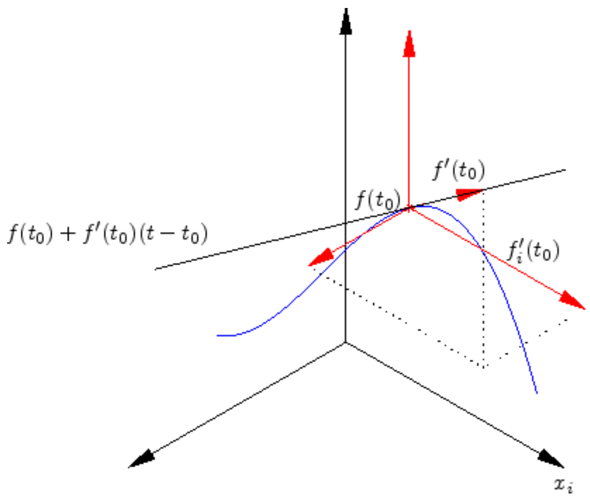
انالیز ۱ **Analysis 1**

د پوهنتون لپاره لکچرنوټونه

د ډېرو متحولو یا اووښتونو انالیز

یا انالیز دوه



ليکونکي: د شتوتګارت پوهنتون د شميرپوهنې يا رياضي څا نګه

د مات انلاين څخه يا د شتوتګارت پوهنتون ... څانګه

Smakhan1946gmail.com

ژباړی: ډ اکتر ماخان (میرِي) شینواری

Ketabton.com

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لوی څښتن په نامه

په دې هیله، چې په دې لیکنو او ژباړو به مې زموږ د بې وزلې او له پوهې پاتې ملت - په ما د پوهنې په لار د لګښت - لپاره د پوهنې په لور داسې لږ ونډه اخستې وي.

د کتاب نوم: د ډېرو متحولو یا اووښتونو انالیزې

لیکونکي: د شتوتګارت پوهنتو د ریاضي څا نګه

د مات انلاین څخه یا د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه

ژباړی: ډ اکتر ماخان میرې شینواری

Smakhan1946@gmail.com

د چاپ لړي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ژباړي مننه

د دې ليکنې مل نورې خپروني د شتوتګارت د پوهنتون د شميرپوهنې د څانګې د لکچرونو لړۍ چاپ باندې پيل کيږي

د هر څه له مخه د هغو ليکونکو پروفيسرانو څخه زياته مننه، چې د ليکنو څخه يې زما د ژباړې لپاره تفاهم لري. ماته د دوي د ليکنو د ژباړې په هيڅ ډول مادي ګټه نه شته او دا کار مې يوازې په يوه د پوهنې توانمندې ، مګر وروسته پاتې ژبې ويونکي ولس ته وړاندې دی، دا دې د دې پروفيسرانو له خوا په پوهنيزه اړخ کې- زموږ په دې اړخ کې هم مرستې ته اړ ولس- سره مرسته وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

بلواک یا تابع یا فنکشن ۱

کربښیزې توابع ۳

ځلوری- یا مربع فنکشنونه یا – توابع ۴

همغږیز توابع ۶

برعکس – یا په څټ فنکشن ۹

د فنکشنونو یا توابعو سره شمیرنه ۱۱

ننوتي او وتلي - یا مقعر او محدبې توابع ۱۲
پولینوم ۱۵

د پولینومونو سره انترپولیشن ۲۱

د لاګرانج-پولینوم ۲۳

راشنل (کسری یا نسبتي) توابع ۲۵
کمپلکس راشنل- یا کسري توابع ۲۷
په ټوټه مات ټوټه کونه یا تجزیه کونه ۲۸
د حقیقي ټوټه کسر ټوټه ونه یا تجزیه ۳۳
د حقیقي ټوټه کسر ټوټه ونه یا تجزیه ۳۹
د اویلر-مویورې فرمول ۴۰
تانجنت او کوتاجنت ۴۱
د ارکوس توابع ۴۲
هارمونیک لړځیدنې یا رپیدنې ۴۳
اکسپوننشل توابع ۴۹

ګټه یا ربح ۵۰

ټولیز توان توابع او لوګاریتم ۵۶

د ودې قانون ۵۷

د توان او لوګاریتم لپاره شمیرقوانین ۵۸

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

های پرابول تابع	۵۹
د یوې پرلپسې پوله ارزښت	۶۲
د کوشي قضیه	۶۶
همغږیز ه پولې ته تلنه	۶۸
د پرلپسې پولې ته تلنه	۷۰
نارېښتونی پوله ارزښت	۷۱
پوله اینفریور او پوله سوپریور	۷۲
پرتله کوونکې قضیه	۷۳
د یوې پرلپسې پنډغالي ټکی	۷۵
ورهولست- مودل	۷۶
ریکورژن	۷۶
د پيPi رکورزیو اپروکسیمیشن	۷۸
د پرلپسیو یا ترادفونو ځانګړي ...	۸۲
د یوې لړۍ پرلپسې	۸۴
هندسي یا ځمککچیزې لړۍ	۸۶
هارموني لړۍ	۸۸
مطلق پولې ته تلونکې لړۍ	۸۹
مایورانت او مینورانت	۹۰
د وېش قضیه	۹۱
د ریښې قضیه	۹۳

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لایبنیځ قضیه ۹۴

د لړیو ځانګړي پوله ارزښتونه ۹۸

ناپرېکیدنه یا متمادیت ۹۹

یو اړخیز ناپرېکیدنوالی یا متمادیت ۱۰۲

د ناپرېکیدونکو توابعو لپاره ... ۱۰۴
منځ ارزښت جمله ۱۰۷
د دوه سطحو – یا برخو تلنلار ۱۰۹
د ناپرېکیدونکي تابع افرطیت ۱۱۰

برابرډوله ناپرېکیدنوالی ۱۱۱

په ټکي ډول پولې ته تلنه برابرارزښته ... ۱۱۲

د توابعو لړۍ پولې ته تلنه ۱۱۴

توابعو لړۍ ته مایورانت یا پورته پولې ۱۱۶

د اکسپوننشل تابع ضرب انځورونه ۱۱۷
د اکسپوننشال تابع لړۍ انځورونه ۱۱۹

مشتق(رابیلیدنه)

د بنسټتوابعو مشتق یا رابیلیدنه ۱۲۴

د مشتق یارابیلیدنې کربنزوالی ۱۲۷

د ضرب قانون ۱۲۷

د وېش قانون یا لار ۱۲۹

ځنځیری لار یا – قانون ۱۳۰

ایمپلیځیت مشتق نیول ۱۳۲

د لایبنیځ قاعده یا لار ۱۳۶

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليک

لوګاريتمي مشتق يا – رابيليدنه ۱۴۱

د رولې جمله ۱۴۳

منخ ارزښت قضيه ۱۴۴

ټوليزه (شوې) منخ ارزښت جمله ۱۴۵

لانداو-سيمبول ۱۴۷

د لو، پيتال قاعده يا لار ۱۴۸

کرښيزاپروکسميشن (ورنږدېوالی) ۱۵۰

د ناټيکاوي وده ۱۵۱

د نيوټن تلنلار يا – قانون ۱۵۳

د تيلور پولينوم ۱۵۷
حقيقي د تيلور لړۍ ۱۶۱

اکسپوننشل تابع ۱۶۳
د اويلر فرمول ۱۶۵
د لوګاريتم تابع ۱۶۶
بينوميال لړۍ ۱۶۷
د تيلور –لړۍ مشتق او انتيګرال ۱۶۸

د تيلور-لړۍ ضرب ۱۷۰

د تيلور-لړۍ وېش ۱۷۲

د راشنل توابعو تيلور-وديزېنه ۱۷۴

د يوې تيلور – لړۍ ۱۷۵

د معکوس تابع د تيولور وديزيينه ۱۷۷
د تيلور ځانګړې لړۍ ۱۷۸
د پاد نږدې ارزښت شميرنه ۱۷۹

(c) ketabton.com: The Digital Library

اکستریما(افراطیت)	۱۸۱
د اکستریم – یا افرطي ازښتونو ازماېښت	۱۸۵
پولینوم	۱۸۶
اسیمپټوټي(یو په بل نه پرېوتونکي یا ګاونډيتوب)	۱۹۰
د راشنل- یا کسر توابعو ګاونډ یا اسیمپټوټي	۱۹۱
د کږو یا منحنیو خبرې یا بحث	۱۹۲
ریمن-انټیګرال	۱۹۸
د انټیګرال خویونه	۲۰۱
د انټیګرالشمیرنې منځ ارزښت جمله	۲۰۱
بنسټیز – یا ساده توابع	۲۰۳
د بنسټیزو توابعو لومړني توابع	۲۰۷
ټوټه- یا پارشل انټیګرالونه	۲۰۷
دلتا - تابع	۲۱۲
د متحولو – یا اووښتونو بدلون	۲۱۳
د متحولو – یا اووښتونو بدلون	۲۱۹
ساده راشنل انټیګرالونه د زیاتواره قطب سره	۲۲۲
د راشنلتوابعو انیګرالونه	۲۲۵
د ساین او کوساین د ضرب انټیګرالونه	۲۲۷
د کمپلکس تریګونومتیکي توابعو انټیګرالونه	۲۲۸
تریګونومتریکي بدلونونه	۲۳۰
د ساین او کوساین راشنل توابع	۲۳۳

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ځرخیدونو بدنونو ډکی یا حجم ۲۳۶

د یوې کږې یا منحني اوږدوالی ۲۴۱

د ذوزنقې قانون **۲۴۴**

د ګاوس فرمول ۲۴۸

ناڅرګند یا نا معلوم انتیګرال ۲۵۱

د نامعلوم انتیګرال لپاره د پرتلې قضیه ۲۵۵

ګاما تابع یا – فنکشن ۲۵۸

د کوشي اصلي ارزښت ۲۵۹

د انتیګرال لاندې مشتقول ۲۶۰

لایبنیځ-قانون ۲۶۳

د نامعلومو انتیګرالونو مشتقول ۲۶۸

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوې،

چاپیدونکې او چاپ ته چمتو لیکنې ۲۷۱

(c) ketabton.com: The Digital Library

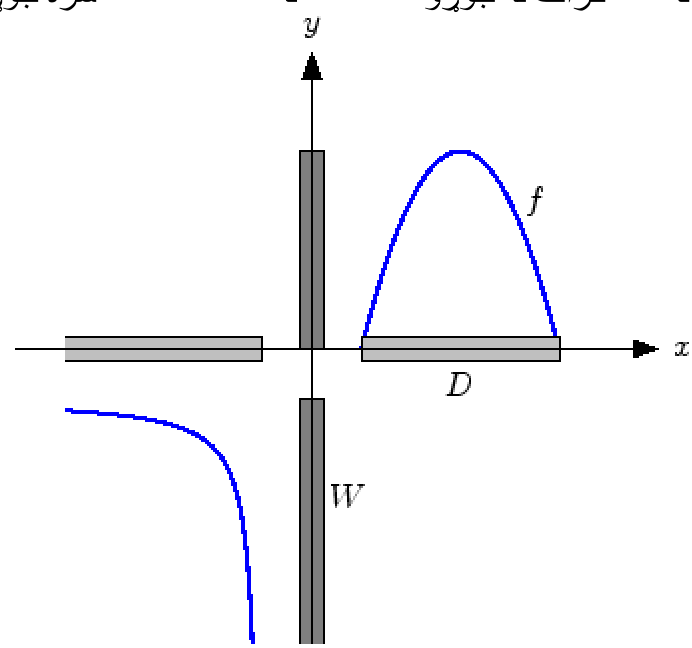
بلواک یا تابع (ټيک يې: فنکشن) Funktion

یو فنکشن یا بلواک یا تابع

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)$$

د تعریف ورشو $D \subseteq \mathbb{R}$ هرتوکی x د ارزښت ډېری $W \subseteq \mathbb{R}$ څخه د یوه ارزښت $f(x)$ سره تنظیموي.

د f ګراف له جوړو (x, y) د $y = f(x)$ سره جوړ دی.



(c) ketabton.com: The Digital Library

لکه د څیرې څخه چې لیدلکیږي، تعریفورشو (رنګه خړه یا پرته) او ارزښت ورشو (تیاره خړه یا ولاړه) په x -محور همداسې په y -محور د ګراف پریوتل دي.

لیکونکي: هیولیګ، هورنر، کنش

د دې لپاره چې د تابع

$$f(x)=\frac{\ln(3-x)}{\sqrt{x}-1}$$

تعریف ورشو او ارزښت ورشو وټاکو، لومړی دې د په ساده –یا لومړنیو توابعو رامنځ ته کیدونکې بندیزونه یا محدودوالی په پام کې ونیول شي. د تعریف ورشو د توکي لوګاریتم باید زیاتیز یا مثبت وي او د ارزښت ورشو ناکمیز یا نامنفي وي:

$3-x>0$ او $x\geq 0.$

په همدې توګه باید ماتلاندې یا مخرج صفر نه وي، دا په دې معنا چې

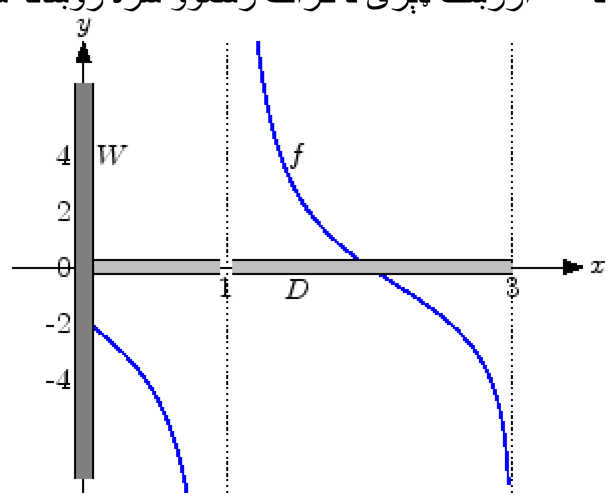
$x\neq 1.$

په ټولیزه توګه راکوي:

$$\mathrm{D}=[0,3)\backslash\{1\}=[0,1)\cup(1,3).$$

.

د f ارزښت دېرې د ګراف رسموو سره روښانه شي



(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چې f د $x \in (1,3)$ لپاره د $-\infty$ او $+\infty$ ترمنځ ټول ارزښتونه نيسي، $W = \mathbb{R}$ باور لري.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر،کنش)

لاندې جدول د څو بنسټيزو توابعو تعريفورشو او ارزښت ورشو ښايي.

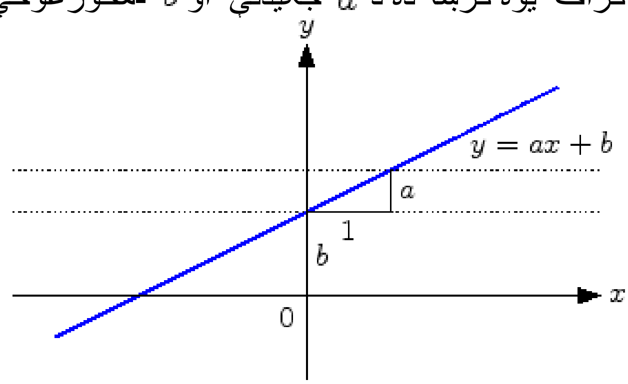
$f(x)$	D	W
$1/x$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\ln x$	$(0, \infty)$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$\mathbb{R} \setminus \{x : x = (2k+1)\pi/2,\ k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$
$\sqrt{x}$	$[0, \infty)$	$[0, \infty)$

(لیکونکي: هیولیګ، هیورنر،کنش)

کرښيز فنکشنونه يا توابع

د يوه کرښيز فنکشن يا تابع
$f(x) = ax + b$

ګراف يوه کرښه ده د a جګيدنې او y -محورغوڅي(محورقاطع) b سره .



(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره بديلي انځورونه د ټکي-جګيدنې – بڼه ده

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = a$$

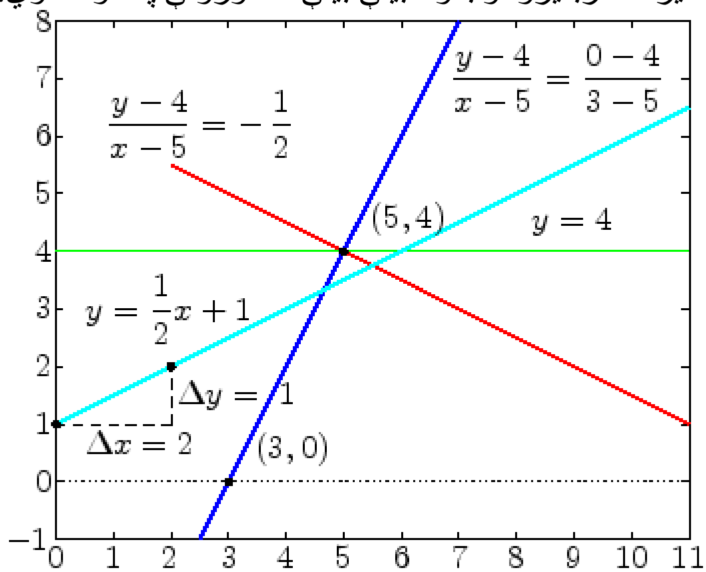
او د دوه-ټکو- بڼه

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0},$$

چيرته چې (x_0, y_0) او (x_1, y_1) په کرښه پراته ټکي دي.

(ليکونکي: هيوليګ، هيورنر)

ځيره د کرښيزو توابعو بيلي بيلي انځوروني په کوته کوي:



ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

ځلورۍ- يا مربع فنکشنونه يا - توابع

د يوه مربع تابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

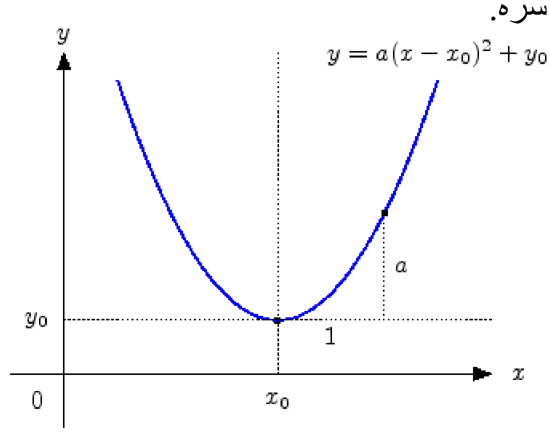
کراف د لاندې بڼې يو پارابول دی

$$y = a(x - x_0)^2 + y_0$$

د ککرۍ- یا رأستېکي

$$(x_0, y_0) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a} + c\right).$$

سره.



پای

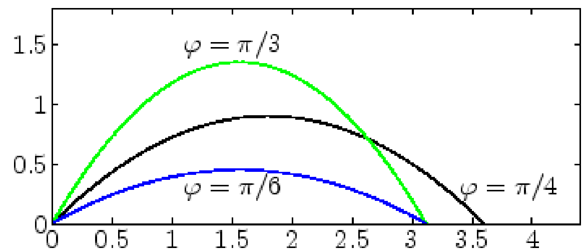
- که يو تن د يوه کونج φ لاندې په يوه v چټکتيا و توغول شي، د الوتنې لار دا لاندې پارابول

$$y = x \tan\varphi - \frac{g}{2v^2\cos^2\varphi}x^2$$

راکوي ، چيرته چې g د ځمکې بيړه ده یا - تعجيل دی.

لاندې ځيره: مايیل توغول یا غورځول د v = 6 سره.

(c) ketabton.com: The Digital Library



مساوات د برابرډوله خوزښت په x - او y -کمپوننتونو د بيلوني يا ټوټه کوني(که غواړې: تجزيې) څخه لاس ته راځي ، د v پيل چټکتيا سره او د ازاده غوزوني د خوزښت ته پام کوني له لاري:

$$x(t) = vt\cos\varphi \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{v\cos\varphi}$$

$$y(t) = vt\sin\varphi - \frac{1}{2}gt^2$$

$$\Rightarrow y(x) =$$

$$= \frac{vx\sin\varphi}{v\cos\varphi} - \frac{gx^2}{2v^2\cos^2\varphi} = x\left(\tan\varphi - \frac{gx}{2v^2\cos^2\varphi}\right).$$

د غورځوني واټن دی

$$x = \frac{2v^2\cos^2\varphi}{g}\tan\varphi = \frac{v^2}{g}\sin(2\varphi).$$

دا د $\varphi = \pi/4 \mathrel{\widehat{=}} 45°$ لپاره ماکسيمال دی.
ليکونکي: هيوليک، هيورنر،کنش

همغږيزې توابع Monotone Funktion

(c) ketabton.com: The Digital Library

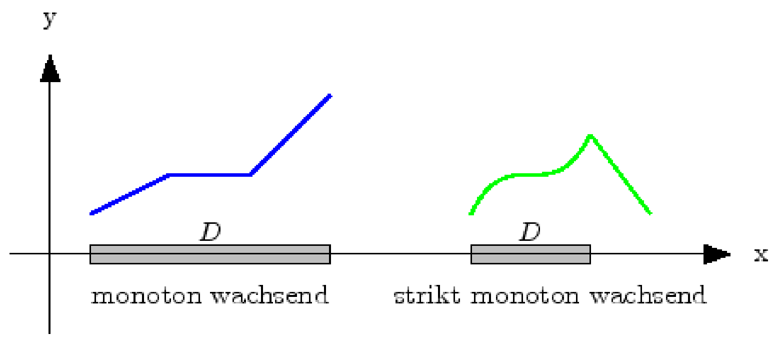
یو تابع f په یوه انتروال D (کره) همغږیز جګېدونکی دی، که وی

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \overset{(<)}{\leq} f(x_2), \quad x_k \in D,$$

همداسي که f توټه ډوله ناپرېکېدونکی مشتقوړ دی، که وي

$$f'(x) \overset{(>)}{\geq} 0$$

د ټولو $x \in D$ لپاره تر ځانله یا جدا ټکي بورې



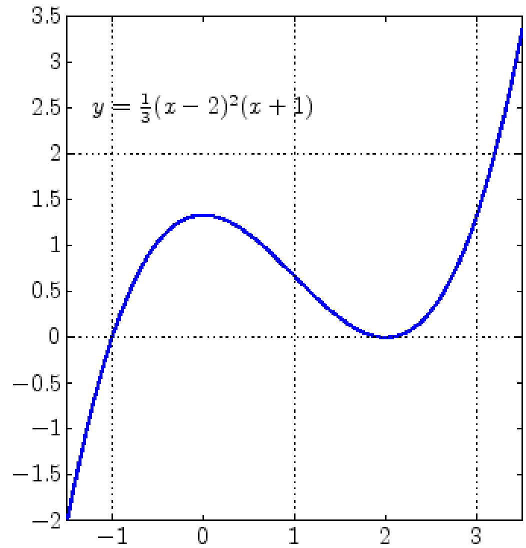
همغږیز جګېدونکي کره همغږیز جګېدونکي

په ورته توګه (کره) همغږیز ټیټیدونکی تعریفیږي.

یکونکي: هیولیک، هیورنر،کنش

تابع $x \mapsto f(x) = \frac{1}{3}(x-2)^2(x+1)$ په $x = 0$ ځای کي یو جګ- یا ماکسیمال ټکی ($f'(0) = 0, f''(0) < 0$) لري او په $x = 2$ ځای ټیټ-یامینیمال ټکی ($f'(2) = 0, f''(2) > 0$) لري . د $x \leq 0$ او $x \geq 2$ لپاره تابع کره مونوتونجګېدونکي نخ ده او د $0 \leq x \leq 2$ لپاره کره مونوتون ټیټیدونکي نه ده.

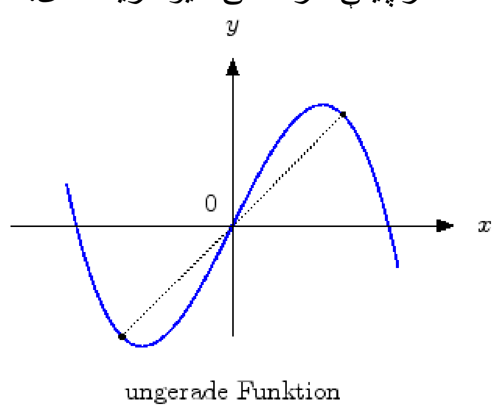
(c) ketabton.com: The Digital Library



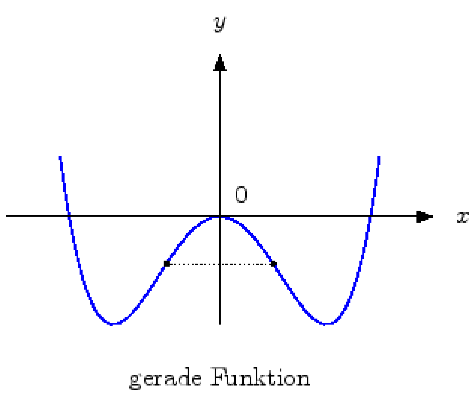
يکونکي: هيوليک، هيورنر،کنش

جوړه او ناجوړه – يا جفت او طاق توابع

يو تابع f جوړه دی، که $f(x) = f(-x)$ وي، دا په دې معنا چې که ګراف د y - محور سره سيومتريک وي. يو ناجوړه يا طاق تابع $f(x) = -f(-x)$ دی، او ګراف سرچيني سره ټکی سيومتريک دی.



ناجوړه يا طاق تابع



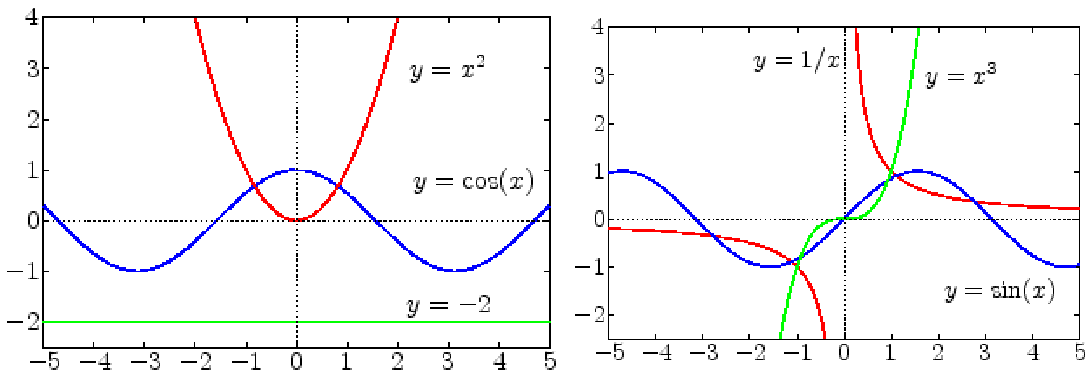
جوړه يا جفت تابع

د دوه جوړه توابعو ضرب جوړه تابع دی. برعکس د يوه ناجوړه يا طاق تابع ضرب د يوه جوړه تابع سره ناجوړه دی. د زياتون يا جمعي او کمښت يا تفريق جوړولو سره د تابع تيپ يا ډول ساتلی پاتيږي.

پای.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې توابع یو کینې لور ته یو څو جوړه (جفت) او ښي لور ته یو څو ناجوړه (طاق) توابع ښايي.



د مناسب ترکیب جوړولو سره سرې نورې بیلګې لاس ته روارې. نو توابع

$$f(x) = x^2 \cos x - x^3 \sin x, \qquad g(x) = -2 + \frac{1}{x^2}$$

جوړه دي او

$$h(x) = f(x)\sin x - g(x)x^3$$

ناجوړه دي.
پاي.

برعکس – یا په ښت فنکشن - تابع**Umkehrfunktion**

د یوه اینجکتیو (په کې -) تابع $f : D \to W$ د تعریفورشو D او ارزښت ورشو $W \subseteq \mathbb{R}$ سره د

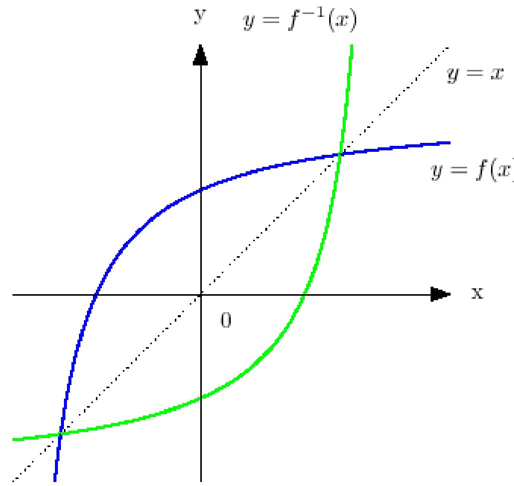
$$f^{-1} : W \to D \subseteq \mathbb{R},\ x \mapsto f^{-1}(x)$$

له لارې تعریف دی. له دې سره لاندې باور لري

$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y).$$

د برعکس توابعو تعریف ورشو د f ارزښت ورشو ده. د هغه ګراف $y = f^{-1}(x)$د f د ګراف په لومړي کونجنیمی $(y = x)$ هنداره شوې ښېره ده:

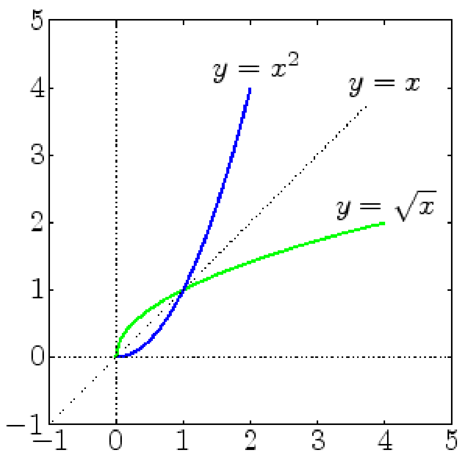
(c) ketabton.com: The Digital Library

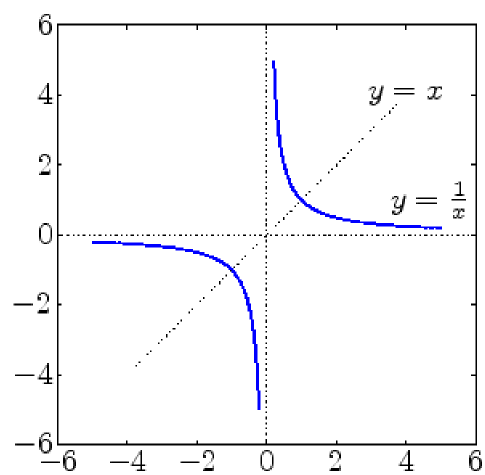


کیدی شي لیکندود $f^{-1}(x)$ مو په ساده توګه د معکوس ارزښت $f(x)^{-1} = \frac{1}{f(x)}$ سره بدلولو ته لار ښود کړي. په ځانګړې توګه ، که د تابع x ارزښت ونه لیکل شي، دا اړیکي دې باید روښانه وي، چې موخه مو څه ده.

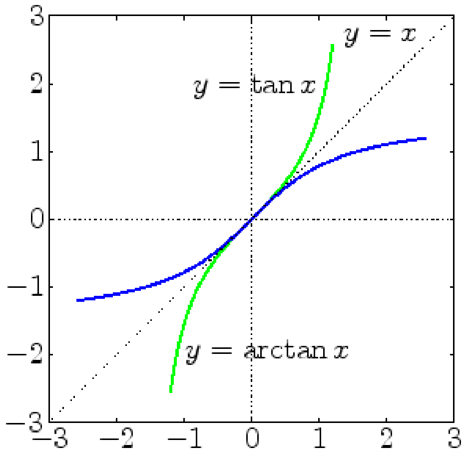
پای.

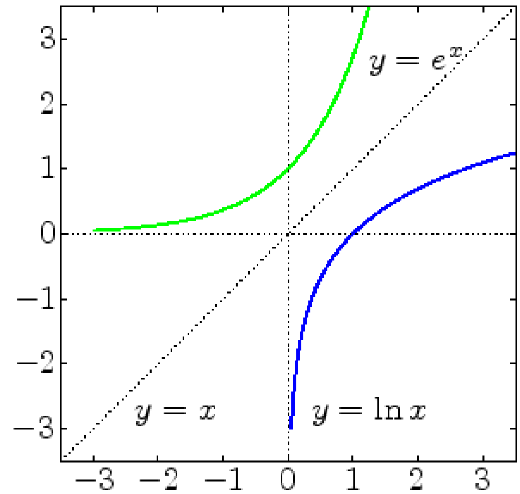
لاندې ځیرې د یو څو بیلګو برعکس - یا په ځېز فنکشن یا تابع ښایي.





(c) ketabton.com: The Digital Library





په لاندې جدول کې هر اړونده تعریف ورشو وې ورکړ شوې دي:

f	D	f^{-1}	D
x^2	$\mathbb{R}$	$\sqrt{x}$	$[0,\infty)$
e^x	$\mathbb{R}$	$\ln(x)$	$(0,\infty)$
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$
$\tan x$	$\mathbb{R}\setminus\{x : x=(2z+1)\pi/2 , z\in\mathbb{Z}\}$	$\arctan x$	$\mathbb{R}$

د فنکشنونو یا توابعو سره شمیرنه Rechnen mit Funktionen

د توابعو کرښیز ترکیب ټکي دوله تعریف شوی دی، دا په دې معنا چې په توابعو د اړونده عملیو له لارې:

$$(rf+sg)(x) = rf(x)+sg(x).$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ورته توګه ضرب fg او وېش f/g . په وېرش کې باید g د صفر سره برابر نه وي..
بالاخره

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

د دوه توابعو یو په بل پسې راوستل یا ځنځیرونه ښايي.
پای.

د بیلګې

$$f(x) = x^2 - 4, \qquad g(x) = x + 2$$

لپاره مختلفې تړنې راکوي

$$(f + 2g)(x) = x^2 + 2x$$

$$(fg)(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = x - 2, \qquad x \neq -2$$

په وېش کې تعریفتشځای $x = -2$ له منخه تلونکی یا د جګیدو وړ دی،

ځکه چې صورت یا ماتباندې $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$ هم په $x = -2$ کې یو صفرځای لري.

د f او g یو په بل پسې تړنه یا ځنځیرونه راکوي

$$(f \circ g)(x) = (x + 2)^2 + 4$$

$$(g \circ f)(x) = x^2 - 2,$$

نو تړنه یا عملیه $\circ$ کموتاتیو یا بدلوړ نه ده.

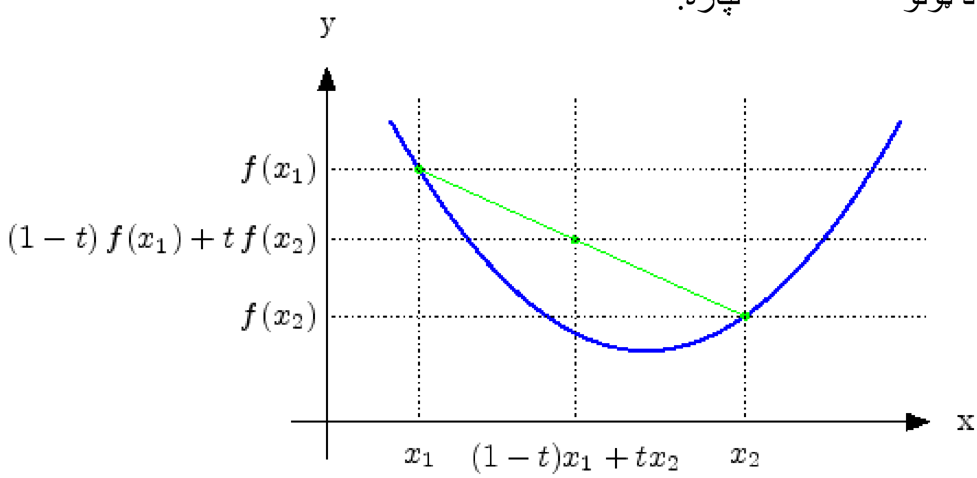
(c) ketabton.com: The Digital Library

ننوتي او وتلي - يا مقعر او محدبې توابع

يو تابع په يوه انتروال D كې(كره) ننوتی دی، كه هر ټوټه وونې يا سيكانت د گراف پورته لور ته پروت وي، دا په دې معناچې

$$f((1-t)\,x_1 + t x_2) \overset{(<)}{\leq} (1-t)\,f(x_1) + t\,f(x_2)\,,\quad t \in (0,1)$$

د ټولو $x_i \in D$ لپاره.



كه f دوه واره ناپرېكېدونكی مشتقوړ وي، نو (كره) ننوتنه د ټولو $x \in D$ لپاره د

$$f''(x) \overset{(>)}{\geq} 0$$

سره تر هغه ځانله ټكي پورې ورته يا برابر ارزښته ده.

د ننوتو توابعو زياتون يا جمعه ننوتي ده. ترڼي يا عمليي $/,\cdot,-$ همداسي يو په بل پسي راوړنه يا ځنځيرونه $\circ$ په توليزه توګه ننوتالی نه ساتي. بالاخره هر ننوتی تابع ناپرېكېدونكی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ورته توګه وتلی تابع هم تعریف کيږي. د وتلي تابع لپاره ټوټه وونی یا سیکانت د ګراف کښته لور ته پروت دی، دا په دې معنا چې د x - محور باندې هنداره شوی تابع $-f$ وتلی دی.

پای.

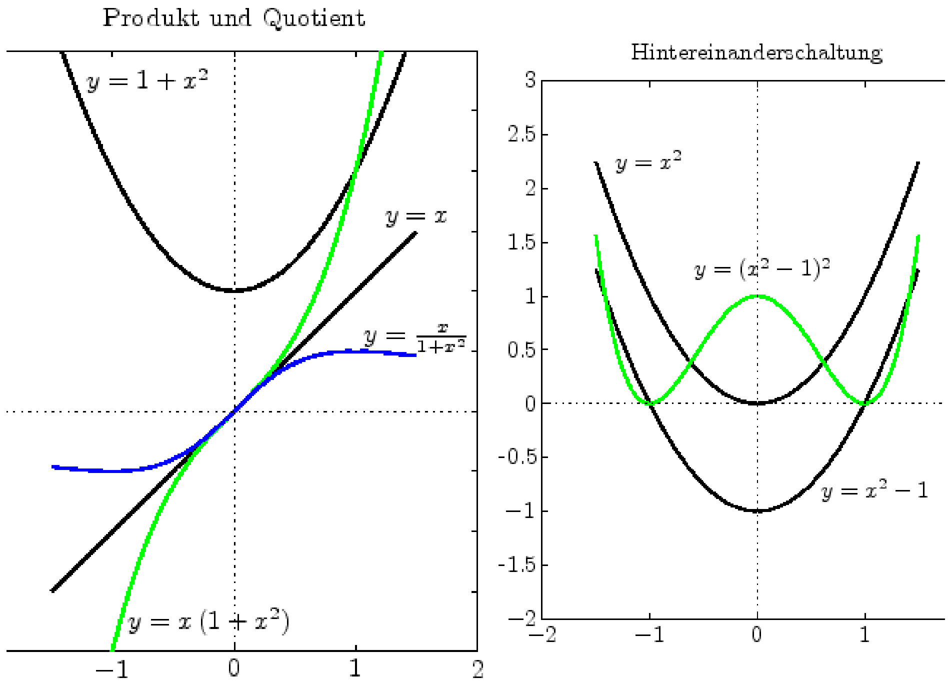
د دوه ننوتو فنکشنونو یا توابعو جمعه یا زیاتون د تعریف څخه ترلی لاس ته راځي:

$$
\begin{aligned}
&(f+g)((1-t)x_1+tx_2) \\
&\quad = \quad f((1-t)x_1+tx_2)+g((1-t)x_1+tx_2) \\
&\quad \leq \; (1-t)\,f(x_1)+t\,f(x_2)+(1-t)\,g(x_1)+t\,g(x_2) \\
&\quad = \; (1-t)(f+g)(x_1)+t(f+g)(x_2),
\end{aligned}
$$

د کوم سره چې د نابرابرون ننوتوالی د f او g څخه کار اخستل کيږي.
نوري ترنې یا عملیې په ټولیزه توګه ننوتوالی نه ساتي، لکه چې لاندې بیلګې به یې وشایي.

یو په بل پسې ترنه ضرب او ویش

(c) ketabton.com: The Digital Library



د دې لپاره چې په يوه ټکي کې د تابع ناپرېکدنوالی وښايو، ټاکو $c < a < x < b$.
نو دی

$$x = ta + (1-t)b$$

$$a = sx + (1-s)c$$

د $0 < s,t < 1$ سره. داچې ننوتی دی، نو باور لري

$$f(x) - f(a) \le (1-t)(f(b) - f(a))$$

همداسې

$$f(x) - f(a) \ge \left(\frac{1-s}{s}\right)(f(a) - f(c)),$$

د $f(a) \le sf(x) + (1-s)f(c)$ له امله.

د $x \to a$ لپاره s او t د 1 په لور هڅيږي، او له دې سره دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

$$\lim_{x\to a}(f(x)-f(a))=0.$$

د $x<a$ لپاره ورته دلیل راوړل کیږي.

پولینوم Polynom

د n درجې یو پولینوم p په لاندې بڼه لیکل کیږي

$$p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$$

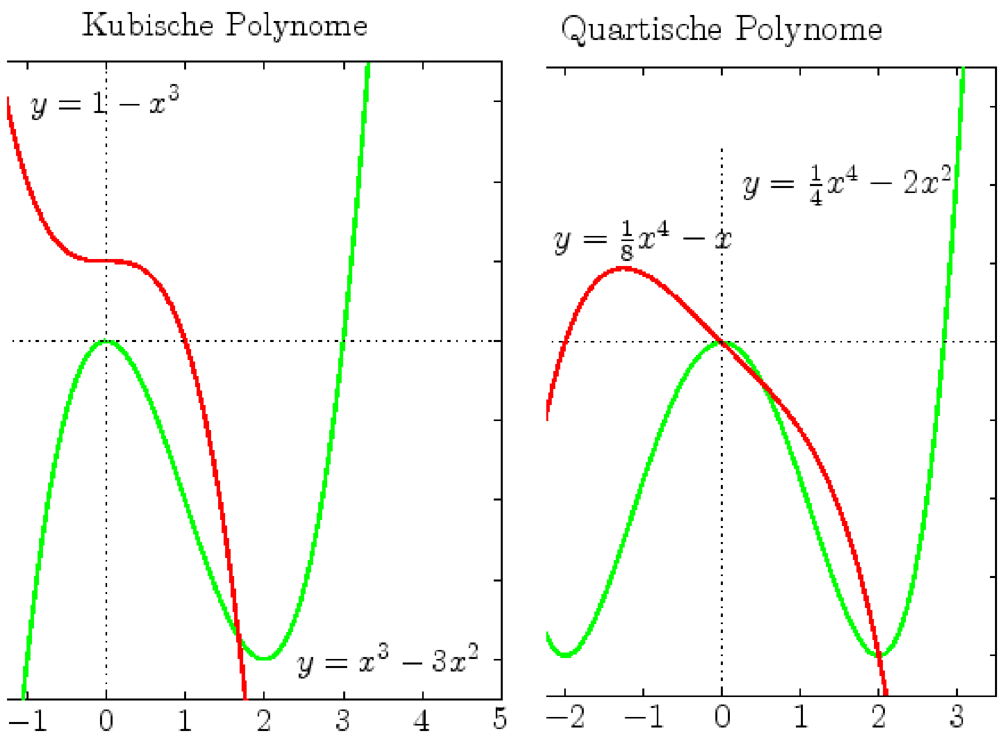
د $a_n\neq 0$ سره.

اووښتوني یا متحولې x او ضریب یا ځلووني a_k کیدی شي حقیقي – همداسې کمپلکس ګڼونه یا عددونه وي. په اړونده توګه د حقیقي همداسې د کمپلکس پولینوم څخه غږیږو.
لیکونکیة: هیورنر او هیولیګ

لاندې ځیرې مکعب ډوله ($n=3$) او کوارتیک ډوله ($n=4$) پولینومونه د ځرنګوالي له لورې مختلف تابع ګرافونو سره ښايي.

کوارتیک پولینومونه مکعب پولینومونه

(c) ketabton.com: The Digital Library



پولینوموېش Polynomdivision

پولینومونو p او q ته د $m = \text{Grad}\, q \le \text{Grad}\, p = n$ سره یواځني پولینومونه f او r شتون لري د

$$p = fq + r, \quad \text{Grad}\, f = n - m, \quad \text{Grad}\, r < m.$$

سره.

دا توته ونه کیدی شي د وېش له لارې د باتي یا باقی سره وټاکل شي.

په ځانګي توګه د p د صفرځای t لپاره لاس ته راځي چې $p(x) = f(x)(x-t)$ دی د $\text{Grad}\, f = n - 1$ ړ سره.

پای.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د q سره د p وېش څخه لرو

$$\underbrace{a_n x^n + \cdots}_{p(x)} = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} \underbrace{(b_m x^m + \cdots)}_{q(x)} + p_{n-1}(x)$$

د یوه پاتې یا باقي $p_{n-1}(x) = a'_{n-1} x^{n-1} + \cdots$ سره.

که $m \leq n-1$ وي کېدی شي بیا ووېشل شي:

$$p_{n-1}(x) = \frac{a'_{n-1}}{b_m} x^{n-1-m} q(x) + p_{n-2}(x) .$$

پروسه پرې کیږي، که د پاتې پولینوم درجه له m کوچنۍ وي، دا په دې معناچې وروسته د $r = p_{n-(n-m+1)}$. سره.
د ټل بیا ضرب له لارې لاس ته راځي

$$f(x) = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} + \frac{a'_{n-1}}{b_m} x^{n-1-m} + \cdots .$$

که t د p صفرځای وي، نو باور لري

$$0 = p(t) = f(t)(t-t) + r(t) = r(t)$$

او له دې سره $r(x) = 0$ ، ځکه چې Grad $r < 1$ دی.

د پولینوم وېش د لیکنیز وېش سره ورته مخ ته تلی شي.

د بېلګې په توګه د $p(x) = 9x^5 + 12x^4 + 10x^3 + 4x^2 + 4x + 2$
او $q(x) = 3x^2 + 2x + 1$ لپاره لاس ته راځي

$$(9x^5 + 12x^4 + 10x^3 + 4x^2 + 4x + 2) : (3x^2 + 2x + 1) =$$
$$= 3x^3 + 2x^2 + x + \frac{r(x)}{q(x)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$
\begin{array}{r}
-(\,9x^5 + \quad 6x^4 + \quad 3x^3\,) \\
\hline
6x^4 + \quad 7x^3 + 4x^2 \\
-(\quad 6x^4 + \quad 4x^3 + 2x^2\,) \\
\hline
3x^3 + 2x^2 + 4x \\
-(\quad 3x^3 + 2x^2 + \quad x\,) \\
\hline
3x + 2 = r(x)
\end{array}
$$

نو دی

$$\underbrace{9x^5 + 12x^4 + 10x^3 + 4x^2 + 4x + 2}_{p(x)} = \underbrace{(3x^3 + 2x^2 + x)}_{f(x)}\underbrace{(3x^2 + 2x + 1)}_{q(x)} + \underbrace{(3x + 2)}_{r(x)}\,.$$

د یوه پولینوم صفرځایونه او فاکتوري کول یا په ضریبونو ټوټه کول

یو د n درجې پولینوم p د ځووالي یا تکرار سره ټیک z_k کمپلکس صفرځایونه لري او له دې سره کېدی شي په ورته کرښیزو ضریبونو یا فاکتورونو

$$p(z) = c(z - z_1)\cdots(z - z_n)$$

ولیکل شي د ثابتې c سره.

که p حقیقی یا قیبل وي، نو کمپلکس صفرځایونه په کنجوګیری جوړو $x_k \pm \mathrm{i}y_k$ رامنځ ته کیږي.

یو حقیقي په ضریبونو لیکل یا فاکتوره کول کېدی شي د کرښیزو فاکتورونو ترڅنګ د لاندې مربع فاکتورونه

$$(z - x_k - \mathrm{i}y_k)(z - x_k + \mathrm{i}y_k) = (z - x_k)^2 + y_k^2$$

هم ولري.

د دویمې درجې پولینوم صفرځایونو لپاره کیدی د منځشپې یا **ABC فرمول(دا د p,q-فرمول ته روته یا همهغسې دی) و کارول شي** او د دریمې او څلورمې درجې پولینومونه د کاردان فرمولونو Cardanischen Formeln له لارې د اکسپلیڅیت الجبری افادو یا ویېنو په توګه و ټاکل شی.

د جګو درجو پولینومونو لپاره بیا په ټولیزه توګه نومریکي تلنلارې کارول کیوي. که بیا یو صفرځای معلوم وی، نو کېدی شي د ا ړونده کرښیز فاکتورونې یا ضریبونې له لارې

(c) ketabton.com: The Digital Library

و وېشل شي.
$q(z) = p(z)/(z - z_1)$ او $z_2, \ldots, z_n$ د $n - 1$ درجې د پولینوم د د صفرځایونو په توګه وټاکل شي.
د الجبر بنسټیزې جملې په اساس د ≥ 1 Grad درجې کمپلکس پولینوم یو صفرځای لري . د پرلپسې پولینوموېشنې د صفرځایونو سره
اړونده کربښیز صریبونه یا فاکتورونه له دې سره ضریبونه راکوي.

که p فقط حقیقی صریبونه ولري، نو باور لري

$$\overline{p(z)} = \overline{\sum_{k=0}^{n} p_k z^k} = \sum_{k=0}^{n} p_k \overline{z^k} = \sum_{k=0}^{n} p_k \overline{z}^k = p(\overline{z})$$

یعنې د یوه صفرځای z_0 لپاره هم $p(\overline{z_0}) = \overline{0} = 0$ دی.

د $p(z) = z^3 - 5z^2 + 9z - 5$

په ضریبونو لیکل یا فاکتوره کول ټاکو. پیژنو، چې $z_1 = 1$ یو صفرځای دی او یو د پولینوم وېش سره لرو
$p(z)/(z-1) = z^2 - 4z + 5.$

د دې مربع پولینوم صفرځایونه د منځشپې فرمول له مخې دي
$z_{2,3} = 2 \pm i.$

د دې په تعقیب کمأبکس فاکتورونه لاندې ده

$$p(z) = (z-1)(z-2-i)(z-2+i).$$

حقیقی په ضریبونو لیکنه یا صریبونه د دواړو اخرنې فکتورونو د تولګې څخه لاس ته راوړو همداسې سیده د مربع تکمیلونې له لارې:

$$z^2 - 4z + 5 = (z-2)^2 + 1,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې معنا چې

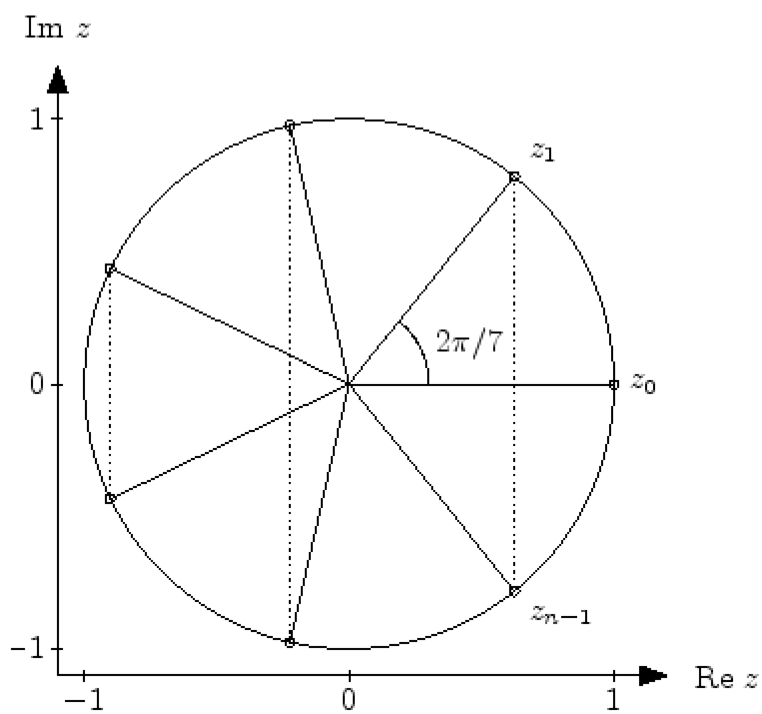
$$p(z) = (z-1)((z-2)^2+1).$$

لیکونکي: هیولیګ،هیورنر، کنش

د $p(z) = z^n - 1$ صفرځایونه n -م یوونرېښي یا واحدجذرونه دي
$z_k = \exp(2k\pi \mathrm{i}/n), k = 0, ..., n-1.$

له دې سره کمپلکس فاکتورونه لاس ته راځي

$$p(z) = \prod_{k=0}^{n-1}(z - \exp(2k\pi \mathrm{i}/n)).$$



د کمپلکس کنجرګیري صفرځایونو ټولګه یا یوځای کونه حقیقي فاکتوري کونه راکوي.

د جوړه n لپاره دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$p(z) = (z-1)(z+1)\prod_{k=1}^{n/2-1}(z^2 - 2z\cos(2k\pi/n)+1)$$

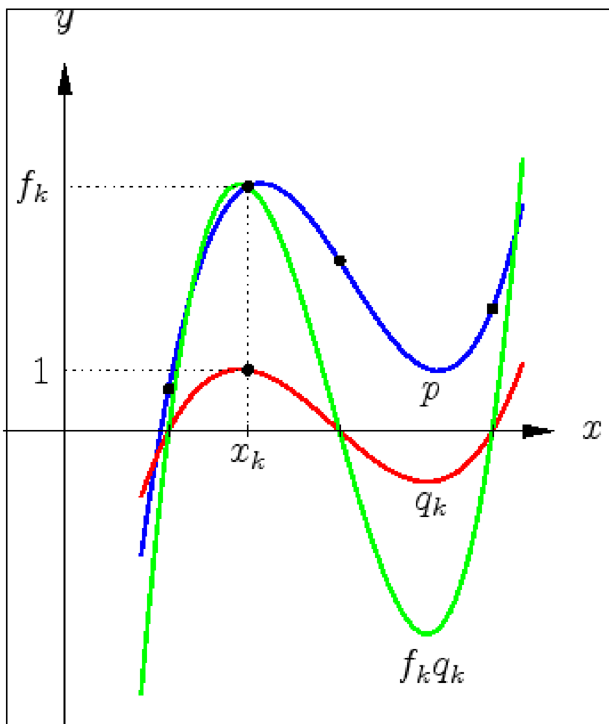
او د ناجوړه یا طاق n لپاره

$$p(z) = (z-1)\prod_{k=1}^{(n-1)/2}(z^2 - 2z\cos(2k\pi/n)+1).$$

پای.

د پولینومونو سره انترپولیشن

په $n+1$ کې تابع ا رزښتونه f_k جوړه په مختلف تکیه ځایونو $x_0, \dots, x_n$ کیدی شی یواځني د یوه $\le n$ Grad درجي پولینوم له لارې انترپولی شي:



$$p(x_k) = f_k, \quad k = 0, \dots, n.$$

دا انترپولیشن پولینوم کیدی شي د لاګرانج – بڼه

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k q_k(x),$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

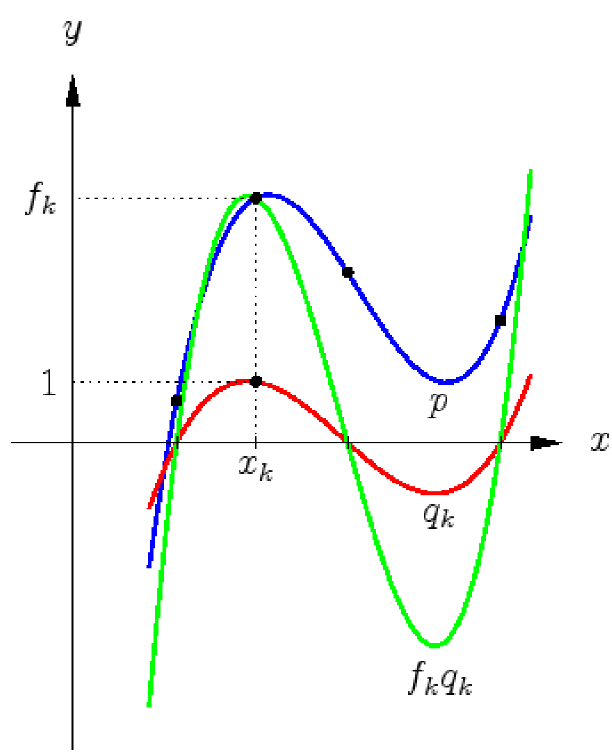
$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k q_k(x),$$

$$p(x_k) = f_k, \quad k = 0, \ldots, n\,.$$

دا انترپوليشن پولينوم کيدی شي د لاګرانج – بڼه

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k q_k(x), \quad q_k(x) = \prod_{j \neq k} \frac{x - x_j}{x_k - x_j},$$

انځور شي.



پولينوم q_k د لاګرانج-پولينوم بلل کيږي او په ټکي x_k کې ارزښت 1 لري او په نورو ټولو ټکو x_j کې يې ارزښت صفر دی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليک

$$q_k(x_j) = \delta_{k,j}$$

د کرونيکر-سومبول δ سره.

د لاګرانج-پولينوم

$$q_k(x_j) = \delta_{j,k}$$

پوره کوي او له دې سره لاس ته راځي

$$p(x_j) = \sum_k f_k \delta_{j,k} = f_j \,,$$

د انترپوليشن شرايط ټول پوره دي.

د دې لپاره چې يواځنوالی وښايو، چې يو بل انترپوليشنپولينوم $\tilde{p}$ شتون لري، کمښت را اخلو يا تر ځېړنې نيسو.

$p - \tilde{p}$.

دا (لړتر لړه) $n+1$ صفرځاونه لري(د انترپوليشن کېدونکي ځايونه x_k)، مګر (زيات له زياته) د n درجو. له دط سره بايد کمښت کټمټ وي، نو پولينومونه سره توپير نخ لري.

ليکونکي: هيوليګ،هيورنر

په اکويديستانت يا برابرواټنيز تکيه -ځايونو $x_k = kh$ د f_k ارزښتونو توابعو ټيک ګرافيکي انځورونې ته کېدی شي مکعبيز انترپوليشن وکارول شي. له دې سره په تکيه-ځايونو $x_{k+1/2} = (k+1/2)h$ منځ ارزښتونه د

$$f_{k+1/2} = (-f_{k-1} + 9f_k + 9f_{k+1} - f_{k+2})/16$$

له لارې اپروکسيمی شي. دا پروسه تکراريږي، تر هغز چې پوره داتا منځ ته راشي.

د –ټکو -فرمول وزنونه

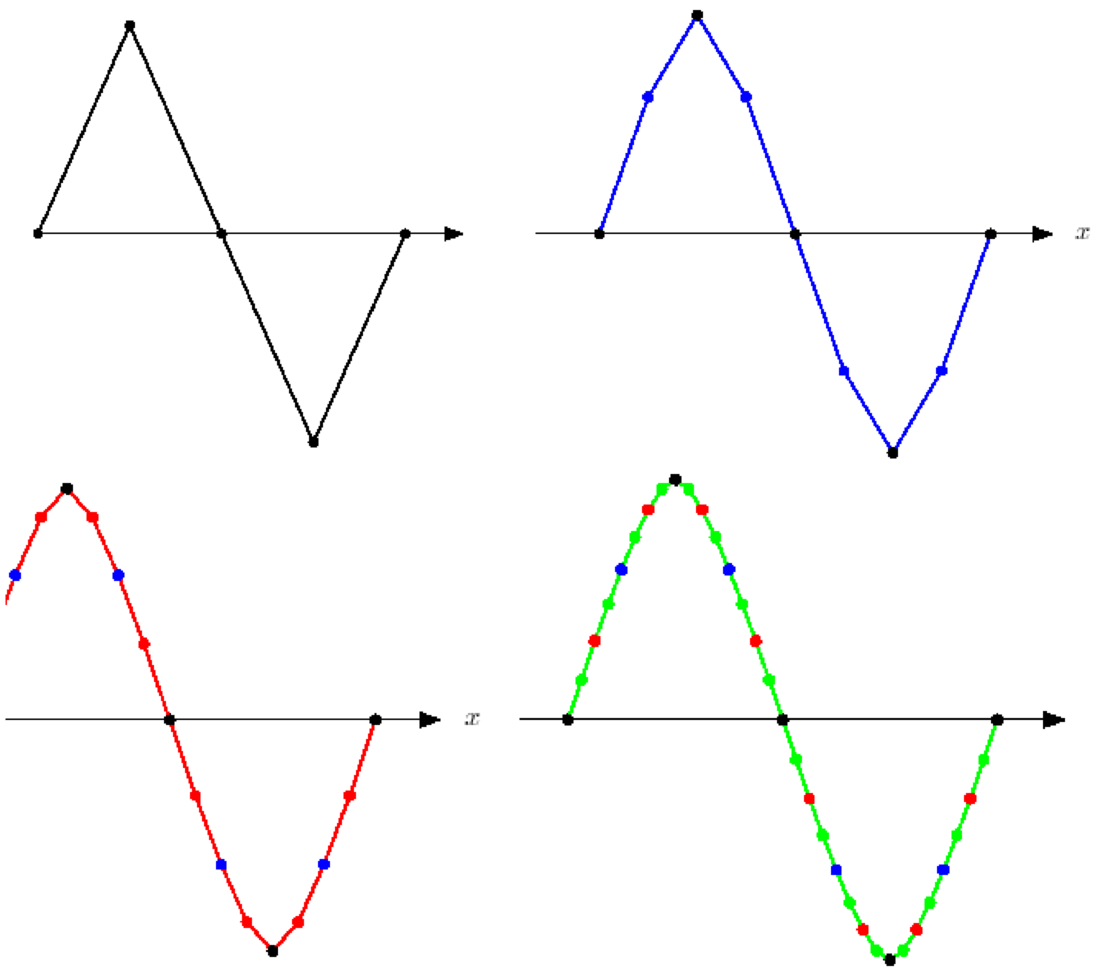
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-\frac{1}{16},\ \frac{9}{16},\ \frac{9}{16},\ -\frac{1}{16}$$

په تکيه-ځايونو $x_{k+1/2}$ د لاګرانژ-پولينوم ارزښتونه دي.
د بيلګې په بتوګه

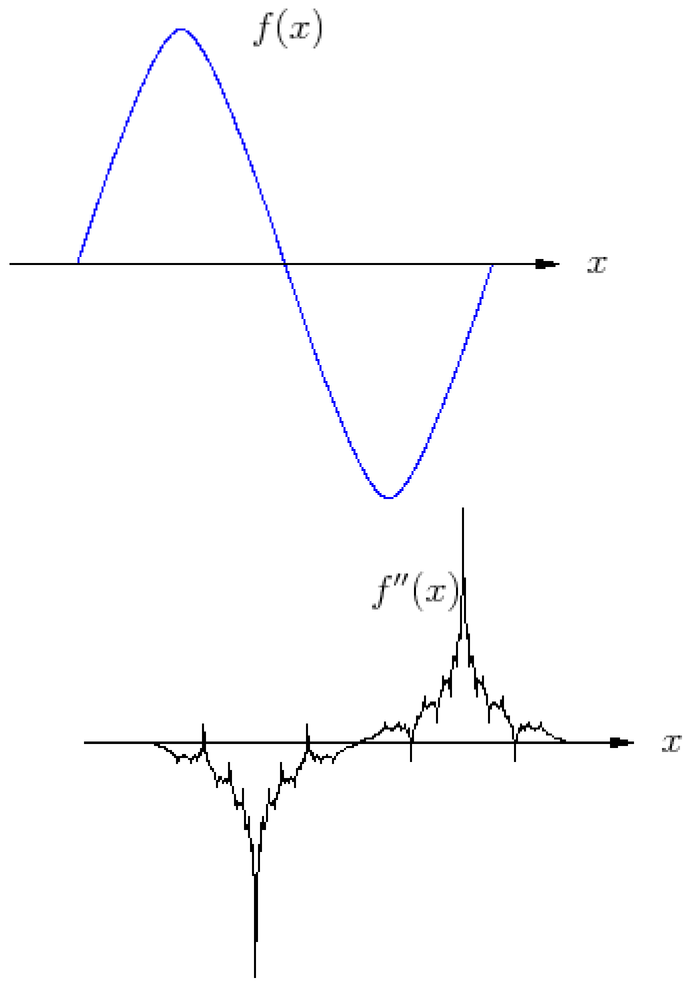
$$-\frac{1}{16}=\left(\frac{x-kh}{(k-1)h-kh}\,\frac{x-(k+1)h}{(k-1)h-(k+1)h}\,\frac{x-(k+2)h}{(k-1)h-(k+2)h}\right)\Bigg|_{x=(k+1/2)h}.$$

دی.
د سيمتري په بنسټ او دا چې ضريبونه بايد سيمتريک شي(د ثابتو داتا انترپوليشن) ، بې له شمېرنې نور ضريبونه راکوي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

ځيره وتونداتا ښايي او د 4 -ټکو-انترپوليشن د درې ځله کاروني يا استعمال له لارې د منځ ته ارغلي ساين تابع اپروکسيميشن . په حقيقت کې دا لاندې کيڼ ښودل شوی پوله تابع خوی اغيز لري. مګر په هر حالت فقط لومړی مشتق ناپرېکيدونکی دی.



ښی ګرافيک وېشلی کمښت له لارې ورنږدې يا نږدې دويم مشتق د اته واره انترپوليشن پسې ښايي. سړی د ګراف فراکتال fraktalen (فراکتال: لاتين: مات) خويونه پيژني.

راشنل (کسری يا نسبتي) توابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

يو ريښتونی تابع r د صورت درجې m او مخرج درجې n سره د دوه پولينمونو وېش دی:

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n}.$$

دا انځوونه نا ټوټه وونې بلل کيږي، که p او q کوم ګډ کرښيز ضريب يا فاکتور ونه لري. د مخرج صفرځايونه راشنل تابع r د تعريف تشځايونه دي او د قطبځايونه بلل کيږي. د دوی نظم د صفرځايونو ډېرځلوالی ښايي.

اووښتونې يا متحولې x او ضريبونه a_k, b_k کېدی شي حقيقي يا کمپلکس وي.

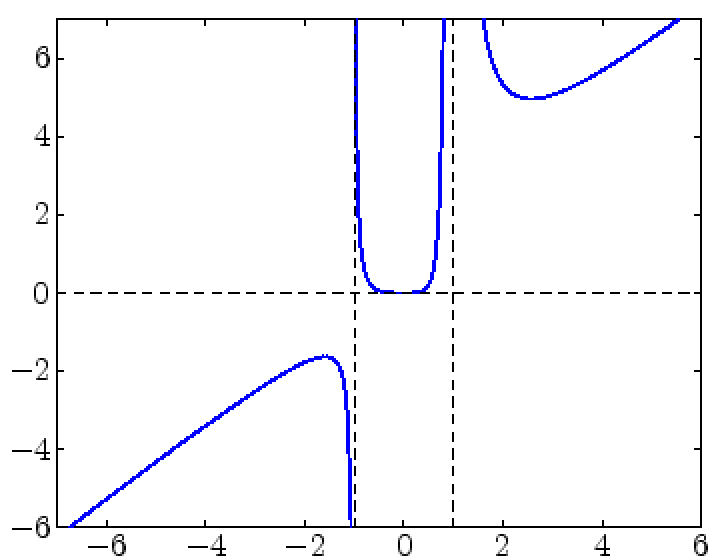
اړوند سړی د حقيقي يا کمپلکس راشنل تابع څخه غږيږي.

لليکونکي : ايپ، هيوليګ

تابع

$$f(x) = \frac{x^4}{(x+1)(x-1)^2}$$

تابع يو سادهقطب په $x = -1$ کې لري او دبل پول په $x = 1$ کې.



(c) ketabton.com: The Digital Library

سرې له تابع f څخه درک کوي، چې په يوه ساده صفرځای کې مخنښنه بدلوي او په يوه ډبل صفرځای کې مخنښنه تغير نه خوري.

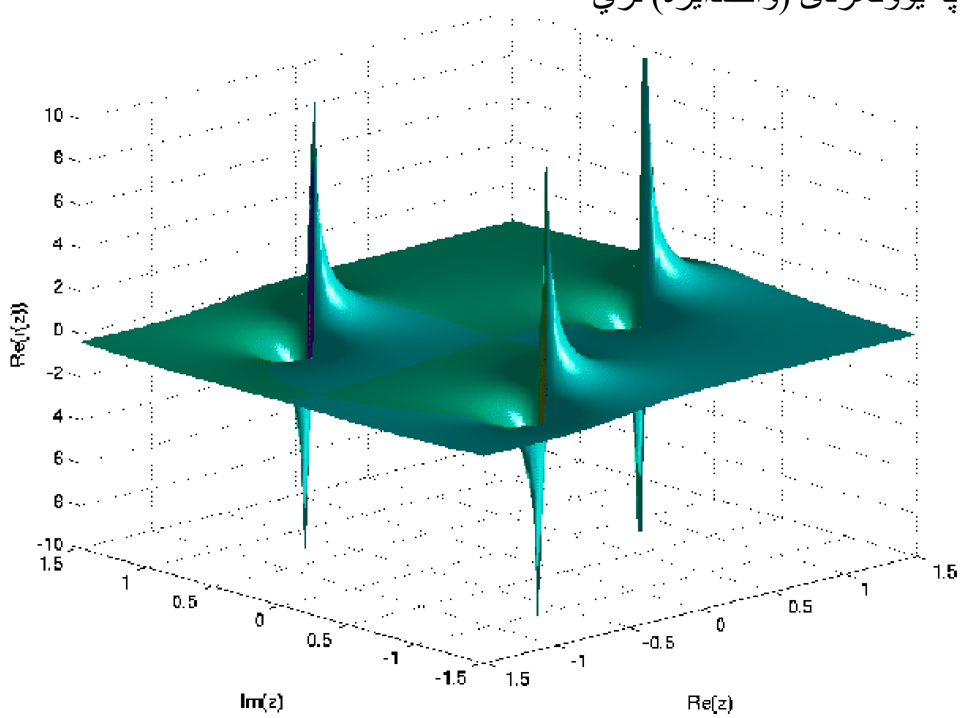
کمپلکس راشنل- يا کسري توابع

$$r(z)=\frac{z^2}{z^3-1}$$

درې صفرځايونه

$$z_1=1, z_2=e^{2\pi i/3}=-\tfrac{1}{2}+\tfrac{\sqrt{3}}{2}i, z_3=e^{-2\pi i/3}=-\tfrac{1}{2}-\tfrac{\sqrt{3}}{2}i$$

په يوونکردی (واحددايره) لري



ځيره د r د ګراف رييل - او ايماجينار برخه ښايي. له دې سره د رنګوښنه (که چېرې رنګه وه) د r د مطلق ارزښت له لارې تاوکل شوې.

) ليکونکي: اپپ،هيورنر، کنش

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ټوټه مات ټوټه کونه يا تجزيه کونه **Partialbruchzerlegung**

يو د m_j نظم راشنل تابع r د n مختلفو صفرځايونو z_j سره ،

$$r = \frac{p}{q}, \quad q(z) = (z - z_1)^{m_1} \cdots (z - z_n)^{m_n}$$

کيدی شي په لاندې ټوټه شي

$$r(z) = f(z) + \sum_{j=1}^{n} r_j(z), \quad r_j(z) = \frac{a_{j,1}}{z - z_j} + \ldots + \frac{a_{j,m_j}}{(z - z_j)^{m_j}},$$

دلته f د $d = \mathrm{Grad}\, p - \mathrm{Grad}\, q$ Grad درجې پولينوم دی ($f = 0$ ، که $d < 0$ وی). راشنل توابع r_j د r په قطبځايونو کې اصلي برخې بلل کيږي. دا د $r(z)$ لوېدنه تشريح کوي د $z \to z_j$ لپاره. پولينوم f کيدی شي د پولينوموېش له لارې وشمېرل شي:

$$p = fq + g, \quad \mathrm{Grad}\, g < \mathrm{Grad}\, q\,.$$

دلته g د p په q باندې وېشنې پاتې يا باقي دی. ضريبونه $a_{j,\nu}$ کيدی شي د z^k د ضريبونو د پرتله کونې له لارې په کټوټوالي

$$p(z) = q(z)\left(f(z) + \sum_{j=1}^{n} r_j(z)\right)$$

وټاکل شي.

د بديل په توګه د اصلي برخو ټاکلو لپاره د پوله ارزښت متود هم کارول کيدی شي.

د قطبونو د خوراځګو ضريبونو لپاره باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a_{j,m_j} = \lim_{z\to z_j}(z-z_j)^{m_j} r(z).$$

د یوه نظم $(m_j > 1)$ قطبخای کې نه شي کېدی ضریبونه $a_{j,1},\dots,a_{j,m_j-1}$ سیده د پولي ارزښت په توګه وټاکل شي. سړی کړی شي دا اوس شمیرل شوی ترم $a_{j,m_j}/(z-z_j)^{m_j}$ کم کړي او د رکورسیو متود وکاروي.. یو ضریب پرتله کونه د همدا اوس شته ترمونو په پام کې نیولو هم شونې ده.

پوله ارزښت کېدی شي وټاکل شي، داسې چې د r په مخرج کې ضریب $(z-z_j)^{m_j}$ لرې برېښوول شي او بیا z_j په پاتې کسر یا ـمات کې ځا په ځای شي. په ځانګړې توګه باور لري

$$a_{j,1} = \frac{p(z_j)}{\prod_{k\neq j}(z_j - z_k)}$$

د ساده قطب ځایونو $z_1,\dots,z_n$ لپاره.

لیکونکي : اپ، هیورنر

د ساده قطبځایونو ($m_j = 1$) لپاره به توټه کونه منځ ته راشي. د پولینوم وېش پسې راشنل تابع منځ ته راځي

$$r(z) - f(z) = \frac{g(z)}{q(z)} = \frac{g(z)}{(z-z_1)\cdots(z-z_n)},$$

د کوم سره چې پولینوم $q(z)$ او $g(z)$ ګډ پروېشونی یا مقسوم علیه ونه لري، نیسو ، چې ټول z_j مختلف دي، او $\operatorname{Grad} g < n$ باور لري.

د ټوټه کسر ټوټه کوني سره د برابر اېښوونې وروسته

$$\frac{a_1}{z-z_1} + \cdots + \frac{a_n}{z-z_n}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $a_j = a_{j,1}$ سره او د q د ضربول سره سړی د $g(z)$ د لاګرانژ -انځورونه لاس ته راوړي

$$g(z) = \sum_{j=1}^{n} \left(a_j \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n} (z - z_k) \right) = \sum_{j=1}^{n} \left[a_j \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n} (z_j - z_k) \right] \underbrace{\prod_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n} \frac{z - z_k}{z_j - z_k}}_{q_j(z)}$$

دا په ې معناچې د $q_j(z_k) = \delta_{j,k}$ له امله په ګوډیزه نوکانو کې د $g(z_j)$ ازښتونه

$$a_j = g(z_j) / \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n} (z_j - z_k).$$

دي. له دې سره لاس ته راځي
په ورته توګه د جګو درجو قطبځایونه هم کار ول کېدی شي. دا مګر تخنیکي لږ پې]لی دی.
لیکونکي : اپ، هیورنر
د

$$r(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{z^3}{z^2 + z - 2}$$

په ټوټه کسر(مات) ټوټه ونه دې وټاکل شي.
دا چې د صورت درجه د مخرج له درجې کوچنی نه ده، باید لومړی یو پولینوم وېش صورت ونیسي. سړی لاس ته راوړي

$$\begin{aligned}
&(z^3) : (z^2 + z - 2) = z - 1 + \frac{3z - 2}{z^2 + z - 2},\\
&-(\underline{z^3 + z^2 - 2z})\\
&\qquad -z^2 + 2z\\
&\quad -(\underline{-z^2 - z + 2})\\
&\qquad\quad 3z - 2
\end{aligned}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې معنا چې $r = f + \frac{g}{q}$ د $f(z) = z - 1, \quad g(z) = 3z - 2.$ سره .
د دې لپاره چې د ټوټه مات ټوټه ونې ايښونه چې لاس ته راوړو بايد اوس د r قطبځايونه وټاکل شي. د منځشپې فرمول سره لاس ته $z_1 = 1$ او $z_2 = -2$ راوړو د مخرج پلينوم د صفځای په څېر:

$$q(z) = (z - 1)(z + 2).$$

د g/q ټوټه مات ټوټه ونه له دې سره لاندې بڼه لري

$$\frac{3z - 2}{z^2 + z - 2} = \frac{a_1}{z - 1} + \frac{a_2}{z + 2}.$$

دا اخر پل د ضريبونو a_k ټاکل دي.
د پوله ارزښت متود سره لاس ت ه راځي

$$a_1 = \lim_{z \to 1}(z - 1)\frac{3z - 2}{z^2 + z - 2} = \left.\frac{3z - 2}{z + 2}\right|_{z=1} = \frac{1}{3}$$

$$a_2 = \left.\frac{3z - 2}{z - 1}\right|_{z=-2} = \frac{8}{3}.$$

او

په ټوليزه توګه لاس ته راځي

$$r(z) = z - 1 + \frac{1/3}{z - 1} + \frac{8/3}{z + 2}.$$

پای.

راشنل توابع

$$r(z) = \frac{2z^2 - 5z - 3}{z^3 - 3z^2}$$

په $z_1 = 3$ کې يوه سادهقطبځای لري او په $z_2 = 0.$ کې يو دبل قطبځای لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چې د صورت درجه د مخرج له درجې کوچنۍ ده، پولينوم وېش ته اړتيا نه شته او د په ټوټه کسر ټوټه ونه دا بڼه لري

$$\frac{2z^2-5z-3}{z^3-3z^2}=\frac{a_1}{z^2}+\frac{a_2}{z}+\frac{a_3}{z-3}.$$

د پوله ارزښت متود سره لرو

$$a_1 \quad =\lim_{z\to 0} z^2\frac{2z^2-5z-3}{z^3-3z^2}=\left.\frac{2z^2-5z-3}{z-3}\right|_{z=0}=1$$

$$a_3=\lim_{z\to 3}(z-3)\frac{2z^2-5z-3}{z^3-3z^2}=\left.\frac{2z^2-5z-3}{z^2}\right|_{z=3}=0\,.$$

سرې په ساده ډول کړی شي، چې دا پاتې (هغه په اصطلاح، چې ورته وايو باقي مانده) ضريبونه a_2 په يوه ټکي $z \neq 0,3$ د تابع ارزښتونو د پرتوله کوني له لارې وټاکي.
د بېلګې په توګه د $z = 1$ لپاره لرو

$$\frac{2-5-3}{1-3}=1+a_2+0$$

او سرې $a_2=2$ لاس ته راوړي.
ليکونکي: اپ،هيورنر
د راشنل توابعو لپاره

$$r(z)=\frac{z^2-5z+4}{z^3-3z^2+z+5}$$

لپاره قطبځايونه روښانه نه دي. د ازمايښت له لارې $z_1=-1$ پيداکيږي او بيا د پولينوم وېش سره لاس ته راځي

$$(z^3-3z^2+z+5):(z+1)=z^2-4z+5.$$

.

د نيمي شپې فرمول سره د مخرج نور صفرځايونه $q(z)$ لاس ته راځي

$$z_{2,3}=2\pm i.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې سره ماتلاندې يا مخرج ضريبه ونه يا فاکتوری کونه

$$q(z) = (z+1)(z-2-i)(z-2+i)$$

لرې او د ټوټه کسر ټوټه کونه داسې ده

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{a}{z+1} + \frac{b}{z-2-i} + \frac{c}{z-2+i}.$$

د دې لپاره چې a, b, c د ضريبونو د پرتلې له لارې وټاکو، د مخرج $q(z)$ سره وپشو او لرو

$$z + 4 = a(z-2-i)(z-2+i) + b(z+1)(z-2+i) + c(z+1)(z-2-i).$$

د $1, z, z^2$ د ضريبونو د پرتله کوني له لارې د درې ناټاکلو يا نامعلومو a, b او c لپاره يو کرښيز مساوات سيټم لاس ته راځي:

a	b	c	
1	1	1	1
-4	$-1+i$	$-1-i$	-5
5	$-2+i$	$-2-i$	4

د حل په حيث لاس ته $b = i/2$ $a = 1,$ او $c = -i/2$ راځي ، دا په دې معنا ، چې

$$r(z) = \frac{1}{z+1} + \frac{i/2}{z-2-i} + \frac{-i/2}{z-2+i}.$$

که اخري دواړه ترمونه سره يوځای کړو، نو حقيقي ټوټه کسر ټوټه ونه لاس ته راځي

$$r(z) = \frac{1}{z+1} + \frac{1/4}{z^2-4z+5}.$$

د حقيقي ټوټه کسر ټوټه ونه يا تجزيه

(c) ketabton.com: The Digital Library

یو حقیقي ريښتونی یا راشنل تابع r د حقیقي قطبځایونو x_j سره او کمپلکس کنجوګیري قطبځایونو $u_k \pm i v_k$ سره او څو واره والی یا ډېروالی همداسې m_j n_k

$$r = \frac{p}{q}, \quad q(x) = \prod_j (x - x_j)^{m_j} \prod_k ((x - u_k)^2 + v_k^2)^{n_k}$$

کیدی شي په لاندې بڼه

$$r(x) = f(x) + \sum_j \sum_{\nu \le m_j} \frac{a_{j,\nu}}{(x - x_j)^\nu} + \sum_k \sum_{\mu \le n_k} \frac{b_{k,\mu}(x - u_k) + c_{k,\mu}}{((x - u_k)^2 + v_k^2)^\mu}$$

ټوټه کیږي، د $d = \text{Grad } p - \text{Grad } q$ درجې ($f = 0$ ، که $d < 0$ وي)

یوه پولینوم f سره. د په هر قطبځای زیاتونونو یا د جمعې غړو د ګڼون یا تعداد ډېرواره والی په ګوته کوي. په ځانګړې توګه د ساده قطبځای لپاره باور لري

$$r(x) = f(x) + \sum_j \frac{a_j}{x - x_j} + \sum_k \frac{b_k(x - u_k) + c_k}{(x - u_k)^2 + v_k^2}.$$

پولینوم f کیدی شي دپولینوم وېش له لارې وټاکل شي

$$p = fq + g, \quad \text{Grad } g < \text{Grad } q,$$

دا په دې معنا چې q د p وېش په g باندې پاتې یا باقي دی. ضریبونه کیدی شي د مخرج پولینوم سره له ضرب وروسته دضریبونو د پرتلې له لارې وشمېرل شي.
حقیقي ټوټه کسر ټوټه کونه هم کیدی شي د کمپلکس بڼې څخه و کټل شي یا لاس ته راوړل شي، داسې چې سرې کمپلکس کنجوګیري ترمونه سره یوځای کاندې.

ټوټه کونه د ساده قطبځایونو ($m_j = n_k = 1$) لپاره سرته رسیږي..

(c) ketabton.com: The Digital Library

د r کمپلکس ټوټه کسر ټوټه کونه په دې حالت کې دا لاندې بڼه لري

$$p(x)+\sum_j \frac{a_j}{x-z_j}$$

د z_j سره د مخرج پرلينوم q ساده صفرځايونه او

$$a_j=\lim_{z\to z_j}(z-z_j)r(z).$$

دا q چې حقيقي دی، نو کمپلکس صفرځايونه د کمپلکس کونجږګيري جوړوړپه توګه منځ ته راځي:

$$z_k=u+\mathrm{i}v,\quad z_l=u-\mathrm{i}v=\overline{z_k}.$$

له دې سره د اړونده ترمونو لپاره لاندې ټوټه ونه باور لري

$$\overline{a_k}=\lim_{z\to z_k}\overline{(z-z_k)r(z)}=\lim_{\overline{z}\to z_l}(\overline{z}-z_l)r(\overline{z})=a_l,$$

دا په دې معنا، چې

$$a_k=s+\mathrm{i}t,\quad a_l=s-\mathrm{i}t.$$

د دواړو ترمونو يوځای کونه غوښتونې بڼه راکوي:

$$\frac{s+\mathrm{i}t}{x-u-\mathrm{i}v}+\frac{s-\mathrm{i}t}{x-u+\mathrm{i}v}=\frac{2s(x-u)-2tv}{(x-u)^2+v^2}.$$

د جګو درجو قطبځايونه کيدی شي په ورته توګه تر څيړنې ونيول شي، مګر دليل راوړنه يې په څرګنده توګه پيچلې ده.

د

$$r(x)=\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{2x^3-9x^2+11x+1}{x^3-4x^2+5x}$$

حقيقي په ټوټه کسر ټوټه کونې ټاکنه په درې پلونو يا قدمونو وېشل کيږي

(i) دا چې $\mathrm{Grad}\ p\geq\mathrm{Grad}\ q$ دی، لومړی د پلوينوم وېشنه صورت نيسي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

$$(2x^3 - 9x^2 + 11x + 1) : (x^3 - 4x^2 + 5x) = 2$$

$$g(x) = -x^2 + x + 1.$$

پاتې

له دې سره لاس ته راځي

$$r(x) = f(x) + \frac{g(x)}{q(x)} = 2 + \frac{-x^2 + x + 1}{x^3 - 4x^2 + 5x}.$$

(ii) د دې لپاره چې د g/q ټوټه ونې اینبوونه یا اسعمال پیداکړو، نو قطبځایونه ټاکو یا پیدا کوو.

د q د صفرځایونو $x = 0$ د نوکانو دباندېکونې وروسته د مبع تکمیل له لارې سرې نور دواړه صفرځایونه لاس ته راوړي:

$$x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1^2.$$

دا پاتې صفرځایونه کمپلکس کونجوګیري جوړې $u \pm iv = 2 \pm i$ دي.له دې سره اینبوونه په لاندې توګه ده

$$\frac{-x^2 + x + 1}{x((x-2)^2 + 1^2)} \ = \ \frac{a}{x} + \frac{b(x-2) + c}{(x-2)^2 + 1^2}\,.$$

(iii) د ضریبونو د ټاکنو لپاره د اصلي مخرج q سره ضربېږي او ترې لاس ته راځي

$$-x^2 + x + 1 \ = \ a((x-2)^2 + 1^2) + b(x-2)x + cx$$

د x ,1 او x^2 ضریبونو پرتله مو کرښیز مساوات سیستم ته بیایي

$$1 = \qquad\qquad 5a$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$1 = -4a - 2b + c$$

$$-1 = a + b$$

د لاندې حل سره

$$a = \frac{1}{5},\ b = -\frac{6}{5},\ c = -\frac{3}{5}\,.$$

له دې سره حقيقي ټوټه کسر ټوټه کونه ده

$$r(x) = \frac{1/5}{x} + \frac{-6/5(x-2) + (-3/5)}{(x-2)^2 + 1^2}.$$

د ټاکلو لپاره پوله ارزښت متودونه هم کارول کيږي. که دا اېښوونه یا ځای په ځای کونه د x سره ضرب شي او $x = 0$ کیږدي، نو لاس ته ترې راځي

$$\frac{1}{2^2 + 1^2} = a + 0 \Longrightarrow a = \frac{1}{5}.$$

د $x = 2$ ځای په ځای کونې سره c لاس ته راځي:

$$\frac{-2^2 + 2 + 1}{2(0^2 + 1^2)} = \frac{1/5}{2} + \frac{c}{0^2 + 1^2} \Longrightarrow c = -\frac{3}{5}.$$

بالاخره کېدی b د ټکی ازماېښت $x \neq 2$ له لارې ، د بېلګې په توګه $x = 1$ منځ ته راشي.
پای.

د

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x^3}{x^4 + 2x^2 + 1}$$

حقيقي ټوټه کسر ټوټه کونې ټاکلو په دوه پلونو یا قدمونو کې ترتيبيږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

(i) د اینښووني د ټاکلو لومړی قطبځایونه پیدا کیږي. له

$$q(x) = (x^2+1)^2$$

پیژندل کیږي، چې $\pm i$ ډبل صفرځایونه دي، دا په دې معنا چې $u=0$ او $v=1$.
له دې سره دا اینښوونه ده

$$\frac{x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{b_1x+c_1}{x^2+1} + \frac{b_2x+c_2}{(x^2+1)^2}.$$

(ii) د ضریبونو د ټاکلو له امله دا سړی د اصلي مخرج q سره ضربوي او لاس ته
ترې راوړي

$$\begin{aligned} x^3 &= (b_1x+c_1)(x^2+1)+b_2x+c_2 \\ &= b_1x^3+c_1x^2+(b_1+b_2)x+(c_1+c_2)1. \end{aligned}$$

د $1, x, x^2$ او x^3 د ضریبونو پرتله کونه مو کرښیز سیستم ته بیایي

$$\begin{aligned} 1 &= b_1 \\ 0 &= c_1 \\ 0 &= b_1+b_2 \\ 0 &= c_1+c_2 \end{aligned}$$

د لاندې حل سره

$$b_1=1,\ c_1=0,\ b_2=-1,\ c_2=0\,.$$

بدیلې کیدی شي د کمپلکس ټوټوه کسر ټوّ کونې ځخه مخ ته لاړ شو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{z^3}{(z-i)^2(z+i)^2} = \frac{a}{z-i} + \frac{b}{(z-i)^2} + \frac{c}{z+i} + \frac{d}{(z+i)^2}.$$

ضریبونه $c=\overline{a},\ d=\overline{b}$ پوره کوي او د جمعي جوړولو له لارې

$$\frac{a}{z-i} + \frac{c}{z+i},\ \frac{b}{(z-i)^2} + \frac{d}{(z+i)^2}$$

هم حقیقي توټهکسر ټوټه کونه لاس ته راوړي

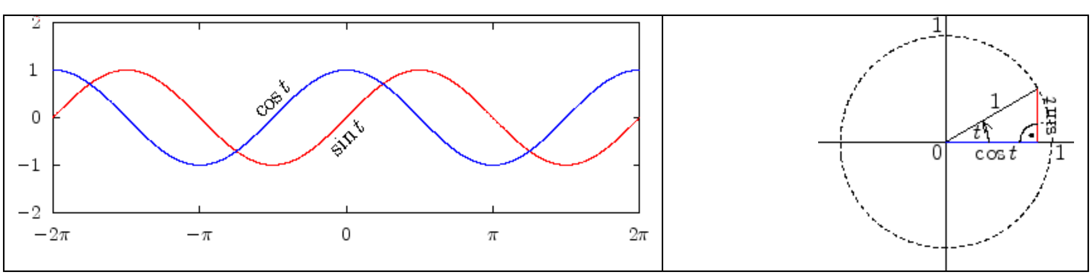
$$\frac{x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{x^2+1} + \frac{-x}{(x^2+1)^2}.$$

Sinus und Cosinus ساین او کوساین

د

$$(\cos t, \sin t), \quad t \in \mathbb{R}$$

سره په سرچینه په کونج t څرخول شوی ټکی $(1,0)$ کواوردینات نومولکیږي . د تر مخنښي پورې کوساین او ساین په یوه ولاړکودیز ړېکودي (المثلث القایم الزاویه) کې د ولاړ اړخونو(هغه اضلاع وې چې یو د بل سره قلموازاویه جوړه وي) نسبت د نیمی(قطر) سرره په ګوته کوي.



دواړه ګردی توابع یا د دایرې توابع 2π - تلبېرته راګرځېدوني یا 2π - پریودیکي دي او باور لري

$$\cos t = \sin(t + \pi/2)$$

- ,

(c) ketabton.com: The Digital Library

- $\cos t = \cos(-t), \quad \sin t = -\sin(-t)$,
- $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$.

يو څو ځانګړي ارزښتونه دي:

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

د اويلر-مويورې فرمول **Formel von Euler-Moivre**

يو اکسپوننشل تابع د ايماجينار x -محور سره کېدی شي د $t \in \mathbb{R}$ لپاره د تريکونومتريک(درېکوډي - يا مثلثاتې -) توابع په مرسته افاده شي.

$$\cos t + \mathrm{i}\sin t = \exp(\mathrm{i}t)$$

کوساين او ساين حقيقي – او ايماجينار ګنونه(عددونه) په ګوته کوي د ارزښت (1 سره ($|\exp(\mathrm{i}t)| = 1$.

که پورته فرمول اينورتير يا معکوس شي ، نو لاس ته راځي

$\cos t$	$= \operatorname{Re} e^{\mathrm{i}t} = \frac{1}{2}\left(e^{\mathrm{i}t} + e^{-\mathrm{i}t}\right)$
$\sin t$	$= \operatorname{Im} e^{\mathrm{i}t} = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(e^{\mathrm{i}t} - e^{-\mathrm{i}t}\right)$.

د اکسپ، کوساين او ساين کتمتوالی اويلر او مويورې ته ځي. دا د جيومتريکي کمپلکس عددونو د انترپوليشن لپاره بنسټ جوړوي او د فوری-اناليوز کې غوره رول لوبوي.

ليکونکي: هيوليک، کوپف

د ساين او کوساين لپاره د زياتون- يا جمع قضيه

(c) ketabton.com: The Digital Library

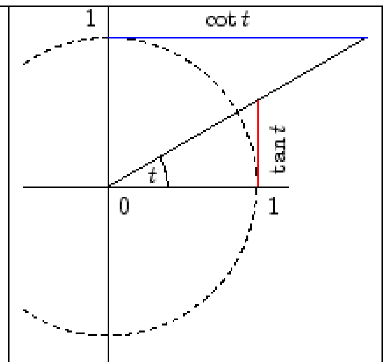
د ګردی‌توابعو $\sin t$ او $\cos t$ لپاره لاندې اړیکې باور لري:

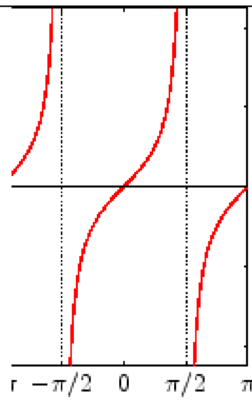
- $$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
- $$\sin(\alpha+\beta)=\sin\beta\cos\alpha+\sin\alpha\cos\beta$$

په ځانګړې توګه دی

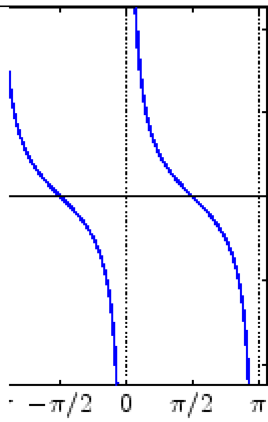
$$\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha,\qquad \sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha.$$

تانجنت او کوتاجنت **Tangens und Cotangens**





تانجنت



کوناتجنت

د تانجنت او کوتانجنت توابع د

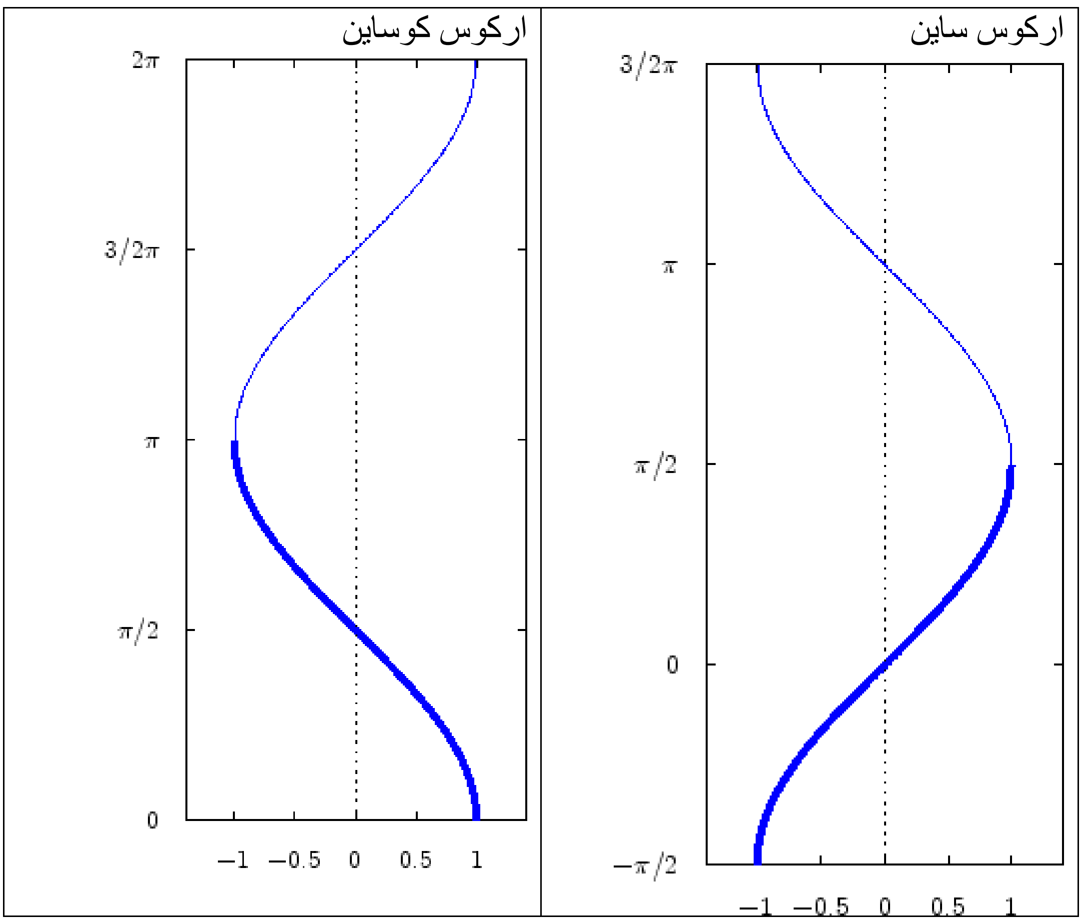
$$\tan t=\frac{\sin t}{\cos t},\qquad \cot t=\frac{\cos t}{\sin t}$$

له لارې تعریف دي. دا تر دمخنخښي پورې د ولاړګوډیز درېګوډي(- - مثلث) د ولاړګوډونو Katheten نسبت ورکوي
یو څو ځانګړي ارزښتونه دي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

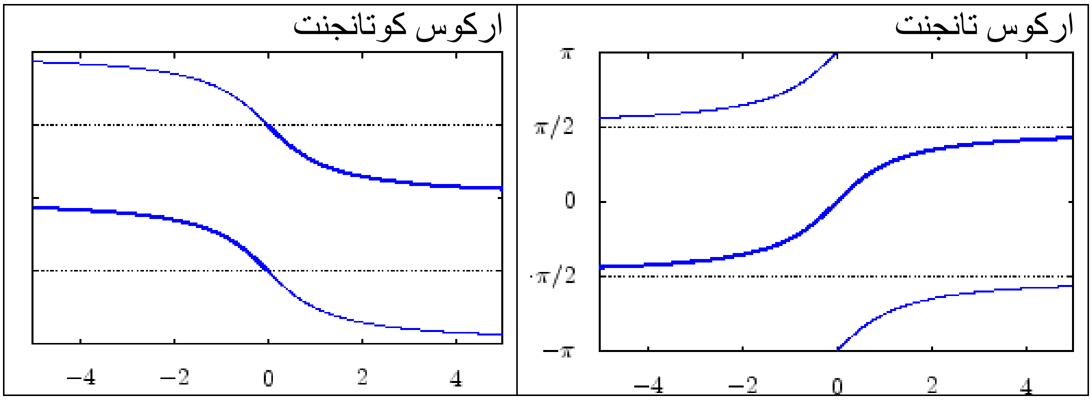
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
tan	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	nicht def.
cot	nicht def.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

د ارکوس توابع **Arcusfunktionen**



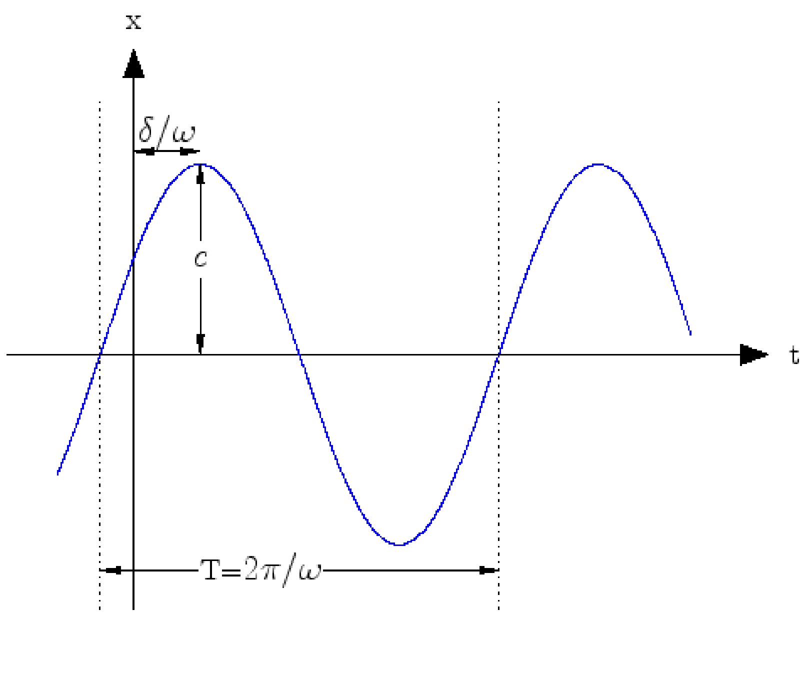
د درېګوډيز (ترېګونومتريکي يا مثلثاتي) توابعو په څټ يا معکوس توابع د arccos, arcsin, arctan, arccot سره ښوول کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د دي تعريف – او ارزښت ورشو د پورته ځېرې څخه رانيول کېدی شي.
له دې سره اصلي ځانګې غوړې يا پنډې کښل شوي دي.
ليکونکي: هيوليک، کنوپف، کنش

هارمونيک لړځيدني يا رپيدني
Harmonische Schwingung



(c) ketabton.com: The Digital Library

یو هارمونيکي لړځیدنه د جګوالي Amplitude $c \geq 0$ سرره،د فاز بلځای ته وړنه یا راکښنه δ او فرکونښ ω همداسې پریودېوالی یا تل (بیرته) راګرځیدنه $T = 2\pi/\omega$ لاندې بڼه لري

$$x(t) = c\cos(\omega t - \delta)\ .$$

ورته یا برابر ارزښته انځورونه ده

$$\mathrm{Re}\, c\exp(\mathrm{i}(\omega t - \delta))$$

یا

$$a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$$

د $a = c\cos(\delta), b = c\sin(\delta)$ سره ، دا په دې معنا چې (c,δ) د (a,b) قطبي کواوردیناتونه دي.
پای.

د پارمتر شمیربدلون د جمعي تیورم څخه لاس ته راځ:

$$c\cos(\omega t - \delta) = c\,(\cos(\omega t)\cos(\delta) + \sin(\omega t)\sin\delta) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad a = c\cos\delta, \quad b = c\sin\delta.$$

برعکس دی

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \delta = \arctan(b/a) + \varphi$$

د لاندې سره

$$\varphi = \begin{cases} 0, & \text{für } a \geq 0 \\ \pi, & \text{für } a < 0 \text{ und } b \geq 0 \\ -\pi & \text{sonst.} \end{cases}$$

پای.

د هارموني رپیدنې یو پر بل پربوتنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

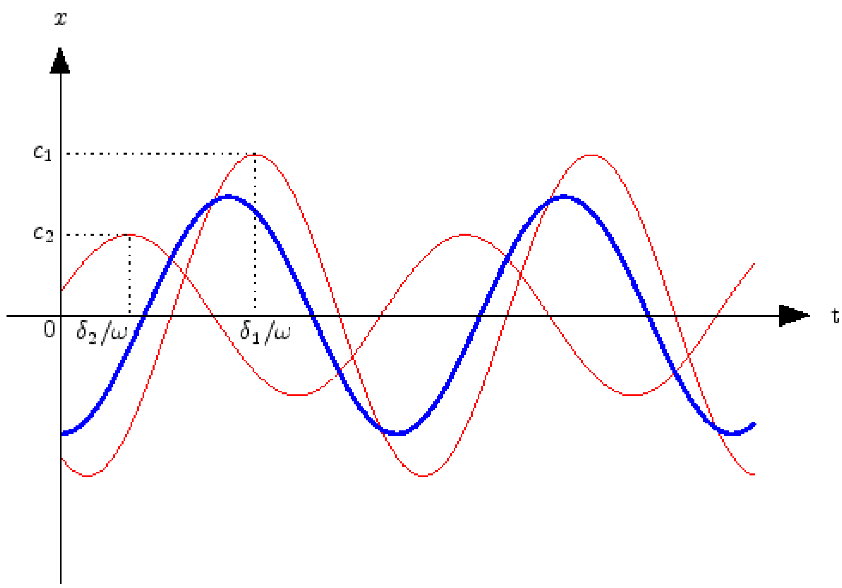
د دوه هارموني رپېدنو يو پر بل پربوتنه (په څېره کې غوړ کښل شوي دي)

$$x_k(t) = c_k \cos(\omega t - \delta_k), \quad k = 1, 2\,,$$

د

امپليتوډې سره هارمونيک دي

$$c = \sqrt{c_1^2 + 2\cos(\delta_1 - \delta_2)c_1c_2 + c_2^2}\,.$$



ليکونکي: هيوليک، کوپف،کنش

د يو پر بل پربوتني کمپلکس بڼه

$$\mathrm{Re}\,(c_1e^{\mathrm{i}\omega t - \delta_1} + c_2e^{\mathrm{i}\omega t - \delta_2}) = \mathrm{Re}\,([c_1e^{-\mathrm{i}\delta_1} + c_2e^{-\mathrm{i}\delta_2}]e^{\mathrm{i}\omega t})$$

راکوي

$$[\ldots] = ce^{-\mathrm{i}\delta} = z$$

او له دې سره

$$c^2 = z\bar{z} = (c_1e^{-\mathrm{i}\delta_1} + c_2e^{-\mathrm{i}\delta_2})(c_1e^{\mathrm{i}\delta_1} + c_2e^{\mathrm{i}\delta_2})\,.$$

$$e^{\mathrm{i}s} + e^{-\mathrm{i}s} = 2\cos s$$

د په پام کې نيولو سره ضربونه غوښتنه راکوي..

په بديله ت وګه کېدی شي امپليتود انځوروني

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_k(t) = a_k \cos(\omega t) + b_k \sin(\omega t)$$

څخه وشمېرل شي. سړى لاس ته راوړي

$$c = \sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2}\ .$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

په درځ يا مټه باندې کړولو هارموني لړځېدنه يو په بل پرېوځي

$$\cos(\omega t - \delta_k), \quad \delta_k = k\delta,\ k = 0, \ldots, n,$$

د برابر يا همغه فرکونځ او امپليتود. لړځېدنه د کمپلکس انځوروني په مرسته د دې لاندې حقيقي برخې په حيث لاس ته راځي

$$e^{i\omega t} + e^{i(\omega t - \delta)} + \ldots + e^{i(\omega t - n\delta)} = e^{i\omega t}\frac{1 - (e^{-i\delta})^{n+1}}{1 - e^{-i\delta}}$$

$$= e^{i\omega t}\frac{e^{-i\frac{n+1}{2}\delta}(2i\sin\frac{n+1}{2}\delta)}{e^{-i\frac{\delta}{2}}(2i\sin\frac{\delta}{2})} = \left(\frac{\sin\frac{n+1}{2}\delta}{\sin\frac{\delta}{2}}\right) e^{i(\omega t - \frac{n}{2}\delta)}\ .$$

يو په بل پرېوتنه لاندې امپليتود لري

$$\frac{\sin\frac{n+1}{2}\delta}{\sin\frac{\delta}{2}}$$

او فاز $(n/2)\delta$.

د $\omega = 0$ سره د ايماجيناربرخې د پرتله کوني له لارې تريګونمتريکی کتمتوالی راکوي.

$$\sin\delta + \ldots + \sin n\delta = \frac{\sin\frac{n+1}{2}\delta \sin\frac{n}{2}\delta}{\sin\frac{\delta}{2}}\ .$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه لړځېدنو $c_k e^{\mathrm{i}\omega_k t}$ يو پر بل پرېوتنه کېدی شي د

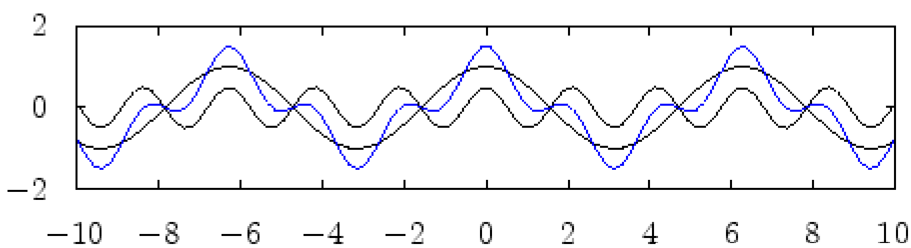
$$c(t)e^{\mathrm{i}\bar{\omega}t}, \quad c(t) = c_1 e^{-\mathrm{i}\Delta\omega t} + c_2 e^{\mathrm{i}\Delta\omega t},$$

په ضرب د $\bar{\omega} = (\omega_1 + \omega_2)/2$ او $\Delta\omega = (\omega_1 - \omega_2)/2$ سره ولیکل شي.
لاس ته راغلی داسي په نامه مودوليري رپېدنه تيک هلته پريوديکي ده، که د فرکونڅ نسبت ω_1/ω_2 راشنل وي.
د مودولي شوی کمپلکس امپليتود مينيمال او ماکسيمال ارزښت همداسي مطلق ارزښت د $|c_1 - c_2|$ همداسې $c_1 + c_2$ ترمنځ لوړ ټيټ کيږي. په ځانګړې توګه دی

$$c(t) = 2c\cos(\Delta\omega t)$$

د همغي يا برابرې امپليتود $c = c_1 = c_2$ لپاره.
لاندې ځيرې يو څو بېيېکي حالتونه په ګوته کوي

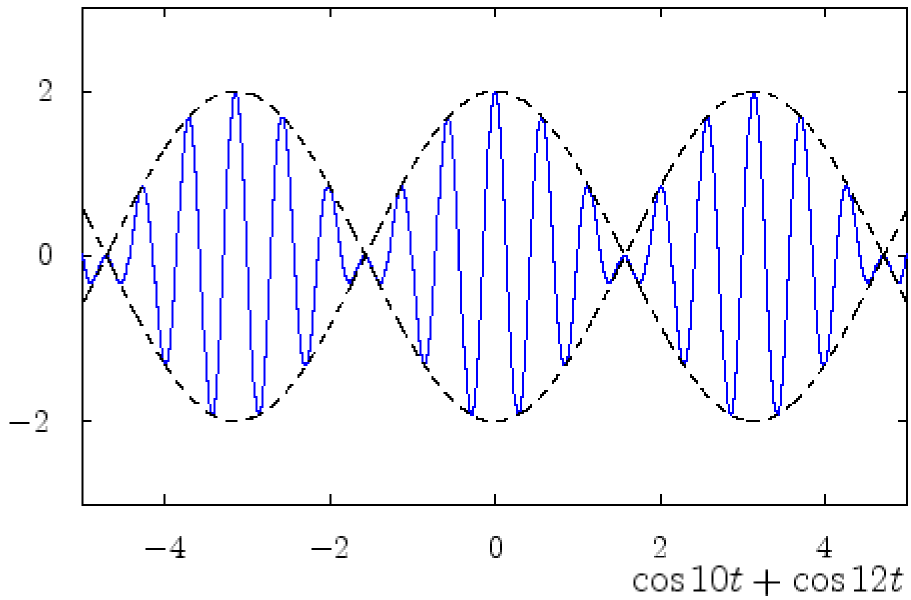
- periodische Überlagerungپريوديکي يو پر بل پرېوتنه



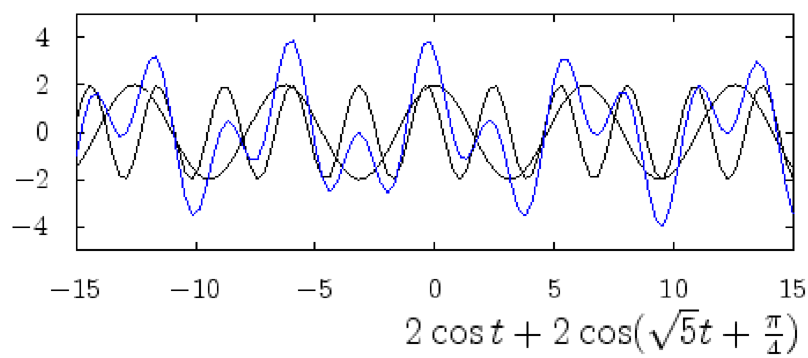
$\cos t + \frac{1}{2}\cos 3t$

- برابر امپليتود c_k او $\omega_1 \approx \omega_2$

(c) ketabton.com: The Digital Library



- aperiodische Überlagerung اپریودیکي یا نه - یو پر بل پرېوتنه



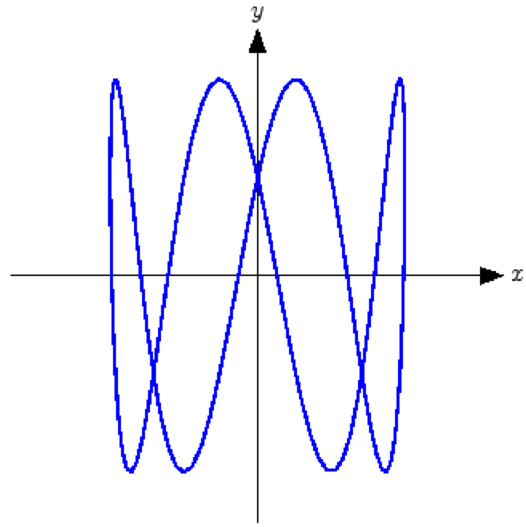
پاي.

د سطي لړځېدنو یو پر بل پرېوتنې د لړځېدنو مختالف لورو (a_1, a_2) او (b_1, b_2) کړېږ یا منحني

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t - \delta_1) + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t - \delta_2),$$

لاس ته راځي چې د مخترع Lissajous-Figuren لیساجوس ـخیرې بللکیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

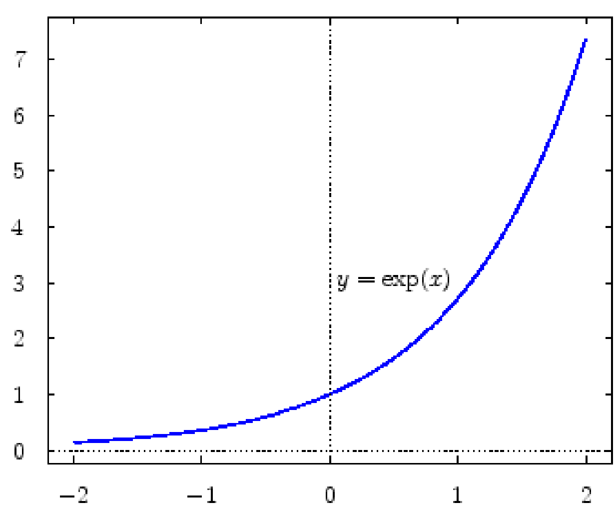


خبره د پارامتر یوه بېلګه بناييي

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \omega_1 = 1, \quad \delta_1 = 0, \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \omega_2 = 4, \quad \delta_2 = \frac{\pi}{3}.$$

پای.

اکسپوننشل توابع
Exponentialfunktion



توان تابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = e^x = \exp(x)$$

$x \in \mathbb{R}$

د اويلر عدد ... $e = 2.71828$ سره اکسپونننشل تابع بلل کيږي. دا د ټول لپاره مثبت ده او د تابع مساوات پوره کوي

$$e^{x+y} = e^x e^y \, .$$

$$e^{-x} = 1/e^x$$

په ځانګړې توګه

ګټه يا ربح **Verzinsung**

يوبيل بډايۍ د – وارهد اخستني همداسې او وركوني وروسته د يوې ګټوې Rate r ($r < 0$ همداسې $r > 0$) د يوې ګټونې فاکتور $(1+p)$ سره لاندې پای بډايۍ وركوي

$$y = (1+p)^n x + \frac{(1+p)^n - 1}{p} r \, .$$

دلته $p = 1$ د 100% يو ګټه اينسوونه ده په کلنۍ ګټه ا چونې سره.

فعاله کلنۍ ګټه د مياشتنۍ ګټونې څخه شمېرل کيږي د يوه ګټې اينسونې p_m سره و لاندې ته

$$p_j = (1+p_m)^{12} - 1 \geq 12 p_m \, .$$

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

بنسټ بډايۍ په همدې لومړني ګټونې پريود کې په پام کې نيول کيږي، اخستنه ههمداسې اچونه لومړی د ورپسې کال. په لاندې توګه يا د اسې راکوي

$$\begin{aligned} n = 1: &\quad y = x(1+p) + r, \\ n = 2: &\quad y = \big(x(1+p) + r\big)(1+p) + r. \end{aligned}$$

په ټولېزه توګه باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = \left(\cdots\left(x(1+p)+r\right)(1+p)+r\right)\cdots\Big)$$

$$= x(1+p)^n + \left[1+(1+p)+(1+p)^2+\cdots+(1+p)^{n-1}\right]r$$

دا په ګوډیزو نوکانو کې افاده کېدی شي په هندسي جمعه فرمول واړوي او سړی دا ورکړ
شوی فرمول لاس ته راوړي.
پای.

د منهتان خرڅول 1626زک مورګن(د ځمکي د کچوني یوون یا واحد دی) 11000
Morgen د یوه حاضر قیمت په رانیولو ګټور تمام شو، ځکه چې په کلنی7 په سلو کې
ګټه دا بډایي په کال 2000 زک کي

$$y = 60\,\mathrm{NLG}\cdot(1.07)^{374} = 5.857\cdot10^{12}\,\mathrm{NLG}\ (\triangleq 2.658\cdot10^{12}\,\mathrm{EUR})$$

ده(که متمأن بانکونه او د اسعارو رفورم له مخه نه وي نیول شوی یا فرض شوی).
په میاشتنی ګټه لرو

$$y = 60\,\mathrm{NLG}\cdot(1+7/1200)^{4488} = 13.030\cdot10^{12}\,\mathrm{NLG}\ (\triangleq 5.913\cdot10^{12}\,\mathrm{EUR})$$

او

$$y = 60\,\mathrm{NLG}\cdot\exp(0.07\cdot374) = 14.060\cdot10^{12}\,\mathrm{NLG}\ (\triangleq 6.380\cdot10^{12}\,\mathrm{EUR})$$

د ټولیزې ګټونې سره.
که مورګن د 0.81 Ha هکتارسره وشمېرل شي، نو د منهتان دا نننی سطحه د89
مربعکیلو متره ورکوي. یو کور هلته نن نږدې6500 USD/Quadratmeter امریکایي
ډالر په مربع متر ارزښت لري. دا پیسې به د یوه کور تعمیرلپاره چې څلور پوړیز وي
ورسیږي، چی په ټوله سطحه ونیسي.
پای.

د یوه $x = 200000$ یوروپور ، $n = 30$ کلونو لپاره او یوې کره شوې ګټې پېنې $p = 5$
په سلو کې میاشتنی ګټه لاندې ده

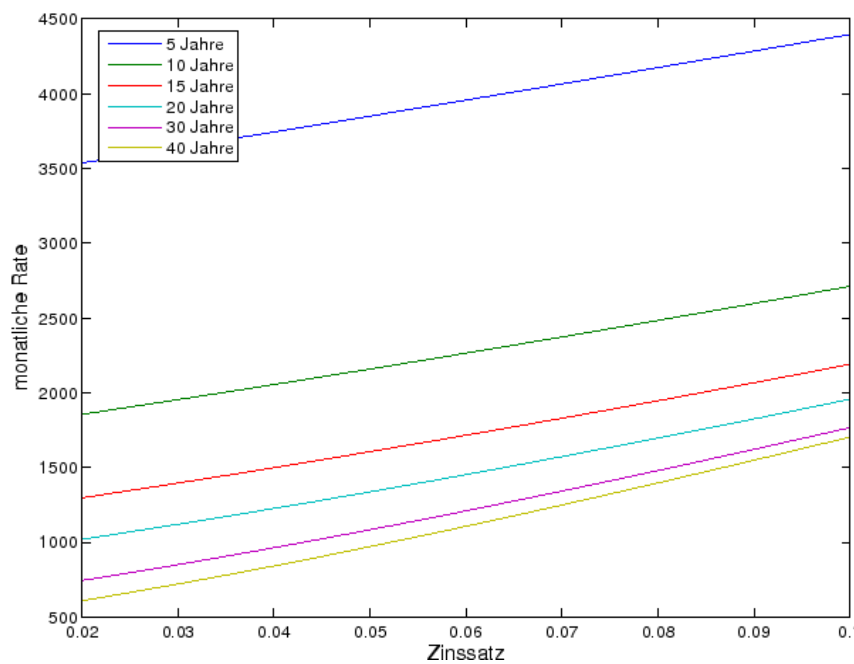
$$p_m = (1+p)^{1/12} - 1 = 0.4074\%$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او میاشتنی رات یا ګټه ده

$$r = \frac{p_m(1+p)^n}{(1+p)^n - 1}x = 1060.11\,\mathrm{EUR}.$$

د لاندې پسې تړلي له ګټي فرمول څخه د صفراینوونې له لارې د پور ارزښت راکوي او
د $(1+p_m)^{12} = 1+p$ په پام کې نیولو سره .
ټوله تادیه $30 \cdot 12r = 381639.60$ یورو د پور جمعې څخه د په 90.8 په سلو کې اوړي(د بانک مزدوري پرې زیاته).



پروت: ګټونه یا د ګټې پېنه ، ولاړ: میاشتنی ګټه
ګراف میاشتنی ګټه بنایي د یوه 200 000 یورو پور لپاره د ګټې پېنې د ضریب په څېر د مختلفو وختونو لپاره.
پای.

کلنې د پیسو ورکونه $x = 10000$ یورو د یوې 7 په سلو کې ګټونې ته د $n = 12$ کلونو وروسته یوه دا لاندې بدایي ورکوي

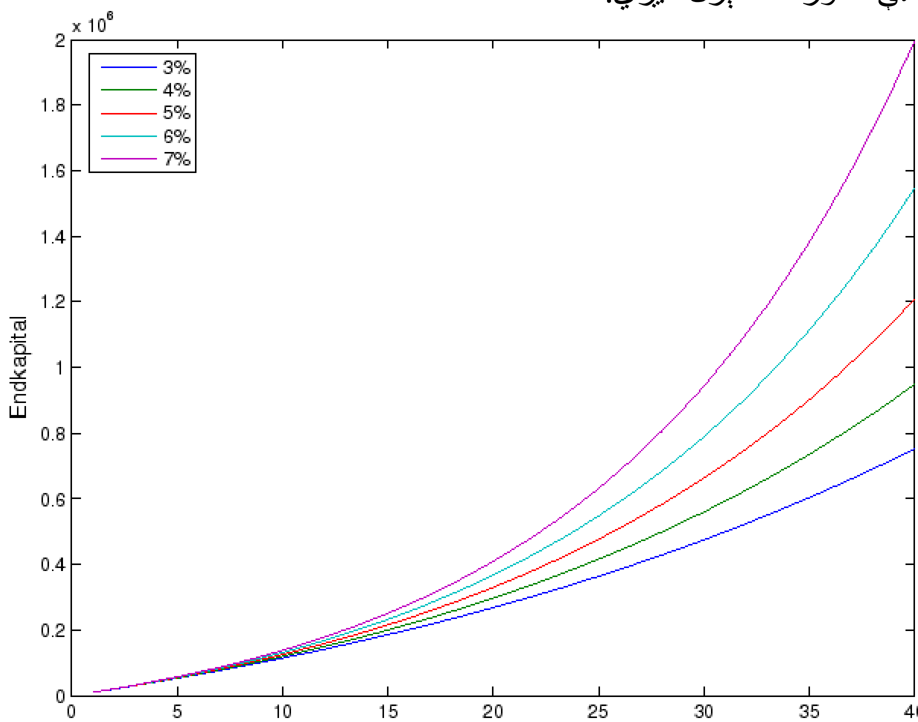
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = \frac{(1+p_j)^n - 1}{p_j} z = \frac{1.07^{12} - 1}{0.07} 10000\,\mathrm{EUR} = 178884.51\,\mathrm{EUR}.$$

د نور لس کاله د ژوند انتظار ته دا د لاندې یوه میاشتنې تقاوت ته بسیا کوي

$$r = \frac{p_m (1+p_j)^{10}}{(1+p_j)^{10} - 1} y = \frac{0.005654 \cdot 1.07^{10}}{1.07^{10} - 1} 178884.51\,\mathrm{EUR} = 2057.17\,\mathrm{EUR},$$

چې د هیپوتیکي(د کورونو جوړولو او اخستلو لپاره ارزانه پور دی) Hypotheken ګټې ته ورته شمېرل کیږي.



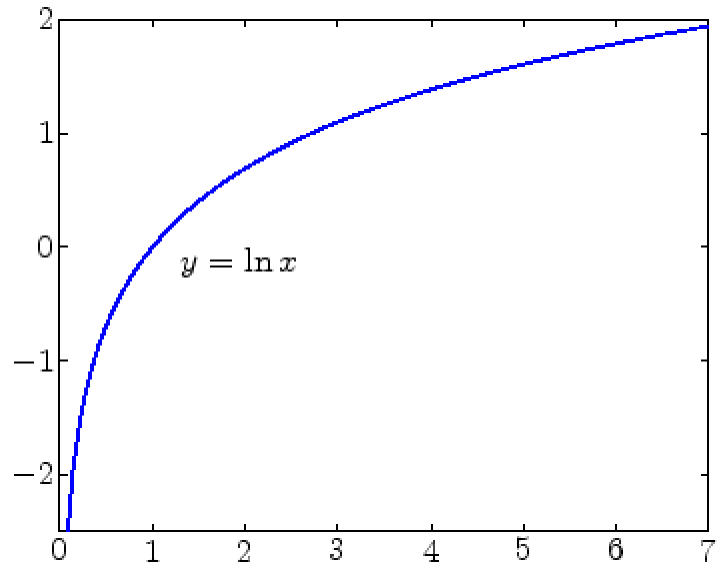
پروت: وخت ،   ولاړ: پای سرمایه
څېره د مختلفو ګټونو لپاره د یوې سرمایې وده ښایي د وخت تېرېدو سره .
پای.

لوګاریتم **Logarithmus**

د لوګارتم تابع د اکسپوننشلتابع معکوس دی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = e^x \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln y.$$



دا $(0,\infty)$ کره مونوتونن جګېدونکی په $\mathbb{R}$ تنظيموي او لاندې تابعمساوات پوره کوي

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y.$$

په ځانګړې توګه دی $\ln(1/x) = -\ln x$.
پای.

د يوې مادې راديواکتيو له منځه تلنه(په زراتو تجزيه کېدنه) د زره کيدنې قانون

$$N(t) = N(0)e^{-kt}$$

له مخې تشريح کيږي. دلته $N(t)$ د ا تمونو ګڼون يا تعداد دی د t په وخت کې او $k>0$ يوه د موادو په واک کې د زره کېدو ثابته ده.

د نيم ارزښت وخت T داسې تعريف دی $N(T)=\frac{1}{2}N(0)$ ، داپه دې معنا چې

$$e^{-kT} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow T = \ln 2/k.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د چرنوبل د ریکتور د ړز یا الوتنې سره یو ه ډینګرۍ یا خولې یا مرخیړۍ په ځنو برخو کې Cäsium-137 د 2000Bq/kg (Bq/kg د رادیواکتیویتی د فعالیت د کچونې لپاره یوون دی) سره د نیمارزښت وخت 29.7 کلونو په وړانګو خور شو.

$$k = \frac{\ln 2}{29.7} = 0.023$$

او له دې سره

$$N(t) = 2000\exp(-0.023t).$$

په المان کې پوله ارزښت .600Bq/kg کې پروت د ی. د

$$600 = 2000\exp(-0.023t) \Rightarrow -0.023t = \ln(0.3) \Rightarrow t \approx 52$$

له امله داپوله ارزښت د ورکړشوو ارزښتونو لپاره ۵۲ کالو وروسته کښته – یا کمیږي.

نیم وخت ارزښت :

Cäsium-134	2 Tage
Cäsium-137	29.7 Jahre
Jod-131	8 Tage
Kohlenstoff-14	5730 Jahre
Kalium-40	1.2 Mrd. Jahre
Plutonium-239	24000 Jahre
Radon-222	3.8 Tage
Radium-226	1600 Jahre
Strontium-90	28 Jahre
Uran-235	800 Mio. Jahre
Uran-238	4.5 Mrd. Jahre

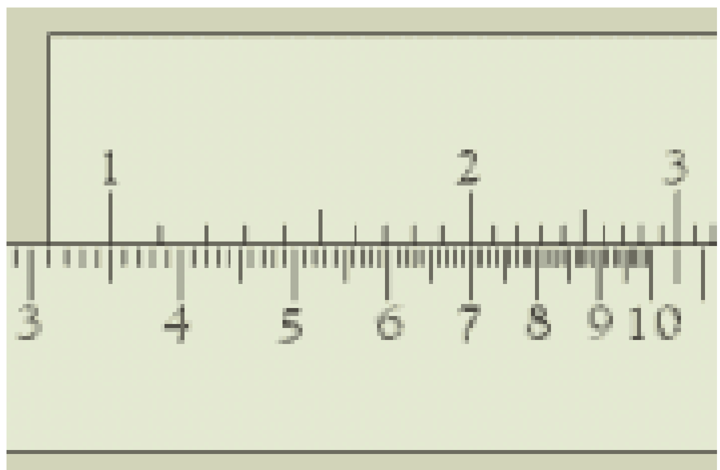
پای.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لوګاریتم دا خوی لري، چې د دوه ګڼونو یا عددونود لوګاریتمونو جمعه د دې د دې دوه عددونو د ضرب د لوګاریتم سره برابر دی:

$$\log x + \log y = \log(xy).$$

په دې توګه کېدی شي چې دوه کرښي(خط کشونه) د لوګاریتم کچوونو سره یو په بل کیږدي او لاس ته راوړنه د دېعددونو جمعه نه بلکه ضرب دی.(د شمېرکښوونې (چې یوې او بلې لورته کښیږي) اصول)



د پورته ښېرې ښخه د بېلګې په توګه ګورو چې $3.5 \cdot 2 = 7$ دی. د لته د پورته کچوونې ۱ د لاندې سکالا په3.5 (لومړی ضریب) کېښول کیږي. بالاخره ۲ د پورته سکالا (دویم ضریب) د ضرب لاس ته راوړنه په لاندې سکالا لوستل کیږي.

پای.

ټولیز توان توابع او لوګاریتم

د $a > 0$ لپاره تعریفوو

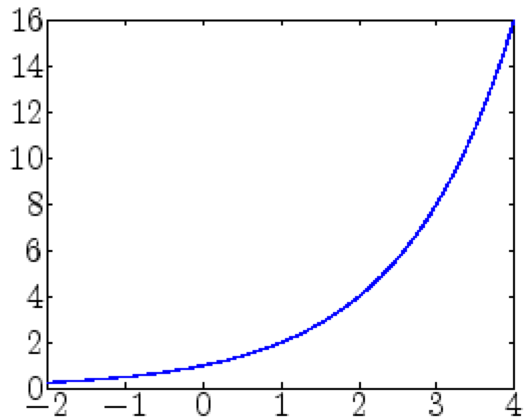
$$y = a^x = \exp(x \ln a)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

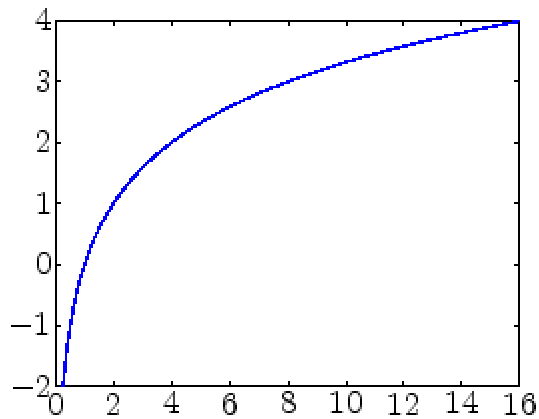
د معکوس یا په څټ تابع سره

$$x = \log_a y, \quad y > 0.$$

په ځانګړې توګه سړی لیکي $\log = \log_{10}$ د لوګاریتم لپاره د 10 بنسټ سره او $\mathrm{ld} = \log_2$ د دوال لوګاریتم لپاره.



$f(x) = 2^x$



$f(x) = \mathrm{ld}(x)$

د ودې قانون

$$y = a^x, \quad a > 0$$

کیدی شي نیم لوګاریتمي دکښل شي. دلته په یوه محور x او په بل محور $\log y$ لیکل کیږي. د x او $\log y$ ترمنځ نسبت د ودې قانون له مخې کرښیز دی او رسم شوې کرښه لاندې جګړ.الی لري

$$m = \log a.$$

یو بل امکان دادی، چې په دواړو محورونو یو لوګاریتمي سکالا وکاروو. دا د بېلګې په توګه د ناټیکاوي ارزښت لپاره

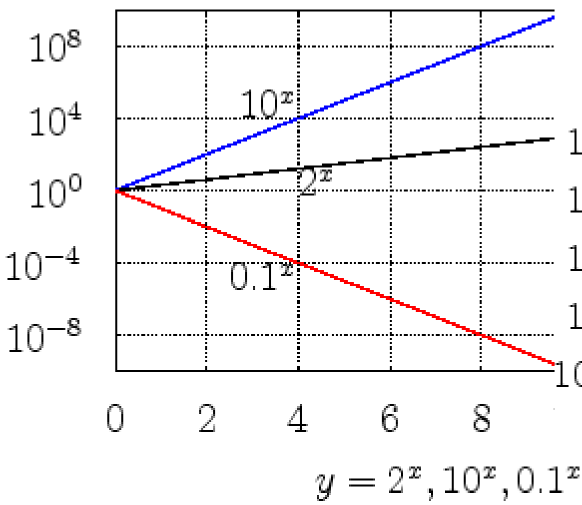
$$\varepsilon \approx cn^{-k}$$

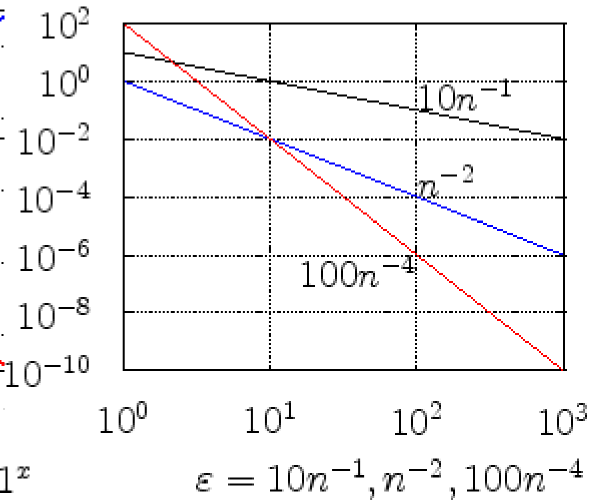
مناسب ده. دا چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\log \varepsilon = \log c - k \log n \,,$$

د کرږې کميز يا منفي چګېدنه ورکوي.





د توان او لوګاريتم لپاره شميرقوانين

Rechenregeln für Potenzen und Logarithmen

د اکسپوننشل – او لوګاريتمي توابعو د تعريف او تابع مساواتو څخه لرو

$$\begin{aligned} a^{s+t} &= a^s\, a^t, & \log_a x + \log_a y &= \log_a(xy), \\ a^{s-t} &= a^s / a^t, & \log_a x - \log_a y &= \log_a(x/y), \\ (a^s)^t &= a^{st} & \log_a x^t &= t \log_a x \,. \end{aligned}$$

برسېره پردې د دوه مختلفو بنسټونو ت رمنځ د شمېربدلون لپاره باور لري

$$\log_b x = \log_b a \; \log_a x \,.$$

په ځانګړې توګه دی

$$\log x = (\log e) \ln x \,.$$

ليکونکي: هيوليک، کنوپف

که کيږدو

$$x = a^s, \quad y = a^t,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو د توان او لوګاريتم د فرمولونو ورته وال يا برابرارزښتوالی روښانه دی. لومړي دواړه کتمتوالي د تابع مساواتو څخه لاس ته راځي او دريم له تعريف $b^r = e^{r \ln b}$ څخه.:

$$(a^s)^t = (e^{s \ln a})^t = e^{st \ln a} = a^{st}.$$

د شميبدلون فرمول برابرارزښت دی و لاندې ته

$$x = b^{\log_b a \log_a x},$$

او د ساده وني له لارې ښی اړخ لاس ته راځي.
ليکونکي: هيوليګ، کنوپف

لاندې دواړه بېلط دشمېقوانين تشريح کوي يا په ګوته کوي.
(i)

$$) - 2\ln(2) = \ln(2^2) + \ln(x^2) - 2\ln 2 = 2\ln 2 + 2\ln x - 2\ln 2 = 2\ln x$$

(ii)

$$\log_4(x^2) +$$

ld

$$(2x) = 2\frac{\ln x}{\ln 4} + 1 + \frac{\ln x}{\ln 2} = 1 + \frac{\ln x}{\ln 2} + \frac{\ln x}{\ln 2} = 1 + 2\frac{\ln x}{\ln 2}$$

های پرابول تابع **Hyperbelfunktionen**

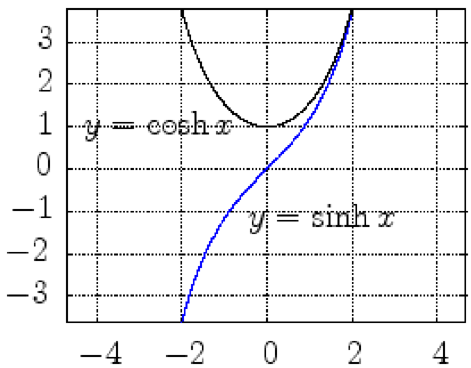
تريګونومتريکي توابعو ته ورته تعريفوو

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

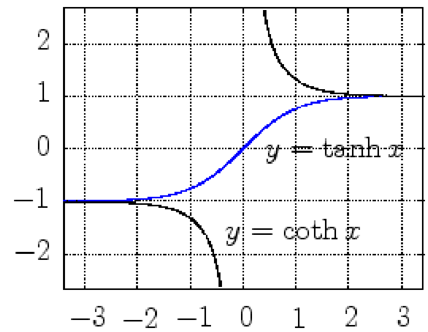
همداسې

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = 1/\coth x.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



sinh x, cosh x

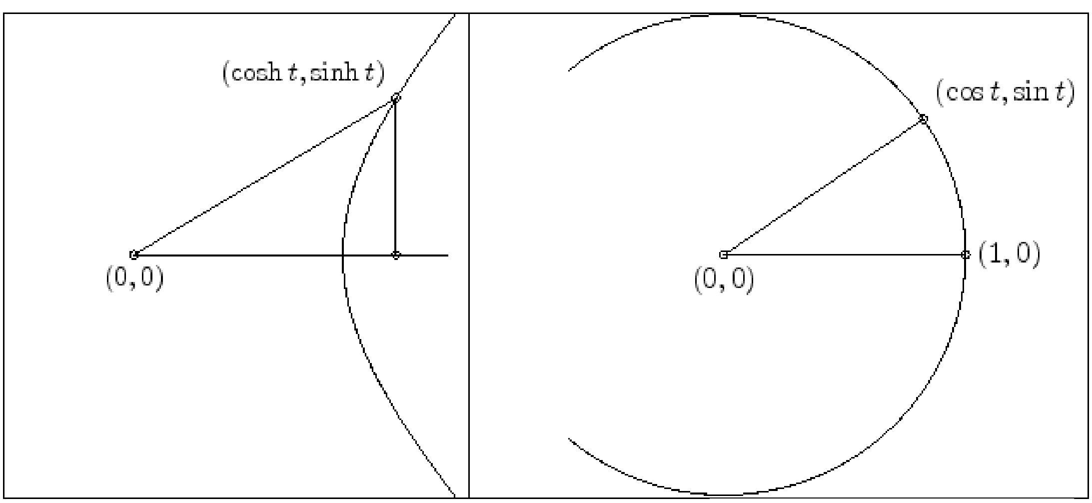


tanh x, coth x

معکوس یا په خټ توابع اکسپلیځیت یا په روښانه توګه ورکول کيږي:

$$\begin{aligned} \operatorname{arsinh} x &= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), & -\infty < x < \infty \\ \operatorname{arcosh} x &= \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), & 1 \leq x < \infty. \end{aligned}$$

د هایربول تابع نوم د لاندې کتمتوالي خخه رانیول شوی



$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

دا روښانه کوي، چې د $t \mapsto (\cosh t, \sinh t)$ له لارې د هایرابول یو ښاخ پارامتري کيږي..

له $y = (e^x - e^{-x})/2$ خخه د e^x سره ضرب له لارې لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(e^x)^2 - 2ye^x - 1 = 0$$

او له دې سره

$$e^x = y + \sqrt{y^2+1}.$$

د مربع مساوات دويم حل د $e^x > 0$ له امله بايد په پام کې ونه نيول شي. د لوګاريتمي کوني څخه لاس ته راځي

$$\operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}).$$

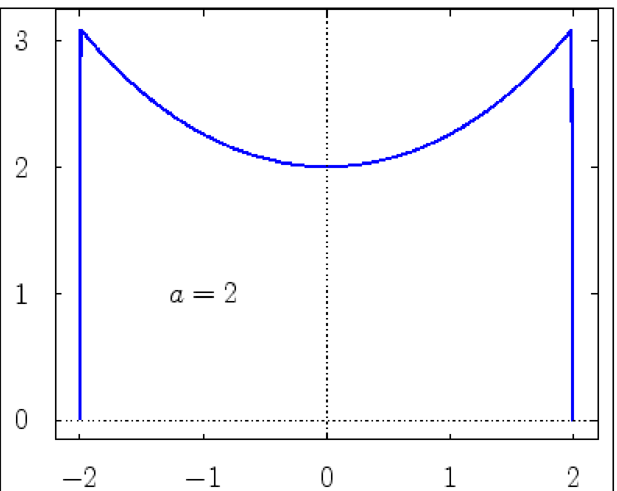
د کوساين هوپربوليک د فرمول څخه پورته ته په ورته توګه لاس ته ره اځي

$$(e^x)^2 - 2ye^x + 1 = 0$$

او له دې سره

$$e^x = y + \sqrt{y^2-1}.$$

د لوګاريتم کوني له لارې د په ښت- يا معکوس تابع فرمول لاس ته راځي.
ليکونکي: هيوليک، کنوپف

د يوه هايپارابول په پای ټکو کلک شوي سيم ځکوالی h د خپل وزن له لارې اغيزمنشوی دننی شپانونګ a دی $h(x) = a\cosh(x/a).$ تابع h د لاندې دفرنځيال مساوات حل دی. $h'' = \frac{1}{a}\sqrt{1+(h')^2}.$	

هايپارابوليکی کتمتوتوالی
Hyperbolische Identitäten

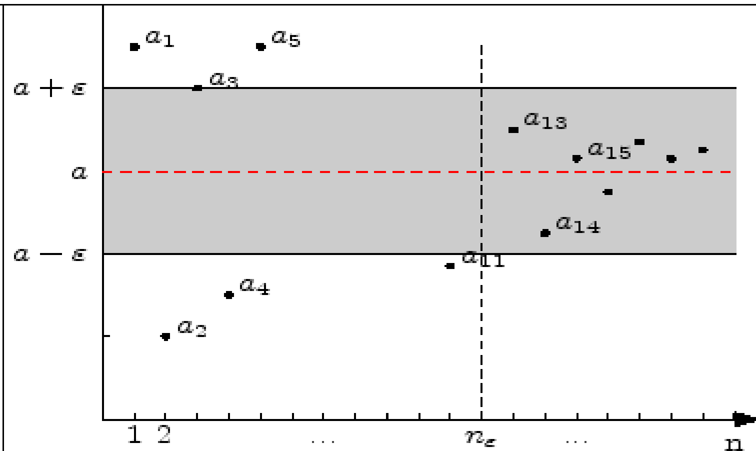
تريګونومتريکي توابعو ته ورته کتمتوالی باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{aligned}
\sinh(-x) &= -\sinh x \\
\cosh(-x) &= \cosh x \\
\sinh(x+y) &= \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y \\
\cosh(x+y) &= \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y \\
\cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1\,,
\end{aligned}$$

چې د تعریفونوو له لارې کېدی شي نازک شي

د یوې پرلپسي (ترادف)پوله ارزښت
Grenzwert einer Folge

یوه پرلپسي $(a_n) = a_1, a_2, \dots$ د یوه پوله ارزښت a په لور هخیږي، $a = \lim_{n\to\infty} a_n,$ که هر $\varepsilon > 0$ ته یو n_ε داسي شتون ولري د $\lvert a_n - a \rvert < \varepsilon$ $n > n_\varepsilon$ سره د ټولو لپاره	

دا $a_n \to a$ لیکدود هم د یوې پرلپسي د کونورګنت یا پولې ته تلو لپاره کارول کیږي .

(c) ketabton.com: The Digital Library

که (a_n) پوله ارزښت ونه لري، نو پرلپسې ديورګنت يا پولې ته نه تلونکې بللکيږي.

پای.

د دې لپاره چې د کونورګنت-قضيه وښايو يعنې $|a_n - a| < \varepsilon$ د $n > n_\varepsilon$ لپاره

وښايو، کيدی شي لومړی دا افاده $|a_n - a|$ د تخمين کونې له لارې پورته لور ته ساده کړو او بيا داسې په نامه نامساوات د n پسې حل کړو.

که دا د بيلګې په توګه د لاندې پرلپسې لپاره وکارول شي

$$a_n = \frac{n^2+n}{n^2+1},$$

کومه چې پوله ارزښت $a = 1$ لري، يو ممکنه تخمين دی

$$|a_n - a| = \left|\frac{n^2+n}{n^2+1} - 1\right| = \left|\frac{n-1}{n^2+1}\right| \leq \frac{n}{n^2+1},$$

دا چې $|n-1| \leq n$ د ټولو $n \geq 0$ لپاره . پرته له دې $n^2+1 > n^2$ دی او له دې سره $\frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}$ هم . نو له دې لاس ته راځي

$$|a_n - a| \leq \frac{n}{n^2+1} \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

له دې سره $\frac{1}{n} < \varepsilon$ دی، بايد $n > \frac{1}{\varepsilon}$ وي. که n_ε يو طبيعي عدد چې له $\frac{1}{\varepsilon}$ لوی وي ، وټاکو ، نو د ټولو $\varepsilon > 0$ او ټولو $n > n_\varepsilon$ لپاره باور لري.

$$|a_n - a| < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پرلپسې
$1, q, q^2, \ldots$

د $|q| < 1$ لپاره يو پوله ارزښت 0 لري او د $|q| > 1$ يا $q = -1$ لپاره
ديورګنت دی

د پرلپسيو د پوله ارزښت شميرنې لارې
Rechenregeln für Grenzwerte bei Folgen

د پولې ته تلونکې پرلپسې (a_n) او (b_n) لپاره د پولو a او b سره باور لري:

- $\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$
- $\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = ab$
- $\lim_{n\to\infty} (a_n / b_n) = a/b$, falls $b \neq 0$
- ليکونکی: اپپ، هيوليګ

زياتون او کمښت يا کمون : د درېګوډي نابرابرون څخه لاس ته راځي
$|(a_n \pm b_n) - (a \pm b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| \to 0.$

ضرب يا ځل: دا چې a_n محدود ده، لرو

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \leq |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| \to 0.$$

وېش: د ټول $n > n_0$ لپاره دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$0 \notin \left(b - \frac{|b|}{2}, b + \frac{|b|}{2}\right) \ni b_n \,,$$

او له دې لاس ته راځي

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b - b_n}{bb_n}\right| \leq \text{const}\; |b_n - b| \to 0,$$

دا په دې معنا چې $1/b_n \to 1/b$. د a_n/b_n پولې ته تلنه دهمدا اوس ښوول شوي د پولې ته تلونکو پرلپسيو ضرب قانون څخه لاس ته راځي.

پای.

که دپرلپسيو توکي د n راشنل تابع وي، $a_n = \frac{p(n)}{q(n)}$ ، نو کيدی شي پوله ارزښت د خورا جګ توان د لنډونې څخه پيداکړی شو. د بيلګې په توګه دی

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n - 2n^2}{3n^2 + 4n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n - 2}{3 + 4/n} = -\frac{2}{3}\,.$$

په ټوليزه توګه د صورت-درجې j او مخرج-درجې k لپاره باور لري

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_j n^j + \cdots p_0}{q_k n^k + \cdots q_0} = \begin{cases} 0, & \text{für } j < k \\ \frac{p_j}{q_k}, & \text{für } j = k. \end{cases}$$

د $j > k$ لپاره پرلپسې پولې ته نه ځي يعنې ديورګنت ده.

پای.

دمعلومو پوله ارزښتونو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e, \quad \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$$

په مرسته لاس ته راځي

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2-1)^n}{n^{2n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\left(\frac{n-1}{n}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e\cdot\frac{1}{e} = 1.$$

په پام کې نيسو، چې

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \neq \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^n = 1 \ ,$$

ځکه چې د ضرب د ضريبونو ګڼون يا تعداد ثابت نه دی.

ليکونکی: هيوليک، کرايڅ

د کوشي قضيه Cauchy-Kriterium

يوه پرلپسې (a_n) ټيک هلته پولې ته ځي، که د ټولو $\varepsilon > 0$ لپاره يو n_ε شتون ولري، داسې چې

$$|a_j - a_k| < \varepsilon$$

د ټول $j, k > n_\varepsilon$ لپاره باور ولري.

د کوشي په نوم نومول شوي قضيې په مرسته د پوله ارزښت ثبوت بې د پوله ارزښت پېژندلو ممکن دی.

ليکونکی: اېپ، هيوليګ

د کوشي – قضيې اړينوالی د پوله ارزښت له تعزيف څخه لاس ته راځي:

$$a = \lim a_n \iff |a_m - a| < \varepsilon \quad \text{für} \quad m > m_\varepsilon$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که کیږدو $n_\varepsilon = m_{\varepsilon/2}$ ، نو لرو

$$|a_j - a_k| \le |a_j - a| + |a - a_k| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

د ټول $j, k > n_\varepsilon$ لپاره، حه چي د ښوولو وو.

دا چي شرط پوره کېدونکی هم دی، ستونځمن دی چي و يې ښايو، او دا د حقيقی عددونو په پوره والي ولاړ دی.

پای.

يوه رکورزيو تعرف شوې پرلپسي (a_n) کېدی شي زيات وخت د کوشي-قضيه د تخمينونې له لارې

$$|a_{n+1} - a_n| \le cq^n$$

د $q \in [0,1)$ سره يې ټيکوالی و ازمايل شي. داسې د هندسي پولې ته تلنه د $j < k$ لپاره راکوي

$$|a_j - a_k| \le |a_j - a_{j+1}| + |a_{j+1} - a_{j+2}| + \quad \dots \quad + |a_{k-1} - a_k| \le cq^j \left(1 + q + q^2 + \dots\right) \le \frac{cq^j}{1-q}.$$

ښی اړخ د $< \varepsilon$ لپاره ده د $j, k > n_\varepsilon = \ln \frac{\varepsilon(1-q)}{c} / \ln q$ لپاره ، نو د کوشي قضيه پوره ده. د ځرګند، د

$$a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}, \quad a_0 = 1,$$

له لارې رکورزيو تعريف شوې پرلپسي a_n د کونورګنځ قضيې د ثبوت لپاره استعمالوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ایندکشن پیل : $(n = 1)$: نامساوات

$$|a_1 - a_0| \leq cq$$

باور لري، که $c = |a_1 - a_0|/q$ کېښول شي.

د ایندکشن پای $(n \to n+1)$: شړی اټکل شوی کمښت یا تفریق د

$$|a_{n+1} - a_n| = |\sqrt{2 + a_n} - \sqrt{2 + a_{n-1}}| = \left|\frac{a_n - a_{n-1}}{\sqrt{2 + a_n} + \sqrt{2 + a_{n-1}}}\right|.$$

په بڼه ښيي.

د اندکشن د نیونې له مخې ښی اړخ $\leq \frac{1}{2\sqrt{2}}cq^n$ دی او د ټاکنې سره
$q = 1/2\sqrt{2} \leq cq^{n+1}$

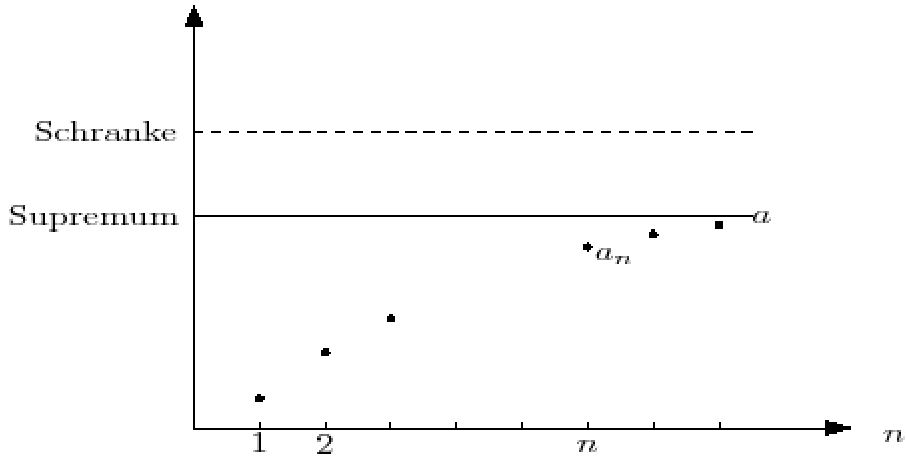
لکه چې غوښتل مو.

پای.

یو غږېزه پولې ته تلنه **Monotone Konvergenz**

یو پرلپسي (a_n) همغږیز جګېدونکي $a_{n+1} \geq a_n$ همداسي همغږیز
ټیټېدونکي $a_{n+1} \leq a_n$ بلل کیږي ، که همداسي وي د ټولو n لپاره. دا کره همغږیز
جګېدونکي همداسي کره همغږیز ټیټېدونکي بلل کیږي ، که $a_{n+1} > a_n$
همداسي $a_{n+1} < a_n$ وي د ټولو n لپاره.

(c) ketabton.com: The Digital Library



یوه رابنده یا محدوده ، د $n > n_0$ لپاره همغږیز جګېدونکي یا ټيټېدونکي پرلپسي (a_n) پولې ته تلونکي ده. پوله ارزښت يې د پرلپسي توکو a_n $n > n_0$, سوپريموم همداسې اینفیموم دی.

لیکونکی: اپپ، هیولیګ

د یوې مونوتون جګېدونکې پرلپسې لپاره د سوپرېموم د تعریف سره، چې د ټولو $\varepsilon > 0$ لپاره یو n_ε شتون لريو د کوم لپاره چې باور لري

$$a - \varepsilon < a_{n_\varepsilon} \le a = \sup_{n > n_0} a_n$$

د همغږیزوالي په بنسټ دی

$$a - \varepsilon < a_{n_\varepsilon} \le a_n \le a \quad , \text{für} \quad n > n_\varepsilon ,$$

نو $a_n \to a$.

د مونوتون ټيټېدونکي پرلپسي لپاره په ورته توګه دلایل راوړل کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پرلپسي پولې ته تلنه

Die Konvergenz der Folge

$$a_n = (1+1/n)^n, \quad n = 0, 1, ...,$$

د اويلر عدد e په لور کېدی شي د مونوتون کونورګنت حملې په بنسټ و ښوول شي.
دواړه وړاندنيونې(فرضيې) کېدی شي د بېنوم درسي جملې په مرسته و ښوول شي.

(i) رابنديدنه يا محدوديت: له

$$a_n = (1+1/n)^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \binom{n}{3}\frac{1}{n^3} + ...$$

او

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k} \leq \frac{n^k}{1\cdot 2\cdots 2}$$

لاس ته راځي

$$a_n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... \leq 3$$

(ii) همغږيزوالی: سړی a_{n+1} هم د بېنوم له جملې سره شماري:

$$a_{n+1} = 1 + \binom{n+1}{1}\frac{1}{n+1} + \binom{n+1}{2}\frac{1}{(n+1)^2} + \binom{n+1}{3}\frac{1}{(n+1)^3} + ...$$

که دا په (i)کې د a_n انځورونې سره پرتله کړي، نو سړی کره کوي، چې اړونده ترمونه لوی دي:

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k}\frac{1}{n^k}$$

$$\leq \frac{(n+1)\cdot n\cdots(n-k+2)}{1\cdot 2\cdots k}\frac{1}{(n+1)^k} \quad =$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \binom{n+1}{k} \frac{1}{(n+1)^k}.$$

دا له نامساوات څخه لاس ته راځي

$$\frac{n-j}{n} \leq \frac{n+1-j}{n+1}$$

د يوګونوو ضريبونو لپاره. داچې د a_{n+1} لپاره زياتون يا جمعه لا ترم

$$\frac{1}{(n+1)^{n+1}}$$

لري لاس ته راځي

$$a_n < a_{n+1}.$$

نارېښتونی پوله ارزښت **Uneigentliche Grenzwerte**

يوه پرلپسي (a_n) دا نارېښتونی پوله ارزښت ($-\infty$) ∞ لري، که د ټولو $a > 0$ لپاره يو n_a شتون ولري، داسې چې

$$a_n > a \;\; (< -a)$$

باور ولري د ټولو $n > n_a$ لپاره. پرلپسي چې نارېښتونی پوله ارزښت لري، دا ټاکلې ديورګنت –يا پولې ته نه تلونکې پرلپسې هم بلل کيږي.
ليکونکي:اپپ، هيوليک، ويپپر

د دې لپاره چې وښايو ، چې

$$a_n = \frac{n!}{2^n} \to \infty,$$

دا په دې معنا چې

$$\frac{n!}{2^n} > a$$

د $n > n_a$, لپاره، دا a_n سړی د يوې ساده افادې يا وېينې له لارې کښته لور ته تخمينوي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a_n = \frac{1 \cdot 2 \cdots n}{2 \cdot 2 \cdots 2} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{2}.$$

له دې سره له $\frac{n}{4} > a$ همداسې له $n > 4a = n_a$ لرو $a_n > a$

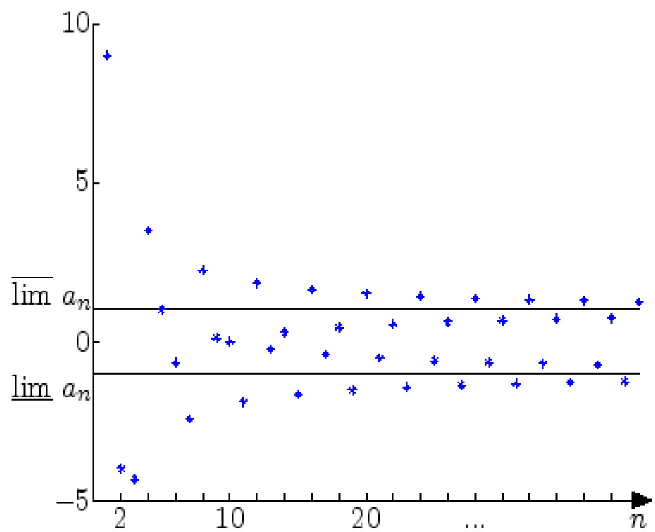
پوله اينفريور او پوله سوپريور(کښته - او پورته پوله ارزښت)

Limes Inferior und Limes Superio

د هرې پرلپسې (a_n) لپاره، په ناصلي حالت کې uneigentlichen Sinn ، يو پوله ارزښت شتون لري.

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \underline{a_n}\,, \quad \underline{a_n} = \inf_{k\geq n} a_k$$

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \overline{a_n}\,, \quad \overline{a_n} = \sup_{k\geq n} a_k$$



لکه په خيره کې چې شوول شوی دی، پرلپسې (a_n) د همعريزې پرلپسې $(\underline{a_n})$ او $(\overline{a_n})$ له لارې يا نوره هم ښه له لورې رابندې دي:

$$\underline{a_n} \leq a_n \leq \overline{a_n}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که پوله انفریور او پوله سوپریور یو په بل پریوځي، نو پرلپسي (a_n) پولي ته تلونکې ده او لرو

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n \,.$$

لیکونکي: اپپ ،هیولیگ

د پولي اینفریور او پولي سوپریور شتون د همهغږیز پولي ته تلني جملي له لارې ترلې لاس ته راځي، خکه چې پرلپسي

$$\underline{a}_n = \inf_{k\geq n} a_n \ , \quad \overline{a}_n = \sup_{k\geq n} a_n$$

همغږیز جګیدونکې همداسې همغږیز ټیټیدونکې دي.
په روښانه توګه باور لري

$$\underline{a}_n \leq a_n \leq \overline{a}_n \,.$$

که پوله اینفریور او پوله سوپریور همغه ازښت a ولري، نو لا سته راځي

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$$

د $n > n_\varepsilon$ لپاره، نو $a_n \to a$.

پرتله کوونکې قضیه **Vergleichskriterium**

که د $\lim a_n = a$ او $\lim c_n = c$ سره د پوره کوچني n لپاره
$a_n \leq b_n \leq c_n$ باور لري، نو دی

$$a \leq \underline{\lim}\, b_n \leq \overline{\lim}\, b_n \leq c.$$

په ځانګړې توګه له $a = c$ د پرلپسي (b_n) کونورګنت لاس ته راځي:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = a = c \,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی غوښتنه ساده ده، ځکه چې نابرابرون $\leq$ د پولې ته تګ له امله ساتلی پتیري:

$$\inf_{k\geq n} a_n \leq \inf_{k\geq n} b_n \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} a_n = \underline{\lim}\, a_n \leq \underline{\lim}\, b_n .$$

په ورته توګه لرو $\overline{\lim}\, b_n \leq c$.

که پوله ارزښتونه سره برابر وي ($a = c$) ، نو باور لري

$$a - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < a + \varepsilon$$

د $n > n_\varepsilon$ لپاره. له دې سره لرو $b_n \to a$.
پای.

پوله ارزښت

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

په لاندې نامساوات باندې د پرتلې قضیې استعمال له لارې لاس ته راځي

$$1 \leq \sqrt[n]{n} \leq 1 + \frac{2}{\sqrt{n}} .$$

دلته ښی نابرابرون د بینوم د فرمول څخه باوري دی:

$$1 \leq n \leq 1 + n \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{4}{n} + \cdots$$

په تولیزه توګه د ضرب قانون څخه لاس ته راځي

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^k} = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n}\right)^k = 1$$

د $k \in \mathbb{N}$ لپاره . د کم نظم ترمونو د په زیاتوالي له امله پوله ارزښت ساتلی پاتیږي. د یوه پولینوم

$$p(n) = a_k n^k + \cdots + a_0 \;,\; a_k > 0$$

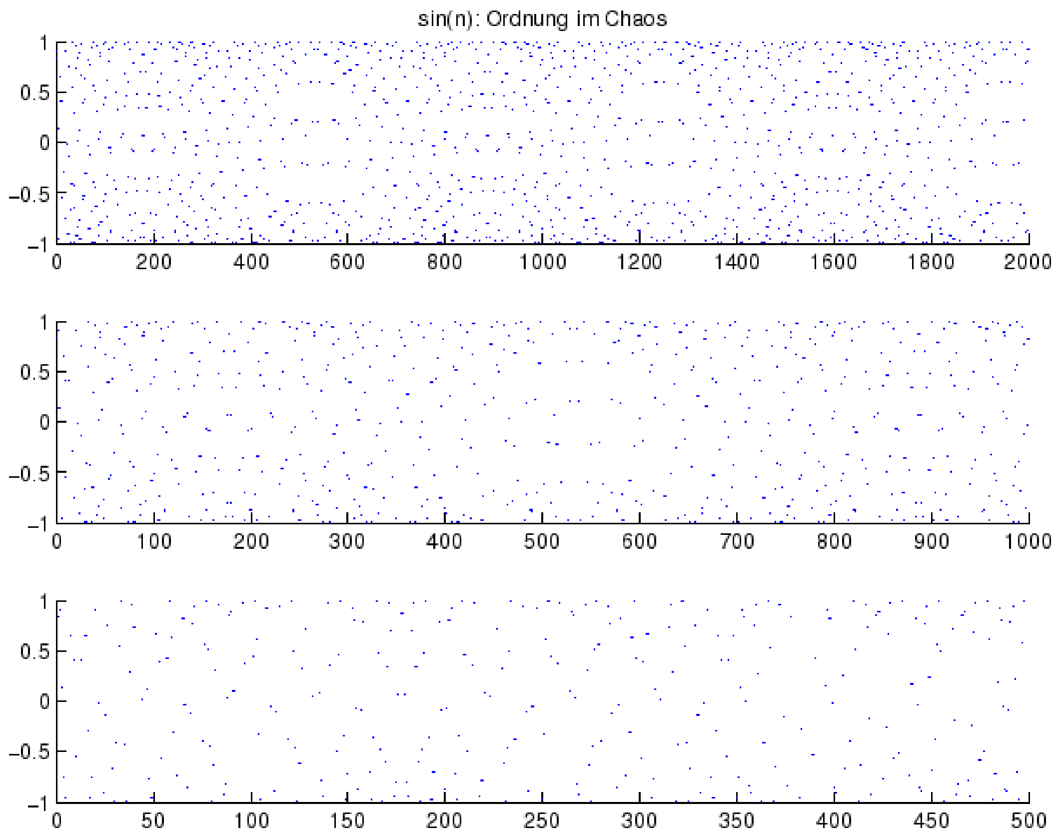
لپاره هم $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p(n)} = 1$ دی .

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوې پرلپسي پنډغالي ټکی **Häufungspunkt einer Folge**

یوه پرلپسي (a_n) پنډغالي ټکی a لري، که هر انټروال $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ دپرلپسي ناپای ډېر توکي خوندي ولري. دې ته ورته د یوې برخه پرلپسي باور لري، چې a ته ځي. په ځانګړې توګه یوپوله ارزښت د پرلپسي بنډغالي ټکی هم دی.

څېره پرلپسي $(\sin n)_{n\in N}$ ښايي.



سړی په نږدې توګه د پرلپسي يا ترادف توکو a_n برابروېشنه په انټروال $[-1,1]$ کې پيژني. په ريښتوني ښول کېدی شي، چې په $[-1,1]$ کې هر ټکی د پرلپسي پنډغالي ټکی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوې پرلپسې يا ترادف (a_n) د پندغالي ټکي د ټاکلو لپاره بايد کونورګنت برخه پرلپسې و پيژندل شي.
د بيلګې لپاره

هغه دا دي

$$a_n = \frac{n\sin(n\frac{\pi}{2})}{n+\sin(n\frac{\pi}{2})}$$

$$b_k = a_{2k} = \frac{0}{k}$$

$$c_k = a_{4k+1} = \frac{(4k+1)}{(4k+1)+1}$$

$$d_k = a_{4k+3} = \frac{-(4k+1)}{(4k+1)+1}.$$

له دې سره پنډغالي ټکی لاس ته راځي

$$\lim b_k = 0, \lim c_k = 1, \lim d_k = -1$$

ورهولست- - يا فرهولست- مودل **Verhulst-Modell**

يو بيلجيمي شميرپوه وو : Pierre-François **Verhulst** [vəɾˈhʏlst]
(* 28. Oktober 1804 in Brüssel; † 15. Februar 1849 ebenda)

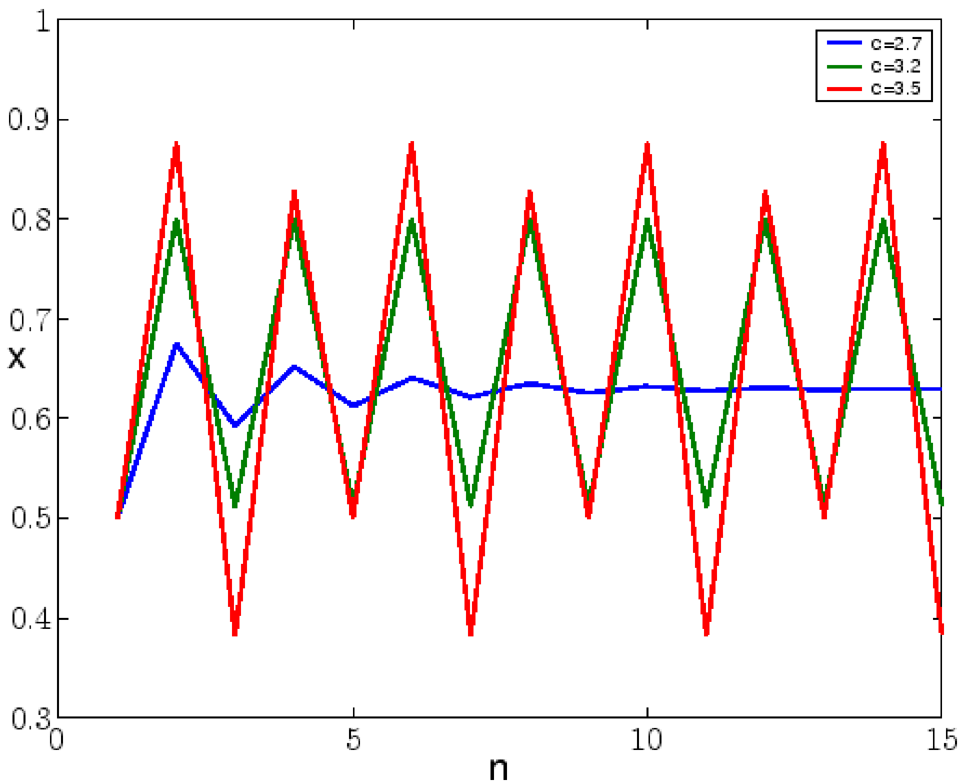
ريکورژن(په څټ ځغاستل) Rekursion

هغه فنکشن، چې د خپل ځان له خوا پيژند لري يا تعريفيږي

$$x_{n+1} = cx_n(1-x_n)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $c \in (0,4]$ سره د نورمال شوي خلکو ګڼوالي x_n وده په ګوته کوي. يو څو تيوپيکي بيلګې د ا لاندې څېره ښايي

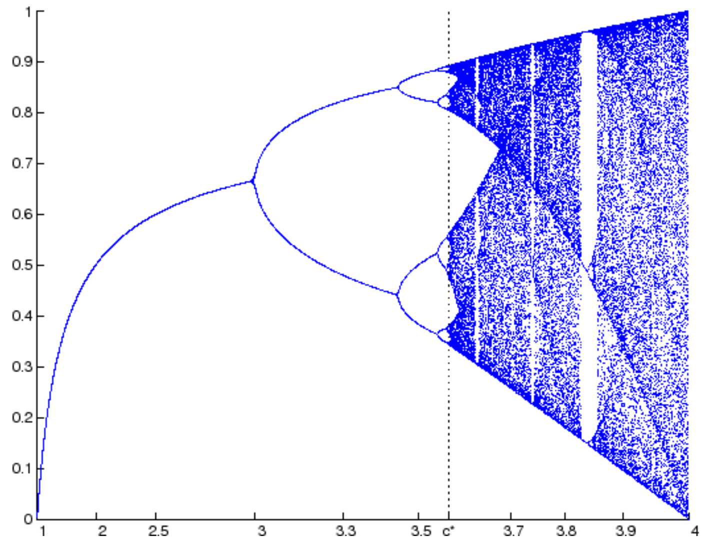


د $c \leq 3$ لپاره x_n د $n \to \infty$ لپاره لاندې پولې ارزښت ته ځي

$$x_* = \frac{c-1}{c}.$$

د $c > 3$ لپاره سړی اوسځليشن ګوري. که پارامتر تل لوی شي، نو د پېډغالي - ټکو x_* ګڼون يا تعداد دوه برابره کيږي د افاظ پارامتر ارزښتونو c_i څخه اوښتلو باندې يعني له دې نور زياتيدلو باندې . دا په لاندې څېره کې کښل شوی دی، په کوم کې چې د ټکي x_* د c -محور پورته لور ته ځای په ځای شوي دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



پوله ارزښت

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n - c_{n-1}}{c_{n+1} - c_n} = 4,69920166\ldots$$

داسي په نامه د انځوروني ثابته ده، چې دا زیات وخت د ځانګو کولو پرابلم کې رول لوبوي.

له پورته ځیرې څخه روښانه کیږي، چې ایتیشن د

$$c > c^* = \lim_{n\to\infty} c_n$$

لپاره یوګډوډیز chaotisches Verhalten حالت ښایي

د پيPi رکورزیو اپروکسیمیشن
Rekursive Approximation von Pi

د a_n او b_n نیم اوږدوالی چې د یوې یوونګردی یا واحد داېرې د $(6 \cdot 2^n)$ -ګوډونو
یا کونجونو په باندې او په کې یعنې په دننه اودباندې لاندې ریکورژن پوره کړي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}\,, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}b_n}\,, \quad a_0 = 2\sqrt{3}\,,\, b_0 = 3\,,$$

د $\pi = 3.1415926535897932\ldots$ په مرسته اپروکسیمي کیدی شي.
دا فرمول د یوهان فریدریش پفاف Johann Friedrich Pfaff (1765-1825) له خوا په 1800 زکال میندل شوی.
ارښیمیدس Archimedes (287-212 v. Chr.) د 96 –ګوټونو ($n = 4$) او اټکل یا تخمین سره اړیکي

$$3.140845\ldots = \frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7} = 3.142857\ldots$$

ومیندلې یا ترې لاس ته راوړې.

د ګردۍ ګڼ یا عدد π له د یو میلیارد ځایونو ډېر شمیرل شوی دی. لاندې جدول د تاریخي ودې څخه یوه کاپی راکوي.:

Wert	korr. Stellen		Jahr	Autor
				Bibel (1. Könige 7:23)

Autor	Jahr		korr. Stellen	Wert
Bibel (1. Könige 7:23)	550	v. Chr.	0	3
Babylonier	2000	v. Chr.	1	3+1/8
Archimedes	250	v. Chr.	3	223/71 $< \pi <$ 22/7
Liu Hui	263		5	
Tsu Ch'ung Chi	480		7	
Al-Kashi	1429		14	

(c) ketabton.com: The Digital Library

Romanus	1593		15	
Van Ceulen	1596		20	
Van Ceulen	1615		35	
Sharp	1699		71	
Machin	1706		100	
Rutherford	1824		152	
Strassnitzky/Dase	1844		200	
Shanks	1874		527	
Smith/Wrench	1949		1 120	
Reitwiesner u.a.	1949		2 037	
Genuys	1958		10 000	
Shanks/Wrench	1961		100 265	
Guilloud/Filliatre	1966		250 000	
Guilloud/Dichampt	1967		500 000	
Guilloud/Bouyer	1973		1 001 250	
Kanada/Yoshino/Tamura	1982		16 777 206	
Kanada/Tamura/Kubo u.a.	1987		134 217 700	
Chudnovskys	1989		1 011 196 691	

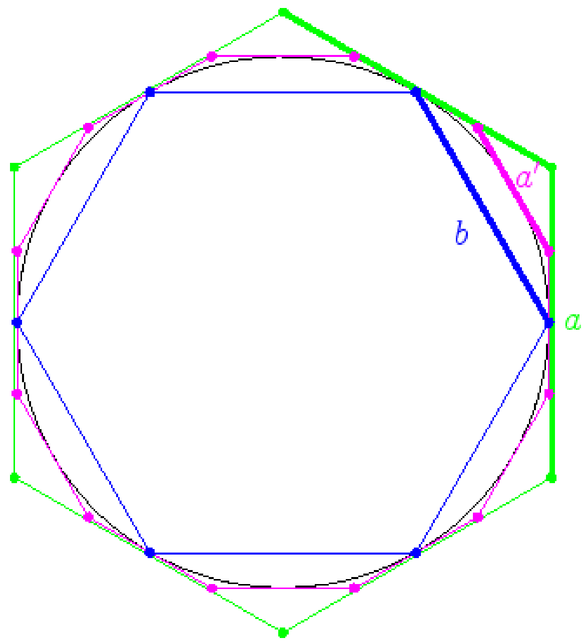
پای.

د ج.ف. پفاف ریکورزیون په ساده هندسي پامکوني باندې ولاړ دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

د وړانګي (تالس) جملې له مخې د a_n لپاره لاس ته راځي:

$$a' : b = \left(\frac{a}{2} - \frac{a'}{2}\right) : \frac{a}{2} \Leftrightarrow a'a = ba - ba' \Leftrightarrow a' = \frac{ab}{a+b}\,.$$



که $k_n = 3 \cdot 2^n$ د ډېرګوډي نیم د اړخونګښون یا تعداد په ګوته کړي، نو باور لري

$$a_n = k_n a\,,\; b_n = k_n b \Rightarrow a_{n+1} = k_{n+1} a' = 2k_n \cdot \frac{ab}{a+b}$$

$$= 2\frac{(k_n a)(k_n b)}{k_n a + k_n b} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}\,.$$

د b_n لپاره ریکورزیون کېدی شي د تریګونومتري توابعو په مرسته و ښوول شي. له

$$a_n = k_n 2 \tan(\pi / (2k_n))\,, \quad b_n = k_n 2 \sin(\pi / (2k_n))$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاس ته راځي

$$\begin{aligned} b_{n+1}^2 &= 4k_n^2 4\sin^2(\pi/(4k_n)) \\ &= \underbrace{2k_n 2\tan(\pi/(4k_n))}_{a_{n+1}} \underbrace{\cos(\pi/(4k_n)) 2k_n 2\sin(\pi/(4k_n))}_{k_n 2\sin(\pi/(2k_n))=b_n} \\ &= a_{n+1} b_n \,. \end{aligned}$$

د پرلپسيو يا ترادفونو ځانګړي پوله ارزښتونه

يو څو غوره پوله ارزښتونه په لاندې جدول کې راوړل شوي

a_n	$a = \lim_{n\to\infty} a_n$
$\sqrt[n]{n}$	1
$n^\alpha q^n\,,\ \lvert q\rvert < 1$	0
$n^{-\alpha}\ln n\,,\ \alpha > 0$	0
$q^n/n!$	0
$n!/n^n$	0
$(1+1/n)^n$	e
$(1-1/n)^n$	$1/e$

پای.

(c) ketabton.com: The Digital Library

زيات واره کيدی شي پوله ارزښتونه وشميرل شي، داسې چې سړی د مناسب بڼه بدلون له لارې معياري افادې ته بېرته ولاړ شي. دا د دوه بيلو سره روښانه کيږي.

(i) د پرلپسې پوله ارزښت شمېرلو ته

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{2n+3}\right)^{4n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

سړی ږدي

$$m = 2n+3,\ n = \frac{m-3}{2}$$

او لاس ته راوړي

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{2m-6}.$$

په دې پسې يا د دې په تعقيب دی

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \left(\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right)^2 \cdot \left(\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)\right)^{-6} =$$

$$= e^2 \cdot 1^{-6} = e^2.$$

$$a_n = \binom{3n}{n}/2^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

(ii) د دې لپاره چې د

پوله ارزښت وشميرو، سړی ليکي

$$a_n = \frac{(3n)(3n-1)\cdots(2n+1)}{n\cdot(n-1)\cdots 1}\cdot\frac{1}{2^n} =$$

$$= \left(\frac{3}{2}\cdot\frac{3-1/n}{2}\cdots\frac{2+1/n}{2}\right)\cdot\frac{n^n}{n!}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چې په نوکانو کې افاده ≥ 1 ده لرو

$$\lim_{n\to\infty} a_n \geq \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!} = \infty.$$

د لاندې بڼې پوله ارزښت

$$\frac{a_n \pm b_n}{c_n \pm d_n}$$

په مناسب ډول سړی داسې شمیري، چې سړی د مطلق ارزښت د لویې پرلپسې توکو سره وویشي:

د بیلګې په توګه دا پوله ارزښت

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(3+\sqrt{n+4})^2}{5n+\ln\, n}$$

که غواړو وشمیرو، نو مات یا کسر په لاندې بڼه لیکو

$$\frac{9+3\sqrt{n+4}+n+4}{5n+\ln\, n} = \frac{13/n+6\sqrt{1/n+4/n^2}+1}{5+(\ln\, n)/n}.$$

دا چې $1/n, 1/n^2$ او $(\ln\, n)/n$ د صفر پهلور ځی، نو پوله ارزښت دا لاندې دی

$$\frac{0+6\cdot\sqrt{0}+1}{5+0} = \frac{1}{5}.$$

د یوې لړۍ پرلپسې (لنډ: لړۍ) پوله ارزښت
Grenzwert einer Reihe

یو زیاتون یا جمعه $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ دډېروو زیاتیدونو سره لړی بلل کیږي. دا د یوې پولې ارزښت

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k,$$

په لور هڅيږي، که ټوټه زياتوونويا – جمعو

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

پرلپسې (s_n) د s لور ته وهڅيږی يا کونورګنت شي. که پوله ارزښت شتون ونه لري نو پرلپسې پولې ته نه تلونکې يا ديورګنت بلل کيږي.
پوله ارزښت کېدی د زياتوونو (هغه عددونه چې يو په بل زياتيږي) د لړۍ پرلپسې په واک کې وي، همداسې اړتيا نه شته چې د نظم بدلون وروسته شتون ولري.

د يوې لړۍ د پولې ته تلنې لپاره اړيين (شرط) دی، چې

$$\lim a_n = 0.$$

فقط په لږو حالتونو کې د يوې لړی روښانه يا اکسپليځيټ شمېرنه ممکن ده. يوه بېلګه يې د ټاکلو لړيو ده د راشنل زياتيدونو سره لکه

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2-1} = \frac{3}{2}.$$

د ټوټه کسر ټوټه ونې وروسته

$$\frac{2}{n^2-1} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1},$$

کېدی شي دا لړۍ په

$$(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{5}) + (\frac{1}{4} - \frac{1}{6}) + \dots$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بنه وليکل شي. تر $\frac{1}{1}$ او $\frac{1}{2}$ پورې ټول زياتېدونې يو بل له منځه وړي يا پورته کوي، داسې چې پوله ارزښت $\frac{3}{2}$ ترلې لوستل کېدی شي.

د ټوټه زياتون د کمښت لپاره د ټول $n < m$ لپاره باور لري

$$|s_n - s_m| =$$

$$= |(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}) + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}) + \ldots + (\frac{1}{m-3} - \frac{1}{m-1}) + (\frac{1}{m-2} - \frac{1}{m})| \leq$$

$$\leq \frac{4}{n-1},$$

داچې منځني ترمونه سره پورته کيږي يا له منځه سره وړي. ټوټه زياتون يا ــجمعه د کوشي – پرلپسې جوړوي:

$$n > 1 + \frac{4}{\varepsilon}.$$

د لپاره $|s_n - s_m| < \varepsilon$

و پولې ارزښت ته کمون يا تفريق دی

$$|\frac{3}{2} - s_n| = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} < \frac{2}{n}.$$

بيلګه دا هم ښايي، چې د زياتوونو يا د جمعې د غړو لړۍ پرلپسې غوره يا ښه روښانه ده.

که لړۍ پرلپسې

$$(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{8} - \frac{1}{5}) +$$
$$+ (\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16} - \frac{1}{6}) + \ldots,$$

وټاکو، نو هر ه په نوکالانو کې افاده $\geq \frac{1}{4}$ ده، نو لړۍ پرلپسې ديورګنت ده.

هندسي يا ځمککچيزې لړۍ
Geometrische Reihe

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځمکچیزه لړۍ $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ تیک هلته پولې ته ځي، $|q| < 1$ وي.

د هندسي زیاتونفرمول سره

$$s_n = 1 + q + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

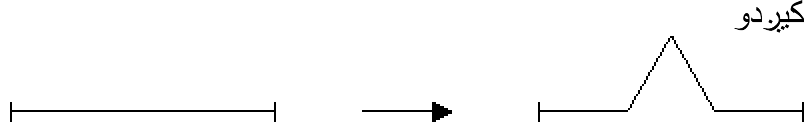
کېدی شي پوله ارزښت وښانه یا اکسپلیڅیت وشمېرل شي:

$$\lim_{n \to \infty} s_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n + \cdots = \frac{1}{1 - q}$$

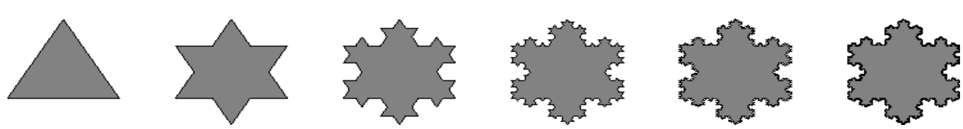
د $|q| < 1$ لپاره.

پای.

که د یوه برابر اړخیز درېکوډي یا مثلث مخ ته تک سره ژۍ د قانون یا قاعدې سره سم کیږدو



نو یوه ډېرۍ یا ستې لاس ته راځي د وتلو ژیو سره ، داسې په نامه د کوښ-د واورو پوتې Koch-Schneeflocke.



- -م د واورو پوتی $3 \cdot 4^n$ ژۍ لري. دا چې د هر پل سره په ضریب $1/3$ کمیږي، نو د دې خومره والي لپاره لاس ته راځي

د ژیو ګنون یا – تعداد ضرب د ژیو اوږدوالی:

$$(3 \cdot 4^n)(3^{-n}) = 3\,\left(\tfrac{4}{3}\right)^n \to \infty\,,$$

،

دا په دې معنا چې د ژیو اوږدوالی پولې ته نه ځي یا دیورګنت دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په n -م پل سره $3\cdot 4^{n-1}$ برابراړخيز درېګوډي لاس ته راځي د ژيو اوږدوالي 3^{-n} او سطحې $\sqrt{3}/4\,(3^{-n})^2$ په ور زياتوالي سره. په دې توګه د n –م د واورو پوټي د سطحې لپاره راکوي

$$\frac{\sqrt{3}}{4}+\sum_{i=1}^{n}\left(3\cdot 4^{i-1}\frac{\sqrt{3}}{4}\left(3^{-i}\right)^2\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(1+\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n}\frac{4^{i-1}}{9^{i-1}}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(1+\frac{1}{3}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{4}{9}\right)^{i}\right).$$

دا وتلي پوله دېرى په پسې توګه سطحه لري

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\left(1+\frac{1}{3}\,\frac{1}{1-4/9}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{5}.$$

هارموني لړۍ Harmonische Reihe

هارموني لړۍ

$$s=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k},$$

پولې ته نه ځي يا همداسې ناټاکلی پوله ارزښت $s=\infty$ لري.
په ټوليزه توګه لړۍ

$$s_\alpha=\sum_{k=1}^{\infty}k^{-\alpha}$$

د $\alpha\leq 1$ لپاره ديورګنت او $\alpha>1$ لپاره پولې ته تلونکي ده. يو څو ځانګړي ارزښتونه د.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$s_2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots ,$$

$$s_4 = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-4} = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots ,$$

$$s_6 = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-6} = \frac{1}{1^6} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \dots .$$

مطلق پولې ته تلونکې لړۍ **Absolut konvergente Reihen**

که

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|,$$

پولې ته لاړ شي، نو لړۍ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ مطلق پولې ته تلونکې بللل کیږي.

د کونورګنت د دې قوي بڼې څخه لرو، چې لړۍ د زیاتوونو لړې پرلپسې په خوښه تغیر له امله هم کونورګنت ده یعنې پولې ته ځی.

کوښی (کوشي) – کونورګنت قضیه راکوي:

$$\exists n_\varepsilon : |a_{m+1}| + \cdots + |a_n| < \varepsilon \quad \text{für} \quad m,n > n_\varepsilon$$

د درېګودي نابرابرون په مرسته د توته زیاتون د کمښت لپاره لاس ته راځي:

$$|s_n - s_m| = |a_{m+1} + \cdots + a_n| \le |a_{m+1}| + \cdots + |a_n| < \varepsilon$$

د $m,n > n_\varepsilon$, لپاره ،

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې معناچې د $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ پولې ته تلنه.

مايورانت او مينورانت
Majorante und Minorante

که $|a_n| \le c|b_n|$ د $n \ge n_0$ لباره وي او يو مثبت يا زياتيزه ثابته، نو د $\sum b_n$ مطلق کونورګنت څخه د $\sum a_n$ مطلق کونورګنت لاس ته راځي

که برعکس $|a_n| \ge c|b_n|$ وي دټولو تر پای ډيرو n لپارهو نو د $\sum |b_n|$ ديورګنت څخه لاس ته راځي، چې $\sum a_n$ هم مطلق کونورګنت نه ده.

زياتوخت يا زيات واره هندسي لړی $\sum q^n$ او لړی $\sum n^{-\alpha}$ د پرتله کونې لړی په څير کارول کيږي.

د لړی

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n}^{-1}$$

لپاره دی

$$a_n = \frac{n \cdot (n-1) \cdots 1}{(2n) \cdot (2n-1) \cdots (n+1)} \le 2^{-n}.$$

د دې په تعقيب هندسي لړۍ $\sum 2^{-n}$ يوه مايورانت ده، نو دا پولې ته تلونکې ده.
د لړی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1000}$$

لپاره د $n > 9$ لپاره باور لري

$$a_n \geq \frac{n^2}{2n^3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} .$$

په دې پسې یا په تعقیب هارموني لړۍ یوه مینورانت ده، نو لړۍ پولې ته نه ځي یا دیورګنت ده.

د وېش قضیه Quotientenkriterium

که $a_n \neq 0$ د $n > n_0$ لپاره وي او یو عدد $q \in (0,1)$ شتون ولري د

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q\,, \quad n > n_0\,,$$

سره، نو $\sum a_n$ مطلق پولې ته ځي. برعکس

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1\,, \quad n > n_0\,,$$

، نو $\sum a_n$ پولې ته نه ځي یا دیورګنت ده.
د پولې ته تلنې لپاره پوره کېدونکې قضیه کېدی شي په ورته بڼه

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$$

هم ولیکل شي.
په پام کې دې وي، چې پوره کېدونکي پولې ته تلونکي شرطونه رکورزیو د نابرابرون

$$|a_{n+1}| < |a_n|\,, \quad n > n_0\,,$$

په توګه دی، چې د هغې په بنسټ کومهوینا ممکن نه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پای.

که

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\,,\ \left|\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}\right|\,,\ \ldots\ \le q\,,$$

وي، نو دی

$$|a_{n+k}| \le q|a_{n+k-1}| \le \ldots \le q^k|a_n|\,.$$

له دې سره هندسي لړئ یوه مینورانت ده.
د دیورګنت لپاره قضیه راکوي، چې

$$0 < |a_n| \le |a_{n+1}| \le \ldots$$

د $n > n_0$ لپاره. زیاتیدوني صفرپرلپسي نه جوړوي، له کوم چې د $\sum a_n$ دیورګنت لاس ته راځي یا پولې ته نه تګ..
پای.

د وېش قاعده کېدی شي ګټوره وي که په لړیو استعمال شي، چې د هغې زیاتووني فاکولتیت او توانونه خوندي ولري. د

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \Big/ \binom{2n}{n}$$

لپاره د بېلګې په توګه سړی لاس ته راوړي

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{3^{n+1}\,(n+1)!\,(n+1)!}{(2n+2)!}\cdot\frac{(2n)!}{3^n\,n!\,n!} = \frac{3\cdot(n+1)(n+1)}{(2n+2)(2n+1)}\,.$$

د دې افادې پوله ارزښت د $n \to \infty$ لپاره $\frac{3}{4}$ دی، پسې(تعقیب) یې لړئ پولې ته ځي.

د زیاتوونو یو سیده تخمین

$$a_n = \frac{3\cdot 6\cdots 3n}{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مفصل دی یا ډېر کار غواړي. ضريبونه

$$\frac{3k}{n+k}, \quad k=1,\ldots,n,$$

له يو څخه هم لوی دي او هم کوچني. سړی بايد مناسبې جوړې سره يوځای کاندي، چې يوه تخمين ته راشي.

د ريښې يا جذر قضيه **Wurzelkriterium**

که يو عدد $q \in [0,1)$ د

$$\sqrt[n]{|a_n|} \le q$$

سره شتون ولري د $n > n_0$ لپاره، نو $\sum a_n$ مطلق پولې ته ځي. که برعکس

$$|a_n| \ge 1$$

وي د ناپای ډېرو n لپاره، نو $\sum a_n$ پولې ته نه تلونکې ده.

د کونورګنت لپاره پوره کېدونکي شرطونه کېدی شي په ورته يا برابر ارزښته بڼې

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$$

هم وليکل شي.

که $|a_n| \le q^n$ د $n > n_0$ لپاره باور ولري، نو هندسي لړی يو مايورانت جوړوي.

د ديورګنت لپاره شرط راکوي، چې (a_n) صفر پرلپسې نه ده، ځکه چې $|a_n| \ge 1$ د ناپای ډېرو n لپاره باور لري..

د ريښې قضيه استعما کېدی شي په هغو لړيو ګټوره وي، چې د هغو زياتونونه n -م توان خوندي ولري. د

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(3+(-1)^n)^n} = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{2^3} + \ldots$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره سړی د بیلګې په توګه لري

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x|}{|3+(-1)^n|}\,.$$

د دې افادې یا وییني پرلپسې

$$\frac{|x|}{2}, \frac{|x|}{4}, \frac{|x|}{2}, \ldots\,,$$

د

$$q = \frac{|x|}{2}$$

له لارې یا سره محدود ده. په تعقیب یې لړی د $|x| < 2$ لپاره پولې ته ځي.
همدې نتیجې ته رسو، که سړی پوله سوپریور جوړه کړي.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x|}{2}\,.$$

دا د n –مې ریښې اوسځیلیري پرلپسې پولې ته نه ځي بې پروا یا نا غوره یا مهمه نه ده.

د لایبنیځ قضیه Leibniz-Kriterium

الترنیري (مخ نخښه بدلونې) لړۍ

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \pm \cdots$$

پولې ته ځي، که (a_k) یوه مونوتون صفر پرلپسې وي. د لړۍ باقیو یا پاتو لپاره باور لري

$$0 \le |\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^k a_k| \le |a_{n+1}|.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوې الترنیري جمعې ارزښت کېدی شي تل د لومړي زیاتوني د مطلق ارزښت له لارې اټکل شي.

د اټکل په بنسټ

$$|s_m - s_n| = |a_{n+1} - a_{n+2} + \ldots - a_m| \leq |a_{n+1}|$$

د کوښنی قضیه پوره ده، او د لپاره د پاتې جمعې اټکل لاس ته راځي.
د دې نامساوات د ښوونې لپاره، چې د لړی دپاتې لپاره اټکل راکوي، سرې بې له تولیزو بندیزونو (o.B.d.A.) $a_{n+1} \geq 0$ نیسي او $s_m - s_n$ د

$$a_{n+1} - \underbrace{(a_{n+2} - a_{n+3})}_{\geq 0} - \underbrace{(a_{n+4} - a_{n+5})}_{\geq 0} - \ldots \leq a_{n+1}$$

له لارې پورته لور ته اټکل کوي. او د

$$\underbrace{(a_{n+1} - a_{n+2})}_{\geq 0} + \underbrace{(a_{n+3} - a_{n+4})}_{\geq 0} + \ldots \geq -a_m \geq -a_{n+1}$$

له لارې کښته لور ته اټکل کوي

د لایبنیځ قضیې سره د الترنیري هارموني لړی

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \ln 2\,;$$

پولې ته تګ لاس ته راځي ، پرلپسې

$$a_n = \frac{1}{n}$$

په روښانه توګه یوه همغږیزه صفر پرلپسې ده. د n –م توټه جمعې ناټیکاوی ، دا په دې معنا چې د لړی پرلپسې مطلق ارزښ دا لاندې دی

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} - \ln\, 2\right| \leq \frac{1}{n+1}\,.$$

د لایبنیځ قصیې دواړه وړاندنیونې غوره دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n} = -\frac{2}{1} + \frac{3}{2} - \frac{4}{3} + \frac{5}{4} - \dots$$

لړۍ لپاره زیاتووني a_n صفرپرلپسې نه جوړوي. له

$$|s_{n+1} - s_n| = |a_{n+1}| \geq 1$$

ځخه دیورګنت لاس ته راځي.

د

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}_{\max}\left(\frac{(-1)^n}{n}, \frac{(-1)^n}{2n}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \dots$$

لړۍ لپاره زیاتوونې a_n همغږیزې نه دي. که یو په بل پسې زیاتوني سره یوځای کړو، نو لاس ته ترې راځي

$$b_n = a_{2n-1} + a_{2n} = -\frac{1}{2(2n-1)} + \frac{1}{2n} = \frac{2n-2}{(4n-2)(2n)} \geq \frac{1}{4n}$$

für $n > 1$.

په تعقیب هامونې لړۍ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ یوه مینورانت ده، نو له دې کبله لړۍ دیورګنت ده.

د اویلر **Euler** ګڼ یا عدد **e** دیوې پرلپسې او یوې لړۍ پولې په حیث

د اویلر عدد $e = 2,71828182845905\dots$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کیدی شي د یوې پرلپسې او یوې لړۍ پوله ارزښت پّ ځیر انځور شي

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

پای.

د لړۍ پولې ته تلنه له $1/n! \leq 4\cdot 2^{-n}$ څخه د مایورانت قضیې په بنسټ لاس ته راځي.

پرلپسې $a_n = (1+1/n)^n$ د لاندې دواړو اټکلونو په بنسټ د e سره نومول شوي یا په نخښه شوي پوله ارزښت په لور ځي.

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n \leq e$$

. (a)

د ښوونې لپاره لومړی په پام کې نیسو چې د $n \geq k \geq 0$ لپاره

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!}\,\frac{n}{n}\,\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n} \;\leq\; \frac{1}{k!}$$

دی. له دې سره د بینوم فرمول څخه لرو

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \leq \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \leq e$$

او دپوله ارزښت جوړولو سره غوښتنه لرو.

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n \geq e$$. (b)

د ښوونې لپاره $N \geq 1$ په خوښه تاکو مګر کره او د $n > N$ لپاره لرو:

$$a_n \geq \sum_{k=0}^{N}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{N}\frac{1}{k!}\,\frac{n}{n}\,\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n} \geq \sum_{k=0}^{N}\frac{1}{k!}\left(\frac{n-N}{n}\right)^N.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې سره لاس ته راځي

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n \geq \underline{\lim}_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{N}{n}\right)^N = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}$$

او د پولې ارزښت جوړولو($N \longrightarrow \infty$) سره غوښتنه.

له (a)او (b) څخه د $\underline{\lim}\, a_n \leq \overline{\lim}\, a_n$ له امله لرو :

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = e.$$

د لړيو ځانګړي پوله ارزښتونه

په لاندې کې د ځو غوره لړيو پوله ارزښتونه ورکړ شوي.

.

$$\sum_{k=0}^{\infty} aq^k = a + aq + aq^2 + \cdots = \frac{a}{1-q} \text{, für } |q| < 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots = \infty$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \cdots = \ln 2$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

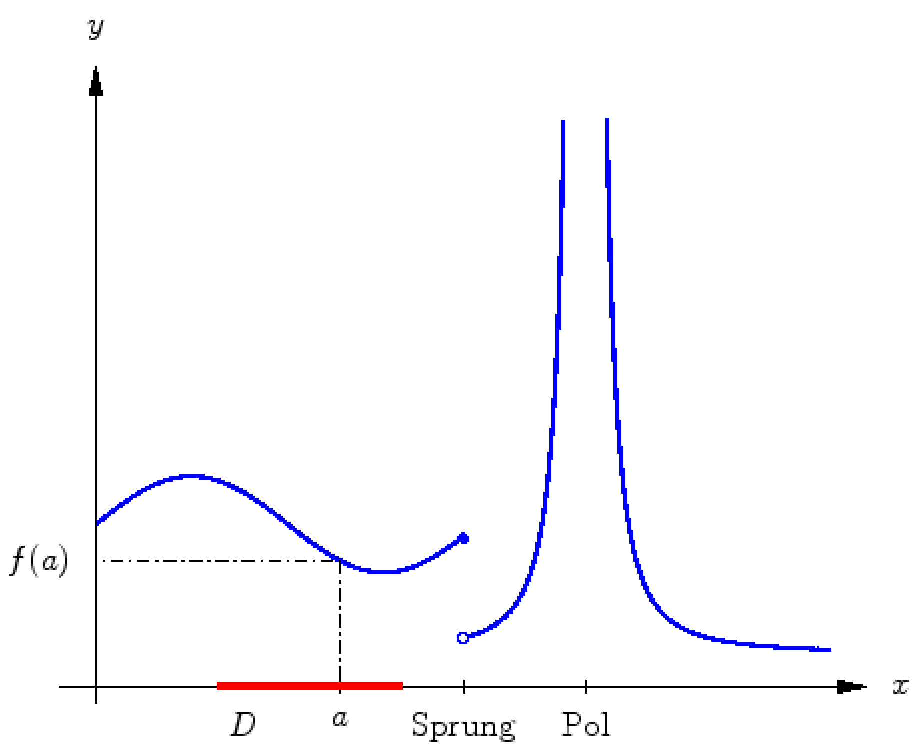
$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k^2} = 1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}\pm\cdots=\frac{\pi^2}{12}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots=e$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\frac{1}{k!} = 1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\pm\cdots=\frac{1}{e}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\cdot 2^k} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\cdots=\ln 2$$

ناپرېکیدنه یا متمادیت **Stetigkeit**



(c) ketabton.com: The Digital Library

یو تابع f په ټکی a کې ناپرېکیدونکی یا متمادي دی، که د ټولو پرلپسیو (x_n) لپاره د د پولې a سره د تابع ارزښت $f(x_n)$ د $f(a)$ په لور کونورګنت وی یا هڅیږي:

$$x_n \to a \Longrightarrow f(x_n) \to f(a)\,,$$

د پوله ارزښت د تعریف له مخې هر $\varepsilon > 0$ ته یو δ_ε شتون ل ري د $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ سره د $|x - a| < \delta_\varepsilon\,,$ لپاره ، او سړی لیکي

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)\,.$$

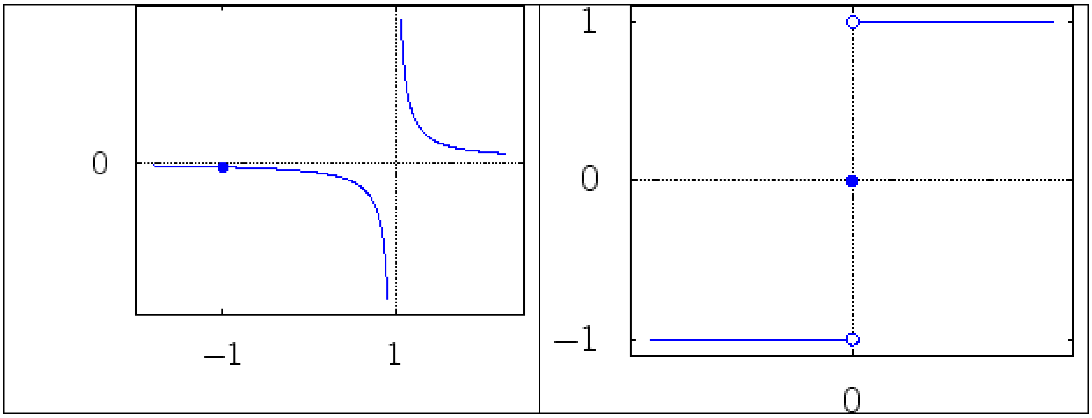
یو تابع په یوه انتروال D ناپرېکیدونکي ده، که دا د D په هر ټکي کې ناپرېکېدونکې وي.

دا په دې معناچې د f ګراف سره تړلی دی، تابع ګام یا ټوپ نه وهي او قطب نه لري (لنډ: نه پرې کیږي او نه ماتیږي).

بالاخره ناپرېکېدنه په دې معنا ده، چې ګراف بې له دې چې (پنسل پورته شي) پرې شي رسم کیږي.

فنکشن $f(x) = \operatorname{sign}(x)$	فنکشن $g(x) = \dfrac{x+1}{x^2-1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



پورته دواړه بيلګې د پرېکيدنې مختلف تيوپونه ښايي.

د سيګنوم تابع sign په صفرځای کې يو توپ وهي. په حقيقت کې د تابع ارزښت $\mathrm{sign}(0)=0$ تعريف دی، مګر د $f(x)$ پوله ارزښت د $x\to 0$ لپاره شتون نه لري.

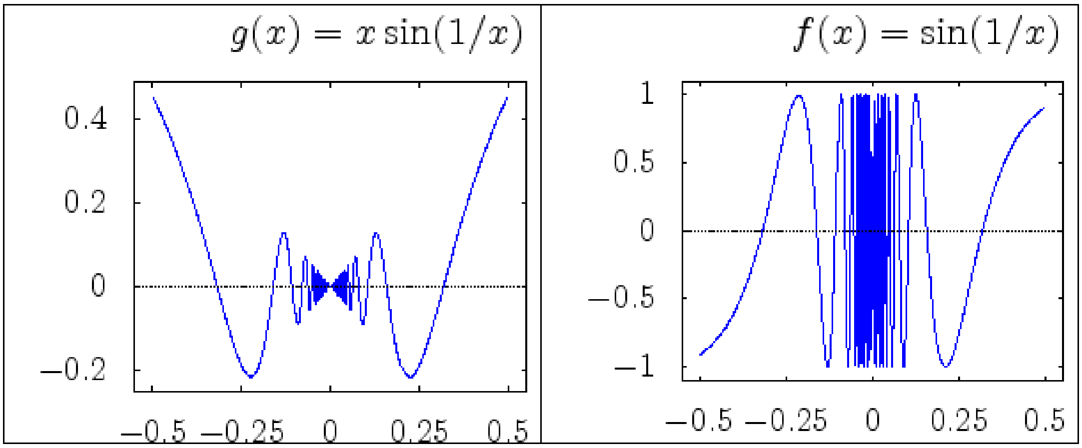
تابع په $x=\pm 1$ کې تعريفتشيا لري. د $x\to 1$ لپاره $|g(x)|$ د ∞ په لور هخيږي، g هلته يو قطبځای لري. مګر سره له دې هم پوله ارزښت $\lim_{x\to -1} g(x)$ شتون لري. دا تړلی د کرښيز ضريب $(x+1)$ د لنډونې څخه کتل کيږي.

$$g(x)=\frac{1}{x-1},\ x\neq -1\,.$$

دا يوه له منځه وړونکې يا پورته کيدونکې تعريفتشيا ده. د تابع ارزښت $g(-1)=-\frac{1}{2}$ د تکميلونې له لارې g په $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ باندې يو ناپرېکيدونکې تابع کيږي.

پای.

(c) ketabton.com: The Digital Library



تابع (خیرې یې پورته دي)
$f(x) = \sin(1/x)$

په صفر 0کې پرېکیدونکي ده، ځکه چې د $x \to 0$ لپاره د -1 او 1 ترمنځ اوسځیلی کیږي.

برعکس یاپه ښټ د تابع

$$g(x) = x\sin(1/x)$$

تعریفتشیا په $x = 0$ کې پورته کیدونکې یا له منځه وړونکې ده.

له

$$0 \le |x\sin(1/x)| \le |x|$$

د $\lim_{x\to 0}|x| = 0$ سره د پرتله کیدونکي قضیې په بنسټ لاس ته راځي

$$\lim_{x\to 0} x\sin(1/x) = 0.$$

له دې امله کیدی شي د g

(c) ketabton.com: The Digital Library

$g(0) = 0$

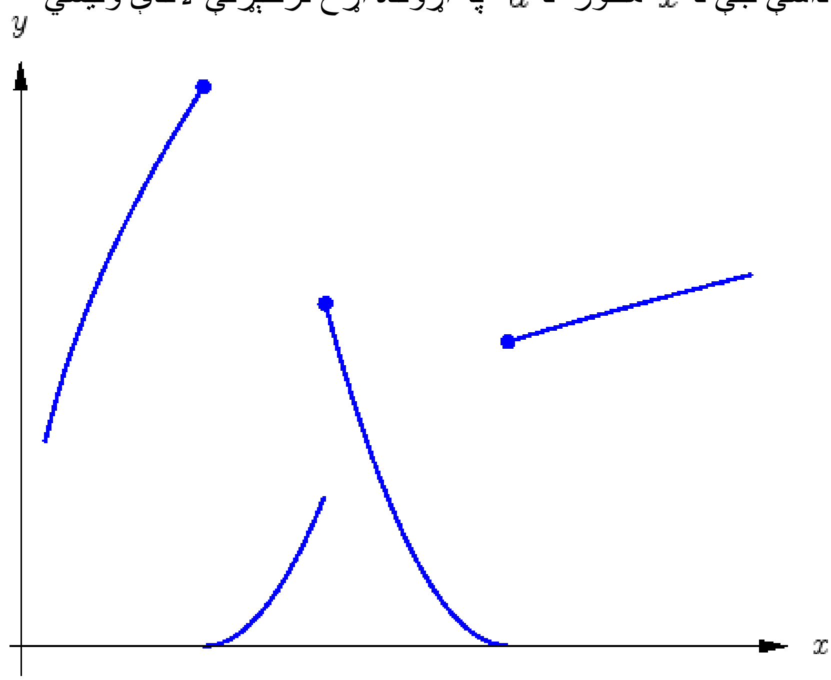
اینووني له لارې یوه په ټول $\mathbb{R}$ ناپرېکیدونکي تابع ته پوره شي.

یو اړخیز ناپرېکیدنوالی یا متمادیت **Einseitige Stetigkeit**

ناپرېکدنوالي ته ورته سړی کیږ- همداسي ښی ناپرېکېدنوالی تعریفوي

$$\lim_{x \to a-} f(x) = f^{-}(a)\,, \qquad \lim_{x \to a+} f(x) = f^{+}(a),$$

داسې جې د x محور د a په اړونده اړخ ترڅېرنې لاندې ونیسي

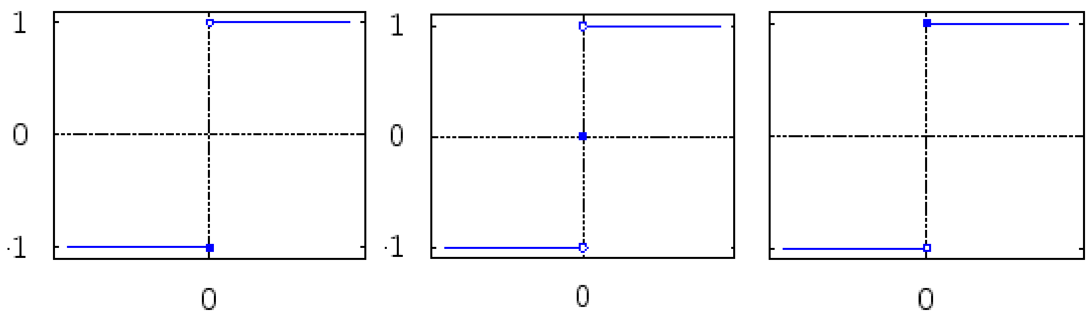


که د f په یوه ټوټځای تابع ارزښت تعیف وي، نو دا په ګراف کې پنډ په نخښه کېدی شي، چې روښانه شي چې د کیږ- یا ښي اړخ د پولې ارزښت سره سر خوري.

پای.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تابع
$$f(x) = x/|x|$$
په ټولو ټکو کې تر تعریفتشیا $x = 0$ پورې ناپرېکیدونکې ده.



که $f(0) = -1$ کېږدو نو تابع به کیڼ اړخیزه او د $f(0) = 1$ سره ښی اړخیزه ناپرېکېدونکې په 0 کې مخ ته لاړه شي. د $f(0) = 0$ لپاره د سیګنوم-تابع

$$f(x) = \mathrm{sign}(x),$$

لاس ته راځي، چې دا په 0 کې نه ښیـ – او نه کینه ناپرېکېدونکی دی.

د ناپرېکیدونکو توابعو لپاره لارې یا قاعدې

په یوه ټکي a کې ناپرېکېدونکې توابعو f او g لپاره

$rf \quad (r \in \mathbb{R})$

$f \pm g$

fg

$f/g \quad$ (وي $g(a) \neq 0$) که

$f \circ g$

په a کې ناپرېکیدونکې دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ورته وګه په یوه انتروال D ناپرېکېدونکې تابع همداسې د کېن – اوښي اړخیز ناپرېکېدنوالي ځایونو لپاره باور لري.
پای.

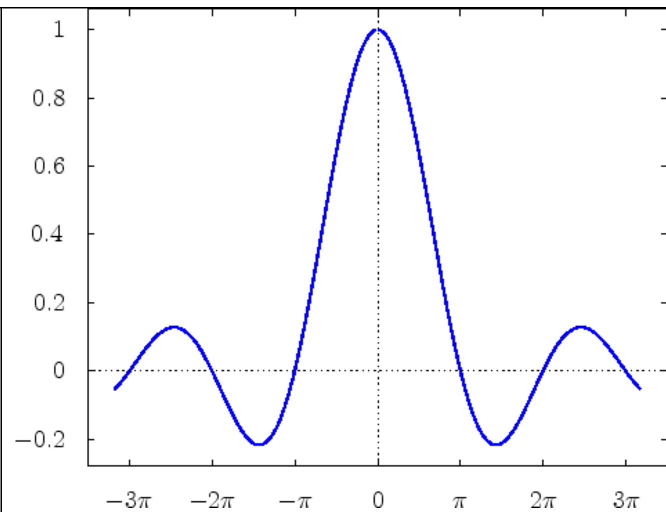
دا لار د پوله ارزښت لپاره اړونده وینا ښخه ترلې لاس ته راځي.
که دبېلګې په ت وګه د ناپرېکېدونکو توابعو کمپوزېشن(ترکیب) تر څېړنې ونیسو، د g د ناپرېکېدنوالي ښخه د هرې پرلپسې (x_n) لپاره د پوله ارزښت a سره دا راکوي

$$\lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(a).$$

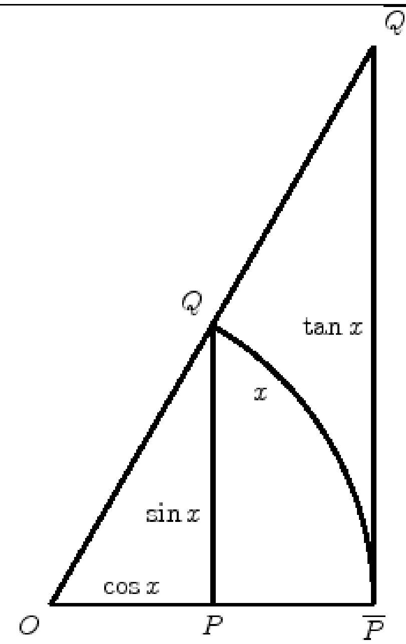
دا چې f هم ناپرېکېدونکې دی، لاس ته راځي

$$\lim_{n\to\infty} f(g(x_n)) = f(g(a)).$$

پاي.

داسې په نامه sinc - تابع. $f(x) = \operatorname{sinc} x = \frac{\sin x}{x}$ د مخ ته بیولو یا دوام $f(0) = 1$ سره په $\mathbb{R}$ باندې ناپیکېدونکې ده. ښوونه یې د ترېګونومتریک توابعو په تخمین پورې اړه لري.	

(c) ketabton.com: The Digital Library

	د ردېګودي $\Delta(OPQ)$ ، د ګردی ټوټه ووني يا وتر او درېګودي $\Delta(O\overline{P}\,\overline{Q})$ د سطحو د پرتلې له لارې په څېره کې کتل کيږي، چې $$\frac{\sin x \cos x}{2} \le \frac{x}{2} \le \frac{\tan x}{2}$$ همداسې $$\frac{1}{\cos x} \ge \operatorname{sinc} x \ge \cos x,$$ د $\sin x/2$ سره وېشني له لارې او د معکوس ارزښت جوړونه. د $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$ د پرتلې قضيې څخه لاس ته راځي. $$\lim_{x\to 0} \operatorname{sinc} x = 1.$$

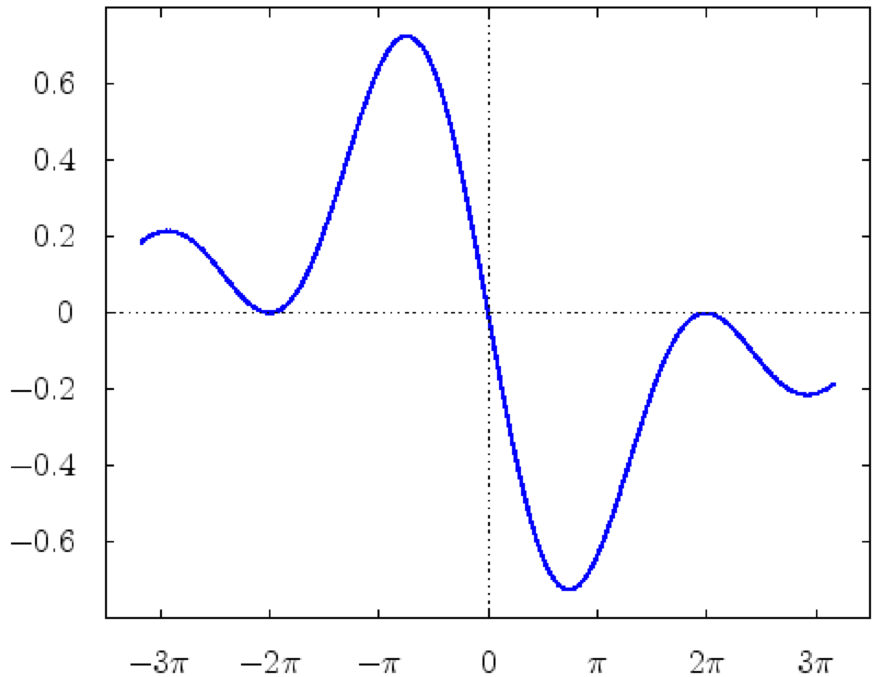
ليکونکي: اپپ، هيوليک

تابع

$$f(x) = \frac{\cos x - 1}{x}$$

د مخ ته وړنې $f(0) = 0$ سره په ټول $\mathbb{R}$ ناپرېکيدونکي ده

(c) ketabton.com: The Digital Library



باور لري

$$\frac{\cos x - 1}{x} = \frac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{x(\cos x + 1)} = \frac{\cos^2 x - 1}{x(\cos x + 1)}$$

$$= -\frac{\sin^2 x}{x(\cos x + 1)} = -\frac{\sin x}{x}\frac{1}{\cos x + 1}\sin x,$$

او له

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x + 1} = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \lim_{x\to 0}\sin x = 0$$

لاس ته راځي

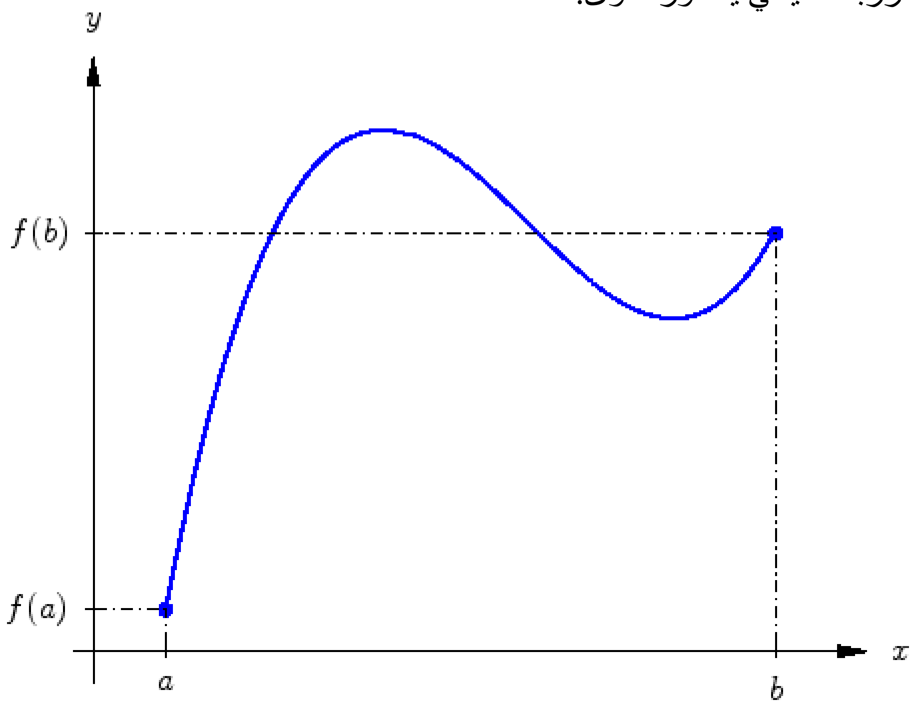
$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x} = 0.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليک

(c) ketabton.com: The Digital Library

منځ ارزښت جمله **Zwischenwertsatz**

یو ناپرېکېدونی تابع f په یوه بندانتروال $[a,b]$ د $f(a)$ او $f(b)$ ترمنځ هر ارزښت نیسي یا غوره کوی.



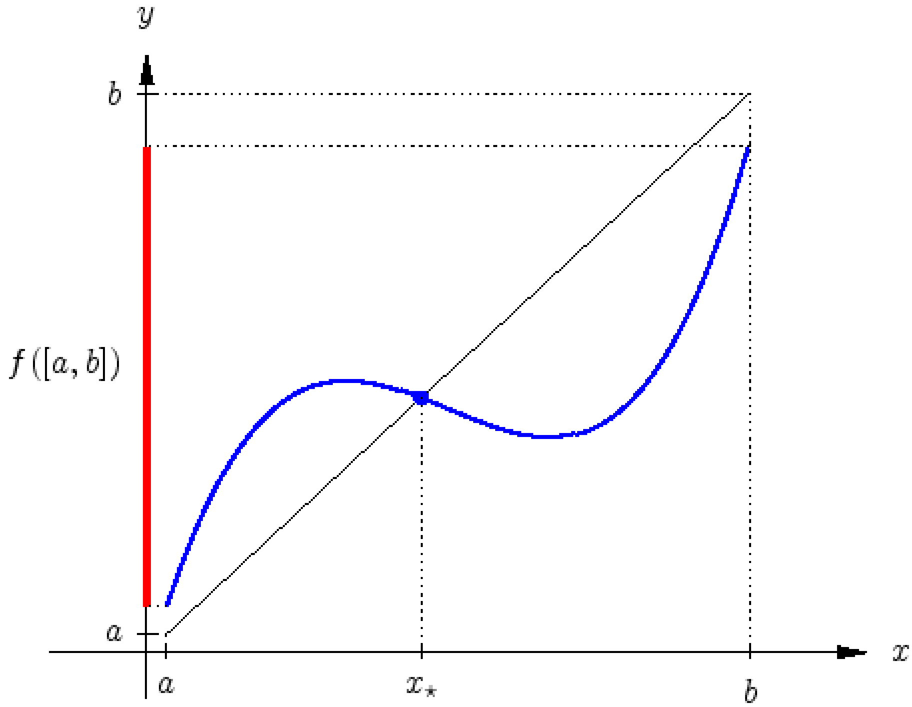
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

که یو تابع f انتروال $[a,b]$ په انتروال $[a,b]$ ناپرېکېدونکی تنظیم کړي، نو یو $x_\star$ شتون لري د

$$x_\star = f(x_\star).$$

سره.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د ناپرېکېدونکي تابع

$$g(x) = f(x) - x$$

لپاره $g(a) \geq 0$ او $g(b) \leq 0$ باور لري. د منځ ارزښت جملې سره د يوه صفرځای $x_\star \in [a,b]$ شتون لاس ته راځي:

د نتپرېکېدونکو توابعو لپاره

$$g(x) = f(x) - x$$

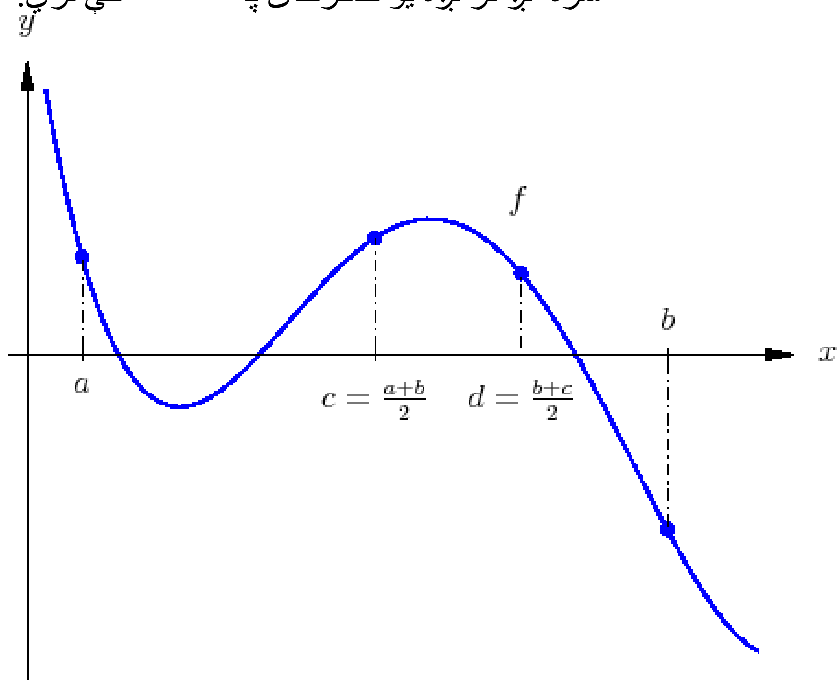
$$g(x_\star) = 0 \;\Leftrightarrow\; f(x_\star) = x_\star$$

دا په دې معناچې د f يو ځاي په ځای - يا بيکس تکی $x_\star$.
ليکونکي: هيوليګ، کراخ

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه سطحو – يا برخو تلنلار **Bisektionsverfahren**

د منځ ارزښت جملې په بنسټ يو ناپرېکيدونکی تابع $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ د $f(a)f(b) \leq 0$ سره لږ تر لږه يو صفرځای په $[a,b]$ کې لري.



که دا انتروال نيم شي او f ته د انتروال په ةنځ کې ارزښت ورکړي

$$c = \frac{a+b}{2},$$

نو کيدی شي د مخنښي په مرسته پرېکړه وشي، چې د کوم انتروال په نيمايي کې بايد صفرځای پروت وي:

$f(a)f(c) \leq 0$ لاسته راځي ، چې په $[a,c]$, کې صفرځای شتون لري

$f(a)f(c) \geq 0$: لاس ته راځي صفرځاب په $[c,b]$. کې شتون لري

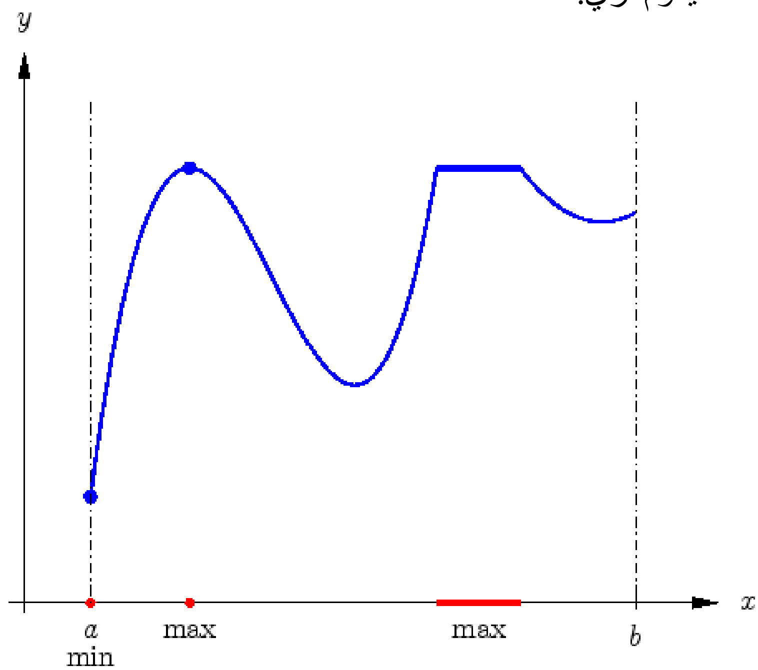
سړی اوس دا اړونده برخه انتروال ټاکي او دااېتريږ iteriert (ټيک حل ته ور نږدې کونه) کوي، تر څو د انتروال اوږدوالی غوښتوني ټيکوالي ته ورسيږي.

ليکونکي: اېپ، هيوليګ، پفايل

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ناپرېکيدونکي تابع افرطيت Extrema stetiger Funktionen

يو ناپرېکيدونکی تابع په يوه پای رابند انتروال $[a,b]$ لږ تر لږه يو مينيموم او يو ماکسيموم لري.



ليکونکي: اېپ، هيوليک

يو $c > 0$ شتون لري د
$$(x+y)^n \le c(x^n+y^n)$$
سره د $x,y \ge 0$ لپاره

د بنووني ته د $x \neq 0$ لپاره (حالت $x = 0$ ساده دی) ليکو

$$z = y/x$$

او ناپرېکيدونکی تابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(z) = \frac{(1+z)^n}{1+z^n}.$$

څېړو.

دا چې $\lim_{z\to\infty} f(z) = 1$ دی، نو یو $b > 0$ شتون لري، داسې چې $f(z) \le 2$ د $z \ge b$ لپاره باوري کوي. د

$$c = \max\left\{2, \max_{z\in[0,b]} f(z)\right\}$$

سره لاس ته راځي

$$f(z) = \frac{(1+z)^n}{1+z^n} \le c$$

او له دې سره پورته غوښتنه

لیکونکي: اېپ، هیولیګ

برابرډوله ناپرېکیدنوالی Gleichmäßige Stetigkeit

یو تابع f په یوه انتروال D برابرډوله یا برابرارزښته ناپرېکېدونکی دی ، که د ټولو $\varepsilon > 0$ لپاره یو δ_ε شتون ولري ، دا سې چې راکړي

$$|x-a| < \delta_\varepsilon \;\Rightarrow\; |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

د ټولو $x, a \in D$ لپاره.

د f د تنها ناپرېکېدنې په برعکس δ_ε د a په واک کې نه ده. تنهاپه یوه محدود رابند انتروال کې ناپرېکېدنوال کی او برابرارزښته یا – ډوله ناپرېکېدنوالی سره ورته دی.

لیکونکي: هیولیګ، پفایل

په ټکي ډول پولې ته تلنه Punktweise Konvergenz

(c) ketabton.com: The Digital Library

د توابعو (f_n) يوه پرلپسي په يوه انټروال D ټکي ډوله د پولې تابع f په لور پولې ته ځي.

$$f_n \underset{\text{pktw.}}{\longrightarrow} f,$$

که $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ وي د ټولو $x \in D$ لپاره.

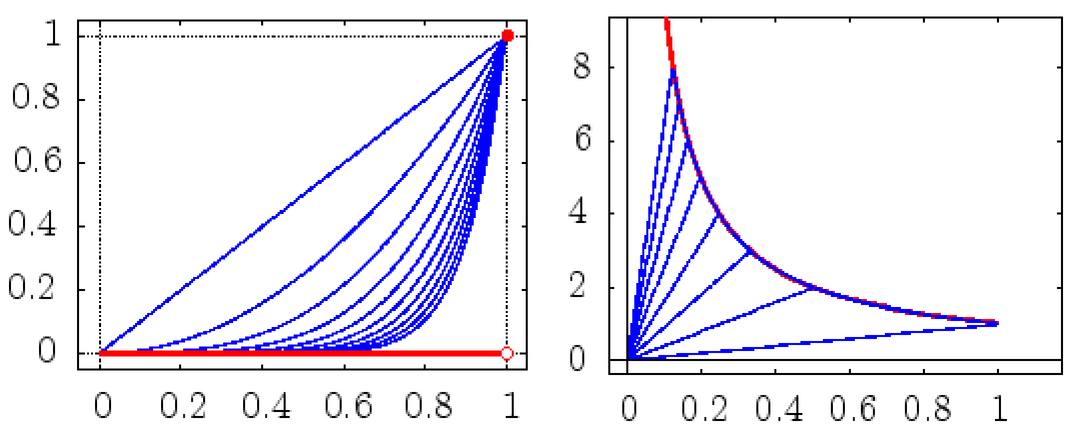
ليکونکي: اېپ، هيوليګ

په ټکيډوله پولې ته تلنې بايد نه دی چي ناپرېکېدنوال او بندوالی ساتلي پاتې شي.

د بېېلګې په توګه د $f_n(x) = x^n$ ټکي ډوله پوله ارزښت په $[0, 1]$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

په ښي انټروال پای پرېکېدونکی دی، لکه په کينه څېره کي چي ښوول شوی دی.



د يو کونورګنت لپاره بېلګه چي د نامحدود پوله تابع په لور ښی څېره د پرلپسي سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & 0 < x \le 1/n \\ 1/x, & 1/n < x \end{cases},$$

ښايي ، چې په $(0,1)$ ټکي ډوله د پوله تابع $f(x) = 1/x$ په لور پولې ته ځي.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

برابرارزښته يا برابرډوله پولې ته تلنه **Gleichmäßige Konvergenz**

د توابعو يوه پرلپسي (f_n) په يوه انتروال D برابرډوله د يوه پولې تابع f په لور پولې ته ځي،

$$f_n \underset{\text{glm.}}{\longrightarrow} f,$$

که هر $\varepsilon > 0$ ته يو n_ε شتون ولرى، داسې چې

$$n > n_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

د ټولو $x \in D$ لپاره باور ولري.
د کوشي قضيې په مرسته کېدى شي برابرډوله پولې ته تلنه بې د پولېتابع نسبت څخه تعريف شي. سړى ورته شرطونه لاس ته راوړي، داسې چې

$$m, n > n_\varepsilon \Longrightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

د ټولو $x \in D$ لپاره بايد باور ولري.
که توابع f_n ناپرېکېدونکي وي، نو پوله تابع f هم ده.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د درېګوډي نامساواتو څخه لرو

$$\begin{aligned} &|f(x_0) - f(x)| \\ &\le |f(x_0) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f_n(x) + f_n(x) - f(x)| \\ &\le |f(x_0) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)|. \end{aligned}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د په خوښه $\varepsilon > 0$ ته د برابرډوله کونورګنت له امله يو n_ε شتون لري، داسې چې د $n > n_\varepsilon$ لپاره

$$|f_n(y) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall\, y \in D$$

باوري کوي. د يوه داسې n لپاره اخرنی او لومړنی ترم $< \varepsilon$ دي، که $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ وي. دا له $|f(x) - f(x_0)| < 3\varepsilon$ لاس ته راځي او له دې سره $f(x) \to f(x_0)$ د $x \to x_0$ لپاره.

ليکونکي: اېپ، هيوليګ

د توابعو لړۍ پولې ته تلنه **Konvergenz von Funktionenreihen**

يوه د توابعو f_k لړۍ $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ ټکي ډوله (برابرډوله) پولې ته تلونکې ده، که دا د لاندې ټوټه جمعې يا زياتون $s_n = \sum_{k\le n} f_k$ لپاره دا حالت ولري.

يوه کلکونه يې مطلق پولې ته تلنه ده، چې د هغې سرره د $\sum_n |f_n|$ د برابرډوله پولې ته تلنې لپاره غوښتل کيږي. په دې حالت کې پولې ته تلنه د لړۍ يوه نظم بدلون لپاره هم ساتلی پاتيږي.

د تعريف سره سم دا وينا وې په تابع پرلپسيوو هم د باور وړ دي.

ليکونکي: اېپ، هيوليګ

په لاندې کې د يو څو تيوپيکي بيلګو حالتونه ښولکيږي

(i) د توابعو لړۍ

$$\sum_{k=0}^{\infty} x(1-x)^k = x\left[1 + (1-x) + (1-x)^2 + \cdots\right]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په $[0,1]$ ټکي ډوله پولې ته ځي. د هندسي لړۍ لپاره فرمولپه مرسته پوله تابع لاس ته راځي

$$f(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ 1, & x>0.\end{cases}$$

دا چې په $x=0$ کې پرېکېدونکې دی، کېدی شي لړی برابرډوله کونورګنت نه وي.

(ii) د $x\in[0,1]$ لپاره لړۍ

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-x)^k}{k}=-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\pm\cdots$$

د لايبنيخ –پولې ته تلنې له امله ($\frac{x^k}{k}$ همغږيز صفر پرلپسې ده). دا چې د لړۍ پاتې د لايبنيخ پسې د

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-x)^k}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-x)^k}{k}\right|=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(-x)^k}{k}\right|\le\left|\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|\le\frac{1}{n+1}$$

له لارې اټکل کېدی شي، لړۍ په $[0,1]$ حتی برابرډوله پولې ته ځي. مګر سره له دې په $[0,1]$ باندې مطلق پولې ته نه ځي، ځکه چې $\sum(1/k)$ ديورګنت ده.

(iii) لړۍ

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k^2}=x+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{9}+\cdots$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په $[-1,1]$ باندې مطلق پولې ته ځي، ځکه چې

$$\sum_{k=1}^{m}\left|\frac{x^k}{k^2}\right|-\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{x^k}{k^2}\right|=\sum_{k=n+1}^{m}\left|\frac{x^k}{k^2}\right|\leq\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$

باور لري، او

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

پولې ته ځي.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

توابعو لړۍ ته مایورانت یا پورته پولې
Majorante bei Funktionenreihen

د پوره لوی n لپاره باور لري

$$|f_n(x)|\leq ca_n\,,\quad x\in D\,,$$

اوکه لړۍ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ پولې ته ځي، بیا نو لړۍ

$$\sum_{n=1}^{\infty}f_n$$

مطلق پولې ته تلونکې ده.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

وینا تړلې د اعدادو لړۍ لپاره د مایورانت له جملې لاس ته راځي، ځکه چې د ټولو $x\in D$ لپاره لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sum_{k=1}^{n} |f_k(x)| - \sum_{k=1}^{m} |f_k(x)| \leq c \sum_{k=m+1}^{n} a_k$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د اکسپوننشل تابع ضرب انځورونه

اکسپوننشل تابع کېدی شي د يوه ضرب د پوله ارزښت په حيث انځور شي:

$$e^x = \lim_{n\to\infty}(1 + x/n)^n \; , x \in \mathbb{R} \, ,$$

په هر انتروال $[-a, a]$ د برابرډوله پولې ته تګ سره.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

لومړی به د

$$f_n(x) = (1 + x/n)^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{x}{n} + \cdots + \binom{n}{n}\frac{x^n}{n^n} \, .$$

برابرډوله پولې ته تلنه و ښوول شي. دې ته سړی ترې کار اخلي يا استعمالوي، چې

(i)

$a^k/k! \to 0$ د په خوښه $a \geq 0$ لپاره ؛

(ii)

$p_{n,j} = \frac{n(n-1)\cdots(n-j+1)}{n^j}$ د هر $j \in \mathbb{N}$ لپاره يو مونوتون جګېدونکې د 1 په لور تلونکې پرلپسې ده.

د دې لپاره چې د کوشي فرمول استعمال کړو، سړی کمښت يا تفريق $f_m(x) - f_n(x)$ په لاندې بڼه ليکي

$$\sum_{j=0}^{k-1}(p_{m,j} - p_{n,j})\frac{x^j}{j!} + \sum_{j=k}^{m} p_{m,j}\frac{x^j}{j!} - \sum_{j=k}^{n} p_{n,j}\frac{x^j}{j!}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $k < n < m$ سره .

د $|x| \le a$ لپاره د $a \ge 1$ او $k \ge 2a$ سره د اخرنيو زياتېدونو ارزښت هر ځل

$$\le \frac{a^k}{k!} \underbrace{\left(1 + \frac{a}{k+1} + \frac{a^2}{(k+1)(k+2)} + \cdots\right)}_{\le 2},$$

دی، نو د(i) پسې $< \varepsilon/3$ د يوه پوره لوي ټاکلې k لپاره.

د (ii) پسې يا له مخې دی

$$|p_{m,j} - p_{n,j}| < \frac{\varepsilon/3}{ka^k}$$

د $m, n > N_j(\varepsilon)$ لپاره، اوله دې سره کيدی شي د لومړنی جمعې هره زياتېدونې د $f_m(x) - f_n(x)$ په ټوټه کيدو د $\frac{\varepsilon/3}{k}$ له لارې اټکل کړي. په ټوليزه توګه لرو

$$|f_m(x) - f_n(x)| < k\frac{\varepsilon/3}{k} + 2\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \quad m, n > \max_{j<k} N_j(\varepsilon).$$

د

برابرډوله پولې ته تلنې په بنسټ په هر انتروال $[-a, a]$ باندې د پولې تابع $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ ناپرېکېدونکې ده. بسيا کوي، چې $f(x) = e^x$ د راشنل پروت محور $x = p/q$ لپاره وښايو. د يوې برخه پرلپسې $n = mp$ په راوړنې سره د e د تعريف څخه لاس ته راځي

$$\lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{x}{mp}\right)^{mp} = \lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{p}{mpq}\right)^{mpq/q} = e^{p/q}$$

د $t \mapsto t^{p/q}$ ناپرېکېدنې له امله.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اکسپوننشال تابع لړۍ انځورونه

اکسپوننشل تابع کېدی شي د یوې لړۍ د پولع ارزښت په تګه انځور شي:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \ , x \in \mathbb{R},$$

د هر انتروال $[-a, a]$ برابرډوله پولې ته تلنې سره.
لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

اوس د ضرب انځورونې ته ورته والی ښولکيږي:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$$

دا ترلی د تیلور-لړۍ په څېر د جمعې د روښانه ونې څخه لاس ته راځي. د $x > 0$ لپاره دا لاندې سیده ښوونه ستونځمنه ده، سره له دې بې له مشتق منځ راوځي.

سړی پوله ارزښت د $\lim_{n\to\infty}(1+x/n)^n$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\left(\frac{x}{n}\right)^j = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{x^j}{j!}\underbrace{\frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-j+1)}{n\cdot n\cdots n}}_{\leq 1}\right)$$

$$\leq \lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n}\frac{x^j}{j!}$$

له لارې پورته لور ته اټکل کوي او د

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{x^j}{j!}\frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-j+1)}{n\cdot n\cdots n}\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\geq \sum_{j=0}^{m}\left(\frac{x^j}{j!}\lim_{n\to\infty}\prod_{k=0}^{j-1}(1-k/n)\right)$$
$$= \sum_{j=0}^{m}\frac{x^j}{j!}$$

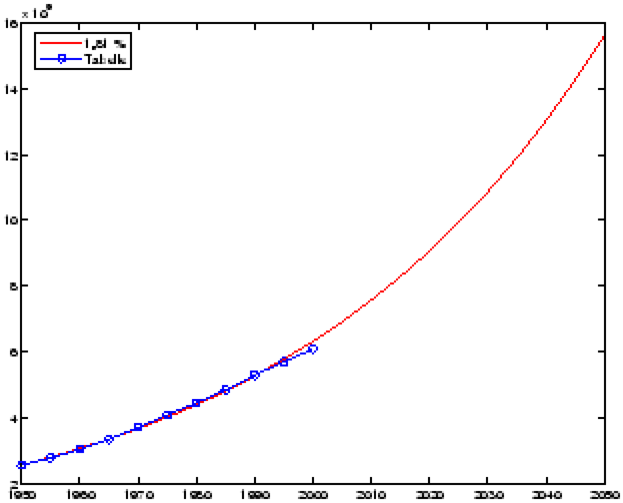
د یوه په خوښه $m \in \mathbb{N}$ کښته لور ته اټکل کوي. د $m \to \infty$ لپاره د پوله ارزښت جوړولو څخه وروسته د دواړو آټکلونو یو بل سره برابروالی لاس ته راځي.
یوه ورته دلیل راوړنه د $x < 0$ لپاره همم شونې ده، که سړی مثبت او منفي برخه په دې منځ ته راغلي جمعه کې ځانله یا جداوځیري.
لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

اکسپوننشا تابع د ډېرې بیلوژیکي ودې پروسې تر څېړنې لاندې نیسي. د بیلګې په توګه په یو ساده د د قومونو ودې مودل کې د زیږېدنې ګڼون یا تعداد متناسب دی د د ورځني اوسیدونکو تعداد $p(t)$ سره د t په وخت کې، دا په دې معنا چې
$$p(t+\Delta t) \approx p(t) + \Delta t(\lambda p(t)) .$$

د $\Delta t \to 0$ لپاه دا د ودې قانون
$$p(t) = ce^{\lambda t}\ , \qquad c = p(0)\ ,$$
له لارې مودلي کیږي.

کال	د نفوسو تعداد په میلیونو	ونده
	2555	
1950	2779	1.76 %
1955	3039	1.87 %
1960	3345	2.02 %
1965	3707	2.16 %
1970	4088	1.80 %
1975	4456	1.80 %
1980	485	1.79 %
1985	5283	1.77 %
1990	5690	1.54 %
1995	6080	1.37 %
2000		1.25 %

(c) ketabton.com: The Digital Library



(کينږ) جدول د نړۍ اوسېدونکي $p(t)$ ښايي همداسي کلنۍ د ودې تعداد(اټکل شوی ارزښت). کلنۍ منځني د ودې زياتون (ريټ) په کلونو 1950-2000کې 1.81 % وو. له 1950 کال څخه به د ثابت منځني اکسپوننشل ودې سره

$$p(t) = 2555078074e^{0.0181(t-1950)}$$

به د نړۍ اوسېدونکي په کال 2050 کې 16 ميليارده وګنل شي(ټکي په ټکي شوې کرښه يا منحني).

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

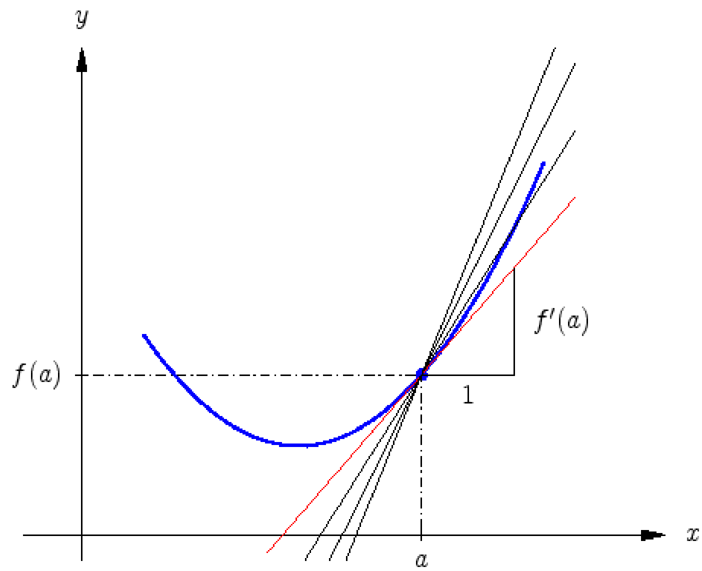
مشتق(رابيليدنه) **Ableitung**

يو تابع f په ټکي a کې مشتقوړ يا رابېلېدوړ دی، که د مشتق په نوم نومول شوې پوله ارزښت

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

شتون ولري..

(c) ketabton.com: The Digital Library



مشتقوړوالی یا رابیلیدوړوالی هندسي په دې معنا دی، چې د ټوټه ونې یا سیکانت جګوالی له

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

څخه د ورکړشوي تانجنت جګوالي په لور وهڅیږي یا کونورګنت شي(پوله يي ونيول شي).

سړی داسې هم لیکي:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{dy}{dx}$$

د $y = f(x)$ سره . دا لیکدود یا دود په کمبنت وېش کې $\Delta x \to 0$ پولې ته ټک ښايي

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{x + \Delta x - x}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

جګ مشتقونه د $f'', f''', \dots$ همداسې $f^{(2)}, f^{(3)}, \dots$ سره په نخښه کېږي.

یو تابع f په یوه ډېرۍ یا سټ D باندې مشتقوړ بلل کېږي، که $f'(x)$ د ټول $x \in D$ لپاره شتون ولري.

د تابع $f(x) = x^2$ د مشتق لپاره د تعریف سره سم لرو:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x \,.$$

دویم مشتق $f''(x) = 2$ ثابت دی.

په ټولیزه توګه یو د خوښې مونوم $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ لپاره د بینوم فرمول په مرسته لرو

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} x^{n-1} h + O(h^2)}{h} = n x^{n-1} ,$$

د کوم سره چې $O(h^2)$ د نظم h^2 ترمونه په نخښه کوي.

د $f(x) = \sin x$ مشتق کېدی شي د زیاتون – یا جمعي قضیې په مرسته وشمېرل شي له

$$\sin(t \pm h/2) = \sin t \cos(h/2) \pm \cos t \sin(h/2)$$

څخه د کمښت وېش لپاره د $t = x + h/2$ سره راکوي

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{\sin\left((x+h/2) + h/2\right) - \sin\left((x+h/2) - h/2\right)}{h}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \frac{2\cos(x+h/2)\sin(h/2)}{h}.$$

د

$$\lim_{h\to 0}\frac{2\sin(h/2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(h/2)}{h/2} = 1$$

له امله د $h \to 0$ لپاره ښی اړخ د $\cos x$ په لور هڅيږي.
ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د بنسټتوابعو مشتق يا رابيليدنه

لاندې جدول د غوره بنسټتوابعو مشتق ښايي:

$f(x)$	$f'(x)$		$f(x)$	$f'(x)$
c	0		x^r, $r \neq 0$	$r\,x^{r-1}$
e^x	e^x		$\ln\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$		$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\cos x$	$-\sin x$		$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tan x$	$\tan^2 x + 1$		$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$		$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د مشتق يارابيليدنې کرښزوالی **Linearität der Ableitung**

مشتق کرښيز دی، دا په دې معناچې د مشتقوړ توابعو f او g لپاره باور لري

$$(rf)' = rf', \quad r \in \mathbb{R},$$

$$(f \pm g)' = f' \pm g'.$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د ضرب قانون **Produktregel**

د دوه مشتقوړ توابعو f او g د ضرب مشتق دی

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

په ټوليزه توګه د ضرب $f = f_1 \cdots f_n$ لپاره باور لري

$$f' = \sum_{i=1}^{n} f_i' \frac{f}{f_i}.$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د تعريف څخه ترلی راکوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(fg)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} g(x+h)\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} f(x)\frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د پولینوم

$$p(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$$

مشتق د $x = 1, 2, 3$ په ځایونو کي ټاکل کیږي. دا چې د هر کرښیز ــضریب مشتق 1 دی، د ضرب له لارې یا قاعدې څخه لرو

$$p'(1) = (1-2)(1-3) = 2,$$

$$p'(2) = (2-1)(2-3) = -1,$$

$$p'(3) = (3-1)(3-2) = 2.$$

په ورته توګه سرې د

$$p(x) = (x-1)\cdots(x-n),$$

لپاره شایي، چې

$$p'(k) = (-1)^{n-k}\,(n-k)!\,(k-1)!$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دی د $k = 1, \ldots, n$ لپاره.
(Autoren: Höllig/Hörner/Knesch)

د وېش قانون یا لار **Quotientenregel**

د دوه مشتقوړ توابعو د وېش مشتق دی

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

په ټول ټکو x کې د $g(x) \neq 0$ سره. په ځانګړې توګه باور لري

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2} .$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1-2x}{4+3x^2}$$

د راشنل توابعو مشتق دی

$$\frac{(1-2x)'(4+3x^2) - (1-2x)(4+3x^2)'}{(4+3x^2)^2}$$

$$= \frac{-2(4+3x^2) - (1-2x)(6x)}{(4+3x^2)^2}$$

$$= \frac{6x^2 - 6x - 8}{(4+3x^2)^2}$$

په بدیلي ډول د ضرب قانون سره لاس ته راوړو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\left((1-2x)\frac{1}{4+3x^2}\right)' =$$

$$= (-2)\frac{1}{4+3x^2} + (1-2x)\frac{-6x}{(4+3x^2)^2} = \frac{6x^2-6x-8}{(4+3x^2)^2}.$$

(Autoren: Höllig/Kreitz

ځنځیری لار یا - قانون **Kettenregel**

د توابعو د ځنځیروني

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

لپاره مشتق دی

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

.

د $f(y) = z,\ g(x) = y,\ h(x) = z$ سره سړی لیکي

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\,\frac{dy}{dx}$$

.

لیکونکي: هیولیګ، کویف

د تعریف څخه ترلی لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$
\begin{aligned}
(f(g(x)))' &= \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{g(x+h)-g(x)}\,\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\
&= \lim_{\tilde{h}\to 0}\frac{f(g(x)+\tilde{h}))-f(g(x))}{\tilde{h}}\,\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\
&= f'(g(x))g'(x),
\end{aligned}
$$

چیرته چې $\tilde{h} = g(x+h) - g(x)$ دی.

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د ځنځیري قانو د روښنه کولو ته تعریفیږي:

$$h'(x) = \frac{d}{dy}\,\mathrm{s}\,h(x) = \sin\big(\underbrace{\ln(1+x^2)}_{y=g(x)}\big)\cdot x^2))g'(x)\,.$$

د دنننی مشتق $g'(x)$ شمېرلو ته د سره د ځنځیر قانون کارول کیږي:

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2}(2x)\,.$$

په بدیلي توګه کېدی شي د مشتق لیکدود وکارول شي. د

$$z = \sin y, y = \ln w, w = 1 + x^2$$

سره دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dw}\frac{dw}{dx} = \cos(y)\frac{1}{w}2x = \cos\left(\ln(1+x^2)\right)\frac{1}{1+x^2}(2x)\,.$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

ایمپلیڅیت مشتق نیول Implizites Differenzieren

که یو تابع $y = f(x)$ ایمپلیڅیت وي، دا په دې معناچې یو برابرون په x او y کې ورکړ شوی، داسې چې دواړه خواوې د x پسې مشتق کیدی شي. دلته یواځې په $y = y(x)$ کې افادو باندې ځنځیري قانون استعمالیږي.

د بېلګې په توګه سړی د

$$E:\ \ x^2 + 3y^2 = 7$$

له لارې ورکړ شوې ایلیپسې یا هګۍ

$$\frac{d}{dx}\left(x^2+3y^2\right) = 2x + 6yy' = \frac{d}{dx}7 = 0$$

همداسې

$$y' = -\frac{1}{3}\,\frac{x}{y}$$
.

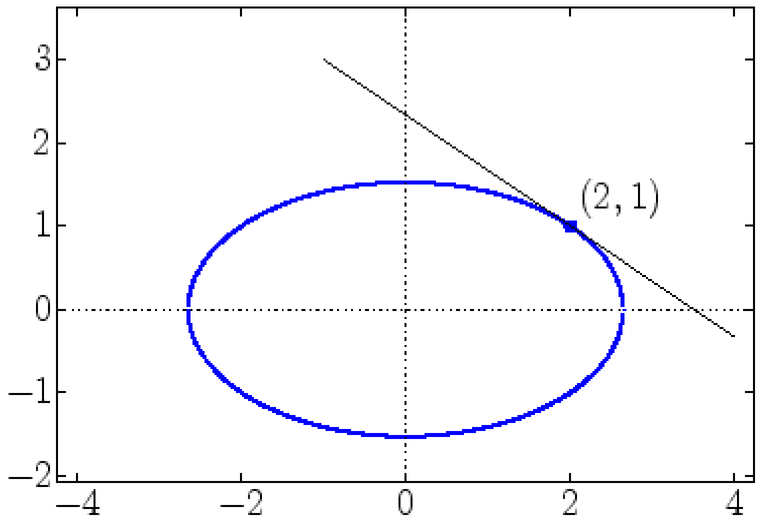
لاس ته راوړي.

له دې سره کېدی شي د E په یوه ټکي د $y \neq 0$ سره د تانجنت جګوالی وټاکل شي.

د بېلګې په توګه د $(2,1)$ لپاره په لاس راځي

$$y' = -\frac{1}{3}\frac{2}{1} = -\frac{2}{3}$$
.

(c) ketabton.com: The Digital Library



په ورته توګه جګ مشتقونه شمېرل کيږي. د yy' لپاره دضرب قانون د استعمال سره دی

$$\frac{d}{dx}(2x+6yy') = 2+6(y')^2+6yy'' = 0\,.$$

له دې لاس ته راځي

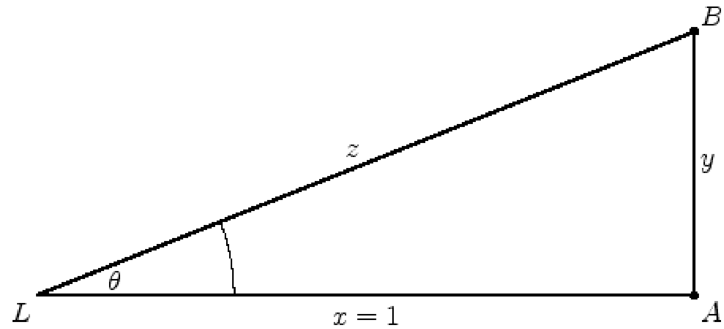
$$y'' = -\frac{1+3(y')^2}{3y}$$

.

کيدی شي په E باندې د يوه ټکي ځا په ځای کول او همدا د $y'(x)$ ارزښتونو پيژندلو له لارې ځرګند ازښتونه ټاکي
ليکونکي: هيوليګ، کوپف

په ټکي L کې يو د برېښنا يا رنا برج دی د يوه ځرخېدونکي بېجلی يا ګروپ سره، چې د رنا وړانګه يې د ټکو A او B له لارې تللی 1 km کرښيز لرې دښته لويږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



وړانګه غورځونکی د یوه څرخون لپاره 2 ثانیو ته اړتیا لري، دا په دې معنا چې

$$\frac{d\theta}{dt} = \pi$$

. د رڼاوړانګې پوزیشن یا ځای په دښته کې دی

$$y(t) = x\,\tan\theta(t).$$

له دې سره د چټکتیا لپاره لاس ته راځي

$$\frac{dy}{dt} = 1\pi\,\frac{1}{\cos^2(\theta)} \longrightarrow \infty \quad \text{für} \quad \theta \to \frac{\pi}{2},$$

دا په دې معنا چې سوری یې له رڼا چټک دی.

یو ټیکه معالعه لاندې راکوي. د دې وخت توپیر په پام کېنیولو له امله رڼا B ته د په وخت $t = \frac{\theta}{\pi} + \frac{z}{c}$ ورسیږي، دکوم سره چې $c = 300000\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$ د رڼا چټکتیا ده،

له دې سره لرو

$$\frac{\theta'}{\pi} = 1 - \frac{z'}{c}.$$

وروسته د t پسې د $z^2 = y^2 + 1$ مشتق راکوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$zz' = yy', \qquad \frac{z'}{y'} = \frac{y}{z} = \sin(\theta).$$

د θ' او z' اېښوونه په

$$y' = \frac{\theta'}{\cos^2(\theta)}$$

کې بالاخره راکوي

$$y' = \frac{1}{\cos^2(\theta)}\left(\pi - \frac{\pi}{c} y' \sin\theta\right)$$

همداسې

$$y' = \frac{c \cdot 1\pi}{c\,\cos^2(\theta) + 1\pi \sin(\theta)}$$

.

د $\theta \longrightarrow \frac{\pi}{2}$ لپاره اوس $y' \longrightarrow c$ هڅېږي، د اینشټاین د تیوري سره په هم غږۍ
کې باور لري

t

$$y' \longrightarrow \infty \qquad \frac{\sin(\theta)}{\cos^2(\theta)} \to -\frac{c}{\pi},$$

für

$$\theta \approx 4.781 \in \left(\tfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$$

داپه دې معناچې د لپاره بېرته سړی یوو خورا لویه چټکتیا
لاس ته راوړي. سوری له دې امله د رڼا ګړندی دی. دا د اینشټاین تیوري سره په تضاد
کې نه دی، ځکه چې سړی یو ه پېښه Phänomen, ګوري، نا دا خورنده ماده. د ،،ساده

$300000\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$

څېرونکي،، لپاره بو نا ښه احساس پاتیږي دا په هر صورت له ښخه
ورو خوزي.
لیکونکي: هیولیګ، کوپف

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لایبنیځ قاعده یا لارLeibniz-Regel

د یوه ضرب n -م مشتق دی

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$$

.

(Autoren: Höllig/Kopf)

د په حالت کې باور لري

$$(fg)'' = (f'g + fg')' = f''g + 2f'g' + fg''$$

او د لپاره دی

$$(fg)''' = (f'g + fg')'' = (f''g + 2f'g' + fg'')' =$$

$$= f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + fg'''$$

تولیزه بښوونه د اندکشن له لارې صورت په n نیسي د بینومیال ضریبونو لپاره د ریکورزین په پام کې نیولو سره.

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د $x = 0$ په ځا کې دې د

$$f(x)\, g(x) = x^9 \cos(\sin x)$$

یولسم مشتق وشمېرل شي.

د دې لپاره لومړی له دې څخه کار اخلو، چې د $x = 0$ لپاره د مونوم f فقط 9 -م مشتق د صفر سره نابرابر دی:

$$f^{(9)}(0) = 9!\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لایبنیځ- فرمول له دې سره فقط په یوه ترم راکمه وي.

$$(fg)^{(11)}\,|_{x=0} = \binom{11}{2}\, f^{(9)}(0)\, g^{(2)}(0)\,.$$

د ځنځیري قانون سره لرو یا لاس ته احْي

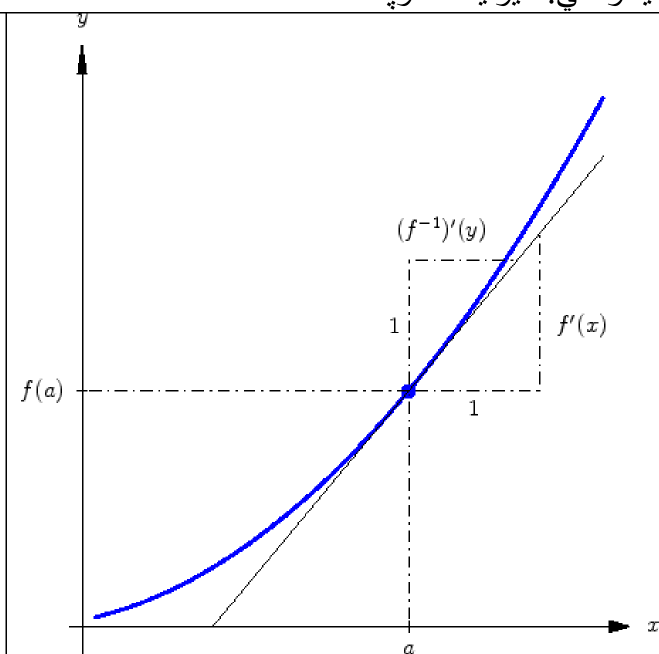
$$g'(x) = \qquad -\sin(\sin x)\,\cos x$$

$$g''(x) = \qquad -\cos(\sin x)\cos^2 x + \sin(\sin x)\sin x,$$

یعني $g''(0) = -1$. له دې سره غوښتونی مشتق دا لاندې دی

$$\binom{11}{2}\, 9!\,(-1) = -\frac{1}{2}\,(11!)\,.$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

که یو تابع د $y = f(x)$ سره $f'(x) \neq 0$ f ناپرېکېدونکي مشتقوړ وي، نو د x په یوه چاپېریال کې معکوس وړ دی ، او باور لري $(f^{-1})'(y) = f'(x)^{-1},$ همداسې $dx/dy = (dy/dx)^{-1}$.	

(c) ketabton.com: The Digital Library

لکه په ځېره کې چې لیدل کیږي، د f او f^{-1} جګوالي معکوس دي.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ،

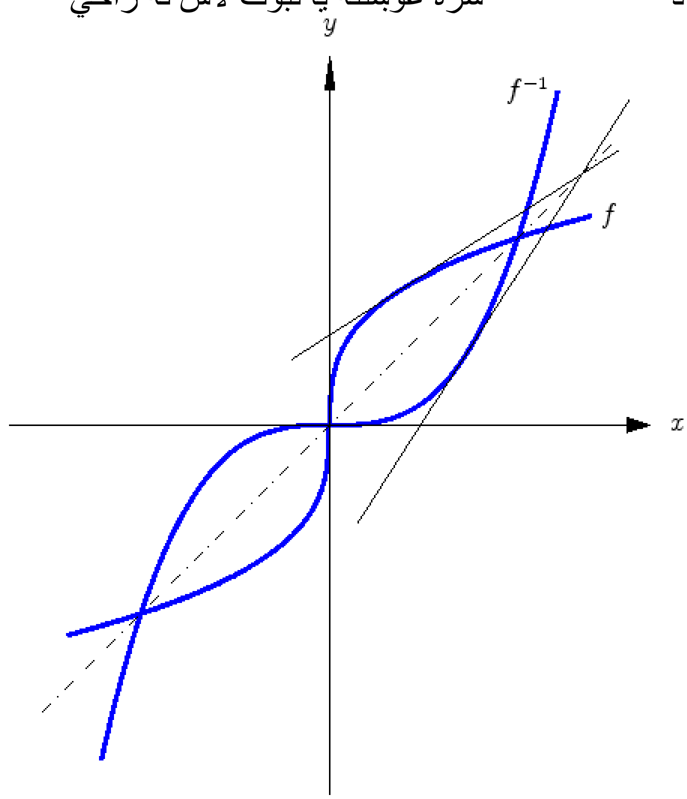
که کیږدو $g = f^{-1}$ ، نو لاس ته راوړو

$$x = g(f(x))$$

او د ځنځیري قانون سره مشتقونه

$$1 = g'(f(x))f'(x)\,.$$

د $y = f(x)$ سره غوښتنه یا ثبوت لاس ته راځي



(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چې د f او f^{-1} جګوالی په اړونده د x او y په ځایونو کې سره معکوس دي، روښانيږي، که په پام کې ونيول شي، چې f او f^{-1} يو بل ته سيومتريک دي.

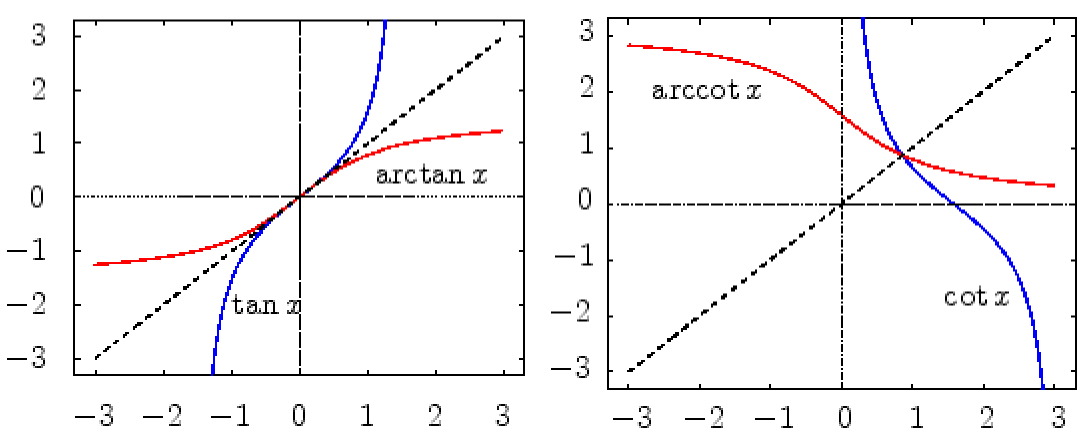
ليکونکي: اپپ، هيوليک،

دا چې د تانجنت تابع د $x = \arctan y$ معکوس تابع مشتق وټاکو، لومړی شمېرو

$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{d}{dx}\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

له دې سره لاس ته راځي

$$\frac{d}{dy}\arctan y = \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)^{-1} = \cos^2 x.$$



ښی اړخ اوس باید د y تابع په څېر وليکل شي. د دې لپاره کټوټوالی کارول کيږي يا استعماليږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + y^2$$

او لاس ته راوړي

$$\frac{d}{dy}\,\mathrm{arctan}y = \frac{1}{1+y^2}.$$

په ورته توګه د کوتانجنت په څېټ- یا معکوس تابع ښایو.

$$\frac{d}{dy}\,\mathrm{arccot}y = -\frac{1}{1+y^2}.$$

لیکونکي: اپپ، هیولیک،

ع

$y = f(x) = x\,(1 - x$

ء انتروالونو

$(-\infty, 1/2$

او

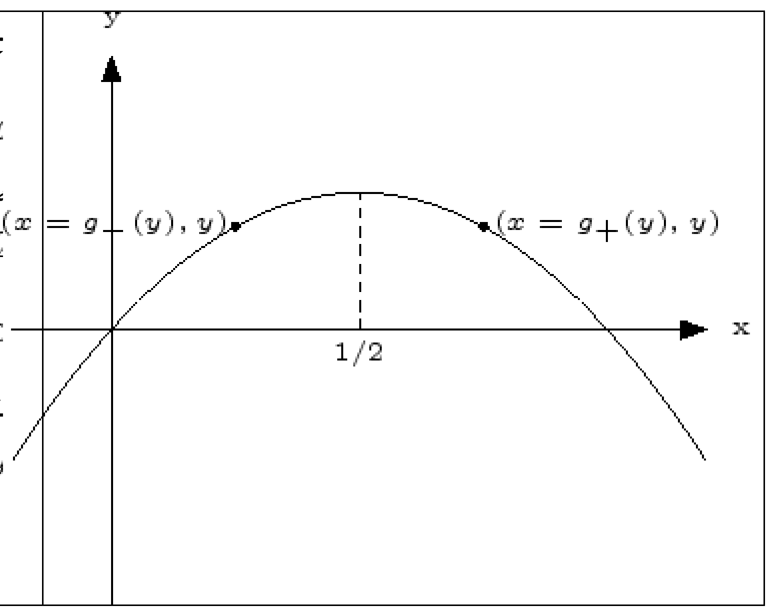
$[1/2, \infty$

هر وار په

ټ – یامعکوس تابع

$x = g(y$

لري.



(c) ketabton.com: The Digital Library

په دواړو حالتونو کې باور لري

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{1-2x}\,.$$

بل يې مشتقنيول راکوي

$$g''(y) = \left(\frac{1}{1-2x}\right)'\frac{dx}{dy} = \frac{2}{(1-2x)^2}\frac{1}{1-2x}\,.$$

په ځانګړي ډول د $x = 1, y = 0$ لپاره لاس ته راځي

$$g'(0) = 1, \quad g''(0) = -2\,.$$

مشتقونه شمېرلوړ دي، بې له دې چې معکوس تابع باید روښنه جوړه شي. دا ټيک هلته شونی دی، چې که سړی د y تابع د په څېر $g'(y)$ و لیکي. په دې بیلګه کې دا شوندی دی، ځکه x د y تابع په څېر لیکل کېدی شي:

$$g_{\pm}(y) = \frac{1}{2} \pm \sqrt{1/4 - y}\,.$$

پورته ارزښتونه داسې شمېرل کېدی شي، دکومو سره چې د هغوی د ارزښتجوړې $(1,0)$ اړونده څانګه باید وټاکل شي.

لیکونکي: هیولیک، کرایخ

لوګاريتمي مشتق يا - رابیلیدنه **Logarithmische Ableitung**

دا فرمول

$$f'(x) = f(x)\frac{d}{dx}\ln|f(x)|$$

کیدی شي د $g(x) > 0$ سره د $y = g(x)^{h(x)}$ بڼې توابعو مشتقیدو ته وکارول شي. سړی لاس ته راوړي

(c) ketabton.com: The Digital Library

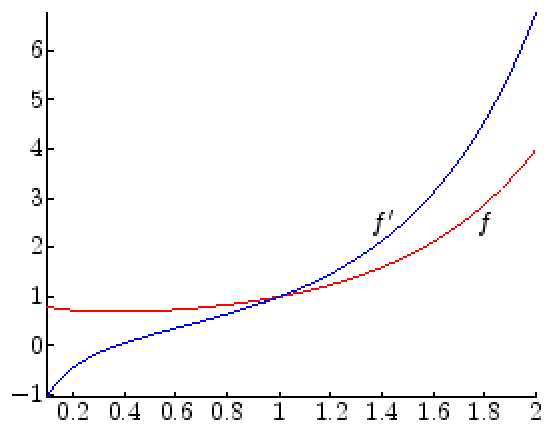
$$\frac{dy}{dx} = g(x)^{h(x)} \frac{d}{dx}\left(h(x)\ln g(x)\right).$$

ليکونکي: اپپ، هيوليک،

د $x > 0$ سره تابع $f(x) = x^x$

لپاره مشتق دی

$$f'(x) = x^x \frac{d}{dx}\ln(x^x) = x^x \frac{d}{dx}(x\ln x) = x^x(\ln x + 1).$$



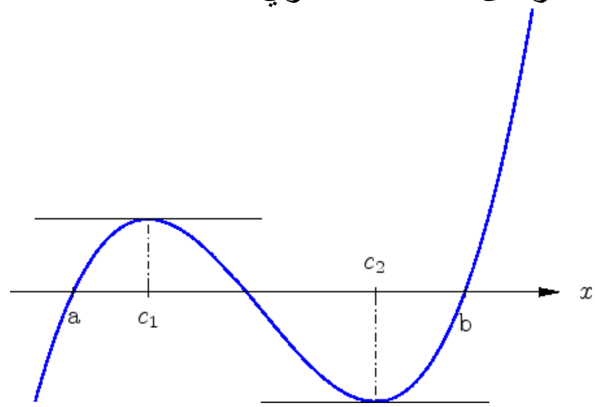
د $x \to 0$ لپاره $\ln f(x) = x \ln x$ د صفر په لور هڅيږي، نو x^x د $e^0 = 1$ په لور. نو تابع په صفرځای کې ښي اړخيز ناپزېکېدونکي ده. د مشتق لپاره f دا حالت نه دی. د $x^x \to 1$ او $\ln x + 1 \to -\infty$ له امله د $x \to 0$ لپاره په صفر يو ولاړ يا عمود تانجنت لري.

ليکونکي: اپپ، هيوليک،

د رولې جمله Satz von Rolle

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوه ناپرېکيدونکي مشتقوړ تابع f مشتق د $f(a)=f(b)=0$ سره لږ تر لږه يو صفرځای $c\in(a,b)$ لري.



توليز باور لري: که يو تابع په يوه انتوال $[a,b]$ کې n صفرځايونه ولري (د ډېروار والي په شمول)، نو هلته k ـم مشتق $\geq n-k$ صفرځايونه لري.

ليکونکي: اپپ، هيوليگ،

دا چې f ناپرېکېدونکی دی، نو د افراطي ارزښت جملې له امله په $[a,b]$ کې ټکي c او d شتون لري دا لاندې باوري کوي

$$f(c) = \min_{x\in[a.b]} f(x)$$

$$f(d) = \max_{x\in[a.b]} f(x) .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که f ناثابت وي(د ثابت f حالت ساده دی)، نو $f(c) < f(d)$ باور لري. له دې امله لږ ترلږه د دې دواړو ټکو څخه يو يې په (a,b) کې پروت دی . دا چې f مشتقوړ دی باید د دې ځايز يا لوکال افراطيت لپاره مشتق ورک – يا صفر شي.

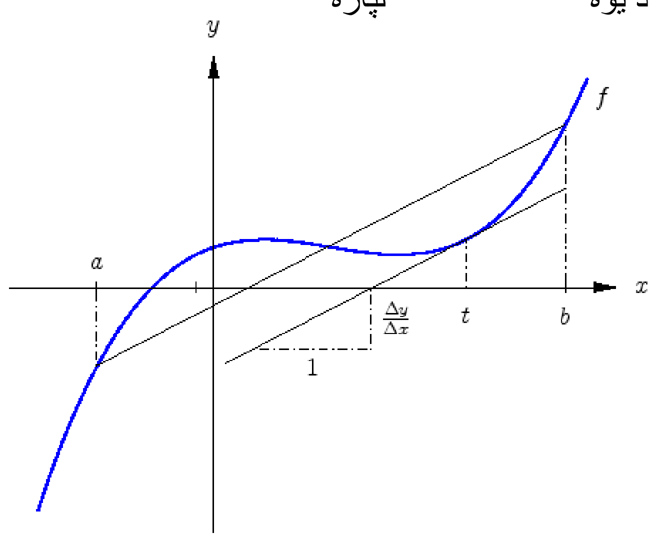
ليکونکي: اېپ، هيوليک،

منځ ارزښت قضيه **Mittelwertsatz**

د يوه ناپرېکېدونکي مشتقوړ تابع f لپاره باور لري

$$f(b) - f(a) = f'(t)(b-a)$$

د يوه $t \in (a,b)$ لپاره



هندسي دا کتوتوالی په دې معنا دی، چې تانجنت په يوه ټکي کې غبرګ دی د له پای ټکو $(a, f(a))$ او $(b, f(b))$ تېرېدونکي توټه وني يا وتر سره. داسې هم ليکو

$$\Delta y = f'(t)\Delta x$$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیکونکي: اېپ، هیولیګ،

د یوې تابع

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

لپاره $g(a) = g(b) = 0$ باور لري. دا چې f ناپرېکېدونکی مشتقوړ دی، نو g هم ناپرېکېدونکی مشتقوړ دی او د رولې د جملې پر بنسټ یو $t \in (a,b)$ شتون لري د لاندې سره

$$0 = g'(t) = f'(t) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

همداسې

$$f(b) - f(a) = f'(t) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

لیکونکي: اېپ، هیولیګ،

ټولیزه (شوې) منځ ارزښت جمله **Verallgemeinerter Mittelwertsatz**

که f او g ناپرېکېدونکي مشتقوړ توابع وي، نو یو $t \in (a,b)$ شتون لري د لاندې سره

$$(f(b) - f(a))g'(t) = (g(b) - g(a))f'(t)\,.$$

که برسېره پردې په (a,b) باندې $g'(x) \neq 0$ باور ولري، نو سرې کړی شي هم

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(t)}{g'(t)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

هم وليکي.
ليکونکي: اپپ، هيوليگ،

د تابع

$$h(x) = (f(b)-f(a))g(x) - (g(b)-g(a))f(x) - f(b)g(a) + f(a)g(b)$$

لپاره $h(a) = h(b) = 0$ باور لري. دا چې f او g ناپرېکېدونکي مشتقوړ دي، نو h هم ناپرېکېدونکې مشتقوړ دی او د پورته د رولې د جملې سره سره سم يو $t \in (a,b)$ شتون لري د لاندې سره.

$$0 = h'(t) = (f(b)-f(a))g'(t) - (g(b)-g(a))f'(t)$$

bzw. همداسې

$$(f(b)-f(a))g'(t) = (g(b)-g(a))f'(t)\,.$$

که (a,b) په باندې $g'(x) \neq 0$ وي. نو د منځ ارزښت جملې سره سم $g(b)-g(a) \neq 0$ هم او سړی لاس ته راوړي.

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(t)}{g'(t)}\,.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليگ،

لانداو-سيمبول **Landau-Symbole**

سړی ليکي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = O(g(x)) \qquad (\ x \to a)\ ,$$

که يو ثابت c شتون ولري، دسې چې $|f(x)| \le c|g(x)|$ وي a ته پوره نږدې x لپاره .

د $|f(x)|/|g(x)|$ د 0 په لور هڅيږي، نو سړی په اړونده توګه ليکدود کاروي

$$f(x) = o(g(x))$$
.

ليکونکي: اپپ، هيوليک،

د بينوم له جملې څخه لاس ته راځي

$$(1+x)^n = 1 + nx + O(x^2) \quad (x \to 0)$$

په څټ – يا معکوس جوړونې د $1-nx$ سره دغزونې وروسته لاس ته راځي

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1+x)^n} &= \frac{1}{1+nx+O(x^2)} \\ &= \frac{1-nx}{1-(nx)^2+O(x^2)} = \frac{1-nx}{1+O(x^2)} \\ &= 1 - nx + O(x^2)\,. \end{aligned}$$

د $x \to \infty$ لپاره دی

$$(1+x)^s = O(x^s)$$

د ټولو $s \in \mathbb{R}$ لپاره.

ليکونکي: اپپ، هيوليک،

(c) ketabton.com: The Digital Library

ناپرېکیدنه او مشتقوړوالی کیدی شي د لاګرانژ فرمول په مرسته تعریف شي.

یو تابع f په $x = a$ کې ناپرېکېدونکی دی، که وي

$$f(x) - f(a) = o(1) \quad (x \to a) .$$

مشفقوړوالی د

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + r$$

سره په یوه معنا دی د

$$r = o(h) \quad (|h| \to 0) .$$

سره.

د یوه دوه واره ناپرېکېدونکي مشتقوړتابع لپاره د تېلور ــودې څخه هغه تېره

$$r = O(h^2)$$

اټکل لاس ته راځي

لیکونکي:کلاوس، هیولیګ،

د لو، پیتال قاعده یا لار **Regel von l'Hospital**

که دوه ناپرېکېدونکي مشتقوړ توابع f او g په a کې یوه ګډ صفرځای یا قطبځای ولري، نو باور لري

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

که ښی پوله ارزښت شتون ولري(په ورکړ شوي حالت کې په ناپای کې)

د ټولیزه منځ ارزښت جملې په بنسټ د x او a تر منځ یو t شتون لري د لاندې سره

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(t)}{g'(t)} ,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که سرې ، د يوه ناپای پوله ارزښت په موخه، $f'(t)/0$ يعني داسي $\pm\infty$ په معنا کړي.

له دې $x \to a$ سره هم a $t \to a$ ځي، نو سملاسي راکوي

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليک،

د لو، پيتال د جملې استعمال د يو څو بېلګو لړيو په بنسټ روښانه کيږي

د $0/0$ لپاره:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x+1}{3x^2-7x+4} = \lim_{x\to 1}\frac{3x^2-2}{6x-7} = -1$$

د $-\infty/\infty$ لپاره :

$$\lim_{x\to 0+} x\ln(x) = \lim_{x\to 0+}\frac{\ln(x)}{1/x} = \lim_{x\to 0+}\frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0+} -x = 0$$

د ټولو $x \to \infty$ لپاره:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi/2-\arctan x}{1/x} = \lim_{x\to\infty}\frac{-1/(1+x^2)}{-1/x^2} = 1$$

ډېواره استعمال:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin(x)}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-x}{x\sin(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{\sin(x)+x\cos(x)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \qquad \lim_{x\to 0}\frac{-\sin(x)}{2\cos(x)-x\sin(x)}=0$$

په دې بېلګو کې دې پام وي، چې د شمېرلو پوله ارزښت شتون د لوپيتال قاعدې د استعمال پسې د منځته راغلې پوله ارزښت د شتون له لارې تضمين دی.

ليکونکي: اېپ، هيوليګ،

کرښيز اپروکسميشن (ورنږدېوالی) **Lineare Approximation**

د يوه دوه واره ناپرېکېدونکي مشتقوړ تابع f لپاره باور لري

$$f(x+\Delta x)=f(x)+f'(x)\Delta x+R$$

د لاندې پاتې غړي سره

$$R=\frac{1}{2}f''(t)(\Delta x)^2=O((\Delta x)^2)$$

او د t د x او ترمنځ $x+\Delta x$ سره.

ليکونکي: اېپ، هيوليګ،

تابع

$$g(y):=f(y)-f(x)-f'(x)(y-x)-$$

$$-\frac{f(x+\Delta x)-f(x)-f'(x)\Delta x}{(\Delta x)^2}(y-x)^2$$

د $y=x+\Delta x$ لپاره يو صفرځای لري او د $y=x$ لپاره يو دېل يا دوه واره صفرځای لي. د رولې د جملې په تعقيب يو $y=x+\Delta x$ شتون لري د لاندې سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

$0 = g''(t)$	$= f''(t) - 2\frac{f(x+\Delta x) - f(x) - f'(x)\Delta x}{(\Delta x)^2}$

همداسې

$f(x+\Delta x) - f(x) - f'(x)\Delta x$	$= \frac{1}{2}f''(t)(\Delta x)^2\,.$

لیکونکي: اېپ، هیولیګ،

د ناټیکاوي وده **Fehlerfortpflanzung**

د یوه کچ – یا اندازونې ارزښت $\Delta x = \tilde{x} - x$ مطلق ناټیکاوی یا یو نږدېوالی $x \approx \tilde{x}$ ښايي نو د یوه ناپرېکېدونکي مشتقوړ تابع f لپاره

$$|\Delta y| = |f'(x)||\Delta x| + o(\Delta x)$$

باور لري د $\Delta y = f(\tilde{x}) - f(x)$ سره. په اړونده توګه د نسبي ناټیکاوی لپاره باور لري

$$\frac{|\Delta y|}{|y|} = \left(|f'(x)|\,\frac{|x|}{|y|}\right)\frac{|\Delta x|}{|x|} + o(\Delta x)$$

که $x, y \neq 0$ وي. په نوکانو کې افاده c_r د x په ځای کې د f د کندیشن عدد بلل کیږي.

د ترم $o(\Delta x)$ د پرېښېږېږلړ یعنې له منځه وړلو له لارې کېدی شي د ناټیکاوي نږدیوالس اټکل شي. د دې سره کېدی شي د ټیک مشتق ارزښت په ځای مناسب بندیزونه هم وکارول شي:

$$|\Delta y| \leq c_a|\Delta x|\,, \quad c_a \geq \max_{|t-x|\leq|\Delta x|} |f'(t)|\,.$$

په ا ړونده توګه $c_r = c_a\frac{|x|}{|y|}$ د نسبي ناټیکاوي لپاره یو بندیز یا لنډ: بند دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیکونکي: اپپ، هیولیګ،

یو کونج $\vartheta \in (0, \pi/2)$ کېدی شي د کاټېټونو یا ولاو اړخونو د نسبت څخه په جګېدونکي دربګوډي کې داسې وټاکو :

$$\vartheta = \arctan(y/x) \,.$$

که y د کره ځای په ځای x سره کچ کړو، نو کېدی شي ضریب c_a د مطلق ناټیکاوي لپاره د

$$\left|\frac{d\vartheta}{dy}\right| = \left|\frac{1/x}{1 + y^2/x^2}\right| = \left|\frac{x}{x^2 + y^2}\right|$$

له لارې اټکل شي. افاده د $y = 0$ لپاره ماکسمال کیږي، او سړی لاس ته $c_a = \frac{1}{x}$ راوړي، دا په دې معنا چې

$$|\Delta\vartheta| \le |1/x| \ |\Delta y| \,.$$

لویې ناټیکیاوی د کوچني x لپاره غزیږي. په ورته توګه د نسبي ناټیکاوي د قوی کېدني فکتور لپاره هم باور لري

$$c_r = \max_y \left|\frac{x}{x^2 + y^2}\frac{y}{\vartheta}\right| \,.$$

که دا لاندې تخمین وکارول شي

$$|\vartheta| \ge |\sin\vartheta| = \left|\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right| \,,$$

،

نو لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$c_r \le \left| \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \le 1 \, .$$

نو نږدېوالي دول باور لري

$$\frac{|\Delta\vartheta|}{|\vartheta|} \le \frac{|\Delta y|}{|y|} \, ,$$

دا په دې معنا چې نسبي فکتور نه غښتلی کیږي

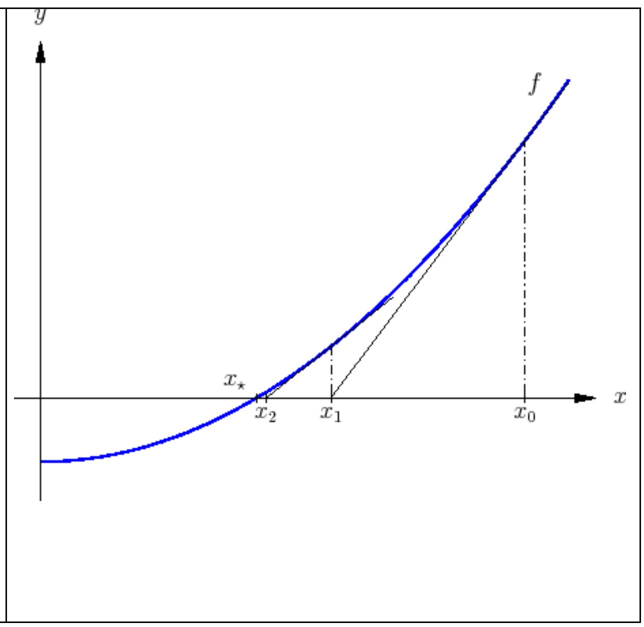
لیکونکي: کلاوس، هیولیک،

د نیوټن تلنلار یا - قانو **Newton-Verfahren**

د نیتن تلنلار سره کېدی شي د یوه تابع f صفرځای x_* نومریک وټاکل شي. د نږدېوني یا اپروکسمیشن پرلپسي $x_0, x_1 \ldots$ د کرښیزوالي څخه ګټل کیږي.

نږدېوالی $x_{\ell+1}$ د x -محور سره د تانجنت غوښتکی دی په تکی $(x_\ell, f(x_\ell))$ کې :

$$x_{\ell+1} = x_\ell - f(x_\ell)/f'(x_\ell)$$



د یوه ساده صفرځای x_* ($f'(x_*) \neq 0$) لپاره د نیوټن – ایتریشن لوکال مربع پولې ته ځي، دا په دې معناچې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$|x_{\ell+1} - x_*| \le c \; |x_\ell - x_*|^2$$

د پیلټکي x_0 لپاره د x_* په یوه پوره کوچني چاپریال کې.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ،

د تیلور -نږدې ارزت Taylor-Approximation له لارې سړی

$$0 = f(x_*) = f(x_\ell) + f'(x_\ell)(x_* - x_\ell) + r$$

لاس ته راوړي د پاتې غړي

$$r = \frac{1}{2} f''(t_\ell)(x_* - x_\ell)^2 \,,$$

سره د یوه t_ℓ لپاره چې د x_* او x_ℓ ت رمنځ پرته ده. که د انترپولیشن قاعده کې کیږدو

$$f(x_\ell) = f'(x_\ell)(x_\ell - x_*) - r$$

،

نو لالاس ته راځي

$$x_{\ell+1} = x_* - r/f'(x_\ell) \,.$$

د $f'(x_\ell) \neq 0$ لپاره لرو

$$|x_{\ell+1} - x_*| = c_\ell |x_\ell - x_*|^2, \quad c_\ell = \frac{1}{2} \, \left| \frac{f''(t_\ell)}{f'(x_\ell)} \right| \,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

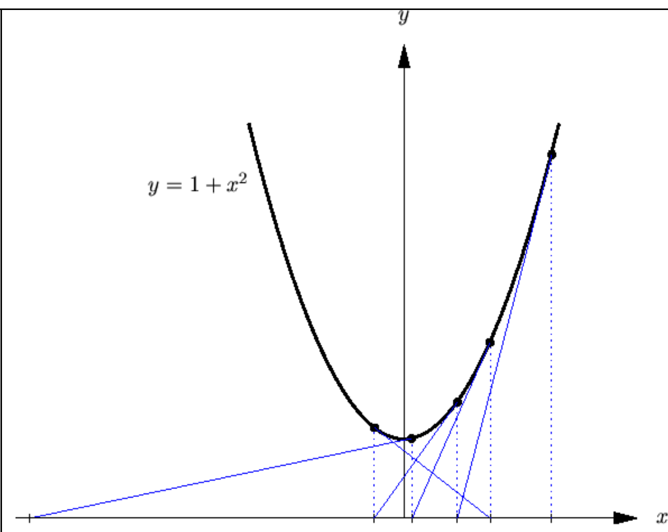
که $f'(x_*) \neq 0$ باور ولري، نو c_ℓ د ناپريکيدنبأه امله د x_ℓ لپاره په يوه د x_* چاپيريال $[x_* - \delta, x_* + \delta]$ کې مخدود دی:
$c_\ell \leq c$.

له ې سره د مربع يا خلوريز پولې ته تګ لاس ته راځي.
ليکونکي: اېپ، هيوليګ،

که په لاندې مساوات د نيتن قانون وکاروو

$$f(x) = x^2 + 1 = 0$$
،
نو اتريشن(پل په پل اصلي حل ته وردرېدې کېدنه) لاس ته راځي

$$x_{l+1} = \frac{1}{2}\left(x_l - \frac{1}{x_l}\right) .$$

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>f
په پام کې د ې وي. چې حقيقي حل نه لري، نيوتن تلنلار يا قانون په حقيقي پيل ارزښت x_0 سره پولې ته نه شي تللی.
(x_l)
په رښتيا کې پرلپسي يو ګډوډ حالت غوره کوي.

د کټمتوالي په مرسته</td>
</tr>
</table>

$$\cot(2\phi) = \frac{1}{2}\left(\cot\phi - \frac{1}{\cot\phi}\right)$$

پرلپسي (x_ℓ) کېدی شي اکسپليځيټ ورکړل شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_0 = \cot\phi \implies x_\ell = \cot(2^\ell \phi).$$

لیکونکي: اپپ، هیولیک،

ها له بابلیانو ښخه کارول شوی ایترېشن یا پل پل مخ ته تلنه یا تکرار

$$x \longleftarrow (x + a/x)/2$$

د یوه حقیقی عدد a د ریښني شمېرلو ته په ټیکه مطالعه د $f(x) = x^2 - a$ لپاره د نیوتن تلنلار په حیڅ ځان ښایي:

$$\frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) = x - \frac{x^2 - a}{2x}$$

د $a = 2, x_0 = 1$ لپاره نږدې شمېرنه یا اپروکسیمېشن لاس ته راوړو.

1

1.5

1.416666666666666666666666666666666667

1.414215686274509803921568627450980392157

1.41421356237468991062629557889013491011 7

1.41421356237309504880168962350253024361 5

1.414213562373095048801688724209698078570

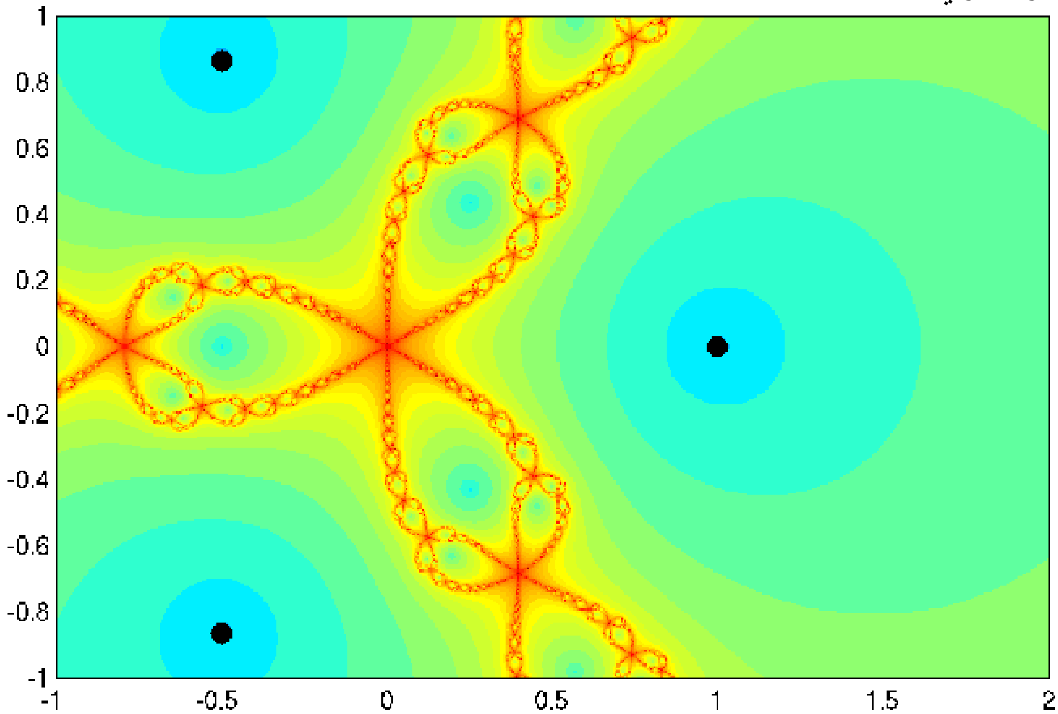
کونورګنځ فوق العاده ګړندی دی. د هر پل سره د د ټیکو ځایونو(ترې لاندې کرښه تېره ده) تعداد په نږدې توګه دوه واره کیږي. په دې بېلګه کې مربع پولې ته تلنه کېدی شي د ساده بڼې بدلون له لارې هم وښوول شي:

$$x_{\ell+1} - \sqrt{a} = (x_\ell + a/x_\ell)/2 - \sqrt{a} = \frac{1}{2x_\ell}(x_\ell - \sqrt{a})^2.$$

د نیټن-تلنلار د هندسي روښانه ونې ښخه لرو، چې په نږدې توګه شمېرنه د $x_0 \neq 0$ لپاره پولې ته تلونکې ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې څېره د لاندې مساوات لپاره د کمپلکس نيوټن-اېټرشن پولي ته تلنه ښايي
$z^3 - 1 = 0$
د حلونو $z = \exp(2\pi i k/3)$ سره. مختلف رنګونه د پولي ته تلني ورشو ګاني ښايي د همغه يا اړونده صفرځاى لپاره. تياره رنګه شوط ځايونه ګړندى پولي ته تلنه په ګوته کوي.



سرې د پولي ته تلني ورشو په روښانه توګه fraktal مات خوي پيژني

د تيلور پولينوم**Taylor-Polynom**

د تيلور پولينوم Das Taylor-Polynom

$$p_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه تابع f انترپولیری (ارزښت چې د دوه ټکو ترمنځ پروت وي) مشتق په ټکي a
$p_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a),\ k = 0, \ldots, n$
تر ت نظم n پورې، دا په دې معنا چې .
که f یو $(n+1)$-واره ناپرېکېدونکی مشتقوړ وي، نو باور لري

$$f(x) = p_n(x) + R, \quad R = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

د یوه t لپاره چې د a او x ترمنځ وي.
لیکونکي: اېپ، هیولیګ،

سیده پسې شمیرنه د f او p_n مشتق یو بل سره توافق یا یوغږیزوالی ښایي. د پاتې غږي R د پوره کیدو یا تکمیل ته سړی د تیلور پولینوم په یوه بل ترم غزوي:
$q(y) = p_n(y) + c(y-a)^{n+1}$.

ثابته داسې ټاکل شوې، چې $q(x) = f(x)$ وي. پسې $q - f$ یو صفرځای لري د $n+1$ د ډېروالي سره په $y = a$ کې او یو بل صفرځای په $y = x$ کې، په ټولیزه نو $n+2$ صفرځایونه . درولې جملې پسې باید $(n+1)$-م مشتق باید لږ تر لږه یو صفرځای t ولري:

$$0 = q^{(n+1)}(t) - f^{(n+1)}(t) = c(n+1)! - f^{(n+1)}(t)\,.$$

له

$$R = f(x) - p_n(x) = q(x) - p_n(x) = c(x-a)^{n+1}$$

څخه د پاتې غړي غوښتونې بڼه راکوي.
لیکونکي: اېپ، هیولیګ،

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ساين تابع $f(x) = \sin x$ مشتقونه دي

$$f' = \cos x, \quad f'' = -\sin x, \quad f''' = -\cos x, \quad f^4 = f = \sin x, \dots .$$

د ارزښتونو

$$f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = -1, \quad f^4(0) = f = 0, \dots .$$

سره لومړي د تيلور پولينومونه د ساين تابع دي.

$$p_1(x) = x$$

$$p_3(x) = x - \frac{x^3}{6}$$

$$p_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

$$p_7(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040}$$

په ورته توګه د کوساين تابع لپاره هم باور لري

$$p_0(x) = 1$$

$$p_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$$

$$p_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

$$p_6(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

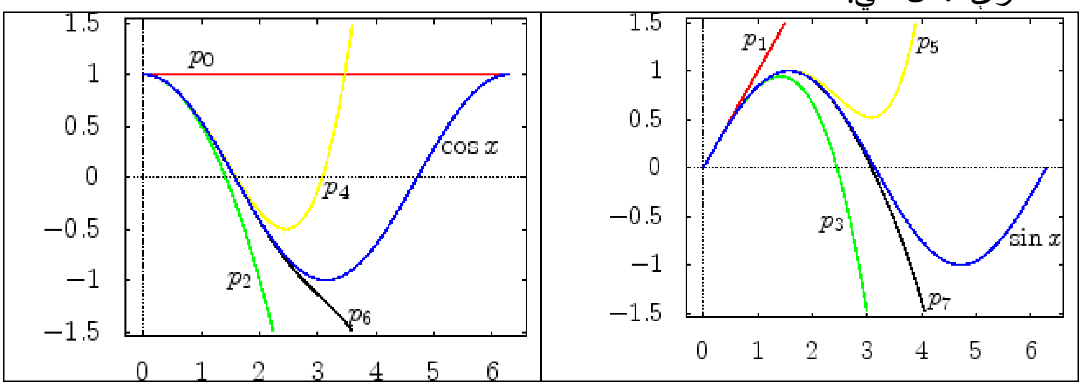
نږدې شمېرنه يا اپروکسيمېشن د ډېر کوچني x لپاره خورا دقيق دی. د بېلګې په توګه کېدی شي د نږدېوني ناټيکاوی

$$\sin 0.1 \approx p_4(0.1) = 0.09983\ldots$$

د

$$|R| = \frac{|\cos t|}{5!}\, 0.1^5 \le \frac{1}{12000000} \le 10^{-7}$$

له لارې اټکل شي.



لکه د خبرې څخه چې ليدل کيږي، نږدې شمېرنه د لوی x لپاره لومړی د ځګو درجو سره پوره ټيک يا دقيق وي. په جدول کې د څو د x - ارزښت لپاره ناټيکاوي ورکړل شوي دي.

x	π	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/4$	$\pi/5$	$\pi/6$
$p_1(x)$	3.1416	0.5708	0.1812	0.0783	0.0405	0.0236
$p_3(x)$	2.0261	0.0752	0.0102	0.0025	0.0008	0.0003
$p_5(x)$	0.5240	0.0045	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000
$p_7(x)$	0.0752	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

(c) ketabton.com: The Digital Library

$p_0(x)$	2.0000	1.0000	0.5000	0.2929	0.1910	0.1340
$p_2(x)$	2.9348	0.2337	0.0483	0.0155	0.0064	0.0031
$p_4(x)$	1.1239	0.0200	0.0018	0.0003	0.0001	0.0000
$p_6(x)$	0.2114	0.0009	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

لیکونکي: اپپ، هیولیګ،

حقیقي د تیلور لړۍ **Reelle Taylor-Reihe**

په یوه ټکي x_0 کې د یوه ناپای ډېرواره مشتقوړ تابع f د تیلور لړۍ د یوې په توان لړۍ یوه وده ده:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x-x_0)^n, \quad a_n=\frac{1}{n!}\,f^{(n)}(x_0)\,.$$

د $x\in\mathbb{R}$ لپاره لړۍ او همداسې ټول مشتقونه په یوه انتروال (x_0-r,x_0+r) کې مطلق پولې ته تلونکي دي او د $|x-x_0|>r$ لپاره پولې ته نه تلونکي دي. د $|x-x_0|=r$ لپاره بې له نورو څېړنو د لړیې پولې ته تلنې په هکله ویناوې ناشونې دي.

د ودې ټکي د واټن لپاره بند(بندیز) r د پولې ته تلنې یا کونورګنت ـوړانګې په نامه یادیږي او د فرمول

$$r=\left(\varlimsup_{n\to\infty}|a_n|^{1/n}\right)^{-1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

سره شمېرل کيږي. له دې سره ارزښتونه $r = 0$ او $r = \infty$ شوني دي. په دې حالت کې د کونورګنت انتروال يا تش دی او يا ټول $\mathbb{R}$ دی.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

د ريښي قضيې په بنسټ دی

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\right|} = \frac{1}{r}\,|x-a|\,.$$

په توګه د $|x-a| < r$ لپاره د ټېلرو-اړی يوې ته ځي او د $|x-a| > r$ لپاره پولې ته نه ځي. د $|x-a| = r$ لپاره نوري څېړنې اړيينې دي يا نورو څېړنو ته اړتيا ده.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

تابع

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2), & \text{für } x \neq 0 \\ 0, & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

په 0کې برابرډوله ناپرېکېدونکې ده. دا پسې دپوره ايندکشن له لارې ښوول کېدی شي، چې ټول مشتقونه د

$$f^{(n)}(x) = \frac{p_n(1/x)}{\exp((1/x)^2)}$$

بڼې دي، د يوه مناسب پولينوم p_n سره. دا چې د $x \to 0$ (همداسې د $1/|x| \to \infty$) لپاره اکسپوننشل تابع نسبت يوه پولينوم ته په قوت يا قوي جګيږي، نو ټول پولينومونه په $x = 0$ ځای کې ارزښت 0لري. اړونده تيلور-لړی نو له دې امله صفر لړی ده

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sum_{k=0}^{\infty} 0x^k .$$

داچې د $x \neq 0$ $f(x) \neq 0$ لپاره دی، نو د تيلور-لړۍ د f سره فقط د $x = 0$ لپاره يو بل سره برابر يا يو غړيز دي، دا په دې معنا چې د پولې ته تلنې وړانګه r 0 ده.

ليکونکي: اېپ، هيوليک،

اکسپوننشل تابع

$$f(x) = \exp(x)$$

لاندې مشتق لري

$$f^{(n)}(x) = \exp(x) .$$

که د $x = 0$ په ځای کې وارزول شي ، ترې لاس ته راځي

$$f^{(n)}(0) = 1 .$$

د دې په تعقيب د اکسپوننشل تابع د تيلور-لړۍ لاندې بڼه لري

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} .$$

دا چې

$$\lim_{k\to\infty} 1/\sqrt[k]{k!} = 0 ,$$

نو $r = \infty$ دی، دا په دې معنا چې د تيلورر-لړۍ په ټول $\mathbb{R}$ پولې ته ځي يا کونورګنت ده.

ليکونکي: اېپ، هيوليک،

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بیلګې لپاره تابع

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

په $a = 4$ ودیز کیږي.

ددې لپاره لومړی مشتقونه جوړیږي:

$f'(x)$	=	$-\frac{1}{2}\, x^{-3/2}$
$f''(x)$	=	$\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\, x^{-5/2}$
.	.	.
.	.	.
.	.	
$f^n(x)$	=	$(-1)^n\, 2^{-n} \cdot 1 \cdot 3 \cdots (2n-1) \cdot x^{-\frac{2n+1}{2}}$.

په ودیزېنې ټکي د قیمت اینووونې یا -وضع کونې سره سړی د تیلور-ضریبوننه لاس ته راوړي

$$c_n = \frac{f^{(n)}(4)}{n!} = (-1)^n\, \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)}\, 2^{-2n-1} .$$

د لړۍ لومړي درې ترمونه دي

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{16}\,(x-4) + \frac{3}{128}\,(x-4)^2 + \cdots .$$

د دې لپاره چې د ضریبونو وړانګه r وټاکو، په پام کې نیسو

$$\frac{1}{2}\,\frac{1}{2n}\,2^{-2n} \leq c_n \leq \frac{1}{2}\,2^{-2n} .$$

له دې سره دی

$$\frac{1}{4}\,\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\sqrt[n]{1/(4n)} \leq \overline{\lim_{n\to\infty}}\,\sqrt[n]{c_n} \leq \frac{1}{4}\,\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\sqrt[n]{1/2} .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1/n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$$

دا چي دی لاس ته

$$r = \frac{1}{(1/4)} = 4$$

راځي .

ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

د اويلر فرمول

$$\exp(\mathrm{i}t) = \cos t + \mathrm{i}\sin t$$

کيدی شي د تيلور-وديزيښني پہ مرسته

$$\cos t = \qquad 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} - \ldots$$

$$\sin t = \qquad t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} - \ldots$$

د کوساين - او ساين توابع منځ ته راوړل شي. له

$$-\frac{t^2}{2} = \frac{(\mathrm{i}t)^2}{2}, \quad -\frac{t^3}{6} = \frac{\mathrm{i}^2 t^3}{3!}, \quad +\frac{t^4}{24} = \frac{(\mathrm{i}t)^4}{4!}, \quad +\frac{t^5}{120} = \frac{\mathrm{i}^4 t^5}{5!}, \ldots$$

څخه لاس ته راځي

$$\cos t = \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}t)^2 k}{(2k)!}$$

$$\mathrm{i}\sin t = \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}t)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

او د زياتون يا جمعي له لارې د تيلور –وديزيښني له لارې د اويلر فرمول لاس ته راوړو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{aligned}\exp(\mathrm{i}t) &= 1 + \mathrm{i}t - \frac{t^2}{2!} - \mathrm{i}\frac{t^3}{3!}\cdots \\ &= 1 - \frac{t^2}{2!} \pm \cdots + \mathrm{i}(t - \frac{t^3}{3!} \pm \cdots) \\ &= \cos t + \mathrm{i}\sin t\,.\end{aligned}$$

ليکونکي: اېپ، هيوليګ،

د لوګاريتم تابع

$$f(x) = \ln x$$

لاندې مشتق لري

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f'''(x) = \frac{2}{x^3}\,.$$

په دې پسې مرربعيز د تيلور –پولينوم په ټکي $a = 1$ کې دی

$$p(x) = 0 + (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2\,.$$

باقی – يا پاتې غړی دابنه لري

$$\begin{aligned}r(x) = f(x) - p(x) &= \frac{1}{3!}\,f'''(\xi)\,(x-1)^3 \\ &= \frac{1}{3\,\xi^3}(x-1)^3\end{aligned}$$

د ξ سره، چې د x او 1 ترمنځ پروت دی. ناټيکاوی د ممکن کوچني ξ لپاره خورا غټ دی. سړی اټکل لاس ته راوړي

$$|r(x)| \le \frac{1}{3}\left|\frac{x-1}{\min(1,x)}\right|^3\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $x \in [0.75, 1.25]$ لپاره ناتیکاوی دی

$$\leq \frac{1}{3}\left|\frac{1/4}{3/4}\right|^3 = \frac{1}{81}\,.$$

لیکونکي: هیولیگ،

بینومیال لړی Binomialreihe

تابع

$$f(x) = (1+x)^\alpha$$

د $\alpha \in \mathbb{R}$ سره یوه تیلور-لړی لري

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

د $|x| < 1$ لپاره ، د کوم سره چې

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$$

تولیز شوی بینوم ضریب دی

لیکونکي: اپپ، هیولیگ،

دا ترلي لاس ته راځي، چې

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لړی

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k$$

د وېش قضيي

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\left|\frac{\binom{\alpha}{k+1}x^{k+1}}{\binom{\alpha}{k}x^k}\right|=|x|\overline{\lim_{k\to\infty}}\left|\frac{\alpha-k}{k+1}\right|=|x|<1.$$

له مخې پولې ته ځي
ليکونکي: اېپ، هيوليګ،

د تيلور ـــلړی مشتق او انتيګرال
Differentiation und Integration von Taylor-Reihen

د يوې د تيلور- لړی

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(x-a)^k\,,\quad c_k=\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,,$$

کېدی شي غړي ډوله يا يې غړي په غړي مشتق او انتيګرال ونيول شي:

$$f'(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)c_{k+1}(x-a)^k$$

$$\int f(x)dx=c+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_{k-1}}{k}(x-a)^k.$$

په دواړو عمليو کې د پولې ته تلنې وړانګه بې تغيره پاتېږي.

ليکونکي: هيوليګ، کرايځ

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بينوملړی

$$(1+t)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} t^k = 1 + \alpha t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}t^3 + \cdots,$$

ځخه د $t = -x^2$ او $\alpha = -1/2$ سره لاس ته راځي

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \binom{-1/2}{k} x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)} x^{2k}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{16}x^6 + \cdots.$$

د انتيګرال له لارې او همداسې د

$$\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \arcsin(0) = 0$$

په پام کې نيولو سره د غړي په غړي انتيګرال له لارې داوده لاس ته راځي

$$\mathrm{arcs}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \binom{-1/2}{k} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

$$= x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \cdots$$

ليکونکي: اپپ، هيوليک،

د انتيګرا

$$\int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

نږدې ډوله شميرنه د تيلور-اکسپوننشل تابع باندې لاس ته راولي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$e^{-t^2} \qquad = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{k!} \,.$$

له دې سره لاس ته راځي

$$\int_0^x e^{-t^2}\,dt \qquad = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{k!(2k+1)} \,.$$

د نومریکي نږدېوني پخ حیث د $\int_0^1 e^{-t^2}\,dt$ لپاره لاندې ارزښتونه لاس ته راځي

k=0: 1
k=1: 0.66666666666667
k=2: 0.76666666666667
k=3: 0.74285714285714
k=4: 0.74748677248677
k=5: 0.74672919672920
k=6: 0.74683603433603
k=7: 0.74682280682281
k=8: 0.74682426573971
k=9: 0.74682412070118
(Autoren: App/Höllig)

د تیلور-لړی ضرب **Multiplikation von Taylor-Reihen**

د تیلور – لړی کېدی شي غړي په غړي سره ضرب شي:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} f_n (x-a)^k\right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-a)^k\right) = \sum_{k=9}^{\infty} c_k (x-a)^k$$

د لاندې سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$c_k = \sum_{j=0}^{k} f_{k-j} b_j \ .$$

د ضرب د کونورګنت وړانګه د دواړو ضريبونو د پولې ته تلنې وړانګې د مينيموم سره برابره ده.

ليکونکي: ، هيوليک، کرايخ

د لاندې تابع د تيلور – لړۍ شميرنې ته

Zur Berechnung der Taylor-Reihe der Funktion

$$f(t) = e^{-t}\cos(\omega t)$$

سړی کړی شي د اکسپوننشل تابع د تيلور – لړۍ او د کوساين –تابع وکاروي

$$e^{-t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t)^k}{k!} = 1 - t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} \pm \cdots$$

$$\cos = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\omega t)^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{(\omega t)^2}{2!} + \frac{(\omega t)^4}{4!} - \frac{(\omega t)^6}{6!} \pm \cdots \ .$$

د ضرب څخه د لومړي ترم لپاره لاس ته راځي

$$e^{-t}\cos(\omega t) = 1 - t + \frac{1-\omega^2}{2!} t^2 + \left(\frac{\omega^2}{2!} - \frac{1}{3!}\right) t^3 + \cdots \ .$$

$$e^{-t}\cos(\omega t) = \mathrm{Re}\left(e^{(\mathrm{i}\omega - 1)t}\right)$$

بديلي کېدی شي هم و کارول شي:

$$e^{-t}\cos(\omega t) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}\omega - 1)^k t^k}{k!}\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \mathrm{Re}\left(1 + (\mathrm{i}\omega - 1)t + \frac{(\mathrm{i}\omega - 1)^2}{2!}t^2 + \frac{(\mathrm{i}\omega - 1)^3}{3!}t^3 \cdots\right)$$

$$= 1 - t + \frac{1 - \omega^2}{2!}t^2 + \frac{3\omega^2 - 1}{3!}t^3 + \cdots .$$

ليکونکي: اپپ، هيوليگ،

د تيلور-لړۍ وېش Division von Taylor-Reihen

د دوه تيلور – لړيو وېش

$$q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k (x-a)^k \Big/ \sum_{k=0}^{\infty} g_k (x-a)^k, \qquad g_0 \neq 0,$$

د ضريبونو پرتلې له لارې کېدی شي له کتوتوالي

$$(q_0 + q_1 u + \ldots)(g_0 + g_1 u + \ldots) = f_0 + f_1 u + \ldots , \quad u = x - a ,$$

څخه وټاکل شي:

$$q_0 g_0 = f_0 \quad \longrightarrow \quad q_0$$

$$q_1 g_0 + q_0 g_1 = f_1 \quad \longrightarrow \quad q_1$$

$$\vdots$$

$$q_n = (f_n - q_{n-1} g_1 - \ldots - q_0 g_n)/g_0 \quad \longrightarrow \quad q_n .$$

ليکونکي: هيوليگ، اپريبش

د $q(x) = \tan x$ تر 5نظم پورې وديزونې لپاره ږدو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(q_1x + q_3x^3 + q_5x^5 + \dots)\underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots\right)}_{\cos x} = \underbrace{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots}_{\sin x}.$$

له دې سره همدا اوس وکارول شو، چې تانجنت $\tan x$ ناجوړه(طاق) دی، دا په دې معنا چې $q_0 = q_2 = \ldots = 0$.
د ضریبونوو له پرتلې څخه لرو:

$$q_1 x = x \longrightarrow q_1 = 1,$$

$$\left(-\frac{q_1}{2} + q_3\right)x^3 = -\frac{1}{6}\,x^3 \longrightarrow q_3 = \frac{1}{3}\,,$$

$$\left(\frac{q_1}{24} - \frac{q_3}{2} + q_5\right)x^5 = \frac{1}{120}\,x^5 \longrightarrow q_5 = \frac{2}{15}\,.$$

لیکونکي: هیولیگ، اپریش

د راشنل توابعو تیلور-ودیزېنه

Taylor-Entwicklung rationaler Funktionen

د یوه راشنل تابع $r(z)$ د تیلور –ودیزیېنه په ټکي $z = a$ کې کېدی شي د کمپلکس پارشل جمعې په مرسته وټاکل شي، دا په دې معناچې r د یوه پولینوم او د بنسټ تابع

$$\frac{1}{(u-z)^j} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+j-1}{j-1} \frac{(z-a)^n}{(u-a)^{n+j}}\,.$$

جمعه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوګونو زياتونونو(د جمعي اعضاوې) د کونورګنت وړانګې د وديزېنې ټکي د قطب نقطو د واټن $|u-a|$ سره برابره ده
ليکونکي: کلاوس هيوليګ

وديزېنه يا وده د بينوم لړۍ يو ځانګړی حالت دی:

$$\frac{1}{(u-z)^j} = \frac{1}{((u-a)-(z-a))^j} = (u-a)^{-j}(1+x)^{-j},$$

$$, \quad x = -\frac{z-a}{u-a}.$$

بديلي کېدی شي په ټکي $z=a$ کې مشتق وشمېرل شي او د n-م د تيلور ضريبونو لپاره لاس ته راوړو

$$\frac{j\cdot(j+1)\cdots(j+n-1)}{n!} = \binom{n+j-1}{n}(u-a)^{-j-n}.$$

د

$$\lim_{n\to\infty}\binom{n+j-1}{j-1}^{1/n} = 1$$

له امله د کونورګنت يا پولې ته تلنې وړانګه $|u-a|$ ده .
ليکونکي: کلاوس هيوليګ

د ښووني لپاره د

$$r(z) = \frac{1}{z^2-z} = -\frac{1}{z} - \frac{1}{1-z}$$

وده په $a=3$ وتاکل شي. د لومړي ترم لپاره د ټوليز فرمول څخه د $u=0$ او $j=1$ سره لاندې د تيلور n -م ضريب لاس ته راوړي

$$\binom{n}{0}(-3)^{-(n+1)},$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې معنا چې

$$-\frac{1}{z} = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}((z-3)/(-3))^n, \quad |z-3| < 3\,.$$

دا ترې لاس ته راغلې هندسي لړۍ کېدی شي سیده هم لاس ته اروړل شي. دا د دویم ترم په بنسټ ښوول کیږی. سړی لیکي

$$-\frac{1}{1-3-(z-3)} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-(z-3)/(-2)}$$

او لاس ته راوړي

$$-\frac{1}{1-z} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}((z-3)/(-2))^n, \quad |z-3| < 2\,.$$

د دواړو لړیو زیاتون یا جمعه دا وده راکوي

$$\frac{1}{z^2-z} = \left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{9}-\frac{1}{4}\right)(z-3) + O((z-3)^2)\,.$$

لیکونکي: کلاوس هیولیک

د یوې تیلور – لړۍ معکوس ارزښت تکرار شمیرنه
Iterative Berechnung des Kehrwerts einer Taylor-Reihe

که $g(0) \neq 0$ وي، نو کېدی شي د ایترېشن له لارې

$$f \longleftarrow 2f - gf^2$$

له $f(x) = 1/g(0)$ څخه په وتو د معکوس ارزښت $f = 1/g$ وده وشمېرل شي.
د لته په هر پل کې د ټیکو ترمونو تعداد یا ګڼ،ن دوه برابره کیږي.
دا متود د نیوتن تلنلار د $\frac{1}{f} - g = 0$ د یوه حل f ټاکل په ګوته کوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیکونکي: کلاوس هیولیګ، اپیریش

د پولې ته تلنې وینا کیدی شي د کتوتوالي

$$f_{\text{neu}} - \frac{1}{g} = -g\left(f_{\text{alt}} - \frac{1}{g}\right)^2$$

حخه ولوستل شي، ځکه چې له $f_{\text{alt}} - 1/g = O(x^n)$ لاس ته

$$f_{\text{neu}} - 1/g = O(x^{2n})$$

راځي .

لیکونکي: کلاوس هیولیګ، اپیریش

د

$$f(x) = 1/g(x) = 1/\cos x$$

تیلور ودیزیېنه کېدی شي لکه چې په تعقیب یې پل په پل وشمېرل شي. له

$$g = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + O(x^6)\,,\quad f_0 = 1$$

څخه په وته لاس ته راځي

$$f_1 = 2\cdot 1 - g\cdot 1^2$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + O(x^6)$$

$$f_2 = 2(1+\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4) - g\,(1+\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4)^2 + O(x^6)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + O(x^6)\,.$$

سملاسې له دوه پلونو (قدمونو) وروسته لومړي شپږ ترمونه ټیک دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots$ سره له ضرب پسې د تانجنت لړۍ راکوي

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \dots$$

لیکونکي: کلاوس هیولیګ، اپیریښ

د معکوس تابع د تیولور ودیزیینه
Taylor-Entwicklung der Umkehrfunktion

د یوه تابع f د معکوس تابع $g(x)$ د تیلور ضریبونه د $f'(a) \neq 0$ سره په ټکي $b = f(a)$ کې کېدی شي د

$$g(f(x)) = x$$

له مشفونې و ټاکل شي :

$$g(b) = a$$

$$g'(b)\, f'(a) = 1 \quad \longrightarrow \quad g'(b)$$

$$g''(b)\, f'(a)^2 + g'(b)\, f''(a) = 0 \quad \longrightarrow \quad g''(b)$$

$$\vdots$$

دا منځ ته راغلې مساوات کېدی شي تل پسېsukzessive د مشتقونو $g'(b),\, g''(b), \dots$ پسې وشمېرل شي.
لیکونکي: کلاوس هیولیګ، اپیریښ

د $f(x) = \sin x$, $g(x) = \arcsin x$ او $a = 0$ لپاره لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$g(0) = 0$$

$$g'(0)\cos 0 = 1 \quad \longrightarrow \quad g'(0) = 1$$

$$g''(0)\cos^2 0 - g'(0)\sin 0 = 0 \quad \longrightarrow \quad g''(0) = 0$$

$$'(0)\cos^3 0 - g''(0)(-\sin 0) + g''(0)\cos 0(-\sin 0) + g'(0)(-\cos 0) = 0 \quad \longrightarrow \quad g'''(0) = 1$$

$$\vdots$$

$$\arcsin x = x + \tfrac{1}{6}x^3 + O(x^4)$$

دا په دې معنا چې . که په پام کې ونيول شي،
جې د يوه ناجوړه يا طاق تابع په څېر – يا معکوس تابع ناجوړه ده، نو سملاسي يې
وديزيېنه تر پنځم ترم پورې ټيک ده.
ليکونکي: کلاوس هيوليک، اپېريش

د تيلور ځانګړې لړۍ Spezielle Taylor-Reihen

$$(1 = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots \quad |x| < 1$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \cdots \quad -1 < x \leq 1$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \cdots \quad x \in \mathbb{R}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \cdots \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\mathrm{t} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{2^{2k}(2^{2k}-1)}{(2k)!}B_{2k}x^{2k-1} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \cdots \quad |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$\mathrm{ar} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)}\frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \cdots \quad |x| < 1$$

$$\mathrm{arcc} = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)}\frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \cdots\right) \quad |x| < 1$$

$$\mathrm{arctan} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \pm \cdots \quad |x| < 1$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د پاد نږدې ارزښت شميرنه **Pade-Approximation**

د يوه تابع $f(z) = c_0 + c_1 z + \cdots$ د (m,n) - پاد-نږدې ارزښت شمېرنه يو راشنل تابع دی د صورت – يا ماتباندې درجې m او مخرج يا ماتلاني درجې n سره، چې د f سره د $z \to 0$ لپاره تر ټولو درجو ترمونو همغږيز کيږي يا سره برابريږي:

$$\frac{p(z)}{q(z)} - f(z) = O(z^{m+n+1}).$$

پولينومونه $p(z) = a_0 + \cdots + a_m z^m$ او $q(z) = b_0 + \cdots + b_n z^n$ کېدی شي د ضريبونو د پرتلې له لارې وټاکل شي.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د q سره د ضرب وروسته لاس ته راوړو

$$(a_0 + a_1 z + \cdots) - (c_0 + c_1 z + \cdots)(b_0 + b_1 z + \cdots) = c z^{m+n+1} + \cdots,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او لاس ته راځي، چې د $k \le m + n$, z^k ضریبونه باید ورک شي:

$$
\begin{aligned}
k = 0: &\quad a_0 - c_0 b_0 = 0 \\
k = 1: &\quad a_1 - c_0 b_1 - c_1 b_0 = 0 \\
&\quad \cdots .
\end{aligned}
$$

دا کښته – یا لامدې ټاکل شوی هوموجېن کرښیز مساوات سیستم ($m + n + 1$ مساوات د $m + n + 2$ متحولو یا ناټاکلو سره) راکوي، چې تل حل لري.
دا چې f په صفر کې قطب نه لري، راکوي $b_0 = 0$ ، چې $a_0 = 0$ راکوي. له دې امله کېدی شي د ممکنه لنډونو وروسته د q لومړي له صفر توبېرېدونکي ضریبونه د 1 سره برابر ایښول کېښولی شي.
لیکونکي: ایپ، هیولیګ

د اکسپوننشل توابعو لپاره د (m,n)-پاد-نږدې ارزښت شمېرنې ته مساوات سیستم په لاندې ډول دی.

$$0 = a_0 - b_0$$

$$0 = a_1 - b_1 - b_0$$

$$\cdots$$

$$0 = a_m - b_m - \cdots - \frac{1}{m!} b_0$$

$$0 = b_{m+1} - \cdots - \frac{1}{(m+1)!} b_0$$

$$\cdots$$

$$0 = \frac{1}{m!} b_n - \cdots - \frac{1}{(m+n)!} b_0 \, .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

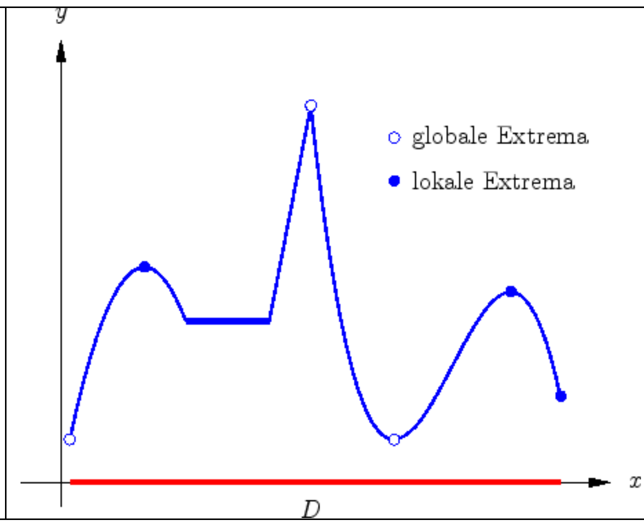
د حل لپاره د بیلګي په توګه لاس ته راوړی شو

$$r_{1,1}(x) = \frac{1+x/2}{1-x/2}, \quad r_{2,2}(x) = \frac{1+x/2+x^2/12}{1-x/2+x^2/12}.$$

ليکونکي: اپپ، هیولیک

اکستريما(افراطیت) **Extrema**

تابع f په a کي په یوه ډیری(ست) D یو تولیز یا ګلوبال مینیموم لري، که وي $f(a) \le f(x) \quad \forall x \in D.$

په یوه ځاییز – یا لوکال مینیموم کي د تابع ارزښت $f(a)$ فقط په یوه کوچني]اپیریال $(a-\delta, a+\delta) \cap D$ کي مینیمال دی. ګلوبال او لوکال مینیموم سره ورته تعریف دي.	

په یوه رابند انتروال د یوه توته دوله ناپرېکېدونکی او مشتقوړ تابع لپاره کېدی شي افراطي ارزښتونه فقط د مشتقونو په صفرځایونو ، پرېکېدونکي ځایونو او یا په ژێ ځایونو کي رامنځ ته شي. تیوپ یا ډول يي کېدی شي د جګو مشتقونو په مرسته او د ت ابع ارزښتونو د پرتلي له لارې پيداشي.

ليکونکي: هیولیک، هیورنر
د یوه ناپرېکېدونکي مشتقوړ تابع لپاره د لوکال مینیموم سره د تعریفورشو په دنني ټکي a کي د مشتق لپاره لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

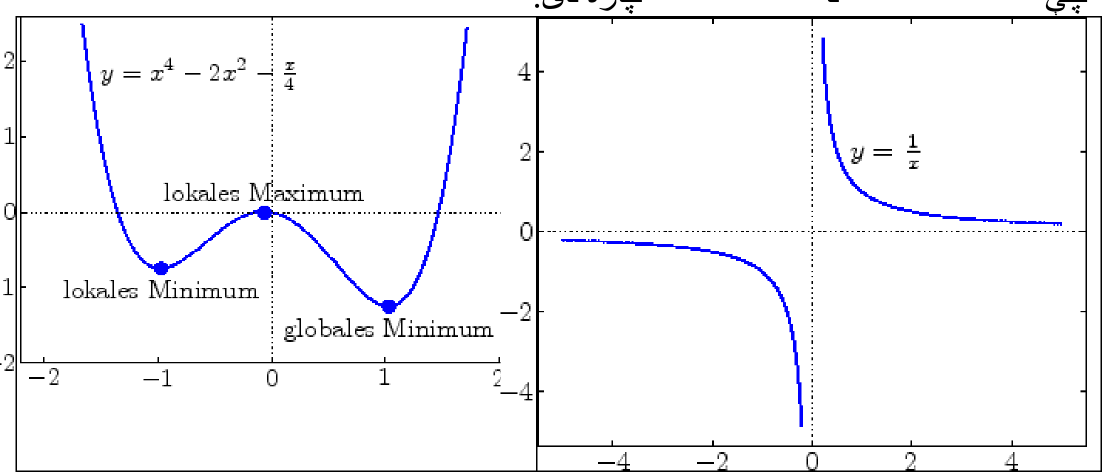
$$f'(a) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \geq 0}} \overbrace{\frac{f(a+h) - f(a)}{h}}^{\geq 0} \geq 0$$

او

$$f'(a) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \leq 0}} \overbrace{\frac{f(a+h) - f(a)}{h}}^{\geq 0} \leq 0$$

نو $f'(a) = 0$. يعني د تعريف ورشو په دننه کې په يوه لوکال افراطيت کې بايد مشتق صفر وي يا f هلته مشتقوړ نه وي.
ليکونکي: هيوليک، هيورنر

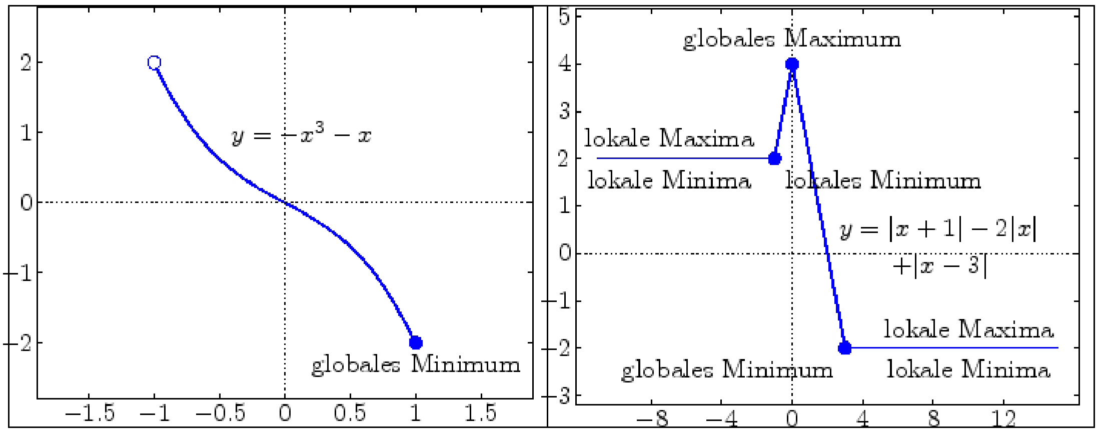
په لاندې کې به يو څو تيپيکي حالتونه وڅيړل شي.
تابع $f(x) = x^4 - 2x^2 - x/4$ د $D = \mathbb{R}$ سره دوه مينيما اويو متکسيما لري. مينيموم د کوچني تابع ارزښت سره ګلوبال دی. يو کلوبال ماکسيموم شتون نه لي ، ځکه چې $f(x) \to \infty$ د $x \to \pm\infty$ لپاره دی.



تابع $f(x) = 1/x$ د $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ سره اکستيم يا افراطي ارزښتونه نه لري.که يو تابع په يوه واز انتروال ثابت وي، نو دا ځايونه هم (لکال) ماکسيما او هم) لوکال) مينيما دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

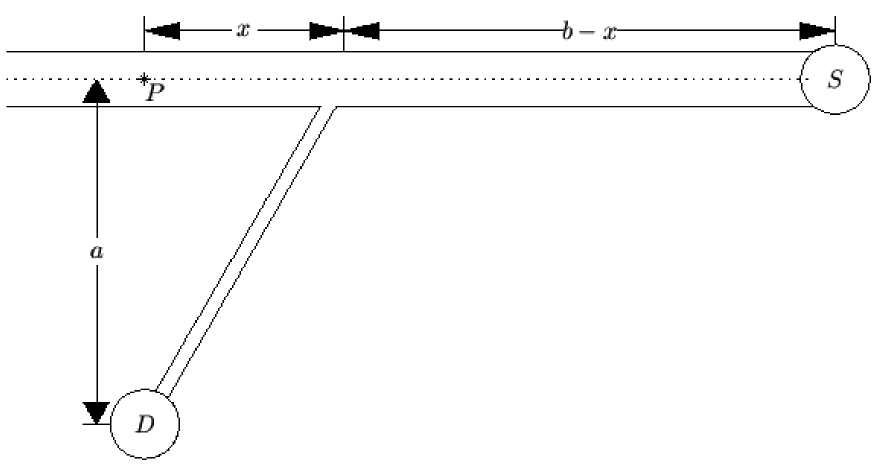
یوه کره همغږیز – یا مونوتون تابع سره افراطي ارزښتونه په ژی ټکو کې نیول کیږي، که دا تعریفورشو پورې تعلق ولري یا اړوند وی.



لیکونکي: هیولیک، هیورنر

له یوه کلي D څخه یوه ښار S ته یوترنسرک جوړیږي. په واټن a همدا اوس له کلي و ښار ته یو سرک جوړ دی له ښار څخه تر ټکي P پورې لار ، هغه سرک چې کلي ته بل یا پسي نږدې پروت دی، اوږدوالی b لري.

دا سیده کرښیز توته لار باید داسي جوړه وي، چې د ښار ګرندی رسیدنه شووني یا تظمین وي، که د یوه منځني [ټکتیا km/h $v_a = 120$ د $v_n = 60$ په واټن په نوې څنګیز یا فرعي سرک څخه لاړ شو.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د P او د ښنګیز سرک ترمنځ واټن $x \geq 0$ د ټاکلو لپاره د مینیمی – یا کموني له لارې اړین وخت

ښار ته د خوزښت لپاره دی

$$t(x) = \sqrt{a^2 + x^2}/v_n + (b - x)/v_a$$

د مشتق صفرځایونه

$$t'(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}v_n} - \frac{1}{v_a} \overset{!}{=} 0\,,$$

راکوي

$$v_a x = v_n \sqrt{a^2 + x^2} \quad \Leftrightarrow \quad x_m = a/\sqrt{3}$$

یعني ممکنه لوکال اکستېرم ځاي په (0, b)کې. ایا چې دا مینیموم دی، باید د خوزښت وخت سره په انتروالټکو کې د پرتلې له لارې وټاکل شي:

$$t(a/\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}a + b}{v_a}\,, \qquad t(0) = \frac{2a + b}{v_a}\,, \qquad t(b) = \frac{2\sqrt{a^2 + b^2}}{v_a}$$

په روښانه توګه $t(0) \geq t(x_m)$ دی. د ښي پایټکو لپاره باور لري

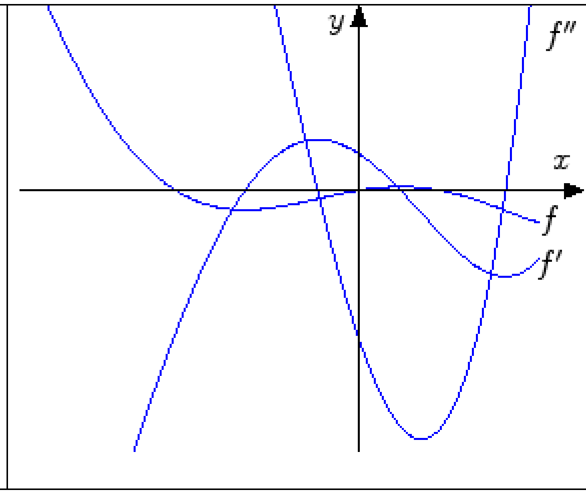
$$\begin{aligned} t(b) \geq t(x_m) \Leftrightarrow \quad & 2\sqrt{a^2 + b^2} \geq \sqrt{3}a + b \\ \Leftrightarrow \quad & 4a^2 + 4b^2 \geq 3a^2 + 2\sqrt{3}ab + b^2 \\ \Leftrightarrow \quad & a^2 - 2\sqrt{3}ab + 3b^2 = (a - \sqrt{3}b)^2 \geq 0\,. \end{aligned}$$

اخرنی مساوات تل پوره دی، او له دې سره x_m اوپټیمال یا اغیز من دی، که په غوره انتروال $(0, b)$ کې پروت وي.: $b \geq a/\sqrt{3}$. په بل حالت کې به مینیموم په ژی ټکي b ته ، یعنې ښار ته د سیده تړنې، سره ورسیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ليکونکي: هيوليگ، هيورنر

د اکستريم – يا افرطي ازښتونو ازمايښت **Extremwerttest**

	د يوه افراطی ارزښت تيوپ يا ډول په هکله کېدی شي د جګو مشتقونو په مرسته پرېکړه وشي. که f يو دوه واره ناپرېکيدونکی مشتقوړ تابع وي او $f'(a) = 0\,,\qquad f''(a) > 0$ $(f''(a) < 0)\,,$ ولرو،

نو f په a کې يو ځاييز مينيموم(ماکسيموم) لري. که د a په ځای کې دويم مشتق ورک شي يا صفر شي، نو بايد جګ مشتقونه پرېکړې ته را وړاندې شي. که باور ولري

$$f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0 \quad \text{und} \quad f^{(n)}(a) \neq 0\,,$$

نو f په a کې تيک هلته يو افراطيت لري، که جوړه وي. په دې حالت کې په f په a کې يو لوکال يا ځای اړونده ماکسيموم همداسې مينيموم لري، که $f^{(n)}(a) < 0$ همداسې $f^{(n)}(a) > 0$ وي.

ليکونکي:اېپ، هيوليگ

د ښووني لپاره و f ته سرې د a په ځای کې د $n-1$ درجې د تيلور-پولينوم کاروي د باقي يا پاتي

$$f(x) - f(a) = \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-a)^n$$

غړي سره او په پام کې نيسي، چې د $f^{(n)}(t)$ او د $f^{(n)}(a)$ لپاره(او له دې سره هم د t لپاره) a ته په بوره نږدېوالي همغه يا برابره مخنخښه ولري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ناجوړه یا طاق n لپاره له $x < a$ څخه و $x > a$ ته په تلني کې د پورته مساوات ښۍ اړخ یو د مخنښې بدلون لري. د دې پسې $f(x) - f(a)$ هم هلته د مخنښې بدلون لري او د a د f افراطي ځای نه دی.

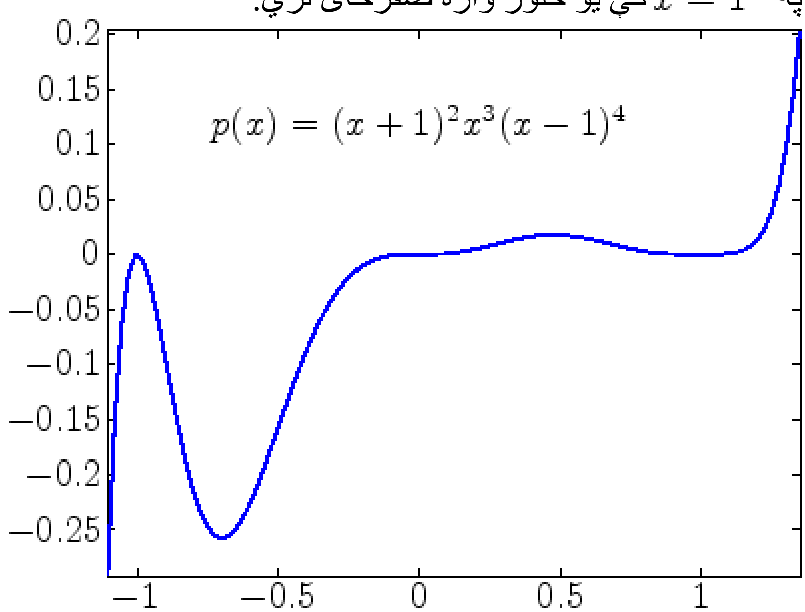
د جوړه n لپاره د $x \neq a$ لپاره تل $(x-a)^n > 0$ دی. د $f^{(n)}(a) < 0$ په حالت کې د $x \neq a$ لپاره او x چې a ته پوره نږدې پروت دی $f(x) < f(a)$ لاس ته راځي. نو تابع f په دې حالت کې په a کې یو لوکال ماکسیموم لري . حالت $f^{(n)}(a) > 0$ په ورته توګه یو لوکال میموم راکوي.

لیکونکي:اپپ، هیولیک

پولینوم

$$p(x) = (x+1)^2 x^3 (x-1)^4$$

په $x = -1$ کې یو دبل صفرځای ، په $x = 0$ کې یو درېواره صفرځای لري او په $x = 1$ کې یو څلور واره صفرځای لري.



باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$p(-1) = p'(-1) = 0, \quad p''(-1) = 2(-1)^3(-2)^4 < 0 .$$

په $x = -1$ کې p یو ماکسیموم لري. په $x = 1$ کې p یو مینیموم، څکه چې

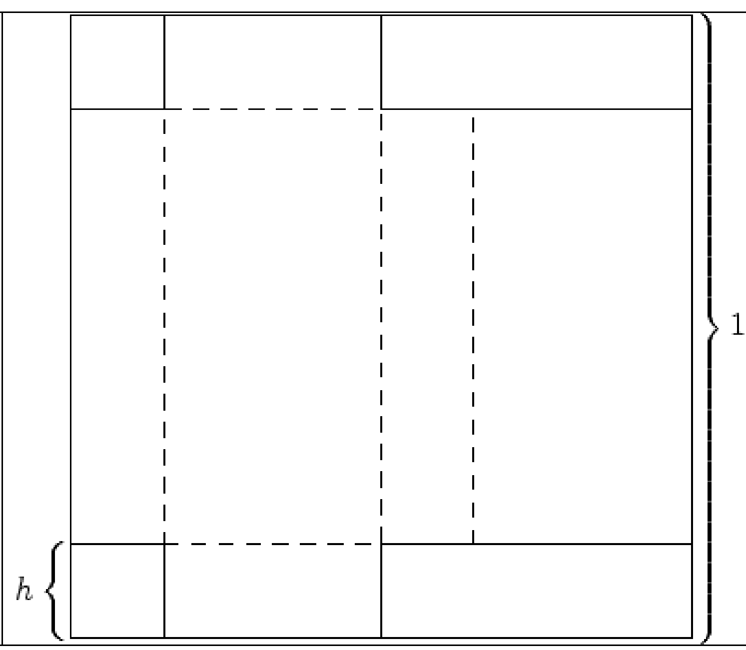
$$p(1) = \ldots = p'''(1) = 0, \quad p^{(4)}(1) = 2^2 1^3 4! > 0 .$$
،

بالاخره p د

$$p(0) = p'(0) = p''(0) = 0, \quad p'''(0) = 3!(-1)^4 \neq 0$$

له امله او په $x = 0$ کې یو مخنخښې بدلون له امله په سرچینه کې افراطي ځایونه نه لري.

لیکونکي:اپپ، هیولیګ

د دې ورکړ شوي غوڅنموني په مرسته دې د مربعیز ټوټه کارتونونو څخه دې ممکنه د لوی حجم صندق جوړ شي	

ډکی یا حجم دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$v(h) = \underbrace{(1-2h)/2}_{\text{Länge}} \cdot \underbrace{(1-2h)}_{\text{Breite}} \cdot \underbrace{h}_{\text{Höhe}} = 2h^3 - 2h^2 + \frac{1}{2}h$$

جګوالی سور اوږدوالی

د مشتق صفرځایونه

$$v'(h) = 6h^2 - 4h + \frac{1}{2} \overset{!}{=} 0$$

راکوي

$$= \frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} - \frac{1}{12}} = \frac{1}{3} \pm \frac{1}{6}$$

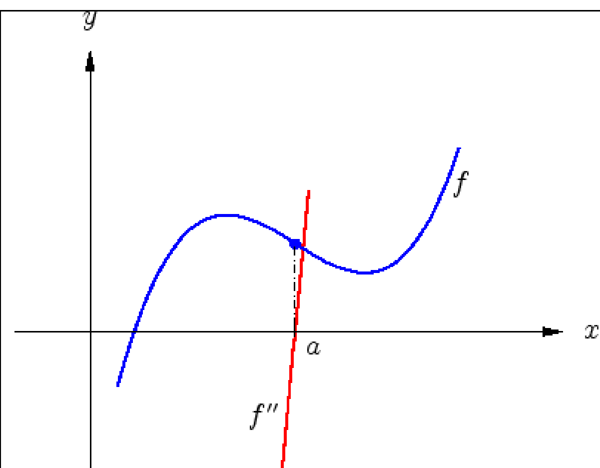
يعني ممکنه افراطي ځايونه. فقط $h = \frac{1}{6}$ هندسي موخه ور دی او

$$v\,(1/6) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{27}\,.$$

دا چې د ژۍ ټکو $h = 0$ او $h = 1/2$ لپاره ډکی یا حجم صفر 0 دی، صندق د $h = 1/6$ لپاره ماکسیمال ډکی یا حجم لري.

ليکونکي:ايپ، هيوليک

اوړونټکي(نقطه انعطاف) **Wendepunkte**



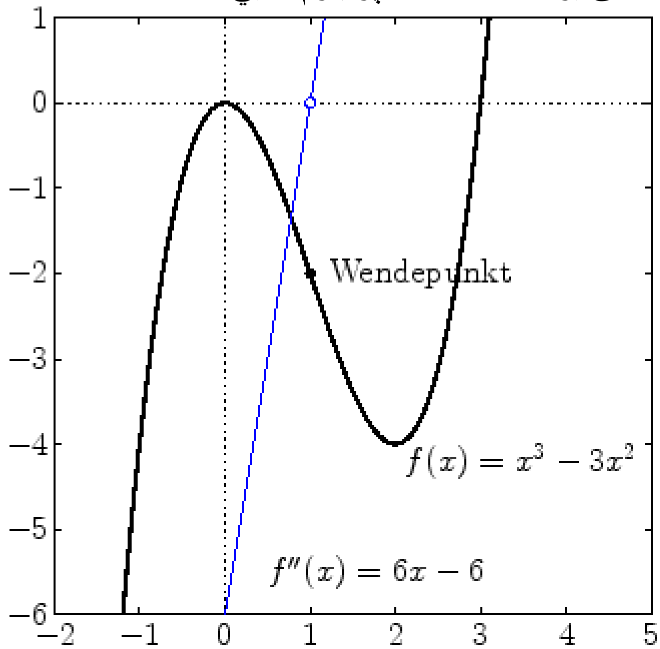
د يوه تابع f په يوه اوړنټکي a کې دويم مشتق مخنښنه بدلوي.

د يوه پوره هوار تابع لپاره اړين دی، چې $f''(a) = 0$ وي او پوره $f'''(a) \neq 0$ کېدونکي، چې وي.

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

مشتق يو kubisches پولينوم ښايي.



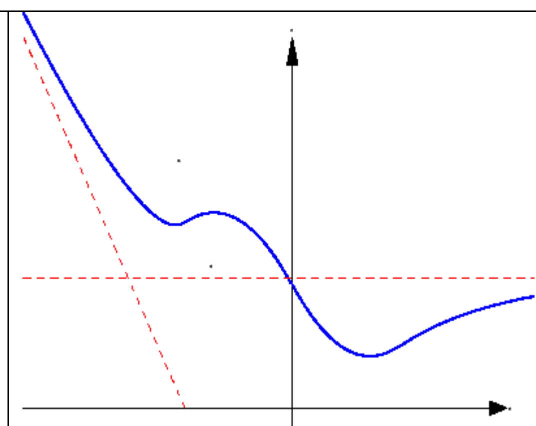
دا چې د ويم مشتق کرښيز دی، تل ټيک يو افراطی ټکی شتون لري.
ليکونکي: هيوليک، هيورنر

اسيمپتوتي(يو په بل نه پرېوتونکي يا ګاونډی) **Asymptoten**

يو کرښيز تابع $p(x) = ax + b$ د f يو اسيمپتوت يا ګاونډی دی، که د $x \to \infty$ يا $x \to -\infty$ لپاره $f(x) - p(x) \to 0$ وي.

لکه په ښېره کې چې ښوول شوی دی، ګاونډ د تابع f حالت د لوي x لپاره تشريح کوي.

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

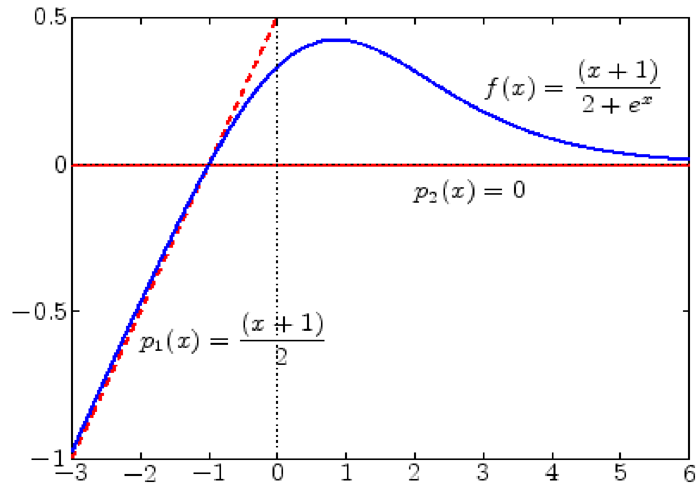


(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره چې د تابع

$$f(x) = \frac{x+1}{2+e^x}$$

ګاونډ وټاکو پوله ارزښتونه $x \to \pm\infty$ ځانله تر څېړنې نيسو.



د $x \to \infty$ لپاره دی

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)\cdot e^{-x}}{2\cdot e^{-x}+1}$$

$$= \frac{0}{0+1} = 0\,.$$

له دې سره د x محور ګاونډ يا اسيمپتوت دی

د $x \to -\infty$ لپاره e^x د 0 په لور هځيږي او

$$p(x) = \frac{x+1}{2}$$

ګاونډ دی.

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

د راشنل- یا کسر توابعو گاونډ یا اسیمپټوټې
Asymptoten rationaler Funktionen

يو راسنل تابع

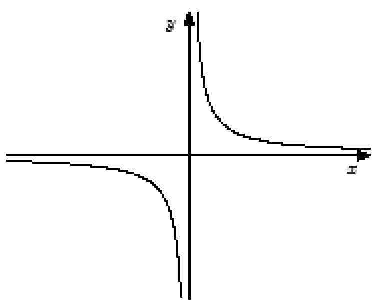
$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

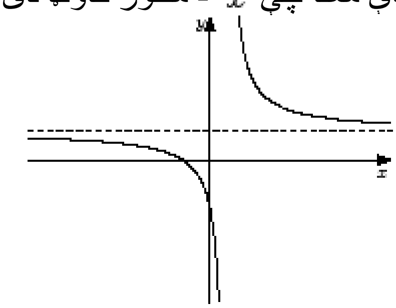
تیک هلته یو کربنیز گاونډ لري، که $\text{Grad}\; p \leq \text{Grad}\; q+1$ وي.

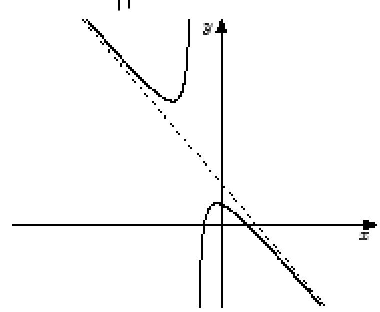
د $\text{Grad}\; p < \text{Grad}\; q$ لپاره باور لري

$$\lim_{p\to\pm\infty} r(x) = 0\,,$$

دا په دې معنا چې x - محور گاونډ دی.







د $\text{Grad}\; q \leq \text{Grad}\; p \leq \text{Grad}\; q+1$ لپاره سرې کربنيز گاونډ د پولينوم وېش سره لاس ته راوړي :

$$r(x) = ax + b + \frac{\tilde{p}(x)}{q(x)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

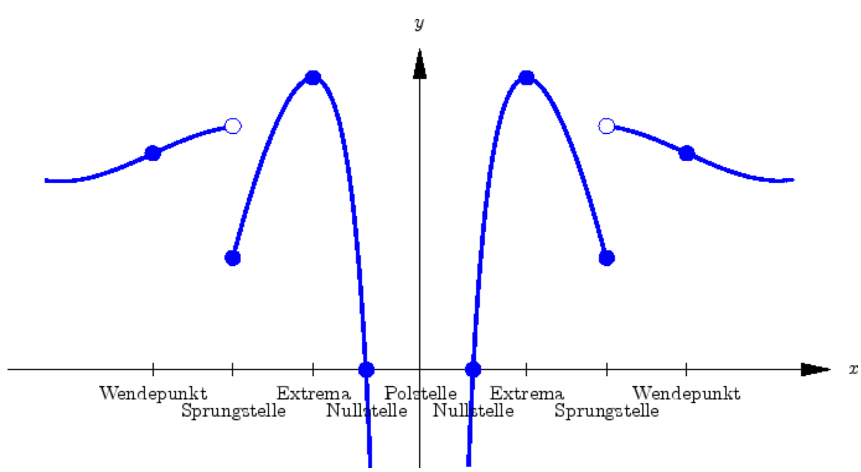
د q Grad $\tilde{p} <$ Grad سره. اسیمپتوت پروت یا افقي, $(a = 0)$ دی، که Grad q Grad $p =$ وي.

که د صورت درجه د مخرج له درجې له یو زیات وي، نو $r(x)$ د لوي x لپاره د یوه پولینوم سره، چې ≥ 2 درجه وي اپروکسیمي کیږي.
لیکونکي: هیولیک، هیورنر

د کږو یا منحنیو خبرې یا بحث Kurvendiskussion

د یوه تابع د څومره والي حالت باندې قضاوت ته لاندې نخښې کیدی شي رامخ ته شي:

- سیومتري Symmetrien
- تل بیرته راګرځیدنه Periodizität
- پرېکیدنوالي ځایونه Unstetigkeitsstellen
- صفرځایونه Nullstellen ($\longrightarrow$ Vorzeichen) (مخنخښه $\longrightarrow$)
- اکستریما Extrema ($\longrightarrow$ Monotoniebereiche) (همغږیزوالي $\longrightarrow$ ورشوګاني)
- اوړونټکی Wendepunkte ($\longrightarrow$ Konvexitätsbereiche) (ننوتلوالي ورشوګاني $\longrightarrow$)
- قطبځایونه Polstellen
- اسیپتوتونه یا ګاونډي Asymptoten



(c) ketabton.com: The Digital Library

د تابع یو اړونده تحلیل د کړو خبرې اترې یا بحث بلل کیږي
لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د کړوخبرو اترو د ښکندونې لپاره یو تابع

$$f(x) = \sin x + \frac{1}{3}\ \sin(3x)$$

تر څېړنې نیول کیږي.

سیمتري : داچې $\sin x = -\sin(-x)$ دی ، نو تابع ناجوړه دی

تل بیرته راګرځېدنه یا پریودیځیتيPeriodizität : تابع لکه د ساین تابع پخپله 2π - پریودیکي دی او له دې امله په لاندې کې فقط په انتروال $[-\pi, \pi]$ کې راوړل کیږي.

د پرېکېدنوالي ځایونه : تابع له ناپرېکېدونکو توابعو څخه سره یرځای شوی، له دې امله برکېدنځاینه نه لري.

صفرځایونه: د زیاتو- یا جمعه نقضیې سره $[-\pi, \pi]$ دی

$$f(x) = 2\sin x - \frac{4}{3}\ \sin^3 x = \sin x \underbrace{\left(2 - \frac{4}{3}\sin^2 x\right)}_{\neq 0}.$$

تابع صفرځایونه په 0 او $\pm\pi$ کې لري.
افراطیت: مشتق

$$f'(x) = 2\cos x - 4\sin^2 x\ \cos x = -2\cos x + 4\cos^3 x$$

صفر دی د $\cos x = 0$ یا د $\cos x = \pm 1/\sqrt{2}$ لپاره ، نو

$$x = \pm\pi/2 \quad \vee \quad x = \pm\pi/4 \quad \vee \quad x = \pm 3\pi/4.$$

دا چې تابع په ټول $\mathbb{R}$ تعریف او تلبیرته راګرځېدونې ده، ژئ ترڅېړنې لاندې نه نیسو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دویم مشتق د محنخښې څخه

$$f''(x) = 2\sin x - 12\cos^2 x\,\sin x$$

او د تابع ارزښت د پرتله کونې له لارې کېدی شي د افراطیت تیوپ یا ډول وټاکل شي:

x	$f(x)$	$f''(x)$	Typ
$-3\pi/4$	$-\sqrt{8}/3$	$2\sqrt{2} > 0$	globales Minimum
$-\pi/2$	$-2/3$	$-2 < 0$	lokales Maximum
$-\pi/4$	$-\sqrt{8}/3$	$2\sqrt{2} > 0$	globales Minimum
$\pi/4$	$\sqrt{8}/3$	$-2\sqrt{2} < 0$	globales Maximum
$\pi/2$	$2/3$	$2 > 0$	lokales Minimum
$3\pi/4$	$\sqrt{8}/3$	$-2\sqrt{2} < 0$	globales Maximum

اوړونټکی یا د انعطاف ټکیWendepunkte :

دویم مشتق

$$f''(x) = 2\sin x - 12\cos^2 x\,\sin x = -10\sin x + 12\sin^3 x$$

$$\sin x = \pm\sqrt{5/6}$$

صفر دی د $\sin x = 0$ لپاره یا ، دا په دې معنا چې

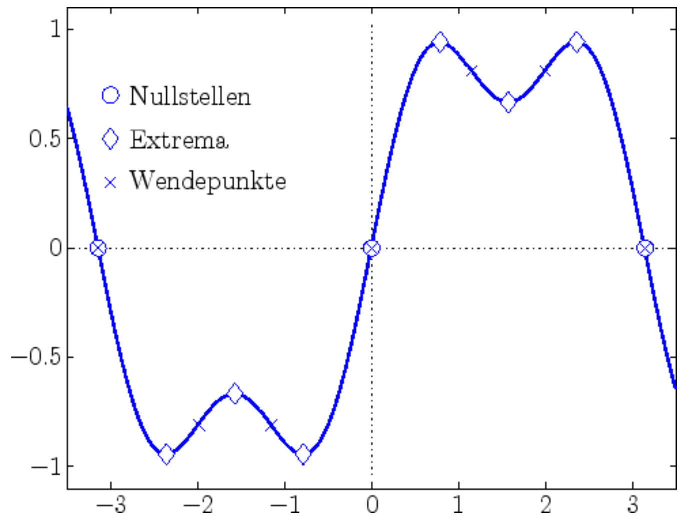
$$x = 0 \quad \vee \quad x = \pm\pi \quad \vee \quad x \approx \pm 1.15 \quad \vee \quad x \approx \pm 1.99$$

دا چې په دې ځای کې دریم مشتق نه ورکیږي. تابع f اوړونټکی په $(0,0)$ او $(\pm\pi,0)$ کې لري همداسې په نږدې توګه په $(-1.99,-0.81)$ ، $(1.15,0.81)$, $(-1.15,-0.81)$ او $(1.99,0.81)$ کې.

قطبځایونه**Polstellen** : ناپرېکېدونکي توابع قطبځایونه نه لري.

ګاونډي **Asymptoten** : تابع پریودیکې او نه ثابت دی، نو ګاونډي یا اسیپتوت یا مجاورتونه نه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library



لیکونکي: هیولیک، هیورنر

د یوې کږې خبرو یا بحث روښانه ولو لپاره تابع

$$f(x) = \frac{5x^3 + 4x}{20(x-1)(x+1)}$$

ترخیرني لاندې نیول کیږي.
سیومتري : صورت ناجوړه او مخرج جوړه دی. تابع نو له دې امله ناجوړه دی، دا په دې معنا چې سرچیني ته سیومتریک دی.
پریودیڅیتي یا (تل) بیرته راګڅیدنه: تابع پریودیک نه دی.
برېکیدنځایونه: د مخرج صورت صفرځایونه ± 1 د صورت صفرځایونه نه دي. له دې سره f په $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ناپرېکېدونکی دی.
صفرځایونه: صورت د $x = 0$ لپاره ورکیږي.
افراطیت :

$$f'(x) = \frac{5x^4 - 19x^2 - 4}{20(x^2-1)^2} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2$$

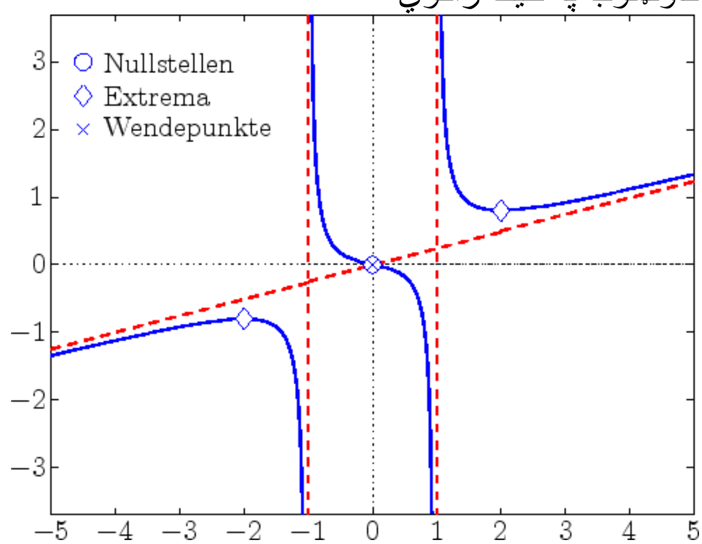
دا چې تابع ساده صفرځایونه لري، افراطیت فقط لوکال یا ځای اړوند دی. د f د ځومره والي حالت خخه کیدی شي تیوب یا ډول لاس ته راشي. دا چې $f(x) \to -\infty$ د $x \to -\infty$ او $x \to -1$ لپاره دی، باید انتروال $(-\infty, -1)$ یو ماکسیموم ولري. په ورته توګه $(1, \infty)$ لړ تر لږه یو مینیموم لري. نو د مشتق صفرځایونو ته

(c) ketabton.com: The Digital Library

سړی یو لوکال ماکسیموم په $(-2,-4/5)$ او یو لوکال مینیموم په $(2,4/5)$ کې لاس ته راوړي.
اوړونټکي یا نقاط انعطاف:

$$f''(x)=\frac{-80x^5+398x^3+42x}{20(x^2-1)^3}\overset{!}{=}0 \quad\Rightarrow\quad x=0$$

داچې په دې ځای کې دریم مشتق صفر نه دی، نو $(0,0)$ یو اوړونټکی دی.
قطبځایونه: تابع په $x=\pm1$ کې ساده قطبځایونه لري.
اسیمپتوت یا ګاونډېتوب: یو د پولینوم وېش $p(x)=5x/20+0=x/4$ د ګاونډتوب په حیث راکوي



لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د کړې خبرو اترو د ښوولو یا روښانه کولو ته تابع

$$f(x)=e^{-x^2}+\frac{4|x|}{e^4}$$

څېړل کیږي.

سیمټري : دا چې x^2 او $|x|$ جوړه دي، تابع جوړه دی، دا په دې معنا چې سیمتر و - y محور ته.
پریودیځیتي یا تل بېرته راګرځېدنه: تابع پریودیک نه دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پرېکېدنوالي ځایونه: تابع له ناپرېکېدونکو توابعو څخه سره یوځای شوې ده او له دې امله پرېکېدنځایونه نه لري. لکه د مطلق ارزښت تابع لپاره په هرحالت مشتق په صفرټکي کي ناپرېکېدونکی نه دی.
صفرځایونه: اکسپوننشل توابع تل مثبت یا زیاتیز دي، د مطلق ارزښت تابع نه منفي دي. نو صفرځایونه نه شته.
افراطیت:

$$f'(x) = -2xe^{-x^2} + \frac{4}{e^4}\text{sign}(x) \overset{!}{=} 0,\ x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2\,.$$

برسیره پردې دې افراطی ټکی په $x = 0$ کې ،څېړل شي، چېرته چې مشتق پرېکېدونکی دی. دا چې تابع په ټول $\mathbb{R}$ تعریف دی، نو د x لپاره د $\pm\infty$ ته د تلنې حالت هم باید په پام کې ونیول شي.
دا چې $f(x) \to \infty$ د $x \to \pm\infty$ لپاره دی، نو f لږ تر لږه یو ګلوبال مینیموم لري، مګر کلوبال ماکسیموم نه لري. د y ارزښت په پرتله کریتیکال ټکی

$$(-2, 9/e^4) \qquad (0,1) \qquad (2, 9/e^4)$$

ښایي، چې ګلوبال مینیموم په $x = \pm 2$ کې نیول کیږي. دا چې f په انتروال $[-2, 2]$ کې مینیموم او هم یو ماکسیموم لري، ترې لاس ته راځي چې $(0,1)$ یو لوکال ماکسیموم دی.
اوړونټکی یا د انعطاف ټکی:

$$f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad 4x^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1/\sqrt{2}$$

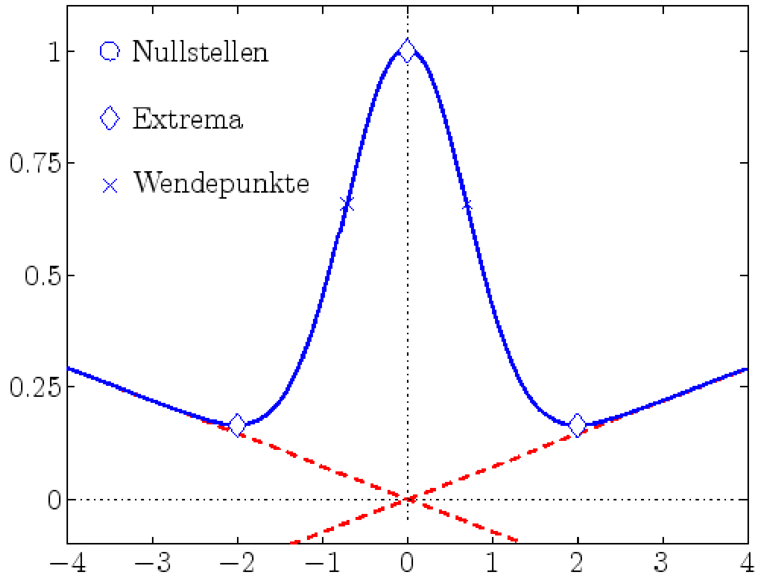
دریم مشتق په دې ځایونو $\neq 0$ کې دی. ترې لاس ته راځي چې f یو اوړنټکی

$$\left(\pm 1/\sqrt{2},\ e^{-1/2} + \frac{4}{\sqrt{2}\,e^4}\right).$$

لري.
قطبځایونه: تابع قطبځایونه نه لري.

ګاونډي یا مجاورتها: دا چې e^{-x^2} د $|x|$ لپاره د صفر په لور ګړندی دی، تابع ګاونډیان $p_+(x) = \frac{4x}{e^4}$ او $p_-(x) = \frac{-4x}{e^4}$ لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library



ليکونکي: هيوليک، هيورنر

ريمن-انتيګرال **Riemann-Integral**

د يوه ناپرېکېدونکي تابع f يو تاکلى انتيګرال د

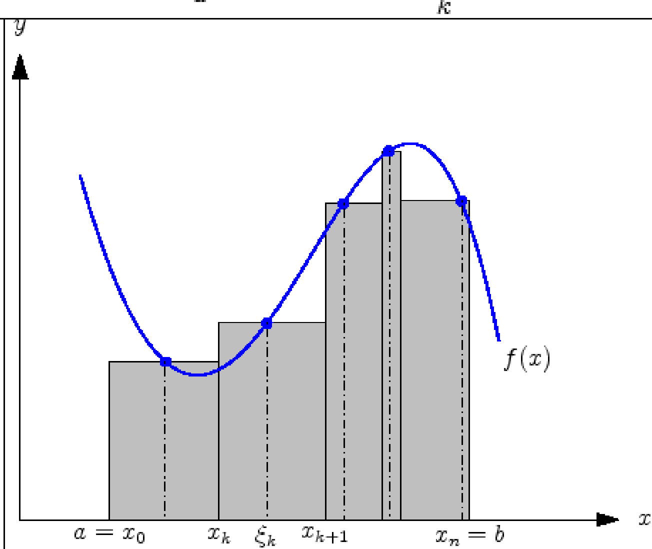
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|\Delta|\to 0} \int_a^b f_\Delta = \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_k f(\xi_k)\,\Delta x_k$$

له لاريٖ تعريف شوى دى. دلته د $\Delta:\ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ يوه توته کونه بنايي،

$$|\Delta| = \max_k \Delta x_k\ ,$$

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}\ ,$$

يو ماکسيمال انتروال دى او ξ_k په k – م انتروال يو په خوښه ټکى دى. د انتيګرال تعريف په بنى لور زياتون ياجمعه د ريمن زياتون يا – جمعه بلل کيږي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د زياتيز يا مثبت f لپاره $\int_a^b f(x)\,dx$ د f د ګراف کښته لورته سطحه په ګوته کوي

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر، ويپپر

که $f(x)$ ناپرېکيدونکی مشتقوړ وي، نو د مشتقشمېرنې د منځ ارزښت جملې څخه د لپاره باور لري

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq (x_2 - x_1) \max_{x\in[x_1,x_2]} |f'(x)|$$

Δ_i دې د ټوټه ونو يوه پرله پسې وي د $|\Delta_i| \to 0$ سره. د تابع پرلپسې دوه توکي Δ_m او Δ_n را اخلو او د Δ ټوټه ونه را اخلو، چې د Δ_m او Δ_n د نورو يا ورپسې يل لاندې ټوټه کونو له لارې منځ ته راځي ، چېرته چې Δ_m د لاندې يا ورپسې ټوټه ونو ټکي $x_i\,,\,i=0,\ldots,k_m$ دي او Δ ټکي $z_i\,,\,i=0,\ldots,k$ لري، نو د $\zeta_j\in[z_{j-1},z_j]$ سره باور لري

$$\left|\int f_\Delta - \int f_{\Delta_m}\right| = \left|\sum_{j=1}^{k} f(\zeta_j)\,\Delta z_j - \sum_{i=1}^{k_m} f(\xi_i)\,\Delta x_i\right|$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{k_m} \sum_{x_{i-1}\leq z_{j-1}<z_j\leq x_i} (f(\zeta_j) - f(\xi_i))\Delta z_j\right|$$

$$\leq |\Delta_m| \max_{t\in[a,b]} |f'(t)| \underbrace{\sum_{i=1}^{k_m} \sum_{x_{i-1}\leq z_{j-1}<z_j\leq x_i} \Delta z_j}_{b-a} .$$

په ورته تګه باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\left|\int f_\Delta - \int f_{\Delta_n}\right| = O(|\Delta_n|)\,,$$

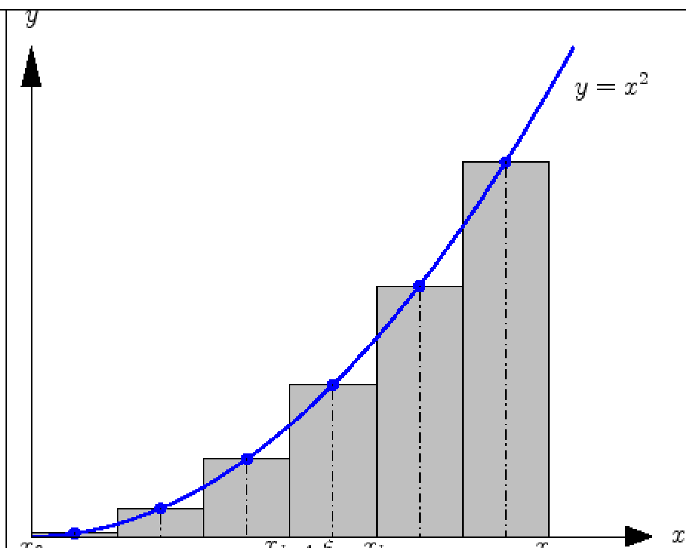
او له دې سره

$$\left|\int f_{\Delta_m} - \int f_{\Delta_n}\right| \to 0$$

د $n,m \to \infty$ لپاره . د ريمن –زياتون نو يوه کوشي-پرلپسي جوړوي، نو پولي ته تلونکي دي.
په ورته توګه د دوه پرلپسيو و همغې يا برابرې پولي ته تلنه وښوول شي.
د توته ناپرېکېدونکو f ښوونه تخنيکي داسې لږ پېچلي ده. سرې د f د ناپرېکېدني انتروال ښېل يا جدا ترخېړني نيسي او هلته د برابرړوله ناپرېکېدني څخه ګټه اخلي:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \le \varepsilon \qquad \text{für} \quad |x_1 - x_2| < \delta\,.$$

دا اټکل د منځ ارزښت جملي په ځای رامنځ ته کيږي او نور دلايل په ورته وګه مخ ته بيولکيږي.
ليکونکي: هيوليک، هيوررنر

ريمن –انتيګرال په حيث د $\int_0^1 x^2\,dx$ شمېرلو کيدی شي د توته ونې پرلپسي وکارول شي د n-م توته ونې لپاره د ارزښتونو ځايونو $\xi_i = (2i-1)/(2n)\,,$ $,\, i = 1, \ldots, n\,,$ سره.	

د تعريف سره سم لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int f_{\Delta_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \left(\frac{2i-1}{2n}\right)^2 = \frac{1}{4n^3} \left(4\sum_{i=1}^{n} i^2 - 4\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1\right)$$

$$\frac{1}{4n^3} \left(\frac{4n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{4n(n+1)}{2} + n\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{12n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int f_{\Delta_n} = \frac{1}{3}$$

او له دي سره .
ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

د انتيګرال خويونه **Eigenschaften des Integrals**

دا لاندې تاکلی انتيګرال دا لاندې خويونه لري :

$$\int f + g = \int f + \int g \,, \quad \int rf = r \int f$$

کربنيزوالس,

$$f \le g \implies \int f \le \int g$$

همغږيزوالی :

$$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$$

زياتون يا جمعه

$$\int_b^a f = -\int_a^b f$$

د وروستيو خويونو د همغږيزونې له امله سرې تعريفوي: .
ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

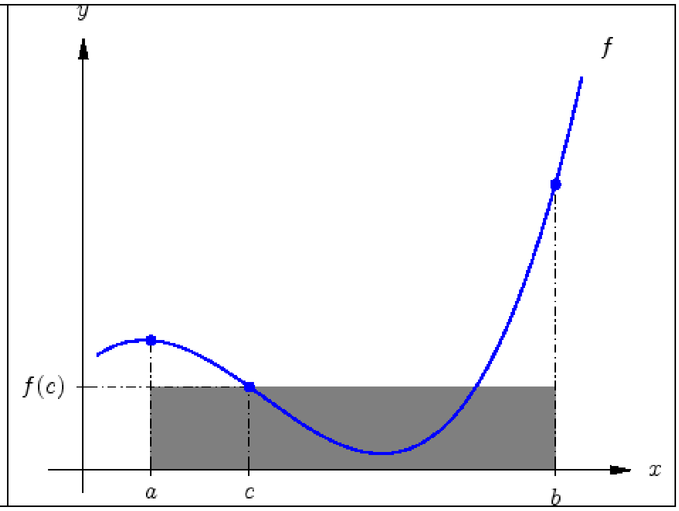
د انتيګرالشميرنې منځ ارزښت جمله
Mittelwertsatz der Integralrechnung

(c) ketabton.com: The Digital Library

که f او g په $[a,b]$ ناپرېکېدونکي توابع وي او g د مخنخښي بدلون ونه لري ، نو $c \in [a,b]$ شتون لري د

$$\int_a^b fg = f(c) \int_a^b g.$$

سره



په ځانګي توګه ، لکه په ځېره کې چې ليدوړ دي، دی $\int_a^b f = (b-a)f(c)$

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

بې له ټوليزو بنديزونو دې $g \geq 0$ وي. د انتيګرال د اټکل له لارې

$$(\min_{[a,b]} f)\, g(x) \leq f(x)g(x) \leq (\max_{[a,b]} f)\, g(x)$$

لاس ته راځي

$$(\min_{[a,b]} f) \int g \leq \int fg \leq (\max_{[a,b]} f) \int g \,.$$

دا چې f د منځارزښت جملې له مخې د $\min f$ او $\max f$ ترمنځ هر ارزښت نيسي، نو غوښتونی برابروالی راکوي.

په ټولېزه توګه وړاندنيونه ده، چې د g مخنخښي بدلون نه لري، اړيين، لکه د بېلګې

$$\underbrace{\int_{-1}^{1} x^2\, dx}_{>0} = \int_{-1}^{1} x \cdot x\, dx \neq c \int_{-1}^{1} x\, dx = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځخه ليدل کيږی.
ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

بنسټيز – يا ساده توابع **Stammfunktion**

يو تابع F د $F' = f$ سره د f بنسټيز ت ابع دی، او د دې لپاره ليکو

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

د ټولو بنسټيز توابعو ډېرۍ لپاره، چې د f ناټاکلي انتيګرال بلل کيږي.
د انتيګرالونې ثابته c په خوښه ده. د بېلګې په توګه دی

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

د $F_a(a) = 0$ سره يو ممکنه لومړی يا بنسټيزه تابع.
نه ټولو بنسټيزو توابعو ته داسې روښانه د بنسټيزو توابعو اکسپليځيت ورکړه شونې ده،

$$f(x) = \exp\left(x^2\right)$$

يوه بېلګه ده .
ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

د انتيګرالشميرنې اصلي جمله يا قضيه
Hauptsatz der Integralrechnung

که F د يوه ناپرېکېدونکي تابع f بنسټيز يا لومړنی تابع وي ، دا په دې معنا چې $f = F'$ وي، نو باور لري

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

همداسې په لنډه ليکندول

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_a^b f = [F]_a^b \,.$$

یو بنئتیز انتیګرال کېدی شي د انتروال په پای ټکو کې د بنستیزو توابعو د تابع ارزښتونو د کمښت په ډول وشمېرل شي
لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

که دواړه خواوې د b تابع په څېر راوړل شي، نو بسیا کوي وښایو، چې دواړه خواوې برابر مشتق لري، ځکهچې د $b=a$ لپاره ارزښت سره سرخوري(دواړه خواوې صفر دي).
د کینې اړخ لپاره لرو

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(\int_a^{b+h} f - \int_a^b f \right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_b^{b+h} f \,.$$

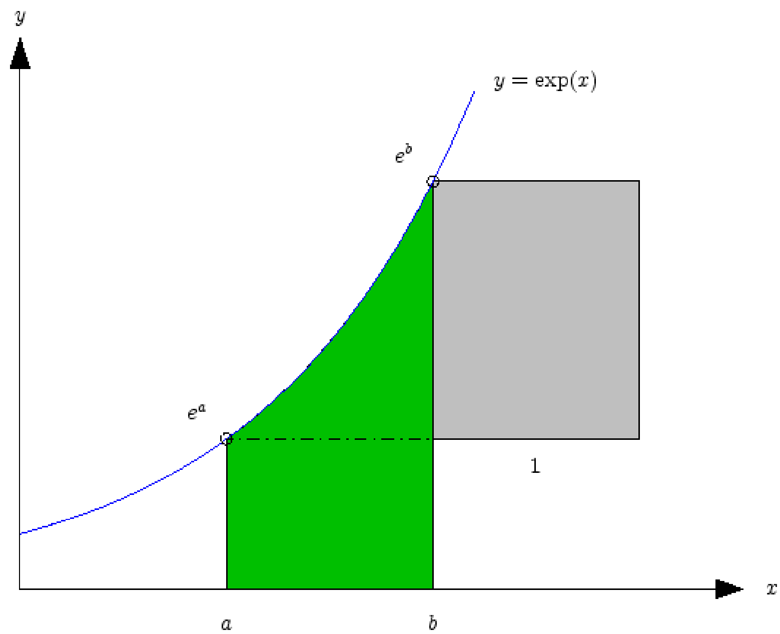
د منځ ارزښت جملې پسې یا په تعقیب انتیګرال مساوي دی په $(b+h-b)\,f(c)$
د $c \in (b, b+h)$ سره.
پوله ارزښت برابر دی په $f(b)$. دا د ښي اړخ د مشتق سره سر خوري یا یو غږیز دی
لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د اکسپننشل تابع مشتق بېرته اکسپوننشل تابع دی او له دې امله دی

$$\int_a^b e^x \, dx = e^b - e^a \,.$$

د د a او b ترمنځ ګراف لاندې سطحه برابره د ولاړګوډیزر(مستطیل) د سطحې سره د سور 1 او د تابع ارزښت دواټن د اوږدوالي په حیث.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د لوکايتم تابع $F(x) = \ln(x)$ مشتق $F'(x) = 1/x\,,\; x \in \mathbb{R}^+$ دی او له دې سره

$$\int_a^b 1/x\,dx = \ln(b) - \ln(a)\,, \quad a,b \in \mathbb{R}^+\,.$$

د $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ يو بنسټيز تابع $F(x) = \arctan x$ دی . د دې په تعقيب دی

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}\,.$$

د مشتقوني څخه لاس ته راځي، چې

$$F(x) = -\ln(\cos x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $f(x) = \tan x$ یو بنستیز تابع دی

$$F'(x) = -\frac{1}{\cos x}(-\sin x).$$

په تعقیب دی:

$$\int_0^{\pi/4} \tan x \, dx = -\left[\ln(\cos x)\right]_0^{\pi/4} = -\ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \approx 0.347 .$$

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د M کتلي یو ستوری یو د کښولو ورشو تولیدوي، چې د هغې له خوا په یوه کتله m یو زور $F(x) = \gamma \frac{mM}{x^2}$ واردوي . دلته γ د ګراویتیشن یا راکښنې قوه ده او x د دروندتکو ترمنځ واټن دی.

د $1/x^2$ لپاره یو لومړنی یا بتستیز تابع $-1/x$ دی. د دې لپاره چې یو تن له واټن a و واټن b ته یوړولی شو ، باید کار

$$\int_a^b F(x) \, dx = \gamma mM \int_a^b \frac{1}{x^2} \, dx = -\left[\gamma mM/x\right]_a^b = \gamma mM(1/a - 1/b)$$

سرته ورسیږي.

د a لپاره د ستوري د وړانګي سرره برابر او $b \to \infty$ کېدی شي د برابر اینوونې له لارې د کینیتیکي انرژي سره چې داسي په نامه د تېښتي چټکتیا v تاکي دا په دې معنا چې چټکتیا ، چې اړین ده، چې د یوه ستوري راکښنقوه پرېښودی شي یا راکښنقوې څخه ووځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{m}{2}v^2 = \gamma \frac{mM}{a} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\gamma \frac{2M}{a}}\,.$$

په اکواتور کې د ځمکې لپاره $v = 11.2\,\mathrm{km/s}.$ دی .
ليکونکي: هيوليگ، هيورنر

Stammfunktionen der Grundfunktionen د بنسټيزو توابعو لومړني توابع

لاندې جدول بنسټيزو توابعو $f(x)$ ته لومړني توابع $F(x)$ ښايي

$f(x)$	$F(x)$		$f(x)$	$F(x)$
$x^s\,,\ s \neq -1$	$x^{s+1}/(s+1)$		$1/x$	$\ln\lvert x\rvert$
$\exp(x)$	$\exp(x)$		$\ln(x)$	$x\ln(x) - x$
$\sin x$	$-\cos x$		$\cos x$	$\sin x$
$\tan x$	$-\ln(\cos x)$		$\sin x \cos x$	$\sin^2(x)/2$
$1/(1+x^2)$	$\arctan x$		$1/\sqrt{1-x^2}$	$\arcsin x$

Partielle Integration ټوټه- يا پارشل انتيگرالونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مشتق د ضرب قانون $(fg)' = f'g + fg'$ څخه په ورته توګه فرمول بندي له
لارې د ناټاکلي انتيګرال لپاره راکوي:

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx\,.$$

په اړونده توګه د ناټاکلو انتيګرالونو

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'$$

لپاره باور لري. د لته دې په پام کې ونيول شي، چې د ژۍ ترم $[fg]_a^b$ ورکيږي، که د
دواړو توابعو څخه يو يې د انتروال پای ټکو کې صفر وي. په همدې توګه د پريوديکي
تابع لپاره د پريود اوږدوالي $(b-a)$ کې هم له منځه ځي.
ليکونکي: هيوليګ، کوپف

له $\int (1+x)^\alpha\,dx = \dfrac{1}{\alpha+1}\,(1+x)^{\alpha+1} + c$ څخه د $\alpha \neq -1$ لپاره لاس
ته راځي

$$\int \underset{u}{x}\underset{v'}{\sqrt{1+x}}\,dx = x\frac{2}{3}(x+1)^{3/2} - \int 1\cdot\frac{2}{3}(1+x)^{3/2}\,dx$$

$$= \frac{2}{3}x(1+x)^{3/2} - \frac{4}{15}(1+x)^{5/2} + c.$$

په ورته توګه شميرل کيږي

$$\int_0^1 \underset{u}{x}\underset{v'}{\sqrt{1-x}}\,dx = \left[-x\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}\right]_0^1 + \int_0^1 1\cdot\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}\,dx$$

$$= 0 - \left[\frac{4}{15}(1-x)^{5/2}\right]_0^1 = \frac{4}{15}\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یو لوګاریتمي ضریب د یو ځل ټوټه انتیګرالونې له لارې له منځه تلی شي.
د بیلګې په توګه دی

$$\int x^n (\ln|x|)\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}(\ln|x|) - \int \frac{1}{n+1}x^{n+1}\,\frac{1}{x}\,dx$$
$$= \frac{1}{n+1}x^{n+1}(\ln|x|) - \frac{1}{(n+1)^2}x^{n+1} + c.$$

په دې ډول کیدی شي په خوښه پولینومونه

$$\sum_{j,k} a_{j,k}x^j(\ln|x|)^k$$

په x او $\ln|x|$ کې انتیګرال شي یا انتیګرال ونیول شي.

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د ټوټه اتیګرالونې له لارې کېدی شي د پولینوم درجه کمه شي. د بېلګې په توګه دی

$$\int x^n e^x\,dx = x^n e^x - \int n x^{n-1} e^x\,dx$$
$$= x^n e^x - n x^{n-1} e^x + \int n(n-1)x^{n-2}e^x\,dx$$
$$= \cdots$$
$$= e^x \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\frac{n!}{k!}x^k + c.$$

په دې توګه نېدی شي د $n \in \mathbb{N}$, $x^n\, e^{\beta x}$, بنې ترمونوکمبینېشن په خوښه انتیګرال شي یا یې انتیګرال ونیول شي. لیکونکي: هیولیګ، کوپف

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $x^n \cos x$ او $x^n \sin x$ ضربونه کېدی شي د ډېرواره ټوټه انتيګرالونې له لارې انتيګرال شي:

$$\int x^n \left\{ \begin{array}{c} \cos x \\ \sin x \end{array} \right\} dx = x^n \left\{ \begin{array}{r} \sin x \\ -\cos x \end{array} \right\} - \int nx^{n-1} \left\{ \begin{array}{r} \sin x \\ -\cos x \end{array} \right\} dx$$
$$= \ldots .$$

د تکرار ټوټه انتيګرالوني له لارې بالاخره ضريب x^k له منځه ځي. په دې توګه کېدی شي د په خوښه پولينوم توابعو لومړنی تابع په $x,\ \sin x$ او $\cos x$ کې وشمېرل شي.
ليکونکي: هيوليګ، کوپف

له $\cosh'(x) = \sinh(x)$, $\sinh'(x) = \cosh(x)$ څخه لاس ته راځي

$$\int e^x \sinh(x)\, dx = e^x \cosh(x) - \int e^x \cosh(x)\, dx$$
$$= e^x \cosh(x) - e^x \sinh(x) + \int e^x \sinh(x)\, dx$$

او له دې سره لکه چې برېښي
$$e^x \cosh(x) = e^x \sinh(x),$$

يو په څرګنده توګه مخامخوالی يا تضاد دی.
ناټيکاوی په اخرنظ پايونه کې پروت دی – د انتيګرالنيوني ثابته بايد په پام کې ونيول شي:
$$e^x \frac{e^x + e^{-x}}{2} = e^x \frac{e^x - e^{-x}}{2} + c\,.$$

د $c = 1$ ټاکنه مو ټيکې نتيجې ته لارښودوي.
ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د ټوټه انتيګرالونې سره لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليک

$$\int e^{ax}\sin(bx)\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos(bx)\,dx$$
$$= \frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \frac{b}{a^2}e^{ax}\cos(bx) - \frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\sin(bx)\,dx,\ (a\neq 0).$$

د ويم ځل انتيګرالونه مو بېرته برابر انتيګرال ته ته بيايي، او له دې سره لاس ته راځي:

$$\int e^{ax}\sin(bx)\,dx = \frac{ae^{ax}\sin(bx) - be^{ax}\cos(bx)}{a^2+b^2} + c$$

بديلي سړی

کړی شي د اويلر-مويورې فرمول هم د پورته ډول انتيګرال شمېرنو ته استعمال کړي. د

$$\cos(t) = \mathrm{Re}\left(\exp(it)\right)$$

بېلګې په توګه له لاس ته راځي

$$\int_0^\pi e^t\cos(t)\,dt\,\mathrm{Re}\left(\int_0^\pi \exp(t+\mathrm{i}t)\,dt\right) = \mathrm{Re}\left(\left[\frac{\exp(t+\mathrm{i}t)}{1+\mathrm{i}}\right]_0^\pi\right)$$
$$= \mathrm{Re}\left(\frac{-e^\pi - 1}{1+\mathrm{i}}\right) = -(e^\pi+1)/2\,.$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

له

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\sin(mx)\,dx = -\int_{-\pi}^{\pi} n\cos(nx)\left(-\frac{1}{m}\cos(mx)\right)dx$$
$$= \frac{n^2}{m^2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\sin(mx)\,dx$$

د $m\neq n$ لپاره لرو

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\sin(mx)\,dx = 0\,.$$

په پام کې دې ونيول شي، چې د تابع پريوديڅيتي يا تل بېرته رتکرځېدنه په ټوټه انتيګرالونه کې د ژی شرايط له منځه ځي. د $m = n$ لپاره د لومړي مساوات او

$$\sin^2+\cos^2=1$$

څخه لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$2\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2(nx)\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}1\,dx=2\pi\,.$$

په ورته توګه سړی د تابع $\cos(mx)$ اورتوګونالیتي ښايي.
لیکونکي: هیولیګ، کوپف

دلتا - تابع Delta-Funktion

د دیراکDiracsche دلتا-تابع δ د

$$\int_{\mathbb{R}}\delta f=f(0)$$

له لارې تعریف دی، د کوم سره چې یو په خوښه ناپرېکیدونکی تابع دی، چې د یوه انتروال (a,b) دباندې وکیږي. د ټوټه انتیګرالوني په مرسته یا په یوه پوله پروسه کېدی شي δ د Heavisideschen ټوپتابع د مشتق ټولیزوالي

$$H(x)=\begin{cases}1, & \text{für } x>0\\ 0, & \text{sonst}\end{cases}$$

په حیث تشریح کیدی شي.

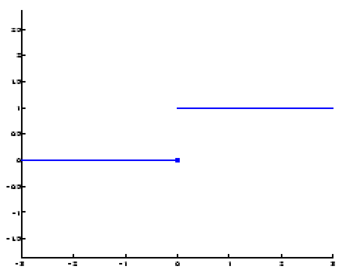
لیکونکي: هیولیګ، کوپف

که $0\in(a,b)$ وي، نو د ټوټه انتیګرال سره لاس ته راځي

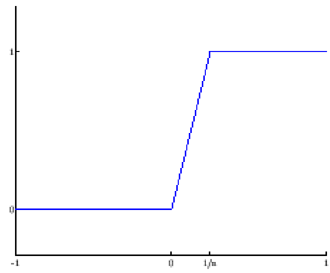
$$\begin{aligned}\int_{-a}^{b}H'f&=[Hf]_a^b-\int_a^b Hf'\\&=-\int_0^b f'=-[f]_0^b\\&=f(0)\end{aligned}$$

او له دې سره $\int H'f=\int\delta f$.

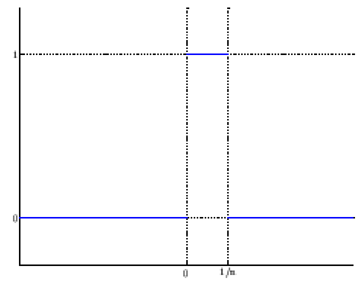
(c) ketabton.com: The Digital Library



Heaviside-Funktion
H



نږدېوالی
H_n
Näherung
der Heaviside-Funktion



نږدېوالی
$\delta_n = H'_n$
Näherung
der Delta-Funktion

په د پوله پروسي سره د جوړ شوي د Heavyside-Funktion اپروکسيميشن سره سرِی بدیل لاس ته راوړي :

$$\int_a^b H'_n f = n \int_0^{1/n} f = f(t_n) \to f(0)\,.$$

له دې سره د اخرني مساوات لپاره د منځ ا رزښت جمله کارول شوې.
ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د متحولو – یا اووبنتونو بدلون Variablensubstitution

د ځنځيري قاونو

$$\frac{d}{dx}F(g(x)) = f(g(x))g'(x), \quad f = F',$$

ځخه د د بدلون $y = g(x)$ لپاره لومړنيو تابع جوړولو له لارې لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(y) + c = \int f(y)\,dy\,.$$

په ورته توګه د ټاکلي انتیګرال لپاره باور لري

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy$$

.

د دفرنشل کونو په ورسته کېدی شي دا فرمول په لاندې بڼه

$$\int_a^b f(g(x))\frac{dy}{dx}\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy$$

وليکل شي.

يو ساده ځانګړی حالت يو کرښيز متحول بدلون دی

$$x \mapsto y = px + q\,.$$

په دې حالت کې دی

$$\int f(px+q)\,dx = \frac{1}{q}F(y) + c$$

همداسې

$$\int_a^b f(px+q)\,dx = \frac{1}{p}\,[F]_{pa+q}^{pb+q}\,.$$

ليکونکي: هيوليک، کوپف

د انتيګرال

$$\int_0^{\pi/\varepsilon} \frac{\sin \varepsilon x}{x}\,dx$$

لپاره بدلون $u = \varepsilon x\,,\; dx = \frac{1}{\varepsilon}du$ او د انتيګرالونې پولو ترانسفورميشن $x = \pi/\varepsilon \leftrightarrow u = \pi$ راکوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_0^{\pi/\varepsilon} \frac{\sin \varepsilon x}{x} dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u} du.$$

په ټوليزه توګه د يو بدلون $u = rx$ سره باور لري

$$\frac{dx}{x} \to \frac{du}{u}$$

او له دې سره

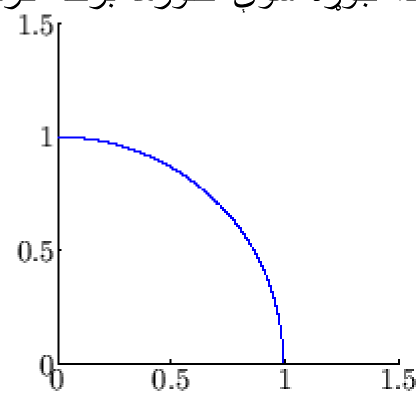
$$\int_a^b f(rx)\frac{dx}{x} = \int_{ra}^{rb} f(u)\frac{du}{u}.$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

تابع

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad 0 \le x \le 1,$$

دا جوړه شوې څلورمه برخه ګردۍ يا څلورمه برخه داېره ښايي



له دې سره د انتيګرال لپاره باور لري

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{\pi}{4}.$$

که بدلن $x = \sin u,\ dx = \cos u\, du,\ x = 0 \to u = 0$ وکارول شي او $x = 1 \to u = \frac{\pi}{2}$، نو لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2 u\, du = \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2}\,,$$

لکه ځنګه چې انتظار کېده. د اخرني مساوات لپاره دا لاندې

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 u + \cos^2 u\, du = \frac{\pi}{2}$$

وکارول شو.

په عجيبه ډول بدلون , $x = \cos u,$ $dx = -\sin u\, du$

$x = 0 \rightarrow u = -\pi/2$

او $x = 1 \rightarrow u = 2\pi$ په برېښنده توګه يوه ناټيکه

نتيجه راکوي:

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_{-\pi/2}^{2\pi} -\sin^2 u\, du = -\frac{5\pi}{4}.$$

څه ناټيک وو؟ په کلکه نيولې توګه باور لري

$$\sqrt{1-\cos^2 u} = |\sin u|$$

او له دې سره

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_{-\pi/2}^{2\pi} |\sin u|(-\sin u)du = \frac{\pi}{4}.$$

د لاندې انتيګرال لپاره

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2-4}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{((x-3)/2)^2-1}}$$

بدلون $y = (x-3)/2$, $dx = 2dy$ راکوي

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+5}} = \int \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}}\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ورپسې بدلون f $y = \cosh t$, $dy = \sinh t\, dt$ سره د

$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ له امله لاس ته راځي

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+5}} &= \int \frac{\sinh t\, dt}{\sinh t} \\ &= \int dt = t + c \\ &= \operatorname{arcosh} y + c \\ &= \operatorname{arcosh}((x-3)/2) + c \\ &= \ln\left(\frac{x-3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{x^2-6x+5}\right) + c\end{aligned}$$

له دې سره د بېلګې په توګه لاس تهراځي

$$\begin{aligned}\int_5^7 \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+5}} &= \ln(2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}) - \ln 1 \\ &= \ln(2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}).\end{aligned}$$

که په انتګرالېدونکي کې دننه مشتق پېژندل کیږي، لکه د بېلې په توګه د

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x}\, dx\,,$$

لپاره، نو د بدلون قانون په ځانګړې توګه ساده دی. په دې بېلګه کې

$$y = g(x) = \ln x\,, \quad g'(x) = \frac{1}{x}$$

ځای په ځای کوو او لاس ته راوړو

$$\int g(x)^2\, g'(x)\, dx = \int y^2\, dy = \frac{1}{3}y^3 + c\,.$$

د په څټ یا معکوس بدلون سره لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int \frac{\ln x^2}{x}\,dx = \frac{1}{3}(\ln x)^3 + c\,.$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

په تیوپیکي توګه سړی هڅیږي چې د بدلون له لارې انتیګرالېدونکی ساده کړي. د بېلګې په توګه د

$$\int \frac{e^{3y}}{e^{2y}-1}\,dy$$

لپاره نرډې دی چې

$$y = g(x) = \ln x \quad \Leftrightarrow \quad x = e^y$$

کیږدي. دا د

$$\frac{dy}{dx} = g'(x) = \frac{1}{x} = e^{-y}$$

له امله دا ترانسفورمي شوی ناټاکلی انتیګرال راکوي

$$\int \frac{x^3}{x^2-1}\,\frac{dy}{dx}\,dx = \int \frac{x^2}{x^2-1}\,dx = \int \left(1 + \frac{1}{x^2-1}\right)\,dx$$

$$\int 1\,dx + \int \frac{1}{x^2-1}\,dx = x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + c\,.$$

د $x = e^y$ دبېرته بدلون له لارې بالاخره لاس ته راځي

$$F(y) = e^y + \frac{1}{2}\left|\frac{e^y-1}{e^y+1}\right| + c\,.$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

لومړی (بنسټیزه -) تابع

$$\int \frac{dx}{\cos x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

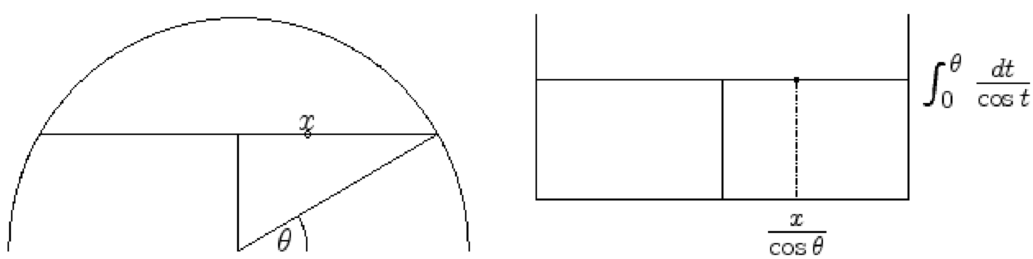
کيدی شي د بدلون سره

$$u = \frac{1}{\cos x} + \tan x = \frac{1+\sin x}{\cos x}, \qquad du = \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}\right) dx,$$

وشمېرل شي:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\cos x} &= \int (\cos x)^{-1} \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}\right)^{-1} du \\
&= \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c \\
&= \ln\left|\frac{1}{\cos x} + \tan x\right| + c.
\end{aligned}$$

يو کارونه يې د Mercator-Projektion دی. له دې سره د ځمکې بورته سطحه کونجريښتونې په سطحه برېوځي.



د سور گردۍ (طول البلد) له دې سره د $1/\cos\theta$ په نسبت سره غزيږي.

ليکونکي: هيوليک، کوپف

ساده راشنل انتيگراليدونکې د ساده قطب سره
Elementare rationale Integranden mit einfachen Polen

د درې بنستيتيوپه راشنل توابعو لومړنی توابع دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \qquad \frac{1}{a}\ln|x+b/a| + c$$

$$\int \frac{dx}{(x-a)^2+b^2} = \qquad \frac{1}{b}\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right) + c$$

$$\int \frac{(x-a)dx}{(x-a)^2+b^2} = \qquad \frac{1}{2}\ln((x-a)^2+b^2) + c$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

فرمولونه کېدی شي ترلي د مشتق له لارې پسې وشمېرل شي. بديل يې د انتيګرال ساده بڼه بدلونونه شوني دي.

له $\int dy/y = \ln|y| + c$ لاس ته راځي

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{x+b/a} = \frac{1}{a}\ln|x+b/a| + c.$$

د بڼه بدلون پسې

$$\int \frac{dx}{(x-a)^2+b^2} = \frac{1}{b^2}\int \frac{dx}{((x-a)/b)^2+1}$$

بدلون $dx = b\,dy$, $y = (x-a)/b$ راکوي

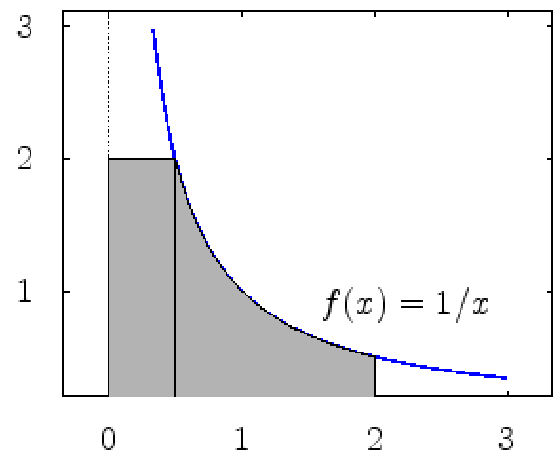
$$\frac{1}{b}\int \frac{dy}{y^2+1} = \frac{1}{b}\arctan y + c = \frac{1}{b}\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right) + c.$$

د بدلون , $y = (x-a)^2 + b^2$ سره لاس ته راځي

$$\int \frac{(x-a)\,dx}{(x-a)^2+b^2} = \qquad \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y} = \frac{1}{2}\ln|y| + c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

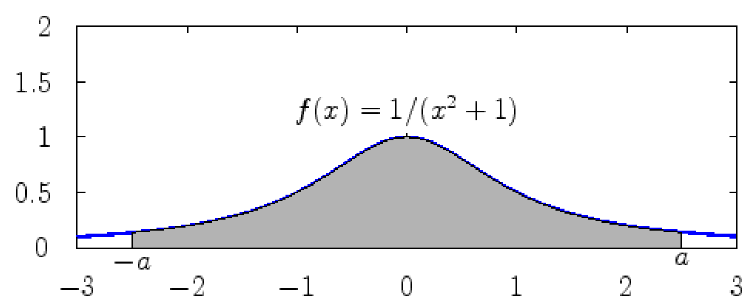
$$= \frac{1}{2}\ln((x-a)^2+b^2)+c.$$



د خړې سطحې مساحت د

$$2\frac{1}{2}+\int_{1/2}^{2}\frac{1}{x}dx = 1+\ln 2-\ln\frac{1}{2} = 1+\ln 4$$

له لارې شمېرل کېږي.
ليکونکي: هيوليک، کوپف



د $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ د ګراف لاندې سطحه داسې شمېرل کېږي

$$\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to\infty}\arctan a-\arctan(-a) \longrightarrow \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = \pi$$

ليکونکي: هيوليک، کوپف

(c) ketabton.com: The Digital Library

د

$$r(x) = \frac{3x+6}{2x^2-4x+10}$$

لومړی تابع ټاکلو لپاره، لومړی د مخرج مربعتکمیلونه جوړیږي:

$$2(x^2-2x+5) = 2((x-1)^2+2^2).$$

په اړونده توګه صورت هم بڼه بدلیږي:

$$3(x+2) = 3((x-1)+3).$$

له دې سره کېدی شي د ستاندارد افادې په توګه ټوټه یا تجزیه شي:

$$r(x) = \frac{3}{2}\,\frac{x-1}{(x-1)^2+2^2} + \frac{9}{2}\,\frac{1}{(x-1)^2+2^2}.$$

له دې سره لاس ته راځي

$$\int r(x)\,dx = \frac{3}{4}\,\ln\left((x-1)^2+4\right) + \frac{3}{4}\,\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) + c.$$

د ټاکلی انتیګرال $\int_1^3 r(x)\,dx$ لپاره سرې د پولو د په ځای اینوونې له لارې لومړنی تابع لاس ته راوړي

$$\frac{3}{4}\left(\ln 8 - \ln 4 + \arctan(1) - \arctan(0)\right) = \frac{3}{4}\,\ln 2 - \frac{3}{16}\,\pi.$$

لیکونکي: هیولیګ،

ساده راشنل انتیګرالونه د زیاتواره قطب سره

Elementare rationale Integranden mit mehrfachen Polen

د $n \in \mathbb{N}$ لپاره دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int (x-a)^{-n-1}dx = -\frac{1}{n}(x-a)^{-n} + c\ .$$

د ډېرواره کمپلکس کنجوګيري قطبځايونو کې د اړونده مربع

$$q(x) = (x-a)^2 + b^2$$

ضربيونو لپاره باور لري

$$\int \frac{c(x-a)+d}{q(x)^{n+1}}\,dx = \frac{d(x-a)}{2b^2n\,q(x)^n} - \frac{c}{2n\,q(x)^n} + \frac{d(2n-1)}{2b^2n}\int \frac{dx}{q(x)^n}\ .$$

د ګراد يا درجې ردکشن د لومړنې تابع رکورزيو شمېرنه شوونې کوي.
ليکونکي: هيوليک، کوپف

لومړنی فرمول د $y = x - a$ او $dx = dy$ د د بدلون له لارې لاس ته راځي:

$$\int (x-a)^{-n-1}dx = \int y^{-n-1}dy = -\frac{1}{n}y^{-n} + c\ .$$

د دويم فرمول د ښووني لپاره لومړی يو ساده د رکوزيون فرمول منځ ته راځي.

د ټوټه انتيګرالونې سره لاس ته راځي

$$\begin{aligned}\int \frac{dy}{(1+y^2)^k} &= \frac{y}{(1+y^2)^k} + 2k\int \frac{y^2}{(1+y^2)^{k+1}}\,dy \\ &= \frac{y}{(1+y^2)^k} + 2k\left(\int \frac{dy}{(1+y^2)^k} - \int \frac{dy}{(1+y^2)^{k+1}}\right)\ .\end{aligned}$$

له دې کټمټوالی منځ ته راځي

$$\int \frac{dy}{(1+y^2)^{k+1}} = \frac{y}{2k(1+y^2)^k} + \frac{2k-1}{2k}\int \frac{1}{(1+y^2)^k}\,dy\ .$$

له دې سره اوس د بدلون $y = \frac{x-a}{b}$ سره لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{((x-a)^2+b^2)^{n+1}} &= \frac{1}{b^{2n+2}} \int \frac{dx}{((\frac{x-a}{b})^2+1)^{n+1}} \\ &= \frac{1}{b^{2n+1}} \int \frac{dy}{(1+y^2)^{n+1}} \\ &= \frac{1}{b^{2n+1}} \left(\frac{y}{2n(1+y^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} \int \frac{dy}{(1+y^2)^n} \right) \\ &= \frac{x-a}{2b^2n((x-a)^2+b^2)^n} + \frac{2n-1}{2b^2n} \int \frac{dx}{((x-a)^2+b^2)^n} .\end{aligned}$$

ترم

$$\int \frac{c(x-a)}{((x-a)^2+b^2)^{n+1}}\, dx$$

کيدی شي د بدلون $y=(x-a)^2+b^2$ له لارې وشميرل شي، ځکه چې په صورت کې د y مشتق ځای لري:

$$\begin{aligned}\int \frac{c(x-a)}{((x-a)^2+b^2)^{n+1}}\, dx &= \frac{c}{2} \int \frac{dy}{y^{n+1}} \\ &= \frac{c}{2(-n)y^n} \\ &= -\frac{c}{2n((x-a)^2+b^2)^n} .\end{aligned}$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د انتيګرال

$$\int \frac{2x+1}{(x^2+9)^2}\, dx$$

لپاره په ټوليز فرمول کې د ايښوونې وروسته د ډېرواره قطبونو سره د $a=0, b=3, c=2, d=1$ او $n=1$ سره راکوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{-2}{2(x^2+9)}+\frac{x}{18(x^2+9)}+\frac{1}{18}\int\frac{1}{x^2+9}\,dx$$

او د بنه بدلون پسې

$$\frac{x-18}{18(x^2+9)}+\frac{1}{18}\left(\frac{1}{3}\arctan(\frac{x}{3})+c\right)$$
$$=\frac{x-18}{18(x^2+9)}+\frac{1}{54}\arctan(\frac{x}{3})+c'.$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د راشنلتوابعو انيګرالونه **Integration rationaler Funktionen**

د حقيقي ټوټه کسر ټوټه ونې له لارې کېدی شي يو حقيقي راشنل تابع د لاندې درې ساده بنسټيزو جمعي

$$ax^n\,,\quad\frac{c}{(ax+b)^n}\,,\quad\frac{c(x-a)+d}{((x-a)^2+b^2)^n}$$

د $n\in\mathbb{N}_0\,,\ a,b,c,d\in\mathbb{R}$ سره انځور شي. د لومړنيو توابعو په مرسته کېدی شي د دې بنسټتوابعو لپاره د په خوښه راشنلتوابعو لپاره لومړنۍ توابع وټاکل شي.
ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د

$$\int r(x)dx,\quad r(x)=\frac{x^5+10x^3+5^2-x+25}{x^4+8x^2-9}\,,$$

د شمېرلو لپاره لومړی يو ټوټه کسر ټوټه ونه سرته رسوو.
د پولينوم وېش پسې ،

$$r(x)=x+\frac{2x^3+5x^2+8x+25}{x^4+8x^2-9}\,,$$

اود مخرج ضريبونو جوړولو پسې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x^4+8x^2-9=(x+1)(x-1)(x^2+9)\,,$$

لاس ته راځي

$$r(x)-x=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-1}+\frac{cx}{x^2+9}+\frac{d}{x^2+9}\,.$$

که د اصلي مجراج سره ضب شي، نو لاس ته راځي

$$\begin{aligned}&2x^3+5x^2+8x+25\\ =\quad & a(x-1)(x^2+9)+b(x+1)(x^2+9)+(cx+d)(x^2-1)\end{aligned}$$

$$x^3(a+b+c)+x^2(-a+b+d)+x(9a+9b-c)+1(-9a+9b-d)$$

او د ضريبونو د پرتلې $a=-1$, $b=2$, $c=1$ او $d=2$ له لارې.
يوګوني ترمونه کېدی اوس ساده انتيګرال شي:

$$\int\frac{x^5+10x^3+5^2-x+25}{x^4+8x^2-9}$$

$$=\quad\int x dx+\int\frac{-dx}{x+1}+\int\frac{2dx}{x+1}+\int\frac{xdx}{x^2+9}+\int\frac{2dx}{x^2+9}$$

$$\frac{1}{2}x^2-\ln|x+1|+2\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln(x^2+9)+\frac{2}{3}\arctan\left(\frac{x}{3}\right)+c.$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د ساين او کوساين د ضرب انتيګرالونه

د $a^2\neq b^2$ لپاره د زياتون-يا جمعي قضيې څخه لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int \sin(ax)\sin(bx)\,dx = \frac{\sin((a-b)x)}{2(a-b)} - \frac{\sin((a+b)x)}{2(a+b)} + c$$

$$\int \sin(ax)\cos(bx)\,dx = -\frac{\cos((a-b)x)}{2(a-b)} - \frac{\cos((a+b)x)}{2(a+b)} + c$$

$$\int \cos(ax)\cos(bx)\,dx = \frac{\sin((a-b)x)}{2(a-b)} + \frac{\sin((a+b)x)}{2(a+b)} + c.$$

په ځانګړې توګه د ټولګڼيزو يا تامعددې a,b لپاره انتيګارل په پريوديکي انتروال $[-\pi,\pi]$ باندې ورکيږي. د ټوټه انتيګرالونې په مرسته لاس ته راځي

$$\int \sin^n(ax)dx - \frac{1}{na}\sin^{n-1}(ax)\cos(ax) + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}(ax)dx$$

$$\int \cos^n(ax)dx\,\frac{1}{na}\sin(ax)\cos^{n-1}(ax) + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}(ax)dx.$$

داسې کيدی شي اکسپوننت سوکڅسيو يا تل کم شي. د $n=2$ لپاره په ځانګړې توګه لاس ته راځي

$$\int \sin^2(ax)\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2ax)}{4a} + c$$

$$\int \cos^2(ax)\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2ax)}{4a} + c.$$

په ځانګړې توګه باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)\,dx = \pi$$

د $n \in \mathbb{N}$ لپاره .

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

که د لومړۍ کټمټوالي د ښي اړخ مشتق ونیول شي، نو سړی لاس ته راوړي

$$\frac{1}{2}\cos\left((a-b)\,x\right) - \frac{1}{2}\cos\left((a+b)\,x\right) .$$

د زیاتون – یا جمعي قضیه راکوي

$$\frac{1}{2}\left(\cos(ax)\cos(bx) + \sin(ax)\sin(bx) - \cos(ax)\cos(bx) + \sin(ax)\sin(bx)\right) =$$

$$= \sin(ax)\sin(bx) ,$$

کوم چې د کیڼ لور د انتیګرال سره سر خ وري.

د $\cos^2(ax)$ او $\sin^2(ax)$ لومړنی تابع کېدی شي د ټوټه انتیګرال سره وشمېرل شي. د بېلګې په توګه دی

$$\int \sin(ax)\sin(ax)\,dx$$

$$= -\frac{1}{a}\cos(ax)\sin(ax) - \int \left(-\frac{1}{a}\cos(ax)\right)\left(a\cos(ax)\right)\,dx$$

$$= -\frac{1}{a}\cos(ax)\sin(ax) + \int \left(1 - \sin^2(ax)\right)\,dx .$$

د $\int \sin^2(ax)\,dx$ پسې حل کونه غوښتونی لومړنی تابع راکوي.

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د کمپلکس تریګونومتیکي توابعو انتیګرالونه

Integration komplexer trigonometrischer Polynome

له

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int e^{\mathrm{i}kx}\,dx = \frac{1}{\mathrm{i}k}e^{\mathrm{i}kx} + c, \quad 0 \neq k \in \mathbb{Z},$$

څخه د کمپلکس تریګونومتریکي پولینومونو لپاره لاس ته راځي

$$p(x) = \sum_{|k| \leq n} c_k e^{\mathrm{i}kx},$$

داسې چې

dass

$$\int p(x)\,dx = c + c_0 x + \sum_{0 \neq |k| \leq n} \frac{c_k}{\mathrm{i}k} e^{\mathrm{i}kx}$$

همداسې

sowie

$$\int_{\pi}^{\pi} p = 2\pi c_0$$

باور لري.

د اویلر-مویورې فرمول په مرسته کېدی شي په دې توګه په خوښه پولینومونه په $\sin(kx)$ او $\cos(kx)$ کې انتیګرال شي.

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^4 x\,dx$$

شمdرلو ته د اویلر-مویورې فرمول په مرسته انتیګرال په لاندې توګه لیکل کیږي

$$\frac{1}{16}\left(e^{\mathrm{i}x} - e^{-\mathrm{i}x}\right)^4 = \frac{6}{16} + \sum_{k \neq 0} c_k e^{\mathrm{i}kx}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او $2\pi\frac{6}{16}=\frac{3}{4}\pi$ د انتیګرال ارزښت په توګه لاس ته راوړي.

بدیلي کیدی شي ټوټه انتیګرال وکارول شي:

$$\begin{aligned}\int \sin^4 x dx &= \int \sin x \sin^3 x\, dx\\ &= -\cos x \sin^3 x + 3\int \cos^2 x \sin^2 x\, dx\\ &= -\cos x \sin^3 x + 3\int \sin^2 x\, dx - 3\int \sin^4 x\, dx.\end{aligned}$$

که په $\sin^4 x$ انتیګرال ښی لور ته راوړل شي، نو د درجې کموالی راکوي

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^4 x\, dx = -\frac{1}{4}\left[\cos x \sin^3 x\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{3}{4}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x\, dx\,.$$

د

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x\, dx = \pi$$

په مرسته سړی $\frac{3}{4}\pi$ هم د انتیګرال ارزښت په توګه لاس ته راوړي
لیکونکي: هیولیک، پفایل

تریګونومتریکي بدلونونه **Trigonometrische Substitutionen**

د لاندې بدلونونو په مرسته کېدی شي د ساده الجبري انتیګرالیدونکو یوه لړۍ اکسپلیځیت یا په ښه هڅرګنده توګه وشمېرل شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليک

$$x = a\sin t: \qquad dx = a\cos t\,dt \qquad \sqrt{a^2-x^2} = a\cos t$$
$$x = a\tan t: \qquad dx = a/\cos^2 t\,dt \qquad \sqrt{a^2+x^2} = a/\cos t$$
$$x = a/\cos t: \qquad dx = a\sin t/\cos^2 t\,dt \qquad \sqrt{x^2-a^2} = a\tan t$$

په بل حالت کې باید د رېښې د پروت محور متحولې لومړی په مربعیز تکمیلېدونکې بڼه راړل شي.
لیکونکي: هیولیک، پفایل

د انتیګرال

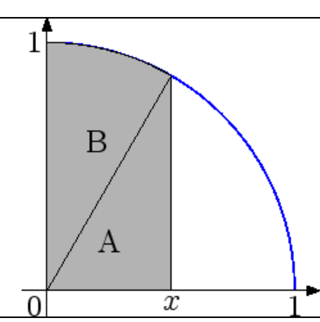
$$\int_0^{1/2} \sqrt{1-x^2}\,dx$$

لپاره بدلون $x = \sin t,\ dx = \cos t\,dt$ او د پولو اعیارول $x = 0 \to t = 0$ او $x = 1/2 \to t = \pi/6$ راکوي

$$\int_0^{\pi/6} \cos^2 t\,dt = \left[\frac{1}{2}(\sin t\cos t + t)\right]_0^{\pi/6} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

ناټاکلی انتیګرال دی

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x + c.$$

	انتیګرال کیدی شي د یوه ساده هندسي یا ځمککچیز اند(فکر) سره هم وټاکل شي لکه د ځیرې ځخه چې لیدل کیږي، د $\sqrt{1-x^2}$ د ګراف لاندې سطحه په دوه برخسطحو ودانه یا جوړه ده.

د دربېکودې سطحې مساحت $A = \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}$ دی او د ګردی برخط یا قطاع مساحت د $t = \arcsin x$ کونج سره $B = \frac{1}{2}t = \frac{1}{2}\arcsin x$ ده. د دې سطحو د

(c) ketabton.com: The Digital Library

مساحت جمعه کيدل غوښتونې سطحه راکوي.
ليکونکي: هيوليک، کوپف

د انتيګرال

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$$

لپاره د بدلون $x = \tan t,$ $dx = 1/\cos^2 t\, dt$ څخه لاس ته راځي

$$\int \frac{dt/\cos^2 t}{\tan t/\cos t} = \int \frac{dt}{\sin t} = \ln|\tan\frac{t}{2}| + c,$$

د کوم سره چې اخرنی مساوات د ښی اړخ د مشتق نيولو له لارې ازمايل کېدی شی.
د بېرته بدلون له لارې لاس ته راځي

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = \ln|\tan(\frac{1}{2}\arctan x)| + c.$$

له دې سره د بېلګې په توګه لاس ته راځي

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} &= \ln|\tan\frac{\pi}{4}| - \ln|\tan\frac{\pi}{8}| \\ &= \ln 1 - \ln\left(\frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{1+\frac{1}{2}\sqrt{2}}\right) \\ &= \ln(1+\sqrt{2}).\end{aligned}$$

ليکونکي: هيوليک، کوپف

د انتيګرال

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2-4}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{((x-3)/2)^2-1}}$$

لپاره بدلون $y=(x-3)/2$, $dx=2dy$ راکوي

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+5}} = \int \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}}.$$

د پسي بدلون $y=\frac{1}{\cos t}$, $dy=\frac{\sin t}{\cos^2 t}\,dt, \sqrt{y^2-1}=\tan t$ n سره لاس ته راځي

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+5}} = \int \frac{dt}{\cos t} = \ln\left|\frac{1}{\cos t}+\tan t\right| + c,$$

د کوم سره چې اخرنی برابروالی د بنی خوا د مشتق نیونې له لارې ازمایل کیدی شي.
د په څټ یا معکوس بدلون پسې د

$$\sin t = \sqrt{1-(1/y)^2}, t = \arccos y = \arcsin\sqrt{1-(1/y)^2}$$

سره لومړنی تابع دلاس ته راځي

$$\ln\left|y + y\sin\left(\arccos\frac{1}{y}\right)\right| + c = \qquad \ln\left|y + y\sqrt{1-\left(\frac{1}{y}\right)^2}\right| + c$$

$$= \ln\left|\frac{x-3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{x^2-6x+5}\right| + c.$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د ساین او کوساین راشنل توابع
Rationale Funktionen von Sinus und Cosinus

د بدلون

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x = \tan(t/2)$$

سره د يوه په خوښه راشنل تابع r لپاره لاس ته راځي

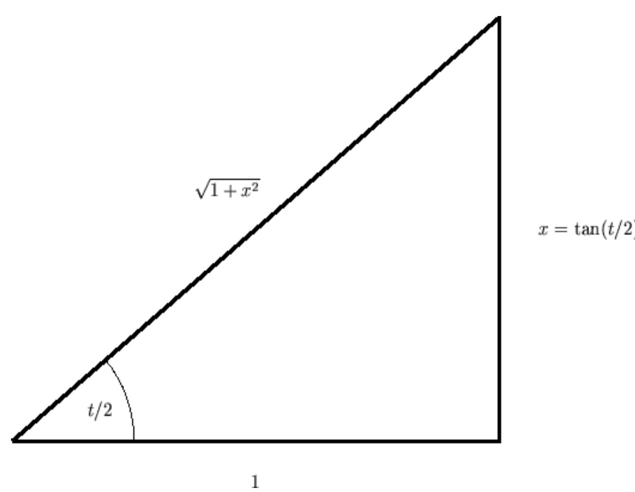
$$\int r(\cos t, \sin t)\, dt = \int r\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}, \frac{2x}{1+x^2}\right) \frac{2}{1+x^2}\, dx\,.$$

له دې سره ترېګونومتريکي تابع کېدی شي په يوه راشنل انتيګرال واړوي، کوم چې د ټوټه کسر ټوټه ونې سره شمېرل کېدی شي.

ليکونکي: هيوليګ، اپريښ

لکه د څيرې څخه چې ليدل کيږي، باور لري

$$\cos(t/2) = 1/\sqrt{1+x^2}\,, \quad \sin(t/2) = x/\sqrt{1+x^2}$$



له دې لاس ته راځي

$$dx = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\cos^2(t/2)}\, dt = \frac{1}{2}\,(1+x^2)\, dt$$

همداسې

$$\cos t = \cos^2(t/2) - \sin^2(t/2) = \frac{1-x^2}{1+x^2}\,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sin t = 2\cos(t/2)\sin(t/2) = \frac{2x}{1+x^2}\,.$$

ليکونکي: هيوليګ، اپريښ

د بدلون $x = \tan(t/2)$ سره لاس ته راځي

$$\int \frac{dt}{\sin t} = \int \frac{1+x^2}{2x}\,\frac{2}{1+x^2}\,dx$$

$$= \int \frac{dx}{x} = \ln|\tan(t/2)| + c.$$

په اړونده تګه لاس ته راځي

$$\int \frac{dt}{\cos t} = \int \frac{1+x^2}{1-x^2}\,\frac{2}{1+x^2}\,dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right) dx$$

$$= \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c\,.$$

د $x = \tan(t/2)$ د بېرته بدلون پسې لاس ته راځي

$$\int \frac{dt}{\cos t} = \ln\left|\frac{1+\tan(t/2)}{1-\tan(t/2)}\right| + c\,.$$

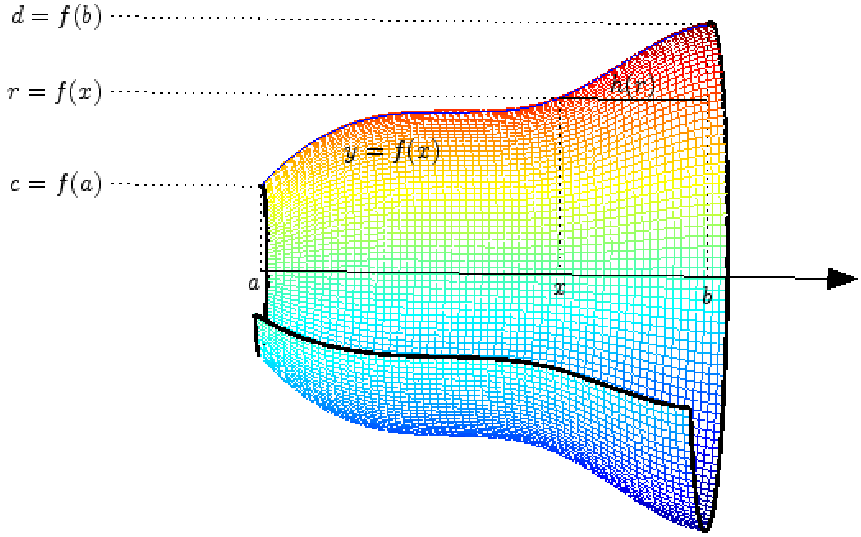
ليکونکي: هيوليګ، اپريښ

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څرخیدونو بدنونو ډکی یا حجم **Volumen von Rotationskörpern**

د V ډکی حجم د x په محور جوړ شوي بدن د تابع ګراف $r = f(x) \geq 0$, $a \leq x \leq b$
د څرخون له لارې کېدی شي انتیګرېشن له لارې په ګردی ډوله غوڅي
یا تقاطع باندې شمېرل کیدی شي:

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx \, .$$



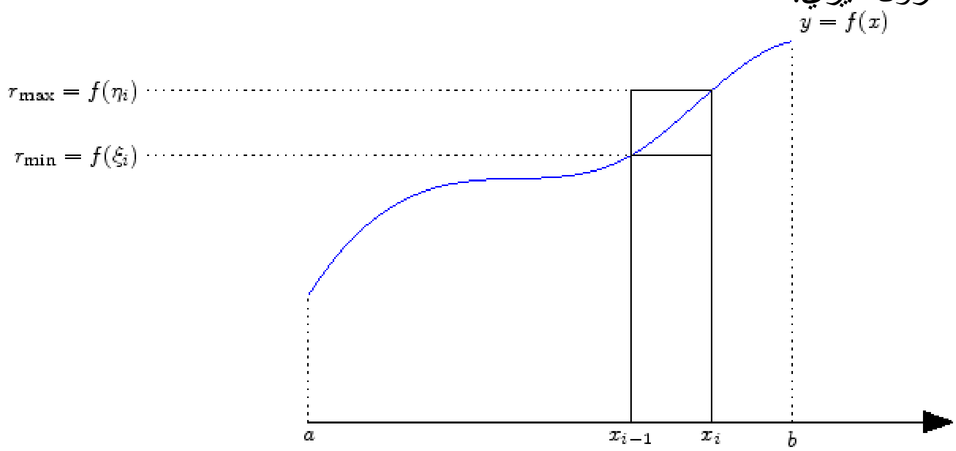
بدیلي کېدی شي د توتې پوښ باندې انتیګرال شي.

$$V = \pi c^2 (b - a) + 2\pi \int_c^d r \, h(r) \, dr \, ,$$

چیرته چې c همداسې d مینیمال همداسي ماکسیما وړانګه r او $h(r)$ په بدن کې
خوندي توتې پوښ تول جګوالی دی د وړانګې r سره. دا واریانت له تولو د همغږیز
وړانګې تابع f لپاره موخ وره ده.
لیکونکي: هیولیک، هیورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لومړي فرمول د ښووني لپاره په څېره کې کښل شوی اپروکسیمیشن یا نږدېوالی کارول کیږي.



یوه ټوټه کوني Δ یوه انټروال $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1 \ldots n,$ لپاره کېدی شي ډکی(حجم) د یوې توټې

له لارې د مینیمال وړانګې $f(\xi_i)$ سره او یوې توټې د ماکسیمال وړانګې $f(\eta_i)$ سره رابند شي. د ټول حجم V لپاره نو بیا باور لري

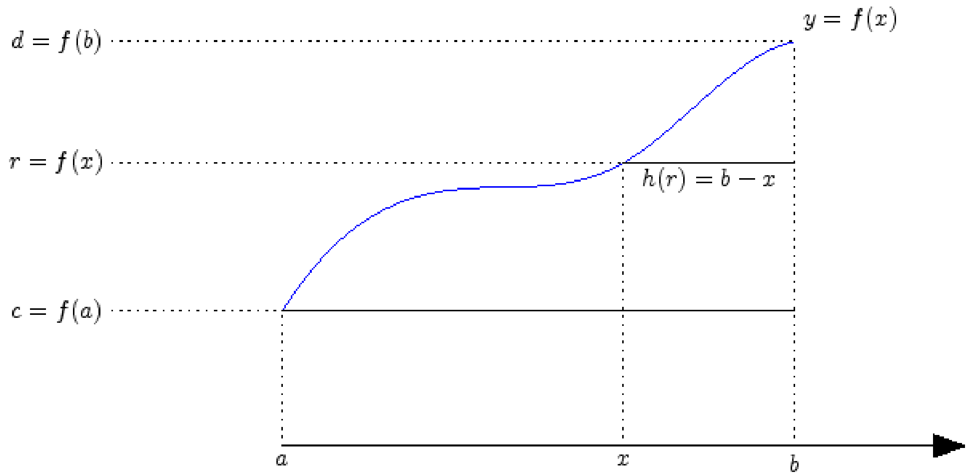
$$\pi \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)^2 \Delta x_i \leq V \leq \pi \sum_{i=1}^{n} f(\eta_i)^2 \Delta x_i \ ,$$

د $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ سره. دواړه دباندني ترمونه د ریمن-جمعه ده، چې د انټیګرال ارزښت لور ته ځي، یعني باور لري

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx.$$

ددویم فرمول د ښووني لپاره لومړی نیول کیږي، چې f همغږیز جګېدونکی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د $dr = f'(x)\,dx$ ، $r = f(x)$ همداسې د $x = f^{-1}(r)$ سره لاس ته راځي

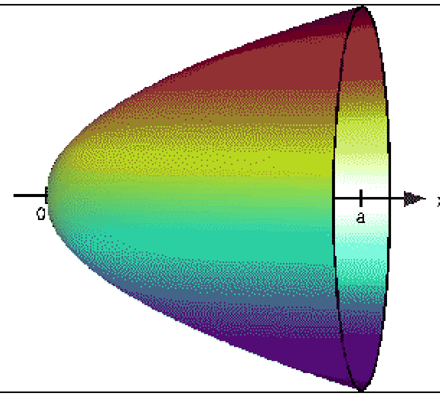
$$\begin{aligned} 2\pi \int_{c=f(a)}^{d=f(b)} h(r) r\, dr &= \pi \int_a^b \underbrace{(b-x)}_{u} \underbrace{2 f(x) f'(x)}_{v'}\, dx \\ &= \pi\, (b-x) f(x)^2 \Big|_a^b + \pi \int_a^b f(x)^2\, dx \\ &= \underbrace{-\pi (b-a) c^2}_{\text{innerer Zylinder}} + \pi \int_a^b f(x)^2\, dx\,, \end{aligned}$$

څه چې دویم فرمول په ګوته کوي.

د همغږیز تیټېدونکي توابعو لپاره کېدی شي په ورته توګه مخ ته ولاړ شو. په تولیز حالت کې دا د همغږیزوالي ورشو د ټوټه کوني له لارې لاس ته راځي

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

	دا څيره شوی پارابولوييد د کږې يا منحني $y=\sqrt{x}$ د څرخون يا څرخېدو له لارې د x په محور څېره شوی .

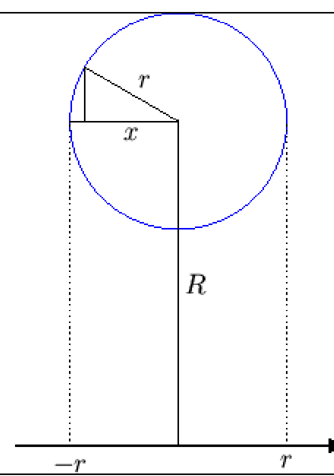
د څرخيدونکي بدن د څرخيدني قانون سره سم ډکی يا حجم دی

$$\pi \int_0^a (\sqrt{x})^2 \, dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^a = \frac{1}{2}\pi a^2 .$$

بديلي د توتي پوښ بادي انتيګرلوني له لارې لاس ته راوړي

$$2\pi \int_0^{\sqrt{a}} r(a-r^2)dr = 2\pi \left[-\frac{1}{4}(a-r^2)^2 \right]_0^{\sqrt{a}} = \frac{1}{2}\pi a^2 .$$

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

	يو توروس (د ګردی يا داېرې کړی Torus) ديوې ګردی دڅرخون څخه منځ ته راځي د وړانګې r سره په يوه محور د منځ ټکي څخه په R واټن.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ډکی یا حجم د دوه څرخیدونکو بدنونو د کمښت څخه شمیرل کیږي

$$V = \pi \int_{-r}^{r} \left(R + \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx - \pi \int_{-r}^{r} \left(R - \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx$$

$$= 4\pi \int_{-r}^{r} R\sqrt{r^2 - x^2}\, dx\,.$$

د بدلون $dx = r\, \cos\varphi\, d\varphi$, $x = r\, \sin\varphi$ سره لاس ته راځي

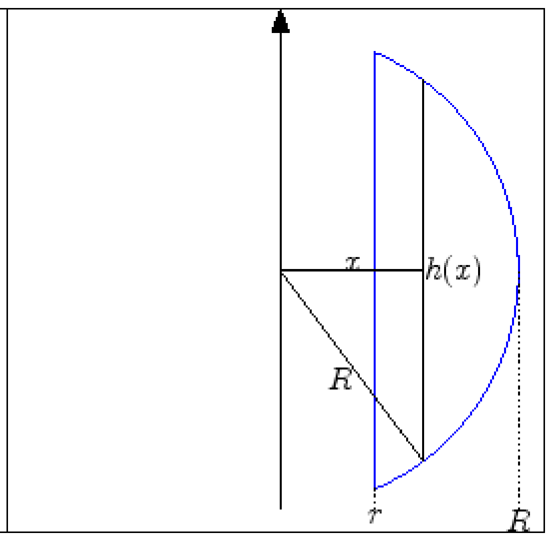
$$V = 4\pi R r \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi\, r \cos\varphi\, d\varphi$$

$$= 4\pi R r^2 \frac{\pi}{2} = 2\pi^2 R r^2\,,$$

ځکه چې

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{2}\,.$$

لکه چې څېره شوی یو له غونډاري د R په وړانګې په پراته محور د وړانګې r سره رابیله شوې توته ده.



د دې لپاره چې ډکي یا حجم شمېرو، د وړانګې $x,\, r \le x \le R$ سره په توته پوښ انتیګرال نیولکیږي . د $R = 5, r = 3$ لپاره د $h(x) = 2\sqrt{R^2 - x^2}$ سره لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$V = 2\pi \int_r^R 2x\sqrt{R^2 - x^2}\, dx = 2\pi \left[-\frac{2}{3} \left(R^2 - x^2\right)^{3/2} \right]_r^R$$

$$= \frac{4}{3}\pi (25-9)^{3/2} = \frac{256}{3}\pi\,.$$

د يوې کږې يا منحني اوږدوالی **Länge einer Kurve**

د يوې کږې L اوږدوالی د ناپرېکېدونکي مشتقوړ پارامتريک کولو $t \mapsto p(t)$ سره، $a \le t \le b$ ، دی

$$\int_a^b |p'(t)|\, dt\,.$$

پّ ځانګړې توګه د يوې کږې لپاره په xy -سطحه د پارامتريک انځورونې $p(t) = (x(t), y(t))$ سره باور لري

$$L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt\,.$$

په ځانګړې توګه ديوه تابع $y = f(x)\,,\ x \in [c,d]$ ګراف لاندې اوږدوالی لري

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx\,.$$

د $p(a)$ او $p(t)$ ترمنځ د کږو ټوټو اوږدوالی ،

$$s(t) = \int_a^t |p'(\tau)|\, d\tau\,,$$

کيدی شي د کانونيکي کږې پارمتر په توګه وکارول شي. سږی داسې په نامه د کږې اوږدوالي پسې پارمتري کونه لاس ته راوړي :

(c) ketabton.com: The Digital Library

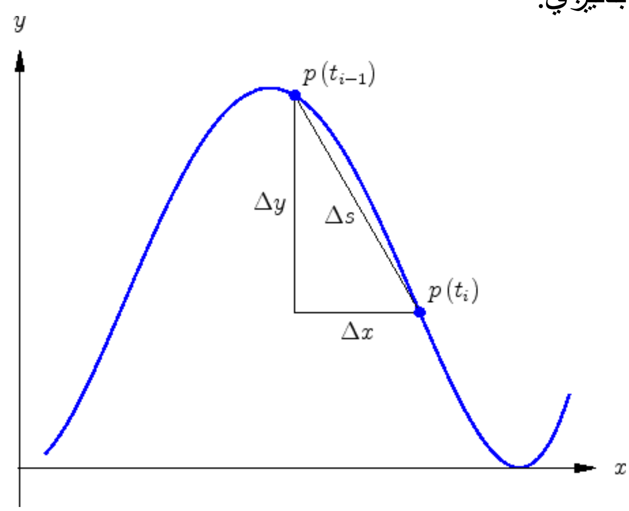
$$q(s) = p(t), \quad |q'| = 1 .$$

د نورمي تانجنت کږې په بنسټ د کانونيکي پارامتري کونې لپاره باور لري

$$\int_C f = \int_0^L f(q(s))\, ds$$

د C د L اوږدوالي سره.
ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

د يوې مسطحې کږې د اږدوالي شميرنې لپاره د پارامتر انتروال ييه ټوټو وېشل کيږي او يو برخه انتروال $[t_{i-1}, t_i]$ لپاره کږه د پاى ټکو د ترونکرښې له لارې ځاى بدليږي يا بدليږي.



د انتګرال د منځ ارزښت جملې سره بيا باور لري:

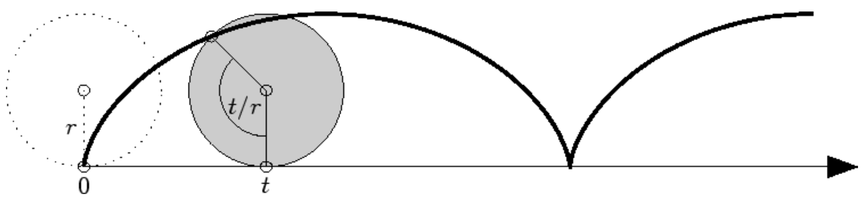
$$\sum_{i=1}^{n} \Delta s_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(p_1'(\xi_i))^2 + (p_2'(\eta_i))^2}\, \Delta t_i ,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\xi_i, \eta_i \in [t_{i-1}, t_i]$ سره . دا اخرنۍ ويېنه يا افرده د ورکړ شوي انتيګرال د يمن-زياتون يا ـجمعې دی.
په ورته تګه د ډېرپراخېدونکي يا ډېربعديز ې کږې لپاره د مشتق نورم د انتيګرال په بنه راکوي.
ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

که د r وړانګې سره يوه ګردۍ يا داېره د په محور ګرځوو يا وخرخوو، نو ژي ټکی يو څيکلوييد تشريح کوي.



د سرچينې لپاره د پيل ټکي په حيث

$$\begin{aligned} x(t) &= t + r\cos(3\pi/2 - t/r) = t - r\sin(t/r) \\ y(t) &= r + r\sin(3\pi/2 - t/r) = r - r\cos(t/r) \end{aligned},$$

د $t \in [0, 2\pi r]$ سره ، د يوې ګړې ليندې يو پارمتري کونه ده.
د ليندې اوږدوالی دی

$$L = \int_0^{2\pi r} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi r} \sqrt{(1-\cos(t/r))^2 + (\sin(t/r))^2}\, dt\,.$$

د بدلون $s = t/r$, $dt = r\,ds$ او کتمتوالي

$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1\,, \quad 1 - \cos(2\varphi) = 2\,\sin^2\varphi$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

سره لاس ته راځي

$$L = \quad r\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1-\cos(s))}\,ds = r\int_0^{2\pi}2\sin(s/2)\,ds = 8\,r\,.$$

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

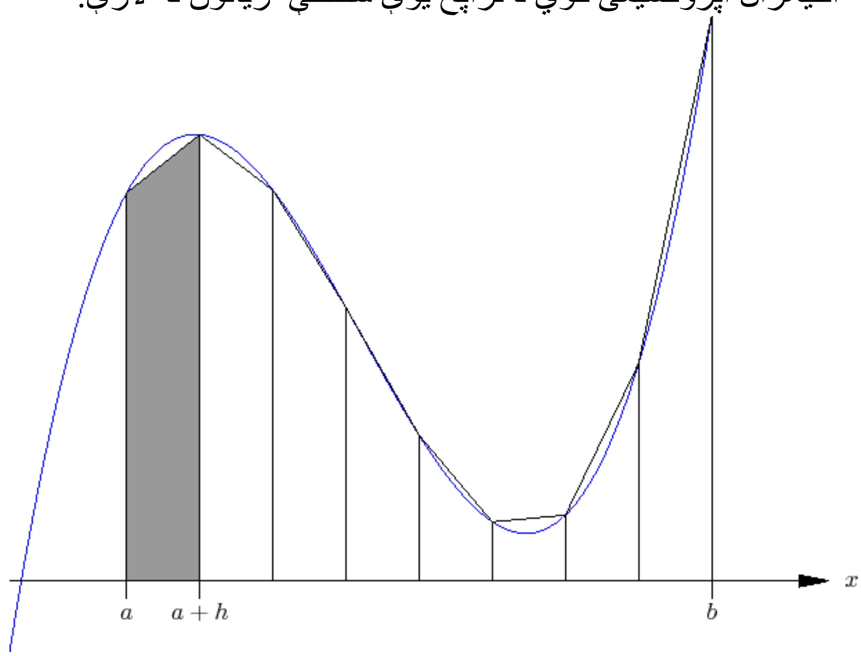
د ذوزنقي قانون **Trapez-Regel**

نږديوالی

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx s_h f =$$

$$= h(f(a)/2 + f(a+h) + \cdots + f(b-h) + f(b)/2)$$

انتيګرال اپروکسيمی کوي د تراپخ يوې سطحې زياتون له لارې.



د يوه دوه واره ناپرېکېدونکی مشتقوړ تابع د ناتيکاوي پاره باور لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$s_h f - \int_a^b f = \frac{b-a}{12} f''(r) h^2,$$

د $r \in [a,b]$ لپاره.

په ټيکه توګه ناټيکاوی د خويو يا هوارو توابعو لپاره ګاونديز يا اسيمپټوټيکي وده لري

$$s_h f - \int_a^b f = c_1 (f'(b) - f'(a)) h^2 + c_2 (f'''(b) - f'''(a)) h^4 + \dots$$

له f او h څخه خپلواکې ثابتې c_j سره. له دې څخه لاس ته راځي، چې د ټراپځ قانون د $(b-a)$-پريوديکي توابعو لپاره خورا دقيق دی. ناټيکاوی ګړندی د صفر په لور ځي نسبت هر h-توان ته.
ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

په يوه ا نتروال ناټيکاوی دی

$$\frac{h}{2}(f(0) + f(h)) - \int_0^h 1 \cdot f = \int_0^h (t - h/2) f'(t)\, dt.$$

بيا ټوټه انټيګرالونه او منځ ا رزښت جملهې استعمال راکوي

$$-\int_0^h \frac{1}{2} t(t-h) f''(t)\, dt = \underbrace{-\int_0^h \frac{1}{2} t(t-h)\, dt}_{h^3/12} \; f''(r).$$

په ټوټه انتروال باندې د جمعې پسې سرې لاس ته راوړي

$$\frac{1}{12} h^3 \sum_{i=1}^{n} f''(r_i).$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمعه کیدی شي د

$$n\ \min f'' \leq \sum f''(r_i) \leq n\ \max f''$$

له لارې اټکل شي. د ترمنځارزښت جملې پسې بالاخره لاس ته راځي

$$\sum f''(r_i) = nf''(r) = \frac{b-a}{h} f''(r)\,,$$

د یوه $r \in [a,b]$ سره.

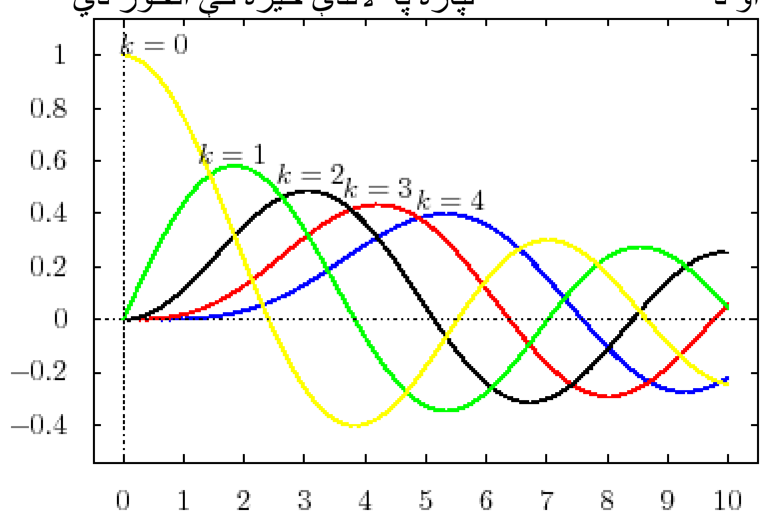
د ګاونډ یا مجانب ناټیکاوي ودې ښوونه اوړده ده. دا د باقي غړي په تل ټوټه انتیګرالونه ولاړه ده او د ژۍ ترمونو په یوه مناسبه کارونه یا استعمال.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د بسل-تابع Bessel-Funktionen $\mathcal{J}_k$ د ټولګنیز k لپاره دا لاندې انتیګرال انځورونه لري

$$\mathcal{J}_k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\cos(kz - x\sin(z))}_{f(z)}\, dz$$

او د $k = 0, \ldots, 4$ لپاره په لاندې ډول خیره کې انځور دي



(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټراپيځ قانو شميرلو سره شړی کاروي، چې

$$\frac{1}{2}\left(f(a)+f(a+2\pi)\right)=f(a)$$

او دا چې f جوړه دی. که ټکي

$$z_i=-\pi+\frac{1+2i}{2}\frac{2\pi}{n},$$

وټاکو ، نو جمعه

$$\sum_{i=0}^{n-1}f(z_i)=2\sum_{i=n/2}^{n-1}f(z_i)$$

دې جوړه شي.

لکه د $\mathcal{J}_1(2)$ لاندې نږدېونه یا اپرکسيميشن د $n=4,8,\dots 64$ ټکو سره ښايي،
پولې ته تلنه فوقالعاده ګړندی ده.

n	
4	0.45464871341284084769800993295587
8	0.57655235602472460377030331810649
16	0.57672480775615774487465153090293
32	0.57672480775687338720244824226913
64	0.57672480775687338720244824226913

دا د ذوزنقي قانون جګ ټيکاوی د خوی پريوديکي انتيګرال لپاره يوپيک دی او کېدی
شي د ناټيکاوي د يوهه ټيکې انځورونې ، د اويلر-ماکلورن-Euler-
Maclaurinschen د جمعي فرمول مدلل کړای شي.

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګاوس فرمول **Gauß-Formel**

د n –مې درجې يا نظم د ګاوس فرمول په نږدې بڼه يا ډول د يوه تابع انتيګرال ټاکي د انتيګرال د انترپوليشن پولينوم له لارې د n-مې درجې د لاګرانژ پولينومونو په صفرځايونو $x_1 < \cdots < x_n$ کې:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f\left(x_i\right)$$

د w_i سره د لاګرانژپولينوم

$$p_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

په انتوال $[-1,1]$ باندې.

فرمول د $< 2n$ Grad درجې پولينوم لپاره ټيک دی او د ټولو له مخه د تحليلی توابعو لپاره خورا ټيک دی. ټول وزنونه w_i زياتيز يا مثبت دي، او تکيه ځايونه x_i په انتګريشن انتروال $(-1,1)$ کې پراته دي. دا د ګاوس پارامتر تر 10 -م نظم پورې جدولي شوی او په لاندې جدول کې ورکړ شوی دی

n	x_i	w_i
2	$\pm\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1
3	0 $\pm\frac{1}{5}\sqrt{15}$	$\frac{8}{9}$ $\frac{5}{9}$
4	$\pm\frac{1}{35}\sqrt{525-70\sqrt{30}}$ $\pm\frac{1}{35}\sqrt{525+70\sqrt{30}}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{36}\sqrt{30}$ $\frac{1}{2}-\frac{1}{36}\sqrt{30}$
5	0 $\pm\frac{1}{21}\sqrt{245-14\sqrt{70}}$ $\pm\frac{1}{21}\sqrt{245+14\sqrt{70}}$	$\frac{128}{225}$ $\frac{161}{450}+\frac{13}{900}\sqrt{70}$ $\frac{161}{450}-\frac{13}{900}\sqrt{70}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګاوس پارامتر x' او w' د خوښي انتګریشنانتروال $[a,b]$ لپاره د کرښنيز تراسفورمېشن له لارې لاس ته راځي:

$$x'_k = a + \frac{b-a}{2}(x_k + 1), \quad w'_k = \frac{b-a}{2} w_k \,.$$

لومړی ښايو، چې نږدې ټاکنه د $< n$ Grad درجې د پلوینوم f لپاره ټیک دی. دا د لاندې څخه لاس ته راځي

$$\sum_{k=1}^{n} w_k f = \sum_{k=1}^{n} \left(\int_a^b p_k(x)\, dx \right) f(x_k) = \int_a^b \underbrace{\sum_{k=1}^{n} p_k(x) f(x_k)}_{=q(x)} \, dx \,.$$

داچې p_k نسبت و ټکو x_k ته د لاګرانژ پولینومونه دي، q په دې ټکو کې و f ته انترپولیشنپولینوم دی او داسې له f سره همغږيز کيږي.

د ځانګړو ټکو ټاکلو له لارې کېدی شي حتی د $< 2n$ Grad درجې پولینوم f ټیک انتیګرال شي.

دې ته f د پولینوموېش په مرسته داسې لیکو

$$f(x) \qquad = p(x)s(x) + r(x)$$

د n Grad درجې لژندر-پولینوم p او د. $< n$ Grad دجې پولینومونه r او s.

که $p(x_k) = 0$ په پام کې ونیول شي، نو لکه پورته لاس ته راځي

$$\sum_{k=1}^{n} w_k f(x_k) = \sum_{k=1}^{n} \left(\int_a^b p_k(x)\, dx \right) \left(p(x_k)s(x_k) + r(x_k) \right)$$

$$= \int_a^b \sum_{k=1}^{n} p_k(x) r(x_k)\, dx = \int_a^b r(x)\, dx \,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له بلې خوا باور لري

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \int_a^b (p(x)s(x)+r(x))\,dx\\ &= \int_a^b p(x)s(x)\,dx + \int_a^b r(x)\,dx\\ &= \int_a^b r(x)\,dx\,,\end{aligned}$$

ځکه چې p د $< n$ Grad درجې پولينوم ته اورتوګونال دی.
د وزن زاتيزوالی يا مثبتوالی د کتمتوالي څخه لاس ته راځي

$$w_k = \int p_k = \sum_i w_i\,p_k(x_i) = \sum_i w_i\,p_k(x_i)^2 = \int p_k^2\,.$$

د اخرنې تر مخ يا وړاندې مساوات د $p_k(x_i) = \delta_{k,i}$ له امله باور لري، او اخرنی، داچې p_k^2 $< 2n$ Gradدرجه لري، نو د ګاوس-فرمول له لارې ټيک انتيګرال کيدی شي.
د ګاوس-فرمول د روښانه ولو ته لاندې جدول د مختلفو انتيګراندونو يا انتيګرال کېدونکو نږدې ټاکل يا اپروکسيميشن ښايي.

n	$\int_1^1 e^{-x^2}\,dx$	$\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,dx$	$\int_0^1 \sqrt{1-x^4}\,dx$
1	2.000000	2.000000	0.968245
2	1.433062	1.848571	0.891006
3	1.498679	1.851976	0.879356
4	1.493334	1.851936	0.876417
5	1.493663	1.851937	0.875306

(c) ketabton.com: The Digital Library

په اخرني انتيګرال کې ورو پولې ته تلنې دليل په $x = 1$ کې زينګولاريتي ده.

د ګاوس-فرمول فقط خويو يا هوارو glatt (يو تابع خوی يا هوار تابع يو ماتماتيکي تابع دی، چې ناپرېکېدونکی او ناپای زيات مشتقوړ وي توابعو ته ډېر دقيق دی.

ليکونکي: اېپ، هيوليګ

ناڅرګند يا نا معلوم انتيګرال Uneigentliches Integral

د يو په يوه انتروال $[a, b)$ توته ډوله ناپرېکېدونکی تابع f لپاره کېدی شي د

$$\int_a^b f = \lim_{c \to b-} \int_a^c f$$

له لارې د انتيګرال کليمه په ناپای انتروالونو ($b = \infty$) او نامحدودو انتيګراليدونکو($f(b) = \pm\infty$) وغزول شي.

په ورته توګه زينګولاريتي په لاندې يا په دواړو پولو مطالعه شي. په اخرني حالت کې بايد پوله ارزښت د پرلپسې $c \to a+$, $d \to b-$ د ټاکنو څخه خپلواک وي.

د يوه ناټاکلي انتيګرال د شتون لپاره پوره کېدونکي د f مطلق انتيګرالوړوالی دی، دا په دې معناچې

$$\int_c^d |f(x)| \leq \text{ثابت}$$

د ټول برخه انتروالونو $[c, d] \subset (a, b)$ لپاره.

ليکونکي: اېپ، هيوليګ

د ناټاکلي انتيګرال د شميرلو لپاره

$$\int_0^\infty e^{-x}\, dx\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $b > 0$ لپاره ټاکي

$$\int_0^b e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^b = -e^{-b} + 1\,.$$

له دې سره سرى لاس ته راوړي

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left(-e^{-b}+1\right) = 1\,.$$

که پوله ارزښت ساده شمېرل کېدونکى وي، نو سرى پسې تړلي ناټاکلې پولې کاروي، داپه دې معنا چې سرى ليکي

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^\infty = 0-(-1) = 1$$

او دا په راوړل شوې بيلګه کې.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د ناټکلو انتيګرالونو

$$\int_2^\infty \frac{1}{x(\ln(x))^r}\,dx\,.$$

لپاره د بدلون $y = \ln(x)$, $dy = dx/x$
سره سرى لاس ته راوړي

$$\int_2^b \frac{1}{x(\ln(x))^r}\,dx = \int_{\ln(2)}^{\ln(b)} \frac{1}{y^r}\,dy = \begin{cases} \dfrac{(\ln(b))^{1-r}-(\ln(2))^{1-r}}{1-r}\,, & r \neq 1 \\ \ln(\ln(b)) - \ln(\ln(2))\,, & r = 1 \end{cases}.$$

په دې پسې د $b \to \infty$ لپاره پوله ارزښت ټيک هلته شتون لي، که $r > 1$ باور ولري. په دې حالت کې دى

$$\int_2^\infty \frac{1}{x\ln(x)^r}\,dx = -\frac{(\ln(2))^{1-r}}{1-r}\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د ناټاکلي انتیګرال

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\sqrt{\cos(x)}}\,dx\,.$$

لپاره انتیګرالېدونکی په پورته انتیګرال پولي $x = \frac{\pi}{2}$ سیګولار دی. سړی د $0 < b < \frac{\pi}{2}$ لپاره لاس ته راوړي

$$\int_0^b \frac{\sin(x)}{\sqrt{\cos(x)}} = \left[-2\sqrt{\cos(x)}\right]_0^b = -2\sqrt{\cos(b)} + 2\,.$$

له دې سره لاس ته راځي

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\sqrt{\cos(x)}}\,dx = \lim_{b\to\frac{\pi}{2}} \int_0^b \frac{\sin(x)}{\sqrt{\cos(x)}} = \lim_{b\to\frac{\pi}{2}} \left(-2\sqrt{\cos(b)} + 2\right) = 2\,.$$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د ناټاکلي انتیګرال

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+2x}{1+x^2}\,dx\,.$$

لپاره

$$\arctan(x) + \ln(1+x^2)$$

د انتیګرالیدونکو بنسټ- یا ساده تابع دی. ناټیکه ایښوونه

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+2x}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_{-b}^{b} \frac{1+2x}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \left[\arctan(x) + \ln(1+x^2)\right]_{-b}^{b}$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(2\arctan(b)\right) = \pi$$

د ناټاکلي انتیګرال لپاره راکوي. د تعریف سره سم د ناټاکلي انتیګرال پورته او کښته پولي باید یو له بل خپلواک و څېړل شي. داچې نه پوله ارزښت

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{c\to-\infty}\int_c^0 \frac{1+2x}{1+x^2}\,dx = \lim_{c\to-\infty}\left(-\arctan(c)-\ln(1+c^2)\right)$$

او نه پوله ارزښت

$$\lim_{d\to\infty}\int_0^d \frac{1+2x}{1+x^2}\,dx = \lim_{d\to\infty}\left(\arctan(d)+\ln(1+d^2)\right)$$

شتون لري، دا ناټاکلی انتیګرال

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1+2x}{1+x^2}\,dx$$

هم شتون نه لري.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د نامعلوم انتیګرال لپاره د پرتلې قضیه

Vergleichskriterium für uneigentliche Integrale

که f د g لپاره یو مایورانت وي، داپه دې معناچې

$$|f(x)| \le |g(x)| \quad a < x < b$$

باور لري، نو د g د مطلق انتیګرالوړوالي څخه د انتیګرال

$$\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

شتون لاس ته راځي

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

فقط د پوله ارزښت

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_a^b f = \lim_{c\to b-}\int_a^c f$$

شتون ترڅېرنې لاندې نیول کیږي. په نورو حالتونو کې په ورته توګه مخ ته ځو.
تابع

$$r(c) = \int_a^c |f|$$

برابرغږېزه جګېدونکې ده او پورته لور ته د $\int_a^b |g|$ له لارې رابنده یا محدود ده. په دې پسې د r د $c \to b-$ لپاره پولې ته تلونکی دی او له دې امله $\int_a^b |f|$ شتون لري.
تابع

$$s(c) = \int_a^c (f+|f|)$$

همم برابرغږېزه جګېدونکې ده او د $2\int_a^b |g|$ له لارې رابنده یا محدود. پسې s هم د $c \to b-$ لپاره پولې ته تلونکی دیاو له دې امله $\int_a^b (f+|f|)$ شتون لری.
له دې څخه د

$$\int_a^b f = \int_a^b (f+|f|) - \int_a^b |f|\,.$$

شتون لاس ته راځي.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د پرتلع تلبع لپاره زیات وخت $f(x) = x^r$ کارول کیږي.
د $0 < a < b < \infty$ لپاره دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_a^b x^r\,dx = \begin{cases} \dfrac{b^{r+1}-a^{r+1}}{r+1}, & r \neq -1 \\ \ln(b)-\ln(a), & r = -1\,. \end{cases}$$

دا ترم د $b \to \infty$ لپاره ټيک هلته پولې ته تلونکی دی، که $r < -1$ باور ولري، دا په دې معناچې انتيګرال

$$\int_1^\infty x^r\,dx$$

شتون ولري ټيک د $r < -1$ لپاره.

د $a \to 0+$ لپاره ټيک هلته پوله ارزښا لاس ته راځي، که $r > -1$ باور ولري، دا په دې معنا چې انتيګرال

$$\int_0^1 x^r\,dx$$

ټيک د $r > -1$ لپاره شتون ولري.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د دې لپاره چې د نامعلوم انتيګرال شتون د

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx$$

په حيث وښايو ، سړی دا انتيګرال په دوه برخو توته کوي.

دا چې $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ دی، نو لاندې انتيګرال شتون لري

$$\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}\,dx\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په انتروال $[1,\infty]$ د نامعلوم انتیګرال لپاره د ټوټه انتیګرالوني له لارې لاس ته راځي

$$\int_1^b \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \left[-\frac{\cos(x)}{x}\right]_1^b - \int_1^b \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx\,.$$

د $b \to \infty$ لپاره لومړی ترم د $\cos(1)$ په لور ځي او دويم د پرتلې قضيې له مخې پولې ته ځي، ځکه چې

$$\left|\frac{\cos(x)}{x^2}\right| \le \left|\frac{1}{x^2}\right|\,.$$

سره له دې چې د تابع کوم ورکړ شوی لومړی – يا بنسټيز تابع نه لري، کېدی شي د نامعلوم انتيګرال ارزښت وټاکي. .

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\,.$$

ليکونکي: اېپ، هيوليک

ګاما تابع يا - فنکشن **Gamma-Funktion**

د

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\,dt,$$

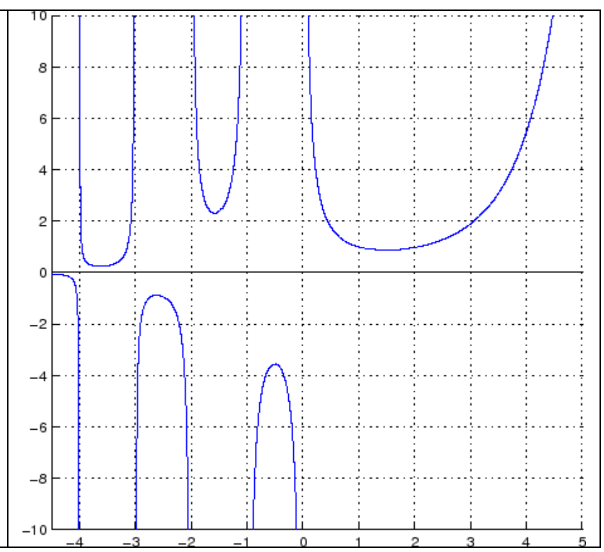
$$x \in (0,\infty)\,,$$

له ارې تعريف شوی ګاما تابع فنکشنل مساوات پوره کوي

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)\,.$$

په ځانګړې توګه

$\Gamma(n+1) = n!$, $n \in \mathbb{N}$. دی.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د فنکشنل مساواتو په مرسته کېدی شي ګاما-تابع د کميز پروت يا x محور لپاره هم تعريف کړی شي. لکه د جوړ شوي تابع ګراف ښخه چې ليدل کيږي، دا ساده قطبونه د $x = 0, -1, \ldots$ لپاره لري.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

انتيګرال

$$\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\,dt$$

فقط د $0 < x < 1$ لپاره پرابلم جوړوي. په دې حالت کې انتيګرال د $t^{x-1}e^{-t} \leq t^{x-1}$ له امله د پرتلې قضيې له مخې پولې ته تلونکی دی.

انتيګرال

$$\int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$$

هم د پرتلې قضيې په بنسټ شتون لري او اټکلونه $t^{x-1}e^{-t} \leq t^{-2}$

د پوره لوي t لپاره بسيا کوي.
د ټوټه انتيګرال سره لاس ته راځي

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t}\,dt = \left[-t^x e^{-t}\right]_{t=0}^\infty + \int_0^\infty x t^{x-1} e^{-t}\,dt$$
$$= 0 + x\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt = x\Gamma(x)\,,$$

او له دې سره د پوره ابندکشن په مرسته او $\Gamma(1) = 1$ د $n \in \mathbb{N}$ لپاره لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Gamma(n+1) = n!\,.$$

د ګاما تابع د ګاوس تعریف

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

د تابع یوه روښانه ونه په ټول $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}^-$ اجازه زاکوي.

.

لیکونکي: اېپ، هیولیګ

د کوشي اصلي ارزښت **Cauchyscher Hauptwert**

د یوه په $x = c \in (a,b)$ کې زیګولار تابع f لپاره سړی

$$\mathrm{CHW}\int_a^b f = \lim_{h\to 0+}\left(\int_a^{c-h} f + \int_{c+h}^b f\right)$$

د کوشي اصلي ارزښت په څېر تعریفوي

لیکونکي: اېپ، هیولیګ

د ټیپیکي بېلګې په څېر د کوشي اصلې ارزښت

$$\mathrm{CHW}\int_{-a}^{a} x^k\,dx\,,\quad k\in\mathbb{Z}\,,$$

شمېرل کیږي.

د $k = -1$ لپاره دی

$$\int_{-a}^{-h}\frac{dx}{x} + \int_h^a \frac{dx}{x} = \ln|h| - \ln|a| + \ln|a| - \ln|h| = 0\,.$$

د انټیګرالیدونکي د انټی سیمتري په دلیل د CHW ورکیږي په یو سیمتري انټروال لپاره.

د $k \neq -1$ لپاره دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_{-a}^{-h} x^k\,dx + \int_h^a x^k\,dx = \frac{1}{k+1}\left((-h)^{k+1} - (-a)^{k+1} + a^{k+1} - h^{k+1}\right)$$

د ناجوړه یا طاق k لپاره دا ا فاده یا ویینه او له دې سره د کوشي اصلي ارزښت صفر دی. د زیاتیز یا مثبت جوړه(حفت) k لپاره دا د $2/(k+1)a^{k+1}$ په لور هڅیږي.
په ساده توګه د کوشي اصلي ارزښت د رګولار انتیګرال سره سره خوري یا یوعږیز کیږي. د $k=-2,-4,\ldots$ لپاره برعکس یا د دې په خلاف هم انتیګرال او هم د کوشي اصلي ارزښت شتون نه لري.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د انتیګرال لاندې مشتقول Differenzieren unter dem Integral

انتیګرال $\int_a^b f(x,t)\,dx$ د ناپرېکېدونکې تابع f لپاره د t ناپرېکېدونکی تابع دی.
که f_t ناپرېکېدونکی وي، ن و باور لري

$$\frac{d}{dt}\int_a^b f(x,t)\,dx = \int_a^b f_t(x,t)\,dx\,.$$

لیکونکي: هیولیګ،کنیش

د دې لپاره چې د

$$g(t) = \int_a^b f(x,t)\,dx$$

ناپرېکېدنه په ټکي $t_0 \in (c,d)$ کې وښایو، له دې څخه کار اخلو، چې f په ولاړګوډیز $[a,b]\times[c,d]$ کې برابرډوله ناپرېکېدونکی دی. هر $\varepsilon > 0$ ته له دې امله یو $\delta > 0$ شتون لري داسې چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$|f(x,t) - f(x,t_0)| < \varepsilon$$

باور لري د ټولو x او $|t - t_0| < \delta$ لپاره. د دې t لپاره نو دی

$$|g(t) - g(t_0)| \leq \int_a^b |f(x,t) - f(x,t_0)|\, dx < \varepsilon(b-a)\,.$$

له دې سره g ناپرېکېدونکی دی.

که f_t ناپرېکېدونکی وي، نو لاس ته راځي

$$\frac{g(t+h) - g(t)}{h} = \int_a^b \frac{f(x,t+h) - f(x,t)}{h}\, dx =$$

$$= \int_a^b \frac{1}{h} \int_0^h f_t(x,t+s)\, ds\, dx\,,$$

د کوم سره چې

$|f_t(x,t+s) - f_t(x,t)| < \varepsilon$ دی د ټولو $h < \delta\,.$ لپاره.

له دې امله کېدی شي د دفرنسل وېش کمښت و

$$\int_a^b f_t(x,t)\, dx = \int_a^b \frac{1}{h} \int_0^h f_t(x,t)\; ds\, dx$$

ته د

$$(b-a)\frac{1}{h}\, h\, \varepsilon$$

له لارې اټکل شي او د h سره د صفر په لور هڅېږي.

لیکونکي: بوسسلر، هیولیک،کنیش

بسل- توابعBessel-Funktionen دا لاندې د انتیګرال انځورونه لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\sin t - nt)\,dt, \quad n = 0, 1, \ldots\ .$$

دا دا لاندې د دفرنځیال مساوات پوره کوي

$$x^2 J_n''(x) + x J_n'(x) + (x^2 - n^2) J_n(x) = 0\,.$$

دا کېدی شي د انتیګرا لاندې د دفرنځیال سره وازمایل شي. لومړی دی

$$J_n'(x) \quad = \quad -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \underbrace{\sin(x\sin t - nt)}_{v}\,\underbrace{\sin t}_{u'}\;dt$$

$$\frac{n}{\pi}\int_0^{\pi} \cos t\cos(x\sin t - nt)\,dt - \frac{x}{\pi}\int_0^{\pi} \cos^2 t\cos(x\sin t - nt)\,dt$$

$$J_n''(x) \quad = \quad -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\sin t - nt)\sin^2 t\,dt$$

که $J_n'(x)$, $J_n(x)$ او $J_n''(x)$ د دفرنځیال مساوات په کېن لور کبنیبنول شي او له $\xi = x\sin t - nt$
π سره ضرب شي، له کوم سره چې کیبنول شي، نو لاس ته راځي

Se

$$-x^2\int_0^{\pi}\cos\xi\sin^2 t\,dt - x^2\int_0^{\pi}\cos^2 t\cos\xi\,dt + nx\int_0^{\pi}\cos t\cos\xi\,dt + x^2\int_0^{\pi}\cos\xi\,dt - n^2\int_0^{\pi}\cos\xi\,dt$$

$$= \quad nx\int_0^{\pi}\cos t\cos\xi\,dt + x^2\int_0^{\pi}\cos\xi\,dt - n^2\int_0^{\pi}\cos\xi\,dt$$

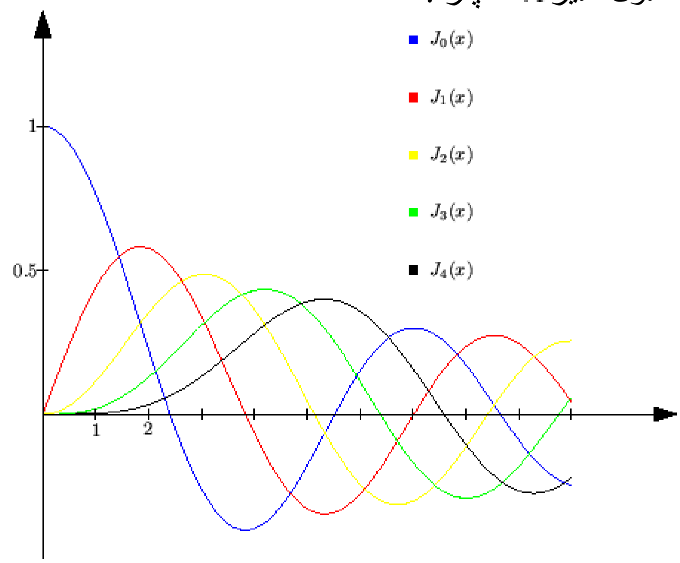
$$= \quad n\int_0^{\pi}(x\cos t - n)\cos(x\sin t - nt)\,dt$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليک

$$n\sin(x\sin t - nt)|_0^\pi = 0 \quad =$$

د ټول ګنيز n لپاره.



ځېره 5 لومړني د بسل توابع ښنايي .
ليکوڼکي: بوسسلر ، هيوليګ،کنيش

Leibniz-Regelلايبنيځ-قانون

د ناپرېکېدونکو مشتقوړ توابعو a, b او f لپاره دی

$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)dx = \int_{a(t)}^{b(t)} f_t(x,t)dx + f(b(t),t)b'(t) - f(a(t),t)a'(t)$$

ليکوڼکي: بوسسلر ، هيوليګ،کنيش

که انتيګرال له $g(t)$ سره وښوول شي او ځا په ځا کړو

$$V(t) = (a(t), b(t), t)\,, \quad U(c,d,e) = \int_c^d f(x,e)\;dx\,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو $g = U \circ V$ دی او فرمول د ځنځيري قانون له لارې لاس ته راځي:

$$g'(t) = U'(V(t))\, V'(t), \quad V' = (a', b', 1).$$

له دې سره د U ټوټه مشتقونه دا لاندې دي

$$U_c(c,d,e) = -f(c,e),$$

$$U_d(c,d,e) = f(d,e), \quad U_e(c,d,e) = \int_c^d f_e(x,e)\, dx\,,$$

او د $g'(t)$ لپاره په افاده يا ويينه کې اينوولو سره غوښتنه راکوي.
ليکونکي: بوسسلر، هيوليګ،کنيش

د لايبنيخ فرمول سره لاس ته راځي

$$\frac{d}{dt}\int_0^{\sqrt{t}} e^{x^2/t}\, dx = \int_0^{\sqrt{t}} -\frac{x^2}{t^2} e^{x^2/t}\, dx + e\frac{d}{dt}\sqrt{t}$$

$$= -\int_0^{\sqrt{t}} \frac{x^2}{t^2} e^{x^2/t}\, dx + \frac{e}{2\sqrt{t}}$$

بيا مشتقول يې راکوي

$$\frac{d}{dt}\left(-\int_0^{\sqrt{t}} \frac{x^2}{t^2} e^{x^2/t}\, dx + \frac{e}{2\sqrt{t}}\right)$$

$$= \int_0^{\sqrt{t}} 2\frac{x^2}{t^3} e^{x^2/t} + \frac{x^4}{t^4} e^{x^2/t}\, dx - \frac{e}{2t^{3/2}} - \frac{e}{4t^{3/2}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \int_0^{\sqrt{t}} \frac{2tx^2 + x^4}{t^4}\, e^{x^2/t}\, dx - \frac{3e}{4t^{3/2}}$$

بديلي لومړی کېدی شي بدلون $x = \sqrt{t}y$, $dx = \sqrt{t}\, dy$ وليکي او دا انتيګرال لاس ته راوړي

$$g(t) = \int_0^1 e^{y^2} \sqrt{t} dy$$

د کره يا ځای په ځای پولو سره . نو کېدی شي

$$g'(t) = \frac{d}{dt} \int_0^1 e^{y^2} \sqrt{t} dy = \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{t}} e^{y^2}\, dy$$

$$= \int_0^{\sqrt{t}} \frac{1}{2t} e^{x^2/t}\, dx$$

او

$$g''(t) = \frac{d}{dt} \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{t}} e^{y^2}\, dy = -\int_0^1 \frac{1}{4t^{3/2}} e^{y^2}\, dy$$

$$= -\int_0^{\sqrt{t}} \frac{1}{4t^2} e^{x^2/t}\, dx$$

په ساده توګه وشميرل شي.

د لومړي مشتق لپاره د فرمول مساوات روښانه نه دي، خو کېدی شي اسان د ټوټه انتيګرالوني سره و ازمايل شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-\int_0^{\sqrt{t}} \frac{x^2}{t^2} e^{x^2/t}\,dx + \frac{e}{2\sqrt{t}} = \quad -\frac{1}{2t}\int_0^{\sqrt{t}} \underbrace{x}_{v}\, \underbrace{\frac{2x}{t} e^{x^2/t}}_{u'}\,dx + \frac{e}{2\sqrt{t}}$$

$$-\frac{1}{2t}\left[x e^{x^2/t}\right]_{x=0}^{x=\sqrt{t}} + \int_0^{\sqrt{t}} \frac{1}{2t} e^{x^2/t}\,dx + \frac{e}{2\sqrt{t}}$$

$$= \quad \int_0^{\sqrt{t}} \frac{1}{2t} e^{x^2/t}\,dx$$

د دويم برابرون مشتق کېدی شي په ورته توګه و ښوول شي.
ليکونکي: هيوليک،کنيش

په t پسې د انتيګرال د مشتق

$$\int_{t^2}^{e^t} \frac{\cos(tx)}{x}\,dx$$

لپاره لاس ته راځي

$$\begin{aligned}
&\int_{t^2}^{e^t} -\sin(tx)\,dx + \frac{\cos(te^t)}{e^t}\frac{d}{dt}e^t - \frac{\cos(t^3)}{t^2}\frac{d}{dt}t^2 \\
&= \frac{1}{t}\cos(te^t) - \frac{1}{t}\cos(t^3) + \cos(te^t) - \frac{2}{t}\cos(t^3) \\
&= \left(\frac{1}{t}+1\right)\cos(te^t) - \frac{3}{t}\cos(t^3)
\end{aligned}$$

ليکونکي: هيوليک،کنيش

د دفرنشل مساوات

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$u'(t) - \lambda u(t) = f(t)$$

یو زره یا کوچنی حل u_p کېدی شي دهوموجېن مساوات حل $\exp(\lambda t)$ د سوپر پوزېشن له لارې و کټل شي:

$$u_p(t) = \int_0^t e^{\lambda(t-s)} f(s)\, ds\,.$$

د لايبنيځ فرمول په بنسټ دی

$$u_p'(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t \frac{e^{\lambda t}}{e^{\lambda s}} f(s)\, ds = \int_0^t \lambda \frac{e^{\lambda t}}{e^{\lambda s}} f(s)\, ds + f(t)\frac{d}{dt}t$$

$$= \lambda \int_0^t \lambda e^{\lambda(t-s)} f(s)\, ds + f(t)$$

په دفرنشل مساوات کې د $u_p(t)$ او $u_p'(t)$ د اينوولو له لارې کېدی شي حل تصديق شي.
ليکونکي: هيوليګ،کنيش

د نامعلومو انتيګرالونو مشتقول

Differenzieren uneigentlicher Integrale

که توابع f او f_t ناپرېکېدونکې وي او د $t \in (c, d)$ لپاره باور ولري

$$|f(x,t)| \le \psi(x), \qquad \int_0^\infty \psi < \infty$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$|f_t(x,t)| \le \varphi(x), \qquad \int_0^\infty \varphi < \infty,$$

نو کيدی شي د انتيګرال د نخښې لاندې مشتق ونيول شي:

$$\frac{d}{dt}\int_0^\infty f(x,t)\,dx = \int_0^\infty f_t(x,t)\,dx\,, \quad c < t < d\,.$$

په ورته توګه ويناوې د محدودو انتيګرالېدونکو سره د نامعلومو انتيګرالونو لپاره باور لري.

ليکونکي: هيوليګ،کنيش

د دې لپاره چې وښايو، چې

$$\int_0^\infty \frac{f(x,t+h)-f(x,t)}{h} - f_t(x,t)\,dx$$

د $h \to 0$ لپاره د 0 په لور هڅيږي، انتيګرال توټه کيږي:

$$\int_0^\infty \ldots = \int_0^b \ldots + \int_b^\infty \ldots$$

دويمه زياتېدونکې يا د جمعې غړی د نيونې له مخې د

$$\left|\int_b^\infty \frac{1}{h}\int_0^h f_t(x,t+s)\,ds - f_t(x,t)\,dx\right| \le \int \frac{1}{h}\,h\varphi(x)+\varphi(x)\,dx = 2\int_b^\infty \varphi(x)\,dx$$

له لارې اټکل شي. دا انتيګرال له $< \varepsilon$ کيږي. د پوره لويې b لپاره. د دې b لپاره لومړی زياتېدونکی $< \varepsilon$ دی د پوره کوچني h لپاره.، ځکه چې د پای انتيګريشن انتروال لپاره د انتيګرال لاندې مشتق کېدی شي.

ليکونکي: هيوليګ،کنيش

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګاما تابع مشتقونه

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty e^{-x} x^{t-1}\, dx, \quad t > 0\,,$$

دي

$$\Gamma^{(k)}(t) = \int_0^\infty e^{-x} x^{t-1} (\ln x)^k\, dx\,.$$

مشتقيدنه په حق ده، ځکه چې انتيګرالېدونکي $f(x,t) = e^{-x} x^{t-1} (\ln x)^k$ يو
برابرډوله مايورانت لري:

$$|f(x,t)| \le e^{-x}\, x^{r-1}\, x^k \le c e^{-x/2}, \quad x \ge 1$$

او

$$|f(x,t)| \le x^{1/r-1} |\ln x|^k \le c x^{1/(2r)-1}\,, \quad x \le 1$$

د $t \in [1/r, r]$ لپاره. د دې لپاره وکارول شو، چې

$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha e^{-\beta x} = 0, \quad \lim_{x\to 0+} x^\alpha |\ln x|^\beta = 0$$

د ټولو $\alpha, \beta > 0$ لپاره

ليکونکي: بوسسلر، هيوليګ،کنيش

دا د پارامتر په واک کې انتيګرال

$$g(t) = \int_0^\infty \sin(xt)\, \frac{dx}{x}$$

مطلق پولې ته تلونکی نه دی، له دې امله برابر ډوله مايورانت هم نه لري.
د لته مو د t پسې د انتيګرال لاندې يو فورمال دفرنځيشن يوه تضاد ته لاربښودوي.
فورمال مشتق

$$g'(t) = \int_0^\infty \cos(xt)\, dx$$

يو پولې ته نه تلونکی انتيګرال دی. له بلې خوا يو واريابل بدلون $y = xt$,
$dy = t\, dx$

(c) ketabton.com: The Digital Library

راکوي

$$g(t) = \int_0^\infty \sin(y)\,\frac{dy}{y} = \frac{\pi}{2}\,.$$

مشتق په دي لاس ته راوړنه کېمټ صفر دی.
لیکونکي: بوسسلر، هیولیګ،کنیش

د ۲۰۱۱ ز ک د مارچ لسم
بری د لوی ځښتن سره دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډاکتر ماخان شينواري چاپ شوې ليکنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړی:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

1987 Vienna (Austria):

دويم:

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, at the University of Vienna/Austria

لاندې د شميرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دريم: د شميرپوهنې ستر کتاب : د شميرپوهنې برسيره د انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې ليکنه به يې ځنو ځايونو غزېدلې او ځنې ځايونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو کې شميرنه، د ګټې – او کټې د کټې شميرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتياوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني - پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځیال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپینې خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکټر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلي.

د ډاکټر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

(c) ketabton.com: The Digital Library

: *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برینکمن لیکنې چې له پرینکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

١ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

٢ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دویم ټوک

٣ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصایه یا ستاتیستیک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – انالیزی ١

٧ – انالیزې ٢

٨ – کرښیز الجبر

٩ - د شمیرپوهنې بنسټونه

١٠ - د فرمولونو ټولګه

١١ – فنکشنل انالیز

١٢ – وکتور شمیرنه

نورې ژباړې

١٣ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښیز الجبر

١۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

(c) ketabton.com: The Digital Library

زما لیکنې

onn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په

کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلې

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

۲۲- داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزې پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو ویپونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې وبه غزیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

نوري ليکنې، چې په ژباړه يې پيل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپريږي:

د ګروپونو تيوري

- د ښوونځي لپاره فزيک د برينکمن ليکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دويم مسلک فزيک دی، دا ليکنې ژباړم. دا هم د دې ليکوال يوه ډېره ښه ليکنه ده، چې -د شميرپوهنې په څير- دلته هم زيات تمرينونه د حل يا اوبيونې سره په کې راغلي او ماته زيات ګټور برېښي)

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library