د پوهنې وزارت

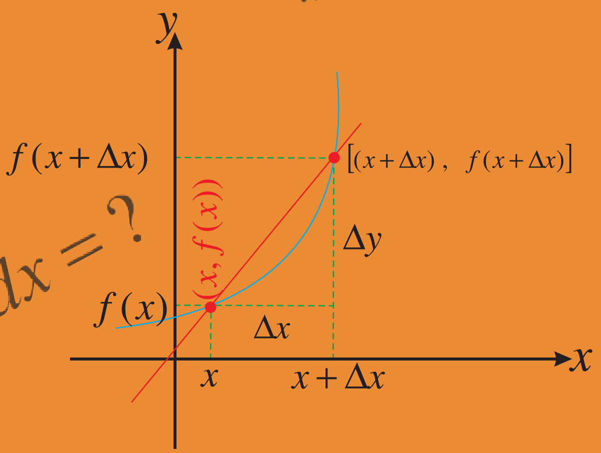
د تعلیمي نصاب، د ښوونکو د روزنې او د ساینس د مرکز معینیت

د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تالیف لوی ریاست

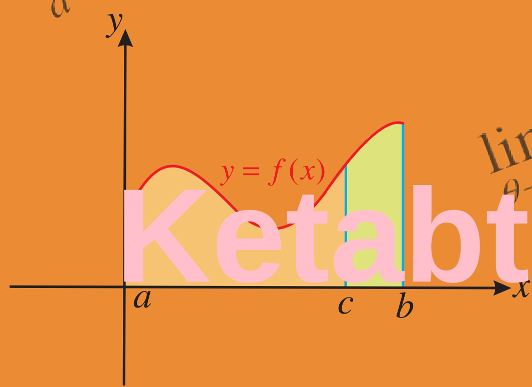
ریاضي ۱۲

ټولګی

$$\lim_{x \to a} f(x) = ?$$



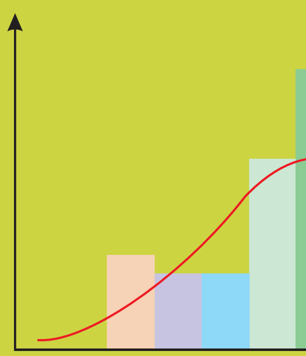
$$\int_a^b f(x)\,dx = ?$$



$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = ?$$

د چاپ کال: ۱۳۹۰

ریاضي ۱۲ ټولګی



Ketabton.com

د پوهنې وزارت
د تعليمي نصاب، د ښوونکو د روزنې او د ساينس د مرکز معينيت
د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تاليف
لوی رياست

رياضي ۱۲
ټولګی

د چاپ کال: ۱۳۹۰ هـ . ش.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیکوالان:

- پوهیالی حمدالله شیرزی وردگ د پوهنې وزارت د درسي کتابونو د تألیف د پروژې غړی
- مؤلف مهناز توخي د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تألیف علمي غړې
- پوهنمل طلاباز حبیب زی د پوهنې وزارت د درسي کتابونو د تألیف د پروژې غړی
- پوهندوی خالقداد فیروزکوهي د پوهنې وزارت د درسي کتابونو د تألیف د پروژې غړی
- سرمؤلف میرنقیب الله د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تألیف علمي غړی
- د مؤلف مرستیال محمد خالد ستوری(ځدراڼ) د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تألیف علمي غړی

علمي او مسلکي ایډیټ:

- حبیب الله راحل د پوهنې وزارت سلاکار د تعلیمي نصاب د پراختیا په لوی ریاست کې.
- سرمؤلف نظام الدین د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تألیف علمي غړی
- د مؤلف مرستیال رحیمه هدایت‌زی د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تألیف علمي غړې

د ژبې ایډیټ:

- محمدقدوس ذکوخیل د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تألیف علمي غړی

دیني، سیاسي او کلتوري کمیټه:

- مولوي عبدالوکیل د اسلامي تعلیماتو علمي غړی.
- حبیب الله راحل د پوهنې وزارت سلاکار د تعلیمي نصاب د پراختیا په لوی ریاست کې.

د څارنې کمیټه:

- دکتور اسدالله محقق د تعلیمي نصاب د پراختیا، د ښوونکو د روزنې او د ساینس مرکز معین
- دکتور شېر علي ظریفي د تعلیمي نصاب د پراختیا د پروژې مسؤول
- د سرمؤلف مرستیال عبدالظاهر گلستاني د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تالیف لوی رئیس

طرح او ډیزاین:

ولید «نوید» نسیمي

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

بسم الله الرحمن الرحیم

(c) ketabton.com: The Digital Library

ملي سرود

دا وطن افغانستان دی — دا عزت د هر افغان دی
کور د سولې کور د تورې — هر بچی یې قهرمان دی
دا وطن د ټولو کور دی — د بلوڅو د ازبکو
د پښتون او هزاره وو — د ترکمنو د تاجکو
ورسره عرب، ګوجر دي — پامیریان، نورستانیان
براهوي دي، قزلباش دي — هم ایماق، هم پشه یان
دا هیواد به تل ځلیږي — لکه لمر پر شنه آسمان
په سینه کې د آسیا به — لکه زړه وي جاویدان
نوم د حق مو دی رهبر — وایو الله اکبر وایو الله اکبر

بسم الله الرحمن الرحيم

د پوهنې د وزير پيغام

ګرانو ښوونکو او زده کوونکو،

ښوونه او روزنه د هر هېواد د پراختيا او پرمختګ بنسټ جوړوي. تعليمي نصاب د ښوونې او روزنې مهم توکی دی چې د معاصر علمي پرمختګ او ټولنې د اړتياوو له مخې رامنځته کيږي. ښکاره ده چې علمي پرمختګ او ټولنيزې اړتياوې تل د بدلون په حال کې وي. له دې امله لازمه ده چې تعليمي نصاب هم علمي او رغنده انکشاف ومومي. البته نه ښايي چې تعليمي نصاب د سياسي بدلونونو او د اشخاصو د نظريو او هيلو تابع شي.

دا کتاب چې نن ستاسو په لاس کې دی، پر همدې ارزښتونو چمتو او ترتيب شوی دی. علمي ګټورې موضوعګانې پکې زياتې شوې دي. د زده‌کړې په بهير کې د زده‌کوونکو فعال ساتل د تدريسي پلان برخه ګرځېدلې ده.

هيله من يم دا کتاب له لارښوونو او تعليمي پلان سره سم د فعالې زده‌کړې د ميتودونو د کارولو له لارې تدريس شي او د زده‌کوونکو ميندې او پلرونه هم د خپلو لوڼو او زامنو په باکيفيته ښوونه او روزنه کې پرله پسې ګډه مرسته وکړي چې د پوهنې د نظام هيلې ترسره شي او زده‌کوونکو او هېواد ته ښې برياوې ور په برخه کړي.

پر دې ټکي پوره باور لرم چې زموږ ګران ښوونکي د تعليمي نصاب په رغنده پلي کولو کې خپل مسؤوليت په ريښتوني توګه سرته رسوي.

د پوهنې وزارت تل زيار کاږي چې د پوهنې تعليمي نصاب د اسلام د سپېڅلي دين له بنسټونو، د وطن دوستی د پاک حس په ساتلو او علمي معيارونو سره سم د ټولنې د ځرګندو اړتياوو له مخې پراختيا ومومي.

په دې ډګر کې د هېواد له ټولو علمي شخصيتونو، د ښوونې او روزنې له پوهانو او د زده‌کوونکو له ميندو او پلرونو څخه هيله لرم چې د خپلو نظريو او رغنده وړانديزونو له لارې زموږ له مؤلفانو سره د درسي کتابونو په لا ښه تألیف کې مرسته وکړي.

له ټولو هغو پوهانو څخه چې د دې کتاب په چمتو کولو او ترتيب کې يې مرسته کړې، له ملي او نړيوالو درنو مؤسسو، او نورو ملګرو هېوادونو څخه چې د نوي تعليمي نصاب په چمتو کولو او تدوين او د درسي کتابونو په چاپ او وېش کې يې مرسته کړې ده، مننه او درناوی کوم.

ومن الله التوفيق

فاروق وردګ

د افغانستان د اسلامي جمهوريت د پوهنې وزير

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

لړلیک

سرلیک | مخونه

لومړی څپرکي لیمیټ ۱-۴۰

- د لیمیټ مفهوم
- د ښي او کیڼي خوا لیمیټونه
- د لیمیټ خاصیتونه
- د نسبتي تابعګانو لیمیټونه
- د $\frac{\infty}{\infty}$ مبهم شکل
- د $\infty - \infty$ او $0 \cdot \infty$ مبهم شکلونه
- د $0^0, \infty^0, 1^\infty$ مبهم شکلونه
- د مثلثاتي تابعګانو لیمیټ
- د تابعګانو متمادیت
- د متمادي تابعګانو خاصیتونه
- د څپرکي لنډیز او پوښتنې

دویم څپرکی مشتقات ۴۱-۸۲

- د یوې تابع مشتق
- د مشتق هندسي تعبیر
- د مشتق قوانین
- د مرکبو تابعګانو مشتق
- د مثلثاتي تابعګانو مشتق
- ضمني مشتقات
- لوړې مرتبه مشتقات
- د څپرکي لنډیز او پوښتنې

دریم څپرکی د مشتق د استعمال ځایونه ۸۳-۱۳۲

- د یوې تابع بحراني ټکی(اعظمي او اصغري)
- د انعطاف د ټکي ټاکل د دویم مشتق څخه په ګټې اخېستنې سره
- د منحنيګانو رسمول
- د توابعو د ګرافونو مجانبونه
- د هوموګرافیک تابعګانو ګراف
- د دریمې درجې یو مجهوله تابع ګراف
- د رول قضیه
- د متوسط قیمت قضیه
- د لوپیټال قاعده
- د بحراني ټکو تطبیق
- د څپرکي لنډیز او پوښتنې

سرلیک | **مخونه**

څلورم څپرکی انتیگرال ۱۳۳-۱۷۲
- د ریمان مجموعه
- د انتیگرال مفهوم
- د غیرمعین انتیگرال خواص
- معین انتیگرال
- د معین انتیگرال خواص
- د مشتق او انتیگرال اساسي قضیې
- په تعویضي طریقې سره انتیگرال نیونه
- قسمي انتیگرالونه
- د څپرکي لنډیز او پوښتنې

پنځم څپرکی د لوګاریتمي او اکسپوننشیل تابعګانو مشتق او انتیګرال ۱۷۳-۱۹۸
- د لوګاریتمي او اکسپوننشیل تابعګانو مشتق
- د معکوسو تابعګانو مشتق
- قسمي کسرونه
- د اکسپوننشیل تابعګانو انتیګرالونه
- د لوګاریتمي تابعګانو انتیګرال
- د قسمي کسرونو په مرسته د انتیګرال محاسبه
- د څپرکي لنډیز او پوښتنې

شپږم څپرکی د انتیګرال تطبیقات ۱۹۹-۲۲۲
- د یوې منحني د محصور شوې سطحې د مساحت محاسبه
- د دوو محصور شویو منحنیګانو ترمنځ د مساحت محاسبه
- د دوراني جسمونو د حجم محاسبه
- د قوس د اوږدوالي محاسبه
- د څپرکي لنډیز او پوښتنې

اووم څپرکی احصائیه ۲۲۳-۲۶۰
- د احتمال د تابع توزیع
- د دوه جملهیي توزیع او د برنولي آزمایښت
- د پواسن د احتمال توزیع
- د نورمال توزیع
- د نورمال توزیع منحني لاندې مساحت او د هغې سټنډرډ کول
- نمونه اخیستل
- د نمونې د اوسط توزیع
- د مرکزي لیمیټ قضیه
- د نمونهیي توزیع نسبت
- د څپرکي لنډیز او پوښتنې

اتم څپرکی احتمالات ۲۶۱-۲۸۲
- پرېکړې او نښتې فضاګانې
- هم چانسه پېښې
- د نښتو یا پیوسته فضاګانو احتمال
- مشروط احتمال
- د حاصل ضرب اصل
- د ناخاپه پېښو استقلالیت
- د څپرکي لنډیز او پوښتنې

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی څپرکی

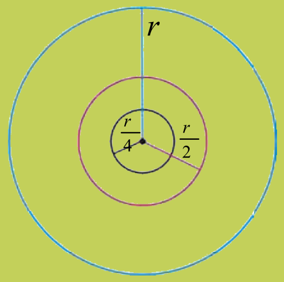
لیمیټ

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لیمیټ مفهوم

په یوه مستوي کې درې دایرې داسې رسم کړئ چې د O ټکي د دایرو متحد مرکز او شعاعګانې یې په ترتیب سره $r, \frac{r}{2}$ او $\frac{r}{4}$ وي، دې عملیې ته نور څو ځلې دوام ورکولای شئ؟



فعالیت

د $a_n = (1+\frac{1}{n})$ او $a_n^* = (1-\frac{1}{n})$ ترادفونه د $n \in IN$ لپاره په پام کې ونیسئ او لاندې فعالیت ترسره کړئ:

- د عددونو په محور باندې د a_1 او a_1^* موقعیت(ځای) وښیئ.
- ویلای شئ، چې د a_2 او a_2^* قیمتونه د $[a_1^*, a_1]$ د فاصلې دننه یا دباندې پراته دي.
- د a_1 ، a_1^* او a_2 ، a_2^* منځنی ټکی یو له بل سره پرتله کړئ.
- پورته پړاوونو ته په پاملرنې سره ویلای شئ، چې د a_3 او a_3^* د ټکو موقعیت د عددونو پر محور په کوم ځای کې واقع دي.
- آیا ویلای شئ، چې د n د تر ټولو لویو قیمتونو په اخیستلو سره د a_n او a_n^* ردیفونه کومو قیمتونو ته نږدې کېږي؟

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله لیکلای شو:

پایله: لیدل کېږي، چې د a_n ترادف له ښي لورې څخه د 1 او د a_n^* ترادف له کیڼ لورې څخه د 1 عدد ته د n په زیاتېدو سره نږدې کېږي، یعنې:

ـ د a_n ترادف کله چې n بې نهایت ته تقرب وکړي، مساوي په(1) سره کېږي او همداشان د a_n^* د ترادف $n-$ام حد که n بې نهایت ته نږدې شي هم مساوي له (1) سره کېږي.

$$a_1^* \rightarrow a_2^* \rightarrow a_3^* \rightarrow \quad 1 \quad \leftarrow a_3 \leftarrow a_2 \leftarrow a_1$$

ددې لپاره چې د لیمیټ مفهوم مو ښه څرګند کړی وي، په لومړي پړاو کې هغه په څو ترادفونو کې د ګراف په پام کې نیولو سره تر څېړنې لاندې نیسو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

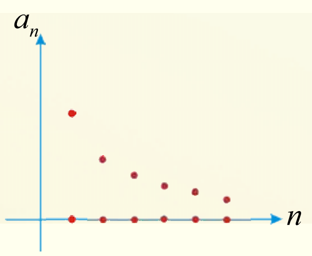
مثال: لاندې ورکړل شوي ردیفونه د n د تر ټولو لویو قیمتونو لپاره کوم قیمت ته تقرب کوي یا نږدی کېږي، موضوع په ګرافیکي ډول تشریح کړئ، په داسې حال کې چې:

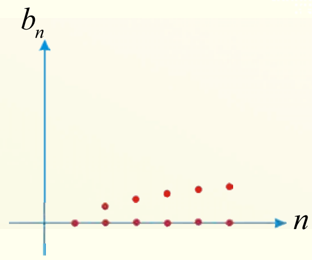
$$a_n = \left(\frac{2n+3}{n}\right) \ \dots (i) \qquad b_n = \left(\frac{n-1}{n}\right) \ \dots (ii) \qquad c_n = (-1)^n \frac{1}{n} \ \dots (iii)$$

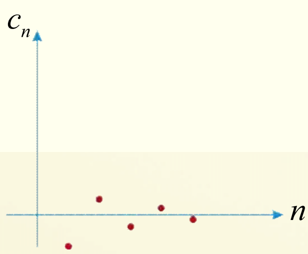
حل: پوهېږو چې د n د بېلابېلو قیمتونو لپاره ګرافیکي ښودنه په لاندې ډول ده.

n	1	2	3	4	5	6	7	$\to \infty$
a_n	5	$\frac{7}{2}$	3	$\frac{11}{4}$	$\frac{13}{5}$	$\frac{15}{6}$	$\frac{17}{7}$	$\to 2$

n	1	2	3	4	5	$\to \infty$
b_n	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\to 1$







n	1	2	3	4	5	$\to \infty$
c_n	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{5}$	$\to 0$

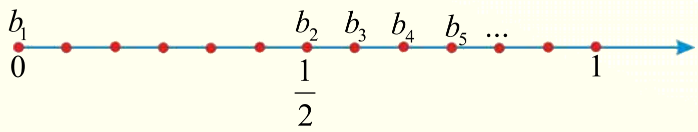
له پورتینو ګرافونو څخه لیدل کېږي چې راکړل شوي ترادفونه د n د قیمتونو په زیاتېدو سره د ترادفونو قیمت یوه ټاکلې عدد ته نږدې کېږي، لکه د a_n ترادف د 2 عدد ته د b_n ترادف د 1 عدد ته او د c_n ترادف صفر ته تقرب کوي، چې ترادف ته د ډېرو لویو قیمتونو په ورکولو سره موضوع په آسانی سره روښانه کېږي.

د ترادف د قیمتونو له جدول څخه د لیمیټ قیمت څرګندېږي، د لیمیټ په شته والی کې ردیف یوه ټاکلې عدد ته نږدې کېږي. دغه ټاکلې عدد ته لیمیټ (limit) وایي. چې په lim سره ښودل کېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ددې لپاره د $b_n = \frac{n-1}{n}$ ترادف په پام کې نیسو، لرو چې:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
b_n	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{10}{11}$	...



او یــــا کـــــه چیـــــري $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}$ .... I , $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \ldots, \frac{n+1}{n}$ .... II او $2, 4, 6, \ldots, 2n$ .... (III) د عددونو ترادفونه په پام کې ونیسو، لیدل کېږي چې که n د بې نهایت لورې ته نږدې شي، نـو د I تـرادف صـفر تـه نـږدی کېږي د II تـرادف د (1) عـدد تـه نـږدی کېږي د III تـرادف د بې‌نهایت(∞) ته نږدې کېږي.

د متحول تقرب: ویل کېږي چې د x متحول د a عدد ته تقرب کوي، په داسې حال کې چې x پـه اختیـاري ډول د a عدد ته نږدی کېږي، یعنې د x او a ترمنځ تفاوت له هر کوچني عدد($\delta > 0$) څخه کوچنی دی یا په لاندې ډول:

$\forall \delta > 0 : |x-a| < \delta$ یا $\lim\limits_{x \to a} x = a$ یا $x \to a$ یا $|x-a| \to 0$

له ښي لورې د متحول تقرب: ($x \to a^+$) که چیرې د x د قیمتونو یو متناقص ترادف موجود وي پـه داسـې حال کې چې په تدریجي ډول د a اختیاري عدد ته نږدی شي.

$x: a+0.1, \; a+0.01 \;, \; a+0.001 \;, \; a+0.0001 \;, \ldots \to a^+$

له کېڼ لورې د متحول تقرب: ($x \to a^-$) که چیرې د x د قیمتونو یو متزاید تـرادف موجود وي پـه داسـې حال کې چې x په تدریجي ډول د a اختیاري عدد ته نږدی شي.

$x: a-0.1, \; a-0.01 \;, \; a-0.001 \;, \; a-0.0001 \;, \ldots \to a^-$

نو د x د متحول تقرب د a عدد ته معادل دی د x د متحول تقرب له ښي لورې او د x د متحول تقرب له چپ لورې؛ یعنې:

$x \to a \;\; \Leftrightarrow \;\; (x \to a^+ \;, \; x \to a^-)$

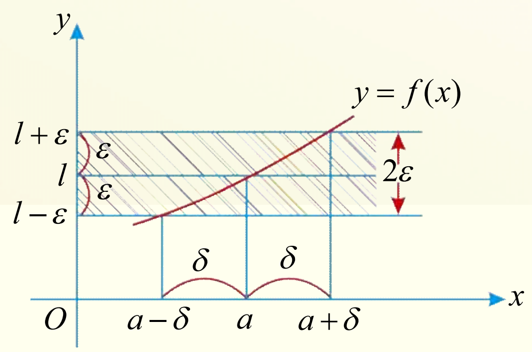
(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی بېلګه: د x متحول د 9 عدد ته نږدې کړئ یا په بل عبارت د $x \to 9$ مفهوم توضیح کړئ.

حل:

$$x: 9.1\ ,\ 9.01\ ,\ 9.001\ ,\ 9.0001\ ,\ \ldots \to 9^+$$
$$x: 8.9\ ,\ 8.99\ ,\ 8.999\ ,\ 8.9999\ ,\ \ldots \to 9^-$$

تعریف: که چیرې د $f(x)$ تابع په یوه غیر تړلې انټروال کې چې د a عدد په هغې کې ګډون لري کیدای شي چې تابع په a کې نه وي تعریف شوی. که چیرې د x متحول د a عدد ته نږدې شي نو د $f(x)$ تابع د l عدد ته نږدې کېږي، نو ویل کېږي چې د $f(x)$ تابع لېمیټ عبارت له l څخه دی، کله چې د x متحول د a عدد ته تقرب وکړي نو داسې یې لیکو: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ یا $\begin{matrix} x \to a \\ f(x) \to l \end{matrix}$



$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : |x-a| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x)-l| < \varepsilon$$
$$\lim_{x\to a} f(x) = l \ \Leftrightarrow\ (|x-a| \to 0 \Rightarrow |f(x)-l| \to 0)$$

پوښتنه

د $f(x) = 2x$ تابع کې په ګرافیکي ډول وښیئ چې که x د (3) عدد ته نږدې شي $f(x)$ له (6) سره مساوي کېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ښي او کيڼ خوا لېمېټونه

مخامخ تصوير ته پاملرنه وکړئ وواياسئ چې مخامخ ونې ته له کومو خواوو څخه نږدې کېدای شو.

فعاليت

په لاندې جدول کې د $x \neq 1$ ، $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ ته ځينې قيمتونه ورکړل شوي.

x	0.98	0.99	0.999	?	1.001	1.01	1.02
$f(x)$	1.98	1.99	1.999	?	2.001	2.01	2.02

$\longrightarrow \qquad \longleftarrow$

- د تابع ګراف رسم کړئ.
- که x د (1) عدد ته نږدې شي، نو $f(x)$ کوم عدد ته نږدې کېږي.

د پورتني فعاليت څخه لاندې پايله ليکلای شو:

د ښي خوا لېمټ: د $f(x)$ تابع د a په عدد کې د ښي لوري l_1 لېمېټ لري که چېرې د هر $\varepsilon > 0$ لپاره يو کوچنی عدد د $\delta > 0$ موجود وي داسې چې که: $x \in (a, a+\delta) \Rightarrow f(x) \in (l_1-\varepsilon, l_1+\varepsilon)$ يا

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = l_1$$

د کيڼ خوا لېمېټ: د $f(x)$ تابع د a په عدد کې د کيڼ لوري l_2 لېمېټ لري که چېرې د هر $\varepsilon > 0$ لپاره د $\delta > 0$ يو عدد پيدا شي داسې چې $x \in (a-\delta, a) \Rightarrow f(x) \in (l_2-\varepsilon, l_2+\varepsilon)$ يا

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = l_2$$

د $f(x)$ تابع هغه وخت چې $x \to a$ ته نږدې شي د l لېمېټ لري، يعنې: $\lim_{x\to a} f(x) = l$ په دې شرط چې:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = l = \lim_{x\to a^+} f(x)$$

دویمه بېلگه: و ښیئ چې $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=6$ سره دی.

حل: د ښي او کيڼي خوا لېمیټونه تر څېړنې لاندې نیسو:

x	3.5	3.1	3.01	3.001	...	3^+
$f(x)$	6.5	6.1	6.01	6.001	...	6

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-9}{x-3}=6$$

x	2.5	2.9	2.99	2.999	...	3^-
$f(x)$	5.5	5.9	5.99	5.999	...	6

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-9}{x-3}=6$$

لیدل کېږي چې د ښی خوا او کیڼې خوا لېمیټونه سره مساوي دي، نو $\lim\limits_{x\to 3}=\frac{x^2-9}{x-3}=6$ دي.

دویمه طریقه: د لېمیټ د تعریف په پام کې نیولو سره فرضوو چې د هر اختیاري کوچني عدد ε لپاره یو δ شتون لري داسې چې:

$$\forall\varepsilon>0\quad \exists\delta>0:\ |x-a|<\delta\ \Rightarrow\ |f(x)-l|<\varepsilon$$

$$|x-3|<\delta\ \Rightarrow \left|\frac{x^2-9}{x-3}-6\right|=\left|\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}-6\right|=|x+3-6|=|x-3|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow \varepsilon=\delta$$

له پورتنی اړیکې څخه دا معلومېږي چې ε له δ سره اړیکه لري، که δ ته قیمت ورکړو ε قیمت اخلي او که ε ته قیمت ورکړو δ قیمت اخلي، بنا پر دې هغه تعریف چې د لېمیټ لپاره موجود دی سم دی او تابع لېمیټ لري، یعنې: $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=6$

پوښتنه

وښیئ چې د $f(x)=\frac{|x-2|}{x-2}$ تابع کله چې $x\to 2$ لېمیټ نه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لیمیټ خاصیتونه (Properties of Limit)

د مخامخ مساوات دلیمیټونو دواړه خواوې کله چې $x \to -1$ وکړي، سره مساوي دي او که نه؟

$$\lim_{x\to -1}(x^2 \pm x) = \lim_{x\to -1} x^2 \pm \lim_{x\to -1} x$$

ددې فعالیت د سرته رسولو لپاره لاندې پوښتنو ته ځوابونه پیدا کړئ:

- که x د 2 عدد ته نږدې شي، نو د $f(x) = x + 2$ تابع لیمیټ به څو وي؟
- که $x \to 3$ ته تقرب وکړي، نو د $g(x) = 2x$ تابع لیمیټ پیدا کړئ.
- $\lim_{x\to 2} f(x) \pm \lim_{x\to 2} g(x)$ پیدا کړئ.
- $\lim_{x\to 2} f(x) \cdot \lim_{x\to 2} g(x)$ پیدا کړئ.
- $\lim_{x\to 2} f(x) \div \lim_{x\to 2} g(x)$ پیدا کړئ.

له پورتنی فعالیت څخه لاندې پایلې لیکلای شو:

که $\lim_{x\to a} f(x) = A$ او $\lim_{x\to a} g(x) = B$ وي، نو:

1) $\lim_{x\to a} Kf(x) = K \lim_{x\to a} f(x) = KA$

2) $\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = A \pm B$

3) $\lim_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) = A \cdot B$

4) $\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{A}{B}, \quad \lim_{x\to a} g(x) = B \neq 0$

5) $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{A}, \quad \lim_{x\to a} f(x) = A \geq 0$

له پورتنیو خواصو څخه درې خاصیتونه ثبوتوو او پاتې یې د زده‌کوونکو کورنی دنده ده.

بې نهایت کوچنی تابعګانې: د $\varepsilon(x)$ تابع کله چې $x \to a$ ته نږدې شي بې نهایت کوچنی بللې کېږي، که چیرې $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$ وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

1- ددې لپاره چې $\lim_{x\to a} f(x)=b$ سره شي، لازم او کافي ده چې د $f(x)$ تابع د یوه ثابت عدد b او یـوې بې نهایت کوچني تابع $\varepsilon(x)$ کله چې $x\to a$ د مجموعې په حیث وښودل شي، یعني:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=b+\varepsilon(x) \\ \lim_{x\to a}\varepsilon(x)=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x)=b$$

2- که چیرې $\varepsilon(x)$ ، $x\to a$ ته نږدې شي، بې نهایت کوچنې تابع وي، خو صفر نه وي، نو $\lim_{x\to a}\frac{1}{\varepsilon(x)}=\infty$

د بې نهایت کوچنې تابعگانو مجموعه بیا هم یوه بې نهایت کوچنې تابع ده.

3- د بې نهایت کوچنیو تابعگانو د ضرب حاصل بیا هم یوه بې نهایت کوچنې تابع ده.

4- که چیرې $\varepsilon(x)$ یوه بې نهایت کوچنې تابع او $u(x)$ داسې یوه تابع وي چې لېمیټ یې صفر نه وي، نو د $v(x)=\frac{\varepsilon(x)}{u(x)}$ تابع یوه بې نهایت کوچنې تابع ده.

مثال:

I) د $\varepsilon(x)=x^2-9$ تابع کله چې $x\to 3$ ، یوه بې نهایت کوچنې تابع ده ځکه چې:

$$\lim_{x\to 3}(x^2-9)=0$$

II) $\varepsilon(x)=\frac{1}{2x}$ تابع کله چې $x\to\infty$ ته نږدې شي بې نهایت کوچنې تابع ده:

$$\lim_{x\to\infty}\varepsilon(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x}=0$$

مثالونه: د تېرو خاصیتونو په مرسته لاندې سوالونه حل کړئ.

$$1)\ \lim_{x\to 2}(2x^2-1)=\lim_{x\to 2}2x^2-\lim_{x\to 2}1=2\lim_{x\to 2}x^2-\lim_{x\to 2}1=2\cdot 2^2-1=7$$

$$2)\ \lim_{x\to -3}(x-1)^2=\lim_{x\to -3}(x-1)\cdot\lim_{x\to -3}(x-1)=(-4)(-4)=16$$

$$3)\ \lim_{x\to 0}\frac{4x-3}{x+1}=\frac{\lim_{x\to 0}4x-\lim_{x\to 0}3}{\lim_{x\to 0}x+\lim_{x\to 0}1}=\frac{0-3}{0+1}=-3$$

د پورتنیو مثالونو له حل څخه د لېمیټ یو خاصیت داسې بیان او ثبووو:

1. د څو تابعگانو د مجموعې لېمیټ د نومورو هرې تـابع د لېمیټونـو لـه مجمـوعې سـره مـساوي دي، یعنـي: کـه چیرې د $f(x_1), f(x_2)$ تابعگانې وي، نو لرو چې:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x_1)+f(x_2)\right]=\lim_{x\to a}f(x_1)+\lim_{x\to a}f(x_2)$$

ثبوت: که $\lim_{x\to a}f(x_2)=b_2$ ، $\lim_{x\to a}f(x_1)=b_1$ او ε_1 او ε_2 بې نهایت کوچنې تابعگانې وي، نو:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x_1)\pm f(x_2)\right]=b_1\pm b_2$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x_1)=b_1+\varepsilon_1\ \ .....\ I \\ f(x_2)=b_2+\varepsilon_2\ \ .....\ II \end{array}\right\}\Rightarrow f(x_1)\pm f(x_2)=(b_1+\varepsilon_1)\pm(b_2+\varepsilon_2)=b_1\pm b_2+(\varepsilon_1\pm\varepsilon_2)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

خرنگه چې $(\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2)$ د بې نهايت کوچنيو تابعگانو مجموعه او تفاضل ده او د بې نهايت کوچنيو تابعگانو مجموعه او تفاضل بياهم يوه بې نهايت کوچنۍ تابع ده، نو:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x_1)\pm f(x_2)\right]=b_1\pm b_2=\lim_{x\to a}f(x_1)\pm\lim_{x\to a}f(x_2)$$

2. **د دوو يا څو تابعگانو د ضرب د حاصل لېميټ د نومړو تابعگانو د لېميټونو د ضرب له حاصل سره مساوي دی:**

ثبوت:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x_1)\cdot f(x_2)\right]=\lim_{x\to a}f(x_1)\cdot\lim_{x\to a}f(x_2)=b_1\cdot b_2$$

$$\left.\begin{array}{l}f(x_1)=b_1+\varepsilon_1\\ f(x_2)=b_2+\varepsilon_2\end{array}\right\}\Rightarrow f(x_1)\cdot f(x_2)=(b_1+\varepsilon_1)(b_2+\varepsilon_2)$$

$$f(x_1)\cdot f(x_2)=b_1\cdot b_2+b_1\cdot\varepsilon_2+b_2\cdot\varepsilon_1+\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2$$

خرنگه چې ε_1 او ε_2 ډېر کوچنی عددونه دي، نو د ضرب حاصل يې د b_1 او b_2 سره او همداشان په خپلو کې بې‌نهايت کوچنی کېږي، نو:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x_1)\cdot f(x_2)\right]=b_1\cdot b_2=\lim_{x\to a}f(x_1)\cdot\lim_{x\to a}f(x_2)$$

3. د دوو تابعگانو د نسبت لېميټ د هغو تابعگانو د لېميټونو له نسبت څخه عبارت دی؛ لکه په لاندې ډول:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}=\frac{b_1}{b_2}\quad,\quad g(x)=b_2\neq 0$$

ثبوت:

$$\left.\begin{array}{l}f(x)=b_1+\varepsilon_1\\ g(x)=b_2+\varepsilon_2\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{b_1+\varepsilon_1}{b_2+\varepsilon_2}$$

د مساوات له دواړو خواوو څخه $\frac{b_1}{b_2}$ تفريق کوو:

$$\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{b_1}{b_2}=\frac{b_1+\varepsilon_1}{b_2+\varepsilon_2}-\frac{b_1}{b_2}=\frac{b_2(b_1+\varepsilon_1)-b_1(b_2+\varepsilon_2)}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}$$

$$=\frac{b_2b_1+b_2\varepsilon_1-b_1b_2-b_1\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}=\frac{b_2\varepsilon_1-b_1\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_1)}$$

$$\Rightarrow\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{b_2\varepsilon_1-b\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}+\frac{b_1}{b_2}=\frac{b_2\varepsilon_1-b_1\varepsilon_2+b_1b_2+b_1\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}$$

$$=\frac{b_2(b_1+\varepsilon_1)}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}=\frac{b_1+\varepsilon_1}{b_2+\varepsilon_2}\quad\Rightarrow\quad\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{b_1+\varepsilon_1}{b_2+\varepsilon_2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

خرنگه چې ε_1 او ε_2 ډېرې کوچنۍ مثبت عددونه ($0<\varepsilon<1$) دي، نو کله چې $x \to a$ وکړي صفر کېږي او په پایله کې په لاس راځي، چې:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}=\frac{b_1}{b_2}$$

د سانډویچ قضیه: که چیرې د $f(x)$, $g(x)$ او $h(x)$ تابعګانې د هر x لپاره په یوه غیر تړلي انټروال کې چې د a عدد په کې شامل دی(ولو که $x \neq a$) او $f(x)\le g(x)\le h(x)$ شرط صدق وکړي په هغه صورت کې چې $\lim_{x\to a}f(x)=b=\lim_{x\to a}h(x)$ وي، نو $\lim_{x\to a}g(x)=b$ دی.

مثال: که د $u(x)$ تابع دغه خاصیت ($1-\frac{x^2}{4}\le u(x)\le 1+\frac{x^2}{2}$) ولري، نو $\lim_{x\to a}u(x)$ په لاس راوړئ.

حل: لیدل کېږي چې $\lim_{x\to 0}(1+\frac{x^2}{2})=1=\lim_{x\to 0}(1-\frac{x^2}{4})$ نو د سانډویچ د قضیې په پام کې نیولو سره لرو چې:

$\lim_{x\to 0}u(x)=1$

قضیه: که چیرې $f(x)$ او $g(x)$ داسې تابعګانې وي چې $f(x)<g(x)$ نو د لیمیټ د شتون په صورت کې یې لیمیټ $\lim_{x\to a}f(x)\le\lim_{x\to a}g(x)$ سره دی.

مثال: د $f(x)=\frac{15x-4}{5x+6}$ او $g(x)=\frac{15x+4}{5x-6}$ تابعګانې په پام کې نیسو په واضح ډول معلومېږي چې $f(x)<g(x)$ دی، د $x>1$ لپاره لرو:

حل:

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{15x-4}{5x+6}=\frac{15}{5}=3$$

$$\lim_{x\to\infty}g(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{15x+4}{5x-6}=\frac{15}{5}=3$$

پوښتنې

لاندې لیمیټونه د امکان په صورت کې پیدا کړئ.

1) $\lim_{x\to 0}6x^3-2x^2+5x+3$ 2) $\lim_{x\to -1}x^7-2x-5$ 3) $\lim_{x\to 0}\frac{(9x+2)^2-4}{x}$

4) $\lim_{x\to 0}\frac{5x^2+7x}{(2x-5)^2-9}$ 5) $\lim_{x\to 2}\sqrt{x-2}$ 6) $\lim_{x\to 1}\frac{2x}{x^2-4x+1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د نسبتي تابعګانو لېمیټونه

آیا پوهېږئ چې مخامخ اریکې په څه نامه یادېږي؟

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$$

$$\infty - \infty$$

$$0 \cdot \infty$$

فعالیت

- د $y = x^2 - 1$ تابع لېمیټ هغه وخت پیداکړئ، چې $x \to -2$ ته تقرب وکړي.
- د $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ تابع لېمیټ هغه وخت پیداکړئ، چې $x \to 1$ ته تقرب وکړي.
- د $y = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$ تابع لېمیټ هغه وخت پیداکړئ، چې $x \to \infty$ ته تقرب وکړي.

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله لیکلای شو:

پایله

- د ځینو تابعګانو لېمیټ مستقیماً د قیمت په وضع کولو سره لاسته راځي.
- د ځینو تابعګانو لېمیټ مبهم شکلونه لري؛ لکه $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty$ ... چې د ابهام د له منځه وړلو څخه وروسته د تابع لېمیټ لاسته راځي، چې په لاندې ډول یې تر څېړنې لاندې نیسو:

I- د $\frac{0}{0}$ **بڼه**:

فعالیت

- د $f(x) = \frac{x - 1}{x^2 - 1}$ تابع قیمت د $x = -1$ په نقطه کې وڅېړئ.
- د $f(x)$ تابع لېمیټ کله چې $x \to 1$ وي د ابهام کومه بڼه لري.
- آیا د $f(x)$ تابع په داسې ډول ساده کولای شو چې د $x = 1$ لپاره یو معین قیمت ولري؟

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

که چیرې یوه تابع د $\frac{0}{0}$ په شکل مبهمه بڼه ولري، د لېمیټ د پیداکولو لپاره یې لومړی تابع د تجزیې په مرسته ساده کوو د ابهام عامل(خبیثه فکتور) له منځه وړو او بیا یې د لېمیټ قیمت په لاس راوړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: لاندې لېمیټونه پیداکړئ.

$$1)\ \lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}\quad ,\quad 2)\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x-2}\quad ,\quad 3)\ \lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}$$

حل: لومړی د لېمیټ بڼه ټاکو:

$$1)\ \lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}=\frac{(-2)^2-4}{-2+2}=\frac{0}{0}$$

څرنګه چې پاسنۍ لېمیټونه د $\frac{0}{0}$ بڼه لري، نو د تجزیې په مرسته یې وروسته له ساده کولو څخه د لېمیټ قیمت په لاندې ډول په لاس راوړو:

$$\Rightarrow \lim_{x\to -2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)}=\lim_{x\to -2}(x-2)=-2-2=-4$$

$$2)\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x-2}=\frac{2^2-12+8}{2-2}=\frac{0}{0}$$

حل: بیا هم لېمیټ د $\frac{0}{0}$ مبهم شکل لري:

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-4)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x-4)=2-4=-2$$

$$3)\ \lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}=\frac{0}{0}$$

حل: لیدل کېږي چې نوموړی لېمیټ بیا هم د $\frac{0}{0}$ بڼه لري، نو د لېمیټ د لاسته راوړلو لپاره د کسر صورت او مخرج د صورت په مزدوج کې ضربوو:

$$\Rightarrow \lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}\cdot\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+4}=\lim_{x\to 16}\frac{(x-16)}{(x-16)(\sqrt{x}+4)}$$

$$=\lim_{x\to 16}\frac{1}{\sqrt{x}+4}=\frac{1}{8}$$

پوښتنې

$$1)\ \lim_{x\to 3}\frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}=?\qquad 2)\ \lim_{x\to 1}\frac{\frac{5}{2x-3}+5}{x^2-1}=?\qquad 3)\ \lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}=?$$

$$4)\ \lim_{x\to 2}\frac{\frac{2x}{x^2+1}-\frac{4}{5}}{x-2}=?\qquad 5)\ \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+3}-\frac{1}{3}}{x}=?$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

II- د $\frac{\infty}{\infty}$ مبهم شکل

آیا د مخامخ تابع لیمیټ ټاکلی شئ؟

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-3x+8}{2x^2-2}$$

فعالیت

- د $f(x)=2x^4+x^3-4x-1$ د تابع لیمیټ چې $x\to\infty$ وخېږئ.
- د $g(x)=x^3-2x-4$ د تابع لیمیټ چې $x\to\infty$ وخېږئ.
- د $y=\frac{5}{x-2}$ د تابع لیمیټ چې $x\to\infty$ وخېږئ.
- د $\frac{f(x)}{g(x)}$ د تابع لیمیټ هغه وخت په لاس راوړئ، چې $x\to 0$ وکړي.
- د $\frac{f(x)}{g(x)}$ د تابع لیمیټ هغه وخت په لاس راوړئ، چې $x\to\infty$ وکړي.

له پاسنی فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

پایله: هغه توابع چې د $\frac{\infty}{\infty}$ بڼه ولري د لیمیټ د پیداکولو لپاره یې داسې کړنه کوو:

د تابع صورت او مخرج په هغه متحول، چې تر ټولو لوی توان ولري وېشو، وروسته له ساده کولو څخه یې لیمیټ په لاس راځي.

لومړی مثال: $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{3x^2-2}$ پیداکړئ.

حل: لومړی د لیمیټ بڼه ټاکو:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{3x^2-2}=\frac{\infty-1}{\infty-2}=\frac{\infty}{\infty}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځرنګه چې پوښتنه د $\frac{\infty}{\infty}$ شکل لري، نو صورت او مخرج په x^2 باندې وېشو:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{3x^2-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2}-\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x^2}}{3-\frac{2}{x^2}}=\frac{1-\frac{1}{\infty}}{3-\frac{2}{\infty}}=\frac{1-0}{3-0}=\frac{1}{3}$$

دويم مثال: د $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2}{x-2}$ پيدا کړئ.

حل: $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2}{x-2}=\frac{\infty}{\infty}$

ځرنګه چې پوښتنه د $\frac{\infty}{\infty}$ شکل لري، نو صورت او مخرج د x له ټولو په لوړ توان وېشو:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2}{x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2}{x^2}}{\frac{x}{x^2}-\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x^2}}{\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=\frac{1-\frac{2}{\infty}}{\frac{1}{\infty}-\frac{2}{\infty}}=\frac{1-0}{0}=\frac{1}{0}=\infty$$

دريم مثال: $\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x^2-2}$ پيدا کړئ.

حل: $\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x^2-2}=\frac{\infty}{\infty}$

ځرنګه چې پوښتنه $\frac{\infty}{\infty}$ شکل لري، نو صورت او مخرج د x له ټولو په لوړ توان وېشو:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x^2-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x^2}}=\frac{\frac{1}{\infty}-\frac{1}{\infty}}{1-\frac{2}{\infty}}=\frac{0}{1-0}=\frac{0}{1}=0$$

يادونه: هغه تابعګانې چې د $\frac{\infty}{\infty}$ بڼه ولري، پرته له دې چې عمليه پرې سرته ورسوو کولای شو، په لاندې ډول د هغوی لېميټ په لاس راوړو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $f(x)=\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+...+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+...+b_n}$ تابع په پام کې ونيسئ که چيرې ($x\to\infty$) کړي وي؛ نو دلته درې حالتونه ممکن دي:

1- د $m=n$ لپاره د نوموړی کسر لېميټ عبارت دی له $\frac{a_0}{b_0}$.

2- د $m<n$ لپاره د نوموړی کسر لېميټ عبارت له صفر څخه دی.

3- د $m>n$ لپاره د نوموړی کسر لېميټ عبارت له $\pm\infty$ څخه دی.

څلورم مثال: لاندې لېميټونه پيدا کړئ.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2+6x^4-x^3+x-1}{-x^4+2x^2-3}$ 2) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{-8+6x^3-x^2+x}{5x^3-x^4+6x-1}$ 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-2}{x+1}$

حل:

1- څرنګه چې $m=n$ دی، نو:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+6x^4-x^3+x-1}{-x^4+2x^2-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x^4}{-x^4}=-6$$

2- څرنګه چې $m<n$ دی، نو د نوموړی تابع ليميټ صفر دی.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-8+6x^3-x^2+x}{5x^3-x^4+6x-1}=0$$

3- څرنګه چې $m>n$ دی، نو د نوموړي تابع ليميټ مساوي له ∞ سره دی:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2}{x+1}=\infty$$

يادونه: زده‌کوونکي دې ورکړل شوي څوابونه په کور کې د عمليې د سرته رسولو څخه وروسته په لاس راوړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

لاندې لیمیټونه پیدا کړئ؟

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6}{x^2 - x}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4 + x^2 + x + 6}{x^3 - 3x + 4}$

3) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^5 + x^2 - x + 9}{x^4 + x^2 - x + 5}$

4) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3 + x^2 - x + 7}{x^3 - x + 5}$

5) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2 - 2}{x + 1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

III- د $(\infty-\infty)$ او $(0\cdot\infty)$ مبهم شکلونه

د مخامخ لېمېټونو قیمتونو پیدا کړئ.

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x^2-4}-\frac{x-1}{x^2-4}$$

$$\lim_{x\to 3}(x^2-9)\cdot\frac{2x^3-4}{x-3}$$

فعالیت

- د $a+1$ مزدوج ولیکئ.
- د $\sqrt{x}-1$ مزدوج ولیکئ.
- د $f(x)=\sqrt{x}-\sqrt{x+1}$ لېمیټ پیدا کړئ،کله چې $x\to\infty$ تقرب وکړي.
- د $f(x)=(2x-1)(x+1)$ تابع لېمیټ وټاکئ، کله چې $x\to\infty$ تقرب وکړي.

له پورتني فعالیت څخه پایله داسې بیانوو:

د هغو تابعګانو چې د $(\infty-\infty)$ او $(0\cdot\infty)$ مبهم شکلونه ولري، د لېمیټ د پیداکولو لپاره یې د کسرونو له جمع کولو، ضرب او مزدوج څخه ګټه اخلو او هغه داسې ساده کوو، تر څو چې د $\frac{0}{0}$ او یا $\frac{\infty}{\infty}$ بڼه غوره کړي، وروسته یې لېمیټ په لاس راوړو.

مثال: لاندې لېمیټونه پیدا کړئ.

1) $\lim_{x\to 1}(\frac{9}{x-1}-\frac{8x+10}{x^2-1})=?$ 2) $\lim_{x\to 1}(x-1)(\frac{1}{x^2+2x-3})=?$

حل 1:

$$\lim_{x\to 1}(\frac{9}{x-1}-\frac{8x+10}{x^2-1})=\frac{9}{1-1}-\frac{8\cdot 1+10}{1^2-1}=\frac{9}{0}-\frac{18}{0}=\infty-\infty$$

څرنګه چې نومړی لېمیټ د $(\infty-\infty)$ بڼه لري نو لیکلای شو، چې:

$$=\lim_{x\to 1}\frac{9x+9-8x-10}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{0}{0}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

2) $\lim\limits_{x\to1}(x-1)(\frac{1}{x^2+2x-3})=?$

حل2:

$$\lim_{x\to1}(x-1)(\frac{1}{x^2+2x-3})=(1-1)(\frac{1}{1^2+2-3})=0\cdot\frac{1}{3-3}=0\cdot\frac{1}{0}=0\cdot\infty$$

لیدل کېږي چې نوموړی لېمیټ د $(0\cdot\infty)$ شکل لري، نو:

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(x+3)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{x+3}=\frac{1}{4}$$

پوښتنې

لاندې لېمیټونه پیدا کړئ.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$

2) $\lim\limits_{x\to1}(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^2})$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^5-8x^3)$

4) $\lim\limits_{x\to5}\left[(x^2-25)\frac{1}{x-5}\right]$

5) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})$

د $1^{\infty}, \infty^{0}, 0^{0}$ شکلونه

د مخامخ لیمیټ مبهم شکل وټاکئ؟

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}} = ?$$

فعالیت

- د $y = x^{x}$ تابع لیمیټ په هغه صورت کې پیدا کړئ چې $x \to 0$ وکړي.
- د $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ لیمیټ بیا په هغه صورت کې وټاکئ چې $x \to \infty$ وکړي.
- د کومې عملیې په مرسته کولای شو چې $1^{\infty}, \infty^{0}, 0^{0}$ شکلونه په ضرب بدل شو.

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

که چیرې یوه تابع پورتني مبهم شکلونه ځانته غوره کړي هغه د طبیعي لوګاریتم په مرسته د $0 \cdot \infty$ شکل ته د اړولو وړ دي، یعنې:

$$\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)} \Rightarrow \ln(\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}) = \lim_{x\to a}(\ln f(x)^{g(x)}) = \lim_{x\to a}[g(x)\ln f(x)]$$

یادونه:

I- که چیرې $n \to \infty$ وکړي د $a_n = (1+\frac{1}{n})^{n}$ ترادف $e = 2.71828182$ عدد ته تقرب کوي.

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n} = e$$

چې په لاندې جدول کې ښکاریږي:

n	$\frac{1}{n}$	$1+\frac{1}{n}$	$(1+\frac{1}{n})^{n}$
1	1	2	2
2	0.5	1.5	2.25
5	0.2	1.2	2.48832
10	0.1	1.1	2.59374246
100	0.01	1.01	2.704813829
1000	0.001	1.001	2.716923932
10000	0.0001	1.0001	2.718145926
100000	0.00001	1.00001	2.718268237
1000000	0.000001	1.000001	2.718280469
1000000000	10^{-9}	$1+10^{-9}$	2.718281828

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e = 2.718281828$ دی چې ... $e = 2.71$ عدد ته د Euler عدد وايي.

II-

1) $\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$ 2) $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{\alpha}{x})^{\beta x} = e^{\alpha\beta}$

3) $\lim_{x\to 0}\frac{Ln(1+x)}{x} = 1$ 4) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1$

ثبوت: پوهېږو چې څلور واړه پوښتنې د 1^∞ مبهم شکلونه لري.

1) $x = \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{x} \ , \ \alpha \to 0 \Rightarrow x \to \infty \Rightarrow \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$

2) $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{\alpha}{x})^{\beta x} = e^{\alpha\beta}$

$$u = \frac{\alpha}{x} \Rightarrow x = \frac{\alpha}{u} \ , \ x \to \infty \Rightarrow u \to 0$$

$$\lim_{u\to 0}(1+u)^{\beta\frac{\alpha}{u}} = \lim_{u\to 0}\left[(1+u)^{\frac{1}{u}}\right]^{\alpha\beta}$$

$$x = \frac{1}{u} \to u = \frac{1}{x} \ , \ u \to 0 \Rightarrow x \to \infty$$

$$\lim_{u\to 0}\left[(1+u)^{\frac{1}{u}}\right]^{\alpha\beta} = \lim_{x\to\infty}\left[(1+\frac{1}{x})^x\right]^{\alpha\beta} = e^{\alpha\beta}$$

3) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\ln(1+x)\right] = \lim_{x\to 0}\left[\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]$

$$\ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right] \ , \ x = \frac{1}{u} \Rightarrow u = \frac{1}{x} \ , \ x \to 0 \Rightarrow u \to \infty$$

$$\ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right] = \ln\left[\lim_{u\to\infty}(1+\frac{1}{u})^u\right] = \ln e = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$4)\ y=e^x-1 \Rightarrow e^x=1+y \Rightarrow x=\ln(1+y)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(1+y)}{y}}=\frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}}$$

$$=\frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\frac{1}{y}\ln(1+y)}=\frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\ln(1+y)^{\frac{1}{y}}}\ ,\ y=\frac{1}{x}\Rightarrow x=\frac{1}{y}\ ,\ y\to 0\Rightarrow x\to\infty$$

$$=\frac{1}{\ln\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x}=\frac{1}{\ln e}=\frac{1}{1}=1$$

د 1^∞ مبهم شکل عمومي حالت: که چیرې د اکسپوننشیل تابع لیمیټ یعني $\lim\limits_{x\to a}[u(x)]^{v(x)}$ د 1^∞ مبهم شکل ځانته غوره کړي په دې حالت کې $\alpha=u-1$ سره تعویضوو، په نتیجه کې:

$$\lim_{x\to a}u^v=\lim_{x\to a}[(1+u-1)]^{\frac{v}{u-1}u-1}=\lim_{x\to a}\left[(1+\alpha)^{\frac{v}{\alpha}\alpha}\right]=\lim_{x\to a}\left[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\lim\limits_{x\to a}(v\alpha)}$$

خرنګه چې $\alpha=u-1$ دی که چیرې $u\to 1$ **نو** $\alpha\to 0$ **ته نږدې کېږي په پایله کې :**

$$\lim_{x\to a}[u(x)]^{v(x)}=\left[\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\lim\limits_{x\to a}[v(u-1)]}=e^{\lim\limits_{x\to a}[v(u-1)]}=e^P$$

$$\lim_{x\to a}[u(x)]^{v(x)}=e^P\quad,\quad P=\lim_{x\to a}[v(u-1)]$$

لومړی مثال: د $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^x$ لیمیټ قیمت په لاس راوړئ.

حل: لومړی د لیمیټ بڼه ټاکو معلومېږي چې لیمیټ د 1^∞ مبهم شکل لري، نو له فورمول څخه کار اخلو:

$$u=1+\frac{2}{x}\quad,\quad v=x$$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^x=e^P\quad,\quad P=\lim_{x\to\infty}\left[x(1+\frac{2}{x}-1)\right]=2$$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^x=e^P=e^2$$

دویم مثال: د $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{\frac{x-5}{2}}$ **قیمت محاسبه کړئ.**

حل: **لومړی د لیمیټ بڼه ټاکو** $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{\frac{x-5}{2}}=1^\infty$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

څرنګه چې معلومېږي نوموړی لېمیټ د 1^{∞} مبهم شکل لري نو له فورمول څخه کار اخلو:

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{\frac{x-5}{2}} = e^P$$

$$u = 1+\frac{1}{x} \quad , \quad v = \frac{x-5}{2}$$

$$P = \lim_{x\to a}[v(u-1)] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x-5}{2}(1+\frac{1}{x}-1)\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x-5}{2}(\frac{1}{x})\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{x-5}{2x} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{\frac{x-5}{2}} = e^P = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

دریم مثال: $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}} = ?$

حل: **د تېر په شان بیاهم لومړی د لېمیټ بڼه ټاکو،** $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}} = 1^{\infty}$

څرنګه چې معلومېږي لېمیټ د 1^{∞} مبهم شکل لري د فورمول په مرسته يې محاسبه کوو:

$$u = \cos x \quad , \quad v = \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}} = e^P$$

$$P = \lim_{x\to a}[v(u-1)] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}(\cos x-1)\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)(\cos x+1)}{x(\cos x+1)}$$

$$\frac{\cos^2 x+\cos x-\cos x-1}{x(\cos x+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-\sin^2 x-\cos^2 x}{x(\cos x+1)}$$

$$= -\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x+1} = -1\cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}} = e^P = e^0 = 1$$

پوښتنې

لاندې لېمیټونه محاسبه کړئ.

1) $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x+2}$

2) $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln x}$

3) $\lim_{x\to\infty}(\frac{x+3}{x-1})^{x+2}$

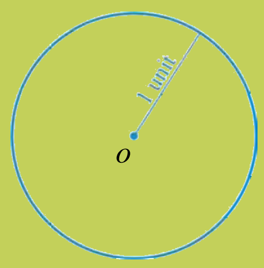
4) $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{n^2})^{n^2}$

5) $\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x}}$

د مثلثاتي تابعګانو لیمیټ

Trigonometric functions limits

که د یوې دایرې شعاع یو واحد (1unit) وي، نوموړې دایرې ته څه ډول دایره وایي.



فعالیت

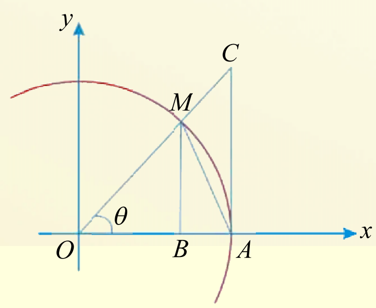
- دوضعیه کمیاتو په سیستم کې د $C(o,r)$ په مثلثاتي دایره کې د θ مرکزي زاویه رسم کړئ.
- د C له بهرني ټکي څخه په دایره باندې د ox پر محور د $\overline{CA}$ مماس او $\overline{MB}$ عمود رسم کړئ.
- د C ټکی د دایرې له مرکز سره وصل کړئ.
- د مرکزي زاویې د مقابل قوس د اندازه کولو واحد په ګوته کړئ.

له پورتني فعالیت څخه قضیه داسې بیان او ثبوتوو:

قضیه: د یوې زاویې د ساین او د هغې زاویې د نسبت لیمټ مساوي په (1) دي، کله چې زاویه صفر ته تقرب وکړي.

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$$

ثبوت: په لاندې شکل کې د MOA او COA د مثلثونو او OMA د قطاع مساحتونه په لاس راوړو:



مثلث مساحت MOA د $=\frac{1}{2}\cdot\overline{OA}\cdot\overline{BM}=\frac{1}{2}\cdot r\cdot\overline{BM}=\frac{\overline{BM}}{2}\cdot r$

قطاع مساحت $O\overset{\frown}{A}M$ د $=\frac{1}{2}\theta r^2$

د θ د زاویې پراخوالی باید په رادیان لاسته راوړو.

مساحت $C\overset{\Delta}{O}A$ د $=\frac{1}{2}\cdot\overline{OA}\cdot\overline{AC}=\frac{1}{2}\cdot r\cdot\overline{AC}=\frac{\overline{AC}}{2}\cdot r$

د MOA او COA مثلثونو مساحتونه د OMA د قطاع له مساحت سره پرتله کوو:

$$\frac{1}{2}r\,\overline{BM}<\frac{1}{2}\theta r^2<\frac{\overline{AC}}{2}\cdot r$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د نامساواتو دواړه خواوې په $\frac{2}{r^2}$ کې ضربوو:

$$\frac{\overline{BM}}{r}<\theta<\frac{\overline{AC}}{r} \Rightarrow \sin\theta<\theta<\tan\theta \Rightarrow 1<\frac{\theta}{\sin\theta}<\frac{1}{\cos\theta}$$

$$\Rightarrow \cos\theta<\frac{\sin\theta}{\theta}<1 \Rightarrow \lim_{\theta\to0}\cos\theta\le\lim_{\theta\to0}\frac{\sin\theta}{\theta}\le\lim_{\theta\to0}1$$

د ساندویچ د قضیې پر بنسټ معلومېږي چې $\lim_{\theta\to0}\cos\theta=1$ او همدارنګه $\lim_{\theta\to0}1=1$ دی، نو $\lim_{\theta\to0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$ دی.

پوهېږو چې د هرې زاویې ساین د (1) او (-1) د عددونو تر منځ تحول کوي:

$$-1\le\sin\theta\le1$$

$$-\frac{1}{\theta}\le\frac{\sin\theta}{\theta}\le\frac{1}{\theta}$$

$$-\lim_{\theta\to\infty}\frac{1}{\theta}\le\lim_{\theta\to\infty}\frac{\sin\theta}{\theta}\le\lim_{\theta\to\infty}\frac{1}{\theta}$$

د ساندویچ د قضیې پر اساس لیکلای شو چې:

$$\left.\begin{array}{l}-\lim\limits_{\theta\to\infty}\frac{1}{\theta}=0\\ \lim\limits_{\theta\to\infty}\frac{1}{\theta}=0\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{\theta\to\infty}\frac{\sin\theta}{\theta}=0$$

په پایله کې ویلای شو چې د یوې زاویې ساین او د هغې زاویې د نسبت لیمیټ مساوي په صفر دی هغه وخت چې زاویه بې‌نهایت ته نږدې شي.

لومړی مثال: $\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{x}$ پیدا کړئ.

حل: که $2x=\alpha$ نو $x=\frac{\alpha}{2}$ کېږي، څرنګه چې $x\to0$ کړی دی، نو $\alpha\to0$ کوي، نو لیکلای شو:

$$\frac{\sin\alpha}{\frac{\alpha}{2}}=2\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

له پورته مساواتو څخه لاس ته راځي:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim_{\alpha\to0}\frac{\sin\alpha}{\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow 2\lim_{\alpha\to0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=2\cdot1=2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال: $\lim_{x\to0}\frac{5\tan2x}{7x}$ حل کړئ.

حل:

$$\frac{5\tan2x}{7x}=\frac{5\frac{\sin2x}{\cos2x}}{7x}=\frac{5\sin2x}{7x\cos2x}=\frac{5\cdot2x\frac{\sin2x}{2x}}{7x\cos2x}=\frac{10\frac{\sin2x}{2x}}{7\cos2x}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{5\tan2x}{7x}=\frac{10}{7}\frac{\lim_{x\to0}\frac{\sin2x}{2x}}{\lim_{x\to0}\cos2x}=\frac{10}{7}$$

دریم مثال: $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos2x}{x}$ حل کړئ.

حل: پوهېږو چې $1-\cos2x=2\sin^2x$ سره دی، نو:

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos2x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2x}{x}$$

$$=2\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to0}\sin x=2\cdot1\cdot0=0$$

څلورم مثال: $\lim_{x\to0}\frac{\tan3x}{\sin5x}$ پیداکړئ:

حل:

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan3x}{\sin5x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin3x}{\cos3x}}{\sin5x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{3x\frac{\sin3x}{3x}}{\cos3x}}{5x\frac{\sin5x}{5x}}=\frac{3x}{5x}\frac{\frac{\lim_{x\to0}\frac{\sin3x}{3x}}{\lim_{x\to0}\cos3x}}{\lim_{x\to0}\frac{\sin5x}{5x}}=\frac{3}{5}\frac{\frac{1}{1}}{1}=\frac{3}{5}$$

پنځم مثال: $\lim_{x\to0}\frac{\cos4x-\cos6x}{x^2}$ په لاس راوړئ.

حل: پوهېږو چې $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ نو:

$$\lim_{x\to0}\frac{-2\sin\frac{4x+6x}{2}\sin\frac{4x-6x}{2}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-2\sin5x\sin(-x)}{x^2}=-2\lim_{x\to0}\frac{5\sin5x}{5x}\lim_{x\to0}\frac{-\sin x}{x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که $y = 5x$ سره وي، او $x \to 0$ نو $y \to 0$ کوي، نو:

$$= 10\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 10\cdot 1\cdot 1 = 10$$

پوښتني

لاندي لېمیټونه محاسبه کړئ.

1) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin(x+\frac{\pi}{6})}{x+\frac{\pi}{6}}$

2) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x}$

3) $\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{1+\tan^2 x}$

4) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x}{x}$

5) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{\sin 3x}$

6) $\lim_{x\to 0}\sin 5x\cos 3x$

7) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan(2x-1)}{4x^2-1}$

8) $\lim_{x\to 0}\sqrt{\cos 2x - \cos x + 1}$

9) $\lim_{x\to 1}(\cos^2 x + \sin^2 x)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تابعګانو متمادیت

Continuity of functions

شکلونو ته پام وکړئ.

لومړي او دویم پلونه څه توپیر لري، خپل نظر بیان کړئ.

د تابعګانو ګرافونه مختلف شکلونه لري، چې ځینې یې په یوه قلم پرته له دې چې د قلم څوکه له کاغذ څخه پورته شي رسمېږي، متصلې یا متمادي تابعګانې بلل کېږي او ځینې یې په یوه قلم نه شي رسمېدلای یعنې د رسم په وخت کې باید د قلم څوکه یو ځل یا څو ځلې د کاغذ څخه پورته شي، څکه په یوه برخه کې یې ګراف غوڅ وي، دغه ډول تابعګانې په نوموړې ټکي کې غیر متصلې یا غیر متمادي تابعګانې بلل کېږي.

فعالیت

- د $f(x) = x^2 + 4x$ تابع ګراف رسم کړئ.
- د $f(x)$ د تابع لېمیټ د $x = 1$ په نقطه کې پیدا کړئ.
- د $f(x)$ د تابع قیمت د $x = 1$ په نقطه کې پیدا او وروسته داوړه اړیکې سره پرتله کړئ.

له پاسني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

پایله: د $y = f(x)$ تابع د $x = a$ په ټکي کې متمادي بلله کېږي، چې لاندې شرطونه په کې صدق وکړي.

1- د $f(x)$ تابع د a په ټکي کې تعریف شوې وي.

2- راکړل شوې تابع د a په ټکي کې لېمیټ ولري.

3- د $f(a)$ قیمت باید د $f(x)$ له لېمیټ سره مساوي وي: $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

لومړی مثال: وښيئ چې د $f(x)=x^2+2x-1$ تابع د $x_0=2$ په ټکي کې متمادي ده.

حل:ځرنګه چې د تابع د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه دي، نو د متمادیت له شرطونو څخه لیکلای شو:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ 2\in Dom\ f(x)=IR \\ 2)\ \lim\limits_{x\to 2}(x^2+2x-1)=4+4-1=7 \\ 3)\ f(2)=2^2+4-1=7 \end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 2}f(x)=f(2)=7$$

ځرنګه چې د متمادیت درې واړه شرطونه په کې حقیقت لري، بناءً تابع متمادي ده.

دویم مثال: د $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$ د تابع متمادیت د $x_0=-1$ په ټکي کې وڅېړئ.

حل: د $f(x)$ د تابع د تعریف ساحه عبارت ده؛ له: $IR\setminus\{-1\}$

او $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x-1}{x+1}=\dfrac{-3}{0}=\infty$ سره دی.

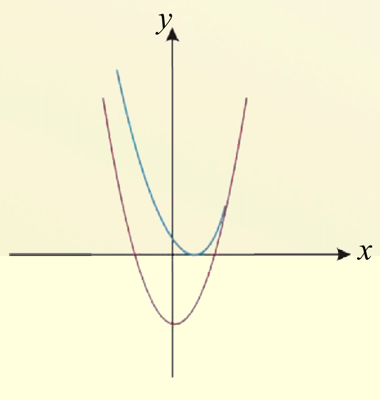
ځرنګه چې لیدل کیږي -1 د تابع د تعریف په ساحه کې شامل نه دی، بناءً نوموړی تابع د -1 په ټکي کې متمادي نه ده.

دریيم مثال: د $f(x)=\begin{cases}x^2-2x+1\ ;\ x<2\\ x^2-3\ \ \ \ \ \ \ \ ;\ x\geq 2\end{cases}$ د تابع متمادیت د $x=2$ په ټکي کې وڅېړئ.

حل: لومړی د تابع د ښي او کیڼي خوا لیمټونه څیړو:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(x^2-3)=1 \\ \lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x^2-2x+1)=1 \end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 2^+}f(x)=\lim_{x\to 2^-}f(x)\quad\Rightarrow\lim_{x\to 2}f(x)=f(2)$$

په پایله کې ویلای شو چې تابع په نوموړي ټکي کې متمادي ده، لکه چې په شکل کې لیدل کیږي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

څلورم مثال: که $f(x)=\begin{cases}2x+1 \; ; \; x\ge 1\\ 1-x \; ; \; x<1\end{cases}$ وي، نو د $x=1$ په ټکي کې د تابع متمادیت وڅیړئ.

حل:

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 1} f(x)=1-x=0\\ f(1)=0\end{array}\right\} \left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} 2x+1=3\\ \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} 1-x=0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 1^+} f(x)\neq \lim_{x\to 1^-} f(x)$$

نو تابع په $x=1$ کې غیر متمادي ده.

پایله: که چیرې د $g(x)$ تابع د $x=a$ په ټکي کې $f(x)$ په $x=g(a)$ کې متمادي وي، نو $f(g(x))$ په $x=a$ کې هم متمادي ده، یعنې:

$$\lim_{x\to a} f(g(x))=f(\lim_{x\to a} g(x))=f(g(a))$$

1) $\lim_{x\to a}(f(x))^{\alpha}=(\lim_{x\to a} f(x))^{\alpha} \quad , \quad \alpha\in IR$

2) $\lim_{x\to a} a^{f(x)}=a^{\lim_{x\to a} f(x)}$

3) $\lim_{x\to a}\log_a f(x)=\log_a(\lim_{x\to a} f(x))$

4) $\lim_{x\to a}\sin f(x)=\sin(\lim_{x\to a} f(x))$

پنځم مثال: که $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x+3}$ وي او $x\neq -3$ وي.

آیا د $f(x)$ تابع د $x=-3$ په ټکي کې متمادي ده؟

حل: څرنګه چې تابع د $x=-3$ په نقطه کې نه ده تعریف شوې یا په بل عبارت د -3 عدد د تابع د تعریف په ساحه کې نه دی شامل، نوله دې امله تابع د $x=-3$ په ټکي کې متمادي نه ده.

غیر متمادیت: که چیرې د $f(x)$ تابع په $x=a$ کې یو له لاندې درې شرطونو څخه و نه لري وایو چې f په a کې غیر متمادي ده او a یې د انفصال ټکی دی. انفصال په درې ډوله دی.

لومړی ډول: د f تابع د a په ټکي کې د ښي او کیڼ لوري لیمیټونه ولري خو مساوي نه وي.

دویم ډول: کم تر کمه یو له دوو لیمیټونو(د ښي او کیڼ لوري لیمیټونه) څخه موجود نه وي.

دریم ډول: که چیرې تابع د a په ټکي کې لیمیټ ولري خو a د f د تعریف په ساحه کې شامل نه وي.(یوازې یو خالي ټکی وي.)

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

په ورکړ شویو ټکو کې د تابع متمادیت وڅېړئ.

a) $f(x) = x^2 + 5(x-2)^7 \quad ; \quad x = 3$

b) $f(x) = \dfrac{x+3}{(x^2+2x-5)} \quad ; \quad x = -1$

c) $h(x) = \dfrac{\sqrt{8-x^2}}{2x^2-5} \quad ; \quad x = -2$

d) $f(x) = \dfrac{1}{(x-3)^3} \quad ; \quad x = 3$

e) $f(x) = |x-3| \quad ; \quad x = 3$

f) $g(x) = \dfrac{|x|}{x} \quad ; \quad x = 0$

g) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3+x}{x} & ; \quad x \neq 0 \\ 3 & ; \quad x = 2 \end{cases}$

h) $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x+3} \quad ; \quad x = 2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د متمادي تابعگانو خاصیتونه

د مخامخ مساواتو په اړه سوچ وکړئ چې حقیقت لري او که نه؟

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$$
$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$
$$(f \div g)(x) = f(x) \div g(x) \quad , g(x) \neq 0$$

فعالیت

- که $f(x) = x^2 - 1$ وي د تابع متمادیت وڅېړئ.
- که $g(x) = x + 3$ وي د تابع متمادیت وڅېړئ.
- د $f(x) + g(x)$ د تابعگانو متمادیت وڅېړئ.

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

پایله: که د $f(x)$ او $g(x)$ تابعگانې د $x = c$ په ټکي کې متمادي وي، نو له لاندې تابعگانو څخه یې هره یوه په $x = c$ یا یوه انټروال کې متمادي ده.

1- د تابعگانو جمع $f(x) + g(x)$

2- د تابعگانو تفریق $f(x) - g(x)$

3- د تابعگانو ضرب $f(x) \cdot g(x)$

4- د تابعگانو تقسیم $\dfrac{f(x)}{g(x)} \; ; \; g(x) \neq 0$

لومړی بېلگه: **که** $f(x) = x^2 + 3$ **او** $g(x) = x^2 + 3x - 2$ **وي، نو:**

1- f او g د $x = 1$ په ټکي کې متمادي دي او که نه؟

2- وڅېړئ، چې:

الف) $f(x) + g(x) = (f + g)(x)$ وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ د $x=1$ په نقطه کې متمادي ده او که غیر متمادي.

حل:لومړی هره یوه تابع بېلابېله څېړو چې متمادي ده که نه؟

1) $Df(x) = IR$

2) $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}(x^2+3) = 4$

3) $f(1) = (1^2+3) = 4$

نو د f **تابع د** $x=1$ په نقطه کې متمادي ده.

1) $Dg(x) = IR$

2) $\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1}(x^2+3x-2) = 1^2+3\cdot 1-2 = 2$

3) $g(1) = (1^2+3\cdot 1-2) = 2$

په همدې شان د g تابع د $x=1$ په ټکي کې هم متمادي ده.

2- اوس د تابعګانو د جمعې او ضرب د حاصل متمادیت څېړو:

الف)

$f(x)+g(x) = x^2+3+x^2+3x-2 = 2x^2+3x+1$

1) $D(f(x)+g(x)) = IR$

2) $\lim_{x\to 1}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to 1}(2x^2+3x+1) = 6$

3) $f(1)+g(1) = (1+3+1+3-2) = 6$
$\lim_{x\to 1}[f(x)+g(x)] = f(1)+g(1) = 6$

$(f+g)(x) = x^2+3+x^2+3x-2 = 2x^2+3x+1$
1) $D[(f+g)(x)] = IR$
2) $\lim_{x\to 1}[(f+g)(x)] = \lim_{x\to 1}[2x^2+3x+1] = 6$
3) $(f+g)(1) = (2x^2+3x+1)(1) = 6$
$\lim_{x\to 1}[(f+g)(x)] = (f+g)(1) = 6$

په پایله کې د متمادي تابعګانو د جمعې حاصل د $x=1$ په نقطه کې متمادي دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب)

$$f(x)\cdot g(x)=(x^2+3)(x^2+3x-2)=x^4+3x^3+x^2+9x-6$$

1) $D(f\cdot g)(x)=IR$

2) $(f\cdot g)_{(1)}=1^4+3\cdot 1^3+1^2+9\cdot 1-6=8$

3) $\lim_{x\to 1}(f\cdot g)(x)=8$

$\lim_{x\to 1}(f\cdot g)(x)=(f\cdot g)(1)=8$

په پایله کې د متمادي تابعگانو د ضرب حاصل د $x=1$ په نقطه کې متمادي ده.

دویمه بېلگه: که $g(x)=3x-2$ او $f(x)=x+1$ وي، وخېږئ، چې آیا $f(x)\cdot g(x)$ د $x=2$ په نقطه کې متمادي ده؟

حل:

1) $Df(x)=IR$

2) $\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}(x+1)=3$

3) $f(2)=x+1=3$

$\lim_{x\to 2} f(x)=f(2)=3$

1) $Dg(x)=IR$

2) $\lim_{x\to 2} g(x)=3x-2=3\cdot 2-2=4$

3) $g(2)=3x-2=3\cdot 2-2=4$

$\lim_{x\to 2} g(x)=g(2)=4$

$$f(x)\cdot g(x)=(x+1)(3x-2)=3x^2-2x+3x-2=3x^2+x-2$$

$D(f\cdot g)(x)=IR$

$\lim_{x\to 2}[f(x)\cdot g(x)]=3(4)+2-2=12$

$(f\cdot g)(2)=3(4)+2-2=12$

$\lim_{x\to 2}[f(x)\cdot g(x)]=(f\cdot g)(2)=12$

په پایله کې لاس ته راځي چې $f(x)\cdot g(x)$ د $x=2$ په ټکي کې متمادي ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- وښيئ چې لاندې تابعگانې په ورکړ شويو نقطو کې متمادي دي او که نه؟

1) $f(x) = x^3 - 2(x+1)^5 \quad ; \quad x = 2$

2) $g(x) = \dfrac{x^2+3}{(x^2 - x + 5)(x^2 + 2x)} \quad ; \quad x = -1$

3) $h(x) = \dfrac{x\sqrt{x}+1}{(x+2)^3} \quad ; \quad x = 4$

2- تشريح کړئ، چې ولې د $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+3} - \sqrt{2}}{x}$ تابع په $x = 0$ کې غيرمتمادي ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي لنډيز

د متحول تقرب: ویل کېږي چې د x متحول د a عدد ته تقرب کوي، په داسې حال کې چې x په اختیاري ډول د a عدد ته نږدې کېږي، یعنې د x او a ترمنځ تفاوت له هر کوچني عدد($\delta > 0$) څخه کوچني دی یا په لاندې ډول:

$$\forall \delta > 0 : |x-a| < \delta \quad \text{یا} \quad \lim_{x \to a} x = a \quad \text{یا} \quad x \to a \quad \text{یا} \quad |x-a| \to 0$$

له ښي لوري د متحول تقرب: ($x \to a^+$) که چیرې د x د قیمتونو یو متناقص ترادف موجود وي په داسې حال کې چې په تدریجي ډول د a اختیاري عدد ته نږدې شي.

$$x:\ a+0.1,\ a+0.01\ ,\ a+0.001\ ,\ a+0.0001\ ,\ \ldots \to a^+$$

له کیڼ لوري د متحول تقرب: ($x \to a^-$) که چیرې د x د قیمتونو یو متزاید ترادف موجود وي په داسې حال کې چې x په تدریجي ډول د a اختیاري عدد ته نږدې شي.

$$x:\ a-0.1,\ a-0.01\ ,\ a-0.001\ ,\ a-0.0001\ ,\ \ldots \to a^-$$

نو د x د متحول تقرب د a عدد ته معادل دی د x د متحول تقرب له ښي لوري او د x د متحول تقرب له چپ لوري؛ یعنې:

$$x \to a \iff (x \to a^+\ ,\ x \to a^-)$$

تعریف: که چیرې د $f(x)$ تابع په یوه غیر تړلي انټروال کې چې د a عدد په هغې کې شامل وي کیدای شي چې تابع په a کې نه وي تعریف شوی. که چیرې د x متحول د a عدد ته نږدې شي نو د $f(x)$ تابع د l عدد ته نږدې کېږي، نو ویل کېږي چې د $f(x)$ د تابع لیمیټ عبارت له l څخه دی، کله چې د x متحول د a عدد ته تقرب وکړي نو داسې یې لیکو: $\lim_{x \to a} f(x) = l$ یا $\begin{matrix} x \to a \\ f(x) \to l \end{matrix}$

د لیمیټ ځانګړتیاوې: که f او g دوې تابعګانې وي، C,L او M حقیقي عددونه وي داسې چې $\lim_{x \to c} f(x) = L$ او $\lim_{x \to c} g(x) = M$ ، نو لاندې رابطې لیکلای شو:

1) $\lim_{x \to c}(f(x)+g(x)) = \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x) = L+M$

2) $\lim_{x \to c}(f(x)-g(x)) = \lim_{x \to c} f(x) - \lim_{x \to c} g(x) = L-M$

3) $\lim_{x \to c}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x \to c} f(x) \cdot \lim_{x \to c} g(x) = L \cdot M$

4) $\lim_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to c} f(x)}{\lim_{x \to c} g(x)} = \dfrac{L}{M}\ ,\quad M \neq 0\ ,\quad g(x) \neq 0$

5) $\lim_{x \to c} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x \to c} f(x)} = \sqrt{L}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بې نهايت کوچنی تابعګانې: د $\varepsilon(x)$ تابع کله چې $x \to a$ ته نږدې شي بې نهايت کوچنی بللې کېږي، که چيرې $\lim_{x\to a}\varepsilon(x)=0$ وي.

د ساندويچ قضيه: که چيرې د $f(x)$, $g(x)$ او $h(x)$ تابعګانې د هر x لپاره په يوه غير تړلي انټروال کې چې د a عدد په کې شامل دی(ولو که $x \neq a$) او $f(x) \le g(x) \le h(x)$ شرط صدق وکړي په هغه صورت کې چې $\lim_{x\to a} h(x) = b = \lim_{x\to a} f(x)$ وي، نو $\lim_{x\to a} g(x) = b$ دی.

- که چېرې يوه تابع د $\frac{0}{0}$ بڼه ولري، د لېميټ د پيداکولو لپاره يې لومړی تابع د تجزيې په مرسته ساده کوو او بيا يې لېميټ په لاس راوړو.
- $f(x)=\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ ...\ +a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ ...\ +b_n}$ د تابع د لېميټ د پيداکولو لپاره چې $x\to\infty$ وکړي، عبارت دی له:

1. د $m=n$ لپاره د نوموړي کسر ليميټ عبارت دی له $\frac{a_0}{b_0}$
2. د $m<n$ لپاره د نوموړي کسر ليميټ عبارت له صفر څخه دی.
3. د $m>n$ لپاره د نوموړي کسر ليميټ عبارت دی له $\pm\infty$

- د هغو تابعګانو چې $(\infty-\infty)$ او $(0\cdot\infty)$ بڼه ولري د لېميټ د پيداکولو لپاره يې د کسرونو د جمعې، ضرب او مزدوج څخه ګټه اخلو، تر څو د $\frac{0}{0}$ يا $\frac{\infty}{\infty}$ بڼه غوره کړي چې وروسته يې لېميټ په لاس راوړو.
- هغـــــه تابعګـــــانې چـــــې د 1^∞ مـــــبهم شـــــکلونه لـــــري لـــــه دې فورمـــــول څخه $P=\lim_{x\to a}[v(u-1)]$, $\lim_{x\to a}[u(x)]^{v(x)} \overset{1^\infty}{=} e^P$ يې د لېميټ د پيداکولو لپاره کار اخلو.
- لاندې رابطه کله چې $\theta\to 0$ وکړي هميشه سمه ده.

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$$

- د $y=f(x)$ تابع د $x=a$ په ټکی کې متمادي بلل کېږي، کله چې:

1. a د $f(x)$ د تابع په دومين کې شامل وي.
2. راکړل شوی تابع د a په نقطه کې لېميټ ولري.
3. $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لومړي څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتنو ته څلور ځوابونه ورکړل شوي دي سم ځواب په نښهٔ کړي.

-1 $\lim_{x\to 0}\frac{3x-\sin x}{x}$

a) 2 b) -2 c) 1 d) 3

-2 $\lim_{x\to -2}\frac{x^2-x-6}{x^2+x-2}$

a) $-\frac{5}{3}$ b) $\frac{5}{3}$ c) 0 d) 1

-3 $\lim_{x\to 1.4}(2x+0.3)$

a) 1 b) 3 c) 0 d) هیڅ یو

-4 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\tan 2x}$

a) 1 b) 0 c) $\frac{3}{2}$ d) $\frac{2}{3}$

-5 $\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

a) $2+\sqrt{2}$ b) 2 c) $\sqrt{2}$ d) 4

-6 $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{1+\cos 2x}$

a) 1 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{4}$ d) 4

-7 لاندې لیمیتونه پیداکړئ.

1) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x+5}{2x^2+1}$

2) $\lim_{x\to -1}\sqrt{3+x}$

3) $\lim_{x\to +\infty}\frac{6}{x^2-7}$

4) $\lim_{x\to \infty}\frac{x^4+x^2+x+6}{x^3-3x+4}$

5) $\lim_{x\to \infty}\frac{3x^2-2}{x+1}$

6) $\lim_{x\to 2}\frac{x^3+5x-18}{x^2+3x-10}$

7) $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x-4}{x-\sqrt{3x-2}}$

8) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x-10}$

9) $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}$

10) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x\cos x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

11) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x-10}{x^2-x-2}$

12) $\lim_{x\to -2}\left(\frac{x+3}{x+2}+\frac{2}{x^2+2x}\right)$

13) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(a+x)+\sin(a-x)}{\tan(a+x)+\tan(a-x)}$

14) $\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2}{2x^2-1}-\frac{x^2}{2x+2}$

15) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\sin x-\tan x}{x^2\sin x}$

16) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x+\sin^2 x}{a x^2}$

17) $\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x\sin x+\sin^2 x}{x^2}$

18) $\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin 2x}{x+\sin 3x}$

19) $\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 3x\sin 2x}{x\tan 3x}$

20) $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x+2}}+\frac{1}{\sqrt{x+2}}$

21) $\lim_{u\to 0}\frac{\sin 3(\pi+u)}{\sin 8(\pi+u)}$

22) $\lim_{x\to 1}\frac{1-x^2}{\sin \pi x}$

23) $\lim_{x\to \infty}\frac{2x^2-x+3}{x^2-8x+5}$

24) $\lim_{x\to \infty}\frac{8x+4}{4x+\sqrt{x}}$

25) $\lim_{x\to 2}\frac{9x^2-x+5}{\sqrt{9x^4+1}}$

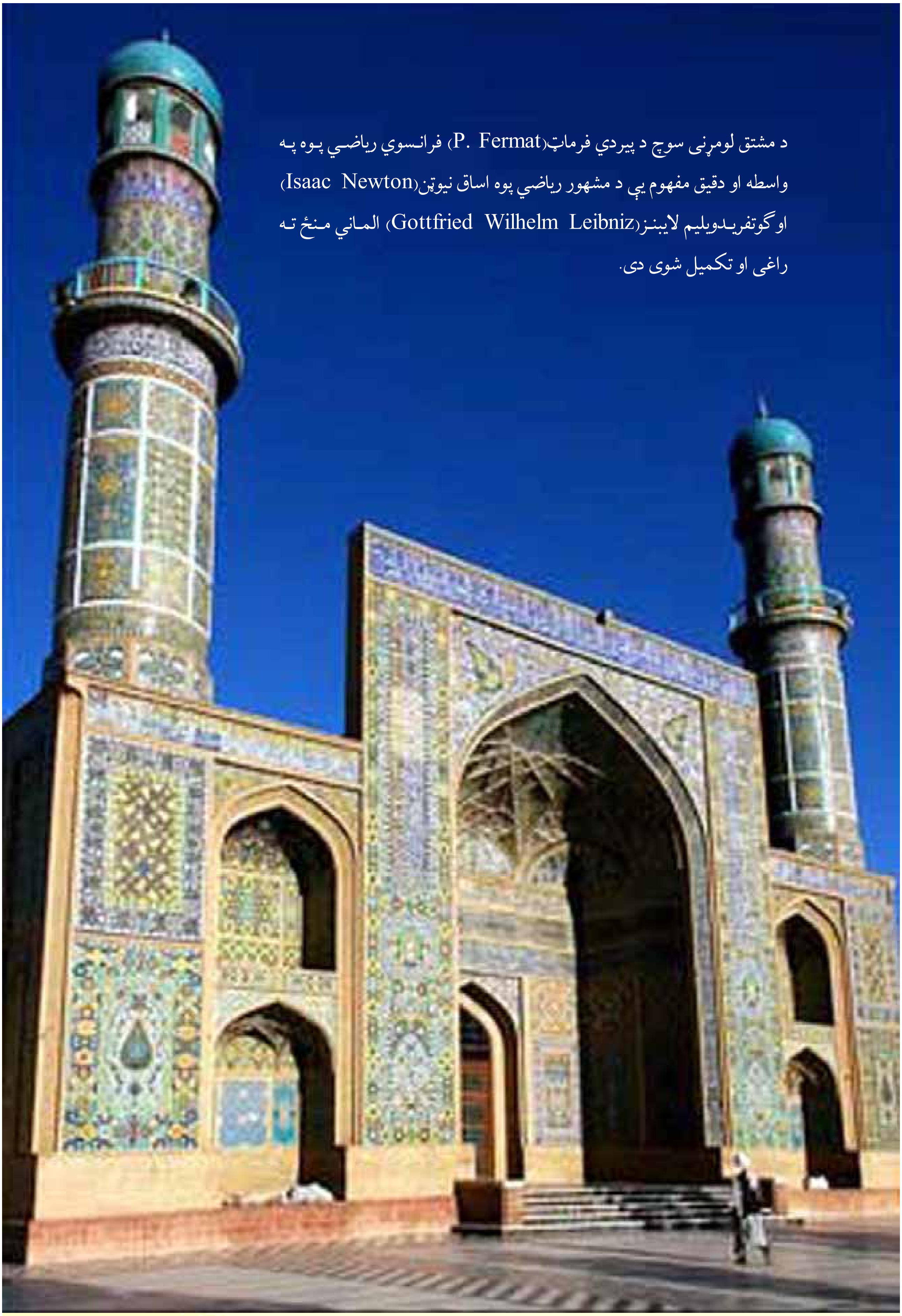
26) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^2}\right)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم څپرکی

مشتق



د مشتق لومړنی سوچ د پیردي فرماټ(P. Fermat) فرانسوي رياضي پوه په واسطه او دقيق مفهوم يې د مشهور رياضي پوه اساق نيوټن(Isaac Newton) اوګوتفریدویلیم لايبنز(Gottfried Wilhelm Leibniz) الماني منځ ته راغی او تکميل شوی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مشتقات

Derivatives

د $f(x)=x^2-1$ تابع په پام کې ونیسئ د مخامخ کسر لیمیټ پیدا کړئ.

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=?$$

د یوه منحني میل

- که د یوه مستقیم خط دوه ټکي $A(x_1,y_1)$ او $B(x_2,y_2)$ معلوم وي، نو د دې مستقیم خط میل له کومې رابطې څخه په لاس راځي.
- آیا د یوه مستقیم خط میل ثابت او مساوي دي؟ که په یوه ځانګړې ټکي پورې اړه لري؟
- آیا د مستقیم خط میل د هغې زاویې سره اړه لري، چې مستقیم خط یې د x د محور له مثبت لوري سره جوړوي؟
- آیا د مستقیم خط او منحني میلونه یو شان پیداکیږي؟

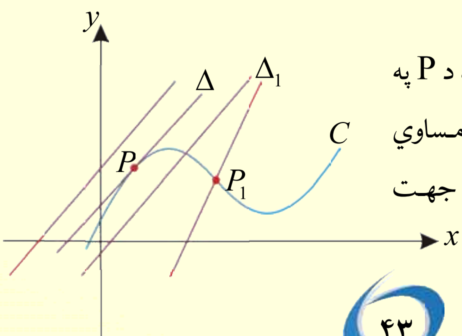
له پورتنیو پوښتنو څخه څرګندیږي چې د منحني میل په اسانی سره نشو پیداکولای ځکه چې منحني خط په هر ټکي کې خپل مسیر ته بدلون ورکوي او په مختلفو ټکو کې بېلابېل میلونه لري، نو له دې کبله لومړی د یوه منحني خط میل د هغه په یوه ټکي کې تعریفوو او بیا یې د محاسبې لپاره یو فورمول په لاس راوړو.

فعالیت

- د وضعیه کمیاتو په مستوي کې د c منحني خط رسم او د P او P_1 دوه ټکي پرې وټاکئ.
- د P_1 په ټکي کې د Δ_1 قاطع او د p په ټکي کې د Δ مماس رسم کړئ.
- که د P_1 ټکی د C په منحني باندې داسې حرکت وکړي، چې د p ټکی ته نږدې شي، په پایله کې د Δ_1 مستقیم خط له Δ مستقیم خط سره څه اړیکه پیداکوي؟

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

د Δ د مستقیم خط میل چې د C له منحني سره د P په نقطه کې مماس دی د هغې زاویې له (tan) سره مساوي دی چې مستقیم خط یې د x د محور له مثبت جهت سره جوړوي.

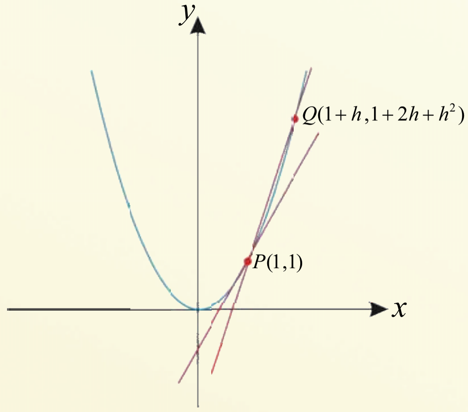


(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د $y = f(x) = x^2$ د منحني سره د مماس میل د $P(1,1)$ په ټکي کې پیداکړئ.

حل: څرنګه چې د منحني میل د مماس له میل سره د P په ټکي کې برابر دي، نو ددې مماس میل لـه هغې فورمول څخه چې دوې نقطې یې معلومې وي، نشو پیدا کولای، ځکه دلته یوازې د یوې نقطې مختصات ورکړل شوي دي. ولې کولای شو د دې مماس د میل تخمیني قیمت د هغه قاطع خط له میل څخه چې د P او Q له ټکو څخه تېرېږي، پیدا کړو، په هغه صورت کې چې د Q ټکي د P ټکي ته نږدې شي د PQ د مماس میل 2 ته تقرب کوي چې په لاندې جدول کې لیدل کېږي:

x	2	1.5	1.1	1.01	1.001
y	4	2.25	1.21	1.0201	1.002001
$m_{\overline{PQ}} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	3	2.5	2.1	2.01	2.001



په عمومي ډول هغه لومړی مختصه چې د $P(1,1)$ ټکي ته نږدې ده په $1+h$ ښودلای شو، چې h یو کوچنی مثبت یا منفي عدد دی، خو $h \neq 0$ دی نو لیکلای شو:

$$f(1+h) = (1+h)^2 = 1 + 2h + h^2$$

نو دا $(1+h \ , \ 1+2h+h^2)$ ټکی د منحني پر مخ راکړل شوی پروت دی، نو په پایله کې هغه مستقم خط چې له $P(1,1)$ او $Q(1+h, 1+2h+h^2)$ له ټکو څخه تیرېږي، میل یې عبارت دی له:

$$m_{PQ} \frac{(1+2h+h^2)-1}{(1+h)-1} = \frac{2h+h^2}{h} = 2+h$$

که چیرې په شکل کې $h \to 0$ نو $Q \to P$ کوي، قاطع خط د $P(1,1)$ په نقطه کې مماس کېږي چې د همدې مماس میل ته د تابع مشتق وایي؛ یعني: $\overline{PQ} = \lim_{h \to 0}(2+h) = 2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لیمیټ دا عملیه موږ ته دا امکان پـه لاس راکـوي چـې د $y = x^2$ د تـابع د منحنـي میـل پـه یـوه اختیـاري ټکـي $P(x, y)$ کې په لاس راوړو. که د Q د ټکي اختیاري مختصات $\left[x+h, (x+h)^2\right]$ وي کـه د PQ میـل تـه m او د P په ټکي کې د مماس میل په m_T سره وښیو لرو، چې:

$$m = \frac{(x+h)^2 - x^2}{x+h-x} = \frac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h} = \frac{2xh+h^2}{h} = 2x+h$$

$$m_{T} = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x$$

نو په عمومي بڼه لیکلای شو، که چېرې $Q[x+h\ ,\ f(x+h)],\ P[x, f(x)]$ د نوموړي منحني دوې اختیاري نقطې وي، نو لاندې خارج قسمت چې د Newton د رابطې په نامه مشهور دی، لیکلای شو:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

په حقیقت کې دا د هغه مستقیم خط میل دی چې د P او Q له ټکو څخه تېرېږي.

او د منحني میل د هغې په هر اختیاري ټکي کې عبارت دی له:

$$m_T = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

دویم مثال: د $f(x) = x - x^2$ د منحني سره د مماس میل د $P(2,0)$ په ټکي کې پیداکړئ.

حل: د Newton خارج قسمت تشکیل او د $x = 2$ په ټکي کې د منحني میل حسابوو:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = m_T = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(2+h)-(2+h)^2-2+2^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2+h-4-4h-h^2-2+4}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h-4h-h^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h(1-4-h)}{h} = \lim_{h\to 0}(-3-h) = -3$$

منځنی یا وسطي تعبیر

که یو جسم د یوه مستقیم خط پر مخ د حرکت په حال کې وي، طبیعي ده چې وهل شوی فاصله د زمان تابع ده یعني $S = f(t)$ د t_1 او t_2 دوو وختونو خارج قسمت $\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}$ د جسم د وسطي سرعت پـه نامـه یـادېږي او سرعت د t_0 پـه وخت کې عبارت لـه هغه حد یا لیمیت څخه دی چې لحظوي سرعت بلـل کېږي. $\lim_{t\to t_0}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پورتنی رابطې لیمیټ د t او t_0 په وخت کې داسې لیکو:

$$\lim_{t\to t_0}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}=\lim_{t\to t_0}\frac{S-S_0}{t-t_0}=\frac{\Delta S}{\Delta t}$$

په پایله کې وبلای شو چې د تابع او متحول د زیاتوالی خارج قسمت ته متوسط تغییر وایي، یعنې:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{f(s_2)-f(s_1)}{t_2-t_1}$$

مثال: د $y=f(x)=x^2$ په تابع کې د f متوسط تغیرات د $[2,5]$ په انټروال کې پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې $x_1=2$ او $x_2=5$ دی، نو د تعریف په مرسته لیکلای شو:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{f(5)-f(2)}{5-2}=\frac{5^2-2^2}{5-2}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{25-4}{5-2}=\frac{21}{3}=7$$

پوښتنې

1) د لاندې تابعګانو د x د متحول لپاره د یو Δx او Δy تزاید په پام کې نیولو سره $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ او میل یې په غوښتل شوو ټکو کې پیدا کړئ.

1) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=?$, $f(x)=2x^2-4$, (0)

2) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=?$, $f(x)=2x-x^2$, (3)

3) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=?$, $f(x)=3x^2-5x+4$, $(2,-1)$

2) د $f(t)=5t^3-3t+1$ د تابع متوسط تغییرات د $[2,4]$ په انټروال کې پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوې تابع مشتق

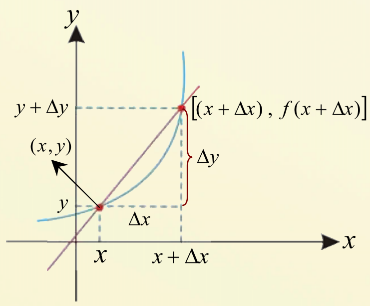
مخامخ لیمیټ څه را ښیي آیا په بل ډول یې لیکلای شو؟

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

- که چیرې د $y=f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انټروال کې متمادي وي، که د x متحول د Δx په اندازه زیاتوالی پیدا کړي آیا تابع تزاید کوي په دې حالت کې، د متحول او تابع د زیاتوالي رابطه ولیکئ.
- د تابع تزاید د متحول پر تزاید $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$ داسې ولیکئ چې په مساوات کې بدلون رانشي.
- که له دواړو خواوو څخه لیمیټ ونیول شي، په هغه صورت کې چې Δx صفر ته تقرب وکړي، د دې حد یا لیمیټ د څه په نامه یادیږي؟

د پورتنی فعالیت پایله داسې بیانوو:

$$y=f(x)$$
$$y+\Delta y=f(x+\Delta x)$$
$$\Delta y=f(x+\Delta x)-y$$
$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)\quad / \div\Delta x$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$



تعریف: د تابع او د متحول د بدلون د لیمیټ نسبت ته کله چې د متحول تزاید صفر ته تقرب وکړي د تابع مشتق بلل کیږي؛ لکه: $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ او هغه په $f'(x)$ یا y' , $\frac{df}{dx}$, $\frac{dy}{dx}$ ښودل کیږي.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}=\frac{df(x)}{dx}=y'=f'(x)$$

لومړی مثال: که $f(x)=2x$ وي، د دې تابع مشتق پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: د مشتق د تعریف څخه په ګټه اخیستنې سره لیکلای شو، چې:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2(x+\Delta x)-2x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x+2\Delta x-2x}{\Delta x}$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x}{\Delta x}\Rightarrow f'(x)=2$$

دویم مثال: د $f(x)=x^3$ د تابع مشتق پیداکړئ.

حل:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^3+3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(3x^2+3x(\Delta x)+(\Delta x)^2)}{\Delta x}=3x^2+3x(0)+0^2\quad\Rightarrow\ f'(x)=3x^2$$

دریم مثال: د $x\geq 0$, $f(x)=\sqrt{x}$ مشتق پیداکړئ.

حل: مخکې له حل څخه $x\geq 0$ حالت په پام کې نیسو:

الف: که $x>0$ وي؛ نو د مشتق د تعریف په مرسته لیکو:

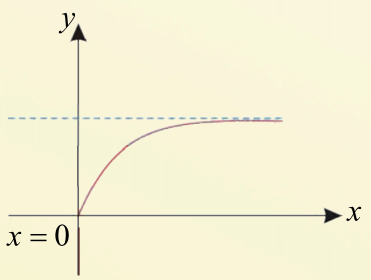
$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}$$

صورت او مخرج د صورت په مزدوج کې ضربوو:

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}\quad\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

ب: که $x=0$ شي نو $\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$ موجود نه دی، نو د $y=\sqrt{x}$ تابع د $x=0$ په ټکي کې د اشتقاق وړ نه وي لکه چې په شکل کې لیدل کېږي؛ یعنې که x ډېر لوی شي، نو د مماس میل صفر ته نږدې کېږي او د $x=0$ په ټکي کې د مماس میل ډېر لوییږي، چې مماس په یوه عمود $(\frac{1}{2\sqrt{x}})$ خط بدلیږي.



پوښتنې

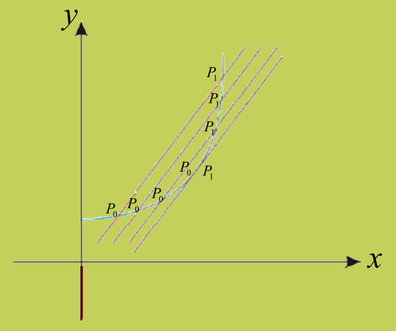
دلاندې توابعو مشتق د تعریف په مرسته پیداکړئ.

1) $f(x)=x-x^2$ 2) $f(x)=-2x^2$ 3) $f(x)=2x^2+x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

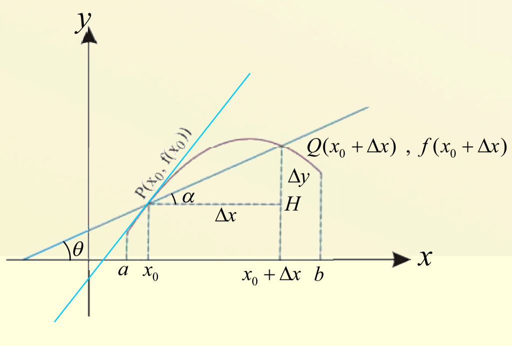
د مشتق هندسي تعبير

په مخامخ شکل کې څه وینئ د هغه په اړه مناقشه وکړئ.



فعالیت

- د وضعیه کمیاتو په مستوي کې د C منحني یا د $f(x)$ تابع داسې چې د $[a,b]$ متمادي وي ګراف رسم او د $P(x_0, f(x_0))$ او $Q(x_0+\Delta x\ ,\ f(x_0+\Delta x))$ ټکي د منحني پرمخ وټاکئ.
- د Δ مستقیم خط داسې رسم کړئ، چې د منحني د P او Q له ټکو څخه تېر شي.
- آیا ویلای شئ چې د Δ مستقیم خط د x د محور له مثبت جهت سره څه ډول زاویه جوړوي؟
- ووایئ چې د $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ یا $\frac{HQ}{HP}$ نسبت د څه په نامه یادېږي؟
- که د Q ټکی د P ټکي ته ډېر نږدې شي $(\Delta x \to 0)$، نو د Δ مستقیم خط په څه ډول کرښه بدلېږي په شکل کې یې وښیئ
- لیمیټ د $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ کله چې $\Delta x \to 0$ وکړي، د $P(x_0, f(x_0))$ په ټکي کې وڅېړئ.



د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

د $f(x)$ منحني د تابع مشتق، د $P(x_0, f(x_0))$ په ټکي کې د مماس له میل سره برابر دی؛ یعني:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = \tan\alpha = \tan\theta = m_\Delta$$

تعریف: د مماس میل د منحني د تماس په ټکي کې د تابع د مشتق څخه په هغه ټکي کې عبارت دی، یا په بل عبارت د هغې زاویې د ټانجنټ څخه عبارت دی چې د Δ مستقیم خط یې د x د محور لـه مثبت جهت سره جوړوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د هغه مماس میل او معادله چې د $f(x) = 2x^3 - 1$ په منحني د $A(1,1)$ په ټکي کې رسمېږي پیدا کړئ.

حل: پوهېږو چې $m = \tan\alpha = f'(x)$ دی، نو لیکلای شو؛ چې:

$$f(x) = 2x^3 - 1$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(x+\Delta x)^3 - 1 - (2x^3 - 1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2[x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + (\Delta x)^3]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x^3 + 6x^2\Delta x + 6x(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3 - 1 - 2x^3 + 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x[6x^2 + 6x\Delta x + 2(\Delta x)^2]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} [6x^2 + 6x(\Delta x) + (\Delta x)^2] = 6x^2$$

بناءً د مماس د میل قیمت د $A(1,1)$ په ټکي کې مساوي دی په: $m = f'(x) = f'(1) = 6x^2 = 6 \cdot 1^2 = 6$

نو د مماس معادله په لاندې ډول ده:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = 6(x - 1) \Rightarrow \quad y = 6x - 5$$

دویم مثال: د $y = x^2 + 1$ د تابع د مماسل میل قیمت د $x_0 = 2$ په ټکي کې په لاس راوړئ.

حل:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 + 1 - (x_0^2 + 1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0^2 + 2(\Delta x)x_0 + (\Delta x)^2 + 1 - x_0^2 - 1}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + (\Delta x)) = 2x_0$$

$$m = y' = 2x_0 = 2 \cdot 2$$

$$y' = m = 4$$

دریم مثال: د $y = f(x) = x^2$ تابع ورکړل شوي ده، غواړو د $x = x_0$ په ټکي او په ځانګړي توګه د $x_0 = 2$ په ټکي کې د تابع مشتق پیدا کړو:

$$x = x_0$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2x_0 + \Delta x)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$$

اوس د حد د لاس ته راوړلو له لارې لیکلای شو:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0$$

څرنګه چې $x_0 = 2$ دی، نو $f'(2) = 2\cdot 2 = 4$ یعنې د $x_0 = 2$ په ټکي کې د $y = f(x) = x^2$ د تابع لومړی مشتق له 4 سره برابر دی. دا په دې معنی چې د مستقیم خط میل د $x_0 = 2$ په ټکي کې 4 دی.

څلورم مثال: د $f(x) = x^3$ تابع مشتق پیداکړئ.

حل:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0+\Delta x)^3 - x_0^{\ 3}}{\Delta x}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_0^{\ 3} + 3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x_0^{\ 3}}{\Delta x}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x(3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x^2))}{\Delta x}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x^2)$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2) = 3x_0^2$$

نو $f(x)$ د تابع مشتق د x_0 په ټکي کې برابر دي له: $f'(x_0) = 3x_0^2$

پنځم مثال: د x_0 په ټکي کې د $f(x) = \frac{1}{x}$ تابع مشتق پیداکړئ.

حل:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$
$$f(x_0) = \frac{1}{x_0}$$
$$f(x_0) + \Delta y = \frac{1}{x_0 + \Delta x}$$
$$\Delta y = \frac{1}{x_0+\Delta x} - f(x_0)$$
$$\Delta y = \frac{1}{x_0+\Delta x} - \frac{1}{x_0}$$
$$\Delta y = \frac{x_0 - (x_0+\Delta x)}{x_0(x_0+\Delta x)}$$

د مساوات دواړه خواوې په Δx وېشو:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{x_0 - x_0 - \Delta x}{x_0(x_0+\Delta x)}}{\Delta x}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{-\Delta x}{x_0(x_0+\Delta x)}}{\Delta x}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{\Delta x\cdot x_0(x_0+\Delta x)} \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{x_0(x_0+\Delta x)}$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-1}{x_0(x_0+\Delta x)}$$
$$f'(x_0) = \frac{-1}{x_0(x_0+0)} = \frac{-1}{x_0^2}$$

نو $f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$ د x_0 په ټکي کې د $f(x)$ مشتق دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مشتق تابع يې $f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$

پوښتنې

1. په لاندې پوښتنو کې د تابعګانو مشتق پيدا کړئ.

1) $f(x) = 5x^2 - 2$　　2) $f(x) = \frac{2}{x}$

2. په ورکړل شويو ټکو کې د لاندې تابعګانو مشتق پيدا کړئ.

1) $f(x) = 4x^2 \quad , \quad x_0 = \frac{1}{2}$　　2) $f(x) = 3x - 1 \quad , \quad x_0 = -1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مشتق قوانين

آيا کولای شئ چې د مخامخ تابع مشتق پرته د تزايد له لارې په بله طريقه پيدا کړئ؟

$$f(x) = 2x^2$$

1- د يوه ثابت عدد مشتق:

فعاليت

د $y = C$ تابع(C ثابت عدد) په پام کې ونيسئ.

- تابع ته د Δx په اندازه بدلون(تزايد) ورکړئ، د تابع د تزايد په اړه څه فکر کوئ؟
- د تابع او متحول د بدلون(تزايد) نسبت تشکيل کړئ.
- د پورته مساوتو له دواړو خواوو لېميټ ونيسئ په هغه صورت کې چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

د پورتني فعاليت پايله داسې بيانوو:

د هرې ثابتې $f(x) = C$ تابع مشتق له صفر سره مساوي دی، ځکه چې د هرې ثابتې تابع گراف يوه افقي کرښه ده چې ميل يې صفر دی.

ثبوت:

$$y = C$$
$$y + \Delta y = C$$
$$\Delta y = C - y$$
$$\Delta y = C - C$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{C - C}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x}$$
$$y' = 0$$

مثال: د $f(x) = \pi^4$ او $y = 100$ تابعگانو مشتق پيدا کړئ.

حل: خرنگه چې π^4 او 100 ثابت عددونه دي؛ نو:

$$f(x) = C \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0$$
$$f(x) = \pi^4 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0$$
$$f(x) = 100 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- د يوې طاقت لرونکې تابع مشتق:

فعاليت

د $y = x^n$ تابع چې $n \in IR$ او $n \geq 1$ وي، په پام کې ونيسئ.

- متحول ته د Δx په اندازه تزايد ورکړئ، آيا تابع هم تزايد کوي که تزايد کوي په کومه اندازه اړيکه يې وليکئ؟
- د پورته اړيکې څخه د Δy قيمت پيدا کړئ، د متحول او تابع د تزايد نسبت تشکيل کړئ.
- د پورته مساوات له اطرافو څخه په هغه صورت کې لېمټ ونيسئ چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

د پورته فعاليت پايله داسې ثبوتوو:

که چېرې $f(x) = x^n$ راکړل شوې وي، نو $f'(x) = nx^{n-1}$ سره کېږي.

ثبوت:

$$y = x^n$$

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^n \quad \Rightarrow \Delta y = (x + \Delta x)^n - y$$

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n$$

$$\Delta y = (x + \Delta x - x)[(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2} x + (x + \Delta x)^{n-3} x^2 + \ldots + x^{n-1}]$$

$$\Delta y = \Delta x[(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2} x + (x + \Delta x)^{n-3} x^2 + \ldots + x^{n-1}]$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x[(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2} x + (x + \Delta x)^{n-3} x^2 + \ldots + x^{n-1}]}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2} x + (x + \Delta x)^{n-3} x^2 + \ldots + x^{n-1}\right]$$

$$y' = \underbrace{x^{n-1} + x^{n-1} + x^{n-1} + \ldots + x^{n-1}}_{n \text{ ځلې } x^{n-1}}$$

$$y' = nx^{n-1}$$

لومړی مثال: د $f(x) = x^5$ د تابع مشتق د $x = \frac{1}{2}$ په ټکي کې وټاکئ.

حل:

$$f(x) = x^5 \Rightarrow f(x)' = 5x^{5-1} \Rightarrow f'(x) = 5x^4$$

$$f(\frac{1}{2}) = 5 \cdot (\frac{1}{2})^4 = 5 \cdot \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$$

پوښتنې

د لاندې تابعګانو مشتق پيدا کړئ.

1) $f(x) = x^{-2}$ 2) $x(t) = gt^2$ 3) $t(x) = x^8$

4) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ 5) $f(x) = 10^{10}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

3- د حاصل جمع مشتق:

فعالیت

د u او v مشتق منوونکي تابعګانې په پام کې ونیسئ.

- آیا د $y = u + v$ تابع د مشتق وړ ده؟
- د $y = u + v$ په تابع کې $u(x)$ ته د Δu په اندازه او $v(x)$ ته د Δv په اندازه تزاید ورکړئ، د y د تزاید په اړه څه فکر کوئ؟ د هغې اندازه ولیکئ.
- لومړی د تابع تزاید پیدا او بیا د رابطې دواړه خواوې په Δx وویشئ او وروسته یې لېمیټ په هغه صورت کې پیدا کړئ، چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

د پورته فعالیت پایله داسې ثبوتوو:

ثبوت:

د یو حاصل جمع مشتق د حدونو د مشتقاتو د جمعې له حاصل سره مساوي ده:

$$y = u + v$$
$$y + \Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v$$
$$\Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v - y$$
$$\Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v - u - v$$
$$\Delta y = \Delta u + \Delta v$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

څرنګه چې $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'$ او $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v'$ دی، نو : $y' = u' + v'$

4- د حاصل تفریق مشتق

که $y = u - v$ وي، نو $y' = u' - v'$ دی.

ثبوت یې د زده‌کوونکو کورنی دنده ده.

لومړی مثال: د $y = 2x + 1$ د تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: لیدل کېږي چې $u = 2x$ او $v = 1$ دی، نو:

$$u' = 1 \cdot 2x^{1-1} = 2x^0$$
$$u' = 2$$
$$v' = 0$$

بناءً: $y'=u'+v' \Rightarrow y'=(2x)'+(1)' \Rightarrow y'=2+0 \Rightarrow y'=2$

دویم مثال: د $f(x)=4x^2-3x+5$ د تابع مشتق پیداکړئ.

حل: په دې تابع کې $u=4x^2$, $v=3x$ او $w=5$ دی چې $u'=8x$, $v'=3$ او $w'=0$ کېږي، نو:

$$y'=u'+v'+w'$$
$$y'=(4x^2)'-(3x)'+(5)'$$
$$y'=8x-3$$

دریم مثال: د لاندې تابعګانو مشتقونه پیداکړئ:

1) $y=12x-7$
$y'=(12x)'-(7)'$
$y'=12$

2) $f(x)=9x^2-12x+4$
$f'(x)=(9x^2)'-(12x)'+(4)'$
$f'(x)=18x-12$

3) $f(x)=6x^3-2x^2+6x-1$
$f'(x)=(6x^3)'-(2x^2)'+(6x)'-(1)'$
$f'(x)=18x^2-4x+6$

5- د حاصل ضرب مشتق:

که د u او v توابع مشتق منونکي وي، نو $u\cdot v$ هم مشتق منونکي دي، د $y=u\cdot v$ تابع په پام کې ونیسئ.

- **په پورتنی تابع کې u ته Δu په اندازه، v ته Δv په اندازه تزاید ورکړئ او د تابع تزاید پیداکړئ.**
- د Δy د تزاید له پیداکولو وروسته د مساوات اطراف په Δx وویشئ.
- د پورتنی رابطې د دواړو خواوو څخه په هغه صورت کې لېمیټ ونیسئ، چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

له پورتني فعالیت پایله داسې ثبوتوو:

ثبوت:

$$y=u\cdot v$$
$$y+\Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v) \Rightarrow \Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v)-y$$
$$\Delta y=u\cdot v+u\cdot\Delta v+v\cdot\Delta u+\Delta u\cdot\Delta v-u\cdot v$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{u\cdot\Delta v+v\cdot\Delta u+\Delta u\cdot\Delta v}{\Delta x}=v\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}+u\frac{\Delta v}{\Delta x}+\Delta u\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=v\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\Delta u\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}$$
$$y'=v\cdot u'+u\cdot v'+0\cdot v'$$
$$y'=u'v+v'u$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د $y = x^3(x^2-3)$ د تابع مشتق پیدا کړئ؟

حل: پوهېږو، چې $y = u \cdot v$ شکل لري چې په دې صورت کې $y' = uv' + vu'$ دی.

$$\left.\begin{array}{l} u = x^3 \Rightarrow u' = 3x^2 \\ v = x^2 - 3 \Rightarrow v' = 2x \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y' = u'v + v'u \\ y = x^3(x^2-3) \\ y' = 3x^2(x^2-3) + 2x(x^3) \\ y' = 3x^4 - 9x^2 + 2x^4 = 5x^4 - 9x^2 \end{array}$$

دویم مثال: د $y = (5x-1)^2$ د تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: د y تابع کولای شو د فکتورونو د ضرب په شکل داسې ولیکو:

$$y = (5x-1)^2 = (5x-1)(5x-1)$$

$$\left.\begin{array}{l} u = 5x-1 \Rightarrow u' = 5 \\ v = 5x-1 \Rightarrow v' = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y' = u'v + v'u \\ y' = 5(5x-1) + 5(5x-1) \\ y' = 25x - 5 + 25x - 5 = 50x - 10 \end{array}$$

6- **د حاصل تقسیم مشتق**:

که د u او v تابعګانې مشتق منونکې وي؛ نو $\frac{u}{v}$ کله چې $v \neq 0$ وي، هم مشتق منوونکی ده، اوس د $y = \frac{u}{v}$ تابع په پام کې ونیسئ.

- u او v ته په ترتیب سره Δu او Δv په اندازه تزاید ورکړې او د y تابع تزاید پیدا کړئ.
- د مساوات دواړه خواوې په Δx وویشئ.
- د پورتني رابطې له اطراف څخه په هغه صورت کې چې $\Delta x \to 0$ وکړي، لېمیټ ونیسئ.

د پورتني فعالیت پایله داسې ثبوتوو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

ثبوت:

$$y=\frac{u}{v}\Rightarrow y+\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}\Rightarrow \Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-y$$

$$\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\frac{u}{v}=\frac{uv+v\cdot\Delta u-uv-u\cdot v\Delta}{v(v+\Delta v)}$$

$$\Delta y=\frac{v\cdot\Delta u-u\cdot\Delta v}{v(v+\Delta v)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{v\cdot\Delta u-u\cdot\Delta v}{v(v+\Delta v)}}{\Delta x}=\frac{v\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}\right)=\frac{v\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}(v+\Delta v)}$$

$$y'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$$

لومړی مثال: د $y=\frac{2+3x}{1-2x}$ تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: لیدل کېږي چې تابع د $\frac{u}{v}$ بڼه لري چې مشتق یې عبارت دی له:

$$\left.\begin{array}{l}u=2+3x\ \Rightarrow u'=3\\ v=1-2x\ \Rightarrow v'=-2\end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l}y=\frac{u}{v}\quad\Rightarrow y'=\frac{u'v-v'u}{v^2}\\ y'=\frac{3(1-2x)-[-2(2+3x)]}{(1-2x)^2}\\ =\frac{3-6x+4+6x}{(1-2x)^2}=\frac{7}{(1-2x)^2}\end{array}$$

یادونه: که چیرې وغواړو چې د یوې تابع مشتق په یوه ټاکلې نقطه لکه په x_0 کې پیدا کړو وروسته د تابع د مشتق څخه ټاکلې قیمت په هغه کې وضع کوو چې د تابع مشتق په هغه نقطه کې پیدا کړو، لکه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال: د $f(y)=\dfrac{2y^2-3}{1-3y}$ د تابع مشتق د $y=0$ په ټکي کې پیداکړئ:

حل: د تابع د حاصل تقسیم د مشتق څخه لرو:

$$f'(y)=\frac{4y(1-3y)-[-3(2y^2-3)]}{(1-3y)^2}=\frac{4y-12y^2+6y^2-9}{(1-3y)^2}$$

$$f'(y)=\frac{-6y^2+4y-9}{(1-3y)^2}$$

$$f(0)=\frac{-6(0)^2+4(0)-9}{1+0}$$

$$f(0)=-9$$

$$\left.\begin{array}{l} u=2y^2-3 \Rightarrow u'=4y \\ v=1-3y \Rightarrow v'=-3 \end{array}\right\}$$

دریم مثال: د $f(t)=\dfrac{-3}{2t-1}$ د تابع مشتق پیداکړئ.

حل: پوهېږو چې تابع د $\dfrac{u}{v}$ بڼه لري نو د $y=\dfrac{u}{v}$ له فورمول څخه په ګټه اخیستنې سره داسې عمل کوو:

$$\left.\begin{array}{ll} y=\dfrac{u}{v} & \Rightarrow y'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2} \\ u=-3 & \Rightarrow u'=0 \\ v=2t-1 & \Rightarrow v'=2 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(t)=\frac{0\cdot(2t-1)-2(-3)}{(2t-1)^2}=\frac{6}{(2t-1)^2}$$

پوښتنې

د لاندې توابعو مشتق پیداکړئ:

1) $f(x)=\dfrac{3}{5}x(x-2)$ 2) $g(x)=(2x-3)(x-3)$ 3) $f(x)=(2x-1)^2$

4) $f(t)=\dfrac{t^2}{1-2t}$ 5) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2}$ 6) $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$

7) $f(x)=3x^5-5x^2$ 8) $f(x)=7x+3$

(c) ketabton.com: The Digital Library

7- د يوې مربع جذري تابع مشتق:

د $y=\sqrt{x}$ تابع په پام کې ونيسي.

- د $y=\sqrt{x}$ تابع متحول ته د Δx په اندازه تزايد ورکړئ د تابع تزايد پيدا کړئ.
- د لاس راغلي رابطې له دواړو خواوو څخه لېميټ په هغه صورت کې ونيسي، چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

د پورتني فعاليت پايله داسې ثبوتوو:

ثبوت:

$$y=\sqrt{x} \Rightarrow y+\Delta y=\sqrt{x+\Delta x}$$

$$\Delta y=\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}$$

د مساوات د ښي اړخ صورت او مخرج د صورت په مزدوج کې ضربوو:

$$\Delta y=\frac{(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{x+\Delta x-x}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{\Delta x}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}} \Rightarrow \lim_{\Delta x\to o}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to o}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\boxed{y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

لومړی مثال: د $f(x)=\sqrt{x}(x^2-1)$ د تابع مشتق پيدا کړئ.

حل: ليدل کېږي چې تابع د $u\cdot v$ بڼه لري، نو:

$$\left.\begin{array}{l} u=\sqrt{x} \Rightarrow u'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \\ v=x^2-1 \Rightarrow v'=2x \end{array}\right\} \Rightarrow \quad f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2-1)+2x\cdot\sqrt{x}$$

$$f'(x)=\frac{x^2-1}{2\sqrt{x}}+2x\sqrt{x}=\frac{x^2-1+4x(\sqrt{x})^2}{2\sqrt{x}}$$

$$=\frac{x^2-1+4x^2}{2\sqrt{x}}=\frac{5x^2-1}{2\sqrt{x}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

8- د $\sqrt{u}$ تابع د جذري مربع مشتق

- که چیرې y د u او u د x تابع او مشتق منوونکي وي د y اړیکه u ته او u، x ته څه فکر کوئ.
- د u متحول ته د Δu په اندازه تزاید ورکړئ د Δy د تزاید په اړه څه فکر کوئ.
- د مساواتو له دواړه خواوو څخه لېمیټ ونیسئ چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

$$y + \Delta y = \sqrt{u + \Delta u}$$
$$\Delta y = \sqrt{u + \Delta u} - \sqrt{u}$$

د مساوات د ښي اړخ صورت او مخرج د صورت په مزدوج کې ضربوو:

$$\Delta y = \frac{(\sqrt{u+\Delta u} - \sqrt{u})(\sqrt{u+\Delta u} + \sqrt{u})}{\sqrt{u+\Delta u} + \sqrt{u}}$$
$$\Delta y = \frac{u + \Delta u - u}{\sqrt{u+\Delta u} + \sqrt{u}}$$

د مساوات دواړه خواوې په Δx وېشو او بیا د مساوات له دواړو خواوو څخه لېمیټ نیسو چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\sqrt{u+\Delta u} + \sqrt{u}}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\sqrt{u+\Delta u} + \sqrt{u}} \cdot \frac{1}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \to 0 \Rightarrow \Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x}}{\sqrt{u+\Delta u} + \sqrt{u}}$$
$$y' = \frac{u'}{\sqrt{u} + \sqrt{u}} = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

د ویم مثال: د $h(x) = (x^2 + x)\sqrt{x}$ د تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: د $y = u \cdot v$ او $y = \sqrt{x}$ د فورمولونو له مشتق څخه په ګټه اخیستنې سره لرو:

$$\left.\begin{array}{l} u = x^2 + x \ \Rightarrow u' = 2x + 1 \\ v = \sqrt{x} \quad \Rightarrow v' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} h'(x) = (2x+1)\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2 + x) \\ h'(x) = 2x\sqrt{x} + \sqrt{x} + \frac{x^2 + x}{2\sqrt{x}} \\ h'(x) = \frac{4x^2 + 2x + x^2 + x}{2\sqrt{x}} = \frac{5x^2 + 3x}{2\sqrt{x}} \end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم مثال: د $f(x)=(\sqrt[3]{x}-1)(x+3)$ د تابع د مشتق قیمت د $x=8$ په ټکي کې په لاس راوړئ.

حل: د $y=u\cdot v$ او $y=\sqrt[n]{u}$ د تابع د مشتق څخه په ګټه اخیستنې سره لیکلای شو:

$$\left.\begin{aligned} u=\sqrt[3]{x}-1 &\Rightarrow u'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \\ v=x+3 &\Rightarrow v'=1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}(x+3)+1(\sqrt[3]{x}-1) \\ f'(x) &= \frac{x+3}{3\sqrt[3]{x^2}}+(\sqrt[3]{x}-1) \end{aligned}$$

اوس د تابع مشتق د $x=8$ نقطه کې پیدا کوو:

$$f'(8)=\frac{8+3}{3\sqrt[3]{8^2}}+\sqrt[3]{8}-1=\frac{11}{12}+1=\frac{23}{12}$$

پوښتنې

1- د لاندې توابعو مشتقونه پیدا کړئ.

$$f(x)=\frac{1}{x+1} \quad , \quad y=3x^{-3} \quad , \quad f(x)=x^2+3$$

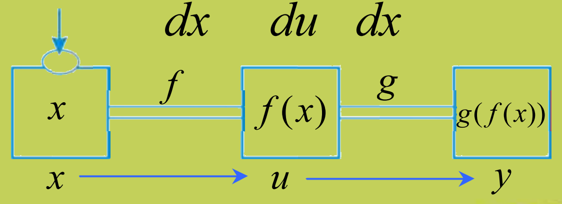
2- که $f(x)=x^2-3x$ او $g(x)=\sqrt{x}-1$ وي، د دې تابعګانو د جمعې، ضرب او تقسیم مشتقونه پیدا کړئ. $[(f+g)',(f\cdot g)',(f\div g)' \quad g\neq 0]$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مرکبو تابعګانو مشتق (زنځيري قاعده) Chain Rule

د مخامخ اړيکې او شکل په اړه خپل نظر بيـان کړئ.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$



فعاليت

که چيرې y د u او u د x تابع وي او د اشتقاق وړ وي.

- وواياست چې y د u او u له x سره څه اړيکه لري؟
- آيا د $\Delta y=\Delta y\cdot\frac{\Delta u}{\Delta u}$ مساوات حقيقت لري؟
- د پورتني مساوات دواړې خواوې په Δx وويشئ.
- که د ښي اړخ د کسرونو د مخرجونو ځايونه بدل شي، په پورتني رابطه کې بدلون راځي؟
- د پورتني مساوات له اطراف څخه په هغه صورت کې ليميټ ونيسي چې $\Delta x\to 0$ وکړي.

د پورتني فعاليت پايله داسې ثبوتوو:

د تابع، تابع مشتق ثبوت او پايله يې په لاندې ډول ده.

ثبوت:

$$\Delta y=\Delta y\cdot\frac{\Delta u}{\Delta u}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta u}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

څرنګه چې $\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=y'_{(u)}$ او $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=u'_{(x)}$ دی، نو: $y'_{(x)}=y'_{(u)}\cdot u'_{(x)}$

د دې زنځيري قاعدې پر بنسټ لاندې پايلې ليکلای شو:

1- که $y=u^n$ وي؛ نو $y=nu^{n-1}\cdot u'$ کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- که $y=\sqrt[n]{u}$ وي؛ نو $y'=\dfrac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$ کېږي.

مثال: د لاندې تابعګانو مشتق پیدا کړئ.

1) $y=(2x^2-1)^3$ 2) $y=\sqrt{1-x^2}$ 3) $y=(x^2-3)^2\cdot 2x^3$

4) $y=\sqrt[3]{x^2-2x^3}$ 5) $y=(x^2-2)^{-3}$

حل: د زنځیري قاعدې په مرسته لیکلای شو؛ چې:

1) $y=\underbrace{(2x^2-1)}_{u}{}^3$

$$\left.\begin{aligned} &u=2x^2-1\Rightarrow u'_x=4x\\ &y=u^3\Rightarrow y'_u=3u^2\end{aligned}\right\}\Rightarrow \begin{aligned} &y'_{(x)}=y'_{(u)}\cdot u'_{(x)}\\ &y'=3(2x^2-1)^2\cdot 4x=3(4x^4-4x^2+1)\cdot 4x\\ &\quad=(12x^4-12x^2+3)\cdot 4x=48x^5-48x^3+12x\\ &\quad=12x(4x^4-4x^2+1)\quad=12x(2x^2-1)^2\end{aligned}$$

2) $y=\sqrt{1-x^2}$

$$\left.\begin{aligned} &u=1-x^2\quad\Rightarrow u'_{(x)}=-2x\\ &y=\sqrt{u}\Rightarrow y'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\quad y'=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

لیدل کېږي چې تابع د ضرب د حاصل بڼه لري نو: $y=u\cdot v\ \Rightarrow\ y'=u'v+v'u$

3) $y=(x^2-3)^2\cdot 2x^3$

$$\left.\begin{aligned} &u=(x^2-3)^2\\ &u'_{(x)}=2(x^2-3)(2x)\\ &v=2x^3\Rightarrow\ v'_{(x)}=6x^2\end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned} &y'=\left[(x^2-3)^2\right]'\cdot 2x^3+\left[2x^3\right]'(x^2-3)^2\\ &y'=\left[2(x^2-3)\cdot 2x\right]2x^3+6x^2(x^2-3)^2\\ &\quad=8x^4(x^2-3)+6x^2(x^2-3)^2\\ &\quad=8x^6-24x^4+6x^2(x^4-6x^2+9)\\ &\quad=8x^6-24x^4+6x^6-36x^4+54x^2\\ &\quad=14x^6-60x^4+54x^2\end{aligned}$$

4) $y=\sqrt[3]{x^2-2x^3}$

$$\left.\begin{aligned} &u=x^2-2x^3\\ &u'_{(x)}=2x-6x^2\end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned} &y=\sqrt[n]{u}\Rightarrow y'=\frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}\\ &y'=\frac{2x-6x^2}{3\sqrt[3]{(x^2-2x^3)^2}}\end{aligned}$$

5) $y=(x^2-2)^{-3}$

$$\left.\begin{aligned} &u=x^2-2\\ &u'_{(x)}=2x\end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned} &y=u^n\Rightarrow y'=nu^{n-1}\cdot u'\\ &y'=-3(x^2-2)^{-4}\cdot 2x=\frac{-6x}{(x^2-2)^4}\end{aligned}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه:

I. که چیرې د f تابع د (x_0) په ټکي کې مشتق ولري، نو $f'(x_0)$ د هغه مماس میل دی چې د $((x_0)\ ,\ f(x_0))$ په نقطه کې له منحني یا د تابع له ګراف سره رسمېږي.

مثال: د $f(x)=x^3$ د تابع میل د $x_0=1$ په ټکي کې پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې $x_0=1$ دی؛ نو: $f(x_0)=1$ سره کېږي او $P(1,1)$ چې د تماس ټکی دی، میل یې عبارت دی، له:

$$f'(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x^2+x+1)=3\quad\Rightarrow\quad f'(1)=3$$

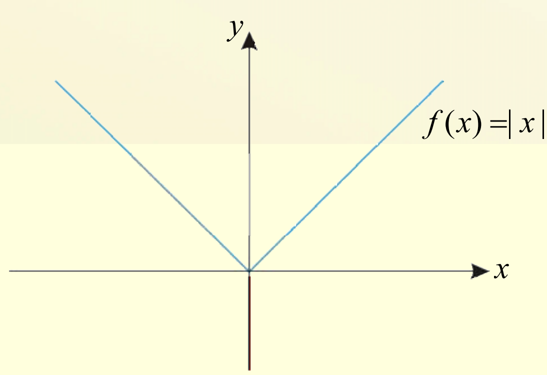
II. که د f تابع د $x=x_0$ په ټکي کې د مشتق وړ وي، نو دا تابع د x_0 په ټکي کې پیوسته یا متمادي ده، خو برعکس یې ټیک نه ده، یعنې کېدای شي، یوه تابع په یوه ټکي کې متمادي یا پیوسته وي، ولې په هغه ټکي کې د مشتق وړ نه وي.

مثال: د $f(x)=|x|$ د تابع مشتق د $x=0$ په ټکي کې پیدا کړئ.

حل: پوهېږو چې مشتق په حقیقت کې د نیوټن د نسبت د لیمیټ محاسبه ده چې د ښي او کیڼ اړخ لیمیټونه یې په صفر کې سره وڅېړل شي.

$$f'(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=1$$

$$f'(0^-)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=-1$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

لیدل کېږي، چې $f'(0^-) \neq f'(0^+)$ دی، نو تابع په $x = 0$ کې د مشتق وړ نه ده، ولې تابع د صفر په ټکي کې پیوسته یا متمادي ده.

پوښتنې

د لاندې توابعو مشتق پیدا کړئ.

1) $y = (x^2 + 2)^2$

2) $f(x) = (x^3 - 4x^2 + 1)^{-4}$

3) $y = (1 - 2x^3)^4$

4) $h(z) = \sqrt{\dfrac{1-z}{1+z}}$

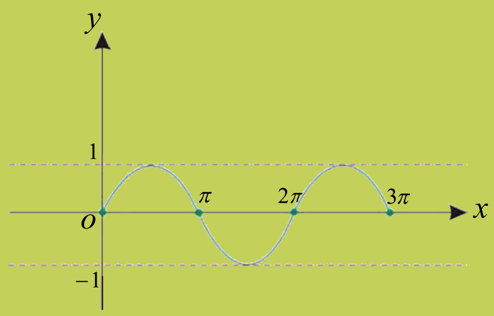
5) $f(t) = \sqrt[3]{3t + 1}$

6) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2 + x^2 + x^3}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مثلثاتي تابعګانو مشتق

مخامخ ګراف څه ډول تابع را ښيي؟



- مثلثاتي دايره او راديان تعريف کړئ.
- آيا دا $-1 \le \sin x \le 1$ اړيکه حقيقت لري او که نه؟
- د $y = \sin x$ تابع په پام کې ونيسئ متحول د Δx په اندازه بدلون ورکړئ او د تابع بدلون په پام کې ونيسئ.
- د $\sin(x+\Delta x) - \sin x$ مثلثاتي رابطې ته انکشاف ورکړئ؟
- وروسته د انکشاف له پورتني رابطې څخه $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ نسبت جوړ او د مساوات له دواړو خواوو څخه په هغه صورت کې لېمېټ ونيسئ چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

له پورته فعالیت څخه پایله داسې ثبوتوو:

1- د $y = \sin x$ تابع مشتق:

ثبوت:

$$y = \sin x$$
$$y + \Delta y = \sin(x + \Delta x)$$
$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x$$
$$\Delta y = 2\cos\frac{x + \Delta x + x}{2} \cdot \sin\frac{x + \Delta x - x}{2} = 2\cos\frac{2x + \Delta x}{2} \cdot \sin\frac{\Delta x}{2}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \cdot 2\cos(x + \frac{\Delta x}{2}) \cdot \sin\frac{\Delta x}{2} = 2\cos(x + \frac{\Delta x}{2}) \cdot \sin\frac{\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\cos(x + \frac{\Delta x}{2}) \cdot \lim_{\Delta x \to 0}\sin\frac{\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \Rightarrow y'(x) = \cos x \cdot 1$$
$$y' = \cos x$$
$$\boxed{y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که چیرې $f(x)=\sin u$ وي په داسې حال کې چې u د x تابع وي؛ نو لیکلای شو:

$$f(u)=\sin u \Rightarrow y'=u'\cos u$$

لومړی مثال: د $f(x)=\sin 4x$ مشتق پیدا کړئ.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\sin 4x \\ u=4x \Rightarrow u'=4 \\ f(x)=\sin u \Rightarrow y'_u=\cos u \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f(x)=\sin u \Rightarrow f'(x)=u'\cos u \\ f(x)=\sin 4x \Rightarrow f'(x)=4\cos 4x \end{array}$$

دویم مثال: د $f(x)=x^3\cdot\csc x$ د تابع مشتق پیدا کړئ.

حل:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^3\cdot\csc x = x^3\cdot\dfrac{1}{\sin x} \\ u=x^3 \Rightarrow u'=3x^2 \\ v=\dfrac{1}{\sin x} \Rightarrow v'=\dfrac{-uv'}{v^2}=\dfrac{-\cos x}{\sin^2 x} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f(x)=x^3\cdot\csc x \\ f'(x)=3x^2\cdot\csc x+\dfrac{-\cos x}{\sin^2 x}\cdot x^3 \\ \quad =3x^2\csc x-\cot x\cdot\csc x\cdot x^3 \\ \quad =3x^2\csc x-x^3\cot x\cdot\csc x \end{array}$$

پوښتنې

د لاندې توابعو مشتق په لاس راوړئ:

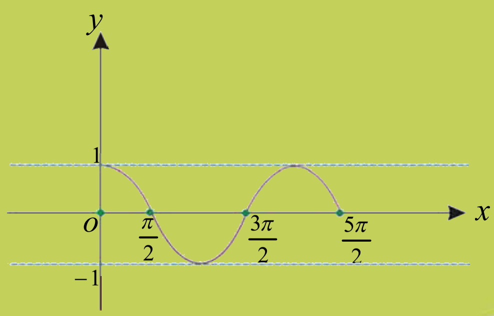
$a)\ y=\sin 5x$ $\qquad b)\ y=\dfrac{\sin x}{1+x}$

$c)\ y=\sqrt{1+\sin x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $y=\cos x$ تابع مشتق

مخامخ گراف څه ډول تابع را ښيي؟



- د $y=f(x)=\cos x$ په تابع کې متحول ته Δx او تابع ته د Δy په اندازه تزاید ورکړئ.
- د $\cos(x+\Delta x)-\cos x$ مثلثاتي رابطې ته انکشاف ورکړئ.
- د پورتنی انکشافي رابطې په مرسته د $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ نسبت تشکیل او له اطرافو څخه لېمیټ ونیسئ چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

د پورتني فعالیت پایله داسې ثبوتو:

2- د $y=\cos x$ تابع مشتق

ثبوت:

$$y=\cos x$$

$$y+\Delta y=\cos(x+\Delta x)$$

$$\Delta y=\cos(x+\Delta x)-\cos x$$

$$\Delta y=-2\sin\frac{x+\Delta x+x}{2}\cdot\sin\frac{x+\Delta x-x}{2}$$

$$\Delta y=-2\sin\frac{2x+\Delta x}{2}\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\lim_{\Delta x\to 0}\sin(x+\frac{\Delta x}{2})\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\sin\frac{\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=-\sin x\cdot 1$$

$$\boxed{y=\cos x \quad\Rightarrow\quad y'=-\sin x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یا په لنډ ډول هغه داسې ثبوتوو:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$$

$$(\cos x)' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}\cdot(-2\sin x\cos x)$$

پوهېږو $\sqrt{1-\sin^2 x} = \cos x$ چې سره دی، نو:

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos x}(-2\sin x\cdot\cos x)$$

$$\boxed{(\cos x)' = -\sin x}$$

که چیرې $y=\cos u$ وي په داسې حال کې چې u د x تابع وي؛ نو لیکلای شو:

$$\boxed{y=\cos u \Rightarrow y' = -u - \cdot \sin u}$$

لومړی مثال: د لاندې توابعو مشتق پیدا کړئ.

1) $f(x)=\sin 2x = 2\sin x\cos x$ 2) $f(x) = x - \sin x\cos x$

حل: پوهېږو چې $y=u\cdot v \Rightarrow y' = u'\cdot v + v'u$ دی، نو:

1) $f(x)=\sin 2x = 2\sin x\cos x$

$f'(x) = (2\sin x)'\cos x + (\cos x)'\cdot 2\sin x = 2\cos^2 x - 2\sin^2 x$

$f'(x) = 2(\cos^2 x - \sin^2 x) \Rightarrow y' = 2\cos 2x$

2) $f(x) = x - \sin x\cos x$

$f'(x) = (x)' - (\sin x\cdot\cos x)' = (x)' - [(\sin x)'\cdot\cos x + (\cos x)'\cdot\sin x]$

$f'(x) = (x)' - [\cos x\cos x + (-\sin x\sin x)] = 1 - \cos 2x$

پوښتنې

د لاندې تابعگانو لومړی مشتق پیدا کړئ.

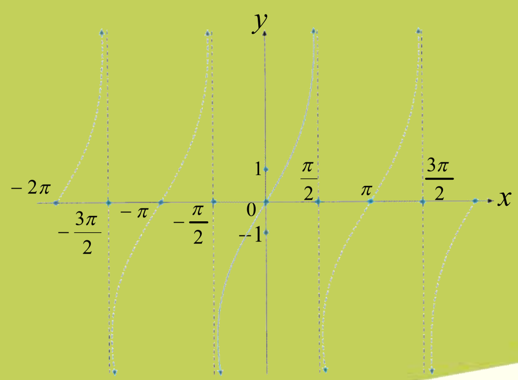
1) $f(x) = (\sec 2x + \tan 2x)^2$ 2) $f(x)=\sin^2 x$ 3) $f(x)=\sec x$

4) $f(x)=\csc x$ 5) $f(x) = \dfrac{5\sin^2 2x}{3\cos 5x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $y = \tan x$ تابع مشتق

مخامخ ګراف څه ډول تابع راښيي.



فعالیت

- د $y = \tan x$ تابع د نسبت په شکل ولیکئ.
- د پورتني نسبت څخه مشتق ونیسئ، هغه له څه سره مساوي کېږي.

له پورته فعالیت څخه پایله داسې ثبوتوو:

3- د $y = \tan x$ تابع مشتق:

ثبوت:

$$f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$f'(x) = \frac{(\sin x)'\cos x - (\cos x)'\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x - (-\sin x)(\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$y = \tan x$$

$$y'_{(x)} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

پاتې فورمولونه زده کوونکو ته پرېږدو.

لومړی مثال: د لاندې مثلثاتي تابع مشتق پیدا کړئ.

$$y = \tan^3 x$$

حل: پوهېږو چې که $y = u^n$ وي نو مشتق یې $y' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$ سره دی، نو:

$$\left.\begin{aligned} u &= \tan^3 x \\ u' &= \sec^2 x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} y &= \tan^3 x \\ y' &= 3\tan^2 x \sec^2 x \end{aligned}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال: د $y=\sec x\cdot\cot x$ تابع مشتق پیداکړئ.

حل: خرنگه چې تابع شکل د $y=u\cdot v$ شکل لري، نو:

$$y=\sec x\cdot\cot x$$
$$u=\sec x \quad\Rightarrow\quad u'=\sec x\tan x$$
$$v=\cot x \quad\Rightarrow\quad v'=-\csc^2 x$$

د u', v, u او v' قیمتونه د $y'=u'\cdot v+u\cdot v'$ په فورول کې وضع کوو:

$$y'=\sec x\tan x\cdot\cot x+\sec x(-\csc^2 x)$$
$$=\sec x\tan x\frac{1}{\tan x}-\csc^2 x\sec x$$
$$=\sec x-\csc^2 x\sec x$$

پوښتني

د لاندې تابعګانو مشتق پیداکړئ.

a) $y=\tan x\cot x$

b) $y=(x^2+x-1)\tan^2 x$

c) $y=\dfrac{1}{\tan x}$

d) $y=\tan x\sec x-\cot x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ضمني مشتقات

مخامخ مساوات په عبارت سره ولیکئ.

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}$$

فعالیت

- د $y = 2x^2 - 4$ د تابع مشتق پیدا کړئ.
- د $y^2 + xy = 1$ تابع څو متحوله تابع ده؟ او ګراف یې څه ډول شکل لري؟
- د پورتني تابع مشتق پیدا کولای شئ.

د یوه منحني خط معادله د وضعیه کمیاتو په سیستم کې عبارت له $y = f(x)$ څخه ده، له دې ځایه $y - f(x) = 0$ کېږي او $y - f(x)$ یوه دوه متحوله تابع د x او y له جنسه ده، که $F(x,y) = y - f(x)$ تابع په پام کې ونیسو، نو د دې منحني معادله د $F(x,y)$ شکل غوره کوي؛ د مثال په ډول: $F(x,y) = x^2 + y^2 - 25$ وي، نو د $F(x,y) = 0$ له معادلې څخه لیکلای شو، چې $x^2 + y^2 - 25 = 0$ یا $x^2 + y^2 = 25$ چې د دې دوو پېلا بېلو توابعو معادلې $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$ دي.

په عمومي ډول د $F(x,y) = 0$ معادله کیدای شي چې د څو تابع ګانو معادله د $y = f(x)$ په بڼه وي، پاملرنه وکړئ.

د $y = f(x)$ په تابع کې چې x او y یو له بل څخه جلا وي، نو مشتق یې په آسانۍ پیدا کولای شو، ولې په ځینو رابطو کې y له x سره یو ځای بیان شوي وي لکه په $xy^2 - y + 1 = 0$ چې د مشتق په نیولو کې که د x له جنسه مشتق نیسو، نو y یو ثابت عدد فرضوو او که د y له جنسه مشتق نیسو x ثابت فرضوو لکه:

$$xy^2 - y + 1 = 0$$

$$(xy^2)' - (y)' + (1)' = 0 \Rightarrow 1y^2 + x(2y'y) - y' = 0 \Rightarrow y^2 = -2xyy' + y' = y'(-2xy + 1)$$

$$y' = \frac{y^2}{-2xy + 1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په عمومي حالاتو کې که ضمني رابطه د $f(x,y)=0$ په شکل تعریف شوی وي؛ نو $y'(x)$ په لنډ ډول داسې محاسبه کېږي:

$$y'_{(x)}=-\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}=-\frac{\text{د تابع مشتق نظر } x \text{ ته(} y \text{ ثابت دی)}}{\text{د تابع مشتق نظر } y \text{ ته(} x \text{ ثابت دی)}}$$

لومړی مثال: د $y=\sin\frac{x}{y}+1$ ضمني تابع مشتق د $(\pi,1)$ په ټکي کې پیدا کړئ.

حل: د $y-\sin\frac{x}{y}-1=0$ رابطې څخه $y'_{(x)}=\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}$ پیداکوو.

$$y-\sin\frac{x}{y}-1=0$$

$$\left.\begin{aligned}f'_{(x)}&=y'_x-(\sin\frac{x}{y})'_x-(1)_x\\&=0-\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}-0=\frac{-1}{y}\cos\frac{x}{y}\\f'_{(y)}&=y'_y-(\sin\frac{x}{y})'_y-(1)_y\\&=1-\frac{x}{1}\cos\frac{x}{y}-0=1-x\cdot\cos\frac{x}{y}\end{aligned}\right\}\Rightarrow y'_{(x)}=-\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}=-\frac{\frac{-1}{y}\cos\frac{x}{y}}{1-x\cdot\cos\frac{x}{y}}=\frac{\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}}{1-x\cdot\cos\frac{x}{y}}$$

اوس په $y'_{(x)}$ رابطه کې د x او y قیمتونه وضع کوو چې د $y'(\pi,1)$ په لاس راځي.

$$y'_{(\pi,1)}=\frac{\frac{1}{1}\cos\frac{\pi}{1}}{1+\pi\cos\frac{\pi}{1}}=\frac{\cos\pi}{1+\pi\cos\pi}=\frac{-1}{1-\pi}$$

دويم مثال: د $x^2y+2y^3=3x+2$ رابطې ضمني مشتق پیدا کړئ.

حل:

$$x^2y+2y^3=3x+2$$
$$x^2y+2y^3-3x-2=0$$
$$f'_{(x)}=2xy+0-3-0=2xy-3$$
$$f'_{(y)}=x^2+6y^2-0-2=x^2+6y^2-2$$
$$f'_{(x)}=-\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}=-\frac{2xy-3}{x^2+6y^2-2}=\frac{3-2xy}{x^2+6y^2-2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم مثال: د $y^6 - y - x^2 = 0$ ضمني مشتق پیداکړئ.

حل:

$$f'_{(x)} = -2x$$
$$f'_{(y)} = 6y^5 - 1$$
$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{-2x}{6y^5-1} = \frac{2x}{6y^5-1}$$

او یا په بله طریقه:

$$y^6 - y - x^2 = 0$$
$$6y^5y' - y' - 2x = 0$$
$$(6y^5-1)y' = 2x$$
$$y' = \frac{2x}{6y^5-1}$$

د تابع دویم ضمني مشتق

د ضمني رابطې د دویمې مرتبې د مشتق د پیداکولو لپاره د فورمول په مرسته لومړی د ضمني اړیکې لومړی مشتق پیداکوو او بیا له دې رابطې څخه مشتق نیسو.

لومړی مثال: د $x^2 - y^2 = 1$ رابطې دویمه مرتبه مشتق $y''_{(x)}$ پیداکړئ.

حل:

$$x^2 - y^2 = 1$$
$$x^2 - y^2 - 1 = 0$$
$$f'_{(x)} = (x^2)'_x - (y^2)'_x - (1)'_x = 2x - 0 - 0 = 2x$$
$$f'_{(y)} = (x^2)'_y - (y^2)'_y - (1)'_y = 0 - 2y - 0 = -2y$$
$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{2x}{-2y} = \frac{x}{y}$$

او یا به بله طریقه:

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{(x^2)'_x - (y^2)'_x - (1)'_x}{(x^2)'_y - (y^2)'_y - (1)'_y} = -\frac{2x-0-0}{0-2y-0} = \frac{x}{y} \Rightarrow y'_{(x)} = \frac{x}{y}$$

اوس د $y' = \frac{x}{y}$ له رابطې څخه مشتق نیسو $y''_{(x)}$:

$$y''_{(x)} = \frac{(x)'y - y'x}{y^2} = \frac{y - y'x}{y^2} = \frac{y - \frac{x}{y}\cdot x}{y^2} = \frac{y^2 - x^2}{y^3} = \frac{-1}{y^3} \Rightarrow y''_{(x)} = \frac{-1}{y^3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم مثال: د $x^2+xy+y^2-3=0$ په معادله کې د y مشتق نسبت x ته د $(1,1)$ په ټکی کې پیدا او پر منحنی د مماس معادله يې وليکئ.

حل: څرنګه چې د $(1,1)$ ټکی په معادله کې صدق کوي نو نوموړی ټکی د منحنی پرمخ واقع دی؛ د $y'_{(x)}$ د پیداکولو لپاره په ورکړ شوي معادلې کې ليکلای شو:

$$f'_{(x)}=2x+y$$
$$f'_{(y)}=x+2y$$
$$y'_{(x)}=-\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}=-\frac{2x+y}{x+2y}\quad,\qquad x+2y\neq 0$$
$$y'=-\frac{2x+y}{x+2y}=-\frac{2+1}{1+2}=-1$$
$$y-y_1=m(x-x_1)\ \Rightarrow\ y-1=-(x-1)\ \Rightarrow\ y=-x+2$$

او يا په بله طريقه هم کولای شو د تابع ضمني مشتق په لاس راوړو:

$$x^2+xy+y^2-3=0$$
$$2x+y+x\cdot y'+2yy'=0$$
$$2x+y+(x+2y)y'=0$$
$$(x+2y)y'+2x+y=0$$
$$(x+2y)y'=-2x-y$$
$$y'=\frac{-2x-y}{x+2y}$$

دريم مثال: د $x^2y^3=5y^3+x$ ضمني تابع مشتق پیداکړئ.

حل:

$$x^2y^3-5y^3-x=0$$
$$f'_{(x)}=2xy^3-0-1=2xy^3-1$$
$$f'_{(y)}=3x^2y^2-15y^2-0$$
$$y'_{(x)}=-\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}=-\frac{2xy^3-1}{3x^2y^2-15y^2}=\frac{1-2xy^3}{3x^2y^2-15y^2}$$

پوښتني

1- د $x\sin y+y\cos x=5$ د رابطې ضمني مشتق پیداکړئ.

2- د $x^3+xy^2+y=3$ رابطې څخه ضمني مشتق ونيسئ.

3- د $x^2+y^2=4x+4y$ رابطې څخه ضمني مشتق ونيسئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لوړې مرتبه(متوالي) مشتقات

د مخامخ تابع درې ځلې مشتق ونیسئ؟

د مخامخ تابع پنځه ځلې مشتق ونیسئ؟

$$f(x) = \sin x$$

$$f(x) = \cos x$$

فعالیت

- د $y = 2x^4 - 3x^3 - 2x - 1$ تابع مشتق پیدا کړئ.
- د پورته تابع دویم مشتق پیدا کړئ.
- د پورتني مشتق د تابع دریم ځل مشتق ونیسئ.
- د پورتني تابع نور څو ځلې مشتق نیولی شو؟
- د پورتنی تابع څووم مشتق له صفر سره مساوي دی؟

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

که د $y = f(x)$ مشتق منونکی وي، لومړی مرتبه مشتق یې په $y' = f'_{(x)}$ ، دویمه مرتبه مشتق یې په $y'' = f''_{(x)}$ دریمه مرتبه مشتق یې په $y''' = f'''_{(x)}$ ... په کلي ډول $n-$ام مرتبه مشتق د $y = f(x)$ تابع په $y^{(n)} = f^{(n)}_{(x)}$ علامت ښیو.

لومړی مثال: د $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ تابع دریم مشتق په لاس راوړئ.

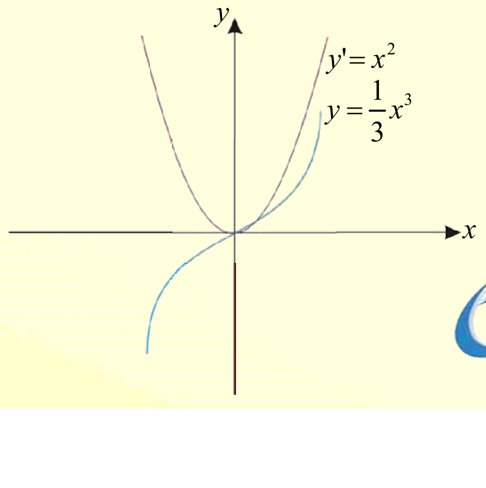
حل:

$$y = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$$
$$y' = 3x^2 - 6x + 4$$
$$y'' = 6x - 6$$
$$y''' = 6$$

دویم مثال: د $y = \frac{1}{3}x^3$ د تابع گراف او د هغې د لومړی مرتبې مشتق تابع گراف رسم کړئ.

حل:

$$y = \frac{1}{3}x^3$$
$$y' = \frac{3}{3}x^2 = x^2$$
$$y' = x^2$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم مثال: که $y=\sin x+\cos x$ وي، د $(y^{(9)})^2+y^2$ قیمت پیداکړئ.

حل: لومړی د تابع نهمه مرتبه مشتق یا $(y^{(9)})$ په لاس راوړو:

$$y=\sin x+\cos x$$
$$y'_{(x)}=\cos x+(-\sin x)=\cos x-\sin x$$
$$y''_{(x)}=-\sin x-(\cos x)=-\sin x-\cos x$$
$$y'''_{(x)}=-\cos x-(-\sin x)=\sin x-\cos x$$
$$\vdots$$
$$f'^{(9)}_{(x)}=\cos x-\sin x$$
$$(y^{(9)})^2+y^2=(\cos x-\sin x)^2+(\sin x+\cos x)^2$$
$$=\cos^2 x-2\sin x\cos x+\sin^2 x+\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x$$
$$=2\sin^2 x+2\cos^2 x=2(\sin^2 x+\cos^2 x)=2$$

څلورم مثال: د $y=2x^6-3x^5-2x^3-3x^2-1$ د تابع پنځه ځلي مشتق پیداکړئ.

$$y=2x^6-3x^5-2x^3-3x^2-1$$
$$y'=12x^5-15x^4-6x^2-6x$$
$$y''=60x^4-60x^3-12x-6$$
$$y'''=240x^3-180x^2-12$$
$$y^{(4)}=720x^2-360x$$
$$y^{(5)}=1440x-360$$

یادونه: که چیرې $n-$ام درجه‌یي څو جمله‌یي تابع $f_{n(x)}=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\ \dots\ +c_nx^n \quad c_n\neq 0$ راکړې شوې وي $n-$ام مشتق یې په لاندې ډول په لاس راځي:

$$f_{n(x)}=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\ \dots\ +c_nx^n \qquad c_n\neq 0$$
$$f'_{n(x)}=c_1+2c_2x+3c_3x^2+\ \dots\ +nc_nx^{n-1}$$
$$f''_{n(x)}=2c_2+6c_3x+\ \dots\ +n(n-1)c_nx^{n-2}$$
$$f'''_{n(x)}=6c_3+12c_4x+\ \dots\ +n(n-1)(n-2)c_nx^{n-3}$$
$$f^{n}_{n(x)}=n(n-1)(n-2)x\ \dots\ c_n=n!c_n$$

په عمومي ډول که $k>n$ وي، نو: $f^{k}_{n(x)}=0$

پوښتنې

د لاندې تابعګانو تر هغې مشتق پیداکړئ چې د مشتق تابع له صفر سره مساوي شي.

1) $y=4x^4-3x^3-2x$ 2) $y=(5x-2)^3$

3) $y=a+b+c^2-x-ax-bx-cx^3-c^3x$ 4) $y=\sin x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د خپرکي مهم ټکي

- که چېرې د $P(x, f(x))$ او $Q(x+h, f(x+h))$ ټکي د $f(x)$ تابع دوه اختیاري ټکي وي، نو لاندې اړیکه د Newton خارج قسمت په نامه یادېږي:

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{x+\Delta x-x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

د منحني میل په یوه اختیاري ټکي کې عبارت دی، له:

$$m_T=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

د یوې تابع مشتق: د تابع او متحول د تزاید، د نسبت لیمیټ کله چې $\Delta x\to 0$ وکړئ، د مشتق په نامه یادېږي او په $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$ ښودل کېږي.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)=y'$$

که چېرې د $f(x)$ تابع د (x_0) په یوه ټکي کې د مشتق وړ وي، نو $f'(x)$ د مماس میل د منحني سره د $(x_0, f(x))$ په ټکي کې دی.

که د f تابع د $x=x_0$ په ټکي کې د مشتق وړ وي، نو دا تابع په x_0 کې متمادي ده، خو ددې برعکس سمه نه ده؛ یعني کیدای شي یوه تابع په یوه ټکي کې متمادي وي، ولې په هغه ټکي کې د مشتق وړ نه دی.

د $f(x)$ د تابع مشتق د C پر منحني $P(x_0, f(x_0))$ په ټکي کې د مماس له میل سره برابر دی.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'=\tan\alpha=\tan\theta=m_\Delta$$

د تماس په ټکي کې د یوه منحني سره د مماس میل د هغې تابع د مشتق په نوم یادېږي.

که د یوې تابع مشتق ونیول شي، نو یوه تابع په لاس راځي چې دا د مشتق تابع بلل کېږي.

که د f تابع د (x_0-r, x_0+r) په فاصله کې($x_0=x$ په شاوخوا) کې تعریف شوې وي او د هغې لیمیټ موجود وي، په دې حالت کې کولای شو چې یو مماس خط د $f(x)$ د تابع په منحني د $x=x_0$ په ټکي کې رسم کړو، د دې مماس میل عبارت دی له: $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

مشتق قوانین:

1) $f(x)=C \quad \Rightarrow \quad f'(x)=0$

2) $f(x)=x^n \quad \Rightarrow \quad f'(x)=n\cdot x^{n-1}$

3) $f(x)=u\pm v \quad \Rightarrow f'(x)=u'\pm v'$

4) $f(x)=u\cdot v \quad \Rightarrow \quad f'(x)=u'v+v'u$

5) $f(x)=\dfrac{u}{v} \quad , \quad v\neq 0 \Rightarrow f'(x)=\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$

6) $f(x)=\sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

7) $f(x)=\sqrt{u} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

8) $f(x)=\sqrt[n]{u} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\dfrac{u'}{n\cdot\sqrt[n]{u^{n-1}}}$

د مرکبو توابعو مشتق: $y'_{(x)}=y'_{(u)}\cdot u'_{(x)}$

د مثلثاتي تابع گانو مشتق:

1) $y=\sin x \quad \Rightarrow \quad y'=\cos x \quad , \quad y=\sin u \quad \Rightarrow \quad y'=u'\cos u$

2) $y=\cos x \quad \Rightarrow \quad y'=-\sin x \quad , \quad y=\cos u \quad \Rightarrow \quad y'=-u'\sin u$

که د $y=f(x)$ تابع مشتق منونکی وي، په بشپړ ډول n-ام ځلي مشتق يې $y^{(n)}=f^{(n)}_{(x)}$ دی.

د دویم څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتنو ته څلور ځوابونه درکړل شوي دي، سم ځواب په نښه کړئ:

1- $f(x)=x^2-x$ منحنی میل د $P(3,0)$ په ټکی کې عبارت دی له:

$a)\ 3$ $b)\ -3$ $c)\ 5$ $d)\ -5$

2- د $f(x)=2x^2$ په تابع کې د f متوسط بدلون د $[3,4]$ په انتروال کې عبارت دی له:

$a)\ 18$ $b)\ 14$ $c)\ -14$ $d)\ 32$

3- د $y=2x^2-3x^{-1}$ تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ y'=4x^2+3$ $b)\ y'=4x+\frac{1}{2}x$ $c)\ y'=4x+\frac{3}{x^2}$ $d)\ y'=4x$

4- د $f(x)=\sqrt{x-1}$ د تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ 0$ $b)\ \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$ $c)\ \frac{x-1}{2\sqrt{x}}$ $d)\ \frac{-1}{2\sqrt{x-1}}$

5- د $f(x)=2x^2+x$ تابع د $x=1$ په ټکی کې د مماس خط معادله عبارت دی له:

$a)\ y=5x-5$ $b)\ y=x-3$ $c)\ y=5$ $d)\ y=5x$

6- د $y=\frac{2x}{-x+4}$ د تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ y'=-4x+8$ $b)\ y'=-2$ $c)\ y'=\frac{4x+8}{(-x+4)}$ $d)\ y'=\frac{8}{(-x+4)^2}$

7- د $y=(2-x^2)^3$ تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ y'=-6x^5+2x^3-24x$ $b)\ y'=3(2-x^2)^2$ $c)\ y'=3(-2x)^2$ $d)$ هیڅ یو

8- د $y=\sin x$ د تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ y'=\sin x$ $b)\ y'=\cos x$ $c)\ y'=-\sin x$ $d)\ y'=-\cos x$

9- د $y=(1+x^4)^{\frac{-1}{5}}$ د تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ y'=-\frac{4}{5}x^3(1+x^2)^{\frac{-6}{5}}$ $b)\ y'=-\frac{1}{5}(1+x^2)^{\frac{-6}{5}}$

$c)\ y'=-4x^3$ $d)$ هیڅ یو

10- د $y=\frac{\cos}{1-\cos x}$ د تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ y'=\frac{\sin x}{(1-\cos x)^2}$ $b)\ y'=\frac{-\sin x}{(1-\cos x)}$ $c)\ y'=\frac{-\sin x}{(1-\cos x)^2}$ $d)$ هیڅ یو

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې پوښتنې مفصل حل کړئ.

1. د $f(x)=\dfrac{2\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$ د تابع مشتق پیدا کړئ؟

2. د $f(x)=\dfrac{x+\sqrt{x-x^2}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}$ د تابع مشتق پیدا کړئ؟

3. د $f(x)=(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$ د تابع مشتق پیدا کړئ.

4. د $f(x)=(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x}+4)$ د تابع مشتق پیدا کړئ.

5. د $f(x)=\sin x\cdot\cos x$ د تابع مشتق د $\dfrac{\pi}{4}$ په ټکي کې پیدا کړئ.

6. د $f(x)=\dfrac{(\sin x+\cos x)^2}{1+\sin 2x}$ د تابع مشتق پیدا کړئ.

7. د $y=\cos x$ تابع اتمه مرتبه مشتق پیدا کړئ.

8. د $y=\sin^2 x+\cos^2 x$ تابع نهمه مرتبه مشتق پیدا کړئ.

9. د $x^2+xy+y^2=3$ تابع ضمني مشتق پیدا کړئ.

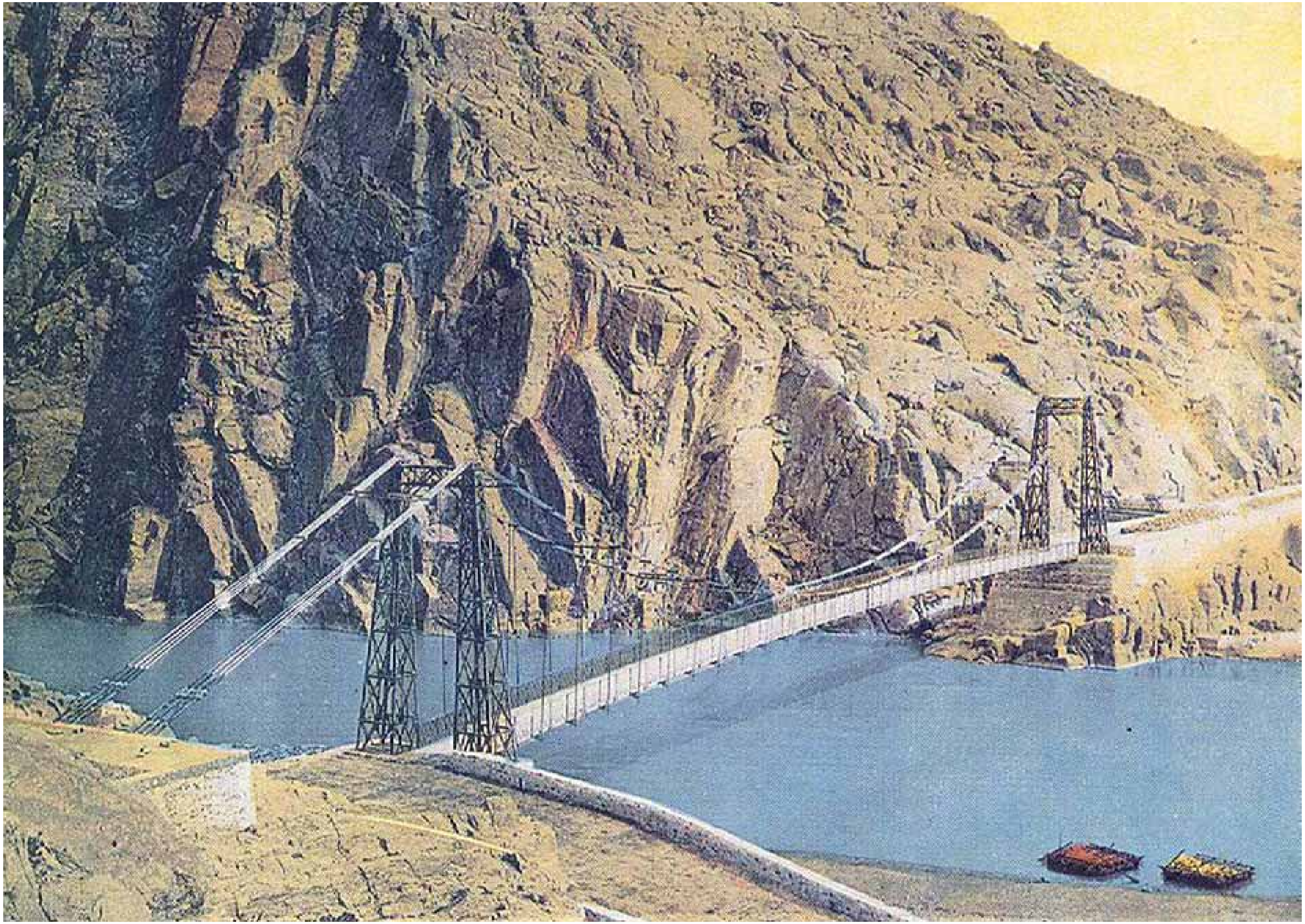
(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم څپرکی

د مشتق د استعمال ځایونه

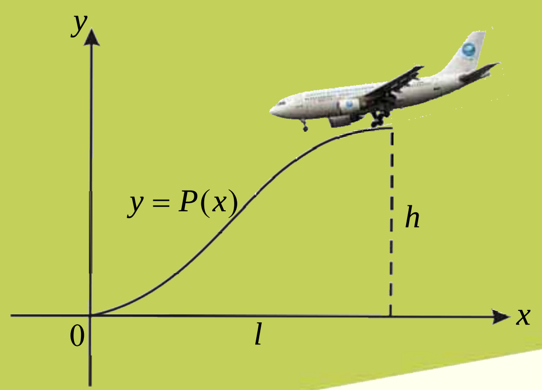
(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library



د مشتق د استعمال ځایونه

د مخامخ شکل د ارتفاع په اړه خپل نظر بیان کړئ.

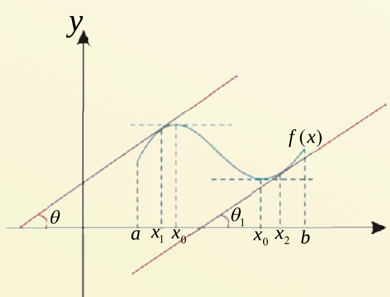


له مشتق څخه په ډیرو ځایونو کې لکه: (په فزیک کې د حرکت، سرعت او تعجیل اړونـد معادلې د مشتق څخه په ګټه اخېستنې سره حلېږي همدارنګه په کیمیا کې هم، د تابع د تحولات، د ځینو لیمیټونو په پیدا کولو کې) کار اخیستل کیږي چې ځینې ځایونه یې دلته تر څېړنې لاندې نیسو.

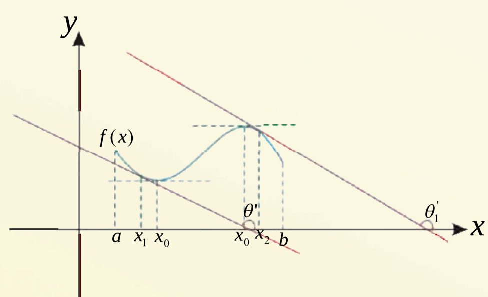
I- د یوې تابع تحولات:

فعالیت

لاندې شکلونو ته پاملرنه وکړئ:



(1)



(2)

- متزایدې او متناقصې توابع څه ډول توابع دي؟
- په (1) شکل د (a,b) په انټروال کې د x_0 ، x_1 او x_2 په ټکو کې د رسم شویو مماسونو میلونه د (2) شکل له مماسونو سره پرتله کړئ.
- په (1) او (2) شکلونو کې تر ټولو جګ ټکی او تر ټولو ټیټ ټکی په ګوته کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- په پورته شکلونو کې وښيي چې کومه تابع په کومه ساحه کې متزايده او په کومه ساحه کې تابع متناقصه ده؟
- په متزايده، متناقصه او ثابته تابع کې مشتق و څېړئ.

د پورته فعاليت پايله داسې بيانوو:

1- که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انتروال کې متمادي او په (a,b) انتروال کې د مشتق وړ وي، نو که چيرې په ورکړل شوي انټروال کې $f'(x)>0$ وئ، تابع په هغه انتروال کې متزايده بلل کيږي.

2- که چيرې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انتروال کې متمادي او د (a,b) په انتروال کې د مشتق وړ وي که به ورکړ شوي انټروال کې $f'(x)<0$ وي، نو تابع په هغه فاصله کې متناقصه بلل کيږي.

يادونه:د تابع له تزايد څخه مطلب دا دی چې د x د متحول قيمت په زياتېدو سره د تابع قيمت زيات او د تابع د تناقص څخه مطلب دا دی چې د x د متحول د قيمت په زياتېدو سره د y يا تابع قيمت کم يا ثابت پاتې شي.

لومړی مثال: وښيئ چې د $f(x)=x^3+3x+1$ تابع گراف متزايد ده.

حل: څرنگه چې تابع کسري بڼه نه لري نو ټول حقيقي عددونه د تعريف ساحه کيدای شي او هم پوهېږو چې د تابع د تزايد شرط $f'(x)>0$ دی، نو لازمه ده چې د تابع مشتق تر مطالعې لاندې ونيسو:

$$f(x)=x^3+3x+1$$
$$f'(x)=3x^2+3$$

ليدل کيږي چې د مشتق لومړی حد تام مربع دی نو د x د ټولو قيمتونو لپاره همېشه مثبت دی. کله چې (+3) ورسره جمع شي بيا هم قيمت يې مثبت دی، نو د $f'(x)>0$ دی نو تابع متزايده ده.

دويم مثال: د $f(x)=x^3-3x+5$ تابع په کوم انتروال کې متناقصه ده؟

حل: څرنگه چې د $f(x)$ تابع په هره انتروال کې متمادي او د مشتق وړ ده، نو د متناقص تابع لپاره لرو $f'(x)<0$ دی، يعنې:

$$f'(x)=3x^2-3<0$$
$$f'(x)=0$$
$$3x^2-3=0$$
$$3x^2=3$$
$$x=\pm1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیدل کېږي چې د تابع مشتق د $-1 < x < 1$ په انټروال کې منفي دی نو تابع په همدې انټروال کې $(-1,1)$ متناقصه ده.

دریم مثال: د $f(x) = 5x - 4$ تابع تحولات وڅېړئ.

حل: لومړی د تابع د تعریف ساحه پیدا او وروسته د تابع د تزاید شرط په کې څېړو:

$$D_f \to IR$$
$$f(x) = 5x - 4$$
$$f'(x) = 5 > 0$$

څرنګه چې $f'(x) > 0$ نو د ټولو قیمتونو لپاره همېشه مثبت دی. نو تابع متزایده ده.

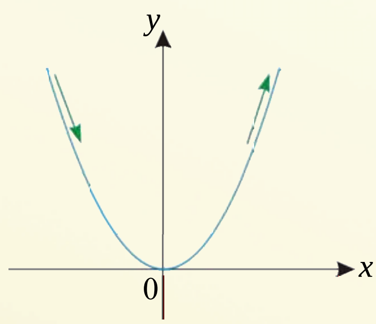
څلورم مثال: د $y = x^2$ د تابع ګراف ته خیر شئ او وښیئ چې ورکړل شوي تابع په کوم انټروال کې متزایده او په کوم انټروال کې متناقصه ده.

حل: پوهېږو چې که تابع متناقصه وي $y' < 0$ او که تابع متزایده وي $y' > 0$ څخه دی، نو لیکلای شو چې:

$$y = x^2 \Rightarrow y' = 2x$$

د تناقص شرط $y' < 0 \Rightarrow 2x < 0 \Rightarrow x < 0$

د تزاید شرط $y' > 0 \Rightarrow 2x > 0 \Rightarrow x > 0$



x	$-\infty$	-2		-1		0		1		2		$+\infty$
y'	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
y	$+\infty$ ↘	4	↘	1	↘	0	↗	1	↗	4	↗	$+\infty$

د تابع له ګراف څخه لیدل کېږي چې تابع د $(-\infty, 0)$ په انټروال کې متناقصه او د $(0, +\infty)$ په انټروال کې متزایده ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- د $f(x)=ax+b$ د تابع تحولات وښئ؟

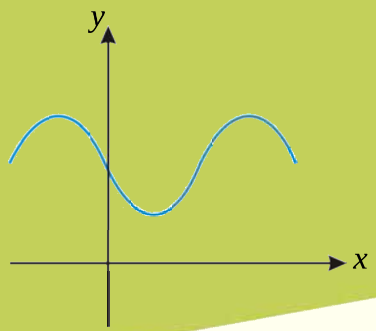
2- د $y=\frac{-3}{4}x-1$ د تابع تحولات وښيئ؟

3- وښيئ چې د $f(x)=2x^2+3x+1$ تابع د $x=1$ په نقطه کې متزايده ده؟

4- د $y=x^2+3x+2$ د تابع د تزايد انتروال و ټاکئ؟

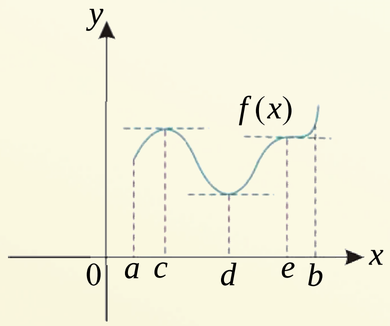
د يوې تابع بحراني(*Extreme*) ټکي (اعظمي *Maximum* او اصغري *Minimum*)

په مخامخ شکل کې تر ټولو لوړ ټکی او تر ټولو ټيټ ټکی وښيئ او ووايئ چې دا ټکي د څه په نامه يادېږي؟



فعاليت

که په لاندېني شکل کې د $f(x)$ تابع د (a,b) په انټروال کې د مشتق وړ وي.



- د متحول د قيمت په زياتوالي په کوم انټروال کې د تابع قيمت لوييږي.
- د متحول د قيمت په کموالي په کوم انټروال کې د تابع قيمت کمېږي.
- د تابع تحولات په (c,d) او (d,e) انټروال کې وڅېړئ.
- د $f(x)$ د تابع مشتق په کومو ټکو کې له صفر سره مساوي دی.

د پورته فعاليت پايله داسې بيانوو:

د يوې تابع په ګراف کې د y پر محور تر ټولو جګې نقطې ته اعظمي(maximum) او تر ټولو ټيټې نقطې ته د تابع اصغري(minimum) وايي، د x د هغو قيمتونو لپاره چې تابع اعظمي او يا اصغري قيمتونه اخلي د بحراني(Extreme) نقطو په نامه يادېږي.

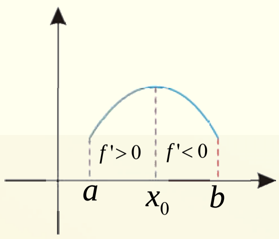
(c) ketabton.com: The Digital Library

تعریف:

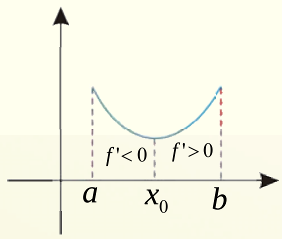
1- **ثابته تابع**: که چیرې د یوې تابع لومړی مشتق همیشه له صفر سره مساوي وي تابع ته ثابته تابع وایي.

2- **متزایده تابع**: که چیرې د یوې تابع لومړی مشتق د (a,b) په فاصله کې مثبت وي تابع په هغه فاصله کې متزایده بلل کېږي، یعنې $y'>0$ چې په لاندې شکلونو کې لیدل کېږي.

3- **متناقصه تابع**: که چیرې د یوې تابع لومړی مشتق د (a,b) په فاصله کې منفي وي یعنې $y'<0$ وي، تابع په هغه فاصله کې متناقصه بلل کېږي چې په لاندې شکلونو کې لیدل کېږي.



(1)



(2)

1- **اعظمي ټکی**: که چیرې د $y=f(x)$ تابع د x_0 په معین ټکي کې د تزاید له حالت څخه د تناقص حالت ته بدل شي یا په بل عبارت د x_0 په دې معین ټکي کې د مشتق اشاره له مثبت څخه منفي ته بدله شي د x_0 په نقطه کې د تابع قیمت د اعظمي(maximum) په نامه یادېږي.

2- **اصغري ټکی**: که چیرې د $y=f(x)$ تابع د x_0 په معین ټکي کې د تناقص له حالت څخه تزاید حالت ته بدل شي یا په بل عبارت د x_0 په دې معین ټکي کې د مشتق اشاره له منفي څخه مثبت ته بدله شي د x_0 په نقطه کې د تابع قیمت د اصغري (minimum) په نامه یادېږي.

3- **د انعطاف ټکی**: که چیرې مشتق خپله اشاره د x_0 په یوه معین ټکي کې له مثبت څخه صفر ته او بیا مثبت ته یا له منفي څخه صفر او بیا منفي ته بدله کړي x_0 د انعطاف د نقطې په نامه یادېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د $f(x)=x^3-\frac{7}{2}x^2+2x$ راکړل شوی ده دا تابع خو د (Extreme) ټکی لري.

حل: د تابع لومړی مشتق پیداکوو بیا هغه مساوي په صفر وضع کوو او د x قیمتونه په لاس راوړو.

$$f'_{(x)}=3x^2-7x+2$$

$f'(x)=0$

$3x-1=0\Rightarrow x_1=\frac{1}{3}$

$x-2=0\Rightarrow x_2=2$

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{17}{54}$	↘	-2	↘	-2	↗	$+\infty$
			Max				Min		

په پایله کې ویلای شو چې اصلي تابع دریمه درجه ده نو د $f(x)$ د تابع مشتق د $(\frac{1}{3})$ او (2) په دوو نقطو کې خپله علامه بدلوي، نو دوه بحراني(Extreme) ټکي لري.

دویم مثال: د $f(x)=\frac{x+1}{x^2-2x}$ تابع موضعی Extreme ټکي یا نستبي ټکي مشخص کړې.

حل: لومړی د تابع مشتق په لاس راوړو، وروسته یې علامې ټاکو:

لیدل کېږي چې تابع د $y=\frac{u}{v}$ شکل لري، نو $y'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$$f(x)=\frac{x+1}{x^2-2x}$$

$$f'(x)=\frac{x^2-2x-(2x-2)(x+1)}{(x^2-2x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-x^2-2x+2}{(x^2-2x)^2}$$

دیوه کسر قیمت هغه وخت له صفر سره مساوي دی چې د تابع صورت مساوي له صفر سره وي.

$$f'(x)=0 \quad\Rightarrow -x^2-2x+2=0$$

$$\Delta=b^2-4ac=12$$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2+\sqrt{12}}{-2}=-2.73$$

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2-\sqrt{12}}{-2}=0.73$$

x		-3		-2.73		-1		0.73		1	
$f'(x)$	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$
$f(x)$	↘	$-\frac{2}{15}$	↘	Min	↗	0	↗	Max	↘	-2	↘

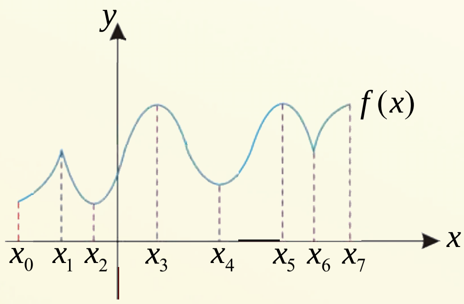
(c) ketabton.com: The Digital Library

په جدول کې ښکاري چې f' د x_1 او x_2 دواړو خواوو ته خپله علامه بدلوي، نو تابع دوه د Extreme ټکي لري، یعنې تابع اعظمي او اصغیر ټکي لري.

اعظمي او اصغري مطلق ټکي

کیدای شي یوه تابع په یوه انټروال کې څو موضعي بحراني ټکي ولري، خو په یوه تړلي انټروال کې تابع یوازې یوه مطلقه اعظمي او یوه مطلقه اصغري نقطه لري. په شکل کې یې وښیئ؟

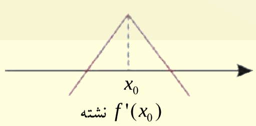
لاندینی شکل ته ځیر شي:

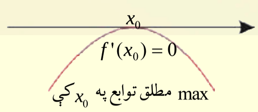


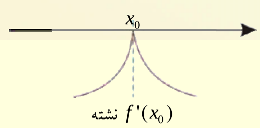
- د $f(x)$ په تابع کې اعظمي او اصغري ټکي وښیئ.
- د $f(x)$ تابع بحراني ټکي په ګوته کړئ.
- پورتنی تابع په ورکړل شوي انټروال کې څو موضعي بحراني ټکي لري.
- پورتنی تابع په ورکړل شوي انټروال کې څو اصغري او اعظمي لري.

د پورته فعالیت پایله داسې بیانوو:

مطلق اعظمي *Maximum*: په عمومي ډول د $(x_0, f(x_0))$ ټکي مطلق اعظمي بلل کیږي، که چیرې د $f(x)$ د تعریف په ساحه کې د هر x لپاره $f(x) \le f(x_0)$ وي، نو $f(x_0)$ ته مطلق اعظمي وایي لاندې شکلونه وګورئ.

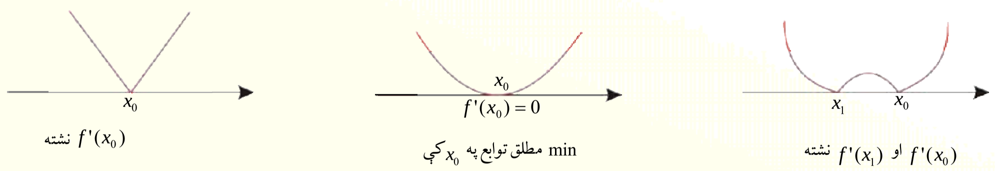






(c) ketabton.com: The Digital Library

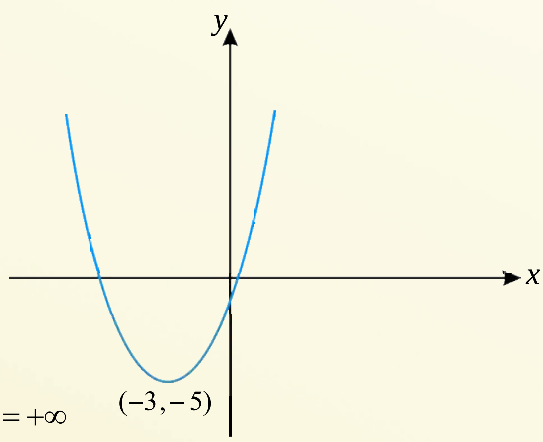
مطلق اصغري *Minimum*: په عمومي ډول د $(x_0, f(x_0))$ نقطه مطلقه اصغري بلل کيږي، کـه چيـرې د f د تعريف په ساحه کې د هر x لپاره $f(x) \geq f(x_0)$ وي، نو په دې حالت کې $f(x_0)$ تـه مطلقه اصغري وايي، د x هغه قيمتونه چې د هغوی لپاره تابع يا اعظمي او يا اصغري قيمتونه اخلي د x دغه قيمتونه د Extreme په نامه يادېږي.



لومړی مثال: د $f(x)=\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{1}{2}$ د تابع مطلق اصغري پيداکړئ.

حل: د $f(x)$ د تابع مشتق نيسو او د مشتق د تابع حلونه په لاس راوړو:

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{1}{2}$$
$$f'(x)=x+3$$
$$f'(x)=0$$
$$x+3=0$$
$$x=-3$$
$$f(-3)=-5$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}(\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{1}{2})=+\infty$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}x^2+3\lim_{x\to\infty}x-1\lim_{x\to\infty}-\frac{1}{2}=+\infty$$



x	$-\infty$		-4		-3		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\frac{9}{2}$	↘	-5 (Min)	↗	3	↗	$\frac{15}{2}$	↗	$+\infty$

په پايله کې د $x=-3$ په ټکي کې چې د تابع قيمت (-5) دی او تابع په $(-3,-5)$ ټکي کې مطلق اصغري لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم مثال: د $f(x)=x^3-3x+2$ د تابع اعظمي او اصغري ټکي پيدا او رسم يې کړئ.

حل: د اعظمي او اصغري ټکو د پيدا کولو لپاره لومړی د تابع لومړی مشتق پيدا او بيا د مشتق د تابع صفري ټکي په لاس راوړو.

$f(x)=x^3-3x+2$

$f'(x)=3x^2-3$

$f'(x)=0$

$3x^2-3=0$

$3x^2=3$

$x^2=1$

$x_1=1 \quad , \quad x_2=-1$

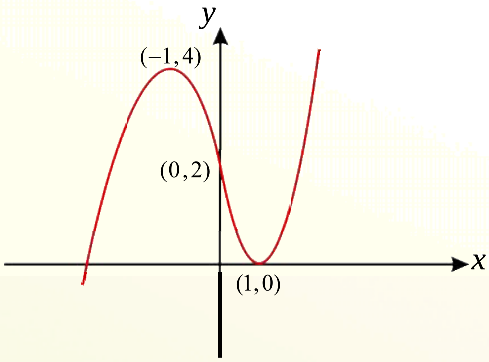
$f(1)=1^3-3\cdot1+2=1-3+2=0$

$f(0)=0-3\cdot0+2=2$

$f(2)=2^3-3\cdot2+2=4$

$f(1)=0 \quad , \quad f(0)=2 \quad , \quad f(2)=4$

$Max\ f(2)=4 \qquad Min\ f(1)=0$



x	$-\infty$	-2		-1		0		1		2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$f(x)$	$-\infty\nearrow$	$-\frac{5}{6}$	$\nearrow$	4 (Max)	$\searrow$	2	$\searrow$	0 (Min)	$\nearrow$	4	$\nearrow +\infty$

له جدو څخه ليدل کېږي چې تابع د $(-\infty,-1)$ او $(1,+\infty)$ په انټروالونوکې مطلقه متزايده او $(-1,1)$ په انټروال کې متناقصه ده، نو د $(1,0)$ نقطځ اصغري او د $(-1,4)$ نقطه اعظمي ده.

د يوې تابع د ګراف رسمولو لپاره لاندې ټکي بايد په پام کې ونيسو:

1. د تابع متماديت او نامتماديت مطالعه کړو.
2. د قايمو محورراتو سره د ګراف تقاطع.
3. د لومړي مشتق د اشارې مطالعه د تابع د تزايد او تناقص لپاره.
4. د تابع د اعظمي او اصغري ټکو لپاره د مشتق صفري ټکي پيدا کول.
5. د مجانبونو ټاکل.
6. د جدول ترتيبول او د هغوی په مرسته د ګراف رسمول.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم مثال: د $y = 2 + x - x^2$ تابع ګراف رسم کړئ؟

حل: لیدل کېږي چې تابع د متحول د ټولو قیمتونو لپاره معینه ده.

1- ددې تابع د تقاطع ټکی د x او y له محورونو سره پیداکؤو:

د y له محور سره دګراف تقاطع د ټکو د پیداکولو لپاره په ورکړشوي تابع کې $x = 0$ وضع کوو:

$$x = 0 \qquad y = 2 + 0 - 0 = 2$$

نو پورتنی ګراف د y محور په $(0,2)$ نقطه کې قطع کوي.

د x د محور سره دګراف د پرېکړې د ټکو دپیدا کولو لپاره y مساوي په صفر وضع کوو او د x قیمت پیداکوو:

$$y = 0 \ , \ 2 + x - x^2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 2}}{-2} = -\frac{-1 \pm 3}{2}$$

$$x_1 = -1 \ , \ x_2 = 2$$

نو پورتنی ګراف د x محور په $(-1,0)$ او $(2,0)$ نقطو کې قطع کوي.

2- د تابع اعظمي او اصغري ټکي پیداکوو، ددې کار لپاره دتابع اول او دویم مشتق څیړو.

$$y = 2 + x - x^2$$

څرنګه چې د تابع په اعظمي او اصغري په نقطو کې د تابع لومړی مشتق صفر دی نو $y' = 0$ سره وضع کوو:

$$y' = 1 - 2x$$

$$y' = 0 \text{،} \quad 1 - 2x = 0$$

$$-2x = -1 \ \Rightarrow \ 2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

تابع په $x = \frac{1}{2}$ نقطه کې یو اعظمي یو یا اصغري قیمت لري، دهغې دپیژندنې له پاره دتابع دویم مشتق پـه $x = \frac{1}{2}$ ټکو کې څیړو:

$$y'' = -2 < 0$$

څرنګه چې y'' تل منفي دی نو په $x = \frac{1}{2}$ کې هم منفي دی څکه نو تابع په $x = \frac{1}{2}$ ټکی کې یو اعظمي قیمت لري څرنګه چې د $x = \frac{1}{2}$ لپاره $y = 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 2\frac{1}{4}$ کېږي، نو د تابع اعظمي نقطه داده: $(\frac{1}{2} \text{،} \ 2\frac{1}{4})$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

دامنحني دانعطاف نقطه نه لري ځکه چې دهر x لپاره $y'' < 0$ دی.

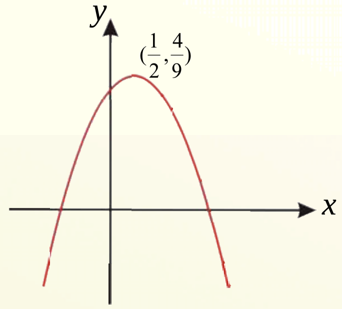
3- په $\pm\infty$ کې دګراف څېړل:

$$\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty}(2+x-x^2) = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty}(2+x-x^2) = -\infty$$

د زیاتې روښانتیا لپاره لاندې جدول ترتیب شوی، او دتابع ټول بدلونو نه په هغوکې په ګوته کوو او وروسته نوموړی ګراف رسموو.

x		-1		$\frac{1}{2}$		2	
y'	$+$		$+$	0	$-$		$-$
y	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$2\frac{1}{4}$	$\searrow$	0	$\searrow$



پوښتنې

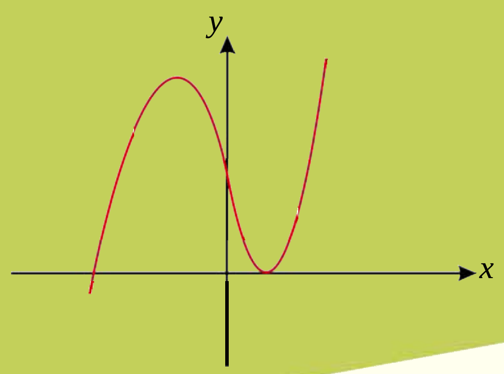
1- د لاندې توابعو موضعي Extreme و ټاکئ.

$a)\ f(x) = x^2 - 3x + 2$ $\qquad b)\ f(x) = \frac{x+1}{x^2}$ $\qquad c)\ y = 3x^2 - 4x + 1$

2- د $f(x) = 3x^3 - 4x^2$ د تابع مطلقه min پیدا کړئ.

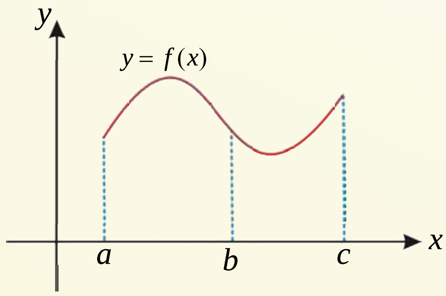
د انعطاف د نقطې ټاکل

هغه ټکي چې د يوې تابع ګراف په هغې کې خپل محدبيت، مقعريت ته او يا دې پر عکس بدلوي د څه په نامه يادېږي؟ آيا په دې ټکي کې د دويم مشتق علامه او قيمت څرګند شوی ده؟



فعاليت

لاندينۍ شکل په پام کې ونيسئ.



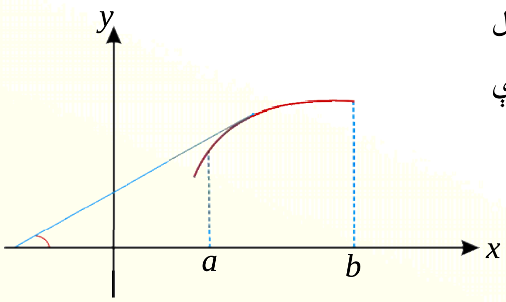
- د $y = f(x)$ د تابع منحني د (a,b) په انټروال کې څه ډول منحني بلل کيږي؟
- د $y = f(x)$ د تابع منحني د (b,c) په انټروال کې څه ډول منحني بلل کيږي؟
- د (a,b) په انټروال کې په منحني يو مماس رسم کړئ او له هغه مماس سره يې پرتله کړئ چې د (b,c) په انټروال کې په منحني رسمېږي.

د پورتني فعاليت پايله داسې بيانوو:

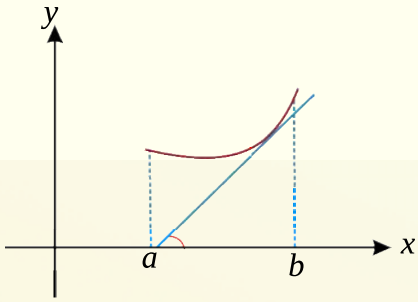
1. د $y = f(x)$ د تابع منحني په يوه انټروال کې پرسيدلی يا محدب بلل کېږي، که چيرې په دې انټروال کې په منحني مماس رسم شي، نو مماس د منحني له پاسه يا پورته خواته پروت وي، په دې صورت کې د تابع دويم مشتق منفي $y'' < 0$ په لاس راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې ډول که د $y = f(x)$ د تابع دویم مشتق د انټروال په ټولو ټکو کې منفي وي، نو د تابع ګراف یا منحني په دې انټروال کې محدب پاتې کیږي.



2. د $y = f(x)$ د تابع منحني په یوه انټروال کې ننوتې یا مقعره بلل کیږي، که چیرې په نوموړي انټروال کې په منحني مماس رسم شي، نو مماس د منحني نه لاندې یا ښکته خوا پروت وي، که د $y = f(x)$ د تابع دویم مشتق د انټروال په ټولو ټکو کې مثبت $y''>0$ وي، منحني په دې انټروال کې مقعر بلل کیږي.



تعریف: هغه ټکي چې تابع له مقعریت څخه محدبیت ته او یا ددې پر عکس په کې جهت بدلوي، د انعطاف (Inflection) نقطه بلل کیږي.

که د $y = f(x)$ تابع د $x = x_0$ په ټکي کې چې د تابع دویم مشتق صفر شي ($f''(x_0)=0$) وي تابع د $x = x_0$ په ټکي کې د انعطاف نقطه لري او ددې پر عکس تابع د انعطاف نقطه نه لري.

لومړی مثال: د $f(x) = x^2 - 5x + 4$ د تابع ګراف رسم محدبیت او مقعریت یې وڅیړئ.

حل: تابع د متحول د ټولو قیمتونو لپاره معینه ده.

1- د y له محورسره تقاطع

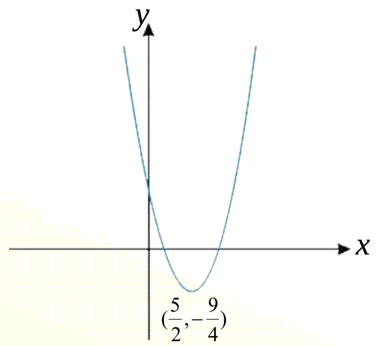
$$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=4 \end{array}\right\} \Rightarrow (0,4)$$

2- د x له محورسره تقاطع

$$\left.\begin{array}{l} y=0 \\ x^2-5x+4=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2-5x+4=(x-4)(x-1) \Rightarrow x_1=4 \quad , \quad x_2=1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د x له محور سره د تقاطع ټکي $(4,0)$ او $(1,0)$ دي.



x	$-\infty$	0	1	$\frac{5}{2}$	4	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	
$f(x)$	$+\infty \searrow$	$4 \searrow$	$0 \searrow$	$-\frac{9}{4}$ min $\nearrow$	$0 \nearrow$	$+\infty$

د ګراف، مقعریت او محدبیت د څیړلو لپاره د تابع دویم مشتق په لاس راورو:

$$f(x)=x^2-5x+4 \Rightarrow y'=2x-5$$

$$f''(x)=2>0$$

څرنګه چې $y''>0$ دی، نو په پایله کې ویلای شو چې منحني ننوتي یا مقعر دی.

دویم مثال: هغه انټروالونه وټاکئ چې په هغې کې د $y=x^3+9x^2-6x+1$ تابع ګراف محدب یا مقعر وي.

حل:

$$y=x^3+9x^2-6x+1$$

$$y'=3x^2+18x-6 \Rightarrow y''=6x+18$$

$$y''<0 \Rightarrow 6x+18<0$$

$$6x<-18 \Rightarrow x<-3$$

$$y''>0 \Rightarrow 6x+18>0$$

$$6x\geq -18$$

$$x>-3$$

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
y''	$-$	0	$+$
y	$\cap$ محدب	انعطاف	$\cup$ مقعر

څرنګه چې لیدل کیږي د تابع دویم مشتق په $(-\infty,-3)$ انټروال کې منفي او د $(-3,+\infty)$ انټروال کې مثبت دي نو دا ډول ګراف په لومړی انټروال کې محدب او په دویم کې مقعر دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم مثال: د $f(x)=x^5-5x^3$ د تابع د انعطاف ټکی و ټاکئ؟

حل:

$$f(x)=x^5-5x^3 \Rightarrow f'(x)=5x^4-15x^2$$
$$f''(x)=20x^3-30x$$
$$f''(x)=0$$
$$20x^3-30x=0$$
$$x(20x^2-30)=0$$
$$x_1=0$$
$$20x^2-30=0$$
$$x^2=\frac{3}{2} \Rightarrow x_2=\sqrt{\frac{3}{2}} \quad , \quad x_3=-\sqrt{\frac{3}{2}}$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{3}{2}}$		0		$\sqrt{\frac{3}{2}}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\cap$	-13.65	$\cup$		$\cap$	$-6\sqrt{\frac{3}{2}}$	$\cup$	

لیدل کیږي چې په $x=\sqrt{\frac{3}{2}}$ او $x=0$ ، $x=-\sqrt{\frac{3}{2}}$ کې د تابع دویم مشتق صفر دی یا $f''(x)=0$ علامه بدلوي او په دې ټکو کې مماس رسمیدلی شي، چې هغه ټکی د انعطاف ټکی دی.

پوښتنې

1. د $f(x)=x^2-4$ د تابع محدبیت او مقعریت وټاکئ.
2. د $f(x)=-2x^2-1$ د تابع د انعطاف نقطه وټاکئ.

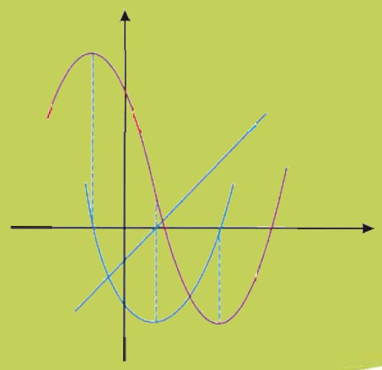
(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د منحني ګانو رسمول

د دويمې درجې تابعګانو ګراف

د مخامخ شکل په اړه خپل نظر بيان کړئ.



فعاليت

- د $f(x)=x+1$ د تابع ګراف د $f(x)=-x+1$ د تابع له ګراف سره پرتله کړئ.
- د $y=ax^2+bx+c$ د تابع د تعريف ساحه و ټاکئ آيا دا تابع متمادي ده؟
- د نوموړې تابع لومړی مشتق پيدا او د Maximum او Minimum ټکي او د تناظر محور يې وټاکئ.
- د تابع ليميټ په هغه صورت کې پيدا کړئ چې $x \to \pm\infty$ وکړي.
- له محورونو سره د تقاطع ټکي و ټاکئ.
- د تحولاتو جدول ترتيب او نوموړی منحني رسم کړئ.

د پورته فعاليت پايله داسې بيانوو:

1- د تابع د تعريف ساحه: ليدل کېږي چې تابع د متحول د ټولو قيمتونو لپاره ټاکلې ده، يعنې:

$$D_f \to (-\infty,+\infty)$$

نو تابع د خپل تعريف په ساحه کې متمادي ده.

2- د تابع د بحراني ټکو او د تناظر محور ټاکل:

$$f'(x)=2ax+b=0$$
$$f'(x)=0$$
$$2ax+b=0$$
$$2ax=-b$$
$$x=\frac{-b}{2a}$$

د $x=\frac{-b}{2a}$ قیمت په اصل تابع کې وضع کوو:

$$y=a(-\frac{b}{2a})^2+b(-\frac{b}{2a})+c \Rightarrow a\cdot\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{2a}+c=0$$

$$y=\frac{b^2-2b^2+4ac}{4a}=\frac{-b^2+4ac}{4a} \Rightarrow \frac{4ac-b^2}{4a}$$

د $(-\frac{b}{2a}\ ,\ \frac{4ac-b^2}{4a})$ ټکی بحراني یعني اعظمي یا اصغري دی.

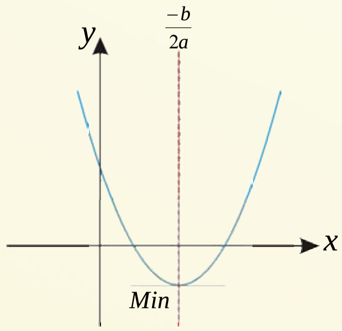
الف: که $a>0$ وي، نو: $a>0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

تابع په $(\frac{-b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$ ټکي کې Min لري.

ب: که $a<0$ وي، نو: $a<0 \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

تابع په $(\frac{-b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$ ټکي کې Max لري.

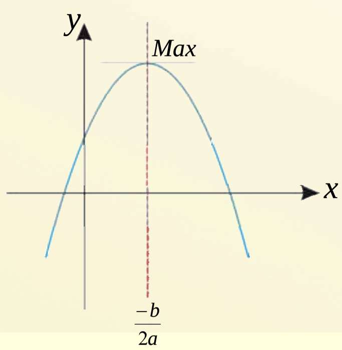
3- د ګراف د رسمولو لپاره جدول ترتیب او ګراف یې رسموو:



$a>0$

x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
y'	$-$		$+$
y	$+\infty$ ↘	$\frac{4ac-b^2}{4a}$	↗ $-\infty$

خرنګه چې $a>0$ د منحني خوله(جهت) پورته خواته او د $(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4})$ اصغري نقطه ده.



$a<0$

x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
y'	$-$		$+$
y	$+\infty$ ↘	$\frac{4ac-b^2}{4a}$	↗ $-\infty$

خرنګه چې $a<0$ د منحني خوله(جهت) پورته خواته او د $(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4})$ اعظمي نقطه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د $f(x)=x^2-4x+3$ د تابع تحولات مطالعه اوگراف يې رسم کړئ.

حل:

1- د تابع د تعريف ساحه $(-\infty,+\infty)$ تابع د ټولو حقيقي قيمتونو لپاره تاکلې ده، نو تابع په دې انټروال کې متمادي ده.

2- د تابع د منحني تقاطع د x له محور سره:

$$\left.\begin{array}{l} y=0 \\ x^2-4x+3=0 \\ (x-1)(x-3)=0 \\ x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ x-3=0 \Rightarrow x=3 \end{array}\right\} (1,0) \quad , \quad (3,0)$$

3- د تابع د منحني تقاطع د y له محور سره:

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=0-4\cdot 0+3 \\ y=3 \end{array}\right\} (0,3)$$

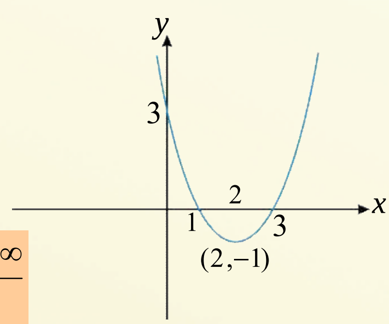
4- د تابع د extreme ټکو د پيدا کولو لپاره د لومړی مشتق صفري ټکي پيدا او جدول يې ترتيبوو:

$$f'(x)=2x-4=0 \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow x=2$$

$$\left.f(2)=2^2-4\cdot 2+3=-1\right\} \Rightarrow V(2,-1)\min$$

$$x\to\pm\infty \Rightarrow f(x)\to\pm\infty$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left[x^2-4x+3\right]=+\infty$$



x	$-\infty$		0		1		2		3		$+\infty$
y'		−		−		−		+		+	
y	$-\infty$	↘	3	↘	0	↘	-1 (Min)	↗	0	↗	$+\infty$

دويم مثال: د $f(x)=-x^2+2x$ د تابع تحولات مطالعه اوگراف يې رسم کړئ.

حل: ليدل کيږي چې تابع د ټولو قيمتونو لپاره تعريف شوې ده، نو:

1- د تابع د تعريف ساحه عبارت دی له: $(-\infty,+\infty)$ چې په دې ساحه کې تابع متمادي ده.

2- د تابع د منحني د تقاطع ټکی د x له محور سره:

$f(x)=0$

$-x^2+2x=0$

$x(-x+2)=0$

$x_1=0 \quad (0,0)$

$-x+2=0$

$x_2=2 \quad (2,0)$

د تقاطع ټکی

3- د تابع د منحني تقاطع د y له محور سره:

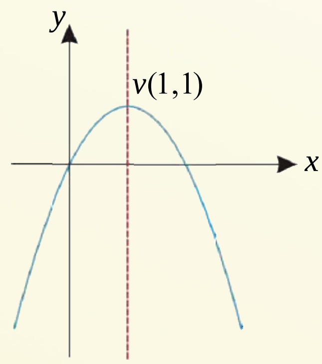
$x=0$

$f(x)=-x^2+2x$

$f(x)=0+2\cdot 0$

$f(x)=0 \quad (0,0)$

4- د تابع د extreme نقطو د پیداکولو لپاره د تابع لومړی مشتق پیداکوو او جدول یې ترتیب او ګراف یې رسموو:



$D_f \to (-\infty,+\infty)$

$f(x)=-x^2+2x$

$f'(x)=-2x+2=0$

$-2x+2=0$

$-2x=-2$

$\left.\begin{array}{l} x=1 \\ f(1)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow V(1,1)Max$

x	$-\infty$	0		1		2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$+$		$-$		$-$
$f(x)$	$-\infty \nearrow$	0	$\nearrow$	1 (Max)	$\searrow$	0	$\searrow -\infty$

په جدول کې لیدل کېږي چې د مشتق علامه د مثبت څخه منفي ته او یا د تزاید حالت څخه تناقص ته شکل بدلوي نو تابع د $(1,1)$ په ټکي کې اعظمي ده.

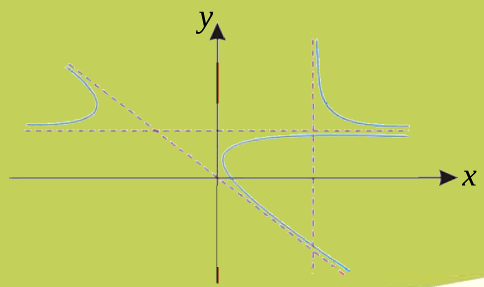
پوښتني

1. د $f(x)=2x^2-x-1$ د تابع ګراف رسم کړئ.
2. د $f(x)=x^2-x-2$ د تابع د ګراف بدلونونه وڅېړئ او ګراف یې رسم کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د توابعو د ګرافونو مجانبونه

شکل ته پام وکړئ ټکی ټکی کرښې د څه په نامه یادېږي، نومونه یې واخلئ.



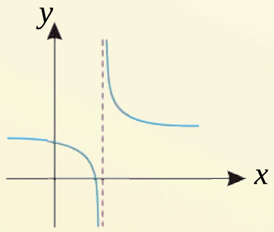
فعالیت

- مجانبونه څه دول کرښې دي؟
- مجانبونه، منحنيګان په کومو ټکو کې قطع کوي؟

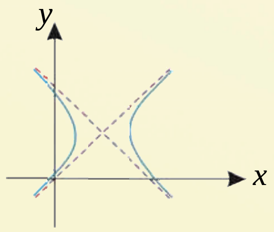
د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

مجانبونه: هغه مستقیمې کرښې دي چې د منحني لپاره د لاربنود حیثیت لري او د منحني کرښه غوڅه کړي، هغه تابعګانې چې د متحول د ځینو قیمتونو لپاره غیر متمادي وي مجانبونه لري او په درې ډوله دي.

1- **عمودي مجانب**: د $y = f(x)$ تابع هغه عمودي مجانب لري چې $x \to a$ او $y \to \infty$ وکړي، یعنې $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ شي یا په بل عبارت په کسري تابعګانو کې که چیرې د کسر مخرج مساوي په صفر شي نوموړې تابع بې‌نهایت خوا ته تقرب کوي، نو ددې ډول مجانب د پیدا کولو لپاره د کسر مخرج له صفر سره مساوي وضع کوو.

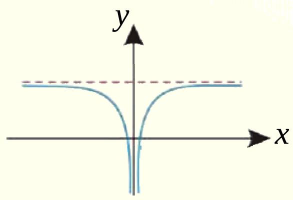


2- **مایل مجانب**: د $y = f(x)$ کسري تابع کله چې د صورت او مخرج د تقسیم حاصل د یوه مستقیم خط په شکل ($y = ax + b$) لاسته راشي داسې چې $a \neq 0$ وي په لاس راځي او دا هغه وخت امکان لري چې تابع د مایل مجانب لرونکی وي، یعنې د متحول د صورت درجه او د متحول د مخرج درجه له درې څخه لوړه وي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

په یاد ولرئ چې که یوه تابع د افقي مجانب لرونکي وي، مایل مجانب نه لري او بر عکس که چیرې مایل مجانب ولري افقي مجانب نه لري.



3- **افقي مجانب**: یوه تابع هغه وخت د افقي مجانب لرونکې ده، چې که $x \to \infty$ وکړي د تابع قیمت یو ثابت مقدار شي او یا په بل عبارت یوه تابع هغه وخت د افقي مجانب لرونکې ده چې کـه $x \to \infty$ وکړي، نو $y \to c$ ته تقرب کوي، یعني $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = c$ شي.

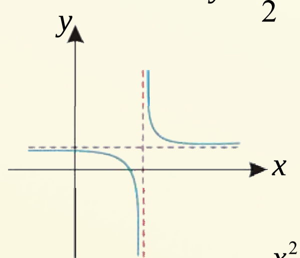
لومړی مثال: د $f(x) = \frac{x+1}{2x-4}$ تابع عمودي مجانب پیدا کړئ.

حل: د عمودي مجانب د پیدا کولو لپاره د کسر مخرج مساوي په صفر وضع کوو، لرو چې:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x+1}{2x-4}\right) = \frac{1}{2}$$

افقي مجانب عبارت دی له: $y = \frac{1}{2}$

x	-1	0	$+1$
y	0	$-\frac{1}{4}$	-1



دویم مثال: د $y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x}$ د تابع د منحني مجانبونه وټاکئ.

حل:

1- مایل مجانب: ددې مجانب د پیدا کولو لپاره د تابع صورت د تابع پر مخرج وېشو:

$$y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x} = x + 2 - \frac{1}{x} \Rightarrow y = x + 2$$

2- عمودي مجانب: د دې مجانب د پیدا کولو لپاره د تابع مخرج مساوي په صفر وضع کوو:

$$y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x} \Rightarrow x = 0$$

3- افقي مجانب: څرنګه چې تابع مایل مجانب لري، نو افقي مجانب نه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دريم مثال: د $f(x)=\dfrac{(x-3)(x+2)}{(x+1)(x-2)}$ تابع مجانبونه وټاکئ.

حل:

1- عمودي مجانب: د تابع مخرج مساوي په صفر وضع کوو:

$$(x+1)(x-2)=0$$

$$\left.\begin{array}{l} x+1=0 \\ x_1=-1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x-2=0 \\ x_2=2 \end{array}$$

نو $x=2$ او $x=-1$ د تابع عمودي مجانبونه دي.

2- افقي مجانب: د افقي مجانب د پیداکولو لپاره د تابع لیمیټ په لاس راوړو:

$$y=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-3)(x+2)}{(x+1)(x-2)}=1$$

نو $y=1$ د تابع افقي مجانب دی.

3- خرنگه چې د تابع د صورت له وېش څخه پر مخرج د $y=ax+b$ خطي معادله پیدا نه شوه، نو تابع مایل مجانب نه لري.

د مجانبو د ټاکلو عمومي لاره:

که چیرې د $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ په ناطقه تابع کې m او n په ترتیب سره د صورت او مخرج درجې وي، نو:

الف: که $m<n$ وي، نو د x محور افقي مجانب دی.

ب: که $m=n$ وي، نو $y=b$ افقي مجانب دی، داسې چې b د m او n د درجو د حدودو د ضریبونو نسبت دی.

ج: که چیرې $m>n$ وي، نو افقي مجانب نه لري، ولې د مایل مجانب احتمال يې شته.

د: که چیرې $m=n+1$ وي(که د صورت درجه د یوه واحد په اندازه له مخرج څخه لویه وي) تابع هرو مرو مایل مجانب لري، په دې حالت کې افقي مجانب نه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

د لاندې توابعو مجانبونه وټاکئ.

1) $f(x)=\dfrac{3x-6}{x^2-x-2}$

2) $f(x)=\dfrac{-2x^2}{x^2+1}$

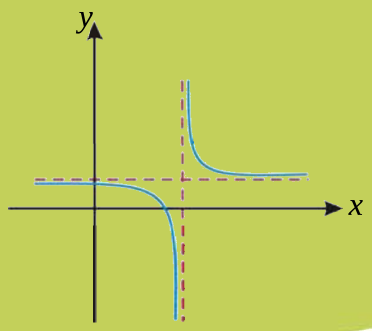
3) $f(x)=\dfrac{8}{x^2-4}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هوموګرافيک تابع ګانو ګراف

شکل تـه پاملرنـه وکـړئ دا شـکل د څـه ډول تـابع ګـراف دی؟ افقي او عمودي مجانبونه يې وښيئ.



فعاليت

- هوموګرافيک تابع څه ډول تابع ده، په يوه مثال کې يې واضح کړئ.
- د $y=\frac{1}{x}$ د تابع ګراف رسم کړئ.
- د نوموړي تابع مجانبونه لومړی پيدا او بيا يې رسم کړئ.
- د تابع دګراف تقاطع د x او y له محورونو سره پيدا کړئ.

د پورتني فعاليت پايله داسې بيانوو:

هغه تابعګانې چې د $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ شکل ولري، هوموګرافيک تابعګانې بلل کېږي، داسې چې $c\neq 0$ وي. دا ډول توابع دوه مجانبونه لري چې:

1- افقي مجانب يې:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{ax}{x}+\frac{b}{x}}{\frac{cx}{x}+\frac{d}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{a+\frac{b}{x}}{c+\frac{d}{x}} \Rightarrow y=\frac{a}{c}$$

2- عمودي(قايم) مجانب يې:

$$cx+d=0 \Rightarrow cx=-d \Rightarrow x=-\frac{d}{c}$$

لومړی مثال: د $f(x)=\frac{2x-1}{x-3}$ د تابع بدلونونه وڅېړئ او ګراف يې رسم کړئ.

حل:

$$x-3=0$$
$$x=3$$

1. خرنگه چې د تابع مخرج د $x=3$ په قیمت کې صفر کېږي نو تابع پرته د $x=3$ څخه د متحول په ټولو قیمتونو کې معینه ده، یعني د تابع د تعریف ساحه ټاکو: $Domin=IR\setminus\{3\}$

2. د تابع د منحني تقاطع د x له محور سره:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=0 \\ 2x-1=0 \\ 2x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \end{array}\right\} (\frac{1}{2},0)$$

3. د تابع د منحني تقاطع د y له محور سره:

$$x=0 \Rightarrow f(0)=\frac{2\cdot 0-1}{0-3}=\frac{1}{3} \quad \Big\} (0,\frac{1}{3})$$

4. د مجانبونو ټاکل:

الف- افقي مجانب: $y=2$, $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-1}{x-3}=2$ یا $f(x)=\frac{a}{c}=\frac{2}{1}=2$

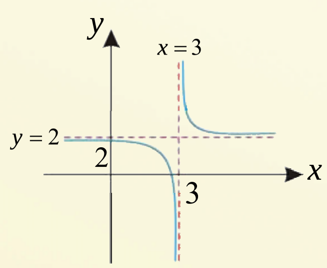
ب- عمودي مجانب: $x=3 \Leftarrow x-3=0$ یا $x=-\frac{d}{c}=-\frac{-3}{1}=3$

5. د تابع د extreme ټکي پیدا کوو او جدول يې ترتیب او ګراف يې رسموو:

$$f'(x)=\frac{2(x-3)-(2x-1)}{(x-3)^2}=\frac{-5}{(x-3)^2}<0$$

$$f''(x)=\frac{0\cdot(x-3)^2-(-5)\cdot 2(x-3)}{(x-3)^4}=\frac{10(x-3)}{(x-3)^4}=\frac{10}{(x-3)^3}$$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$-$
$f''(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↘	نه دی تعریف شوی	$+\infty$ ↘



دویم مثال: د $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$ د تابع د ګراف بدلونونه و څېړئ او ګراف يې رسم کړئ.

حل: $x+1=0 \Rightarrow x=-1$

1- د تابع د تعریف ساحه $D_f\to IR\setminus\{-1\}$ یعني تابع په $x=-1$ ټکي کې تعریف شوې نه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- د تابع د منحني تقاطع د x له محور سره: $y=0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow (1,0)$

3- د تابع د منحني تقاطع د y له محور سره: $x=0 \Rightarrow y=\frac{0-1}{0+1}=-1 \Rightarrow y=-1 \Rightarrow (0,-1)$

4- د مجانبونو ټاکل:

الف- عمودي مجانب: $x+1=0 \Rightarrow x=-1$

ب- افقي مجانب: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x-1}{x+1} \Rightarrow f(x)=y=1$

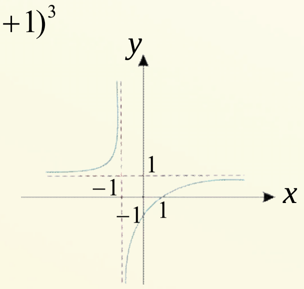
5- د تابع extreme نقطې پیدا کوو، جدول یې ترتیب او ګراف یې رسموو:

$$f(x)=\frac{x-1}{x+1}$$

$$f'(x)=\frac{1\cdot(x+1)-1\cdot(x-1)}{(x+1)^2}=\frac{x+1-x+1}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}>0$$

$$f''(x)=\frac{0\cdot(x+1)^2-2\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{-4(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{-4}{(x+1)^3}$$

x	$-\infty$ $\quad -1$	
$f'(x)$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	$1 \nearrow$ نه دی تعریف شوی	$\nearrow 1$



دریم مثال: غواړو د $f(x)=\frac{2x-5}{x}$ تابع ګراف رسم کړو.

حل:

1- د تابع د تعریف ساحه تر څېړنې لاندې نیسو لیدل کېږي چې تابع پرته د $x=0$ څخه نور د متحول د ټولو قیمتونو لپاره معینه ده، یعنې: $D_f \to IR\setminus\{0\}$

2- د محورانو سره د تقاطع ټکي

الف- د x له محور سره تقاطع:

$$f(x)=0 \Rightarrow \frac{2x-5}{x}=0$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x-5=0 \\ 2x=5 \Rightarrow x=\frac{5}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow (2.5,0)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب- د y له محور سره تقاطع: د $x = 0$ لپاره د $f(x)$ تابع تعریف شوې نه ده، نو د y محور سره تقاطع نه لري.

-3 **مجانبونه**:

الف- عمودي مجانب: څرنګه چې په مخرج کې یوازې x موجود دی، نو $x = 0$ یې عمودي مجانب دی چې د y محور کېږي.

ب- افقي مجانب: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{2x-5}{x}\right] = 2$ نو $y = 2$ د تابع افقي مجانب دی.

-4 د بحراني ټکو پیداکول: د بحراني ټکو د پیداکولو لپاره د تابع لومړی مشتق پیداکوو

$$f(x) = \frac{2x-5}{x}$$

$$f'(x) = \frac{2\cdot x-(2x-5)}{x^2} = \frac{2x-2x+5}{x^2}$$

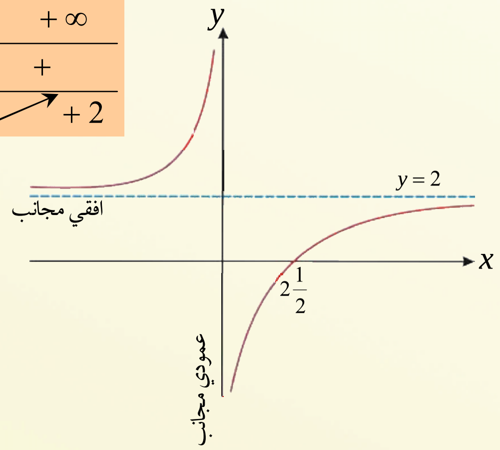
$$f'(x) = \frac{5}{x^2} > 0$$

څرنګه چې $f'(x) > 0$ دی، نو تابع متزایده ده.

د ګراف د رسمولو لپاره د تابع تحولات په جدول کې ترتیبوو:

x	$-\infty$		0		2.5	$+\infty$
$f'(x)$		+		+		+
$f(x)$	2 ↗	$+\infty$		$-\infty$ ↗	0 ↗	$+2$

نه دی تعریف شوی



پوښتنې

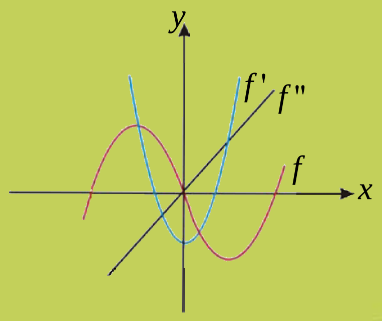
1. د $f(x) = \frac{x-1}{x+3}$ تابع بدلونونه وڅېړئ او رسم یې کړئ.

2. د $f(x) = \frac{x}{x-4}$ تابع بدلونونه وڅېړئ او رسم یې کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دريمې درجې يو مجهوله تابع ګراف $y=ax^3+bx^2+cx+d$ ، $a\neq 0$

مخامخ شکل د ځينو توابعو ګرافونه رابښيي تاسې د هـرې تابع د ګراف په هکله خپل نظر بيان کړئ.



فعاليت

- د $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ تابع په اړه فکر وکړئ او ووايئ چې تابع څومه درجه تابع ده؟
- د نومړې تابع ضريبونه او ثابت حد وليکئ.
- د نومړې تابع دويم مشتق پيدا کړئ.

د پورته فعاليت پايله داسې بيانوو:

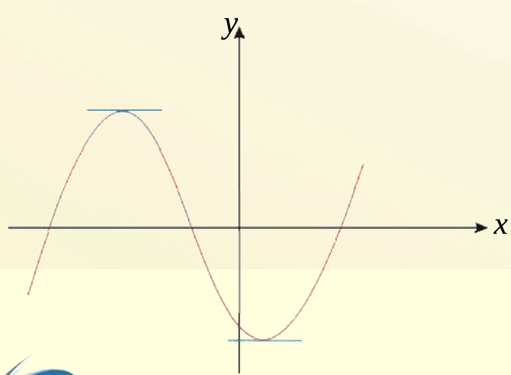
1. د $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ، په دريمه درجه تابع کې چې $a>0$ وي داسې په پام کې نيسو که چيرې د تابع لومړی مشتق پيدا کړو دويمه درجه تابع په لاس راځي، نو د $f'(x)=0$ لپاره د دويمې درجې د معادلې حل په پام کې نيسو او Δ يې مطالعه کوو که چيرې د معادلې Δ له صفر څخه لوی $(\Delta f'>0)$ وي، نو معادله(د تابع مشتق) دوه حله لري، که چيرې $a>0$ وي منحنی له کين لـوري څخـه ښـي لـوري تـه يـوه نـسبي اعظمـي نقطـه(Maximum) او يـوه نـسبي اصغري(Minimum) لري.

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$a>0 \Rightarrow \Delta f'>0$

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗		↘		↗ $+\infty$

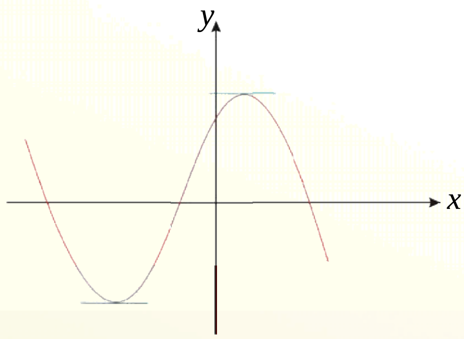


(c) ketabton.com: The Digital Library

2. د $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ، په تابع کې چې $a<0$ ، $f'(x)=0$ او $\Delta f'(x)>0$ معادله دوه جذرونه لري، که چیرې $\Delta f'>0$ نو منحنې دکین لوري څخه ښي لوري ته یوه نسبي اصغری(Minimum) او یوه نسبي اعظمي(Maximum) نقطه لري.

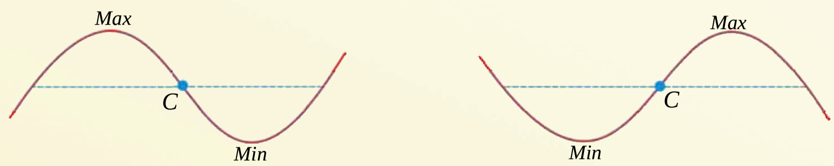
$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$
$$f'(x)=3ax^2+2bx+c$$
$$a<0 \quad \Rightarrow \quad \Delta f'>0$$

x		x_1		x_2	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty \searrow$		$\nearrow$		$\searrow +\infty$



3. که د دریمې درجې تابع منحنې نسبي بحراني Extreme ولري، د Extreme دټکو د منځنې ټکي یا د انعطاف د نقطې مختصات یې:

$$I(x_c,y_c)=\left(\frac{x_{max}+x_{min}}{2},\frac{y_{max}+y_{min}}{2}\right)$$



4. د دریمې درجې تابع د تناظر ټکی د تابع د انعطاف ټکی:

$$f'(x)=0$$
$$3ax^2+2bx+c=0$$

چې د تناظر ټکي یې وروسته د نوموړې معادلې د حل څخه د تناظر مرکز $x=-\frac{b}{3a}$ په لاس راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

5. د $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ په تابع کې که $a<0$ وي او $f'(x)=0$ سره وضع شي او $\Delta f'(x)=0$ نو معادله یو یا دوه مساوي جذرونه لري په هغه صورت کې چې $f'(x)\le 0$ وي، نو په دې صورت تابع متناقصه ده او که چیرې $f'(x)\ge 0$ وي نو په دې صورت کې تابع متزایده ده.

(2) (1)

لومړی مثال: د $f(x)=(x-1)(x+2)^2$ د تابع تحولات وڅېړئ او ګراف یې رسم کړئ.

حل: لومړی د تابع Extreme ټکو مختصات په لاس راوړو، وروسته د لومړي مشتق په مرسته ګورو چې تابع په کومه برخه کې متزایده او په کومه برخه کې متناقصه ده د محورونو سره د تقاطع ټکي پیدا کوو او د اعظمي او اصغري نقطو د تشخیص او د انعطاف نقطو د پیدا کولو لپاره د تابع دویم مشتق په کار وړو د تحولاتو جدول یې ترتیبوو او بیا یې ګراف رسموو:

$f(x)=x^3+3x^2-4$

$f'(x)=3x^2+6x$

$3x^2+6x=0$

$x(3x+6)=0$

$x_1=0 \quad , \quad 3x+6=0 \quad \Rightarrow \quad x_2=-2$

$f'(x)=0 \quad \Rightarrow x_1=0 \quad , \quad x_2=-2$

$f(0)=0^3+3\cdot 0^2-4=-4$

$f(-2)=(-2)^3+3(-2)^2-4$

$\quad =-8+12-4=0$

$f''(x)=0 \quad \Rightarrow \quad 6x+6=0$

$6x=-6$

$x=-1$

د انعطاف د نقطې د لاسته راوړلو لپاره $x=-1$ په اصلي تابع کې وضع کوو چې د $f(x)$ قیمت لاسته راځي:

$f(-1)=(-1-1)(-1+2)^2=-2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د انعطاف ټکی: $I(-1,-2)$

د محورونو سره تقاطع:

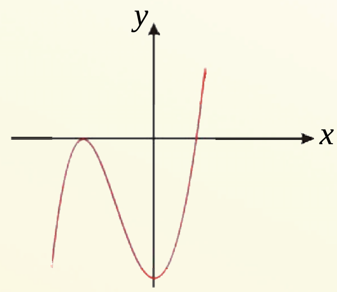
الف- د x له محور سره تقاطع:

$$y=0$$
$$(x-1)(x+2)^2=0$$
$$\left.\begin{array}{l}x-1=0\\x=1\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}(x+2)^2=0\\x+2=0\\x_2=-2\end{array}\right\} \Rightarrow (1,0)\ ,\ (-2,0)$$

ب- د y له محور سره تقاطع:

$$x=0$$
$$y=0^3+3\cdot0^2-4=-4 \ \Rightarrow (0,-4)$$

x	$-\infty$	-2		-1		0	$+\infty$
$f'(x)$	+		−		−		+
$f''(x)$	−		−		+		+
$f(x)$	$-\infty$ ↗	0 (max)	↘	-2	↘	-4 (min)	↗ $+\infty$



دویم مثال: د $f(x)=-x^3+3x^2$ د تابع تحولات وڅېړئ او ګراف رسم کړئ.

حل: د تابع لومړی مشتق پیداکوو او وروسته یې صفري نقطې ټاکو او د تابع اعظمي او اصغري نقطې په لاس راوړو.

-1

$$f(x)=-x^3+3x^2$$
$$f'(x)=-3x^2+6x$$
$$f'(x)=0 \ \Rightarrow -3x^2+6x=0 \ \Rightarrow x(-3x+6)=0$$
$$x_1=0 \ ,\ -3x+6=0 \ \Rightarrow -3x=-6 \ \Rightarrow x_2=2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اعظمي او اصغري ټکي عبارت دي له:

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=-0^3+3\cdot 0^2=0 \\ f(2)=-2^3+3\cdot 2^2=4 \end{array}\right\} \Rightarrow (0,0)\ ,\ \ (2,4)$$

2- د محورونو سره تقاطع:

الف- د x له محور سره تقاطع:

$$\left.\begin{array}{l} y=0 \\ -x^3+3x^2=0 \\ x^2(-x+3)=0 \\ x_1=0\ \ ,\ \ \ -x+3=0 \\ \qquad\qquad\quad x_2=3 \end{array}\right\} \Rightarrow (0,0)\quad ,\qquad (3,0)$$

ب- د y له محور سره تقاطع:

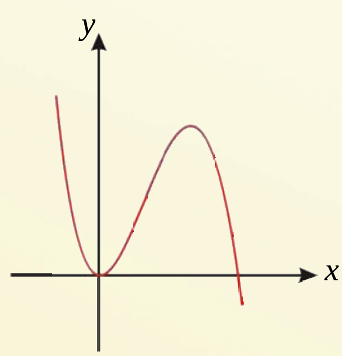
$$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ f(x)=-0^3+3\cdot 0^2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow (0,0)$$

3- د انعطاف د نقطې د پيداکولو لپاره $f''(x)$ مطالعه کوو:

$$f''(x)=-6x+6=0$$
$$x=1$$
$$f(x)=-x^3+3x^2$$
$$f(1)=2\ \Rightarrow\ I(1,\ 2)$$

4- اوس يې جدول ترتيبوو او ګراف يې رسموو:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$		$-$	
$f''(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	2	↗	4	↘	$-\infty$
			Min نسبي				Max نسبي		



(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم مثال: د $f(x)=x^3-3x^2+x+1$ د تابع د تناظر د مرکز مختصات پیدا کړئ.

حل: پوهېږو چې د تناظر مرکز د $x=\frac{-b}{3a}$ له رابطې څخه لاسته راځي، نو:

$$x=\frac{-b}{3a}=\frac{-(-3)}{3\cdot 1}=1 \Rightarrow f(1)=1^3-3(1)^2+1+1=0$$

د تناظر د مرکز مختصات $C(1,0)$

پوښتنې

1. د لاندې تابعګانو د تحولاتو جدول ترتیب او ګرافونه یې رسم کړئ.

$a)\ f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+x+1 \quad , \quad b)\ f(x)=-(x-1)^3$

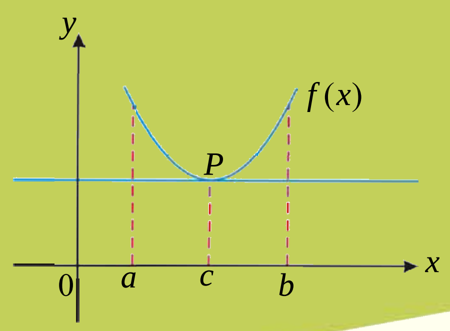
2- د $f(x)=-2x^2+6x-3$ د تناظر د مرکز مختصات پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د رول قضیه

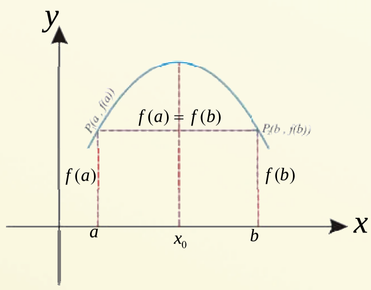
Rolle Theorem

په مخامخ شکل کې د $f(x)$ تابع او د Δ مستقیم خط یو له بل سره څه اړیکې لري او $f'(c)$ له څه سره مساوي دی.



فعالیت

- په مخامخ شکل کې د (a,b) په انټروال کې د $f(x)$ په منحني داسې ټکي شته چې له هغو څخه په منحنی داسې مماس رسم شي چې د x له محور سره موازي وي.
- د $f(x)$ تابع په کوم انټروال کې متمادي او په کومه فاصله کې د مشتق وړده.
- که چیرې $f(a)=f(b)$ وي، نو د x_0 ټکي په (a,b) انټروال کې وخیرئ.



د پورتني فعالیت څخه لاندې قضیه بیانولای شو:

قضیه: که چیرې د $f(x)$ تابع د $a \le x \le b$ په انټروال کې متمادي او د $a < x < b$ په انټروال کې د مشتق وړ وي او $f(a)=f(b)$ وي، نو لږ تر لږه د x_0 یو ټکی په $a < x < b$ انټروال کې شته چې د $f'(x_0)=0$ شي.

ثبوت: څرنګه چې د $f(x)$ تابع په ورکړل شوی انټروال کې متمادي او د مشتق وړ ده، نو بحراني Extreme ټکی لري.

1- که $f(x)=c$ ثابته تابع وي، نو واضح ده چې $f'(x)=0$ ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- که د $f(x)$ تابع ثابته نه وي، او $x_2, x_1 \in (a,b)$ او $f(x_1) > 0$ وي، نو تابع په $[a,b]$ کې یو $x_0 \in [a,b]$ Maximum قیمت لري چې $f(x_0) \geq f(x_1) > 0$ شي او همدا راز که $f(x_2) < 0$ وي، نو تابع یو اصغري Minimum قیمت لري.

څرنگه چې په Extreme نقطو کې د تابع مشتق صفر دی، نو $f'(x_0) = 0$ کیږي.

لومړی مثال: د رول قضیه د $f(x) = \cos x$ د تابع لپاره په $[a,b] = (\pi, 5\pi)$ فاصله کې تطبیق کړئ.

حل: څرنگه چې $f(\pi) = f(5\pi) = -1$ سره وي نو د $f(x)$ تابع د هر x لپاره د مشتق وړ ده نو د $(\pi, 5\pi)$ په انټروال کې متمادي او په $(\pi, 5\pi)$ په انټروال کې مشتق منونکی ده چې د Rolle د قضیې مطابق په $(\pi, 5\pi)$ کې لږ تر لږه یو x_0 موجود دی چې د هغه قیمت لپاره $(\cos x)' = 0$ شي. څرنگه چې $(\cos x)' = -\sin x$ دی، نو باید $-\sin x = 0$ معادلې لږ تر لږه یو حل په $(\pi, 5\pi)$ کې موجود وي.

$-\sin x = 0 \Rightarrow \sin x = 0$ دا معادله په $(\pi, 5\pi)$ کې دري ځله $4\pi, 3\pi, 2\pi$ قیمتونه اخېستلای شي.

دویم مثال: د رول قضیه د $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ تابع په $[a,b] = [-1,1]$ فاصله کې تطبیق کړی.

حل: لیدل کیږي چې تابع د پیل او پای په ټکو کې د مشتق وړ نه ده، ولې د رول د قضیې د تطبیق وړ ده ځکه $f(-1) = f(1) = 0$ دی $f(0)$ تابع په $[-1,1]$ کې متمادي ده او په $[-1,1]$ کې د x_0 یو عدد شته چې $f'(x_0) = 0$ شي او هغه $x_0 = 0$ دی.

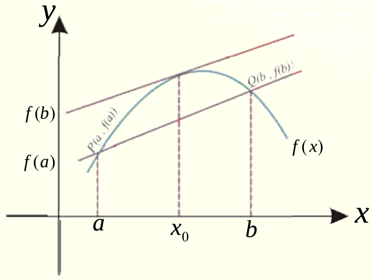
د $y'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u}}$ فورمول څخه په گټه اخېستنې سره مشتق په لاس راوړو:

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \Rightarrow \quad f'(0) = \frac{0}{\sqrt{1-0^2}} = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د متوسط قیمت قضیه(لاگرانژقضیه):

فعالیت



مخامخ شکل په پام کې و نیسئ:

- د یوې مستقیمې کرښې میل لـه کـومې رابطې څخه پـه لاس راځي؟
- د $\overline{PQ}$ د مستقیمې کرښې میل پیدا کړئ.
- د $\overline{PQ}$ د کرښې میل د $f(x)$ د تابع له مشتق سره څه اړیکه لري؟

له پورتني فعالیت څخه قضیه داسې بیانوو:

قضیه: که چیرې $f(x)$ د $[a,b]$ په فاصله کې متمادي او د (a,b) پـه فاصلـه کـې د مـشتق وړ وي د (a,b) د انتـروال څخـه د c یـو عـدد شـته دی داسـې چـې: $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$

یعني: $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ دی.

ثبوت: یوه مرستندویه تابع په پام کې نیسو، لیدل کېږي چې:

$$g(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot x$$

$$g(a)=f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot a=\frac{f(a)b-f(b)a}{b-a} \quad \text{.........} \ \text{I}$$

$$g(b)=f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot b=\frac{f(a)b-f(b)a}{b-a} \quad \text{.........} \ \text{II}$$

نو $g(a)=g(b)$ سره دی د رول د قضیې پر بنسټ سره د c عـدد د (a,b) انتـروال کې شته دی چې $g'(c)=0$ دی نو:

$$g'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow g'(x)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0 \Rightarrow f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\Rightarrow f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د $f(x)=2x^3-8x+1$ په تابع کې د متوسط قیمت قضیه په $[a,b]=[1,3]$ کې وڅیرئ.

حل: لیدل کېږي چې د $f(x)$ تابع په $[1,3]$ کې متمادي او په $(1,3)$ کې د مشتق وړ ده، نو د متوسط قیمت له قضیې سره سم په $(1,3)$ کې یو x_0 شته داسې چې:

$$f(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{36}{2}=18$$

د c د پیداکولو لپاره لرو: $f'(x_0)=6x^2-8=18 \Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{26}{6}}$

څرنګه چې $x=\sqrt{\frac{26}{6}}$ په $(1,3)$ کې ګډون لري، نو $x_0=\sqrt{\frac{13}{3}}$ دی.

او $x=-\sqrt{\frac{26}{6}}$ په $(1,3)$ فاصله کې واقع نه ده، نو د قبول وړ نه ده.

پوښتنې

1- که چیرې د $f(x)=\sqrt{x(4-1)}$ تابع د $[0,4]$ په انټروال کې راکړل شوې وي د x_0 قیمت داسې پیداکړئ چې د رول قضیه په پورتني تابع کې صدق وکړي.

2- که د $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x$ تابع راکړل شوې وي د x_0 قیمت د $[0,3]$ په فاصله کې داسې وټاکئ چې د رول قضیه په هغې کې صدق وکړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

3- د هوپيتال قاعده (L' Hopitall)

مخامخ مساوات څه بيانوي؟

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

فعاليت

- د $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$ د تابع لېميټ په هغه صورت کې پيدا کړئ چې $x\to 1$ ته تقرب وکړي.
- د پورتني تابع د صورت او مخرج مشتق پيدا او د تابع له لېميټ سره يې پرتله کړئ.
- د $f(x)=\dfrac{3x^4-3x^2-4x-1}{2x^2-4x^3+2x^4}$ د تابع لېميټ په هغه صورت کې پيدا کړئ چې $x\to\infty$ تقرب وکړي.
- د پورتني تابع د صورت او مخرج مشتق پيدا او د تابع له لېميټ سره يې پرتله کړئ.

له پورتني فعاليت څخه دا قاعده بيانو:

د هوپيتال قاعده:

که د $f(x)$ او $g(x)$ تابعګانې د (a,b) په انټروال کې تعريف او د مشتق وړ وي.

که چيرې $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ د لېميټ نسبت د $x\to a$ قيمت کې د $\dfrac{0}{0}$ مبهم شکل او يا په $x\to\infty$ کې د $\dfrac{\infty}{\infty}$ شکل ونيسي په دې حالت کې د تابع د لېميټ د پيداکولو لپاره د $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ مشتق پيداکوو او په هغه کې قيمتونه وضع کوو که بياهم د تابع شکل مبهم وي مشتق نيولو ته ادامه ورکوو ...n تر څو د ابهام شکل ختم شي د مثال په ډول:

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2+x-10}{x^2-4}=\frac{2\cdot 2^2+2-10}{2^2-4}=\frac{0}{0}=0$$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{4x+1}{2x}=\frac{4\cdot 2+1}{2\cdot 2}=\frac{9}{4}$$

يا

$$\lim_{x\to 2}\frac{(2x+5)(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{2x+5}{x+2}=\frac{2\cdot 2+5}{2+2}=\frac{9}{4}$$

مثال: د لوپیتال له قاعدې څخه په ګټه اخیستنې سره د لاندې توابعو لیمیټونه پیدا کړئ.

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\sin 2x}{x-\sin 2x}$ 2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^4-81}{x-3}$ 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-4x+6}{7x^2-2x+1}$

لومړی ځواب:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin 2x}{x-\sin 2x}=\frac{0+\sin 2\cdot 0}{0-\sin 2\cdot 0}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+\sin 2x)'}{(x-\sin 2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1+2\cos 2x}{1-2\cos 2x}=\frac{1+2}{1-2}=-3$$

دویم ځواب:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^4-81}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{3^4-81}{3-3}=\frac{81-81}{3-3}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x^4-81)'}{(x-3)'}=\lim_{x\to 3}\frac{4x^3}{1}=\frac{4\cdot 3^3}{1}=108$$

دریم ځواب:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-4x+6}{7x^2-2x+1}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(3x^2-4x+6)'}{(7x^2-2x+1)'}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x-4}{14x-2}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(6x-4)'}{(14x-2)'}=\frac{6}{14}=\frac{3}{7}$$

پوښتنې

د لوپیتال د قاعدې څخه په ګټه اخیستنې سره لاندې لیمیټونه پیدا کړئ.

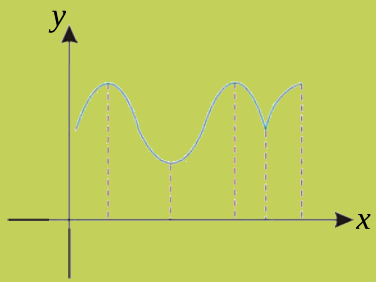
$a)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$, $b)\ \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^5-1}{x^3-1}$

$c)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x^3}$, $d)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5}{3x^3}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بحراني ټکو تطبیق

په مخامخ شکل کې تر ټولو لوړ ټکی او تر ټولو ټیټ ټکی وښیئ او دا ټکی د څه په نامه یادیږي.



1- دوه عددونه پیدا کړئ چې مجموعه یې 20 او د ضرب حاصل یې لوی ممکن قیمت ولري.

حل: که لومړی عدد ته x ووایل شي، نو دویم عدد $20-x$ دی او د ضرب حاصل یې د تابع په شکل داسې: $f(x)=x(20-x)$ لیکو، څرنګه چې د x عدد په $[0,20]$ انټروال کې تحول کوي، نو د تابع مطلق اعظمي قیمت په $[0,20]$ کې لټوو:

$$f(x)=20x-x^2$$
$$f'(x)=0$$
$$20-2x=0$$
$$-2x=-20$$
$$x=10$$
$$f(10)=20\cdot 10-10^2=200-100=100$$
$$f(0)=20\cdot 0-0^2=0$$
$$f(20)=20\cdot 20-20^2=400-400=0$$

لیدل کیږي چې (10 ، 100) د تابع اعظمي نقطه ده، نو مطلوب عددونه $x_1=10$ او $x_2=10$ چې د ضرب حاصل یې 100 دی.

2- د یوه خوځنده جسم د حرکت معادله د $x=(t-2)(t-3)$ په بڼه راکړل شوې ده، د جسم متوسط سرعت د $t_1=3$ او $t_2=4$ د وخت په واټنو کې پیدا کړئ.

حل: د منځنی سرعت د تعریف په مرسته لیکلای شو چې:

$$\text{منځنی سرعت}=\frac{x_{(t_2)}-x_{(t_1)}}{t_2-t_1}=\frac{x_{(4)}-x_{(3)}}{4-3}=\frac{2-0}{4-3}=2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

3- دکرې د حجم او سطحې تر منځ منځنی نسبت پیدا کړئ.

حل:

$$\text{دکرې حجم} = v_{(x)} = \frac{4}{3}\pi x^3 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{4}{3}\pi \cdot 3x^2 = 4\pi x^2$$

$$\text{دکرې مساحت} = S_{(x)} = 4\pi x^2 \Rightarrow \frac{ds}{dx} = 4\pi \cdot 2x = 8\pi x$$

$$\frac{dv}{ds} = \frac{4\pi x^2}{8\pi x} \Rightarrow \frac{dv}{ds} = \frac{1}{2}x$$

4- د سانتي ګراد(C) او فارنهایت (F) د حرارت تر منځ $C = \frac{5}{9}(F-32)$ اړیکه شته، تاسې د (C) او (F) تر منځ منځنی نسبت وټاکئ.

حل: د منځنی سرعت د تعریف $(V_m = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x})$ په مرسته لیکلای شو:

$$\frac{\Delta C}{\Delta F} = \frac{C(F+\Delta F)-C(F)}{\Delta F} = \frac{\frac{5}{9}(F+\Delta F-32)-\frac{5}{9}(F-32)}{\Delta F} = \frac{5}{9}$$

5- یوه ځمکه چې مستطیلي شکل لري، محیط یې $200m$ دی، کېدای شي اعظمي Maximum مساحت یې پیدا کړئ.

حل: په ورکړل شوي محیط سره کولای شو، ډېر مستطیلونه رسم کړو، ولې شرط دا دی چې هغه مستطیل زموږ مطلوب دی چې مساحت یې تر ټولو زیات وي، نو که د مستطیل اوږدوالی په x او سور یې په y وښیو، نو لیکلای شو:

$\text{میحط} = 2x+2y = 200$

$\text{میحط} = x+y = 100 \quad \Rightarrow y = 100-x$

$\text{مساحت} = x \cdot y$

$S = x(100-x) = 100x - x^2 \quad , \quad D_s = IR$

$x > 0 \quad , \quad y > 0 \quad \Rightarrow 100-x > 0 \quad \Rightarrow x < 100$

اوس د $S = 100x - x^2$ په تابع کې $0 < x < 100$ انټروال کې د تابع اعظمي مساحت داسې پیدا کوو:

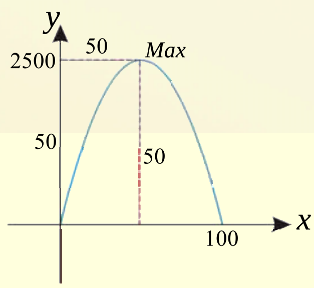
$S' = 100 - 2x$

$S' = 0 \Rightarrow 100 - 2x = 0 \quad \Rightarrow x = 50 \quad \Rightarrow S_{(50)} = 2500$

$\lim_{x\to 0^+} S(x) = 0$

$\lim_{x\to 0^-} S(x) = 0$

x	0		50		100
S'		+	0	−	
S	0	↗	2500	↘	0



(c) ketabton.com: The Digital Library

په پایله کې له شکل څخه هم لیدل کېږي چې تر ټولو لوی مساحت هغه وخت لاسته راځي چې د مستطیل طول 50 واحده وي، نو مساحت 2500 واحد مربع کېږي.

6- که د دوو عددونو مجموعه 200 وي، هغه عددونه داسې وټاکئ چې د مربعاتو مجموعه یې اصغري شي.

حل: که چیرې دا عددونه x او y وي، نو $x+y=200$ او که x ، $x^2+y^2=T_{(x)}$ فرض کړو، نو:

$$T_{(x)}=x^2+y^2$$
$$=x^2+(200-x)^2$$
$$=x^2+x^2-400x+(200)^2$$
$$=2x^2-400x+40000$$
$$T'_{(x)}=4x-400$$
$$T'_{(x)}=0$$
$$4x-400=0$$
$$x=100$$

په پایله کې ویلای شو چې د مربعاتو تر ټولو کوچنۍ مجموعه عبارت دی له: $T_{(100)}=20000$

7- د A ټکی د $y=\frac{2}{x}$ د منحني له پاسه حرکت کوي، تر ټولو کوچنی انټروال د A د نقطې او د مختصاتو د مبدې ترمنځ لاسته راوړو.

حل: د $y=\frac{2}{x}$ د تابع منحني پر مخ د A د نقطې مختصات $A(x,\frac{2}{x})$ دي، نو:

$$\overline{OA}=\sqrt{x^2{}_{(A)}+y^2{}_{(A)}}=\sqrt{x^2+\frac{4}{x^2}}$$
$$\overline{OA}^2=x^2+\frac{4}{x^2}=d^2 \Rightarrow d'_{(x)}=(x^2)'+(\frac{4}{x^2})'=2x-\frac{8x}{x^4}=2x-\frac{8}{x^3}$$
$$d'_{(x)}=\frac{2x^4-8}{x^3}$$
$$d'_{(x)}=0$$
$$2x^4=8$$
$$x_1=\sqrt{2} \quad , \quad x_2=-\sqrt{2}$$
$$d_{\sqrt{2}}=(\sqrt{2})^2+\frac{4}{(\sqrt{2})^2}=2+\frac{4}{2}=\frac{8}{2}=4$$
$$d_{-\sqrt{2}}=4$$

په پایله کې تر ټولو کوچنی فاصله له مبدا څخه 2 واحد مربع ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

8- یو مکعب مستطیل چې قاعده یې مربع ده، په پام کې نیسو، که د دریو واړو بعدونو مجموعه 24 وي، د مکعب تر ټولو لوی حجم پیدا کړئ.

حل: که د مکعب مستطیل د قاعدې ضلعې ته x او جګوالي ته یې y وویل شي، نو:

$$x + x + y = 24 \Rightarrow y = 24 - 2x$$

څرنګه چې $y \geq 0$ دی، نو $0 \leq x \leq 12$ کېږي او د مکعب مستطیل حجم عبارت دی له:

$$V = x^2 \cdot y \Rightarrow V = x^2(24-2x) = 24x^2 - 2x^3$$

$V = 24x^2 - 2x^3$	$V(0) = 24 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0^3$
$V'(x) = 48x - 6x^2$	$= 0 - 0 = 0$
$V'(x) = 0$	$V'(0) = 0$
$48x - 6x^2 = 0$	$V(8) = 24 \cdot (8)^2 - 2 \cdot (8)^3$
$x(48-6x) = 0$	$= 1536 - 1024 = 512$
$x_1 = 0$	$V(8) = 512$
$48 - 6x = 0$	$V(12) = 24 \cdot (12)^2 - 2 \cdot (12)^3 = 3456 - 3456 = 0$
$-6x = -48$	$V(12) = 0$
$x = 8$	

نو د مکعب مستطیل تر ټولو لوی حجم $512cm^3$ دی.

پوښتنې

1- د $y = x^3 + x^2 + x + 1$ د تابع تحولات پیدا او منحني یې رسم کړئ.

2- دوه داسې عددونه پیدا کړئ چې د جمعې حاصل یې 20 او د ضرب حاصل یې تر ټولو لوی ممکن قیمت ولري.

3- که د اوسپنې له یوې تختې څخه چې هره ضلعه یې $1m$ طول لري یو سر خلاص بکس جوړېږي د هغه له څلورو کنجونو څخه څلور مساوي مربعګانې پرې کړئ او بیا هغه قاط کړئ کوچنی مربعګانې په کومه اندازه پرې شي چې نوموړی بکس ممکن اعظمي حجم ولري.

4- د $y = x^2$ ګراف ته ډېره نژدې نقطه له $A(0,3)$ نقطې سره پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي مهم ټکي

- د $f(x)$ یوه تابع هغه وخت متزایده بلل کېږي، چې د $[a,b]$ په انټروال کې پیوسته او په (a,b) خلاص انټروال کې د مشتق وړ وي.
- د $f(x)$ یوه تابع هغه وخت متناقصه بلل کېږي، چې د $[a,b]$ په انټروال کې متمادي او په (a,b) خلاص انټروال کې د مشتق وړ وي.
- د تابع له تزاید څخه مطلب دا دی چې د x د متحول په زیاتېدو سره د تابع قیمت زیات او د تابع له تناقص څخه مطلب دا دی چې د x متحول په زیاتېدو سره د تابع قیمت کم شي.
- په یوه تابع کې تر ټولو جگې نقطې ته موضعي اعظمي(Local Maximum) او تر ټولو ټیټې نقطې ته موضعي اصغري(Local Minimum) وایي، د x هغه قیمتونه چې د هغوی لپاره تابع یا اعظمي او یا اصغري قیمتونه اخلي د Extreme په نامه یادېږي.
- مطلق Maximum: د $(x_0, f(x_0))$ نقطه مطلقه اعظمي بلل کېږي، که چیرې د $f(x)$ د تعریف په ساحه کې د هر x لپاره $f(x) \le f(x_0)$ وي، نو $f(x_0)$ ته مطلقه اعظمي وایي.
- مطلق Minimum: د $(x_0, f(x_0))$ نقطه مطلقه اصغري بلل کېږي، که چیرې $f(x)$ د تعریف په ساحه کې د هر x لپاره $f(x) \ge f(x_0)$ وي، نو $f(x_0)$ ته مطلقه اصغري وایي.
- د $y = f(x)$ د تابع منحني په یوه انټروال کې محدب بلل کېږي، که چیرې په دې انټروال کې په منحني مماس رسم شي، نو مماس د منحني پورته خواته پروت وي او د تابع دویم مشتق منفي په لاس راځي.
- د $y = f(x)$ د تابع منحني په یوه انټروال کې مقعر بلل کېږي، که چیرې په نوموړي انټروال کې په منحني مماس رسم شي، نو مماس د منحني ښکته خوا پروت وي، او د تابع دویم مشتق مثبت په لاس راځي.
- هغه ټکی چې د تابع له مقعریت څخه محدبیت ته او یا برعکس خپل لوری بدلوي، د انعطاف(Inflection) ټکی بلل کېږي.
- هغه تابعگانې چې د $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ بڼه ولري، د هوموگرافیک تابعگانو په نامه یادېږي، په دې شرط چې $c \neq 0$ وي.

- که چیرې د $f(x)$ تابع د $a \le x \le b$ په انټروال کې متمادي او د $a < x < b$ په انټروال کې د مشتق وړ او $f(a) = f(b)$ وي، نو لږ ترلږه د x_0 یو ټکی په $a < x < b$ په انټروال کې شته چې $f'(x_0) = 0$ دی، دا قضیه د رول د قضیې په نامه یادېږي.
- که چیرې $f(x)$ په $[a,b]$ فاصله کې متمادي او د (a,b) په خلاصه فاصله کې متمادي او د مشتق وړ وي د x_0 یو عدد د a او b ترمنځ شته چې $f'(x_0) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ دی دا د متوسط قیمت قضیه بلل کېږي.

د هوپیتال قاعده:

که د $f(x)$ او $g(x)$ تابعګانې د (a,b) په انټروال کې تعریف او د مشتق وړ وي.

که چیرې $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ د لېمیټ نسبت کله چې $x \to a$ د $\dfrac{0}{0}$ مبهم شکل او په هغه صورت کې چې $x \to \infty$ کې د $\dfrac{\infty}{\infty}$ شکل ونیسي په دې حالت کې د تابع د لېمیټ د پیداکولو لپاره د $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ مشتق پیداکوو او په هغه کې قیمتونه وضع کوو که بیاهم د تابع شکل مبهم وي مشتق نیولو ته دوام ورکوو ... n تر څو د ابهام شکل ختم شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دریم څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتنو ته څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، سم ځواب په نښه کړئ:

1 – که یوه تابع په $[0,b]$ انټروال کې متمادی او د مشتق وړ وي، نو هغه وخت متزاید ده چې :

$a)$ $f'(x)=0$ $b)$ $f'(x)<0$ $c)$ $f'(x)>0$ $d)$ $f'(x)\geq 0$

2- په یوه تابع کې تر ټولو جګې نقطې ته:

$a)$ Minimum وایي $b)$ Infliction وایي $c)$ Maximum وایي $d)$ هیڅ یو

3- د $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+2x}$ په تابع کې د Extreme ټکی عبارت دی له:

$a)$ دوه ټکي $b)$ یو ټکی $c)$ درې ټکي $d)$ نه لري

4 – هغه ټکی چې تابع له مقعریت څخه محدبیت ته بدلوي:

$a)$ د اعظمی ټکی دی $b)$ دانعطاف ټکی دی $c)$ اصغری ټکی دی $d)$ هیڅ یو

5- د $f(x)=ax^2+bx+c$ د تابع د تعریف ساحه عبارت له :

$a)$ $(-\infty\ ,+\infty)$ $b)$ $(-\infty\ ,0)$ $c)$ $(0,-\infty)$ $d)$ هیڅ یو

6- د $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+2}$ تابع عمودی مجانب عبارت دی له:

$a)$ $x=1$ $b)$ $x=2$ $c)$ $x=-1$ $d)$ $x=-2$

7- د هوموګرافیک تابع عمودی مجانب عبارت دی له:

$a)$ $y=\dfrac{a}{c}$ $b)$ $x=-\dfrac{d}{c}$ $c)$ $y=\dfrac{c}{a}$ $d)$ $y=-\dfrac{c}{d}$

8- د $g(x)=\dfrac{4x^2-6x}{x^2-4}$ تابع افقی مجانب عبارت دی له:

$a)$ 4 $b)$ 6 $c)$ -6 $d)$ -4

9- لاندې کومه الجبري اړیکه حقیقت لري:

$a)$ $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ $b)$ $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f'(x)$ $c)$ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ $d)$ هیڅ یو

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې پوښتنې ځواب کړئ:

1. د $f(x)=x^2-x$ د تابع د منحني میل د $P(3,0)$ په ټکي کې پیدا کړئ.

2. د $f(x)=-x^2$ په تابع کې د $[3,4]$ په انټروال کې د منحنی د بدلون ټکي پیدا کړئ.

3. د نیوټن د خارج قسمت په مرسته د لاندنیو تابعګانو مشتق پیدا کړئ.

1) $f(x)=2x$ 2) $f(x)=3x^2-1$ 3) $f(x)=\sqrt{2}x$

4. د لاندنیو تابعګانو په ورکړل شوو نقطو کې مشتق پیدا کړئ.

1) $f(x)=2x-1 \quad , \quad x_0=-1$ 2) $f(x)=x^2 \quad , \quad x_0=2$

5. د لاندې تابعګانو د مشتق تابع پیدا کړئ.

1) $f(x)=2x-4x^2$ 2) $f(x)=3x^3-1$ 3) $f(x)=\sqrt{2}x$

6. په ورکړل شوو ټکو کې د تابعګانو مشتق محاسبه کړئ.

1) $f(x)=7x^2-3x \quad , \quad x_0=-1$

2) $f(x)=6x^2-2x-1 \quad , \quad x_0=\dfrac{1}{2}$

7. د $f(x)=3x^5-4x^2-3x$ د تابع څلور ځلې مشتق ونیسئ او د هغې ګراف رسم کړئ.

8. د $x^2y+6y^3=x-3$ د تابع ضمني مشتق پیدا کړئ.

9. د لاندې تابعګانو مشتق پیدا کړئ.

1) $f(x)=x^3\sec x$ 2) $f(x)=\sin(3x-1)$ 3) $f(x)=\cos^2 2x$

10. کوم مثبت عدد دی چې د خپل معکوس سره جمع شي د جمعې حاصل یې تر ټولو کوچنی شي؟

11. د $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$ تابع ګراف رسم کړئ.

12. د $f(x)=\dfrac{4x^2}{x^2+1}$ تابع ګراف رسم کړئ.

13. د $f(x)=\sin x$ مثلثاتي تابع ګراف رسم کړئ.

14. د $f(x)=\tan x$ مثلثاتي تابع ګراف رسم کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

څلورم څپرکی

انتیګرال

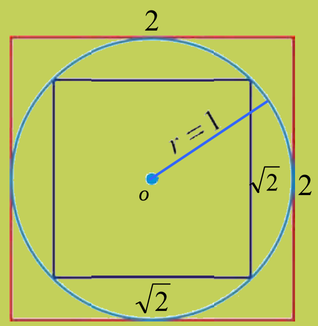
(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

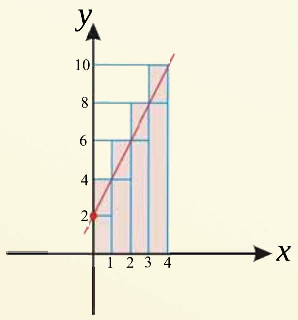
د ریمان مجموعه

Riemann's Sum

په مخامخ شکل کې چې که د دایرې شعاع یو واحد ده، د دایرې د محیطي او محاطي څلور ضلعي ګانو مساحت حساب کړئ او وواياست چې ددې دايرې مساحت له مخامخ څلور ضلعي ګانو سره څه اړيکه لري؟



- هغه مساحت چې د x د محور او $f(x)=2x+2$ د تابع د ګراف په منځ کې د$[0,4]$ په انټروال کې محصور شوی دی، خط خط کړئ.
- د $y=2x+2$ تابع په ګراف کې د څلورو لاندينيو او پورتنيو مستطيلونو مساحتونه چې په شکل کې ښودل شوي دي پيدا کړئ.



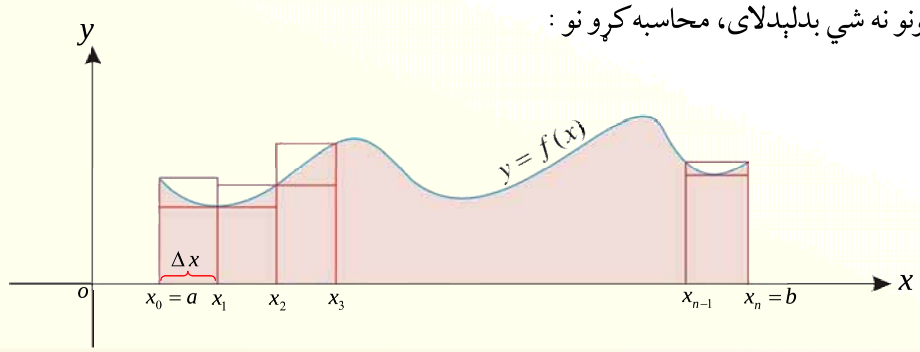
- د پورتنيو مستطيلونو د مساحت مجموعه، او د لاندينيو مستطيلونو د مساحت مجموعه د تابع د ګراف د لاندينۍ مساحت سره په ورکړ شوي واټن کې څه اړيکه لري؟
- د پورته په څېر فعاليت د اتو مساوي لاندينيو مستطيلونو او د اتو مساوي پورتنيو مستطيلونو لپاره تکرار کړئ او پايله يې د ګراف د لاندې مساحت سره په نوموړي واټن کې پرتله کړئ.
- که چيرې د پورتنيو مستطيلونو د مساحتونو مجموعه او لاندينيو مستطيلونو[1] د جوړولو لپاره د تابع په ګراف کې د فاصلې ويش زيات کړو د پورتنيو او لاندينيو مستطيلونو د مساحتونو مجموعه کوم قيمت ته نږدې کيږي.

---

[1]- که چيرې د x په محور د فاصلو تقسيمات زيات کړو او يا که چيرې په يوه فاصله کې د مستطيلونو شمير زيات شي په هم هغه اندازه د ګراف لاندنۍ مساحت د قيق په لاس راځي.

له پورتني فعالیت څخه لاندې تعریف لاسته راځي:

تعریف: فرضوو چې د $y = f(x)$ تابع د $[a,b]$ په تړلی انټروال کې متمادي او تعریف شوې وي که چیرې د ناحیې مساحت چې د x د محور او $y = f(x)$ د تابع د ګراف ترمنځ واقع دی چې په هندسي شکلونو نه شي بدلېدلای، محاسبه کړو نو:



د $[a,b]$ تړلې انټروال چې په n مستطیلو نو وېشو، څرنګه چې د هر مستطیل عرض د $(\Delta x = \frac{b-a}{n})$ رابطې څخه په لاس راځي او د مستطیلونو طول عبارت دی تابع قیمت په هماغه نقطه کې دی.

او د مستطیلونو د هر انټروال اوږدوالی د $i = 1,2,3, \dots ,n$ لپاره په لاندې ډول دي:

$$x_0 = a, x_1 = a + \Delta x, x_2 = a + 2\Delta x \dots, x_i = a + i\Delta x, \dots , x_n = b$$

$$[x_0, x_1] \ , \ [x_1, x_2] \ , \ [x_2, x_3], \ \dots \ ,[x_{i-1}, x_i], \ \dots \ ,[x_{n-1}, x_n]$$

که په شکل کې د لاندینیو مستطیلونو مساحت په $f(x_{i-1})\Delta x$ او د پورتنیو مستطیلونو مساحت په $f(x_i)\Delta x$ وښودل شي، نو لرو چې:

د لاندینیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه $= f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \dots + f(x_{n-1})\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x$

د پورتنیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه $= f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \dots + f(x_n)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$

که چیرې محصور شوی مساحت په A وښیو نو: $\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x < A < \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$

که چیرې د رابطې له اطراف څخه لیمیټ ونیسو نو لرو چې:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x \le \lim_{n\to\infty} A \le \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ساندویچ د قضیې پر بنسټ لیکلای شو؛ چې: $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = A$

نو $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ تـه د ریمان مجموع او ددې مجموعې لېمیټ یعنې $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ تـه د ریمان د مجموعې لېمیټ وایي.

لومړی مثال: د $[0,2]$ انټروال په څلور مساوي برخو وویشئ، د $y = x^2 + 1$ منحني، او x محور تر منځ مساحت پیدا کړئ.

حل: که چیرې $[0,2]$ انټروال په څلورو مساوي برخو وویشو؛ نو د مستطیلونو عرض داسې په لاس راځي:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}$$

ددې مستطیلونو دهر انټروال اوږدوالی عبارت دي له:

$$x_0 = a = 0 \quad , \quad x_1 = a + \Delta x = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = a + 2\Delta x = 1 \quad , \quad x_3 = a + 3\Delta x = \frac{3}{2}$$

$$x_4 = 2$$

$$[x_0, x_1] \quad , \quad [x_1, x_2] \quad , \quad [x_2, x_3], \ldots\ldots\ldots, [x_{n-1}, x_n]$$

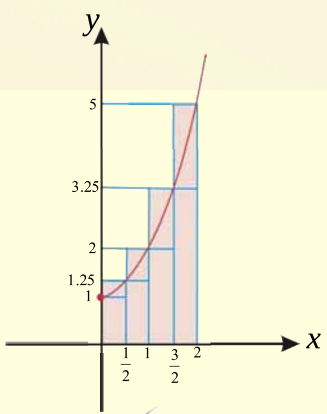
$$[0, \tfrac{1}{2}] \quad , \quad [\tfrac{1}{2}, 1] \quad , \quad [1, \tfrac{3}{2}] \quad , \quad [\tfrac{3}{2}, 2]$$

د تابع دګراف د رسمولو لپاره تابع ته قیمتونه ایږدو او د مستطیلونو طول لاس ته راځي:

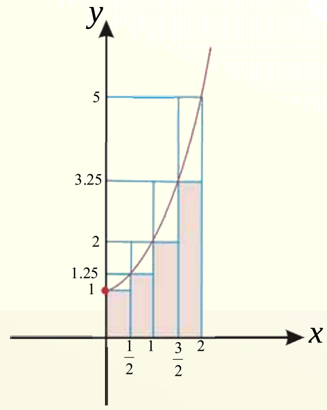
$$f(x) = x^2 + 1 \ , \ f(0) = 1$$

$$f(\tfrac{1}{2}) = 1.25 \ , \ f(1) = 2$$

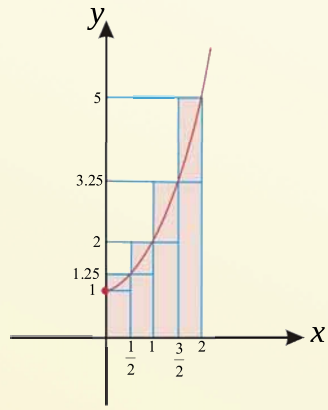
$$f(\tfrac{3}{2}) = 3.25 \ , \ f(2) = 5$$



(c) ketabton.com: The Digital Library



د لاندينيو مستطيلونو د مساحتونو مجموعه $= 1\times\frac{1}{2} + 1.25\times\frac{1}{2} + 2\times\frac{1}{2} + 3.25\times\frac{1}{2} = 3.75$



د پورتنيو مستطيلونو د مساحتونو مجموعه $= 1.25\times\frac{1}{2} + 2\times\frac{1}{2} + 3.25\times\frac{1}{2} + 5\times\frac{1}{2} = 5.75$

$$3.75 < A < 5.75$$

دويم مثال: د $f(x) = 1 + x$ تابع د ريمان د مجموعې لېميټ په $[1, 10]$ انټروال کې پيدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

باید یه یاد ولرو:

$$\sum_{i=1}^{n} c = cn$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{10-1}{n} = \frac{9}{n}$$

$$x_i = a + \Delta x i = 1 + [\frac{9}{n}]\, i \quad , \quad i = 0,1,2, \ldots$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \lim_{n\to\infty} [\sum_{i=1}^{n} (1+x_i)\Delta x]$$

$$= \lim_{n\to\infty} [\Delta x \sum_{i=1}^{n} (1+x_i)]$$

$$= \lim_{n\to\infty} [\Delta x \sum_{i=1}^{n} 1 + \Delta x \sum_{i=1}^{n} x_i]$$

$$= \lim_{n\to\infty} [\frac{9}{n} \sum_{i=1}^{n} 1 + \Delta x \sum_{i=1}^{n} (a + \Delta x i)]$$

$$= \lim_{n\to\infty} [\frac{9}{n} \sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{9}{n} \sum_{i=1}^{n} (1 + \frac{9}{n} i)]$$

$$= \lim_{n\to\infty} [\frac{9}{n} \sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{9}{n} (\sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{9}{n} \sum_{i=1}^{n} i)]$$

$$= \lim_{n\to\infty} [\frac{9}{n} \cdot n + \frac{9}{n} (n + \frac{9}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2})]$$

$$= \lim_{n\to\infty} [9 + \frac{9}{n} (n + \frac{9n^2 + 9n}{2n})]$$

$$= \lim_{n\to\infty} [9 + \frac{9}{n} (\frac{2n^2 + 9n^2 + 9n}{2n})]$$

$$= \lim_{n\to\infty} [9 + \frac{9}{n} (\frac{11n^2 + 9n}{2n})]$$

$$= \lim_{n\to\infty} [9 + \frac{99n^2 + 81n}{2n^2}]$$

$$= \lim_{n\to\infty} [9 + \frac{99n^2}{2n^2} + \frac{81n}{2n^2}]$$

$$= \lim_{n\to\infty} [9 + \frac{99}{2} + \frac{81}{2n}]$$

$$= 9 + \frac{99}{2} = 58.5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

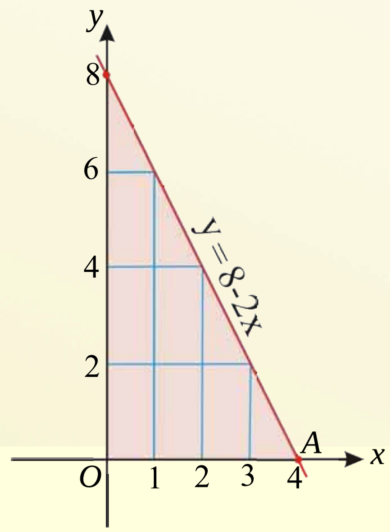
پوښتنې

1. د $[0,3]$ انټروال په بشپړو مساوي برخو له ویشلو څخه وروسته د $y=3x$ مستقیم خط او د x د محور تر منځ مساحت محاسبه کړئ.

2. د $\Delta x=0.5$ قیمت لپاره او د لاندې جدول د قیمتونو په پام کې نیولو سره ګراف رسم، د لاندینیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه او پورتنیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه پیدا کړئ.

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
y	14	20	26	32	38	44	50

3. د $y=8-2x$ تابع ګراف د لاندې OA مثلث مساحت د $[0,4]$ په انټروال کې د ریمان د مجموعې د لیمیت څخه په ګټه اخیستنې سره پیداکړې.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د انتیگرال مفهوم

Concept of Integral

ځرنگه چې پوهېږئ د شکلونو لاندیني او پورتني مساحتونه د انتیگرال په واسطه محاسبه کېږي.

آیا کولای شو چې د مخامخ شکل پورتنی مساحت په لاس راوړو.

د هغې تابع انتیگرال چې مشتق یې معین وي او یا په بل عبارت د ریمان مجموعی لیمیټ ته انتیگرال وایي دا($\int$) د انتیگرال علامه ده، د sum د کلیمې یا د ریمان د مجموعې د S توري غزیدلی حالت دی، لکه: $\int f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ چې دلته $f(x)$ تابع او dx د $f(x)$ تابع د انتیگرال متحول نظر x ته دی.

انتیگرالونه عموماً په دوه ډوله دي. معین او غیر معین انتیگرالونه، هغه انتیگرالونه چې په ترتیب سره یې تر څېړنې لاندې نیسو:

I- غیرمعین انتیگرال *Indefinite Integral*

فعالیت

- که د $F(x) = 2x^2 - 1$ تابع وي له دې تابع څخه مشتق ونیسئ.
- ددې تابع له مشتق څخه انتیگرال ونیسئ.
- په لاس راغلی انتیگرال له لومړنی تابع سره پرتله کړئ او ووایئ چې(-1) په نوموړي تابع کې د څه په نامه یادېږي.
- که په پورتني تابع کې (-1) په C ونوموو د $f(x)$ تابع له څه سره مساوي ده؟
- پورتنی فعالیت د $F(x) = x^6 + 1$ تابع لپاره تکرار کړئ او ووایئ چې $f(x)$ له څه سره مساوي ده.

له پورتني فعالیت څخه لاندې تعریف په لاس راځي:

تعریف: که چیرې د $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په تړلی انټروال کې تعریف او $F(x)$ د $f(x)$ یوه لومړنی تابع وي. د $F(x)+C$ تابعگانو سټ په داسې حال کې چې C یو ثابت عدد وي د $f(x)$ تابع غیرمعین انتیگرال په نامه یادېږي او داسې لیکل کېږي: $\int f(x)dx = F(x) + C$

لومړی مثال: $\int x\,dx$ پیداکړئ.

حل: $\int x\,dx = \frac{x^{1+1}}{1+1} + C = \frac{x^2}{2} + C$

دویم مثال: $\int \frac{1}{\sqrt[7]{x^3}}\,dx$ حساب کړئ.

حل: $$\int \frac{1}{\sqrt[7]{x^3}}\,dx = \int x^{-\frac{3}{7}}\,dx = \frac{x^{-\frac{3}{7}+1}}{-\frac{3}{7}+1} + C = \frac{x^{\frac{4}{7}}}{\frac{4}{7}} + C = \frac{7}{4}\sqrt[7]{x^4} + C$$

دریم مثال: $\int x^{\frac{3}{2}}\,dx$ پیداکړئ.

حل: $$\int x^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C = \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + C$$

پوښتني

لاندې انتیګرالونه محاسبه کړئ:

a) $\int \sqrt[5]{x^3}\,dx$

b) $\int \frac{1}{x^4}\,dx$

c) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

d) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt[4]{x^2}}$

e) $\int \sqrt[8]{x^4}\cdot x\,dx$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د غیرمعین انتیګرال خواص

Properties of indefinite integral

تاسې د لیمیټ او مشتق خواص مخکې مطالعه کړي؟ آیا کیدای شي چې ورته خواص په غیر معین انتیګرال کې هم وي؟

$$\left.\begin{array}{l}\int \quad dx \\ \int [f(x) \pm g(x)]\, dx \\ \int [f(x)\cdot g(x)]\, dx \\ \int \dfrac{f(x)}{g(x)} dx \quad , g(x) \neq 0\end{array}\right\} = ?$$

فعالیت

د مشتقاتو د خواصو څخه په کار اخیستنې د لاندې تابعګانو مشتق پیدا کړئ.

$$f(x) = 3x^4$$

$$f(x) = 2x^3 - \frac{1}{x^2}$$

$$f(x) = \sin x + \cos x$$

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایلې په لاس راوړو:

څرنګه چې د تابعګانو د مشتق د پیداکولو لپاره له ځانګړو قوانینو څخه ګټه اخېستل کېږي، غیرمعین انتیګرالونه هم د داسې خواصو لرونکي دي چې هغه پرته له ثبوت څخه قبلوو:

1- که یو ثابت عدد وي، نو لرو چې: $\int \quad dx = \quad \int dx = \quad x + C$

مثال: د $\int 5dx$ انتګرال پیدا کړئ.

حل: $\int 5dx = 5 \int dx = 5x + C$

2- که چیرې $n \neq -1$ وي، نو: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د $\int x^4dx$ **انتیګرال** پیدا کړی.

حل: $\int x^4dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} + C = \frac{1}{5}x^5 + C$

3- که چیرې a یو ثابت عدد او $f(x)$ تابع وي، **نو**:

$$\int a\, f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$$

مثال: د $\int 2x^2\,dx$ **انتیګرال** محاسبه کړئ.

حل: $\int 2x^2dx = 2\int x^2dx = 2\frac{x^3}{3} + C = \frac{2}{3}x^3 + C$

4- که چیرې $f(x)$ او $g(x)$ دوې تابعګانې وي په دې صورت کې د تابعګانو د جمع او تفریق د حاصل انتیګرال مساوی دی په:

$$\int[f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

مثالونه:

$a)\quad \int(2x^2+3)dx = \int 2x^2dx + \int 3dx = \frac{2x^3}{3} + 3x + C$

$b)\quad \int(8-2x)dx = 8\int dx - 2\int xdx = 8x - x^2 + C$

5- که چیرې دتابعګانو ترادف تر انتیګرال لاندې وي، په دی صورت کې د دوی انتیګرال مساوی دی په:0

$$\int[f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + \ldots + \int f_n(x)dx$$

مثال:

$$\int[x^3 - 6x^2 + 9x + 1]dx = \int x^3dx - \int 6x^2dx + \int 9xdx + \int dx$$
$$= \frac{x^4}{4} - \frac{6x^3}{3} + \frac{9x^2}{2} + x + C$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

6- که $f(x)$ او $g(x)$ دوې تابعګانې وي، په دې حالت کې د تابعګانو د ضرب د حاصل انتیګرال مساوي نه دی د انتیګرالونو د ضرب له حاصل سره په جلا توګه، یعنې:

$$\int [f(x)\cdot g(x)]dx \neq \int f(x)dx \cdot \int g(x)dx$$

مثال: که چېرې $f(x)=x+1$ او $g(x)=x-2$ وي، نو:

حل الف: لومړی په تابع ګانو د ضرب عملیه تطبیق کوو او وروسته یې انتیګرال په لاس راوړو:

$$\begin{aligned}\int [f(x)\cdot g(x)]\,dx &= \int [(x+1)(x-2)]dx = \int (x^2-2x+x-2)\,dx\\ &= \int (x^2-x-2)\,dx\\ &= \int x^2dx - \int x\,dx - \int 2\,dx\\ &= \frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x+C\end{aligned}$$

حل ب: اوس د هرې تابع انتیګرال بېل بېل محاسبه کوو او وروسته یې سره ضربوو په لاس راغلې قیمتونه سره پرتله کوو.

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx\cdot\int g(x)\,dx &= \int (x+1)\,dx\cdot\int (x-2)\,dx = (\int x\,dx+\int dx)(=\int x\,dx-\int 2\,dx)\\ &= (\frac{x^2}{2}+x+C)(\frac{x^2}{2}-2x+C) = (\frac{x^2}{2}+x)(\frac{x^2}{2}-2x)+C\\ \Rightarrow\ & \frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x+C \neq (\frac{x^2}{2}+x)(\frac{x^2}{2}-2x)+C\end{aligned}$$

په پایله کې څرګنده شوه، چې نوموړی مساوات حقیقت نه لري.

7- که چېرې $f(x)$ او $g(x)$ دوه تابعګانې وي په دې صورت کې د توابعو د تقسیم د حاصل انتیګرال مساوي نه دی د هرې تابع د انتیګرال له حاصل تقسیم سره، یعنې: $\int \frac{f(x)}{g(x)}dx \neq \frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx}$

مثال: که چېرې $f(x)=x^2+2x$ او $g(x)=x$ وي، نو لرو:

د الف جزء حل: لومړی د تابع ګانو د تقسیم د حاصل انتیګرال په لاس راوړو.

$$\begin{aligned}\int [f(x)\cdot g(x)]\,dx &= \int [(x+1)(x-2)]dx = \int (x^2-2x+x-2)\,dx\\ &= \int (x^2-x-2)\,dx\\ &= \int x^2dx - \int x\,dx - \int 2\,dx\\ &= \frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x+C\end{aligned}$$

د ب جزء حل: اوس د صورت او مخرج د تابعګانو انتيګرالونه بېل بېل په لاس راوړو او وروسته يې سره پرتله کوو.

$$\int f(x)\,dx\cdot\int g(x)\,dx=\int(x+1)\,dx\cdot\int(x-2)\,dx=(\int x\,dx+\int dx)(\int x\,dx-\int 2\,dx)$$
$$=(\frac{x^2}{2}+x+C)(\frac{x^2}{2}-2x+C)=(\frac{x^2}{2}+x)(\frac{x^2}{2}-2x)+C$$
$$\Rightarrow\ \frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x+C\neq(\frac{x^2}{2}+x)(\frac{x^2}{2}-2x)+C$$

په پايله کې څرګنده شوه چې مساوات حقيقت نه لري.

پوښتني

د انتيګرال د خاصيتونو څخه په ګټه اخيستنې سره لاندې انتيګرالونه محاسبه کړئ:

a) $\int -17\,dx=?$

b) $\int\frac{(1+x)^2}{1+x}dx=?$

c) $\int 2x^4dx=?$

d) $\int\frac{1}{x^5}dx=?$

e) $\int(2x^2+4x^3-5x+9)dx=?$

f) $\int(2x+3)^6dx=?$

g) $\int\frac{x^3+2x^2}{x^2}dx=?$

h) $\int(2+x)dx=?$

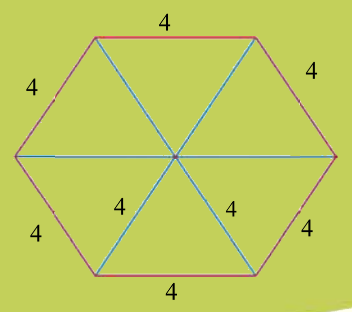
(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

معین انتیگرال

Definite Integral

د شپږ ضلعي دننه مثلثونو د مساحتونو مجموعه پیدا او د شپږ ضلعي له مساحت سره یې پرتله کړئ.



فعالیت

- د $f(x)=2x$ د تابع ګراف د $[2,5]$ په انټروال کې د $n=5$ لپاره رسم کړئ او د ګراف لاندینی مساحت پیدا کړئ
- په شکل کې د ګراف لاندینی مساحت د کومو دوو عددونو ترمنځ پروت دی.

د پورتنی فعالیت پایله داسې بیانوو:

تعریف: که چیرې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وی نو د $f(x)$ تابع د ریمان مجموعې لېمیټ ته کله چې n بې‌نهایت ته نږدی شی او د فرعي انټروالونو (Δx) لوی اوږدوالی صفر ته نږدی شي، د $f(x)$ تابع له $x=a$ څخه تر $x=b$ پورې د معین انتیګرال په نوم یادیږي، یعنې:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x=\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$$

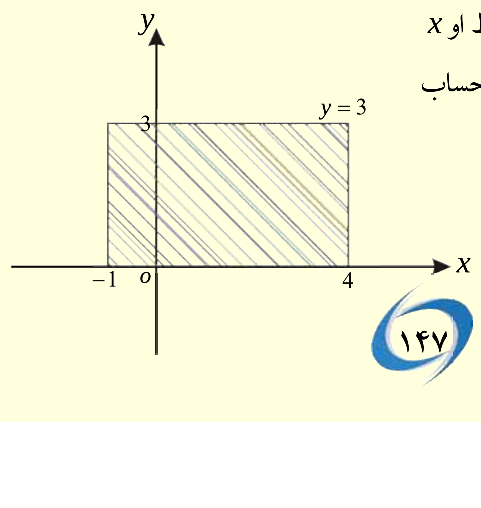
چې a ته د انتیګرال لاندینی سرحد او b ته د انتیګرال پورتنی سرحد وایې.

لومړی مثال: د $\int_1^3 x^2\,dx$ ټاکلي انتیګرال قیمت پیدا کړئ.

حل: لومړي د $F(x)$ لومړنی تابع پیدا کوو او بیا د مطلوب انتیګرال قیمت ټاکو:

$$\int_1^3 x^2dx=[\frac{x^3}{3}]_1^3=\frac{3^3}{3}-\frac{1^3}{3}=\frac{27-1}{3}=\frac{26}{3}$$

دویم مثـال: هغه مساحت چې د $y=3$ خط او x محور ترمنځ په $[-1,4]$ انټروال کې محصور دی حساب کړئ.



حل: د $\int_{-1}^{4} 3\, dx$ معین انتیګرال د یوه مستطیل مساحت رابښيي چې په تېر شکل کې لیدل کېږي.

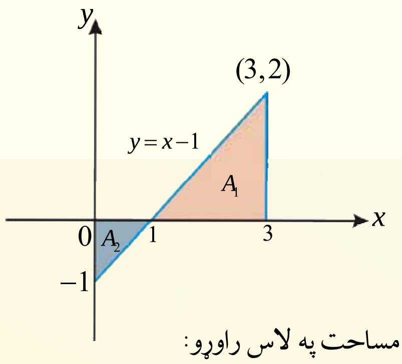
ددې مستطیل مساحت د مستطیل د عرض او طول د ضرب له حاصل سره مساوي دی.

د مستطیل مساحت $= 3[4-(-1)] = 3\cdot 5 = 15$

د انتیګرال څخه په ګټه اخیستنې سره د مستطیل مساحت په لاندې ډول محاسبه کوو.

$$\int_{-1}^{4} 3\, dx = [3x]_{-1}^{4} = 3[4-(-1)] = 15$$

دریم مثال: هغه مساحت چې د $y = x-1$ مستقیم خط او x محور ترمنځ په $[0,3]$ انټروال کې محصور دی په لاس راوړئ.



حل:

له شکل څخه په ګټه اخیستنې سره لومړی د ښي خوا د لوی مثلث مساحت په لاس راوړو:

$$A_1 = \frac{1}{2}(2\cdot 2) = \frac{1}{2}\cdot 4 = 2$$

د کوچنی مثلث مساحت عبارت دی له:

$$A_2 = \frac{1}{2}[1(-1)] = \frac{1}{2}(-1) = -\frac{1}{2}$$

د A_1 او A_2 د مساحتونو مجموعه عبارت ده له:

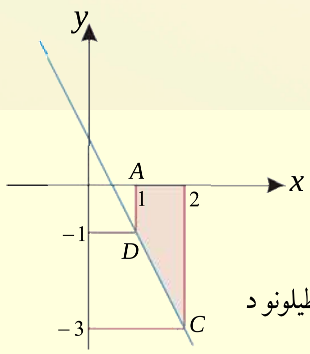
$$A_1 + A_2 = 2 - \frac{1}{2} = 1.5$$

په پایله کې د نوموړي انتیګرال قیمت عبارت دی له:

$$\int_{0}^{3}(x-1)\, dx = [\frac{x^2}{2} - x]_0^3 = [\frac{3^2}{2} - 3] - 0 = \frac{9}{2} - 3 = 1.5$$

پوښتنې

1. د مخامخ شکل څخه په کار اخیستنې سره هغه مساحت چې د $y = -2x+1$ د مستقیم خط او د x د محور ترمنځ محصور دی په لاس راوړئ.



2. د $f(x) = x^2$ تابع د لاندینیو مستطیلونو د مساحت مجموعه او پورتنیو مستطیلونو د مساحت مجموعه په $[0,1]$ انټروال کې د $n = 4$ لپاره په لاس راوړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د معین انتیګرال خواص

Properties of definite integral

آیا کولای شو چې د غیرمعین انتیګرال د ځانګړونو څخه په ګټه اخیستنې سره مخامخ اړیکې پوره کړو.

$$\left.\begin{array}{l}\int_a^b c\,dx \\ \int_a^b [f(x)\pm g(x)]\,dx \\ \int_a^a f(x)\,dx\end{array}\right\} = ?$$

فعالیت

- د $\sum_{=1}^{4} 3^{2}$ مجموعه حساب کړئ.
- د $\int_a^b x\,dx$ د انتیګرال قیمت د $[-1,1]$ په انټروال کې پیدا کړئ.
- د $\int_0^2 (1+3x)\,dx$ ټاکلی انتیګرال محاسبه کړئ.

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

د ځینو انتیګرالونو محاسبه د قیمت په وضع کولو سره امکان لري او ځینې یې امکان نه لري، دې ته اړتیا پیدا کېږي، ترڅو ټاکلي انتیګرال ثبوت کړو.

1. د ثابتې تابع انتیګرال د $[a,b]$ په انټروال کې یعنې $\int_a^b Cdx$ عبارت دی، له:

$$\int_a^b C\,dx = C\int_a^b dx = C[x]_a^b = C(b-a)$$

ثبوت: د $[a,b]$ انټروال په n مساوي برخو یعني $\Delta x_i = \dfrac{b-a}{n}$ وېشو او د هر x_i لپاره د i - ام انټروال څخه لرو: $i = 0,1,2,\ldots,n$ $\qquad f(x_i) = C$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} C\,\Delta x_i = C(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \ldots + \Delta x_n) = C\left(\frac{b-a}{n} + \frac{b-a}{n} + \ldots + \frac{b-a}{n}\right)$$

$$= C(b-a)\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}\right) = C(b-a)\frac{n}{n} = C(b-a) \Rightarrow \int_a^b Cdx = C(b-a)$$

مثال: $\int_3^4 dx$ تاکلی انتیگرال حساب کړئ.

حل: $\int_3^4 dx=[x]_3^4=4-3=1$

2. که د $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انټروال کې انتیګرال منونکی وی او یو ثابت حقیقي عدد وي، نو لرو چې:

$$\int_a^b \; f(x)dx= \; \int_a^b f(x)dx$$

ثبوت: که چیري د $[a,b]$ انټروال د x_i ، $i=1,2,...,n$ په n مساوي برخـو وویـشو نـو د ریمـان د مجموعې او انتیګرال د تعریف له مخې لیکلای شو:

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \; f(x_i)\Delta x=\lim_{n\to\infty} \; \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x= \; \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int_a^b \; f(x)dx= \; \int_a^b f(x)dx$$

مثال: د $\int_{-2}^{2} 4\,dx$ تاکلي انتیګرال محاسبه کړئ.

حل: $\int_{-2}^{2} 4dx=4\int_{-2}^{2} dx=4[x]_{-2}^{2}=4(2-(-2))=4\cdot 4=16$

3. که د $F(x)$ تابع یوه لومړنی تابع د $f(x)$ او په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وي، نو:

$$\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx$$

ثبوت:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x=\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)=-(-F(b)+F(a))$$

$$=-(F(a)-F(b))=-\int_b^a f(x)\,dx \;\Rightarrow\; \int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx$$

مثال: د $\int_2^3 2x\,dx=-\int_3^2 2x\,dx$ انتیګرال مساوات پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: لومړی د کیڼ لوری انتیګرال او وروسته د ښيي خوا انتیګرال محاسبه کوو:

$$\int_2^3 2x\,dx = [\frac{2x^2}{2}]_2^3 = \frac{2(3)^2}{2} - \frac{2(2)^2}{2} = \frac{2(9)}{2} - \frac{2(4)}{2} = \frac{18}{2} - \frac{8}{2} = \frac{18-8}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$\int_3^2 2x\,dx = [\frac{2x^2}{2}]_3^2 = \frac{2(2)^2}{2} - \frac{2(3)^2}{2} = \frac{2(4)}{2} - \frac{2(9)}{2} = \frac{8}{2} - \frac{18}{2} = \frac{8-18}{2} = -\frac{10}{2} = -5$$

د لاسته راغلو قیمتونو په پام کې نیولو سره پایله په لاس راځي:

$$\int_2^3 2x\,dx = -\int_3^2 2x\,dx$$

4- که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وي په هغه صورت کې لرو، چې: $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

ثبوت: **څرنګه چې** $\Delta x = 0$ **دی، نو:**

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \int_a^a f(x)\,dx = F(a) - F(a) = 0$$

$$\Rightarrow \int_a^a f(x)\,dx = 0$$

مثال: د $\int_3^3 3x^2\,dx$ انتیګرال محاسبه کړئ.

حل: $\int_3^3 3x^2 dx = [\frac{3x^3}{3}]_3^3 = [x^3]_3^3 = [3^3 - 3^3] = 27 - 27 = 0$

5- که $f(x)$ او $g(x)$ تابعګانې په $[a\ ,b]$ انټروال کې انتیګرال منونکي وي، نو:

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\ dx$$

ثبوت:

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}[f(x_i) \pm g(x_i)]\ \Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty}[\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x \pm \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\,\Delta x]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x \pm \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} g(x_i)\,\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثالونه:

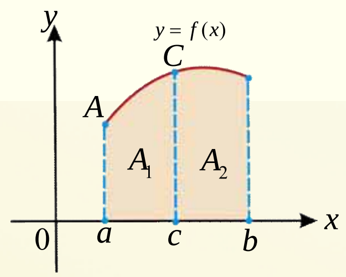
حل:

$$a)\ \int_0^1 (4+3x^2)\,dx=\int_0^1 4\,dx+\int_0^1 3x^2\,dx=4\int_0^1 dx+3\int_0^1 x^2\,dx=4[x]_0^1+3\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=4+1=5$$

$$b)\ \int_0^3 (x^2-1)\,dx=\int_0^3 x^2dx-\int_0^3 dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3-[x]_0^3=\frac{27}{3}-3=\frac{27-9}{3}=\frac{18}{3}=6$$

6. که چیرې د $f(x)$ تابع په یوه تړلي انټروال کې چې د b ،a او c ټکي یې شامل دي انتیګرال منونکي وي،

نو: $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$



ثبوت: دلته د $[a,b]$ انټروال په دوو انټروالونو د $[a,c]$ او $[c,b]$ تقسیموو، وروسته د $f(x)$ تابع انتیګرال په نوموړي انټروالونو کې په پام کې نیسو.

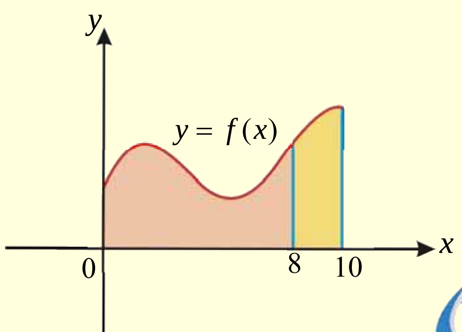
د انتیګرال اصلي مفهوم ته په پام $A=\int_a^b f(x)dx$ په حقیقت کې د هغې سطحې مساحت دی چې د $f(x)$ د تابع د ګراف او x د محور ترمنځ د $[a,b]$ په انټروال کې محصوره ده. په داسې حال کې چې د هغه سطحې مساحتونه چې د $f(x)$ ګراف او د x د محور ترمنځ د $[a,c]$ او $[c,b]$ په انټروالونو کې محصوره ده او په شکل کې واضح لیدل کېږي عبارت ده له:

$$A_2=\int_c^b f(x)\,dx\ ،\ A_1=\int_a^c f(x)\,dx$$

په پایله کې ویلای شو چې: $A=A_1+A_2\Rightarrow\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$

مثال: که چیرې $\int_0^{10} f(x)dx=17$ او $\int_0^8 f(x)dx=12$ وي، نو د $\int_8^{10} f(x)dx$ انتیګرال قیمت محاسبه کړئ.

حل:



$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$$

$$\int_0^{10} f(x)\,dx=\int_0^8 f(x)\,dx+\int_8^{10} f(x)\,dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس د $\int_{8}^{10} f(x)\,dx$ انتیگرال قیمت په لاس راوړو:

$$\int_{8}^{10} f(x)\,dx = \int_{0}^{10} f(x)\,dx - \int_{0}^{8} f(x)\,dx = 17 - 12 = 5$$

7. که چیرې د $f(x) \le g(x)$ تابعګانې په $[a,b]$ انټروال کې انتیګرال منومنکي وي؛ نو لرو:

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx \le \int_{a}^{b} g(x)\,dx$$

ثبوت:

$$\int_{a}^{b} g(x)\,dx - \int_{a}^{b} f(x)\,dx = \int_{a}^{b} [g(x) - f(x)]dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [g(x) - f(x)]\,\Delta x$$

نو څرنګه $g(x) - f(x) \ge 0$ او $\Delta x \ge 0$ دی نو د سلسلې هر حد مثبت دی، نو د هغې لېمیټ هم منفي نه دی یعني:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [g(x_i) - f(x_i)]\,\Delta x \ge 0 \Rightarrow \int_{a}^{b} [g(x) - f(x)]\,dx \ge 0$$

$$\int_{a}^{b} g(x)\,dx - \int_{a}^{b} f(x)\,dx \ge 0 \Rightarrow \int_{a}^{b} g(x)\,dx \ge \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

مثــــال : کــه چیــرې $f(x) = 1 - \frac{x^2}{4}$ او $g(x) = 1 + \frac{x^2}{2}$ وي، نــو د $x > 1$ لپــاره وښایاســـت چـــې $\int_{a}^{b} f(x)dx \le \int_{a}^{b} g(x)dx$ دی.

حل:

$$\int_{a}^{b} (1 - \frac{x^2}{4})\,dx \le \int_{a}^{b} (1 + \frac{x^2}{2})dx$$

$$\int_{a}^{b} 1\,dx - \int_{a}^{b} \frac{x^2}{4}\,dx \le \int_{a}^{b} 1\,dx + \int_{a}^{b} \frac{x^2}{2}\,dx$$

$$[x]_a^b - \frac{1}{12}[x^3]_a^b \le [x]_a^b + \frac{1}{6}[x^3]_a^b$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوهېږو چې $(b-a)>0$ دی، نو:

$$(b-a)-\frac{1}{12}(b^3-a^3)\le(b-a)+\frac{1}{6}(b^3-a^3) \qquad /\div(b-a)$$

$$1-\frac{1}{12}(b^3-a^3)\le 1+\frac{1}{6}(b^3-a^3)$$

$$-\frac{1}{12}(b^3-a^3)\le+\frac{1}{6}(b^3-a^3) \qquad /\div(b^3-a^3)$$

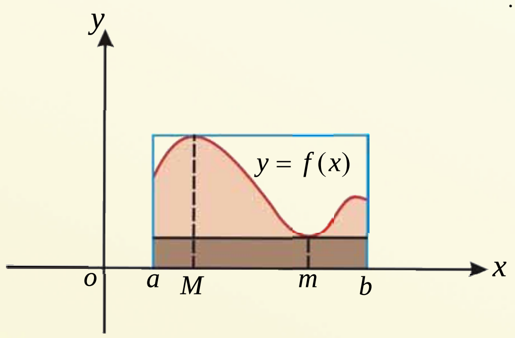
$$-\frac{1}{12}<\frac{1}{6} \Rightarrow -1<2$$

8. که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي او M, m قیمتونه په ترتیب سره د تابع مطلق اعظمي او مطلق اصغري قیمتونه په نوموړی انټروال کې وی، نو $m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$

ثبوت: څرنګه چې $m\le f(x)\le M$ دی نو لرو چې:

$$\int_a^b m\,dx\le\int_a^b f(x)\,dx\le\int_a^b M\,dx$$

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)\,dx\le M(b-a)$$



چې دا وروستنی اړیکه د انټیګرال د تخمیني قضیې په نامه یادېږي.

مثال: $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ انټیګرال په تخمیني توګه حساب کړئ.

حل: څرنګه چې د $f(x)=e^{-x^2}$ تابع په $[0,1]$ انټروال کې متمادي ده او $M=f(0)=e^0=1$ مطلق اعظمي او $m=f(1)=e^{-1}$ مطلق اصغري دی، نو لرو چې:

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)\,dx\le M(b-a)$$

$$e^{-1}(1-0)\le\int_0^1 e^{-x^2}dx\le 1(1-0)$$

$$e^{-1}\le\int_0^1 e^{-x^2}dx\le 1$$

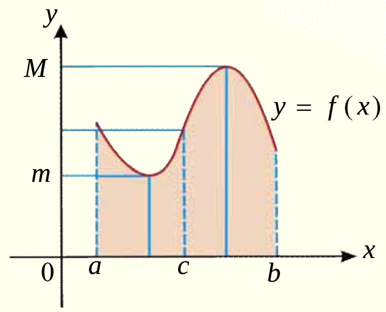
$$e^{-1}=\frac{1}{e}\approx 0,3679\Rightarrow 0.3679\le\int_0^1 e^{-x^2}dx\le 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پایله کې د انتیگرال تخمیني قیمت د 1 او 0.3679 قیمتونو ترمنځ قرار لري.

9. که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وي، نو د c یو حقیقي عدد شته چې: $a \le c \le b$ دی، نو:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$



ثبوت: د $a<b$ لپاره m او M قیمتونه په ترتیب د تابع مطلق اصغري او اعظمي قیمتونه د $[a,b]$ په انټروال کې وي، لکه مخامخ شکل د انتیگرال د تخمیني قضیې څخه په کار اخیستنې د $c\in[a,b]$ لپاره لرو چې:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a) \quad \Rightarrow \quad m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le M$$

فرضوو $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx =$ وي، نو $\le M$ $m \le$ دی او د هر c حقیقي عدد لپاره، $a \le c \le b$

لرو چې: $f(c) =$ نو: $f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$

چې دا وروستی اړیکه د متوسط قیمت د قضیې په نامه یادېږي څرنګه چې $f(c)$ د تابع متوسط قیمت په $[a,b]$ انټروال کې دی.

مثال: د $f(x)=x^2$ تابع په $[1,4]$ انټروال کې په پام کې ونیسئ آیا کولای شئ

$\int_1^4 x^2\,dx = [\frac{x^3}{3}]_1^4 = [\frac{64}{3}-\frac{1}{3}] = [\frac{64-1}{3}] = \frac{63}{3} = 21$ دی.

حل: څرنګه چې $f(x)=x^2$ تابع ده اوس که د x په ځای د c قیمت په تابع کې وضع کړو نو: $f(c)=c^2$ سره کېږي چې دلته د متوسط قیمت د قضیې د فورمول څخه د c قیمت داسې په لاس راځي:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس په پورتنی رابطه کې یې قیمت ایږدو، لرو چې:

$$\int_1^4 x^2\,dx = c^2(4-1)$$

$$21 = 3c^2 \Rightarrow c^2 = \frac{21}{3} \Rightarrow c^2 = 7 \Rightarrow c = \sqrt{7}$$

$$= f(c) \quad , \quad f(c) = c^2 = (\sqrt{7})^2 = 7 \Rightarrow f(c) = 7 \quad , \quad = 7$$

ښکاره شوه چې د تابع یو قیمت مساوي په او $1 < \sqrt{7} < 4$ دی.

له مخکې څخه پوهېږو چې د مستطیل مساحت د طول او عرض د اوږدوالي د ضرب سره برابر دی نو د متوسط قیمت په فورمول کې $f(c)$ طول او $b-a$ عرض دی نو د منحني لاندې مساحت په $[1,4]$ انټروال کې مساوي له هغه مستطیل سره دی چې اضلاع یې 7 او 3 دی.

پوښتنې

1. لاندې معین انتیګرالونه محاسبه کړئ.

$a)\ \int_{-1}^{1}(x^3+2)\,dx = ?$

$b)\ \int_{2}^{5}7x\,dx = ?$

$c)\ \int_{-2}^{4}(-x)\,dx = ?$

$d)\ \int_{-1}^{3}(2|x|-3x)\,dx = ?$

$e)\ \int_{-2}^{3}3x\,dx$

$f)\ \int_{-1}^{2}(x^3-\frac{1}{2}x^4)\,dx = ?$

$g)\ \int_{-4}^{4}(2x^2-\frac{1}{8}x^4)\,dx = ?$

$h)\ \int_{1}^{3}\sqrt{x}\,dx$

2. د $\int_{-1}^{4} f(x)\,dx$ انتیګرال قیمت د $[-1,4]$ په انټروال کې داسې پیدا کړئ، چې $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 5$ او $\int_{1}^{4} f(x)dx = -2$ وي.

3. د $f(x) = x$ تابع په $[0,2]$ انټروال کې په نظر کې ونیسئ او د c قیمت په لاس راوړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

10- د انتیګرال او مشتق اساسي قضیې

یو موټر په $72\frac{m}{\sec}$ چټکتیا سره په حرکت کې دی، دریور برک ته فشار ورکوي او موټر وروسته له 6 ثانیو ودرېږي په دې وخت کې وهل شوې فاصله پیدا کړئ.

$$S(t)=v_0\cdot t$$

- د مشتق د تعریف څخه په ګټې اخیستنې سره د $f(x)=x^2$ د تابع مشتق د $h=0$ په ټکي کې پیدا کړئ.
- د په لاس راغلې تابع انتیګرال په $[0,1]$ انټروال کې محاسبه کړئ.
- د په لاس راغلو دواړو حالتونو قیمتونه سره پرتله کړئ.

له پورتني فعالیت څخه په لاس راځي، چې:

د انتیګرال او مشتق تر منځ یوه منطقي اړیکه شته چې له دې اړیکې څخه په کار اخیستنې سره کولای شو، د انتیګرال اصلي او اساسي قضیې په لاندې ډول ثبوت کړو:

1- د انتیګرال او مشتق لومړی اساسي قضیه:

که چیرې د $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انټروال کې متمادي وي او x په دې انټروال کې شامل وي، لرو چې:

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

خرنګه چې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې مشتق منونکې ده، نو د هر $x\in[a,b]$ لپاره $F'(x)=f(x)$ دی.

ثبوت: څرنګه چې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي ده، نو د هر $x\in[a,b]$ لپاره د $f(x)$ تابع په $[a,x]$ انټروال کې متمادي ده په پایله کې د $f(x)$ تابع په دې انټروال کې انتیګرال منوونکې هم ده.

اوس د $F(x)$ تابع مشتق د تعریف مطابق لیکو او بیا د x متحول ته د h په اندازه تزاید ورکوو، لکه په لاندې ډول:

$$F'(x)=f(x)$$

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(a)+F(a)-F(x)}{h}$$

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(a)-(F(x)-F(a))}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{F(x)\Big|_a^{x+h}-F(x)\Big|_a^{x}}{h}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس د $f(x)$ تابع په $f(t)$ عوض کوو:

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(t)\big|_a^{x+h}-F(t)\big|_a^{x}}{h}$$

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{x+h} f(t)\,dt-\int_a^{x} f(t)\,dt}{h}$$

نظر دریم خاصیت ته لرو چې: $\int_a^b f(t)\,dt=-\int_b^a f(t)\,dt$

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{x+h} f(t)\,dt-\int_a^{x} f(t)\,dt}{h}$$

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{a} f(t)\,dt+\int_a^{x+h} f(t)\,dt}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h}$$

د متوسط قیمت د قضیې څخه $f(c)=\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt$ چې c د x او $x+h$ تر منځ واقع دی، نو کله چې h صفر ته تقرب وکړي c ، x ته تقرب کوي، همدارنګه د f تابع له متمادیت څخه لرو:

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt=\lim_{c\to x} f(c)=f(x)$$

په پایله کې: $F'(x)=f(x)$

مثال: د $f(x)=\int_2^{x^2+1}\frac{1}{t^2+1}$ مشتق پیدا کړئ.

حل:

$$F(x)=\int_a^{x} f(t)\,dt \text{ یا } F(x)=\int_a^{g(x)} f(t)\,dt$$

$$u=g(x)=x^2+1$$

$$f(t)=\frac{1}{t^2+1}$$

د زنځیري قاعدې له مخې لرو:

$$F'(x)=f(g(x))\cdot g'(x)$$

$$F'(x)=\frac{1}{(x^2+1)^2+1}\cdot(x^2+1)'=\frac{1}{(x^2+1)^2+1}\cdot 2x$$

$$F'(x)=\frac{2x}{(x^2+1)^2+1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- د انتيګرال او مشتق دويمه اساسي قضيه:

که چيرې $F(x)$ د $f(x)$ تابع لومړنی تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وي، په دې صورت کې لرو چې:

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

ثبـــوت: د مخکينـــی قـــضيې څخـــه پـــوهېږو چـــې کـــه $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ دی لـــه دې ځايـــه د هر $x \in [a,b]$ لپاره $F'(x) = f(x)$ نو د دې دوو مقدارونو خلاف يو ثابت مقدار شته چې:

$$f(x) - F(x) = \quad \Rightarrow f(x) = F(x) +$$

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

$$F'(x) = f(x)$$

$$\int_a^x f(t)dt = f(x) = F(x) +$$

$$\int_a^x f(t)\ dt - F(x) =$$

که د x په ځای په پورتنی رابطه کې a وضع کړو، نو:

$$\int_a^a f(t)\ dt - F(a) = \qquad , \qquad 0 - F(a) = \qquad \Rightarrow \qquad = -F(a)$$

که د قيمت په لومړی رابطه کې وضع کړو، نو: $\int_a^x f(t)dt - F(x) = -F(a)$

که د x په ځای په دې رابطه کې b وضع شي، نو: $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

چې اخيری رابطـه پـه $\int_a^b f(t)\,dt = [F(x)]_a^b$ پـه شـکل ښـودل کېـږي دغـه وروسـتی اړيکـه د لـومړنی تـابع او $\int_a^b f(t)\,dt$ انتيګـــرال تـــرمنځ اړيکـــه ښـــيي، چـــې د نيوټن "لايبنز" رابطې په نوم هم يادېږي.

يادونه:

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + c$$

$$\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\cot x + c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د $\int_0^1 x^2dx$ انتيګرال حاصل پيدا کړئ.

حل: $$\int_0^1 x^2dx = F(1)-F(0) = [\frac{x^3}{3}]_0^1 = \frac{1}{3}\cdot 1^3 - \frac{1}{3}\cdot 0^3 = \frac{1}{3}$$

پوښتنې

1. **لاندې مشتقات پيدا کړئ.**

$a)\ F(t) = \int_{\sin t}^{\cos t} \frac{1}{4-x^2}dx$

$b)\ F(t) = \int_{0}^{\cos t} \frac{1}{4-x^2}dx$

$c)\ F(t) = \int_{-\pi}^{t} \frac{\cos y}{1+y^2}dy$

$d)\ F(x) = \int_{1}^{x} \frac{\sin t}{t}dt$

2. **که په** $f(t)=t$ **تابع کې** $F(0)=2$ **وي، د** $F(b)$ مقدار په $0, 0.2, 0.4, \ldots, 1$ ټکو کې پيدا کړئ.

3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$ پيدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

11- په تعویضي طریقې سره انتیګرال نیونه

_ آیا کولای شئ چې مخامخ انتیګرال د نامعین انتیګرال له خواصو څخه په کار اخېستنې سره حل کړئ.

_ که نه شی کولای، نو د جذر لاندې افاده په یوه متحول سره عوض کړئ او بیا هغه حساب کړئ او ووایئ چې په انتیګرال کې د وضع کولو دا طریقه په څه نوم یادېږي.

$$\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx$$

فعالیت

- د $\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx$ انتیګرال کې د جذر لاندې افاده په u سره عوض کړئ.
- د u مشتق ونیسي او د dx قیمت پیدا کړئ.
- څرنګه چې نوموړی انتیګرال یو معین انتیګرال دی، نو د $u = 2x+1$ په معادله کې د $x = 0$ او $x = 4$ قیمتونه وضع او د انتیګرال سرحدونه د u له جنسه په لاس راوړی، وروسته د انتیګرال قیمت محاسبه کړئ.

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایلې ته رسېږو:

که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې مشتق منونکی وي، $u = g(x)$ او $F'(x) = f(x)$ سره تعویض شي، څرنګه چې $du = g'(x)dx$ دی، له زنځیري قاعدې څخه لیکلای شو:

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

لومړی مثال: د $\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2}$ انتیګرال قیمت پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: د قوس دننه افاده په u عوض کوو:

$$u = 3-5x \quad , \quad du = -5\,dx \qquad dx = -\frac{du}{5}$$

$$\begin{cases} x=1 \\ u=3-5x \Rightarrow u=3-5\cdot 1=-2 \Rightarrow u=-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2 \\ u=3-5x \Rightarrow u=3-5\cdot 2=3-10 \Rightarrow u=-7 \end{cases}$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2} = \int_{-2}^{-7} \frac{1}{u^2}(-\frac{1}{5})\,du = -\frac{1}{5}\int_{-2}^{-7}\frac{du}{u^2} = -\frac{1}{5}\left[-\frac{1}{u}\right]_{-2}^{-7} = \left[\frac{1}{5u}\right]_{-2}^{-7} = \frac{1}{5}\left[-\frac{1}{7}+\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{14}$$

دویم مثال: د $\int_0^1 x^2(1+2x^3)^5\,dx$ انتیګرال حساب کړئ.

حل: د قوس دننه افاده په u عوض کوو.

$$u = 1+2x^3 \quad , \quad du = 6x^2\,dx \Rightarrow x^2 dx = \frac{1}{6}du$$

$$\begin{cases} x=0 \\ u=1+2x^3 \Rightarrow u=1+2\cdot 0=1 \Rightarrow u=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=1 \\ u=1+2x^3 \Rightarrow u=1+2\cdot 1=3 \Rightarrow u=3 \end{cases}$$

$$\int_0^1 x^2(1+2x^3)^5\,dx = \int_1^3 u^5 \frac{1}{6}\cdot du = \frac{1}{6}\int_1^3 u^5 du = \frac{1}{6}[\frac{u^6}{6}]_1^3 = \frac{1}{6}[\frac{3^6}{6}-\frac{1}{6}]$$

$$= \frac{1}{6}[\frac{729}{6}-\frac{1}{6}] = \frac{1}{6}[\frac{728}{6}]$$

$$= \frac{728}{36} = \frac{182}{9} = 20.\overline{2}$$

فعالیت

- د $\int x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$ انتیګرال کې د جذر لاندې افاده د u په متحول سره تعویض کړئ.
- له u څخه مشتق ونیسئ او په لاس راغلی قیمت په لومړني انتیګرال کې وضع او هغه حساب کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- د پورته څخه د $F(x)+C$ په لاس راغلي تابع څخه مشتق ونیسئ او د هغې څخه لومړنی تابع په لاس راوړئ.

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

که د $F(u)$ تابع د $f(u)$ لومړنی تابع وي، د $u=g(x)$ د متحول په تعویض سره یوه بله تابع چې مستقل متحول یې x او متمادي مشتق ولري له زنځیري قاعدې څخه په کاراخیستنې سره لرو:

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

لومړی مثال: $\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$ انتیګرال حساب کړئ.

حل: د جذر لاندې افاده په u سره عوض کوو.

$$u = 1-4x^2 \ , \ du = -8x\,dx$$

$$xdx = -\frac{1}{8}du$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{u}}(-\frac{1}{8})\,du = -\frac{1}{8}\int \frac{1}{\sqrt{u}}\,du = -\frac{1}{8}\int u^{-\frac{1}{2}}\,du = -\frac{1}{8}\,(\frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1})+C$$

$$= -\frac{1}{8}(\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}})+C = -\frac{1}{8}(\frac{\sqrt{u}}{\frac{1}{2}})+C = -\frac{1}{8}(2\sqrt{u})+C = -\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}+C$$

دویم مثال: $\int x^3\cos(x^4+2)dx$ حساب کړئ.

حل: که چیرې $u = x^4+2$ وضع کړو په لاس راځي:

$$u = x^4+2 \ , \ du = 4x^3dx \ , \ x^3dx = \frac{1}{4}du$$

$$\int x^3\cos(x^4+2)\,dx = \int \cos u \cdot \frac{1}{4}du$$

$$= \frac{1}{4}\int \cos u\,du$$

$$= \frac{1}{4}\sin u + C$$

$$= \frac{1}{4}\sin(x^4+2)+C$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

لاندې انتیګرالونه د تعویض له لارې محاسبه کړئ.

a) $\int \cos 3x\, dx = ?$

b) $\int_1^2 x\sqrt{x-1}\; dx = ?$

c) $\int_0^7 \sqrt{4+3x}\; dx = ?$

d) $\int 2\sqrt[5]{(1-4x)^2}\, dx = ?$

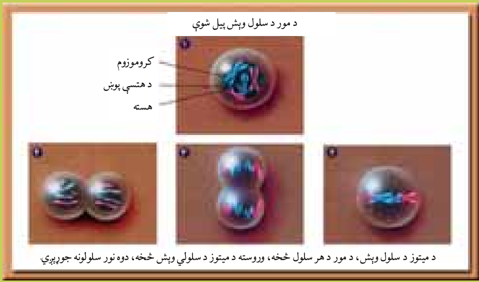
e) $\int 2x(x^2+3)^4\, dx = ?$

f) $\int_0^5 \frac{x\,dx}{x^2+10} = ?$

g) $\int \sqrt{\cos x}\; \sin x\; dx = ?$

(c) ketabton.com: The Digital Library

12- قسمي انتيگرالونه



د حجروي وېش په وخت کې يوه حجره په دوو يا څو حجرو وېشل کېږي. ايا کولای شئ دا لاره(روش) په نورو شيانو کې لکه: تيږه، شگه او نورو کې ووينو که څواب هو وي، نو دا لاره د څه په نامه يادېږي.

فعالیت

- د $\int \frac{xdx}{x^2+1}$ انتيگرال په تعويضي طريقه حل کړئ.
- د $\int_{-1}^{1} 3x^2\sqrt{x^3+1}dx$ انتيگرال قيمت په تعويضي طريقه پيدا کړئ.
- **آيا کولای شی چې د** $\int x^2 \sin xdx$ انتيگرال په تعويضي طريقه وشمېرئ.

له پورتني فعاليت څخه دې پايلې ته رسېږو:

د $\int f(x)g(x)dx$ په انتيگرال کې $f(x)$ او $g(x)$ دوي مشتق منونکی تابعگانې دي چې يوه له بلې سره د ضرب ور وي يا نه وي، خو د انتيگرال محاسبه يې اسانه کار نه دی، که چيرې $f(x)=u$ او $g(x)=v$ وضع کړو، د ضرب حاصل مشتق يې مساوي په: $(u\cdot v)'=u'v+v'u$ دی.

له پورتنی رابطې څخه $v'u$ په لاس راوړو اوله اطراف څخه انتيگرال نيسو:

$$v'\cdot u=(u\cdot v)'-u'\cdot v$$

$$\int v'\cdot u\ dx=u\cdot v-\int u'\cdot v\ dx \quad \text{يا} \quad \int udv=u\cdot v-\int vdu$$

چې پورتنی رابطې ته د غيرمعين انتيگرال فورمول په قسمي طريقه وايي.

که د u او v تابعگانې په $[a,b]$ انتروال کې تعريف شوي وي، لاندی فورمول د معين انتيگرال فورمول په قسمي لاره(طريقه) بلل کېږي.

$$\int_a^b v'u\,dx=u\cdot v\Big|_a^b-\int_a^b vu'\,dx \quad \text{يا} \quad \int_a^b udv=u\cdot v\Big|_a^b-\int_a^b vdu$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د $\int x\sin x\,dx$ انتیگرال پیداکړئ.

حل:

$$u = x \quad , \quad du = dx$$
$$dv = \sin x\,dx \quad , \quad v = -\cos x$$
$$\int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du$$
$$\int x\sin x\,dx = x(-\cos x) - \int -\cos x\,dx$$
$$= -x\cos x + \sin x + C$$

دویم مثال: د $\int_0^1 -xe^x\,dx$ انتیگرال حساب کړئ.

حل:

$$u = -x \quad , \quad du = -dx \quad , \quad -du = dx$$
$$dv = e^x dx \quad , \quad v = e^x$$
$$\int_a^b v'\cdot u\,dx = u\cdot v\,\Big|_a^b - \int_a^b v\cdot u'\,dx$$
$$\int_0^1 -xe^x\,dx = [-xe^x]_0^1 + \int_0^1 e^x dx$$
$$= -e^1 + 0\cdot e^0 + [e^x]_0^1$$
$$= -e^1 + e^1 - e^0 \quad = -e^0$$
$$= -1$$

یادونه:
$$\int e^x\,dx = e^x + c$$

پوښتنې

لاندې انتیگرالونه حساب کړئ.

a) $\int \theta\cos\theta\,d\theta = ?$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x\,dx = ?$

c) $\int x^5\cos(x^3)\,dx = ?$

d) $\int_0^1 xe^x\,dx = ?$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د خېرکي مهم ټکي

د ریمان مجموعه: فرضوو د $y = f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي او تعریف شوې وي او د ناحیې مساحت چې د x محور او د $y = f(x)$ منحني ترمنځ واقع دی چې په هندسي شکلونو نه شي بدلېدلای، محاسبه کړو.

د $[a,b]$ انټروال چې په n مستطیلو نو تقسیموو خرنګه چې د هر مستطیل عرض د $(\Delta x = \frac{b-a}{n})$ رابطې څخه په لاس راځي او د مستطیلونو طول عبارت دی د تابع قیمت په هم هغه ټکي کې، دا فاصلې په لاندې ډول دي:

او د مستطیلونو انټروالونه د n, ... $i = 1,2,3,$ لپاره په لاندې ډول دي:

$$x_0 = a \quad , \quad x_1 = a+\Delta x \quad , \quad x_2 = a+2\Delta x, \ \dots \ , x_i = a+i\Delta x, \ \dots \ , x_n = b$$

$$[x_0,x_1] \ , \ [x_1,x_2] \ , \ [x_2,x_3], \ \dots \ ,[x_{i-1},x_i], \ \dots \ ,[x_{n-1},x_n]$$

که د لاندینیو مستطیلونو مساحت په $f(x_{i-1})\Delta x$ او د پورتنیو مستطیلونو مساحت په $f(x_i)\Delta x$ وښودل شي او د محصور شوي سطحې مساحت په A وښیو، نو لرو چې:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x < A < \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

نامعین انټیګرالونه:که چیرې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې تعریف او $F(x)$ د $f(x)$ یوه لومړنۍ تابع وي. د $F(x)+C$ توابعو سټ چې c یو ثابت عدد وي د غیرمعین انټګرال په نامه یادېږي او داسې لیکل کېږي: $\int f(x)dx = F(x)+C$

د نامعین انټیګرالونو خواص(ځانګړتیاوې):

$$\int dx = \int dx = x+C$$

$$\int a\, f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$$

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$

$$\int [f_1(x)+f_2(x)+\dots+f_n(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + \dots + \int f_n(x)dx$$

$$\int [f(x)\cdot g(x)]\,dx \neq \int f(x)dx \cdot \int g(x)dx$$

$$\int \frac{f(x)}{g(x)}dx \neq \frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx} \quad , \quad g(x)\neq 0$$

معین انتیگرال: د $f(x)$ تابع د ریمان مجموعي لېمیټ ته په $[a,b]$ انټروال کې کله چې n بې‌نهایت ته نږدې شي د Δx فرعي انټروالونو اوږدوالی صفر ته نږدی کېږي، چې د $f(x)$ تابع ټاکلی انتیګرال د $x=a$ څخه تر $x=b$ پورې په نوم یادېږي.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b)-F(a)$$

a ته د انتیګرال لاندینی سرحد او b ته د انتیګرال پورتنی سرحد وایي.

د معین انتیګرال خواص(ځانګرتیاوې):

$$\int_a^b C\,dx = C(b-a)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

$$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

$$f(x)\le g(x) \;\Rightarrow\; \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

$$m(b-a)\le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a) \;\Rightarrow\; f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د انتیگرال او مشتق لومړی اساسي قضیه:

که چیرې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وي او x په دې انټروال کې شامل وي، لرو چې:

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

څرنګه چې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې د مشتق وړ ده، نو د هر $x\in[a,b]$ لپاره $F'(x)=f(x)$ دی.

د انتیګرال او مشتق دویمه اساسي قضیه:

- که چیرې $F(x)$ تابع د $f(x)$ لومړنی تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وي، په دې صورت کې لرو چې:

$$\int_a^b f(t)\,dt=F(b)-F(a)$$

- که $F(u)$ د $f(u)$ لومړنی تابع وي او د $u=g(x)$ متحول سره تعویض شي چې مستقل متحول یې x او متمادي مشتق ولري. د زنځیری قاعدې څخه په کار اخیستنې سره لرو:

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx=\int f(u)\,du$$

- که $F(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې د مشتق منونکي وي، او $u=g(x)$ همدارنګه $F'(x)=f(x)$ سره تعویض شي، څرنګه چې $du=g'(x)dx$ دی، له زنځیری قاعدې څخه لیکلای شو:

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx=\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

- د $\int f(x)g(x)dx$ انتیګرال کې $f(x)$ او $g(x)$ دوې مشتق منونکي تابعګانې وي چې په خپل منځ کې قابل د ضرب وي او یا نه وي، خو د انتیګرال محاسبه یې آسانه کار نه دی، که چیرې $f(x)=u$ او $g(x)=v$ سره عوض شي، د هغوی د حاصل ضرب مشتق عبارت دی له:

$$(u\cdot v)'=u'\cdot v+v'\cdot u$$

له پورتني اړيکې څخه $v'\cdot u$ په لاس راوړو او له دواړو خواوو څخه انتیګرال نیسو:

$$\int v'\cdot u\ dx = u\cdot v - \int u'\cdot v\ dx \quad \text{یا} \quad \int udv = u\cdot v - \int vdu$$

چې اخیرۍ اړیکې ته د غیر معین انتیګرال فورمول په قسمي طریقه وایي.

- که د u او v تابګانې په $[a,b]$ انټروال کې تعریف شوی وي لاندې فورمول، د معین انتیګرال فورمول په قسمي لاره(طریقه) بلل کیږي:

$$\int_a^b v'u\,dx = u\cdot v\,\Big|_a^b - \int_a^b vu'\,dx \quad \text{یا} \quad \int_a^b udv = u\cdot v\,\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي پوښتنې

1- د لاندې ټاکلو انتیګرالونو قیمت پیدا کړئ.

$a)\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+x^2}dx$ $\quad b)\ \int_{-4}^{4}[2x^2 - \frac{1}{8}x^4]dx$ $\quad c)\ \int_2^4 \frac{1}{x^2}dx$

$d)\ \int_0^3 4dx$ $\quad e)\ \int_1^3 \sqrt{x}\,dx$ $\quad f)\ \int_1^2 (x^2 - x^5)\,dx$

$g)\ \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos^2 x}dx$ $\quad h)\ \int_{-2}^{0}[\frac{x^3}{4} + \frac{x^2}{3}]dx$ $\quad i)\ \int_2^3 (x^3 + x^2)dx$

$)\ \int_{-2}^{2}[x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x - 4]dx$ $\quad)\ \int_0^{\pi} \sin x dx$ $\quad l)\ \int_1^2 x^2\,dx$

2- لاندې غیر معین انتګرالونه حل کړئ.

$a)\ \int[\sin x + 8x^3]dx$ $\quad b)\ \int[x^5 + \frac{4}{x^4} + x^3 + \frac{2}{x^2} + x]dx$

$c)\ \int x(1-2x^2)\,dx$ $\quad d)\ \int \sin x\,dx$

$e)\ \int \frac{\sin 2x}{2\sin x}dx$ $\quad f)\ \int \frac{(1-x)^2}{1-x}dx$

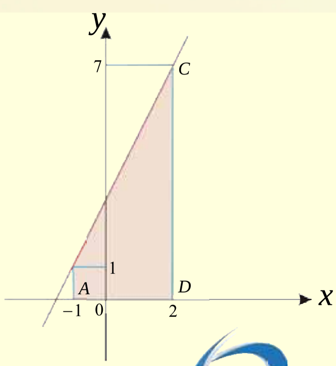
$g)\ \int \sqrt[5]{x^3}\,dx$ $\quad h)\ \int \frac{3x^2+8x}{x}dx$

$i)\ \int(2x^2+3)\,dx$ $\quad)\ \int \frac{1}{\sqrt{x^3+2}}dx$

$)\ \int \frac{(1+x)(1-x)}{x-x^3}dx$ $\quad l)\ \int(3x^2+4x-1)\,dx$

3- د لاندې محصور شوي سطحې مساحت د شکل له مخې پیدا کړئ.

$\int_{-1}^{2}(2x+3)\,dx$



(c) ketabton.com: The Digital Library

4- لاندي انتيګرالونه د تعويضي طريقې په مرسته پيدا کړئ.

$a)\ \int 3\cos(2x+1)\,dx$

$b)\ \int \sqrt{3x+5}\,dx$

$c)\ \int \frac{2\,dx}{x+2}$

$d)\ \int (3x+6)^3\,dx$

$e)\ \int x^3\sqrt{x^4+2}\,dx$

$f)\ \int (x^3+2)^2 3x^2 dx$

$g)\ \int_0^2 \frac{dt}{(3-2t)^2}$

$h)\ \int_0^2 x^2\cdot\sqrt{9-x^3}\,dx$

$i)\ \int \frac{1}{(x-10)^7}dx$

$)\ \int_0^1 (1-x^2)^3 x dx$

$)\ \int (4-3x)^7 dx$

$l)\ \int \frac{x^2dx}{\sqrt[4]{x^3+2}}$

5- لاندي انتيګرالونه د قسمي طريقې په مرسته پيدا کړئ.

$a)\ \int x\cos x\,dx$

$b)\ \int_0^{\pi} \sin x\cos x\,dx$

$c)\ \int e^x\cdot\cos x\,dx$

$d)\ \int_0^{2\pi} x\cos 3x\,dx$

$e)\ \int xe^{-x}dx$

$f)\ \int x\sqrt{1+x}\,dx$

$g)\ \int x^2\cdot e^{2x}dx$

$h)\ \int e^{2x}\sin 3x\,dx$

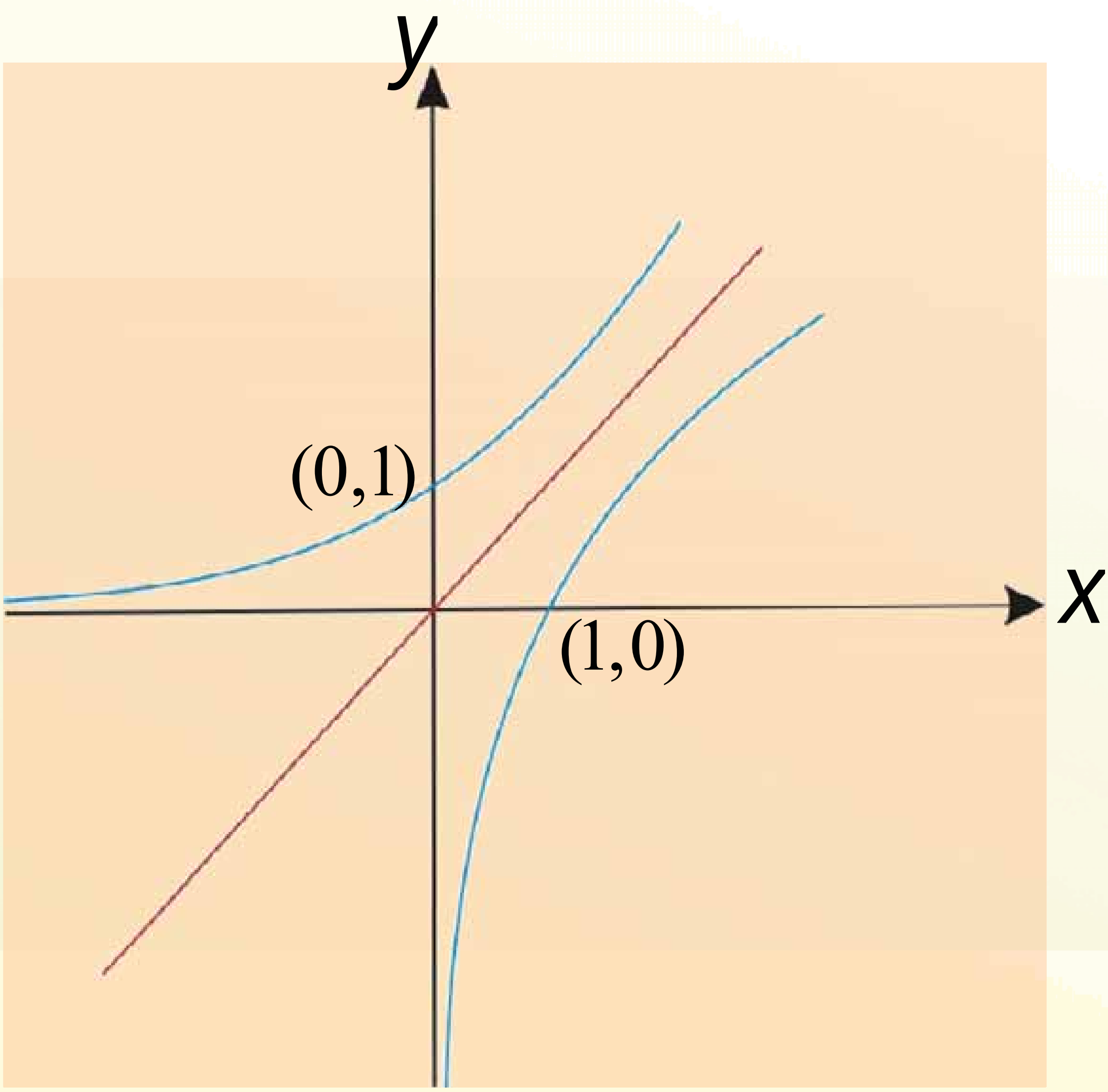
$i)\ \int x^2\cdot e^{-x}\,dx$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم څپرکی

د لوګاریتمي او اکسپوننشیل تابعګانو مشتق او انتیګرال

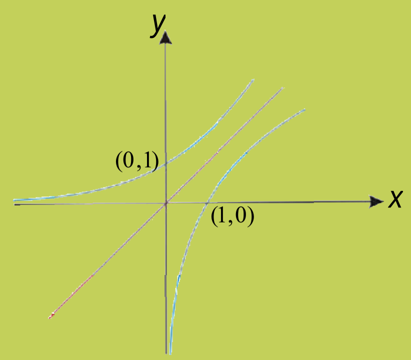
(c) ketabton.com: The Digital Library



(c) ketabton.com: The Digital Library

د لوګاریتمي او اکسپوننشیل تابعګانو مشتق

مخامخ شکل د څه ډول تابعګانو ګراف راښیي، نومونه يې واخلئ.



فعالیت

- لوګاریتم تعریف او خواص يې ولیکئ.
- لوګاریتمي او اکسپوننشیل تابعګانې یوه له بلې سره څه اړیکې لري.
- که $\log_b x$ یوه متصله تابع وي، نو $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ له کوم عدد سره مساوي ده.
- د $y = f(x)$ د تابع له دواړو خواوو څخه طبیعي لوګاریتم ونیسئ، اړیکه يې ولیکئ.

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

په عمومي ډول که $f(x)=\ln x$ او $g(x)=a^x$ وي؛ نو $g'(x)=a^x \ln a$ او $f'(x)=\frac{1}{x}$ دی.

ثبوت:

-1

$$y = g(x) = a^x$$

$$\ln y = \ln a^x = x \ln a$$

د مساوات له دواړو خواوو څخه نظر x ته مشتق نیسو:

$$\frac{y'}{y} = x' \ln a + x(\ln a)'$$

$$\frac{y'}{y} = \ln a + 0$$

$$\frac{1}{y} y' = \ln a$$

$$y' = y \ln a \quad \Rightarrow \quad g'(x) = a^x \ln a$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

-2

$$f(x)=\ln x$$

$$(\ln x)'=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln\frac{x+h}{x}}{h}$$

$$(\ln x)'=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln(\frac{x+h}{x})=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln(1+\frac{h}{x})\ =\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\frac{x}{h}\ln(1+\frac{h}{x})$$

$$=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\ln(1+\frac{h}{x})^{\frac{x}{h}}$$

که $u=\frac{x}{h}$ وضع شي نو $\frac{1}{u}=\frac{h}{x}$ دی څرنګه چې $h\to 0$ تقرب وکړي نو $u\to\infty$ ته نږدې کېږي، لیکلای شو چې:

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}\lim_{u\to\infty}\ln(1+\frac{1}{u})^{u}=\frac{1}{x}\ln\lim_{u\to\infty}(1+\frac{1}{u})^{u}$$

پوهېږو چې $\lim_{u\to\infty}(1+\frac{1}{u})^{u}=e$ دی، نو: $(\ln x)'=\frac{1}{x}\ln e=\frac{1}{x}$

قضیه

1. که د $f(x)=\log_a x$ تابع مشتق منوونکی وي؛ نو مشتق یې $f'(x)=\frac{1}{x}\log_a e$
2. که $f(x)=\log_a g(x)$ او $g(x)$ مشتق منوونکی وي، نو $(\log_a g(x))'=\frac{g'(x)}{g(x)}\log_a e$

ثبوت:

-1

$$f(x)=\log_a x\quad\Rightarrow\ f'(x)=\frac{1}{x}\log_a e$$

$$f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_a\frac{x+h}{x}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_a(1+\frac{h}{x})=\lim_{h\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{h}\log_a(1+\frac{h}{x})=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\log_a(1+\frac{h}{x})^{\frac{x}{h}}$$

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a\lim_{h\to 0}(1+\frac{h}{x})^{\frac{x}{h}}$$

اوس که $\frac{x}{h}=u$ وضع شي نو $\frac{1}{u}=\frac{h}{x}$ کېږي، که $h\to 0$ صفر ته تقرب وکړي، نو $u\to\infty$ کوي، یعني:

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a\lim_{u\to\infty}(1+\frac{1}{u})^{u}=\frac{1}{x}\log_a e$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- غواړو ثبوت کړو چې: $(\log_a g(x))' = \frac{g'(x)}{g(x)}\log_a e$

د زنځيري قاعدې له مخې:

$$f'(x) = (\log_a g(x))' = (\log_a g(x))' \cdot g'(x) = \frac{1}{g(x)}\log_a e \cdot g'(x)$$

$$= \frac{g'(x)}{g(x)}\log_a e$$

که $a = e$ وضع شي؛ نو لرو: $(\log_a g(x))' = (\ln g(x))' = \frac{g'(x)}{g(x)}$

پايله:

1- د Exponential تابعګانو مشتق د لوګاريتم په مرسته کولای شو په اسانی سره په لاس راوړو.

که $y = e^x$ وي ددې تابع مشتق $y' = e^x$ دی ځکه که د $y = e^x$ رابطې څخه طبيعي لوګاريتم ونيسو، په لاس راځي:

$$y = e^x \Rightarrow \ln y = x\ln e = x$$

$$(\ln y)' = (x)' \Rightarrow \frac{y'}{y} = 1 \Rightarrow y' = y \cdot 1 = e^x$$

2- که $y = e^u$ او u تابع د x وي، نو: $y' = u'e^u$

3- که $y = a^u$ کله چې $a > 0$ او $a \neq 1$ وي، نو: $y' = u'a^u \ln a$

4- د لوګاريتمي تابعګانو د مشتق پيداکولو لپاره په بېلابېلو قاعدو سره له دې اړيکې څخه ګټه اخلو:

$$y = \log_a u \Rightarrow y' = (\log_a u)' = \frac{u'}{u}\log_a e$$

$$y' = \frac{u'}{u}\log_a e = \frac{u'}{u} \cdot \frac{1}{\log_e a} \Rightarrow y' = \frac{(\ln u)'}{\ln a} = \frac{u'}{u\ln a}$$

لومړی مثال: د $f(x) = \ln(x^2+1)$ تابع مشتق پيداکړئ.

حل: که $g(x) = x^2+1$ وضع کړو، نو لرو:

$$g(x) = x^2+1$$

$$g'(x) = 2x$$

$$(\ln g(x))' = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

$$(\ln(x^2+1))' = \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} = \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x \Rightarrow f'(x) = (\ln(x^2+1))' = \frac{2x}{x^2+1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال: د $f(x)=\ln(x^2-5x+4)$ تابع مشتق پیدا کړئ.

حل:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\ln(x^2-5x+4) \\ g(x)=x^2-5x+4 \Rightarrow g'(x)=2x-5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (\ln g(x))'=\dfrac{g'(x)}{g(x)} \\ (\ln(x^2-5x+4))'=\dfrac{g'(x)}{g(x)}=\dfrac{2x-5}{x^2-5x+4} \end{array}$$

دریم مثال: د $f(x)=\log_a\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}$ او $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}$ تابعگانو مشتق پیدا کړئ.

حل: پوهیږو چې $\log_a\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}=\log_a(\dfrac{x^2+1}{x^2-1})^{\frac{1}{2}}$ دی، نو لیکلای شو، چې:

$$\log_a\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}=\log_a(\frac{x^2+1}{x^2-1})^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log_a\frac{x^2+1}{x^2-1}=\frac{1}{2}(\log_a(x^2+1)-\log_a(x^2-1))$$

$$(\log_a\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}})'=\frac{1}{2}(\log_a(x^2+1)-\log_a(x^2-1))'$$

$$=\frac{1}{2}[\frac{(x^2+1)'}{(x^2+1)}\log_a e-\frac{(x^2-1)'}{(x^2-1)}\log_a e]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{2x}{x^2+1}\log_a e-\frac{2x}{x^2-1}\log_a e\right]=\frac{1}{2}\cdot 2x\log_a e\left[\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2-1}\right]$$

$$=\frac{-2x}{x^4-1}\log_a e$$

حل: پوهیږو چې $\ln\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}=\ln(\dfrac{x^2+1}{x^2-1})^{\frac{1}{2}}$ دی، نو لیکلای شو، چې:

$$\ln\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}=\ln(\frac{x^2+1}{x^2-1})^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(\ln(x^2+1)-\ln(x^2-1))$$

$$(\ln\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}})'=\frac{1}{2}[\ln(x^2+1)-\ln(x^2-1)]'=\frac{1}{2}[(\ln(x^2+1))'-(\ln(x^2-1))']$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{2x}{x^2+1}-\frac{2x}{x^2-1})=\frac{-2x}{x^4-1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

څلورم مثال: د $y = e^{(x^2+1)}$ تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: پوهېږو چې که $y = e^u$ وي نو $y' = u'e^u$

$$y = e^{(x^2+1)} \Rightarrow y' = (x^2+1)' \cdot e^{x^2+1} = 2x \cdot e^{x^2+1}$$

پنځم مثال: د $y = \sqrt[x]{2}$ تابع مشتق په لاس راوړئ.

حل: پوهېږو چې که چیرې $y = a^u$ وي نو $y' = u'a^u \ln a$ سره دی، نو:

$$y = \sqrt[x]{2} = (2)^{\frac{1}{x}} \Rightarrow y' = (\frac{1}{x})' \cdot 2^{\frac{1}{x}} \ln 2 = \frac{-1}{x^2} \cdot 2^{\frac{1}{x}} \cdot \ln 2$$

شپږم مثال: د $y = x^{2x}$ تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: که د معادلې له دواړو خواوو څخه طبیعي لوګاریتم ونیسو، په لاس راځي چې:

$$y = x^{2x}$$
$$\ln y = \ln x^{2x}$$
$$\ln y = 2x \ln x$$
$$(\ln y)' = (2x \ln x)' \Rightarrow \frac{y'}{y} = 2\ln x + 2x \cdot \frac{1}{x}$$
$$y' = 2(\ln x + 1) \cdot y \Rightarrow y' = 2(\ln x + 1) \cdot x^{2x}$$

اووم مثال: د $y = 10^x$ تابع مشتق حساب کړئ.

حل: پوهېږو چې $y = a^x \Rightarrow y' = a^x \ln a$ دی، نو:

$$y = 10^x$$
$$y' = 10^x \cdot \ln 10$$

اتم مثال: د $y = e^{3x}$ تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: که $u = 3x$ وضع شي، نو: $u'(x) = 3$

$$y = e^u$$
$$y' = e^u \cdot u' = e^{3x} \cdot 3$$
$$y' = 3e^{3x}$$

نهم مثال: د لاندې تابعګانو مشتق پیدا کړئ.

1) $y = \log(x^4 + 1)$ 2) $y = \log_3(\log_2 x)$ 3) $y = \log_{x^2-1} x^2 + 1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: پوهېږو چې د لوګارتمي توابعو مشتق په مختلفو قاعدو سره د لاندي قضيې څخه په ګټه اخيستنې سره په لاس راوړو:

$$y=\log_a u$$

$$y'=(\log_a u)'=\frac{u'}{u}\log_a e=\frac{u'}{u\log_e a}=\frac{u'}{u\ln a}$$

1) $y=\log(x^4+1) \Rightarrow y'=\dfrac{4x^3}{(x^4+1)\ln 10}$

2) $y=\log_3(\log_2 x) \Rightarrow y'=\dfrac{(\log_2 x)'}{\ln 3\log_2 x}=\dfrac{\frac{1}{x\ln 2}}{\ln 3\log_2 x}=\dfrac{1}{(\ln 2)(\ln 3)x\log_2 x}$

$$=\frac{1}{\ln 2\cdot\ln 3\cdot x\cdot\frac{\log_e x}{\log_e 2}}=\frac{1}{\ln 2\cdot\ln 3\cdot x\cdot\frac{\ln x}{\ln 2}}=\frac{1}{\ln 3\, x\ln x}$$

3) $y=\log_{x^2-1} x^2+1=\dfrac{\log_e(x^2+1)}{\log_e(x^2-1)}=\dfrac{\ln(x^2+1)}{\ln(x^2-1)}$

پوهېږو چې $y'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2} \Rightarrow y=\dfrac{u}{v}$ دی؛ نو لرو:

$$y'=\frac{\frac{2x}{x^2+1}\cdot\ln(x^2-1)-\frac{2x}{x^2-1}\ln(x^2+1)}{\left[\ln(x^2-1)\right]^2}$$

پوښتنې

د لاندې توابعو مشتق پیدا کړئ:

a) $f(x)=\ln\sin 3x$

b) $f(x)=\ln\sqrt{3x^2+7}$

c) $f(x)=\ln(5x^2-6x+5)$

d) $f(x)=\log_{10} 3x^2$

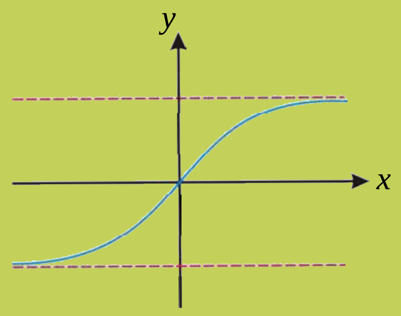
e) $f(x)=y=x^x$

f) $y=\dfrac{(x+1)^2(\sqrt{x}-1)}{(x+4)^3e^x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د معکوسو تابعګانو مشتق

مخامخ شکل د څه ډول تابع ګراف راښيي؟



کـه چيـري f او g يـوه د بلـې دوې معکوسـې تابعګـانې وي، يعنـې $y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$ وي، نـو:

$\frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{dy}{dx}$ يا $y'_x = \frac{1}{x'_y}$ دی، ځکه چې د تابع او ضمني تابعګانو له مشتق څخه ليکلای شو:

$$\left.\begin{array}{l} y = f(x) \\ x = g(y) \end{array}\right\} \Rightarrow y'_x \cdot x'_y = y'_y \quad \Rightarrow y'_x \cdot x'_y = 1 \quad \Rightarrow y'_x = \frac{1}{x'_y}$$

مثال: د $y = a^x$ تابع مشتق د هغې د معکوسې تابع په مرسته پيدا کړئ.

حل:

$$y = a^x \quad \Rightarrow x = \log_a y$$

$$\Rightarrow y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\log_a y)'} = \frac{1}{\frac{1}{y}\log_a e} = \frac{1}{\frac{1}{y}}\log_e a = y\log_e a$$

$$y' = a^x \ln a$$

د مثلثاتي معکوسو تابعګانو مشتق

د مثلثاتي معکوسو تابعګانو مشتق د لاندې اړيکو په مرسته لاسته راوړو:

1) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 2) $(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

3) $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$ 4) $(arc\cot x)' = \frac{-1}{1+x^2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ثبوت:

1) $y = arc\sin x \quad \Leftrightarrow \quad x = \sin y$

$(arc\sin x)' = ?$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}$$

$$\Rightarrow (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

2) $y = arc\cos x \quad \Leftrightarrow \quad x = \cos y$

$(arc\cos x)' = ?$

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\cos y)'} = \frac{1}{-\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}$$

$$\Rightarrow (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

3) $y = arc\tan x \Leftrightarrow x = \tan y$

$$\Rightarrow (arc\tan x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y$$

$$= \frac{\cos^2 y}{1} = \frac{\cos^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y}$$

دکسر صورت او مخرج په $\cos^2 y$ ویشو:

$$(arc\tan x)' = \frac{\cos^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y} = \frac{1}{\tan^2 y + 1} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

4) $y = arc\cot x \Leftrightarrow x = \cot y$

$(arc\cot x)' = ?$

$$(arc\cot x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\cot y)'} = \frac{1}{\frac{-1}{\sin^2 y}}$$

$$= -\sin^2 y = \frac{-\sin^2 y}{1} = \frac{-\sin^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y}$$

دکسر صورت او مخرج په $\sin^2 y$ وېشو:

$$= -\frac{\sin^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y} = \frac{-1}{1+\cot^2 y} = -\frac{1}{1+x^2}$$

لومړی مثال: د $y = (\arctan x)^5$ تابع مشتق پیدا کړئ.

$$y' = 5(\arctan x)^4 (\arctan x)' = 5(\arctan x)^4 \frac{1}{1+x^2}$$

دویم مثال: د $y = \log_5(\arctan x)$ تابع مشتق پیدا کړئ.

$$y' = [\log_5(\arctan x)]' = \log_5 u = \frac{u'}{u \ln a}$$

$$= \frac{\frac{1}{1+x^2}}{\arctan x \ln 5} = \frac{1}{(1+x^2)(\arctan x \ln 5)}$$

دریم مثال: د $y = arc\tan e^x$ تابع د مشتق مقدار د $x = 0$ ټکي کې پیدا کړئ.

$$y' = [arc\ \tan e^x]' = (arc\tan u)' = \frac{u'}{1+u^2} = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$$

$$y'(0) = \frac{e^0}{1+e^0} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1. د لاندې تابعګانو مشتق پیدا کړئ.

1) $y = (arc\sin x)^3$

2) $y = \log_2(arc\cos x)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

قسمي کسرونه

د یو کسر تجزیه کول په قسمي کسرونو:

پـوهېږو چـې د $\frac{2}{x+1}$ او $\frac{1}{x^2-1}$ د جمعې حاصل $\frac{2x-1}{x^2-1}$ دی، آیا کولای شئ چې له دې کسر څخه د $\frac{2}{x+1}$ او $\frac{1}{x^2-1}$ کسرونه لاسته راوړئ.

$$\frac{2}{x+1}+\frac{1}{x^2-1}=\frac{2x-1}{x^2-1}$$

فعالیت

- د $\frac{7}{x+1}$, $\frac{5}{x-2}$ او $\frac{2}{x-5}$ کسرونه سره جمع کړئ.
- د پورته کسرونو د جمعې حاصل، بېرته په لومړنیو کسرونو واړوئ.
- واقعي کسرونه څه ډول کسرونه دي، تعریف یې کړئ.

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

تعریف: د یوه واقعي کسر هغه کوچنی کسرونه چې د جمعې د عواملو په شکل لیکل شوی وي، که چېرې هغوی سره جمع کړو، راکړل شوی واقعي کسر په لاس راشي، نو دا جمع شوي لومړني کسرونه د قسمي کسرونو په نامه یادېږي.

د یوه واقعي کسر د تجزیه کولو لپاره لاندې حالتونه په پام کې نیسو:

لومړی حالت:

که چېرې د $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ ناطق کسر مخرج ($P_n(x)$) له خطي بېلابېلو ضربي عواملو څخه جوړ شوی وي او تکرار نه وي په لاندې بڼه بدلېدلای شي:

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{}{x-x_2}+\frac{C}{x-x_3}+\cdots+\frac{}{x-x_n}$$

(A, C, ... حقیقي عددونه دي)

لومړی مثال: د $\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}$ کسر په قسمي کسرونو تجزیه کړئ.

حل: د مخرج پولینوم په لومړنیو ضربي عواملو تجزیه کوو، نو په لاس راځي:

$$x^3-4x^2-7x+10=(x-5)(x-1)(x+2)$$

لیدل کېږي، چې نوموړی کسر له دریو قسمي کسرونو څخه جوړ شوی دی، صورتونه یې A, C, ټاکو:

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{A}{x-5}+\frac{\ }{x-1}+\frac{C}{x+2}$$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{A(x-1)(x+2)+\quad(x-5)(x+2)+C(x-1)(x-5)}{(x-5)(x-1)(x+2)}$$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{Ax^2+Ax-2A+\quad x^2-3\quad x-10\quad+Cx^2-6Cx+5C}{(x-5)(x-1)(x+2)}$$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{(A+\quad+C)x^2+(A-3\quad-6C)x+(-2A-10\quad+5C)}{(x-5)(x-1)(x+2)}$$

لیدل کېږي، چې د دواړو خواوو د کسرونو مخرجونه سره برابر دي، نو باید صورتونه هم سره برابر وي، نو د مطابقت د خواصو(د ورته حدونو ضریبونه سره مساوي وي) څخه په ګټه اخستنې سره لیکو:

$$\begin{cases}A+\quad+C=4\\A-3\quad-6C=-1\\-2A-10\quad+5C=-39\end{cases}$$

د پورته سیستم له حل څخه وروسته $A=2$, $\quad=3$ او $C=-1$ په لاس راځي، نو:

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{2}{x-5}+\frac{3}{x-1}-\frac{1}{x+2}$$

دویم مثال: د $\frac{3x^3-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8}$ کسر په قسمي کسرونو تجزیه کړئ.

حل: لومړی نوموړی کسر په واقعي کسر بدلوو او بیا پورتنی طریقه پرې تطبیقوو:

$$\frac{3x^3-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8}=3x+\frac{4x-1}{x^2-2x-8}\Rightarrow\frac{4x-1}{x^2-2x-8}=\frac{A}{x-4}+\frac{\ }{x+2}$$

$$=\frac{A(x+2)+\quad(x-4)}{(x-4)(x+2)}=\frac{(A+\quad)x+(2A-4\quad)}{x^2-2x-8}$$

$$\left.\begin{matrix}A+\quad=4\\2A-4\quad=-1\end{matrix}\right\}\Rightarrow A=\frac{5}{2}\quad,\qquad=\frac{3}{2}$$

$$\frac{3x^2-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8}=3x+\frac{5}{2(x-4)}+\frac{3}{2(x+2)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم حالت:

که د کسر د مخرج ضربي عوامل لومړی درجه پولینوم وي چې ځینې یې تکرار راغلي وي، یعنې که د $x-x_0$ عامل n ځلې په مخرج کې تکرار شوی وي، نو لیکلای شو؛ چې:

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)}=\frac{A}{x-x_0}+\frac{\quad}{(x-x_0)^2}+\cdots+\frac{\quad}{(x-x_0)^n}$$

لومړی مثال: د $\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}$ واقعي کسر په قسمي کسرونو تجزیه کړئ:

حل: د مخرج د پولینوم ضربي عوامل په لاس راوړو:

$$x^3-4x^2+5x-2=(x-1)(x-2)(x-1)$$

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{3x^2-6x+2}{(x-2)(x-1)^2}=\frac{A}{(x-2)}+\frac{\quad}{(x-1)}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{A(x-1)^2+\quad(x-2)(x-1)+C(x-2)}{(x-2)(x-1)^2}$$

$$=\frac{(A+\quad)x^2+(-2A-3\quad+C)x+(A+2\quad-2C)}{(x-2)(x-1)^2}$$

$$\left.\begin{array}{l}A+\quad=3\\-2A-3\quad+C=-6\\A+2\quad-2C=2\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{array}{l}A=2\\\quad=1\\C=1\end{array}$$

$$\Rightarrow\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

دریم حالت:

که د مخرج ضربي عوامل دریمه درجه پولینوم چې د تجزیې وړ نه وي او تکرار هم نه وي راغلی، نو د $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ واقعي پولینوم د یو قسمي کسر $\frac{Ax+\quad}{ax^2+bx+c}$ بڼه لري.

لومړی مثال: د $\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}$ کسر په قسمي کسرونو تجزیه کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: د مخرج پولینوم ضربي عوامل عبارت دي له:

$x^3+3x^2+6x+4=(x+1)(x^2+2x+4)$

څرنگه چې د x^2+2x+4 درې جمله يي د حقيقي عددونو په سټ کې حل نه لري، نو په دې ساحه کې د تجزيې وړ نه ده له دې امله ليکو:

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{Ax+\quad}{x^2+2x+4}+\frac{C}{x+1}=\frac{(Ax+\quad)(x+1)+C(x^2+2x+4)}{(x^2+2x+4)(x+1)}$$

$$=\frac{(A+C)x^2+(A+\quad+2C)x+(\quad+4C)}{(x^2+2x+4)(x+1)}$$

$$\left.\begin{array}{l}A+C=5\\A+\quad+2C=8\\\quad+4C=9\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{array}{l}A=3\\\quad=1\\C=2\end{array}\Rightarrow\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{3x+1}{x^2+2x+4}+\frac{2}{x+1}$$

پوښتني

لاندې کسرونه په قسمي کسرونو تجزيه کړئ.

-1

a) $\frac{-x^2+2x-12}{x^3+2x^2+6x+5}$ b) $\frac{4x^2-3x+8}{x^3-2x+4}$ c) $\frac{2x^4-8x^3+7x^2-3x+4}{x^2-9x+3}$

-2

a) $\frac{1}{x^4(x+1)}$ b) $\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}$ c) $\frac{x^4+1}{x^2(x-1)}$

d) $\frac{3x^2+5x+10}{x^3+2x^2-4x-8}$ e) $\frac{3x^2-18x+36}{x^3-6x^2+9x}$

-3

a) $\frac{3x+7}{(x^2+x+1)(x^2-4)}$ b) $\frac{x^2+3x+4}{x^4-2x^2+1}$

c) $\frac{x^2+13x+10}{x^3-5x^2}$ d) $\frac{x^5}{x^4-1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اکسپوننشل تابعګانو انتيګرالونه

مخامخ اړيکې سره پرتله کړئ.

$$\log_a b = x$$

$$a^x = b$$

فعاليت

- د $f(x) = a^x$ تابع څه ډول تابع ده، نوم يې واخلئ.
- د لوګاريتمي تابع يوه بېلګه وليکئ.
- د $\log_a x = C$ اړيکه په اکسپوننشيل ډول وليکئ.

له پورتني فعاليت څخه ليکلای شو چې:

د $f(x) = e^x$ طبيعي اکسپوننشيل تابع لپاره لرو $\int e^x dx = e^x + C$ نو په عمومي ډول

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} \quad , \ a \neq 1 \quad , \ a \in IR^+$$

ثبوت:

$$\int a^x dx$$

$$u = 1 \ \Rightarrow \ du = 0 \cdot dx$$

$$dv = a^x \ \Rightarrow \ v = \frac{a^x}{\ln a}$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} - \int \frac{a^x}{\ln a} \cdot 0 \cdot dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د $f(x) = 2^{x-3}$ اکسپوننشیل تابع انتیگرال غواړو پیدا کړو:

د توان له قانون څخه لرو:

$$2^{x-3} = \frac{2^x}{2^3} = \frac{1}{8}2^x$$

$$\int 2^{x-3}dx = \int \frac{1}{8}2^x dx = \frac{1}{8}\int 2^x dx$$

$$\frac{1}{8}\int 2^x dx = \frac{1}{8}\cdot\frac{2^x}{\ln 2} + C$$

دویم مثال: دلاندې اکسپوننشیل تابعګانو انتیګرالونه پیدا کړئ.

1) $\int 3^{x+1}\,dx = ?$ 2) $\int 6^{x-1}\,dx = ?$

حل:

1) $\int 3^{x+1}\,dx = ?$

$$3^{x+1} = 3^x \cdot 3$$

$$\int 3^x \cdot 3\,dx = 3\int 3^x\,dx = 3\cdot\frac{3^x}{\ln 3} + C$$

2) $\int 6^{x-1}\,dx = ?$

$$6^{x-1} = \frac{6^x}{6} = \frac{1}{6}\cdot 6^x$$

$$\int \frac{1}{6}6^x\,dx = \frac{1}{6}\int 6^x\,dx = \frac{1}{6}\cdot\frac{6^x}{\ln 6} + C$$

پوښتنې

د لاندې اکسپوننشیل تابعګانو انتیګرالونه محاسبه کړئ.

a) $\int 3^{x-1}dx$ b) $\int 2^{-x}dx$ c) $\int a^{x+b}dx$

d) $\int \frac{1}{a^x}dx$ e) $\int 2^x\cdot 3^x dx$ f) $\int \frac{2^x}{3^x}dx$

g) $\int \frac{4^{x+3}}{2^x}dx$ h) $\int \frac{5^x+3^x}{2^x}dx$ i) $\int (1+2^x)dx$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لوګاریتمي تابعګانو انتیګرال

ونښيئ چې د تابع په کوم حالت کې نزولي او په کوم حالت کې صعودي ده.

$$y = a^x$$

$$\int a^x dx = ?$$

فعالیت

- لوګاریتم په څو ډوله دی، د هر ډول عمومي رابطه ولیکئ.
- د $x = a^y$ او $y = \log_a x$ معادلې یو له بل سره څه اړیکه لري.
- د $x = b^y$ او $y = \log_b x$ تابعګانو ګراف رسم کړئ.
- آیا کولای شو چې د لوګاریتمي تابعګانو انتیګرال ونیسو؟

د پورتني فعالیت څخه پایله داسې بیانوو:

که $(x \in IR^+)$ $f(x) = \ln x$ وي د طبیعي لوګاریتم د تابع لپاره لیکلای شو: $\int \ln dx = x \cdot \ln x - x + C$

که $(x, a \in IR^+, a \neq 1)$ $f(x) = \log_a x$ وي د معمولي لوګاریتم تابع لپاره لیکلای شو:

$$\int \log_a x\,dx = x \log_a \frac{x}{e}$$

ثبوت:

1- که $a = e$ وضع شي، نو:

$$\int \log_a x\,dx = x \log_a \frac{x}{e} + C$$

$$\int \log_e x\,dx = \int \ln x dx = x \log_e \frac{x}{e} = x(\log_e x - \log_e e)$$

$$\int \ln x\,dx = x \ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

-2

$$\int \log_a x\,dx = x\log_a \frac{x}{e} + C$$

$$u = \log_a x \ , \quad du = \frac{1}{x}\log_a e\,dx$$

$$dv = dx \ , \quad v = x$$

$$\int \log_a x\,dx = x\log_a x - \int x\frac{1}{x}\log_a e\,dx$$

$$= x\log_a x - \log_a e\int dx$$

$$= x\log_a x - x\log_a e = x(\log_a x - \log_a e) = x\log_a \frac{x}{e} + C$$

$$\int \log_a x\,dx = x\ \log_a \frac{x}{e} + C$$

مثال: د $\int \ln 3x dx$ غیرمعین انتیگرال غواړو پیدا کړو:

حل:

$$\int \ln 3x dx = \int (\ln 3 + \ln x)dx = \int \ln 3\,dx + \int \ln x\,dx$$

$$= x\ln 3 + x\ln x - x$$

$$= x(\ln 3 + \ln x) - x = x(\ln 3x - 1)$$

یادونه:

(I) د تعویض Substitution له لارې کولای شو د غیرمعین انتیگرال حل پیدا کړو.

لومړی مثال: لاندې انتیگرالونه پیدا کړئ.

حل:

$$a)\quad I = \int \frac{1}{2}e^{-2x-3}dx$$

$$-2x - 3 = u, \qquad -2 = \frac{du}{dx} \quad , \quad dx = -\frac{1}{2}du$$

$$I = \int \frac{1}{2}e^{u}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)du = -\frac{1}{4}\int e^{u}du = -\frac{1}{4}e^{u} + C = -\frac{1}{4}e^{-2x-3} + C$$

$$b)\quad I = \int \frac{2dx}{x+2}$$

$$x + 2 = u, \qquad 1 = \frac{du}{dx} \qquad dx = du$$

$$I = \int \frac{2du}{u} = 2\int \frac{du}{u} = 2\ln|u| + C = 2\ln|x+2| + C$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال: د $f(x)=e^{2x}$ تابع انتیگرال ونیسئ:

حل:

$$f(x)=e^{2x} \Rightarrow \int f(x)dx=\int e^{2x}dx=?$$

$$u=2x \Rightarrow du=2dx$$

$$dx=\frac{du}{2}$$

$$f(x)=e^{2x} \Rightarrow \int f(x)dx=\int e^{u}\cdot\frac{du}{2}=\frac{1}{2}\int e^{u}\,du$$

$$\int e^{2x}dx=\frac{e^{u}}{2}+C=\frac{e^{2x}}{2}+C=\frac{1}{2}e^{2x}+C$$

آزمايښت: $F(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+C \Rightarrow F'(x)=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot 2=e^{2x}=f(x)$

دریم مثال: د $f(x)=x\cdot\ln x^{2}$ انتیگرال حساب کړئ.

حل:

$$f(x)=x\cdot\ln x^{2} \Rightarrow \int f(x)dx=\int(x\cdot\ln x^{2})dx=?$$

$$u=x^{2}$$

$$du=2x\,dx \Rightarrow dx=\frac{1}{2}du$$

$$\int f(x)\,dx=\int x\cdot\ln u\cdot\frac{1}{2x}du=\frac{1}{2}\int\ln u\,du=\frac{1}{2}[u\cdot\ln u-u+C]=\frac{1}{2}u\cdot\ln u-\frac{1}{2}u+C$$

$$=\frac{1}{2}x^{2}\cdot\ln x^{2}-\frac{1}{2}x^{2}+C$$

(II) معین انتیگرالونه هم د بدلون(تعویض) له لارې حل کیږي.

لومړی مثال: د $\int_{-1}^{1}e^{2x}\,dx$ انتیگرال پیدا کړئ.

$$f(x)=e^{2x} \Rightarrow \int_{-1}^{1}e^{2x}\,dx$$

$$u=2x \Rightarrow du=2\,dx \Rightarrow dx=\frac{1}{2}du$$

$$\left.\begin{array}{l} x=-1,\ u=2x \Rightarrow u=2(-1)=-2 \\ x=1,\ u=2x \Rightarrow u=2(1)=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \int_{-1}^{1}e^{2x}\,dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}e^{u}\,du=\frac{1}{2}\left[e^{u}\right]_{-2}^{2}=3.627$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال: د $f(x)=\int_1^2 2x\cdot\ln x^2dx$ انتیگرال قیمت پیدا کړئ.

$$u=x^2$$

$$du=2x\,dx\Rightarrow dx\frac{1}{2x}du$$

$$\left.\begin{array}{l}x=1\ ,\ \ u=x^2=1\\ x=2\ ,\ \ u=x^2=4\end{array}\right\}\Rightarrow\int_1^2 2x\cdot\ln x^2dx=\int_1^4 2x\cdot\ln u\cdot\frac{1}{2x}du=\int_1^4\ln u\,du$$

$$=[u\cdot\ln u-u]_1^4=[4\cdot\ln 4-4]-[1\cdot\ln 1-1]\approx 2.545$$

پوښتنې

لاندې انتیگرالونه حل کړئ.

$a)\ \int\ln 2x^3dx$ $\quad b)\ \int\ln\sqrt{x}dx$ $\quad c)\ \int\log\frac{x}{2}dx$

$d)\ \int 3\log\frac{1}{x}dx$ $\quad e)\ \int_1^2\frac{4}{e^{2x-4}}dx$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د قسمي کسرونو په مرسته د انتيګرال محاسبه

د مخامخ کسر قسمي کسرونه پيدا کړئ.

$$\frac{5}{x^2-3x+2}=\frac{?}{(x-2)}+\frac{?}{(x-1)}$$

مخکې مو د قسمي کسرونو تجزيه مطالعه کړه اوس غواړو چې د هغو تابعګانو انتيګرالونه د قسمي کسرونو په واسطه تر څېړنې لاندې ونيسو.

لومړی مثال: $\int\frac{7x-12}{x^2-6x+8}dx$ محاسبه کړئ.

حل: د قسمي کسرونو د تجزيې په مرسته ليکلای شو:

$$\frac{7x-12}{x^2-6x+8}dx=\frac{A}{(x-2)}+\frac{\quad}{(x-4)}$$

$$\frac{A(x-4)+\quad(x-2)}{(x-2)(x-4)}=\frac{Ax-4A+\quad x-2\quad}{(x-2)(x-4)}=\frac{(A+\quad)x-4A-2\quad}{(x-2)(x-4)}$$

$A+\quad=7$

$-4A-2\quad=-12$

$A=7-\quad$

$-4(7-\quad)-2\quad=-12$

$-28+4\quad-2\quad=-12$

$-28+2\quad=-12$

$2\quad=16\Rightarrow\quad=8$

$A=7-8=-1$

$$\frac{7x-12}{x^2-6x+8}=-\frac{1}{x-2}+\frac{8}{x-4}$$

نو ليکلای شو چې:

$$\int\frac{7x-12}{x^2-6x+8}dx=\int\frac{-1}{x-2}dx+\int\frac{8}{x-4}dx$$

$$\int\frac{7x-12}{x^2-6x+8}dx=-\int\frac{1}{x-2}dx+8\int\frac{1}{x-4}dx$$

$$=-\ln|x-2|+8\ln|x-4|+C=\ln(x-2)^{-1}+\ln(x-4)^8+C$$

$$=\ln\left[(x-2)^{-1}\cdot(x-4)^8\right]=\ln\left[\frac{(x-4)^8}{x-2}\right]+C$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم مثال: د $\int \frac{-5x+9}{x^2+x-6}dx$ انتيګرال محاسبه کړئ.

حل: مخرج په فکتورو تجزيه کوو: $x^2+x-6=(x-2)(x+3)$

نو:

$$\frac{-5x+9}{x^2+x-6}=\frac{-5x+9}{(x-2)(x+3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{\quad}{x+3}$$

$$\frac{A(x+3)+\quad(x-2)}{(x-2)(x+3)}=\frac{Ax+3A+\quad x-2\quad}{(x-2)(x+3)}=\frac{(A+\quad)x+3A-2\quad}{(x-2)(x+3)}$$

$$(A+\quad)x+3A-2\quad=-5x+9$$

$$A+\quad=-5\Rightarrow A=-5-\quad$$

$$3A-2\quad=-5x+9$$

د A او عددي قيمتونه عبارت دي له:

$$3(-5-\quad)-2\quad=9$$

$$-15-5\quad=9$$

$$-5\quad=24$$

$$\quad=-\frac{24}{5}$$

$$A=-5+\frac{24}{5}=\frac{-25+24}{5}=-\frac{1}{5}$$

$$\frac{-5x+9}{x^2+x-6}=\frac{-\frac{1}{5}}{x-2}-\frac{\frac{24}{5}}{x+3}$$

$$\int\frac{-5x+9}{x^2+x-6}=\int\frac{-\frac{1}{5}}{x-2}dx-\int\frac{\frac{24}{5}}{x+3}dx=-\frac{1}{5}\int\frac{1}{x-2}dx-\frac{24}{5}\int\frac{1}{x+3}dx$$

$$=-\frac{1}{5}\ln(x-2)-\frac{24}{5}\ln(x+3)$$

$$=\ln(x-2)^{-\frac{1}{5}}+\ln(x+3)^{-\frac{24}{5}}=\ln\left[(x-2)^{-\frac{1}{5}}\cdot(x+3)^{-\frac{24}{5}}\right]+C$$

پوښتنې

لاندې انتيګرالونه د قسمی کسرونو په طريقه حل کړئ.

a) $\int\frac{x+2}{x^3-3x^2-x+3}dx$ b) $\int\frac{x-2}{x^2-6x+13}dx$ c) $\int\frac{x^6}{x^4+3x^2+2}dx$

د څپرکي مهم ټکي

- که $f(x)=e^x$ وي، نو ددې تابع مشتق عبارت له $f'(x)=e^x$ دی.
- که $f(x)=a^x$ وي، د دې تابع مشتق $f'(x)=a^x\cdot\ln a$ دی.
- که $f(x)=\log_a x$ وي، نو د تابع مشتق $f'(x)=\frac{1}{x}\log_a e=\frac{1}{x\ln a}$ دی.
- $f(x)=\log_a g(x)$ وي، نو د تابع مشتق $(\log_a g(x))'=\frac{g'(x)}{g(x)}\log_a e$ دی.
- **قسمي کسرونه**: د یوه واقعي کسر هغه کوچنې کسرونه چې د جمعې د عواملو په شکل لیکل شوی دی که هغوی جمع کړو، راکړل شوي واقعي کسر په لاس راځي، قسمي کسرونه بلل کېږي.
- که چیرې د $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ کسري پولینوم مخرج ($P_n(x)$) د خطي بېلابېلو ضربي عواملو څخه جوړ چې تکرار نه وي راغلی په لاندې ډول بدلیدلای شي:

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{}{x-x_2}+\frac{C}{x-x_3}+\cdots+\frac{}{x-x_n}$$

- که د لومړۍ درجه پولینوم مخرج ضربي عوامل چې ځینې یې تکرار راغلي وي، یعنې که د $x-x_0$ عامل n ځلې تکرار شوی وي، نو لیکلای شو؛ چې:

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)}=\frac{A}{x-x_0}+\frac{}{(x-x_0)^2}+\cdots+\frac{}{(x-x_0)^n}$$

- که د مخرج ضربي عوامل دویمه درجه پولینوم د تجزیې وړ نه وي او تکرار هم نه وي راغلی نو د $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ واقعي پولینوم یو توپه کسر $\frac{Ax+}{ax^2+bx+c}$ بڼه لري.
- د اکسپوننشیل تابعګانو انتیګرال لپاره لیکلای شو:

$$\int e^x dx=e^x+C \quad , \quad \int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C \quad , \quad (a\in IR^+ \, , \, a\neq 1)$$

- د لوګارتمي توابعو د انتیګرال لپاره لیکلای شو:

$$\int \ln dx=x\ln x-x+C \quad , \quad \int \log_a x\,dx=x\log_a\frac{x}{e}+C$$

- ځینې تابعګانې چې پرته د بدلون له لارې حل کېږي، لیکو:

$$f(x)=e^x \Rightarrow \int f(x)\,dx=\int e^x\,dx=e^x+C$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پنځم څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتنې حل کړئ.

1. د $f(x)=\ln(\frac{x-2}{x+2})$ د تابع مشتق پیدا کړئ.

2. د $f(x)=\ln\sqrt{x-1}$ تابع مشتق پیدا کړئ.

3. د $y=2x^{2x}$ تابع مشتق پیدا کړئ.

4. د $f(x)=\log\sqrt{x^3}$ تابع مشتق پیدا کړئ.

5. لاندې کسرونه په قسمي کسرونو تجزیه کړئ.

1) $\frac{x+1}{x^2-x-6}$ 2) $\frac{x^2-x+1}{x^3+2x^2+x}$ 3) $\frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}$

6. لاندې انتیګرالونه پیدا کړئ.

1) $\int 5t^7 dt$ 2) $\int \frac{x^3-3}{x^2}dx$

3) $\int (2\cos x-5\sin x+e^x)dx$ 4) $\int \sqrt{\cos x}\sin x dx$

5) $\int xe^{-x}dx$ 6) $\int (\frac{5}{(2x+1)(x-2)})dx$

7) $\int_{-1}^{1} 3x^2\sqrt{x^3+1}dx$

7 – د لاندې تابعګانو مشتق پیدا کړئ.

a) $y=\ln(x^2+x+1)$ b) $y=\ln(\sin x)$

c) $y=e^{x^2+1}$ d) $y=\sqrt[x]{2}$

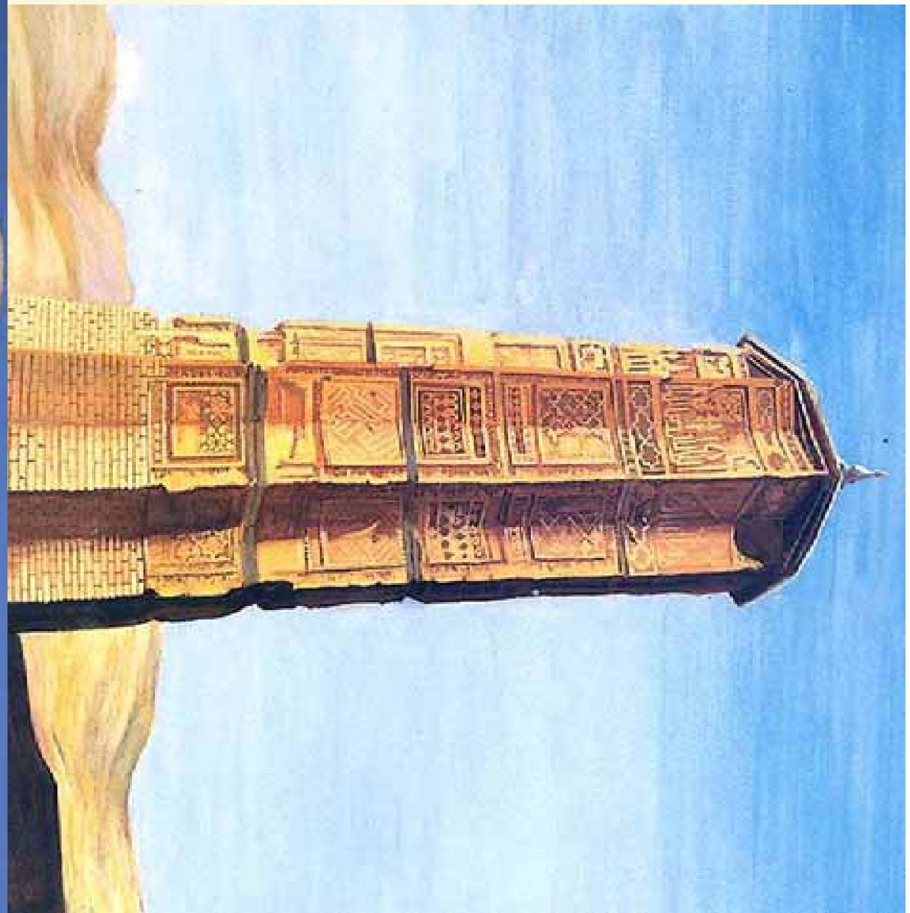
(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

شپږم څپرکی

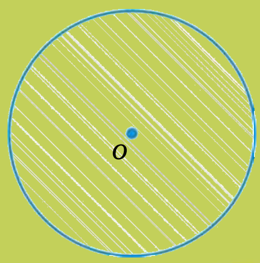
د انتيگرال تطبيقات

(c) ketabton.com: The Digital Library



د يوې منحني د محصور شوي سطحې د مساحت محاسبه
Accounting of area bounded by one curve

د مخامخ شكل مساحت چې يوه سطحه د يوې منحني په واسطه ترل شوې دايره ده د مساحت فورمول يې ووياست.



فعاليت

د $y=1-x^2$ تابع په پام کې ونيسئ.

- د تابع بحراني (*Critical Point*) ټکي او د x محور سره د تقاطع ټکي پيدا او ګراف يې رسم کړئ.
- د $y=1-x^2$ تابع او x محور تر منځ د سطحې د مساحت قيمت د انتيګرال په مرسته پيدا کړئ.
- پورتنی فعاليت د $y=-x^2+2x$ تابع لپاره تکرار کړئ او د منحني او د x د محور تر منځ محصور شوی مساحت محاسبه کړئ.

له پورتني فعاليت څخه لاندې پايلې لاسته راځي:

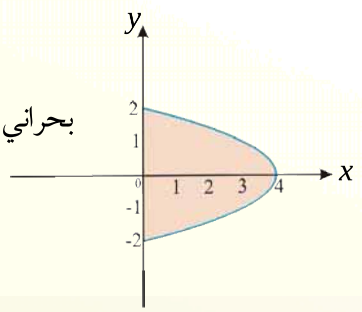
ـ $\int_a^b f(x)\,dx = F(a)-F(b)$ انتيګرال د يوې سطحې د مساحت قيمت راښيي چې د $y=f(x)$ منحني او د x محور او د $x=a$, $x=b$ د کرښو له خوا رابند (محصور) دی.

ـ که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ ترلي انټروال کې مثبت او متمادي وي، يعنې $y=f(x)\geq 0$ په دې صورت کې $f(x)$ تابع ګراف تل د x محور پورته خواته او که $y=f(x)\leq 0$ وي، په دې حالت کې $f(x)$ تابع ګراف د x محور لاندې خواته واقع ده او منفی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د $x=4-y^2$ تابع د منحني او د y د محور تر منځ محصور شوی مساحت پیداکړئ.

حل: لومړی د تابع بحراني ټکي او د y محور سره د پرېکړې ټکي پیداکوو، وروسته يې شکل رسموو، د بحراني ټکي د پیداکولو لپاره لومړی د تابع مشتق نیسو او له صفر سره يې مساوي کوو او د محورو سره د پرېکړې ټکو د په لاس راوړلو لپاره تابع له صفر سره برابروو.



$x=4-y^2 \Rightarrow x'=-2y=0$

$x'=0 \;\Rightarrow\; y=0$

$y=0\,,\quad x=4-y^2 \Rightarrow x=4-0 \Rightarrow x=4 \quad\Rightarrow\; (4,0)$ بحراني ټکی

$x=0\;,\quad 4-y^2=0 \Rightarrow y^2=4$

$y=\pm 2 \quad\Rightarrow\; (0,2)\quad,\quad (0,-2)$ د محورونو سره د پرېکړې ټکي

څرنګه چې د $x=4-y^2$ معادله په $[-2,2]$ انټروال کې نظر x محور ته دواړه ټکي متناظر دي، نو د نمايي مساحت په پام کې نیولو سره، د انتیګرال د مساحت سرحدات په لاندې ډول په لاس راوړو:

$$A=\int_{-2}^{2}(4-y^2)\,dy=2\int_{0}^{2}(4-y^2)dy=2[4y-\frac{y^3}{3}]_0^2$$

$$A=2\,[(4\cdot 2-\frac{2^3}{3})-0]=2\,(8-\frac{8}{3})=2\,(\frac{24-8}{3})\;=2\,(\frac{16}{3})=\frac{32}{3}$$

دویم مثال: د x محور او د $y=1-\frac{1}{2}x^2$ تابع منحنی د محصور شوی سطحی مساحت محاسبه کړئ.

حل: د محصور شوی سطحې د مساحت ټاکلو لپاره لومړی بحراني ټکی او د x محور سره د تقاطع ټکي په لاس راوړو.

$y=1-\frac{1}{2}x^2\;,\; y'=-x$

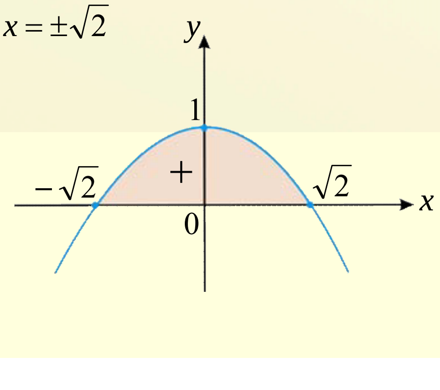
$y'=0 \;\Rightarrow\; x=0$

$x=0,\; y=1-\frac{1}{2}x^2=1 \;\;\Rightarrow\;\; y=1-\frac{1}{2}0^2 \;\;\Rightarrow\;\; y=1 \;\;\Rightarrow\;\; (0,1)$ بحراني ټکی

$y=0, 1-\frac{1}{2}x^2=0 \;\;\Rightarrow\;\; -\frac{1}{2}x^2=-1 \;\;\Rightarrow\;\; x^2=2,\; x=\pm\sqrt{2}$

$x_1=\sqrt{2}\quad,\quad x_2=-\sqrt{2}$

$(\sqrt{2},0)\;,\;(-\sqrt{2},0)$ د محورونو سره د پرېکړې ټکي



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}(1-\frac{1}{2}x^2)\,dx=2\int_{0}^{\sqrt{2}}(1-\frac{1}{2}x^2)\,dx=2([x-\frac{1}{6}x^3]_0^{\sqrt{2}})$$

$$A=2(\sqrt{2}-\frac{(\sqrt{2})^3}{6}-0)=2(\frac{6\sqrt{2}-(\sqrt{2})^3}{6})=2(\frac{6\sqrt{2}-\sqrt{8}}{6})$$

$$=(\frac{6\sqrt{2}-2\sqrt{2}}{3})=\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$$A=1.8853$$

دریم مثال: د $y=x^2-3$ تابع ګراف د x له محور سره یوه سطحه رابند وي، د دې سطحې مساحت پیدا کړئ.

حل: لومړی د سطحې د ټاکلو لپاره د تابع ګراف رسموو او د تابع بحراني ټکی او د تقاطع ټکی په لاس راوړو:

$$y=x^2-3\Rightarrow y'=2x$$

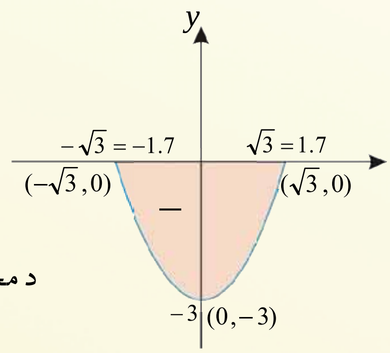
$$y'=0\Rightarrow x=0$$

$$x=0\ ,\ y=x^2-3\Rightarrow y=0^2-3$$

$\Rightarrow y=-3\Rightarrow(0,-3)$ بحراني ټکی

$$y=0\ ,\ \ x^2-3=0\Rightarrow x^2=3$$

$x=\pm\sqrt{3}\Rightarrow(\sqrt{3},0)\ ,\ (-\sqrt{3},0)$ د محورونو سره د پرېکړې ټکي



څرنګه چې د $y=x^2-3$ تابع په $[\sqrt{3},-\sqrt{3}]$ انټروال کې د محور سره د پرېکړې ټکي متناظر قیمتونه لري نو ګراف یې د x محور څخه لاندې دی او انټیګرال یې منفي دی، نو د ټول مساحت څخه د انټیګرال د سرحدونو نیمایي مساحت پیدا کوو او په 2 کې یې ضربوو:

$$A_1=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}(x^2-3)\,dx=-2\int_{0}^{\sqrt{3}}(x^2-3)\,dx=-2(\int_{0}^{\sqrt{3}}x^2\,dx-3\int_{0}^{\sqrt{3}}dx)=-2([\frac{1}{3}x^3]_0^{\sqrt{3}}-[3x]_0^{\sqrt{3}})$$

$$=-2(\frac{1}{3}[(\sqrt{3})^3-0]-3[\sqrt{3}-0])=-2(\frac{1}{3}(\sqrt{3})^3-3\sqrt{3})$$

$$=-\frac{2}{3}(\sqrt{3})^3+6\sqrt{3}=-\frac{2}{3}(1.7)^3+6(1.7)=-\frac{2}{3}(4.913)+10.2=-\frac{9.826}{3}+10.2$$

$$=-3.2753+10.2=6.9247$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

څلورم مثال: د $y = x^2 - 3x$ تابع ګراف رسم د منحني او x محور تر منځ د سطحې مساحت په $[-1,4]$ انټروال کې وټاکئ.

حل: لومړی د منحني بحراني ټکی او له محورونو سره د پرېکړې ټکي پیدا کوو:

$y = x^2 - 3x$

$y' = 2x - 3 = 0 \Rightarrow 2x = 3 \,,\, x = \frac{3}{2}$

$x = \frac{3}{2} \,,\;\; y = x^2 - 3x \Rightarrow y = (\frac{3}{2})^2 - 3(\frac{3}{2})$

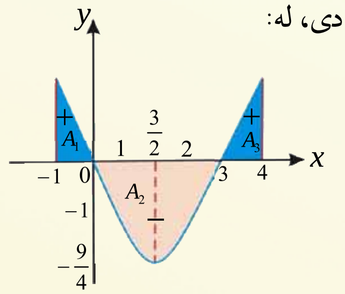
$y = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} = -\frac{9}{4} \,,\;\; (x,y) = (\frac{3}{2}, -\frac{9}{4})$ بحراني ټکی

څرنګه چې $y'' = 2 > 0$ دی، نو د $(\frac{3}{2}, -\frac{9}{4})$ ټکي د تابع مطلق اصغري ټکی دی او د تقاطع ټکي یې د x له محور سره عبارت دي، له:

$y = 0 \Rightarrow x^2 - 3x = 0$

$\Rightarrow x(x-3) = 0$

$\Rightarrow x_1 = 0 \;\;,\;\; x_2 = 3$



$A = A_1 - A_2 + A_3 = \int_{-1}^{0}(x^2 - 3x)\,dx - \int_{0}^{3}(x^2 - 3x)\,dx + \int_{3}^{4}(x^2 - 3x)\,dx$

$A = [\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2]_{-1}^{0} - [\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2]_{0}^{3} + [\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2]_{3}^{4}$

$A = [(\frac{1}{3}\cdot 0 - \frac{3}{2}\cdot 0) - (\frac{1}{3}\cdot(-1)^3 - \frac{3}{2}\cdot(-1)^2)] - [(\frac{1}{3}\cdot 3^3 - \frac{3}{2}\cdot 3^2) - (\frac{1}{3}\cdot 0 - \frac{3}{2}\cdot 0)] +$

$[(\frac{1}{3}\cdot(4)^3 - \frac{3}{2}\cdot(4)^2) - (\frac{1}{3}\cdot(3)^3 - \frac{3}{2}\cdot(3)^2)]$

$= -(-\frac{1}{3} - \frac{3}{2}) - (\frac{1}{3}\cdot 27 - \frac{3}{2}\cdot 9) + (\frac{1}{3}\cdot 64 - \frac{3}{2}\cdot 16) - (\frac{1}{3}\cdot 27 - \frac{3}{2}\cdot 9)$

$= \frac{1}{3} + \frac{3}{2} - \frac{27}{3} + \frac{27}{2} + \frac{64}{3} - \frac{48}{2} - \frac{27}{3} + \frac{27}{2}$

$= \frac{1 - 27 + 64 - 27}{3} + \frac{3 + 27 - 48 + 27}{2} = \frac{65 - 54}{3} + \frac{57 - 48}{2} = \frac{11}{3} + \frac{9}{2} = \frac{22 + 27}{6} = \frac{49}{6}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

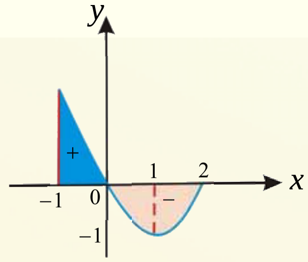
پنځم مثال: د $y = x^2 - 2x$ منحني د x محور او $x = 2$ ، $x = -1$ کرښو تر منځ مساحت پیدا کړئ.

حل: لومړی بحراني ټکي وروسته د x محور سره د تقاطع ټکی په لاس راوړو:

$$y = x^2 - 2x \Rightarrow y' = 2x - 2 = 0$$
$$2x = 2 \Rightarrow x = 1$$
$$x = 1 \;,\; y = x^2 - 2x = 1^2 - 2(1) = -1 \Rightarrow (1,-1)$$ بحراني ټکی

څرنګه چې $y'' = 2 > 0$ دی، نو تابع د $(1,-1)$ په ټکي کې مطلق اصغري لري او د x محور سره يې تقاطع په لاندې ډول ده.

$$y = 0 \quad , \quad x^2 - 2x = 0$$
$$x(x-2) = 0$$
$$x_1 = 0 \;,\; x_2 = 2$$



څرنګه چې منحني د $[-1,2]$ په انټروال کې له مبدأ څخه تیرېږي او د منحني یوه برخه د $[-1,0]$ په انټروال کې د x محور پورته خواته او بله برخه يې د $[0,2]$ په فاصلې کې د x محور ښکته خواته پرته ده انتیګرال يې منفي دی:

$$A = \int_{-1}^{0}(x^2 - 2x)dx - \int_{0}^{2}(x^2 - 2x)\,dx = [\frac{1}{3}x^3 - x^2]_{-1}^{0} - [\frac{1}{3}x^3 - x^2]_{0}^{2}$$
$$= (0 - (-\frac{1}{3} - 1)) - ((\frac{8}{3} - 4) - 0) = -(-\frac{1}{3} - 1) - (\frac{8}{3} - 4) = -(\frac{-1-3}{3}) - (\frac{8-12}{3})$$
$$= -(\frac{-4}{3}) - (\frac{-4}{3}) = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

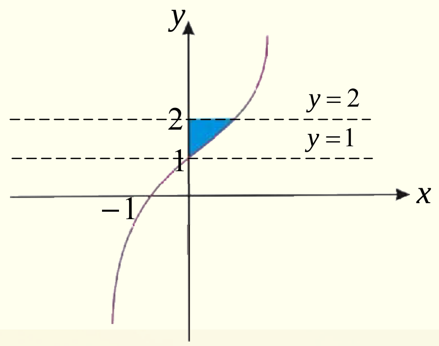
(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- د $f(x) = \sin x$ منحني او د x محور تر منځ مساحت په $[-2\pi, 2\pi]$ انټروال کې حساب کړئ.

2- د $y = x^3 + 1$ تـابع منحنـي او $y = 1$ ، $y = 2$ کرښو تر منځ مساحت وټاکئ.

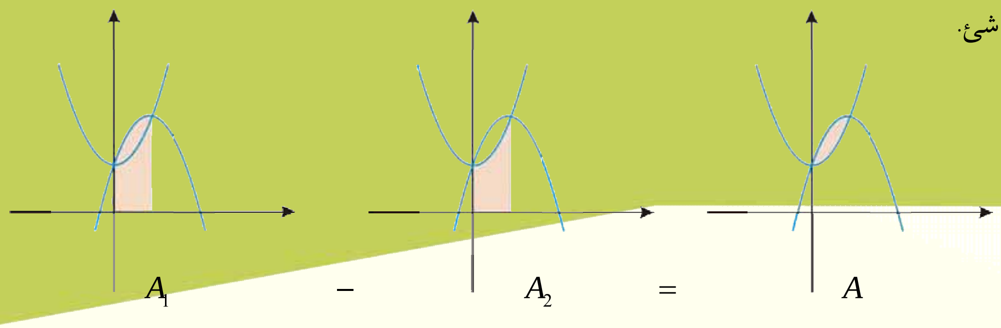


3- د $y = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}+x}$ منحني او د $x = 0$ او $x = 1$ کرښو تر منځ مساحت حساب کړئ.

د دوو محصور شويو منحني ګانو تر منځ د مساحت محاسبه

Accounting of area bounded by tow curves

لاندې شکلونه په پام کې ونيسئ د $A = A_1 - A_2$ اړيکې د سموالي په اړه خبره وپلای شئ.



فعاليت

که د $y_1 = 1 - x^2$ او $y_2 = x^2 - 1$ تابعګانې راکړل شوې وي.

- د $y_1 = y_2$ رابطې څخه د x قيمت په لاس راوړئ.
- د لاس ته راغلو قيمتونو په پام کې نيولو سره د هغوی ګراف رسم کړئ.
- څرنګه چې د y_1 تابع ګراف د y_2 تابع د ګراف څخه لوړ دی نو د تابعګانو د انتيګرال د تفريق حاصل $(y_1 - y_2)$ د x په ټاکل شوی انټروال کې حساب کړئ.
- نوموړی فعاليت د $y = x^2$ تابع د منحني او $y = x + 2$ د کرښې لپاره تکرار کړئ او د محصورې شوي سطحې مساحت حساب کړئ.

د پورتنی فعاليت څخه لاندې پايلې لاسته راځي:

_ که چيرې د $y_1 = f(x)$ او $y_2 = g(x)$ دوو منحني ګانو د محصور شوي سطحې د محاسبې لپاره په هغه صورت کې چې $f(x) > g(x)$ وي، يعنې د $f(x)$ تابع ګراف د $g(x)$ تابع دپاسه واقع وي نو لومړی د دواړو منحني ګانو د تقاطع ټکي پيدا کوو وروسته د پاسني او لاندينې منحني د x د محور سره مساحت په $[a, b]$ انټروال کې محاسبه کوو:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b g(x)\, dx$$

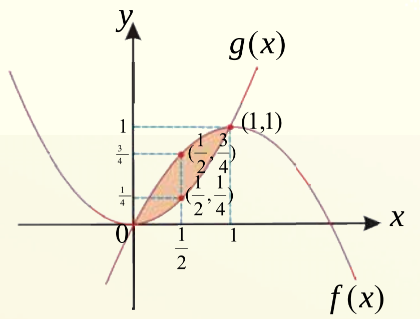
(c) ketabton.com: The Digital Library

ـ که چیرې د $g(x)$ تابع ګراف د $f(x)$ تابع د ګراف دپاسه واقع وي، نو لرو چې:

$$A=\int_a^b[g(x)-f(x)]dx=\int_a^b g(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,dx$$

لومړی مثال: د $f(x)=2x-x^2$ او $g(x)=x^2$ منحنې ګانو د ګرافونو ترمنځ د پرتې سطحې مساحت حساب کړئ.

حل: لومړی د دواړو منحنې ګانو د تقاطع ټکی پیدا کوو:



$f(x)=2x-x^2\quad,\quad g(x)=x^2$

$f(x)=g(x)\Rightarrow 2x-x^2=x^2$

$2x-x^2-x^2=0$

$2x-2x^2=0$

$2x(1-x)=0$

$2x=0\quad\Rightarrow x_1=0$

$1-x=0\quad\Rightarrow x_2=1$

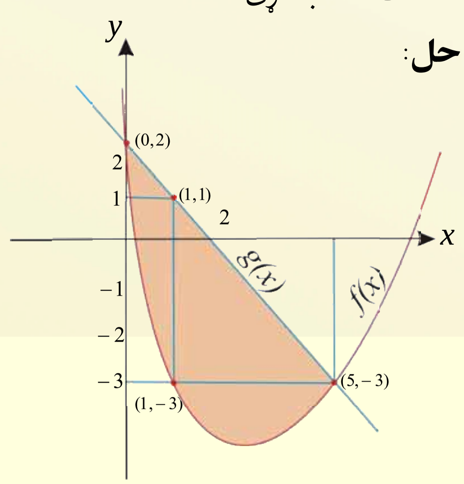
لیدل کېږي چې ددواړو منحنې ګانو تقاطع (1،1) او (0،0) ده اوس د محصور شوي سطحې مساحت پیدا کوو.

$$A=\int_a^b[f(x)-g(x)]=\int_0^1[2x-x^2-x^2]dx=\int_0^1[2x-2x^2]=[\frac{2x^2}{2}-\frac{2x^3}{3}]_0^1$$

$$=[x^2-\frac{2}{3}x^3]_0^1=(1-\frac{2}{3})-0=\frac{3-2}{3}=\frac{1}{3}$$

دویم مثال: د $f(x)=x^2-6x+2$ تابع او $g(x)=2-x$ کرښې د ګرافونو تر منځ د پرتې سطحې مساحت حساب کړئ.

حل:



$$\left.\begin{array}{l}f(x)=x^2-6x+2\\ g(x)=2-x\end{array}\right\}\Rightarrow f(x)=g(x)$$

$x^2-6x+2=2-x\Rightarrow x^2-6x+2-2+x=0$

$x^2-5x=0\Rightarrow x(x-5)=0$

$x_1=0\quad,\quad x_2=5$

$\Rightarrow(0,2)\ ,\ (5,-3)$ د کرښې او منحنې د تقاطع ټکي

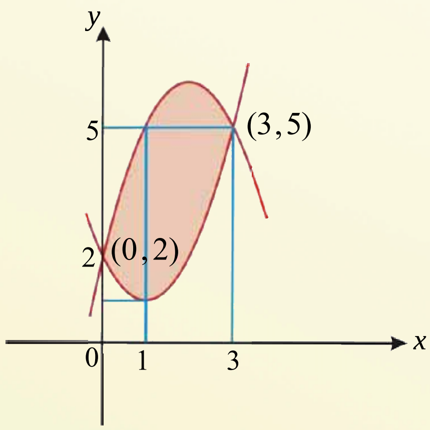
(c) ketabton.com: The Digital Library

له شکل څخه ښکاري چې د $g(x)$ کرښې ګراف د $f(x)$ ګراف پورته خوا ته واقع دی، په دې معنی چې $g(x) > f(x)$

$$A=\int_a^b[g(x)-f(x)]\,dx=\int_0^5(2-x-x^2+6x-2)dx$$
$$=\int_0^5(-x-x^2+6x)\,dx=\int_0^5(-x^2+5x)\,dx$$
$$=[-\frac{x^3}{3}+5\frac{x^2}{2}]_0^5=(-\frac{125}{3}+5\cdot\frac{25}{2})-0=-\frac{125}{3}+\frac{125}{2}$$
$$=\frac{-250+375}{6}=\frac{125}{6}$$

دریم مثال: د $f(x)=-x^2+4x+2$ او $g(x)=x^2-2x+2$ تابعګانو د ګرافونو تر منځ د پرتې سطحې مساحت پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې د دواړو ګرافونو د تقاطع ټکي د انتیګرال حدونه جوړوي، نو د دې ټکو د پیدا کولو لپاره $f(x)=g(x)$ وضع کوو:



$$\left.\begin{array}{l} f(x)=-x^2+4x+2\\ g(x)=x^2-2x+2\end{array}\right\}\Rightarrow f(x)=g(x)$$
$$-x^2+4x+2=x^2-2x+2$$
$$\Rightarrow -x^2+4x+2-x^2+2x-2=0$$
$$-2x^2+6x=0\Rightarrow x(-2x+6)=0$$
$$\Rightarrow x_1=0\quad,\quad -2x=-6\Rightarrow x_2=3$$

د دواړو منحني ګانو د تقاطع ټکي $(3,5)$, $(0,2)$

د x محور سره د تقاطع ټکي عبارت له (5،3)، (2،0) دی اوله شکل څخه لیدل کېږي چې د $g(x)$ ګراف د $f(x)$ له ګراف څخه پورته واقع دی نو لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A=\int_a^b [f(x)-g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx=\int_0^3(-x^2+4x+2)dx-\int_0^3(x^2-2x+2)dx$$

$$=[-\frac{x^3}{3}+\frac{4x^2}{2}+2x]_0^3-[\frac{x^3}{3}-\frac{2x^2}{2}+2x]_0^3$$

$$=-\frac{1}{3}\cdot 27+2\cdot 9+6-0-\frac{1}{3}\cdot 27+9-6+0$$

$$=-9+18-9+9$$

$$=9$$

پوښتنې

1- د $y=x^2$ او $y=-x^2+4x$ منحني گانو د گرافونو تر منځ د پرتې سطحې مساحت پيدا کړئ.

2- د $y^2=2x-2$ پارابول او $y=x-5$ کرښې د گرافونو تر منځ د سطحې مساحت حساب کړئ.

3- د $y^2=2x+6$ منحني او $y=x-1$ کرښې د گرافونو تر منځ د سطحې مساحت محاسبه کړئ.

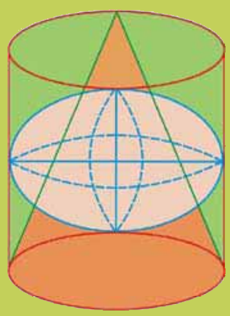
(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوراني جسمونو د حجمونو محاسبه

Accounting of rounding things Volume

د مخامخ شکل د جسمونو د حجمونو تر منځ نسبت پیدا کړئ.

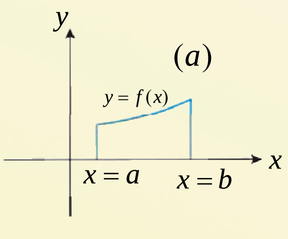


په مخکنیو ټولګیو کې مو د جسمونو حجم پیدا کړی وو پرته له دې چې د هغوی فورمولونه ثبوت شي منلي مو وو، خو اوس د جسمونو د حجم فورمولونه د معین انتیګرال څخه په ګټه اخیستنې سره ثبوتوو.

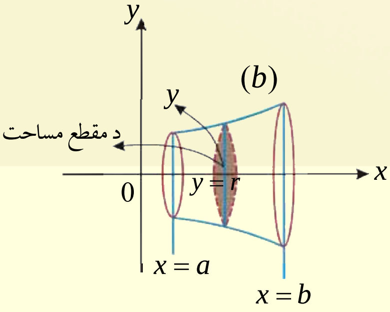
- یو ټکی او یوه کرښه په فضاکې داسې په پام کې ونیسئ چې ټکی د کرښې په منځ کې واقع وي.
- هغه جسم چې د یوې مستقیمې کرښې له دوران څخه د یوه ټکي په شاوخوا له څرخېدو وروسته جوړېږي نوم یې واخلئ.
- د نوموړی جسم د حجم فورمول ولیکئ او ووایئ چې هغه څنګه ثبوتوو.

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

- که چیرې د $y = f(x)$ متمادي تابع د منحني مساحت نظر (a) شکل

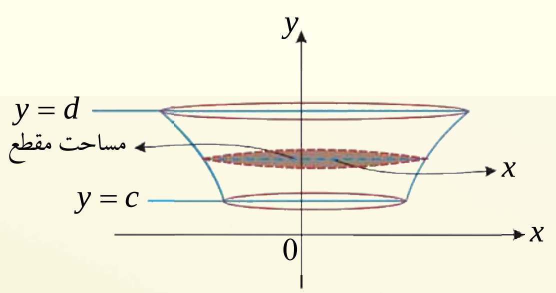


د $x = a$ او $x = b$ کرښو او منحني په واسطه محصور شوی وي، نو د هغه جسم حجم چې د پورتني تابع د منحني له دوارن څخه د x محور په شاوخوا لاسته راځي تقریباً استوانه یې شکل لري، لکه د (b) شکل.



چې ارتفاع يې $\Delta x = b - a$ ده او د دې استوانې سطح د دايروي شکل په واسطه محصوره شوې ده چې دې سطحو ته مقطع وايي او پوهېږو چې د دايرې مساحت نظر x محور ته $A(x) = \pi r^2$ دی او ددې مقطع شعاع شکل ته په کتو سره د y محور سره موازي ده؛ نو $y = r$ کېږي او د حجم فورمول يې نظر ريمان مجموع ته په لاندې ډول دی:

$$v = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} A(x)\Delta x = \int_a^b \pi r^2\,dx = \int_a^b \pi y^2\,dx = \int_a^b \pi[f(x)]^2\,dx$$



- که د $x = f(y)$ تابع د منحني مساحت $y = c$ او $y = d$ کرښو ترمنځ محصور شوی وي دداسې استوانې د مقطع مساحت نظر y محور ته $A(y) = \pi r^2$ دی چې ارتفاع يې $\Delta y = d - c$ او شعاع يې $x = r$ سره ده هغه حجم چې ددې دوران څخه په لاس راځي په لاندې ډول دی:

$$v = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} A(y)\Delta y = \int_a^b \pi r^2\,dy = \int_a^b \pi x^2\,dy = \int_a^b \pi[f(y)]^2\,dy$$

د دوراني جسمونو حجم د انتيګرال په مرسته په لاس راځي لکه:

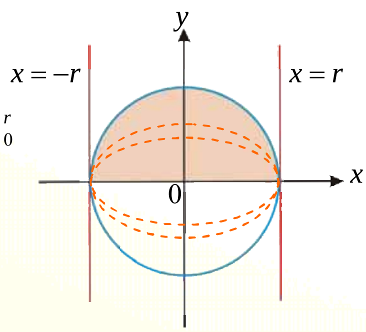
1- د انتيګرال په مرسته د کرې حجم پيدا کړئ.

ثبوت: پوهېږو چې که چيرې نيمه دايره د خپل قطر په شاوخوا وڅرخي کره لاس ته راځي او د دايرې معادله $x^2 + y^2 = r^2$ ده، اوس د نيمې دايرې حجم له څرخېدو وروسته په لاس راوړو او هغه دوه برابره کوو، چې د دايرې بشپړ حجم په لاس راشي

$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$y^2 = r^2 - x^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$V = \int_{-r}^{r} \pi y^2 dx = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\, dx$$



$$= 2\pi \int_{0}^{r} (r^2 - x^2)\, dx = 2\pi [r^2 x - \frac{x^3}{3}]_0^r$$

$$= 2\pi [(r^3 - \frac{r^3}{3}) - 0]$$

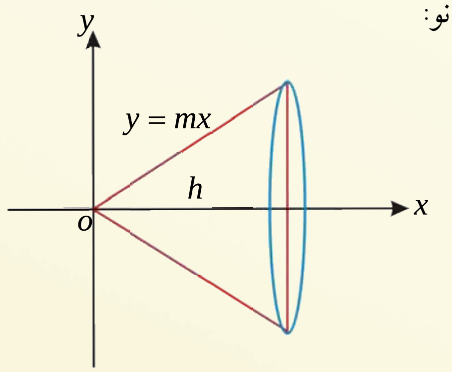
$$= 2\pi (\frac{3r^3 - r^3}{3})$$

$$= 2\pi (\frac{2r^3}{3})$$

$$V(\text{د کرې حجم}) = \frac{4}{3} \pi r^3$$

2- د انتیګرال په مرسته د مخروط حجم پیدا کړئ.

ثبوت: خرنګه چې مخروطي سطح د $y = mx$ کرښې له دوران څخه د x د محور په چاپیریال په لاس راځي نو:



$$V = \int_{0}^{h} \pi y^2 dx$$

$$= \int_{0}^{h} \pi m^2 x^2 dx = \pi m^2 \int_{0}^{h} x^2 dx$$

$$= \pi m^2 [\frac{x^3}{3}]_0^h = \pi m^2 (\frac{h^3}{3})$$

$$= \frac{\pi h}{3} (mh)^2$$

له پورته شکل څخه لیدل کیږي چې د مخروط قاعده دایروي بڼه لري اوشعاع یې د h محور سره موازي ده، یعنې $y // r$ او همدا رنګه د مخروط ارتفاع (h) د x په محور باندې منطبق ده، نو د $(x = h)$ د $y = mx$ په اړیکه کې یې قیمت وضع کوو:

$$y = mx \quad \Rightarrow \quad r = mh$$

$$= \frac{\pi h}{3} \; r^2$$

$$V = \pi r^2 \times \frac{h}{3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

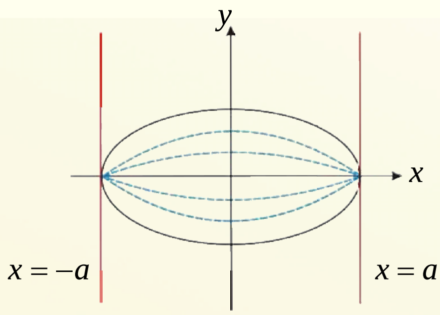
خرنگه چې د مخروط قاعده دايروي ده، د دايرې مساحت πr^2 دی، لرو چې:

$$V = \pi r^2 \cdot \frac{h}{3}$$

$$V(\text{د مخروط حجم}) = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

3- د الپس حجم چې د $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ د منحني او x محور په چاپير د لوی قطر په شاوخوا له دوران وروسته جوړېږي، په لاس راوړئ.

ثبوت: د الپس د نيمايي حجم د لوی قطر په شاوخوا په لاس راوړو او هغه دوه چنده کوو، چې د بشپړ الپس حجم په لاس راشي.



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \Rightarrow y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2$$

$$V = \int_{-a}^{a} \pi y^2\, dx = \pi \int_{-a}^{a} [b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2]dx$$

$$= 2\pi \int_{0}^{a} [b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2]dx = 2\pi[b^2 x - \frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x^3}{3}]_0^a$$

$$= 2\pi[(b^2 a - \frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{a^3}{3}) - 0] = 2\pi[b^2 a - \frac{b^2 a}{3}]$$

$$= 2\pi[\frac{3b^2 a - b^2 a}{3}] = 2\pi[\frac{2b^2 a}{3}]$$

$$V = \frac{4}{3}\pi b^2 a \Rightarrow \text{د الپس دوران د لوی قطر په شاوخوا حجم} = \frac{4}{3}\pi b^2 a$$

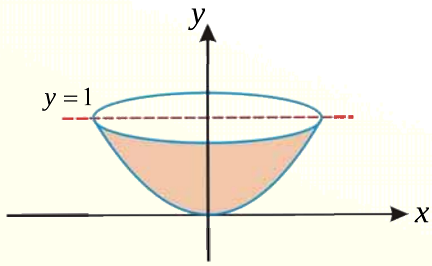
که چيرې د الپس محراقونه د y په محور پراته وي او د هغه انتګرال حساب کړو د الپس د کوچني قطر په شاوخوا حجم په لاندې ډول په لاس راځي:

$$\text{د الپس دوران د کوچني قطر په شاوخوا حجم} = \frac{4}{3}\pi a^2 b$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د هغه جسم حجم چې د $y = x^2$ او $y = 1$ کرښې تر منځ پرتې مستوي مساحت د دوران څخه د y په محور په لاس راځي، پیدا کړئ.

حل: لومړی شکل رسموو وروسته یې مساحت حسابوو:

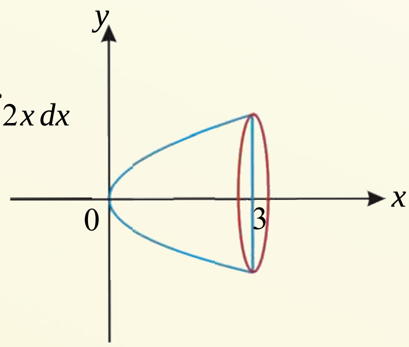


$$V = \int_a^b \pi x^2 dy = \pi \int_0^1 y\, dy = \frac{1}{2}\pi y^2 |_0^1 = \frac{1}{2}\pi$$

$$\Rightarrow V = \frac{\pi}{2}$$

دویم مثال: د $y = \sqrt{2x}$ تابع او $y = 3$ کرښې ترمنځ د څرخیدلی جسم مساحت پیدا کړئ.

حل:



$$V = \int_a^b \pi y^2 dx = \int_0^3 \pi[\sqrt{2x}]^2 dx = \pi \int_0^3 [\sqrt{2x}]^2 dx = \pi \int_0^3 2x\, dx$$

$$V = 2\pi \int_0^3 x\, dx = 2\pi[\frac{x^2}{2}]_0^3$$

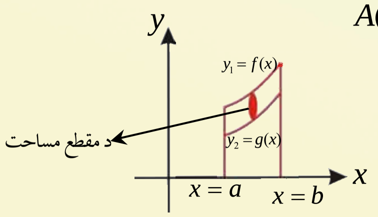
$$V = 9\pi$$

یادونه: که د $y_1 = f(x)$ او $y_1 = g(x)$ تابعګانې په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وی د هغه دوراني جسم حجم د $f(x)$ او $g(x)$ منحني ګانو او د $x = a$ ، $x = b$ کرښو تر منځ جوړېږي له لاندې رابطې څخه لاسته راځي:

$\Delta x =$ د استوانې ارتفاع

$A(x) =$ (د استوانې د مقطع مساحت) $= \pi y_1 - \pi y_2 = \pi(y_1 - y_2)$

د هغې استوانې د حجم فورمول چې د $f(x)$ تابع ګراف د $g(x)$ تابع ګراف څخه پورته قرار لري.



$$V = \int_a^b \pi(y_1^2 - y_2^2)\, dx = \pi \int_a^b (y_1^2 - y_2^2)\, dx$$

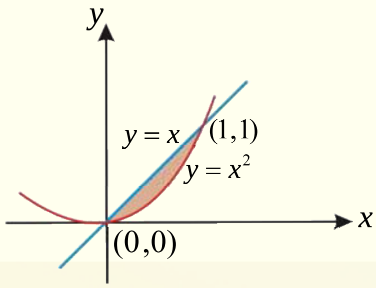
(c) ketabton.com: The Digital Library

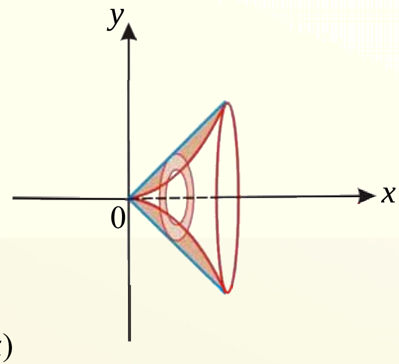
د هغې استواني د حجم فورمول چې د $g(x)$ تابع ګراف ، د $f(x)$ ګراف څخه پورته واقع وي.

$$V = \int_a^b \pi(y_2^2 - y_1^2)\,dx = \pi\int_a^b (y_2^2 - y_1^2)\,dx$$

مثال: د هغه جسم حجم پیداکړئ چې د $y = x^2$ منحني او $y = x$ کرښې تر منځ د پرتې سطحې مساحت له دوران څخه د x محور په شاوخوا په لاس راځي، محاسبه کړئ.

حل:





$$\left.\begin{array}{l} y_1 = x^2 = f(x) \\ y_2 = x = g(x) \end{array}\right\} \Rightarrow y_2 > y_1 \ ,\ g(x) > f(x)$$

$$= \int_a^b \pi(y_2^2 - y_1^2)\,dx = \int_0^1 \pi(x^2 - (x^2)^2)dx$$

$$= \pi\int_0^1 (x^2 - x^4)\,dx = \pi[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}]_0^1$$

$$= \pi[(\frac{1}{3} - 0) - (\frac{1}{5} - 0)] = \pi[\frac{1}{3} - \frac{1}{5}]$$

$$V = \pi[\frac{5-3}{15}] = \pi[\frac{2}{15}] = \frac{2\pi}{15}$$

پوښتنې

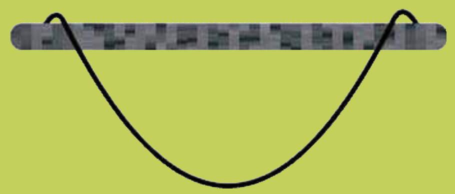
1. د هغه جسم حجم چې د $y = \sin x$ تابع او د $x = 0$ او $x = \pi$ دوو کرښو تر منځ محصور شوی مساحت له دوران څخه د x د محور په چاپیر جوړېږي پیدا کړئ.
2. د هغه جسم حجم پیدا کړئ چې د $y = x^3$ منحني او $y = 8$ ، $x = 0$ کرښو ترمنځ محصور شوی مساحت له دوران څخه د y د محور په چاپیر جوړېږي حساب کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د قوس د اوږوالی محاسبه

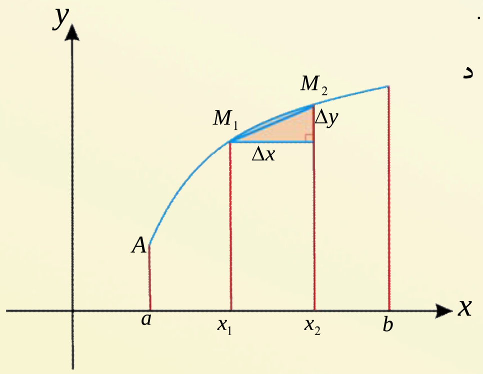
Accounting the Length of Arc

څرنګه کولای شو چې د مخامخ پرې اوږدوالی پیداکړو؟



فعالیت

- د قایمو مختصاتو په سیستم کې د $y = f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال پـه پـام کې ونیسئ او هغې تـه $\overset{\frown}{A}$ ووایې، داسې چې تابع په نوموړی فاصله کې متمادي او د مشتق وړ وي.
- د $[a,b]$ انټروال په دریو مساوي برخو ویشو او د x_1 او د x_2 د قوس اوږدوالی په M_1 او M_2 ښیو.
- د M_1 له ټکي څخه یوه ټوټه کرښه د M_2 په ټکي او یوه بله کرښه، د هغې پـه مخامخ کرښه رسـمو او د دوارو ټوټه کرښو، د تقاطع ټکی ونوموئ.
- د M_1 د کرښې فاصلې ته Δx او M_2 ته Δy وایې او د M_2 M_1 د قایم الزاویه مثلث د مخامخ قوس اوږوالی د فیثاغورث د قضیې په مرسته حساب کړئ.



له پورتني فعالیت څخه کولای شو، چې د M_1 M_2 مثلث د مخامخ قوس اوږدوالی داسې ثبوت کړو.

ثبوت:

له قایم‌الزاویه M_1 M_2 مثلث څخه په ګټې اخیستنې سره لرو چې:

$$(M_1 M_2)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

$$M_1 M_2 = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مشتق له تعریف څخه پوهېږو:

$$f'(t)=\frac{\Delta x}{\Delta t} \quad , \quad g'(t)=\frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$$\Delta x=f'(t)\cdot\Delta t \quad , \quad \Delta y=g'(t)\cdot\Delta t$$

$$M_1M_2=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\sqrt{[f'(t)\cdot\Delta t]^2+[g'(t)\cdot\Delta t]^2}$$

$$M_1M_2=\sqrt{[f'(t)]^2+[g'(t)]^2}\cdot\Delta t$$

نو د ریمان له مجموعې څخه لرو:

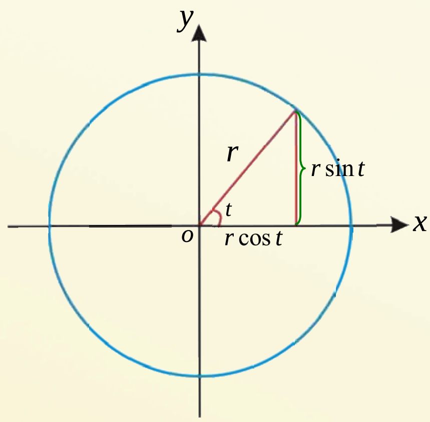
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{[f'(t)]^2+[g'(t)]^2}\cdot\Delta t$$

$$=\int_a^b\sqrt{[f'(t)]^2+[g'(t)]^2}\,dt$$

لومړی مثال: د $x^2+y^2=r^2$ د دایرې محیط محاسبه کړئ:

حل: څرنگه چې د دایرې پارامتري معادله په دې ډول $\begin{cases}x=r\cos t\\ y=r\sin t\end{cases}$ ده.

که چیرې $0\le t\le\pi$ وي، نو د دایرې نمایي محیط پیدا کړئ.



$$P=\int_0^{\pi}\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt$$

$$x'=-r\sin t \quad , \quad y'=r\cos t$$

$$P=\int_0^{\pi}\sqrt{(-r\sin t)^2+(r\cos t)^2}\,dt$$

$$P=\int_0^{\pi}\sqrt{r^2\sin^2 t+r^2\cos^2 t}\,dt$$

$$P=\int_0^{\pi}\sqrt{r^2(\sin^2 t+\cos^2 t)}\,dt=\int_0^{\pi}\sqrt{r^2}\,dt$$

$P=[r\,t]_0^{\pi}=(r\cdot\pi-r\cdot 0)=\pi r$ د دایرې نیمایي محیط

د دایرې مکمل محیط $=2\pi r$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه:

1- د $y = f(x)$ منحني معادله په $a \le x \le b$ انټروال کې راکړل شوې ده، د x د پارامتر په پام کې نیولو سره د منحنی د قوس اوږدوالی داسی محاسبه کوو:

$$= \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\ dx$$

مثال: د $y = f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ منحني د قوس اوږدوالي په $0 \le x \le 4$ فاصله کې حساب کړئ.

حل: $f(x) = x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$

$$= \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\ dx = \int_0^4 \sqrt{1 + (\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}})^2} \cdot dx$$

$$= \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\ dx = \int_0^4 \sqrt{u} \cdot \frac{4}{9}du = \frac{4}{9}\int_0^4 u^{\frac{1}{2}}\ du$$

$$u = 1 + \frac{9}{4}x \qquad du = \frac{9}{4}dx \qquad dx = \frac{4}{9}du$$

$$= \frac{4}{9}[\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}]_0^4 = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3}[u^{\frac{3}{2}}]_0^4 = \frac{8}{27}[\sqrt{u^3}]_0^4$$

$$= \frac{8}{27}[\sqrt{(1 + \frac{9}{4}x)^3}]_0^4 = \frac{8}{27}[\sqrt{(1 + \frac{9}{4} \cdot 4)^3} - 1] = \frac{8}{27}(\sqrt{10^3} - 1)$$

$$= \frac{8}{27}(10\sqrt{10} - 1)$$

2- د $x = f(y)$ منحني په $a \le y \le b$ انټروال کې راکړل شوې ده، د y د پارامتر د په پام کې نیولو سره لرو، چې:

$$= \int_a^b \sqrt{f'^2(y) + 1}\ \ dy$$

مثال: د $x = f(y) = y^{\frac{3}{2}}$ منحني د قوس اوږدوالی په $1 \le y \le 4$ انټروال کې حساب کړئ.

حل:

$$f(y)=y^{\frac{3}{2}} \quad , \quad f'(y)=\frac{3}{2}\cdot y^{\frac{1}{2}}$$

$$=\int_a^b\sqrt{f'^2(y)+1}\,dy=\int_1^4\sqrt{(\frac{3}{2}\cdot y^{\frac{1}{2}})^2+1}\,dy$$

$$=\int_1^4\sqrt{\frac{9}{4}y+1}\,dy=\int_1^4\sqrt{u}\cdot\frac{4}{9}du \qquad u=\frac{9}{4}y+1$$

$$=\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}[u^{\frac{3}{2}}]_1^4=\frac{8}{27}[\sqrt{(\frac{9}{4}y+1)^3}]_1^4 \qquad du=\frac{9}{4}dy$$

$$=\frac{8}{27}[\sqrt{(10)^3}-\sqrt{(\frac{9}{4}+1)^3}] \qquad dy=\frac{4}{9}du$$

$$=\frac{8}{27}[\sqrt{1000}-\sqrt{(\frac{13}{4})^3}]=\frac{8}{27}[10\sqrt{10}-\sqrt{\frac{2197}{64}}]$$

پوښتنې

1. د $x=t^2$ او $y=t^3$ د منحنيګانو د قوس اوږدوالی د $1\le x\le 2$ د فاصلې تر منځ پيدا کړئ.

2. د $f(x)=\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}$ د منحني د قوس اوږدوالی د $0\le x\le 1$ د فاصلې تر منځ پيدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د خپرکي مهم ټکي

- د $\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$ انتیګرال د یوې سطحې د مساحت اندازه یا پراخوالی راښیي چې د $y=f(x)$ منحني او د x د محور او د $x=a$ او $x=b$ کرښو له خوا رابند دی.
- که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې مثبت او متمادي وي، یعنې $y=f(x)\geq 0$ په دې صورت کې د $f(x)$ تابع ټل د x د محور پورته خواته او که $y=f(x)\leq 0$ وي، په دې حالت کې د $f(x)$ د x د محور لاندې خواته واقع او انتیګرال یې منفي دی.

د دوو منحنيګانو په واسطه د محصور شوی مساحت محاسبه:

- که چیرې د $f(x)$ تابع د $g(x)$ تابع د ګراف په پورتنۍ برخه کې واقع وي، نو لرو:

$$A=\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx=\int_a^b f(x)\,dx-\int_a^b g(x)\,dx$$

- که چیرې د $g(x)$ تابع ګراف د $f(x)$ تابع په پاسنۍ برخه کې واقع وی؛ لرو چې:

$$A=\int_a^b [g(x)-f(x)]dx=\int_a^b g(x)dx-\int_a^b f(x)dx$$

د دوراني جسمونو د حجم مساحت:

- که چیرې د $y=f(x)$ متمادي تابع مساحت د $x=a$ او $x=b$ کرښو په واسطه محصور شوی وي، نو د هغه جسم حجم چې د پورتني تابع له منحني د دوران څخه د x محور په شاوخوا لاسته راځي تقریباً استوانه‌یي شکل لري.

چې ارتفاع یې $\Delta x=b-a$ ده او د دې استوانې سطح د دایروي سطحو په واسطه محصوره شوې ده چې دې سطحو ته مقطع وایي او پوهیږو چې د دایرې مساحت نظر د x محور ته $A(x)=\pi r^2$ دی او ددې مقطع شعاع نظر شکل ته د y له محور سره موازي دی؛ نو $y=r$ کیږي او د حجم فورمول یې نظر د ریمان مجموعې ته په لاندې ډول دی:

$$v=\lim_{n\to\infty} V_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} A(x)\Delta x=\int_a^b \pi r^2\,dx=\int_a^b \pi y^2\,dx=\pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx$$

- که د $x=f(y)$ تابع مساحت د $y=c$ ، $y=d$ کرښو ترمنځ محصور شوی وي دداسې استوانې مقطع نظر y محور ته $A(y)=\pi r^2$ چې ارتفاع یې $\Delta x=d-c$ او شعاع یې $x=r$ سره ده هغه حجم چې ددې دوران د مساحت څخه په لاس راځي په لاندې ډول دی:

$$v=\lim_{n\to\infty} V_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} A(y)\Delta y=\int_a^b \pi r^2\,dy=\int_a^b \pi x^2\,dy=\pi\int_a^b [f(y)]^2\,dy$$

د قوس د اوږدوالی محاسبه:

د قوس د اوږدوالی د محاسبې فورمول: $= \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt$

(1 $= \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx$

(2 $= \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(y)}\, dy$

د شپږم څپرکي پوښتنې

1. د $y^2 - x - 5 = 0$ منحني او د y د محور تر منځ د پرتې سطحې مساحت محاسبه کړئ.
2. د هغې سطحې مساحت چې د $y = \sin x$ منحني په $[0, 2\pi]$ انټروال کې او د x د محور تر منځ پرته ده، پیدا کړئ.
3. د $y = x^2 - 2x$ او $y = 6x - x^2$ منحنيګانو تر منځ د پرتې سطحې مساحت حساب کړئ.
4. د $y = -x^2 + 4x - 3$ منحني او x محور تر منځ د پرتې سطحې مساحت پیدا کړئ.
5. د $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ او $y = x^2 - 4x$ منحنيګانو تر منځ د پرتې سطحې مساحت پیدا کړئ.
6. د هغه جسم حجم وټاکئ چې د $y = \sin x - \cos x$ منحني او $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ کرښو د x محور په شاوخوا له دوران څخه په لاس راځي، حساب کړئ.
7. د هغې سطحې حجم چې د $y = \frac{1}{4}x^2 + 2$ منحني د تابع له دوران څخه د x د محور پرشاوخوا په $[0, 4]$ انټروال کې جوړ شوي وي.
8. د هغې رابندې شوې مسطحې د جسم حجم چې د $y = x^2$ منحني او د $x^2 + y^2 = 2$ دایرې له دوران څخه د x محور په شاوخوا جوړ شوې وي پیدا کړئ.
9. د هغه جسم حجم چې د $y = \frac{1}{2}x + 1$ کرښې دوران او د x محور په $[2, 6]$ انټروال کې جوړېږي، په لاس راوړئ.
10. د $y = -x + 4$ منحني د قوس اوږدوالی په $-2 \le x \le 2$ انټروال کې حساب کړئ.
11. د $y = \frac{4}{3}x + \frac{4}{3}$ تابع د منحني د قوس اوږوالی په $2 \le x \le 5$ انټروال کې پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

اووم څپرکی

احصائیه

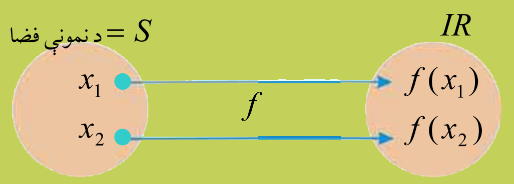
(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

موږ ټول افغانان یو.

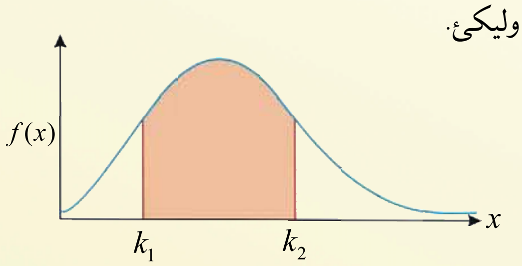
د احتمال د تابع توزیع

د تصادفي ازمایښت، نمونه‌یي فضا او ناځاپه متحول کلمې ستاسو په ذهن کې څه څه را ژوندي کوي.



فعالیت

- هغه تصادفي متحول چې په احصائیه او احتمالاتو کې تري ګټه اخلي، له هغه متحول سره چې په الجبر کې مو لوستي دی څه توپیر لري؟
- که $x_1, x_2 \dots x_n$ د یوه سټ عناصر او $P(x = x_i) = f(x_i)$ تابع ولرو، هغه مرتبې جوړې چې د نوموړی تابع څخه په لاس راځي، جوړې او بیا یې ولیکئ.
- مخامخ شکل ته په کتنې سره د k_1 او k_2 مقدارونو ترمنځ او د $f(x)$ منحنی لاندینی محدود شوی مساحت د انتیګرال په شکل وښیئ.



- د لاندې جدول په پام کې نیولو سره د $[E(x = x_i)] = \sum_{i=1}^{2} x_i f(x_i)$ ، $[x_i - E(x_i)]^2$ او $[x_i - E(x_i)]^2 f(x_i)$ مجموعه په لاس راوړئ.

x_i	0	1
$f(x_i)$	0.5	0.5

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پورتنی فعالیت پایله داسې بیانوو:

ـ هغه تصادفي متحول چې په احصائیه او احتمالاتو کې تر څېړنې لاندې نیول کېږي عبارت له هغه تابع څخه دی، چې د تعریف ناحیه یې نمونه‌یي فضا او د قیمتونو ناحیه یې حقیقي اعداد دي.

ـ که $P(x = x_i) = f(x_i)$ ولرو نو د $[x_1, f(x_1)], [x_2, f(x_2)], \ldots, [x_n, f(x_n)]$ مرتبو جوړو ته د مجزا(گسسته) احتمال تابع وايي.

- د تجمعي او پیوسته احتمال تابع کولای شو، په دې بڼه $F(x) = P(X \le x)$ وښيو.
- که چیرې $f(x)$ د احتمال تابع او x تصادفي متحول وي، په دې صورت کې د دې احتمال چې x د k_1 او k_2 په منځ کې وي برابر دی له:

$$P(k_1 \le x \le k_2) = \int_{k_1}^{k_2} f(x)\,dx$$

- که چیرې x پیوسته ناڅاپه (تصادفي) متحول او $k_1 < k_2$ څخه وي، په دې صورت کې:

$$P(k_1 \le x \le k_2) = F(k_2) - F(k_1)$$

- که چیرې x ناڅاپه مجزا متحول وي، په دې حالت کې اوسط (*Expected Value*) د x تصادفي مجزا متحول چې د $E(x)$ په بڼه ښودل کېږي، برابر دی له:

$$E(x) = x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + \ldots\ldots\ldots + x_n f(x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)$$

$E(x)$ د x اوسط هم بلل کېږي چې هغه په $\bar{x}$ ښيي همدارنگه که چیرې x گسسته تصادفي متحول وي، په دې صورت کې د x وریانس چې د S^2 په شکل ښودل کېږي برابر دی له:

$$S^2 = \sum_{i=1}^{n} [x_i - E(x_i)]^2 f(x_i)$$

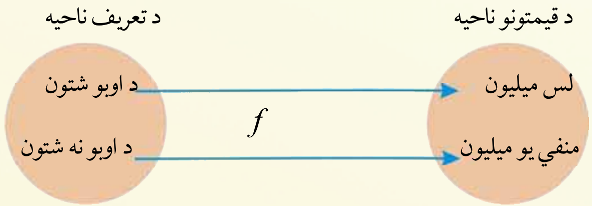
(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: یو شخصي شرکت غواړي د یوې غونډۍ پر سر د اوبو یوه څاه وکني، د اوبو څاه په یو میلیون افغانۍ تمامېږي که نوموړې څاه اوبه ورکړي د شرکت مالك لس میلیونه افغانۍ اجوره اخلي، پرته له هغې بـه د څاه دکېندلو یو میلیون افغانۍ مصرف په زیان ورکړي.

الف_ دا موضوع د یوې تابع په بڼه وښیئ.

ب_ که د دې احتمال چې کیندل شوې څاه اوبه ورکړي 0.2 او د نه ورکولو احتمال یې 0.8 وي، پـه دې صـورت کې د احتمـال تـابع، اوسـط $(Expected\ Value)$، وریـانس او د x تـصادفي متحـول معیـاري انحراف پیدا کړي.

د الف حل:



د ب حل: د تصادفي متحول احتمال تابع، اوسط، وریانس او معیاري انحراف په لاندې جدول کې ښـودل شوي دي:

تصادفي متحول	د تابع احتمال	اوسط	د تصادفي متحول د مربعاتو انحراف د تصادفي متحول له اوسط څخه	واریانس	انحراف معیار
x_i	$f(x_i)$	$E(x)=\sum x_i f(x_i)$	$[x_i - E(x)]^2$	$S^2=[x_i-E(x)]^2 f(x_i)$	S
-1	0.8	$-1\cdot 0.8=-0.8$	$(-1-1.2)^2=4.84$	$4.84\cdot 0.8=3.872$	4.4
10	0.2	$10\cdot 0.2=2$	$(10-1.2)^2=77.44$	$77.44\cdot 0.2=15.488$	
	0.1	1.2		$\sum S^2=19.360$	

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

فرض کوو چې د یوه موټر پلورنځي د 100 ورځو خرڅلاو په لاندې ډول دی:

د ورځو شمېر	60	30	8	2
د پېرودل شوو موټرو شمېر	0	1	2	3

د x تصادفي متحول د احتمال تابع او د تجمعي احتمال تابع پیدا کړئ.

د تجمعي احتمال له تابع څخه په ګټه اخېستنې سره وواېئ چې په یوه ورځ کې حداکثر احتمال د (2) موټرونو او حداقل احتمال د دوو موټرونو په کومه کچه دی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه جمله‌یي توزیع او د برنولي ازمویښت

یو ګڼ‌شمېر کوونکي د پوهنتون د کانکور په آزموینه کې د 160 سؤالونو څخه 100 سؤالونه حل کړل. تاسې څه سوچ کوئ چې دا ګڼ‌شمېر کوونکي په آزموینه کې بریالي کېږي او یا بې نتیجه پاتې کېږي؟

د احتمال دوه جمله‌یي توزیع یوه مجزا توزیع ده چې د مختلفو پېښو د توصیف لپاره په کار وړل کېږي اکثراً پېښې چې په نړۍ کې منځ ته راځي دوه حالتونه لري.

فعالیت

د لاندې آزمویښتي پېښو د شرطونو څخه څه ډول پایلې په لاس راوړلای شئ.

- څو ځلې دوه سکې واچول شي چې سمدلاسه دواړه شېر راشي.
- څو ځلې دوه تاسه واچول شي چې د شمېرو مجموعه یې له 7 څخه کوچنۍ شي.
- د یوې جعبې څخه څو ځلې د یوې مرۍ(مهره) اخېستل چې د تورو او سپینو مرۍ لرونکې ده.
- د یوې جعبې څخه چې د تورو او سپینو مریو لرونکې ده څو ځلې یوه مرۍ واخېستل شي چې اخېستل شوی مرۍ سپینه وي(چې اخېستل شوي مرۍ بیا په جعبه کې واچول شي)
- که چېرې m بریالیتوب د n آزمایښت څخه($m < n$) چې ترتیب په کې مهم نه دی دا ټاکنه د څه په نامه یادېږي او فورمول یې ولیکئ.
- که د m شکلونو د بریالیتوب احتمال د n ازمایښت څخه په P او $n-m$ شکلونو د ناکامې احتمال د n آزمایښت څخه په q وښودل شي نو د m کامیابي احتمال د آزمایښت د n شکلونو څخه به څو وي؟
- زده‌کوونکي له پنځو څلور ځوابه آزموینې د پوښتنو سره مخامخ کېږي. هغوی په ناڅاپه ډول پوښتنو ته ځوابونه ورکوي، فرض وکړئ که د (سم ځواب) بریالیتوب په T او (ناسم ځواب) نه بریالیتوب د F په توری وښودل شي په دې صورت کې د هر یوه سم او ناسم ځواب احتمال به څومره وي؟

له پورتني فعالیت څخه څرګندېږي چې د برنولي آزمایښت یو ناڅاپه ازمایښت دی، چې کولای شو پایله یې په دوو حالتونو بریالیتوب او نابریالیتوب دسته بندي کړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د برنولي توزيع کولای شو چې په $P(x=m)=P^m(1-P)^{1-m}=P^m\cdot q^{1-m}$ په بڼه وښيو په داسې حال کې چې P د برياليتوب احتمال او $q=1-p$ د نابرياليتوب احتمال دی.

که چيرې يو ازمايښت n ځلې تکرار کړو، يو ترادف په لاس راځي، داسې چې که د هر آزمايښت د برياليتوب احتمال P او نابرياليتوب احتمال q وي، په دې صورت کې د n ځلي آزمايښت څخه د m ځلي برياليتوب احتمال عبارت دی له: $0\le m\le n$ $\qquad P(X\le m)=\binom{n}{m}P^m q^{n-m}$

پورتني اړيکه کولای شو چې په دې ډول $B(m,n,p)$ هم وښيو،

د پورتنی فورمول په پام کې نيولو سره کولای شو، د دوه جمله‌يي د توزيع اوسط په $\bar{x}=np$ او د دوی توزيع معياري انحراف د $S=\sqrt{npq}$ په بڼه وښيو.

مثال: د يوه ناروغ د ښه کېدو احتمال د شکرې له ناروغی څخه 0.4 دی، که چيرې 15 تنه په دې ناروغی اخته وي، ددې خومره احتمال شته چې پنځه تنه ښهٔ شي او همدا شان پيداکړی چې له 3 څخه تر 4 تنو پورې جوړ شي.

حل: څرنګه چې $n=15$, $m=5$, $q=0.6$, $P=0.4$ دی نو:

$$P(m=5)=\binom{n}{m}P^m\cdot q^{n-m}=\binom{15}{5}(0.4)^5(0.6)^{10}$$

$$=\frac{15!}{5!(15-5)!}\cdot 0.01024\cdot 0.0060466176 0=\frac{360360}{120}\cdot 0.00006191$$

$$=\frac{22.3098876}{120}=0.1859$$

$$P(3\le m\le 4)=\sum_{i=3}^{4}\binom{15}{i}(0.4)^i(0.6)^{15-i}=(3^{15})(0.4)^3(0.6)^{15-3}+(4^{15})(0.4)^4(0.6)^{15-4}$$

$$=\frac{15!}{3!(15-3)!}(0.064)(0.6)^{12}+\frac{15!}{4!(15-4)!}(0.0256)(0.6)^{11}$$

$$=\frac{2730}{6}(0.000139264)+\frac{3270}{24}(0.0000928512)$$

$$=\frac{0.38019072}{6}+\frac{0.3036}{24}=0.063365+0.012650$$

$$P(3\le m\le 4)=0.076015$$

پوښتني

په يوه کلي کې 200 کورنی اوسيږي که هره کورنی 4 ماشومان ولري ددې احتمال پيداکړئ چې هره کورنی

- حد اقل يو زوی لري.
- يوازې دوه زامن لري.
- يوه يا دوې لوڼې ولري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پواسن د احتمال توزیع

که چیرې د برنولي دوه جملهيي توزیع فورمول په پام کې ونیسو، ایا ویلای شئ که چیرې د برنولي په دوه جملهيي توزیع کې د P قیمت صفر ته تقرب وکړي او د n قیمت لایتناهي ته تقرب وکړي؛ نو د برنولي دوه جملهيي توزیع څه سره مساوي کیږي.

1) $b(x,n,p)=\binom{x}{n}p^{x}q^{n-x}$

2) $\lim_{n\to\infty} b(x,n,p)=\dfrac{\lambda^{x}\cdot e^{-\lambda}}{x!}$

3) $P(x,\lambda)=\dfrac{\lambda^{x}\cdot e^{-\lambda}}{x!}$

فعالیت

کــه $n=5$، $p=0.1$ او $m=2$ وي د $P(x=m)=\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{m}}{m!}$ قیمتونـــه پـــه داســـې حـــال کـــې چـــې $P(X=m)=\binom{n}{m}P^{m}q^{n-m}$ او $\lambda=np$ وي محاسبه کړئ او له پاسنیو توابع قیمتونه سره یې پرتله کړئ، ویلای شي چې دکوم فورمول په کار وړل، ساده دی؟

د پواسن فورمول کولای شي، چې د m شکلونو دکامیابي احتمال د n آزمایښتونو څخه کله چې n لوی او دکامیابي احتمال P کوچنی وي، د تقریبي محاسبې لپاره وکارول کیږي.

دا فورمول عبارت دی له: $P(X=m)=\dfrac{e^{-x}\lambda^{m}}{m!}$

چې $\lambda=np$ او $e=2.71828$ دی.

په یاد ولرئ چې د پواسن په توزیع کې اوسط او هم وریانس له λ سره برابر دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: 200 تنو مسافرينو د يوې الوتکې ټکټ اخېستلی دی د مخکنيو تجاربو په اساس که د هغه مسافرينو چې ټکټ يې رانيولی دی د نه راتگ احتمال 0.01 وي. ددې احتمال چې 3 تنه مسافرين واپس را نه شي څومره دی.

حل: په دې مسئله کې د(نه راتلل) کاميابي ده او همدارنگه ليدل کيږي چې $n=200$ ډېر لوی او $P=0.01$ يعنې د کاميابی احتمال کوچنی دی، نو لرو:

$$P(X=m)=\frac{e^{-\lambda}\,\lambda^{m}}{m!} \qquad \lambda=n\,p=200\cdot 0.01=2$$

$$P(3)=\frac{(2.71828)^{-2}\cdot 2^{3}}{3!}=\frac{\frac{1}{(2.71828)^{2}}\cdot 8}{6}=\frac{\frac{1}{7.3890461584}\cdot 8}{6}$$

$$=\frac{0.13533\cdot 8}{6}=\frac{1.08268}{6}=0.1804$$

اوس که چيرې دا احتمال د دو جمله‌يي په فورمول محاسبه کړو،لرو چې:

$$P(X=m)=\binom{n}{m}P^{m}\,q^{n-m}$$

$$\left.\begin{matrix}n=200\\ p=0.01\end{matrix}\right\}\Rightarrow q=0.99$$

$$P(3)=P(X=3)=\binom{200}{3}(0.01)^{3}(0.099)^{200-3}$$

$$=\frac{200!}{3!\cdot 197!}(0.01)^{3}(0.099)^{197}=0.1814$$

څرنگه چې ليدل کيږي دواړه ځوابونه سره معادل دي نو واضح ده چې د پواسن د فورمول له لارې احتمال محاسبه ساده ده.

يادونه:

د پواسن د فورمول په واسطه کولای شو چې په یوه ټاکلي وخت کې د ورتللو د شمېر احتمال په لاندې ډول وښيو:

$$P(X=m)=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^m}{m!}$$

په پورتني فورمول کې t د ښودل شوی وخت نسبت پر ټول وخت چې اوسط هغې ته ورکړل شوی وي m د ورتللو شمېر د t په واحد وخت کې د λ د ورتګ شمېر اوسط په واحد د وخت کې دی.

مثال: که په یوه ساعت کې د یوه بانک د مراجعینو شمېر په متوسط ډول 60 تنه وي، ددې احتمال چې څلور تنه په لومړيو دريو دقيقو کې راغلی وي څومره دی.

حل:

$$\lambda=60 \quad , \quad t=\frac{3}{60}=\frac{1}{20}$$

$$m=4 \quad , \quad \lambda t=60\cdot\frac{1}{20}=3$$

$$P(m=4)=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^m}{m!}=\frac{e^{-3}(3)^4}{4!}=\frac{(2.71828)^{-3}(3)^4}{4!}=\frac{\frac{1}{(2.71828)^3}\cdot 81}{4\cdot3\cdot2\cdot1}$$

$$=\frac{\frac{1}{20.0854}\cdot 81}{24}=\frac{4.03278}{24}=0.168032$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

د چاپ د یوه ماشین د جوړولو لپاره په یوه کال کې په متوسط ډول ورتګ دوه ځلې ده، فرض کوو چې د پواسن توزیع په دې اړه صدق کوي.

الف: د ماشین د جوړولو لپاره د ورتګ د احتمال توزیع په یوه کال کې حساب کړئ.

ب: د توزیع اوسط او معیار انحراف څومره دی؟

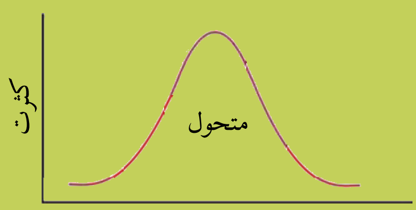
ج: فرض کړئ که د هر ورتګ مصرف 100 افغانۍ وي، د هر ماشین د جوړولو مصرف پیدا کړئ؟

د: ددې احتمال چې په هر کال کې دیوه ماشین د جوړولو مصرف له 300 افغانیو څخه زیات وي، څومره دی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د نورمال توزیع

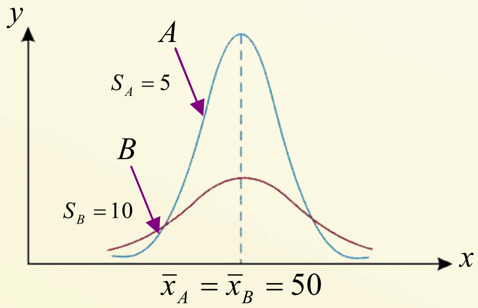
پوهیږو چې د نورمال منحني شکل مشابه او متناظر له زانګولی سره ده، په نورمال منحني کې د پراګنده‌ګی مرکزي شاخصونه(معیاري انحراف او اوسط) څه ډول ځایونه(موقعیتونه) نیولی شي.



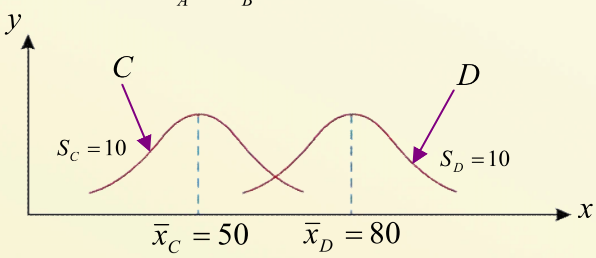
فعالیت

د نورمال بېلابېل توزیعات د بېلابېلو اوسط او معیار انحرافونو لرونکی دی.

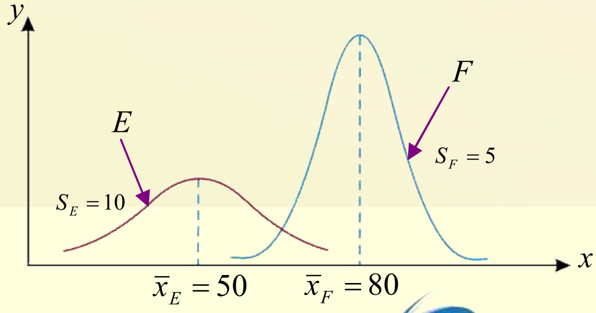
څو د نورمال توزیع له بېلابېلو اوسطحو او معیار انحرافونو سره په لاندې شکلونو کې ورکړل شوي دي.



الف شکل



ب شکل



ج شکل

لاندینی فعالیت له پورتنیو شکلونو څخه په ګټه اخیستنې سره په شفاهي ډول بیان کړئ؟

- د الف په شکل کې د A او B د تصادفي متحول توزیع د څه ډول معیاري انحراف او اوسط لرونکې ده؟
- د ب په شکل کې C او D توزیع د څه ډول معیار انحراف او اوسط لرونکی دی؟
- د ج په شکل کې د E او F توزیع د څه ډول معیار انحراف اوسط لرونکی دی؟
- د نورمال منحني شکل دواړو خواوو ته تر کوم ځایه غزیدلي دي؟

د پورتني فعالیت له سرته رسولو څخه داسې پایله په لاس راځي چې:

د نورمال منحني توزیع کیدای شي چې په څلورو طریقو یو له بل سره توپیر ولري. د نورمال توزیع ریاضیکي معادله چې د $f(x)$ احتمال توزیع تابع ښودونکی ده، په لاندې ډول ښوول کېږي.

$$f(x)=\frac{1}{s\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{s}\right)^2}$$

او یا

$$f(x)=N(x,\bar{x},s)$$

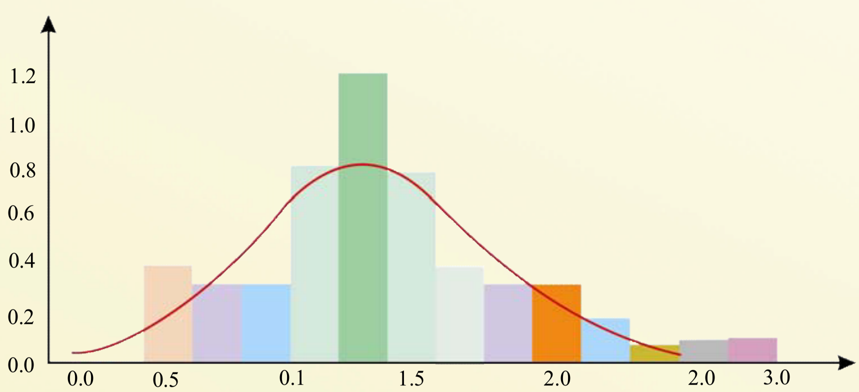
په داسې حال کې چې $e=2.71828$ او π هم ثابت عدد 3.14189 دی $\bar{x}$ اوسط، s معیار انحراف، x پیوسته تصادفي مقدار او $f(x)$ د منحني جګوالی راښیي.

د نورمال توزیع له پیوسته توزیعګانو څخه ده. د نورمال توزیع په واسطه کولای شو، د اندازه کولو توپیر په ښه توګه سره نږدې کړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د موټرونو ماشين د تيلو سوزولو په وخت کې يوه اندازه مضر لوګی توليدوي، د هغه مضر لوګی مقدار چې له 46 موټرونو توليدېږي، چې د يوه تن په واسطه چې لورنزن نومېده په 1980 کال کې وڅېړل شو.يوه اندازه لوګی د نايتروجن اوکسايدونه لري. لاندې مستطيلي ګراف د نايتروجن اوکسايد ميزان د $(\frac{gr}{mil})$ د 46 موټرونو د نورمال احتمال توزيع اوسط او وريانس چې د نومورې کس له خوا تر څېړنې لاندې نيول شوی. ددې مستطيلي ګراف د ستونونو مساحت متناسب دی له هغو 46 نمونه‌يي شمېر له اندازه‌ګيری سره چې ددې ستون د افقي ټکو تر منځ قرار لري.

د مثال په ډول په څلورم ستون کې(چې له 1 څخه تر 1.2 پورې په افقي محور قرار لري) د $0.870 \cdot 0.2 = 0.174$ مساحت لرونکی دی چې د $\frac{4}{46}$ سره برابر دی ځکه 8 ديتا له 1 څخه تر 1.2 پورې پراته دي.

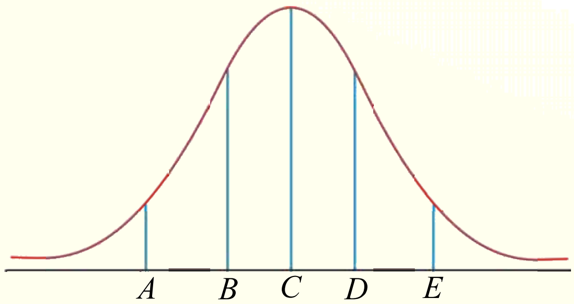


(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنه

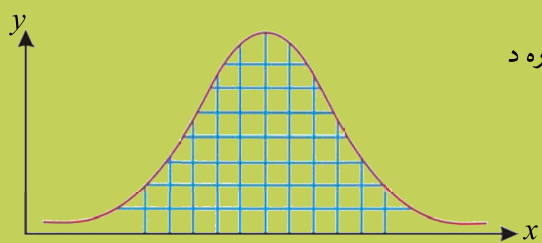
لاندینی شکل په پام کې ونیسئ د A, B, C, D او E ټکو موقعیت د معیار انحراف د اوسط له جنسه پیدا کړئ.



د نورمال توزیع منحني لاندې مساحت او د هغې ستېنډرډ کول

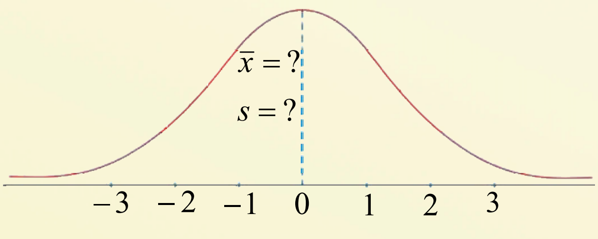
مخامخ شکل په پام کې ونيسئ:

د $y = f(x)$ د منحني لاندې مساحت د محاسبې لپاره د څه ډول لارو ورانديز کوئ.



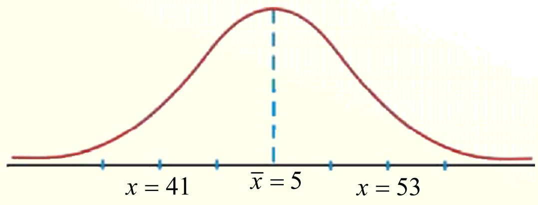
فعاليت

- که چيرې د x تصادفي پيوسته متحول د احتمال نورمال توزيع چې اوسط يې $\bar{x}$ او معيار انحراف يې s وي، ددې احتمال چې دا تصادفي متحول د x_1 او x_2 تر منځ کميت غوره کړي د انتيګرال په بڼه يې وليکئ.
- سوچ کولای شئ چې د احتمال نورمال توزيع د رياضي شکل انتيګرال محاسبه به ساده کار وي.
- که چيرې د نورمال تصادفي متحول په $z = \frac{x-\bar{x}}{s}$ ډول وليکو، د $f(x)$ تابع د احتمال توزيع برابر له څه سره ده؟
- ويلای شئ چې اوسط او معيار انحراف په لاندې شکل کې له کومو عددونو سره برابر دي؟



(c) ketabton.com: The Digital Library

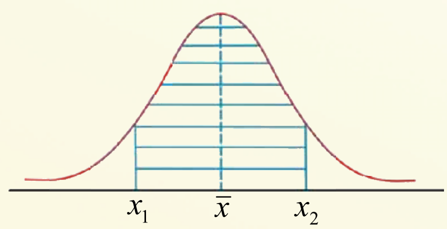
- که په لاندې شکل کې چې د $x = 41$ او $x = 53$ قیمتونه په نورمال ډول د $\bar{x} = 50$ اوسط او $S = 5$ معیار انحراف ښودل شوي دي نو د $z = \frac{x - \bar{x}}{s}$ مقدار په لاس راوړئ.



له پورتنۍ فعالیت څخه دا پایله په لاس راځي چې د احتمال د محاسبې لپاره داسې چې د x پیوسته تصادفي متحول د x_1 او x_2 تر منځ یو کمیت ونیسئ، نو باید د x د احتمال د توزیع له تابع څخه انتګرال ونیسو او د منحنۍ لاندې سطحه د x_1 او x_2 فاصلو ترمنځ په لاندې ډول محاسبه کړو:

$$f(x_1 < x < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\bar{x}}{s})^2}$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} N(x, \bar{x}, s)dx$$



د نورمال توزیع احتمال محاسبه ساده کار نه دی، د نورمال توزیعګانو د منحنۍ لاندې مساحت محاسبه اوږدو جدولونو ته اړتیا لري چې عملاً دا کار ګران دی، کولای شو چې د جدول د جوړولو شکل د احصائیوي data د سټنډرډ کولو په واسطه حل کړو.

په دې معنا چې کولای شو په x پورې اړوند تصادفي متحول چې د نورمال توزیع لرونکی دی، د لاندې اړیکې په واسطه سټنډرډ کړو.

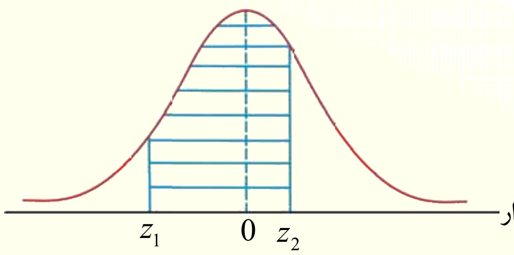
$$z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

دلته z د سټنډرډ نورمال متحول په نامه او منحنۍ ته د سټنډرډ نورمال منحنۍ په نامه یا د نورمال احتمال منحنۍ نومول کېږي، په یاد ولرئ چې د z سټنډرډ وي، متحول تل د صفر اوسط لرونکی او یو معیار انحراف یې دی، همدارنګه د نورمال منحنۍ او افقي محور ترمنځ مساحت له ټاکل شوي واحد سره برابر وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

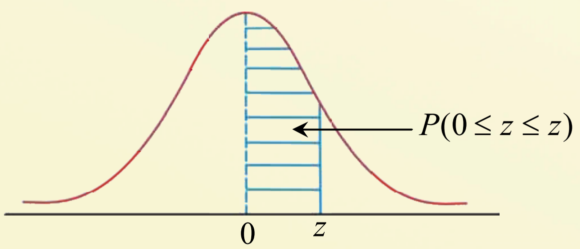
لاندې مساحت د يوه منحني يوه برخه د نورمال احتمال چې له احتمال سره مستقيم تناسب لري او کولای شو چې د $z=\frac{x-\bar{x}}{s}$ بدلولو سره يې په لاندې ډول وښيو.

$$f(z_1<z<z_2)=\int_{z_1}^{z_2}\frac{1}{s\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-z^2}{2}}dz=\int_{z_1}^{z_2}N(z,0,1)\,dz$$



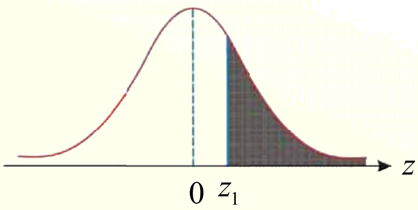
د x متحول منحني لاندې مساحت چې د $x=x_1$ او $x=x_2$ ترمنځ واقع دی، د z متحول له منحني مساحت سره چې د $z=z_1$ او $z=z_2$ ترمنځ پراته مساوي دي. په پايله کې کولای شو چې د نورمال د توزيع ستنډرډ د جدول په لرلو سره د نورمال توزيع احتمال د ناڅاپه متحول د هر ممکنه قيمت لپاره په لاس راوړای شو.

د ستنډرډ نورمال د توزيع احتمال د جدول د استعمال له لارې کولای شو، په لنډ ډول توضيح کړو. هغه جدول چې ددې لوست په پای کې راغلی دی، د ستنډرډ نورمال توزيع اړوند په احتمالاتو کې ګډون لري. لاندې جدول ددې لوست يوه برخه د جدول پای راښيي، هغه ارقام چې د جدول دپاسه ليکل شوی دی، راښيي چې z د مثبتو مقدارونو لپاره تنظيم شوی دی چې د منحني لاندې مساحت له صفر ټکی څخه تر z پورې راښيي.

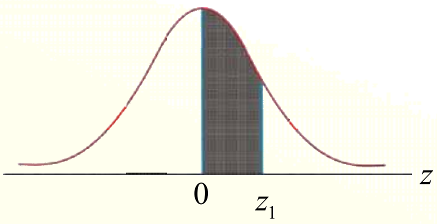


(c) ketabton.com: The Digital Library

جدول(1)



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9278	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9268	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997



جدول(2)

z	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۰/۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۴۰	۰/۰۰۸۰	۰/۰۱۲۰	۰/۰۱۶۰	۰/۰۱۹۹	۰/۰۲۳۹	۰/۰۲۷۹	۰/۰۳۱۹	۰/۰۳۵۹
۰/۱	۰/۰۳۹۸	۰/۰۴۳۸	۰/۰۴۷۸	۰/۰۵۱۷	۰/۰۵۵۷	۰/۰۵۹۶	۰/۰۶۳۶	۰/۰۶۷۵	۰/۰۷۱۴	۰/۰۷۵۴
۰/۲	۰/۰۷۹۳	۰/۰۸۳۲	۰/۰۸۷۱	۰/۰۹۱۰	۰/۰۹۴۸	۰/۰۹۸۷	۰/۱۰۲۶	۰/۱۰۶۴	۰/۱۱۰۳	۰/۱۱۴۱
۰/۳	۰/۱۱۷۹	۰/۱۲۱۷	۰/۱۲۵۵	۰/۱۲۹۳	۰/۱۳۳۱	۰/۱۳۶۸	۰/۱۴۰۶	۰/۱۴۴۳	۰/۱۴۸۰	۰/۱۵۱۷
۰/۴	۰/۱۵۵۴	۰/۱۵۹۱	۰/۱۶۲۸	۰/۱۶۶۴	۰/۱۷۰۰	۰/۱۷۳۶	۰/۱۷۷۲	۰/۱۸۰۸	۰/۱۸۴۴	۰/۱۸۷۹
۰/۵	۰/۱۹۱۵	۰/۱۹۵۰	۰/۱۹۸۵	۰/۲۰۱۹	۰/۲۰۵۴	۰/۲۰۸۸	۰/۲۱۲۳	۰/۲۱۵۷	۰/۲۱۹۰	۰/۲۲۲۴
۰/۶	۰/۲۲۵۸	۰/۲۲۹۱	۰/۲۳۲۴	۰/۲۳۵۷	۰/۲۳۸۹	۰/۲۴۲۲	۰/۲۴۵۴	۰/۲۴۸۶	۰/۲۵۱۸	۰/۲۵۴۹
۰/۷	۰/۲۵۸۰	۰/۲۶۱۲	۰/۲۶۴۲	۰/۲۶۷۳	۰/۲۷۰۴	۰/۲۷۳۴	۰/۲۷۶۴	۰/۲۷۹۴	۰/۲۸۲۳	۰/۲۸۵۲
۰/۸	۰/۲۸۸۱	۰/۲۹۱۰	۰/۲۹۳۹	۰/۲۹۶۷	۰/۲۹۹۶	۰/۳۰۲۳	۰/۳۰۵۱	۰/۳۰۷۸	۰/۳۱۰۶	۰/۳۱۳۳
۰/۹	۰/۳۱۵۹	۰/۳۱۸۶	۰/۳۲۱۲	۰/۳۲۳۸	۰/۳۲۶۴	۰/۳۲۸۹	۰/۳۳۱۵	۰/۳۳۴۰	۰/۳۳۶۵	۰/۳۳۸۹
۱/۰	۰/۳۴۱۳	۰/۳۴۳۸	۰/۳۴۶۱	۰/۳۴۸۵	۰/۳۵۰۸	۰/۳۵۳۱	۰/۳۵۵۴	۰/۳۵۷۷	۰/۳۵۹۹	۰/۳۶۲۱
۱/۱	۰/۳۶۴۳	۰/۳۶۶۵	۰/۳۶۸۶	۰/۳۷۰۸	۰/۳۷۲۹	۰/۳۷۴۹	۰/۳۷۷۰	۰/۳۷۹۰	۰/۳۸۱۰	۰/۳۸۳۰
۱/۲	۰/۳۸۴۹	۰/۳۸۶۹	۰/۳۸۸۸	۰/۳۹۰۷	۰/۳۹۲۵	۰/۳۹۴۴	۰/۳۹۶۲	۰/۳۹۸۰	۰/۳۹۹۷	۰/۴۰۱۵
۱/۳	۰/۴۰۳۲	۰/۴۰۴۹	۰/۴۰۶۶	۰/۴۰۸۲	۰/۴۰۹۹	۰/۴۱۱۵	۰/۴۱۳۱	۰/۴۱۴۷	۰/۴۱۶۲	۰/۴۱۷۷
۱/۴	۰/۴۱۹۲	۰/۴۲۰۷	۰/۴۲۲۲	۰/۴۲۳۶	۰/۴۲۵۱	۰/۴۲۶۵	۰/۴۲۷۹	۰/۴۲۹۲	۰/۴۳۰۶	۰/۴۳۱۹
۱/۵	۰/۴۳۳۲	۰/۴۳۴۵	۰/۴۳۵۷	۰/۴۳۷۰	۰/۴۳۸۲	۰/۴۳۹۴	۰/۴۴۰۶	۰/۴۴۱۸	۰/۴۴۲۹	۰/۴۴۴۱
۱/۶	۰/۴۴۵۲	۰/۴۴۶۳	۰/۴۴۷۴	۰/۴۴۸۴	۰/۴۴۹۵	۰/۴۵۰۵	۰/۴۵۱۵	۰/۴۵۲۵	۰/۴۵۳۵	۰/۴۵۴۵
۱/۷	۰/۴۵۵۴	۰/۴۵۶۴	۰/۴۵۷۳	۰/۴۵۸۲	۰/۴۵۹۱	۰/۴۵۹۹	۰/۴۶۰۸	۰/۴۶۱۶	۰/۴۶۲۵	۰/۴۶۳۳
۱/۸	۰/۴۶۴۱	۰/۴۶۴۹	۰/۴۶۵۶	۰/۴۶۶۴	۰/۴۶۷۱	۰/۴۶۷۸	۰/۴۶۸۶	۰/۴۶۹۳	۰/۴۶۹۹	۰/۴۷۰۶
۱/۹	۰/۴۷۱۳	۰/۴۷۱۹	۰/۴۷۲۶	۰/۴۷۳۲	۰/۴۷۳۸	۰/۴۷۴۴	۰/۴۷۵۰	۰/۴۷۵۶	۰/۴۷۶۱	۰/۴۷۶۷
۲/۰	۰/۴۷۷۲	۰/۴۷۷۸	۰/۴۷۸۳	۰/۴۷۸۸	۰/۴۷۹۳	۰/۴۷۹۸	۰/۴۸۰۳	۰/۴۸۰۸	۰/۴۸۱۲	۰/۴۸۱۷
۲/۱	۰/۴۸۲۱	۰/۴۸۲۶	۰/۴۸۳۰	۰/۴۸۳۴	۰/۴۸۳۸	۰/۴۸۴۲	۰/۴۸۴۶	۰/۴۸۵۰	۰/۴۸۵۴	۰/۴۸۵۷
۲/۲	۰/۴۸۶۱	۰/۴۸۶۴	۰/۴۸۶۸	۰/۴۸۷۱	۰/۴۸۷۵	۰/۴۸۷۸	۰/۴۸۸۱	۰/۴۸۸۴	۰/۴۸۸۷	۰/۴۸۹۰
۲/۳	۰/۴۸۹۳	۰/۴۸۹۶	۰/۴۸۹۸	۰/۴۹۰۱	۰/۴۹۰۴	۰/۴۹۰۶	۰/۴۹۰۹	۰/۴۹۱۱	۰/۴۹۱۳	۰/۴۹۱۶
۲/۴	۰/۴۹۱۸	۰/۴۹۲۰	۰/۴۹۲۲	۰/۴۹۲۵	۰/۴۹۲۷	۰/۴۹۲۹	۰/۴۹۳۱	۰/۴۹۳۲	۰/۴۹۳۴	۰/۴۹۳۶
۲/۵	۰/۴۹۳۸	۰/۴۹۴۰	۰/۴۹۴۱	۰/۴۹۴۳	۰/۴۹۴۵	۰/۴۹۴۶	۰/۴۹۴۸	۰/۴۹۴۹	۰/۴۹۵۱	۰/۴۹۵۲
۲/۶	۰/۴۹۵۳	۰/۴۹۵۵	۰/۴۹۵۶	۰/۴۹۵۷	۰/۴۹۵۹	۰/۴۹۶۰	۰/۴۹۶۱	۰/۴۹۶۲	۰/۴۹۶۳	۰/۴۹۶۴
۲/۷	۰/۴۹۶۵	۰/۴۹۶۶	۰/۴۹۶۷	۰/۴۹۶۸	۰/۴۹۶۹	۰/۴۹۷۰	۰/۴۹۷۱	۰/۴۹۷۲	۰/۴۹۷۳	۰/۴۹۷۴
۲/۸	۰/۴۹۷۴	۰/۴۹۷۵	۰/۴۹۷۶	۰/۴۹۷۷	۰/۴۹۷۷	۰/۴۹۷۸	۰/۴۹۷۹	۰/۴۹۷۹	۰/۴۹۸۰	۰/۴۹۸۱
۲/۹	۰/۴۹۸۱	۰/۴۹۸۲	۰/۴۹۸۲	۰/۴۹۸۳	۰/۴۹۸۴	۰/۴۹۸۴	۰/۴۹۸۵	۰/۴۹۸۵	۰/۴۹۸۶	۰/۴۹۸۶
۳/۰	۰/۴۹۸۷	۰/۴۹۸۷	۰/۴۹۸۷	۰/۴۹۸۸	۰/۴۹۸۸	۰/۴۹۸۹	۰/۴۹۸۹	۰/۴۹۸۹	۰/۴۹۹۰	۰/۴۹۹۰
۳/۱	۰/۴۹۹۰	۰/۴۹۹۱	۰/۴۹۹۱	۰/۴۹۹۱	۰/۴۹۹۲	۰/۴۹۹۲	۰/۴۹۹۲	۰/۴۹۹۲	۰/۴۹۹۳	۰/۴۹۹۳
۳/۲	۰/۴۹۹۳	۰/۴۹۹۳	۰/۴۹۹۴	۰/۴۹۹۴	۰/۴۹۹۴	۰/۴۹۹۴	۰/۴۹۹۴	۰/۴۹۹۵	۰/۴۹۹۵	۰/۴۹۹۵
۳/۳	۰/۴۹۹۵	۰/۴۹۹۵	۰/۴۹۹۵	۰/۴۹۹۶	۰/۴۹۹۶	۰/۴۹۹۶	۰/۴۹۹۶	۰/۴۹۹۶	۰/۴۹۹۶	۰/۴۹۹۷
۳/۴	۰/۴۹۹۷	۰/۴۹۹۷	۰/۴۹۹۷	۰/۴۹۹۷	۰/۴۹۹۷	۰/۴۹۹۷	۰/۴۹۹۷	۰/۴۹۹۷	۰/۴۹۹۷	۰/۴۹۹۸
۳/۵	۰/۴۹۹۸	۰/۴۹۹۸	۰/۴۹۹۸	۰/۴۹۹۸	۰/۴۹۹۸	۰/۴۹۹۸	۰/۴۹۹۸	۰/۴۹۹۸	۰/۴۹۹۸	۰/۴۹۹۸
۳/۶	۰/۴۹۹۸	۰/۴۹۹۸	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹
۳/۷	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹
۳/۸	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹
۳/۹	۰/۵۰۰۰	۰/۵۰۰۰	۰/۵۰۰۰	۰/۵۰۰۰	۰/۵۰۰۰	۰/۵۰۰۰	۰/۵۰۰۰	۰/۵۰۰۰	۰/۵۰۰۰	۰/۵۰۰۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مثال په ډول که چیري $z=1.56$ وي لومړی هغه سطر پیداکړئ چې په هغه کې z د 1.5 معادل دی، که چیرې ددې کرښې په اوږدوالي پرمخ لاړ شو، تر څو هغه ستون ته ورسېږې چې له پاسه 0.06 لیکل شوی دی له 0.9406 عدد سره مخامخ کېږو چې د منحنې د لاندې اړوندې سطحې د $z=0$ څخه تر $z=1.56$ پورې دی، نو لیکلای شو چې:

$$P(0 \le Z \le 1.56) = 0.9406$$

لومړی مثال: د څښلو(نوشابې) د بوتلونو د ډکولو دستګاه داسې تنظیم شوې ده، که 952 ملي‌لیټر نوشابه په بوتل کې واچوي ددې نوشابې میزان چې د نورمال توزیع اوسط یې 952 ملي‌لیټره او معیاري انحراف یې 4 ملي‌لیټره دی. ددې احتمال چې بوتل د 952 او 956 ملي‌لیټرو ترمنځ نوشابه ولري، څومره دی.

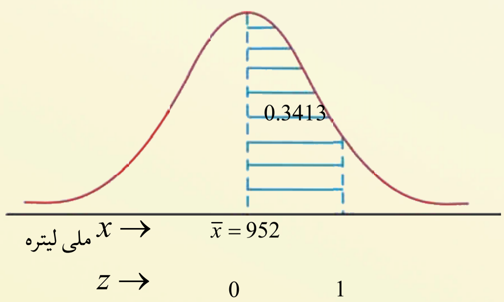
حل: لومړی z د x له جنسه پیداکوو:

$$z_1 = \frac{x-\bar{x}}{s} = \frac{952-952}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

$$z_2 = \frac{956-952}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

نو پر دې اساس د x د تعریف ناحیه له 952 څخه تر 956 د z تعریف د ناحیې له صفر څخه تر 1 بدلېږي.

د لوست د پیل له جدول(2) څخه په ګټه اخیستنې سره لرو $P(0 \le z \le 1) = 0.3413$ احتمال داسې دی چې هغه بوتل چې له 952 څخه تر 956 ملي‌لیټرو نوشابه ولري، یا په بل عبارت 34.13 فیصده ډک شوي بوتلونه له 952 څخه تر 956 ملي‌لیټره نوشابه لري؛ یعنې:



$$\begin{aligned} P(0 \le z \le 1) &= P(z_2) - P(z_1) \\ &= P(1) - P(0) \\ &= 0.3413 - 0 \\ &= 0.3413 \end{aligned}$$

دویم مثال: په یوه خاص مضمون کې د زده‌کوونکو د نمبرو د نورمال توزیع اوسط 70 او معیاري انحراف یې 8 دی له نورمال سټنډرډ جدول څخه په ګټه اخیستنې سره له 54 څخه تر 84 نمبرو ترمنځ فیصدي پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: د مسألې حل په لاندې ډول په ترسيمي بڼه ښودل شوی دی.

د $x = 54$ لپاره لرو: $z_1 = \frac{54-70}{8} = -2$

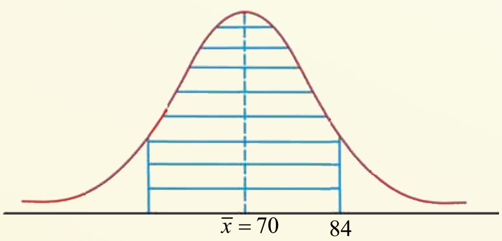
د $x = 84$ لپاره لرو: $z_2 = \frac{84-70}{8} = 1.75$

څرنګه چې د سټنډرډ نورمال منحني لاندې مساحت په يو محدود انټروال کې په پام کې نيول شوی دی؛ نو له نورمال سټنډرډ جدول(2) څخه لرو:

$$P(-2 \le z \le 0) = P(0 \le z \le 2) = 0.9772$$
$$P(0 \le z \le 1.75) = 0.9599$$

د ټاکل شوي مساحت د پام وړ احتمال دی.

$$P(-2 \le z \le 0) + P(0 \le z \le 1.75) = 0.4772 + 0.4599$$
$$= 0.9371$$



پوښتنې

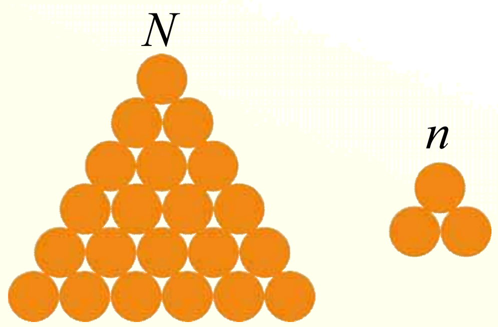
د لومړي مثال په پام کې نيولو سره محاسبه کړئ چې د بوتلونو څو فيصده له 948 څخه تر 956 ملي‌ليټرو پورې نوشابه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

نمونه اخېستل

په دې متل کې((موټې د خروارو نمونه ده)) څرنګه تحليلوئ.



$N =$ جامعه $\Rightarrow n = ?$

فعاليت

- که چيرې وغواړئ چې د افغانستان د 12 ټولګې د زده‌کوونکو ونې(قد) اندازه کړئ ددې کار لپاره څه ډول لارې وړانديز کوئ.
- نمونه په دوو ډولونو وېشل کېږي، ساده نمونه او ناځاپه نمونه، تاسې ددې نمونو کومې يوې ته غوره‌والی ورکوئ؟ ولې؟
- د نمونه‌ګيرۍ لپاره ښکاره څېل دلايل شته ايا کولای شئ يو يا دوه دليلونه يې ووايئ.
- سوچ کولای شئ چې د اوسط او معيار انحراف عددي ځانګړنې چې د ټولنې د توزيع او د نمونې د توزيع لپاره ورځخه ګټه اخېستل کېږي، يو شان وي.
- ايا د نمونه‌ګيرۍ او ليدل شويو ناځاپه متحولينو د مقدارونو ترمنځ توپير شته؟

له پورتني فعاليت څخه پوهېږو چې د نمونه اخېستنې بېلې بېلې لارې شته دی.

ـ ناځاپه نمونه اخېستنه: د ټولنې ټول عناصر په ټاکل کېدو کې هم چانس دی.

ـ سيستماټيک نمونه اخېستنه: د ټولنې عناصر په منظم ډول کود وهل شوی دی.

ـ طبقه‌يي نمونه اخېستنه: ټولنه په بېلابېلو متجانسو ډلو وېشل شوی وي.

ـ خوشه‌يي نمونه اخېستنه: که ټولنه ډېره لويه وي، هغه په بېلابېلو ځانګو وېشو او له هرې ځانګې څخه يوه نمونه ټاکو.

ـ د هرې ټولنې عددي ځانګړنې(اوسط معيار انحراف) ته د ټولنې پارامتر وايي.

ـ د هرې ټولنې د عددي نمونه‌ګيرې ځانګړنې(اوسط معيار انحراف) ته آماره وايي.

ـ د نمونې پايلې د مشاهدې د مقدارونو په عنوان د ناځاپه متحولينو په بڼه په پام کې نيسو.

ـ د $x_1, x_2 \dots x_n$ ناځاپه متحولونو يوه ناځاپه نمونه د x تصادفي متحول ويل کېږي.

که چیرې تابع یې په دې ډول تعریف شوی وي.

$$f(x_1,x_2)...,x_n)=f(x_1)\cdot f(x_2)...f(x_n)$$

مثال: فرض کوو چې په یوه قطی کې 5 سپینې او 7 تورې ګلولې وي، د قطی له منځ څخه 5 ګلولې یوه یوه ځای په ځای کول(د یوه عنصر دویم ځل ټاکل مجاز) ټاکو.

د ټاکل شوی ناخاپه نمونې تصادفي متحولین په ژبه بیان کړئ او اړونده توزیع یې پیدا کړئ.

حل: د x_1، x_2 او x_3 ناخاپه متحولونو په پام کې ونیسئ په لومړی پړاو کې د x_1 ناخاپه متحول لپاره د صفر عدد د تورې ګلولې لپاره او د (1) عدد د سپینې ګلولې ټاکلو په لومړی پړاو کې ځانته غوره کړئ. او د x_2 متحول هم د صفر عدد د تورې ګلولې او د (1) عدد سپینه ګلوله لپاره په دویم پړاو کې ځانته غوره کوي په همدې بڼه د x_3 ناخاپه متحول په دویم پړاو کې هم د صفر عدد د تورې ګلولې لپاره ټاکو چې په دې پړاو کې (1) عدد سپینه ګلوله ځانته غوره کوي، په دې حالت کې د x_1، x_2 او x_3 ناخاپي متحولونه د برنولي ناخاپه متحولین دي. د $p=\frac{5}{12}$ له پارامتر او د $i=1,2,3$ مقدارونو څخه لرو:

$$f(x_i)=(\frac{5}{12})^{x_i}(1-\frac{5}{12})^{1-x_i}$$

څرنګه چې نمونه اخېسته ناخاپه ده، نو د x_1، x_2 و x_3 ناخاپه متحولین یو له بل څخه بېل دی نو تابع یې عبارت دی له:

$$f(x_1,x_2,x_3)=P(x_1=x_1\ ,\ x_2=x_2\ ,\ x_3=x_3)$$

په یاد ولرئ چې د عناصرو هره ناخاپه نمونې له مجهول پارامترونو سره تړلې نه دي، هغې ته آماره وایي.

پوښتنې

1. که $N=25$ د یوې ټولنې حجم وي که وغواړو چې پنځه ګونه ناخاپه نمونه یې پیدا کړو، د هغو نمونو شمېر چې په لاس راځي څومره ده؟
2. ساده او ناخاپه نمونې سره له مثال بیان کړئ؟
3. فرض کوو چې د یوې ټولنې څخه مو ناخاپه نمونه رانیولې ده څه سوچ کوئ چې ددې نمونې سره به څه وکړو؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د نمونې د اوسط توزیع

دولت غواړي ویوهېږي چې د یوه ښار د وګړو متوسطه ګټه(سپما) څومره ده؟

ددې کار لپاره ناڅاپه نمونه ټاکي او د نمونې اوسط محاسبه کوي.

اوس باید ددې محاسبه شوې مقدار څخه کوم کمیت تخمین کړئ؟

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = ?$$

فعالیت

- د لاندې data د دریو زده‌کوونکو د ورزشي لوبو د نمبرو پایله راښیي:

نوم	داود	سلیمان	پژواک
نمبرې	2	3	4

- د نمبرو د احتمال توزیع یې ولیکئ.
- د زده‌کوونکو د نمبرو اوسط او معیار انحراف حساب کړئ.
- راکړل شوی نمبرې د مرتبو جوړو په مرسته(ممکنې دوه ګونې نمونې د ځای په نیولو) ارایه او د هرې نمونې اوسط د جدول په بڼه وښیئ.
- د نمونو د اوسط د احتمال توزیع جدول(د $\bar{x}$ دکثرت د تو زیع جدول) ولیکئ.
- د $\bar{x}$ دکثرت توزیع جدول مستطیلي ګرام رسم کړئ.
- د اوسط د $\bar{x}$ متحول د زده‌کوونکو د نمبرو د اوسط سره پرتله کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

له پورتني فعالیت څخه دا پایله په لاس راځي:

که $x_1, x_2, ...x_n$ د یوې ټولنې د $f(x)$ احتمال تابع ناڅاپه نمونه وي په دې صورت کې د ناڅاپه نمونې احتمال توزیع عبارت دی له:

x	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$f(x)$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\dots$	

د $\bar{x}_n$ متحول د اوسط، $E(\bar{x}_n) = \mu$

د $\bar{x}_n$ متحول وریانس، $U(\bar{x}_n) = \frac{1}{n}\delta$

د نموني وریانس $S_n^{\ 2} = S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$

د نمونه‌یي وریانس اوسط، $E(S^2) = \delta^2$

په داسې حال کې چې $\bar{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ نمونه‌یي اوسط، μ د ټولنې اوسط δ^2 د ټولنې وریانس S^2 د نموني وریانس دی.

مثال: د لاندې ټولنه، ټولې دوه ګونې ممکنه ناڅاپه نمونې د ځای په ځای کولو سره ټاکو:

$$f(x) = \frac{1}{3} \quad , \quad x = 1,2,3$$

الف: د x د احتمال توزیع ولیکئ.

ب: د ټولنې اوسط او وریانس حساب کړئ.

ج: د $\bar{x}$ د توزیع جدول تشکیل او مستطیلي ګراف یې رسم کړي.

د: $E(\bar{x})$ او $V(\bar{x})$ حساب کړئ.

حل:

الف:

x	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب:

$$\mu = E(x) = \sum_{x=1}^{3} x f(x) = \frac{1}{3}(1+2+3) = 2$$

$$E(x^2) = \sum_{x=1}^{3} x^2 f(x) = \frac{1}{3}(1^2+2^2+3^3) = \frac{14}{3}$$

$$\delta_x^2 = E(x^2) - (E(x))^2 = \frac{14}{3} - 2^2 = \frac{2}{3}$$

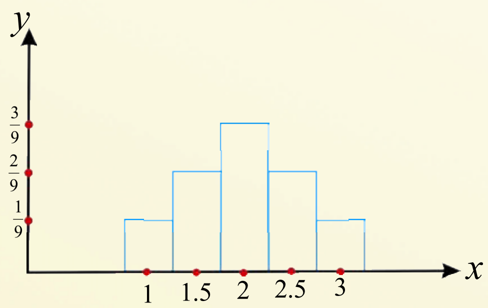
ج: لاندې جدول ټولې دوه‌گونې ممکنو نمونو د ځای نیول، د سره او هر یوه اوسط راښيي:

نمونه	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(3,1)	(3,2)	(3,3)
$\bar{x}$	1	1.5	2	1.5	2	2.5	2	2.5	3

د $\bar{x}$ د توزیع د کثرت جدول په لاندې ډول ښودل کېږي:

$\bar{x}$	1	1.5	2	2.5	3
$f(\bar{x})$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

د $\bar{x}$ مستطیلي ګراف په لاندې ډول رسمېږي:



د:

$$\mu_{\bar{x}} = E(\bar{x}) = \sum \bar{x} f(\bar{x}) = 1\cdot\frac{1}{9} + 1.5\cdot\frac{2}{9} + 2\cdot\frac{3}{9} + 2.5\cdot\frac{2}{9} + 3\cdot\frac{1}{9} = \frac{18}{9} = 2$$

$$E(\bar{x}^2) = \sum \bar{x}^2 f(\bar{x}) = 1^2\cdot\frac{1}{9} + (1.5)^2\cdot\frac{2}{9} + 2^2\cdot\frac{3}{9} + (2.5)^2\cdot\frac{2}{9} + 3^2\cdot\frac{1}{9} = \frac{13}{3}$$

$$\delta_{\bar{x}}^2 = V(\bar{x}) = E(\bar{x}^2) - (E(\bar{x}))^2 = \frac{13}{3} - 4 = \frac{1}{3}$$

$$E(x) = E(\bar{x}) = 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو ليدل کېږي چې:

$$V(\bar{x}) = \frac{\delta_x^{\ 2}}{n} = \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3}$$

پوښتنه

1. فرض کوو چې يوه ټولنه د $6,4,2$ او 8 څلورو عددونو څخه جوړه شوې وي، په دې صورت کې توزيع، اوسط او وريانس ددې ټولنې محاسبه او وروسته ددې ټولنې څخه دوه ګوني ناځاپه نمونه د ځای په نيولو سره وټاکئ او د نمونې توزيع اوسط يعنې $\bar{x}$ په لاس راوړئ. د کثرت څو ضلعي ګراف يې رسم کړئ، د $\bar{x}$ اوسط او وريانس حساب کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مرکزي لیمیټ قضیه

پوهېږو چې د ټولنې کمیت ته د ټولنې پارامتر او د نمونې کمیت ته نمونه یې اوسط ویل کېږي د $S_{\bar{x}}$ او $\bar{x}$ د نمونو احصائیه د کوم پارامتر په اړه اطلاعات زموږ په اختیار کې ږدي.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = ?$$

فعالیت

- که د لوېې ټولنې حجم په $\frac{S}{\sqrt{n}}$ و، د کوچنۍ ټولنې حجم په $\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\frac{S}{\sqrt{n}}$ (چې N د ټولنې عناصر شمېر، n د نمونه عناصرو شمېر او S معیار انحراف دی) وښیو څه وخت کېدای شي چې د لوېې ټولنې حجم له کوچنۍ ټولنې سره برابر شي؟
- که د $x_1, x_2, ..., x_n$ نورمال توزیع یو له بل څخه بېل وي آیا د هغوی د جمع حاصل د نورمال توزیع لرونکی ده؟
- که $x_1, x_2, ..., x_n$ ناخاپه ځانګړي متحولونه په یو شان توزیع شوي وي او د μ اوسط لرونکي وي او ς^2 وریانس وي ویلای شو چې د $S_n = x_1 + x_2 + ... + x_n$ د توزیع وریانس او اوسط څو دی؟

د پورتني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

که چیرې N د یوې لوېې ټولنې د μ متناهي اوسط او δ^2 متناهي وریانس لرونکې یوه ناخاپه n ګونه نمونه وټاکو، په دې صورت کې د نمونې اوسط یعنې $\bar{x}$ د تقریبي نورمال توزیع د $\mu_{\bar{x}} = \mu$ اوسط $\delta_{\bar{x}}^{2} = \frac{\delta^2}{n}$ وریانس دی او $Z = \frac{\bar{x}-M}{\frac{\delta}{\sqrt{n}}}$ ناخاپه متحول د نورمال سټنډرډ توزیع دی. په داسې حال کې چې $\frac{N-n}{N-1}$ ضریب د N د لویو قیمتونو لپاره (1) ته نږدې کېږي. په حقیقت کې یې لیمیټ هغه وخت چې $n \to \infty$ وکړي، برابر له (1) سره دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د یوه لوی ټولگی ځخه چې د زده‌کوونکو د ریاضي مضمون نمبرو نورمال توزیع د 71 اوسط او معیار انحراف یې 9 دی. یوه 9 تایي نمونه ټاکو، ددې احتمال چې ددې نمونې د نمبرو اوسط له 80 ځخه زیات وي حساب کړئ. همدارنگه که چیرې په تصادفي ډول یو زده‌کوونکی وټاکو، په دې صورت کې احتمال ددې چې نمبرې یې له 80 ځخه زیاتې وي محاسبه کړئ.

حل: ځرنگه چې $\bar{x}$ د نورمال توزیع د μ په اوسط او معیار انحراف لرونکی دی، نولرو:

$$P(\bar{x} > 80) = P(z = \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\delta}{\sqrt{n}}} > \frac{80-71}{\frac{9}{\sqrt{n}}} = P(z > 3)$$

$$= 1 - P(z) \leq 3 = 1 - 0.9987 = 0.0013$$

همدارنگه د $n = 1$ لپاره لرو:

$$P(\bar{x} > 80) = P(z = \frac{\bar{x}-\mu}{\delta} > \frac{80-71}{9} = P(z > 1)$$

$$= 1 - P(z) \leq 1 = 1 - 0.8413 = 0.1587$$

پاملرنه:

د $P(z)$ قیمت له (2) جدول ځخه په لاس راوړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنه

1- د هغو جعبو وزن چې د يوه ماشين په واسطه ترل کېږي، د نورمال توزيع اوسط يې $\mu = 250gr$ او معياري انحراف يې $\delta = 20gr$ وي مطلوب دی، د هغې احتمال محاسبه چې د ناځاپه نمونې د اوسط وزن $n = 16$ تايي د جعبو کوچنی له $240gr$ وي.

د نمونه‌یي توزیع نسبت

د A په یوه ښارکې n کسان غواړي د B یوکس د ښاروال په صفت وټاکي، که دا کسان تر پوښتنې لاندې راشي او x د موافقو کسانو شمېر وښيئ ددې کسانو نسبي کثرت مساوي په څه دي.

- که چیرې x د دوو جملو توزیع لرونکی وي، کولای شو ولیکو چې:

$$f(x)=\binom{n}{x}P^{x}(1-p)^{n-x} \qquad x=0,1,2,\ ....$$

که چیرې $\hat{P}=\frac{x}{n} \Rightarrow x=n\hat{P}$ وي د x قیمت په تعویض سره په پورتنی فورمول کې $f(\hat{P})$ ولیکئ.

- د $\hat{P}=\frac{x}{n}$ په فورمول کې که د x تصادفي متحول د n ناخاپه متحولینو د $x_1,x_2,...,x_n$ له مجموع څخه تشکیل شوی وي، $\hat{P}$ د نمونې اوسط سره څه اړیکه لري؟

که چیرې x ناخاپه متحول، n د برنولي د آزمایښتونو مجموعه، P د هر آزمایښت بریالیتوب احتمال وي په دې صورت کې $\hat{P}$ د نمونې د نسبت آماره $E(x)=n\,p$ اوسط $V(x)=n\,p\,q$ د x ناخاپه متحول وریانس وي.

د دوه جمله‌یي د توزیع په پاملرنې سره د $\hat{P}$ توزیع په دې فورمول سره کولای شو.

$$f(n\hat{P})=\binom{n}{n\hat{P}}p^{n\hat{p}}(1-p)^{n(1-\hat{p})} \qquad \hat{P}=0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},.....,1$$

د $\hat{P}$ ناخاپه متحولینو اوسط $(Expected\ Value)$ او وریانس په لاندې صورت لیکلای شو:

$$\mu_p=E(\hat{P})=P$$

$$\delta^2\hat{P}=V(\hat{P})=\frac{p\,q}{n}=\frac{p(1-p)}{n}$$

د نورمال ستندرډ توزیع یې عبارت دی له:

$$z=\frac{x-n\,p}{\sqrt{n\,p\,q}}=\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{p\,q}{n}}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د کاليو د بڼه والي احتمال $P = 0.3$ دی، يوه ساده ناخاپه نمونه $n = 6$ ګونه ټاکو که چيرې x د ناقصو کاليو ښودونکی وي، د x او $\hat{P}$ احتمال توزيع وليکئ.

حل: د x ناخاپه متحول د دوه جمله‌يي توزيع د $P = 0.3$ او $n = 6$ پارامترونه وي.

$$f(x) = P(X = x) = B(x,6,0.3) \qquad x = 0,1,...,6$$

د دوه جمله‌يي توزيع جدول څخه په ګټه اخيستنې سره لاندې احتمالونه محاسبه او د توزيع د جدول احتمال يې ليکو:

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	0.1176	0.3025	0.3241	0.1852	0.0595	0.0102	0.0007

د $\hat{P}$ ناخاپه متحول د $0, \frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}$ او 1 قيمتونه نيسي:

$$P(\hat{P} = 0) = P(X = 0) = 0.1176$$

$$P(\hat{P} = \frac{1}{6}) = P(X = 1) = 0.3025$$

او پاتې نور په مشابه ډول محاسبه کېږي، پام وکړئ چې:

$$P(\hat{P} = \frac{x}{n}) = P(X = x)$$

او د $\hat{P}$ د احتمال توزيع عبارت دی:

$\hat{P}$	0	1.6	2.6	3.6	5.6	1
$f(\hat{P})$	0.1176	0.3025	0.3241	0.0595	0.0102	0.0007

په پورتني مثال کې:

$$P(\hat{P} \le 0.6) = P(x \le 3.6) = P(x \le 3) = \sum_{x=0}^{3} B(x,6,0,3) = 0.9294$$

اويا:

$$P(\hat{P} \le 0.27) = P(x \le 1.62) = P(x \le 3) = 0.1176 + 0.3025 = 0.4201$$

پوښتنې

1. ددې احتمال چې د يوه تن د غوښتنليک فرم په پوره ډول پرته له غلطی(تېروتنې) څخه ډک کړي $P = 0.7$ وي، يوه نمونه د $n = 200$ ګونه د استخدام ډک شوی فارمونه مو ټاکلی وي.

- ددې احتمال محاسبه کړئ چې $\hat{P}$ د ± 00.05 داخلي فاصله کې د ټولنې له بنسټ څخه ولوېږي.
- ددې احتمال محاسبه کړئ چې $\hat{P}$ د 0.6 څخه زيات وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي مهم ټکي

- ناڅاپه متحول هغه اصطلاح ده چې د يوې تابع په عنوان په احصائيه او احتمالاتو کې ترې نه ګټه اخيستل کېږي.
- د يوه مجزا ناڅاپه متحول د احتمال تابع هغه تابع ده چې د تعريف ناحيه يې هغه عددونه دي چې ناڅاپه متحول کولای شي هغه غوره کړي او د قيمتونو ناحيه سره د تعريف د ناحيې د عناصرو اړونده احتمالونه ګڼون لري.
- د تجمعي احتمال تابع هغه تابع ده چې د تعريف ناحيه کې هغه عددونه ګڼون ولري چې د x ناڅاپه متحول يې ځانته غوره کوي او د قيمتونو ناحيه يې د $f(x)$ ټول تصويرونه موجود دي.
- د يوه پيوسته(متمادي) متحول د احتمال تابع هغه تابع ده چې د تعريف ناحيه يې د x ټول پيوسته(متمادي) مقدارونه غوره کړي او دقيمتونو ناحيه يې $F(x)$ ټول تصويرونه وي.
- د x مجزا ناڅاپه متحول اوسط Expected value او وريانس په وار سره عبارت دي له:

$$E(x)=\sum_{i=1}^{n}x_i f(x_i)=\bar{x}$$

$$V(x)=S^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-E(x_i))^2 f(x_i)$$

- د برنولي توزيع، $P(X=m)=P^m(1-P)^{1-m}$
- د دوه جمله‌يي توزيع، $P(X=m)=\binom{n}{m}P^m\ q^{n-m}$
- د دوه جمله‌يي توزيع اوسط او معياري انحراف عبارت له: $S=\sqrt{n\,p\,q}$, $\bar{x}=n\,p$
- د پواسن د احتمال توزيع يو مجزا احتمال توزيع ده چې فورمول يې عبارت دی له:

$$P(x=m)=\frac{e^{-\lambda}\ \lambda^m}{m!}$$

- که N له يوې نورمالې جامعې څخه د n ځلي(تايي) ناڅاپه نمونه وټاکو د $\bar{x}$ د نمونه‌يي اوسط آماره د نورمال توزيع لرونکی له $\mu_{(\bar{x})}=\mu$ اوسط سره او $\delta_{\bar{x}}^2=\dfrac{\delta^2}{n}$ او $z=\dfrac{\bar{x}-\mu}{\frac{\delta}{\sqrt{n}}}$ د ستندرډ نورمال توزيع سره ده.
- د نورمال توزيع: د نورمال توزيع شکل له زنګولی سره مشابه او متناظر دی، په نورمال توزيع کې مرکزي شاخصونه يو له بل سره برابر دي او د پيوسته ناڅاپه متحولونو د ناحيې تعريف محدود دی چې د احتمال توزيع يې عبارت ده له:

$$f(x)=\frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\bar{x}}{\delta})^2}$$

چې μ د ټولنې اوسط او δ د ټولنې معياري انحراف دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- د $f(x)$ تابع د منحني لاندې مساحت د محاسبې لپاره د a او b په فاصلو کې کولای شو لـه دې انتیګـرال څخه ګټه واخلو:

$$P(a \le x \le b) = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\delta})^2}$$

- که چیرې x د دوه جملـه‌یي توزیع د n شـمېرد برنـولي پـر لـه پـسې ازمایـښتونه، P د کامیـابی احتمـال او $q = 1 - p$ د هر ازمایښت د نابریالیتوب احتمال وي، په دې صورت کې د احصائیه د اوسـط نمونـه او د x ناخاپـه متحـول وریـانس پـه ترتیـب سـره عبـارت دی لـه: $\hat{P} = \frac{x}{n}$, $E(x) = np$ او $V(x) = npq$

همدارنګه د دوه جملـه‌یي توزیع، اوسط، وریانس او د سټنډرډ توزیع او $\hat{P}$ ناخاپه متحول په ترتیب سره عبارت دی له:

$$E(\hat{P}) = P \quad , \quad f(\hat{P}) = \binom{n}{n\hat{P}} P^{n\hat{P}} q^{(1-P)}$$

$$z = \frac{\hat{P} - P}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \quad , \quad V(\hat{P}) = \frac{pq}{n}$$

- ددې $z = \frac{x - \mu}{\delta}$ اړیکې پـه واسـطه کـولای شـو چـې هـره احـصائیوي مجموعـه یـې د نورمـال توزیـع لرونکی وي هغه په سټنډرډ نورمال بدل کړو.
- نمونه په دوو برخو وېشل کېږي، ساده نمونه او ناخاپه نمونه.
- د نمونه ګیری طریقې په عمومي ډول عبارت دي لـه: ناخاپـه نمونـه‌ګیـري، منظمـه نمونـه‌ګیـري، ګروپـي نمونه‌ګیري، خوشه‌یي نمونه ګیري.
- د x نمونې ناخاپه متحولونو اړوند تابع په دې صورت تعریفېږي.

$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots, x_n) = f(x_1), f(x_2), \ldots\ldots\ldots, f(x_n)$$

- که چیـرې x د ټولنې یـوه ناخاپـه نمونـه د $f(x)$ د احتمـال تـابع پـه لرلـو سـره وي $E(\bar{x}_n) = \mu$ اوسـط، $V(\bar{x}_n) = \frac{1}{n}\delta$ د اوسط وریانس، δ^2 د ټولنې وریانس او S^2 ته د نمونو وریانس وایي.

د څپرکي پوښتنې

1. دوه سکې څلور ځلې پورته واچوئ او د خط راتللو شمېر په پام کې ونیسئ:
   - ناڅاپه متحولونه د تابع په بڼه وښیئ.
   - د هر ځل د پورته اچونې احتمال نمونه‌یي فضا سره نسبت ورکړئ.
   - د تابع د تجمعي او مجزا احتمال ولیکئ.

2. که چیرې د یوې جوړې بوټونو د نقیصې احتمال $P = 0.1$ وي، د ناقصو بوټونو اوسط او معیار انحراف په یوه نمونه کې $n = 400$ جوړو بوټونو پیدا کړئ.

3. د یوه شرکت په ګدام کې 500 پایې کمپیوټرونه شته چې د هغې له جملې څخه یې 50 پایې نقص لري، یو اخیستونکی له هغې څخه 10 پایې کمپیوټرونه اخلي، ددې احتمال څومره دی چې هغې 8 پایې جوړ اخیستې وي؟

4. لاندې اطلاعات چې اوسط او معیار انحراف د دوو پارامترونو په اړوند دی د نورمال توزیع د رسمولو لپاره ترې ګټه واخلئ. لومړی یو افقي محور رسم کړئ او د $\bar{x}$ ، $\bar{x}+s$ ، $\bar{x}-s$ ، $\bar{x}+2s$ او $\bar{x}-2s$ ټکي پرې وټاکئ وروسته یو ټکی د h اختیاري جګوالی په اندازه د $\bar{x}$ له پاسه په پام کې ونیسئ او $\bar{x}+s$ له پاسه یو ټکی د $0.6h$ په جګوالي وټاکئ، یعنې یو ټکی چې مختصات یې $(\bar{x}+s, 0.6h)$ څرنګه چې د نورمال منحنې متناظر دی، همدا عمل په ځانګړي توګه په $\bar{x}-s$ هم سرته ورسوئ. اوس د $\bar{x}+2s$, $\bar{x}-2s$ د پاسه دوه ټکې د h او $0.15h$ په جګوالي په پام کې ونیسئ، پام وکړئ چې د نورمال منحنې د دقیق رسمولو لپاره د $0.6067h$ او $0.1354h$ په ځای له $0.6h$ او $0.15h$ څخه ګټه واخلئ. په پایله کې دا ټکي د یوه منحنې په واسطه وصل او ووایئ چې دا منحنې په کومو فاصلو کې محدب او په کومو فاصلو کې مقعره ده.

5. په یوه روغتون یوه څېړنه راښیې چې د مراجعینو شمېر د شنبې په ورځ وروسته له وخت څخه د 6 او 8 ترمنځ 25 تنه دی. فرض کړئ چې د پواسن د احتمال توزیع په دې حالت کې صدق وکړي.
   - د روغتون د مراجعینو د احتمال توضیح د دوشنبې له ورځې، وروسته له وخت څخه د 6 او 8 ساعتونو تر منځ پیدا او ګراف یې رسم کړئ؟ آیا دا توزیع خمېده ده؟
   - ددې توزیع د اوسط او معیار انحراف مقدار په لاس راوړئ.
   - آیا دا ممکنه ده چې د دوشنبې په ورځ وروسته له وخت څخه د 6 او 8 ساعتونو ترمنځ به له 7 تنو څخه زیات روغتون ته مراجعه کړې وي؟ ولې؟

6. فرض کوو چې د یوه کتاب د یوه مخ د تېروتنو شمېر د پواسن د توزیع یا $\lambda = \frac{1}{2}$ پارامتر لرونکی دی د محاسبې احتمال یې مطلوب دی داسې چې:

(c) ketabton.com: The Digital Library

- حد اقل یوه ټاپیي تېروتنه په هغه مخ کې وي.
- دقیقاً 5 ټاپیي تېروتنې په هغه مخ کې دي.
- د 3 او 6 ترمنځ ټاپیي تیروتنې په هغه کې وي.

7. فرض کوو چې د هغه پستون قطر چې د یوه اتوماتیکي ماشین په واسطه جوړېږي په نورمال یا اوسط ډول 25 ملي متر او معیار انحراف یې 0.5 ملي متره توزیع شوی وي.
   - کله چې د پستون قطر د 25.2 او 25.9 ترمنځ وي احتمال یې څومره دی.
   - د پستونونو کوم نسبت د 25 ملي قطر لرونکی او له هغې څخه کم دی.
   - که چیرې 1000 پستونه جوړ شي، له هغوی څخه څو دانې ددې وړ دی چې 24.07 ملي مترو څخه کم قطر ولري.
   - د تولید شویو پستونونو څو فیصده د 24.56 ملي متره معادل قطر یا له هغه څخه زیات لري.

8. که چیرې $x_1, x_2, ..., x_n$ د x ناڅاپه متحول یوه تصادفي نمونه وي ایا د $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$ ، $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ ، $\frac{x_1+x_2}{x_4}$ او $x_1+3x_2-x_3$ تابع آماره دی.

9. که چیرې x یو ناڅاپه متحول او د μ او δ^2 پارامترونه وي آیا د $\frac{3x_1-2x_3-\delta}{8\mu+x_2}$ ، $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)$ او $x_1+x_3-\mu$ توابع μ او δ^2 مجهول وي آیا پورتنیو تابعګانو ته احصائیه ویلی شو؟

10. ټولنه د برق په څلورو ډلو کې ګڼون لري، که د عمرونـو اوږدوالـي یـې د ساعتونو پـه حساب سره عبارت لـه 108 104 112 103 دي یوه ډله ناڅاپه ټاکو، فرض کوو چې د x ناڅاپه متحول ټاکل شوی د ډلو د عمر اوږدوالی راوښيئ:
    - د x د احتمال توزیع ولیکئ.
    - $E(x)$ او $V(x)$ محاسبه کړئ.

11. د یوه ښار د وګړو دګټې اندازه چې د غیرنورمال توزیع $\mu=90$ افغانی اوسط او د 25 افغانی معیار انحـراف سره دی که چیرې د 225 کسیز د وګړو د یوې نمونې دګټې مجموعـه لـه 2100 افغـانیو څخه زیاتـه وي، احتمال یې څومره دی؟

12. پوهېږو چې 56% وګړي د A نوماند طرف دار دی، څومره ددې احتمال شته چې $n=50$ دوه‌ګونې یـوه نمونه کې حداقل 60% وګړي د A نوماند طرفدار وي.

13. پـه 12 مثـال کـې کـه چیـرې $P=0.4$ وي، یعنـې ددې احتمـال چـې یـو وګـړی د A کاندیـد طرفـدار وي 0.4 دی، یوه $n=200$ ګونه نمونه وټاکو نو څومره ددې احتمال شته چې لااقل 100 وګـړی د A کاندیـد طرفدار وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

اتم څپرکی

احتمالات

(c) ketabton.com: The Digital Library

بېلې شوې(غیرمتمادي) او نښتې(متمادي) فضاګانې

په مخامخ شکلونو کې د لومړي او دویم نل څخه په وار سره اوبه په څمکه توییږي وېلای شئ چې له دې نلونو څخه په څمکه د اوبو د څاڅکو د تویېدو توپیر په څه کې دی؟

فعالیت

- د یو رمل په اچولو سره وېلای شي چې د نمونه یي فضا ټولې ممکنې پایلې کومې دي؟
- آیا د ونې څخه د یو یې پخې منې د لوېدلو وخت وړاندوینه کولای شئ چې وروسته له څو ثانیو، دقیقو او یا ساعتونو څخه پر ځمکه ولوېږي؟
- نظر وخت ته د منې د لوېدلو نمونه یي فضا ولیکي.
- د رمل دانې د اچولو تجربې نمونه یي فضا د عناصرو شمېر او له ونې څخه د منې د لوېدلو وخت څنګه پرتله کولای شي.

د پورتنی فعالیت له سرته رسولو څخه لاندې پایله په لاس راځي:

د یوې ناڅاپه تجربې نمونه یي فضا عبارت له هغه ټاکلي او یا نا ټاکلي سټ یا مجموعې څخه ده، چې د ځینې عناصرو یې د شمېر وړ، او ځینې یې د شمېر وړ نه وي.

هغه نمونه یي فضاګانې چې عناصر یې د شمېر(countable) او تشخیص وړ وي د پرېکړې یا ګسسته(شلیدلي) نمونه یي فضا یا متصل په نامه یادېږي او هغه نمونه یي فضاګانې چې عناصر یې د شمېر وړ نه وي د نښتې(پیوسته) یا متمادي نمونه یي فضا په نامه یادېږي.

لومړی مثال: له لاندې نمونه یي فضاګانو څخه کومه یوه نښتې(پیوسته) او کومه یوه پرېکړې(ګسسته) ده.

الف: د دوو رمل دانو اچول

ب: د 8 او 12 ترمنځ د یوه حقیقي عدد ټاکل.

ج: له 30 زده کوونکو څخه د 3 تنو ټاکل

(c) ketabton.com: The Digital Library

د: د یوې کُرې د حرارت د یوې درجې لوړېدل د 100 درجو د سانتي ګرېډ څخه تر 1000 درجود سانتي ګرېډ پورې.

هـ : د 30° او 45° زاویو ترمنځ یوه زاویه ټاکل.

حل: څرنګه چې (الف او ج) نمونه‌یي فضاګانې د محدودو غړو له شمېر څخه جوړ شوي، نو پرېکړې یا ګسسته فضا ولې (ب، د او هـ) له نامحدود حقیقي عددونو څخه تشکیل(جوړ) چې د شمېر وړ نه دي، نو نبتي یا پیوسته فضاګانې دي.

دویم مثال: خیبر د کور د ګلانو د اوبولو لپاره یو واټرپمپ اخیستي دي.

که چېرې د واټرپمپ عمرد ساعت له مخې په پام کې ونیسو، په دې حالت کې د واټرپمپ د عمر د اوږدوالی نمونه-یي فضا چې کیدای شي هر مثبت حقیقي عدد د واټرپمپ د ورانېدو په صورت کې د کار د مودې قیمت شي، په دې ډول د داسې ناځاپه حادثې پېښېدل صفر هر حقیقي عدد کیدای شي چې دا نمونه‌یي فضا یوه غیر متمادی، نبتي یا پیوسته نمونه یې فضا ده؛ یعنې { t د واټرپمپ د ورانېدو وخت، $S = \{t \in IR : t \geq 0$ چې په پورتنې نمونه یې فضا کې t د واټرپمپ د عمر اوږدوالي راښيي.

یادونه:

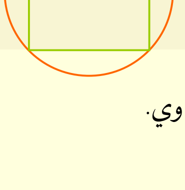
1- د لومړي مثال الف او ج جزونه کې محدودې نمونه‌یي فضاګانو څخه بحث شوی چې عناصر یې د شمېر وړ دي، د ب او د جزونو کې نامحدودې نمونه‌یي فضاګانې ذکر شوې چې عناصر یې د شمېر وړ نه دي، نو څکه ټول مثبت حقیقي عددونه اخېستلای شي.

2- په دویم مثال کې نمونه‌یي فضا متصل یا غیر محدوده ده چې د حقیقي عددونو د انټروال په توګه ښودل کېږي.

پوښتنې

1- یو غشي وېشتونکی د یوه دایروي د سک په دننه چې ورانګه یې r ده، په پام کې ونیسي. د غشي د لګېدو ځای د دایرې په دننه کې چې مرکز ته نږدې ولګېږي، د هغې نمونه یې فضا ارایه کړي. وواياست چې دا څنګه یوه نمونه یې فضا ده.

2- په مخامخ شکل کې په ناځاپي یا تصادفي ډول د دایرې په دننه کې یو ټکي و ټاکئ، احتمال ددې شته چې مطلوب ټکي د مربع په دننه کې وي.



3- یو طبیعي دوه رقمي عدد و ټاکئ، هغه احتمال پیدا کړې چې عدد د 4 مضرب وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

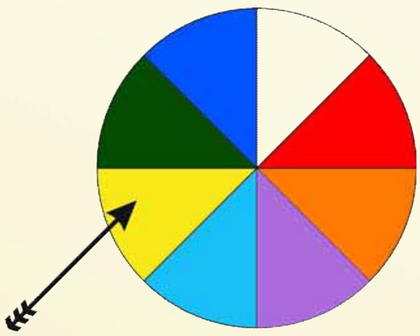
هم چانسه پېښې

د يوې نورمال رمل دانې په اچولو کې د (1) او يا (5) شمېرې مخ ته راتللو لپاره شرط څه دي؟

د 2 او 5 شمېرې د راتللو چانس يو له بل سره څه اړيکه لري؟

فعاليت

د مخامخ شکل په څېر يوه دايره په پام کې ونيسئ، که چېرې په راکړې شوې دايره کې يو ښکاري غشي وولي لاندې پوښتنو ته ځواب ورکړئ.



- په سور رنګه ناحيه او شين رنګه ناحيه کې د غشي لګېدل يو له بل سره څه اړيکه لري؟
- د غشي د لګېدو چانس د کچه په اړه د نارنجي او سپينو رنګونو سره په پرتله باندې څه ويلاى شي؟
- د غشي د لګېدو د چانس کچې په تور رنګ څومره ده؟
- د تجربې، نمونه‌يي فضا يې وليکئ.
- لومړني ناخاپه پېښې لست کړي او د هر يو احتمال پيدا کړى دي؟
- د لومړنيو پېښو د احتمالونو د مجموع په برخه کې څه ويلاى شي؟

د پورتنۍ فعاليت له اجرا کولو څخه لاندې پايله په لاس راوړو:

هغه لومړنۍ ساده پېښې چې د هغوي د پېښېدلو چانس په يوې تجربې په اجرا کولو کې سره برابر وي، د هم چانسه پېښو په نامه يادېږي. لکه:

که چېرې $S=\{e_1,e_2\ ,...e_n\}$ يوه نمونه يي فضا وي، نو $\{e_i\}$ د هر $i=1,2...n$ لپاره يوه ناخاپه لومړني پېښه ده که $0\le P(\{e_i\})\le 1$, $i=1\,,\,2\,,\,...n$ دي.

سربېره پر دې د لومړنيو پېښو د احتمالونو مجموع مساوي له يوه سره ده.

$$P(\{e_1\})+P(\{e_2\})+...+P(\{e_n\})=\sum_{i=1}^{n}P(e_i)=1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

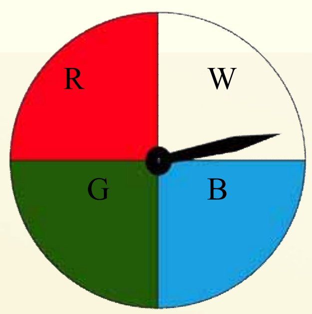
مثال: څلور تنه په یوه لوبه کې ګډون کوي. تاسې د هر یوه د ګټلو احتمال پیداکړئ په داسې حال کې چې نمونه‌یي فضا هم چانسه وي.

حل: که چېرې $S = \{a, b, c, d\}$ نمونه یې فضا وي، نو د هرې ناخاپه لومړنۍ پېښې احتمال $\frac{1}{4}$ دی.

لرو چې: $P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = \frac{1}{4}$

پاسنۍ لومړنۍ پېښې سره هم چانسه دی.

پوښتنې



1- مخامخ شکل په پام کې ونیسئ، که چېرې د عقربې(ستنې) د درېدلو احتمال په آسماني او سپین رنګ 0.30 او د سره رنګ پرمخ 0.26 وي، د شنه رنګ پرمخ د درېدلو احتمال به څومره وي؟

2- لاندې د کثرت جدول د رمل یوې دانې د اچولو لپاره په پام کې ونیسئ. هغه احتمال پیداکړئ، چې د رمل دانه (5) شمېره راشي.

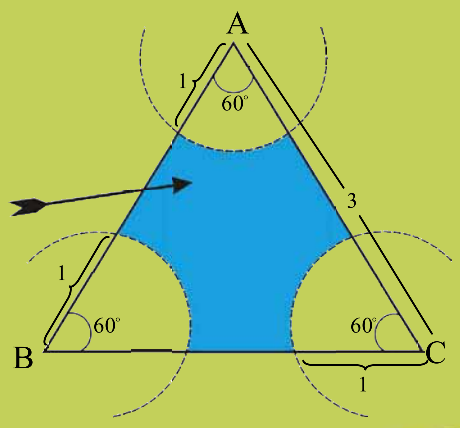
د رمل شمېره	1	2	3	4	5	6
کثرت	7	9	8	7	3	10

3- د رمل یوه دانه داسې ډکه شوې چې د جفت شمېرو د راتللو احتمال د طاق شمېرو دوه برابره وي، که یو چا په شرط وهلو کې(5) شمېره ټاکلې وي، د هغې احتمال پیداکړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

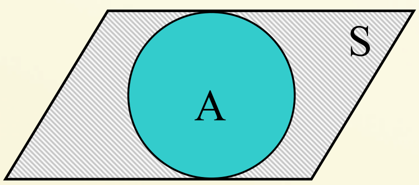
د نښتي یا پیوسته(متمادي) فضاګانو احتمال

د یوه متساوي الاضلاع مثلث دننه چې هره ضلعه یې 3 واحده ده، یو غشي ولو، ددې احتمال چې د غشي د لګېدلو ټکې د مثلث د هر رأس نه د یو واحد په اندازه لوی وي، څو دی؟



فعالیت

- آیا ویلای شي چې د یوې ټوټه کرښې، د یوې مستوي د یوې برخې او یا د فضا د حجم څو ټکي یو پر بل پسې موجود دي؟
- د هغو ټکو د پیښېدلو احتمال چې د A په برخه کې چې د S د لویې برخې فرعي مساحت دی، لکه څرنګه چې په شکل کې لیدل کېږي د A او د S د ساحو د مساحتونو د نسبت سره څه اړیکه لري؟



- آیا کولای شئ دا مسئله په فضا د یوه جسم حجم د یوې برخې د احتمال د محاسبې لپاره عمومیت ورکړئ؟

د پورتني فعالیت له سرته رسولو څخه لاندې پایله لاسته راځي.

پیوسته(متمادي) نمونه‌یي فضا د نامعینو ټکو مجموعه ده، چې شکل یې د اعدادو په محور، په مستوي کې لکه سطح او یا په فضا کې لکه حجمونه دی، څرنګه چې ددې ټکو ښوونه ممکن نه ده، نو د احتمال د نسبت پیدا کولو لپاره د ټوټه کرښو د اوږدوالي، د اشکالو سطحو او یا د جسمونو له حجم څخه استفاده کوو.

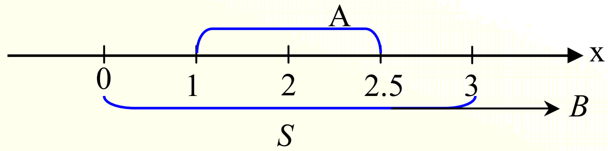
معمولاً د اعداد له محور څخه په ګټه اخیستنې سره د x یو متحول، د یوه مساحت د یوې برخې لپاره د دوو متحولونو لکه x او y او په همدې ترتیب د حجمونو لپاره له دریو متحولونو لکه x, y او z څخه ګټه اخلو.

لومړی مثال: د اعدادو په محور د $(0,3)$ په انټروال کې د x یو ټکي په ناڅاپي یا اتفاقي ډول ټاکو پیدا کړئ ددې احتمال چې $1 < x < 2.5$ وي؟

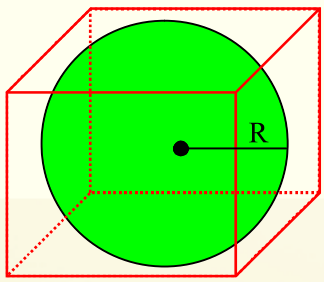
(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: د حقيقي اعدادو محور رسم کړئ د S او A فاصلې د هغې پر مخ ټاکو، د شکل په پام کې نیولو سره د A پیښې د پیښېدو احتمال څخه لرو:

$$P(A)=\frac{\text{د A ټوټه کرښې اوږدوالی}}{\text{د B ټوټه کرښې اوږدوالی}}=\frac{2.5-1}{3-0}=\frac{1.5}{3}=\frac{1}{2}$$



دویم مثال: په ناڅاپه ډول یو ټکی د یوه مکعب په دننه کې چې ضلعه یې 2 واحده وي ټاکو پیدا کړئ ددې احتمال چې نوموړي ټکي د مکعب د محاطي کُرې په دننه کې وي.



حل: که چېرې کره د هغه مکعب په دننه کې چې ضلعه یې a واحده ده، محاطه وي، نو د کرې شعاع $r=\frac{a}{2}$ کېدای شي نو:

A ناڅاپه پېښه د کرې د حجم او S نمونه یې فضا سره مساوي چې د مکعب حجم دی، نو لرو:

$$r=\frac{a}{2}=\frac{2}{2}=1$$

$$P(A)=\frac{\text{د کرې حجم}}{\text{د مکعب حجم}}=\frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{a^3}=\frac{\frac{4}{3}\pi(1)^3}{2^3}=\frac{\pi}{6}$$

پوښتنې

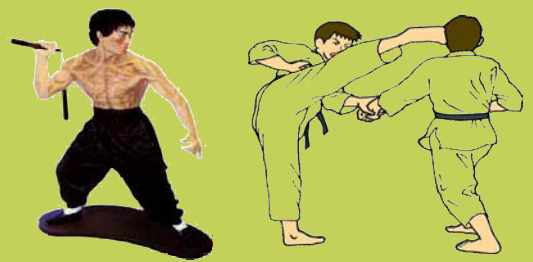
1- د حقیقي اعدادو په محور د A او B دوه ټکي په ناڅاپي یا تصادفي ډول داسې ټاکو چې $0\le A\le 3$ او $-2\le B\le 0$ وي، ددې احتمال پیدا کړئ چې د d واټن د A او B ترمنځ وي او 3 واحدو څخه لوی وي.

2- که چېرې یو ټکي په ناڅاپي یا تصادفي ډول د دایرې د سطحې پرمخ وټاکو، ددې احتمال پیدا کړئ، چې نوموړی ټکی نظر د دایرې محیط ته د دایرې مرکز ته نږدې وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مشروط احتمال

له یوه ولایت څخه (20) تنه نارینه او ښځینه زده کوونکي د کانکور په آزموینه کې د طب پوهنځي ته بریالي شوي دي، د هغوی له جملې څخه یې 5 تنه ښه کاراته بازان دي: که په 15 تنو بریالیو نارینه وو کې 4 تنه یې ښه کارته بازان وي. د نومړو محصلینو له مینځ څخه په اتفاقي ډول یو تن ټاکو احتمال د دې پیدا کړئ، چې:



- ټاکل شوی محصل یوه کارته بازه نجلي وي؟
- په پورتني سوال کې هغه نجلي په کوم شرط سره د طب پوهنځي ته بریالي شوي؟

فعالیت

له 2500 زده‌کوونکو څخه 1600 تنه یې په مطالعه کولو عادت لري.

چې له 80% زده‌کوونکو څخه یې 70% نارینه زده‌کوونکي وي او په مطالعه کولو عادت ولري، که د ټولو زده‌کوونکو لپاره احتمال یو شان وی، د لاندې پېښو په پام کې نیولو سره د یوه تن زده‌کوونکي ټاکل د ښوونځي له زده‌کوونکو څخه:

R: له مطالعې سره عادت لري.

M : نارینه زده‌کوونکي دی.

F: یوه ښځینه زده‌کوونکې ده.

د لاندې پوښتنو په حل فکر وکړئ:

- ددې احتمال پیدا کړئ چې د مطالعه کوونکو له منځ څخه ټاکل شوي زده‌کوونکی نارینه وي؟
- ددې احتمال پیدا کړئ چې د مطالعه کوونکو له منځ څخه ټاکل شوی تن یوه ښځینه وي؟
- ددې احتمال پیدا کړئ چې ټاکل شوي زده‌کوونکي یو نارینه وي په دې شرط چې په مطالعه عادت وي.

د پورته فعالیت د سرته رسولو څخه لاندې پایله په لاس راوړو:

په حقیقت کې د هغه نارینه زده‌کوونکي د ټاکلو احتمال په دې شرط چې په مطالعه عادت ولري.

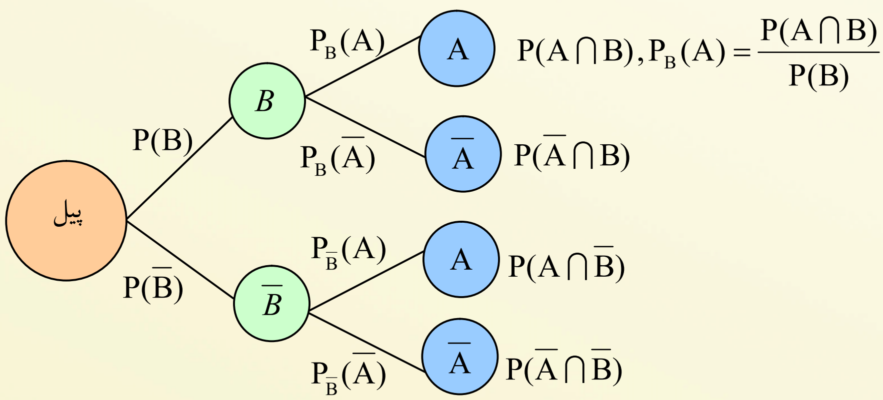
د لاندې احتمالات وېش له حاصل څخه عبارت دی که چیرې Ω ټوله نمونه‌يي فضا او $|\Omega|$ نمونه‌يي فضا د عناصرو شمیر وي، نو لرو:

$$P_R(M)=\frac{P(M\cap R)}{P(R)}=\frac{\frac{|M\cap R|}{|\Omega|}}{\frac{|R|}{|\Omega|}}=\frac{|M\cap R|}{|R|}=$$ د هغه نارینه زده‌کوونکو د ټاکلو احتمال چې په مطالعه عادت وي.

$P_R(M)$ د هغې پیښې له احتمال څخه عبارت دي چې ټاکلي زده‌کوونکي نارینه وي، په دې شرط چې هغه په مطالعه عادت وي.

تعریف: که چیرې S نمونه‌يي فضا A او B د نمونه‌يي فضا دوې ناڅاپي پیښې وي، په داسې حال کې چې $P(B)\neq 0$ وي. په دې حالت کې نوموړی احتمال یعنې $P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ چې د A ناڅاپي پیښې احتمال نظر د B ناڅاپي پیښې ته مشروط احتمال بلل کیږي.

د پورته تعریف په پام کې نیولو سره نظر د مسیر لومړي قاعدې ته د ونه‌ییز دیاګرام په مرسته هم په لاس راوړای شو.



د مشروط احتمال له فورمول څخه لاندې مهمې پایلې په لاس راځي:

1- د مسیر د لومړي قاعدې څخه لرو:

$$P(A\cap B)=P(B)\cdot P_B(A)$$

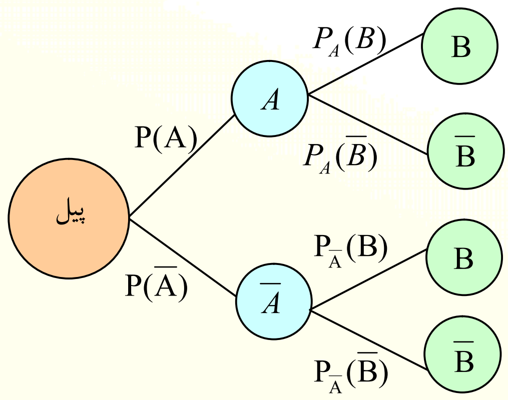
مسیر له دویمې قاعدې د څخه په ګټه اخیستنې سره لرو:

$$P(A\cap \bar{B})=P(\bar{B})\cdot P_{\bar{B}}(A)$$

$$P(A)=P(B)\cdot P_B(A)+P(\bar{B})\cdot P_{\bar{B}}(A)$$

2- ونه‌ییزه(درختي) دیاګرام له مخې $P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$

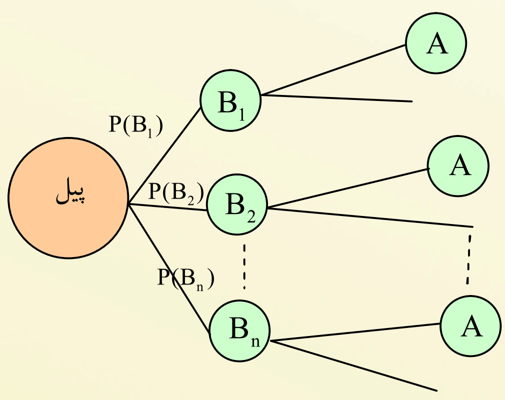
(c) ketabton.com: The Digital Library



له لومړي پایلې څخه په لاس راځي چې: $P_A(B)=\dfrac{P_B(A)\cdot P(B)}{P(B)\cdot P_B(A)+P(\overline{B})\cdot P_{\overline{B}}(A)}$

3- که چیرې نوموړی حالت د Ω نمونه یي فضا ناځاپي پېښو د $B_1, B_2, ..., B_n$ اختیاري ویش لپاره عمومیت ورکړو د ونې په ډول د دیاګرام د په پام کې نیولو سره کولای شو، لاندې فورمول په لاس راوړو.

$$P_A(B_i)=\frac{P_{B_i}(A)\cdot P(B_i)}{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+...+P(B_n)\cdot P_{B_n}(A)}=\frac{P(A\cap B_i)}{\sum_{k=1}^{n}P(B_k)\cdot P_{B_k}(A)} \qquad i=1,2,...,\ n$$



لومړی مثال: یو زده کوونکي ښوونځي ته د تللو لپاره 50% هره ورځ د ګاډي څخه ګټه اخلي چې 70% په ټاکلي وخت ښوونځي ته رسیږي. په منځني ډول نوموړي 60% په ټاکلي وخت ښوونځي ته حاضرېږي که چیرې پیښې:

A: د ګاډي په واسطه راتلل B: په ټاکلي وخت رسېدل

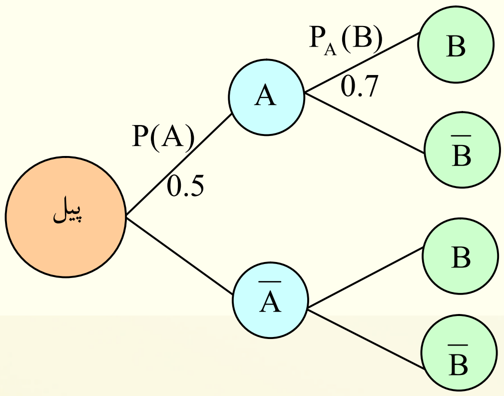
(c) ketabton.com: The Digital Library

وي په دي صورت کې د A مشروط احتمال نظر B ته يعنې $P_B(A)$ مطلوب دي؟

حل: د نوموړي احتمال د پيداکولو لپاره د ونهييز يا درختي دياگرام په پام کې نيولو سره نظر فورمول تـه پـه لانـدې ډول په لاس راځي:

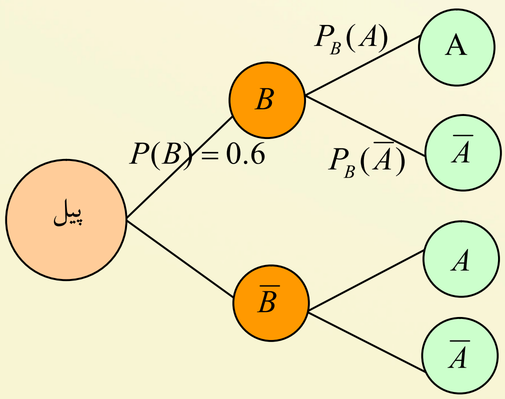
$$P_B(A)=\frac{P(A)\cdot P_A(B)}{P(B)}=\frac{0.5\cdot 0.7}{0.6}=0.5833=58.33\%$$

نـو پـه دې اسـاس د ګـاډي پـه واسـطه د رسېدلو احتمـال پـه دې شـرط چې پـه ټاکلي وخـت پـه شـوونځي کـې وي 58.33% سـلنې سـره برابـر دی.



پوښتنې

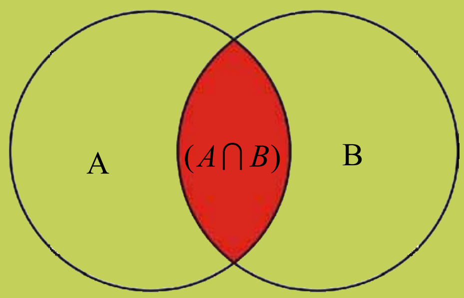
له لاندې دياگرام څخه په ګټه اخيستنې سره د مشروط احتمـال په ټاکلي وخت رسېدل ښوونځي ته په دې شرط چې د ګاډي په واسطه سرته رسيدلي وي، يعنې $P_A(B)$ د ناڅاپه پيښې احتمـال ښوونځي ته په ټاکلي وخت رسيدل، پـه دې شرط چې د ګاډي په واسطه نه وي راغلي يعنې $P_{\overline{A}}(B)$ مطلوب دي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د حاصل ضرب اصل

د A ناخاپه پیښې مشروط احتمال په B ، د A او B ناخاپه پیښې احتمال یو له بل سره څه اړیکه لري؟



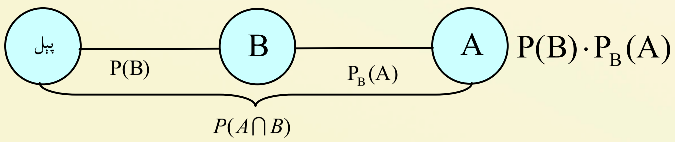
فعالیت

- که چیرې A او B دوې ناخاپه پیښې د S په نمونه یي فضا کې وي.
- د A ناخاپه پیښې مشروط احتمال B ته ولیکئ.
- د ونه‌ییز دیاگرام څخه په ګټه اخیستنې سره د $P(B)\cdot P_B(A)$ قیمت په لاس راوړئ.
- د $(A\cap B)$ ناخاپه پیښو احتمال د A او B ناخاپه پیښو څخه او یا د A مشروط له B څخه په ګټه اخیستنې سره ولیکئ.
- د فعالیت د دوو پورتنیو بندونو د محاسبې پایلې یو له بل سره پرتله کړې.
- آیا کولای شو چې موضوع د ډیرو ناخاپه پیښو لپاره عمومیت ورکړو.

د پورتني فعالیت له سرته رسولو څخه لاندې پایله په لاس راوړو.

د S په یوه نمونه یي فضا کې د A او B د دوو ناخاپه پیښو لپاره د مشروط احتمال د تعریف په پام کې نیولو سره لرو: $P(A\cap B)=P(B)\cdot P_B(A)$

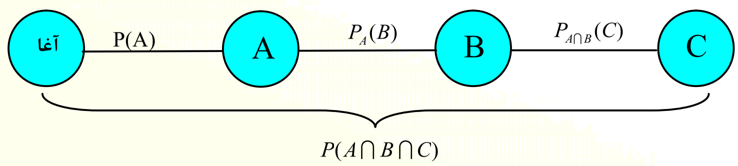
دا مسئله کولای شو چې د ونه‌ییز دیاګرام په مرسته هم په لاس راوړو:



$$\Rightarrow P(A\cap B)=P(B)\cdot P_B(A)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا مطلب د دریو A، B او C پیښو لپاره په لاندې ډول پراخوو.



$$\Rightarrow P(A\cap B\cap C)=P(A)\cdot P_A(B)\cdot P_{A\cap B}(C)$$

پورتنی قاعده د حاصل ضرب په نامه یادېږي او کولای شو، هغه د یو شمېر اختیاري ناخاپي پیښو لپاره هم په لاس راوړو.

مثال: د B_1, B_2 او B_3 دریو ولایتونو په پارلماني ټاکنو کې چې د هر یوه لپاره د ټاکنو د ګډون کوونکو فیصدي او د جمهوري ګوند برخه فیصدي ورکړل شوې ده؟

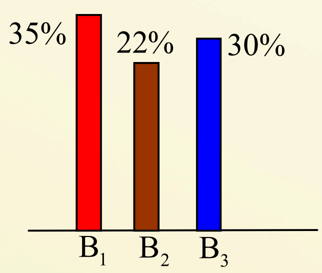
په کوم احتمال د ټاکنو ګډون کوونکي او یا رایې اچوونکي جمهوري ګوند ټاکلی وي.

حل: په لاندې ډول ناخاپي پیښې تعریف او نوموو:

V : هغه رایې ورکوونکي چې د جمهوري ګوند یې ټاکلي دي.

B_i : د ولایت رایې ورکوونکي B_i – (i-ام) … i=1,2,3 لاندې ارقام ورکړل شوي وي.

ولایت	راي ورکوونکي فیصدي	جمهوري ګوند ته رایې ورکوونکي
B_1	33.2%	35
B_2	46.5%	22
B_3	20.3%	30



د $B_i\ (i=1,2,3)$ ناخاپه پیښې په حقیقت کې یې د S نمونه یي فضا یو ویش جوړ کړي چې د هغوی لپاره صورت نیسي.

1- B_i یو له بل سره دوه په دوه مستقل او ګډ عناصر نه لري.

2- د S نمونه یي فضا لپاره $\bigcup_{i=1}^{3}B_i = S = B_1\cup B_2\cup B_3$ دی، نو $B_i\cap V\ (i=1,2,3)$ پیښنه یو له بل سره یو په یو مستقل د هغوی لپاره صورت نیسي. $V=\bigcup_{i=1}^{3}(B_i\cap V)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې اړیکې څخه کولای شو، د دواړو خواوو د احتمال لپاره ولیکو:

$$P(V)=P\left(\bigcup_{i=1}^{3}(B_i\cap V)\right)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i\cap V)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)\cdot P_{B_i}(V)$$
$$=P(B_1)\cdot P_{B_1}(V)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(V)+P(B_3)\cdot P_{B_3}(V)$$
$$=0.332\cdot 0.35+0.465\cdot 0.22+0.203\cdot 0.3=0.1162+0.1023+0.0609$$
$$=0.2794=27.94\%$$

تعریف: که چیرې د $B_1, B_2, ..., B_n$ څرنګه چې $P(B_i)\neq 0$ وی $i=1,...n$ پیښو عمومي حالت د S په نمونه‌یي فضا کې یوه پیښه وي، نو $P(A)$ د کامل احتمال په نامه یاد او د A اختیاري ناڅاپه پیښې لپاره لرو:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)\cdot P_{B_i}(A)$$

د مشروط احتمال د تعریف، د اصل حاصل ضرب له قضیې څخه د کامل احتمال د مسئلې په پام کې نیولو څخه لاندې فورمول چې د بائیز(Baye's) د فورمول په نامه یادیږي، په آسانۍ سره په لاس راځي، داسې چې B_i چې $i=1,...n$ د S نمونه یي فضا یو پیښې لپاره چې $P(B_i)\neq 0$ ، $i=1,...n$ د A د ناڅاپه پیښې احتمال چې $P(A)\neq 0$ سره وي، لرو:

د بائیز (Bayex)فورمول:

$$\boxed{P_A(B_i)=\frac{P(A\cap B_i)}{P(A)}=\frac{P(B_i)\cdot P_{B_i}(A)}{\sum_{k=1}^{n}P(B_k)\cdot P_{B_k}(A)}}$$

د بائیز فورمول ډیر استعمال لري لکه د $n=2$ لپاره $B_1=\overline{B}, B_2=\overline{B}$ په پام کې ونیسو، په حقیقت کې B_1 او B_2 د S نمونه یي فضا پیښې وي لرو:

$$P_A(B)=\frac{P(B)\cdot P_B(A)}{P(B)\cdot P_B(A)+P(\overline{B})\cdot P_{\overline{B}}(A)}$$

پورتنی فورمول د $n=2$ د بائیز له فورمول څخه عبارت دي.

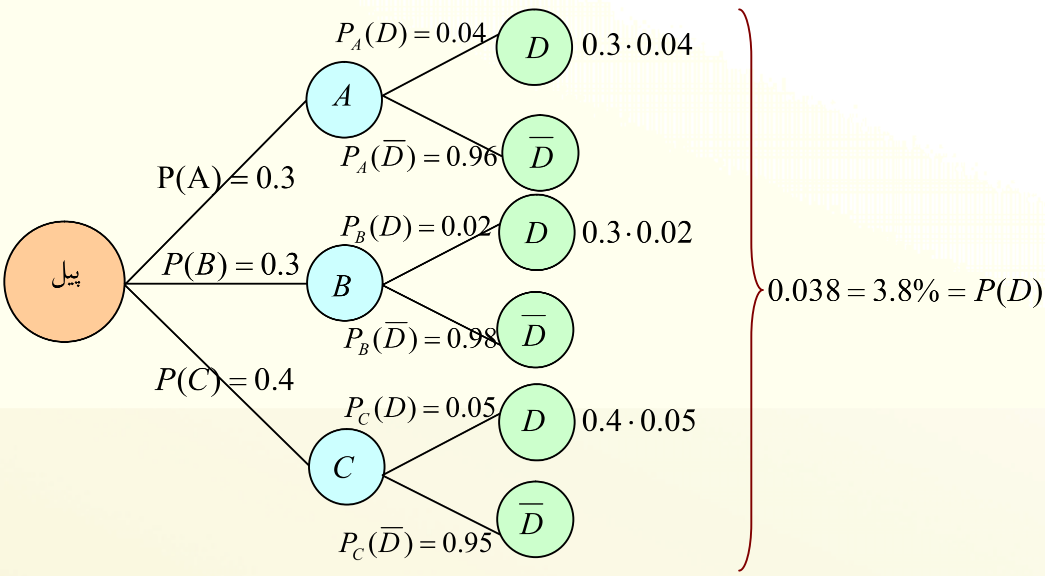
مثال: په یوه فابریکه کې د A، B او C درې ماشینونه په ترتیب سره 30% ، 30% او 40% برخه د برق ګروپونه تولیدوي. که چیرې په ماشینونو کې د ګروپونو د خرابېدو کچه په ترتیب سره 4%، 2% او 5% وي او نوموړي ګروپونه په ګډه سره خرڅ شي، مطلوب دي:

a) ددې احتمال چې یو اخېستل شوي ګروپ وران یا خراب وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

b) په کوم احتمال خراب خرڅ شوی ګروپ د C ماشین پورې اړه لري.

c) یو نوی تولید شوی ګروپ لرو، په کوم احتمال سره به د B ماشین پورې مربوط وي.



د b جز:

$$P_D(C)=\frac{P(D\cap C)}{P(D)}=\frac{P(C)\cdot P_C(D)}{P(D)}=\frac{0.4\cdot0.05}{0.038}=\frac{0.02}{0.038}=0.526=52.6\%$$

د c جز:

$$P_{\overline{D}}(B)=\frac{P(\overline{D}\cap B)}{P(\overline{D})}=\frac{P(B)\cdot P_B(\overline{D})}{P(\overline{D})}=\frac{0.3\cdot0.98}{0.3\cdot0.96+0.3\cdot0.98+0.4\cdot0.95}$$

$$=\frac{0.294}{0.288+0.294+0.38}=\frac{0.294}{0.962}=0.3056=30.56\%$$

پوښتنې

1- د 1000 دانو رملونو په منځ کې د یوې دانې په شېږ واړه مخونه یوازې د 6 شمېره وهل شوې ده. د هغوی له منځ څخه یوه ناڅاپه د رمل دانه ټاکل شوې او درې ځلې اچول شوې ده. درې ځلې 6 راغلې. پیدا کړئ، هغه احتمـال چې په ټاکل شوې دانه به سم ډول شمېرې وهل شوې وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ناڅاپه پېښو استقلالیت

لـه مـشروط احتمـال څخـه پـوهیږو چـې د A او B دوو ناڅاپو پېښو یا حـادثو د B د پېښې پېښدل د A پـه پېښه تـاثیر اچـوي پـه دې سـبب لازمـه ده چـې د احتمـال د محاسبې په وخت کې د A او B پیښه په پام کې ونیسو.

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$

د هغه حالت لپاره چې د A ناڅاپه پیښې پیښدل پر B ناڅاپه پیښې اغېزه ونه لري او بر عکس.

د A او B د ضرب د حاصل احتمال د $A\cap B$ پیښې له احتمال سره څه اړیکه لري.

تعریف: د A او B دوې ناڅاپه پیښې چې یوه پر بله اغیزه لرونکې نه وي د ناڅاپه مستقلو پیښو په نامه یادیږي.

$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

فعالیت

- د S نمونه یي فضا او د A او B دوې یوه له بلې څخه مستقلې پیښې چې د S نمونه یي فضا کې شامل وي، په پام کې ونیسئ.
- د مشروط احتمال فورمول څخه په هغه صورت کې چې A او B یوه له بلې څخه مستقلې دوې پیښې وي د $P(A)$ او $P_B(A)$ احتمالونه یو له بل څخه څه توپیر لري؟
- د $P(A\cap B)$ ناڅاپه پیښې احتمال له څه سره مساوي دی؟
- د $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ د پیښو د احتمال د فورمول څخه په هغه صورت کې چې A او B ګډ ټکی ونه لري څه پایله اخلې؟

د پورتني فعالیت له سرته رسولو څخه لاندې پایله په لاس راځي:

1: د A او B دوې پیښې مستقلې بلل کېږي که چیرې:

$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$ (د ضرب د حاصل اصل)

2: که چیرې A او B پیښې د ګډو ټکو لرونکې نه وي، نو

$A\cap B=\emptyset\Rightarrow P(A\cap B)=0$

$\Rightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(B)$ (د جمع د حاصل اصل)

لومړی مثال: که چېرې د یوه ښوونځي د زده کوونکو د سترګو رنګ او ذکاوت یو پر بل پرته له اغېزې فرض شوي وي. د لاندې پېښو په پام کې نیولو سره په ناڅاپه ډول د یوه زده کوونکي ټاکلو لپاره:

H: ټاکل شوی تن یو هوښیار ذکي زده کوونکی وي.

B: ټاکل شوي زده کوونکي تورې سترګې ولري.

پیدا کړې هغه احتمال چې ټاکل شوی زده کوونکی په ناڅاپه توګه هوښیار ذکي او توري سترګې ولري.

حل: ددې لپاره چې ټاکل شوی زده کوونکی هوښیار او تورې سترګې ولري لیکلای شو:

څرنګه چې $P_B(H)=P(H)$ بر سیره پردې $P_B(H)=\frac{P(B\cap H)}{P(B)}$ نو:

$P(B\cap H)=P(H)\cdot P(B)$

عمومي حالت: د A_1 , A_2 , $A_n.....$, $(n\geq 2)$ ناڅاپه پېښې احتمالاً یو له بلې څخه مستقلې بلل کېږي که چېرې د هرو دوو یا څو پېښو په ترکیب کې د ضرب د حاصل قاعده صدق وکړي پرته له هغې پېښې احتمالاً یوه له بلې سره تړلې نومول کېږي.

پایله:

1: پاملرنه باید وشي چې د ضرب د حاصل له قاعدې څخه په ګټه اخیستنې سره په لاندې متقاطع جدول کې هم کولای شو چې $A\cap B$, $A\cap\overline{B}$, $\overline{A}\cap\overline{B}$ او $A\cap\overline{B}$ ا ناڅاپه پېښو احتمالي پایلې د A او B پېښو لپاره چې احتمالونه یې a او b وي، په آسانۍ په لاس راوړو. د A او B د مستقل والی څخه پوهېږو چې د A او $\overline{B}$ ، $\overline{A}$ او B په پای کې $\overline{A}$ او $\overline{B}$ هم یوه له بلې څخه مستقلې دي؛ نو لرو:

	B	$\overline{B}$	
A	$P(A\cap B)=a\cdot b$	$P(A\cap\overline{B})=a(1-b)$	a
$\overline{A}$	$P(\overline{A}\cap B)=b(1-a)$	$P(\overline{A}\cap\overline{B})=(1-a)(1-b)$	$1-a$
	b	$1-b$	1

2: د A ، B او C درې ناڅاپه پېښې چې یوه له بلې څخه مستقلې دي، لرو:

$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

$P(A\cap C)=P(A)\cdot P(C)$

$P(B\cap C)=P(B)\cdot P(C)$

$P(A\cap B\cap C)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال: په یوه کڅوړه کې دوې سپینې او دوې تورې مرۍ پرتې دي. دوې مرۍ یوه له بلې پسې له کڅوړې څخه پورته کوو، په داسې حال کې چې:

a- د لومړۍ مرۍ د پورته کولو نه وروسته هغه بېرته په کڅوړه کې ږدو.

b- پرته له دې چې مرۍ واپس کېښودل شي.

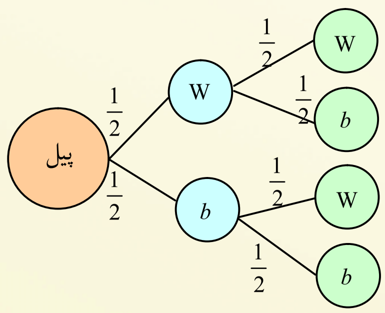
د A پېښه: په لومړي ځل سپینه مرۍ راووزي. B: دویم ځل مرۍ سپینه وي.

له یوې بلې څخه مستقلې یا تړلې (وابسته) دي.

حل:

a) څرنګه چې $P(A)=\frac{1}{2}$ او $P(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ وي او

$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{4}$ دي نو A او B یوه له بلې څخه مستقلې دي.

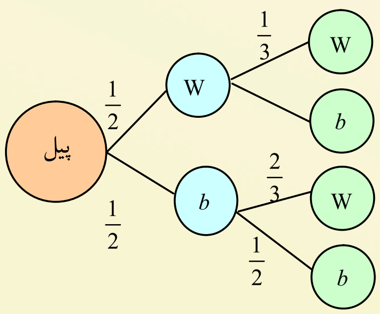


b) څرنګه چې:

$$P(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{2}\,,\;P(A)=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow P(A\cap B)\neq P(A)\cdot P(B)$$

نو A او B یوه له بلې څخه تړلې یا وابسته دي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم مثال: د لاندې متقاطع جدول خالي ځایونه چې په نښه شوي دي ډک یې کړئ:

	B	$\overline{B}$	
A	0.12	$P(A\cap\overline{B})=?$	?
$\overline{A}$	$P(\overline{A}\cap B)=?$	$P(\overline{A}\cap\overline{B})=?$	?
	?	0.6	

حل: ځرنګه چې $P(\overline{B})=0.6$ دي نو لرو:

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-0.6=0.4$$

$$P(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0.12}{0.4}=0.30$$

$$\Rightarrow P(\overline{A})=1-P(A)=1-0.3=0.70$$

او د پېښو د تقاطع څخه لرو چې:

$$P(A\cap\overline{B})=P(A)\cdot P(\overline{B})=0.3\cdot 0.6=0.18$$

$$P(\overline{A}\cap B)=P(\overline{A})\cdot P(B)=0.7\cdot 0.4=0.28$$

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})=0.7\cdot 0.6=0.42$$

په همدې ترتیب په جدول کې د قیمتونو په وضع کولو سره مسئله تکمیلیږي.

پوښتني

یو سټ چې عناصر یې $5,3,2$ او 30 دی د یوه رقم د انتخاب احتمال یې 0.25 دی په ناڅاپي ډول لـه نوموړي سټ څخه یو رقم انتخابوو، که چیرې A_k ناڅاپه پیښه د هغه رقم چې انتخاب شـوي او د تقسیم قابلیت پـه k ولري، آیا A_2 , A_3 او A_5 ناڅاپي پیښې دوه په دوه مستقل دي او که نه؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

بېلې شوې(غیرمتمادي) نمونه يي فضا:

هغه نمونه يي فضا چې عناصر يې د شمېر او تشخيص وړ وي، د **پرېکړې يا** گسسته نمونه‌يي فضا په نامه يادېږي؛ لکه د رمل يا د سکې اچولو تجربي نمونه‌يي فضا.

نبښتي(متمادي) نمونه يي فضا:

هغه نمونه يي فضا چې عناصر يې د شمېر وړ نه وي د پيوسته يا متمادی نمونه‌يي فضا په نامه يادېږي چې د حقيقي اعدادو پر محور د فاصلې په بڼه او يا په فضاکې د هندسي شکلونو يا حجمونو په ډول څرگندېږي.

هم چانس پېښې:

د يوې نمونه يي فضا لومړني پيښې چې د هغوي پېښې د تجربې په پای کې په برابر احتمال پېښېږي، هم چانسه پېښې بلل کېږي. د هم چانس پېښو د احتمال مجموع له يوه سره مساوي ده.

د نبښتی(پيوسته) فضا احتمال:

د ټوټه کرښو، سطحو او حجمونو مساعد حالتونه د يوې پام وړ ناڅاپې پيښې لپاره په يوه تجربي نمونه‌يي فضا کې شامل ټوټه کرښو، سطحو او حجمونه عبارت دی د متصلې فضا له احتمال څخه.

مشروط احتمال:

کـه چيرې A او B د S، د نمونـه‌يي فـضا دوې ناڅاپـه پېـښې چـې $P(B) \neq 0$ وي پـه دې حالـت کـې $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ ته د A ناڅاپه پيښې د مشروط احتمال په نامه يادېږي پـه دې شـرط چې د B پېښه لـه مخکې پېښه شوې وي.

يوه له بلې څخه مستقلې پېښې:

د A او B دوه ناڅاپه پېښې يوه له بلې څخه مستقلې بلل کېږي، که چيرې:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ (د ضرب د حاصل اصل)

د څېړکي پوښتنې

1. د لاندې نمونه يي فضاګانو څخه کومه يوه سره نښتي يا پيوسته او کومه يوه پرېکړې يا ګسسته دی؟

الف: د يوې رمل دانې اچولو تجربه

ب: د يوې سکې د اچولو تجربه

ج: د يو غشي لګېدل په يوه دايره

د: د يوې فلزي ميلې د اوږدوالي زياتېدلو تجربه نظر حرارت ته

2. د يو چارتراش چې اوږدوالي يې L دي په ناڅاپه ډول په سور اره کوو، تر څو دوه برخې شي څومره احتمال ددې شته دي چې د کين اړخ اره شوي برخه د ښي اړخ له درې برابره څخه کوچني وي.

3. د يوه خصوصي شرکت يو کارګر هره ورځ د 8 او 8:50 ساعتونو په منځ کې کورته نږدې تم ځاي کې چې د مامورينو په ګاډي کې د کارته د تګ لپاره ګډون وکړي او په 8:15 ، 8:30 او 8:45 وختونو تم ځاي ته رسېږئ څومره احتمال ددې شته چې نوموړې تن له 5 دقيقو څخه لږ منتظر پاتي شي.

4. د $[0.3]$ تړلي فاصلې څخه په ناڅاپه ډول دوه عددونه ټاکو، پيدا کړي ددې احتمال چې د اعدادو مجموعه د 5 څخه کوچنی او د 2 څخه لويه وي.

5. په ناڅاپه ډول يو ټکي د مخروط دننه چې د قاعدې وړانګې يا شعاع يې R او جګوالی $R\sqrt{3}$ دي ټاکو، پيدا کړي ددې احتمال چې ټکي د محاطي کرې دننه په دې مخروط کې قرار لري.

6. د يو خودکار قلم خرابېدل دوه دليلونه لري:

1- د ميخانيکيت خرابېدل

2- د خودکار د نيچې خرابېدل

که چېرې د يو خودکار قلم د خرابېدو احتمال 0.088 او ددې احتمال چې د خرابېدو دليل (1) ،شميره وي مساوي په 0.05 او د دويم نقص احتمال مساوي په 0.002 وي وڅېړئ: چې دوه پورتنی دلايل مستقلې او يا غير مستقلې پېښې دي؟

7. خيبر غواړي هغه څلور کليګانې چې په جيب کې يې لري او سره يو شان دي د کورد دروازې قلف خلاص کړي په کوم احتمال سره ورروسته د دريمې کلي له آزمويلو سره چې له جيب څخه يې را باسي د قلف اړونـد کلي وي، په هغه صورت کې چې:

a) هره آزمويل شوي کلي په هغه صورت کې چې اصلي کلي نه وي دوباره په همغه جيب کې اچوي.

b) هره آزمويل شوي کلي په هغه صورت کې چې اصلي کلي نه وي په بل جيب کې اچوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library