شمیر پوهنه

(ریاضي)

ستر کتاب

Ketabton.com

لومړی برخه

دویم غځیدلی چاپ

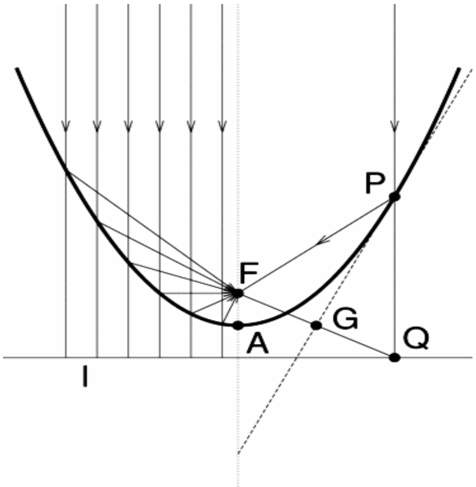
لیکونکی: ډاکتر ماخان (میږی) شینواری

(c) ketabton.com: The Digital Library

شمیرپوهنه

(رياضي)

سترکتاب



دويم غزېدلی چاپ

ليکونکی: ډاکتر ماخان ميرڼي شينواري

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلوي ښښتن په نامه

په دې هيله، چې په دې ليکنو او ژباړو به مې زموږ د بې وزلي او له پوهې پاتې ملت - په ما د پوهنې لپاره د لګښت - لپاره د پوهنې په لور داسي لږ ونده اخستې وي.

کتاب پيژندنه

د کتاب نوم: د شميرپوهنه ستر کتاب(لومړی برخ)

ليکونکی: ډاکتر ماخان،، ميری،، شينواری

makhanshinwari@gmail.com

د خپريدو لړی

خپرندوی: د افغانستان کلتوري ودې ټولته

جرمني

چاپ کال ۲۰۱۲

چاپ چارې

دانش خپرندويي ټولنې تخنيکي څانګه

WWW.danishpress.com

د چاپ حقوق خپرندوي ټولنې ليکونکي يا ژباړي سره خوندي دي.

پښتو مو ژبه او شميرپوهنه پرې ساده ده

(c) ketabton.com: The Digital Library

د خپرندوی ټولنې یادښت

له هغې مودې را په دې خوا، چې د افغانستان د کلتوري ودې ټولنې د علمي، ساینسي او طبي اثرو د خپرولو لړۍ پیل کړې، تراوسه یې په دې لړ کې مهم اثار خپلو هیوادوالو ته وړاندې کړې دي.

موږ باور لرو، چې پښتو ژبه هغه وخت په یوه مهمه غني ژبه بدلیدلای شي، چې د پوهې په ګانه سمبال شي او په علمي او اکاډمیکو اثارو غني شي.

اوس چې زموږ ملي سراسري ژبه د بیلابیلوګواښونو او چلنجونو سره مخامخ ده، پر موږ ټولو ده، چې د دغه ګواښونو په وړاندې به په نره ودریږو او د علم او قلم په ژبه به ځواب ورته ووایو.

د اتحادیې له حوا د ډاکتر ماخان شینواري تراوسه زیاتو چاپ شویو اثارو په څنګ کې، د ده د پنځه وپښت شمیر پوهنې نویو ژباړو او لیکنو او دوه ټولنیزو لیکنو تر منځ، دغه اثر په همدې لړ کې ځکه د ارزښت وړ دی، چې د علمي، ساینسي اثارو د خپراوي په لړ کې د یوه مهم ګام په توګه ګڼل کیدای شي او هیله ده، چې د دې برخې مینه وال لوستوال، زده کوونکي او د پوهنتو زده کړې کڅه ترې واخستلی شي.

په درناوي

د افغانستان کلتوري ودې ټولنه

۲۰۰۱۲ ز ک

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ليکونکي مننه

د هر څه له مخه د هغو ليکونکو پروفيسرانو څخه زياته مننه، چې د ليکنو څخه يې زما د ژباړې لپاره تفاهم لرې. ماته د دوي د ليکنو د ژباړې په هيڅ ډول مادي ګټه نه شته او دا کار مې يوازې په يوه د پوهنې توانمندې ، مګر وروسته پاتې ژبې ويونکي ولس ته وړاندې دی، دا دې د دې پروفيسرانو له خوا په پوهنيزه اړخ کې زموږ په دې اړخ کې هم مرستې ته اړ ولس سره مرسته وي.

همدا ډول زموږ،، د افغانسان کلتورې ودې ټولنه،، جرمنې، د غړو، مرستندويانو او په تيره بيا د مشر تابه څخه زياته مننه کوم، چې پرته له خپرندوې ټولنې په توګه يې د دې ليکنو زياته اقتصادي ونډه هم په غاړه اخستې.

دې لاندې زما کليوالو ملګرو او ملګرو د دې کتابونو په چاپ کې د توان سره سمه اقتصادي ونډه اخستې، چې زه ترې زياته مننه کوم:

د ښاغلي ډپلوم انجنير ريحان الدين حساس، ښاغلي ډپلوم انجنير محمد اکبر نور، ښاغلی ډاکتر سردار ګانه وال، ښاغلی ډاکترماڼوګل ګانه وال، ښاغلي ټولنپوه محمدعارف بيان، ښاغلي ډپلوم انجنيرمحمد ايوب بيان، همداسې زما د ملګري اروابناد ډاکتر حاجي محمد سلطانزي د ځوي ښاغلي ډاکتر صالح محمد سلطانزي ، ډپلوم انجنير او ډپلوم اقتصاد پوه رحمت الله فتحي او نه اخر زما د لور ډاکتر ځانګې شينواري او زما د ځوي اقتصاد پوه او ټولنساپوه اباسين شينواري.

نه د ټولو په اخر کې زما له ميرمن ښاپرۍ څخه ډېره زياته مننه، چې زما د ليکنو- نه دا چې مخه يې نه ده نيولې- پوره ملاتړ کړي.

بيا هم له دوي څخه د زړه له کومې مننه کوم او لوي ښتن دې ورته اجرونه ورکړي، چې داسې مرستو ته دوام ورکړي.

په مننه : ستاسو ماخان شينواری

جرمني د بن ښار

۲۰۱۲ ز ک

(c) ketabton.com: The Digital Library

نیولیک

نويې سريزه

سريزه

افغاني، يوناني ، لاتين الف ب

شميرپوهنيزې نخښې

۰ ۱	د شميرپوهنې سم اند يا منطق	۱
۱ ۰ ۱	پوهنيزه ژبه او پيدايښت يا طبيعي ژبه	۱
۲ ۰ ۱	د شميرپوهنې سم اند بنسټيزه کليمې	۳
۱ ۰ ۳ ۰ ۱	ثابتې ، اووښتونې يا واريابلې ، ترمونه	۳
۲ ۰ ۲ ۰ ۱	وينا	۵
۳ ۰ ۲ ۰ ۱	د دوه ارزښتوالي اصول يا پرينځيپ	۷
۴ ۰ ۱	وينا فورم يا ۰بڼه او کوانتورونه	۱۳
۵ ۰ ۱	اړيين او پوره کيدونکي شرطونه	۲۸
۶ ۰ ۱	د شميرکليمه يا د لغاتو	۳۱
۷ ۰ ۱	برابرون او نابرابرون	۳۳
۱ . ۸	تمرينونه	۳۸
۲ ۰	ډيرۍ پوهنه	۳۹
۲ ۰ ۱	د ډيرۍ پوهنې کليمه	۴۰
۲ . ۲	د ډېريو ترمنځ اړيکې	۴۵

(c) ketabton.com: The Digital Library

	برخېدېری	۴۶
	د یوې ډېری توان یا تواندېری (توانسټ)	۴۸
۲ ۰ ۳	په ډیری کې کارونې یا عملیې(۱)	۵۰
	غوڅېدېری یا متقاطعدېری	۵۲
	د یوې ډېری یا سټ کمپلیمنت	۵۷
۲ ۰ ٤	څیرونه	۵۸
	تمرینونه	۶۷
۳ ۰	د رییل ګڼونو سره د شمیرلو بنسټیزې...	۷۰
۳ ۰ ۱	د ګڼونو- یا اعدادو سیستم جوړښت	۷۰
۳ ۰ ۱ ۰ ۱	پیداینښتي یا طبیعي ګڼونه	۷۰
۳ ۰ ۱ ۰ الف	د پیداینښت یا طبیعي ګڼونو جوړښت	۷۱
۳ ۰ ۱ ۰ ب	د پیداینښت ګڼونو انځورونه او شمیرنه	۷۲
۳ ۰ ۱ ۰ پ	د شمیرنې بنسټیز قوان ین	۷۸
۳ ۰ ۱ ۰ ۲	ټولګڼونه	۸۴
۳ ۰ ۱ ۰ ۲	الف د ویش تیوري	۸۶
۳ ۰ ۱ ۰ ۲ ب	غټ ګډ پرویشونی(بزګترین مقسوم علیه ...)	۸۸
۳ ۰ ۱ ۰ ۳	راشنلګڼونه	۱۰۶
۳ ۰ ۱ ۰ ٤	رییلګڼونه	۱۰۸
۳ ۰ ۲ ۰ ۱	ماتشمیرنه	۱۱۹

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۳	تمرینونه	۱۳۰
۰ ٤	پوتنځ یا توان ، ریښه یا جذر	۱۴۱
۱ ۰ ٤	توان د ټولګنیز په جګ یا اکسپوننت	۱۴۱
۲ ۰ ٤	ریښه او توان د راشنل اکسپوننت یا جګګن سره	۱۴۴
۳ ۰ ٤	توان د ریيلګڼ اکسپوننت یا جګګڼ سره	۱۵۱
٤ ۰ ٤	ټولګه	۱۵۲
۰ ۵	لوګاریتم	۱۵۸
۱ ۰ ۵	د لوګاریتم کلیمه	۱۵۸
۳ ۰ ۵	ټولګه	۱۶۶
۰ ٦	ګونومتري	۱۶۹
۱ ۰ ٦	بنسټیزه ځمککچپوهنه یا هندسه	۱۶۹
۱ ۰ ۱ ۰ ٦	ټکی او کرښه	۱۶۹
۲ ۰ ۱ ۰ ٦	کونج	۱۷۱
۳ ۰ ۱ ۰ ٦	درېګوډئ	۱۷۴
٤ ۰ ۱ ۰ ٤	کونکروانیځ او ورته والی	۱۷۸
۵ ۰ ۱ ٦۰	ولاړکونجیز دریګوډئ	۱۸۴
۲ ۰ ٦	په ولاړکونجیز دریګوډئ کې د ...	۱۸۸
۳ ۰ ٦	په یوونګردئ کې د کونج بلواک ..	۱۹۰
٤ ۰ ٦	د ساین او کوساین جملې	۱۹۵

(c) ketabton.com: The Digital Library

٦ ، ٥	تریګنومتریکي کتمتوالی	۲۰۵
۵ . ۶	تریګنومتریکي یا کونجکچیز فرمولونه	۲۱۵
۰۷	کمپلکس ګنونه	۲۲۲
۰۸	د ښوونې یا ثبوت متودونه	۲۳۵
۸ ۰ ۱	سیده ښوونه	۲۳۵
۸ . ۲	ناسیده ښوونه	۲۳۷
۸ ۰ ۳	د پوره ایندکشن له لارې ښوونه	۲۳۹
۹	لاینیز برابرون له یوې اوړیدونې یا ...	۲۴۳
۱ ۰۹	لاینیز برابرون	۲۴۴
۱۰	کومبیناترویک، د بینوم جمله	۲۶۶
۱۰ ۰ ۱	فاکولتیت یا فاکتوریل	۲۶۶
۱۰ ۰ ۲	د بینوم ځله ونه	۲۶۷
۱۰ ۰ ۳	د بینوم جمله	۲۷۰
۱۰ ۰ ٤	کومبیناتوریک	۲۷۴
۱۰ ۰ ٤ ۰ ۱	پرموتیشن	۲۷۵
۱۰ ۰ ٤ ۰ ۲	واریيشن	۲۸۰
۱۰ ۰ ٤ ۰ ۳	کمبینیشن	۲۸۶
۱۰ ۰ ٤ ۰ ٤	د پرموتیشن، واریيشن او	۲۹۱
۰۱۱	لانیز الجبري برابرونونه	۲۹۵

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۱ ۰ ۱	لانیز برابرون له دوه اوړیدونو یا ...	۲۹۶
۱۱ ۰ ۱ ۰ ۳	دویمه درجه دیترمینانت او د کرامر...	۳۰۷
۱۱ ۰ ۱ ۰ ٤	د ګاوس الګوریتم	۳۱۲
۱۱ ۰ ۱ ۰ ٥	له دوه وو زیات برابرونونه له دوه ...	۳۱۶
۱۱ ۰ ۲	لاینیز برابرونونه له درې	۳۱۷
۱۱ ۰ ۲ ۰ ۱	یو برابرون له درې ناپیژندونو سره	۳۱۷
۱۱ ۰ ۲ ۰ ۲	دوه برابرونونه له درې ...	۳۱۸
۱۱ ۰ ۲ ۰ ۳	دریمه درجه دیترمینانت او د ...	۳۱۹
۱۱ . ۲ . ۴	د ګاوس لګوریتم	۳۲۲
۱۱ ۰ ۳	په خوښه ډېر مساوات د په خوښه ...	۳۲۵
۱۱ ۰ ۳ ۰ ۱	د n -م درجې دیترمینانت او د ...	۳۲۶
۱۱ ۰ ۳ ۰ ۲	د ګاوس الګوریتم	۳۲۸
	تمرنونه	۳۳۳
۱۲	الجبري برابرونونه	۳۴۰
۱۲ ۰ ۱	نالاینیز برابرونونه	۳۴۰
۱۲ ۰ ۲	څلوری ئیز یا مربع برابرونونه	۳۴۳
۱۲ ۰ ۲ . ۱	د دوه په جګ برابرونونه ، د وییتا جمله	
۱۲ ۰ ۲ ۰ ۲	څلوری برابرونونه ، چې په نورمال	۳۵۰
۱۲ ۰ ۲ ۰ ۳	د n -م درجې ځانګړي برابرو...	۳۵۱

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۲ ۰ ۳	دریمه درجه برابرونونه	۳۵۷
۱۲ ۰ ٤	د ریښي برابرونونه	
۱۳	ترانسڅیندنت برابرونونه	۳۷۵
۱۳ ۰ ۱	لوګاریتم برابرونونه	۳۷۵
۱۳ ۰ ۲	اکسپوننشل- یا په جګګړ برابرونونه	۳۸۰
۱۳ ۰ ۳	ګونومتریکي یا کنجکچیز برابرونونه	۳۸۵
١٤	له نابرابرونونو او مطلقه ارزښت ..	۳۹۶
١٤ ۰ ۱	نابرابرونونه	۳۹۶
١٤ ۰ ۱ ۰ ۱	بنستیزې کلیمې او شمیر قوانین	
١٤ ۰ ۱ الف	اینتروال	۳۹۷
١٤ ۰ ۱ ۰ ۲	نابرابرونونه له یوې ناپیژندونکی...	۴۰۰
١٤ ۰ ۱ ۰ ۳	د نابرابرونونو سیستم ...	۴۰۹
١٤ ۰ ۱ ۰ ٤	نابرابرونونه له دوه ناپیژندونکو سره	۴۱۱
١٤ ۰ ۲	برابرونونه او نابرابرونونه	۴۱۴
١٤ ۰ ۲ ۰ ۱	له مطلقه ارزښت سره شمیرنه	۴۱۴
١٤ ۰ ۲ ۰ ۲	برابرونونه له مطلقه ارزښت سره	۴۱۵
١٤ ۰ ۲ ۰ ۳	نابرابرونونه له مطلقه ارزښت سره	۴۲۰
١٥	بلواک یا فنکشنونه یا طابع	۴۳۰
١٥ ۰ ۱	د بلواک کلیمه او د بلواک انځورونه	۴۳۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ ۰ ۱۵ د بلواک خویونه ۴۳۳

د ستر کتاب دویمه برخه

۱٦ د هوارې یا سطحې شننیزه هندسه ... ۴۶۶

۱ ۰ ۱٦ کرښه ۴۶۶

۲ ۰ ۱٦ ګردۍ ۴۷۵

۳ ۰ ۱٦ ایلیپسې ۴۸۲

٤ ۰ ۱٦ هیوپربول ۴۸۷

٥ ۰ ۱٦ پارابول ۴۹۲

٦ ۰ ۱٦ تولګه ۴۹۴

۱۷ وکتور شمیرنه ۵۰۲

۱ ۰ ۱۷ د وکتور پیژند یا تعریف، ۵۰۲

په کارتیزي کواوردینات سیستم کې د وکتور انځورونه ۵۰۲

۲ ۰ ۱۷ د دوه وکتورونو سکالار ځل ۵۰۹

۳ ۰ ۱۷ د دوه وکتورونو وکتوري ځل ۵۱۲

٤ ۰ ۱۷ غبرګهواریز یا موازي الاضلاع ضرب ۵۱۷

٥ ۰ ۱۷ په شننیزه ځمککچ کې د وکتورونو ....

۱ ۰ ٥ ۰ ۱۷ د یوې کرښې وکتوري انځورونه ۵۲۱

۲ ۰ ٥ ۰ ۱۷ د هوارې یا سطحې وکتوري انځورونه ۵۲۴

٥ ۰ ۱۷ د هواربرابرونونو سکالارفورم یا ۰بڼه ۵۲۵

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۸ پرلپسې او پرلپسې لړۍ ۵۳۳

۱۸۰۱ پیل ۵۳۳

۱۸۰۲ د ګڼون - عددونوپرلپسې کلیمه ۵۳۴

۱۸۰۲۰۱ مونوتوني پرلپسې ۵۴۲

۱۸۰۲۰۲ اریتمیتیکي پرلپسې ۵۴۵

۱۸۰۲۰۳ هندسي پرلپسې ۵۴۷

۱۸۰۲الف لړۍ ۵۵۰

۱۸۰۲ الف ۰۱ هندسي لړۍ ۵۵۵

۱۸۰ ۲ الف ۲ اریتمیتیکي لړۍ ۵۵۷

۱۸۰٤ د پرلپسې او لړیو د پولې ... ۵۵۸

۱۹ د فنکشنونو پولې او ناپریکیدنه ۵۷۸

۱۹۰۱ بنسټیزې کلیمې

د پولو یا حدونو خویونه ۵۸۶

د راشنل، کسري یا نسبتي ۵۹۲

د مشلثاتي یا درېکوډي کچ توابعو پولې ۵۹۶

ناپرېکیدنې ۶۰۴

۱۹۰۲ په پوله ارزښت او ناپریکیدنې څو جملې

۱۹۰۳ د ناپریکیدونکو فنکشنونو خویونه ۶۱۰

۱۹۰٤ د بنسټیزو فنکشنونو ناپریکیدنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ښېرکي ټولګه ۶۱۶

۲۰ دفرنښیالشمیرنه ۶۲۶

د تابع تغیرمنځ ارزښت(منځنی قیمت) ۶۲۶

په یوه ټکي کې د تابع ګراف ... ۶۲۸

د لحضوی(سترګورپ) تغیر... ۶۳۰

کمښتوېش (تقسیم تفاضل؟) ۶۳۱

دفرنشلوېش یا رابیلیدنه یا مشتق ۶۳۳

کمښتوېش او مشتق یا رابیلیدنه ۶۳۶

د x_o په ځای کې د فنکشن مشتق ۶۴۳

د تانجنت پیژند او خویونه ۶۴۷

د تانجنت او عمود یا ولاړ تولیز مساوات ۶۵۰

په بیدیا کې جګوالی ۶۵۲

۲۰. ۱ ۰ ۱ الف : د تانجنت یا جګیدنې غوره والی

۲۰ ۰ ۲ د فرنښیال یا رابیلیدنې یا مشتق قاعدې ۶۵۶

د درېګوډیزو یا مثلثاتي ۶۶۲

د اکسپوننشل یا په جګ توابعو.... ۶۷۰

د مشتق استعمال په طبیعي پوهن کې ۶۷۶

د ایمپلیښیت توابعو مشتف ۶۸۳

د بنسټیزو رابیلیدنو(مشتقونو) جدول ۶۸۶

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټولګه ۶۸۸

د يوې تابع د مشتق قابليت ۶۹۱

د معکوس- - يا په څټ توابعو مشتق ۶۹۸

۲۰ .۳ د بنسټيزو بلواکو رابيليدنه ۷۰۱

د رول قضيه ۷۱۰

د وايرشتراس قضيه ۷۱۱

۲۰.٤ ۰ افراطي ارزښتونه او اوړونټکی

د دفرنشل منځ ارزښت قضيه ۷۱۲

يوعړيزې توابع ۷۱۵

ځای اړوند افراطي ټکي ۷۲۰

د انعطاف – يا اوړونټکی ۷۲۴

د کوږ يا منحني بحث يا خبرې ۷۳۳

ناټاکلي حدونه يا پولې ۷۴۶

د برنولي او د لو پيتال ۷۵۰

۲۰ ۰ ۵ د غټو ګټو پرابلم ۷۵۷

تمرينونه ۷۶۷

په ټوټه کسرونو ټوټه کونه ۷۷۸

۲۱ انتيګرالشميرنه ۷۸۷

پيلراوړنه ۷۸۷

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۱	انتیګرالشمیرنه	۷۸۹
	د ریمن(ناټاکلی) انتیګرال	۷۹۰
	بنسټیزه یا لومړنۍ تابع	۷۹۴
	سطحه او لومړنۍ تابع	۷۹۶
	ناټاکلی انتیګرال	۷۹۹
	د ټاکلي انتیګرال شمیرنه	۸۱۲
	تکمیلیدونکي بنسټونه	۸۱۴
	د ټاکلي انتیګرال ځخه و ټاکلي ...	۸۱۵
	د انتیګرالونې قاعدې	۸۱۷
	د اکسپوننشل توابعو انتیګرال	۸۱۹
	د لوګاریتمي توابعو انتیګرال	۸۱۹
	بدلون قانون	۸۲۱
	توابع، چې بې د بدلون له لارې...	۸۲۷
	ټوټه انتیګرالونه	۸۳۲
	د ټوټه انتیګرالونې لار	۸۳۴
	د ټوټه راشنل کسرونو انتیګرال	۸۳۸
	ناپای(مبهم) انتیګرال	۸۴۱
	د ټاکلو انتیګرالونو حل د بدلون له لارې	۸۵۲
	د انتیګرالشمیرنې استعمال	۸۶۲

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوې لیکنې او ژباړې

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ ته چمتو لیکنې او ژباړې

د ژباړي یا لیکونکي ژوند ته لنډه کتنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مهربان او بخښونکي خدای(ج) په نامه

سریزه

ګرانو هیوادوالو !
یو څه چي پیل لري نو پاي هم باید ولري، د داسي یوه کار پیل او پای ته ځما هم لوړه او تنده دومره زیاته ده، چي مېرښت یې زما لپاره هم ناشونی دی.

د هیواد په هراړخیزه بدبختیو یو سړی هلته نور هم پوره پوهیدلی شي، چي په یوه کار پیل وکړي، څکه چي سملاسي ورته څرګندیږي، چي په هیڅ شي کي ځموږ په هیواد کي لاتراوسه څه نه دي شوي په جوړښتیزه لور، په وراني کي مو د نړۍ سرکښي ځانته ګټلې.
موږ ګورو چي په مسلکي چارو کي له پیل دا ستونځي موجود دي، چي تراوسه حتی هغه بنستیز مسلکي نومونه مو له خپلی ژبې نه دي را اخستلي، چي مسلك ته اسانتیاوې پیښبوي. له کومه ځاي چي ماته روښانه ده، تر نن ورځې په دې هکله چا په شمیرپوهنه د ستونځوبیو لپاره کومی هڅي هم نه دي کړي او ستتونځي یي نه دي ګاللي، چي دلته طبعآ افراد ملامت نه دې، بلکه ځموږ دهیواد دتاریخ په اوږدو کي دولتني جوړښت، دپوهني او همدا ډول د کلتور او ژبي د ودې دنده د حکومتونو ده، چي ځموږ په هیواد کي ځموږ حکومتونو خپل ځانونه د دې کار جوګه نه دې ګڼلي، کیدی شي چي ووایو چي په ریښتیني یي ددې کار مخه هم نیولی ده، چي په افغاني ژزبه دې څه کار وشي.
ګرانو لوستونکو !
داکار ځکه په افغاني او په ولسی افغاني لیکل شوی، چي زه په مسلکي اړخ کي یواځي، په علمي توګه په الماني ژبه پوهیږم، د انګلیسي سره هم بلد یم، نو دا

(c) ketabton.com: The Digital Library

نومونه چې له دې دباندنیو ژبو را اړووم ، داچې په ښوونځي کې څما لیك لوست په افغاني ژبه وو، په افغاني ژبه په ولسي پوهنیزه توګه اړولی شم. ماته دا کلیمې په مروجه افغاني ژبه نه دي معلومې او یا کومې چې ماته معلومې دي او زه ورسره بلد یم هغه همغه وخت ماته د پوهیدلو له امله د ستونځو ډکې ښکاریدلې .

شمیر پوهنه هم، د نورو پوهنو په څیر، یوه پراخه پوهنه ده او زیاتې څانګې لري. دا چې څما په فکر دا متآسفانه نه یواځې زما لمړی کار دی، بلکه دا د افغاني ژبې په دې توګه یو لمړی علمي اثر دی، چې په دې بنسټیزه توګه په درسي او تمریني ډول سرته رسیږي.

نن نړۍ او د انسانانو فکر دومره پر مختګ کړی او دا نور هم په خورا چټکتیاوده کوي، چې پخپله انسان ورته د تعجب په سترګه ګوري، مګر موږ لا تراوسه په هغه بنسټیزو ستوځوبیو (د ستونځو حل باندې) پیل نه دی کړی ، که دا په هره څانګه کې هم وي. څموږ پرابلمونه هراړخیز دي او هراخیزو هڅو ته مو ضرورت شته.

شمیرپوهنه څه شی دی ؟

شمیرپوهنه یو مرستندویه پوهنه ده، چې په ټولو پوهنو کې نغښتې یا په بل عبارت : په ټولو پوهنو کې د پوهیدلو بنسټیزه ریښه جوړه وي، که دا پوهنې اجتماعي وي او که طبعي (پیدایښتي) یعنې که ساپوهنه وي که اقتصاد او که کیمیا وي یا فزیك، بیله شمیر پوهنې یې وده او په پوهیدنه ناشونې ده. شمیرپوهنه له بلې خوا یواځې خپلواکه پوهنه هم ده. شمیر پوهنه بل څه ته اړ نه ده.

ددې کتاب لیکلو زما زیات وخت په بر کې ونیوه او لیکل یې د پوره ستونځو سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټول کار زما په غاړه وو او بل چا را سره متآسفانه چې مرسته هم نه شوه کولی.

د داسی یوه کتاب لیکنی مسئولیت باید د دولت په غاړه وي او مسلکي باید د داسی لیکنی څخه خپل ژوند تآمین کړای شي. د همدې هدف لپاره د مسلك زدکړه کیږي. ما په دې کرښه غوښتل، چی څمونږ د هیواد ستنځي نورې هم ګوته لك کړم.

زه غواړم چی خپلی د سر خبرې په لاندې توګه رالنډې کړم
– د لیکونکی راڅونی دلیلونه یا د شوق رابیدارول
– دداسی کتاب لیکنه په هغه وخت کی شوني کیږي، چی د لیکونکي اقتصادي ژوند تآمین وي، زه د ټولنیزو مرستو پیسو څخه ژوند کوم، یعنی د نورو خلکو د مالیا پیسو باندې. کار نه پیداکیږي او اجازه یي هم نه لرم چي پیسی وګتم.

– وخت باید پوره موجود وي او داهم ما پوره لروده، چی له دې د مخه می په سیاسی هلو ځلو دا وخت تیر کړی او دا اوس می خپل مسلك ته رامخه شوه.

– ددې کتاب لیکلو لپاره باید یو لیکونکی د خپلی ټولنی او د خپلی ټولنی د خلکو سره مینه ولری او په همدې ډول، د خپلی ټولنی او د ټولنی د خلکو او د ټولو څخه د مخه د خپل ځان لپاره هم خوبونه ولري، خیالونه ولري، چی یواځی د خوبونو ریښتیا کولو لپاره په داسی کار بریالی کیدی شي. ما ددې کار ستونځی په پوره مینه په غاړ واخستلی او دا کار می په پوره مینه سر ته ورساوه.
– په دې برسیره لیکونکی دې وظیفی ته هم باید شعوري وي، چی دی ددې کار لپاره د ملت په پیسو تربیه شوی او د ملت پور هم باید ادا شي، د داسی لږ پور اداکولو هم ما ته پوره خوښي راو بخښله.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په کور کې هم باید تر یوې ممکنه اندازې پورې یو تفاهم موجود وي یعنې یو غبرګوالی باید په کورنۍ کې وي، که داسې هم نه وي ، خو د داسې کار مخه باید ونه نیول شي ، د نورو ستونځوبیو (ستونځو حل) په خاطر، چې موږ افغانان یې په ځانګړې توګه اقتصادي اړخ کې پوره لرو، چې نه یواځې د ځان لپاره بلکه د خپلوانو لپاره هم باید پام وي، مګر ما دا توان په خپل ځان کې ددې امله نه کوته چې امکانات یې ځما لپاره نه وو.

دوم : د کتاب د لیکنو ستونځې:

د داسې کتاب لیکنه د پوره ستونځو سره مل ده، چې زه دې ستونځو ته په لاندې توګه ګوته نیسم.

۱ - دا کتاب په داسې ژبه لیکل کیږي چې له مرې څخه نیول شوې، ژیندۍ شوې، خپه شوي، خو د مرګ څخه بچ ده، له ښارونو شړل شوې، او یواځې په غرو او رغو کې ژوندۍ پاتې شوې.

دې ته باید ګوته ونیسم، چې دا کرښې دا مطلب نه لري، چې ګوندې زه به، خدای (ج) دې ونه کړي، د بلې ژبې په خلاف یم. دا زما کار نه دی او نه دا حق ځان ته ورکوم، خو دا حق لرم چې خپلې ژبې، د خپل ولس ژبې ته ، چې کمېدلې او وروسته پاتې ساتل شوې، ګوته ونیسم. موږ افغانانود افرادو په توګه هم افغاني ژبه پرېښوولې چې ولس یعنې د یوه هیواد د ژبې دپرېښوولو حق څوک نه لري، نه دولت او نه افراد. دا کار متاسفانه د افغاني ژبې په ضد او بیا د ټولو په سر کې پخپله د افغانانو څخه شوی دی، د بل ځا څخه څوک باید ګیله من نه وي.

افغاني ژبه، که څه هم پوهانو او د لیك لوست خاوندانو په زیات شمیر، نه ټولو، د لاسه ورکړې، خو بیا هم دا ژبه دا استعداد، د نورو ژبو په څیر لري، چې یوه پوهنیزه لیکنه ورباندې وشي یا بهتره پوهنیزه شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ژبه يواځې د پوهولو او پوهيدلو اله نه ده، بلکه د ولس پوهنيزه وده کې پوره غوره رول لري او د کلتوري ودې لارښودې او بنسټ دی، په دې برسيره د پوهې د اسانوولو خورا غوره اله ده. د يوه ولس د پرمختګ او د ژبې پرمخوده يو بل باندې سيده او په ځټې اغيز من دي، چې ولس وروسته پاتې وي، ژبه يې وروسته پاتې ده او که يوه ژبه وروسته پاتې وي، نو هغه ولس د نورو ولسونو سره په پوهه کې سيالي نه شي کولی او د ولس خلك د نورو ولسونو د خلکو سره د سيالی کولو استعداد ځان کی نه شي روزلی، که څه هم استعدادونه به موجود وي.

ما کوښښ کړی چې کم له کمه بنسټيزې کليمې په افغاني واړوم، چې دا کار مې په پوره برياليتوب، د پوره ستونځو سره سره سرته رسولی او په دې هکله مې زيات فکر هم په کار اچولی چې مسلکي بنسټيزې کليمي په روانه افغاني راوړل شي. هغه نومونه چې ټاکل شوي، داسې نومونه دي، چې د هغه شي ماهيت په کې روښانه دی. دا کا د هرڅه لمړی ددې لپاره بايد وشي، چې په پوهنيزو شيانو او نومونو پوهيدل بايد ساده شي.

په پوهنه کې له بلې ژبې تيريدنه ناشونی ده او يا په بل عبارت په بله ژبه صرف نظر نه شي کيدی. دلته هم هدف دا نه دی چې افغاني ژبه دې د نورو ژبو د لغاتو څخه پاکه شي، دا کار يواځې هلته کيږي، چې يوه ژبه له پوهنې وروسته پاتې وي.

د پوهنيزې ودې سره ژبې ته د نورو ژبو لغات راننوځې او ضرور هم دي. ما کوښښ کړی چې که د کوم لغات لپاره د پښتو نوم يا نه وي او يا مناسب نه وي، هغه په جهاني مروجه لغاتو وليکم.

دا چې افغاني د افغانستان ژبه او بيا هم زيندی شوې ژبه ده، دا د دولت کار وو او افغاني ژبې ته د تنفس ورکولو يا بهتره د افغاني ژبې د زيندی څخه خلاسون يا د افغاني ژبې څخه د لعنت د کړی لرې کولو دنده هم د دولت ده، خو ترهغې بايد موږ هم دې ته پام ولرو او دا پاملرنه خپله دنده وګرځوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه ولس په ژبنیو ستونځو هلته پوهیدل ممکن کیږي، چې څوك د ژبې سره په پوهنیزه توګه مخامخ شي. په افغاني ژبه دلمړي ځل لپاره داسې یوه لیکنه د ستونځو سره مل ده، مګر ناشونې نه ده.
دلته غواړم چې دې ته هم ګوته ونیسم، چې د نومونو په ټاکلو کې ما کله کله دوه نومونو کارولی، چې هغه مې په ټول کتاب کې شاید اصلاح کړې نه وي، خو په دې باور لرم چې په هدف کې ستونځې نه پیښوي لکه د بیلګې په توګه: ما لمړی ګنپوهنه لکیلی وه، چې وروسته مې شمیر پوهنې بانډې واړوله. شاید په ټولو ځایونو کې مې نه وي شمیرپوهنه کړي. دربهګوډي ما لمړی دریکونجې لیکلی وو، چې دا هم شاید د کتاب په اوږدوکې نه وي اصلاح شوی، داسې نور څه به هم وي، خو دې ته بیا ګوته نیسم، چې د پوهیدلو لپاره دا کومې ستونځې ه پیښوي.

۲ – تخنیکي ستونځې:
د ګرانو لوستونکو پام به دې ته راوګرځی، چې څمړ لپاره د داسې کتاب لیکلوپه لار کې تخنیکي ستونځې هم خورا زیاتې دي. ما په کمپیوتر د شمیرپوهنې د فرمولونو لیکلو سره ستونځې لرودي، نو له دې امله مې د نورو کتابونو دکاپیو څخه بیاتې کړې او دلته مې سریښ کړې، چې کله کېږې هم سریښ شوې دي او په دې هم پوهیږم، چې دا یو غیر قانوني کار هم دی، خو هیله ده چې د رااخستلشووکتابونو لیکونکې او چاپوونکې به دې ته تفاهم ولري او زه له دوي د هرڅه له مخه د دوي له دې تفاهم څخه د خوښې څرګندونه کوم.

غواړم د ګرانو لوستونکو دې ته هم پام راوګرځوم چې املایي غلطی به شوي وي، ، خو په پوهیدلو کې به ستونځې پیښې نه کړي، د هغې بخښنه غواړم، زه نور دا کار نه شم ځنډولی، ځکه چې ډیر ورسره ستړی شوم.
ما هیڅ دا فکر نه کاوه، چې زه دې داسې یو کار سر ته ورسوم، خو خدای(ج) په

(c) ketabton.com: The Digital Library

حرکت کی برکت ایښوولی دی.
لنډه دا، چی ددې کتاب د چاپ پورې چمتووالي کار ټول زما په غاړه وو، چی زه ورسره همدومره ستړی شوی هم یم او نورې سهوې او د غلطیئو سمولو لپاره می نور د زړه زور ختلی، که څه هم په دې اخرو ورځو کی د ملګرو په فشار ما ، څما په فکر ټولی سهوې لرې کړی.

دریم – کتاب د کومو لوستونکو لپاره دی؟

ګران لوستونکی به د را اخستلشوو کتابونو څخه دې ته پام راوګرځولی شي، چی دا کتاب د نوو څه ډول لیکنو څخه راټول شوی. ددې کتاب لوستونکی د پوهنتون د شمیرپوهنی، پیدایښتي پوهنو، اقتصاد او همداسی د نورو پوهنو زدکړي دي.
دا کتاب په ښوونځي کی هم کارول کیدی شي، خو ښوونکی باید دې ته پام وکړي، چي هغه څه، چی د کتاب په پیل کی هم دي، په پیل کی نه شي لوستل کیدی.
څنی څه په همدې لمړی برخه کی راغلي، چی نابلدو زدکوونکو ته به ستونځي پیدا کړي، خو دې ته د لږ پام وروسته، پام راګرځیدلی شي.

څلورم – دلوستلو وړاندیز

ما لږ ستونځي لرودې، چی دا کتاب په خپله خوښه ترتیب کړم. زه مجبور شوم چي یو کتاب د بنستیز کتاب په توګه ونیسم او د نورو کتابونو رااخستنی بیا په کی ځاي کړم.
ما د بنستیز کتاب په څیر د شیفر–جورج–تریپلر کتاب ونیوه. نو له دې امله می برخه ویش هم په همغه ډول کړی. ما غوښتل، چی د کتاب پیل په سمسوح یا بهتره سم اند (لنډ سمند) یعني منطق وکړم، خو هغه په اوومه برخه کي څیړل شوی.
څما وړاندیز دادی، چی اوومه– اتمه او نهمه برخه دې د هرڅه لمړی ولوستل شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

اومه اتمه او نهمه برخه څمور په هیواد کی زما په فکر ، چی نا اشنا وي. په هر صورت د اوومی برخی سریزه خو دي د هرڅه له مخه ولوستل شي او همداسی د ډیري پوهی سره اشناییته هم خورا ضرور ده

شپږم . مننه

ددې کتاب لیکلو کی ، که څما د دوستانو لخوا دې کار ته راهڅول نه وی، نو دا کار سرته نه شو رسیدلی، په تیره بیا په المان کي د « افغانستان کلتوري ودې ټولنی »دوستانو. زه له دې د ټولو د زړه له کومی خوښنه کوم. د دې ټولنی د غړو او پلویانو زیاته خوښتنه، چی ددې کتاب چاپ یی د ټولنی په چوکاټ کي په غاړه اخستی.

ډیر محترم پوهاند مجاوراحمد زیار څخه زیاته مننه، چی د لغاتو د نظر څخه تیریدنه او همدا ډول په ټولو ماناوو کي ماته خوراګټوره مشوره هم راکړې.
زما میرمن زما د ستونځو شاهده وه. په زړه ناروغه، خو په پراخه او لوي زړه او پوره حوسیله یی زما د دې لیکنی ملاتړ کاوه، چی بی ددې له ملاتړ به دا کار هم سرته نه وی رسیدلی، که څه هم دا به یی کله کله ویل، چی ګوندې پیسی می باید ګټلی وی ، خو په دې پوهیږې، چی ددې چانس نه شته، کله کله به، چی به تنګه شوه نو ویل به یې چی نور دا د چرګانو ټونګي باید بس کړم. له دې امله زما دمیرمن ښاپیری څخه هم د زړه له کومی خوښنه کوم او دا پراخه سینه او دا ناروغه زړه یی همداسی ښه تکړه ورته د لوي خداي(ج) څخه غواړم، چی زما د داسی کارونوملاتړ نور هم وکړي.

راتلونکی کارونه: د همدې کتاب سره سم ما یو د هندسی کتاب ژباړلی، چی د

(c) ketabton.com: The Digital Library

المان د پنځم ټولګی ښخه هندسه په کی راغلی د څه نونورو شمیرپوهنیزو مضوعاتو سره. دا به هم په دې کتاب پسی ټولی چاپ ته ورکړي شي.
زه یو بل خوب هم لرم، چی همدا اوس دې د یوه بل الجبر کتاب لیکلو باندې پیل وکړم. موضوعات می په سر کی راګرځي.
که چیرې نور دوستان او شمیرپوهان د شمیر پوهنی په ځانګه کی څه لیکل غواړي او په دې هکله ستونځي لري، او ستوځوبیو وړاندیزونه لري نو زه به ورسره وعده وکړم، چی دلته افغانان و ملاتړ ته راوهڅوم. د هغو دوستانو سره چي د شمیر پوهنی کوم کتاب ته یی د ژباړنی نیت وي او په افغانستان او پاکستان کی ژوند کوي نود هغو سره به وعده وکړم چی دلته ورته په دې ټولنه کی او یا د ټولنی دباندې د مرستی هلی ځلی وکړم. ځما هدف دادی، چی موږ باید داسی کارونو ته ملا راوتړو. له ما ښخه لټ بل څوک نه شته، دا چی ما دا کار سرته رسولی ، باور وکړي، چی هر بل افغان یی هم سرته رسولی شي،

په مینه ستاسو ماخان

(c) ketabton.com: The Digital Library

افغاني ، يوناني او الماني الف بی

ا	ب	پ	ت	ټ	ث	ج	چ
څ	ځ	ځ	ح	خ	د	ډ	ذ
ر	ړ	ز	ژ	ږ	ص	ض	ط
ظ	ع	غ	ف	ك	ګ	ق	ل
م	ن	و	ه	ي	ى	ې	ئ ۍ

يوناني الف بی

Α α	*Α α*	Alpha
Β β	*Β β*	Beta
Γ γ	*Γ γ*	Gamma
Δ δ	*Δ δ*	Delta
Ε ε	*Ε ε*	Epsilon
Ζ ζ	*Ζ ζ*	Zeta
Η η	*Η η*	Eta
Θ ϑ	*Θ ϑ*	Theta
Ι ι	*Ι ι*	Iota
Κ κ	*Κ ϰ*	Kappa
Λ λ	*Λ λ*	Lambda
Μ μ	*Μ μ*	My
Ν ν	*Ν ν*	Ny
Ξ ξ	*Ξ ξ*	Xi
Ο ο	*Ο ο*	Omikron
Π π	*Π π*	Pi
Ρ ρ	*Ρ ϱ*	Rho
Σ σ	*Σ σ*	Sigma
Τ τ	*Τ τ*	Tau
Υ υ	*Υ υ*	Ypsilon
Φ φ	*Φ φ*	Phi
Χ χ	*Χ χ*	Chi
Ψ ψ	*Ψ ψ*	Psi
Ω ω	*Ω ω*	Omega

اومیګا پښتو وینه ← ← په الماني وینه

الماني الف بي

A a	*A a*	𝔄 𝔞
B b	*B b*	𝔅 𝔟
C c	*C c*	ℭ 𝔠
D d	*D d*	𝔇 𝔡
E e	*E e*	𝔈 𝔢
F f	*F f*	𝔉 𝔣
G g	*G g*	𝔊 𝔤
H h	*H h*	ℌ 𝔥
I i	*I i*	ℑ 𝔦
J j	*J j*	𝔍 𝔧
K k	*K k*	𝔎 𝔨
L l	*L l*	𝔏 𝔩
M m	*M m*	𝔐 𝔪
N n	*N n*	𝔑 𝔫
O o	*O o*	𝔒 𝔬
P p	*P p*	𝔓 𝔭
Q q	*Q q*	𝔔 𝔮
R r	*R r*	ℜ 𝔯
S s	*S s*	𝔖 𝔰
T t	*T t*	𝔗 𝔱
U u	*U u*	𝔘 𝔲
V v	*V v*	𝔙 𝔳
W w	*W w*	𝔚 𝔴
X x	*X x*	𝔛 𝔵
Y y	*Y y*	𝔜 𝔶
Z z	*Z z*	ℨ 𝔷

شمیرپوهنیزې نخښې

مساوي .... $=$

نامساوي (نوروکتابونو کی) $\neq (=)$

کوچنی له .... $<$

لوي له........ $>$

کوچنی یا مساوي له .... $\leq$

لوي یا مساوي له .... $\geq$

ډیر کوچني .... $\ll$

ډیر لوي .... $\gg$

ورته یا متناسب.......... $\sim$

کونګروانیخ .... $\cong$

همداسی یا ښایي یا په ګوره کوي

کټمټ................ $\equiv$

غبرګ .... $\parallel$

ناغبرګ............... $\nparallel$

ولاړ په .... $\perp$

دریګوټی .... $\triangle$

ګردی .... $\bigcirc$

نیمی یا قطر........... $\varnothing$

کونج .... $\angle$

د دوه کرښو g او h ترمنځ کونج $\angle (g,h)$

کرښه، له A و B ته .... $\overline{AB}$

له A و B ته لوریزه کرښه.... $\overrightarrow{AB}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیندہ..................... AB

مطلقه ارزښت د .... |a|

ایماجینار یوون (واحد)....... i

د اویلرګڼ = ...2,7182818 e

پي د لودولف ګڼπ= ...3, 14149

د په لور هڅیږي یا کونورجنت کیږي ->

ناپای.................. œ

د x فنکشن یا په واك چی بلواك مو بللی f(x)

(لوستل یي (f د x یا د f, x لنډ : fx)

د x څیرونه په f(x) : لیکو: ~~x~~ f(x) f : x →

دلته h د x فنکشن، g د x فنکشن h(x); g(x)

لیمس یا پوله............... lim

	ساین	sin
تریګونومتریکي	کوساین	cos
بلواك	تانجنت	tan
	کوتنجنت...........	cot
	ارکوس ساین..........	arc sin
څیکلومتریکي	ارکوس کوساین	arc cos
بلواك	ارکوس تانجنت	arc tan
	ارکوس کوتانجنت.....	arc cot

لوګاریتم و بنسټ a ته $\log_a$

لوګاریتم و بنسټ ۱۰ ته $\lg_{10}$

دیکادیکي لوګاریتم.....

لوګاریتم و بنسټ e ته ln

طبعي یا پیدایښتي لوګاریتم

کمپلکس ګڼونه........... $\mathbb{C}$

ریېلګڼونه .... $\mathbb{R}$

ټولګڼونه .... Z

نامنفي ټولګڼونه یا

طبعي ګڼونه د صفر سره $\mathbb{N}^*$

طبعي ګڼونه .... $\mathbb{N}$

تعریفډېری .... D

ارزښتډېری........... W

حلډېری L

د ډېري A پوتنځډېری P(A)

ډېري............. M,N,A,B

تشډېری .... $\emptyset$

برخه ډېری...........

پورته یا لویډېری (چې بل ډېری خوندي لري)

ټولنډېری........... $\cup$

غوڅډېری .... $\cap$

د A کومپلیمنت ..... CA , A'

د ډېریو ورته والی ...... A~B

د ډېریو ځل.......... A × B

لوستل B اټیران A یا - ځل -

توپیرډېری : A بي له B ده A\ B

دلته: a د b پروېشوني ده یا a b ویشي a | b

د a او b غټ ګډ په ویشونی(لنډ : غ ګ و) ggt(a,b)

د a او b کوچني ګډ زیاتځله(لنډ : ك ګ ځ) kgv(a,b)

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته : a د M توکی دی .... $a \in M$

او a د M توکی نه دی .... $a \notin M$

ټولنخښه (د ټولو x لپاره باور لري) $\forall$

د موجودیت نخښه: یو x موجود دی $\exists$

کونیونکشن A او B لیکو $A \wedge B$

دیسینکشن A یا B لیکو $A \vee B$

(کله کله الترناتیو)

ایمپلیکاشن: له A څخه B لاس ته راځي $A \Rightarrow B$

نیګیشن یا نه والی $\neg$

د A او B ویناو ورته والی یا اکویوالنت $A \Leftrightarrow B$

له A څخه B لاس ته راځ او له B څخه A لاس ته راځي.

ماتریکس......... A نورو کتابونو کي $\|A\|$

دیترمینانت $|A|$

د a څخه n–امه ریښه $\sqrt[n]{a}$

د x اکسپونتشلبلواك

د n – فاکولتیت یعنی $n!=1.2.3....n$ $n!$

بینومخلوونې $\binom{n}{p}$

لوستل: n په p باندې

له a تر b واز اینتروال $]a,b[$

$= \{ x \mid a < x < b \}$

له a تر b بند اینتروال $[a,b]$

$= \{ x \mid a \leq x \leq b \}$

کیڼ واز اینتروال $]a,b]$

$= \{ x \mid a < x \leq b \}$

ښې واز اینتروال $[a,b[$

$= \{ x \mid a \leq x < b \}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د زیاتون نخښه (سیګما) $\sum_{i=1}^{n}$

که د زیاتونتخښه داسی وي

لوستل: له $i=1$ تر n پورې

ځلنخښه (پي) $\prod_{i=1}^{n}$

که داسی لیکل شوي وي

لوستل: له $i=1$ تر n پورې

پرموتیشن یا بدلون

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ ۰ د شمیرپوهنې سم اند (د ریاضیاتو منطق (logic))

سم اند (سماند) یا منطق (logic یونانی کلمه ده، چي اند(فکر) یا وی(لغات) ته وایی).

د وینا د ټیک یا کره فرمولولو لپاره د سم اند(منطق) څخه کاراخستل کیږي د فورمال سم اند، د سم اند پوهنی بنسټ، د فکر ډول او فکر کولوقوانینو په څیر یې څیړنه د اریستو تلس(٣٨٤ تر ٣٢٢ ز ۰ ک۰ ا)) له خوا کیښول شوې۰

د ریاضیاتو منطق(د شمیرپوهنی سم اند) د شمیر پوهنې د یوې برخی په څیر پرمختګ یا وده وکړه۰ سم اند د شمیرپوهنی بنسټ دیٔ او د شمیر پوهنی په ټولو څانګو کی ننوتی۰

یادونه : سم اند په خپله ختة کې په فلسفه پورې تړلی مسلک دیٔ نو له دې امله دا لیکنه د ټولو مینه والولپاره په زړه پورې خوندیوني(متن) لرودیٔ شي۰ هیله ده، چې ګڼ هیوادوال به یې وګوری او کمي به یې راپوره کړي، دلته او یا په ځانله لیکنه کی۰

۱ .۰۱ پوهنیزه ژبه او پیداینتي- یا طبیعي ژبه

اند (فکر) او ژبه یو له بل سره داسې تړلي، چې بیلیدنه یې ناشوني ده. په ورځني ژوند کی انسانان خپل اند یا فکر په طبیعي ژبه څرګندوي، مګر دا د مسلکي ژبی په څیر د

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوهنی(علم) لپاره بسیا نه کوي، ځکه چی د ځنو لغاتو مانا کره یا ټینګه نه ده ټاکل شوی، دا په دې مانا، چی په طبیعي ژبه کی یو لغات بیلی بیلې ماناوي لري لکه لور(د ریبلو لور) او لور(په کومه لور) او یا څو لغاتونه ، لکه شلغم، ټیپر او منګریتي، چی همغه یو څه یا شی په ګوته کوي.

په مسلکی نومونو کې یو څوترمینولوجي(Terminology لاتین، یونانی): په یوه مسلک کی شته(موجود دي) د مسلکي لغاتونو ټولګه او په همدې توګه د هغوي ښوونه ، منځ ته راوړل کیږي، چې د کلمو موخور(هدفمند) کره یاکلک ایښوولو (ځای پرځاي کولو) د نورمي ویناو استعمال او د هغوي او د ورځنی ژبی ویناودد څخه ګټه اخلي۰

په دې ډول په شمیرپوهنه یا ریاضیاتو کی هم یوه پوهنیزه ژبه منځ ته راغلې، چی له پیدایښتي یا طبیعي ژبې او یوې ځانګړی ترمینولوجي سره یوځاي شوې یا په بل ډول : د پوهنیزې ژبی او یوې ځانګړي ترمینولوژي ټولګه ده۰

له دې امله شمیرپوهنه په یوه لوړه کچه ټیکوالی(Exaktheit) ، په یوه لنډ، روښانه ، څرګند او له دې امله یو لیدوړ « وینا ډول» درلودی شي۰

شمیرپوهنه او سم اند یا منطق دواړه دیوې سمبولیک ژبی څخه د کارونی یا استعمال کار اخستی شي. د لغاتو په ځاي نخښی ایښوول کیږي، چی مصنوعي منځ ته راغلي او په ځانګړو ماناو سمبال دي۰

د شمیرپوهنی پوهنیزه ژبه کې غوښتنه داده، چې باید په کلکه او روښانه توګه د ریښتونو (Realität واقعیتونو) شیانوObjects ، د هغو شمیرنیزو څیرو او د دې لپاره پیدا یا منځ ته راغلو نخښو ترمنځ توپیر وکړي. شیان له انسانانو احساسیږي، د یوه ذهنیت (Abstruction ابسترکشن) له لارې په یوه کلیمه څیره (متصور؟) کیږي. او شته والی یې د یوې نخښې جوړښت construction ممکنوي. څیره کوونه یې د شمیرنې شیان دی او یوه «نخښونه» غوره کوي، چې دیوه نوم اوزیات وخت د یوې نخښې په څیر ځان نیسي، د بیلګې په توګه : لکه هر طبیعي ګڼ(عدد) د یوې نخښې داسي په نامه د عددنخښې (ګڼنخښې) له لارې انځوریږي. دا نخښه څیفر Ziffer یا ګڼنخښه(عددنخښه)، چې عربې همغځ صفر دی, بلل کیږي. داسې نخښونې دبنسټیزو نخښو څخه منځ ته راغلي. په درسي ځاي سیستم کې بنسټیز څیفرونه یا ګڼنخښې په لاندی ډول دي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ .

١ ٠ ٢ د شمير پوهنى سم اند بنسټيزې کلمي

١ ٠ ٢ ٠ ١ ثابتى، متحولې او ترومونه(١)

Constants, variables, terms

په شميرپوهنه کې شيان ، د شيانو ترمنځ اړيکې او د شيانو تړنې په نخښو(سومبولونو) انځوريږي.

١ – شميرپوهنيزې نخښې

- د ثابتو(تل همغو) لپاره نخښې (علامې): دا د يوه کره ټاکلې مانا لپاره نخښې دي يانې تغير نه خوري، لکه ٧ ، ١٢ ، π ،e, او داسې نور

- د اووښتونو يا واريابلو(متحولو) لپاره نخښې: دا د يوې ورکړ شوې ډيرۍ يا سټ (په ډيرۍ پوهنه کې روښانه کيږي) داسې په زړه پورې توکي لپاره يوه نخښه ده، کومه چې د اووښتونويا متحولو بنسټسټ يا-ډيرۍ بلل کيږي، دا په لاتين تورو په نخښه کيږي او کله کله په اندکس(ز٠ايندکسونو) يا پيژندنخښه index (ز٠ پيژندنخښې Indices) چې ايندکس د تورو پښنو ته راځي په نخښه کيږي٠

لکه: $a_1; a_2; b_i; i = 1,2,3 \ldots$

- اړيکنخښې : دا د شيانو اوګڼونو يا اعدادو ترمنځ د اړيکو نخښې دي لکه $<$, $>$، $=$, $\leq$, $\geq$,

- د نښلونو،کارونو، تړنو يا عمليونخښې : لکه زياتون-(جمعه)، کمون-تفريق-) ، ځل-(ضرب-)، او ويش -يا تقسيم نخښې: / ، : +, -, *

(c) ketabton.com: The Digital Library

- تخنيکي نخښې : لکه سيميکولوم (,, ,,)، نوکان ( ) او نور ډولونه يې او کوما ،

د نخښو لړۍ : که نوکان، واريابلی(اووښتونې), ثابتی او د هغوي يوځاي ايښودل د اړيکو- ، نښلونو- ، او تخنيکی نخښو يوځاي ايښوول موخه ور يا هدفمند يو په بل زيات شي، نو يوه د نخښو لړی ترې منځ ته راځی٠

(۱) ثابتې((تل) همغه يا تل همغه، همغه ارزښتيزې) ،

متحولې :اوښتونی يا اوړيدونی يا واريابلې او ترمونه

بيلګه :

الف : د 3.(1 + 2a) – a + 144 يوه د نخښو لړی (ترادف) ده

ب : 11x =6 – 3a).(b – 12) ، دا د نخښو لړی نه ده، ځکه چې د نخښو لړۍ موخه وره يا هدفمنده نه ده ايښوول شوې، د برابرنخښې پسې نوک نه شته، دا په دې مانا، چې له دې څخه څه نه پوهيږو.

۲ - ترمونه terms, Termen : که په يوه لړۍ کې، يواځې ثابتې (همغه)، اووښتونې(متحولې، واريابلې) نښلونې او تخنيکي نخښې کارول شوې وي، يانې اړيکې نه وي کارول شوي، نو دې ته ترم ويل کيږي. هر يو ترم پورې که واريابلی ولرې پيژندډيری يا تعريفسټ هم اړه لري، دا د داسې اووښتونو يا متحولو اصلی بنسټسټ يوه برخډيری او يا هغې سره برابر برخه سټ يا - ډېرۍ ده، په کوم کې چې د ترم ارزښت بيرته د بنسټډېرۍ توکی دی. د ترم ارزښت شميرل کيدی شي، که د مخه ټاکلشوې نارونې يا عمليې اجرا شي، که چېرې اووښتونې يا واريابلې د پيژندډېرۍ د توکو نخښونه غوره کړي. دا په لويو لاتين تورو(اکه: $(T, T_1, T_2$ په نخښه کيږي. که ترمونه اووښتونې ولري، نو د اووښتونو يوه ورزاته نخښه په نوکانو کې نيولکيږي، لکه :

T(x); T(x,y)

بيلګه :

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف : ترم 3/4 + 126 ، چې اووښتونې یا متحولې نه لري په Tسره په نخښنه کوو او لیکو: T=126 + 3/4 یا $T=126+\frac{3}{4}$

ب : ترم 2x + 10 چې اووښتونې یا متحولې x لري یانې T(x) = 10 + 2x ۰ د اووښتونو بنسټیدیری یا ــډېری دې یا د طبیعي اعدادو ډیریN°وي

تعریفډیری د بنسټیدیری سره برابره ده، که په ترم کې د اووښتونې یا واریابلی x پهٔ ځای یو پیداینښتې ګڼ یا طبیعي عدد 2 کیږدو، نو د ترم ارزښت دی : T(2) = 14

پ : (x+2y)/x یا $\frac{x+2y}{x}$

ترم دی چې دوه متحولې لري او په T(x,y) سره یې په نخښنه کوو۰ د اووښتونو یا متحولو بنسټیدیری دې د پیداینښتي یا طبیعي اعدادو سټN وي, نو د x لپاره تعریفډیری N° ده۰ د y لپاره N (پیداینښتی ګنونډیری°N تعریفډیری لپاره ترم نه دی تعریف یاپیژند نه لري)

د 0 = x لپاره ترم نه دی تعریف یا پیژند ند لري

د ترم T(x,2y) = (x,y) /x یا $T(x,2y)=\frac{x+2y}{x}$

ارزښتشمیرنه د x=2 او y= 3 لپاره په دې ډول ده :T(2,3) = (2+6) / 2 = 4

یادونه: د ګڼونو لپاره دې دریمه او څلورمه برخه وکتل شي، چې هلته ګنونډیری ورکړ شوي دي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چې انسان د خپل چاپېریال د ټولو شیانو او پیدایښتونو سره لاس په ګریوان دئ، نو پوښتنې او هیلې رامنځ ته کیږي،غوښتنې لري او ویناوې کوي، په کومو ویناو کې،

چې شیان او ریښتونی(واقعیتونه) بیرته هنداره (منعکس) کیږي یا په یوه څه یا شي، چې وینا کیږي، نو موخه ترې د هغه څه ریښتون حالت یا ځاننیونه ده۰ یوه وینا په واقعیت کې ټیک هلته ریښتیا ده، کله، چې په هغې کې شي حالت یا بهتره شي ځاننیونه په ریښتونې شته یا موجود وي، په بل حالت کې دا وینا ناریښتیا (غلطه) ده. موږ نیسو، چې دا څه دې په شمیرپوهنه کې کره ټاکلي وي او پریکړه دې پرې کیدی شي۰

پژند(تعریف) ۱ ۰ ۱ :

وینا د یوه شی ، څرنګوالي (چې څنګه دئ)، د هغهٔ بیرته هندارونه یا منعکسونه ده۰ (دا په دې مانا، چې وینا یو شی په وینا کې همهغسی ښایي لکه څنګه چې دئ له دې امله شي هندارونه یامنعکسونه)، چې د ژبی له لارې وړاندې کیږي یا په همدې ډول په نخښه کیږي۰

یا په بل عبارت وینا د کلیمو داسې هدفمند یوځایوالی یا یوځاي ایښوول دي، چې د یوه شی حالت (ځاننیونه) یا شکل او د شیانو ریښتونې اړیکی بیرته هنداره یا منعکسوي او موخه وردی، چې د هغه دریښتیاوالي پوښتنه رامنځ ته کړای شي۰

یا په بل ډول :

د وینا لاندې سرې یو ژبنی یوون، یا یووالی (واحد unit ,Einheit)پوهیږي، کوم چې د شي اړیکی (د شي څرنګوالی) بیانوي۰ دلته دا مهمه نه ده، چې دا وینا په کومه ژبه، په پیدایښتي (طبیعي) او که په مصنوعي ژبه ویل شوې (افاده شوي) دا هم غوره نه ده، چې دا وینا د طبیعي پوهنو لپاره ده، د هوا حالاتو لپاره او که د بازار د نرخ لپاره ده۰

په بل او ورځنې ډول: یوه وینا یوه جمله ده یا فرمول دی، چې یا ریښتیا او یا ناریښتیا ده۰ داسې هم ویل کیږي، چې وینا یو «ریښتیاارزښت » ،، ریښتیا یا نا ریښتیا ،، لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

یعنې : د شمیرپوهنې سم اند لپاره پریکړی د وینا « رېښتیا ارزښت»(رښښتیا یا نارښتیا) دئ۰ نور خویونه په راتلونکی کې نه څېړل کیږي۰

ویناوې د لاتین په لویو تورو A , A* په نخښه کوو او داسې نور۰

۱ ۰ ۲ ۰ ۳ د دوه ارزښتوالی اصول یا پرینځیپ جمله

هره وینا یواځې یو ممکن « رېښتیا ارزښت» لرودئ شي، دا په دې نامه، چی وینا یا رېښتیا ده او یا نارېښتیا. (د دریم نه والی اصول یا پرینځیپ)۰

دا په دې ماناو چې ددې دوه ارزښتونو تر منځ بل ارزښت ناشونی دئ. دوه ارزښتوالی او د دریم نه والی باید سره بدل نه شي.

که یوه ژبنۍ افاده یا وېینه د وینا په څیر ترتیبوو، دا بیا دلته ارزښتناکه ده، چی د ویناارزښت حتمآ باید څرګند یا معلوم نه وي۰ که بالاخره ټوله پوهنه د رښتیا لور غوره کړي وي، بیاهم موږ څرګند ژبنیو موادو ته اړ یو، چی د هغه شي حالت (ځاننیونه) افاده کړاي شو یا وویلی شو، د کومو په شته والی یا نه شته والی، چی پریکړه وشي۰

ټولې ویناوې له دې امله په دوه ټولګیو یا کلاسو ویشل کیږي، د رښتیا ویناو ټولګی او د نارښتیا ویناو ټولګی یا کلاس(صنف)۰

که وینا رېښتیا وي، نو رېښتیا ارزښت یې رېښتیادئ او په w سره یې ښایو، که وینا رېښتیا ارزښت نارېښتیا ولري ، نو په f یا،، نه،، یې ښایواو وایو، چې د وینا رېښتیا ارزښت نارېښتیا دئ

تکرار : هره جمله، چی « رېښتیا ارزښت» (رېښتیا یا نا رېښتیا) ولري، وینا بلل کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

شمیرپوهنیز سم اند(منطق) د ویناو سره سر او کار لري..

بیلګې:

غونډاله (جمله)

الف : » د کابل سین د کونړ له سین سره ګډیږي«رېښتیا وینا ده۰

ب : 7 = 4 + 3 رېښتیا وینا ده

پ : » ٦ لومړنی ګڼ دی« دا نارېښتیا- یا ناتیک وینا ده۰(د اعدادو په برخه کې لومړني اعداد یاګڼونه کتلکیدی شي)

پوښتنجملی : » ته د څو کالو یې ؟ « نه شي کیدی یو رېښتیا ارزښت باندې تنظیم شي۰ له دې امله وینا نه ده۰

نورې بیلګې :

ویناوې دي:

(دپیتاګوراس (فیثاغورس) جمله۰

د کاتیتونو یا د یو بل سره ولاړو یا عمودو اړخونو یا ضلعو مربعګانو (څلوریو) زیاتون(جمعه) د هیپوتینوزې(اوږده اړخ قایمې زاویې ته مخامخ ضلعه یا قطر) د څلوری یا مربع سره برابر دی.

نورې بیلګې :

سرک لوند دی

ټول سپي خطرناک دي

3 > 5

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې کې که یو کاربن له دوه اکسیجنه سره یوځاي یا زیات شي، نو کاربن دوه اکسیډ CO_2وښایي

د دي پرځښ یا مخامخ یا پر خلاف یا برعکس : ویناوې نه دي:

د کابل ښار;NaCl ;   لمده کوڅه

د افغانستان د خلکو ژوند په دیرش کلن جنګ کې

لاندې ویناوې

کیمیا یوه طبیعي یا پیدایښتي پوهنه (علم) ده

۷ پر دریو بی له پاتې (باقي) نه ویشل کیږي

د وینا «ریښتیا ارزښت » ریښتیا لري

لاندې ویناوې

برلین یو کوچنی ښار دی

3 < 5   پنځه له دریو کوچنی دی

ټول لومړني اعداد یاګنونه ناجوړه (طاق) دي

کابل د کونړ پر سین پروت دی

هره یوه له دې ویناو « ریښتیا ارزښت » نا ریښتیا لري

نومه ونې: پورته مې د جفت لپاره، چې ورسره بلد یو جوړه ولیکه، نو طاق ته ناجوړه وایو٠

په لاندې کې به وڅیرو، چې ویناوې شته، چې نورې ویناوې د خپلې برخی په څیر په ځان کې خوندي(لنډ : خوندي) لري٠ داسې ویناوو ته یوځاېشوې یا یوځای ایښول شوې یا ځنځیري ویناوې وایو او که غواړی ! مرکبې ویناوې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره بيلګه راوړو » کۀ د کوم ګڼ(عدد)a پروت زياتون يا پرته جمعه په 3 ويشوړ وي، نو داعدد يا ګڼ په 3 ويشوړ دی، يانی که عدد 1521 ولرو ، نو د دې عدد پرته جمعه 1+5+2+1=9 په 3 ويشوړ ده له دې لاس ته راځي، چی پخپله ۱۵۲۱ هم په 3 ويشوړ دی٠

که کومه وينا په داسې ويناوو ويشوړ يا ټوټه کيدونکې نه وي، نو دې ته بيا ساده وينا ويل کيږي٠

لکه : سپين غر يوه خورا جګه څوکه لري

يوه بله بيلګه د يوځای شوې(ځنځيري) وينا لپاره

سپينغر خورا خواريکښ دی، هغه په دې پوهيږي، چی نور کار ته وهڅوي٠

څرګنده ده، چی دواړه ساده جملې د برخويناو په څير يوځاي شوي ويناوې دي: » سپينغر خورا خواريکښ دی« همدا ډول » هغه (سپيغر) پوهيږي، چی نور کارته وهڅوي«٠

دا ويناوې کيدی شي په نورو ډولونو هم يو له بل سره داسې وتړل شي، چې رښتياارزښت يې همغه پاتې شي٠

د بيلګي په توګه:

١ - سپينغرخورا خواريکښ دی٠ يا هغه پوهيږي، چی نور کار ته وهڅوي

٢ - ځکه، چی هغه پوهيږي، نو کار ته وهڅوي، نو سپينغر خورا خواريکښ دی٠

٣ - دا چی سپينغر پوهيږي، چی نور کار ته وهڅوي ، نو سپيغر خورا خواريکښ دی٠

٤ – سره له دې، چی هغه پوهيږي، نور کار ته وهڅوي، هغه خورا خواريکښ دی٠

ګورو، چی په دې ډول يو له بل توپيريدونکی تړلې يا ځنځيري، يا يوځاي شوی ويناوې جوړيږي، چی په خپله رښتياارزښت کی يو له بل توپير کيدی نه شي٠ د دوي توپير د

(c) ketabton.com: The Digital Library

دوي یو له بل سره تړلو ځرنګوالي له لارې مخ ته پروت دئ یا رامنځ ته شوی دئ٠
په لاندې کې به ممکنه« ویناتړنه» (یا نورهم ښه: ویناځنځیرونه) تر ځیړنې لاندې ونیول شي.

پیژند ۱ ۰ ۲ :

یوه «ویناتړنه» یا یو «ویناتړاو» (نوره هم ښه: «زنځیرونه») داسې ژبنئ وینې(افادې) دي، چې د هغوي په مرسته له یوې یا ډېرو وېناو څخه نوې ویناوې جوړیدی شي.

موږ د سم اند یا منطق ستېرینځیپ په لاس ته راوړنو سره ځانونه په داسې ویناو رابندوو، کومې چې داسې جوړې وي، چې ریښتیا ارزښت یی یواځی او یواځی د «برخویناو» ریښتیا ارزښت په واک کې وي٠

بیلګی

الف: سپین ډیر خواریکښ دی، هغه په دی پوهیږي، چی نور کار ته وهځوي٠

ب : سپین یا راځی او یا لوبه نه کیږي٠

پ – د فوټبال په لوبه کې نه دباندې رفري او نه دننه رفري فاول یا ناسمي ولید٠

۱ ۰ ۲ ۰ ٤ ویناتړنه یا وینابلواک (- فنکشن یا – تابع)

د ویناتړنو (عملیو)په هکله مو پورته بیلګو کې ولیدل، چې که څوک د تړنو لپاره « او » او یا « سره له دې» ونیسي تل یوه یوځاي شوې وینا منځ ته راځي. دا وینا هلته او فقط هلته ریښتیا ده، چې دواړه «برخویناوې» ریښتیا وي. دلته د خبرو پرځاي غواړو «ریښتیا فنکشن یا رښتیا تابع» وپیژنو. موږ پریکړه کوو، چې د په زړه پورې ویناوو (ویناواریابلو یا وینا اوښتونو(وینا متحولو)) لپاره سومبولونه p,q,r,... او یا ا ، ب پ، وکارول شي یا استعمال شي. موږ دا غواړو ساده پیل کړو، یانی د یوه یو

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځاینیونکی(یوځائیز یا یوګوني) بلواک یا فنکشن او که همغه پخوانی ډول تابع مو ښه راځي، له تابع څخه٠

یادونه: د بلواک یا تابع کلمه وروسته څېړل کيږي، دلته د بلواک یا فنکشن پرځاي ویناترنه یا عملیه بسیا کوي. دا ځنی ویونه(لغات) ستونځی لري، چی د ښونځي زده کوونکي یې هغه ساده ډول فکر ته رابولم او د لوړو زده کړو خاوندانو ته دا کومې ستونځی نه لري.

نه والی(نفی)Negation

د وینا تړاو یا ویناتړنی(عملیې) «نه والی»: دیوی ویناP نه والی هغه وینا ده، چې هلته او یواځی هلته د رینښتیا ارزښت ناریښتیا لري، چیP ریښتیا ارزښت ریښتیا ولري٠

موږ د وینا P نه والی نفی په Pنه سره ښایو ، شمیرپوهنیزه نخښونه یې په لاندې توګه ده ¬p په یوه جدول کې ریښتیا فنکشن یا ریښتیابلواک کې داسی څرګند وو(دا چې زه کله کله هغه شمیرپوهنیز سومبول د نه p لپاره ¬p نه شم لیکلی، نو دا به همغسې p نه ولیکم.

P	Pنه یا ¬p
w	F
f	w

د یوې وینا P تکرار نه والي یا بیا نه والي لاس ته راوړنه، لکه چې لاندې یې ګورو، هم خورا څرګنده ده .

p	p¬	p¬¬
w	f	w
f	w	f

(c) ketabton.com: The Digital Library

دوه واره نه والی د همغي لومړنۍ وینا رښتیاارزښت لري

په پيدايښتي ژبه کی نه والی په«نه» یا « نا » خپل رښتینوالی مومي٠ «اباسین هغه خپل ټاکلی وخت ته را نه غۍ٠ دا د اباسین خپل ټاکلي وخت ته راغی « نه والی» دی٠

نه والی ته بیلګه : د وینا ¬A نه والی : "7 < 3 ,, وینا نهA ده: دا چی A رښتیا ده، نو ¬A نارښتیا ده٠

ترنه(عملیه) یا کنجنکشن Conjunction (لاتین: ترنه، دلته د « او (and)» ترنه یا تړاو):

وینافورم یا – بڼه:

د وینا په څېر یا - مخامخ یا - برعکس وینا بڼه رښتیا ارزښت نه لري، د وینافورم یا – بڼې لپاره بیلګی دي لکه پوښتنې، امرونه او نظرونه یاعقیدې:
۱ – هوا څنګه ده ؟

۲ - کورته لاړ شه

۳ – شین یو ښه رنګ دی٠

که په ترمونو کې، چې واریابلی یا اوښتونې لري، اړیکنخښی ولیکل شي، یوه وینابڼه منځ ته راځي٠ یوه د نخښو لړۍ کم له کمه د یوې اووښتونې یا متحولې د بیلګې په توګه

3 + x <5 د بنسټیزورشو N کې نه ریښتیا ده او نه ناریښتیا٠ دا له دې امله وینا نه ده٠ که چیرې د واریابلې یا اووښتونې یا متحولې پر ځای ٠ او ۱ ولیکل شي، نو بیا یوه رښتیا وینا ترې منځ ته راځي٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

که چیرې په ځاي يې نور د پيدايښتي ګڼونو توکی ځاي په ځاي شي، نو بیا ناريښتيا وېناوې منځ ته ترې راځي۰

دا چی اووښتوني يا متحولي د بنسټيزي يا بنسټ ستڼ څخه په خوښه توکی اخستلی شي، نو له دې امله دا اووښتوني د خپلواک يا ازاده اووښتونی(متحولي) په نامه ياديږي۰

پيژند :

يوه وينابڼه د نخښو لړی ده، چې کم له کمه يوه خپلواکه اوښتونې(متحوله) لري او د

- د دې اووښتوني په ځاي د بنسټيزې ورشو يا ساحې او يا
- د دې اووښتوني ترلو څخه د کوانتيفيکاتورونو(کوانتورونو) په مرسته يوه وينا جوړيدی شي.

يادونه :

که په لاندې کې د تړاو يا تړني کلمه منځ ته راځي، نو موخه ترې د « او » تړنه ياکنجنکشن conjunction دی۰ له ګرامر سره په توپير، چې هلته تړنه يا تړاو يو « تړونتيکی، تړاولغات» ښايي په سم اند کې تړنه يو څرګند(دوه ځايلرونکی يا دوه ځاييزيا نوره هم ښه دوه ګونی) جملي ترل يا په بل عبارت دوه ځاينيونکې (نوره هم ښه : دوه ييز يا دوه- ګونی) فنکشن يا تابع(بلواک) تعريفوي يا پيژنی۰

د « او» تړنه او نخښه يې $\wedge$

پيژند ۱ ۰ ۳ :

$p \wedge q$ دوه وېناوې p او q يانې د «او » يوځايوالیp او q يواځې او يواځې هلته يو رښتيا ارزښت رښتيا لري، چې p اوq دواړه رښتيا ارزښت رښتيا ولري۰ که له دې څخه يوه وينا هم نارښتيا وي، نو بيا د « او » تړنه نارښتيا ده ۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ترنې نخښنه ددوه ويناو qاو p ترمنځ ليکل کيږي p/\q او ويل کيږي p او p مورږ د « او » ترنه په لاندې جدول کې روښانه کوو يا انځوروو:

يادونه: په لاندې کې w رښتيا او f ناربښتيا په معنا دي

p/\q	q	p
w	w	w
f	f	w
f	w	f
f	f	f

د « او » ترنې ته بيلګه :

د دوه رښتينو ويناو د A وينا : ,, 7 < 3 ,, او د B وينا : 3 يو لومړنی ګڼ دی رښتيا وينا A /\ B ده « ۳ له ۷ کوچنی او لومړنی ګڼ هم دی»۰

يادونه: مورږ ګران لوستونکي به سره يوځاي فکر وکړو، چې دا پريمګنونه لومړي او که لومړني ګڼونه وبولو۰ زه فکر کوم، چې لومړي ګڼونه لومړنی نه دي۰ دا ځکه لومړي ګڼونه دي، چې له دوي له زياتون او يا کمون څخه لومړی ګڼونه جوړيږي۰ مورږ به يي زياتون په پام کې راولو، چې : 3+5=8

د دوه ويناو دا ترنه يا کنجنکشن، چې مختلف رښتياارزښتونه ولري يانې د A وينا: 3 ,, 7 < ,, (رښتيا او د B وينا: « ۳ يو جوړه ګڼ دی (ناربښتيا)، نو A/\B وينا : چې ۳ له ۷ کوچنی دی او جوړه ګڼ دی « (ناربښتيا) ده۰ دا ويناترنه ويناارزښت ناربښتيا لري۰

د دوه ويناو د « او» ترنه دA وينا: 7 < 3 او د B وينا « ۳ يو جوړه ګڼ يا جفتعدددی» يوه ناربښتيا وينا ده : ۳ يو لومړنی ګڼ دی او له ۷ لوي دی۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

ومو لیدل، چې د « او » تړنه او یا کنجنکشن په ورسره بلده (عادي) توګه هلته جوړیږي، چې دوه ویناجملې په «او» سره وتړل شي:

غوټۍ «پټیدځاي» پیداکړ او دا پټیدنه یې پټه وساتله»۰ کیدی شي له «مګر» « سره له دې هم» « په همدې ډول » تړنه وویله – یا افاده شي۰

پورته ډول ، د بیلګی په توګه: په پټپټکي کې « که سپین پټ شي او هوسۍ د هغه د پټیدو ځاي پیدا کړي او دا چاته ونه ښایې»، نو داسې وایو « او » یا « هم »

هوسۍ د سپین د پټیدو ځاي پیدا کړ« او » دا پټیدځاي یې پټ واسته۰

۱) هلمند موږ(بډا) شو او هیواد یې پریښود ۰

۲) سره له دې، چې برلین کوچنۍښار دۍهلته د منی د المپیک لوبي کیږي

۳) ۱۵ ګڼ جوړه دۍ، د هغه پروت زیاتن په ۳ ویشونۍدۍ

په ټولیزه توګه د « او » تړنه هلته رښتیا ارزښت رښتیا لري، چې د جملی ټولی برخې رښتیاارزښت ریښتیا ولري، اړین نه ده، چې نظم په پام کی ونیول شي۰ په وینا تړنه کې کیدی شي زیاتې وینابرخی سره په تړنه « او » وتړل شي لکه « هغه راغۍ، ویې لیدل او بریۍ یې په برخه شو»

پیژند ۱ ۰ ٤ :

د« یا(or)» تړنه یا دیسجنکشن Disjunction (لاتین: ټاکنه یا پریکړه) Alternative الترناتیو یا د » یا « تړنه» دا په « یا » بیرته ورکړ شوې «جمله تړنه» تل ژوروالی ته راهځوي: باید جوته شي، چې ترې تیریدنه یا صرف نظر په نه کیدونکی اوکه ترې نه تیریدونکی « یا » موخه ده۰ د دیسجنکشن یا د «یا»تړنی پیژند یا تعریف یواځنی دۍ او دا ⩗ د یا تړننخښه ده.

د دیسجنکشن نخښه د دوه ویناو p اوq ترمنځ ځایول کیږي p⩗q او ویل کیږي p یا q او

په لاندې ډول څرګندیږي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

p	Q	$p \vee q$
w	W	w
w	f	W
f	w	w
f	f	f

له دې پورته جدول څخه پوره جوتيږي، چې ديسجنکشن يا د « يا » تړنه $p \vee q$ يو داسې رښتياتابع (-بلواک يا- فنکشن) دی، کوم چې هلته او هلته رښتيا فنکشن رښتيا اخلي، کله چې کم له کمه د « يا » تړنې يو غړی د رښتيا ارزښت رښتيا ولري يا واخلي٠ که د ديسجنکشن دواړه غړي نارښتيا وي نو $p \vee q$ هم نا رښتيا دی٠ دا د رښتيا فنکشن کې د ځايونې « يا» څخه بل څه نه دي٠ يوه د «نه خونديکونې» يا « نه ځايونې» يا « په برکې نه نيونې» د « يا » وييڼه يا افاده ده، چې دا په نورو ژبو کې په بل ډول مګر په پښتو کې « يا٠٠٠ او يا ٠٠٠» ليکل کيږي٠

بيلګه (د « يا » تړنې ته):

د دوه رېښتينو ويناو د « يا» تړنه د A وينا: „ 7 < 3„ اود B وينا: « ۳ د ٦ پرويشونی دی» يوه رښتيا وينا $A \vee B$ ده : «۳ له ۷ کوچنی دی او د ٦ پرويشونی هم دی»٠

د دوه ويناو تړنه، چی مختلف ارزښتونه لري.

د A وينا „ 7 < 3 „ رښتيا او د B وينا: „ 7 =3 „ (نارښتيا) ، نو $A \vee B$ ده، چې 7 < 3 يا 7 = 3 دا وينا تړنه د رښتيا ارزښت رښتيا w لري٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه نارښتیا ویناو د « یا »(" Or") تړنه:

د A وینا : "7 > 3 " او د B وینا: ۳ یو جوړه ګڼ (جفتت عدد)دئ یوه نارښتیا وینا A∨B ده:

« ۳ له ۷ لوي او نا جوړه ګڼ (طاق عدد)دی»

الترناتیوAltenative یا انتیوالنځ Antivalenz ویناوې : دا د » یا « ویناتړنه باید د « یا ... او یا سره بدله نه شي، ځکه چې دا هلته هم نارښتیا ده، که چیرې دواړه ویناوی رښتیا وي۰

بیلګه : (دوه الترناتیو ویناو ته ، چې رښتیا وي)

د وینا 7 > 3 او« ۳ یو لومړی ګڼ دئ» د الترناتیو په نامه داسې دئ « ۳ یا له ۷ کوچنئ دئ او یا یو لومړی ګڼ دئ» نارښتیا دئ۰

بیلګی : (نه والي، کنجنکشن، دیسجنکشن ته)

یادونه: په لاندې (Wahr) w د رښتیا او(Falsch)f د نارښتیا لپاره کارول شوي.:

ویناتړاو

A	π پي تولګڼ دئ	f
B	π ایراشنل ګڼ دی	W
C	صفر له پيπ کوچنی دئ	W
D	π پي له دری کوچنی دئ	f

(c) ketabton.com: The Digital Library

A	π ټولګڼ نه دی	W
C	π کوچنی برابر له صفر	F
A∨C	π ټولګڼ او له صفر لوي دی	f
B∧C	π ایراشنل او له صفر لوي دی	W
A∨C	π پي ټولګڼ یا له صفر لوي دی	W
A∨D	π ټولګڼ یا له ۳ کوچنی دی	f

بیلګه : له دې بیلګی دمخه هغهٔ فرمول دی

یا کتاب لولم او یا فلم ګورم٠ په دې بیلګه کی الترناتیو یا بدیل شته دی، یانې د » او یا « امکان شته٠ دا د » او یا « کارونه یا استعمال د خرڅلاو شیانو باندې باید بند وي٠ یانې دوه نرخونه باید ورنه کړای شي٠

دا لاندې فزیکي بېلګه ده، چې ګران لوستونکي دې پخپله هم ورته پام وکړي او ځیره دې یې په پام کې راولی٠ په شالت یا سرکت الجبر کې د کجنکشن یا د »او« ترنې« ریښتینوالی لپاره دوه پرلپسی(لړی) شالتونه ترل شوي دي،

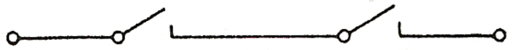


Bild 7.1

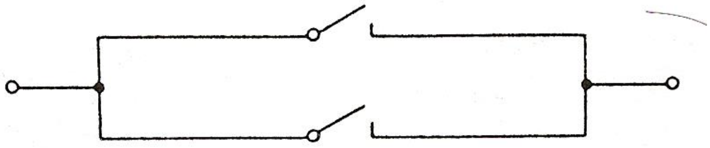


Bild 7.2

(c) ketabton.com: The Digital Library

کمپلکس رښتیابلواک یا – فنکشنونه

دا وروستیبیلګه په ګوته کوي، چې داسې یوځاي شوې ویناوې جوړیدۍ شي، په کومو کې چې له یو زیات ترړوني موجود وي٠

که دا ساده وینا که چې «په تیاتر کې نن لوبه کیږي» په p پس له دې جملې کمپلکس جوړخت دا نه ترى تيريدونكى (رښتيا - بلواک يا رښتيا فنکشن » نهp ∨ p دۍ٠ د دې لپاره هم د رښتیاارزښت فنکشن ورکول کیږي٠ د رښتیا ارزښت لپاره p له دې څخه نهp یا p نه (دا دواړه دې برابر ومنل شي) او بیا هم نهp∨p جوړیږي، چې جدول یې په لاندې ډول ورکړ شوی دۍ

د یوې وینا نه والی

p	Pنه	p∨pنه
w	f	W
f	w	w

لاس ته راوړنه یا نتیجه هکپک کوونکې نه ده یوه وینا نهp∨p تل رښتیا ده، بی له ځانګړي حالت او له دې خپلواک، چې p کوم رښتیاارزښت غوره کوي .

ویناسم اندیزې ویینې یا افادې، چې د هغې رښتیابلواک کتمټ یا identisch(identic) رښتیا دې(دا په دې مانا، چې که د ویناؤوښتونکې یا واریابلې ته هر رښتیاارزښت ورکړ شي یانې رښتیا یا نارښتیا تل د رښتیا ارزښت رښتیاغوره کوي)، وینا سم اندیزه قوانین بلل کیږي، یا ورته تاوتولوژي Tautologien

ویناسم اندیزې ویینې یا افادې، چې د هغو رښتیاارزښت بلواک کتمټ نارښتیا دۍ (دا په دې مانا چې د متحولې یا اووښتونې په هره وینا ارزښت وینا نارښتیا ارزښت غوره کوي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

کونترا-دیکتوریکي وینا بلل کیږي٠ورته ویناوې کونترادیکشنونه contradiction (د دوه ویناوو مخامخوالی یا – تضاد)

بیلګه :

ربښتیاارزښت دې د وییني یا افادې نه(p∨q) لپاره وشمیرل شي په همدې وخت کې دې د نهp∨q ربښتیاارزښت هم وشمیرل شي او له بل سره دې پرتله شي.

جمله : ښایو، چې $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

$$p...q....p \vee q....\neg(p \vee q)......\neg p...\neg q...\neg p \wedge \neg q$$
$$w...w......w.........f.............f.....f.........f$$
$$w...f.......w........f.............f......w........f$$
$$f...w........w........f............w.......f.........f$$
$$f...f........f.........w............w........w.........w$$

داچې د مخ ته پراته جدول څلورم او اوم درځ یو په بل پریوځي یا یو د بل سره برابر دي، نو ویېنې یا افادې $\neg(p \vee q)$ او $\neg p \wedge \neg q$ په څرګند ډول همغه ربښتیا بلواک یا –فنکشنونه دي. دا په دې معنا چې ،، جملې: دا نارښتیا ده، چې p یاq ،، او ،، نه q او نهp ،، همغه ربښتیا - (او په دې ډول همغه نارښتیا-) شرایط لري، که دp اوq په ځای بلې یوې لیدونکې جملې ځای نیولی وي. دا ډول دوه وینا تړاو -وینا تړنه) او تل همغه ارزښت ورکوي.

که په دې عملیو کې نوکان ځا په ځای شي، نو د عملیې ارزښت طبعاً همغه نه پاتیږي، لکه

د بې نوکانو عملیې.

ایمپلیکیشن implication (لاتین: ورراګډول، خورول):

(c) ketabton.com: The Digital Library

که دوه ویناوې د خپل تړاو له لارې« که۰۰۰، نو سره تنظیم یا ترتیب شي اپیلیکیشن سومبول=> چې دا سومبول د دواړو ویناو Aاو B ترمنځ ولاړ دئ: او دا مانا لري:

که A نو B یا په همدیډول «له A څخه B لاس ته راځي» وینا A ته پریمیس Prämisse (لاتین نیونه (فرضیه) وایي او وینا B ته کونکلوزیون Konklusion (لاتین: پاي لاس ته راوړنه) وایي۰ د دوه ویناو ایمپلیکیشن ټیک هلته نارښتیا دئ، چې پریمیسس رښتیا او کونکلوزیون نارښتیا وي۰ په بل ډول رښتیا دئ۰

د دوه ویناو لاس ته راوړنه یا تعقیب د لاندې جدول له لارې یواځنی ځرګندیدی شي

د لاس ته راوړنې یا ایمپلیکیشن یا پسې راتلنی، په ځان پسې لرنې سومبول =>

P	q	p=> q
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

دلته داسی یوه تړنه لرو، چې له دوه برخه ویناو A اوB ټیک هلته یو نارښتیا یوځاي شوې ویناچې په p=/>qسره ښایو)۰

کله چې لومړۍبرخه وینارښتیا او دومه برخه وینا نارښتیا وي په کمپیوتري یا پروګام ژبه کې داسی ویل کیږي: If….., then…..

کومې ژبنۍ افادې یا ویینې په دې رښتیا فنکشن بیرته اړول کیږي. بیرته یا په څټ

(c) ketabton.com: The Digital Library

راګرځيدلی شي. په ښکاره ډول د بيلګې په توګه جمله: که پسرلی لوبه وګټي، نو ماښام د تلويزيون کتلو ته کورته راځي.

ناريښتيا ده، که د جملې لومړئ برخه رښتياوي او دويمه نارښتيا. که په جدول کې برخه جملو ارزښتونه لکه د بيلګې په توګه د جدول لومړئ همداسې څلورمه کرښه سره يو د بل پرتله شي(که دواړه برخه جملې رښتيا همداسې نا رښتيا وي) پرابلمونه نه پيښوي، په دې حالت کې ټوله وينا رښتيا ده، که لومړئ برخه وينا نارښتيا او معکوس دويمه برخه رښتياوي، نو په دې حالت کې به د بيلګې په توګه جمله نارښتيا ونه ليدل شي(که پسرلی لوبه ونه ګټي او سره له دې هم تلويزيون ليدلو ته راشي)، نو بيا د دوه ارزښتوالي پرينځيپ له مخې يواځې دا ارزښت ،، رښتيا،، باقي پاتې کيږي. د پورته فنکشني پوره والي له مخې په ګوته کوو، چې هم $\neg p \vee q$ او هم $\neg (p \vee \neg q)$ ټيک بيرته بيا(بيرته) د ايمپليکيشن د رښتيا فنکشنونه ورکوي.

په بل ډول افادې يې: q که p، او يا هم p ، د q لپاره پوره کيدونکی شرط دی(په بل ډول يې: q د p لپاره اړيين شرط دی)

ورته والی :يوارزښتوالی(برابرارزښتوالی) Äquivalent

که دوه ويناوې q او p خپله ترڼه په » ټيک هلته ، که » په هم دې ډول « هلته او هلته، که» تنظيم کړي، دې ته ورته والی يا ايکويوالنت وايي۰ د ايکويوالنت سومبول دی ≈ د دواړو ويناو q او p ترمنځ دا سومبول پروت دی q ≈ p په دې مانا، چې p ټيک هلته که q ۰ ايکويوالنت سومبول يې په دواړو خواو ايمپليکيشن لري: له p څخه q لاس ته راځي او له q څخه p

د دوه ويناو ايکويوالنت ټيک هلته رښتيا دی، که دواړه ويناوې رښتيا يا دواړه ويناوې نارښتيا وي۰

دا شي څرنګوالی يا شي حالت په لاندې جدول کې روښانوو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

P⇔q	q	p
W	w	w
F	f	w
F	w	f
W	f	f

سیده او مخامخ یا په ښت دي په دې مانا وي، چې له p ځخه q لاس ته راځی او په ښت، یا نی له q ځخه p لاس ته راځی۰

۱ ۰ ۳ د وینابلواکو یا فنکشنونو ترمنځ اړیکې

د دوه ویناو تړنه سم اندیزه یا منطقي برابرارزښته بلل کیږي، که د ویناو ربښتیاارزښت د تړنویناارزښت سره یو په بل وخوري یا یو بل سره برابر شي۰ دا د یو ویناارزښت جدول له لارې څرګندیدی شي۰ ومو لیدل، چې ایکویوالنت په دواړو لورو لاس ته راوړنه یا ایمپلیکیشن دی۰ په لاندې جدول کی به وګورو، چې دریم او شپږم درځونه، متې یا ستنی څنګه یو بل سره ځان نیسی یا ګورو، چې سره یوارزښته دي۰

p	q	p ⇔ q	p=>q	q ⇒ p	(p ⇒ q) (q ⇒ p)
W	w	w	w	w	...........W
w	*f*	f	f	*w*	.........*f*
F	*w*	*f*	*w*	*f*	.........F
f	*f*	w	w	*w*	.........*w*

ورته والی اړیکی د ورته والی یا ایکویوالنت سومبول باندې هم ښوول کیږي

$$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)(q \Rightarrow p)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا ورته والي ويناتړنه موږ ته دا اجازه راکوي، چې یو بل سره بدل کړو یانی د یوه ځاي د بل سره بدل کړو۰ له دې ځخه پیچلو تړنو کې لکه د شالت الجبر کې کار اخستل کیږي۰

د دې ورته والی ويناتړنې غوره بیلګه د،،دي مورګان،، قاعده ده De Morgansche Regel

$$(1)......(\overline{p \wedge q}) \Leftrightarrow (\overline{p} \vee \overline{q})$$

$$(2)......(\overline{p \vee q}) \Leftrightarrow (\overline{p} \wedge \overline{q})$$

د کنجنکشن او دیسجنکشن لپاره دیستریبوتیو قانون:

(3) [p/\(q\/r)] □ [(p/\q) \/ (p/\r)]

(4) [p\/(q/\r)] □ [(p\/q) /\ (p\/r)]

۱ ۰ ٤ وینافورم یا - بڼه او کوانتورونه

وینا سم اند په لاندې ډول ساده ټولیز کیدی شي۰ د بیلګي په توګه که مختلف شیان همغه خویونه ولري، نو ضرور ده، چې دا فورمال وویلي - - یا افاده کړای شو: دلته د ویناو پر ځاي د وینافورم ځخه خبري دي، یا غږیږو۰ دا داسی ژبنی ویینې یا افادې دي، چې د شیانو لپاره واریابلی یا اوبښتوني لري او لومړی د مناسب انفرادې ځاي پرځاي وروسته یوه وینا شي۰ بیلګي یی په لاندی ډول دي

لومړی : x پر دوه ویشونی دی »

دویم : » z یو هوار څلورګوډی(څلورضلعي) » دی۰

دریم : «u له v څخه لوي » دی او داسی نور

(c) ketabton.com: The Digital Library

ترهر ځاي پرځاي کولو وروسته ربنتيا يا نارښتيا وينا لاس ته راځي٠ که په دويم کی دz پرځاي «ډيرگوډی» (کثيرالاضلاع) ځاي پرځاي شي، نو يوه ربنتيا وينا لاس ته راځي٠

که په لومړي کیx د7 پرځاي ځاي پرځاي شي، نو يوه نارښتيا وينا لاس ته راځی٠ دريم يوه اړيکه(ريليشن(ده، چې هلته د انفراديو د ايښولو ترتيب هم يو رول لري٠ دلته که د تورو پر ځاي گڼونه ږدو، نو هلته دا رښتيا وينا ده که د لومړي توري پرځاي ستر گڼ ځاي پرځاي شي٠د فورمال سم اند په ژبه د پريديکات په شکل٠(له دې امله دې د سم اند برخی ته د پري ديکات first-order logic سم اند يا منطق وايي٠

بيرته داسی ليکو P(x), Q(z), R(u,v)

يوه بله کارونه يا عمليه شته، چې له وينا بنې څخه وينا جوړوي٠ چې کوانتيفيکيشن Quantifikationبلل کيږي٠ دا ويناهغه وخت منځ ته راځي، چې ټول د وينا بنی افراد همغه خويونه ولري، چې ټولوينا (Allaussage) ورته وايو٠ياچې په پوښتل شوي چاپريال کې داسي افراد شته وي، چې همغه خويونه ولري، دې ډول وينا ته موږ د شتون يا موجوديت وينا يا Existenzaussage وايو٠ زموږ په بيلگه کې يی استعمال لاندې را په گوته وکي

څلورم : (پيدايښتی يا طبيعي) گڼونه يا اعداد شته، چې په دوه ويشل کيږي

پنځم : ټولې څلوری (مربع) هوارې ډيرگوډی يا کثيرالاضلاع دي٠

د ټولکوانتور يا ټولوينا لپاره نخښه∀

د شتون- يا موجوديتکوانتور يا شتونوينا لپاره نخښه ∃

يادونه : د ټولکوانتور لپاره نخښه د سرچپه A په څير ده او د شته والي کوانتور لپاره نخښه د په څټ E په څير ده په پام کې دې وي، چی د کوانتورونو ورکونې وروسته اووښتونې (ورياريابلی يا مجهولی) ورکول کيږي٠

څلور ۱ : $\exists x \in P(x)$

داسی يي لولو، چی يو x په P(x) کې شته

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځه ۱   : $\forall z \in Q(x)$

دا داسی لولو: د ټولوz لپاره ، چې په Q(x) کې پروت دئ (یا د ټولو۰۰ له ۰۰۰ څخه)

دا سومبول ∃ دا مانا لري،چې« کم له کمه یو ۰ ۰۰ شته»د وینابڼی او په دې پورې اړوند واریابلو یا اووښتونو ډیریو جوړه، د دې سومبول سره یوه د« شتون- یا موجودیت وینا» ورکوي، په نامه د اووښتونو ساحه یا ډیری کې، په کوم کې چی کم له کمه یوه داسې اووښتونې ځاي په ځایونه شته وي کومه چې ویناښه رښتیا وینا کوي۰

بیلګی (د رښتیا شتون - موجودیت ویناوي)

اول - $\exists x \in R: x+1=0$

(لوستل : یو داسی رییل ګڼ یا عدد x له(په) R (کې) شته ،د کوم لپاره چې0 =x+1 باور لري) دلته x دا مانا لري، چې x د رییلګڼډیری یا ریل ا عدادو سټ R توکی دئ او ∈ په دې مانا دی، چې توګي له ۰۰۰ دی۰

دویم : $\exists x \in R:$

$x^2 + 4x = 0$

(لوستل: یو x له(په) R څخه(کې) شته د کوم لپاره ، چې $x^2+4x=0$ باور لري)

دریم : $\exists x \in R: \quad x^2 - 4 = 0$

(په دې جمله کې حتی دوه رییلګڼونه شته دی، چې د هغې لپاره $x^2-4 = 0$ باور لري

: (2، -2)

جمله (د یوې شتونوینا یا موجودیتوینا نه والی یا نفی)

$\exists x \notin R: x^2+1=0$

لوستل: داسې رییلګڼ x نه شته، د کوم لپاره چې برابرون $x^2+1 = 0$ باور ولري

(c) ketabton.com: The Digital Library

داسې وينابنې هم شته، د کومو لپاره، چې د اووښتونديرئ يا واريابلډيرئ ټولو توکو لپاره رښتيا وينا شي۰

بيلګه: وينابنه « x په 2 ويشونى دئ » د جوړه ګڼونو هريوه لپاره رښتيا ارزښت لري په

دا سومبول ∀ په دې مانا دئ، چې « د ټولو x لپاره» د وينابنې او په همدې پورې اړوند د وينا متحولو ډېرئ يا سټ (ويناااووښتونديرئ يا واريابلډيرئ) ترنه له دې سومبول سره يوه Universalaussage يونيورزالوينا يا ټولوينا منځ ته راځي۰ په دې مانا چې د دې متحولو ډېرئ(اووښتونديرئ) هر توکى لپاره د وينابنې څخه يوه رښتيا وينا جوړيږي۰

جمله : (دUniversalaussage يونيورزال- يا ټوليزې وينا يا ټولوينا لپاره

$$(1)........\forall x \in G : 2 \mid x$$

(د ټولو جوړه ګڼونو (جفت اعدادو)لپاره باور لري، چې x په ۲ ويشونى دئ)

$$(2).......\forall \in R, x^2 > x$$

(د ټولو ريیلاعدادو x لپاره, کوم چې له يوه لوي وي باور لري $x^2 > x$)

جمله : (د نارښتيا ټوليزې وينا لپاره)

$$\forall x \in R : x^2 > x$$

دا وينا نارښتيا ده، ځکه چې دا د $1 \leq x \leq 0$ لپاره باور نه لري، پس دا وينا د ټولو ريل عددونو لپاره باور نه لري۰

۱ ۰ ۵ اړين – يا ضروري- او پوره کيدونکي شرطونه

د ايمپليکيکشن سومبولA=>B ((« کهA نو B » « له A څخه Bلاس ته راځي»)يا په بل ډول : که A باور ولري، نو B هم باور لري»

(c) ketabton.com: The Digital Library

په شمیرپوهنه کې ځانګړي فرمولونه شته۰

الف) « A د B لپاره پوره کیدونکی شرط دئ»

ب) « B د A لپاره یو اړیین یا ضروري شرط دئ»

فرمولونه الف) وايي، چې د A رښتینوالی د B رښتینوالی ځان پسی لري یانی له آ څخه ب پوره کیږي یا له یوه څخه وبل ته رسیږو یا د A شرطونه د B د شرطونو پوره کیدنو لپاره نیونه(فرضیه) ده او ب شرط پوره کیدنه اړیینه یا ضرور ده، چی آ پوره شي۰

بیا : وینا باور لري۰

د B وینا د باور لرلو لپاره دا پوره دئ یا پوره کیدونکی دئ یا بسیا کوي، که د A وینا باور ولري

بیلګي د پوره کیدونکو شرطونو لپاره:

۱ – وینا A : « ګڼ n پر ٦ ویشونی دئ»

وینا B : « ګڼ n پر ۳ ویشونی دئ»

A => B

د دې لپاره پوره کیدونکی شرط دئ یا بسیا کوي، چې یو رییل ګڼ n پر ۳ ویشونی دئ، که دا پر ٦ ویشونی وي۰
که n پر ٦ ویشونی وي، نو پر ۳هم ویشونی دئ ۰ دا نو تراوسه دا مانا نه لري، چې ضرور دې ګڼ n که پر ۳ ویشونی وي، پر ٦ دې هم ویشونی وي۰ د بیلګي په توګه ګڼ ۹ پر ۳ ویشونی دئ ، مګر په ٦ نه دئ ویشونی۰

۲ - وینا A : “n > 7„

وینا B :وي دې :n > 6

A => B

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره دا پوره کیدونکی دی، چې یو رییلګې ن له ٦ څخه لوي دی۰ که اړیکې، چې ن له ٦ لو دی، باور ولري

داسې رییلګنونه هم شته، چې له ٦ څخه لوي دي، مګر له۷ څخه لوي نه دي۰ د بیلګي په توګه ٥ ،٦، یا شپږ.نیم

د ب) فرمولبندي وايي، چې وینا ب باورلرل غوښتونکی یا اړیین یا ضرور دی، د دې لپاره، چې وینا A باور ولري۰

که وینا B باور ونه لري نو وینا A هم باور نه لري ۰

بیلګی د اړیین(ضروري) شرطونو لپاره:

۱ – د دې لپاره، چې یوګڼ n پر 6 وویشل شي، اړین(ضرور) ده، چې دا ګڼ پر3 ویشونی وي۰ یو ګڼ، چې پر3 نه وي ویشونی، نو پر ٦هم ویشونی نه دی۰

۲ - ویناA : » څلور ګوډی یوه څلوری یا مربع ده«

وینا B : » څلور ګوډی څلور ولاړ کونجونه لري« A => B

د دې لپاره ضرور، چې یوه څلورګوډی یوه مربع(څلوری) ده دا خویونه دي، چې څلور ولاړ کونجونه ولري، که ټول ګونجونه یې ولاړ نه وي، نو مربع یا څلوری نه ده که یوه څلورګډی څلور ولاړکونجونه ولري اړین نه ده، چې څلوری یا مربع دې وي۰

د برابروالي یا برابرارزښتي (ایکویوالنت) سومبول«

A<=> B

(په دواړو لورو ایمپلیکیشن) لپاره په شمیرپوهنه کې هم فرمولبندي شته: دا وايي، چې A دB لپاره یو ضروري او پوره کیدونکی شرط دی۰ « دا وايي، چېA ټیک هلته باور لري، کله چې B باور ولري

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګی : د پوره کیدونکی او ضروري شرطونو لپاره

۱ – ویناA : « ګڼ یا عدد n پر ٦ ویشونی دئ»

وینا B : « عدد n پر ۳ او ۲ ویشونی دئ»

A <=> B

د دې لپاره ضرور او پوره کیدونکې دی، چې: n پر ٦ ویشونکی دئ، که دا عدد پر۳ او ۲ ویشونکي وي٠

۲ – وینا A : » څلورګوډی یا څلورضلعي یوه څلوری یا مربع ده«

ویناB : « څلورګوډی څلور ولاړ کونجونه لري او څلو برابر اوږده اړخونه یا ضلعې»

A<=>B

ددې لپاره، چې څلورګوډی یو مربع دئ ضرور او پوره کیدونکی دا خویونه دي، چې څلور ولاړ کونجونه او څلو برابر اوږده اړخونه(ضلعې) ولري٠

۱ ٠ ٦ د شمیرکلمو یا ویو(لغاتونو) شمیرنیز مفهوم(ترې پوهیدنه)

پیژند (تعریف) څه شی دئ؟

د کلیمی ټاکنه ده، چې ټیک ټاکلي او له مخامخوالی(تضاد) ازاده وي٠ په عامو خبرو کی کله که کلیمی راځي ، چې په مختلفو اشکالو ترې ځانګړي ماناوي اخستل کیږي، خوپه شمیرپوهنه کې داسې نه ده٠

د شمیرنی ټاکنی یا پیژندونه (تعریفونه)د ټیک څرګندې پوهنې یوه نه پرېښوونکی سمبال اله ده، یانې ترې تیریدل نه شي کیدای٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله څه شی دی ؟

 ټولې ربښتونې ویناوې په شمیرپوهنه کې جملې بلل کیږي، چې د پیژندنې لپاره ښوونې یا ثبوت ته اړتیا لري ۰

اکسیوم Axium څه شی دی؟

 بې ثبوته ربښتینې وینا ته اکسیوم وایي

شمیرپوهنیزې یا د ریاضي جملې زیاتې نیونې(فرضيي) او ثابتول(غوښتنه،جوته ونه یا ښوونه) په بر کې- یا خوندي لري۰

که دا وینا داسی وي، نو پس داسی به هم وي۰ دلته که دا وینا داسې وي نیونه یا فرضیه ده او نو داسې هم ده۰ دا غوښتنه ده، چې باید ثبوت یا وښوول شي۰

اکسیوم : ۱ طبیعي عدد دی (پیانو Peano)

: ټکی هغه دی، چې پر ویشونی نه وي یانې په ټکی ویشل بند دي۰ (Euklid)

: حتمي پیښه د پیښې امکان ۱ درجه لري۰

جمله: که درېګوډی ولاړکونجیز وي، نو(پس) د پیتا ګوراس (pythagoras) درسي جمله باور لري

: یو لومړی ګڼ، چې له دوه لوي وي، باید ناجوړه(طاق) وي

: په اخره جمله کې نیونه(فرضیه) ده (که یو پریم عدد له ۲ لوي وي۰۰۰) او ثبوت یې (هر له دوه لوي عدد په دوه ویشل کیږي پس لومړی ګڼ نه شي کیدی، نو دا تل ناجوړه یاطاق دی)په ځتوالي یا تضاد کې پیژندل کیږي۰
تل داسی نه ده، چې د جملی د ربښتینوالی څخه دې د جملی په ځتوالی یا تضاد هم ربښتیا وي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

لکه:

جمله: که ٦٪ پس ۲٪ هم (رښتیا)

جمله: که ۲ ٪ پس ٦٪ هم (نارښتیا)

۰۰۰۰۰تیک هلته ، چۀ که۰۰۰۰یوځاي راوړي

بیلګه : که چیرې غبرګ اړخیز کې هر دننني کونج ۹۰ درجی وي، نو دا ولاړکونجیز(قام الزاویه) دی۰

په څټ : که غبرګ اړخیز ولاړ کونجیز وي، نو دننني کونجونه ۹۰ درجی لوي دي۰

یوځایراوړل :

یو غبرګ اړخیزتیک هلته(هلته او هلته یا بیا او بیا یا یواځنې او یواځنې ټاکلی یا یواځنی ټاکلی او په څټ) ولاړکونجیز دی، کله چې دنني کونجونه ۹۰ درجی لوي وي۰

۱ ۰ ۷ برابرونونه او نابرابرونونه (مساوات او نامساوات)

پیلبیلګه:

لمسی ، پلار او نیکه په ګډه ۱۱۳ کلن دي۰ پلار د ځوي د عمر یوکال کم اوه ځله عمر لري او نیکه د پلار د عمر له دوه برابره څخه ٦ کاله نور هم زیات عمر لري۰

پوښتنه : له دوي څخه هر یو څو کلن دی؟

د ځوي عمر په x سره ښایو، نو د پلار عمر 7 x-1 دی او د نیکه عمر 2(7x-1)+6 کاله کیږي، چی د دې ټولو زېښت وختونو زیاتون یا جمع بیا ۱۱۳ کاله دی یانی :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x+7x-1+2(7x-1)+6 = 113$$

یو ډول ترمونه رامنځ ته کیږي او ساده کیږي:

$$x+7x-1+14x-2+6= 113 \ \ \vee \ \ 22x +3 = 113$$

په کينې ۲۲ ځله د x ارزښت چې ۳ په ورزیات شوي او دا له ۱۱۳ سره برابر دی

نو دا ګڼې ۲۲ ځله x بیا ۱۱۰ کیږي: $22x = 110$ او د x ساده ارزښت ۲۲ – مه برخه د ۱۱۰ ده یانې: په دې لاس ته راوړنې سره زوي ٥ کلن پلار ۳٤ کلن او نیکه ۷٤ کلن دی۰

که ترمونه $T^\wedge$ او T° د برابروننخښنی = باندې یو له بل سره وتړل شي، نولاندې برابرون پیداکیږي: $T^\circ = T^\wedge$ ۰

که چیرې ترمونه په دې نخښنو ≤ , ≥ , < , > او(نابرابروننخښنه =|) یو له بل سره وتړل شي یو نابراون منځ ته راځي.

برابرونونه او نابرابرونونه چې ناټاکلي یا مجهولو سره یوځاي شي، هغې ته د ویناڤورم یا نوره هم ښه وینا بڼه ویل کیږي۰

دا یا رښتیا یا نارښتیا وینا کیدی شي۰ که ناټاکلي، چې اوښتوني یې هم بولو(د بیلګې په توګه z , x , y) پر ځاي د بنسټیډیری ګڼونه ولیکل شي۰ په برابرونپوهنه کې له پیژند – یا تعریفډیری څخه هغه ګڼونه غوره دي، چې د ورکړ شوي فورم یا بڼې یو برابرون یا نابرابرون رښتیا وینا کړي۰

د یو برابرون یا نابرابرون (مساوات یا نامساوات) هر عدد ځاي پرځاي کول، چې وینابڼه پیژند - یا تعریفډیری پورې اړوند وي او دا وینا ریښتینې کوي، اوبیډیری یا حلډیری L کې پروت دی یا د برابرون یا نابرابرون په ډکوونکو (پوره کوونکو) ډیریو پورې تړلی برابرون ته ، چې د ټولو ځاي پرځاي کولو لپاره ریښتونې وینا ورکوي کټمټ یا (identisch, identic) وینا وایي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګې :

الف) $5x= 4$ د $x = 0,8 = 4/5$ لپاره رښتیا وینا ته ځی : یانې

$5.0,8=4$ نو $L=\{0,8\}$

ب) $3x^2 = 48$ د $x = 4$ لپاره او $-4 = x$ لپاره رښتیا وینا ته ځې

یانی $3.(-4)^2 = 48$ څخه لاس ته راځی او په څټ $3.4 = 48$ پس- $L = \{ -4;4\}$

۲ – نابرابرون الف) $2x > 1 => L= \{x \mid x> -1/2 \}$

ب) $x < 3 => L = \{ x \mid x > -3 \}$

۳ – کتمتوالی : الف) $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$

ب) $(a+b)^2 = a^2+b^2 +2ab$

دوه برابرونونه یا نابرابرونونه، چې په خپل پیژندډیریکې سره برابر وي(یا یو پربل وخوري،

یانې یو د بل پرځاي ایښول کیدی شي) او همغه اوبی- یا حلډیری ولري ایکویوالنت (Equivalent) یا «ځاي پرځاي کول برابر» یا ورته بلل کیږي۰

یادونه : دا لاندې د جدول په ډول دی، له پورته له ښي و کیڼ لور ته په درځ یانې ولاړ درځ لوستل کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

	نابرابرون	براون
۱) وینافورم کې کیدی شي،چې خواوې سره بدلې شي	$T° < T^\wedge$ $T^\wedge > T°$ $2x < 6$ $6 > 2x$	$T°=T^\wedge$ $T^\wedge = T°$ $3x=5y$ $5y = 3x$
۲) که وینافورم په دواړو خواووهمغه ترم زیات یا کم شي او د یوې ورزیات ترم پیژنددیری خوندې وساتل شي یا ځاي کړي	$T^\wedge < T°$ $=>$ $T^\wedge \pm T° < T° \pm T^\wedge$	$T^\wedge = T°=>$ $T^\wedge \pm T° = T° \pm T^\wedge$
یا تغیر ونه خوري۰ مخامخ یا کیڼ لوربیلګه کې تفریقدیری تغیر خوړلی	$3y < 4x$ $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ $4y \pm 2x < 4x \pm 2x$	$2z = 8$ $=>$ $2z \pm 3 = 8 \pm 3$

پر ښتې بیلګه

$2z=8 \mid=> 2z+3-z=8+3-z$

دا چې $z=4$ دې نوي ورزیات شوي

ترم $3-z$ نه دی تعریف یا پیژندنه

لري، ځکه چې $3 - z$ یو پیدایښتي یا طبیعي ګڼ نه دی

۳) د وینافورم دواړه $T^\wedge=T° \Leftrightarrow$ $T^\wedge.T > T°.T$ $T^\wedge < T° \Leftrightarrow$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اړخونه کیدی شي چې	T^ < T° ⇔	T^.T =T°.T
له همغه مثبت ترم سره	T^:T>T°:T	⇔T^:T = T° : T
ځل او یا په همغه ترم	T > 0 که	که T > 0 وي
وویشل شي	3y -12 < 30z -90	4x+2 = 10x-6
	⇔ y – 4 < 10z -30	⇔2x + 1 = 5x -3
	⇔ 4y -16 < 40z -120	⇔ 2xc + 10 = 50x-30
٤) د یوه برابرون	T^ <T° ⇔ T^.T > T°.T	T^=T° ⇔
دواړه خواوې کیدی شي،	T^ < T°	T^.T =T°.T
چې له یوه منفی ترم سره	⇔T^:T = T° : T	⇔T^:T>T°:T
ځل شي یا دواړه خواوې په	T < 0	T < 0
همغه ترم وویشل شي۰	-2y < -4	3x = 12
که په دې فورم کې	⇔ y> 2	⇔-9x= -36
نابرابرونونه وي نو د	⇔ 10y > 20	⇔ x = 4
برابرون لورې بدلیږي، یا نخښه بدلیږي		

یادونه :

په تولیزه، چې په کتابونو کې لیکل شوي، ترمونه T یو او T دوه په لاندڼ توګه د ایندکس سره په نخښه کوي: T_1, T_2

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ . ۷ . تمرنونه:

۱ – په ۱ . ۳ –مه برخه کې د رښتیا ارزښت ورتو الی له (۱) څخه تر (۴) پورې وښایاست.

۲ – د رښتیا ارزښت جدول له لارې وښایاست، چې لاندط ویناتړاو منطقي مساوي ارزښت دی.

الف - (A⇔B) او (B⇔A)

ب- (A=>B) او(AvB)

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ ۰ ډیرۍ پوهنه Die Mengenlehre, the set theory

ډیرۍ پوهنې یا سټ تیوري باید خپل ځای په شمیرپوهنه او همدا ډول په نورو پیداینښتي- یا طبیعی پوهنو کې نیولي وي، نو له دې امله د لنډ تیر وخت را په دې خوا په پرمختللو هیوادونو او اوس هم په افغانستان کې د ښوونځیو په لیکلوست کې پیل شوه، ځکه چې بې له ډیرپوهنې یا سټ تیوري شمیرپوهنه بې مفهومه ده او ناشونې۰ دا به له دې لیکنې څخه همدا اوس څرګنده شي، چې پیداینښتي یا طبیعي ګڼونه یا - اعداد او هرڅه د ګڼونو په څیره کې ، چې موږ ته څرګند وي هغه ټولې ډیرۍ یا سټ دي او بل څه نه دي۰

ډیري پوهنې (سټ تیوري)په پرمختللو هیوادونو کې هم د شلمې پیړۍ په دویه نیمه کې د میندو او پلرونو لپاره ستونځې پیدا کړې، ځکه، چې دوي د ډیرۍ پوهنې سره بلد نه وو او د خپلو کوچنیانو سره یې مرسته نه شوه کولی۰

د ډیرۍ کلمه له عدددونو یا ګڼونو پخوانۍ ده، که څه هم پخوا انسانانو په خپله خوښه نه ښووله لکه اوس۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

په تراوس ورسره بلد ډول هم سټ يا ډېرئ پيژندل کيږي، لکه د ښوونځی نجونې او هلکان، يا په يوه ټولگی کې ميزونه او چوکی، يا لکه هغه نيزوړي، چې نيز راوړي او د سپين په پټي کې يې ډيرۍ ډيرۍ اچولي يا د هسکې مينې د ښوونځي په لسم ټولگی کې د زده کوونکو، کتابونو، کتابچو پنسلونو، څوکيو او ميزونو سټ يا ډيرۍ.

د ډېرئ پوهنې کلمه: موږ په افغانستان کې هم د ډيرۍ له کليمې سره اوس بلد شوي يو که څه هم تربيلو بيلو پرديو نومونو لاندې، چی زما په اند به زده کوونکو او ښوونکو ته يواځې ذهني غوره والي لري، زه غواړم، چی د ډيرۍ څو مختلف پيژندونه يا تعريفونه ورکړم، چې ښه مو ورته پام راوگرځي، دا له دې امله هم، چی د ډيري پوهنې (سټ تيوري) غوره والی ته مو نور هم پام راوگرځي.

ډيرئ پوهنه د شميرپوهنې سټه جوړوي او د شميرپوهنې ټولې څانگې په ډيرۍ پوهنه

ودانې دي. نن شميرپوهنه بې له ډيرۍ پوهنې داسې وده نه شي کولی او سټه يې وزي.

پيژند ۲ ۰ ۱

الف : ډيرۍ يا سټ د ټاکلو شيانو يا کلمو ټولگه (يوځايوالی، مجموعه) ده، چې پخپله خوښه د يوې ټاکلې بنسټډيرۍ يا بنسټ سټ څخه ، چې د پيژندلشويو اصولو يا کرکتريين له مخې ټاکل شوې وي

ب : د الماني شميرپوه کانتور(George Cantor 1845 – 1918) پيژند:

زموږ د خيال يا ليد څرگند ټاکلو ، ټيک يو له بل توپيرکيدونکو شيانو ټولگې (يوځايټولولو يا مجموعې) ته ډيرۍ وايي او هر شي ته، چې ډيرۍ يې جوړه کړې يا ډيرۍ ترې جوړه شوې وي، د ډيرۍ – يا سټ توکی وايی.

(Set and elements of set ډيرۍ او د ډيرۍ توکی)

پ : د مختلفو شيانو ټولگې يوه يوون يا يووالی (واحد Einheit, unite) ته په

(c) ketabton.com: The Digital Library

شمیرپوهنه کې ډیرۍ وایی

یادونه : د واحد لپاره، چې تراوسه ورسره بلد یو یوون یا یووالی ښه نومه ونې دي٠ دا که څو واره وویل شي، نو باورلرم، چې ورسره بلدیږو٠

ت : څرګند شیان د ګډو نخښو پربنسټ، چې تر څیړنې لاندې نیول کیږي او د دې نخښو له امله یوځاي ټولیږي یا ټولګه جوړوي، ډیرۍ یا سټ تشکیلوي٠ ګډې نخښې کیدی شي ښکلا، کوچنیوالی او داسې نور وي٠

یادونه: د ګرانو لوستونکو دې دي ته پام وي، چې په پورته پیژندونو کې یې غوره او د پام وړ پیژند یاتعریف د جورج کانتور پیژند دی.

بیلګه :

ګڼونه یا عددونه، نومونه، او توري کیدی شي د ډیریو بیلګو په توګه راوړل شي٠

ګورو، چې د ډیرۍ یا سټ کلمه په شمیرپوهنه کې بل ډول ده لکه په ولسي ژبه کې، چې دلته ډیرۍ د څنو شیانو زیات یوځاي کول موخه ده، د ځانګړو شرایطو لاندې.

په شمیرپوهنه کې ډیرۍ په لویو لاتین تورو لیکل کیږي لکه A,B,.. او یا M,N, X,Y,.... د ډیریو توکي د لاتین په کوچنیو تورو لیکل کیږي، لکه a,b,c,... او m,n,x,v,...

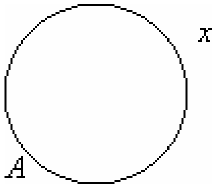
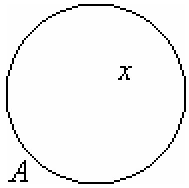
د دې لپاره، چې وپوهیږو، چې ایا توکی a د ډیرۍ A توکی دی که نه نو لیکو: $a \in A$

په پورته کې توکی a د ډیرۍ A توکی دی.

که a د A توکی نه وي ، نو لیکو: $a \notin A$ دلته a د ډیرۍ A توکی نه دی

دا پورته لینکدود له ښی وکیڼ لور ته هم لیکلی شو، چې پرلپسی لړۍ یې ساتلې پاتې شي٠ زه یې په څټ لیکنو سره لیکنیزې ستونځی لرم٠دا لاندې یې دیاګرام دی، خو توکي یې بل ډول لیکل شوي دي، چې ګرانو ستونکو ته به د پوهیدلو ستونځ پیدا نه کړي

(c) ketabton.com: The Digital Library

 $a \in A$ (a د A توکی نه دی)	 $a \notin A$ (a د A توکی دی)

ډیرۍ A دې له a,b,c,d,e,f,g,h, توکو جوړه وي، چې په لاندې توګه یی لیکو

$$A = \{ a,b,c,d,e,f,g,h\}$$

ګورو، چې { } د ډیرۍ یا سټ نخښه ده

یادونه : دا د ډیرۍ کلمه موږ په افغانستان کې سټ set بولو ، چې انګریزي ده، په فارسي کې یې مجموعه بولي، چې ډیرۍ د شیانو مجموعه یا ټولګه ده او په الماني کې ورته مینګې Die Mengeوایي. هغه بنسټیزه خبره یې په پیژند یا تعریف کې ده، که موږ یې چې هرڅنګه وبولو، خو د یو بل څخه کره توپیرکیدونکو شیانو ټولګی ته ... وایو. د ټکو پر ځاي ، چې هر څه لیکی، خو موږ ګورو، چې په پښتو یې هغۀ مناسبه نوموه ونه ډیرۍ ده، دا د کوټې کوټې څخه یا راپنډ او داسې نورو څخه ماته ښه ښکاریږي او زموږ ولس د دې نامه سره بلد دی، چې په پوهنه او لا نور ښه په شمیرپوهنه کې باید وکارول شي. زه بیا په دې ټینګار کوم، چې دا خپل ، چې ما ټاکلی یا بل څوک یې که بل ډول بولی د انګریزي یا الماني یا بل پردي نوم څخه ښه او پوهوړ دی. د سټ مانا که په ډکشنري کی وګورۍ ،نو پوه به شو، چې له دې نوم څخه مو خپل د پښتو نوم ښه او مناسب دی. ګورووچې دا نوم اوس ژورنالستان هم زیات کاروي او وایي، چې ډېرۍ یا ډېرۍ خلکو.... وکتل.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه ۲ ۰ ۱

الف) M_1 (لوستل M اينډکس ۱ دا به په لاندې نخښونه کې روښانه شي پام دې وي، چې (index(indeces اينډکش پيژند نخښې ته وايي) دې د لومړيو ګڼونو ډير ۍ (اعدادو سټ) وي، نو باور لري: $7 \in M_1, 8 \notin M_1$

ب) M_2 دې د لاندې برابرونونو يا مساواتو د اوبيونو(حلونو) ډيرۍ وي

(x+1)(x-2) = 0

نو باور لري : $-1 \in M_2, 2 \in M_2, 1 \notin M_2$

بيلګه ۲ ۰ ۲ :

الف) د مساوات (x+1)(x-2) = 0 حل ډيرۍ M_2 ده $M_2 = \{-1, 2\}$

ب) د جوړه (جفت) عددونو ياګڼونو ډيرۍ M_3 ده $M_3 = \{0, 2, -2, 4, -4, ...\}$

ډيرۍ لکه، چې ومو ويل د توکو د خويونو له لارې هم څرګنديدی شي يا ورکول کيدی شي۰

M = { x | د خوويونو ۰۰۰ سره x}

(لوستل: M د ټولو x ډيرۍ ده له خويونو ۰۰۰۰۰ سره)

بيلګه ۲ ۰ ۳

الف) { د ټولو x سټ ، چې هلته x يو لومړنی عدد يا ګڼ دی| M = { x

b) M = { x | (x+1)(x-2) = 0 }

$c)..........M = \{x \mid x \in R, 0 \le x \le 1\}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تشدیرۍ ډیرۍ، چې کوم توکی ونه لري تشدیرۍ یا خالي سټ بلل کیږي او داسی یې لیکو: θ یا $\{\}=\varnothing$

دا دې د یوې ډیرۍ یا سټ سره، چې یوائی له صفر څخه جوړه ده، نه بدلیږي یانې

$$\{\} = \varnothing \neq \{0\}$$

بیلګه ۲ ۰ ٤

$$\{x \mid x \in Z, x^2 + x - \frac{3}{4} = 0\} = \theta$$

ځکه، چې د برابرون یا مساوات $x^2+x-3/4 = 0$ حلډیرۍ

$$\{x|x^2+x-/4= 0 \} = \{ 1 / 2 \ , -3/2\}$$

کوم ټولګڼ یا تام عدد خوندي نه لري٠

ټولګڼونو پیژند ته دې پام وي، چې د راشنلګنونو برخډیرۍ ده٠دریمه برخه دې وکتلشي

بیلګه ۲ ۰ ٥ : د ز٠ کال د دویمې نیمایي میاشتو سټ یا ډیرۍ په Ju , aug sep , ok,no, de سره ښایو او لیکو: A= { jul,aug,sep.ok,no,de}

نو داسې لرو یا نوره هم ښه داسی لیکلی شو: $jul \in A, jun \notin A$

دا په دې مانا، چې جولای د A توکی دی او جون د A توکی نه دی

بیلګه ۲ ۰ ٦ : ټول مندیزي، چې نن مازیګر لمانځه ته د غارخلي لمنځتون یا جماعت ته راغلي٠

بیلګه ۲ ۰ ۷ : د هغو میرو ، غواوو او وزو ډیرۍ، چې نن په نخاس کې خرڅې شوې.

بیلګه ۲ : ۸ د ټولو هغۇ ګڼونو ډیرۍ(عددونو سټ) M، چې ۳۰ ویشي یانې

۱ ، ۲ ، ۳ ، ۵ ، ٦ ، ۱۰ ، ۱۵ ، ۳۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

داسې يې ليکو : $M = \{ 1,2,3,5,6,10,15,30\}$

دا سټ پاي سټ ده داسې وایو، چې ډیرئ یا سټ M د ټولو هغو توکو x - لکه پورته - جوړ شوې، چې ۳۰ ویشي او داسې يې ليکو: $M =\{ x \mid x$ د ۳۰ پرویشونی ګڼ$\}$

د ټولو پیداینښتې یا طبیعي ګڼونو ډیرئ(اعدادو سټ) N ټاکو او داسې يې ليکو:

$$N = \{ 1,2,3,4\ldots.\}$$

دا نه پای لرونکی یا لایتناهي ډیرئ(سټ) ده ، چې په لاندې ډول يې نخښه ده یا په لاندې ډول په نخښه کیږي: ∞

ګورو، چې په شمیرپوهنه کی موږ پر پای ګڼونو برسیره ناپای عددونو سره هم مخامخ یو.

۲ ۰ ۲ د ډیریو ترمنځ اړیکې relation between sets

د سټونو ترمنځ غوره اړیکی د برابروالی او خوندیونې یا خوندي لرنې (مساویوالی او یو په بل کې ځاي لرلو) اړیکې دي.

پيژند ۲ ۰ ۲ دوه ډیري یا سټونه M_1 او M_2 یو د بل سره برابرې دي، یانې

$$M_1 = M_2$$

که چیرې د ډیرئ یا سټ M_1 هر توکی د ډیرئ یا سټ M_2 توکی هم وي او پر ښټ یا برعکس هر د M_2 توکی د M_1 توکی هم وي.

برابرې ډیرئ برابر توکي هم لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بيلګی په توګه

$$M_1 = \{x \mid (x+1)(x-2)(x+3) = 0\}$$
$$M_2 = \{-1, 2, -3\}$$
$$\Leftrightarrow M_1 = M_2$$

ګورو، چې M_1 د M_2 سره برابر دئ

برخډيرۍ(سبسټ subset)

پيژند ۲ ۰ ۳ :

يوه سټ M_1 د سټ يا ډېرۍ M_2 برخډيرۍ (لاندې ډيرۍ، خوندي ډيرۍ يا سب سټ) بلل کيږي يا M_1 په M_2 کې ځای ده يا نوره هم ښه M_1 په M_2 کې خوندي ده,، ليکندود يا ليکنډول:

$M_1 \subseteq M_2$ که د ډيرۍ M_1 هر توکی دسټ يا ډېرۍ M_2 توکی هم وي۰

کيدی شي، چې M_1 د M_2 سره برابر هم وي، که برابروالی يا مساوات نا شوني وي نو بيا د اصلي برخډيرۍ يا اصلي سب سټ څخه غږيږو۰

پيژند ۲ ۰ ٤ :

يوه ډيرۍ يا سټ M_1 د M_2 اصلي برخډيرۍ ده او داسې يې ليکو: $M_1 \subset M_2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

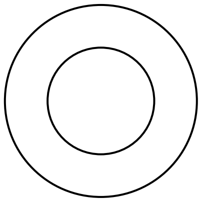
که $M_1 \subseteq M_2$ باور ولري او کم له کمه د M_2 یو توکی د M_1 توکی نه وي٠

بیلګې:

الف) که ولرو $M_1 = \{-1,1\}, M_2 = \{-1,0,1\}$ نو M_1 په M_2 کې اصلی خوندي دی

ب) د ټولو څلوریو (مربعو) ډیرۍ د ټولوڅلورګوډیو(څلور اضلاعو) اصلي برخډیرۍ ده٠

پ) څیره ۱ ۰ ۱ په هواره یا سطحه کې ټکوډیرۍ ښایي، د کومو لپاره چې باور لري، که M_1 او M_2 د ټکو ډیرۍ یا-سټ وي $M_1 \subset M_2$



که په پورته څیره کې وګورو، نو یوه ګردۍ (دایره) M_1 په بله لویه M_2 ګردۍ کې خوندي ده٠

تشډیرۍ په هره ډیرۍ کې خوندي ده٠ هره ډیرۍ په خپل ځان کې د نااصلي برخډیرۍ په څیر خوندي ده٠

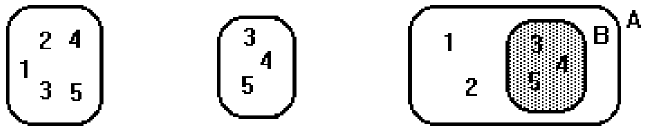
یا دا پیژند :

که باور ولري : B⊆A $x \Rightarrow A \in x \in B$

بیلګه:

A={1,2,3,4,5} B={3,4,5} B⊆A

(c) ketabton.com: The Digital Library



پیژند ۲ ۰ ۵ :

هغه ډیرۍ، چې هیڅ توکی ونه لري تشډیرۍ بلل کیږي او داسې یې لیکو: $M=\theta=\{\}$

یادونه : پام دې وي، چې صفر ډیرۍ او تشډیرۍ سره بدلې نه شي یانې لاندې ته:

$\{\} = \theta \neq \{0\}$

د یوې ډېرۍ توان یا تواندېرۍ (توانسټ)

پیژند ۲ ۰ ٦ :

د یوې ډیرۍ M د ټولو برخډیریو ډیرۍ پوتنخډیرۍ یا په تواندیرۍ(-سټ) بلل کیږي او داسې یې لیکو:P(M) په تواندیرۍ توکي لري، چی هر یو یی بیا خپله ډیرۍ ده۰

بیلګه : د M = { a,b.c} ډیرۍ دا لاندې په تواندیرۍ لري

$$P(M) = \{ \{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$$

هره ډیرۍ چې د توکو ښخه جوړه وي هغه ټیک n جګ 2n توکی لري یانی : n^{2n}

دا پورته د جملې په ښیر د پوره ایندکشن له لارې اوبی (حل-) کیدی شي(لومړۍ برخه دې وکتل شي)۰ دا دنده د ګرانو لوستونکو د خوښې کار دی، که کوي یي۰

پیژند ۲ ۰ ۷ : د ډیرۍM زور |M| لاندې د ډیرۍ د توکو تعداد یاګڼون پوهیږو۰ که دوه ډیرۍ M اوN همغه زور ولري هغه ته یوزوریزه – یا برابرزوریزه ډیرۍ وایو او داسې یې لیکو: |M| = |N|

(c) ketabton.com: The Digital Library

د برابرونونو یا مساواتو او خونديِ ساتنو خویونه

الف) رفلکسیو- یا د انعکاس(هندارونیزيِ) اړیکيreflexivity

هغه اړیکي، چې د هغه او د هغه دخپل ځان ترمنځ ریښتونې ویناوې ورکړ شوي وي رفلیکسیویا انعکاسي اړیکي بلل کیږي لکه: $M = M, M \subseteq M$

خونديِ لرل اړیکي رفلکسیو نه دي $M \not\subset M$

دا په دې مانا، چې هیڅ ډیرئ د خپل ځان اصلي برخډیرئ یا برخسټ نه شي کیدئ۰

ب) سیومتریکي اړیکي Symetric relation

هغه اړیکي سیومتریک بلل کیږي، چې د شیانو ترمنځ چې کارول کیږي یا استعمالیږي یو له بل سره بدلیدلی شي۰

لکه $M_1 = M_2 \Leftrightarrow M_2 = M_1$

خونديِ لرل سیومتریکي اړیکي نه دي:

که وي $M_1 \subseteq M_2$ نو اړیکی $M_2 \subset M_1$ ناربښتیا یا ناټیک دي

دا هلته چې وي: $M_1 \neq M_2$

پ) ترانزیتیویتي Transitivity یا وړون اړیکي

ترانزیتیویتي هغه اړیکي دي، چې له یوه نه وبل ته یي د وړلو امکان شته یا موجود وي۰

له L = M او M = N څخه لاس ته راځي L = N

او

$$M_1 \subseteq M_2 \wedge M_2 \subseteq M_3 \Rightarrow M_1 \subseteq M_3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پورته داسي لولو: که M_1 د M_2 برخډيرئ او M_2 د M_3 برخډيرئ وي، نوله دې څخه لاس ته راځی، چې M_1 د M_3 برخډيرئ ده

برابونونه یا مساوات او په بل کې ځایه ونه یا خوندي ساتنه ترانزیتیو اړیکې یا خویونه دي

۲ ۰ ۲ په ډيرئ کې کارونې یا عملیې

ټولنډيرئ (د اتحاد سټ)

پيژند۲ ۰ ۸ :

د دوه ډيريو M_1 او M_2 ټولنډيرئ(unionاتحاد سټ)، چې د ډيريو ټولنه ورته وایو ده:

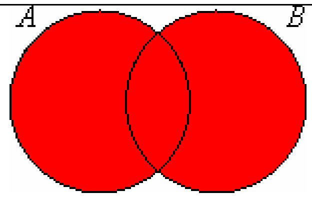
$$M = M_1 \cup M_2$$

دلته داسې پوهيږو، چې M د ټولو هغو توکو څخه جوړه شوې ډيرئ یا سټ ده، چې لږ تر لږه د M_1 او M_2 توکي هم خوندي ولري۰

د ټولنې $M = M_1 \cup M_2$ هر توکی د M_1 یا M_2 توکی هم دئ (پرتله ۱ ـمه برخه د یا سره پرتله) یانې دا د ټولنډيرئ توکی د M_1 یا M_2او یا د دواړو توکي دي۰

یا لاندې دیاگرام

(c) ketabton.com: The Digital Library

 	$A ? B$ $A\cup B$ (B تولنه A) x) د A سره B اړيکې لري

بيلګى

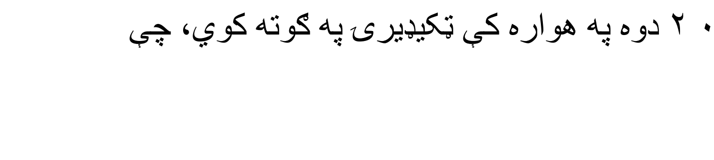
الف) M_1 دې د ځوانانو ډېرى وي، چې بکلوريا لري او M_2 دې د هغو ځوانانو ډېرى وي، چې مسلکي شهادتنامې لري، نو $M = M_1 \cup M_2$ د ټولو هغو ځوانانو ډېرئ ده، چې بکلوريا او مسلکي شهادتنامې ولري او يا دواړه شهادتنامې ولري۰

ب)

$$M_1 = \{k, a, r\}, M_2 = \{u, r, s, e, l\}$$
$$M_1 \cup M_2 = \{k, a, r, u, s, e, l\}$$

يا په لاندى توګه پيژند او بيلګه: A او B دې دوه ډېرى وي د دې ډېريو ټولنه داسې ليکو

$A\cup B = \{x \mid x\in A \vee x\in B\}$
$A=\{1,2,3,4\}$ $B=\{3,4,5\}$ $A\cup$
$B=\{1,2,3,4,5\}$



ټل په ټکو ټکي شوې ټکيډيرى ټولنديرى په ګوته کوي۰

ب – څيره ۲ ۰ ۲ دوه په هواره کې ټکيډيرى په ګوته کوي، چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف) ټکیپردئ دي٠ ب) ګډ ټکی لري٠

پ) اړیکې $M_1 \subset M_2$ پوره کوي:

د دې لپاره څیرې په لاندې کې په بیلګو کې راغلې دي٠

د ټولنې لپاره کموتاتیو قانون باور لري» $M_1 \cup M_2 = M_2 \cup M_1$ دا په دې مانا، چې د لړۍپرلپسې دلته(لنډ: لړۍ) د ډیریو په ټولنه کی رول نه لوبوي

یادونه : که ګڼونه ۱ ، ۲ ، ۳ ، ٤ ٠٠٠ ولرو، نو دا پرلپسې بولو او که بیا دا سره جمعه کړو لکۀ

$$1 \ , \ 1+2,1+2+3,1+2+3+4+,1+2+3+4++..+....$$

نو دا لړپیرلپسې یا لنډ: لړۍ بولو(پرلپسی برخه کې دې وکتل شي) دا په دې مانا، چې له دوو څخه د زیاتو ډیریو ټولنه لړۍپرلپسی(لنډ: لړۍ) رول نه لري٠

اسوشیاتیو قانون باور لري٠

$$(M_1 \cup M_2) \cup M \ = M_1 \cup (M_2 \cup M_3) = M_1 \cup M_2 \cup M_3$$

غوڅډیرئ (د ډیریو غوڅی یا –متقاطع سټ) intersection

یادونه : دا کړی شو، چې د ډیرو ګډغوڅی وبولو(دا د ګرانو لوستونکو خوښه ده،کوم ناټیکوالی په کې نه شته)

پیژند:

ډیرئ M د ډیرئ M_1 او ډیرئ M_2 غوڅډیرئ یا د تقاطع سټ ده(لوستل: M_1

غوڅ(پرې)په M_2 (لنډ: غوڅی): $M = M_1 \cap M_2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د ډيرئ M ټول توکي د ډيرئ M_1 او ډيرئ M_2 توکی وي۰

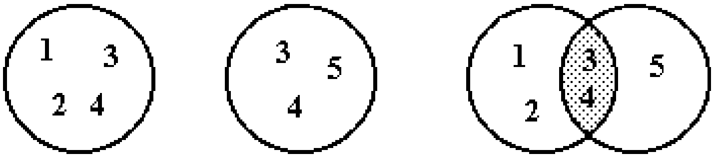
د غوڅډيرئ $M = M_1 \cap M_2$ هرتوکی د ډيرئ M_1 او ډيرئ M_2 توکي دي (د ۱ ـمې برئ د هم او هم په مانا يا د «او» په مانا)

يا دا پيژند :

د ډيريو A او B غوڅئ $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

بيلګه:

A = { 1,2,3,4}, B = { 3,4,5} => $A \cap B = \{3, 4\}$



يادونه: دې پورته ډول دياګرام ته د ون دياګرام Venn-Diagram يا د Euler-Venn- Diagram وايې

بيلګې :

لومړئ : يوه ډله زده کوونکي له ننګرهار او پکتيا څخه راځي، چې په M_1 يې په نخښه کوو۰ يوه بله ډله ، چې په M_2 يې په نخښه کوود کندهار او همغه د پکتيا زده کوونکي، چې په M سره يې ښايو، دي۰ د دې دواړو ډلو غوڅډيرئ

$M = M_1 \cap M_2$

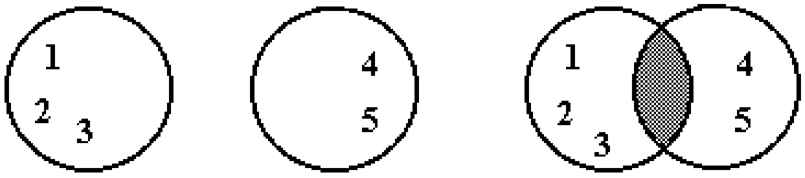
د پکتيا زده کوونکي دي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

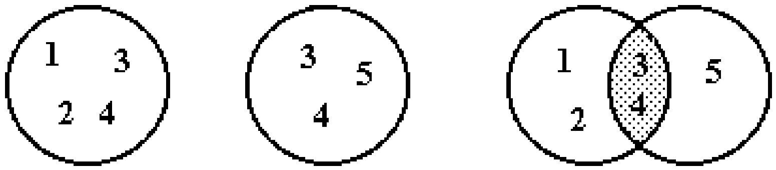
دويم:

$$M_1 = \{k, a, r\}, M_2 = \{u, r, s, e, l\},$$
$$M = M_1 \cap M \;\; = \{r, l\}$$

دريم ځيره ۲ ۰ ۳ په هواره يا سطحه کې ښايي، چې الف) ګنون پردي دي



ب) يو بل سره ګډ ټکی لري



پ) اړيکی

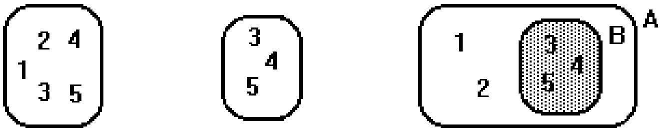
$$M_1 \subset M_2$$

پوره کوي

بيلګه:

A={1,2,3,4,5} B={3,4,5} B⊆A

(c) ketabton.com: The Digital Library



هغه ټکو باندې ټکي شوې ډېرۍ اصلي برخډېرۍ ده

دوه ډېرۍ، چې غوڅډېرۍ یې تشډېرۍ وي

$$M_1 \cap M_2 = \theta$$

لکه د مخه مو چې ګوته ورته ونیوله پردۍ بلل کيږي

د غوڅډېرۍ لپاره ، لکه څنګه د ټولنډېرۍ لپاره کموتاتیو قانون باور لري

$$M_1 \cap M_2 = M_2 \cap M_1$$

او اسوشیاتیو قانون

$$(M_1 \cap M_2) \cap M_3 = M_1 \cap (M_2 \cap M_3) = M_1 \cap M_2 \cap M_3$$

ددواړو د ډېرۍکارونو یا ډېرۍ عملیو یانی ټولنډېرۍ او غوڅډېرۍ لپاره دواړه دیستریبوتیو قانونونه پوره کيږي یا باور لري

$$M_1 \cup (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cup M_2) \cap (M_1 \cup M_3)$$

$$M_1 \cap (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3)$$

(د ګڼونو د شمیرکارونو یا عملیو لپاره یواځې یو دستریبوتیو قانون شته والی لري:

$$a_1.(a_2 + a_3) = a_1.a_2 + a_1.a_3$$

مګر په ټولیزه توګه باور نه لري

$$a_1 + (a_2.a_3) = (a_1 + a_2).(a_1 + a_3)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پيژند :

کمونډيرئ يا تفريق سټ M_2 د ډيرئ M_1 او ډيرئ M کموالی يا فرق دئ او

داسې يې ليکو: $M_2 = M / M_1 = \{x \mid x \in M \wedge x \notin M_1\}$

له M څخه د M_1 ډيرئ کمه شوې

يا کله چې د M_2 توکي د M هغه توکي وي، چې هغه د ډيرئ M_1 توکي نه وي٠

ليکندود ياليکنډول :
$A / B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

لوستل : د A او B توپيرډيرئ ياکمونډيرئ يا تفريقډيرئ له ټولو هغو توکوx جوړه ده، د کومو لپاره، چې باور لري : x د A توکی دی او x د B توکی نه دئ

بيلګې :

لومړئ : په يوه ټولګي کې M_1 د ټولو نارينه وو زده کړو ډيرئ ده او M_2 دټولو زده کړو ډيرئ (د نارينه وو او ښځينه وو) ، چې په شميرپوهنه کې لس نمرې وړي٠

M_1 / M_2

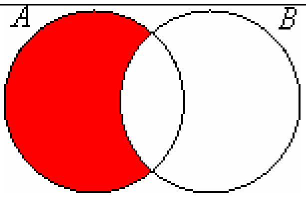
د هغو زده کړو ډيرئ ده، چې ۲ ، ۳ ، ٤ ، ۵ ، ٦، ۷ ، ۸ ، ۹، نمرې وړي او ټول د هغو نجونو ډيرئ ده، چې په شميرپوهنه کې يې لس نمرې وړي٠

که په ټولګي کې يواځې نارينه زده کړي وي، نو باور لري

$M_1 / M_2 = \theta$

يا دا لاندې :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$A \backslash B$ (B بې له A) (x له A سره B اړیکې لري)	

دویم :

$$M_1 = \{k,r,a,i\}, M_2 = u,r,s,e,l\}$$
$$M_1 / M_2 = \{k,a\}, M_2 / M_1 = \{u,s,a\}$$

لکه څنګه، چې د کمون یا تفریق پیژند او بیلګي را په ګوته کوي په ټولیزه توګه باور نه لري:

$$M_1 / M_2 \neq M_2 / M_1$$

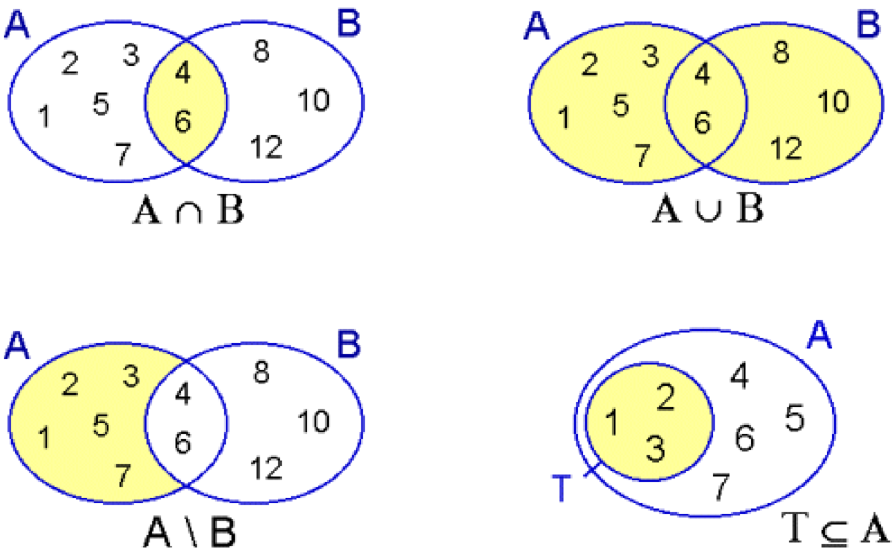
د یوې ډیرۍ یا سټ کمپلمنت یا پوره کوونکی :

دا کارونه یا عملیه د نورو کارونو څخه توپیر لري، چې په ډیرۍ کی مو څیړلي۰ دا یوه یوځاییزه کارونه ده او دا نورې دوه ځایزې کارونی یا عملیې دي۰

موږ بنسټډیرۍ په U او د ټولو هغو توکو ډیرۍ، چې U کې پراته دي یانې د U توکي دي او هغه په M کې نه دي پراته یانې د M توکي نه دي پوره ډیرۍ یا کمپلیمنت بولو او د $\bar{M}$ سره یې په نخښنه کوو۰

په لاندې څیره کې بیا د ډیرۍ غوڅې، - ټولنه او – کمون او برخډیرۍ ته د ګرانو لوستونکو لا زیات پام را اړوو۰

(c) ketabton.com: The Digital Library



پیژند:

پوره کوونکی- یا تکمیلډیرۍ (یا د یوې ډیرۍ کمپلیمنت) د یوې ډیرۍ M پوره کوونکې ډیرۍ $\bar{M}$ تیک هغه توکي لري(د بنسټډیرۍ U څخه) ، کوم چې د M توکي نه وي٠

دوه ځله کمپلیمنټډیرۍ جوړول خپلې لومړنی وینا ته ځي ، یانې $\bar{\bar{M}} = M$

دلته یواځې یوه ساده بیلګه راوړو: په یوه کلي کې دوه کورنی د توپیر او برګ کورنی اوسیږي٠ که دا دوه کورنی یو له بل سره خپلوي ونه لري، نو دوي یو له بل سره پوره ډیرۍ یا تکمیلډیرۍ بلل کیږي یانې دا کلی پوره کوي٠

۲ . ٤ خیرونه mapping یا اړیکې:

(c) ketabton.com: The Digital Library

يادونه : پام دې وي، چې دا هغه ورسره بلد تابع کلمه نه ده، چې وروسته به ورسره بلد شو٠

په دې برخه کې لومړی د ډيرۍ ضرب کلمه پيژنو يا تعريفوو او بيا د ضرب کلمې کارونه ځيړو٠

پيژند ۲ ٠ ۹ : د دواړو ډيريو M يو او2 M ډيريضرب(اتيرانضرب) هم ورته وايي، يانې په x سره ځليږي يا ضربيږي

$$M = M_2 \times M_2$$

د ټولو تنظيم يا ترتيب شويو توکو

$$x \in M_1, y \in M_2$$

جوړو (x,y) ډيرۍ ده٠

بيلګې

$$M_1 = (a,b\}, M_2 = \{1,2,3\}$$
$$M_1 \times M_2 = \{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\}$$

د جوړو د غوښتل شوي تنظيم له مخې ځل په ډيريو کې کموتاتيو نه دی دا په دې مانا، چې

په ټوليزه توګه باور نه لري: $M_1 \times M_2 \neq M_2 \times M_1$

۲ – R دې د ټولو رييلګڼونو ډيرۍ وي٠ په هندسي مانا د کرښې د ټولو ټکو ډيرۍ٠ RxR د ټولو رييلګڼونو جوړو ډيرۍ ده، په هندسي مانا د هوارې يا سطحې د ټولو ټکو ډيرۍ ده٠

پيژند ۲ ٠ ۱۰ :

د ځيرونې F لاندې د دوه ډيريو د ضربډيرۍ $M_2 \times M_2$ برخډيرۍ پوهيږو٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

پس د جوړه تنظيم شوو توکو ډيری، چې $x \in M_1$ له يوه يا ډيرو توکو $y \in M_2$ سره تنظيم يا بهتره په باندې ځيره شي٠

داسی هم ويلی شو: د1 M توکي د2 M په يوه يا ډيرو توکو تنظيميږي يا ځېره کيږي٠

که $M_1 \times M_2 \supseteq F \ni (x.y)$ وي، نو x اوريجنل يا اصلي توکی او y ځيره توکی بلل کيږي٠

د ټولو اصلي توکو ډيری پيژندورشو يا تعريفورشو يا پيژنندډيری يا تعريفډيری بلل کيږي او د ټولو ځېره توکو ډيری د ځېروني ډېری، ارزښتورشو يا ارزښتډيری بلل کيږي٠

بيلګی

$$M_1 = \{a, b, c, d\}, M_2 = \{1, 2, 3, 4\}$$

د جدول په توګه دM يو توکو ځېرونه ونه يا ځېره کوونه د M دوه په توکو

ځېره توکی اصلي توکه يا ځيره کوونکی توکی

a -----------------------→ 1 , 2 ,5

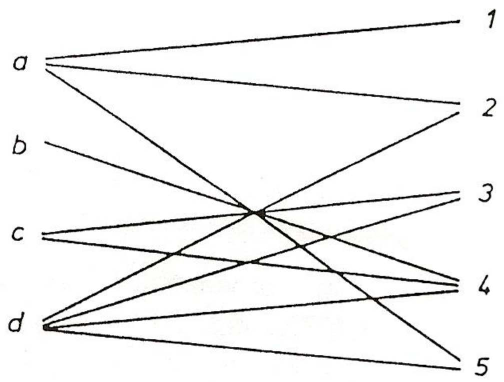
b -----------------------→ 4

c -----------------------→ 3,4

d -----------------------→ 2,3,4,5

يا دا لاندې:

(c) ketabton.com: The Digital Library



څيرونه:

F = { (a,1),(a,2),(a,5),(b,4),(c,3),(c,4),(d,2),(d,3),(d,4),(d,5)}

(د M يو او M دوه ډيريو د ټولو توکو جوړو ډيرى)

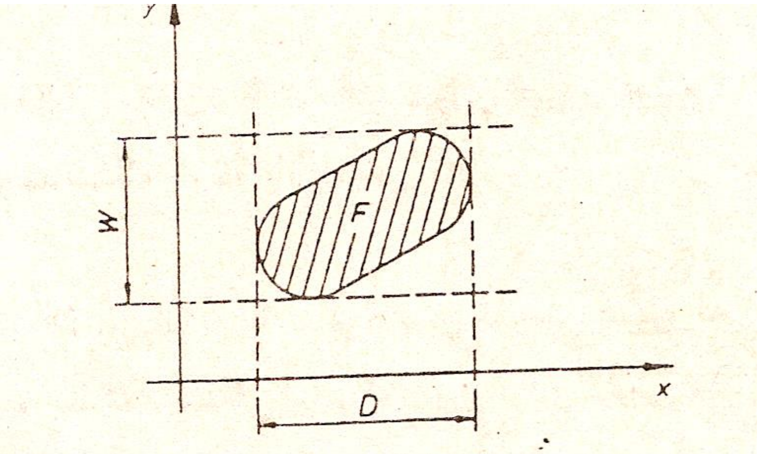


Bild 9.6 څيره

دريم : هر پيدايښتي يا طبيعي ګڼ a د هغه په دوه ځله b=2a باندې څيره کيږي٠ داسي پيژند شوې يا تعريف شوې څيره ونه په لاندې بڼه هم انځوريدلى شي٠

$$F = \{(a,b) \mid a \in N, b = 2a\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته هم N د پيدايښتي يا طبيعي ګڼونو ډيرۍ· پيژنددیرۍ يا تعريف- د ټولو پيدايښتي ګڼونوډيرۍ ده او ارزښتډيرۍ د ټولو جوړه ګڼونو ډيرۍ ده·

ځلورم : که M يو په يوه ښوونځي کې د ښوونکو ډيرۍ وي او M دوه په ښوونځي کې د ځانګړو ټولګيو ډيرۍ وي نو ښوونکي، چې په ټولګيو کې درس ورکوي دا يوه ځېرونه ده· د ښوونکو ډيرۍ د ځانګړو ټولګيو په ډيرۍ کې

مورږ د ځېره ونې ځلور حالتونه توپيروو:

پيژندونه(دې ته دې ګران لوستونکي ښه پام وکړي):

لکه په لومړۍ بيلګه کې په ځيره ونه F کې د1 M ، چې تعريفډيرۍ D سره برابر دئ او M2 ، چې له ځيره ډيرۍ , W سره برابر دئ ، توکي مو مخ ته پراته دي·

له يوې ځيرونې Fغبرګيرو د1 M په M2 باندې· دلته دې « د » او « په » ته پام وي)

وي دې: $D \subset M_1, W \subset M_2$

لکه په دويمه بيلګه کې ، نو د يوې ځيره ونې F غبرګيرو له M1 په M2 کې (دلته دې

« په » او ,په کې » ته پام ور واړول شي)

وي دې : $D = M_1 \wedge W \subset M_2$

دلته د يوې ځيره ونې غبرګيرو د1 M په M2 کې دلته دې دريمه بيلګه په پام کې راواړل شي·

وي دې: $D \subset M_1 \wedge W = M_2$

نو د يوې ځيره ونې غبرګيرو له M1 په M2 باندې· دلته ځلورمه بيلګه د بيلګې په توګه راوړو· د دې نيونې لاندې چې ټول ښوونکی ځانګړي ټولګيو ته درس ورکوي·

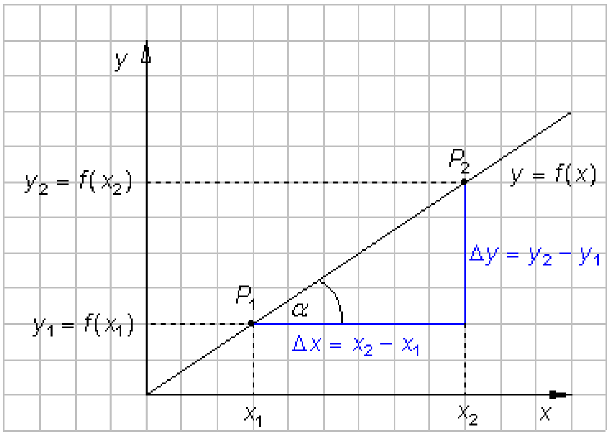
(c) ketabton.com: The Digital Library

يادونه : دا لاندې برخه دې ګران لوستونکي وګوري، خو د دې اوس وخت لپاره لږ ستونځمنه ده او شايد ځيرې هم رانه شي، خو که لږ د شميرپوهنې سره بلد شو، بيا پرې پوهيدل ساده دې٠ زه مخ ته لړم، چې په دې هکله ليکلى کتاب، چې چاپ شوى نه دى دلته پر ليکه کړم، چې هلته بيا دا موضوع لږ غزيدلي ده٠

بيلګه ۲ ٠ ۵ : موږ په هواره يا سطحه کې ځرګند شوي کړۍ د ډيريځل RxR په ځير د برابرونونو له لارې رانيسو(R د رييلګنونو ډيرۍ د ګنګرښې ټکي دي(ګنونه دې وکتل شي))٠

الف) $y = 2x$ يوه ځيره ونه ده د R په R باندې ، ځکه چې باور لري

$$D=W=R$$



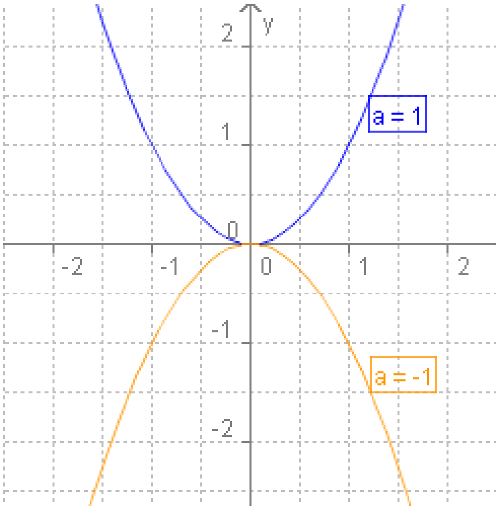
يادونه : په پورته ځيره کې برابرون $y = ax+b$ دى.

ب) $y = x^2$

يوه ځيره ونه ده د R په R کې ، ځکه چې باور لري

$$D = R\ ,\ W = [0,\ \infty]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



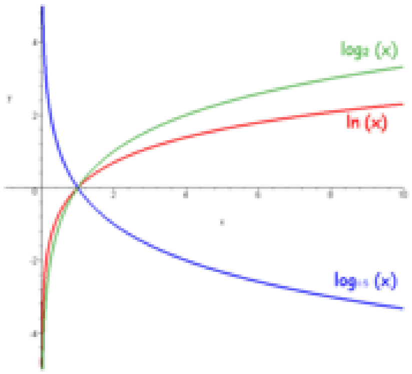
یادونه :

پوته بلواک د $x \mapsto ax^2 + bx + c$ ډول دی، چې b = 0 , c = 0 او a = 1 , a = -1 اينبول شوي دي٠

پ) y = log x

یوه خیره ونه ده له R په R باندې « ځکه چې باور لري٠

$$D = (0,\infty) \wedge W = R$$

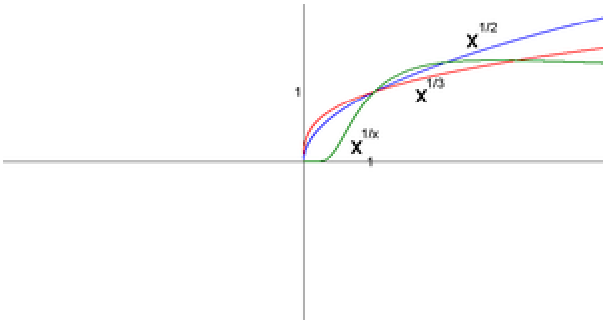


(c) ketabton.com: The Digital Library

ت) $y=+\sqrt{x}$

یوه څیرونه ده له R په R ، ځکه چې باور لري

$D=W[0,\infty]$



یادونه : پورته د دویې ،دریمې او په x -مې ریښې په مانا دی

څیرې له ویکي څخه په مننه راکښنه شوي دي٠

پیژند ۲ ٠

یوه څیره ونه E یواځنی بلل کیږي٠ که هر $x\in D$ په ټیک یوه $y\in W$

باندې څیره شي٠ دا په دې مانا، چې هر $x\in D$ ټیک یووار په $y\in W$

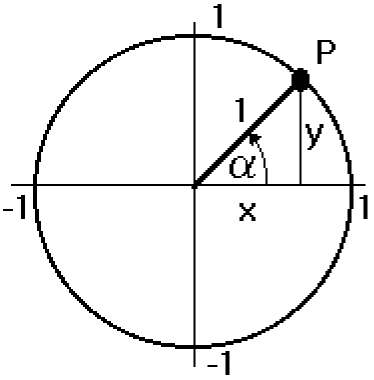
تنظیمډیرۍ یا جوړه ډیرۍ کې رامنځ ته کیږي٠ یوه یواځنی څیره ونه فنکشن

یا« بلواک» بلل کیږي او یا لکه تراوسه ورسره بلد یو یوه تابع بلل کیږي٠

پام:

دا دې دلته کره په ګوته شوې وي، چې زه « یوازنی څیره ونه » بلواک یا فنکشن بولم٠

(c) ketabton.com: The Digital Library



بیلګه ۲ ۰ ٦ : په بیلګه ۲ ۰ ۵ کې له الف تر ت پورې ټولې ځیروني فنکشنونه یا بلواک دي۰ د دې پر څنګ لاندې برابرون (یوونګردی یاني ګردی، چې وړانګه یې یو یوون یایووالی یا واحد وي ځیره ۰) انځور شوې ځیره ونه له R په R کې [1,1-]) D=W) فنکشن یا بلواک نه دی ، ځکه چې اصل دوه ځیرې لري یاني که په تنظیمجوړه کې د ځیره ونې لړي پرلپسې(لنډ:لړی) بدله شي، نو یوې پرځنګ ځیره ونې ته راځو:

پیژند ۲ : ځیره ونې F ته پرځنګ ځیرونه F^{-1} د ټولو جوړو (x,y) ډیری ده له سره ۰ $(x,y) \in F$

پیژند ۳ ۰ یوه ځیره ونه یویواځنی بلل کیږي، که یواځنیF او F^{-1} یوازنی ځیروه ونې وي، دا په دې مانا، چې که هر $x \in D$ او $y \in W$ ټیک یو ځل په تنظیم کې منځ ته راشي۰

یادونه : د ځیروني نوم څخه باید ونه ډار شو دا ځیره ونې ځیرې کووني (که څوک یو کالی یا رخت ځیرېکوي)او ځیره کووني توپیر، ځکه سره کیدی شي، چې هغه منځپانګه یې یو له بل توپیر لري۰ موږ پښتو کې نږدې یو ډول لیکونکي ویونه (لغات) لرو، خو دا هغې منځپانګې له مخې توپیریږي۰
ډیری پوهنه د شمیرپوهنې سټه ده، نو په راتلونکي کې به یې نوره هم ژوره وځیړو او همدا اوس هم نور ګران هیوادوال دې ته رابولم، چې له ما سره ګډ کار یا خپلواک دې کار ته ملا راوتړي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

ما دا برخه غزولې، چې په خپل شووني وخت کې به ګرانو لوستونکو ته په ځانله توګه د يوه کتاب په څير هم وړاندې شي٠

۲ . ۵ تمرينونه

۱ – د لاندې ډېئ يا سټ توکي د شميرنې له لارې انځور کړئ

الف $\{x$ لومړی عدد او$20 > x \mid x\}$ (لوستل: د ټولو عددونو x ډېرئ يا سټ، چې xلومړنی عدد او $x < 20$ دی).

ب- $\{x|x^2+x-6=0\}$

پ-$\{x^2+x-6=0$ او$0 < x \mid x\}$ دا په نوکانوکې ټول له کيڼ ښي لور ته لولو

ت) $\{x \mid x$ رييلګڼ او $x^2+1=0\}$ دا ټول څه له ښي و کيڼې لور ته ولولی

۲ – د توکو x, y, z اړلرونوالی و ډيري M ته وڅيړی !

الف) M د لمړنيو ګڼونو ډيری

$x = 4, y = 5, z = 6$

ب) M د لاندې مساواتو حلډيری (اوبيډيری)

$x^3 + x^2 - 6x = 0$

$x = 0, y = 2, z = 3$

پ) M د ريشنلګڼونو ډيری چې په اينتروال [3 ,3-] کی پراته دي

$x = -2, \quad y = \sqrt{2}, \quad z = 1/3$

ت) M د رييلګڼونو ډيری چې په اينتروال [3 ,3-] کي پراته دي

$x = -4, \quad y = \sqrt{2}, \quad z = 3$

۳ – د لاندې ډيريو ترمنځ کومی اسريکی پرتی دي

الف) M_1د ټول جفت ګڼونو ډيری

(c) ketabton.com: The Digital Library

او M_2 د ټولو ټولګتونو ډیرۍ

ب) د ټولو مساواتو $x^2 + 2x - 3 = 0$, حلونو (اوبیو) ډیرۍ

$M_2 = \{ -3 , 1 \}$

پ) M_1 د ټولو ګنو ډیرۍ چي پر ۶ ویشل کیږي.

او M_2د ټولو ګنونو ډیرۍ چي په ۳ ویشل کیږي !

او M_3د ټولو ګنو ډیرۍ چي په ۱۲ ویشل کیږي !

۴ – د ډیرۍ $\{ a,u,t,o \}$ ټول برخډیري ورکړۍ !

۵ – د لاندي ډیریو څخه ټولنډیرۍ ، غوڅډیري او دواړه ټوټډیري جوړ کړۍ !

الف) $M_2 = \{m,a,u,l,t,i,e,r\}$ ، $M_1 = \{ k,a,m,e,l\}$,

ب) $M_2 = \{ 3 ,6 ,9,.... \}$ ، $M_1 = \{ 2,4,6,.. \}$,

پ) $M_2 = \{x \mid x^2-3x+2 = 0\}$ ، $M_1 = \{ x \mid x^2 + x +- 2 = 0\}$

۶ – د یوه ډیرۍ M او د تشډیري $\emptyset$ ټولنډیرۍ، غوڅډیرۍ او توپیرډیرۍ جوړ کړۍ !

۷ – د یوه ډیرۍ M او خپل همدي ډیرۍ ټولنډیرۍ ، غوڅډیرۍ او توپیرډیرۍ جوړ کړۍ !

۸ – وي دي $M_1 = \{ 4 , 8 , 12 \}$ $M_2 = \{ 3 , 6 , 8\}$

$M_3 = \{0 , 2 ,4 ,6 \}$, $M_4 = \{ 6 , 12 , 18 \}$

جوړ کړۍ : $M = [(M_1 \cup M_2) \cap M_3] \setminus M_4$!

۹ – جوړ کړۍ

الف) $M_1 \cup (M_1 \cap M_2)$ پ) $M \setminus \emptyset$

ب) $M_1 \cap (M_1 \cup M_2)$ ت) $\emptyset \setminus M$

۱۰ – وي دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$M_1 \cup M_2 = \{1,2,3,4,5\},$$
$$M_1 \cap M_2 = 71,3,5\}$$
$$M_1 \backslash M_2 = \{2,4\}, M_1 \backslash M_2 = \emptyset$$

له دي پورته څخه M_1 او M_2 وټاکی !

۱۱ – وي دي

الف) $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ ب) $M_1 \subset M_2$,

وټاکی: $M_1 \backslash M_2$!

۱۲ – وي دی M_1 , M_2 (د نیمواز) اینتروال تکي ډیري:

$$M_1 = \{-3, 3\}, M_2 = [1, 7]$$

وټاکی

الف) $M_1 \cup M_2$ ب) $M_1 \cap M_2$ پ) $M_1 \backslash M_2$

ت) $M_2 \backslash M_1$ ټ) $M_1 \times M_2$

۱۳ – وي دي $M_1 = \{1, 2, 3\}$, $M_2 = \{\{a, b\}$

الف) د $M_1 \times M_2$ ځل جوړ کړی

ددي لاندي ب) تر ت) برخی تمرین لپاره دي ۹ الف برخه وکتل شي.

ب) دا لاندي کوم ډول ځیرونی دي

$$F_1 = \{(1,a),(1,b)\}$$
$$F_2 = \{(1,a),(3,a)\},$$
$$F_3 = \{(1,a),(2,b),(3,b)\},$$
$$F_4 = \{(1,a),(2,a),3,a)\},$$
$$F_5 = \{(1,a),(2b)\}$$

په ټولو حلونو (اوبیو) کی F_1 تر F_5 ورکړی .

پ) په ځټ ځیرونه ورکړی

ت) د ځیرونو F_1 څخه تر F_5 پوري، کوم یواځنی او کوم حتی یویواځني دي ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . دحقيقي اعدادو (-ګڼونو) سره د شميرلو بنسټيزې نښلونې

(ترڼی، کارونی يا عمليي)

۳ ۰ ۱ د اعدادو د سيستم جوړښت

۳ ۰ ۱ ۰ ۱ طبيعی اعداد يا -ګڼونه natürliche Zahlen

انسانانو له پخوا څخه اعدادو ته اړتيا درلوده۰ له دې امله يې پرمخ وديينه کې هڅې وکړې، چی له ډيری (سيټ) (د ليکنې په دننه کې ډيری پوهنه هم څيرلشوې)) سره داسې لارغوره کړي، چی دا ډيری تشريح کړای شي او د انسانانو او چاپيريال(طبيعيت) د پرلپسې اخ او ډب په نتيجه کې د ګڼ يا عدد وی(کلمه يا لغات) راپيداشوی، چې د عدد يا ګڼ کليمې پربنسټ د ريښتينو شيانو څرګند څومره والي (کميت)Quantitative ترلاسه کړي۰ د طبيعی اعداد و څخه په ګڼلو يا که غواړې شميرلو کې ګټه اخستل کيږي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ ۰ ۱ ۰ ۱ ۰ الف د طبيعي عددونو(پيدايښتي ګنونو) جوړښت

پيژند (تعريف)۳ ۰ ۱:

الف) ټول طبيعی اعداد د ډيرئ په څير يوه ټولګه جوړوي او د طبيعی اعدادو ډيرئ يا ست په نامه ياديږي يا يې طبيعی اعداد بولو او په N او همداسې N° سره يې په نخښه کوو۰

ډير پای طبيعي اعداد شته ، ځکه چی په هر طبيعی عدد پسی راتلونکی طبيعی عدد هم شته دئ (يعنی په هرڅومره لوي طبيعی عدد پسی راتلونکی طبيعی عدد شته دئ، چې دا وروسته روښانه کيږي)۰

ب) دطبيعي ګڼونو(اعدادو) اکسيوماتيکيAxiomatic جوړښت

اکسيوم جمله ده، چی اوبيونه (حل) نه غواړي او همداسی منل کيږي۰ دا چی جمله ، اکسيوم څه دي په لومړئ برخه يانې سم اند (منطق) کې دې وکتل شي۰

طبيعی عدد کلمه د جيوسيپې پيانو(Giuseppe Peano له ۱۸۵۸ – ۱۹۲ ز ۰کال) اکسيومونو پر بنسټ لاندې پيژند لري يا په لاندې توګه تعريف کيږي:

۱ – د صفر ګڼ يو پيدايښتي ګڼ دئ

۲ - د هرطبيعي عدد يا ګڼ m لپاره يو يوائځنی ټاکلی طبيعي عدد n شته، چې سملاسي(ترلی) د m پسی ګڼ دئ، د کوم لپاره چی لرو: $m+1 = n = m^{\wedge}$

دلته $m^{\wedge}$ د m پسي سملاسې يا ترلی ګڼ يا عدد په ګوته کوي۰

۳ – هرطبيعي عدد زيات له زياته په يوه طبيعی عدد پسی سملاسي راتلونکی ګڼ دئ۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

٤ – هیڅ طبیعي عدد نه شته، چې پسی راتلونکی پیداینښي عدد یې صفر وي۰

۵ – که طبیعي عددو ډېرۍ M صفر د توکي په څیر ولري او که له هر طبیعي عدد m سره د هغه پسی تړلی راتلونکی عدد یا ګڼ `m هم د M توکی وي، نو M ټول

طبیعي عددونه خوندي لري یا په بل ډول » ټول طبیعي اعداد په کې ځاي دي۰

یادونه: ځنې ادبیاتو کې، د پیانو سیستم کې، د صفر په ځای ۱ لیکل شوی. په دې حالت کې بیا صفر ته د طبیعي عدد یا ګڼ په څیر نه کتل کیږي. که بیا صفر ورسره مل کړو، نو د صفر سره طبیعي ا عدادو ډېرئ یا –سټ یې د صفر سره بولو.

۱ . ۱ ب : د طبیعی اعدادو یا ګڼونو انځورونه او سیستمونه:

طبیعي اعداد په نخښو (دې ته په الماني کې Zifferوایي، چه همغه د صفر په معنا دی، خو دلته ترې مطلب، چې دا څیرو، دی) انځوریږي. د دې لپاره چې دا لږ ځای ونیسي، نو د لویو او وړو اعدادو لپاره نخښې له کوچنیو سره یوځای کیښول شوې دي. دا چې څرنګه یوه د عدد یا ګڼ نخښه له بل توپیریږي، په لاندې ډول یې د زیاتون یا جمعي سیستم او ځای سیستم کې ښایو.

په زیاتون سیستم کې هر بنسټیز ،،ځای،، یو ،، ځای ارزښت،، لري. د څیفرونو زیاتون د یو په بل کې د ورزیاتشوي بنسټیز څیفر پخپله هغه عدد یا ګڼ ورکوي. بیلګه یې په رومي ګڼونو کې راړو. دا له بنسټیزو څیفرونو جوړ شوی(ترې لاندې لسیز د اعدادو سیستم دی). زه دلته د ضرورت په بنسټ ټول ضروري څیفرونه چې موخه ترې عددونه دي، له پیل راوړم:

(c) ketabton.com: The Digital Library

رومي عددونه:	M	D	C	L	X	V	I
عربي عددونه:	1000	500	100	50	10	5	1

طبیعي عدونه له دې امله یو د بل ترڅنګ لیکو چې کم ځای ونیسي لکه د بیلګې په توګه:
CXX په دې معنا چې C+X+X

په رومي ګڼونو کې، که بنسټیز کوچني ګڼنخښې لکه C , V , I د لوي ګڼنخښې و کیڼ لور ته ولیکل شي نو دا مانا لري چې دا کوچنۍ ګڼ له لوي ګڼ څخه کم شوی.
د بیلګي په توګه: XC = C - X .

بیلګې: الف: MMDCCLXVIII په دې مانادی 2768
ب : MCMXXIX په دې مانا دی 1929
پ : CCCIV په دې مانا دی 304

ځایسیستم: په ځاي سیستم کې هره بنسټیزه نخښه یو «ځاي ارزښت نخښه ارزښت» لري.

لکه : g– ئیز ځاي سیستم(پوزیشن سیستم ((Positionssystem)): د طبعي ګڼ n انځورونه په g– ئیزځای سیستم کې په دې ډول ده چې د یوه ورکړشوي ستې په بنسټ($g \in N$) $g \geq 2$ هر طبعي ګڼ n په لاندې ځانګړي ډول انځوریدلی شي:

$$n = a_k g^k + a_{k-1} g^{k-1} + \ldots + a_1 g + a_0$$

دلته بنسټیزې ګڼنخښې a_i، g د $i = 0,1,2,\ldots,k$ او $k \geq 0$ د $0 \leq a_i \leq g-1$ چې $a_k \neq 0$ وي په کار راځي یا اړتیا ورته شته.

لیکلی شو :

$$n = a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0$$

که د بدلیدلو (د بل څه سره) امکانات رامنځ ته کیږي، نو بهتره به وي چې په

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې ډول ولیکل شي

$$n = [a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0]_g$$

نن په ټوله نړۍ کي ګڼل په لسیز سیستم (ګڼځای ارزښت) باندې کیږي، چې تل داسي نه وه، لکه په افغانستان کي چې دا اوس هم د ډوډۍ پور لپاره په لرګي کرښه را کاږي، چې څو ډوډۍ واخستل شوې.

په لسیز سیستم کی ګڼځای «ارزښت» لري چې انځور شي، مګر په لرګی کی ځای ارزښت نه لري چې کرښه چیرته کښل شوې، هلته د پور کرښو له ګڼون یا تعداد څخه پور څرګندیږي.

بل د ګڼلو سیستم . لکه د مخه مو چی تر پام لاندې ونیوه، د ګڼلو رومي سیستم دی چی نن هم د ارزښت وړ دی او همدارنګه د مفهوم ډك، زیاتونسیستم(جمعی –) څرګندیږي.

بیا هم غواړو چی دا په لاندې ډول خانګړی کړو:

۱ – هره لاندې نخښبه I, X, C کړای شي چی زیات ترزیاته ۳ ځله(۳ واری) په یو ګڼ کی پرله پسی یا ښنګ تر ښنګ راشی

۲ – هره، د ګڼ نخښبه V, L, M خورا زیاته یو ځل ښنګ تر ښنګ په یوه ګڼ کی راتلی شي.

۳ – که بنستیز نخښبه I, X او یا ....__-- ددې نخښو د ارزښت نه لوړو ارزښت نخښو V, X, L, C, D یا M CXI تر مخ ځای په ځای شوې یا انځوروي نو د لوي ارزښت څخه کمیږي .

زیاتون او کمون (جمعه او منفي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

۴ – په هرګڼ انځورز(Zahlendarstellung) کی کیدی شي چې یواځې یو بستهیز ګڼ تر مخ ځای په ځای یا انځور شي لکه: MXCVII = 1098 مګر نه IMIC
۵ – د یو ګڼ لپاره د امکان په حال باید کمی نخښبی په کار واچول شي.

عربي ګڼونه : دا ګڼونه، چې موږ ورسره بلد یو، د لسیز سیستم ګڼونه دي، چې عربی ګڼونه بلل کیږي. دا د ګڼلو لسیز سیستم عربو د هند څخه راوړی چي په دولسمه پیړۍ کې یې اروپا ته یو وړ. دا اصلي ګڼونه له صفر(۰) تر ۹ پورې دي یا له 0 تر 9 پورې، چی

څیفر ورته واي (همغه عربی صفر دی) چي دلته ترې بنستهیز ګڼونه پوهیدل کیږي.

لکه چي ګوته مو ورته ونیوه، زیاتونسیستم نور ارزښت نه لري، څکه چی د یو ګڼ ارزښت د ګڼ نخښبی زیاتون باندې انځور کیږي. د ځای سیستم سره د ګڼونو انځورول ساده دي.

> **تعریف ۱ . ۱ ب** : په یو «ځاي ارزښت سیستم» کی هغه ګڼ لوي دی چی زیات ځایونه ولري، که چیرې د ګڼ د ځایونو شمیر سره برابر وي(مساوي وي) نو هغه ګڼ ستر دی چی له کینی لورې یې نخښبه لویه وي.

لسیز – یا لسګونی سیستم: لسیز سیستم هغه ځای ارزښت سیستم دی چي له انځورونی یې څرګندیږي. په لسیز سیستم کی د ګڼ انځورولو نخښبی، لکه د مخه مو چی انځور کړې، ۰،۱،۲،۳،۴،۵،۶،۷،۸،۹ دي. ۱۰ ګڼ د لسیز سیستم بنستهیزه نخښبه ده. دا چی نور ګڼونه نه انځوریږي، نو ځای هلته ډک دی چی پرله پسی (ترتیب یانظم) د ۰ تر ۹ یعنی له 0 تر 9 ګڼونو پورې په ځای شوي وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې ډول د پسی جگ ځای یوون (واحد) د په کار اچول شووګڼنخښنو ګڼون (تعداد یا شمیر) دی، خموږ په حالت کی ۱۰ .

لکه چی د مخه مو ګوته ورته ونیوله، د پای (نه لایتناهی) ډیري (set , die Menge ګڼون د ګڼلو لپاره لاندې ګڼونه کفایت کوي: ۱، ۲، ۳، ۴، او ۹ –امه برخه دې وکتل شي)) غږو ګڼلو لپاره لاندې ګڼونه کفایت کوي: ۱، ۲، ۳، ۴، او داسی نور. ټولودې ګڼونو ته چی دصفرګڼ ورسره مل شي د طبعي ګڼونو ډیری N ویل کیږي. ددې لپاره لیکو :

$N = \{ 0, 1, 2, . 3 . 4 , 5 , 6,....\}$; $N^* = \{ 1, 2, 3, 4, ...\}$

موږ ګڼونه په کوچنیو لاتینی ټکو یا حروفو ښایو لکه a ,b,c, ... n . دا ریښتوني

(ریښتینوالی یا واقعیت) چی n دې یو طبعي ګڼ وي، داسی لیکل کیږي $n \in N$ یا $n \in N^*$ (ویل کیږي چی: n د طبعي ګڼونوډیري N یا*N توکی دی(لنډ n د N یا *N ځخه دی)) په دې ځای کی دې دګڼ او ګڼځای (ځیفر) توپیر ته پام وي.

موږ دګڼونو ټاکلو لپاره بلد یا اشنا د نخښنډیري لسیز سیستم په کار اچوو (استعمالوو)

$$N_{10} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,\}$$

د ګڼونو د نخښنو $a_i \in N_{10}$ پرله پسی، لکه د مخه مو چی په ګوته کړل، په لاندې ډول یو طبعي ګڼ انځوروي:

$$a_n\, a_{n-1}\, a_{n-2} \dots a_2\, a_1 a_0 = a_n.10^n + a_{n-1}10^{n-1} + a_{n-2}\, .10^{n-2} + ..+ a_2\, .10^2 + a_1.10 + a_0\, 10^0$$

$$a_i \in N.$$

ګڼونه په نورو ځیفرونو ډیري هم انځوریدی شي. د بیلګي په توګه په اینفورماتیك (Infrormatik) کی، چی د دوالسیستم (Dualsystem) (دوئیز سیستم) ځخه کار اخستل کیږي. ددې لپاره دوه ګڼنخښنې (ځیفرونه) لیکل کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$N = \{ 0,1 \}$

په لاندې جدول کې دلسیز او دوه ئیز سیستمونو لمړني ګڼونه يو د بل ترڅنګ کېښل شوي:

دوه ئیز سیستم	لسیز سیستم
0	0
1	1
10	2
1 1	3
100	4

په ټولیزه توګه(عمومي توګه) دلته يو څيفر پرلبسې(د عددون ترادف) $a_i \in N_2$ يو طبیعي عدد په لاندې ډول انځوروي،

$$a_n a_{n-1} \ldots\ldots a_2 a_1 a_0 = a_n.2^n + a_{n-1}.2^{n-1} + \ldots\ldots + a_2.2^2 + a_1.2^1 + a_0.2^0 \,,\ a_i \in N$$

بیلګه ۱ . ۱ :

$$59 = 1.\ 32 + 1.16 + 1.8 + 0.4 + 1.2 + 1.1$$

$$= 1.2^5 + 1.2^4 + 1.\ 2^3 + 0.2^2 + 1.2^1 + 1.2^0 = 111011$$

یا دونه :: څه لنډ لنډیزونه

د طبیعي اعدادو ډیرۍ یا سټ داسی په نخښنه کوو:

د پیدایښتي یا طبیعی ګڼونو ډیرۍ $N = \{ 1, 2 , 3 , \ldots \}$

دپیدایښتي ګڼونو ډیرۍ د صفر سره $N° = \{ 0, 1 , 2 , \ldots. \}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ه کتابونو کی دا د صفر نخښنه په لاندې برخه کی راځي٠

۳ ۰ ۱ ۰ ب د طبيعي اعدادو يا ګڼونو انځورونه:

طبيعي اعداد په نخښنو انځوريږي٠ دا عددونه يا ګڼونه د ځان لپاره يو سيستم لري، چې هغه زيات يې موږ نه څيرو٠ زموږ لپاره غوره هغۀ عربی اعداد يا ګڼونه دی٠

يا په بل ډول : دا عددونه چې موږ ورسره بلد يو د لسيز ځايستسم عددونه دي، چی دا مو د مخه په ګوته کړل٠ دا کورونه (خونې يا خانې) لري او په هر کور کی له صفر تر ۹ ځاي نيوی شي او بيا يې هر ځاي يو ارزښت لري، له دې امله دا » ځاي ارزښت سيستم« دی٠ لومړي کور ته يويز، دوم ته لسيز، دريم ته سليز او همداسی ، چی دا مو د مخه لږ روښانه کړي٠

انځورونه يا څيفرونه يې دي : ۰ ، ۱ ، ۲ ، ۳ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ۷ ، ۸ ، ۹ دا د بنسټيز ګڼونو نخښی دي، نور يې په کورونو يا ځايسيستم باندې روښانه کيدی شي٠

پيژند ۳ ۰ ۱ ۰ ب :

په يو» ځاي ارزښت سيستم « کې هغه ګڼ لوي دی، چی ډير ځايونه ولري٠ که چيرې د ګڼ د ځايونو يا کورونو ګڼون (تعداد) سره برابر وي٠ نو بيا هغۀ ګڼ لوي دی، چی کيڼ لور يې ګڼنخښه لويه وي٠

۳ ۰ ۱ ۰ پ : طبيعي اعدادو کې د شميرنې بنسټيز قوانين

اوس په لاندې ډول د پيداينت ګڼونو، په ټوليزه توګه د رييل ګڼونو لپاره او وروسته د کمپلکسو ګڼونو لپاره هم باوري(معتبر) بنسټيز د شميرنې قوانين وړاندې کوو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف : د انډول (نظم يا ترتيب يا لوي واړه ترتيب(Anordnung) بنسټيز قوانين:

که > ولرو، نو دې ننوتي کونج کی یا د نخښی خوله کی عدد یا ګڼ لوي دئ او د وتلی کونج یا لوي کونج >که نخښه یا داسی کونجکی یا څڼ یا ککره کې لیکل شوی عدد کوچنی دئ. که ګڼونه یا اعداد ۱۵ او ۲۳ ولرو نو د لویواړه اړیکی داسی لیکو، یانې که 15 > 23 ولرو نو ترې څرګندیږي، چی عدد۱۵ له عدد ۲۳ کوچنی دئ .

د دوه طبيعي اعدادو a اوb ترمنځ له لاندې اړیکو څخه ټیک یوه اړیکه باور لري»

$$a < b \quad , a = b \quad , a > b$$

۲ - ۲۱ =۲۱ که د ۲۱ په ځاي توری ولیکو هم a = a به وي اینه ونه یا هندارونه یا منعکسونه (ريفليکسيويتي Reflexivity)

۳ – له a = b => (لاس ته راځي) b = a (سيومتري، انډول، ورته واي (Symmetry

د انعکاسي (اينه ونيز – يا هندارونيز) برابروالی یانی که چیري دا عددونه وراینه يا هنداره يا انعکاس شي، نو دواړه عددونه په دا بل لور بيرته سره برابر دي يا برابريږي. که انعکاسي(اينه ونيز)برابر نوم ورته کيږدو، نو هم مناسب به وي، خو موږ به يې همغه سيومتري وبولو.

٤ - له a = b او b = c => (لاس ته راځی) a = c(ترانزيتيو Transitivity)

ترانزیتیو ګورو، چی یو له بل اړوند مانا ته نږدی دی، ځکه چی دا ګڼونه یو د بل سره په واکوالي تړلي یا له یو څخه وبل ته ځی یا وړل کیږي.

۵ – له a < b او b < c => (لاس ته راځی) یا a < c یا $a < b, b < c \Rightarrow a < c$

وړاندیز : که چیری دا پورته وي یا لغاتونه یا نومه ونی په همغه لاتین نومونو ولیکو ښه

(c) ketabton.com: The Digital Library

به وي، خو له شميرپوهنی پرته مانا باندی يې هم پوهيدنه ښه او اړيينه ده٠

ب : د زياتون (جمع) .Addition n بنسټيز قوانين

که چيرې له طبيعي اعدادو څخه يو ، دوه يا څو ګڼونه يو په بل زيات شي، نو يو پيدايښتي ګڼ ترې لاس ته راځی او دا کارونه(عمليه) «زياتون يت جمعه » بولو، ځکه، چی ګڼونه يو په بل زياتيږي٠

پيژند: د همغه ډول شيانو يا يو څه يو په بل زياتيدلو ته زياتون (جمع) وايو

که عدد ۱۰ په عدد ۱۸ ورزيات کړو نوعدد ۲۸ ترې لاس ته راځی يا

۱۰ + ۱۸ = ۲۸

په پورته کې ۱۰ او ۱۸ يو پر بل زياتيږي، نو له دې امله يې «زياتېدونی» (ما تراوسه زياتووني بللي، خو فکر کوم،چې زياتيدوني يې ښه نومه ونه ده) بولي، ۱۰ + ۱۸ جمعه او ۲۸ « جمع ارزښت» بلل کيږي ٠ چی په هغه پخوانی نوم مو ورته حاصل جمع وايه ٠ + زياتوننخښه ده او = برابروننخښه (مساوات علامه) بولو

دجمعې يا زياتون بنسټيز قوانين

۱ - د دوه طبيعي اعدادو a او b لپاره تل يو زياتون (جمع) a + b شته دی

۲ - يواځنوالی : له a' = a او b' = b څخه لاس ته راځي: a'+b' = a + b

۳ - COMMUTATIVE LAWکموتاتيو- يا بدلون قانون دی:a + b = b +a

۴ - assotiative law اسوشياتيو - سره ګډېدنې قانون. لرو
(a+b)+c=a+(b+c)=a+b+c

۵ - Monotony law مونوتوني – يا همغږيزوالي قانون :

(c) ketabton.com: The Digital Library

له $a < b$ څخه لاس ته راځي $a+c < b+c$

یادونه : په $a+b=c$ کې a او b زیاتېدونې $a+b$ زیاتون او c زیاتون ارزښت بلل کیږي

یادونه : په زیاتون کې لاندی زیاتونقوانین هم باوري دي:

ناپیلی توکی: په $N°$ کی یو توکی شته، چی که د هرپیدایښتي توکی سره په زیاتون یا جمعه کی ور زیات شي همغه توکي ورکوي· دا توکی صفر دی: $a+0=a$

ناپیلی توکی کړی شو نالوریز وبولو،ځکه،چې د کومې لور ګڼ باندې یې په زیاتون کې بدلون نه راولی یا د زیاتون ارزښت همغه پاتیږي، همداسې ناړونده او که بل څه مو په خوښه وي همغسې یې وبولی·

پ : د کمون (تفریق)Subtraction بنستیز قوانین

پیژند:د پیدایښتي ګڼونوa او b لپاره، چې $a>b$ وي، یواځی یوx شته دی، د کوم لپاره ، چې باور لري: $a - b = x$

که $x= a -b$ شته وي، نو ټیک یواځني شته دي(موخه x دی)

نومه ونې: b کمیدونی یا مفروق (تراوسه مې کمونی بللی) a ترې کمونی یا مفروق منه $a +b$ کمون او x کمون- یا تفریق ارزښت بلل کیږي یا بولو :

موږ پورته د لاتین تورو لپاره طبیعي اعدادونخښی لیکو، چی ساده یې ونومو:

$20 – 10 = 10$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورته کی موږ له ۲۰ لس کم کړل، چی لاس ته راوړنه یې ۱۰ ده، نو له دی امله یې داسی نوموو:

تر مخ یادونه: په لاندې کې ع . د عربي په معنا دی

۲۰ «ترې کمونی »، ځکه، چی ترې کمیږي(ع۰ مفروق منه)، ۱۰ «کموونی« یا کمیدونی(ع۰ مفروق) دا بل لس یې «کمون ارزښت» یا د کمون لاس ته راوړنه(لنډ: لاس ته راوړنه یا کمون) (ع ۰ حاصل تفریق) ، – کموننخښه او = برابروننخښه ده۰

ت : د ځل (ضرب) Multiplication بنسټیز قوانین:

۱ - د دوه پیدایښتي ګڼونو a او b لپاره د پیدایښتي ګڼونو په ډیری کې تل یو ځل a.b شته دی. د a.b لپاره داسي هم لیکو ab په پورته کې a او b ځلوونی (ضریبونه) او ab=x « ځل ارزښت » یا ځل(حاصل ضرب) دی۰

وایي چی ضرب وهلو ته وایي او د جمع (که جمعې) لنډه طریقه، چی۰۰۰۰وي یا د زیاتون لنډه لار ده۰ ګورو، چی دا پیژند، چی وهل او دربول دي زموږ لپاره دومره موخور نه دی او ځل د پښتو ښه نوم دی، چی له دربولو مو ځانونه راویستلي وي۰

که ووایو، چی : د کابل او جلالاباد ترمنځ لار ۱۵۰ کیلو متره ده۰ زمری له کابل څخه جلال اباد ته ۸ ځله لاړ، نو زمري به جلال اباد ته د تګ ټوله څومره لار وهلی وي؟

لیکو: ۱۵۰ × ۸ = ۱۲۰۰ ، نو زمري به ټوله ۱۲۰۰ کیلو متره لار وهلي وي۰ ګورو، چی د ځل نومونه د ضرب لپاره ښه او اسانه ده، ځکه چی پښتو ده او له ضریبونو څخه به هم ځلوونی اسان وي، به ۰۰۰وي نه، بلکی اسان دي۰

۲ - له $a = a'$ او $b = b'$ څخه لاس ته راځي $a'b' = ab$ (یواځیتوب)

۳ - لرو $ab = ba$ کموتاتیو – یا د بدلون قانون

(c) ketabton.com: The Digital Library

٤ - لرو $(ab)c = a(bc)$ د ګډولو- اسوشیاتیو قانون

٥ – لرو $(a+b)c = ac + bc$ د ویشونې- یا دیستریبوتیو قانون Distributive law

٦ - له $a < b$ او $c > 0$ لاسته راځي $ac < bc$

جګتیتوالي یا یوغریزوالي قانونMonotony

ټ – د ویش بنستیز قانون Division

پیژند٣ ٠ ٢ :

که د دوه طبیعي عددونو a اوb لپاره، چې $a \neq b$ او $a \neq 0$ وي یانی صفر نه وي یو طبیعي عددx شته، چې برابرون (مساوات) $ax = b$ پوره کړي، نو

$x = \frac{b}{a}$ یا b/a د b او a ویش (تقسیم) بلل کیږي، چې ماتګې(کسر) یې هم بولو

١ – که $a / b = x$ یا $x = \frac{a}{b} = a/b$ شته یا موجود وي ، نو یواځنی شته دی(یواځني په دې مانا، چې بل ګڼ x نه شته او یواځې همدا ګڼ x دی)

نومه ونې : په پورته برابرون کې a/b وېش x ویش ارزښت، b ویشونی یا ویشه وونی دی، ځکه چې په یوڅه ویشل کیږي او a پرویشونی بلل کیږي، ځکه، چې څه پر ویشل کیږي یا مقسوم، مقسوم علیه یا قاسم ، حاصل تقسیم ٠

ګورو چې له قاسم یا مقسوم او همداسی د مقسوم علیه او حاصل تقسیم څخه مو دا د پښتو نومه ونی پر- یا پرې ویشونی ، ویشه ونی اوویش ارزښت یا لاس ته راوړنه ساده او زر پوهېږ دي، خو په خواشینی به وه وایم، چې تراوسه په شمیرپوهنه کی ورسره نابلد یو ٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

که ۱۲ کتابچې پر څلورو زده کوونکو وویشو، نو هر یوه ته درې کتابچې رسیږي٠ گورو، چې ۱۲ په یو څه ویشلکیږي، نو ویشونی یې ښه نوم دی٠ دا ۱۲ په څلور ویشل کیږي پر ۰۰۰ ویشل کیږي، نو له دې امله څلور پر ویشونی بولو، درې یې لاس ته راوړنه ده لکه چې تراوسه مو ورته حاصل تقسیم وایه، له دې امله ورته ویش ارزښت وایو او دا کارونه یا عملیه خو ویش بلل شوی٠

۳ ۰ ۱ ۰ ۲ ټولگڼونه یا تام اعداد INTEGERs

د دووو طبیعي عددونوa او bکمون یا تفریق (x= b-a) ټیک او ټیک هلته یا هلته او هلته د طبیعي عددونو ډیری یا سټ کی شته، چې وي : $a \leq b$

د شمیرپوهنې نخښنو باندې داسې لیکل کیږي:

$$x = b - a \Leftrightarrow a \leq b$$

انگریزي یې if and only if ټیک او ټیک هلته یا هلته او هلته(دا شننه یا وینه پورته د شمیرپوهنې نخښې ته ده)٠

که هغې نخښې ته وگورو، نو هم لاندې ترې څرگندیږي، له ښی لور کیڼ لاس ته راځی او په څټ(برعکس) له کیڼ لور ښی لاس ته راځی٠ یا که۰۰۰ وي، نو ۰۰۰ لاس ته راځی او په څټ٠

ټولگڼونه یا تام اعداد هم د انسانانو د اړتیاو پر بنسټ منځ ته راغلي ، یا منځ ته راوړل شوي٠که چیرې سپین د خړ ۱۰۰ افغانۍپوروړی وي او سپین ورته اتیا افغانۍ ورکړي، نو سپین بیا هم شل افغانی پوروړی پاتیږي، دا په دی ما، چې ۸۰ + ۱۰۰ - = ۲۰ - ۰ گورو، چی ۲۰ – یو پیداینتي گڼ یا طبیعي عدد نه دی٠یا 20- = 100 – 80

(c) ketabton.com: The Digital Library

په هغه حالت کی، چی کموونی (مفروق) له ترېکموني(مفروق منه) څخه لوي وي، نو لاس ته راوړنه يې طبيعي عدد نه دی٠ اوس يوه د اعدادو بلې ډيری پيژند ته اړ کيږو، چی هغه د ټولګنونوډيری ده او دا د طبيعي عددونو او د طبيعي عددونو کمي(منفي) او صفر سره يوځاي کوو، چی ټولنه جوړوي(په ډيری کۀ به روښانه شي)، هغه څه، چی له دې ټولنې لاس ته راځي هغه د ټولګنونو ډيری ده او داسې يی ليکو:

$$Z = N \cup -N \cup 0$$
$$Z = \{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots\}$$

د دې لپاره، چې ترې کمونی د کمېدونی کوچنی وي ، نو پيدايښتي ګڼونه په کمګڼونو غزوو يا پراخوو، دا په دې مانا، چی د پيدايښتي ګڼونو مخنخښه په کمونخښه يا منفي نخښه باندې سنبالوويانې (کيدی شي زموږ هيوادوال د څېټ نخښی په نامه ورسره بلدوي، خو هره نخښه، چې د ګڼ زياتی يا کمی ښايې د ګڼ کيڼ لور ته ليکل کيږي، چې دا ما مخنخښه ليکلې او بللی

هغه په برخه ۳ ۰ ۱ ۰ ۱ کې ورکړ شوي شميرقوانين په Z کې هم باور لري

د ټولګڼونوډيری

Z = { …. -3, -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , 3 , …. }

د مخه مو شميرقوانين، چې د پيدايښتي ګڼونو لپاره ورکړل، هغۀ د ټولګڼونو لپاره هم باور لري

د کمون يا تفريق بنسټقوانين (پسی يا دوام):

۲ - د هرو دوو ټولګڼونو يا تام اعدادو a او b لپاره يو ټولګڼ x=b-a شته، د کوم لپاره، چیa+x=b برابرون باوري دی

د ويش تيوري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۰۱۰۳ الف د ویش قاعدې ، لارې یا خویونه

د طبیعي عددونولپاره د نورو قاعدو ترڅنګ ، چې د لومړنیو ګڼونو د ټوټه ونې یا تجز یې لپاره خورا ګټور دی باور لري

الف) یو ګڼ په ۲ (٤ ، ۸ ، ١٦) ویشونی دی، که د اخر ځیفر یا کور (له اخره(موخه تری ښی لور دی) دوه ، درې ، څلور ۰۰۰ بنستیزو ځیفرونو) څخه جوړ ګڼ په ۲ (٤ ، ۸ ، ١٦ ۰۰۰ویشونی وي) په دوه ویشونی ګڼ جوړه (جفت) نومیږي او بل ډول یی ناجوړه(طاق) بلل کیږي۰ ګورو، چی دلته هم په جوړې او ناجوړه ښه پوهیدلی شو

ب) یو ګڼ په ٥ (٢٥ ، ١٢٥ ، ٦٢٥ ، ۰۰) ویشونی دی، که د اخر(له ښي لور) بنستیز ځیفر (د اخر دوه، درې ، څلور ، ۰۰۰ بنستیز ځیفرونو) جوړ ګڼونه په ٥ (٢٥، ١٢٥ ، ٦٢٥ ۰۰۰) ویشوني وي

یادونه : په لاتین کی هغه، چی ښي لور ته وي هغه ته اخر وایي او موږ یې شاید لومړی وبولو۰ زه کوښښ کوم، چې دا پوهوړ ولیکم، خو بیا دې هم ګران لوستونکی تری ټیک ناپوهیدنه ماته وبخښي او مشوری دې راکړي۰

پ) یو ګڼ په ۳ همداسی ۹ ویشونی دی ، که د ګڼ پروت زیاتون پر دې ګڼونو ویشونی وي۰

د یوه ګڼ پروت زیاتون لاندې د هغه ګڼ بنستیز ه ګڼونخښو(ځیفرونو) زیاتون پوهیږو، بی له دې، چې د هغه ځاي ارزښت په پام کې ونیول شي۰

بیلګۀ : د 126 پروت زیاتون یا پرته جمعه ده: 1+2+6=9

ت) یو ګڼ په 11 ویشونی دی که د هغه ګڼ الترنیري(نخښه بدلونکی) پروت زیاتون۰ پر 11 ویشونی وي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

الترنیري پروت زیاتون، چې پروت کمون هم ورته وایی له بنستیزو څیفرونو ۱ ، ۳ ، ۵ زیاتون څخه د ۲ ، ٤ ، ٦ ، ۰۰۰ زیاتون کمون پو هیږو ، بی له دې، چې ځاي ارزښت یې په پام کی ونیول شي یا په بل ډول، که د ناجوړه کور زیاتون څخه د جوړه د زیاتون کم کړو۰

بیلګه: ۱۷۳۸ په ۱۱ ویشوني دي، ځکه، چې : ۱۵= ۸+ ۷ او ٤ - = ۳ – ۱ -، چې الترنیري زیاتون یانی ۱۱ = ٤ – ۱۵ یې په ۱۱ ویشونی دی۰

ټ) یو ګڼ پ ه ۳۷ وېشوړ دی که (د ګڼ له اخر څخه جرړشوي) د درېګوني ګڼونو زیاتون پر ۳۷ وېشونی وي.

بیلګه:

37|(448+352+216+20)⇔ 37|1036 ځکه چې 37| 20216352448

ث) یو ګڼ په ۷ همداسې په ۱۳ ویشوړ دی، که د هغه (د ګڼ له لخ څخه جوړ) درېګونی الترنیري زیاتون پر ۷ همداسې پر ۱۳ وېشونی وي.

بیلګې : 7|(604-37)⇔ 7 | 567 ځکه چې 7 | 37604

13| (889-293+709-96) ⇔ 13|1209 ځکه ، چې 13 | 9679293889

ج) یو ګڼ په ۱۰۱ وېشونی دی، که (د ګڼ له اخر څخه جړشوی) دوهګونی الترنیري زیاتون په ۱۰۱ وېشونی وي.

بیلګه:

101|(69-06+63-03+79)⇔ 101|202 ځکه چې 101|7930630669

(c) ketabton.com: The Digital Library

يادونه : که پيداښنتي ګڼونه a او b ولرواو ولرو a : b ، نو a پر b وېشو، که وېش

ارزښت يې هر ګڼ وي او که پيداښنتي ګڼونه a او b ولرو او ولرو b|a ، نو دا په دې مانه، چې ګڼ b ګڼ a ويشي بې له پاتي ياني ګڼ a په ګڼ b وېشوړ دی.

۳ ۰ ۱ ۰ ۲ټ) خوراغټ ګډ پرويشونی او خورا کوچنی ګډ زياتځله

يا بزرګترين قاسم مشترک و کوچکترين مضرب مشترک(ذو الاضعافالاقل)

Great common divisor and small common multiple

ددې لپاره، چې دا په سرليک کې ورکړ شوي څه ښه و پېژندلی شو ، داسې مخ ته ځو:

لاندې ګڼونه دې ورکړ شوي وي، سملاسي يې په لومړنيو ګڼونو ټوټه کوو

$$260 = 2.130=2.2.65=2.2.5.13 = 2^2.5.13$$

$$468=2.234=2.2.117=2.2.3.39=2.2.3.3.13=2^2.3^2.13$$

له پورته دواړو ګڼونو د لومړنيوګڼونو ځله وونو هر يوه څخه هغه لومړنی ګڼ رانيسو او سره ځله وو بې، چې په دواړو ګڼونو کې ګډ وي او توان(په خپل ځای کې دې وکتل شي) يا جګګڼ بې ټيټ يا کم وي . ياني

$$22.13 = 2.26 = 52$$

دا پورته لاس ته راوړی ګڼ ياني ۵۲ پورته دواړه ګڼونه وېشي ياني د دواړو ګڼونو پرووېشونی

دی او خورا غټ پرووېشونی هم دی. ياني ۵۲ خورا غټ او ددواړو ګډ پرووېشونی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لنډ : ۵۲ د یورته ګڼونو خورا غټ ګډ پروېشونی دی.

داسې ګڼ , خوراغټ ګډ پروېشونی, بولو (لنډ ونه یې : غ ګ و)

هغه ګڼ، چې د دوه یا ډېرو ګڼونو ګډ پروشونی او خورا غټ هم وي، نو دې ګڼ ته خورا,,

غټ ګډ پروېشونی ,, (لنډونه: غ ګ و) وایو. یا

(بزرګترین عامل (مقسوم علیه) مشترک)Greatest commom divisor(g c d)

اوس بیا داسې مخ ته ځو:

په پورته کې هغه د دواړو ګڼونو لومړني ځلهووني، له هر څخه یو چې په جګ توان وي

یانې خورا غټ جګګڼ ولري ، هغه د جګ توان رابېلوو او بیا یې سره خله وو، چې لاس ته

ترې راځي: $2^2.3^2.5.13=2340$

دا پورته ګڼ یانې ۲۳۴۰ د دواړو ورکړ شوو ګڼونو ګډ زیاتځله دی (یانې ګډ په دواړو

وېشل کیږي) او دا خورا کوچنی ګڼ هم دی. دا په دې مانا،چې له دې ګڼ بل کوچنی ګڼ نه

شته، چې د پورته ګڼونو دواړو ګډ زیاتځله(څو برابره) وي.:

لنډ : خورا کوچنی ګڼ دی. د دواړوګڼونو (یانې ګډ) زیاتځله (ګډ څو واره) دی

لنډ یې : خورا کوچنی ګډ زیاتځله (لنډونه یې: خ ګ ځ) یا
(کوچکترین مضرب مشترک یا ذوالاضعاف الاقل)Least common multiple(l.c.m.)

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګران هیوادوال دې ورته پام وکړي، چې کوم نوم به زموږ لپاره زر یا بیخي پوهوړ او ساده وي.

ورپسې داسې مخ ته ځو:

دا چې موږ په پیدایښت یا طبیعي ګڼونو کې له شمیرلو سره بلد شو ، نو په لاندې ډول پیژند ورکوو:

پیژند(تعریف)۳ ۰ ۳ :

a او b دې تولګڼونه وي٠ وایو چې « ګڼ a ګڼ bویشي» (او یا هم a د bپروېشونې دئ او یا همa د b څو برابره (زیاتځله) دئ) که یو تولګڼ u شته یا موجود وي او دا باوري کړيau=b ددې لپاره لیکوa|b (وایو، چې ګڼ aګڼ b ویشي ، خو اړیین یا ضرور نه ده، چې کلمه ګڼ ورسره وویل شي٠

که a د bپروېشونی نه وي، نو د دې لپاره لیکوa|/b(دا نخښه /| دې د نه ویشونی لپاره ومنل شي)

بیا لیکو، چې : پیدایښتي ګڼونه، چې په ۲ ویشل کیږي جوړه (جفت) ګڼونه بلل کیږي او که نه نو ناجوړه (طاق) ګڼونه بلل کیږي٠ د صفر ګڼ د پیدایښتي ګڼونو په ډیرۍ کې یو ځانګړی حالت لري٠

په لاندې جمله کې بې له ښوونې یا اوبیونې د دې ویشکلمی لپاره یو څو ساده شمیرقاعدې را یوځای کوو، چې په راتلونکي کې ترې کار اخستل کیږي٠

جمله ۳ ۰ ۱ :

د په خوښه یا زړه پورې تولګڼونو a,b,c,d لپاره باوري دي:

(۱) ± 1 او $\pm a$ ویش (دا په نامه « ساده» پروېشوني دي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

(۲) د ۱ پرویشونی ۱ او ۱ - دي

(۳) تل باور لري، چې 0 | a او a | 0 یواځی په هغه حالت کې باور لري، چې a = 0 وي

(٤) له a|b او b|c <= a|c

(٥) له a|b لاس ته راځي: ac|bc ۰که c |= 0 وي ، نو د دې په څټ هم باوري

دي۰ دا په دې مانا چې، که ac|bc وي، نو a|b هم باور لري۰د ګڼونو

ليکدود له مخې، که نړيوالجال ته پورته شو داسې ليکو، که نه دا پورته بسيا

کوي: $c \neq 0, a | b \Rightarrow ac | bc$

(٦) لهa|b او c|d څخه لاس ته راځي او په څټ ac| bd لنډه ليکنه يې(که نږ ته پورته شوه): $a | b, c | d \Leftrightarrow ac | bd$

(۷) له a | b او b| a لاس ته راځي a = ± b

(۸) له a |b اوa|c څخه لاس ته راځي a|(bx+cy) د ټولو ټولګڼونو x او y لپار

(۹) ټيک هلته a|b کله چی وي|b| | |a|،

(۱۰) که a | b او b = 0 نه وي نو باوري دي |b| > a > |b | -

حل (اوبی) : (۱) له a = (-a)(-1) = a1 لاس ته راځي

(۲) له 0 = a0 لرو 0 | a . که وي a | 0 , نو يو ټولګڼ u شته د کوم لپاره چی وي a = 0u

او له کومی چی لاس ته راځي 0 = a .

(۳) ساده دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(۴) که $a \mid b$ او $b \mid c$, نو تړولګڼونه u او v د $au = b, bv = c$ سره موجود دی . له دې لاس ته راځي $c = bv = a(uv)$ ، پس $a \mid c$.

(۵) که $a|b$ ، پس یو تړولګڼ u د $au = b$ سره موجود دی، او هم د $(ac)u = bc$ سره، د کوم ځخه چې لاس ته راځي $ac \mid bc$. د $c \neq 0$ لپاره دا اخرنتخیر په ځپ کیدی هم شي.

(۶) د $a|b , c|d$ او (۵) ځخه لاس ته راځي چې $ac|bc$ او $bc|bd$ ، د (۴) له مخې $ac \mid bd$.

(۷) د $a \mid b$ او $b \mid a$ ځخه د تړولګڼونو u او v موجودیت لاس ته راځي د $au = b$ او $bv = a$ سره. برسیره پر دې لاس ته راځي $a(uv) = a$, پس $a=0$ یا $u=v=\pm1$. په لمړي حالت کی د $a \mid b$ له امله $b = 0$, پس $a = b$. په دوم حالت کی $a =\pm b$ دی.

(۸) د تړولګڼونو u , v لپاره دې $au = b$ او $av = c$ ، نو له دې $a(ux+vy)=bx+cy$ لاس ته راځي، پس $a \mid (bx+cy)$ د ټولو تړولګڼونو x او y لپاره.

(۹) وي دې $a|b$. له $a \mid b$ ، $a| \mid |a|$ او $b \mid |b|$ ځخه او د (۴) ځو واره استعمال ځخه لاس ته راځي، چې $|a| \mid |b|$. په ځپ: که $|b| \mid |a|$ باورلري، نو د $|b| \mid |a|$ ، $|a| \mid a$ او $b \mid |b|$ ځخه په ورته ډول لاس ته راځي $a \mid b$.

(۱۰) دی $a \mid b$ ، پس د (۹) هم $|a| \mid |b|$. که $b \neq 0$ وي ، پس یو طبعي ګڼ u لاس ته راځي د $|a|u = |b|$ سره، له کوم چې $|a| \leq |b|$ لاس ته راځي.

که $b|a$ د تړولګڼونو a,b لپاره د $b \neq 0$ سره، نو یو یواځنی معلوم ګڼ q شته (د a او همداسی د b «کومپلیمنت پرویشونی» بلل کیږي)، چې لرو $a = bq$.

په تړلیزه توګه لاندې جمله باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۳ ۰ ۲ (د ویش الګوریتم): a او b دې تولګنونه وي٠ د $b \neq 0$ سره ٠ نو یواځني ټاکلي، په پای پلونو(قدمونو) کی شمیرلکیدونکي تولګنونه q او r (چې د a پر b ویش

څخه لاس ته راځي او «ویش» په همدې ډول « پاتی بلل کیږي، شته دی،د کومو لپاره چی باور لري: $a = bq + r \ \wedge \ |0| \leq r < b$

هر یو تولګڼ کم له کمه ساده پرویشونی لري یعنی 1 ± او پخپله د دې تولګڼ زیاتیز(مثبت) او کمیز(منفي)٠ دې پرویشؤنو ته «سادهٔ پرویشونی» وایو٠

پیژند ۳ ۰ ب :

هر یو تولګڼ، چې یواځی او یواځي ساده پرویشونی ولري مور ورته لومړنی ګنونه وایو او دا لومړنی یا پریم ګنونهPrimzahlen په pسره په نخښه کوو، چې دا پریم یا لومړی ګڼ د پیدایښتي ګنونوتوکی دی٠

هریو تولګڼ، چی لومړنی ګڼ نه وي د لومړنیو ګنونو په څلونو(څله وونو)(ضریبونو) توټه یا تجزیه کیدی شي٠

بیلګی :

$$240 = 24 \,.\, 10 = 3 \,.\, 8 \,.\, 2 \,.\, 5 = 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 5 = 2^4 \cdot 3 \,.\, 5 \qquad -\ 1$$

$$2310 = 2 \,.\, 1155 = 2 \,.\, 3 \,.\, 385 = 2 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 77 = 2 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 7 \,.\, 11 \qquad -2$$

$$3750 = 25 \,.\, 15 \,.\, 10 = 5 \,.\, 5 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 2 \,.\, 5 = 2 \,.\, 3 \,.\, 5^4$$

که پورته بیلګو ته په ځیر شو نو په ۱ او ۳ راغلو ګنونو کی ګڼ ۲ د دواړو پر ویشونی دی او همدا ډول ۳ هم د دواړوګنونو پرویشونی دی یانی $2.3 = 6$ برسیره پردې ګڼ ۵ هم نو $2.3.5 = 30$ دواړه ګنونه ویشي او شاید په دې ګنونو کی یو خورا غټ ګډ پرویشونی هم وي٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورته دربواړو بیلګو کې ۲ ، ۳ ، ۵ د ځلوونو په څیر خوندي دي یانې دا ګڼونه ویش، چې له دې امله ګڼ ۳۰ د درجواړو ګڼونو غ۰ګ۰پ دی

پیژند ۳ ۰ پ :

a او b دې ټولګڼونه وي او d دې یو مثبت یا زیاتونی ټولګڼ وي، د کومو لپاره، چې باور لري:

$$(1) d \mid a \wedge d \mid b$$
$$(2) t \mid a \wedge t \mid b \Rightarrow t \mid d$$

پس d د a او b خورا غټ ګډ پرویشونی(غ۰ګ۰پ) بلل کیږي d لپاره داسی لیکو:

$$d = (a,b)$$

نو d خورا غټ ګډ پرویشونی(لنډ: غ۰ګ۰پ) بلل کیږي۰

که باوري وي: $(a,b) = 1$ نو a او b پروېش پردي بلل کیږي یانې له ۱ پرته بل داسې ګڼ نه شته، چې دواړه ګڼونه پر وویشل شي.

یادونه : په زیاتو ادبیاتو کې لنډونه په دربتورو کیږي، خو که غواړی دا خورا غټ ګډ پرویشونی داسې رالنډوو : خ غ ګ پ

یادونه: ما د خورا غټ ګډ پرویشونی لپاره دا پورته درې توکي غوره کړي، که ګران لوستونکي بل وړاندیز لري، نو زه یي ضرور په پام کی په پوره خوښی نیسم۰ دې دوه کلمو ته په فارسي ادبیاتو کې بزرګترین قاسم مشترک او کوچکتریب مضرب مشترک وایي او ذوالاضعاف الاقل یې هم بولي۰

یادونه : که چیرېd او *d دواړه دa او b غ ګ پ وي، نو له پورته پیژند څخه لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

چی $d \mid d^*$ او $d^* \mid d$ ، نو د $d^*, d \geq 0$ له امله لرو $d^* = d$

لاندې جمله په وښايي ، چې داسې غ ګ و تل شته دی

جمله ۳ ۰ ۳ :
په خوښه تولګنونو a او b لپاره دې غ ګ پ d شته وي، نو تولګنونه x او y شته د کومو لپار، چې لرو: $d = ax + by$

حل(اوبې): که $a = b = 0$ وي ، نو 0 د a او b غ ګ و دی، نور ساده دی. د a او b د ممکنه بدلون (په پام کی دې وي چې د (a, b) تعریف په a او b کی سیومتریك دی) له امله اجازه لرو چې $b \mid\neq 0$ ونیسو.
مونږ اوس رکورسیف (rekursiv (دا په دې مانا چې د مخه غړي څخه وروستی یعنی وریسی غړی لاس ته راوړلکیږي)
تولګنونه......, $r_{-1}, r_0, r_1, r_2, \ldots$ او $q_1, q_2 \ldots\ldots\ldots$ په لاندې ډول تعریفوو: وي دې , $r_{-1} = a$ $r_0 = b$ د $i \geq 1$ او $r_{i-1} \mid\neq 0$ لپاره تولګنونه q_i , r_i داسی تعینوو چی $r_{i-2} = q_i r_{i-1} + r_i$

او $o \leq r_i < |r_{i-1}|$ کوم چی له جملی (۱ . ۳) څخه ممکن کیدی شي . باید یو نه منفی ګڼ n ورکړ شوی وي، د کوم لپاره چی لرو $r_n \mid\neq 0$ مګر $r_{n+1} = 0$, چی بی له دې بیا یوه نه پای د طبعي ګنونو لویدونکی یا کمیدونکی پرلپسی لاس ته راځي، کوم چی ناشونی(ناممکن) دی. دامو اوس ددې لاندې مساواتو شیما ته لاربشودوي

$$a = q_1 b + r_1$$

$$b = q_2 r_1 + r_2$$

....

....

$$r_{n-2} = q_n r_{n-1} + r_n$$

$$r_{n-1} = q_{n+1} r_n$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که دا مساوات د شکته پورته وویل شي، نو په ترتیب (یو په بل پسی) لاس ته راځي:

$$r_n \mid r_{n-1} \,,\, r_n \mid r_{n-2} \,,\, \ldots\, r_n \mid b \,,\, r_n \mid a$$

دا په دې مانا چی r_n د a او b یو غ گ و دی. t دې د a او b یو بل غ گ و وي، نو په دې حالت کی که دا پورته مساوات له پورته ښکته ولولو، نو یو په بل پسی لرو

$$t \mid r_0 \,,\, t \mid r_1 \,,\, t \mid r_2 \,,\ldots,\, t \mid r_{n-1} \,,\, t \mid r_n$$

دا په دې مانا چی $|r|$ د a او b غ گ و دی.

هر د دې گڼونو r_i د ($-1 \leq i \leq n$) سره، په ځانگړي ډول r_n او ددې سره (a , b) یو د a او b لاینې کمبینیشن دی ، په لاندې ډول $au + bv$, چی u او v ټولگڼونه دي.

$r_{-1} = a$ د

او $r_0 = b$ لپاره ساده دی. که د یوه i لپاره د $1 \leq i \leq n$ سره، که یو د a او b یو لاینې کمبینشن ښوونه د r_{i-1} او r_{i-2} لپاره همدا سم د لاسه پیداشوي وي، نوله $r_{i-2} = q_i r_{i-1} + r_i$ څخه د یوې داسی r_i د ځای په ځای کولو له لارې هم ، چی په دې ډول د ایندکشن له لاری غوښتنه لاس ته راځي. (پای)

یادونه : د غ گ پ د ښوونې متود ، چی پورته او په لاندې بیلگه کې راوړل شي د اویکلید الگوریتم"Euklid Algorithmus„ د یوې گڼیزې دندې یا کارونی (عملیې) شیماتیکي اوبیونې(حل) متود په نامه یادیږي، نو له دې سره x او y هم له a څخه

d = ax + by اکسپلیځیتExplizit (لاتین: څرگند، واضح، روښانه) شمیرل کیدی شي.

بیلگه:

غوښتنه (2124 , 1764) = d ۰ د اویکلید الگوریتم کارونی له لارې لرو:

$$2124 = 1 \,.\, 1764 + 360$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$1764 = 4.360 + 323$$

$$360 = 1.324 + 36$$

$$324 = 9.36$$

$$=> d=36$$

كه پورته وګورو نو غ ک پ $d = 36$ دئ

د دې لپاره ، چېd لهx او y سره په $d = ax+by$ ډول انځور کړی شو، نو په لاندې توګه مخ ته ځو:

$$36 = 360 – 1.324 = 360 – 1(1764 – 4.360) = (-1).1764 + 5.360$$

$$= (-1) . 1764 + 5.(2124 – 1764) = 2124 . 5 + 1764.(-6)$$

د پورته څخه دa اوb لپاره لاندې مهمه پيژند نخښنه يا نخښنونه لاس ته راځي

يادونه : ماته دا لاندې جملې ښه ښکاريږي، چې ګرانو لوستونکو ته يې بی له اوبيونې

وړاندې کړم، دا جملې په خته کې د ګڼونوتيوري دنده ده، چې په ګڼونتيوري کې بيا د ښوونې سره ښوول کيږي۰

جمله۳ ۰ ۹ :

a اوb دې ټولګڼونه وي. د a اوb يو ګډ پرويشونی $t \geq 0$ هلته او هلته د a او b ګ غ پ دئ کله چې دا شکل $t = ax + by$ د a اوb ټولګڼونو سره انځور کړاي شو۰ په ځانګړې ډول a اوb هلته او هلته ويشپردي دي، که ټولګڼونه x او y شته وي د کومو لپاره چې باور لر:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$ax + by = 1$$

اوبیونه : د شرایطو ضرورت سم د لاسه له ۳ ې ۶ څخه لاس ته راځي. دا چې شرایط پوره کېدونکي هم دي، له دې لاس ته راځي، چې هر د او پروېشوني د پروېشوني هم دي..

څو جملې په لاندې کې روړو، ګڼونتېري پورې اړه لر او دلته يې نه ښايو.

جمله : ۱۰ . ۳

a اوb دې تولګڼونه وي۰ د a اوb هر ګډ پرويشونی $t \geq 0$ لپاره باور لري:

$$(a/t,b/t) = (a,b) / t$$

په ځانګړي توګه t د a او b یو ګډ پرویشونی هلته اوهلته غ ګ پ دئ چې باور ولري

$$(a/t,b/t) = 1$$

لیما۳ ۰ ۱۱(جمله ګئ)(اویکلید): په خوښه تولګڼونو aاوb اوc لپاره باور لري

له $a|bc$ او $(a,b) = 1$ لاس ته راځي $a|c$

تعریف۳٫۱ ت : $a_1 , a_2 , ... a_n$ دي تولګڼونه وي $(n \geq 1)$, او d دې يو نه منفي تولګڼ وي د کوم لپاره چې باور لري :

لمړی : $d | a_i$ د ټولو $i = 1 ,...., n$ لپاره

ب : له $t | a_i$ څخه د ټولو $i = 1 ,...., n$ لپاره لاس ته راځي $t | d$.

نو d د $a_1,...., a_n$ غ ګ و بلل کیږي او د d لپاره هم داسی لیکو $(a_1 , ... , a_n)$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د a_n , ... , a_1 لپاره د داسې غ ګ و يواځتوب په ۲ . ۵ کې کتل کيدی شي او د موجوديت لپاره يې لرو :

جمله ۲ . ۱۳ : د خوښي تولګنونو a_n , ... , a_1 لپاره ($n \geq 1$) غ ګ و موجود او d د a_1 , ... , a_n خطي (لايني) کمبينيشن دی دا په دې مانا چې

$$d = a_1x_1 + ... + a_nx_n$$

د مناسبو تولګنونو x_n , ... , x_1 لپاره.

يادونه : له دې بيا لاس ته راوړل کيدی شي:

$$(a_1 , ... , a_n) = ((a_1 ,..., a_{n-1}), a_n)$$

د په خوښه تولګنونو a_n , ..., a_1 د ($n \geq 1$) لپاره. سمې کړی شي چې د $a_1,...,a_n$ غ ګ و پل په پل د اويکليد الګوريتموس له لارې پيدا کړي، چې دلته يې د اوبې يا حل تيريږو.

د اوبې يا حل لپاره يې د n په لور د پوره ايندکشن څخه کار اخستل کيږي چې په ۸ –امه برخه کې څيړل شوی دی.

بيلګې:

۱ - ګنونه 240 او3750 غ ګ پ 30 = 2.3.5 لري

۲ – لرو 408 او748

$$408 = 2^3.3.17, 748 = 2^2.11.17$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پس غ ګ پ دی: 17 . 2<2> = (408,748) یا دا لاندې که ن ج پورته شول

$$(408,748) = 2^2.17 = 68$$

۳ – پ غ ګ پ د ګڼونو او غ ګ پ 6 = (30.66.114) دی، ځکه، چې
30 = 2.3.5

او 66 = 2.3.11 او 114 = 2.3.19 دي

٤ – ګڼونه 54 او 65 ګډ پرویشونی نه لري دا موږ پرویشپردی بولو، ځکه، چې دي:

65 = 5.13 /\ 54 = 2.3.3.3

خورا کوچنی ګډ زیاتځلی(کوچکترین مضرب مشترک)

موږ په لاندې کې د خورا کوچني ګډ زیاتځله (لنډ: ک ګ ز) کلیمې په څېرنه پیل کو۰ دا کلمه و غ ګ پ یوه دوه ییزه یا دوه ګونی یا غبرګه (دوال Dual) کلمه ده، موږ په لاندې ډول سملاسي تولیز پیژند ورکوو

تعریف ۲ . ت : $a_1 ,....., a_n$ دې $(n \geq 2)$ تولګڼونه وي، او v دې یو داسی نه منفی تولګڼ وي، د کوم لپاره چې باور لري:

الف – $a_i | v$ د n , ... ,, $i = 1$ لپاره

ب – له $a_i | w$ څخه د n , ... , $i = 1$ لپاره لاس ته راځي $v | w$.

نو v د $a_1 , ... , a_n$ کوچنی ګډ زیاتځله(لنډ : ك ګ ځ) بلل کیږي او داسې یې لیکو:

$$v = [a_1 , ... , a_n]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پيژند (د دوه ګڼونو لپاره)

a او b دې ټولګڼونه وي او v دې يو داسې نه کميز يا نه منفی ټولګڼ وي، د کوم لپاره، چې باور لري:

(۱) $v|a$ او $v|b$

(۲) له $a|w$ او $b|w$ څخه لاس ته راځی $v | w$

نو v د a او b خورا کوچنی ګډ زياتځله (لنډ» ک ګ ز او که غواړی خ ک ګ ز) بلل کيږي او په لاندې توګه يې ليکو

$$v = [a,b]$$

جمله :

په خوښه ټولګڼونو $a,b,c,\ldots,n$ لپاره ک ګ ز شته دی او دا يواځنی دی

$$[a,b,c,\ldots,n]$$

يادونه: موږ لاندې مساوات هم د مختلفو جملو او د هغو له حلونو لاس ته راوړو:
دټولګڼونو ($n \geq 3$) $a_1, \ldots a_n$ لپاره لرو $[a_1,\ldots,a_n] = [[a_1,\ldots,a_{n-1}], a_n]$
او هم $|a_1a_2| = [a_1, a_2]$ (a_1, a_2)

لاس ته راوړني (داهم په همدې مانا مګر د جملې په څير دی): د په خوښه ټولګڼونو a, b, c لپاره باور لري: له $b|c$, $a|c$ او $(a,b) = 1$ څخه لاس ته راوړو $ab|c$

د ګڼتيوري بنسټيزه جمله:

(c) ketabton.com: The Digital Library

پيژنده :

يو ټولګڼ$n > 1$ لومړی ګڼ (prime number) بلل کيږي، که له ساده پرویشونv بل پرویشونی ونه لري٠

لومړي ګڼونه لاندې غوه خويونه لري.:

ليما (لکه کوچني جمله): که p يولمړی ګڼ وي او$p \mid a_1 \ldots a_n$ د ټولګڼونو $a_1, \ldots, a_n$ لپاره. نو $p \mid a_i$ د کم له کمه يوه i د $1 \leq i \leq n$ سره.

حل (اوبی): حل يې د ايندوکشن له لارې صورت نيسی، چې ددې لپاره بايد ۸ - امه برخه کتل شوې وي.

د $n = 1$ لپاره ښوونه ساده ده . اوس دې $n > 1$ وي او ليما دې $n-1$ لپاره سملاسي باور ولري. نو لرو $p \mid a_n$ ، په بل ډول بيا له $p \nmid a_n$ څخه لاس ته راځي چې $(p, a_n) = 1$ دې . له مخته تيرې جملی لاس ته راځي، چې که $p \mid a_1 \ldots a_{n-1}$ وي ، نو داسې دی $p \mid a_i$ د يو i لپاره چې $1 \leq i \leq n-1$ وي د ايندکشن د نيونې په بنسټ.

د لومړنيو ګڼونو غوره والی د « ګڼونتيوري بنسټيزی جملې» څخه لاس ته راځي

جلمه (د ګڼونتيوري بنسټيزه جمله):

هر يو پيداښتي (طبيعي) ګڼ ،د ګڼونو تر تيب پورې، په يواځني او يواځني (يويواځنی (له دې کلمو څخه موخه داده، چې دا په يواځی يو ډول ليکل کيدی شي او بس٠ کيدی شي د ګڼونو پروتځاي بدل وي، خو ضريبونه همغه دي)) ډول د لومړنيو ګڼونو ځل په ځير ليکل کيدی شي٠

اوبی : ښوونه د n په لور ايندکشن له لارې مخ ته بيايو (برخه ۸ دې ودې کتل شي)

د $n = 1$ لپاره باور لري، که. لکه معمول ، 1 د طبعي ګڼونو د تش(خالي) ځل په ځير تعريف کړو. له دې امله دې $n > 1$ وي او جمله دې د ټولو طبعي ګڼونو $< n$ لپاره ښوول

(c) ketabton.com: The Digital Library

شوي وي. موږ اوس ټول د n پروېشونی $t > 1$ په نظر کي نيسو. کم له کمه يو داسی ګڼ شته لکه n . که p د دې پروېشونو کوچنی پروېشونی وي، نو p لمړی ګڼ دی. په بل ډول به نو بيا p يو پروېشونی q لرودی د $1 < q < p$ سره، او دا چي q د n پروېشونی وي، نو دا به د p تعريف رد کړي. دا چي $n / p < n$ د ايندونکشن نيوني په بنسټ $\frac{n}{p}$ د لمړي ګڼونو د ځل په ځير ليکل کيدی نو په همدې ډول پخپله n هم.

وي دې $n = p_1p_2..p_r = p'_1p'_2...p'_s$ د n دوه ډوله د لمړيوګڼونو د ځل په ځيرليکنه . له $p_1 \mid p'_1...p'_s$ اوس لاس ته راځي $p_1 \mid p'_i$ د يو i د $1 \le i \le s$ سره . د نمرې بدلولو له لارې دې وي $p_1 \mid p'_1$. داچي بيا $p_1 = p'_1$ باور لري، نو لاس ته راځي $p_2...p_r = p'_2....p'_s$ ، له کومو چي د ايدکشن له نيوني لرو $r - 1 = s - 1$ ، پس $r = s$ او (او د ترتيب بدلون) هم له $p_i = p'_i$ $2 \le i \le r$ لاس ته راځي .

پای.

د بنسټيزې جملی د ګټور استعمال لپاره لاندې جمله ده

جمله : هر طبعی ګڼ n په ټيك يو ډول په لاندې فورم انځوريدلی شي

$n = \prod_p p^{\nu_p}$ ($\nu_p \geq 0$ ، $\nu_p = 0$ يواځي د پای ډيرو p لپاره). (ν نيولوشتل کيږي)

چيرته چي p ټولو طبعي ګڼونو کې په جګيدونکي لړی پرلپسې کې ځغلي.

يادونه: د عملي شميرنې لپاره په هغو ګڼونو چې جګ يې صفر وي تيريدل کيدی شي، لکه : $n = 2^2.7$, $n = 28$ د $n = 2^2 . 3^0 . 5^0 . 7$ لپاره

لاس ته راوړنې : $(a,b) = 1$ او $(a , bc) = 1$ ، نو هم $(a , bc) = 1$ ، د په خوښه ټولګڼونو a , b , c لپاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوبي یا حل : نیولی دي وي چې $(a, bc) > 1$ ، نو بیا به یو لمړنی ګڼ p موجود وي د p/a او p / bc سره، د لیما ۲ . ۲ له مخې به یې باور لرودی p/b یا p/c داد (a,b)= (a,c) = 1 سره تضاد دی.

جمله : a او b دې له صفر مختلف ګڼونه وي او $|a| = \prod_p p^{\alpha_p}$ او $|b| = \prod_p p^{\beta_p}$ د دوي مطلقه ارزښتونو لمړی فاکتورتجزیه د ۲ . ۴ له مخې ، نو a | b هلته او هلته باور لري که د ټولو لمړي ګڼونو p لپاره باور ولري $\alpha_p \leq \beta_p$

لاس ته راوړني : وي دې a او b له 0 مختلف ګڼونه، $|a| = \prod_p p^{\alpha_p}$ همداسې $|b| = \prod_p p^{\beta_p}$ دې د مطلقه ارزښتونو لمړني فاکتورتوټونه (تجزیه) وي. نو باور لري

$$(a,b) = \prod_p p^{\min(\alpha_p, \beta_p)} , [a,b] = \prod_p p^{\max(\alpha_p, \beta_p)}$$

چیرته چې $\min(\alpha_p, \beta_p)$ د دواړو ګڼونو α_p او β_p خوراکوچنی او $\max(\alpha_p, \beta_p)$ خورا لوي په ګوته کوي.

بیلګه : $a = 2124 = 2^2.3^2.59$ او $b = -1764 = -2^2.3^2.7^2$ نو لرو $(a,b) = 2^2.3^2 = 36$ او $[a,b] = 2^2.3^2.7^2.59 = 104076$

یادونه : د لاس ته راوړني ۲ ښخه سم د لاسه له دوو ښخه زیاتو ټولګڼونوباندې غ ګ و او ک ګ ز هم استعمالیدی شي.

یو څو په لمړیو ګڼونو اړونده پرابلومونو دې پوښتنو ته چې ایا ناپای زیات لمړي ګڼونه موجود دې که نه اویکلید لخوا ځواب ورکړ شوی. لاندې یو ښکلي ځواب دی چې له هغه رینبه نیسي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاس ته راوړني : وي دې a او b له 0 مختلف ګنونه $|a|=\prod_p p^{\alpha_p}$ همداسې $|b|=\prod_p p^{\beta_p}$ دې د مطلقه ارزښتونو لمړني فاکتورتونه (تجزيه) وي. نو باور لري

$$(a,b)=\prod_p p^{\min(\alpha_p,\beta_p)} , [a,b]=\prod_p p^{\max(\alpha_p,\beta_p)}$$

چيرته چې $\min(\alpha_p,\beta_p)$ د دواړو ګنونو α_p او β_p خوراکوچنی او $\max(\alpha_p,\beta_p)$ خورا لوي په ګوته کوي.

بيلګه : $a = 2124 = 2^2.3^2.59$ او $b = -1764 = -2^2.3^2.7^2$ نو لرو $(a,b)=2^2.3^2 = 36$ او $[a,b] = 2^2.3^2.7^2.59 = 104076$

يادونه : د لاس ته راوړنې ۲ څخه سم د لاسه له دوو څخه زياتو تولګنونوباندې غ ګ و او ك ګ ز هم استعماليدی شي.

يو څو په لمړيو ګنونو اړونده پرابلومونو دې پوښتنو ته چې ايا ناپای زيات لمړي ګنونه موجود دې که نه اويکليد لخوا ځواب ورکړ شوی. لاندې يو ښکلي ځواب دی چې له هغه رينبه نيسي:

جمله: ناپاي ډير لومړني ګنونه شته.

حل(اوبی) : موږ جمله ناسيده يا ناسمه ښايو (۸ –امه برخه دې وکتل شي) او نيسو چې پايدير لمړی ګنونه p_1 , p_2 , p_3 , ..., p_r موجود دې. ګڼ $N = p_1p_2...p_r+1$ له 1 لوي دی او له دې امله په يوه لمړي ګڼ p ويشونکی دی. د نيونی له مخی لرو $p = p_i$ د $1 \le i \le r$ سره . د $P|N$ او $p | p_1p_2....p_r$ له امله لاس ته راځي $p |1$.کوم چې ناشونی دی (ناممکن) له دې امله بايد ناپای زيات لمړي ګنونه موجود وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه : د میلاد څخه پخوا د « اریتوتنس غلبیل» متود څرګندوو، چې موږ د 1 او 100 ترمنځ د لمړي ګڼونو معلومول دغې (دي) متود له لارې په لاندې توګه څرګند وو

~~1~~ 2 3 ~~4~~ 5 ~~6~~ 7 ~~8~~ ~~9~~ ~~10~~ 11 ~~12~~ 13 ~~14~~
~~15~~ ~~16~~ 17 ~~18~~ 19 ~~20~~ ~~21~~ ~~22~~ 23 ~~24~~
~~25~~ ~~26~~ ~~27~~ ~~28~~ 29 ~~30~~ 31 ~~32~~ ~~33~~ ~~34~~ ~~35~~ ~~36~~
37 ~~38~~ ~~39~~ ~~40~~ 41 ~~42~~ 43 ~~44~~ ~~45~~ ~~46~~ 47 ~~48~~ ~~49~~ ~~50~~
~~51~~ ~~52~~ 53 ~~54~~ ~~55~~ ~~56~~ 57 ~~58~~ 59 ~~60~~ 61 ~~62~~ ~~63~~ ~~64~~
~~65~~ ~~66~~ 67 ~~68~~ ~~69~~ ~~70~~ 71 ~~72~~ 73 ~~74~~ ~~75~~ ~~76~~ ~~77~~
~~78~~ 79 ~~80~~ ~~81~~ ~~82~~ 83 ~~84~~ ~~85~~ ~~86~~ ~~87~~ ~~88~~ 89 ~~90~~ ~~91~~
~~92~~ ~~93~~ ~~94~~ ~~95~~ ~~96~~ 97 ~~98~~ ~~99~~ ~~100~~

۳ ۰ ۱ ۰ ۳ - راشنل ګڼونه Rational Nnumbers

(لاتین: عاقلانه یا هوښیار اعداد یا ګڼونه)

د افغانستان په دري ادبیاتو کې داسی ګڼونه او ایراشنلګڼونه کله ناطق د ګونګ اوداسې نورو ګڼونو په نامه یا دیږي، کله یې ماتګڼونه بللي، خوزه دا ښه بولم، چې دا همداسې یانې راشنلګڼونه وبلل شي، که څوک یې هوښیار ګڼونه بولی هم خوښه یی او یا مات ګڼونه ، خو دلته راځیو Ratio nهوښیار په معنا نه بلکه د نسبي په معنا دی۰

یادونه : که / ولرو یانې که ولرو a / b نو دا په دې مانا، چېa په b ویشل کیږي۰ که ولرو≠ نود نابرابرونښنه ده۰ دا په دې مانا، چی b له 0 سره برابره نه ده۰ د دوه ګڼونود a او b ویش x = b / a د ټولګڼونو په ډیرۍ کې تل هلته شته دی، چې a د b ټولګڼیز څو ځله وي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره، چې بیا هم ویش$a : b$ (دلته هم b پرa ویشل کیږي) کیدونی شي» سره له دې، چې ویش تل په ټولګڼونوکی پیژند نه لري یا تعریف نه دی یا صورت نه نیسي« باید د ټولګڼونو ډیری ماتګڼونو(کسر) ډیری‌ته پراخه شي، چې د لومړي ځل لپاره افاده یا وینه b/a سومبولیک مانا لري، د نوو ګڼونو په څیر نیسو او په ټولګڼونو یې ور زیاتوو، نو هغهٔ ګڼونه، چې لاس ته راځی موږ ورته راشنلګڼونه وایو ۰ دلته دا راشنل ګڼ د جوړې په څیر ورکړ شوی دی

cb / ca هلته باور لري، چې$c \neq 0$ دټولګڼ او$b| a$ د ماتګڼ په څیر ورکړ شوي وي

د راشنلګڼونو ډیری، چې په Q سره ښایو د ټولګڼونو ماتګڼو b/a چې $a \neq 0$ اوa او b د ټولګڼونو له ډیری وي، د ټولګڼونوپراخوالی دی او ټول د مخه تیر بنسټیز قوانین په کې باور لري او د ویش بنسټیز قانون ته داسې پراخیدلی شي

ټ : د ویش(تقسیم) بنسټیز قانون(دوام)

۲ - د دوه راشنل ګڼونوa ،$a \neq 0$ او b لپاره یواځنی راشنل ګڼ $x = b/a$ شته دی، چې برابرون یا مساوات$ax = b$ پوره کوي

راشنل ګڼونه هم د ورځنیو اړتیاو پر بنسټ منځ ته راغلی

بیلګه :

که شپږ منه غنم په دولسو تنو وویشو، نو د هر تن نیم من غن, راسیږي، چې دا نیم یې

راشنلګڼ دی، یاني $6 : 12 = 1 / 2 = 1 : 2$ یا $\frac{1}{2}$

دا باید په ګوته کړو، چې راشنل ګڼونه د پای یا ناپای لسمیز ګڼ په څیر لیکل کیدی شي

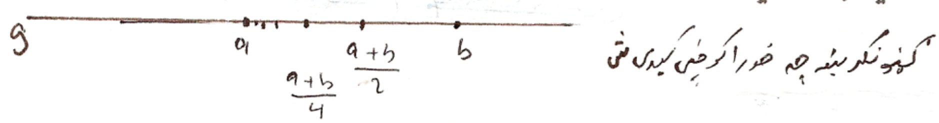
(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ ۰ ۱ ۰ ٤ - رییل گڼونه(Real numbers (reele Zahlen

(فرانسوي: په ريښتوني شته يا موجود)

د ريشنلگڼ په بنسټ هغه ورځني تيوريكې اړتياوي چې د شميرعمليو بې بنديزه (نامحدود) په كار اچولو يا استعمال ته موجود وي حل يا اوبې شوې او همدارنگه عملي اړتياوي چې اندازه كولو ته موجود وي هم حل شوې وي.

د ريشنلگڼ له لارې كيدى شي چې د كرښې اوږدوالى ټيك وركړ شي يا په همدې مانا : په هرځومره وړوكې گڼونكرښه انتروال كې هم ناپاى زيات گڼونه، چې په ټكو يا نقطو انځور شوي، پراته دي.



د ټولو دې امكاناتو سره سره هم بيا په يوه كرښه كې هر ټكى د ريشنلگڼ په ذريعه نه شي ښودل كيدى يا په بل عبارت د كرښې هر ټكى د ريشنلگڼ په مانا نه دى . دا گڼونه چې د «ايريشنلگڼونو»په نامه ياديږي، كيدى شي د يوه پريوديكي(periodische) (د گڼونو كړى نه شليږي) ناپاى لسيزمات له لارې وښوول شي.
د بيلگي په توگه د مربع د نيمي(قطر) x اندازه چې د مربع يو اړخ ۱ وي نه شي كيدى چي په ريشنلگڼ وښوول شي. د پيتاگوراس د جملې په بنسټ د x لپاره لاندې مساوات لرو : $x^2 = 1^2 + 1^2$, پس $x=\sqrt{2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د رييلګڼ کليمه يوه ژوره کليمه ده چې د پوهيدلو لپاره يې «پولي» (ليمس lim) ته اړتيا موجود ده چې په ۱۸ –امه برخه کې به تر څېړنې لاندې ونيول شي.

ډير اينتروالبنديدل چې په همغه يوه ټکي راځرځي مساوي(ورته) ارزښته (Äquivalent لاتين :مساوي ارزښته) ليدل کيږي

رييلګڼېرى R چې په ريشنلګڼېري د ايريشنلګڼېري ورزياتول دي چې له ۲ . ۱ . ۱ تر ۲ . ۱ . ۳ برخې پورې ټول بسټزقوانين په کې باور لري. د رييلګڼ له لارې دکرښې ټول ټکي په بر کې نيول کيدى شي. په دې ډول رييلګڼونه ټولى د شميرلو او اندازه کولو اړتياوې پوره کوي.

ګورو چې $x^2 + 1 = 0$ د رييلګڼ حل يا اوبې نه لري. دلته د دې ګڼونو پراخوالي ته اړتيا پيښيږي چې کمپلکسګڼونو ته پراخ شي، او په ۵ –امه برخه کې به تر څېړنې لاندې ونيول شي.

يا دا لاندې په لنډه توګه:

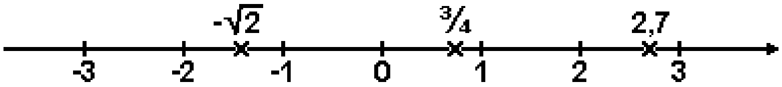
مورږ ګڼونه يا اعداد لرو، چې هغه راشنل ګڼونه نه دي يانى که مورږ د ۲ ګڼ ريښه(جذر) ونيسو، نو داسى يو ګڼ لاس ته راځي، چې هغه په لسميزه توګه پاي ته نه شي رسيدى يانى پريوديکى (تل بيرته راګرځيدونى يا پسى نور هم پراخيدونى) دي۰ داسى ګڼونو ته ايراشنل ګڼونه وايو۰

تل بيرته راګرځيدنيز (periodi(cal تل بيرته راګرځيدوني ,Period د ګڼونو ځنځير نه شليږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

ایراشنل – یا نانسبي عددونه یاګڼونهIrational numbers

د راشنل او ایراشنل ګڼونوټولنی ته رییل ګڼونه وایو(دا چې ټولنه څه شی دی، په ډیری پوهنه یا سیټتیوري کې به ولوستل شي) .۰ موږ د ګڼونو د ښوولو لپاره لاندې ګڼونکرښه باسو په کومه کې چې له صفر سره پیداینتي-، ټول- راشنل-،اراشنل ګڼونه کښل شوي دي یانې ریل ګڼونکرښه



۳ ۰ ۲ - رابیلشوی(له نورو -) د شمیر قواعد

په دې برخه کې د رییل ګڼونو لپاره رابیل شوي قوانین څیرو، چې د مخه تیرو قواعدو باندې ولاړ دي۰ دلته درانده ټکی دا لاندې دي:

- په رییلګنونو کی څلور بنسټیز شمیرډولونه په ځانګړي توګه په لاندې ډول د نوکانو افادی (وییني) سره شمیرنه (نوکان ایښوول)۰ له زیاتون ګډ فاکتورونه یا ځلووني له نوکانو راوستل، د بینومیال فرمولونه۰

- پر صفر ویشنه د ناشونوالی په پام کی ساتنه

- له ماتو (کسرونو) سره شمیرل او په ځانګړي توګه لنډول (واړه کول) پراخول یا غزول او د اصلي ګډ ماتلاندي (مخرج المشترک) جوړول۰ د داسی ماتلاندی(مخرج) چې له ټاکلو او ناټاکلو ترمونو څخه جوړ وي۰

نوموني: کسر ته مات وایو او صورت او مخرج ته موږ ماتباندې او ماتلاندې وایو، چې سملاسي یې په مانا هم پوهیږو۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ ۰ ۲ ۰ ۱ – جمعه او تفريق (زياتون او کمون)

د زياتون او کمون بنسټيزو قوانينو څخه لاندې لاس ته راځي

$$-(-a) = a\ ,\ .\quad a - b = a + (-b),$$

$$(a+b+c\ldots-c-d-\ldots)+(e+f+\ldots-g-h-\ldots) = a+b+\ldots-c-d-\ldots+e+f+\ldots-g-h-\ldots$$

دا دا مانا لري، چې که چيرې د نوکانو دباندې زياتوننخښه (د جمع علامه) وي، نو د نوکانو څخه ويستلو کې ګڼ خپله مخنخښه نه بدلوي۰ که د نوکانو د باندی کموننخښه (منفي نخښه) وي، نو د ګڼونو له نوکانو ايستلو په حال کی د نوکانو دننه نخښی بدليږي۰ يانی کموننخښه زياتوننخښه او زياتوننخښه کموننخښه کيږي۰ بيلګه يې لاندې ګورو

$$(a+b+\ldots-c-d-\ldots)-(e+f+\ldots-g-h-..)= a+b+\ldots-c-d-\ldots..-e-f-\ldots\ldots+g+h+\ldots$$

په همدې ترتيب کيدی شي نوکان هم ځاي پرځای شي۰

دلته بايد مطلق ارزښت هم په ګوته شي ، چې په ګڼکرښه د صفر څخه د يوه ريیلګڼ واټن په ګوته کوي،

د کوم لپاره چی ليکو :

مطلق عدد يا - ګڼ يا بي اړيکو ګڼ (absolut number)

دا په دې مانا، چې د دې ګڼ سره زياتيزه او کميزه نخښه يا مثبت او منفي نه ليکل کيږي يا يون(واحد) هم ورسره نه وي، دا ټيک او ټيک يو ګڼ ښايج او بس۰

$$|a| = a\ ;\ a > 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$|a| = 0 \;;\; a = 0$

$|a| = -a \;;\; < 0$

ياني که a زياتيزه يا مثبت وي،نو a پخپله ليکواو که a کميزه يا منفي وي، نو -a ليکواو که a صفر وي نو د هغه لپاره 0 ليکو

۳ ۰ ۲ ۰ ۲ ځل(ضرب)

د ځل لپاره لاندې د مختخبنی قوانين باور لري:

$$(+a)(+b) = +ab,\ (+a)(-b) = -ab\ ,\ (-a)(-b) = +ab,\ (-a)(+b) = -ab$$

که چيرته ډير نوکبندونه راګرځيدلی وي، نو دا د ځل قانون پل په پل پر مخ ځی بيلګه:

$$(a+b)(c-d)(e-f-g) = (ac - ad + bc - bd)(e-f-g)$$

$$= (ace-acf-acg-ade+adf+adg + bce-bcf-bcg-bde-bdf+bdg)$$

د ځانګړي حالت په توګه د بينوم پيژندل شوی فرمولونه راوړو:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګران لوستونکی کولی شي، چې پورته فرمولونه وښايي، چې ټیک دي.

دا په لاندې ډول کارولکيږي :

بیلګه ۱ . ۳ :

$$4a^2 + 12ab + 9b^2 = (2a + 3b)^2 .$$

$$a^2x^2 - 2abxy + b^2y^2 = (ax - by)^2 = (by - ax)^2.$$

$$16u^2 - 2v^2 = (4u + 2 \ v)(4u - 2 \ v)$$

۳ ۰ ۲ ۰ ۳ ویش

په پام دې کې ولرو، چې b:a د $a = 0$ لپاره کوم مفهوم نه لري۰ پر صفر ویش ناشونی دئ

په ویش کی نوکبندول د زیاتون، کمون او ځل په څیر ساده نه کیږي۰ په ویش کی د زیاتون په ډول لیکل شوی هر توکی په ماتلاندې ویشل کیږي:

بیلګه ۳ ۰ ٤ :

$$(3a^2b - 6ab^2 + 12\ abc) : 3ab = a - 2b + 4c$$

یا داسې

$$\frac{3a^2b}{3ab} - \frac{6ab^2}{3ab} + \frac{12abc}{3ab} = a - 2b + 4c$$

د $ab \neq 0$ لپاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

دې لاس ته راوړنې(نتیجې) ته سړی د ګډو ځلوونو یا فاکتورونو یا خپلواکنوک څخه وتلو له لارې هم رسیدلی شي:

$$3a^2b - 6ab^2 + 12\,abc = 3ab(a - 2b + 4c)$$

له دې ځایه کیدی شي، چې د پولینوم وېش بیل شي

بیلګه ۳ . ۵ :

$$(3a^2b - 6ab^2 + 5c) : 3ab = a - 2b \text{ Rest } 5c \text{ باقي} \Leftrightarrow$$

$$\frac{3a^2b}{3ab} - \frac{6ab^2}{3ab} + \frac{5c}{3ab} = a - 2b + \frac{5c}{3ab} \text{ لپاره } ab \neq 0,$$

د یوه زیاتو یا چمعي وېش په یوه چمعه، کیدی شي د بینوم جکلې له لارې صورت ونیسي

بیلګه ۳ . ۶ : $(a^2 + 2ab + b^2) : (a+b) = a + b \Leftrightarrow \frac{(a+b)^2}{a+b} = a + b$ لپاره $a \neq -b.$

بیلګه ۳ . ۷ : $(a^2 - b^2) : (a+b) = a - b \Leftrightarrow \frac{a^2 - b^2}{a+b} = a - b$ لپاره $a \neq -b.$

بیلګه ۳ . ۸ : $\frac{(ax - by)^2}{by - ax} = \frac{(by - ax)^2}{by - ax} = by - ax$ لپاره $ax \neq by,$

دلته هم وېش د پاتې یا باقي سره شونی دی.

بیلګه ۳ . ۹ : $a^2 - 2ab + b^2) : (a - b) = [(a - b)^2 + b^2] : (a - b) = a - b$:

باقي یا پاتې b^2

له دې لاس ته راځی او په څټ

بیلګه ۱ . ۱۰

$$\frac{(a-b)^2+b^2}{a-b}=\frac{(a-b)^2}{a-b}+\frac{b^2}{a-b}=a-b+\frac{b^2}{a-b}$$ باقي $a \neq b$,

$(16u^2 - v^2) : (4u + \sqrt{2}v) = 4u - \sqrt{2}v$ Rest v^2 باقي $\Leftrightarrow$

$$\frac{16u^2-v^2}{4u+\sqrt{2}v}=\frac{16u^2-2v^2+v^2}{4u+\sqrt{2}v}=\frac{16u^2-2v^2}{4u+\sqrt{2}v}+\frac{v^2}{4u+\sqrt{2}v}$$

$$=4u-\sqrt{2}v+\frac{v^2}{4u+\sqrt{2}v}$$

د $4u \neq -\sqrt{2}v$ لپاره

فورمال ور د دوه پولينومونو ويش دی (برخه ۱۲ دي اندول(پرتله) شي):

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x^1+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x^1+b_0}=P_n(x):Q_m(x),$$

که د ماتباندي پولينوم درجه د ماتلاندي پولينوم درجې لوي یا مساوي وي($n \geq m$).

مور نيسو چې: $a_n \neq 0, b_m \neq 0$ او $Q_m(x) \neq 0$.

د دواړو ويشو« ټوټه ويشو» (پارشيالويش(Partialdivision)) دا دی چې دا

د $P_n(x) : Q_n(x)$ ويش په لاندې ډول وليکلی شو:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\text{Polynom } 1+\frac{\text{Polynom } 2}{Q_m(x)},$$

چيرته چې د پولينوم 2 درجه له $Q_m(x)$ درجې څخه کوچنی ده.

دې هدف ته په لاندې ډول رسيږو

۱ – سړی يواځې د جګ نظم غړي $a_nx^n : b_mx^m$ ويشي او له دي سره يوه

غلطي $F(x)$ کوي:

$$Q_{n(x)}: Q_m(x)=\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}+F(x) \qquad *$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ – سړی (*) په ماتلاندې پولینوم $Q_m(x)$ ویشي

$$P_n(x) = (a_n / b_m)\, x^{n-m} Q_m(x) + F(x)$$

او له دې غلطی $F(x)$ ، په لاندې فورم یا ډول لاس ته راخي

$$F(x) = P_r(x) / Q_m(x)$$

د $P_r(x) = P_n(x) - (a_n / b_m)\, x^{n-m}\, Q_m(x)$ سره

چیرته چی د پولینوم $P_r(x) = c_r x^r + c_{r-1} x^{r-1} + .. + c_0$ درجه r د پیل پولینوم $P_n(x)$ له درجی n څخه کم له کمه په یو کوچنی وي . د ګڼونو شمیر په

تکیه ویلی شو، چی $P_r(x)$ پاتی پولینوم یا په ساده ډول پاتی (باقي) دی.

۳ – که لا تراوسه د $Q_m(x)$ درجه r له m کوچني وي نو د ټکو ۱ – او ۲ – تویته ویش په $P_r(x) : Q_m(x)$ استعمالیږي، د لاندنی نتیجی سره

$$P_r(x) : Q_m(x) = (c_r / b_m)\, x^{r-m} + P_t(x)/Q_r(x)$$

چیرته چي د $P_t(x)$ درجه t کم له کمه په یو له $P_r(x)$ درجي کوچنی وي.

د تویته ویش دا عملیه اخر ته رسیږي، که (د پای ډیرو پلونو (قدمونو) اخستلو وروسته د ماتباندې غلطی پولینوم درجه له m څخه کوچنی وي.

بیلګه ۲ . ۱۱ . لمړی دې د تویته ویش ۱ او۲ پلونه (قدمونه، ګدمونه) په پراخ ډول د لاندې ویش په بیلګه توضیح شي

$$P_n(x) : Q_m(x) = P_3(X):Q_1(x) = (6x^3+5x^2-3x+1):(3x-2)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

	$P_3(x) \quad : Q_1(x) = (a_3 / b_1)x^2 + F(x)$
$(a_3 / b_1)x^2Q_1(x) = 2x^2 (3x-2) =$	$(6x^3 + 5x^2-3x+1) : (3x-2) = 2x^2 \quad +F(x)$ $6x^3 -4x^2$
$P_2(x) = P_3(x) -(a_3 /b_1) x^2Q(x) =$	$9x^2 -3x +1$
$F(x) = P_2(x) : Q_1(x) =$	$(9x^2 - 3x +1) : (3x - 2)$

بيلگه ۱۳ . ۱۲ : د تېر ويش بيلگه ۱ . ۱۱د $F(x)$ غلطی ته دوام ورکوو، ترڅو چې د لیکنی شکل لنډ شي:

$F(x) = P_2(x):Q_1(x) = (9x^2-3x+1):(3x-2) = 3x+G(x)$

$3x.Q_1(x) \qquad = \quad (9x^2-6x)$

یاباقي $\qquad$ پاتي $\quad = \quad 3x+1$

$G(x)= (3x+1):(3x-2)$

له دې لاندې نتجه لاس ته راځي :

$(6x^3+5x^2-3x+1):(3x-2)=2x^2+3x + G(x)$

$G(x) \quad = (3x+1):(ex-2) = \ 11 +H(x)$

$Q_1(x) = 3x-2$

پاتی = $\qquad$ یاباقي = 3

$H(x) = \ 3 : (3x-2)$

پس باور لري

$(6x^3+5x^2 - 3x+1) : (3x-2) = 2x^2+ 3x+1 + 3/(3x-2)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تول توته ویش کیدی شي په لاندي ډول مخ ته یوړل شي .

```
                                   (1)   (4)   (7 )  (۱۰  )
(6x³+5x²-3x + 1) : (3x-2) =   2x²   + 3x  +  1   +3/(3x-2)
(2)   6x³-4x²
(3)          -9x²-3x + 1
(5)           9x²-6x
(6)                3x +1
(8)                3x -2
(9)                   3
```

$$(6x^3+5x^2-3x+1):(3x-2)=2x^2+3x+1+3/(3x-2)$$

دلته (i) د پرلپسی پل اخستلو په مانا ده.

جمله ۳ . ۱۳

```
                                                      (1)   (4)   (7)   (10)
     (18x⁴ +  15x³ + 0x² – 2x + 1) : (3x² + x – 1) =  6x² + 3x +  1 + 2/(3x² + x – 1)
(2)  18x⁴ +   6x³ – 6x²
(3)           9x³ + 6x² – 2x + 1
(5)           9x³ + 3x² – 3x
(6)                 3x² +  x +  1
(8)                 3x² +  x –  1
(9)                              2
```

$$(18x^4+15x^3+0x^2-2x+1):(3x^2+x-1)=6x^2+3x+1+\frac{2}{3x^2+x-1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۲ . ٤ ماتشمیرنه (کسرشمیرنه)

د مات m/n کلمه د لومړي ځل لپاره د ټولګڼونو m,n څخه د ریشنلګڼونو انځورونو لپاره تعریف شوې٠ کیدی شي، چې دا کلمهa/b ته، چې a او b رییل ګڼونه دي، وغزول شي٠

باید په پام ې ور،چې ماتباندې صفر نه شي..

د بیلګي په توګه:

ویش(a/(b-c تیک هلته مفهوم لري، چې b≠c وي٠ ماتګڼ a/b همدا ګڼ ښايي

لکه a : b او یا $\frac{a}{b}$ ، دلته هم باید b |=0 وي.

په اخر کې باید په ګوته شي، چې مات لاندی – او همدارنګه ماتباندې ګڼ هم هر ماتګڼ کیدی شي او هم دواړه٠ دا باید دلته هم په پام کې وي، چې هیڅ یو ماتلاندې ګڼ باید صفر نه وي یانی دلته بی له اولنی ماتباندې نور یو ګڼ هم، چې ماتلاندې پورې اړه لري، نه شي صفر کیدی دا موږ د ماتو مات (کسرالکسر) بولو٠

بیلګې:

$$a : (b/c) = a / (b/c) , b |=0 , c|= 0 \quad ,$$

$$(a/b) : c = (a/b) / c \quad b|=0, c|= 0$$

$$(a/b): (c/d) = (a/b) / (c/d), b |= 0 , c |= 0 , d |=0$$

یا په لاندې ډول:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{a}{b}:\frac{\frac{a}{b}}{c}, b\neq 0, c\neq 0, ..., \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}, b\neq 0, c\neq 0, d\neq 0$$

په ځو واره ماتګڼ کې باید اصلي ماتکرښه څرګنده پیژندونکي وي، چې په دې توګه د هر ډول ناټیکوالی مخه نیول شوي وي. په ټولیزه توګه باور لري

$$\frac{\frac{a}{b}}{c}\neq\frac{\grave{a}}{\frac{b}{c}}$$

هریو ماتګڼ b|=0, a / b په یوه ګڼ c |= 0 پراخیدی او همداسې لنډیدی شي

یانې ماتلاندې او ماتباندې په یوه ګڼ c ځلیدی یا ویشل کیدی شي او دا کړنلار په اصلي

ګڼ کې تغیر نه راولي

$$\frac{a}{b}=\frac{a.c}{b.c}=\frac{a:c}{b:c}, b\neq 0, c\neq 0$$

د ماتګڼ لنډوالی ددې لپاره ښه دی، چې ماتګڼ ساده کړي.

د بیلګې په توګه:

$$\frac{8}{12}=\frac{2}{3}, \frac{ax-ab}{y-ac}=\frac{x-b}{y-c}; a\neq 0, y\neq c$$

باید تل په پام کې ولرو، چې یواځنی فکتور یا ځلوونی یا ضریب لنډیدی شي او نه زیاتوونی د بیلګې په توګه لاندې ماتګڼ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$(a+c):b+c)$ چې $b \neq -c$ وي نه شي لنډیدی دا $(a+c):(b+c) = a:b$

باور لري،چې $b \,|= 0, c = 0 \; \vee \; -c \,|= a, a = b$

پراخوالی یا غزول د دې لپاره اړیین دی، چې ډیر ماتګښونه په ګډ ماتباندې (مخرج المشترک) راوستلی شي، ځکه چې یواځې هغهٔ مات یو په بل زیاتیدی یا یو له بل کمیدی شي، چې ګډ ماتلاندې ولري.

لکه : $\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}, c \neq 0$

که چیري پرڅښ یا برعکس ماتګښونهa / b او c/d د نابرابر ماتلاندې لرونکی سره زیاتوو او یا کموو ، نو دا په ګډ ماتلاندې باید راولو۰ ګډ ماتلاندې د ټولو ماتلاندو څخه دی۰ د بیلګي په توګه لاندې باور ي دی:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} = \frac{adf + bcf + bde}{bdf}, b \neq 0, d \neq 0, f \neq 0 \Leftrightarrow bdf \neq 0$$

او دا لاندې

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{cb}{bd} = \frac{ad \pm cb}{bd}, b \neq 0, d \neq 0 \Leftrightarrow bd \neq 0$$

تل باید ماتګښونو ګڼلو کې ماتلاندې سره حُل نه شي، چې ګډ ماتلاندې لاس ته راولو، دا د ښوونځي په څرګنده بیلګه باندې ښایو

بیلګه: $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{15} - \frac{1}{36}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کیدی شي، چې اصلي ماتلاندې)ا۰م۰ل (وټاکل شي

= 2.3.5.6.15.36= 97200 ا ۰ م ۰ ل ۰

کیدی شي، چی ا۰م۰ل۰ د لومړنیو ګڼونو ځل په څیر هم ولیکو:

2 = 2

3= 3

5 = 5

6 = 2. 3

15= 3 .5

3۰. 3.۰2۰36 = 2

$2^2.3^2.5 = 4.9.5 = 180$

پس د ګډ ماتلاندې لپاره د لوړکې یا لوړ جګګې یا لوړ طاقت لومړي ځلووني رانیول کیږي۰ چې ګڼل خورا ساده کوي۰

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{15} - \frac{1}{36}$$

$$\frac{90 - 60 + 36 - 30 + 12 - 5}{180} = \frac{43}{180}$$

دا چې دا تګلار څنګه د ماتو په تولیزه افاده استعمالیدی شي لاندې بیلګه یی ښایي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه ۳ ۰ ۱۵ په لاندې بيلګه کې

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}-\frac{1}{a^2b}+\frac{1}{ab^2}$$

چې يوائې د لاندې لپاره موخه ور دی$a \neq 0 \wedge b \neq 0$

د اصلي ماتلاندې لپاره يانې

$$a.b(ab)(a^2b).(ab^2) = a^3.b^3$$

نه ټاکي، نو له دې امله دی

$$a = a$$

$$b = \quad b$$

$$ab = a \quad b$$

$$a^2 . b = a^2 \quad b$$

$$ab^2 = a \quad b^2$$

دا ا۰م۰ل۰ په لاندې توګه دی $= a^2 \quad b^2$

له دې امله لرو:

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}-\frac{1}{a^2b}+\frac{1}{ab^2}=\frac{ab^2-a^2bab-b+a}{a^2b^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۳ ۰ ۱٦ : د وييني يا افادې

$$\frac{2}{a-2}+\frac{2}{a-1}-\frac{1}{a+1}-\frac{a+3}{a^2-1}-\frac{a+6}{a^2-4}, a\neq 0, a\neq \pm 2$$

لپاره ټاکو

a-2 = (a-2)

a – 1 = (a-1)

a+1 = (a+1)

a + 2 = (a+2)

a^2 - 1 = (a-1)(a+1)

a^2-4 = (a-2) (a+2)

(a-2)(a-1)(a+1)(a+2) = (a^2-1)(a^2-4)

دا پورته لاس ته راوړنه ا۰م۰ل۰- چۀ دا په همدې وخت کې غ ک پ هم دی- په ګوته کوي او له پورته څخه د مخه ورکړشوې افادې لپاره لاس ته راځي:

$$\frac{2(a^2-1)(a+2)+2(a^2-4)-(a-1)(a^2-4)-(a-2)(a^2-1)}{(a^2-1)(a^2-4)}$$

$$=\frac{(a+3)(a^2-4)+(a+6)(a^2-1)}{(a^2-1)(a^2-4)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې مات ماتباندې صفر دې‌په دې ډول په پورته پیل کې ورکړ شوې افاده یا وینه د صفر پیچلې لیکلو بیلګه ده او بس۰

د ځل او ویش لپاره لاندې قاعدې باور دي:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}, b\neq \wedge d\neq\Leftrightarrow bd\neq 0$$

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}; b\neq 0, c\neq 0, d\neq 0\Leftrightarrow bcd\neq 0$$

بیلګه ۳ ۰ ۱۷ الف)

$$1-\frac{1}{1-a\frac{1}{1-\frac{b}{a}}}=1-\frac{1}{1-\frac{a}{\frac{a-b}{a}}}=1-\frac{1}{1-\frac{a^2}{a-b}}=1-\frac{1}{\frac{a-b-a^2}{a-b}}$$

$$=1-\frac{a-b}{a-b-a^2}=\frac{a-b-a^2-a+b}{a-b-a^2}=\frac{-a^2}{a-b-a^2}=\frac{a^2}{a^2-a+b}$$

د $a\neq 0, a\neq b, a^2-a+b\neq 0$

لپاره۰ دا په دې مانا، چې

$$a\neq\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{1-4b})$$

بیلګه ۳۰ء ۱۷ ب:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}}{\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}}=\frac{\frac{a(a+b)-b(a-b)}{(a-b)(a+b)}}{\frac{a(a-b)+b(a+b)}{(a+b)(a-b)}}=\frac{a(a+b)-b(a-b)}{(a^2-b^2)}\cdot\frac{(a^2-b^2}{a(a-b)+b(a+b)}$$

$$=\frac{a^2+ab-ab+b^2}{a^2-ab+ab+b^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}=1, \forall\ |a|\neq|b|$$

یادونه: په پورته لیکنه کې د ګڼونو موضوع لږ وغزول شوه، خو لږ څه نور هم باید راغلي وی. دلته اړیین د ګڼونو شمیرقوانین دي او د ګڼونو پیژندل. د ګڼونو اړیکې د خوندیونې له لارې

$N\subset Z\subset Q\subset R$

او په دې کنونو کې باوري د شمیر قوانین، چې هغه زیاتون ، کمون ، ځل ، ویش دی او د ویش په بنسټ ماتشمیرنه. دا باید په همغه ساده ډول زده کړای شي.

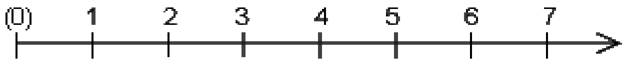
موږ هغه د لومړي وار لپاره اړیین د ګڼونو شمیرنقوانین په لاندې توګه رالنډوو، چې د لومړي وار لپاره په همدې پوهیدنه بسیا کوي.

ګڼونډیری (لنډه ټولګه)

پیدایښتي – یا طبیعي ګڼونډیری

N = {1, 2, 3, 4, 5, ... }.)

په وړانګه د پیدایښتي ګڼونو انځورونه

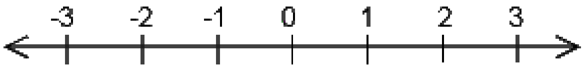


(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټولګڼونو ډيرى

Z = { ... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... }

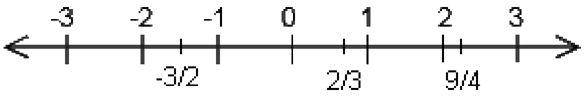
د ټولګنونو ډيرۍ انځورونه په يوه کرښه



د راشنلګڼونو ډيرۍ

$$Q = \{ \frac{p}{q} | p, q | Z \wedge q \neq 0 \}$$

په ګڼونکرښه راشنلګڼونه د ټولګڼونو تر منځ پراته دي



هر راشنل ګڼ د لسميز يا پريوديکی ګڼ په څير ليکل کيدۍ شي

د ماتو سره شميرنه

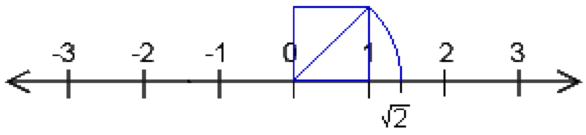
د دوه راشنلګڼونو ترمنځ تل ناپاي زيات نور راشنلګڼونه شته ، دا ګڼ پارته دي، مګر بيا يې هم ترمنځ نور ګڼونه يا ځايونه هم شته، چې ګڼونه په کې ځاي دی او دې ګڼونو ته مو ايراشنل ګڼونه وويل ۰ لکه چې يو راشنلګڼ نه دۍ

راشنل او ايراشنلګڼونه رييل ګڼونه جوړوي

د رييل ګڼونوډيرۍ يا حقيقي اعدادو سټ

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ريیلګڼونو ډيرئ د ګڼونکرښی ټولو ټکو څخه جوړه ده، لاندې ګڼونکرښه کې روښانه ده



په ریيلګڼونوکي بی له بنديزونو شميرل کړی شو، خو په ماتلاندې کې بايد صفر نه وي او دا د هر ډول ګڼونولپاره باور لري

شميرډولونه لومړی پوړئ

:Additionزياتون يا جمعه

زياتوونی +زياتونی = زياتون

د زياتون کموتاتيو قانون $a + b = b + a$

د زياتون اسوځياتيو قانون $(a + b) + c = a + (b + c)$

و زياتون ته د يوه بی اغيزه يا ناپيلی توکی شتون$a + 0 = a$

مخامخ – يا په ښټ ګن يا برعکس عدد$a + (-a) = 0$

کمون:Subtraktion

د زياتون په ښټ کارونه يا عمليه ۰ ترې کمه وونی – کمه ونی = کمون

$a + x = b \Leftrightarrow x = b - a$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه: $7 + x = 10 \Leftrightarrow x = 10 - 7 = 3$

شمیرډولونه:

دویمه پوړۍ

ضرب یا ځل: فاکتور (ځله وونی ضریب) ۰ فاکتور(ځله وونی) ځل
د زیاتون تکرار، بیلګه. $4 + 4 + 4 = 3 \cdot 4 = 12$

د ضرب یا ځل کموتایتو قانون $a.b = b.a$

د ضرب یا ځل اسوشیاتیو قانون $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

دستریبوتیو قانون $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

و ضرب ته د یوه ناپیلي توکي شتون(بي اغیزه توکی یې که وبولو هم بده به نه وي)

$a \cdot 1 = a$

په خپ ارزښت یا برعکس قیمت $a \cdot (1/a) = 1$

یو ضرب ټیک هلته صفر دئ، چې د صرب یو ضریب صفر وي $a \cdot 0 = 0$

ویش:
ویشونی : پرویشونی = ویش (لوستل یې له ښي وکیڼ لورته)

ویش د ضرب یا ځل په خپ کارونه ده) $a : b = c$

$a \cdot x = b \Leftrightarrow x = b:a$

د بېلګې په توګه z.B.: $4 \cdot x = 12 \Leftrightarrow x = 12:4 = 3$

په صفر ویش پیژند نه لري یا تعریف نه لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۳ تمرینونه

۱ – د اعدادو یا ګڼونو ډولونه او د د اعدادو انځورونه

۱ ، ۱ – په کوم د اعدادو ډېرئ یا سټ کې د عدد a او عدد bلپاره د شمیرلو څلور قاعدې یا لارې باور لري؟

یادونه: دلته دې ترې کمونی یا مفروق منه او وېشونش یا مقسوم تل a وي همداسې دې کمونی یا مفروق او پروېشونی یا مقسوم علیه تل b وي.

a) $a = 8, \quad b = 2$

b) $a = 5, \quad b = 8$

c) $a = 7, \quad b = 0$

d) $a = -6, \quad b = 1$

۱ . ۲ عددونه او یو له بل سره پرتله کړئ او ورکړئ، چې له دې دواړو کوم لو دی!

a) $a = \frac{13}{17}, b = \frac{169}{289}$

b) $a = \frac{11}{21}, b = \frac{121}{231}$

c) $a = \frac{888}{901}, b = \frac{896}{911}$

d) $a = -\frac{13}{12}, b = -\frac{143}{130}$

۱ . ۳ – د اعدادو یا ګڼونو او څخه تفرسق، ضرب او وېش جوړ کړئ! ورکړئ، چې دا نتیجې د اعدادو کومو ډولونو پورې اړه لري!

د پوښتنې ۱ ، ۱ یادونه دلته هم باور لري.

a) $a = \pi, \quad b = 5$

b) $a = \sqrt{2}, b = \sqrt{2}$

c) $a = \frac{2}{3}, \quad b = \frac{3}{2}$

d) $a = 0, \quad b = 1$

۱ . ۴- په دوه ییز سیستم کې لاندې ګڼونه یا اعداد انځور کړئ!

a) 28 b) 47 c) 73 d) 112

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ . ۵ – لاندې ربښتوني یا راشنل اعداد د کوټیو کې اچوني یا کوټۍ وني له لارې په نږدې ۵ ځایونږ ټیک پیدا کړۍ.

a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt{18}$ c) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

۲ . د زیاتیزو او ځلیزو (د جمعې او ضرب) نوکانو وازول

۲ . ۱ – لاندې نوکان واز کړۍ

a) $7a - 3b + (-a + 2c) - (3c - 6b) - (6a - 3c)$
b) $5a + [7c - (2a - 3b)] - (4c - a + b)$
c) $7a - [3a - (7 + 5b)] + [a - (4 - 6b)] - (2a + 7b)$
d) $8a - \{a + [(3a - 2b) - (5a + 3b)] - [(-a + 6b)]\}$

2.2. a) $(-a)(b - a - c)$
b) $2a[a - (b - 3a)]$
c) $3(a + b + c) - 5(a + b) - c - 2(b - c - a)$
d) $|a| \cdot (b - 2a) - b \cdot (a + 2b)$

2.3. a) $(2a - b)(9a + 4b)$ b) $(9a - 2b)(7a - 3b)$
c) $(a + b - c)(a - b - c)$ d) $(3a + 2b)(4a - 3b)(5a - 7b)$

2.4. a) $(7a - 5b)(3a + 4b) - (5a - 9b)(4a - b)$
b) $(a + 4)(a - 2) - (a + 2)(a - 1)$
c) $(a + b)(c - d) - (a - b)(c + d)$
d) $(1 - a)(a - 1) - 2(a + 1)(a - 2)$

۳ – د بینوم فرولونه

۳ . ۱ – د بینوم فرمولونه وکاروۍ یا استعمال کړۍ او د شونتیا سره سم یې ساده کړۍ

a) $(-a + 3b)^2$ c) $(-a - b)(a - b)$
b) $(-1 + a)(a + 1)$ d) $(-1 + a)^2 - (1 - a)^2$

3.2. a) $(4a^2 - 3)(4a^2 + 3) - (3a - 4)^2 + (5a + 1)^2$
b) $(a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

c) $(3a + 2b - 5c)^2$
d) $(a + b - c - d)^2$

3.3. a) $49a^2 + 42a + 9$
b) $25a^2 + 40ab + 16b^2$
c) $169a^2 - 130ab + 25b^2$
d) $9a^4b^2 + 12a^2b + 4$

3.4. a) $(8a - b)^2 - 16a^2$
b) $81a^2 - 16(4a - 3b)^2$
c) $4a + 12\sqrt{ab} + 9b$
d) $(\sqrt{ab} - 1)(-1 - \sqrt{ab})$

3.5. a) $(a + b + 1)(a + b - 1)$
b) $(a + b)^2 + 2a + 2b + 1$
c) $a^2 - 2ab + b^2 - 2a + 2b + 1$
d) $a^2 + 2ab + b^2 - 4(a + b) + 4$

۳ . ۶ لاندي وېینې یا افادې ساده کړئ، داسې چې د مربع تکمیلوني له لارې پوره مربع وې جوړې کړئ!

a) $4a^2 - 12a + 9b^2 - 24b = 0$
b) $16a^2 + 25b^2 - 128a + 50b = 0$
c) $3a^2 - 2b^2 - 2\sqrt{6}\,a + 2\sqrt{6}\,b = 0$
d) $4x^2 + 12xy - 9a^2 + 12ab = 0$

۴ . د مناسبو ضریبونو له نوکانو راوسته له ۴ .
۱ تر ۴ . ۴ پورې پوښتنو کې ورکړ شوې وېینې یا افادې په ضریبونو ټوټه کړئ او تر شوونتیا پورې یې ساده کړئ.

4.1. a) $a + a^2$
b) $-a^2 - a$
c) $8ab + 20b^2$
d) $ab + ac - ad$

4.2. a) $a^2b^2 + ab + ab + 1$
b) $ab - ac - b + c$
c) $3a + 3 - 2a - 2 + 4b(a + 1)$
d) $8(7a - 5b) - 5c(7a - 5b)$

4.3. a) $3ac - 3bc - 2ad + 2bd + 4ac - 4bc - 7ad + 7bd$
b) $a^2b + ac - ab - c$
c) $15ab - 5a - 1 + 3b$
d) $4a^2 + 20ab + 25b^2 - a^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

4.4. a) $(a^3 - a^2)(2a - 2a^2)$
b) $(-5a - 3b)^2 + (-5a + 3b)^2$
c) $(-5a - 10b)(-3a + 6b)$
d) $(-a - 1)(a - 1) - (a^2 - 1)$

۴ . ۵ – هر ځل د n لوی توان $(n=1,2,3,\ldots)$ له نوکانو راوباسئ!

a) $n^2 + n + 1$
b) $3n^2 - n + 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$
c) $(1 - 2n)^3$
d) $(\frac{1}{4}n^2 + 3n - 1)^2$

۵ – د په نوکانو کې افادو وېش

لاندې وېش سره ته ورسوئ.

دا چې وېش په صفر ناشونی دی، په دې او لاندې ټولو تمرينونو کې دا ا رزښتونه له شمیره وباسئ، کوم چې $a,b,\ldots$ يې نه شي نیولی یا اخستلای.

5.1. a) $(10a^2 - 2ab + 16ac) : 2a$
b) $(25ab - 40b^2) : (-5b)$
c) $(28a^3 - 20a^2 + 32a) : (-4a)$
d) $(27a^2b - 63ab^2) : (-9ab)$

5.2. a) $(3a^2 + 5ab + 2b^2) : (a + b)$
b) $(a^2 - 2ab - 3b^2) : (a - 3b)$
c) $(3a^2 + 2a - 5) : (3a + 5)$
d) $(4a^2 - 7ab + 3b^2) : (4a - 3b)$

5.3. a) $(35a^2 + 24ab - 15ac + 4b^2 - 6bc) : (5a + 2b)$
b) $(15a^3 + 67ab^2 - 52a^2b - 28b^3) : (5a - 4b)$
c) $(21ax - 15bx + 9cx - 35ay + 25by - 15cy) : (7a - 5b + 3c)$
d) $(12a^2 + ab - 17ac - 20b^2 + 29bc - 5c^2) : (3a + 4b - 5c)$

5.4. a) $(a^3 + b^3) : (b + a)$
b) $(1536b^3 + 375a^3) : (25a^2 + 64b^2 - 40ab)$
c) $(144a^4 - 81b^2) : (27b + 36a^2)$
d) $(a^3 - b^3) : (a - b)$

5.5. a) $(9a^3 - 7ab^2 + 2b^3) : (3a + 2b)$
b) $(a^2 - 10a - 25) : (a - 5)$
c) $(a^3 - 2ab + b^3) : (a + b)$
d) $(24a^4 - 26a^3 - 76a^2 + 32a) : (4a^2 - 7a - 8)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

5.6. a) $(x^4 - x^3 - 5x^2 - 40x + 7) : (x^2 + 3x + 9)$
b) $(2x^2 - x + xy - y^2 + 2y - 2) : (2x - y + 1)$
c) $(13a^2b + 4b^3 - ab^2 + 10a^3) : (2a + 3b)$
d) $(3a^3 + 2a^2 - 7a^2b + 3a - 2ab + 4ab^2 - 4b + 3) : (3a - 4b + 2)$

۶ . ماتشميرنه يا کسرشميرنه

۶ . ۱ – لاندې کسرونه صورت او م خرج يعني د ماتباندې او ماتلاندې د خورا غټ ګډ پروېشوني سره د لومړنيو ضريبونو يا څلوونو له لارې لنډ کړئ

a) $\frac{6\,732}{20\,196}$
b) $\frac{2\,730}{5\,005}$
c) $\frac{20\,520}{2\,280}$
d) $\frac{69\,069}{138\,138}$

۶ . ۲ – د لاندې اعداد خورا کوچنی ګډ زاتځلی (ذ الاضعافالاقل) پيدا کړئ

په لاندې کې und د او په معنا دی

a) 3, 6, 9, 18, 27, 54 und 81
b) 8, 12, 21, 42, 56 und 84
c) 5, 13, 16, 20, 26 und 42
d) 120, 252, 264, 315 und 616

۶ . ۳ . د برابر نوميزو يا برابرمخرج کسرونو شميرنه

6.3.1. a) $\frac{1}{3}+3\frac{1}{3}+3\cdot\frac{1}{3}-4\frac{2}{3}$
b) $\frac{3}{7}-\frac{1-6}{7}+2\frac{1}{7}-7\frac{2}{7}$
c) $10\frac{1}{5}-\frac{4-5}{5}-5\cdot\frac{1}{5}+\frac{10-1}{5}$
d) $2\frac{2}{26}+\frac{5-3}{13}+3\frac{33}{39}-0\cdot\frac{25}{65}$

6.3.2. a) $\frac{a+1}{a}-\frac{a-1}{a}-\frac{1-a}{a}$
c) $\frac{(a-b)^2}{ab}-\frac{1-2ab}{ab}-\frac{a^2+b^2}{ab}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

b) $\frac{a+1}{b}-\frac{a-b}{b}-\frac{b-a}{b}$ d) $\frac{(a-b)^3}{2ab}-\frac{(a+b)^3}{2ab}$

۶ . ۴ – د نا برابرنوميزو کسرونو جمعه او تفريق، په مخرج يا ماتلاندې کې ضريبونه

6.4.1. a) $5\frac{7}{12}+1\frac{41}{72}+2\frac{17}{24}+9\frac{5}{9}$ c) $\frac{5}{18}+\frac{5}{6}-\frac{1}{3}+\frac{14}{27}+\frac{71}{81}$

b) $36\frac{14}{39}+19\frac{4}{13}+15\frac{5}{6}-2\frac{19}{72}$ d) $\frac{15}{64}-\frac{77}{96}+\frac{1}{243}-\frac{3-8}{24}+3\frac{1}{1296}$

6.4.2. a) $\frac{b+5c-a}{6}-\frac{3a-7b+6c}{4}+\frac{4a-5b+7c}{3}$

b) $\frac{a-9}{18}+\frac{a-2}{6}+\frac{5(2a-1)}{12}-\frac{3(a-1)}{8}-\frac{2(3a-4)}{9}$

c) $\frac{16b+3a}{48}+\frac{7a-8b+9c}{24}-\frac{9a+8b+12c}{32}$

d) $\frac{4c-3a}{12ac}+\frac{5b-2c}{10bc}-\frac{b^2-c}{4b^2c}+\frac{4b^2-5a}{20ab^2}+\frac{2}{3a}+\frac{a-b}{5ab}$

6.4.3. a) $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}-\frac{a^2+b^2}{2b}-1$

b) $\frac{5a-6b}{30c^2}-\frac{b(5c^2-3a)}{15ac^2}-\frac{a}{4b}+\frac{a(3c^2-2b)}{12bc^2}+\frac{b}{3a}$

c) $\frac{3a^2+8b^2}{6ab}-\frac{a(4b-5c)}{10bc}+\frac{4a-5b}{10c}+\frac{b(3a-2c)}{6ac}$

d) $\frac{4c-3a}{12ac}+\frac{5b-2c}{10bc}-\frac{b^2-c}{4b^2c}+\frac{4b^2-5a}{20ab^2}+\frac{2}{3a}+\frac{a-b}{5ab}$

۶ . ۵ - د نابرابر نوميزو ماتونو(کسرونو) جمعه او تفريق(زياتون او کمون)، جمعه مخرج يا ماتلاندې کې.

۶ . ۵ . ۱ : د a لپاره يو په بل پسې ورکړشوي ارزښت ځای په ځای کړئ‌او دا داسې لاس ته راغلي ماتونه(کسرونه) سره يوځای کړئ! بيا په ټوليزه توګه د ورکړ شوو کسرونو لاس ته راوړنې ورکړئ او هغه ارزښتونه لرې کړي، چې د a د اخستلو يا نيولو اجازه نه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}$	د a=1,2,3 سره
b) $\frac{1}{a-2}-\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a+2}$	د a=3,4,5 سره
c) $\frac{a}{a-1}+\frac{a}{a+1}-2$	د a=2,3,4 سره
d) $\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a-1}+\frac{1}{(a+1)^2}-\frac{1}{(a-1)^2}$	د a=2,3,4 سره

6.5.2. a) $\frac{3a-1}{4a-1}-\frac{3}{4}$

b) $\frac{a-2}{a-3}-\frac{a-1}{a-2}$

c) $\frac{1}{a+1}+\frac{4}{3a+2}-\frac{3}{a+1}$

d) $\frac{10}{2a-2}-\frac{6a}{3a^2-6a}-\frac{9b}{3ab-9b}$

6.5.3. a) $\frac{3ax-3by}{6x^2y-6xy^2}-\frac{5a^2x+5aby}{10ax^2y+10axy^2}$

b) $\frac{6ab+9b}{6ab-6b}-\frac{6ab-4b}{6ab+6b}-\frac{10b^2}{12a^2b^2-12b^2}$

c) $\frac{1}{a^2-b^2}-\frac{2b^2}{2a^4-2a^2b^2}-\frac{b^2}{a^2b^2}+\frac{1}{a^2+b^2+2ab}$

d) $\frac{24a^2b-72ab^2}{60a^2b+24ab^2}-\frac{49a^2b-28ab^2}{35a^2b+14ab^2}-\frac{20a-10b}{10a-5b}$

6.5.4. a) $\frac{3a+b}{2a^2+2ab}-\frac{a^2+b^2}{2a^2b+2ab^2}+\frac{2a-5b}{4ab+4b^2}$

b) $\frac{a+2b}{3a^2-3ab}-\frac{1}{2b}-\frac{3b-a}{2ab-2b^2}$

c) $\frac{2a-5}{a+3}-\frac{3a-4}{a+2}+\frac{a^2+6a+10}{a^2+5a+6}$

d) $\frac{5a-2b}{3a+b}-\frac{88a^2+28ab+0,25b^2}{48a^2+7ab-3b^2}+\frac{24a+b}{16a-3b}$

6.5.5. a) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-\frac{b^2}{a^2+ab}-\frac{a^2}{ab+b^2}$

b) $\frac{6a-5b}{8a^2+24ab+18b^2}-\frac{2a-b}{36a^2-81b^2}+\frac{3}{12a-18b}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

c) $\frac{2a+3b}{2ab+b^2}-\frac{4a^2+b^2}{4a^2b+2ab^2}-\frac{5a-b}{4a^2+2ab}$

d) $\frac{9a-b}{6a^2-2ab}-\frac{6a+b}{3ab-b^2}+\frac{1}{2b}$

۶ . ۶: د ماتونو یا کسرونو ضربونه(یا ځلونه):

6.6.1. a) $3\cdot\frac{1}{3}$ b) $b\cdot\frac{1}{a}$ c) $\frac{5}{8}\cdot\frac{8}{5}$ d) $\frac{0}{b}\cdot\frac{b}{c}$

6.6.2. a) $\left(\frac{a}{3b}+\frac{3b}{a}\right)\cdot 3ab$ c) $\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{3b}\right)\cdot(2a-3b)$

b) $\left(\frac{5a}{6bc}-\frac{6b}{7ac}+\frac{2c}{3ab}\right)\cdot 84abc$ d) $\left(\frac{2}{a}+\frac{3}{b}\right)\cdot\left(\frac{a}{2}-\frac{b}{3}\right)$

6.6.3. a) $\frac{4a^2-9b^2}{21a^2b+14a^3}\cdot\frac{7a+5ab}{6b-4a}$ b) $\frac{16a^4-a^2}{24a^3+8a^2}\cdot\frac{36a^2+24a+4}{4a+1}$

c) $\frac{a^2+1}{(a+1)^2}\cdot\frac{a^3+a^2+a+1}{(a^2+1)^2}$ d) $\frac{4ab-3a}{9ab-3b^2}\cdot\frac{18a-6b}{4a^2+10ab}\cdot\frac{8ab-6a}{4ab+10b^2}$

۶ . ۷ . د ماتونو وېش:

6.7.1. a) $\frac{2}{3}:3$ b) $a:\frac{1}{b}$ c) $\frac{a}{b}:b$ d) $\frac{0}{a}:\frac{1}{b}$

۶ . ۷ . ۲ : د لاندې وېینو یا افادو برعکس یا په څېټ ارزښتونه پیدا کړی.

a) $\frac{a}{b}$ b) $\frac{a+1}{b}$ c) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ d) $\frac{1}{a+b}$

6.7.3. a) $\left(\frac{a}{2b}-\frac{2b}{a}\right):\frac{a}{a+2b}$ c) $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right):\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)$

b) $\left(1-\frac{2}{a}+\frac{1}{a^2}\right):\frac{1-a^2}{a^2}$ d) $\left(\frac{a+b}{b}+\frac{a+b}{a}\right):\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

6.7.4. a) $\dfrac{1-\frac{1}{a}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}}$

b) $\dfrac{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1}{\frac{a^2+b}{b}-\frac{a+b^2}{a}}$

c) $\dfrac{\frac{a}{a-b}+\frac{b}{a+b}}{\frac{a}{a+b}-\frac{b}{a-b}}$

d) $\dfrac{\frac{a}{1-a}+\frac{a+1}{a}}{\frac{a-1}{a}-\frac{a}{a+1}}$

6.7.5. a) $\dfrac{\frac{1}{a^3}-\frac{1}{b^3}}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{b^2}}$

b) $\dfrac{\frac{x^2}{ab}+x\cdot\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)-\frac{1}{ab}}{\frac{x}{a}-\frac{1}{b}}$

c) $\dfrac{\frac{a+b}{a-b}-\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}}{\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}}$

d) $\dfrac{\frac{1}{16a^2}+\frac{1}{2ab}+\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{8a}+\frac{1}{2b}}+\dfrac{\frac{1}{16a^2}-\frac{1}{2ab}+\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{8a}-\frac{1}{2b}}$

6.7.6. a) $\dfrac{a+\frac{1}{1-ab}}{1-\frac{1}{1-ab}}$

b) $\dfrac{1}{a-\dfrac{a}{1-\frac{a}{a-b}}}$

c) $1-\dfrac{1}{1-a\cdot\dfrac{1}{1+\frac{b}{a}}}$

d) $\dfrac{\dfrac{a+\frac{1}{4}b}{a-\frac{1}{4}b}-\dfrac{a-\frac{1}{4}b}{a+\frac{1}{4}b}}{1+\dfrac{b^2}{16a^2-b^2}}$

۶ . ۸ . لاندې ماتونه يا کسرونه، که ممکن وي، ساده کړئ (که غواړئ د مخکني شکل بدلون څخه وروسته)

6.8.1. a) $\dfrac{35ac-50bc}{7a-10b}$

b) $\dfrac{a-\sqrt{a}\cdot b}{b-\sqrt{a}}$

c) $\dfrac{34ax+51bx-119cx}{2a+3b-7c}$

d) $\dfrac{a^2-ab+ac}{b-a-c}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

6.8.2. a) $\dfrac{ax+bx+ay+by}{a+b}$ c) $\dfrac{91ab+7b+39a^2+3a}{13a+1}$

b) $\dfrac{ab+\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}a-\frac{1}{4}}{a+\frac{1}{2}}$ d) $\dfrac{ax+\frac{x}{b}-\frac{a}{y}-\frac{1}{by}}{\frac{1}{b}+a}$

6.8.3. a) $\dfrac{25a^2-130ab+169b^2}{25a-65b}$ c) $\dfrac{\frac{1}{4}a^2b^2+17ab+289}{\frac{17}{2}\left(\frac{1}{17}ab+2\right)}$

b) $\dfrac{2x^2+8xy+8y^2}{(x+2y)^2}$ d) $\dfrac{25a-20\sqrt{ab}+4b}{ab(\sqrt{a}-0{,}4\sqrt{b})}$

6.8.4. a) $\dfrac{a^4-b^4}{(a+b)^2(a-b)}$ c) $\dfrac{(a^2-b^2)^2-(a^2+b^2)^2}{ab(a+b)}$

b) $\dfrac{(a+b)^4-(a-b)^4}{a^2+b^2}$ d) $\dfrac{(a^2+b^2)^2(a^2-b^2)^2+2a^4b^4}{a^4+b^4}$

6.8.5. a) $\dfrac{(\frac{1}{9}a^2+b^2+\frac{2}{3}ab)(x^3-27y^3)}{(2b+\frac{2}{3}a)(x-3y)}$ c) $\dfrac{(80-40ab+5a^2b^2)(4-ab)}{64\cdot\left(\frac{ab}{4}-1\right)^3}$

b) $\dfrac{(2x^2-20x+50)(2a-1)(a+\frac{1}{2})}{(1-2a)(2a+1)(25-x^2)}$ d) $\dfrac{(32a^3b^2x-18ax^3y^2)\cdot 3by}{(12ab^2y+9bxy^2)\cdot 2ax}$

6.8.6. a) $\dfrac{(a+b+1)(a+b-1)+(a-b)^2-2\cdot\left(b^2+\frac{1}{2}\right)}{a+1}$

b) $\dfrac{\left(4a+\frac{1}{4}b-2\sqrt{ab}\right)\cdot\left(2\sqrt{a}+\frac{1}{2}\sqrt{b}\right)}{2\sqrt{a}-\frac{1}{2}\sqrt{b}}$

c) $\dfrac{(a+1)^2-b^2}{a^2+2ab+b^2+2a+2b+1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

d) $\frac{(a-1)^2-(b-1)^2}{a^2+b^2+2ab-4(a+b-1)}$

۶ . ۹ . د (-1) سره شميرنه

الف- ورکړشوی دې وي/ (b-c) a(b-c) . a=-1ځای په ځای کړئ او داسې لاس ترې راغلي کسر يا مات لپاره مختلف ليکدودونه ورکړئ.

ب – ورکړي دې (5c -3b-a)/(1-a) وي په صورت او مخرج (ماتباندې او ماتلاندې) کې (-1) له نوکانو راوباسئ او دا عدد لنډ کړئ.

پ – کسر يا مات $(b^2 - a^2)$ /(-a-b) د (-1)سره پراخ کړئ او ساده يې کړئ.

ت- ورکړی دې وي $1-\frac{25a^2-36b^2}{6b-5a}$ په مخرج يا ماتلاندې کې (-1) له نوکانو راباسئ او دا وينه يا افاده ساده کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

٤ ۰ توان (پوتنځ) او ريښه (جذر) Potenz , Wurzel (Root)

په دې برخه کې د توان او جذر يا ريښې قوانين ترڅېړنې لاندی نيسو، دلته غوره دا ده، چې د کارونې يا استعمال چټکتيا ته پرمختګ (تکامل) ورکړو ۰ دا مشوره کيږي، چې ريښه دې په پوتنځ واړول شي، چې د اکسپوننت - يا جګعدد يې نسبي يا راشنل وي۰ د دې فورمال ټيک کره د ګڼلو قوانينو په څنګ کې د باوري کيدو لپاره بايد په نيونو(فرضيو) هم ژور فکر وشي۰

د ريښې پيژند د خلاف يا پر څټ عمليو مخه بايد نيول شوي وي، چې د هغې له مخې راديکاند (ريښه ويستونی يعنی هغه ګڼ، چې ريښه يی وېستلکيږي يا نيول کيږي،د ريښی نخښې لاندی ګڼ او هم د ريښی ارزښت نامنفي اعداد (ناکميز ګڼونه) وي۰ د توان زړه پورې ريل اکسپوننت (په جګ) هلته کره دی يا باوري دی، چې د بنسټ لپاره د مثبت عددونو نيونه يا فرضيه شوي وي۰

٤ ۰ ۱ توان (پوتنځPotenz) په ټولګڼيز يا تام عدد په جګ يل اکشسپوننت

(c) ketabton.com: The Digital Library

پيژند ٤ ٠ ١:

د يوه په خوښه ريل ګڼ توان لاندې موږ د a د خپل ځان سره n- م واره ځل

پو هيږو ٠ د دې لپاره ليکو: $a^n = b$ دلته a بنسټ n = 1,2,3,…

اکسپوننت(جګګڼ، لنډ: جګ) او b د پوتنځ يا توان ارزښت بلل کيږي٠

د بيلګي په توګه

$$a = a , a^2 = a . a , \quad a^3 = a.a.a$$

(4,1) د n = 0 لپاره کره ټاکل کيږي $a^\circ = 1$ د $a \mid= 0$ سره

د پيژند يا تعريف پر بنسټ (اود څه بنديزونو په څلورديوالى کې، چې لاندې شوي) ښوول کيدى شي، چې د خوښى يا زړه پورې ريېلګڼونو $a,b \in R$ او $m,n \in N^*$ نامنفى ټولګڼونو اکسپوننت يا جګګڼ لپاره لاندې باورلري

$$a^n.b^n = (a.b)^n;..(4,2)$$

$$a^n : b^b = (\frac{a}{b})^n = (a/b)^n; b \neq 0;................(4,3)$$

$$a^n.a^m = a^{n+m};..(4,4)$$

$$a^n : a^m = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}; a \neq 0, n \geq m;............(4,5)$$

$$(a^n)^m = a^{n.m};..(4,6)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا پورته د توان اړيکې د ټولګنيز مثبت جګړ يا اکسپوننت لپاره باور لري، کيدئ شي، چی ټولګڼونو ته وغزول شي، که چيرې پيژند ورکړو يا تعريف کړو:

$$\frac{1}{a^n} = a^{-n}; n = 1,2,3,....,..a \neq 0, ...(4,7)$$

دا پورته د توان قوانين د ټولګنيز جګ(اکسپوننت) لپاره بی بنديزونو يواځې د نه ورکيدونکو رييل بنسټونو ياني د $a \neq 0$ او $b \neq 0$ لپاره باور ي دي . په (4,5) کې بيا بنديز $n \geq m$ اړيين نه دی٠

د توان قوانين کيدئ شي په ښه بدلونکو افادو يا ويينو وکارول- يا استعمال شي٠

بيلګه4 .1

$$[\frac{4a^{-3}b^0}{x^2y^{-1}}]^{-2} = (4abx^{-2}y]^{-2} = 4^{-2}a^6x^4y^{-2} = \frac{a^6x^4}{16y^2}, abxy \neq 0$$

بيلګه 4 . 2

$$\frac{9^4(a^2\sqrt{ab})^2}{18^2.(3ab)^3} = \frac{3^8.a^4.a.b^2}{2^2.3^4.3^3.a^3.b^3} = \frac{3a^2}{4b}, a > 0, b \neq 0$$

بيلګه4 . 3

$$\frac{3-a}{a^{m-4}} + \frac{a^6 - a^5 + 2a^3 - 1}{a^{m+1}} - \frac{2a^2+1}{a^{m-2}} =$$

$$= \frac{a^5(3-a) + a^6 - a^5 + 2a^3 - 1 - a^3(2a^2+1)}{a^{m+1}} =$$

$$= \frac{3a^5 - a^6 - a^5 + 2a^3 - 1 - 2a^5 - a^3}{a^{m+1}} = \frac{a^3 - 1}{a^{m+1}}, a \neq 0, m \in Z$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوتنځ زیاتون او کمون کې باید پام وي، چې یوازې د برابر پوتنځ ګڼونه یو له بل سره زیاتیدی او یو له بل کمیدی شي۰

بیلګه 4 . 4

$$3a^n + 2a^n = 5a^n$$

بیلګه4 . 5

$$4a^{n+1} + 2a^n + 5b^{n+1} - 3b^n - 3a^{n+1} + a^n - 4b^{n+1} + 3b^3 = a^{n+1} + 3a^n + b^{n+1}$$

دې ته بیا ګوته نیسو، چې د بنسټ - او پوتنځ مخنخښې کې دې توپیر وشي۰ پوتنځ له مثبت - یا زیاتونمخنخښې سره تل مثبت یا زیاتیز پوتنځ ارزښت لري، په دې ترځ کې، چې پوتنځ د منفي - یا کمیز بنسټ سره که اکسپوننت جوړه وي مثبت زیاتیز او که اکسپوننت ناجوړه وي نو منفي - یا کمون ارزښت لري۰

باور لري:

$$(2a)^{2n} = +a^{2n}, ..., (-a)^{2n} = +2a^{2n}$$
$$(+a)^{2n+1} = +a^{2n+1}, ..., (-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}, n \in Z, a > 0$$

٤ ۰ ۲ – ریښه او توان له ریشنل جګ عدد (اکسپوننت) سره

پیژند ٤ ۰ ۲

د یوه نامنفي ګڼ a لپاره n -مه ریښه هغه نامنفي ګڼ b دی، د کوم لپاره چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

باور لري: $b^n = a$

د دې لپاره ليکو:

$$b = \sqrt[n]{a}, n = 1, 2, 3, ...(4,8)$$
$$a \geq 0, b \geq 0 ....(4,9)$$

دلته a راديکاند Radikand ، يا ګڼ، چې ريښه (جذر) يې نيولکيږي(مورږ دا

ريښه نيووني يا ريښه ويستونى بولو) او n دريښې جګ(اکسپوننت) او b د

ريښې ارزښت يا ريښه ارزښت بلل کيږي٠

بايد پردې ټينګار وشي، چې ريښه يوائې د نامنفى راديکاند يا ريښه ويستوني (ريښه نيوني) $a \geq 0$ راوستل کيږي يا نيول کيږي او پخپله په لاندې توګه يو نامنفي - يا ناکميز ارزښت لري يانى

$$b = \sqrt[n]{a} \geq 0$$

د دې کره کونې لپاره لاندې يادونې شوي دي:

۱ – د جوړه $n = 2,4,6,...$ لپاره د $a<0$ سره ريښه b په ريېلګڼونو کې نه شته، کوم ، چې (4,8) پوره کړي

ځکه، چې د b جوړه په توان تل نامنفي يا ناکميز يانې زياتيز ګڼ دى٠

۲ – د جوړه او مثبت - يا زياتيز برابرون $b^n = a$

په ختّه په ريښتوني دوه ريېل اوبيوني ياحلونه لري د بيلګې په توګه $b^2 = 4$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یانې $n = 2$ او $a = 4$ اوبیونې

$$b_1 = 2, b_2 = -2$$

دي٠ د دې لپاره، چې د رادیکاند د شمیرلو کارونې یواځنۍ سرته ورسولی شو، باید د یوې اوبیونې لپاره پریکړه وکړو، نو له دې امله موږ مثبت ارزښت غوره بول

۳ – د ناجوړه . $n = 1, 3, 5$ او $a \geq 0$ لپاره

$$b^n = a$$

تل یواځني زیاتیز(مثبت) اوبی یا حل لري یانې $b \geq 0$

۴ – د ناجوړه n او کیمز یا منفي a لپاره $b^n = a$

تل یواځنې یو منفی اوبی یا حل لري٠ یانې $b < 0$ د بیلګې په توګه دا $b^3 = -8$ یواځې

اوبی $b = -2$ لري.

په هر صورت باید د جوړه... $n=2,4,6$ ګڼونو لپاره $a \geq 0, b \geq 0$ وغوښتل شي، ځکه چې په بل صورت کې به یا ریښه شته نه وي او یا به یواځنی اوبی نه لري، یانې څو اوبی به شته وي

د ناجوړه یا طاقو $n = 1,3,5,...$ لپاره کیدی شي، چې له دواړو غوښتنو تیر شو٠ دلته به یواځې تاوان یا زیان دا وي، چې د ټولو ممکن حالتونو لپاره به بیل بیل د ریښې د قوانینو غوره کولو ته اړ کیږو٠ له بلې خوا به ریښی د قوانینو ترتیبول د پوتنخ لپاره ، چې پورته ایښول شوي بندیزونه nقوانینو لپاره ستونځمن وي٠ له دې امله د ناجوړه ریښو

(c) ketabton.com: The Digital Library

اکسپوننت غوره کوو او د یواځني یو اوبی لپاره 2- د 8- = b³ او نه $-2=\sqrt[3]{-8}$

بلکه $-2=-\sqrt[3]{8}$ لیکو٠ په دې اړوند او د یادو شوو نیونو په بنسټ دې دا لاندې اوبی په ګوته شوی وي

$$\sqrt{a^2}=a, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4,10)$$

څلوری ریښه یا مربع ریښه $\sqrt{a^2}$ د ټولو حقیقي اعدادو یا - ګڼونو a لپاره تعریف شوي٠ د نامثبت یا نازیاتیز ې a لپاره به (4,10) په داسی حال کې، چې د منفي a لپاره به بیا د (4,10) اوبی منفي یا متیز وي، کوم، چې نیونه b ≥ 0 نفې کوي.

په ځانګړي حالتونوکې به د (4 , 10) بنول شویو حالتونو استعمال لاندې مخامخوالي یا مضاد لاس ته راولي، لکه :

$$\sqrt{4}=\sqrt{2^2}=2, \sqrt{4}=\sqrt{(-2)^2}=-2$$

یانې د 2- = 2 سره٠

د (10 , 4) ټیک داسې لیکل کیدی شي:

$$\sqrt{a^2}=|a|=\{a, a\geq 0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4,11)$$

$$=\{-a \quad , a\leq 0 \qquad\qquad (4,11)$$

د ریښې یا جذر له پیژند (9 , 4) , (8 , 4) سره سم کیدی شي، چې لاندې باوري د ریښې قوانین ولیکل شي د….n = 1,2,3 او a , b ≥ 0 لپاره

$$\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4,12)$$

$$\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a}/\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a/b}, b>0 \ldots\ldots (4,13)$$

$$\sqrt{a}.\sqrt[m]{a}=\sqrt[n.m]{a^{n+m}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4,14)$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[n.m]{a} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4,15)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پورته د (4,15),(414),(413,).(4.12) ترمنځ باید لږ واټن وي، خو کومه ترې ناسمه پوهېدنه نه رامخ ته کوي ۰ دلته پېژندل کيږي، چې د ريښې قوانين د پوتنځقوانينو ته، چې په(4,2) تر (4,6)پورې ورکړ شوي،د پرتلې وړ دي۰ په رښتيا چې دا د پوتنځقوانينو لاس ته راتلی شي، که پوتنځ د ريشنل اکسپوننت سره په لاندې ډول تعريف شي يا يې لاندې پيژند ورکړ شي۰

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n} \Leftrightarrow \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m ....(4,16)$$

د... $a \geq 0$, $n = 1,2,3,\ldots$, $m = 1 , 2 , 3 4 \ldots$ لپاره

د بيلګې په توګه (۱٦ ، ٤) په لاندې ډول ليکل کيږي

$$\sqrt[n]{a}.\sqrt[m]{a} = a^{1/n} \cdot a^{1/m} = a^{(1/n)+(1/m)} = a^{(n+m)/n.m} = \sqrt[n.m]{a^{n+m}}$$

دا اړيکې (4,16) کيدی شي منفي $m = -1,-2,-3,\ldots$ ته هم پراخه شي، چيرته، چې (4,17) په ټينګه - يا کره باور ولري

$$a^{-(m/n)} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}, a > 0....................(4,17)$$

بې له بنديزونو د خوښې جګو n اوm لپاره د پوتنځقوانين (4, 2) تر (4,6) باور لري، خو يوائې هلته، چې نه ورکيدونو بنسټونو يانې $a>0, b>0$ نيونه شوې وي۰

د ريښې شميرلو لپاره بايد اساساً د(4,16) له مخې ريشنل اکسپوننتونه واوړي او له (4,2) تر (4,6) استعمال کړي

اړتيا لرو، چې د پوتنځ او ريښې سره شميرلو د قوانينو استعمال نيوني تل و ازمايلی شو۰ په ځانګړي ډول د بنسټ نه منفيتوب کمونوالی يا نامنفيوالی يا مثبتتوب(مثبتوالی يا زياتونوالی) پريږدو، چې لاندې ناسم پاي کيدډول وښايو۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sqrt{-a}=(-a)^{1/2}=(-a)^{2/4}=\sqrt[4]{(-a)^2}=\sqrt[4]{a^2}=a^{2/4}=a^{1/2}=\sqrt{a}$$

برابرون يوازې د دې ساده حالت0 = a لپاره شته دی يا باور لري، د 0=|a يا $a \neq 0$ لپاره a-او يا a منفي دي دا په دې مانا، چې a يا-a پيژند نه لري يا تعريف نه دی٠

د توان قوانين د توان سره شميرلو، چې راشنل جګ لري، په لاندې بيلګو کې روښانه کوو:

پام: په لاندې بيلګو کې دا تراوسه د شمير بنستيز قوانين ټول راغلي، د نو ورسره بلدېدونکو ګرانو لوستونکو ته دې دا روښانه وي، چې د لږ فکر وروسته هرڅه روښانه کيدی شي٠ شميرنه يې لږ وخت نيسي، که غواړی پخپله يې يو ځل وشميری٠

بيلګه ٤ ٠ ٦

$$\sqrt[3]{\sqrt{125}}=\{(125)^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{3}}=(125)^{\frac{1}{6}}=(5^3)^{\frac{1}{6}}=5^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5}=2,2361$$

بيلګه ٤ ٠ ٧

$$\frac{a^2\sqrt{b}c^{-2}}{\sqrt[3]{a^2}b^{-3}}:\frac{d^2\sqrt{c}}{\sqrt[5]{d}a^{-5}}=\{a^{(2-\frac{2}{3})}b^{(\frac{1}{2}+3)}c^{-2}\}:\{a^5c^{-2}d^{(2-\frac{1}{5})}\}=$$

$$=a^{(2-\frac{2}{3}-5)}b^{(\frac{1}{2}+3)}c^{(-2-\frac{1}{2})}d^{(-2+\frac{1}{5})}=a^{-\frac{11}{3}}b^{\frac{7}{2}}c^{-\frac{5}{2}}d^{-\frac{9}{5}}=$$

$$=\frac{\sqrt{b^7}}{\sqrt[3]{a^{11}}.\sqrt{c^5}.\sqrt[5]{d^9}}=\frac{b^3.\sqrt{b}.c^2}{a^3.\sqrt[3]{a^2}.c^2.\sqrt{c}..d^5.\sqrt{d^4}}$$

بيلګه ٤ ٠ ٨

$$8.\sqrt[3]{343}-4.\sqrt[3]{125}+5\sqrt[3]{8}-5\sqrt[3]{729}$$

$$=8.\sqrt[3]{7^3}-4\sqrt[3]{5^3}+5.\sqrt[3]{2^3}-5.\sqrt[3]{3^6}=8.7-4.5+5.2-5.9=1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه ٤ ۰ ۹

$$5.\sqrt{63}-2.\sqrt{175}-\sqrt{343}+3.\sqrt{28}$$
$$=5.\sqrt{7.3^2}-2.\sqrt{7.5^2}-\sqrt{7.7^2}+3.\sqrt{7.2^2}=$$
$$=5.3\sqrt{7}-2.5\sqrt{7}-7.\sqrt{7}+3.2.\sqrt{7}=$$
$$=15.\sqrt{7}-10.\sqrt{7}-7.\sqrt{7}+6.\sqrt{7}=4.\sqrt{7}$$

بيلګه ٤ ۰ ۱۰

$$\sqrt{a-\sqrt{a^2-b^2}}.\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}=\sqrt{(a-\sqrt{a^2-b^2}).(a+\sqrt{a^2-b^2})}=$$
$$=\sqrt{a^2-(\sqrt{a^2-b^2})^2}=\sqrt{a^2-a^2+b^2}=|b|$$

د $|a|\geq|b|$ لپاره

د مختلفو شميرلو لپاره موخور دی، چې مات لاندې کې منځ ته راغلې ريښې له منځه يوسو (د ماتلاندې ريشنل کول)۰

که په ماتلاندې کې يوه ريښه $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$ د فاکتور يا ځلوونې په څيررامنځ ته شي، نو دا د وظيفې لپاره يوازې اړيين ده چې $m<n$ ($m , n >0$) او $m,n\in Z$ په پام کې راوړو

کارونه يا عمليه په لاندې ډول اجرا کيږي($N^*|= 0$, $a > 0$)

$$Z\big/N=\frac{Z}{N}=\frac{Z}{N*\sqrt[n]{a^m}}=\frac{Z.a^{1-\frac{m}{n}}}{N*a^{\frac{m}{n}}.a^{1-\frac{m}{n}}}=\frac{Z.\sqrt[n]{a^{n-m}}}{N*a},\text{..........}(4,18)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه ٤ ۰ ۱۱

$$\frac{3}{2\sqrt[3]{3}}=\frac{3}{2.3^{\frac{1}{3}}}=\frac{3.3^{\frac{2}{3}}}{2.3.3^{\frac{2}{3}}}=\frac{3^{1+\frac{2}{3}}}{2.3^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}}=\frac{3^{\frac{5}{3}}}{2.3}=\frac{3^{\frac{2}{3}}}{2}=\frac{1}{2.\sqrt[3]{9}}$$

که په ماتلاندې کې د څلورې- يا مربع ريښې زياتون يا کمون وي $N=\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ نو ماتلاندې له مات $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ سره غزوو او د بينوم فرمول استعمال سره له $a>0$ او $b>0$،چې $a\neq b$ وي لاس ته راځي:

$$\frac{Z}{N}=\frac{Z}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}=\frac{Z.(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})}{(\sqrt{a}\pm\sqrt{b}).(\sqrt{a}\mp\sqrt{b})}=\frac{Z.(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})}{a-b},\ldots(4,19)$$

بيلګه ٤ ۰ ۱۲

$$\frac{1}{2-\sqrt{3}}=\frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=\frac{2+\sqrt{3}}{4-3}=2+\sqrt{3}$$

بيلګه ٤ ۰ ۱۳

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

۴ . ۳ توان(پوتنځ) د حقيقي – يا رييل جګ (اکسپوننت) سره

دلته دا په ګوته کوو يا دې دا ويل شوي وي، چې د توان ټول قوانين له (4,2) تر (4,7) دې په خوښه حقيقي اعدادو اکسپوننتونو(جګعددونو)m,n لپاره باور لري،طبعاً بې بنديزه ټيک د مثبت بنسټ لپاره. يعنې a,b>0 ، برسيره پردې بايد توان $a^{\alpha}; a>0$ د ناريښتوني يا ايراسنل عدد α لپاره تعريف شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که α يو ايراشنل – يا ريښتونی عدد وي، نو موږ د ۳ . ۱ . ۴ برخې سره سم انتروالونو بندولو په بنبټ لرو: $\propto = \{a_{n;}a'_{n}\}$. دلته $a_{n;}a'_{n}$ هوښيار يا راشنل اعداد دي.

بيا نو

$$\beta = \{a^{a_n}; a^{a'_n}\} \qquad (4{,}20)$$

هم په انتورالونو بندول دي چې غږي يې (۴،۲) لاندې تعريف شوي توانونه دي د راشنل اکسپوننت سره. د هغه موجود په انتروالونو بندولو سره په دې توپير، چې

$$2^1 < 2^{\sqrt{2}} < 2^2$$
$$2^{1,4} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,5}$$
$$2^{1,41} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,42}$$
$$2^{1,414} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,415}$$
$$2^{1,4142} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,4143}$$
$$\vdots$$

اخرني مساوات په دې معنا دی

نو لرو $\sqrt[10000]{2^{1412<2^{\sqrt{2}}<\sqrt[10000]{2^{14143}}}}$

٤ ، ٣ تولګه : د a>0, b>0 رييل او $m,n \in N(n \neq 0)$

همدا ډول $m,n \in N(n \neq 0)$ ييلو لپاره باور لري

$$\alpha, \beta \in R$$

$$a^0 = 1, \frac{1}{a^\alpha} = a^{-\alpha}, \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}, \sqrt[n]{a^m} =$$

$$= (\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا پورته موضوع تر دې ځايه بسيا کوي، که نور څه مخته راتلل، چې اړيين وو، هغه به بيا په ګډه ورزياتوو

۴ . ۵ . تمرينونه

۱ . د توان کلمه، د توان جمعه او تفريق يا زياتون او کمون

۱ . ۱ – د توان په څير يې وليکئ

a) $(-a^{-1}) \cdot (-a^{-1}) \cdot (-a^{-1}) \cdot (-a^{-1})$ b) $-\left(\frac{1}{a^{-2}} \cdot \frac{1}{a^{-2}} \cdot \frac{1}{a^{-2}}\right)$

c) $-(b-a) \cdot (a-b) \cdot (a-b)$ d) $-(a^0 b) \cdot (a^0 b) \cdot (a^0 b) \cdot (a^0 b)$

1.2. a) -3^{-4} b) $(-5)^3$ c) $(-2^{-1})^3$ d) $-\left(\frac{2}{3}\right)^2$

1.3. a) $12a^2b - 6ab^2 - 15a^2b + 6ab^2 - 7a^2b$

b) $(3a+2b)x^4 - x^4(2b-3a) + x^4(3a+2b)$

c) $4(a-b)^2 + 2(b-a)^2 - 3(a-b)^2$

d) $18(a-1)^3 - 3(1-a)^3 - 15(a-1)^3 + 4(1-a)^3 + 3(1-a)^3$

۲ – د توانو ضرب او وېش د برابر بنسټ سره

2.1. a) $\frac{3a^{n+1} \cdot 6x^{n+7} \cdot 9b^{x+1}}{3x^n \cdot 2b^{x+1} \cdot 3a}$ c) $\frac{a^{x+1} \cdot b^{x+3} \cdot a^{3x-1} \cdot b^{x+3}}{a^{x-2} \cdot b^{3-x} \cdot a^x \cdot b^{x+1}}$

b) $\frac{a^{n+1} \cdot a^{n+1} \cdot a^n}{a^0 \cdot a^n \cdot a^{n-1}}$ d) $\frac{a^{3n-x} \cdot b^{2n+x}}{a^{n+2x} \cdot b^{2n-x}} \cdot \frac{x^{3n+2} \cdot y^{2n-1}}{x^{2n-3} \cdot y^{n+1}}$

2.2. a) $\frac{18x^{a+4}}{2y^{5a+7}} : \frac{4x^{7-3a}}{9y^{8+5a}}$ c) $\frac{42a^2b^3 \cdot x^{n+1}}{36c^3 \cdot y^2 \cdot z^{n-3}} : \frac{70a^3b^2 \cdot x^{n+2}}{54c^2y^4 \cdot z^{n-2}}$

b) $\frac{a^{5x-2y}}{b^{6m-1}} : \frac{a^{4x+y}}{b^{m-2}}$ d) $\frac{45xa^3 \cdot 9y^n(a-1)^2}{9yb^3 \cdot 30x^n(a+1)^2} : \frac{9y^{n-1}(1-a)^3}{24x^{n+1}(1+a)^2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۲ . د توان ضرب او جمعه(زياتون) د همغه بنسټ سره:

2.3. a) $(x^{5n+3} + x^{4n+5} - x^{3n+4}) : x^{2n+3}$

b) $(143a^4b^5 - 221a^3b^5 - 247a^5b^4) : 13a^3b^4$

c) $(a^{n+1}b^{x-1} + a^nb^x + a^{n-1}b^{x+1}) : a^{n-2}b^{x-1}$

d) $(16a^8 - a^4b^2 + 9b^4) : (4a^4 - 5a^2b + 3b^2)$

د لوګاريتم بنسټ فرمولونو استعمال.

په لاندې کې x وشميرئ

۳ . د توان په توانونه، د توانونو ضرب او وېش د برابر جګګڼ يا جګعدد سره، د کميزو يا منفي اکسپوننتونو سره شميرنه

3.1. a) $\left(1\frac{3}{4}\right)^2 : \left(2\frac{1}{3}\right)^2$

b) $4^{-2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-4}$

c) $\left(-\frac{1}{a^{-4}}\right)^{-5}$

d) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{-3}$

3.2. a) $\frac{18^4(a^2b)^2}{27^3 \cdot (2a\sqrt{a} \cdot b)^2}$

b) $\frac{(6ab)^3 \cdot (5a^2b)^4}{2^4 \cdot 3ab^2 \cdot (25a\sqrt{b})^2}$

c) $\left(\frac{4b^2y^2}{6a^2x^2}\right)^3 \cdot \left(\frac{8a^3y^2}{6b^3x^3}\right)^4 \cdot \left(\frac{18b^3x^6}{16a^3y^3}\right)^2$

d) $\left(\frac{45b^2y^3}{24a^3x}\right)^2 \cdot \left(\frac{6bx^3}{9ay^3}\right)^3 \cdot \left(\frac{75b^3x^3}{36a^4y}\right)^2$

3.3. a) $\frac{(3a-9b)^2}{81b^2-9a^2}$

b) $\frac{(6a-12b)^2 \cdot (3a+6b)^2}{(6a^2-24b^2)^2}$

c) $\frac{(4a^2-9b^2)^2}{(3a^2-2ab)^2} \cdot \left(\frac{9a^2-4b^2}{2a^2+3ab}\right)^2$

d) $\left(\frac{2xb^3}{3ya^3}\right)^3 \cdot \left(\frac{15x^2a^3}{8y^3b}\right)^2 : \left(\frac{25x^3b^3}{12y^4a}\right)^2$

3.4. a) $\frac{27x^{-5} \cdot y^{-6} \cdot z^{-1}}{45x^{-4} \cdot y^{-5} \cdot z^0} \cdot \frac{49x^{-2} \cdot y^{-3} \cdot z^{-4}}{42x^{-3} \cdot y^{-4} \cdot z^{-3}}$

b) $\frac{a^{-2} \cdot x^{-4} \cdot y^{-6}}{b^3 \cdot c^{-4} \cdot z^{-5}} : \frac{a^{-3} \cdot b^{-5} \cdot x^{-3}}{c^{-5} \cdot y^6 \cdot z^{-7}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

c) $\dfrac{(ax-ay)^m \cdot (3bx+3by)^n}{(cx^2-cy^2)^{m+n}}$

d) $\left(\dfrac{(x+y)^{3a-4}}{x^{a-1}y^2} : \dfrac{y^{2a-5}}{x^{4a-3}(x+y)^{3-2a}}\right)\dfrac{x^{4-3a}y^{3a-6}}{(x+y)^{a-2}}$

۴ . د کومو شرليطو لاندې کيدی شي لاندې عددونه د يوه مربع – يا څلورې ريښه وي؟

4.1. a) $+a, -a$ b) $+a^2, -a^2$ c) $+a^3, -a^3$ d) ab

4.2. a) $+(a-b), -(a-b)$ b) $+(a-b)^2, -(a-b)^2$ c) a^2-b^2 d) a^2+b^2

۵ - د ريښو جمعه او تفريق)زياتوناو کمون)

5.1. a) $6\sqrt{27}+2\sqrt{108}-7\sqrt{75}$

b) $\sqrt{50}+\sqrt{8}-\sqrt{72}+\sqrt{18}$

c) $3\sqrt[4]{256}-4\sqrt{49}-7\sqrt[3]{27}+2\sqrt[5]{32}$

d) $3\sqrt{50}-\sqrt{98}+4\sqrt{288}+14\sqrt{162}-\sqrt{25-9}\cdot\sqrt{2}$

5.2. a) $\dfrac{x(2r^2-4x^2)}{\sqrt{r^2-x^2}}-8x\sqrt{r^2-x^2}$

b) $\dfrac{r(4r^2-3rH)}{\sqrt{4r^2-2rH}}-3r\sqrt{4r^2-2rH}$

c) $2\sqrt{(x-k)^2+x^2}-\dfrac{(2x-k)^2}{\sqrt{2x^2-2kx+k^2}}$

d) $\dfrac{h^2+\left(c-\frac{c}{2}\right)^2-\left(c+\frac{c}{2}\right)^2}{\sqrt{h^2+\left(c-\frac{c}{2}\right)^2}}-\dfrac{h^2+2\cdot\frac{c^2}{4}}{\sqrt{h^2+\frac{c^2}{4}}}$

5.3. a) $\sqrt{1-x}+\dfrac{x+1}{2\sqrt{1-x}}$

b) $\dfrac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{3x^2}{(1-x^2)^2\sqrt{1-x^2}}$

c) $\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2-x^2}+\dfrac{x^2}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$

d) $\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}+\dfrac{x}{(x+\sqrt{x^2+a^2})\cdot(\sqrt{x^2+a^2})}$

۶ – د ريښو يا جذرونو ضرب او وېش

(c) ketabton.com: The Digital Library

6.1. a) $\sqrt{3\cdot 7}\cdot\sqrt{3\cdot 5}\cdot\sqrt{5\cdot 7}$ c) $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{4}}:\sqrt{\frac{a^2-b^2}{4}}$

b) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$ d) $\sqrt{\frac{a^2+b^2+2ab}{2}}\cdot\sqrt{\frac{b^2-2ab+a^2}{2}}$

6.2. a) $(3-\sqrt{2})(2+3\sqrt{2})$ c) $\sqrt{12x^2-12x}\cdot\sqrt{3x^2-3}$

b) $\sqrt{8+2\sqrt{10}}\cdot\sqrt{8-2\sqrt{10}}$ d) $\sqrt{a^2+a}\cdot\sqrt{ab+b}$

6.3. a) $\left(4^{-\frac{1}{4}}+\left(\frac{1}{2^{-\frac{3}{2}}}\right)^{-\frac{4}{3}}\right)\cdot\left(4^{-0,25}-(2\sqrt{2})^{-\frac{4}{3}}\right)$ c) $\frac{\sqrt{a+c}+\sqrt{b+c}}{\sqrt{a+c}-\sqrt{b+c}}$

b) $\sqrt{6x^2-6}\cdot\sqrt{\frac{3x-3}{2x+2}}$ d) $\frac{\sqrt{(a-b)^2+a^2+b^2-2ab}}{\sqrt{2(a^2+b^2)(a^2-b^2)}}$

۷ – د توان او ریښي ریښه وېستنه (حلونه)

.1. a) $\sqrt{0,04^5}$ b) $\sqrt[3]{4200}$ c) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{8}}$ d) $\sqrt{\sqrt[4]{256}}$

.2. a) $\sqrt[2n-1]{a^{4n^2-1}}$ c) $\sqrt{\sqrt[3]{a^6\cdot b^{12}}}$

b) $\sqrt[4]{a^2\cdot\sqrt[3]{a^2}}$ d) $\sqrt[3]{\sqrt{a^6\cdot b^8}}$

.3. a) $\sqrt[3]{(a-b)^3(a+b)^4}$ c) $\frac{4\pi r^3-8\pi r^3}{\sqrt{\left(4r^2-2r\cdot\frac{4}{3}\cdot r\right)^3}}$

b) $\sqrt{\frac{1}{8}a^2+\sqrt{\left(\frac{a^2}{8}\right)^2+\frac{a^4}{8}}}$ d) $\pm\sqrt{\left(\frac{x_0y_1^2}{y_1^2-y_2^2}\right)^2-\frac{y_1^2x_0^2}{y_1^2-y_2^2}}-\frac{x_0y_1^2}{y_1^2-y_2^2}$

.4. a) $\sqrt[4]{\frac{a}{b}\cdot\sqrt[3]{\frac{b^2}{a}\cdot\sqrt{\frac{1}{a^2}}}}$ c) $\sqrt{a\cdot\sqrt[8]{a^5\cdot\sqrt[3]{a}}}:\sqrt[4]{a\cdot\sqrt[3]{a^2\cdot\sqrt{a}}}$

b) $\sqrt[3]{a^3\cdot\sqrt{a^2\cdot\sqrt[5]{a^8\cdot\sqrt[4]{a^3}}}}$ d) $\frac{\sqrt[6]{a^5\cdot\sqrt[3]{a^2}}}{\sqrt[3]{a^2\cdot\sqrt[6]{a^4}}}:\frac{\sqrt{a^3\cdot\sqrt[9]{a^7}}}{\sqrt[9]{a^7\cdot\sqrt{a}}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۸ – لاندې ماتونه یا کسرونه داسې شکل ته واړوئ، چې مخرج ریښه نه وي.

8.1. a) $\frac{3}{4\sqrt{3}}$ b) $\frac{4}{\sqrt[3]{2}}$ c) $\frac{10}{3\sqrt{8}}$ d) $\frac{15}{\sqrt[11]{243}}$

8.2. a) $\frac{a^2}{\sqrt[3]{a^5}}$ b) $\frac{1}{\sqrt[9]{x^{13}}}$ c) $\frac{y^2x}{\sqrt{x^3y}}$ d) $\frac{ab}{\sqrt[7]{a^2b^3}}$

8.3. a) $\frac{13}{7-\sqrt{10}}$ b) $\frac{6}{\sqrt{5}+1}$ c) $\frac{15}{3-\sqrt{6}}$ d) $\frac{16}{3+\sqrt{5}}$

8.4. a) $\frac{8}{3\sqrt{2}+4}$ b) $\frac{17}{3\sqrt{5}-2\sqrt{7}}$ c) $\frac{6}{\sqrt{8}+\sqrt{5}}$ d) $\frac{6}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$

8.5. a) $\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$ b) $\frac{3(\sqrt{5}-\sqrt{8})}{\sqrt{8}+\sqrt{5}}$ c) $\frac{3+\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ d) $\frac{4\sqrt{10}-7\sqrt{3}}{\sqrt{10}-\sqrt{3}}$

8.6. a) $\frac{7\sqrt{5}+4\sqrt{3}}{5\sqrt{3}+2\sqrt{5}}$ c) $\frac{\sqrt{3-\sqrt{2}}}{\sqrt{3+\sqrt{2}}}$

b) $\frac{2\sqrt{6}+3\sqrt{5}}{2\sqrt{6}-3\sqrt{5}}$ d) $\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵ ۰ لوګاريتم يا لوګاريتموس Logarithmus

په دې برخه کې د لوکاريتم کلمه ترڅېرنې لاندې نيسو او د لوګاريتم د قوانينود استعمال اسانتياوې، چې په کره يا په کلکه يې په نيونو (فرضيو) پاملرنه شوي وي څېړو ۰

۵ ۰ ۱ د لوګاريتم کلمه

موږ په دې برخه کې لوګاريتم تر څېړنې لاندې نيسو، د لوګاريتم د قوانينو اسانتياوې څېړو ، چې په نيونو يا فرضيو کې بايد پوره پاملرنه شوې وي ۰د لوګاريتم $c = \log_b a$ پيژند لپاره د يوه زياتيز - يا مثبت عدد a يوه زياتيز - يا مثبت عدد b ته چې $b \neq 1$ او د لوګاريتم بنسټ بلل کيږي له لاندې برابرون يا مساوات څخه مخ ته ځو د په خوښه c لپاره

$$b^c = a \; ; a > 0; b > 0; b \neq 1 \qquad (5,1)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که a او b له مخه ورکړ شوي وي، نو د برخی ٤ سره یواځنی ټاکلی دی۰ که a او b له مخه ورکړشوي وي، نودپورتنیو نیونو سره یواځنی رییل ګڼc شته دی، چې برابرون(4,1) پوره کوي۰ دې ته د a لوګاریتم وایود b پر بنسټ:

پیژند ٥ ۰ ١:

د ریلل مثبت ګڼ a لوګاریتم لاندې، چې له یوه سره نابرابر بنسټ bولري، هغه ریلل ګڼ c پوهیږو , له کوم سره، چې bد هغه په توان یا پوتنځ کړو او ګڼ a ترې لاس ته راشي۰ لکه (5,1)

د دې لپاره لیکو:

$$c = \log_b a; a > 0; b > 0; b \neq 1, ...(5,2)$$

(5,1) او (٢ ۰ ٥) یو ارزښت لري د دې لپاره، چې د لوګاریتم قوانین له (5,2) سره سم لاس ته راوړو، نو د(5,1) ته بیرته ورګرځو۰ دا به په لاندې بیلګه کې روښانه شي،په کوم کې چې له a,b,c څخه تل دوه ګڼونه ورکړ شوي دي

بیلګه ٥ ۰ ١

٥ ۰ ١ الف : له $2^x = 16$ لرو x=4 ، ځکه، چې $16 = 2^4$

ب له $3^x = \frac{1}{9}$ څخه لرو x=-2 ، ځکه چې $3^{-2} = 1/3^2 = 1/9 = \frac{1}{9}$

٥ ۰ ١ ۰ ٢ الف:$2 = \log_x 36$ د $x^2=36$ سره یو ارزښت لري، نو لروx=6

ب : $-6 = \log_x \frac{1}{36}$ د $x^{-6} = \frac{1}{64} = \frac{1}{2^6} = 2^{-6}$ سره یو ارزښت لري،

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو لرو x = 2

۵ ۰ ۱ ۰ ۳ الف : $x=\log_5 125$ د $5^x=125=5^3$ سره، یوارزښت لري،

نو x = 3

ب: $x=\log_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{16})$ د $(\frac{1}{2})^x=1/16=(1/2)^4$

سره یو ارزښت لري، نو لرو x= 4

۳ ۰ ۱ ٤ الف $5=\log_3 x$ د $3^5=x$ سره یو ارزښت لري، نو x=243

ب : $-5=\log_2 x$ د $2^{-5}=x$ سره یو ارزښت لري، نو لرو $x=\frac{1}{2^5}=\frac{1}{32}$

۵ ۰ ۱ ۰ ۵ الف $2=\log_x(-6)$ تعریف نه دی یا پیژند نه لري۰

ب : $x=\log_{-5}125$ پیژند نه لري یا تعریف نه دی

پ: $\log_1 x$ پیژند یا تعریف نه دی

له (5,1) او(5,2) څخه لاس ته راځي

$a=b^{\log a}$,...(5,3)

$\log_b 1=0, \log_b b=1$,............................(5,4)

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ځانګړي بنسټ لپاره لاندې سومبول کارولکيږي

$b = e = 2,71828 \Leftrightarrow b = 10$

$$\log_{10} a = \log a, \log_e a = \ln a, ...(5,5)$$

د lga لوګاريم ته لسيز لوګاريتم وايي او lna ته پيداينتي يا طبيعي لوګاريتم وايي(e وروسته ځيړو) زيات وخت د لشميز لوګاريتم لپره داسې هم ليکو:

$$c = \log a \qquad (5,6)$$

که سومبولlog ځو واره رامنځ ته شي، نو په پام کې دې وي، چې په خوښه، مګر همغه بنسټ بايد وکارول شي۰

۵ ۰ ۲ د لوګاريتم قوانين

د لوګاريتم د پيژند سره سم د (5,1) او(5,2) له مخې کيدی شي د پوتنځ د قوانينو(5,3) تر(5,7) په مرسته لاندې لوګاريتم قوانين رابيل کړای شو، کوم چې په خوښه مګر همغه لوګاريتم بنسټ b |= 0 ، b>0 او د زياتيز(مثبت) x> 0 , y > 0 لپاره باور لري

$$\log(x.y) = \log x + \log y, ...(5,7)$$

$$\log \frac{x}{y} = \log x - loy, ...(5,8)$$

$$\log x^a = a \log x, a \in R, ...(5,9)$$

$$\log \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log, n = 1, 2, ..., ...(5,10$$

د پوتنځ قوانينو له مخې د دې فرمولونو راوستل يو د وړانديز وړ د لوګاريتم ژورې ځيرنې لپاره تمرين ښايي

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بیلګې په توګه له (۷ ، ۵) همداسې

$$\log_b(x.y) = \log_b x + \log_b y, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5,11)$$

ځکه په لاندې ډول او له (5,2)،(5,1) ځکه لرو

$$c_1 = \log \quad x, c_2 = \log_b y, c = \log_b(x+y), \ldots\ldots\ldots\ldots(5,12)$$

د لاندې سره یو ارزښت لري

$$b^{c_1} = x, b^{c_2} = y, b^c = x.y, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5,13)$$

له(5,13) او د پوتنځ قانون(4, 2) پر بنسټ لرو :

$$b^c = x.y = b^{c_1}.b^{c_2} = b, \Rightarrow c = c_1 + c_2, \ldots\ldots\ldots\ldots(5,14)$$

او له (5,11) همداسې د(5,7) ښوونه د (5,12) له امله د لوګاریتم د (5,7) تر(5,10)

قوانینو کیدی شي د پیچلي لوګاریتم له افادې ځکه د لوګاریتم ساده بنسټیزې افادې ته بیرته راوګرځو اوپه ځټ،

بیلګه ۵ ، ۲

$$\log \frac{2\sqrt{a+b}\,a^3 b^2}{\sqrt[3]{c}(a+c)^2}$$
$$= \log 2 + \frac{1}{2}\log(a+b) + 3\log a + 2\log b - \frac{1}{3}\log c - 2\log(a+c)$$

بیلګه ۵ ، ۳

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\log(a+b)+2\log(a-b)-\frac{1}{2}\log(a^2-b^2)$$
$$=\log\frac{(a+b)(a-b)}{\sqrt{a^2-b^2}}=\log\frac{(a^2-b^2)(a-b)}{\sqrt{a^2-b^2}}=\log[(a-b)\sqrt{a^2-b^2}]$$

اوس باید وښایو، چې تر کومو شرایطو لاندې دا اړیکې باور لري۰

په بیلګه ۵ ۰ ۲ کې په کینې اړخ کې لوګاریتم ځاي لري، چې د ټولو a,b,c تعریف دی او لاندې برابرون پوره کوي یا ډکوي:

وي دې $a+b>0$ (د دې لپاره ، چې ریښه تعریف وي او صفر نه شي، ځکه، چې بیا لوګاریتم اوبی یا حل نه لري۰

وي دې $c>0$ (د دې لپاره چې ریښه تعریف او ماتلاندې صفر نه شي)

وي دې $a+b\neq 0$ (د دې لپاره، چې لوګاریتم تعریف وي)

وي دې $b\neq 0, a>0$ (د دې لپاره، لوګاریتم تعریف وي)
د کینې اړخ لوګاریتم په ځانګړي ډول د $a = 2$. $b = -1$, $c = 1$ لپاره تعریف دی۰ په ښي اړخ کې ولاړ برابرون شکلبدلون یا څیره بدلون ریښتونی کیدی نه شي، ځکه چې Log بې ځایه دی ۰ د دې لپاره، چې د څیرې بدلون ریښتونوالی ممکن شي، باید د $b\neq 0$ پر ځاي په ټینګه یا کره b>0, وغوښتل شي ۰

په بیلګه۵ ۰ ۳ کې کینه خوا یواځې هلتهموخه وره ده، چې وي:

$$a+b>0,\quad a-b>0$$

نو بیا $a^2-b^2 = (a+b)(a-b)>0$ او په دې بیلګ کې رامنځ ته شوي ټول لوګاریتمونه هم تعریف دي۰ دا اړیکې د ټولو a ، bلپاره هم باور لري،د کومو لپاره چېپورته نابرابرون ډک وي۰ دا کیدی شي $a>-b$, $a>b$ له امله هم و $a>|b|$ ته راغوند شي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

دې --

ته دې هم ګوته نیولې وي، چې لوګاریتم په یوه بنسټ b یوه بل لوګاریتم یوه په خوښه بل بنسټd ته د شمیراوړون د شمیرنې اړول کیدی شي $(b > 0, b \neq 1, d > 0, d \neq 1, a > 0)$

د(۵،۳) له مخې باور لري $a = b^{\log_b a}$

د دې برابرون لوګاریتم نیول و بنسټd ته لرو:

د $\log_d a = \log_d b^{\log_b a} = (\log_b a)(\log_d b), ...(5,15)$

لسیز لوګاریتم اړول په پیداینتي یا طبیعي لوګاریتم او په ځټ لپاره لیکوb=10, d = e همداسې b = e , d = 10 او لاس ته راځي :

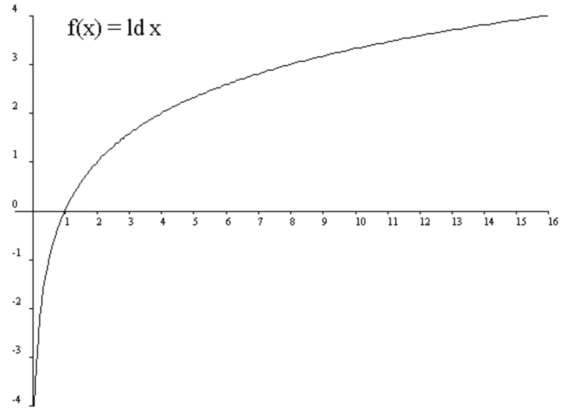
Lga = (lge)(lna); …………………(16)

Lna=(ln10)(lga) = 2,30429lga;……(17)

$\lg a = (\lg e)(\ln a), ...(5,16)$

$\ln a (\ln 10)(\lg a) = 2,30429 \lg a, ...(5,17)$

د لوګاریتم فنکشن یا بلواک او دیاګرام یې



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$b^{\log_b n} = n$$

$$\log_b b^x = x$$

تکرار د نورو تورو سره

د یوه ځل لوګاریتم

$$\log_b (n \cdot m) = \log_b n + \log_b m$$

$$\log_b \frac{n}{m} = \log_b n - \log_b m$$

د پوتنځ لوګاریتم

$$\log_b n^m = m \cdot \log_b n$$

د ریښې لوګاریتم

$$\log_b \sqrt[m]{n} = \frac{1}{m} \log_b n$$

د لوګاریتم یو په بل بدلیدل

$$\log_b n = \log_b d \cdot \log_d n$$

د کوما یا لسمیزمات نخښهٔ وروسته بینارځایونه ó او لسمیزسیستم

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

	binär	dezimal
2^{-1}	0,1	0,5
2^{-2}	0,01	0,25
2^{-3}	0,001	0,125
2^{-4}	0,0001	0,062.5
2^{-5}	0,0000.1	0,031.25
2^{-6}	0,0000.01	0,015.625
2^{-7}	0,0000.001	0,007.812.5
2^{-8}	0,0000.0001	0,003.906.25
2^{-9}	0,0000.0000.1	0,001.953.125

۵ ۰ ۳ ټولګه

لوګاریمتم د اکسپوننشل فنکشن یا بلواک په څېړ بلواک دی

$x = \log_b n \iff b^x = n$

د $a,b,x,y,d, > 0$ رییل ګڼونواو $a, b, d \neq 1$ لپاره باور لري:

$$c = \log_b a \Leftrightarrow b^c = a, b^{\log_b a} = a, \log_b 1 = 0, \log_b b = 1, b \neq 1$$

$$\log_{10} a = \lg a, \log_e a = \ln a, e = 2,71828.....$$

$$\log(x.y) = lox + \log y, \log \frac{x}{y} = lodx - \log y,$$

$$\log x^{\alpha} = \alpha, \alpha \in R, \log \sqrt[n]{x} \frac{1}{n} \log x, n = 1,2,3,....$$

$$\log_b a = (lod_b d)(.(\log_d a),$$

$$\lg a = (\lg e).(\ln a) = 0,43429 \ln a, \ln a = (\ln 10).(\lg a) = 2,30259 \lg a$$

۵ . ۴ – تمرینونه

۱ . د د لوګاریتم تعریف

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلوګاریتم تعرف وکاروئ یا استعمالکړئ او x وټاکئ.

1.1. a) $\log_7 49 = x$ b) $\log_3 1 = x$ c) $\log_5 \sqrt[6]{25} = x$ d) $\log_{0,5} \frac{1}{32} = x$

1.2. a) $\lg \frac{1}{10} = x$ b) $\lg 10^{-\frac{1}{3}} = x$ c) $\lg \sqrt[3]{100} = x$ d) $\lg \sqrt{\frac{1}{10}} = x$

1.3. a) $\log_x 8 = 3$ b) $\log_x 25 = 2$ c) $\log_x 243 = 5$ d) $\log_x 1024 = 10$

1.4. a) $\log_x 4 = \frac{1}{2}$ b) $\log_x \frac{1}{5} = -1$ c) $\log_x \sqrt{10} = \frac{1}{2}$ d) $\log_x \frac{1}{32} = -5$

1.5. a) $4^x = 64$ b) $64^x = 64$ c) $9^x = 3$ d) $8^x = 4$

1.6. a) $2^x = \frac{1}{8}$ b) $3^x = \frac{1}{27}$ c) $5^x = 0,04$ d) $10^x = 0,0001$

1.7. a) $\lg x = 3$ b) $\lg x = -2$ c) $\log_2 x = 6$ d) $\log_{0,5} x = 4$

1.8. a) $\ln x = 2$ b) $\ln x = \frac{1}{2}$ c) $\ln x = -1$ d) $\ln x = 0$

۲ . د لوګاریتم قوانینو استعمال دلوګاریتم
قوانیناستعمال کړئ دو د a,b,c,d,m,n باور لرلو ورشو کره وټاکئ.

2.1. a) $\lg 2^4$ b) $\lg \left(\frac{1}{2}\right)^3$ c) $\lg \sqrt{10}$ d) $\lg\sqrt{\frac{1}{100}}$

2.2. a) $\ln \left(\sqrt{e}\right)^3$ b) $\ln\sqrt{e^{3(\ln e^2+\ln e^6)}}$ c) $\ln \sqrt{\frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}}$ d) $\ln \sqrt{\frac{5e}{e^{\ln 5}}}$

2.3. a) $\lg \sqrt[7]{a^5}$ b) $\lg \frac{a^2b^3}{c}$ c) $\lg \sqrt[3]{\frac{ac^2}{bd}}$ d) $\lg \frac{a^2\sqrt{b}}{\sqrt{a^5b^3}}$

2.4. a) $\lg (a^4 - b^4)$ b) $\lg (a^2 + b^2)^2$ c) $\lg \frac{(a^2 - b^2)^2}{a^4 - b^4}$ d) $\lg \frac{a^2 - b^2}{(a^2 + b^2)^2}$

2.5. a) $\log \sqrt{\frac{1-a}{1+a}}$ c) $\ln \frac{\sqrt{a} \cdot b^{-2}}{\sqrt[3]{c} \cdot d^{-3}}$

b) $\lg \sqrt[n+1]{a^n \cdot \sqrt[m]{b^{-1}}}$ d) $\log 2 \sqrt{3 \cdot \sqrt[3]{a^2 b \cdot \sqrt[4]{ac^2}}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2.6. a) $\frac{1}{3}\log(a+b)+\frac{1}{3}\log(a-b)^{-1}$

b) $\lg a + n\lg(a+b) + n\lg(a-b)$

c) $\lg a - \frac{1}{2}\lg b + \frac{4}{3}\lg c$

d) $\frac{1}{3}\lg(a^2-b^2)-\frac{1}{2}\lg(a-b)-\frac{1}{2}\lg(a+b)$

2.7. a) $\frac{1}{3}\lg a+\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{2}\lg(a+b)+\frac{1}{2}\lg(a-b)-\lg a-\lg b\right\}$

b) $\frac{1}{2}\lg(a^2+b^2)-\frac{1}{3}\{\lg(a-b)+\lg(a+b)\}$

c) $\frac{1}{3}(\lg a+3\lg b)-\frac{1}{2}(4\lg c-2\lg d)$

d) $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{b}{a}+\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-1}\right)-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{b-\sqrt{b^2-a^2}}+\ln\sqrt{a}$

۳ . د لوګاريتم بنسټيز فرمولونو استعمال.

x وشميرئ.

3.1. a) $x = \lg 5 \cdot \lg 20 + (\lg 2)^2$

b) $x = 2 \cdot 10^{2\lg 2}$

c) $x = 3 \cdot 10^{-2\lg 3}$

d) $x = \left(100^{\frac{1}{2}\lg 49}\right)^{\frac{1}{2}}$

3.2. a) $x = \sqrt{10^{2+\lg 9}}$

b) $x = \sqrt[3]{10^{4-\frac{1}{2}\lg 100}}$

c) $x = \sqrt[3]{10^{\frac{1}{2}(\lg 2+\lg 32)}}$

d) $x = \sqrt{\sqrt{10}^{\lg 16}}$

3.3. a) $x = \ln\frac{7,63}{\sqrt{e^3}}$

b) $x = \ln\frac{0,23}{2e^2}$

c) $x = \left\{\left(\sqrt[3]{e}\right)^2\right\}^{\ln 8}$

d) $x = \left(\sqrt{e}\right)^{3\ln 5}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

٦ ۰ ګونومتري (کونجکچ یا مثلثات (Gonometry

دا برخه هم د ښوونځي له امله یو تکراري خوي لري. ددې وظیفه به داوي چې د کونجکچ چېکتیاته (ګونومتري شمیرنی ته) په ګراد- او لینده کچ، دکونجفنکشن په استعمال د ولاړکونجیز - او عمومي درېګوډیود تریګونومتري فرمولونو په استعمال د تریګونومتري افادو په څیره بدلون ته پر مختګ ورکړي یا پر مخ بوزي. غواړم چې د بنسټیزې هندسي کلیمی او قوانین مو د هرڅه له مخه مخ ته پراته وي . خو سره له دې به هم ددې کتاب لوستونکی د بنسټیزې هندسی سره بلد وي ۰ زه به کوښښ وکړم چې ځنی هندسي کلیمی،کم له کمه په څیره کی ګرانو لوستونکو ته، په مناسب ځاي کی وړاندې کړم یا بهتره په پښتو ونوموم .

۱ ۰ ٦ بنسټیزه هندسه

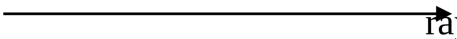
٦ . ۱ . ۱ ټکی او کرښه point (stright) line

ټکی او کرښه د بنسټیزې هندسی مهمی بنسټیزې کلیمی دي. دا ابسترکتی(خیالي، فکري ، نه لیدیدونکی) کلیمي په خورا ټیك راوړوندود هم نه شي تعریف کیدی، مګر ددوي ترمنځ موجودې اړیکي کیدی شي په شمیرنه کی په خورا زیاتو ډولونو استعمال شي، ٦

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ . ۴ په چی لکه څنګه شي ګرځول وګرځول لیدوړ کرښه او ټکی چی کیږي هڅه هم دې له سره اخیستل شوي. - امه برخه کی پېښ شوي. دلته کرښې په g ښوول شوي او غشی یی ناپای پراخوالی په ګوته کوي. دا د غشي انځورونه دکرښی په انځورونه کی پریښول کیږي یعني نه انځوریږي، که دا مو و ناریښتیاو ته ونه هڅوي ۰ ټکی کیدی شي د دوه کرښو غوڅځای په څیر ونیوله شي) څیرې په غور وګورئ

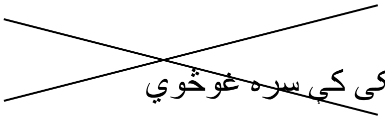
وړانګه ray  A

کرښه g

(stright line

بند کرښه یا ټوټه کرښه Line segment

A B



دوه کرښې په ټکی کې سره غوڅوي

د بیلګي په توګه لاندې ویناوې باور یا صدق لري

- ددوه ټکو له لارې یوه کرښه تاکل کیږي(پورته څیره وګورئ)، چی دا کرښه دا ټکي خوندي ساتي یا پخپل بر کی لري .

- دوه ناغبرګي او په یوه هواره کی پرتی کرښی یو بل ټیك په یوه ټکي کی سره غوڅوي (پورته څیرو کې کتل کیږي)

یوه وړانګه s_1 له یوې لور په یوه ټکي A بنده کرښبرخه ده) (او یوه پایکرښه له دوه ټکو A او B بنده یا راګیر کرښه ده)

(c) ketabton.com: The Digital Library

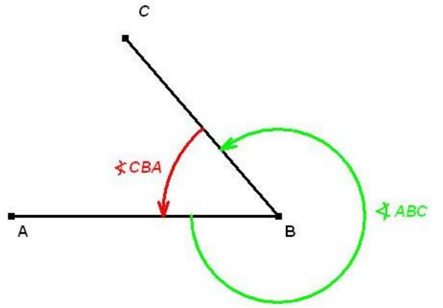
----

٦ . ١ . ٢ کونج angle یا زاویه

که یوه وړانګه s_1 د خپل پیلځاي څخه په S و خپل اخر ځاي s_2 (ځیره ۴ . ۲الف) ته یووړه شي، نو دا وهل شوې هواره دننني هواره، s_1 او s_2 پښنی او په همدې ډول د S کونج α (الفا) ککره بلل کیږي.

که ځرخون د ساعت نخښي په څټ یا مخامخ وې نو دا ځرخونلورمثبت یا زیاتیزه او همداسې کونج مثبت یا ز یاتیز کونج بولو او بل ډول ځرخونلور یې منفي- یا کمیز کونج بلل کیږي.

په مخامخ ه کې سور په نخښه شوی کونج ننوتی او زرغون په نخښه شوی کونج وتلی کونج دی

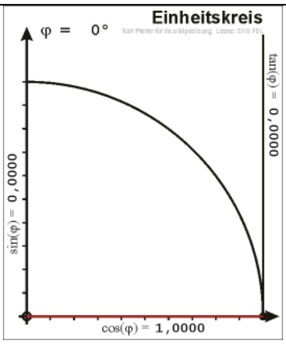


کیدی شي چی یو کونج x په ګراد اندازه شي

$$x = a° \qquad (6.1)$$

په داسې حال کې چې ولاړکونج، کوم چې یو په بل ولاړې کرښې $g_1 \wedge g_2$ (او ته دې پام وي) یې جوړوي، له 90° سره مساوي وښایو(لاندې ځیره ، که نورېځیرې و نه کښل شوې) . کیدی شي چی کونج x (ایکس دلته د الفا په ځاي دی، توري پروانه لري، چې کوم وي)په لینده اندازه هم ورکړ شي

$$x = b \qquad (6.2)$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورته یونګردۍ کې ګورو، چې هر ډول کوجونه کښل او ټاکل کیدی شي

په دې ډول ټاکل شوی ګردۍ لینده په وړانګه(شعاع) ویشل کیږي. له دې لارې x د یوه بې نومه ګڼ په ځیر لاس ته راځي، چې د ډیرو ګټلو لپاره ګټور دئ. یوه په لینده اندازه ورکړ شوی کونج x په یوې یوونګردۍ) r = 1 (کی انځوروړ دی، چیرته چی دا د اړوند ګردیلیندې اوږدوالی ښاي (ځیره په پورته کې کښل شوې)

په دې پسی یا ددې په تعقیب یو د °360 کونج د یوونګردۍ چاپیری) محیط(په ګوته کوي . له دې امله د ګرادGradmass (درجکچ (او)ګردي-) لیندې اندازې یا لیندیکچ یو په بل بدلون ممکن کیږي.

$$a^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} b = 57,296^\circ b, b = \frac{\pi}{180^\circ} a^\circ = 0,017453 a, ...(4,3)$$

پام : په پورته ځیره کې هر ډول کونجونه که له ۳٦۰ درجو زیات هم وي کره کیدی ، که ځیرې روښانه نه وو لیکل شوي، چې دا شپږمه برخه ده یا ٤ – مه برخه لیکل شوي وي،نو هغه دې ،نو ٤ دې په ٦ بدل شي٠.

د لاندې بیلګو له لارې دې د کونجورکولو یو څو امکاناته ونومول شي او په همدې ډول دې د »شمیراوړون اړیکی« یاپه بنه توګه د شمیر یو په بل بدلون اړیکی وڅیړل شي.

یادونه : زما شمیرونی یو ډول پرابلم لري او هغه دا چې د دقیقې او ثانیې نخښې هغهسې، چې ورسره بلد یو نه کاږی، دا به راته ګران لوتونکي وبخښي٠

بیلګه ٦. ١ :

کونج “a = 47°12'36 دې په لینده اندازه واړول شي. موږ لمړی کونج په دځیمالو یا لسیزو برخو اړوو، دا په دې مانا چی ورکړ شوې دقیقې او ثانیې دې په ورته لسیزمات افاده شي:

12’=720“

720 = '12 "

(c) ketabton.com: The Digital Library

پس په ټولیزه توګه $720'+36'' = 756''$ له دې لاس ته راځی

$1'=(1/3600)°$ (<=)

له دې وروسته په همدې توګه $756.(1/3600)°=0,21°$

له دې لاس ته راځي : $a=47°12'36''=47,21°$

په عمومي توګه باور لري

$$\alpha' = (\frac{\alpha}{60})°, \beta'' = (\frac{\beta}{3600})$$

د(٦ . ٣) پسی باور لري $b=0.017453.47,21=0,826$

دلته ځیرې راځي، خو د دې ځیرو په ځاي به موږ په پورته ځیرو بسیا وکړو، دا چې موږ تراوسه د لږ څه ځمککچ سره بلد یو (د دې لپاره دې زما د ځمککچ کتاب وکتل شي)، نو دا کومې ستونځې نه رامنځ ته کوي۰

بیلګه ٦ . ٢ :

کونج $\frac{\pi}{7}$ دې په درجه کچ یا -اندازه) لسیز او سکساګسیمال (لاتین :یوناني: د بابلیانو په ۶۰ اباد شوی ګڼیز سیستم(ځاي ارزښت سیستم) ویشنو (برخو) ورکړ شي. د (۳ . ۴) له

مخی لرو

$a° = 57,296°.(3,14/7)=25,701°$ د $0,701°$ اړولو په دقیقو او ثانیو ورکوي

$$0,701° = 0,701.60' = 42,06', \qquad 0,06' = 0,06.60=3,6''$$

پس داسی دی $\frac{\pi}{7} = 25,701° = 25°42'3,6''$

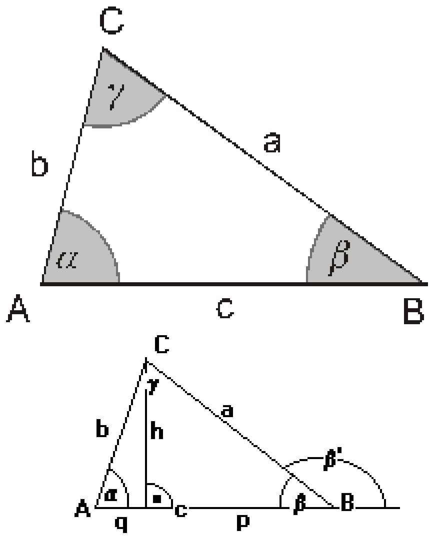
(c) ketabton.com: The Digital Library

دا پورته داسی لوستل کیږي ۲۵ درجي، ۴۲ دقیقي او ۶ ، ۳ ثانیي

۳ . ۱ . ٦   دریګوړی

یادونه: موږ دلته بیا د نومونو(نومه ونو) د ستونځو سره مخامخ کیږو. هغه هواره چی له کرښو راګیر وي دلته له درې کرښو یا هغه هواره، چې ګوړونه ، کونجونه یا ګوټونه ولري، موږ دا ۰۰۰ کونجي یا۰۰۰ ګوټي او یا ۰۰۰ګوړي بولو. ځموږ ژبه او الماني تر یوې ډیرې اندازی په ترکیبي نومونو کی او یا نورو نومونو ډولونوکی یو بل ته ورته دي او په الماني کی هم دې ته ځانګړي نومونه شته. ماته یو کونج چي له دباندې ورته کتل کیږي او د یوې بندې هواره وي ګوړ مناسب ښکاریږي. موږ په ورځنۍ یا مروجه ژبه کی وایو ، چی د هغه کلی په ګوړ کی .... دا تخنیکي هم درست دی، ځکه چی دا هم دلته مات دی یعنی ګوړ دی. که یو کونج له دننه وګورو نو هغی ته موږ تل کونج وییلی. که څوك په یوه ګوټه کی ناست وي نو وايي، چه په هغه کونج کی دلته نو بیا ګوړ نه وايي. ما د کتاب په اوږدو کی لمړی ځل د ټولو لپاره کونج کارولی، که ټول مو همغسی سم یا اصلاح نه کړل ، نو فکر کوم چی د ګرانو لوستونکو به ورته پام وي .

په ټولیزه توګه په یوه سطحه یا هواره کی له پرتو کرښو g2 , g2 , g1 څخه یو مثلث یا دریګوړی جوړیږي، چی ګوړونه یی C . B . A ، اړخونه یی c. b. a او کونجونه یی α, β, γ دي (د مثلث دننه کونجونه یا زا ویې او دباندې ګوړونه دي، چې موږ یط په پښتو کې همداسې بولو)) مخامخ څیرې دې وکتل شي



(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې جملې باور لري چې بې له ښوونې دلته راوړل کیږي

- په دریګوډي کې د کونجونو زیاتون $180°$ درجې دی یا π دئ

- یو دباندنې کونج د په نه پراته دننني کونجونو د زیاتون سره مساوي ده، له دې امله د یوه دریګوډي د دباندنیو کوجونو زیاتون $360°$ یا 2π دی۰

- د یوه دریګوډي د اړخونو نیمي په یوه ټکي کې یو بل سره پري کوي، چې دا په همدې وخت کې د دریګوډي » دروندټکی یا دثقل مرکز « دی. اړخنیمي یو بل په تناسب د۱ : ۲ پرې کوي یا په پښتو:

د اړخونو ځاننیونه یې۱ :۲ ده) په ځیره کې وګورئ) د یوه دریګوډي منځولاړې

یو بل په یوه داسې ټکي کې سره غوڅوي، کوم چې په همدې وخت کې د چاپیر ګردي) هغه ګردئ یا دایره چې دریګوډی په خپل دننه کې نیسي یا بهتره، د دریګوډي خوندیګردئ(منځټکی دئ)۰

د یوه دریګوډی کونجنیمي یو بل په یوه ټکي کې سره پرې کوي، چې دا په همدې وخت کې د دننه ګردئ) ګردئ چې د دریګوډي

په دننه کې ده یا ګردئ یا دایره کې خوندي دریګوډی (منځټکی دئ) لاندې کې یې ځیره شته) د یوه دریګوډي جګی یا د ارتفاع کرښې په یوه ټکی کې سره غوڅوي.) ځیرې ټولې لاندې کتل کیږي

د هوارې ځمککچ کې غوره ټکي دا لاندې دي :او په دوي پورې لاندې ځیرې اړه لري، چې تکرار راځی، خو پروا نه لري۰

د جګیو غوڅټکی Orthocenter **Höhenschnittpunkt** (H),

(c) ketabton.com: The Digital Library

(*U*) **Umkreismittelpunkt** circumcenter ۰د دباندنی- یا په راتاو ګردی منځټکی

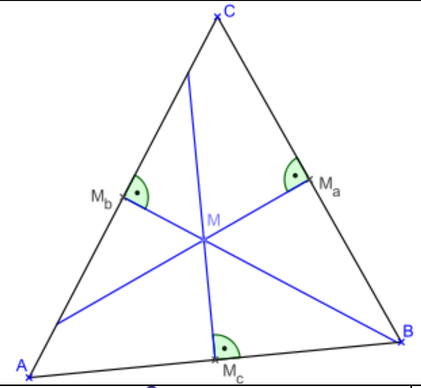
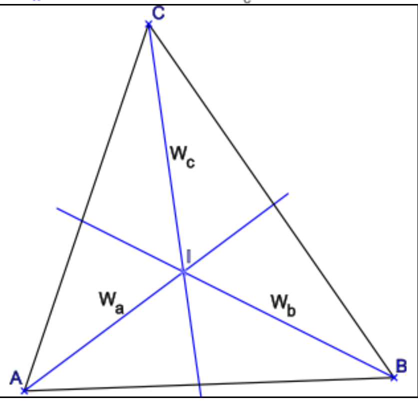
Seitensymmetralen), seid symetry ۰د اړخسیومتریو غوڅټکی

(*I*) **Inkreismittelpunkt** inscribed circle, incircle den ۰د دننه ګردی منځټکی

Winkelsymmetralen r ۰ د کونجسیومتري

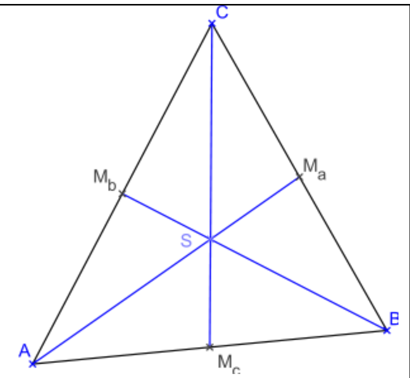
r (*S*) **Schwerpunkt**   centroid   ۰   دروندټکی

Seitenhalbierenden) median ۰اړخنیمی

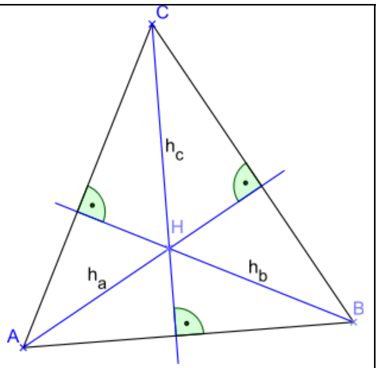
	مخامخ خیره کې مثلث یاد دریګوډي په منځ عمود یا - ولاړې کرښې ښایي
	دامخامخ مثلث هغه کرښې ښایي، چې کونج نیموي او موږ یې کونجنیمی (ناصف الزاویه) بولو (په پورته خیره په نیم اړخ ولاړې کرښې دي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

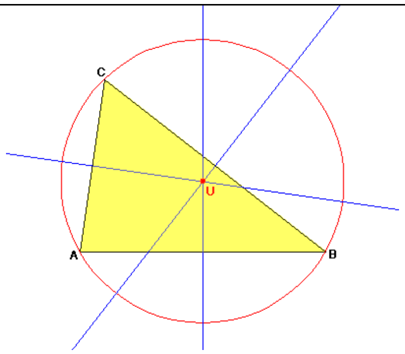
لاندې مثلث کې هغه کرښې دي، چې له کونج څخه اړخ نیموي٠ موږ یې اړخنیمی یا ناصف الاضلاع بولو٠

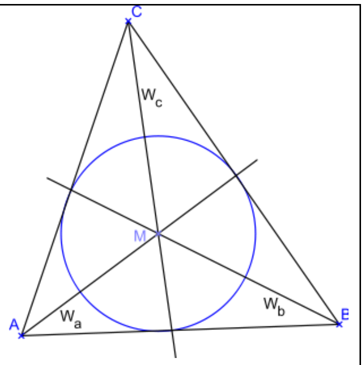


لاندې څېره کې د مثلث هغه کرښې دي، چې له کونج په اړخ ولاړې دي٠ دا د اړخ جګوالی په ګوته کوي، چې ما جګی یا ارتفاع بللي دي٠



په پورته څېره کې کونجنیمی دي ، چې منځ ټکی یې د خونديږ ګردی یا دننه ګردی منځټکی هم دی



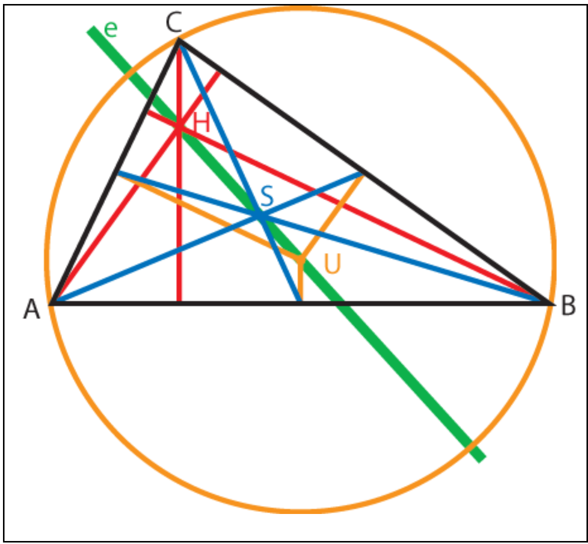


(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورته کینه خیره کې د اړخ په نیمه ولاړې کرښې دي، چې غوښتکی یې د په راتاو ګردی یا چاپېرګردی منځتکی دی٠

دا په یو ډول درې کرښې هرې درې یې په یوه ټکی کې سره غوځوي٠

که د یوې درېګوډې د منځولاړو په غوښتکي یوه ګردی داسی ووهل شي، چې د ګردی کږه درېګوډئ له یوه ګوډ څخه تیره شي، نو دا ګردی د درېګوډې له نورو دوه ګوډونو څخه هم تیرېږي٠ که درېګوډی تیره کونجیزه وي، نو د ګردی منځتکی د درېګوډې په دننه کې پروت دی ، که درېګوډی ولاړکونجیزه وي، نو کونج د ګردی په هیپوتینوز ې یا اوږده اړخ پروت دی (د تالس جمله دې وکتل شي) او که درېګوډی پڅکونجیزه وي، نو منځتکی له درېګوډی دباندې پروت دی٠



که درېګوډی ABC وي ، S دروندتکی، U د چاپیریالګردی منځپکی ، او H د جګیو غوځپکی وي، نو کرښه په لاندې ځاننیونه یا تناسب پراته دي :دا په لاندې خیره کې کتل کیږي ٠

$$\overline{HS} : \overline{SU} = 2 : 1$$

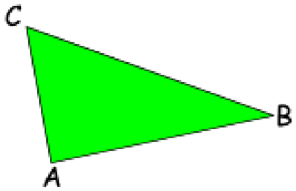
۶ . ۱ . ۴ برابرارزښتوالی او ورته والی یا مشابهت Congruence and Similarity

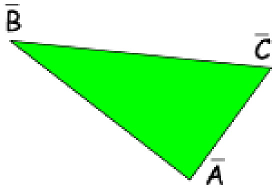
دوه دریګوډې ABC او A'B'C' یو بل سره کونګروانیڅ یا برابر پټووني دي یانې براربارزښته دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

ABC ≡ A'B'C'

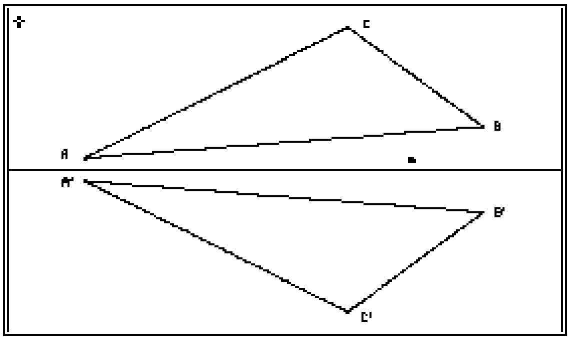
(4.4) که وکښول شي یانې که هرې لورته یووړل شي(وکښول شي) او وڅرخول شي او اینه ونه یا هندارونه یې یو بل پوره پټ کړي یا یو په بل پوره پریوځي (لاندې څیر)





که دریګوډي سره کونګروانیڅ وي، نو باید کم له کمه په دري اصلي ټوټو (اړخونو او کونجونو) کی یو بل سره مساوي وي

په ښټ یی هم باور لري S اړخ او W کونج په ګوته کوي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

جملې: دریکوډي ټیك هلته کونګرواینځ دي چی یو بل سره مساوي شي په

۱ - دريې اړخونو کی SSS

۲ - دوه اړخونو او ددې اړخونو ترمنځ کونج کی SWS

۳ - دوه کوجونو او د لوي اړخ ته مخامخ کونج کی SSW

۴ - یوه اړخ او ددې اړخ دواړه خواو کونجونو کي ،WSW

د دې جملو په څټ هم باور لري، دا په دې مانا چی که دریګوډي په کونګروانځ جملو کی ورکړشوو اصلي برخو کی سره برابر وي، نو دا کونګروانځ دي. د کونګروانځ جملو په بنسټ کیدی شي په ځانګړي توکه دریګوډیجوړښت سرته ورسول شي، کوم چی د کونګروانځ جملو کارونی په څیر لیدل کیدای شي .

د دوه هوارو شکلونو ورته والی (Ähnlichkeit)هلته مخ ته پروت دی، کله چی په همغو یا اړوند دريې کونجونو کی یو بل سره برابر وي او د همغو یا اړوند اړخونو تر منځ یی تناسب یا ځاننیونه موجود وي .

دا جملي هلته هم باور لري که د کونګروانځ له جملو ورته جملو ته ورشو

جمله:

دوه دریګوډي ټیك هلته یو بل ته ورته دي که یو دبل سره برابر وي، په :

۱ - دري اړخونود اوږدوالي ترمنځ ځان نیونی یا تناسب کی

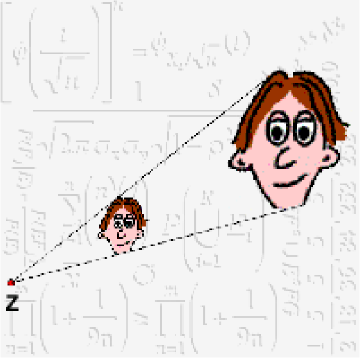
۲ - د دوه اړخونو د اوږدوالي ترمنځ تناسب او ددې اړخونو ترمنځ کونج کی

۳ - د دوه اړخونو او د لوي اړخ مخامخ کونجونو ترمنځ تناسب یا ځاننیونه کی

۴ - دوه مساوي پرتو کونجونو کی

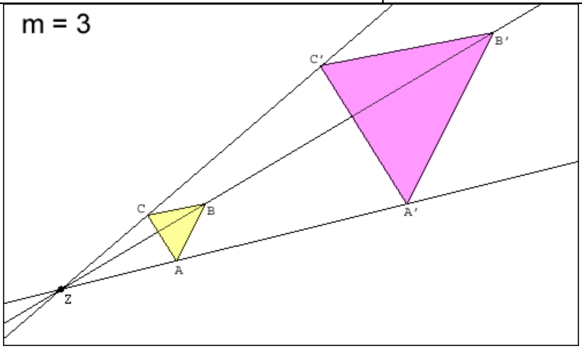
(c) ketabton.com: The Digital Library

دا مخامخ ځيرې ورته دي ، كه د دې دوه کرښو پاى سره په يوه کرښه وتړى او د يوه اړخ د د په خوښه ټکي سره د مخ ته کرښې سره غبګه کرښه وباسى، نو دوه ورته درېګودي لاس ته راځي

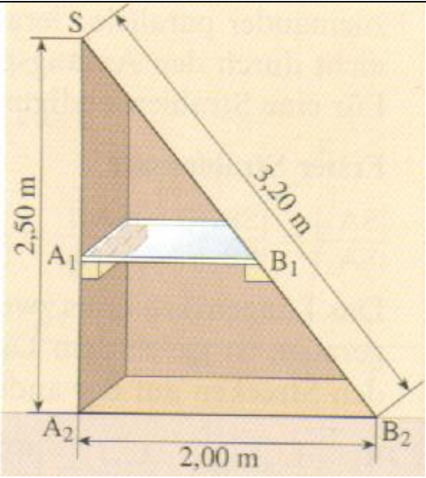


په لاندې ځيره کې كښل شوي دريګودي ورته دي، دا په دې مانا چي باور لري:

$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$



د ورته جملو سره خپلواني جملى د وړانګو جملى دي:



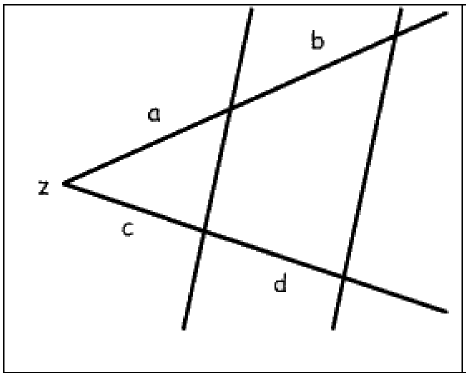
په دې پورته ځيره کې درېګودي يو بل ته ورته دي٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

د وړانګې لومړۍ جمله:

دوه له یوه ټکی وتلي وړانګې ، که له دوه غبرګو کرښو غوڅې شي نو ټوټې يې لاندې اړیکی سره لري۰

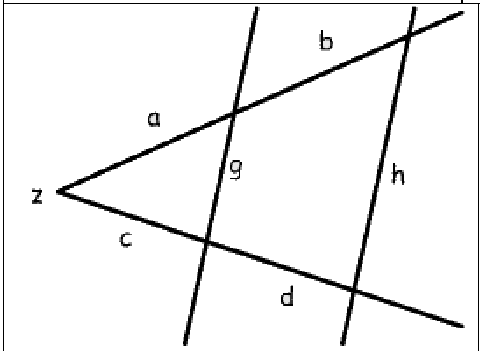
$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \qquad \frac{a}{(a+b)}=\frac{c}{(c+d)}$$



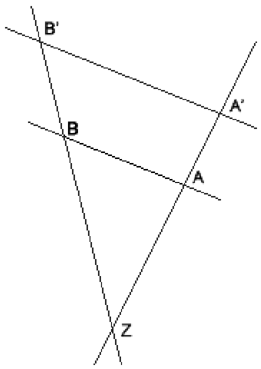
د وړانګې دویمه جمله:

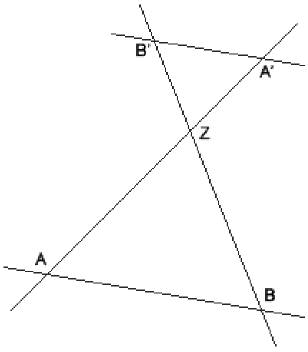
که له یوه ټکي دوه کرښې وکښل شي او دا بیا له دوه غبرګو کرښو غوڅې شي، نو د ټوټو ترمنځ دا لاندې اړیکی لري، دا ته والي له جملو ده۰ ټکی چې ځنګهدي په پام کې نیول کیدی شي او د دې او پورته جملې ترمنځ توپیر ته هم پام نیولی شو

$$\frac{g}{h}=\frac{a}{(a+b)} \qquad \frac{g}{h}=\frac{c}{(c+d)}$$



یا دالاندې، چې هرڅه يې روښانه دي





(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\overline{ZA'} : \overline{ZA} = \overline{ZB'} : \overline{ZB}$$
$$\overline{ZA} : \overline{AA'} = \overline{ZB} : \overline{BB'}$$
$$\overline{ZA'} : \overline{AA'} = \overline{ZB'} : \overline{BB'}$$

$$\overline{A'B'} : \overline{AB} = \overline{ZA'} : \overline{ZA}$$
$$\overline{A'B'} : \overline{AB} = \overline{ZB'} : \overline{ZB}$$

(دا لاندې د لیکنې له لارې روښانه شوې څېره دې ګران لوستونکي وکاږي)

که درې په یوه ټکي کی پریکیدونکی کرښي g1 , g2 او g3 د دوه غبرګو) موازی(کرښو g4 او g5 لخوا پرې شي، نو د بیلګي په توګه له ۴ . ۱۰ کښل شوي څېرې څخه لاندې اړیکي لاس ته راځي:

. 1 OA1 : OA2 = OB1 : OB2 , OA1 : OA2 = A1B1 : A2B2

دا په دې ماناچی په وړانګو پرتي ورته برخی په مساوي تناسب یا ځاننیوی سره پرتی دي:

. 2 A1A2 : B1B2 = OA1 : OB1 = OA2 : OB2

دا په دې مانا چی: په وړانګو پرتي ورته برخی په مساوي تناسب یا ځاننیونی پرتی دي لکه اړونده، د ککری اندازه شوې برخي چی په وړانګه پرتی دي.

۳ - A1A2 : A2A3 = B1B2 : B2B3 , A1A2 : B1B2 = A2A3 : B2B3

دا په دې مانا چی: په غبرګو پرتی کرښي په همغه برخوکی یو له بل سره په مساوي تناسب یا ځاننیونی پرتی دي

د وړانګو جملی هم باور لري، که د دوه غبرګو په څیر رامنځ ته شي یا که ککره د غبرګو ترمنځ پرته وي) په دې حالت کی دې وړانګي د کرښو په ځاي بدلی یا ولیکل شي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۴ . ۳ : د اړخونو a او c اوهمداسی د کونج الفا څخه دې

یو دریګوډی جوړ شي. لاندې حالتونه تر څیړنې لاندې نیسو

$a > c$ - 1

موږ کاږو $AB = c$ او په ټکي A کونج‌الف

د c په کچه کاږو. په B یو ګردبلینده کاږو د a

په کچه چی د الفا ازاده پښه په ټکې C کې غوڅوي)

څیره دې ګران لوسونکی پخپله وکاږي، روښانه ده

$a < c$ - 2

دلته درې امکاناته شته دی(د دې درې امکاناتو څیره وکاږۍ)

۲ . ۱ : د ګردیلینده په B د a په اندازه د α ازاده پښه په دوه هغوټکو کي پرې کوي،
په کومو کی چی اوبی یواځنی نه دی.

۲ . ۲ : ګردبلینده د α ازاده پښه لمسوي.

۲ . ۳ : ګردبلینده د α اندازه پښه نه غوڅوي .

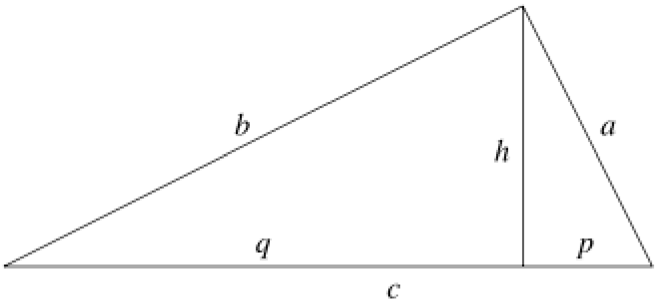
$a = c$ (۳

ګردبلینده په B د a په اندازه د α ازاده پښه په دوه ټکو ، په نامه A او C کي پرې
کوي. دې لپاره چی حالتونه ۲ - او ۳ - له منځه لرې او تل یواځنی حل ولرو، نو $a > c$
نیونه په دریم کونګرواینځ جمله کی ضرور ده

۶ . ۱ . ۵ .ولاړکونجیز دریګوډی مثلث قایم الزاویه

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مختلفو دریګوډیو ځخه موږ په لاندې برخه کی ولاړ کونجیز دریګوډی ترڅیړنی لاندې نیسو .په ولاړکونجیز دریګوډي کی د ولاړ کونج مخامخ اړخ هوپوتینوزې) Hypotinuse(بلل کیږي، نور دواړه اړخونه کاتیتونه یو: کاتیت (Katheten)بلل کیږي. هغه ولاړکونجیز دریګوډي ته روځنی یا ورسره بلدې یا مروجی په نخښه کونه یا لنډ په نخښونه به له ځیرې ۴ . ۱۳ ځخه واخلئ



په ولاړکونجیز دریګوډي کی دا لاندې راوړل شوې اړیکی باور لري چی دلته یی بی له اوبی)ښوونی(راوړو:

یادونه : په ولاړګوډیز کې د ولاړکونج مخامخ اړخ اوږد اړخ بولو او د ولاړ ګوډ پښې ولاړ اړخونه، چې غوښتوني کونج ته مخامخ مخامخ اړخ (پښه) او په موخه ور کونج پرته پښه په کونج پروت اړخ (- پښه) بولو او یا په دې لاتین نوموونو یانې مخامخ کاتېت او (په کونج) پروت کاتېت.

د پیتاګوراس (Pythagoras) جمله:

په ولاړکونجیز دریګوډي کی د هیپوتینوزې مربع هواره د دواړو کاتیتو د مربع هوارو زیاتون سره برابر یا مساي ده:

$$c^2 = a^2 + b^2 \qquad (6.5)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دکاتیتو(د ولاړاړخونو یا د مخامخ او په پراته اړخ(ضلع)) جمله:

په ولاړکونجیز دریګوډي کی د کاتیت مربع هواریزمساوي ده د ولاړ کونجي هوارې سره، چی له هیپوتینوزې او ددې کاتیت له پرویکشن یا پریوستون څخه لاس ته راځی:

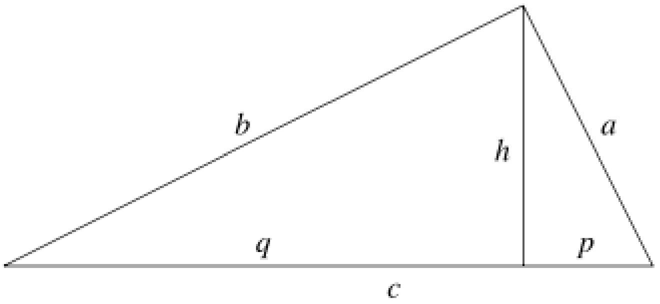
$$a^2 = p.c\ ,\ b^2 = q.c \qquad (6,6)$$

جګجمله :

په ولاړکونجیز دریګوډي کی د هیپوتیزې په جګي مربع هواریزمساوي ده د هیپوتینوزې (لوي اړخ) برخو څخه منځ ته راغلې ولاړکونجي هوارې سره

$$h^2 = q\ .\ p \qquad (6.\ 7\ )$$

یا په لاندې کې لنډ بیا ورکړ شوي



لنډ: (ددې لپاره دې پورته څېره وکتل شي)

پیتاګوراس جمله : $c^2 = a^2 + b^2$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اویکلید د کاتیتونو(پروت – ،مخامخ اړخونو) جملې

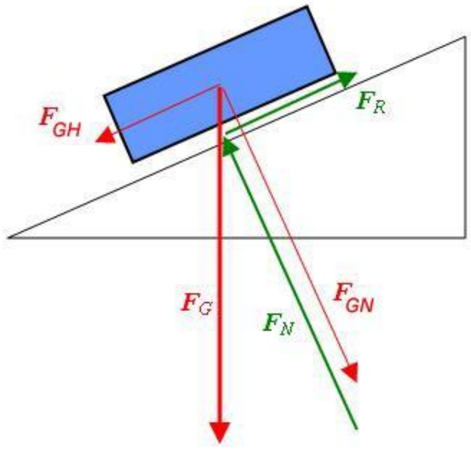
$$a^2 = c \cdot p$$

$$b^2 = c \cdot q$$

$$c = p + q$$

د اویکلید جګجمله $h^2 = p \cdot q$

بیلګه ۴ . ۴ : (ځیره نه ده کښل شوې، د ې ته دې ګران لوستونکج فکر وکړي٠ دا یوه فزیکي دنده هم ده(ځېره وکښل شوه، نخښې هم لږ بدلې دي)) د یوه بدن د وزن G تجزیه څرګندوي (د بدن دروند ټکی) دا د فزیك له مخی هغه ټکی دی چی د بدن ټول وزن پرې پروت وي (KSP =)چی په یوه مائله هواره پروت دی، دا وزن مائلي هوارې سره غبرګ په یوه کښته کشونکی زور FH او په مائلی هوارې نیغ ولاړ ، ولاړ) عمودي(زور) قوه FN)تجزیه کیږي. د ښوولو ده چی، دریګوډي ABC د KSPاو FN او FH له خوا ټاکلي دریګوډي سره ورته دی

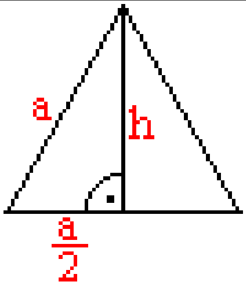
	یادونه: په لیکنه کې زور یا توان د لاندې ځېرې سره داسې بدلوو:شین تنیا د مستطیل شکل G دی $F_H = F_{GH}, F_N = F_{GN}, G = F_G$ ګوډونه : له پورته ګوډ A کښته ښی لور ته ګوډ C کښته کیڼ لور ته ګوډ B په ګوډ A کونج α ، په ګوډ B کونج β

(c) ketabton.com: The Digital Library

داچې G||AC څغلي، نو FH او G یو کونج α جوړوي. دا چې $\beta = R - \alpha$ ده، نو FN او G کونج β جوړوي، دواړه دریګوډي په دې برسیره په ولاړکونج کې یو بل ته ورته دي٠

یادونه : داسې بیلګې، چې ښیره یې نه شم ایستلی که وي هم بدې نه دي، ګران لوستونکي کړای شي،چې داسې ښیرې پخپله وباسي، دا دې یو تمرین وي٠ زما زړه نه شي، چې له لیکلو یې تیر شم٠

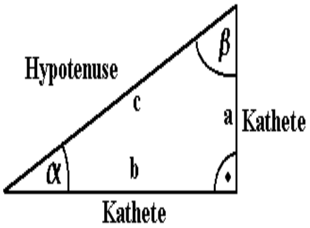
بیلګه ۴ . ۵ : په یوه مساوي اړخیز دریګوډي کې دې (لاندې ښیره) جګې و شمیرل شي .د ٦ . ۴ (له مخې لرو(جګې په همدې وخت کې د مخامخ اړخ نیمې هم دی، دا په دې درېګوډي کې وکاړی)

$h^2 = a^2 - (a/2)^2$ $h^2 = a^2 - a^2/4$ $h^2 = (3/4)a^2$ $h = (\sqrt{3}/2)a$	

٦ . ۲ په ولاړکونجیز دریګوډي کې د اړخونو تناسب

د کونجکچ لپاره د اړخونو تناسب هم مساعد دی، چې یوه ولاړکونجیز دریګوډي کې جوړیږي(لاندې ښیره). که د کونج α مخامخ اړخ یا -کاتیت a gegkathete د مخامخ اړخ په ښیر وښایو، د b اړخ په β پروت اړخ ankathete او hypothenuse لوی اړخ وي، نو په ولاړکونجیز دریګوډي کې لاندې اړخځانیونی منځ ته راځي یا جوړیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{katheta}{c}$$
$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{kathetb}{c}$$
$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{opk}{ank}$$
$$\cot\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{ank}{opk}$$

د وړانګو جملو له امله دا اړيکي يا تناسب يوائي د کونج   په واك کی دی. که په پام کی
ونيول شي چي $\beta = 90° - \alpha$ دی، نولاندې اړيکی ليکلی شو

$$\sin\beta = \frac{b}{c} = \sin(90-\alpha) = \cos\alpha$$

$$\cos\beta = \frac{a}{c} = \cos(90-\alpha) = \sin\alpha$$

$$\tan\alpha = \frac{b}{a} = \tan(90-\alpha) = \cot\alpha$$

$$\cot\beta = \frac{a}{b} = \cot(90-\alpha) = \tan\alpha$$

له دې ليدل کيږي، چی د دې څلورو ارزښتونو د پيداکولو لپاره دوه ګنجدولونه پوره دي يا
بسيا کوي   .ورپسي يا ددې په تعقيب پيژندوړ دي

$$\tan\alpha = \frac{in\alpha}{\cos\alpha}, \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\cot\alpha};....................(6,10)$$

برسيره پردې د پيتاګوراس د جملی په پام کی نيولو سره لرو

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;.......................(6,11)$$

$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}; 1 + \cot^2 = \frac{1}{\sin^2\alpha};...........(6,12)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

٦ ٠ .٣　　په يوونګردۍ کې د کونج فنکشنونه (-بلواك)

په ۴ . ۲ برخه کی $\sin\alpha; cis\alpha; \tan\alpha; \cot\alpha$ يواځي د ليديدونکو)Konkrete(
اړختناسبونو لپاره په يوه ولاړکونجيز دريګوډي کی ځاي په ځاي دي. دا ويناوې يواځي
يا په ځانګړې توګه د $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} (0 < \alpha < 90°)$ لپاره تعريف دي. که α د
خپلواك واريابل په څير ونيسو، نو $\sin\alpha$ او داسې نور فنکشنونه راپه ګوته کوي چې په
برخه ۱۵ کې انځور دي او کوجنفنکشنونه بلل کيږي. په ياده شوې برخه کې) څيرې ۱۵ .
۲۰ الف او ب

ددې لپاره چې د دې تعريفونو پراخوالی په زړه پورې کونجونو لپاره ممکن شي، نودا مو
د يوون ګردي باندې مخ نخښې په واك کې کرښو ته لارښودوي .د لته ټولی کرښی) د
لته به له کرښو ځمور مطلب پای کرښی وي(، چی پخپله او يايی پرويکشن يا پريوستون
يا پريوتنه په وړانګو s1 او s2 پروت وي زياتون مخنخښه) مثبت مخنخښه(لري، ټولی
کرښي او يايي پرويکشنونه پريوستونونه چی په وړانګو s'1 او s'2 پرتی وي کمون
مخنخښه (منفي مخنخښه) لري .د لاندې څيرو کښلو سره کيدی شي تعريفونه ۸ . ۴ (د
په خوښه کونجونو لپاره پراخه شي

$$\sin\alpha = \overline{QP}, \cos\alpha = \overline{OP}, \tan\alpha = \overline{AD}, \cot\alpha = \overline{BE}; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6,13)$$

د کونج α لپاره چي په لومړي څلورمه يا کوادرانت Quadrant (لاتين: د
کواورديناتسيستم څلورمه کی پروت دی(لاندې څيره له کيڼ و ښی لورته کښته دا په
فرمولونوکې کارول شي توري ساده ايښوول کيږي٠ په څيرو کې شنې کرښې د ساين دي
او سرې کرښې کوساين دی او کونجونه ټول په ترتيب له يوه سره پهالف سره په نخښه
کيږي، چې د دې لارې تانجنت او کوتانجنت هم پيدا دي او توري هم ايښوولی شو)، دا
تعريفونه د هغو تعريفونو سره سر خوري، کوم چی په ولاړکونجيز دريګوډي کی تر
څيرنی نيول شوي دي .په پام کی دې وي چی کونج α په لينده اندازه کی د
ګرديليندې اوږدوالي AP سره مساوي دی، چيرته چی په زيات څرخون له 2 څخه
لوييدلی هم شي .برسيره پر دې له تعريفونو) ۱۳ . ۴ (څخه لاس ته راځي، چی ساين-او
کوساين فنکشنونه، پريود :360°) 2 (periode (تل تکراريدونکی ، بيرته

(c) ketabton.com: The Digital Library

راګرځيدونکی(، تنجنت - او کوتنجنت فنکشنونه پريود(°180) لري .

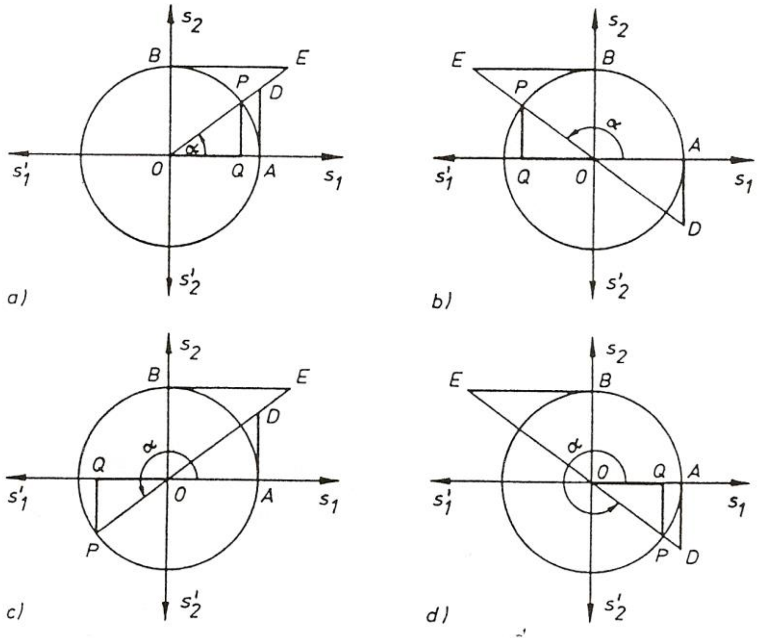


Bild 4.17 شکل

پس لرو

$$\sin(\alpha+2\pi)=\sin(\alpha+360°)=\sin\alpha$$
$$\cos(\alpha+2\pi)=\cos(\alpha+360°)=\cos\alpha;......................(6.14)$$
پ‍ه
$$\tan(\alpha+2\pi=\tan(\alpha+360°)=\tan\alpha$$
$$\cot(\alpha+2\pi)=\cot(\alpha+360°)=\cot\alpha$$

تيوليزه)عمومي(توګه لرو

$$\sin(\alpha+2k\pi)=\sin(\alpha+k.360°)=\sin\alpha$$
$$\cos(\alpha+2k\pi)=\cos(\alpha+k.360°)=\cos\alpha;......................(6.15)$$
$$\tan(\alpha+2k\pi=\tan(\alpha+k.360°)=\tan\alpha$$
$$\cot(\alpha+2k\pi)=\cot(\alpha+k.360°)=\cot\alpha$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تولو تولګنونو $k = ..-3,-2,-1,0,1,2,3....$ لپاره

یادونه :د کوادرانت لپاره څلورمه لیکلی شو خو دا باید په پام کی وي چی دا په کواوردیناتسیستم کی دی

جدول یا تخته ۴ . ۱ د کونج-یازاویو توبعو وخنخښه

	لومړئ څلورمه $(0;\frac{\pi}{2})$	دویمه څلورمه $(\frac{\pi}{2};\pi)$	دریمه څلورمه $(\pi;\frac{3}{2}\pi)$	څلورمه څلورمه $(\frac{3}{2}\pi;2\pi)$
sinx	+	+	-	-
cosx	+	-	-	+
Tan x	+	-	+	-
cotx	+	-	+	-

برسیره پر دې لاندې اړیکې باور لري:

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha, \quad \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$$
$$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha, \quad \cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha \qquad (4.16)$$
$$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha, \quad \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha,$$
$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha, \quad \cos(-\alpha)=\cos\alpha$$
$$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha, \quad \cot(-\alpha)=-\cot\alpha$$

بیلګه ۴ . ۶ : د جبشمیروني سره د کونجفنکشن د $\alpha = 446°$ لپاره پیداکوو . دا چی α په درجی اندازه ورکړ شوي ده، نو اومشالتریا سویچ بدون (دلته مطلب د

(c) ketabton.com: The Digital Library

جبشميري اړونه ده، پۀ غوښتل شوي فنکشن کی) په « DEG » سموو او بیا
لاندې ورکوني کوو.
په همدې ډول تکمې وهو

جدول یا تخته ۴ . ۱ د کونجفنکشنونو مختخښه

دنده مو د لاندې مساوت حل یا اوبی دی

1. $\sin\alpha = a$, 2. $\cos\alpha = a$,
3. $\tan\alpha = a$, 4. $\cot\alpha = a$

دلته تمرینونه ۱ او ۲یواځي هلته موخه ور یا هدفمند ي، چې باور ولري $-1 \le a \le 1$

او په تمرین ۳ او ۴ کط په خوښه هر ارزښت نیولی شي.
یو «بنستهیزوبی یا بنستیز حل»α د هر تمرین د جبشمیرني سره په لاندې ډول یا
همداسی تکموترتیب لاس ته راځي (دا په دې اړه لري چیα په درجه اندازه یا لینده
اندازه کوو، نو په ورته ډول د سویچبدلون په "DEG" یا "RAD" باندې راولو)

1. [a] [F] [sin]   2. [a] [F] [cos]
3 [a] [F] [tan]   4. [a] [1/x] [F] [tan]

تکمه F د په ختې فنکشن ته تلنه ممکنوي.
دلته نو بیاد α هر بنستهیزحل په درجه یا لینده کچ څرګندیږي.
د $a = -0{,}55$ لپاره لاندې بنستیزحلونه لاس ته راځي :

1. $\alpha_0 = -33{,}367013° = -0{,}58236$,
2. $\alpha_0 = 123{,}36701° \quad = 2{,}1531606$,

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

3. $\alpha_0 = -28{,}810793° = -0{,}5028432,$
4. $\alpha_0 = -61{,}189206° = -1{,}0679531.$

د مخ ت ه تیرو په بنسټ لو

1. $\sin\alpha = \sin(180° - \alpha) = \sin(\pi - \alpha),$
2. $\cos\alpha = \cos(-\alpha)$

او په ورته توگه،، فرعي یا ځنگیز حل یا اوبی،،

1. $\beta_0 = 180° - \alpha_0 = \pi - \alpha_0,$
2. $\beta_0 = -\alpha_0$

لاس ته راشي

د لیدیدونکي حالت $a = -0{,}55$ لپاره په دې مانا چې :

1. $\beta_0 = 213{,}367013° = 2{,}1531563,$
2. $\beta_0 = -123{,}36701° = -2{,}1531606.$

د α ټول حلونه د (۱۵ . ۴) له امله په لاندې فورم لاس ته راځي

1. und 2. $\alpha = \alpha_0 + k \cdot 360° = \alpha_0 + 2k\pi,$
$\alpha = \beta_0 + k \cdot 360° = \beta_0 + 2k\pi,$

3. und 4. $\alpha = \alpha_0 + k \cdot 180° = \alpha_0 + k\pi.$

بیلگه ۴ . ۹ : لرو $\sin x = 1/2\sqrt{3}$. ودې شمیرل شي $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$.

$$\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x} = \pm\sqrt{1-\frac{3}{4}} = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2},$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\pm\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{3},$$

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{\pm\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه ۴ . ۱۰ : په بيلګه ۴ . ۴ کي ورکړشوی زور F_H او F_N څومره لويي دي، که په مايل هواره پروت بدن وزن 700 N وي (دلته N د Newton لپاره دی چی وزن پري اندازه کيږي) او مائلی هوارې مايلکونج $\beta = 28°$ وی؟

$$\sin\beta = \frac{F_H}{G}, \quad F_H = G \cdot \sin\beta = 700\ \text{N} \cdot \sin 28° = 700\ \text{N} \cdot 0{,}4695 = 328{,}65\ \text{N}.$$

$$\cos\beta = \frac{F_N}{G}, \quad F_N = G \cdot \cos\beta = 700\ \text{N} \cdot \cos 28° = 700\ \text{N} \cdot 0{,}8829 = 618{,}03\ \text{N}.$$

۴. ٦ دساين- او كوساين جملی

دا دواړه جملی ممکنوي چی په ټوليز يا عمومي درېګوډي کی شميرنی پلی کړای شو

۱ . د ساين جملهد څيرې ۴ . ۱۸ له نخښوني سره لرو

$$\sin\alpha = \frac{h_c}{b}, \quad \sin\beta = \frac{h_c}{a}$$

او له دې امله

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b} \quad \text{bzw.} \quad \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}.$$

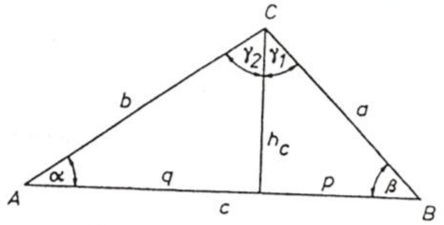


Bild 4.18

په ورته توګه ښوول کيدی شي، چې په عمومي توګه صدق کوي

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}. \qquad (4.17)$$

څيره پورته او لاندې کښل شوي، دا يو ولاړکونجيز درېګوډی کښل کيږي(پورته او لاندې څيرې)

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ورته توګه ښوول کیدی شي، چی په عمومي توګه صدق کوي

د ساین جمله کیدی شي استعمال شي، که د یوه دریګوډي -دوه اړخونه او لوي اړخ ته

مخامخ کونج - SSW یو اړخ او داړه پرې پراته کونجونه WSWورکړشوي وي

۲ . د کوساین جمله

د ځیرې ۴ . ۱۸ ځخه لاس ته راځي

$$
\begin{aligned}
h_c^2 &= b^2 - q^2 \\
h_c^2 &= a^2 - p^2 \\
\hline
a^2 &= b^2 + p^2 - q^2, \quad p = c - q, \\
a^2 &= b^2 + (c-q)^2 - q^2, \\
a^2 &= b^2 + c^2 - 2cq + q^2 - q^2, \quad q = b\cos\alpha,
\end{aligned}
$$

نو $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$ لرو او همداسې:

$$
\begin{aligned}
a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha, \\
b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta, \\
c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.
\end{aligned}
\qquad (4.18)
$$

د کوساین جله استعمالیدی شي، که په یوه درېګوډي یا مثلث کې

- درې اړخونه یا ضلعې یا

- دوه ا ړخونه(ضلعې) او له هغو رابند کونج یا زاویه

ورړ شوي وي.

بیلګه ۴ . ۱۱ :د دوه قوو(زور F1)او F2 لاس ته راوړل شوې R1 چی په پراته لورد F1سره کونج جوړوي ، ځنګه شمیرل کیږي؟ د دې دوه قوو F1 او F2 برسیره له دوي جوړکونج هم معلوم دی .د دې پوښتنی کولو د روښانولو لپاره ځیره ۴ . ۱۹

(c) ketabton.com: The Digital Library

ورکړ شوې، له کومی څخه چی د دوي ترمنځ اړیکي هم معلومیږي .په دې پسی په ABCدریګوډي کی، F1 = c, F2 = a اوss - 180°= ss' معلوم دي، α

او R = b لټوونکی یا غوښتونکی لویي دي؟

د کوساین جملی (۱۸ . ۶) څخه لرو

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos ss$$

همداسی یا⇔

$$R^2 = F1^2 + F2^2 - 2F1F2 \cos(180° - ss')$$

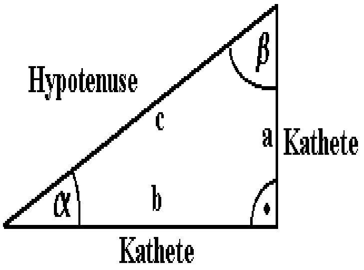
او د ساین له جملی (۱۷ .۶) لاس ته راځي

له کومو چی α ټاکل کیدی شي .

لوي اړخ او ولاړ یا عمود اړخونه (هیپوتینوز او کاتیتونه یا مخامخ- او په پروت اړخ):

۱ – په ولاړکونجیز دریګوډي کې ولاړ کونج ته مخامخ اړخ هیپوتینوز یا لوي اړخ بولو۰

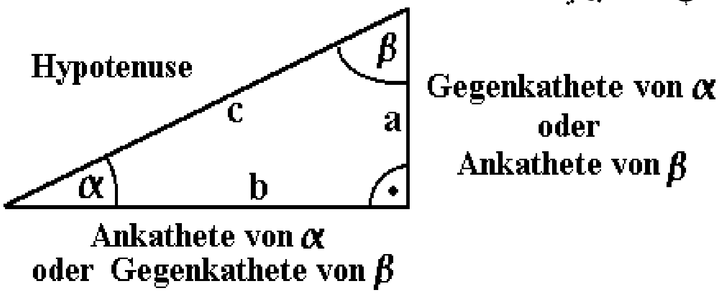
۲ - نور دواړه اړخونه غوښتوني – یا مطلوب کوج ته مخامخ اړخ او په مطلوب کونج پروت اړخ یا ولاړ اړخونه یا کاتیتونه بولو۰

	مخامخ دریګوډی دې ورکړشوی وي: په لاندې درېګوډي کې کونجونه، او اړخونه جوت یا څرګند روښانه دي . د اړخونو نومونه: الفا کونج ته مخامخ مخامخ اړخ بولو او په الفا پروت اړخ په پروت یا پروت اړخ بولو. ولاړ کونج ته مخامخ لوی اړخ بولو

(c) ketabton.com: The Digital Library

لند یا تکرار :پورته او په لاندې بیلګه کې دا اړخونه دغوښتوني کونج مخامخ او په پراته اړخونه بلل کیږي

بیلګه
بیا دې همغه پورته درېګوډی ورکړ شوی وي، چې په بیتا پروتاوخ یا کاتیت د الفا مخامخ اړخ یا کاتیت او په څټ په الفا پرو اړخ یا ه کاتیت د بیتا مخامخ اړخ یا کاتیت ده، چې په څیره کې لیدلکیږي٠



د ساین جمله

په تریګونومتري کې ساینجمه د درېګوډي د یوه کونج او د دې کونج مخامخ اړخ ترمنځ اړیکی ښایي٠ دا له البتانی میندل شوي او ښوول شوي٠ د درېګوډي درې اړخونه او درې ګونجونه ، وړانګه او چاپیری ورکړ شوي (لکه په فرمول کې) نو باور لري:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r = \frac{u}{\pi}$$

یادونه : دا پورته فرمول دې (6,14)وي ٠

زیات وخت د ساین جمله په داسې ډول هم ورکول کیږي:

$$\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = a : b : c$$

که چیرې په درېګوډي کې د ساین جملې له لارې څه ښوول کیږي ، نو دې ته دې پام وي، چې په اینتروال [0°;180°] کې په ټولیزه توګه د همغه کونج دوه یو له بل بیل ارزښتونه لیدل کیږي، دا: دوه ګونوالی ګونګرواینځجمله په ګوته کوي٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره دې د کوساین جمله هم وکتل شي

ښوونه : (دا ځیره دې ٦ ، ١٨ وي او دا نا نومول شوي کونجونه دې x,y وي)

$$\sin\alpha = \frac{h_c}{b}$$

$$\sin\beta = \frac{h_c}{a}$$

په h_c پسې يې اوبی کوو

$$h_c = b \cdot \sin\alpha$$

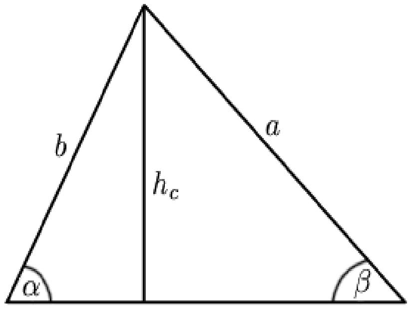
د برابراينوني له لارې لاس ته راځي

$$a \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\alpha$$

که په $\sin\alpha \cdot \sin\beta$ وويشو، نو د غوښتنې لومړی برخه کې لاس ته

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

راځي



برابرون له $\frac{c}{\sin\gamma}$ سره په پيداينښتي توګه ځګی h_a او یا h_b لاس ته راکوي

د کاروني بيلګه : درځګوډی ABC لارو او ورکړ شوي :

$$a = 5,4\,\mathrm{cm} \text{ ، } b = 3,8\,\mathrm{cm} \text{ ، } \alpha = 73^\circ$$

دا نورې لويې دې په دربګوډي کی پيداشي

د β شميرلو لپاره د ساين جمله کارول کيږي

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sin\beta = \frac{b\cdot\sin\alpha}{a} = \frac{3{,}8\,\text{cm}\cdot\sin 73^\circ}{5{,}4\,\text{cm}} = 0{,}67$$

$$\beta = \underline{42^\circ}$$

لکه د خه مو، چې ګوته ورته ونیوله یو بل کونج هم د همدې ارزښت سضته شته ، یانې

$$\beta' = 180^\circ - 42^\circ = 138^\circ$$

د دې اوبی په پوښتنه کې نه راځي، ځکه چې د درېګوډي د کونجونو زیاتون به له ۱۸۰ درجو څخه واوړي۰

او نو ګاما د کونج زیاتون جملې له لارې لاس ته ر اوړو

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 73^\circ - 42^\circ = \underline{65^\circ}$$

اړخ c هم داسې لاس ته راځي

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

$$c = \frac{a\cdot\sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{5{,}4\,\text{cm}\cdot\sin 65^\circ}{\sin 73^\circ} = \underline{5{,}118\,\text{cm}}$$

دکوساین جمله

په تریګونومتري کې کوساینجمله په درېګوډي کې د درېګوډي د اړخونو او کونجونو

ترمنځ اړیکې ښایي ، چې په لاندې توګه ورکړ شوي دي :

یادونه : دا لاندې فرمولونه دې (۱۸ ۰ ۹) وي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta$$

که ګاما ۹۰ درجې وي، نو دپیتاګوراس جملې له مخې لرو:

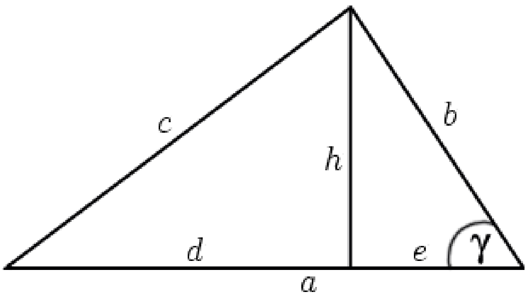
$$c^2 = a^2 + b^2$$

د کوساین جمله استعمالیدی شي، که په یوه دریګوډي کی

- درې اړخونه (SSS) یا
- دوه اړخونه او له هغو بند کونج (SWS) ورکړ شوي وي.

که له پورته څخه یې درې ورکړ شوي وي، نو څلورم یې پیداکولی شو

ښوونه :



د درېګوډي په کیڼ لور د پیتاګوراس قضیه استعمالوو، چې د c^2 لپاره یوه شمیرافاده یا –وبینه پیداکړو، د دې لپاره د دې خوا د ولاړاړخونو یا کاتیتو اوږدوالی څلوری یا مربع باید پیدا شي

$$h^2 = b^2 - e^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ښي اړخ لپاره د پیتاګوراس قضیي استعمال څخه لرو

$$d^2 = (a-e)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot e + e^2$$

(د بینوم فرمول)

د پیتاګوراس جملې له مخې د کيڼ لور لپاره لرو:

$$c^2 = h^2 + d^2$$

اوس دواړه پورته پیداشوي شمیرویینې یا- افادې سره زیاتوو:

$$c^2 = b^2 - e^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot e + e^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot e$$

اوس باور لري $\cos\gamma = \frac{e}{b} (\frac{ankathet}{Hypotenuse})$

له دې لاس ته راځي $e = b \cdot \cos\gamma$

دا پورته ځای په ځای کوو، نو د c^2 لپاره لاس ته راځي:

$$c^2 = \underline{\underline{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma}}$$

بیلګه:

یو درېګوډیABC ، چې اړخونه یې څرګند دي، ورکړ شوی

$a = 4{,}9 \text{ cm}$ ،

$b = 2{,}8 \text{ cm}$

$c = 3{,}5 \text{ cm}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کونج β لویوالی غواړو پیداکړو

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta$$

$$2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta = a^2 + c^2 - b^2$$

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c} = \frac{(4{,}9\,\mathrm{cm})^2 + (3{,}5\,\mathrm{cm})^2 - (2{,}8\,\mathrm{cm})^2}{2 \cdot 4{,}9\,\mathrm{cm} \cdot 3{,}5\,\mathrm{cm}} = 0{,}83$$

$$\beta = \underline{34^\circ}$$

دا پیژند ورکو یا داسې تعریفوو

$$\sin A = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}} \qquad \cos A = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}$$

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\text{opp}}{\text{adj}} \qquad \sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{\text{hyp}}{\text{adj}}$$

$$\cot A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{\text{adj}}{\text{opp}} \qquad \csc A = \frac{1}{\sin A} = \frac{\text{hyp}}{\text{opp}}$$

Common formularکډ وډ فرمولونه

Pythagorean identitiesد پیتاګوراس کتمېوالی

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

$$1 + \tan^2 A = \sec^2 A$$

$$1 + \cot^2 A = \csc^2 A$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

زياتون او كمون كېتمتوالى Sum and difference identities

$$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$$

$$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$$

$$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$$

$$\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$$

$$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$$

$$\tan(A-B)=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$$

دوه برابره كونج كې ګېتمتوالي Double-angle identities

$$\sin 2A=2\sin A\cos A$$

$$\cos 2A=\cos^2 A-\sin^2 A=2\cos^2 A-1=1-2\sin^2 A=\frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$$

$$\tan 2A=\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}=\frac{2\cot A}{\cot^2 A-1}=\frac{2}{\cot A-\tan A}$$

د نيم كونج ګېتمتوالى Half-angle identities

$$\sin\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$$

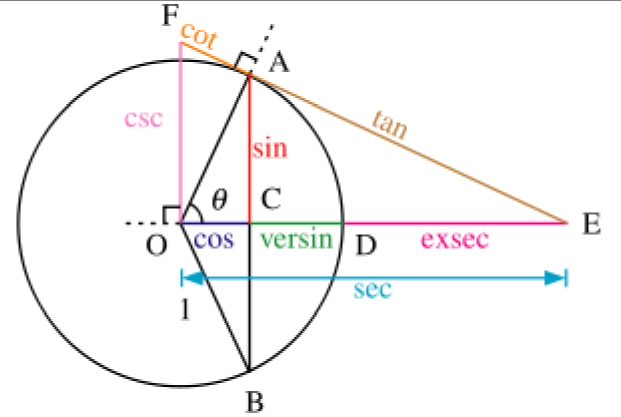
$$\cos\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\tan\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}} = \frac{\sin A}{1+\cos A} = \frac{1-\cos A}{\sin A}$$

د ترېګونومترېکي کتمتوالي لیست List of trigonometric identities

نوره ژوره څېرنه دلته نه کړو، دې ته ګوته نیسو، چې په لاندې څېره کې ترېګونومترېکي فنکشنونه روښانه دي

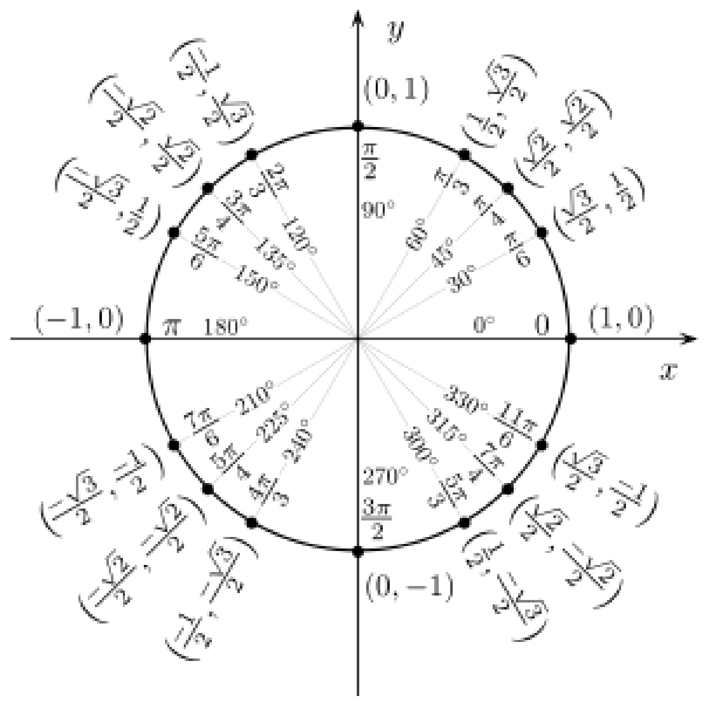


د یوه کونج θ ټول ترېګونومترېکي فنکشنونه په O باندې د یوې یونګردۍ ترم له لارې ورکول کېدی شي (یونګردۍ لاندې ورکړ شوې او کونجونه هم په نخښنه شوي)

مخامخ:

یوونګردۍ(یووالي یا واحد ګردۍ)

The unit circle



(c) ketabton.com: The Digital Library

Notationلیکنبڼه

دا لاندې لیکنبڼه یا - ډول د ټولو تریګونومتریکي – یا مثلثاتي فنکشنونو ساین، کوساین ، تانجنت ، کوتانجنت ، سیکانت، کوسیکانت لپاره باور لري، د لنډوني لپاره په لاندې جدول کې یواځې ساین او کوساین لیکل شوي دي

$\arcsin(x)$ کیدی شي $\sin^{-1}(x)$ ولیکل شي، خو د $(\sin(x))^{-1}$ سره باید بدل نه شي

Definitionsپيژند:

$$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \qquad \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{\tan(x)}$$

تل بیرته راګرځیدنه ، سیومتري او بدلونPeriodicity, symmetry, and shifts .

په یوون(یووالي-) ګردۍ یا دایره کې ساده لیدل کیږي:

Periodicity تل بیرته راګرځیدنه

ساین ، کوساین ، سیکانت، کوسیکانت تل بیرته راګرځیدنه 2π ده(پوره ګردی) (تکرار دی)

$$\sin(x) = \sin(x + 2k\pi)$$

$$\cos(x) = \cos(x + 2k\pi)$$

$$\sec(x) = \sec(x + 2k\pi)$$

$$\csc(x) = \csc(x + 2k\pi)$$

تانجنت ، کوتانجنت تلبیرته راګرځیدنه π لري(نیمګردۍ یا نیمدایره) :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\tan(x) = \tan(x + k\pi)$$

$$\cot(x) = \cot(x + k\pi)$$

Symmetry سیومتري

د تریګونومتریکي فنکشنونو لپاره سیومتري ، لکه لاندې کښل شوي

$x \to -x,\ x \to \pi/2 - x$ ،یا $x \to \pi - x$ په لاندې ډول ده

$$\begin{aligned}
\sin(-x) &= -\sin(x), & \sin\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) &= \cos(x), & \sin(\pi - x) &= \sin(x) \\
\cos(-x) &= \cos(x), & \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) &= \sin(x), & \cos(\pi - x) &= -\cos(x) \\
\tan(-x) &= -\tan(x), & \tan\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) &= \cot(x), & \tan(\pi - x) &= -\tan(x) \\
\cot(-x) &= -\cot(x), & \cot\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) &= \tan(x), & \cot(\pi - x) &= -\cot(x) \\
\sec(-x) &= \sec(x), & \sec\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) &= \csc(x), & \sec(\pi - x) &= -\sec(x) \\
\csc(-x) &= -\csc(x), & \csc\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) &= \sec(x), & \csc(\pi - x) &= \csc(x)
\end{aligned}$$

بدلون : د $\pi/2$ او π بدلون دی

$$\begin{aligned}
\sin\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) &= \cos(x), & \sin(x + \pi) &= -\sin(x) \\
\cos\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) &= -\sin(x), & \cos(x + \pi) &= -\cos(x) \\
\tan\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) &= -\cot(x), & \tan(x + \pi) &= \tan(x) \\
\cot\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) &= -\tan(x), & \cot(x + \pi) &= \cot(x) \\
\sec\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) &= -\csc(x), & \sec(x + \pi) &= -\sec(x) \\
\csc\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) &= \sec(x), & \csc(x + \pi) &= -\csc(x)
\end{aligned}$$

د پیتاګوراس کتمتوالی Pythagorean identities

د دې بنسټ د پیتاګوراس قضیه ده

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کونج د زیاتون او کمون کتمتوالی Angle sum and difference identities

$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$$

د کمون او زیاتوننخښي په ورته ترتیب راځي لکه په فرمولونو کي

$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$$

که په کیڼ لور " + " وي، نو په ښي لور"-" راځي او په څټ

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(x)\tan(y)}$$

د کونج دوه ځلوالي فرمول Double-angle formulae

که $x = y$ کیږدو د پیتاګوراس یا موفریي فرمول له لارې لرو د $n = 2$ له امله ۰

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) = \frac{2\tan(x)}{1 + \tan^2(x)}$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x) = \frac{1 - \tan^2(x)}{1 + \tan^2(x)}$$

$$\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1 - \tan^2(x)}$$

$$\cot(2x) = \frac{\cot(x) - \tan(x)}{2}$$

د نیمکونج فرمول Half-angle formular

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(x)}{2}}$$

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(x)}{2}}$$

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}. \qquad (1)$$

که د ریښي لاندې ماتباندي او مات لاندې له $1 + \cos x$ سره ځل شي ، نو د پیتاګوراس جملې له مخه لرو:

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{(1+\cos x)(1+\cos x)}} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos^2 x}{(1+\cos x)^2}}$$

$$= \frac{\sin x}{1+\cos x}.$$

په ورته توګه که برابرون له (۱) له $1 - \cos x$ سره ځل شي، نو لور

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{(1-\cos x)(1-\cos x)}{(1+\cos x)(1-\cos x)}} = \pm\sqrt{\frac{(1-\cos x)^2}{(1-\cos^2 x)}}$$

$$= \frac{1-\cos x}{\sin x}.$$

د نیمکونج فرمولونه د تانجنت لپاره دي:

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)} = \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که کیږدو $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right),$

نو لرو: $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$

د ځل و زیاتون ته کتمتوالی Product-to-sum identities

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{\cos(x-y) + \cos(x+y)}{2}$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2}$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{\sin(x-y) + \sin(x+y)}{2}$$

د زیاتون- و- ځل ته کتمتوالی (برابرون) Sum-to-product identities

که د x لپاره $(x+y)/2$ او y لپاره $(x-y)/2$ کیږدو نو لرو

$$\cos(x) + \cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin(x) + \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos(x) - \cos(y) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin(x) - \sin(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

که $x, y,$ او z د کوم درېګوډي کونجونه وي یا په نورو کلیمو، نو

(c) ketabton.com: The Digital Library

نیمګردی یا نیمدایره $\text{if } x + y + z = \pi = \text{half circle,}$ =که

او *نو یا* tan x + tan y + tan z = tanx.tany.tanz

$\text{and } \sin(2x) + \sin(2y) + \sin(2z) = 4\sin(x)\sin(y)\sin(z).$

Trigonometric conversions تریګونومتریکي په څټوالی

هر تریګونومتریکي فنکشن د بل تریګونومتریکي فنکشن سره سیده یا سیخي اړیکی لري۰ داسي اړیکی د په څټ اړیکو له لارې افاده یا ویل کیدی شي، لکه : که φ او ψ د تریګنومتریکي فنکشنونو د یوې جوړې نمایندکی وکړي ، او arcψ دې د ψ په څټ وي، داسي چې $\psi(\text{arc}\psi(x)) = x$ ۰ نو $\varphi(\text{arc}\psi(x))$ کیدی شي د یو الجبري فنکشن ترم x په څیر وویلی شي یا افاده شي۰

داسي فرمولونه د لاندې جدول له لارې ښوول کیدی شي : موږ دا نوره نه روښانه کوو او په لاندې جدول پوهیدی شو

φ \ ψ	sin	cos	Tan	csc	sec	cot
sin	x	$\sqrt{1-x^2}$	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$
Cos	$\sqrt{1-x^2}$	x	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
Tan	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	x	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\sqrt{x^2-1}$	$\frac{1}{x}$
sec	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{1+x^2}$	$\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$	x	$\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$
cot	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x^2-1}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	x

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sin 0 = \sin 0^\circ = 0 = \cos 90^\circ = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin 30^\circ = 1/2 = \cos 60^\circ = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin 45^\circ = \sqrt{2}/2 = \cos 45^\circ = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin 60^\circ = \sqrt{3}/2 = \cos 30^\circ = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

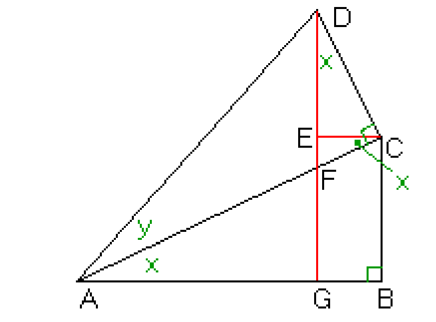
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin 90^\circ = 1 = \cos 0^\circ = \cos 0$$

د طیلایي نسبت φ له امله لرو

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4} = \varphi/2$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{\varphi-1}{2} = \frac{1}{2\varphi}$$

جیومتریکي غوښتنه (ثبوت)Geometric proofs



sin(*x* + *y*) = sin(*x*) cos(*y*) + cos(*x*) sin(*y*)

په مخامخ خیره کي کونج x د ولاړکونجیز درېکودي ABC برخه ده، او کونج y د و لاړکوڼیز درېکودي ACD برخه ده ۰ نو جوړښت DG و AB باندې ولاړ او CE و AB ته غبرګ دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

کونج ACE =کونجBAC = Angle x

EG = BC.   کونج CDE= x

$$\sin(x+y)$$

$$=\frac{DG}{AD}$$

$$=\frac{EG+DE}{AD}$$

$$=\frac{BC+DE}{AD}$$

$$=\frac{BC}{AD}+\frac{DE}{AD}$$

$$=\frac{BC}{AD}\cdot\frac{AC}{AC}+\frac{DE}{AD}\cdot\frac{CD}{CD}$$

$$=\frac{BC}{AC}\cdot\frac{AC}{AD}+\frac{DE}{CD}\cdot\frac{CD}{AD}$$

$$=\sin(x)\cos(y)+\cos(x)\sin(y).$$

cos(*x* + *y*) = cos(*x*) cos(*y*) − sin(*x*) sin(*y*)

Using the above figure:د پورته ځيرې څخه کار اخلو

$$\cos(x+y)$$

$$=\frac{AG}{AD}$$

$$=\frac{AB-GB}{AD}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \frac{AB - EC}{AD}$$

$$= \frac{AB}{AD} - \frac{EC}{AD}$$

$$= \frac{AB}{AD} \cdot \frac{AC}{AC} - \frac{EC}{AD} \cdot \frac{CD}{CD}$$

$$= \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AC}{AD} - \frac{EC}{CD} \cdot \frac{CD}{AD}$$

$$= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y).$$

د $\sin(x-y)$ او $\cos(x-y)$ فرمولونو ښوونه

د $\cos(x-y)$ او $\sin(x-y)$ لپاره فرمولونه ساده ښوول کیږي، که د $\cos(x+y)$ او $\sin(x-y)$ لپاره فرمولونه وپیژنو

$$\mathbf{\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y)}$$

که په فمرول $\sin(x+y)$ کې د y په ځاي -y کیږدو نو لرو

$$\sin(x+(-y)) = \sin(x)\cos(-y) + \cos(x)\sin(-y).$$

که د فاکت څخه، چې ساین جوړه او کوساین ناجوړه فنکشنونه دي، نو لرو

$$\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y).$$

$$\mathbf{\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)}$$

موږ په پورته فرمول $\cos(x+y)$ کې د y په ځاي -y ږدو ، نو لرو

$$\cos(x+(-y)) = \cos(x)\cos(-y) - \sin(x)\sin(-y).$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د فاکت څخه، چې ساین جوړه او کوساین ناجړه فنکشنونه دي، نو لاس ته راوړو

$$\cos(x-y)=\cos(x)\cos(y)+\sin(x)\sin(y).$$

۶ . ۵ تریګونومتریکي یا کونجکچ فرمولونه

د کونجبلواك یا کونجفنکشن د شمیرلو لپاره، له دا اوس څرګند فرمولونو، یوه د اړیکو ډله شته) د زیاتون)جمع(تیوریم(، له کومو یی چی دلته یوڅو راوړل غواړو .د همغو فرمولتولګه) کتاب چي فرمولونه په کي راټول وي(کی لاندې فرمولونه پیدا کیدی شي

$$\sin(x\pm y)=\sin x.\cos y\pm\cos x.\sin a;......................(6,19)$$

$$\cos(x\pm y)=\cos x.\cos y\mp\sin x.\sin y;......................(6,20)$$

$$\sin 2x=2\sin x.\cos x;\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x;..................(6,21)$$

$$\tan(x\pm y)=\frac{\tan x\pm\tan y}{1\mp\tan x.\tan y};...................(6.22)$$

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2};........................(6,23)$$

$$\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}.\sin\frac{x-y}{2};$$

$$cox+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2};...........................(6,24)$$

$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}.\sin\frac{x-y}{2}$$

ددې اړیکو ښوونه یوه مهمه کورني دنده ده، خو څه به په دې لاندې بېلګه کې وښایو

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۶ . ۱۲ :

Cos(x+) = cosx.cosy –sinx.siny

مور له ځیرې ۴ . ۱۸ څخه مخ ته ځو، او ځاي په ځاي کوو $\gamma_1 = x$ ، $\gamma_2 = y$ ، نو لرو $\gamma = x + y$.

د کوساین له جملې لاس ته راځي

$$2ab\cos\gamma = a^2 + b^2 - c^2, \quad a^2 = p^2 + h_c^2, \quad b^2 = q^2 + h_c^2, \quad c^2 = (q+p)^2$$

$$= p^2 + h_c^2 + q^2 + h_c^2 - (q+p)^2,$$

$$= p^2 + h_c^2 + q^2 + h_c^2 - q^2 - 2qp - p^2$$

له $2ab\cos\gamma = 2h_c^2 - 2qp$ څخه لاس ته راځي

$$\cos\gamma = h_c^2 / ab - qp / ab = (h/a).(h/b) - (q/b).(p/a),$$

$$\cos\gamma = \cos\gamma_1 . \cos\gamma_2 - \sin\gamma_1 . \sin\gamma_2$$

$$\cos(x+y) = \cos x . \cos y - \sin x . \sin y$$

څه چې د ښوولو وو

یادونه: ځای په ځای باید دې ته ګوته ونیسم، چې د ضرب او وېش تړاو نسبت و جمعې اړ تفریق یا زیاتو او کمون تړاو ته کلک یا کلک نښتی دی.

بیلګه ۴ . ۱۳ – لاندې ویینې یا افادې دې ساده شي

$$a)\ y = \sin(\alpha - \frac{\pi}{4}) + \sin(\alpha + \frac{\pi}{4})$$

دې (۶ . ۲۳) پسې د مساوات(برابرون) ښی اړخ د لاندې سره یو- یا هم ارزښته ده.

$$2\sin\frac{\alpha - \frac{\pi}{4} + \alpha + \frac{\pi}{4}}{2} \cdot \cos\frac{\alpha - \frac{\pi}{4} - \alpha - \frac{\pi}{4}}{2} = 2\sin\alpha\cos(-\frac{\pi}{4}) = 2\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4},$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له کوم چې $y = \sqrt{2}\,\sin\alpha$ لاس ته راځي

b) $y = \cos(\frac{3}{2}x + \pi)$

د (۶ . ۲۰) پسې لرو

$$\cos(\frac{3}{2}x+\pi) = \cos\frac{3}{2}x \cdot \cos\pi - \sin\frac{3}{2}x \cdot \sin\pi.$$

دا چې $\cos\pi = -1, \sin\pi = 0$ دی، نو لاس ته راځي

$$y = \cos(\frac{3}{2}x+\pi) = -\cos\frac{3}{2}x.$$

دې نتیجې ته د (۶ . ۱۶) استعمال وروسته هم رسیږو، له کومې چې لاس ته راځي

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha \text{ ist.}$$

بیلګه ۶ . ۱۴ برابرون یا مسات $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}, \quad 0 \le \alpha \le 2\pi,$ دې وښوول شي

دی $1 = \cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}$ او $\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$ او له دې سره

$$\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2} - (\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2})}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2}} = |\sin\frac{\alpha}{2}| = \sin\frac{\alpha}{2} \quad (\text{wegen } 0 \le \alpha \le 2\pi).$$

۶ . ۶ تمرینونه

۱ – بنسټیزه هندسه یا څمککچونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ . ۱ – لاندې کونجونه دې په لینده اندازه همداسې په درجه اندازه(د څسیما یا دسیمال یا لسمیز او سمساګیسیمال (د ۶۰ په بنسټ جوړ شوي ګڼل(که غواړۍ شمیرل) برخو) ورکړ شوي دي،

1.1.1.a) $15°$	b) $225°$	c) $105°$	d) $277{,}5°$
1.1.2.a) $\frac{\pi}{8}$	b) $\frac{\pi}{12}$	c) $2\pi+\frac{\pi}{2}$	d) $\pi-\frac{\pi}{3}$
1.1.3.a) $4{,}24°$	b) $70{,}9°$	c) $31°\,17'\,20''$	d) $228{,}1923°$
1.1.4.a) 5,19	b) 0,22	c) 2,31	d) 1

۱ . ۲ – یو درېګوډی له $a = 4{,}5$ cm , $b = 12{,}2$ cm او $c = 11{,}7$ cm سره ورکړ شوی دی. دا درېګوډی جوړ کړی ! د اړخونو نیموونکی وکاږۍ، د منځ ولاړې ، کونجنیموونکي او جګې، همداسی یي ګردیخوندي او خوندیګردي ګردی(یعنی دباندې او دننه ګردی) رسم کړی.

۱ . ۳ – لاندې درېګوډی جوړ کړی

a) $a = 11{,}7$ cm , $b = 9{,}2$ cm , $\gamma = 43{,}5°$

b) $c = 16{,}1$ cm , $\alpha = 84{,}6°$ $\beta = 51{,}9°$

وښايي چی ولی دواړه درېګوډي ورته دي

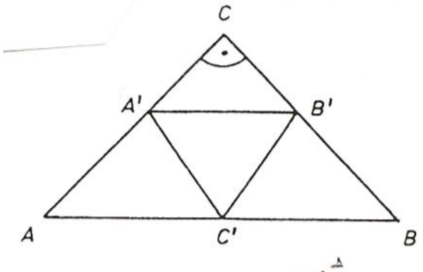


Bild 4.20 ځېره

۱ . ۴ – یو مساوي پښیز، ولاړکونجیز درېګوډي ABC ته یو مساوي اړخیز درېګوډی A'B'C' داسی په دننه کی ورکړ شوی چی $\overline{A'B'} \parallel \overline{AB}$ څغلي او C' په $\overline{AB}$ پرته ده (څیره ۴ . ۲۰ دې وکتل شي).

ورکړی $\overline{B'C'} = \overline{A'C'} = \overline{A'B'}$ د $\overline{BC} = \overline{AC}$ سره!

(c) ketabton.com: The Digital Library

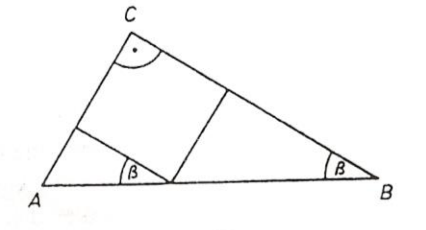


Bild 4.21

۱ . ۵ – په یوه ولاړکونجیز دریګوډي کی د
خیږي ۴ . ۲۱ سره سم په لیدوړ ډول
په دننه کی یوه مربع ورکړ شوې. د مربع
اړخونه وشمیرئ
الف) له کانتو څخه
ب) له هیوپوتینوزبېرخو څخه

۲ . د جېشمیرنی سره د ارزښتونوټاکنه

۲ . ۱ – له لاندې کونجونو څخه د لاندېکونجونو لپاره فنکشن ارزښتونه پیداکړئ:

a) α = 47,15° , b) α = -390° , c) α = 7,784 , d) α = 13,195

۲ . ۲ – کونج ß دې د sinß = a , cos ß = a , tan ß = a , cot ß = a څخه د

a) a = 0,8290 , b) a = -0,2907 , c) a = -2,145, d) a = 0,8660

لپاره وشمیرل شي (په اوبې کی دې د الفا په ځاي بیتا ولیکل شي !!!)

۳ . په ولاړکونجیز دریګوډي کې شمیرنې

۳ . ۱ – په ولاړکونجیز (γ = 90°) دریګوډي کې معلوم دي

الف) a = 3 cm , b = 4 cm ، ب) a = 5 cm , c = 12 cm

کوم ازښتونه sin α , cos α , tan α , cot α لري؟

۳ . ۲ – ولاړکونجیز دریګوډي کې (γ = 90°) نه ورکړشوي کونجونه او نه ورکړ شوي اړخونه وشمیرئ ، لاندې لوبي موږ ته معلومي دي:

a) a = 50cm , b) a = 40cm , c) b = 70 cm , d) c = 65 cm

b= 78,1 cm α = 43°36' α = 18°55' ß = 59° 29'

۳ . ۳ – وشمیرئ ! h_c, A او همداسی د ټاکلي مساوي پښیز دریګوډي ورکړ شوي پاتې کونجونه او اړخونه (ß = α, a = b):

a) a = 66cm , b) c = 22,4 cm , c) a = 38,9 cm , d) c = 30,3 cm

c = 130 cm α = 47,8°, γ = 33,3° γ = 48,2°

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) درې قوې دې د زوريا قوت $F_1 = 167{,}5N$, $F_2 = 112\ N$ او $F_3 = 157\ N$ سره ورکړ شوې وي، چې په ګډه يو درېګوډى جوړوي. د دې درېګوډي کونجونه چې له اړخونو رابند دي، څومره لوي دي؟

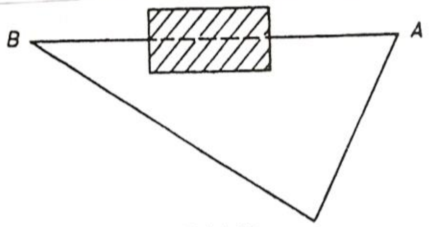


Bild 4.23 ځاکره

پ) دوه ټکي A او B چې يوه کور يې مخه پټه کړې وي، يو له بل څومره لرې دي، که $\overline{BC} = 75{,}25\ m$, $\overline{AC} = 51{,}75m$ او $\sphericalangle BCA = 71°15'45''$ وي (ځيره ۴ . ۲۳)

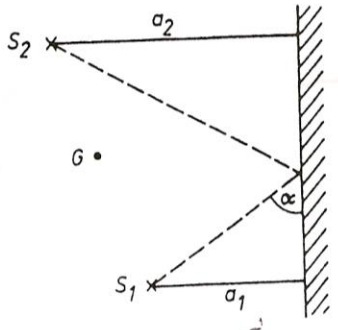


Bild 4.24 ځاکره

ت) د دوه يخ هاکي لوبغاړو S_1 او S_2 ترمنځ يو د مخالف ټيم لوبغاړى G ولاړ دى. S_1 په داسې ډول توپ و S_2 ته وهي چې توپ په يوه ديوال ولږېږي، (ځيره ۴ ، ۲۳ وګورى). د دواړو لوبغاړو S_1 او S_2 لريوالى څومره دى؟ که د دوي واټن له ديوال $a_1 = 2{,}5m$ همداسې $a_2 = 6{,}5\ m$ وي او توپ د يوه دې ديوال سره په يوه کونج $\propto = 42°$ ولږېږي.؟

۵ . د ترېګونومتريکي يا درېګوډيزو(مثلثاتي) فرمولونو استعمال

۵ . ۱ – بې له جبشميري او جدول دې نور دوه درې فنکشن ارزښتونه دې وشميرل شي، که ورکړ شوي وي: $(0 < \alpha < 2\pi)$:

a) $\sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ b) $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ c) $\tan\alpha = \sqrt{3}$ d) $\cot\alpha = -\sqrt{3}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۵ . ۲ - لاندې مساوات وښايی:

5.2.1. a) $1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

b) $1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$

c) $\cos\alpha \cdot \sqrt{1+\tan^2\alpha} = 1$

d) $1 + 2\cos\alpha = 4\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$

5.2.2. a) $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$

b) $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$

c) $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$

d) $\cot\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$

5.2.3. a) $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

b) $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

c) $\tan 3\alpha = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}$

d) $\cot 3\alpha = \frac{\cot^3\alpha - 3\cot\alpha}{3\cot^2\alpha - 1}$

5.2.4. a) $\cos 2\alpha = \cos^4\alpha - \sin^4\alpha$

b) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}$

c) $\cos 2\alpha = 1 - 8\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}$

d) $\cos 2\alpha = \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$

5.2.5. a) $\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \cos 2\alpha = \frac{1}{4}\sin 4\alpha$

b) $\frac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} = -(\cos\alpha + \sin\alpha)$

c) $\sin\alpha + \sin(\alpha + \frac{2\pi}{3}) + \sin(\alpha + \frac{4\pi}{3}) = 0$

d) $\sin^2(3\pi - \alpha) + \sin^2(6{,}5\pi + \alpha) = 1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۷ ۰ ګډوله ګڼونه یا کمپلیکس اعداد Komplexe Zahlen

د مخه مو ولیدل، چې څنګه یوه ګڼډیرۍ پر بله ګڼډیرۍ ودانه شوې ده۰ که ولرو

$$x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \quad x^2 = -1 \qquad (7, 1)$$

که پورته برابرون ته وګورو، نو څرګند لیدل کیږي، چې دا په رییلګڼونډیرۍ کې اوبی یا حل نه لري، نو له دې امله باید (1 , 7)د ګڼنو ډیرۍ وغزول شي۰ له

$$x_1 = \sqrt{-1}, x_2 = -\sqrt{-1}, ...(7,2)$$

د $\sqrt{-1}$ ګڼ، چې د لومړي ځل لپاره د رییل مانانه لري، دا سومبول د $i = \sqrt{-1}$

ټاکل کیږي چیرته، چې لرو: $i^2 = -1$ د

$$x_1 = i, x_2 = -i \Leftrightarrow x_{12} = \pm i, ...(7,3)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیکو : دا پورته د لاندې سره

$i^2 = - 1$ (7 , 4)

د (7,1) ځاي نیسي، ځکه، چې باور لري

$$x_1^2 = i^2 = -1 \Leftrightarrow x_2^2 = i^2 = -1$$

دا چې i رییل مانا نه لري، نو دې سومبول ته ایماجینارګڼ imaginär(لاتین: فقط خیالي)یوون(واحد)وایو.

برابرون

$$x^2+a = 0 \Leftrightarrow x^2 = -a \ , a > 0 \qquad (7,5)$$

کیدی شي په لاندې ډول ولیکل شي

$$x_1 = \sqrt{-a} = \sqrt{a}.\sqrt{-1} = \sqrt{a}.i, ...(7,6)$$
$$x_2 = -\sqrt{-a} = -\sqrt{a}.\sqrt{-1} = -\sqrt{a}.i$$

دلته د(7,4) له امله باور لري

$$x_1{}^2 = ai^2 = -a, x_2{}^2 = (-\sqrt{a})^2 i^2 = -a, ...(5,7)$$

اوس د ایماجینار ګڼ یوون(واحد) تولیز کوو

$$z = bi, b \in R, i^2 == -1, ...(5,8)$$

ایماجیناریوون(واحد)z= i یو ځانګړی ایماجینارګڼ b=1 دی

د تولیزې خلورې (عمومي مربع) برابرون(مساوات) اوبی(حل) :

$$x^2 + px + q = 0, p, q \in R, ...(7,9)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې ډول د څلوری پوره کولو یا مربع تکمیلول له لارې

$$(x + p/2)^2 = x^2 + px + p^2 / 4$$

لاس ته راځی یالرو<=

$$x^2 + px + q = (x + p/2)^2 = +(q - p^2/4) \qquad (7, 10)$$

$$(x + p/2)^2 = p^2/4 - q \qquad (7, 11)$$

او که فورمال پسی وګڼل شي

$$(x + p/2)_{1,2} = \pm\sqrt{p^2/4 - q}$$

نو لرو

$$x_{12} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{p^2/4 - q}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7,12)$$

د $p^2 = 4q$ لپاره رییل «ډبل» اوبی یا حل لاس ته راځي

$$x_1 = x_2 = -\frac{p}{2}$$

که $p^2 > 4q$ وي نو(7,12) دوه مختلف رییل اوبیوني یا حلونه منځ ته راوړي۰

که $P^2 < 4q$ وي، نو رییل اوبی نه شته دی

د ایماجینار ګڼ په مرسته کیدی شي ولیکو

$$\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = \sqrt{[q - \frac{p^2}{4}](-1)} = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.i$$

که اوس ځاي پر ځاي کړو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-\frac{p}{2}=a\in R,\sqrt{q-p^2/4}=b\in R$$

نو په لاندې بڼه دوه اوبيونې يا حلونه لاس ته راځي

$$x_{1,2}=a\pm bi;a,b\in R$$

د دې فورم یا بڼې ګڼونه کمپلکس ګڼونهKomplexe Zahlen (لاتين: پوره کوونکي - یا پوره کيدونکي-) بلل کيږي

$$z = a+bi\ ,\ i^2 =-1;\ a,b \in R \qquad (7,13)$$

د کمپلکس ګڼونوډيرۍ په C سره په نخښه کوو

$$\bar{z}=a-bi, ...(7,14)$$

دا پورته (7,14) و(7.13) ته کنجوګيري کمپلکس ګڼ بلل کيږي٠ لنډ کنجوګيري کمپلکس ګڼ یا اوښتی ګڼ

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}, ...(5,15)$$

د دې مطلقه یا ساده ارزښت

$$a = re(z) \Leftrightarrow b = Im(z) \qquad (7,16)$$

د دې ريیل همدا رنګه ایماجینار برخه

دوه کمپلکسګڼونه برابر بلل کيږي، که دوي په ريیل او ایماجینار برخه کې یو له بل سره برابر وي:

$$a_1+b_1i=a_2+b_2i\Leftrightarrow a_1=a_2,b_1=b_2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

موږ تل په پام کې لرو، چې$i^2 = -1$ اېښودل شوې

ګډوله یا کمپلکس عدد کېدی شي په سطحه یا هاره کې د لاندې شکل سره سم(د ګاوس د اعدادوسطحه). سړی د کمپلکسو اعدادو سره همغسې شمېرنه کوي، لکه د حقیقي اعدادو سره او په پام کې نیسي چې: $i^2 = -1$

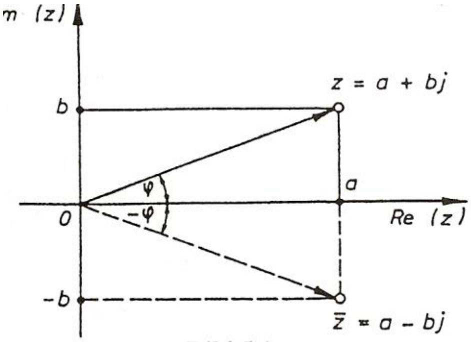


Bild 5.1

موږ دې سیستم ته پروت ولاړ سیستم وایو یا کواوردیناتسیستم Koordinaten systm

پورته ځیره دې وکتل شي

پروتولاړ سیستم ته د (x,y) - سیستم هم وایي په پروتولاړ سیستم کې پروت ځرخون(محور) د x - محور ته د هوارې یاسطځې ریبلبرخه او ولاړ محور یا د y – محور ته یپایماجینار برخه وایې لکه څنګه، انځور شوي دي۰ په دې توګه په پروتولاړ سیستم کې یو ټکی منځ ته ر اځي، چې کمپلکس ګڼ انځوروي۰(موږ دا اوس دا برخه نوره نه ځیرو، خو دا د وکتورونو په ډول انځورېږي او کارونی یا عملي یې هم همداسې دي، لکه د ورسره بلدو وکتورونو) یادونه : هغه ګران هیوادوال، چې نوي د شمېرپوهنی د دې برخې سره بلدېږي، د هغو لپاره دې په دا لومړي ځل ځنې وییونه یا لغاتونه یاکلمې په پام کې نه راځی، لکه د وکتور کلمه، خو دا پورته یا لاندې ځیرو کې کتلی شو، چې د کمپلکس ګڼونو زیاتون او کمون څنګه دی

۷ ۰ ۱ زیاتون او کمون:

(c) ketabton.com: The Digital Library

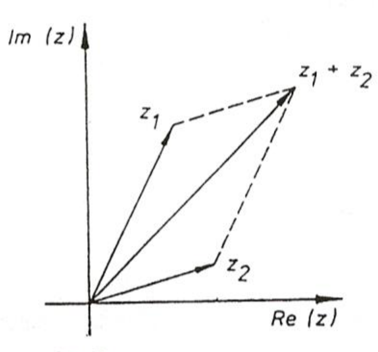
لاندې ښېرو ته دې پام وي او ګورو، چې رییل برخه او ایماجینار برخه د Re(z) او Im(z) سره په نخښه شوي دي

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 + b_1 i) \pm (a_2 + b_2 i) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2), ...(7,17)$$

بیلګه ۷ ۰ ۱ ورکړ شي:

$$z_1 = 2 - 3i, z_2 = 3 + 2i$$
$$\Rightarrow z_1 + z_2 = 5 - i, z_1 - z_2 = -1 - 5i$$
$$\Rightarrow$$
$$|z_1| = \sqrt{2^2 + 3} = \sqrt{13}, |z_1| = \sqrt{13}$$
$$-z_1 = -2 + 3i, -z_2 = -3 - 2i$$

زیاتون یا جمعه (او په همدې توګه کمون یا تفریق یعنې د(-z2) په زیاتون)کیدی شي د ښېرې ۵ (په همدې توګه د ښېرې ۷ . ۳) د ګراف له لارې هم ښوول شي.



7.2 Bild 5.2 څېره

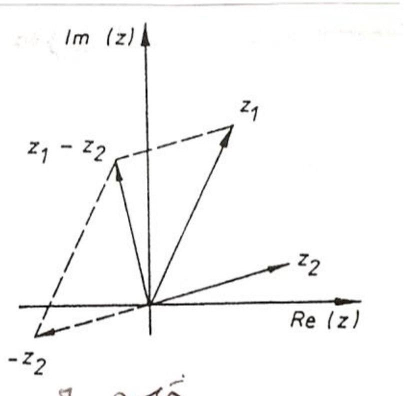
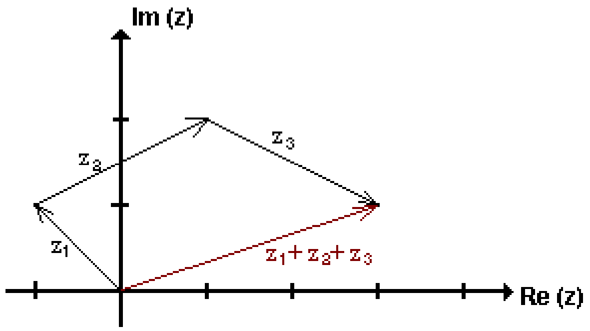


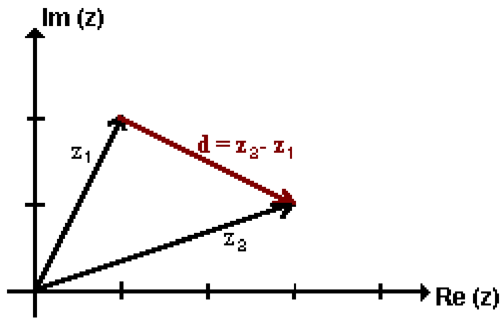
Bild 7.3 څېره

(c) ketabton.com: The Digital Library

یا لاندې:



په پورته او لاندې ځیرو کې د کملپکس ګڼونو د زیاتون او کمون انځور لیدلکیږي٠



دکملپکس ګڼونو ارزښت

د وکتورz اوږدوالی د کملپکس ګڼونو ارزښت بلل کیږي٠

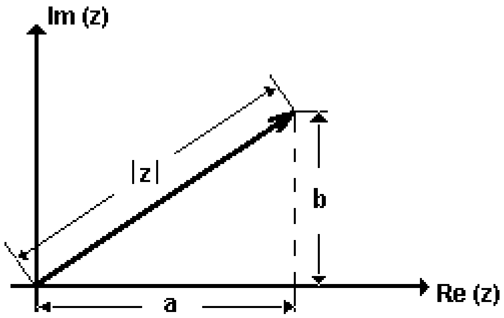
دا د په |z| سره ښايو او د پیتاګوراس(فئثاغورث) د جملې

سره ښوول کیږي، د دې لپاره دې پورته اخرنی لیکه

هم وکتل شي٠ مخامخ ځیره موږ ته د کمپلکس ګڼ

د ارزښت انځور ښايي

(c) ketabton.com: The Digital Library



$|z| = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$.

په درې ګوډي کې د اړخونو ځانګړنې یا تباسب له امله باور لري

$$||z_1|-|z_2|| \le |z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7,18)$$

برسیره پر دې باور لري:

$$\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$$

۷ . ۲ د کمپلکس ګڼونوځل:

د ورسره بلد نوک اینوولو له لارې لاس ته راځي

$$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i) = a_1a_2 + a_1b_2i + b_1a_2i + b_1b_2i^2$$
$$= a_1a_2 + a_1b_2i + b_1a_2i + b_1b_2(-1)$$
$$\Rightarrow$$

نو بارورل ري

$$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i) = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i \qquad (7,20)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګران لوستونکی به زما په ستونځو پوه شي، چې لاتین توري په بدل ډول لیکل شوي، چې دا هم زما تخنیکي ستونځې دي، دا که په هرځایکې وي،دا به راته ګران د شمیرپوهنې مینه وال وبخښي۰ دا لاندې هم ساده ازمایل کیدی شي

$$\overline{z_1.z} = z_1.z_2 \quad , \quad |z_1 .z_2| = |z_1||z_2| \qquad (7,21)$$

بیلګه ۷ ۰ ۲

د $z.\bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2+b^2+(-ab+ab)i = a^2+b^2$

او (۱۵ ، ۷) له امله لاس ته راځي:

$$\Rightarrow \quad z.\bar{z} = |z|^2 \qquad (7,22)$$

۷ ۰ ۳ ویش

$$z_1 : z_2 = (a_1+b_1 i):(a_2+b_2 i) = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1+b_1}{a_2+b_2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{z_1 \overline{z_2}} = \frac{(a_1+b_1 i)(a_2-b_2 i)}{(a_2+b_2 i)(a_2-b_2 i)} = \frac{(a_1a_2+b_1b_2)+(a_2b_1-a_1b_2)i}{a_2^2+b_2^2}$$

$$z_1 : z_2 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1+b_1 i}{a_2+b_2 i} = \frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2} + \frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2} i \qquad (7,23)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې پسی لاس ته راځي

$$|\frac{Z_1}{Z_2}|=\frac{|Z_1|}{|Z_2|},\left(\overline{\frac{Z_1}{Z_2}}\right)=\frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}} \qquad (7,24)$$

بیلګه ۷ . ۳ :

د (۷ . ۲۴) د دوهمې برخې ښوونه:

$$\frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}}=\frac{\overline{Z}_1.Z_2}{\overline{Z}_2.Z_2}=\frac{(a_1-b_1i)(a_2+b_2i)}{(a_2-b_2i)(a_2+b_2i)}=$$

$$=\frac{(a_1a_2+b_1b_2)+(a_1b_2-a_2b_1)i}{a_2^2+b_2^2}=$$

$$=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}-\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i=\overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)}$$

بیلګه ۷ ۰ ٤ :د $Z1$ او $Z2$ لپاره له سره سم لاس ته راځي:

$$Z_1:Z_2=\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{2-3i}{3+2i}=\frac{(2-3i)(3-2i)}{(+2i)(3-2i)}=\frac{(6-6)-(4+9)i}{3^2+2^2}=\frac{13}{13}i=-i$$

۷ . ۴ . تمرینونه

۱ - مېلق یا همغه ارزښتونه او انځورونه

۱ . ۱ – لاندې په اریتمیتیکي یا شمیرنیزه توګه ورکړ شوي ورکړ شوي کمپلکس عددونه په ګاوس سېحه کې انځور کړئ! د دې عددونو مېلقه ارزښتونه وشمیرئ.

a) $z=1-i$ b) $z=\sqrt{2}+\sqrt{2}i$

c) $z=2(1-\sqrt{3}i)$ d) $z=-1-i$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ . ۲ – د ګاوس د عددونو سطحه کې د هغو لاندې مخلوط یا کمپلکس عددونو ځای ورکړئ، د کومو لپاره چې باور لري:

a) $|z| = \sqrt{2}$ b) $|z| < \sqrt{2}$ c) $|z| > \sqrt{2}$ d) $|z| = r$

۲ – جمعه او تفریق(زاتون او کمون)

۲ . ۱ – د شمیرنې او کاږنې یا رسم کونې له لارې پیدا کړئ

a) $(1+2i)+(2+i)$ b) $(-2+i)+1-2i)$

c) $(1-2i)-(1-2i)$ d) $(-1-2i)+(2-i)$

۲ . ۲ - د شمیرنې او کاږنې یا رسم کونې له لارې پیدا کړئ

a) $(22+5i)+(2+i)$ b) $(3+2i)-(5+2i)$

c) $(1+2i)-(1+2i)$ d) $i-(1-2i)$

۳ . ضرب(ځل) او وېش:

په لاندې کې a,b,c,d,x,y حقیقي ګڼونه دي.

۳ . ۲ – وشمیرئ

a) $(2+\sqrt{3}\,i).(3-\sqrt{2}i)$ b) $(3+2\sqrt{2}\,i).(3-2\sqrt{2}\,i)$

c) $(1+\sqrt{5}\,i).(1-\sqrt{5}\,i).(13-12i))$ d) $\sqrt{3+\sqrt{7}i}.\sqrt{3-\sqrt{7}i}$

۳ . ۲ – وشمیرئ

a) $(x+y\,i)(2x+yi)$ b) $(\sqrt{x}+\sqrt{y}\,i)(\sqrt{x}-\sqrt{y}\,i)$

c) $\left(\frac{2}{3}a-3bi\right)\cdot\left(\frac{4}{3}a+5bi\right)$ d) $(c-\sqrt{d}\,i)(-c-2\sqrt{d}\,i)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۳ . ۳ – د لاندې ماتونو مخرج یا ماتلاندې حقیقي ورګرځوئ (a ، b حقیقي دي)

3.3.1. a) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}\,i}{\sqrt{3}+\sqrt{2}\,i}$ b) $\dfrac{1-20\sqrt{5}\,i}{7-2\sqrt{5}\,i}$

c) $\dfrac{56+33i}{12-5i}$ d) $\dfrac{63\ +\ 16i}{4\ +\ 3i}$

3.3.2. a) $\dfrac{5i}{\sqrt{2}-\sqrt{3}\,i}$ b) $\dfrac{3-27\sqrt{5}\,i}{7-3\sqrt{5}\,i}$

c) $\dfrac{i-\sqrt{3}}{\sqrt{3}\,i-2}$ d) $\dfrac{i}{8-i}(i+1)$

3.3.3. a) $\dfrac{3a+4bi}{4a-3bi}+\dfrac{4a-3bi}{4a+3bi}$ b) $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}\,i}{\sqrt{a}-\sqrt{b}\,i}-\dfrac{\sqrt{b}+\sqrt{a}\,i}{\sqrt{b}-\sqrt{a}\,i}$

c) $\dfrac{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}\,i}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}\,i}-\dfrac{\sqrt{1-a}+\sqrt{1+a}\,i}{\sqrt{1-a}-\sqrt{1+a}\,i}$

d) $(5-i)\,(6-i)+\dfrac{5-i}{6-i}$

۴ . سره رایوځی شوې پوښتنې

ګډوله ګڼونه یا اعداد ورکړ شوي.

$z_1=\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{i}{2}$ او $z_2=-\frac{1}{4}-\sqrt{3}\,\frac{i}{4}.$

۳ - د لوګاریتم بنسټ فرمولونو استعمال. په لاندې تمرینونوکې x وشمرئ.

$$z_1=\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{i}{2}\ \text{ und }\ z_2=-\frac{1}{4}-\sqrt{3}\,\frac{i}{4}.$$

وشمیرئ:

(c) ketabton.com: The Digital Library

4.1. a) $z_1 + z_2$ b) $z_1 - z_2$ c) $z_1 \cdot z_2$ d) $\frac{z_1}{z_2}$

4.2. a) $|z_1|$ b) $|z_2|$ c) $\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ d) $\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

4.3. a) $|z_1 + z_2|$ b) $|z_1 - z_2|$ c) $\bar{z}_1 + \bar{z}_2$ d) $\bar{z}_1 - \bar{z}_2$

4.4. a) $|z_1| \cdot |z_2|$ b) $\frac{|z_1|}{|z_2|}$ c) $|z_1 \cdot z_2|$ d) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$

۴ . ۵ – د لاندې مربع مساواتو حلونه ورکړئ!

a) $x^2 + (1 + i)\,x - 2\,(1 - i) = 0$

b) $x^2 + (3 - 2i)\,x + 3\,(1 - i) = 0$

c) $x^2 - \frac{i}{2}\sqrt{2}\,x + 1 = 0$

d) $16\,x^2 + 8\,(i + 1)\,x + 2\,(i + \frac{9}{2}) = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۸ - د ښوونې(ثبوت) متودونه

په شمیرپوهنه کې داسې مخ په وړاندې ځو، چې د ځینو نیونو یا فرضیو په فرمولولو سره، غوښتنو یا ښوونو او یا لکه تراوسه د ثبوتولو پرابلم (د ګڼپوهنې جملې په څیر) منځ ته رااچوو، چې دا نیونې او غوښتنې ویناوې دي۰ په جملو کېډ دې ماتماتیکي یا شمیرپوهنیزه تړنه بیا ایمپلیکیشن یا لاس ته راوړنه ده(مخ ته دې وکتل شي)یانې A => B دا غوښتنه د رښتیا ارزښت w غوښتنه B کې نغښتې او دا اوبی یا حل B له V او د دې تراوسه اوبی- یا حل شوو جملو لاس ته راځی۰ د دې لاس ته راوړنو لپاره بیلابیلې لارې شته ، چې په لاندې کې یې څیړو

۸ ۰ ۱ سیده یاسیخه (مستقیمه) ښوونه

په سیده ښوونه (ثبوت) کې سړی له یوې وینا A څخه مخ ته ځي، چې رښتیاارزښت یې څرګند دی او په دې لاس ته راوړنې پسې د B وینا لاس ته راوړي۰

دا وینا B هم رښتیا ده، ځکه چې له یوې رښتیا پریمیسې Prämisse (نیونې یا فرضیې) څخه رښتیا کونکلوزیون Konklusion (لاس ته راوړنه یا نوره هم ښه ښوونه یا ثبوت)(د اینمپلیکیشن ۱ او ۲ لیکه د رښتیاارزښت په جدول کې) له یوې رښتیا پریمیسې څخه د نارښتیا کونکلوزیون لاس ته راوړنې نارښتیا دي (ایمپلیکیشن رښتیا ارزښت ۲ ـــم جدول)۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه : سیده اوبیونه یا حل:

نیونه V : $x \geq 1$

غوښتنه B : $6x+3 \geq 3x + 6$

اوبی : وینا A ، چې ربښتیا ارزښت w یې جوت دی، نیونه يې $x \geq 1$ ده۰ له 3 سره ځل له امله لاس ته راوړنې لرو چې په لاندې ډول دی3 $3x \geq$: د 3 زیاتون له لارې لرو: $3x + 3 \geq 6$ د $3x$ زیاتون له امله لاس ته راځي:

$6x + 3 \geq 3x+6.$

بیلګه:

د یوه ناټیک اوبیونې یا حل کارونه (متود)

د ښوونې دی $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a.b}$

د ښوونې وړ وینا څخه لاندې لاس ته راوړنې لرو:

$(a+b)^2 \geq ab$

$a^2+b^2+2ab \geq 4ab$

$a^2 -2ab+b^2 \geq 0$

$(a-b)^2 \geq 0$ لاس

ته راوړل شوې ویناوې $(a-b)^2 \geq 0$ بې بندیزه ربښتیا دي۰ مګر دا د ښوولو وینا یواځې د شرایطو $b \geq 0, a \geq 0$ لاندې باور لري۰ له دې امله که له ربښتیا وینا څخه غوښتل شوې یا د ښوولو ویناو ته نه شي راتلی(سیده ښوونه) او په ناسداږه یا غیرمستقیم ه ښوونه یا اوبیونه باندې استعمال شي نو ګټوره به وي، چې په لاندې توګه تر څېړنې لاندې ونیول شي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

۸ ۰ ۲ ناسیده ښوونه یا - ثبوت:

په ناسیده ښوونه کې له یوه نفي یا نیګیشن یا نه والي څخه مخ ته ځو، چې A « ناغوښتنه» او له دې یوه وینا B لاس ته راوړل کیږي، کومه چې نارښتیا ده۰ وینا یعنې نفيې غوښتنه یا ثبوت هم نارښتیا دی، ځکه چې له یوې نارښتیا نیونې څخه یوه نارښتیا ښوونه یا ثبوت لاس ته راتلی شي(د ایمپلیکیشن څلورمه کرښه).

له یوې رښتیا نیونې څخه د یوې نارښتیا ثبوت لاس ته راوړنه نارښتیا ده۰ (د ثبوت د

رښتیا جدول څخه) که د غوښتنو نفی نارښتیا وي، نو غوښتنه بیا په دې اوبیونې یا حل کې رښتیا ده۰

بیلګه : ناسیده ښوونه یا ثبوت

نیونه V : a , b دې رییل ګڼونه وي او وي دې: $a \geq 0, \quad b \geq 0$

ښوونه یا غوښتنه B :

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

اوبیونه : د غوښتنو نفيې ده $\frac{a+b}{2} \prec \sqrt{a.b}$

د پورته نابرابرون له څلورې یا مربع کولو له امله لاس ته راوړنه لرو:

$$(a+b)^2/4 < a.b$$

دواړه لورې له څلورو سره ضربوو، نو لاس ته راځی

$$(a+b)^2 < 4a.b$$

له څلورې وتنې یامربعوتنې څخه لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a^2+b^2+2ab < 4ab$$

په دواړو لورو د 4ab کموني څخه لاس ته راځي

$$a^2-2ab+b^2 < 0$$

د نابرابرون کينه لور د څلورى ۰ مربع په بڼه ليکل کيدى شي او هيڅکله له صفر څخه نه شي کوچنى کيدى۰ دا په دې مانا، چې $(a+b)^2 < 0$ نارښتيا دى يا غلط دى، نو له دې سره $(a+b) < ab$ نارښتيا دى يانې

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

رښتيا دى ۰

۲ – غوښتنه B :د ۲ ريښه يا جذر $\sqrt{2}$ ايرشنل دى

اوبيونه يا حل : د غوښتنې نفيې ده، چې : د ۲ ريښه $\sqrt{2}$ ريشنل ګڼ دى (د ريشنل ګڼونو لپاره دې برخه ۳ وکتل شي)، نو بايد بيا دوه ټولريشنل ګڼونه q, p, د $q \neq 0$ سره شته وي، چې دا باوري شي:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow p^2 = 2q^2$$

له دې پورته برابرون سره p^2 يو جوړه((جفت) ګڼ دى۰ نو له دې امله p هم يو جوړه ګڼ دى، ځکه چې يواځې د جوړه ګڼ مربع يا څلورى جوړه کيدى شي $p=2p'$ له مربع يا څلورئ کولو او پر ځاي اينوولو لاس ته راځي:

$$P^2 = 4p'^2،$$

$$2q^2 = 4p'^2$$

$$q^2 = 2p'^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له اخرنی برابرون لاس ته راځي، چې q هم یو ځلوری یا مربع ګڼ دئ. په دې پسې لرو p او q پر ۲ ویشونی دئ، یانې پرویشپردی نه دئ. که پرویشپردي ټول ګڼونه p اوq له $\sqrt{2}$

سره شته نه وي، نو دا ډول ټولګڼونه نه شي کیدی، چې شته یا موجود وي.

۸ ۰ ۳ د پوره ایندکشن له لارې ښوونه

د پوره ایندکشن ثبوت یا حل د هغو غوښتنو لپاره کارول کیږي، چې د یوه ټاکلي ګڼ n0 (صفر باید لږ د ن د پښی لاندې ولیکل شي) څخه د ټولو پیدایښتي ګڼونو لپاره باوري کیدی شي. یانې دلته نوینه داده، چې یوه وینا د لپاره که باور ولري، نو دا بیا د ټولو پیدایښت ګڼونو لپاره باور ي کیدی شي.

بیلګه ۱ :

د ټولو $n \geq 0$ لپاره ۲ په توان دn له صفر لوي یا له صفر بسره برابر دي یعنې باور لري: $2^n \geq 0$

بیلګه : د ټولو $n \geq 0$ لپاره باور لري 1+3+5+... 2n+1)= n²

د پوره ایندکشن د ښوونې لپاره د « پوره ایندکشن پرینځیپ بنسټ» مخ ته پروت دئ:

که یوه وینا دn= n0 یا(په لاندې، که ن،ج، ته پورته شو،نو صفر په پښه کېلیکل شوی)
$n = n_0$ لپاره باور ولري او که د دې وینا د یوه په خوښه پیدایښتي ګڼ n = k لپاره اور لرلو څخه د n = k+1 لپاره باوریوالی ترې لاس ته راشي، نو دا وینا د ټولو پیدایښتي ګڼونو $n \geq n_0$ لپاره ریښتونې ده .

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې پسې په ترتیب د اینډکشن ښوونه په دوه پلونو یا قدمونو سرته رسیږي

۱ - د اینډکشن پیل

ښوول کیږي، چې دا وینا د $n \geq n_0$ لپاره باور لري

۲ – د اینډکشن پل

اوس باید یو ایمپلیکیشن یا لاس ته راوړنه وښوول شي. له دې امله د اینډکشن پل یا له برخه پلونو جوړ دئ

۲ الف: د اینډکشن نیونه :

نیول کیږي، چې وینا د $n = k \geq 0$ لپاره باور لي او دا نیونه په V فرمولبند کیږي

یادونه V د نیونې لپاره ځاي پرځاي کیږي یا راوړل کیږي.

۲ ب – د اینډکشن غوښتنه:

غوښتل کیږي، چې دا وینا د $n = k+1$ لپاره باور لري او دا غوښتنه په B فرمولبندي کوو. دا په ګوته کوو، چې B دلته د غوښتنې پرځاي لیکو

۲ ج – د اینډکشن ښوونه :

ښوول کیږي، چې B له A څخه لاس ته راځي: $A \Rightarrow B$

بیلګه ۱ :

۱ – د $n = 0$ لپاره باور لري $2^0 = 1 > 0$

۲ . ۱ . V ته :

$2^k > k$

و ۲ . ۲ B ته

(c) ketabton.com: The Digital Library

$2^{k+1} > k+1$

۲ ۰ ۳ له B <= V : له $2^k > k$ او $2 > 1$ څخه د زياتون له امله لاس ته راځي :

$2 + 2^k > k+1$

او له دې لاس ته راځي: $2.2^k > k+1, 2^{k+1} > k+1$

بيلګه ۲ :

۱ ۰ د $n = 1$ لپاره باور لري $1 = 1° = 1$

و ۲ ۰ ۱ V ته: $1+3+5++\ldots+(2k-1) = k^2$

و ۲ ۰ ۲ B ته:

و ۲ ۰ ۳ B <= V ته: له نيونې څخه د زياتوون 2k+1 زياتونې او له دې د ښي خوا د يوه بينومځلورى(-مربع) په څير انځورونې څخه لاس ته راځي:

$1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1=k^2+2k+1$

او له دې د ښى خوا انځوروني څخه د بينوم څلورى(-مربع) لاس ته راځى :

$1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1)= (2k+1)^2$

يادونه : د V او B پر ځاي کړى شو، چې نيونه او غوښتنه وليکو، يانې مورږ درې څه لرو، چې نيونه غوښتنه او ښوونه ده٠ په هغه ورسره بلد ډول يې ښوونه د يوه پارابلم حل دى، چې ما اوبى يا اوبيونه بللى(اوبي پښتو ده او ښه کره، همدې وي يا لغات ته مناسب خپل د پښتو نوم دى، چې ورسره بلد هم يو، لکه ملګوبى، خړوبى، چې موخه ترې همدا اوبى دى او په نورو ژبو کې هم همداسې دى)

دلته د شميرپوهنې سم اند درس ته د پاى ټکى ږدو، کۀ نور څه مو ښه مخ ته راغله هغه به بيا د تړنې په ډول ورسره مل کړو٠ ستاسو وړانديزونو ته هم سترګى په لار يم٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۸ . ۴ تمرینونه

۱ – سیده وښایي

الف) له $a + 1/a = b$ څخه لاس ته راځي $a^3 + 1/a^3 = b^3 - 3b$

ب) د دوه تیرو کونجونو α ، β لپاره صدق کوي

$$\sin(\alpha + \beta) < \sin\alpha + \sin\beta$$

۲ – ناسیده وښایي :

الف) د ټولو x لپاره ، چې وي $0 < x < \infty$ ، صدق کوي

$$(3x - 4) / (2x + 4) > 1$$

ب) $\sqrt{2}$ یو ایریشنل کېږ دی

۳ – د پوره اندکشن له لارې یې وښایئ

a) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{(n+1)\,n}{2}.$

b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{(2n+1)(n+1)\,n}{6}.$

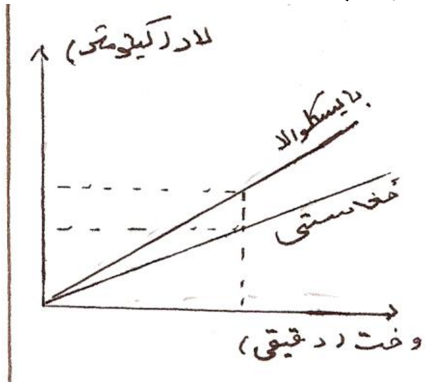
c) $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1.$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۹ ۰ کربنیز- یا خطي-یا لاینیز مساوات د یوې متحولې سره

پیل بیلګه

یو بایسکل ځغلوونکی او یو پلی له یوه ځایه په همغه وخت خوزي یا حرکت کوي، کوم چې په ګراف کې ښکاره شوی دی(که د ګراف ښکاره راته ناشوني شول بخښنه غواړم۰ که بل چا دا کار وکولی شو نو دا به یې هم مرسته وي، خو پرې پوهیدل کومې ستونځې نه لري) بایسکل په ګړۍ کی ۱۵ کیلومتره ځغلي او پلی ۱۰ کیلو متره په ګړۍ کي ځغلي. دوي پس له یونیم ساعت سره یوځاي کیږي. هر یو څومره لار وهي او یو له بل څومره لرې دي؟



(c) ketabton.com: The Digital Library

دا موږ دلته، لکه په ځنو کتابونو کی چی د فنکشن د نامه لاندې يادېږي، په همغه نامه نه يادوو خو هدف به همغه وي که دا د برابرون يا مساوات په نامه وبولو .
وخت) په دقيقه (په t ښايو لار) کيلومتر(په s ښايو د لارانځورونی څخه په گراف کی څرگنديږي چی بايسکلځغلوونکی له ۶۰ دقيقو وروسته ۱۵ کيلو متره ځغليدلي يعني 15km /hاو پلی ۱۰ کيلو متره يعني 10km/h
غواړود هرڅه لمړی وښايو چی هر يو له يونيم ساعت وروسته څومره لار وهلي او بيا دويمي پوښتني ته ځواب ورکوو.
بايسکل ځغلوونکی به له دوه ساعته وروسته 2.15km = 30 km ځغليدلی وي او پلی به 2.10km=20km ځغليدلی وي بايسکل ځغلونکی به له tوخته وروسته t.15km
15.tkm= لار وهلي وي. دلته وخت t خپلواك اوړيدونی يا نا پژندونکی او لار s بلواك اوړيدونی يا ناپيژندونکی يعني د t په واك کی دئ. دا کليمي به بيا د فنکشن او څيرونو په برخو کی پوره تر څيړني لاندې ونيول شي. د بايسکل ځغلوونکي وهلې لار، چی په r يې ښايو برابرون داسی ليکو:

$$S_r = 15.t; t \in Q_0^+$$

د بايسکل ځغلونکی وهلی لار، tچی د بايکلځغلولو وخت دی طبعآ زياتيز يا مثبت دئ ورته دپلي چی په lيي ښايو وهلي لار هم تاکل کيږي،يعني د l وهلی لار:

$$S_l = 10.t; t \in Q_0^+$$

له دې سره مو وښوول چی دواړه له پيل ټکي له 1,5 ساعته يو له بل څومره لرې دي. وهل شوې لار :

د بايسکل ځغلوونکي $S_r = 15.1,5 = 22,5km$

د پلي $S_l = 10.1,5 = 15,0km$

ددې په تعقيب له 1,5 ساعته وروسته دواړه يو له بل 7,5 km لرې دي .

۹ . ۱ لاينيز- يا کرښيز مساوات :

د کرښيز مساوات فرمول د يوې اوښتونې يا مجهولې x سره داسی دئ

$$Ax = a \qquad (9.1)$$

دلته A , a حقيقي اعداد دي. د (۱ . ۶) برابرون اوبيونه (حل) دا مانا لري چی ټول هغه حقيقي اعداد وښوول شي چی که په پورته (۱ . ۹) برابرون يا مساوات کې ځای په ځای شي، د مساوات شرايط پوره کړي. د حقيقي اعداد و بنسټيز قانون (۳ – مجه

(c) ketabton.com: The Digital Library

برخه دې وکتل شي) په بنسټ کیدی شي چې د حقیقي عددد مساوات دواړه خواوي په یوه عدد سره ځل یا ضرب کړو. بی له دې چې مساوت زخمي شي. داچې ویش په د $\frac{1}{A}; A \neq 0$ ځل سره برابر دی نو لیکل کیږي

$$x = \frac{a}{A}; A \neq 0; ....(9,2)$$ ....

دا د (۱ . ۹) یواځنی ممکن حل دی۰که په ښځ یا برعکس A = 0 وي، نو دلته دوه حالتونه یو د بل توپیروو

۱ – که $a \neq 0$ وي: دا مساوات بیا داسی دي $0.x = a; a \neq 0$

دا یو مخامخوالی یا تضاد یا نوره هم ښه په ځتوالی تشکیلوي ، نو په دې حالت کی حقیقي عدد x شته نه دئ چی دا(۱ . ۹) مساوات پوره کړي.

۲ - که a = 0 وي، نو بیا برابرون (۱ . ۹) لاندې شکل نیسي

0.x = 0

دا برابرون بیا د ټولو ریيلګڼونو xلپاره پوره (ډك) دئ. یا برابرون پوره کوي.

دا بیا داسی هم لیکل کیږي : (په خوښه x = (belپس دا لاندې باور لري:

برابرون (۱. ۹ .) د $A \neq 0$ لپاره یواځنی ټاکلې اوبیونه (۹ .۲) لریږد A = 0 او $a \neq 0$ لپاره اوبیونه نه لري د A = 0 او a = 0 لپاره هر ریيلګڼ x اوبیونه یا حل دی.

په دې لاس ته راوړنوکی، د یوې اووښتونې یا مجهولی سره د ریيل برابرونونو د ګڼلو ټوله تیوري خوندي ده .

یو لاینیز برابرون (مساوات) (یو برابرن، چی د برابرونونو په دواړو خواوکی د لاینیزو برابرونونو ترمونو زیاتون $a_i + x_i + b_i$ پرت وي) دا مخکني نورمالفورم (۹ . ۱) مو له مخه مخ ته نه دی پروت، پس سړی په دواړو خواو د لاینیزو ترمونو د هدف په لور زیاتون (همداسی کمون) له لارې همغه مخکني نورمالفورم ته بیرته راړوي، دا د II . 2 بنسټیز قانون له مخی یو ورته فورمبدلون یا بڼه بدلون دئ)(د اوبي یا حل ډیری تغیر نه دئ خوړلی) د بېلګي په توګه لاندې مساوات ورکړ شوی

$$a_1x - b_1x + c_1 - d_1 = a_2x - b_2x + c_2 - d_2$$

پس کیدی شي چی په دواړو خوا $b_2x + d_1$ ور زیات کړو او $a_2x + c_1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ترې کم کړو، نو لاس ته راځي

$$a_1x-b_1x-a_2x+b_2x=c_2-d_2-c_1+d_1;......................(9.3)$$

دلته هغه د x لرونکی غړي د مساوات په کيڼ لور او ثابت د برابرون په ښي لورپراته دي. داسی ليکو

$$A=a_1-b_1-a_2+b_2;a=c_2-d_2-c_1+d_1$$

نو دا برابرون (۳ . ۹) د برابرون (۱ . ۹) سره (ته) کټمټ (ورته) دی، که په لاندې فورم يا بڼه يو مساوات ورکړ شوی وی

$$\frac{a_1}{a_2}x=\frac{b_1}{b_2}$$

(دا ټيک هلته موخه ور يا هدفمند دی چی $a\neq 0;b\neq 0$ وي) . نو برابرون د x په لور حل کيدلی شي ، که دا په a2 ځل شي او د a1 |=0 په حالت کی په a1 وويشل شي:

$$x=\frac{a_2b_1}{a_1b_2}$$

بيلګه ۹ . ۱ :

برابرون $\frac{a^2x-b^2}{a}-\frac{a(b-ax)}{b}+\frac{b^2}{a}$ هلته موخه ور دی چی $a\neq 0;b\neq 0$ وي.

ددې لپاره چی د ماتلاندې ښخه ځانونه خلاص کړو، نو پورته ورکړ شوي برابرون د ګډماتلاندي a.b سره ځل کوو:

$$b(a^2x-b^2)-a^2(b-ax)+b^2=a^2b$$

$$a^2bx-b^3-a^2b+a^2x+b^3=a^2b$$

اوس برابرون ترتيبيږي او راټوليګی، xله نوکانو ښخه راوځي

$$a^2bx+a^3x=a^2b+b^3+a^2b-b^3$$

$$a^2(ax+b)=2a^2b$$

د $a\neq 0$ له امله کيدی شي په a^2 وويشل شي (a+b)x=2b

دا د لاينيز برابرونونو بنسټيزه بڼه (فورم) (۱ . ۹) ده

که ($a+b\neq 0,(a\neq -b)$ وي ، نو(x = 2b /(a + b

(c) ketabton.com: The Digital Library

يوګونی يا يواځنی اوبيونه يا حل دیَ
که(a = -b) a + b = 0 ، نو د $b \neq 0$ له امله اوبيون شته نه ده .
هغه حالت چی ناپاي زياتې اوبيونې يا حلونه منځ ته راځي(د x =په خوښه) ، د نيونی يا فرضيي له امله چی بايد $b \neq 0$ وي، موجود نه دیَ.
پام:
په دې هکله زياتې بيلګی کيدی شي راوړل شي، چې ضريب يا ځله ووني په مختلفو توانونو وي۰ زه دلته يواځې دومره يادونه کوم، چې په مساواتو کې، چې اوښتونی يا متحولې ولري، همغهسی شميرل کيږي، لکه په ربيلعددونو کې۰
دلته هم بايد دې ته پام وي، چې ماتلاندې صفر نه شي۰ که چيرې اړيينې وې او يا ګرانو لوستونکو يې راوړل وغوښتل، نو زه به بيا دا کار سرته ورسوم او بيلګې به هم راوړم او که چيرې کوم د شميرپوهنې مينه وال په دې هکله د پوښتنو ځوابونه غوښتل، زه به وهڅيږم او دا کار به هم سر ته ورسوم، که لوي څښتن غوښتل۰ زه دومره يادونه کوم، چې په دې هکله زما د شميرپوهنې بنسټيز کتاب کې زياتې بيلګې راوړل شوي، خو نه پوهيږي، چې دا کتاب به چا ته ورسيږي او که نه

بيلګه 9 . ۲ :
برابرون $(x/a)-((a-x)/2bc)+(a-x)/3c = 1$ يوائې
د $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ لپاره موخه ور دیَ.
ددې لپاره چی مات لاندې له منځه يوسو، نو مساوات د ا.م.ل. 6abc ا(صلي ماتلاندې) سره ځل کوو:
$$6bcx-3a(a-x)+2ab(a-x) = 6abc$$
ورپسی نور، په لاندې ډول، د څرګندو شميرلارو يا - قاعدو له لارې لاس ته راځي:
$$6bcx-3a^2+3ax+2a^2b-2abx=6abc$$
$$(6bc+3a-2ab)x=6abc+3a^2-2a^2b,$$
$$(6bc+3a-2ab)x=a(6bc+3a-2ab)$$
دا بيرته د لايني مساوات (۹ . ۱) بنسټيزه ده، او له دې امله صدق کوي:
د $6bc+3a-2ab \neq 0$ لپاره x=a د مخ ته پراته مساوات يوائنی حل دیَ.
د $6bc+3a-2ab = 0$ لپاره د $0x = 0$ له امله هر ربيل کڼ x اوبيونه ده.
نو لرو x=a د $6bc+3a-2ab \neq 0$ لپاره د $6bc+3a-2ab = 0$ لپاره x په خوښه
دلته د ځيرل شوو برابرونونو، چی په ساده ډول يی لاينيزوالی يا لاينيزتوب پيژندل کيږي، په څنګ کی برابرون شته چی په اصل (پرينځيپ) کی کرښيز يا لاينيز نه دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

مګر په لاینیز مساوات یا برابرونونو اړول کیدی شي. دلته ددې غوښتنو په څنګ کې چې د ناپیژندونکو ضریبونو a,b,c ..... لپاره شوي، زیات وخت په x هم شرطونه ایښول کیږي.

ددې لپاره لاندې کې درې ساده بیلګي راوړو:

بیلګه ۹ . ۳ :

برابرون $(8x - 9)(3x - 4) - (5x - 6)^2 = (4 + x)(3 - x) - 9$

د لومړي حل لپاره څلوری برابرېن یا مربع مساوات دی، ځکه چې څلوری(مربع) غړي لري. د یو له بل څلولو یا ضربولو وروسته څلوری غړي له منځه ځي. یو لاینی مساوات د یوې ځانګړي سره سره پاتي کیږي:

$$24x^2 - 32x - 27x + 36 - (25x^2 - 60x + 36) = 12 - 4x + 3x - x^2 - 9$$

$$-x^2 + x = 3 - x - x^2$$

$$2x = 3$$

$$x = 3 / 2$$

بیلګه ۹ . ۴ : برابرون $(2x - a) / (x - b) = 1$ یواځي هلته هدفمند دی که حل x دا شرط $x \neq b$ پوره کړي. نو بیا لرو: $2x - a = x - b \Rightarrow x = a - b$

د $x \neq b$ له امله باید باوري وي $a - b \neq b$ له دې امله لرو $a \neq 2b$ پس ورکړ شوی مساوات د $a \neq 2b$ لپاره یواځنی ټاکلی حل $x = a - b$ لري او پرته له دې ($a = 2b$) حل نه لري.

بیلګه ۹ . ۵ :

مساوات $(a / x) + (b / x) - (c / x) = 1$

یواځي هلته هدفمند دی چې $x \neq 0$ وي. ددې نیونو لاندې باور لري . $x = a + b - c$ دا نو د $x \neq 0$ له امله یواځي هلته حل دی، کله چې $a + b \neq c$ وي. پس ورکړ شوي مساوات یواځي د $a + b \neq c$ لپاره یواځنی ټاکلی حل $x = a + b - c$ لري، په غیر له دې ($a+b=c$) حل یا اوبیونه نه لري

بیلګه ۹ . ۶ : د لاندې مساوات څیړنه:

$$\frac{b^3c^2x - \frac{1}{a^2}}{121500ab^4c^3} - \frac{a^2x - \frac{1}{b^3c^2}}{2880a^3bc} + \frac{abcx - \frac{1}{ab^2c}}{5400(abc)^2} = 0,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چی ټيك د $abc \neq 0$ لپاره يو هدف لري، بايد د اصلي مات لاندې پيدا کولو لپاره د مات لاندې ك.ګ.څ. تکرار شي

$$12150ab^4c^3 = 2^2.3^5.5^3.a.b^4.c^3$$

$$2880a^3bc = 2^6.3^2.5.a^3.b.c$$

$$5400(abc)^2 = 2^3.3^3.5^2.a^2.b^2.c^2$$

$$................ = 2^6.3^5.5^3.a^3.b.c^3 = 64.243.125.a^3bc^3$$

دا پورته ګڼ اصلي ماتلاندې (ا.م.ل) دی

که برابرون د ا.م.ل. سره ځل شي، نو ماتونه له منځه ځي او لاس ته راځي:

$$16a^2(b^3c^2x - \frac{1}{a^2}) - 225b^3c^2(a^2x - \frac{1}{b^3c^2}) + 120c.(abcx - \frac{1}{ab^2c}) = 0$$

د نوکانو يو له بل ځلولو راټول، ترتيبونه او ويشنه د x تر څنګ ولاړو فاکتورونو يا ضريبونو $(A = 89a^2b^3c^2 \neq 0)$ څخه د نيونو سره سم دا لاندې لاس ته راوړکيږي

$$x = 1 / a^2b^3c^2, \; abc \neq 0$$

د دې وظيفي لپاره د حل نور امکانات نه شته.

تر اوسه مو هغه ماتونه وڅيړل چی مات لاندې يي له ځلونو جوړ وو، غواړو چی اوس داسی ماتونه وڅيرو چي مات لاندې يي له زياتونونو جوړ وي، چی د نوکانو له لارې په ځلوونو ټوټه کيدلي يا تجزيه کيدلی شي .

بيلګه ۹ . ۷ :

برابرون

$$\frac{a^2(2bx-1)}{a^4b^2x^2-b^2} + \frac{b}{a^2b+b} = \frac{a^2bx}{a^2bx-b} + \frac{b^2(2ax-3)}{a^4x^2x^2-b^2} - 1$$

ټيك د دې نيونو سره صدق کوي $ab \neq 0$, $|x| \neq 1 / a^2$. :

(c) ketabton.com: The Digital Library

اصلي مات لاندې) ا م ل (په لاندې ډول پیداکوو

$$a^4b^2x^2 - b^2 = b^2.(a^4x^2 - 1)$$
$$= b^2.(a^2x+1)(a^2x-1)$$
$$a^2bx + b = b.(a^2x+1)$$
$$a^2bx - b = b.(a^2x-1)$$

$$b^2.(a^2x+1).(a^2x-1) = b^2(a4x^2 - 1 =$$

اصلي ماتلاندی)ا م ل

د اصلي مات لاندې مساواتو له نوکانو څخه راوتلو) چي یو یا څو غړی د نوکانو دباندې او نور په نوکانو کی بندیږي(، لنډونو او ځلوونو له لارې لاس ته راځي

$$.....a^2(2bx-1)+b^2(a^2x-1) = a^2b^2x(a^2x+1)+b^2(2ax-3)-b^2(a^4x^2-1)$$
$$2a^2bx - a^2 + a^2b^2x - b^2 = a^4b^2x^2 + a^2b^2x + 2ab^2x - 3b^2 - a^4b^2x^2 - b^2$$
$$.............2a^2bx - 2ab^2x = a^2 - b^2$$
$$.................2ab(a-b)x = (a+b)(a-b)$$
$$..................................x = \frac{a+b}{2ab}$$

د $b \neq a$ او $0 \neq ab$ لپاره(دا د نیونو له لارې تل پوره دی)که $a = b$ وي، نو x د $0.x = 0$له امله په خوښه ارزښتونه نیولی شي، بی له هغو چی په بنسټیزو نیونو کی له نیونو د باندې ساتل شوي وي) یعني په مساوات کی ځاي ورته نه وي(. په دې حالت کی د xمطلقه ارزښت د کېنونو $a = b$ د په څېټ ارزښت سره نه شي مساوي کیدی .د x لپاره نیول شوې نیونی د حل ورکولو کی باید په پام کی نیول شوي وي دا په دې مانا چي باید تل پوره وي:

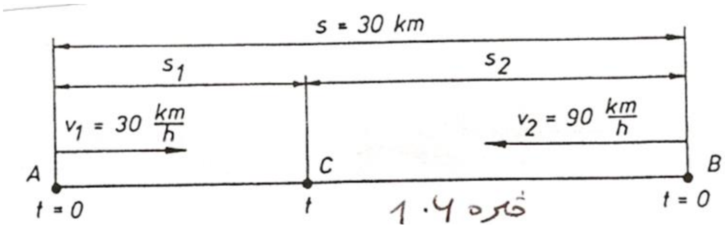
$$\pm 1 / a^2 \neq \frac{a+b}{2ab}$$

بیلګه ۹ . ۸ :

دوه ګاډې تمځایونه Aاو B یو له بل 30km لرې دي. د A څخه یو بارګاډی په ساعت کی د دیرش کیلومتره 30km/h په یوه ثابت سرعت یا چټکتیا باندې د B په لور

(c) ketabton.com: The Digital Library

خوزيږي. د Bڅخه يو تيز ګاډی D د 90km/h ثابت سرعت سره دAپه لور حرکت کوي. که دواړه ګاډي په همغه وخت کي حرکت وکړي ، کله به يو بل سره مخامخ شي؟دلته درې فزيکي لويي يو رول لري : لار، وخت او سرعت. دا به په سومبولونو t , s او vسره وښول شي. ددې شي ځاننيوني لپاره ځيره ځېره وکاږی



پوښتنه » چيرته « د دواړو ګاډو د يوځايوالی ټکی C ته متوجه ده. دا کيدی شي د A څخه و C ته لريوالي(د بار کاډي لارs1) يا د Bلريوالي وC څخه(د تيزګاډي D لار s2) سره وشميرل شي. پوښتنه »کله« د ګاډو يوځايوالي وخت t ته متوجه ده. دا هدفمند دی کی د وخت لپاره د وخت کمون له روانيدو تر يوځايکيدو وټاکو. دلته درې اوړېدوني يا مجهولی مخ ته لرو s1 , s2 او t .

د پورته ورکړشو شي نيونی سره مناسب لاندې اړيکی باور لري:

$$v_1 = s_1 / t \quad , v_2 = s_2 / t \quad , \quad s_1 = + s_2 = s$$

د باورې ارزښتونو مارونې يا استعمال سره لاس ته راځي

$$s_1 = 30\ t \ , s_2 = 90\ t \ , s_1 + s2 = 30$$

(دلته د اندازی يونونه(واحدونه) پريښوول کيږي. او پريکړه کوو چی لار په کيلو متر او وخت په ساعت ښايو)!

دا درې مجهولی s1 , s2 او t دی د دې برابرونونو يا مساواتو سره چی حل به يی په همداسی په برخه ۱۱ کی ورکړشوی وي، مګر دا دومره ساده دې چي د يوې له پيژندلو سملاسي نورې هم شميرل کيدی شي. کيدی شي چی دا مساوات په يوې مجهولی مساواتو بيرته واړول شي. ددې مجهولی x په ځای کيدی شي s1 , s2 او t وټاکل شي .

که وليکو s1 = x ، نو د اخري برابرون څخه لاس ته راځي s2 = 30 - x. دا په لمړنيو دوه مساواتو کی ځاي په ځاي کوو او دواړه د t په لور حلووو:

$$t = s1 / 30 = s2 / 90 = x / 30 = (30 -x) / 90$$

نو لرو: $x / 30 = (30-x) / 90$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاينيز ټاکنبرابرون يا ټاکنبرابرون د x لپاره دی، چې ساده حل کيدی شي:

$30x = 30 - x$, $4x = 30$ $x = 7,5$

نو لرو

$s_1 = 7,5$ km , $s_2 = 22,5$ km , $t = (7,5 / 30)h = 1h/4 = 15$ min

که وليکو $s2 = x$ ، نو شميرنه لاندې لار غوره کوي يا بهير نيسي:

$s_1 = 30 - x$, $t = s_1 / 30 = s_2 / 90 = (30 - x)/ 90$

$3(30 - x) = x$

$90 = 4x$

, $x = 22,5$

$s_2 = 22,5$km , $s_1 = 7,5$ km , $t = (22,4/90)h = 1h/4 = 15$ min

که بالاخره وخت $t = x$ د اووښتونې يا ناپيژندونی په څير وټاکو، نو بار لري يا صدق کوي: $s1 + s2 = 30x + 90x = 30$

$20x = 30$

$x = 30 / 120 = 1/4$, $t = (1/4)h = 15$ min

$s1 = 30t = 30/4$ km$=7,5$km

$s2 = 90t = 22,5$ km

دواړه ګاډي له ټکی A څخه د $0,25$ h$= 15$ min حرکت وروسته په $7,5$ km لريوالی يو بل سره مخامخ کيږي

بيلګه ۹ . ۵ – مساوات $(a/x)+(b/x)-(c/x)=1$

يواځې هلته هدفمند دی چې $x \neq 0$ وي. ددې نيونو لاندې باور لري $x = a + b - c$. دا نو د $x \neq 0$ له امله يواځې هلته حل دی، کله چې $a + b \neq c$ وي. پس ورکړ شوي مساوات يواځې د $a + b \neq c$ لپاره يواځنی ټاکلی حل $x = a + b - c$ لري، په غير له دې $(a+b=c)$ حل نه لري.

بيلګه۹ . ۶ – د لاندې مساواتو څيړنه

$$\frac{b^3c^2x - \frac{1}{a^2}}{121500ab^4c^3} - \frac{a^2x - \frac{1}{b^3c^2}}{2880a^3bc} + \frac{abcx - \frac{1}{ab^2c}}{5400(abc)^2} = 0,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چې تیك د $abc \neq 0$ لپاره یو هدف لري، باید د اصلي مات لاندې پیدا کولو لپاره د مات لاندې ك.ګ.خ. تکرار شي.

$$121500ab^4c^3 = 2^2 . 3^5 . 5^3 . a . b^4 . c^3$$

$$2880a^3bc = 2^6 . 3^2 . 5 . a^3 . b . c$$

$$5400 a^2b^2c^2 = 2^3 . 3^3 . 5^2 . a^2b^2c^2$$

اصلي ماتلاندې لنډ «ا م ل» $= 2^6 . 3^5 . 5^3 . a^3b . c^3 = 64.243.124.a^3bc^3$

که مساوات د ا.م.ل. سره ضرب شي، نو ماتونه له منځه ځي او لاس ته راځي

$$16a^2 \cdot \left(b^3c^2x - \frac{1}{a^2}\right) - 225b^3c^2 \cdot \left(a^2x - \frac{1}{b^3c^2}\right) + 120ab^2c \cdot \left(abcx - \frac{1}{ab^2c}\right) = 0.$$

د نوکانو یو له بل خلولو راټول، ترتیبونه او ویشنه د x تر څنګ ولاړو فاکتورونویا ضریبونو ($A = 89a^2b^3c^2 \neq 0$) څخه د نیونو سره سم دا لاندې لاس ته راوړکیږي

$$x = 1 / a^2b^3c^2 \quad , \quad abc \neq 0$$

د دې وظیفې لپاره د حل نور امکانات نه شته.

تر اوسه مو هغه ماتونه وڅېړل چې مات لاندې یې له خلونو جوړ وو، غواړو چې اوس داسې ماتونه وڅېړو چې مات لاندې یې له زیاتونونو جوړ وي، چې د نوکانو له لارې په خلونو توټه کېدلي یا تجزیه کېدلی شي.

بیلګه ۹ . ۷ :

$$\frac{a^2(2bx-1)}{a^4b^2x^2-b^2} + \frac{b}{a^2bx+b} = \frac{a^2bx}{a^2bx-b} + \frac{b^2(2ax-3)}{a^4b^2x^2-b^2} - 1$$

تیك د دې نیونو سره صدق کوي: $ab \neq 0$, $|x| \neq 1 / a^2$.

اصلي مات لاندې (ا م ل) په لاندې ډول پیداکوو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a^4b^2x^2 - b^2 = b^2.(a^4x^2 - 1)$$
$$= b^2.(a^2x+1)(a^2x-1)$$
$$a^2bx + b = b.(a^2x+1)$$
$$a^2bx - b = b. \quad (a^2x-1)$$

اصلي ماتلاندی(ا م ل) $= b^2.(a^2x+1).(a^2x-1) = b^2(a^4x^2 - 1)$

د اصلي مات لاندې مساواتو له نوکانو څخه راوتلو (چې یو یا څو غړی د نوکانو دباندې او نور په نوکانو کی بندیږي) ، لنډونو او خلوونو له لارې لاس ته راځي:

$$\begin{aligned} a^2(2bx-1) + b^2(a^2x-1) &= a^2b^2x(a^2x+1) + b^2(2ax-3) - b^2(a^4x^2-1) \\ 2a^2bx - a^2 + a^2b^2x - b^2 &= a^4b^2x^2 + a^2b^2x + 2ab^2x - 3b^2 - a^4b^2x^2 + b^2 \\ 2a^2bx - 2ab^2x &= a^2 - b^2 \\ 2ab(a-b)x &= (a+b)(a-b) \\ x &= \frac{a+b}{2ab} \end{aligned}$$

د $a \neq b$ او $ab \neq 0$ لپاره (دا د نیونو له لارې تل پوره دی)

که $a = b$ وي، نو x د $0.x = 0$ له امله په خوښه ارزښتونه نیولی شي، بې له هغو چې په بنستیزو نیونو کې له نیونو د باندې ساتل شوي وي(یعني په مساوات کی ځاي ورته نه وي). په دې حالت کی د x مطلقه ارزښت د کنهونو $a = b$ د په څنې ارزښت سره نه شي مساوي کیدی.

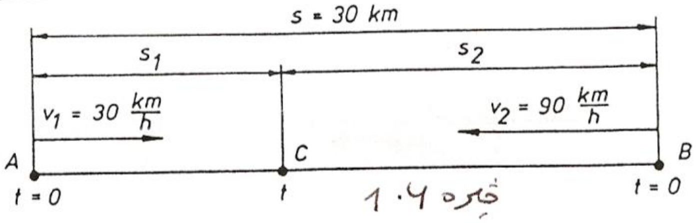
د x لپاره نیول شوي نیونې د حل ورکولو کې باید په پام کې نیول شوي وي؛ دا په دې مانا چې باید تل پوره وي:

$$\pm 1 / a^2 \neq (a+b) / 2ab$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۶ . ۸ : دوه ګاډي تمځایونه A او B یو له بل 30 km لرې دي. د A څخه یو بارګاډی په ساعت کی د دیرش کیلومتره 30 km/h په یوه ثابت سرعت یا چټکی باندې د B په لور حرکت کوي. دB څخه یو تیز ګاډی D د 90km / h ثابت سرعت سره د A په لور حرکت کوي. که دواړه ګاډي په همغه وخت کي حرکت وکړي ، کله به یو بل سره مخامخ شي؟

دلته درې فزیکي لویې یو رول لري : لار، وخت او سرعت. دا به په سومبولونو s , t او v سره وښول شي. ددې شي ځانتیوني لپاره ځیره ۶ . ۱ ورکړ شوې.



ځیره ۶ . ۱

پوښتنه « چیرته » د دواړو ګاډو د یوځایوالی ټکی C ته متوجه ده. دا کیدی شي د A څخه و C ته لریوالي (د بار ګاډي لار s_1) یا د B لریوالي و C څخه (د تیزګاډي D لار s_2) سره وشمیرل شي.

پوښتنه «کله» د ګاډو یوځایوالي وخت t ته متوجه ده. دا هدفمند دی کی د وخت لپاره د وخت کمون له روانیدو تر یوځایکیدو وټاکو.

دلته درې مجهولی مخ ته لرو s_1 , s_2 او t . د پورته ورکړشو شي نیونی سره مناسب لاندې اړیکی باور لري:

$$v_1 = s_1 / t \quad , v_2 = s_2 / t \quad , \quad s_1 = + s_2 = s$$

د باوری ارزښتونو استعمال سره لاس ته راځي

$$s_1 = 30\,t \ , \ s_2 = 90\,t \ , \ s_1 + s_2 = 30$$

(دلته د اندازی یونونه پرینبوول کیږي. او پریکړه کوو چی لار په کیلو متر او وخت په ساعت ښایو!)

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا درې مجهولې s_2 , s_1 او t دی د درې مساواتو سره چې حل به يې په ۶ الف او یا همداسی په برخه ۱۱ کی ورکړشوی وي، مگر دا دومره ساده دي چي د یوې له پیژندلو سملاسي نورې هم شمیرل کیدی شي. کیدی شي چی دا مساوات په یوې مجهولی مساواتو بیرته واړول شي. ددې مجهولی x په ځای کیدی شي s_2 , s_1 او t وټاکل شي. که ولیکو $s_1 = x$ ، نو د اخري مساوات څخه لاس ته راځي $s_2 = 30 - x$. دا په لمړنيو دوه مساواتو کی ځاي په ځاي کوو او دواړه د t په لور حلووو:

$$t = s_1 / 30 = s_2 / 90 = x / 30 = (30 - x) / 90$$

نو لرو

$$x / 30 = (30 - x) / 90$$

لاینې ټاکنمساوات د x لپاره دي، چی ساده حل کیدی شي:

$$30x = 30 - x\ ,\ 4x = 30$$

$$x = 7{,}5$$

$$s_1 = 7{,}5\text{ km},\quad s_2 = 22{,}5\text{ km},\quad t = \frac{7{,}5}{30}\text{h} = \frac{1}{4}\text{h} = 15\text{min}.$$

نو باور لري:

که s2=x کیږدو،نو شمیرنه په لانې ډول ځغلي یا لاندې لار غوره کوي:

$$s_1 = 30 - x,\quad t = \frac{s_1}{30} = \frac{s_2}{90} = \frac{30 - x}{30} = \frac{x}{90}\ ,$$

$$3\,(30 - x) = x,$$
$$90 = 4x,$$
$$x = 22{,}5,$$

$$s_2 = 22{,}5\text{ km},\ s_1 = 7{,}5\text{ km},\quad t = \frac{22{,}5}{90}\text{ h} = \frac{1}{4}\text{ h} = 15\text{min}.$$

که بالاخره وخت د نامعلومې په څیر وټاکل شي، یعنې x=t ، نو باور لري:

$$s_1 + s_2 = 30x + 90x = 30,$$
$$20\,x = 30,$$
$$x = \frac{30}{120} = \frac{1}{4},\quad t = \frac{1}{4}\text{ h} = 15\text{ min}.$$
$$s_1 = 30\,t = \frac{30}{4}\text{ km} = 7{,}5\text{ km},$$
$$s_2 = 90\,t = 22{,}5\text{ km}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دواړه ګاډي له ټکي A څخه د 0,25h=15minخوزښت(حرکت) وروسته په 17,5kmکې يو بل سره مخامخ کيږي.

۹ . ۲ تمرينونه

۱ . ناکرښيز يا نالاينيز مساوات د يوې مجهولې سره

لاندې مساوات حل کړئ aاو b نتيجه يې د ازمايئ! د مجهولو ضريبونو سره ارزښتونه راوباسئ; چې a او b يې نه شي غوره کولی يا نيولی.

دا ورکړئ چې مساوات د کومو a او b لپاره يواځنی حل لري، حل نه لري او يا ناپای ډېر حلونه لري.

همداسې تلنه طا رويه د نورو مجهولو ضريبونوسره هم وکړئ، چې په نورو برخو کې منځ ته راځي.

۱ . ۱ –بې له کسرونو يا ماتونو مساوات حل کړئ.

1.1.1. a) $8\left(\frac{1}{2}x-1\right)-2(x-1)=0$

b) $(3-x)(x+4)-9=(3x-4)(8x-9)-(5x-6)^2$

c) $2a(x+3)=(3+x)(5+2a)$

d) $3a-(7b+11a)-(3x-12b-9c)=(3x-8a)+5b-(3c-6x)$

1.1.2. a) $(a-x)(x+c)=2c(a-x)-(b-x)(c-x)$

b) $a(x+1)(ax+b)+b(a+bx)(1-x)=x^2(a-b)(a+b)$

c) $(x+a)(a-x)-b(b-a)=(x+a)(b-x)$

d) $a^2(x-a)+ab^2=b^2(x+b)-a^2b$

۱ . ۲ – کسري مساوات په مخرج کې د ټاکلو ضريبونو او فاکتورونو سره .

1.2.1. a) $\frac{3x-16}{3}+\frac{2x-10}{5}=3-\frac{x+1}{15}$ b) $4-\frac{10-3x}{5}=3-\frac{10-7x}{10}+\frac{x}{2}$

c) $\frac{2x+1}{2}+\frac{3x+1}{4}+\frac{5x+1}{8}=1-\frac{7x+1}{8}$ d) $\frac{4x+1}{3}+\frac{6x-1}{2}=5+5\cdot\frac{8x-10}{9}$

1.2.2. a) $\frac{4x-3}{20}-\frac{1}{12}(4x-5)=1-\frac{3}{5}(2x+11)$

b) $3(6\frac{1}{2}+x)-\frac{7}{3}(2x-\frac{19}{2})-\frac{8}{3}x+\frac{5}{3}=0$

c) $\frac{7x-16}{3}-\frac{4}{5}(x+1)+6=\frac{3x}{2}$ d) $\frac{3x}{4}-\frac{4}{3}(x-4)=3$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1.2.3. a) $\frac{3x-7}{5}-\frac{7-4x}{7}=\frac{5x-11}{10}-\frac{19-10x}{14}$

b) $\frac{17+4x}{10}-\frac{7+x}{5}=\frac{7x+13}{25}-\frac{5+x}{20}$

c) $\frac{2x-11}{15}-\frac{x}{5}+\frac{59}{40}=\frac{8x-59}{30}-\frac{16x-145}{24}$

d) $\frac{4x+4}{5}-\frac{5x-4}{55}=\frac{2x+9}{4}-\frac{12x-3}{44}$

1.2.4. a) $\frac{5x+17}{3}-\left(\frac{3x+8}{2}-3\right)=\frac{3x+12}{2}-\left(\frac{x+4}{6}+3\right)$

b) $2-\left(\frac{3x+8}{4}-\frac{2x+2}{3}\right)=1-\left(\frac{7x+20}{8}-\frac{2x-7}{3}\right)$

c) $\frac{4-x}{2}-\left(\frac{8-x}{3}-\frac{x+2}{4}\right)+\left(\frac{8-x}{6}-\frac{3(2+x)}{8}\right)+x=1$

d) $\frac{10-14x}{8x}-\left(\frac{6}{5}+\frac{4}{2x}\right)=\frac{5}{8x}-\left(\frac{12}{5}+\frac{14x+1}{10x}\right)$

۱ . ۳ – کسري – یا ماتمساوات، چې په مخرج کې یې نا ټاکلي ضریبونه او فاکتورونه ورکړشوې وي.

1.3.1. a) $\frac{ax-1}{bcx}+\frac{bx-1}{acx}+\frac{cx-1}{abx}=0$ b) $\frac{ax-b}{bcx}+\frac{bx-c}{acx}+\frac{cx-a}{abx}=0$

c) $\frac{3(x-b)}{a}-\frac{2(x-a)}{b}-1=0$ d) $\frac{a-b^2}{x}-\frac{c-b^2}{x}-b=0$

1.3.2. a) $\frac{bx-a}{a}+b=bx-1$ b) $\frac{x-a}{a}-a=\frac{x-b}{b}-b$

c) $\frac{a+b}{x}-a=ab-\frac{a-b}{x}$ d) $\frac{ax^2-bx+1}{a}=\frac{bx^2-ax+1}{b}$

1.3.3. a) $\frac{bx-a^2}{a}+\frac{ax-b^2}{b}=\frac{b-ab}{a}+\frac{a-ab}{b}$

b) $\frac{20a-x}{5a}+\frac{6b-cx}{2b}=10-\frac{9c-ax}{3c}$

c) $\frac{a^3}{b}(x-1)-\frac{b+c}{b}(1-2x)=b^2(1-x)+\frac{b+c}{b}$

d) $\frac{x(b-a)}{ab}+\frac{b(c-x)}{ac}=\frac{x+b}{a}-\left(\frac{b}{c}+\frac{x}{b}\right)$

۱ . ۴ - کسري – یا ماتمساوات، چې په مخرج کې یې نا ټاکلي ضریبونه او فاکتورونه ورکړشوې وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

1.4.1. a) $\frac{5}{x+2}+\frac{3}{2(x+2)}=\frac{1}{2}-\frac{7}{2(x+2)}$ b) $\frac{12x+5}{16x-15}-\frac{16x+1}{15}=\frac{3-2x}{5}-\frac{2x-1}{3}$

c) $\frac{10-2x}{3}+\frac{13+2x}{7}=\frac{14x+26}{2x+21}-\frac{17+8x}{21}$

d) $\frac{2x^n+7x^{n-1}}{9}+\frac{7x^n-44x^{n-1}}{5x-14}=\frac{4x^n+27x^{n-1}}{18}$

1.4.2. a) $\frac{8x+7}{9x^2-4}=\frac{16}{15x-10}$ b) $\frac{24-5x}{6-2x}-5=\frac{34-14x}{9-3x}$

c) $\frac{x+4}{12x+4}-\frac{x-4}{3x+1}=5$ d) $\frac{10x-11}{12x+18}=\frac{3}{2}-\frac{4x+1}{6x-9}$

e) $\frac{x}{x-2}-\frac{x-2}{3x-6}=\frac{1}{6}$ f) $\frac{8-x}{5-10x}=2-\frac{5}{3-6x}$

g) $\frac{12x}{10x+5}+\frac{6x-10}{2x+1}-\frac{2x+25}{12x+6}+\frac{10x-1}{8x+4}=2$

h) $\frac{3x-2}{5x+10}-10=\frac{2x+1}{3x+6}+\frac{2(1-4x)}{x+2}$ i) $\frac{6x-1}{4x-6}+\frac{10x-7}{6x-9}=11-\frac{14x+1}{8x-12}$

j) $\frac{3x}{2x-\frac{1}{2}}-\frac{16x^2}{3(4x-1)}=\frac{4(1-x)}{3}-\frac{4}{12x-3}$

1.4.3. a) $\frac{x-2}{x+2}-\frac{x+4}{x-2}=2\frac{x-38}{x^2-4}$ b) $\frac{12}{x+4}-\frac{x+4}{x-4}+\frac{x^2}{x^2-16}=0$

c) $\frac{5x^2-120}{10-x}+\frac{3x^2+80x}{10+x}=\frac{2x^3+160}{100-x^2}$

d) $\frac{15x+2}{5x-2}+\frac{25x-2}{5x+2}=\frac{200x^2-25x+18}{25x^2-4}$

e) $\frac{16x^2-20x+4}{4x^2-16}=\frac{2x-1}{2x-4}+\frac{3(2x+1)}{2(x+2)}$

f) $\frac{7x^2+8}{2(x^2-1)}=\frac{2(x+1)}{x-1}+\frac{3x-4}{2x+2}$

g) $\frac{16x^2-6x}{2x+1}-\frac{6x}{1-2x}=\frac{32x^3-16x^2+4x+16}{4x^2-1}$

۱ . ۴ . ۴ ـ

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

a) $\frac{2x-5}{x-5}+\frac{3x-5}{x-9}=\frac{5x^2-39x+30}{x^2-14x+45}$

b) $\frac{2x-9}{x-12}+\frac{x-6}{x-24}=\frac{3x^2-87x-36}{x^2-36x+288}$

c) $\frac{11x+6}{x^2-3x-54}=\frac{3x-14}{2x-18}-\frac{3(x+2)}{2x+12}$

d) $\frac{7x-15}{3x-6}+\frac{8x-21}{3x-3}+\frac{10x+21}{3x^2-9x+6}=5$

e) $\frac{1}{3x+21}+\frac{1}{3(x-5)}-\frac{x+6}{4(x^2+2x-35)}=0$

f) $\frac{136x^2-4x-266}{48x^2-32x+5}=\frac{14x-19}{4x-1}-\frac{8x+25}{12x-5}$

g) $\frac{8x-3}{6x-4}+\frac{6x-4}{10x-6}=\frac{116x^2+10x-34}{60x^2-76x+24}$

۱ . ۴. ۵ -

a) $\frac{5x-12}{2}=\frac{5\cdot\left(\frac{1}{2}x^2+3\right)}{x+1}-\frac{7x-10}{2x-10}$ b) $\frac{28}{45-7x}=\frac{5}{x-9}-\frac{9}{x-5}$ ؛

c) $\frac{x+6}{x-2}+\frac{3x-8}{x-4}=\frac{6(x+9)}{x+6}$ d) $\frac{x-13}{x+3}+\frac{8x+45}{x+5}=\frac{9x+7}{x+2}$

۱ . ۵ – کسري مساوات، چې په مخرج يا مات لاندې کې يې ناټکلي ضريبونه او فکتورونه ورکړ شوي وي.

۱ . ۵ . ۱ –

a) $\frac{2a+x}{2a-x}=\frac{a+b}{a-b}$ b) $\frac{a-b}{2c-x}=\frac{a+b}{2c+x}$

c) $\frac{a}{a-2x}-\frac{b}{b-2x}=0$ d) $\frac{x-\sqrt{a}}{x-\sqrt{b}}-\frac{x-\sqrt{a}}{x+\sqrt{b}}=0$

۱ . ۵ . ۲ –

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $\frac{a}{x+b}-1=1+\frac{b}{x+b}$ b) $a-\frac{ax}{x-1}=\frac{1}{a}-\frac{x}{ax-1}$

c) $a+b+\frac{x}{a+b}=a-b+\frac{x}{a-b}$ d) $\frac{1}{a+b}+\frac{a+b}{x}=\frac{1}{a-b}+\frac{a-b}{x}$

e) $\frac{x}{ab}+ab=\frac{1}{a+b}+(a+b)x$ f) $\frac{ax}{b}+\frac{bx}{a}+\frac{2ab}{a+b}=\frac{(a+b)^2x}{ab}$

g) $\frac{a+1}{b}x+\frac{b+1}{a}x+\frac{2ab}{a+b}=a+b+1$

1.5.3. a) $\frac{2(6x^2-11a^2)}{4x^2-9a^2}=5-\frac{4x+a}{2x+3a}$ b) $\frac{a}{1-x}-\frac{b}{x+1}=\frac{(a-b)(ab+1)}{1-x^2}$

c) $\frac{2a}{2-x}-\frac{2b}{x+2}=\frac{4(a^2b+ab^2+a-b)}{4-x^2}$

d) $\frac{b-x}{a+x}+\frac{1-x}{a-x}=\frac{a(1-2x)}{a^2-x^2}$ e) $\frac{ax+b}{ab-b^2}-\frac{a-bx}{ab+b^2}=\frac{2(ax+b)}{a^2-b^2}$

f) $\frac{2a+ab^2x}{a+ab^2x}-\frac{a^2(3-2bx)}{a^2-a^2b^4x^2}=\frac{b^2(2ax-1)}{a^2-a^2b^4x^2}-\frac{ab^2x}{a-ab^2x}$

۶,۱ – کسرمساوات یا ماتبرابرون له دوه کسرونو سره

a) $\frac{\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}-x}-\frac{2}{3}=\frac{2}{3}-\frac{\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}-x}$ b) $\frac{\frac{3}{2}-\frac{1}{x}}{\frac{3}{2}+\frac{1}{x}}-\frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{x}}{\frac{2}{3}+\frac{1}{x}}=\frac{\frac{3}{2}-\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x}+1}$

c) $\frac{a-\frac{1}{x}}{a+\frac{1}{x}}-\frac{1}{x}=\frac{x-\frac{1}{a}}{x+\frac{1}{a}}-\frac{1}{a}$ d) $\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{x}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{x}}=\frac{a-\frac{1}{x}}{a+\frac{1}{x}}$

۱ . ۷ . شي تمرینونه

۱ . ۷ . ۱ – که د یوه ګڼ خلور خله او ۱۴ زیاتون ۴۰ وي ، نو هغه ګڼ کوم دی؟

۱ ۷ . ۲ – که د یوه ګڼ خلورخله او ۴ زیاتون ددې ګڼ او ۱۴ زیاتون سره برابر وي ، نو هغه ګڼ کوم دی ؟

۱ . ۷ . ۳ – د یوه ګڼ خلورمه برخه او پنځه خله ۴۲ ګڼ ورکوي ، نو هغه ګڼ کوم دی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ . ۷ . ۴ – که د یوه ګڼ څلوربرابره څخه ۲ کم شي او په یوه ګڼ وویشل شي چې ۴
تري کم شوی او ۱۱ لاس ته ترې راشي، نو دا ګڼ به کوم وي؟

۱ . ۷ . ۵ – د یوه ګڼ پنځه ځله او د ۳ زیاتو دوه ځله لوي دی. لکه د د ې ګڼ دري
ځله او ۱ کمون. دا ګڼ کوم دی؟

۱ . ۷ . ۶ – د یوه ګڼ څلورځله او ۱۴ کمون نیم دومره لوي دی لکه ددې ګڼ دوه ځل
او ۸ . دا ګڼ څه نومیږي؟

۱ . ۷ . ۷ – د یوه ګڼ شپږ ځله او د ۵ کمون یا توپیر چې ددې ګڼ په څلور ځله او ۵
زیاتون وویشل شي، ۱ ور کوي. دا ګڼ څه نومیږي؟

۱. ۷ . ۸ – د یوه مات ماتباندې په ۵ له ماتلاندې کوچنی دی. که ماتباندې په ۲۳ او
مات لاندې په ۸ لوي شي، نو د ورکړشوي مات په څټ ارزښت لاس ته
ترې راځي. دا ګڼ څه نومیږي.

۱ . ۷ . ۹ – ۲۵ داسې په دوه ګڼونو بیل کړی یا تجزیه یا ټوټه کړی، چې د مربع توپیر
یې ۱۲۵ شي.

۱ . ۷ . ۱۰ – د دوه ګڼونو توپیر یا کمون ۶ او مربع یې ۱۸۰ دی . ګڼونه څه نومیږي؟

۱ . ۷ . ۱۱ – دوه ګڼونه داسې تناسب کې دي، یا یو بل ته داسې ځانونه نیسی .
که دوم په لمړی وویشل شي، نو ۲ لاس ته راځي او پاتی یې ۷ دي.
دواړه ګڼونه کوم دي؟

۱ . ۷ . ۱۲ – د دوه ځاینیونکي ګڼ پروت زیاتون ۱۲ دی. که له دې ګڼ ۱۸ کم شي،
نو یو دوه ځاینیونکی ګڼ لاس ته راځي، د همغه ځایګڼونو سره مګر په
څټ ترتیب سره.

۱ . ۷ . ۱۳ – یو زدکړی غواړي د یوه ګڼ څخه مربع ریښه د یو په بل کی بندولو
پرینځیپ یا اصول له لارې پیدا کړي. دی لمړی یو ګڼ د ریښی په څیر

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټاکي، چې مربع يې په ۲۷ کوچنی دی. بيا يوه ريښنه ټاکي ، کومه چې دوه له هغه لوي دی چې لمړی ټاکل شوی. ددې ريښنې مربع په ۳۳ لوي دی ، هغه ګڼ کوم دی چې مربع ريښنه يې غواړو پيدا کړو ؟

۱ . ۷ . ۱۴ – يو د سپورت ملګرو ټولنه له څلورو ډلو جوړه ده. لمړی ډله ۳۷ دملګرو غړي لري، په داسی حال کی چی نورو ډلی 1 / 4 , 1 / 5 په همدې ډول 2 / غړي په بر کی نيسي. د غړو شمير څومره دی او د هرې ډلی څومره دي

۱ . ۷ . ۱۵ – يو نفر په درې ورځو کی مجلی په داسی شمير خرڅوي: په لمړی ورځ 1 / 9، دومه ورځ 1 / 6 او په دريمه ورځ 1 / 4 د مجودو لوټوکه .

دی اوس له هغومجلو د نيمايي دوه کمي د ځان سره لري. هغه څومره مجلی د خرڅلاو لپاره لرودې؟

۱ . ۷ . ۱۶ – يوه ميلمه د يوه زدکوونکي څخه د هغه د عمر پوښتنه وکړه. زدکوونکي په ټوکه ځواب ورکړ« ځما پلار چی درې مياشتی پخوا يی خپله ۵۵ کلنی ولمانځله، ځما د عمر څلورواره څخه 1 / 4 زيات زوړ دی.» زدکوونکی څومره عمر لري؟

۱ . ۷ . ۱۷ – د يوه زدکوونکي پلار څلورنيم ځله زوړ دی لکه د هغه ځوي. دواړه ۲۷ کاله د هغه د يو اوياکلن نيکه څخه ځوان دي، پلار او ځوي څومره زاړه دي؟

۱ . ۷ . ۱۸ – په يوه معما کی يو زدکوونکی د ې بل ته وايي: « که زه لما سره بټوه کی پيسو سره ۵،۲ افغانی ور زياتي کړم ، زياتون يی له ۵ سره ځل يا ضرب کړم او له دې ځل څخه ۱۲ کمی کړم او دا لاس ته راغلی کمون يا توپير په 11 وويشم نو نتيجه يی ۸ افغانی ده. » هغه زدکوونکی په خپله بټوه کی څومره پيسی لري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ . ۷ . ۱۹ – په یو په بل پسی تړلو مقاومتونو کی لمړی او دوهم یو ډول لوي دي،
دریم دوه ځله او څلورم دریځله دومره لوي دي لکه لمړی دوه یاد شوي
مقامتونه، ټول مقاومت ۱۰۵۰ (اومیګا) ، په دې پروت شپانونك
۱۱۰ ولټه دی. اوس الف) یوګوني مقاومتونه څومره لوي دي، ب
برققوه، برخه مقاومتونه ؟

۱ . ۲۰.۷ – د دوه غبرګ چالان عمومي مقاومت (ماته متآسفانه په افغانسان کی د
فزیك مروج نومونه دې معلوم، خو فکر کوم چي په هدف به پوه شو) دی
a) 1000Ω , b) 2000Ω
یو مقاومت4000Ωدی، هغه بل څومره لوي دی؟

۱ . ۷ . ۲۱ . د دریو غبرك قاومتونو څخه یی دوم دوه واره دومره لوي دی لکه لمړی
او دا دریم یی درېواره دومره لوي دی لکه دوم ، هر مقاومت څومره لوي
دی، که عمومي مقاومت a) $12 k\Omega$, b) 300Ω وي؟

۲۱ . د دري غبرګو مقاومتونو څخه یی دوم دوه واره دومره لوي دی لکه لمړی
او دا دریم یی درېواره دومره لوي دی لکه دوم ، هر مقاومت څومره لوي
دی، که عمومي مقاومت الف) $12 k\Omega$
ب) 300Ω وي؟

۲۲ . په اوبو کي یو د لرګي منډه باید څومره لوي وي، چي د لمبیدو استعداد
یی ۷۵۰ نیوټونه وي او د لرګي خاص وزن یا کلکوالی (د فرمول څخه
معلومیږي چی دا څه شی دی) $4 \frac{N}{dm^3}$ وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۷ . ۲۳ د سونګموادو ټانك د دوم ماشین لپاره ۴۰ لیتره ګډوډ د سونګ مواد لري.
څومره تیل او څومره بنزین په ټانك کی موجوددي که ګډونه یی وي؟

۷ . ۲۴ د ښار د ښکلا لپاره د ښارمنځ د سرك په اوږدوالي ۸۵ ونی کینول کیږي.
دا چی د مخه خرکړ شوی او تل همغه واټن په یوه متر کوچنی شي ، نو په سرك بیا ۲۰ ونی زیاتی کینښول کیدی شي. د دې هرې ونې واټن وبلی ته څومره لویې دی؟

۷ . ۲۵ د بایسکلځغلونوکو ډله له سر څخه ۵۰ متره اوږدوالی لري. هغه ۴۵ کیلومتره په ساعت کی سرعت لري، چی په یوه پله چی اوږدوالی یی متره دی ، څومره وخت ته ضرورت لري، چی له پله پورې لاړ شي.

۷ . ۲۶ واورومنډه کی ، دا وروسته وړونکی د پروسېرکلني وړونکی څخه یوه نیمه دقیقه وروسته په ځغاسته پیل کوي. د څو کیلو متره وروسته دی کړی چی لمړني ځغلیدونکي څخه مخ ته شي، که د ده منځنی سرعت ۵ متره ثانیه کی وي او د لمړي ۸ ، ۴ متره په ثانیه کی وي ؟

۷ . ۲۷ د تامنځي د دز سره د سپورت میله کي ۲۰۰ متره ځغاستی د منډې ډله په ځغاسته پیل کوي. ځغلیدونکی د پیل کرښي څخه لس متره شا ته ولاړدي.
برخه نیوونکی په منډه پیل کوي ، چی د تومانچی د ډز کرد وګوري دو وخت توپیر څومره دی، که غږ رسیدنه په نظر کی ونه نیول شي او د غږ سرعت ۳۴۰ متره په ثانیه کی وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۰ کومبیناتوریك - د بینوم جمله

کومبیناتریک څخه په شمیرپوهنه کې د دې لپاره کار خلي، چې یو ګڼ ، پل ځاي بدلو
څومره والبنابې او که څو ګڼونهخپل ځاي بدل کړې دا څنګه لیکل کیږي۰ د ځای بدلون
شمیرنه ده
او د هغې ډولونه۰
په ۱۰ ۱۰ ۱او ۱۰ ۲۰ برخو کی به د شمیرپوهنی مرستندوي مواد د بینوم
جملی(۳.۱۰)
برخه(او کومبیناتوریك (۱۰ . ۴ برخه) د فاکولتیت کلیمي او بینومیالکوایفیڅینت
(بینوم ځلوني) پیل شي .

۱۰ . ۱ فاکولتیت Die Fakultät, factorial

پیژند ۱۰ . ۱ :
د n!سومبول (ویل کیږی n « فاکولتیت «) لاندې سرې له1 تر n پورې ګڼونو ضرب
پوهیږي، یعنی n.(n-1).(n-2)....1.2 = ! n برسیره پر دې تعریفوو: 1 = !0

د فاکولتیت له پیژند څخه څرګندیږي، چی (n!.(n+1 = !(n+1) لرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه:
په افغاني ادبیاتو کی تر هغې چی ماته معلومات شته د فاکولتیت په ځاي فاکتوریال لیکل شوی. ما په دې کتاب کی دا د الماني کلیمه یا پښتو ، ځله وونی،، زیات کاره ولی، هیله ده چی تاسو به یی په خپله خوښه وټاکی. په دې کی کومه سهوه منځ ته نه شي راتلی۰

بیلګی :

الف $n!$: د $n = 5$ لپاره په دې ډول دئ: $5! = 1 . 2 . 3 . 4 . 5 = 120$

ب : په دې ډول دئ : $0!.2!.4! = 1.(1.2).(1.2.3.4) = 48$

پ: په دې ډول دئ: $5!/3! = 1.2.3.4.5 / 1.2.3 = 4.5 = 20$

ت : په دې ډول دئ

$$(n+2)!/(n-1)! = 1.2.3....(n-1)(n).(n+1).(n+2)/1.2.3...(n-1)$$
$$= n.(n+1).(n+2)$$

ټ: داسی دئ

$$2.n! = 2.(1.2....n),$$
$$(2.n)! = 1.2....n.(n+1)....2n.$$

۱۰ . ۲ د بینوم ځلوونی یا ضریبونه

پیژند: ۱۰ . ۲

د سیمبول $\binom{n}{k}$ (وییل کیږي n « پر » k لاندې د دوه ځله ونو ویش پوهیدل کیږي چی هر یو k ځله وونی یا ضریبونه یا فاکتورونه لري :

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \prod_{i=1}^{k} \frac{n+1-i}{i}$$

برسیره پر دې دا هم په کلکه کره کیدلی شي:

$$\binom{0}{0} = 1; \quad \binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1; \quad \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1};$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\binom{n}{1} = n$$

د k ګڼ يو پيداينتي يا طبعي ګڼ دی او د ماتلاندي او مات باندي ګڼونو ګڼون يا تعداد ښايي،په مات لاندې کي د لومړيو k پيداينت يا طبعي ګڼونو فاکتورونه دي. دn ګڼ رييل دی او د مات پورته لومړنی فاکتور دی. دوم فاکتور n - 1 ، دريم n-2 تر k –م فاکتور n-k+1 پورې . دا $\binom{n}{k}$ سومبول د اويلر(leo nard Euler له ۱۷۰۷ - ۱۷۸۳سويسي ګڼپوه، فزيکپوه او استرولوګ) لخوا د لومړې ځل لپاره پيل شو، له دې امله ورته د اويلر سومبول وايي پرتله يا مقايسه برخه ۱۰ . ۳ (. که څوك ديوه بينوم پوتنځ يا توان شميري) ۱۰ . ۳ برخه(، نو سيمبول $\binom{n}{k}$ لاس ته راځي چې د يوا- ځنيو زياتونونو ځلونه دي، او له دې امله ورته بينوم ضريب يا بينوم ځلهووني ويل کيږي.

بيلګی :

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4}{2!} = \frac{20}{2} = 10$$

$$\binom{49}{6} = 13.983.816 \text{ ،} \binom{3}{5} = 0$$

$$\binom{2}{1/3}$$

تعريف نه دی ، ځکه چی 1 / 3 پيدأيښتي يا طبعي ګڼ نه دی.

د بينوم ضريبونو يا ځلونوخويونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ - د n<k ، $n,k \in N$ لپاره باور لري $\binom{n}{k} = 0$

که n یو طبعي ګڼ وي او لهk کوچنی وي، نو صفر په ماتباندې کی یوځله وونی

یا ضیرب دی

۲ - د $n > k$ ، $n,k \in N$ لپاره باور لري

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

اوبیونه (حل): سرې د !(n-k سره د مات $\binom{n}{k}$ پراخوالي له امله لاس ته راوړي

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \prod_{i=1}^{k} \frac{n+1-i}{i}$$

دا پورته برابرون له $\frac{(n-k)!}{(n-k)!}$ سره ځلوو، نو لاس ته راځي

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

له دې نور لاس ته راځي، که د k په ځاي n - k ولیکل شي

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-n+k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

۳ - باور لري

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

حل (اوبی) : د کښ اړخ زیاتون څخه دا لاندې لاس ته راوړل کیدی شي، که د بینوم ضریبونه یا ځلووني د ماتو په څیر ولیکل شي ، ماتونه ور زیات کړي او د زیاتونون ګډ فاکتورونه چی په ماتباندې کی دی په نوکانو کی ونیسي اوپاتی ساده کړي :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}+\frac{n(n-k)...(n-k+1)(n-k)}{(k+1)!}=$$

$$=\frac{n(n-1)...(n-k+1)+n(n-k)...(n-k+1)(n-k)}{(k+1)!}=$$

$$=\frac{n(n-1)...(n-k+1)[k+1+n-k]}{(k+1)!}=$$

$$=\frac{n(n-1)...(n-k+1)(n+1)}{(k+1)!}$$

که په پورته ۱ افاده یا وبینه کې د مات پورته اخرنی فاکتور د لومړي ځله وونی په ځير وليکل شي، لاندې بينوميال يا بينوم ځلوونی (ضريب) تعريفوي:

$$\binom{n+1}{k+1}$$

۱۰ . ۳ د بینوم جمله

د بینوم لاندې سرې د دوه توکو (ګنونو) زیاتون پوهيږي. یعني: x+y
د بیونم جمله موږ ته ښايي چی ځنګه د یو بینوم

$$(x+y)^n$$

پوتنځ، چی پیدايښتي ګڼ n يی ایکسپوننت یا جکګڼ یا لنډ جګ وي، د زیاتون په ځير پر مخ بیول کیږي. که د x + y بینوم پوتنځ د n = 0,1,2,3,4,5,6 اکسپوننت لپاره شمیرو، نو لاندې نتیجه لاس ته راوړو :
پاسکال دريګوډی

$$(x+y)^0=.....................1$$
$$(x+y)=....................x+y$$
$$(x+y)^2=...............x^2+2xy+y^2$$
$$(x+y)^3=.............x^3+3x^2x+3xy^2+y^3$$
$$(x+y)^4=..........x^4+4xy+6x^2y^2+4xy^3+y^4$$
$$(x+y)^5=.....x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5$$
$$(x+y)^6=x^6+6x^5y+15x^4y^2+20x^3y^3+15x^2y^4+6xy^5+y^6$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې د زياتونونو پرمخبيولوکی يو قانونيت ليدل کيږي. د زياتونو ګڼون(شمير، تعداد) د بينوم د اکسپوننت څخه په يو لوي دی . ټول زياتونی د x او y پوتنځ ځل لري، په داسی ډول چی د x او y پوتنځ زياتون په n برابريږي او په دې ډول د x پوتنځ په کميدلو) د y پوتنځ په زياتيدلو دx په اکسپوننت په ترتيب پرلپسی
n , n-1, ...1 , 0
د yاکسپوننت په ترتيب 0,1 n-1,n..,دي. د بينوم پوتنځ کوايفڅينتونه داسی په نامه پاسکال Blaise Pascal(۱۶۲۳ - ۱۶۶۲ فرانسوي شمرنپوه(ګڼوندريګوډی جوړوي .

							1							
						1		1						
					1		2		1					
				1		3		3		1				
			1		4		6		4		1			
		1		5		10		10		5		1		
	1		6		15		20		15		6		1	
1		7		21		35		35		21		7		1

په دې کی هر ګڼ د دواړو پورته کيڼ-ښي پرتوګڼونوزياتون دی، چی بي له کړاو د نورو اکسپوننتويا په جګو n = 7,8, ... لپاره پرمخ بيول کيدی شي. د ډيرو لويو اکسپوننتو n لپاره بيا هم دالار له کړاو ډکه ده ليونارد اويلرLeonhard Euler د کومبيناتوريك فکرونو کی د کوايفيڅينتونو يووني يا يوونوالي يا بهتره يوونواليز ستروکتورونه يا جوړښتونه وپيژندل. په n -م n (د بينوم جګ يا اکسپوننت (ليکه اوK- م ځای، n ,.... , k = 0 , 1 کی ولاړ ضريب دفورم څخه دی) له کومه امله چی په ۱۰ . ۲ برخه کی د اويلر سومبول په نوم داسی بلل شوي د بينوم ضريب په
څير رامنځ ته شو)که د پاسکال ګڼونو دريګوډی د اويلر سومبول استعمال په څيروليکل شي نو لاس ته راځي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\binom{0}{0}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\binom{1}{0}\binom{1}{1}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{1}$$

$$\ldots\ldots\ldots\binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3}$$

$$\ldots\ldots\binom{4}{0}\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{4}$$

$$\ldots\binom{5}{0}\binom{5}{1}\binom{5}{2}\binom{5}{3}\binom{5}{4}\binom{5}{5}$$

$$\binom{6}{0}\binom{6}{1}\binom{6}{2}\binom{6}{3}\binom{6}{4}\binom{6}{5}\binom{6}{6}$$

داويلر سومبول كی د فاكتور پرځاي ، چې ګڼونه دی ، سومبول $\binom{n}{k}$ ليكل كيږي.

يادونه : ما كله a,b او كله بيا x,y ليكلي، دا په يو ډول ليكنه ښكلې ښكاريږي، خو زه كله كله داسې ستونځې لرم .

په ۱۰ . ۲ برخه كی د بينوميالكوايفيښينت لپاره ښوول شوو خويونو۲ په بنسټ د پاسكال دريګوډي منځنی محور ته سيومتري پراته كوايفيښينته سره مساوي دي. داچی هر كو- ايفيښينت وربانديې پورته كوايفيښينتونو زياتون سره مساوي دی په ۳ كی وښوول شو) د تمرين وظيفه ۱۰ . ۴ دې هم ورسره پر تله) مقايسه(شي) د اويلر سيمبول په استعمال

د يوه بينوم $(a+b)^n$ د پوتنځ د زياتون پرمختك د يوه طبيعي ګڼ n لپاره په لاندې ډول ليكلو ته اجازه راكوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۰ . ۱ (د بينوم جمله)

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

$$= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}b^i$$

اوبونه (حل): د پوره ايندكشن له لارې:

د ايندوكشن پيل : (n = 0)

$$(a+b)^{k+1} = \binom{k+1}{0}a^{k+1} + \binom{k+1}{1}a^k b + \binom{k+1}{2}a^{k-1}b^2 + \ldots + \binom{k+1}{k}ab^n + \binom{k+1}{k+1}b^{k+1}$$

$$(a+b)^0 = \binom{0}{0}a^0 = 1$$

د ايندكشن نيونه : (n = k)

$$(a+b)^k = \binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + \ldots + \binom{k}{k-1}ab^{n-1} + \binom{k}{k}b^k$$

د اندكشن غوښتنه: (n = k + 1)

$$(a+b)^{k+1} = \binom{k+1}{0}a^{k+1} + \binom{k+1}{1}a^k b + \binom{k+1}{2}a^{k-1}b^2 + \ldots + \binom{k+1}{k}ab^n$$

$$+\binom{k+1}{k+1}b^{k+1}$$

دايندكشن ښوونه:

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)^k(a+b)$$

$$= \binom{k}{0}a^{k+1} + \binom{k}{1}a^k b + \binom{k}{2}a^{k-1}b^2 + \ldots + \binom{k}{k}ab^k$$

$$+\binom{k}{0}a^{k+1}b + \binom{k}{1}a^{k-1}b^2 + \binom{k}{2}a^{k-2}b^3 + \ldots + \binom{k}{k-1}ab^k + + \binom{k}{k}b^{k+1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که یو د بل سره (یو د بل لاندې په څنګ یا کږې پرتې) برابر پوتنځ یا توان ځلونه د اویلر فرمول یا سومبول د زیاتونخویونو د استعمال له لارې سره راټول (یوځاي) شي

$$C_{W_6}^{(4)} = \binom{6+4-1}{4} = 126$$

$$\binom{k}{1} + \binom{k}{0} = \binom{k+1}{1}, \binom{k}{2} + \binom{k}{1} = \binom{k+1}{2}, \ldots, \binom{k}{k} + \binom{k}{k-1} = \binom{k+1}{k}$$

لومړي او اخر زیاتون ضریبونه ولیکل شي نو غوښتل شوې اړیکی لاس ته راځي

$$\binom{k}{0} = \binom{k+1}{0}, \binom{k}{k} = \binom{k+1}{k+1}$$

د (a-b)=a+(-b) له امله د بینوم له جملی د یوه n -م پوتنځ دکمون څخه لاس ته راځي

$$(a-b)^n = \binom{n}{0}a^n - \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 - \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \ldots \pm \binom{n}{n}b^n$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i}(-b)^i$$

بیلګې:

$$(x+y)^3 = \binom{3}{0}x^3 + \binom{3}{1}x^2y + \binom{3}{2}xy^2 + \binom{3}{3}y^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x-y)^3 = \binom{3}{0}x^3 + \binom{3}{1}x^2(-y) + \binom{3}{2}x(-y)^2 + \binom{3}{3}(-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

۱۰ . ۴ کومبیناتوریك:

کومبیناتوریك د یوې ډېرۍ د پاې غړو یوځای درولو یا راوړلو ترتیب قوانینو سره سر او کارلري. کیدی شي د ټولو غړو یا یوې برخې یوځاییولو په څیر راوړل شي، په یوځاییولو کی کیدی شي د غړو ترتیب یو رول ولوبوي او یا هم نه، او همدارنګه په راڼوځاییولو کی

(c) ketabton.com: The Digital Library

کيدی شي د غړو تکرار راشی او يا هم نه. له دې امله د يوځاييولو يا ټولګی درې ډولونه توپيروو(Komplexion هم ورته وايي)، په نامه پرموتيشن، واريیشن، کمبينيشن (Permutation, Variation, Kmobination) کوم چې په لاندې برخو کی يو په بل پسی څيړل کيږي او په اخرنی جدول کی به ليديدونکی څرګند شي يا ليدوړو ښوول شي

۱۰ ۰ ٤ ۰ ۱۱ پرموتيشنPermutare

(لاتين: ..سره بدلول، دلته دا اصلاً ځاي بدلون دی. لنډ: بدلون)

پيژند ۱۰ . ۳ :

د n غړو يو پرموتيشن (ځاي بدلون)بې له تکرار داسی »يوځاي درول« دي، په کوم کی

چې n غړي په يوه د زړه پوري ترتيب کی څنګ په څنګ ولاړ وي. د n غړو مختلفه ترتيبونه

تل د مختلفو پرموتيشنونو يا ځايبدلونونو په مانا ده

بيلګی:

۱ - د دوه غړو پرموتيشن

الف : 1 2 دی 12 21

ب : a , m دی am ma

۲ - د درې غړو پرموتيشنونه

الف : ۱ ، ۲ ، ۳ دي:

۱۲۳ ۲۱۳ ۳۱۲

۱۳۲ ۲۳۱ ۳۲۱

ب : a,m,s دی:

ams mas sam

asm msa sma

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۳ - د څلور غړو پرموتیشنونه

الف : 1,2,3,4 دي:

4123	3124	2134	1234
4132	3142	2143	1243
4213	3214	2314	1324
4231	3241	2341	1342
4312	3412	2413	1423
4321	3421	2431	1432

دا پورته پرموتیشنونه له پورته وکښته لور ته لیکسیکایې ترتیب دي، دې ته به د کرانو لوستونکو پام وي، وروسته هم همداسی دي، که دا توري وي او که ګڼونه ۰ په ګڼونو کی پیدایښتي ده، چې د پښتو لیکسیکایې ترتیب پچه [ام کی نیول شوی۰له ښي لور کښته بیا بیرته ګین لور خوزښت دی۰

ب : a,m,s,u دي:له کښ کښته لور ته بیا بیرته پورته

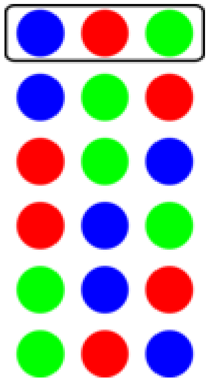
uams	samu	masu	amsu
uasm	saum	maus	amus
umas	smau	msau	asmu
umsa	smua	msua	asum
usam	suam	muas	aums
usma	suma	musa	ausm

(c) ketabton.com: The Digital Library

پ (ا ت ج ک دي:دلته طبعاً له ښي وکيڼ لورته ترتيبيږي(

اتجک	تاجک	جاتک	کاتج
اتکج	تاکج	جاکت	کاجت
اجتک	تجاک	جتاک	کتاج
اجکت	تجکا	جتکا	کتجا
اکتج	تکاج	جکات	کجات
اکجت	تکجا	جکتا	کجتا

د ټولو پرموتيشنونود ليکلو لپاره مرستندوی مواد، د بيلګی په ډول له څلورو غړو څخه د ۲۴ پرموتيشنونو، ليکسيکني ترتيب، دا په دې مانا چې د ليکسکا لغاتو ترتيب ته »کتٻ مټ« (ورته) دی، چی د غړو پيدايښتي لړی مخته پرته وي (په تورو، په ګڼونوکښطبعی يو په بل پسي). دبيلګي په توګه د غړو a , m , s , u ۲۴ پرموتيشنونه په لکسيکا ترتيب ورکړ شوي. د دې غړو) يا تورو(جوړ شوي پرموتيشنونه) لغاتونه(maus همدا رنګه saum په دې ترتيب کی ۸ ـام همدا ډول په ۱۴ ـام ځاي کی ولاړ دي. همدا ډول په پ (کی د څلورو تورو ا ، ت ، ج ، ک پرموتيشن ورکړ شوی چی ۸ ـ۱م ځا ي کی يي تاکج ولاړ او په ۱۵ – م ځای کی يي جتاک ولاړ دی.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د پورته درې غونډارو لپاره نظم یا ترتیب ۲ ۰ ۳ = ٦ دی۰

که لیکو ، چې 1.2.3.4.5.6نو ددې پرځاي لیکو $6! = 720$:

جمله ۱۰ . ۲ :

د پرموتیشنونو Pn ګڼون (شمیر یا تعداد) ، د n یوله بل مختلفو غړو، په لاندې

ډول دی : $n = Pn!$

اوبنونه : د پوره ایندکشن له لارې :

داېندکشن پیل : $(n = 1):\quad P_1 = 1! = 1$

د ایدکشن نیونه : $(n = k):\quad P_k = k!$

د ایندکشن غوښتنه : $(n = k+1):\quad P_{k+1} = (k+1)!$

د ایندکشن ښوونه : k غړو ته په k! پرموتیشنونو کی د ځل په څیر یو(k+1) -ام غړی راځي. دا (k+1) - ام غړی کیدی شي له لومړې تر (k+1) - ام ځاي پورې ودریږي، داسی چې د (k+1) -ام غړي ورنیولو د هر k غړو پرموتیشن k+1 پرموتیشنونه د k+1 غړو پرموتیشنونه شي. له دې امله باور لري

$$P_{k+1} = P_k\,(k+1) = k!(k+1) = (k+1)!$$

بیلګه :

په څومره مختلفو لړیو پرلپسی (دا مړضوع په ۱۸ برخه کې کتلی شئ) کی لس زدکوونکی په یوه لیست کی خپل نومونه لیکلی شي ؟

اوبی یا حل : $P_{10} = 10! = 3628800$ •

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند ۱۰ . ۴ :

هر د k غړو ترتیبونه، د کومو څخه چی i-ام غړی ni - ځله رامنځ ته کیږي،

د i = 1 , 2 , ... ,k لپاره، نو پرموتیشن د تکرار) د تکرارسره پرموتیشن(سره نومیږي . د غړو شمیر په پرموتیشن کی بیا داسی دی $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$

بیلګی :

۱ - د دوه غړو a , b پرموتیشن په کوم کی چی غړی a یو ځل او غړی b دوه ځله رامنځ ته کیږي،

$(k = 2; n_1 = 1; n_2 = 2; n = n_1 + n_2 = 1 + 2 = 3)$

په دي ډول دی: abb bab bba

۲ - د غړو a , b پرموتیشن، په کوم کی چی a دوه ځله، غړی b دريځله رامنځ ته کیږي $(k = 2; n_1 = 2; n_2 = 3; n = n_1 + n_2 = 2 + 3 = 5)$ په لاندې ډول دی

abbba abbab ababb aabbb
babba babab baabb
bbbaaa bbaba bbaab

جمله ۱۰ . ۳ : د k غړو د پرموتیشن ګنون یا تعداد $P_n^{(n_1,n_2,...,n_k)}$ ، له کومو چی i-ام غړی ni -ځله رامنځ ته کیږي ، په لاندې ډ ول دی:

$$P_n^{(n_1,n_2,...,n_k)} = \frac{n!}{n_1!.n_2!....n_k!}$$

حلونه یا اوبیونه: که په پرموتیشن کی n = n1 + n2 + ...+ nk (دلته دې ګنونه دn ایندکس کې ومنل شي) غړو یو له بل توپیر لرودی (مختلف وي) ، نو !n پرموتیشنونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

به موجود وی، که i - ام غړی ni -ځله رامنځ ته شي، داچی د ni غړو لپاره ni!
پرموتيشنونه موجود دي، نو ni پرموتيشنونه د يوه پرموتيشن په ځير رايو ځاي کيږي،

دا په دې مانا چی د!n شمير په $n_i!$ بايد وويشل شي (i = 1 . ..., k)

بيلګی :

۱ - د k = 2 مختلفو غړو پرموتيشن، په کوم کی چی لومړی (n_1-1)- ځله او دويم (n_1-2)- ځله رامنځ ته کيږي، دی:

$$P_3^{(1,2)} = \frac{(1+2)!}{1!2!} = \frac{3!}{1!.2!} = 3$$

۲ - د k = 2 مختلفو غړو پرموتيشن، په کومو کی چی لومړی (n1=2) -ځله او دويم (n2 = 3) -ځله رامنځ ته شي، دئ

$$P_5^{(2,3)} = \frac{5!}{2!.3!} = 10$$

۱۰ . ۴ . ۲ واريیشن اوښتنه يا بدليدنه Variation :

تعريف ۱۰ . ۵:

د n غړو واريشن (بدليدنه يا اووښتنه Variation) لاتين(بدلونه اووښتنه تغيرونه يا بيا تغيرونه) و k -ام ټولګي ته(وهرې k ټوټی ته، $n \le k$) هر له k غړو يوځانکول (يوځاي درول، يوځاي ليکل) دی، کوم چی د n غړو د لړئ پرلپسی په نظر کی نيولو سره جوړيږي..

بيلګي:

۱ - د درې غړوa,b,c واريیشن و دويم ټولګي ته دي :

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

ab	ba	ca
ac	bc	cb

۲ - د ځلورو غړو d , a , b , c واریيشنونه و ۲ - م ټولګي ته دي:

ab	ba	ca	da
ac	bc	cb	db
ad	bd	cd	dc

د ځلورو غړو d , a , b , c واریيشنونه و ۳ - ۱م ټولګي ته دې

dab	cab	bac	abc
dac	cad	bad	abd
dba	cba	bca	acb
dbc	cbd	bcd	acd
dca	cda	bda	adb
dcb	cdb	bdc	adc

۳ - د پنځه غړو 1 , 2 , 3 ,4, 5 واریيشنونه و ۲ - ۱م ټولګي ته دي

51	41	31	21	12
52	42	32	23	13
53	43	34	24	14
54	45	35	25	15

(c) ketabton.com: The Digital Library

د n غړو واریشنونه و n -ام تولګي ته د n غړو پرموتیشن سره یو شی یا براابر کیږي

جمله ۱۰ ۰ ٤ :

د n غړو و k -ام تولګي ته د واریشنونو ګڼون (تعداد) $V_k^{(k)}$ دی :

$$V_k^{(k)} = n(n-1).(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

اوبنونه : د مکلمل (پوره یا بشپړ ایندکشن له لارې) ایندکشن په k اړه لري، n ځاي په ځاي دی یا ځاي په ځاي کلك ولاړ دی

ایندکشن پیل :(k = 1)

$$V_n^{(1)} = n!/(n-1)! = n$$

ټیك (صحیح) دی ، ځکه چی له n غړوکیدی چی له یوه غړی جوړ واریشنونه جوړکړی شي.

ایندکشن نیونه : (k = k0) :

$$V_n^{(k_0)} = n!/(n-k_0)!$$

ایندکشن غوښتنه(ثبوت:):(k0 +1 = k)

$$V_n^{(k_0+1)} = n!/(n-k_0-1)!$$

دایندکشن ښوونه : د k0 - م درجی هر واریيشن لپاره، په دې واریيشن کی نه رامنځ ته کیدونکو پاتی n - k0 غړو شمیر دی .که په ترتیب یو له دې n - k0 غړو د دې k -م تولګی واریشنونو $V_n^{(k)}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په اخرکی ځاي په ځاي شي، نو له دې یو دk+1 ټولګي n - k0 واریشنونه لاس ته راځي، او که دا کار په ټولو واریشنونو $V_n^{(k)}$ وشي، نولاندې واریښنونه لاس ته راځي:

$$\frac{n!}{(n-k_0)!}(n-k_0) = \frac{n!}{(n-k_0-1)!}$$

(که چیرې یود n - k0 غړو ورزیات په یو بل ځای کیښوولی وی، نو یودk+1 ټولګي واریښن به یی لاس ته راوړی وی، کوم چی همدا اوس موجود دی. دا سړی په بیلګه ۲ (k , 2 = n = 4, k =3 (باندې لیدوړ کولی شي)

بیلګي:

۱ - د درې غړو واریښنونو شمیر و دوم ټولګي ته دی : $v_3^{(2)} = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$

۲ - د څلور غړو واریښنونو شمیر و دوم ټولکی ته دی: $v_4^{(2)} = \frac{4!}{(4-2)!} = 12$

د څلور غړو واریښنونو شمیر ودریم ټولګي ته دی: $v_4^{(3)} = \frac{4!}{(4-3)!} = 24$

۳ - د پنځه غړو واریښنونو شمیر ودوم ټولګي ته دی: $v_5^{(2)} = \frac{5!}{(5-2)!} = 20$

پیژند ۱۰ . ۶ :

د n غړو واریښنونه و k - ام ټولګي ته په کوم کی چی یوګونی غړي تر k-ځله تکرار وي نو واریښنونه د تکرار سره نومیږي یا بلل کیږي.

بیلګی: ۱ - د درې غړو a , b , c واریښنونه و دوم ټولګي د تکرار سره دي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

ca	ba	aa
cb	bb	ab
cc	ba	ac

۲ - څلور غړو a , d , c , b د دويم ټولګی واريیشنونه د تکرار سره دي:aa

da	ca	ba	
db	cb	bb	ab
dc	cc	bc	ac
dd	cd	bd	ad

۳ - د درې غړو 1 , 2 , 3 د دريم ټولګي واريیشنونه دي(دا لاندې ولاړ ترتيب له کيڼ وښې لور ته دی، خو په لاندې کې په ځښ شوی)

311	211	111
312	212	112
313	213	113
321	221	121
322	222	122
323	223	123
331	231	131
332	232	132
333	233	133

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۰ . ۵ : د n غړو د k -ام ټولګي د واریيشنونو شمير $V_{W_n}^{(k)}$

$C_6^{(4)}.C_{43}^{(2)}=\binom{6}{4}\binom{43}{2}=13545$ د تکرار سره دی: $V_{W_n}^{(k)}=n^k$

حل)اوبی): په k د پوره ایندکشن له لارې:

د ایندکشن پیل (k = 1) :

د $V_{W_n}^{(1)}=n^1$ لپاره صحیح دی، ځکه چی له n غړو څخه n واریيشنونه،چی هر یوله یوه غړي جوړ دی، جوړیږي.

د ایندکشن نیونه (k0 = k) : $V_{W_n}^{(k_0)}=n^{k_0}$

د ایندکشن غوښتنه (k0+ 1 = k): $V_{W_n}^{(k_0+1)}=n^{k_0+1}$

د ایندکشن ښوونه : د (k0 + 1) -ام درجی واریيشنونه د nk واریيشنونو چی k0 – امه درجه واریيشنونو څخه لاس ته راځي، په کوم کی چی له دوي هر یو په ترتیب د n غړو اخر ته یو ور واچوي یا ورزیات (علاوه) کړي (یادونه دې، چی په واریشنونو بی له تکرار شوې ، وکتل شي) .

له دې امله د دې شمير $n^{k_0}.n=n^{k+1}$ واریيشنونه دی.

بیلګي :

۱ - د درې غړو و دوم ټولګي ته د واریيشنونوشمير له تکرار سره دئ

$V_{W_3}^{(2)}=3^2=9$

۲ - د څلور غړو و دوم ټولګی ته د واریيشنونو شمير له تکرار سره دی

$V_{W_4}^{(2)}=4^2=16$

(c) ketabton.com: The Digital Library

----

۳ - د درې غړو و دريم ټولګي ته ض واريېشنونو شمير له تکرار سره دی

$$V_{W3}^{(3)} = 3^3 = 27$$

۴ - د مورس نخښه (Morsezeichen) له دوه غړو ، ټکی او لنډې کرښې يوځای کيږي.

د يوه ، دوه درې او څلورو غړو جوړه نخښو شمير دئ

$$V_{W2}^{(1)} + V_{W2}^{(2)} + V_{W2}^{(3)} + V_{W2}^{(4)} = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 30$$

۱۰ . ۴ . ۳ کمبينيشن (Kombination (لاتين: يو بل سره تړل)

تعريف ۱۰ . ۷ :

د n غړو و k-ام ټولګي ته (n > k) يو کمبنيشن هغه دئ چی هر يو له k غړو يوځاي دروولو څخه ، کوم چی له n غړو، بی د غړو له نظم په پام کی نيولو سره، جوړوي.

کمبينيشن له واريېشن منځ ته راځي، که چيری نظم په پام کی ونه نيول شي.

بيلګي:

۱ - د درې غړو a , b , c و دوم ټولګي ته کمبينيشن په لاندې ډول دئ:

ac bc

ac ......

۲ - د څلور غړو d , a , b , c و دوم ټولګي ته کمبينيشن په لاندې ډل دئ

ab bc cd

...... ac bd

ad ....

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې ځلو غړو ودريم ټولګي ته کمبينيشنونه په لاندې ډول دي:

abc bcd

acd

۳ - د پنځه غړو 1 , 2 , 3, 4 , 5 و دريم ټولګي ته کمبينيشنونه په لاندې ډول دي(لاندى هم بايد له کينې لاندې لورته په ښى لور ليکل شوي وى)

123 234 345

124 235

125 245

134

135

145

جمله ۱۰ . ۶ : د n غړو و k -م ټولګي ته د کمبينيشنونو شمير دی $C_n^{(k)}$

$$C_n^{(k)} = \binom{n}{k}$$

اوبى (حل): د n غړو و k-ام ټولګي ته د اوريیشنونو شمير دی:

$$V_n^{(k)} = \frac{n!}{n-k}$$

کمبينيشنونه له واريیشنونو په دې توپيريږي، چې ترتيب په نظر کی نه نيول کيږي، دا بيا دا مانا لري چې ټول د k غړو !k پرموتيشنونه په يو کمبينيشن کی يوه ته يوځاي کيږي

له دې امله لرو :

$$C_n^{(k)} = \frac{V_n^{(k)}}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!.k!} = \binom{n}{k}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګی :

۱ - و دوم ټولګي ته د درې غړو کمبینشنونو شمیریا ګڼون دی

$$C_3^{(2)} = \binom{3}{2} = 3$$

۲ - و څلورم ټولګي ته د څلور غړو کمبینیشنونو شمیر دی‌د څلورو غړو و دریم ټولګي ته د کمبینیشنونو شمیر دی

$$C_4^{(2)} = \binom{4}{2} = 6$$

۳ - د پنځه غړو ودریم ټولګي ته د کمبینیشنونو شمیر دی

$$C_4^{(3)} = \binom{4}{3} = 4$$

۴ - په لاتري (۶ له ۴۹ څخه) د امکاناتو لپاره شمیر دی

الف (یو شپږ $C_{49}^{(6)} = \binom{49}{6} = 13983816$

ب : یو څلور $C_6^{(4)}.C_{43}^{(2)} = \binom{6}{4}\binom{43}{2} = 13545$

۶ تیپ عددونه د یوه ۴ عددونوګروپ څخه ںوځای کیږي، چی له ایستل شوو شپږ عددونو (۴ تیک یا صحیح) او دوه عددونه(۲ پاتی عددونه) دي .

پیژند ۱۰ . ۸ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

د n غړو و k-ام ټولګي ته کمبینیشن، په کوم چی یواځني غړي k - ځله تکراروي، کمبینیشنونه د تکرار سره نومیږي.

بیلګي:

۱ - د دري غړوc , a , b و دویم ټولګي ته د تکرار سره کمبینشنونه دي.

aa ۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰

bb ab ۰ ۰۰۰۰۰

cc bc ac

۲ - د څلور غړو d , a , b , c و دویم ټولګي ته د تکرار سره کمبینیشنونه دي

aa ۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰

bb ab ۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰

cc bc ac ۰۰۰۰۰۰۰۰

dd cd bd ad

۳- د دري غړو 1 , 2 , 3 و دریم ټولګي ته د تکرار سره کمبینیشنونه دي(لاندي لیکنه باید له کینۍ لور پیل وی، خو دلته له ښی لور پیل شوی وکینۍ لور ته)

331 221 111

332 222 112

333 223 113

123

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۰ . ۷ : د n غړو و k - ام ټولګي ته د تکرار سره د کمبینیشنونو شمیر یا ګڼون دی:

$$C_{W_n}^{(k)} = \binom{n+k-1}{k}$$

دلته دې له ښوونی(چی په kد پوره ایندکشن له لار ې صورت نیسی) تیر شو.

بېلګې: ۱ - د درې غړو و دویم ټولګې ته د تکرار سره کمبېنیشنونه ګڼون یا شمېر دی

$$C_{W_3}^{(2)} = \binom{3+2-1}{2} = 6$$

۲ - دڅلورو غړو و دویم ټولګې ته د تکرار سره کمبېنیشنونه ګڼون یا شمېر دی

$$C_{W_4}^{(2)} = \binom{4+2-1}{2} = 10$$

۳ - د درې غړو و دریم ټولګې ته د تکرار سره کمبېنیشنونه ګڼون یا شمېر دی

$$C_{W_3}^{(3)} = \binom{3+3-1}{3} = 10$$

۴ - د څلورو مکعبونو ، چې اړخونه یې د یوه تر شپږ نخښنه وي . (نخښنه شپږ اړخیز) ممکن مختلف اچول ، په دې مانا چې کومې سترګې سره لویږي لاندې دي.

$$C_{W_6}^{(4)} = \binom{6+4-1}{4} = 126$$

۱۰ . ۴ . ۴ د برموتییشن،واریيشن،کمبینیشن ټولکه

داا	د په پا یوې برخی راټولونه م کی نیولو شوو غړو		د ټولو په پام کی نیول شوو غړو راټولونه یا ټولګه
	له نظم تیریدنه	نظم په پام کی نیونه	
	کمبینیشن	واریيشن	پرموتيشن
د ټول غړي یوله بل توپير لري	د n غړو کمبینیشن و k-ام ټولګي ته شمير یا ګڼون $C_n^{(k)} = \binom{n}{k}$	د n غړو واریيشن و k-ام ټولګي ته شمير یا ګڼون $V_n^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!}$	دn غړو پرموتيشن شمير یا ګڼون $P_n = n!$
له تکرار سره	د n غړو دکمبینیشن شمير وk -ام ټولګي د تکرار سره $C_{W_n}^{(k)} = \binom{n+k-1}{k}$	د n غړوواریيشن شمير د تکرار سره $V_{W_n}^{(k)} = n^k$	د k غړو پرموتيشن د ni غړو سره په k -م ګروپ کی $P_n^{(n_1,n_2,\ldots n_k)} = \frac{n!}{n_1!.n_2!....n_k!}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۰ . ۵ تمرینونه

۱ - لاندې فاکولتی وشمیری

الف) 7! ، ب) 3!.5! ، پ) 6! / 4!.I0!

۲ - لاندې ویشونه ساده کړی

a) (n+1)! / (n-2)! b) (2n)! / n! c) n! / 2n!

۳ - لاندې افادې وشمیری!

a) $\binom{6}{4}$ b) $\binom{1,5}{3}$ c) $\binom{-1}{6}$ d) $\binom{4}{1}$ e) $\binom{4}{0}$

f) $\binom{8}{8}$ g) $\binom{5}{4}\cdot 4!$ h) $\binom{7}{6}\cdot 3!$ i) $\binom{6}{7}\cdot 3!$ j) $\dfrac{\binom{7}{6}}{3!}$

۴ - لاندې زیاتونونه وشمیری!

a) $\binom{2}{1}+\binom{2}{2}$ b) $\binom{3}{1}+\binom{3}{2}$ c) $\binom{3}{2}+\binom{3}{3}$

d) $\binom{4}{1}+\binom{4}{2}$ e) $\binom{4}{2}+\binom{4}{3}$ f) $\binom{4}{3}+\binom{4}{4}$

۵ - لاندې افادې د بینوم د فرمول کارونی (استعمال) په بنسټ وګټی!

a) $(x+y)^7$ b) $(a-6)^6$ c) $(5a+4y)^3$

d) $(x/2 - y/3)^4$ e) $(2\ \ a+3\ \ b)^2$ f) $(x^2+y^2)^3$

۶ - لاندې افادې ساده کړی!

a) $(-1+a)^2-(1-a)^2$ b) $(a^2+b^2)^2-(a^2-b^2)^2$

c) $(\ \ ab-1)(-a-\ \ ab)+ab$

۷ - د بینوم په یو ځل یی بیل (تجزیه) کړی!

a) $25a^2+10\,ab+b^2$ b) $(49a^2-42a+9$

c) $169a^2-130\,ab+25b^2$ d) $2x+2.\ \ 6xy+3y$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۸ – الف) د غړو ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ پرموتیشنونه په لکسیکوگرافي نظم ولیکئ!

ب) د a,e,f,h,n پرموتیشنونو په څو ځایونو کی« fahne » او« hafen » ولاړ دي؟ دا الماني کلیمي دي چی دپښتو اړونه یی « بیرغ» او« بندر» دی.

۹ – الف) په څو ځایترتیب یا تنظیم کیدی شي ، شپږ کسه ځاي ونیسی؟

ب) څومره پنځهٔ ځیفري ګڼونه د پنځه ځیفرونو4, 3, 2, 1, 0 سره کیدی شي ولیکل شي، که هغه ګڼونه چی په صفر پیل کیږي ونه لیکل شي ؟

پ) د غړو a,b,c,d,f څومره پرموتیشنونه په c ، په de ، په cdef پیل کیږي؟

۱۰ – الف) د غړو a , b , c ټول پرموتیشنونه ولیکئ، په کومو کي چي a او b هره یوځل، غړی c دوه ځله رامنځ ته کیږي.

ب) د دې پرموتیشنونو ګڼون یا شمیر وګڼئ!

۱۱ – څومره تنظیم شوي جوړې د الفبا د۲۶ (لاتین توري) تورو څخه جوړیدلی شي ؟

۱۲ – د څلورم ټولګي څومره مختلف واریيشنونه د

الف) بي له تکرار

ب) له تکرار سره د غړو 8 , 6 , 4, 2, 0 موجود دي؟

۱۳ – یوه سوری کارت له ۸۰ سوریدرځونو چي هریو لس سوري لري، جوړ دی. څومره د سوریو یوځایلیکل ممکن دي، که هر درځ ټیك یو ځل سوری شي؟

۱۴ – له شپږ غړو جوړ کمبینیشن ګڼون و څلورم ټولګي ته او پنځم ټولګي ته څومره لوي دی،

الف) بي له تکرار

ب) له تکرار سره؟

۱۵ – یادونه : دا د کارتو لوبولپاره تمرین نه دی لیکل شوی

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱۶ - څومره مختلفي ازمايني ممكن دي كه په يوه توليد كې له هر ۲۰ يوه وازمايل شي؟

۱۷ - په موټرو ترافيك نخښې په لاندې توګه يوځاى شوي : يوه د ځاي نښونه ډله د نخښې الف بې پسې څلور ګروپ يا ډله راځي، چې له څيفرونو ۰ تر ۹ څخه جوړ وي. د يوې كره ټاكلې الف بې پيژندنښې يا ترافيكي نخښې ممكن دي؟

۱۸ - د مختلفو اندازو او د خامموادو جوړ نلونه ، د رنګونې له لارې يو له بل توپيريدى شي ، كه څلور رنګ نښونې ولرو؟

۱۹ - د منډې يوه ميچ په اخركې شپږ پاتې منډې وهونكې برخه اخلي. د منډو څومره امكانات موجود دي؟

۲۰ - په څومره ډوله

الف) اته مختلفې مرغلرې،

ب) درې سرې، څلور شنې، يوه زرغونه مرغلره

ترتيبيدلى شي؟

۲۱ - څومره تلفونونه كيدى شي وتړل شي كې يواځې پنځه ځايزه نمره موجود وي؟ څومره تلفون تړل ممكن دي كه تلفون نمرې شپږځايزې وي او په 0 پيلكيدنه يې اجازه ونه لري؟

۲۲ - د درې شپږسترګيو (يا –اړخيزو) سره (څيره مكعب دى اومخونه له يوې تر شپږ سترګو باندې په نخښه دي، ماته يې د پښتو نوم نه راځي او االماني يې Würfel دى) څومره مختلفې اچونې ممكن دي، چې ټولې شپږسترګې مختلفې سترګې ګڼون وښايې؟
څومره مختلفې اچونې له درې شپږسترګيو سره ممكن دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۱ کرښیز-، خطي – یا لاینیز الجبر

یادونه : د لته دې هم د هرڅه له مخه بیا دې ته ګوته نیول شوي وي ، چې څه به تکرار وي، خو هغه لاتین متل دی، چې » تکرار د زدکړې مور ده .«
لاندې مخ ته پرته اصلي برخه دm برابرونونو ځوابونو ته چې n اووښتونې یا مجهولی یا ناپیژندونکی لري، وقف ده، چیرته چې m د برابرونونو ګڼون یا تعداد n د ناپیژندونکو یا مجهولو ګڼون (تعداد) سره برابر او همدا ډول لوي او یا کوچنی کیدی شي
په ۱۱ . ۱ برخه کی د دوه ناپیژندونکو یا مجهولو سره د برابرونونو سیستمونه تر څیړنی لاندې نیول کیږي، چې د ښوونځي شمیرپوهنی تکرار دی، مګر دلته د برابرونونو سیستمونه د ناټاکلوځلونو یا ضریبونو یا فاکتورونو سره هم راوړل کیږي، چې د حالتونو توپیریدنه یي اړیینه ده٠
دا راوړنی به په ۱۱ . ۲ برخه کی درې ناپیژندونکو یا نامعلومو او په ۱۱ . ۳ برخه کی په خوښه زیاتوناپیژندونکو ته وغزیږي، په ټولو برخو کی پل په پل د دیترمینانت کلیمه او د ګاوس الګوریتم د کار ډګر ته را اچول کیږي .
په ۱۱ . ۴ برخه د هوموجینو برابرونونو سیستم ځانګړي ځوابونه په بر کی نیسي٠
یادونه : ولې لاینیز برابرونونه او نه کریز یا بندکرښیز یا خطی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

موږ د برابرونونو له څيرې پوهيږو، چۀ دا يوه کرښه ورکوي، چې لاتين يا کۀ غواړئ انګريزي يې لاين نومولی۰ د کرښو اوبندکرښو نومونه هم شته، خو د دې لپاره، چې د نورو درسې منځپانګی سره يې توپير وي،نو موږ هم ورته له دې امله لاينيز وايو۰

۱۱ . ۱ . لاينيز برابرون د دوه ناپيژندونکو سره

داسی يو مساوات د دوه ناپيژندونکو سرهکيدي چی په لاندې ډول انځور شي

$$ax + by = c \qquad (11.1)$$

دلته کيدی شي چی ناپيژندونکی لويي x او y په خوښه رييل ګنونه وي چی يو له بل سره په ورکړ شوي بنه تړلي. يا په بل عبارت : x او y واريابلی(اووښتونکی يا لنډ: اووښتوني) دي، برابرون (۱۱ . ۱) لاينيز فنکشن(بلواك) برابرون په ګوته کوي چی د هغي څيره په y,x کواوردينات کی ناپای کرښه ده(۱۶ - امه برخه دی وکتل شي)

ځانګړی حالت : a = 0 يا b = 0 په ځانګړې توګه کرښه انځوروي يا په ګوته کوي چی د y - محوراو همداسی د x - محور سره غبرګه د ه .

که دا (۱ . ۱۱) برابرون د دواړو نايژندونکو يا مجوهولو x او y لپاره ټاکنمساوات يا ټاکنبرابرون ونيول شي، نو دا پوښتنه رامنځ ته کيږي، چی ددې مسئلی د حل (اوبی) لاندې به څه پوهيدل غوښتونکی وي.

د (۱۱. ۱) برابرون اوبيونه په څرګند ډول د ټولو ارزښتجوړو (x ,y) ډيری ده، چی(۱۱.۱) برابرون پوره کوي. که اصلي حالت a , b |= 0 ته پام وکړو نو برابرون (۱ . ۱۱) د y په لور داسی ځوابوو.

$$y = - (a/b) x + c/b \qquad (11.2)$$

کيدی شي چی x په خوښه وټاکل شي او y له (۲ . ۱۱) برابرون څخه لاس ته راولو. ګورو چی ناپاي ډيرې اوبيونې يا حلونه لاس ته راځی يعني د اوبيونې ډيری يا اوبيډيری L په لاندې ډول ده

$$L = \{ (x, y) \mid y = - (a/b) x + c/b \} \quad (11.3)$$

داسې لوستل کيږي: L د ټولو (x,y) جوړو ډيری ده ،داسې چې..... (ورپسې هغه برابرون)۰

ددې لپاره لنډ ليکل کيږي: د (۱۱ . ۱) برابرون اوبی يا حل y = -(a/b)x+c/b ، د خوښی x ۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

طبعآ کيدی شي چي برابرون د x په لور هم اوبی شي. دلته y په خوښه نيسو، نو د لته د برابرون (۱۱ . ۱) ځواب داسی دی , x = -(b/a)y + c/b په خوښهy ۰

دا چي په لانديې کی مورږ د درېو يا ډيرو ناپيژندونکو يا نامعلومو برابرونونو سره سر او کار لرو، نو موخه ور بولو که ناپيژندونکې د x, y , z .... سره په نخښه نه کړو بلکه د $x_1, x_2, x_3, ...$ سره .

ددې په نخښونو سره کيدی شي چی په څرګند ډول وښايو:

لانديې برابرون د دوه ناپيژندونکو x_1, x_2 سره

$$a_1x_1 + a_2x_2 = b, ...(11,4)$$

د a |= 0 لپاره

∞^i

ځوابونه لري

∞^i

په دې مانا چی i = 1 , 2, 3۰۰۰ ناپيژندونکو يا نامعلومی لپاره په خوښه r ازښتونه کيښوول کيدی شي.

$$x_1 = -\frac{a_2}{a_1}x_2 + \frac{b}{a_1}, ...(11,5)$$

په خوښه x_2

د

$a_2 \neq 0$

لپاره

∞

ځوابونه

$$x_2 = -\frac{a}{a_2}x_1 + \frac{b}{a_2}; ....(11,6)$$

x_1

په خوښه

د a1 =a2 = b = 0 (0.x1+ 0.x2= b = 0 (لپاره ناپای ډير ځوابونه

د په خوښه

$$x_1, x_2, ...(11,7)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د

$a_1 = 0; a_2 = 0; b \neq 0$

لپاره

$0.x_1 + 0.x_2 = b \neq 0$

په ځنوالی یا تضاد یا مخامخوالی دی، له دې امله ځواب نه شته.
نوټ : دلته

∞^i

دا مانا لري چې د ناپیژندونې یا مجهولی

x_i

لپاره i = 1,2.. په خوښه ناپای ارزښتونه نیول کیدی شي.

۱۱ . ۱ . ۲ – دوه لاینیز برابرونونه د دوه ناپیژندونکو سره
د دوه برابرونونو سیستم د دوه ناپیژندونکو سره لاندې عمومي شکل لري

$$I............a_{11}x_1a_{12}x_2 = a_1$$
$$II..........a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = a_2;..................(11,8)$$

دا ټاکلي برابرونونه کیدی شي چې په اوونبتونو یا واریابلو x 1 اوx2کی د
بلواکبرابرون یا فنکشنمساوات په څیر ونیول شي او په x1 , x2 - کواوردیناتسیستم کی
د کرښو په ډول انځور شي. که کرښي یو بل غوڅي کړي نو دا د مساواتو په سیستم (۸ .
۱۱) کی د کرښو یوګونی(بهتره : یوګونی، یواځنی د بل څه لپاره کارول شوی)
اوبیونه ده یا حل دی.
که دواړه کرښي یو په بل پریوځي نو دا په دې مانا دي چې II همغه مساوات لکه I
انځوروي. دلته دا بسیاکوي، چې د ۱۱ . ۱ . ۱ . له مخي تیك یا فقط مساوات I یا
مساوات II حل شي. دلته ناپاي ډیر

∞^1

ځوابونه موجود دي.
داسي هم کیدی شي چې فورمال

∞^2

رامنځ ته شي، که ټول

$a_{ik} \wedge a_i$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د صفر سره برابر ي. موږ دلته دا حالت نه څیړو. دا څیړو چې، که دا برابرون اوبیونه ونه لري. دا حالت هغه وخت رامنځ ته کیږي، چي کرښه I اوکرښه II غبرگي ځغلي مگر یو په بل نه وي پرتی.

په دوه برابرونونو کي، د دوه ناپیژندونکو یا اووښتونو سره، کیدي شي لاندې حالتونه را منځ ته شي

۱ - یو یواځني ټاکلی ځواب مو مخ ته پروت دئ (اصلي حالت)

۲ - کوم ځواب مو و مخ ته نه دئ پروت (سیستم مخامخوالی یا تضاد لري)

۳ - ناپای ډیر ځوابونه موجود دی II (برابرون برابر په I مساوات او یا د هغه څو برابره دی)

۴ - ناپاي ډیر ځوابونه موجود دي.

(ټول $a_{ik} = 0$ او ټول $a_i = 0$ دي)

د دوه برابرونونو له مخی چی دوه ناپیژندونکی لري، کیدی شي په اسانتیا وپیژندل شي، چی د برابرونونو کوم حالت مو مخ ته پروت دئ.

په سیستمونو کی چي درې یا زیاتي واریابلی یا اووښتونې لري ورته حالتونه په ساده ډول نه شو پیژندلی چي کوم حالت تر مخ لرو. دلته باید فورمال پرمخ لاړ شو، دا چی څنکه دا کار سرته رسولی شو غواړو چی د پوښتنو په فورمال ځواب پیل وکړو او د برابرونونو پوښتنو ته ځواب پیدا کړو. دلته باید دري بنسټیز د مساواتسیستم د ځواب کاردودونه)متودونه(تکرار شي:

۱ . د برابر یا مساوي ځاي په ځاي کولو متود:
دواړه برابرونونه د یوې نامعلومی په لور اوبی کیږي(د بیلگي په توگه د x دوه په لور(، دواړه برابرې لیکي او په دې ډول یو برابرون د یوې نامعلومي سره منځ ته راځي۰

۲ - یو د بل پر ځاي کیښولو متود:
برابرون یا مساوات د یوې ناپیژندونکې (د بیلگي په توگهx دوه) په لور ځواب کیږي او دا لاس ته راوړنه په بل برابرون کی ځاي په ځاي کیږي، په دې ډول د یوې ناپیژندونې برابرون منځ ته راځي (د بیلگي په توگه دx یو)

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۳ - د زیاتون کارونه (جمع کولو عملیه):

سرې یو ټاکلی څو برابره (کیدی شي چی کمیز یا منفي هم وي) د II د I برابرون د برابرون یوه ټاکلي څو برابره سره زیاتوي، داسی چې یوه ناپیژندونی بیا مخ ته نه راځی یا له منځه ولاړه شي. د نیتجي سره بیا دا بله ناپیژندوني څیړي. دا د داوړو نامعلومو(ناپیژندونو) لپاره کیداي شي . دا متود دبرابرونونو د سیستم لپاره بنسټیز دی چی د دیترمینانتو (die Determinanten) له لارې د برابرونونو ځواب لاس ته راوړو .
دا متود په درې ځانګړو برابرونسیستمونو باندې باید وکارول شي، ټول څلورځلوني(ځله ووني یا ضریبونه) بایدله صفر توپیر ولري یعني $a_{ik} \neq 0$ که چیرې یو $a_{ik} = 0$ د بیلګي په توګه $a_{21} = 0$ نو بیا به مساواتو په لاندې ډول د درېګوډي جوړښت لرودی:

$$I.............a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = a_1;......a_{11} \neq 0$$
$$II.....................a_{22}x_2 = a_2,.......a_{22} \neq 0;..........(11,9)$$

دلته نو
$a_{21} = 0$

بیا له II سیده راویستل کیدی شو او د نتیجي څخه یي چی په I کی کښیښودل شوې وی x_1 هم معلومیدی شو. دلته دا په ګوته کوو چی د ګاوس الګوریتم په استعمال بیا برابرون د درېګوډي شکل باندې اړول کیږي .دا درې څرګند حالتونه په لاندې ډول دي :
سیستم ۱

I 2x1 + 3x2 = 4

II x1 - 2x2 = -5

دا سیستم یواځنی یوځواب لر II برابرون د I برابرون سره اړیکی نه لري

سیستم ۲
2x1 + 3x2 = 4
II 4x1 + 6x2 = 8

په اسانۍ ګورو چی دلته II برابرون په ۲ ځل شوی I برابرون دیَ . دواړه برابرونونه همغه کرښه وښایی او په دې ډول د مساواتو اوبیونې ناپای دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

سیستم ۳:

I $2x1 + 3x2 = 4$

II $4x1 + 6x2 = 10$

دلته بې ډیله څرګنده ده چې برابرونونه یو د بل تضاد یا یو د بل په څټ دي .د Iبرابرون دوه برابره په لاندې ډول دی:

$4x1 + 6x2 = 8$

په دې توګه ناممکن ده چې II هم باوري وي، نو له دې امله دا سیستم ۳ اوبیونه نه لري.

بیلګه ۱۱ . ۱ :

سیستم۱ دې په پورته درې ورکړ شوو متودونو ځواب شي .

الف: مساوي اینوولوکارونه یا عملیه

$$I':.....x_1 = 2-(3/2)x_2;.......;II':.....x_1 = 2x_2 - 5$$

$$2-(3/2)x_2 = x_2 - 5$$

$$-(7/2)x_2 = -7$$

$$x_2 = 2;\Rightarrow$$

$$x_1 = 2-(3/2).2$$

$$x_1 = -1$$

ب) د بل په ځاي کینولوکاروونه (عملیه) : II د x1 په لور ځواب کیږي او بیا په I کې ځاي په ځاي کیږي۰

$$II'::.........x_1 = 2x_2 - 5$$

$$2(2x_2 - 5) + 3x_2 = 4$$

$$4x_2 - 10 + 3x_2 = 4$$

$$7x_2 = 14$$

$$x_2 = 2 \Rightarrow x_1 = 2.2 - 5 \Rightarrow x_1 = -1$$

پ) د زیاتونکاروونه: x_1 له منځه ځي، که (-2) ځله د II برابرون و I ته زیات شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$I:................2x_1+3x_2=4$$
$$(-2)II:........-2x_1+4x_2=10$$
$$I-2II:....................7x_2=14$$
$$..................................x_2=2$$

کیدی شي، ود بیلګي په توګه، له II څخه x1 وشمیرل شي:
$$x_1=2x_2-5=4-5=-1$$

د زیاتون کاروونی په کلکه یا تل استعمال څخه کیدی شي
x2
له منځه یو وړل شي، په دې شکل چی د II درې برابره د I دوه ځله ته ورزیات کړی شي.

$$2.I:............4x_1+6x_2=8$$
$$3.II:............3x_1-6x_2=-15$$
$$-------------------$$
$$2.I+3.II:........7x_1..........=-7$$
$$........................x_1.............=-1$$

یادونه : په پورته کې یا نورو کومو ځایونو کې ، چې ټکی چیرته اینسول کیږي، پوهیږو، چې چیرته ټکی د ځاي غزونې او چیرته د ځل لپاره ځاي په ځاي شوي دي

بیلګه ۱۱ . ۲ :
سیسم ۲ دې په پورته درې متودو ځواب شي:

الف (مساوي اینوولو:

I' : x1 = 2 -(3/2).x2

II': x1 = 2 -(3/2)x2

2- (3/2)x2 = 2 - /3/2)x

0.x2 = 0

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته

x_2

په خوښه. دا په دي مانا چی

x_2

هر ارزښت نیوی شي ۰ له 'I ځخه ناپای ډیر ځوابونه لاس ته راځي

$x_1 = 2 - (3/2)x_2$ او x_2 په خوښه.

ب) د بل په ځاي ایښوولومتود: $I' \quad x_1 = 2-(3/2)x_2$,

په II کی ایښول کیږي

$$II' \quad 4.(2-(3/2)x_2) + 6x_2 = 8$$
$$8-6x_2+6x_2 = 8$$
$$0.x_2 = 0 \quad x_2$$

په خوښه له 'II لاس ته راځي

$I' : x_1 = 2 - 3/2\, x_2$ x_2 په خوښه

پ) د زیاتون متود یا لار یا طریقه:

$$2.I \quad 4x_1 + 6x_2 = 8$$
$$II \quad 4x_1 + 6x_2 = 8$$

$$II - 2.I: \ 0x_1 + 0x_2 = 0$$

که یواځی دا مساوات په نظر کي ونیول شي ، نو x_1 او x_2په خوښه ټاکل کیدی شي، دا چی د x_1 او x_2 ترمنځ په I یا II کی ورکړ شوي اړیکي دي ، نو یواځي یوه ناپیژندونکو په خوښه ټاکل کیدی شي . ځواب داسی دی:

$$x_1 = 2-(3/2)x_2$$

x_2په خوښه

په همدې ډول:

$$x_2 = 4/3 -(2/3)x_1 ,$$

دلته x_1 په خوښه ټاکل کیږي

بیلګه ۱۱ . ۳ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

سیستم ۳ دې په پورته درې ورکړشوومتودونو ځواب شي.

الف (مساوي ځاي په ځاي کولو متود:

$$I' : \quad x1 = 2 -(3/2)x2$$
$$II' : \quad x1 = 5/2 -(3/2)x2$$
$$2-(3/2)x2 = 5/2 -(3/2)x2$$
$$0.x2 = 1/ 2$$

دا یو په ځتوالی یا تضاد دی، ځکه چې هیڅ یو رییل ګڼ x2 نه شته چې دا مساوات پوره کړي، نو له دې امله کوم ځواب نه شته یا وجود نه لري.

ب) د بل په ځاي لیکلو عملیه: $I' : \quad x1 = 2 - (3/2)x2$,

په II کی دی په ځای شي

$$II': 4.(2-(3/2)x2)+6x2 = 10$$
$$8 - 6x2 + 6x2 = 10$$
$$0.x2 = 2$$

دا مخامخوالی یا په ځتوالی یا تضاد دئ ، پس ځواب نه شته.

پ) د زیاتون متود:

$$2 . I \quad 4x + 6x = 8$$
$$II \quad 4x + 6x = 10$$

$$2.I - II \quad 0.x + 0.x = -2$$

په ځتوالی یا تضا د دئ ، ځواب وجود نه لري

د لاندې بیلګو سره غواړو د منځ ته راتللو پیښتنو ځوابونو لپاره اړوند لارښوونه ګوته لك کړو.

بیلګه ۱۱ ۰ ٤ : په لاندې فورم یا بنه برابرونسیستم ورکړ شوی:

$$I \quad x /(a+b) +y/(a-b)$$
$$II \quad x /(a-b) +y/(a+b)$$

دا ټیك هلته موخه ور یا هدفمند دئ چی $b = a$ او $b = -a$ وي، یعنی $|b| = |a|$ وي .

(c) ketabton.com: The Digital Library

کيدی شي چې دا سيستم د پورتنيو متودونو څخه په يوه متود تړلی ځواب کړي، د يوه د مخه ورکړ شوي فورم يا بڼې اوړون له لارې هم ځواب کيدی شي.
لمړی د جمعی متود څخه کار اخلو:
د I ځل له $1/(a+b)$ او II ځل له $-1/(a-b)$ څخه وروسته دا لرو:

$$x/(a+b)^2+y/(a^2-b^2)=1/(a+b)$$

$$-x/(a-b)^2-y/(a^2-b^2)=-1/(a-b)$$

له دې سره د y دواړه ځله وونې ياضريبونه يو د بل مخامخ (يا په بل عبارت يو د بل په څټ) نخښی لري او له دې امله د زياتون په حالت کی له منځه ځي، نو په دې توگه مو يو برابرون د يوې ناپيژندونکی سره مخ ته پروت دی:

$$\frac{x}{(a+b)^2}-\frac{x}{(a-b)^2}=\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a-b}$$

$$\frac{(a-b)^2-(a+b)^2}{(a+b)^2(a-b)^2}x=\frac{a-b-(a+b)}{a^2-b^2}$$

$$\frac{a^2-2ab+b^2-a^2-2ab-b^2}{(a^2-b^2)^2}x=\frac{a-b-a-b}{a^2-b^2}$$

$$-\frac{4ab}{a^2-b^2}x=-2b$$

$$2abx=b(a^2-b^2)....(*)$$

$$x=\frac{a^2-b^2}{2a};ab\neq 0$$

که I له $1/(a+b)$ او IIله $-1/(a-b)$ سره ځل شي کيدی شي: چې y په ورته ډول وشميرل شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{x}{a^2-b^2}-\frac{y}{(a-b)^2}=\frac{1}{a-b}$$

$$-\frac{x^2}{a^2-b^2}-\frac{y}{(a+b)^2}=\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a+b}$$

$$\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{(a-b)^2(a+b)^2}y=\frac{a-b-(a+b)}{a^2-b^2}$$

$$\frac{a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2}{(a^2-b^2)^2}y=\frac{a+b-a+b}{a^2-b^2}$$

$$-\frac{4ab}{a^2-b^2}y=2b$$

$$2aby=b(a^2-b^2)....(*)$$

$$y=\frac{a^2-b^2}{2a};ab\neq 0$$

دلته مو ځانګړی حالت مخ ته پروت دی، چی دواړه ناپیژندونکی مساوي دي، کومی چی ځمونږ د څیړنی لپاره بي مفهومه دی.

دا د x , y لپاره شمیرل شوي ارزښتونه په هغه حالت کی باوري دی چی ab |= 0 وي.

نو څیړو چی کوم حالت توپیر د ab = 0 لپاره منځ ته راځي. . دلته مساوات) * (تر څیړنی لاندې نیسو او درې حالته توپیروو:

.1 a = 0 , b |= 0

مساوات)*(داسی دي

0.x = -2b3, 0 . y = -2b3

په دې حالت کی برابرون سیستم ځواب نه لري.) تضاد مخ ته پروت دی

. 2 a |= 0 , b = 0

برابرون(*)(په دې حالت کی داسی دی.

0 . x = 0 ; 0 . y = 0

دلته مخامخوالی یا په څتوالی یا تضاد نه شته (له I او هم له II لاس ته راځي

x/a+y/a=1 <=> x+y=a

که y خپلواك وټاکل شي، نو لرو x=a-y دلته y په خوښه ټاکل کیدی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په بل حالت کی لرو , $y = a - x$ دلته x په خوښه دی

3 . $a=b=0$

دا حالت د نیونی له مخی بند ، ناشونی یا ناممکن دئ.

بیلګه ۱۱ . ۵:

$$\frac{11}{2x-3y}+\frac{18}{3x-2y}=13$$

$$\frac{27}{3x-2y}-\frac{2}{2x-3y}=1$$

که دا سیستم د $(3x-2y)(2x-3y)$ سره ځلوني په بنسټ فورم بدل کړي، نو لرو:

$$69x-76y=78x^2-169xy+78y^2$$

$$48x-77y=6x^2-13xy+6y^2$$

او کتل کیږي چی په دې ډول لاینیز برابرونتسیستم د x او y لپاره منځ ته نه راځي . دا چی په دې هر یو سیستم کی دوه ماتلاندې سره برابر دي نو کیدی شي چی نوې ناپیژندونکی u , v و لیکو. دا وشمیرو او بیا له دې وروسته لویي x , y راپیدا کړو . موږ ځاي پر ځاي کو

$u=1/(2x-3y)$,$v=1/(3x-2y)$

او لاس ته راوړو:

$11u+18v=13$ <=> $11u+18v=13$

$27v-2u=1$ $-2u+27v=1$

موږ د زیاتون یا جمعی متود کاروو

$33u+54v=39$

$4u-54v=-2$

$37u=37$

$u=1$ => $v=1/9$

له دې سره کیدی شي x او y وشمیرل شي:

$1=1/(2x-3y)$<=> $2x-3y=1$

$1/9=1/(3x-2y)$ <=> $3x-2y=9$

له دې څخه غوښتونکی ځواب $x = 5 , y = 3$ لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۱ . ۱ . ۳ دویمه درجه دیترمیناتي او د کرامر قاعده

که په ټولیزسیستم(11.8) باندې د زیاتون متود استعمال شي، نودx2د له منځه وړلو په لار لاس ته راځي

$$I' = a_{22}.I - a_{22}.II$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$$

پورته برابرون دی) ۱۱،۱۰ (وي

اود x1 د له منځه وړلو:

$$II' = a_{11}.II - {}_{21}.I :$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = (a_{11}a_2 - a_1a_{21})$$

دا پورته برابرون دې (۱۱،۱۱) وي

که 0 =| (a11a22 -a12a21) وي، نو له دې یواځنی ټاکلی ځواب لاس ته راځي

$$x_1 = \frac{a_1a_{22} - a_{12}a_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}; x_2 = \frac{a_{11}a_2 - a_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, ...(11,12)$$

که د ارزښتونه په (11 . 8) کی ځای په ځای شي نو تصدیقیږي، چې(11 . 12) په ریښتینی د (11, 8) ځواب دی. له (11 . 10) تر (11 . 12) سرې په واقعیت یا رښتونی کی د دیترمینانت کلیمی په لور لاروی کوي(لارښودوي.)

پیژند ۱۱ . ۱: د یو منظم سیستم دوه ځله دوه رییلو ګڼونو $a_{ik}, (i, k = 1, 2)$ د د ۲ -امه درجه دیترمینانت لاندې ، لاندینی ګڼ پوهیږو:

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}; ....(11,13)$$

د اصلي دوه کونجتړي یا دیاګونال (قطر) د توکوځل، ترې کم(منفی) د څنګ یا فرعی دوه کوجنتړي(قطر) د توکو ځل(یا) د اصلي دوه کونجتړې یا قطر د توکو ځل څخه د څنګ یا فرعي دوه کونجتړې د توکو ځل کمیږي یا منفی کیږي)

یادونه : دا اوس او وروسته دیترمینانت بڼه د ماتریکس په څیره لیکل شوی، په دیترمینانت کې کرښی سمې دي، خو کومه ناسمپوهنه په کې نه راځي.

په (11 . 13) کی د xi ځله ووني یا ضریبونه داسی لیکل شوي لکه په (11 . 8) سیستم کی . د (11.13) دیترمینانت له دې امله د (11 8) (له ماخڅه دانوکانو کې دننه ګڼونه کله کله بدلیږي، دې ته دې د ګرانو لوستونکو پام وي، دا شمیرپوهنیزه ناسمي منځ ته نه راولي) سیستم د ځلونو (ضریبونو) دیترمینانت بلل کیږي.

که په (11. 13) کی لومړی (درز، ستن یا متِه یا ولاړه لیکه یا-کیله) د دیترمینانت ولاړه لیکه(په ځای) چی د xi ځله ووني یا ضریبونه دی د (11 . 8) برابرونسیستم

(c) ketabton.com: The Digital Library

ښي اړخ (مطلقه توکی) توکي a1 , a2 وليکل شي نو(په x1 اړونده) لاندې
ديترمينانت لاس ته راځي:

$$D_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_1 a_{22} - a_{12} a_2$$

د پورته برابرون ګڼه يا نمره دې) ١١،١٤ (وېپه همدې ډول که د) 11 . 13 (
ديترمينانت دوهم درز بدل کړی شي، نو دx2 پورې اړوند لاندې ديترمينانت لاس ته
راځي

$$D_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_{21} & a_2 \end{pmatrix} = a_{11} a_2 - a_1 a_{21}; \ldots\ldots\ldots\ldots (11,15)$$

که له (11 . 10) تر(11 . 12) پورې له (11 . 13) تر (11 . 15) پرتله
یامقایسه شي نو لاس ته راځي

جمله ١١ . ١ (د کرامر قاعده):
که د ځله وونو يا ضريبونو ديترمينانت لپاره په (11. 13) کې

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \neq 0; \ldots\ldots\ldots\ldots (11,16)$$

باوري وي نو د مساواتو سيستم (11 . 8) يواځنی ټاکلی ځواب لري
x1=D1/D ; x2 = D2/D /11,17)
په داسی حال چی D1 او D2 د (11 . 14) او (11 . 15) له مخی شميرل کيږي.
د (11 . 10) او (11 . 11) له امله لرو

جمله ١١ . ٢ :
که په (١١ . ١٣) کی د ځلونو ديترمينانت D لپاره باوري وي
(11,18) 0 = D
او د کم له کمه يوې ډيترمينانتD1 يا D2 لپاره په (14, 11) يا (11 , 15) باوري
وي
D1|=0 \/ D2 |=0 (11,19)
نو (11 . 8) سيستم ځواب نه لري، ځکه چي برابرون يی يو د بل سره مخامخ دي (
تضاد کی دي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله۱۱ . ۳ :
باوري دي
D=D1=D2=0 (11 . 20)
نو يو له برابرونونو I يا II زياتي دی) دواړه برابرونونه يو بل ته اړ دی يا د بل په واك کی دي(او د ۱۱ . ۱ . ۱ . ۱ . برخی متود استعماليدلی شي يا كار ترې اخستل كيدی شي.
د ښوونبيلګو په څير دې اوس د ۱۱ . ۱ تر ۱۱ . ۳ پورې بيلګي (۱۱ . ۱ . ۲ برخه) كارول شوي سيستمونه ۱ ،۲ او۳ ګران لستونكي په ديترنمنانتو ځواب كړي، كه چيرې ما دا كار سرت ونه رساوه۰.
بيلګه ۱۱ . ۶ : د سيستم لپاره باور لري

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4-3=-7 \neq 0$$

پس يوائځنی تاكلی ځواب لري. پسی باور لري

$$D_1=\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} = -8+15=7 \neq 0; D_2=\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -10-4=-14$$

له دې امله باوري دی

x1=D1/D=7/-7 , x2=D2/D=-14/-7= 2 ,

بيلګه۱۱ . ۷ :

د سيستم ۲ لپاره باور لري

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 12-12=0$$

او ورپسی

$$D_1=\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} = 24-24=0; D_2=\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 16-16=0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې امله ناپاي ډېر ځوابونه موجود دي) بيلګه۱۱ . ۲ دې وکتل شي.)

بيلګه ۱۱ . ۸ :   د سيستم ۳ لپاره باور لري

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0$$

D =   2   3   =12 -12 = 0

او ورپسی

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 10 & 6 \end{vmatrix} = 24 - 30 \neq 0$$

همدلت روښانه ده، چی ځواب نه شته(د 0=| 4 = D2له شميرلوکيدی شي، چی تيرشو)

بيلګه ۱۱ . ۹ :

موږ بالاخره غواړو چي په بيلګه ۱۱ . ۴ کی ورکړ شوی مساواتسيستم ته د ديترمينانت له لارې ځواب ورکړواو ددې لپاره لومړی   D , D1 او D2 شميرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$D=\begin{vmatrix}\frac{1}{a+b} & \frac{1}{a-b}\\ \frac{1}{a-b} & \frac{1}{a+b}\end{vmatrix}=\frac{1}{(a+b)^2}-\frac{1}{(a-b)^2}=\frac{(a-b)^2-(a+b)^2}{(a+b)^2(a-b)^2}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots=\frac{a^2-2ab+{}^2-a^2-2ab-b^2}{(a^2-b^2)^2}=-\frac{4ab}{(a^2-b^2)^2};$$

$$D_1=\begin{vmatrix}1 & \frac{1}{a-b}\\ 1 & \frac{1}{a+b}\end{vmatrix}=\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a-b}=\frac{a-b-(a+b)}{(a+b)(a-b)}=-\frac{2b}{a^2-b^2};$$

$$D_2=\begin{vmatrix}\frac{1}{a+b} & 1\\ \frac{1}{a-b} & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a-b}=\frac{a-b-(a+b)}{(a+b)(a-b)}=-\frac{2b}{a^2-b^2}$$

لومړی حالت $ab \mid= 0$:

دلته دیترمینانت $D \mid= 0$ او دا د برابرونسیستم یواځنی ټاکلی ځواب دی

$$x=\frac{D_1}{D}=\left(-\frac{2b}{a^2-b^2}\right):\left(-\frac{4ab}{(a^2-b^2)^2}\right)=\frac{2b}{a^2-b^2}\cdot\frac{(a^2-b^2)^2}{4ab}=\frac{a^2-b^2}{2a}$$

$$y=\frac{D_2}{D}=\frac{a^2-b^2}{2a}$$ (د $D1 = D2$ له امله)

دوم ۱ حالت $a=0, b\mid=0$: دلته $D = 0$ مګر

$D1 = D2 \mid= 0$

او د مساواتسیستم ځواب نه لري

دوم ۲

دلته $D = D1 = D2 = 0$

او ناپای ډیر ځوابونه موجود دي چی په بیلګه ۱۱ . ۴ کي ښوول شوي .

دوم ۳ حالت $a = b = 0$:

دلته مساواتسیستم هدفمند نه دی (په صفر ویش مخ ته پروت دی) مشوره کیږي چی

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندی د برابرونونو سیستم دې د لاندې بریالي فورم بدلولو وروسته دبیلا بیلو لارو ځواب شي او د ځواب متودونه دې یو د بل سره پرتله یا مقایسه شي.

$$(a-b)x+(a+b)y=a^2-b^2$$
$$(a+b)x+(a-b)y=a^2-b^2$$

۱۱ ۰ ۱ ۰ ٤ د ګاوس الګوریتم

په ۱۱ . ۱ . ۲ . برخه کي ځیرل شوو متودو ټیك په نظر نیولو سره (برابرو لیکلو- په ځاي - او د زیاتون عملیه) ، کره پوهیدلی شو چی ددې په مرسته ټولیز د برابرونسیستم (8 . 11)

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = a_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = a_2$$

په یوه دریګوډیز جوړ سیتسم

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = a_1$$
$$\ldots\ldots\ldots a_{22}x_2 = a_2$$

بدلولي شو، کوم چی بیا خورا ساده ځواب کیدی شي

۱ . که 0 =| a22 وي، نو لاس ته راځي:

الف) x2=a2/a22

ب) برسیره پر دې که $a_{11} \neq 0$ وي، نو لاس ته راځي:

x1=(a1/a11)-(a12/a11)x2=
(a1/a11)-(a12/a11).(a2/a22)

۲ . که 0 = a22 او 0 =| a2 وي نو ځواب موجود نه دی یا نه شته

۳ . که 0= a22 او 0 = a2 وي، نو ۲- م برابرون بی هوده دی (د ضرورت وړ نه دی)، او سړی بیا ا. برابرون د ۱۱ . ۱ . ۱ برخی متود په مرسته ځوابولی شي.

د (11 . 8) سیستم د ځواب پرابلم په دې ډول کمیږي، چی دا سیستم په دریګوډی بڼه یا – ځیره واړوي . هغه الګوریتم چی دا په هر حالت کی ځواب کولی شي، د ګاوس الګوریتم دی. یا (11 . 8) سیستم دریګوډی ځیره لري او یا ټول aik د صفر سره برابر نه دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې کی (11 . 8) سیستم په روځنی - یا مروج ډول او هم شیماتیکي ډول لیکل کیږي.

x1	x2	RS		
I	a11x1+a12x2= a1	a11	a12	a1
II	a21x1+a22x2= a2	a21	a22	a2

(دلته RS د مساواتو د ښي خوا (ښ خ) یا ښی لور یا ښی اړخ مانا ورکوي)، که I په ځای پریښودل شي اود II برابرون a11 / a21 - ځله له I برابرون ځخه کم شي ، نولرو

		x_1	x_2	Rs
I	$a_{11}x_1+a_{12}x_2 = a_1$	a_{11}	a_{12}	a_1
II'	$0.x_1+(a_{12}-a_{11}.a_{22}/a_{21})x_2=a_1-a_{11}.a_2/a_{21}$	0	$a_1- a_{11}.a_{22}/a_{21}$	$a_1-a_{11}.a_2/ a_{21}$

که II' لنډ په دی فورم ولیکل شي

نو ټول سیستم لاندې شکل غوره کوي :

		x1	x2	RS
I	a11x1+a12x2= a1	a11	a12	a1
II'	b22x2 = b2		b22	b2

اوس بیرته باید زیات حالتونه یو له بل توپیر شي:

-که b22 |= 0 وي ، نو x2 له II' اوx1 لهI لاس ته راځي.
-که b22 = 0 , b2 |=0 وي، نو ځواب وجود نه لري.
-که b22 = b2 = 0 وي، نو ناپای زیات ځوابونه موجود دي، چی لهI او ۱۱ . ۱ . ۱ برخی ته ورته را ځرګندیدی شي (معلومیدلی شي.)

سیستمونه ۱ ، ۲ ، ۳ د ګاوس په الګوریتم ښوول کیږي

بیلګه ۱۱ . ۱۰ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا سیستم داسی لیکل او شیماتیك کیږی:

		x_1	x_2	RS
I	$2x_1 + 3x_2 = 4$	2	3	4
II	$x_1 - 2x_2 = -5$	1	-2	-5

که غوښتونکی دریګوډیځیره غواړو لاس ته راولو نو Iهمداسی پریږدو او له II څخه دI یو یو په دوه ځله کموو :

		x_1	x_2	RS
I	$2x_1 + 3x_2 = 4$	2	3	4
II'	$0.x_1 - (7/2)x_2 = -5$	0	-7/2	-5

له II' لاس ته راځي x2 = 2
او له I څخه لاس ته راځي. x1 = 2 -(3/2) x2 = -1

بیلګه ۱۱ . ۱۱:

دلته سیستمونه ۲ او ۳ یوائي په شیماتیکي ډول (جدول په شکل (ځیږو. دلته د لمړی لیکی دوه ځله د دوهمی لیکی کمیږي

سیستم ۳

	x1	x2	RS
I	2	3	4
II	4	6	10
II'=II-2.I	0	0	2

سیستم۲

	x1	x2	RS
I	2	3	4
II	4	6	8
II'=II-2.I	0	0	0

په سیستم ۲ کی ګورو چی لمړی برابرون د دوم برابرون په مخامخ څه نوی نه لري (0 = 0 تضاد یا مخامخوالی نه شته). له دې امله یو برابرون (د بیلګي په توګه I) موجود دی چی د ۱۱ . ۱ . ۱ برخي او یا ۱۱ . ۲ په څیر ځواب کیږي. په سیستم ۳ کی تضاد همدا اوس لیدل کیږي" 0 = 2 " ، نو له دې امله ځواب نه شته.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۱ . ۱۲ :

سیستم I دې په څلور ډوله یا واریانتو د ګاوس الګوریتم په مرسته وڅیړل شي

دوم واریانت   اول واریانت

	x1	x2	RS
I	2	3	4
II	1	-2	-5
II'=II+(2/3).I	7/3	0	-7/3
1.	2	1	-1

	x1	x2	RS
I	2	3	4
II	1	-2	-5
II'=II-(1/2).I	0	-7/2	-7
2.	-1	2.	2

څلورم وایانت   دریم واریانت

	x1	x2	Rs
I	2	3	4
II	1	-2	-5
I=I-2.II	0	7	114
2	1.	-1	1.

	x1	x2	RS
I	2	3	4
II	1	-2	-5
I'= I+(3/2).II	7/2	0	-7/2
2.	2	2.	-1

دا دلته د یو ګڼ په چوکات یا څلورګوډیز کی نیول دا مانا لري چی د هغی د پاسه ناپیژندونکي د مساوات څخه شمیرل کیږي، کومه چی په هغه لیکه کی پرته ده چی چوکاټ شوې، دا په یواځني ډول دا مانا لري :

واریانت ۱:

ا) له I څخه دې x1 و شمیرل شي

ب) له II' څخه دې x2 وشمیرل شي

پ) په 1 کی x2 له II' شمیرل کیږي:

$$x2= -7 / (-7/ 2) =2$$

ت) په 2 کی x1 له I شمیرل کیږي:

$$x = (1/ 2)(4 - 3.2) = -1$$

واریانت ۲ :

ا) له I څخه دې x2 وشمیرل شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) له II' څخه دې x1 وشمیرل شي
پ (له II' لرو: 1- = x1
ت) له I څخه لرو: x2 = 2
واریانت (امکان) ۳
ا) له II څخه دې x2 وشمیرل شي
ب) له I' څخه دې x1 وشمیرل شي
پ) له I' لرو 1- = x1
ت (له II لرو 2 = x2
واریانت (امکان) ۴
ا) له II دې x1 و شمیرل شي
ب) له I' څخه دې x2 وشمیرل شي
پ (له I' لر x2 = 14 / 7 = 2
ت) له II لرو:
x1 = -5+2.2 = -1

ټولی څلور واریانتی یا امکانت برابر ارزښتونه لری، خو دا چی په څلورمه واریانت کی په ټولګټونو شمیرنه کیږي، »مخته وونه« یا مخوونه(برتري) یا نوره هم ښه وړاندې توب ورکول کیږي.

۱۱ . ۱ . ۵ له دوه وو زیات برابرونونه د دوه ناپیژندونکو سرهره

که څوك له دوه زیات برابرونونه د دوه اوښتونو یا ناپیژندونکو سره ځواب کوي، په ټولیزه (عمومي) توګه باید په نخښه شي چی لومړي دوه برابرونونه x1, x2 ځوابونه لري. که دا ځوابونه په نورو برابرونونو کی ځای په ځای شي تضاد ته رسیږو. د دوه ناپیژندونکو سره له دوه زیات مساوات په ټولیزه توګه حل نه لري. یواځي په ځانګړی حالت کی دا سیستم ځواب لرودی شي. موږ دا پروسه اول په عمومي ښوونلارې څیړو او بیا د ګاوس الګوریتم له لارې.

بیلګه ۱۱ . ۱۳: لاندني دوه سیستمونه ورکړ شوي دي

a) I $x1 + 2x2 = 3$ b) I $x1 + 2x2 = 3$
II $2x1 - x2 = 1$ II $2x1 - x2 = 1$
III $3x1 + x2 = 2$ III $3x1 + x2 = 4$

له I او II څخه د څرګندو یا معلومومتودونو له لارې په دواړو سیستمونو کی لاندې، په لومړی ځل یواځنی پیژندل شوی، ځواب لاس ته راځي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

له (a او)b څخه لرو $x_1 + 2x_2 = 1$ که دا ارزښتونه په IIIکی ځاي په ځاي شي نو لرو:

په (a) کې : $1.1+3.1 = 4 \neq 2$, په (b) کی : $4 = 1.1 + 3.1$

نو سیستم (a) ځواب نه لري او سیستم ($\hat{b}$) یواځني ټاکلی ځواب لري

یعني $x_1=x_2=1$

بیلګه ۱۱ . ۱۴ :

په بیلګه ۱۱ . ۱۳ کي ورکړ شوي مساوات اوس د ګاوس د الګوریتم له لارې ځواب کوو.

a)

	x1	x2	RS
I	1	2	3
II	2	-1	1
III	3	1	3
II'=II-2.I	0	-5	-5
III'=II-3.I	0	-5	-7
III''=III'-II'	0	0	-2

b)

	x1	x2	RS
I	1	2	3
II	2	-1	1
III	3	1	4
II'=II-2.I	0	-5	-5
III=III-3.I	0	-5	-5
III=III'-II'	0	0	0

په (a) کی تضاد پیژندلکیږي ($III':0.x_1+0.x_2=-2$) ځواب نه شته یا وجود نه لري .

په (b) کی تضاد مخ ته نه دئ پروت .($III':0.x_1+0.x_2=0$) له II' څخه لرو:

$x_2 = 1$ او له I څخه لاس ته راځی : $x_1=3-2.1=1$

۱۱ . ۲ لاینیزبرابرونتسیستم د درې ناپیژندونکو سره

۱۱. ۱ ۰ ۲ ۰ یو برابرون د دري ناپیژندونکو سره

مو ږ یو مساوات د دري ناپیژندونکو سره تر څیړني لاندې نیسو:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2+ a_{13}x_3 = a_1 \quad (11 . 21)$$

دوه مختلف حالتونه ۱ او ۲ او نورمال فورم ۳ ممکن دي

$$I .\quad a_{11}=a_{12}=a_{13}=0 \quad (11 . 22)$$

دلته x_1 , x_2 او x_3 یو له بل پوره خپلواك ټاکل کیدی شي. ویل کیږي چی ناپاي ډیر ځوابونه مخ ته پراته دي (x_1 په خوښه، x_2په خوښه او x_3په خوښه)

$$2.\quad a_{11}=a_{12}= a_{13}= 0 ,a_1 \neq 0 \quad (11 . 23)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته تضاد مخ ته پروت دی

$0x1+0.x2+0.x3 = a1 \neq 0$

اوبيونه نه شته.

۳- د کم له کمه يوه ځلجوړې i , k لپار دې aik |= 0 وي. (بي د ټوليز وبنديزونو يا عموميت د محدود والی دې a11|= 0 وي (. کيدی شي چی x2 او x3 په خوښه وټاکل شي (ناپاي ډير ځوابونه)، او لاس ته راځي

$x1=(1/a11)(a1-a12x2-a13x3)$ په خوښه x1 او x3 (11,24)

۱۱ . ۲ . ۲ دوه برابرونونه د درې ناپيژندونکو سره

لاندې د دوه برابرونسيستمونه د درې اوښتونو يا ناپيژندونکو سره

$a11x1+a12x2+a13x3=a1$ (11,25)

$a21x1+a22x2+a23x3= a2$ (11,25)

موږ دا را ويستلي حالتونه ، چيرته چی د ټولو i, k لپاره aik= 0 ، په پام کی نه نيسو. دا حالت هم په پام کي نه نيسو چی دوم برابرون د لومړي په څير وي (ناپاي ډير ځوابونه. او يا دوهم برابرون د لمړي سره په مخامخوالي يا ښتوالي يا تضاد کی وي (ځواب نه وي) . دا ټول حالتونه اسان پيژندونکي دي. موږ په يوه بيلګه کی دا اصلي حالت څيړو چی يو ناپيژندونکي يا نامعلوم (د بيلګي په توګه x3) په خوښه ټاکل کيږي او دا نورې دوه ناپيژندونکی يا اووښتونې (x1 او x2) يواځنی لاس ته راځي، او يا يواځنی ورکول کيدی شي (ناپاي ډير ځوابونه).

بيلګه ۱۱ . ۱۵:

x1	x2	x3	RS		
1	1	1	3	I	x1+x2+x3=3
1	2	3	6	II	x1+2x2+3x3=6
0	1	2	3	II'=II-I	0.x1+x2+2x3=3

له 'II لاس ته راځي

$x2 = 3 -2x3$

له I څخه لاس ته راځي

$x1=3-x2-x3=3-(3-2x3)-x3, x1= x3$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او له دې لاس ته راځي
$,x1=x3,x2 = 3 -2x3$ $x3$ په خوښه.

۱۱ . ۲ . ۳ دریمه درجه دیترمینانت او د کرامر قاعده

اوس درې برابرونونه یا معادلې یا مساوات د درې ناپېژندونکو سره څېړو

I a11x1+a12x2+a13x3= a1 (11 . 26)

II a21x1+a22x2+a23x3= a2 (11,26)

III a31x1+a32x2+a33x3= a3 (11,26)

له دې سیستم څخه کیدی شي چې د ۱۱ . ۱ . ۲ برخی د برابر لیکلو او یو د بل په ځای لیکلو متودونه په ساده ډول استعمال شي. د زیاتونتیورم (-قضیه) فکر غواړي او د دریمي درجي دیترمینانت او د کرامر قاعدې په لور مو د (۱۱ . ۲۶) سیستم ځواب پیدا کولو لپاره هڅوي

پېژند ۱۱ . ۲:
رییل ګڼونو aik (i,k = 1,2,3 (یو درې درجه منظم د دیتمرمینانت سیستم

$$D=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix};.................................(11,27)$$

لاندې سرې لاندنی رییلګڼ پوهیدلی شي):

$$D=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}=a_{11}\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}-a_{12}\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}+a_{13}\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}=$$

$$a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32)})-a_{12}(a_{1}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{33});............(11,28)$$

له دې سره د دریمی درجي دیترمینانت شمیرنه د دوهمی درجی دیترمینانت په شمیرنه بدله شوه. . ۱۱ . ۲ تعریف او په ځانګړې توګه) 11 .28 (فرمول په لاندې ډول توضیح کیدی شي:
پېژند ۱۱ . ۳ : په (11 . 27) کی د دیترمینانت D لاندېدیترمینانت Aik لاندې هغه دومه درجه دیترمینانت پوهیدلی شو، چی د D دیترمینانت i- می لیکی او k - م درځ یا متې د لرې کولو یا د منځه وړلو له لارې منځ ته راځي(زه د ماتریکس په دننه

(c) ketabton.com: The Digital Library

کې دا لیکې او مټې یا ستې له منځه نه شم وړلی، خو دا کومې ستونځې نه پیښوی ، ځکه، چې لاس ته راوړنه یې پسې لیکل شوې)

$$A_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$A_{12} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$A_{13} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

په دې ډول کیدی شي چې د ۱۱ . ۲ دیترمینانت په دې فورم ولیکل شي

پیژند ۱۱ . ۴ :

د دریمی درجي دیترمینانت D لاندې، چې په (11 . 27) کی ورکړ شوی دی، دا لاندې ګڼ پوهیدل کیږي:

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

د زیاتون عملیي ځخه، چې دلته نسبت د دوه ناپیژندونکو مساواتو ته چې دوه ناپیوندونکی لري، روښانه ده، د (11 . 26) ځخه لاس ته راوړل کیږي:

$$Dx1 = D1\ ,\ Dx2 = D2\ ,\ \ Dx3 = D3 \qquad (11\ .\ 29\ )$$

په داسی حالت کی چی Di داسي لاس ته راځي چی د ځله وونودیترمینانت (11 . 28) کی سړی i - م درځ یا ستن یا مټه د (11. 26) برابرون ښي لور ته ځای په ځای کړي.

$$D_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_{12} & a_{13} \\ a_2 & a_{22} & a_{23} \\ a_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; D_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_1 & a_{13} \\ a_{21} & a_2 & a_{23} \\ a_{31} & a_3 & a_{33} \end{pmatrix}; D_{13} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_3 \end{pmatrix}; \ldots\ldots(11,30)$$

موږ دا نتیجه بي له ښووني ورکوو.

له (۱۱ . ۲۹) ځخه لاندې جملی لاس ته راځي:

جمله ۱۱ . ۴ (د کرامر قاعده) :

که د (۱۱ . ۲۶) د ځله وونودیترمینانتو(۱۱). ۲۷ ،په همدې ډول (۱۱ . ۲۸) لپاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$D \neq 0$ (11 . 31)

با وري وي ، نو (۱۱ . ۲۶) برابرونسيستم يواځنی ځواب لري

$x1=D1/D$; $x2=D2/D$; $x3=D3/D$ (11,32)

جمله ۱۱ . ۵ :

که $D = 0$ مګر $|Di| = 0$ کم له کمه د يوه i ($i = 1,2,3$) لپاره وي، نو د (۱۱ . ۲۶)
برابرونسيستم ځواب نه لري (په (۱۱ . ۲۹ کی تضاد دی)

جمله ۱۱ . ۶ :

که $D = D1 = D2 = D3 = 0$ وي، نو په (۱۱ . ۲۶) کی کم له کمه يو برابرون
له ضرورته زيات دی او دا (۱۱ . ۲۶) برابرونسيستم کيدي شي چي د ۱۱ . ۲ . ۲
متودونو باندې ځواب شي (وړانديز دئ چی د ګاوس الګوريتم له متود ; چی په ۱ . ۲ .
۴ برخه کی ورکړ شوي ځواب شي.)

بيلګه ۱۱ . ۱۶ :

په لاندې سيستم

I x1 -x3 = -2

II x1 +x2 -x3 = 0

III 2x1 - x2 = 0

کی دی

$$D = \begin{pmatrix} 10-1 \\ 11-1 \\ 2-10 \end{pmatrix} = 1.\begin{pmatrix} 1-1 \\ -10 \end{pmatrix} - 0.\begin{pmatrix} 1-1 \\ 20 \end{pmatrix} + (-1).\begin{pmatrix} 11 \\ 2-1 \end{pmatrix} = -1-0-1.(-1-2) = 2$$

$$D_1 = \begin{pmatrix} -20-1 \\ 01-1 \\ 0-10 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 1-1 \\ -10 \end{pmatrix} - 0\begin{pmatrix} 0-1 \\ 00 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 01 \\ 0-1 \end{pmatrix} = 2;$$

$$D_2 = \begin{pmatrix} 1-2-1 \\ 10-1 \\ 200 \end{pmatrix} = 1.\begin{pmatrix} 0-1 \\ 00 \end{pmatrix} - (-2)\begin{pmatrix} 1-1 \\ 20 \end{pmatrix} - 1.\begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix} = 4:$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 10-2 \\ 110 \\ 2-10 \end{vmatrix} = 1.\begin{vmatrix} 10 \\ -19 \end{vmatrix} - 0.\begin{vmatrix} 10 \\ -10 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 11 \\ 2-1 \end{vmatrix} = 6$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو يواځنى ټاکلى ځواب موجود دى.

$x1=D1/D=2/2=1,\ x2=D2/D=4/2=2\ ,x3=D3/D=6/2=3$

بيلګه ۱۱ . ۱۷ :

په لاندې سيستم

$$\begin{array}{ll} I & x1 + x2 + x3 = 0 \\ II & x1 \quad -x3 = 0 \\ III & 2x1 + x2 \quad =1 \end{array}$$

کي دى.

دا بيلګه دې ګران لوستونکى پخپله وښايي ، چې اوبيونه نه شته ۰ دې ته بايد ګوته ونيسم، $D = 0$ او $D1= -1 |=0$ ، چې ځواب نه لري۰

۱۱ . ۲ . ۴ د ګاوس الګوريتم

د ګاوس الګورتيم لومړى د (۱۱ . ۲۶) برابرونسيستم لپاره استعماليږي. دا د دوه مساواتو لپاره چې درې ناپيژندونکي لري او همدارنګه د زياتو مساواتو سيستم لپاره چې درې ناپيژندونکي لري د استعمال وړ دى.

د ګاوس د الګوريتم موخه په دې کى پرته ده چى (11 . 16) سيستم د ورته بدلونفورم له لارې په دريګوډيفورم را اوړي.

$$\begin{array}{lll} I & a11x1+a12x2+a13x3=a1 & (11\ .\ 34) \\ II & \quad b22x2+b23x3=b2 & \\ III & \quad\quad c33x3=c3 & \end{array}$$

بنسټيز حالت : که $a11|=0,b11|=0 ,c11|=0$ وي نو يو په بل پسې سړى کړى شي چې له III $x3$, او له II $x2$, وشميري. مګر په (11 . 34) کى ځانګړي حالتونه هم پيژندل کيږي:

-که $c3|=0,c33=0$ وې، نو يو په ښتوالى يا تضاد مخ ته پروت دى، ځواب وجود نه لري

- که$c3=c33=0$ وى، نو III له ضرورتزيات دى سړى يواځى I او II څيړي.

- که$c33=c3=0$او برسيره پر دې $a11|=0, b11|=0$ وي، نو $x3$ په خوښه ټاکل کيدى شي او $x2$له II او $x1$ له I چى $x3$ ته اړ وي، شميرلکيدى شي (ناپاى ډير ځوابونه)

-برسيره پر دې که $b22=b23=0 , b2|=0$ وي، نو ځواب وجود نه لري

-که نور هم ولرو چى $c33=c3=0$ او $b22=b23=b3=0$وي ، نو II له ضرورت زيات دى او له $a11|= 0$ کيدى شي چى $x2$ او $x3$ په خوښه وټاکل شي، او $x1$له I لاس

(c) ketabton.com: The Digital Library

ته راځي چی x2 او x3 ته اړ (په واك کی يا تابع) وي (ناپاي ډير ځوابونه ځوابونه) .
که ټول ځلونه او د مساواتو ښی خوا صفر وي ، نو ناپاي ځوابونه موجود دی.

د ګاوس الګوريتموس د درې ناپيژندونکو(11 . 26) سره له دوه پلونو(قدم) جوړ دئ
لومړی پل (قدم) : نيسو چی په (11 . 2 6)کی a11 |= 0 دی. دا د نمرې بدلولو په بنسټ هميشه لاس ته راوړی شو) بي له ورکړ شووحالتونو) چی ټول aik = 0 وي) .
دلته I ورکول کيږي، او له II د I دا a21/a11 - ځله او له III دا a31 / a11 - ځله د I کموي. ددې ډخه لاندې سيستم لاس ته راځي:

I a11x1+a12x2+a13x3=a1 (11 . 35)
II b22x2+b23x3=b2
III c33x3=c3

دويم پل (قدم) : د b22 |=0 نيوني سره په 'II او 'III باندې د ۱۱ . ۱ . ۴ برخي سره سم د ګاوس الګوريتم استعماليږي : سړی 'II بي تغيره پريږدي اوله'III دا b32/b22-ځله د 'II کموي، له دې راپيداکيږي

I a11x1+a12x2+a13x3=a1 (11 . 37)
II b22x2+b23x3=b2
III c33x3=c3

د ګاوس د شيما فورماليتي سره سم بيا دا شکل غوره کي

	x1	x2	x3	RS
I	a11	a12	a13	a1
II	a21	a22	a23	a2
III	a31	a32	a33	a3
II' = II-(a21/a11)I		b22	b23	b2
III' = III-(a31/a11)I		b32	b33	b3
III'' = III' - (b32/b22)II'			c33	c3

x3 = c3 / c33
x2=(1/b22)(b2-b23x3)
x1=(1/a1)(a1-a12x2-a13x3)

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۱ . ۱۸ : دا سیستم ۰(مقایسه بیلګه ۱۱ . ۱۶)

I x1 -x3= -2
II x1 + x2-x3 = 0
III 2x1 -x2 = 0

د ګاوس الګوریتم سره په لاندې ډول حل کیږي

	x1	x2	x3	RS
I	1	0	-1	-2
II	1	1	-1	0
III	2	-1	0	0
II'= II - I	0	1	0	2
III'= III - 2.I	0	-1	2	4
III'' = III' + II'	0		2	6

x3=6/2=3
x2=2......................
x1=-2+x3=-2+3=1

بیلګه۱۱ . ۱۹: (پرتله بیلګه ۱۱ . ۱۷ (دا سیستم

I x1 + x2- x3 = 0
II x1 -x3 = 0
III 2x1+ x2 = 1

د ګاوس د الګوریتم په مرسته په لاندې ډول حل کیږي

	x1	x2	x3	RS
I	1	1	1	0
II	1	0	-1	0
III	2	1	0	1

(c) ketabton.com: The Digital Library

II'=II-I	0	-1	-2	0
III'=III-2.I	0	-1	-2	1
III''=III'-II'	0	0	0	1

دلته دی "0 = 1 " تضاد. سیستم نه اوبی کیږي یا حل نه لري.

بیلګه ۱۱ . ۲۰: (مقایسه یا پرتله بیلګه ۱۱ . ۱۷) دا سیستم

I x1 +x2+x3 =3

II x1+2x2+3x3=6

III 2x1+3x2+4x3=9

په لاندې ډول د ګاوس په الګوریتم اوبیونه ده

	x1	x2	x3	RS
I	1	1	1	3
II	1	2	3	6
III	2	3	4	9
II'=II-I	0	1	2	3
III'=III-2I	0	1	2	3
III'' = III'-II'	0	0	0	0

=x3 په خوښه

x2 = 3 -2x3

x1=3-x2-x3=3-(3-2x3)-x3=x3

۱۱ ۰ ۳ په خوښه ډیر مساوات ، په خوښه ډیر ناپیژندونکو سره

موږ په عمومي ډول د لاینیز سیستم برابرونونو په لار ښونی پیل کوو m (برابرون د nناپیژندونکو سره)

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+....+a_{1n}x_n=a1..................(11,37)$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}+....+a_{2n}x_n=a_2$$
$$...$$
$$..$$
$$a_{nm}x_1+a_{m2}x_2+a_{m3}x_3+.....+a_{mn}x_n=a_m$$

دا په خوښه یا ازاد پریږدو چی د برابرونونو ګڼون (تعداد) m د ناپیژندونکوn د ګڼون (تعداد) څخه لوي، کوچنی او که برابر دئ. په څرګندو دندو یا وظایف موږ دلته له څلور ناپیژندونکو څخه نه پورته کیږو او یواځی لاندې دوه متودونه څیړو

۱۱ ۰ ۳ . ۱ دn - م درجی دیترمینانت او د کرامر قاعده

پیژند ۱۱ . ۵ :
د n رییل ګڼونو aik یوه منظم سیستم n- م درجي دیترمینانت

$$D=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix};..........................(11,38)$$

لاندې سرِی لاندنې رییل ګڼ پوهیږي:

$$D=a_{11}A_{11}-a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}-a_{14}A_{14}+...\pm a_{1n}A_{1n}.....(11,39)$$

دلته aik غړي پورې مربوطه لاندې دیترمینانت Aik د (n-1) - م درجی دیترمینانت ده، چی پاتیږي، که په Dکیi - مه لیکه اوk - م درځ ، مته یا ستن (لیکه او درځ چی aikپه کی ولاړ وی) په کرښه لرې کړي یا کرښه پرې تیره کړي، یعنی ووهي.

په دې ډول د-n ام درجی دیترمینانت شمیرل و- (n-1)-ام درجی دیترمینانت شمیرلو ته راتیتیږي .
په ځانګړي توره د څلورمی درجی دیترمینانت لپاره دا لرو

$$A_{11}=\begin{vmatrix} a_{22}a_{23}a_{24} \\ a_{32}a_{33}a_{34} \\ a_{42}a_{43}a_{44} \end{vmatrix};A_{12}=\begin{vmatrix} a_{21}a_{23}a_{24} \\ a_{31}a_{33}a_{34} \\ a_{41}a_{43}a_{44} \end{vmatrix};....A_{1n}\,etc$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که n برابرونونه د n ناپیژندونکو سره مخ ته ولرو) په) 11 . 37 (کی لرو) n=m د جمع تیورم په مرسته داسی سیستمونو لپاره لاندې نتیجه لاس ته راوړو

$$Dx_1=D_1, Dx_2=D_2, \ldots Dx_n= D_n \qquad (11 . 42)$$

د Di دیترمینانت داسی لاس ته راځي چی د ځله وونویا ضریبونو په دیترمینانت) ۱۱ . ۳۸ (کی د-i ام درځ متې یا ستن د برابرونسیستم د ښي لاس سره بدل کړي .

د بیلګی په توګه یوسیستم د ۴ مساواتو او۴ ناپیژندونکو سره (پرتله مقایسه ۱۱ . ۴۰)

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_1 a_{12} a_{13} a_{14} \\ a_2 a_{22} a_{23} a_{24} \\ a_3 a_{32} a_{33} a_{34} \\ a_4 a_{42} a_{43} a_{44} \end{vmatrix}; D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} a_1 a_{13} a_{14} \\ a_{21} a_2 a_{23} a_{24} \\ a_{31} a_3 a_{33} a_{34} \\ a_{41} a_4 a_{43} a_{44} \end{vmatrix}; \ldots\ldots\ldots\ldots (11,43)$$

له(11 . 42) څخه لاس ته راځي

جمله ۱۱ . ۷ (د کرامر Cramer قاعده):

د ځله وونې یا ضریب دیترمینانت (۳۸.۱۱) لپاره د یوه مساوات سیستم د n مساواتو د nناپیژندوکو سره په (۱۱ . ۳۷) د m = n سره) باوري دی

$|D| = 0$ (اصلي حالت) (11 . 44)

نو دا برابرونسیستم یواځنی ټاکلی ځواب لري(حل لري

$$x_1=D_1/D, x_2=D_2/D, \ldots, x_n=D_n/D. \quad (11 . 45)$$

برعکس که , D = 0 مګر D1 |= 0 کم له کمه د یوه i لپاره نو دا سیستم حل نه لري . که D=D1=D2=...=Dn=0 وي، نو کم له کمه یو مساوات غیر ضروري دی (دلته د اوبیونې لپاره د ګاوس الګوریتم وړاندیز کوو)

بیلګه ۱۱ . ۲۱:

لا ندې سیستم دې حل شي

$$\begin{array}{llllll} \text{I} & x_1 & & +x_3 & & = 0 \\ \text{II} & 2x_1 & +x_2 & & +x_4 & = 0 \\ \text{III} & & x_2 & & -x_4 & = 4 \\ \text{IV} & x_1 & -x_2 & -x_3 & +x_4 & = -2 \end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$D=\begin{vmatrix}1010\\2102\\010-1\\1-1-11\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}102\\10-1\\-1-11\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}212\\01-1\\1-11\end{vmatrix}=-3-3=-6$$

$$D_1=\begin{vmatrix}0010\\0102\\410-1\\-2-1-11\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}012\\41-1\\-2-11\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}2-1\\-21\end{vmatrix}+2.\begin{vmatrix}41\\-2-1\end{vmatrix}=-2-4=-6$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1010\\2002\\040-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}002\\40-1\\-2-11\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}202\\04-1\\1-21\end{vmatrix}=2.\begin{vmatrix}40\\-2-1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2\begin{vmatrix}4-1\\-21\end{vmatrix}\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}04\\1-2\end{vmatrix}=$$

$$=2.(4)+.2+2.(-4)=-12$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1000\\2102\\014-1\\1-1-21\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}102\\14-1\\-1-21\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4-1\\-21\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2.\begin{vmatrix}14\\-1-2\end{vmatrix}=4-2+2(-2+4)=6\end{vmatrix}$$

$$D_4=\begin{vmatrix}1010\\2100\\0104\\1-1-1-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}100\\104\\-1-1-2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}210\\014\\1-1-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}04\\-1-2\end{vmatrix}+2.\begin{vmatrix}14\\-1-2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}01\\1-2\end{vmatrix}=$$

$$=4+2.2-(-4)=12;$$

$$x_1=\frac{-6}{-6}=1;x_2=\frac{-12}{-6}=2;x_3=\frac{6}{-6}=-1;x_4=\frac{12}{-6}=-2$$

۱۱ .۳ . ۲ د ګاوس الګوریتم:

موږ ولیدل چی د ګاوس الګوریتم له لارې د مساوتو یو دریکوجشکل سیستم لاس ته راوستی شو، چی د هغي له مخی څرګندولی شو چی کوم حل)ځواب(مخ ته پروت دی .

دا په لاندې بیلګه څرګندوو

بیلګه ۱۱ . ۲ ۲ :

که په بیلګه ۱۱ . ۲۱ کی ورکړ شوی سیستم د ګاوس الګوریتم له لارې حل کړو، نو لاندني شیما لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

	x1	x2	x3	x4	Rs
I	1	0	1	0	0
II	2	1	0	2	0
III	0	1	0	-1	4
IV	1	-1	-1	1	-2
II'=II -2.I	0	1	-2	2	0
4III' = III	0	1	0	-1	4
IV' = IV-I	0	1	-2	1	-2
III" = III' - II'	0	0	2	-3	4
IV" = IV' +II'	0	0	-4	3	-2
IV'" = IV" + 2.II"	0	0	0	-3	6

x4 = -2

x3=1/2(4+3.(-2))= -1

x2=0+(-1)(-2)= 2......

x1 = -(-1) = 1 ....

بيلگه ۱۱ . ۲۳:

دا برابرونسيستم

I x1 +x2 +x3 +x4=4

II x1 -x2 -x3 +x4=0

III 3x1 -x2 -x3 +x4=2

حل يا اوبيونه ی نه لرې، لکه د گاوس له شيما څخه چی ليدل کيږي:

	x1	x2	x3	x4	RS
I	1	1	1	1	4

(c) ketabton.com: The Digital Library

II	1	-1	-1	1	0
III	3	-1	-1	3	2
II' = II-I	0	-2	-2	0	-4
III' = III-3.I	0	-4	-4	0	-10
III'' = III' - 2.II'	0	0	0	0	-2

دلته III" په ښتوالی یا تضاد خوندي لري " 0 = -2 "

بیلګه ۱۱ . ۲۴:

لاندې سیستم د ۵ برابرونونو او ۴ ناپیژندونکو سره

I x1 +x2 +x3 +x4= 4

II x1 -x2 -x3 +x4= 0

III 3x1 -x2 -x3 +3x4= 4

IV x1 +2x2 +3x3 +4x4=10

V 3x1 +x2 + x3 +3x4= 8

ګورو چی oe1 (ناپای ډیر) اوبیونې لري

	x1	x2	x3	x4	RS
I	1	1	1	1	4
II	1	-1	-1	1	0
III	3	-1	-1	3	4
IV	1	2	3	4	10
V	3	1	1	3	8
II' = II-I	0	2	- 2	0	-4
III'= III-3.I	0	-4	-4	0	-8
IV' = IV -I	0	1	2	3	6
V' = V-3.I	0	-2	-2	0	-4

(c) ketabton.com: The Digital Library

II"= II'+2.IV'	0	0	2	6	8
III'=III'+4.IV'	0	0	4	12	16
V" = V' +2.IV'	0	0	2	6	8
III''' = III"-2.II'	0	0	0	0	0
V'''=V"-II	0	0	0	0	0

ګورو چی III''' او V''' تضاد نه لري. سرې کړي شي چی x4 په خوښه وټاکي او لاس ته راوړي

له , x3=4-x4 "II له x2=6-2(4-3x4)-3x4=-2+3x4 'IV او لهI

x=4-x2-x3-x4=4-(-2+3x4)-(4-3x4)-x4=2-x4

نو x1=2-x4 په خوښه x4 ټاکو

او x2=-2+3x4 ، په خوښه x4 ټاکو

او x3=4-3x4 په خوښه x4 ټاکو

یادونه : هغه ګڼ یا نوره هم ښه هغه ځله ووني، چې غواړو صفر شي یا له منځه وړو هغه مو شنه کړي۰

سرې د ګاوس شیما په دوم بلاك کی پیژندلی شي، مساوات، کوم چی په 'III او 'V پورې اړه لري، بل څه نه افاده کوي په غیر له هغی چی په 'II اړه لرونکي دي. کیدی شو چی په 'III او 'V لیکو مو کرښه تیره کړې وی) له منځه وړې وی (. دریم بلا ك به یواځي له کرښی 'II جوړ وی، او د ګاوس الګوریتم به له دې سره پاي میندلی وی.

۱۱ . ۴ هوموژین مساواتسیستم:

د n مساواتو یو سیستم د n نامعلومو سره چی د ټولو مطلقه غړي ورك شي، هموګین مساواتسیسمتم بلل کیږي .

د n = 3 لپاره دا د مثال په توګه هوموګېن سیستم بلل کیږي

$$
\begin{aligned}
&\text{I} \quad a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3= 0 \\
&\text{II} \quad a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3= 0 \qquad (11.46) \\
&\text{III} \quad a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3= 0
\end{aligned}
$$

یو داسی هموژینسیستم تل یوه اسانه اوبیونه یا اسان حل لري

$$x_1=x_2=x_3=...=x_n=0 \qquad (11.47)$$

که د ځلوونو د یترمینانت (۱۱ . ۳۸) لپاره 0 =| D باور ولري، نو د جملی ۱۱ . ۷ شیما څخه یواځي اسان trivial اوبیونه یاحل موجود دی او باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۱ . ۸ : يو هوموګين مساواتسيستم يواځ هلته سخت حل لري، که D = 0 باوري وي
بيلګه ۱۱ . ۲۵ :
دا هوموژين برابرونسيستم

$$\begin{aligned} &I && x1 && +x3=0 \\ &II && x1 -x2 && =0 \\ &III && x1 +x2 && +x3=0 \end{aligned}$$

د

$$D=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&-1&0\\1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&0\\1&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&-1\\1&1\end{vmatrix}=-1+(1+1)\neq 0$$

له امله يواځنی ساده اوبيونه x1=x2 =x3= 0 لري.
بيلګه ۱۱ . ۲۶:
دا هموګين مساواتسيستم

$$\begin{aligned} &I && x1 && +x3 = 0 \\ &II && x1 +x2 && = 0 \\ &III && x1 +x2 && +x3 = 0 \end{aligned}$$

$$D=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&-1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&0\\1&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&-1\\0&1\end{vmatrix}=-1+1=0$$

د

له امله ناساده اوبنونه هم لري دا په لاندې ډول د ګاوس د الګوريتموس څخه لاس ته راځي: په لاندې کې RS د پاتې- يا باقي سيستم په معنا دی.

x1 x2 x3 RS

---

0 0 1 I 1
0 II 1 -1 0
0 III 0 1 1

II'=II-I 0 -1 -1 0
III' = III 0 1 1 0

II'' = II + III' 0 0 0 0

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګورو چی II"تضاد نه لري x3په خوښه ټاکو، او له III' لاس ته راځيx3-=x2 او له I
څخه لاس ته راځي x1=-x3نوx1= -x3نو X3 په خوښه او x2 = -x3 نوx3 په خوښه

. تمرينونه

د نامعلومو لپاره -لکه له ښوونځي چې ورسره بلد يو-پوهيږو او يا هم

۱ – کربنيز مساواتسيستم له دوه مجهولو سره.

مشوره مو داده، چې د دې تمرينونو د حل لپاره د مختلفو تګلارو څخه کار اخستلس شي، چې بيايې و ازمايو. د لته دې د زياتون يا جمعې قانون او همداسې د ګاوس الګوريتم ته لومړيتوب ورکړ شي ا و د ديترمينانت سره شميرنه دې يوه بله د استعمال لار وي.

۱ . ۱ – مساوتسيستم د ټاکلو ضريبونو سره

1.1.1. a) $2x_1 + 3x_2 = 8$, $3x_1 - 6x_2 = -30$ b) $x_1 = 3x_2 - 14$, $x_2 = 3x_1 - 22$

c) $51x - \frac{3}{20y} = 3$, $48x - \frac{1}{10y} = 2$ d) $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 3$, $\frac{5}{x} - \frac{1}{y} = 4$

1.1.2. a) $5(x_2 + 2) - 3(x_1 + 1) = 23$, $3(x_2 - 2) = 19 - 5(x_1 - 1)$ b) $3(2x_1 - x_2) + 4(x_1 - 2x_2) = 87$, $2(3x_1 - x_2) - 3(x_1 - x_2) = 82$

c) $4 - \frac{1}{3}(2x - y - \frac{9}{2}) = \frac{1}{8}(3x - 6 - 4y)$, $4 - \frac{x - \frac{1}{2}y + 3}{3} = \frac{2y - x - 6}{8}$ d) $3y - \frac{3(4x - 3y)}{2} = 2x - 3y - 1$, $3x - \frac{3(3x - 2y)}{5} = 5x - 3y - 1$

1.1.3. a) $\frac{1}{\frac{7}{2}x - 3} = \frac{1}{4y - 3}$, $\frac{1}{\frac{5}{2}x + 4} = \frac{1}{3y + 1}$ b) $\frac{1}{3x - 5} = \frac{4}{7y - 13}$, $\frac{1}{y - x} = \frac{8}{3x + y}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

c) $\frac{1}{y-10} = \frac{25}{12x+19}$

$\frac{1}{45-x} = \frac{8}{15y+1}$

d) $4+y = x$

$\frac{2}{5-3x} = \frac{3}{7-2y}$

1.1.4. a) $(x-1)(2y+5) = (y+1)(2x-1)$

$(2x+7)(y-2) = (2y-3)(x+2)$

b) $4(5y-3)(2x+1) = (10x+7)(4y-3)$

$2(2y+1)(x+4) = (2x+5)(2y+3)$

c) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{x}-\frac{1}{y} = \frac{1}{6}$

d) $\frac{3}{x}+\frac{8}{y} = 3$

$\frac{15}{x}-\frac{4}{y} = 4$

1.1.5. a) $\frac{9x_1}{2}+\frac{3x_2}{2} = 3$

$3x_1+x_2 = 2$

b) $\frac{2x_2-5x_1}{6}+\frac{x_1}{6} = \frac{x_2-2x_1}{3}$

$\frac{5-3x_1}{3}-\frac{4x_2-1}{4} = \frac{6x_1+23}{12}-\frac{3x_1-4x_2}{2}$

c) $\frac{12}{4x_1+3x_2}-\frac{1}{3(3x_1-2x_2)} = \frac{1}{6}$

$\frac{5}{3x_1-2x_2}+\frac{6}{4x_1+3x_2} = 5{,}25$

d) $3(x_1-2)+4(2x_2+\frac{3}{2}) = 0$

$5(x_1+3)-3(x_2-\frac{1}{3}) = 16$

1.1.6. a)
$$\begin{aligned} 3x_1+4x_2 &= 8 \\ 5x_1-2x_2 &= 9 \\ 7x_1-8x_2 &= 10 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 6x_1-x_2 &= 1 \\ 9x_1+2x_2 &= 5 \\ 3x_1-x_2 &= 1 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 5x_1-3x_2 &= -3 \\ 3x_1+5x_2 &= 5 \\ 3x_1-1{,}8x_2 &= -1{,}8 \\ 0{,}9x_1+1{,}5x_2 &= 1{,}5 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 2x_1-3x_2 &= 10 \\ -\frac{1}{3}x_1+\frac{1}{2}x_2 &= -\frac{5}{3} \\ x_1-1{,}5x_2 &= 5 \\ 0{,}5x_1-0{,}75x_2 &= 2{,}5 \end{aligned}$$

۱ ، ۲ – مساواتسیستم د ناټاکلو ضریبونو سره

1.2.1. a)
$$\begin{aligned} x_1+x_2 &= a \\ ax_1-x_2 &= b \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 3x_1-2x_2 &= 5a \\ 2x_1-3x_2 &= 5b \end{aligned}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

----

c) $10x + 6y = 4a + b$
$6x + 10y = 4a - b$

d) $14x - 15y = 24a$
$10x - 21y = 24b$

1.2.2. a) $\frac{x_1}{2a+b} - \frac{x_2}{2a-b} = \frac{8ab}{b^2 - 4a^2}$
$\frac{x_1}{2a+b} + \frac{x_2}{2a-b} = \frac{8a^2 + 2b^2}{4a^2 - b^2}$

b) $-(a+b)x_1 + (a-b)x_2 = 0$
$(a-b)x_1 + (a+b)x_2 - 4ab = 0$

c) $\left(\frac{a^2+b^2}{2b}\right)^2 \cdot x - \left(\frac{b^2-a^2}{2b}\right)^2 \cdot y = a^2$
$\frac{a^2+b^2}{2b} \cdot x + \frac{b^2-a^2}{2b} \cdot y = b$

d) $\frac{x}{b+c} - \frac{y}{a+c} = a - c$
$\frac{x}{a+b} - \frac{y}{b+c} = b - a$

1.2.3. a) $x + y = \frac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2}$
$x - y = \frac{4ab}{a^2-b^2}$

b) $x + y = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$
$2x + 3y = \frac{2a^2+ab+3b^2}{a^2-b^2}$

c) $ax + by = 2a$
$a^2x - b^2y = a^2 + b^2$

d) $ax + by = a^3 + 2a^2b + b^3$
$bx + ay = a^3 + 2ab^2 + b^3$

1.2.4. a) $ax + by = 2a$
$x + y = \frac{a^2+b^2}{ab}$

b) $(a-b)x + (a+b)y = a + b$
$\frac{x}{a+b} - \frac{y}{a-b} = \frac{1}{a+b}$

c) $\frac{x-a}{y-a} = \frac{a-b}{a+b}$
$\frac{x}{y} = \frac{a^3-b^3}{a^3+b^3}$

d) $(a-b)x + y = \frac{a+b+1}{a+b}$
$x + (a+b)y = \frac{a-b+1}{a-b}$

۱ . ۳ – شي شمیرنه

۱. ۳. ۱ کوم دوه اعداد لاندې خویونه لري؟ که هرعدد په ۵ لوی شي، د مربع یا څلورځ کمون(تفریق) یې په ۱۰۰ لوییږي، په داسې حال چې ضرب یې په۳۲۵ زیاتیږي.

۱ . ۳ . ۲ د دوه عددونو جمعه یا زیاتون دومره لوي دی، لکه د تفریق مربع یې.

که ۴ لومړي عدد تع ورزیات شي او له دویم عدد کم شي، نو د مربع کمون د یا تفریق یې ۹۹ دی، وښایئ چې عددونه څومره لوی دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ . ۳ . ۳ د هرو دوه ګڼونو څخه هر یویې په 2 لویوي، نو ګڼونه ځانونه نیسي لکه: 4 : 3 . که له هر یوه ددې دوه ګڼونوڅخه 3 کم شي ، نو داسی لاس ته راغلی ګڼ ځان نیسی لکه : 3 : 2 . دواړه ګڼونه کوم دي؟

۱ . ۳ . ۴ د دوه ګڼونو زیاتون 999 دی. که لمړی ګڼ په 9 وویشل شي او دوم په 6 ، نو د ویشونکو زیاتون 138 دی . هر یو ددې دوه ګڼونو شومره لوي دی؟

۱ . ۳ . ۵ د دوه ګڼونو زیاتون 1000 دی. که لمړی له 2 او دوم له 3 سره ځل یا ضرب شي، نو د ځلونو زیاتون بی 2222 دی. هر یو له دې ګڼونوڅومره لوي دی؟

۱ . ۳ . ۶ په دوه ګڼونو کې یو له بل په 0,909 لوي دی، زیاتون یې 3,191 دی. دواړه ګڼونه څه نومیږي یا کوم دي؟

۱ . ۳ . ۸ . د یوه دریکونجي د دوه اړخونواوږدوالي زیاتون 8,4 cm دی او پړیکشن یا پریوستون یې د دریکونجي په دریم اړخ 4 cm او 1,6 cm دی. د دریګوډي اړخونه څومره لوي دي؟

۱ . ۳ . ۹ . د یوه لوي ښار ترمنځ دوه کلي X او Y د ښار له مرکز Z سره یو دریګوډی جوړوي . له X څخه چی له Z څخه تیریږي ،Y ته اوږدوالي 12 cm دی، Y له مرکز Z څخه 2 km زیات لري دی نسبت و X ته ، دواړه مخ کلی X او Y له مرکز Z څخه څومره لرېدي؟

۱ . ۳ . ۱۰ . د یوه فوټبال میدان څخه د څلورکونجي شکله د لرګیو راګرځیدلی دیوال، چی 420 m اوږد دی ، باید په اغزیو سیمانو بدل کړي. دلته یوه خوا په 5 m کوچنی کیږي، که بل اړخ په 10 m اوږده شي. له دې سره د سیمګرځی اوږده د هوارې دنته په $100\ m^2$ زیاتیږي. د څلورکونجیز اړخونه څومره لوي دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ . ۳ . ۱۱ . د یوه موټر ماشین یخی ۸ لیټره اوبه خوندي کوي او دوه وتللارې لري، دا کیدی شي خالي شي، که د بیلګي په توګه لمړی 5 دقیقی او دوم 2 دقیقی واز کړي او یا دوم 6 دقیقي او لمړي 3 دقیقي واز شي. په هرنل کي څومره اوبه په یوه دقیقه کی وزي؟

۱ . ۳ . ۱۲ . یو پلار له خوي څخه ۳۶ کاله زوړ دی په ۵ کاله کی پلارد خوي 1 / 4 عمرڅخه ور زیات 3 برابره د خوي عمر لري اوس پلار او خوي هر یو څومره عمر لري؟

۱ . ۳ . ۱۳ . د شربت د ګډولو لپاره دوه ډوله شربتونه سره ګډیږي. که له لمړې درې بوتله واخستل شي او له دوم ۷ بوتله نو د یوه بوتل ارزښت دې ۲ مارکه وشمیرل شي. مګر که له لمړې ۷ بوتله او له دوم درې بوتله سره ګډ شي، د یوه بوتل ارزښت 40 , 2 الماني مارکه(DM) کیږي. د په کارونو شربتونو بوتل به څومره ارزښت ولري؟

۱ . ۳ . ۱۴ . یود 450 m^3 اوبو اوبه ډکی یا اوبه ساتی (بیلر) له دوه نلونو ډکیږي. که لمړی نل درې دقیقي او دوم یوه دقیه واز وي،نو په اوبه ساتي کی 40 m^3 اوبه جریان لرودی شي. مګر که لمړی یوه دقیقه او دوم نل ۷ دقیقي وازې وي، نو اوبه ساتي ته 60m^3 اوبه جریان لري. هر نل په یوه دقیقه کی څومره اوبه اوبه ساتي ته غورځوي؟ څومره باید هر نل له همغه یوه وخته واز وي چی اوبه ساتی ډك شي؟

۱ . ۳ . ۱۵ . دوه کارګرو ته د کندنی کار ور په غاړه کیږي. که دواړه یو ځاي کار وکړي، نو ۱۲ ورځو ته ضرورت دی. که لمړی دوه ورځي او دوم درې ورځي کار وکړي، نو په دې وخت کی یواځي 5 / 1 برخه د کار کړه کیږي. څومره ورځی به له دوي هر یو ځانله د دې کار لپاره ضرورت ولري ؟ اړتیا ورته دی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ . ۳ . ۱۶ . د يوې ګردۍ په چاپيري چې ۱۰۰ متره اوږد دی، دوه بدنونه په حرکت راځي. هغوي هر ۲۰ دقيقې حرکت کوي، که هغوي په همغه لور حرکت وکړي او هر ۴ دقيقې، که هغوي يو د بل په خټ لور حرکت وکړي، هر بدن په يوه ثانيه کې څومره واټن تی کوي يا وهي؟

۱ . ۳ . ۱۷ . په يوه ګردۍ چې چاپېرې يې ۹۹۹ متره اوږد دی دوه بدنونه په همغه لور حرکت کوي او دا حرکت په هرو ۳۷ ثانيوکی. د واړو بدنونو سرعت څومره دی،که د لمړي سرعت څلور واره لوي لکه د دوم ګړی ؟

۲

. کرښيز مساوات سيستمونه د درې مجهولو سره ۲ .

۱ – مساواتسيستم د ټاکلو ضريبونو سره

a) $\begin{aligned} x + y &= 14 \\ x + z &= 15 \\ y + z &= 16 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 4 \\ x_1 + x_3 &= 18 \\ x_2 - x_3 &= 6 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 6{,}6 \\ x_1 - x_3 &= 2{,}6 \\ x_2 - x_3 &= 2 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} x + y + z &= 25 \\ 3x - 2z &= 1 \\ 20y - 16z &= 0 \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} 2x + 3z &= 13 \\ 3x - 4y &= 3 \\ 5y - 6z &= 9 \end{aligned}$

f) $\begin{aligned} 12x + 24y - 42z &= 30 \\ 4x + 8y - 14z &= 10 \\ 6x + 12y - 21z &= 15 \end{aligned}$

g) $\begin{aligned} 5x + 3y + 2z &= 207 \\ 5x - 3y &= 37 \\ 3y - 2z &= 19 \end{aligned}$

h) $\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 17 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 13 \\ -x_1 + x_2 + x_3 &= 14 \end{aligned}$

i) $\begin{aligned} x_1 - 5x_2 + 2x_3 &= 11 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 6 \\ 6x_1 - 16x_2 + 10x_3 &= 39 \end{aligned}$

j) $\begin{aligned} 4x + 4\tfrac{1}{2}y - 6\tfrac{3}{4}z &= 20 \\ 2\tfrac{1}{5}x - 2\tfrac{1}{3}y + 1\tfrac{1}{2}z &= 5\tfrac{2}{3} \\ 1\tfrac{2}{3}x + 1\tfrac{3}{4}y - 4\tfrac{1}{2}z &= 3\tfrac{1}{3} \end{aligned}$

k) $\begin{aligned} \tfrac{2}{5}x - y &= 0 \\ \tfrac{2}{3}x - z &= 1 \\ -\tfrac{2}{3}y + z &= 2 \end{aligned}$

۲ . ۲ – مساوات سيستمونه د ناټاکلو ضريبونو سره

a) $\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2c \\ x_1 + x_3 &= 2b \\ x_2 + x_3 &= 2a \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2(a + b) \\ x_1 + x_3 &= 2(a + c) \\ x_2 + x_3 &= 2(b + c) \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} ax + by - z &= 1 \\ ax - by + z &= b \\ -ax + by + z &= a \end{aligned}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

d) $ax + y - cz = 2a$
$-ax + y + cz = 2c$
$ax - y + cz = 2ac$

e) $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2a$
$\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = 2b$
$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 0$

f) $-\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{2}{a}$
$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$
$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = \frac{2}{b}$

g) $x + \frac{y}{b} - \frac{z}{c} = a$
$y + \frac{z}{c} - \frac{x}{a} = b$
$z + \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = c$

h) $\frac{x}{b+c} + \frac{y}{c-a} = a + b$
$\frac{y}{c+a} + \frac{z}{a-b} = b + c$
$\frac{z}{a+b} + \frac{x}{b-c} = c + a$

۳ . په خوښه زيات مساوات د په خوښي زياتو مجهولو سره

a) $2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 7$
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$
$0{,}5x_1 + x_2 + 1{,}5x_3 - 0{,}5x_4 = 3$
$3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 10$

b) $3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 6$
$x_1 + 0{,}5x_2 + x_3 = 1$
$7x_1 + x_2 + 6x_3 + x_4 = 10$
$6x_1 + 0{,}5x_2 + 5x_3 + x_4 = 9$

c) $x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 - 2x_5 = 1$
$-2x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 3$
$-2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 - 2x_5 = 5$
$3x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 2$
$x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 4$

d) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 21$
$x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + x_6 = 1$
$6x_1 - 5x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 2x_5 - x_6 = 0$
$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 - 6x_6 = 19$
$2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 6x_5 - 7x_6 = -24$
$-x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + x_6 = 3$

هوموجين مساوات سيستمونه:

a) $3x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 0$
$-x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0$
$-2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0$

b) $-x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0$
$5x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 0$
$3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$

c) $20x_1 - 10x_2 + 15x_3 = 0$
$-12x_1 + 6x_2 - 9x_3 = 0$
$8x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 0$

d) $6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0$
$9x_1 - 5x_2 + 6x_3 = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۲ . الجبري مساوات يا - برابرونونه

۱۲ . ۱ نالاينيز- يا ناکرښيز- يا ناخطي برابرونونه

ټول مساوات چی د نورمالفورم

$$A . x = a \qquad (12.1)$$

سره يوارزښته (اکويوالنت) نه وي ، نالاينيز – يا ناکرښيز مساوات بلل کيږي او عمومي فورم يی په لاندې ډول دی

$$F(x) = 0 \qquad (12 . 2)$$

دلته F (x) په x کی يوه ناکرښيزه يا ناخطي وييبنه يا افاده ده . د (12 . 2) حل دا مانا لري چی ټول د xارزښتونه پيدا شي د کومو لپاره چی (12 . 2) باوري وي. بايد په پام کی ونيول شي چی ايا يواځي رييل ارزښتونه پيدا کوو او که کمپلس ارزښتونه هم غواړو چی پيدا کړو. د بيلګی په توګه لاندې ناکرښيز يا لاينيز مساوات

$$x^2 - x - 2 = 0$$

لاندې دواړه رييل ځوابونه لري

$$x1 = -1 , x2 = 2$$

چی د ارزښتونو ځاي په ځاي کولو سره بي مساوات باوري کيږي .ددې په څټ يا برعکس دا برابرون $x^2 + 1 = 0$ رييل ځواب نه لري (۵ -مه برخه دي وکتل شي)، بلکه لاندې ايماګينار ځوابونه لري : $x1= i , x2 = -i$

د دې حالت د ښه روښانولو لپاره دې (۱۵ برخه دې وکتل شي) د برابرون او فنکشن ترمنځ اړيکو ته پاملرنه وشي: اړيکو $y=F(x)$ ته فنکشنبرابرون او x ته متحوله

(c) ketabton.com: The Digital Library

وايي، چې زه يې کله اووښتونی او کله ناپيژندوني بولم(ښه نومه ونه يې اوښتوني ده) په څټ یا برعکس (2 . 12) يو ټاکنمساوات دی او x هلته يوه ناپيژندونکی یا اوښتونی دی.

د (2 . 12) برابرون یا مساوات اوبیوني یا حل ته د برابرون د F (x) صفرځای یا د مساوات F(x)=0 جذر یا ريښه هم وايي.

هغه برابرون یا مساوات چی په (۱۲ . ۲) فورم نه دئ ورکړ شوی کیدی شي چی په دې لاندې فورم واړول شي. د بیلګي په توګه د دې برابرون لپاره :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = a; g(x) \neq 0$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = a; g(x) \neq 0$$ او f(x)=g(x)

نورمال فورم په لاندې ډول لاس ته راوړل کيږي

F(x)=f(x)-a.g(x)=0 او F(x)= f(x)-g(x)= 0

د نالاینیزو برابرونونو لپاره د لاینیزو برابرونونو په څير راغونده (اختماميه، رابنده، راتړلی) تيوري نه شته. په پوليزه یا عمومي ډول څوك نور فرمول نه شي ورکولی، د کوم له مخی چی د صفرځاي معلوميدی شي. باید په نومریکو (numerischen Methoden) متودونو یا ورپسې ګڼ متودونو په ورنزدې یا تقریبي ډول پيداشي

نالاینییز برابرونونه په دوه ټولګيو ويشل کيږی: الجبري او تراسڅندنت چی په دې او راتلونکی څپرکي یا لکه چی ما استعمال کړې برخه کی یی څيړو، چي اوبیونې یی روښانه افاده شوې (explizit لاتین: واضح یا روښانه ، افاده شوی، اکسپليڅټ) دي.

له ۱۲ . ۲ څخه تر ۱۲ . ۴ پورې الجبري برابرونونه څيړل کيږي چی په لاندې نورمال فورم یا – بڼه اړول کیدی شي

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1 x + a_0 = 0 ....(12,3)$$

دلته په (2 . 12) کی یو نالاینیز بلواک یا – فنکشن (F (x د یوه n - م درجی پولينوم په څير مخ ته پروت دی . موږ په (۱۲ . ۲) کی د ضريبونو(ځله وونو) لپاره یواځی رییل ګڼونه پريږدو (په دې مانا چي ځلونه یواځي رييل وي، یواځی رييل ګڼونو ته اجازه ورکوو) .

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په (۱۲ . ۳) کی کیږ اړخ ته n - م درجه پولینوم

$$F(x) = P_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1x + a_0 = 0 ....(12,4)$$

ته ټول ریشنل (- ریښتونی) بلواک یا فنکشن هم وایي، ځکه چی د ریشنل شمیرله عملیو زیاتون، کمون، او ځل له لاري او نه په x واریابلی او ai د رییل ضریبونو، ځلونو یا فاکتورونو باندې د ویش کارونی کارولو (عملي استعمال) له لارې منځ ته راځي .ټولیز برانرون یا

$$b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + ... + b_1x + b_0 = 0; b_n \neq 0 ....(12,5)$$

کیدي شي په bn|= 0 ویش باندې په (۱۲ . ۳) نورمال فورم واړول شي .

که دا نه لاینیزفنکشن یا ۰ بلواک F (x) په (۱۲ . ۲) باندې په واریابلي یا اووښتوني x او ځلونو باندې ټول د شمیر کاروني یا عملیي او بالاخره دویش کارونه وکارول شي یا اجرا شي او رییل پارامتر (Parameterپه شمیرپوهنه کې ثابت (همغۀ) او یا مرستندویه لوي ده) تشکیل شي نو فنکشنونو ته بیا مات ریشنل فنکشنونه ویل کیږي.
دا تل د دوه پولینومونو یا ریشنل فنکشنونو د ویش په څیر انځوروږ دي

$$F(x) = R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + ... + b_1x + b_0}{c_mx^m + c_{m-1}x^{m-1} + c_{m-2}x^{n-2} + ... + c_1x + c_0}; .....(12,6)$$

په همدې ډول برابرون

$$F(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = 0; ....(12,7)$$

تل په (۱۲ . ۵) یا (۱۲ . ۳) برابرون اړول وړ دي . دا باید په پام کی وي چی د (۱۲ . ۳) لپاره یواځنی هغه ځواب په پوښته کی راځي، د کوم لپاره چی باوري وي:

$$Q_m(x) \neq 0$$

که چیرې د نالاینیزبلواک یا - فنکشن جوړولو کی د ریشنل شمیرعملیو تر څنګ د توان (متې، په جګ) یا پوتنځ کول او جذر نیولوته هم اجازه ورکړل شي نو بیا سرې د الجري فنکشنونو څخه غږیږ. یعني داسي فنکشنونو ته الجبري فنکشنونه ویل کیږي او (۱۲ . ۲) برابرون بیا الجبري برابرون بلل کیږي ، دا ډول مساوات هم کیدی شي چی په (۱۲ . ۳) فورم واړول شي.

هره n - مه رېښه یا جذر $\sqrt{G(x)}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د G(x) افادې يا ويينې له منځه وړل کيدی شي, که چيرې څوك دا برابرون په يوه خوا راوړي او بيا د برابرونونو دواړه خواوې دn په توان کړي يا د n پوتنځ يا مټ ته جګ کړي . دا په ۱۲ . ۴ برخه کی په څرګندو يا معلومو بيلګوڅيړل کيږي . په نومولو تګلارو د الجبري مساواتو ځيرنه د (۱۲ . ۳) فورم برابرونونو ته راکښته کيدلی شي. د الجبري مساواتو دا نورمال فورم د n - می درجي برابرون هم بلل کيږي. ټول نالاينيز برابرونونه چی الجبري برابرون نه دي، ترانسځيندنت برابرون بلل کيږي . د ترانسځيندنت رابرونونو درې تيوپونه، په نامه ، اکسپوننشل برابرونونه ، لوګاريتمي برابرونونه ، او ګونومتريکي برابرونونه دي چي په برخه ۱۳ کی به تر څيړني لاندې ونيول شي.

۱۲ . ۲ څلوری(مربع-) مساوات په توان(مټ، جګ) د ۲

۱۲ . ۲ . ۱ په جګ د ۲ مساوات په نورماله بڼه

د نالاينيزو الجبري برابرونونو ساده بڼه د ۲ په توان يا مټ (په جګ ۲ هم ويل کيږي) برابرونونه دي چی څلوری يا مربع برابرونونه بلل کيږي .د دې ټوليزه بڼه (عمومي فورم) داسی ده ۰ دی

$$b_2x^2 + b_1x + b_0 = 0; b_2 \neq 0; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(12,8)$$

په b2 يي ويش په لاندې ډول يو ورته ارزښته (اکويوالنت äquivalent) نورمالبڼه يا نورمالفورم ورکوي

$$x^2 + a_1x + a_0 = 0; (a_1 \neq b_1 / b_b; a_0 \neq b_0 / b_2); \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(12,9)$$

ددې حل د څلوری پوره کونې يا مربعتکميل څخه په ګټه د بينوم په فورمل ودې کتل شي: ۱ . ۲ . ۲) ولاړ دی.

$$[x + a_a / 2]^2 = x^2 + a_1x + \frac{a^2{}_1}{4}; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(12,10)$$

په دې ډول کيدی شي چی (۱۲ . ۹) برابرون په لاندې فورم داسی واړول شي:

$x^2+a_1x+a_0=(x+a_1/2)^2+a_0-a_1^2/4 = 0 \Leftrightarrow$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$[x+a1/2]^2=(a1^2/4)-a0 \qquad (12,11)$$

که وي

$$(a1^2/4)-a0>0 \Leftrightarrow a1^2 -4a0>0 \Leftrightarrow a1^2>4a0 \quad (12,12)$$

نو دوه امکانات شته دی، چی (۱۲ . ۱۱) برابرون پوره کړي:
داصدق کوي

$$x+\frac{a_1}{2}=\sqrt{(a_1^2/4)-a_0};.........................(12,13)$$

یا

$$x+\frac{a_1}{2}==-\sqrt{(a_1^2/4)-a_0};.........................(12,14)$$

دا دواړه خواو په توان د ۲ څخه، د (۱۲ . ۱۳) او همداسی د (۱۲ . ۱۴) څخه (۱۲ ۱۲)برابرون او په دې ډول (۱۲ . ۹) برابرون لاس ته راځي (په پام کی دې وي چی a د ۲ اصلي برخی په بینا تل نا کمیز یا نامنفي ګڼ پو هیدل کیږي، چی څلوری یا مربع یی a ده) . له (۱۲ . ۱۳) په همدې ډول له (۱۲ . ۱۴) څخه ریبل ځوابونه لاس ته راځي،

$$x_1=-\frac{a_1}{2}+\sqrt{(a_1^2/4)-a_0};x_2=-\frac{a_1}{2}-\sqrt{(a_1^2/4)-a_0};.........................(12,15)$$

او ددې لپاره دا هم لیکلی شو

$$x_{1,2}=-\frac{a_1}{2}\pm\sqrt{(a_1^2/4)-a_0};.........................(12,16)$$

په (۱۲ . ۹) کی د (۱۲ . ۱۵) په همدې توګه (۱۲ . ۱۶) ځاي پر ځاي کولو څخه پو هیدل کیږي چی دواړه ارزښتونه
x1 او x2
په ریښتونی څلوری برابرون یا مربع مساوات پوره کوي.
په لاندې حالت کی

$$(a_1^2/4)-a_0=0 \Leftrightarrow a_1^2-4a_0=0 \Leftrightarrow a_1^2=4a_0;.............(12,17)$$

د (۱۲ . ۱۶) له لارې تیك یو ریبل اوبی لرو:

$$x_{1,2}=x_1=x_2=-(a_1/2)\pm 0=-a\ \ /2;.................................(12,18)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په (۱۲ . ۱۵) همداسی په (۱۲ . ۱۶) باندې په تکیه دا اوبی دوه واره دی یا په بل عبارت دوه واره رامنځ ته کیږي او په دې ډول د یوه دوه واره اوبیونې (۱۲ . ۱۸)څخه غړیږو.

که وي

$$(a_1^2/4)-a_0<0 \Leftrightarrow a_1^2-4a_0<0 \Leftrightarrow a_1^2<4a_0;................/12,19)$$

نو (۱۲ . ۱۱) همداسی (۱۲ . ۹) رییل حل نه لري. که په کمپلس گڼونو شمیرنه وکړو نو له ۵ - برخی څخه لاندې لاس ته راوړو

$$x+a_1/2=\sqrt{a_0-(a_1^2/4)i} \wedge x+a_1/2=-\sqrt{a_0-(a_1^2/4)i}$$

او په دې ډول د کونجوګيرت کمپلکس حل جوړه لاس ته راځي:

$$x_{1,2}=-a_1/2\pm\sqrt{a_0-(a_1^2/4)i};...................(12,20)$$

له دې څخه هم چی په (۱۲ . ۹) ځای په ځای شي څرګندیږي چی د x1 او x2 ارزښتونه پیل برابرون یا مساوات پوره کوي.

که په (۱۲ . ۱۹) حالت کی لاندې څرګندونی ته پام وي

$$\pm\sqrt{a_0-(a_1^2/4)i}=\pm\sqrt{(a_1^2/4)i-a_0};...................(12,21)$$

نو لاندې جمله یی راغونډه داسی فرمولولی شو

جمله ۱۲ . ۱: (د څلوری یا مربع) په توان یا جګ د ۲) برابرونونو د اوبیونې فرمول) د څلوری- یا مربع برابرونونو(مساواتو) $x^2+a_1x+a_0=0$

$$x_{1,2}=-a_1/2\pm\sqrt{a_0-(a_1^2/4)i}$$

ټیك دوه ځوابونه لري

د $a_1^2>4a_0$

په حالت کی دوه مختلف رییل حلونه دی، د $a_1^2=4a_0$ په حالت کی یو رییل دوه برابره(ډبل) حل دی او د $a_1^2<4a_0$ په حالت کی یو جوړه کونیوګیرت - کنجوګیریکمپلکس حل شته دي.

په ساده ډول لاندې د وییتا جمله هم د مربع مساوتو لپاره ښوول کیدی شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۲ . ۲ (د وييتا(Vieta)جمله) :

که x1 او x2 د خلورئ - يا مربع برابرونونو (۱۲ . ۹) همداسی د (۱۲ . ۸) اوبيوني وي نو باوري دی

$$a_1 = b_0 / b_1 = x_1.x_2; ....(12,22)$$

$$a_2 = b_1 / b_2 = -(x_1 + x_2); ....(12,23)$$

حل : (۱۲ . ۲۳) فرمول په دريواړو حالتونو کی سم د لاسه له لاندې څخه لاس ته راځي:

$$-(x_1 + x_2) = \left[\frac{a_1}{2} - \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}\right] + \left[\frac{a_1}{4} + \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}\right] = a_i$$

د (۱۲ . ۲۲) فرمول د تصديق لپاره د بينوم دريم فرمول او i ² = -1 استعمال څخه په په (۱۲ . ۱۲) حالت کی باور لري :

$$x_1.x_2 = \left[-\frac{a_1}{2} + \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}\right].\left[-\frac{a_1}{2} - \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}\right] = \frac{a_1^2}{4} - \left[\sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}\right]^2$$

$$= \frac{a_1^2}{4} - \frac{a_1^2}{4} + a_0 = a_0$$

په (۱۲ . ۱۷) حالت کی لاس ته راځي:

$$x_1.x_2 = \left[-\frac{a_1}{2} + 0\right]\left[-\frac{a_1}{2} - 0\right] = \frac{a_1^2}{4} = a_0$$

په (۱۲ . ۱۹) حالت کی باوري دي:

$$x_1.x_2 = \left[-\frac{a_1}{2} + \sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}\, i\right].\left[-\frac{a_1}{2} - \sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}\, i\right] = \frac{a_1^2}{4} - \left[\sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}\right]^2 i^2$$

$$= \frac{a_1^2}{4} - [a_0 - \frac{a_1^2}{4}].(-1) = \frac{a_1^2}{4} + a_0 - \frac{a_1^2}{4} = a_0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ویيتا جملی په مرسته لاندې جمله باوري کيږي یا تصديقيږي

جمله ۱۲ . ۳ :

یو ۲ درجيیز پولینوم کیدی شي چی په دوه لايني فاکتورونو یا ضریبونو یا ځله وونو بیل یا ټوټه یا تجزیه شي:

$$x^2+a_1x+a_0=(x-x_1)(x-x_2);...................(12,24)$$

په همدې ډول

$$b_2x^2+b_1x+b_0=b_2(x-x_1)(x-x_2);...................(12,25)$$

چیرته چي x1 او x2 د ځلورې برابرونونو یا مربع مساواتو (۱۲ . ۹) په همدې ډول د (۱۲ . ۸) دواړه ځوابونه دي

اوبیونه : له (۱۲ . ۲۲) ، (۱۲ . ۲۳) څخه د (۱۲ . ۹) همداسی د (۱۲ . ۸) په پام کي نیولو سره لرو

$$(x-x_1)(x-x_2)=x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=x^2+a_1x+a_0=$$

$$=\frac{1}{b_2}(b_2x^2+b_1x+b_0)$$

د جملی ۱۲ . ۳ څخه دې ته راځول کيږو چی د (۱۲ . ۱۷) حالت کی د دوه برابره ریيل اوبیو څخه خبرې وکړو(وغږيږو). د x1 = x2 له امله لاس ته راځي

$$x^2+a_1x+a_0=(x-x_1)^2;a_1^2=4a_0;...................(12,26)$$

دا دري حالتونه(۱۲ . ۱۲) .(۱۲ . ۱۷) او (۱۲ . ۱۹) کیدی شي چی د فنکشن

$$y=p_2(x)=x^2+a_1x+a_0$$

ځیرو یا شکلونو (ګراف) په مرسته د کتلو شي.

ګراف په بنسټیزه توګه پارابول انځوروي، چی پورته خوا ته سرواز دی. ځکه چی که x هرڅومره کوچنی شي)که x د کميز ناپای په جګ یا توان شي) او همدارنګه x هرڅومره لوي شي (که x د ∞ (ناپای) په جګ شي y لوییږي (ستریږي یا غټیږي) ، ځکه چیx^2 نسبت و x ته په توان یا قوي جګیږي له ټولو پولو(yد ناپای لور ته ځي)۰ د دې ډول پولو کره پیژند یا تعریف په ۱۹ - برخه کي لوستل کيدی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په (۱۲ . ۱۲) حالت کی د x - محور په داړو ریيلو ځایونو x1 او x2 کی غوڅیږي؛ په (۱۲ . ۱۷) حالت کی په x1 = x2 ځای کی يي لمسوي او په (۱۲ . ۱۹) حالت کی گډ ټکي ورسره نه لري یا نه وررسیږي (پرتله څیره . ۱۲ . ۱)

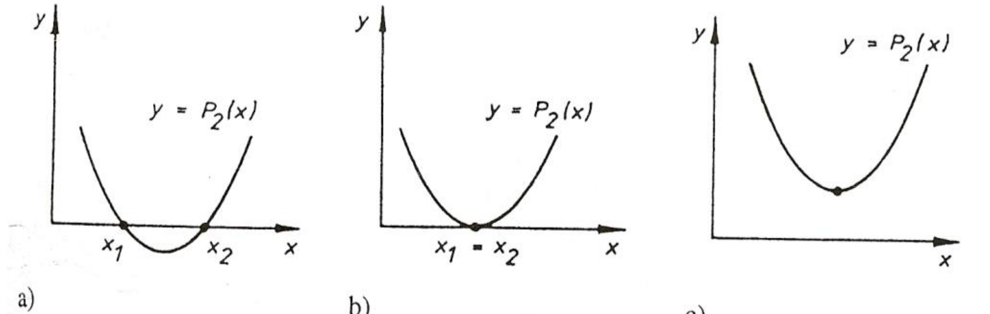


Bild 12.1

له جملی ۱۲ . ۱ تر ۱۲ . ۳ پورې به په درې ساده ډوله د (۱۲ . ۱۲) ، (۱۲ ، ۱۷ ، (۱۲ . ۱۹) سره مناسبو بیلگو روښانه شي.

بیلگه ۱۲ . ۱ :

په برابرون $x^2 - x - 6 = 0$ کی لرو

$a1 = - 1 , a0 = -6$ او د $a_1^2 - 4a_0 1 + 24 = 25 > 0$

له امله (۱۲ ، ۱۲) حالت مخ ته پروت دی.
دواړه له صفر مختلف ځایونه د جملی ۱۲ . ۱ څخه په لاندې فورم لاس ته راځي:

$$x_{1,2} = 1/2 \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = 1/2 \pm \sqrt{1/4 + 24/4} = 1/2 \pm \sqrt{25/4} = 1/2 \pm 5/2$$

$$\Rightarrow x_1 = 3; x_2 = -2$$

جمله ۱۲ . ۲ :

له لاندې لاس ته راوړنی یاتعقیب څخه باوري کیږي

$$a_0 = -6 = x_1 x_2 = 3(-2) = -6$$

$$a_1 = -1 = -(x_1 + x_2) = -(3-2) = -1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له جملی ۱۲ . ۳ ځخه لاس ته راځي: $x^2-x-6=(x-3)(x+2)$

بیلګه ۱۲ . ۲ :

له مساواتو $x^2-4x+4=0$ لرو $a1=-4,a0=4$ او د $a_1^2-4a_0=16-4.4=0$

له امله (۱۲ . ۱۷) حالت مخ ته لرو ۰ دوه ئیز ریبل حل په لاندې ډول له جملی ۱۲ . ۱

ځخه لاس ته راځي $x_{1,2}=2\pm\sqrt{4-4}=2$ نو لرو $x1=x2=2$

جمله ۱۲ . ۳ :

په لاندې ډول باوري کیږي

$$a_0=4=x_1.x_2=2.2=4$$
$$a_1=-4=-(x+x_2)=-(2+2)=-4$$

د جملی ۱۲ . ۳ له مخی لرو $x^2-4x+4=(x-2)^2$

بیلګه ۱۲ . ۳ :

له مساواتو $x^2-4x+13=0$ ځخه لرو , $a1=-4$,$a0=13$او د $a_1^2-4a_0=16-52-36$

له امله حالت (۱۲ ، ۱۹) مخ ته لرو.

د کونیوګیرت(کنجوګیري) کمپلکس جوړه اوبیونو یا حلونو له جملی ۱۲ . ۱ ځخه په لاندې بڼه یا فورم لاس ته راولو

$$x_{1,2}=2\pm\sqrt{4-13}=2\pm\sqrt{-9}=2\pm 3i$$
$$\Rightarrow x=2+3i;x_2=2-3i$$

د جملی ۱۲ . ۲ سره سم باور لري

$$a_0=-4=-(x_1+x_2)=-(2+3i+2-3i)=-4$$
$$a_1=13=x_1.x=(2+3i)(2-3i)=4-9i^2=4+9=13$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او د جملی ۱۲ . ۳ له مخې داسی دی

$x^2-4x+13=(x-2-3i)(x-2+3i)$

د مربع مساوات (۱۲ . ۸) همداسی (۱۲. ۹) اوبی په ښکاره ډول ساده کیږي، که یو ځلی a0 اویا a1 ورك شي:

د a0 = 0 لپاره لرو

$$x(x+a_1)=0 \Leftrightarrow x_1=0; x_2=-a_1$$

د a1=0 لپاره لرو

$$x^2+a_0=0$$

$$\Rightarrow x^2=-a_0; x_{,2}=\pm\sqrt{a_0}$$

۱۲ . ۲ . ۲ څلوری(مربع-)برابرون چی په نورمالبڼه

مخ ته نه دي پراته

که یو مربع مساوات په نورمال فورم (۱۲ . ۹) مخ ته نه وي پروت، له دې د مخه چی جمله ۱۲ . ۱ وکارول شي، نو باید په دې بڼه واړول شي.

بلیګه ۱۲ . ۴ :

$2x-(x+2)^2=(x-2)^2-4(x+1)$

$2x-x^2-4x-4=x^2-4x+4-4x-4$

$-x^2-2x-4=x^2-8x$

$x^2-3x+2=0$

$$x_{1,2}=3/2\pm\sqrt{9/4-2}=3/2\pm\sqrt{9/4-8/4}=3/2\pm\sqrt{3/2}\pm\sqrt{1/4}=3/2\pm1/2$$

$$\Rightarrow x_1=2; x_2=1$$

که مجهول یا ناپیژندلی یا اوړیدونې x د مات لاندې رامنځ ته شي، نو باید په صفر ویش ناممکن یا ناشونوالی په پام کي ونیول شي.

بیلګه ۱۲ . ۵ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

برابرون $(x^2+2x)/(2x^2+2x-4)=1$

ټیك هلته مانا لري، چې وي $2x^2+2x-4 \neq 0$

لومړی ورکړشوی برابرون اوبی کیږي او بیا ازمائل کیږي، چې ایا د ماتلاندې شرایط پوره دی، که نه.

$$x^2+2x=2x^2+2x-4$$

$$-x^2 = -4$$

$$x_{,2} = \pm 2; x = 2; x_2 = -2$$

د $x=x1=-2$ لپاره په ماتلاندې کی لرو

$$2x^2 + 2x - 4 = 8 + 4 - 4 = 8 \neq 0$$

او $x = x2 = -2$ لپاره په ماتلاندې کی لرو

$$2x^2 + 2x - 4 = 8\text{-}4\text{-}4 = 0$$

له دې امله $x1 = 2$ د پیل برابرون اوبی دی

۱۲ . ۲ . ۳ د n - م درجې ځانګړي برابرونونه ، چې په څلوری یا مربع برابرونونو بیرته بدلیدلی شي

د n - مې درجې مساواتو(۱۲ . ۳) یو څو ځانګړي حالتونه کیدی شي چې د څلوری برابرونونو یا مربع مساواتو په مرسته ځواب شي یا اوبی شي۰ دا ځانګړی حالت موجود دی یا شته دی که باور ولري

$$a_1 = a_1 = \ldots = a_{n-3} = 0 \qquad (12, 27)$$

دn- می درجی برابرون بیا داسی دي

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} = 0; \ldots\ldots\ldots\ldots(12,28)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x^{n-2}(x^2 + a_{n-1}x + a_{n-2}) = 0$$

$$\Rightarrow x^{n-2} = 0 \vee x^2 + a_{n-1}x + a_{n-2} = 0; \ldots\ldots\ldots\ldots(12,30)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه : په پورته کې له (۱۲ ، ۳۰) پورته برابرون (۱۲،۲۹) دئ
د دې برابرونونو دوهم برابرون یو څلورئ - یا مربع برابرون دی، چې د جملي ۱۲ ۱ په بنسټ لاندې ځواب لري .

$$x_{1,2} = -\frac{a_{n-1}}{2} \pm \sqrt{\frac{a_{n-1}^2}{4} - a_{n-2}}$$

لومړی برابرون دا اوبی یا حل لري x = 0 چې دا (n-2)- ځله رامنځ ته کیږي x3 = x4 = ... = xn=0

بیلګه ۱۲ . ۶:

برابرون $x^6 + 2x^5 - 3x^4$ د $x^6 + 2x^5 - 3x^4 = x^4(x^2 + x - 3)$

او $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+3} = -1 \pm 2$

لاندې اوبیونې لرو

$$x_1 = 1, x_2 = -3; x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$$

نور هم هغه حالت ساده دی، که $a_{n-2} = 0$ وي، او باور ولري

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} = 0; x^{n-1}(x + a_{n-1}) = 0 \Rightarrow$$

$$x_1 - a_{n-1}, x_2 = x_3 = ... = x_n = 0; ....(12,32)$$

یو بل ځانګړی حالت مخ ته لرو، که د برابرون (۱۲ ، ۳) درجه n جوړه ګڼ یا جفت - وي

n = 2k (12 . 33)

او فقط (ټیك) ځله وونې یا کوایفیڅینتونه a0 او ak له صفر سره برابر نه وي:

$$x^{2k} + a_k x^k + a_0 = 0; ....(12,34)$$

دلته داسی ځاي په ځاي کوو

$$y = x^k; ....(12,35)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او له دې سره د y لپاره ځلورۍ برابرون یا مربع مساوات لاس ته راځي:

$$y^2 + a_k y + a_0 = 0 \qquad (12, 36)$$

د لاندې ځوابونو سره (پرتله : جمله ۱۲ ، ۱)

$$y_{1,2} = -(a_k / 2) \pm \sqrt{\frac{a_k^2}{4} - a_0};......................(12,37)$$

د(۱۲ ، ۳۵) له امله دې د لاندې دوه برابرونونو

$$x^k = y_2 \wedge x^k = y_1;..........................(12,38)$$

ټولې اوبیونې وخیرلی شي، چی د k = 1 لپاره ساده دی، د k = 2 لپاره(بیکوادرات برابرون) (د ځلورۍ یا د مربع مربع) یا د ریلو y1 او y2 لپاره د تراوسه ځرګندو میتودو سره تل کیدونکی دی . نور حالتونه ددې اوس وخت لپاره په ټولیزه توګه ستونځی لري.

بیلګه ۱۲ . ۷ :

لاندې بیکوادرات برابرون $x4 + 5x^2 - 6 = 0$ کیدی د سوبستیچیوشن یعني بدلون له لارې $y = x^2$ په ځلورۍ برابرون $y^2+5y-36=0$ باندې بدل شي. د جملی ۱۲ . ۱ په بنسټ لرو

$$y_{,2} = -5/2 \pm \sqrt{25/4+36} = -5/2 \pm \sqrt{25/4+144/4}$$

$$= -5/2 \pm \sqrt{169/4} = -5/2 \pm 13/2$$

$$\Rightarrow y_1 = 4; y_2 = -9$$

دواړه برابرونونه ، چی د بیرته بدلون(-سوبستیچیوشن) له امله لاس ته راوړو

$x^2 = 4$, $x^2 = -9$

لاندې اوبی یا حل لري

x1 = 2 , x2 = -2 , x3 = 3i , x4 = -3i

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱۲ . ۲ . ۴ د برابرونسیستمونه چی بیرته په ځلوری برابرونونو بد لید لی شي

یوه د نالاینیزو مساواتسیستمونو لړی کیدی شي چی په ځلوری برابرون یا مربع مساواتو بیرته واړول شي. ددې لپاره دوه ساده بیلګي راوړو.

بیلګه ۱۲ . ۸:

$$x + y = 1 \qquad (12, 39)$$

$$x^2 + y^2 = 13 \qquad (12, 40)$$

لومړی برابرون د y په لور حل کیږي، $y = 1-x$، او دا حل په دوم برابرون کی اینوول کیږي:

$$x^2 + (1-x)^2 = 13$$

$$x^2 + 1 - 2x + x^2 = 13$$

$$2x^2 - 2x - 12 = 0$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$x_{1,2} = 1/2 \pm \sqrt{1/4 + 6} = 1/2 \pm \sqrt{25/4} = 1/2 \pm 5/2 \Leftrightarrow$$

$$x = 3, x_2 = -2$$

د (۱۲ ، ۴۰) له مخی په دې لاندې د y - ارزښتونه اړه لري

$$y1 = -2 , y2 = 3$$

نو دا نه لاینیز برابرون لاندې اوبیونې لري

$x1 = 3 , y1 = -2$ او $x2 = -2 , y2 = 3$

بیلګه ۱۲ . ۹ :

د لاندې مساواتو سیستم کی

$$ax + y = 1; \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چی یواځي د $x \neq 0, y \neq 0$ لپاره موخه وریا هدفمند دی، دوم برابرون په xy څلولو(ضربولو)سره په لاندې بڼه اړول کیږي:

$$y+x=xy \qquad (12,42)$$

لومړی برابرون د y په لور ځواب کیږي

$$y = 1 - ax \qquad (12,43)$$

او په (۱۲ . ۴۲) کی ایښول کیږی یا ځای په ځای کیږي

$$1-ax+x=x(1-ax) = x - ax^2$$

$$, ax^2 - ax + 1 = 0 \qquad (12,44)$$

د $a = 0$ په حالت کی (۱۲ . ۴۴) برابرون مخامخوالی لري یا په ښتوالی لري یا تضاد لاس ته راکوي » $1 = 0$ « نو ځواب نه شته

د $a \neq 0$ لپاره د(۱۲ . ۴۴) ښخه لاس ته راځی $x^2 - x + 1/a = 0$

او د جملی ۱۲. ۱ له امله لرو $x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{4} - \frac{1}{a}$

د

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{a} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{4} ....(12.45)$$

لپاره مو (۱۲ . ۱۲) حالت مخ ته پروت دی . دوه برخی حالتونه باید په پام کی ونیول شي:

د $a > 0$ لپاره له (۱۲ ، ۴۵) ښخه لرو , $a > 4$ او د $0 > a$ لپاره له (۱۲ ، ۴۵) ښخه لرو . $a < 4$ له دې امله د

$$a < 0 \text{ او } a > 4 \quad (12, 46)$$

لپاره د (۱۲ ، ۴۴) دوه مختلف ریل ځوابونه موجود دي:

$$x_1 = 1/2 + \sqrt{1/4 - 1/a}, x_2 = 1/2 - \sqrt{1/4 - 1/a}; ....(12.47)$$

په دې پوروې د (۱۲ ، ۴۶) له مخی دواړه دy - ارزښتونه هم اړه لري

$$y_1 = 1 - a/2 - a.\sqrt{1/4 - 1/a}; y_2 = 1 - a/2 + \sqrt{1/4 - 1/a}; ....(12.48)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

باید وازمایيل شي چی د (۱۲ ، ۴۶) په حالت کی x1 , x2 , y1 ,y2 (ټول) نابرابر په صفر دي . تل 1 /2 < x1 دی. که 0 = x2 وی، نو باوري به وی

$$1/2 = \sqrt{1/4 - 1/a};1/4 = 1/4 - 1/a$$

دا د هیڅ a لپاره ممکن نه دی. له دې امله $x_2 \neq 0$ دی
که 0 =y1 يا 0 = y2 وی، نو لاندې به باور لرودی:

$$1 - a + a^2/4 = a^2/4 - 1 \Leftrightarrow 1 = 0$$

دا هم ناشونی یا ناممکن دی، نو دلته هم*لرو* $y_1 \neq 0;\ y_2 \neq 0.$
په (۱۲ ، ۴۶) حالت کی د (۱۲ ، ۴۱) د (۱۲ ، ۴۷) ، (۱۲ ، ۴۸) سر ه سم، دوه

مختلف رییل ځوابونه شته دی - غواړی- موجود دي
x2, y2 . او x1 , y1
د

1/4-1/a=0 <=> a=4 (12 , 49)

لپاره(۱۲ ، ۱۷) حالت مخ ته پروت دی، او برابرون (۱۲، ۴۴) ډبل رییل حل لري

x1 = x2 = 1 /2 (12,50)

په دې پورې د (۱۲ ، ۴۳) له مخې هغه y - ارزښت ډبل ګڼ اوبی پورې هم اړه لري.

y 1 = y2 = 1 - 4. (1 /2) = -1

د (۱۲ ، ۴۹) په حالت کی پس د (۱۲ . ۱۹) يو ریل، ډبل ګڼلی حل موجود دی

x1=x2=1/2 , y1=y2= -1 (12 , 51)
د

1/4-1/a < 0 <=> 1/a > 1/4 (12 , 52)

لپاره (۱۲ ، ۱۹) حالت مخ ته پروت دی. د 0 < a لپاره (۱۲ ، ۵۲) د a<4 کتمټ (ورته) دی، او د a< 0 لپاره دa>4 سره کتمټ دی (له دې امله په ښتوالی یا تضاد) .

نو د(۱۲ ،۵۲) باور لري، د

0 < a < 4 (12 , 53)

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره . په دې حالت کی (۱۲ ، ۴۴) کونجوګیري کمپلکس اوبیونې لري:

$$x_1 = 1/2 + \sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{4}}\, i; x_2 = 1/2 - \sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{4}}\, i; ....(12.54$$

د (۱۲ ، ۴۳) له مخی په دې پورې د y - ارزښتونه اړه لري:

$$y_1 = 1 - a/2 - a\sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{4}}\, i; y_2 = 1 - a/2 + a\sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{4}}\, i; ....(12,55)$$

له دې ارزښتونو هیڅ هم صفر کیدی نه شي .پس په یوځاي شوي یا راټوله توګه لرو:
برابرونسیستم (۱۲ ، ۴۱) د $a = 0$ لپاره اوبی نه لري، د $a < 0$, په همدې ډول $a >$ 4لپاره دواړه ریل اوبي (۱۲ ، ۴۷) ، (۱۲ ، ۴۸) ، د $a = 4$ لپاره رییل ډبل ګڼلي اوبۍ (۱۲ ، ۵۱) او د $0 < a < 4$ لپاره دوه کونجوګیري کمپلکس اوبي (۱۲ ، ۵۴) ، (۱۲ ، ۵۵) لري.

۱۲ . ۳ دریمه درجه مساوات یا - برابرونونه

ددې لپاره چی په زړه پورې -n (ام (درجي مساواتو حلول ساده کړای شو نو لکه د مساواتو مربع سیستم جملو ته ورته جملی د دریمی درجی مساوات لپاره ځیړو.
د دریمی درجی مساواتو نورمال فورم په د (۱۲ . ۳) سره سم په لاندې ډول دی.

$$x^3+a2x^2+a1x+a0=0 \qquad (12,56)$$

دا پولینوم

$$y=P3(x)=x^3+ a2x^2+a1x +a0 \qquad (12 , 57)$$

لاندې بنسټیز خویونه لري: که x ډیر لوي شي یعني ناپای په لور لاړشي $x \to \infty$ نو y هم د ناپای په لور ځي، ځکه چی دx^3 ارزښت نسبت د x^2 ارزښت ته په بیړه جګیږي او بیا همداسي و x ته هم . که a1 او a2 کمیز یا منفي هم وي نو y به د لویو x- ارزښتونو لپاره زیاتیز یا مثبت وي. داچي x^3 د کمیز x - ارزښت لپاره له صفر کوچنی دی، نو په همدې ډول

x->-o د y -> -o

لپاره .د دې ډول »پولوارزښت یا لیمس« لپاره کره تعریفونه بیا په ۱۹ برخه کی په پراخه توګه څیړل کیږي .د یو-x ارزښت) خورا کوچنی هم کیدی شي (شته چی د هغه

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره 0 < y وي اود یو x - ازښت) چی خورا لوي هم کیدی شي) ، د کوم لپاره چی y>0 دی. ددې دواړو ارزښتونو تر منځ باید د مساوات (۱۲ . ۵۶) یو ریښل اوبی پروت وي.

په ډیرو لاندې بیلګو کی سړی کړی شي چی په ساده ډول د جدول په مرسته ازمائیلي حلونه پیدا کړي، په عمومي توګه بیا هم باید وشمیرل شي.

ددې لپاره یو څو بیلګی:

بیلګه ۱۲ ، ۱۰ الف:

د پولینوم

$$y = x^3 - 3x^2 -4x + 12 \qquad (12, 58)$$

لپاره لاندې د ارزښت جدول لاس ته راځي

$$X = 0, 1, -1, 2$$

$$Y = 12, 6, 12, 0$$

په دې توګه یو ریښل صفرځاي پیدا شو

$$x_1 = 2 \qquad (12, 59)$$

په ۱۵-مه برخه کی به د هورنر شیما په بنسټ یو متود ورکړ شي ، دکومی له لار ې چی بیا د مټ(توان= لوړولو ته اړتیا نه پیدا کیږي او پولینومونو د فنکشن ارزښت ساده پیدا کیدی شي یا شمیرل کیدی شي

بیلګه ۱۲ . ۱۱ الف:

دا برابرون

$$2x^3 + 11x^2 + 12x - 9 = 0 \qquad (12,60)$$

لاندې نورمال فورم یا -بڼه لري

$$x^3 +(11 / 2) x^2 + 6x - 9/2 = 0 \qquad (12 . 61)$$

د صفرځاي پیداکولو لپاره دې د (۱۲ . ۶۰)مساوات لپاره د ارزښت جدول جوړ شي)ترتیب شي وشمیرل شي (، څکه چی هلته ماتونه منځ ته نه راځي:

$$X = 0, 1, 1/2$$

$$Y = -9, 16, \quad 0$$

نو

$$x_1=1/2 \qquad (12, 62)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مساوات (۱۲ . ۶۰) په همدې ډول (۱۲ . ۶۱) یو رییل صفرځای دی

بیلګه ۱۲ . ۱۲ الف:

د لاندې برابرون لپاره

$$x^3-9x^2+27x-27=0 \qquad (12, 63)$$

د ارزښت جدول

X = 0 , 1 , -1 ; 2 , -2, 3

Y = -27 , -8 , -64 , -1 , -25, 0

له لارې لاندې رییل صفرځاي لاس ته راځي

$$x = 3 \qquad (12, 64)$$

بیلګه ۱۲ . ۱۳ الف :

د برابرون

$$x^3 -9x^2 +27x -27 =0 \qquad (12, 65)$$

لپاره د جدول

X = 0 , 1

Y = -3 ; 0

سره لاندې صفرځاي لاس ته راځي

$$x = 1 \qquad (12, 66)$$

په ټولیزه توګه کیدی شي په کلکه څرګند شي ، چې د دریم درجی برابرونسیستم (۱۲ . ۵۶) لپاره تل یو رییل اوبی یاحل x1 شته دی. دا یو واقعیت دی چې بي له ښوونی یی لیکو، چې دا پولینوم (۱۲، ۵۷) بي له پاتي په لاینیز فاکتور (x - x1) ویشل کیدی شي او یو دومه درج پولینوم ترې لاس ته راځي:

$$(x^3+a2x^2+a1x+a0):(x-x1)=x^2+b1x+b0$$

له دې امله داسی دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۲ . ۴ :

هر دریمه درجه برابرون (۱۲ . ۵۶) کم له کمه یو رییل اوبی x1لري او دا لاندې باوري دي

$$P_3(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = (x - x_1)(x^2 + b_1x + b_0);.............(12,67)$$

دلته نو بیا نور د دریمي درجي مساواتو (۱۲ . ۵۶) دوه حلونه x2 او x3لاس ته راځي که څلوری برابرون یا مربع مساوات $x^2 + b1x + b0 = 0$ اوبی شي، او د جملو ۱۲ . ۱او ۱۲ . ۳ سره کیدی شي چی لاندې جمله فرمولبندې کړی شو

جمله ۱۲ . ۵ :

هر دریمه درجه برابرون دری اوبیونې یا اوبی x1 , x2,x3 لري او دا باور لري

$$x^3+a2x^2+a1x+a0=(x-x1)(x-x2)(x-x3) \quad (12, 68)$$

دلته دا لاندني حالتونه ممکن دي

۱ - دری رییل مختلف حلونه x1 , x2 او x3 شته دی (موجود دي)

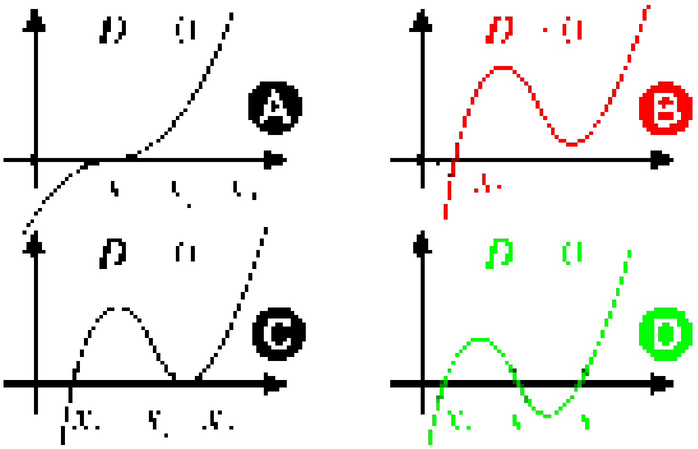
۲ - یو رییل حل x1 او ددې سره مختلف یو ډبل رییل حل x2=x3شته دی .

۳ - یو رییل درېګونی حل شته دی

$$x1 = x2 = x3$$

۴ - یو رییل حل x1 او یوه جوړه کونجوګیرت کملکس اوبیونې یا اوبي $x_2 = \overline{x_3}$ شته دی

دا لاندې څیره د ټولو راشنل فنکشنونو(۱۲ . ۵۷) تیپیکي تلنه د جملی ۱۲ . ۵ څلورو حالتونو کی ښايي



(c) ketabton.com: The Digital Library

د (۱۲ . ۶۸) فرمول په مرسته د بني اړخ په ځلولواو فاکتورونو(ځله وونو) پرتلی یا انډول له لارې کیدی شي د دریمی درجي پولینومو لپاره د وییتا جمله تصدیق کړي چی د جملی ۱۲ . ۲ سره سر خوري

جمله ۱۲ . ۶ :

که x1 , x2 او x3 د دریمي درجي برابرون (۱۲ . ۵۶) اوبیونې وي ، نو لاندې باوري دي

$$a0=-x1.x2.x3 \qquad (12,69)$$

$$a1=x1x2+x1x3+x2x3 \qquad (12,70)$$

$$a2=-(x1+x2+x3) \qquad (12,71)$$

جملی ۱۲ . ۴ په مرسته دې اوس د بیلګو ۱۲ . ۱۰ الف، تر ۱۲ . ۱۳ الف پورې د نورو دواړوx2 او x3 اوبیونې ولټول شي.

بیلګه ۱۲ . ۱۰ ب :

(۱۲ . ۵۸) برابرون د (۱۲ . ۵۹) برابرون له مخی x1 = 2 حل لري. سړی دا ځواب د ۱ . . ۴ ۲ . برخي له مخي د پارشل Partial -(ټوټه-(ویش په بنسټ لاس ته راوړي.

$$(x^3-3x^2-4x+12):(x-2)=x^2-x-6$$

$$..\underline{x^3+2x^2}$$

$$........-x^2-4x+12$$

$$.........\underline{-x^2+2x.........}$$

$$..............-6x+12$$

$$..............-6x+12$$

له x² - x - 6 = 0 څخه لاس ته راځي

$$x_{2,3}=1/2\pm\sqrt{1/4+6}=1/2\pm\sqrt{1/4+24/4}=1/2\pm 5/2,$$

$$x2=3, x_3=-2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته د جملی ۱۲ . ۵ لومړی حالت لرو، د لاندې مختلفو ریښو ځوابونو سره
، $x1 = 2 , x2 = 3 , x3 = -2$
او داسی دی:

$$x^3-3x^2-4x+12 = (x - 2)(x-3)(x + 2)$$

بیلګه ۱۲ . ۱۱ ب :

(۱۲ . ۶۰) برابرون د (۱۲ . ۶۲) برابرونونو له مخی اوبی
$x1 = 1 / 2$
لري او داسی دی:

$$(2x^3+11x^2+12x-9):(x-1/2)=2x^2+12x+18$$

او له $2x^2 + 12x + 18 = 0$

په همدې ډول یا (□) له $x^2 +6+9=0$ څخه لاس ته راځي

$$x_{2,3} = -3 \pm \sqrt{9-9} = -3 \Leftrightarrow x_2 = x_3 = -3$$

دلته د جملي ۱۲. ۵ دوم حالت مخ ته پروت دی د یوه ریښ حل او یو بل له دې حل مختلف ډبل ریښ حل سره، یعنی لرو $x1=1/2 , x2=x3=-3$ او داسی دی

$$x^3+(1/2)x^2+6x-9/2)=(x-1/2)(x+3)^2$$

بیلګه ۱۲ . ۱۲ب :

(۱۲ . ۶۳) برابرون د(۱۲ . ۶۴) له مخی $x1 = 3$ ځواب لري. دلته باور لري

$$(x^3-9x^2+27x-27):(x-3)=x^2-6x+9$$

له $x^2-6x+9=0$ څخه لاس ته راځي

$$x_{2,3} = 3 \pm \sqrt{9-9} = 3$$

نو دلته مو د جملی ۱۲ . ۵ د دریم حالت درې برابره ځواب مخ ته پروت دی یعنی

$$x_1 = x_2 = x_3 = 3$$

او داسی دی

$$x^3+-9x^2+27x-27=(x-3)^3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۲ . ۱۳ ب : (۱۲ . ۶۵) برابرون د (۱۲ . ۶۶) برابرونونو له مخی ځواب
x1 = 1 لري، او داسی دئ

$$(x^3 -5x^2 +17x-13):(x-1) = x^2-4x+13$$

له $x^2-4x+13 = 0$ څخه لاندې لاس ته راځي

$$x_{2,3} = 2 \pm \sqrt{4-13} = 2 \pm 3i$$

دلته د جملی ۱۲ . ۵ څلورم حالت د یوه ریيل حل او یوه جوړه کونیوګیرت کملکس ځوابونوسره مخ ته پروت دي.

$$x1 = 1 , x2 = 2+3i , x3 = 2 - 3i,$$

او دا باوري دي

$$x^3-5x^2+17x-13=(x-1)(x-2-3i)(x-2+3i) \qquad =(x-1)(x^2-4x+13)$$

۱۲ . ۴ د ریښی (جذر) برابرون

په ۱۲ . ۱ برخه کی د ریښی رابرون وڅیړل شو. او دا هم څرګند شو چی ځنګه د ریښی برابرون په ریشنل برابرونو اوله دې سره n- می درجي برابرونو بدليدلي شي٠ دا دې دلته د بیلګو په څير پاتي وي. یواځي ريیل اوبیونې به و څیړل یا و پلټل شي.

جمله ۱۲ . ۱۴ :
د ریښي برابرون

$$7+3\sqrt{2x+4}=16; ....(12,72)$$

ډیر ساده کیدی شي چی په لاینیزو برابرونونو واړول شي

$$3\sqrt{2x+4}=9; \sqrt{2x+4}=3; 2x+4=9; 2x=5; x=5/2; ....(12,73)$$

د ازمايلو لپاره که (۱۲ . ۷۳) برابرون په (۱۲ . ۷۲) برابرونونو کی خوندي شي، نو څرګندیږي چی دا دx-ارزښتونه په ریښتيا د مخه ورکړ شوي ارزښتونه پوره کوي

$$7+3\sqrt{5+4}=7+3.3=16$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۲ . ۱۵:

د ريښی برابرون یا مساوات

$$\sqrt{2x+19}+5=0;..........(12,74)$$

کيدی شي په ساده بڼه واړول شي

$$\sqrt{2x+19}=-5; 2x+19=5; x=3;.........................(12,75)$$

د ازمايني لپاره، که (۱۲ . ۷۵) د پيل په برابرون (۱۲ . ۷۴) کی خوندي شي، نو دا برابرون ورکوي

$$\sqrt{2x+19}=10\neq 0$$

له دې امله ارزښت x = 3 د برابرون (۱۲ . ۷۴) ځواب نه دی . په دې لاس ته راوړنو سره یا په دې تعقیب د پيل برابرون ځواب نه لري.) داسي کيدی هم نه شي، ځکه چي تل 19 + x 2>0 دی)۰

دا ساده بیلګی موږ ته را ښايي چي باید د ريښی مساواتو حل تل وازمایل شي چي ایا په ريښتوني دا ځواب دی او که نه، او دا په داسی ډول چي شميرل شوي ارزښتونه په پيل مساوات کی کيږدي چی ایا مساوات پوره کوي که نه . دا عمل یواځي د ازمایلو لپاره نه دی چي ګوندې تيك یا صحيح شميرنه شوې او که نه، بلکه دا ځواب یو اړيين سما نديز پل یا ضروری منطقي پل دی .

په ټوليزه توګه باور لري: که برابرون:

$$f(x)=g(x) \qquad (12,76)$$

په یو ې نوي بڼه واړول شي

$$F(x)=G(x) \qquad (12,77)$$

چی د برابرون دواړو لورو ته یا یو څه ور زيات شي ، یا تری کم شي، یاداوړه خواوې په یوه ګڼ ځل (ضرب) شي او یا وويشل شي (په دې حال کی باید پرويشونی صفر نه وي، ځکه چی په صفر ویشل اجازه نه لرو) که دواړه خواوی د ريښی لاندې راشي او یاپه توان پورته شي نود پيل برابرون (۱۲ ، ۷۶) هر ابی بدل شوي برابرون (۱۲ . ۷۷) ځواب هم دی ، مګر نه په ځټ (برعکس، مخامخ). کيدی شي چی اړول شوی برابرون (۱۲ . ۷۷) زيات ځوابونه ولري نسبت و پيل برابرون (۱۲ ، ۷۶) ته . دا به په لاندې بيلګه کي روښانه شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۲ . ۱۶:

د ریښي یا جذر برابرون یا مساوات

$$\sqrt{x}-\sqrt{x-1}=\sqrt{2x-1} \qquad (12 . 78)$$

څلوری یا مربع ته د جګولو له لارې دا بڼه غوره ګوي

$$x+(x-1)-2\sqrt{x(x-1)}=2x-1$$

x+(x-1)-2x(x-1)=2x-1 ,

نو $\sqrt{x(x-1)}=0$

په بیا څلوری یا مربع کولو سره سړی یو مربعمسوات لاس ته راوړي

x(x-1) = 0 (12 , 79)

چې لاندې اوبی یا ځواب لري :

$x_1 = 0, x_2 = 1$ (12 . 80)

دا د (۱۲ . ۷۹) اوبیونې دي، مګر باید و ازمایل شي چې ایا دا د (۱۲ . ۷۸) اوبیونې هم دي که نه.

د x = 0 لپاره په (۱۲ . ۷۸) کی دوه ریښی نه دي تعریف یا ددوه ریښو پيژند نه شته، نو x = 0 د (۱۲ . ۷۸) اوبیونه نه ده .

د x = 1 لپاره لاس ته راځي 1 - 0 = 1

له دې امله x = 1 د پیل بیلګی (۱۲ . ۷۸) یوګونی ځواب یا اوبی دی .

بیلګه ۱۲ . ۱۷:

د ریښی برابرون

$$\sqrt{x}.\sqrt{x-3}-\sqrt{x^2-4x+3}-\sqrt{2x^2-7x+3}=0,............(12,81)$$

کیدی شي چې په ورته ډول لکه (۱۲ . ۷۸) بڼه واړول شي:

$$\sqrt{x}.\sqrt{x-3}=\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{2x^2-7x+3} \Rightarrow$$

$$x(x-3)=(x^2-4x+3)+(2x^2-7x+3)+2\sqrt{(x^2-4x+3)(2x^2-7x+3)} \Rightarrow$$

$$-2\sqrt{(x^2-4x+3)(2x^2-7x+3)}=2x^2-8x+6$$

$$(x^2-4x+3)(2x^2-7x+3)=(x^2-4x+3)^2;.........(12.82)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا برابرون يا مساوات پوره دی، که $x^2-4x+3=0$ باور ولري، نو د لاندې لپاره

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-3} = 2 \pm 1, x_1 = 3, x_2 = 1, ...(12,83)$$

د ټولونورو x لپاره $x^2-4x+3|= 0$ دی ، او (۱۲ . ۸۲) کیدی شي چې په لاندې فاکتور وویشل شي:

$$2x^2- 7x + 3 = x^2 -4x + 3$$

$$x^2 - 3x = 0$$

$$x(x-3) = 0$$

$$x3 = 0, x4 = x1 = 3$$

او په (۱۲ . ۸۱) کی ځاي په ځاي کولو سره ازمایل کیږي، چی کوم له لاندې ارزښتونو

$$x_1 = 3, x_2 = 2, x_3 = 0$$

پیل برابرون ډکوي.(باوري کوي، پوره کوي)

د $x = 3$ لپاره باور لري:

$$\sqrt{3}.\sqrt{0} - \sqrt{9-12+3} - \sqrt{18-21+3} = 0$$

له دې امله $x = 3$ د پیل برابرون یا مساوات (۱۲ ۸۱) اوبی یا حل دی . د

$x2 = 1,$ او $x3 = 0$

لپاره ریښي پیژند نه لري یا تعریف نه دی، نو له دې امله د پیل برابرون (۱۲ . ۸۱)

اوبی حل $x = 3$ (12 . 85)

یواځني حل دی

۱۲ – تمرینونه

۱ – مربع مساوات

۱,۱- مربع مساواتدټاکلو ضریبونو سره

1.1.1. a) $x^2 - 4 = 0$ b) $3x^2 + 27 = 0$

c) $x^2 - 9x = 0$ d) $5x^2 = 125\,x$

1.1.2. a) $(x + \frac{1}{3})(x - \frac{1}{3}) = \frac{7}{12}$ b) $(x + \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2}) = \frac{5}{16}$

c) $(x - 6)(x + 5) = 0$ d) $(x - \sqrt{7})(x - \sqrt{5}) = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1.1.3. a) $x^2 - 6x + 8 = 0$ b) $x^2 + 4x + 2 = 0$

c) $x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = 0$ d) $x^2 + 27\frac{1}{12} = 10\frac{7}{12}\,x$

1.1.4. a) $3x^2 - 20 = x$ b) $7x^2 + 23x = 84$

c) $(43 + 10x)^2 + (66 + 10x)^2 = (79 + 14x)^2$

d) $(3x - 5)^2 - (2x + 5)^2 = 0$

1.1.5. a) $\frac{8-x}{2} - \frac{2x-11}{x-3} = \frac{x-2}{6}$ b) $3x - \frac{3x-10}{9-2x} = 2 + \frac{6x^2-40}{2x-1}$

c) $\frac{5x-1}{6x-9} - \frac{9x-4}{8x+12} - \frac{3x+8}{4x^2-9} = \frac{1}{2}$ d) $\frac{3}{x-2} - \frac{8}{4-3x} = \frac{19}{2x+1}$

۱ . ۲ – مربع مساوات د ناټاکلو ضریبونو سره

1.2.1. a) $x^2 - a^2 = 0$ b) $x^2 - ax = 0$

c) $x^2 + \frac{4}{3}ax + \frac{1}{3}a^2 = 0$ d) $x^2 + \frac{1}{2}bx - \frac{1}{2}b^2 = 0$

1.2.2. a) $8x^2 - 10bx - 3b^2 = 0$ b) $12x^2 - 34ax + 10a^2 = 0$

c) $16x^2 - 8ax + a^2 - b^2 = 0$ d) $ax^2 + bx + c = 0$

1.2.3. a) $a^2 - x^2 = (a - x)(b + c - x)$

b) $(x - a + b)(x - a + c) = (a - b)^2 - x^2$

c) $(a + bx)^2 + (ax - b)^2 = 2(a^2x^2 + b^2)$

d) $(x + a + b)(x - a + b) + (x + a - b)(x - a - b) = 0$

1.2.4. a) $ax^2 - (a^2 + 1)x + a = 0$ b) $abx^2 - (a^2 + b^2)x + ab = 0$

c) $a^2(a - x)^2 = b^2(b - x)^2$

d) $(a - x)^2 - (a - x)(x - b) + (x - b)^2 = (a - b)^2$

1.2.5. a) $x + \frac{1}{x} = \frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b}$ b) $x - \frac{1}{x} = \frac{a}{b} - \frac{b}{a}$

c) $\frac{a+x}{b+x} + \frac{b+x}{a+x} = \frac{5}{2}$ d) $\left(\frac{a-x}{x-b}\right)^2 = 8\left(\frac{a-x}{x-b}\right) - 15$

۱ . ۳ – مساوات سیتم، کوم مو مربع مساوتو ته لاربنبنودوي یا بیایي

1.3.1. a) $3x + 2y = 3$, $xy = 3$ b) $10x + y = 10$, $5x(15x + y) = 75$

c) $3x + 7y = 21$, $3x^2 - 7y = \frac{21}{2}$ d) $x^2 + xy + y^2 = 1372$, $2x - y = 2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1.3.2. a) $x + y = a$, $xy = b$ b) $xy = a$, $\frac{x}{y} = b$

c) $x^2 + y^2 = c^2$, $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$ d) $ax^2 - \frac{b}{y^2} = 2(a^2 - b^2)$, $bx^2 - \frac{a}{y^2} = a^2 - b^2$

۱ . ۴ – د n-مې درجې ځانګړي مساوات، چېپه مربع مساوات بیرته اړول کیدی شي

۱ . ۴ . ۱ – بې مربع مساوات د ټاکلو یا معلومو ضریبونو سره

a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ b) $(x^2 - 5)^2 + (x^2 - 1)^2 = 40$

c) $(x^2 - 10)(x^2 - 3) = 78$ d) $10x^4 - 21 = x^2$

۱ . ۴ . ۲ - بې مربع مساوات د ناټاکلو یا نامعلومو ضریبونو سره

a) $x^4 + a^4 + b^4 = 2a^2x^2 + 2b^2x^2 + 2a^2b^2$

b) $(a^2x^2 + b^4)(x^2 - a^2) = b^2(x^4 - a^4)$

c) $\frac{a^2b^2x^2}{a^3b + ab^3x^2} + \frac{ab - x^2}{x^2 - 1} = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2x^2}$

d) $\frac{(a-b)x^4}{a^2 - b^2} + \frac{4x^2}{a+b} = x^2 + 4$

۱ . ۴ . ۳ – د n-مې رجې مساوات د $a_0 = a_1 = \ldots = a_{n-3} = 0$ سره

a) $x^{10} + 6x^9 + 5x^8 = 0$ b) $\frac{5}{2}x^5 + 7x^4 = -20x^3$

c) $abx^8 - (a^2 + b^2)x^7 = -abx^6$ d) $ax^{22} - a^2x^{11} + a^2 - a = 0$

۱ . ۵ – لاندې مساوات هم د xاو هم د a پسې حل کړئ!

a) $x^2 + \sqrt{a}\,x - a = 0$ b) $x^2 - 2bx + 2(ab - \frac{1}{2}a^2) = 0$

c) $x^2 + 9ab = (a + b)(x + 2a + 2b)$ d) $(x + b)(x - b) = a(2x - a)$

۱ . ۶ . – شي شوالونه

۱ . ۶ شي سوالونه

۱ . ۶ . ۱ الف دوه ګڼونه ځان داسې نیسي لکه 1 : 3 . ددې ګڼونو د مربع زیاتون ۱۵۶۰ دی. دا ګڼونه څه نومیږي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) د درې یو په بل پسې ګڼونو د لوی ګڼ مربع دومره ده ، لکه د دوه کوچنیوګڼونو د مربعو زیاتونونه. دا ګڼونه څه نومیږي یا کوم دي؟

پ) د کوم مثبت ګڼ لسرځله د هغه د مربع څخه ۹۹۹ کوچنی دی؟

ت) مات 1/4 په دوه فاکتورونو a او b داسې تجزیه کړی، چې لاندې زیاتون $(a^2 + b^2)/(a^2 - b^2)$ یې لاس ته راشي.

۶ . ۲ . الف) په یوه برابر برقجریان کی مقاومت په دیرش اوم Ω 30 لوییږي، په کوم کې چی د برققوه په همغه د 220 V (وولټه) شپانونګ په پنځه امپیر (1,65A) کوچنی‌شي . مقاومت او برققوه څومره دي؟

ب) دوه سیخونه چی مقاومت یی Ω 60 یو له بل توپیر لري، چې یوه د غبرګ چالانولوعمومي مقاومت Ω 22,5 کړي. دواړه برخه مقاومتونه څومره لوی دي؟

۶ . ۳ . الف) یوه د بایسکلځغلونی لار چې ۲۲۵ کیلو متره اوږده ده، د یوه موادو موټر څخه په دریتیم ساعته لنډ وخت کې وهل کیږي،چې د موټر په منځني سرعت چې 26, 25 km/h نسبت و بایسکلځغلونکي ته د موادو موټر او بایسکل ځغلونکي سرعت او د وهلو وخت څومره دي؟

ب) د سپورت جشن کې یو سپورتي چې له A و B ته په 5km/h سرعت ځغلي، له خپل منډپیل څخه یونیم ساعت وروسته له یوه بایسکلسپورتي څخه وروسته کیږي، کوم چې له مخامخ کیدو، نیم ساعت وروسته B ته رسیږي، او سملاسي بیرته ګرځي او په همغه وخت کې A ته رسیږي په کوم کې چې ځغاستنی و B ته رسیږي، د $\overline{AB}$ کرښه څومره لري ده؟

پ) دوه ډبډبي ځغاستي یوبل باندې نیغ ولاړو سرکونو د څلورلاري په لور په ډبډبیو ځغلي. د لمړي سرعت ۵ متره په ثانیه کی، دوم څلور متره په ثانیه کی دوي له ۳ ثانیو وروسته یو ۳۵ متره لریوالی یو له بل لري، دوي یو

(c) ketabton.com: The Digital Library

له بل په سرچینه کې د څلور لارې څومره لرېوالی لروده، که لمړی له دوم ۴ متره ورته نژدې وو؟

ت) د ګاډي یو لاین د موټرځغاست سرك لمړی برخې سره غبرګ غزيدلی. د یوه موټر ځغاستي پیل کې د یو مخته راتلونکي ګاډي واټن ۲۲۵ متره لرې دی. کله دوه ماشینونه په همغه چګوالي دي، که موټرځغاستی منظم تعجیل او یو تعجیل د $10m/s^2$ کی لري، په داسی حال کی چی د ګاډی سرعت ثابت او $72\ km/h$ دی؟

ټ) په منځنی سرعت $v_m = 18km/h$ په ۶ بجو له لاپیځیږ ښخه د دیساو په لور بایسکل ښغلیدونکی په ۸ بجو ، په همغه وخت کی له دیساو ښخه د لاپیځیږ په لور راتلونکی بایسکل ښغاستی سره مخامخ کیږي. ورستنی ۱۰۰ دقیق د مخه دیساو ته راځي لکه دوم ولاپیځیږ ته. د دیساو او لاپیځیږ ترمنځ لرېوالی یا واټن څومره دی؟

۱ . ۶ . ۴ . الف) په ولاړنجیز دریڅګوډي کې ، کاتیتې څانونه داسې یوبل سره نیسي لکه 3:4 ، هیپوتینوزې ۵۰ سانتي متره ده ، کاتیتې څومره اوږدې دي؟

ب) د یوه ولاړکونجیز دریګوډي اړخونه څومره لوي دي ، که د دواړو کاتیتو زیاتون یې۱۷ سانتیمتره اود یوې کاتیتې او هیپوتینوزې زیاتون ۱۸ سانتي متره وي ؟

پ) د یوه سمکونجیز(ولاړکونجیز) دریګوډي کاتیتې څومره لویې دي، که د هغوي زیاتون ۴۲ سانتیمتره وي ، د دریګوډي هواردننه ۲۱۶ مربع سانتي متره وي ؟

ت) د یوه ولاړګوډي نیمی (قطر) ۳۵ سانتي متره اوږد دی، که د ولاړ ګوډي اوږد اړخ ۸ سانتي متره وغزول شي او لنډ اړخ ۶ سانتي متره وغزول شي، د نیمي اوږدوالی ۱۰ سانتیمتره لویږي. د سمکونجیز اړخونه څومره لوي دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

ت) که د مربع یوه خوا ۷ سانتي متره وغزوي او بل اړخ په همدې ارزښت لنډ کړي،نو مربع او سمکونجیز دواړه د هوارې دننه ۴۹۵۱ مربع سانتي متره لري.
د سم اړخیز اړخونه څومره لوي دي؟ (یا ولاړ اړخ)

ټ) د یوې ګردۍ وړانګه ۱۶ سانتي متره اوږده ده. په ګرډۍ کې دننه ځاي مربع اړخ څومره لوي دی؟ (یا څونډي مربع اړخ)

ج) د یوې ګردۍ نیمی باید څومره لوي، که په دننه منځشوې مربع اړخ ۱ سانتي متره د هغه د وړانګې څخه لوي وي؟

ح) که د یوې ګردۍ نیمی (قطر) ۳ سانتي متره لوي شي ،نو د ګردۍ هواره دوه برابره کیږي. د ګردۍ سرچینې نیمی څومره لویه ده؟

خ) د یوه نیمغونډي نیمی څومره دی، که د هغه د دیوال لویوالی ۳ سانتیمتره او او تشه کې یې ۵۰۱۶ مکعبسانتي متره وي؟

۲ – د درېمې او څلورمې درجې مساوات

2.1 a) $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$ b) $x^3 + x^2 - 5x - 84 = 0$

c) $3x^3 - x^2 - 9x + 3 = 0$ d) $x^3 + x - 2 = 0$

12.5 Übungsaufgaben 1

2.2. a) $4x^4 - 12x^3 + 7x^2 + 3x - 2 = 0$ b) $x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 6x = 0$

c) $x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 4x - 5 = 0$ d) $6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0$

۳ . ریښه مساوات:

ټول ارزښتونه x وشمیرئ، چې د لاندې مساااتو حلونه یا اوبیونې دي. د هرې پوښتنې د ټیکاوي لپاره ازماېښت وکړئ!

۳ . ۱ – ریښه مساوات د ټاکلو ضریبونو یا ځلوونو سره:

3.1.1. a) $\sqrt{x} = 3$ b) $\frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{2}{3}\sqrt{x} + 7 = 2\sqrt{x}$

c) $\frac{5}{3}\sqrt{15x} - \frac{3}{5}\sqrt{15x} - 11 = \frac{1}{3}\sqrt{15x}$

d) $\sqrt[3]{x} = 5$

3.1.2. a) $(3\sqrt{x} - 5)(5\sqrt{x} - 3) = 5(3x - 31)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

b) $(5\sqrt{x}-2)^2+(12\sqrt{x}-9)^2=(13\sqrt{x}-9)^2$

c) $\frac{5\sqrt{x}+12}{7\sqrt{x}+15}=\frac{4}{5}$ d) $\frac{2\sqrt{x}+3}{2\sqrt{x}-3}=7$

3.1.3. a) $\frac{\sqrt{x}-3}{7}-\frac{\sqrt{x}-25}{5}=7-\frac{2+\sqrt{x}}{4}$ b) $\frac{16-\sqrt{x}}{2}-\frac{10-\sqrt{x}}{3}=\sqrt{x}$

c) $\sqrt{x}+\sqrt{2x}=1$ d) $2\sqrt{x}-\sqrt{2x}=2+\sqrt{2}$

3.1.4. a) $10-\sqrt{x-2}=3$ b) $\sqrt{3x-5}+4=5$

c) $\sqrt[3]{7x-6}+6=10$ d) $4\sqrt[3]{5x-8}=3\sqrt[3]{9x+1}$

3.1.5. a) $9\sqrt{5x+1}=20+4\sqrt{5x+1}$ b) $\sqrt{7x+2}=\frac{5x+6}{\sqrt{7x+2}}$

c) $3\sqrt{4x-3}-\frac{10x}{\sqrt{4x-3}}=\frac{1}{\sqrt{4x-3}}$ d) $\frac{9x}{\sqrt{10x-9}}-\sqrt{10x-9}=\frac{2}{\sqrt{10x-9}}$

3.1.6. a) $\sqrt{9x^2-10x-55}=3x-5$ b) $x+1=\sqrt{2x^2+\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}}$

c) $17-4\sqrt{\frac{3x+5}{x-7}}=1$ d) $24-7\cdot\sqrt[3]{\frac{4x-1}{x-6}}=3$

3.1.7. a) $\sqrt{52-3\sqrt{5x+6}}=2\sqrt{10}$ b) $\sqrt{x+1-\sqrt{2x+3}}=1$

c) $\sqrt{37-7\sqrt{5x+4}}=4$ d) $\sqrt[4]{19-3\sqrt[3]{5x-9}}=2$

3.1.8. a) $\sqrt{9x-17}-3\sqrt{x-4}=1$ b) $2\sqrt{9x+4}-3\sqrt{4x-11}=1$

c) $\sqrt{x+9}-\sqrt{x+2}=\sqrt{4x-27}$ d) $\sqrt{9x+10}-\sqrt{x-1}=\sqrt{4x+9}$

3.1.9. a) $\sqrt{x+4}-\sqrt{x-8}+\sqrt{x-3}-\sqrt{x+13}=0$

b) $\sqrt{x+9}+\sqrt{x-12}=\sqrt{x}+\sqrt{x-7}$

c) $\sqrt[3]{9x+10}-\sqrt{3x+4}=0$ d) $\left|\sqrt{3x+7}\right|+\left|\sqrt{4-x}\right|=3$

3.1.10. a) $\frac{1}{1+\sqrt{1-x}}+\frac{1}{1-\sqrt{1-x}}=\frac{2x}{9}$ b) $\sqrt[3]{76+x}+\sqrt[3]{76-x}=8$

c) $\left(\sqrt[3]{x}-1\right)^2+\sqrt[3]{x^2}=\sqrt[3]{x}$ d) $\sqrt[4]{x^3}-2\sqrt{x}+x=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۳ . ۲ – رینه مساوات د نامعلومو ضریبونو سره

3.2.1. a) $\sqrt{x}=a$ b) $\sqrt[3]{x}=b$

c) $a-\sqrt[3]{x}=b$ d) $a\sqrt{x}-b=c\sqrt{x}-d$

3.2.2. a) $\sqrt{x-a}=b$ b) $\sqrt[3]{a-x}=b$

c) $\sqrt[4]{a^4+x}=a$ d) $\sqrt[6]{a^6-x}=b$

3.2.3. a) $(\sqrt{ax}+\sqrt{b})(\sqrt{ax}-\sqrt{b})=(a+1)(a-1)b$

b) $(a-\sqrt{x})\,(b-\sqrt{x})=(c+\sqrt{x})\,(d+\sqrt{x})$

c) $\dfrac{\sqrt{ax}-b}{\sqrt{ax}+b}=\dfrac{3\sqrt{ax}-2b}{3\sqrt{ax}+5b}$ d) $\dfrac{2a+3\sqrt{bx}}{3a+2\sqrt{bx}}=\dfrac{3b+2\sqrt{ax}}{2b+3\sqrt{ax}}$

3.2.4. a) $\sqrt{x}+\dfrac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$ b) $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{x}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}=\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{a}+\sqrt{x}}-\left|\dfrac{(x+a)^2}{a(x-a)}\right|$

c) $\dfrac{a+b\sqrt{x}}{a+b}=\dfrac{c+d\sqrt{x}}{c+d}$ d) $\dfrac{a+b\sqrt{x}}{a\sqrt{x}+b}=\dfrac{c+d\sqrt{x}}{c\sqrt{x}+d}$

3.2.5. a) $x+\sqrt{x^2-a^2}=a$ b) $x-\sqrt{ax(1+x)+1-x}=1$

c) $\sqrt{x+a}=a-\sqrt{x}$ d) $\sqrt{x+a^2}-\sqrt{x}=b$

3.2.6. a) $\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x}=\dfrac{b}{\sqrt{b-x}}$ b) $\sqrt{x+a}-\sqrt{5x-3a-4b}=\dfrac{2b}{\sqrt{x+a}}$

c) $\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a}=\dfrac{x+a-b}{\sqrt{x+a}}$

d) $\sqrt{3a-2b+2x}-2\sqrt{3a-2b-2x}=\dfrac{a+2b+2x}{\sqrt{3a-2b+2x}}$

3.2.7. a) $\dfrac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{a}{b}$ b) $\dfrac{\sqrt{3x^2-1}+\sqrt{3-x^2}}{\sqrt{3x^2-1}-\sqrt{3-x^2}}=\dfrac{a}{b}$

c) $\sqrt[3]{a+x}+\sqrt[3]{a-x}=\sqrt[3]{2a}$ d) $\sqrt[3]{a+x}+\sqrt[3]{a-x}=\sqrt[3]{c}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۳ ، ۳ – مساوات سیستمونه، چې ریښه مساوات خوندي لري

3.3.1 a) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=8$, $\sqrt{xy}=15$

b) $x+y=58$, $\sqrt{x}+\sqrt{y}=10$

c) $\sqrt{x-5}+\sqrt{y+2}=5$, $x+y=16$

d) $\sqrt{5-3x+x^2}+\sqrt{5-3y+y^2}=6$, $x+y=3$

3.3.2 a) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\dfrac{a}{b}$, $xy=(a^2-b^2)^2$

b) $\dfrac{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}=\dfrac{a}{b}$, $x^3-c^3=c^3-y^3$

c) $x\sqrt{x+y}=a$, $y\sqrt{x+y}=b$

d) $x\sqrt[3]{x^2+y^2}=a$, $y\sqrt[3]{x^2+y^2}=b$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۳ ترانسڅندنت برابرونونه یا ـ مساوات

لکه څنګه چی په ۱۲ . برخه کی دې ته ګوته نیول شوې وه، چی دلته یواځې هغه ترانسځندنت مساوات څېړل کیږي، کوم چی بیرته په الجبري مساواتو اړول کیدی شي.
دا بیرته په الجبري مساواتو اړول، لکه څنګه په ریښه مساواتوکی، په خوښه په بل شکل اړول کیږي او په داسي ډول دي لکه هملته:

د فرمول په اړولو(فورم بدلون یا بڼه بدلون) سره کوم ځواب له منځه نه ځي، خو کیدی شي چی اړولی فرمول زیاتې اوبیونې یا حلونه نسبت د پیل برابرون ته ولري. له دې امله باید د اړول شوي برابرون ټولې اوبیونې په پیل برابرون کی ځاي په ځاي یا کېښوول شي او وکتل شي چی کوم له دې د پیل مساوات حلونه هم دي

لکه څنګه په ریښه یي برابرونونو یا مساواتو کی ، دلته هم یواځی رېیل اوبیونې پلټل کیږي.

۱۳ . ۱ لوګاریتمي مساوات

د لوګاریتمي مساواتو او اکسپوننشل یا په جګ سماواتو د حل (اوبي) پیدا کولو لپاره اړیین یا ضرور(ضروري یا اړیین شرایط) دی، چی د یو عدد(ګڼ) aلوګاریتم، د b په بنسټ، معلوم کړو یا وڅیړو.

$$x = \log_b a; a > 0, b >, b \neq 1 ....(13,1)$$

د بنسټ $b = 10$ لپاره(lga) او د بنسټ b=e لپاره (ln a) کیدی شي (۱۳ . ۱)

(c) ketabton.com: The Digital Library

سيده د جبشميري له لارې پيداشي. په څټ يا برعکس د 10 =| e|= b لپاره برابرونونه په دې ډول اړول کيږي

$$x = \log_b a = \lg a / \lg b = \ln a / \ln b ....(13.2)$$

د لوګاريتمي مساواتو يو ساده ډول يا شکل (تيپ) دا دئ

$$l\,\text{og}_b\, x = c ....(13.3)$$

دا برابرون د (7. ۱) ، (7. ۲) له مخې لاندې ته ورته دئ:

$$x = b^c ....(13,4)$$

دا سی افاده هم د جبشميري سره شميرل کيدی شي.

بيلګه ۱۳ . ۱ $\log_2 x = 1,5; x = 2^{1,5} = 2.8284$:

په همدې ډول د (۱۳ . ۳) بڼې اوبيونه په لاندې ټوليز شوي شکل هم ساده دی

$$\log_b f(x) = c ....(13,5)$$

دلته (f(x يوه الجبري وبينه يا افاده ده، د (۱۳ . ۵) سره الجبري برابرون کټمټ (ورته) دئ

$$f(x) = b^c ....(13,6)$$

ټولې د (۱۳ . ۶) اوبيونې د (۱۳ . ۵) اوبيونې هم دي

بيلګه ۱۳ . ۲ : لوګاريتميز برابرون

$$\log_2 (x^2 + x + 6) = 3$$

دلاندې مساواتوسره کټمټ دي

$x^2+x+6=2^3=8$ (همداسی) ⇔ $x^2+x-2=0$

او لاندې اوبيونې لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}; x_1 = -2; x_2 = 1$$

یو د (۱۳ . ۵) ډول (تیپ) برابرون هم مخ ته لرو، که د هغه کیڼې لور (ارخ) ته یود لوګاریتم ریشنل لاینیز کمبینشن الجبري وییڼه یا افاده موجوده وي

$$r_1.\log_b g_1(x) + r_2.\log_2(x) + r_3.\log_b g_3(x) + ... = c.........(13,7)$$

دلته ځلوني ri راشنل ګڼونه دي. د لوګاریتم قوانینو (۷. ۷) ، (۷. ۹) کاروني یا استعمال څخه، ۷ برخه وګورئ، (۱۳ ، ۵) لاس ته راځي او دا د لاندې برابرونونو سره

$$f(x) = \{g_1(x)\}^{r_1}.\{g_2(x)\}^{r_2}.................................(13,8)$$

بیلګه ۱۳ . ۳:

لومړی له $\log_3(x - 1) + \frac{1}{2}\log_3 x - \frac{1}{2}\log_3(x-1) = 2$ څخه لاندې لاس ته راځي

$$\log [(x - 1)(\frac{x}{x-1})^{\frac{1}{2}}]$$

اوله دې څخه ریښه برابرون $\sqrt{x}.\sqrt{x-1} = 9$ ،

د کوم له څلوری یا مربع کولو څخه $x(x-1)=81$ یعني $x^2-x-81=0$

د لاندې ځواب سره

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{324}{4}} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{325}{4}} = \frac{1}{2} \pm (\frac{1}{2}).18.03;$$

$$x_1 = 9,515; x_2 = -8,515$$

تیك دا $x1 = 9,515$ پیل برابرون پوره کوي

. د $x=x2<0$ لپاره $\log x$ او په همدې ډول $\log(x-1)$ پیژند نه لري یا تعریف نه دي.

بیلګه ۱۳ . ۴:

له $\log_b(2x+3)=\log_b(x-1)-1$ څخه لاس ته راځي

$$\log_b[(2x+3)/(x-1)] = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او نور پسی $\frac{2x+3}{x-1} = b^1 = b$ پس

$2x+3=bx-b$
$b+3=x(b-2)$
$x=(b+3)/b-1)$

پیل وبینه یا افاده د $x>1$ لپاره موخه وره یا هدفمنده ده، یعني
که $1<(b+3)/(b-2)$) وي.
د $b>2$یعنی $b-2>0$ څخه لاس ته راځ $b+3 > b-2$
له دې لرو $-2<3$دا د ټولو b لپاره پوره دی
د. $b \le 2$ لپاره د $b+3 \le b-2$ $b+3 < b-2$ څخه $2 \le 3$ لاس ته راځي اودا د هیڅ b
لپاره باور نه لري .
له دې امله کره د $b > 2$ لپاره اوبی شته دی. د $b \le 2$ لپاره اوبیونه نه شته دی.

د لاندې لوګاریتمي تیپ برابرون هم کیدی شي په الجبري مساواتو بیرته واړول شي

$$F(\log_b f(x)) = 0 \qquad (13.9)$$

چیرته چی F او هم f الجبریزې وینې یا افادې دي. د بدلون کاروایي یا عملیه اجرا کوو

$$y=\log_b f(x).....................................(13,10)$$

او په لمړي پل کی الجبري برابرون اوبی کوو

$$F(y)=0 \qquad (13.11)$$

ددې اوبیونه ..$y1,y2,$ په (۱۳/۱۰) کی ږدو، نو د هر yi لپاره د تیپ (۱۳/۵)
لوګاریتمي مساوات لاس ته راځي:

$$\log_b f(x) = y_i; \quad i = 1,2,3,......... \qquad (13.12)$$

له دې څخه لاندې الجبري مساوات لاس ته راځي

$$f(x)=b^{y_i} \qquad (13.13)$$

ددې لپاره چی و ازمائیلی شو چی ایادا هم برابرون پوره کوي، نو ټول ددې برابرونونو
اوبیونې یا ځوابونه باید په پیل برابرون (۱۳/۹) کی کینوول شي یا ځاي په ځای شي،

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۳ . ۵ : برابرون $\log^2 x - \lg x - 2 = 0$ د سبستیځیوشن(بدلون) $y = \lg x$ سره په
څلوری برابرون $y^2 - y - 2 = 0$ بدلیږي .
د $y_1 = 2$ او $y_2 = -1$ ځوابونو سره
.له $\lg x = 2$ او $\lg x = -1$ لاس ته راځي

$$x_1 = 10^2 = 100 \text{ او } x_2 = 10^{-1} = \frac{1}{10}$$

دواړه ځوابونه د پیل برابرون ځوابونه دي.

بیلګه ۱۳ . ۶ :

له برابرون $(6/(\lg x + 1)) + (8/(\lg x - 1)) = 3$
د $x > 0$, مګر $(x \neq 1/10, x \neq 10)$ چې د اصلي ماتلاندې $(\lg x + 1)(\lg x - 1)$ سره
ځل شی، لاس ته ترې راځي

$$6(\lg x - 1) + 8(\lg x + 1) = 3(\lg^2 - 1)$$
$$, \quad 6\lg x - 6 + 8\lg x + 8 = 3\lg^2 x - 3$$
$$0 = 3\lg^2 x - 14\lg x - 5$$

او د بدلون $y = \lg x$ سره مو لاندې څلوری بڼې یا مربعفورم ته بیایي:

$$3y^2 - 14y - 5 = 0 \;,\; y^2 - (14/3)y - 5/3 = 0$$

د لاندې ځوابونو سره

$$y_{1,2} = \frac{7}{3} \pm \sqrt{\frac{49}{9} + \frac{15}{9}} = \frac{7}{3} \pm \frac{8}{3};\; y_1 = lox_1 = 5;\; y_2 = \lg x_2 = -\frac{1}{3}$$

$$x_1 = 10^5;\; x_2 = x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{10}}$$

دواړه ارزښتونه پیل مساوات پوره کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که په یوه برابرون کی لوګاریتمونه د مختلفو بنسټونو b سره رامنځ ته شي، نو کیدی شي د (۱۳ . ۲) په مرسته په همغه برابر بنسټ واړول شي

بیلګه ۱۳ . ۷ :

له $\log_2(x-1) + \log_4(x-1) - 1 = 0$

څخه دلاندې برابرون په مرسته لاس ته راځي:

$$\log_4(x-1) = \frac{\log_2(x-1)}{\log_2 4} = \frac{1}{2}\log_2(x-1),$$

$$\log_2(x-1) + \frac{1}{2}\log_2(x-1) - 1 = 0,\ \log_2(x-1) = \frac{2}{3},\ x-1 = 2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4},$$

$$x = 1 + \sqrt[3]{4}.$$

دا ارزښت د پیل برابرون اوبی یا ځواب هم دی:

$$\log_2\sqrt[3]{4} + \log_4\sqrt[3]{4} - 1 = \frac{1}{3}\log_2 4 + \frac{1}{3}\log_4 4 - 1 = \frac{1}{3}\cdot 2 + \frac{1}{3} - 1 = 0.$$

۱۳ . ۲ اکسپوننشل – یا په جګ برابرونونه

ساده اکسپوننشل برابرون(مساوات)

$$a^x = b; a > 0, a \neq 1, b > 0 \ldots\ldots\ldots\ldots(13{,}14)$$

کیدی شي چی د لوګاریتم نیولو سره سملاسي حل شي(ځواب شي)

$$x = \log_a b = \lg_b / \lg_a = \ln b / \ln a \qquad (13,15)$$

لاندني برابرونونه په ساده ډول په (۱۳ ، ۱۴) ډول (رقم (تیوپ) برابرونونو باندې اړول کیدی شي.

بیلګه ۱۳ . ۸:

$$2^x + 3^{x+2} - 2^{x+2} - 3^{x+1} = 0.$$

$$2^x(1-2^2) + 3^x(3^2-3) = 0,\ \text{bzw.}\ 6\cdot 3^x = 3\cdot 2^x,\ \text{bzw.}\ \left(\frac{2}{3}\right)^x = 2,$$

$$x = \frac{\lg 2}{\lg\frac{2}{3}} = \frac{\lg 2}{\lg 2 - \lg 3} = -1{,}7095.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که په (۱۳ . ۱۴) د الجبري وییني یا افادي(f (x اکسپوننتونه یاجګګنونه وي، نو:

$$af(x)=b, a>0, a|=1, b>0 \qquad (13 . 16)$$

په دې ډول د لوګاریتمولو له لارې یو الجبري برابرون لاس ته راځي

$$f(x)=\log_a b ....(13,17)$$

د کومو ځوابونه چې د) ۱۳ . ۱۶ (ځوابونه هم دی.

بیلګه ۱۳ . ۹ : مساوات $2^{x^2+x-4} = 4$

مو لاندې ځلوری برابرون یا مربع مساوات ته بیایي (لاربنودوي)

$$(x^2+x-4)=\log_2 4 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + x - 6 = 0$$

د $x_1 = 2 , x_2 = -3$ ځوابونوسره ، کوم چې د پیل برابرون اوبیونې یا ځوابونه هم دي۰

بیلګه ۱۳ . ۱۰ :

په برابرون $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^{x+1}$ کی د یوه پوتنځ بنسټ د بل پوتنځ د بنسټ په څټ ارزښت

دی. له دې امله باور لري

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x+1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$$

له دې څخه لاس ته راځي

$$x_1 + 1 = -3 , x_2 = -4$$

بیلګه ۱۳ . ۱۱ : په مساوات $16^{(3^x)} = 4^{(6^x)}$

کې کیدی شي چې ناپیژندونکی د اکسپوننت یا په جګ څخه د دوه واره لوګاریتمولو له لارې لاس ته راشي (راحل شي):

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$3^x \cdot \lg 16 = 6^x \cdot \lg 4 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{6}\right)^x = \frac{\lg 4}{\lg 16} \Leftrightarrow x \cdot \lg 0{,}5 = \lg \frac{\lg 4}{\lg 16} = \lg \frac{2\lg 2}{4\lg 2},$$

$$x \cdot \lg 0{,}5 = \lg 0{,}5 \quad \text{یا oder} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2},$$

$$x = 1 \qquad x = 1.$$

بیلګه ۱۳ . ۱۲ : $7\sqrt[x]{22} - 15\sqrt[x]{25} = 0$

یو د تیپ یا ډوی مساوات دي، ځکه چې باور لري

$$\frac{\sqrt[x]{22}}{\sqrt[x]{25}} = \frac{15}{7} \Leftrightarrow \sqrt[x]{\frac{22}{25}} = \frac{15}{7} \Leftrightarrow \left(\frac{22}{25}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{15}{7}$$

او له دې امله

$$\frac{1}{x} = \frac{\lg \frac{15}{7}}{\lg \frac{22}{25}} \Leftrightarrow x = \frac{\lg 22 - \lg 25}{\lg 15 - \lg 7} = 0{,}1677.$$

که د مساوات په کیڼ اړخ د اکسپوننشل افادو څلونه او یا ویشونه هم وي، د مختلفو بنسټونو او مختلفو الجبري اکسپوننتونو سره، کیدی شي چې د لوګاریتمولو له لارې الجبري مساوات لاس ته راشی.

له

$$\frac{a_1^{f_1(x)}.a_2^{f_2(x)}........}{b_1^{g_1(x)}.b_2^{g_2(x)}........} = c; ....(13,18)$$

څخه لاس ته راځي:

$$f_1(x)\lg a_1 + f_2(x)\lg a_2 + ... - g_1(x)\lg b_1 - g_2(x)\lg b_2 - .... = \lg c \qquad (13 . 19)$$

که یو مساوات مو مخ ته پروت وي، په کوم کی چې د یوه اکسپوننشل افادې یوه الجبري وپینه یا افاده F د الجبري اکسپوننت(f(x سره رامنځ ته شي

$$F(a^{f(x)}) = 0 ; ....(13,20)$$

نو دا بدلونه کوو

$$y = a^{f(x)} \qquad (13 . 21)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د برابرون

$$F(y) \qquad (13.22)$$

د ټولواوبیونو $y_1, y_2, y_3;$............... لپاره باید

$$a^{f(x)} = y_i; i=1,2,3....... \qquad (13.23)$$

په همدې ډول

$$f(x) = \log_a y_i \quad ; i = 1, 2, 3 .... \qquad (13.24)$$

اوبی شي

بیلګه ۱۳ . ۱۳:

برابرون $3^{2x}+3^x = 2$ کیدی شي چی د بدلون $y = 3^x \, (y^2 = 3^{2x})$ سره په څلوری

برابرون یا مربع مساوات $y^2+y-2=0$ بیرته واړول شي. لاس ته راځي

$$y_{1.2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{8}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}; y_1 = 3^x = 1; y_2 = 3^x = -2$$

له دې څخه لاس ته راځي

$$x_1.\lg 3 = \lg 1 = 0, \; x_1 = 0$$

دا برابرون $x_2.\lg 3 = \lg(-2)$ اوبیونه نه لري

بیلګه ۱۳ . ۱۴ :

په برابرون

$$\sqrt{e^{x^2-1}} - \sqrt{e^{x^2-1}-1} = \sqrt{2e^{x^2-1}-1} ....(13,25)$$

کې داسی بدلوو:

$$y = e^{x^2-1} ....(13,26)$$

او لاس ته راوړو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sqrt{y}-\sqrt{y-1}=\sqrt{2y-1};..............................(13,27)$$

له دې څخه د مربع کوولو له لارې لاس ته راځي:

$$y+y-1-2\sqrt{y(y-1)}=2y-1\Rightarrow -2\sqrt{y(y-1)}=0 => y(y-1)=0$$

$$y_1=0; y_2=1$$

تیك $y_2=1$ (۱۳ ، ۲۷) پوره کوي. له دې امله

$$e^{x^2-1}=1;..(13,28)$$

حل اوبی . د لوګاریتمولو څخه تعقیبیږي:

$x^2-1=\ln 1=0,$

$x1 = 1 , x2 =-1$

دواړه ارزښتونه پیلبراورن پوره کوي٠

برسیره پر دې باید وښوول شي، چې په برخی ۱۳ . ۱ او ۱۳ ۲ کی انځور شوي متودونو سره یوه د مساواتو ټوله لړی حل کیدی شي، په کوم کی اکسپوننشل افادې او لوګاریتم یوځاي رامنځ ته کیږي.

بیلګه ۱۳ . ۱۵ :

له $2^{(\ln^2 x-\ln x+1)}=8$ څخه د بیلګي په توګه د بنسټ 2 لوګاریتموولو له لارې لاس ته راځي

$\ln^2 x-\ln x+1=\log_2 8 = 3$

که کیږدو $y = \ln x$ ، نو دا څلوری برابرون یا مربع مساوات $y^2-y-2=0$ لاس ته راځي،د ځوابونو

$y1 = -1 , y2 = 2$

سره او له دې بیا لاس ته راځي:

$\ln x=-1 , \ln x=2, x1=e-1=1/e , x2=e^2$

۱۳ . ۳ ګونومتریکي- یا کونجکچ برابرون

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګونومتري ساده برابرون لاندې څیره لري

$\sin x=a , \cos x=a \quad (13 . 29)$

$\tan x=a , \cot x=a, \quad (13 . 30)$

دلته فقط دواړه لومړي برابرونونه (۱۳ . ۲۹) ځوابونه لري ، که $-1 \le a \le 1$ باور ولري، نور ارزښتونه sin x او cos x نه شي غوره کولی(پرتله برخه ۶ . ۳) د جبشمیرني سره د تکمو یا ګوټکونو په پرلپسی د (۱۳ . ۲۹) همداسی (۱۳ . ۳۰) یو ځواب لاس ته راځي

د(۱۳، ۲۹) لپاره

a F sin a F cos

د (۱۳،۳۰) لپاره

a F tan a 1/x tan

دا چي tan x او cotx پریودې همداسی 180°لري او په یوه اینتروال کی چي اوږدوالی همداسی 180°لري د(۱۳ ۳۰) ټیك یو ځواب پروت دی، لاندې جمله صدق کوي

جمله ۱۳ . ۱ :که x0 د(۱۳ . ۳۰) یو ځواب وي) چی د بیلګي په توګه د جبشمیرنی په مرسته لاس ته راځي)، نو د (۱۳ . ۳۰) د لاندې بڼی ټول ځوابونه تر لاسه کوو

$$x_k = x_0 + k\pi = x_0 + k.180°; k = ...-3,-2,-1, 01, 2, 3,...;..........(13,31)$$

په همدې ډول دې دلته هم د هندسی برخه په پام کی وي. چی د هغو له مخې په (۱۳ ، ۳۱) کی د بیلګي په توګه باور لري

$$x_k = \frac{\pi}{6} + k\pi = 30^{o} + k.180^{o}$$

د کونجونو فنکشنونه sin x او cos x پریودې(تل بېرته راګځېدنه یا دوران)

$$2\pi = 380°$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لري. مساوات (۲۹.۱۳) ددې اوږدوالی اینتروال کی دوه حلونه لري. که چیرته د جبشمیرني سره یوه اوبیونه x_0 پیداشي، نو د sin x = a په حالت کی $x=-x_0$ هم یو حل دی، او $x=-x_0$ د cos x = a په حالت کی یو بل اوبی

یا حل دی. پس لرو:

جمله ۱۳ . ۲ : که x0 د (۱۳ ، ۲۹) یو هغه اربیونه یا حل وي، چی د بیلګي په توګه په جبشمیروني لاس ته راځي، نو د sin x = a ټول حلونه په لاندې ډول لاس ته راځي

$$x_k = x_0 + 2k\pi = x_0 + k.360°; k = ...-3,-2,-1,0,1,2,3,....; ....(13,32)$$

$$\bar{x} = \pi - x_0 + 2k\pi = 180° - x_0 + k.360°; ....(13,33)$$

او د cos x = a ټول حلونه په لاندې ډول لاس ته راځی

$$x_k = x_0 + 2k\pi = x_0 + k.360°; k = ...-3,-2,-1,0,1,2,3,....; ....(13,34)$$

$$\bar{x} = -x_0 + 2k\pi = -x_0 + k.360°; ....(13,35)$$

بیلګه ۱۳ . ۱۶: د مساوات sin x = 0,23910 لپاره د جبشمیرني سره لاندې حلونه لاس ته راځي: (په درجه کچ یا ګراد اندازه) x0 =13,833427º
(په لینده کچ)0,24143 = 0,017453. 3,833427
د) ۱۳ . ۳۲ (،) ۱۳ ، ۳۳ (له امله په لاندې سره ټولې اوبیونې راکړ شوي دي

$$x_k = 13,833427 + k.360° = 0,24143 + k.6,28318,$$

$$\bar{x}_k = 166,16657° + k.360 = 2,9001 + k.6,28318.$$

بیلګه ۱۳ . ۱۷ : د برابرون cos x = -0,682000 اوبیونه د جبشمیروني سره مومو

x0 = 133,00013º = 133º = 2,32125.

د (۱۳ ، ۳۴) او (۱۳ . ۳۵) له مخی ټول حلونه په لاندې ډول لاس ته راځي

$$x_k = 133° + k.360° = 2,32125 + k.6,28318,$$

$$\bar{x}_k = -133° + k.360° = -2,34125 + k.6,28318$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۳ . ۱۸:

د برابرون $\tan x = -\sqrt{3} = 4,843000$ حل په جبشمیرني پیداکوو

$x_0 = -59,999988° = -60° = -1,04718$

له دې امله د) ۱۳ . ۳۱ (له مخې ټول حلونه په لاندې ډول لاس ته راځي

$x_k = -60° + k.180° = -1,04718° + k.3,14159$

بیلګه۱۳ . ۱۹:

د برابرون $\cot x = 4,843000$ ټولې اوبیونې یا حلونه د جبشمیرني سره داسی

$x_0 = 11,666677° = 11,67° = 0,203675$

لاس ته راځي. په دې توګه د (۱۳ . ۳) له مخې ټول حلونه په لاندې ډول لرو:

$x_k = 11,67° + k.180° = 0,203675 + k.3,14159$

بیلګه ۱۳ . ۲۰ : مساوات $\sin x = \sqrt{2}$ د $1 < 2$ له امله اوبیونه ل نه لري .

د ګونومتري مساواتو نور تیپونه یا ډولونه، کوم چې تراوسه په څرګندومتودو یا لارو ځوابوړ دي، لاندې بڼه لري

$$\sin f(x) = a , \quad \cos f(x) = a \qquad (13 . 36)$$

$$\tan f(x) = a \quad , \cot f(x) = a \qquad (13 . 37)$$

دلته کیدی شي چې $f(x)$ الجبري او یا ترانسځیندنته افاده وي‌که بدل (سوبستیتوتي) شي

$$y=f(x) \qquad (13.38)$$

نو لاندې مساواتونه لاس ته راځي

$$\sin y= a , \cos y = a \qquad (13 . 39)$$

$$\text{Tan } y= a , \cot y = a \qquad (13 . 40)$$

دا کیدی شي د جملی ۱۳ . ۱ سره سم اوبی کړای شي. ددې اوبیونې یا حلونه دې $y3, y2, ,y1 , ...$ وي .

د (۱۳ ، ۳۷) سره سم د $f(x) = yi , \ i = 1,2,3,...$ ټولې اوبیونې یا حلونه لاس ته راځي ددې لپاره دې بیلګه ورکړ شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۳ . ۲۱: $\sin(x-120°)/3=1/2$

د سبستیچیوشن یا بدلون $y=(x-120°)/3$ سره لاس ته راځي $\sin y=1/2$ د لاندې اوبیوني (حل) سره

$$y_k = 30° + k.360° \,,\; k = ...,-3,-2,-1,\, 0,1,2,3...$$

$$\overline{y}_k = 150° + k.360°$$

ټول د $(x - 120°)3 = y_k$, $(x - 120°)/3 = y_k$ اوبىوني (حلونهو پـه توګه لاس ته راځي:

$$x_k = 3y_k + 120 = 90°+3k.360°+120° = 210° + 3k.360°$$

$$\overline{x}_k = 3y_k + 120° = 450° + 3k \,.\, 360° + 120° = 570°+3k.360°$$

د ګونومتري فنکشنونو یو بل تیپ یا ډول ، له لاندې ځخه لاس ته راځي

$$f(\sin x,\cos x,\tan x,\cot x,\sin 2x,\cos 2x,\tan 2x,\cot 2x,$$
$$\sin 3x,\cos 3x,\tan 3x,\cot 3x,\, ...) \qquad (13\,.\,42)$$

دلته که د بیلګي په توګه بدل شي

$$y = \sin x \qquad (13\,.\,43)$$

د ۴ . ۵ برخی تریګونومتري فرمولونو په مرسته ټول په (۴۲ ، ۱۳) رامنځ ته شوي کونجفنکشنونه په y سره افاده کولی شو:

$$\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x} = \pm\sqrt{1-y^2}\,,$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{y}{\pm\sqrt{1-y^2}}\,, \qquad \cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\pm\sqrt{1-y^2}}{y}\,, \qquad (13.44)$$

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x = \pm 2y\sqrt{1-y^2}\,,\; \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1-2y^2$$ (usw. او داسې نور

له دې سره برابرون (۴۲ . ۱۳)، پهy ، یو برابرون بدلیږي:

$$F(y) = 0 \qquad (13\,,\,45)$$

دا دې په همغه ډول حلیدونکي وي او حلونه دې ....y1 , y2 .y3 وي. نو بیاد(۱۳.۴۳)سره مناسب لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sin x = y_i, i=1,2,3... \quad (13.46)$$

اوبی کړي او د ټولو اوبیونو سره، کوم چې په (۴۲ . ۱۳) کي ښول شي ، وازمایل شي، چې ایا دا هم پوره کوي، که نه په (۴۲ . ۱۳) کیدی د x په ځاي یوه افاده g(x) هم ولیکلی شي.

$$f(\sin g(x), \cos g(x), ...) = 0 \quad (13.47)$$

نو بیا سړی بدلوي

$$y = \sin g(x) \quad (13.48)$$

د پورته متود تشریح لپاره په لاندې ډول دوه ساده بیلګي ورکول کیږي

بیلګه ۱۳ . ۲۲:
برابرون

$$\sin x + \cos x = 1 \quad (13.49)$$

د (۴۲ . ۱۳) ، (۴۴ . ۱۳) سره ځان په رینه ببرابرون بدلوي

$$y \pm \sqrt{1-y^2} = 1 <=> \pm \sqrt{1 - y^2} = 1-y <=> 1-y^2 = 1 + y^2 - 2y \quad (13.50)$$

$$<=> 0 = 2y^2 - 2y = 2y(y-1)$$

$$y_1 = 0 , y_2 = 1 \quad (13.51)$$

اوس دې په یاد شي ، چې د y2=1 لپاره برابرون (۵۰ . ۱۳) او له دې سره سم برابرون (۴۹ . ۱۳) تل پوره دي. د دې په څېر یا خلاف y1 فقط د (۵۰. ۱۳) حل دی ، که د
رینبی له مخه زیاتیز یا مثبت نخښه وي. دا حالت یوائې هلته مخ ته پروت دی، چې cos x>0وي.

دا هلته هم پام ته راځي، که د برابرون (۵۱ . ۱۳) سره برابرون (۴۶ . ۱۳)حل یا اوبی شي او
حل یا اوبونه یی په (۴۹ . ۱۳) کی کیښول شي:

$$\sin x = y_1 = 0 , x_k = k\pi ; \; k=...-3,-2,-1,0,1,2,3... \quad (13.52)$$

$$\sin x = y_2 = 1 , x_k = \pi/2 + 2k ; \; k = ..,-3,-2,-1,0,1,2,3,... \quad (13.53)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که (۱۳ . ۵۲) په (۱۳ . ۴۹) کېښوول شي، نو لاس ته راځي:

د جوړه k لپاره $\sin x_k + \cos x_k = \sin k\pi + \cos k\pi = 0 + 1$

د جوړه k لپاره $\sin x_k + \cos x_k = \sin k\pi + \cos k\pi = 0 - 1$

د پیلمساوات د زیاتځله حلونه یواځي جفت ګڼونه دي($x\pi = 2k\pi$) که(۱۳ . ۵۳) په (۱۳ . ۴۹) کېښوول شي، نو لاس ته راځي

$\sin x_k + \cos x_k = \sin(\pi/2 + 2k) + \cos(\pi/2 + 2k) = \sin\pi/2 + \cos\pi/2 = 1 + 0 = 1$

له دې وروسته ټول xk پیلبرابرون پوره کوي .

نو د (۱۳ . ۴۹) ټولې اوبیوني په لاندې بڼه لاس ته راځي

$x_k = 2k\ ,\ x_k = \pi/2 + 2k\ ;\ k = ..-3,-2,-1,o,1,2,3,...$ (13 . 54)

بیلګه ۱۳ . ۲۳ : د برابرون $\cos x + \cos 2x = 0$ (13.55)

سره کیدی شي د ریښی مساوات څخه لار واړوو یت تیرشو. که چیرته $y = \cos x$ بدل کړي. د

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = y^2 - (1 - y^2) = 2y^2 - 1 \qquad (13.57)$$

له امله له څخه (۱۳،۵۵) مربع مساوات لاس ته راوړو.

$$2y^2 + y - 1 = 0 \qquad (13.58)$$

د دې حل سره : $y_{1;2} = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{8}{16}} = -\frac{1}{4} \pm \frac{3}{4},$

$$y_1 = \frac{1}{2}\ ,\quad y_2 = -1. \qquad (13.59)$$

په (۱۳ . ۵۶) کې ایښوولو له لارې لاس ته راځي

$$\cos x = y_1 = \frac{1}{2}\ ,\quad x_k = 60° + k \cdot 360° = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,$$

$$\overline{x}_k = 300° + k \cdot 360° = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, \qquad (13.60)$$

$$\cos x = y_2 = -1,\quad \overline{\overline{x}}_k = 180° + k \cdot 360° = \pi + 2k\pi, \qquad (13.61)$$

$$x = \begin{Bmatrix} 60° \\ 180° \\ 300° \end{Bmatrix} + k \cdot 360° = \begin{Bmatrix} \frac{\pi}{3} \\ \pi \\ \frac{5\pi}{3} \end{Bmatrix} + 2k\pi. \qquad (13.62)$$

تمرینونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټول ارزښتونه x وشمیرئ، چې لاندې برابرونونه پوره کوي! پام دې وي، چې د هرې پ،ښتنې سره یې ازمایل یا ازماېښت اړینده.

۱ - لوګاریتمي مساوات یا برابرونونه

1.1. a) $\log_4 (x+1) = -3$ b) $4 - 3\lg 2x = 10$

c) $\lg \sqrt{2x} = 1{,}314$ d) $\ln (x-1)^2 = 2$

1.2. a) $\lg (2x+5) - \lg (3x+1) = 2$ b) $\lg 4x + \lg 2x + \lg x = 6$

c) $\frac{1}{3}\ln x^6 = \frac{1}{2}\ln 81$ d) $\lg (x-1)^2 = 6 \lg 2$

1.3. a) $\lg (x-1) + \lg 3 = \lg (x^2 - 1)$

b) $\lg (x+1)^2 = \lg 2 + \lg (x+1) + \lg (x-1)$

c) $\lg x - \lg 4 = \lg 35 - \lg (x+4)$

d) $\lg (x-2) - \frac{1}{2} \lg 4 = \frac{1}{3} \lg 125 - \lg (x+1)$

1.4. a) $\lg x + \lg (x+1) + \lg (x-1) = \lg 24$

b) $\lg 3 + 2 \lg x = \lg (4 + x^3)$ c) $\lg (152 + x^3) - 3 \lg (x+2) = 0$

d) $2 \lg^2 x^3 - 3\lg x - 1 = 0$

1.5. a) $\lg x + \lg (a - \frac{1}{a}) = \lg (1 - \frac{1}{a}) + \lg (1 + \frac{1}{a})$

b) $\lg (ax) - \lg a + \lg \frac{b}{a} = \lg b + \lg \frac{x}{a}$

c) $\lg x - \lg \frac{x}{abx - 1} = \lg (a-1) + \lg (a+1)$

d) $\log_a (2x+1) = \log_a (x-1) + 1$

1.6. a) $\frac{10}{\lg x - 2} - \frac{5}{\lg x + 1} = 4$ b) $\frac{1}{\lg x + 1} - \frac{3}{\lg x - 3} = 2$

c) $\frac{2}{\log_2 x + 1} - \frac{1}{\log_2 x - 5} = 1$ d) $\frac{1}{5 - \lg x} + \frac{2}{1 + \lg x} = 1$

1.7. a) $\lg (x^2 + 1) = 2 \lg^{-1} (x^2 + 1) - 1$ b) $(\log_5 x - 2) \log_5 x = 25^{\log_5 \sqrt{3}}$

c) $\lg^2 x^3 - 10 \lg x + 1 = 0$ d) $\sqrt{\lg(1-x)} + 5 \lg (1-x) = 6$

1.8. a) $2\lg \lg x = \lg (3 - 2 \lg x)$ b) $\log_2 (x - 14) = 1 + \frac{1}{2} \log_2 (3x - 26)$

c) $4 \log_3^3 5x - 7 \log_3 15 x + 7 = 0$ d) $3 \lg^2 x^2 - \lg x - 1 = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1.9. a) $x^{\lg x+2} = 1000$ b) $x = 10^{1-0,25 \lg x}$

c) $x^{\log_5 (5x) - 4} = 625$ d) $x^{\log_a x} = a^2 x$

1.10. a) $x \lg \sqrt[5]{5^{2x-8}} - \lg 25 = 0$ b) $\log_2 (4 \cdot 3^x - 6) - \log_2 (9^x - 6) = 1$

c) $\log_2 (9 - 2^x) = 10^{\lg (3-x)}$ d) $x (\lg 5 - 1) = \lg (2^x + 1) - \lg 6$

1.11. a) $\log_2 [2 + \log_3 (x + 3)] = 0$ b) $\log_5 [\log_2 (\log_4 x)] = 0$

c) $2 \log_x 27 - 3 \log_{27} x = 1$ d) $\dfrac{\lg x}{\lg (x+1)} = -1$

۲ ـ اکسپوننشل مساوات

2.1. a) $(a^{x-2})^{x+2} = (a^{x+3})^{x-4}$ b) $a(a^{x-3})^{x+2} = a^{3x+5}(a^x)^{x-6}$

c) $\sqrt[3]{a^{2x+9}} = \sqrt[4]{a^{3x+5}}$ d) $\sqrt[x-2]{a^{11-x}} = \sqrt[9-x]{a^{x+3}}$

2.2. a) $10^{5x} = 3^{10}$ b) $0,375^x = 2576$

c) $\sqrt[x]{6,325} = 1500$ d) $\sqrt[x]{10,27} = \sqrt[4]{5}$

2.3. a) $\left(\frac{3}{4}\right)^{2x-3} = \left(\frac{4}{3}\right)^{3x+5}$ b) $\left(\frac{6}{7}\right)^{3x+10} = \left(\frac{7}{6}\right)^{2x-3}$

c) $\left(\frac{3}{5}\right)^{2x+1} = \left(\frac{5}{8}\right)^{3x+4}$ d) $16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3x-1} = 27 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}$

2.4. a) $\left(\frac{1}{100}\right)^{\frac{1}{x}} = 24,24^{\frac{1}{10}}$ b) $\sqrt[2x]{3^{3x+2}} = \sqrt[3x]{2^{2x+3}}$

c) $3^{(2^x)} = 2^{(3^x)}$ d) $8^{(5^x)} = 4^{(7^x)}$

2.5. a) $4^{x^2-x+1} = 8^x$ b) $3^{9x+1} = 9^{3x-1}$

c) $\sqrt{9^{x(x-1)-0,5}} = \sqrt[4]{3}$ d) $\sqrt[3]{\sqrt[x-1]{3^{10x+5}}} = \sqrt[3x-9]{27^{3x-7}}$

e) $2^{x^2-6x-2,5} = 16\sqrt{2}$ f) $2^{x^2-7,7x+16,5} = 8\sqrt{2}$

g) $5^{(x^2+x-2)(3-x)} = 1$ h) $4^{\sqrt{x+1}} = 64 \cdot 2^{\sqrt{x+1}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2.6. a) $7^{2x+1} - 3^{x-1} = 7^{2x+3} - 3^{x+1}$ b) $2^{x+1} - 3^{x} = 2^{x+3} - 3^{x+2}$

c) $3^{2x-1} - 5^{3x-2} = 3^{2x+1} - 5^{3x+2}$ d) $5^{2x} - 3 \cdot 5^{x} + 2 = 0$

e) $5^{4\sqrt{x}} - 6 \cdot 5^{2\sqrt{x}} + 5 = 0$ f) $2^{\frac{3}{\sqrt{x}}} - 2^{\frac{2}{\sqrt{x}}+1} + 2^{\frac{1}{\sqrt{x}}} - 2 = 0$

g) $3^{x+1} - 2 = 9^{x}$

h) $3^{x+1} + 3^{x-1} + 3^{x-2} = 5^{x} + 5^{x-1} + 5^{x-2}$

i) $2 \cdot 3^{x+3} + 7 \cdot 3^{x-2} = 493$ j) $3^{\sqrt{x}} - 3^{1-\sqrt{x}} = \frac{26}{3}$

k) $33 \cdot 2^{x-1} - 4^{x+1} = 2$ l) $3^{x} + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 5^{x}$

2.7. a) $5^{x-3} + 2 \cdot 5^{x-2} = 5{,}08$ b) $5^{\sqrt{x}} - 5^{3-\sqrt{x}} = 20$

c) $9^{\sqrt{x^2+3x}} + 0{,}5 + 9 = 28 \cdot 3^{\sqrt{x^2+3x}}$ d) $2^{-2x} - 17 \cdot 2^{-(x+2)} + 1 = 0$

e) $2^{x^2} + 2^{1-x^2} = \frac{9}{2}$ f) $12\sqrt[2x]{3} - \sqrt[x]{3} = 27$

g) $4^{\sqrt{3x^2-2x}+1} + 2 = 9 \cdot 2^{\sqrt{3x^2-2x}}$ h) $\sqrt{3^{x-56}} - 7 \cdot \sqrt{3^{x-60}} = 162$

i) $9^{x^2-1} - 36 \cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0$

2.8. a) $\frac{3^{x} + 3^{-x}}{3^{x+1} - 1} = \frac{5}{12}$ b) $\frac{2^{x} + 1}{2^{x} - 4^{x}} = 6$

c) $4 + \frac{2}{3^{x} - 1} = \frac{5}{3^{x-1}}$ d) $\frac{2^{x} + 10}{4} = \frac{9}{2^{x-2}}$

e) $x^{x} = x$

۳ – ګونومتریکي – یا کونجکچیز مساوات

3.1. a) $\tan x = \frac{1}{2}$ b) $\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ c) $\cot x = \frac{2}{5}$ d) $\tan x = -1$

3.2. a) $\sin(2x - \frac{\pi}{2}) = 0{,}309$ b) $\cos(2x - \frac{\pi}{3}) = 0{,}342$

c) $\sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{10}) = 0{,}809$ d) $\cos(x + \frac{\pi}{3}) = 0{,}471$

(c) ketabton.com: The Digital Library

3.3. a) $5\sin^2 x - 10\cos^2 x - 1 = 0$ b) $\cos^2 x + \frac{1}{3}\sin x\cos x + \frac{2}{3}\sin^2 x = 1$

c) $\cos^2 x + 2\cos x - \sin^2 x + 1 = 0$ d) $2\cos^2 x + \sin x - 1 = 0$

e) $\sin^2 x + 5\sin x\cos x + 8\cos^2 x = 0$ f) $\sin^2 x - \cos^2 x - 3\sin x + 2 = 0$

g) $\sin^2 x - 2\cos x + 2 = 0$ h) $\sqrt{1+\cos x} = \sin x$

i) $\sqrt{1+\sin x} + \cos x = 0$ j) $\sin^4 x = 2\cos^2 x - 1$

k) $\sqrt{\cos x} + \sqrt[4]{2}\sin x = 0$ l) $1 - \cos x = \sin x$

3.4. a) $\sin 2x = \sqrt{3}\sin x$ b) $\cos 2x = \cos x$

c) $\sin 2x \cdot \tan x = 1$ d) $\cos 2x + 3\cos x = 1$

e) $\cos\frac{x}{2} - \cos x = 1$ f) $2\sin\frac{x}{2} - \cos x + 1 = 0$

g) $\cos x + \cos 2x = \sin x + \sin 2x$

h) $2\sin x\cos 2x - 1 + 2\cos 2x - \sin x = 0$

i) $3(1 - \sin x) = 1 + \cos 2x$ j) $\sin 2x + 2\cot x = 0$

k) $3\cos 2x - 20\sin x = 9$ l) $\cos 2x + 2\cos x + 1 = 0$

3.5. a) $2\sin^2\frac{x}{2} + \cos 2x = 0$ b) $2\cos^2\frac{x}{2} + \cos 2x = 1$

c) $\tan x - \sin x = 2\sin^2\frac{x}{2}$ d) $\sin^2 x - \cos^2 x = \cos\frac{x}{2}$

e) $2\sin^2 x + \sin^2 2x = 2$ f) $3 - 2\sin^2 2x = 2\sin^2 x$

g) $5\cos 2x + 16\sin x + 14\sin^2 x + 7 = 0$

h) $3\cos 2x - 6\cos x + 4\sin^2 x = -3$

i) $2\cos x + 3 = 4\cos\frac{x}{2}$ j) $2\sin^2 x + \sin^2 2x = 0$

k) $\tan x + \tan 2x - \tan 3x = 0$

3.6. a) $\cos x\cos 2x = \cos 3x$ b) $\sin 5x\cos 3x = \frac{1}{2}\sin 8x - 0{,}5$

c) $\sin^2 x + \cos^2 2x = \sin^2 3x + \cos^2 4x$ d) $(\cos 8x)^2 \cdot 2 + \sin 16x = 1$

e) $2\cos^2 4x + \sin 10x = 1$ f) $2 - 6\sin x\cos x = \cos 4x$

g) $\cos 4x + 2\cos^2 x = 1$ h) $\sin x\cos 5x = \sin 9x\cos 3x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

i) $\sin\frac{7x}{2}\cos\frac{3x}{2} = \sin\frac{9x}{2}\cos\frac{x}{2}$ j) $\cos\frac{7x}{2}\cos\frac{x}{2} = \cos\frac{9x}{2}\cos\frac{3x}{2}$

k) $\sin x - \sin 3x + \sin 5x - \sin 7x = 0$ l) $\cos x + \cos 3x = \cos 5x + \cos 7x$

3.7. a) $2\sin^3 x - 3\sin x\cos x = 0$ b) $4\sin^3 x - 8\sin^2 x - \sin x + 2 = 0$

c) $\tan^3 x + \tan^2 x \;\; 3\tan x - 3 = 0$ d) $\tan^3 x - \tan^2 x + \tan x = 1$

3.8. a) $\sqrt{3}\sin x + 3\cos x = 0$ b) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = \sqrt{3}$

c) $\sqrt{3}\sin 3x + \cos 3x = 1$ d) $\sqrt{2\sin 2x} + 2\sin x = 0$

e) $1 - \sin x = \sin^2(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})$ f) $2\sin^2\frac{x}{2} = \cos(\frac{3\pi}{2} + \frac{x}{2})$

g) $1 - \cos 2x + \cos 6x - \cos 8x = 0$ h) $\cos x - 2\cos 3x + \cos 5x = 0$

i) $\cos 4x + 2\cos^2 x = 0$ j) $1 - \sin x\cos x + \sin x - \cos x = 0$

k) $\cos 3x + \sin 3x = \cos x + \sin x$ l) $\sin x\cos x - \sin^2 x - \cos x + \sin x = 0$

m) $\sin x + \cos x = \frac{1}{\cos x}$ n) $(\cos x)^{\sin x} = 1$

o) $\frac{1+\cos 2x}{2\cos x} = \frac{\sin 2x}{1-\cos 2x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۴. د نامساواتو یا نابرابرونونو او مطلقه ارزښتونو سره شمیرنه

۱۴ . ۱:نابرابرون(نامساوات)

۱۴ . ۱ . ۱ بنسټيزې کلیمی او شمیرقوانین

یو نابرابرون لاس ته راځي، که دوه ترمونه T1 او T2 د یوې اړیکنخښنی<, $\geq$,> او $\leq$ له لارې یو د بل سره تړلي وي.
په لاندې کی به نابرابرونونه تر څیړنی لاندې ونیول شي، چی یوه یا دوه ریيلی واریابلی یا اوښتونی ولري . یو نابرابرون د دوه واریابلو(اووښتونو) سره د وینامنطق په بنسټ یو د وینا شکل ښايي، د هغو سره چی واریابلی هر ارزښت غوره کولی شي، د کومو لپاره چی ترمونه T1 او T2 څرګنددي . یو اوبی یا حل هر هغه ارزښت دی ، په همدې توګه هغه ارزښت جوړه ده، چی واریابل یا اووښتونې یی غوره کولی شي او په ترم کی د هغي ځاي په ځاي کیدو سره نابرابرون یوه ریښتونی وینا وي . د ټولو اوبیونو یا ځوابونو ټولګه په حلډیري L کی سره راټولیګي.
په لاندې برخه کی به ډیر د وینامنطق(ویناسم اندیز) سومبولونه چی په برخه ۱ ۰ ۲ (او د ډیري عملیو سومبولونه) چی په برخه ۲ . ۳ راغلي په کار واچول شي. د دې سومبولونو د اهمیت یا غوره والي سره دې سړی بیا هم ځان اشنا کړي.
د نابرابرونونو سره شمیرنه کی دې لاندې قاعدې په پام کي ونیول شي(مقایسه برخه ۳)، دلته دې a , b , c او dریيل ګڼونه وي. لاندې باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a<b \Leftrightarrow a \pm c<b \pm c,$ (14,1)

$a<b \wedge c>0 \Rightarrow a.c<b.c$ (14,2)

$a:b<b:c$ (14,2)

$a<b \wedge c<0 \Rightarrow a.c>a.c$ (14,3)

$a:c>b:c$ (14,3)

$a<b \wedge c=0 \Rightarrow a.c=b.c$ (14,4)

د برابرونونو شمیرنی سره انډول کی دې دلته (۱۴ . ۳) قاعده ځانګړې تر پام لاندې وي.د منفی یا کمیز ګڼ سره ځل یا ویش عملیه کی دا د نابرابرون نخښه راکرځي یا را په شا کیږي یا که غواړئ برعکس کیږي. د بیلګي په توګه $3 < 4$ مګر که داوړه خواوې د $1 -$ سره ځل شي نو لاس ته راځي $-3 > -4$

ټول د شمیرلو لپاره ورکړ شوي قواعد د نابرابرون لپاره په ورته ډول د اړیکنخښنو > سره باور لري دا په دې مانا چې$a \leq b$ دا چی په څرګند ډول د دوه ګڼونو ځل او ویش هلته زیاتیز (مثبت)دی چی دواړه ګڼونه همغه مخنخښنه ولري او کمیز (منفي) که چیری مخنخښي یی توپیر ولري، او لاندې اړیکی باور لري:

$a.b>0 \Leftrightarrow$ (14,5)

$\Leftrightarrow a:b>0 \ (a>0 \wedge b>0) \vee (a<0 \wedge b<0),$ (14,5)

$a.b<0 \Leftrightarrow$ (14,6)

$\Leftrightarrow (a>0 \wedge b<0) \vee (a<0 \wedge b>0).$ (14,6)

دبرابرونونو شریکولو کی، په ځانګړي ډول د ویش لپاره، باید ونیول شي چی $b \mid= 0$ یعني د ځل او ویش لپاره دې توپیریدونکو قاعدو ته پام وي . د بیلګي په توګه دي:

$a.b \geq 0 \ \Leftrightarrow \ (a \geq \wedge (a \geq 0) \vee (a<0 \wedge b<0)$ (14,7)

$a:b \geq 0 \ \Leftrightarrow \ (a \geq 0 \wedge b>0) \vee (a \leq 0 \wedge b<0)$ (14,8)

۱۴ . ۱ ۱الف اینتروال

د واریابلو د څیړنو لپاره باید ټول معتبر ډیري ورکړل شي، د بیلګي په توګه د یوه فنکشن یا بلواك تعریف - او ارزښت ډیري.

پیژند ۴ . ۱ الف :

یو اینتروال یو د یوبل سره اړوند د رییلګڼونو R برخه ډیر) ده۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

یو اینتروال له دې امله، بې له تشوالي یا تشي ، د ګڼکرښی یوه ټاکلی برخه ده، چی له دوه ګڼونو a او b رابندیږي. که د غاړې ټکي په اینتروال کی دننه وي یا خوندې وي نو د بند

اینتروال څخه غږیږو او که اینتروال پورې اړه ونه لرې، واز اینتروال دی، او په همدې ډول نیمبند او نیم واز اینتروالونه.
د اوبیډیری په ورکولو سره په ګڼکرښی باندې، لاندې د انیتروال انځورونه په کار اچول کیږي.

لاندې ۱۱ د اینتروال مختلف تیپونه دي یا نې ، چې a او b له R دي او $a < b$ ده٠

1. $(a,b) = \{x \mid a < x < b\}$ واز اینتروا ، اخر تخري په اینترول اړه نه لیر
2. $[a,b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$ بند اینتروال ، اخر توري په اینتروال ئورې اړه لري
3. $[a,b) = \{x \mid a \leq x < b\}$ ښی واز اینتروال
4. $(a,b] = \{x \mid a < x \leq b\}$ کیڼ واز اینتروال
5. $(a,\infty) = \{x \mid x > a\}$ ښي لورته ناپاي او کیڼ لور ته واز اینتروال
6. $[a,\infty) = \{x \mid x \geq a\}$ ښي لور ته ناپای او کیڼ لور ته بند اینترال
7. $(-\infty,b) = \{x \mid x < b\}$ ښي لور ته واز او کیڼ ورته ناپاي اینتروال
8. $(-\infty,b] = \{x \mid x \leq b\}$ ښي لور ته بند او کیڼ لورت ناپاي اینتروال
9. $(-\infty,\infty) = \mathbb{R}$ ناپای اینتروال ، ټول رییلګڼونه
10. $\{a\}$ د دې یوه توري ډیری
11. $\varnothing$ تشډیری

لاندې اینتروالونه د ناپای په لور هم رابند دي یانې په دې مانا، چې د ناپای ډیری هم په اینتروال پورې اړه لري، یانې ناپای ډیری ټولنه ورسره جوړوي٠

1. $[-\infty,b] = \{x \mid x \leq b\} \bigcup \{-\infty\}$
2. $[-\infty,b) = \{x \mid x < b\} \bigcup \{-\infty\}$
3. $[a,\infty] = \{x \mid x \geq a\} \bigcup \{\infty\}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(a,\infty] = \{x \mid x > a\} \bigcup \{\infty\}$$

4. $[-\infty,\infty] = \mathbb{R}^+$

پورته ته الترناتیو یا بدیلي لیکنبڼه Alternative notation

په نړیواله توګه یو بل ډول لیکنبڼۀ په لاندې ډول ورکو لکیږي

$]a,b[= \{ x \mid a < x < b \}$

$[a,b] = \{ x \mid a \le x \le b \}$

$[a,b[= \{ x \mid a \le x < b \}$

$]a,b] = \{ x \mid a < x \le b \}$

یادونه : داپورته د اینتروال ډولونه د نړیوال جال څخه راکښته شوي، دا می هم وغوښتل ګرانو لوستونکو ته وړاندی کړم

بند انیتروال : ۰۰۰۰ $[a,b]=\{x|a\le x\le b\}$

نیم و از اینتروال :۰۰۰۰۰ $(a,b]=\{x|a<x\le b\}$

نیم واز اینتروال :۰۰۰۰۰۰ $[a,b)=\{x|a\le x<b\}$

واز اینتروال : ۰۰۰۰۰ $(a,b)=\{x|a<x<b\}$

ښی بند ناپای اینتروال : $(-oe,b]=\{x|x\le b\}$

کښ بند ناپای اینتروال : $[a,oe)=\{x|x\ge a\}$

ښی واز ناپای اینتروال :۰ $(-oe,b)=\{x|x<b\}$

کیڼ واز ناپای اینتروال :۰ $(a,oe)=\{x|x<b\}$

ناپای اینتروال : (-oe، oe)={x|x د ګڼکرښی ټکی دی}

بیلګه ۱۴ . ۱الف:

په بنستیزه ډیری Rکی د لاندې برابرون پیژنددیری غوښتنه منځ ته رااچوو.

$x - 2 = 1 + 7 - x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل : د دې ترم T1(x) = x - 2 پیژنددیری ده:

D1 = [2 , oe)

په همدې توګه د ترم T2(x)=1+7-x پیژنددیری ی ده: (D2 =(-oe,7

د برابرون دپیژنددیری لپاره لاس ته راوړو:

$$D = D_1 \bigcap D_2 = [2,\infty) \bigcap (-\infty,7] = [2,7]$$

لاندې څیره وګورې(متاسفانه، چې ښه څېره نه شم کښلی)

۱۴ . ۱ ۲ .نابرابرون د یوې مجهولی سره

د شمیرقاعد ې لومړی د هغونابرابرونونو لپاره په کار اچول کیږي چې یوه اوښتوني یا مجهوله ولري، او اوبیونې یی په ټولیزه توګه د اینتروالونو له لارې انځوریږي.

(۱۴ . ۱) قاعده د په خوښه ترمونو د زیاتون او کمون داسی اجازه راکوي، لکه په برابرونونو کی.

بیلګه ۱۴ . ۱:

لرو 5x-6<4+9x دواړو لورو ته 6 + 9x- ورزیاتوو، نو لرو 10 > 4x-

دواړه خواوې په 4 - ویشو.

د (۱۴ . ۳) له مخې لاس ته راځي x > -5/2

د اوبیونې ډیر یا اوبیډیری : L=(-5/2,oe)

که په یوه غوښتونکی حُل یا ویش کی ځله وونی، همداسي پرویشونی یو واریابل یا اووښتونی ترم وي، نو باید د (۱۴ . ۲) تر (۱۴ . ۴) سره سم ددې ترم د مخنخښي په واك والي کی د حالت توپیرونه(ښه یې : توپیره ونه) تر پام لاندې ونیول شي .

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوګونو اوبیډیریو پیداکولوپه هکله، په هر ډول چی وي، باید په پام کی ولرل شي، چی یواځي هغه د نابرابرون شمیرل شوي دx - ارزښتونه اوبیونې دي، چي ټول ىی سملاسي (په همدې وخت کی) هغه نیول شوی (فرض شوی) شرایط پوره کړي.

هر برخ اوبیډېرۍ یا برخحلډیرۍ کیدی شي چی د غوځډیرۍ په څیر له همغه هرپورتني نماینده برخساحویا-ورشو(یا نوره هم ښه : -برخچاپیریالونو) واریابلی (اووښتونی) او د نابرابرون ډیرۍ شمیرل شوو واریابلو یا اووښتونکو ارزښتونو جوړ شي. د غوځډیرۍ جوړښت، کیدی شي چی د یوګونو ډیریو د ګرافیکی انځورونو په څیر په ګنوړانګه ساده شي. د نامساوتو ټولې اوبیډیرۍ د برخ اوبیډیري یوه د یوګونو حالتونو ټولنډیرۍ ده .

بیلګه ۱۴ . ۲:

(3x-5)(x-2)<4(x-2)

که په (x-2) باندې وویشل شي، نو باید د شرایطو په پام کی لرلو سره سم

د x > 2 لپاره (x-2)>0

د x = 2 لپاره (x-2)=0

د x <2 لپاره (x-2)<0

نابرابرن دې په درې برخه ساحو کی یو له بل بیل وڅیړل شي.

لومړی حالت:

$$x > 2 \iff x \in (2, \infty)$$

دلته د مخ ته پراته نامساوت لاندې ورته بڼه بدلون څخه لاس ته راځي

$$3x - 5 \le 4 \iff 3x \le 9 \Leftrightarrow x \le 3 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 3]$$

له دې x - ارزښتونو څخه یواځي هغه د مخه ورکړ شوي نابرابرون ، چي په لومړي حالت کی راوړل شوي اوبیونې دي ، یواځي هغه x د

$$x \in (2, \infty)$$

سره د اوبیو یا اوبیونو په څیر نیسو. له دې امله د لومړي حالت اوبیډیري لرو:

$$L_1 = (2, \infty) \bigcap (-\infty, 3] = (2, 3]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دوم حالت:

$$x = 2 \Leftrightarrow x \in \{2\}$$

د لته په (x -2) باندې ویشل کیدی نه شي.
د $x = 2$ ارزښت لیکلو رښتیا وینا $0 \geq 0$ لاس ته راځي او له دې امله

$$L2 = \{2\}$$

دریم حالت:

$$x < 2 \Leftrightarrow x \in \{-\infty, 2\}$$

د $0 < 2 - x$ له امله د (۱۴ . ۳) له مخې پخپله د مخه ورکړ شوي نابرابرون لاندې ورته فورمونه ورکوي

$$3x - 5 \geq 4 \Leftrightarrow 3x \geq 9 \Leftrightarrow x \geq 3 \Leftrightarrow x \in [3, \infty)$$

له دې x - ارزښتونو کوم یو نه شي کیدی چې په دریم حالت کې راوړل شي:

$$L_3 = (-\infty, 2) \cap [3, \infty) = \varnothing$$

د برخه اوبیډیریو ټولنی څخه ټول اوبیډیر) لاس ته راځي:

$$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = (2,3] \cup \{2\} \cup \varnothing = [2,3]$$

نو ټولې اوبیونې هغه x د ي د کومو لپاره چې لرو: $2 < x < 3$
په لاندې بیلګو کې نور دومره زیات توضیحات نه ورکول کیږي.

بیلګه ۱۴ . ۳ :

$$(3x-1)/(2x+4)<2$$

د شرایطو $|2x+4|=0$ له مخې، دا په دې مانا چې $x |=2$ د مات لاندې سره ځله ونې له امله

د $x>-2$ لپاره $(2x+4)>0$

د $x<-2$ لپاره $2<(2x+4)$

سره سم یواځې دوه حالتونه توپیروو:

لومړی حالت:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x > -2 \Leftrightarrow x \in (-2, \infty)$$
$$3x - 1 < 4x + 8 \Leftrightarrow x > -9 \Leftrightarrow x \in (-9, \infty)$$
$$L_1 = (-2, \infty) \cap (-9, \infty) = (-2, \infty)$$

ځیره ۱۴ ۱ الف: دا ځېره لاندې کښل شوی، په هغې کې چې بیا دا اوبیدیری روښانه شو۰

دوم حالت:

$$x < -2 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -9)$$
$$3x - 1 > 4x + 8 \Leftrightarrow x < -9 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -9)$$
$$L_2 = (-\infty, -2) \cap (-\infty, -9) = (-\infty, -9)$$
$$L = L_1 \cup L_2 = (-\infty, -9)$$

پورته اخر د نابرابرون یا نامساوات حل یا اوبی دی۰

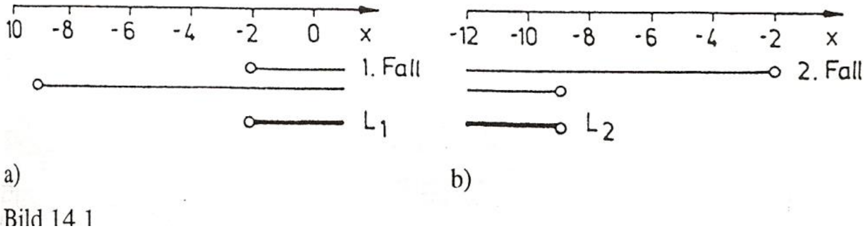


Bild 14 1

ځیره ۱۴ ا ب : دلته هم ګنونوکرښې شته، چۀ په هغې کې دا اوبیدیری روښانه کاړل شوي دي۰ ، که ځیره مې ونه کاړله، نو داکار بج ګران لوستونکی هم وکولای شي۰

د مخنخښی راوړلو په بنسټ د نابرابرن یوه ځانګړي بڼه یا فورم، چې په (۵.۱۴) تر (۱۴ . ۸) اړیکو کی استعمال شوي، اوبیونه ګټوره وښايي.

نابرابرونونه

دلته هم ځو بیلګې راوړل کیږي، چې نابرابرونونه په کې اوبی شوي دي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا برخه د نړیوالجال څخه راکښنته شوي، له دې امله یې لیکبڼه د مخکنۍ لیکبڼې سره توپیر لري. دا لاندې لرو .

$ax+b > 0, \quad a \neq 0$;

$x^2 - 5 < 0$;

$|2x-5| \leq x + 10$;

دلته اوبیونې اینتروالونه دي. ښول کیږي، چې اوبېدیرۍ څنګه پیداکیږي او د دې لپاره

اړیین شرایط کوم دي.

- په دواړو لورو همغه ګڼ زیاتیدلی یا کمیدلی شي
- که دواړه خواي د کمیز ګڼ سره ځل شي یا په کمیز ګڼ وویشل شي، نو مخنخښه تغیر خوري. که زیاتیز وي، نو دواړه خوا په توان کیدی شي او ریښج یې وستل کیدی شي، پام دې وي، چې برابرون بیا زیاتیزه او که کمیزه مخ نخښه غوره کوي او یا دواړه
- موږ (1.9:1 اوبی کوو

د $a > 0$ سره لورو

$$ax+b>0 \Longleftrightarrow ax > -b \Longleftrightarrow x > -\frac{b}{a}$$

د لاندې حلسټ یا اوبېدیرۍ

$$\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{b}{a}\} = (-\frac{b}{a}, \infty).$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $a < 0$ سره لرو

$$ax + b > 0 \Longleftrightarrow ax > -b \Longleftrightarrow x < -\frac{b}{a}$$

د لاندې اوبیډیری سره

$$\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{b}{a}\} = (-\infty, -\frac{b}{a}).$$

موږ (1.9:2 اوبی کوو :

$$x^2 - 5 < 0 \Longleftrightarrow x^2 < 5 \Longleftrightarrow |x| < \sqrt{5}$$

په اخرنې پل کې دې دې ته پام وي $\sqrt{x^2} = |x|.)$ د روابنه تشیرح لپاره یا شننې لپاره یو د حالت توپیر رامنځ ته کوو :

په حالته $x \geq 0$ کې $|x| = x,$ او $|x| < \sqrt{5}$ په ساده ډول $x < \sqrt{5}.$ مانا لري

په حالت ist $x < 0$ کې $|x| = -x,$ او $|x| < \sqrt{5}$ د , $-x < \sqrt{5}$ په مانا یا ورته $x > -\sqrt{5}.$ نو لرو

$$|x| < \sqrt{5} \Longleftrightarrow -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$$

او اوبیډیری

$$\mathcal{L} = (-\sqrt{5}, 0) \cup [0, \sqrt{5}) = (-\sqrt{5}, \sqrt{5}).$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

موږ 1.9:3 اوبی کوو د یوه حالت تو[پر سره

$$2x - 5 \leq x + 10 \quad x \leq 15, \quad \Longleftrightarrow$$

$$2x - 5 \geq 0 \quad x \geq \frac{5}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad 2x \geq 5 \quad \Longleftrightarrow$$

(i) که وي $2x - 5 \geq 0;$ نو دئ $|2x - 5| = 2x - 5,$ او موږ لرو

له دې لاس ته راځي

$$\frac{5}{2} \leq x \leq 15.$$

(ii) $2x - 5 < 0.$ نو دئ $|2x - 5| = -(2x - 5)$ او لرو

$$-2x + 5 \leq x + 10 \quad \Longleftrightarrow \quad -3x \leq 5 \quad \Longleftrightarrow x \quad \geq -\frac{5}{3},$$

$$2x - 5 < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2x < 5 \quad \Longleftrightarrow \quad x < \frac{5}{2}.$$

له دې لاس ته راځي:

$$-\frac{5}{3} \leq x < \frac{5}{2}.$$

د نابرابرون اوبیونډیری له دې امله ده

$$\mathcal{L} = [-\frac{5}{3}, \frac{5}{2}) \cup [\frac{5}{2}, 15] = (-\frac{5}{3}, 15].$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې کې یو څو تمرینونه ورکړ شوي، کۀ ګران مینه وال یې غواړې تمرین کړي۰

لاندې نابرارونونه اوبی کړئ

(i) $\frac{3}{x+5} < 2$,

(ii) $\sqrt{x^2+x+2} > x$,

(iii) $|x+5| > |x-2|$.

بیلګه ۱۴ . ۴:

$1/(3-x)>2/(x+6)$, $x|=-6$; $x |= 3$

د اصلي ماتلاندې (3-x)(x+6) سره د حٔل له امله باید بیا هم د هغه مخنخبنه په پام کی ونیول شي. شرایط، د کوموله مخی چی مات لاندې مثبت د ی، کیدی شي د (۱۴ . ۵) له لارې ومیندل شي:

$$(3-x)(x+6)>0 \Leftrightarrow (3-x)>0 \wedge x+6>\vee\ (3-x)<0 \ \wedge\ x+6<0$$

$$\Leftrightarrow\ (x<3 \wedge x>-6) \vee\ (x>3\ \wedge x<-6) \Leftrightarrow\ -6<x<3$$

نو (۱۴ . ۶) شوونې کوي یا ممکنه وي، چی هغه ورشو(ساحه یا ډیری یا نه هم شهچاپیریال) پیدا کړو چیرته چی اصلي مات لاندې کمیز یا نفي دئ:

$$(3-x)(x+6)<0 \ \Leftrightarrow (3-x) >0 \wedge x+6><0 \vee (3-x)<0 \wedge x+6>0$$

$$\Leftrightarrow (x<3 \wedge x<-6) \vee (x>3 \ \wedge x>-6) \Leftrightarrow x < -6 \vee x>3$$

له دې امله د (۱۴ . ۲) او (۱۴ . ۳) په پام کې لرلو سره شمیرنه لاس ته راځي:

لمړی حالت :

$$-6 < x < 3 \ \Leftrightarrow x \in (-6 , 3)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د زیاتیز ځله ووني یا مثبت فاکتور (3-x)(x+ 6) سره ځلولو له امله د اړیکو نخښه ساتلی پاتیږي:

$$x+6 \geq 6-2x \Leftrightarrow x \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0,\infty),$$

$$L_2 = (-6,3) \cap [0,\infty) = [0,3)....(mape(zirah)14.2a)$$

دوم حالت : $x < -6 \vee x > 3) \Leftrightarrow x \in (-\infty,-6) \cup (3,\infty)$

دا چی د لته اصلي مات لاندې منفی دی، نو ځل د اړیکو نخښه باندې راګرځیدونی یا په څټ (چپه یا برعکس(تاسیر لري:

$$x+6 \leq 6-2x \Leftrightarrow x \leq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty,0)$$

$$L_2 = [(-\infty,-6) \cup (3,\infty)] \cap (-\infty,0) = (-\infty,-6)....(mape(zirah)14.2b)$$

اوبیډیری $: L = L_1 \cup L_2 = [0,3) \cup (-\infty,-6) = (-\infty,-6) \cup [0,3)$

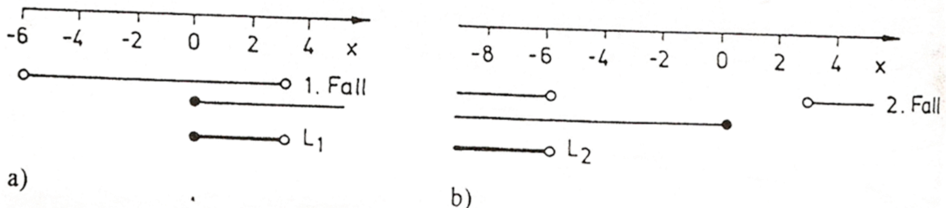


Bild 14.2 ځاکره

د څلورۍ برابرون یا مربع نامساوات حل لپاره کیدی شي د څلورۍ ترم ځل انځورونی څخه کار واخستل شي.

بیلګه ۱۴ . ۵ : $-x^2+9x<0$

لومړی د (۱۴ . ۳) په پام کي نیولو سره دx^2 د مخ (کیڼ لور) کمیز- یا منفي ځلو,وونوباندې ویشل کیږي:

$$x2 - (9/2)x + 2 > 0$$

ددې لپاره چی دا نامساوات د ځل په ځیر ولیکلی شو، د مربع مساواتو حل شمیرو، کومه چی د اړیکنخښي په ځاي د مساواتنخښی ځاي په ځاي کولووروسته منځ ته راځي.

$$x^2-(9/2)x+2=0 \Rightarrow x1=4 , x2=1/2$$

$$x^2 - \frac{9}{2}x + 2 > 0 \Leftrightarrow (x-4)(x-\frac{1}{2}) > 0 \Leftrightarrow (x > 4 \wedge x > \frac{1}{2}) \vee (x < 4 \wedge x < \frac{1}{2})$$

$$\Leftrightarrow x > 4 \vee x < \frac{1}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې سره د (۱۴ . ۵) په کارولو د نابرابرون حل لاس ته راځي:

حلډېرى : $L=(-\infty;\frac{1}{2})\cup(4;\infty)=R\setminus\{\frac{1}{2};4\}$

په دې برسیره دې په یاد وي چې داډول نامساوات د مشهور مربع فنکشن د کرړې کښلو له مخې هم حل کیدی شي، په ځانګړې ډول هلته، چې اړوند مربع شکل رییل حل نه لري. بالاخره پهپای کې د وېش د مخنښې راوړلو یوه بېلګه ښایو.

بیلګه ۱۴ . ۶ : $\frac{x+5}{3x-2}\leq 0,\ x\neq\frac{2}{3}$.

حل (۱۴,۸) ته ورته دی

$$\frac{x+5}{3x-2}\leq 0 \Leftrightarrow (x\geq -5 \wedge x<\frac{2}{3}) \vee (x\leq -5 \wedge x>\frac{2}{3}) \Leftrightarrow -5\leq x<\frac{2}{3}.$$

د سیستم حل ډېرى یا حل سټ: $L=[-5,\frac{2}{3})$.

۱۴ . ۱ . ۳ د نابرابرونسیستم د یوې ناپیژندونکی یا مجهولی یا اوښتونې سره

د یوه نابرابرون سیستم اوبیډیرى L د یوګونو نابرابرونونو اوبیډیریو غوڅډیرى ده . ګټور یا موخه وربه وي (دا هدفمند دی)، که نابرابرون لکه په یوه برابرونسیستم کی په نمره کړى شي ، ددې لپاره چې دا یوګوني (دا په دې مانا چې یو یو) اوبی کړى شو.

بیلګه ۱۴ . ۷

$$5-2x\geq 3-x$$
$$x^2-5x-6<0$$
$$I.5-2x\geq 3-x \Leftrightarrow x\leq 2 \Rightarrow L_I=(-\infty,2]$$
$$II.x^2-5x<0 \Leftrightarrow (+1)(x-6)<0 \Leftrightarrow -1<x<6 \Rightarrow L_{II}=(-1,6)$$
$$\Rightarrow L=L_I\cap L_{II}=(-\infty,2]\cap(-1,6)=(-1,2]$$

د سیستم اوبیډیرى: Lدئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

بېلګه ۱۴ . ۸

$$-2<\frac{4x-10}{x-1}<3, x\neq 1$$

د داسی نابرابرون څنځیرونه یا یو بل سره تړنه د دواړو نابرابرونونو د سیستم سره په یوه مانا دئ:

$$I. -2<\frac{4x-10}{x-1}$$

$$II. \frac{4x-10}{x-1}<3$$

د همغه فاکتور(x-1) سره د حَل اړیین یا ضروری حالت توپیریدنه کیدی شي د دواړو نابرابرونونو لپاره غبرګ د لیدوړ بنی سره وڅیړل شي (مخ په وړاندې یووړ شي) :
(یادونه: په لاندي کې دې Fall(1) لومړې حالت او Fall(2) دویم حالت وي)

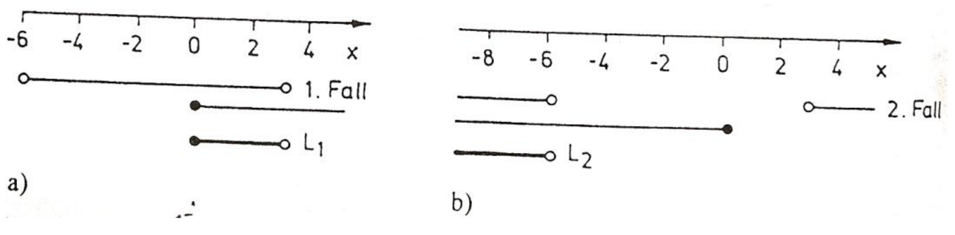
....I..II

	I	II
$1.Fall^{(1)}$ $x\in(1,\infty)$	$-2x+2<4x-10$ $\Leftrightarrow x>2 \Leftrightarrow x\in(2,\infty).$ $L_{I_1}=(1,\infty)\cap(2,\infty)=(2,\infty)$	$4x-10<3x-3$ $\Leftrightarrow x<7 \Leftrightarrow x\in(-\infty,7).$ $L_{II_1}=(1,\infty)\cap(-\infty,7)=(1,7)$
$2.Fall^{(2)}$ $x\in(-\infty,1)$	$-2x+2>4x-10$ $\Leftrightarrow x<2 \Leftrightarrow x\in(-\infty,2).$ $L_{I_2}=(-\infty,1)\cap(-\infty,2)=(-\infty,1)$	$4x-10>3x-3$ $\Leftrightarrow x>7 \Leftrightarrow x\in(7,\infty).$ $L_{II_2}=(-\infty,1)\cap(7,\infty)=\varnothing$
	$L_I=L_{I_1}\cup L_{I_2}$ $=(-\infty,1)\cup(2,\infty)$	$L_{II}=L_{II_1}\cup L_{II_2}$ $=(1,7)$

د LI او LII غوڅېدیری جوړول بیرته کیدی شي چي د یوګونو اوبیډیریوګنوړانګه باندې د لیدنی شي)(څیره ۱۴ . ۳

د سیستم اوبیډیری:

$$L=L_I\cap L_{II}=(2,7)$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱۴ . ۱ . ۴ نابرابرون د دوه اووښتونو یا مجهولو(ناپیژندونکو) سره

د دوه نابرابرون - یا نابرابرونسیستمونو اوبیډیرئ د یوه اوبیډیرئ $R^2 = R \times R$ برخډیرئ ده، چی د هوارې په څیر د لیدنی کیدی شي. له دې امله ګرافیکي ښوونه د ټکو ډیري په ځیر په یوه کواوردینات سیستم کی مساعد دئ. په دې برخه کی به مونږ یوائځي د لاندې ډول لاینیزنابرابرون::

$$ax + by + c > 0 \; (\geq 0 \; , <0, \leq 0 \;) \qquad (14.9)$$

واریابلو یا اوښتونو x , y او ثابتو ځله وونو(ضریبونو)

$a, b, c \in R$

سره د شرایطو $a|=0 \vee b\,|=0$ سره سم تر څیړنی لاندې ونیسو.

که ددې اړیکو نخښه د برابرون سره بدله کړو نو د یوې کرښي برابرون $ax+by+c=0$ لاس ته راځي، کومه چی د پروتولاړ - یا کواوردینات سیستم په دوه نیمو هوارویا ستحو ویشي. د نابرابرونسیستم (۱۴ . ۹) ، چی ټیك په یوه له دې دوه هوارو کی باور لري، په راتلونکي بیلګه ۱۴ . ۹ کی ښوول کیږي. د اوبیډیرئ په هواره کی د کرښونو یا کرښو کرښو کولو(د ډیرو کرښو کښلو) له لارې په نخښه کیدی شي. که په نابرابرون کي برابرون نه وي پریښوول شوي یعني برابرون په کی نه وي ځاي شوي، نو راتلونکی کرښه د اوبیډیرئ پورې اړه نه لري او کیدی شي یوائځي ټوټه ټوټه کرښی (پرې لاین یا غوڅکرښو) په څیر په نخښه شي، لکه څنګه چی د ډیرئ ګرافیکي ښوونه ورځنی یا بلده یا معمول ده. که برابرون ورپورې اړه ولري، نو کرښه د اوبیډیرئ پورې اړه لرونکی برخی په څیر په نخښه کیږي.

بیلګه ۱۴ . ۹ :

$$2x+5y-10>0$$

که نابرابرون د y په لور اوبی شي، نو دې ته ورته نابرابرون $y>-(2/5).x+2$ لاس ته راځي، کوم چی په یوه کره نیولي x په روښانه توګه د لویو y - ارزښتونو لپاره پوره دئ نسبت ورته برابرون ته . له دې امله دهوارې چی د کرښې $y=-(2/5).x+2$ څخه پورتنی نیمی هوارې ټول ټکی اوبیډیرئ L جوړوي ش که څیره ون کښل شوه، نو پل په پل داکار ګران د شمیرپوهنې مینه وال کولی شوي ۱۴ . ۴)

دا په بیلګه ۱۴ . ۹ کی تشریح تګلار په نابرابرون (۱۴ . ۹) کی د مخه نیسي چي $b|=0$ دئ. په ټولیزه توګه یا عمومي ډول دا متود د استعمال وړ دئ، چی د کواوردینات سیستم

(c) ketabton.com: The Digital Library

يوه په خوښه ټاكلي ټكى ځاى په ځاي كولو كى ، چى په كرښه ax+bx+c=0 نه وي پروت٠

ازمايو چي ايا دا نابرابرون په اړونده نيمه هواره كى باور لري او يا نه.كه ممكن وي نو د شميرنى د ساده والي له امله ځانګړى ټكى(0.0) ټاكو. دا په بيلګه ۱۴ . ۹ كى ددې ټكى بدلون وروسته نا ريښتيا وينا 10 - > 0 لاس ته راكوي او په دې ډول د اوبيډيرۍ پيداشوى ځاي (ښه به پروتځاي وي خو د لنډونى له امله ځاي بسيا كوي) تصديقوي.
دلته يوه ځيره كښل كيږي دلته د اوښتونو پرځاي ګڼونه ږدو او بيا كرښه باسو٠ په كواوردينات كي د هوارې هغه برخه، چې اوبيډيرۍ ده كرښ كرښه كوو، دا په دې مانا، چې د كرښى هغه دكرښونو لور ته ابيډيرۍ ده٠

د يوه نابرابرونسيستم چى دوه مجهولى ولري، نو هر نابرابرون ځانله ځانله اوبى كيږى او بالاخر ه بي د يوګونو اوبيډيريو غوڅډيرى نيول كيږي يا جوړيږي.

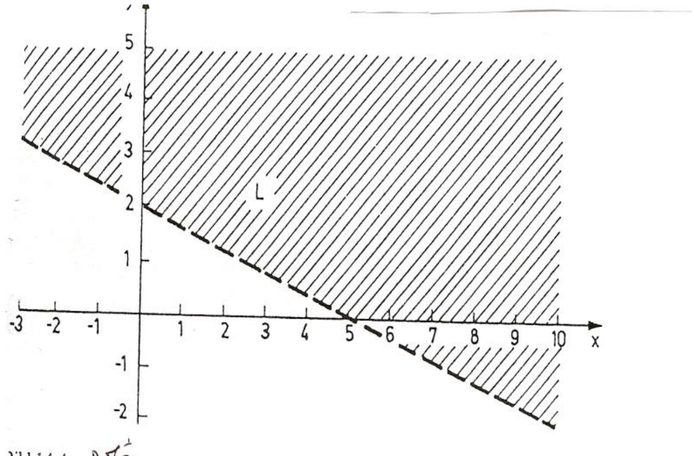


Bild 14.4 ځاكره

بيلګه ۱۴ . ۱۰:

I . 2x+y<6

II. 4x-y>0

(0,0) نابرابرون I پوره كوي او له دې امله په اړونده اوبيډيري LI كى پروت دى. دا چى په نابرابرون II كى د (0 , 0) سيده برابرون باوري دي، نو دلته بايد يو بل ټكى د بيلګي په توګه (1 , 0) كيښول شي، كوم چى د په ځنوالي يا تضاد په لور ځي، او له

(c) ketabton.com: The Digital Library

دې امله اوبیډیرۍ LII کی نه دۍ پروت. (؟؟؟ش ۱۴ . ۵ الف(. ش ۱۴ . ۵ ب دسیستم حلېدیرۍ L ښايي چي له دوه نیمکرښو بندیږي یا له دوه نیم کرښومحدودیږي.
د وړاندیزارزښت لري چی د تمرینونو په خپلواك کار کولو کی د غوښتونکو اوبیډیریو L د یوګونو نیمهوارو غوځډیرۍ حتي تر غاړې پورې رنګینه یا کرښی کرښی راوکښل شي، چی په دې ډول یی یو کواوردیناتسیستم د انځورولو لپاره بسیا وکړي .ش ۱۴ . ۵

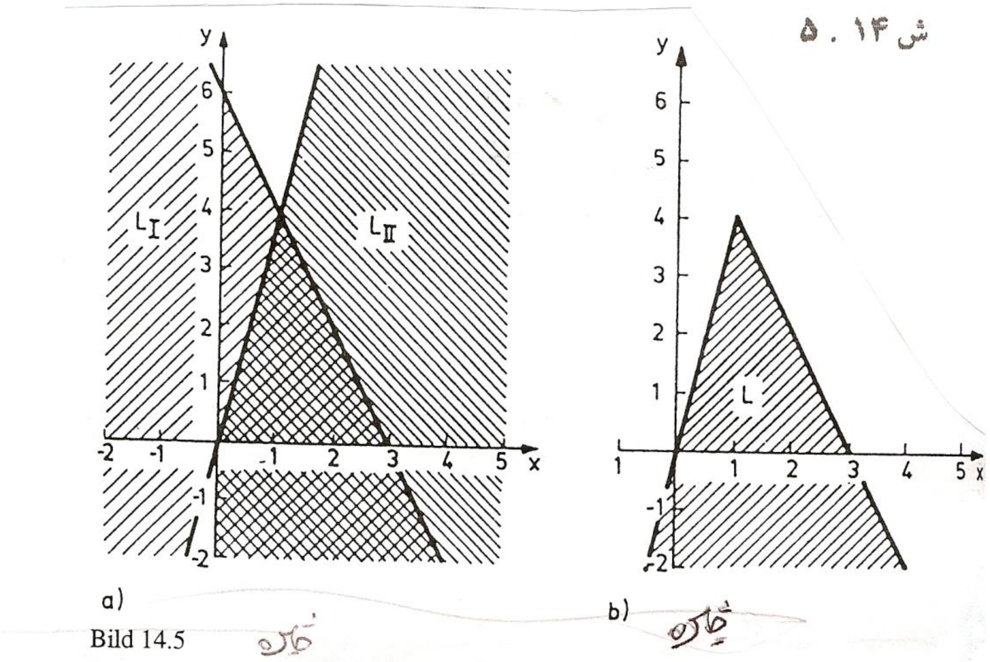


Bild 14.5

بیلګه ۱۴ . ۱۱:

I . $x-3y-6<0$

II. $-x+y+1<0$

III. $x-6<0$

دا اوبیډیرۍ په ش ۱۴ . ۶ کی انځور ۱۲ کرښي
د پورته نابرابرونسیستم له مخۀ د هر نابرابرون لپاره کرښه کشل کیږي، په یوه کواوردینات سیستم کې او بیا د هوارې هغه برخه، چې دریواړه کرو کې رابنده منهواره وي، هغه یې اوبی دی٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

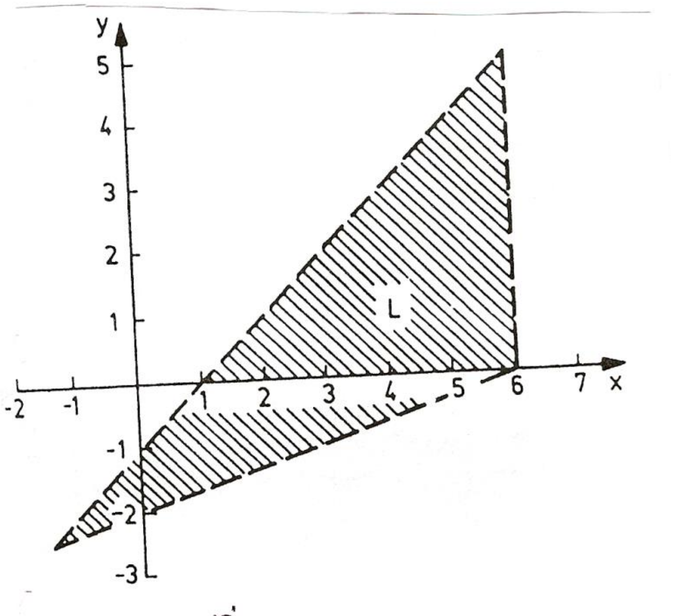


Bild 14.6 شکل

۱۴ . ۲ برابرون او نابرابرون د مطلقه ارزښتونو سره

۱۴ . ۲ ۱ د مطلقه ارزښتونو سره شمیرنه

که په یوه براروں یا نابرابرون کی د ترمونو مطلقه ارزښتونه د مجهولی په څیر رییلي واریابلي یا اووښتونی وي، نو د مجهول په لور له ابیولو د مخه باید یو د مطلقه ارزښت خپلواك فورم پیداشي. داچي له برخی ۳ څخه څرګنده ده چی د یوه رییل ګڼ مطلقه ارښت د

مخنخښی په واك په توپیري ډول جوړیږي نو د یوه ترم لیکل بي له مطلقه ارزښت، په پرینځیپ کی دوه حالتونه توپیریږي٠
داسی دئ:

$T(x) = T(x)$ لپاره $T(x) \geq 0$ د (14,10)
$T(x) = -T(x)$ لپاره $T(x) < 0$ د (14,10)

(c) ketabton.com: The Digital Library

که مطلقه ارزښت د صفر لوي یا په صفر برابر وي، نو کیدی شي چې د مطلقه ارزښت لرې پرېښول شي، یا د نورو ترمونو سره په تړلو په نوکانو بدل شي. که مطلقه ارزښت متن منفي وي یعني د مطلقه ارزښت دننه، نو د مطلقه ارزښت نخښنو په ځاي نوکان لیکل کیږي او دا نوکان بیا په (۱ -) ځلیږي. هغه ټکي چي په (۱۴ ، ۱۰) کی ورکړ شوي شرایط پوره کوي، نو پرېښول کیږي چی ځانونه په قاعده کي په اینتروال وښایي، کوم چی دیسیونکت(پردي) برخه ډیری د اوښتونوچاپیریالونه دي، د کوم لپاره چی (T(x ښوول شوی دی. د دواړو برخه چاپیریالونو ټولنډیري، باید بیرته د ټول هغه واریابلچاپیریال ورکړي، کوم چی د کنترول لپاره باید و ازمایل شي. په دې ځاي کی دې د ځله وونی او ویش مطلقه ارزښتونو لپاره قواعد ورکړ شي، چی د بدلون لپاره د ارزښت وړ دي.

که a اوb رییل ګڼونه وي ، نو لاندې باور لري کیږي.

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

$$|a : b| = |a| : |b|$$ د $b \neq 0$ لپاره

۱۴ . ۲ . ۲ برابرون د مطلقه ارزښت سره

د یوه مطلقه ارزښت مساوات حل لکه چی د حالت توپیرولوکی توضیح شوی ، باید په هر حالت کی وازمایل شي چی ایا دا اوبیونې په نیول شوي یا فرض شوي اینتروال کي پراته دی او که یوائې د اوبې په څیر ښکاریدونکي رامنځ ته کیږي . یوګوني اوبیوني اوبیډیري L کی رایوځاي کیږي. د مقایسي یا انډول یا پرتلی لپاره د برابرونونو هغه کرافیکي اوبیونې شونی یا ممکن دی، په کوم کی چی هره لور یا اړخ د یو فنکشن تنظیم عملیي راوړل کیږي یا رانیول کیږي او په x , y - پروت ولاړ – یا کواوردینات سیستم
کی انځوریږي .
د دواړو فنکشنونو غوڅټکي x - کواوردیناتونه په همدې وخت کی د برابرونونو اوبیونې دي.

بیلګه ۱۴ . ۱۲:

$$|x+1|=(x/2)+2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

باور لري:

$(x+1) \geq 0$ د $x > -1$ لپاره

$(x+1) < 0$ د $x < -1$ لپاره

(14,11) د $x \geq -1$ لپاره $|x+1| = x+1$

(14,11) د $x < -1$ لپاره $|x+1| = -x-1$

لومړی حالت

$$x \in [-1, \infty)$$

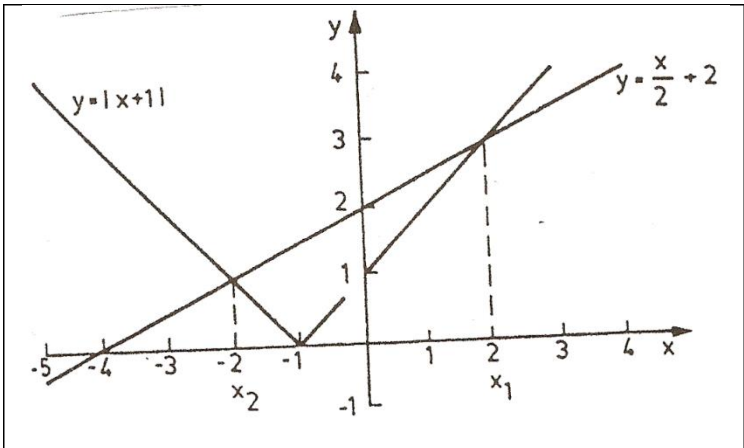
$$|x+1| = x/2+2 \Leftrightarrow x+1 = x/2+2 \Leftrightarrow x = 2 \in [-1, \infty] \Rightarrow x_1 = 2$$

دوم حالت:

$$x \in [-1, \infty)$$

$$|x+1| = x/2+2 \Leftrightarrow -x-1 = x/2+2 \Leftrightarrow x = -2 \in [-\infty, -1] \Rightarrow x_2 = -2$$

د برابرون یا مساوات اوبیدیری $L = \{-2, 2\}$



په داسی حال کی چی د ښی اړخ د ورکړشوي برابرون، $y = x/2 + 2$, ګرافیکی انځورونه، په څرګند ډول یوه کرښه ده، کیڼ اړخ، $y = |x+1|$ د (۱۴ . ۱۱) سره د دوه نیموکرښو په څیر منځ ته راځي.

اوبی : کیدی شي په ځ. ۱۴ . ۷ کی ولوستل شي

که یو برانرون د لاینیزو ترمونو زیات مطلقه ارزښتونه ولري، نو شووني یا مساعد ده چی لومړی د هغه ګنوړانګه په هغه ځاي کی وویشل شي، چیرته چی د ترمونو مخنخښه د مطلقه ارزښت په دننه کی تغیر خوري او د هر یوه مطلقه ارزښت څرګندونه په داسی لاس ته راغلو برخه اینتروالونو کی د لیدلو وړ یوځاي راټول کړي.

بیلګه ۱۴ . ۱۳ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

|1- x|-|2x+3|=1

د (۱۴ . ۱۰) پسی لرو:

د x<1 لپاره |1-x|=1-x

د x>1 لپاره =-1+x

او(لاندې او پورته هم لومړی له کینِ وښی لو رته لوستل کیږي

د x>-3/2 لپاره |2x+3|=2x+3

د x<-3/2 لپاره =-1x-3

یوځاي راټول یا د ګډ فرمولولو لاندې تر پام یا تر تظر

	x<-3/2	-3/2<x <1	x>1
|-1+x|	1-x	1-x	−1+x
|2x+3|	2x+3	-2x-3	|2x+3|

له دې امله د برابرون اوبې کی درې حالتونه توپیروو. برسره پر دې باید کمیزه – یا منفي نخښه د دويم مطلقه ارزښت د مخه په پام کی ونیول شي:

لمړی حالت:

$$x \in (-\infty, -3/2)$$

$$1 - x - (-2x - 3) = 1 \Leftrightarrow x + 4 = 1 \Leftrightarrow x = -3 \in (-\infty.-3/2) \Rightarrow x_1 = -3$$

دم حالت:

$$x \in [-3/2, 1]$$

$$1 - x - (2x + 3) = 1 \Leftrightarrow -3x - 2 = 1 \Leftrightarrow x = -1 \in (-\infty.-3/2) \Rightarrow x_2 = -1$$

دریم حالت:

$$x \in (1, \infty)$$

$$-1 + x - (2x + 3) = 1 \Leftrightarrow -x - 4 = 1 \Leftrightarrow x = -5 \notin (1, \infty)$$

په وروستی حالت کی شمیرل شوی ارزښت د نیونی سره په څټ یا تضادکی دی، چی x3 = -5

یواځي ښکارندډوله اوبی دی(دا په دې مانا چی یواځی د اوبي په څیر یا - غوندې ښکاریږي) .

اوبډیری : L = {-3,-1}

د ښکارندډوله اوبي منځ ته راتګ کیدی شي، چی د ګراف اوبي – یا حللارې له لارې څرګند

(c) ketabton.com: The Digital Library

شي. د کيڼ اړخ یا لور مطلقه ارزښت خپلواك یا ازاد ښودل کیدی شی چی توته توته د مخه تیرشوي شمیرنو په بوګونوحالتونو کی لاس ته راځی. له دې امله تعقیبيږي:

د $x > -3/2$ لپاره $=x+4$

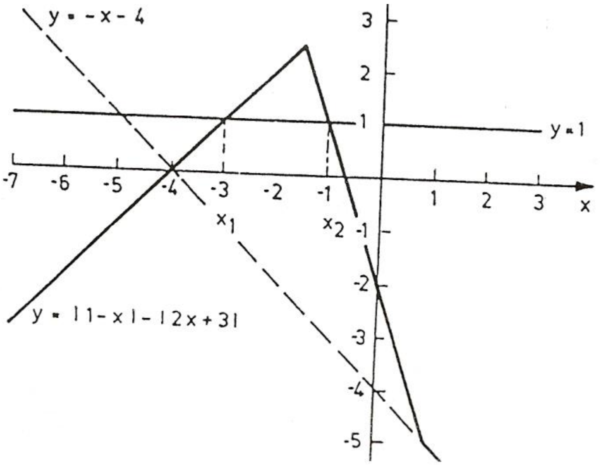
د $-2/3< x < 1$ لپاره $|1- x|-|2x+3|=-3x-2$

د $x > 1$ لپاره $=-x-4$

ښی لور همغه - یا ثابت فنکشن $y = 1$ دی . د مخه شمیرل شوو اوبیونو پرتلې له پرتلې مقایسي خیره شته، خو زما په ستونځو ګرانلوستونکی اوس بلد دي ۱۴ . ۸ ښایي، چی دواړه کرښي ریښتیا د $x < -3/2$

او $-3/2< x < 1$ لپاره ربښتیا هره یوه بله یوځل پرې کوي، مګر د $x > 1$ لپاره یو بل نه پریکوي. په دریم حالت کی د اړوند کرښی توتی $y = -x-4$ د اوږدوالی پرتکی راکوي، د کرښي $y = 1$ د حل په خیر حل د نیول شوي اینتراوال د باندې دی خیره (شاید داخیره هم خیره نه شي، کۀ کرانو مینه والو داکار پخپله وکړ ، نو نور به هم ګټور به وي)ش . ۱۴ . ۸

دلته هغه خیره باید ریشی او یا راغلی وي، یا راغلې وی۰



که د مطلقه ازښت نخښی په یوه ځلوري - یا مربع ترم کی له منځه وړل کیږي، نو کیدی شي چی د مخنخښي غوښتل شوي خیرنی چي په برخه .۱۴. ۱ . .۲ کی تر خیړني نیول شوې د مربع نامساوات د حل متود ګټه ترې واخستل شي.) بیلګه ۱۴ . ۵ دې مقایسه شي)

بیلګه ۱۴ . ۱۴:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$|x^2 - 6x + 5| = 3$

د $x^2-6x+5>0 \Leftrightarrow (x-1)(x-5)>0 \Leftrightarrow x<1 \vee x>5$

او $x^2-6x+5<0 \Leftrightarrow (x-1)(x-5)<0 \Leftrightarrow 1<x<5$

سره لاس ته راځي

(14,12) د $x<1 \vee x>5$ لپاره $|x^2-6x+5|=x^2-6x+5$

(14,12) د $1<x<5$ لپاره $|x^2-6x+5|=-x^2+6x-5$

لومړی حالت: $x \in (-\infty,-1] \cup [5,\infty)$

$x^2-6x+5=3 \Leftrightarrow x^2-6x+2=0,$

$L \Rightarrow x_1=3+\sqrt{7}=5{,}65 \in [5, \infty)$, $x_2= 3 - \sqrt{7} = 0{,}35 \in (-oe , 1]$

دوم حالت $x \in (1,5)$:

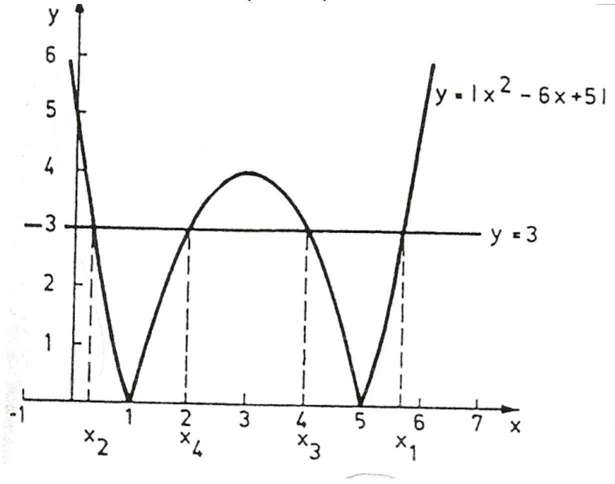
$-x^2+6x-5=3 \Leftrightarrow x^2-6x+8=0,$

$L \Rightarrow x_3=4 \in (1, 5)$, $x_4= 2 \in (1, 5)$

پام : که چیرې حل یا اوبی مو نه وو لیکلی او L مو لیکلی وو ، نو دا د اوبی په مانا دی المانی Lösung ورته وایي چی لند په L لیکل کیږي .

اوبیډیری: $L = \{3 - \sqrt{7}); 2;4;3;3+\sqrt{7}\}$

ځیره ۱۴ . ۹ د ګراف له لاری اوبی ښایي. کیڼ لور $y=|x^2-6x+5|$ د (۱۴ . ۱۲) له امله د پارابوللیندو څخه یوځای کیږي. ځیره ۱۴ . ۹



ځیره ۱۴. ۹

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ټولیزه توګه د یوه برابرون اوبې کې ، په کوم کې چې n مختلف ارزښتوییني یا - افادې یعني $|T_i(x)|$, $i = 1,2,...n$ منځ ته راځي، 2^n حالتونه یو له بل توپیر کیږي. دا د هغه کیدونکو کیدنو یا ممکن امکاناتو ګڼون یا تعداد دئ ، کوم چې موجود دی ، چې د ترم $T_i(x)$ د تیپ یا بڼی وي چې یا
($T_i(x)$ >0 او یا $T_i(x)$ 0<راکوي، یعنی د دوه توکو د وارییشن امکاناتو ټولګي ته پرتله ۱۰ . ۴ . ۲ برخه) د ارزښت نخښی د له منځه وړلو له امله د (۱۴ ، ۱۰)
قاعدې سره سم 2^n برابرونونه منځ ته راځي، چې په ټولیزه یا عمومي توګه دې اوبیونې ولرودئ شي. یوازې دا باید وازمایل شي ، چې ایا دا اوبې xi پیلبرابرون x_1,x_2,x_3,...... پوره کوي که نه.
د دې ټولیزې تګلار پسی موږ په بیلګي ۱۴ . ۱۳ کی د
T1(x)=1-x, T2=(2x+1)
سره، په لاندې $2^2 = 4$ حالتونو باندې کار کوو:

$$1.\ T_1(x) \geq 0 \wedge T_2(x) \geq 0: \quad (1-x)-(2x+3)=1 \Rightarrow x_1=-1.$$

$$2.\ T_1(x) \geq 0 \wedge T_2(x) < 0: \quad (1-x)+(2x+3)=1 \Rightarrow x_2=-3.$$

$$3.\ T_1(x) < 0 \wedge T_2(x) \geq 0: -(1-x)-(2x+3)=1 \Rightarrow x_3=-5.$$

$$4.\ T_1(x) < 0 \wedge T_2(x) < 0: -(1-x)+(2x+3)=1 \Rightarrow x_4=-\frac{1}{3}.$$

پیلبرابرون د3- = x1=1, x2لپاره پوره دي مګر د x3 اوx4لپاره پوره نه دي.

۱۴ . ۲ . ۳ نابرابرون دمطلقه ارزښت سره

که په نابرابرونو کی مطلقه ارزښتونه منځ ته راشی، نو داسی دي لکه په برخه. ۱۴ .۲ ۲ کی د حالتونو توپیر سره ونیسی یعني د کارپیل په وکړي، کوم چې بي له مطلقه ارزښتنخښو د انځوروني لپاره ضرر یا غوښتونکي دي. د واریابلو یا اووښتونکو اړونده برخه چاپیریال په دننه بیا مختلف نابرابرون ۱۴ .۱ سره سم حل کوو، د کوم سره چي بیرته د حالت توپیر اړیین دئ

بیلګه ۱۴ . ۱۵ : |7-3x|>2

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی حالت:

$$7-3x \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 7/3]$$

$$7-3x \geq 2 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 5/3]$$

$$L_1 = (-\infty, 7/3] \cap (-\infty, 5/3) = (-\infty, 5/3]$$

دویم حالت:

$$7-3x < 0 \Leftrightarrow x \in (7/3, \infty)$$

$$-7+3x \geq 2 \Leftrightarrow x \in [, \infty)$$

$$L_2 = (7/3, \infty) \cap [3, \infty) = [3, \infty)$$

$$\Rightarrow$$

$$L = L_1 \cup L_2 = (-\infty, 5/3] \cup [3, \infty) = R \setminus (5/3, 3)$$

په پورته کې د دې د غشي څوکه له پامه کې نه راړل کیږي:

بیلګه ۱۴ . ۱۶: |x-5|<|x+1|

د یوګونو ترمونو انځورونه بي له ارزښتنخښی:

د x > 5 لپاره |x-5|= x–5

د x < 5 لپاره |x-5|=-x+5

او

د x ≥ 1 لپاره |x+1|=x+1

د x ≤ -1 لپاره |x + 1| = -x - 1

په یوه لید وړ توګه په لاندې توګه راټولیګي رایوځاي کیږي یا راغونډیږي :

	X > -1	-1≤ x<5	x≥ 5
|x-5| =	-x+5	-x+5	x-5
|x+1|=	-x-1	x+1	x+1

لومړی حالت: $x \in (-\infty, -1)$

|x-5|<|x+1|<=>-x+5<-x-1 <=> 0<-6

د هر x<-1 نابرابرون یوې ناریښتیا وینا ته لارښودوي، چی په دې حالت کی کوم اوبه وي ، دا په دې مانا چي: L1 = Ø

دوم حلات $x \in [-1, 5)$:

(c) ketabton.com: The Digital Library

|x-5|<|x+1|<=> -x+5<-x-1 <=> x>2<=>

$x \in [2, \infty]$

$L_2 = [-1, 5) \cap (2, 5) = (2, 5)$

دریم حالت: $x \in [5, \infty)$

|x-5| < |x + 1| <=> x - 5 < x + 1 <=> 0<6

هر 5 ≥ x نابرابرون پوره کوي، دا په دې مانا چې: L3 = [5 , oe)

حلډيری: $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = (2, 5) \cup ([5, \infty) = (2, \infty)$

بیلګه ۱۴ . ۱۷: |x²-4x-21|<24

د x²-4x-21≥0 <=> x<-3 v x≥7

او x²-4x-21<0 <=> -3<x<7

څخه لاس ته راځي:

د x<-3 v x≥7 لپاره |x²-4x-21|=x²-4x-21

د -3<x<7 لپاره = -x²+4x+21

لومړی حالت: $x \in (-\infty, -3] \cup [7, \infty)$

|x²-4x-21|<24 <=> x²-4x-21<24 <=> x²-4x-45<0

<=> -5 < x < 9 <=>

x ∈ (-5,9)

$L_1 = [(-\infty, -3] \cup [7, \infty)] \cap (-5, 9) = (-5, -3] \cup [7, 9)$

دویم حالت: $x \in (-3, 7)$

|x²-4x-21|<24 <=> -x²+4x+21<24 <=> x²-4x+3>0

<=> x < 1 v x > 3 <=>

$x \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty),$

$L_2 = (-3, 7) \cap [(-\infty, 1)] \cup (3, \infty) = (-3, 1) \cup (3, 7)$

اوبیډيری:

$L = L_1 \cup L_2 = (-5, 1) \cup (3, 9)$

دا بیلګې د دې درس لپاره بسیا کوي، دا بیا دلته هم تکرار لیکم، که په کومه موضوع کې ګرانو لوستونکو څه زیات غوښتل هغه هم په پام کې نیول کیږي او کړی شو، چې په ګډه هره موضوع وغزوو٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې کی به په یوه بیلګه کی داسی نامساوات وڅیړو، په کومه کی چی مجهوله په مطلقه ارزښت افاده شوي وي او هم مات لاندې کی منځ ته راشی.

بیلګه ۱۴ . ۱۸: $|1+2x| / (1-x) < 1 , x \neq 1$

د (۱۴ ، ۱۰) له مخی د مطلقه ارزښت له منځه وړلاو د مات لاندې سره د نابرابرون ځله ونه د (۱۴ . ۲) او (۱۴ . ۳) له مخی په هر وخت کی د همغه ترم مخنخښه باید په پام کی ونیول شي. باور لري یا صدق کوي:

د $x \geq -1/2$ لپاره $|1+2x| = 1+2x$

د $x<-1/2$ لپاره $|1+2x|=-1-2x$

او

د $1 > x$ لپاره $(1-x)>0$

د $x > 1$ لپاره $(1-x) < 0$

دلته هم په همغه دوه تیریدونکو ځایونو کی ګنوړانګه سره بیله یا توټه کیږي، داسی چي په راتلونکو ګڼلو کی یا ځانیزه توګه درې حالتونه یو له بل توپیریږي.

	$X<-1/2$	$-1\leq x<1$	$x>1$
$\|1+2x\|$	$-1-2x>$	$1+2x$	$1+2x$
$=1-x$	>0	>0	<0

لومړی حالت: $x \in (-oe, -1/2)$

$$-1-2x\leq 1-x \iff x\geq -2 \iff$$

$$x \in [-2 , oe)$$

$$L_1 = (-oe, -1/2) \cap [-2 , oe) = [-2 , -1/2)$$

دویم حالت $x \in [- 1/2,1)$:

$$1+2x < 1- x \iff x<o \iff x \in (-oe,0]$$

$$L_2 = [-1/2 ,1] \cap (-oe,0] = [-1/2, 0)$$

دریم حالت:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$x \in (1, oe)$

$1 + 2x \geq 1 - x \iff x \geq 0 \iff x \in [0, oe)$

$L_3 = (1, oe) \cap [0, oe) = (1, oe)$

د حلونو ست(اوبیډیری):

$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = [-2;0] \cup (1,oe)$

د دوه ناپیژندونکو سره د یوه نامساوات ارزښت حلډیري پیدا کولو لپاره هم باید لمړی ارزښت له منځه ولاړ شي. مساوات (۱۴ . ۱۰) ته ورته د واریابلو یا اوښتونکو x او y سره، د یوه لایني ترم ارزښت سره، باور لري:

(14,13) د $ax+by+c \geq 0$ لپاره $= ax+by+c$

(۱۴ ، ۱۳) د $ax+by+c < 0$ لپاره $|ax+by+c| = -(ax+by+c$

د نیونو یا فرضیو سره $a \neq 0 \ v \ b \neq 0$

دواړه ښي لیکل شوي شرطونه په برخه ۱۴ . ۱ . ۴ کی د کارول شوې بڼی(۱۴ . ۹) نابرابرون
هم کارول شوي . له دې امله باید یو نامساوات د ارزښت افادي (۱۴ . ۹) سره، د کرښی $ax + by + c = 0$ له لارې ورکړ شوې، یو له بل بیلی یا جدا، د x,y-هوارې نیمه هوارې یو له بل بیلی اوبی کړی شي.

بیلګه ۱۴ . ۱۹:

$|x-y+1| > x-2x-4$

د (۱۴ . ۱۳) اړیکو باور لري :

د $-x-y+1 \geq 0$ لپاره $|-x-y+1| = -x-y+1$

د $x-y+1 < 0$ لپاره $= x + y - 1$

لومړی حالت: $-x - y + 1 > 0$

$|-x-y+1| > x-2y-4 \iff -x-y+1 > x-2y-4 \iff -2x+y+5 > 0$

$L1 = \{(x,y) | -x-y+1 \geq 0, -2x+y+5 > 0\}$

دوم حالت: $x-y+1 < 0$

$|-x-y+1| > x-2y-4 \iff x+y-1 > x-2y-4 \iff 3y+3 > 0 \iff y < -1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$L2=\{(x;y)|-x-y+1<0 ,y>-1\}$

له دې سره L1 او L2 د اوبيډيرئ دوه نابرابرونونو غوځديرئ ده او کيدی شي، لکه څنګه يو نابرابرون د يوه ګراف سره انځور شي (ځيره دلته هم په پوښتنه کې ده ۱۴ . ۱۰ الف) اوبيډيرئ بيرته د ورکړ شوو نابرابرونونو برخ اوبيډيريو تولنديرئ ده٠ (ځيره ۱۴ . ۱۰ ب) دلته هم همغه د مخه پام لرنه)٠

که په يوه نابرابرون کی دوه ارزښت افادې يا – ويينې د (۱۴ . ۱۳) بنی رامنځ ته شي، نو د ارزښت ترپام نيولو سره څلور حالتونه يو له بل توپير کيدی شي.

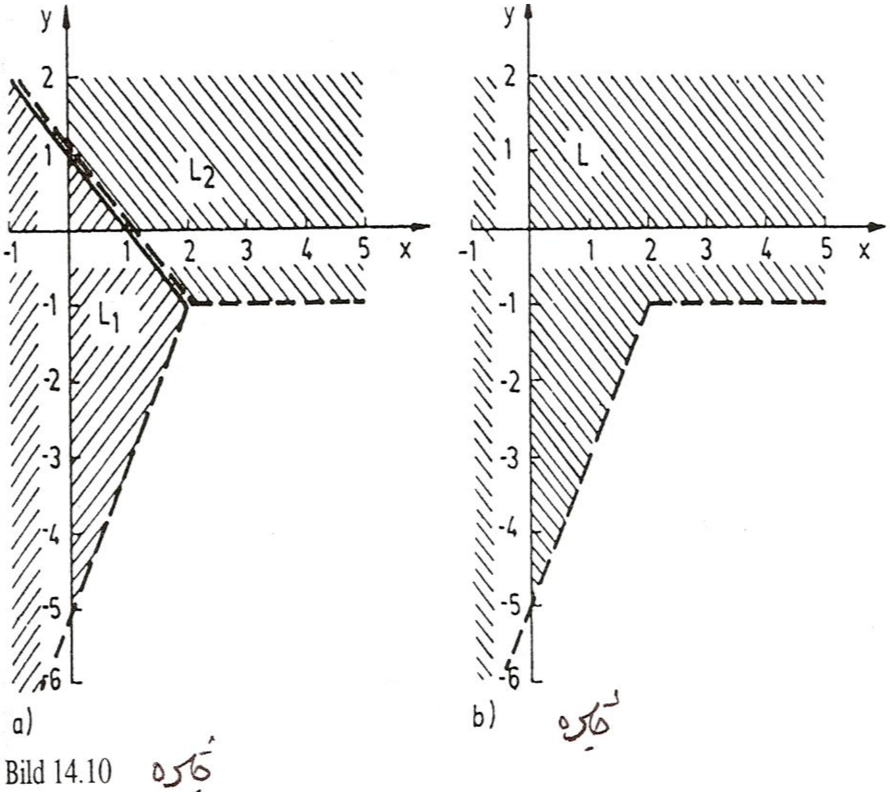


Bild 14.10

تمرينونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې نامساواتو حلډېرۍ پیدا کړئ

1. a) $8x - 3 < 2x + 9$ b) $5 - 7x \le 3x - 10$

c) $\frac{x}{2} - \frac{2}{3} > \frac{1}{2} + \frac{x}{9}$ d) $3(3x - 2) \ge 4(3 - 2x)$

e) $\frac{8x-5}{5} \le \frac{2x+5}{3}$ f) $\frac{3}{4} - \frac{2}{3}x > \frac{5}{4}x + \frac{1}{6}$

g) $\frac{8}{9} + 6x \ge 2(\frac{5}{6} + 3x)$ h) $\frac{1}{3}(\frac{x}{8} - 6) < \frac{x}{6} - \frac{x}{8} + 1$

2. a) $(3x + 1)(2x - 1) < (5x - 3)(2x - 1)$

b) $(8x - 9)(3x + 2) \ge (2 + 7x)(2 + 3x)$

c) $(7x - 3)(5 - 7x) > (3 - 7x)(5x + 3)$

d) $(5 + 2x)(7 - 5x) \le (10 + 4x)(2 - 3x)$

e) $x^2 - x - 6 \le 2x + 4$ f) $x^2 + 5x - 6 > 3 - 3x$

g) $x^2 + 3x \ge -2x - 6$ h) $x^2 - 4x + 4 < 4x - 8$

3. a) $\frac{3}{2x-4} \le 2$ b) $\frac{3x-4}{2-3x} \ge 4$

c) $\frac{2x-2}{2x+2} < 2$ d) $\frac{5x+3}{x} < -2$

e) $\frac{4x+1}{3x-2} > 5$ f) $\frac{9-3x}{x-3} > -3$

g) $\frac{4x+6}{2x+3} < 3$ h) $\frac{3(4x-1)}{x-1} \ge 12 - \frac{2(4x-5)}{x-1}$

4. a) $\frac{3}{4x-4} \le \frac{2}{x-6}$ b) $\frac{1}{5-3x} > \frac{1}{5x+4}$

c) $\frac{x+1}{x-3} < \frac{x-1}{x+2}$ d) $\frac{4x-3}{2x+1} \le \frac{2x+3}{x+2}$

e) $\frac{2x-1}{2x+1} + \frac{3x+1}{x-2} > 4$ f) $\frac{x-3}{1-6x} - \frac{2x+1}{4x+3} \ge -\frac{2}{3}$

g) $\frac{2x+1}{2x-2} + \frac{2x-3}{3x-3} \ge 1$ h) $\frac{2-5x}{3-x} - \frac{2-6x}{1-3x} < \frac{3}{8} \cdot 27^{\log_3 2}$

5. a) $(2x - 3)(3x - 2) < 0$ b) $(x + 3)(7 - x) \le 0$

c) $x^2 + 4x + 3 \ge 0$ d) $x^2 - 8x + 7 \le 0$

e) $x^2 + 4x + 5 < 0$ f) $x^2 - 6x + 10 > 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

g) $x^2 - 2x + 1 > \frac{5}{2}x - 1$ h) $2x^2 - 3x - 3 < 3(x - 1)$

6. a) $(x^2 - 6x + 5)(x^2 + 1) < 0$ b) $(x^2 - 4x + 5)(x^2 + 1) \le 0$

c) $(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 4) > 0$ d) $(9 - x^2)(x^2 + 3x + 2) \ge 0$

e) $(x^2 + 4x - 5)(x^2 - 4) > 0$ f) $2x^4 - x^3 + 10x^2 - 5x > 0$

g) $-x^3 - 3x^2 + 16x + 48 \le 0$ h) $\frac{x^3}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}\,x^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}x + \sqrt{2} < 0$

7. a) $\frac{x+4}{x+3} > 0$ b) $\frac{x+3}{x-7} < 0$

c) $\frac{2x+3}{3x-4} \le 0$ d) $\frac{x-2}{5x+1} \ge 0$

e) $\frac{6+9x}{4+6x} < 0$ f) $\frac{2x-1}{8x-4} > 0$

g) $\frac{3x-12}{x^2-4x} \ge 0$ h) $\frac{x^2-25}{2x+10} \le 0$

8. a) $x - 8 + \frac{7}{x} < 0$ b) $x + 3 - \frac{4}{x+3} > 0$

c) $8(x-2) \ge \frac{20}{x+1} + 3(x-7)$ d) $\frac{3x-24}{4} - (2x-6) > -\frac{5}{x}$

د لاندې نامساواتسیستمونو حل ډېرۍ وټاکئ

9. a) $2 + x \ge 2x - 7$, $5(x-3) \ge 2(x-3)$ b) $x + 6 < 14 - 3x$, $6 + 7x \ge 3x + 5$

c) $\frac{2}{3} - \frac{x}{2} > \frac{x}{3} + \frac{1}{6}$, $\frac{1}{2} + \frac{3}{4}x < \frac{8-x}{3}$ d) $x + \frac{1}{3} \le 2x - \frac{7}{6}$, $5(x - \frac{3}{2}) \le 2x - 3$

10. a) $x^2 - 3x < 0$, $2(x+2) < 4x - 1$ b) $x^2 + 6x + 8 < 0$, $2(x+2) > x + 3$

c) $x^2 - 9 < 0$, $x + 2 > 2(x-1)$ d) $x^2 - 3x + 3 > 0$, $4(x-1) < 2(x+1)$

11. a) $x^2 - 4x - 5 \le 0$, $x^2 + 6x - 16 < 0$ b) $x^2 + 2x - 8 < 0$, $x^2 - 3x - 4 > 0$

c) $x^2 - 5x > 0$, $x^2 - 9 > 0$ d) $x^2 - 6x + 5 < 0$, $x^2 + 8x + 15 < 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

12. a) $3x+2>2x+1>3(x-4)$ b) $-1<\frac{7x-3}{8x-5}<1$

c) $2<\frac{5x+1}{2x-1}<5$ d) $1<\frac{x^2+4x+5}{x+1}<4$

13. a) $3-x<2-4x$
$x+3<\frac{1}{2}(x+1)$
$\frac{x}{2}>x+\frac{1}{2}$

b) $x+5>\frac{7}{2}x+\frac{3}{2}$
$4(x-1)<13-\frac{1}{4}x$
$2x-1>x+6$

د لاندې نامساواتو او همداسې د نامساواتسیستمونو حاډېرئ په کارتیزې کواوردینات – یاپروتولاړ سیستم کې ګرافیکې انځور کړئ.

14. a) $y\geq -\frac{3}{2}x+3$ b) $y<-\frac{2}{3}x+2$

c) $x<2y+2$ d) $x>-y+3$

e) $4x-5y>12$ f) $-3x-8y\leq 24$

g) $2(y-3)\leq 6(x-1)$ h) $5x-y+2>3y-3x-10$

15. a) $2x+3y>-6$
$x-y<2$

b) $3x-y>3$
$x+y>4$

c) $x>1$
$x+2y<4$
$y+3>x$

d) $x-4y-6\leq 0$
$2x+y-3\leq 0$
$y-5\leq 0$

16. a) $-2<x+y<2$
$-2<x-y<2$

b) $x>2$
$-3<y<2+x$
$x+y<5$

c) $x^2-y^2\leq 0$ d) $(2x+y+1)(3y-x-1)>0$

د لاندې نامساواتو حاډېرئ د شمیرلو او همداسې ګرافیکې لارې پیداکړئ.

17. a) $|x-3|=5$ b) $|x+2|=7$

c) $|1-\frac{x}{2}|=x+\frac{5}{2}$ d) $|x+3|=|3x-4|$

e) $|x-4|=|2x+3|$ f) $|9-3x|-|2x-1|=4-2x$

g) $|2-3x|-|x+1|+|2x+2|=3$ h) $|x-3|-|3x-4|+|2x+1|=6$

18. a) $|x^2-2x-8|=7$ b) $|8-2x^2|=6$

(c) ketabton.com: The Digital Library

c) $|2x - x^2| = 8$ d) $|x^2 + 6x + 5| = 5$

e) $|x^2 - 4x + 3| = 1$ f) $|x^2 - 2x - 3| = 1$

g) $|4x^2 + 4x + 4| = 3$ h) $|x^2 - 3x + 7| = 4$

19. a) $\left|\frac{2x+4}{x-3}\right| = 1$ b) $\left|\frac{2x-4}{x+3}\right| = 2$

د لاندې نامساتو حلډېرۍ پيدا کړۍ

20. a) $|x - 2| < 3$ b) $|2 - 4x| \geq 1$

c) $2 - |1 - x| \geq 1 + x$ d) $|2x - 3| < x + 3$

e) $|3x - 5| > 2|x + 2|$ f) $|3x + 3| \geq \left|\frac{1}{2}x - 1\right|$

g) $|x - 4| + |2 - x| \leq 2$ h) $|3 - x| < 2 - |x - 5|$

21. a) $|x^2 + 2x - 3| \leq 12$ b) $|x^2 - 6x + 8| \geq 3$

c) $|x^2 + 4x - 5| > 2$ d) $|15 + 2x - x^2| < 7$

e) $|x^2 - 6x + 11| < 1$ f) $|x^2 + 4x + 7| > 2$

g) $|3 + 6x + 3x^2| > 0$ h) $|x^2 + 4x| < 4$

22. a) $\left|\frac{x+3}{1-x}\right| > 3$ b) $\left|\frac{1-4x}{2-x}\right| > 4$

c) $\frac{2x+3}{|x+4|} \leq 1$ d) $\frac{\frac{2}{3}x - \frac{3}{2}}{\left|\frac{3}{4} + \frac{x}{2}\right|} \leq \frac{5}{6}$

e) $\frac{|3x-2|}{x+2} \geq 2$ f) $\frac{|x-1|}{2x+2} \geq 1$

د

لاندې نامساواتو حلډېرۍ په يوه په يوه کوارديناتسيستم کې انځور کړۍ او ا نځور يې وکاږۍ

23. a) $x + y < |3x + 2|$ b) $y + |x + 2| \leq 4$

c) $x + |y - 2| < 3$ d) $|2x + y - 3| \geq 2y - 3x + 4$

e) $|x + 3| + |y - 5| \leq 3$ f) $|x + y - 2| > |y - x + 1|$

g) $|x + y + 1| \leq |x - y - 1|$ h) $|x - y| > |x - 2y - 2|$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۵ فنکشنونه(بلواك يا تابع)

۱۵ . ۱ د فنکشن کلیمه او د فنکشن انځورونه:

غواړم چی ددې برخی په پیل کی دی کلیمي ته د لوستونکو پام راوګرځوم: د فنکشن کلیمه کله د یواځنی څیرونی، چی په هندسه کی خورا ډیره کارول کیږي یا استعمالیږي ، کله د تابع(بلواك) او بیا زیاته د فنکشن په نامه څموږ په دې کار کی بلل شوې چی موږ ورسره تراوسه د تابع تر نامه لاندې هم بلد یو، څما په اند یا فکر که دا موږ بلواك وبولو، نو هدفمند به مو نومولی وي. په لاندې کي به وګور چی خپلواکی او بلواکی ناپیوندونکی څموږ د څیړلو متن جوړوی

پيژند ۱۵ . ۱:

د یوې ریيلی واریابلی ریيل ارزښته فنکشن(لنډ: فنکشن) د ریيلو ګڼونو ډیری باندې ، د یوې ډیری $D \subseteq R$ یوه یواځنی څیرونه ده. D دپيژند ډیری نومیږي .
د ټولو ارزښتونو ډیریَ چي y یی د ځان لپاره غوره کولی شي، که x د پيژنددیریَ یا تعریف ډیري په دننه کی وځغلي، د ارزښت ډیری W بلل کیږي .
د ي وې قانونمندیَ f له مخی هر $x \in M$ یواځني یوه $y \in W$ باندې تنظیمیږي:

$$y = f(x)$$

اوس نو x خپلواك واریابل یا اووښتونی یا مجهوله بلل کیږي یا نومیږي او y بلواك واریابل یا اووښتونی بلل کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

د فنکشن مختلف انځورډولونو ترمنځ سړی توپیروي. د فنکشن »کلیمه انځورونه« یوه په خوله ویونکی یا یو اعلانونکی ، له ماتماتیکي یا شمیریز سومبولیك څخه تیریدونکی یا په شمیریز سومبولیك صرف نظر کوونکی، مگر ددې لپاره یو پیچلی، د تشریح شکل دی، چی په لاندې کې به ورسره بلد شو.

بیلگه ۱۵ . ۱ : هر رییل گڼ د همغه رییلگڼ په نیم ور زیات ۱ باندې تنظیمیدل.

بیلگه ۱۵ . ۲ : هر یو منفي گڼ به د هغه په مطلقه ارزښت او هر یو مثبت گڼ او صفر به د هغه په مربع تنظیم شي.

د شمیرپوهی سومبولونو تر استعمال لاندې، تحلیلي (شننیزه) انځورونه د بلواک یا فنکشن تشریح ده. دلته x اوy د نورو رییلو گڼونو سره د بنسټیزو کارونو یا عملیو ، زیاتون، کمون ، ځل ، ویش ، او د بنسټیزو فنکشنونو له لارې تړل دي (پرتله برخه ۱۵ . ۴).

بیلگی ۱۵ . ۱ ته: y=(x/2)+1, D=R , W=R

بیلگی ۱۵ . ۲ ته : د x<0 لپاره y=|x|
دلته D=R,W = [0,∞) د x>0 لپاره y=x²
پام دې وي چی په داسی حالت کې له کیڼ و ښې لور ته یا گډوډلوستل کیږی یعنی داسی لولو: y د x مطلقه ارزښت سره مساوي دی ، که چیرې x له 0 کوچنی وي. داسی لیکنو ته دې گران لوستونکی پوره پام ولري او فکر کوم چی له اشتباه سره به نه مخامخ کیږو) . تحلیلي(شننیزه) انځورونه اکسپلیڅیت(واضح)روښانه و څرگند) explizitنومیږي، که د فنکشن برابرون ، لکه په بیلگو ۱۵ ، ۱ او ۱۵ . ۲ چی په یوه د yپه لور حلکیدونکي فورم مخ ته پروت وي: y =f(x) که چیرې داسي نه وي نو د تحلیلي - یا شننیزې انځوروني شکل F(x,y)=0 دی او فنکشن ایمپلیڅیت (ورسره ځای شوي یا وراسره تړلی implizit) بلل کیږي یا نومیږي . د بیلگی په توگه به 2y-x-1=0 D=R,W=R,فنکشن د بیلگي ۱۵ . ۱ یو ایمپیلیڅیت انځورونه وی. دیوه فنکشن نه هره ایمپلیڅیت شنینیزه بڼه (ایمپلیڅیت تحلیلي فورم) کیدی شي په

اکسپلیڅیت شننیزه یا سپړنیزه بڼه (تحلیلي فورم) واړول شي. د بیلگی په توگه : که $x + y + y^5 - 1 = 0$ وي، نو دا د y په لور اکسپلیڅیت حل کیدونکی نه دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یو فنکشن تحلیلي یا شننیزې انځورونی ځانګړې بڼه پارامتری څرګندونه ده. دلته تنظیم د یوه مرستندوي اووښتونې یا واریابلی t ، دا په نامه پارامتر، له لاري لاربښودیږي. هر پارامتر (له یوه پارامتر ساحی څخه)

$x = \varphi (t)$, $y = \Psi (t)$

په یو ارزښتجوړې x,y تنظیمیږي.

بیلګه ۱۵ . ۱ ته: $x=2t ,y=t+1; -oe< t <oe$ به یوه پارامتري انځورونه وی

او $x = t , y = t/2 + 1$ به یوه بله پارامتري انځورونه وي.

زیات وخت فنکشنونه د جدول په څیر ورکول کیږي

بیلګي ۱۵ . ۱ته:

X	-2	-1	0	1	2 ....
Y	2	0,5	1	1,5	2 .....

بیلګي ۱۵ ، ۲ ته:

X....	-3	2	-1	0	1	2	3 ...
Y....	3	2	1	0	1	4	9 ...

د فنکشن ګرافیکی انځورونه (د یوې ټوټې) په -x,y کواوردینات سیستم کی د یوې کړې له لارې، د هغه فنکشن انځورونی څخه عبارت ده ، چی د واریابلو

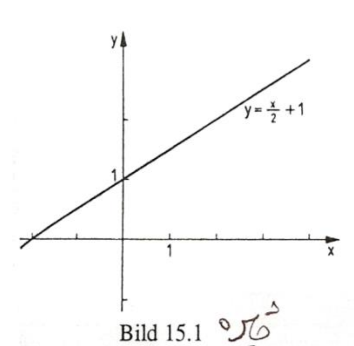


Bild 15.1 ځېره

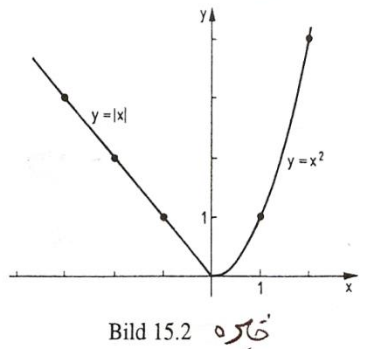


Bild 15.2 ځېره

یا اووښتونوجوړې د x,y - هواره یا سطحه کی یواځني او یواځني ټکي باندې تنظیمیږي .

څیره ۱۵ . ۱ . او ۱۵ . ۲) بیلګي ۱۵ . ۲ته بیلګي ۱۵ . ۱ته

(c) ketabton.com: The Digital Library

----

۱۵ . ۲ د فنکشنونو- یا بلواکو خویونه

پیژند ۱۵ . ۲: $y = f(x)$
په ایتروال]a,b[کی هلته او هلته یا تیك هلته مونوتون جګیدونکی
(مونوتون لویدونکی) دی، چیرته چی ددوه په زړه پورې ارزښتونو
$x \in [a,b] \wedge y \in [a,b]$ لپاره د$x1<x2$ سره باور ولري:

$$f(x1) \leq f(x2) \quad (f(x1) > f(x2))$$

که د برابرونښه باور ونه لري نو له کره یا کلکی مونوتوني غږیږو.

وبیلګي ۱۵ . ۱ ته: $y=(1/2)x+1$ په $D = R$ کی کلك مونوتون دئ

و بیلګي ۱۵ . ۲ ته: $y=|x|$ د $x<0$ لپاره
او $y= x^2$ د $x>0$ لپاره
په اینتروال) [oe,0] کي مونوتون ټیټېدونکی یا -لویدونکی
او په اینتروال [oe,0) کی مونوتون جګیدونکی دی

پیژند یا تعریف ۱۵ . ۳ :

په یوه اینتروال]-a,a[کی یو تعریف شوی فنکشن $y = f(x)$ هلته او هلته جوړه (جفت) یا سیومتریك symetrisch,(ناجوړه (طاق) یا نا- یا انتیسیومتریكantisymetrisch بلل کیږي چی باوري وي

$$f(-x) = f(x) \quad (f(-x) = -f(x))$$

د جوړه فنکشنونو ځیرې اکسیال یا محوري سیومتریك و y - محور ته ځغلي) دلته هم ځیره شته ، نو تل به همغه څه لیکم؟ ۱۵ . ۳ (، طاق فنکشنونه و سرچینی ته منځني یا مرکزي سیومتریك ځغلي) بیا هم ځیره او ۰۰۰۰ش ۱۵ . ۴)

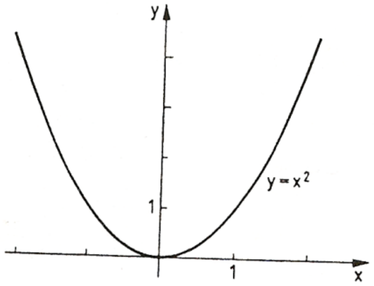
بیلګه ۱۵ . ۴
فنکشن $y= x^3 ,D= R$
یو ناجوړه یا طاق فنکشن دی :

$$(-x^3) = -x^3$$

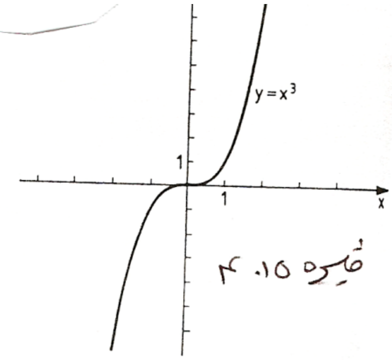
بیلګه ۱۵ . ۳ :
فنکشن $y=x^2,D=R$
یو جوړه یا جفت فنکشن دی:

$$(-x)^2 = x^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



څیره ۱۵، ۳



څیره ۱۵، ۴

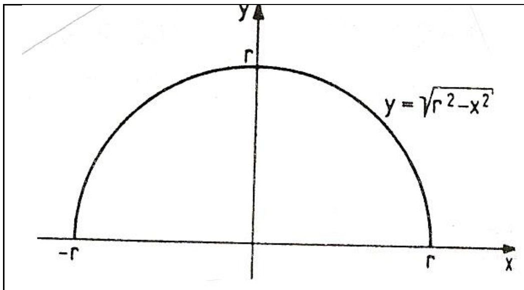
د بیلگي ۱۵ . ۱ او ، ۱۵ . ۲ فنکشنونه نه جوړه یا جفت او نه ناجوړه یا طاق دي

پیژند ۱۵ . ۴:

$y = f(x)$ تیك هلته په D (پیژنددیری ده) بند یا رابند(محدود)بلل کیږي که یو $k > 0$ داسی شته وي چي دا باور ولري :

$$|f(x)| < k \quad \forall x \in D$$

بیلگه ۱۵ . ۵:

	فنکشن $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $D = [-r, r]$ بند یا راګیر(محدود)(زه به دا له دي وروسته بند وبولم) دی، ځکه چی لرو:نیم یوونګردی څیره ده ش . ۱۵ . ۵ $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \leq r$

پیژند ۱۵ . ۵:

$y = f(x)$ پریودیکي(دوراني یا بیرته- یا تل بیرته راګرځیدونکی periodical بلل کیږي د دوران یا راګرځیدونی p سره ، که باور ولري:

$$f(x + p) = f(x)$$

د دورانی یا تل راکځیدونکو (پریودیکي) فنکشنونو تیوپیکي بیلگي تریگونومتریکي فنکشنونه دي (پرتله برخه ۱۵ . ۳)

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند ۱۵ . ۶ :

ټول $x \in D$ د $f(x)=0$ سره، د فنکشن $f(x)$ صفر ځایونه بلل کیږي۰

د فنکشن صفرځایونه د مساوات $f(x) = 0$ د حل له لارې پیدا کیږي. داحلونه د x- محور سره د فنکشن کربې د غوڅټکو x - ارزښتونه دي.

بیلګی ۱۵ . ۱ته:

د فنکشن $y = 1/2\,x + 1$ صفرځایونه د مساوات $x/2 + 1 = 0$ اوبی $x = -2$ دی (ځیره ۱۵ . ۱)

بیلګه۰ ۱۵ . ۶:

فنکشن $y = x^2 - 4$ دوه صفرځایونه لري:

$$x^2 - 4 = 0 \iff x_1 = 2 ,\quad x_2 = -2$$

فنکشن $y = x^2 + 4$ صفرځایونه نه لري.) بیا هم ځیر ۱۵ . ۶)

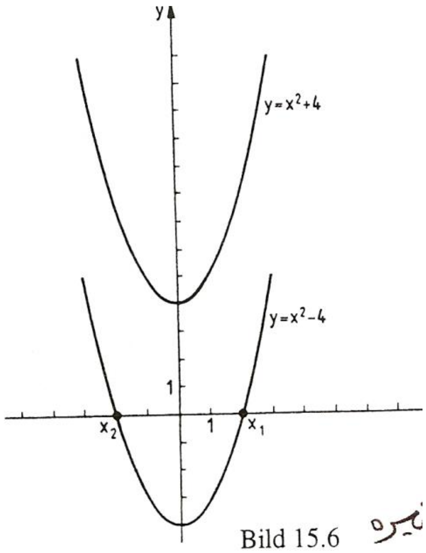


Bild 15.6 ځیره

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند ۱۵ . ۷:

$x \in D \quad , \quad y \in W \quad y = f(x),$

یویواځنی« یا یواځنی او یواځنی بلل کیږي، که هریو $y \in W$ د یوه $x \in D$ په واك کی وي یا هر یو $y \in W$ ته یوه $x \in D$ ځیره شوی وي، د کوم لپاره چی باور ولري: (y = f(x)یو یویواځنی یایواځنی او یواځنی فنکشن په ځتکیدونکی دی ، دا په دې مانا چي دا یو فنکشن (x = g(y تعریفوي، یعني په ځټ یا چپه فنکشن. که دلته د اووښتونو یا واریابلو د نخښی(نخونی) سره بدلی شي، نو د په ځټ فنکشن په توګه لرو y=g(x) دا د فنکشن روځنی یا وسره بده یا که غواړی مروجه ځیره ده، چی x خپلواك اوyبلواك ، دلته د x په واك کی واریابل یامجهولی یا ناپیزندونکی دي د y=f(x) په ځټ یا برعکس فنکشن لپاره داسی هم لیکلی شو: $y = f^{-1}(x)$

فنکشن y = x د خپل په ځټ فنکشن سره کټمټ(- ورته) identic دی۰ د په ځټ یا برعکس فنکشن $y = f^{-1}(x)$

کرافیکی ځیره y = x په کرښه د y =f(x) (هندارونه) یعنی په هنداره کی ځیرونه او لنډ یی: هندارونه) ده۰

بیلګي ۱۵ ، ۱ ته :

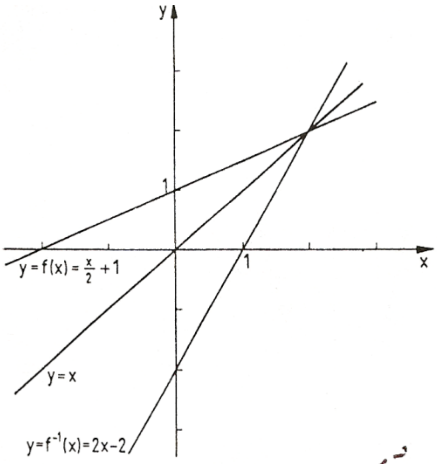


Bild 15.7a ځایره

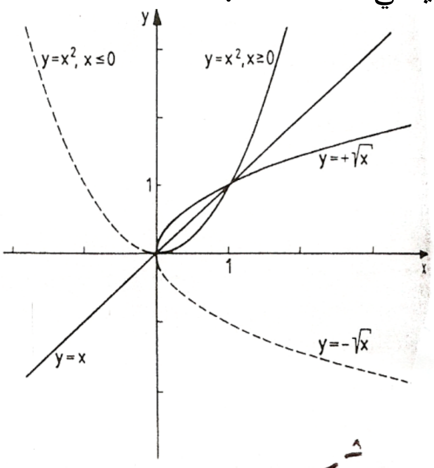


Bild 15.7b ځایره

د فنکشن y = f(x)= x/2 +1 چپه یا په ځټ فنکشن داسی دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$y = f^{-1}(x) = 2x - 2$

سړی $y = x/2 + 1$ د x په لور اوبی کوي: $x=2y-2$ او بالاخره x او y سره بدلوي .
(ځیره. ۱۵ ۷ الف)

بیلګي ۱۵ . ۳ ته : فنکشن

$x \in D$ $y = x^2$,

ځیرره ش ۱۵ . ۳) په ځټکیدونکی دي یا په ځټکیدونکی نه دی.

هر $y \in W$ $=[0,oe]$ پورې دوه$[-oe,oe]$ = $x \in D$ اړه لري، یعنی $x=+y$او $x=-y$

مګر $y= x^2$کلك مونوتون جګیدونکی دی (او په دې ډول یواځنی او یواځنی).

د $0 \geq x$ لپاره او کلك مونوتون لویدونکی د $0 < x$ لپاره. $y=x^2,x\geq 0$
ته چپه- یا په ځټ فنکشن $y=+ x$ دی، او $y = x^2 , x < 0$ ته چپه- یا په ځټ فنکشن $y =$ x -دی. (ځیره ۱۵ . ۷ ب) .

په ټولیزه (عمومي) توګه لاندې جمله باور لري

جمله ۱۵ . ۱ :

که $y = f(x)$کلك مونوتون جګیدونکی) لویدونکی (وي ،نو په ځټ فنکشن $y = f^{-1}(x)$ موجود دی او دا هم کلك مونوتون جګیدونکی (لویدونکی) دی.

۱۵ . ۳ . بنسټیز فنکشنونه

په دې برخه کي بنسټیز فنکشنونه تعریفیږي. دا ټول راشنل فنکشنونه، مات راشنل فنکشنونه، پوتنځ یا په توان فنکشنونه، ایکسپوننشل فنکشنونه او لوګاریتم فنکشنونه، تریګونومتري فنکشنونه او ځیکلومتري فنکشنونه دي. دا بنسټیز فنکشنونه به د خپلوځانګړدوله خویونو له مخی وځیړل شي. په برخه ۱۵ . ۴ که به دفنکشن فنکشنونه (ځنځیری - یا تړلي فنکشنونه) وځیړل شي. د فنکشنونو ځیړل به د هغو ځانګړدوله یا کرکتریستیکي خویونو له مخی هلته هم دوام ومومي، که د دیفرنشل شمیرنی کومکي مواد مو مخ ته پراته وي (برخه ۲۰ . ۴)

پیژند ۱۵ . ۸ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

فنکشن

$$y=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a^2 x^2 + a_1 x + a_0, n \in N; a_i \in R, a_n \neq 0 \quad (15.1)$$

د ټولو $x \in R$ لپاره تعریف دی او n - مه درجه ټولریشنلفنکشن نومیږي.دې ډول فنکشنونو ته پولینوم فنکشنونه(یا لنډ : پولینوم) هم ویل کیږي

یو ساده ټول ریشنل - ۱ - امه درجه (n = 1) یالاینې فنکشن په لاندې ډول دی:

$$y = mx + n \qquad (15.2)$$

دلته m او n په (۱۵ . ۱) کی پارامترونو a1 او a0 په مانا دي. د لاینې فنکشنونو ښیره(ګراف) یوه کرښه ده چې په y = n کی دy - محور غوڅوي (x = 0) او جګوالی $m = \tan\alpha$

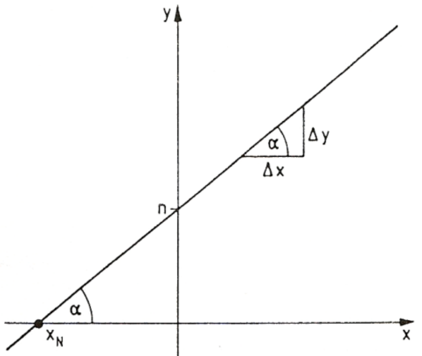


Bild 15.8 ګاره

لري (ښېره پورته . ۱۵ . ۸) جګوالی د y - ارزښت د تغیر د x - ارزښت تغیر سره متناسب دی: $m = \Delta y / \Delta x = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

کرښه جګیږي که $m > 0$ او لویږي یا ټیټیږي که $m < 0$ وي اوکه $m = 0$ وي،
دx - محور سره غبرګه څغلي . کرښه ،که $|m| = 0$ نیول شوی وي، ټیك یو صفرځای (y = 0) لري: $x_N = - n/m$

که را په غاړه شي چې د یوې کرښې برابرون، چې له دوه ټکو (x1,y1) او (x2,y2) تیریږي، پیدا کړو چي پو په بل نیغي نه وي ولاړې ، نو د هغو جګوالی m او د هغو پرتټکی

(c) ketabton.com: The Digital Library

یا نوره ښه غږځتکی n په y - محور د برابرونسیستم

$$y1 = x1m + n , y2 = x2m + n$$

له مخی پیدا کوو او په دې توګه لاس ته راوړو

$$(y-y1)/(x-x1)=(y2-y1)/(x2-x1)$$

په بل پل)قدم(کی موږ ۲ -امه درجه ټولریشنل فنکشنونه یا مربع فنکشنونه رامنځ ته کوو لکه په (۱۵ . ۱) کي $a_2 = a, a_1 = b, a_0 = c$

$$y=ax^2+bx+c , a \ |= 0 \qquad (15 .3)$$

د مربع فنکشنونو ځیره) ګراف (پارابول دی چی د هغي سیومتري محور و y - محور ته غبرګ ځغلي. کوایفیځینت) ځله ووني یا ځلیدونکی (a,b,c) د پارابول د ککرې ځاي او بڼه)فورم(ټاکی.

موږ د مربع فنکشن یو څو ځانګړي حالتونه تر ځیړني لاندې نیسو.

1. $y=x^2(a=1 ,b=0,c=0) \qquad (15 . 4)$

نورمال پارابول، د ککرې کواوردینات: $x_s = 0 , y_s = 0$

(خ . ۱۵ . ۹)

2. $y=x^2+px+q \ (a=1 , b=p , c=q) \qquad (15 . 5)$

او $x^2 + px$ ته د څلوری - یا مربع تکمیلولو ورزیاتونی څخه لاس ته راځي:

$$y=x^2+px (p/2)^2+q-(p/2)^2=(x+p/2)^2+q-p^2/2 \quad (15,5)$$

یو و (نسبت) (۱۵ . ۴) ته (مخامخ) د x - لور په p/2 - اودy - لور په

$q - p^2 /4$ راکښل (راښکل-یا راکش -) شوی نورمال پارابول د ی ، دا په دې مانا چی په (۱۵ . ۵) راکښل شوی پارابول دا ککره لري:

$$x_s = -p/2 , y_s =q - p^2/4$$

بیلګه ۱۵ . ۷:

$$y=x^2+6x+10, xs=-6/2=-3,ys=10-6^2/2=1$$

(خ،۱۵ . ۹)

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

3. y = ax² (a|=0,b=0, c = 0)

د ککرۍ (سر یا رآس) کواوردینات . $x_s = 0$, $y_s = 0$

پارابول د |a| > 1 لپاره خور، د |a|<1 لپاره پرسیدلی،د a > 0 لپاره پورته لور ته او د a < 0 لپاره کښته لورته واز دی (خلاص دی)

بیلګه ۱۵ . ۸:

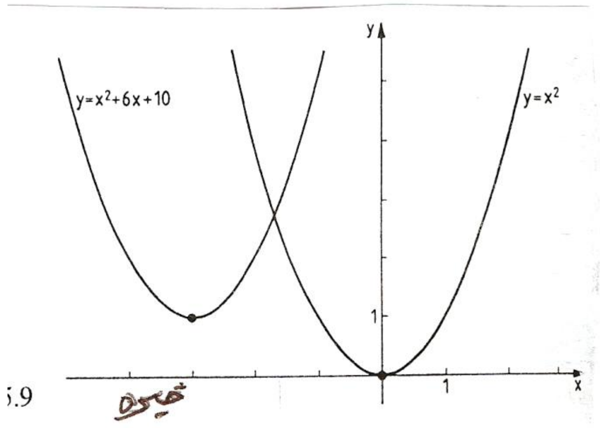
$y = 2x^2$, $y = (1/2)x^2$, $y = -2x^2$

(ځ . ۱۵ . ۱۰)

4. $y=ax^2+bx+c=a[x^2+(b/a)x+c/a]$

د ککرۍ (رأس) کواوردینات داسی دی (لکه په ۱۵ . ۵ کی یی چی مخ ته تللي یو)

$x_s = -b/2a; y_s = a[(c/a)-(b^2/4a^2)] = c - b^2/4a^2$



بیلګه ۱۵ . ۹:

$y=-(1/2)x^2+x+4$,(a=-1/2, b=1, c=4)

دککرۍ کواوردینات:

$x_s = -1/(2.(1/2)) = 1, y_s = 4 - 12/(4.(-1/2)) = 9/2$

دا چي a = -1/2 دی، نو پارابول پرسیدلی او لاندې لور ته واز دی (ش ۱۵ . ۱۱)

(c) ketabton.com: The Digital Library

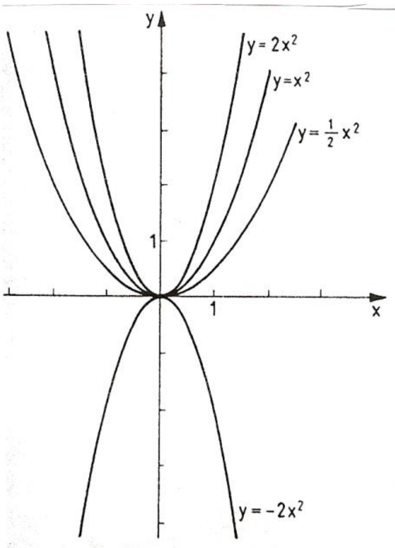


Bild 15.10

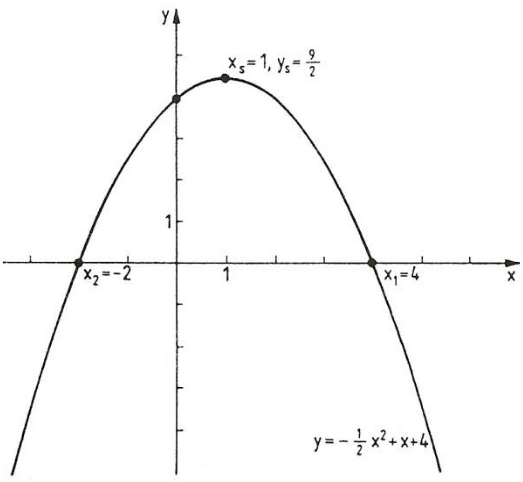


Bild 15.11

د فنکشن $y=ax^2+bx+c$ د صفرځایونه د برابرون $ax^2+bx+c=0$ اوبیونې دي.

وبیلګي ۱۵ . ۹ ته (خ. ۱۵ . ۱) :

صفر ځایونه له دې لاس ته راځي : $-(1/2)x^2+x+4=0$ ، چی دلته $x_1 = 4, x_2 = -2$ دي •

و بیلګي ۱۵ . ۷ (ځیره ۱۵ . ۹) ته :

د $x^2+6x+10=0$ یاني $x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9-10} = -3 \pm \sqrt{-1} = -3 \pm i$ څخه لاس ته راځي چی برابرون رییل صفرځایونه نه لري .

فنکشن $y = x^2$ غبرګ یا جوړه(ډبل) صفرځایونه لري یاني $x_{1,2} = 0$ دي

د ټولریشنل فنکشن دریمو او لوړو درجو لپاره به د بیلګي په توګه دټولریشنلفنکشنونو بیلګي له مخې، دریمه درجه ټولریشنل فنکشن راوړو

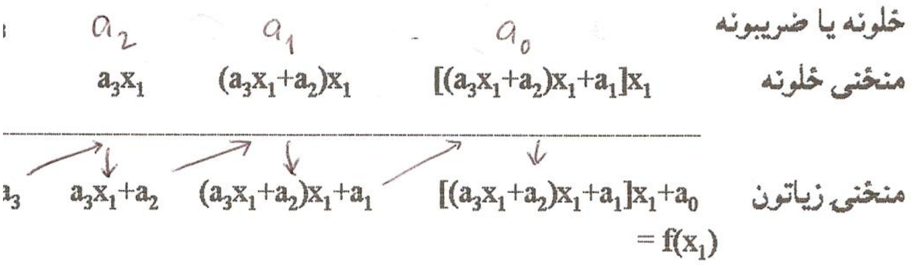
چي د فنکشن ارزښت شمیرلو یو ځانګړی لیدوړ فورم دی، د هورنرشیما(بنه) Hornerschema، معرفي شي. ددې لپاره به د(۱۵ . ۶) فورم بدل شي.

$$x_{4,5} = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm 2i$$

$$y = [a_3x^2 + a_2x + a_1]x + a_0 = [(a_3x + a_2)x + a_1)x + a_0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

هغه ورکړ شوي خپلواك x_1 پورې اړوند فنکشن ارزښت $y_1 = f(x_1)$ کیدی شي له دې بڼی سره په لاندې ډول وشمیرل شي:
a3 له x1 سره ځل کیږي، دې سره a2 زیاتیږي، زیاتون یی له x1 سره ځل، او a1 ور زیاتوو، زیاتون د x1 سره ځل او a0 ور زیاتوو. دا د عملیوپرلپسی په لاندې ډول د لاندې شیما (د هورنرشیما) له لارې په لیدوړ ډول مخ ته بیایو (ځرکندوو)



ددې شیما پوهیدل لږ نابلد دی او څه فکر غواړي، خو پرې پوهیدل له نورو مساواتو څخه روښان دی.

بیلګه ۱۵ . ۱۰ : د فنکشن $y=x^3-3x^2-14x-5$ لپاره دفنکشن ارزښتونه له لاندې خپلواکو $x1 = -2$ او $x2 = 5$ څخه شمیرل کیږي.
یادونه: دا د هورنر شیمت زما په دې اوسنۍ د برینکمن ژباړه کې مفصل شته(ژباړی). اوبیونه) :

	1	-2	-14	- 5
$x_1 = -2$		-2	8	12
	1	-4	-6	7 = f(-2)
$x_2 = 5$		5	15	5
	1	3	1	0=f(5)

لرو $f(-2) = 7$ او $f(5) = 0$ (صفرځایونه)

(c) ketabton.com: The Digital Library

که چيرې ددريمی درجی ريشنلفنکشن يو صفرځاي ولري، نو کړی شو چی د پولينوم ويش له لارې دا لايني فاکتور بيل کړو(پرتله ۱۲ - امه برخه، جمله ۱۲ . ۴)

بيلګي ۱۵ . ۱۰ ته: $(x^3-2x-14x-5):(x-5)=x^2+3x+1$ له دې امله لرو:

$$y = x^3-2x^2-5 = (x^2+3x+1)(x-5)$$

د ويش پولينومونو ځلووني ، يعنی 1 د(x^2) سره ، 3 د (x) سره او 1 د هورنرشيما په اخره ليکه کی ولاړ دئ. د هورنرشيما له لاری د صفرځاي شميرلو سره په همغه وخت يا دمګړی کی د پولينوم ويش صورت نيسي. لرو:

$$[a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0):(x-x_1)=a_3x^2+(a_3x_1+a_2)x+[(a_2x_1+a_1)x_1+a_1]$$

او0 = f (x1) چی د$(x-x_1)$سره د ځلونې له لارې دا تصديقيدلی شي. پاتی صفر ځايونه د ځلورئ – يا مربع برابرنی د اوبيونې له لارې لاس ته راځي

$$x^2+3x+1=0; x_{2,3}=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-1}=-(3\pm\sqrt{5})/2$$

په دې ډول د دريمی درجي فنکشن د درې لايني فنکشنونو د ځلونې په څير ليکل کيدی شي (پرتله: برخه ۱۲ جمله ۱۲ . ۵)

$$y=x^3-2x^2-14x-5=(x-5)[x-\frac{-3+\sqrt{5}}{2}][x-\frac{-3-\sqrt{5}}{2}]$$

د جملی۱۲ . ۵ وينا په عمومي توګه د ټولوn- م درجو ريشنل فنکشنونولپاره لاندېجمله باور ي کوي

جمله ۱۵ . ۲ :

هر n - م درجه ټول ريشنلفنکشن n صفرځايونه لري . کيدي شي دا ټول يو له بل توپير ولري او يادا صفرځايونه څوځله هم رامنځ ته شي، رييل او يا جوړه کونجوګيري کملکس کيدی شي.

که $x_1, x_2, ,..., x_n$ دلاندې فنکشن n صفر ځايونه وي

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو دا د لاینیز فاکتورونو د ځلونې په څیر په لاندې ډول لیکل کیدی شي:

$$y = (x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)a_n$$

د هورنرشیما په استعمال کی دې لاندې په پام کی ونیول شي:
که په یوه n - م درجه پولینوم کی یو x - پوتنځ نه وي ، نو د هغه د کوایفیشینت یا ځله وونې لپاره دې صفر ولیکل شي .

بیلګه ۱۵ . ۱۱ :
5 - مه درجه ټول ریشنلفنکشن $y = 2x^5 - 6x^3 - 20x^2 - 8x + 80$ درې صفرځایونه
$x_1 = x_2 = 2, x_3 = -2$
لري. نور صفرځایونه دې پیداکړی شي او فنکشن دې د لاینیزو فاکتورونو د ځلونې په څیر ولیکل شي.

ځواب : د هورن جملی له لارې یو په بل پسی د پولینوم ویش یو پاتی 2 - مه درجه پولینوم لاس ته راکوي:

	2	0	-6	-20	-8	80
x_1 = 2		4	8	4	-32	-80
	2	4	5	-1	-40	0 = f(0
x_2 = 2		4	16	36	40	....
	2	8	18	20	0=f(2)	
x_3 = -2		-4	-8	-20		
	2	4	10	0=f(-2)		

دا پاتی پولینوم $2x^2+4x+10 = 2(x^2+2x+5)$ د $x^2+2x+5 = 0$ له امله
د $x_{4,5} = -1\pm\sqrt{1-5} = -1\pm 2i$
لپاره لاندې د ځل فورم لري $2x^2+4x+10 = 2(x+1-2i)(x+1+2i)$

په دې ډول ورکړشوی پولینوم په لاندې ډول لیکل کیږي

$$y=2(x-2)^2(x+2)(x+1-2i)(x+1+2i)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ددې لپاره چی د دریمي او جګو درجو د ټول ریشنلفنکشنونو یوه څیره یا تصویر ولرودی شو، نور کرکتریستیکی یا د خویونو ټکی یی د دیفرنڅیالشمیرنې له لارې لاسته راوستی شو(برخه ۲۰ . ۴)

بې له دې چی د دفیرنڅیالشمیر له مرستي کار واخلو ، کیدی شي چی د هغه د ناپای په هکله وینا وي وکړی شو. موږ په لیدیدونکی ډول د فنکشن د پولی کلیمه په کار اچوو، کومه به چی په برخه ۱۹ کی ټیك تعریف شي. دا د بیلګي په توګه دا مانا لري چی $\lim_{x\to\infty}$ f(x) = g سره (f(x تل ارزښت g ته نزدې کیږي، که x د oe یانې ناپای په لور لاړشي. د

(۱۵ . ۱) لپاره باورلري:

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty} x^n . \lim_{x\to\pm\infty}[a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + ... + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}] = a_n \lim_{x\to\pm\infty} x^n$$

دا چی

xn -> oe

د x -> ± oe لپاره که n جوړه (جفت) وي

او xn ->±oe د x ->±oe لپاره که n ناجوړه (طاق) وي، او له دې لاس ته راځي

که n جوړه او a_n زیاتیز یا مثبت وي، نو لرو $\lim_{x\to\infty} y = \infty; \lim_{x\to-\infty} y = \infty$

(کږه له oe - څخه د oe په لور ځي) .

که n جوړه او a_n کمیز یا منفي وي، نو لرو: $\lim_{x\to\infty} y = -\infty; \lim_{x\to-\infty} y = \infty -$

کږه د oe - څخه د oe - په لور ځي) .

که n ناجوړه او a_n کمیز یا مثبت وي ، نو لرو: $\lim_{x\to\infty} y = \infty; \lim_{x\to-\infty} y = -\infty$

کږه له oe - څخه د oe په لور ځي)

کهن n ناجوړه او a_n کمیز وي ، نو لرو: $\lim_{x\to\infty} y = -\infty; \lim_{x\to-\infty} y = \infty$

کږه لهoe څخه د oe - په لور ځي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند ۱۵ . ۹ :
فنکشن

$$y = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0};..........(15,7)$$

$$n, m \in N_0; a_k, b_i \in R; Q_m \neq 0$$

مات ریشنلفنکشن بلل کیږي او د ټولو x د $Q_m(x) \neq 0$ لپاره تعریف دی.

فنکشن (۱۵ . ۷) اصلي مات نومیږي، که n<m وي او نااصلي مات دی که n ≥ m ۰ نااصل مات فنکشن کیدی شي چي د پولینوم ویش له لارې تجزیه (ټوټه) شي او د یوه ټول ریشنلفنکشن او یوه ریښتونی ماتی برخی د زیاتون په څیر ولیکل شي.

بیلګه ۱۵ . ۱۲:

فنکشن $y = \frac{2x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 13x - 6}{x^3 - 4x}$ اصل مات نه دی(n =4,m=3) په ماتلاندې
فنکشن باندې دماتباندې فنکشن ویش ښخه لاس ته راځي:

$$(2x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 13x - 6) : (x^3 - 4x) = 2x - 3$$

د $2x^2+x-6$پاتی (باقي) سره. پس لرو:

$$y=2x-3+(2x^2+x-6)/(x^3-4x).$$

فنکشن (۱۵ . ۷) د x = x0 لپاره یو صفرځاي لري، که x = x0وي نو باور لري:
$P_n(x_0) = 0$ مگر $Q_m(x) \neq 0$

دا د $x = x_L$لپاره تشځاي (Lücke) لري،که وي: $P_n(x_0) = 0$ او $Q_m(x)=0$
د $x = x_P$لپاره یو قطب pol لري که وي: $P_n(x_P) \neq 0$ مگر $Q_m(x_P)=0$

بیلګه ۱۵ . ۱۳ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

فنکشن ($y=(2x^2+x-6)/(x^3-4x$ د ماتباندې- او ماتلاندې فکشنونو ټوټې کولو وروسته په لاندې فورم د لاینې فاکتورونوپه توګه لیکل کیږي.

$$y=\frac{2(x-\frac{3}{2})(x+2)}{x(x+2)(x-2)}$$

د $x = x_0 = 3/2$ لپاره ماتباندې صفر دی، مګر مات لاندې صفر نه دئ (صفرځای)مات لاندې- او مات باندې فنکشنونه د $x = xL = -2$ لپاره صفر دې (تشځای)
د $x = x_{P1} = 0$ او $x = x_{P2} = 0$ لپاره ماتلاندې صفر او مات باندې صفر نه دئ (قطب)
که x سره د قطب ځاي ته نزدې شي، نو y د ناپای په لور ځي چی د قطبځای (ټیك ناپای ځای بللکیږي) xpکی کره داسیمپتوتي کربنې $x = xP$ ته نزدې کیږي .د یوه تشځای xL په حالت کی ماتفنکشن د نامعلومی افادې 0 / 0 شکل غوره کوي، له دې
امله د $x = xL$ لپاره تعریف نه دی.

په ناپای کی د فنکشن ځان نیونی ته:

د اصل ماتفنکشن ($n<m$) د x په جګ پوتنځ یعنی x^m د ماتباندې او ماتلاندې د ویش څخه لاس ته راځی:

$$y=\frac{\frac{a_n}{x^{-n+m}}+\frac{a_{n-1}}{x^{-n+1+m}}+\ldots+\frac{a_1}{x^{-1+m}}+\frac{a_0}{x^m}}{b_m+\frac{b_{m-1}}{x}+\ldots+\frac{b_1}{x^{m-1}}+\frac{b_0}{x^m}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{0}{b_m}=0$$

داچی د x ټول اکسپوننتونه مثبت دي، او د x ټول پوتنځونه د ناپای په لور ځي ، نو د آصل مات فنکشن څیره د x->±oe لپاره د x - محور ته نزدې کیږي. فنکشنونه

چی آصل مات نه وي نو د x->±oe لپاره داسی ځانونه نیسي، چی اصل د ماتفنکشن برخه یی د صفر په لور ځي، لکه ټولریشنل برخه .
د نااصل مات فنکشن څیره د x -> ±oe سره ، ځان خپل ټولریشنلبرخی ته نزدې کوي.

بیلګه ۱۵ . ۱۴:

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف: $y = x/(x^2+1)$ د $x0 = 0$ په ځاي کی صفرځای لري. تشځاي او پول یا قطب نه لري ربیل اوبیونه نه لري) او د $x \to \pm oe$ لپاره د x- محور $(y = 0)$ د اسیمپتوتی په څیر لري (څیره. ۱۵ . ۱۲)

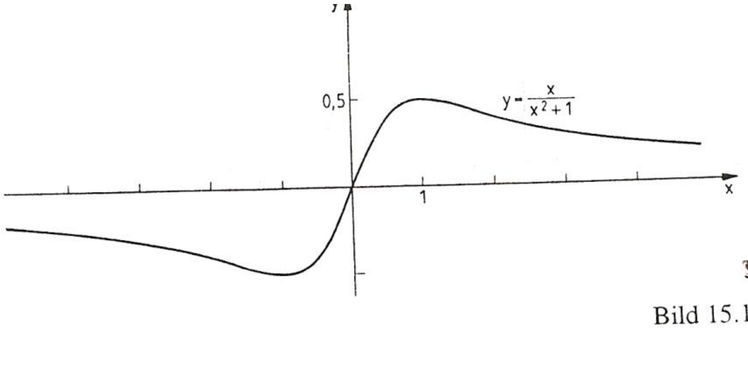
ب: $y=(x^2+2x-3)/(x+2)=x-3/(x+2)$ صفرځایونه($x^2+2x-3 =0$) په $x1 =-3$ او $x1=1$ کی لري . تشځای نه لري او په $x3 = -2$ کی قطب لري دا په دې مانا چی $x = -2$ اسیمپتوتی دی، او د $x \to \pm oe$ لپاره فنکشن $y = x$ اسیمپتوتي کیږي)دا سیمپتوتی کلیمه دې په برخه ۱۶ . ۴ کی هم وکتل شي)

موږ په دې پسی ځانله شوي ځانګړي ټول - یا مات ریشنلفنکشنونه راوړو: فنکشن

$$y = x^n; n \in Z \setminus \{0,1\} .... (15,8_a)$$

یو ځانګړی پوتنځفنکشن دی(د پوتنځ پیژند 6 ۰ ۱)

(15.8)د زیاتیززیاتیز یا مثبت ټولګې n لپاره یو ټولرشنل فنکشن دی. د جوړه ټولګې n لپاره ټولریشنل فنکشن دی. د ټولګې n لپاره ټولی کرې د تعریف ډیری(-) = D oe,oe، د ارزښت ډیری(W=(0,oe او ګډ ټکی (1,1)، (0,0),(1,1) لري. (څیره ۱٤ الف ۱۵) د ناجوړه ګڼ د n لپاره(D = (-oe,oe او(W = (-oe,oe دي او (-1,-1) , (0,0). (1,1) ګډ ټکي دي (څیره ۱۵ . ۱۴ ب)۰



څیره

Bild 15.12

(c) ketabton.com: The Digital Library

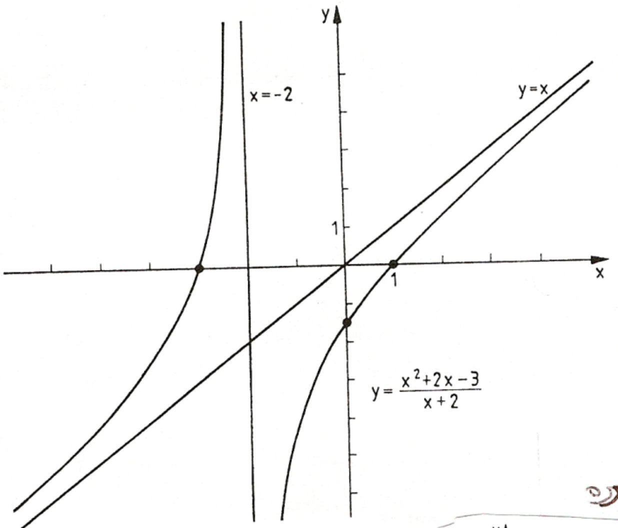


Bild 15.13

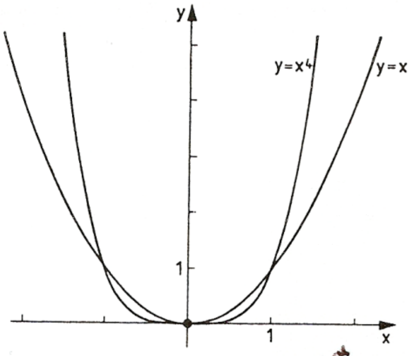


Bild 15.14a

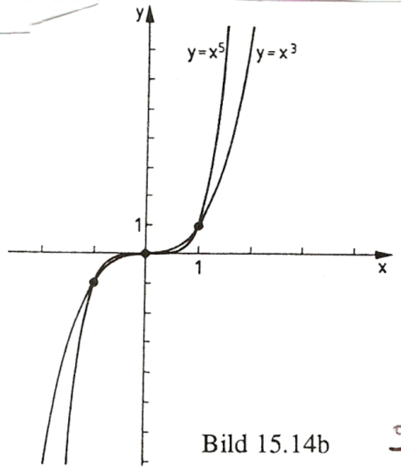


Bild 15.14b

(۱۵ ، ۸ الف) د ټول کمیز یا منفي ګڼ nلپاره یو مات ریشنل فنکشن دئ په x = 0 کی د یوه قطب او y = 0 کی یوې اسیمپټوتی په څیر. د جوړه ګڼون یا تعداد (کمیز n) لپاره ټولی کرږې د پیژند ډیري
D = (-oe,oe)\{0} د ارزښت ډیري(W = (0,oe لري اوګډټکي (1,1), (1-,1) ؟؟؟ څیره ش. ۱۵/۱۵الف) .
د ناجوړه ګڼون (کمیز n)لپاره{ D = (-oe,oe)\{0 او(W=(-oe,oe او(1-،1-)) (1,1) ګډ ټکی دی (څیره »۱۵ . ۱۵ ب) .
دوه څیرې دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

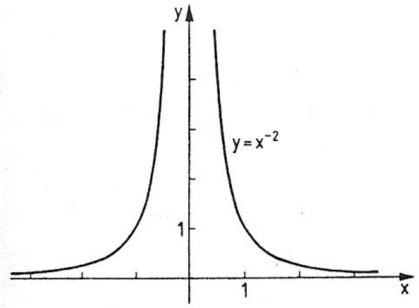


Bild 15.15a

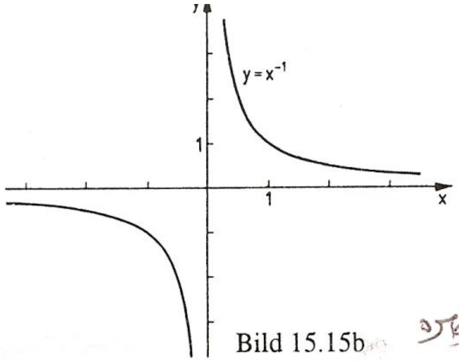


Bild 15.15b

د پوتنځ فنکشن پر ګښت بلواک لپاره دې د مونوتوني اینتروال په پام کی ونیول شي.(پرتله بیلګه(بیلګه ۱۵ .۳)
د فنکشن) لوستل له کیڼ وښي لور ته

$$y = x^n; n \in N^*\{1\}, D = [0,\infty), W = [0,\infty)$$

چپه- یا پر ګښت فنکشن په لاندې ډول دی.

$$y = \sqrt[n]{x}\ ,\ n \in N \setminus \{1\}\ ,\ D = [0,\infty), W = [0,\infty) .... (15,8_b)$$

او رینه فنکشن نومیږي (پیژند ۶ . ۲ دې وکتل شي) پوتنځ فنکشن کیدی شي و ریشنل ایکسپوننت ته پراخه شي) دلته لرو $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} (\sqrt[n]{x})^m = x^{\frac{n}{m}}$ (پرتله برخه ۴)

که پوتنځ فنکشنونه د ریشنل فنکشنونو لپاره راوړل شي:

$$y = x^n\ ,\ a \in Q\ ,\ x > 0 \qquad (15 . 8c)$$

نو د ریښي فنکشن (۱۵ . ۸ ب) دې د پوتنځ فنکشن په څیر وپوهیدی شي.

د پوتنځ فنکشن (۱۵ . ۸ ث) پرګښت بیرته پوتنځ فنکشن دی.
ټولیز پوتنځ فنکشن پیژند د رییل ایکسپوننت لپاره ورکړ شوی(د رییلګڼونو کلیمه دې وکتل شي برخه ۳ ۰ ۱ . ۴ کی)

پیژند ۱۵ . ۱۰ : فنکشن

$$y = x^{\alpha} \quad , \quad \alpha \in R\ ,\ x > 0 \qquad (15. 8d)$$

پوتنځ فنکشن نومیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۵ . ۱۵ : فنکشن

$y = x^{\frac{3}{2}} = \sqrt{x^3}, x \geq 0$

لاندې چپه - یا پر ښۍ فنکشن لرو

$y = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}, x \geq 0$

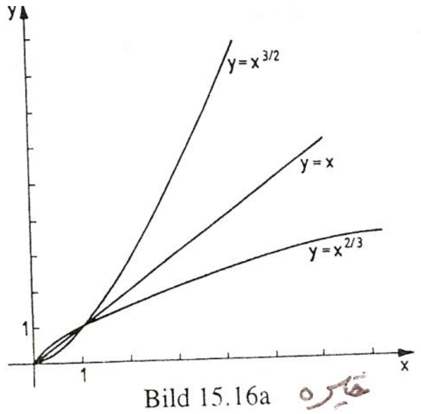


Bild 15.16a ځیره ب)

(ځیره ۱۵ . ۱۶ الف)

فنکشن لاندې چپه فنکشن لري: $y = x^{-1/2} = 1/\sqrt{x}, x > 0$

ځیره ۱۵ . ۱۶ ب)

$y = x^{-2} = 1/x^2, x > 0$

یادونه : په پیژند ٤ . ۲ کی مو وویل چی یوائی د ناکمیز رادیکاندو ریښه ویستل کیدو اجازه لرو. دا کړنلار دې د پرښت فنکشن جوړولو برسیره د مونوتوني غوښتلو لپاره هم په
پام کی وي. د بیلګي په توګه فنکشن
$y=x^3$ په ټول تعریفدیري کي مونوتون پورته کیدونکی وی او له دې امله ټول په ښۍ کیدونکی وی، $y=\sqrt[3]{x}$ د فنکشن $y = x^3$ په پیژنددیری($D = [0,oe$ کی پر ښۍ فنکشن دی، په داسی حال کی، چی د$y= x^3$ پرښت فنکشن د[$D= (-oe,0$
سره په $y = -\sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{|x|}$ فنکشن کی ورکړ شوی دی(ش. ۱۵ . ۱۷) .

پیژند ۱۵ . ۱۱: فنکشن

$y=a^x, a > 0, a \neq 1$..................................(15,9)

(c) ketabton.com: The Digital Library

ایکسپوننشلفنکشن یا په جګ(لنډ »جګ«) بلواك بلل کیږي۰
(د ایکسپوننت یا »جګ« کلیمی لپاره دی پیژند ۴ . ۱ وکتل شي)

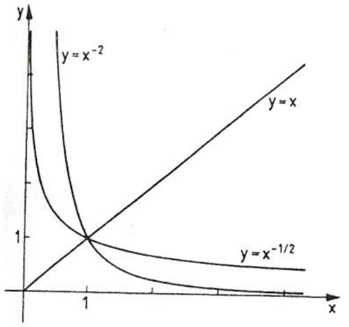


Bild 15.16b

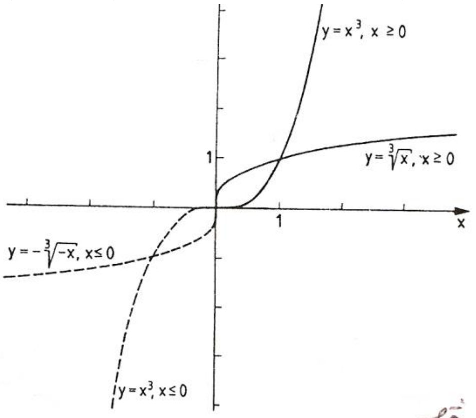


Bild 15.17

پورته دوه ځیرې دې پام کې ونیول شي

فنکشن (۱۵ . ۹) لاندې پیژندډیری(D=(-oe,oe او ارزښتډیری(W=(o,oe لري. د $a^0 = 1$ له امله ټکی(0,1 () د ټولو کږو ګډ ټکی دی

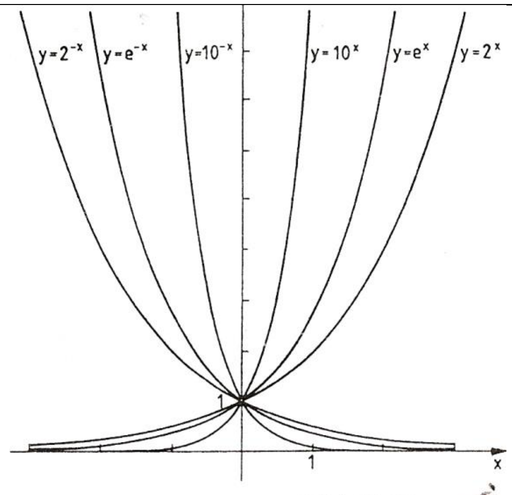


Bild 15.18

د a>0 لپاره (۱۵ . ۹)
په کلکه یو غږیز- یا مونوتونجګیدونکی دی اود x->oe سره د x - محور ته اسیمپوتیك ورنزدې کیږي .د 0<a<1 لپاره) ۱۵ . ۹ (په کلکه مونوتون لویږي او ځان د oe -> x سره د x -محور ته اسیمپتوتیك نزدې کوي .

د اکسپوننشل فنکشنونو یو څو بیلګې
(a=2; e ; 10 ; 1 /2 ; 1/e ; 1/10)
په ځیره ۱۵ . ۱۸ کی انځور شوي

پیژند ۱۵ . ۱۲ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې فنکشن د ایکسپوننشل فنکشن په څېر فنکشن دئ

$y = \log_a x$, $a > 0$, $a \mid= 1$ (15.10)

او لوګاریتم فنکشن بلل کیږي

د لوګاریتم کلیمي لپاره پیژند ۵ . ۱ وګورئ) فنکشن (۱۵ . ۱۰) پیژنددیرئ
($D = (0.oe$ او د ارزښتدیرئ($W=(-oe,oe$ لري.

د $y = \log_a x$ کرږې د ګرږو $y=a^x$ هنداورنه ده، په کرښه $y=x$ ۰ ټکئ($1,0$) د ټولوکرږو
ګډ ټکی دئ (څیره شته دئ)

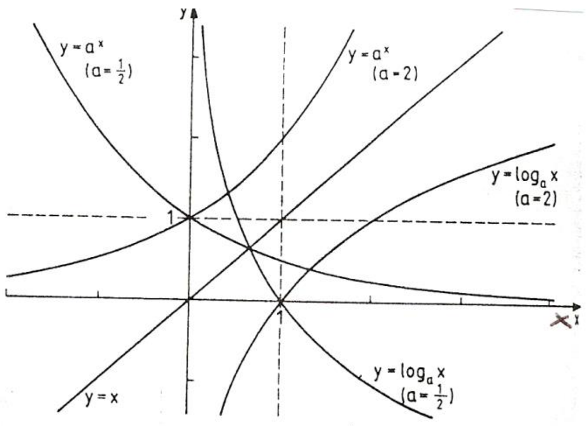


Bild 15.19 څېره

د $a>1$ لپاره(۱۵ . ۱۰) کلك مونوتونجګیدونکی اود $x\text{-}>0$ لپاره اسیومپتوتیك د کمیز y -
محور ته نزدې کیږي. د $0<a<1$ لپاره (۱۵ . ۱۰) کلك مونوتون لویدونکی دی او د
$x>0$ لپاره اسیمپتوتیك د زیاتیز y - محور ته نزې کیږي. په شکل ۱۵ . ۱۹ کی $y=a^x$
او په څېر یی یعني $y = \log_a x$
د $a= 2$ او $a=1/2$ لپاره انځوریږي .
په ځانګړې توګه لیکل کیږي $y = \log_{10}x = \lg x$, $y = \log_e x = \ln x$ ۰

پیژند ۱۵ . ۱۳:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تریګونومتري فنکشنونو یا د کونجفنکشنونو لاندې(پرتله برخه ۶ . ۳) دا لاندني فنکشنونه په نخښه کیږي یا راوړل کیږي.

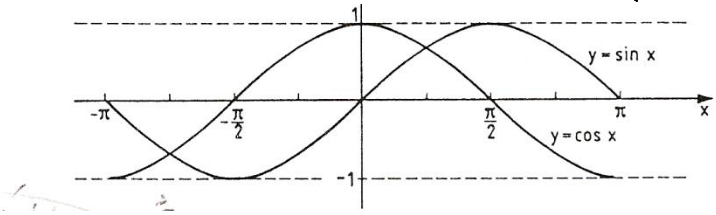
$y=\sin x ;D=R,W=[1,1]$..$(15,11_a)$

$y=\cos x; D=R, W=[-1,1]$..$(15,11_b)$

$y=\tan x=\sin x/\cos x; D=R\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi\}, W=R, k\in Z$....$(15,11_c)$

$y=\cot x=\cos x/\sin x; D=R\setminus\{k\pi\}, W=R, k\in Z$..........$(15,11_d)$

د دې ګروتګلار په ش. ۱۵ .۲۰الف او ۱۵ . ۲۰ ب کی انځور شوی.



تریګونومتریکی فنکشنونه $y = \sin x, y = \tan x , y = \cot x$ ناجوړه فنکشنونه، او $y = \cos x$ یو جوړه فنکشن یا – بلواک دی.

تریګونومتریکي فنکشنونه پریودیکي فنکشنونه دي(مقایسه ۱۵ . ۵)
فنکشنونه $y=\sin x , y= \cos x$ پریودې 2π لري، دا په دې مانا چی لرو:

$\sin (x+2k\pi) = \sin x ; \cos(x+2k\pi) = \cos x , k\in Z$

لاندې فنکشنونه پریود π لري
$y=\tan x , y=\cot x$.دا په دې مانا چي

$\tan (x + k\pi) = \tan x, \cot (x + k\pi) = \cot x , k\in Z$

د تریګونومتریکي فنکشنونو صفرځایونه دي $x_k= k\pi, k\in Z$

د $y=\tan x$, $k\in Z$ $x_k=\frac{\pi}{2}+k\pi$ $y=\sin x$ لپاره او د $y = \cos x , y = \cot x$

لپاره تانجنت - او کوتنجنت فنکشنونه قطب ځایونه(ناپاځایونه) لري یعني $y = \tan x$

په $x_k=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in Z$ او $y = \cot x$ په $k\in Z$, $x_k= k\pi$ کی.

د تریګونومتریکی فنکشنونو لپاره دې د هغو مونوتوني خویونه په پام کی ونیول شي. د بیلګي په توګه

(c) ketabton.com: The Digital Library

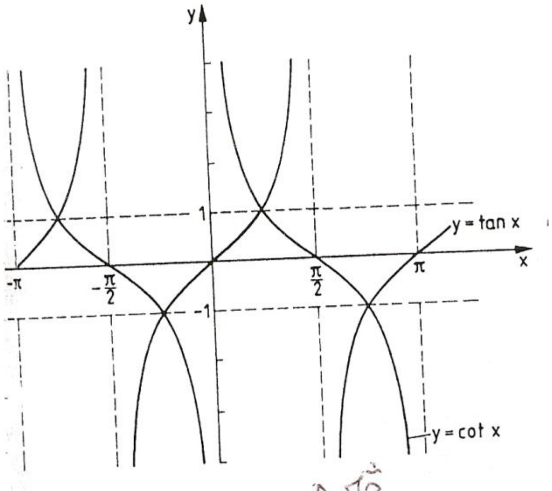


Bild 15.20b

فنکشن y = sin x په ایتروال $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ کي مونوتون جګیدونکی دئ او په انتروال $[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$ کی مونوتون لویدونکی، او دا مونوتوني خویونه په یوه پوره پریودې کی تکراریږي. پس ویلی شو:

د $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ لپاره y = sin x جګیدونکی یا پورته کیدونکی دئ

د $\frac{\pi}{2}+2k\pi \le x \le \frac{3\pi}{2}+2k\pi$ لپاره لویدونکی دئ، او په ورته توګه

د $-\pi+2k\pi \le x \le 0+2k\pi$ لپاره y = cos x پورته کیدونکی دی۰

د $0+2k\pi \le x \le \pi+2k\pi$ لپاره لویدونکی دئ

د $-\frac{\pi}{2}+2k\pi \le x \le \frac{\pi}{2}+2k\pi$ لپاره y = tan x جګیدونګی دئ

د $0+k\pi < x < \pi+k\pi; k \in Z$ لپاره y =cot x جګیدونکی دئ ،

په تنجنت ـ او کوتنجنت فنکشنونو کی د قطب ځایونه د مونوتوني اینتروالونو ترمنځ پراته دي، له دې امله دا مونوتوني ایتروالونه واز اینتروالونه دي.د ساین فنکشنونه د بیلګي په توګه د وخت په پریودیکي انځور کی خپل استعمال مومي Schwingung (شوینګونګ: رپیدنه=. په عمومي ډول دلته خپلواك واریابل په t نخښه کیږي .فنکشن

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = a \sin (\omega t + \varphi) \qquad (15 . 11e)$$

هارموني فنکشن بلل کيږي.

يادونه: فنکشن (۱۵ . ۱۱ت) د پيژند (۱۵ . ۱۵) له مخې تړلی يا ځنځيري فنکشن دی.
موږ ترڅيړني لاندې نيسو چي د ساين فنکشن د مخه فاکتور a فاکتور د خپلواك واريابل
tاو زياتوونکی د ساين فنکشن په خپلواك)Argoment(د کړښځيره باندې څه تاسير
اچوي.

۱ - د فاکتور a تاثير په فنکشن y = a . sin t د y = sin t فنکشن ارزښت باندې غزول
يا راکشول دی که (1 < |a|)او يا پړسول دي که
وي (1 > |a|) y= a.sin x فنکشن ارزښت a - ځله د فنکشن ارزښت
y = sin t دی، چيرته چی برسيره پردې د a > 0 لپاره په t - محور يوه
اينه ځيرونه هم منځ ته راولي (څره ش. ۱۵ ۲۱ الف .) (a = 2 , a = 1 / 2)
په فنکشن کی a امپليتودې Amplitude(جګوالی(نوميږي او د
شوينګنګ Schwingungرپيدنی پراخوالی يا ښه : سور باندې تاثير اچوي.
ځيره شته

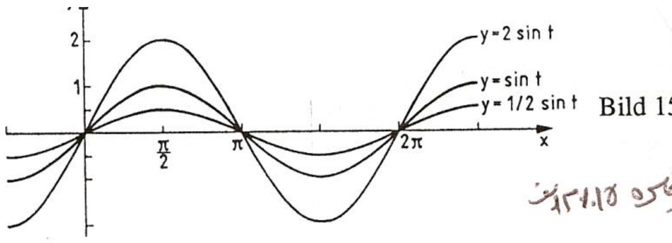
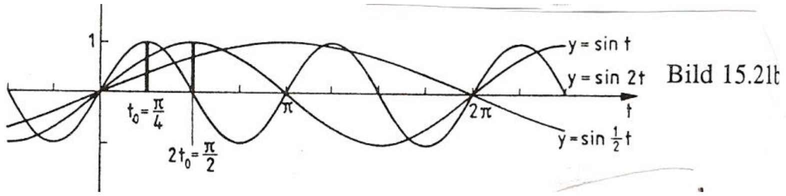


Bild 15.21

۲ - په فنکشن y = sinω t کی فاکتور ω په فنکشن y = sin t باندې يو وختني غزول که
1<|ω| يا پړسول که1>|ω| وي تاثير اچوي.چيرته چی د 0 < ω لپاره برسيره پردې يو
په y- محور اينونه هم ده.
د يوه ټاکلي خپلواك $t = t_0$ لپاره په فنکشن y = sinω t يوه فنکشن ارزښت، دy = sin t
خپلواك ω-ځله ، يعني $t = \omega t_0$ لپاره غوره کوي (ځيره ؟؟ ش . ۱۵ . ۲۱ ب).
ګردی فرکونځ (Kreisfrequenz) بلل کيږي، دا په پريودې تاثير اچوي او y = ω t
پريودې $P = \dfrac{2\pi}{\omega}$لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library



۳ – زیاتیدونکی φ په فنکشن $y = \sin(t+\varphi)$ کی د $y = \sin t$ باندې دیوې راکښنی تاثیر په $|\varphi|$ له کینی لور φ 0< او یا له ښي لور φ 0> اچوي .

د یوه ټاکلي خپلواك $t = t0$ لپاره د فنکشن $y = \sin(t+\varphi)$ سره یو فنکشن ارزښت، چې د $y=\sin t$ لپاره۰

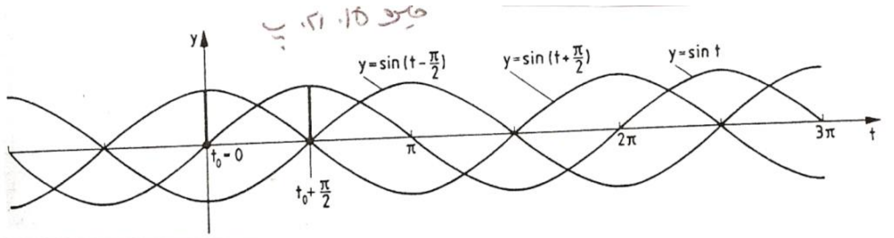
د φ په کچه راکښل شوی (یعنی د یوه ځاي څخه بل ځای ته وړل شوی) وي، یعني د $t = t_0+\varphi$ لپاره، غوره کوي.(څیره ، ۱۵ . ۲۱ پ)

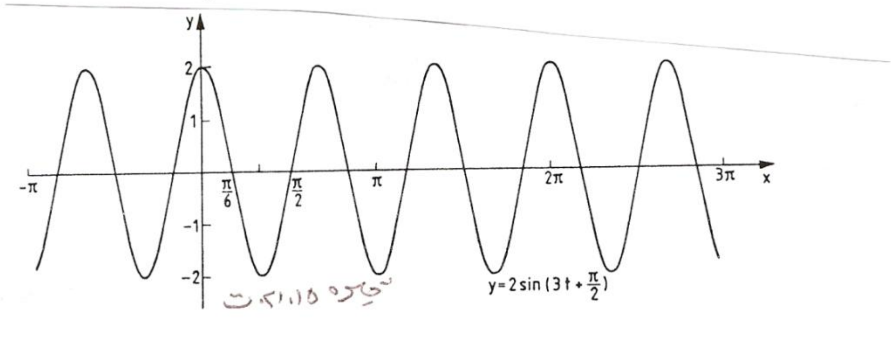
$$(\varphi = \frac{\pi}{2}, \varphi=-\frac{\pi}{2})$$

په فنکشن

$$y = a.\sin(\omega t + \varphi) = a . \sin\omega (t+\frac{\varphi}{\omega})$$

کی φ چی فازې نومیږي یو د راکښلو تاثیر په کره $y = a.\sin\omega t$ د $\frac{\varphi}{\omega}$ په اندازه اچوي.





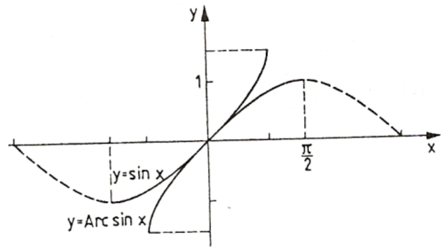
(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورته شکل ۱۵ .۲۱ ت کی هارموني فنکشن $y = 2 . \sin(3t+\frac{\pi}{2})$ انځوردی. هغه امپلیتود a = 2 لري، پریودې یی $P=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2}{3}\pi$ او په $\frac{\varphi}{\omega}=\frac{\pi}{6}$ کې د sint و کینږ لورته راکښل شوی دی.

ځبره ۱۵ . ۲ پ $\varphi=\frac{\pi}{2}, \varphi=-\frac{\pi}{2}$

د تریګونومتري فنکشنونو(یواځني) په معکوسوالي یا په ځتوالي کی مورږ په ځانګړو یو غږیزو یا مونوتوني اینتروالونو تکیه کوو، د لاندې تعریف سره مناسب

پیژند .۱۵ ۰ ۱۴ :
(پام: ځیرې له تشریح د مخه راغلې، بله لار نه وه)



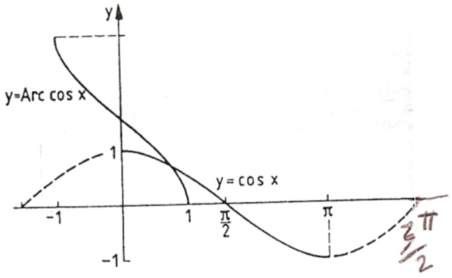
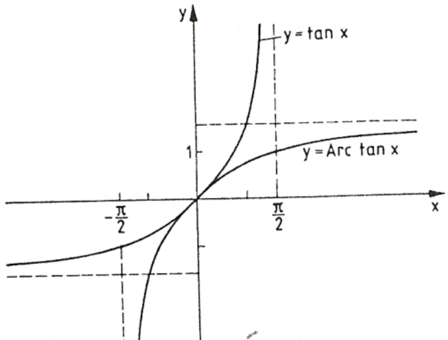


Bild 15.22 Bild 15.23



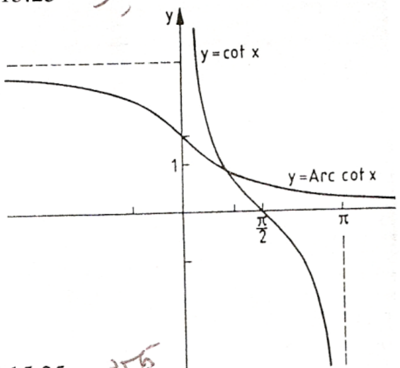


Bild 15.24 Bild 15.25

د لاندې فنکشنونو

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

1. $y = \sin x,\quad D = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],\quad W = [-1, 1]$ (15.12a)

2. $y = \cos x,\quad D = [0, \pi],\quad W = [-1, 1]$ (15.12b)

3. $y = \tan x,\quad D = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),\quad W = \mathbf{R}$ (15.12c)

4. $y = \cot x,\quad D = (0, \pi),\quad W = \mathbf{R}$ (15.12d)

پرڅټ یا چپه فنکشنونه لاندې ځیکلومتریکي فنکشنونه (ارکوس فنکشنونه) دي:

1. $y = \operatorname{Arc}\sin x,\quad D = [-1, 1],\quad W = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (15.13a)

2. $y = \operatorname{Arc}\cos x,\quad D = [-1, 1],\quad W = [0, \pi]$ (15.13b)

3. $y = \operatorname{Arc}\tan x,\quad D = \mathbf{R},\quad W = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (15.13c)

4. $y = \operatorname{Arc}\cot x,\quad D = \mathbf{R},\quad W = (0, \pi)$ (15.13d)

د تریګونومتري فنکشنونو برخی په مونوتوني ایتروالونو) ۱۵ .۱۲ الف(تر) ۱۵ . ۱۲ ت (او د هغوي چپه) ۱۵ . ۱۳ الف (تر) ۱۵ . ۱۳ ت (په ځیرو ۱۵ . ۲۲ تر ۱۵ ۲۵ پورې انځور دي.

۱۵ . ۴ ځنځیري (تړلي) فنکشنونه

پیژند ۱۵ . ۱۵ :

د $x \in D$لپاره یو فنکشن $z = g(x)$ د ارزښتدیري W سره ورکړ شوی او برسیره پر دې د $z \in W$لپاره یو فنکشن $y= f(z)$ورکړشوی، نو

$$y = f(g(x)) \qquad (15.14)$$

د x تړلی (ځنځیري) فنکشن بلل کیږي٠

یادونه : یو تړلی فنکشن کیدی شي چی زیاتو ځنځیرونو سره هم رامنځ ته شي: د بیلګي په توګه $z = f(x$

د$x \in D, z \in W$لپاره او $w=h(z)$ د $z \in W, w \in W^*$لپاره

او$y=f(w)$ د $W^* \in W$ لپاره لرو،

نو $y=f[h(g(x))]$ هم د x یو تړلی فنکشن دی

بیلګه ۱۵ . ۱۶ :

الف : د $z = 2x + 4$ او $y = e^z$ سره تړلی فنکشن $y = e^{2x+4}$ لاس ته راځي .

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب : په ترلي فنکشن $y = \sin x^2$ کی $z = x^2$ دننني - او $y = \sin z$ د باندنی فنکشن دی.
په ترلي فنکشن $y = \sin^2 x = (\sin x)^2$ کي $z = \sin x$ د نننی - او $y=z^2$ دباندنی فنکشن دی
پ : د
$, y = \cos w \quad w = \sqrt{z} \quad , \quad z = 2x + 4,$
سره ترلي فنکشن $y = \cos \sqrt{2x + 4}$ لاس ته راځي
ت : په ترلي فنکشن $y=\text{Arctan}1/(x-1)$ کی $z=x-1$ دننني، $w=1/z$ منځنی او $y=\text{Arctan}\ w$ دباندنی فنکشن دی .

یادونه : د یوه ورکړشوي x - ارزښت لپاره د ځنځیري فنکشنونو د فنکشن ارزښت شمیرنی

له » دننه « پیل کیږي .

بیلګي ۱۵ . ۱۶ ته :
ب) د $x = 0.5$ لپاره دی
$z=x^2=0,5^2=0,25;y=\sin x^2=\sin z=\sin 0,25=0,24740$
او
$z=\sin x=\sin 0,5=0,47942;y=\sin^2 x=z^2=0,47942^2=0,22984$

پ) د $x = 2$ لپاره دی $z=x-1=2-1=1 \ ; \ w=1/z=1/1=1$
$y=\text{Arctan}w=\text{Arctan}1=\frac{\pi}{4}$

روښانونه، تشریح:

$y=f(x)$ تحلیلي(شننیزه) وینا بلل کیږي، که $f(x)$ له رییل ګڼونواو بسټیزو فنکشنونوڅخه د زیاتون، کمون،ځل، ویش، له لارو ترلی یا ناترلي(ځنځیري یا نا ځنځیري) جوړیږي

د بیلګي په توګه دې په پام کی وي، چي ماتلاندې فنکشن دې صفر نه وي د پوتنڅ بنسټ او همداډول رادیکاند منفی نه شي کیدلی، او یا باید مثبت وي، چی د لوګاریتم نومروس باید

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثبت وي او(Arc sin f(x همداډول(Arc cosf(x تيك د $x \in [-1,1]$ لپاره پېژند لري يا تعريف دي

بيلګه ۱۵ . ۱۷ :

د لاندې تحليلي ويناو لپاره دې تعريفدېري پيداکړی شي.

الف $y = \sqrt{x^2 - 3}$

راديکاند بايد کميز يا منفي نه وي، چی دا مان لري:

$x^2-3 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 3 \Leftrightarrow |x| \geq 3$ ($x \geq \sqrt{3}$ v $x \leq -\sqrt{3}$)

نو لرو $D =(-oe , - 3] \cup [3 ,oe]$

ب)($y=lg(x+2)+1/(3+2x-x^2$ له لمړي زياتونی کی بايد $Numerus > 0$ نومروس وي دا په دې مانا چی : $x +2 >0 \Leftrightarrow x > -2$ ،

پس($D1=(-2,oe$

په دوم زياتوني کی بايد مات لاندې په صفر برابر نه وي (=| 0) وي . د مات لاندې صفرځايونه

له $3-2 x-x^2 = 0$ څخه لاس ته راځي او دي $x1=2,x2=-1$.

نو $D2=R\backslash(2;-1)$ دی

د فنکشن تعريفدېری بايد دا اول زياتونی او همداسی د دوم زياتونی تعريفدېري وي يعنی د D1 او D2

غوڅدېری: $D=D_1 \cap D_2 = (2 ,oe) \backslash \{2; -1\}$

پ) $y = Arc\ sin\ (x-1)/5)$ د ارکوس ساين-فنکشن د تعريفدېري په پام کی نيولو سره بايد باور ولري-

$-1\leq(x-1)/5\leq1 \Leftrightarrow -5\leq x-1\leq 5 \Leftrightarrow -4\leq x\leq 6 \Rightarrow D=[-4,6]$

ت $(y = 1 /\sqrt{(x^2 - 4)}$

راديکاند بايد له صفر لوي وي او مات لاندې دصفرسره نامساوي، دا په دې مانا چی

$x^2-4>0 \Leftrightarrow x^2<4 \Leftrightarrow x>2$ يا $x<-2$

نو دی $D=(-\infty,-2) \cup (2,\infty)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱۵ . ۵ تمرینونه

۱ – د ایمپلیڅیت توابعو ایکسپلیڅیت انځورونه ورکړئ

الف - $6x-10y=15$ ب - $x+y/3 = 5$

پ - $2x^2 -3y +3 = 0$ ت – $x^2 -4x + 2y - 8 = 0$

۲ - لاندې فنکشنونه په پارامترانځورونی ورکړ شوي

a) $x=2t \quad y=-t^2+3t$ b) $x=\sqrt{t} \quad y= 2t+1$

c) $x=1/t \quad y=2(t-3)$ d) $x(/2)t-1 \quad y=t^2$

پارامتر له منځه یوسی او په دې سره ورکړی $y=f(x)$

۳ - لاندې فنکشنونه په مونوتوني وڅېرئ، او که ممکن وي نو مونوتوني اینتروالونه په تعریفېدیرو بیل (تجزیه) کړئ، یا لو نه کړی.

a) $y=2x-3$ b) $y=-2x+3$ c) $y=x^2$

d) $y=-2x^2$ c) $y=2x^2+1$ f) $y=|x|$

۴ – پریکړه وکړئ چی لاندې فنکشنونه جفت، ناجفت او یا له دې دووکوم نه دي:

a) $y=x$ b) $y=x+1$ c) $y=x-1$

d) $y=2x^2$ e) $y=2x^2+1$ f) $y=(x-1)^2$

g) $y=x^2/2$ h) $y=x^5$ i) $y=|x|$

۵ – د لاندې فنکشنونو د صفر ځایونه پیدا کړی

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

a) y = -2x + 3 b) y = (x-1)(x+2) c) y =-x²-x-2

d) y = 2x² -12x +18 e) y = x² + 1 f) y = x³

۶ – لاندېفنکشنونو ته په خټ فنکشونونه پیدا کړی

a) y = -2x + 3 b) y = x² + 1 , D = [0 , œ), W = [o,œ)

c) y = (x+1)² , D =[-1,œ),W=[0,œ), d) y=x³ /2 , D =[o,œ),W=[0,œ)

۷ – لاندې لاینې فنکشنونه ورکړ شوي دي

a) y = 0,4x -1,6 b) y = -x + 1 c) y =(1 /5)(3x +1,5)

d) y = 2 e) 3x -3y -7 = 0 f) 4y + x = -1

کرښې دې وکښل شي. جګوالي کونج ∝ دې پیدا شي. او صفرخایونه x_N و ګنی!

۸ – کومه کرښه له لاندې ټکو تیریږي

a) (2,3) (5,5) b) (1 ,1) او (3,7) c) (-1,0) او (-2,-3) ?

۹ – لاندې مربع بلواك یا فنکشنونه ورکړ شوي

a) y = x² -4x +3 b)y = x²-8x+16 c) y = x² -6x +10

d) y = (x-5x)(x-1) e) 2x² -10x+12 f) y = 3x² +6x

g) y = $-\frac{x^2}{2}$+x + 4 h) y = x² / 4 + x +2 i) y = 5x² +45

د ککرې کواوردینات دې پیداشي. صفرخایونه دې وګنل شي او پارابول دې انځور شي

۱۰ – د لاندې تولریشنل فنکشنونه دې دورکړشوو x ارزښتونو سره د هورنرشیما د استعمال له لارې وګنل شي. فنکشنونه دې د خلفورم باندې انځور شي

a) y = f(x) = x³ -6x +5; x_1 = 1 , x_2 = -1

b) y = f(x) = (1 /2)x³ -x² -(13 /2)x -5; x_1 = 1 /5 x_2 = 5

c) y = f(x) = x³ +2x + 2x ; x_1 = -2 x_2= 0,2

d) y = f(x) = x⁴ -x³ -28x² 32x +40 ; x_1 = 2 x_2 = 5

e) y = f(x) = 2x⁴ - 3x² -6x² +5x +6 ; x_1 = 1,5 x_2 = 2

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۱ – مات ریشنل فنکشنونه وړکړ شي : (ړ)

a) $y = \frac{x^2+x-2}{x^2+2x-3}$ b) $y = \frac{x^4-3x^3-4x^2}{x^2+5x+6}$

c) $y = \frac{x^3+2x^2+x}{x^4-13x^2+36}$ d) $y = \frac{x}{(x^3+6x^2+9x)(x^2-4x+4)}$

e) $y = \frac{2x^3-x^2+6x-3}{x^2+3}$.

صفرځایونه دې وټاکل شي، پول. تشځایونه او د 8 ± <- x لپاره ځان نیونه!

۱۲ – لاندېفنکشنونو ته په ځپ فنکشنونه جوړ کړی

a) $y = 2^{x-1}$, D = R , W=(0,œ) b) $y = 2^x - 1$, D = R , W =(-1,œ)

c) $y = \log_3 x$, D = (0,œ), W = R d) y = ln(x-1) , D =(1,œ), W = R

۱۳ – لاندې فنکشنونو ته مونوټوني اینټروالونه ورکړی او برخه په ځپ فنکشنونه:

a) $y = (x-1)^2$ b) $y = x^2 - 1$ c) $y = (x+1)^2 + 1$

d) $y = x^2 - 4x + 5$ e) $y = 4x^2$ f) $y = (1/4)x^2 + x/2 + 1$

۱۴ – ترلې فنکشنونه $y = f[h(g(x))]$ په دننه او دباندې فنکشنونو

$y = f(w)$, $w = h(z)$, $z = g(x)$

بیل (تجزیه) کړی(د تعریف–او ارزښتدیریوورکولو څخه کیدی شي تیرشو)

a) $y = e^{(x+1)^2}$ b) $y = \left(e^{x+1}\right)^2$ c) $y = \lg \sqrt{2x-3}$

d) $y = \sqrt{\lg(2x-3)}$ e) $y = \tan \sqrt{x-3}$ f) $y = \sqrt{\tan(x-3)}$

g) $y = \sqrt{\tan x - 3}$ h) $y = \tan \sqrt{x} - 3$ i) $y = \mathrm{Arc}\sin x^2 +$

j) $y = [\mathrm{Arc}\cos(3x-2)]^{\frac{1}{2}}$ k) $y = \ln \sin \frac{x}{3}$ l) $y = \sin \ln(x + \frac{1}{3}$

m) $y = \sqrt{\frac{1}{\sin x}}$ n) $y = \frac{1}{\sqrt{\sin x}}$ o) $y = \frac{1}{\sin \sqrt{x}}$

p) $y = \mathrm{Arc}\cot e^{2x+1}$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱۵ – ترلي فنکشنونه $y = f[h\{g(k(x))\}]$ په دباندې او دننه فنکشنونو

$y = f(v),\ v = h(w), w = (g(z)),\ z = k(x)$

بيل کړی (د تعريف– او ارزښتدېري باندې تيرونه کيدی شي)

a) $y = \left[\operatorname{Arc}\cot\left(e^{x}+1\right)\right]^{\frac{1}{2}}$ b) $y = e^{\operatorname{Arc}\cot(2x+1)^{\frac{1}{2}}}$ c) $y = \sin\left[\cos\frac{x-4}{3}\right]^{2}$

d) $y = \sqrt{5-\tan\sqrt{x}}$ e) $y = \cos\left[\ln\left(x^{2}-1\right)+1\right]$ f) $y = \log_{3}\left[\sqrt{2^{x}+1}\right]$

g) $y = e^{\tan\sqrt{7x-1}}$ h) $y = \tan e^{\sqrt{7x-1}}$.

۱۶ – د لاندې شننيزويا سپړنيز (تحليلي) افادو لپاره تعريفدېري پيدا کړی.

a) $y = \sqrt{x-3}$ b) $y = \sqrt{3-x^{2}}$ c) $y = \sqrt{x^{2}-9}$

d) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^{2}-9}}$ e) $y = \dfrac{1}{x^{2}+x-6}$ f) $y = \ln(2x+5)$

g) $y = \operatorname{Arc}\cos(2x-4)$ h) $y = \sqrt{x}+\dfrac{1}{x}$ i) $y = \ln x+\dfrac{1}{x-1}$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوې لیکنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړی:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

1987 Vienna (Austria):

دویم:

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, at the University of Vienna/Austria

لاندې د شمیرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې لیکنه به یې ځنو ځایونو غزېدلې او ځنې ځایونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو زرو کې شمیرنه، د ګټې – او کټې د کټې شمیرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتیاوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنستونه دي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني ـ پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنشیال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپینې خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغي او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغي او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې چې همدا اوس چاپ شوې دي:

: *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برینککن لیکنې چې له پرینمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

١ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

٢ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دویم ټوک

٣ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصایه یا ستاتیستیک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د ښتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د ښتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي، را ژباړل شوي دي.

۶ – انالیزی ١

٧ – انالیزې ٢

٨ – کرښیز الجبر

٩ - د شمیرپوهنې بنسټونه

١٠ - د فرمولونو ټولګه

١١ – فنکشنل انالیز

١٢ – وکتور شمیرنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

نوري ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښيز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه يا د اعدادو تيوري

زما ليکنې : همدا اوس ځنې چاپ شوي او ځنې چاپ ته چمتو دي.

Bonn (Germany):

۱۵ - د شميرپوهنې ستر کتاب دويم چاپ د پوره تغيراتو سره :

دا کتاب د شميرپوهنې برخې برسيره د انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په کتاب کې د اړتيا سره زياتونه او کونه راغلي

کتب په دوه برخو کې چاپ شوی دی

الف . لومړئ برخه

ب . دويمه برخه

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دويم چاپ د پوره تغيراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دويم چاپ له تغيراتو سره

۱۸ - ډېرئ پوهنه يا سټ تيوري

۱۹ – د شميرپوهنې سم اند (منطق رياضي)

۲۰ - د يو څو شميرپوهانو ژوندليک

۲۱ – د شمير پوهنې ګډې وډې ليکنې

۲۲- داهم ژباړه ده، خو ليکونکی يې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتيګرال شميرنو ته تمرينونه او اوبيونې يا حلونه يې

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزۍ پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې وبه غزیږي.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپریږي:

د ګروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اومم ټولګې پورې ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیونې سره په کې راغلي او ماته زیات ګټور برېښي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لیکوال ژوند ته لنډه کتنه

ماخان په اولني نوم میرېي شینواری د اروابنادې پستو او اروابناد نوررحمان زوي په ۱۳۲۰ ؟ ه لمریز کې د شینوارو هسکه مینه کې دې نړۍ ته سترګې راغږولي.

د هسکې مینې د لومړنې ښوونځي (د لومړنیو زده کوونکو څخه) څخه وروسته د رحمان بابا لیسه له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پورې(ښوونځي له لومړي ټولګې پیل او د دویم ټولګې څخه ګام او پای).

د ۱۹۶۶ تر سپتبر د کابل طب پوهنځی. له ۱۹۶۶ سپتمبر څخه د اتریش برس، چې هلته یې د شمیرپوهنې ډاکتري په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

د۱۹۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فبروري تر پای د دباندنیو چارو وزارت کې مامور. د ۱۹۸۸ مارچ څخه تر ۱۹۹۲ جون پورې په بن کې د افغانستان جمهوریت سفارت شارژد افیر(صفر نه وو). له هغې وروسته په جرمنې کې سیاسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ څخه د ۲۰۰۹ دسمبر پورې د د ریاضي څانګه کې د پوهنې وزارت درسي نساب کې دنده.

ماخان میرېي په ۱۹۷۲ کې له لرې د میرمن ښاپیرۍ سره واده شوی، چې د واده خبر ورته اتریش ته راغی. ده له میرمن ښاپیری سره په ۱۹۶۳ ز ک کې کوزده کړې وه.

دوي ته لوي څښتن په اتریش ویانا کې د مای په شلم ۱۹۷۹ ز ک دوه بچیان وبخښل، چې څانګه او اباسین نومیږي. څانګه په المان کې د پوهنتون علمي همکاره وه او د حقوقو ډاکتره ده او اباسین ملي اقتصاد او ټولنیزه سایکولوژي لوستلې.

ماخان شینواري بې کاره نه دی او لږ تر لږه له ۹۷ ۱۹ څخه همدا د کتابونو لیکلو اوو د ژباړې دنده یې په غاړه اخستې، چې خپل فکر د شونې پولې تازه وساتي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library