

$$\begin{array}{r|l} & A \cdot X_1 = b \\ - & A \cdot X_2 = b \\ \hline = & A \cdot (X_1 - X_2) = 0 \end{array}$$

له ن ج : بنستیز درس | کرنیز الجبر

2012

**Ketabton.com**

ژیاری: ډاکتر ماخان (میری) شینواری

## کرنییز الجبر

$$\begin{array}{r|l} & A \cdot X_1 = b \\ - & A \cdot X_2 = b \\ \hline = & A \cdot (X_1 - X_2) = 0 \end{array}$$

dr.shinwari@hotmail.com

له ن ج : بنسٹیز درس | کرنییز الجبر

ژباری: ڊاکٽر ماخان (میری) شینواری

۱	نظر یا د پیداکیډو فکر
۲	هندسي لری پرلپسي یا لری
۳	د برنولي نا مساوات یا نابرابرون
۴	د یوه کرښیز مساواتسیستم جوړښت
۵	ماتریکسونه:
۷	تراسپوني ماتریکس
۷	سیومتريکي ماتریکسونه
۸	نا یو ډوله یا اینهوموجین
۹	یو ډوله یا هوموجین
۹	لیکه پوریز بڼه
۱۳	ډیترمینانتونه
۱۳	رانگ
۱۳	د حلفضا د ډیمنزیون (بعد، پراخیدونۍ) ټاکل
۱۴	د گاوس - تلنلار یا - - قانون
۱۶	د گاوس الگوریتموس ټیکاوی
۱۷	د حلونو یا اوبیونو نور قوانین
۱۹	ورته والي - یامشابهت اړیکي
۱۹	ډېری یا ست له ترنو یا عملیو سره
۲۰	لاندي برخه ( که توته برخه یا کښته برخه):
۲۰	گروپ

۲۱	د ابل - یا کموتاتیو گروپ
۲۱	کری
۲۳	بدن یا تن
۲۳	پاتي تولگي یا باقي تولگي
۲۷	وکتور فضا
۲۷	کربنیز خپلواکوالی
۲۸	کربنیز بلواکواکوال
۲۸	د وکتور فضا تعریف
۲۹	د یوه وکتور فضا جوړونه یا که غواړی تولید
۳۴	سپاین یا کربنیزه Span، (کربنیزه) رابنده ورشو
۳۴	جوړبنتسیستم ( تولیدي سیستم)
۳۵	بنسټ
۳۵	د شتاینیخ بدلونجمله
۴۰	بعد یا پراخېدونی
۴۲	لاندي وکتور فضا
۴۳	د لاندي فضاو لپاره د بعد یا پراخیدوني فرمول
۴۴	د فنکشنونو یا څیرونو(توابعو) خویونه
۴۴	په کې (فنکشن یا تابع)
۴۴	په ( په باندي او په کې فنکشن یا -- تابع)

- ۴۵ کرښيز فنکشنونه يا توابع
- ۴۵ زړی (هسته) او عکس يا څېره
- ۴۶ ځانگړي کرښيز فنکشنونه
- ۵۰ د ارزښتوني فنکشنونه يا توابع يا څېروني
- ۵۱ ايزومورفيزمونه
- ۵۲ ماتريکسونه
- ۵۳ د يوه ماتريکس رانگ
- ۵۵ د متي (درز يا ستنې يا ولاړې ...
- ۵۵ په څټ- يا معکوس ماتريک
- ۵۶ ديترمينانتونه
- ۵۸ د لاپلاس د وديزېني جمله
- ۵۹ د ديترمينانتونو ساده ټاکنه
- ۶۱ د ايندومورفيزم ديترمينانتونه
- ۶۲ اِيگن ارزښت
- ۶۲ اِيگنوکتور
- ۶۲ دوه -کونجټري کيدونکي يا دوه-کونجټري ....
- ۶۳ اِيگن فضاوي
- ۶۴ ماتريکس سړی څنگه دوه-کونجټري يا...
- ۶۵ سکالار ضرب (دنننی ځل يا -ضرب) او نورم
- ۶۷ د کوشي -شوارخ- نامساوات

سرليک

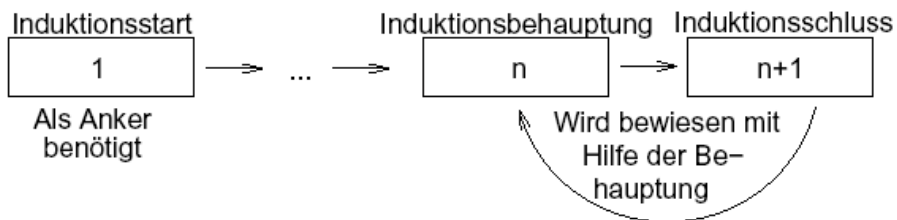
۶۸	اورتوگونال وکتورونه
۶۸	اورتونورمال بنسټونه:
۶۸	خای بدلون
۶۸	ترانپوزیشن
۷۰	د ډاکټر ماخان شینواري لیکنې

## د ژباړې نیولیک

د دې سرلیک لاندې یوه بله لیکنه هم شته. دا مخ ته پرته لیکنه ساده او د پیل په څیر باید وکتل شي. دا لیکنه د بنسټیزو لیکنو ن ج څخه راژباړل شوي ده.

### نظر یا د پیداکیډو فکر

پوره اندکشن د بنوونې یو متود یا لار ده، هغه چې په کرښیزه الجبر کې زیات کارول کیږي. د بنوونې لپاره نیول کیږي چې یو ټاکلی فرمول د اندکشن ثبوت د  $n$  لپاره صدق کوي. د اندکشن پای یا ختمېدلو – چې د اندکشن پل هم بلل کیږي- بنوول کیږي، چې دا فرمول د  $n + 1$  لپاره صدق کوي، دایې چې بېرته د اندکشن ثبوت باندې لاس ولرو یا راوښو. د دې لپاره چې بنوونه پیڅي ټیک یا پوره ټیک وي، د یوه نښلون ټکي ته اړتیا شته، له کوم چې  $n$  پیل کیږي. دا نښلونټکی د اندکشن پیل ټکی هم بلل کیږي. یا د اندکشن پیل او په بنوونه کې په پیل کې راوړل کیږي.



د پورته دپښتو ژباړه له کین و ښي لور ته:

پورته: د ایندکشن پیل. لاندې: د په باندې اینولو ( کلکولو) لپاره اړین.

لوریزئ کرښي: لرو .

بیرته څیره پورته: د ایندکشن غوښتنه یا ثبوت د ایندکشن پای. لاندې: د غوښتنې یا ثبوت په مرسته بنوول کیږي.



## هندسي لړۍ پرلپسې يا لړۍ ( )

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}$$

د بنوولو دی:

د اندکشن پیل:  $n = 1$

$$\begin{aligned} q^0 &= 1 \\ &= \text{Okay} \\ \frac{1-q^1}{1-q} &= 1 \end{aligned}$$

د اندکشن وړاندنیونه (فرضیه): د  $n$  لپاره دې بنوول شوي وي:

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}$$

د اندکشن پیل:  $n \rightsquigarrow n+1$

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

دا د بنوولو دی.

کين پيل کوو

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n q^k &= \sum_{k=0}^{n-1} q^k + q^n \\ &=_{\text{nach Vor.}} \frac{1-q^n}{1-q} + q^n \\ &= \frac{1-q^n}{1-q} + \frac{(1-q)q^n}{1-q} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1 - q^n + (1 - q)q^n}{1 - q} \\
 &= \frac{1 - q^n + q^n - q^{n+1}}{1 - q} \\
 &= \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}
 \end{aligned}$$

د برنولي نا مساوات يا نابرابرون Bernoulische Ungleichung

$$(1 + x)^a \geq 1 + ax \quad \text{دې وېنول شو}$$

د اندکشن پیل:  $a = 1$

$$1 + x \geq 1 + x \quad \text{تیک دی.}$$

د اندکشن پل:

$$a \rightsquigarrow a + 1$$

$$(1 + x)^{a+1} \geq 1 + (a + 1)x$$

دې وېنول شي

مور بېرته له بنی لوري پیل کوو

لاندي کې : Die Voraussetzung = نیونه (فرضیه)

$$\begin{aligned}
 (1 + x)^{a+1} &= (1 + x)^a \cdot (1 + x) \\
 &\stackrel{\text{Voraussetzung}}{\geq} (1 + ax) \cdot (1 + x) \\
 &= 1 + x + ax + ax^2 \\
 &= 1 + (a + 1)x + ax^2 \\
 &\geq 1 + (a + 1)x
 \end{aligned}$$

د پوره اندکشن سره نور د وېنولو فرمولونه

$$(1 + x)^a \geq 1 + ax \quad \forall x \geq 0$$

د لومړیو  $n$  طبیعي اعدادو مجموعه:

$$\sum_{i=0}^n i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

د یوه کرښیز مساواتسیستم جوړښت

یو کرښیز مساواتسیستم د یو کرښیزو مساواتو تعداد څخه جوړ دی. دا مساوات نامعلومي خوندي لري، هم داسې په نامه واریابلي (اوښتوني یا متحولي). نامعلومي د ضریبونو سره ضربیږي. که د نامعلومي ضریب  $0$  - وي یعنی باور ولري:  $(\text{دلته } x_k \cdot 0 \cdot x_k)$  نامعلومه ده) - نو دا ډول نامعلومه په مساواتو کې هم پرنښوول کېږي یعنی نه لیکل کېږي. دا لاندې د یوه کرښیز مساواتسیستم یوه بېلگه ده:

$$\begin{aligned} x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 &= 5 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 &= 0 \end{aligned}$$

او دا ټول  $a_{ij}$  عمومي ضریبونه دي او  $x_j$  واریابلي یا متحولي یا اوښتوني:

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot x_1 + \dots + \dots + a_{1n} \cdot x_n &= b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + \dots + \dots + a_{2n} \cdot x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + \dots + \dots + a_{mn} \cdot x_n &= b_m \end{aligned}$$

وکتور  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  کوم چې زیات وخت عمود لیکل کېږي د حل وکتور بلل کېږي. د یوه مساواتسیستم د ممکنه حلونو ډېری یا سټ د حلونو ډېری بلل کېږي:

$$\text{Lös}(A, b) := \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = b\}$$

که د حلونو ډېری تشه وي، نو د مساواتسیستم ناڅلور یا نه حل کېدونکی دی.

سرلیک

## ماتریکسونه:

سری کړی شي په لږ ځای کې کرښیز مساوات د ماتریکس په ډول ولیکي. د مخه له دې چي دا کار کوو باید ماتریکسونه راوړو یا رامنځ ته کړو.

یو ماتریکس یو ولاړکودیز یا ولاړکونجیز جدول دی د  $m$  کیلو یا لیکو او  $n$  درځونو یا متو یا ولاړو لیکو سره.

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

د ماتریکس لیکندول  $m \times n$  - ماتریکس

سری کړی شي د ماتریکسونو یوگوني کرښی رادباندي ولیکي. دا بیا د لیکو وکتورونه بلل کيږي. په ټیک دې ترتیب د ولاړو لیکو یا متو یا ستنو وکتورونه هم لاس ته راوړی شو، که سری یوگوني متي رادباندي ولیکي.

سری کړی شي ماتریکسونه یو له بل سره جمعہ کړي.

$$\begin{aligned} A + B &:= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

او سره ضرب کړي-+:

$$\begin{aligned}
 A \cdot B &:= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + \dots + a_{1n} \cdot b_{n1} & \dots & a_{11} \cdot b_{1m} + \dots + a_{1n} \cdot b_{nm} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} \cdot b_{11} + \dots + a_{mn} \cdot b_{n1} & \dots & a_{m1} \cdot b_{1m} + \dots + a_{mn} \cdot b_{nm} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

د ماتریکسونو په جمعه ساده پوهیدل کیدی شي. سری سره جمعه کوي، چې اړونده کمپوننتونه یو له بل سره جمعه کړي، داسې نتیجه لاس ته راځي. د ماتریکسونو ضرب ستونځمندی. په ضرب کې د لومړۍ ماتریکس لیکه د دویمې ماتریکس د متې سره ضرب کيږي او ورپسې سره جمعه کيږي. او نتیجه یې داسې لاس ته راځي، چې  $c_{ij}$  یعنی  $i$ -مه لیکه،  $j$ -مه متې کې ضرب د حل ماتریکس چې لاسته راشي، د لومړي ماتریکس د  $i$ -مې لیکې د  $j$ -مې متې یا ستون د توکو سره ضربوو او له ټولو ضربونو څخه جمعه جوړوو. دا یو ځل بیا لیکو:

$$\begin{aligned}
 &\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dots & b_{1j} & \dots & \dots \\ \dots & b_{2j} & \dots & \dots \\ \dots & \vdots & \dots & \dots \\ \dots & b_{nj} & \dots & \dots \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

هیله ده، چې په دا موضوع کې به لږه روښنتیا منځ ته راغلي وي. داسې وایو چې سری دښی دیترمینانت متې په  $90^\circ$  درجو د ساعت څرخوني (عقربک؟؟) په لور څرخوي، چې د کینې ماتریکس په لیکه پریوځي، یو په بل پراته توکي بیا سره ضربیوي او په دې پسي یې بیا له دې ضربونو جمعه جوړوي.

سرلیک

اوس د ماتریکس د ضریوني په بندیزونو هم پوهیږو. سری کړی شي  $n \times m$  - ماتریکس فقط د  $n \times m$  - ماتریکس سره ضرب کړي. دا په دې معنا، چې د کین ماتریکس لیکي تیک دومره باید اوږدې وي لکه د بني ماتریکس متي (درځونه، ستنې)، پرته له دې ته په لیکه نه،، پرېوځي،، یا سرخوري .

## تراسپوني ماتریکس

د یوې ماتریکس ترانپوني ماتریکس داسې لاس ته راوړو، چې لیکي او متي سره بدلې شي. له توکي  $a_{ij}$  څخه توکی  $a_{ji}$  لاس ته راځي.

$$a_{ij} = a_{ji}$$

بیلگه:

$$T \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \end{pmatrix}$$

د مربع ماتریکسونو لپاره دا په همدې معنا دی لکه په ،،دوه - کونجټري،، ( قطر) باندې هندارونه(انعکای).

## سیومتريکي ماتریکسونه

یو ماتریکس تیک هلته سیومتريک دی، چې باور ولري:

$$a_{ij} = a_{ji}$$

د کرښیز مساوات سیستم ځایسپمايزه لیکندول

د یوه ماتریکس په مرسته او کېدی شي کرښیز مساوات انډري - او ځای سپمايز ولیکو. مور ته دا بام ودریږي، چې دا نامعلومي تل په هر مساوات کې همغه دي . نو لکه په ماتریکس ضربوني کې د ماتریکس ضربوني په مرسته دا د مساوات سیستم څخه دباندې راباسو او په دې توگه د ضربیونو( ځلونو) ماتریکس  $A$  لاس ته راوړو:

$$A \cdot x = b$$

د لیکښي له مخي دا داسي برېښي:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

د گاوس تلفلار لپاره، چې لاندې لیکل شوي ده، دا بیا په لنډه توګه تکراروو او  $x^-$  وکتور هم لري بریزدو. له دې سره نوکان او مساوات هم لري پریردو یا نه لیکو او دا ټول په یوه **Kasten** کاستن یا کارتون کې لیکو، چې دا لګه چې ګورو، په لاندې توګه لیکل کیري.

$$\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}$$

نا یو ډوله یا اینهموجینبرابرون

یو کرښیز مساوات سیستم نایوډوله (اینهموجین) بللکیري، که که لږ تر لږه د یو  $b_i$  لپاره  $(1 \leq i \leq n)$  باور ولری

$$b_i \neq 0$$

په ریښتیني توګه دا پهدې معنا دی: پهنی لور صفرماتریکس نه دی ولاړ یا خای په خای نه دی.

یو ډوله یا هوموجین Homogen

د دې برعکس یو مساوات سیستم برابرډوله (هوموجین) بلل کیري، که  $b$  صفروکتور وي، دا په دې معنا چې دټول  $b_i$  لپاره  $(1 \leq i \leq n)$  باور لري

$$b_i = 0$$

دا دا معنا لري، چې په بني اړخ صفروكتور پروت دی

## لیکه- پوریز بڼه Zeilenstufenform

مور اوس طبعاً د کرښیز مساواتسیستم د اوبیوني یا حل سره مینه لرو. دا گاوس الگوریتم چې یوڅه کښته راي، د اوبیونو یا حلونو د پیداکولو لپاره مرسته کوی. دا ماتریکس د ساده لیکه بدلون بني څخه په لیک-پورې-بني باندې اړوي. په لیکپوریزبڼه کې یو ماتریکس مخ ته لرو، که هغه خورا ټیټه لیکه دا اکثره کین پراته صفرونه تولې لیکې خوندي ولري او د کین پرتو صفرونو تعداد (گنون) پورته لور ته کم شي، د کوم سره چې کله کله یې له لیکې و لیکې ته یو حل برابر باټي کیری. لاندې ماتریکس د لیکې-پوریز-بني ماتریکس بیلگه ده

$$\begin{pmatrix} 0 & \otimes & \oslash & \oslash & \oslash & \oslash & \oslash \\ 0 & 0 & \otimes & \oslash & \oslash & \oslash & \oslash \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \otimes & \oslash & \oslash \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \otimes & \oslash \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \otimes \neq 0 \\ \oslash \neq 0 \text{ oder } 0 \end{array}$$

پورته الماني: د ،،،،، په معنا

جمله :

مور کړی شو هر ماتریکس په لیکه-پوریز-بڼه ماتریکس واروو. داچې د گاوس تلنلار د دې لپاره یو الگوریتم راکوي، چې دا متمین ده او دا جمله بنسول شوي.

د حلونو کرینتیریوم

( نخښي، چې د دوه یا زیاتو شیانو یا کسانو ترمنځ پرې پرېکړه کیري )

د دې لپاره چې د کرښیز مساواتسیستم د حلونو تعداد وټاکلی شو، د حلونو کرینتیرین یا نخښي(توپیرنخښي) شتون لري..



برابردوله یا هموجین مساواتسیستم کړی شي یا ساده حل ولري او یا ډېر حلونه ولري. ساده حل:

ساده حل یې صفروکتور دی، دا په دې معنا، چې ټول مساوات ټیک هلته پوره کيږي، که ټولې واریابلې (متحولي یا اووښتوني) صفر کېښوول شي.

دا حالت هلته رامنځ ته کيږی، چې که برابردوله مساوات سیستم په داسې لیکه-بوریز-بڼه و اړولی شي، چې په هره لیکه کې له بورته تر کښته یو صفر ځا په ځای وی. او همدومره د ماتریکس متي ولرو لکه لیکي. د یوه کرښیز مساوات سیستم بیلگه، چې یو د لیکه-پوری-بڼې ماتریکس سره، چې ښایي، چې فقط ساده حل شتون لري.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

د دې مساواتسیستم د اخرنې لیکې څخه لاس ته راځي  $x_3 = 0$ . له دویمې لیکې لاس ته راځي او بالاخره  $x_1 = 0$ ، له کومه امله چې مور د حل په څېر فقط صفروکتور لاس ته راوړو.

د یو هموجین مساواتسیستم سره کړی شو و ازمايو، چې ایا وکتورونه یو بل ته کرښیز خپلواک ای ا کرښیز بلواک دي. مور له دې سره وکتورونه په متاریکس کې د متي وکتورونو په څېر لیکو. که داسې لاس ته راوړی هموجین کرښیز م ساوات سیستم فقط ساده حلونه لري، ن و وکتورونه یو بل ته کرښیز خپلواک دی.

زیات حلونه یا اوبیوني:

دا هموجین کرښیز مساوات سیستم زیات حلونه لري، که خپلواکه متحوله ( اووښتوني) شتون ولري.. یوه خپلواکه اووښتوني هغه اووښتوني ده چې مساواتسیستم حل له لاري کره نه وي ټاکل شوي. مور مری شو داسې اووښتوني په خپله خوښه وټاکو او همداسې په خوښه زیات حلونه د مساوات سیستم لپاره لاس ته راځي.

دا حلونه یو وکتورفضا غزوي.

سرلیک

دا څنگه پېژنو، چې ایا یو میواتسیستم خپواکي متخولي لري؟ خپلواکي متخولي ټیک هلته شتون لري، چې په سیستم کې لږ مساوات شتون ولري، نسبت اووښتونو ته.

بیلگه:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

داسې مساواتسیستمونه شته، چې په هغې کې داسې نه ده، چې د متخولو څخه دې مساوات لږ وي. په داسې مساواتسیستم کې پېژنو، چې په لیکه پوریزه کونه کې یوه صفرا لیکه شتون لري. په هوموجینرینیز سیستم کې کېدی شي داسې لیکه له منځه یوسو) پام! داپه ناهموجین کې مکنه نه ده، ځکه چې دا حقیقت به مو لهمنځه وړی وي، چې کومحل شتون نه لري). که د دې لهمنځه وړنې سره زیاتې متخولي پاتې شي نسبت مساواتو ته، ن و یو م ساواتسیستم بهولرو د **خپلواکو (ازاده) متخولو** سره .

که د یوه هوموجین مساوات سیستم د حل سره، په کوم کې چې ماتریکس له متو وکتورونو جوړ دی، چې کرینیز خپلواکوالی یې یو بل ته ازمايل کيږي، لاس ته راشي، نو وکتورونه یو بل ته کرینیز بلواک دي.

انهوموجین مساواتسیستمونه کېدی شي هېڅ حل، ټیک یو حل او یا ریات حلونه ولرودای شي.

هېڅ حل یا نه حل: یو انهوموجین کرینیز سیستم کوم حل نه لري، که د دیوه مساوات ضریبونه صفر وي، او اړونده  $b_i$  صفر نه وي...:

یعني

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = b_i \quad b_i \neq 0$$

داسې یو برابرېون یا مساوات بڼه اړولی بڼه بدل **entartet** بلل کيږي. بڼه اړول شوي مساوات نه پوره کيږي او له دې سره تېرلمساوات سیستم نه پوره کېدونکی دی، له کومه کبله چې مور حل هم نه لرو.

ټیک یو حل:

یو انهموجین مساوات ټیک یو حل لري، که دا اړونده هوموجین مساوات سیستم — دا اړونده هوموجین مساوات سیستم جوړ شي، په کومکې چې ټول  $b_i$  د صفر سره برابر ولیکل شي — فقط ساده حلونه ولري.

د دې لپاره چې حلونه وشمیرلی شو، دا انهموجین کرښیز سیستم د لیکې پوریزبڼه باندې اړوو، لکه پورته مو چې داسې وکړل، د کوم سره چې مور  $b_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) هم باید په پام کې ونیسو.

یو ناهوموجین مساوات سیستم کیدی شي د دې لپاره وکارول شي، چې و ازمایي، چې ایا یو وکتور د نورو وکتورونو څخه د کرښیز کمپینیشن په څېر جوړی شي که نه. ټیک هلته یو حل شته، که  $b$  د متو یا ستنو وکتورونو د کرښیز کمپینیشن څخه جوړولی شي. که داسې یو حل شتون ونه لري، نو نه شي کېدی چې د متو وکتورونو څخه کمپیني یا ترکیب کړي. که یو یا حتا زیات حلونه شتون ولري، نو دا په لاندې توګه دي:

زیات حلونه یا اوبیوني:

لکه په کرښیز هوموجین مساواتسیستم کې ازادې متحولي په ناهوموجین مساوات سیستم کې هم راپیدا کیري یا منځ ته اړخي. دا بېرته په هغه وخت کې شتون لري، که سړی ذاتي متحولي ولري نسبت مساواتو ته. په ناهوموجین سیستم کې هم سړی کړی شي صفرلیکې لري کړي، چېرته چې  $b_i = 0$  هم وي. په هر حالت دا بڼه تغیر شوي مساوات له منځه نهشي وړل کېدی.

## دیترمینانته Determinante :

که د یوه مربع ماتریکس وکتورونه یو بل ته کرښیز بلواک وي، نو دیترمینات  $\neq 0$  دی. په بل حالت کې  $\neq 0$  . له دې سره د  $Ax = b$  لپاره باور لري:

سرلیک

	$\det A \neq 0$
د هوموجین مساواتسیستم لپاره ساده حل،	$\Rightarrow$
	$\det A = 0$
د ناهوموجین مساوات سیستم لپاره حلونه.	$\Rightarrow$
د ناهوموجین سیستم لپاره حلونه یو حل یا هیڅ حل	

## رانگ Rang

$$\text{rang}(Ab) = \text{rang}(A)$$

حل شتون لري. د یوه ناهوموجین سیستم لپاره یو حل شتون لري. د یوه هوموجین سیستم لپاره ساده حل شتون لري.

## د حلفضا د دیمنزیون (بعد، پراخیدونی) ټاکل

د یوه هوموجین مساواتسیستم د حلدبریو د د بعد ټاکلو لپاره مور کړی شو د دیمنزیون یا بعد فرمول څخه کار واخلو. دا چې هر ماتریکس  $A$  په یوه ټاکلي بنسټ  $f_A$  ایندومورفیزم انخوړوي د هوموجین کرښیز مساوات سیستم حلفضا لپاره

$$\text{Lsg}(A, 0) = \text{Kern}(f_A)$$

باور لري او داسې کړس شو د بعد د فرمول

$$\dim V = \dim(\text{Kern}(f)) + \dim(\text{Bild}(f)) \Leftrightarrow d$$

$$\dim(\text{Kern}(f)) = \dim V - \dim(\text{Bild}(f))$$

سره د حلفضا بعد وټاکو

## بعد یا پراخیدونی

یا  $0$  دی : نو بیا ټیک ساده حل شتون لري، داسې په نامه صفروکتور.

یا  $> 0$  دی : نو په دې حالت کې ازادې اووښتونې (متحولې) شتون لري، بعد لویوالی د متحولو تعداد دی، چې لرو یې:

پوښتنه:

مور عکس (خیره) څنگه ټاکو؟ مور دلته باید یوون – واهدوکتورنه په ماتریکونو وځغوو یا راوړو. مور بای د پسي د بیلد (څپرې) پراخېدونې وشمېرو، داسې چې په هغې کې بېرته یو کرښیز مساواتسیستم حل کړو. مور له دې سره یو د شمیرنې پانگه لرو دی شو. او که اشتباه کړم؟

## د گاوس - تلنلار یا - - قانون Gauss-Verfahren

د گاوس-قانون د دې لپاره دی، چې یو ماتریکس په لیکه وکتورونو راوړي. د لیکه وکتورونو بدلیدنه او لیکه کمون یا تفریق د تر مخه سکالار ضرب په بنسټ د برخه اخستونکو لیکو تر هغې مخ ته بیایي، چې ماتریکس په لیکه پوریز ماتریکس بدل شي. د گاوس قانون تل د کنترولو دی یا عملي کیدی شي. خو سه له دې هم کېدی شي، چې په قوي ډول ناتییک وي. اوس الگوریتموس، پروگرامي،، کوو:

لاندي یا کښته برخه:

د گاوس قانون د یوه ماتریکس د لیکه پوریز بڼې باندې اړولو لپاره

- په پیل کې ازمايو، چې ایاماتریکس ماتریکس همرا اوس لیکه پوریز بڼه لري. په بېخي ځانگړې توگه  $A = 0$ ، یعنی فقط له  $0$  -نو څخه جوړ ماتریکس لیکه پوریز بڼه لري.

- د دې عمل جراکولو له مخه – او نظري په دې مهال هم- کېدی شي او باید هم لیکې بدلې شي، که دا کار گټور وي. دا په دې معنا، چې د لیکې د پيوت توکي (Pivotelemente) له پورته بېخي کین تل پسي بڼې لور ته لار شي. د پيوت توکي

سرلیک

هغه توکي بللکيري، کوم چې له بني لوري کتل شوي په يوه ليکه کې لومړی يا په سر کې د 0 سره نابرابر وي.

- د  $i$  سره پيل شوې هرې ليکې لپاره د پورته ليکې د  $i = 1$  سره تر د اخري ليکې پورې لاندې ډول مخ ته خو:

د هرې ليکې لپاره، چې وي - ليکه  $j$  تل له ليکې  $i$  کښته پرته ده - د  $i$

ډيرواره له ليکې  $j$  ته ور زياتوي يا تر کموي (که غواړی، جمعه کوي يا تري

تفريقوي)، داسې چې  $a_{ji}$  - دلته  $i$  اووښتونې يا متحوله د متې يا درخ گڼه(نمره) په گوته کوي- 0 شي.

د گاوس الگوريتموس يوه ليدنه

په لاندې کې Aktuelles ورځنۍ يا اکتول

لومړی پل يا تلنلار  $i=1$

Aktuelles $i \rightarrow$	X	X	X	X	Aktuelles $i \rightarrow$	X	X	X	X
Aktuelles $j \rightarrow$	0	X	X	X		0	X	X	X
	X	X	X	X	Aktuelles $j \rightarrow$	0	X	X	X
	X	X	X	X		X	X	X	X
	↑					↑			

Aktuelles $i \rightarrow$	X	X	X	X
	0	X	X	X
	0	X	X	X
Aktuelles $j \rightarrow$	0	X	X	X
	↑			

دويمه پل يا تلنه  $i=2$

Aktuelles $i \rightarrow$	X	X	X	X	Aktuelles $i \rightarrow$	X	X	X	X
Aktuelles $j \rightarrow$	0	X	X	X		0	X	X	X
	0	0	X	X	Aktuelles $j \rightarrow$	0	0	X	X
	0	X	X	X		0	0	X	X
	↑					↑			

دریم پل یا تلنه  $i=3$ 

		$X$	$X$	$X$	$X$
		$0$	$X$	$X$	$X$
Aktuelles $i \rightarrow$	$0$	$0$	$X$	$X$	
Aktuelles $j \rightarrow$	$0$	$0$	$0$	$X$	
			$\uparrow$		

له ماتریکی داسی په لاس راری لیکه پوریز بڼه وکتور څخه کېدی شي حلونه (اوبیوني) وشمېرل شي.

دا داسی کوو چې دا مساواتسیستم بېرته په ماتریکس بڼه په یوگونو مساواتو بدل کړو او له لاندې څخه په پیل په اړونده متحولي پسي حل کړو.

کخ دا مساواتسیستم زیات حلونه لرودی شي، نو له دې سره پېژنو، چې متحولي شتون لري، چې د هغو ارزښتونه ه شو ټاکلی. دا نو ازادې متحولي دي.

### د گاوس الگوریتموس ټیکای

د دې لپاره چې وښایو چې گاوس قانون یو کرښیز مساوات سیستم  $\bar{A}$  د ټیک همغه یا برابر حلېږی (حلسټ) سره لکه مساواتسیستم  $A$  یې چې تولیدوي، باید وښایو، چې لاندې بڼه بدلونونه په حلونو کوم اغیز نه لري.

لومړی: د لیکو بدلونه

دویم: د لیکو صربونه د سره او بالاخره یې د بلې لیکې سره زیاتول یا کمول (جمعه او تفریق)

بنوونه یې:

لومړی: دا ساده دی. د یوه مساواتسیستم د لیکو بدلون په حلونو کوم اغیز نه لري، ځکه چې لري پرلپسي پروا نه لري..

سرلیک

دویم: مور د مساواتسیستم دوه لیکي ترخپرنې لاندې نیسو، خکه چې بڼه بدلون فقط د دې دوه لیکو په مرسته صورت نیسي. نور و دوه لیکو سره سراوکار نه لرو او د حلونو ډېری تغیر نه خوري:

$$\begin{aligned} (1) \quad a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n &= b_i \\ (2) \quad a_{j1}x_1 + \cdots + a_{jn}x_n &= b_j \end{aligned}$$

لومړۍ لیکه د  $\lambda$  سره ضربوو، په مساوات کې تغیر نه راځي، خکه چې سړی  $\lambda$  بیرته لندولی شي یا کمولی شي یا که غواړی اختصار کولی شي:

$$\lambda \cdot a_{i1}x_1 + \cdots + \lambda \cdot a_{in}x_n = \lambda \cdot b_i$$

دا (1) اوس د دویمې (2) لیکي سره جمعه کوو، لکه چې ترې لرو

$$a_{j1}x_1 + \cdots + a_{jn}x_n + (\lambda \cdot a_{i1}x_1 + \cdots + \lambda \cdot a_{in}x_n) = b_j + (\lambda \cdot b_i)$$

پوهیرو چې دلته هم په حل کې کوم تغیر نه راځي، خکه چې مساوات ورسره زیاتوو، چې په دواړو لورو ته راغلی او دواړو لورو ته همغه برخه ورکوي. دا بیرته سره لندیدی شي او مور بیرته وتونمساوات لرو.

## د حلونو یا اوبیونو نور قوانین

د یوه کرښیز مساواتسیستم د حل لپاره د گاوس قانون ترڅنګ نور قوانین هم شته. په ښوونځي کې مو د بدلون قوانین وپیژندل. په دې کې یو مساوات د یوې متحولې یا اووښتونې سره حل کیري او بیایي ارزښت د مساوات سیستم په بل مساوات کې کېښوول کیري. په همدې ترتیب دې کار ته دوام ورکوو، چې بیداشو اووښتونې ارزښت د مساوات سیستم په هبل مساوات کز څا په ځای کیري، تر څو چې د ټولو متحولو ارزښتونه پیداشي. که د اووښتون و ارزښتونه په پای کز څا په ځاشي او لاس ته راشی،  $0 = 0$ ، نو مساوات سیستم ناپای ډېر حلونه یا اوبیوني لري. که د دې څا په ځای کوني وروسته،

کین اړخ  $\neq$  ښی اړخ، نو کوم حل شتون نه لري. په ورته توګه دا مساوي ایشوني قانون هم کارول کیري، د کوم سره چې دوه مساوات د یوهې اووښتونې په لور حل شي او بیا



برابر ولیکل شي.

په پای کې باید وکورو، چې د یوه کرښیز مساوات سیستم څنگه حلونه لاس ته رارو، که ورته سیستم حل کړ شوی وي:

غواړو د یوه ناهوموجین کرښیز مساوات سیستم حلېږی  $I$  وټاکو. مور د هوموجین کرښیز مساوات سیستم حلېږی یا حل سټ  $H$  پیژنو. د هوموجین کرښیز مساوات سیستم حلونو ډېری یا سټ  $H$  د اړونده تابع د زری (هستی) Kern سره برابره ده. برسره پردې مور د ناهوموجین سیستم ټوټه یا برخه حل یا د حل یوه برخه حل  $v_0$  پیژنو.

مور کړی شو د دې ناهوموجین سیستم حلېږی  $I$  پیدا کړو، داسې چې

د ناهوموجین سیستم ټولو حلونه  $v_0$  جمعه کوو:

$$I = v_0 + H = \{v_0 + h \mid h \in H\}$$

د هوموجین کرښیز مساوات سیستم حلونه  $Ax = 0$  د کرښیزو توابعو زری (که غواړی: هسته) دی. مور کړی شو، لکه د ماتریکس  $A$  سره چې انځور یږي، دا زری و دې ټوټه - یا برخا حل ته ورزیات یا ور جمعه کړو. دا ځانله (تنها) د ناهوموجین مساوات سیستم سره نه کوو بلکه د هوموجین مساوات سیستم سره هم همداسې مخ ته ځو.

$$Lsg(A, 0) = v_0 + Kern(A)$$

د هوجین مساوات سیستم ته تل یو ساده حل  $0$  شتون ري، له دې سره لرو

$$Lsg(A, 0) = 0 + Kern(A) = Kern(A)$$

مور د ناهوموجین مساوات سیستم دوه حلونه لرو. له دې دوه وو څخه یو حل د هوموجین مساوات سیستم لپاره جوړولی شو، داسې دواړه حلونه یو بل کم یا تفریق کړو:

سرلیک

$$\begin{array}{r|l} & A \cdot X_1 = b \\ - & A \cdot X_2 = b \\ \hline = & A \cdot (X_1 - X_2) = 0 \end{array}$$

## ورته والي - يامشابهت اړيکي Äquivalenzrelationen

په  $A$  يوه اړيکه  $\sim$  تیک هلته ورته بللکيږي، که د ټول  $a, b, c \in A$  لپاره باور ولري

لومړی:  $a \sim a$  يا  $(a, a) \in \sim$  انهکاس يا هندارون اړيکي يا (Reflexiv)

دويم: که  $a \sim b$ ، نو  $b \sim a$  يا که  $(a, b) \in \sim$ ، نو  $(b, a) \in \sim$  سيومتريک اړيکي (Symmetrisch)

دریم: که  $a \sim b$  او  $b \sim c$ ، نو  $a \sim c$  يا که  $(a, b), (b, c) \in \sim$ ، نو  $(a, c) \in \sim$  ترانسيتيو اړيکي (Transitiv)

ورته اړيکي يوه ډبري (ست) په، ورته ټولگيو، ويشي.

## ډبري يا ست له ترنو يا عمليو سره

د بنوونځي او هم د شمېرپوهنې په ورځني ژوند کې له دې سره بلد يو، چې له کومو سره ترمونه ساده کېدی شي. دا زيات وخت ډبره مرسته کوي. د بېلگې په توگه د ډېستريبيوتيو قانون په مرسته لاندې ترم خورا زر گڼلی شو، لکه بي له دې قانون.

$$\left(\frac{1}{8} + \frac{13}{2}\right) \cdot \frac{8}{13} = \frac{1}{8} \cdot \frac{8}{13} + \frac{13}{2} \cdot \frac{8}{13} = \frac{1}{13} + 4 = 4\frac{1}{13}$$

د بينوم لومړی جملي هم د ډېستريبيوتيو قانون ډبر واره استعمالول دي

$$(a+b)^2 = (a+b) \cdot (a+b) = (a+b) \cdot a + (a+b) \cdot b = a \cdot a + b \cdot a + a \cdot b + b \cdot b = a^2 + 2ab + b^2$$

په لاندې برخه کې اوس شمېرنې نور قوانین ، چې د اکسیومونه بلل کېږي و تعریفو. دا قوانین د ډېریو لپاره صدق کوي د اړونده ترنو سره. زیات وخت پوښتنې رامنځ ته کېږي، چې دا اکسیومونه له کومه راځي. اکسیومونه خویونه ل ري، چې دا په ساده توګه تعریفیږي، بې له ثبوت. طبعاً دا په خوښه نه ټاکل کېږي. مګر په لومړي سر کې یا د پیل زده کوونکو لپاره په دې بسیا کوو، چې دا دې شتون ولري.

لاندي برخه ( که ټوټه برخه یا کښته برخه):

### Unterabschnitte

مور او یو په بل پسې یوګوني تعریفونه ورکوو. له دې سره پورته و کښته لور ته تل زیات امسیمونه باور لري. د بیلګې په توګه تنونه یا اجسام له دوه کموتاتیو ګروپونو منځ ته راځي، یو ځل نسبت جمعي یا زیاتون + ته او یوځل نسبت و ضرب \* یا \* ته او دې سره اړونده ډیسټریبوتیو قانون څخه یو ځای یا په ګډه، یعنی بدن یا تن یا جسم له ګروپ څخه زیات دی.

ګروپ

یوه حوره یا یو ګون  $(G, +)$  ، چې  $G$  یوه ډېری ده او  $+$  یوه ترنه یا عملیه ده،

$$+ : G \times G \rightarrow G$$

ګروپ بللکیري، که لاندي اکسیومونه پوره وی:

سرلیک

**G1** :  $(a + b) + c = a + (b + c) \forall a, b, c \in G$  اسوخیاتیو قانون.

**G2** : یو  $e \in G$  (ناپیلی توکی) شتون لري چې د  $\forall a \in G$  لپاره لاندې خویونه پوره کوي:

$$e + a = a$$

لومړی:

دویم: د هر  $a \in G$  لپاره یو  $a' \in G$  شتون لري (په څټ یا برعکس توکی) د  $a' + a = e$  سره

د ابل - یا کموتاتیو گروپ **Abelsche / kommutative Gruppe**

یو گروپ د ابل گروپ بلل کیږي، که د د گروپ د اکسیومونو **G1** او **G2** برسېره دا  $\forall a, b \in G \quad a + b = b + a$  باور ولري ( کموتاتیو قانون) هم **(Kommutativgesetz)**.

کری Ring

یو گون  $(R, +, *)$  ، چېرته چې  $R$  یوه ډبرې او  $+, *$  دوه تړونونه یا عمليې دي د لاندې سره

$$+ : R \times R \rightarrow R \quad * : R \times R \rightarrow R,$$

کری یا رینگ بلل کیږي، که لاندې اکسیومونه پوره وي:

**R1** : د + سره یو ځای کموتاتیو گروپ ( اسوځاتیوؤ ناپیلی توکی، په څنټ یا برعکس توکی دی.

**R2** :  $(a * b) * c = a * (b * c) \forall a, b, c \in R$  ( د \* لپاره اسوځاتیو دی.

**R3** : دپستربوتیو قانون باور لري:

$$\forall a, b, c \in R : (a + b) * c = a * c + b * c \quad (a)$$

$$\forall a, b, c \in R : a * (b + c) = a * b + a * c \quad (b)$$

کری د یوې توکي (واحد توکي) سره **Ring mit Einselement**

$(R, +, *)$  یوه کری ده، له دې امله باور لري:

$\exists 1 \in R$  ( ناپیلی توکی یا یوې توکی د ترنې لپاره ) د هغه لپاره چې باور لري:

$$1 * a = a$$

کموتاتیو کری: **Kommutativer Ring**

$(R, +, *)$  یوه کری ده، له دې امله باور لري:

$$\forall a, b \in R : a * b = b * a \quad ( د * لپاره کموتاتیو قانون )$$

کموتاتیو کری د یوې توکي ( واحد عنصر) سره

کری، په کومو کې چې کموتاتیو قانون باور لري او دا هم یو یویتوکی ولري، یعنی د دوه پورته اکسیومونو سره، کموتاتیو کری د یویتوکی سره بللکیري.

## Field Körper بدن یا تن یا پتی

یو ارزښت نظم یا توپل  $(K, +, *)$  یو تن دی، که باور ولري

**K1** : د کموناتیو کړی اکسیومونه د یویتوکي سره باور لري.

**K2** : داسې چې  $a * a^{-1} = 1$  باور لري (د تړني \* لپاره په څنډ یا  $\forall a \in K \exists a^{-1}$  برعکس توکی)

## پولینوم کړی Polynomring

$\mathbb{K}$  دې یو تن وي. د  $\mathbb{K}_n[t]$  ډېری د لاندې بڼې پولینومونو څخه جوړه ده

$$a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_nt^n$$

$$a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$$

د کومو سره  $t$  یوه اووښتونې (متحوله) او  $n$  د پولینوم درجه

بللکیري. د پولینومونو دا ډېری یو کموناتیو کړی ده. د یوه پلینوم  $P$  خورا جگ

ضریب (څلوونی) - په پورتنی بېلگه کې یعنی  $n$  ، چې باید  $a_n \neq 0$  وي - د پولینوم

درجه بللکیري. که دا  $0$  وي، یعنی د ټولو  $i$  لپاره  $a_i = 0$  ، نو دا پولینوم صفر

پولینوم بلل کیري. د صفر پلینوم درجه ناپای ده:

$$\deg P := \begin{cases} \infty & \text{falls } P = 0 \\ n & \text{max } (i \text{ für das gilt } a_i \neq 0) \end{cases}$$

## پاتي ټولگي يا باقي ټولگي Restklassen

اوس غواړم د بدن لپاره یوه بله بېلگه دروپېژنم یا معرفي کړم، د لومړنیو گڼونو پاتي ټولگي. د لومړنیو گڼونو پاتي ټولگي کېدی شي بدنونه شي، داسې چې په هغو کې

جمعه(زیاتون) او ضرب(ځل) تعریف شي. داسې تنونه  $\mathbb{F}_p$  بللکیري یعنی د بېلگې په توگه  $\mathbb{F}_7$  د پاتېتولگي 7 لپاره. په روځني ژوند کې د پاتې تولگي سره ډېر شمېرل کیري، د بېلگې په توگه د لیکنيزې جمعې سره 2.2 :

$$\begin{array}{r} 8 \\ + \quad 1 \quad 9 \\ \hline 1 \quad 7 \end{array}$$

مور 8 او 9 د 7 سره جمعہ کرل چې چېرته مو هغه لاس ته راغلی زیات هېر کړی نه دی. مور اوس کړی شو چې هغه زیات یا لاس ته راغلی پرېږدو او ولیکو

$$8 \bmod 10 + 9 \bmod 10 \equiv 7 \bmod 10$$

چېرته چې ،، mod ،، مودولو modulo په معنا دی، یعنی د وېش پاتې یا باقی.

په ورته توگه نور پاتې تولگي هم تعریفولی شو. د دې په ځایچې په 10 یې ووېشو په 3 یې وېشو.

$$\begin{array}{r} 3 \\ + \quad 1 \quad 2 \\ \hline 1 \quad 2 \end{array}$$

د دې لپاره کړی شو، چې یو د جمعې او ضرب جدول جوړ کړو:

$$\begin{array}{c|ccc} + & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{c|ccc} \cdot & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{array}$$

په همدې توگه دا کار بیا کړو، دا وار د پاتې تولگي 4 لپاره:

## سرلیک

+	0	1	2	3	·	0	1	2	3
0	0	1	2	3	0	0	0	0	0
1	1	2	3	0	1	0	1	2	3
2	2	3	0	1	2	0	2	0	2
3	3	0	1	2	3	0	3	2	1

اوس کړی شو د بدن اکسیومونه په یوگوني ډول په هغو پاتي ټولگيو پوري اړونده بدن باندې د جدول ارزښتونو په مرسته و ازمایو. کموتاتیو قانون باور لري، که جدول په دوه -کونجزي ( قطر) باندې هندارون يا انعکاس سیومتريک وي. په خټ يا معکوس توکی شتون لري، که د جدول په هره لیکه او هره مټه کې د بدن هر توکی یوخل منځ ته راشي يا شتون ولري. صفرتوکی شتون لري، که په هره لیکه او هره مټه کې منځ ته راشي يا شتون ولري. اسوخیاتیو او دبسترپیوتیو قوانین له جدول څخه په ساده توگه نه شي لوستل کېدی.

وروسته له دې چې دا نښلونتيکي ( د نښلونو ټکي) لرو، پېژنو، چې بدن  $\mathbb{F}_4$  شتون نه لري. دا د ضرب د معکوس توکی قانون په خلاف دی. داسې  $x$  نه شته چې  $2 \cdot x = 1$  باوري کړي

يعني د 4 پاتي ټولگي څخه بدن نه شي جوړېدلای. برعکس يو بدن  $\mathbb{F}_3$  له پاتي ټولگي 3 څخه ممکن دی، ځکه چې هېڅ اکسیوم نه زیانمن يا زخمي کيږي: گورو چې سيمتريک، برعکس او ناپیلي توکي شتون لري. همداسې د نږدې پسي ازمایلو څخه گورو چې اسوخیاتیو او دبسترپیوتیو قوانین هم باوري دي.

که نور هم ځیرنه ژوره کړو، نو په دې کې یو سیستم گورو، چې کله یو پاتي ټولگی  $P$  یو بدن  $\mathbb{F}_p$  کيږي. دا حالت ټيک هلته رامنځ ته کيږي، چې  $P$  یو لومړنی گڼ (عدد) وي. دا ثبوت دلته نه راوړو.

مگر غواړو چې په پای تعريف کړو، چې یو کرکتریسټيک ( خوی ټاکونی) څه شی دی او ولې د یوه په خوبه بدن  $\mathbb{K}$  کرکتریسټيک تل یو لومړنی گڼ او یا 0 دی:

پېژند(تعريف):

$\mathbb{K}$  دې یو رډن وي او 1 د ضرب یو ناپیلي توکی (یوونټوکی، عنصر واحد) وي. د یوه زیاتيز يا مثبت عدد  $n$  لپاره د  $n \cdot 1$  لاندې پوهیږو



سرلیک

$$n \cdot 1 = \underbrace{1 + \dots + 1}_{n \text{ mal}}$$

د بدن  $\mathbb{K}$  کرکتریسټیک په لاندې توګه تعریف دی

که $n > 0$ شتون ونه لري، چې $n \cdot 1 = 0$ باور ولري	$\text{char} \mathbb{K} = \begin{cases} 0 \\ n \end{cases}$
که $n$ شتون ونه لري، چې باور ولري $n \cdot 1 = 0$	

بنوونه:  $n$  تل یو لومړنی ګڼ دی:

وي دې  $n \neq 0$  (د تعریف دویم حالت). که  $n$  لومړنی عدد نه وي، نو دا په لاندې ضقیبونو ټوټه کېږي [2.3](#).

$$\begin{aligned} n \cdot 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (n_1 \cdot n_2) \cdot 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow n_1 \cdot 1 \cdot n_2 \cdot 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow n_1 \cdot 1 = 0 \wedge n_2 \cdot 1 &= 0 \end{aligned}$$

دا تضاد دی. ځکه چې  $n_1 < n$  او  $n_2 < n$  باید کرکتریسټیک  $\mathbb{K} = n_1$  او یا  $\mathbb{K} = n_2$   $\text{char} \mathbb{K} = n$  کرکتریسټیک وي. دی  $\text{char} \mathbb{K} = n$  او له دې سره  $n$  په ضریبونو نه شي ټوټه (تجزیه) کېدی، نو له دې امله یو لومړنی عدد دی.

مور د بنوونځي څخه غوره بدنونه پېژنو، لکه د هوبنیاړ اعدادو (کسري-)  $\mathbb{Q}$ ، د ریل یا حقیقي اعداد  $\mathbb{R}$  بدنونه او ورپسې د کمپلکس اعدادو  $\mathbb{C}$  بدنونه هم. دا ټول بدنونه کرکتریسټیک  $0$  لري. نور د اعدادو غوره ډېری هم شته لکه د ټول ګڼونو ( - اعدادو) ډېری. دا فقط یو کموتاتیو ګروپ جوړوي، ځکه چې په نسبت و ضرب ته معکوس توکی نه لری. دا له دې امله داسې ده، چې مور په دې عددونو کې ماتونه (کسرونه) نه لرو. د ټولو طبیعي اعدادو  $\mathbb{N}$  ډېری چې  $0$  ورسره تړلی دی او یا نه،

سرلیک

متأسفانه چې حتا یو گروپ هم نه دی، څکه چې د جمعې معکوس توکي نه لرو، د بېلگې په توگه د  $3 + x = 1$  لپاره  $x$  شتون نه لری، څکه چې  $x = -2$  شتون نه لري.

## وکتور فضا der Vektorraum

لاندې برخه

کرښیز بلواکوالی ( خطي تابعیت )

یادونه (ژباړی): گ، رو چې دلته مو تابع کلیمه، چې د فنکشن لپاره کارول کیږي، ناتیګاوي ته لارښودوي. دلته د بلواکوالی یا تابعیت څخه موخه فنکشن نه دی. پای.

یو د وکتورونو  $(v_1, \dots, v_n)$  کورنی کېدی شي کرښیز بلواکه یا کرښیز خپلواکه وي، نه دواړه یو ځای کېدی شي او هم نه له دوه څخه یوه هم نه . یوه کورنی هغه ډېری ده، چې یو توکی په کې دوه ځله هم راتلی شي. پس موږ په خوښه وکتورونه لرو- په کوم کې چې همغه وکتور حتی دوه ځله راتلی شي- کوم چې موږ داپه خپلو اړیکو کې یو له بل سره څېړو.

## کرښیز خپلواکوالی

$V$  دې یو  $\mathbb{K}$ -وکتور فضا وي. یوه د وکتورونو  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  پای کورنی له  $V$  څخه کرښیز خپلواک بلل کیږی، که له  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$$

څخه لاس ته راشي، چې  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$  دي.

دا په دې معنا، چې صفر وکتور د نورو وکتورونو  $v_1, v_2, \dots, v_n$  څخه ساده ترکیب کیدی شي

کرښیز بلواکواکوال:

$V$  دې بیا هم یو  $\mathbb{K}$ -وکتور فضا وی. یوه د وکتورونو  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  پای کورنۍ له  $V$  څخه کرښیز بلواک بلل کیږي، که له  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$$

لاس ته راشي، چې هم ساده حل  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$  شته، او هم یو حل له کوم سره چې لږ تر لږه یو  $(1 \leq i \leq n) \lambda_i \neq 0$  دی.

دا په دې معنا دی، چې مور صفر وکتورونه د ساده حلونو یا اوبیونو څخه په بل ډول هم د وکتورونو د کورنۍ څخه جوړولی شو

د وکتور فضا تعریف:

اوس د وکتور فضا تعریف ته راځو:

$\mathbb{K}$  دې یو بدنوي. یو درېگون  $(V, +, *)$  چې  $V$  یوه  $n$ -گون

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

سرلیک

او + او \* ترني يا عمليي وي

$$+ : V \times V \rightarrow V$$

$$* : \mathbb{K} * V \rightarrow V$$

$\mathbb{K}$ -وكتور فضا بلل کيري، که لاندې اکسيونونه باور ولري:

$(V, +)$

يو کموناتيو گروپ دی.

$$\lambda * (\mu * v) = (\lambda * \mu) * v \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, v \in V \quad \text{باور لري} \quad \text{S1} \quad \text{(قانون)}$$

(آسوخياتيو)

$$1 \in \mathbb{K} : \forall v \in V : 1 * v = v \quad \text{ناپيلي توکی} \quad \text{S2}$$

$$(\lambda + \mu) * v = \lambda * v + \mu * v \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, v \in V \quad \text{باور لري} \quad \text{D1} \quad \text{(قانون)}$$

(ديستريبيوتيو)

$$\lambda * (v + w) = \lambda * v + \mu * w \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, v, w \in V \quad \text{باور لري} \quad \text{D2} \quad \text{(قانون)}$$

(دبتریبوتيو)

د يوه وكتور فضا جوړونه يا که غواړی تولید Erzeugen eines Vektorraums

اوس غواړو  $n$ -گونی [3.1](#)  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ، چې دوكتور فضا د تولید لپاره اړتی ورته لرو تولید کړو. دا کړی شو که مور دا تول وليکو. دا د ډېرو کمو وكتورونو لپاره هم موخه ور دی. مگر د زیاتو وكتور فضاو لپاره دا نا ممکن دی، ځکه چې مور ناپای ډېر گونونه لرو. مور باید دا د يوه شمېر قانون سره تولید کړو.

## کرنیز ترکیبوالی

وي دي  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  په  $\mathbb{K}$ -وکتور فضا کې یوه د وکتورونو کورنۍ. هر  
د  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K})$  بنې

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$$

وکتور  $v$  د  $v_1, v_2, \dots, v_n$  کرنیز ترکیب بلل کیږی.

اوس، د کلمو، کرنیز خپل(بل)واک، او د، کرنیز ترکیب، ترمنځ یو څو بنوونې یا  
ثبوتونه رارل کیږی. د دې بنوونو لاس ته راوړنې به شاید د ډېرو زده کړو په غوښه  
او وینو ته تللي وي. تاسو پوهیږی چې دا داسې دی. خو بیا هم مور باید دا یو ځل  
وښایو:

جمله؛

که د کورنۍ  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  وکتورونه یو بل ته کرنیز خپلواک وي، نو کېدی شي  
هر وکتور  $v \in L(v_1, v_2, \dots, v_n)$  د دوی له لارې په یوه ټاکلې لار ترکیب شي. له

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n \quad v = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_n v_n$$

څخه لاس ته راځي

$$\lambda_1 = \mu_1; \lambda_2 = \mu_2; \lambda_n = \mu_n$$

بنوونه:

$$\begin{aligned} v &= v \\ \Leftrightarrow \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n &= \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_n v_n \\ \Leftrightarrow (\lambda_1 - \mu_1)v_1 + (\lambda_2 - \mu_2)v_2 + \dots + (\lambda_n - \mu_n)v_n &= 0 \end{aligned}$$

د کرنیز خپلواکوالي له امله باور لري:

سرلیک

$$\lambda_1 - \mu_1 = 0; \lambda_2 - \mu_2 = 0; \dots \lambda_n - \mu_n = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \mu_1; \lambda_2 = \mu_2; \dots \lambda_n = \mu_n$$

له دې سره کېدی شي وکتور ټیک په یوه ډول ترکیب شي.

برعکس یا په څنډ کېدی شي وښوول شي:

جمله:

که چیرې یو وکتور  $v$  ټیک په یوه ډول له وکتور کورنیو  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  څخه د کرښیز ترکیب کېدی شي، نو نو د دې کورنی وکتورونه یو بل ته کرښیز خپلواک دي.

ټیک په یوه ډول تکلیور په دې معنا دی، چې که

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$$

$$\text{und } v = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n$$

$$\lambda_i - \mu_i = 0 \quad \text{باور ولري،} \quad \lambda_i = \mu_i \quad \text{باور لري او له دې سره}$$

$$v = v$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n$$

$$\Leftrightarrow (\lambda_1 - \mu_1) v_1 + \dots + (\lambda_n - \mu_n) v_n = 0$$

داچې  $1 \leq i \leq n$  د  $\lambda_i - \mu_i = 0$  لپاره د کورنی وکتورونه کرښیز خپلواک دي.

جمله:

که د یوې کورنی  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  وکتورونه کرښیز بلواک وي، نو له یوه څخه زیات امکانات شته چې وکتور  $v$  ترکیب کړو. کرښیز بلواک په دې معنا دی، چې لږ تر لږه یوه  $v_i$  لپاره  $(1 \leq i \leq n)$  باور ولري:

$$v_i = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \dots + \lambda_n v_n.$$

بښوونه:

که موږ وکتور  $v$  ولرو، کړی شو دا په لاندې ډول ترکیب کړو:

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n.$$

له دې څخه لاس ته راځي  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . اوس کړی شو دا پورته یادشوی کرښیز

ترکیب د  $v_i$  لپاره ځای په ځای کړو او لاس ته راږو

$$\begin{aligned} v &= \lambda_1 v_1 + \dots + \\ &\quad \lambda_i \cdot (\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \dots + \lambda_n v_n) \\ &\quad + \dots + \lambda_n v_n \\ \Leftrightarrow v &= (1 + \lambda_i) \lambda_1 v_1 + \dots + (1 + \lambda_i) \lambda_n v_n \end{aligned}$$

نو  $(1 + \lambda_i) \lambda_1, \dots, (1 + \lambda_i) \lambda_n$  یو نوی امکان دی چې  $v$  ترکیب کړو او د دې سره همدا اوس دوه امکانات لرو

موږ کړی شو چې لاندی دوه واقعیتونه هم ثبوت کړو:

جمله:

که یو وکتور  $v_i$  د کورنی  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  کرښیز د کورنی  $(v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n)$  څخه نه شي ترکیبېدی، نو د کورنی  $(v_1, \dots, v_n)$  وکتورونه یو بل ته کرښیز خپلواک دي.

بښوونه:

نیسو چې دا کرښیز بلواک دي. دا په دې معنا، چې د

سرلیک

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0$$

لپاره لږت ر لږه د یوه  $\lambda_i$  لپاره  $(1 \leq i \leq n)$  باور لري

$$\lambda_i \neq 0$$

دا په دې معنا چې

$$\begin{aligned} \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \dots + \lambda_n v_n &= -\lambda_i v_i \\ \Leftrightarrow \frac{\lambda_1}{-\lambda_i} v_1 + \dots + \frac{\lambda_{i-1}}{-\lambda_i} v_{i-1} + \frac{\lambda_{i+1}}{-\lambda_i} v_{i+1} + \dots + \frac{\lambda_n}{-\lambda_i} v_n &= v_i \end{aligned}$$

نو کېدی شي، چې له  $v_i$   $(v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n)$  کرښيزه ترکیب کړای شي. دا نیونی ته تضاد دی. نو باید وکتورونه کرښيز خپلواک وي.

په همدې توگه برعکس ی په څټ هم باور لري:

جمله:

که د کورنی  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  وکتورونه یو بل ته کرښيز خپلواک وي، نو کوم یو وکتور د بل څخه کرښيز ترکیب کېدی نه شي.

بنوونه:

نیسو، چې دا شونی دی، یو وکتور  $v_i$   $(1 \leq i \leq n)$  کېدی شي کرښيز ترکیب کړای شي. نو باور لري:

$$v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \dots + \lambda_n v_n$$



گورو، چې  $\lambda_i \neq 0$  دی، څکه چې  $\lambda_i = -1$  . او د کورنۍ وکتورونه به کرښیز بلواک وی. تضاد. بو دا ممکن نه ده، چې له دې وکتورونو څخه کوم یو له بل څخه کرښیز ترکیب کړي، څکه چې بیا به کرښیز خپلواکوالی زخمی شوی یا زیانمن شوی وي.

سپاین یا کرښیزه **Spann**، (کرښیزه) رابنده ورشو) **Abschluss**، **lineare Hülle**

په یوه  $\mathbb{K}$ - وکتور فضا کې د یوې کورنۍ  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  د ټولو کرښیز ترکیبونو ډېرۍ سپاین یا کرښیزه رابنده ورشو بلل کېږي

$$\text{span}(v_1, \dots, v_n)$$

یا د وکتورونو د کورنۍ کرښیزه (که غواړئ) سمڅه (**Hülle**)

روښانه دې وي: د یوه سپاین وکتورونه ناجبري کرښیز خپلواک نه دي.

**جوړښتسیستم (تولیدي سیستم) Erzeugendensystem**

د وکتور کورنۍ  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  د وکتور فضا  $V$  تولیدي سیستم بلل کېږي، که باور ولري

$$V = \text{span}(v_1, v_2, \dots, v_n)$$

دایه دې معنا چې وکتورونه د وکتور فضا  $V$  مکمله یا پوره غزوي.

دلته کېدی شي، چې د وکتورونو کورنۍ کرښیز بلواک یا کرښیز خپلواک وی. دا یواځي باید وکتور فضا و غزوي.

**بنسټ Basis**

د وکتورونو  $(v_1, \dots, v_n)$  کورنۍ د وکتور  $V$  بنسټ بلل کېږي، که د کورنۍ یوگوني وکتورونه

- یو بل ته کرښیز خپلواک دي

- او که د وکتورونو کورنۍ ټول وکتور  $V$  وغزوي، یعنې د  $V$  یو تولیدي (جوړختیز) سیستم دی:

$$V = \text{span}(v_1, \dots, v_n)$$

او

$$\text{und } \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0 \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$$

له دې سره یو تولیدي سیستم ټیک هلته یو بنسټ دی، چې د دې تولیدي سیستم وکتورونه یو بل ته کرښیز خپلواک دي.

**د شتاینیخ بدلونجمله Austauschatz von Steinitz**

جمله:

په یوه د  $\mathbb{K}$  - وکتورونو کورنۍ (که فضا)  $V$  کې دې یو بنسټ

$$B := \{v_1, \dots, v_r\}$$

او یوه کرښیز خپلواکه کورنۍ

$$(w_1, \dots, w_n)$$

ورکړ شوي وي.

دی  $r \geq n$  . سری کړی شي د بنسټ  $n$  وکتورونه د  $n$  کرښیز خپلواکو وکتورونو کورنیو سره بدل کړای شي، داسې چې نوی بنسټ  $B^*$  بېرته کرښیز خپلواک دی او د وکتورفضا  $V_K$  بنسټ دی. د ایدنکس د گڼې بدلون وروسته کېدی شي داسې ولیکو:

$$B^* := \{w_1, \dots, w_n, v_{n+1}, \dots, v_r\}$$

$$B^* := \{w_1, \dots, w_n, v_{n+1}, \dots, v_r\}$$

یا په ځانګړي حالت  $n = r$  :

$$B^* := \{w_1, \dots, w_n\}$$

بڼونه:

بڼونه د بدلون لپاره سره صورت نیسي. دا د بدلون لپاره (وره جمله) د د بنټ څخه یو وکتور اخلي او یو بل ورزیاتوي:

**Austauschlemma** گڼه جمله

یو  $K$ -وکتورفضا  $V$  دې د بنسټ

$$B := \{v_1, \dots, v_r\}$$

سره ورکړ شوي وي او یوه  $w$  د

$$w = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{k-1} v_{k-1} + \underline{\lambda_k v_k} + \lambda_{k+1} v_{k+1} + \dots + \lambda_r v_r \in V$$

د  $\lambda_k \neq 0$  (\*) سره او

$$\lambda_k \neq 0.$$

نو

$$B' := \{v_1, \dots, v_{k-1}, w, v_{k+1}, \dots, v_r\}$$

ببرته یود  $V$  بنسټ دی .

یعنی سری کړی شي  $v_k$  د  $w$  وکتور سره بدل کړي. ( دا نور  $\lambda_1 \dots \lambda_r$  بي له  $\lambda_k$  باید حتماً 0 نه وي، مگر دوی کړی شي).

د بدلون جملې بنوونه **Beweis des Austauschlemmas** :

د لیکنې د ساده کونې لپاره نیسو، چې  $k = 1$  دی. مور بنایو چې

$$B' := \{w, v_2, \dots, v_r\}$$

هم د  $V_K$  بنسټ دی.

- د بنسټ 3.2 ټول وکتورونه  $v \in V$  د کرښیز ترکیب په څېر لیکل کېدی شي  
یعني

$$v = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_r v_r \quad (**)$$

داچې  $\lambda_1 \neq 0$  دي، کړی شو په لاندې ډول یې بڼه بدل کړو

$$\begin{aligned} w &= \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r && (von *) \\ \Leftrightarrow \lambda_1 v_1 &= w - \lambda_2 v_2 - \dots - \lambda_r v_r \\ \Leftrightarrow v_1 &= \frac{w}{\lambda_1} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2 - \dots - \frac{\lambda_r}{\lambda_1} v_r \end{aligned}$$

- اوس کړی شو دا په  $**$  کې ځای په ځای کړو

$$\begin{aligned}
 v &= \mu_1 \left( \frac{w}{\lambda_1} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2 - \dots - \frac{\lambda_r}{\lambda_1} v_r \right) + \dots + \mu_r v_r \\
 &= \mu_1 \frac{w}{\lambda_1} - \mu_1 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2 - \dots - \mu_1 \frac{\lambda_r}{\lambda_1} v_r + \dots + \mu_r v_r \\
 &= \frac{\mu_1}{\lambda_1} w + \left( \mu_2 - \mu_1 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) v_2 + \left( \mu_3 - \mu_1 \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \right) v_3 + \dots + \left( \mu_r - \mu_1 \frac{\lambda_r}{\lambda_1} \right) v_r
 \end{aligned}$$

له دې لاس ته راځي، چې نوی بنسټ لږ تر لږه یو تولیدي سیستم دی.

- اوس پاتې دادی چې کرښیز خپلواکوالی و ښایو

$$\mu w + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_r v_r = 0$$

د \* ځای په ځای کونه:

$$\begin{aligned}
 &\mu(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_r v_r) + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_r v_r = 0 \\
 \Leftrightarrow &\mu \lambda_1 v_1 + (\mu \lambda_2 + \mu_2) v_2 + (\mu \lambda_3 + \mu_3) v_3 + \dots + (\mu \lambda_r + \mu_r) v_r = 0
 \end{aligned}$$

نو  $\mu \lambda_1 = \mu \lambda_2 + \mu_2 = \mu \lambda_3 + \mu_3 = \dots = \mu \lambda_r + \mu_r = 0$  ځکه چې  $B$  کرښیز خپلواکه وه ( $\mu_2 = \mu_3 = \dots = \mu_r = 0$ ) او  $\mu = 0$  ځکه چې  $\lambda_1 \neq 0$ .

له دې څخه کرښیز خپلواکوالی لاس ته راځي

د بدلون جملې ښوونه:

له دې وروسته چې ومو ښوول، چې سړی یو وکتور  $v_k$  له بنسټ څخه را اخستی شي او د وکتور  $w$  سره یې بدلولی شي، که دا اړونده  $\lambda_k \neq 0$  وي کړی شي، چې د نمرې یا گڼې بدلون سره له ټیک ځای ته راوړل شي، باید وښایو، چې د زاړه بنسټ لپاره تل داسې یوه  $\lambda_k \neq 0$  شتون لري، داسې چې مور وکتورونه پرلپسې سره بدلولی شو:

سرلیک

- که صفر وکتورونه سره بدل کړو، نو بنوونې ته نه اړکيو. مور اړيین نه یو چې کوم وکتور پیدا کړو، چې له هغو سره بنسټ وکتور بدل کړو. دا زموږ د ایندکشن پیل دی.

- زموږ د ایندکشن نیونه ده، چې  $k$  وکتورونه مو سره بدل کړي دي او بېرته مو یو بنسټ لاس ته راوړی دی:

$$B' = \{w_1, \dots, w_k, v_{k+1}, \dots, v_r\}$$

- د ایندکشن پای :

که مور وکتور  $w_{k+1}$  بدل کړو، نو باید یو  $\lambda_i$  د  $k+1 \leq i \leq r$  سره پیدا کړو، د کوم لپاره چې  $\lambda_i \neq 0$  باور لري. باور لري :

$$w_{k+1} = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_k w_k + \underbrace{\lambda_{k+1} v_{k+1} + \dots + \lambda_r v_r}_{\text{mindestens ein } \lambda_i \neq 0}$$

دا پورته لږ تر لږه یوه  $\lambda_i \neq 0$ .

دا چې کرښیز خپلواکه کورنی  $(w_1, \dots, w_k, w_{k+1}, \dots)$  کرښیز خپلواکه وه، اجازه نه شته چې  $\lambda_1 = \dots = \lambda_k \neq 0$  وي، ځکه چې پرته له دې کرښیز خپلواکوالی زحمي شوی وي.

دا چې  $w_{k+1}$  هم صفر وکتور نه دی، ځکه چې بیا به کرښیز خپلواکوالی زحمي شوی وي، نو یو  $\lambda_i$  ( $k+1 \leq i \leq r$ ) شتون لري د  $\lambda_i = 0$  سره.

د بنوونې څخه لاس ته راوړنه

- که یو  $K$ - وکتور فضا  $V$  یو پای بنسټ ولري، نو د  $V$  هر بنسټ پای دی.
- د یوې وکتور فضا هر دوه بنسټونه برابر اوږدوالی لري.
- بنسټ پوره کېدنه:

په یوه پای تولېدکېدونکي وکتور فضا  $V$  کې دې کرښیز خپلواک وکتورونه  $w_1, w_2, \dots, w_n$  ورکړل شوي وي. نو کېدی شي سړی پیدا کړي، داسې چې

$$B := \{w_1, w_2, \dots, w_n, w_{n+1}, \dots, w_r\}$$

د  $V$  یو بنسټ وي.

- دې د کرښیز خپلواک وکتورونو ډېری وي، چې یوه وکتور فضا  $v_i, \dots, v_n$  غزوي، نو د  $v_i, \dots, v_{n+1}$  ډېری په هر حالت کرښیز بلواک ده.

دا په دې معنا چې بل وکتور نه شي پیدا کېدی چې و  $v_i, \dots, v_n$  ته کرښیز خپلواک وي.

- د بنسټ بدلید جمله:

- دې کرښیز خپلواک وکتورونه وي، چې یوه وکتور فضا غزوي (دا په دې معنا چې دا یو بنسټ دی)، نو  $w_i, \dots, w_n$  کرښیز خپلواک وکتورونه، چې د  $v_i, \dots, v_n$  وکتورونو د کرښیز ترکیب څخه جوړېدی شي، برابره وکتور فضا غزوي.

### بعد یا پراخېدونی (Dimension)

که  $V$  یوه  $K$ - وکتور فضا وي، نو تعریفوو

سرلیک

که $V$ پای بنسټ ونه ري، که $V$ د $r$ اوږدوالي بنسټ ولري	$\dim_k V = \begin{cases} \infty \\ r \end{cases}$
--	--

د پراخېدونې يا بعد جمله:

وي دي  $f : V \rightarrow W$  دلته  $\mathbb{K}$ -وکتورفضاوي دي) يو کرښيز بلواک. نو د بعد پراخېدونې جمله باور لري:

$$\dim V = \dim \text{Bild}(f) + \dim \text{Ker}(f)$$

Bild څیره او  $\text{Ker}(\text{Kern})$  زری يا هسته

بنوونه :

يادونه:

$\dim V$  : د بنسټ وکتورونو گڼون يا تعداد.

$\dim \text{Bild}(f)$  : د وکتورونو گڼون يا تعداد د  $V$  د لاندي وکتورفضا  $\text{Bild}(f)$  کې.

$\dim \text{Ker}(f)$  : د  $f$  په زري (هسته) کې د وکتورونو گڼون يا تعداد. دا بېرته د  $V$  لاندي وکتورفضا ده.

لومړی: دا چې زری  $\text{Ker}(f)$  د  $V$  لاندې وکتورفضا ده، په هر حالت لرو

$$\dim V \geq \dim \text{Ker}(f).$$

د زري  $v_1, v_2, \dots, v_n$  د بنسټونو وکتورونه يو بل ته کرښيز خپلواک دي.

د بنسټ کېلېډو جملې په بنسټ کېدې شي دي بنسټ ته کرښيز خپلواک وکتورونه  $V$  ته ورزيات کړي او دا بنسټ په دې توگه د  $V$  يوه بنسټ ته پوره يا تکميل کړي:



$$B_V := \{v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1}, \dots, v_k\}.$$

لومړی: مور اوس پریردو چې تابع  $f$  د وکتور فضا  $V$  په بنسټ وځغلي. نو لاس ته راوړو:

$$\text{Bild}(f) = \underbrace{\sum_{i=1}^n \lambda_i f(v_i)}_{=0} + \sum_{i=n+1}^k \lambda_i f(v_i) = \sum_{i=n+1}^k \lambda_i f(v_i)$$

د زري بنسټو وکتورونه په 0 تنظيميري يا **خبره** کيږي. له دې امله د خبرې يا عکس د بنسټو وکتورونو گڼون يا تعداد او له دې سره د عکس پرځېدونی يا بعد دی.

$$\begin{aligned} \dim \text{Bild} &= \dim V - \dim \text{Kern} \\ \Leftrightarrow \dim V &= \dim \text{Bild} + \dim \text{Kern} \quad !!! \end{aligned}$$

## لاندي وکتور فضا

تعريف (پېژند):

د وکتور فضا  $V$  په  $\mathbb{K}$  باندي يو لاندي وکتور فضا  $U$  منځ ته راځي، که سړی د وکتور فضا ټاکلي توکي لري پرپردي (لنډ: پرپردي). له دې سره بايد د لاندي وکتور فضا پاتي توکي دا لاندي ځويونه پوره کړی:

$$U \neq \emptyset$$

- د ټول  $x, y \in U$  لپاره  $x + y \in U$  باور لري او د ټولو  $\lambda \in \mathbb{K}$ ،  $x \in U$  لپاره  $\lambda x \in U$  باور لري .

خوښونه:

- له دې سره یو وکتور فضا لږترلږه دره لاندې وکتور فضاوې لري. یو ځل دا اکسیومونه پخپله په وکتور فضا کې ورکړل شوي، داسې چې دا وکتور فضا و خپل ځان ته لاندې وکتور فضا ده. له بلې خوا هر وکتور فضا صفر وکتور لري. دا صفر وکتور ځانله هم یوه وکتور فضا ده.

-  $U_1 \cap U_2$  لاندې فضا ده، که  $U_1$  او  $U_2$  لاندې فضاوې وي.

-  $V_K$  دې یوه وکتور فضا وي او  $v_1, \dots, v_n \in V_K$  هر کرښیز ترکیب  $L(v_1, \dots, v_n)$  یوه لاندې فضا ده.

## د لاندې فضاو لپاره د بعد یا پراخیدونې فرمول

$$\dim(U_1 \cap U_2) + \dim(U_1 + U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2)$$

ښوونه د وکتور فضاو د بنسټ د وکتورونو د گڼون یا تعداد باندې مخ ته بیول کېږي. د وکتور فضا  $U_1 \cap U_2$  بنسټ یو ځل وکتور فضا  $U_1$  او یو ځل وکتور فضا  $U_2$  ته ورپوره یا تکمیل کېږي. د وکتور فضا  $U_1 + U_2$  بنسټ د غوڅي بنسټ دی جمعه یې دا نور د  $U_1$  او  $U_2$  وکتورونه

فنکشنونه یا توابع، په ځانگړې توگه کرښیزې-

تعریف:  $X$  او  $Y$  ډېرې یا ستونه دي. یو تابع  $f$  یو ترتیب یا تنظیم دی، د کومو له لارې چې هر توکي  $x \in X$  په تیم یوه توکي  $f(x) = y \in Y$  تنظیم شي

$$f : X \rightarrow Y$$

- دا چې دا توکی ځنگه ترتیبیږي دا پروا نه لري. لومی په کرښیزو توابعو کې بندیزونه رارل کيږي، دا چې تابع باید کرښیز هوي.

- د  $Y$  په توکي کېدی شي د  $X$  ډېر توکي وښايي یا په ډېرو توکو ترتیب یا تنظیم شي. مگر برعکس ممکن نه دی. دا په  $Y$  کې توکی، کوم چې د  $X$  توکی له ښودل کيږي یا په کوم چې د  $X$  توکی تنظیم شي، باید تل یواځنی ټاکلی وي.

### د فنکشنونو یا څیرونو (توابعو) ځویونه Eigenschaften von Abbildungen

په باندې فنکشن (- تابع) Surjektiv

$$f : V \rightarrow W$$

دې یوه تابع وي. تابع په باندې ده، چه باور ولري:

$$f(v) = w \quad \forall w \in W \exists v \in V$$

، داسې چې

په کې (فنکشن (څیرونه یا تابع)) Injektiv

$$f : V \rightarrow W$$

دې یو تابع وي. تابع په باندې دی، که باور ولري:

$$\forall x, y \in V$$

$$f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y \quad x \neq y \Leftrightarrow f(x) \neq f(y)$$

په ( په باندې او په کې فنکشن یا -- تابع) Bijektiv

په توابع هم په باندې تابع دي او هم په کې تابع ( سوزجکتیو، اینجکتیو) دي یخه په باندې اوپه کې والی پوره کوي:

سرلیک

داسې چې باور لري ،  $\forall w \in W \exists v \in V$  ،  $f(v) = w$  . (هر  $w \in W$  ټیک یو پخوا یا تر مخځېره  $v \in V$  لري)

## کرښیز فنکشنونه یا توابع *Lineare Abbildung*

تعریف (پېژند)

یو تابع  $f : V \rightarrow W$  ، د کوم سره چې  $V$  او  $W$  وکتور فضاوې دي په همغه بدن  $K$  ، کرښیز بلل کيږي (یا د وکتورونو هومومورفیزم)، که  $r \in K \forall x, y \in V$  او لپاره باور ولري:

$$L1 : f(x + y) = f(x) + f(y)$$

$$L2 : r \cdot f(x) = f(r \cdot x)$$

سری کری شي دواړه اکسیومونه په باندې تګه سره رایوځای کړي:

$$L : f(r \cdot x + y) = r \cdot f(x) + f(y)$$

زړی (هسته) او عکس یا څېره *Bild und Kern*

د یوه تابع  $f : V \rightarrow W$  څېره یا عکس په لاندې توګه تعریف دی

دلتر لږه یوه لپاره.

$$\text{Img}(f) := \{w \in W | f(v) = w \text{ für mindestens ein } v \in V\}$$

د یوه تابع  $f : V \rightarrow W$  زری په لاندې توگه تعریف دی

$$\text{Kern}(f) := \{v \in V | f(v) = 0\}$$

## ځانگړي کرښیز فنکشنونه (توابع)

یو کرښیز تابع  $F : V \rightarrow W$

یو مونومورفیزم Monomorphismus بلل کیږي، که  $F$  اینجکتیو وي.

ایپیمورفیزم Epimorphismus ، که  $F$  سورجکتیو وي،

ایزومورفیزم Isomorphismus ، که  $F$  بیجکتیو وي،

اینډومورفیزم Endomorphismus ، که  $V = W$  او

اوتومورفیزم Automorphismus ، که  $V = W$  او  $F$  بیجکتیو وي.

د په باندې، په کې ، په ( باندې او کې) فنکشنونو یا توابعو لپاره ښوونه

$$X \rightarrow X$$

وي دی  $f : X \rightarrow X$  . لاندې ویناوې برابر ارزښته یا ایکویوالنت دي:

(i) په کې دی  $f$  injektiv

(ii)  $f$  surjektiv په باندې دی

(iii)  $f$  bijektiv په کې دی

دا چې له (iii) څخه (i) او (ii) لاس ته راځي او او څخه لاس ته راځي روښانه ده.

سرلیک

د بنوولو دی چې لومړی. (i) → (ii) او دویم. (ii) → (i)

لومړی: اینجکتیو له دې لاس ته راځي سورجکتیو. دا داسط بنایو، که په کې وښایو، چې، نه سورجکتیو له دې لاس ته راځي نه اینجکتیو،. د نور کلمو سره: تابع سورجکتیو ده، که دا اینجکتیو وي، ځکه چې که سورجکتیو نه وي، نو ایجکتیو به هم نه شوی کېدی:

- په باندې یا سورجکتیو په دې معنا ده، چې د ټولو  $x \in X$  لپاره په وتونډېرې کې یو شتون لري، داسې چې باور  $f(x') = x$  لري. . که یو تابع په باندې نه وي، نو یو  $x \in X$  په کوڅه ډېرې کې له مخه څېره ونه لري (یعنې چې دا یې څېره وي).  
نو  $f(X) \neq X$  باور لري .

وي دې  $X := \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  ، نو  $|X| = n$  ، نو  $|f(X)| = m < n$  [4.1](#) دی. نو نو اوس دا **Schubfachprinzip von Dirichlet** ( د ډیرینلیت (شمیر پوه) د میز کورونو) لکه چې د میز خانه یې پول، خو داسې چې ډیپتر کورگري ولري (ژباړی) اصول) وایي، چې که  $n$  شیان په  $m$  کورونو (خانو) کې کېږدو او  $n > m$  وي، نو لږ تر لږه په یوه کور کې له یوه زیات شیان باید واچول شي.

$f(x) = f(x')$  د دې لاس ته راوړنې سره اینجکتیووالی نه دی ورکړ شوی، ځکه چې مگر  $x \neq x'$  ( ټیک هلته چې په یوه کور کې دوه توکي پراته دي).

دویم : سورجکتیو له دې لاس ته راځي اینجکتیو. مور بنایو چې که تابع اینجکتیو نه وي، نو سورجکتیو هم نه ده.

1.  $f$  په کې نه ده، نو  $f(x) = f(x')$  شتون لري د سره . نو  $x \neq x'$   $f(X) \neq X$  دی او دا چې لږ تر لږه په  $|f(X)| < |X|$  کې یو توکی کم دی لږ تر لږه  $|f(X)| = n - 1$  کېدی شي وي ، داسې چې  $|f(X)| < |X|$  او له دې

سره تابع په باندې نه ده، داسې چې په موخه ډېرې کې یو توکی  $x \in X$  شتون لري د کوم لپاره چې په وتونډېرې کې  $x' \in X$  شتون نه لري.

$$\text{Ker}(F) = 0 \Leftrightarrow \text{په کې (اینجکتیو)}$$

$$0 \in W \quad \text{او} \quad x, v_1, v_2, n \in V \quad \text{او} \quad F: V \rightarrow W$$

له دې لاس ته راځي:

دا چې  $F$  په کې یا اینجکتیو دی نو هر شکل یا څېره یو پخوا یا ترمخ شکل لري.

$$\Leftrightarrow \text{د } 0 \text{ پخواشکل یا ترمخ شکل یا څېره دې } n \text{ وي.}$$

$$\text{Ker}(F) = \{n\} \Rightarrow F(n) = 0$$

دا چې کرښیز دی باید باور ولري:

$$F(x) + F(n) = F(x + n)$$

$$\Leftrightarrow F(x) = F(x + n) - F(n)$$

$$\Leftrightarrow F(x) = F(x + n) - 0$$

$$\Leftrightarrow F(x) = F(x + n)$$

$$\Rightarrow n = 0$$

$$\text{نو } \text{Ker}(F) = 0$$

له دې لاس ته راځي ( $\Leftarrow$ ):

$$\text{Ker}(F) \Leftrightarrow \{v \in V | F(v) = 0\}$$

د په باندېوالي خوڼه: دا چې تابع کرښیزه دی باور لري:

د په کې والي ښوونه:

$$F(v_1) = F(v_2)$$

$$\Leftrightarrow F(v_1) - F(v_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow F(v_1 - v_2) = 0$$

$$\text{Da } \text{Ker}(F) = 0 \Rightarrow F(v_1 - v_2) = F(0)$$

سرليک

له دي سره دی  $v_1 = v_2$ .

$L$  په کي  $\Leftrightarrow$  کرښيز خپلواک وکتورونه په کرښيز خپلواک وکتورونو څېره کيږي

$L$  په کي  $\Leftrightarrow$  کرښيز خپلواک  $\perp$  کرښيز خپلواک

له دي لاس ته راځي (  $\Leftarrow$  ) :

$$L(v) = L(w) \Rightarrow \dots \Rightarrow v = w$$

ښايو:

وي دي  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  بنسټ،  $v, w \in V$  او بنسټ او  
 $L(v_1), \dots, L(v_i), \dots, L(v_n)$  کرښيز خپلواک

$$\begin{aligned} L(v) &= L(w) \\ \Leftrightarrow L(\sum \lambda_i v_i) &= L(\sum \mu_i v_i) \\ \Leftrightarrow \sum \lambda_i L(v_i) &= \sum \mu_i L(v_i) \\ \Rightarrow \sum (\lambda_i - \mu_i) L(v_i) &= 0 \quad (v) \end{aligned}$$

( د کرښيز کمپنیشن د يواځيوالي له امله )

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum (\lambda_i - \mu_i) v_i &= 0 \\ \Rightarrow v &= w \end{aligned}$$

په کي والی ښايي

له دي لاس ته راځي يا

$\Rightarrow$ :

$$L(\sum \lambda_i v_i) = 0$$

ښايو:

$$\Leftrightarrow \sum \lambda_i v_i = \sum \mu_i v_i$$

$$\Leftrightarrow \sum \lambda_i L(v_i) = \sum \mu_i L(v_i)$$

د ا ینجکتیویتي له امله



$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum (\lambda_i - \mu_i) L(v_i) &= 0 \\ \Rightarrow \sum (\lambda_i - \mu_i) &= 0 \\ \Rightarrow L(\sum \lambda_i v_i) &= 0 \end{aligned}$$

## د ارزښتوني فنکشنونه یا توابع یا څېرونې

مور د بېلگې په توګه درې پولینومونه  $P_1, P_2, P_3$  لرو د لاندې سره

$$\begin{aligned} P_1 &= (x-1)(x-2)(x-4) \\ P_2 &= (x-3)(x-5)(x-1) \\ P_3 &= (x-4)(x-2)(x-3) \end{aligned}$$

مور اوس کړی شو یو د ارزښتوني تابع یا څېرونه تعریف کړو ( $a$  ځای دی په کوم کې چې ارزونه کېږي)

$$W_a(P) : P \mapsto P(a)$$

د ارزښتوني پولینوم کرښیز دی ځکه چې لاندې  $\lambda \in K \quad \forall P, Q \in \mathbb{Q}[X]$  او [4.2](#) باور لري :

$$W_a(\lambda P + Q) = \lambda W_a(P) + W_a(Q)$$

په دې توګه د ارزښتوني تابع سره کرښیز خپلواک وکتورونه په کرښیز خپلواک وکتورونو څېره کېږي ای مابینګ mapping جوړوي، دا په دې معنا چې

کرښیز خپلواک دي، که  $W_a(P_1), W_a(P_2), W_a(P_3)$  کرښیز خپلواک وي.

مور د

$$\lambda_1 W_a(P_1) + \lambda_2 W_a(P_2) + \lambda_3 W_a(P_3) = 0$$

سرلیک

لپاره بنایو

$$: \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 :$$

$P(1)$  په دې معنا چې  $P$  د 1 په ځای کې ارزښتول کيږي، یعنې دپولینوم ارزښت ټاکل کيږي، که 1 ځای په ځای کړو :

	$P(1)$	$P(2)$	$P(3)$	
$P_1$	$= 0$	$= 0$	$\neq 0$	$\Rightarrow \lambda_3 = 0$
$P_2$	$= 0$	$\neq 0$	$= 0$	$\Rightarrow \lambda_2 = 0$
$P_3$	$\neq 0$	$= 0$	$= 0$	$\Rightarrow \lambda_1 = 0$

داچې درې وکتورونه، چې د ارزښتوني له لارې جوړيږي یا منځ ته راځي یا تولیديږي، کرښیز خپلواکدي، دادري وکتورونه  $P_1, P_2, P_3$  هم کرښیز خپلواک دي.

## ایزومورفیزمونه Isomorphismen

$V$  او  $W$  دې  $\mathbb{K}$ - وکتورفضاوې وي.  $V$  د  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  وکتور فضا بنسټ وي. تابع  $f : V \rightarrow W$  ټیک هلته ایزومورفیزم 4.3، ده، که

$$(f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n))$$

د  $W$  یو بنسټ وي. دا جمله په ځټ یا برعکس هم باور لري.

$V$  دې یو  $\mathbb{K}$ -وکتروفضا او  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  دې بنسټ وي.

مور ایزومورفیزم

$$\mathbb{K}^n \rightarrow V$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \rightarrow \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$$

کانونیکي بنسټ- ایزومورفیزم بولو. د اړتیا په حالت کې دا په  $\Phi(v_1, v_2, v_n)$  توګه هم بڼایو. مور دلته ګورو چې د کانونیکي بنسټ- ایزومورفیزم څخه کار اخستلای شو، چې د یوونوکتورونو (واحد-) سره (کانونیکي بنسټ) او د وکتروفضا  $V$  د بنسټوکتورونو څخه یو ماتریکی جوړ کړو، چې د دواړو وکتورفضاو ترمنځ ترنفورمي کیري.

مور دا داسې کړو چې د  $V$  د بنسټ وکتورونه یو په بل پسې په ماتریکس کې ولیکو.

### ماتریکسونه Matrizen

$$Mat(m \times n; K)$$

یو ماتریکس  $m$  لیکو او  $n$  درځونو (متو، سنتو) نظم دی د  $K$  بدن (پټي، ورشو، ساحه) څخه. د یوه ماتریکس د یوګونو توکو د لیکي - او - متي کېدی شي د ایندکس لیکدود Indizeschreibweise سره ټیک کره شي:

$$a_{ij}$$

دلته  $i$  لیکه او  $j$  مټه په کوته کوي.

کرښیزې فنکشنونه (توابع) د ماتریکسونو په څېر

هر کرښیزه تابع کېدی شي په ټیک یوه ماتریکس تنظیم شي

## د یوه ماتریکس رانگ Rang

د یوه ماتریکس رانگ د کرښیز خپلواکو لیکو/ یا د همغږی د متو گڼون یا تعداد دی.

د متو رانگ = د لیکو رانگ = Zeilenrang = Spaltenrang

جمله:

د هر  $m \times n$  ماتریکس لپاره باور لري:

د لیکو رانگ = د متو رانگ یا رانگ

ښوونه:

ورکړ شوی یو  $(m \times n)$  ماتریکس

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

مورن  $R_1, \dots, R_m$  سره لیکي-وکتورونه ښایو:

$$\begin{aligned} R_1 &= (a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}) \\ R_2 &= (a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n}) \\ &\vdots \\ R_m &= (a_{m1}, a_{m2}, \cdots, a_{mn}) \end{aligned}$$

که  $r$  د لیکي رانگ وي، نو مورن  $r$  کرښیز خپلواک وکتورونه لرو، کوم چې د دې لپاره بنسټ جوړوي:

$$S_1 = (b_{11}, b_{12}, \cdots, b_{1n}), S_2 = (b_{21}, b_{22}, \cdots, b_{2n}), \dots, S_r = (b_{r1}, b_{r2}, \cdots, b_{rn})$$

هر لیکه وکتور  $R_i$  د لاندې بنسټ وکتورونو کرښیز ترکیب دی:

$$\begin{aligned} R_1 &= k_{11}S_1 + k_{12}S_2 + \dots + k_{1r}S_r \\ R_2 &= k_{21}S_1 + k_{22}S_2 + \dots + k_{2r}S_r \\ &\dots \\ R_m &= k_{m1}S_1 + k_{m2}S_2 + \dots + k_{mr}S_r \end{aligned}$$

د دې لپاره چې د ماتریکس هر توکی  $a_{ji}$  لاس ته راوړو، باید ټول ضریبونه، د لیکې وکتور ونه د لیکېضاخه وکتوروفضا انځور کړ، د بنسټ وکتور د اړونده توکي سره

ضرب کړو. دا د  $a_{11}$  لپاره د بېلگې په توگه دی

$$a_{11} = k_{11} \cdot b_{11} + k_{12} \cdot b_{21} + \dots + k_{1r} \cdot b_{r1}$$

له دې سره  $a$  د ټولو  $i$  لپاره د لیکې ډول دی.

$$\begin{aligned} a_{1i} &= k_{11}b_{1i} + k_{12}b_{2i} + \dots + k_{1r}b_{ri} \\ a_{2i} &= k_{21}b_{1i} + k_{22}b_{2i} + \dots + k_{2r}b_{ri} \\ &\dots \\ a_{mi} &= k_{m1}b_{1i} + k_{m2}b_{2i} + \dots + k_{mr}b_{ri} \end{aligned}$$

موږ کړی شو اوس هر د مټې وکتور په لاندې توگه ولیکو:

$$\begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} = b_{1i} \cdot \begin{pmatrix} k_{11} \\ k_{21} \\ \vdots \\ k_{m1} \end{pmatrix} + b_{2i} \cdot \begin{pmatrix} k_{12} \\ k_{22} \\ \vdots \\ k_{m2} \end{pmatrix} + \dots + b_{ri} \cdot \begin{pmatrix} k_{1r} \\ k_{2r} \\ \vdots \\ k_{mr} \end{pmatrix}.$$

له دې امله دا وکتورونه د  $r$  وکتورونو کرښیز ترکیب دی:

$$\begin{pmatrix} k_{11} \\ k_{21} \\ \vdots \\ k_{m1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k_{12} \\ k_{22} \\ \vdots \\ k_{m2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} k_{1r} \\ k_{2r} \\ \vdots \\ k_{mr} \end{pmatrix}$$

سرلیک

اړیښ نهده چې دا وکتورونه دې یو بل ته کرښیز خپلواک وي. مگر په هر حالت باید هغه خورا جگړن (عدد) په  $r$  رابند یا محدود وي، چې له کوم هامله دی

د متي (درز یا سنتي یا ولاړې ليکې یا کيلي) رانک  $\leq r$  Spaltenrang

سړی همداسې د ترا سپونی شوي ماتریکس سره هم مخ ته ځي او په دې توگه،،  
Zeilenrang د ليکې رانک،، لاس ته راوړي. له دې سره دی:

د ليکې رانک = د متي رانک

## په څټ- یا معکوس ماتریک Inverse Matrix

یو مربع یا څلوریزه  $n \times n$  ماتریکس  $A$  یو معکوس ماتریکس  $A^{-1}$  لري،، که یو لهدې لاندې برابر ارزښته اړیکو څخه یو پوره وي.

- د متو (لیکو) وکتورونه کرښیز خپلواک دي.  
 $\text{rang}(A) = n$

$$\det(A) \neq 0$$

- له دې سره اړوند کرښیزه تابع  $f_A$  یو ایزومورفیزم دی.

څرخون- او هدارون-ماتریکسونه (--- د انعکاسوني --)

په  $\mathbb{R}^2$  کې څرخون یا څرخونه:

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

په  $\mathbb{R}^2$  کې هندارونه:

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$$

## دېترمینانتونه Determinanten

دېترمینانتونه دڅه لپاره دي؟

دېترمینانتونه په  $\mathbb{R}^2$  کې د غبرگ اړخیز (موازی الاضلاع) په  $\mathbb{R}^2$  کې د یوه شپات (کشکول شوی کوارډر یا مکعب) او په  $\mathbb{R}^n$  کې د یوه غبرگ خوايز سطحه ورکوي. له دې سره روښانه کېدی شي، چې ولې یو دېترمینانت صفر دی، که وکتورونه یو بل ته کرښیز بلواک وي. که په کې دوه وکتورونه ورکړ شوي وي او دا یو بل ته کرښیز بلواک وي، نو دا یو غبرگارخیز نه شي غزولی او له دې امله مساحت صفر دی. له دې سره هر مربع – یا څلوری-ماتریکس یوه گڼ یا عدد سره تنظیمیږي.

### تعریف (پېژند) Definition

دېترمینانت هر ماتریکس  $M(n \times n, \mathbb{K})$  یو عدد  $\mathbb{K}$  باندې تنظیموي:

$$\det : M(n \times n, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$$

فنکشن (تابع) لاندې خوږونه لري:

لومړی: دېترمینانت په هره لیکه کې کرښیزه ده. دا په دې معنا، چې که سړی له ماتریکس  $M$  یوه کرښه لري بریرېدي یا پریرېدي او د یو کتور  $x$  سره بدله کړي، چې بیا دا تابع نسبت دې وکتور ته ځان کرښیز نیسي.

دویم: که د ماتریکس د لیکې رانک نسبت د لیکې تعداد  $n$  ته کوچنی وي، نو  $\det A = 0$  ده.

سرلیک

دریم : د یوونماتریکس یا واحدماتریکس ډیترمینانت 1 دی:

$$\det(E) = 1$$

ټیک یوه تابع شته، چې دا خوبونه پوره کوي. دا باید وښایو، داسې چې مور یواځنوالی او شتونوالی وښایو. دا هر شرط لپاره باید په یواځې تگهوبنول شي.

مرشتندوي جمله: Hilfssätze :

د ښوونې لپاره لومړی لاندې مرستندوی جملې ښایو:

لومړی: که په ماتریکس  $A$  کې دوه لیکې بدلې شي، نو ماتریکس  $A'$  لاس ته راځي، نو باور لري.

$$\det A' = -\det A$$

دویم: که د یوعماتریکس لیکه د یوه سکالار  $\lambda$  سره ضرب شي نو ماتریکس  $A'$  لاس ته راځي او له دې سره باور لري:

$$\det A' = \lambda \det A$$

دریم: که په یوه ماتریکس  $A$  کې یوه لیکه د ماتریکس د بلې لیکې سره جمع (ورزیاته) شي نو ماتریکس  $A'$  لاس ته راځي، نوله دې څخه ډیترمینان بي اغیزه پاتې کیږي:  $\det A = \det A'$

د دې مرستندوی او یواځنوالی او شتون جملو ښوونه دې په Jänich کې وکتل شي.

د ډیترمینانتو ساده شمېرنه

لاندې برخه



$$\begin{array}{c} 2 \times 2 \\ 3 \times 3 \\ \cdot \\ \cdot \end{array}$$

### د لاپلاس د ودیزیني جمله Laplace Entwicklungssatz

د لاپلاس د ودیزیني جمله مرسته کوي، کد له  $3 \times 3$  ماتریکسونو څخه لوی دیترمینانتونه ټاکو [6.1](#) .

سری کړی شي دیترمینانت ته وده ورکړای شي، که ماتریکس تل په کوچنیو دیترمینانتونو و وېشي. دلته لاندې ماتریکس  $A_{ij}$  هغه ماتریکس ده، چې د ماتریکس  $A$  د  $i$ -مې او  $j$ -مې لیکي همداسې مټي د لري کولو څخه لاس ته راځي. سری کړی شي چې ودیزینه سرته ورسوي یا د لیکي له لاري

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot A_{ij}$$

یا د مټوو پسي

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot A_{ij}$$

د ضریب یا څلوني  $(-1)^{i+j}$  په مرسته یو د سترنجختي ډوله مخ یا **موسترمنځ** ته راځي. له دې سره د دیترمینانت مخنځینه ټاکل کيږي:

+	-	+	-	+
-	+	-	+	-
+	-	+	-	+
-	+	-	+	-
+	-	+	-	+

بېلگه:

سرليک

<p>وديزينه پورته ليکه پسي پورته ليکه = &lt;</p> <p>په لاندې دېترمينات کې د ليکې په څير له منځه وړل کيږي</p> <p style="text-align: center;">=</p>	$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$
--	---

$+a_{11} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$ <p style="text-align: center;">1. Spalte ausgeblendet</p> <p style="text-align: center;">۱-م درخ لري کړي</p>	$-a_{12} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$ <p style="text-align: center;">2. Spalte ausgeblendet</p> <p style="text-align: center;">۲-م درخ لري کړي</p>
$+a_{13} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{pmatrix}$ <p style="text-align: center;">3. Spalte ausgeblendet</p> <p style="text-align: center;">۳-م درخ لري کړي</p>	$-a_{14} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix} =$ <p style="text-align: center;">4. Spalte ausgeblendet</p> <p style="text-align: center;">۴-م درخ لري کړي</p>

د دېترمينانتونو ساده ټاکنه

- که يوه ليکه يا مټه کرښيز بلواک وي، نو باور لري

$$\det A = 0$$

دا د لاندې سره په برابره معناده (د ليکو تعداد همداسي د مټو تعداد)

$$\text{rang } A < n$$

- که څوک يوه مټه د بلې سره بدله کړي يا يوه ليکه د بلې سره بدله کړي،

مخنځبڼه تغیر خوري (دا چي د دیترمینانت تابع الترنیري (بدیلی) **alternierend** ده)

$$\det A_{ij} = -\det A_{ji}$$

- کهد ماتریکس یوه لیکه د سکالار سره ضرب شي، نو باید تنها دیترمینانت هم د همغه سکالار سره ضرب شي:

$$\det \begin{pmatrix} \lambda \cdots \lambda & \vdots & \lambda \cdots \lambda \\ \lambda \cdots \lambda & \lambda a & \lambda \cdots \lambda \\ & \vdots & \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} \cdots & \vdots & \cdots \\ \cdots & a & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}$$

په همدې توگه که دیترمینانت د  $\lambda^n$  سره هم ضربی شي، د کوم سره چي  $n$  د لیکو تعداد دی، داسي دهلکه که یوه ماتریکس ټوله له  $\lambda$  سره ضرب شي.

$$\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det A$$

- د یوونماتریکس (واحد-) دیترمینانت 1 ده:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

- د یوه درېگودي ماتریکس دیترمینانت د هغه د دوه کونجترې ضرب دی:

$$\det \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \cdots \cdot \lambda_n$$

داسي یوه درېگویزه ماتریکس کړی شو د هر په خوښه  $n \times n$  - ماتریکس څخه د ساده لیکو عملیو څخه د گاوسقانون له مخي لاس ته راوړو. مور باید د دیترمینانت په ټاکلو یواځي دې ته پام وکړو، چي لیکه بدلون دیترمینانت ته له

سرلیک

ځانسره یوسو. نو که  $r$  د لیکو د بدلون تعدادوي، چې مور سر ته رسولي چې درېگودیزه بڼه لاس ته راوړو، باور ولري::

$$\det A' = (-1)^r \cdot a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$$

- که څوک یوه ماتریکس ترنسیپوني کړي (دایه دې معنا چې د لیک څخه مټې جوړوي او له مټو څخه لیکې او یا په مربع یا څلوریزه ماتریکسونو کې دا په دوهکونجټري(قطر) هنداره کوي) په دې حالت کې د ترادپوني ماتریکس دیترمینانت ارزښه د نه ترانپوني شوي ماتریکس د دیترمینانت سره برابر دی:

$$\det A = \det A^T$$

کوچنی بام: په ضرب کې دې پامدې وي. باور لري

$$(AB)^t = B^t A^t$$

- دیترمینانت- ضرب-جمله

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

..... بنوونه یې دلته ورزیاته کړی.

## د ایندومورفیزم دیترمینانتونه

دا چې مور هر ایندومورفیزم  $f$  د مربع – یا څلوری-ماتریکس سره انځورولی شو، [6.2](#)، له دې سرهکړی شو چې د ایندومورفیزم دیترمینانت هم تعریف کړو:

$$\det f := \det A_f \in \mathbb{K}$$

اوس داپوښتنه رامنځ ته کوو، چې ایا د  $V$  د مختلفو بنسټونو لپاره دیترمینانتونه مختلف دي. دا کېدی شي وښوول شي چې دیترمینانت د بنسټ د ټاکنو یا انتخاب څخه خپلواک

دي. له دې سره له دې امله كړی شو چد د يوه ايندومورفيزم ديترمينانت يواځني ت عريف كړو.

## اينگن ارزښت (Eigenwerte (Eigenvalue)

يادونه: دا اينگن په ټول ژبو كې همدا سي ليكي. دا الماني وي يا لغات دي، د خپل په معنا دي.

## اينگن ارزښت (Eigenwerte (Eigenvalue)

$F$  دې د وكتور فضا  $V_K$  ايندومورفيزم وي. يو  $\lambda \in K$  اينگن ارزښت بلل كيږي، كه يو  $v \in V$  شتون ولري د  $v \neq 0$  سره، داسي چې باور ولري.

$$F(v) = \lambda v$$

## اينگوكتور (Eigenvektoren)

$F$  دې د وكتور فضا  $V_K$  يو ايندومورفيزم وي. هر له صفر وكتور مختلف  $v \in V$  د

$$F(v) = \lambda v$$

سره د  $F$  اينگوكتور بلل كيږي (اينگن ارزښت  $\lambda$  ته)

## دوه-كونجټري كيدونكي يا دوه-كونجټري كيدونور (قطري كيدونكي)

### Diagonalisierbar

يو ايندومورفيزم دوه كونجټري كېدونكي (قطري كېدونكي يا - وړ) بلل كيږي، كه د اينگن وكتورونو څخه يو بنسټ شتون ولري. دا په دې معنا چې د ايندومورفيزم لپاره يو دوه كونجټري ماتريكس د لاندي بڼه شتون لري (د متو وكتورونه بنسټ وكتورونه

شتون لري،  $\lambda_i$  ایگن ارزښتونه دي)

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

### Eigenräume

$F$  دې  $V$  ایندومورفیزم وي او  $\lambda \in K$ ، نو

$$Eig(F; \lambda) := \{v \in V : F(v) = \lambda v\}$$

$F$  د یو ایگنفضا بولو نسبت و  $\lambda$  ته.

- اگن فضا د  $V$  وکتور فضا یو برخوکتور فضا ده.

- صفروکتور په لیگنوکتور کې خوندي نه دی.

-  $Eig(F; \lambda) \setminus \{0\}$  د  $\lambda$  اړونده ایگنوکتورونو ډبرې ده

- (S.210) ...

کرکتریسټیکي پولینوم یا سری ځکه ایگن ارزښتونه پیدا کوي؟

سری کری شي چې ایگن ارزښتونه وټکي، داسې چې د کرکتریسټیکي پولینوم  
صفرځایونه پیدا کوي. باور لري [7.1](#)

د ایگن ارزښت دی له دې لاس ته راځي او په څنډ

$$\lambda \text{ ist Eigenwert von } F \Leftrightarrow \det(F - \lambda id_V) = 0$$

سړی د لاندې ماتریکسونو دوه-کونجترې (قطر) پیدا کوي:

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{mn} - \lambda \end{pmatrix}$$

سړی ایځن وکتورونه او ایځن ارزښتونه څنگه پیدا کوي؟

که څوک ایځن-ارزښت  $\lambda$  ولري، نو کېدی شي و هغه ته مناسب ایځنوکتور وټاکي، داسې چې سړی لاندې برابر و - یا مساوات سیستم حل کړي:

$$(A - \lambda I)X = 0$$

لکه کرینتیکي پولینوم لپاره سړی همداسې بېرته ماتریکس جوړوي، چېرته چې د  $\lambda$  لپاره ایځن ارزښتونه ځای په ځای کوي. بیا سړی دا هوموچن مساوات سیستم حل کوي.

یو ماتریکس سړی څنگه دوه-کونجترې یا قطري کوي؟

لومړ: که لږ ایځنوکتورونه تولید یا جوړېدی شي، دې ته (نسبت دې ته) چې ماتریکس درزونه همداسې لیکي لري، نو ماتریکس دوه کونجترې کېدونکي نه ده.

که پوره وکتورونه شتون لري او ودې ته ایځن ارزښتونه نو  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  باور لري

$$D = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

سکالار ضرب (د نننۍ ځل یا ضرب) او نورم

## Skalarprodukt (Innenprodukt) und Norm

سکالار ضرب

تعریف یا پیژند:

یو تابع  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  ، سکالار ضرب بلل کیري، که  $\forall x, x', y \in \mathbb{R}^n$  دا لاندې باور ولري:

- $\langle x + x', y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle$  کرښیزوالی )
- $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$  (سیومتري Symmetrie)
- $\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$  او  $\langle x, x \rangle \geq 0$  مثبت او دیفینیت (Positiv und definit)

بېلگه:

$$\langle a, b \rangle \mapsto a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

## نورم Norm

پیژند (تعریف): یوه څیرونه یا فنکشن  $\| \cdot \| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  نورم بلل کیري، که لاندې امسیومونه باور ولري

$$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

دیفینیت -

$$\|x\| \geq 0$$

مثبت -



$$\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \quad \text{- هوموجین}$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \text{- درې ګوډي یا مثلثاتي نابرابرون}$$

بیلګه:

$$\|a\|_\infty = \|(a_1, a_2, \dots, a_n)\|_\infty = \max(|a_i|; i = 1, \dots, n)$$

ماکسیموم یا خورا جګ ارزښت

$$\|a\|_1 = \|(a_1, a_2, \dots, a_n)\|_1 = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$$

(یو نورم)

$$\|a\|_2 = \|(a_1, a_2, \dots, a_n)\|_2 = \sqrt{\langle a, a \rangle} = \sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2 + \dots + |a_n|^2}$$

(د پيوټاګوراس نورم)

د وازیدو کونج تعریف:

د یوې وکتور فضا د  $x$  او  $y$  وکتورونو ترمنځ د وازیدو کونج  $\alpha$  په لاندې توګه تعریف دی

$$\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| \cos \alpha \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}$$

د وازیدو کونج د تعریف لپاره باید کوساین تل تعریف وي. مور باید وښایو، چې دا لاندې باور لري:

$$-1 \leq \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|} \leq 1$$

دا د کوشي-شوارخ-نامساواتو خونديونه ده.

سرلیک

د کوشي-شوارخ-نامساوات

دپه خوښه وکتورونو  $u, v \in V$  لپاره باور لري:

$$\langle u, v \rangle^2 \leq \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle$$

يا ورته (اکويواننت):

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

ښوونه:

د  $y = 0$  لپاره ساده دی. وي دي  $y \neq 0$ . مور له يوه واړه چل څخه کار اخلو او

$$\lambda := \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|} \in \mathbb{R}$$

ردو. لاندې باور لري:

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle x - \lambda y, x - \lambda y \rangle &= \langle x, x \rangle - 2\lambda \langle x, y \rangle + \lambda^2 \langle y, y \rangle \\ &= \|x\|^2 - 2 \frac{\langle x, y \rangle^2}{\|y\|^2} + \frac{\langle x, y \rangle^2}{\|y\|^2} \\ &= \|x\|^2 - \frac{\langle x, y \rangle^2}{\|y\|^2} \end{aligned}$$

په ورته توگه باور لري  $\langle x, y \rangle^2 = \|x\|^2 \|y\|^2$  او له دې سره

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

نورمال شوي او اورتوگونال وکتورونه

وکتورونو نورماليدنه:

$$\langle v, v \rangle = 1$$

وکتورونه نورمال شوي دي، چې اوږدوالی 1 لري، دا په دې معنا، چې

$$\|v\| = 1$$

يو وکتور نورمال کیدی شي يا کيږي، داسې چې دی د په څنډ يا معکوس ارزښت سره ضرب شي:

$$v_{\text{normalisiert}} = \frac{1}{\|v\|} \cdot v$$

### اورتوگونال وکتورونه (يو په بل ولاړ -)

دوه وکتورونه  $v_1$  او  $v_2$  يو بل ته اورتوگونال دي، که دا يو په بل ولاړ يا عمود وي. يا نيغ ولاړ وي. له دې امله د دوي سکالار ضرب يا ځل 0 دی.

$$\langle v_1, v_2 \rangle = 0$$

هر وکتور فضا ته لږ تر لږه يو (يعنې په ريښتوني زيات) له اورتوگونال وکتورونو بنسټونه شته. کا دا هو اوږدوالی 1 ولري، نو دا **اورتونورمال** دي.

اورتونورمال بنسټونه:

يو اورتونورمال بنسټ هغه بنسټ دی، په هغه چې ټول وکتورونه دي چې نسبت سکالار ضرب ته اوږدوالی 1 لري او يو بل ته اورتوگونال دي.

سړی کړی شي هر بنسټ ته د شميدت اورتوگوناليدونکي **Schmidtschen** تڼلار

**Orthnormalisierungsverfahren** په مرسته يو اورتونورمال بنسټ جوړ کړي:

مور غواړو د  $i = 1$  تر  $i = n$  پورې لاندې فرمول وځغلوو، د کوم سره چې  $n$  د بنسټ وکتورونو تعداد يا گڼون دی، او يو بل پسې اورتوگونال وکتورونه د 1 اوږدوالي پيدا کوي يا ميندي، چې دا مور سملاسي د بل وکتور شميرنو لپاره اړين مومو.

سرلیک

$$e_i = \frac{v_i - \sum_{k=1}^{i-1} e_k \cdot \langle v_i, e_k \rangle}{\left\| v_i - \sum_{k=1}^{i-1} e_k \cdot \langle v_i, e_k \rangle \right\|}$$

## خای بدلون Permutation

لیکندود

یو خایبدلون یو په - یعنی بیجکتیو څیرونه یا فنکشن دی، کوم چې  $n$  توکي ( $n > 0$ ) تنظیموي.

$$\sigma = \left( \begin{array}{c} 1 \\ \sigma(1) \end{array}, \begin{array}{c} 2 \\ \sigma(2) \end{array}, \dots, \begin{array}{c} n \\ \sigma(n) \end{array} \right)$$

دا پورته لیکنډول دا معنا لري، چې د بیلگي په توگه 1 د  $\sigma(1)$  خای ته راکنبل کيږي. په همدې توگه څیوکلکي یا تل بیرته راگرځیدوني لیکنډود هم ورځنی یا بلد دی. د بیلگي په توگه:

$$(12)(3)(564) = \left( \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 6 & 4 \end{array} \right)$$

## ترانپوزیشن Transposition

یو ترانسپوزیشن د ټیک دوه یتوکو بدلون دی په څیوکلکي لیکنډود یعنی  $(ab)$ . هر پرموتیشن د دوه ترانپوزیشنونو کمپوزیشن (ضرب) دی.

د ممکنه خای بدلونو گڼون یا تعداد

که یوه ډېری یا سټ  $n$  توکي لري، نو دا  $n!$  ځای بدلونونه ممکن دي.

پاتي يا تش ځایونه

که یو پرموتیشن له یوه کوچني ځای څخه و یوه لوي پسي څیره کړي، نو تشځایونه تولیدیږي. که  $j < k$  او  $\sigma(k) < \sigma(j)$  وي، نو دا یو تشځای دی.

د ډاکتر ماخان شینواري لیکنې

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوي لیکنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړی:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra :  
general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

1987 Vienna (Austria):

دویم:

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren .  
Uni. Wien

*Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras,  
at the University of Vienna/Austria*

لاندې د شمیرپوهنې پښتوتول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه، له  
خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسيره د انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د بنوونکو او زده کوونکو لپاره ( دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې ليکنه به يې ځنو ځايونو غزېدلې او ځنې ځايونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمکچپوهنه ( هندسه ) ، په سلو، زرو کې شميرنه، د گټې – او کټې د کټې شميرنه ، د احتمالي شميرنه کتاب د بنوونځي ټولې اړتياوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه ( د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شميرپوهنې انگرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شميرپوهنې الماني - پښتو - او پښتو الماني ډکشنري

*Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German*

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځيال برابرېون ( دا کتاب په دې څانگه کې يو پيل دی، ساده ليکل شوی)

*Differential equation Translation; An Introduction*

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمير پوهنې فرمولونو ټولگه

*Mathematical Formulas*

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپینې خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغي او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغي او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلي.

د ډاکتر ماخان ،،میري،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)

لاندې د برینکمن لیکنې چې له پرینکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دویم ټوک

۳ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دریم ټوک

۴ - د احتمالي شمیرنه د ښوونځي لپاره

۵ - احصایه یا ستاتیسټیک دښوونځي لپاره

سرلیک

لاندې کتابونه د شتوتگارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتگارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – اناليزی ۱

۷ – اناليزي ۲

۸ – کرښيز الجبر

۹ - د شميرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولگه

۱۱ – فنکشنل اناليز

۱۲ – وکتور شميرنه

نورې ژباړې

۱۳ – له [www.grundstudium.info/linearealgebra](http://www.grundstudium.info/linearealgebra) څخه: کرښيز الجبر

۱۴ – Georg Guttenbrunner گڼونپوهنه يا د اعدادو تيوري

زما ليکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شميرپوهنې ستر کتاب دويم چاپ د پوره تغيراتو سره : دا کتاب د شميرپوهنې برخې برسيره د

انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسي د ښوونکو او زده‌کونکو لپاره پوره گټور دی. په

کتاب کې د اړتيا سره زياتونه او کونه راغلي

۱۶ - ځمکچپوهنه ( هندسه ) دويم چاپ د پوره تغيراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دويم چاپ له تغيراتو سره



- ۱۸ - ډېری پوهنه يا ست تيوري
- ۱۹ - د شمير پوهني سم اند ( منطق رياضي)
- ۲۰ - د يو څو شمير پوهانو ژوندليک
- ۲۱ - د شمير پوهني گډې ودې ليکني
- ۲۲ - داهم ژباړه ده، خو ليکونکی يې متأسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتيگرال شميرنو ته تمرينونه او اوبيوني يا حلونه يې
- ۲۳ - د شمير پوهني انگريزي پښتو او عربي + درې ډکشنري
- ۲۴ - د شمير پوهني پښتو انگريزي ډکشنري
- ۲۵ - د شمير پوهني پښتو ډکشنري د شمير پوهنيزو ويونو په پښتو روښانه ونه
- ۲۶ - د زړه له کومې ( دا هغه ليکني دي، چې ځنې يې په نړيوال جالونو کې خپرې شوي دي).
- ۲۷ - د افغانستان په هکله سپيني خبرې، چې وبه غزيرې.
- نوري ليکني، چې په ژباړه يې پيل شوی، خو لا پوره نه دي
- د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتکارت پوهنتون ن ج څخه خپرېږي:
- د گروپونو تيوري
- د بسونځي لپاره فزيک د برينکمن ليکنه
- له پنځم ټولگي څخه تر اووم ټولگي پورې ژباړل شوی ( دا چې زما دويم مسلک فزيک دی، دا ليکني ژباړم. دا هم د دې ليکوال يوه ډېره ښه ليکنه ده، چې د شمير پوهني په څير- دلته هم زيات تمرينونه د حل يا اوبيوني سره په کې راغلي او ماته زيات گټور برېښي)

سرلیک

82



**Get more e-books from [www.ketabton.com](http://www.ketabton.com)  
Ketabton.com: The Digital Library**