د شمیرپوهنې بنسټونه

ډاکتر ماخان میرې شینواری

Ketabton.com

(c) ketabton.com: The Digital Library

وینا

د وینا لاندې یوه ژبنیزه افاده یا وېینه پوهیږو، چې د دې لاندې دوه ربنتیا ارزښتونو ،، ربنتیآ،،(``wahr,,) w همداسې ،، ناربنتیا،، یا ناتېک (``falsch,,) f څخه د یوه سره تنظیم کیدی شي.

ویناوې په لویو تورو A سره په نخښه کیږي : ، او کېدی شي د منطقي یا سم اندیزو عملیو سره وتړل شي. بنستیزې شمېرپوهنیزې ویېنې یا افادې ، چې له نورو افادو څخه منځ ته نه شي راتلی اکسیومونه بلل کیږي

لاندې بیلګه د دې شمیرپوهنې وینا روښانه کوي.

وینا

A : هر طبیعی عدد د لومړنیو عددونو ضرب دی. دا یوه ربنتیا وینا ده.

وینا

B : هر لومړنی ګڼ یا عدد ناجوړه یا طاق دی. دا چې 2 جوړه یا حفت عدد او پریم دی، نو وینا ناربنتیا ده.

دا تروسه بنوول شوي اټکلونه

C : ناپای ډیر د پریم اعدادو غبرګوني شته. دا یوه شمیرپوهنیزه وینا ده، ځکه چې دا یا ربنتیا ده او یا نا ربنتیا. دلته موخه د لومړني عدد د غبرګوني څخه هغه لومړني ګاونډي ناجوړه عددونه دي ، چې دواړه لومړني عددونه دي ، د بیلګې په توګه.

$$(3,5),\ (5,7),\ (11,13),\ldots\ .$$

دا تراوسه حورا لویه د لومړنیو عددونو جوړه (د 19.4.2006 پورې) ده:

$$16869987339975\cdot 2^{171960}\pm 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کره کونې سره

D : د جمعې ۱۳ ـمه یوه د بدبختۍ روځ ده.

دا یوه وینا نه ده، ځکه چې دا په یوه رښتیا ارزښت نه شي تنظیودی.

لیکونکې: هولیګ،هورنر

منطقي(سم اندیزې) تړنې(که غواړې: عملیی یا نښلونې)

منطقی یا سم اندیزې ویناوې کېدی شي په لاندې جدول کې ورکړ شوو عملیو سره و تړل شي.

یادونه : له کیڼ و ښي لور ته.

تیک هلته رښتیا، که	وییندود	لیکندود	نومونه	
A نارښتیا ده.	نه A	$\neg A$	نه والی	
	A او B رښتیا دي	(A او B)	$A \wedge B$	Konjunktion یا د او تړنه
	A یا B رښتیا ده.	(A یا B)	$A \vee B$	Disjunktion د یا تړنه
	A او B بیل رښتیا	(یا A یا B)	$A \not\equiv B$	Antivalenz نابرابر ارزښته

(c) ketabton.com: The Digital Library

ارزښتونه ري			
A نارښتي یا B رښتیا ده	له A څخه B له B څخه A	$A \Rightarrow B$ $B \Leftarrow A$	Implikation ترې لاس ته راوړنه
او B همغه یا برابر رښتیا ارزښتونه لري	(A و B ته برابر ارزښته دی) یا له A څخه B لاس ته راځي او برعکس	$A \Leftrightarrow B$	Äquivalenz برابر ارزښته

د دې لپاره چې په منطقي افادو یا وییېنو کې نوکان یا قوسونه سپما کړو، کره کوو، چې $\neg$ له $\wedge$ او $\vee$ څخه کلک یا قوي نښلوي او دا بیا له $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ او همداسې له $\not\equiv$.

دا ایمپلیکیشن په پام کې ونیسی، چې B تیک هلته رښتیاه ده، چې A رښتیا وي. له ناټیکو نیونو(فرضیو) ، تیک یا رښتیا او یا هم نارښتیا پایلې را وېستل کیدی شي.

دا د یا ترنې لپاره نخښه یوه دv په شان نخښه ده، چې د vel (lat. oder) (لاتین. یا) لپاره ځای په ځای شوې. د یا ترنې لپاره کېدی شي چې سومبول ،، $+$ ،، وکارول شي او د او- ترنې لپاره ،، $\cdot$ ،،. که سومبول 0 د ناټیک یا غلط لپاره وکارول شي او هر بل ارزښت د رښتیا په ځیر و کارول شي، نو کیدی شي منطقي ترنې د طبیعي عددونو شمېرنې له لارې هم پر مخ بوتلای شو یا استعمال کړای شو.

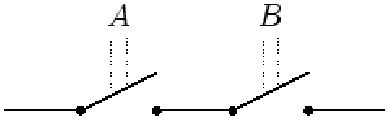
(c) ketabton.com: The Digital Library

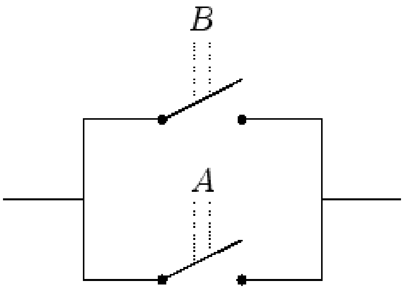
په شميروني (کمپيوتر ژبه کې له انګريزي راغلي کليمې NOT (Negation) (نه والی)، AND (Konjunktion (کنجکشن)، OR (Disjunktion) (ديسجنکشن)، يا EXOR oder XOR (exclusive or, Antivalenz) (بې له يا نابرابر ارزښته) او د هغې نه والی NAND (negierte Konjunktion) (نه شوی کنجکشن) ، NOR (negierte Disjunktion) (نه شوی ديسجنکشن) او NXOR (Äquivalenz) (برابرارزښته) لپاره کارول شوي.

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر، کيمرلې

که وينا د سويچ په څېر انځور کړو، چې تړلي وي، که وينا رښتيا وي، په همدې توګه واز ، که وينا نارښتيا وي، نو کېدی شي مسلسل سويچونه د يا – تړني په څېر او غبرګ سويچونه د او-تړني په څېر صورت ومومي .

د او-تړنه   د يا-تړنه



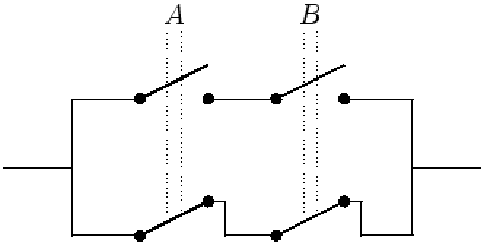


يوه نه-شوې وينا يو سويچ دی، چې تړلی دی، که وينا نارښتيا وي. له دې سره کېدی شي سويچ ځېرې د برابر ارزښته، نابرابر ارزښته او ايمپليکيشن لپاره ورکړل شي.

برابرارزښته : $A \Leftrightarrow B$ همداسې $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

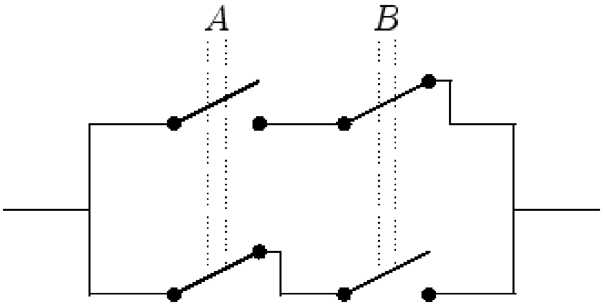
Äquivalenz:

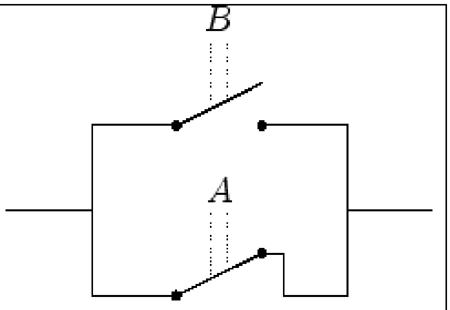
(c) ketabton.com: The Digital Library



نابرابرارزښته: $A \not\equiv B$ همداسي $(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$

Antivalenz:



 	ایمپلیکېشن یا ترې لاس ته راتلنه: $A \Rightarrow B$ همداسي $\neg A \vee B$

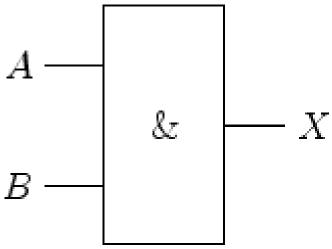
سویچونه کیدی د ترانزیستور له لارې منځ ته راشی یا صورت وومومي، چې په جګ یا ټیټ اینسوول شوي شبانونګ جریان مومي یا تیریږي. د (1) ارزښت جګ شپانونګ دی ټیټ یا کم شپانونګ ارزښت (0) دی.

د دین DIN 40900 سره د اړونده (مطلوبه) شپانونګ تعریف ورکول کیږي. دا د ولاړګوډیز(مستطیل) خخه جوړ دی، په کومو کې چې اړونده تړنې ورکړ شوې دي. یو نه- والی د یوې ګردی(دایرې) سره په نخښه شوی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

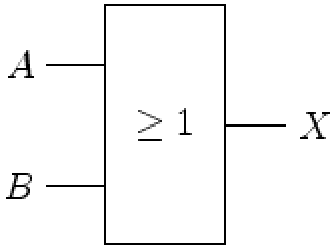
Konjunktion

کنجکشن



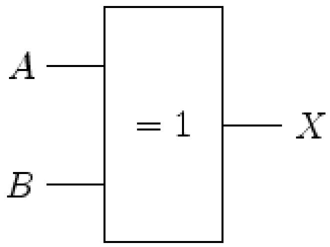
Disjunktion

ديسينکشن



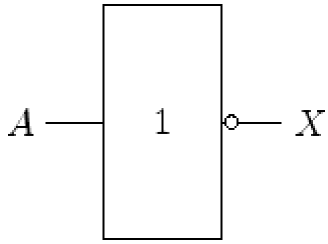
Antivalenz

نابرابررارزښته



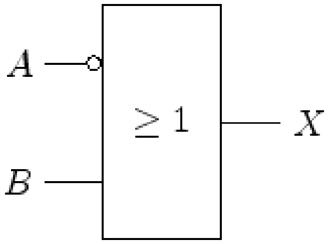
Negation

نه-والی



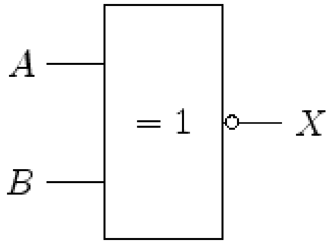
Implikation

ايمپليکېشن



Äquivalenz

برابرارزښته



منطقي عمليو لپاره لاندې کتمتوالی Identitäten باوري دی.

Assoziativgesetze: اسوځياتيو قانون

$$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$$

$$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$$

Kommutativgesetze: کموتاتيو يا بدلېدنقانون

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A \wedge B = B \wedge A$$

$$A \vee B = B \vee A$$

De Morgansche Regeln: د دي مورګان قانو

$$\neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B)$$

$$\neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B)$$

Distributivgesetze: دیستریبوتیو قانون

$$(A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C)$$

$$(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

او نور :

$$\neg(\neg A) = A$$

$$A \wedge A = A$$

$$A \vee A = A$$

Alternative Darstellungen: الترناتیو یا بدیلیی انځورونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

ايمپليکشن
Implikation: $A \Rightarrow B \quad = \quad \neg A \vee B \quad = \quad \neg A \Leftarrow \neg B$

Äquivalenz: ا $A \Leftrightarrow B \quad = \quad (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

Antivalenz: $A \not\equiv B \quad = \quad (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$

بديلې فرمولونه زيات وخت په ښوونو کې استعمال مومي.

يوه منطقي افاده يا وينه ، چې د رامنځ ته شوې وينا رښتيا ارزښت خپلواکه تل رښتيا همداسې نارښتيا وي، تاوتولوجي Tautologie همداسې کونتراديکشن Kontradiktion بلل کيږي. داسې يوه افاده کړی شي د ښه بدلون سره همداسې د سره بدله شي. په ځانګړې توګه دا کټمټوالی باور لري:

$$A \vee \neg A = \mathrm{w} \quad \text{bzw.} \quad A \wedge \neg A = \mathrm{f}\,,$$

همداسې

$$A \vee \mathrm{w} = \mathrm{w} \quad \text{bzw.} \quad A \wedge \mathrm{w} = A\,,$$

همداسې

$$A \vee \mathrm{f} = A \quad \text{bzw.} \quad A \wedge \mathrm{f} = \mathrm{f}\,.$$

همداسې

ليکونکي: هيوليک،، هيورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دي مورګان قانون او د دېستريبوتيو قانو کېدی شي وښوول شي، داسي چې د وينا د ربښتيا ارزښت لپاره ټول امکانات وځيړل شي. د دې مورګان قانون داپه لاندې جدول کې روښانه شوی دی.

A	B	$A \wedge B$	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A) \vee (\neg B)$, $\neg(A \wedge B)$
w	w	w	f	f	f
w	f	f	f	w	w
f	w	f	w	f	w
f	f	f	w	w	w

د ايمپليکېشن، برابرارزښتوالي او نابرابرارزښتوالي لپاره برابر ارزښته شننه له تعريف څخه لاس ته راځي.

د منطقي قانون د روښانه کونې لپاره د وينا

$$\underbrace{|x-1|>1}_{A} \Longrightarrow \underbrace{(x<0) \vee (x>1)}_{B}$$

بڼه دليږي.

د د پمورګان قانون سره سم لرو:

$$\neg B = \neg(x<0) \wedge \neg(x>1) = (x \geq 0) \wedge (x \leq 1).$$

له دې سره سم ايمپليکېشن $A \Rightarrow B$ د وينا د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$|x-1| \leq 1 \Longleftarrow 0 \leq x \leq 1\,.$$

سره برابرارزښته دی

بیا هم دا نتیجه لاس ته راځي ، که ایمپلیکېشن د تعریف سره سم د

$$(\neg A) \vee B = |x-1| \leq 1 \vee \neg(0 \leq x \leq 1)$$

سره بدل کړي.

د بېلګې په توګه افاده یا وینه

$$L : (A \vee B) \Rightarrow (\neg A \wedge B)$$

ساده کوو.. د ایپلیکېشن پهځای اینونه او د دېموران قانون له امله لاس ته راځي

$$\neg(A \vee B) \vee (\neg A \wedge B) = (\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)\,.$$

د دېتریبوتیو قانون له مخط دا وینا برابرارزښته ده د $\neg A \wedge (\neg B \vee B)$ سره.

پېژندل کیږي، چ د B ارزښت بې اغیزه دی یا ارزښتناک نه دی او $L = \neg A$.

د منطقي افادې L د ازماېښت ته الترناتیو یا بدیلي کېدی شي یو د ریښتیا ارزښت جدول هم وکارول یا ا ستعمال شي.

A	B	$\neg(A \vee B)$	$\neg A \wedge B$	L
w	w	f	f	f
w	f	f	f	f
f	w	f	w	w

(c) ketabton.com: The Digital Library

f	f	w	f	w

له دې دا هم لاس ته راځي: $L = \neg A$

کوانتورونه Quantoren

د فرمولو،، شتون لري....،، . ،، د ټولو .... لپاره،، لپاره لندوني شتونکوانتور $\exists$ او ټول کوانتور $\forall$ استعمالیږي.. دا کوانتورونه زيات وخت د $A(p)$ سره په تړاو کې استعمالیږي، چې د یوه پارامتر p چې د ډېرۍ یا سټ P توګی دی، په واک کې دي.

Schreibweise ليکندود	Bedeutung معنا
$\exists p \in P: \ A(p)$	یو توکی p له P شتون لري، د هغه لپاره چې $A(p)$ رښتيا دي.
$\forall p \in P: \ A(p)$	د ټولو p لپاره چې له P دی $A(p)$ رښتيا دی.

د دواړو وينا ډولونو د نه٠والي سره کونتوونه هم بدليږي.

$$\neg(\exists p \in P: \ A(p)) = \forall p \in P: \ \neg A(p)$$

$$\neg(\forall p \in P: \ A(p)) = \exists p \in P: \ \neg A(p)$$

دا $\exists!$ ليکن ډول هم روښنی دی د فرمولولو لپاره، چې ،، ټيک يو ... شته،،

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کوانتورونو د شمېرنې ښوونې لپاره وينا

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon\ \forall n \in \mathbb{N}:\ \ n > n_\varepsilon \Longrightarrow |a_n| < \varepsilon$$

راوړل کيږي. دا په دې معنا چې يوه لړی(ترادف)

$$a_1, a_2, \ldots$$

د 0 په لور يا0 ته ځيري، دا په دې معنا چې د پوره لوی n لپاره د a_n مطلق ا رزښت د هرې د مخه ورکړشوي بند يا بنديز ε څخه کوچنی دی.

نه-والی داسې لاس ته راځي، چې زړي وينا نه شي او کوانتورونه سره بدل شی،

$$\exists \leftrightarrow \forall\,.$$

د ايمپليکېشن يا لاس ته راوړني يا – راتلني اينوونه او د مورګبن قانون څخه لاس تهراځي

$$\neg(n > n_\varepsilon \Longrightarrow |a_n| < \varepsilon) = \neg(n \leq n_\varepsilon \vee |a_n| < \varepsilon) =$$

$$= n > n_\varepsilon \wedge |a_n| \geq \varepsilon\,.$$

له دې سره د نه شوې وينا دا بنه لري:

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall n_\varepsilon\ \exists n \in \mathbb{N}:\ \ n > n_\varepsilon \wedge |a_n| \geq \varepsilon\,.$$

دا په دې معنا چې پرلپسې(ترادف) (a_n) د 0 لورته نه ځيري . دا په دې معنا چې يو لرزښت $\varepsilon > 0$ شتون لري، چې له هغه پرلپسې $|a_n|$ تل بيا اوړي يا تېرېږي.

ليکونی:ک. هيوليک

(c) ketabton.com: The Digital Library

سیده ښوونه

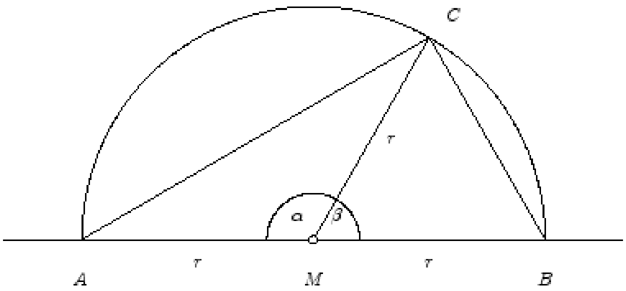
یوه غوښتنه ثبوت) B کېدی شي و ښوول شي، چې هغه له رښتیا وینا A څخه را منځ ته شي او یا په داسې بېرته واړول شي.

$$A \Longrightarrow B\,.$$

ویناوې A کړی شي وړاندنیونې(فرضیې) هم ولري، چې هغه دِ غوښتنې B لپاره اړیینې دي.

لیکونکی: هیولیګ

د بېلګې لپاره یې د تالس جمله را اخلو، چې هر په یوه نیم ګردی(نیم دایره) کې رابند درېګودی(مثلث) ولاړګوډېز یا قایم الزاویه دی.



دا سیده ښوونه په لاندې دوه جملو ولاړه ده:

اول : په یوه مثلث کې د دننیو کونجونو جمعه π ده.

دویم : د یوه برابر پښیز (یا که غواړی: متساوی الاضلاع) مثلث بنسټکونجونه پرابر لوي دي.

که دا په مثلث $\Delta(AMC)$ او $\Delta(CMB)$ و کاروو، نو له دې لاس ته راځي

$$\sphericalangle ACM = \frac{\pi-\alpha}{2}, \qquad \sphericalangle MCB = \frac{\pi-\beta}{2}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sphericalangle ACB = \pi - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$$

او له دې سره دی

او د $\alpha + \beta = \pi$ له امله په $\pi/2$ سره برابر.

ناسیده ښوونه

د دې لپاره چې وښایو چې له یوې وړاندنیونې(فرضیې) V څخه غوښتنه(ثبوت) B لاس ته راځي یعنې) $B \implies V$(، کېدی شي ونیسو ، چې وینا B د V د وړاندنیونې له امله نارښتیا ده، دا مو یوه تضاد ته بیایي:

$$V \wedge (\neg B) \implies F,$$

د F سره یوه نارښتیا وینا ده، په ځانګړې توګه $F = \neg V$ یا $F = B$.

په ځانګړې توګه باور لري

$$B = (\neg B \implies F) = (\neg B \Rightarrow B),$$

که وړاند نیونې نه وي شوي.

لیکونکي: هیولیګ، کنش،اببریبس

ایمپلیکېشن ترې لاس ته راتلنه یا - راوړنه

$$V \wedge (\neg B) \implies F$$

د $\neg(V \wedge (\neg B)) \vee F = (\neg V) \vee B \vee F.$ سره برابرارزښته دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که ایمپلېکشن رښتیا وي، داپه دې معنا چې د شمېرپوهنیزو قوانینو څخه لاس ته راغلی، نو باید غوښتنه(ثبوت) B رښتیا وي، ځکه چې $\neg V$ نارښتیا ده او F یا نارښتی او یا د B سره برابر دی.

لیکونکي: هیولیگ، هیورنر

د دې ناسیده ښوونې د روښانه ونې لپاره ښایو، چې $\sqrt{2}$ ایراشنل دی، داپه دې معنا چې د مات یا مسر په څېر نه شي انځورېدلای.

$$\neg B:\ \sqrt{2}=\frac{p}{q}$$

نیسو، چې غوښتنه B نارښتیا ده. بس باور لري

د $p,q\in\mathbb{N},\quad \mathrm{ggT}(p,q)=1$. سره .

دلته ggT انګرېزي یې gcdخورا عټ کډپروېشونی (ذوالاضعاف الاقل) دی.

د نیونې څخه د مربع کونې او د q^2 سره ضربونې له امله لاس ته راځي

$$2q^2=p^2\,,$$

دا یه دې معنا چې p^2 او له دې سره p یو چوړه یا جفت عدد دی. په ځانګړې توګه یو $r\in\mathbb{N}$ شتون لري د $p=2r$ سره. د $q^2=2r^2$ له امله q هم یو چوړه عدد دی او له دې سره $\mathrm{ggT}(p,q)=2$. دا د نیونې نیونې جوړښت $\neg B$ سره په تضاد کې ده، چې $\mathrm{ggT}(p,q)=1$ ، دا په دې معنا چې

$$(\neg B)\Longrightarrow B\,.$$

له دې امله یا د دې په تعقیب باید غوښتنه B رښتیا وی،

د پوره اندکشن له لارې ښوونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

وينابنې د طبيعي پارامتر سره کېدی شي ډ پوره ايندکشن له لارې وښوول شي. که $A(n)$ يوه د $n \in \mathbb{N}$ په واک کې وينا وي، نو د دې لپاره دې لاندې دواړه د د ښوونې پلونه (قدمونه) روښانه- يا و اخستل شي. .

لومړی : د ايندکشن پيل : ښايو چې $A(1)$ رښتيا دی.

دويم : اينوکشنپايونه يا ختم: ښايو چې د نيونې چې $A(n)$ رښتيا دی(دايندکشن هی‌وپوتيزې)، لاسته زاځي، چې هم رښتيا دی، ياپه دې معنا چې

$$A(n) \implies A(n+1).$$

نو دا باوري دی، چې $A(n)$ د ټولو $n \in \mathbb{N}$ لپاره ضدق کوي.

د يوه اندکشن ښوونې سره يو په بل پسې sukzessive دا پسې د تر مخه ځخه لاس ته راځي.

که د اندکشن پيل د $n_0 = 1$ لپاره نه بلکه د $n_0 > 1$ لپاره سرته ورسيږي، نږ وينا بيا فقط د $n \geq n_0$ لپاره صدق کوي.

د مربع(ځلوری) عددونو د جمعې لپاره فرمول

$$A(n):\ \sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),$$

کيدی شي د پوره اندکشن سره وښوول شي.

د اندکشن پيل ($A(1)$):

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sum_{i=1}^{1} i^2 = 1^2 = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{6}.$$

د اندکشن پای

$$A(n) \implies A(n+1)):$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 + (n+1)^2 = \underbrace{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}_{A(n)} + (n+1)^2$$

$$= \frac{(n+1)\left[n(2n+1)+6(n+1)\right]}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

د اندکشن هیوپوتېزې، لکه چې روښانه شوه، په دریم برابروالي کې استعمال شو.

ډېرى(سټ)

یوه ډېرى A له توکو $a_1, a_2, \dots$ جوړه ده یعنې

$$A = \{a_1, a_2, \dots\}.$$

که توکي د یوه خوى له مخې خوى لرونکي (کرکترېزه) شي، نو د دې لپاره لیکو

A={a:د E خوى لري:a}

د دې لپاره سرې لاندې نخښې کاروي یا استعمالوي:

لیکندول	معنا

(c) ketabton.com: The Digital Library

a د A توکی دی .	$a \in A$
a د A توکی دی .	$a \notin A$
B د A برخډېرۍ(برخسټ) ده	$A \subseteq B$
Bد A برخډېرۍ(برخسټ) ده	$A \subset B$
دتوکو ګڼون یا تعداد په... کې	$\|A\|$
تشډېرۍ یا تشسټ	$\emptyset$

که $|A| < \infty$ همداسي $A = \infty$ باور ولري، نو دلته د پای ډېرۍ همداسي ناپای ډېرۍ څخه غږيږو.

دوه یا څو ډېرۍ برابرزوريزۍ بلل کيږي، که د دوی د توکو ترمنځ يو بيجکتيو بلواک يا تابع يعنې برعکسکيدونکی بلواک شتون ولري ($|A| = |B|$ د پای ډېرۍ لپاره).

د A د ټول برخو ډېرۍ $\mathcal{P}(A)$ تواندېرۍ بلل کيږی، دا په دې معنا چي

$$\mathcal{P}(A) = \{B : \ B \subseteq A\}$$

له دې سره باور لري $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$, $A \in \mathcal{P}(A)$ او $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$

ليکونکي: هيوليک، کنش

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګڼونو (اعدادو) ډېرۍ

د لاندې ګڼونو ډېرۍ لپاره معیاري نخښې استعمال مومي:

طبعي اعداد : $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$

ټول اعداد: $\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$

راشنل یا هوښیار اعدا: $\mathbb{Q} = \{p/q : \ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N},\ \mathrm{ggT}(p,q) = 1\}$

ریل یا حقیقي(ریښتوني) اعداد: $\mathbb{R} = \{x : \ x = \lim_{n\to\infty} q_n,\ q_n \in \mathbb{Q}\}$

کومپلکس اعداد: $\mathbb{C} = \{x + \mathrm{i}y : \ x, y \in \mathbb{R},\ \mathrm{i}^2 = -1\}$

په همدې توګه لاندلیکنډول هم کارول کیږي:

$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ او $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : \ x > 0\}$ او دې ته ورته یا په همدې ډول

$\mathbb{Z}^-$, $\mathbb{Z}_0^-$, $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{Q}_0^+$, $\mathbb{Q}^-$, $\mathbb{Q}_0^-$, $\mathbb{R}_0^+$, $\mathbb{R}^-$, $\mathbb{R}_0^-$.

لیکونکي: کرهیولیګ

په ډېریو کې عملیې

د دوه ډېریو A او B لپاره لاندې علمیې تعریف دي:

ټولنه (اتحاد)

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A \cup B = \{x:\ x \in A\ \vee\ x \in B\},$$

غوڅی(قطاع):

$$A \cap B = \{x:\ x \in A\ \wedge\ x \in B\},$$

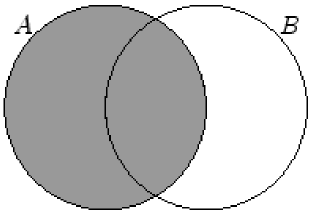
کمښت یا کمون (تفریق)، پوره کېدونکې ډېری،

$$A \setminus B = \{x:\ x \in A\ \wedge\ x \notin B\},$$

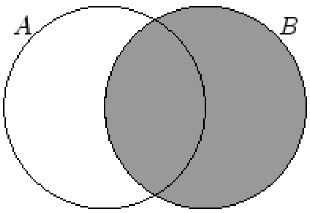
سیوتریکې کمښت (کمون)

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

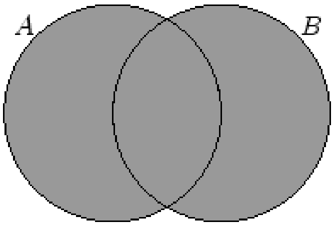
په لاندې ځېرو کې د ډېریو عللیې داسې په نامه ون-دیاګرام Venn-Diagramme سره ښوول شوي دي.



A



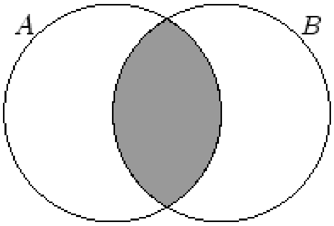
B



تولنه

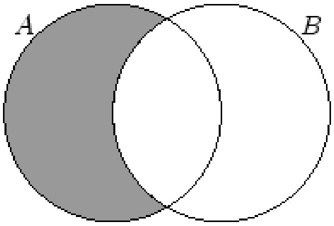
$A \cup B$ Vereinigung:

(c) ketabton.com: The Digital Library



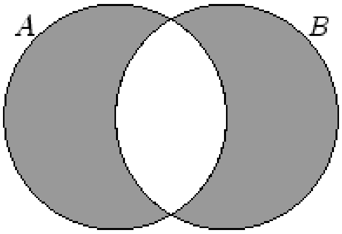
غوځی

$A \cap B$ Schnitt:



کمښت

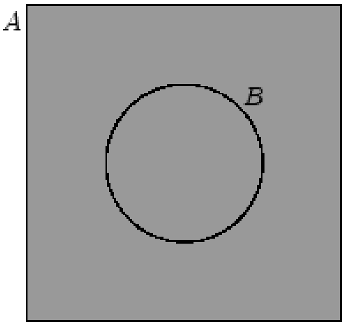
$A \setminus B$ Differenz:



سیومتریکي کمښت

symmetrische $A \Delta B$ Differenz:

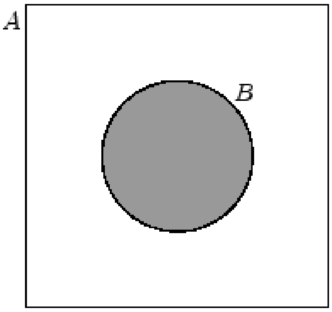
که $B \subset A$ وي، نو یوځو دیاګرامونه یو بل سره خوري یا یو په بل پریوځي:



ټولنه

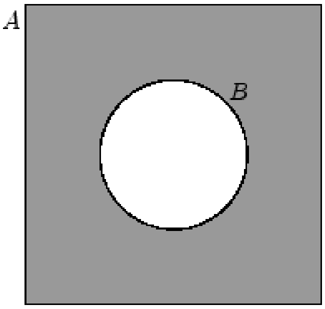
Vereinigung:

$A = A \cup B$



غوځی

$B = A \cap B$ Schnitt:



پوره کېدنکي ډېرۍ

Komplementärmenge :

$A \setminus B = A \Delta B$

لیکونکې: هولیګ،هورنر، کنیش

د ډېریو عملیو لپاره شمېرقوانین:

اسوځیاتیو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

کموتاتیو یا بدلېدونکی قانون.

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cup B = B \cup A$$

- Morgansche Regeln:
- د مورگان قانون یا قاعده

$$C \backslash (A \cap B) = (C \backslash A) \cup (C \backslash B)$$

$$C \backslash (A \cup B) = (C \backslash A) \cap (C \backslash B)$$

- دیستریبوتیو قانون.

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

دا قوانین د منطیقي قوانینو په کوته کونه هم ده، که د $\cup, \cap$ عملیو په ځای $\wedge, \vee$ کیږدو. او $C\backslash$ په ځای $\neg$ کیږدو.

لیکونکي:هیولیګ،هیونر

(c) ketabton.com: The Digital Library

د نمونې په توګه به د دې مورګان لومړی قانون و ښوول شي. باور لري:

$$x \in C\backslash(A \cap B) \Leftrightarrow \qquad x \in C \wedge x \notin (A \cap B)$$

$$\Leftrightarrow x \in C \wedge (x \notin A \vee x \notin B).$$

د ډیستریبوتیو قاونو له مخې اخرنی افاده یا ویینه د لاندې سره برابرارزښته ده

$$(x \in C \wedge x \notin A) \vee (x \in C \wedge x \notin B) \Leftrightarrow x \in (C\backslash A \cup C\backslash B),$$

له کوم سره چې غوښتونکی کتمتوالی ښوول شوې.

لیکړنکی:ک. هیولیګ

د دې مورګان قاعدې له مخې د بیلګې په توګه لاس ته راځی

$$C \setminus (A \cap C) = (C \setminus A) \cup (C \setminus C) = (C \setminus A) \cup \emptyset = C \setminus A,$$

$$C \setminus (A \cup C) = \qquad (C \setminus A) \cap (C \setminus C) = (C \setminus A) \cap \emptyset = \emptyset.$$

د ډیستریبوتیو قانون د بېلګې په توګه لاس ته راځي:

$$(A \cup B) \cap B \quad = \qquad (A \cap B) \cup (B \cap B) = (A \cap B) \cup B.$$

له دې سره باور لري $(A \cap B) \cup B = B$ ، څکه چې $(A \cap B) \subseteq B$ دی

کارتېزي ضرب (حَل)

د دوه ډېریو A او B کاتېزي ضرب دواړو ډیریو د ټولو منظمو جوړو ډېری ده:

$$A \times B = \{(a,b): \ a \in A \wedge b \in B\}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

باور لري:

$$(a,b) = (a',b') \Leftrightarrow (a = a' \wedge b = b').$$

داپه دې معنا چې د ډېرى برابروالي ($\{a,b\} = \{b,a\}$) په عکس يا په ځېټ د لړی پرلپسې غوره ده

په ورته تو ګه n - واره يا څله کارتېزي ضرب تعريفوو

$$A_1 \times \cdots \times A_n$$

د ټولو منظمو n - ګونونو $(a_1, \dots, a_n)$ د $a_i \in A_i$ سره . که ډېرى برابرى وي، نوليکو:

$$A^n = A \times \cdots \times A$$

ليکونکي:هيوليک،هيورنر

اړيکې Relation

که د ډېرى A توکي د ډېرى B له توکو سره په اړيکو کې قرار ولري يا ولاړې وي، نو کېدى شي دا د يوې اړيکې سره افاده يا وويل شي. دا د توکو له منظمو جوړو (a,b) جوړه ده، چې دا د اړيکو له لارې سره تړلي دي. نو يوه اړيکه R د A او B د کارتېزي ضرب برخډېرى ده. وايو چې a د b سره په اړيکو کې ده او د دې لپاره ليکو $a \,\mathrm{R}\, b$:

$$a \,\mathrm{R}\, b \Leftrightarrow (a,b) \in R \subseteq A \times B.$$

ليکونکي:ژ. هيورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اړيکو د داتا بانک   Relationale Datenbank

يوه نمونه يي بېلګه   د اړيکو د ،،داتا-بانک،، دی. دلته د بېلګې په توګه يو د درسونو (لکچرونو) جدول او يو د زده کړو جدول ورکول شوي چې يو له بل سره په اړيکو کې راغلي. دا په لاندې ځېره کې روښانه شوي.

په لاندې کې کيڼ لور ته نومونه دي

درس	کوټه		
لوړه شميرپوهنه ۱ د زده کوونکو...	V57.01 V47.02		

Mtr.-Nr.	Name
1000000	Anton Antonius
1000001	Berta Bethel
1000002	Cornelius Cornell
1000003	Damian Damien
1000004	Egon Ekel
1000005	Frank Frankfurth

دا هم دلته روښانه شوي چې د يوې ډېرۍ توکي د بلې ډېرۍ د توکو سره په اړيکو کې راځي يا که غواړۍ :قرار لري.

ليکونکي: بوسلر، هيورنر

د اړيکو خويونه

په يوه ډېرۍ A کې يوه اړيکه $R \subseteq A^2$ په لاندې توګه بلل يا نمول کيږي:

رفلکسيوreflexiv ، که هر توکی د خپل ځان سره په اړيکه کې وي:

$$\forall a \in A : (a,a) \in R$$

سيومتري symmetrisch ، که د توکو لړۍ پرلپسې کوم رول نه لوبوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$$

انتی سیمتري antisymmetrisch ، که که له سیمتري څخه کټمتوالی لاس ته راشي:

$$(a,b) \in R \wedge (b,a) \in R \Rightarrow a = b$$

ترانزتیوtransitiv ، که له یوه زنځی څخه منځنی توکی لرې کېدی شي:

$$(a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$$

ټوتالي total، که هر دوه توکي لږ تر لږه په یوه لور په اړیکو کې سره راتلی شي:

$$\forall a,b \in A : (a,b) \in R \vee (b,a) \in R$$

که یوه اړیکه رفلکسیو ، سیومتریک او ترانزیتیو وي، نو دا ،،ورته اړیکې،، (برابرارزښته اړیکې) بلل کیږي. دلته بیا زیات وخت $a \sim b$ د $a\,\mathrm{R}\,b$ په ځای لیکل کیږي. یو ورتهاړیکې ډېرۍ A په توکي پردیو برخډېریو ویشي (ورته یا برابر ارزښته ټولګیو)، د کوم سره چې د یوې برخډیرۍ دوه توکي یوبل سره په اړیکو کې دریږي(برابرارزښته دي). په داسې حالت کې چې دوه توکي له مختلفو برخډریو څخه داسې حالت نه لري.

که یوه اړیکه رفلکسیو، انتیسیمتري او ترانزیتیو وي، نو دا یو نیم نظم دی او د دې لپاره $a \leq b$ د $a\,\mathrm{R}\,b$ په ځای لیکل کیږی. که یو نیم نظم د دې برسېره(سربېره) توتالي وي، نو دا (توتال) نظم بللکیږي او A د $\leq$ سره منظمه ده.

لیکونکی:ژ هیورنر

د یوې ډېرۍ M پوتنځډېرۍ $\mathcal{P}(M)$ کې د ډېرۍ خوندیونه یا په کې ځایېدنه $\subseteq$ نیم نظم دی، ځکهچې باور لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$A \subseteq A$ رفلکسیو انتیترانزیتیو $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Rightarrow A = B$ او

ترانزیتیو $A \subseteq B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$ قوانین. که M له یوه زیات توکي ولري، نو خوندیونه نظم نه ی، ځکه چې لاندې باور لري:

$$a, b \in M, a \neq b : \{a\} \not\subseteq \{b\} \wedge \{b\} \not\subseteq \{a\},$$

دا په دې معنا چې دا ټوتالي منظمه نه ده.

اړیکي ،، ټیک دومره توکي لري لکه،، د یوې پای ډېرۍ M په تواندېرۍ کې $\mathcal{P}(M)$ برابرارزښته ده ځکهچز باور لري : $|A| = |A|$ (رفلکسیو)،

$|A| = |B| \Rightarrow |B| = |A|$ (سیومتري)،

$|A| = |B| = |C| \Rightarrow |A| = |C|$ (ترنزیتیو)

لیکونکی:ژ هیورنر

په یوې ډېرۍ باندې زیات وخت اړیکي یا په همدې ډول پرابرارزښته – اړیکې د توکو د خویونو له لارط تعریقیږي. د بېلګې په توګه دوه اړیکي په

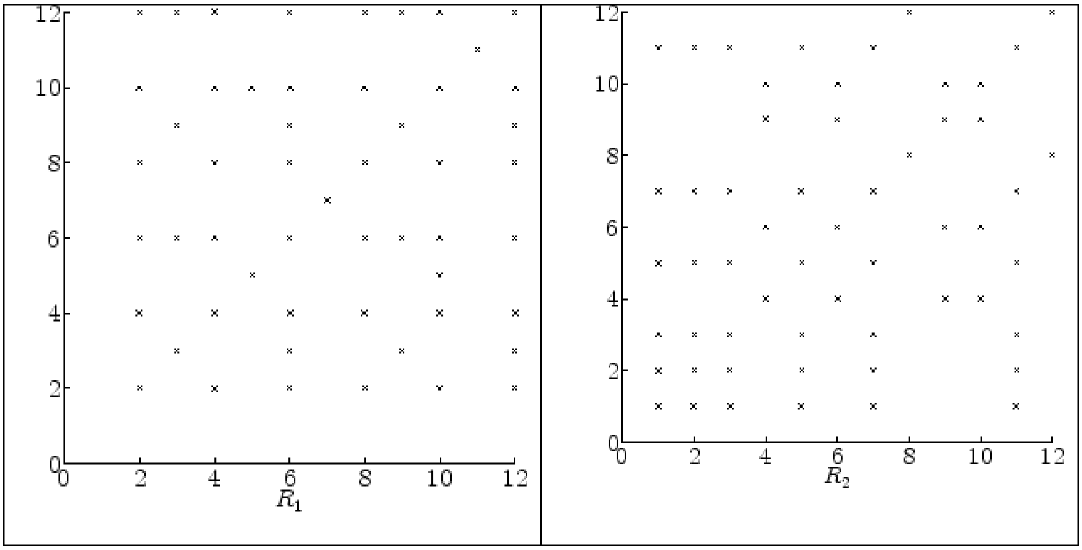
$$M = \{1, 2, \ldots, 12\}$$

کې ترځېږنې لاندې نیسو:

لومړی $x\ R_1\ y$: x او y یو ګډ پروېشونی (مقسوم علیه مشترک) $\neq 1$ لري .

دویم $x\ R_2\ y$: x او y برابرډېر پروېشوني لري

(c) ketabton.com: The Digital Library



برخدېريو په څېر د اړيکو ګراف ښايي . $M \times M$ د ځېرونه يا يا تابع(بلواک)

اړيکې R_1 سيومتريک او رفلکسيو دي، مګر نه ترانزيتيو. د بيلګې په توګه $x = 4$ او $y = 6$ ګډ پروېشونی 2 لري او $y = 6$ او $z = 9$ ګډپروېشونی 3 لري، مګر $x = 4$ او $z = 9$ ګډ پروېشونی نه لري. نو

$$(xR_1y \wedge yR_1z) \Rightarrow xR_1z$$

باور نه لري.

اړيکې برابرارزښت –اړيکې دي. رفلکسيويتي، سيومتري او ترادزيتيويتي په ځرګنده توګه پوره دي. برابرارزښته –ټولګي

دي د يوه، دوه، درې څلور او شپږ پروېشونو سره.

ليکونکي: هيليګ،کرايخ

فنکشن (بلواک يا تابع)

د يوه فنکشن f لاندې له يوې ډېرۍ A په يوه ډېرۍ B باندې يوه قانونمندي پو هيږو، چې هر $a \in A$ توکی په يواځني ډول يو ټاکلي $b = f(a) \in B$ باندې تنظيم کړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f : A \longrightarrow B \,.$$

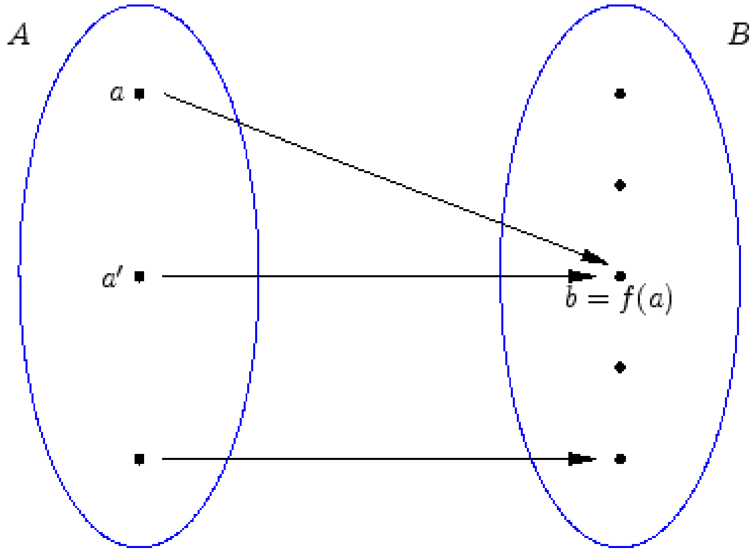
د توکو- نظم لپاره لاندي ليکندود استعماليږي

$$a \mapsto b = f(a)$$

او b د a ځېږي يا ارزښت په حيث بلل کيږي او همداسي a د b (د پخوا ځېږي)د تعريف توکي په ځېر بلل کيږي.

لکه د لاندي ځيري ځخه چي کتل کيږي، بايد د B توکي د A د يوه توکي د ځېږي توکي په توګه رامنځ ته شي او د B يو توکی کېدی شي د A د ډېرو توکو ځېره يا نظم وي. په هر حالت بايد د A د هرتوکی لپاره په يواځني توګه يوه ځېره شتون ولري، دا په دې معنا چي له هر a څخه بايد يو غشی وتلی وي.

پيژندل کيږي چي ځيره زيات تعريفتوکي يا د ځيري پخوانی يا نوره هم ښه مخکني لري(دا په دې معنا چي ځيره کېدونکی دی)، دلته د بيلګي په توګهa او a'. د ځيرونی لپاره کليمه فنکشن هو کارول کيږي، په ځانګړې توګه په ريل ا حقيقي او کمپلکس اناليوزي کي.



ليکونکي: هيوليک،هيورنر،کيمرلي

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تابع يا خيروني يا بلواک(تابع) خويونه

د دوه ډېريو A او B ترمنځ يوه تابع

$$f : A \longrightarrow B$$

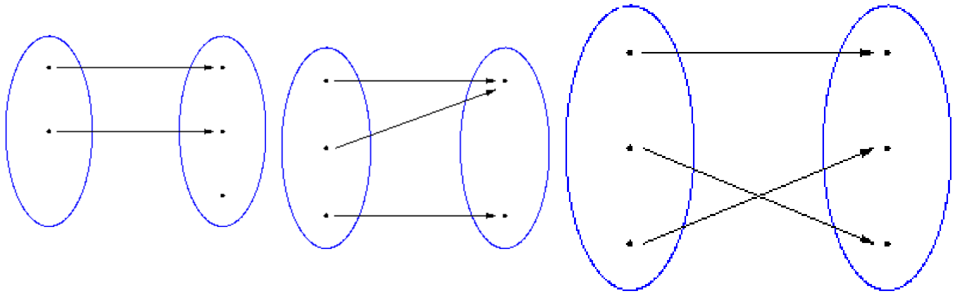
داسې يا په لاندې تګه بلل کيږي:

په کې بلواک injektiv : که د هر $a, a' \in A$ لپاره د $a \neq a'$ سره دا $f(a) \neq f(a')$ صدق وکړي.

په باندې (بلواک) surjektiv : که هر $b \in B$ لپاره يو $a \in A$ شتون ولري د $f(a) = b$ سره.

په (بلواک) bijektiv : که (تابع) f په کې او په باندې وي.

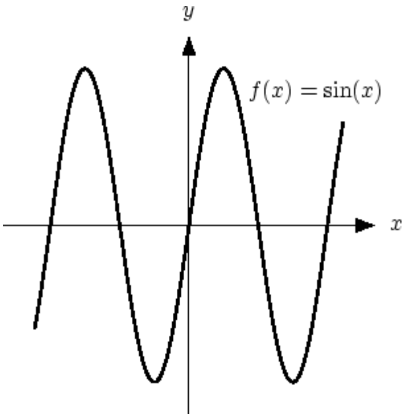
دا کليمې کېدی شي د ډېرۍ دياګرام له لارې روښانه شي.

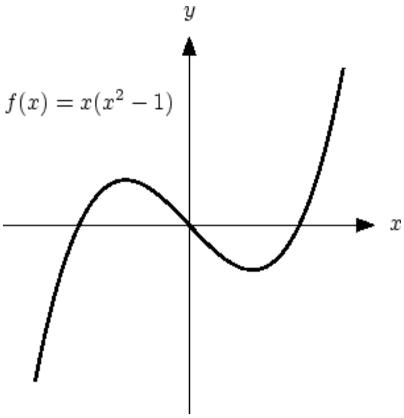


injektivپه کې surjektivپه باندې bijektivپه

د يو څو بلواکو(توابعو) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ خويونه ورکړ شوي دي

(c) ketabton.com: The Digital Library



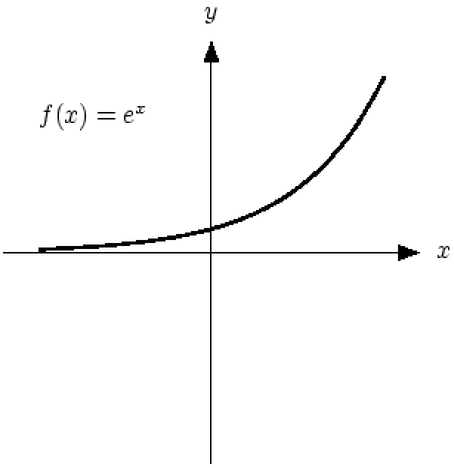


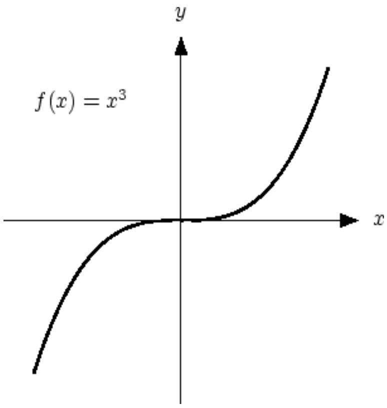
weder injektiv, noch surjektiv

نه په کې او نه په باندې

surjektiv, aber nicht injektiv

په باندې، مګر نه په کې





nicht surjektiv, aber injektiv

، نه په باندې مګر په کې

bijektiv, d.h. injektiv und surjektiv

په، دا په دې معنا چې په کې او په باندې

(c) ketabton.com: The Digital Library

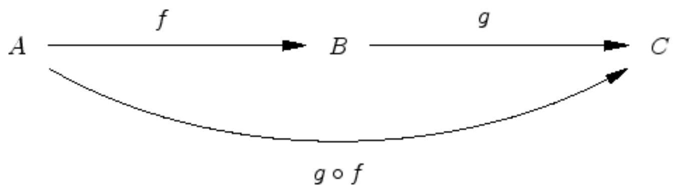
د فنکشنونو (بلواکو یا توتبعو) تړنه یا عملیې

Verknüpfung von Abbildungen

د دوه فنکشنونو $f : A \to B$ او $g : B \to C$ تړنه یا کمبوزیشن (زنځیرونه یا سره ګډ ایښونه) د

$$a \mapsto (g \circ f)(a) = g(f(a)), \quad a \in A,$$

له لارې تعریف شوی او په لاندې دیاګرام کې لیدوړ ګرځېدلی.



تابع اسوځیاتیو ده، دا په دې معنا چې $\circ$ تړنه

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

صدق کوي، مګر په ځرګند ډول کموتاتیو نه ده. .

لیکونکی: هیولیګ، کنش

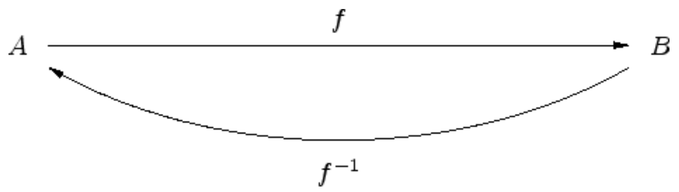
په څټ یا برعکس فنکشن (بلواک یا تابع)Inverse Abbildung

د یوه په فنکشن یا تابع $f : A \to B$ لپاره د

$$b = f(a) \Leftrightarrow a = f^{-1}(b)$$

له لارې په څټ فنکشن یا برعکس تابع $f^{-1} : B \to A$ تعریف ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library



په ځانګړې توګه $a = f^{-1}(f(a))$ دی، داپه دې معنا چې $f^{-1} \circ f$ کټمټ یا ورته تابع دی.

لیکونکي: هیولیګ، کنش

فاکولتې یا فکتوریل Fakultät

د لومړیو n طبیعي اعدادو یا ګڼونو ضرب د

$$n! = 1 \cdot 2 \cdots n$$

سره په نخښه کیږی. (لوستل یې : n فاکولتې). له دې سره کلک تړلی یا له دې سره ه کلکه په نړاو کې تش ضرب داسې لیکو: $0! = 1$.

ګڼ یاعدد $n!$ د n مختلو شیانو دمختلفو امکاناتو د ترتیب یا نظم ګڼون یا تعداد ر ښایي

د لوی n لپاره د $n!$ اسیپتوتیکي حالت د سترلینګ Stirlingschen فرمول له لارې په ورته نږدې ډول وښوول شي:

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + O(1/n)\right).$$

لیکونکي: هیولیګ،هیورنر

د بینوم ضریبونه (ځلووني) Binomialkoeffizient

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $n,k \in \mathbb{N}_0$ لپاره د $n \geq k$ سره د بینوم ضریبونه تعریفوو:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1\cdots(k-2)(k-1)k}.$$

د $0! = 1$ له امله په ځانګړې توګه باور لري:

$$\binom{0}{0} = 1, \quad \binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1.$$

د بینومي ضریب $\binom{n}{k}$ د n توکو سره یوې ډېرۍ د k - توکیزو برخډېریو ګڼون یا تعداد ورکوي.

د پاسکال درېګودی(مثلث) Pascalsches Dreieck

د بینوم ضریبونه

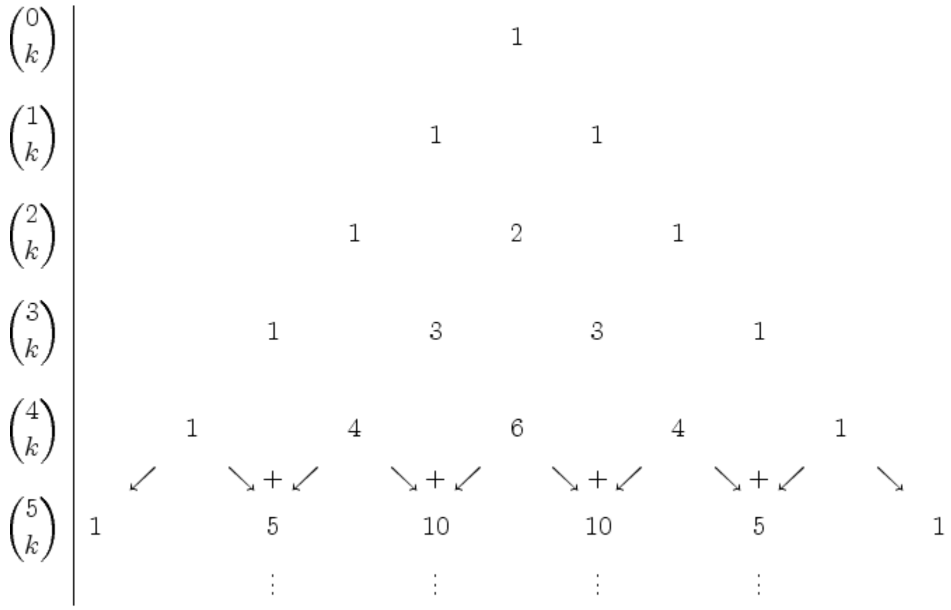
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

د لاندې رېکورزیون Rekursion (په بېرته معلومو فرمولونو) په مرسته

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

په یوه درېګډیزې شیما یا شکل، داسې په نامه پاسکال درېګودي کې یا له لارې وشمېرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library



.

لیکونکي: هیولیګ، کنش

دا د ښوولو کټمټوالی

$$\frac{(n+1)!}{(n+1-k)!\,k!} = \frac{n!}{(n-k+1)!\,(k-1)!} + \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

د $n!$ سره وېشنې او $(n-k+1)!\,k!$ سره ضربونې له لارې د

$$n+1 = k + (n+1-k)\,.$$

سره برابرارزښته دی.

لیکونکي: هیولیګ، کنش

د بینوم درسي جمله Binomischer Lehrsatz

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بینوم درسي جملې سره کېدی شي د دوه متحولو یا اووښتونو د زیاتون یا جمعې توان وشمېرل شي.

د ټولو $n \in \mathbb{N}_0$ لپاره صدق کوي:

$$(a+b)^n =$$

$$a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k .$$

په ځانګړي توګه د $n = 2, 3$ لپاره:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 ,$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3 .$$

د بینوم جمله کیدی شي د پوره ایدکشن له لارې وښول شي.

د $n = 0$ او $n = 1$ لپاره کټمټوالی د

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^{0-k} b^k = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1, \quad \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^{1-k} b^k = a + b$$

له امله د په خوښه a او b لپاره ربښتیا یا ټیک دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

نیسو چې د n لپاره صدق کوي. نو دی:

$$(a+b)^{n+1}$$

$$=(a+b)(a+b)^n = (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1}$$

$$=$$

$$=a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1} + b^{n+1}$$

$$=a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^{n-k+1}b^k + b^{n+1}$$

$$=a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right]a^{n+1-k}b^k + b^{n+1}$$

$$=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^k$$

د بینوم ضریبونو لپاره کټمټوالی Identitäten für Binomialkoeffizienten

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بینوم ضریبونو لپاره لاندې کتوتوالی صدق کوي:

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k},$$

$$0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k, \quad n \geq 1,$$

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n-k-1+i}{i}, \quad k < n,$$

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=0}^{n-k} \binom{k-1+i}{i}, \quad k > 0.$$

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

لومړي دواړه کتمتوالي تړلي د بینوم د درسي ځخه لاس ته راځي،

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$

د ارزښتونو $a = b = 1$ همداسې $a = -b = 1$ سره .

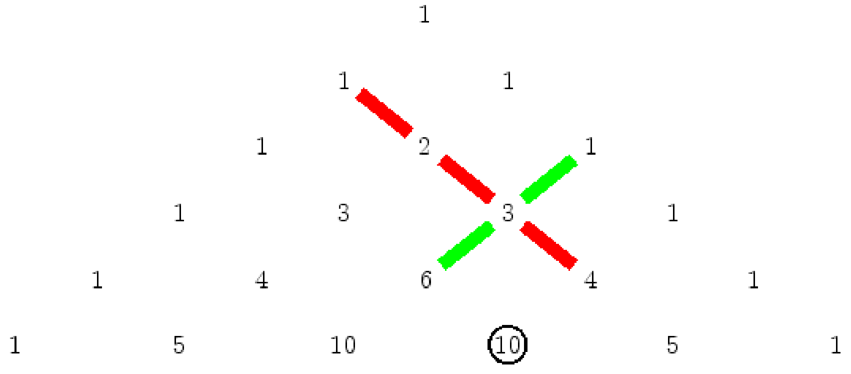
دریم کتوتوالی د ریکورزین فرمول په بیا بیا استعمال له لارې لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} &= \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \\
&= \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k-2} \\
&= \dots \\
&= \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k-1} + \dots + \binom{n-k-1}{0} \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{n-k-1+i}{i}.
\end{aligned}$$

په دې مساواتو کې د $(n-k) \leftrightarrow k$ په ځای اینولو یا سبستیچیشن Substitution له لارې ځلورم کتمتوالی لاس ته راخي.

دا اخرني دواړه کتوتوالي کېدی شي په پاشکال درېکودي کې جمعه کوني لخ لارې انخور شي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډېريو يا سټونوکمبيناتوريک Kombinatorik von Mengen

(د کمبيناتوريک د نورې زياتې کتنې لپاره دې زما دشميرپوهنې ستر کتاب وکتل شي)

لاندې جدول د مختلفو امکاناتو ګڼون يا تعداد ورکوي، چې د يوې د n مختلفو توکو سره ډېرۍ ځخه k توکي ټاکلی شو، د کوم سره چې بايد توپير شي، چې ايا د لړۍ پرلپسې يو رول لري (ترتيبونه) او تکرار ونه په کې اجازه لري که نه.

	sortiert منظم(د ټاکلو اړخونو له لارې) ترتيب	nicht sortiert نا منظم
له تکرار سره	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$
بې له تکرار سره	$n(n-1)\cdots(n-k+1)$	$\binom{n}{k}$

ليکونکي: هيوليک،کنش

لومړی : نا ترتيب يا نا منظم ټاکنه بې له تکرار ځخه

که د لړۍ پرلپسې په پام کې ونيو لې، نو د لومړي ځل لپاره n امکانات شتون لري، $(n-1)$ امکانات د دويم لپاره ، تر $(n-k+1)$ امکاناتو پورې د k-م توکي لپاره، نو په ټوليزه توګه

$$n(n-1)\cdots(n-k+1)$$

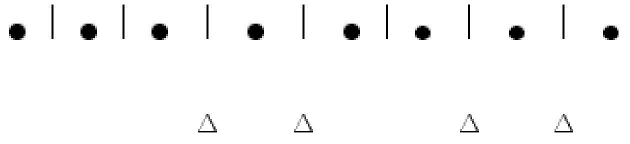
امکانات شتون لري.

دا بايد د ګڼون يا تعداد $k!$ سره وه وېشل شي چې د k توکو پرموتيشن (د توکو ځای بدلون : لنډ: ځای بدلون) دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم : ناتتيب شوي انتخاب د تکرار سره

يو برابرارزښته پرابلم دادی، چې $n-1$ په نځښه شوې (نشاني شوي) د $n+k$ ټکو تر منځ ځای په ځای شي.



د $(i-1)$ -م او i -م ترمنځ ټکو تعداد چې په 1 کم شوی د i–م توکي تکرارونو سره برابر دی. د لومړي سره سم د ممکنه په نځښه کيدونو تعداد لپاره لاس ته راځي

$$\binom{n+k-1}{n-1},$$

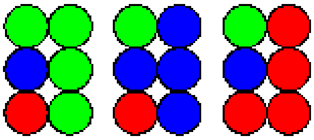
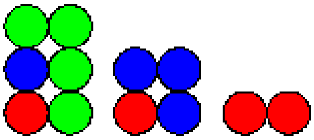
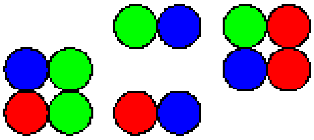
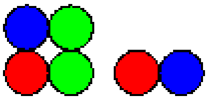
کوم چې په جدول کې ورکړ شوي عدد سره سر خوري.

دريم : د تتيب شوي انتخاب لپاره فرمول پسې تړلی لاس ته راځي.

ليکونکي:هيوليک، کنش

په يوه مرتبان کې يو سور يو شين او يو اسماني توپونه (غونډوسکې) پراته دي. په جدول کې د دوه واره راوستنې د امکاناتو تعداد کتل کيږي ($k=2, n=3$).

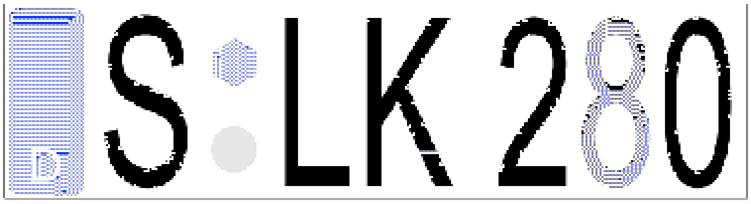
ناترتيب شوي يا نامنظم	ترتيب شوي	
$\binom{n+k-1}{k}$	n^k	د تکرار سره (دبېرته وراچونې سره)

		
	$3^2 = 9$	$\binom{3+2-1}{2} = 6$
بې د تکرار سره (نه دبېرته وراچوني سره)	$n(n-1)\cdots(n-k+1)$	$\binom{n}{k}$
		
	$3 \cdot 2 = 6$	$\binom{3}{2} = 3$

ليکونکي:هيوليک، کنش

د موټر نمره Autokennzeichen

د يوه الماني موټر نمره د ايالت يا ښار لپاره د ≤ 3 تورو کمبينيشن ، ≤ 2 د نورو تورو او تر يوه څلورځايز عدد څخه د ښلګي په توګه :



(c) ketabton.com: The Digital Library

له n تورو څخه 26^n کمبینېشنونه شتون لري او له دې سره

$$(26+26^2+26^3)\cdot(26+26^2)\cdot 9999 = 1.28\cdot 10^{11}$$

ممکنه نمرې (که د ښار یا ایالت د ورسره ور ګډونه په پام کې ونه نیول شي

لیکونکي:هیولیګ، کنش

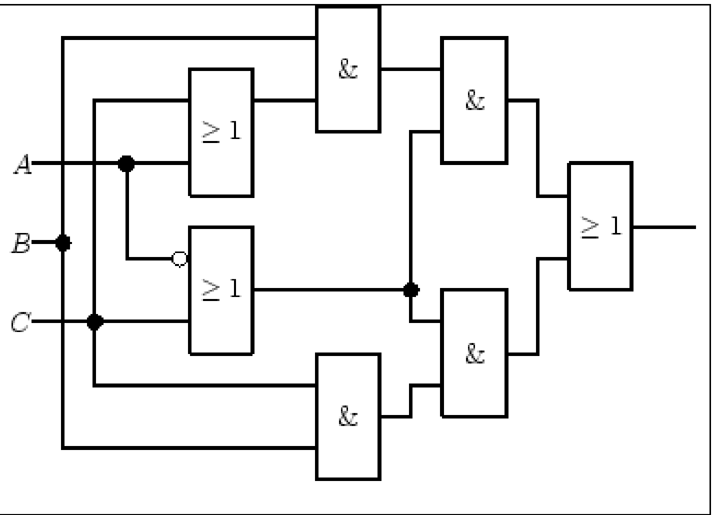
پوښتنې

- د ښه بدلون او همداسې د رښتیا جدول سره و و زامیی، چې ایا افادې یا ویېښې تل ټیک دي یعني Tautologien دي:

$$(A\vee B)\Rightarrow\big((\neg A\vee B)\wedge(A\Rightarrow\neg A)\big)$$

$$(A\Rightarrow(B\Rightarrow C))\Leftrightarrow((A\wedge B)\Rightarrow C)$$ پای.

- اړیکې $\Box, \Diamond$ د ډېرې پوهنې څخه د منطقي علیو $\{\wedge,\vee,\Rightarrow\}$ لپاره ځای په ځای شوي. په کومو حالتونو کې باور لري:

- محامخ سویچونه(شالتونګونه) ساده کړی:	

(c) ketabton.com: The Digital Library

- ډېرى $A, B \neq \emptyset$ ، یوه تابع $f : A \to B$ همداسې برخډېرى $U, V \subset A$ او $X, Y \subset B$ ورکړ شوي دي. د لاندې اړيکو رښتياوالى همداسې نارښتياوالى د يوې مناسبې برعکس بېلګې په مرسته وښايئ:

الف- $f(U \cup V) = f(U) \cup f(V)$ ب - $f(U \cap V) = f(U) \cap f(V)$

پ - $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$

ت - $f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$

- د يوه تابع $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ په هکله لاندې وېناوې په فورمال ليکندود افاده کړئ:

الف - fپه باندې نه دى ب - f په کې نه دى

پ – f په نه دى ت – fنه په کې او نه په باندې دى

ليکونکى: کريستيا اپيپينش

- د $n \in \mathbb{N}$ لپاره د پوره ايدکشن له لارې وښايئ:

a) $$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$ b) $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

- د $n \in \mathbb{N}$ لپاره د پوره ايدکشن له لارې وښايئ:

الف : $a_n = n^3 + 5n$ په 6 وېشونى دى.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب : $b_n = \frac{n}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{6}$ یو طبيعي عدد دی.

- په یوه میلمستیا کې 25 کسان سره یوځای کیږي. څومره لاسونه سره ورکول کیږي، که هر میلمه هر بل مېلمه ته لاس ورکړي. .

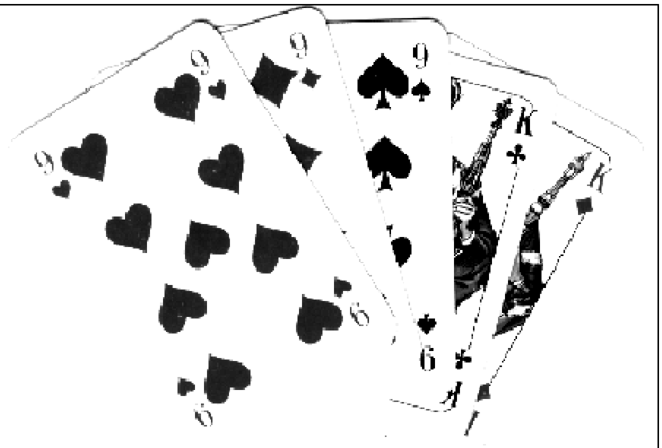
د شمیرپوهنې له لومړني کورس څخه

- و ښایی:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{m+k}{k} = \binom{m+n+1}{n}$$ **a)**

$$\sum_{\ell=1}^{n} \binom{n+k-\ell}{k} = \binom{n+k}{k+1}$$ **b)**

لاس ته راونې یې په پاسکال درېګوډي کې انځور کړی. لیکونکی: کلاوس هیولیګ

	- په یوه د کارتو لوبه کې چې له 32 کارتو جوړه ده(8 ارزښتونه 4 رنګونه) څومره امکانت شته دی، چې فول هوز Full Haus (درې برابرارزښته او دوه برابر ارزښته) کارتې لاس ته راوړل شي؟ د دې لپاره څومره امکانات شته چې دا څېره شوې کارتې د دوه کارتو بدلولو سره یو پوکر(څلور برابر ارزښتونه) لاس ته راوړای شي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

ازمايښت Test

لومړۍ پوښتنه:

د لاندې منطقي ابادې رښتيا ارزښت پيدا کړئ

$$D:\ (A \Rightarrow B) \wedge (\neg C \vee A)$$

چې د ويناو A, B, C د رښتيا ارزښتونو تابع يا په واک کې وي.

هر ځل يا'w' او يا 'f' ورکړئ.

دويمه پوښتنه:

ډېرئ $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ او $B = \{4, 5, 6, 7\}$ ورکړئ.

په ګوته کړئ، چې ايا لاندې ويناوې رامنځ ته کيږي که نه(J د هو لپاره او N د نه لپاره)

دريمه پوښتنه:

د دوه هره يوه د درې توکيزه ډېريو A او B ترمنځ څومره اړيکې شتون لري؟

له ې څخه څومره بلواک يا تابع دي او څومره بلواک يې په باندې(سورجکتيو) دي؟

څلورمه پوښتنه:

و څېړئ چې ايا لاندې توابع يا بلواک $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ په باندې، په کې او په دي:

$$\textbf{a)} \quad f(x) = x \sin x \qquad \textbf{b)} \quad f(x) = \exp\left(-x^3 + 1\right)$$

$$\textbf{c)} \quad f(x) = x \ln \frac{1}{|x| + 1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځمه پوښتنه:

څومره پنځه ځایزه ګنونه یا عددونه شتون لري د لاندې سره

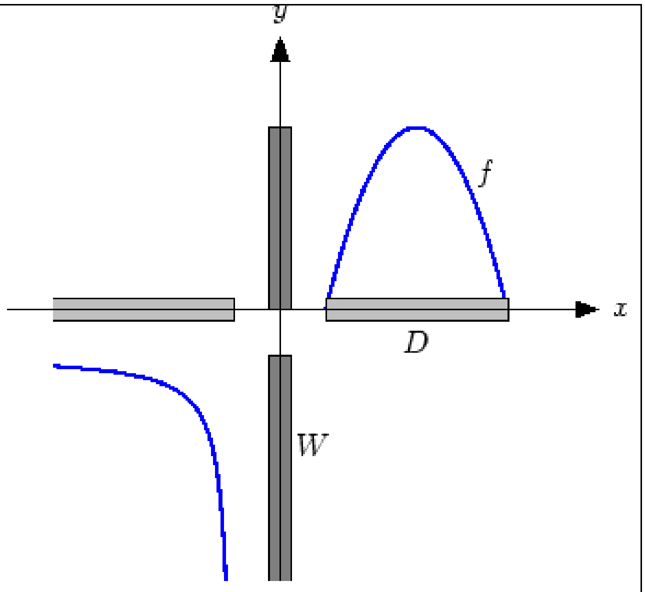
الف: پنځه مختلف عددونه

ب) تیک دوه جوړه عددونه

شپږمه پوښتنه:

څومره امکلنات شتون لري، چې ناه کسان په درېیز ګروپ ووېشو؟

تابع   یا فنکشن یا بلواکFunktion



یو فنکشن

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)$$

هر د تعریفورشو $D \subseteq \mathbb{R}$ هر توکی x په یوه د ارزښت ورشو $W \subseteq \mathbb{R}$ په یوه توکي $f(x)$ باندې تنظیموي..

د فنکشن یا بلوتک f ګراف له تکو (x, y) جوړ دی د $y = f(x)$ سره.

لکه د تابع څخه چې لیدل کیږي، د تعیف ورشو (روڼ شین) او د ارزښت ورشو(تیاره خړ) د x – محو ر همداسې د y -محور پرېوستونونه Projektionen دي.

د دې لپاره چې د تابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = \frac{\ln(3-x)}{\sqrt{x}-1}$$

تعریف ورشو او ارزښت ورشو وټاکو، باید په ساده تابع رامنځ ته شوي بندیزونه په پام کې ونیسو. د لوګاریتم ارګومنت باید مثبت(زیاتیز) وي:

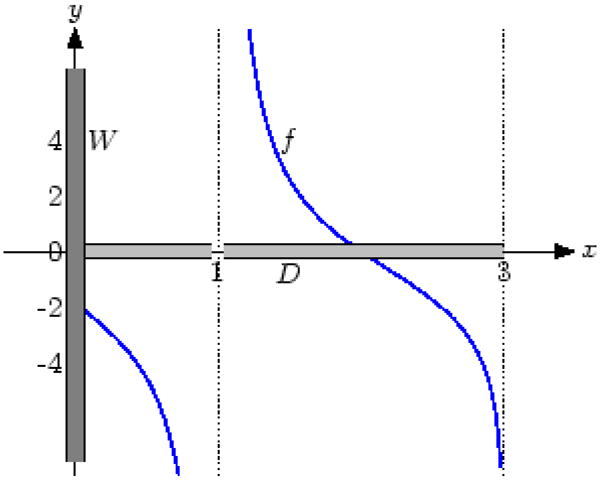
یعني $3-x>0$ او $x \geq 0.$

په هر حالت مخرـ(ماتلاندې) بای صفر نه شي، دا په دې معنا چې $x \neq 1.$.

په ټولیزه توګه لاس ته راځي:

$$\mathrm{D} = [0,3)\backslash\{1\} = [0,1) \cup (1,3).$$

د f ارزښت د رسم سره روښانه یا واضح کیږي.



دا چې f د $x \in (1,3)$ لپاره د $-\infty$ او $+\infty$ ترمنځ ټول ارزښتونه نیسي یا اخلي، نو باور لري. $W = \mathbb{R}$

لیکونکي:هیولیک،هیورنر،کنش

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې جدول د څو بنسټيزو بلواک يا توابعو د تعريف - او ارزښت ورشو بنايي:

$f(x)$	D	W
$1/x$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$
$\ln x$	$(0,\infty)$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$\mathbb{R}\setminus\{x\ :\ x=(2k+1)\pi/2,\ k\in\mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$
$\sqrt{x}$	$[0,\infty)$	$[0,\infty)$

ليکونکي:هيوليک،هيوررنر،کنش

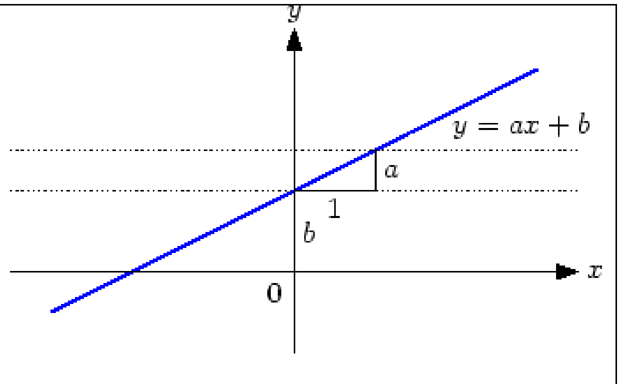
کرښيز فنکشنونه Lineare Funktion

د يوه کرښيز فنکشن

$$f(x)=ax+b$$

ګراف يوه کرښه ده د a جګېدنې

سره او د y -محورغوڅې b سره.



الترناتيو يا بديلې انځورونې يې تکي-جګيدنې-بڼه

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=a$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

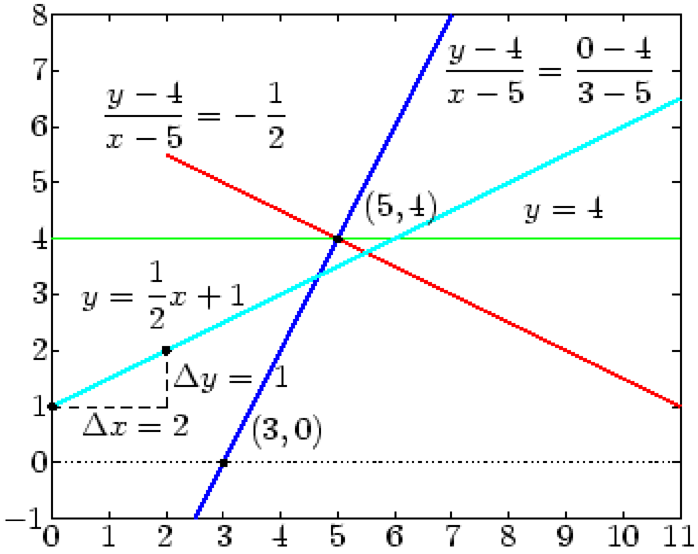
او د دوه ـټکو-بڼه

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0},$$

دي ، د کوم سره چې (x_0, y_0) او (x_1, y_1) په کرښه ټکي دي.

ليکونکي:هيوليک،هيورنر

تابع د کرښيزو فنکشنونو مختلفو انځورونو بڼې ښايي يا په نخښه کوي.



مربعيز فنکشنونه Quadratische Funktion

د يوه مربعيز تابع ګراف

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

يو د

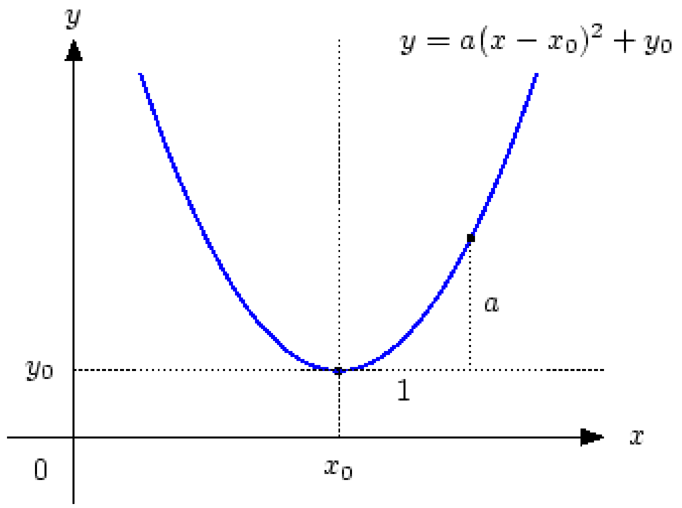
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = a(x - x_0)^2 + y_0$$

د بنې پارابول دی د ککرې

$$(x_0, y_0) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a} + c\right) .$$

سره.



مایل ګوزار یا – غورځونه Schräger Wurf

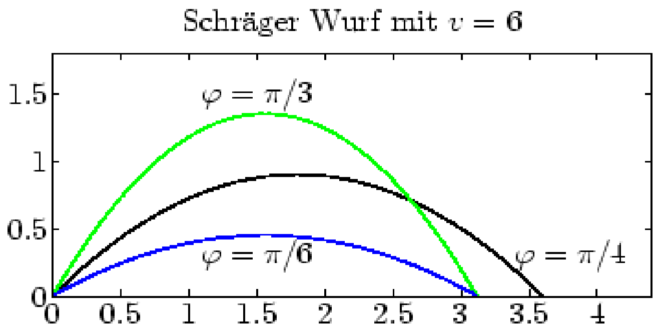
که یو تن د کونج φ لاندې د یوې چټکتیا v سره وغورځول شي، نو د الوتنې لار یې یو پارابول

$$y = x \tan\varphi - \frac{g}{2v^2 \cos^2\varphi} x^2$$

ښايي ، چېرته چې g د ځمکي بيړه(تعجيل) ده.

مايله ګوزارونه يا –غورځونه د v=6 سره.

(c) ketabton.com: The Digital Library



مساوات د برابردوليز خوزښت ځخه لاس ته راځي د پيل چټکتيا v سره په x - او y -کمپوننتونو يا برخو او د همدې وخت د ازادې غورځوني بيړه ييز خوزښت سره.:

$$x(t) = vt\cos\varphi \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{v\cos\varphi}$$

$$y(t) = vt\sin\varphi - \frac{1}{2}gt^2$$

$$\Rightarrow \; y(x) = \frac{vx\sin\varphi}{v\cos\varphi} - \frac{gx^2}{2v^2\cos^2\varphi} = x\left(\tan\varphi - \frac{gx}{2v^2\cos^2\varphi}\right).$$

د غورځوني واټن دی:

$$x = \frac{2v^2\cos^2\varphi}{g}\tan\varphi = \frac{v^2}{g}\sin(2\varphi)\,.$$

دا د $\varphi = \pi/4 \mathrel{\widehat{=}} 45^\circ$ لپاره ماکسيمال کيږي.

ليکونکي: هيورنر،هيوليک،کنش

(c) ketabton.com: The Digital Library

پولینوم Polynom

یو د n-م دجي پولینوم p په لاندې بڼه ليکل کيږي:

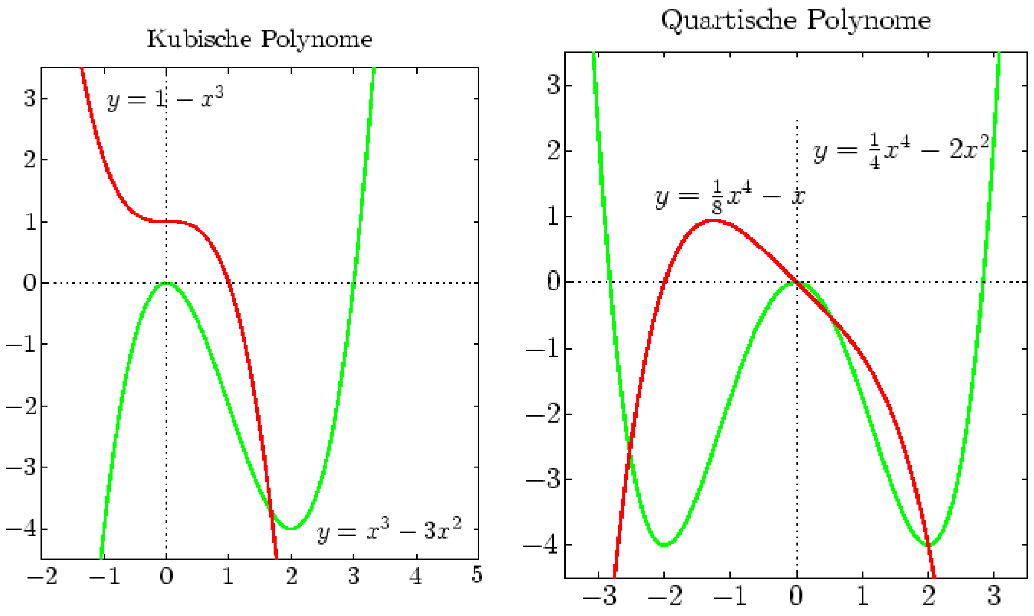
$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

د $a_n \neq 0$ سره .

اووبنتوني يا متحوله x او ضريبونه a_k کېدی شي رينتونی (حقيقی) يا کمپلکس عددونه وي. په اړونده توګه له دې امله له حقيقی همداسې کمپلکس پولينومونو غږيږو.

ليکونکي:هيوليک،هيرنر

لاندې توابع مکعبي $n = 3$ او مربعيز $n = 4$ پولينومونه په ګوته کوي، د خرنګوالي (کواليټي) مختلف تابع ګراف سره



ليکونکي: هيورنر،هيوليک،کنش

(c) ketabton.com: The Digital Library

راشنل فنکشن یا بلواک(تابع) Rationale Funktion

يو نسبتي تابع د صورت(ماتباندې) درجې m او مخرج(ماتلاندې) درجې n سره يو د دوه پولينومونو وېش دی.

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n}.$$

دا انځورونه ناوېشوړ irreduzibel بلل کيږي، که p او q کوم ګډ کرښيز ضريب ونه لري.

د مخرج صفرځايونه راشنل تابع r د تعريف تشياوې دي او د پول ځايونو په نامه يادېږي. د دوی نظم د صفرځايونو دېرځلوالی دی.

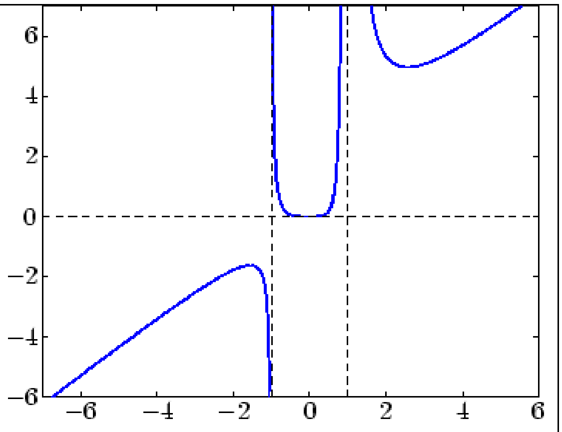
د اووښتوني يا متحولي x او ضريبونه a_k, b_k کېدی شي حقيقي يا کمپلکس عددونه وي. په اړونده توګه د حقيقي يا کمپلکس ربښتوني فنکشن څخه غږيږو.

ليکونکي:هيوليک، اپپ

فنکشن

$$f(x) = \frac{x^4}{(x+1)(x-1)^2}$$

په $x=-1$ کې يو ساده قطب لري او
په $x=1$ کې دبل قطب لري



د تابع څخه پژندل کيږي، چې f په يوه ساده قطب کې مخنخبنه بدلوي او په دبل قطب کې مخنخبنه نه تغيروي. ليکونکي:هيوليک، اپپ

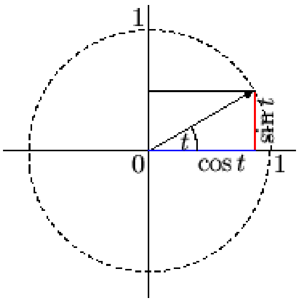
(c) ketabton.com: The Digital Library

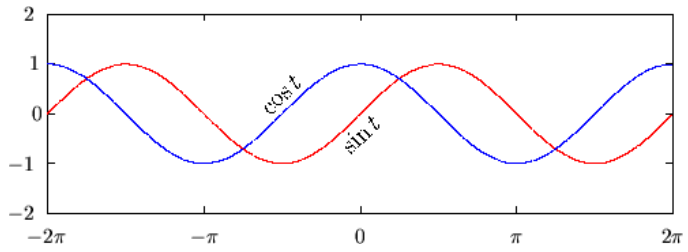
ساین او کوساین Sinus und Kosinus

د

$$(\cos t, \sin t), \quad t \in \mathbb{R}$$

سره کواودينات چې په سرچينه کې په کونج t ځرخول شوی ټکی $(1,0)$ په نخښه کيږي.





دواړه د ګردی یا دايرې توابع کوسان او ساین 2π - پريوديکي (تل بېرته راګرځېدوني) دي او باور لري

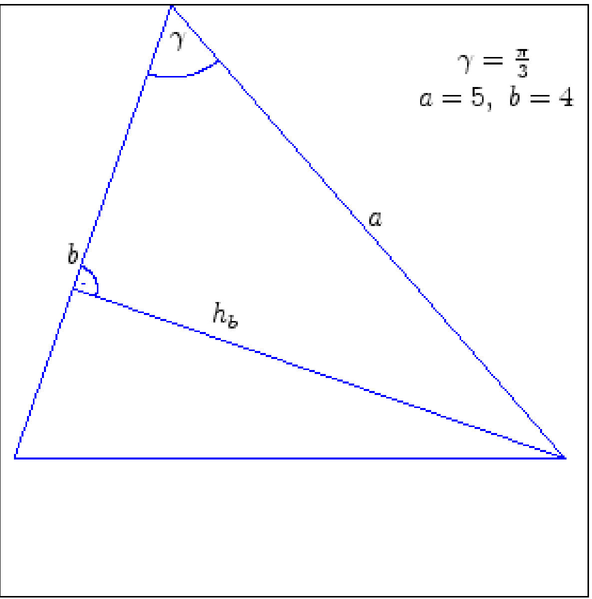
- $\cos t = \sin(t + \pi/2)$,
- $\cos t = \cos(-t), \quad \sin t = -\sin(-t)$,

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

د تر مخنخبنې پورې د داېرې تابع د ولاړکوډيز درېکوډي(قايمالزايه مثلث) د قطر (نيمي) سره چې ا وړدوالی یې 1 دی دو لاړو (عودو) ضلعو اوږدوالی شايي. يو ځو ځانګړي ارزښتونه يې دي:

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

(c) ketabton.com: The Digital Library



د دې لپاره چې د ځېره شوي درېګودي د سطه وتاکلی شو، لومړی جګوالی h_b شمېرو:

$$\sin\gamma = \frac{h_b}{a} \Rightarrow h_b = a\sin\gamma\,.$$

له دې سره لاس ته راخي:

$$F = \frac{1}{2}ab\sin\gamma\,.$$

د ورکړ شوو ارزښتونو لپاره لاس تخ راخي:

$$F = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}\,.$$

د ساین او کوساین لپاره د جمعي جمله(قضيه)

د داېرې توابعو $\sin t$ او $\cos t$ لپاره لاندې اړيکې صدق کوي:

- $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
- $\sin(\alpha+\beta) = \sin\beta\cos\alpha + \sin\alpha\cos\beta$

په ځانګې توګه

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha, \qquad \sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha.$$

ليکونکی.ژ.هيورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

تابع

$$u(t) = \cos(w_1 t) + \cos(w_2 t)$$

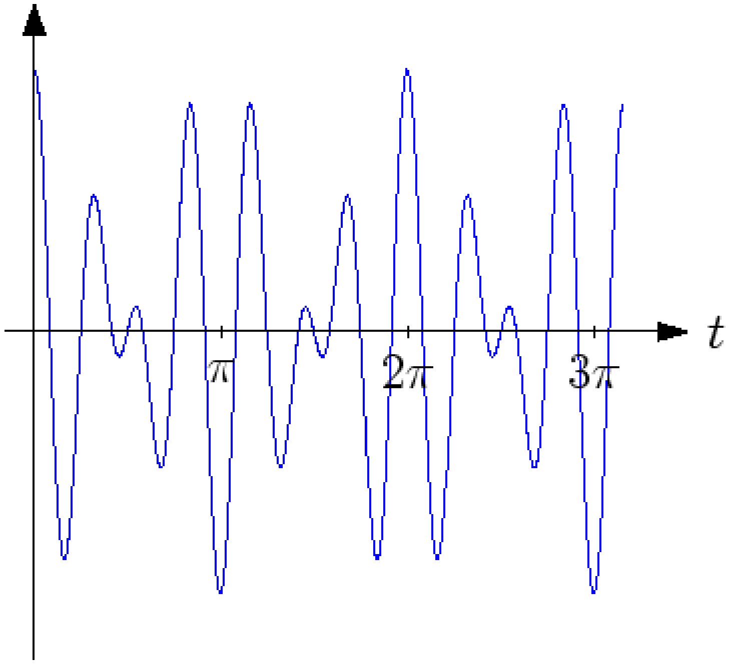
اړيکي د دوه لړزېدنو يو ځای رامنځ ته کېدنه روښانه کوي. د جمعي قضيې په مرسته کېدی شي انځورونه ساده شي. د $\overline{w} = \frac{1}{2}(w_1 + w_2)$ او $\Delta w = |w_1 - \overline{w}|$ سره له

$$\cos(\overline{w} - \Delta wt) = \cos(\overline{w}t)\cos(\Delta wt) + \sin(\overline{w}t)\sin(\Delta wt)$$

$$\cos(\overline{w} + \Delta wt) = \cos(\overline{w}t)\cos(\Delta wt) - \sin(\overline{w}t)\sin(\Delta wt)$$

څخه لاس ته راځي، چې

$$u(t) = 2\cos(\overline{w}t)\cos(\Delta wt)\,.$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

بلواک د $w_1 = 7$, $w_2 = 5$ لپاره لړځېدنه ښايي، دا په دې معنا چې $\overline{w} = 6$. ,
او $\Delta w = 1$

$$u(t) = 2\cos(6t)\cos t\,.$$

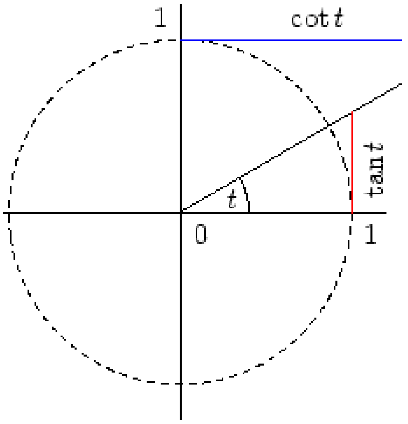
ليکونکي:هيوليک،کرايخ

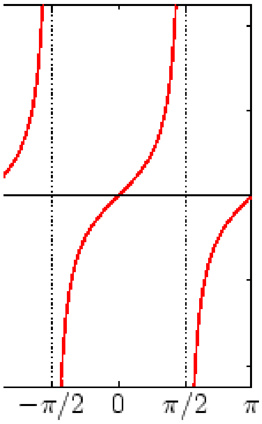
تانجنت او کوتانجنت

توابع تانجنت او کوتانجنت د

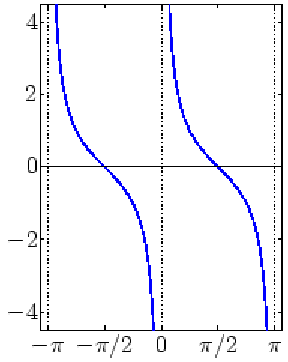
$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}, \quad \cot t = \frac{\cos t}{\sin t}$$

سره تعريف شوي. دا په ولاړکوډيز درېګوډي (قايوم الزاويه مثلث) کې د تر مخنخښي پورې د ولاړو اړخونو تناسب ورکوي





Tangens



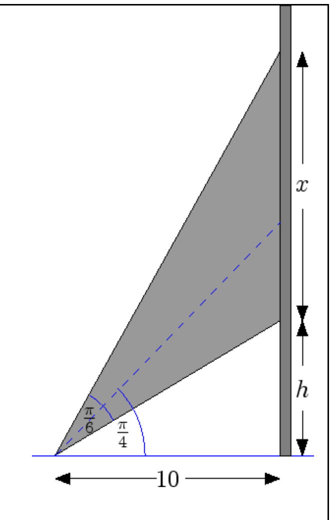
Kotangens

يو څو ځانګړي ارزښتوني دي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
tan	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	nicht def.
cot	nicht def.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

تابع د شکل له مخې يو د برېښنا مخروط ، چې په يوه ولاړ دېوال پرېوځي ښايي



د دې لپاره چې خورا لوي يا ماکسيمال پوسېده د تاکلی شو، جوړوو

$$\frac{h}{10} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12}\right) = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$\frac{x+h}{10} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12}\right) = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}\,.$$

که $h = \frac{10}{3}\sqrt{3}$ په دويم مساوات کې ځاېه ځای کړوو نو لاس ته راځي

$$\frac{x}{10} = \sqrt{3} - \frac{1}{3}\sqrt{3}\,,$$

يعني $x = \frac{20}{3}\sqrt{3}$

ليکونکي:هيوليک،کرايخ

(c) ketabton.com: The Digital Library

اکسپوننشل توابع(بلواک)

توان تابع

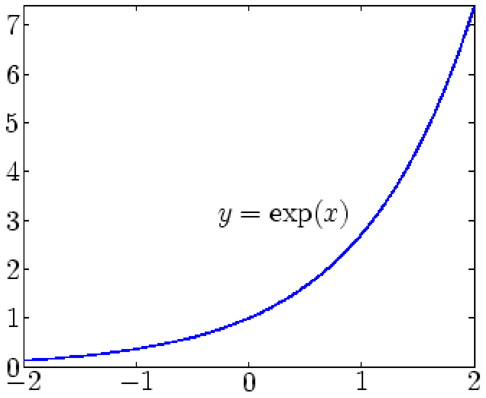
$$y = e^x = \exp(x)$$

د اویلرEulerschen عدد $e = 2.71828...$ سره اکسپوننشل تابع بلل کیږي. دا د تولو $x \in \mathbb{R}$ لپاره مثبت(زاتیز) ده او فنکشنل مساوات

$$e^{x+y} = e^x e^y \, .$$

پوره کوي.

په ځانګړي توګه دی $e^{-x} = 1/e^x$.



لیکونکي:هیولیک،هیورنر

اکسپوننشل تابع د ډېرو بیولوژیکي پروسو زیاتوالی روښانه یا تشریح کوي.

د بیلګې په توګه د یوه ساده نفوس مودل متناسب دی د اوسنیو نفوس تعداد $p(t)$ سره د t په وخت کې، دا په دې معنا چې

$$p(t+\Delta t) \approx p(t) + \Delta t(\lambda p(t)) \, .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\Delta t \to 0$ لپاره دا د ډېروالي قانو د $p(t)$ مودلی کيږي.

لاندې جدول د نړۍ نفوس ښايي د کلني ډېرېدنې سره.(اټکل ارزښت)

Jahr کال	Bevölkerungszahl د نفوسو تعداد	اټکل ارزښت Rate
1950	2555078074	1.76 %
1955	2779669781	1.87 %
1960	3039332401	2.02 %
1965	3345837853	2.16 %
1970	3707610112	2.05 %
1975	4088224047	1.80 %
1980	4456705217	1.79 %
1985	4854602890	1.77 %
1990	5283755345	1.54 %
1995	5690865776	1.37 %
2000	6080141683	1.25 %
2005	6460553564	1.12 %
2010	6823634553	1.03 %

(c) ketabton.com: The Digital Library

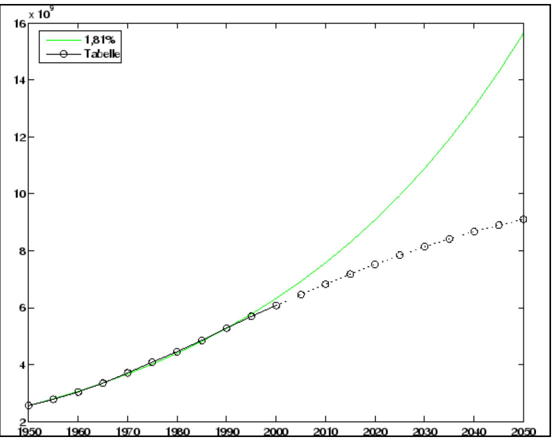
2015	7175675066	0.95 %
2020	7518010600	0.86 %
2025	7840660355	0.76 %
2030	8140344240	0.68 %
2035	8416742278	0.60 %
2040	8668391454	0.53 %
2045	8897073495	0.47 %
2050	9104205830	

کلنی د نفوسو منځنی ډېروالی په کلونو 1950-2000   کې % 1.81 وو. د 1950 کال وروسته د منځني ثابت ډېروالي سره.

$$p(t) = 2555078074e^{0.0181(t-1950)}$$

د نړۍ نفوس به په 2050کال کې 16 میلیارده ته جګ شي(ټکي ټکي شوې کرښه (منحني)). په جدول کې اټکل د نفوسو د کمېدو ځخه مخ ته ځي

ليکونکي : هيوليګ، هيورنر



د ګټې ګټه Zinseszins

(c) ketabton.com: The Digital Library

یوه پیلبډايي x د n -واره وکونو همداسي اخستنو د یوې Rate r ($r < 0$ bzwهړداسي . $r > 0$) د یوې ګنې ضریب $(1+p)$ له کبله لاندې پیل پای بدآيي ورکوي :

$$y = (1+p)^n x + \frac{(1+p)^n - 1}{p} r \, .$$

له دې سره $p = 1$ یوه 100% د ګټې د یوې ربحې د کلنۍ اېښوونه په ګوته کوي

موثره کلنۍ ربحه p_j د میاشتنۍ ګټوني څخه شمېرى کيږي د یوې p_m ربحې (ګټې سره)

$$p_j = (1+p_m)^{12} - 1 \geq 12 p_m \, .$$

لیکونکي : هیولیک، هیورنر

بنستیز ه سرمایه په لومړني ربحپریود کې په پام کې نیول کیږي، اینبوونه او همداسي اخستنه یا راوستنه په لومړي ځل د هر ورپسي کال. دا د ا لاندې راکوي:

$$\begin{aligned} n = 1: \quad & y = x(1+p) + r, \\ n = 2: \quad & y = \big(x(1+p) + r\big)(1+p) + r. \end{aligned}$$

په ټولیزه توګه صدق کوي:

$$y = \Big(\cdots\big(x(1+p)+r\big)(1+p)+r\Big)\cdots\Big)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= x(1+p)^n + \big(1 + (1+p) + (1+p)^2 + \cdots + (1+p)^{n-1}\big)r$$

دا په نوکانو کې د r افاده کيدی شي د هندسي جمعې فرمول سره واړول شي او سړی دا ورکړل شوی فرمول لاس ته راوړي.

ليکونکي : هيوليک، هيورنر

يو د 100000 يورو پور(قرضه) په کلنې ګټونه او يوې ګټونې يا ربحې % 5 سره د 10 کاله وروسته بېرته ورکړ شي. سړی د

$$y = 0\,,\ n = 10\,,\ p = 0.05\,,\ x = 100000$$

سره ګټه لاس ته راوړي:

$$r = 1.05^{10} \cdot 100000 \frac{0.05}{1.05^{10} - 1}$$

$$= 12950.46$$

د مياشتنى د $\frac{5}{12}\%$ په ګټونې يا په ګټه اېښوونې سره دا راکوي

$$n = 120\,,\ p = \frac{1}{240}$$

په ورته توګه

$$r = \left(\frac{241}{240}\right)^{120} \cdot 100000 \frac{\frac{1}{240}}{(\frac{241}{240})^{120} - 1}$$

$$= 1060.66$$

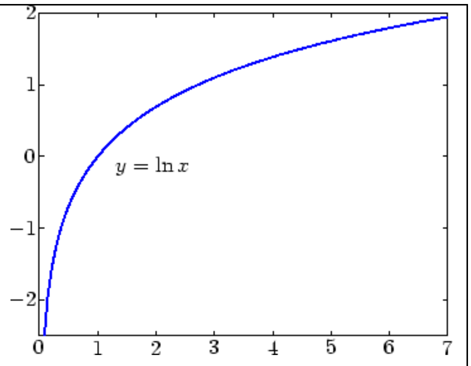
(c) ketabton.com: The Digital Library

د میاشتنی ګټې تادیه کونې ده، کلنی 12727.86 ده. دلته د مخه د ګټې تادیه کونه یو زیان منځ ته راولي. د $\frac{4}{12}$ % سره به دا د لاندې سره برابر وای:

$$\left(\frac{(1+\frac{1}{300})^{12}-1}{\frac{1}{300}}-12\right)\cdot 1060.66 = 235.96\,.$$

لیکونکي : هیولیک، کرایخ

لوګاریتم Logarithmus

د لوګاریتم تابع د اکسپوننشل تابع برعکس (په ښتې) تابع ده: $y = e^x \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln y.$	

دا $(0,\infty)$ په $\mathbb{R}$ کره مونوتون(یوغږیز) کره جګېدونکی تنظیموي او لاندې د تابع مساوات پوره کوي

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y.$$

په ځانګړې توګه لرو: $\ln(1/x) = -\ln x$

لیکونکی: هیولیک،کوپف

(c) ketabton.com: The Digital Library

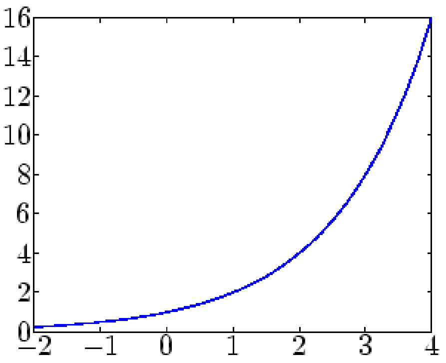
تولیز په توان تابع او لوګاریتم

د $a > 0$ لپاره تعریفوو :

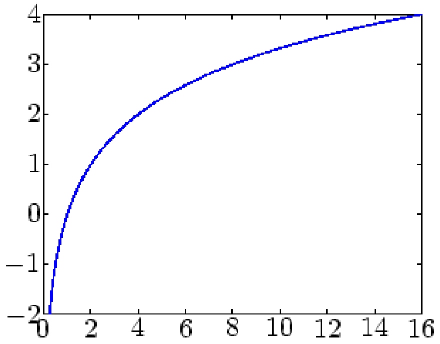
$$y = a^x = \exp(x \ln a)$$

د برعکس تابع(بلواک) $x = \log_a y, \quad y > 0.$ سره

په خانګي توګه د 10 په بنسټ لوګاریتم لپاره لیکو $\log = \log_{10}$ او $\mathrm{ld} = \log_2$ د دوه ګوني یا دوال لوګاریتم لپاره.



$f(x) = 2^x$



$f(x) = \mathrm{ld}(x)$

لیکونکی: هیولیک،کوپف

د توان او لوګاریتم لپاره شمیرقوانین

له تعریفونو او تابعمساواتو څخه د اکسپوننشل - او لوګاریتمي توابعو لپاره لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{aligned} a^{s+t} &= a^s\, a^t, & \log_a x + \log_a y &= \log_a(xy), \\ a^{s-t} &= a^s/a^t, & \log_a x - \log_a y &= \log_a(x/y), \\ (a^s)^t &= a^{st} & \log_a x^t &= t \log_a x\,. \end{aligned}$$

برسیره (سربېره) پر دې د مختلفو بنسټونو ترمنځ شمېربدلون لپاره اړیکې باور لري:

$$\log_b x = \log_b a\, \log_a x\,.$$

په ځانګړې توګه

$$\log x = (\log e) \ln x\,.$$

لیکونکی: هیولیک،کوپف

لاندې بېلګې د شمېرقاعدو استعمال روښانه کوي .

(i)

$$\ln(4x^2) - 2\ln(2) = \ln(2^2) + \ln(x^2) - 2\ln 2 =$$

$$= 2\ln 2 + 2\ln x - 2\ln 2 = 2\ln x$$

(ii)

$$\log_4(x^2) +$$

$$(2x) = 2\frac{\ln x}{\ln 4} + 1 + \frac{\ln x}{\ln 2} = 1 + \frac{\ln x}{\ln 2} + \frac{\ln x}{\ln 2} = 1 + 2\frac{\ln x}{\ln 2}$$ ld

لیکونکی: هیولیک،کوپف

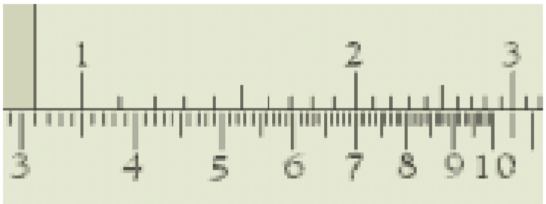
(c) ketabton.com: The Digital Library

د لوګاريتم شمېرونی

په لوګاريتم کې لاندې قانون باوري دی:

$$\log x + \log y = \log(xy).$$

له دې کبلخ کېدی شي دوه سکالا يا کچ‌ړونې یو په بل کېږدو او د نتسجې په توګه نه د دې عددونو جمعه بلکه ضرب لاس ته راځي.



د پورته څېرې څخه د بېلګې په توګه لاس ته راړو، چې $3.5 \cdot 2 = 7$. دلته لومړی 1 د پورته سکالا په 3.5 (لومړی ضریب) د په لاندې سکالا شمېرل کيږي. بالاخره 2 د پورته سکالا (دويم ضريب) د ضرب نتيجه په لاندې سکالا لوستل کيږي.

ليکونکي،هيوليګ.کوپف، ويپر

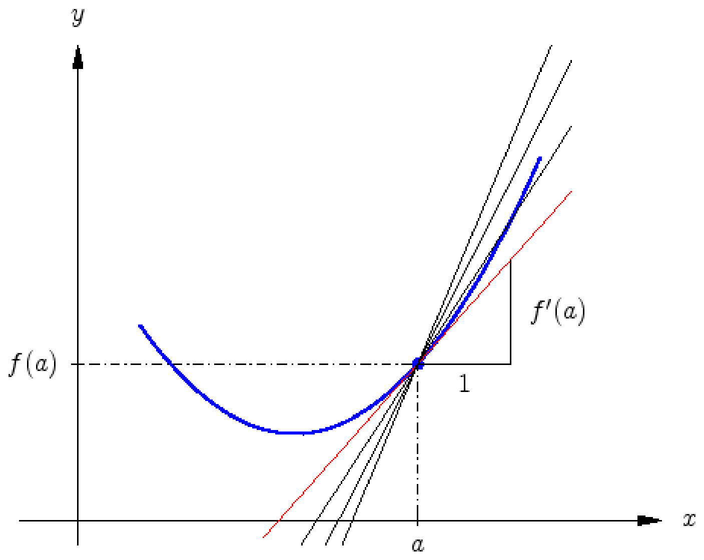
مشتق يا رابېلېدنه Ableitung

یو تابع f په یوه ټکي a کې مشتقوړ دی، که دا د رابېلېدنې يا مشتق په څېر نيوله شوې پوله(ليميټ)

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

شتون ولري

(c) ketabton.com: The Digital Library



هندسي مشتقوړوالی په دې معنا دی، چې د غ،خوون(قطاعو) جګېدنه چې د

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

سره ورکړل شوي د تانجنت جګوالي په لور وهځېږي یا کورګنت شي.

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x)$$

د دې لپاره هم لیکو او جګ مشتقونه د $f'', f''', \ldots$ او

همداسې د $f^{(2)}, f^{(3)}, \ldots$ سره ښایو. یو فنکشن f په یوه ډېرۍ D مشتقوړ بلل

کیږي، که $f'(x)$ د ټولو $x \in D$ لپاره شتون ولري.

لیکونکی:هیولیګ،کوپف

د تابع $f(x) = x^2$ مشتق

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2x + h) = 2x\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مشتق $f''(x) = 2$ یو ثابت دی.

د یوه په خوښه مونوم $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ لپاره ، بینوم د فرمول په مرسته لاس ته راځي

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} x^{n-1}h + O(h^2)}{h} = nx^{n-1},$$

د کوم سره چې $O(h^2)$ د نظم ترم h^2 په ګوته کوي.

لیکونکی:هیولیګ،کوپف

د $f(x) = \sin x$ مشتق کېدی شي د جمعې قضیې په مرسته وشمېرل شي.

له

$$\sin(t \pm h/2) = \sin t \cos(h/2) \pm \cos t \sin(h/2)$$

د $t = x + h/2$ سره کمښتېرښ لاس ته راکوي:

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{\sin\left((x+h/2)+h/2\right) - \sin\left((x+h/2)-h/2\right)}{h} =$$

$$= \frac{2\cos(x+h/2)\sin(h/2)}{h}.$$

له

$$\lim_{h\to 0} \frac{2\sin(h/2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h/2)}{h/2} = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

املہ بنی اړخ د $0 \to h$ لپاره د $\cos x$ په لور هڅيږي.

غوره (مهم) مشتقونه

لاندې جدول د غوره توابعو مشتقونه راکوي: :

$f(x)$	$f'(x)$		$f(x)$	$f'(x)$
c	0		x^r , $r \neq 0$	$r\,x^{r-1}$
e^x	e^x		$\ln\|x\|$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$		$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\cos x$	$-\sin x$		$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tan x$	$\tan^2 x + 1$		$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$		$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

ليکونکي: هيوليک، کوپف

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مشتق کرښیزوالی Linearität der Ableitung

مشتق کرښیز دی دا په دې معنا چې د مشتقوړ توابعو f او g لپاره صدق کوي

$$(rf)' = rf', \quad r \in \mathbb{R},$$

$$(f \pm g)' = f' \pm g'.$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د ضرب یا ځل قانون

د دوه مشتقوړ توابعو f او g مشتق دی

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

تولیز د $f = f_1 \cdots f_n$ ضرب لپاره صدق کوي:

$$f' = \sum_{i=1}^{n} f_i' \frac{f}{f_i}.$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د ضرب د قانو سره لاس ته رځي

$$\frac{d}{dx}(x^2 \ln x) = 2x \ln x + x^2 \frac{1}{x} = x(2 \ln x + 1).$$

که $\sin x$ د ضریب په حېیث ورزیات کړي، نو بیا د ضرب قانو ن استعمال لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{d}{dx}\left[\sin x(x^2\ln x)\right] = \cos x(x^2\ln x) + \sin x(x(2\ln x + 1))\,.$$

په بدیل ډول کېدی شي دا فرمول په ډېرواره ضرب وکارول شي او لاس ته اري راوړي

$$\frac{d}{dx}\left[\sin x(x^2\ln x)\right] = \cos x(x^2\ln x) + 2x(\sin x\ln x) + \frac{1}{x}(\sin x\, x^2)\,.$$

لیکونکي: هیولیګ، کرایخ

د وېش قانون Quotientenregel

د دوه مشتقوړ توابعو د وېش مشتق دی

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

په ټول ټکو x کې د $g(x) \neq 0$ سره. په ځانګړي توګه باور لري

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}\,.$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د راشنل تابع

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1-2x}{4+3x^2}$$

مشتق دی:

$$\frac{(1-2x)'(4+3x^2) - (1-2x)(4+3x^2)'}{(4+3x^2)^2} = \frac{-2(4+3x^2) - (1-2x)(6x)}{(4+3x^2)^2} =$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \frac{6x^2 - 6x - 8}{(4+3x^2)^2}$$

د ضرب قانون سره یې بدیل لاس تهراخي

$$\left((1-2x)\frac{1}{4+3x^2}\right)' = (-2)\frac{1}{4+3x^2} + (1-2x)\frac{-6x}{(4+3x^2)^2} = \frac{6x^2-6x-8}{(4+3x^2)^2}.$$

لیکونکي:هیولیک،کرایخ

زنځیري قانون

د توابعو دزنځیرونې

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

لپاره مشتق دی:

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

د $f(y) = z,\ g(x) = y,\ h(x) = z$ سره دا هم لیکل کیږي

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$$

.

)لیکونکي:هیولیک، کوپف

د زنځیر قانون

$$h(x) = \sin\left(\underbrace{\ln(1+x^2)}_{y=g(x)}\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د روښانه ونې لپاره تعريفيږي:

$$h'(x) = \frac{d}{dy}\sin(y)g'(x) = \cos\left(\ln(1+x^2)\right)g'(x)\,.$$

د دننني مشتق شمېرنه $g'(x)$ سر له نوې د زنځيري قانو له مخې صورت نيسي:

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2}(2x)\,.$$

بديلي کېدی شي مشتقيزه ليکندود وکارول شي. د

$$z = \sin y, y = \ln w, w = 1 + x^2$$

سره دی:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dw}\frac{dw}{dx} = \cos(y)\frac{1}{w}2x = \cos\left(\ln(1+x^2)\right)\frac{1}{1+x^2}(2x)\,.$$

ليکونکي:هيوليک، کوپف

ايمپليځيت مشتقوړ توابع

د بيلګې په توګه د

$$E:\ \ x^2 + 3y^2 = 7$$

له لارې ورکړ شوې ايليپسې (هګۍ يا بيضوي) له لارې لرو:

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 + 3y^2\right) = 2x + 6yy' = \frac{d}{dx}7 = 0$$

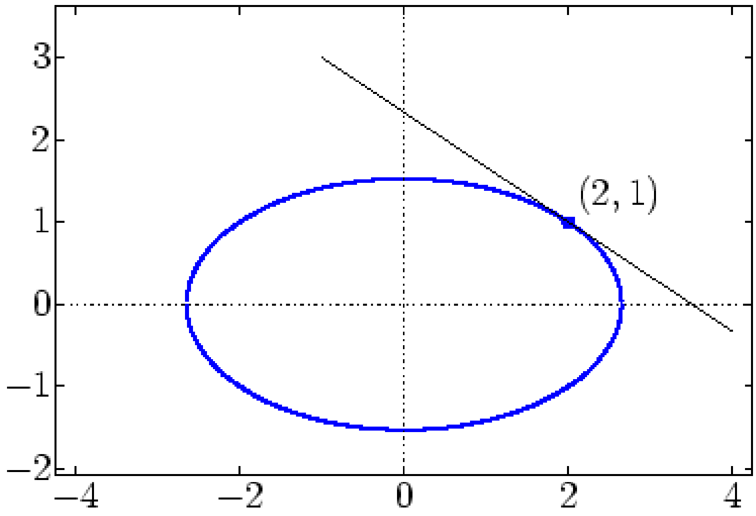
همداسې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y' = -\frac{1}{3}\,\frac{x}{y}$$
.

سره د تانجنت جګوالی $y \neq 0$ باندې په یوه ټکي د E له دې سره کیدی شي په لپاره لاس ته راځي $(2,1)$ وټاکل شي. د بیلګې په توګه د

$$y' = -\frac{1}{3}\frac{2}{1} = -\frac{2}{3}$$
.



په ورته توګه کیدی شي لوړ یا جګ مشتقونه هم وشمیرل شي. د yy' لپاره د ضرب قانون کارول یا استعمال له لارې دی

$$\frac{d}{dx}\,(2x + 6yy') = 2 + 6(y')^2 + 6yy'' = 0\,.$$

له دې لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y'' = -\frac{1 + 3(y')^2}{3y}$$.

ټاکلي $y'(x)$ د يوه ټکي د کواوردينات اېښوولو او همدا اوس د E بيرته په ارزښت له لارې څرګند ارزښتونه وټاکل شي.

ليمړنکي:هيوليګ،کنپف

لوګاريتمي مشتق

فرمول

$$f'(x) = f(x)\frac{d}{dx}\ln|f(x)|$$

کېدی شي د بڼې $y = g(x)^{h(x)}$ مشتق نيوني ته د $g(x) > 0$ سره وکارول شي. لاس ته راځي

$$\frac{dy}{dx} = g(x)^{h(x)}\frac{d}{dx}\Big(h(x)\ln g(x)\Big) .$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

تابع

$$f(x) = x^x$$

د $x > 0$ سره مشتق دی.

$$f'(x) = x^x\frac{d}{dx}\ln(x^x) = x^x\frac{d}{dx}\left(x\ln x\right) = x^x(\ln x + 1) .$$

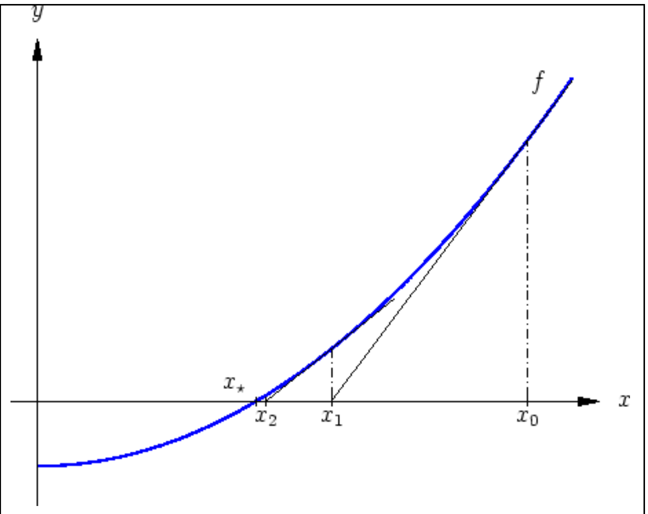
(c) ketabton.com: The Digital Library

د $g(x) = x^{\ln x}$ لپاره لاس ته راځي

$$g'(x) = x^{\ln x} \frac{d}{dx} (\ln x)^2 = 2x^{\ln x} \frac{\ln x}{x} .$$

ليکونکي: اېپ، هيوليګ

نيوټن تلنلار يا قانون Newton-Verfahren

د نيوټن قانون سره د يوه تابع f صفرځای کېدی شي و ټاکل شي. د $x_0, x_1 \ldots$ پرلپسي يا ترادف نږدې ارزښتشمېرني يا Approximation د کرښيزوالی له لارې وګټل شي. نږدېونه x_{l+1} د تانجنتِ غوڅټکی دی په ټکي $(x_l, f(x_l))$ کې د x - محور سره. $x_{l+1} = x_l - f(x_l)/f'(x_l)$	

د يوه ساده صفرځای $x_\star$ ($f'(x_\star) \neq 0$) لپاره د نيوټن –ايتراشن Newton-Iteration ځای - لوکالي مربعيز پولې ته هځيږي (کونورګنت) ، دا په دې معنا چې

$$|x_{l+1} - x_\star| \leq c \; |x_l - x_\star|^2$$

د پيلټکي x_0 لباره د $x_\star$ په يوه پوره کوچني چاپيريال کې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بابلیانو ریښه (جذر)نیونه

داد بابلیانو ښخه کارول شوی ایتراشن(لاتین : تکرار Iteration)

$$x \longleftarrow (x + a/x)/2$$

د یوه مثبت عدد a دریښي شمېرلو لپاره د ټیکي کتني ښخه د نیوټن -تګلار په څېر د $f(x) = x^2 - a$ لپاره ځان راباسي

$$\frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) = x - \frac{x^2 - a}{2x}$$

د $a = 2, x_0 = 1$ لپاره نږدې شمېرنې (Approximationen) لاس ته راځي.

1

1.5

1.416666666666666666666666666666666667

1.414215686274509803921568627450980392157

1.41421356237468991062629557889013491011 7

1.414213562373095048801689623502530243615

1.414213562373095048801688724209698078570

پولې ته تلنه خورا ګړندی ده. د هر پل سره د ټیک شوو ځایونوتعداد په نږدې توګه (د کرښې سره په نخښنه شوی) دوه واره کیږي. مربعیز پولې ته تلنه کېدی شي په دې بېلګه کې د ساده بڼه بدلون سره وښوول شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_{l+1}-\sqrt{a}=(x_l+a/x_l)/2-\sqrt{a}=\frac{1}{2x_l}(x_l-\sqrt{a})^2.$$

$x_0 \neq 0$

د نیوټون تلنلار هندسي روښانه وني ښخه لاس ته راځي، چې د ټولو لپاره تکرار پولې ته ځي.

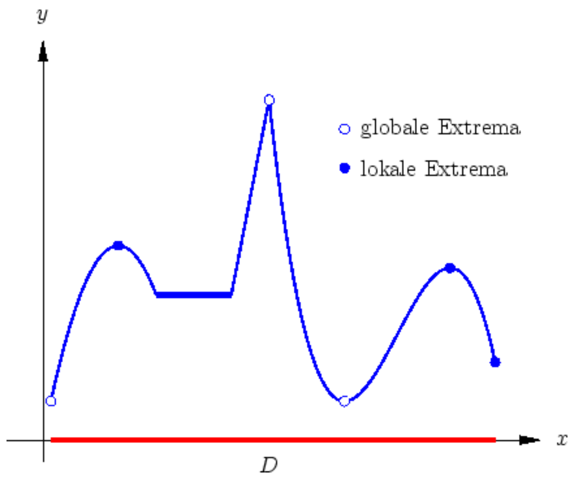
افراطیت Extrema

یو تابع f په a کې په ډېرې D یو ځای اړوند مینیموم لري، که وي:

$$f(a) \leq f(x) \quad \forall x \in D.$$

د ځای اړونده مینیموم سره د تابع ارزښت $f(a)$ په یوه خورا کوچني چاپېریال $(a-\delta, a+\delta) \cap D$ کې مینیموم دی.

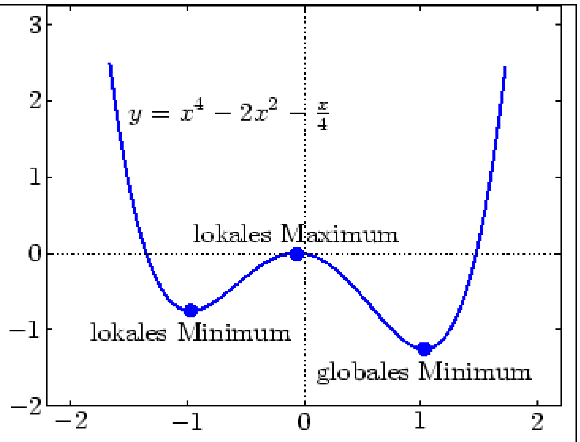
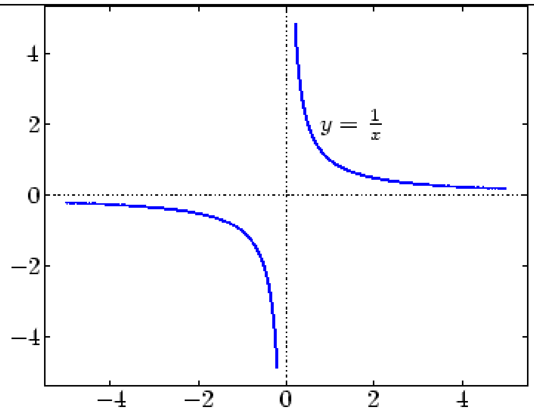
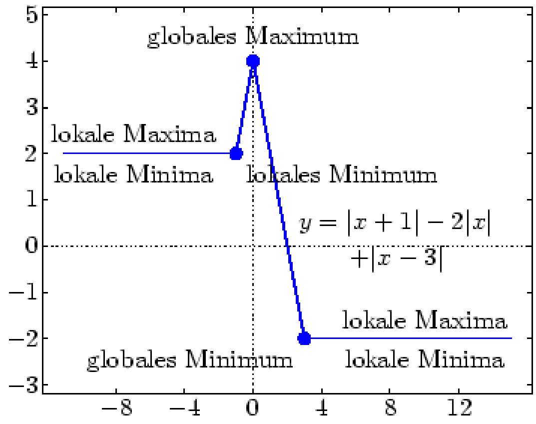
ګلوبال او لوکال (مطلق او ځای اړونده) خورا جګ ارزښتونه (ماکسیموم) په ورته توګه تعریف دي.



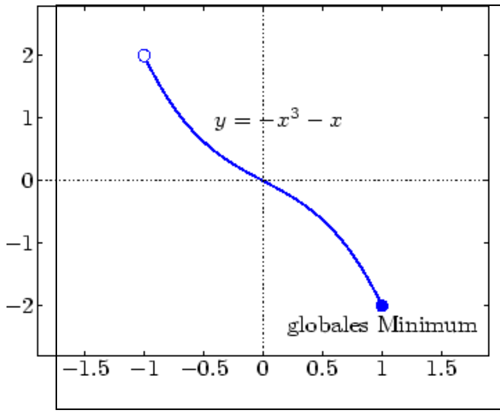
په یوه بند انټروال په ټوټه ډول نابرېکېدونی او مشتقوړ تابع کېدی شي افراطي ارزښتونه فقط د مشتق په په صفرځایونو، پرېکېدځایونو یا ژۍ ټکو کې رامنځ ته شي. دا ډول تیوپ کېدی شي د ځګو مشتقونو په مرسته او دتابع ارزښتونو د پرتله کوني له لارې پیدا کړای شي. لیکونکي:هیورنر،هیولیګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې کې به یو څو تیوپیکي حالتونه تر بحث لاندې راښي یا و څېړل شي.

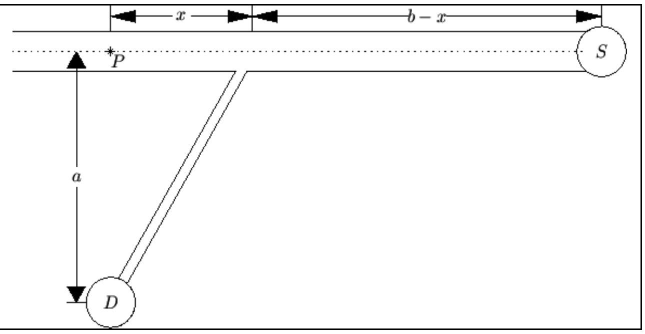
تابع $f(x) = x^4 - 2x^2 - x/4$ د $D = \mathbb{R}$ سره دوه مینیما لري او یو ماکسیما. مینیمومو د خورا کوچني تابع ارزښت سره مطلقه دی. یو مطلق ماکسیما شتون نه لري، ځکه چې د $x \to \pm\infty$ لپاره $f(x) \to \infty$.	
تابع د $f(x) = 1/x$ $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ سره کوم افراطي ارزښت نه لري. که یو تابع په واز انټروال کې ثابت وي، نو دا ځایونه (ځاییز (ځای اړونده) یا لوکال) ماکسیمال او هم (ځایز) مینیمال دي، د یوه کره یوغږیز تابع سره افراطی ارزښتونه د ژی ټکو سره نیول کیږي، که دا دد تعریفورشو پوری اړه ولري.	
	

(c) ketabton.com: The Digital Library



لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

له یوه کلي D څخه یوه ښار S ته یو سرک جوړیږ ي. کلي ته په واټن a همدا اوس ښار ته یوه شاه لار (ګړندی لار) جوړه ده. د ښار څخه د P ټکي پورې ، چې کلي ته نږدې ګړندی لار پرته ده، اوږدوالی b لري.



سیده کرښیزه توته لار جوړیږي.له کومې چې ښا رته زر رسېدل تظمینوي، که په ګړندی لار له $v_a = 120$ km/h منځنی چټکتیا(سرعت) او $v_n = 60$ km/h په دنوې څنګیزه توته لار لاړ شي.

واټن $x \ge 0$ د P او فرعي توته سرک ترمنځ په ګړندي د واټن $x \ge 0$ شمېرنه د اړیین وخت د مینیمال کولو له لارې.

$$t(x) = \sqrt{a^2 + x^2}/v_n + (b - x)/v_a$$

ښار ته د رسیدو لپاره .

د مشتق صفر اینسوونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$t'(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2} v_n} - \frac{1}{v_a} \stackrel{!}{=} 0\,,$$

راکوي

$$v_a x = v_n \sqrt{a^2 + x^2} \quad \Leftrightarrow \quad x_m = a/\sqrt{3}$$

د لوکال انحرافي ځای په څېر. ایا چې دا مینیموم دی، باید دا د وهل شوې لار وخت د انتروال د پای ټکو لپاره و ازمایل شي:

$$t(a/\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}a + b}{v_a}\,, \qquad t(0) = \frac{2a + b}{v_a}\,, \qquad t(b) = \frac{2\sqrt{a^2 + b^2}}{v_a}$$

په روښانه توګه $t(0) \geq t(x_m)$ دی. نامساوات $t(b) \geq t(x_m)$ ورته دي و دې لاندې ته:

$$t(b) \geq t(x_m) \quad \Leftrightarrow \quad 2\sqrt{a^2 + b^2} \geq \sqrt{3}a + b$$

$$\Leftrightarrow \quad 4a^2 + 4b^2 \geq 3a^2 + 2\sqrt{3}ab + b^2$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2 - 2\sqrt{3}ab + 3b^2 = (a - \sqrt{3}b)^2 \geq 0\,.$$

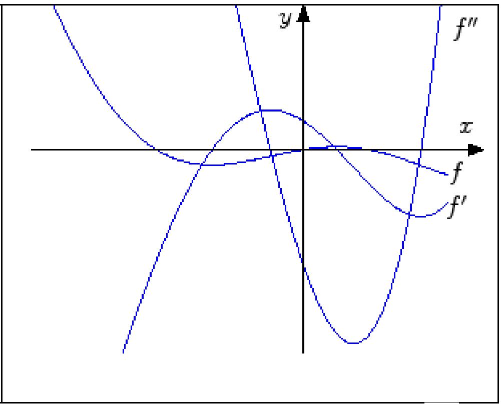
دا اخرني نامساوات تل پوره کیږي، او له دې سره x_m اوپټیمال دی، که $b \geq a/\sqrt{3}$ وي.

په بل حالت کې x_m په انتروال $[0, b]$ کې نه دی پروت او په ژې ټکي b پروت مینیموم ته ، یعنې ښار ته په سیده تړنلار، رسېدی شي.

لیکونکي:هیورنر، هیولیګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

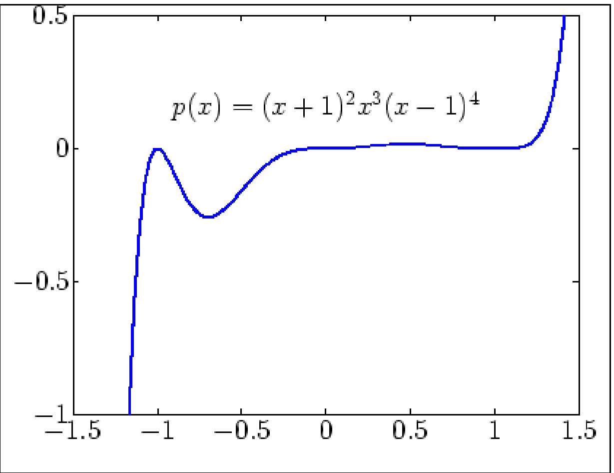
افراطي ارزښتونو ازمايښت Extremwerttest

	د افراطي ارزښتونو ډول يا تيوپ باندې کيدی د جګو مشتقونو په مرسته پرېکړه وشي که f دوه واره ناپرېکېدونکی او مشتقوړ وي او $f'(a) = 0\,, \qquad f''(a) > 0$ $(f''(a) < 0)\,,$

نو f په a کې يو ځای اړونده مينيموم(ماکسيموم) لري. که دويم مشتق د a په ځای کې ورک شي، نو بايد جګ مشتقونه پرېکړې ته راکښل شي يا راوړل شي. که باور ولري:

$$f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0 \quad \text{او} \quad f^{(n)}(a) \neq 0\,,$$

نو f په a کې تيک هلته يو افراطي ځای لري، که جوړه وي. په دې حالتکې f په a کې يو ځای اړونده خورا جګ – يا همداشي خورا تيټ تکی لري، که $f^{(n)}(a) < 0$ همداسې $f^{(n)}(a) > 0$ وي.

پولينوم $p(x) = (x+1)^2 x^3 (x-1)^4$ په $x = -1$ کې يو ډبل، په $x = 0$ کې يو درېواره او په $x = 1$ کې يو څلورواره صفرځای لري.	

(c) ketabton.com: The Digital Library

صدق کوي

$$p(-1) = p'(-1) = 0, \quad p''(-1) = 2(-1)^3(-2)^4 < 0\,.$$

په $x=-1$ کې p یو مینیموم لري. په $x=1$ کې p یو ماکس لري، ځکه چې

$$p(1) = \ldots = p'''(1) = 0, \quad p^{(4)}(1) = 2^2 1^3 4! > 0\,.$$

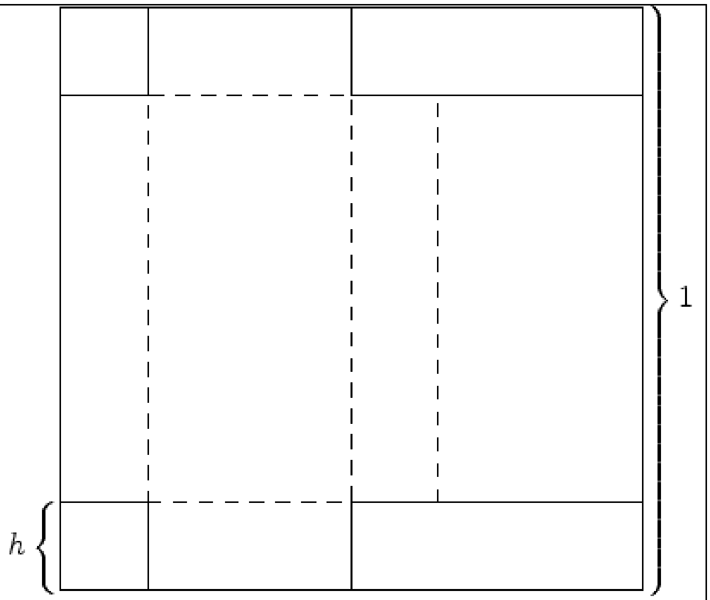
بالاخره د p

$$p(0) = p'(0) = p''(0) = 0, \quad p'''(0) = 3!(-1)^4 \neq 0$$

له امله او یو مخنخبنه بدلون په $x=0$ کې په سرچینه کې افراطي ځای نه شته.

کوتۍ Schachtel

د دې ورکړ شوي غوښ نمونې په مرسته دې د یوه مربع ډوله کارتوني کاغذ څخه خورا لوي کوتی جوړشي، چې خورا لوي حجم (ډکی) لري.



(c) ketabton.com: The Digital Library

حجم یا ډکی دی:

$$v(h) = \underbrace{(1-2h)/2}_{\text{Länge}} \cdot \underbrace{(1-2h)}_{\text{Breite}} \cdot \underbrace{h}_{\text{Höhe}} = 2h^3 - 2h^2 + \frac{1}{2}h$$

اوږدوالی سور جګوال

د مشتق صفرځایونه

$$v'(h) = 6h^2 - 4h + \frac{1}{2} \stackrel{!}{=} 0$$

تريې

$$h = \frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} - \frac{1}{12}} = \frac{1}{3} \pm \frac{1}{6}$$

د ممکنه ځای اړونده افراطي ځایونه لاس ته راځي. فقط $h = \frac{1}{6}$ هندسي موخه ور

$$v(1/6) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{27}.$$

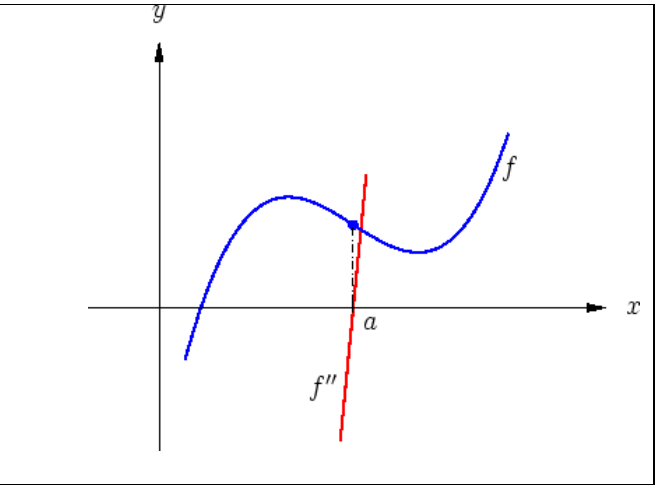
دی او .

دا چې د ژۍ ټکو $h = 0$ او $h = 1/2$ لپاره حجم یا ډکی دی، نو کوتی د $h = 1/6$ لپاره خورا لوي حجم لري.

لیکونکي: هیولیک،هیورنر

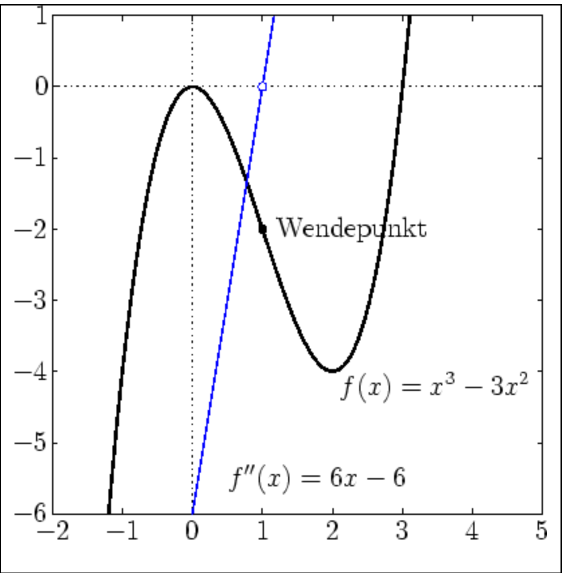
اوړونټکي (نقاط انعطاف Wendepunkte)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یو تابع f په یوه اوړونټکي a کي دویم مشتق مخنخبنه بدلوي (یعني په دې ټکي کې تابع خپله لور بل لور ته اړوي) .	

د یوه پوره هوار تابع لپاره اړین دی، چې $f''(a) = 0$ او پوره دی، چې $f'''(a) \neq 0$

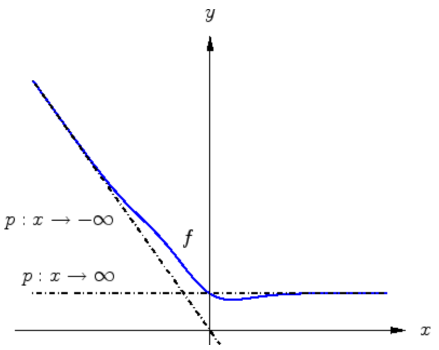
لیکونکي: هیولیک،هیورنر

تابع یو مکعبي پولینوم ښايي. دا چې دویم مشتق کربنیز دی، نو ټیک یو اوړونټکی(د انعطاف ټکی) شتون لري لیکونکي: هیولیک، هیورنر	

ګاونډې یا لنډ: ګاوند (مجاورتها Asymptoten)

(c) ketabton.com: The Digital Library

یو تابع د یوه تابع f اسیمپتوت دی ، که $f(x) - p(x) \to 0$ وي د $x \to \infty$ یا د $x \to -\infty.$ لپاره.



په ورسره بلد ډول p د f په څېر یوه ساده بڼه لري او د دې په چوپېرکې ، چې د $f(x)$ د ځرنګوالي حالت د لوی x لپاره وڅېړي.

د ځانګړو معناو کربنیز اسیمپتوتونه $p(x) = ax + b$ دي. دوي د نورو ترڅنګ د منحني یا کږو بحث کې یو رول لوبوي.

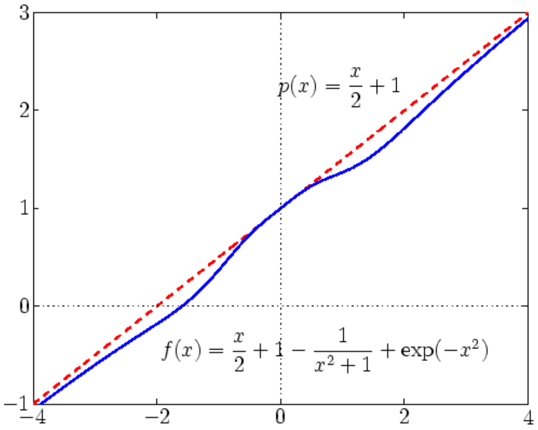
لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د یوه ځېره شوي یا متشکل شوي تابع $f(x)$ لپاره د $|x| \to \infty$ لپاره تناسب د کربنیزو ترمونو له خوا تاکل کیږي، ځکه چې

$$\lim_{|x|\to\infty} \exp(-x^2) = \lim_{|x|\to\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0 \,.$$

له دې لاس ته راړني سره کربنه $p(x) = x/2 + 1$ اسیمپتوت ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library



ليکونکي: هيوليک، هيورنر

د راشنلتابع ګاونډ يا- اسيمپټوتونه Asymptoten rationaler Funktionen

يو راشنل تابع

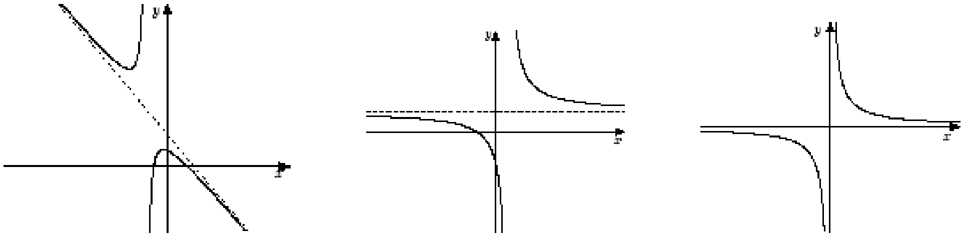
$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

ټيک هلته يو کرښيز اسيمپټوت لري که $q+1$ له ګراد يادرجي $p \leq$ وي.

د Grad q < Grad p لپاره باور لري

$$\lim_{p \to \pm\infty} r(x) = 0\,,$$

داپه دې معنا چې د x -محور اسيمپټوت دی.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د $q+1$ Grad $p \leq$ Grad $q \leq$ Grad e لپاره اسیمپتوت لاس ته راځي د پولینوموېش له خوا:

$$r(x) = ax + b + \frac{\tilde{p}(x)}{q(x)}$$

د Grad $\tilde{p} < q$ Grad سره. اسیمپتوت پرته (افقي) ده $(a = 0)$ ، که Grad $p = q$ Grad. وي.

که د صورا درجه له یوه څخه زیاته د محرج له درجې لویه وي، نو یوه اسیمپتوتیکي پولینوم لري د ≥ 2 درجې

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

د راشنل توابعو

$$r_1 = \frac{4x+3}{2x+1}$$ او $$r_2 = \frac{2x^2}{x+1}$$

لپاره دپولینوم وېش له لارې لاس ته راځي:

$$r_1(x) = 0x + 2 + \frac{1}{2x+1}$$

او

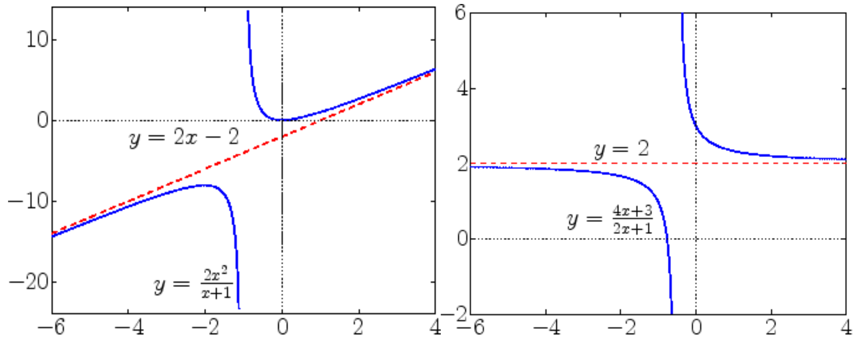
$$r_2(x) = 2x - 2 + \frac{2}{x+1}$$

اسیمپتوت یا ګاونډ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$y_1 = 2$ او $y_2 = 2x - 2$.

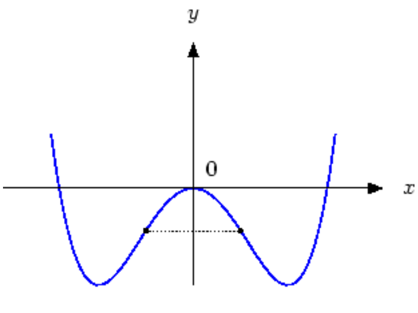
دا دوه بېلګې په لاندې ځېرو کې روښانه شوې دي.



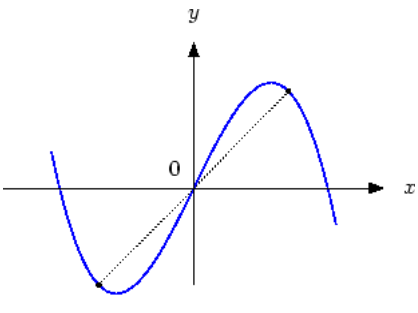
ليکونکي: هيوليک، هيورنر

سيومتري Symmetrie

يو تابع f جوړه(جفت) دی، که $f(x) = f(-x)$ وي ، دا په دې معنا، چې که ګراف د y-محور ته سيومتري وي. د يوه ناجوړه (تاق) تابع لپاره $f(x) = -f(-x)$ دی، او ګراف و سرچينې ته ټکی سيومتريک دی.



gerade Funktion



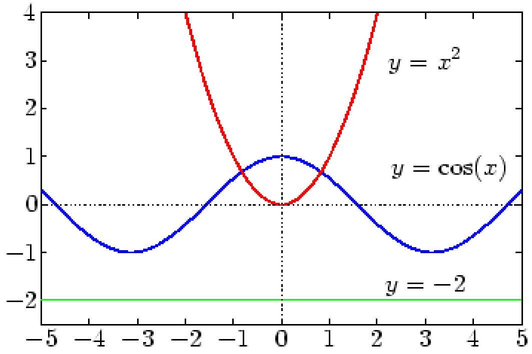
ungerade Funktion

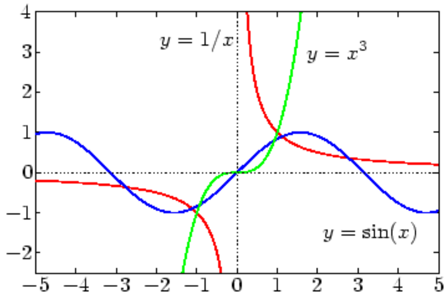
(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه جوړه او ناجوړه توابعو ضرب جوړه دی. د دې برعکس د یوه جوړه او یوه ناجوړه تابع ضرب ناجوړه یا طاق دی. د جمعې او تفریق جوړولو سره ډول ساتلی پټیږي.

لیکونکي: هیولیک، هیورنر،کنش

دا لاندې څېره ښي لور ته یوڅو جوړه او کیڼ لور ته یو څو ناجوړه توابع ښایي.





د مناسبو کمبینېشنونو جوړولو سره نورې بېلګې لاس ته راځي. نو توابع

$$f(x) = x^2 \cos x - x^3 \sin x, \qquad g(x) = -2 + \frac{1}{x^2}$$

جوړه دي او

$$h(x) = f(x) \sin x - g(x) x^3$$

ناجوړه دي.

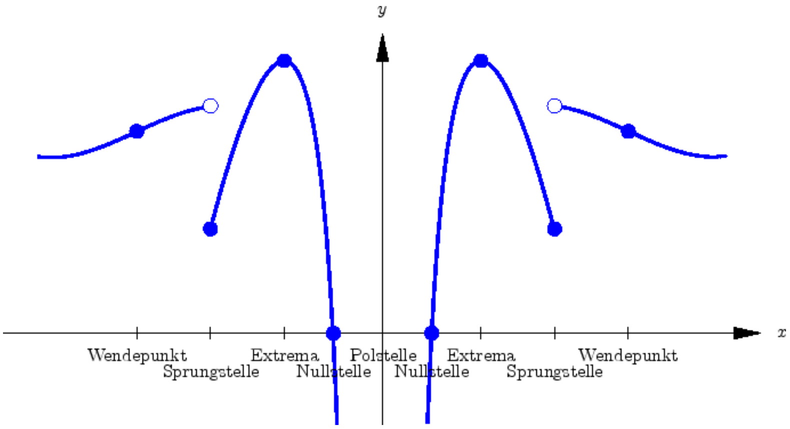
لیکونکي: هیولیک، هیورنر،کنش

د کږو یا منحنیو خبرې اترې(بحث)

د یوې تابع د ځرنګوالي حالت د قضاوت لپاره کېدی شي لاندې ټکي په پام کې ولرل شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

- Symmetrienسیومتر
- Periodizität تل بېرته راګرځېدنوالی
- Unstetigkeitsstellenپرېکېدنځایونه
- (Nullstellen ⟶ Vorzeichen مخنښنه (صفرځایونه
- (Extrema ⟶ Monotoniebereiche همغږيزوالي وشوګانې) افراېيت
- (Wendepunkte ⟶ Konvexitätsbereiche د کونوکسی ورشو) اوړونټکی د انعطافنقطه
- Polstellenقطبځایونه
- Asymptotenاسمپتوتي یا ګاونډيتوبونه



د توابعو داسې یو تحلیل د ګړو خبرې اترې یا د منحنیو بحث بلل کیږي

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د کړو بحث ښوول یا روښانه ولو لپاره تابع

$$f(x) = \sin x + \frac{1}{3}\sin(3x)$$

ځیرو .

سیمتري: دا چې $\sin x = -\sin(-x)$ ناجوړه تابع دی..

(c) ketabton.com: The Digital Library

تل ببرته راګرځېدنه یا پریودیڅیتي: تابع پخپله لکه د ساین تابع پخپله 2π - پریودي ده او په راتلونکي کې فقط په انټروال $[-\pi,\pi]$ ترڅېړنې راځي.

د پرېکېدنې ځایونه: تابع له ناپرېکدونکو توابعو مرکبه جوړه شوې او له دې امله پرېکېدنځایونه نه لري.

صفرځایونه: د جمعي(زیاتون) قضیې سره $\sin(3x) = 3\sin x - 4\sin^3 x$

دی:

$$f(x) = 2\sin x - \frac{4}{3}\sin^3 x = \sin x \underbrace{\left(2 - \frac{4}{3}\sin^2 x\right)}_{\neq 0}.$$

تابع په 0 او $\pm\pi$ کې صفرځایونه لري..

افراطیت: تابع

$$f'(x) = 2\cos x - 4\sin^2 x\,\cos x = -2\cos x + 4\cos^3 x \stackrel{!}{=} 0$$

د $\cos x = 0$ یا $\cos x = \pm 1/\sqrt{2}$ لپاره ورکیږي ، نو

$$x = \pm\pi/2 \quad \vee \quad x = \pm\pi/4 \quad \vee \quad x = \pm 3\pi/4.$$

دا چې تابع په ټول $\mathbb{R}$ تعریف او پریودیکي ده، ژیټکي ترڅېړنې نه راځي.

د دویم مشتق د مخنخښې یعنې

$$f''(x) = 2\sin x - 12\cos^2 x\,\sin x$$

مخنخښې او تابع ارزښتونو د پرتله کونې له لارې کېدی شي د افراطیت تیوپ یا ډول وټاکل شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

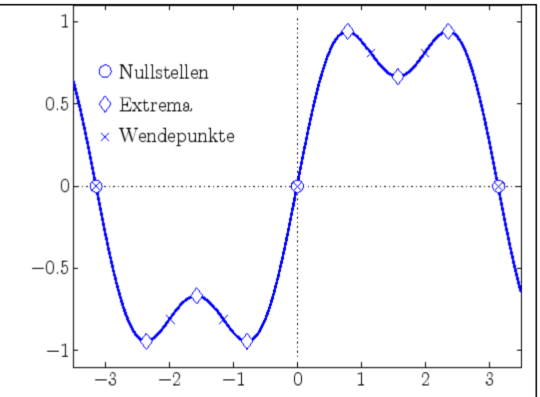
x	$f(x)$	$f''(x)$	Typ
$-3\pi/4$	$-\sqrt{8}/3$	$2\sqrt{2} > 0$	globales Minimum
$-\pi/2$	$-2/3$	$-2 < 0$	lokales Maximum
$-\pi/4$	$-\sqrt{8}/3$	$2\sqrt{2} > 0$	globales Minimum
$\pi/4$	$\sqrt{8}/3$	$-2\sqrt{2} < 0$	globales Maximum
$\pi/2$	$2/3$	$2 > 0$	lokales Minimum
$3\pi/4$	$\sqrt{8}/3$	$-2\sqrt{2} < 0$	globales Maximum

اوړونټکی(نقطه انعطاف)

$$f''(x) = 2\sin x - 12\cos^2 x \sin x = -10\sin x + 12\sin^3 x \stackrel{!}{=} 0$$

د $\sin x = 0$ یا $\sin x = \pm\sqrt{5/6}$ لپاره پوره دی، دا په دې معنا چې

$$x = 0 \quad \vee \quad x = \pm\pi \quad \vee \quad x \approx \pm 1.15 \quad \vee \quad x \approx \pm 1.99$$



په دې ځای کې دریم مشتق صفر نه دی. نو تابع په $(0,0)$ او $(\pm\pi,0)$ کې اوړونټکي لري، همداسي په $(-1.99,-0.81)$, $(-1.15,-0.81)$, $(1.15,0.81)$ او $(1.99,0.81)$ کې نږدې ازښتونه لري.

قطبونه : ناپرېکیدونکي توابع قطبځایونه نه لري.

اسیمپتوتونه: تابع پریودیکي او نا ثابت دی، نو اسیومپتوتونه نه لري.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

بېلګه :

د یوه کرږ بحث د ښوونې لپاره یو تابع

$$f(x) = \frac{5x^3 + 4x}{20(x-1)(x+1)}$$

ترڅېړنې لاندې نیول کیږی.

سیومتري: صورت ناجوړه(طاق) او مخرج جوړه(جفت) دی. نو تابع ناجوړه دی، داپه دې معنا چې سرچینې ته ټکی سیومتریک دی.

پریودیوالی یا تل بېرته راګرځېدنوالی: تابع پریودیکي نه دی.

د پرېکېدنې ځایونه: صفرځایونه ± 1 د صورت صفرځایونه نه دي . له دې سره f په $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ باندې ناپرېکېدونکی دی.

صفرځایونه: صورت د $x = 0$ لپاره ورکیږی.

افراطیت:

$$f'(x) = \frac{5x^4 - 19x^2 - 4}{20(x^2-1)^2} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2$$

دا چې تابع ساده صفځایونه لري، نو افراطیت فقط ځای اړوند دی. افراطي ارزښتونه دي:

$(-2, -4/5)$ ځای اړوند خورا جګ ټکی ، $(2, 4/5)$ ځای اړوند خورا ټیټ ټکی.

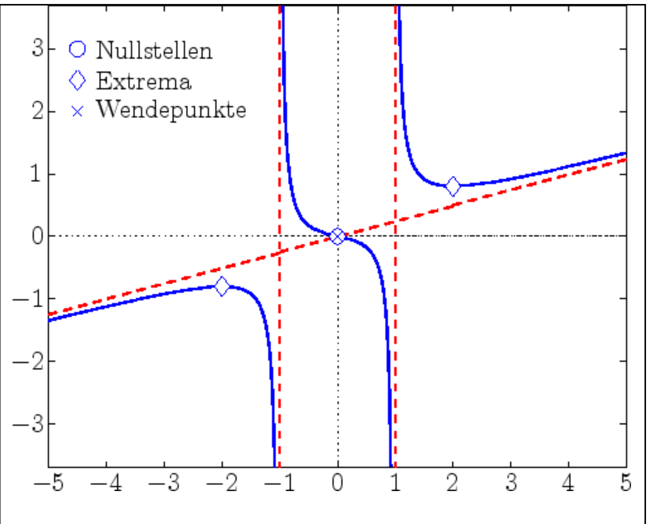
له دې سره کېدی شي، چې د f ډول یا تیپ د کوالیتاتیو حالت څخه. دا چې $f(x) \to -\infty$ د $x \to -\infty$ او $x \to -1$ لپاره ، باید په انتروال

کي یو ځای اړونده مینیموم ولري. په ورته توګه په $(1,\infty)$ کي $(-\infty,-1)$
لږ تر لږه یو ځای اړونده خورا ټیټ ارزښت.

اوړونټکی (نقطه انعطاف) :

$$f''(x) = \frac{-80x^5 + 398x^3 + 42x}{20(x^2-1)^3} \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

په دې ځای کې دریم مشتق صفر نه دی.



قطبځایونه: تابع په $x = \pm 1$ کې ساده صفرځایونه لري،

اسیمپتوټونه: دیوه پولینوم وېش څخه

$$p(x) = 5x/20 + 0 = x/4$$

د اسیمپتوت په توګه لرو.

لیکونکي:هیولیک،هیورنر

بېلګه:

د کږې یا منحني بحث لپاره لاندې تابع تر څېړنې لاندې نیسو:

$$f(x) = e^{-x^2} + \frac{4|x|}{e^4}$$

سیومتر:

داچې x^2 او $|x|$ جوړه دي تابع جوړه دی، داپه دې معنا چې سیومتریک و y-محور ته.

پریودیوالی: تابع پریودیک نه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پرېکېدنځایونه: تابع د ناپرېکېدنتوابعو څخه مرکبه (یوځای اینول) شوې ده او له دې امله پرېکېدنځایونه نه لري. لکه د مطلق ارزښت توابعولپاره ټول مشتقونهپه صفرځای کې پرېکېدونکي دي.

صفرځایونه: اکسپوننشل تابع تل مثبتّ(زاتیزه) ده، د مطلق ارزښت تابع نامنفي ده. نو صفرځایونه نه شته.

افراطیت:

$$f'(x) = -2xe^{-x^2} + \frac{4}{e^4}\text{sign}(x) \stackrel{!}{=} 0,\ x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2\,.$$

سربېره پردې دې کریتیکل ټکی $x = 0$ په پام کې وي، چېرته چې مشتق پرېکېدونکی دی.

تابع په ټول $\mathbb{R}$ تعریف دی، د x د $\pm\infty$ په لور حالت ته دې پام وي.

دا چې $f(x) \to \infty$ د $x \to \pm\infty$ لپاره f لږ ترلږه یو مطلق مینیموم لري، مگر هیڅ مطلق ماسیموم. پرتله د y - ارزښت کریتیکل ټکي

$$(-2, 9/e^4) \qquad (0,1) \qquad (2, 9/e^4)$$

ښايي، چې په $x = \pm 2$ کې مطلق مینیموم نیولکیږي. داچې f په انتروال $[-2, 2]$ یو مینیموم او هم یو ماکسیموم لري، لاس ته راځي چې $(0,1)$ یو ځای اړونده مینیموم دی.

اوړونټکي :

$$f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad 4x^2 = 2 \quad \Rightarrow$$

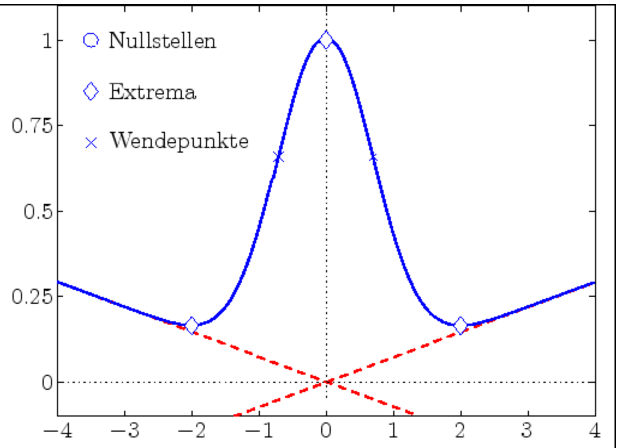
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Rightarrow \quad x = \pm 1/\sqrt{2}$$

دیم مشتق په دې ځای کې $\neq 0$ دی.

<table>
<tr>
<td>قطبځایونه: تابع قطبځایونه نه لري.

اسیمپتوتونه: دا چې e^{-x^2} له $|x|$
څخه د $x \to \infty$ لپاره ګړندی د
صفر په لور درومي، تابع اسیمپتوت
$p_+(x) = \frac{4x}{e^4}$
او ی:

لیکونکي هیورنر، هیولیګ</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

د ریمن انتیګرال Riemann-Integral

دیوه توټه ږوله (په توټه توټه کې) ناپرېکېدونکی تابع f ټاکلی انتیګرال د

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|\Delta|\to 0} \int_a^b f_\Delta = \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_k f(\xi_k)\,\Delta x_k$$

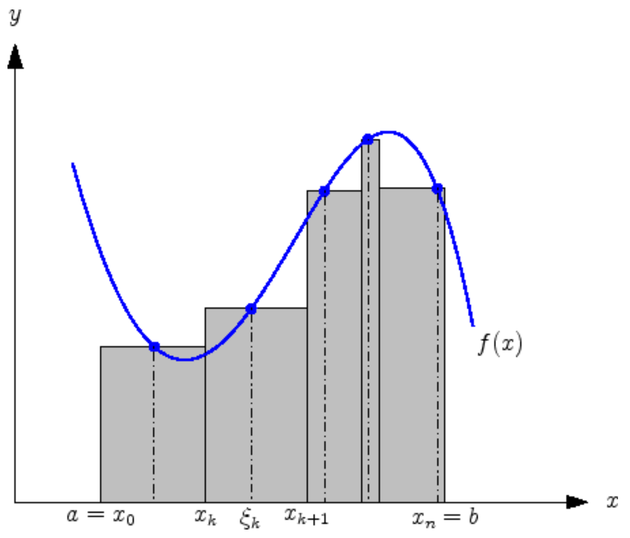
له خوا یا سره تعریف دی. دلته $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ د $[a,b]$ توټه ونه ښایي،

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}\,, \qquad |\Delta| = \max_k \Delta x_k\,,$$

د انتروال ماکسیمال اوږدوالی دی او

ξ_k په خوښه ټکی دی په k -م انتروال کې. د انتیګرال تعریف په بڼې لور جمعې د ریمن – جمعو په نامه یادیږی.

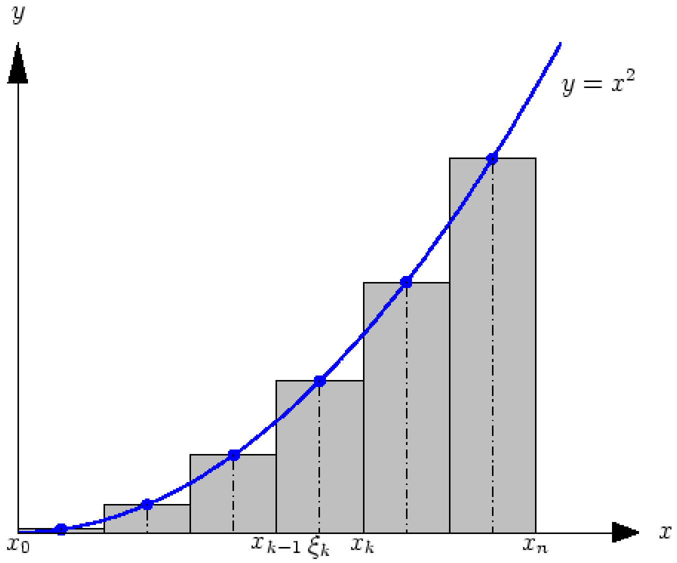
(c) ketabton.com: The Digital Library



د مثبت f لپاره $\int_a^b f(x)\,dx$ د سطحې مساحت دی د f د ګراف لاندې.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنرو ویپر

د $\int_0^1 x^2\,dx$ د ریمن انتیګرال په حیث راوړنې سره کېدی شي د ټوټه ونو پرلپسې(ترادف)



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Delta_n : x_i = i/n \, , \, i = 0, \ldots , n \, ,$$

وکارول شي د ارزښت شوو ځايونو

$$\xi_i = (2i-1)/(2n) \, , \, i = 1, \ldots , n \, ,$$

سره د n -مې توته ونې لپاره.

د تعريف سره سم لاس ته راځي:

$$\int f_{\Delta_n} =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \left(\frac{2i-1}{2n} \right)^2 = \frac{1}{4n^3} \left(4 \sum_{i=1}^{n} i^2 - 4 \sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1 \right)$$

$$= \frac{1}{4n^3} \left(\frac{4n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{4n(n+1)}{2} + n \right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{12n^2}$$

او له دې سره

$$\lim_{n \to \infty} \int f_{\Delta_n} = \frac{1}{3}$$

.

بنسټيزه تابع Stammfunktion

يو تابع F د $F' = f$ سره د f بنسټيز تابع ده، او د دې لپاره ليکو

$$\int f(x) \, dx = F(x) + c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټول بنسټيزو توابعو ډېرى يا سټ د ى ، چې د f ناټاکلى انتيګرال بلل کيږي. د انتيګرېشن ثابته په خوښه ده. د بېلګې په توګه

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

د $F_a(a) = 0$ سره يو ممکنه بنسټتابع دى.

د ټولو ساده توابعو لپاره د داسې بنسټيزو توابعو داسې اکسپلېڅيت ورکړه ممکنه نه ده، د دې لپاره بيلګه ده: $f(x) = \exp\left(x^2\right)$.

هر تابع

$$F_1(x) = x^3 + 2\,, \quad F_2(x) = x^3\,, \quad F_3(x) = x^3 - 1$$

د

$$f(x) = x^2\,.$$

يو بنسټيز تابع دى.

د $f(x) = \frac{1}{x}$ لپاره د $c > 0$ سره

$$F(x) = \ln(c|x|)$$

يو بنسټيز تابع دى.

ليکونکي: هيوليک،کرايڅ

د انتيګرال شمېرنې اصلي جمله

(c) ketabton.com: The Digital Library

که F د یوه ناپرېکېدونکي تابع f بنسټیزه تابعوي، داپه دې معن، چې $f = F'$ ،
نو باور لري

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

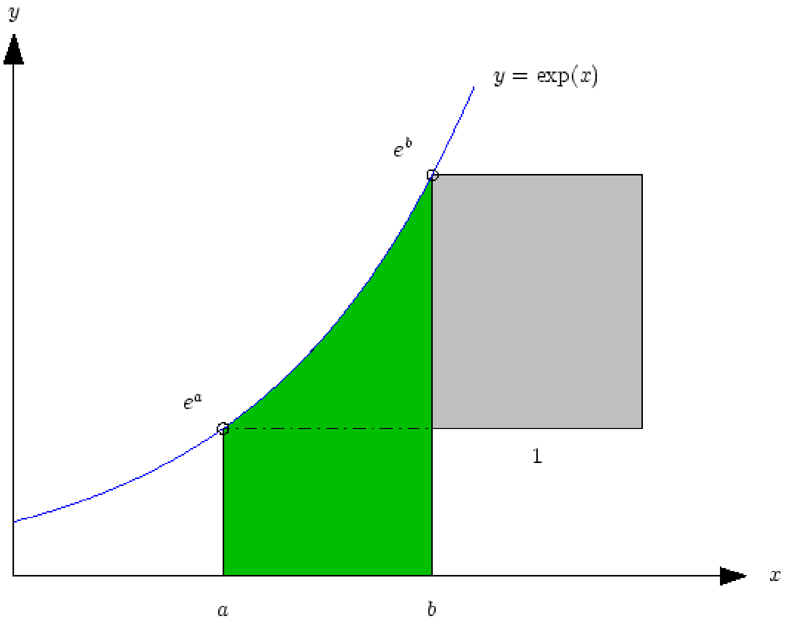
همداسې په لنډ لیکدول

$$\int_a^b f = [F]_a^b \ .$$

یو تاکلی انتیګرال کېدی شي د بنسټیزو توابعو د انتوال په پای ټکو کې د تابع ارزښتونو د کمښت په څېر وشمېرل شي.

لیکونکي: هیورنر، هیولیک

د اکسپوننشل تابع مشتق بېرته اکسپوننشلتابع دی او له دې امله لرو:



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_a^b e^x\,dx = e^b - e^a\,.$$

د a او b ترمنځ دګراف سطحه مساوي ده د سور 1 او د تابع ارزښتونو دجګوالي واټن څخه جوړ ولاړګوډیز (مستطیل).

د لوګاریتمي تابع $F(x)=\ln(x)$ مشتق $F'(x)=1/x\,,\,x\in\mathbb{R}^+$ دی او له دې سره

$$\int_a^b 1/x\,dx = \ln(b)-\ln(a)\,,\quad a,b\in\mathbb{R}^+\,.$$

لیکونکي: هیورنر، هیولیک

د $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ یو بنسټیز تابع $F(x)=\arctan x$ دی . په تعقیب لرو

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(1)-\arctan(0)=\frac{\pi}{4}\,.$$

د کمښت سره verifiziert ، چې

$$F(x) = -\ln(\cos x)$$

د $f(x)=\tan x$ بنسټیز تابع دی:

$$F'(x) = -\frac{1}{\cos x}(-\sin x).$$

د دې پایله ده:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_0^{\pi/4} \tan x\, dx = -\left[\ln(\cos x)\right]_0^{\pi/4} = -\ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \approx 0.347\,.$$

ليکونکي: هيورنر، هيوليک

يو پلانېټ د M کتلې سره يو د ګراويتيشن (راکښنې ورشو) ورشو توليدوي، چې په يوه تن يا بدن د m کتلې سره يوه قوه $F(x) = \gamma\frac{mM}{x^2}$ استعمالوي. د لته د γ ګراويتيشن ثابته ده او x د درونډ ټکو (د ثقل مرکزونو) واټن دی.

د $1/x^2$ لپاره بنستيز تابع $-1/x$ دی. د دې لپاره چې يو بدن د a څخه و b ته په واټن يوسي، بايد کار

$$\int_a^b F(x)\, dx = \gamma m M \int_a^b \frac{1}{x^2}\, dx = -\left[\gamma m M/x\right]_a^b$$

$$= \gamma m M(1/a - 1/b)$$

سرته ورسيږي .

د a لپاره مساوي د پلانټ وړانګه او $b \to \infty$ کېدی شي د کينېټيکي انرژي سره د مساوي اينوني له امله داسې په نامه د تېښتې چټکتيا يا سرعت v و ټاکل شي،داپه دې معنا چې چټکتيا ، چې اړيينه ده، د يوه پلانېټ ګراويتېشن ورشو څخه وو تلی شي:

$$\frac{m}{2}v^2 = \gamma\frac{mM}{a} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\gamma\frac{2M}{a}}\,.$$

په اکواتور کې د ځمکې لپاره $v = 11.2$ km/s. لرو.

ليکونکي: هيورنر، هيوليک

(c) ketabton.com: The Digital Library

غوره – یا راوتلي بنسټیز توابع

لاندې جدول د زیات رامنځ ته کېدونکو توابعو $f(x)$ د بنسټیزو توابعو $F(x)$ جدول ښایي.

$f(x)$	$F(x)$		$f(x)$	$F(x)$
$x^s\,,\,s\neq-1$	$x^{s+1}/(s+1)$		$1/x$	$\ln\|x\|$
$\exp(x)$	$\exp(x)$		$\ln(x)$	$x\ln(x)-x$
$\sin x$	$-\cos x$		$\cos x$	$\sin x$
$\tan x$	$-\ln(\cos x)$		$\sin x\cos x$	$\sin^2(x)/2$
$1/(1+x^2)$	$\arctan x$		$1/\sqrt{1-x^2}$	$\arcsin x$

لیکونکي: هیورنر، هیولیک

ټوټه انتیګرالونه Partielle Integration

د ضرب قانو $(fg)'=f'g+fg'$ له مخې د ناټاکیو انتیګرالولوپاره یو ورته فرمول لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx\,.$$

په اړونده توګه د ټاکلو انتيګرالونو لپاره لرو

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'$$

له دې سره دې په پام کې وي، چې د ژۍ ترمونه $[fg]_a^b$ ورکيږي، که يو له دې دواړو توابعو په انټروال ټکو کې صفر وي. دا د پريوديکي توابعو لپارهم ورکيږي ، د پريودې اوږدوالي $(b-a)$ سره.

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

له

$$\int (1+x)^\alpha\,dx = \frac{1}{\alpha+1}\,(1+x)^{\alpha+1} + c$$

د $\alpha \neq -1$ لپاره

لرو

$$\int \underset{u}{x}\underset{v'}{\sqrt{1+x}}\,dx = x\frac{2}{3}(x+1)^{3/2} - \int 1\cdot\frac{2}{3}(1+x)^{3/2}\,dx$$

$$= \frac{2}{3}x(1+x)^{3/2} - \frac{4}{15}(1+x)^{5/2} + c.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ورته توګه شمېرل کيږي

$$\int_0^1 \underset{u}{x}\underset{v'}{\sqrt{1-x}}\,dx = \left[-x\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}\right]_0^1 + \int_0^1 1\cdot\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}\,dx$$

$$= \qquad 0-\left[\frac{4}{15}(1-x)^{5/2}\right]_0^1 = \frac{4}{15}\,.$$

ليکونکي: هيوليک، کوپف

د اووښتونو (واريابلو) بدلونVariablensubstitution

د زنځيري قانون څخه

$$\frac{d}{dx}F(g(x)) = f(g(x))g'(x), \quad f = F',$$

د يوه بدلون $y = g(x)$ لپاره د بنسټتوابعو جوړولو له لارې لاس ته راځي

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(y) + c = \int f(y)\,dy\,.$$

په ورته توګه د ټاکلو انتيګرالونو لپاره باور لري

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy$$

د دفرنشل په مرسته کېدی شي دا تابع په لاندې بڼه وليکل شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_a^b f(g(x))\frac{dy}{dx}\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

که په انتیګراند کې دننني مشتق پېژندوړ وي، لکه د بېلګې په تګه د

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx\,,$$

لپاره ، نو د بدلون استعمال خورا ساده دی. په دې بېلګه کې ږدو

$$y = g(x) = \ln x\,,\quad g'(x) = \frac{1}{x}$$

او لاس ته راځي

$$\int g(x)^2\,g'(x)\,dx = \int y^2\,dy = \frac{1}{3}y^3 + c\,.$$

د په خټ بدلون له لارې لاس تهراځي

$$\int \frac{\ln x^2}{x}\,dx = \frac{1}{3}(\ln x)^3 + c\,.$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

په تیپیک ډول د بدلون له لارې سرۍ هڅېږي چې انتیګرال ساده کړي.دبېلګې په توګه د

$$\int \frac{e^{3y}}{e^{2y}-1}\,dy$$

لپاره په نږدې توګه ږدو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = g(x) = \ln x \quad \Leftrightarrow \quad x = e^y$$

دا د

$$\frac{dy}{dx} = g'(x) = \frac{1}{x} = e^{-y}$$

له امله ترانسفورمي شوی ناټاکلی انتيګرال راکوي.

$$\int \frac{x^3}{x^2-1}\,\frac{dy}{dx}\,dx =$$

$$= \int \frac{x^2}{x^2-1}\,dx = \int \left(1 + \frac{1}{x^2-1}\right)\,dx$$

$$= \int 1\,dx + \int \frac{1}{x^2-1}\,dx = x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + c\,.$$

د $x = e^y$ په ځيې يا برعکس بدلون سره لاس ته راځي

$$F(y) = e^y + \frac{1}{2}\left|\frac{e^y-1}{e^y+1}\right| + c\,.$$

ليکونکي: هيوليک، کوپف

د مرکاتور پرپوستون Mercator-Projektion

بنسټتابع

$$\int \frac{dx}{\cos x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

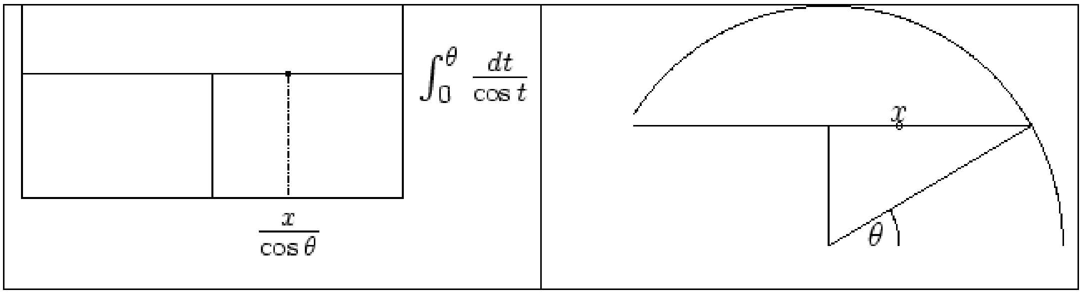
کېدی شي د بدلون

$$u = \frac{1}{\cos x} + \tan x = \frac{1+\sin x}{\cos x}, \qquad du = \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}\right)\, dx,$$

سره وشمېرل شي.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\cos x} &= \int (\cos x)^{-1} \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}\right)^{-1} du \\ &= \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c \\ &= \ln\left|\frac{1}{\cos x} + \tan x\right| + c. \end{aligned}$$

یو استعمال د مررکاتور پرېوستون دی. دلته د ځکې پوښ سطحه کرنجساتونکي یا کرنجيښتونې په یوه سطحه پریوځي یا پرې ایستلی شي.



دلته سور درجه یا عرض البلد په اړیکو $1/\cos\theta$ غزول شوی.

لیکونکي: هیولیک، کوپف

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څرخېدونکو بدنونو ډکی(حجم) Volumen von Rotationskörpern

<table>
<tr>
<td>

په x -محور د تابع

$r = f(x) \geq 0$

,

$a \leq x \leq b$

د څرخېدني

له امله جوړ شوی بدن V

ډکی(حجم) کېدی شي د

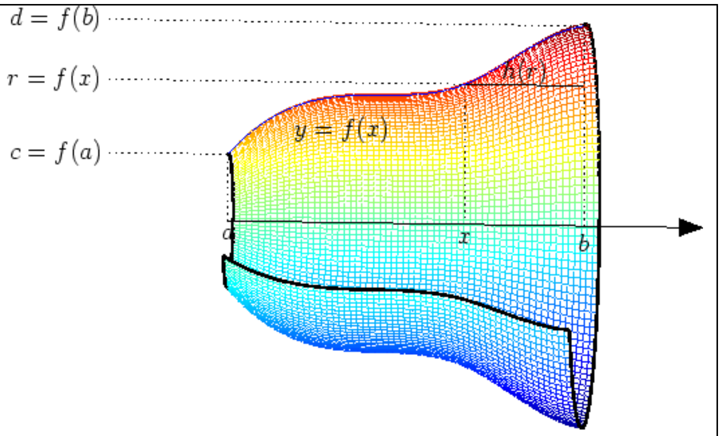
ګردی ډوله(دایره ډوله)

پروټِ غوڅیو انتیګرال له

لارې و شمېرل شي:

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx \, .$$

</td>
<td>



</td>
</tr>
</table>

په بدیلي ډول کېدی شي توتې(استواني) پوښ له لارې هم وشمېرل شي

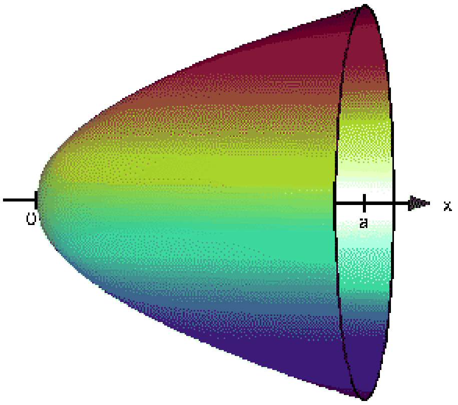
$$V = \pi c^2 (b - a) + 2\pi \int_c^d r h(r) \, dr \, ,$$

د کوم سره چې c همداسي d مینیمال همداسي ماکسیمال وړانګي r دي او $h(r)$
په بدن کې خوندي توتي پوښ تول جګوالی دي د وړانګي r سره. دا بدیل د تولو له
مخه د همغږیز وړانګي تابع f لپاره موخه ور دی.

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

دا جوړ یا څېره شوی پارابولوید د x – محور باندې د کرې $y = \sqrt{x}$ څرخون سره
منځ ته اځي

(c) ketabton.com: The Digital Library



د ځرخون بدن د فرمول سره سم ډکی(حجم) دی:

$$\pi \int_0^a \left(\sqrt{x}\right)^2 \, dx = \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a = \frac{1}{2}\pi a^2 .$$

په بدیلې توګه د توتې پوښ باندې انتیګرال له لارې منځ ته راځي. 1

$$2\pi \int_0^{\sqrt{a}} r(a - r^2)dr = 2\pi \left[-\frac{1}{4}(a - r^2)^2\right]_0^{\sqrt{a}} = \frac{1}{2}\pi a^2 .$$

لیکونکي: هیولیک، کوپف

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوې لیکنې:

<u>1988 Vienna (Austria):</u>

<u>لومړی:</u>

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

<u>1987 Vienna (Austria):</u>

<u>دویم:</u>

Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Diss . Uni. Wien Algebren .

Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, Dissertation at the University of Vienna/Austria

لاندې د شمیرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

<u>2000 Bonn (Germany):</u>

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې لیکنه به یې څنو ځایونو غزېدلې او څنې ځایونه ترې لرې شوي دي)

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

څلورم: څمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو کې شمیرنه، د ګټې – او کټې د کټې شمیرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتیاوې پوره کوي

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني ـ پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځیال برابرون (دا کتاب په دې څانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپینې خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برینکمن لیکنې چې له پرینکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دویم ټوک

۳ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصایه یا ستاتیستیک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – انالیزی ۱

۷ – انالیزې ۲

۸ – کرښیز الجبر

۹ - د شمیرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ – فنکشنل انالیز

۱۲ – وکتور شمیرنه

نورې ژباړې

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښیز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner گڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په

کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلي

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

۲۲- داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته

تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزي پښتو او عربي + دري ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه ليکنې دي، چې ځنې يې په نړيول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپينې خبرې، چې وبه غزيږي.

نوري ليکنې، چې په ژباړه يې پيل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپريږي:

د ګروپونو تيوري

- د ښوونځي لپاره فزيک د برينکمن ليکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دويم مسلک فزيک دی، دا ليکنې ژباړم. دا هم د دې ليکوال يوه ډېره ښه ليکنه ده، چې -د شميرپوهني په څير- دلته هم زيات تمرينونه د حل يا اوبيونې سره په کې راغلي او ماته زيات ګټور برېښي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لیکوال ژوند ته لنډه کتنه

ماخان په اولني نوم میرِي شینواری د اروابنادې پستو او اروابناد نوررحمان زوي په ۱۳۲۰ ؟ ه لمریز کې د شینوارو هسکه مینه کې دې نړۍ ته سترګې راغړولي.

د هسکې مینې د لومړنې ښوونځي (د لومړنیو زده کوونکو څخه) څخه وروسته

د رحمان بابا لیسه له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پورې(ښوونځي له لومړي ټولګې پیل او د دویم ټولګې څخه ګام او پای). د ۱۹۶۶ تر سپټبر د کابل طب پوهنځی. له ۱۹۶۶ سپټمبر څخه د اتریش برس، چې هلته یې د شمیرپوهنې ډاکتري په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

د۱۹۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فبروري تر پای د دباندنیو چارو وزارت کې مامور.

د ۱۹۸۸ مارچ څخه تر ۱۹۹۲ جون پورې په بن کې د افغانستان جمهوریت سفارت شارژد افیر(صفر نه وو).

له هغې وروسته په جرمني کې سیاسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ څخه د ۲۰۰۹ دسمبر پورې د د ریاضي څانګه کې د پوهنې وزارت درسي نساب کې دنده.

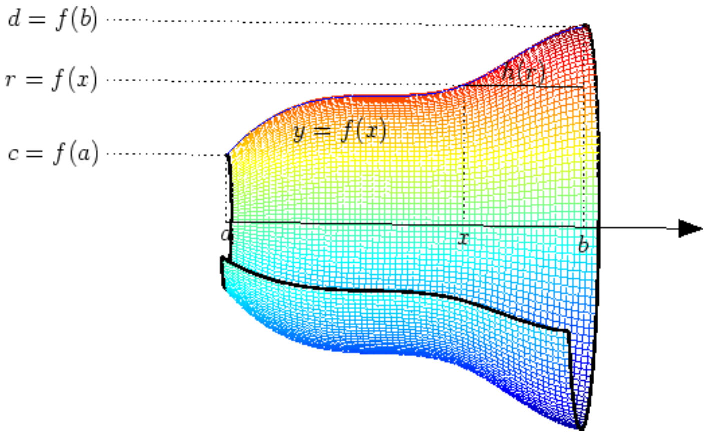
ماخان میرِي په ۱۹۷۲ کې له لرې د میرمن ښاپیرۍ سره واده شوی، چې د واده خبر ورته اتریش ته راغی.

ده د میرمن ښاپیرۍ سره په ۱۹۶۳ ز ک کې کوزده کړې وه.

دوي ته لوي څښتن په اتریش ویانا کې د مای په شلم ۱۹۷۹ ز ک دوه بچیان وبخښل، چې څانګه او اباسین نومیرِي. څانګه په المان کې د پوهنتون علمي همکاره وه او د حقوقو ډاکتره ده او اباسین ملي اقتصاد او ټولنیزه سایکولوژي لوستلي. ماخان شینواري بې کاره نه دی او لږ تر لږه له ۹۷ ۱۹ څخه همدا د کتابونو لیکلو او د ژباړې دنده په غاړه اخستې، چې خپل فکر تر شونې پولې پورې تازه وساتي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د شميرپوهنې بنسټونه



ليکونکي: پروفيسور هيوليګ او ډله يې

(c) ketabton.com: The Digital Library

له مات. ن ج څخه

ژباړي : ډاکتر ماخان میرې شینوالری

وینا ۱

منطقي(سم اندیزې) ترړنې ۲
کوانتورونه ۱۱
سیده ښوونه ۱۳
ناسیده ښوونه ۱۴
ایمپلیکېشن ترې لاس ته راتلنه یا – راوړنه ۱۴
د پوره اندکشن له لارې ښوونه ۱۶
د مربع(ځلورئ) عددونو د جمعي لپاره فرمول ۱۶
ډېرئ(سټ) ۱۷
د ګڼونو (اعدادو) ډېرئ ۱۹
په ډېریو کې عملیې ۱۹
کارتېزي ضرب (ځل) ۲۳
اړیکې ۲۴
د اړیکو د داتا بانک ۲۵
د اړیکو خویونه ۲۵
فنکشن ۲۸
د تابع یا ځیروني یا بلواک(تابع) خویونه ۳۰
د فنکشنونو ۳۲
په څټ یا برعکس فنکشن ۳۲
فاکولتې یا فکتوریل ۳۳
د بینوم ضربیونه ۳۳
د پاسکال درېګودی ۳۴
د بینوم درسي جمله ۳۵

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بينوم ضريبونو لپاره کټمټوالی ۳۸
ډ دېريو يا سټونوکمبيناتوريک ۴۰
کرښيز فنکشنونه ۴۹
مربعيز فنکشنونه ۵۰
مايل ګوزار يا – غورځونه ۵۱
پولينوم ۵۳
راشنل فنکشن يا بلواک(تابع) ۵۴
ساين او کوساين ۵۵
تانجنت او کوتانجنت ۵۸
اکسپوننشل توابع(بلواک) ۶۰
د ګټې ګټه ۶۳
لوګاريتم ۶۵
ټوليز په توان تابع او لوګاريتم ۶۶
د لوګاريتم شمېروني ۶۸
مشتق يا رابېلېدنه ۶۸
غوره (مهم) مشقونه ۷۱
د مشتق کرښيزوالی ۷۲
ايمپليځيت مشتقوړ توابع ۷۵
لوګاريتمي مشتق ۷۷
نيوټن تلنلار يا قانون ۷۸
د بابليانو ريښه (جذر)نيونه ۷۹
افراطيت ۸۰
د مشتق صفر اينوونه ۸۲
افراطي ارزښتونو ازماينت ۸۴
کوتئ ۸۵
ګاونډې ۸۸
د راشنلتابع ګاونډ يا- اسيمپټوتونه ۸۹
سيومتري ۹۱
د کږو يا منحنيو خبرې اترې(بحث) ۹۲
د ريمن انتيګرال ۹۹
بنسټيزه تابع ۱۰۱
د انتيګرال شميرنې اصلي جمله ۱۰۳
غوره – يا راوتلي بنسټيز توابع ۱۰۶
د اووښتونو (واريابلو) بدلون ۱۰۸
د مرکاتور پرېوستون ۱۱۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ځرخيدونکو بدنونو ډکی(حجم) ۱۱۲
پوښتنه: ۱۱۵
د ډاکتر ماخان شينواري چاپ شوې ليکنې: ۱۱۹
د ډاکتر ماخان ،،ميرې،، شينواري ليکنې او
ژباړې چې په چاپيدو يې پيل کيږي ۱۲۱

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library