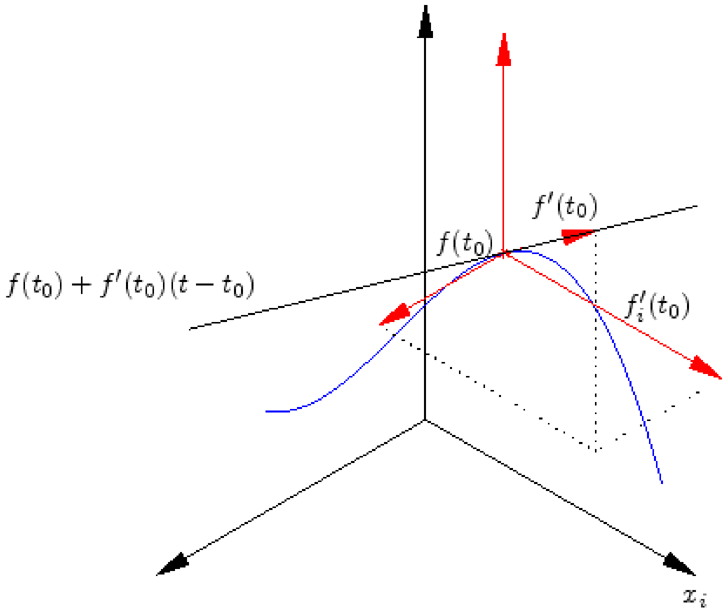
د پوهنتون لپاره لکچرنوټونه

د ډېرو متحولو یا اووښتونو انالیز

یا انالیز دوه



لیکونکي: د شتوتګارت پوهنتون د شمیرپوهنې یا ریاضي څانګه

د مات انلاین څخه یا د شتوتګارت پوهنتو ن ن ج څخه

ژباړی: ډاکټر [illegible] ځان (میرزي) شینواری

د لوی څښتن په نامه

په دې هیله، چې په دې لیکنو او ژباړو به مې زمونږ د بې وزلې او له پوهې پاتې ملت - په ما د پوهنې په لار د لګښت - لپاره د پوهنې په لور داسې لږ ونډه اخستې وي.

د کتاب نوم: د ډېرو متحولو یا اووښتونو انالیزې

ډ اکتر ماخان میرزي شینواری

Smakhan1946@gmail.com

د چاپ لړي:

د ژباړې مننه

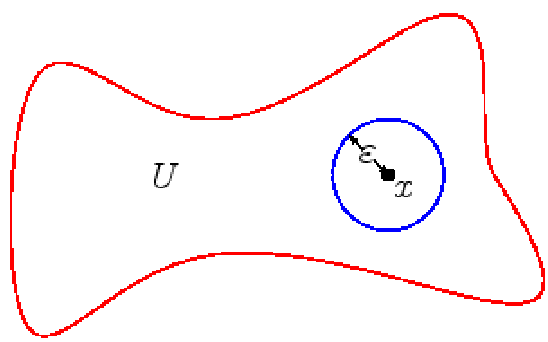
د دې لیکنې مل نورې خپرونې د شتوتګارت د پوهنتون د شمیرپوهنې د څانګې د لکچرونو لړۍ چاپ باندې پیل کیږي

د هر څه له مخه د هغو لیکونکو پروفیسرانو څخه زیاته مننه، چې د لیکنو څخه یې زما د ژباړې لپاره تفاهم لري. ماته د دوي د لیکنو د ژباړې په هیڅ ډول مادي ګټه نه شته او دا کار مې یوازې په یوه د پوهنې توانمندې ، مګر وروسته پاتې ژبې ویونکي ولس ته وړاندې دی، دا دې د دې پروفیسرانو له خوا په پوهنیزه اړخ کې- زموږ په دې اړخ کې هم مرستې ته اړ ولس- سره مرسته وي.

بنسټيزې ياساسي کليمې
ډېرې يا سټ او پولې ته تلنه

چاپېريال

دا د يوه ټکي $x \in \mathbb{R}^n$ د ε-چاپېريال په حيث دا لاندې غونډوسکه(غونډارى،توپ که غوارېئ: کره) نوموو
$B_\varepsilon(x) = \{y : |y - x| < \varepsilon\}$.



په تولېزه توګه د x چاپېريال U يوه ډېرئ ده، چې يو چاپېريال ε خوندي لري.

ليکونکي: هوليګ او پفايل

د وکتورونوکونورګنت يا پولې ته تلنه

د وکتورونو $x_k \in \mathbb{R}^n$ يوه پرلپسې د يوه وکتور x خواته کنورګ کيږي يا ځي،
$\lim x_k = x$ همداسې, $x_k \to x$
که د ټولو $\varepsilon > 0$ لپاره يو ايندکس k_ε شتون ولري

د $|x_k - x| < \varepsilon$ سره د $k > k_\varepsilon$. لپاره.

په بل ډول هر ε -چاپیریال $B_\varepsilon(x) = \{y: \ |y-x| < \varepsilon\}$

ټولې ترپاي ډېرو پرلپسې(ترادف) توکو پورې خوندي لري.

د (x_k) کونورګنځ ته ورته د ټولو کمپوننتونو کونوی رګنځ دی، د اپه دې معنا چې کیدی شي یو پراخیدونې یا یوبعدې کونورګنځ کریتیریوم ورته راکښل - یا راونیول شي.

(لیکونکي : بوسلر، هولیګ، شترایت)

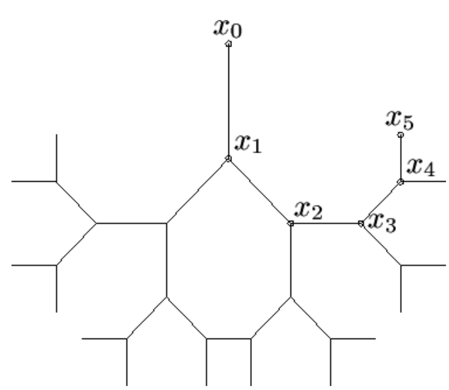
د وکتورونوو لپاره د کوشي**Cauchy** کریتیریوم یا قضیه

یوه د وکتورونوو پرلپسي $x_k \in \mathbb{R}^n$ تیک هلته پولې ته ځي(کونورګنت ده) ، که دا کوشي **پرلپسې وي.**

داپه دې معنا چې د ټولو $\varepsilon > 0$ لپاره یو k_ε شتون لري د $|x_\ell - x_k| < \varepsilon$ سره د $\ell, k > k_\varepsilon$. لپاره .

د ا له دې سره په برابره یا همغه معنادی، داسې چې د (x_k) د کمپوننتونو هر یو یې یوه کوشي پرلپسي ده.
(لیکونکي: هیولیګ، شترایت)

د کوشي کریتیریوم د روښانه ونې لپاره یوه بینار(دوه ګونې) ونه راوړو.



په یوه ټوټه(کرښه) هره یوه په ضریب $\lambda\ (0 < \lambda < 1)$ سره لنډیږي او په $45°$- کونج اینول شوی بله ټوټه باندې ورزیاتیږي. په داسې یوه جوړه شوې دوه یزه ونه د داسې سوکڅیسیو په ښاخونو بیل شوي ټکو هره پرلپسې پولې x_k ته ځي یا کونورګیر کیږي. د تعریف سره سم باور لري د دوه یوپه بل پسې پرلپسیو (تصاعدونو) (x_k) لپاره باور لري: $|x_{k+1} - x_k| = c\lambda^k$.

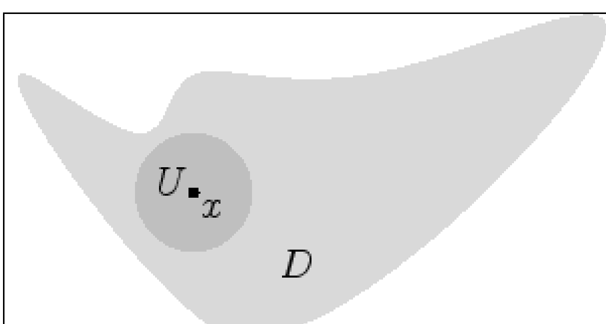
دا راکوي، چې داپرلپسې د کوشي پرلپسې ده، څکه چې:

$$
\begin{aligned}
|x_\ell - x_k| &= |x_\ell - x_{\ell-1} + x_{\ell-1} - \ldots + \ldots - x_{k+1} + x_{k+1} - x_k| \\
&|x_\ell - x_{\ell-1}| + |x_{\ell-1} - x_{\ell-2}| + \ldots + |x_{k+2} - x_{k+1}| + |x_{k+1} - x_k| \\
&\leq c\lambda^{\ell-1} + c\lambda^{\ell-2} + \ldots + c\lambda^k \\
&= c\lambda^k \frac{1-\lambda^{\ell-k}}{1-\lambda} \leq c'\lambda^k \\
&\leq \varepsilon
\end{aligned}
$$

د $\ell > k > k_\varepsilon$ لپاره

(لیکونکي: هیولیک، شترایت)

وازه ډیرئ یا -سټ **Offene Menge**



یوه ډیرئ $D \subseteq \mathbb{R}^n$ وازه بلل کیږي، که چیرې د ډیرئ هر ټکی $x \in D$ یو چاپیریال ولري، چې دا ټول په D کې پروت وي، په ځانګړې توګه $\mathbb{R}^n$ او تشډیرئ $\emptyset$ وازې دي.

د يوې په خوښه ډېرئ D لپاره $D \subseteq \mathring{D}$ د D دننه بنايي، دا په دې معنا چې د ټول ټکو ډېرئ د يوه چاپيريال سره په D کې پرته ده.

(ليکونکي: هيوليک، پفايف)

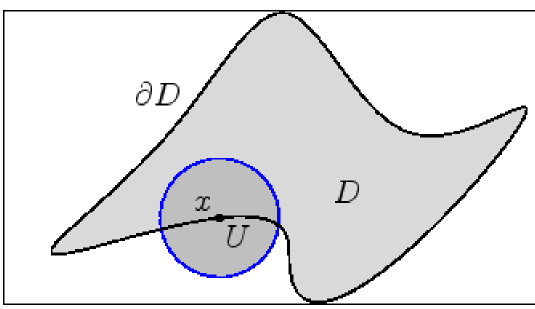
رابنده ډېرئ Abgeschlossene Mengen

يوه ډېرئ $D \subseteq \mathbb{R}^n$ رابنده يا بنده بلل کيږي، که ديوې د ټکو $x_k \in D$ پولې ته تلونې پرلپسې په D کې پرته وي. په ځانګړې توګه $\mathbb{R}^n$ او تشډېرئ $\emptyset$ بندې دي.

د په خوښه ډېرئ D لپاره دا $D \supseteq \overline{D}$ د D رابندونه بولو، داپه دې معنا چې د پرلپسيو د ټولو پوله ارزښتونه په D کې.

(ليکونکي: هيوليک، پفايف)

د يوې ډېرئ ژئ يا غاړه

د يوې ډېرئ $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ژئ ∂D له ټولو ټکو x جوړه ده، کومه چې چاپيريال U نه لري، دا يا ټوله په D کې پرته ده او يا د D په کمپليمنت (پوره کيدونکي) کې پرته ده.	

د بديل په توګه کيد شي چې ژئ د رابند کمون يا تفريق او دننه،

$$\partial D = \overline{D} \setminus \mathring{D}$$

په حيث تعريف شي.

(ليکونکي هيوليګ او پفايف)

پوره کيدونکې ډېرئ Kompakte Menge

يوه تړلې او محدوده ډېرئ $D \subseteq \mathbb{R}^n$ کمپليمنت يا پوره کيدونکې بلل کيږي.
لاندې کرکتريستيکا دې ته ورته يا اکويوالنځ دي:

- هره پرلپسې په D کې يوه کونورګنځ برخه ډېرئ لري د پولې سره په D کې.
- د D هر د وازې ډېرئ د سره پټوني يا پوښونې سره يوه پای پوښونه يا پټونه لري.

(ليکونکي: هيوليګ او پفايف)

مولتيواريانت – يا د ډېرو توابع Multivariate Funktionen

يو ريل يا حقيقی مولتی واريانت(د ډيرو متحولو - يا اوښتونوتوابع هم بلل کيږي)

$$f: \mathbb{R}^n \supseteq D \to \mathbb{R}^m, \quad x \mapsto f(x),$$

د تعريف ډېرئ D يو وکتور $x = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{t}}$ په يوه وکتور
$f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))^{\mathrm{t}}$ تنظيموي. پس f د n ريل حقيقي متحولو $x_1, \ldots, x_n$ په واک کې دی.

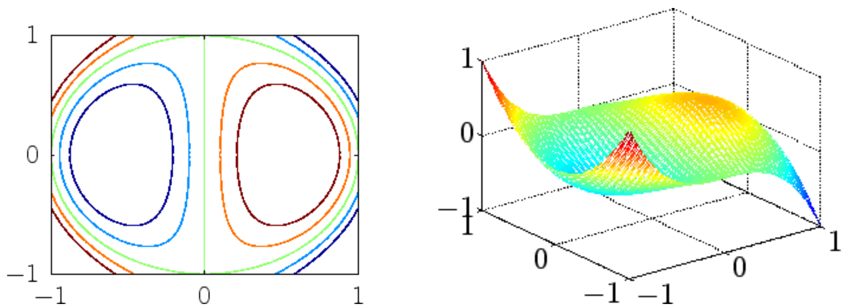
د تابعورشو يا ځيره ورشو د m بعد يا پراخيدوني له مخې سرې د سکالارو $(m = 1)$ او وکتور ارزښتيزو $(m > 1)$ توابعو ترمنځ توپير کوي. که $n = 1$ (او f ناپريکيدونکې وي)، نو f يوه پارامتري شوې کره يا منحني بلل کيږي.

د $m, n \leq 3$ لپاره زيات وخت اينډکسونه نه کارول کيږي او واريابلې له x, y او z سره په نخښنه کوو.

د بیلګي په توګه

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix} .$$

د $m = n = 2$ په حالت کې



لکه دا شکل چې روښانه کوي، Visualisierung ته دګراف سکالار توابع

$$\{(x, f(x)) : \ x \in D\}$$

او د نیوتن سطحي

$$\{x \in D : \ f(x) = c\}$$

وکارول شي.

پولینومونه د ډېرو متحولو سره :

یو پولینوم p په n اوبنتونو $x_1, \dots, x_n$ کې د مونومونو کربنیز کمبینیشن دی

$$p(x) = \sum_\alpha a_\alpha x^\alpha, \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \ ,$$

د $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$ سره، هريو د جمعي ورشو له مخې د لاندو ترمنځ توپير کوي:

د ټولو درجو $\le m$: $\sum \alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \le m$

د ماکسيمالو درجو $\le m$: $\max \alpha = \max_i \alpha_i \le m$

يو د k -درجې پولينوم هوموجين بلل کيږي، که کربنيزترکيب فقط مونوم د $\sum \alpha = k$ سره خوندي ولري. د داسې هوموجينو مونومونو ګنون يا تعداد په $\binom{k+n-1}{n-1}$ دی.

تعقيب يې د پولينوم پراخيدونی يا بعد د توتال درجې $\le k$ سره برابر

$$\binom{k+n}{n} = \sum_{k=0}^{m} \binom{k+n-1}{n-1} .$$

دی

د n -متحولو پولينومونو بعد د $\le m$ ماکسيمال درجې $(m+1)^n$ دی.

د بيواريات يا دوه اووښتونو يا متحولو پولينومونو $(n=2)$ لپاره د هومو جينن مونومونو له ليست څخه

$$\begin{array}{ll} k=0: & 1 \\ k=1: & x,\, y \\ k=2: & x^2,\, xy,\, y^2 \\ k=3: & x^3,\, x^2y,\, y^2x,\, y^3 \\ \ldots\ , & \end{array}$$

کتل کيږي چې د k درجې لپاره د دوی تعداد

$$k+1 = \binom{k+2-1}{2-1}$$

دی

د دوه متحولو پولینومونو د توتال درجې $\leq m$ د بعد لپاره لرو

$$1+2+\cdots+(m+1) = \frac{(m+2)(m+1)}{2} = \binom{m+2}{2}.$$

په ځرګنده توګه $(k+1)^2$ مونومونه شتون لري

$$x^i y^j, \quad i,j \leq m,$$

د $\leq k$ ماکسیمال درجې

په تولیزه توګه (د n -متحولو پولینومونو) لپاره کیدی شي یو اکسپوننت

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \sum \alpha = m$$

د یوه کره مونوتونې پرلپسی یا ترادف سره

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \alpha_1 + 1 \\ \beta_2 &= \alpha_1 + \alpha_2 + 2 \\ \ldots \\ \beta_{n-1} &= \alpha_1 + \cdots + \alpha_{n-1} + (n-1) \end{aligned}$$

له $\{1, \ldots, m+n-1\}$ څخه و پیژندل شي:

$$\alpha_i = \beta_i - \beta_{i-1} - 1$$

د $\beta_0 = 0,\ \beta_n = m+n$ سره. نو $\binom{m+n-1}{n-1}$ امکانات شتون لري

د ټول $\leq k$ درجو n–وارايت مونومونه د $(n+1)$ -متحولو د درجو k هوموجين مونومونه پ هګوته کوي:

$$x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n} \leftrightarrow x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n} x_{n+1}^{k-\sum \alpha_i}$$

(اخرنی اکسپوننت ټينګ ځای په ځای دی). نو بعد دی

$$\binom{k+(n+1)-1}{(n+1)-1}.$$

د مکسيمال $\leq k$ درجو د پولينوم بعد په ورته توګه بيواريات حالت ته شميري.

يو د توتال درجو ≤ 3 پولينوم په 2 متحولو کی لاندې توليزه بڼه لري

$$p(x,y) =$$

$$a_{3,0}x^3 + a_{2,1}x^2y + a_{1,2}xy^2 + a_{0,3}y^3$$

$$+a_{2,0}x^2 + a_{1,1}xy + a_{0,2}y^2$$

$$+a_{1,0}x + a_{0,1}y + a_{0,0}\,,$$

او

$$4x^3 - 2xy^2 + 5y^3$$

د 3 درجو هوموجين بيواريات پولينوم لپار يوه بيلګه ده.

ديوه ≤ 2 درجو پولينومم توليزه بڼه په درې متحولو کی ده:

$p(x,y,z)_=$

$$a_{2,0,0}x^2 + a_{0,2,0}y^2 + a_{0,0,2}z^2$$

$$+a_{1,1,0}xy + a_{1,0,1}xz + a_{0,1,1}yz$$

$$+a_{1,0,0}x + a_{0,1,0}y + a_{0,0,1}z + a_{0,0,0}\,.$$

د ډېرو اووښتونو يا متحولو توابعوو ناپريکيدنه يا متماديت

يو تابع f د تعريف ورشو D په يوه ټکي x کې ناپريکيدونکي دی، که

$$D \ni x_k \to x_{k\to\inf} \implies \lim_{k\to\inf} f(x_k) = f(x)\,.$$

که دا د ټولو $x \in D$ لپاره باور ولري ، نو f په ټول D باندې نا پونکی دی

که د تعريف ورشو په ژی ∂D د ټکي x لپاره پوله ارزښت شتونولري، نو کيدی شي f ناپريکيد ونکی مخ ته يو ول شي.

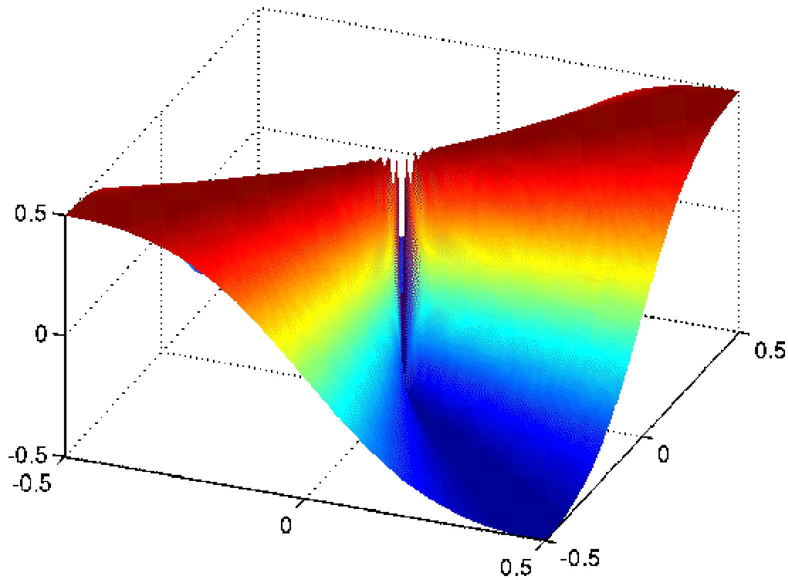
د ډېرړ متحولو د ترړنو لپاره همغه قوانين باور لري،لکه د يوې متحولي تابع لپاره.

(ليکونکي: هيوليګ او شترايت)

يو ناثابت بيواريات تابع $f(\varphi)$ ، چې فقط له کونج او نه د وړانګې $r=\sqrt{x^2+y^2}$ په واک کې يا تابع ده،په صفرټکي کې پريکيدونکي ده. د دې لپاره تيپيکې بيلګه

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} = \cos\varphi\sin\varphi$$

راړل کيږي.



که په صفرټکي کې يوه کربنه وټاکو،

$$g: \; y = mx$$ همداسې $$g: \varphi = c \; ,$$

نو په کربنه تابع- يا خطي تابع ا رزښت ثابت دی،

$$f(x, mx) = \frac{mx^2}{x^2 + (mx)^2} = \frac{m}{1 + m^2} = c_m$$

همداسي

$$f(\varphi) = \cos\varphi \sin\varphi = c_\varphi \; ,$$

$$f(x, mx) = \frac{mx^2}{x^2 + (mx)^2} = \frac{m}{1 + m^2} = c_m$$

bzw.

$$f(\varphi) = \cos\varphi \sin\varphi = c_\varphi \; ,$$

پرته له صفرټکي چې هلته تابع ارزښت نه دی تعریف.
پرته له صفرټکي د ټول ټکو لپاره باور لري

$$D \ni (x_k, y_k) \to (x, y) \implies$$

$$\implies f(x_k, y_k) = \frac{x_k y_k}{x_k^2 + y_k^2} \to \frac{xy}{x^2 + y^2} = f(x, y) .$$

په صفرټکي کې تابع بریکیدونکي مخ ته وړلوړ ده. که د $x \to 0$ لپاره په مختلو کرښو باندې پوله ارزښت په پام کې ونیسو، نو لاس ته راړل کیږي

$$\lim_{x\to 0} f(x, mx) = \lim_{x\to 0} \frac{m}{1+m^2} = \frac{m}{1+m^2} ,$$

دا په دې معنا چې پوله ارزښتپه هر سرچینه یزې کرښې مختلف دی. له دې سره پوله ارزښت

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$$

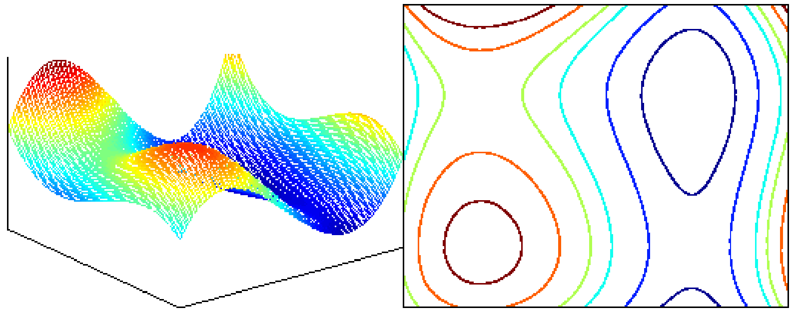
شتون نه لري.

(لیکونکي: بوسلر،هیولیګ، شترایت)

په کومپاکت دېریو د ناپریکیدونکو-یا متمادي توابعو افراطي ارزښتونه

یو ناپریکیدونکی تابع په یوه کومپاکته دېرئ یو مینیموم او هم یو ماکسیموم لري.

په کینه څیره شوي تابع باندي مینیموم اړ ماکسیموم په نخښنه شوي دي. په نیو وکرښه ا فراطي ځایونه د رابندو منحنیو له لارې پیژندلکیږي، هغه چې دا ټکي رابندوي یا (په بر کې) رانیسي.



ليکونکي: هيوليک، شترايت

وکتورنورمونو برابروالی

هر وکتورنورم $\|\ \|$ په $\mathbb{R}^n$ کي دا وکليدنورم $|\ |$ ته اکويوالنت يا برابرارزښته دی، دا په دې معنا چې شابتې c_i شتون لري د $c_1\|x\| \leq |x| \leq c_2\|x\|$ سره د ټولو $x \in \mathbb{R}^n$ لپاره.

(ليکونکی: هيوليک،پفايف)

نابرابرونونه يا نا مساوات سکالارانواريانت دي، دا په دې معنا چې د بدلون $x \mapsto \lambda x$ سره تغير نه خوري. دا بسيا کي، چې وکتورونه x په يوون- يا واحدسفيري يا فضا

$$S:\quad |x| = 1$$

کي تر ځځيرنې لاندې ونيسو. په S باندې هر نورم د 0 سره نا برابر دی، لهدې امله تابع

$$x \mapsto \frac{\|x\|}{|x|}$$

ناپريکيدونکي دی،،ځکه چې S کومپک دی، نو يو مينيموم c_1 شتون لري او يو ماکسيموم c_2.

(لیکونکي: هیولیګ او پفایف)

لیپشیڅ-ناپریکیدنه *Lipschitz-Stetigkeit*

یو تابع c_2 په یوې ډیرۍ D لیپشیڅ-ناپریکیدونکی Lipschitz-stetig بللکیږي، که یوه لیپشیڅ- ثابته c شتونولري، داسي چې

$$||f(x) - f(y)|| \leq c||x - y||$$

د ټولو $x, y \in D$ لپاره.

که f ناپریکیدونکی اومشتقوړ او D کونکاو یا وتلی یا محدب؟؟وي، نو د لیپشیڅ-ثابته د جاکوبي-ماکسیموم Jacobi-Matrix سره اټکل کیدی شي،:

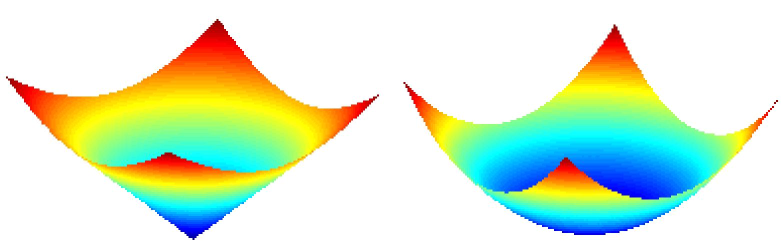
$$c \leq \sup_{x \in D} |f'(x)| .$$

(لیکوني: اېپ، هیولیګ)

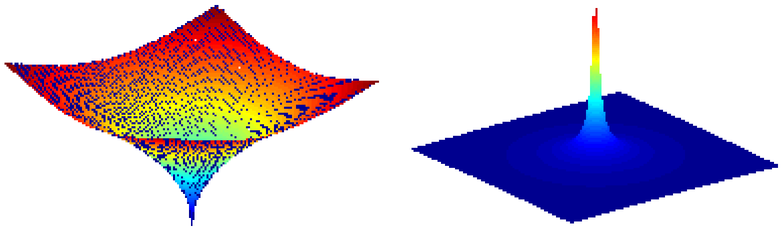
د تابع

$$f(x) = r^\alpha, \quad r = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2},$$

لپاره ډیر حالتونه سره توپیر کیږي.



$\alpha = 1$ $\alpha = 2$



$\alpha = 0.5$ $\alpha = -1$

(i) د $\alpha = 1$ لپاره f ګلوبال لیپشیخ ناپریکیدونکی دی. د درېګوډیيا مثلث د نامساوات څخه لاس ته راځي

$$|r - r'| = ||x| - |x'|| \leq |x - x'|,$$

دا په دې معنا چې $c = 1$ د $D = \mathbb{R}^n$ لپاره لیپشیخ-ثابته ده.

(ii) د $\alpha > 1$ لپاره f په محدود ه ډېرئ D باندې لیپشیخ-ناپرېکیدونکی دی. د منځ ارزښت جمېپه بنسټ

$$|r^\alpha - (r')^\alpha| = \alpha s^{\alpha-1}|r - r'|$$

دی سره د r او r' ترمنځ،پهتعقیب يي

$$c = \max_{x \in D} \alpha |x|^{\alpha-1}$$

ټاکل کیدی شي.

(iii) د $0 < \alpha < 1$ لپاره f ناپریکیدونکی دی مګر نه لیپشیخ- ناپریکیدونکی د 0 په یوه چاپریال کې. شرایط

$$|r^\alpha - 0^\alpha| \le c|r - 0|$$

د $r \to 0$ لپاره پوره نه دي

(iv) د $\alpha < 0$ لپاره f په 0 کې پريکيدونکيدی،ځکه چې د $r \to 0$ لپاره r^α د ∞ په لور هڅيږي.

(ليکونکي: بوسلر،هيوليګ،شترايت)

کونترا هيري فنکشن يا -- تابعKontrahierende Abbildung

يو تابع

$$g : D \to D$$

کونترا هيرکيدونکی(کيکاږل کيدونکی) دی، که په يوه مناسب نورم

$$\|g(x) - g(y)\| \le c\,\|x - y\|, \quad x, y \in D\,,$$

کې د $c < 1$ سره باورولري. د دپسره c داسېپه نامه د g کونتراکشنثابته ده،دا کړی شيد يوې کونوکسډيرئ لپاره د جاکوبي ماتريکس په مرسته د

$$\sup_{x \in D} ||g(x)||$$

اټکل کولای شي.

(ليکونکي: بوسلر،هيوليږ)

د يوه مثبت ديفينيت ماتريکس A لپاره

$$g(x) = x - \omega(Ax - b)$$

کونتراهیر دی،، که پارامتر ωپوره کوچنی وټاکل شي. باور لري

$$g(x) - g(y) = Q(x - y), \quad Q = E - \omega A\,,$$

دکوم سره چې د Qا یګن ارزښت ϱ_i د A له ا یګنارزښت λ_i څخه شمیرل کیدی شي:

$$\varrho_i = 1 - \omega\lambda_i\,.$$

که څا په څای کړو $\omega = 1/\max_i \lambda_i$ ، نوټول ایګن ارزښتونهپه $[0,1)$ کې پراته دي، او د اویکلیدینورم استعمال سره
$c = \|Q\| = 1 - (\min_i \lambda_i)/(\max_i \lambda_i) < 1$ دی.

د بانښ ځاي په ځای ټکیجمله ***Banachscher Fixpunktsatz***

که gیو کونتراهیري تابع یا څیرونه وي، چې دا یوه ناتشه، رابنده ډیرئ $D \subset \mathbb{R}^n$ په خپل ځان ځیره کړي یعنې د ځان تابع وي دا په دې معنا چې باور لري:

- $D = \overline{D}$
- $x \in D \Rightarrow g(x) \in D$
- $\|g(x) - g(y)\| \le c\|x - y\| \quad \forall x, y \in D$

د $c < 1$ سره، نو gیوه یواځنی ټاکلي ځای په ځای ټکی $x_* = g(x_*) \in D$لري،له $x_0 \in D$څخه په وتنه یا تلنه کیدی شي x_* دایتراشن پرلپسي

$$x_0,\, x_1 = g(x_0),\, x_2 = g(x_1),\, \ldots$$

اپروکسیمیرشي. د ناتیکاوي لپاره باور لري

$$\|x_* - x_k\| \le \frac{c^k}{1-c}\,\|x_1 - x_0\|$$

دا په دې معنا چې ایتراشن پرلپسې د هر پیلارزښت لپاره کرښیز پولې ته ځي.

د ځای په ځای ټکوچمل په پوره متریکي فضاو کې تولیز باور لري. دا چې د نورمترانسلیشن اینواریانځ او هوموجینیتی ته اړتیا نه شته، سړی کړی شي $\|x-y\|$ د یوه تولیز واټن تابع $d(x,y)$ سره بدل کړي.

(لیکونکې: ا پپ،بوسلر،هیولیګ)

دا چې $g(D)\subseteq D$ ، د ټولو $\ell>0$ لپاره $x_\ell \in D$ باور لري، او د کونتراکشن شرطو څخه لاس ته راځي

$$\|x_{\ell+1} - x_\ell\| = \|g(x_\ell) - g(x_{\ell-1})\| \le c\,\|x_\ell - x_{\ell-1}\|.$$

ددې نامساوات ایترایشن څخه لاس ته راځي

$$\|x_{\ell+1} - x_\ell\| \le c^\ell\,\|x_1 - x_0\|.$$

د $j>\ell$ لپاره د دریګوډي نامساوات څخه لاسته راځي

$$\begin{aligned}
\|x_j - x_\ell\| &\le \|x_j - x_{j-1}\| + \|x_{j-1} - x_{j-2}\| + \cdots + \|x_{\ell+1} - x_\ell\| \\
&\le (c^{j-1} + \cdots + c^\ell)\|x_1 - x_0\| = \tfrac{c^j - c^\ell}{c-1}\,\|x_1 - x_0\| \\
&\le \tfrac{c^\ell}{1-c}\,\|x_1 - x_0\|,
\end{aligned}$$

او له دې سره د کوشي-کونورګنت پرلپسې x_ℓ یوه پوله ارزښت x_* ته. که له نامساوات

$$\|g(x_*) - x_*\| \le \|g(x_*) - g(x_j)\| + \|g(x_j) - x_*\| \le$$
$$\le c\,\|x_* - x_j\| + \|x_{j+1} - x_*\|$$

ځخه پوله ارزښت $j \to \infty$ ته سړی لاړ شي، نو ګوري، چې x_* د g یو ځای په ځای ټکی دی. دا هم یواځنی بیکس ټکیدی. که ونیسو، چې یوو بل ټکی $\tilde{x}_* \ne x_*$ هم شتون لري، نو د کونترادیکشن شرلیطوڅخه برعکس راکوي.

$$\|\tilde{x}_* - x_*\| = \|g(\tilde{x}_*) - g(x_*)\| \le c\|\tilde{x}_* - x_*\|\,.$$

د ناتیکاوي لپاره اټکل د $\|x_j - x_\ell\|$ لپاره د نامساوات څخه لاس ته راځي دا هم وپولې $j \to \infty$ته د تګ له لارې.

(لیکونکي: بوسلې، هیولیګ)

د نمونیې یا تیپیکي استعمال لپاره یولړمتظرر کرښیزسیستم تر څیړنې لاندې نیسو:

$$Ax + \varepsilon f(x) = b$$

د یوه مربع ماتریکس A سره. د پوره کوچني ε د کرښیزېبرخې تعریفورشو لپاره، او سړی کړی شي دا سیستم د ایترایشن

$$x \leftarrow g(x) = A^{-1}(b - \varepsilon f(x))$$

سره حل کړي. دلته نیول کیږي، چې A انورتیرکیدونکیدی او تابع f لیپشیڅ – ناپریکیدونکېده د ثابتې c_f سره.

د بانښ فیکسټکي چملېBanachschen Fixpunktsatzes د نیوني یا فرضیې د ازمایښت لپاره سړی ټاکي

$$D = \{y:\ \|y - p\| \le r\}, \quad p = A^{-1}b\,.$$

د په خوښنه $x \in D$ لپاره دی

$$\|g(x)-p\| = \varepsilon\|A^{-1}f(x)\| \le \varepsilon\|A^{-1}\| \max_{y\in D}\|f(y)\|\,.$$

ټاکو

$$\varepsilon \le \frac{r}{\|A^{-1}\| \max_{y\in D}\|f(y)\|}\,,$$

نو $g(x) \in D$ دی ،دا په د معنا چی g په D ځېره کوي یا مپینګکوي

د کنترکشنثابتيKontraktionskonstante c لپاره اټکلونه

$$\|g(x)-g(y)\| = \varepsilon\|A^{-1}(f(x)-f(y)\| \le \underbrace{\varepsilon\|A^{-1}\|c_f}_{c}\|x-y\|$$

له f څخه د لیپپشیڅ-ثا بتې c_f سره

لاس ته راځي $c<1$، که

$$\varepsilon < \frac{1}{\|A^{-1}\|c_f}$$

که و غوښتل شي. دواړه شرایط به روښانه توګه د پوره کوچنی ε لپاره پوره ردي

(لیکونکي: بوسلي،هیلیګ)

ټوټه مشتق Partielle Ableitungen

د یوېتابع f مشتق $\partial_i f$ په i–مه واریلابلي متحولي پسي یونیوارینتي ابع
$x_i \mapsto f(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n)\,,$ تابع مشتق دید هغه سره چې واریبلي x_i،
$j \neq i$ د ثابتیول ې په ځبر ترځېړني کیږي.

داسې هم ليکو

$$\partial_i f = f_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}\,.$$

د يونيواريات مشتق د تعريع سره سم باور لري

$$\partial_i f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\ldots, x_i + h, \ldots) - f(\ldots, x_i, \ldots)}{h}\,.$$

پارشل مشتعونه د سکالارو او همد وکتورارزښتيزړ حقيقی توابعو لپاره تعريع دي. په پارشلمشفقنيونه کې په دواړو حالتونوړ کې د تابع تيوپ يا ډول ساتلی پاتې کيږي. د تعريف سره سم باور لري

$$\partial_i \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_i f_1 \\ \vdots \\ \partial_i f_n \end{pmatrix}\,.$$

پارشل مشتق د کمپوننتونو سره سيمولتان يل همغهوختيز جوړيږي

د توتال يا بيخي انتيګرال همداسې کرښيز اپرو کسسيماشن لپاره د وکتوربڼه يا تيوپ د معنا دډکدی. دا ورسره بلد کنونشن يا قرار و وکتورونو داد د متحولې x او هم تابع f لپاره کارول کيږي

(ليکونکي:هيليک، شترايت)

د سکالار تابع لپاره توته مشفق هم سکالار دی.

د بيلګی په توګه د

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 + 5x_2 x_3$$

لپاره مشتق لاسته راځي

$$\begin{aligned} \partial_1 f &= 2x_1 x_2 \,, \\ \partial_2 f &= x_1^2 + 5x_3 \,, \\ \partial_3 f &= 5x_2 \,. \end{aligned}$$

د یوه وکتور ارزښتیز تابع لپاره ،لکه د بیلګي په توګه

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, x_3) \\ f_2(x_1, x_2, x_3) \\ f_3(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2^3 x_3 \\ x_1 x_2 x_3 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix}$$

د کمپوننتونونو تعداد پارشل- یا توپه مشتق سره ساتلی پاتي کيږي:

$$\partial_1 f = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 \\ \partial_1 f_2 \\ \partial_1 f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 x_3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\partial_2 f = \begin{pmatrix} \partial_2 f_1 \\ \partial_2 f_2 \\ \partial_2 f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_2^2 x_3 \\ x_1 x_3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\partial_3 f = \begin{pmatrix} \partial_3 f_1 \\ \partial_3 f_2 \\ \partial_3 f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2^3 \\ x_1 x_2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(ليکونکي: بوسلي،شترايت)

ډېرواره ټوټه مشتق

دوه واره (يو په بل پسې نيول شوى) ټوټه مشتقونه د

$$\partial_i \partial_j f = f_{x_j x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

سره په نخښه کيږي،

په ورته د توګه د جګو مشتقونو لپاره تګه ليکو

$$\partial_i \partial_j \partial_k \ldots f$$

په بديلي توګه کيدى شي مولتى ايندکس نوتيشن

$$\partial^\alpha f = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n} f, \quad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n),$$

وکارول شي،چېرته چي ايندکس $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$ د توپه مشتقونو د توپه مشتقونو تعداد په i - مه متحولی پسې په نخښه کيږي

زياتون يا جمعه $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ توپه مشتق بلل کيږي

(ليکونکي: هيوليک، شترايت)

تابع

$$f(x) = \exp(\mathrm{i}x^{\mathrm{t}}y) = \exp(\mathrm{i}(x_1y_1 + \ldots + x_ny_n))$$

مسطحه ځپه بلل کيږي اود نورو تر څنګ د فوري-اناليوزېFourier-Analysis کې رول يو غوره رول لوبوي

مشتقونه ساده شميرل کيدی شي. دځنځيري قانون سره لاس ته راځي

$$\partial_k f(x) = \mathrm{i}y_k \exp(\mathrm{i}x^{\mathrm{t}}y)$$

$$\partial_\ell \partial_k f(x) = (\mathrm{i}y_\ell)(\mathrm{i}y_k) \exp(\mathrm{i}x^{\mathrm{t}}y)$$

او له دې سره

$$\partial^\alpha f(x) = (\mathrm{i}y)^\alpha \exp(\mathrm{i}x^{\mathrm{t}}y) = \mathrm{i}^{|\alpha|} y^\alpha \exp(\mathrm{i}x^{\mathrm{t}}y)$$

د $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ او $y^\alpha = y_1^{\alpha_1} \cdots y_n^{\alpha_n}$ سره .

د بيلګيپه توګه د $n = 2$ لپاره دی

$$\partial^{(3,4)} f = \underbrace{\mathrm{i}^7}_{-\mathrm{i}} y_1^3 y_2^4 \exp(\mathrm{i}(x_1y_1 + x_2y_2)) .$$

(ليکونکي: بوسلي، هيوليک،شترايت)

د مولتيواريانتو(ډېرواره اووښتونو) پولينومونو ټوټه مشتق

د يوه مونوم ټوټه مشتق

$$\partial^\alpha x^\beta = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n} \left(x_1^{\beta_1} \dots x_n^{\beta_n} \right)$$

تيک هلته له صفر سره نابرابر دی، چې

ويي او په دې حالت کې دی

$$cx^{\beta-\alpha}, \quad c = \prod_i \beta_i(\beta_i - 1) \cdots (\beta_i - \alpha_i + 1)\,.$$

په توګه

دی $\partial^\alpha x^\beta|_{x=0} = \alpha!\delta_{\alpha\beta}$ د $\alpha! = \prod_k \alpha_k!$ سره.

د ټولو پولينومونو $p(x) = \sum_\beta x^\beta$ لپاره باور لري

$$\partial^\alpha p = 0, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = k\,,$$

نو p توتالدرجه $< k$ لري.

(ليکونکي: هيوليک، شترايت)

د ښوونې فکريپيه دې ځانګړي حالت $n = 2$ او $|\alpha| = 3$ وښوول شي. پسې د د مشتق له ورکېدو لاسته ارځي

$$p_{xxx},\, p_{xxy},\, p_{xyy},\, p_{yyy}, \quad p(x,y) = \sum_{j,k} c_{j,k} x^j y^k \,,$$

دا چې p يود توتال درجي ≤ 2 پولينوم دی، دا په د ې معنا چې ټول ضريبونه $c_{j,k}, \quad j+k>2\,,$ ورکيږ ي.

$$c_{j,k}, \quad j+k>2\,,$$

که يو اړونده ترم (د بېلګې په توګه $c_{2,1}x^2y$)صفرنه واي، نو لړتر لږه يو د دريمې درجي يو ټوټه مشتقشته(د بيلګې په توګه p_{xxy})، کوم چط دا ترم نه انولیannulliert کوي.

په ټوليزه توګه هم همداسې دلايل راوړلکيږ ی.

د هر مولتي ايندکس $|\beta| \geq k$ لپاره γ شتون لريد $|\gamma| = k, \quad \partial^\gamma x^\beta \neq 0\,.$ سره.

د بېلګې په توګه سړی کړی شي $n = 3$ ، $k = 4$ اود $\beta = (1,2,3)$ لپاره

$$\gamma = (1,2,1),\ (1,1,2),\ (1,0,3),\ (0,2,2),\ (0,1,3)$$

وټاکي.

(ليکونکي: هيوليګ، شترايت)

د یوه تابع د ټوټه مشتق بدلوړوالی

که د یوه تابع f لومړی اودویم ټوټه مشتق ناپرېکیدونکي وي،نوباورلري

$$\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f\,.$$

د پوره کېدونکي خویتابع لپاره د ټوټه توابعو مشتق لړئ پرلپسي بدلوړ دي.

په ځانګړې توګه دا د مولتی ایندکسـلیکنډول ته ټیکاوی ورکوي.

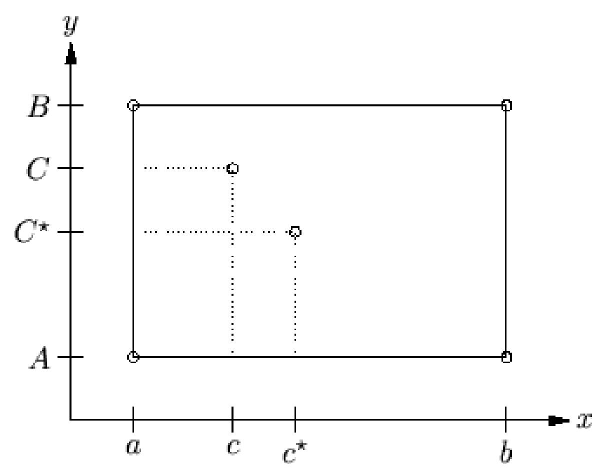
دا چې ټوټه مشتق سره متحولي $x_k,\ k \neq i,j$ ځاي په ځای پاتې کيږي ، بسیا کوي،

چې یو بیواریات تابع $f(x,y)$ په بکاور واچوو یا تر ځېړنې لاندې ونیسو.

په یوه واړه ولاړکوډي د (x,y) لپاره د

$$g(x) = f(x,B) - f(x,A), \quad h(y) = f(b,y) - f(a,y)\,,$$

سره مشفقونه په y - همداسې x -لورو په نخښه کړو.



په کونجونو کې دفرنځ

$$Q = f(b,B) - f(b,A) - f(a,B) + f(a,A)$$

په دوه مختلف ډولونود منځجملې په مرسسته شمیرل کیږي:

$$Q = [f(b,B) - f(b,A)] - [f(a,B) - f(a,A)]$$
$$= g(b) - g(a)$$
$$= (b-a)g_x(c)$$
$$= (b-a)[f_x(c,B) - f_x(c,A)]$$
$$= (b-a)(B-A)f_{xy}(c,C)$$

د $a \le c \le b$ او $A \le C \le B$ او لاندې سره

Q=	$[f(b,B) - f(a,B)] - [f(b,A) - f(a,A)]$
Q=	$h(B) - h(A)$
Q=	$(B-A)h_y(C^\star)$
Q=	$(B-A)[f_y(b,C^\star) - f_y(a,C^\star)]$
Q=	$(B-A)(b-a)f_{yx}(c^\star,C^\star)$

د $a \le c^\star \le b$ او $A \le C^\star \le B$ سره.له دې سره لاست اراځي

$$f_{xy}(c,C) = f_{yx}(c^\star,C^\star)\,,$$

او ولاړکوډیز په واړه کونه سره($b \to a,\ B \to A$) ، د دویمګډوله کشتق د ناپرېکیدنې په بنسټ لرو

$$f_{xy}(a, A) = f_{yx}(a, A)\,.$$

او د لاړګوډي په کوجنیوالي،($b \to a,\ B \to A$) د دویم ګډوله مشتق د ناپریکیدني په بنسټ لاسته راځي

$$f_{xy}(a, A) = f_{yx}(a, A)\,.$$

لیکونکي: بوسلې، هیولیګ، شترایت

فنکشن یا تابع یا بلواک

$$f(x,y) = \frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2}$$

د $(x,y) \neq (0,0)$ لپاره په خوښه ناپرېکیدونکي اومشتقوړ دی

لومړ دوه مشقونه

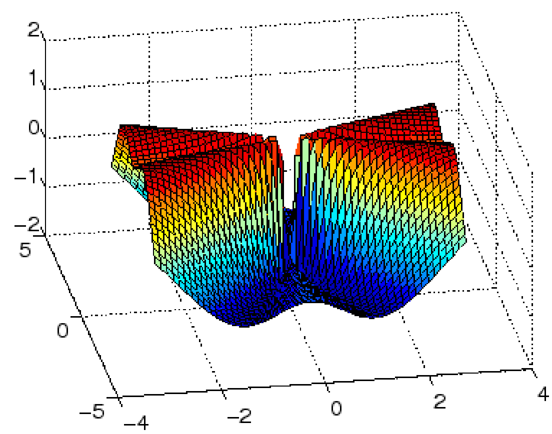
$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \frac{3x^2y - y^3}{x^2+y^2} - 2x\frac{x^3y - xy^3}{(x^2+y^2)^2}, \\ f_y(x,y) &= \frac{x^3 - 3xy^2}{x^2+y^2} - 2y\frac{x^3y - xy^3}{(x^2+y^2)^2}\,, \end{aligned}$$

په ټول $\mathbb{R}^2$ ناپریکیدونکي دي، ځکه چې د

$$|f_x(x,y)|, |f_y(x,y)| \leq (3+1+2(1+1))\sqrt{x^2+y^2}$$

له امله f_x او f_y په ټول په پيل کې د 0 ارزښتونو سره ناپريکيدونکي مخ ته ورلوړدي

ګډوله مشتق ($f_{xy} = f_{yx}$) په $\mathbb{R}^2\setminus(0,0)$ دی مګر په صفرتکي کط پريکيدونکی، کوم چې له مشتق ځخهه ليد ل کيږي



بدلون ناشونی دی:

$$\begin{aligned} f_{xy}(0,0) &= \frac{d}{dy}\left(f_x(0,y)\right)_{|y=0} = \frac{d}{dy}\left(\frac{-y^3}{y^2}-0\right)_{|y=0} = -1, \\ f_{yx}(0,0) &= \frac{d}{dx}\left(f_y(x,0)\right)_{|x=0} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{x^2}-0\right)_{|x=0} = 1\,. \end{aligned}$$

مختلف پوله ارزښتونه لاسته راځي، په دې اړوند چې په کومه لړئ-پرلپسي توپه مشتقونه نيول شوي دي

ليکونکي: هيوليګ، شترايت

توتال مشتقونه *Totale Ableitung*

یو حقیقی تابع $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ په یوه ټکي x کې مشتقوړ دی، که د $|h|\to 0$ لپاره.توتال مشتق د ټوټه مشتق جاکوبي -ماتریکس دی:

$$f' = \mathrm{J}\,f = \frac{\partial(f_1,\dots,f_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)} = (\partial_1 f,\dots,\partial_n f) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \dots & \partial_n f_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_m & \dots & \partial_n f_m \end{pmatrix}.$$

د یوه سکالارتابع($m=1$) لپاره مشتق ګرادینت $f' = (\mathrm{grad}\ f)^{\mathrm{t}}$, بللکیږي او د یوې کږې($n=1$) پارامتري کولو لپارهدتانجنت وکتور. د

توتال مشتق $f'(x)$ شتون لپاره پوره کیدونکي شرطونه د یوه په x چاپیریال کې د ټوټه مشتقونو نه پرېکیدنه ده.

د توتال مشتق $f'(x)$ د شتون لپاره پوره کیدنکي شرطونه په یوه چاپېریال x کې د ټوټه مشتق ناپرېکدنه ده.

د توتال مشتق سره کیدی شي د یوه تابع په ارګومنتو یا تعریفورشوکې $(x\to x+\Delta x)$ د کوچنیورمونو تغیراتو سره اپرکسیمه $(x\to x+\Delta x)$ شي. د نظم $o(|\Delta x|)$ سره ترمونو څخه صرف نظرکیدنه په نږدې توګه باور لري

$$\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x\,.$$

د دې دلپاره چې د پولط پرسه $|\Delta x|\to 0$ رامنځ ته کړو، لیکو

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

داسي په نامه دفرنشال df او dx_i ،کوم چې د کربنيزو اپروکسيميشن تغيرات تشريح کوي

dx_i چې وښايو چې توتالمشتق توپه مشتق خوندي لري، د ساده کونېپه بنسټ يو تابع د دوه متحولو $f(x,y)$ سره رواړو. په دې حالت کي $h = (s,t)^t$ يووکتور دی د دوه کمپوننتونو سره. په د حالت کې $h = (s,t)^t$ يوووکتور دی د وه کمپوونتونو سره. که بيلګي په توګه $t = 0$ ځاي په ځای کړو نو لرو

$$\begin{aligned} f(x+s,y) &= f(x,y) + f'(x,y)\,(s,0)^t + o(|(s,0)|) \\ &= f(x,y) + (\mathrm{J}\,f)_1\,s + o(|s|)\,, \end{aligned}$$

چيرته چې $(\mathrm{J}\,f)_1$ د $\mathrm{J}\,f$ لومړی درځيا مته ښايي له s او پوله ارزښت $s \to 0$ د جوړېدوسره، د $f(x,y)$ توپه مشتق راکوی دپسې x :

$$(\mathrm{J}\,f)_1 = \lim_{s \to 0} \frac{f(x+s,y) - f(x,y)}{s} = \partial_1 f(x,y)\,.$$

د توپه مشتق نا پريکيدنه مقشتوړوالی ايمپليخي کوي، دا په دې معنا چې د توتالمشتق شتونوال.

$$f' = (\partial_1 f, \ldots, \partial_n f)\,.$$

د دې لپاره چې د ټوټه مشتق د ناپرېکیدنې څخه د توتال مشتق شتون لاس ته راوړو لومړی یوسکالار تابع $f(x,y)$ تر څېړنې نیسو. د منځ ارزښت جملې له مخې د $h=(s,t)$ لپاره باور لري

$$f(x+s,y+t) = f(x+s,y) - f(x,y) + f(x+s,y+t)$$

$$-f(x+s,y) + f(x,y)$$

$$= s\ f_x(\xi,y) + t\ f_y(x+s,\eta) + f(x,y)\,,$$

د $\xi \in (x,x+s)$ ، $\eta \in (y,y+t)$ سره. د وړاندنیونې(فرضیی) په بنسټ ټوټه مشتقونه f_x او f_y ناپرېکیدونکي دي، دا په دې معنا چې

$$f_x(\xi,y) \to f_x(x,y)\,, \quad f_y(x+s,\eta) \to f_y(x,y)$$

د $|h| \to 0$ لپاره. له دې سره د تابع f توتال مشتقوړوالی لاسته راوړل کیږي:

$$f(x+s,y+t) = f(x,y) + sf_x(x,y) + tf_y(x,y) + o(|h|).$$

په ورته توګه د n متحولو سکالار تابع لپاره دلایل راوړلکیږي. ټولیزحالت یې په ځانله توګه د کمپوننتو له لارې څخه لاسته راځي.

لیکونکي: بوسلې، هیولیګ، شترایت

تابع

$$f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$$

په صفرځای کې پرکیدونکې ده. دا کتل کیدی شي که د بیلګې په توګه سړی په دوه مختلفو سرچینه کرښو پوله ارزښت $0 \to x$ ونیسی یا راوړي:

$$\lim_{x\to 0} f(x,x)=\frac{x^2}{x^2+x^2}=\frac{1}{2}\neq -\frac{1}{2}=\lim_{x\to 0} f(x,-x).$$

په تعقیب يې f په صفرځای کې مشتقوړ نه دی، ځکه چې له مشتقوړوالي څخه ناپرېکیدنه منځ ته راځي.

په صفرټکي کي مګر دواړه ټوټه مشتقونه شتون لري. له

$$f(x,0)=f(0,y)=0$$

لاس ته راځي

$$f_x(0,0)=f_y(0,0)=0.$$

دواړه ټوټه مشتقونه مر په صفرټکي کي پریکیدونکي دي.

که په مختلفو کرو باندې د مشتق

$$f_x(x,y)=\frac{y^3-x^2y}{(x^2+y^2)^2}$$

که پوله ارزښت $(x,y)\to(0,0)$ تر ځیړنې لاندې ونیسو، نو د بېلګې په توګه د $y=x$ لپاره لرو

$$\lim_{x\to 0} f_x(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{0}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

او د $y = x^2$ لپاره

$$\lim_{x\to 0} f_x(x,x^2) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2-1}{(1+x^2)^2} = -1 \,.$$

په اړونده توګه په صفرځای کې د ټوټه مشتق f_y پرې کیدنه شمیرل کیږي. دا بنایی، چې د مشتقوړوالي لپاره د ټوټه مشتقوني شتونوالی پوره کیدونکې نه دی، بلکه برسیره پردې ناپرېکیدنه هم غوښتل کیږي.

لیکونکي: بوسلي، هیولیګ، شترایت

تابع

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x+2y \\ xy \\ 3x^2+y^2 \end{pmatrix}$$

او $h = (s,t)^t$ دي

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ y & x \\ 6x & 2y \end{pmatrix}$$

او

$$f(x+s,y+t) = \begin{pmatrix} (x+s)+2(y+t) \\ (x+s)(y+t) \\ 3(x+s)^2+(y+t)^2 \end{pmatrix}.$$

له دې سره يو تابع

$$g(s,t) = f(x+s,y+t) - f(x,y) - f'(x,y)\,(s,t)^t = (0, st, 3s^2+t^2)^t,$$

لاس ته راځي، د کوم سره چې د $(s,t) \to (0,0)$ لپَاره هر کمپوننت ګړندی صفر ته ځي نسبت و $|h| = |(s,t)|$ ته،دا په دې معنا چې $g(s,t) = o(|(s,t)|)$

ليکونکي: هيوليګ، شترايت

د سکالار تابع $f(x,y) = r = \sqrt{x^2+y^2}$ لپاره د ګرادينتت په حيث ورکوي

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_1 f \\ \partial_2 f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/r \\ y/r \end{pmatrix}.$$

د يوې ګړي $f(t) = (\cos t, \sin t, t)^t$ پارامتريککولو له لارې د مشتق په حيث يود تانجنتوکتورراکوي

$$f'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)^t.$$

د

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\vartheta\cos\varphi \\ r\sin\vartheta\sin\varphi \\ r\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

له لارې تعريف شوي غونډآري کواوردينات لاندې د جاکوب-ماتريکسدی

$$f'(r,\vartheta,\varphi) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\vartheta,\varphi)} = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & r\cos\vartheta\cos\varphi & -r\sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi & r\cos\vartheta\sin\varphi & r\sin\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta & -r\sin\vartheta & 0 \end{pmatrix}$$

ليکونکي: بوسلې، هيوليګ، شترايت

کرښيزا پروکسيميشن***Lineare Approximation***

په لومړئ نږدېونه کې د ناپريکيدونکي مشتقوړ تابع لپاره باور لري، دا په دې معنا چې د نظم ترمونو $o(|\Delta x|)$ باندې صرفنظرکوني يا پرېښوني له لارې

$$\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x\,.$$

ليکونکي ، هيوليګ، شترايت

د مولتيواريت توابعو د غلطيو وده يا تکثير

Fehlerfortpflanzung multivariater Funktionen

د يوه نا پرېکيدونکي مشتقوړ تابع $x \mapsto y = f(x)$ لپاره کيدی شي داريناکوراتو X inakuraten-ارزښتونو $x + \Delta x \approx x$ د f تونه مشتق په مرسته تشريح کړای شي. د مطلق ناتيکاوي لپاره د $o(|\Delta x|)$ نظم د ترمونوڅخه په صرفنظر باور لري

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) \approx f_{x_1}(x)\Delta x_1 + \cdots + f_{x_n}(x)\Delta x_n\,.$$

که $|x_i|,\ |y| \neq 0$ وي، نو د نسبي ناټيکاوي لپاره لاس ته راځي

$$\frac{\Delta y}{|y|} \approx c_1 \frac{\Delta x_1}{|x_1|} + \cdots + c_n \frac{\Delta x_n}{|x_n|}$$

د لاندې کنډيشن عدد Konditionszahlen سره

$$c_i = \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{|x_i|}{|y|} .$$

يادونه (ژباړی) : د کنډيشن سره سړی پهشميرپوهنه کې هغه شی تشريح کوي، چې يوه پرابلم حل د هغه دد وتون داتا د مضاحمت په واک کې وي. د کنډيشن عدد د دې په واکوالي کچه انځوروي، چې په هغه وتن ناټيکاوی په نا مساعد حالت کې زواکمنه کيږي. دا د تاکلو حل تلنلارو څخه خپلواکه دی. پای.

د کارتيزي کواوردينات څخه د قطبي کواوردينات د φ کونج شميرنې له امله

د مطلق ناټيکاوي لپاره لاس ته راځي

$$\Delta\varphi \approx f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y = -\frac{y\Delta x}{x^2+y^2} + \frac{x\Delta y}{x^2+y^2} .$$

د نسبي ناټيکاوي لپاره لاس ته راځي

$$\frac{\Delta\varphi}{|\varphi|} \approx -\frac{y|x|}{(x^2+y^2)|\varphi|}\frac{\Delta x}{|x|} + \frac{x|y|}{(x^2+y^2)|\varphi|}\frac{\Delta y}{|y|} .$$

د $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$ سره د $|\sin\varphi/\varphi| \leq 1$ له امله لاس ته راځي،
چې د ښې اړخ ارزښت له

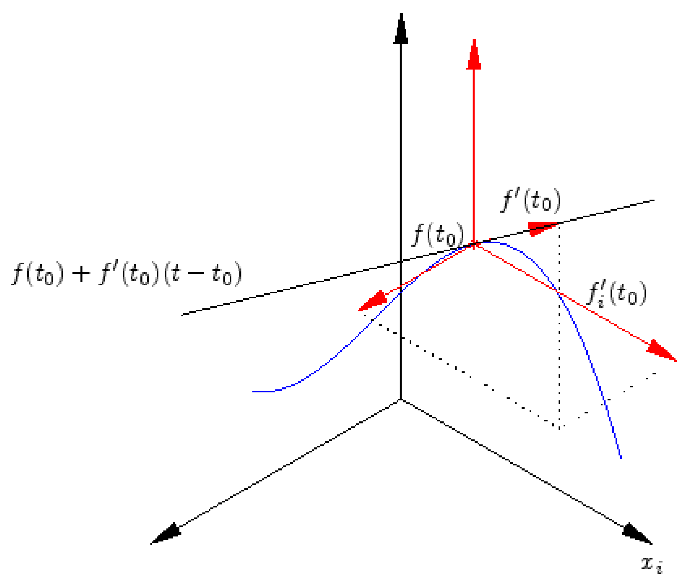
$$\left|\frac{\cos\varphi\ \ \sin\varphi}{\varphi}\right|\left(\frac{|\Delta x|}{|x|}+\frac{|\Delta y|}{|y|}\right)\leq 2\max\left(\frac{|\Delta x|}{|x|},\frac{|\Delta y|}{|y|}\right)$$

لارې اټکل کيدی شي. نسبي ناټيکاوی زيات له زيا ته د يوه ضريب 2قوي کيدی شي.

مطلق ناټيکاوی کيدی شي د يوه ضريب سره چې $1/r$ ته متناسب وي لوی شي. د انتظار سره سم په x او y کې د کونج اندازه کونه د برابر زغم له امله د کوچنۍ وړانګې لپاره ناټيک دی.

ليکونکي: بوسلې، هيوليګ، شترايت

تانجنت Tangente



په ټکي $f\ (t_0)$ کې د مشتقوړ پارامتريکي کرښې(منحني)$t \mapsto (f_1(t),\ldots,f_n(t))^t$

تانجنت يوه کرښه

$$f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0)\,, \quad t \in \mathbb{R}$$

ده داسې چې لږ تر لږه د تانجنت وکتور يو کمپوننت $f_i'(t_0)$ له صفر سره توپير ولري.

ليکونکي: بوسلي، هيوليک، شترايت

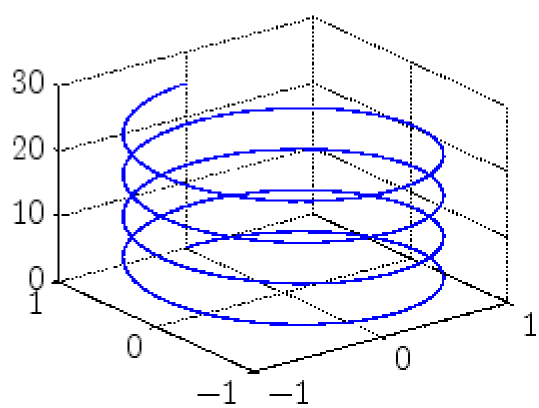
د

$$t \mapsto f(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ t \end{pmatrix}$$

له لارې پارامتريکي پيچميخ کربنه باندې تانجنت دی

$$f'(t) = (\cos t, -\sin t, 1)^t$$

.



د بيلګي په توګه په ټکي $f(3\pi) = (0, -1, 3\pi)$ کې د تانجنت لپاره پارامتريکي کيدنه لاس ته راځو:

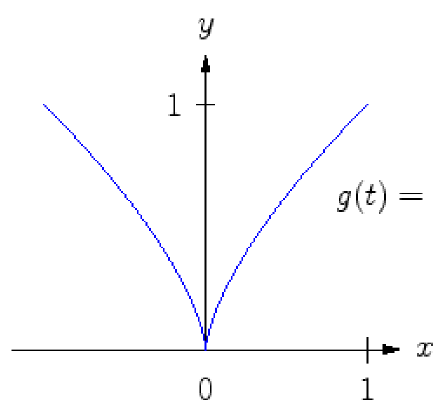
$$t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3\pi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (t - 3\pi) .$$

لیکونکي: هیولیگ، پفایفر

د $t_0 = 0$ لپاره له $t \mapsto g(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \end{pmatrix}$ لارې د پارامتریکي کرږې لپاره د دواړو کمپوننتونو مشتق ورکیږي. د کرږې لور سملاسي له $(0,-1)^t$ څخه و $(0,1)^t$ ته تغیر خوري.

که $g(t)$ د وخت په واک کې ځایزوکتور په حیث تعبیر کړو، نو د $t_0 = 0$ لپاره چټکتیا صفرده. له دې سره، سره له دې چېناپریکیدونکي مشتقوړ کواوردینات، یو پریکیدونکی لورتغیر ممکن

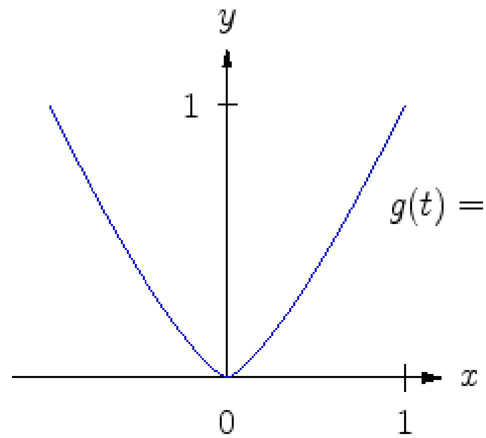
دی.



د $g(t) = (t^3, t^4)^t$ لپاره همداسي $g'(0) = (0,0)$ دی. د پارامتر اړونه یا بدلون

$$s = t^3, \quad g(t) = q(s) = \begin{pmatrix} s \\ s^{4/3} \end{pmatrix}$$

ښایی، چې له $s = 0$ سره د تانجنتتغیر ناپریکیدونکي دي.



لیکونکي: بوسلې، هیولیګ، شترایت

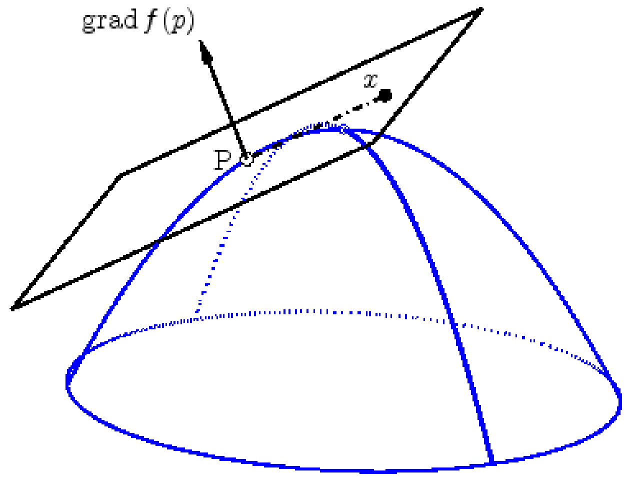
Tangentialebeneتانجنتي سطحه

f دې یوناپریکیدونکی مشتقوړ تابع او $(p_1, \ldots, p_n)$ دې یو ټکی وي په له
$f(x_1, \ldots, x_n) = c$ لاري ایمپلیحیت تعریف شوې سطحه باندې. که
$\operatorname{grad} f(p) \neq 0,$ وي نو تانجنتي سطحه په ټکي P کې مساوات

$$E: \quad (\operatorname{grad} f(p))^t \, (x - p) = 0 \, .$$

لري.

نورمالوکتور و $\operatorname{grad} f$ ته غبرګ دی.



د یوه تابع $y = g\,(x_1\,,\dots\,,x_{n-1})$ د ګراف لپاره په ځانګړې توګه

$$E: \quad y - g(q) = \sum_{i=1}^{n-1} \partial_i g(q)\,(x_i - q_i)$$

د تانجنتي سطحېمساوات دی په لاندې ټکي کې:

$$(q_i\,,\dots\,,q_{n-1}\,,g(q))^t$$

.

توته مشتق $\partial_i g$ له دې امله دتانجتي سطحي جګوالی بنايي د i -م کواوردينات محور په لور

لیکونکي: ب، هیولیک، کیمرلي، شترایت

د توتالمشتق $\mathrm{grad}\, f' = (\quad f)^t$ تعریف دی

$$f(x) = f(p) + (\mathrm{grad}\ \ f)^t(x-p) + o(|x-p|)\,.$$

که له ترم $o(|x-p|)$ ځخه صرفنظروشي،نو د $f(x)=f(p)=c$ له امله د تانجنتي سطحې مساوات لاس ته راځي.

په ورته توګه د يوه د $y=g\left(x_1,\ldots,x_{n-1}\right)$ له لارې تعريف شوي تابع ګراف لپاره باور لري

$$\Delta y=\sum_{i=1}^{n-1}\partial_i g(q)(\Delta x_i)$$

د $\Delta y=y-g(q)$ او $\Delta x=x-q$ سره. د باقي غړي ځخه صرف نظر له امله بيرته د تانجنت سطحې ښوول شوې انځور ته ورځو.

ليکونکي: بوسلې، هيوليک، شترايت

د کګل

$$K:\ f(x,y,z)=x^2+y^2-z^2=0$$

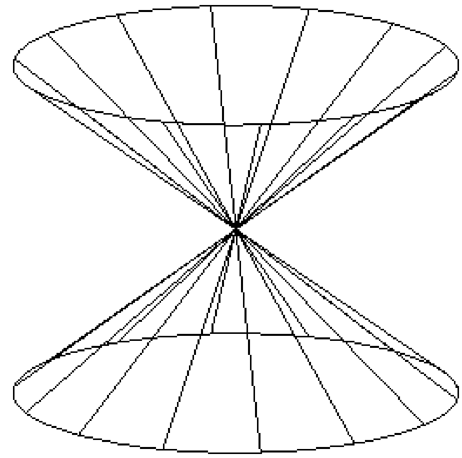
لپاره $\operatorname{grad} f(x,y,z)=(2x,2y,-2z)^t$ دی. له دې سره سړی د تانجنتي سطحې په حيث لاس ته راوړي.

$$E:\ \ -2z_0(z-z_0)+2y(y-y_0)+2x(x-x_0)=0.$$

د بيلګې په توګه تنجنتي سطحه په ټکي $P=(3,4,5)$ کې لاندې مساوات لري

$$E:\ \ -10z+8y+6x=0.$$

په ټکي $Q=(0,0,0)$ کې ګرادينت ورکيږي،د مخروط په ککره يا ځوکه کې تانجنتي سطحه شتون نه لري.



لیکونکي: بوسلې، هیولیګ، شترایت

د یوه دیپول(دوه قطبي) پوتنشل

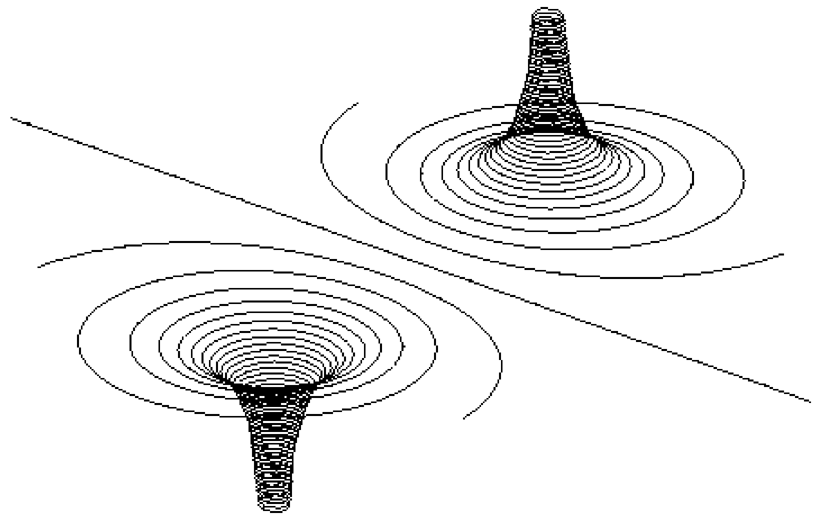
$$f(x) = |x-p|^{-1} - |x+p|^{-1}\,, \quad x = (x_1, x_2)\,,$$

لپاره ،په کوم کې کې چې برق(Ladungen)(دلته باید موخه هغه بار وي،چې دلته شتون لري) په‌ټکو $-P$ او P کې شتون لري د کرادینت په څېر لاس ته راځي

$$\operatorname{grad} f(x) = \frac{(x+p)}{|x+p|^3} - \frac{(x-p)}{|x-p|^3}$$

او له دې سره په یوه ټکي $A = (a_1, a_2)$ کې تنجنتي سطحه

$$x_3 = f(a) + (\operatorname{grad} f(a))^{\mathrm{t}}\ (x-a).$$



د بیلګې په توګه د $A = (0,0)$ لپاره دی

$$x_3 = 0 + (2p^{\mathrm{t}}/|p|^3)(x_1, x_2)^{\mathrm{t}} \,,$$

دا په دې معناچې تانجنتي سطحه په سرچینه کې ځغلي او و P ته ولاړه یا عمود کربنه خوندي لري.

په سیګولاریټیو P او $-P$ کې تانجنتي سطحه شتون نه لري.

لیکونکي: بوسلې، هیولیک، شترایت

مولتیواریات ځنځیري قاعده یا لار

Multivariate Kettenregel

د ناپریکیدونکومشتقوړ توابعو $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^\ell$ او $g : \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}^n$ یو بل پسې تړلو

$$h = g \circ f : x \mapsto y = f(x) \mapsto z = g(y) \,,$$

له امله باور لري

$$h'(x) = g'(y)f'(x)\,,$$

دا په دې معنا چې د جاکوبي-ماتريکس h د جاکوبي-ماتريکسونو f او g ضرب دی.د
يوګونې لاس ته راوړنې يا لرنو د ماتريکس ضرب له لارې لاس ته راځي

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_k} = \sum_j \frac{\partial g_i}{\partial y_j} \frac{\partial f_j}{\partial x_k}\,.$$

په ځانګړې توګه ځنځيري قانون د ځانګړي حالت $m = n = 1$ لپاره (دا په دېمعنا
چې f يوه پارامتريک شوې کږه او g د متحولې يو سکالار تابع) لاندې څېره يا شکل
لري:

$$\frac{d\,h}{d\,x} = (\mathrm{grad}\,g)^{\mathrm{t}}\,f'(x)\,.$$

د يوه تابع د توتالمشتق لپاره باور لري

$$\varphi(x+h) = \varphi(x) + \varphi'(x)h + o(|h|)\,.$$

له دې سره د مشتقونو $f'(x)$ او $g'(y)$ د شتون څخه لس ته راځي

$$g(f(x+h)) = g(f(x) + \underbrace{f'(x)h + o(|h|)}_{\tilde{h}}) =$$

$$= g(f(x)) + [g'(y)\,\tilde{h}] + o(|\tilde{h}|)\,.$$

دا چې

$$[g'(y)\,\tilde{h}] = g'(y)f'(x)h + o(|h|)$$

او $|\tilde{h}| = O(|h|)$ لرود $g \circ f$ د جاکوبي - ماتريکس لپاره غوښتلی فرمول ورکوي.

ليکونکي: هيوليګ، کنش

د ځنځيري قانون د تشکيل يا روښانه ونې لپاره لاندې تابع راوړو

$$y = f(x) = \begin{pmatrix} x_3 \sin(x_1) \\ e^{x_2}/x_3 \end{pmatrix}, \quad g(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1 + \ln(y_2) \\ 0 \\ y_2 \cos(y_1) \end{pmatrix}$$

د دې لپاره چې د $h = g \circ f$ د جاکوبي-ماتريکس په $p = (\pi,\, 0,\, 1)^{\mathrm{t}}$ کې وشميرلی شو، تشکيلوو

$$f'(x)_{|x=p} = \begin{pmatrix} \cos(x_1)x_3 & 0 & \sin(x_1) \\ 0 & e^{x_2}/x_3 & -e^{x_2}/x_3^2 \end{pmatrix}_{|x=p} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

همداسې

$$g'(y)_{|y=f(p)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1/y_2 \\ 0 & 0 \\ -y_2\sin(y_1) & \cos(y_1) \end{pmatrix}_{|y=(0,\,1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

او لاس ته راوړو

$$h'(\pi,0,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

ليکونکي: هيوليک، کنش

د يوه سکالار تابع $f(x,y)$ لپاره د کږې $t \mapsto (x(t),y(t))^{\mathrm{t}}$ په اوږدو د خنځيريقانو له مخې باور لري

$$\frac{d}{dt}f = f_x x' + f_y y'.$$

د بيلګې په توګه د

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}\,, \quad x = \sin t\,, \quad y = \cos t$$

لپاره لاندې مشتق لاس ته راځي

$$\frac{d}{dt}f(x(t),y(t)) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos(t) + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}(-\sin(t))$$

$$= \frac{\sin(t)\cos(t) - \cos(t)\sin(t)}{1}$$

$$= 0$$

دا يوځای اينوول شوي تابع

$$f(x(t), y(t)) = \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t)} = 1$$

د سيده مشتق سره خوري يا برابر دی.

ليکونکي: هيوليک، کنش

د يوه پارامتريکي سطحي $(x(s,t), y(s,t), z(s,t))^t$ له لاري د وکتورارزښتيز تابع $(u(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z))^t$

د جاکوب-ماتريکس نسبت واريا بلو (s,t) ته دی:

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(s,t)} = \begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_s & x_t \\ y_s & y_t \\ z_s & z_t . \end{pmatrix}$$

د بيلګي په توګه د يوه راديال تابع

$$(u,v,w) = (x,y,z)/r, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

لپاره د

$$(x,y,z) = (\cos\varphi, \sin\varphi, z), \quad \varphi \in (-\pi, \pi], \quad z \in \mathbb{R}$$

له لارې پارامتريک شوي مخروط پوښ دی

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = r^{-3} \begin{pmatrix} r^2-x^2 & -xy & -xz \\ -xy & r^2-y^2 & -yz \\ -xz & -yz & r^2-z^2 \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\varphi,z)} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi & 0 \\ \cos\varphi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

د $s = \sin\varphi$ او $c = \cos\varphi$ سره په دې اساس لاسته راځي

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(\varphi,z)} =$$

$$r^{-3} \begin{pmatrix} r^2-c^2 & -cs & -cz \\ -cs & r^2-s^2 & -sz \\ -cz & -sz & r^2-z^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -s & 0 \\ c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$r^{-3} \begin{pmatrix} -sr^2 & -cz \\ cr^2 & -sz \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, =$$

د کوم سره چې دی

$$r = \sqrt{1+z^2}$$

.

ليکونکي: بوسلي،هيوليګ، کنش

د دې لپاره چې د دواړو توابعو

$$f(u,v) = \begin{pmatrix} u+v \\ u-v \\ u^2+v^2-1 \end{pmatrix}, \quad g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$$

د $h = g \circ f$ ګرادینت شمېرل کیږي سرې د f د جاکوب-ماتریکس جوړوي

$$f' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2u & 2v \end{pmatrix}$$

په همدې تګه د g ګرادینت

$$\operatorname{grad} g = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} u+v \\ u-v \\ u^2+v^2-1 \end{pmatrix} .$$

له دې سره د ځنځیري قانون سره لاس ته راځي

$$\begin{aligned} (\operatorname{grad} h)^{\mathrm{t}} &= (\operatorname{grad} g)^{\mathrm{t}} f' \\ &= 2 \begin{pmatrix} u+v+u-v+2u(u^2+v^2-1) \\ u+v-u+v+2v(u^2+v^2-1) \end{pmatrix}^{\mathrm{t}} \end{aligned}$$

او د ساده کونې وروسته

$$\operatorname{grad} h = 4(u^2+v^2) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} .$$

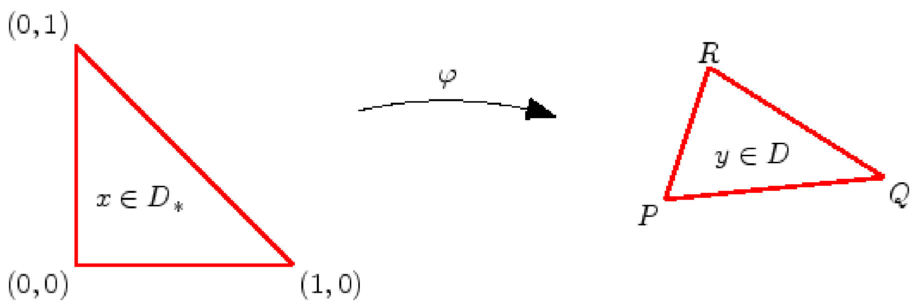
لیکونکي: بوسلې، هیولیګ،

په یوه د رېګوډي D باندې د د یوه رفرنځدرېګوډي افین تابع

$D_* : x_1 + x_2 \leq 1, \quad x_i \geq 0\,,$ د کوډېټکو Q $P,$ او R سره کیدی شي په

لاندې بڼه ولیکل شي

$$y = \varphi(x) = p + (q-p)x_1 + (r-p)x_2$$



افین تبع د جاکوب-ماتریکس لري

$$\frac{\partial(y_1,y_2)}{\partial(x_1,x_2)} = (q-p, r-p)\ .$$

له دې سره د یوه سکالار تابع $h(x) = g(\varphi(x))$ څخه لاسته راځي

$$(\mathrm{grad}\,h(x))^{\mathrm{t}} = (\mathrm{grad}\,g(y))^{\mathrm{t}} \begin{pmatrix} q_1 - p_1 & r_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 & r_2 - p_2 \end{pmatrix}.$$

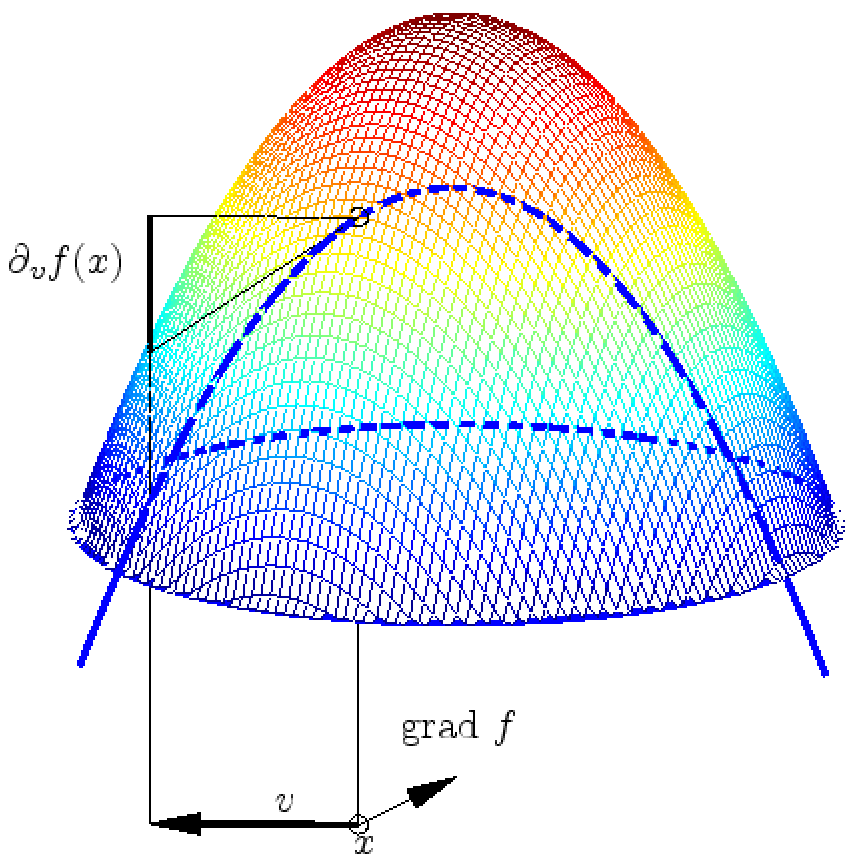
دا تراسفورمیشن د نورو ترڅنګ د ستیفیګکایتماتریکسونو Steifigkeitsmatrizen په لیکنوکې د فینیت-توکو-تګلار Finite-Elemente-Verfahren ته اړیینه ده.

بیکونکي: بوسلي، هیولیګ، کنیش

د يوه تابع لوريز مشتق

د يوه فنکشن يا تابع f مشتق د يوه وکتور v په لرو دی

$$\partial_v f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+hv) - f(x)}{h}.$$



دا کيدی شي د جاکوب-ماتريکس f' په مرسته د ځنځيريقانون په بنسټ د

$$\left(\frac{d}{dt} f(x+tv) \right)_{t=0} = f'(x)v$$

له لارې وشمیرل شي. په ځانګړې توګه $\partial_{e_\nu} f$ د e_ν سره د ν ــم
یوونوکتور(واحدوکتور) ټوټه مشتق دی نسبت و ν ــم کواوردینات ته.

د سکالار تابع تابع لپاره دی

$$\partial_v f = (\operatorname{grad} f(x))^{\mathrm{t}}\ .$$

لکه څنګه چېپه مشتق کې متشکلدی، لوریز مشتق شتون لري په دې حالت کې له f د
v په لور. لوکال تغیر د $v \parallel \operatorname{grad}\ f(x)$ لپاره ما کسیمال دی.

(Autoren: Höllig/Knesch)

د تابع

$$f(x,y) = x^2y^3$$

لوریزمشتق په ټکي $(x,y) = (2,-1)$ کې شمیرلکیږي. د دې لپاره لومړی

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy^3 \\ 3x^2y^2 \end{pmatrix}\ .$$

ټاکو.

د معلومو کواوردینات د ځایپه ځایکولووروسته د یوه لور $v = (a,b)^{\mathrm{t}}$ لپاره لاسته
راځي

$$\partial_v f(2,-1) = (-4, 12) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -4a + 12b\,.$$

لوریزوکتور د

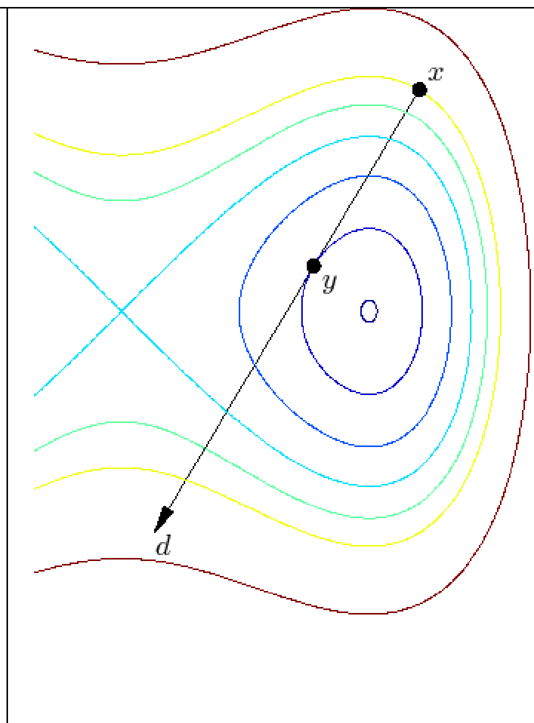
$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \end{pmatrix}$$

لپاره ماکسیمال کیږي، نو د بیلګې په توګه . $v = (-1,3)$ په لومړئ نږدېونه کې له دې سره

$$f(2-t,-1+3t) \approx f(2,-1) + t\partial_v f(2,-1) = -4+40t$$

د f خورا لویه ځایزه یا لوکال جګیدنه په ګوته کوي یا تشریح کوي

د ډېرې زوړندې یا کښته کیدنې متود

 	د ډېرې زوړندې کښته کیدنمتود د مولتیواریات توابعو $f(x_1,\dots,x_n)$ مینیمي کولو په چوپړ کې دی. د یوه ایترایشنپل $x \to y$ عملي کولو ته لومړی منفي ګرادینت $d = -\operatorname{grad} f(x)$ د لوکال بهترین کښته کیدلور په حیث شمیرلکیږي. پسي د y د f مینیمال ځای په حیث د d په لورتاکل کیږي: $f(y) = \min_{t\geq 0} f(x+td)\,.$

لکه په تابع یا ځیره کې چې انځوردی، لټونلور و نیوو ډېرئ **Niveaumenge** ته د x له لارې اورتوګونال ده او تابع د نیوډېرئ په y کې یوه کوچني ار زښت ته لمسوي

یادونه : د نیوو**Niveaumenge** یا روښانه ونه (ژباړی): پهشمیرنه کې د یوه سکالار پټي یا ورشو ټولو ډېریو یا ستونو ټکي، چې هغه همغه ارزښت سره ترتیب یا تنظیم وي. پای.

د خورا زوړندکښته کیدني متود له لارې تولید شوې پرلپسي $x_0, x_1, \ldots$ کونورګنت کیدی شي د ډېرې ټولیزې نیونې سره وښوول شي. پوره کیدونکی دی، که f د کښته لور ته محدود وي او $\operatorname{grad} f$ په یوه د ډېرئ په یوه چاپیریال U کې لیپشیڅ- ناپریکیدونکې وي، دا په دې معنا چې

$$\| \operatorname{grad} f(x) - \operatorname{grad} f(\tilde{x}) \| \leq L \| x - \tilde{x} \|, \quad x, \tilde{x} \in U .$$

باور لري

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \| \operatorname{grad} f(x_\ell) \|^2 < \infty .$$

دا په ځانګړې توګه دې کې خوندي ده، چې د پرلپسي $x_0, x_1, \ldots$ هر پډغالي ټکی د f یو انحرافي یا بهتره افراطي ټکي دی. دا چې دا یو ځاییز یا لوکال مینیموم دی ستاتیستیکي په اطمنان، مګر نه جبرأ ترې لاسته راځي.

په الګرریتم کې یوبعدي یا یو پراخېدونکی مینیموم اړتیا ده چې فقط په نږدې توګه وکړای شي. لټونلور d باید نه دي چې د کمیز یا منفي ګرادینت په څېرو ټاکلی شي او یوه ځییزه مینیموم ځاي y و نه ټاکلشي. د کونورګنت لپاره په ساده توګه پریکړیدی، چې هر ایتراشنپل سره د تابع ارزښت یو رډکشن و $\| \operatorname{grad} f(x) \|^2$ ته متناسب ورسیدای شي.

(Autoren: Höllig/Hörner/Pfeil)

د یوه مربع تابع

$$f(x)=\frac{1}{2}x^{t}Ax-b^{t}x$$

$x\to y$

لپاره د يوه سيومتريک زياتيز يا مثبت ديفينيت ماتريکس A سره يو ايتريشنپل لړي د ډېرزوړندجګيدني بنې متود سره

$$y=x+td,\ d=-\mathrm{grad}f(x)=b-Ax,\ t=\frac{d^{t}d}{d^{t}Ad}\,.$$

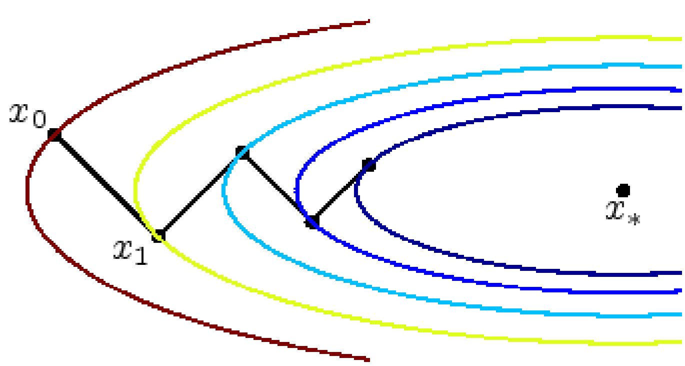
د

$$\begin{aligned} f(x+td) &= \tfrac{1}{2}(x+td)^{t}A(x+td)-b^{t}(x+td) \\ &= \tfrac{1}{2}d^{t}Ad\,t^{2}+(x^{t}Ad-b^{t}d)\,t+c \end{aligned}$$

مينيموم کيدی شي په دې حالت کې ا کسپليځيت يا روښانه توګه ورکړ شي. د t پسې مشتق صفرځايونوله لارې لسته راځي

$$0=d^{t}Ad\,t-(\underbrace{b-Ax}_{d})^{t}d$$

او له دې سره د نيمکربنيزپارامتر t لپاره فرمول.



تابع چې ښايي،کيدی شي ناغوښتلو رپيدنو ياOszillationen ته راشي، که A أيګنارزښت قوي توپير کيدونکی د لوي نظم لري. يوه افراطي پيلګه د

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 100 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

لپاره لاسته راي.

د $x = \begin{pmatrix} c & 1 \end{pmatrix}^t$ لپاره دی

$$d = -\begin{pmatrix} c \\ 100 \end{pmatrix}, \quad Ad = -\begin{pmatrix} c \\ 10^4 \end{pmatrix}$$

او

$$d^t d = c^2 + 10^4, \quad d^t A d = c^2 + 10^6, \quad t = \frac{c^2 + 10^4}{c^2 + 10^6}.$$

له دې سره لرو

$$y = \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{c^2 + 10^4}{c^2 + 10^6} \begin{pmatrix} c \\ 100 \end{pmatrix} = \frac{99c^2}{c^2 + 10^6} \begin{pmatrix} 10^4/c \\ -1 \end{pmatrix}.$$

په رښتيا د $c = 100$ لپاره لرو

$$y = \frac{99}{101} \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}.$$

سرې پيژني، چې مينيموم ته د واټنونو په هر ايترايشنپل کې په سرجينه کې فقط له 1% په کچه کميږي.

په څټ- یا برعکس تابع Umkehrfunktion

$f:\ \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ دې د یوه ټکي x_* په چاپیریال کې ناپریکیدونکی مشتقوړ تابع وي د انورتیري جاکوبي-ماتریکس $f'(x_*)$ سره.

نو f د x_* په یوه چاپیریال U کې بیجکتیو دی، دا په دې معنا چې یو ناپریکیدونکی مشتقوړ برعکستابع $g = f^{-1}$ شتون لري د

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)\,, \quad x \in U\,.$$

سره.

له دې برسیره د جاکوبي-ماتریکس

$$g'(y) = f'(x)^{-1}$$

لپاره باور لري، د ټولو $x \in U$ لپاره.

(Autoren: Höllig/Streit)

مساوات $f(x) = y$ کړی شي د یوه ټکي (x_*, y_*) په چاپیریال

$$U \times V = \{x:\ \ |x - x_*| \leq \delta\} \times \{y:\ \ |y - y_*| \leq \varepsilon\}$$

کې د لیترایشن

$$x \leftarrow \varphi(x) = x - f'(x_*)^{-1}(f(x) - y)$$

سره د بانخ Banachځاي په ځاي يا فيکس ټکي جملې سره حل شي.

دې ته بنوول کيږي، چې φ د کره لپاره يو را ټول شوی kontrahierende ځانيزه تابع ده په U .

د کنوتر اکشن ثابته کيدی شي د $\sup_{x\in U} \|\varphi'(x)\|$ له لارېتخمين شي، داسېچې د اويکليد يا اقليدس نورم $|\cdot|$ باندې تنظيم ماتريکسنورم وکارول شي. د

$$\begin{aligned} \|\varphi'(x)\| &= \|E - f'(x_*)^{-1}f'(x)\| \\ &= \|E - f'(x_*)^{-1}[f'(x_*) + f'(x) - f'(x_*)]\| \\ &= \|f'(x_*)^{-1}(f'(x) - f'(x_*))\| \end{aligned}$$

له امله ديوون – يا وادماتريکس E سره $\leq c < 1$ سوپريمومو دی د پوره کوچني δ لپاره، ځکه چې $f'(x) \rightarrow f'(x_*)$ د $x \rightarrow x_*$ لپاره.

خوندي لرنه يا Die Inklusion $\varphi(U) \subseteq U$ د

$$\varphi(x) - x_* = x - x_* - f'(x_*)^{-1}(f(x) - f(x_*) + y_* - y)\,.$$

نورم د تخمين له لارې لاسته راځي.

د f د ناپریکیدني او مشتقوړوالي په بنسټ باور لر ي

$$f(x) - f(x_*) = f'(x_*)(x - x_*) + R, \quad |R| = o(|x - x_*|) .$$

د دې په تعقیب دی

$$|\varphi(x) - x_*| \leq \|f'(x_*)^{-1}\|(o(\delta) + \varepsilon) \leq \delta$$

د پوره کوچني δ ($o(\delta)/\delta \to 0$) او ε لپاره

له دې سره د باناخ ځاېی ځای تکي جملې نیونې یا فرضییپوره دي، او د ټولو $y \in V$ لپاره د لاندې سره x شتون لري د لاندې سره

$$x = x - f'(x_*)^{-1}(f(x) - y) \Leftrightarrow f(x) - y = 0 ,$$

دا په دې معنا چې سرې کړی شي مساوات د x پسې حل کړي:
$$g(y) = f^{-1}(y) = x$$
.

فورمال د $x = g(f(x))$ مشتق له لارې د ځنځیري قانون سره سم لاس ته راځي

$$E = g'(y)f'(x) .$$

د g د جاکوبي-ماتریکس د f د جاکوبي-ماتریکس معکوس دی. د دې لپاره چېد دې فرمولتیکاوی د ازمایو ، د

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$

لپاره د $x,\ x + \Delta x \in U$ سره لیکو

$$\begin{aligned} & g(y + \Delta y) - g(y) - f'(x)^{-1}(\Delta y) \\ & \quad = \Delta x - f'(x)^{-1}[f(x + \Delta x) - f(x) + |\Delta x|/2] = f'(x)^{-1}R \end{aligned}$$

د $R = o(|\Delta x|)$ سره د f مشتقوړوالي په بنسټ. دا پاتې دي چې وښوولشي، چې $|\Delta x|$ د $|\Delta y|$ له لارېکيدی شي تخمين یا اټکل شي.

دا له

$$\Delta x = f'(x)^{-1}(\Delta y - R)$$

لاس ته راځي

د $\|f'(x)^{-1}\|$ په : U محدودیت له امله:

$$|\Delta x| \le c^* \left(|\Delta y| + o\left(|\Delta x|\right)\right) \le \tilde{c}|\Delta y|$$

د پوره کوچني $|\Delta x|$ لپاره د ثابتو c^* او $\tilde{c}$ سره.

(Autoren: Höllig/Streit)

و دې خېړل شي، چې ایا تابع

$$f: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \\ x/y \end{pmatrix}$$

په ټکي $(x,y) = (2,1)$ کې لوکال معکوسوړ ده. د دې لپاره لومړی د جا کوبي – ماتریکس

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} y & x \\ 1/y & -x/y^2 \end{pmatrix}.$$

جوړیږي.

تر ځیرنې لاندې ټکې کې دی

$$\mathrm{J}\, f = f'(2,1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

د $\det \mathrm{J} = -4 \neq 0$ له امله د

$$\begin{pmatrix} u_* \\ v_* \end{pmatrix} = f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

په چاپیریال کې یو معکوس تابع g شتون لري

د دهجاکوبیماتریکس په ټکي (u_*, v_*) کې دی

$$g'(2,2) = \mathrm{J}^{-1}\, f = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

په دې ساده بیلګه کې کیدی شي g د افادود حلولنو له لارې د u او v لپاره د x او y پسې ایکسپلیځیتexplizit ورکړي:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = g(u,v) = \begin{pmatrix} \sqrt{uv} \\ \sqrt{u/v} \end{pmatrix} .$$

له دې سره سرې کړی شي چې فرمول د $g'(2,2)$ لپاره په سيده لاره و ازمايي.

(Autor: Höllig)

کومپلکس اکسپوننشل تابع

$$z = x + \mathrm{i}y \mapsto \exp(z) = u + \mathrm{i}v$$

کيدی شي ريل يا حقيقي د

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(x)\cos y \\ \exp(x)\sin y \end{pmatrix}$$

په خير وليکي او دجاکوبي-ما تريکس

$$f'(x,y) = \exp(x) \begin{pmatrix} \cos y & -\sin y \\ \sin y & \cos y \end{pmatrix} .$$

د $\det f'(x,y) = \exp(2x) > 0$ له امله د هر ټکي $(u,v)^{\mathrm{t}}$ په چاپيريال يو

برعکستابع g (د کمپلکس لوګاريتم) شتون لري د لاند/ط مشتق سره

$$g'(u,v) = (f'(x,y))^{-1} = \exp(-x) \begin{pmatrix} \cos y & \sin y \\ -\sin y & \cos y \end{pmatrix} .$$

يو ګلوبال برعکس تابع د

$$f(x, y + 2\pi k) = f(x, y), \quad k \in \mathbb{Z},$$

له امله شتون نه لري. د پريوديوالي يا تل بېرته را ګرځيدني له امله هر ټکي $(u, v) \neq (0,0)$ ناپای ډېر ترمخ عکسونه لري.

(Autoren: Boßle/Höllig/Streit)

په پولار کواردیناتو باندې اړولو سره،

$$x = r\cos\varphi,\, y = r\sin\varphi, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}\,,$$

د کواوردينات x پسې د وړانګ ي ټوټه مشت ق لپاره باور لري

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r} = \cos\varphi\,.$$

له بله پلوه له $r = x/\cos(\varphi)$ لاسته راځي

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{\cos(\varphi)}\,.$$

د دې برېښنده تضاد لپاره دليل دا دی، چې د ټوټه مشتقشمېرنې له لارې همغه اووښتونې ثابتې نه شي ساتل کيدی. په لومړي مساوات کې y ثابت دی اوپه دويمکې φ . په دواړو حالتونو کې تغيروخوړ او اغيزه يې په r کې وکتل شوه. دلته ټکی (x, y) هر ځل په پرته لور يا همداسې د کونج φ سره مايل کرښه حرکت کوي. په ورته توګه ځاييز يا لوکال توګه د r تغيرمختلف دی.

د سکالار مشتق قانون

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dx}{dy}\right)^{-1}$$

طبعأ د هر ټوټه مشتق لپاره باورنه لري. د یوه بیجکتیو تابع

$$(x,y) \leftrightarrow (u,v)$$

لپاره په ټولیزه توګه

$$x_u \neq (u_x)^{-1}.$$

دی، له دې ورزیات باید د تابع

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix},$$

جاکوبي-ماتریکس رامنځ ته شي:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}^{-1}.$$

په دې راوړې بیلګه کې

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\,\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\,\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

دی.

معکوس مشتق د x او y پسې لاندې توه مشتق لري:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\frac{1}{r}\sin\varphi & \frac{1}{r}\cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_x & r_y \\ \varphi_x & \varphi_y \end{pmatrix}.$$

په ځانګړې توګه لرو، چې $r_x = \cos\varphi$

(Autoren: Boßle/Höllig/Knesch)

ايمپليځيت توابع

که د يوه ناپريکيدونکيمشتقوړ تابع

$$f:\ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$

لپاره وي

$$f(x_*, y_*) = 0, \quad \det\, f_x(x_*, y_*) \neq 0\,,$$

نودا مساوات سيستم

$$f_\nu(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0\,, \quad \nu = 1, \ldots, n\,,$$

د y_* په يوه چاپيريال کې د x پسې حل کړئ:

$$x = \varphi(y)\,.$$

ايمپليځيت تعريف شوی تابع φ د x_* په يوه چاپيريال کې ناپريکيدونکی مشتقوړ دی او دا لاندېد جاکوبي-ماتريکس لري

$$\varphi' = -(f_x)^{-1} f_y \,.$$

په ورته توګه د توابعو

$$f_j(x_1, x_2, \ldots, x_{n+m}),\ j = 1, \ldots, n\ ,$$

لپاره باور لري د اووښتونو يا متحولو د پرموتيشن پسې، دا په دې معنا چې سړى کړى شي په $x_{j_1}, \ldots, x_{j_n}$ پسې يې حل کړي، که د جاکوبي- ماتريکس f' درځ يا متېه $j_1, \ldots, j_n$ کرښيزخپلواکه وي.

(Autoren: Höllig/Streit)

توابع

$$(x, y) \mapsto u(x, y) = (f(x, y), y)$$

په ټکي (x_*, y_*) کې د په ځښ تابع جملې وړاندنيونې پوره کوي. په ځا نګړې توګه د x اووښتونو ګڼون يا تعداد د f د کمپوننتونو تعداد په ګوته کوي، او

$$u'(x_*, y_*) = \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ 0 & E \end{pmatrix}_{|(x_*, y_*)}\ ,$$

د E سره يوونماتريکس، په ځښ-يا برعکس کيدونکيدی. له دې امله سړى کړى شي

$$(\varphi(y), y) = u^{-1}(0, y)$$

کيږدي، د u^{-1} سره د u ناپريکيدونکی مشتقوړ برعکس تابع.

د جاکوبي-ماتريکساکسپليڅيت فرمول له

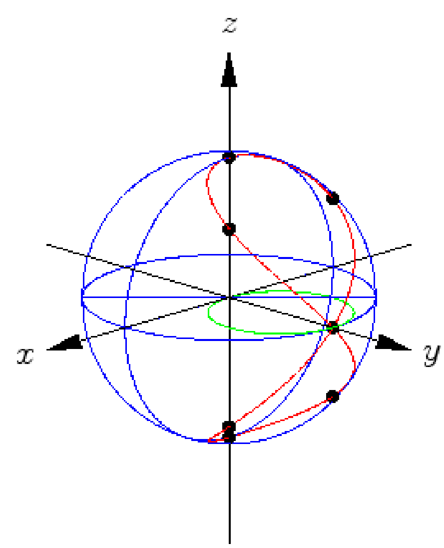
$$0 = (f(\varphi(y), y))_y = f_x\varphi' + f_y \,.$$

لاسته راځي.

د ويواني Vivianische کره يا منحني

$$C: \quad t \mapsto \begin{pmatrix} \sin t \; \cos t \\ \sin(2t) \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi) \,,$$

د توتي يا استواني سره د يوونفضا د غوڅي له لارې لاسته راځي.



په ايمپليخيت بڼې کره د

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= x^2 + y^2 + z^2 - 1 &= 0 \\ g(x, y, z) &= x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} &= 0 \end{aligned}$$

له لارې انځوروړ ده. د ایمپلیځیتتابع جملېسره سړی کړی شي د جاکوبي-ماتریکس

$$\begin{pmatrix} f_x & f_y & f_z \\ g_x & g_y & g_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2x & 2y-1 & 0 \end{pmatrix}.$$

لرلو سره پریکړه وکړي، چې ایا کړه ځان لوکال یا ځاییزد کواوردینات x, y, z څخه د یوې له لارې پارامتریک کیدی شي.

نسبت x ته پارامتریککولو لپاره ، دا په دې معنا چې د y او z پسې حلونه پوره کیدونکېده،داسې چې

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)} = \begin{pmatrix} 2y & 2z \\ 2y-1 & 0 \end{pmatrix}$$

برعکس وړ ده. دا د $z \neq 0$ او $y \neq 1/2$ لپاره حالت دی. سړی لاسته راوړي

$$y(x) = \frac{1}{2} + \delta\sqrt{\frac{1}{4} - x^2}, \quad z(x) = \delta'\sqrt{\frac{1}{2} - \delta\sqrt{\frac{1}{4} - x^2}}.$$

چیرته چې په اړونده توګه د یوګونو ښاخونو مخنخښه $\delta,\ \delta' \in \{-1,1\}$ باید و ټاکل شي.

په ريښتوني دا پارامتریک کونه په ټکو $(0,1,0)^t$، $(\pm 1/2, 1/2, \pm\sqrt{2}/2)^t$ او $(\pm 1/2, 1/2, \mp\sqrt{2}/2)^t$ سینګرلارده. د x پسې

پارمتریک کونې لپاره هندسي اړین دی، چې د تانجنت لور و $(1,0,0)^t$ ته ارتوګونال نه ده، دا په دې معنا چې یو ناساده کمپوننت د x په لور لري.

په ورته توګه نسبت y او z ته د پارامتریکوړوالي لپاره پوره کیدونکیشرطونه لاس ته راځي.

په تکي $(0,1,0)^t$ کې لوکال پارمتریک کیدنه شتون نه لري. کړه دلته دبل ټکی لري. د جاکوبي –ماتریکس

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y,z)}\,|_{(0,1,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

فقط رانګ 1 لري.

د n متحولي یا اوونتوني یوه سکالار تابع f لپاره دا جمله د ایمپیلځیت توابعوپه هکله وایي، چې مساوات

$$f(x_1,\ldots,x_n) = 0$$

د $x \approx x_*$ لپاره د x_k پسې حلکیدی شي، که $\partial_k f(x_*) \neq 0$.
.

د روښانه بیلګې په توګه مسوات

$$f(x,y,z) = xe^y - yz = 0$$

راوړو. ګرادینت دی

$$(f_x,f_y,f_z)^t = (e^y, xe^y - z, -y)^t\,.$$

د $f_x > 0$ له امله $f = 0$ د ټولو (x, y, z) لپاره د x پسې حلوړ دی. دا د مساوات

$$x = yze^{-y}$$

پسې ترلي هم ليدل کيدی

په ورته توګه کتل کيږي، چې د z پسې حل د $y \neq 0$ لپاره هم ممکن دي.

په y پسې مسات ساده نه شي حل کيدی. د ايمپليڅيت توابعو په هکله جمله د (x_*, y_*, z_*) په يوه چاپيريال کې تظمينوي که

$$f_y(x_*, y_*, z_*) = x_* e^{y_*} - z_* \neq 0\,.$$

دا د بيلګې په توګه د مساوات د حل $(0, 0, 1)$ لپاره پوره دی:

$$f_y(0, 0, 1) = -1\,.$$

په تعقيب يی يو تابع φ شتون لري د

$$f(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x, z)\,, \quad (x, z) \approx (0, 1)\,.$$

سره.

سره له دې چې φ اکسپليڅيت د ورکړي وړ نه دی، کيدی شي ګرادينت و ټاکل شي:

$$0 = f(x, \varphi(x, z), z) \Longrightarrow 0 = f_x + f_y \varphi_x\,, \quad 0 = f_z + f_y \varphi_z\,.$$

د راوړل شوي ټکي (x_*, y_*, z_*) کې باور لري

$$\varphi_x(0,1) = -f_x(0,0,1)/f_y(0,0,1) = 1/(-1) = -1$$

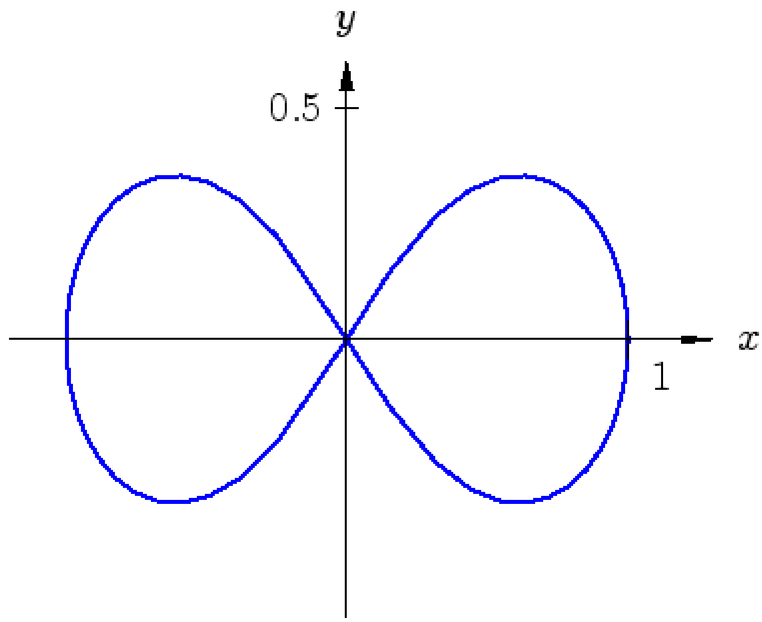
$$\varphi_z(0,1) = -f_z(0,0,1)/f_y(0,0,1) = 0/(-1) = 0\,.$$

(Autor: Höllig)

د بیواریاتت پولینوم p لپاره د

$$p(x,y) = 0$$

له لاربیوه الجبري کړه تعریفیږي. که درجه $p \neq 0$ وي، نو یا x لوکال یو د y تابع دی او یا په څټ. په ټکو کې چې درجه یې ورکیدونکې وي کیدی شي کړه یو سینګولاریټي ولري



د $p(x,y) = y^2 - x^2 + x^4 = 0$ له لارې تعریف شوې لیمنیسکاتې ګرادینت

$$\text{grad}\ p(x,y) = (-2x + 4x^3, 2y)^t$$

فقط په ټکي $(0,0)$ کې په ورکیږي. لکه په خیره کې چې کتل کیږي، نه شي کیدی چې کرږه یواځنۍ په x پسې یا په y پسې حل شي.

په دې $(1,0)$ ټکي او $(-1,0)$ کې تانجنت و x –محور ته ولاړ یا عمود دی. کرږه کړی شي لوکال فقط په x پسې حل شي:

$$x = \sigma \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - y^2}}$$

د $x = \sigma \in \{-1, 1\}$ په چاپيريال کې. برعکس کيدی شي کرہ په ټکو $\pm(1/\sqrt{2}, 1/2)$ کې لوکال فقطد x تابع په څير نه د y په څير ورکړ شي:

$$y = \pm\sqrt{x^2 - x^4}\,.$$

په نورو ټول ټکو (x_0, y_0) کې کيدی شي چې سړی يې هم د x او يا y پسې حل کړي.

بيلګه

$$\frac{dy}{dx} = -p_y^{-1} p_x = \frac{4x^3 - 2x}{2y}$$

ده او

$$y - y_0 = \frac{4x_0^3 - 2x_0}{2y_0}\,(x - x_0)$$

په ټک (x_0, y_0) کې د تانجنت مساوات دي.

(Autoren: Höllig/Streit)

په ناکربنيز مساواتسيستم کې د مخ ته بيونې متود

په يوه د پارامتر تابع مساواتسيستم کې

$$f(x, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

د ناپريکيدونکيمشتقوړ f توټه جاکوبي-ماتريکس f_x سره ناسينګولار دی، نو حلونه

ناپریکیدونکي مشتقوړ د t په واک کې دي. په ځانګړې توګه کیدی شي کرښيز تیلور-ودیزونه

$$x(t+h) \approx x(t) - f_x(x,t)^{-1} f_t(x,t) h$$

د ګاونډیو اپروکسیکیشن لپاره وکارول شي.

دا متود زیات وخت د نیوټن -تګلار د پیل ارزښت د Generierung ته کارول کیږي

لیکوال :هیولیګ، سترایت

د تیلور اپروکسیمیشنTaylor-Approximation

Approximation(لاتین: هغه بل، شمیرپوهنیزه ترې پوهیدنه(مفهوم) نږدېوالی)

د یوه ټکي په چاپیریال کې یو $(a_1, \ldots, a_m)(n+1)$ -ځله ناپریکیدونکی مشتقوړ د m متحولو x_i سکالار تابع f کیدی شي د یوه تیلور-پولینوم له لارې د ټوټال درجي له لارې اپرکسیمیشي:

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \le n} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(a) (x-a)^\alpha + R\,, \quad |x-a| < r\,,$$

د $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_m!$ سره.

پاتې غړی لاندې بڼه لري

$$R = \sum_{|\alpha|=n+1} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(u) (x-a)^\alpha\,, \quad u = a + \theta(x-a)\,,$$

د یوه $\theta \in [0,1]$ لپاره.

د ښووني لپاره د m متحولو د يوه تابع د تيلور وده په يونيواريات حالت بيرته اړولکيږي.
سړی بي د ټوليزو بنديزونو $a = 0$ راوړي او داسې يې ځاي پّ ځای کوي

$$f(x_1, ..., x_m) = f(tx_1, ..., tx_m)|_{t=1} = g(t)|_{t=1}.$$

د يونيواريات تابع $g(t)$ لپاره د تيلور ــوده په صفرټکي کې ده

$$g(t) = g(0) + g'(0)\,t + \cdots + \frac{1}{n!}g^{(n)}(0)t^n + R$$

د

$$R = \frac{1}{(n+1)!}g^{(n+1)}(\theta t)t^{n+1}, \quad \theta \in [0,1].$$

سره.

د ځنځيري قانو پسې لرو

$$\begin{aligned} g(0) &= f(0) \\ g'(0) &= \sum_j (\partial_j f(0))x_j \\ g''(0) &= \sum_i \sum_j (\partial_i \partial_j f(0))x_i x_j \\ &\vdots \end{aligned}$$

دا په دې معنا چې k-م مشتق m^k ترمونه لري. له دوي څخه هغه راټوليږي، په کومو کې چې د يوګونو متحولو پسې برابرزيات واره مشتق ونيول شي.
د بيلګې په توګه د ټولو $m = 2,\ k = 5$ مشتقونو لپاره، کوم چې درې واره د لومړي کمپوننت او دوه واره د دويم کمپوننت پسې مشتق شوی دی، سړی

$$\partial_1\partial_1\partial_1\partial_2\partial_2,\ \ \partial_1\partial_2\partial_1\partial_2\partial_1,\ \ \partial_1\partial_2\partial_2\partial_1\partial_1,\ \ \ldots$$

$\partial^\alpha\ ,\ \alpha=(3,2)$

يوځايراوړي. په ټوليزه توګه په دې کنکريت حالت کې ټوټه مشتق

$\binom{5}{3}=5!/(3!\,2!)$

ترمونه دي. په ټوليزه توګه

$$\binom{k}{\alpha_1}\cdot\binom{k-\alpha_1}{\alpha_2}\cdots\binom{k-\alpha_1-\ \ldots\ -\alpha_{m-1}}{\alpha_m}=k!/(\alpha_1!\ \ldots\ \alpha_m!)$$

ترمونه دي، که د ν -م کمپوننت پسې يي α_ν -ځله مشتق ونيول شي.

که د تابع $g(t)$ دا پورته شميرل شوي مشتقونه د تيلور-وديزيينه کې کيږدو، ضريب يا

ځلوونى $k!$ لنډيږي او سرى لاسته د f غوښتونېوديزينه راوړي.

ليکونکي: بوسلې، هيوليګ، شترايت

د يوه دوه متحولو تابع لپاره تيلور –وديزيينه دا لاندې بڼه لري

$$f(x,y)\ \ f+f_x\,(x-x_0)+f_y\,(y-y_0)=$$

$$+\frac{f_{xx}}{2}\,(x-x_0)^2+f_{xy}\,(x-x_0)\,(y-y_0)+\frac{f_{yy}}{2}\,(y-y_0)^2$$

$$+\frac{f_{xxx}}{6}\,(x-x_0)^3+\frac{f_{xxy}}{2}\,(x-x_0)^2\,(y-y_0)$$

$$+\frac{f_{xyy}}{2}\,(x-x_0)\,(y-y_0)^2+\frac{f_{yyy}}{6}\,(y-y_0)^3+R\,,$$

چېمشتق يې تل په ټکي (x_0, y_0) کې ارزښتول کيږي.

د بيلګې په توګه د

$$f(x,y) = \sin(x - \omega y)$$

او د $(x_0, y_0) = (0,0)$ لپاره د

$$\partial_x^\alpha \partial_y^\beta f(0,0) = \sin^{(\alpha+\beta)}(0)\,(-\omega)^\beta$$

له امله اپروکسيميشن

$$\sin(x - \omega y) =$$

$$= x - \omega y - \frac{1}{3!}\underbrace{(x^3 - 3\omega x^2 y + 3\omega^2 x y^2 - \omega^3 y^3)}_{(x-\omega y)^3} + R$$

د

$$R = \frac{1}{4!}(f_{x^4} + 4f_{x^3y} + 6f_{x^2y^2} + 4f_{xy^3} + f_{y^4})(\theta(x,y))$$

$$= \frac{1}{4!}(x - \omega y)^4 \sin(\theta(x - \omega y)),$$

سره د يوه $\theta \in [0,1]$ لپاره لاسته راوړي.

په بدیل ډول سړی د ټیلور-پولینوم د $t = x - \omega y$ ځاي په ځای کولو له لارې لاسته راوړي د ساین تابع په یوه بعدیز لړئ انځورونه کې:

$$\sin(t) = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots.$$

د $t = x - \omega y$ سره لاس ته راځي

$$f(x,y) = (x - \omega y) - \frac{1}{3!}(x - \omega y)^3 + \frac{1}{5!}\cos(\theta)(x - \omega y)^5,$$

چېرته چې د یونیواریانت پاتې غړي انځورونه کا رول کیږي

لیکونکې: بوسلې، هیولیګ، شترایت

د بیلګې په توګه پولینوم

$$f(x,y,z) = z^2 - xy$$

د $(0,-2,1)$ په ځای کې ودیز کیږي یا تکامل ورکول کیږي. دا له صفر سره نابرابرمشتقونه دي

$$f_x = -y\,,\ f_y = -x\,,\ f_z = 2z\,,\ f_{xy} = -1\,,\ f_{zz} = 2\,.$$

په ودیزوونټکیکې ارزوني د ټیلور-انځوروني

$$1 + 2x + (-0)(y+2) + 2(z-1) + (-1)x(y+2) + \frac{1}{2}2(z-1)^2\,,$$

لاس ته راځي، کوم چې طبعاً د f سره همغګيز دی.

په بديل ډول کيدی شي وديزينه د بڼهبدلون له لارې هم و کتلی شول

$$y + 2 = \eta\,, \quad z - 1 = \zeta$$

او لاس ته راشي

$$f(x,y,z) = (\zeta + 1)^2 - x(\eta - 2) = \zeta^2 + +2\zeta + 1 - x\eta + 2x\,.$$

د هسي ماتريکس Hesse-Matrix

په ټکي $(a_1, \ldots, a_n)$ کې د يوه سکالار تابع f مربعيز تيلور-اپروکسيميشن کيدی شي په بڼه

$$\ldots) = f(a) + (\operatorname{grad} f(a))^t\,(x-a) + \frac{1}{2}(x-a)^t\,\mathrm{H}\,f(a)(x-a) + O(|(x-a)|^3)$$

وليکل شي، د کوم سره چې د سيمتريک هسې- ماتريکس

$$\mathrm{H}\,f(a) = \begin{pmatrix} \partial_1\partial_1 f(a) & \cdots & \partial_1\partial_n f(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_n\partial_1 f(a) & \cdots & \partial_n\partial_n f(a) \end{pmatrix}$$

دويم مشتق خوندي لري.

ليکونکې: بوسلې، هيوليګ، شترايت

کټمتوالی د تيلور-وديزييني د مربع ترمونو د Umschreiben له لارې منځ ته راځي. په بيواريات حالت کې ($n = 2$)

$$f(x,y)= f + f_x\,(x-x_0) + f_y\,(y-y_0)$$

$$+\frac{1}{2!}(f_{xx}\,(x-x_0)^2 + 2f_{xy}\,(x-x_0)\,(y-y_0) + f_{yy}\,(y-y_0)^2) + R$$

$$= f + f_x\,(x-x_0) + f_y\,(y-y_0)$$

$$+\frac{1}{2!}\left((x-x_0)\,,(y-y_0)\right)\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (x-x_0) \\ (y-y_0) \end{pmatrix} + R,$$

دی، د کوم سره چې په بنی اړخ د تابع تعریفدیرئ (x_0, y_0) پریښوول شي یا ونه لیکل شي. باقي یا پاتېغړي

$$R = \sum_{|\alpha|=3} \frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha f(u,v)\,(x-x_0)^{\alpha_1}\,(y-y_0)^{\alpha_2}\,,$$

د

$$(u,v) = (1-\theta)(x_0,y_0) + \theta(x,y)$$

سره د $\theta \in [0,1]$ لپاره د لوي نظم $O(|(x,y)|^3)$ دی.

په تولیز حالت کې شوونه په ورته تګه ده.

لیکونکي: هیولیک، شترایت

د تابع

$$f(x,y)=\ln(x+1/y)$$

لپاره

$$f_x=\frac{1}{x+1/y},\quad f_y=-\frac{1}{xy^2+y},$$
$$f_{xx}=-\frac{1}{(x+1/y)^2},\quad f_{xy}=\frac{1}{(xy+1)^2},\quad f_{yy}=\frac{2xy+1}{(xy^2+y)^2}\,.$$

دی.

په ځانګړې توګه په ټکي $(0,1)$ کې د ګرادینت او د هسې- ماتریکس لپاره لرو

$$\operatorname{grad} f(0,1)=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\quad \mathrm{H}\,f(0,1)=\begin{pmatrix}-1&1\\1&1\end{pmatrix}$$

او له دې سره مربعیز تیلور- وديزيينه

$$\begin{aligned}f(x,y)=&\quad(1,-1)\begin{pmatrix}x\\y-1\end{pmatrix}\\&+\frac{1}{2}(x,y-1)\begin{pmatrix}-1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y-1\end{pmatrix}+O(|(x,y)|^3)\\=&\quad x-y+1+\frac{1}{2}(-x^2+2xy-2x+1+y^2-2y)\\&+O(|(x,y)|^3)\,.\end{aligned}$$

د دې لپاره چې په ټکي $(1,1,1)$ کې د

$$f(x,y,z)=(xy)^z$$

تيلور-وديزيينه وټاکو، شميرولومړى

$$f_x = yz(xy)^{z-1}, \quad f_z = \ln(xy)(xy)^z,$$
$$f_{xx} = y^2 z(z-1)(xy)^{z-2}, \quad f_{zz} = (\ln(xy))^2(xy)^z,$$
$$f_{xy} = z(xy)^{z-1} + xyz(z-1)(xy)^{z-2}, \quad f_{xz} = y(xy)^{z-1} + yz\ln(xy)(xy)^{z-1},$$

(f_y ، f_{yy} او f_{yz} د متحولې د بدليدو له لارې لاسته راځي).

له دې سره لاسته راځي

$$\operatorname{grad} f(1,1,1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{H}\, f(1,1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

او له دې سره سرى لاس ته راوړي

$$f(x,y,z) = 1 + (1,1,0)\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix}$$

$$+\frac{1}{2}(x-1, y-1, z-1)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix}$$

$$+ O(|(x,y,z)|^3)$$

$$= 1 + (x-1) + (y-1) + (x-1)(y-1)$$

$$+(x-1)(z-1) + (y-1)(z-1)$$

$$+ O(|(x,y,z)|^3).$$

ليکونکي: بوسلې، هيوليګ، شترايت

د نيوټن تنلار ***Newton-Verfahren***

د يوه نه کرښيز مساواتسيستم

$$f_1(x_*) = \cdots = f_n(x_*) = 0$$

حل $x_* \in \mathbb{R}^n$ کيدی شي د

$$\begin{aligned} f'(x)\Delta x &= f(x) \\ x &\leftarrow x - \Delta x \end{aligned}$$

له لارې تعريف شوی د نيوټن ايتريشن و ټاکل شي.

که f دوه واره ناپريکيدونکی توګه دفررنځيالوړ او د جاکوبي-ماتريکس $f'(x_*)$ برعکسوړ وي، نو د x_* په يوه چاپيريال U کې د پيل ارزښت لپاره دا تلنلار مربعيز کونورګ يا پولې ته تلونکې ده

$$|x_{\text{neu}} - x_*| \leq c|x_{\text{alt}} - x_*|^2$$

په ځانګړې توګه د $x \in U$ لپاره $\det f'(x) \neq 0$ دی، داسې چې د Δx لپاره دا کرښیز سیستم یوائځنی حل کیدونکی دی.

لیکونکي: هیولیګ، شترایت

د یوه حل x_* لپاره د نږدېوالي x_{alt} څخه په مخ ته تلنه کیدی شي د f کرښیز اپروکسیمیشن له لارې یو ښه شوی نږدیوالی x_{neu} د ټاکل شي، دا په دې معنا چې له

$$0 = f(x_*) = f(x_{\text{alt}}) + f'(x_{\text{alt}})(x_* - x_{\text{alt}}) + R, \quad R = O(|x_* - x_{\text{alt}}|^2)$$

څخه سږی د x_* پسې حل له لارې او باتې غړي پاتې یا لرې کیدو سره د ایتریشنقانون

$$x_{\text{neu}} = x_{\text{alt}} - (f'(x_{\text{alt}}))^{-1} f(x_{\text{alt}}).$$

ګټلی شي.

که لومړی مساوات د $f(x_{\text{alt}})$ پسې حل شي،

$$f(x_{\text{alt}}) = -f'(x_{\text{alt}})(x_* - x_{\text{alt}}) - R,$$

او دا د ایتریشن قانون کې ځا په ځاي کړي، نو لاس ته ترې راځي

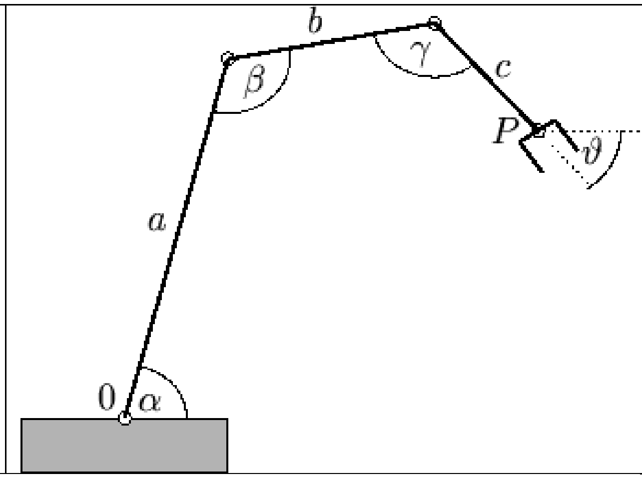
$$x_{\text{neu}} = x_* + (f'(x_{\text{alt}}))^{-1} R.$$

د $f(x)$ د ناپریکیدني او مشتقوړوالي په بنسټ $\left|(f'(x))^{-1}\right|$ په یوه د x_* چاپیریال U کې محدود یا رابند دی او له دې سره

$$|x_{\text{neu}} - x_*| = \left| \left(f'(x_{\text{alt}})\right)^{-1} R \right| \le c\,|x_{\text{alt}} - x_*|^2 .$$

لیکونکي: بوسلې، هیولیګ، شترایت

د نیوټن-تلنلارد دې د کتنې لپاره یو
ساده روبوتر په کاراچول
ترخیرنې لاندې نیسو.
دا څیره یا عکس یو د روبوتر لاس
ښایي له درې څرخون بندونو سره.
له دې سره د پوزیشن یا ځاي
P او ϑ د اخرې برخې
لوریزوالی د بندونود کونجونو α،
β، γ نا کرښیز تابع q دې:



$$\begin{aligned}
q_1(\alpha,\beta,\gamma) &= a\cos(\alpha) + b\cos(\alpha+\beta-\pi) + c\cos(\alpha+\beta+\gamma-2\pi)\\
q_2(\alpha,\beta,\gamma) &= a\sin(\alpha) + b\sin(\alpha+\beta-\pi) + c\sin(\alpha+\beta+\gamma-2\pi)\\
q_3(\alpha,\beta,\gamma) &= \alpha+\beta+\gamma-2\pi.
\end{aligned}$$

د څرګندو ارزښتونو $a=3,\ b=2,\ c=1$ لپاره د

$$\beta' = \alpha+\beta, \quad \vartheta = q_3 = \alpha+\beta+\gamma-2\pi$$

بدلون یا سبستیچیوشن له لارې سرې دا ناکرښیز سیستم لاس ته راوړې

$$\begin{aligned}
0 = f_1(\alpha,\beta') &= p_1 - 3\cos\alpha + 2\cos\beta' - \cos\vartheta\\
0 = f_2(\alpha,\beta') &= p_2 - 3\sin\alpha + 2\sin\beta' - \sin\vartheta\,.
\end{aligned}$$

د روبوتر لاس ارام حالت $\tilde{p}=(2,2)^t$، $\vartheta=-\pi/2$ حل $\alpha_0=\pi/2$، $\beta_0'=\pi$ په ګوته کوي د جاکوبي-ماتریکس

$$f'(\alpha_0, \beta_0') = \begin{bmatrix} 3\sin\alpha_0 & -2\sin\beta_0' \\ -3\cos\alpha_0 & 2\cos\beta_0' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} .$$

سره.

و ګاونډي ځاي $\vartheta = -\pi/4$، $p = (2,3)^t$ ته رسيدني ته د نيوټن-تنلارد لومړي پل لپاره دې کرښيز مساواتسيستم

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\alpha \\ \Delta\beta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} ,$$

حل شي. له دې سره لاس ته راځي $\Delta\alpha = -\sqrt{2}/6\,,\ \Delta\beta' = -\sqrt{2}/4$ او سړی لاس ته راوړي

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Delta\alpha \\ \Delta\beta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi/2 + \sqrt{2}/6 \\ \pi + \sqrt{2}/4 \end{pmatrix} .$$

په پوزيشن p کې ناتيکاوی له دې سره همدا اوس په

$$f(\alpha_1, \beta_1') \approx (0.1172,\, 0.0976)$$

راکم شو.

بويلې، هيوليک، شترايت

کريیکال ټکي يا افراطي(که انحرافي) ټکی Kritischer Punkt

د یوه سکالار تابع f لپاره سړی x افراطي ټکی بولي، که ګراد یا درجه $f(x)=0$ grad وي. که دوه واره ناپریکیدونکی مشتقوړ وي، نو د افراطي ټکي تیپ یا ډول، دا په دې معنا چې د تابعګراف د x په یوه چاپیریال کې د هسي-ماتریکس له لارې ټاکل کیږي. د $\mathrm{H}\,f(x)$ د ایګن ارزښتونو λ_i د مخنخښې له امله د لاندې ترمنځ توپیر کوي:

- هواره ټکی(یعنې په یوه سطحه پروت-) : ټول ایګن ارزښتونه λ_i صفر دي.

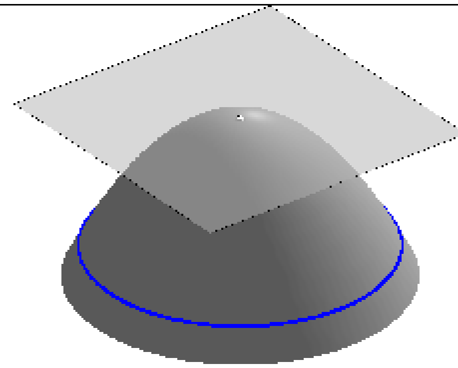
- هګېډوله یا بیضوي ټکی: ټول ایګن ارزښتونه λ_i د صفر سره نامساوي دي او برابرېیا همغه مخ نخښې لري. تابع f په دې حالت کې په x کې یو ځایز(لوکال) افراتیت لري

- هایبراپاربولیک ټکی : ایګن ارزښتونه λ_i شته د مختلفو مخنخښو سره. سړی x زینټکی هم بولي.

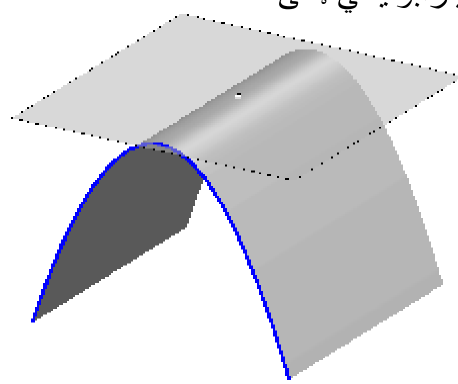
- پارابولیک ټکی: لږ تر لږه یو ایګن ارزښت λ_i صفر دی اونور ټول ا یګن ارزښتونه برابره مخنخښه لري.

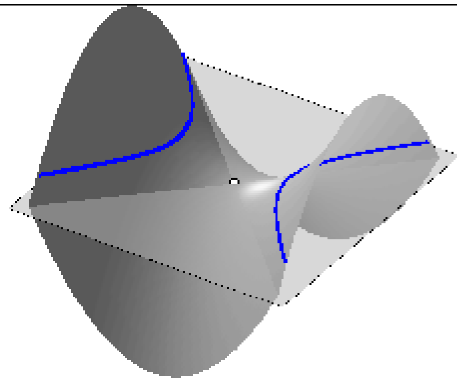
په نخښهوني یا نوموني د جګکرښې له لارې په بی واریات حالت کې پاموړ یا جالبې دي، لکه دا چې په ځیره کې کښل شوې دي.

بیضوي ټکی	های پارابولیکي ټکی



پارابولیکي ټکی





د دوه متحولو یا اووښتونو د تابع ته
کیدی شي ډول یا ټیپ د هسي-ماتریکس
د دیترمینانت سره ټولګیز کړو. که
$< 0 \quad \det(\mathrm{H}\, f) > 0$
وي،نو ادا (   )
یو افراطیت دی(یو زینتکی دی).
د یوه مینیموم همداسي ماکسیموم لپاره
$< 0 \qquad \mathrm{Spur}(\mathrm{H}\, f) > 0$
همداسي
دی. که دیترمینانت له منځه لاړه یا
ورکه شي او هسي- ماتریکس صفرنه
وي، نو ټکی پارابولیک دی.

لیکونکي: هیولیګ، وایس

د تابع

$$f(x, y) = y(1 - x^2 - y^2)$$

افراطي(کریتیکي kritischen) ټکي همداسي تیپ وټاکل شي. د دې لپاره سرې لومړی ګرادینت جوړوي او بیا د هسي – ماتریکس:

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} -2xy \\ 1 - x^2 - 3y^2 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{H}\, f = \begin{pmatrix} -2y & -2x \\ -2x & -6y \end{pmatrix}.$$

له

$$\operatorname{grad} f = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad xy = 0 \quad \wedge \quad x^2 = 1 - 3y^2$$

څخه د انحرافي ټکي په څير

$$\left(0, \pm 1/\sqrt{3}\right), \qquad (\pm 1, 0),$$

لاسته راځي. د هسي ماتريکس هر ځل دلاندې سره برابر دی

$$\begin{pmatrix} \mp 2/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & \mp 6/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & \mp 2 \\ \mp 2 & 0 \end{pmatrix}$$

د $(x,y) = (0, \pm 1/\sqrt{3})$ لپاره دی $\det(\mathrm{H}\, f) > 0$ او

$$\operatorname{Spur}(\mathrm{H}\, f) = \mp 8/\sqrt{3}\,.$$

له دې سره په $(0, -1/\sqrt{3})$ کې يومينيموم او په $(0, 1/\sqrt{3})$ کې يو ماکسيموم شتون لري.

د $(x,y) = (\pm 1, 0)$ لپاره باور لري

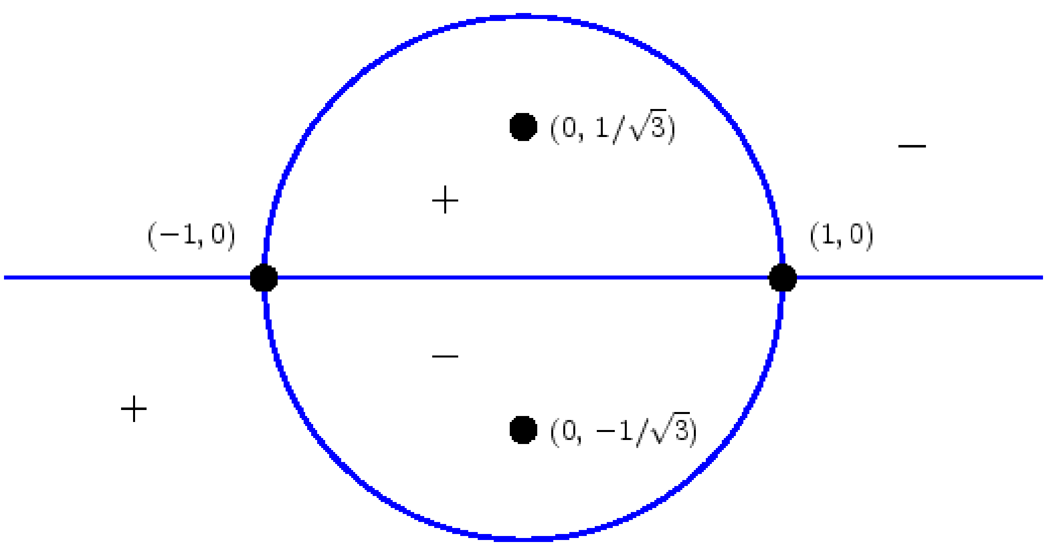
$$\det(\mathrm{H}\, f) = -4 < 0\,,$$

نو دلته يو زينټکی شته.

د کريميکيټکو تيپ کيدی شي د صفرځايتوکواو د f له دې څخه ورکړ شوو مخنخښنو وېشنو له لارې وپيژندل شي. د f ضرب بڼې لاس ته راځي

$$f(x,y)=0 \quad\Longleftrightarrow\quad y=0 \quad\vee\quad x^2+y^2=1\,,$$

داا په دې معنا چې د صفرځايديرئ د x –محور G او يونګردئ C څخه جوړ دی. د G يا C پل اړولو سره مخنخښه بدليږي. په غوښتکوکي $\operatorname{grad} f$ ورکيږي، ځکه لورمشتقونه د G او C په اوړدوالي کې صفر دي. د مخ نخښې بدليدنې په بنسټ دا يو زينتکی دي. د يوون)واحد)ګردئ تيکلي په نيمايي، چې د صفرتکيدېرئ څخه يي ژئ جوړېږيو بايد هر ځل يو افرطيت شتون ولري، ځکه چې ډيرئ کړمپکت ده او f په ژئ صفر دی. د مثبت تابع ارز/شت سره دا يو ماکسيموم دی او د منفي سره يومينيموم.



ليکونکي: بوسلي، هيوليګ

د تابع

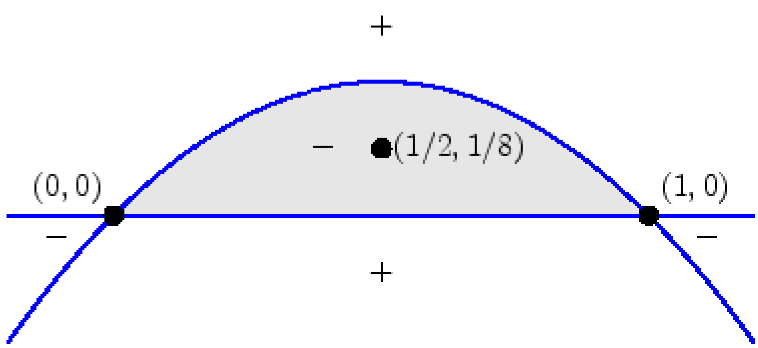
$$f(x,y)=(y-x+x^2)y$$

لپاره

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} (-1+2x)y \\ 2y - x + x^2 \end{pmatrix}$$

دی.

دا انحرافي ټکي critical pointله دې امله $(0,0),\ (1,0),\ (\frac{1}{2},\frac{1}{8})$ دي. تیپ یا ډول کیدی شي د f د مخنځبني ویش ځخه وټاکل شي.



د x –محور سره د پارابولونو غوڅېدکي(د تقاطع نقطي) زین ټکي دي، ځکه چې په f چاپیریال کې زیایز(مثبت٩ او کمیز(منفي) ارزښتونه شتون لري. په خړه روشو ؟؟ کې صفر په ژئ یا غاړه دی او کمیز ارزښت په دننه کې، باید هلته لږترلږه یو ځایز یا لوکال مینیمومشتون ولري.

شمیرپوهنیزدا تبوپیا ډول د هسي-ماتریکس په مرسته فصدیقیدی شي.

$$\mathrm{H}\, f = \begin{pmatrix} 2y & 2x-1 \\ 2x-1 & 2 \end{pmatrix}.$$

د انتقادي یا انحرافي ټکیلپاره لاس ته راوړو

$$\mathrm{H}\, f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{H}\, f(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{H}\, f(1/2,1/8) = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

په لومړيو داوړو ټکو کې د هسي-ماتريکسديترمينانت کميز دی، ټکي لکه انتظار چې کيده زينټکي دي. په $(1/2,1/8)$ کې ديترمينانت او شپور Spur زياتيز يا مثبت دي، پس دلته يو ځايز يا لوکال مينيمومو لرو

(Autoren: Höllig/Reble)

د ډېرو متحولو- يا مولتيوارياتو توابعو افراطيت

xtrema multivariater Funktionen

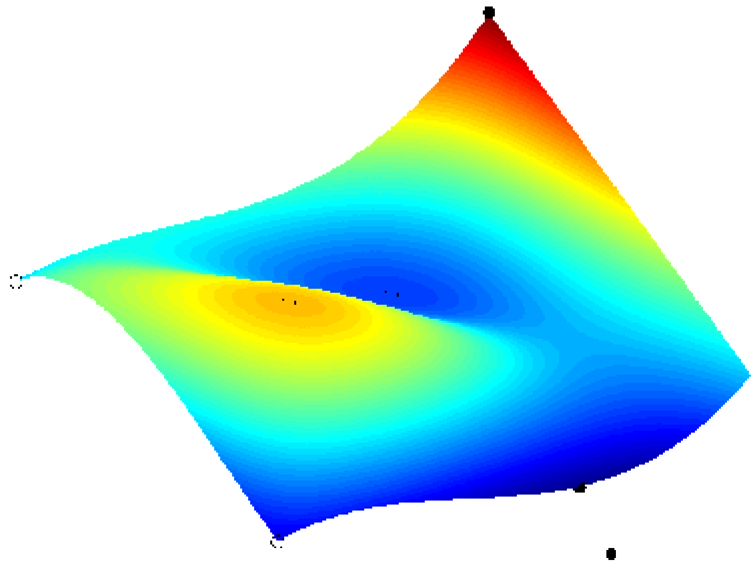
که $f(x_*)$ د x_* په يوه چاپيريال د يوه ناپريکيدونکي مشتقوړ سکالار تابع f مينيموم(ماکسيموم) وي، نو باور لري

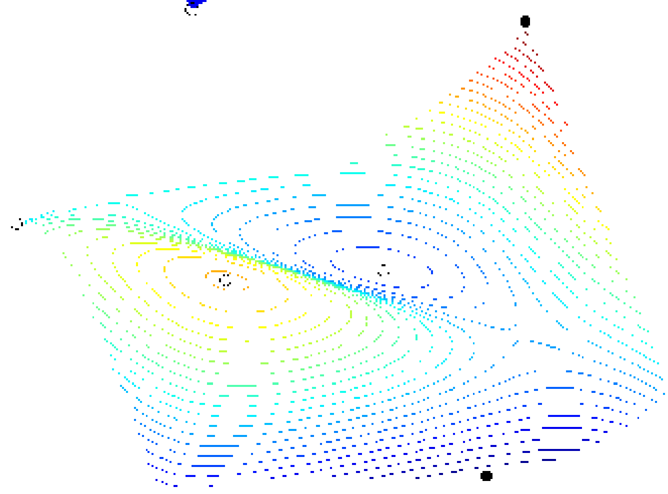
$$\operatorname{grad} f(x_*) = 0\,.$$

يو پورهکيد ونکيشرط دی، چې برسيره پردې د هسی-ماتريکس ټول ا يګن ارزښتونه په انحرافتکي x_* زياتيز يا مثبت(کميزيا منفي) وي.

که ايګن ارزښتونه د مختلفومخنخښو سره شتونولري، نو دا يو زينتکی دی، يعنېځايز يل لوکال افراطيټکی نه دی. که د صفر سره نابرابرو ايګن ارزښتونو د برابر منخنخښي سره لږتر لږه يو ايګن ارزښت صفر وي، نو د احرافي يا انتقادي اټکي x_* تيوپ يا ډول د دويممشتق له لارې نه شي ټولګيز(صنفي) کيدی يعنې چې په کومه ډله يا ټولګي کې دی. ځاييز مينيموم(ماکسيموم) کيدی شي د تعريف ورشو D د ژئ ټکو په ځير هم رامنځ ته شي. په دې حالت کې بايد لوريز مشتق $\partial_v f(x_*)$ د D په منفي ښودونکي لپاره لور v مثبت(منفي) وي.

د يوه سکالار تابع f يو ځاييز افراطي ټکی په يوه ډيرئ D يا انحرافي ټکی دی(دا په دې معنا چې $\operatorname{grad} f = 0$)، يو ژئ ټکی يا د ټوټه – پارشل مشتق پريکيدونکی ځای دی. کيدی شي په دې ځايونو کې مينيموم او ماکسيموم په دې ټکو کې د تابع ارزښتونو د پرتلې له لارې وشميرل شي.





ځيرونه يا تابع مختلف امکانات ښايي. دلته ځاييز افراطي ټکي په ګردئ او
ګلوبال يا ټوليز افراطي ټکي په ټکو سره په نخښه شوي دي.

ليکونکي: بوسلي، هيوليک، وايس

د کرښو په اوږدو تابع f راوړو او د په خوښه لور v لپاره تعريفوو

$$g(t) = f(x_* + tv)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

که f په x_* کې يو ځايیز افراطيت ولري، نو g په $t = 0$ کې يو افراطيت لري.

پايله يې ده

$$0 = g\prime(0) = (\operatorname{grad} f(x_*))^{\mathrm{t}} v = \partial_v f(x_*) .$$

دا چې v په خوښه ټاکلی وو، بايد گرادينت په x_* کې ورکشي.

د مينيموم لپاره د f تعريفورشو تنها په ژئ لاس ته راځي، چې د D په دننه لور ښودونکي وکتور v لپاره لوريز مشتق ورکيږي. تنها په داسې لورو g د $t = 0$ په يوه چاپيريال کې په يوه ښې اړخيز چاپيريال کې يو غږيز جگيدونکی دی. د يوه ما کسيموم لپاره په ورته توگه دلا يل راوړل کيږي

که $\mathrm{H}\, f(x_*)$ فقط مثبت ايگن ارزښتونه ولري، نو د وکتور v لپاره د $|v| = 1$ سره باور لري

$$v^{\mathrm{t}}\, \mathrm{H}\, f(x_*) v \geqslant c > 0 .$$

د دويم مشتق د ناپريکيدنې له امله دا چاپيريال د c په ځای کې د يوې ثابتې $c/2$ سره همداسې د x_* په يوه چاپيريال U کې ټيک پاتې کيږي. د g د تيلور- وديزييني سره لاس ته راځي

$$g(t) = g(0) + \underbrace{g\prime(0)t}_{=0} + \frac{1}{2} g''(\theta t) t^2$$

د $\theta \in [0,1]$ سره. د

$$g''(\theta t) = v^{\mathrm{t}}\, \mathrm{H}\, f(x_* + \theta t v) v^{\mathrm{t}}$$

له امله د 0 په نږدې کې د t لپارهلاس ته راځي

$$g(t) \geqslant g(0) + (c/2)t^2 ,$$

دا په دې معنا چې f په هره لور په x_* کې يو ځا ييز مينيموم لري. د ماکسيموم د پوره کيدونکو شرايطو د لاس ته راوړلو لپاره په ورته توګه مخ ته تلل کيږي.

ليکونکي: هيوليګ، وايس

د مربع تابع

$$f(x) = \frac{1}{2}x^t Ax - x^t b + c$$

ګرادينټ د سيومتري ماتريکس A سره دی

$$\text{grad } f = Ax - b$$

او A د هسې-ماتريکس دی. ځاييز يا لوکال افراطي ځايونه د کرښيز مساوات سيستم $Ax = b$ حلونه دي.

که د A ا يګن ارزښتونه مثبت يا منفي وي، نو $\det A \neq 0$ دی او د مساوات $Ax = b$ يواځنی حل د f يواځنی ځاييزاو همداسې تولیز افراطيت دی.

د ځرګندې بيلګې لپاره

$$f(x, y) = \frac{3}{2}x^2 + 2xy + \frac{3}{2}y^2 + x + 4y - 3$$

دی

$$A=\begin{pmatrix}3&2\\2&3\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}-1\\-4\end{pmatrix}.$$

د

$$\left(\begin{array}{cc}3&2\\2&3\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}x\\y\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}-1\\-4\end{array}\right)$$

حل $(x,y)=(1,-2)$ دی. دا چې $\det A=5$ او $\operatorname{Spur} A=6$ مثبت دي،
نو A مثبت ایګنارزښت لري،او (x,y) د f تولیز مینیموم دی

لیکونکي: هیولیګ، وایس

غواړو د تابع

$$f(x,y)=\cos x+\cos y+\cos(x+y)\,.$$

ځاییز اکسترما پیدا کړو، چې f نسبت x او y ته 2π-پریودیک دی او پسې هم

$f(y,x)=f(x,y)=f(-x,-y)$ بسیا کوي،چې د f $(-\pi,\pi]\times[0,\pi]$.
په ورشوکې وڅیړو. د ټوټه مشتق ژئ ټکي او پریکیدنځایونه په پام کې نه نیول کیږي. نو
باید انحرافي ټکي پیدا شي.

له

$$\operatorname{grad} f=\begin{pmatrix}-\sin x-\sin(x+y)\\-\sin y-\sin(x+y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

لاس ته راځي $\sin x=-\sin(x+y)=\sin y$، نو د $y\in[0,\pi]$ لپاره په
ځانګړې توګه $x=y$ یا $y=\pi-x$. دواړه امکانات یو له بل بیل څیړل کیږي.

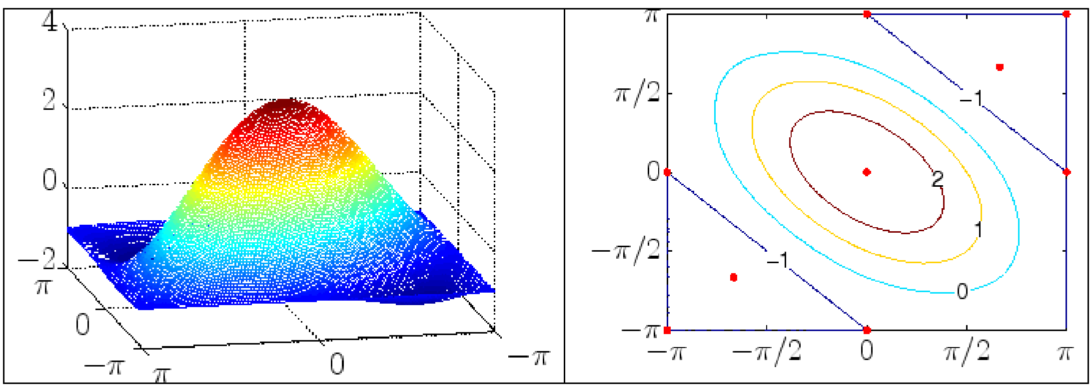
(i) له $x = y$:

$$\sin x = -\sin(2x) = -2\sin x\cos x$$

په اړونده ورشو کې انحرافي ټکي $(0,0)$، (π,π) او $\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$ لاس ته راځي.

(ii) $y = \pi - x$:

له $\sin(x) = -\sin(\pi) = 0$ انحرافي ټکي $(0,\pi)$ او $(\pi,0)$ لاس ته راځي.



د تابع ارزښتونو د پرتلې څخه، چې د مشتق څخه رانیول کیدی شي، پېژندل کیږي، چې $(0,0)$ یو ځاییز ماکسیموم د ارزښت $f(0,0) = 3$ سره دی او $\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$ یو تولیزمینیموم د ارزښت $f\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{3}{2}$ سره دي.

د بل انحرافي ټکي ډول یا ټیپ کیدی شي د هسي ماتریکس Hesse Matrix

$$\mathrm{H}\, f = \begin{pmatrix} -\cos x - \cos(x+y) & -\cos(x+y) \\ -\cos(x+y) & -\cos y - \cos(x+y) \end{pmatrix}$$

سره وټاکل شي. په ټکي (π,π) کې

$$\mathrm{H}\,f = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

دی.

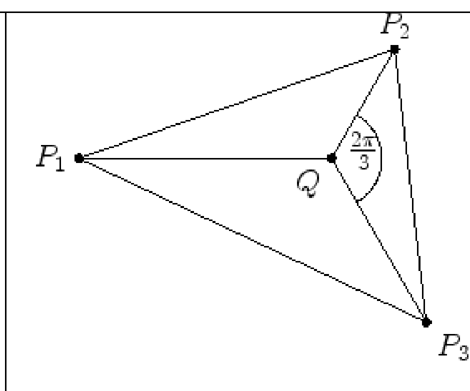
دا چې دیترمینانت منفي دی،نو دا یو زینټکی دی. ټکي $(\pi,0)$ او $(0,\pi)$ د سیومتري له امله یو بل سره enstsprechenورکوي. د هسې-ماتریکس

$$\mathrm{H}\,f = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{H}\,f = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

هم منفي دیترمینانت لري. له دې امله هم دا یو زینټکی دی.

نو په ټولیزه توګه ټکي $(2k\pi,2l\pi)$ ($k,l\in\mathbb{Z}$) د ټولیز ماکسیموم او ټکي $(\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\frac{2\pi}{3}+2l\pi)$ همداسې $(-\frac{2\pi}{3}+2k\pi,-\frac{2\pi}{3}+2l\pi)$ د ټولیزمینیموم په حیث لاس ته راځي

لیکونکي: هیولیګ، وایس

	د شتاینرSteiners پرابلم په دې کې پروت دی،چې یو ټکی $Q\in\mathbb{R}^2$ وټاکي، د کوم لپاره چې ورکړ شوو ټکو P_i د واټنونو زیاتون یا جمعه مینیمال شي.دا ساده ځانګړی حالت یې په ځیره کې ورکړ شوی دی. د درې ټکو P_1 ، P_2 ، P_3 لپاره Q یا د یوه ټکي سره سر

خوري يا د ټول ټکو جوړو لپاره دی $\sphericalangle(P_i, Q, P_j) = 2\pi/3$	

د دې لپاره چې غوښتل شوی خویونه(خوي) وښایو، d_i دي د $Q = (x, y)$ او $P_i = (x_i, y_i)$ ترمنځ واټن وښايي، دا په دې معنا چې

$$d_i^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 \,.$$

د ځنزيريقانون له مخې لاسته راخ

$$2d_i \frac{\partial d_i}{\partial x} = 2\,(x - x_i)$$

لاسته راځي. همداسې

$$\frac{\partial d_i}{\partial x} = \frac{x - x_i}{d_i}$$

اوپه اړونده ډول $\frac{\partial d_i}{\partial y} = \frac{y - y_i}{d_i}$. د واټن تابع ګرادينت ،

$$\operatorname{grad} d_i = \frac{1}{d_i} \begin{pmatrix} x - x_i \\ y - y_i \end{pmatrix} ,$$

له دې امله يويوون يا واحد وکتور دی، کوم چې له P_i د ټکي Q په لور ښايي.

د

$$f = d_1 + d_2 + d_3$$

مينيموم به شي

ماکسيموم د له ټکو P_i څخه په يوه کې و نه نيول شي، په کومو کې چې $\operatorname{grad} d_i$ پريکيدونکيدی، نو بايد په مينيموم کې

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

باورولري. د وکتورګرادينت د برابر اوږدوالي په بنسټ له دې لاسته راځي، چې که دا يو په بل کينول شي يو برابراړخيزدرېګوډی جوړوي. د دوي ترمنځ کونج له دې امله برابره دی په $2\pi/3$.

ليکونکي: بوسلي، هيوليک، وايس

د لانګرانژ ضريبونه(څلووني) *Lagrange-Multiplikatoren*

که د څنګيزو شرايطو $g_i(x) = 0$ لاندې x_* د سکالار تابع f يوځايز افراطي ځای وي، نود لاګرانژ ضريب λ_i شتون لري، داسي چې

$$f'(x_*) = \lambda^{\mathrm{t}} g'(x_*) \,.$$

دلته وړاند نيونه کيږي، چې f او g د x_* په يوه چاپيريال کې ناپرېکيدونکي مشتقوړ دي او د جاکوبي-ماتريکس $g'(x_*)$ پوره رانګ لري.

د فقط يوه فرعينژ – شرايط ساده بنه

$$\operatorname{grad} f(x_*) \parallel \operatorname{grad} g(x_*) \,,$$

لري که $\operatorname{grad} g(x_*) \neq 0$ وي،د ا په دې معنا و چې د f او g نیوو سطحې یو بل په افراطي ځای کې لمسوي.

د لاګرانژ شرطونه پوره کیدونکینه دي، چې پریکړه وکړي، چې یو لوکال افراطیت مو مخ ته پروت دی او یا مینمومو یا ماکسیموم دی. دا د نورو معلوماتو په مرسته کره کیدی شي.

ټولیزه افرا طیت د توابعو د پرتلي په اساس په ټکو کې کیدی شي، کوم چې د لاګرانژ شرطونه پوره کړي، کوم چې په ورکړ شوي حالت کې هغه د ورکړ شوې ډیرئ په ژئ او یا د g' په رانګ ضایع سره.

لیکونکي: بوسلي، هیولیګ، وایس

n دې د اووښتونو ګڼونن یا تعداد وي او m دې فرعي یا څنګیز شرایط وي.

د $m \geq n$ لپاره نه ښوول کیږي، ځکه چې یو په خوښه n–وکتور د n د کرښیز کمبینشن په حیث د g' دکرښیزو خپلواکو لیکو په څیرانځوروړ دی.

د $m < n$ لپاره دې $x = (u, v) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ یو د اووښتونو یا واریبلو ټوټه ونه وي، د کوم سره چې د ممکنه پرموتیشن د $g_u(u_*, v_*)$ په څټوړوالی یا برعکس وړوالی له وړاندې نیول شوی وي. نو د ایمپلیځیت تابع جملې د فرعي شرایطو له مخې ځاییز حلوړ دی:

$$g(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = \varphi(v), \quad v \approx v_* .$$

په تعقیب په یوافراطي ټکي د تابع $v \mapsto f(\varphi(v), v)$ ګرادینت ورکیږي:

$$f_u(u_*, v_*)\varphi'(v_*) + f_v(u_*, v_*) = 0 .$$

د ځنګيز يا فرعي شرايطو $g(\varphi(v), v) = 0$ مشتقيدو له لارې پسې لاسته راځي

$$\varphi'(v) = -g_u(u,v)^{-1} g_v(u,v) .$$

په ګرادينت کې د φ' اينووولو پسې کتل کيږي، چې د

$$\lambda = f_u(u_*, v_*) g_u(u_*, v_*)^{-1}$$

سره مساوات

$$f_u = \lambda g_u , \quad f_v = \lambda g_v ,$$

کوم چې د $f' = \lambda g'$ شرايطو u - او v -کمپوننتونه په ګوته کوي، په ټکي (u_*, v_*) کې پوره دي.

ليکونکي: هيوليک، وايس

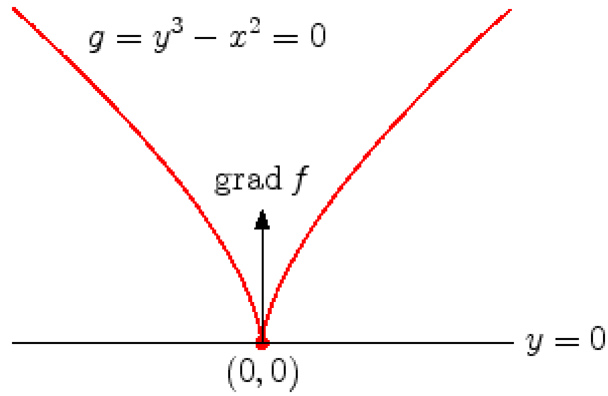
تابع

$$f(x,y) = y$$

لاندې فرعي شرطونه لري

$$g(x,y) = y^3 - x^2 = 0$$

په څرګند ډول په $(0,0)$ کې يو ځايېز يا لوکال مينيموم.



په هر حالت د لاګرنز-شرطونه $(f_x, f_y) + \lambda(g_x, g_y) = 0$ نه دي پوره:

$$(0,1) + \lambda(-2x_*, 3y_*^2) \neq (0,0).$$

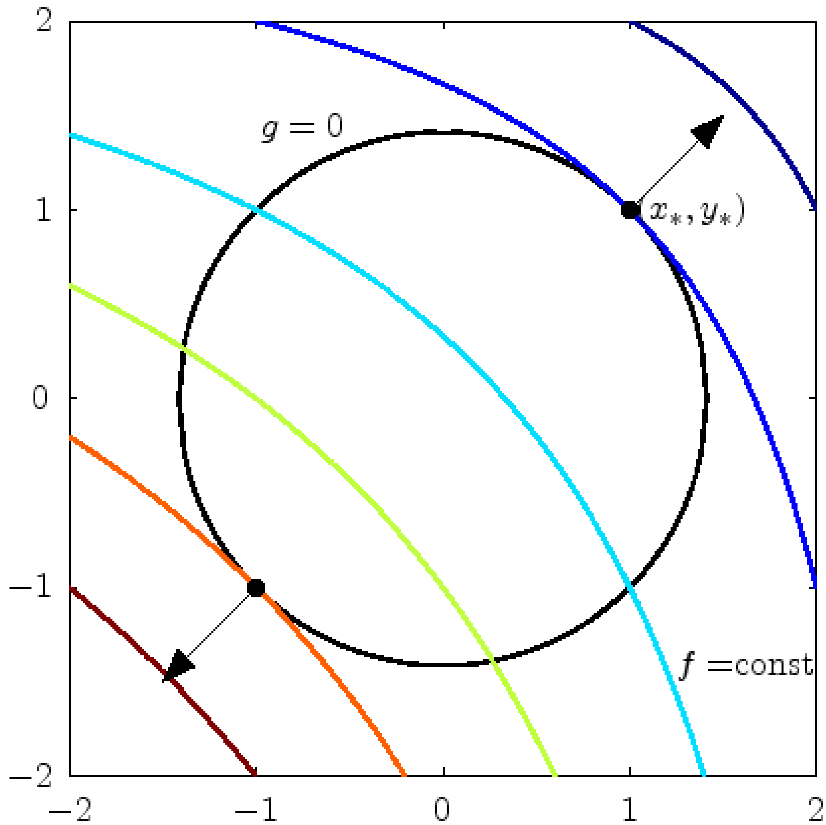
دا له دې امله چېږ جاکوبي-ماتریکس $g'(x_*, y_*) = (0,0)$ پوره رانک نه لري. د g ځاییز حالت د جګ نظم ترمونو له لارې تشریح دي. د لاګرانژ-شرطوه په داسي یوه سینګولار ټکي کې استعمالوړ نه دي.

لیکونکي: هیولیک، وایس

د یوه بیواریات تابع $f(x,y)$ د افراطي ځای لپاره د فرعي یا ځنګیزو شرایطو $g(x,y) = 0$ لاندې باور لري

$$(f_x, f_y) = \lambda(g_x, g_y),$$

دا په دې معنا چې ګراد g وګراد f ته غبرګ دی. د نورو کلمو سره د f د نیو سطحې په ټکي (x_*, y_*) کې د g له لارې تعریف شوې کرېږ سره تانجتني ده یا تانجنت جوړوي.



په ځيره کې په روښانه توګه ښوول شوې بيلګه کې

$$f(x,y) = (x-3)(y-3) \to \min\,, \quad g(x,y) = x^2 + y^2 - 2 = 0$$

د لاګرانژ-شرايط په لاندې توګه دي

$$(y-3, x-3) = \lambda(2x, 2y)\,.$$

د λ له منځه وړنه راکوي

$$y(y-3) - x(x-3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (y-x)(x+y-3) = 0\,.$$

د فرعي شرايطو $x^2 + y^2 - 2 = 0$ سره په تړاو ممکنه افراطي ځايونه $(1,1)$ او $(-1,-1)$ لاس ته راځي. دا چې يوناپريکيدونکی تابع په يوه کومپکته ډيرئ هم

مینیموم او هم ماکسیموم لري، د تابع ارزښتونو پرتله يې ښايي، چې f په $(1,1)$ کې مینیمال او په $(-1,-1)$ کې ماکسیمال کيږي.

ليکونکي: هيوليک، وايس

د

$$f(x,y,z) = x + 2y - z$$

افراطييت غاړو پيدا کړو د لاندې فرعي شريطو لاندې

$$x^2 + y^2 - 8 = 0, \quad x + z - 4 = 0\,,$$

کوم چې د توتې(استواني) غوڅې(تقاطع) د يوې سطحې سره يوه هګۍ تشريح کوي يا ورکوي.

د فرعي طريطو لاندې د جاکوبې-ماتريکس دی

$$\begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

دا فقط د $x = y = 0$ لپاره پوره رانګ نه لري. دا حالت د فرعي سرايطو په اساس نه شيرامنځ ته کيدی. يوه افراطيت (x,y,z) ته پسې هر ځل د لاګرانژ-ضريبونه λ_1, λ_2 داسې شتون لري،چې

$$(1,2,-1) = (\lambda_1, \lambda_2) \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

همداسې

$$2\lambda_1 x + \lambda_2 = 1$$

$$2\lambda_1 y = 2$$

$$\lambda_2 = -1\,.$$

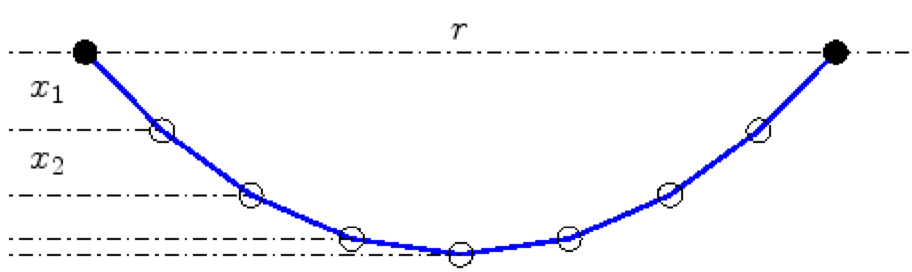
که $\lambda_1 = 1/y$ او $\lambda_2 = -1$ په لومړي برابرون یا مساوات کې ځای په ځای شي، نو $x = y$ ترې لاسته راځي. د فرعي شرایطو څخه ممکنه افرطیت $(2,2,2)$ او $(-2,-2,6)$ لاس ته راوړل کیږي. دا چې په هګئ باندې مینیموم او هم ماکسیموم باید شتون ولري، د تابع ارزښت

$$f(-2,-2,6) = -12 < 4 = f(2,2,2)\,,$$

پرتله کونه یې ښایي، داسې چې f په $(-2,-2,6)$ کې مینیمال او په $(2,2,2)$ کې ماکسیمال کیږي.

(Autoren: Höllig/Weiß)

اوس دې په دوه ټکو ځوړند شوي ځنزیر د ځنزیر غړي $2n$ سره برابروزنځای د 1 ا
وږدوالي سره وټاکی شي.



د ځيرې څخه په نخښهونې سره مو د پوتنشل انرژي مينيمي کوني يا کمونې ته بيايي

$$-\left(\frac{x_1}{2}\right)-\left(x_1+\frac{x_2}{2}\right)-\cdots-\left(x_1+\cdots+x_{n-1}+\frac{x_n}{2}\right)$$

په دې پرابلم د سيومتري په استعمال

$$f(x)=-a_1x_1-\cdots-a_nx_n\to\min\,,$$

$$g(x)=r/2-\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1-x_i^2}=0\,,$$

د $a_i=n-i+1/2$ سره.

د لاگرانژ-شرطونه په لاندې توگه دي

$$a_i=\lambda\frac{x_i}{\sqrt{1-x_i^2}}\,,\quad i=1,\ldots,n\,.$$

دا کيدی شي د x_i پسې مربع(څلورئ-) کونې سره حل شي:

$$x_i^2=\frac{a_i^2}{a_i^2+\lambda^2}\,.$$

په فرعي شريطو کې د اينوولو سره لاندې برابرون راکوي

$$\frac{r}{2}=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{\lambda^2}{a_i^2+\lambda^2}}\,,$$

له هغه چې λ او له دې سره x_i نومريکټاکل کيدی شي.

مربعیزه(څلورئ ییزه) مینیمال کونه د کربنیز برابرونشرلیطو سره

Quadratische Minimierung mit linearen Gleichungsbedingungen

مربعیزه اوپټیمي کونې پرابلم Optimierungsproblem

$$\frac{1}{2}x^{\mathrm{t}}Gx - c^{\mathrm{t}}x \to \min, \quad Ax = b\,,$$

تیک هلته حل کیدونکې دی، که وکتور b د ماتریکس A په څېره- ورشو کې پروت وي او سیومتریک ماتریکس G د A په زړي مثبت سیمیدیفینیت وي.

تول حلونه x_* د لاګرانژ-شرطونه

$$\begin{pmatrix} G & A^{\mathrm{t}} \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_* \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ b \end{pmatrix}$$

د یوه لاګرانژ-ضریب λ سره پوره کوي. حل یواځنی دی، که $\operatorname{Kern} A \cap \operatorname{Kern} G = 0$ وي.

که G برعکس کیدونکی وي، ن و کیدی شي بلاکسیستم په ګډه یا په دله حل شي.

سړی لومړی د لاګرانژ –ضریب ټاکي

$$AG^{-1}A^{\mathrm{t}}\lambda = AG^{-1}c - b$$

او له

$$Gx_* = c - A^{\mathrm{t}}\lambda.$$

اوپتیمال وکتور لاسته راوړي.

دا داسې په نامه د شور-کمپلیمنت-متود Schur-Komplement-Methode په ځانګړې توګه هلته موخه ور دی، که G^{-1} ساده وټاکل شي او یا فقط فرعي شرایط شتون ولري.

لیکونمکي: هیولیګ، هیورنر، پفایل

Q دې یو ماتریکس وي، چې مټه یا درز یې د A د زړي لپاره یو بنسټ جوړوي، او y یو وکتور چې اجازه ولري، دا په دې معنا چې $Ay = b$. یو اجازه وکتور x کیدی شي چې په لاندې بڼه ولیکل شي

$$x = y + Qz$$

.

که په موخه تابع کې ولیکل شي نو لاس ته ترې راځي

$$(Qz)^{\mathrm{t}}Gy = y^{\mathrm{t}}GQz$$

$$\frac{1}{2}z^{\mathrm{t}}Q^{\mathrm{t}}GQz - (Q^{\mathrm{t}}c - Q^{\mathrm{t}}Gy)^{\mathrm{t}}z + \frac{1}{2}y^{\mathrm{t}}Gy - c^{\mathrm{t}}y\,.$$

د دې مربع تابع یو مینیموم z_* تیک هلته شتون لري، که $Q^{\mathrm{t}}GQ$ مثبت دیفینیت وي، او په دې حالت کې پوره کړي

$$Q^{\mathrm{t}}GQz_* = Q^{\mathrm{t}}(c - Gy)\,.$$

دا چې دی

$$Q^{\mathrm{t}} u = 0 \Leftrightarrow u \in (\mathrm{Kern}\, A)^{\perp} \Leftrightarrow u \in \mathrm{Bild}\, A^{\mathrm{t}}\,,$$

نو ورته کرکتريسک کيدنه لاس ته راځي

$$G(y + Qz_*) - c = A^{\mathrm{t}}(-\lambda)\,,$$

يعني د لاګرانژ-شرايط.

حل z_* يواځنی دی، که G د A په زړي مثبت ديفينيت وي، يعنې که $\mathrm{Kern}\, A \cap \mathrm{Kern}\, G = 0$ وي.

د ډلي يا بلوک سيستم لاندې باندې gestaffelte اينسوول شوی حل لاس ته راځي، په کوم کې چې لومړی حل

$$Gx_* + A^{\mathrm{t}}\lambda = c$$

د کيڼ لورد AG^{-1} سره ضرب کړي او بدل يا سبستيتوه $b = Ax_*$ يې کړي.

ليکونمکي: هيوليګ، هيورنر، پفايل

د اوپتيمي کوني پرابلم حل غواړو پيدا کړو

$$x^2 + 2xy + 2y^2 + 4x \to \min$$

د لاندې فرعيشرايطو لاندې

$$x - 2y = 1\,.$$

دا پرابلم $\frac{1}{2}x^t Qx - c^t x \to \min$ ، $Ax = b$ د

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A = (1, -2), \quad b = 1 .$$

سره په ګوته کوي

په ساده توګه اجازه لرونکي ټکي شتون لري او دا چې Q مثبت ديفينيت دی،يو واځنی حل (x_*, y_*) شتون لري، کوم چېډ لاګرانژ ــشرايطو

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_* \\ y_* \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ټاکل کيدی شي. لاسته راځي

$$x_* = -\frac{2}{5}, \quad y_* = -\frac{7}{10}, \quad \lambda = -\frac{9}{5} .$$

ليکونکي : هيوليګ، وايس

د بيلګي په توګه مربع تابع

$$\frac{3}{2}x_1^2 + 4x_1x_2 - \frac{3}{2}x_2^2 + x_3^2 - 5x_1 + 4x_3$$

د فرعي شرايطو

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = -2$$

لاندې مينيمي کيږي

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = -2$$

د

$$G = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = -2$$

دا پرابلم لاندې ستاندارد بڼه لري

$$\frac{1}{2}x^{\mathrm{t}}Gx - c^{\mathrm{t}}x \to \min, \quad Ax = b\,.$$

د دې پرابلم حل باندې چې پريکړه کوو، نو لومړی د A د زړي لپاره يوبنسټ يا باسيس $\{q_1, q_2\}$ ټاکو:

$$(q_1, q_2) = Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

بيا جوړوو

$$S = Q^{\mathrm{t}}GQ = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

دا چې د S ديترمينانت او شپور مثبت دی، نو S مثبت ديفينيت دی، او له دې سره د اوپټيميريکولوپرابلم يو يواځنی حل لري. دا کيدی شي د کون-تکر-شرطونو Kuhn-Tucker-Bedingungen سره و ټاکل شي:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ \hline 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} x_{*,1} \\ x_{*,2} \\ x_{*,3} \\ \hline \lambda \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 5 \\ 0 \\ -4 \\ \hline -2 \end{array}\right).$$

سړی $x_* = (1,0,-3)^t$ او $\lambda = 2$ لاس ته راوړي.

په بدیله توګه سړی کړی شي د شور-کمپلمنت-متودوکاروي.

سړی لومړی ماتریکس G برعکس کوي:

$$G^{-1} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 25/2 \end{pmatrix}.$$

بیا د برابرون $AG^{-1}A^t\lambda = AG^{-1}c - b$ څخه سړی λ ټاکي:

$$-\frac{1}{2}\lambda = -3 + 2 \implies \lambda = 2.$$

د کون-ټرکر-شرایط مو لومړی برابروندله یا -ګروپ

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{*,1} \\ x_{*,2} \\ x_{*,3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\lambda = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix},$$

مو بیرته حل $x_* = (1,0,-3)^t$ ته بیایي.

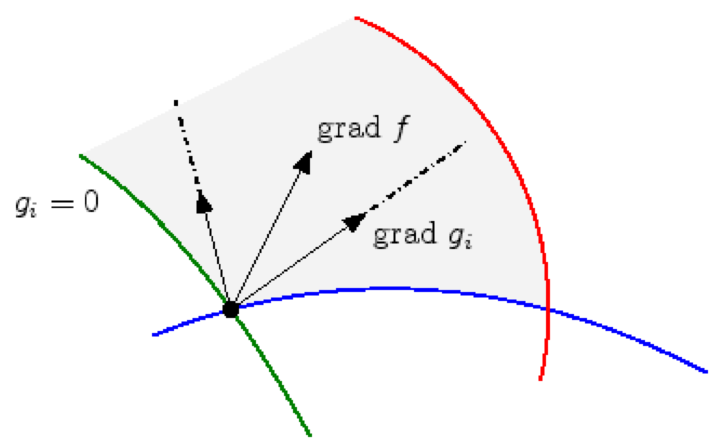
لیکونمکي: هیولیګ، هیورنر، پفایل

د کون-تکر-شرطونه(*Kuhn-Tucker-Bedingungen*)

که x_* د فرعي شرايطو $g_i(x) \geq 0$ لاندې د سکالار تابع f يو مينيموم وي او د فعال برابرونونو $g_i(x_*) = 0$ ، $i \in I$ گرادينت کربشيز خپلواک وي، نو د لاگرانژ-ضريبونه $\lambda_i \geq 0$ شتون لري، داسي چې ترې لرو

$$\operatorname{grad} f(x_*) = \sum_{i \in I} \lambda_i \operatorname{grad} g_i(x_*) .$$

د لوکال ماکسيموم لپاره په ورته توګه $\lambda_i \leq 0$ دی.



د مينيموم لپاره د کون-تکر شرطونه ځمککچيز يا هنسي په دې معنا دي، چې د موخه تابع ګرادينت چې د فعال فرعي شرايطو ځخه خور شوی مخروط (کربنه ، کربنه) کې پروت دی.

پيژنددیری يا ايندکسديرئ I کيدی شي ايمپليخيت د شراطو

$$\lambda^{t} g(x_*) = 0 , \qquad \lambda \geq 0 ,$$

لاندې کره شي. که $g_k(x_*) > 0$ وي،نو لرو $\lambda_k = 0$ ، دا په دې معنا چې ناساده يا ناتريويال ضريبونه فعال شرايط په ګوته کوي.

ليکونکي: هيوليګ، وايس

سرې بايد د x_* په چاپيريال کې فعال شرايط په پام کې ونيسي، ځکه چې نابرابرونونه $g_j(x) > 0$ ، $j \notin I$ په يوه د x_* چاپيريال کې ټيک پاتيږي. تابع f په روښانه توګه په يوه وړه ډيرئ هم مينمال پاتيږي، چې د برابرون شريطو $g_i(x) = 0$ له لارې ورکول کيږي. له دې امله د لاګرانژ-ضريبونوجملې څخه غوښتل شوی کټمټوالی لاس ته راځي. اوس فقط بايد وښوول شي، چې $\lambda_i \geq 0$.

کيدی شي د يوه $k \in I$ لپاره (وړاند) نيونه $\lambda_k < 0$ مو تضا د يا مخامخوالي ته بوزي. د ګرادينت د کرښيز خپلواکوالي يو وکتور v شتون لري د

$$(\operatorname{grad} g_k(x_*))^{\mathrm{t}} v = 1, \quad (\operatorname{grad} g_i(x_*))^{\mathrm{t}} v = 0,\ i \in I \backslash k\,,$$

سره، چې د g_i ، $i \neq k$ له لارې تعريف شوې سطحې تنجنتي هوارې (سطحی) باندې پروت دی. $t \mapsto x(t)$ دې په سطحه يوه کږه(منحني)وي د پيل ټکي $x(0) = x_*$ او پيل لور $x'(0) = v$ سره. د $t \to 0$ لپاره دی

$$g_k(x(t)) = g_k(x_*) + \left((\operatorname{grad} g_k(x_*))^{\mathrm{t}} v\right)\, t + O(t^2) = 0 + t + O(t^2)\,.$$

په کږه باندې ټکي د پوره کيدونکي کوچني $t > 0$ لپاره پريښودونکي (يعنې اجازه لرونکي) دي:

$$g_k(x(t)) \geq 0, \quad g_i(x(t)) = 0,\ i \in I \setminus k\,.$$

د v جوړښت له مخې او f کتمتوالي لپاره دی

$$\frac{d}{dt}f(x(t))_{|t=0} = (\operatorname{grad} f(x_*))^{\mathrm{t}} v = \lambda_k(\operatorname{grad} g_k(x_*))^{\mathrm{t}} v = \lambda_k < 0\,.$$

تابع fد کربښي په اوږدوالي کميږي، د $f(x_*)$ د مينيمالوالي سره په تضاد يا مخامخ.

ليکونکي: هيوليگ، وايس

د کون-ترکر-شرايطو ښوولو ته د تابع $f(x,y) = y^2 - x$

افراطيت د

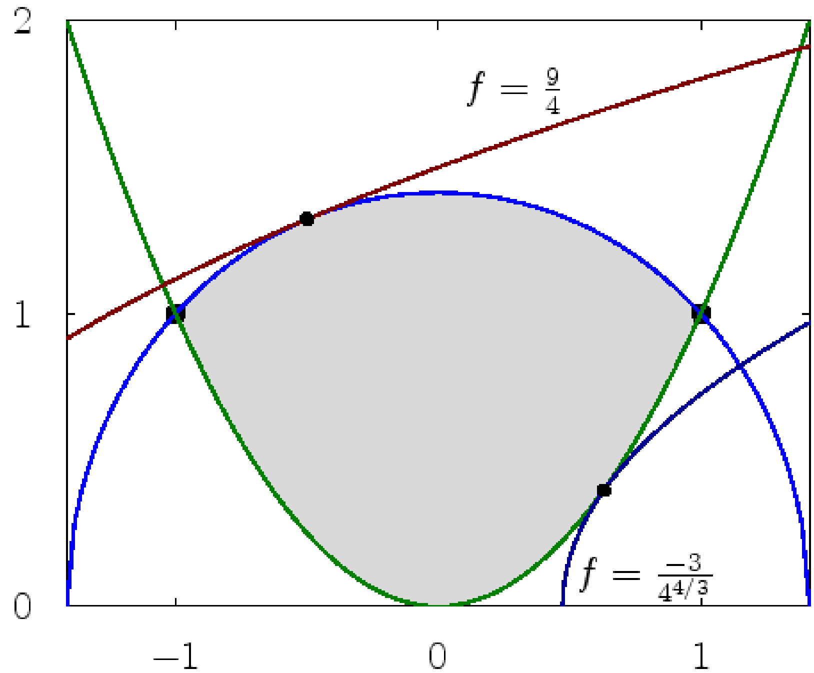
$$y - x^2 \geq 0\,, \quad 2 - x^2 - y^2 \geq 0$$

له لارې په تعريف شوي رونځړ ډيرئ D باندې ټاکو.

د کون-تکر-شرطونه دي

$$(-1, 2y) = \lambda(-2x, 1) + \mu(-2x, -2y)$$

$$\lambda(y - x^2) + \mu(2 - x^2 - y^2) = 0\,,$$



چیرته چي د لاګرانژ- ضریبونه λ او μ برابرې یا همغه مخنخښي لري. د څېرې څخه پېژندل کیږي، چې د معال څن\یز شرایطو د ټولو اجازه لرونکو ټکو لپاره کرښیز خپواک دي)(دا صفر نه دي او د ژیکړې په غوښتکو غبرګ نه دي).له دط امله د کون-تکر شرایط د ټولو اکستریم ارزښتونو لپاره اړیندي. په دې توګه یا داسې چې کوم څنګیز شرطونه فعال دي، باید لاندې حالتونه وپیژندل شي:

(i) $\lambda = 0 , \quad \mu = 0$ (کوم څنګیز شرط فعالنه دی):د $\operatorname{grad} f$ لپاره مساوات

$$(-1, 2y) = (0,0)$$

د پوره کېدوور نه دی. په دې لاس ته راړنه د D په دننه کې f اکستریما نه لري.

(ii) $\lambda = 0 , \quad \mu \neq 0$) $2 - x^2 - y^2 \geq 0$ فعال): له

$$(-1,2y)=\mu(-2x,-2y)$$

$$2-x^2-y^2=0$$

په تعقیب $\mu=-1<0$ ($y=0$ د $(\pm\sqrt{2},0)\notin D$ له امله ناشونی دی)،

$x=-1/2$ او $y=\sqrt{7}/2$. د یوه لوکال اکتریموم لپاره د کون – تکر – شرطونه پوره دي.

$\mu=0$, $\lambda\neq 0$ (iii) ($y-x^2\geq 0$ فعال): له

$$(-1,2y)=\lambda(-2x,1)$$

$$y-x^2=0$$

لاس ته راځي

$$\lambda=2y=2x^2\geq 0\,,\quad -1=(2x^2)(-2x)\Leftrightarrow x=4^{-1/3}$$

او $y=4^{-2/3}$.

د کون-تکر-شرطونه د یوه لوکال اکستریموم لپاره پوره دي.

$\mu\neq 0$, $\lambda\neq 0$ (iv) ($y-x^2\geq 0$ او $2-x^2-y^2\geq 0$ فعال): له

$$y=x^2\quad\wedge\quad x^2+y^2=2$$

لاس ته $(x,y)=(1,1)$ راځي يا $(x,y)=(-1,1)$. د $\operatorname{grad} f$ لپاره په مساوات کې ځای په ځای کوو نو راکوي

$$(-1,2)=\lambda(-2,1)+\mu(-2,-2) \quad \Rightarrow \quad \lambda=1\,, \quad \mu=-\frac{1}{2}$$

همداسې

$$(-1,2)=\lambda(2,1)+\mu(2,-2) \quad \Rightarrow \quad \lambda=1/3\,, \quad \mu=-\frac{5}{6}$$

د لاګرانژ ضرب د مختلفومخنخښنو له امله یا په بنسټ دواړه ټکي اکستریم ځایونه نه دي.

دا چې f په کومپاکت ډېرئ D هم ماکسیمومو او هم مینیموم لري، کېدی شي په ډول يې د لاګرانژ مخنخښې په لاس پرېکړه وشي یا هم د تابع ارزښتونو د پرتلې په اساس. په تعقیب f په $(-1/2,\sqrt{7}/2)$ کې یو ماکسیموم او په $(4^{-1/3},4^{-2/3})$ کې یو مینیموم لري.

لیکونکي: هیلیک، پفایل

د مینیمي پرابلم لپاره

$$f(x)\to\min\,, \quad a_i\le x_i\le b_i$$

د کون-تکر-شرطونه د لوکالمینیموم لپاره

$$\operatorname{grad} f(x_*)=\sum_i\,(\lambda_i-\mu_i)\,e_i$$

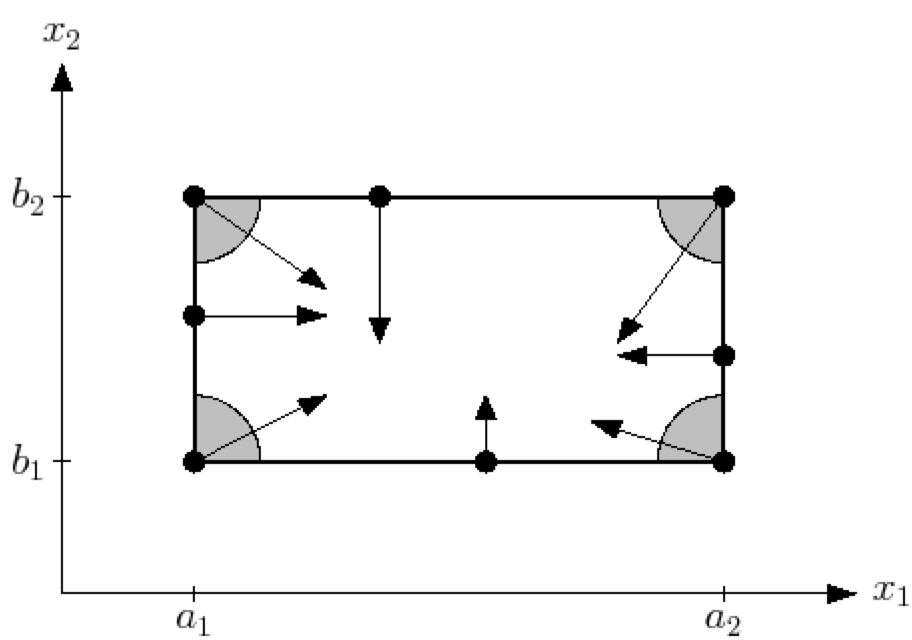
$$\lambda_i\,,\,\mu_i\ge 0$$

$$\lambda^{\mathrm{t}}\,(x_* - a) + \mu^{\mathrm{t}}\,(b - x_*) = 0$$

دي د e_i د i -م یوون-یا واحدوکتور سره. له دې سره ارزښتونه $\pm\infty$ د انتروال د پولې په توګه پرېښوول شوی یعنط نجازه لري، داسط چې ټولې متحولې یا اووښتونې د همغه ډول نامساوات پوره کوي.

که $a_i < x_{*,i} < b_i$ وي، نو نودواړه د لاګرانژ-ضریبونه λ_i او μ_i صفر دي او له دې سره د $\operatorname{grad} f(x_*)$ i -م کمپوننت g_i. برعکس که یو له دې نامساواتو د x_i لپاره فعال وي، په اړونده توګه د لاګرانژ-ضریب د g_i مخنخښه کره کوي:

$$x_{*,i} = a_i \ \rightarrow\ g_i \geq 0\ ; \quad x_{*,i} = b_i \ \rightarrow\ g_i \leq 0\,.$$



تابع د بیواریات موخه فنکشن لپاره د $\operatorname{grad} f(x_*)$ ممکنه لورې ښايي د مینیموم لپاره پهٔ اړخونو د $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ په ګوډونو يا کونجونو. د مینیموم لپاره د ولاړګوډېز يا مستطيل په دننه کې $\operatorname{grad} f(x_*) = 0$ باور لري.

ليونکي: هیولیک، پفایل

د يوه کربښيز تابع

$$(c_1, \dots, c_n)x \to \min$$

مینیموم د کربښيزو فرعي شرطونو لاندې

$$Ax \geq b$$

د يوه $m \times n$ -ماتريکس A سره سړی مربښيز پروګرام ښايي.

يو حل $x_* \in \mathbb{R}^n$ د کون-تکر-شرطونه پوره کوي

$$c^t = \lambda^t A, \quad \lambda^t (Ax_* - b) = 0$$

د $\lambda_i \geq 0$ سره.په ورته توګه د ماکسیموم لپاره $\lambda_i \leq 0$ باور لري.

د روښانه بيلګې

$$x + y \to \min, \qquad x \geq 2, \qquad y \geq 1, \qquad x + 2y \geq 8$$

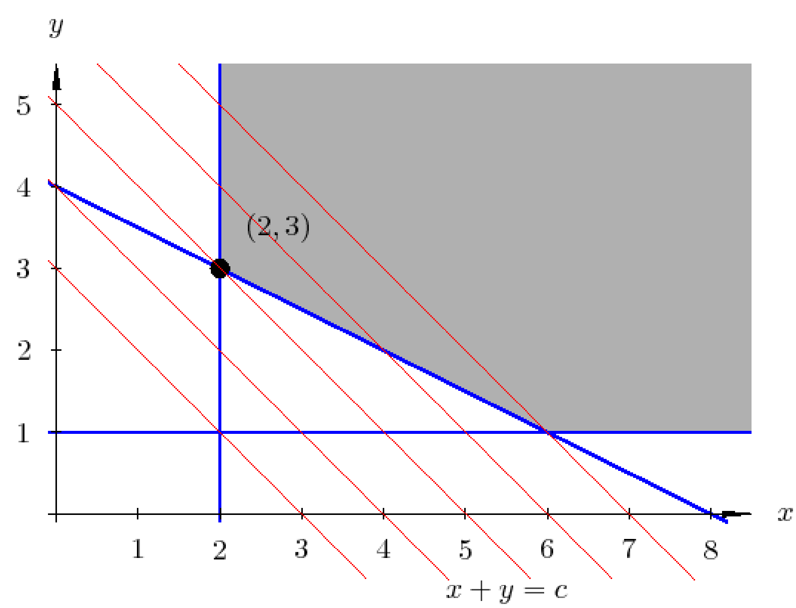
لپاره دی

$$c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

او سړی د کون-تکر-شرایط لاس ته راوړي

$$1 = \lambda_1 + \lambda_3, \qquad 1 = \lambda_2 + 2\lambda_3, \qquad \lambda_1[x-2] + \lambda_2[y-1] + \lambda_3[x+2y-8] = 0$$

د $\lambda_i, [\dots] \geq 0$ سره. سړی زر پیژندلی شي، چې تیک یو د لاګرانژ -ضریب باید صفر وي، چط په بل ډول په شرایطو کې یو تضاد باید رامنځ ته شي. په دې درې حالتونو کې دوه فرعي شرایط فعال دي. دا (x,y) یواځنی کره کوي:



$$\lambda_1 = 0 \longrightarrow (6,1) \qquad \lambda_2 = 0 \longrightarrow (2,3) \qquad \lambda_3 = 0 \longrightarrow (2,1)$$

له دې سره $(2,1)$ فرعي شر طونهنه پوره کوي او د $\lambda_1 = 0$ لپاره $(2,1)$ او $\lambda_3 = 1$ راکوي، دلته د لاګرانژ د ضرب د همغط یا برابرې مخنخښي اړیین شرطونه

نه دې پوره.د تابع مينيموم په $(2,3)$ نيول يا فرض کيږي. په دط حالت کې د لاګرانژ – ضريبونه داسې دي $\lambda = (1/2,0,1/2)^t$.

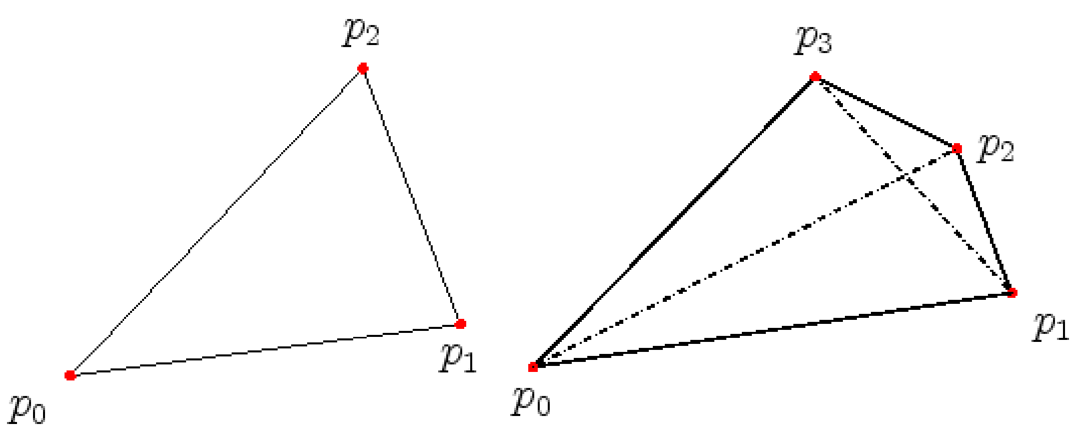
يوځمککچيز يا هدسي جوړښت په ځيره کط ښوول شوی دی. حل ټکی $(2,3)$ دی، په کوم کې چې د موخه تابع سطحيزې کرښې معتبره ورشو لمس کړي. دا روښانه ده چې موخه تابع جګيږي(ټيټيږي)، که سطحيزه کرښه دا معتبره ساحه غوڅه(غوڅه نه) کړي.

ليکونکي: بوسلي، هيوليګ

سيمپلکسSimplex

يو n–بعديز(پراخېدونی) سيمپلکس S د $n+1$ ټکو $p_0,\ldots,p_n$ يو konvexe Hülle ده، چې دا ټول په يوه $(n-1)$-بعديز لاندې فضا کې نه دي پراته:

$$S = \{x = \sum_j \alpha_j p_j \,:\, \sum_j \alpha_j = 1,\ \alpha_j \geq 0\}$$



n=2 n=3

دوه- او درېبعدیز سیمأبمکسونه د درې ګوډي همداسې تیترایدر بلل کیږي.

د یوه سیمپلکس ډکی یا حجم د وکتورونو $p_i - p_0\,,\ i = 1, \dots, n$ د دیترمینانت په مرسته افاده کیدی شي:

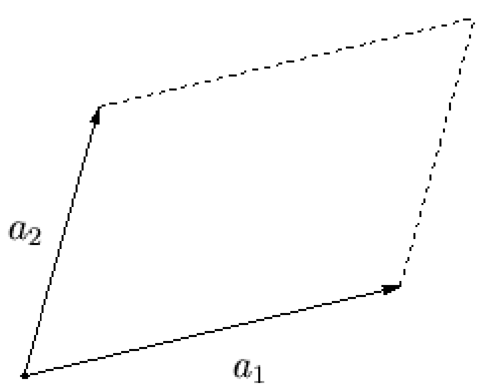
$$\operatorname{vol} S = \frac{1}{n!} \left| \det(p_1 - p_0, \dots, p_n - p_0) \right| .$$

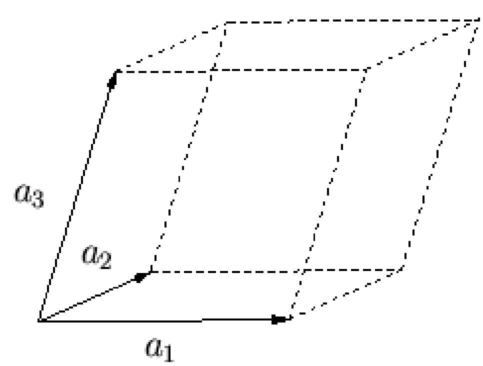
(Autoren: Boßle/Höllig/Streit)

غبرګ اپیپید(غبرګ اړخیز یا مکعبنما)Parallelepiped

یو n -بعدیز (یا پراخیدونی)غبرګ اپیپید P د n کرښیزو وکتورونو a_i څخه غزیږي:

$$P = \{x = \sum_i \alpha_i a_i : \ 0 \le \alpha_i \le 1\} .$$





n=3 n=2

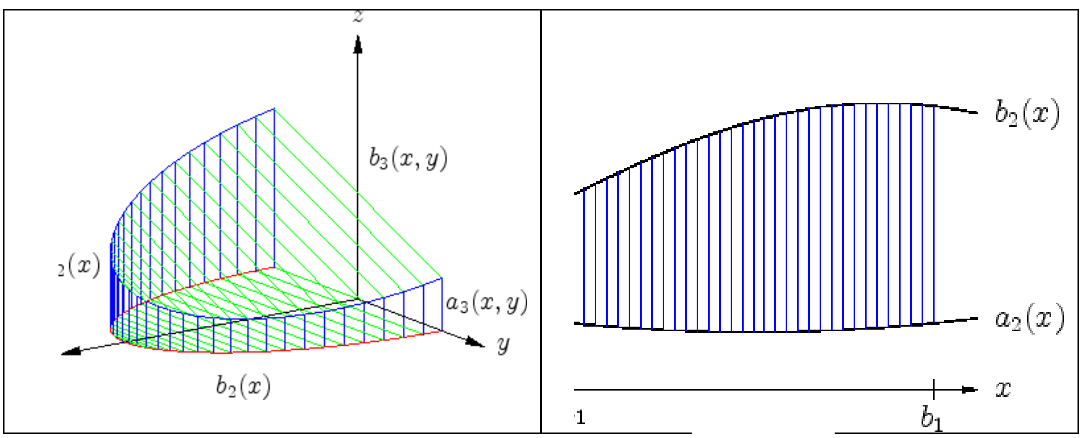
دوه – او درې بعديزغبرګ خواييز غبرک اړخيز همداسې شپاات بلل کيږي.

د غبرګخواييزوډکی(حجم) د ترې غزيدلووکتورونو د ديترمينانت مطلق ارزښت دی:

$$\mathrm{vol}\, P = |\det(a_1, \ldots, a_n)| \,.$$

ليکونکي: هيوليګ، شترايت

د انتيګريشن ورشو



يوه بنستسزه ورشو $V \subseteq \mathbb{R}^n$ د يوه مناسب کواورديناتسيستم ترانسفورميشن $x \to x'$

پسې د د ناپريکيدونکو توابعو a_i او b_i ګراف له لارې رابند دي:

$$\begin{aligned}
&a_1 \le x_1' \le b_1 \\
&a_2(x_1') \le x_2' \le b_2(x_1') \\
&\vdots \\
&a_n(x_1', \ldots, x_{n-1}') \le x_n' \le b_n(x_1', \ldots, x_{n-1}')
\end{aligned}$$

د بنسټیز ورشوګانو یو تر زئکړو یا منحنیو پای ټولنه رګولار ورشو بلل کیږي. د دې لپاره یو ځاګړی حالت یو سیمپلکس دی چې پولیګونالورشو څخه جوړ وي:

لیکونکي: بوسلی، هیولیک، شترایت

د هوزدورف واټن Hausdorff-Abstand

په یوه متریکیفضا M کې د یوې ډیرئ U لپاره د متریک d سره کیدی شي د

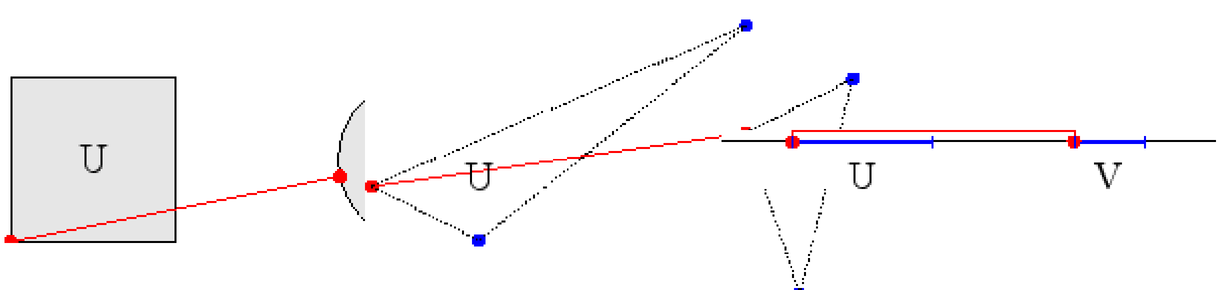
$$\operatorname{dist}(x,U)=\inf_{u\in U} d(x,u)$$

سره د واټن و ته بلل کیږي. په ټولیزه توګه د د وه ډیریو هوزدورف-واټن په لاندې توګه تعریفیږي

$$\operatorname{dist}_H(U,V)=\max\left(\sup_{u\in U}\operatorname{dist}(u,V),\ \sup_{v\in V}\operatorname{dist}(v,U)\right).$$

)لیکونکي: هیولیک، شترایت

په لاندې ځېره کې د ډېریو U او V لپاره یوڅو جوړې په هرکې ټکې په نخښه شوې، د هوزدورف –واټن همدایې داویکلید متریک نیول کیږي.



لکه د بيلګو څخه چې ليدل کيږي، $\mathrm{dist}_H(U,V)$ د دوه ټکو U او V لنډ واټن نه دی

ليکونکي : هيوليګ، شترايت

Mehrdimensionales Integral

ډېر بعديز(ډېر پراخيدونی) انتيګرال

په يوه رګولار ورشو د يوه ناپريکيدونکي تا بع f انتيګرال کيدی شي د ريمن جمعي د پولي په څير تعريف شي:

$$\int_V f\,dV = \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_i f(P_i)\Delta V_i\,, \quad \Delta V_i = \mathrm{vol}(V_i)\,.$$

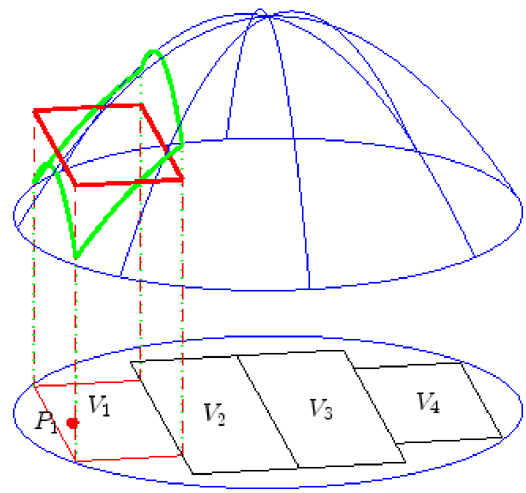
له دې سره د (توکي) پرديو ساده ورشوګانو V_i (په ټوليزه توګه سيمپليکسونو يا غبرګ ايپيپيدونو) ټولنې يا اتحاد له لارې V اپروکسمې کيږي، دا په دې معنا چې د V او $\bigcup_i V_i$ د هوزدورف – واټن د صفر په لورهڅيږي. د $|\Delta|$ سره کيدی شي د V_i ماکسيمال کچونه په نخښه شي، P_i په خوښه ټکي په V_i کې دي.

د ليکنې ډول $\Delta V_i \to dV$ د پولې پروسې سومبولي کول دي، او dV سرې ډکی يا حجم بولي. په لنډ ډول $\int_V f$ هم ليکو يا په مفصل ډول

$$\int_V f\,dV = \int_V f(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_n\,,$$

که څوک د انتیکریشن متحولې راباسي.

د f ناپرېکېدني په اساس د ریمن انتیګرال تعریف هم د توکو ورشوګانو V_i او هم له ټکي P_i خپلواک دی.



د یوه زاتیز یا مثبت تابع لپاره انتیګرال د ډېرئ ډکی یا حجم دی.

$$\{(x_1,\dots,x_n,h):\ 0\le h\le f(x),\,x\in V\}\,.$$

په ځانګړې توګه $\int_V 1$ د امتیګریتي ورشو V حجم دی.

په f او V د د هواروالي وړاندنیونه(فرضیه) کېدی شي ضعیفه شي، داسې چې ا نتیګرال په یوه مناسب پوله پروسه باندې تعریف وي.

لیکونکي : بوسلي، هیولیک، شترایت

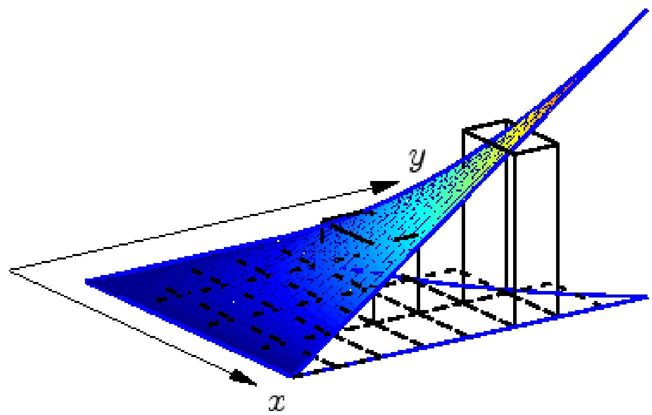
د تابع

$$f(x,y) = xy$$

دې په ورشو

$$V: \quad 0 \leq x \leq 1, \qquad 0 \leq y \leq 1 + x^2$$

کې انتيګرال ونيول شي.



خيره د انتيګريشن ورشو په يوه شډل مربع ګيتر يا -منډو ؟؟؟ باندې وېشنه يا توټه کېدنه

بنايي. د منډو پراختيا $h = 1/n$ لپاره دا اپرکسيمسشن لاس ته راوړو

$$h^2 \sum_{0 \leq j < n} \sum_{0 \leq kh < 1+(jh)^2} (jh)(kh) = h^4 \sum_{0 \leq j < n} j \sum_{0 \leq k < n+j^2/n} k\,.$$

د جګودرجو درجو ترمونو تېرېدني سره دا د دې ډبلي جمعي سره برابر دى

$$h^4 \sum_{0 \leq j < n} j\left((n+j^2/n)^2/2 + Ch^4 \sum_{0 \leq j < n} jn^2/2 + j^3 + j^5/(2n^2) + O(n^2)\right)$$

$$= \quad \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\right)+O(h)\,,$$

اوله دې سره انتيګرال ارزښت $\frac{7}{12}$ لري.

ليکونکي: بوسلي، هيوليګ. شترايت

د فابيني جمله Satz von Fubini

په يوه بنسټيزه ورشو د يوه ناپرېکېدونکي تابع انتيګرال

$$V:\ \ a_j(x_1,\ldots,x_{j-1}) \le x_j \le b_j(x_1,\ldots,x_{j-1})$$

کېدی شي د يوبعدي يا يوپراخېدوني انتيګرالونو د يوبل پسې شمېرنې له لارې لاس ته راشي:

$$\int\limits_V f\,dV = \int\limits_{a_1}^{b_1}\int\limits_{a_2(x_1)}^{b_2(x_1)}\cdots\int\limits_{a_n(x_1,\ldots,x_{n-1})}^{b_n(x_1,\ldots,x_{n-1})} f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_n\cdots dx_2dx_1\,.$$

له دې سره د بنسټيزوورشوګانو د لړئ پرلپسې رول نه لوبوي. په ځانګړې توګه د دېل انتيګرال لپاره د ثابتې انتيګرېشن پولې سره

$$\int\limits_a^b\int\limits_c^d f(x,y)\;dydx = \int\limits_c^d\int\limits_a^b f(x,y)\;dxdy\,.$$

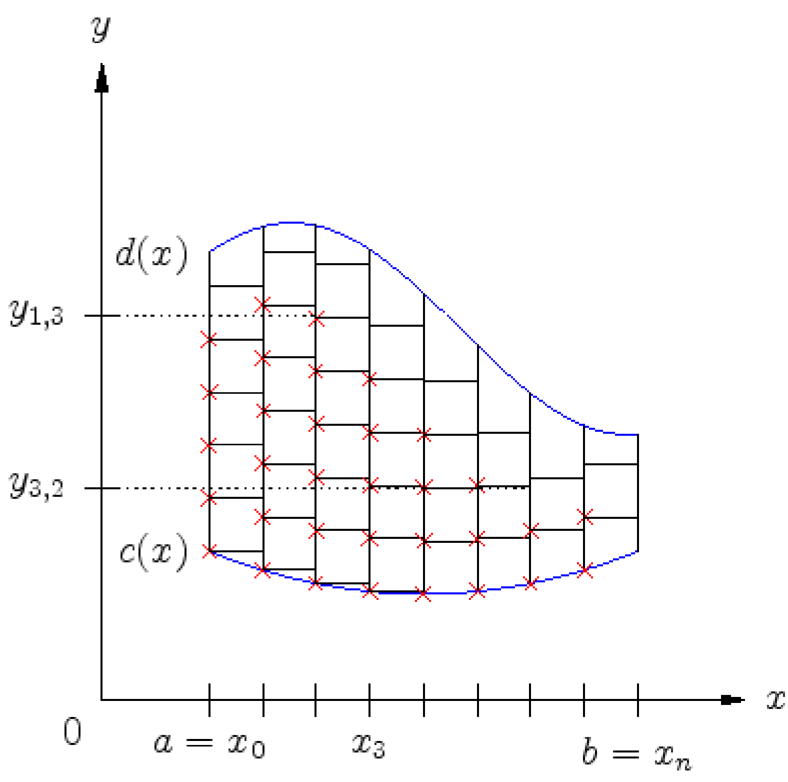
ټوليزه تلنلار کېدی شي په دوهبعدي ځانګړې حالت

$$V: \ a \le x \le b, \quad c(x) \le y \le d(x)$$

لیدوړ وګرځي. د تعریف سره سم سړی $\int_V f$ د ریمن جمعې له لارې اپروکسیمیکوي

$$s_n = h^2 \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m_j-1} f(x_j, y_{j,k})$$

د $h=(b-a)/n$ ، $x_j = a + jh$ او $y_{j,k} = c(x_j) + kh$ سره.



د f په کومپکت انتیګریشن ورشو V باندې برابرډوله ناپرېکیدنې په بنسټ دی

$$|f(x_j,y) - f(x_j,y_{j,k})| \le \varepsilon, \quad y_{j,k-1} \le y \le y_{j,k}\,,$$

د $h < h_\varepsilon$ لپاره. د دې په تعقیب کېدی شي دننئ جمعه د يوه بعدي يا يو پراخيدوني انتيګرال سره پرتله شي:

$$s_n = h\sum_{j=1}^{n}\left(\int_{c(x_j)}^{d(x_j)} f(x_j,y)\,dy + r_{n,j}\right)$$

د $|r_{n,j}| \le m_j h\varepsilon$ سره. همدا دليل کېدی شي په ناپريکيدونکو توابعو $g(x) = \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,dy$ وکارول شي،، او سړی لاس ته راوړي

$$s_n = \int_a^b g(x)\,dx + \left[r_n + h\sum_j r_{n,j}\right]$$

د $|r_n| \le nh\varepsilon$ سره د $h < h'_\varepsilon$ لپاره. دا چې

$$|[\ldots]| \le \Big((b-a) + \max_x(d(x)-c(x))\Big)\,\varepsilon$$

او $\varepsilon > 0$ په خوښه ټاکل کېدی شي، نو پوله $\lim_{n\to\infty} s_n$ د ايترير شوي iterierten يو بعدي انتيګرال سره سر خوري.

ليکونکي : هيوليګ، شترايت

د تابع

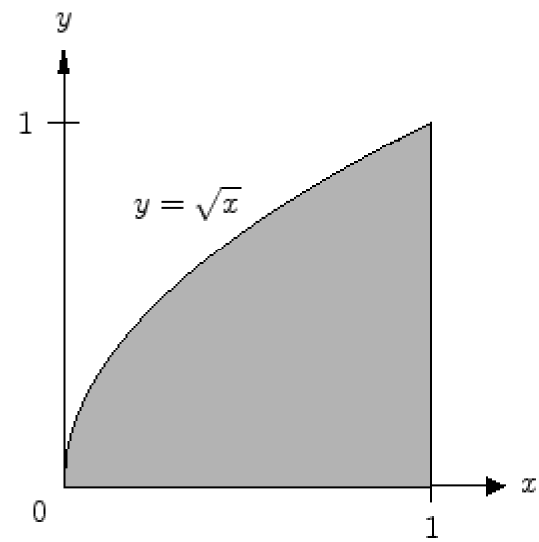
سرليک

$$f(x,y) = y\cos\left(x^2\right)$$

دي داپه ځېره کې انځور شوې ورشو

$$V:\quad 0 \le x \le 1\,,\quad 0 \le y \le \sqrt{x}$$

کې انتیګرال ونیول شي.



د فوبینیجملې سره کیدی شي انتیګرال د دوه بعدي انتیګریشن له لارې وشمیرل شي:

$$\int_V f = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{x}} y\cos\left(x^2\right)\ dy \right)\ dx = \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2}\cos\left(x^2\right) \right]_{y=0}^{y=\sqrt{x}}\ dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2} x\cos\left(x^2\right)\ dx = \left[\frac{1}{4}\sin\left(x^2\right) \right]_0^1 = \frac{1}{4}\sin 1\,.$$

که انتیګریشن لړئ پرلپسې سره بدل شي، نو لاس ته راځي

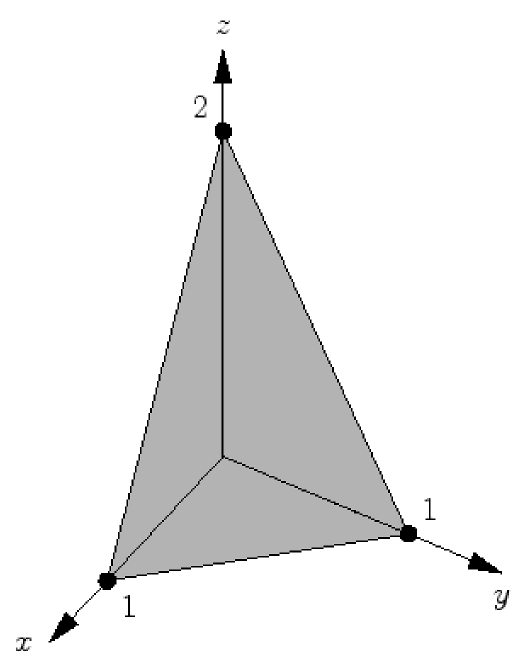
$$\int_V f = \int_0^1 \left(\int_{y^2}^1 y \cos\left(x^2\right) \, dx \right) \, dy \, .$$

په دې حالت کې دننی انتیګرال اکسپلیڅیت شمیروړ نه دی. د ایتریر شوي انتیګرال د عملي شمیرنې لپاره کیدی شي د انتیګریشن لړئ پرلپسې غوره وي.

لیکونکي : بوسلي، هیولیک، شترایت

د دې لپاره چې تابع

$$f(x, y, z) = x$$



په تيترايد

$$T: \quad x, y, z \geq 0, \quad x + y + \frac{z}{2} \leq 1$$

باندې وشميرل شي، نو لومړی به T د بنسټيزې ورشو په توګه ورکړل:

$$T: \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 - x, \quad 0 \leq z \leq 2(1 - x - y).$$

نو بيا دا انتيګرال د فوبيني د جملې په بنسټ شميرلکيدی شي:

$$\int_T f = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{2(1-x-y)} x\, dz \right) dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} 2x(1 - x - y)\, dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(x - 2x^2 + x^3 \right) dx = \frac{1}{12}.$$

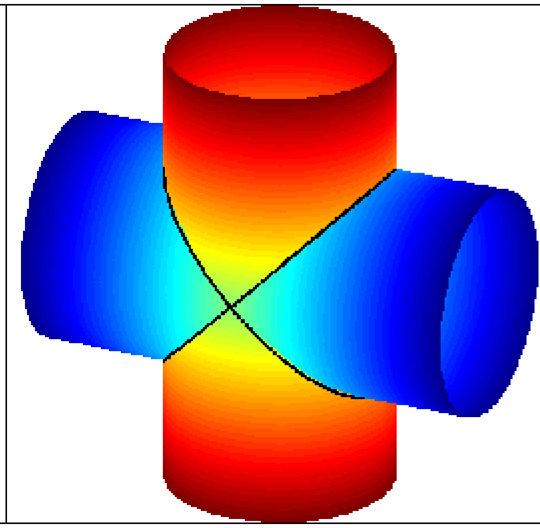
ليکونکي: بوسلي، هيوليګ، شترايت

ډکی يا حجم شميرلکيږي، چې د دواړو توتو له (ګډ) غوڅي

$$Z_1: \; x^2 + y^2 \leq r^2, \quad Z_2: \; x^2 + z^2 \leq r^2$$

له لارې منځ ته راځي.

د سیومتري په بنسټ لومړی د اوکتانتونو ډکي یا حجمونه شمیرلکیږي. په لومړي اوکتانت کې د انتیګریشن ورشو د ګردئ یا دایرې څلورمه ده



$$K:\ 0 \le x \le r, \quad 0 \le y \le \sqrt{r^2 - x^2}.$$

په K باندې د (ګډ) غوښي بدن جګوالی $h(x,y) = \sqrt{r^2 - x^2}$ د Z_2 له لارې ورکړ شوی دی. د ډکي یا حجم په حیث لرو

$$\int_K h = \int_0^r \left(\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} \sqrt{r^2 - x^2}\, dy \right) dx = \int_0^r (r^2 - x^2)\, dx = r^3 - \frac{1}{3} r^3 = 2r^3/3\ ,$$

او له دې سره د ټول بدن لپاره حجم $16r^3/3$.

ليکونکي:بيوسلر،هيوليک،شترايت

د n -بعدیز یونغونډاري(چې وړانګه یې یو واحد دی) ډکی(حجم)

د n - بعدي يوونغونډاري ډکی یا حجم V_n دی

$$B_n = \{x \in \mathbb{R}^n : \ |x| \le 1\}$$

$$V_n = \frac{2\sqrt{\pi^n}}{n\,\Gamma(\frac{n}{2})},$$

د ګاما تابع Γ سره. د $n \le 6$ لپاره ارزښتونه په لاندې جدول کې ورکړشوي دي:

n	1	2	3	4	5	6
V_n	2	π	$4\pi/3$	$\pi^2/2$	$8\pi^2/15$	$\pi^3/6$

ليکونکي:بيوسلر،هيوليک،شترايت

د ګاما تبع د تعريف له مخې د $B_1 = [-1,1]$ لپاره دی

$$\mathrm{vol}\,B_1 = 2 = \frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{1}{2})}$$

.

د ايندکشن پل(قدم) $(n-1) \to n$ لپاره لومړی په پام کې نيسو، چې B_n د هيوپرسطحې $x_n = -1$ او $x_n = 1$ ترمنځ پروت دی او د هيوپرسطحې سره غوڅی(قطاع) $x_n = \xi,\ (-1 \le \xi \le 1)$ يو $(n-1)$ - بعديز غونډاری دی د وړانګې $\sqrt{1-\xi^2}$ سره . د B_n حجم له دې امله کيدی شي د فوبينوسجملې سره په لاندې توګه وشميرلشي:

$$\mathrm{vol}\, B_n = \int_{-1}^{1} (1-\xi^2)^{\frac{n-1}{2}}\ \mathrm{vol}\, B_{n-1}\, d\xi\,.$$

د اينکشن وړاندنيوني

$$\mathrm{vol}\, B_{n-1} = \frac{2\sqrt{\pi^{n-1}}}{(n-1)\Gamma(\frac{n-1}{2})}$$

سره او د ګاما- تابع د تابعمسالات،

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)\,,$$

لاس ته راځي

$$\mathrm{vol}\, B_n = \sqrt{\pi}\, \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}\, \frac{2\sqrt{\pi^{n-1}}}{(n-1)\Gamma(\frac{n-1}{2})}$$

$$= \frac{2\sqrt{\pi^n}\, \frac{n-1}{2}\, \Gamma(\frac{n-1}{2})}{(n-1)\,\Gamma(\frac{n-1}{2})\, \frac{n}{2}\, \Gamma(\frac{n}{2})} = \frac{2\sqrt{\pi^n}}{n\,\Gamma(\frac{n}{2})}\,.$$

له دې سره کېدی شي انتيګرال $\int_{-1}^{1} (1-\xi^2)^{\frac{n-1}{2}}\ d\xi$ د په ځای ايښووني يا سبستيچيوشن $\xi = \sin t$ ، $d\xi = \cos t\, dt$ له لارې وشمېرل شي:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1-\sin^2 t)^{\frac{n-1}{2}}\ \cos t\, dt = \int_{-1}^{1} (1-\xi^2)^{\frac{n-1}{2}}\ d\xi$$

$$2\int_0^{\pi/2}(\cos t)^{n-1}\,\cos t\,dt=\sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}\,.=$$

لیکونکي:بیوسل،هیولیګ،شترایت

د ډېربعدیز انتیګرال ترانسفورمیشن

د یوه رګولار ورشو $U\subseteq\mathbb{R}^n$ د د یوه په (بیجکتیو)، ناپرېکیدونکي، مشتقوړ ترانسفورمیشن g لپاره د

$$\det g'(x)\neq 0,\quad x\in U\,,$$

سره د ناپریکیدونکو توابعو f لپاره باور لري:

$$\int\limits_U f\circ g\,|\det g'|\,dU=\int\limits_V f\,dV\,,\quad V=g(U)\,,$$

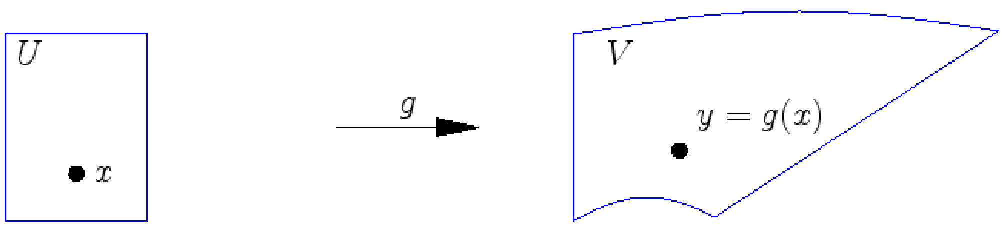
له کوم سره چې $\det g'$ د ترانسفورمیشن د تابع دیترمینانت بلل کیږي. دا ډکي- یا حجم توکیځای اړونده یا ځاییز تغیر تشریح کوي.

$$dV=|\det g'|\,dU\,.$$

د یوه لو کال اورتوګونال یا عمود کواوردیناتو ترانسفورمیشن ، دا په دې معنا چې د g' عمودي متې

$$|\det g'| = \prod_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial g}{\partial x_i} \right| ,$$

دي،دا په دي معنا چې د حجمتوکو سکالير ضريب د يوګونو متحولو سکاليري ضريبونو ضرب دی.



د يوه افين ترانسفوروميشن $y = Ax + b$ سره حجمتوکي د

$$dy = |\det A|\, dx .$$

سره تغير خوري.

په ځانګړې توګه د متحولې د سکالي کولو لپاره باور لري، $y_i = \lambda_i x_i$

$$dy_i = \lambda_i\, dx_i .$$

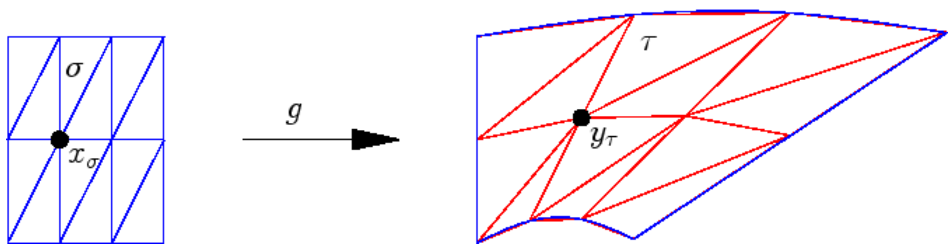
وړاندنيوني يا فرضيي کيدی شي لږ ضعيفي شي.

په ځانګړې توګه بايد د g بيجکتيويتي او د g' برعکسوړوالی فقط د U په دننه کې وغوښتل شي. د f پريکيدنه او ټاکلې زينګولاريتې هم ممکن دي، که ددواړو انتيګرالونو شتون تضمين وي.

ليکونکي: هيوليګ، موبش

د ښوونې یا ثبوت فکر کیدی شي د دوه بعدي انتیګرال لپاره وښوول شي. د ساده والي لپاره نیول کیږي، چې g دوه ځله ناپرېکیدونکی مشتقوړ دی. دا را کوي، چې د $x \in U$

$$|\det g'(x)| \geq 1/c > 0,$$
$$g(x+\Delta x) - g(x) = g'(x)\Delta x + r, \quad |r| \leq c|\Delta x|^2 .$$



لپاره لکه په ځیره کېروښانه شوي،یواپروکسیمیشن ارګومنت کارول کیږي. د دې لپاره د ورشو U د یوه تریانګولیرکونې(مثلثي کونې) ځخه مخ ته ځو، او کیږ ا نتیګرال د ریمن جمعې

$$S_U = \sum_\sigma f(g(x_\sigma))|\det g'(x_\sigma)| \operatorname{vol}\sigma, \qquad x_\sigma \in \sigma$$

له لارې نږدې کوو. درېګوډي(مثلثونو) σ دې ډیر زیات خوارهverzerrt نه شي، دا په دې معنا چې

$$h/c' \leq a \leq c'h$$

د ټولو درېګوډیو سیکانتواوږدوالي a لپاره. دا په ځانګې توګه راکوي، چې لوی کونج برابرېدوله په h کې کښنته لور ته بنده یا محدود ده. دزئ اپروکسیمیشن پوره ښه دی، داسې چې د ریمن/جمعه یا – زیاتون د $h \to 0$ لپاره د $\int_U (f \circ g)|\det g'|$ په لور هڅیږي.

د کونجټکو د تابع له لارې $x_\sigma \mapsto y_\tau = g(x_\sigma)$ د څیره –یا ارزښت ورشو $V = g(U)$ یو درېګوډیزوالی یا مثلث کیدنه منځ ته راځي. کطدی شي د درېګوډي خوربدنه زیاته شي،مګر د نه پرېکیدني او له دې سره د g د جاکوبي-ماتریکس د محدودیت اود برعکس تابع g^{-1} اړخونه د اپروکسیمیشن پارامتر h سره پرتله کیدونکې پاتیږي. برسیره پردې د $\det g' > 0$ په حالت کې د درېګوډي لوریزوالی ساتلی پاتیږي(په همدې ډول د دیترمینانت د مخنخښې بدلون سره برعکس یا په ځت کیږي)،داسې چې یوپه بل پریوتل منځ ته نه راځي.

د منځ ته راغلي څیره – یا ارزښت ورشو منځ ته را ته راغلې درېګوډیزوالي ریمن-جمعه،

$$S_V = \sum_\tau f(y_\tau)\,\mathrm{vol}\,\tau, \qquad y_\tau = g(x_\sigma) \in \tau\,,$$

د $\int_V f$ په لور ځي. دا باید وښول شي، چې د دواړو ریمن –جمعو کمښت د صفر په لور ځي په هڅیږي.
دا د τ درېګوډي د ښه اپروکیمیشن څخه لاسته راځي د σ د افینې څیرې $\tilde\tau$ له لارې:

$$\mathrm{dist}_H(\tilde\tau, \tau) = O(h^2), \quad \tilde\tau = y_\tau + g'(x_\sigma)(\sigma - x_\sigma)\,.$$

دا $\mathrm{vol}\,\tilde\tau = |\det g'(x_\sigma)|\,\mathrm{vol}\,\sigma,$ د دواړو ریمن--جمعود $O(h^3)$ جمعې غړویا زیاتونونو اود دوی د تعداد $O(h^{-2})$ دیسکریپانځ دی. له دې سره لاس ته راځي

$$|S_U - S_V| = O(h) \to 0\,.$$

د هوزدورف-وا ټن د تخمین د ښوونې لپاره سړی درېګوډي(مثل ثونه) سره پرتله کوي

$$\tau = \Delta(y_\tau, y_1, y_2), \quad \tilde\tau = y_\tau + g'(x_\sigma)\Delta(0, x_1 - x_\sigma, x_2 - x_\sigma)$$

د $y_i = g(x_i)$ سره ګاونډې ټکي

$$y_\tau + \alpha'(y_1 - y_\tau) + \alpha''(y_2 - y_\tau),$$

$$y_\tau + \alpha' g'(x_\sigma)(x_1 - x_\sigma) + \alpha'' g'(x_\sigma)(x_2 - x_\sigma)$$

د $0 \le \alpha', \alpha'' \le 1$ سره. د دویممشتق د ناپرېکېدنې د نیونې په بنسټ لاس ته راځي، چې کمښت برابر ډوله د

$$O(\max(|x_1 - x_\sigma|^2, |x_2 - x_\sigma|^2))$$

له لارې اتکل کېدی شي،څه مو چې ښوول.

لیکونکیة هیولیک، موبښ

د ترانسفورمېشن ښوولو ته کېدی شي یوه ورشو V تر څېړنې ونیول شي، هغه د دوه کرښیز سره تړلو پارابلسګمنت له لارې

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ u^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ u^2 \end{pmatrix}, \quad 0 \le u \le 1$$

رابندیږي. که د پارابولسګمنتونه وخوزول شي یعنې تل بل ځایت ه یووړل شي، نو سړی یو پیجکتیو تابع په یوون – یا واحد مربع U لاس ته راوړي.

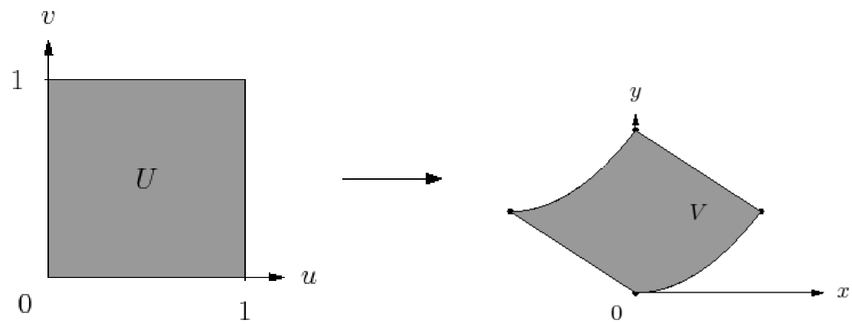
$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v + u \\ v + u^2 \end{pmatrix}, \quad 0 \le u,\ v \le 1\,.$$

د تابع جاکوبي ماتریکس دی

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2u & 1 \end{pmatrix},$$

او سړی د تابع دیترمینانت په ځېر لاسته راوړي

$$\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 2u + 1 > 0\,.$$



له دې سره د ډکي توکی د لاندط سره تغیریږي

$$dV = dx\,dy = (2u+1)du\,dv = (2u+1)dU\,.$$

په V باندې د $f(x,y) = x + y$ د ا نتیګرال لپاره د ترانسفورمیشن قانون سره لاس ته راځي

$$\int\limits_V (x+y)\,dx\,dy$$

$$= \int\limits_0^1 (\frac{2}{4} + 1 + \frac{1}{2})\,dv = 2\,.$$

لیکونکي: هیولیګ، موبش

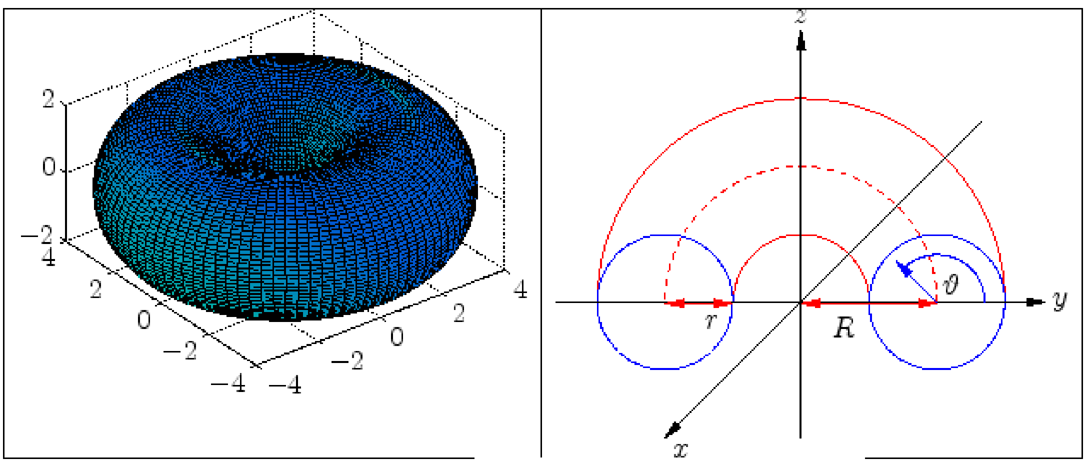
یوتوروس یا کړۍ د بېلګې په توګه د ګردۍ - دابرې تیکلي د څرخونن رامنځ ته کیږي

$$\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R + r\,s\cos\vartheta \\ r\,s\sin\vartheta \end{pmatrix}, \quad 0 \le s \le 1, \quad 0 \le \vartheta \le 2\pi$$

د -z په محور د $r < R$ سره،دا په دي معنا چي

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = p(s,\vartheta,\varphi) = \begin{pmatrix} (R + r\,s\cos\vartheta)\cos\varphi \\ (R + r\,s\cos\vartheta)\sin\varphi \\ r\,s\sin\vartheta \end{pmatrix}$$

یو ممکنه پارامتري کېدنه ده د $0 \le \varphi \le 2\pi$ سره.



د ترانسفورمیشن $p : \begin{pmatrix} s \\ \vartheta \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ جاکوبي ما تریکس دی

$$p' = (p_s, p_\vartheta, p_\varphi) =$$

$$\begin{pmatrix} r\cos\vartheta\cos\varphi & -r\,s\sin\vartheta\cos\varphi & -(R + r\,s\cos\vartheta)\sin\varphi \\ r\cos\vartheta\sin\varphi & -r\,s\sin\vartheta\sin\varphi & (R + r\,s\cos\vartheta)\cos\varphi \\ r\sin\vartheta & r\,s\cos\vartheta & 0 \end{pmatrix}$$

داچې متې یا ستنې یو بل ته اورتوګونال دي،د تابع دیترمینانتو لپاره باور لري

$$|\det p'| = |p_s||p_\vartheta||p_\varphi| = |r||rs||R + rs\cos\vartheta| =$$

$$= r^2 s(R + rs\cos\vartheta).$$

له دې سره د ډکي یا خجم لپاره لاس ته راوړو

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} r^2 s(R + rs\cos\vartheta)\, d\varphi\, d\vartheta\, ds$$

$$= 2\pi r^2 \left(\int_0^1 \int_0^{2\pi} sR\, d\vartheta\, ds + \int_0^1 \int_0^{2\pi} rs^2 \cos\vartheta\, d\vartheta\, ds \right)$$

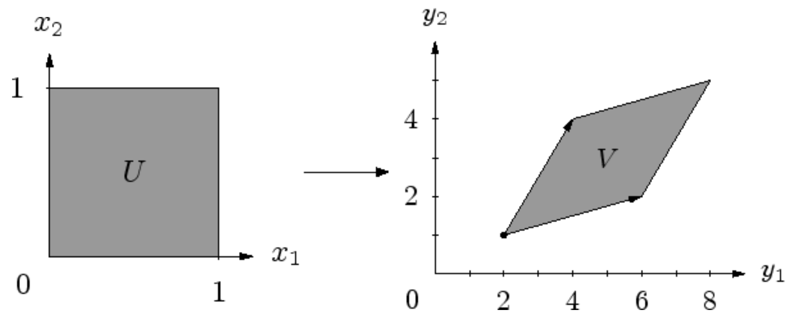
$$= 2\pi r^2 \left(\int_0^1 2\pi sR\, ds + 0 \right) = 2\pi^2 R r^2 .$$

یو غبرګ اړخیزParallelogramm یا موازیالاضلاع V کېدی شي د یوون ګردئ U یوه افین ترانسفورمېشن د ځېرې په حیث انځور شی:

$$U \ni x \mapsto y = Ax + b \in V .$$

له دې سره b یو ګوډ تکی دی او د A متې وکتورونه دي، چې دا غبرګ اړخیز غزوي.
د دې ځېره شوې بېلګې لپاره دی

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} .$$



د ترانسفورمیشن تابع دیترمینانت دی

$$\det \frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x_1, x_2)} = \det A = 10\,.$$

له دې سره د بېلګې په توګه د انتيګرال لپاره په V يو کرښيز تابع لاس ته راځي

$$f(y) = 3y_1 - 4y_2$$

$$\int_V f \quad = \int_U f(Ax+b)10\,dV$$

په ټوليززه توګه معکوسکيدونکی تابع

$$(x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{t}} \mapsto Ax + b$$

يوونمکعب $U = [0,1]^n$ په غبرګ اړخيز (-اپيپد) جوړوي، چې د ماتريکس متې يا ستن څخه غزيږي.په ورته توګه دې روښانه بېلګې د $n = 2$ لپاره ا نتيګرال په V يو کرښيز تابع $f(y) = c^{\mathrm{t}}y$ دی.

$$\int_V f = \int_U c^t(Ax+b)|\det A|\,dx = c^t(Ae/2+b)|\det A|$$

د $e = (1,\ldots,1)^t$ سره.

) لیکونکي: هیولیګ، موبش

په توته کواودینات کې ډکیتوکې یا حجم توکي

Volumenelement in Zylinderkoordinaten

د کواوردینات ترانسفورمیشن لپاره

$$x = \varrho\cos\varphi, \quad y = \varrho\sin\varphi, \quad z = z$$

دی

$$dx\,dy\,dz = \varrho d\varrho\,d\varphi\,dz\,.$$

له دې سره په ځانګې توګه د یوه تابع f د انتیګرال لپاره په یوه توته یا استوانه باور لري

$$Z: \quad 0 \le \varrho \le \varrho_0\,, \quad 0 \le z \le z_0$$

$$\int_Z f = \int_0^{z_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\varrho_0} f(\varrho,\varphi,z)\,\varrho\,d\varrho\,d\varphi\,dz\,.$$

په ځانګړې توګه د یوه اکسیاسیمتریک یا محور سیمتریک تابع $f(\varrho)$ لپاره دی

$$\int_Z f = 2\pi z_0 \int_0^{\varrho_0} f(\varrho)\, \varrho \, d\varrho \,.$$

د سطحې قطبي کواوردینات لپاره د سطحي توکي په ورته توګه ترانسفورمي کيږي.

(Autoren: Höllig/Much)

د کواوردینات ترانسفورمیشن

$$(x, y, z) = g(\varrho, \varphi, z)$$

لوکال یا ځای اړونده اورتوګونال دی،دا په دې معنا چې د جاکوبي ماتریکس

$$g' = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\varrho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \varrho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

اورتوګونال متې یا ستنط لري. په تعقیب د تابعدیترمینانت یا فنکشنل دیترمینانت لپاره باور لري

$$|\det g'| = |g_\varrho|\,|g_\varphi|\,|g_z| = 1 \cdot \varrho \cdot 1 = \varrho \,.$$

)لیکونکی: هولیګ، موښ

د ګاوس تابع د انتیګرال ټاکنې ته،

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-x^2\right) dx = \sqrt{\pi}\,,$$

سړی لاندې مرستندوی جوړښت کاروي. سړی د انتيګرال مربع شمېري:

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-x^2\right) dx\right)^2 \left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-x^2\right) dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-y^2\right) dy\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-x^2 - y^2\right) dx\, dy\,.$$

دا انتيګرال کېديشي د قطبي کواوردينات په مرسته ساده وټاکل شي:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \exp\left(-r^2\right) r\, dr\, d\varphi = 2\pi\left[-\frac{1}{2}\exp\left(-r^2\right)\right]_0^{\infty} = \pi\,.$$

))ليکونکی: هوليګ، موښ

په غونډوسکې يا غونډاري(کورې-) کواوردينات کې د ډکي –يا حجم توکي

د کواوردينات د ترانسفورميشن لپاره

$$x = r\sin\vartheta\cos\varphi,\quad y = r\sin\vartheta\sin\varphi,\quad z = r\cos\vartheta$$

دی

$$dx\,dy\,dz = r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi\,.$$

په ځانګړې توګه په یوه غوډوسکې یا کورې $K:\ 0 \le r \le R$ باندې د یوه تابع f انتیګرال لپاره باور لري

$$\int\limits_K f = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{R} f(r,\vartheta,\varphi)\, r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi\,.$$

په ځانګړي ډول د رادیالسیمتریک تابع $f(r)$ لپاره دی

$$\int\limits_K f = 4\pi \int\limits_0^{R} f(r) r^2 dr\,.$$

)لیکونکی: هولیګ، موبش

د کواوردینات ترانسفورمیشن

$$(x,y,z) = g(r,\vartheta,\varphi)$$

لوکال اورتوګونال دی،دا په دې معنا چې د جاکوبي – ماتریکس

$$g' = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & r\cos\vartheta\cos\varphi & -r\sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi & r\cos\vartheta\sin\varphi & r\sin\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta & -r\sin\vartheta & 0 \end{pmatrix}$$

اورتوگونال متې لري. په دې پسې د فنکشنلديترمينانت لپاره باور لري

$$|\det g'| = |g_r|\,|g_\vartheta|\,|g_\varphi| = 1 \cdot r \cdot r \sin\vartheta = r^2 \sin\vartheta\,.$$

د يوه راديالسيمتريک تابع f لپاره انتيگرال په ϑ او φ راکوي

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi = 2\pi\,[-\cos\vartheta]_0^{\pi} = 4\pi\,.$$

دا ترمخضريب د $\int_K f$ شمېرنې له امله د يوونغونډارې پورته هوارې سطحه ده.

) ليکونکی: هوليگ، موښ

په غونډوسکې(کرې) $K : r \leq 1$ د r^α انتيگرال دی

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1} r^2 r^\alpha \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi = 4\pi \int_0^1 r^{\alpha+2}\, dr\,.$$

فقط د $\alpha > -3$ لپاره شتون لري او په دې حالت کې مساوي دی لاندې سره

$$4\pi \left[\frac{r^{\alpha+3}}{\alpha+3}\right]_0^1 = \frac{4\pi}{\alpha+3}\,.$$

انتيگرال په $\mathbb{R}^3 \setminus K$ دی

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_1^{\infty} r^{\alpha} r^2 \sin\vartheta dr\, d\vartheta\, d\varphi = 4\pi \int_1^{\infty} r^{\alpha+2}\, dr$$

دا انتیگرال فقط د $\alpha < -3$ لپاره شتون لري او په دې حالت کې د لاندې سره مساویدی

$$4\pi \left[\frac{r^{\alpha+3}}{\alpha+3}\right]_1^{\infty} = \frac{-4\pi}{\alpha+3}\,.$$

)لیکونکی: هولیک، موبښ

د صفر نیو باندې د h په جګوالي فشار د بارومتري جګوالیفرمول له لارې ټاکل کیږي:

$$p(h) = p_0\, e^{-\frac{\varrho_0 g h}{p_0}}\,.$$

له دې سره نورمال فشار $p_0 = 101300\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$ دی، $\varrho_0 = 0.150\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ د اکسیجن ټینګوالی(غلظت) په صفر نیو(21% د هوا اکسیجن دی) او $g = 9,80\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ د ځمکې بیړه یا تعجیل دی.

ټینګوالی د فشار سره د ایدیال غازمساوات سره تړلی:

$$\varrho = \frac{p}{R_s T}$$

د $R_s = \frac{k_B}{m_{\mathrm{Molekül}}} = 519\frac{\mathrm{N\,m}}{\mathrm{K\,kg}}$ سره د spezifischen دغاز ثابته د اکسیجن لپاره او T په کالوین کچ شوې تودوخې. د ساده ونې له امله دا د ثابتې $-3°C$ په حیث ، یعنې $T = 270$ K ،نیول- یا کیږي.

له دواړو مساواتو څخه کیدی شي په اتموسفیر کې په نږدې توګه د اکسیجن ټوله کتله وشمېرل شي:

$$M = \int_V \varrho \, dV = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_{r_0}^{\infty} \frac{1}{R_s T} p_0 \, e^{-\frac{\varrho_0 g h}{p_0}} \, r^2 \sin\vartheta \, dr \, d\varphi d\vartheta,$$

له کوم سره چې $r_0 = 6.37 \cdot 10^6$ m د ځمکې وړانګه ده. د

$h = r - r_0$ سبستیچیوشن پسې او په ϑ او φ باندې انتیګرال سره لاس ته راځي

$$M = 4\pi \frac{p_0}{R_s \cdot T} \, e^{\frac{\varrho_0 g}{p_0} r_0} \int_{r_0}^{\infty} e^{-\frac{\varrho_0 g}{p_0} r} r^2 \, dr \, ,$$

او د دوه واره ټوټه – یا پارشل انتیګرال سره د انتیګرال لپاره لاس ته راځي

$$\int_{r_0}^{\infty} e^{-cr} r^2 \, dr = \left[-\frac{r^2}{c} e^{-cr} \right]_{r_0}^{\infty} + \left[-\frac{2r}{c^2} e^{-cr} \right]_{r_0}^{\infty} + \left[-\frac{2}{c^3} e^{-cr} \right]_{r_0}^{\infty}$$

($c = \frac{\varrho_0 g}{p_0}$). په ټولیزه توګه لاس ته راځي

$$M = \frac{4\pi p_0}{R_s T} \left(c^{-1} r_0^2 + 2c^{-2} r_0 + 2c^{-3} \right) = 2.59 \cdot 10^{19} \text{ kg} .$$

د پرتلې لپاره :

ځمککتله - $6 \cdot 10^{24}$ kg $(2.3 \cdot 10^5 \, M)$

سپوږمۍ کتله - $7.4 \cdot 10^{22}$ kg $(2.9 \cdot 10^3 \, M)$

کتله اودروندتکی(نقطه ثقل؟)

د یوه بدن K کتله د ټیکوالي $\varrho(x),\, x \in K$, سره د

$$m = \int\limits_K \varrho(x)\, dK$$

له لارې ورکړ شوی ده. په ځانګړې توګه د $\varrho(x) = 1$ لپاره د . K ډکی(حجم) V لاس ته راوړو.

د کتلې دروندتکي ν ــم کواوردینات د لاندې سره سم شمیرل کیږي

$$s_\nu = m^{-1} \int\limits_K x_\nu \varrho(x)\, dK\,.$$

د $\varrho(x) = 1$ لپاره لرو

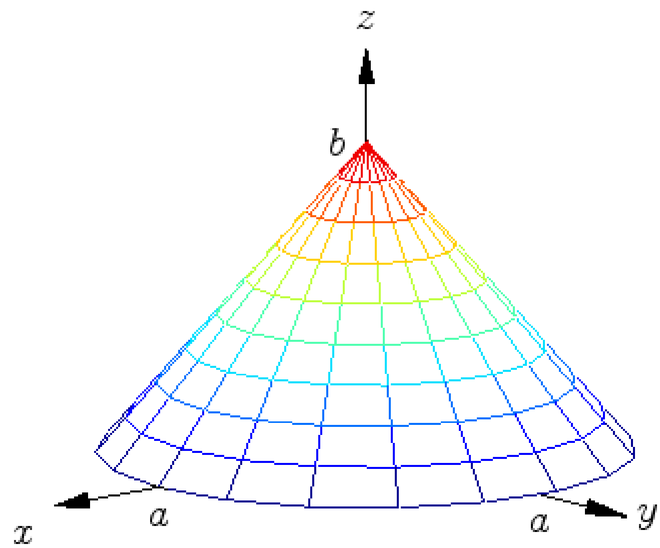
$$s_\nu = V^{-1} \int\limits_K x_\nu\, dK\,,$$

او S هندسي دروندتکی او یا هم په ساده توګه دروندتکی بلل کیږي.

لیکونکي: هیولیګ، کیمرلې، ترایت

یو غونډاری(کره) K د بنسټوړانګې a او جګوالي b سره ډکی(حجم) $V = \frac{\pi}{3}a^2b$ لري او په توته کواوردینات کېلاندې انځورونه لري

$$K\ :\quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le \varrho \le \frac{a}{b}(b-z), \quad 0 \le z \le b\,.$$



د سيمتري له ا مله د دروندټکي د x – او y -کواورديناتونه صفر دي. د z –کواوردينات داسې شميرل کيږي

$$s_z = \frac{1}{V} \int_K z$$

اوپه توته کواوردينات باندې د ترانسفورميشن وروسته لاس ته راوړو

$$V s_z = \int_0^b \int_0^{a(b-z)/b} \int_0^{2\pi} \varrho \, z \, d\varphi d\varrho dz$$

$$= 2\pi \int_0^b \int_0^{a(b-z)/b} \varrho \, z \, d\varrho dz$$

$$= \pi \int_0^b z \left(\frac{a}{b}(b-z)\right)^2 dz$$

$$= \frac{\pi}{12} a^2 b^2 .$$

$$V s_z = \int_0^b \int_0^{a(b-z)/b} \int_0^{2\pi} \varrho \, z \, d\varphi d\varrho dz$$

$$= 2\pi \int_0^b \int_0^{a(b-z)/b} \varrho \, z \, d\varrho dz$$

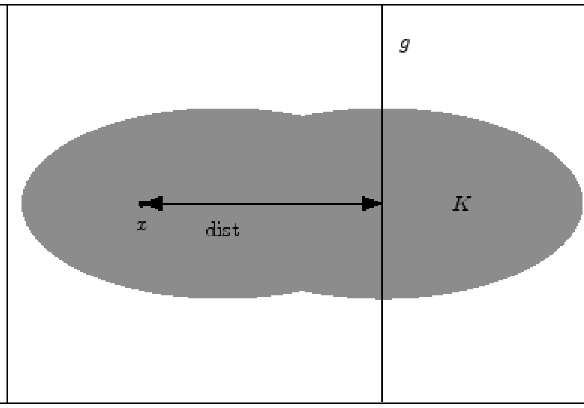
$$= \pi \int_0^b z \left(\frac{a}{b}(b-z)\right)^2 dz$$

$$= \frac{\pi}{12} a^2 b^2 .$$

له دې سره $S = (0, 0, b/4)$. درونددټکی دی.

ليکونکي: هيوليگ، شترايت

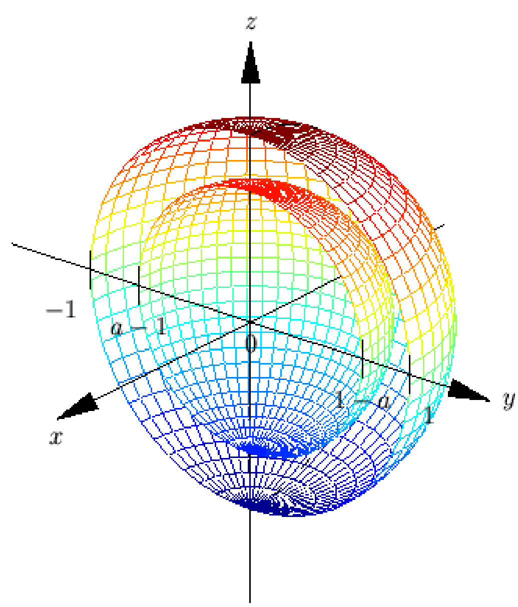
ترايګهايتسمومنټTrägheitsmoment (د کتلې څرکون اړونده لويه)

په يوه محور g د يوه تن K د تينګوالي $\varrho(x),\, x \in K$ سره د Trägheitsmoment دی $$I = \int_K \operatorname{dist}(x,g)^2 \varrho(x)\, dK\,,$$ د کومسره چې dist د واټن تابع بنايي	

ليکونکي: هيوليک، شترايت

تشکيل-يا جوړه شوې تشه غونډوسکه يا کره په کواوردينات سيستم کې لاندې انځورونه لري

$$K\ :\quad 1-a \leq r \leq 1\,,\quad 0 \leq \vartheta \leq \pi\,,\quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi\,.$$



د يوه ثابت تينګوالي ϱ لپاره په z –محور د Trägheitsmoment g دی

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{1-a}^{1} \varrho(\underbrace{r\sin\vartheta}_{\mathrm{dist}((x,y,z),g)})^2 \underbrace{(r^2\sin\vartheta)\ dr\,d\vartheta d\varphi}_{dK} =$$

$$= \frac{2\pi\varrho}{5}(1-(1-a)^5)\int_0^{\pi}\sin^3\vartheta\,d\vartheta$$

$$\frac{2\pi\varrho}{5}(1-(1-a)^5)\left[-\cos\vartheta+\frac{1}{3}\cos^3\vartheta\right]_0^{\pi} = \frac{8\pi\varrho}{15}(1-(1-a)^5)$$

که ټینګوالي ϱ له شرایطو، چې تشغونډوسکې کتله دې یو وي، سړی غواړي وټاکي،

$$1 = \int_K \varrho = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{1-a}^{1}\varrho r^2\sin\vartheta\,dr\,d\vartheta d\varphi = \frac{4\pi\varrho}{3}(1-(1-a)^3)\,,$$

نو لاس ته راځي

$$I(a) = \frac{2}{5}\frac{(1-(1-a)^5)}{(1-(1-a)^3)}\,.$$

په ځانګړي توګه د ټولې غونډوسکې د Trägheitsmoment لپاره $I(1)=2/5$ راکوي او د $a=0$ لپاره د پولې ته تلنې له لارې د لوپیتال قانون سره $I(0)=2/3$

لیکونکې: هیولیک، شترایت

د کږې (منحني) انتیګرال

د یوه ناپرېکیدونکي تابع f انتیګرال د یوې کږې(منحني) C په اودوالي د ریګولار ناپرېکیدونکي مشتقوړ پارامتریککونې

$$t \to p(t) \in \mathbb{R}^n\,, \quad p'(t) \neq 0\,, \quad t \in [a,b]\,,$$

سره

$$\int_C f = \int_a^b f(p(t))|p'(t)|\,dt$$

تعریف دی اود ټاکل شوي پارامتریککونې څخه خپلواک دی.

په ځانګې توګه د $f = 1$ لپاره سړی د کږې اوږدوالی لاس ته راوړي.

په f او p هوارتیا نیونه کیدی شي ضعیفه شي، داسې چې سړی ا نتیګرال په یوه مناسب پولې پروسه باندې تشریح کړي.

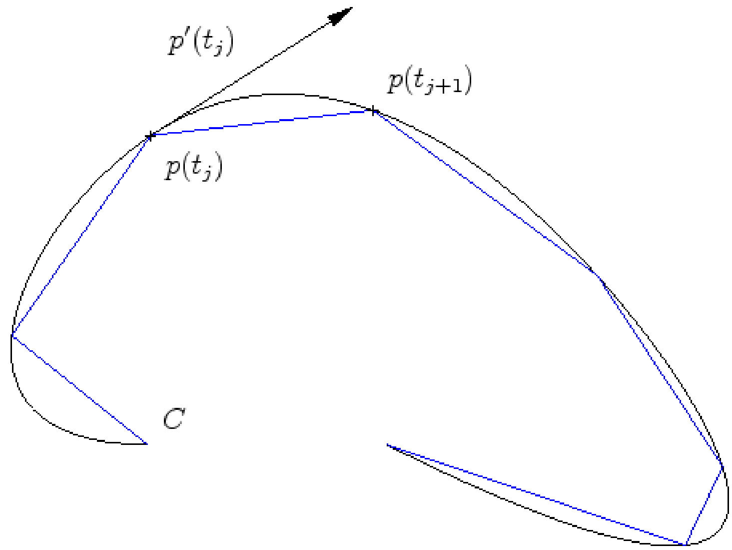
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د ریمن زیاتون یا جمعې په مرسته کېدی شي تعریف مدلل شي. په کږي د د ټکو پرلپسې

$$p(t_j), \quad t_{j+1} - t_j = \Delta t_j\,,$$

دا لاندې دی

$$\int_C f \approx \sum_j f(p_j)|p\,(t_{j+1}) - p\,(t_j)|\,.$$



د منځ ارزښت جملې په بنسټ باور لري

$$p(t_{j+1}) - p(t_j) = \begin{pmatrix} p_1'(\tau_{1,j}) \\ \vdots \\ p_n'(\tau_{n,j}) \end{pmatrix} \Delta t_j$$

د $\tau_{\nu,j} \in [t_j, t_{j+1}]$ سره.د p' د برابرېدوله ناپرېکيدني له امله په $[a,b]$ لرو

$$|p(t_{j+1}) - p(t_j)| = |p'(t_j)| + r_j|\Delta t_j|$$

د $|r_j| < \varepsilon$ سره د $|\Delta t_j| < \delta$ لپاره. د ټوټه وني د نريوالي له امله بنی اړخ د

$$\int_a^b f(p(t))\,|p'(t)|\,dt$$

په لور هڅيږي.

پورته دلیل هم د پارانتی کونط خپلواوالی ښايي، ځکه چې دا د ریکمزاتون کېمنځ ته نه راځي.

په بدیلي توګه کیدی شي مختلف پارامتریککونه د یوې متحولې سبستیچیوشن له لارې یو په واړوي.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د تابع

$$f(x,y,z) = \exp(-z)$$

انتیګرال به د C پیچي میخ د n اړونو یا څرخونو په اوږدوالي د پارانتریک کونې

$$C: \quad p(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}, \quad p'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi n],$$

سره وټاکلشي.

سرې لاس ته راوړي

$$|p'(t)| = \sqrt{2}$$

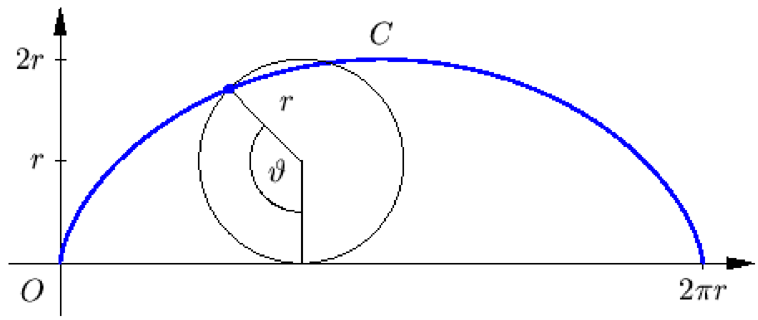
او له دې سره

$$= \int_0^{2\pi n} \exp(-t)\sqrt{2}\, dt \quad \int_C f$$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د ښیوکلوید C اوږدوالی L ټاکل کیږي، هغه چې یو ټکي د یوې دایرې په چاپېریال د

ورانګې $r > 0$ سره تشریح کوي، چې په یوه کرښه ګرځي یا څرخي



د پارامتري کونبلپاره

$$C: \quad p(\vartheta) = r\begin{pmatrix} \vartheta - \sin\vartheta \\ 1 - \cos\vartheta \end{pmatrix}, \quad \vartheta \in [0, 2\pi],$$

دی

$$p'(\vartheta) = r\begin{pmatrix} 1 - \cos\vartheta \\ \sin\vartheta \end{pmatrix}, \quad |p'(t)| = r\sqrt{(1-\cos\vartheta)^2 + \sin^2\vartheta} = r\sqrt{2(1-\cos\vartheta)}.$$

له دې سره د ښیکلویید د اوږدوالي لپاره لاس ته راځي

$$L = \int_0^{2\pi} r\sqrt{2(1-\cos\vartheta)}\,d\vartheta$$

$$= 2r\int_0^{2\pi} \sin(\vartheta/2)\,d\vartheta = 2r[-2\cos(\vartheta/2)]_0^{2\pi} = 8r,$$

د کوم سره چې کټوټوالی $1 - \cos\vartheta = 2\sin^2(\vartheta/2)$ کارول شوی.

لیکونکي اپپ، هیولیګ

د کږې (منحني) انتیګرالخویونه

د کږې انتیګرال $\int_C f$ په f کې کرښیز د ی اونسبت و C ته زیا تیزیا د جمعې په ډول:

- $$\int_C \alpha f + \beta g = \alpha \int_C f + \beta \int_C g$$
- $$\int_C f\, dC = \int_{C_1} f + \int_{C_2} f$$,

که $C = C_1 \cup C_2$ او C_1 او C_2 د ځانله ټکي پورې ټکي پردي وي،

دا له پارامتري کونې څخه خپلواک دی او په ځانګړې توګه د کږې د لوریزوالي څخه هم خپواک دی.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د لیندې اوږدوالی

د یوې د

$$t \mapsto p(t)\,, \qquad a \le t \le b\,,$$

له لارې پارامتري شوې کږه(منحني) C د $p(a)$ او $p(t)$ ترمنځ د کږې اوږدوالی

$$s(t) = \int_a^t |p'(\tau)|\, d\tau\,,$$

کیدی شي د کانوني کږې پارمتر په حیث وکارول شي. سړی دااسې په نا مه د لیندې پسې پارامتري کیدنه لاس ته اروړي:

$$q(s) = p(t), \quad |q'| = 1\,.$$

د کاندید تانجنتوکتور له مخې یا پر بنسټ د دې کانوني پارامتري کونې لپاره باور لري

$$\int_C f = \int_0^L f(q(s))\, ds$$

د C د اوږدوالي L سره.

لیکونکي: اپپ، هیولیک

د بېلګې په توګه د لیندې $q(s)$ پسې د شپیرالي

$$C: \quad p(t) = \exp(t)\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad p'(t) = \exp(t)\begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix}$$

پاراه متري کونه له $t = 0$ تاکل کیږي. سړی لاس ته راوړي

$$s(t) = \int_0^t |p'(\tau)|\, d\tau = \int_0^t \sqrt{2}\exp(\tau)\, d\tau = \sqrt{2}(\exp(t) - 1)$$

همداسې

$$t(s) = \ln(s/\sqrt{2} + 1)\,.$$

له دې سره لاس ته راځي

$$q(s) = (s/\sqrt{2} + 1)\begin{pmatrix} \cos(\ln(s/\sqrt{2}+1)) \\ \sin(\ln(s/\sqrt{2}+1)) \end{pmatrix}.$$

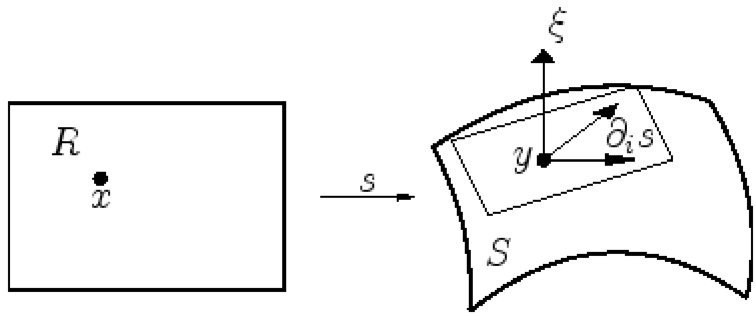
لیکونکي: اېپ، هیولیګ

د یوې ټوټې سطحې رګولار پارامتریکونه

یو ناپرېکېدونکی مشتقموړ پارامتري کونه

$$R \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \mapsto s(x) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

په یوه رګولار ورشو R باندې یو رګولار د سطحې ټوټه $S = s(R)$ تشریح کوي، که s د R په دننه کې اینجکتیو(په باندې) وي او وکتورونه $\partial_1 s(x), \ldots, \partial_{n-1} s(x)$ د ټولو $x \in \mathring{R}$ لپاره کرښیز خپلواک وي.



دا تر مخنخښې پورې يوائځنی ټاکلی يوونوکتور(واحدوکتور) ξ ، چې د $\partial_1 s(x), \ldots, \partial_{n-1} s(x)$ څخه يا له لارې غزېدلی تانجنت سطحې ته اورتوګونال دی، سطحې نورمال بلل کيږي. دا ووکتورونو $\partial_i s(x)$ سره يوځای د $\mathbb{R}^n$ يوه بنسټ جوړوي

ليونکي: هيوليګ، موبښ

د سطحې انتيګرال ***Flächenintegral***

د يوه ناپرېکيدونکي تابع f انتيګرال په يوه رګولار سطحې ټوټې د پارمټري کونې سره

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \mapsto s(x) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad x \in R,$$

او سطحې نورمالي ξ سره د

$$\int_S f\,dS = \int_R (f \circ s)\,|\det(\partial_1 s, \dots, \partial_{n-1} s, \xi)|\,dR$$

په حیث تعریف دی او د تاکل شوي پارمتري کوني ښخه خپلواک دی.

د دیترمینانت ارزښت د سطحېتوکي د سکالي شوی ضریب دی:

$$dS = |\det(\partial_1 s, \dots, \partial_{n-1} s, \xi)|\,dR\,.$$

د $f = 1$ لپاره د ځانګړي حالت په حیث سرې د S سطحې مساحت لاس ته راوړي.

د f او s مساواتوراندنیونې کیدی شي ضعیفي شي، داسې چې ا نتیګرال په یوه مناسب پوله پروسه باندې تعریف شي. برسېره پردې کېدی شي یوه سطحه د ډېرو سطحې ټوټو یوځای شوې یا جوړه شوې وي. د سطحې انتیګرال نو په دې حالت کې د یوګونو ټوټه سطحو باندې د انتیګرالونو زیاتون یا جمعه ده.

لیونکي: هیولیک، موښ

د ساده ونې له ا مله دوه پرا خیدونی یا دوه دیمنزنال حالت ترځیرنې لاندې نیسو.

کېدی شي تعریف د ریمن-زیاتون یا –جمعې په مرسته مدلل کړی شي. لکه په څېره کې چې ښوول شوي، سرې د تریانګولي کولو له لارې R اپروکسیمي کوي د درېګوډي σ د کانتې اوږدوالي سره متناسب و ته h. د ګوډتکو د توابعو له لارې دا د S یوتریانګل تولیدوي د درېګوډیو τ سره:

$$\tau \ni (x_\tau, y_\tau, z_\tau) = s(u_\sigma, v_\sigma)\,.$$

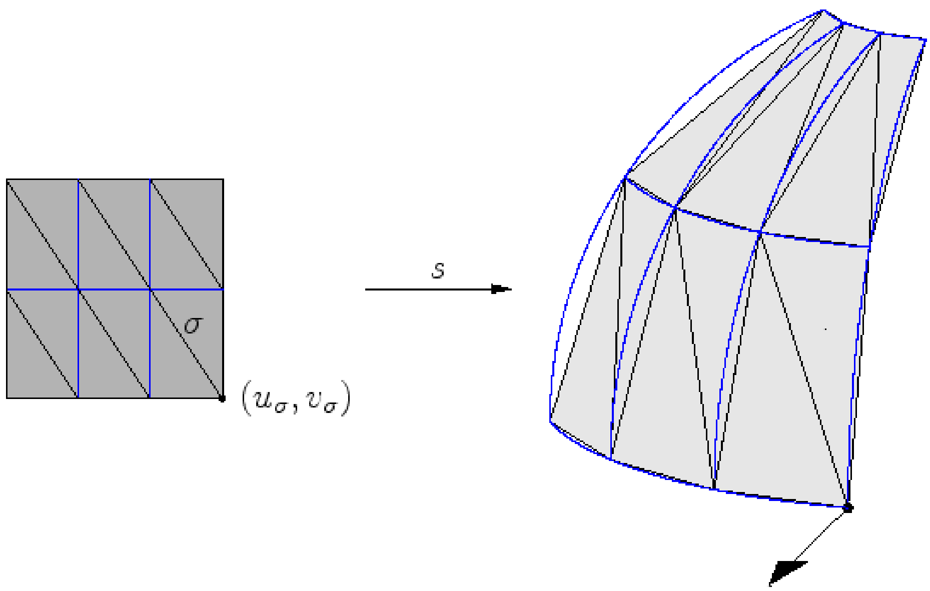
د سکالی کولو ضریب د درېګوډي د سطحې تغیر اپروکسیمي کوي

$$\operatorname{area}(\tau) = |\det(s_u(u_\sigma, v_\sigma), s_v(u_\sigma, v_\sigma), \xi)|\,\operatorname{area}(\sigma) + O(h^3)\,.$$

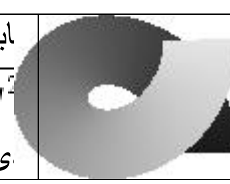
په تعقيب انتيګرال د $h \to 0$ لپاره د ريمن – زياتون له لارې

$$\sum_{\sigma} f(x_\tau, y_\tau, z_\tau) |\det(s_u(u_\sigma, v_\sigma), s_v(u_\sigma, v_\sigma), \xi)| \operatorname{area}(\sigma)$$

نږدې کيږي، هغه چې د $h \to 0$ لپاره د انتيګرال په لور هڅيږي



ليونکي: هيوليک، موبس

ابع $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ ي د	

$$(r,\varphi) \mapsto s(r,\varphi) = \begin{pmatrix} (1+r)\cos\varphi \\ (1+r)\sin\varphi \\ \varphi \end{pmatrix}, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \; -\frac{1}{2} \le r \le \frac{1}{2}$$

له لارې پارامتري شوي د راتاو پوړظ يا زينې Wendeltreppe S برخه توتو

انتيګرال ونيول شي.

د سطحې توکو د سکالي کولو فاکتور د ټاکلو لپاره لومړی شميرو(ځيره پورته مخ کې):

$$s_r = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad s_\varphi = \begin{pmatrix} -(1+r)\sin\varphi \\ (1+r)\cos\varphi \\ 1 \end{pmatrix}.$$

دا چې ټوټه مشتقونه اورتوګونال دي،دی

$$|\det(s_r, s_\varphi, \xi)| = |s_r|\,|s_\varphi| = \sqrt{(1+r)^2+1}.$$

له دې سره لاس ته راځي

$$\int_S f\,dS = \int_0^{2\pi}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (1+r)\sqrt{(1+r)^2+1}\,dr\,d\varphi = 2\pi\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (1+r)\sqrt{(1+r)^2+1}\,dr$$

$$= \frac{2\pi}{3}\left[\left((1+r)^2+1\right)^{\frac{3}{2}}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{2\pi}{3}\left(\left(\frac{13}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right).$$

ليونکي: هيوليک، موبش

د يوه تابع $z(x,y)$ د ګراف S د سطحېتوکی دی

$$dS = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy.$$

دا د پارمتيکولو لپاره د ټوليز تعريف څخه ترلې لاس ته راځي

$$(x,y) \mapsto s(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z(x,y) \end{pmatrix},$$

ځکه چې د سطحې نورمال ξ غبرګ دی و

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ z_x \end{pmatrix}}_{s_x} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ z_y \end{pmatrix}}_{s_y} = \begin{pmatrix} -z_x \\ -z_y \\ 1 \end{pmatrix}$$

ته او د $|\xi| = 1$ له امله دی

$$|\det(s_x, s_y, \xi)| = |s_x \times s_y| = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}.$$

د بیلګې په توګه د کونکرت یا روښانه تابع $z(x,y) = x^2 + \frac{1}{2}y^2$ د ګراف لپاره دی

$$dS = \sqrt{1 + 4x^2 + y^2},$$

او سړی د $f(x,y) = xy$ لپاره لاس ته راوړي او دا په ولاړګوډيز $[0,1] \times [0,2]$ پرتې سطحې ټوټې

$$\int_S f dS = \int_0^1 \int_0^2 xy \sqrt{1 + 4x^2 + y^2}\, dy\, dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 \left[x(1+4x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 dx = \frac{1}{3}\int_0^1 \left(x(5+4x^2)^{\frac{3}{2}} - x(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}\right) dx$$

$$= \frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{20}(5+4x^2)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{20}(1+4x^2)^{\frac{5}{2}}\right)\right]_0^1 = \frac{61}{15} - \frac{625}{6}\sqrt{5}\,.$$

ليونكي: هيوليک، موبښ

د سطحې توکي په توته کواوردينات کې

د سطحې توکي د يوه د

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \varrho\cos\varphi \\ \varrho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

له لارې پارامتري شوی د يوې توتې پورته پوښ S د وړانګې ϱ سره دی

$$dS = \varrho\, d\varphi\, dz\,.$$

له دې سره په توته کواوردينات کې د يوه تابع f د ا نتيګرال لپاره باور لري

$$\int_S f\ dS = \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \int_0^{2\pi} f(\varrho,\varphi,z)\ \varrho\, d\varphi\, dz\,.$$

ليونكي: هيوليک، موبښ

د تانجنت وکتور د اورتوګونالیتي له امله

$$s_\varphi = \begin{pmatrix} -\varrho \sin\varphi \\ \varrho \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad s_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

د سکالا کولو کتور د سطحې توکو لپاره دی

$$|\det(s_\varphi, s_z, \xi)| = |s_\varphi|\,|s_z| = \varrho\,,$$

لکه چې غوښتل مو.

لیونکي: هیولیک، موښ

د ځلورئ یا مربع $V = [0,1]^2$ لپاره اصلي جمله داسې ده

$$\int_0^1 \int_0^1 \operatorname{grad} f(x,y)\,dx\,dy = \begin{pmatrix} \int_0^1 f(1,y) - f(0,y)\,dy \\ \int_0^1 f(x,1) - f(x,0)\,dx \end{pmatrix}.$$

دا له تابع څخه ترلې لیدل کیږي:

$$n = (\pm 1, 0), (0, \pm 1)$$

د کتمتوالي کمپوننتونه د اونیواریانت(یومتحولي یا اووښوتوني) اصلي جمله په ګوته کوي.
د بیلګې په توګه لومړی کمپوننت و لاندطته ورته یا یو ارزښته یا اکویوالنتدی

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f_x(x,y)\,dx - [f(x,y)]_{x=0}^{x=1} \right) dy = 0\,.$$

(Aus: Mathematik-Online)

په غونډاري کواوردينات کې د سطحو توکي

د سطحې د توکي د یوه د

$$\begin{pmatrix} \vartheta \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} R\sin\vartheta\cos\varphi \\ R\sin\vartheta\sin\varphi \\ R\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

له لارې لپاره پارمتري شوی فضا Sphäre د وړانګې R سره دی

$$dS = R^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\,.$$

له دېسره په غونډاري کواوردينات کې د يوه تابع f د انتیګرال لپاره باور لري

$$\int_S f\;dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(R,\vartheta,\varphi)\,R^2 \sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi\,.$$

ليونکي: هيوليک، موښ

د تانجنت وکتور د اورتوګوناليټي له امله

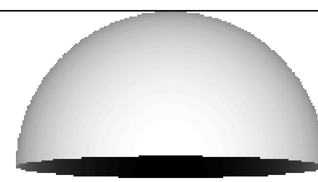
$$s_\vartheta = \begin{pmatrix} R\cos\vartheta\cos\varphi \\ R\cos\vartheta\sin\varphi \\ -R\sin\vartheta \end{pmatrix}, \qquad s_\varphi = \begin{pmatrix} -R\sin\vartheta\sin\varphi \\ R\sin\vartheta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

د سکالیکولووکتور د سطحې توکو لپاره دی

$$|\det(s_\vartheta, s_\varphi, \xi)| = |s_\vartheta|\,|s_\varphi| = R^2\sin\vartheta\,,$$

لکه چې غوښتل مو.

لیکونکي: هیولیک، موبش

	د نیمغونداري(-پیالي یا پوښ) دروندتکی S دې $H\ :\quad x^2+y^2+z^2=1\,,\quad z\geq 0\,,$ د ثابت تیکوالي سره وټاکل شي

د سیومتري په اساس د درونټکي د x -او y - کواوردیناتونه صفر دي. د z –
کواوردینات لپاره د غونداري کواوردینات د کارولوله امله سرې لاس ته راوړي

$$s_z\,\text{area}(H) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\vartheta)\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi = \pi\,,$$

او د $\text{area}(H) = 2\pi$ سره لاسته راځي $s_z = \frac{1}{2}\,.$.

لیکونکي: هیولیک، موبش

د ډېرواره اتیګرال لپاره اصلي جمله

که n د یوه رګولارورشو $V \subset \mathbb{R}^m$ د باندې لور ته لوریزه یوونوورم یا واحدنورم وښایید رګولار $(m-1)$ -- بعد یا پراخېدوني ژئ ∂V سره، نو د یوه ناپرېکېدونکي مشتقوړ تابع f لپاره باور لري

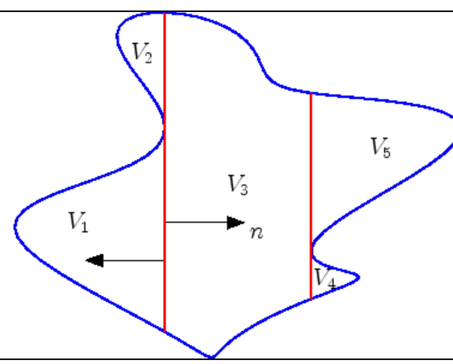
$$\int_V \partial_\nu f = \int_{\partial V} f\, n_\nu, \quad \nu = 1, \dots, m\,.$$

که سړی دا مساوات سره یوځای کړي، نو سړی وکتوري کتمتوالی لاس ته راوړي.

$$\int_V \operatorname{grad} f = \int_{\partial V} f\, n\,.$$

(لیکونکي:هولیک، هورنر)

د ښووني فکر د $m = 2$ لپاره ښوول کیږي.

لومړی په پام کې نیول کیږي، چې د انتیګرال نیولوو ورشو په برخه ورشوګانو وېشل کیدی شي، ځکه چې د نورم د لوریزوني له امله د ټوټه کېدنو په دننئ ژئ د ژئ انتیګرالونه لرې کیږي. له دې امله بسیا کوي، یو د انتیګرال نیوني ساده ورشو راوخلو یا تر څېړني ونیسو.	

د $m = 2$ لپاره سړی V په ساده ورشوګانو ټوټه کوي په لاندې بڼه

$$V:\, a \le x \le b, \quad c(x) \le y \le d(x)\,.$$

بيا د ډبل انتيګرال لپاره باور لري

$$\int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f_y(x,y)\,dydx = \int_a^b (f(x,d(x)) - f(x,c(x))\,dx\,.$$

په ولاړو يا عمودوvertikalen ژيو د y – کمپوننت د صفر عمود دی له دې امله بايد د ژئ ا نتيګرال لپاره پورته اوکښته ژئ په پام کې ونيول شي يا وکتل شي. لاندې ژئ کيدی شي په لاندې بڼه

$$C:\ \ x \mapsto (x, c(x)), \quad a \le x \le b$$

پارامتريک شي او

$$n = \frac{1}{\sqrt{1+c'(x)^2}} \begin{pmatrix} c'(x) \\ -1 \end{pmatrix}.$$

دا ا چې $dC = \sqrt{1+c'(x)^2}dx$ دی، نو باور لري

$$\int_C f n_2 = \int_a^b f(x,c(x))(-1)\,dx\,.$$

په ورته توګه لاندطژئانتيګرال شمېرل کيږي، او د ارزښتونو زياتون يا جمعه د ډبل انتيګرال سره سر خوري يا همغږيز کيږي.

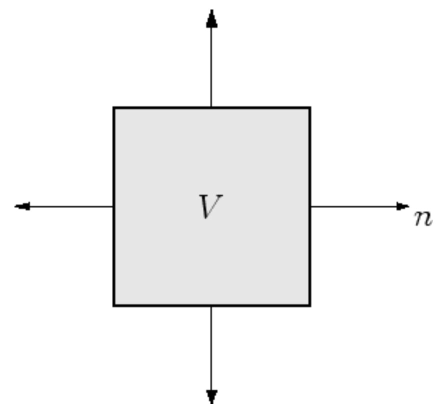
(ليکونکي:هوليک، هورنر)

د مربع $V = [0,1]^2$ لپاره اصلي جمله ده

$$\int_0^1 \int_0^1 \operatorname{grad} f(x,y)\,dx\,dy = \begin{pmatrix} \int_0^1 f(1,y) - f(0,y)\,dy \\ \int_0^1 f(x,1) - f(x,0)\,dx \end{pmatrix}.$$

دا له تابع څخه ترلې ليدل کيږي:

$$n = (\pm 1, 0), (0, \pm 1)$$

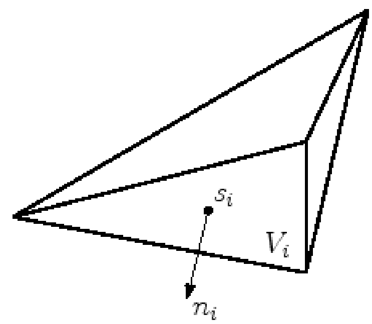


د کېمتوالي کمپوننتونه د يومتحول والي اصلي جمله ده. د بيلګې په توګه لومړی کتپوننت و لاندې ته ورته يا اکويوالنت دی

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f_x(x,y)\,dx - [f(x,y)]_{x=0}^{x=1} \right)\, dy = 0\,.$$

(Aus: Mathematik-Online)

$V \subseteq \mathbb{R}^m$ دې یو سیمپلکس وي، چې د $(m-1)$-بعدي سیمپلکسونو $V_i\,,\ i=1,\ldots,m+1$ له لارې را بندیږي او n_i د باندې لور ته لوریز یوونورمال یا واحدنورمال نومول کیږي او s_i د V_i درونټکی وي.



د یوه ثابت تابع $f(x)=b$ لپاره د اصلي جملېلاسته راځي

$$0=\sum_i \mathrm{vol}_{m-1}(V_i)n_i\,.$$

د یوه کربنیز تابع $f(x)=a^{\mathrm{t}}x$ لپاره باور لري

$$\mathrm{vol}_m(V)\,a=\sum_i \mathrm{vol}_{m-1}(V_i)(a^{\mathrm{t}}s_i)n_i\,.$$

دلته وکارول شوی،چې د یوه سیمپلکس S لپاره د دروندټکي s سره مربعیز فرمول Quadraturformel د کربنزې تابع f لپاره ټیک ده

(Aus: Mathematik-Online)

د يوه غونډاري لپاره په يوه غونډاريکواوردينات کې د وړانګې R اوپاس –يا پورته يا پوښ سطحې يا هوارې سره باور لري

$$dV = r^2 \sin\vartheta \, dr \; d\vartheta \, d\varphi \,, \quad dS = R^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$$

او $n = (x, y, z)^t / R$ يوونئورمال دی. د دې پسې يا دېلاسته راوړنې پسې اصلي جمله ده

$$\int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \operatorname{grad} f(r, \vartheta, \varphi) \, r^2 \sin\vartheta d\varphi \, d\vartheta \, dr =$$

$$= R^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(R, \vartheta, \varphi) \begin{pmatrix} \sin\vartheta \cos\varphi \\ \sin\vartheta \sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} \sin\vartheta \, d\varphi \, d\vartheta \,.$$

د بېلګې په د روښانه تابع لپاره سرې لاس ته راوړي

$$f(x, y, z) = xz^2 = R^3 \sin\vartheta \cos\varphi \cos^2\vartheta$$

د ګرادينت او fn لپاره

$$\operatorname{grad} f(x, y, z) = \begin{pmatrix} z^2 \\ 0 \\ 2xz \end{pmatrix} ,$$

$$f(x, y, z) n = \frac{1}{R} \begin{pmatrix} x^2 z^2 \\ xyz^2 \\ xz^3 \end{pmatrix} \,.$$

د سيومتري په بنسټ اخرودواړو ليکوباندې انتيګرال صفر راکوي.د لومړئ ليکې لپاره په غونډاري کواوردينات کې صفر لاس ته راځي

$$\int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^4 \cos^2 \vartheta \, \sin \vartheta \, d\varphi \, d\vartheta \, dr =$$

$$= R^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} R^3 \sin^3 \vartheta \cos^2 \vartheta \cos^2 \varphi \, d\varphi \, d\vartheta$$

$$= \frac{4}{15} \pi R^5 .$$

(Aus: Mathematik-Online)

Partielle Integration نوټه انتيګرال

د څوی توابعو f او g لپاره د کومپاکت وړونکي سره باور لري

$$\int_{\mathbb{R}^m} g \, \partial^\alpha f = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^m} f \, \partial^\alpha g .$$

(ليکونکي:هوليګ، هورنر)

دا چې f او g کومپاکت وړونکي لري، يوه کوادر V شتونلري،داسې چې د V په ژئ او هم دباندې له V دواړه توابع ورک شي.

د اصلي جملې له مخې د ډېرواره انتيګرالونې لپاره با ور لري

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} \partial_\nu (fg) = \int\limits_V \partial_\nu (fg) = \int\limits_{\partial V} (fg) n_\nu = 0$$

د يوه په خوښه توټه مشتق ∂_ν لپاره.له بلې خوا د ضرب قانون له مخې دی

$$\partial_\nu (fg) = g \partial_\nu f + f \partial_\nu g$$

او له دې سره

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} g \partial_\nu f + \int\limits_{\mathbb{R}^m} f \partial_\nu g = 0\,, \quad \text{bzw.} \quad \int\limits_{\mathbb{R}^m} g \partial_\nu f = -\int\limits_{\mathbb{R}^m} f \partial_\nu g\,.$$

د ∂^α په تجزيه په يوګونو توټه مشتقونو له لارې او پرلپسې د مساواتو استعمال سره سرې دا ورکړ شوی فرمول لاس ته راوړې، ځکه چې په هوارو يا خويو توابعو کې د توټه مشتق سره بدلېدلی شي.

(ليکونکي:هوليګ، هورنر)

د ګرين فرمولونه ***Greensche Formeln***

که n د باندې لور ته لوريز د يوه رګولارورشو $V \subseteq \mathbb{R}^m$ يوونتورمال يا واحدنورمال وښايې د رګولارژئ سطحې $S = \partial V$ سره، نود دوه ناپرېکېدونکي مشتقوړ توابعو f او g لپاره باور لري

$$\int_S f\,\frac{\partial g}{\partial n} = \int_V (\operatorname{grad} f)^{\mathrm{t}}\ \operatorname{grad} g + f\,\Delta g\,.$$

چېرته چې $\frac{\partial g}{\partial n}$ د دباندې لورته مشتق ښايي نورمال دی.

په ځانګړي د $f=1$ لپاره لرو

$$\int_S \frac{\partial g}{\partial n} = \int_V \Delta g\,.$$

یوسیومتري واریانت په ګرین نومول شوې کتمېوالی دی

$$\int_S f\frac{\partial g}{\partial n} - g\frac{\partial f}{\partial n} = \int_V f\Delta g - g\Delta f\,.$$

د دواړو ګرین فرمولونو نه کېدی شي دخوی والي وړاندنیونه ضعیفه شي، داسې چې په مناسب پوله ارزښت تعریف شي.

(لیکونکي:هولیک، هورنر)

د ډېرواره اینتګرال اصلي جملې پسې دی

$$\int_S f\,\partial_\nu g\,n_\nu = \int_V \partial_\nu\left(f\,\partial_\nu g\right)\,,\quad \nu=1,\cdots,m\,.$$

د ضرب قانون سره په ښي اړخ انتیګرال لپاره لاس ته راځي

$$(\partial_\nu f)(\partial_\nu g) + f(\partial_\nu\partial_\nu g)$$

په $\nu=1,\ldots,n$ باندې زیاتون یا جمعي له دې سره د ګرین لومړی فرمول راکوي.

دویم فرمول د f او g یدلون له لارې لاس ته راځي. سرې د

$$\int_S g\frac{\partial f}{\partial n} \quad \text{او} \quad \int_S f\frac{\partial g}{\partial n}$$

لپاره کتمتوالی کموي یا سره تفریقوي او په پام کې نیول کیږي، چې د ډکي- یا حجم اینتګرالونو د ګرادینت ضرب له منځه وړي یا پورته کوي؟

(لیکونکي:هولیګ، هورنر)

د فبروری ۲۴ د ۲۰۱۱ ز ک.

د لوی څښتن په برکت او مهربانئ(ژباړی)

هر پیل شوی کار چې پای کیږي، نو ناروغه زړه ورسره، هغه د شاعرانو خبره، باغ باغ کیږي.(ژباړی)

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوې لیکنې:

<u>1988 Vienna (Austria):</u>

<u>لومړی:</u>

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

1987 Vienna (Austria):

دویم:

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, at the University of Vienna/Austria

لاندې د شميرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دريم: د شميرپوهنې ستر کتاب : د شميرپوهنې برسيره د انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې ليکنه به يې ځنو ځايونو غزېدلې او ځنې ځايونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: څمككچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو کې شميرنه، د ګټې – او كټې د کټې شميرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتياوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شميرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شميرپوهنې الماني ـ پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

<u>*2003 Bonn (Germany):*</u>

اتم: دفرنڅیال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې یو پیل   دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

<u>*Bonn (Germany): 2003*</u>

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

<u>*2003 Bonn (Germany):*</u>

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

<u>1997 Bonn (Germany):</u>

یوولسم: د افغانستان په هکله سپینې خبرې: په   المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

لاندې د برینکمن لیکنې چې له پرینکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

سرلیک

۱ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دویم ټوک

۳ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصایه یا ستاتیستیک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – انالیزی ۱

۷ – انالیزې ۲

۸ – کرښیز الجبر

۹ - د شمیرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ – فنکشنل انالیز

۱۲ – وکتور شمیرنه

نورې ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښیز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په

کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلې

۱۶ - څمککچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

-۲۲   داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزي پښتو او عربي + دري ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه لیکنې دي، چې څنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې وبه غزیږي.

نوري ليکنې، چې په ژباړه يې پيل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپريږي:

د ګروپونو تيوري

- د ښوونځي لپاره فزيک د برينکمن ليکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دويم مسلک فزيک دی، دا ليکنې ژباړم. دا هم د دې ليکوال يوه ډېره ښه ليکنه ده، چې -د شميرپوهنې په څير- دلته هم زيات تمرينونه د حل يا اوبيونې سره په کې راغلي او ماته زيات ګټور برېښي)