د شمیرپوهنې بنسټونه

ډاکتر ماخان میرې شینواری

Ketabton.com

(c) ketabton.com: The Digital Library

وينا

د وينا لاندې يوه ژبنيزه افاده يا وييِنه پوهيږو، چې د دې لاندې دوه رښتيا ارزښتونو ،، رښتيآ،،(,,wahr``) w همداسې ،، نارښتيا،، يا ناټيک (,,falsch``) f ځُخه د يوه سره تنظيم کيدی شي.

ويناوې په لويو تورو A سره په نخښه کيږي : ، او کېدی شي د منطقي يا سم انديزو عمليو سره وټرل شي. بنسټيزې شمېرپوهنيزې ويښې يا افادې ، چې له نورو افادو ځُخه منځ ته نه شي راتلی اکسيومونه بلل کيږي

لاندې بيلګه د دې شميرپوهنې وينا روښانه کوي.

وينا

A : هر طبيعی عدد د لومړنيو عددونو ضرب دی. دا يوه رښتيا وينا ده.

وينا

B : هر لومړنی ګڼ يا عدد ناجوړه يا طاق دی. دا چې 2 جوړه يا حفت عدد او پريم دی، نو وينا نارښتيا ده.

دا تروسه ښوول شوي اټکلونه

C : ناپای ډير د پريم اعدادو غبرګوني شته. دا يوه شميرپوهنيزه وينا ده، ځُکه چې دا يا رښتيا ده او يا نا رښتيا. دلته موخه د لومړني عدد د غبرګوني ځُخه هغه لومړني ګاونډي ناجوړه عددونه دي ، چې دواړه لومړني عددونه دي ، د بيلګې په توګه.

$$(3,5),\ (5,7),\ (11,13),\ \ldots .$$

دا تراوسه حورا لويه د لومړنيو عددونو جوړه (د 19.4.2006 پورې) ده:

$$168699873399 75 \cdot 2^{171960} \pm 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کره کوني سره

D : د جمعې ۱۳ –مه یوه د بدبختۍ روځ ده.

دا یوه وینا نه ده، ځکه چې دا په یوه رښتیا ارزښت نه شي تنظیودی.

لیکونکي: هولیګ،هورنر

منطقي(سم اندیزې) ټرنې(که غواړې: عملیی یا نښلونې)

منطقی یا سم اندیزې ویناوې کېدی شي په لاندې جدول کې ورکړ شوو عملیو سره و ټرل شي.

یادونه : له کیږ و ښي لور ته.

ټیک هلته رښتیا، که	ویینودود	لیکندود	نومونه	
A نارښتیا ده.	نه A	$\neg A$	نه والی	
	A او B رښتیا دي	(A او B)	$A \wedge B$	Konjunktion یا د او ټرنه
	A یا B رښتیا ده.	(A یا B)	$A \vee B$	Disjunktion د یا ټرنه
	A او B بیل رښتیا	(یا A یا B)	$A \neq B$	Antivalenz نابرابر ارزښته

(c) ketabton.com: The Digital Library

ارزښتونه ري			
A نارښتي يا B رښتيا ده	له A څخه B له B څخه A	$A \Rightarrow B$ $B \Leftarrow A$	Implikation تري لاس ته راوړنه
او B همغه يا برابر رښتيا ارزښتونه لري	(A و B ته برابر ارزښته دی) يا له A څخه B لاس ته راځي او برعکس	$A \Leftrightarrow B$	Äquivalenz برابر ارزښته

د دې لپاره چې په منطقي افادو يا وينو کې نوکان يا قوسونه سپما کړو، کره کوو، چې $\neg$ له $\wedge$ او $\vee$ څخه کلک يا قوي نښلوي او دا بيا له $\Rightarrow$,$\Leftrightarrow$ او همداسې له $\not\equiv$.

دا ايمپليکيشن په پام کې ونيسی، چې B ټيک هلته رښتياه ده، چې A رښتيا وي. له ناټيکو نيونو(فرضيو) ، ټيک يا رښتيا او يا هم نارښتيا پايلې را وېستل کيدی شي.

دا د يا تړنې لپاره نخښه يوه dv په شان نخښه ده، چې د vel (lat. oder) (لاتين. يا) لپاره څای په څای شوی. د يا تړنې لپاره کېدی شي چې سومبول ،، $+$ ،، وکارول شي او د او- تړنې لپاره ،، $\cdot$ ،،. که سومبول 0 د ناټيک يا غلط لپاره وکارول شي او هر بل ارزښت د رښتيا په ځير و کارول شي، نو کيدی شي منطقي تړنې د طبيعي عددونو شمېرنې له لارې هم پر مخ بوتلای شو يا استعمال کړای شو.

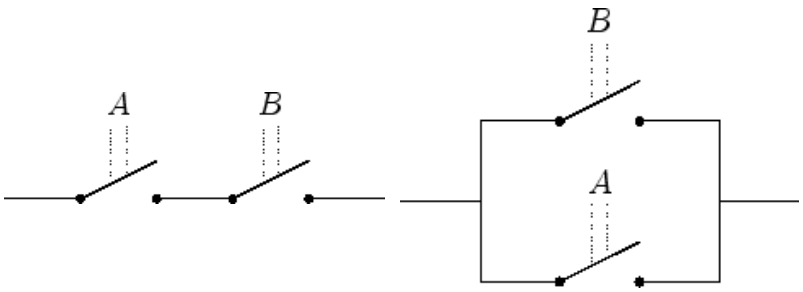
(c) ketabton.com: The Digital Library

په شميروني (کمپيوتر ژبه کي له انګريزي راغلي کليمي NOT (Negation) (نه والی)، AND (Konjunktion (کنجکشن)، OR (Disjunktion) (ديسجنکشن)، يا (EXOR oder XOR (exclusive or, Antivalenz (بي له يا نابرابر ارزښته) او د هغي نه والی(NAND (negierte Konjunktion (نه شوی کنجکشن) ، NOR (negierte Disjunktion) (نه شوی ديسجنکشن) او(NXOR (Äquivalenz (برابرارزښته) لپاره کارول شوي.

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر، کيمرلي

که وينا د سويچ په ځېر انځور کړو، چې تړلي وي، که وينا ريښتيا وي، په همدې توګه واز ، که وينا ناريښتيا وي، نو کېدی شي مسلسل سويچونه د يا – تړنې په ځېر او غبرګ سويچونه د او-تړنې په ځېر صورت وموميِ .

د يا-تړنه د او-تړنه

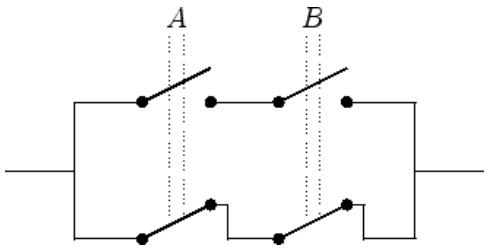


يوه نه-شوې وينا يو سويچ دی، چې تړلی دی، که وينا ناريښتيا وي. له دې سره کېدی شي سويچ ځېرې د برابر ارزښته، نابرابر ارزښته او ايمپليکيشن لپاره ورکړل شي.

برابرارزښته : $A \Leftrightarrow B$ همداسې $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

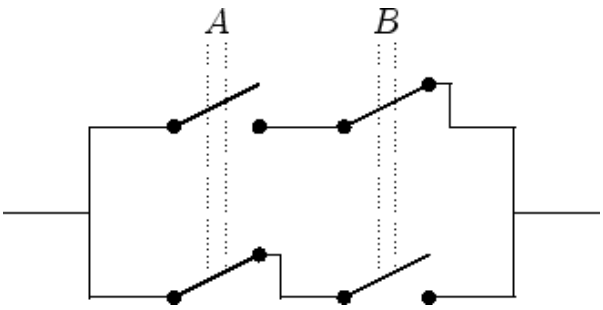
Äquivalenz:

(c) ketabton.com: The Digital Library



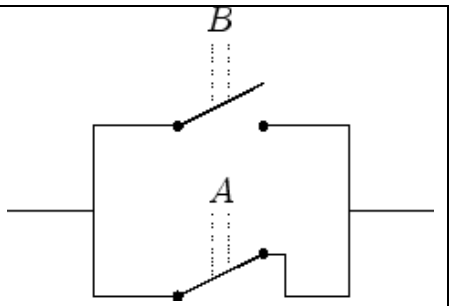
$(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$ $A \not\equiv B$ همداسي نابرابرارزښته:

Antivalenz:



ايمپليکېشن يا تري لاس ته راتلنه:

$\neg A \vee B$ همداسي $A \Rightarrow B$



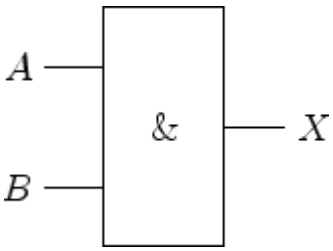
سويچونه کيدی د ترانزيستور له لاري منځ ته راشی يا صورت ومومي، چې په جګ يا ټيټ ايښوول شوي شبانونګ جريان مومي يا تيريږي. د (1) ارزښت جګ شپانونګ دی ټيټ يا کم شپانونګ ارزښت (0) دی.

د دين DIN 40900 سره د اړونده (مطلوبه) شپانونګ تعريف ورکول کيږي. دا د ولاړګوډيز(مستطيل) خخه جوړ دی، په کومو کي چې اړونده ټرني ورکړ شوي دي. يو نه- والی د يوي ګردی(دايري) سره په نخښه شوی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

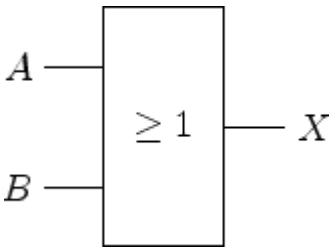
Konjunktion

کنجکشن



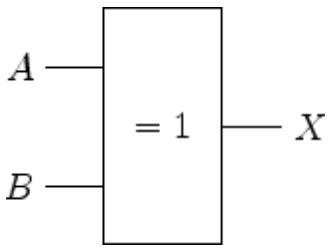
Disjunktion

ډیسینکشن



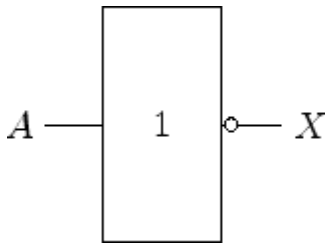
Antivalenz

نابرابرارزښته



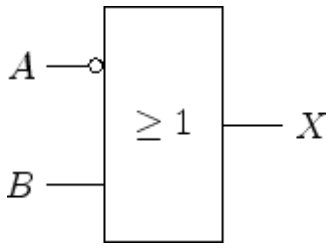
Negation

نه-والی



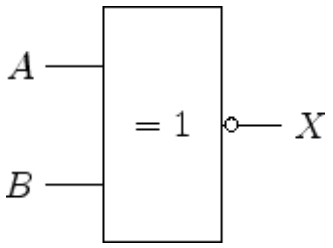
Implikation

ایمپلیکېشن



Äquivalenz

برابرارزښته



منطقي عملیو لپاره لاندې کتمتوالی Identitäten باوري دی.

اسوځیاتیو قانون :Assoziativgesetze

$$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$$

$$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$$

کموتاتیو یا بدلېدنقانون :Kommutativgesetze

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A \wedge B \quad = \quad B \wedge A$$

$$A \vee B \quad = \quad B \vee A$$

د دي مورګان قانو :De Morgansche Regeln

$$\neg(A \wedge B) \quad = \quad (\neg A) \vee (\neg B)$$

$$\neg(A \vee B) \quad = \quad (\neg A) \wedge (\neg B)$$

ديستريبوتيو قانون :Distributivgesetze

$$(A \wedge B) \vee C \quad = \quad (A \vee C) \wedge (B \vee C)$$

$$(A \vee B) \wedge C \quad = \quad (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

او نور :

$$\neg(\neg A) \quad = \quad A$$

$$A \wedge A \quad = \quad A$$

$$A \vee A \quad = \quad A$$

الترناتيو يا بديلیی انځورونه :Alternative Darstellungen

(c) ketabton.com: The Digital Library

ايمپليکشن
Implikation: $A \Rightarrow B \quad = \quad \neg A \vee B \quad = \quad \neg A \Leftarrow \neg B$

Äquivalenz: $A \Leftrightarrow B \quad = \quad (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

Antivalenz: $A \not\equiv B \quad = \quad (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$

بديلي فرمولونه زيات وخت په ښوونو کې استعمال مومي.

يوه منطقي افاده يا ويينه ، چې د رامنځ ته شوې وينا رښتيا ارزښت خپلواکه تل رښتيا همداسې نارښتيا وي، تاوتولوجي Tautologie همداسې کونترادیکشن Kontradiktion بلل کيږي. داسې يوه افاده کړی شي د بڼه بدلون سره همداسې د سره بدله شي. په څانګړي توګه دا کټمټوالی باور لري:

$$A \vee \neg A = \mathrm{w} \quad \text{bzw.} \quad A \wedge \neg A = \mathrm{f}\,,$$

همداسې

$$A \vee \mathrm{w} = \mathrm{w} \quad \text{bzw.} \quad A \wedge \mathrm{w} = A\,,$$

همداسې

$$A \vee \mathrm{f} = A \quad \text{bzw.} \quad A \wedge \mathrm{f} = \mathrm{f}\,.$$

همداسې

ليکونکي: هيوليګ،، هيورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې مورګان قانون او د دېسترېبوتيو قانو کېدی شي وښوول شي، داسې چې د وينا د رښتيا ارزښت لپاره ټول امکانات وڅېړل شي. د دې مورګان قانون داړه لاندې جدول کې روښانه شوی دی.

A	B	$A \wedge B$	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A) \vee (\neg B)$, $\neg(A \wedge B)$
w	w	w	f	f	f
w	f	f	f	w	w
f	w	f	w	f	w
f	f	f	w	w	w

د ايمپلېکېشن، برابرارزښتوالي او نابرابرارزښتوالي لپاره برابر ارزښته شننه له تعريف ځخه لاس ته راځي.

د منطقي قانون د روښانه کونې لپاره د وينا

$$\underbrace{|x-1|>1}_{A} \Longrightarrow \underbrace{(x<0)\vee(x>1)}_{B}$$

بڼه دليږي.

د د ېمورګان قانون سره سم لرو:

$$\neg B = \neg(x<0) \wedge \neg(x>1) = (x \geq 0) \wedge (x \leq 1)\,.$$

له دې سره سم ايمپلېکېشن $A \Rightarrow B$ د وينا د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$|x-1| \leq 1 \Longleftarrow 0 \leq x \leq 1\,.$$

سره برابرارزښته دی

بیا هم دا نتیجه لاس ته راځي ، که ایمپلیکیشن د تعریف سره سم د

$$(\neg A) \vee B = |x-1| \leq 1 \vee \neg(0 \leq x \leq 1)$$

سره بدل کړي.

د بیلګې په توګه افاده یا ویینه

$$L : (A \vee B) \Rightarrow (\neg A \wedge B)$$

ساده کوو.. د اپلیکیشن پهځای ایښونه او د دمورګان قانون له امله لاس ته راځي

$$\neg(A \vee B) \vee (\neg A \wedge B) = (\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)\,.$$

د دټریبوټیو قانون له مخط دا وینا برابرارزښته ده د $\neg A \wedge (\neg B \vee B)$ سره.

پیژندل کیږي، چ د B ارزښت بې اغیزه دی یا ارزښتناک نه دی او $L = \neg A$.

د منطقي افادې L د ازمایښت ته الترناتیو یا بدیلې کیدی شي یو د ریښتیا ارزښت جدول هم وکارول یا ا ستعمال شي.

A	B	$\neg(A \vee B)$	$\neg A \wedge B$	L
w	w	f	f	f
w	f	f	f	f
f	w	f	w	w

(c) ketabton.com: The Digital Library

f	f	w	f	w

له دې دا هم لاس ته راځي: $L = \neg A$

کوانتورونه Quantoren

د فرمولو،، شتون لري....،، . ،، د ټولو .... لپاره،، لپاره لنډونې شتونکوانتور $\exists$ او ټول کوانتور $\forall$ استعمالیږي.. دا کوانتورونه زیات وخت د $A(p)$ سره په ټړاو کې استعمالیږي، چې د یوه پارامتر p چې د ډېرې یا ستې P توګی دی، په واک کې دي.

Bedeutung معنا	Schreibweise لیکندود
یو توکی p له P شتون لري، د هغه لپاره چې $A(p)$ رښتیا دي.	$\exists p \in P : \ A(p)$
د ټولو p لپاره چې له P دی $A(p)$ رښتیا دی.	$\forall p \in P : \ A(p)$

د دواړو وینا ډولونو د نه٠والي سره کونتوونه هم بدلیږي.

$$\neg(\exists p \in P : \ A(p)) = \forall p \in P : \ \neg A(p)$$

$$\neg(\forall p \in P : \ A(p)) = \exists p \in P : \ \neg A(p)$$

دا $\exists!$ لیکن ډول هم روڼنی دی د فرمولولو لپاره، چې ،، ټیک یو ... شته،،

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کوانتورونو د شمېرنې بنوونې لپاره وینا

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_\varepsilon \; \forall n \in \mathbb{N} : \; n > n_\varepsilon \Longrightarrow |a_n| < \varepsilon$$

راوړل کیږي. دا په دې معنا چې یوه لړۍ(ترادف)

$$a_1, a_2, \ldots$$

د 0 په لور یا0 ته هڅیږي، دا په دې معنا چې د پوره لوی n لپاره د a_n مطلق ا رزښت د هرې د مخه ورکړشوي بند یا بندیز ε ځخه کوچنی دی.

نه-والی داسې لاس ته راځي، چې زړې وینا نه شي او کوانتورونه سره بدل شی،

$$\exists \leftrightarrow \forall .$$

د ایمپلیکېشن یا لاس ته راوړنې یا – راتلنې اینسوونه او د مورګبن قانون ځخه لاس تهراځي

$$\neg(n > n_\varepsilon \Longrightarrow |a_n| < \varepsilon) = \neg(n \leq n_\varepsilon \vee |a_n| < \varepsilon) =$$

$$= n > n_\varepsilon \wedge |a_n| \geq \varepsilon .$$

له دې سره د نه شوې وینا دا بڼه لري:

$$\exists \varepsilon > 0 \; \forall n_\varepsilon \; \exists n \in \mathbb{N} : \; n > n_\varepsilon \wedge |a_n| \geq \varepsilon .$$

دا په دې معنا چې پرلپسې(ترادف) (a_n) د 0 لورته نه هڅیږي . دا په دې معنا چې یو لرزښت $\varepsilon > 0$ شتون لري، چې له هغه پرلپسې $|a_n|$ تل بیا اوړي یا تېرېږي.

لیکونې:ک. هیولیګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

سیده ښوونه

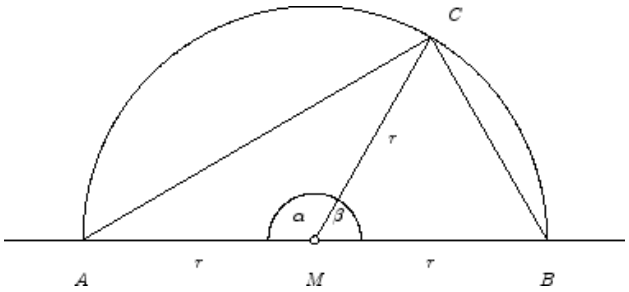
یوه غوښتنه ثبوت) B کېدی شي و ښوول شي، چې هغه له ربنتیا وینا A ځخه را منځ ته شي او یا په داسې ببرته واړول شي.

$$A \Longrightarrow B\,.$$

ویناوې A کړی شي وړاندنیونې(فرضیې) هم ولري، چې هغه د ِغوښتنې B لپاره اړیینې دي.

لیکونکی: هیولیګ

د ښلګې لپاره یې د تالس جمله را اخلو، چې هر په یوه نیم ګردی(نیم دایره) کې رابند درېګودی(مثلث) ولاړګودیز یا قایم الزاویه دی.



دا سیده ښوونه په لاندې دوه جملو ولاړه ده:

اول : په یوه مثلث کې د دننیو کونجونو جمعه π ده.

دویم : د یوه برابر پښیز (یا که غواړی: متساوی الاضلاع) مثلث ښسټکونجونه پرابر لوي دي.

که دا په مثلث $\Delta(AMC)$ او $\Delta(CMB)$ و کاروو، نو له دې لاس ته راځي

$$\sphericalangle ACM = \frac{\pi - \alpha}{2}, \qquad \sphericalangle MCB = \frac{\pi - \beta}{2}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sphericalangle ACB = \pi - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$$

او له دې سره دی

او د $\alpha + \beta = \pi$ له املې په $\pi/2$ سره برابر.

ناسیده ښوونه

د دې لپاره چې وښایو چې له یوې وړاندنیوني(فرضیې) V ځخه غوښتنه(ثبوت) B لاس ته راځي یعنې $V \Longrightarrow B$ (، کېدی شي ونیسو ، چې وینا B د V د وړاندنیوني له املې نارښتیا ده، دا مو یوه تضاد ته بیایي:

$$V \wedge (\neg B) \Longrightarrow F,$$

د F سره یوه نارښتیا وینا ده، په ځانګړې توګه $F = \neg V$ یا $F = B$.

په ځانګړې توګه باور لري

$$B = (\neg B \Longrightarrow F) = (\neg B \Rightarrow B),$$

که وړاند نیوني نه وي شوي.

لیکونکي: هیولیګ، کنش،ابببریښ

ایمپلیکېشن تري لاس ته راتلنه یا - راوړنه

$$V \wedge (\neg B) \Longrightarrow F$$

$$\neg(V \wedge (\neg B)) \vee F = (\neg V) \vee B \vee F.$$

د سره برابرارزښته دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که ایمپلیکشن رښتیا وي، داپه دې معنا چې د شمېرپوهنیزو قوانینو ځخه لاس ته راغلی، نو باید غوښتنه(ثبوت) B رښتیا وي، ځکه چې $\neg V$ نارښتیا ده او F یا نارښتی او یا د B سره برابر دی.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د دې ناسیده ښووني د روښانه ونې لپاره ښایو، چې $\sqrt{2}$ ایراشنل دی، داپه دې معنا چې د مات یا مسر په ځېر نه شي انځورېدلای.

$$\neg B : \sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

نیسو، چې غوښتنه B نارښتیا ده. بس باور لري

$$p, q \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{ggT}(p,q) = 1 .$$ د سره .

دلته ggT انګرېزي یې gcdخورا عټ کېږوښونی (ذوالاضعاف الاقل) دی.

د نیونې ځخه د مربع کونې او د q^2 سره ضربونې له املې لاس ته راځي

$$2q^2 = p^2 ,$$

دا یه دې معنا چې p^2 او له دې سره p یو چوړه یا جفت عدد دی. په ځانګړې توګه یو $r \in \mathbb{N}$ شتون لري د $p = 2r$ سره. د $q^2 = 2r^2$ له املې q هم یو چوړه عدد دی او له دې سره $\mathrm{ggT}(p,q) = 2$. دا د نیونې نیونې جوړښت $\neg B$ سره په تضاد کې ده، چې $\mathrm{ggT}(p,q) = 1$ ، دا په دې معنا چې

$$(\neg B) \Longrightarrow B .$$

له دې املې یا د دې په تعقیب باید غوښتنه B رښتیا وی،

د پوره اندکشن له لارې ښوونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

وینابنې د طبیعي پارامتر سره کېدی شي د پوره ایندکشن له لارې وښوول شي. که $A(n)$ یوه د $n \in \mathbb{N}$ په واک کې وینا وي، نو د دې لپاره دې لاندې دواړه د د ښوونې پلونه (قدمونه) روښانه- یا و اخستل شي. .

لومړی : د ایندکشن پیل : ښایو چې $A(1)$ رښتیا دی.

دویم : اینوکشنپایونه یا ختم: ښایو چې د نیونې چې $A(n)$ رښتیا دی(دایندکشن هیوپوتیزې)، لاسته زاځي، چې هم رښتیا دی، یاپه دې معنا چې

$$A(n) \implies A(n+1).$$

نو دا باوري دی، چې $A(n)$ د ټولو $n \in \mathbb{N}$ لپاره ضدق کوي.

د یوه اندکشن ښوونې سره یو په بل پسې sukzessive دا پسې د تر مخه ځخه لاس ته راځي.

که د اندکشن پیل د $n_0 = 1$ لپاره نه بلکه د $n_0 > 1$ لپاره سرته ورسیږي، نږ وینا بیا فقط د $n \geq n_0$ لپاره صدق کوي.

د مربع(ځلوری) عددونو د جمعې لپاره فرمول

$$A(n): \sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),$$

کیدی شي د پوره اندکشن سره وښوول شي.

د اندکشن پیل ($A(1)$):

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sum_{i=1}^{1} i^2 = 1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}.$$

د اندکشن پای

$$A(n) \implies A(n+1))$$

:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 + (n+1)^2 = \underbrace{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}_{A(n)} + (n+1)^2$$

$$= \frac{(n+1)\left[n(2n+1)+6(n+1)\right]}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

د اندکشن هیوپوتېزې، لکه چې روښانه شوه، په دریم برابروالي کې استعمال شو.

ډېرۍ(ست)

یوه ډېرۍ A له توکو $a_1, a_2, \ldots$ جوړه ده یعنې

$$A = \{a_1, a_2, \ldots\}.$$

که توکي د یوه خوی له مخې خوی لرونکي (کرکتېزه) شي، نو د دې لپاره لیکو

A={a:a خوی لري} د E

د دې لپاره سړی لاندې نخښې کاروي یا استعمالوي:

معنا	لیکنډول

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a \in A$	a د A توکی دی .
$a \notin A$	a د A توکی دی .
$A \subseteq B$	B د A برخډپرۍ(برخست) ده
$A \subset B$	Bد A برخډپرۍ(برخست) ده
$\|A\|$	دتوکو ګڼون یا تعداد په... کې
$\emptyset$	تشډپرۍ یا تشست

که $|A| < \infty$ همداسې $A = \infty$ باور ولري، نو دلته د پای ډپرۍ همداسې ناپای ډپرۍ څخه غږيږو.

دوه یا څو ډپرۍ برابرزوريزۍ بلل کيږي، که د دوی د توکو ترمنځ يو بيجکتيو بلواک يا تابع يعنې برعکسکيدونکی بلواک شتون ولري ($|A| = |B|$د پای ډپرۍ لپاره).

د A د ټول برخو ډپرۍ $\mathcal{P}(A)$ تواندپرۍ بلل کيږی، دا په دې معنا چې

$$\mathcal{P}(A) = \{B : \ B \subseteq A\}$$

له دې سره باور لري $A \in \mathcal{P}(A), \emptyset \in \mathcal{P}(A)$ او $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$

ليکونکي: هيوليګ، کنش

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګڼونو (اعدادو) ډېرۍ

د لاندې ګڼونو ډېرۍ لپاره معياري نخښې استعمال مومي:

طبعي اعداد : $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$

ټول اعداد: $\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$

راشنل يا هوښيار اعدا: $\mathbb{Q} = \{p/q : \ p \in \mathbb{Z},\, q \in \mathbb{N},\, \mathrm{gg}\mathrm{T}(p,q) = 1\}$

ريل يا حقيقي(ريښتوني) اعداد: $\mathbb{R} = \{x : \ x = \lim_{n\to\infty} q_n,\, q_n \in \mathbb{Q}\}$

کومپلکس اعداد: $\mathbb{C} = \{x + \mathrm{i}y : \ x, y \in \mathbb{R},\, \mathrm{i}^2 = -1\}$

په همدې توګه لاندليکنډول هم کارول کيږي:

$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ او $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : \ x > 0\}$ او دې ته ورته يا په همدې ډول

$\mathbb{Z}^-$, $\mathbb{Z}_0^-$, $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{Q}_0^+$, $\mathbb{Q}^-$, $\mathbb{Q}_0^-$ $\mathbb{R}_0^+$, $\mathbb{R}^-$, $\mathbb{R}_0^-$.

ليکونکي: کرهيوليګ

په ډېريو کې عملیی

د دوه ډېريو A او B لپاره لاندې علميې تعريف دي:

ټولنه (اتحاد)

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A \cup B = \{x: \ x \in A \ \vee \ x \in B\},$$

غوڅی(قطاع):

$$A \cap B = \{x: \ x \in A \ \wedge \ x \in B\},$$

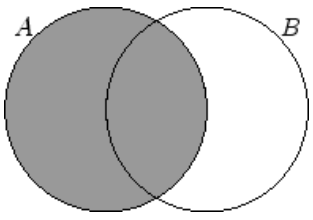
کمښت یا کمون (تفریق)، پوره کېدونکي ډېرۍ،

$$A \setminus B = \{x: \ x \in A \ \wedge \ x \notin B\},$$

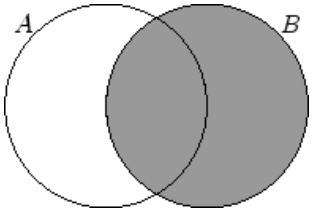
سیوتریکي کمښت (کمون)

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

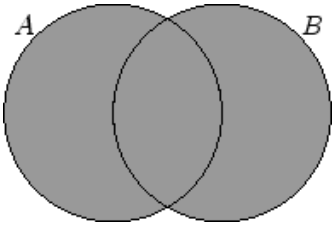
په لاندي ځېرو کې د ډېریو عملیې داسې په نامه ون-دیاګرام Venn-Diagramme سره ښوول شوي دي.



A



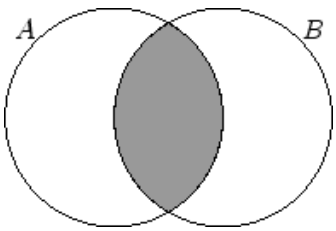
B



ټولنه

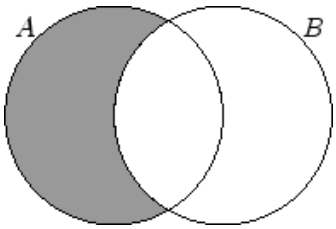
$A \cup B$ Vereinigung:

(c) ketabton.com: The Digital Library



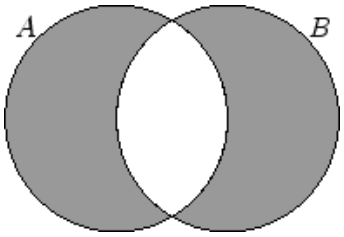
غوځی

$A \cap B$ Schnitt:



کمښت

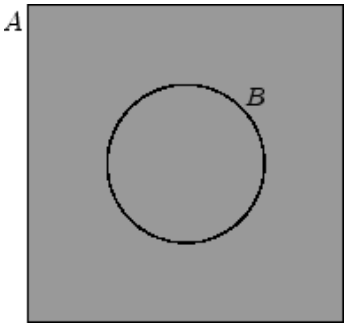
$A \setminus B$ Differenz:



سیومتریکي کمښت

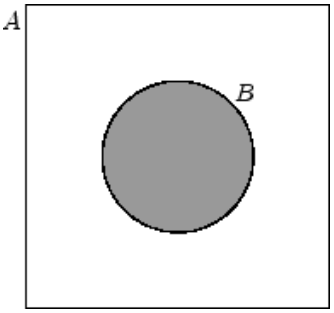
symmetrische
$A \Delta B$ Differenz:

که $B \subset A$ وي، نو یوځو دیاګرامونه یو بل سره خوري یا یو په بل پریوځي:



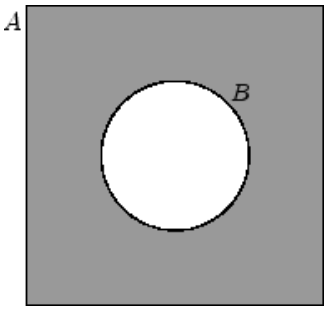
ټولنه

Vereinigung:
$A = A \cup B$



غوځی

$B = A \cap B$ Schnitt:



پوره کېدنکي ډېرۍ

Komplementärmenge :
$A \setminus B = A \Delta B$

لیکونکي: هولیګ،هورنر، کنیش

د ډېریو عملیو لپاره شمېرقوانین:

اسوځیاتیو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

کموتاتیو یا بدلېدونکی قانون.

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cup B = B \cup A$$

- Morgansche Regeln:
- د مورګان قانون یا قاعده

$$C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$$

$$C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$$

- دیستریبوتیو قانون.

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

دا قوانین د منطیقي قوانینو په کوته کونه هم ده، که د $\cap, \cup$ عملیو په څای $\wedge, \vee$ کیږدی او $C \setminus$ په څای $\neg$ کیږدو.

لیکونکي:هیولیګ،هیونر

(c) ketabton.com: The Digital Library

د نمونې په توګه به د دې مورګان لومړی قانون و ښوول شي. باور لري:

$$x \in C \backslash (A \cap B) \Leftrightarrow \qquad x \in C \ \wedge x \notin (A \cap B)$$

$$\Leftrightarrow x \in C \ \wedge (x \notin A \vee x \notin B).$$

د دېستريبوتيو قاونو له مخې اخرنۍ افاده يا ويښنه د لاندې سره برابرارزښته ده

$$(x \in C \wedge x \notin A) \vee (x \in C \wedge x \notin B) \Leftrightarrow x \in (C \backslash A \cup C \backslash B),$$

له کوم سره چې غوښتونکی کټمټوالی ښوول شوی.

لیکړنکی:ک. هیولیګ

د دې مورګان قاعدې له مخې د بیلګې په توګه لاس ته راځی

$$C \setminus (A \cap C) = (C \setminus A) \cup (C \setminus C) = (C \setminus A) \cup \emptyset = C \setminus A,$$

$$C \setminus (A \cup C) = \qquad (C \setminus A) \cap (C \setminus C) = (C \setminus A) \cap \emptyset = \emptyset.$$

د دېستريبوتيو قانون د بیلګې په توګه لاس ته راځي:

$$(A \cup B) \cap B \quad = \qquad (A \cap B) \cup (B \cap B) = (A \cap B) \cup B.$$

له دې سره باور لري $(A \cap B) \cup B = B$ ، ځکه چې $(A \cap B) \subseteq B$ دی

کارټېزي ضرب (ځل)

د دوه ډېرېو A او B کاټېزي ضرب دواړو ډېرېو د ټولو منظمو جوړو ډېرې ده:

$$A \times B = \{(a,b) : \ a \in A \wedge b \in B\}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

باور لري:

$$(a,b) = (a',b') \Leftrightarrow (a = a' \wedge b = b')\,.$$

داپه دې معنا چې د ډېرې برابروالي ($\{a,b\} = \{b,a\}$) په عکس يا په ځټ د لړې پرلپسې غوره ده

په ورته تو ګه n- واره يا ځله کارټېزي ضرب تعريفوو

$$A_1 \times \cdots \times A_n$$

د ټولو منظمو n - ګونونو $(a_1, \ldots, a_n)$ د $a_i \in A_i$ سره . که ډېرې برابرې وي، نوليکو:

$$A^n = A \times \cdots \times A$$

ليکونکي:هيوليګ،هيورنر

اړيکې Relation

که د ډېرې A توکي د ډېرې B له توکو سره په اړيکو کې قرار ولري يا ولاړې وي، نو کېدی شي دا د يوې اړيکې سره افاده يا وويل شي. دا د توکو له منظمو جوړو (a,b) جوړه ده، چې دا د اړيکو له لارې سره تړلي دي. نو يوه اړيکه R د A او B د کارټېزي ضرب برخډېرې ده. وايو چې a د b سره په اړيکو کې ده او د دې لپاره ليکو $a\,\mathrm{R}\,b$:

$$a\,\mathrm{R}\,b \Leftrightarrow (a,b) \in R \subseteq A \times B\,.$$

ليکونکي:ژ. هيورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اړيکو د داتا بانک Relationale Datenbank

يوه نمونه يي بېلګه د اړيکو د ،،داتا-بانک،، دی. دلته د بېلګې په توګه يو د درسونو (لکچرونو) جدول او يو د زده کړو جدول ورکول شوي چې يو له بل سره په اړيکو کې راغلي. دا په لاندې ځېره کې روښانه شوي.

په لاندې کې کينې لور ته نومونه دي

درس	کوټه		Mtr.-Nr.	Name
لوړه شميرپوهنه ۱	V57.01		1000000	Anton Antonius
د زده کوونکو...	V47.02		1000001	Berta Bethel
			1000002	Cornelius Cornell
			1000003	Damian Damien
			1000004	Egon Ekel
			1000005	Frank Frankfurth

دا هم دلته روښانه شوي چې د يوې ډېرۍ توکي د بلې ډېرۍ د توکو سره په اړيکو کې راځي يا که غواړۍ :قرار لري.

ليکونکي: بوسلر، هيورنر

د اړيکو خويونه

په يوه ډېرۍ A کې يوه اړيکه $R \subseteq A^2$ په لاندې توګه بلل يا نمول کيږي:

رفلکسيوreflexiv ، که هر توکی د خپل ځان سره په اړيکه کې وي:

$$\forall a \in A : (a, a) \in R$$

سيومتري symmetrisch ، که د توکو لړۍ پرلپسې کوم رول نه لوبوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$$

انتی سیمتري antisymmetrisch ، که که له سیمتري ځخه کټمټوالی لاس ته راشي:

$$(a,b) \in R \wedge (b,a) \in R \Rightarrow a = b$$

ترانزتیوtransitiv ، که له یوه زنځی ځخه منځنی توکی لرې کېدی شي:

$$(a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$$

ټوتالي total، که هر دوه توکي لږ تر لږه په یوه لور په اړیکو کې سره راتلی شي:

$$\forall a,b \in A : (a,b) \in R \vee (b,a) \in R$$

که یوه اړیکه رفلکسیو ، سیومتریک او ترانزیتیو وي، نو دا ،،ورته اړیکي،، (برابرارزښته اړیکي) بلل کیږي. دلته بیا زیات وخت $a \sim b$ د $a \mathrel{R} b$ په څای لیکل کیږي. یو ورتهاړیکي ډېرې A په توکي پردیو برخډېریو ویشي (ورته یا برابر ارزښته ټولګیو)، د کوم سره چې د یوې برخډیرې دوه توکي یوبل سره په اړیکو کې درېږي(برابرارزښته دي). په داسې حالت کې چې دوه توکي له مختلفو برخډریو ځخه داسې حالت نه لري.
که یوه اړیکه رفلکسیو، انتیسیمتري او ترانزیتیو وي، نو دا یو نیم نظم دی او د دې لپاره $a \leq b$ د $a \mathrel{R} b$ په څای لیکل کیږی. که یو نیم نظم د دې برسېره(سربېره) توتالي وي، نو دا (توتال) نظم بللکیږي او A د $\leq$ سره منظمه ده.

لیکونکی:ژ هیورنر

د یوې ډېرې M پوتنځډېرې $\mathcal{P}(M)$ کې د ډېرې خوندیونه یا په کې څایېدنه $\subseteq$ نیم نظم دی، ځکهچې باور لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$A \subseteq A$ رفلکسیو انتیترانزیتیو $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Rightarrow A = B$ او
ترانزیتیو $A \subseteq B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$ قوانین. که M له یوه زیات توکي ولري،
نو خوندیونه نظم نه ی، ځکه چې لاندې باور لري:

$$a, b \in M, a \neq b : \{a\} \not\subseteq \{b\} \wedge \{b\} \not\subseteq \{a\},$$

دا په دې معنا چې دا ټوټالي منظمه نه ده.

اړیکي ،، ټیک دومره توکي لري لکه،، د یوې پای ډېرۍ M په توانډېرۍ کي $\mathcal{P}(M)$ برابرارزښته ده ځکهچز باور لري : $|A| = |A|$ (رفلکسیو)،

$$|A| = |B| \Rightarrow |B| = |A|$$

(سیومتري)،

$$|A| = |B| = |C| \Rightarrow |A| = |C|$$

(ترنزیتیو)

لیکونکی:ژ هیورنر

په یوې ډېرۍ باندې زیات وخت اړیکي یا په همدې ډول پرابرارزښته – اړیکي د توکو د خویونو له لارط تعریفیږي. د بېلګې په توګه دوه اړیکي په

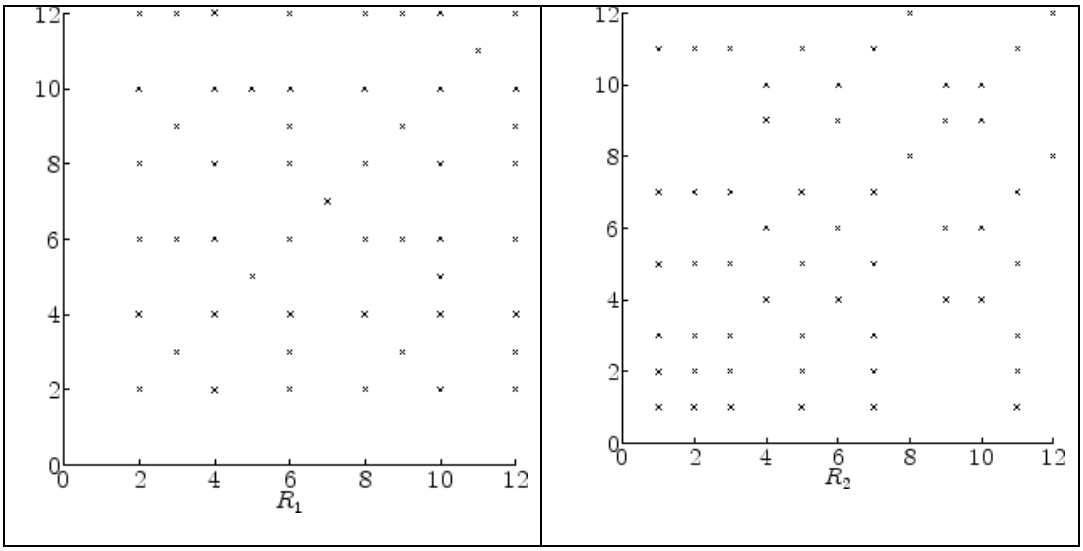
$$M = \{1, 2, \ldots, 12\}$$

کې ترځېړني لاندې نیسو:

لومړی $x \; R_1 \; y$: x او y یو ګډ پروېشونی (مقسوم علیه مشترک) $\neq 1$ لري .

دویم $x \; R_2 \; y$: x او y برابرډېر پروېشوني لري

(c) ketabton.com: The Digital Library



ځيرونه يا يا تابع(بلواک) د $M \times M$ برخډپريو په ځير د اړيکو ګراف ښايي .
اړيکې R_1 سيومتريک او رفلکسيو دي، مګر نه ترانزيتيو. د بيلګې په توګه $x = 4$ او $y = 6$ ګډ پروپشونی 2 لري او $y = 6$ او $z = 9$ ګډپروپشونی 3 لري، مګر $x = 4$ او $z = 9$ ګډ پروپشونی نه لري. نو

$$(xR_1y \wedge yR_1z) \Rightarrow xR_1z$$

باور نه لري.

اړيکې برابرارزښت –اړيکې دي. رفلکسيويتي، سيومتري او ترادزيتيويتي په ځرګنده توګه پوره دي. برابرارزښته –ټولګي

دي د يوه، دوه، دري ځلور او شپږ پروپشونو سره.

ليکونکي: هيليګ،کرايخ

فنکشن (بلواک يا تابع)

د يوه فنکشن f لاندې له يوې ډېرۍ A په يوه ډېرۍ B باندې يوه قانونمندي پوهيږو، چې هر $a \in A$ توکی په يواځني ډول يو ټاکلي $b = f(a) \in B$ باندې تنظيم کړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f : A \longrightarrow B .$$

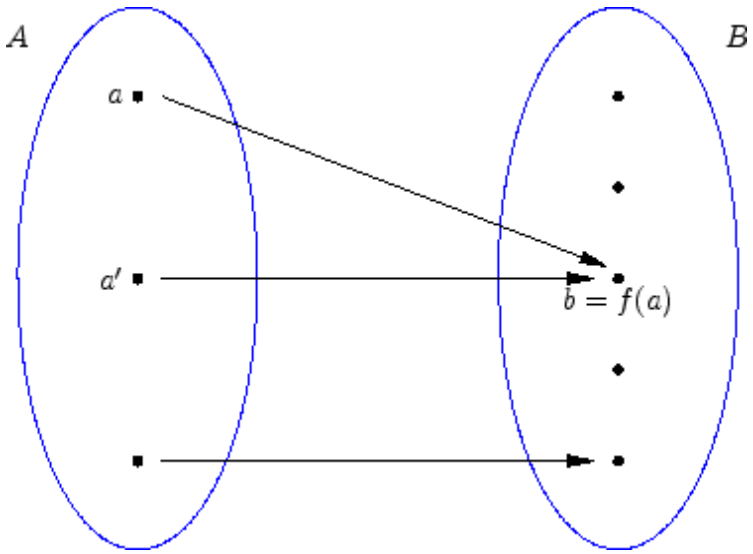
د توکو- نظم لپاره لاندې لیکندود استعمالیږي

$$a \mapsto b = f(a)$$

او b د a ځېرې یا ارزښت په حیث بلل کیږي او همداسې a د b (د پخوا ځېرې)د تعریف توکي په ځېر بلل کیږي.

لکه د لاندې ځیرې ځخه چې کتل کیږي، باید د B توکي د A د یوه توکي د ځېرې توکي په توګه رامنځ ته شي او د B یو توکی کېدی شي د A د ډېرو توکو ځېره یا نظم وي. په هر حالت باید د A د هرتوکی لپاره په یواځني توګه یوه ځېره شتون ولري، دا په دې معنا چې له هر a ځخه باید یو غشی وتلی وي.

پیژندل کیږي چې ځیره زیات تعریفتوکي یا د ځیرې پخوانۍ یا نوره هم ښه مخکني لري(دا په دې معنا چې ځیره کېدونکی دی)، دلته د بیلګې په توګه a او a' . د ځیرونۍ لپاره کلیمه فنکشن هو کارول کیږي، په ځانګړې توګه په ریل ا حقیقي او کمپلکس انالیوزې کې.



لیکونکي: هیولیګ،هیورنر،کیمرلي

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تابع یا څیروني یا بلواک(تابع) خویونه

د دوه ډپریو A او B ترمنځ یوه تابع

$$f : A \longrightarrow B$$

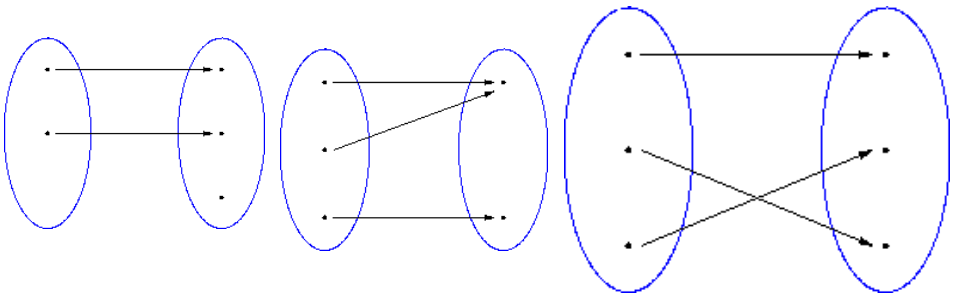
داسي یا په لاندي ټکه بلل کیږي:

په کي بلواک injektiv : که د هر $a, a' \in A$ لپاره د $a \neq a'$ سره دا $f(a) \neq f(a')$ صدق وکړي.

په باندي (بلواک) surjektiv : که هر $b \in B$ لپاره یو $a \in A$ شتون ولري د $f(a) = b$ سره.

په (بلواک) bijektiv : که (تابع) f په کي او په باندي وي.

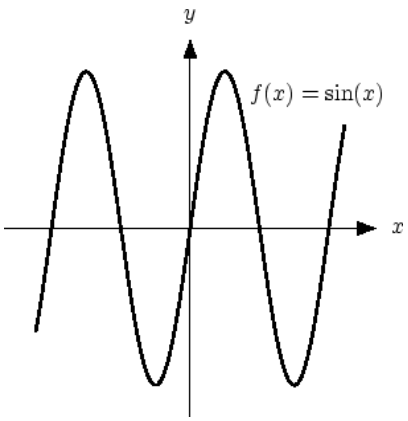
دا کلیمي کېدی شي د ډپرې دیاګرام له لارې روښانه شي.



په کيinjektiv په باندیsurjektiv پهbijektiv

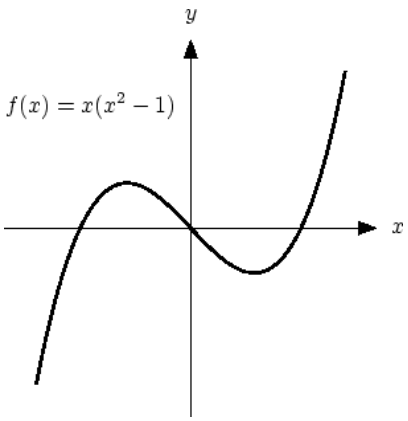
د یو څو بلواکو(توابعو) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ خویونه ورکړ شوي دي

(c) ketabton.com: The Digital Library



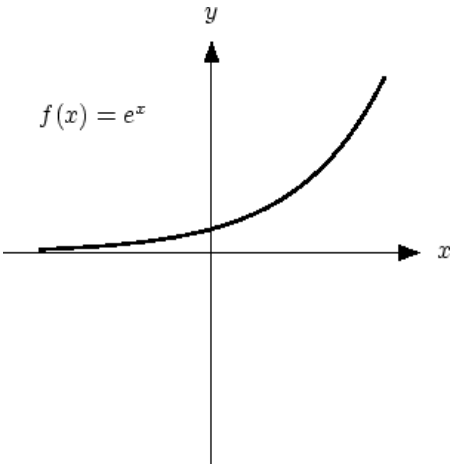
weder injektiv, noch surjektiv

نه په کې او نه په باندې



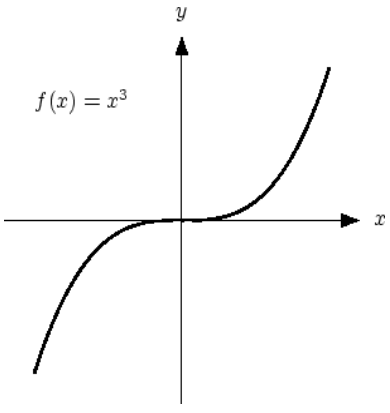
surjektiv, aber nicht injektiv

په باندې، مګر نه په کې



nicht surjektiv, aber injektiv

، نه په باندې مګر په کې



bijektiv, d.h. injektiv und surjektiv

په، دا په دې معنا چې په کې او په باندې

(c) ketabton.com: The Digital Library

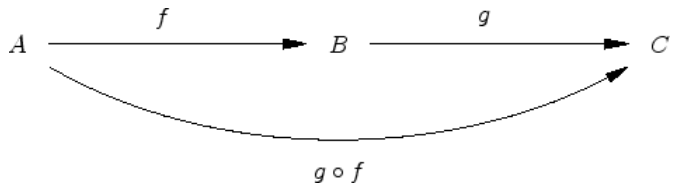
د فنکشنونو (بلواکو یا توتبعو) ټرنه یا عملیې

Verknüpfung von Abbildungen

د دوه فنکشنونو $f : A \to B$ او $g : B \to C$ ټرنه یا کمبوزیشن (زنځیرونه یا سره ګډ ایښونه) د

$$a \mapsto (g \circ f)(a) = g(f(a)), \quad a \in A,$$

له لارې تعریف شوی او په لاندې دیاګرام کې لیدو ګرځېدلی.



تابع اسوځیاتیو ده، دا په دې معنا چې ∘ ټرنه

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

صدق کوي، مګر په ځرګند ډول کموتاتیو نه ده. .

لیکونکی: هیولیګ، کنش

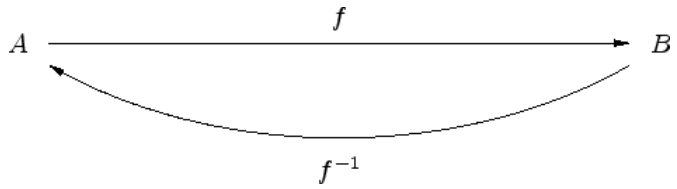
په څټ یا برعکس فنکشن (بلواک یا تابع)Inverse Abbildung

د یوه په فنکشن یا تابع $f : A \to B$ لپاره د

$$b = f(a) \Leftrightarrow a = f^{-1}(b)$$

له لارې په څټ فنکشن یا برعکس تابع $f^{-1} : B \to A$ تعریف ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library



په ځانګړې توګه $a = f^{-1}(f(a))$ دی، داپه دې معنا چې $f^{-1} \circ f$ کټمټ یا ورته تابع دی.

لیکونکي: هیولیګ، کنش

فاکولټي یا فکتوریل Fakultät

د لومړیو n طبیعي اعدادو یا ګڼونو ضرب د

$$n! = 1 \cdot 2 \cdots n$$

سره په نخښه کیږی. (لوستل یې : n فاکولټي). له دې سره کلک تړلی یا له دې سره ه کلکه په نړاو کې تش ضرب داسې لیکو: $0! = 1$.

ګڼ یاعدد $n!$ د n مختلو شیانو دمختلفو امکاناتو د ترتیب یا نظم ګڼون یا تعداد ر ښایي

د لوی n لپاره د $n!$ اسیپټوتیکي حالت د سترلینګ Stirlingschen فرمول له لارې په ورته نږدې ډول وښوول شي:

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + O(1/n)\right).$$

لیکونکي: هیولیګ،هیورنر

د بینوم ضریبونه (ځلووني) Binomialkoeffizient

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $n, k \in \mathbb{N}_0$ لپاره د $n \geq k$ سره د بينوم ضريبونه تعريفوو:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1\cdots(k-2)(k-1)k}.$$

د $0! = 1$ له امله په څانګړي توګه باور لري:

$$\binom{0}{0} = 1, \quad \binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1.$$

د بينومي ضريب $\binom{n}{k}$ د n توکو سره يوې ډېرۍ د k - توکيزو برخډېريو ګڼون يا تعداد ورکوي.

د پاسکال درېګودی(مثلث) Pascalsches Dreieck

د بينوم ضريبونه

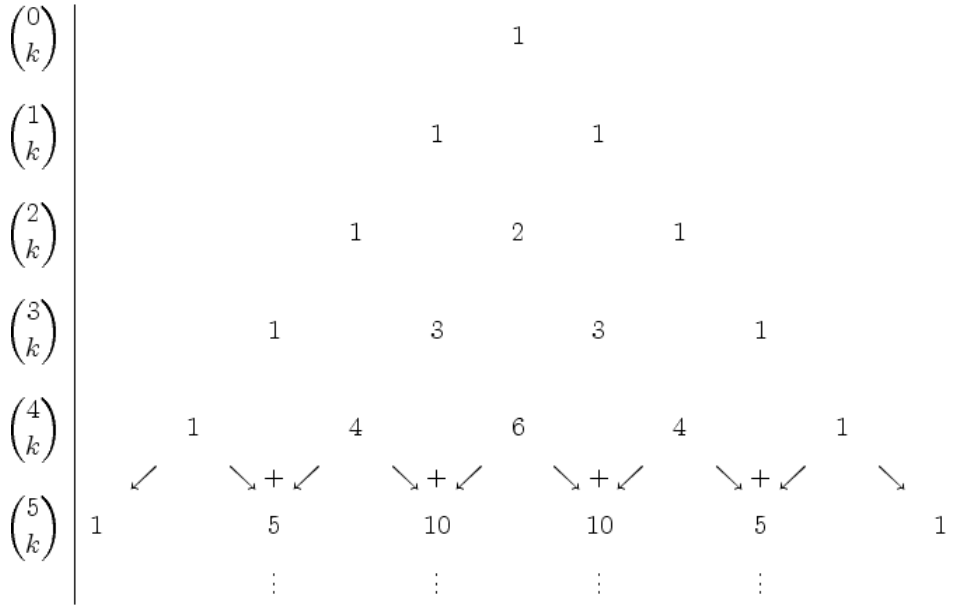
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

د لاندې رېکورزيون Rekursion (په بېرته معلومو فرمولونو) په مرسته

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

په يوه درېګډيزي شيما يا شکل، داسې په نامه پاسکال درېګودي کې يا له لارې وشمېرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library



.

ليکونکي: هيوليګ، کنش

دا د بنوولو کتمتوالی

$$\frac{(n+1)!}{(n+1-k)!\,k!} = \frac{n!}{(n-k+1)!\,(k-1)!} + \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

د $n!$ سره وېشني او $(n-k+1)!\,k!$ سره ضربوني له لاري د

$$n+1 = k + (n+1-k)\,.$$

سره برابرارزښته دی.

ليکونکي: هيوليګ، کنش

د بينوم درسي جمله Binomischer Lehrsatz

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بينوم درسي جملي سره کېدی شي د دوه متحولو يا اووښتونو د زياتون يا جمعي توان وشمېرل شي.

د ټولو $n \in \mathbb{N}_0$ لپاره صدق کوي:

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + b^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k.$$

په ځانګړي توګه د $n = 2, 3$ لپاره:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

د بينوم جمله کيدی شي د پوره ايدکشن له لارې وښول شي.

د $n = 0$ او $n = 1$ لپاره کټمټوالی د

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^{0-k}b^k = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1, \quad \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^{1-k}b^k = a + b$$

له امله د په خوښه a او b لپاره ريښتيا يا ټيک دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

نیسو چې د n لپاره صدق کوي. نو دی:

$$(a+b)^{n+1}$$

$$=$$

$$(a+b)\,(a+b)^n = (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

$$=$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1}$$

$$=$$

$$=$$

$$a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1} + b^{n+1}$$

$$=$$

$$a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^{n-k+1}b^k + b^{n+1}$$

$$=$$

$$a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right]a^{n+1-k}b^k + b^{n+1}$$

$$=$$

$$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^k$$

$$=$$

د بینوم ضریبونو لپاره کتمتوالی Identitäten für Binomialkoeffizienten

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بينوم ضريبونو لپاره لاندې کټوټوالی صدق کوي:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k, \quad n \geq 1, = 0$$

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n-k-1+i}{i}, \quad k < n, = \binom{n}{k}$$

$$\sum_{i=0}^{n-k} \binom{k-1+i}{i}, \quad k > 0. = \binom{n}{k}$$

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

لومړي دواړه کټمټوالي ټرلي د بينوم د درسي ځخه لاس ته راځي،

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$

د ارزښتونو $a = b = 1$ همداسي $a = -b = 1$ سره .

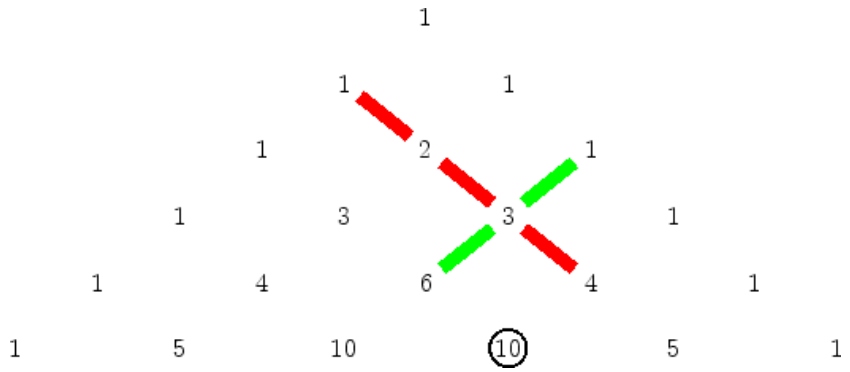
دريم کټوټوالی د ريکورزين فرمول په بيا بيا استعمال له لارې لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$
\begin{aligned}
\binom{n}{k} &= \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \\
&= \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k-2} \\
&= \cdots \\
&= \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k-1} + \cdots + \binom{n-k-1}{0} \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{n-k-1+i}{i}.
\end{aligned}
$$

په دې مساواتو کې د په ځای اینولو یا سبستیچیشن Substitution $(n-k) \leftrightarrow k$ له لارې ځلورم کتمتوالی لاس ته راځي.

دا اخرني دوارہ کتوتوالي کېدی شي په پاشکال درېڅوډي کې جمعه کوني لخ لارې انځور شي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډېرېو يا ستونوکمبيناتوريک Kombinatorik von Mengen

(د کمبيناتوريک د نورې زياتې کتنې لپاره دې زما دشميرپوهنې ستر کتاب وکتل شي)

لاندې جدول د مختلفو امکاناتو ګڼون يا تعداد ورکوي، چې د يوې د n مختلفو توکو سره ډېرې ځخه k توکي ټاکلی شو، د کوم سره چې بايد توپير شي، چې ايا د لړۍ پرلپسې يو رول لري (ترتيبونه) او تکرار ونه په کې اجازه لري که نه.

	sortiert منظم(د ټاکلو اړخونو له لارې) ترتيب	nicht sortiert نا متظم
له تکرار سره	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$
بې له تکرار سره	$n(n-1)\cdots(n-k+1)$	$\binom{n}{k}$

ليکونکي: هيوليګ،کنش

لومړی : نا ترتيب يا نا منظم ټاکنه بې له تکرار ځخه

که د لړۍ پرلپسې په پام کې ونيو لي، نو د لومړي ځل لپاره n امکانات شتون لري، $(n-1)$ امکانات د دويم لپاره ، تر $(n-k+1)$ امکاناتو پورې د k-م توکي لپاره، نو په ټوليزه توګه

$$n(n-1)\cdots(n-k+1)$$

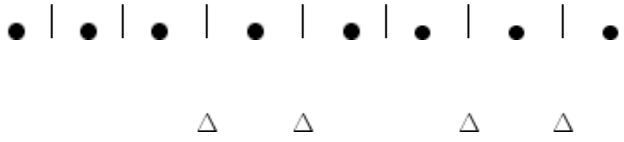
امکانات شتون لري.

دا بايد د ګڼون يا تعداد $k!$ سره وه وېشل شي چې د k توکو پرموتيشن (د توکو ځای بدلون : لنډ: ځای بدلون) دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم : ناتتيب شوي انتخاب د تکرار سره

يو برابرارزښته پرابلم دادی، چې $n-1$ په نځښه شوې (نشاني شوي) د $n+k$ ټکو تر منځ ځای په ځای شي.



د $(i-1)$ -م او i -م ترمنځ ټکو تعداد چې په 1 کم شوی د i –م توکي تکرارونو سره برابر دی. د لومړي سره سم د ممکنه په نخښه کيدونو تعداد لپاره لاس ته راځي

$$\binom{n+k-1}{n-1},$$

کوم چې په جدول کې ورکړ شوي عدد سره سر خوري.

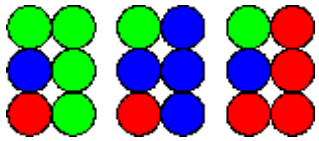
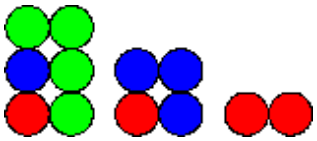
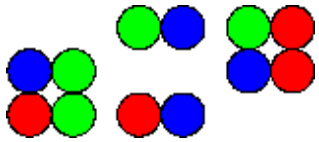
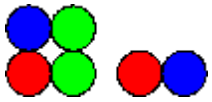
دريم : د تتيب شوي انتخاب لپاره فرمول پسې ترلی لاس ته راځي.

ليکونکي:هيوليګ، کنش

په يوه مرتبان کې يو سور يو شين او يو اسماني توپونه (غونډوسکي) پراته دي. په جدول کې د دوه واره راوستنې د امکاناتو تعداد کتل کيږي ($k=2, n=3$) .

ناترتيب شوي يا نامنظم	ترتيب شوي	
$\binom{n+k-1}{k}$	n^k	د تکرار سره (دبېرته وراچونې سره)

(c) ketabton.com: The Digital Library

		
	$3^2 = 9$	$\binom{3+2-1}{2} = 6$
بې د تکرار سره (نه دېېرته وراچوني سره)	$n(n-1)\cdots(n-k+1)$	$\binom{n}{k}$
		
	$3 \cdot 2 = 6$	$\binom{3}{2} = 3$

ليکونکي:هيوليګ، کنش

د موټر نمره Autokennzeichen

د يوه الماني موټر نمره د ايالت يا ښار لپاره د ≤ 3 تورو کمبينېشن ، ≤ 2 د نورو تورو او تر يوه ځلورځايز عدد ځخه د ېېلګې په توګه :

(c) ketabton.com: The Digital Library

له n تورو څخه 26^n کمبینېشنونه شتون لري او له دې سره

$$(26 + 26^2 + 26^3) \cdot (26 + 26^2) \cdot 9999 = 1.28 \cdot 10^{11}$$

ممکنه نمرې (که د ښار یا ایالت د ورسره ور ګډونه په پام کې ونه نیول شي

لیکونکي:هیولیګ، کنش

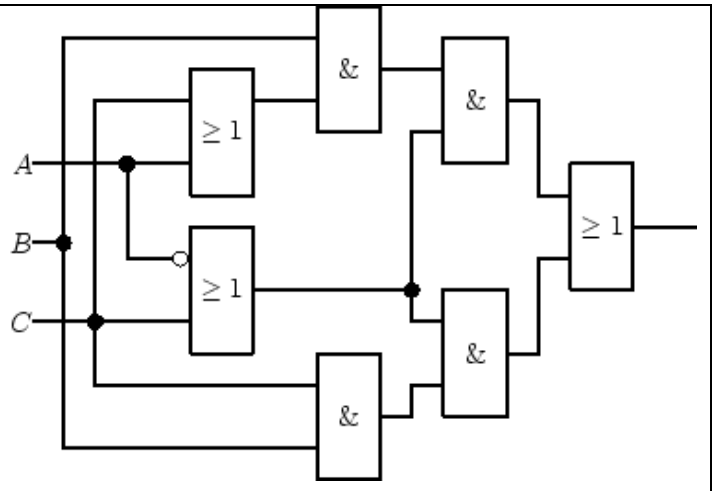
پوښتنې

- د بڼه بدلون او همداسې د ربنتیا جدول سره و و زامیی، چې ایا افادې یا ویښې تل ټیک دي یعنې Tautologien دي:

$$(A \vee B) \Rightarrow \big((\neg A \vee B) \wedge (A \Rightarrow \neg A)\big)$$

$$\big(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)\big) \Leftrightarrow \big((A \wedge B) \Rightarrow C\big)$$ پای.

- اړیکې $\Box, \Diamond$ د ډېرې پوهنې ځخه د منطقي علیو $\{\wedge, \vee, \Rightarrow\}$ لپاره ځای په ځای شوي. په کومو حالتونو کې باور لري:

- محامخ سویچونه(شالتونګونه) ساده کړی:	

(c) ketabton.com: The Digital Library

- ډېرى $A, B \neq \emptyset$ $f : A \to B$ ، يوه تابع همداسې برخډېرى $U, V \subset A$ او $X, Y \subset B$ ورکړ شوي دي. د لاندې اړيکو ريښتياوالى همداسې نارښتياوالى د يوې مناسبې برعکس بېلګې په مرسته وښايى:

الف- $f(U \cup V) = f(U) \cup f(V)$ ب - $f(U \cap V) = f(U) \cap f(V)$

پ - $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$

ت - $f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$

- د يوه تابع $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ په هکله لاندې ويناوې په فورمال ليکندود افاده کړى:

الف - fپه باندې نه دى ب - f په کې نه دى

پ – f په نه دى ت – fنه په کې او نه په باندې دى

ليکونکى: کريستيا اپپيس

- د $n \in \mathbb{N}$ لپاره د پوره ايدکشن له لارې وښايى:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad \textbf{a)} \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1} \quad \textbf{b)}$$

- د $n \in \mathbb{N}$ لپاره د پوره ايدکشن له لارې وښايى:

الف : $a_n = n^3 + 5n$ په 6 وېشونى دى.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب : $b_n = \frac{n}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{6}$ يو طبيعي عدد دی.

- په يوه ميلمستيا کې 25 کسان سره يوځای کيږي. ځومره لاسونه سره ورکول کيږي، که هر ميلمه هر بل ميلمه ته لاس ورکړي. .

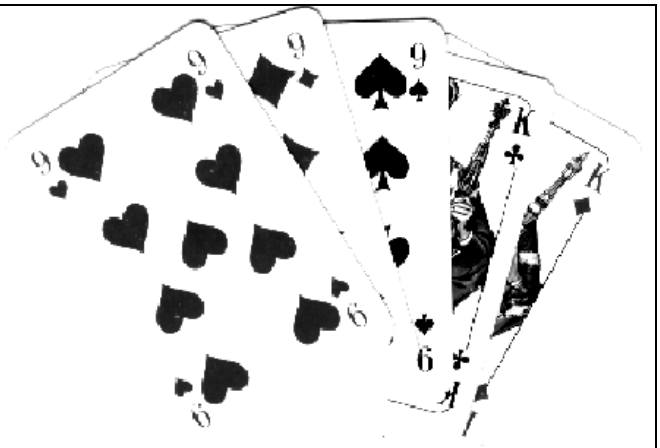
د شميرپوهني له لومړني کورس څخه

- و ښايی:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{m+k}{k} = \binom{m+n+1}{n} \quad \textbf{a)}$$

$$\sum_{\ell=1}^{n} \binom{n+k-\ell}{k} = \binom{n+k}{k+1} \quad \textbf{b)}$$

لاس ته راوني يې په پاسکال درېګوډي کې انځور کړی. ليکونکی: کلاوس هيوليګ



- په يوه د کارتو لوبه کې چې له 32 کارتو جوړه ده(8 ارزښتونه 4 رنګونه) ځومره امکانت شته دی، چې فول هوز Full Haus (درې برابرارزښته او دوه برابر ارزښته) کارتي لاس ته راوړل شي؟

د دې لپاره ځومره امکانات شته چې دا ځېره شوي کارتې د دوه کارتو بدلولو سره يو پوکر(ځلور برابر ارزښتونه) لاس ته راوړای شي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

ازماښت Test

لومړۍ پوښتنه:

د لاندې منطقي ابادي رښتيا ارزښت پيدا کړئ

$$D: \ (A \Rightarrow B) \wedge (\neg C \vee A)$$

چې د ويناو A, B, C د رښتيا ارزښتونو تابع يا په واک کې وي.

هر ځل يا 'w' او يا 'f' ورکړئ.

دويمه پوښتنه:

دپرۍ $A = \{1,2,3,4,5\}$ او $B = \{4,5,6,7\}$ ورکړئ.

په ګوته کړئ، چې ايا لاندې ويناوې رامنځ ته کيږي که نه(J د هو لپاره او N د نه لپاره)

دريمه پوښتنه:

د دوه هره يوه د درې توکيزه دپريو A او B ترمنځ څومره اړيکې شتون لري؟

له ې څخه څومره بلواک يا تابع دي او څومره بلواک يې په باندې(سورجکتيو) دي؟

څلورمه پوښتنه:

و څېړئ چې ايا لاندې توابع يا بلواک $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ په باندې، په کې او په دي:

$$\mathbf{a)} \quad f(x) = x \sin x \qquad \mathbf{b)} \quad f(x) = \exp\left(-x^3 + 1\right)$$

$$\mathbf{c)} \quad f(x) = x \ln \frac{1}{|x| + 1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځمه پوښتنه:

ځومره پنځه ځايزه ګڼونه يا عددونه شتون لري د لاندې سره

الف: پنځه مختلف عددونه

ب) ټيک دوه جوړه عددونه

شپږمه پوښتنه:

ځومره امکلنات شتون لري، چې ناه کسان په درپيز ګروپ ووېشو؟

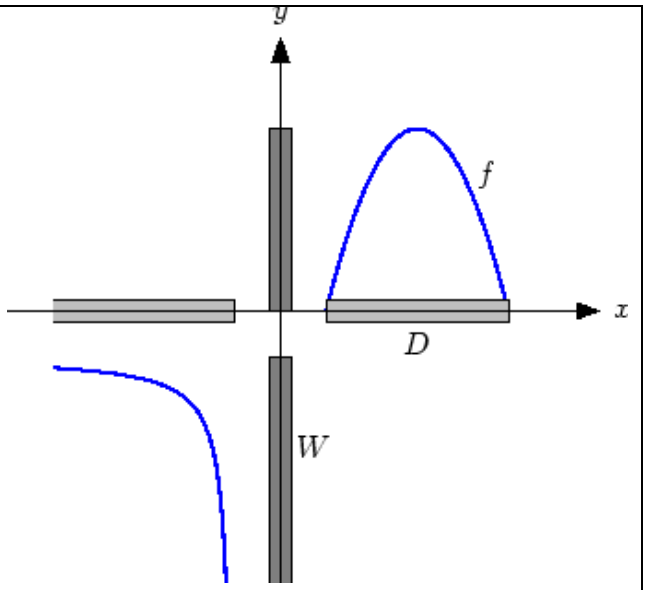
تابع يا فنکشن يا بلواکFunktion

يو فنکشن

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)$$

هر د تعريفورشو $D \subseteq \mathbb{R}$ هر توکی x په يوه د ارزښت ورشو $W \subseteq \mathbb{R}$ په يوه توکي $f(x)$ باندې تنظيموي..

د فنکشن يا بلوتک f ګراف له ټکو (x, y) جوړ دی د $y = f(x)$ سره.



لکه د تابع څخه چې ليدل کيږي، د تعيف ورشو (رونې شين) او د ارزښت ورشو(تياره خړ) د x – محو ر همداسې د y -محور پرېوستونونه Projektionen دي.

د دې لپاره چې د تابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=\frac{\ln(3-x)}{\sqrt{x}-1}$$

تعريف ورشو او ارزښت ورشو وټاکو، بايد په ساده تابع رامنځ ته شوي بنډيزونه په پام کې ونيسو. د لوګاريتم ارګومنت بايد مثبت(زياتيز) وي:

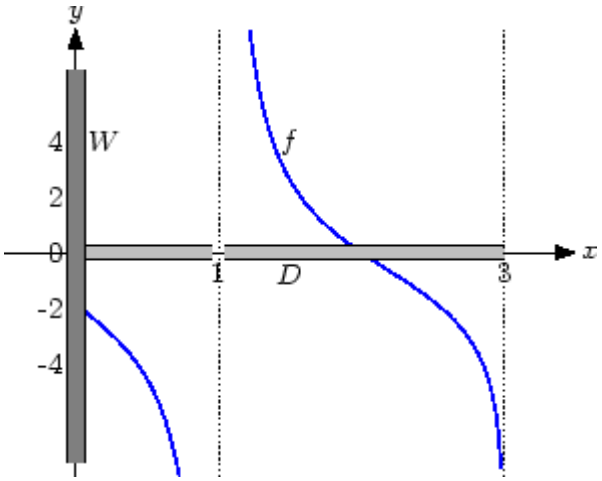
$3-x>0$ يعني $x\geq 0.$ او

$x\neq 1.$ په هر حالت مخر-(ماتلاندې) بای صفر نه شي، دا په دې معنا چې .

په ټوليزه توګه لاس ته راځي:

$$\mathrm{D}=[0,3)\backslash\{1\}=[0,1)\cup(1,3).$$

د f ارزښت د رسم سره روښانه يا واضح کيږي.



دا چې f د $x\in(1,3)$ لپاره د $-\infty$ او $+\infty$ ترمنځ ټول ارزښتونه نيسي يا اخلي، نو باور لري. $W=\mathbb{R}$

ليکونکي:هيوليګ،هيورنر،کنش

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې جدول د څو بنسټیزو بلواک یا توابعو د تعریف - او ارزښت ورشو ښایي:

$f(x)$	D	W
$1/x$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\ln x$	$(0, \infty)$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$\mathbb{R} \setminus \{x \,:\, x = (2k+1)\pi/2,\ k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$
$\sqrt{x}$	$[0, \infty)$	$[0, \infty)$

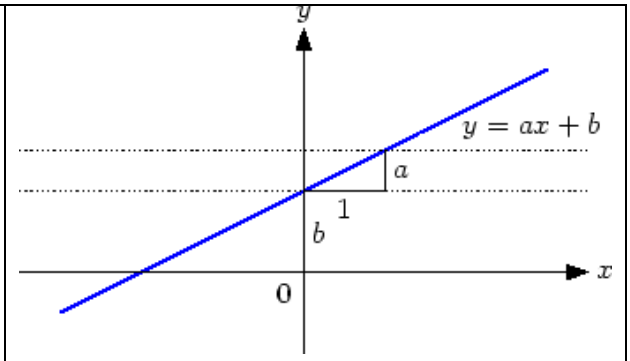
لیکونکي:هیولیګ،هیورنر،کنش

کرښیز فنکشنونه Lineare Funktion

د یوه کرښیز فنکشن

$$f(x) = ax + b$$

ګراف یوه کرښه ده د a جګېدنې سره او د y -محورغوځي b سره.



الترناتیو یا بدیلي انځوروني یې ټکي-جګیدنې-بڼه

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = a$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

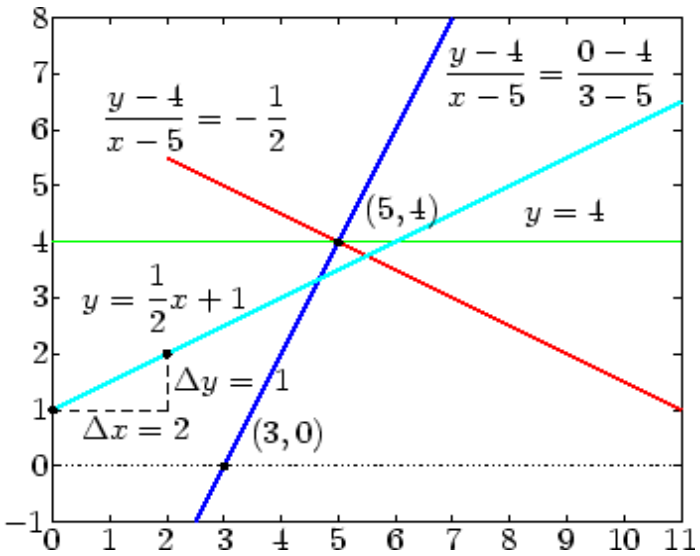
او د دوه ـټکو ـبنه

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0},$$

دي ، د کوم سره چې (x_0,y_0) او (x_1,y_1) په کربنه ټکي دي.

ليکونکي:هيوليګ،هيورنر

تابع د کربنيزو فنکشنونو مختلفو انځورونو بنې بنايي يا په نخبنه کوي.



مربعيز فنکشنونه Quadratische Funktion

د يوه مربعيز تابع ګراف

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

يو د

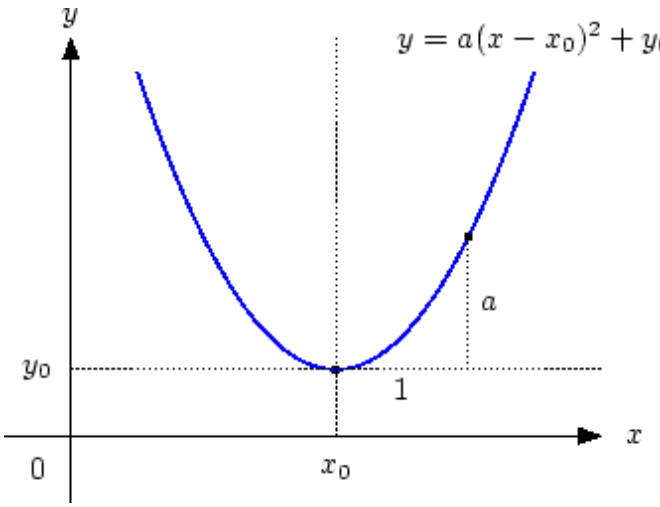
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = a(x - x_0)^2 + y_0$$

د بنې پارابول دی د ککړې

$$(x_0, y_0) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a} + c\right) .$$

سره.



مایل ګوزار یا – غورځونه Schräger Wurf

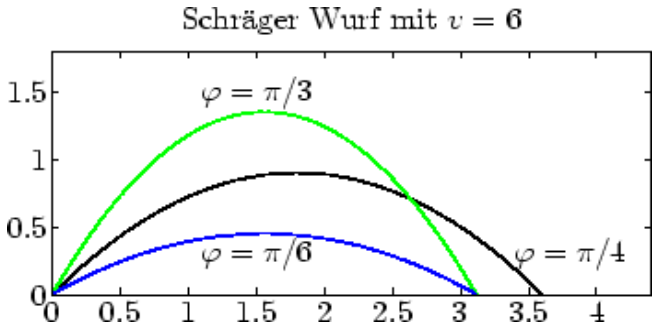
که یو تن د کونج φ لاندې د یوې چټکتیا v سره وغورځول شي، نو د الوتنې لار یې یو پارابول

$$y = x \tan\varphi - \frac{g}{2v^2 \cos^2\varphi} x^2$$

بنایي ، چېرته چې g د ځمکې بیړه(تعجیل) ده.

مایله ګوزارونه یا –غورځونه د v=6 سره.

(c) ketabton.com: The Digital Library



مساوات د برابردولیز خوزښت څخه لاس ته راځي د پیل چټکتیا v سره په x - او y-کمپوننتونو یا برخو او د همدې وخت د ازادې غورځونې بیړه ییز خوزښت سره.:

$$x(t) = vt\,\cos\varphi \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{v\,\cos\varphi}$$

$$y(t) = vt\,\sin\varphi - \frac{1}{2}\,gt^2$$

$$\Rightarrow\; y(x) = \frac{vx\,\sin\varphi}{v\,\cos\varphi} - \frac{gx^2}{2v^2\,\cos^2\varphi} = x\left(\tan\varphi - \frac{gx}{2v^2\,\cos^2\varphi}\right).$$

د غورځونې واټن دی:

$$x = \frac{2v^2\cos^2\varphi}{g}\tan\varphi = \frac{v^2}{g}\sin(2\varphi)\,.$$

دا د $\varphi = \pi/4 \mathrel{\widehat{=}} 45°$ لپاره ماکسیمال کیږي.

لیکونکي: هیورنر،هیولیګ،کنش

(c) ketabton.com: The Digital Library

پولینوم Polynom

یو د n-م دجې پولینوم p په لاندې بڼه لیکل کیږي:

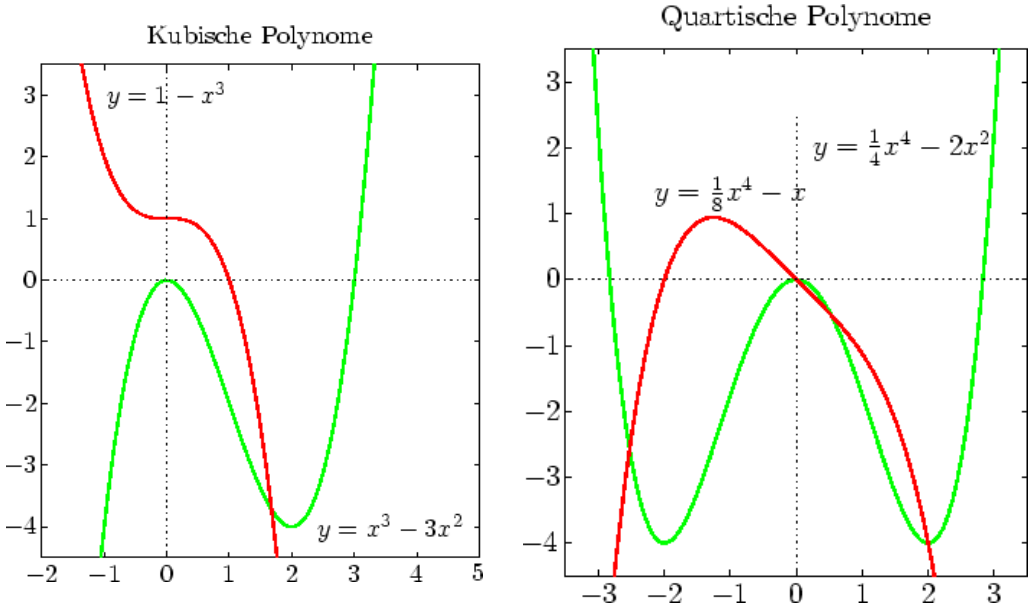
$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

د $a_n \neq 0$ سره .

اووښتونې یا متحوله x او ضریبونه a_k کېدی شي ریښتونی (حقیقی) یا کمپلکس عددونه وي. په اړونده توګه له دې املې له حقیقی همداسې کمپلکس پولینومونو غږیږو.

لیکونکي:هیولیګ،هیرنر

لاندې توابع مکعبي $n = 3$ او مربعیز $n = 4$ پولینومونه په ګوته کوي، د څرنګوالي (کوالیټي) مختلف تابع ګراف سره



لیکونکي: هیورنر،هیولیګ،کنش

(c) ketabton.com: The Digital Library

راشنل فنکشن یا بلواک(تابع) Rationale Funktion

یو نسبتي تابع د صورت(ماتباندې) درجې m او مخرج(ماتلاندې) درجې n سره یو د دوه پولینومونو وېش دی.

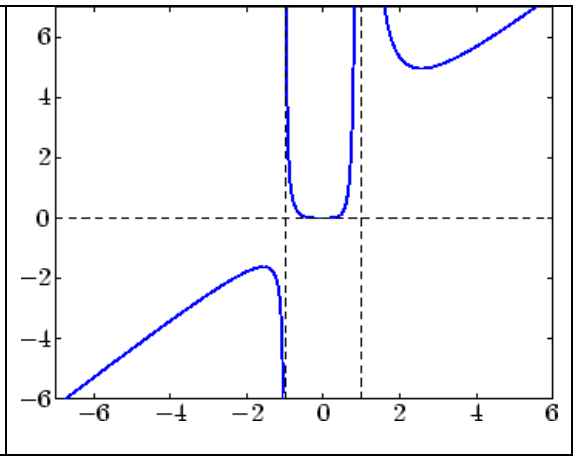
$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n}.$$

دا انځورونه ناوېشور irreduzibel بلل کیږي، که p او q کوم ګډ کرښیز ضریب ونه لري.

د مخرج صفرځایونه راشنل تابع r د تعریف تشیاوې دي او د پول ځایونو په نامه یادیږي. د دوی نظم د صفرځایونو ډېرځلوالی دی.

د اووښتونې یا متحولې x او ضریبونه a_k, b_k کېدی شي حقیقي یا کمپلکس عددونه وي. په اړونده توګه د حقیقی یا کمپلکس رښتوني فنکشن څخه غږیږو.

لیکونکي:هیولیګ، اپپ



فنکشن

$$f(x) = \frac{x^4}{(x+1)(x-1)^2}$$

په $x = -1$ کې یو ساده قطب لري او په $x = 1$ کې ډبل قطب لري

د تابع څخه پژندل کیږي، چې f په یوه ساده قطب کې مخنښه بدلوي او په ډبل قطب کې مخنښه نه تغیروي. لیکونکي:هیولیګ، اپپ

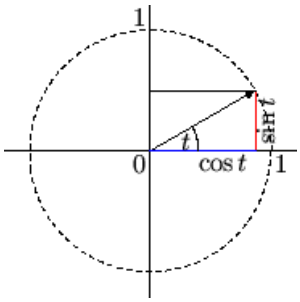
(c) ketabton.com: The Digital Library

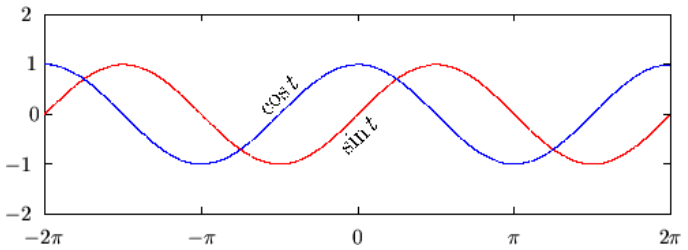
ساين او کوساين Sinus und Kosinus

د

$$(\cos t, \sin t), \quad t \in \mathbb{R}$$

سره کواودينات چې په سرچينه کې په کونچ t ځرخول شوی ټکی $(1,0)$ په نښه کيږي.





دواړه د ګردۍ يا دايرې توابع کوسان او ساين 2π - پريوديکي (تل ببرته راګرځېدوني) دي او باور لري

$$\cos t = \sin(t + \pi/2)$$

,

•

$$\cos t = \cos(-t), \quad \sin t = -\sin(-t)$$

,

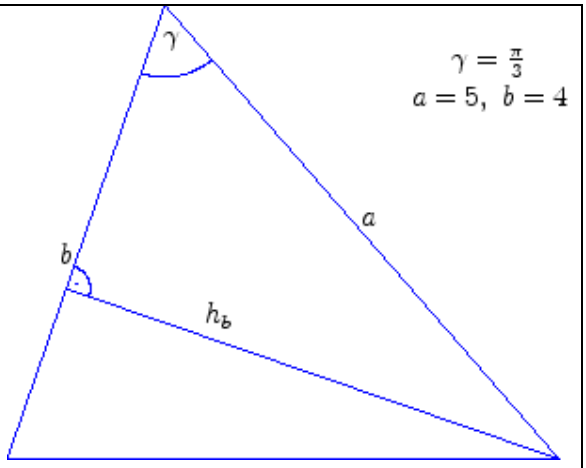
•

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

د تر مخنخبنې پورې د دايرې تابع د ولاړګودیز درېګوډي(قايمالزايه مثلث) د قطر (نيمي) سره چې ا وږدوالی يې 1 دی دو لاړو (عودو) ضلعو اوږدوالی ښايي. يو ځو ځانګړي ارزښتونه يې دي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره چې د څېره شوي درېګوډي د سطه وټاکلی شو، لومړی جکوالی h_b شمېرو: $\sin\gamma = \frac{h_b}{a} \Rightarrow h_b = a\sin\gamma\,.$ له دې سره لاس ته راځي: $F = \frac{1}{2}ab\sin\gamma\,.$	

د ورکړ شوو ارزښتونو لپاره لاس تخ راځي:

$$F = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 4\cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}\,.$$

د ساین او کوساین لپاره د جمعې جملە(قضیه)

د دایرې توابعو $\sin t$ او $\cos t$ لپاره لاندې اړیکې صدق کوي:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

- $$\sin(\alpha+\beta) = \sin\beta\cos\alpha + \sin\alpha\cos\beta$$

پە څانګې توګه

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha, \qquad \sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha.$$

لیکونکی.ژ.هیورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

تابع

$$u(t) = \cos(w_1 t) + \cos(w_2 t)$$

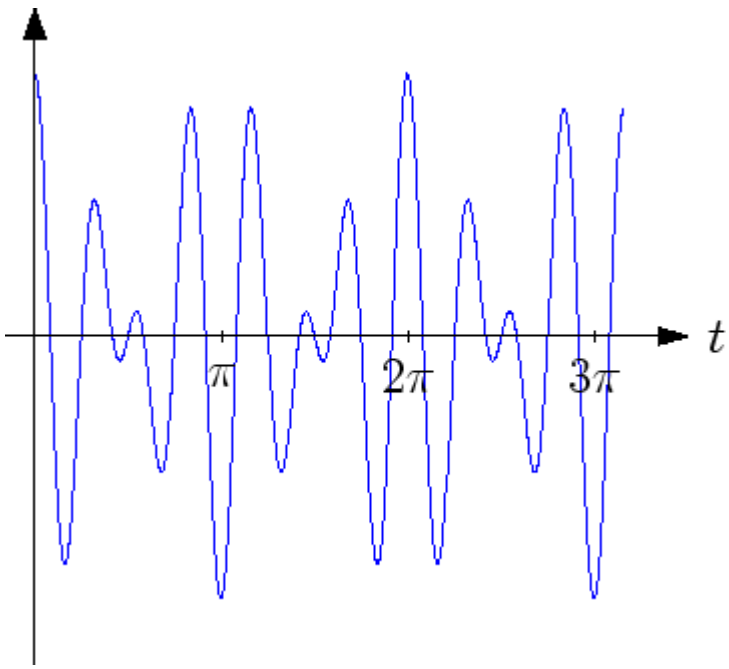
اړيکي د دوه لړزښدنو يو څای رامنځ ته کښدنه روښانه کوي. د جمعي قضيي په مرسته کښدی شي انځورونه ساده شي. د $\overline{w} = \frac{1}{2}(w_1 + w_2)$ او $\Delta w = |w_1 - \overline{w}|$ سره له

$$\cos(\overline{w} - \Delta w t) = \cos(\overline{w}t)\cos(\Delta w t) + \sin(\overline{w}t)\sin(\Delta w t)$$

$$\cos(\overline{w} + \Delta w t) = \cos(\overline{w}t)\cos(\Delta w t) - \sin(\overline{w}t)\sin(\Delta w t)$$

ځخه لاس ته راځي، چې

$$u(t) = 2\cos(\overline{w}t)\cos(\Delta w t)\,.$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

بلواک د $w_1 = 7$, $w_2 = 5$ لپاره لړښېدنه ښايي، دا په دې معنا چې $\overline{w} = 6$. , $\Delta w = 1$ او

$$u(t) = 2\cos(6t)\cos t\,.$$

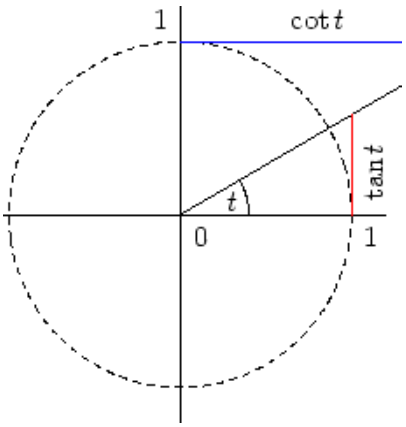
ليکونکي:هيوليګ،کرايځ

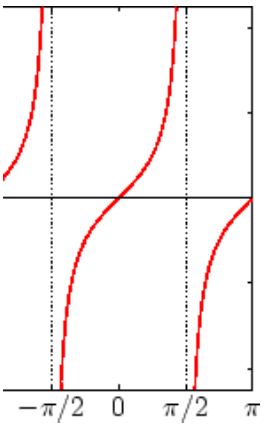
تانجنت او کوتانجنت

توابع تانجنت او کوتانجنت د

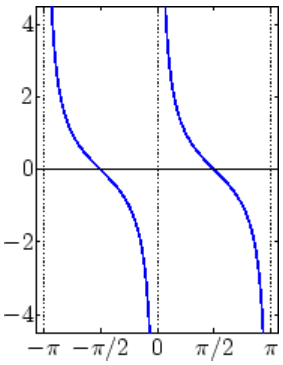
$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}, \quad \cot t = \frac{\cos t}{\sin t}$$

سره تعريف شوي. دا په ولاړګودیز درېګودي (قايوم الزاويه مثلث) کي د تر مخنښې پوري د ولاړو اړخونو تناسب ورکوي





Tangens



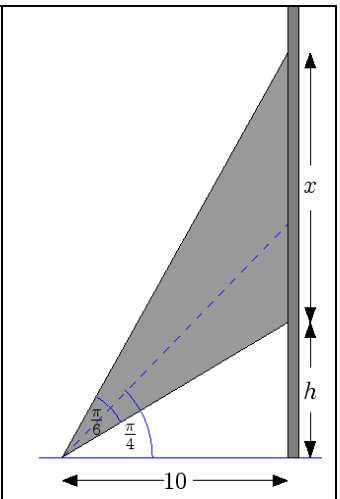
Kotangens

يو څو ځانګړي ارزښتونې دي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
tan	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	nicht def.
cot	nicht def.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

تابع د شکل له مخې یو د برېښنا مخروط ، چې په یوه ولاړ دېوال پرېوځي ښایي



د دې لپاره چې خورا لوې یا ماکسیمال پوسېده د ټاکلی شو، جوړوو

$$\frac{h}{10} = \tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12}) = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$\frac{x+h}{10} = \tan(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12}) = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}\,.$$

که $h = \frac{10}{3}\sqrt{3}$ په دویم مساوات کې ځاپه ځای کړوو نو لاس ته راځي

$$\frac{x}{10} = \sqrt{3} - \frac{1}{3}\sqrt{3},$$

$$x = \frac{20}{3}\sqrt{3}$$

یعنې

لیکونکي:هیولیګ،کرایځ

(c) ketabton.com: The Digital Library

اکسپوننشل توابع(بلواک)

توان تابع

$$y = e^x = \exp(x)$$

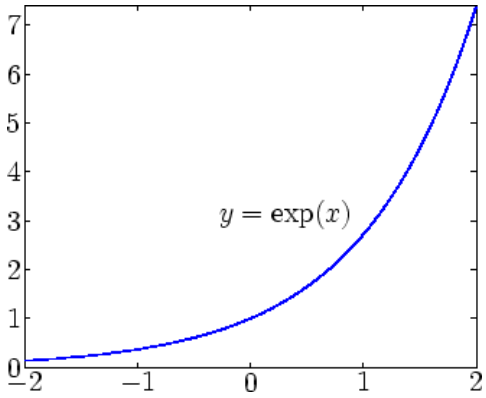
د اویلر Eulerschen عدد $e = 2.71828...$ سره اکسپوننشل تابع بلل کیږي. دا د $x \in \mathbb{R}$ تولو لپاره مثبت(زاتیز) ده او فنکشنل مساوات

$$e^{x+y} = e^x e^y .$$

پوره کوي.

$$e^{-x} = 1/e^x$$

په څانګړي توګه دی .



لیکونکي:هیولیګ،هیورنر

اکسپوننشل تابع د ډیرو بیولوژیکي پروسو زیاتوالی روښانه یا تشریح کوي.

د بېلګې په توګه د یوه ساده نفوس مودل متناسب دی د اوسنیو نفوس تعداد $p(t)$ سره د t په وخت کې، دا په دې معنا چې

$$p(t + \Delta t) \approx p(t) + \Delta t(\lambda p(t)) .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\Delta t \to 0$ لپاره دا د ډېروالي قانو د $p(t)$ مودلی کیږي.

لاندې جدول د نړۍ نفوس ښایي د کلني ډېرېدنې سره.(اټکل ارزښت)

Jahr کال	Bevölkerungszahl د نفوسو تعداد	اټکل ارزښت Rate
1950	2555078074	1.76 %
1955	2779669781	1.87 %
1960	3039332401	2.02 %
1965	3345837853	2.16 %
1970	3707610112	2.05 %
1975	4088224047	1.80 %
1980	4456705217	1.79 %
1985	4854602890	1.77 %
1990	5283755345	1.54 %
1995	5690865776	1.37 %
2000	6080141683	1.25 %
2005	6460553564	1.12 %
2010	6823634553	1.03 %

(c) ketabton.com: The Digital Library

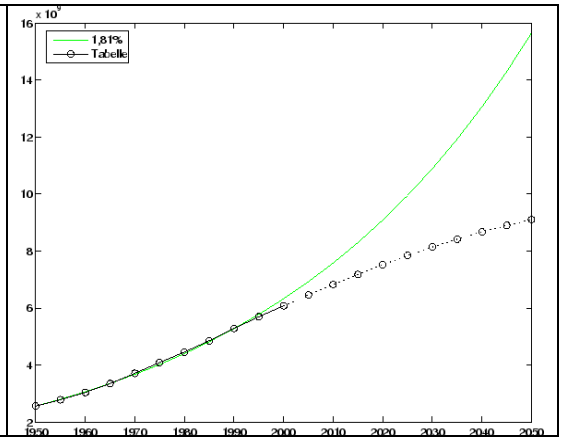
2015	7175675066	0.95 %
2020	7518010600	0.86 %
2025	7840660355	0.76 %
2030	8140344240	0.68 %
2035	8416742278	0.60 %
2040	8668391454	0.53 %
2045	8897073495	0.47 %
2050	9104205830	

کلنی د نفوسو منځنی ډېروالی په کلونو 1950-2000 کې % 1.81 وو. د 1950 کال وروسته د منځني ثابت ډېروالي سره.

$$p(t) = 2555078074e^{0.0181(t-1950)}$$

د نړۍ نفوس به په 2050کال کې 16 ميلياردە ته جګ شي(ټکي ټکي شوي کرښه (منحني)). په جدول کې اټکل د نفوسو د کمښدو ځخه مخ ته ځي

ليکونکي : هيوليګ، هيورنر



د ګټې ګټه Zinseszins

(c) ketabton.com: The Digital Library

یوه پیلبډایي x د n -واره وکونو همداسي اخستنو د یوې Rate (r $r<0$) $r>0$ bzwهړداسي . د یوې ګڼې ضریب $(1+p)$ له کبله لاندې پیل پای بدآیي ورکوي :

$$y=(1+p)^n x+\frac{(1+p)^n-1}{p}r\,.$$

له دې سره $p=1$ یوه 100% د ګټې د یوې ربحي د کلنۍ اپښوونه په ګوته کوي

موثره کلنۍ ربحه p_j د میاشتنۍ ګټونې څخه شمېرې کیږي د یوې p_m ربحي (ګټې سره)

$$p_j=(1+p_m)^{12}-1\geq 12p_m\,.$$

لیکونکي : هیولیګ، هیورنر

بنسټیز ه سرمایه په لومړني ربحپریود کې په پام کې نیول کیږي، اپښوونه او همداسي اخستنه یا راوستنه په لومړي څل د هر ورپسي کال. دا د ا لاندې راکوي:

$$\begin{aligned} n=1: &\quad y=x(1+p)+r,\\ n=2: &\quad y=\big(x(1+p)+r\big)(1+p)+r. \end{aligned}$$

په ټولیزه توګه صدق کوي:

$$y=\qquad \big(\cdots\big(x(1+p)+r\big)(1+p)+r\big)\cdots\big)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= x(1+p)^n + \left(1 + (1+p) + (1+p)^2 + \cdots + (1+p)^{n-1}\right)r$$

دا په نوکانو کې د r افاده کیدی شي د هندسي جمعې فرمول سره واړول شي او سړی دا ورکړل شوی فرمول لاس ته راوړي.

لیکونکي : هیولیګ، هیورنر

یو د 100000 یورو پور(قرضه) په کلنې ګټونه او یوې ګټونې یا ربحې % 5 سره د 10 کاله وروسته بېرته ورکړ شي. سړی د

$$y = 0\,,\ n = 10\,,\ p = 0.05\,,\ x = 100000$$

سره ګټه لاس ته راوړي:

$$r = \frac{1.05^{10} \cdot 100000\,0.05}{1.05^{10} - 1}$$

$$= 12950.46$$

د میاشتنی د $\frac{5}{12}\%$ په ګټونې یا په ګټه اېښوونې سره دا راکوي

$$n = 120\,,\ p = \frac{1}{240}$$

په ورته توګه

$$r = \frac{\left(\frac{241}{240}\right)^{120} \cdot 100000\,\frac{1}{240}}{\left(\frac{241}{240}\right)^{120} - 1}$$

$$= 1060.66$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

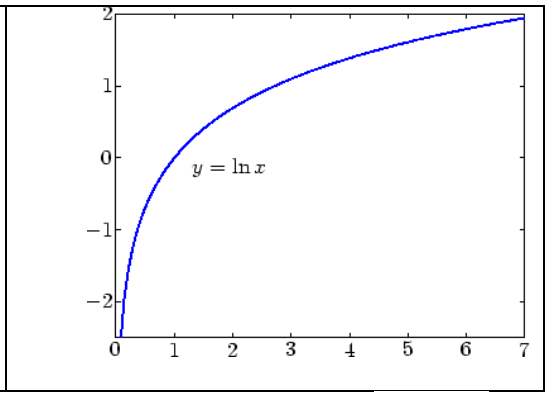
د میاشتنی ګټې تادیه کوني ده، کلنۍ 12727.86 ده. دلته د مخه د ګټې تادیه کونه یو

زیان منځ ته راولي. د $\frac{4}{12}$ % سره به دا د لاندې سره برابر وای:

$$\left(\frac{(1+\frac{1}{300})^{12}-1}{\frac{1}{300}}-12\right)\cdot 1060.66 = 235.96\,.$$

لیکونکي : هیولیګ، کرایخ

لوګاریتم Logarithmus



د لوګاریتم تابع د اکسپوننشل تابع برعکس (په څټ) تابع ده:

$$y = e^x \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln y.$$

دا $(0,\infty)$ په $\mathbb{R}$ کره مونوتون(یوغږیز) کره جګېدونکی تنظیموي او لاندې د تابع مساوات پوره کوي

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y.$$

$$\ln(1/x) = -\ln x$$

په څانګړې توګه لرو:

لیکونکی: هیولیګ،کوپف

(c) ketabton.com: The Digital Library

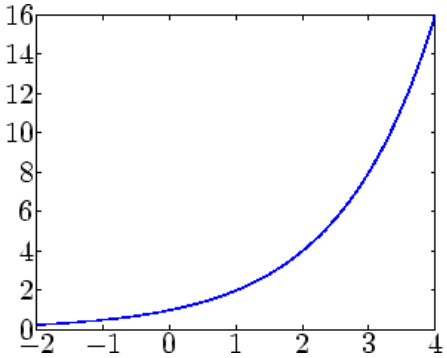
تولیز په توان تابع او لوګاریتم

د $a > 0$ لپاره تعریفوو :

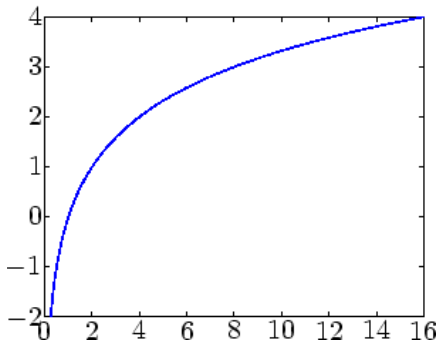
$$y = a^x = \exp(x \ln a)$$

د برعکس تابع(بلواک) سره $x = \log_a y, \quad y > 0.$

په ځانګې توګه د 10 په بنسټ لوګاریتم لپاره لیکو $\log = \log_{10}$ او $\mathrm{ld} = \log_2$
د دوه ګوني یا دوال لوګاریتم لپاره.



$f(x) = 2^x$



$f(x) = \mathrm{ld}(x)$

لیکونکی: هیولیګ،کوپف

د توان او لوګاریتم لپاره شمېرقوانین

له تعریفونو او تابعمساواتو څخه د اکسپوننشل - او لوګاریتمي توابعو لپاره لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{array}{rclrcl} a^{s+t} & = & a^s\,a^t, & \log_a x+\log_a y & = & \log_a(xy), \\ a^{s-t} & = & a^s/a^t, & \log_a x-\log_a y & = & \log_a(x/y), \\ (a^s)^t & = & a^{st} & \log_a x^t & = & t\log_a x\,. \end{array}$$

برسيره (سربېره) پر دي د مختلفو بنسټونو ترمنځ شمېربدلون لپاره اړيکي باور لري:

$$\log_b x = \log_b a\,\log_a x\,.$$

په ځانګړي توګه

$$\log x = (\log e)\ln x\,.$$

ليکونکی: هيوليګ،کوپف

لاندې بېلګې د شمېرقاعدو استعمال روښانه کوي .

(i)

$$\ln(4x^2) - 2\ln(2) = \ln(2^2) + \ln(x^2) - 2\ln 2 =$$

$$= 2\ln 2 + 2\ln x - 2\ln 2 = 2\ln x$$

(ii)

$$\log_4(x^2)+$$

$$(2x) = 2\tfrac{\ln x}{\ln 4} + 1 + \tfrac{\ln x}{\ln 2} = 1 + \tfrac{\ln x}{\ln 2} + \tfrac{\ln x}{\ln 2} = 1 + 2\tfrac{\ln x}{\ln 2}$$ ld

ليکونکی: هيوليګ،کوپف

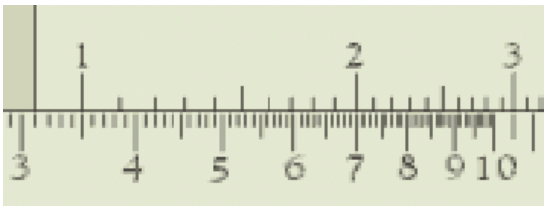
(c) ketabton.com: The Digital Library

د لوګاريتم شمېرونی

په لوګاريتم کې لاندې قانون باوري دی:

$$\log x + \log y = \log(xy).$$

له دې کبلخ کېدی شي دوه سکالا يا کچړبرنې يو په بل کېږدو او د نتسجې په توګه نه د دې عددونو جمعه بلکه ضرب لاس ته راځي.



د پورته څېرې څخه د بېلګې په توګه لاس ته راړو، چې $3.5 \cdot 2 = 7$. دلته لومړی 1 د پورته سکالا په 3.5 (لومړی ضريب) د په لاندې سکالا شمېرل کيږي. بالاخره 2 د پورته سکالا (دويم ضريب) د ضرب نتيجه په لاندې سکالا لوستل کيږي.

ليکونکي،هيوليګ.کوپف، ويپر

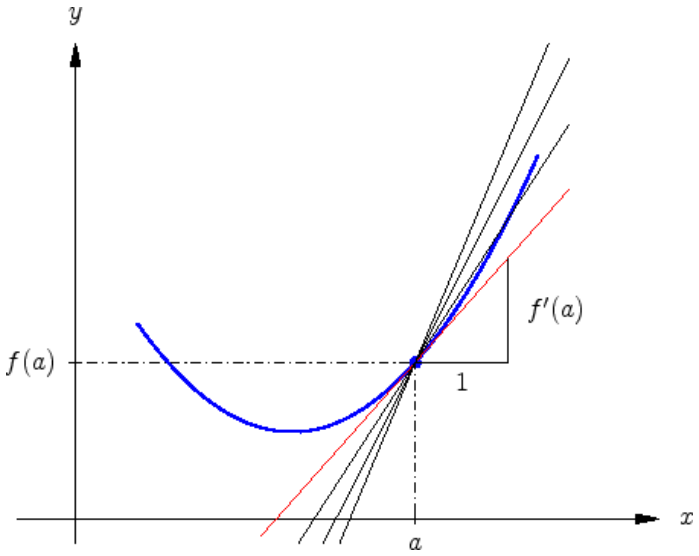
مشتق يا رابېلېدنه Ableitung

يو تابع f په يوه ټکي a کې مشتقور دی، که دا د رابېلېدنې يا مشتق په څېر نيوله شوې پوله(ليميټ)

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

شتون ولري

(c) ketabton.com: The Digital Library



هندسي مشتقورواالی په دې معنا دی، چې د غ،څوون(قطاعو) جګېدنه چې د

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

سره ورکړل شوي د تانجنت جګوالي په لور وهڅيږي يا کورګنت شي.

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x)$$

د دې لپاره هم ليکو او جګ مشتقونه د $f'', f''', \ldots$ او همداسي د $f^{(2)}, f^{(3)}, \ldots$ سره ښايو. يو فنکشن f په يوه ډېرې D مشتقورِ بلل کيږي، که $f'(x)$ د ټولو $x \in D$ لپاره شتون ولري.

ليکونکی:هيوليګ،کوپف

د تابع $f(x) = x^2$ مشتق

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مشتق $f''(x) = 2$ یو ثابت دی.

د یوه په خوښه مونوم $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ لپاره ، بینوم د فرمول په مرسته لاس ته راځي

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\binom{n}{1} x^{n-1}h + O(h^2)}{h} = nx^{n-1},$$

د کوم سره چې $O(h^2)$ د نظم ترم h^2 په ګوته کوي.

لیکونکی:هیولیګ،کوپف

د $f(x) = \sin x$ مشتق کېدی شي د جمعي قضیي په مرسته وشمېرل شي.

له

$$\sin(t \pm h/2) = \sin t \cos(h/2) \pm \cos t \sin(h/2)$$

د $t = x + h/2$ سره کمښتېږي لاس ته راکوي:

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{\sin\left((x+h/2)+h/2\right) - \sin\left((x+h/2)-h/2\right)}{h} =$$

$$= \frac{2\cos(x+h/2)\sin(h/2)}{h}.$$

له

$$\lim_{h\to 0} \frac{2\sin(h/2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h/2)}{h/2} = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

املە بنسی اړخ د $h \to 0$ لپارە د $\cos x$ پە لور هڅيږي.

غوره (مهم) مشقونه

لاندې جدول د غوره توابعو مشتقونه راکوي: :

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
c	0	$r \neq 0$, x^r	$r x^{r-1}$
e^x	e^x	$\ln \lvert x \rvert$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tan x$	$\tan^2 x + 1$	$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مشتق کربنیزوالی Linearität der Ableitung

مشتق کربنیز دی دا په دې معنا چې د مشتقور توابعو f او g لپاره صدق کوي

$$(rf)' = rf', \quad r \in \mathbb{R},$$

$$(f \pm g)' = f' \pm g'.$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د ضرب یا ځل قانون

د دوه مشتقور توابعو f او g مشتق دی

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

تولیز د ضرب لپاره $f = f_1 \cdots f_n$ صدق کوي:

$$f' = \sum_{i=1}^{n} f_i' \frac{f}{f_i}.$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د ضرب د قانو سره لاس ته رځي

$$\frac{d}{dx}(x^2 \ln x) = 2x \ln x + x^2 \frac{1}{x} = x(2 \ln x + 1).$$

که $\sin x$ د ضریب په حیِیث ورزیات کړي، نو بیا د ضرب قانو ن استعمال لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{d}{dx}\left[\sin x(x^2 \ln x)\right] = \cos x(x^2 \ln x) + \sin x(x(2 \ln x + 1)).$$

په بديل ډول کېدی شي دا فرمول په ډېرواره ضرب وکارول شي او لاس ته اړي راوړي

$$\frac{d}{dx}\left[\sin x(x^2 \ln x)\right] = \cos x(x^2 \ln x) + 2x(\sin x \ln x) + \frac{1}{x}(\sin x\, x^2).$$

ليکونکي: هيوليګ، کرايخ

د وېش قانون Quotientenregel

د دوه مشتقور توابعو د وېش مشتق دی

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

په ټول ټکو x کې د $g(x) \neq 0$ سره. په ځانګړې توګه باور لري

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}.$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د راشنل تابع

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1-2x}{4+3x^2}$$

مشتق دی:

$$\frac{(1-2x)'(4+3x^2) - (1-2x)(4+3x^2)'}{(4+3x^2)^2} = \frac{-2(4+3x^2) - (1-2x)(6x)}{(4+3x^2)^2} =$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \frac{6x^2 - 6x - 8}{(4 + 3x^2)^2}$$

د ضرب قانون سره يې بديل لاس تهراځي

$$\left((1-2x)\frac{1}{4+3x^2}\right)' = (-2)\frac{1}{4+3x^2} + (1-2x)\frac{-6x}{(4+3x^2)^2} = \frac{6x^2-6x-8}{(4+3x^2)^2}.$$

ليکونکي:هيوليګ،کرايځ

زنځيري قانون

د توابعو دزنځيروني

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

لپاره مشتق دی:

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

د $f(y) = z,\ g(x) = y,\ h(x) = z$ سره دا هم ليکل کيږي

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\ \frac{dy}{dx}$$

.

)ليکونکي:هيوليګ، کوپف

د زنځير قانون

$$h(x) = \sin\Big(\underbrace{\ln(1+x^2)}_{y=g(x)}\Big)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د روښانه وني لپاره تعريفيږي:

$$h'(x) = \frac{d}{dy}\sin(y)g'(x) = \cos\big(\ln(1+x^2)\big)g'(x)\,.$$

د دنني مشتق شمېرنه $g'(x)$ سر له نوې د زنځيري قانو له مخې صورت نيسي:

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2}(2x)\,.$$

بديلي کېدی شي مشتقيزه ليکندود وکارول شي. د

$$z = \sin y, y = \ln w, w = 1 + x^2$$

سره دی:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dw}\frac{dw}{dx} = \cos(y)\frac{1}{w}2x = \cos\big(\ln(1+x^2)\big)\frac{1}{1+x^2}(2x)\,.$$

ليکونکي:هيوليګ، کوپف

ايمپليځيت مشتقور توابع

د بيلګې په توګه د

$$E:\ x^2 + 3y^2 = 7$$

له لارې ورکړ شوې ايليپسې (هګئ يا بيضوي) له لارې لرو:

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 + 3y^2\right) = 2x + 6yy' = \frac{d}{dx}7 = 0$$

همداسي

(c) ketabton.com: The Digital Library

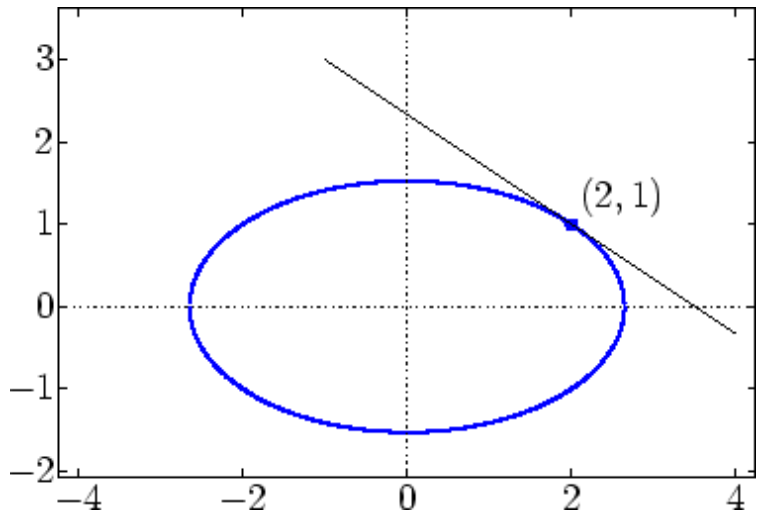
$$y' = -\frac{1}{3}\frac{x}{y}$$

.

سره د تانجنت جګوالی $y \neq 0$ باندې په يوه ټکي د E له دې سره کيدی شي په لپاره لاس ته راځي $(2,1)$ وټاکل شي. د بيلګې په توګه د

$$y' = -\frac{1}{3}\frac{2}{1} = -\frac{2}{3}$$

.



په ورته توګه کيدی شي لوړ يا جګ مشتقونه هم وشميرل شي. د yy' لپاره د ضرب قانون کارول يا استعمال له لارې دی

$$\frac{d}{dx}\left(2x + 6yy'\right) = 2 + 6(y')^2 + 6yy'' = 0\,.$$

له دې لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y'' = -\frac{1+3(y')^2}{3y} .$$

ټاکلي $y'(x)$ د یوه ټکي د کواوردینات اینووولو او همدا اوس د E بیرته په ارزښت له لارې څرګند ارزښتونه وټاکل شي.

لیمړنکي:هیولیګ،کنیف

لوګاریتمي مشتق

فرمول

$$f'(x) = f(x)\frac{d}{dx}\ln|f(x)|$$

کېدی شي د بنې $y = g(x)^{h(x)}$ مشتق نیونې ته د $g(x) > 0$ سره وکارول شي. لاس ته راځي

$$\frac{dy}{dx} = g(x)^{h(x)}\frac{d}{dx}\big(h(x)\ln g(x)\big) .$$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

تابع

$$f(x) = x^x$$

د $x > 0$ سره مشتق دی.

$$f'(x) = x^x\frac{d}{dx}\ln(x^x) = x^x\frac{d}{dx}(x\ln x) = x^x(\ln x + 1) .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $g(x) = x^{\ln x}$ لپاره لاس ته راځي

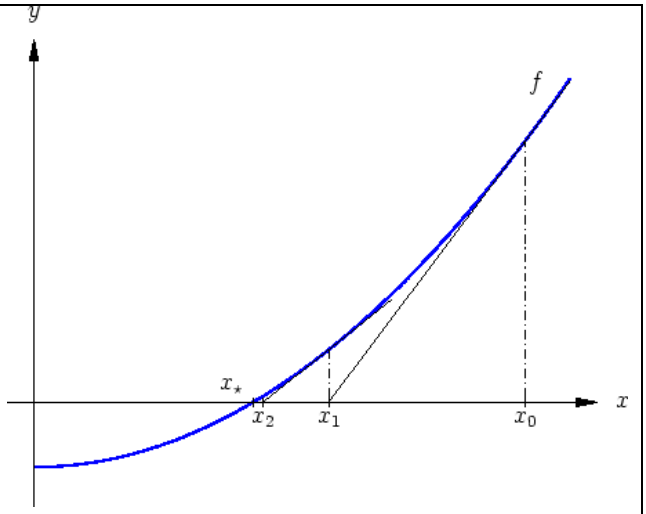
$$g'(x) = x^{\ln x} \frac{d}{dx}(\ln x)^2 = 2x^{\ln x} \frac{\ln x}{x}.$$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

نیوټن تلنلار یا قانون Newton-Verfahren

د نیوټن قانون سره د یوه تابع f صفرځای کېدی شي و ټاکل شي. د پرلپسې یا ترادف $x_0, x_1 \ldots$ نږدې ارزښتشمېرنې یا Approximation د کرښیزوالی له لارې وګټل شي. نږدېونه x_{l+1} د تانجنټ ِغوځټکی دی په ټکي $(x_l, f(x_l))$ کې د x - محور سره.

$$x_{l+1} = x_l - f(x_l)/f'(x_l)$$



د یوه ساده صفرځای $x_\star$ ($f'(x_\star) \neq 0$) لپاره د نیوټن –ایټراشن Newton-Iteration ځای - لوکالي مربعیز پولي ته هځیږي (کونورګنت) ، دا په دې معنا چې

$$|x_{l+1} - x_\star| \leq c\ |x_l - x_\star|^2$$

د پیلتکي x_0 لباره د $x_\star$ په یوه پوره کوچني چاپیریال کې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بابلیانو ریښه (جذر)نیونه

داد بابلیانو څخه کارول شوی ایتراشن(لاتین : تکرار Iteration)

$$x \longleftarrow (x + a/x)/2$$

د یوه مثبت عدد a درینې شمېرلو لپاره د ټیکې کتنې څخه د نیوټن -تګلار په څېر د $f(x) = x^2 - a$ لپاره څان راباسي

$$\frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) = x - \frac{x^2 - a}{2x}$$

د $a = 2, x_0 = 1$ لپاره نږدې شمېرنې (Approximationen) لاس ته راځي.

1

1.5

1.41666666666666666666666666666666666667

1.41421568627450980392156862745098039157

1.41421356237468991062629557889013491011 7

1.41421356237309504880168962350253024361 5

1.41421356237309504880168872420969807857 0

پولې ته تلنه خورا ګړندی ده. د هر پل سره د ټیک شوو څایونوتعداد په نږدې توګه (د کربنې سره په نخښه شوی) دوه واره کیږي. مربعیز پولې ته تلنه کېدی شي په دې بېلګه کې د ساده بڼه بدلون سره وښوول شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_{l+1} - \sqrt{a} = (x_l + a/x_l)/2 - \sqrt{a} = \frac{1}{2x_l}(x_l - \sqrt{a})^2.$$

$x_0 \neq 0$ د نیوټون تلنلار هندسي روښانه وني څخه لاس ته راځي، چې د ټولو لپاره تکرار پولې ته څي.

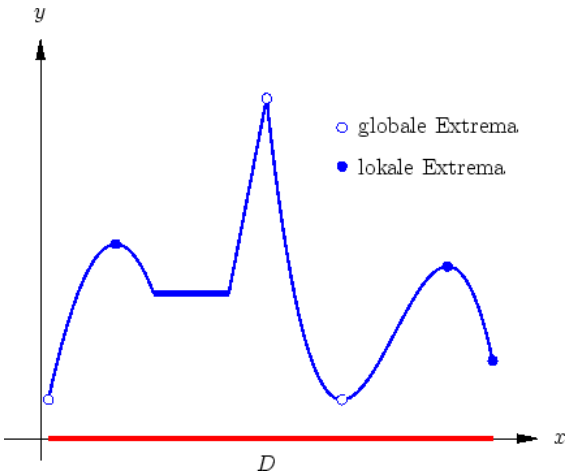
افراطیت Extrema

یو تابع f په a کې په ډېرې D یو څای اړوند مینیموم لري، که وي:

$$f(a) \leq f(x) \quad \forall x \in D.$$

د څای اړونده مینیموم سره د تابع ارزښت $f(a)$ په یوه خورا کوچني چاپېریال $(a - \delta, a + \delta) \cap D$ کې مینیموم دی.

ګلوبال او لوکال (مطلق او څای اړونده) خورا جګ ارزښتونه (ماکسیموم) په ورته توګه تعریف دي.

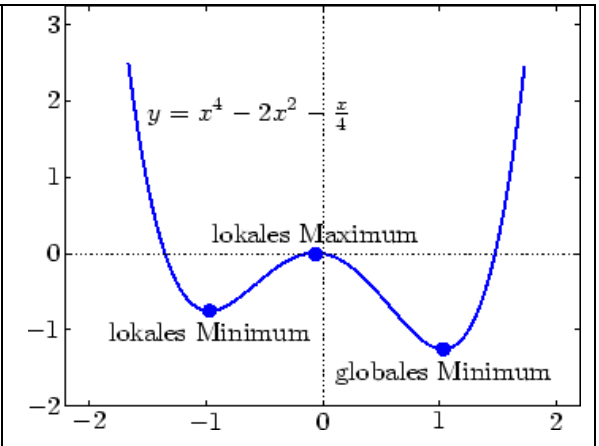


په یوه بند انتروال په ټوټه ډول نابرېکېدونی او مشتقور تابع کېدی شي افراطي ارزښتونه فقط د مشتق په په صفرځایونو، پرېکېدځایونو یا ژې ټکو کې رامنځ ته شي. دا ډول تیوپ کېدی شي د جګو مشتقونو په مرسته او دتابع ارزښتونو د پرتله کونې له لارې پیدا کړای شي. لیکونکي:هیورنر،هیولیګ

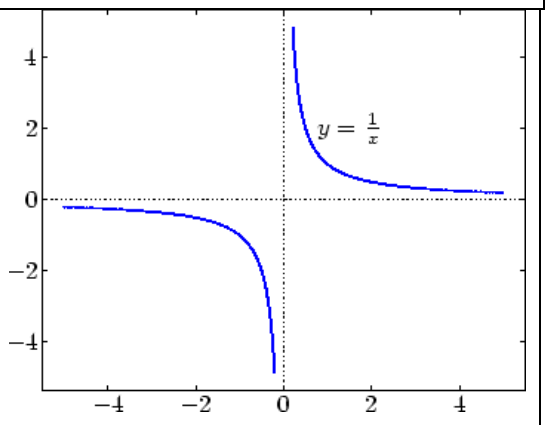
(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندي کي به يو څو تيوپيکي حالتونه تر بحث لاندي راښي يا و څېړل شي.

$f(x) = x^4 - 2x^2 - x/4$ تابع د $D = \mathbb{R}$ سره دوه مينيما لري او يو ماکسيما. مينيمومو د خورا کوچني تابع ارزښت سره مطلقه دی. يو مطلق ماکسيما شتون نه لري، ځکه چې $f(x) \to \infty$ د $x \to \pm\infty$ لپاره .

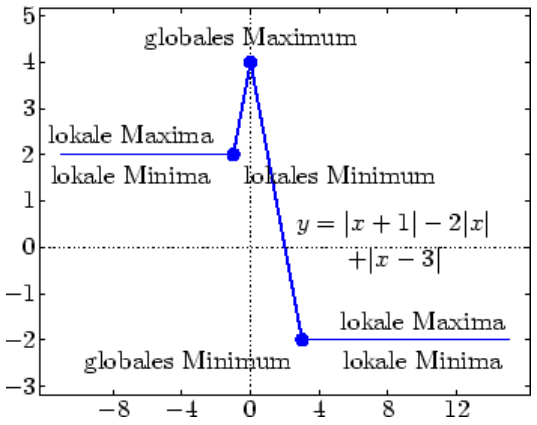


$f(x) = 1/x$ تابع د $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ سره کوم افراطي ارزښت نه لري.

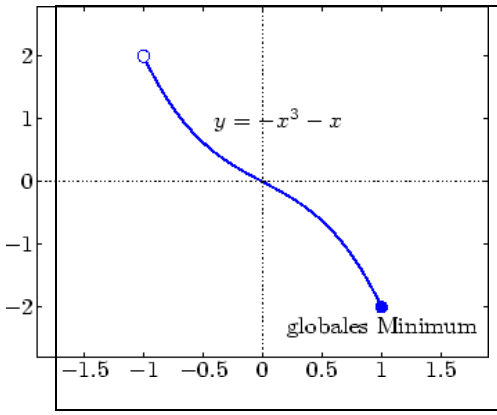


که يو تابع په واز انتروال کي ثابت وي، نو دا ځايونه (ځايېز (ځای اړونده) يا لوکال) ماکسيمال او هم (ځايز) مينيمال دي،

د يوه کره يوغږيز تابع سره افراطی ارزښتونه د ژې ټکو سره نيول کيږي، که دا دد تعريفورشو پورې اړه ولري.



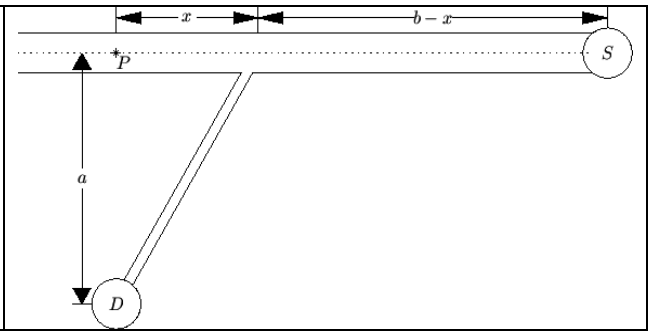
(c) ketabton.com: The Digital Library



لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

له یوه کلي D څخه یوه بنار S ته یو سرک جوړیږي. کلي ته په واټن a همدا اوس بنار ته یوه شاه لار (ګړندۍ لار) جوړه ده. د بنار څخه د P ټکي پورې ، چې کلي ته نږدې ګړندۍ لار پرته ده، اوږدوالی b لري.

سیده کرښیزه ټوټه لار جوړیږي.له کومې چې بنا رته زر رسېدل تظمینوي، که په ګړندۍ لار له $v_a = 120$ km/h منځنۍ چټکتیا(سرعت) او $v_n = 60$ km/h په دنوې څنګیزه ټوټه لار لاړ شي.



واټن $x \geq 0$ د P او فرعي ټوټه سرک ترمنځ په ګړندي د واټن $x \geq 0$ شمېرنه د اړیین وخت د مینیمال کولو له لارې.

$$t(x) = \sqrt{a^2 + x^2}/v_n + (b - x)/v_a$$

بنار ته د رسیدو لپاره .

د مشتق صفر ایښوونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$t'(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}v_n} - \frac{1}{v_a} \stackrel{!}{=} 0\,,$$

راکوي

$$v_a x = v_n\sqrt{a^2+x^2} \quad \Leftrightarrow \quad x_m = a/\sqrt{3}$$

د لوکال انحرافي څای په څېر. ایا چې دا مینیموم دی، باید دا د وهل شوي لار وخت د انتروال د پای ټکو لپاره و ازمایل شي:

$$t(a/\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}a+b}{v_a}\,, \qquad t(0) = \frac{2a+b}{v_a}\,, \qquad t(b) = \frac{2\sqrt{a^2+b^2}}{v_a}$$

په روښانه توګه $t(0) \geq t(x_m)$ دی. نامساوات $t(b) \geq t(x_m)$ ورته دي و دي لاندي ته:

$$t(b) \geq t(x_m) \quad \Leftrightarrow \quad 2\sqrt{a^2+b^2} \geq \sqrt{3}a + b$$

$$\Leftrightarrow \quad 4a^2 + 4b^2 \geq 3a^2 + 2\sqrt{3}ab + b^2$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2 - 2\sqrt{3}ab + 3b^2 = (a-\sqrt{3}b)^2 \geq 0\,.$$

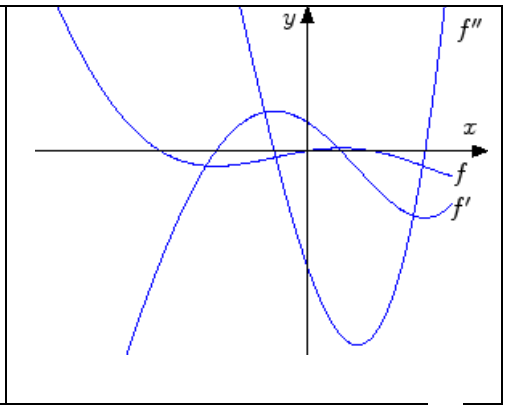
دا اخرني نامساوات تل پوره کیږي، او له دي سره x_m اوپټیمال دی، که $b \geq a/\sqrt{3}$ وي.

په بل حالت کي x_m په انتروال $[0,b]$ کي نه دی پروت او په ژۍ ټکي b پروت مینیموم ته ، یعني ښار ته په سیده ټرنلار، رسېدی شي.

لیکونکي:هیورنر، هیولیګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

افراطي ارزښتونو ازمايښت Extremwerttest



د افراطي ارزښتونو ډول يا تيوپ باندې کيدی د جګو مشتقونو په مرسته پرېکړه وشي که f دوه واره ناپرېکېدونکی او مشتقور وي او

$$f'(a) = 0\,, \qquad f''(a) > 0$$

$$(f''(a) < 0)\,,$$

نو f په a کې يو ځای اړونده مينيموم(ماکسيموم) لري. که دويم مشتق د a په ځای کې ورک شي، نو بايد جګ مشتقونه پرېکړې ته راکښل شي يا راوړل شي. که باور ولري:

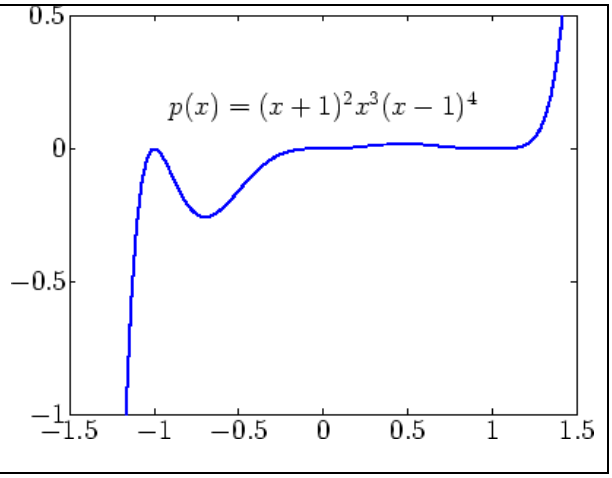
$$f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0 \qquad \text{او} \qquad f^{(n)}(a) \neq 0\,,$$

نو f په a کې تيک هلته يو افراطي ځای لري، که جوړه وي. په دې حالتکې f په a کې يو ځای اړونده خورا جګ – يا همداشي خورا تيټ ټکی لري، که $f^{(n)}(a) < 0$ همداسې $f^{(n)}(a) > 0$ وي.

پولينوم

$$p(x) = (x+1)^2 x^3 (x-1)^4$$

په $x = -1$ کې يو ډبل، په $x = 0$ کې يو درپواره او په $x = 1$ کې يو ځلورواره صفرځای لري.



(c) ketabton.com: The Digital Library

صدق کوي

$$p(-1) = p'(-1) = 0, \quad p''(-1) = 2(-1)^3(-2)^4 < 0\,.$$

په $x = -1$ کې p یو مینیموم لري. په $x = 1$ کې p یو ماکس لري، ځکه چې

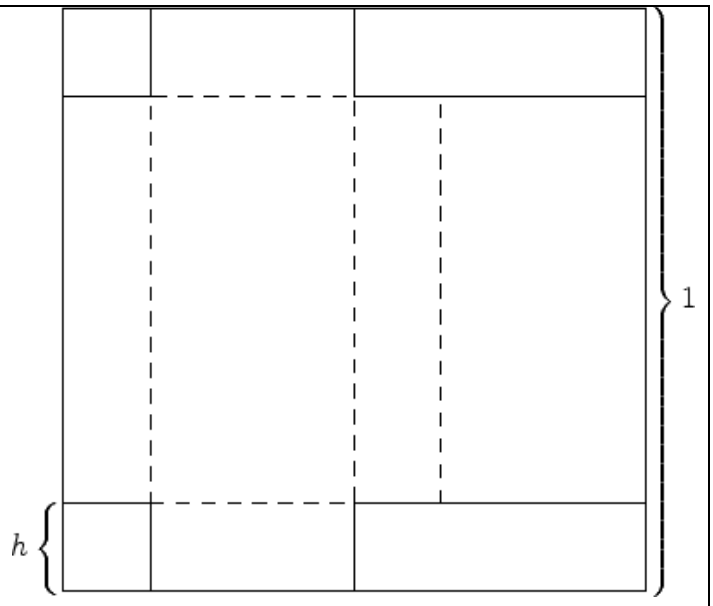
$$p(1) = \ldots = p'''(1) = 0, \quad p^{(4)}(1) = 2^2 1^3 4! > 0\,.$$

بالاخره p د

$$p(0) = p'(0) = p''(0) = 0, \quad p'''(0) = 3!(-1)^4 \neq 0$$

له امله او یو مخنخبنه بدلون په $x = 0$ کې په سرچینه کې افراطي ځای نه شته.

کوتی Schachtel

د دې ورکړ شوي غوڅ نمونې په مرسته دې د یوه مربع ډوله کارتوني کاغذ څخه خورا لوي کوتی جوړشي، چې خورا لوي حجم (ډکی) لري.	

(c) ketabton.com: The Digital Library

حجم یا ډکی دی:

$$v(h) = \underbrace{(1-2h)/2}_{\text{Länge}} \cdot \underbrace{(1-2h)}_{\text{Breite}} \cdot \underbrace{h}_{\text{Höhe}} = 2h^3 - 2h^2 + \frac{1}{2}h$$

جګوال سور اوږدوالی

د مشتق صفرځایونه

$$v'(h) = 6h^2 - 4h + \frac{1}{2} \stackrel{!}{=} 0$$

تري

$$h = \frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} - \frac{1}{12}} = \frac{1}{3} \pm \frac{1}{6}$$

د ممکنه ځای اړونده افراطي ځایونه لاس ته راځي. فقط $h = \frac{1}{6}$ هندسي موخه ور دی او

$$v\,(1/6) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{27}\,.$$

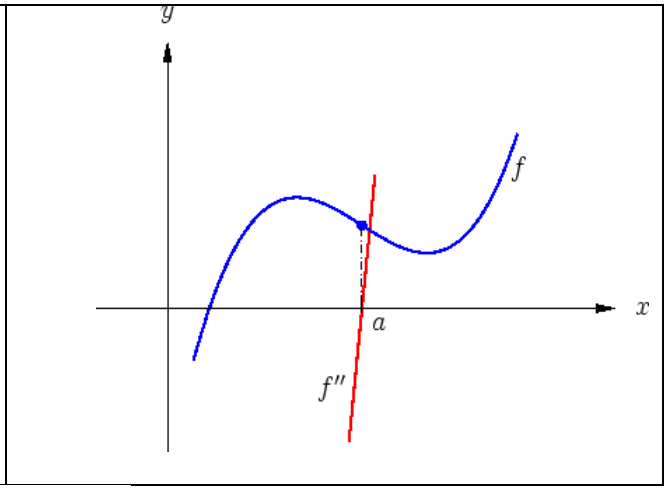
.

دا چې د ژیړ ټکو $h = 0$ او $h = 1/2$ لپاره حجم یا ډکی دی، نو کوتی د $h = 1/6$ لپاره خورا لوي حجم لري.

لیکونکي: هیولیګ،هیورنر

اوږونټکي (نقاط انعطاف Wendepunkte)

(c) ketabton.com: The Digital Library

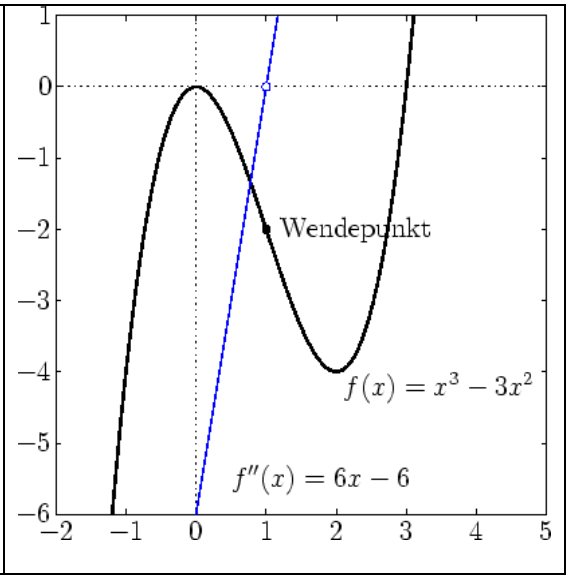
	د f يو تابع په يوه اوږوالي کې a دويم مشتق مخنخښه بدلوي (يعني په دې ټکي کې تابع خپله لور بل لور ته اړوي) .

$$f''(a) = 0$$

د يوه پوره هوار تابع لپاره اړين دی، چې او پوره دی، چې

$$f'''(a) \neq 0$$

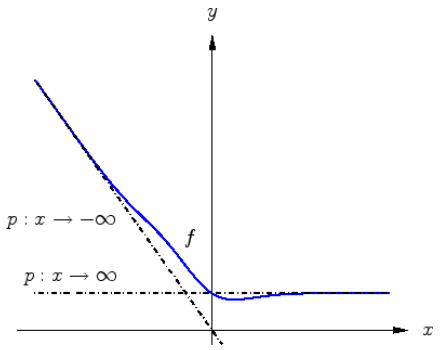
ليکونکي: هيوليګ،هيورنر

	تابع يو مکعبي پولينوم ښايي. دا چې دويم مشتق کرښيز دی، نو ټيک يو اوږوالی(د انعطاف ټکی) شتون لري ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

ګاونډي يا لنډ: ګاونډ (مجاورتها Asymptoten)

(c) ketabton.com: The Digital Library

يو تابع د يوه تابع f اسيمپتوت دی ، که $f(x) - p(x) \to 0$ وي د $x \to \infty$ يا د $x \to -\infty.$ لپاره.



په ورسره بلد ډول p د f په څېر يوه ساده بڼه لري او د دې په چوپړکې ، چې د $f(x)$ د څرنګوالي حالت د لوی x لپاره وڅېړي.

د ځانګړو معناو کربنيز اسيمپتوتونه $p(x) = ax + b$ دي. دوي د نورو ترڅنګ د منحني يا کړو بحث کې يو رول لوبوي.

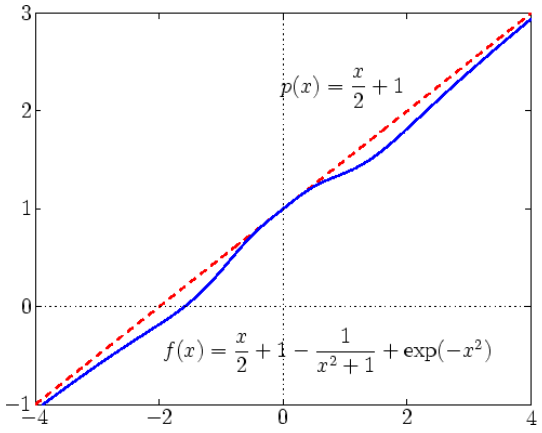
ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

د يوه څېره شوي يا متشکل شوي تابع $f(x)$ لپاره د $|x| \to \infty$ لپاره تناسب د کربنيزو ترمونو له خوا ټاکل کيږي، ځکه چې

$$\lim_{|x|\to\infty} \exp(-x^2) = \lim_{|x|\to\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0\,.$$

له دې لاس ته راړنې سره کربنه $p(x) = x/2 + 1$ اسيمپتوت ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library



لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د راشنلتابع ګاونډ یا- اسیمپټوتونه Asymptoten rationaler Funktionen

یو راشنل تابع

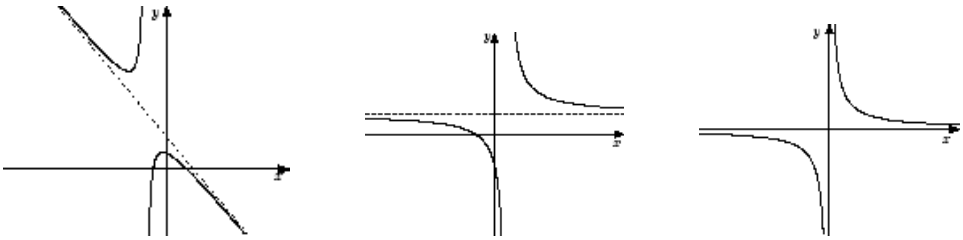
$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

تیک هلته یو کربنیز اسیمپټوت لري که $q+1$ له ګراد یادرجې $p \leq$ وي.

د Grad q > Grad p لپاره باور لري

$$\lim_{p \to \pm\infty} r(x) = 0,$$

داپه دې معنا چې د x -محور اسیمپټوت دی.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\text{Grad}\, p \leq \text{Grad}\, q + 1$ او $\text{Grad}\, p \leq \text{Grad}\, q$ لپاره اسیمپټوت لاس ته راځي د پولینوموپش له خوا:

$$r(x) = ax + b + \frac{\tilde{p}(x)}{q(x)}$$

د $\text{Grad}\, \tilde{p} < \text{Grad}\, q$ سره. اسیمپټوت پرته (افقي) ده $(a = 0)$ ، که $\text{Grad}\, p = \text{Grad}\, q$ وي.

که د صورا درجه له یوه څخه زیاته د محرج له درجې لویه وي، نو یوه اسیمپټوتیکي پولینوم لري د ≥ 2 درجې

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د راشنل توابعو

$$r_1 = \frac{4x+3}{2x+1} \qquad r_2 = \frac{2x^2}{x+1}$$ او

لپاره دپولینوم وپش له لارې لاس ته راځي:

$$r_1(x) = 0x + 2 + \frac{1}{2x+1}$$

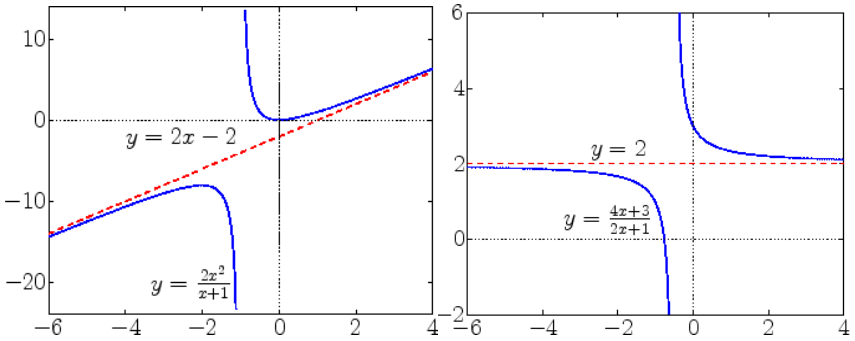
$$r_2(x) = 2x - 2 + \frac{2}{x+1}$$ او

اسیمپټوت یا ګاونډ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$y_1 = 2$ او $y_2 = 2x - 2$.

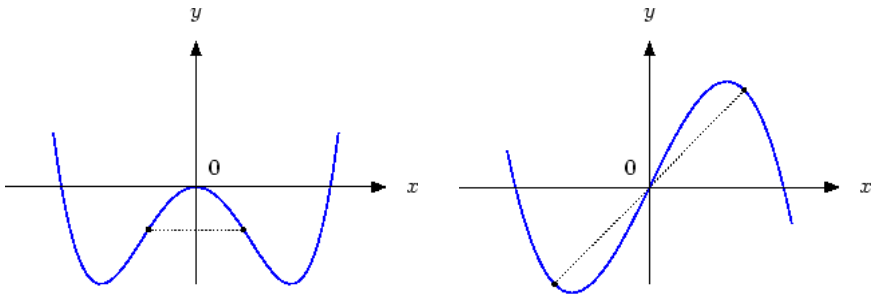
دا دوه بېلګې په لاندې ځېرو کې روښانه شوې دي.



لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

سیومتري Symmetrie

یو تابع f جوړه(جفت) دی، که $f(x) = f(-x)$ وي ، دا په دې معنا، چې که ګراف د y-محور ته سیومتري وي. د یوه ناجوړه (تاق) تابع لپاره $f(x) = -f(-x)$ دی، او ګراف و سرچینې ته ټکی سیومتریک دی.

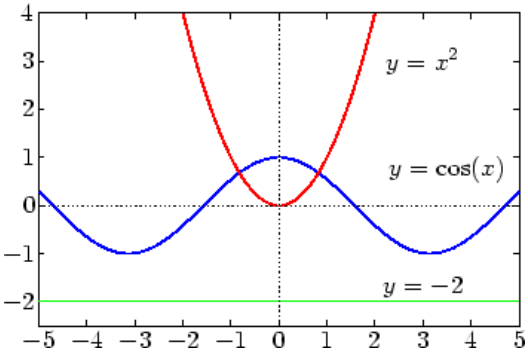


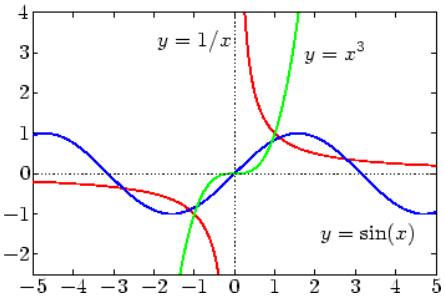
(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه جوړه او ناجوړه توابعو ضرب جوړه دی. د دې برعکس د یوه جوړه او یوه ناجوړه تابع ضرب ناجوړه یا طاق دی. د جمعې او تفریق جوړولو سره ډول ساتلی پتیږي.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر،کنش

دا لاندې څېره ښي لور ته یوځو جوړه او کېڼ لور ته یو څو ناجوړه توابع ښایي.





د مناسبو کمښنېشنونو جوړولو سره نوري بېلګې لاس ته راځي. نو توابع

$$f(x) = x^2 \cos x - x^3 \sin x, \qquad g(x) = -2 + \frac{1}{x^2}$$

جوړه دي او

$$h(x) = f(x) \sin x - g(x) x^3$$

ناجوړه دي.

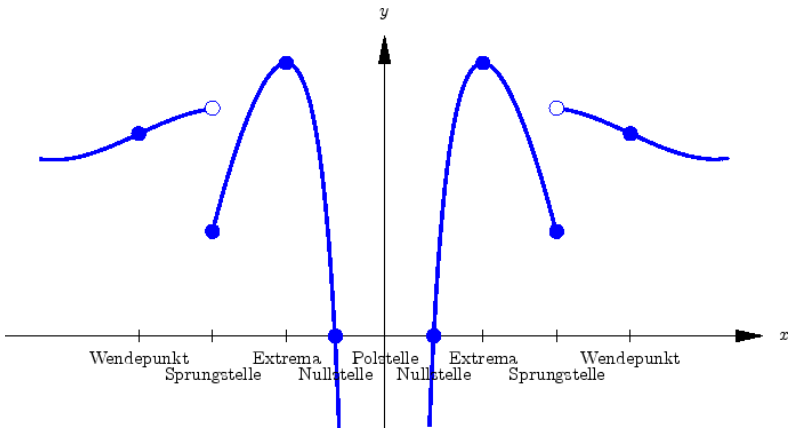
لیکونکي: هیولیګ، هیورنر،کنش

د کږو یا منحنیو خبرې اترې(بحث)

د یوې تابع د څرنګوالي حالت د قضاوت لپاره کېدی شي لاندې ټکي په پام کې ولرل شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

- Symmetrienسیومتر
- Periodizität تل بېرته راګرځېدنوالی
- Unstetigkeitsstellenپرېکېدنځایونه
-) Nullstellen ⟶ Vorzeichen مخنخبنه (صفرځایونه
-) Extrema ⟶ Monotoniebereiche همغږیزوالي وشوګاني (افراییت
-) Wendepunkte ⟶ Konvexitätsbereiche د کونوکسی ورشو (اوړونټکی د انعطافنقطه
- Polstellenقطبځایونه
- Asymptotenاسمپټوتي یا ګاونديتوبونه



د توابعو داسي یو تحلیل د ګړو خبرې اترې یا د منحنیو بحث بلل کیږي

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

د کړو بحث بنوول یا روښانه ولو لپاره تابع

$$f(x) = \sin x + \frac{1}{3}\sin(3x)$$

څیړو .

$$\sin x = -\sin(-x)$$

سیمتري: دا چې ناجوړه تابع دی..

(c) ketabton.com: The Digital Library

تل بېرته راګرځېدنه يا پريوديځيتي: تابع پخپله لکه د ساين تابع پخپله 2π - پريودي ده او په راتلونکي کې فقط په انتروال $[-\pi,\pi]$ ترځېرني راځي.

د پرېکېدنې ځايونه: تابع له ناپرېکدونکو توابعو مرکبه جوړهشوې او له دې امله پرېکېدنځايونه نه لري.

صفرځايونه: د جمعې(زياتون) قضيې سره $\sin(3x) = 3\sin x - 4\sin^3 x$

دی:

$$f(x) = 2\sin x - \frac{4}{3}\sin^3 x = \sin x \underbrace{\left(2 - \frac{4}{3}\sin^2 x\right)}_{\neq 0}.$$

تابع په 0 او $\pm\pi$ کې صفرځايونه لري..

افراطيت: تابع

$$f'(x) = 2\cos x - 4\sin^2 x\,\cos x = -2\cos x + 4\cos^3 x \stackrel{!}{=} 0$$

د $\cos x = 0$ يا $\cos x = \pm 1/\sqrt{2}$ لپاره ورکيږي ، نو

$$x = \pm\pi/2 \quad \vee \quad x = \pm\pi/4 \quad \vee \quad x = \pm 3\pi/4\,.$$

دا چې تابع په ټول $\mathbb{R}$ تعريف او پريوديکي ده، ژيټکي ترځېرني نه راځي.

د دويم مشتق د مخنخبني يعني

$$f''(x) = 2\sin x - 12\cos^2 x\,\sin x$$

مخنخبني او تابع ارزښتونو د پرتله کوني له لارې کېدی شي د افراطيت تيوپ يا ډول وټاکل شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

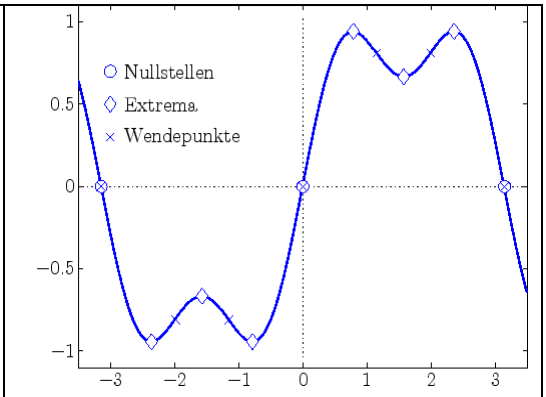
x	$f(x)$	$f''(x)$	Typ
$-3\pi/4$	$-\sqrt{8}/3$	$2\sqrt{2} > 0$	globales Minimum
$-\pi/2$	$-2/3$	$-2 < 0$	lokales Maximum
$-\pi/4$	$-\sqrt{8}/3$	$2\sqrt{2} > 0$	globales Minimum
$\pi/4$	$\sqrt{8}/3$	$-2\sqrt{2} < 0$	globales Maximum
$\pi/2$	$2/3$	$2 > 0$	lokales Minimum
$3\pi/4$	$\sqrt{8}/3$	$-2\sqrt{2} < 0$	globales Maximum

اوړونټکی(نقطه انعطاف)

$$f''(x) = 2\sin x - 12\cos^2 x \sin x = -10\sin x + 12\sin^3 x \stackrel{!}{=} 0$$

د $\sin x = 0$ یا $\sin x = \pm\sqrt{5/6}$ لپاره پوره دی، دا په دې معنا چې

$$x = 0 \quad \vee \quad x = \pm\pi \quad \vee \quad x \approx \pm 1.15 \quad \vee \quad x \approx \pm 1.99$$



په دې ځای کې دریم مشتق صفر نه دی. نو تابع په $(0,0)$ او $(\pm\pi, 0)$ کې اوړونټکي لري، همداسې په $(-1.99, -0.81)$ ، $(-1.15, -0.81)$ ، $(1.15, 0.81)$ او $(1.99, 0.81)$ کې نږدې ازښتونه لري.

قطبونه : ناپرېکیدونکي توابع قطبځایونه نه لري.

اسیمپټوتونه: تابع پریودیکي او نا ثابت دی، نو اسیومپټوتونه نه لري.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

بېلګه :

د یوه کړۍ بحث د ښوونې لپاره یو تابع

$$f(x) = \frac{5x^3 + 4x}{20(x-1)(x+1)}$$

ترڅېړنې لاندې نیول کیږی.

سیومتري: صورت ناجوړه(طاق) او مخرج جوړه(جفت) دی. نو تابع ناجوړه دی، داپه دې معنا چې سرچینې ته ټکی سیومتریک دی.

پریودیوالی یا تل بېرته راګرځېدنوالی: تابع پریودیکي نه دی.

د پرېکېدنې ځایونه: صفرځایونه ± 1 د صورت صفرځایونه نه دي . له دې سره f په باندې ناپرېکېدونکی دی. $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$

صفرځایونه: صورت د $x = 0$ لپاره ورکیږی.

افراطیت:

$$f'(x) = \frac{5x^4 - 19x^2 - 4}{20(x^2-1)^2} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2$$

دا چې تابع ساده صفځایونه لري، نو افراطیت فقط ځای اړوند دی. افراطي ارزښتونه دي:

$(-2, -4/5)$ ځای اړوند خورا جګ ټکی ، $(2, 4/5)$ ځای اړوند خورا ټیټ ټکی.

له دې سره کېدی شي، چې د f ډول یا تیپ د کوالیتاتیو حالت څخه. دا چې $f(x) \to -\infty$ د $x \to -\infty$ او $x \to -1$ لپاره ، باید په انتروال

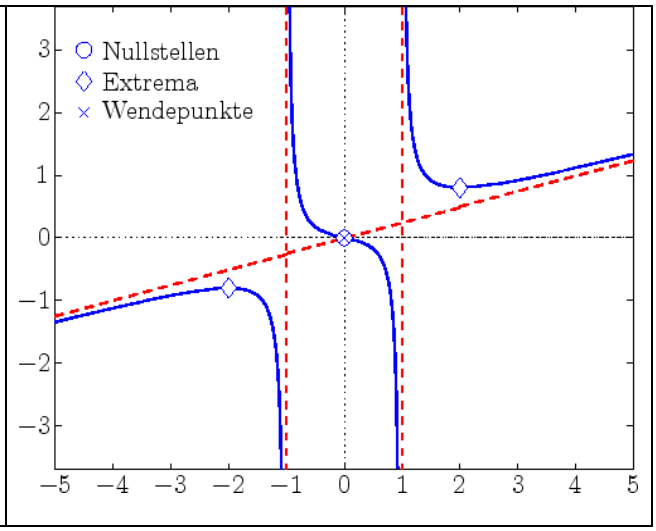
(c) ketabton.com: The Digital Library

$(-\infty,-1)$ کې یو ځای اړونده مینیموم ولري. په ورته توګه په $(1,\infty)$ کې لږ تر لږه یو ځای اړونده خورا ټیټ ارزښت.

اوړونټکی (نقطه انعطاف) :

$$f''(x)=\frac{-80x^5+398x^3+42x}{20(x^2-1)^3}\stackrel{!}{=}0 \quad \Rightarrow \quad x=0$$

په دې ځای کې دریم مشتق صفر نه دی.



قطبځایونه: تابع په $x=\pm 1$ کې ساده صفرځایونه لري،

اسیمپټوتونه: دیوه پولینوم وېش څخه

$p(x)=5x/20+0=x/4$

د اسیمپټوت په توګه لرو.

لیکونکي:هیولیګ،هیورنر

ښلګه:

د کږې یا منحني بحث لپاره لاندې تابع تر څېړنې لاندې نیسو:

$$f(x)=e^{-x^2}+\frac{4|x|}{e^4}$$

سیومتر:

داچې x^2 او $|x|$ جوړه دي تابع جوړه دی، داپه دې معنا چې سیومتریک و y-محور ته.

پریودیوالی: تابع پریودیک نه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پرېکېدنځایونه: تابع د ناپرېکېدنتوابعو څخه مرکبه (یوځای ایښول) شوې ده او له دې امله پرېکېدنځایونه نه لري. لکه د مطلق ارزښت توابعولپاره ټول مشتقونهپه صفرځای کې پرېکېدونکي دي.

صفرځایونه: اکسپوننشل تابع تل مثبتّ(زاتیزه) ده، د مطلق ارزښت تابع نامنفي ده. نو صفرځایونه نه شته.

افراطیت:

$$f'(x) = -2xe^{-x^2} + \frac{4}{e^4}\text{sign}(x) \stackrel{!}{=} 0,\ x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2\,.$$

سربېره پردې دې کریتیکل ټکی $x = 0$ په پام کې وي، چېرته چې مشتق پرېکېدونکی دی.

تابع په ټول $\mathbb{R}$ تعریف دی، د x د $\pm\infty$ په لور حالت ته دې پام وي.

دا چې $f(x) \to \infty$ د $x \to \pm\infty$ لپاره f لږ تر لږه یو مطلق مینیموم لري، مګر هیڅ مطلق ماسیموم. پرتله د y - ارزښت کریتیکل ټکي

$$(-2, 9/e^4) \qquad (0, 1) \qquad (2, 9/e^4)$$

ښایي، چې په $x = \pm 2$ کې مطلق مینیموم نیولکیږي. داچې f په انتروال $[-2, 2]$ یو مینیموم او هم یو ماکسیموم لري، لاس ته راځي چې $(0, 1)$ یو ځای اړونده مینیموم دی.

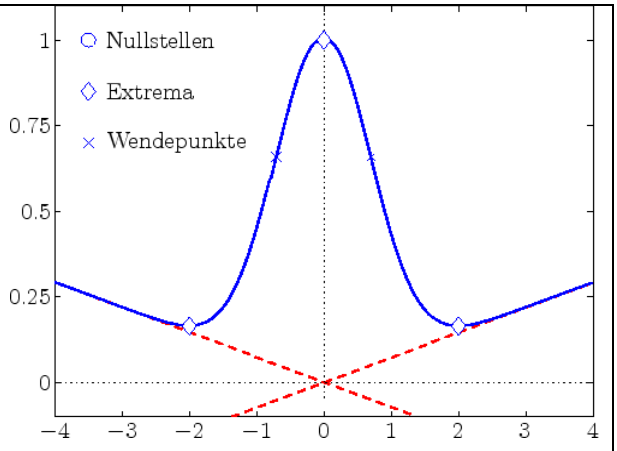
اوړونټکي :

$$f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad 4x^2 = 2 \quad \Rightarrow$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Rightarrow \quad x = \pm 1/\sqrt{2}$$

دیم مشتق په دې ځای کې $\neq 0$ دی.

قطبځایونه: تابع قطبځایونه نه لري. اسیمپټوتونه: دا چې e^{-x^2} له $\lvert x \rvert$ ځخه د $x \to \infty$ لپاره ګړندی د صفر په لور درومي، تابع اسیمپټوت $p_+(x) = \frac{4x}{e^4}$ او ی: لیکونکي هیورنر، هیولیګ	

د ریمن انتیګرال Riemann-Integral

دیوه ټوټه ډوله (په ټوټه ټوټه کې) ناپرېکېدونکی تابع f ټاکلی انتیګرال د

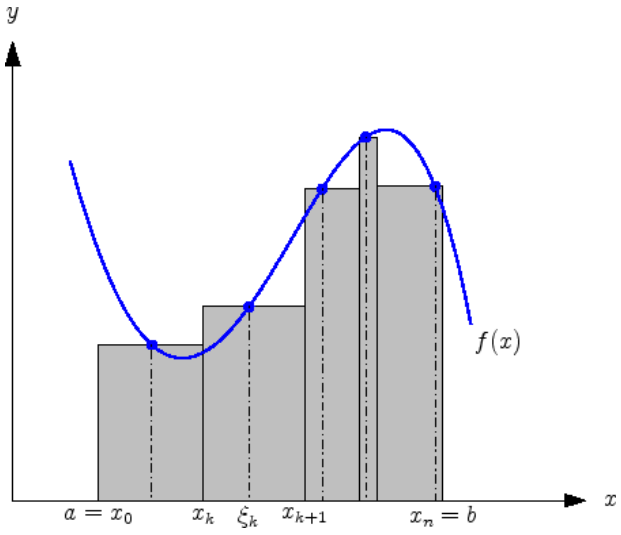
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|\Delta|\to 0} \int_a^b f_\Delta = \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_k f(\xi_k)\,\Delta x_k$$

له خوا یا سره تعریف دی. دلته $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ د Δ د $[a,b]$ ټوټه ونه ښایي،

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}\,, \qquad |\Delta| = \max_k \Delta x_k\,,$$

د انتروال ماکسیمال اوږدوالی دی او ξ_k په خوښه ټکی دی په k -م انتروال کې. د انتیګرال تعریف په ښې لور جمعې د ریمن – جمعو په نامه یادیږی.

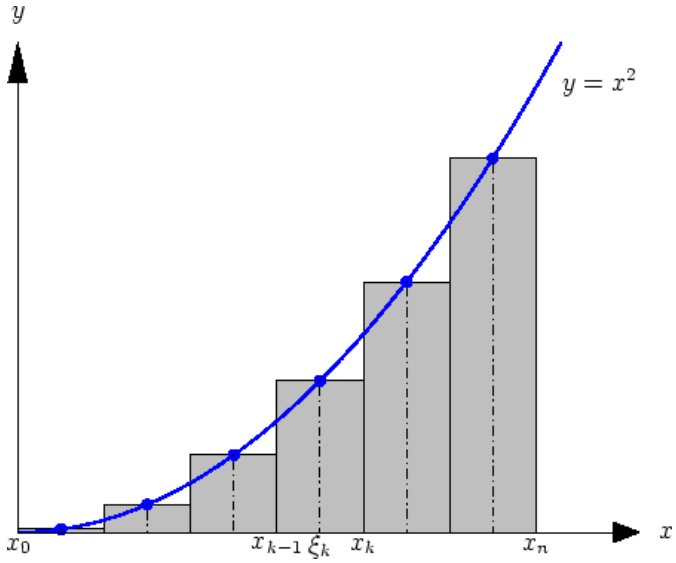
(c) ketabton.com: The Digital Library



د مثبت f لپاره $\int_a^b f(x)\,dx$ د سطحی مساحت دی د f د ګراف لاندې.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنرو ویپر

د $\int_0^1 x^2\,dx$ د ریمن انتیګرال په حیث راوړنې سره کېدی شي د توټه ونو پرلپسې(ترادف)



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Delta_n : x_i = i/n\,,\ i = 0, \ldots, n\,,$$

وکارول شي د ارزښت شوو ځایونو

$$\xi_i = (2i-1)/(2n)\,,\ i = 1, \ldots, n\,,$$

سره د n -مې ټوټه وني لپاره.

د تعریف سره سم لاس ته راځي:

$$\int f_{\Delta_n} =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{2i-1}{2n}\right)^2 = \frac{1}{4n^3}\left(4\sum_{i=1}^{n} i^2 - 4\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1\right)$$

$$= \frac{1}{4n^3}\left(\frac{4n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{4n(n+1)}{2} + n\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{12n^2}$$

او له دي سره

$$\lim_{n\to\infty} \int f_{\Delta_n} = \frac{1}{3}$$

.

بنسټیزه تابع Stammfunktion

یو تابع F د $F' = f$ سره د f بنسټیز تابع ده، او د دي لپاره لیکو

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټول بنسټیزو توابعو ډېرې یا ستې د ی ، چې د f ناټاکلی انتیګرال بلل کیږي. د انتیګریشن ثابته په خوښه ده. د ببلګې په توګه

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

د $F_a(a) = 0$ سره یو ممکنه بنسټتابع دی.

د ټولو ساده توابعو لپاره د داسې بنسټیزو توابعو داسې اکسپلیځیت ورکړه ممکنه نه ده، د دې لپاره بیلګه ده: $f(x) = \exp(x^2)$.

هر تابع

$$F_1(x) = x^3 + 2\,, \quad F_2(x) = x^3\,, \quad F_3(x) = x^3 - 1$$

د

$$f(x) = x^2\,.$$

یو بنسټیز تابع دی.

د $f(x) = \frac{1}{x}$ لپاره د $c > 0$ سره

$$F(x) = \ln(c|x|)$$

یو بنسټیز تابع دی.

لیکونکي: هیولیګ،کرایخ

د انتیګرال شمېرنې اصلي جمله

(c) ketabton.com: The Digital Library

که F د يوه ناپرېکېدونکي تابع f بنسټيزه تابعوي، داپه دې معن، چې $f = F'$ ،
نو باور لري

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

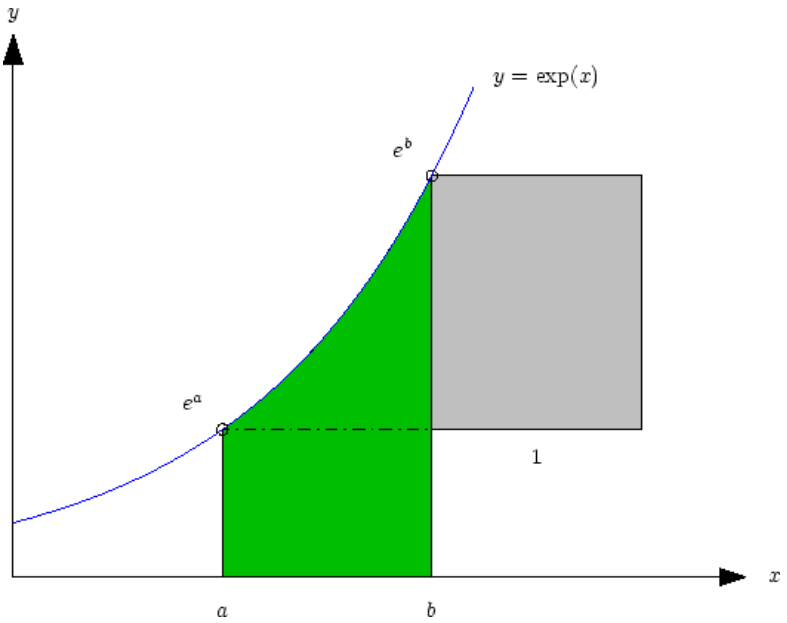
همداسې په لنډ ليکډول

$$\int_a^b f = [F]_a^b \ .$$

يو ټاکلی انټيګرال کېدی شي د بنسټيزو توابعو د انتوال په پای ټکو کې د تابع ارزښتونو د کمښت په څېر وشمېرل شي.

ليکونکي: هيورنر، هيوليګ

د اکسپوننشل تابع مشتق ببرته اکسپوننشلتابع دی او له دې امله لرو:



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_a^b e^x\,dx = e^b - e^a\,.$$

د a او b ترمنځ دګراف سطحه مساوي ده د سور 1 او د تابع ارزښتونو دجګوالي واټن څخه جوړ ولاړګودیز (مستطیل).

د لوګاریتمي تابع $F(x) = \ln(x)$ مشتق $F'(x) = 1/x\,,\ x \in \mathbb{R}^+$ دی او له دې سره

$$\int_a^b 1/x\,dx = \ln(b) - \ln(a)\,, \quad a, b \in \mathbb{R}^+\,.$$

لیکونکي: هیورنر، هیولیګ

د $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ یو بنسټیز تابع $F(x) = \arctan x$ دی . په تعقیب لرو

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}\,.$$

د کمښت سره verifiziert ، چې

$$F(x) = -\ln(\cos x)$$

د $f(x) = \tan x$ بنسټیز تابع دی:

$$F'(x) = -\frac{1}{\cos x}(-\sin x).$$

د دې پایله ده:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_0^{\pi/4} \tan x\,dx = -\left[\ln(\cos x)\right]_0^{\pi/4} = -\ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \approx 0.347\,.$$

لیکونکي: هیورنر، هیولیګ

یو پلانټ د M کتلي سره یو د ګراویتیشن (راکښني ورشو) ورشو تولیدوي، چې په یوه تن یا بدن د m کتلي سره یوه قوه $F(x) = \gamma\frac{mM}{x^2}$ استعمالوي. د لته γ د ګراویتیشن ثابته ده او x د درونډ ټکو (د ثقل مرکزونو) واټن دی.

د $1/x^2$ لپاره بنسټیز تابع $-1/x$ دی. د دې لپاره چې یو بدن د a څخه b ته په واټن یوسي، باید کار

$$\int_a^b F(x)\,dx = \gamma mM \int_a^b \frac{1}{x^2}\,dx = -\left[\gamma mM/x\right]_a^b$$

$$= \gamma mM(1/a - 1/b)$$

سرته ورسیږي .

د a لپاره مساوي د پلانټ وړانګه او $b \to \infty$ کېدی شي د کینټیکي انرژي سره د مساوي ایښونې له امله داسې په نامه د ټښتې چټکتیا یا سرعت v و ټاکل شي،داپه دې معنا چې چټکتیا ، چې اړیینه ده، د یوه پلانټ ګراویټیشن ورشو څخه وو تلی شي:

$$\frac{m}{2}v^2 = \gamma\frac{mM}{a} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\gamma\frac{2M}{a}}\,.$$

په اکواتور کي د ځمکې لپاره $v = 11.2\,\text{km/s}$. لرو.

لیکونکي: هیورنر، هیولیګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

غوره – يا راوتلي بنسټيز توابع

لاندې جدول د زيات رامنځ ته کېدونکو توابعو $f(x)$ د بنسټيزو توابعو $F(x)$ جدول ښايي.

$f(x)$	$F(x)$		$f(x)$	$F(x)$
x^s , $s \neq -1$	$x^{s+1}/(s+1)$		$1/x$	$\ln\lvert x\rvert$
$\exp(x)$	$\exp(x)$		$\ln(x)$	$x\ln(x) - x$
$\sin x$	$-\cos x$		$\cos x$	$\sin x$
$\tan x$	$-\ln(\cos x)$		$\sin x \cos x$	$\sin^2(x)/2$
$1/(1+x^2)$	$\arctan x$		$1/\sqrt{1-x^2}$	$\arcsin x$

ليکونکي: هيورنر، هيوليګ

ټوټه انټيګرالونه Partielle Integration

د ضرب قانو $(fg)' = f'g + fg'$ له مخې د ناټاکيو انټيګرالولپاره يو ورته فرمول لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx\,.$$

په اړونده توګه د ټاکلو انټیګرالونو لپاره لرو

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'$$

$[fg]_a^b$ ورکیږي، که یو له دې له دې سره دې په پام کې وي، چې د ژې ترمونه دواړو توابعو په انټروال ټکو کې صفر وي. دا د پریودیکي توابعو لپارهم ورکیږي ، د پریودې اوږدوالي $(b-a)$ سره.

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

له

$$\int (1+x)^\alpha\,dx = \frac{1}{\alpha+1}(1+x)^{\alpha+1} + c$$

د $\alpha \neq -1$ لپاره

لرو

$$\int \underset{u}{x}\underset{v'}{\sqrt{1+x}}\,dx \quad = \quad x\frac{2}{3}(x+1)^{3/2} - \int 1\cdot\frac{2}{3}(1+x)^{3/2}\,dx$$

$$= \quad \frac{2}{3}x(1+x)^{3/2} - \frac{4}{15}(1+x)^{5/2} + c.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ورته توګه شمېرل کيږي

$$\int_0^1 \underset{u}{x}\underset{v'}{\sqrt{1-x}}\,dx = \left[-x\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}\right]_0^1 + \int_0^1 1\cdot\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}\,dx$$

$$= \qquad 0 - \left[\frac{4}{15}(1-x)^{5/2}\right]_0^1 = \frac{4}{15}\,.$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د اووښتونو (واريابلو) بدلونVariablensubstitution

د زنځيري قانون څخه

$$\frac{d}{dx}F(g(x)) = f(g(x))g'(x), \quad f = F',$$

د يوه بدلون $y = g(x)$ لپاره د بنسټتوابعو جوړولو له لارې لاس ته راځي

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(y) + c = \int f(y)\,dy\,.$$

په ورته توګه د ټاکلو انتيګرالونو لپاره باور لري

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy$$

د دفرنشل په مرسته کېدی شي دا تابع په لاندې بڼه وليکل شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_a^b f(g(x))\frac{dy}{dx}\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

که په انتیګراند کي دننني مشتق پېژندوړ وي، لکه د بېلګې په تګه د

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx\,,$$

لپاره ، نو د بدلون استعمال خورا ساده دی. په دې بېلګه کي ږدو

$$y = g(x) = \ln x\,, \quad g'(x) = \frac{1}{x}$$

او لاس ته راځي

$$\int g(x)^2\,g'(x)\,dx = \int y^2\,dy = \frac{1}{3}y^3 + c\,.$$

د په څټ بدلون له لارې لاس تهراځي

$$\int \frac{\ln x^2}{x}\,dx = \frac{1}{3}(\ln x)^3 + c\,.$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

په تیپیک ډول د بدلون له لارې سړی هڅیږي چې انتیګرال ساده کړي.دبېلګې په توګه د

$$\int \frac{e^{3y}}{e^{2y}-1}\,dy$$

لپاره په نږدې توګه ږدو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = g(x) = \ln x \quad \Leftrightarrow \quad x = e^y$$

دا د

$$\frac{dy}{dx} = g'(x) = \frac{1}{x} = e^{-y}$$

له امله ترانسفورمي شوی ناټاکلی انټیګرال راکوي.

$$\int \frac{x^3}{x^2-1}\,\frac{dy}{dx}\,dx$$

=

$$= \int \frac{x^2}{x^2-1}\,dx = \int \left(1 + \frac{1}{x^2-1}\right) dx$$

=

$$= \int 1\,dx + \int \frac{1}{x^2-1}\,dx = x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + c\,.$$

=

د $x = e^y$ په ځټ یا برعکس بدلون سره لاس ته راځي

$$F(y) = e^y + \frac{1}{2}\left|\frac{e^y-1}{e^y+1}\right| + c\,.$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د مرکاتور پرپوستونMercator-Projektion

بنسټتابع

$$\int \frac{dx}{\cos x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کېدی شي د بدلون

$$u = \frac{1}{\cos x} + \tan x = \frac{1+\sin x}{\cos x}, \qquad du = \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}\right) dx,$$

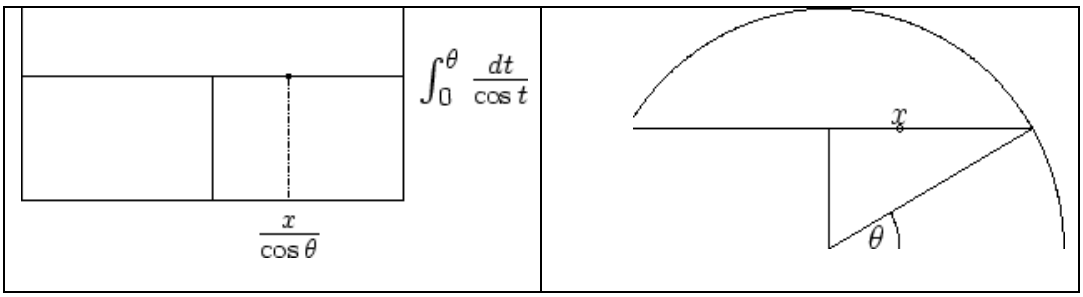
سره وشمېرل شي.

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int (\cos x)^{-1} \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}\right)^{-1} du$$

$$= \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c$$

$$= \ln\left|\frac{1}{\cos x} + \tan x\right| + c.$$

یو استعمال د مررکاتور پرېوستون دی. دلته د ځکي پوښ سطحه کرښجساتونکي یا کرښجیښتونې په یوه سطحه پریوځي یا پرې ایستلی شي.



دلته سور درجه یا عرض البلد په اړیکو $1/\cos\theta$ غزول شوی.

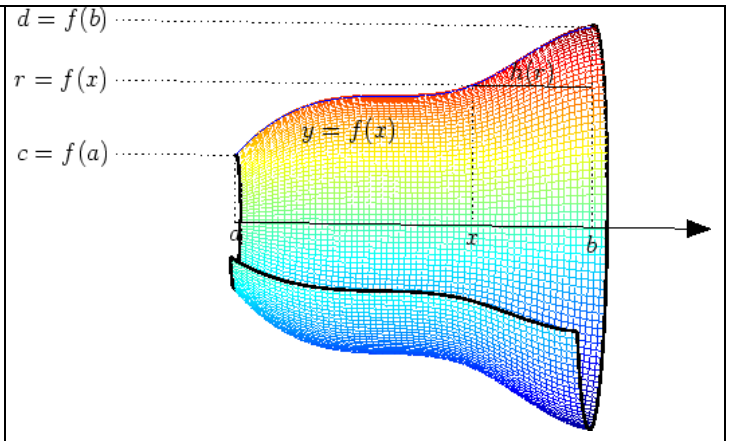
لیکونکي: هیولیګ، کوپف

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څرخېدونکو بدنونو ډکی(حجم)Volumen von Rotationskörpern

په x -محور د تابع $r = f(x) \geq 0$ ، $a \leq x \leq b$ د څرخېدنې له امله جوړ شوی بدن V ډکی(حجم) کېدی شي د ګردی ډوله(دایره ډوله) پروتِ غوڅیو انتیګرال له لارې و شمیرل شي:

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx \, .$$



په بدیلي ډول کېدی شي توتې(استوانې) پوښ له لارې هم وشمېرل شي

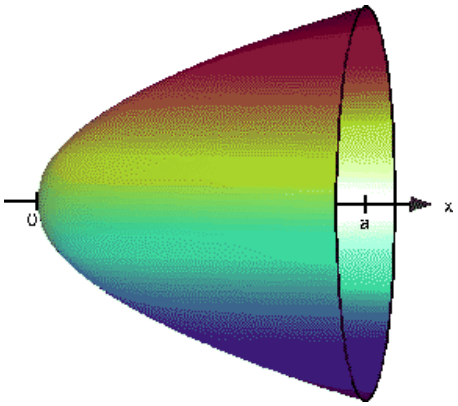
$$V = \pi c^2 (b-a) + 2\pi \int_c^d r\,h(r)\,dr \, ,$$

د کوم سره چې c همداسې d مینیمال همداسې ماکسیمال وړانګې r دي او $h(r)$ په بدن کې خوندي توتې پوښ ټول جګوالی دي د وړانګې r سره. دا بدیل د ټولو له مخه د همغږیز وړانګې تابع f لپاره موخه ور دی.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

دا جوړ یا څېره شوی پارابولوید د x – محور باندې د کږې $y = \sqrt{x}$ خرخون سره منځ ته اځي

(c) ketabton.com: The Digital Library



د څرخون بدن د فرمول سره سم ډکی)حجم) دی:

$$\pi \int_0^a \left(\sqrt{x}\right)^2 \, dx = \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a = \frac{1}{2}\pi a^2 \, .$$

په بديلي توګه د توتي پوښ باندې انتيګرال له لارې منځ ته راځي. 1

$$2\pi \int_0^{\sqrt{a}} r(a - r^2)\, dr = 2\pi \left[-\frac{1}{4}(a - r^2)^2\right]_0^{\sqrt{a}} = \frac{1}{2}\pi a^2 \, .$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوې لیکنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړی:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

1987 Vienna (Austria):

دویم:

Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Diss . Uni. Wien Algebren .

Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, Dissertation at the University of Vienna/Austria

لاندې د شمیرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې لیکنه به یې ځنو ځایونو غزېدلې او ځنې ځایونه تري لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو کې شمیرنه، د ګټې – او کټې د کټې شمیرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتیاوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې المانې ـ پښتو- او پښتو المانې ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځیال برابرون (دا کتاب په دې څانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپینې خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا دري ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برينکمن ليکنې چې له پرينکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شميرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شميرپوهنه د ښوونځي لپاره دويم ټوک

۳ – شميرپوهنه د ښوونځي لپاره دريم ټوک

۴ - د احتمالوالي شميرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصايه يا ستاتيستيک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – انالیزی ۱

۷ – انالیزې ۲

۸ – کرښيز الجبر

۹ - د شميرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ – فنکشنل انالیز

۱۲ – وکتور شميرنه

نورې ژباړې

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کربنیز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګټونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د بنوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په

کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلې

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډپرۍ پوهنه یا ستټ تیوري

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

۲۲- داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انټیګرال شمیرنو ته

تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزي پښتو او عربي + دري ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې وبه غزیږي.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپریږي:

د ګروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیونې سره په کې راغلي او ماته زیات ګټور برېښي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لیکوال ژوند ته لنډه کتنه

ماخان په اولني نوم میړي شینواری د اروابنادي پستو او اروابناد نوررحمان زوي په ۱۳۲۰ ؟ ه لمریز کې د شینوارو هسکه مینه کې دې نړۍ ته سترګې راغړولي.

د هسکې مینې د لومړنې ښوونځي (د لومړنیو زده کوونکو ځخه) ځخه وروسته

د رحمان بابا لیسه له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پورې(ښوونځي له لومړي ټولګي پیل او د دویم ټولګي ځخه ګام او پای). د ۱۹۶۶ تر سپتبر د کابل طب پوهنځی. له ۱۹۶۶ سپتمبر ځخه د اتریش برس، چې هلته یې د شمیرپوهنې ډاکتري په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

د۱۹۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فبروري تر پای د دباندنیو چارو وزارت کې مامور.

د ۱۹۸۸ مارچ ځخه تر ۱۹۹۲ جون پورې په بن کې د افغانستان جمهوریت سفارت شارژد افیر(صفر نه وو).

له هغې وروسته په جرمني کې سیاسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ ځخه د ۲۰۰۹ دسمبر پورې د د ریاضي ځانګه کې د پوهنې وزارت درسي نساب کې دنده.

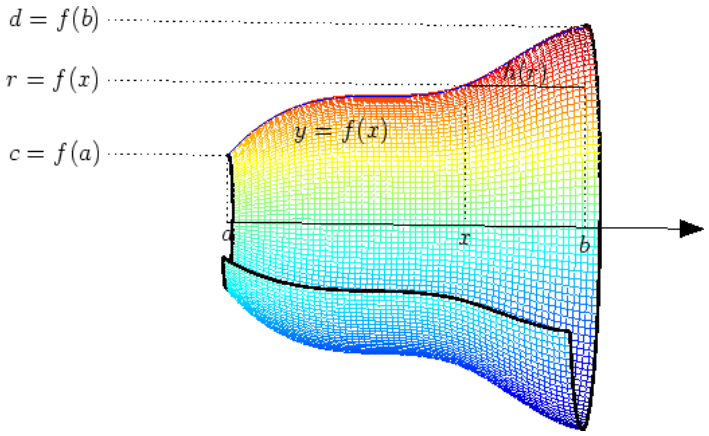
ماخان میړي په ۱۹۷۲ کې له لرې د میرمن ښاپیرۍ سره واده شوی، چې د واده خبر ورته اتریش ته راغی.

ده د میرمن ښاپیرۍ سره په ۱۹۶۳ ز ک کې کوزده کړې وه.

دوي ته لوي ځښتن په اتریش ویانا کې د مای په شلم ۱۹۷۹ ز ک دوه بچیان وښښل، چې ځانګه او اباسین نومیړي. ځانګه په المان کې د پوهنتون علمي همکاره وه او د حقوقو ډاکتره ده او اباسین ملي اقتصاد او ټولنیزه سایکولوژي لوستلې. ماخان شینواري بې کاره نه دی او لږ تر لږه له ۹۷ ۱۹ ځخه همدا د کتابونو لیکلو او د ژباړې دنده په غاړه اخستې، چې خپل فکر تر شونې پولې پورې تازه وساتي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د شمیرپوهنې بنسټونه



لیکونکي.: پروفیسور هیولیګ او ډله یې

(c) ketabton.com: The Digital Library

له مات. ن ج څخه

ژباړي : ډاکتر ماخان میړي شینوالرى

وینا ۱

منطقي(سم اندیزې) تړنې ۲
کوانتورونه ۱۱
سیده ښوونه ۱۳
ناسیده ښوونه ۱۴
ایمپلیکېشن تري لاس ته راتلنه یا – راوړنه ۱۴
د پوره اندکشن له لارې ښوونه ۱۶
د مربع(ځلورې) عددونو د جمعې لپاره فرمول ۱۶
ډېرې(ستې) ۱۷
د ګڼونو (اعدادو) ډېرې ۱۹
په ډېریو کې عملیې ۱۹
کارتېزي ضرب (ځل) ۲۳
اړیکې ۲۴
د اړیکو د داتا بانک ۲۵
د اړیکو خویونه ۲۵
فنکشن ۲۸
د تابع یا څیرونې یا بلواک(تابع) خویونه ۳۰
د فنکشنونو ۳۲
په څټ یا برعکس فنکشن ۳۲
فاکولتې یا فکتوریل ۳۳
د بینوم ضریبونه ۳۳
د پاسکال درېګودی ۳۴
د بینوم درسي جمله ۳۵

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بینوم ضریبونو لپاره کتمټوالی ۳۸
ډ دپریو یا ستونوکمبیناتوریک ۴۰
کربنیز فنکشنونه ۴۹
مربعیز فنکشنونه ۵۰
مایل ګوزار یا – غورځونه ۵۱
پولینوم ۵۳
راشنل فنکشن یا بلواک(تابع) ۵۴
ساین او کوساین ۵۵
تانجنت او کوتانجنت ۵۸
اکسپوننشل توابع(بلواک) ۶۰
د ګټې ګټه ۶۳
لوګاریتم ۶۵
ټولیز په توان تابع او لوګاریتم ۶۶
د لوګاریتم شمېرونی ۶۸
مشتق یا رابېلېدنه ۶۸
غوره (مهم) مشقونه ۷۱
د مشتق کربنیزوالی ۷۲
ایمپلیځیت مشتقوړ توابع ۷۵
لوګاریتمي مشتق ۷۷
نیوټن تلنلار یا قانون ۷۸
د بابلیانو ریښه (جذر)نیونه ۷۹
افراطیت ۸۰
د مشتق صفر ایښوونه ۸۲
افراطي ارزښتونو ازمایښت ۸۴
کوتی ۸۵
ګاونډي ۸۸
د راشنلتابع ګاونډ یا- اسیمپټوتونه ۸۹
سیومتري ۹۱
د کږو یا منحنیو خبرې اترې(بحث) ۹۲
د ریمن انتیګرال ۹۹
بنسټیزه تابع ۱۰۱
د انتیګرال شمیرنې اصلي جمله ۱۰۳
غوره – یا راوتلي بنسټیز توابع ۱۰۶
د اووښتونو (واریابلو) بدلون ۱۰۸
د مرکاتور پرپوستون ۱۱۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څرخيدونکو بدنونو ډکی(حجم) ۱۱۲
پوښتنه: ۱۱۵
د ډاکتر ماخان شينواري چاپ شوي ليکنې: ۱۱۹
د ډاکتر ماخان ،،ميړي،، شينواري ليکنې او
ژباړې چې په چاپيدو يې پيل کيږي ۱۲۱

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library