



د پوهنې وزارت

د تعلیمي نصاب د پراختیا، د ښوونکو د روزنې او د  
ساینس د مرکز معینیت  
د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تالیف ریاست

# د ریاضي د تدریس لارښود

## یوولسم ټولگی



۱۳۹۲ هـ. ش.

د چاپ کال: ۱۳۹۱



د پوهنې وزارت

د تعلیمي نصاب د پراختیا، د ښوونکو د روزنې او د ساینس د مرکز معینیت  
د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تالیف لوی ریاست

# د ښوونکي کتاب

## د ریاضي د تدریس لارښود

### یوولسم ټولگی

د چاپ کال: ۱۳۹۲ هـ. ش.

## ليکوالان:

- سرمؤلف نظام الدين د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تالیف علمي غړی
- سرمؤلف عبدالکبير د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تالیف علمي غړی
- د مؤلف مرستیال محمد خالد ستوری (خډران) د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تالیف علمي غړی
- د مؤلف مرستیال نویدالله هاشمي د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تالیف علمي غړی

## علمي او مسلکي ايډيټ:

- حبيب الله راحل د پوهنې وزارت سلاکار د تعليمي نصاب د پراختيا په لوی ریاست کې
- سرمؤلف ميرنقيب الله د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تالیف علمي غړی
- محمد داؤد غیرت د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تالیف علمي غړی

## د ژبې ايډيټ:

- محمد قدوس دکوخیل د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تالیف علمي غړی

## دیني ، سياسي او کلتوري کمیټه:

- حبيب الله راحل د پوهنې وزارت سلاکار
- محمد اصف کوچی د تعليمي نصاب د پراختيا د پروژې غړی

## د څارنې کمیټه:

- دکتور اسدالله محقق د تعليمي نصاب، د بنوونکو د روزنې او د ساينس مرکز معین
- دکتور شیر علي ظریفی د تعليمي نصاب د پراختيا د پروژې مسؤول
- د سرمؤلف مرستیال عبدالظاهر گلستاني د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تالیف لوی رئیس.

## طرح او ډیزاین:

ولید((نوید)) نسیمی

**د چاپ د سمون چارې:** محمد کبير حقل د پوهنې وزارت د نشراتو او اطلاعاتو رئیس

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



## ملي سرود

دا وطن افغانستان دی	دا عزت د هر افغان دی
کور د سولې کور د تورې	هر بچی یې قهرمان دی
دا وطن د ټولو کور دی	د بلوڅو د ازبکو
د پښتون او هزاره وو	د ترکمنو د تاجکو
ورسره عرب، کوچر دي	پامپریان، نورستانیان
براهوي دي، قزلباش دي	هم ایماق، هم پشه یان
دا هیواد به تل ځلیري	لکه لمر پر شنه آسمان
په سینه کې د آسیا به	لکه زره وي جاویدان
نوم د حق مودی رهبر	وایو الله اکبر وایو الله اکبر

## بسم الله الرحمن الرحيم

د پوهنې د وزير پيغام

گرانو استادانو او ښوونکو،

ښوونه او روزنه د هر هېواد د پراختيا او پرمختگ بنسټ جوړوي. تعليمي نصاب د ښوونې او روزنې مهم توکي دي چې د علمي پرمختگ او ټولني د اړتياوو له مخې چمتو کيږي. څرگنده ده چې علمي پرمختگ او ټولنيزې اړتياوې تل د بدلون په حال کې وي. له دې امله لازمه ده چې تعليمي نصاب هم د وخت له غوښتنوسره سم علمي او رغنده پراختيا ومومي. البته نه ښايي چې تعليمي نصاب د سياسي بدلونونو او د اشخاصو د نظريو او هيلو تابع شي.

د ښوونکي د لارښود د کتاب چې نن ستاسو په لاس کې دی، پر همدې بنسټ چمتو او ترتيب شوی دی. د تدریس د نويو میتودونو له مخې فعالیتونه او معلوماتي مواد په کې ورزیات شوي دي چې په ډاډ سره به د زده کړې په بهیر کې د زده کوونکو د فعال ساتلو لپاره گټور او اغېزمن وي.

هیله من یم د دې کتاب منځپانگه، چې د فعالې زده کړې د میتودونو د کارولو له لارې تالیف او چمتو شوې، ستاسو درنو استادانو د گټې وړ وگرځي. له فرصت څخه په استفادې د زده کوونکو له میندو او پلرونو څخه غوښتنه کيږي د خپلو لوڼو او زامنو په باکیفیته ښوونه او روزنه کې پرله پسې مرسته وکړي چې په دې توگه د پوهنې د نظام موخې او هیلې ترسره شي او ځوان نسل او هېواد ته ښې پایلې او بریاوې ور په برخه کړي.

زموږ گران استادان او ښوونکي د تعليمي نصاب په رغنده پلي کولو کې ستره دنده او دروند مسؤلیت لري.

د پوهنې وزارت تل زیار کاري چې د پوهنې تعليمي نصاب د اسلام د سپېڅلي دین له بنسټونو او ارزښتونو، د ټولني د څرگندو اړتياوو، ملي گټو او وطنپالنې له روحيې او د ساينس او تکنالوژۍ له نوو علمي معیارونو سره سم پراختيا ومومي.

ددې سترې ملي موخې د تر لاسه کولو لپاره د هېواد له ټولو علمي شخصیتونو، د ښوونې او روزنې له پوهانو او د زده کوونکو له میندو او پلرونو څخه هیله لرم چې د خپلو نظریو او رغنده گټورو وړاندیزونو له لارې زموږ له مؤلفانو سره د درسي او د ښوونکي د لارښود د کتابونو په لاسه تالیف کې مرسته وکړي.

له ټولو هغو پوهانو څخه، چې ددې کتاب په چمتو کولو او ترتیب کې یې برخه اخیستې او همدارنگه له ملي او نړیوالو درنو موسسو او نورو ملگرو هېوادونو څخه، چې د نوي تعليمي نصاب په چمتو کولو او تدوین او د درسي او د ښوونکي د لارښود کتابونو په چاپ او وېش کې یې مادي یا معنوي مرسته کړې ده، مننه او درناوی کوم او د لا نورو مرستو هیله یې لرم.

ومن الله التوفيق

فاروق وردک

د افغانستان د اسلامي جمهوریت د پوهنې وزیر

## ښوونکي سره څو خبرې

### ښاغلی ښوونکیه:

د ریاضي د ښوونکي د لارښود کتاب، چې د فعالې زده‌کړې په اساس تالیف شوی، یوازې د ښوونکي دگټې اخیستنې لپاره دی، د زده‌کوونکو په لاس کې دې نه لوېږي.

د ښې او مؤثرې زده‌کړې او تدریس لپاره باید دا لاندې ټکي په پام کې ونیول شي:

(۱) ټولگي ته د لومړنیو فعالیتونو له سرته رسولو لکه (د سلام او احوال پوښتنه، د ټولگي تنظیم، حاضرۍ اخیستلو، د کورنۍ دندې له لیدلو، د تېر لوست ارزونې او د امکان په صورت کې د تېر او راتلونکي لوست ترمنځ د اړیکې له پیدا کولو وروسته په نوي درس پیل وکړئ.

(۲) درسي گټور مواد، چې په چاپیریال کې پیدا کېږي او په لارښود کې یې یادونه شوې له مخکې یې ټولگي ته راوړئ.

(۳) په دې لارښود کې په کارول شوو میتودونو سربېره له هغو گټورو میتودونو څخه هم کار اخیستلای شئ، چې د دندې په اوږدو کې مو کارولي او تجربه کړي دي.

(۴) په دغه کتاب کې د تدریس پړاوونه په عملي شکل په پام کې نیول شوي دي. که په سمه توگه عملي شي په یقین سره چې ستاسو تدریس به گټور واقع شي.

(۵) د امکان تر پولې په موضوع کې اضافي معلومات چمتو شوي دي. دا معلومات په تدریس کې له تاسو سره مرسته کوي. په همدې توگه کولای شئ د زده‌کوونکو احتمالي پوښتنو ته د ډاډ وړ ځوابونه ووايئ. له دې امله ضروري برېښي چې د موضوع له تدریس د مخه هغه په غور ولولئ او ځان پرې پوه کړئ.

(۶) یو ۴۵ دقیقه درسي ساعت داسې وېشل شوی دی چې په ټاکل شوي وخت کې تدریس وشي او درس پای ته ورسېږي. که په هغه ټاکل شوي وخت کې ونه شی کړای چې هغه عملي کړئ، نو واک لرئ چې هغه وختونه لنډ یا زیات کړئ د بېلگې په ډول: د درس د جریان فعالیت د مؤلفانو له خوا ۲۸ دقیقې ټاکل شوی دی. که ستاسو له نظره هغه زیات وي، کولای شئ د بېلگې په توگه هغه ۲۰ دقیقې کړئ او پاتې نورې اته دقیقې به نورو فعالیتونو ورزیاتې کړئ.

(۷) د تدریس په بهیر او د فعالیتونو په سرته رسولو کې ټولو زده‌کوونکو ته برخه ورکړئ

(۸) تمرینونه باید په ټولگي کې د زده‌کوونکو په گډون حل شي.

(۹) که چیرې د یوه تمرین پوښتنې زیاتې وي، یو شمېر دې د درس د پیاوړتیا په پړاو کې د زده‌کوونکو له خوا په ټولگي کې حل او پاتې نورې دې زده‌کوونکو ته کورنۍ دنده ورکړل شي.

(۱۰) د هر څپرکي په پای کې اړوند تمرین ته ځای ورکړ شوی دی. کوبښن دې وشي چې د سختو او اسانه پوښتنو په پام کې نیولو سره د څپرکي د تمرین پوښتنې په دوو، دريو او یا څلورو درسي ساعتونو کې، یا هر څومره چې تاسو یې غوره بولئ، د زده‌کوونکو له خوا حل شي.

(۱۱) د ریاضي په درسي کتاب کې امکان لري چې ځینې طباعتي اشتباهگاني موجود وي او د تجدید نظر تر وخته نشي کیدای چې اصلاح شي لیکن د ریاضي د لارښود د لیکلو په وخت کې په پام کې نیول شوي دي، محترم ښوونکی کولای شي چې د لارښود له مخې یې اصلاح کړي.

په درناوي

## لړليک

### مخ

### سرليک

#### لومړۍ څپرکۍ مخروطي مقاطع

- ۱ • مخروطي مقاطع
- ۴ • الپس (Ellipse)
- ۶ • قطرونه او راسونه، د محراقونو او قطرونو ترمنځ رابطه، د الپس تناظري مرکز، د الپس تناظري محور او عن المركزيت
- ۸ • د بيضوي معادله
- ۹ • د بيضوي معادله (دويم حالت)
- ۱۲ • د هغې بيضوي معادله چې مرکز يې يو اختياري ټکی وي (لومړی حالت)
- ۱۴ • د هغې بيضوي معادله چې مرکز يې يو اختياري ټکی وي (دويم حالت)
- ۱۹ • پارابولا
- ۲۱ • د پارابولا معادله (لومړی حالت)
- ۲۳ • د پارابولا معادله (دويم حالت)
- ۲۶ • د هغې پارابولا معياري معادله چې راس يې يو اختياري ټکی وي
- ۲۸ • د هغې پارابولا معياري معادله چې راس يې يو اختياري ټکی وي (دويم حالت)
- ۳۲ • هايپربول
- ۳۴ • د هايپربولا معادله
- ۳۶ • د هايپربولا د معادلې (دويم حالت)
- ۴۰ • د هغې هايپربولا معادله چې مرکز يې يو اختياري ټکی وي (لومړی حالت)
- ۴۲ • د هغې هايپربولا معادله چې مرکز يې يو اختياري ټکی وي (دويم حالت)
- ۴۵ • د يوې کرنيې مو قعيت نظر مخروطي مقاطعو ته
- ۵۱ • د لومړي څپرکي د عمومي پوښتنو حل

#### دويم څپرکۍ مثلثات

- ۶۱ • د ساين قانون
- ۶۲ • د ساين د قضيې ثبوت په منفرج الزاويه مثلث کې
- ۶۵ • د کوساين قانون
- ۶۸ • د ټانجنټ قانون
- ۷۴ • مثلثاتي مطابقتونه
- ۷۹ • مثلثاتي معادلې
- ۸۴ • دويمه درجه مثلثاتي معادلې
- ۸۷ • د دوه مجهوله مثلثاتي د معادلو سبسټمونو حل
- ۹۳ • د دويم څپرکي د عمومي پوښتنو حل

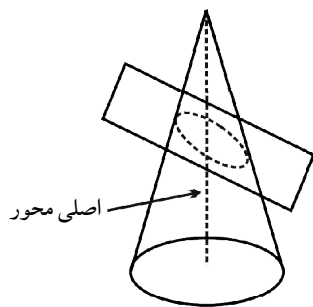
#### درېم څپرکۍ فضايي هندسه

- ۱۰۳ • اساسي مفاهيم او اکسيومونه
- ۱۰۵ • په درې بعدي فضا کې کرښه او مستوي
- ۱۰۷ • د دوو مستقيمو کرښو او دوو مستويگانو نسبي حالتونه
- ۱۱۰ • په فضا کې موازي مستقيم خطونه
- ۱۱۵ • په فضا کې د دوو مستقيمو کرښو تر منځ زاويه
- ۱۱۸ • په فضا کې موازي مستقيم خطونه او موازي مستويگانې
- ۱۲۱ • په فضا کې متعامدې مستقيمي کرښې او مستويگانې



۱۲۳	• په فضا کې موازي مستوي گانې
۱۲۵	• د دريم څپرکي د عمومي پوښتنو حل
	<b>څلورم څپرکي ترادفونه</b>
۱۲۷	• ترادفونه
۱۳۰	• حسابي ترادف
۱۳۳	• په يوه حسابي ترادف کې $n$ - ام حد پيدا کول
۱۳۵	• د حسابي ترادف وسطي حد
۱۳۷	• هارمونيکي ترادف
۱۴۰	• هندسي ترادف
۱۴۳	• په يوه هندسي ترادف کې $n$ - ام حد پيدا کول او د هندسي ترادف وسطي حد
۱۴۶	• د ترادفونو قسمي مجموعه
۱۵۳	• د حسابي ترادف د $n$ لومړيو حدونو قسمي مجموعه
۱۵۶	• د يوه هندسي ترادف د $n$ حدونو د جمعې حاصل
۱۵۹	• لايتاهي هندسي سلسلې
۱۶۲	• د څلورم څپرکي د عمومي پوښتنو حل
	<b>پنځم څپرکي لوگارېتم</b>
۱۶۷	• اکسپوننشل تابع گانې
۱۷۳	• لوگارېتم
۱۷۵	• لوگارېتمې تابع گانې
۱۷۸	• معمولي لوگارېتم او طبيعي لوگارېتم
۱۸۰	• د لوگارېتم قوانين
۱۸۴	• د لوگارېتم د يوې قاعدې اړول په بله قاعده
۱۸۸	• کرکټرستيک او ماتيس
۱۹۰	• د لوگارېتم جدول
۱۹۳	• انټي لوگارېتم
۱۹۵	• خطي انټرپولېشن
۱۹۸	• د لوگارېتمې او اکسپوننشل معادلو حل
۲۰۲	• د رياضيکي عمليو په سرته رسولو کې له لوگارېتم څخه کار اخېستنه
۲۰۵	• د پنځم څپرکي د عمومي پوښتنو حل
	<b>شپږم څپرکي مترېکسونه</b>
۲۱۱	• مترېکسونه
۲۱۴	• د مترېکس ډولونه
۲۱۶	• د مترېکسونو جمع او تفریق
۲۱۸	• په مترېکس کې د سکالر ضرب
۲۲۱	• د دوو مترېکسونو ضرب
۲۲۴	• د يوه مترېکس ترانسپوز مترېکس
۲۲۶	• ډيټرمنانت
۲۲۹	• د ډيټرمنانت خاصيتونه
۲۶۱	• د $2 \times 2$ مرتبې مترېکسونو ضربې معکوس
۲۳۴	• له معکوس مترېکس څخه په کار اخېستني سره د خطي معادلو د سيستم حل
۲۳۷	• د خطي معادلو د سيستم حل د کرامر په طريقه
۲۴۰	• د معادلو د سيستم حل د گوس (Gouse) په طريقه
۲۴۲	• د شپږم څپرکي د عمومي پوښتنو حل
	<b>اووم څپرکي وکتورونه</b>
۲۴۹	• د وضعه کمياتو په سيستم کې وکتورونه
۲۵۲	• د دوو ټکو ترمنځ واټن او منځنی ټکی
۲۵۵	• وکتورونه په سطح او فضا کې
۲۵۸	• په درې بعدي فضا کې د ټکي مختصات

۲۶۲	• د یوه وکتور د جهت زاویې او کوساینونه
۲۶۵	• د دوو وکتورونو د سکالري ضرب حاصل
۲۶۹	• د وکتوري ضرب حاصل
۲۷۱	• د طبیعي واحد وکتورونو د خطي ترکیب په واسطه د یوه وکتور نښودل
۲۷۳	• د مخلوط ضرب حاصل یا درې گونی ضرب
۲۷۷	• د اووم څپرکي د عمومي پوښتنو حل
	<b>اتم څپرکی احصایه</b>
۲۸۵	• د بدلونونو ضرب
۲۸۸	• په نورمال منحنی کې تبتوالی (پراگنده گي)
۲۹۱	• د نورمال توزیع د ډول شاخصونه
۲۹۵	• د پرسوب ضرب
۲۹۸	• څو متحول له ټولني
۳۰۰	• د پراگنده گي گراف
۳۰۳	• پیوستون او د پیوستون ضرب
۳۰۷	• د خطي میلان معادله
۳۱۰	• د اتم څپرکي د عمومي پوښتنو حل
۳۰۱	• د څپرکي پوښتنې
	<b>نهم څپرکی احتمالات</b>
۳۱۷	• پرمو تپشن یا ترتیب
۳۲۱	• ترکیب
۳۲۸	• تبدیل
۳۳۱	• د بینوم قضیه
۳۳۴	• دوه جمله یي احتمال
۳۲۳	• د نهم څپرکي د عمومي پوښتنو حل



## لومړی څپرکی: مخروطي مقاطع

مخروطي مقاطع

د درسي کتاب (3) مخ

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

<p>د دې لوست په پای کې زده کوونکي و توانېږي چې:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• مخروط وپېژني او د مخروطي مقاطع په مفهوم پوه شي.</li> <li>• له یوې چارې څخه په کار اخیستنې سره د یوې مستوي په توګه، مخروط په څو حالتونو (افقي، مایل او عمودي) ډول پرېکړې مخروطي مقاطع په لاس راځي او لاسته راغلي شکلونه یو له بله تشخیص کړي.</li> <li>• د پورته پوهې او مهارت څخه خوښي ښکاره کړي.</li> </ul>	<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- پوهنیزه</li> <li>- مهارتي</li> <li>- ذهنیتي</li> </ul>
<p>پوښتنې او ځوابونه، ډله ییز او انفرادي کار</p>	<p>2- د زده کړې لارې:</p>
<p>چاره، گازرې، بیاتي او کاغذ، د مخروطي مقاطع د تعریف د عنوان اړوند شکل، د شکل چارټ د کتاب 4 مخ</p>	<p>3- مرستندویه مواد:</p>
<p>ښاغلی ښوونکی د سلام او احوال پوښتنې او د زده کوونکو د ځواب له اورېدو څخه وروسته جوړ کړی چارټ دې د ټولګي مخې ته ځوړند کړي او وروډي پوښتنې دې له هغو وپوښتي، که چیرې ځوابونه ونشي ویلای ښوونکی دې په لاندې ډول توضیح کړي:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• که چیرې یو مخروط د یوې مستوي په واسطه په افقي ډول قطع شي د هغه مقطع د دایرې شکل لري.</li> <li>• که چیرې یو مخروط د یوې مستوي په واسطه په مایل ډول قطع شي یوه بیضوي ترینه جوړېږي.</li> </ul>	<p>4- د وروډي برخې توضیح (5 دقیقې)</p>
<p>5- د لوست بهیر او فعالیت (28) دقیقې:</p> <p>ښاغلی ښوونکی دې د مخروطي مقاطعو تعریف د تختې پرمخ ولیکي او اړونده چارټ چې مخکې له مخکې یې جوړ کړی دی د ټولګي په مخکې ځوړند کړي.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• مخروط، اصلي محور، مؤلّد، راس، پورتنی او ښکتنی برخه او د مخروط د تشکیلولو لاره دې زده کوونکو ته توضیح کړي.</li> <li>• ښوونکی د مخروطي مقاطعو تعریف زده کوونکو ته بیانوي.</li> <li>• ښوونکی دې زده کوونکي په مناسبو ډلو و وېشي هرې ډلې ته دې دوې، دوې گازرې له یوې چارې سره او یا یوه دانه بیاتي او د درملو پورې (چې مخروطي) شکل لري، توزیع ورکړي، چې زده کوونکي د کتاب د 3 مخ فعالیت په منظمه توګه سرته ورسوي.</li> </ul>	

یعنی په اصلي محور یې عمود قطع کړي، (افقي مستوي) له اصلي محور سره مایل او له مؤلّد خط سره یې موازي قطع کړي، دوی سر پر سر گازرې دې له لارښوونې سره سمې قطع کړي او په پای کې د دریم مخ وروستی فعالیت دې له هدایت سره سم سرته ورسوي.

- په پای کې دې ښوونکی د هرې ډلې استازی راوغواړي، ترڅو د خپل فعالیت پایله نورو ته توضیح کړي، که چیرې په توضیح او کار کولو کې تېروتنه کوي، د بلې ډلې استازي ته دې دنده ورکړي، ترڅو د فعالیت پایله خپلو ټولگيوالو ته بیان کړي. د ستونزو په صورت کې دې ښوونکی مرسته وکړي.

### 6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

ښاغلی ښوونکی دې د لوست د لاینه تحکیم لپاره 2,1 پوښتنې په ټولگي کې د زده‌کوونکو په گډون سره حل کړي.

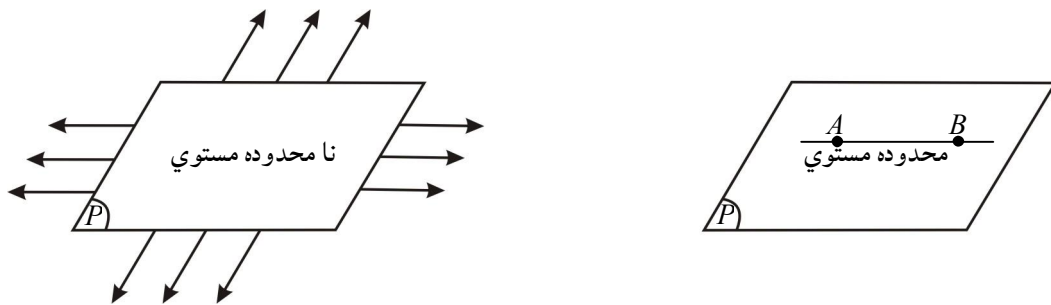
### 7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ښاغلی ښوونکی دې د زده‌کوونکو د پوهې او مهارت د ارزونې لپاره له زده‌کوونکو څخه وپوښتي:

1. کوم هندسي شکلونو ته مخروطي مقاطع ویل کېږي؟
2. څوک کولای شي چې د تختې پر مخ یوې مستوي او یو مخروط ته داسې تقاطع ورکړي چې د تقاطع په پایله کې یوه دایره جوړه شي. همدارنگه یو بل زده‌کوونکی دې داسې تقاطع ورکړي چې د هغه له تقاطع څخه یو الپس جوړ شي.

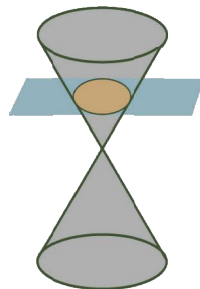
### 8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات:

مستوي یوه لومړنۍ (نه تعریف شوي) اصطلاح منل شوې ده، خو کولای شو د ولاړو اوبو سطحه، د میز سطحه د کاغذ د یوې پانې سطحه او یا د یوې هوارې ټوټې سطحه د یوې مستوي په توگه وپېژنو؛ له دې امله د یوې مستوي د ښودلو لپاره له لاندې شکلونو څخه کار اخیستل کېږي:



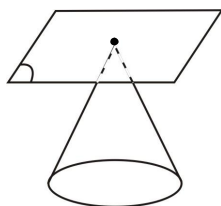
### 9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

- 1- د پورتنی شکل په پام کې نیولو سره، د مستوي او مخروط هغه متقاطع حالت رسم کړئ چې گډ فصل یې یوه دایره او یا یو ټکی وي.



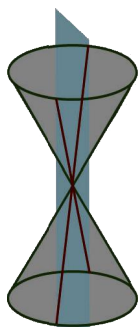
**حل** که چیرې یوه مستوي مخروط داسې قطع کړي، چې په اصلي محور باندې عمود او یا د مخروط له قاعدې سره موازي وي، په دې صورت کې گډ فصل یې یوه دایره ده؛ لکه په مخامخ شکل کې:

که چیرې یوه مستوي د مخروط له قاعدې سره موازي وي او د مخروط له راس سره تماس ولري د تقاطع ځای یې یو ټکی دی، لکه په شکل



2- که چیرې یوه مستوي دوه څوکې په څوکې مخروطونه داسې قطع کړي چې د دواړو مخروطونو اصلي محورونه په

برکې ولري، گډ فصل یې څه ډول هندسي شکل دی؟



**حل** که چیرې یوه مستوي د دواړو مخروطونو اصلي

محورونه په برکې ولري، په دې صورت کې د مستوي او

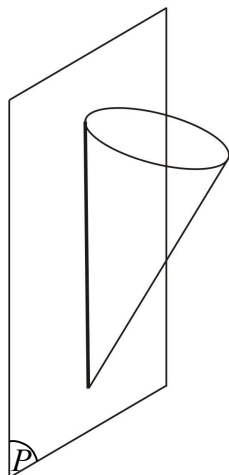
مخروطونو گډ فصل دوه متقاطع خطونه دي چې د کتاب په

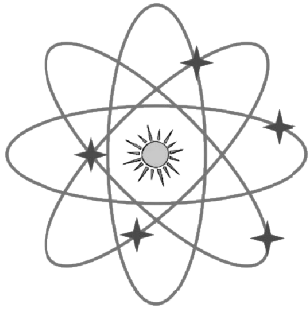
4 مخ کې لیدل کېږي.

3- د یوې مستوي او مخروط گډ فصل په کوم حالت کې یوه کرښه ده؟ په دې حالت کې شکل رسم کړئ؟

**حل** که چیرې یوه مستوي یو مخروط قطع کړي چې اصلي

محور په برکې ولري؛ نو گډ فصل یې یو خط دی.





## لومړۍ څپرکۍ: مخروطي مقاطع

الپس (Ellipse)

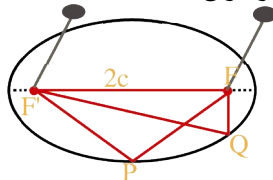
د درسي کتاب (5) مخ

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• زده کوونکي و توانېږي:</li> <li>• الپس وپېژني او په مفهوم يې پوه شي.</li> <li>• د الپس محراقونه، راسونه، اصلي محور، او د الپس مؤلډ وپېژني.</li> <li>• پورتنی اصطلاحگانې (نومونه) په شکل کې وښودلای شي.</li> <li>• د دوو مېخونو او تار څخه په کار اخېستنې سره يوه بيضوي يا <i>Ellipse</i> رسم کړای شي.</li> <li>• له پورته پوهې او مهارت څخه په خپل ورځني ژوند کې کار واخلي.</li> </ul>	<p>- پوهنيزه</p> <p>- مهارتي</p> <p>- ذهني</p>
<p>2- د زده کړې لارې:</p> <p>پوښتنې او ځوابونه، ډله ييز او انفرادي کار</p>	
<p>3- مرستندويه مواد:</p> <p>شېشه يي مېخونه له تار سره يا د اړتيا په اندازه طناب د 4 انچه او سپينيز يا د لرگيو له مېخونو سره، وروډي چارټ او دويم فعاليت چارټ</p>	
<p>4- د وروډي برخې</p> <p>توضیح (5 دقيقې)</p> <p>ښاغلی ښوونکی د سلام او لومړنيو فعاليتونو له اجرا کولو څخه وروسته وروډي چارټ د ټولگي مخې ته ځورند کړی او زده کوونکو ته ووايي چې تاسې د جغرافيايي په مضمون کې لوستي دي چې سبارې د لمر په چاپيره بيضوي مسير سرته رسوي او په شکل کې يې ورته وښايست.</p>	

### 5- د لوست بهير او فعاليت (28) دقيقې:

ښاغلی ښوونکی! که چيرې د زده کوونکو ميزونه داسې وي چې وکولای شو د هغو پر مخ شېشه يي مېخونه ټک و هو، په دې صورت کې زده کوونکي په مناسبو ډلو و وېشي، ترڅو د کتاب د 5 مخ لومړی فعاليت سرته ورسوي، پرته له هغه زده کوونکي له ټولگي څخه بهر وباسي، په دوو ډلو يې و وېشي، په دوو ټکو کې د لرگيو يا 4 انچه مېخونو په ټک و هو لو سره يو حلقه شوی تار چې فاصله يې د دواړو مېخونو له منځ څخه لږ څه زياته وي داسې چې مېخونه د حلقې په منځ او ورسره نښتې وي، وروسته يو لرگوتي له حلقې سره نښتې د مېخونو په شا او خوا و خوځوی



و به لېدل شي چې د خوځېدلي لرگوتي مسير د يوې بيضوي شکل جوړوي. هغه ټکي چې په هغو کې مېخونه ټکول شوي دي د الپس يا بيضوي محراقونه بلل کېږي.

ښاغلی ښوونکی د دويم فعاليت چارټ د ټولگي په مخ کې وځړوی، زده کوونکي په مناسبو ډلو و وېشي، ترڅو د دوو ټکو

ترمنځ د فاصلې له فورمول يعني  $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$  څخه په کار اخېستنې سره د  $MF'$ ,  $MF$  او  $AA'$

اوردوالی پیدا کړي، همدارنگه د  $|MF| + |MF'|$  د جمعی حاصل په لاس راوړي، په پای کې له ډلو څخه یو یا دوه کسه راوغواړئ، چې خپل ډله‌ییز کارونه نورو ته توضیح کړي.  
 ښاغلی ښوونکی د لومړي فعالیت دریم (5مخ جزء) زده‌کوونکو ته کورنۍ دنده ورکړې.

### 6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

ښاغلی ښوونکی لوست ته د تحکیم ورکولو لپاره د دویم فعالیت دریم جزء چې په 6 مخ کې دی، د زده‌کوونکو په گډون سره د پوښتنې او ځواب په شکل د تختې پر مخ سرته ورسوئ.

### 7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ښاغلی ښوونکی د ډاډینې لپاره چې زده‌کوونکو پوهه او مهارت حاصل کړي دی او که نه؟ له زده‌کوونکو څخه لاندې پوښتنې وپوښتئ:

1. الپس څه ډول هندسي شکل ته ویل کېږي؟
2. څوک کولای شي چې الپس رسم او د هغه محراقونه وښيي؟

### 8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات:

غواړو چې د  $M(1, \frac{3}{2})$  او  $F(1, 0)$  ټکو ترمنځ فاصله پیدا کړو؛ نو:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$MF = d_1 = \sqrt{(1-1)^2 + (\frac{3}{2}-0)^2} = \sqrt{(\frac{3}{2})^2} = \frac{3}{2}$$

$$d_2 = MF' = \sqrt{\{1 - (-1)\}^2 + (\frac{3}{2} - 0)^2}$$

$$d_2 = MF' = \sqrt{(1+1)^2 + (\frac{3}{2})^2} = \sqrt{4 + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{16+9}{4}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$$

$$|MF| = \frac{3}{2}, \quad |MF'| = \frac{5}{2}, \quad |MF| + |MF'| = \frac{3}{2} + \frac{5}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$AA' = \sqrt{\{2 - (-2)\}^2 + (0-0)^2} = \sqrt{(2+2)^2} = \sqrt{4^2} = 4$$

څرنگه چې  $AA' = |MF| + |MF'| = 2a$  دی؛ نو ثابت شوه چې  $AA' = |MF| + |MF'| = 4$  دی.

## لومړی څپرکی: مخروطي مقاطع

قطرونه او راسونه، د محراقونو او قطرونو ترمنځ رابطه، د الپس تناظري مرکز، د الپس تناظري محور او عن المركزيت

د درسي کتاب (6 او 7) مخونه

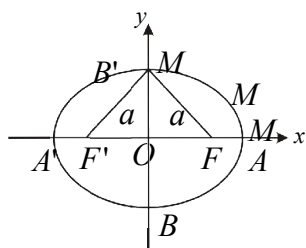
د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- پوهنيزه</li> <li>- مهارتي</li> <li>- ذهني</li> </ul>	<p>ددې لوست په پای کې زده کوونکي و توانېږي چې:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• د الپس قطرونه او راسونه وپېژني، د محراقونو او قطرونو ترمنځ رابطه باندې پوه شي، د الپس تناظري مرکز او تناظري محور وپېژني او همدارنگه د عن المركزيت په مفهوم پوه شي.</li> <li>• د محراقونو او قطرونو ترمنځ رابطه د فيثاغورث له قضیې څخه په کار اخېستنې سره پيدا کړي او همدارنگه له شکل څخه په کار اخېستنې سره د الپس عن المركزيت په لاس راوړي.</li> </ul>
2- د زده کړې لارې:	پوښتنې او ځوابونه، ډله ییز او انفرادي کار
3- مرستندويه مواد:	د 6 او 7 مخونو د شکلونو چارټونه
4- د وړودي برخې توضیح (5 دقیقې)	څرنگه چې پورتنی عنوانونه د الپس فرعي عنوانونه دي؛ نو له دې امله وړودي پوښتنې نه لري چې توضیح ورکړل شي.

### 5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې):

بناغلی ښوونکی دې د سلام، احوال پوښتنې او نورو لومړنیو فعالیتونو له سرته رسولو څخه وروسته د لوست عنوان د تختې پر مخ وليکي او د کتاب د 6 مخ شکل چارټ دې د ټولګي مخې ته وځړوي، وروسته دوه زده کوونکي راوغواړي، ترڅو لومړی زده کوونکی د الپس قطرونه په شکل کې ونیسي او نوم یې واخلي د مثال په ډول  $AA'$  او  $BB'$  د الپس قطرونه دي او دویم زده کوونکی دې د الپس راسونه مشخص او نوم یې واخلي. وروسته له دریم زده کوونکي څخه پوښتنه وکړئ چې د الپس کبير قطر او صغیر قطر له چارټ څخه په کار اخېستنې سره ونیسي، چې  $AA'$  د الپس کبير قطر او  $BB'$  د الپس صغیر قطر دی.

**یادونه** بناغلی ښوونکی دې له یوه زده کوونکي څخه پوښتنه وکړي که چیرې د  $M$  ټکي د صغیر قطر په راسونو یعنی په  $B$  او یا  $B'$  چې د الپس راسونه دي واقع شي، په دې صورت کې  $\overline{MF}$  او  $\overline{MF'}$  فاصلې څه ډول رابطه غوره کوي. که چیرې زده کوونکي ځواب ونشي ویلای، ښوونکی دې ووايي چې په هغه صورت کې  $MF = MF'$  کېږي.



$$\overline{MF} + \overline{MF'} = 2a$$

$$2\overline{MF} = 2a \Rightarrow \overline{MF} = a$$

د  $FMO$  په قائم الزاویه مثلث کې د فيثاغورث له قضیې سره سم  $a^2 = b^2 + c^2$



## 6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$c = \pm\sqrt{a^2 - b^2}$$

پورتنی فورمول د الپس د محراقونو او قطر ترمنځ اړیکه ښيي.

- ښاغلی ښوونکی دې له یوه زده‌کوونکي څخه وغواړي چې د یوه الپس تناظري مرکز او تناظري محور وښيي، که چیرې زده‌کوونکي ونشي کړای چې تناظري مرکز او تناظري محور وښيي، وروسته دې ښوونکي وروښيي.
  - همدارنگه ښوونکی دې پوښتنه وکړي چې: څوک کولای شي د الپس عن‌المرکزیت تعریف کړي؟
- په هغه صورت کې چې زده‌کوونکي د عن‌المرکزیت تعریف ونشي کړای، خپله ښوونکی دې تعریف کړي.

## 7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ښاغلی ښوونکی د خپل یقین لپاره چې زده‌کوونکو پورتنی موضوع‌ګانې زده‌کړي دي او که نه؟ له زده‌کوونکو څخه لاندې پوښتنې وپوښتي:

1. څوک کولای شي چې د الپس قطرونه او راسونه وښيي؟
2. څوک د الپس د اوږد او لنډ قطرونو ترمنځ اړیکه د فورمول په واسطه وبلای شي؟
3. له یوه زده‌کوونکي څخه پوښتنه وکړئ چې عن‌المرکزیت څه شی دی، تعریف یې کړي؟
4. په کوم دلیل د تل لپاره  $e < 1$  دی؟

## 8- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

1- که چیرې په بیضوي کې د کبیر قطر او صغیر قطر اوږدوالی یو له بل سره مساوي وي، څه ډول منحنی په لاس راځي؟  
**حل** که چیرې په بیضوي کې د کبیر قطر او صغیر قطر اوږدوالی یو له بل سره مساوي وي، بیضوي په دایره بدلېږي؛ یعنې دغه ډول منحنی ته دایره ویل کېږي.

2- که چیرې د بیضوي عن‌المرکزیت  $\frac{2}{3}$  وي، په دې صورت کې د کبیر قطر او صغیر قطر نسبت پیدا کړئ.

**حل** څرنگه چې  $e = \frac{c}{a} = \frac{2}{3}$  ده؛ نو له دې څخه  $c = 2$  او  $a = 3$  قیمت اخلي.

د محراقونو او قطرونو ترمنځ د اړیکې له فورمول یعنې  $a^2 = b^2 + c^2$  څخه کار اخلو او د  $b$  قیمت په لاس راوړو.

$$b^2 = a^2 - c^2$$

$$b^2 = (3)^2 - (2)^2 = 9 - 4 = 5$$

$$b = \pm\sqrt{5}$$

$$\text{کبیر قطر} = 2a$$

$$\text{صغیر قطر} = 2b$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\text{کبیر قطر}}{\text{صغیر قطر}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

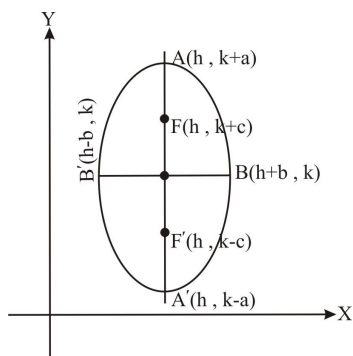
# لومړی څپرکی: مخروطي مقاطع

د بیضوي معادله

د درسي کتاب (9) مخ

د لوست وخت: (یو درسي ساعت)

<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• د پوهنیزه</li> <li>• مهارتي</li> <li>• ذهنيتي</li> </ul> <p>زده کوونکي د لوست په پای و توانېږي چې:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• د الپس یا بیضوي په معادله پوه شي.</li> <li>• د الپس معادله په لاس راوړای شي.</li> <li>• د الپس د فورمول په مرسته پوښتنې حل کړای شي.</li> <li>• له پورتنۍ پوهې او مهارت څخه خوښي ښکاره کړي.</li> </ul>	
<p>2- د زده کړې لارې:</p> <p>پوښتنې او ځوابونه، ډله ییز او انفرادي کار</p>	
<p>3- مرستندويه مواد:</p> <p>د کتاب د 9 مخ د دویم شکل چارټ په ډبل خط، د گراف کاغذ</p>	
<p>4- د وړودي برخې توضیح (5 دقیقې)</p> <p>ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته هغه چارټ چې مخکې له مخکې مو جوړ کړی دی، د تختې پرمخ وځړوی او له زده کوونکو څخه وړودي پوښتنه وکړی، ترڅو زده کوونکي د هغې په اړه فکر وکړي.</p>	
<p>5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې):</p> <p>ښاغلی ښوونکی دې د 9 مخ فعالیت یوه زده کوونکي ته ورکړي چې د تختې پر مخ یې سرته ورسوي، په عین وخت کې دغه فعالیت نورو زده کوونکو ته هم ورکړي چې په گرافي کاغذ کې یې سرته ورسوي.</p> <p>ښوونکی دې د زده کوونکو له کار او فعالیت څخه څارنه وکړي او ضعیفو زده کوونکو ته دې لارښوونه او ورسره مرسته وکړي.</p> <p>په پای کې هغه زده کوونکی چې فعالیت یې د تختې پر مخ سرته رسولی نورو زده کوونکو ته دې خپل کار توضیح کړي. د تېروتنې په صورت کې دې بل زده کوونکي ته دنده ورکړل شي چې فعالیت په تخته سرته ورسوي. هغه زده کوونکي چې تېروتنه یې کړې ده، خپله تېروتنه دې اصلاح کړي.</p> <p>ښاغلی ښوونکی دې د زده کوونکو په فعال گډون سره د پوښتنو او ځوابونو په ډول د الپس معادله ثبوت کړي.</p>	
<p>6- د زده کړې تحکیم: (7 دقیقې)</p> <p>ښاغلی ښوونکی د کتاب د 11 مخ دویم مثال د پوښتنې او ځواب په طریقه په ټولگي کې حل کړی.</p>	
<p>7- د لوست د پایلې ارزونه: (5 دقیقې)</p> <p>ښاغلی ښوونکی د باور د پیدا کولو لپاره چې زده کوونکو لوست زده کړی، او که نه؟ له زده کوونکو څخه لاندې پوښتنې وپوښتي:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. څوک د الپس معادله پر تخته لیکلای شي؟</li> <li>2. که د الپس محراقونه د <math>x</math> پر محور وي، څوک د الپس د راسونو مختصات لیکلای شي؟</li> </ol>	



## لومړی څپرکی: مخروطي مقاطع

د بیضوي معادله- دویم حالت

د درسي کتاب (10) مخ

د لوست وخت: (یو درسي ساعت)

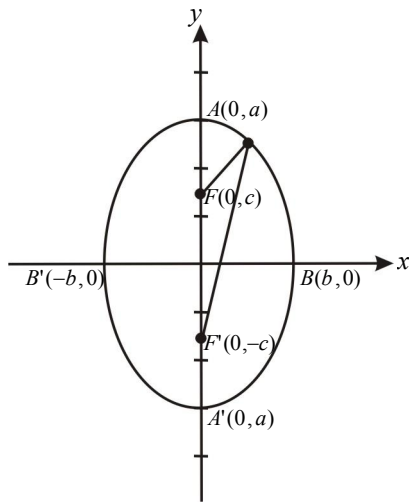
<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• پوهنیزه</li> <li>• مهارتي</li> <li>• ذهنيتي</li> </ul> <p>زده کوونکي به د لوست په پای کې و توانېږي چې:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• د الپس په معادله پوه شي.</li> <li>• د الپس معادله په لاس راوړای شي.</li> <li>• د الپس د فورمول په مرسته پوښتنې حل کړای شي.</li> <li>• له پورتنۍ پوهې او مهارت څخه خوښي ښکاره کړي.</li> </ul>	
<p>2- د زده کړې لارې:</p> <p>پوښتنې او ځوابونه، ډله ییز او انفرادي کار</p>	
<p>3- مرستندويه مواد:</p> <p>په دې مخ کې د وړو دي برخې د پوښتنې رسم شوی چارټ</p>	
<p>4- د وړو دي برخې توضیح (5 دقیقې)</p> <p>ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته هغه چارټ چې مخکې مو جوړ کړی دی، د ټولګي په مخ کې وځړوی او پوښتنه وکړی، په تېر لوست کې د الپس محراقونه د <math>x</math> پر محور باندې پراته وو، نو د الپس معادله <math>\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1</math> په لاس راغله، اوس که چیرې محراقونه د <math>y</math> پر محور باندې وي، د الپس معادله به څه شکل ولري؟ که چیرې ځواب مو په لاس را نه وړ، نو ورته ولیکئ چې معادله یې <math>\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1</math> ده او شکل یې همغه گراف دی چې په چارټ کې رسم شوی دی.</p>	
<p>5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې):</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• ښاغلی ښوونکی د 10 مخ لومړی مثال د پوښتنو او ځوابونو په شکل په ټولګي کې حل کړی.</li> <li>• ښاغلی ښوونکی دې زده کوونکي په مناسبو ډلو ووېشي، ترڅو دریم مثال د یو بل سره په مشوره حل کړي.</li> <li>• ښاغلی ښوونکی دې زده کوونکو له ډلو څخه کتنه وکړي چې زده کوونکي د مثال حل له کتاب څخه نقل ونکړي.</li> <li>• ښاغلی ښوونکی دې فعالې ډلې تشویق او ضعیفو ډلو ته لارښوونه وکړي.</li> <li>• کوښښ دې وشي چې په هره ډله کې لایق او ضعیف زده کوونکي تنظیم شي.</li> <li>• ښاغلی ښوونکی دې د فعالیت په پای کې د هرې ډلې استازي راوغواړي چې خپل ډله ییز کار نورو ته د تختې پرمخ توضیح کړي که چیرې ونه توانېږي، مرسته او لارښوونه ورته وکړی.</li> </ul>	
<p>6- د زده کړې تحکیم: (7 دقیقې)</p> <p>ښاغلی ښوونکی د لوست د لابنه تحکیم لپاره د کتاب 12 مخ څلورم مثال د پوښتنو او ځوابونو په طریقه د زده کوونکو په فعال ګډون سره په ټولګي کې حل کړی.</p>	

### 7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

بناغلی ښوونکی دې د زده‌کوونکو له زده‌کړې څخه د ډاډ لپاره له زده‌کوونکو څخه لاندې پوښتنې وپوښتی:

1. څوک د الپس معادله په هغه صورت کې لیکي چې محراقونه یې د  $x$  پر محور وي؟
2. څوک د الپس معادله په هغه صورت کې لیکلای شي چې محراقونه یې د  $y$  پر محور وي؟
3. څوک د الپس معادله لیکلای شي، چې د اوږده قطر نیمایي اوږدوالی  $5\text{cm}$  او د لنډ قطر نیمایي اوږدوالی یې  $2.5\text{cm}$  وي؟

### 8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات



$$MF = \sqrt{(x-0)^2 + (y-c)^2}$$

$$MF' = \sqrt{(x-0)^2 + (y+c)^2}$$

$$MF + MF' = 2a \dots I$$

$MF$  او  $MF'$  په  $I$  رابطه کې وضع کوو:

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-c)^2} + \sqrt{(x-0)^2 + (y+c)^2} = 2a \dots II$$

$II$  معادله ساده کوو:

$$\sqrt{x^2 + (y-c)^2} + \sqrt{x^2 + (y+c)^2} = 2a$$

$$\sqrt{x^2 + (y-c)^2} = 2a - \sqrt{x^2 + (y+c)^2}$$

دواړه خواوې مربع کوو:

$$x^2 + (y-c)^2 = (2a - \sqrt{x^2 + (y+c)^2})^2$$

$$x^2 + y^2 - 2cy + c^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{x^2 + (y+c)^2} + x^2 + (y+c)^2$$

$$x^2 + y^2 - 2cy + c^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{x^2 + (y+c)^2} + x^2 + y^2 - 2cy + c^2$$

$$-4cy = 4a^2 - 4a\sqrt{x^2 + (y+c)^2} \quad / \div (-4)$$

$$cy = -a^2 + a\sqrt{x^2 + (y+c)^2}$$

$$cy + a^2 = a\sqrt{x^2 + (y+c)^2}$$

دواړه خواوې مربع کوو:

$$(cy + a^2)^2 = a^2 \{x^2 + (y+c)^2\}$$

$$c^2 y^2 + 2a^2 cy + a^4 = a^2 \{x^2 + y^2 + 2cy + c^2\}$$

$$c^2 y^2 + 2a^2 cy + a^4 = a^2 x^2 + a^2 y^2 + 2a^2 cy + a^2 c^2$$

$$a^2 x^2 + a^2 y^2 - c^2 y^2 - a^4 + a^2 c^2 = 0$$

$$y^2 (a^2 - c^2) + a^2 x^2 - a^2 (a^2 - c^2) = 0$$

$$y^2 b^2 + a^2 x^2 - a^2 b^2 = 0$$

$$y^2 b^2 + a^2 x^2 = a^2 b^2$$

دواړه خواوې په  $a^2b^2$  باندې ویشو:

$$\frac{y^2b^2}{a^2b^2} + \frac{a^2x^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2}$$

$$\boxed{\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1}$$

### 8- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

1 - لاندې معادلې په پام کې ونیسئ د اوږده قطر د راسونو او محراقونو ترمنځ فاصله پیدا کړئ.

a)  $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$

b)  $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$

د (a) جز حل: د پوښتنو د حل لپاره لومړی باید اوږد قطر، لنډ قطر او د محراقونو ترمنځ فاصله پیدا کړو.

a)  $a^2 = 36 \Rightarrow a = \pm 6$

$b^2 = 16 \Rightarrow b = \pm 4$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 36 - 16 = 20$

څرنګه چې  $a > b$  ده؛ نو له دې امله محراقي محور یې د  $x$  له محور سره موازي دی.

$c^2 = 20 \Rightarrow c = \pm\sqrt{20}$  یا  $c = \pm 2\sqrt{5}$

څرنګه چې  $a$  د اوږده قطر نیمایي اوږدوالی دی؛ یعنې اوږد قطري یې له  $2a$  سره مساوي دی او  $2c$  د محراقي محور

اوږدوالی رانښيي؛ نو:

$|AA'| = 2a = 2 \cdot 6 = 12$

$|FF'| = 2c = 2 \cdot (2 \cdot \sqrt{5}) = 4\sqrt{5}$

د (b) جز حل:

b)  $a^2 = 100 \Rightarrow a = \pm 10$

$b^2 = 36 \Rightarrow b = \pm 6$

بیا هم لیدل کېږي چې  $a > b$  ده او محراقي محور یې د  $x$  له محور سره موازي دی.

$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c^2 = 100 - 36 = 64$  ،  $\boxed{c = \pm 8}$

$|AA'| = 2a = 2 \cdot 10 = 10$

$|FF'| = 2c = 2 \cdot 8 = 16$

2 - د هغې الپس معادله ولیکئ چې عن المکزیت یې 0.8 وي.

حل پوهېږو چې:  $e = \frac{c}{a} = 0.8 = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

$c = 4$  ،  $a = 5$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2$

$b^2 = 25 - 16 \Rightarrow b^2 = 9$  ،  $\boxed{b = \pm 3}$

څرنګه چې  $a > b$  دی؛ نو محراقي محور یې د  $x$  له محور سره موازي دی او معادله یې په لاندې ډول ده:

$\boxed{\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1}$  یا  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

## لومړی څپرکی: مخروطي مقاطع

د هغې بیضوي معادله چې مرکز یې یو اختیاري ټکی وي (لومړی حالت)

د درسي کتاب (13) مخ

د لوست وخت: (یو درسي ساعت)

<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- پوهنیزه</li> <li>- مهارتي</li> <li>- ذهنيتي</li> </ul> <p>• زده کوونکي به د لوست په پای کې و توانېږي چې:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• د هغې الپس په معادلې چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې نه وي پوه شي.</li> <li>• الپس په هغه صورت کې رسم کړای شي چې د مرکز او محراقونو مختصات ورکړل شي.</li> <li>• د الپس د مرکز ځای د <math>h</math> او <math>k</math> د قیمتونو په پام کې نیولو سره تعیین کړای شي.</li> <li>• د پورتنی پوهې او مهارت له اجرا کولو څخه د خوښی احساس وکړي.</li> </ul>	
<p>2- د زده کړې لارې:</p> <p>پوښتنې او ځوابونه، ډله ییز او انفرادي کار</p>	
<p>3- مرستندویه مواد:</p> <p>د کتاب د 13 مخ د معادلو شکل یعنې <math>\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1</math> او <math>\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1</math> معادلو چارټونه.</p>	
<p>4- د وړودي برخې توضیح (5 دقیقې)</p> <p>ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته هغه چارټ چې مخکې مو جوړ کړی دی، د ټولګي په مخ کې ځورند کړی او وړودي پوښتنه له زده کوونکو څخه وپوښتی، که چیرې زده کوونکي ځواب ونشي وبلای ښاغلی ښوونکی شکل ته اشاره وکړی او د الپس مرکز چې مختصات یې د <math>(h, k)</math> مرتبه جوړه ده او په <math>O(h, k)</math> سره ښودل شوې ده، زده کوونکو ته وروښایاست. څرنگه چې د الپس محراقونه په هغه خط باندې دي، چې د <math>x</math> له محور سره موازي دی؛ نو معادله یې <math>\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1</math> ده او همدارنگه د <math>\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1</math> معادله د هغه الپس معادله ده چې محراقونه یې په هغه خط باندې دي چې د <math>y</math> له محور سره موازي دی. دغه دا رابښي چې د دغې الپس مرکز له پورتنیو شرطونو سره سم د وضعیه کمیاتو په مبدا کې نه ده.</p>	
<p>5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې):</p> <p>ښاغلی ښوونکی زده کوونکو ته دنده ورکړی چې د 13 مخ فعالیت په خپلو کتابچو کې سرته ورسوي. په عین وخت کې دې دغه فعالیت یو زده کوونکی د تختې پر مخ سرته ورسوي.</p> <p>ښاغلی ښوونکی دې څارنه وکړي چې زده کوونکي د خپل فعالیت په سرته رسولو کې بوخت دي او که نه؟ ترڅو د تختې له مخې یې نقل نه کړي. د فعالیت په پای کې هغه زده کوونکی چې د تختې مخې ته ولاړ دی خپل فعالیت نورو زده کوونکو ته توضیح کړي. که چیرې د دغه زده کوونکي په کار کې تېروتنه ولیدل شي، ښاغلی ښوونکی دې لارښوونه ورته وکړي، ترڅو نور زده کوونکي خپلې تېروتنې اصلاح کړي.</p> <p>ښاغلی ښوونکی لومړی حالت چې محراقي محور د <math>x</math> له محور سره موازي دی، له چارټ څخه په کار اخیستنې سره د پوښتنو او ځوابونو په طریقې (د زده کوونکو په ګډون) په ټولګي کې کار وکړی؛ یعنې: <math>\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1</math> معادله ثبوت کړی.</p>	

## 6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

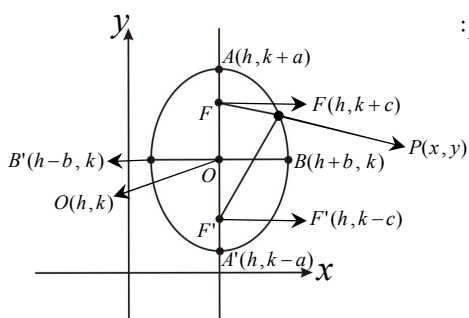
ښاغلی ښوونکی دې لوست ته د تحکیم ورکولو لپاره د 14 مخ لومړی مثال په ټولگي کې د پوښتنو او ځوابونو په طريقه حل کړي.

## 7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

- ښاغلی ښوونکی د زده‌کوونکو د ارزونې لپاره له زده‌کوونکو څخه لاندې پوښتنې وپوښتې:
1. څوک د هغه الپس معادله لیکلای شي چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې وي؟
  2. د هغه الپس معادله څوک لیکلای شي چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې نه وي؟

## 8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات:

د 15 مخ دویم حالت ثبوت د الپس له تعریف څخه په کار اخیستنې سره لرو:



$$|PF| + |PF'| = 2a \quad \dots \text{ I}$$

$$|PF| = \sqrt{(x-h)^2 + \{y-(k+c)\}^2} = \sqrt{(x-h)^2 + \{(y-k)-c\}^2}$$

$$|PF'| = \sqrt{(x-h)^2 + \{y-(k-c)\}^2} = \sqrt{(x-h)^2 + \{(y-k)+c\}^2}$$

د  $|PF|$  او  $|PF'|$  قیمتونه په I رابطه کې وضع کوو:

$$\sqrt{(x-h)^2 + \{(y-k)-c\}^2} + \sqrt{(x-h)^2 + \{(y-k)+c\}^2} = 2a \quad \dots \text{ II}$$

$$\sqrt{(x-h)^2 + \{(y-k)-c\}^2} = 2a - \sqrt{(x-h)^2 + \{(y-k)+c\}^2} \quad \dots \text{ III}$$

د III رابطه دواړه خواوې مربع کوو؛ نو لرو چې:

$$(x-h)^2 + \{(y-k)-c\}^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-h)^2 + \{(y-k)+c\}^2} + (x-h)^2 + \{(y-k)+c\}^2$$

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 - 2c(y-k) + c^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-h)^2 + \{(y-k)+c\}^2} + (x-h)^2 + (y-k)^2 + 2c(y-k) + c^2$$

$$-2c(y-k) - 2c(y-k) = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-h)^2 + \{(y-k)+c\}^2} = -4c(y-k) - 4a^2$$

دواړه خواوې په (-4) وېشو، نو لرو:

$$= -4a\sqrt{(x-h)^2 + \{(y-k)+c\}^2} c(y-k) + a^2 = a\sqrt{(x-h)^2 + \{(y-k)+c\}^2}$$

$$\{c(y-k) + a^2\}^2 = \left[ a\sqrt{(x-h)^2 + \{(y-k)+c\}^2} \right]^2 \quad \text{اوس بیا د پورته مساوات دواړه خواوې مربع کوو:}$$

$$c^2(y-k)^2 + 2a^2c(y-k) + a^4 = a^2[(x-h)^2 + \{(y-k)+c\}^2]$$

$$c^2(y-k)^2 + 2a^2c(y-k) + a^4 = a^2[(x-h)^2 + (y-k)^2 + 2c(y-k) + c^2]$$

$$c^2(y-k)^2 + 2a^2c(y-k) + a^4 = a^2(x-h)^2 + a^2(y-k)^2 + 2a^2c(y-k) + a^2c^2$$

$$c^2(y-k)^2 - a^2(x-h)^2 - a^2(y-k)^2 = -a^4 + a^2c^2$$

د مساواتو دواړه خواوې په (-1) کې ضربوو؛ نو لرو چې:

$$(y-k)^2(a^2 - c^2) + a^2(x-h)^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

$$(y-k)^2b^2 + a^2(x-h)^2 = a^2b^2$$

د  $a^2 - c^2 = b^2$  وضع کوو:

$$\frac{(y-k)b^2}{a^2b^2} + \frac{a^2(x-h)^2}{a^2b^2} = 1 \Rightarrow \frac{(y-k)}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1 \quad \text{د پورته مساواتو دواړه خواوې په } a^2b^2 \text{ وېشو:}$$

## لومړی څپرکی: مخروطي مقاطع

د هغې بیضوي معادله چې مرکزي یو اختیاري ټکی وي (دویم حالت)

د درسي کتاب (15) مخ

د لوست وخت: (یو درسي ساعت)

<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>پوهنیزه</li> <li>مهارتي</li> <li>ذهنيتي</li> </ul> <p>زده کوونکي به د لوست په پای کې و توانېږي چې:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>پوه شي چې د محراقي محور موقعیت ته په تغیر ورکولو سره (د <math>x</math> له محور سره موازي یا د <math>y</math> له محور سره موازي) د الپس د معادلې شکل تغیر مومي.</li> <li>د الپس یا بیضوي شکل ته په کتو سره د الپس معادله تعیین کړای شي.</li> <li>د <math>\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1</math> او <math>\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1</math> معادلو ته په کتو سره پوه شي چې د بیضوي شکل څه ډول یا محراقي محور کوم دی؟</li> </ul>	
<p>2- د زده کړې لارې:</p> <p>پوښتنې او ځوابونه، ډله ییز او انفرادي کار</p>	
<p>3- مرستندويه مواد:</p> <p>د کتاب 15 مخ د بیضوي د شکل چارټ</p>	
<p>4- د وړودي برخې توضیح (5 دقیقې)</p> <p>ښاغلی ښوونکی دې له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته وپوهېږي چې د کتاب د 13 مخ د لومړي حالت وړودي برخې په دې ځای کې هم صدق کوي.</p>	
<p>5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې):</p> <p>ښاغلی ښوونکی په کتاب کې د دویم حالت ثبوت زده کوونکو ته دنده ورکړل شوې ده، فکر کېږي چې دا د زده کوونکو لپاره یو څه ستونزمنه ده. په دې خاطر چې په پوښتنو کې هم درې پوښتنې په دې اړه شتون لري، نو ثبوت یې په اضافي معلوماتو کې موجود دی، هغه مطالعه کړئ، د پوښتنو او ځوابونو په طریقه د زده کوونکو په فعالیت برخې اخیستنې سره په ټولګي کې کار وکړئ. د زده کوونکو گډون شرط دی، د سم ځواب په وبلو سره زده کوونکو ته تحسین او وهڅوی.</p> <p>ښاغلی ښوونکی دې د درسي کتاب د 15 مخ یادونې له لوستلو څخه وروسته، د 15 مخ دویم مثال د زده کوونکو په فعال گډون سره په ټولګي کې حل کړي.</p>	
<p>6- د زده کړې تحکیم: (7 دقیقې)</p> <p>ښاغلی ښوونکی د لوست د ښه تحکیم لپاره زده کوونکي په مناسبو ډلو و وپېښ او د کتاب د 16 مخ دریم مثال ورته ورکړئ چې د یو بل په مشوره یې حل کړي. تاسو د زده کوونکو له ډله ییز کار څخه څارنه وکړئ، فعالیت ډلې تشویق او ضعیفو ډلو ته لارښوونه وکړئ.</p> <p>د فعالیت په پای کې له ډلو څخه یو یا دوه زده کوونکي راوغواړئ ترڅو خپل ډله ییز کار نورو زده کوونکو ته توضیح کړي.</p>	
<p>7- د لوست د پایلې ارزونه: (5 دقیقې)</p> <p>ښاغلی ښوونکی د خپل ډاډ ترلاسه کولو لپاره له زده کوونکو څخه په لاندې ډول وپوښتنئ:</p>	



1. په شکل کې څوک د الپس د محراقونو، راسونو او مرکز مختصات بنودلای شي؟  
 2. څوک د محراقونو او راسونو مختصات، د اوږد قطر او لنډ قطر اوږدوالي له لاندې معادلو څخه پیدا کولای شي:

$$a) \frac{(x+3)^2}{2} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1, \quad b) x^2 + 2y^2 + 4x - 12y + 20 = 0$$

دویمه پوښتنه د کتاب د 16 مخ له پوښتنو څخه ده، چې حل یې د پوښتنو په حل کې شتون لري.

### 8- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

1. د بیضوي په لاندې معادلو کې د مرکز، محراقونو او راسونو مختصات پیدا کړئ.

$$a) \frac{(x+3)^2}{2} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1 \quad b) x^2 + 2y^2 + 4x - 12y + 20 = 0$$

حل:

$$a) \frac{(x+3)^2}{2} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$$

د بیضوي مرکز  $(h, k) = (-3, 1)$  یعنې  $h = -3$ ،  $k = 1$  دی.

$$b^2 = 2 \Rightarrow b = \pm\sqrt{2}$$

$$a^2 = 9 \Rightarrow a = \pm 3$$

څرنگه چې د  $(y-k)^2$  مخرج لوی دی؛ نو د بیضوي محراقي محور د  $y$  له محور سره موازي دی او له  $a^2 = b^2 + c^2$  رابطې څخه په کار اخیستنې سره،  $c$  په لاس راوړو:

$$c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 2 = 7 \Rightarrow c = \pm\sqrt{7}$$

$$\left. \begin{aligned} F(h, k+c) &= F(-3, 1+\sqrt{7}) \\ F'(h, k-c) &= F'(-3, 1-\sqrt{7}) \end{aligned} \right\} \text{د محراقونو مختصات}$$

$$\left. \begin{aligned} A(h, k+a) &= A(-3, 1+3) = (-3, 4) \\ A'(h, k-a) &= A'(-3, 1-3) = (-3, -2) \end{aligned} \right\} \text{د راسونو مختصات}$$

$$b) x^2 + 2y^2 + 4x - 12y + 20 = 0$$

لومړی له کاملې مربع څخه کار اخلو او معادله په معیاري ډول لیکو:

$$x^2 + 4x + 2(y^2 - 6y) + 20 = 0$$

$$x^2 + 4x + 4 - 4 + 2(y^2 - 6y + 9 - 9) + 20 = 0$$

$$(x+2)^2 + 2\{(y-3)^2 - 9\} + 16 = 0$$

$$(x+2)^2 + 2(y-3)^2 - 18 + 16 = 0$$

$$(x+2)^2 + 2(y-3)^2 - 2 = 0$$

$$(x+2)^2 + 2(y-3)^2 = 2$$

$$\frac{(x+2)^2}{2} + \frac{(y-3)^2}{1} = 1$$

له پورتنی معادلې څخه معلومېږي چې د  $(x+2)^2$  مخرج لوی دی؛ یعنې د بیضوي محراقي محور د  $x$  له محور سره موازي دی:

$$a^2 = 2, \quad a = \pm\sqrt{2}$$

$$b^2 = 1, \quad b = \pm 1$$

$$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c^2 = 2 - 1 = 1, \quad c = \pm 1$$

لیدل کېږي چې د بیضوي مرکز  $(h, k) = (-2, 3)$  یعنې:  $h = -2, k = 3$  دی.

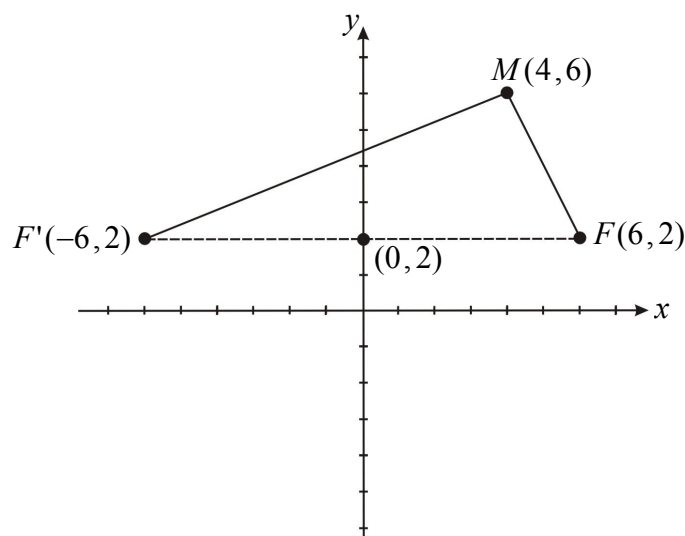
$$\left. \begin{aligned} A(h+a, k) &= A(-2 + \sqrt{2}, 3) \\ A'(h-a, k) &= A'(-2 - \sqrt{2}, 3) \end{aligned} \right\} \text{د راسونو مختصات}$$

$$\left. \begin{aligned} F(h+c, k) &= F(-2 + 1, 3) = F(-1, 3) \\ F'(h-c, k) &= F'(-2 - 1, 3) = F'(-3, 3) \end{aligned} \right\} \text{د محراقونو مختصات}$$

2. د داسې بیضوي معادله ولیکئ چې مرکزي یې د  $(0, 2)$  ټکی، محراق یې د  $(6, 2)$  ټکی او د  $(4, 6)$  له ټکې څخه تیره شي.

**یادونه:** دا پوښتنه په درسي کتاب کې په ټایپ کې غلطه شوې ده، نو په پورته ډول یې اصلاح کړی.

**حل:**



د بیضوي د تعریف په پام کې نیولو سره لرو چې:

$$|AF| + |AF'| = 2a, \quad |MF| + |MF'| = 2a$$

$$|MF| = \sqrt{(4-6)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (4)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$|MF'| = \sqrt{\{4 - (-6)\}^2 + (6-2)^2} = \sqrt{(10)^2 + (4)^2} = \sqrt{116} = 2\sqrt{29}$$

$$|MF| + |MF'| = 2\sqrt{5} + 2\sqrt{29} = 2(\sqrt{5} + \sqrt{29}) = 2a$$

$$a = \sqrt{5} + \sqrt{29}, \quad |FF'| = 2c = 2 \cdot 6 = 12$$

$$b^2 = a^2 - c^2 = (\sqrt{5} + \sqrt{29})^2 - (6)^2 = 5 + 2\sqrt{5}\sqrt{29} + 29 - 36 = 2\sqrt{145} - 2$$

$$b^2 = 22.08 \Rightarrow \boxed{b = \pm 4.7}$$

$$\frac{(x-0)^2}{(\sqrt{5} + \sqrt{29})^2} + \frac{(y-2)^2}{(2\sqrt{145} - 2)^2} = 1 \quad \text{له عبارت دی له:}$$

3. د بیضوي لاندې معادلې د معیاري معادلو په ډول ولیکئ، د مرکز، راسونو، محراقونو وضعیه کمیات او همدارنگه د اوږده قطر، لنډ قطر اوږدوالی، عن المرکزیت پیدا او گرافونه یې رسم کړئ:

$$a) 9x^2 + 25y^2 - 36x - 150y + 36 = 0$$

$$b) 16x^2 + 4y^2 + 96x - 8y + 84 = 0$$

حل (a): بیا هم له تکمیل مربع څخه کار اخلو:

$$9x^2 + 25y^2 - 36x - 150y + 36 = 0$$

$$9x^2 - 36x + 25y^2 - 150y + 36 = 0$$

$$9(x^2 - 4x) + 25(y^2 - 6y) + 36 = 0$$

$$9(x^2 - 4x + 4 - 4) + 25(y^2 - 6y + 9 - 9) + 36 = 0$$

$$9(x - 2)^2 - 36 + 25(y - 3)^2 - 225 + 36 = 0$$

$$9(x - 2)^2 + 25(y - 3)^2 = 225 \quad / \div 225$$

$$\boxed{\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1}$$

$$a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$$

$$b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$$

$$O(h, k) = O(2, 3)$$

څرنگه چې د  $(x-2)^2$  مخرج د  $(y-3)^2$  د مخرج په پرتله لوی دی؛ یعنې  $a > b$  څخه ده، نو د بیضوي محراقي محور د  $x$  له محور سره موازي دی؛ نو:

$$\left. \begin{aligned} A(h+a, k) &= A(2+5, 3) = A(7, 3) \\ A'(h-a, k) &= A'(2-5, 3) = A'(-3, 3) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} B(h, k+b) &= B(2, 3+3) = B(2, 6) \\ B'(h, k-b) &= B'(2, 3-3) = B'(2, 0) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} F(h+c, k) &= F(2+4, 3) = F(6, 3) \\ F'(h-c, k) &= F'(2-4, 3) = F'(-2, 3) \end{aligned} \right\}$$

$$|AA'| = 2a = 2 \cdot 5 = 10 \text{ د اوږده قطر اوږدوالی}$$

$$|BB'| = 2b = 2 \cdot 3 = 6 \text{ د لنډ قطر اوږدوالی}$$

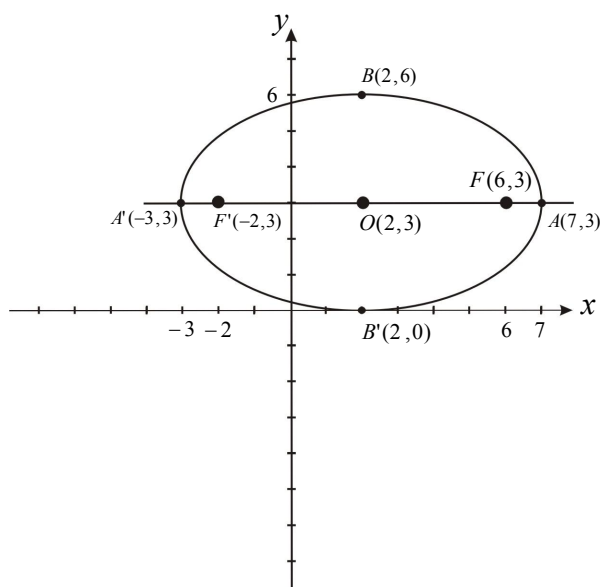
$$|FF'| = 2c = 2 \cdot 4 = 8 \text{ د محراقونو ترمنځ فاصله}$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} = 0.8 \text{ عن المرکزیت}$$

د اوږد قطر د راسونو مختصات

د لنډیا صغیر قطر مختصات

د محراقونو مختصات



(b حل)

$$16x^2 + 4y^2 + 96x - 8y + 84 = 0$$

$$16x^2 + 96x + 4y^2 - 8y + 84 = 0$$

$$16(x^2 + 6x) + 4(y^2 - 2y) + 84 = 0$$

$$16(x^2 + 6x + 9 - 9) + 4(y^2 - 2y + 1 - 1) + 84 = 0$$

$$16(x+3)^2 - 144 + 4(y-1)^2 - 4 + 84 = 0$$

$$16(x+3)^2 + 4(y-1)^2 - 64 = 0$$

$$16(x+3)^2 + 4(y-1)^2 = 64 \quad / \div 64$$

$$\frac{(x+3)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1$$

معلومېږي چې د  $(y-1)^2$  مخرج د  $(x+3)^2$  له مخرج څخه لوی دی؛ نو د بیضوي محراقي محور د  $y$  له محور سره موازي دی او د بیضوي د مرکز مختصات  $(h,k) = (-3,1)$ ،  $h = -3, k = 1$  دي.

$$a^2 = 16 \Rightarrow a = \pm 4$$

$$b^2 = 4 \Rightarrow b = \pm 2$$

$$c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 4 = 12, \quad c = \pm\sqrt{12}$$

$$c = \pm 2\sqrt{3}$$

$$\left. \begin{aligned} A(h, k+a) &= A(-3, 1+4) = A(-3, 5) \\ A'(h, k-a) &= A'(-3, 1-4) = A'(-3, -3) \end{aligned} \right\}$$

د کبیر قطر د راسونو مختصات

$$\left. \begin{aligned} B(h+b, k) &= B(-3+2, 1) = B(-1, 1) \\ B'(h-b, k) &= B'(-3-2, 1) = B'(-5, 1) \end{aligned} \right\}$$

د صغیر قطر د راسونو مختصات

$$\left. \begin{aligned} F(h, k+c) &= F(-3, 1+2\sqrt{3}) \\ F'(h, k-c) &= F'(-3, 1-2\sqrt{3}) \end{aligned} \right\}$$

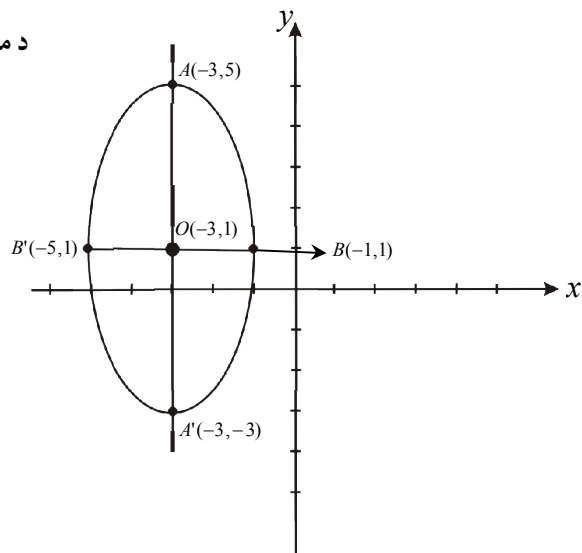
د محراقونو مختصات

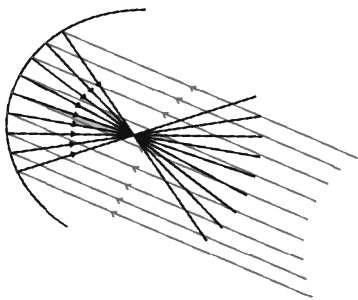
$$|AA'| = 2a = 2 \cdot 4 = 8 \text{ د اوږده قطر اوږدوالی}$$

$$|BB'| = 2b = 2 \cdot 2 = 4 \text{ د لنډ قطر اوږدوالی}$$

$$|FF'| = 2c = 2(2\sqrt{3}) = 4\sqrt{3} \text{ د محراقونو ترمنځ فاصله}$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ عن المركزیت}$$





## لومړۍ څپرکۍ: مخروطي مقاطع

پارابولا

د درسي کتاب (17) مخ

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- پوهنيزه</li> <li>- مهارتي</li> <li>- ذهنيته</li> </ul> <p>زده کوونکي د لوست په پای کې به په دې و توانېږي چې:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• پارابولا به د يوې مخروطي مقاطع په توگه وپېژني او د هغه په مفهوم به پوه شي چې پارابولا يو ډول منحنی ده.</li> <li>• له پارابوليکو شکلونو څخه په انجنيري کې يعنې د پلونو، د کرکيو او داسې نورو شيانو په جوړلو کې کار واخېستلای شي.</li> <li>• د پارابولا د اهميت په پوهېدلو سره به د خوښی احساس وکړي.</li> </ul>	
<p>2- د زده کړې لارې:</p> <p>پوښتنې او ځوابونه، ډله یيز او انفرادي کار</p>	
<p>3- مرستندويه مواد:</p> <p>د وروډي پوښتنې چارټ، د فعاليت چارټونه او نور اړوند چارټونه.</p>	
<p>4- د وروډي برخې</p> <p>توضیح (5 دقیقې)</p> <p>بناغلی ښوونکی له سلام او حال پوښتنې څخه وروسته د کتاب 17 مخ د فعاليت اړوند چارټ د ټولگي په مخ کې وځړوی او له زده کوونکو څخه وروډي پوښتنه وپوښتې، ترڅو د هغې په اړه فکر وکړي او ځواب ورکړي. پرته له هغه بناغلی ښوونکی دې وایي هغه شعاع چې د مقعرې عدسې له اصلي محور سره موازي وي او وروسته له انعکاس څخه له یوه ټکي تېرېږي چې هغه ټکي ته محراق وايي او په <math>F'</math> سره یې ښيي.</p>	
<p>5- د لوست بهیر او فعالیت (28) دقیقې:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• بناغلی ښوونکی د فعاليت چارټ چې مخکې مو په ډبل خط رسم کړی، د ټولگي په مخ کې وځړوی.</li> <li>• بناغلی ښوونکی زده کوونکي په مناسبو ډلو و وېشي ترڅو نوموړی فعاليت د يو بل سره په مشوره سرته ورسوي. د فعاليت په پای کې د يو يا دوو ډلو استازو ته دنده ورکړی چې خپل فعاليت نورو ته توضیح کړي. که چيرې د فعاليت په توضیح کولو کې تېروتنه وکړي لارښوونه ورته وکړی.</li> <li>• بناغلی ښوونکی د فعاليت پایله له زده کوونکو څخه وپوښتې که چيرې زده کوونکو ځواب ورته کړای شو، ښوونکی دې د فعاليت پایله چې د پارابولا تعريف دی، زده کوونکو ته ووايي.</li> <li>• بناغلی ښوونکی هغه چارټ چې په کې د پارابولا وتر رسم شوی دی، د ټولگي په مخ کې وځړوي او له زده کوونکو څخه پوښتنه وکړی: څوک د پارابولا وتر ښودلای شي؟ څوک د پارابولا وتر تعريفولای شي؟</li> </ul> <p>که چيرې زده کوونکي په ځواب ورکولو باندې بريالی شول ښه ده، پرته له هغه بناغلی ښوونکی وتر په شکل کې وروښيي او تعريف یې ورته کوي.</p>	

## 6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

ښاغلی ښوونکی دې د لوست د لابسه تحکیم لپاره، د پارابولا، تناظري محور، هادي خط او راس د زده کوونکو په فعال گډون سره توضیح کړي.

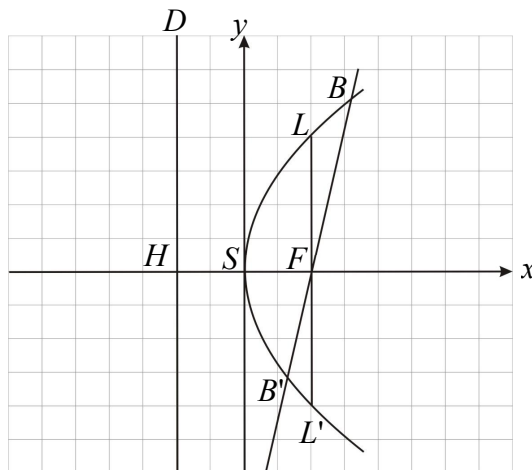
## 7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ښاغلی ښوونکی د خپل ډاډ د ترلاسه کولو لپاره چې زده کوونکي پوه شوي دي او که نه؟ له زده کوونکو څخه په لاندې ډول وپوښتي:

1. پارابولا څه ډول یو منحنی دی؟
2. څوک کولای شي چې په شکل کې د پارابولا راس، هادي خط او محراق وښايي؟

## 8- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

د پارابولا د محراقي وتر اوږدوالی د  $\overline{FH}$  څو برابر دی.



حل:

د محراقي وتر تعریف داسې دی: هغه خط چې له محراق څخه تېر او د پارابولا دوه ټکي سره ونښلوي، د پارابولا محراقي وتر بلل کېږي او همدارنگه عمودي وتر هم له محراق څخه تېر او د  $F$  په نقطه کې عمود وي، د پارابولا دوه ټکي سره نښلوي؛ نو هر عمودي وتر محراقي وتر هم کېدای شي.

د پارابولا د عمودي وتر اوږدوالی د محراق او راس ترمنځ د فاصلې څلور برابره دی؛ یعنې:  $LL' = 4\overline{FS}$

پوهېږو چې  $\overline{FS} = \overline{SH}$  او  $\overline{FH} = 2\overline{SF}$  دی؛ نو محراقي وتر  $\overline{FH} = 2\overline{SF} = 4\left(\frac{\overline{HF}}{2}\right) = 2\overline{FH}$  دی، په پایله کې ویلای

شو چې د پارابولا د محراقي وتر اوږدوالی د  $\overline{FH}$  دوه برابره دی.

$$y^2 = 4px$$

$$x^2 = 4py$$

## لومړۍ څپرکۍ: مخروطي مقاطع

د پارابولا معادله (لومړۍ حالت)

د درسي کتاب (19) مخ

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- پوهنيزه</li> <li>- مهارتي</li> <li>- ذهني</li> </ul>	<p>زده کوونکي به د لوست په پای کې و توانېږي چې:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• د پارابولا معادله وپېژني او د الپس له معادلې سره يې توپير وکړای شي.</li> <li>• پوه شي چې د <math>y^2 = 4px</math> او همدارنگه <math>x^2 = 4py</math> د هغو پارابولا معادلې دي چې راسونه يې د وضعيه کمياتو په مبدا کې دي.</li> <li>• په بېلابېلو حالتونو کې له شکل څخه په کار اخېستلو سره د پارابولا معادله په لاس راوړای شي.</li> </ul>
<p>2- د زده کړې لارې:</p>	<p>پوښتنې او ځوابونه، ډله‌ييز او انفرادي کار</p>
<p>3- مرستندويه مواد:</p>	<p>د 19 او 20 مخونو د پارابولا د شکلونو چارټونه</p>
<p>4- د وړو دي برخې توضیح (5 دقيقې)</p>	<p>ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته په 19 مخ کې د پارابولا د شکل چارټ چې د لومړي حالت اړوند شکل دی، د ټولگي په مخ کې ځورند کړی، په داسې حال کې چې <math>y^2 = 4px</math> او <math>x^2 = 4py</math> معادلې په نوموړي چارټ کې ليکل شوي دي. له زده‌کوونکو څخه وپوښتی چې دغه شکل په کومه معادله پورې اړه لري، ترڅو زده‌کوونکي په دې اړه فکر وکړي. په هغه صورت کې چې ځواب ور نه کړای شي د فعاليت په سرته رسولو سره څرگندېږي چې نوموړی شکل له <math>y^2 = 4px</math> معادلې سره مطابقت لري، ځکه چې د پارابولا محراق <math>F</math> د <math>x</math> پر محور باندې دی.</p>
<p>5- د لوست بهير او فعاليت (28 دقيقې):</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• ښاغلی ښوونکی: زده‌کوونکي په مناسبو ډلو و وېشي چې د له ځورند شوي چارټ څخه په کار اخېستو سره فعاليت د يو بل په مشوره سرته ورسوي.</li> <li>• ښاغلی ښوونکی د زده‌کوونکو له ډلو څخه څارنه وکړي، فعالې ډلې تشويق او ضعيفو ډلو ته لارښوونه وکړي.</li> <li>• ښاغلی ښوونکی يوه زده‌کوونکي ته دنده ورکړي چې د <math>MF</math> او <math>MK</math> قيمتونه پر تخته پيدا کړي او د تعريف په رابطه کې يعنې <math> MF  =  MK </math> کې يې وضع کړي او په پايله کې به د پارابولا معادله په لاس راوړي. په عين وخت کې دې نور زده‌کوونکي دغه فعاليت پرته له دې چې له تختې څخه يې نقل کړي، په خپلو کتابچو کې سرته ورسوي د فعاليت په پای کې هغه زده‌کوونکي چې فعاليت يې پر تخته سرته رسولی، خپل فعاليت نور و زده‌کوونکو ته توضیح کړي، د تېروتنې په صورت کې دې بل زده‌کوونکی د هغه تېروتنې د ښوونکي په مرسته اصلاح کړي.</li> </ul>	

• ښاغلی ښوونکی دې په پای کې د  $P > 0$  او  $P < 0$  حالتونه زده‌کونکو ته بیا ووايي او په شکلونو کې دې وروښيي.

### 6- د زده‌کړې تحکیم: (7) دقیقې

ښاغلی ښوونکی د لوست د لاسه ښه تحکیم لپاره د 20 مخ لومړی مثال له زده‌کونکو سره د پوښتنو او ځوابونو په شکل کار وکړی، تر څو زده‌کونکي ښه زده‌کړه وکړای شي.

### 7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ښاغلی ښوونکی د خپل ډاډ د ترلاسه کولو لپاره چې زده‌کونکو لوست زده‌کړی دی او که نه؟ له زده‌کونکو څخه لاندې پوښتنې وپوښتي:

1. د پارابولا معادله چې راس یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې وي څوک لیکلای شي؟
2. په کوم صورت کې د پارابولا خوله ښی او په کوم صورت کې د پارابولا څوکه کېن لور ته خلاصه وي؟
3. که چیرې د پارابولا محراق د  $x$  پر محور باندې وي، معادله به یې څه شکل ولري؟



## لومړی څپرکی: مخروطي مقاطع

د پارابولا معادله (دویم حالت)

د درسي کتاب (21) مخ

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- پوهنيزه</li> <li>- مهارتي</li> <li>- ذهنيتي</li> </ul>	<p>زده کوونکي به په دې وتوانېږي چې:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• د پارابولا معادله وپېژني په هغه صورت کې چې محراق يې د <math>y</math> په محور باندې وي.</li> <li>• له شکل څخه په کار اخېستنې سره د پارابولا معادله په لاس راوړای شي او د دوو نقطو ترمنځ فاصله پيدا کړي.</li> <li>• زده کوونکي په دې پوه شي چې که چيرې <math>P &gt; 0</math> وي، د پارابولا خوله پورته خواته خلاصه ده او که چيرې <math>P &lt; 0</math> وي، د پارابولا خوله ښکته خواته خلاصه ده.</li> </ul>
<p>2- د زده کړې لارې:</p>	<p>پوښتنې او ځوابونه، ډله ييز او انفرادي کار</p>
<p>3- مرستندويه مواد:</p>	<p>د کتاب د 21 مخ چارټونه</p>
<p>4- د وړو دي برخې توضیح (5 دقيقې)</p>	<p>ښاغلی ښوونکی د کتاب د 21 مخ لومړی چارټ د ټولگي مخې ته وځړوی او له زده کوونکو څخه وپوښتی، که چيرې د پارابولا محراق <math>F</math> د <math>y</math> په محور باندې او هادي خط يې د <math>x</math> له محور سره موازي وي، څوک کولای شي د پارابولا معادله په لاس راوړي؟ ښايي چې زده کوونکي چپ پاتې شي، نو د لوست بهير داسې پيل کړی.</p>
<p>5- د لوست بهير او فعاليت (28 دقيقې):</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• ښاغلی ښوونکی دې يو زده کوونکی راو غواړي چې د پارابولا له تعريف څخه په کار اخېستنې سره د <math> MF  =  MK </math> رابطه پر تخته وليکي.</li> <li>• دویم زده کوونکی دې له فورمول څخه په کار اخېستنې سره د <math>\overline{MF}</math> او <math>\overline{MK}</math> اوږدوالی په لاس راوړي.</li> <li>• دريم زده کوونکی دې د <math>\overline{MF}</math> او <math>\overline{MK}</math> قيمتونه د <math> MF  =  MK </math> په رابطه کې وضع کړي.</li> <li>• بالاخره دريم زده کوونکی دې د ښوونکي په مرسته د رابطې دواړه خواوې مربع کړي او د پارابولا معادله چې <math>x^2 = 4py</math> ده، په لاس راوړي.</li> <li>• ښاغلی ښوونکی دویم او دريم چارټ د ټولگي په مخ کې وځړوی او د <math>P</math> بېل بېل حالتونه يعنې که چيرې <math>P &lt; 0</math> او يا <math>P &gt; 0</math> وي، په پام کې ونيسی او زده کوونکو ته يې په شکل کې وښايست.</li> </ul>	
<p>6- د زده کړې تحکيم: (7 دقيقې)</p> <p>ښاغلی ښوونکی د لوست د تحکيم لپاره د کتاب 22 مخ دویم مثال د پوښتنو او ځوابونو په شکل په ټولگي کې په زده کوونکو باندې کار وکړي، د اړتيا په صورت کې دې له زده کوونکو سره مرسته وکړي.</p>	

## 7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

بناغلی بنوونکی د خپل ډاډ د ترلاسه کولو لپاره له زده‌کوونکو څخه په لاندې ډول وپوښتی:

1. څوک د پارابولا معادله چې محراق یې د  $y$  په محور وي، لیکلای شي؟
2. څوک ویلای شي د  $x^2 = 4py$  او  $y^2 = 4px$  معادلو ترمنځ توپیر څه دی؟
3. څوک کولای شي چې د دواړو حالتونو شکلونه پر تخته رسم کړي؟

نوټ چارټونه دې د تختې له مخ څخه لرې شي.

## 8- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

1- د  $y^2 - 4x = 0$  او  $x^2 = 2y$  معادلو کې د هرې پارابولا د راس وضعیه کمیات او د هادي (موجه خط) معادلې پیدا او گرافونه یې رسم کړئ.

حل:

$$y^2 - 4x = 0$$

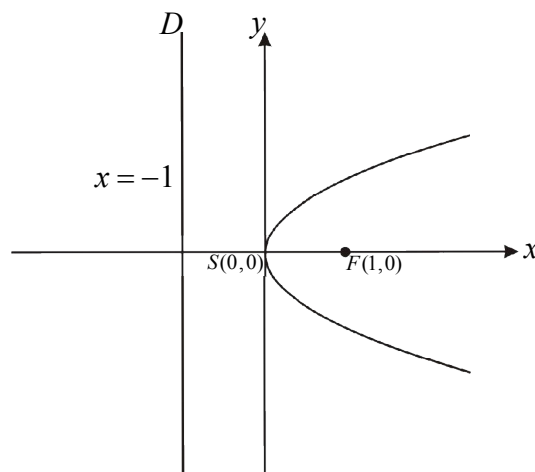
$$y^2 = 4x, \quad 4p = 4 \Rightarrow p = 1 > 0$$

څرنگه چې  $P > 0$  دی؛ نو د پارابولا خوله د  $x$  پر محور بڼې خواته خلاصه ده.

$$\left. \begin{array}{l} y^2 = 0 \Rightarrow y = 0 \\ 4x = 0 \Rightarrow x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow S(0,0) \quad \text{د پارابولا د راس مختصات}$$

د محراق مختصات  $F(P, 0) = F(1, 0)$

$$\left. \begin{array}{l} x = -P \\ x = -1 \end{array} \right\} \text{د هادي خط معادله}$$



د معادلې عمومي شکل  $y^2 = 4Px$

$$x^2 = 2y$$

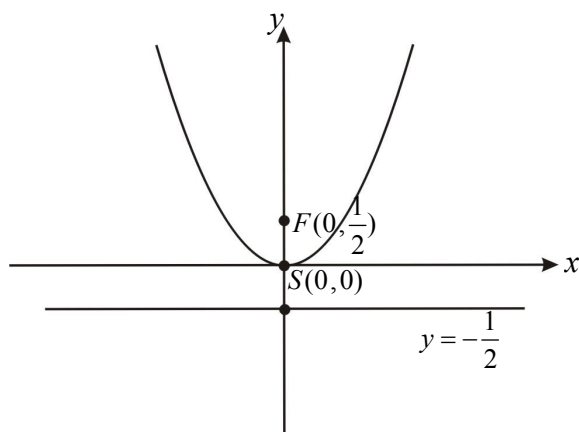
$$4P = 2 \Rightarrow P = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow P = \frac{1}{2} > 0$$

معلومېږي چې  $P = \frac{1}{2} > 0$  دی؛ نو د پارابولا خوله د  $y$  پر محور پورته خواته خلاصه ده.

$$\left. \begin{array}{l} x^2 = 0, \quad x = 0 \\ 2y = 0, \quad y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow S(0,0) \quad \text{د راس وضعیه کمیات}$$

د محراق وضعیه کمیات  $F(0, P) = F(0, \frac{1}{2})$

د هادی خط معادله  $y = -P \Rightarrow y = -\frac{1}{2}$



2- د لاندې قیمتونو له مخې د هرې پارابولا معادله پیدا کړئ:

- a)  $S(0, 0)$                        $F(0, 5)$   
 b)  $S(0, 0)$                        $F(-2, 0)$

حل (a):

د راس له وضعیه کمیاتو څخه معلومېږي چې د پارابولا راس د وضعیه کمیاتو په مبدا کې دی اوله محراق څخه څرگندېږي چې  $P = 5 > 0$  دی؛ نو د پارابولا خوله د  $y$  پر محور پورته خواته خلاصه ده او د هغې پارابولا معادله چې خوله یې د  $y$  پر محور پورته خواته خلاصه وي، عمومي شکل یې  $x^2 = 4Py$  دی.

$$x^2 = 4Py \quad , \quad x^2 = 4 \cdot 5y \Rightarrow \boxed{x^2 = 20y}$$

حل (b):

- b)  $S(0, 0)$                        $F(-2, 0)$

د پارابولا راس د وضعیه کمیاتو په مبدا کې پروت دی او د محراق له مختصو څخه څرگندېږي چې  $P = -2 < 0$  دی؛ نو د پارابولا خوله د  $x$  پر محور کېنې خواته خلاصه ده، عمومي معادله یې عبارت ده له:  $y^2 = 4px$

$$y^2 = 4Px \quad , \quad y^2 = 4(-2)x \Rightarrow \boxed{y^2 = -8x}$$

## لومړۍ څپرکۍ: مخروطي مقاطع

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

د هغې پارابولا معياري معادله چې راس يې يو اختياري ټکی وي

د درسي کتاب (23) مخ

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- پوهنيزه</li> <li>- مهارتي</li> <li>- ذهنيتي</li> </ul> <p>زده کوونکي به په دې وتوانېږي چې:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• د هغې پارابولا د معياري معادلې په شکل به پوه شي چې راس يې يو اختياري ټکی وي.</li> <li>• د <math>(y-k)^2 = 4p(x-h)</math> او <math>(x-h)^2 = 4p(y-k)</math> معادلو د شکلونو په توپير باندې به پوه شي.</li> <li>• د پارابولا معادله په هغه صورت کې چې راس يې د وضعيه کميات په مبدا کې نه وي وليکلای شي او پوښتنې به حل کړای شي.</li> <li>• له پورتنۍ پوهې او مهارت څخه به خوښي ښکاره کړي.</li> </ul>	
<p>2- د زده کړې لارې:</p> <p>پوښتنې او ځوابونه، ډله‌ييز او انفرادي کار</p>	
<p>3- مرستندويه مواد:</p> <p>د 23 مخ او 24 دوه لومړي چارټونه</p>	
<p>4- د وړودي برخې توضیح (5 دقيقې)</p> <p>ښاغلی ښوونکی د 23 مخ د شکل چارټ په توش قلم رسم د <math>(y-k)^2 = 4p(x-h)</math> او <math>(x-h)^2 = 4p(y-k)</math> معادلې پر هغې وليکي او د ټولگي په مخ کې يې وځړوي وروسته وړودي پوښتنه له زده‌کوونکو څخه وپوښتي، ترڅو د هغې په اړه فکر وکړي، که چيرې زده‌کوونکي ځواب ونشي ويلای، د فعاليت له اجرا کولو څخه وروسته به پوه شي چې د <math>(y-k)^2 = 4p(x-h)</math> معادله د هغه پارابولا معادله ده، چې د راس مختصات يې د وضعيه کميات په مبدا کې نه دی.</p>	
<p>5- د لوست بهير او فعاليت (28 دقيقې):</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• ښاغلی ښوونکی زده‌کوونکي په مناسبو ډلو و وېشي، ترڅو د 23 مخ دوه فعاليتونه چې په (•) ټکی نښانې شوي دي سرته ورسوي. وروسته د <math>MF</math> او <math>MN</math> فاصلې د <math>d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}</math> فورمول څخه په کار اخېستو سره پيدا او د <math>\overline{MF} = \overline{MN}</math> په مساوات کې يې وضع کړي او بيا به د مساوات د دواړو خواوو له مربع او ساده کولو وروسته لاندې معادله په لاس راوړي: <math display="block">(y-k)^2 = 4p(x-h)</math> <p>پورتنی معادله په يقيني توگه د هغې پارابولا معادله ده چې د راس مختصات يې <math>(h, k)</math> او د وضعيه کميات په مبدا کې واقع نه دی.</p> <p>ښاغلی ښوونکی دې د زده‌کوونکو له ډله‌ييز کار څخه څارنه وکړي، فعالې ډلې تشويق او له ضعيفو ډلو سره مرسته وکړي.</p> </li> </ul>	

په پای کې د یوې ډلې استازی راوغواړئ چې خپل ډله‌ییز فعالیت نورو زده‌کوونکو ته توضیح کړي او د فعالیت د اجرا په ترڅ کې لارښوونه او مرسته ورسره وکړي.

بناغلی ښوونکی دې د کتاب 24 مخ دوه لومړي چارټونه د ټولګي په مخ کې وڅړوي او په وار سره دې دوه زده‌کوونکي راوغواړي ترڅو د  $P > 0$  او  $P < 0$  په صورت کې اړونده شکلونه زده‌کوونکو ته وروپېژني.

### 6- د زده‌کړې تحکیم: (7) دقیقې

بناغلی ښوونکی دې لوست ته د ښه تحکیم ورکولو لپاره د کتاب د 26 مخ لومړی پوښتنه د زده‌کوونکو په ګډون په ټولګي کې حل کړي.

د همدې مخ دویمه پوښتنه زده‌کوونکو ته کورنۍ دنده ورکړي.

### 7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

بناغلی ښوونکی: د زده‌کړې د ډاډ په هکله زده‌کوونکي د لاندې پوښتنو په کولو سره وازموي:

1. د هغې پارابولا معادله چې راس یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې نه وي، ولیکئ.
2. د پارابولا معادله په هغه صورت چې راس یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې وي، پر تخته ولیکئ.
3. که چیرې  $P > 0$  وي، د پارابولا خوله کومې خواته خلاص ده او که چیرې  $P < 0$  وي، د پارابولا خوله به کومې خواته خلاصه وي؟

## لومړی څپرکی: مخروطي مقاطع

د هغې پارابولا معياري معادله چې راس يې يو اختاري ټکی وي (دويم حالت)

د درسي کتاب (24) مخ

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• زده کوونکي به په دې وتوانېږي چې:</li> <li>• پوه شي، که چيرې د پارابولا تناظري محور د <math>y</math> له محور سره موازي وي، د پارابولا معادله له <math>(x-h)^2 = 4P(y-k)</math> څخه عبارت ده.</li> <li>• پورتنی معادله د شکل او د پارابولا له تعريف څخه په کار اخېستنې سره په لاس راوړای شي.</li> <li>• د پورتنی مهارت او پوهې له حاصلولو څخه خوښي ښکاره کړي.</li> </ul>	<p>- پوهنيزه</p> <p>- مهارتي</p> <p>- ذهنيتي</p>
<p>2- د زده کړې لارې:</p> <p>پوښتنې او ځوابونه، ډله ييز او انفرادي کار</p>	
<p>3- مرستندويه مواد:</p> <p>د 24 مخ د دوو وروستيو شکلونو چارټ</p>	
<p>4- د وړودي برخې</p> <p>توضیح (5 دقيقې)</p> <p>ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې وروسته له زده کوونکو څخه وپوښتې که چيرې د پارابولا تناظري محور د <math>y</math> له محور سره موازي وي، د پارابولا معادله به څه شکل ولري؟</p> <p>ښاغلی ښوونکی دې جوړ شوی چارټ د ټولگي په مخ کې وڅېړي، احتمال لري چې له شکل څخه په کار اخېستنې سره زده کوونکي وکولای شي، د پارابولا معادله په لاس راوړي؛ ځکه په لومړی حالت کې مو چې معادله پيدا کړي وه، هغه له دوی سره مرسته کوي.</p>	
<p>5- د لوست بهير او فعاليت (28 دقيقې):</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• ښاغلی ښوونکی زده کوونکي په مناسبو ډلو ووېشي، ترڅو د هغه معلوماتو له مخې چې له تېر لوست څخه يې لري له يو بل سره په مشوره د پارابولا د معادلې دويم حالت حاصل کړي.</li> <li>• د زده کوونکو د فعاليت له کارولو څخه څارنه وکړي، فعالې ډلې وهڅوي او له ضعيفو ډلو سره مرسته وکړي. د دويم حالت ثبوت د اضافي معلوماتو په توگه کار شوی دی.</li> <li>• لومړی مثال د پوښتنې او ځواب په شکل د زده کوونکو په گډون په ټولگي کې حل کړي.</li> <li>• دويم مثال په زده کوونکو باندې د پوښتنو او ځوابونو په شکل په ټولگي کې کار وکړي.</li> </ul>	
<p>6- د زده کړې تحکيم: (7 دقيقې)</p> <p>ښاغلی ښوونکی د لوست د لارښه تحکيم لپاره دريم مثال په ټولگي کې د پوښتنو او ځوابونو په شکل په ټولگي کې کار وکړي. دريمه پوښتنه زده کوونکو ته کورنۍ دنده ورکړي.</p>	

## 7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

بناغلی ښوونکی د زده‌کوونکو له زده‌کړې څخه د ډاډ لپاره په لاندې ډول وپوښتی:

1. د پارابولا معیاري معادله څه شکل لري؟ (یو زده‌کوونکی دې پر تخته ولیکي)
2. څوک کولای شي د هغې پارابولا شکل رسم کړي چې د تناظر محور یې د  $y$  له محور سره موازي وي او په هغې کې وترونه او محراق په گوته کړي.

## 8- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

1- د لاندې پارابولا معادله پیدا کړي، په داسې حال کې چې:

$$S(1,3), F(-1,3)$$

یادونه: په درسي کتاب کې د  $a$  جز اضافه غلط تایپ شوی دی.

حل:

$$S(1,3) \Rightarrow h=1, k=3$$

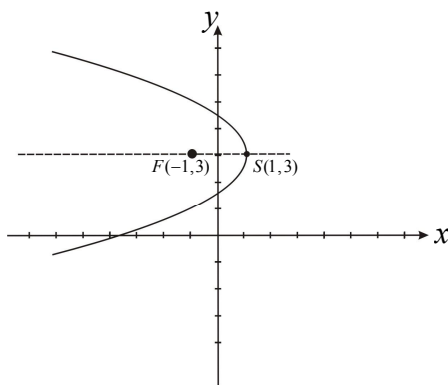
$$F(-1,3) \Rightarrow h+p=-1, k=3$$

$$1+P=-1 \Rightarrow P=-2$$

څرنگه چې  $P < 0$  ده؛ نو د پارابولا خوله د  $x$  پر محور کینې خوا ته خلاصه ده او د داسې پارابولا عمومي معادله عبارت ده له:

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

$$(y-3)^2 = 4(-2)(x-1) \Rightarrow \boxed{(y-3)^2 = -8(x-1)}$$



2- د  $(y-1)^2 = 12(x-4)$  په معادله کې د پارابولا دراس مختصات، د محراق مختصات، د موجه خط معادله او د تناظر محور پیدا او گراف یې رسم کړئ.

$$(y-1)^2 = 12(x-4)$$

$$k=1, h=4, 4p=12 \Rightarrow p=3$$

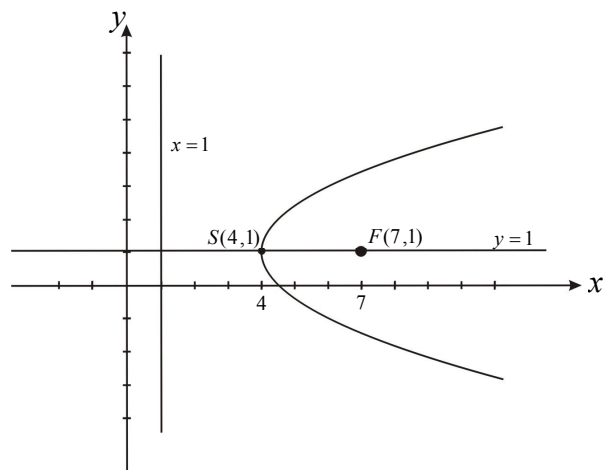
معلومیږي چې  $P > 0$  ده؛ نو د پارابولا خوله د  $x$  پر محور ښي لوري ته خلاصه ده.

د راس مختصات  $S(h, k) = S(4, 1)$

د محراق مختصات  $F(h + p, k) = F(4 + 3, 1) = F(7, 1)$

د هادي خط معادله  $x = h - p \Rightarrow x = 4 - 3 = 1$  ،  $x = 1$

د تناظر محور  $y = k$  ،  $y = 1$



3- لاندې معادلې د پارابولا د معیاري معادلې په ډول ولیکئ او گراف یې رسم کړئ.

a)  $y^2 - 6y + 8x + 41 = 0$

b)  $x^2 - 2x - 6y - 53 = 0$

حل a) له کاملې مربع څخه په کار اخیستنې سره لرو چې:

$$y^2 - 6y + 8x + 41 = 0$$

$$y^2 - 6y + 9 - 9 + 8x + 41 = 0 \Rightarrow (y - 3)^2 + 8x + 32 = 0$$

$$(y - 3)^2 = -8(x + 4)$$

د پارابولا معادله:

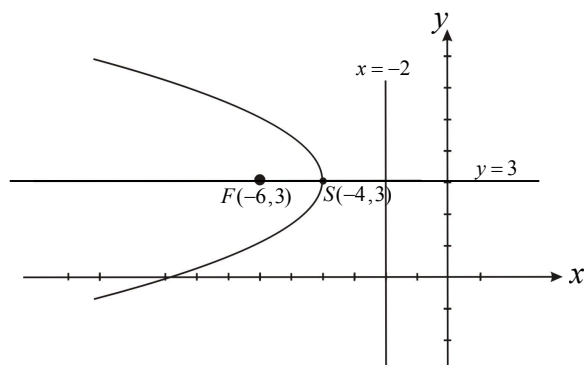
$$h = -4 , k = 3 , S(h, k) = S(-4, 3) , 4P = -8 , P = -2$$

څرنگه چې  $P < 0$  ده؛ نو د پارابولا خوله د  $x$  پر محور کېږي لوري ته خلاصه ده.

د محراق مختصات  $F(h + p, k) = F(-4 + (-2), 3) = F(-6, 3)$

د مؤجه خط معادله  $x = h - p$  ،  $x = -4 + 2 = -2$  ،  $x = -2$

د پارابولا تناظري محور  $y = k$  ،  $y = 3$





حل b) بیا هم له کاملې مربعې څخه کار اخلو:

$$x^2 - 2x - 6y - 53 = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 - 1 - 6y - 53 = 0$$

$$(x-1)^2 - 6y - 54 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 6y + 54$$

د پارابولا معیاري معادله  $(x-1)^2 = 6(y+9)$

د پارابولا راس  $S(h, k) = S(1, -9)$  ،  $h=1$  ،  $k=-9$  ،

$$4P=6 \Rightarrow P=\frac{3}{2}$$

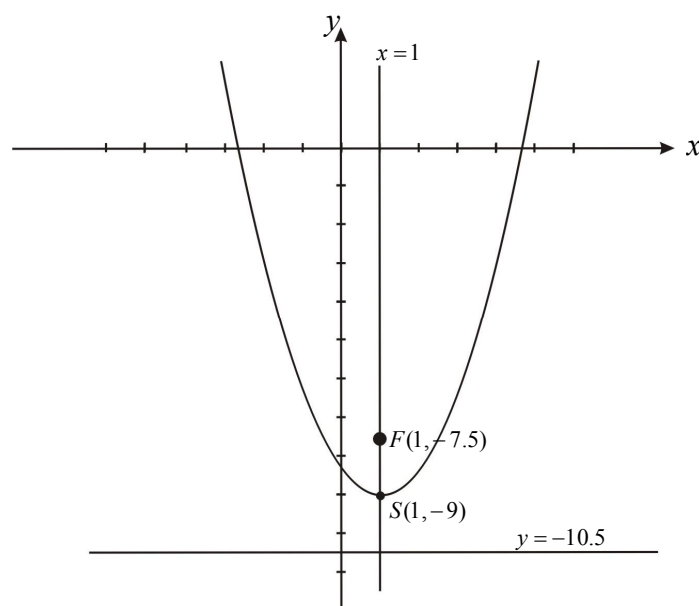
څرنگه  $P > 0$  ده؛ نو د پارابولا خوله د  $y$  پر محور پورته خواته خلاصه ده.

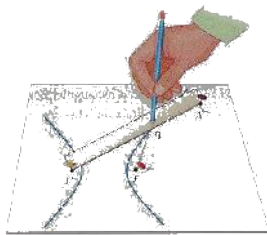
$$F(h, p+k) = F\left(1, \frac{3}{2} - 9\right) = F\left(1, \frac{3-18}{2}\right) = F(1, -7.5)$$
 د محراق مختصات

$$y = k - p \Rightarrow y = -9 - \frac{3}{2} = \frac{-18-3}{2} = \frac{-21}{2} = -10.5$$

د موجه خط معادله  $y = -10.5$

د تناظر محور  $x = h \Rightarrow x = 1$





## لومړی څپرکی: مخروطي مقاطع

هايپربولا (Hyperbola)

د درسي کتاب (27) مخ

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• د هايپربولا په مفهوم پوه شي.</li> <li>• عن المركزيت، تناظري محورونه او د هايپربولا راسونه وپېژني.</li> <li>• هايپربولا له نورو مخروطي مقاطعو سره تشخيص کړای شي.</li> <li>• د يوې هايپربولا اجزاوې په رسم کې وښودلای شي.</li> <li>• د پورتنی پوهې او مهارت له حاصلولو څخه په خپل ځان ډاډمن شي.</li> </ul>	<p>- پوهنيزه</p> <p>- مهارتي</p> <p>- ذهني</p>
<p>2- د زده کړې لارې:</p> <p>پوښتنې او ځوابونه، ډله‌بیز او انفرادي کار</p>	
<p>3- مرستندويه مواد:</p> <p>د 27 مخ د هايپربولا چارټ او 28 مخ د هايپربولا د شکل چارټ</p>	
<p>4- د وړودي برخې</p> <p>توضیح (5 دقيقې)</p> <p>ښاغلی ښوونکی وروسته له سلام او احوال پوښتنې له زده‌کوونکو څخه وروډي پوښتنه وپوښتنې، ترڅو د هغې په هکله زده‌کوونکي فکر کولو ته اړ شي که چيرې زده‌کوونکي پوښتنې ته ځواب ورنشي کړای او په دې صورت کې د فعاليت له سرته رسولو څخه وروسته ځواب په لاس راوړي.</p>	
<p>5- د لوست بهير او فعاليت (28 دقيقې):</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• ښاغلی ښوونکی هغه چارټ چې مخکې مو تيار کړی دی، د ټولگي په مخ کې وڅړوی او يو زده‌کوونکی راوغواړی چې فعاليت پر تخته سرته ورسوي. په عين وخت کې دغه فعاليت د ټولگي نورو زده‌کوونکو ته ورکړی چې په انفرادي توگه يې په خپلو کتابچو کې سرته ورسوي. د فعاليت په پای کې هغه زده‌کوونکی چې د تختې مخې ته ولاړ دی، خپل فعاليت دې نورو ته توضیح کړي. که چيرې د زده‌کوونکي توضیحات سم وي، ښه ده، له هغه پرته يوه داوطلب زده‌کوونکی ته دنده ورکړی چې فعاليت پر تخته سرته ورسوي. ښاغلی ښوونکی دې د اړتيا په صورت کې لارښوونه ورته وکړي او هغه زده‌کوونکي چې د فعاليت په اجرا کې يې تېروتنه کړې ده، خپله تېروتنه دې اصلاح کړي. د فعاليت په پایله کې د هايپربولا تعريف لاسته راځي چې <math> A'A  = 2a</math> کېږي، پر تخته وليکي.</li> <li>• ښاغلی ښوونکی د کتاب د 28 مخ چارټ د ټولگي په مخ کې وڅړوی د پوښتنو او ځوابونو په ډول له زده‌کوونکو څخه، د هايپربولا محراقونه، راسونه، تناظري محورونه او د هايپربولا هادي وروپېژني.</li> <li>• همدارنگه د هايپربولا عن المركزيت فارمول <math>e = \frac{c}{a}</math> توضیح او د <math>e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}</math> رابطه دې پر تخته پيدا کړي، د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړي.</li> </ul>	

6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

ښاغلی ښوونکی دې د لوست د لاندې ښه تحکیم لپاره یو زده‌کوونکی راوغواړي چې د 28 مخ د شکل په لېدلو سره د هایپربولاجزاوې توضیح کړي.

7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ښاغلی ښوونکی، زده‌کوونکي په لاندې پوښتنو سره اړوزي:

1. څوک هایپربولاجزاوې تعریفولای شي؟
2. څوک د هایپربولاجزاوې محراقونه، راسونه او هادي خطونه په رسم کې ښودلای شي؟

8- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

حل:

له عن‌المركزیت  $e = \frac{c}{a}$  رابطې څخه په کار اخیستنې سره د  $a$  او  $b$  عدونو ترمنځ اړیکه د یو بل له جنسه پیدا کړی، یعنې:

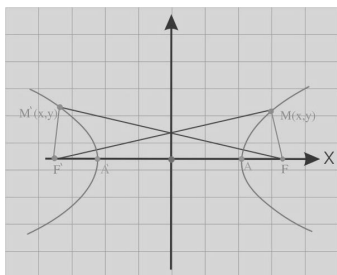
$$e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2}} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2}}$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$$

د  $a$  او  $b$  عدونو او عن‌المركزیت ترمنځ اړیکه



## لومړۍ څپرکي: مخروطي مقاطع

د هايپربولو معادله

د درسي کتاب (29) مخ

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• زده کوونکي به په دې و توانېږي چې:</li> <li>• هايپربولو وپېژني او د هايپربولو په تعريف پوه شي.</li> <li>• د تعريف په پام کې نيولو سره د شکل له مخې د تعريف رابطه وليکي.</li> <li>• د هايپربولو معادله د تعريف او د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې له فورمول څخه په کار اخېستني سره په لاس راوړای شي.</li> <li>• له پورتنۍ پوهې او مهارت څخه خوښي وکړي.</li> </ul>	<p>- پوهنيزه</p> <p>- مهارتي</p> <p>- ذهنيتي</p>
<p>2- د زده کړې لارې:</p> <p>پوښتنې او ځوابونه، ډله‌ييز او انفرادي کار</p>	
<p>3- مرستندويه مواد:</p> <p>د 29 مخ د هايپربولو د شکل د ورودې برخې چارټ او د فعاليت چارټ</p>	
<p>4- د ورودې برخې توضیح (5 دقيقې)</p> <p>بناغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته ورودې چارټ د ټولگي په مخ کې وځړوي، د زده‌کوونکو پام عنوان ته راواړوي، ورودې پوښتنه له زده‌کوونکو څخه وپوښتي، همدارنگه وپوښتي هغه هايپربولو چې راس يې د کميات وضعيه د <math>x</math> پر محور باندې وي، محراقونه به يې په کوم ځای کې پراته وي؟</p> <p>ښايي چې يو شمېر زده‌کوونکي له فکر کولو څخه وروسته ځواب ووايي چې د <math>x</math> پر محور باندې، او له هغې پرته بناغلی ښوونکی د فعاليت اړوند چارټ د ټولگي په مخ کې وځړوي او محراقونه چې د <math>x</math> پر محور باندې پراته دي، ور وښيي.</p>	
<p>5- د لوست بهير او فعاليت (28 دقيقې):</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• بناغلی ښوونکی، زده‌کوونکي په مناسبو ډلو و وېشي چې د کتاب د 29 مخ فعاليت له يو بل سره په مشوره سرته ورسوي؛ يعنې <math> PF </math> او <math> PF </math> په لاس راوړي او د تفریق په رابطه يعنې په <math> PF  -  PF  = 2a</math> رابطه کې يې وضع کړي، څرنگه چې د پارابولا له موضوع څخه پوهېږي، د معادلې دواړه خواوې دې مربع او ساده کړي. په پايله کې به د هايپربولو معادله؛ يعنې <math>\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1</math> په لاس راوړي.</li> <li>• بناغلی ښوونکی د زده‌کوونکو له ډلو څخه څارنه وکړي، فعالې ډلې وهڅوي او له ضعيفو ډلو سره مرسته او ورته لارښوونه وکړي.</li> <li>• بناغلی ښوونکی کوښښ وکړي چې په هره ډله کې لايق او ضعيف زده‌کوونکي شتون ولري.</li> </ul>	

**6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې**

بناغلی بنوونکی: د لوست د لاینه پوهېدو لپاره د کتاب د 31 مخ لومړی مثال د زده‌کوونکو په فعالې برخې اڅپستنې سره پر تخته حل کړئ.

**7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې**

بناغلی بنوونکی د زده‌کوونکو د زده‌کړې د ارزونې لپاره له زده‌کوونکو څخه لاندې پوښتنې وپوښتئ:

1. څوک هایپرېولا تعریف کولای شي؟
2. څوک دهغې هایپرېولا معادله لیکلای شي چې راس یې د وضعیه کمیاتو په محورونو باندې وي؟

## لومړۍ څپرکي: مخروطي مقاطع

د هايپربول د معادلې دويم حالت (مقاطع محور يعني  $AA'$  د  $y$  پر محور پروت وي)

د درسي کتاب (30) مخ

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>زده کوونکي به په دې وتوانېږي چې:</li> <li>د متقاطع محور (<math>AA'</math>) د ځای په پام کې نيولو سره د هايپربول د دوو معادلو يعني <math>\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1</math> او <math>\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1</math> په توپير پوه شي.</li> <li>په پورتنیو دواړو صورتونو کې د هايپربول منحنی ترسیم کړای شي.</li> <li>د اړتیا په صورت کې د هايپربول له فورمولونو او شکلونو څخه کار واخلي.</li> <li>د پورتنیو موضوعاتو په عملي کولو سره د خوښي احساس وکړي.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- پوهنيزه</li> <li>- مهارتي</li> <li>- ذهني</li> </ul>
<p>2- د زده کړې لارې:</p> <p>پوښتنې او ځوابونه، ډله ییز او انفرادي کار</p>	<p>3- مرستندويه مواد:</p> <p>ددې لوست د اضافي معلوماتو چارټ د 31 او 32 مخونو چارټونه.</p>
<p>4- د وړودي برخې توضیح (5 دقیقې)</p> <p>بناغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته د <math>\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1</math> معادله پر تخته وليکي او له زده کوونکو څخه وپوښتي:</p> <p>ایا ویلای شئ چې د هايپربول راسونه او محراقونه په کوم محور باندې پراته دي؟</p> <p>که چیرې زده کوونکي په ځواب ويلو بريالی نشي، نو هغه چارټ چې د کتاب د 32 مخ له دويم مثال څخه جوړ شوی دی، د ټولگي په مخکې ځوړند کړئ او د هايپربول اجزای زده کوونکو ته وروپېژنی.</p>	<p>5- د لوست بهیر او فعالیت (28) دقیقې:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>بناغلی ښوونکی دې زده کوونکي په مناسبو ډلو ووېشي چې د یو بل په مشوره د <math>\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1</math> معادله له نوموړي چارټ څخه په کار اخیستنې سره ثبوت کړي.</li> <li>بناغلی ښوونکی دې زده کوونکو د ډله ییز کار او فعالیت څخه څارنه وکړي. فعالې ډلې تشویق او ضعیفو ډلو ته لارښوونه وکړي. د فعالیت په پای کې د یوې ډلې استازی راوغواړئ چې خپل ډله ییز کار نورو زده کوونکو ته توضیح کړي. د تېروتنې په صورت کې له بلې ډلې دې یو داوطلب زده کوونکی راشي، د هايپربول معادله دې پر تخته ثبوت او توضیح کړي. د اړتیا په صورت کې لارښوونه ورته وکړي.</li> <li>بناغلی ښوونکی د هايپربول د مجانبونو عنوان پر تخته وليکي او له یوه زده کوونکي څخه وغواړئ چې د <math>\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1</math> له معادلې څخه د مجانبونو معادله چې له <math>y = \pm \frac{b}{a}x</math> څخه عبارت ده، ثبوت کړي.</li> <li>بناغلی ښوونکی په هره برخه کې پوښتنه وکړي او زده کوونکي دې استدلال وکړي او ځواب دې ووايي.</li> </ul>

### 6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

ښاغلی ښوونکی: د لوست د لارښه پوهېدو لپاره د 31 مخ دویم مثال د زده کوونکو په فعالې برخې اخیستنې سره پر تخته حل کړئ.

### 7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ښاغلی ښوونکی ددې لپاره چې د زده کړې په هکله ډاډمن شی، نو له زده کوونکو څخه لاندې پوښتنې وکړئ:

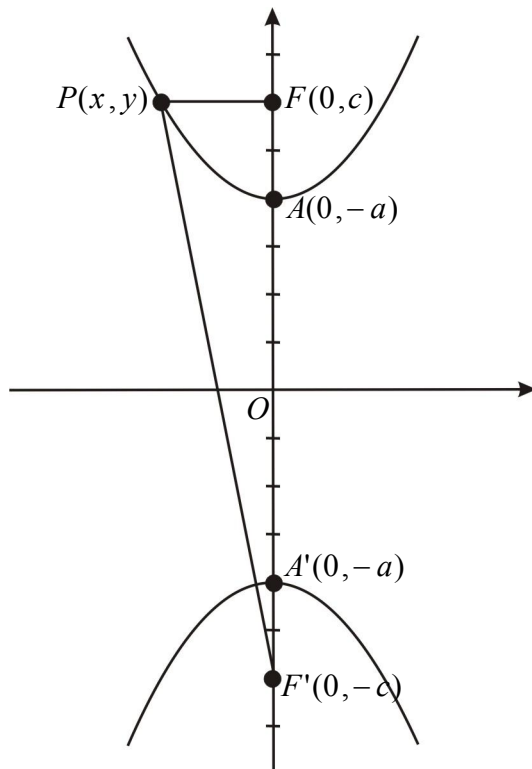
1. که چېرې د  $AA'$  قاطع محور د  $y$  پر محور باندې پروت وي، د هایپربولو معادله کومه ده؟
2. څوک د عن المکزیت فارمول پر تخته لیکي او د هغې د اجزاو و نومونه اخلي.
3. که چېرې د  $AA'$  قاطع محور د  $y$  پر محور پروت وي، د هایپربولو مجانب به کوم شکل ولري؟

**یادونه:** هره پوښتنه دې له یوه زده کوونکي څخه وشي.

### 8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات:

**دویم حالت:** د  $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$  معادلې ثبوت: د

هایپربولو له تعریف سره سم، په یوه مستوي کې د هغه ټکو هندسي محل چې د فاصلو تفاضل یې له دوو ځای پر ځای ټکو څخه تل مساوي اوږدوالی ولري، هایپربولو بلل کېږي، لیکلای شو:



$$|PF'| - |PF| = 2a \quad \dots I$$

$$|PF'| = \sqrt{(x-0)^2 + \{y - (-c)\}^2}$$

$$|PF| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-c)^2}$$

له شکل څخه پوهېږو چې:

اوس پورتنی قیمتونه په  $I$  رابطه کې وضع کوو:

$$\sqrt{x^2 + (y+c)^2} - \sqrt{x^2 + (y-c)^2} = 2a$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 + 2cy + c^2} - \sqrt{x^2 + y^2 - 2cy + c^2} = 2a$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 + 2cy + c^2} = 2a + \sqrt{x^2 + y^2 - 2cy + c^2} \dots II$$

د  $II$  رابطې دواړه خواوې مربع کوو:

$$x^2 + y^2 + 2cy + c^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{x^2 + y^2 - 2cy + c^2} + x^2 + y^2 - 2cy + c^2$$

$$4cy - 4a^2 = 4a\sqrt{x^2 + y^2 - 2cy + c^2} \dots III$$

د  $III$  رابطې دواړه خواوې پر 4 باندې وېشو:

$$cy - a^2 = a\sqrt{x^2 + y^2 - 2cy + c^2} \dots IV$$

د  $IV$  رابطې دواړه خواوې مربع کوو:

$$(cy - a^2)^2 = a^2(x^2 + y^2 - 2cy + c^2)$$

$$c^2y^2 - 2a^2cy + a^4 = a^2x^2 + a^2y^2 - 2a^2cy + a^2c^2$$

$$c^2y^2 - a^2y^2 - a^2x^2 = -a^4 + a^2c^2$$

$$y^2(c^2 - a^2) - a^2x^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

$$y^2b^2 - a^2x^2 = a^2b^2$$

څرنگه چې  $c^2 - a^2 = b^2$  دی؛ نو لرو:

د پورتنی معادلې دواړه خواوې پر  $a^2b^2$  وېشو:

$$\frac{y^2b^2}{a^2b^2} - \frac{a^2x^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2} \Rightarrow \boxed{\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1}$$

د محراقونو او راسونو مختصات په شکل کې نومول شوي دي.

### 9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

د  $4x^2 - y^2 = 16$  هایپربول له معادلې څخه د محراقونو وضعیه کمیات، د راسونو وضعیه کمیات، د موجه خط معادلې او د مجانبونو معادلې په لاس راوړئ او په پای کې یې گراف رسم کړئ.

**حل** لومړی معادله په ستنبرډ شکل اړوو؛ یعنې د معادلې اطراف په 16 باندې وېشو:

$$4x^2 - y^2 = 16 \quad / \div 16 \Rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$$

معلومه شوه چې د هایپربول متقاطع محور د  $x$  محور دی او مرکزي په مبدا کې پروت دی.

$$a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2, \quad A(2, 0), \quad A'(-2, 0) \text{ د هایپربول راسونه}$$

$$b^2 = 16 \Rightarrow b = \pm 4, \quad B(0, 4), \quad B'(0, -4) \text{ د هایپربول د غیر حقیقي راسونو مختصات}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 16 + 4 = 20$$

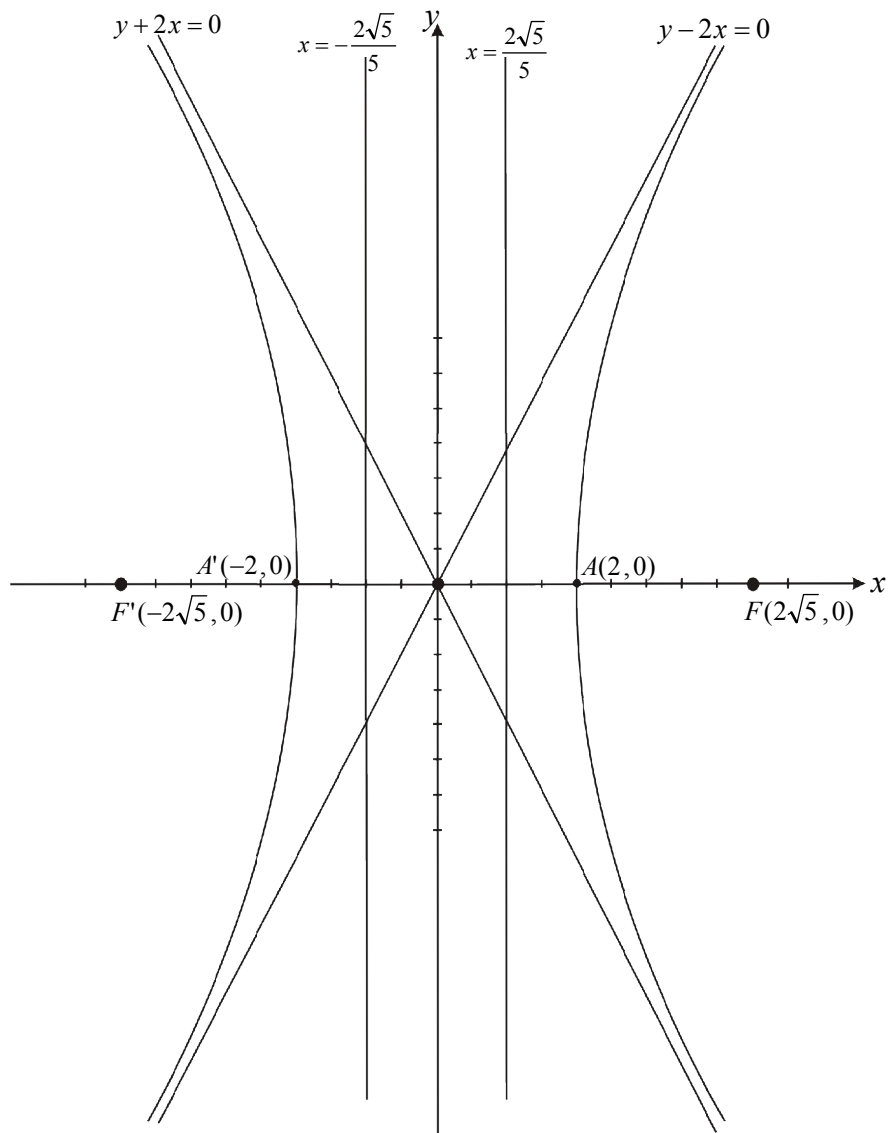
$$c = \pm 2\sqrt{5}$$

$$\text{د محراقونو مختصات } F(c, 0) = F(2\sqrt{5}, 0), \quad F'(-c, 0) = F'(-2\sqrt{5}, 0)$$



د مجانبونو معادلې  $y = \pm \frac{b}{a}x$  ,  $y = \pm \frac{4}{2}x \Rightarrow y = \pm 2x$  ,  $y + 2x = 0$  ,  $y - 2x = 0$

د مؤجه خطونو معادلې  $x = \pm \frac{a}{e} = \pm \frac{a}{\frac{c}{a}} = \pm \frac{a^2}{c} = \pm \frac{2^2}{2\sqrt{5}} = \pm \frac{4}{\sqrt{5}} = \pm \frac{2}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$



## لومړی څپرکی: مخروطي مقاطع

د هغې هايپربول معادله چې مرکز يې يو اختياري ټکی وي (لومړی حالت)

د درسي کتاب (33) مخ

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- پوهنيزه</li> <li>- مهارتي</li> <li>- ذهني</li> </ul>	<p>زده کوونکي به په دې وتوانېږي چې:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• د هغې هايپربول معادله وپېژني چې مرکز يې يو اختياري ټکی وي.</li> <li>• د شکل په لېدو او د تعريف د رابطې په پام کې نيولو سره د هايپربول معادله په لاس راوړای شي او پوښتنې حل کړای شي.</li> <li>• د محراقونو او راسونو مختصات د شکل له مخې وټاکلی شي.</li> <li>• د پورتنیو مفهومونو له بريالۍ اجرا څخه خوښي ښکاره کړي.</li> </ul>
<p>2- د زده کړې لارې:</p>	<p>پوښتنه او ځواب، انفرادي او ډله یيز کار</p>
<p>3- مرستندويه مواد:</p>	<p>د کتاب د 33 مخ د هايپربول چارټ</p>
<p>4- د وړودي برخې توضیح (5 دقيقې)</p>	<p>ښاغلی ښوونکی د لومړنیو فعالیتونو (سلام او احوال پوښتنې...) څخه وروسته وړودي پوښتنه له زده کوونکو څخه وپوښتې، ترڅو زده کوونکي د پوښتنې په اړه فکر وکړي، ښه ده چې زده کوونکي ځوابونه ووايي.</p> <p>ښاغلی ښوونکی د زده کوونکو د ځوابونو له اورېدو وروسته ووايست:</p> <p>څرنگه چې نورې مخروطي مقاطع لکه الپس او پارابولا داسې معادلې درلودلې چې مرکز يې د وضعيه کميات په مبدا کې نه و. په همدې ډول هايپربول هم يو له هغه مخروطي مقاطعو څخه ده، کېدای شي چې مرکز يې د وضعيه کميات په مبدا کې نه وي، يعنې اختياري ټکی وي.</p>
<p>5- د لوست بهير او فعاليت (28 دقيقې):</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• ښاغلی ښوونکی زده کوونکي په مناسبو ډلو ووېشي، ترڅو په ډله یيزه توگه خپل فعاليت سرته ورسوي، که چيرې زده کوونکي په نوموړي فعاليت کې د هايپربول د شکل په رسمولو سره بريالي نشي، هغه وخت چارټ د ټولگي په مخ کې وڅړوي او لارښوونه ورته وکړي چې چارټ ته په کتو سره زده کوونکي د هايپربول معادله په لاس راوړي.</li> </ul>
<p>6- د زده کړې تحکيم: (7 دقيقې)</p>	<p>ښاغلی ښوونکی ددې لپاره چې لوست تحکيم و مومي د يوې ډلې استازی راوغواړي چې خپل ډله یيز کار نور زده کوونکو ته توضیح کړي.</p>

## 7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

بناغلی ښوونکی د خپل ډاډ لپاره چې زده‌کوونکو څه زده‌کړه کړې او که نه؟ له زده‌کوونکو څخه لاندې پوښتنې وپوښتې:

1. څوک د هغې هایپربول معادله لیکلې شي چې مرکزيې د وضعیه کمیات په مبدا کې وي؟
2. څوک د هغې هایپربول معادله لیکلې شي چې مرکزيې د وضعیه کمیات په مبدا کې نه وي.
3. څوک کولای شي له شکل څخه په کار اخیستنې سره په  $|PF'| - |PF| = 2a$  معادله کې د  $PF'$  او  $PF$  قیمتونه وضع کړي؟

## 8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات:

د مجانبونو د معادلو لاس ته راوړلو لپاره د هایپربول معادله  $\left(\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1\right)$  په پام کې نیسو:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{b^2(x-h)^2 - a^2(y-k)^2}{a^2b^2} = 1$$

$$b^2(x-h)^2 - a^2(y-k)^2 = a^2b^2 \quad \Rightarrow \quad -a^2(y-k)^2 = a^2b^2 - b^2(x-h)^2$$

$$a^2(y-k)^2 = b^2(x-h)^2 - a^2b^2, \quad (y-k)^2 = \frac{b^2}{a^2}(x-h)^2 - b^2$$

$$(y-k)^2 = \frac{b^2}{a^2}(x-h)^2 \left\{ 1 - \frac{a^2}{(x-h)^2} \right\} \quad \text{یا}$$

په پورتنی اړیکه کې، که چیرې  $x$  لایتناهي ته تقرب وکړي، د  $\frac{a^2}{(x-h)^2}$  حد صفر ته تقرب کوي؛ نو له پورتنی اړیکې څخه

$$(y-k)^2 = \frac{b^2}{a^2}(x-h)^2 \quad \text{لرو:}$$

$$y-k = \pm \frac{b}{a}(x-h) \quad \text{د پورتنی معادلې دویم جذر نیسو:}$$

$$y = \pm \frac{b}{a}(x-h) + k \quad \text{د مجانبونو معادله}$$

## لومړی څپرکی: مخروطي مقاطع

د هغې هايپربولې معادله چې محراقونه يې د  $y$  له محور سره موازي پر متقاطع محور پراته وي (دويم حالت)

د درسي کتاب (34) مخ

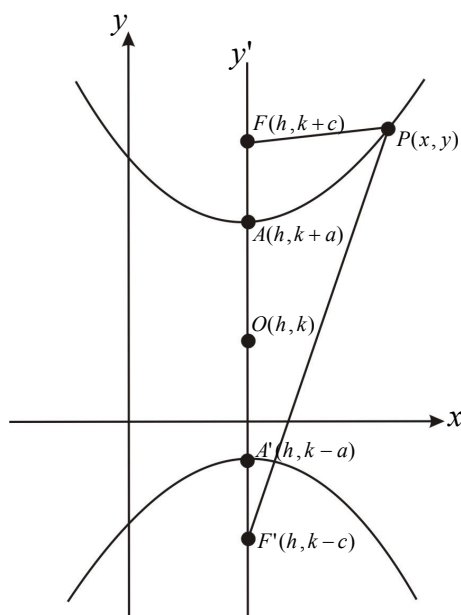
د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>پوهنيزه</li> <li>مهاري</li> <li>ذهنيتي</li> </ul> <p>زده کوونکي به په دې وتوانېږي چې:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>د هغې هايپربولې شکل چې محراقونه يې د <math>y</math> پر محور يا د <math>y</math> له محور سره په موازي محور پراته وي، رسم کړي.</li> <li>د ورکړل شوي شرط لاندې د هغې د راسونو، محراقونو مختصات او د مجانبونو معادلې وټاکي.</li> <li>او د <math>(\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1)</math> معادله په لاس راوړای شي.</li> <li>د پورتنۍ پوهې او مهارت په حاصلولو سره به د رياضي د لازياتې پوهې له حاصلولو سره علاقه مند شي.</li> </ul>	
<p>2- د زده کړې لارې:</p> <p>پوښتنه او ځواب، انفرادي او ډله ييز کار</p>	
<p>3- مرستندويه مواد:</p> <p>د کتاب د 34 مخ د هايپربولې د شکل چارټ</p>	
<p>4- د وړودي برخې</p> <p>توضیح (5 دقيقې)</p> <p>د لومړي حالت وړودي پوښتنه د همدې لوست لپاره هم صدق کوي.</p>	
<p>5- د لوست بهير او فعاليت (28 دقيقې):</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>بناغلی ښوونکی د <math>(\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1)</math> معادله پر تخته وليکي، په معادله کې د هايپربولې ټولې اجزاي وروپېژني، د <math>Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0</math> په برخه کې لنډه تبصره وکړي.</li> <li>بناغلی ښوونکی دې د 32 مخ لومړي مثال د پوښتنې او ځواب په توگه په ټولگي کې حل کړي.</li> <li>بناغلی ښوونکی دې د کتاب د 36 مخ دويم مثال يعنې <math>2x^2 - 8x - 3y^2 - 18y - 31 = 0</math> معادله پر تخته حل کړي او يو زده کوونکی دې راوغواړي چې د هغې معياري معادله وليکي، نور زده کوونکي دې په عين وخت کې نوموړي مثال په خپلو کتابچو کې حل کړي (له کتاب څخه دې گټه وانخلي).</li> </ul> <p>د فعاليت په پای کې دې يو زده کوونکی خپل فعاليت نورو زده کوونکو ته توضیح کړي چې زده کوونکي خپل حلونه د تختې له حل سره پرتله او تېروتنې اصلاح کړي.</p>	
<p>6- د زده کړې تحکيم: (7 دقيقې)</p> <p>د لوست د لابنه پوهېدو لپاره بناغلی ښوونکی دې د راسونو مختصات، د محراقونو مختصات او د مجانبونو معادلې زده کوونکو ته وروښي.</p>	
<p>7- د لوست د پايلې ارزونه: (5 دقيقې)</p> <p>بناغلی ښوونکی دې زده کوونکي د لاندې پوښتنو په واسطه وازمويي:</p> <p>1. څوک د <math>(\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1)</math> او <math>(\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1)</math> معادلو توپير ويلای شي؟</p>	

2. خوک کولای شي د پورتنیو دوو معادلو شکلونه په ساده ډول پرتله کړي؟

8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات:

د هایپرېولا د معادلې د دویم حالت ثبوت:



$$A(h, k+a)$$

$$A'(h, k-a)$$

$$F(h, k+c)$$

$$F'(h, k-c)$$

$$P(x, y)$$

$$|PF| - |PF'| = 2a$$

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-(k+c))^2} - \sqrt{(x-h)^2 + (y-(k-c))^2} = 2a$$

$$\left(\sqrt{(x-h)^2 + (y-(k+c))^2}\right)^2 = \left(2a + \sqrt{(x-h)^2 + (y-(k-c))^2}\right)^2$$

$$(x-h)^2 + (y-(k+c))^2 = 4a^2 + 2 \cdot 2a\sqrt{(x-h)^2 + (y-(k-c))^2} + (x-h)^2 + (y-(k-c))^2$$

$$y^2 - 2y(k+c) + (k+c)^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-h)^2 + (y-(k-c))^2} + y^2 - 2y(k-c) + (k-c)^2$$

$$-2yk - 2yc + k^2 + 2kc + c^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-h)^2 + (y-(k-c))^2} - 2yk + 2yc + k^2 - 2kc + c^2$$

$$-2yc + 2kc = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-h)^2 + (y-(k-c))^2} + 2yc - 2kc$$

$$-4yc + 4kc - 4a^2 = 4a\sqrt{(x-h)^2 + (y-(k-c))^2} \quad / \div 4$$

$$-yc + kc - a^2 = a\sqrt{(x-h)^2 + (y-(k-c))^2}$$

$$-c(y-k) - a^2 = a\sqrt{(x-h)^2 + (y-(k-c))^2} \quad / \cdot (-1)$$

$$(c(y-k) + a^2)^2 = (-a\sqrt{(x-h)^2 + (y-(k-c))^2})^2$$

$$c^2(y-k)^2 + 2ca^2(y-k) + a^4 = a^2[(x-h)^2 + (y-(k-c))^2]$$

$$c^2(y-k)^2 + 2ca^2(y-k) + a^4 = a^2(x-h)^2 + a^2[y^2 - 2y(k-c) + (k-c)^2]$$

$$c^2(y-k)^2 - a^2(x-h)^2 = a^2y^2 - 2a^2y(k-c) + a^2(k-c)^2 - 2a^2c(y-k) - a^4$$

$$= a^2y^2 - 2a^2yk + 2a^2yc + a^2(k-c)^2 - 2a^2yc + 2a^2ck - a^4$$

$$= a^2y^2 - 2a^2yk + a^2[k^2 - 2kc + c^2] + 2a^2ck - a^4$$

$$= a^2y^2 - 2a^2yk + a^2k^2 - 2a^2kc + a^2c^2 + 2a^2ck - a^4$$

$$= a^2y^2 - 2a^2yk + a^2k^2 + a^2c^2 - a^4$$

$$= a^2y^2 - 2a^2yk + a^2k^2 + a^2(c^2 - a^2)$$

څرنگه چې  $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2$  دی؛ نو:

$$c^2(y-k)^2 - a^2(x-h)^2 = a^2[y^2 - 2yk + k^2] + a^2b^2$$

$$c^2(y-k)^2 - a^2(x-h)^2 = a^2(y-k)^2 + a^2b^2$$

$$(a^2 + b^2)(y-k)^2 - a^2(x-h)^2 = a^2(y-k)^2 + a^2b^2$$

$$a^2(y-k)^2 + b^2(y-k)^2 - a^2(x-h)^2 = a^2(y-k)^2 + a^2b^2$$

$$b^2(y-k)^2 - a^2(x-h)^2 = a^2b^2 \quad / \div a^2b^2$$

$$\frac{b^2(y-k)^2}{a^2b^2} - \frac{a^2(x-h)^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2}$$

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1 \quad \text{د هایپربول د دویم حالت معادله:}$$

### 9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

1- د  $9x^2 - 4y^2 + 54x + 16y - 79 = 0$  معادله د هایپربول په معیاري معادلي باندې واړوئ.

**حل:** د پورتنی معادلي له مخې معلومېږي چې  $A \neq B$  او مختلف الاشاره دی.

$$9x^2 - 4y^2 + 54x + 16y - 79 = 0$$

$$9(x^2 + 6x) - 4(y^2 - 4y) - 79 = 0$$

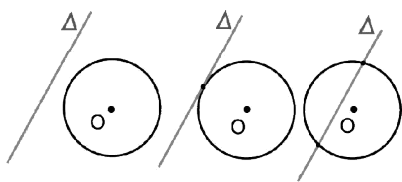
$$9(x^2 + 6x + 9 - 9) - 4(y^2 - 4y + 4 - 4) - 79 = 0$$

$$9(x+3)^2 - 81 - 4(y-2)^2 + 16 - 79 = 0$$

$$9(x+3)^2 - 4(y-2)^2 = 144 \quad / \div 144$$

$$\frac{9(x+3)^2}{144} - \frac{4(y-2)^2}{144} = 1$$

$$\frac{(x+3)^2}{16} - \frac{(y-2)^2}{36} = 1 \quad \text{د هایپربول معیاري معادله}$$



## لومړی څپرکی: مخروطي مقاطع

د یوې کرنيې موقعیت نظر مخروطي مقاطعو ته

د درسي کتاب (37) مخ

د لوست وخت: (یو درسي ساعت)

<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• زده کوونکي به په دې وتوانېږي چې:</li> <li>• د یوې کرنيې او مخروطي مقاطعو د نسبتي حالتونو پر مفهوم پوه شي.</li> <li>• د دایرې او د مستقیمې کرنيې معادلې وپېژني.</li> <li>• له معادلو څخه په کار اخیستنې سره دایره او د مستقیم خط گراف رسم کړای شي.</li> <li>• د دایرې موقعیت له یوې کرنيې سره وټاکلای شي.</li> <li>• بالاخره د پورتنۍ پوهې او مهارت له حاصلولو څخه خوښ شي.</li> </ul>	<p>- پوهنیزه</p> <p>- مهارتي</p> <p>- ذهنيتي</p>
<p>2- د زده کړې لارې:</p> <p>پوښتنه او ځواب، انفرادي او ډله ییز کار</p>	
<p>3- مرستندويه مواد:</p> <p>د کتاب 37، 38، 39 او 40 مخونو چارټونه</p>	
<p>4- د وروډي برخې توضیح (5 دقیقې)</p> <p>بناغلی ښوونکی له زده کوونکو څخه وروډي پوښتنه وپوښتی چې هغوی د دایرې او مستقیم خط د حالتونو په اړه فکر وکړي او نظر ورکړي، البته د فعالیت له سرته رسولو څخه وروسته به وروډي پوښتنه حل کړای شي.</p>	
<p>5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې):</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• بناغلی ښوونکی د زده کوونکو د ځوابونو له اورېدو څخه وروسته د کتاب 37 مخ د شکل چارټ د ټولگي په مخ کې ځورند کړی او زده کوونکي په مناسبو ډلو ووهی چې د 37 مخ فعالیت سرته ورسوي. په پای کې د یوې ډلې استازی راوغوړی چې خپل فعالیت نورو زده کوونکو ته توضیح کړي، د تېروتنې په صورت کې مرسته ورسره وکړی، ترڅو هغه زده کوونکي چې تېروتنه یې کړي وي خپله تېروتنه اصلاح کړي.</li> <li>• بناغلی ښوونکی یو داوطلب زده کوونکی د ټولگي مخ ته راوغوړي چې د <math>x^2 + y^2 = 9</math> دایره د وضعیه کمیاتو په سېسټم کې پر تخته رسم کړي. له یوه بل داوطلب زده کوونکي څخه وغوړی چې د <math>y = x + 3</math> مستقیمه کرنيه هم رسم کړي، بیا ښوونکی شکل ته اشاره کوي او له یوه زده کوونکي څخه پوښتنه کوي:</li> <li>• کرنيې دایره په څو ټکو کې قطع کړې ده؟ د زده کوونکو د ځواب له اورېدو څخه وروسته د لومړي مثال په حل د پوښتنو او ځوابونو په طریقه پیل کوي.</li> <li>• بناغلی ښوونکی دې دویم او دریم مثال د زده کوونکو په فعال گډون او برخې اخیستنې سره حل کړي.</li> </ul>	

### 6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

بناغلی بنوونکی د لوست د لا ښه تحکیم لپاره څلورم مثال د پوښتنو او ځوابونو په شکل په ټولگي کې حل کړی، بیا د  $Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$  معادله پر تخته ولیکئ او مناقشه وکړئ چې پورتنی معادله په کوم صورت کې د دایرې، په کوم حالت کې د الپس او په کوم صورت کې د هایپربول معادله ده؟ همدارنگه د پارابولا معادله به څه شکل ولري؟

### 7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ددې لپاره چې ډاډه شي چې زده‌کوونکو زده‌کړه، کړې ده او که نه؟ زده‌کوونکي په لاندې پوښتنو سره و ارزوئ:

1. یوه مستقیمه کرښه د مخروطي مقاطعو له هر یوه سره څو حالتونه لري؟
2. که چیرې  $\Delta = 0$  وي، ایا مستقیمه کرښه دایره قطع کوي که نه؟ که چیرې دایره قطع کوي؛ نو په څو ټکو کې؟
3. په کوم صورت کې مستقیمه کرښه له مخروطي مقاطعو سره په یوه ټکي کې مماس وي؟



## لومړۍ څپرکي: مخروطي مقاطع

پوښتنې

د درسي کتاب (40) مخ

د لوست وخت: (يو يا دوه درسي ساعتونه)

<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- پوهنيزه</li> <li>- مهارتي</li> <li>- ذهني</li> </ul> <p>زده کوونکي به په دې وتوانېږي چې:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• هريو له مخروطي مقاطعو (دايره، الپس، پارابولا او هايپربول) د معادلو له مخې تشخيص کړای شي.</li> <li>• اړونده پوښتنې حل کړي.</li> <li>• د پوښتنو له حل څخه به په خپل ځان ډاډمن شي.</li> </ul>	
2- د زده کړې لارې:	ډله‌ييز انفرادي، پوښتنې او ځوابونه.
3- مرستندويه مواد:	
4- د ورودې برخې توضیح (5 دقيقې)	

### 5- د لوست بهير او فعاليت (28 دقيقې):

- بناغلی ښوونکی د کتاب 40 مخ د لومړۍ پوښتنې د  $a$  جزء ټولگي کې د پوښتنو او ځوابونو په شکل حل کړی.
- بناغلی ښوونکی زده‌کوونکي په مناسبو ډلو ووېشي، ترڅو د لومړۍ پوښتنې  $b$  جزء په خپلو ډلو کې حل او وروسته د يوې ډلې له استازي څخه وغواړي چې د خپل حل په اړه توضيحات ورکړي چې نورو زده‌کوونکو ته روښانه شي.
- بناغلی ښوونکی د لومړۍ پوښتنې  $c$  جزء يوه زده‌کوونکي ته ورکړی چې پر تخته يې حل کړي. په عين وخت کې دغه پوښتنه نورو ته هم ورکړی چې په انفرادي توگه يې په خپلو کتابچو کې حل کړي او د زده‌کوونکو څارنه وکړي چې له تختې څخه يې نقل نکړي. وروسته د تختې مخې ته ولاړ زده‌کوونکی خپل حل دې نورو ته توضیح کړي، که چيرې کومه تېروتنه شتون ولري، لارښوونه او مرسته ورسره وکړي، چې نور زده‌کوونکي خپلې تېروتنې اصلاح کړي. په هغه صورت کې چې پوښتنې په يوه ساعت کې حل نشي د رياضي په بل درسي ساعت کې دې پاتې پوښتنې حل شي.

### 9- د تمرين او پوښتنو ځوابونه:

1- لاندې معادلې د هغوی د گرافونو د منحنی له مخې و ټاکي:

a)  $y^2 - 2y + x + 3 = 0$

b)  $9x^2 + 9y^2 = 27$

c)  $25x^2 + 16y^2 = 400$

d)  $x^2 - y^2 = 0$

e)  $y^2 + 6y - x + 2 = 0$

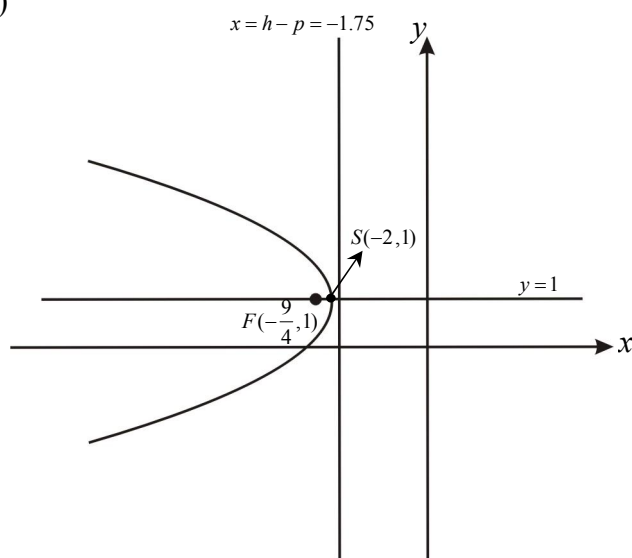
**حل: (a)** مخکې له دې چې پوښتنه حل کړو لومړی باید د پوښتنې ټولې اجزاوې تکمیل مربع شي چې د منحنی په تشخیص کې مرسته کوي.

$$y^2 - 2y + 1 - 1 + x + 3 = 0$$

$$(y-1)^2 + x + 2 = 0 \Rightarrow (y-1)^2 = -(x+2)$$

پورتني معادله د هغې پارابولا معادله ده چې راس یې په  $(-2, 1)$  ټکي کې دی او  $4p = -1$  یا  $p = \frac{-1}{4} < 0$  ده، نو د پارابولا محراق د  $x$  له محور سره پر موازي محور او خوله یې کینې خواته خلاصه ده.

$$F(h+p, k) = F\left(-2 - \frac{1}{4}, 1\right) = F\left(-\frac{9}{4}, 1\right)$$



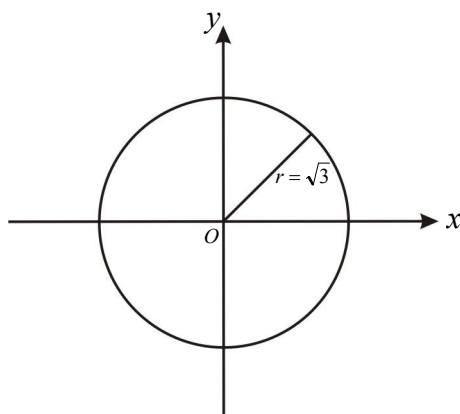
**حل: (b)**

$$9x^2 + 9y^2 = 27$$

$$9(x^2 + y^2) = 27 \div 9$$

$$x^2 + y^2 = 3$$

پورتني معادله د هغې دایرې معادله ده چې مرکز یې د وضعیه کمیات په مبدا کې دی او شعاع یې  $r = \sqrt{3}$  ده.



(c: حل)

$$25x^2 + 16y^2 = 400 \quad / \div 400$$

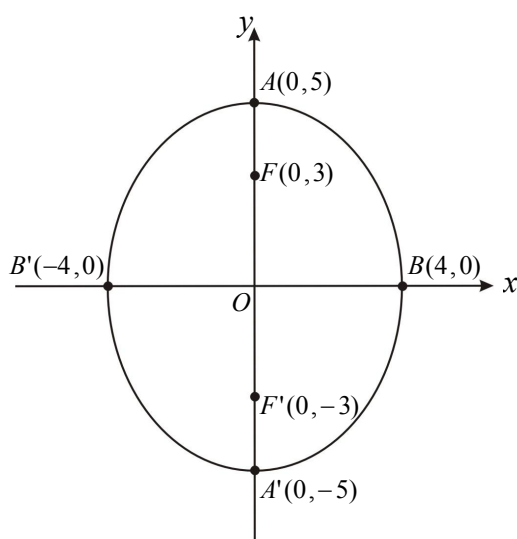
$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$$

پورتنی معادله د داسې بیضوي معادله ده چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې دی، اوږد قطری یې د  $y$  پر محور پروت دی.

$$\left. \begin{array}{l} a^2 = 25, \quad a = \pm 5 \\ b^2 = 16, \quad b = \pm 4 \end{array} \right\} \begin{array}{l} c^2 = a^2 - b^2 \\ c^2 = 25 - 16 = 9, \quad c = \pm 3 \end{array}$$

$$|AA'| = 2a = 10, \quad |BB'| = 2b = 8, \quad |FF'| = 2c = 6$$

$$A(0,5), \quad A'(0,-5), \quad B(4,0), \quad B'(-4,0), \quad F(0,3), \quad F'(0,-3)$$

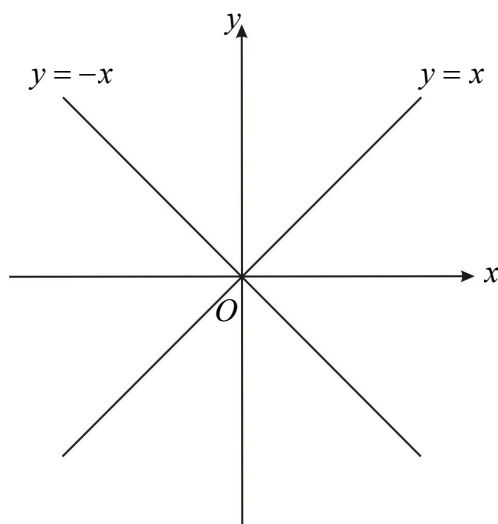


(d: حل)

$$x^2 - y^2 = 0$$

$$-y^2 = -x^2 \Rightarrow y^2 = x^2, \quad y = \pm x$$

د هغو خطونو معادله ده چې د تقاطع ټکی یې د وضعیه کمیاتو مبدا ده.



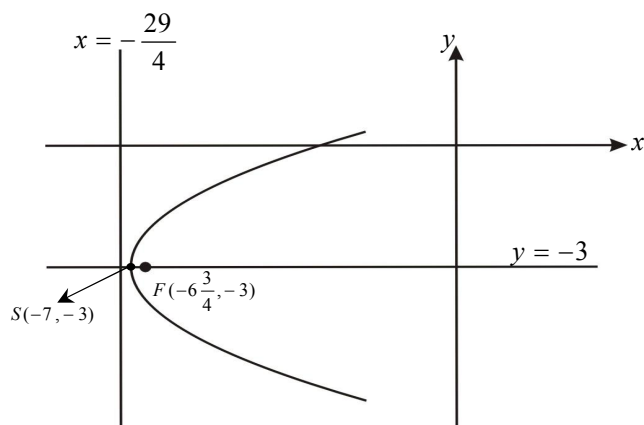
حل: e)

$$y^2 + 6y - x + 2 = 0$$

$$y^2 + 6y + 9 - 9 - x + 2 = 0$$

$$(y + 3)^2 - (x + 7) = 0$$

$$(y + 3)^2 = x + 7$$



پورتنی معادله د هغې پارابولا معادله ده چې راس یې د  $(-7, -3)$  په ټکي کې پروت دی او  $4p = 1$  یا  $p = \frac{1}{4} > 0$  ده؛ نو د پارابولا خوله د  $x$  له محور سره پر موازي محور بني خواته خلاصه ده محراق

$$F(h + p, k) \text{ یا } F(-6\frac{3}{4}, -3)$$

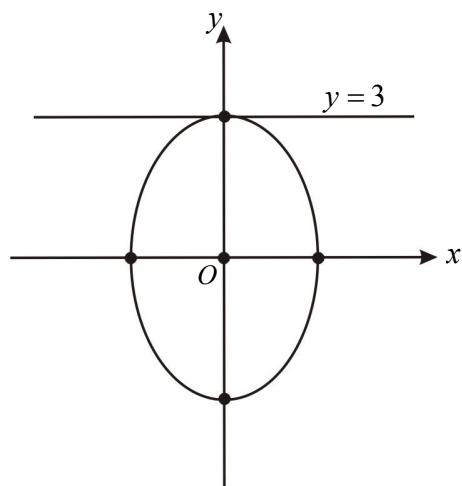
-2 د  $9x^2 + 4y^2 = 36$  الپس او د  $y = 3$  مستقیم خط یو بل په څو ټکو کې قطع کوي؟

حل:

$$9x^2 + 4y^2 = 36$$

$$9x^2 + 4(3)^2 = 36$$

$$9x^2 + 36 = 36 \Rightarrow 9x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$



ویلای شو چې د  $y = 3$  خط له بیضوي سره مماس دی او له بیضوي سره د تماس ټکی یې عبارت دی له  $(0, 3)$  څخه.

-3 د  $y = x$  خط او  $x^2 - 2y^2 = 4$  هایپربول د تقاطع ټکي پیدا کړئ.

حل:

$$x^2 - 2y^2 = 4$$

$$y^2 - 2y^2 = 4$$

$$-y^2 = 4 \Rightarrow y^2 = -4$$

څرنگه چې  $y = x$  دی، نو:

معلو مېږي چې  $y^2$  یو منفي عدد دی، معادله حل نه لري؛ نو هایپربول او  $y = x$  خط یو بل نه قطع کوي.

## د لومړي څپرکي د عمومي پوښتنو حل (اووه درسي ساعتونه)

هرې پوښتنې ته څلور ځوابه ورکړل شوي دي، سم ځواب په نښه او کرښه ترې تا و کړئ:

1- که چیرې یوه مستوي یو مخروط په مایل ډول قطع کړي، نو د مستوي او مخروط د تقاطع ګډ فصل عبارت دی له:

(a) بیضوي (b) دایره (c) هایپربول (d) دوه متقاطع خطونه

2- د اپس محراقونه هغه ټکې دي چې د اپس له مرکز څخه:

(a) برابر و اټن ولري (b) مختلف و اټنونه لري

(c) د اوږده قطر نیمایې و اټن لري (d) د لنډ قطر نیمایې ده.

3- که چیرې  $M$  د اپس یو ټکی  $F$  او  $F'$  محراقونه او  $2a$  داوږده قطر اوږد والې وي، نو په دې صورت کې لرو چې:

(a)  $|MF| - |MF'| = 2a$  (b)  $|MF| + |MF'| = a$

(c)  $|MF| + |MF'| = 2a$  (d)  $|MF| + |MF'| = 0$

4- د اپس عن مرکزیت له لاندې کومې یوې رابطې څخه په لاس راځي:

(a)  $e = \frac{a}{c}$  (b)  $e = \frac{c}{a}$  (c)  $e = \frac{b}{c}$  (d)  $e = \frac{c}{b}$

5- په Ellips کې د لنډ قطر او محراقونو ترمنځ اړیکه عبارت ده له:

(a)  $a^2 = b^2 - e^2$  (b)  $a^2 + b^2 = c^2$

(c)  $a^2 = b^2 + e^2$  (d)  $a^2 = b^2 + c^2$

6- د  $(y-k)^2 = 4p(x-h)$  په معادله کې  $p > 0$  سره وي، نو:

(a) د پارابولا خوله پاس خواته خلاصه ده. (b) د پارابولا خوله لاندې خواته خلاص ده

(c) د پارابولا خوله بڼې خواته خلاص ده (d) د پارابولا خوله کښې خواته خلاص ده.

7- د  $(x+1)^2 = 8(y-2)$  د پارابولا معادله په پام کې ونیسئ. دمخراق وضعیه کمیات یې عبارت دي له:

(a)  $F(-1, -2)$  (b)  $F(-1, 4)$  (c)  $F(-1, 2)$  (d)  $F(-4, -1)$

8- که چیرې  $F$  او  $F'$  د هایپربول محراقونه وي، د  $p$  ټکی په کوم شرط د هایپربول د محیط یو ټکی کیدلای شي؟

(a)  $|PF| + |PF'| = 2a$  (b)  $|PF| - |PF'| = a$

(c)  $|PF| - |PF'| = 2a$  (d)  $|PF| - |PF'| = 0$

9: د  $y = x^2$  د پارابولا ګراف متناظر دی نظر:

(a) د  $y$  محور ته (b) د  $x$  محور ته

(c) د  $x$  او  $y$  محورونو ته (d) د وضعیه کمیاتو مبداتو ته

10: په لاندې ځوابونو کې کوم یو د هایپربول عن مرکزیت بڼې؟

(a)  $e < 1$  (b)  $e = 1$  (c)  $e > 1$  (d)  $e = -1$

11: د  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$  د بیضوي د اوږده قطر موقعیت:

(a) د  $y$  پر محور باندې دی. (b) د  $x$  پر محور باندې دی.

(c) د  $x$  پر محور عمود دی. (d) د  $y$  له محور سره موازي دی.

12: په یوه مستوي کې د ټولو هغو ټکو هندسي محل چې له یوه ثابت ټکي څخه مساوي فاصلې لري. په څه نوم یادېږي؟

(a) کره (b) دایره (c) پارابولا (d) بیضوي

13: د  $y^2 = -4(x+2)$  پارابولا د راس مختصات عبارت دی له:

(a) (2,4) (b) (4,2) (c) (2,0) (d) (-2,0)

14: د  $4x^2 + 4y^2 + 8y + 3 = 0$  معادله عبارت ده له:

(a) دایرې (b) بیضوي (c) پارابولا (d) هایپربول

15: د  $y = 2x$  مستقیم خط د  $\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$  هایپربول په څو ټکو کې قطع کوي؟

حل:

$$\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1 \Rightarrow \frac{9(x-1)^2 - 4(y-2)^2}{36} = 1 \quad / \cdot 36$$

$$9(x-1)^2 - 4(y-2)^2 = 36 \Rightarrow 9(x^2 - 2x + 1) - 4(y^2 - 4y + 4) = 36$$

$$9x^2 - 18x + 9 - 4y^2 + 16y - 16 = 36$$

$$9x^2 - 4y^2 - 18x + 16y - 7 - 36 = 0$$

$$9x^2 - 4(2x)^2 - 18x + 16(2x) - 43 = 0$$

$$9x^2 - 16x^2 - 18x + 32x - 43 = 0$$

$$-7x^2 + 14x - 43 = 0 \quad / (-1) \Rightarrow 7x^2 - 14x + 43 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 196 - 4 \cdot 7 \cdot 43 = 196 - 1204 = -1008$$

معلومېږي چې  $\Delta < 0$  ده او معادله په حقيقي عددونو کې حل نه لري؛ نو د  $y = 2x$  خط له هایپربول سره هېڅ گډ ټکی نه لري.

16: د  $2y = 3x$  مستقیم خط د  $2y^2 - 6y + 5x - 12 = 0$  منحنی په څو ټکو کې قطع کوي؟

حل:

$$2y = 3x \Rightarrow y = \frac{3}{2}x$$

$$2y^2 - 6y + 5x - 12 = 0$$

$$2\left(\frac{3}{2}x\right)^2 - 6 \cdot \frac{3}{2}x + 5x - 12 = 0$$

$$2 \cdot \frac{9}{4}x^2 - 9x + 5x - 12 = 0$$

$$\frac{9}{2}x^2 - 4x - 12 = 0 \quad / \cdot 2$$

$$9x^2 - 8x - 24 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 64 - 4(9)(-24) = 64 + 864 = 928$$

څرنگه چې  $\Delta > 0$  ده؛ نو نوموړی مستقیم خط هایپربول په دوو ټکو کې قطع کوي.

17 : لاندې معادلې په پام کې ونیسئ، لومړی هغه په معیاري ډول ولیکئ، بیا یې گرافونه رسم کړئ.

$$a) x^2 + 4y^2 = 4$$

$$b) 9x^2 + 2y^2 = 15$$

$$c) 16x^2 - 96x + 9y^2 + 90y + 225 = 0$$

$$d) x^2 + 12x - 120y + 288 = 0$$

حل (a):

$$a) x^2 + 4y^2 = 4 \quad / \div 4$$

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

پورتنی معادله د هغې بیضوي معادله ده چې مرکز یې په مبدا کې او محراقي محور یې د  $x$  محور دی. د گراف درسمولو

لپاره مرکز، محراقونه، اوږد قطر او لنډ قطر پیدا کوو:

$$a^2 = 4, \quad a = \pm 2, \quad A(2, 0), \quad A'(-2, 0)$$

$$b^2 = 1, \quad b = \pm 1, \quad B(0, 1), \quad B'(0, -1)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2$$

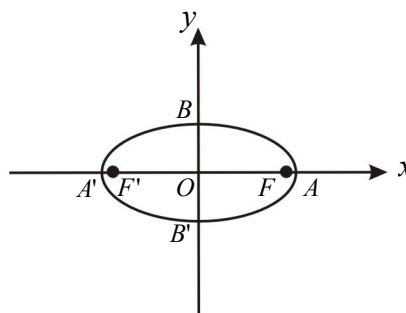
$$c^2 = 4 - 1 = 3 \Rightarrow c = \pm\sqrt{3} = \pm 1.73$$

$$\left. \begin{aligned} F(c, 0) = F(\sqrt{3}, 0) \\ F'(-c, 0) = F'(-\sqrt{3}, 0) \end{aligned} \right\} \text{ محراقونه}$$

$$|AA'| = 2a = 2 \cdot 2 = 4 \text{ د اوږده قطر اوږدوالي}$$

$$|BB'| = 2b = 2 \cdot 1 = 2 \text{ د لنډ قطر اوږدوالي}$$

$$|FF'| = 2c = 2\sqrt{3} \text{ د محراقونو ترمنځ واټن (فاصله)}$$



حل (b):

$$b) 9x^2 + 2y^2 = 15$$

$$9x^2 + 2y^2 = 15 \quad / \div 15$$

$$\frac{9x^2}{15} + \frac{2y^2}{15} = 1 \Rightarrow \frac{\frac{9}{15}x^2}{\frac{9}{9}} + \frac{\frac{2}{15}y^2}{\frac{2}{2}} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{1.666} + \frac{y^2}{7.5} = 1$$

پورتنی معادله د الپس معادله ده، نو څرنګه چې محراقونه د  $y$  پر محور باندې دي، د گرافونو درسمولو لپاره د الپس

محراقونه پیدا کوو:

$$a^2 = 7.5 \Rightarrow a = \pm 2.73$$

$$b^2 = 1.666 \Rightarrow b = \pm 1.28$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$c^2 = 7.5 - 1.666 = 5.84 \Rightarrow c = \pm 2.41$$

$$\left. \begin{aligned} A(0, a) = A(0, 2.73) \\ A'(0, -a) = A'(0, -2.73) \end{aligned} \right\} \text{ د اوږده قطر راسونه}$$

$$\left. \begin{aligned} B(b, 0) &= B(1.28, 0) \\ B'(-b, 0) &= B'(-1.28, 0) \end{aligned} \right\} \text{د لند قطر راسونه}$$

$$\left. \begin{aligned} F(0, c) &= F(0, 2.41) \\ F'(0, -c) &= F'(0, -2.41) \end{aligned} \right\} \text{د محراقونو مختصات}$$

معلومېږي چې  $A \neq B$  او یو شان علامې لري؛ نو پورتنی معادله د یوې بیضوي معادله ده، د گراف رسم دې د زده کوونکو په واسطه وشي.

حل (c):

$$c) 16x^2 - 96x + 9y^2 + 90y + 225 = 0$$

$$16(x^2 - 6x) + 9(y^2 - 10y) + 225 = 0$$

$$16(x^2 - 6x + 9 - 9) + 9(y^2 - 10y + 25 - 25) + 225 = 0$$

$$16(x-3)^2 - 144 + 9(y-5)^2 - 225 + 225 = 0$$

$$16(x-3)^2 + 9(y-5)^2 = 144$$

$$\frac{16(x-3)^2}{144} + \frac{9(y-5)^2}{144} = 1$$

$$\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-5)^2}{16} = 1$$

څرنگه چې د  $(y-5)^2$  مخرج لوی دی؛ نو د بیضوي محراقي محور د  $y$  له محور سره موازي دی.

د بیضوي مرکز  $(h, k) = (3, 5)$

$$a^2 = 16, \quad a = \pm 4 \quad A(h, k+a) = A(3, 5+4) = A(3, 9)$$

$$b^2 = 9, \quad b = \pm 3 \quad A'(h, k-a) = A'(3, 5-4) = A'(3, 1)$$

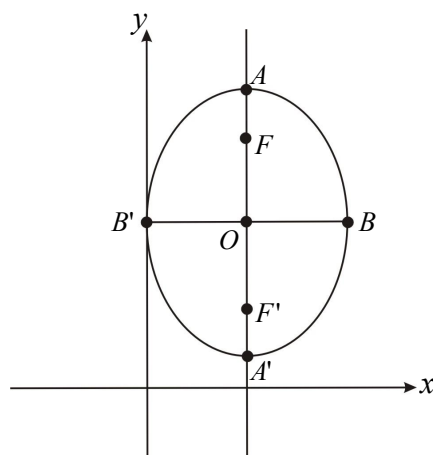
$$B(h+b, k) = B(3+3, 5) = B(6, 5)$$

$$B'(h-b, k) = B'(3-3, 5) = B'(0, 5)$$

$$c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 9 = 7 = 7, \quad c = \pm\sqrt{7}$$

$$F(h, k+c), \quad F(3, 5+\sqrt{7})$$

$$F'(h, k-c), \quad F'(3, 5-\sqrt{7})$$





حل (d):

$$d) x^2 + 12x - 120y + 288 = 0$$

$$x^2 + 12x + 36 - 36 - 120y + 288 = 0$$

$$(x + 6)^2 - 120y + 252 = 0$$

$$(x + 6)^2 = 120y - 252$$

$$(x + 6)^2 = 120(y - 2.1)$$

د پارابولا راس  $S(h, k) = (-6, 2.1)$  ،  $h = -6$  ،  $k = 2.1$

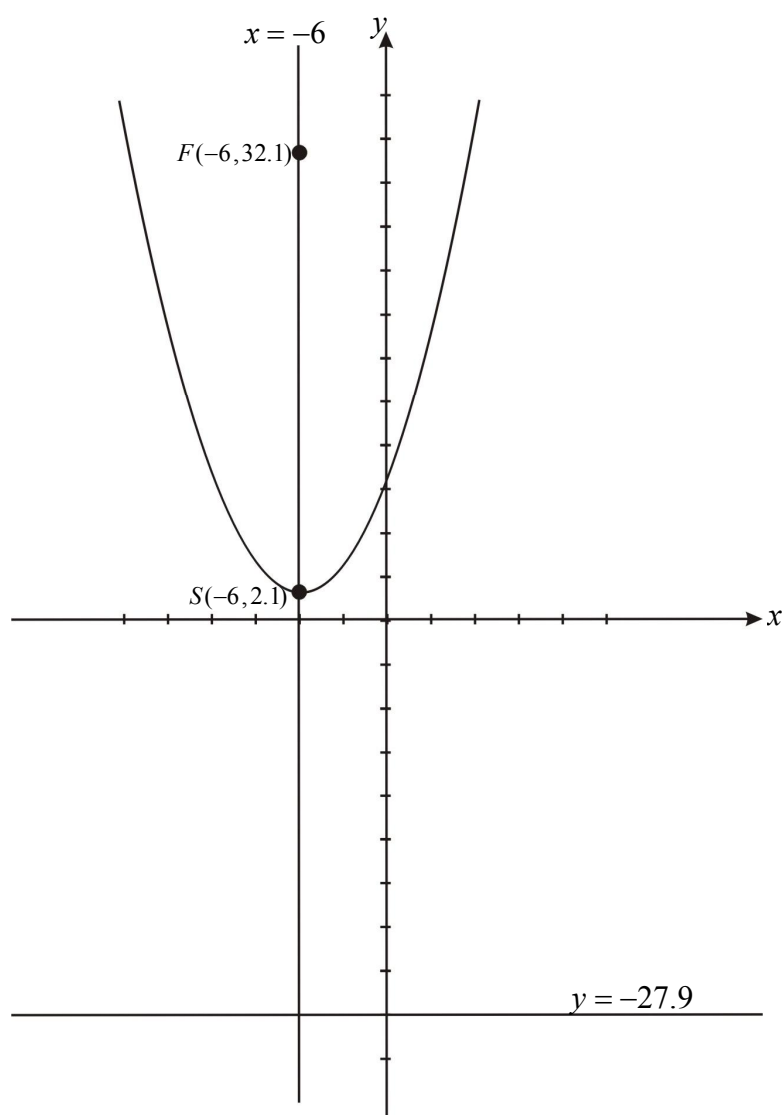
$$4P = 120 \Rightarrow P = 30$$

څرنگه چې  $P > 0$  ده؛ نو د پارابولا خوله د  $y$  پر محور پورته خواته خلاصه ده.

د پارابولا محراق  $F(h, k + p) = F(-6, 2.1 + 30) = F(-6, 32.1)$

د مؤجه خط معادله  $y = k - p = 2.1 - 30 = -27.9$

د تناظر محور  $x = h = -6$



18: د لاندې قیمتونو له مخې د هرې یوې بیضوي معادله پیدا کړئ:

(a)  $(0,0)$  مرکزي مختصه،  $a = -2$  او  $e = 0.75$  دي او لوی قطري یې د  $y$  پر محور باندې پروت دی.

(b)  $(0,0)$  مرکزي مختصه،  $b = 64$  او  $e = 0.5$  دي او لوی قطري یې د  $x$  پر محور باندې پروت دی.

**حل a:** که چیرې د لوی قطر نیمایي  $a$  وي؛ نو:

$$a = 2, \quad e = \frac{c}{a} = 0.75 = \frac{3}{4}, \quad c = a \cdot e = 2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2$$

$$b^2 = 4 - \frac{9}{4} = \frac{16-9}{4} = \frac{7}{4}$$

$$\boxed{\frac{x^2}{\frac{7}{4}} + \frac{y^2}{4} = 1}$$

**حل b:**

$$e = 0.5 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2, \quad b^2 = a^2 - a^2 e^2$$

$$b^2 = a^2(1 - e^2), \quad (64)^2 = a^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) = a^2 \left(\frac{4-1}{4}\right)$$

$$(64)^2 = a^2 \left(\frac{3}{4}\right) \Rightarrow a^2 = \frac{4}{3} (64)^2 = \frac{(2 \cdot 64)^2}{3}$$

$$\frac{x^2}{\frac{4 \cdot (64)^2}{3}} + \frac{y^2}{(64)^2} = 1 \quad \text{یا} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{د بیضوي معادله}$$

19: له لاندې معادلو څخه د بیضوي ټولې اجزایې پیدا کړئ.

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad (b) \quad 4(x-1)^2 + y^2 = 4 \quad (a)$$

**حل a:**

$$4(x-1)^2 + y^2 = 4 \quad / \div 4$$

$$(x-1)^2 + \frac{y^2}{4} = 1$$

څرنگه چې د  $y$  مخروط لوی دی؛ نو د بیضوي محراقي محور (اوږد قطر) د  $y$  له محور سره موازي دی.

$$h = 1, \quad k = 0$$

د بیضوي مرکز  $(h, k) = (1, 0)$

$$a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2$$

$$b^2 = 1 \Rightarrow b = \pm 1$$

$$c^2 = a^2 - b^2 = 4 - 1 = 3 \Rightarrow c = \pm \sqrt{3}$$

د بیضوي د اوږده قطر اوږدوالی  $|AA'| = 2a = 2 \cdot 2 = 4$

د بیضوي د لنډ قطر اوږدوالی  $|BB'| = 2b = 2 \cdot 1 = 2$

د بیضوي د کبیر قطر د راسونو مختصات  $A(h, k+a) = (1, 2)$  ,  $A'(h, k-a) = (1, 0-2) = (1, -2)$

د محراق مختصات  $F(h, k+c) = (1, \sqrt{3})$  ,  $F'(h, k-c) = (1, -\sqrt{3})$

د بیضوي د صغیر قطر د راسونو مختصات  $(h+b, k) = (1+1, 0) = (2, 0)$   
 $(h-b, k) = (1-1, 0) = (0, 0)$

حل (b)

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

بیا هم لیدل کېږي چې د  $y^2$  مخخ لوی دی؛ نو د بیضوي محراقي محور د  $y$  له محور څخه عبارت دی.

$$a^2 = 9 \Rightarrow a = \pm 3$$

$$b^2 = 4 \Rightarrow b = \pm 2$$

$$c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 4 = 5$$

$$c = \pm\sqrt{5}$$

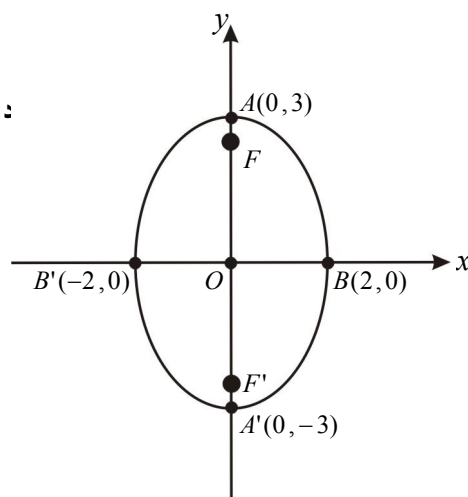
د بیضوي د کبیر قطر د راسونو مختصات  $A(0, a) = A(0, 3)$   
 $A'(0, -a) = A'(0, -3)$

د بیضوي د صغیر قطر د راسونو مختصات  $B(b, 0) = (2, 0)$   
 $B'(-b, 0) = (-2, 0)$

د کبیر قطر اوږدوالی  $|AA'| = 2a = 2 \cdot 3 = 6$

د صغیر قطر اوږدوالی  $|BB'| = 2b = 2 \cdot 2 = 4$

د بیضوي د محراقونو مختصات  $F(0, c) = F(0, \sqrt{5})$   
 $F'(0, -c) = F'(0, -\sqrt{5})$



20: د پارابولا لاندې معادلي لومړي په معیاري شکل ولیکئ او بیایې گرافونه رسم کړئ:

$$x^2 - 11y = 0 \quad (a)$$

$$y^2 - 4y - 4x + 2 = 0 \quad (b)$$

حل (a)

$$x^2 - 11y = 0$$

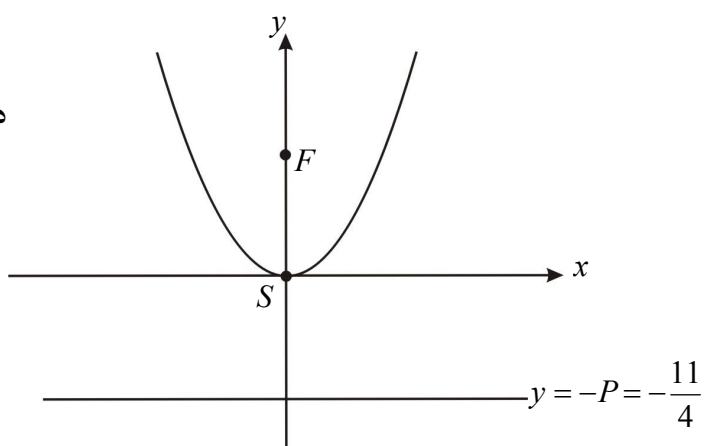
$$x^2 = 4Py$$

$$x^2 = 11y, \quad 4P = 11 \Rightarrow P = \frac{11}{4}$$

څرنگه چې  $P > 0$  ده؛ نو د پارابولا خوله د  $y$  پر محور پورته خواته خلاصه ده او راس یې په مبدا کې واقع دی.

$$F(0, p) = F(0, \frac{11}{4}) \text{ محراق}$$

$$y = -P = -\frac{11}{4} \text{ د موجه خط معادله}$$



(b) حل

$$y^2 - 4y - 4x + 2 = 0$$

$$y^2 - 4y + 4 - 4 - 4x + 20 = 0$$

$$(y-2)^2 - 4x + 16 = 0$$

$$(y-2)^2 = 4x - 16$$

$$(y-2)^2 = 4(x-4)$$

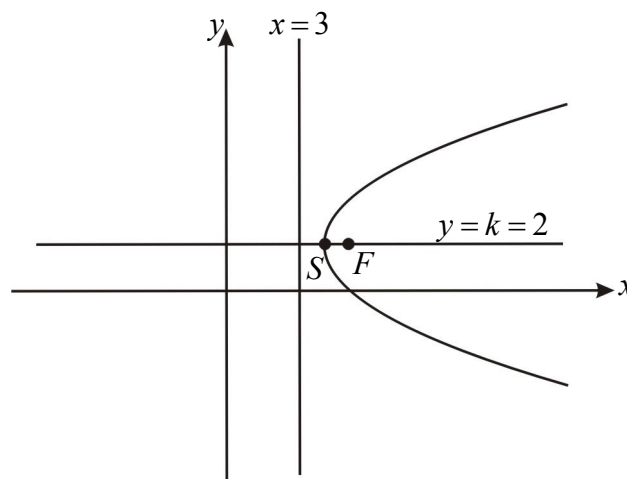
$$4P = 4, \quad P = 1 > 0$$

$$S(h, k) = S(4, 2) \text{ د پارابولا راس}$$

$$F(h+p, k) = F(4+1, 2) = F(5, 2) \text{ محراق}$$

$$x = h - p = 4 - 1 = 3 \text{ د موجه خط معادله}$$

$$y = k = 2 \text{ د تناظري محور معادله}$$



21: د هایپربولا لاندې هره یوه معادله په معیاري ډول وپورئ:

$$4x^2 - y^2 - 8y - 32 = 0 \quad (a)$$

$$2y^2 + 4y - x^2 + 10x - 25 = 0 \quad (b)$$

(a) حل

$$4x^2 - y^2 - 8y - 32 = 0$$

$$-y^2 - 8y + 4x^2 - 32 = 0 \quad / \cdot (-1)$$

$$y^2 + 8y - 4x^2 + 32 = 0$$

$$y^2 + 8y + 16 - 16 - 4x^2 + 32 = 0$$

$$(y+4)^2 - 4x^2 + 16 = 0$$

$$(y+4)^2 - 4x^2 = -16 \quad / \div (-16)$$

$$\boxed{\frac{x^2}{4} - \frac{(y+4)^2}{16} = 1}$$

حل b

$$2y^2 + 4y - x^2 + 10x - 25 = 0$$

$$2(y^2 + 2y) - (x^2 - 10x) - 25 = 0$$

$$2(y^2 + 2y + 1 - 1) - (x^2 - 10x + 25 - 25) - 25 = 0$$

$$2(y+1)^2 - 2 - (x-5)^2 + 25 - 25 = 0$$

$$2(y+1)^2 - (x-5)^2 - 2 = 0$$

$$2(y+1)^2 - (x-5)^2 = 2 \quad / \div 2$$

$$\boxed{\frac{(y+1)^2}{2} - \frac{(x-5)^2}{2} = 1}$$

22: د هغې هایپربولې معادله پیدا کړئ چې  $(-4,0)$  او  $(4,0)$  د راسونو مختصات او  $y = \pm \frac{5}{4}x$  د مجانبونو معادلې وي.

حل پوهېږو چې د مجانبونو عمومي معادله  $y = \pm \frac{b}{a}x$  ده، هغه وخت چې د هایپربولې متقاطع محور د  $x$  له محور سره موازي وي.

$$y = \pm \frac{b}{a}x = \pm \frac{5}{4}x \Rightarrow a = 4, \quad b = 5$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{یا} \quad \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$$

23: د هغې هایپربولې معادله پیدا کړئ چې  $(-1,3)$ ،  $(1,3)$  د راسونو مختصات او محراقي اوږدوالی یې 4 واحد وي.

حل:

$$h = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1-1}{2} = 0, \quad k = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{3+3}{2} = 3$$

د هایپربولې مرکز  $(h, k) = (0, 3)$

$$|FF'| = 2c = 4 \Rightarrow c = 2$$

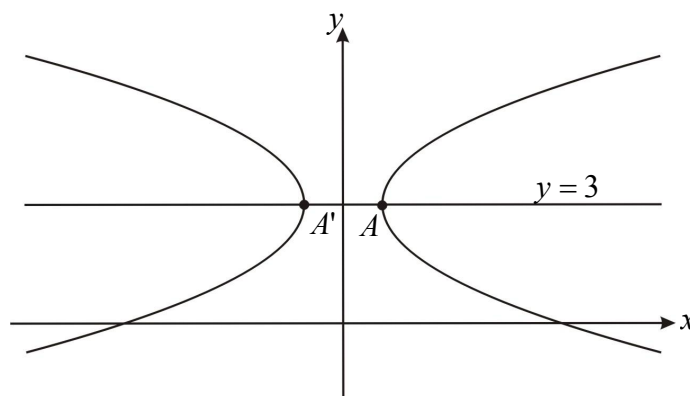
$$|AA'| = \sqrt{(1+1)^2 + (3-3)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(2)^2} = 2a \Rightarrow a = 1$$

$$b^2 = c^2 - a^2 = 4 - 1 = 3 \Rightarrow b = \pm\sqrt{3}$$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$$\boxed{x^2 - \frac{(y-3)^2}{3} = 1}$$



24: د  $y = 2x$  مستقیم خط د  $\frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$  هایپربولاه په څو نقطو کې قطع کوي؟

حل:

$$\frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1 \quad / \cdot (36)$$

$$9(x+1)^2 - 4(y-2)^2 = 36 \Rightarrow 9(x^2 + 2x + 1) - 4(y^2 - 4y + 4) = 36$$

$$9x^2 + 18x + 9 - 4y^2 + 16y - 16 = 36$$

$$9x^2 + 18x + 9 - 4(2x)^2 + 16(2x) - 16 = 36$$

$$9x^2 + 18x + 9 - 16x^2 + 32x - 16 = 36$$

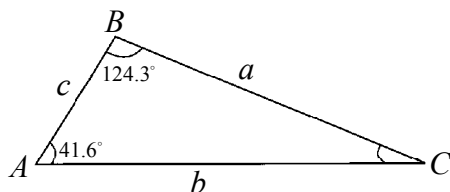
$$-7x^2 + 50x - 7 = 36 \Rightarrow -7x^2 + 50x - 43 = 0 \quad / \cdot (-1)$$

$$7x^2 - 50x + 43 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 2500 - 4 \cdot 7 \cdot 43, \quad \Delta = 2500 - 1204 = 1296$$

$$\Delta = 1296 > 0$$

څرنګه چې  $\Delta > 0$  ده؛ نو  $y = 2x$  خط هایپربولاه په دوو نقطو کې قطع کوي.



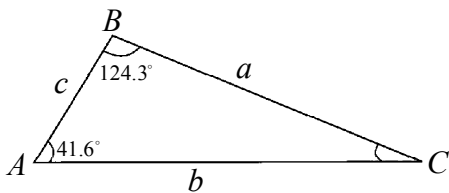
## دویم څپرکی: مثلثات

د ساین قانون (Law of sine)

د درسي کتاب (49) مخ

د لوست وخت: (یو درسي ساعت)

<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>پوهنيزه</li> <li>مهاري</li> <li>ذهنيتي</li> </ul> <p>زده کوونکي به د لوست په پای کې وتوانېږي چې:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>د یوې زاوېې د ساین د قانون په مفهوم پوه شي.</li> <li>د دوو ضلعو او یوې زاوېې او یا د دوو زاویو او یوې ضلع د لرلو په صورت کې د مثلث نورې اجزاوې پیدا کړای شي.</li> <li>په هر مثلث کې د ساین قانون ثبوت کړای شي.</li> <li>د پورته پوهې او مهارت په لرلو سره په خپل ځان ډاډمن شي.</li> </ul>	
<p>2- د زده کړې لارې:</p> <p>پوښتنه او ځواب، انفرادي او ډله ییز کار</p>	
<p>3- مرستندویه مواد:</p> <p>د هر لوست اړونده د شکلونو چارټونه په داسې رنگ چې ولیدل شي، د وروډي پوښتنې چارټ</p>	
<p>4- د وروډي برخې توضیح (5 دقیقې)</p> <p>بناغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته د وروډي پوښتنې چارټ د ټولګي په مخ کې وځړوي او وروډي پوښتنه له زده کوونکو څخه وپوښتي چې د هغه د حل په اړه فکر وکړي. په هغه صورت کې چې زده کوونکي ونشي کولای پوښتنې ته ځواب ورکړي، د فعالیت د اجرا او د ساین د قضیې له ثبوتولو څخه وروسته وروډي پوښتنه حل کړي.</p>	
<p>5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې):</p> <p>بناغلی ښوونکی دې زده کوونکي په مناسبو ډلو ووېشي، تر څو د کتاب 49 مخ فعالیت سرته ورسوي. د فعالیت په پای کې د یوې ډلې استازی دې خپل ډله ییز فعالیت نورو زده کوونکو ته توضیح کړي.</p> <p>د زده کوونکو د تېروتنې په صورت کې ښوونکی دې د کتاب 49 مخ له دویم چارټ څخه په کار اخیستنې سره د ساین قانون زده کوونکو ته په پوره برخه ورکولو سره ثبوت کړي.</p>	
<p>6- د زده کړې تحکیم: (7 دقیقې)</p> <p>ښوونکی دې لوست ته د لاینه تحکیم لپاره د کتاب 51 مخ لومړی مثال د پوښتنې او ځواب په توګه حل کړي. (د کتاب د نوموړي مخ د مثلث د شکل چارټ دې د ټولګي په مخ کې وځړوي.)</p>	
<p>7- د لوست د پایلې ارزونه: (5 دقیقې)</p> <p>بناغلی ښوونکی ددې لپاره چې ډاډمن شي، ایا زده کوونکو لوست ښه زده کړی دی او که نه؟ له هغوی څخه په لاندې ډول وپوښتي:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>له یوه زده کوونکي څخه دې پوښتنه وشي چې د ساین قضیه کومه موضوع بیانوي او فورمول دې ولیکي؟</li> <li>بل زده کوونکی دې راوغواړي، تر څو د <math>\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}</math> تناسب له مخې د <math>b</math> ضلعې اوږدوالی پیدا کړي.</li> </ol>	



## دویم څپرکی: مثلثات

د ساین د قضیې ثبوت په منفرج الزاویه مثلث کې

د درسي کتاب (50) مخ

د لوست وخت: (یو درسي ساعت)

<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- پوهنیزه</li> <li>- مهارتي</li> <li>- ذهنيتي</li> </ul> <p>زده کوونکي به د لوست په پای کې وتوانېږي چې:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• په منفرج الزاویه مثلث کې د ساین د قانون پر مفهوم پوه شي.</li> <li>• د دوو ضلعو او یوې زاویې او یا یوې ضلعې او دوو زاویو په لرلو سره د مثلث نورې اجزاوې پیدا کړي.</li> <li>• په ټولنه کې له دې موضوع سره د مخامخ کېدو په صورت کې ستونزه حل کړای شي.</li> <li>• د پورته پوهې او مهارت په لاس ته راوړلو سره د ریاضي له پوهې سره علاقه پیدا کړي.</li> </ul>	
<p>2- د زده کړې لارې:</p> <p>پوښتنه او ځواب، انفرادي او ډله ییز کار</p>	
<p>3- مرستندویه مواد:</p> <p>د کتاب د 50 او 52 مخونو چارټونه</p>	
<p>4- د وړو دي برخې توضیح (5 دقیقې)</p> <p>بناغلی بنوونکي دې د لومړنیو فعالیتونو له سرته رسولو څخه وروسته د منفرج الزاویه مثلث چارټ د ټولګي په مخ کې وڅړوي او له زده کوونکو څخه دې پوښتنه وکړي چې لیا کولای شی د ساین قضیه په منفرج الزاویه ملث کې ثبوت کړی.</p> <p>بنوونکي دې زده کوونکو ته د فکر کولو وخت ورکړي او زده کوونکي دې ځواب ووايي.</p>	
<p>5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې):</p> <p>بناغلی بنوونکي: په هغه صورت کې چې زده کوونکي سم ځواب ونشي ویلای، د 50 مخ د شکل چارټ د ټولګي په مخ کې وڅړوي او په لنډ ډول د <math>a</math> او <math>b</math> په غزېدلو ضلعو باندې په ترتیب سره د <math>\overline{AD}</math> او <math>\overline{CE}</math> ارتفاعګانې رسم او د چارټ په مخ کې ونیست، وروسته د پوښتنې او ځواب په طریقه (د زده کوونکو په ګډون) د ساین رابطه چې له</p> $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$ <p>څخه عبارت ده په لاس راوړی.</p> <p>بنوونکي دې د کتاب د 52 مخ د شکل چارټ د ټولګي په مخ کې وڅړوي.</p> <p>بنوونکي دې له یوه زده کوونکي څخه وغواړي چې د نوموړي مخ دویم مثال پر تخته حل کړي، په عین وخت کې دې دغه مثال نورو زده کوونکو ته هم ورکړي چې په انفرادي ډول (د کتاب د حل له لیدو پرته) په خپلو کتابچو کې حل کړي. په پای کې تختې ته ولاړ زده کوونکي دې خپل حل نورو زده کوونکو ته واضح کړي، که چیرې دده په حل کې تېروتنه ولیدل شي، بل زده کوونکي دې راوغواړي، ترڅو د هغه تېروتنه رفع کړي.</p> <p>بنوونکي دې د فعالیت په ترڅ کې زده کوونکي وڅاري چې له کتاب څخه کار وانخلي.</p>	



**6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې**

بناغلی ښوونکی دې د لوست د ښه تحکیم لپاره د کتاب 52 مخ دویم چارټ د ټولګي په مخکې وځړوي او زده‌کوونکي دې په مناسبو ډلو ووېشي. چې د نوموړي مخ دریم مثال یو د بل سره په مشوره حل کړي (ښوونکی دې د هغو زاویو ساین چې زده‌کوونکي ورته اړتیا ولري ووايي).  
ښوونکی دې زده‌کوونکو ته اجازه ورنه کړي چې د فعالیت د اجرا په ترڅ کې کومه ډله له کتاب څخه کار واخلي.

**7- د لوست د پایلي ارزونه: (5) دقیقې**

بناغلی ښوونکی ددې لپاره چې ډاډمن شي، ایا زده‌کوونکو لوست ښه زده کړی دی او که نه؟ له هغوی څخه په لاندې ډول وپوښتی:

- ایا په قائم‌الزاویه، حاده‌الزاویه او منفرج‌الزاویه مثلثونو کې د یوه مثلث د زاویو او ضلعو ترمنځ اړیکه توپیر لري او که نه؟ هغه اړیکه ولیکئ؟
- په یوه متساوي‌الساقین قائم‌الزاویه مثلث کې، که چیرې یوه ضلع یې  $10\text{cm}$  او د دویمو لوري، د مثلث زاویې او ضلعي حساب کړئ؟

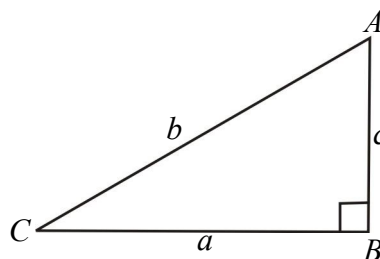
**8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات:**

د ساین د قانون ثبوت په قائم‌الزاویه مثلث کې:

$$\sin A = \frac{a}{b} \Rightarrow b = \frac{a}{\sin A} \dots (1)$$

$$\sin C = \frac{c}{b} \Rightarrow b = \frac{c}{\sin C} \dots (2)$$

$$\sin B = \frac{b}{b} \Rightarrow b = \frac{b}{\sin B} \dots (3)$$



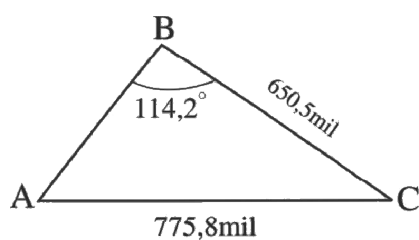
د (1)، (2) او (3) اړیکو له پرتله کولو څخه لرو چې:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

**9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:**

- که چیرې د یوه مثلث د ضلعو او د دویمو لوري  $a = 8$ ,  $b = 5$ , او  $c = 10$  واحد وي، د  $B$  د زاویې اندازه پیدا کړئ.  
**حل:** پورتنی پوښتنه د ساین له قانون څخه په کار اخیستنې نه حل کېږي. ولې دغه پوښتنه د کوساین له قانون څخه په کار اخیستلو سره حلېږي، چې تراوسه زده‌کوونکو نه دی لوستی. یوازې دغه پوښتنه د زده‌کوونکو د ارزونې لپاره په پام کې نیول شوې ده، چې ایا زده‌کوونکي موضوع ته متوجه کېږي او که نه؟

2. لاندې شکل په پام کې ونیسئ د  $A$  او  $B$  د ښارونو ترمنځ واټن پیدا کړئ؟



**حل:** د ساين د قانون په پام کې نيولو سره لرو:

$$a = 650.5 \text{ mil}$$

$$b = 775.3 \text{ mil}$$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

$$\sin A = \frac{a \sin B}{b} = \frac{650.5 \cdot \sin 114.2^\circ}{775.8} = \frac{650.5 \cdot 0.9121}{775.8} = \frac{593.33}{775.8} = 0.765$$

$$A = \arcsin 0.764 = 49.9^\circ$$

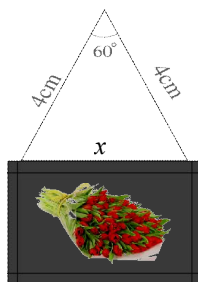
$$\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = 180^\circ - (49.8 + 114.2) = 180^\circ - 164^\circ = 16^\circ$$

$$\hat{C} = 16^\circ$$

$$c = \overline{AB} = \frac{b \sin C}{\sin B} = \frac{775.8 \cdot \sin 16^\circ}{\sin 114.2^\circ} = \frac{775.8 \cdot 0.27}{0.9121}$$

$$c = \overline{AB} = \frac{209.46}{0.9121} = 229.6 \text{ mil}$$

$$c = 229.6 \text{ mil}$$



## دویم څپرکی: مثلثات

د کوساین قانون (Law of cosine)

د درسي کتاب (55) مخ

د لوست وخت: (یو درسي ساعت)

<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>پوهنیزه</li> <li>مهارتي</li> <li>ذهنيتي</li> </ul> <p>زده کوونکي به د لوست په پای کې وتوانېږي چې:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>د کوساین قانون او دهغه په فورمول پوه شي.</li> <li>د یوې زاوې او دوو مجاورو ضلعو په لرلو سره د مثلث دریمه ضلع پیدا کړي، همدارنگه د مثلث د دوو مجاورو ضلعو په لرلو سره د هغو ضلعو ترمنځ زاویه پیدا کړي.</li> </ul>	
<p>2- د زده کړې لارې:</p> <p>پوښتنه او ځواب، انفرادي او ډله ییز کار</p>	
<p>3- مرستندویه مواد:</p> <p>د وروډي پوښتنې د شکل چارټ او د کتاب 55، 57 او 58 مخونو د شکلونو چارټونه</p>	
<p>4- د وروډي برخې</p> <p>توضیح (5 دقیقې)</p> <p>بناغلی ښوونکی د لومړنیو فعالیتونو له سرته رسولو څخه وروسته د وروډي پوښتنې چارټ د ټولګي په مخکې وځړوی او وروډي پوښتنه وپوښتی، ترڅو زده کوونکي دهغه په اړه فکر وکړي او خپل نظر ووايي که چیرې د حل لاره پیدا نشي کړای. د فعالیت د سرته رسولو په پایله کې به وکولای شي چې حل یې کړي.</p>	
<p>5- د لوست بهیر او فعالیت (28) دقیقې:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>بناغلی ښوونکی د کتاب 55 مخ دویم چارټ د ټولګي په مخکې وځړوی.</li> <li>زده کوونکي په مناسبو ډلو و وېشي چې فعالیت د یو بل په مشوره سرته ورسوي.</li> <li>د ډلو د فعالیت د اجرا کولو د بهیر څارنه وکړی، فعالې ډلې تشویق او له ضعیفو ډلو سره مرسته او لارښوونه وکړی.</li> <li>د فعالیت په پای کې دې د یوې ډلې استازی خپل فعالیت نورو زده کوونکو ته د تختې پر مخ توضیح کړي. که چیرې توضیح یې سمه او فعالیت یې صحیح سرته رسولی وي، نورې ډلې دې خپلې تېروتنې اصلاح کړي.</li> <li>د کتاب 57 مخ لومړی مثال د پوښتنې او ځواب په طریقه د زده کوونکو په واسطه حل کړی.</li> <li>یوه زده کوونکي ته دنده ورکړی چې د درسي کتاب 57 مخ دویم مثال پر تخته حل کړي. په عین وخت کې دغه مثال نورو زده کوونکو ته ورکړی چې په خپلو کتابچو کې یې حل کړي. (له کتاب څخه کار وانه خلي). په پای کې تختې ته ولاړ زده کوونکی دې خپل فعالیت نورو ته توضیح کړي، که چیرې سم حل شوی وي، نور زده کوونکي دې خپلې تېروتنې اصلاح کړي.</li> </ul>	
<p>6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې</p> <p>بناغلی ښوونکی لوست ته د لابنه تحکیم لپاره د کتاب 57 مخ دریم مثال د پوښتنې او ځواب پر طریقه په زده کوونکو باندې حل کړی.</p>	

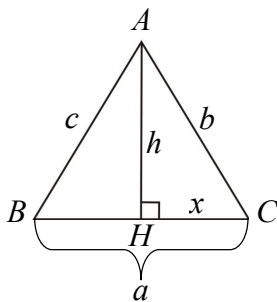
## 7- د لوست د پایلي ارزونه: (5) دقیقې

بناغلی بنوونکی ددې لپاره چې ډاډمن شي، ایا زده‌کوونکو لوست بڼه زده‌کړې دی او که نه؟ له هغوی څخه په لاندې ډول وپوښتئ:

1. یوه زده‌کوونکي ته دنده ورکړئ چې څلورم مثال پر تخته حل کړي.
2. له یوه زده‌کوونکي څخه وغواړئ ترڅو د کوساین قضیه بیان کړي.

## 8- د بنوونکي لپاره اضافي معلومات:

د کتاب د 56 مخ د فعالیت اړونده رابطو ثبوت: د  $AHC$  په قایم‌الزاویه مثلث کې لرو:



$$\overline{AH}^2 = h^2 = \overline{AC}^2 - \overline{HC}^2 = b^2 - x^2$$

همدارنگه په نوموړي مثلث کې:

$$c^2 = \overline{BH}^2 + \overline{AH}^2$$

$$\overline{BH} = a - x$$

نو:

$$c^2 = (a - x)^2 + h^2$$

$$c^2 = (a - x)^2 + b^2 - x^2$$

$$c^2 = a^2 - 2ax + x^2 + b^2 - x^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ax$$

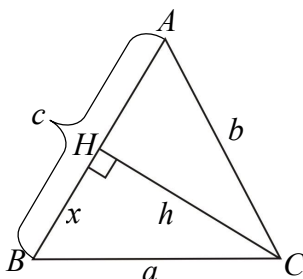
د  $AHC$  په مثلث کې:

$$\cos C = \frac{x}{b} \Rightarrow x = b \cos C$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cos C$$

$$2ab \cos C = a^2 + b^2 - c^2$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$



اوس غواړو چې  $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$  رابطه په لاس راوړو.

$$h^2 = a^2 - x^2 \text{ په مثلث کې لرو چې:}$$

له بلې خوا د  $AHC$  په مثلث کې لرو:

$$b^2 = h^2 + (c - x)^2$$

$$b^2 = h^2 + c^2 - 2cx + x^2$$

په پورتني رابطه کې یې د  $h$  پر ځای قیمت وضع کوو:

$$b^2 = a^2 - x^2 + c^2 - 2cx + x^2$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2cx$$

د BHC په مثلث کې:

$$\cos B = \frac{x}{a} \Rightarrow x = a \cos B$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$-2ac \cos B = b^2 - a^2 - c^2$$

$$2ac \cos B = a^2 + c^2 - b^2$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

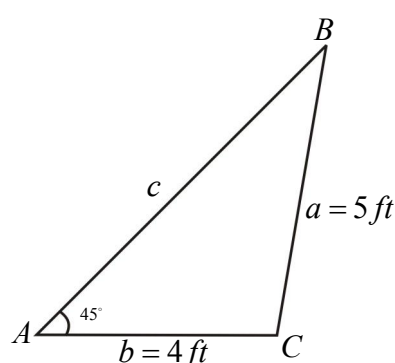
1. که چیرې د ABC په مثلث کې  $b = 4 \text{ ft}$ ,  $a = 5 \text{ ft}$  او  $A = 45^\circ$  وي، د مثلث نامعلومې ضلعې او زاوې پیدا کړئ.

حل:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} \Rightarrow \sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{4 \cdot \sin 45^\circ}{5}$$

$$\sin B = \frac{4 \cdot 0.707}{5} = \frac{2.828}{5} = 0.565$$

$$\hat{B} = \sin^{-1} 0.565 \Rightarrow \hat{B} = 34.4^\circ$$



$$\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = 180^\circ - (45^\circ + 34.4^\circ) = 180^\circ - 79.4^\circ = 100.6^\circ \Rightarrow \hat{C} = 100.6^\circ$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = 25 + 16 - 2 \cdot 5 \cdot 4 \cos 100.6^\circ$$

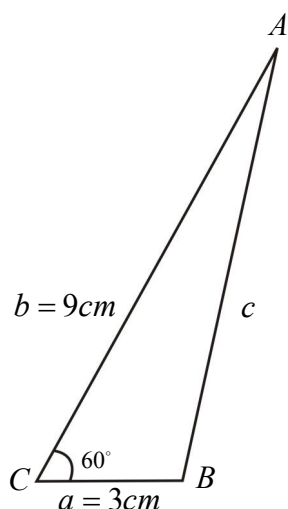
$$c^2 = 41 - 40(-0.1839) = 41 + 7.356 = 48.356$$

$$c = 6.953 \text{ ft}$$

2. که چیرې په یوه مثلث کې  $a = 3 \text{ cm}$  او  $b = 9 \text{ cm}$  او د دوی ترمنځ زاویه  $60^\circ$  وي، د c ضلعې اوږدوالی پیدا کړئ؟

کړئ؟

حل:



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

$$c^2 = 9 + 81 - 2 \cdot 3 \cdot 9 \cos 60^\circ$$

$$c^2 = 90 - 54 \cdot \frac{1}{2} = 90 - 27 = 63$$

$$c = 7.93 \text{ cm}$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan \frac{A+B}{2}}{\tan \frac{A-B}{2}}$$

## دویم څپرکی: مثلثات

د تانجنټ قانون (Law of tangent)

د درسي کتاب (59) مخ

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- پوهنيزه</li> <li>- مهارتي</li> <li>- ذهني</li> </ul> <p>زده کوونکي به د لوست په پای کې وتوانېږي چې:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• د تانجنټ په قانون پوه شي.</li> <li>• له نوموړي قانون څخه په کار اخېستنې سره نامعلومې زاويې او نامعلومې ضلعي پيدا کړای شي.</li> <li>• له پورته پوهې او مهارت څخه خوښي ښکاره کړي او د رياضي له زده کړې سره علاقمند شي.</li> </ul>	
<p>2- د زده کړې لارې:</p> <p>پوښتنه او ځواب، انفرادي او ډله ییز کار</p>	
<p>3- مرستندويه مواد:</p> <p>د وروډي پوښتنې اړوند د تانجنټ د فورمول چارټ</p>	
<p>4- د وروډي برخې</p> <p>توضیح (5 دقیقې)</p> <p>ښاغلی ښوونکی د لومړنيو فعالیتونو له سرته رسولو څخه وروسته هغه چارټ چې د</p> $\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan \frac{A+B}{2}}{\tan \frac{A-B}{2}}$ <p>فورمول په کې لیکل شوی دی، د ټولګي په مخکې وڅړوی او وروډي</p> <p>پوښتنه له زده کوونکو څخه وپوښتی چې د هغې په اړه خپل نظرونه ووايي. په هغه صورت کې چې سم ځواب ونشي ویلای، په لنډه توګه ورته ووايېست، د لوست بهیر په لاندې ډول پیل کړی.</p>	
<p>5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې):</p> <p>ښاغلی ښوونکی زده کوونکي په مناسبو ډلو ووېشي، چې د کتاب 59 مخ فعالیت د یو بل سره په مشوره سرته ورسوي، د زده کوونکو د ډله ییز فعالیت له اجرا کولو څخه څارنه وکړي. فعالې ډلې تشویق او ضعیفو ډلو ته لارښوونه وکړي.</p> <p>ښاغلی ښوونکی تاسې باید د تانجنټ قانون ثبوت مخکې له مخکې لوستی وي، ترڅو وکولای شئ د زده کوونکو له ډلو سره مرسته وکړئ. البته د فعالیت له سرته رسولو څخه وروسته زده کوونکي د تانجنټ قانون هم په ډلو کې ثبوتوي، چې له دې قانون څخه په کار اخېستنې سره کولای شو د یو مثلث نامعلومې ضلعي او یا نامعلومې زاويې پيدا کړو.</p> <p>باید په پام کې ولری چې د پورتنی فعالیت د سرته رسولو پراوونه دې د یوې ډلې د استازي په مرسته پر تخته توضیح شي او ښوونکی دې مرسته ورسره وکړي.</p> <p>ښاغلی ښوونکی د کتاب 60 مخ لومړی مثال د پوښتنې او ځواب په طریقه پر یوه زده کوونکي باندې حل کړی.</p>	

### 6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

ښاغلی ښوونکی تې لوست ته د تحکیم ورکولو لپاره د ضرب او تحویل رابطې یعنی  
 $\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2}$  او  $\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cdot \sin \frac{A-B}{2}$  د زده کونکو په واسطه  
 پر تخته کار وکړي.

### 7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ښاغلی ښوونکی ددې لپاره چې ډاډمن شي، چې ایا زده کونکو لوست زده کړې دی او که نه؟ له زده کونکو څخه لاندې  
 پوښتنې وپوښتي:

1. څوک د تانجنټ قانون ویلای شي؟
2. که چېرې  $A = 60^\circ$ ,  $B = 30^\circ$  او د مثلث یوه ضلع  $b = 5\text{cm}$  وي، له تانجنټ د قانون څخه په کار اخیستنې سره د  
 نوموړي مثلث  $a$  ضلع پیدا کړئ؟

### 8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات:

د کتاب د 60 مخ فعالیت اړوندو رابطو ثبوت:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B} = D$$

$$\frac{a}{\sin A} = D \Rightarrow a = D \sin A \dots 1$$

$$\frac{c}{\sin C} = D \Rightarrow c = D \sin C \dots 2$$

د 1 او 2 رابطې یو ځلې خوا په خوا جمع او بیا تفریق کوو:

$$c + a = D \sin C + D \sin A = D(\sin C + \sin A) \dots 3$$

$$c - a = D \sin C - D \sin A = D(\sin C - \sin A) \dots 4$$

دریمه اړیکه پر څلورمې اړیکې باندې وپشو:

$$\frac{c+a}{c-a} = \frac{D(\sin C + \sin A)}{D(\sin C - \sin A)} = \frac{\sin C + \sin A}{\sin C - \sin A} \dots 5$$

د ضرب او تحویل له فورمول څخه د  $\sin C + \sin A$ ,  $\sin C - \sin A$  قیمتونو په 5 اړیکه کې وضع کوو.

$$\frac{c+a}{c-a} = \frac{2 \sin \frac{C+A}{2} \cdot \cos \frac{C-A}{2}}{2 \cos \frac{C+A}{2} \cdot \sin \frac{C-A}{2}} = \frac{\sin \frac{C+A}{2}}{\cos \frac{C+A}{2}} \cdot \frac{\cos \frac{C-A}{2}}{\sin \frac{C-A}{2}}$$

$$\frac{c+a}{c-a} = \tan \frac{C+A}{2} \cdot \cot \frac{C-A}{2}$$

$$\frac{c+a}{c-a} = \frac{\tan \frac{C+A}{2}}{\tan \frac{C-A}{2}}$$

$$\text{څرنگه چې } \cot \frac{C-A}{2} = \frac{1}{\tan \frac{C-A}{2}} \text{ دی؛ نو:}$$

اوس  $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = D$  وضع کرو لرو چہ:

$$b = D \sin B \dots 1$$

$$c = D \sin C \dots 2$$

$$b + c = D \sin B + D \sin C = D(\sin B + \sin C) \dots 3$$

$$b - c = D \sin B - D \sin C = D(\sin B - \sin C) \dots 4$$

$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{D(\sin B + \sin C)}{D(\sin B - \sin C)} = \frac{2 \sin \frac{B+C}{2} \cdot \cos \frac{B-C}{2}}{2 \cos \frac{B+C}{2} \cdot \sin \frac{B-C}{2}} = \frac{\sin \frac{B+C}{2} \cdot \cos \frac{B-C}{2}}{\cos \frac{B+C}{2} \cdot \sin \frac{B-C}{2}}$$

$$\frac{b+c}{b-c} = \tan \frac{B+C}{2} \cdot \cot \frac{B-C}{2} = \frac{\tan \frac{B+C}{2}}{\tan \frac{B-C}{2}} \Rightarrow \frac{b+c}{b-c} = \frac{\tan \frac{B+C}{2}}{\tan \frac{B-C}{2}}$$



$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan \frac{A+B}{2}}{\tan \frac{A-B}{2}}$$

## دویم څپرکی: مثلثات

د تانجنټ قانون (دویم مثال)

د درسي کتاب (63) مخ

د لوست وخت: (یو درسي ساعت)

<p>زده کوونکي به د لوست په پای کې و توانېږي چې:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• د تانجنټ له قانون څخه په کار اخیستنې سره د یو مثلث ضلعې او زاوېې پیدا کړای شي.</li> </ul>	<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- پوهنیزه</li> <li>- مهارتي</li> <li>- ذهنيتي</li> </ul>
<p>پوښتنه او ځواب، انفرادي او ډله‌ییز کار</p>	<p>2- د زده کړې لارې:</p>
	<p>3- مرستندويه مواد:</p>
	<p>4- د وړودي برخې توضیح (5 دقیقې)</p>
<p>5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې):</p> <p>ښاغلی ښوونکی د سوال او ځواب په طریقه د کتاب د 61 مخ دویم مثال په ټولګي کې کار وکړی. د وخت د لرلو په صورت کې د کتاب 62 مخ د پوښتنو <math>a</math> جزء یوه زده‌کوونکي ته ورکړی چې پر تخته یې حل کړي. په عین وخت کې دغه پوښتنه نورو زده‌کوونکو ته هم ورکړی چې په خپلو کتابچو کې یې حل کړي. په پای کې تخته ته ولاړ زده‌کوونکی دې خپل حل نورو زده‌کوونکو ته توضیح کړي، د تېروتنې په صورت کې دې ښوونکی مرسته ورسره وکړي. هغو زده‌کوونکو چې فعالیت یې په خپلو کتابچو کې سرته رسولې دي، خپل فعالیت دې د تخته له حل سره پرتله کړي د اړتیا په صورت کې دې په خپل فعالیت کې لازم اصلاحات راوړي.</p>	
<p>8- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:</p> <p>د لاندې ورکړل شوو عناصرو له مخې د مثلث نامعلومې اجزاوې پیدا کړئ:</p> <p>(a) که چېرې <math>\hat{C} = 75^\circ</math>, <math>\hat{B} = 60^\circ</math>, <math>a = 35\text{ft}</math> وي.</p> <p>(b) که چېرې <math>\hat{\alpha} = 45^\circ</math>, <math>b = 37\text{m}</math> او <math>\hat{\gamma} = 75^\circ</math> وي.</p> <p>حل (a)</p> $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ $\hat{A} = 180^\circ - (\hat{B} + \hat{C}) = 180^\circ - (60^\circ + 75^\circ)$ $\hat{A} = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$	

د تانجنټ له قانون څخه په کار اخیستنې سره لرو:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan \frac{\hat{A} + \hat{B}}{2}}{\tan \frac{\hat{A} - \hat{B}}{2}} = \frac{35+b}{35-b} = \frac{\tan \frac{45^\circ + 60^\circ}{2}}{\tan \frac{45^\circ - 60^\circ}{2}} = \frac{\tan 52.5}{\tan(-7.5)} = \frac{1.303}{-0.131} = -9.946$$

$$\frac{35+b}{35-b} = -9.946 \Rightarrow 35+b = -9.946(35-b)$$

$$35+b = -348.11 + 9.946b$$

$$b - 9.946b = -348.11 - 35$$

$$-8.946b = -383.11$$

$$b = \frac{-383.11}{-8.946} = 42.82$$

$$\boxed{b = 42.82 \text{ ft}}$$

$$\frac{c+a}{c-a} = \frac{\tan \frac{C+A}{2}}{\tan \frac{C-A}{2}}$$

$$\frac{c+35}{c-35} = \frac{\tan \frac{75^\circ + 45^\circ}{2}}{\tan \frac{75^\circ - 45^\circ}{2}} = \frac{\tan 60^\circ}{\tan 15^\circ} = \frac{1.732}{0.267} = 6.486$$

$$c+35 = 6.486(c-35) = 6.486c - 227.01$$

$$c - 6.486c = -227.01 - 35 \Rightarrow -5.486c = -262.01 \Rightarrow c = \frac{-262.01}{-5.486} \Rightarrow \boxed{c = 47.76 \text{ ft}}$$

حل b

$$\alpha = 45^\circ, \quad a = ?$$

$$\gamma = 75^\circ, \quad b = ?$$

$$\beta = ?$$

$$b = 37m$$

$$\beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma)$$

$$\beta = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

$$\boxed{\beta = 60^\circ}$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan \frac{\alpha + \beta}{2}}{\tan \frac{\alpha - \beta}{2}} \Rightarrow \frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan \frac{45^\circ + 60^\circ}{2}}{\tan \frac{45^\circ - 60^\circ}{2}} = \frac{\tan 52.5}{\tan(-7.5)}$$

$$\frac{a+37}{a-37} = \frac{1.303}{-0.131} = -9.946$$

$$a+37 = -9.946(a-37)$$

$$a+37 = -9.946a + 368.002$$

$$a+9.946a = 368.002 - 37 = 331.002$$

$$10.946a = 331.002$$

$$a = \frac{331.022}{10.946} = 30.24$$

$$a = 30.24m$$

$$\frac{c+a}{c-a} = \frac{\tan \frac{\gamma+\alpha}{2}}{\tan \frac{\gamma-\alpha}{2}}$$

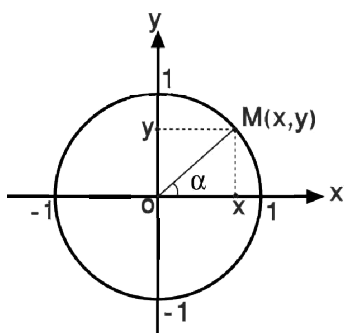
$$\frac{c+30.24}{c-30.24} = \frac{\tan \frac{75+45}{2}}{\tan \frac{75-45}{2}} = \frac{\tan 60^\circ}{\tan 15^\circ} = \frac{1.739}{0.267} = 6.513$$

$$c+30.24 = 6.486(c-30.24) = 6.486c - 196.136$$

$$c - 6.486c = -196.136 - 30.24 \Rightarrow -5.486c = -226.376$$

$$c = \frac{-226.376}{-5.486} = 41.26$$

$$c = 41.26m$$



## دویم څپرکی: مثلثات

مثلثاتي مطابقونه

د درسي کتاب (63) مخ

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• د پوهنيزه</li> <li>• مهارتي</li> <li>• ذهني</li> </ul> <p>زده کوونکي به د لوست په پای کې وتوانېږي چې:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• د مثلثاتي مطابقت په مفهوم پوه شي.</li> <li>• د مثلثاتي مطابقتونو او مثلثاتي معادلو توپير وکړای شي.</li> <li>• د پورته پوهې او مهارت په لرلو سره د خوښی احساس وکړي.</li> </ul>	
<p>2- د زده کړې لارې:</p> <p>پوښتنه او ځواب، انفرادي او ډله‌ييز کار</p>	
<p>3- مرستندويه مواد:</p> <p>د وروډي پوښتنې د شکل چارټ او د کتاب 64 مخ چارټ</p>	
<p>4- د وروډي برخې</p> <p>توضیح (5 دقيقې)</p> <p>ښاغلی ښوونکی دې د لومړنيو فعالیتونو له سرته رسولو څخه وروسته وروډي پوښتنه چې</p> <p>ایا <math>\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1</math> یو مطابقت دی او که نه؟ له زده‌کوونکو څخه وپوښتي، ترڅو د هغه په اړه فکر وکړي.</p> <p>وروډي پوښتنه د کتاب 63 مخ د فعالیت له سرته رسولو څخه وروسته حلېږي. ځکه په فعالیت کې ثبوت کېږي چې <math>\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1</math> یو مطابقت دی.</p>	
<p>5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقيقې):</p> <p>ښاغلی ښوونکی زده‌کوونکي په مناسبو ډول وپېښي چې د کتاب 63 مخ فعالیت په ډله‌ييزه توګه سرته ورسوي، ددې فعالیت په سرته رسولو سره به د مطابقت په مفهوم پوه شي.</p> <p>فعالیت داسې سرته رسول کېږي چې که چېرې د <math>\alpha</math> قیمتونو په ترتیب سره د <math>A</math> او <math>B</math> په افادو کې وضع کړو معلوم به شي چې <math>A = B</math> او یا <math>\frac{\cot \alpha}{\csc \alpha - 1} = \frac{\csc \alpha + 1}{\cot \alpha}</math> کېږي، چې دا یو مطابقت دی.</p> <p>ښاغلی ښوونکی د ډله‌ييز کار له سرته رسولو څخه وروسته د یوې ډلې استازی راوغواړي چې خپل فعالیت نورو ته توضیح کړي او تاسې مرسته ورسره وکړئ.</p> <p>ښاغلی ښوونکی دواړه چارټونه د ټولګي په مخ کې وڅړوي او د کتاب 63 مخ په چارټ کې وښایاست چې د مثلثاتي دایري شعاع یو واحد دی.</p> <p>ښاغلی ښوونکی د کتاب 64 مخ له چارټ څخه په کار اخیستنې سره د <math>\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1</math> مطابقت د پوښتنې او ځواب په طریقه په داسې حال کې چې زده‌کوونکي په کې پوره ونډه ولري، ثبوت کړي.</p>	

## 6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

بناغلی بنوونکی لوست ته د لاینه تحکیم لپاره د کتاب 65 مخ  $1 + \cot^2 \alpha = \csc^2 \alpha$  او  $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$  مطابقتونه یوه زده‌کونکي ته ورکړی چې پر تخته یې ثبوت کړي، په عین وخت کې دغه مطابقت نورو زده‌کونکو ته هم ورکړی چې د  $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ ,  $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ ,  $\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$  او  $\csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$  چې اساسي مطابقتونه دي، له دې څخه په کار اخیستنې سره په خپلو کتابچو کې حل کړي.

## 7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

بناغلی بنوونکی د خپل ډاډ لپاره له زده‌کونکو څخه لاندې پوښتنې وپوښتې:

1. مثلثاتي مطابقت څه ډول مثلثاتي افاده ده؟
2. څوک کولای شي چې د  $\beta = 90^\circ$  قیمت لپاره د  $\frac{\cot \beta}{\csc \beta - 1}$  افاده ساده کړي؟

## 8- د بنوونکي لپاره اضافي معلومات:

(د کتاب 65 مخ فعالیت)

$$1 + \cot^2 \alpha = \csc^2 \alpha$$

د  $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$  قیمت په پورتنۍ رابطه کې ردو:

$$\frac{1}{1} + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \csc^2 \alpha \Rightarrow \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \csc^2 \alpha$$

څرنگه چې  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  دی؛ نو:  $\frac{1}{\sin^2 \alpha} = \csc^2 \alpha$

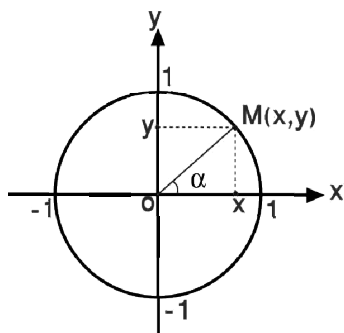
له اساسي مطابقتونو څخه پوهېږو چې د یوې زاوېې کوسیکنټ د هغه زاوېې د سین له معکوس سره مساوي دی، نو:

$$1 + \cot^2 \alpha = \csc^2 \alpha$$

اوس غواړو چې  $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$  رابطه ثبوت کړو:

$$\cot \alpha = \frac{1}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{1}{\sin \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

له اساسي مطابقت څخه پوهېږو چې:  $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ ؛ نو  $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$



## دویم څپرکی: مثلثات

مثلثاتي مطابقونه

د درسي کتاب (65) مخ

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- پوهنيزه</li> <li>- مهارتي</li> <li>- ذهني</li> </ul> <p>زده کوونکي به د لوست په پای کې و توانېږي چې:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• د مثالونو له حل څخه په کار اخېستنې سره له هغو سره ورته پوښتنې حل کړای شي.</li> <li>• د مثلثات له اساسي مطابقونو څخه په کار اخېستنې سره مطابقونه ثبوت او ورکړل شوي افادې ساده کړای شي.</li> </ul>	
<p>2- د زده کړې لارې:</p> <p>پوښتنه او ځواب، انفرادي او ډله‌ييز کار</p>	
<p>3- مرستندويه مواد:</p>	
<p>4- د ورودې برخې توضیح (5 دقيقې)</p> <p>بناغلی ښوونکی د لومړنيو فعاليتونو له سرته رسولو څخه وروسته د لوست بهير داسې پيل کړی او زده‌کوونکو ته ووايست چې ددې عنوان د فعاليت په اړه په تېر لوست کې درته لارښوونه شوې ده.</p>	
<p>5- د لوست بهير او فعاليت (28 دقيقې):</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• بناغلی ښوونکی د کتاب 65 مخ لومړی مثال د پوښتنې او ځواب په طريقه په ټولگي کې حل کړی.</li> <li>• د کتاب د 65 مخ دویم مثال يوه زده‌کوونکي ته ورکړی چې د ټولگي پر تخته يې حل کړي. په عين وخت کې نور زده‌کوونکي دې دغه مثال په داسې حال کې په کتابچو کې حل کړي چې کتابونه خلاص نه کړي. د لوست په پای کې تختې ته ولاړ زده‌کوونکی دې خپل فعاليت نور و زده‌کوونکو ته توضیح کړي. که چيرې له کومې ستونزې سره مخامخ شي، بل زده‌کوونکی دې ستونزې پر تخته حل کړي.</li> <li>• دريم مثال د کتاب 66 مخ څلورم مثال د پوښتنې او ځواب په طريقه په ټولگي کې حل کړي.</li> <li>• زده‌کوونکي په مناسبو ډلو و وېشي چې د کتاب د 66 مخ پنځم مثال په ډله‌ييزه توگه د يو بل په مشوره حل کړي. په پای کې د يوې ډلې استازي دې خپل ډله‌ييز کار نور و زده‌کوونکو ته توضیح کړي.</li> </ul>	
<p>6- د زده کړې تحکيم: (7 دقيقې)</p> <p>بناغلی ښوونکی د زده‌کوونکو ترمنځ د مثبت او سالم رقابت د پيدا کولو لپاره زده‌کوونکو ته ووايي، څوک کولای شي چې 6 او 7 مثالونه په داوطلبانه توگه په ټولگي کې حل کړي او نمرې وگټي.</p>	

## دویم څپرکی: مثلثات

مثلثاتي مطابقونه (د 8، 9 او 10 مثالونو حل)

د درسي کتاب (67-68) مخونه

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- پوهنيزه</li> <li>- مهارتي</li> <li>- ذهني</li> </ul> <p>زده کوونکي به د لوست په پای کې وتوانېږي چې:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• د مثلثات له اساسي مطابقونو څخه په کار اخېستني سره مثالونه او پوښتنې حل کړي.</li> </ul>	
<p>2- د زده کړې لارې:</p> <p>پوښتنه او ځواب، انفرادي او ډلېيز کار</p>	
<p>3- مرستندويه مواد:</p>	
<p>4- د وړودي برخې توضیح (5 دقیقې)</p> <p>بناغلی ښوونکی د لومړنيو فعالیتونو له سرته رسولو څخه وروسته په لاندې ډول د مثالونو په حل پیل وکړی.</p>	
<p>5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې):</p> <p>بناغلی ښوونکی زده کوونکي په مناسبو ډلو و وېشي چې د کتاب د 67 مخ د اتم مثال اړونده مطابقت د یو بل په مشوره حل کړي. (د فعالیت په بهیر کې له کتاب څخه استفاده و نه شي)</p> <p>بناغلی ښوونکی د فعالیت په بهیر کې د زده کوونکو له ډلو څخه څارنه او فعالې ډلې تشویق له ضعیفو ډلو سره مرسته وکړی. د ډلېيز کار په پای کې د یوې ډلې استازی راوغوړی چې خپل فعالیت نورو زده کوونکو ته توضیح کړي.</p> <p>بناغلی ښوونکی د کتاب 67 مخ نهم مثال د پوښتنې او ځواب په طریقه په ټولگي کې حل کړی.</p>	
<p>6- د زده کړې تحکیم: (7 دقیقې)</p> <p>بناغلی ښوونکی لوست ته د لاینه تحکیم ورکولو لپاره د کتاب د 68 مخ لسم مثال په ټولگي کې د پوښتنې او ځواب په طریقه حل کړی.</p>	
<p>7- د لوست د پایلې ارزونه: (5 دقیقې)</p> <p>بناغلی ښوونکی د زده کوونکو له زده کړې د ډاډ لپاره له زده کوونکو څخه لاندې پوښتنې وکړی.</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. کومې معادلې ته مثلثاتي مطابقت ویلای شو؟</li> <li>2. څوک کولای شي چې مثلثاتي اساسي مطابقونه پر تخته ولیکي؟</li> </ol>	
<p>8- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. د مثلثاتو د اساسي اړیکو په پام کې نیولو سره د هرې پوښتنې معادل افاده پیدا کړی.</li> </ol> <p>a) <math>\frac{\sin 25^\circ}{\cos 25^\circ}</math>      b) <math>\sqrt{\sec^2 \beta - 1}</math>      c) <math>\frac{1}{\cos 80^\circ}</math></p>	

**حل:**

$$a) \frac{\sin 250^\circ}{\cos 250^\circ} = \tan 250^\circ$$

$$b) \sqrt{\sec^2 \beta - 1} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \beta} - 1} = \sqrt{\frac{1 - \cos^2 \beta}{\cos^2 \beta}} = \sqrt{\frac{\sin^2 \beta}{\cos^2 \beta}} = \sqrt{\tan^2 \beta} = \tan \beta$$

$$c) \frac{1}{\cos 80^\circ} = \sec 80^\circ$$

2. هر افاده د  $\sin \beta$  له جنسه پيدا كړئ.

$$a) \cot \beta \cos \beta \quad , \quad b) \cot^2 \beta$$

**حل:**

$$a) \cot \beta \cos \beta = \frac{\cos \beta}{\sin \beta} \cdot \cos \beta = \frac{\cos^2 \beta}{\sin \beta} = \frac{1 - \sin^2 \beta}{\sin \beta} = \frac{1}{\sin \beta} - \frac{\sin^2 \beta}{\sin \beta} = \frac{1}{\sin \beta} - \sin \beta$$

$$b) \cot^2 \beta = \frac{\cos^2 \beta}{\sin^2 \beta} = \frac{1 - \sin^2 \beta}{\sin^2 \beta} = \frac{1}{\sin^2 \beta} - \frac{\sin^2 \beta}{\sin^2 \beta} = \frac{1}{\sin^2 \beta} - 1$$

3. لاندې مطابقتونه ثبوت كړئ.

$$a) \frac{\csc \alpha}{\cot \alpha + \tan \alpha} = \cos \alpha$$

$$b) \frac{\tan x - \cot x}{\tan x + \cot x} = 1 - 2 \cos^2 x$$

$$c) \frac{\sin \alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha} = \tan \alpha$$

$$d) \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \cos 2x$$

يادونه: په درسي كتاب كې د  $\frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \cos 2x$  مطابقت په  $\frac{1}{\csc \alpha - \tan \alpha} = \csc^2 \alpha + \tan \alpha$  مطابقت بدل شوی دی.**حل:**

$$a) \frac{\csc \alpha}{\cot \alpha + \tan \alpha} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\frac{1}{\sin \alpha}}{\frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha}} = \frac{\frac{1}{\sin \alpha}}{\frac{1}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}} = \frac{1}{\sin \alpha} \cdot \frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{1} = \cos \alpha$$

$$b) \frac{\tan x - \cot x}{\tan x + \cot x} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}} = \frac{\frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\cos x \sin x}}{\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x \sin x}} = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{1}$$

$$\Rightarrow 1 - \cos^2 x - \cos^2 x = 1 - 2 \cos^2 x$$

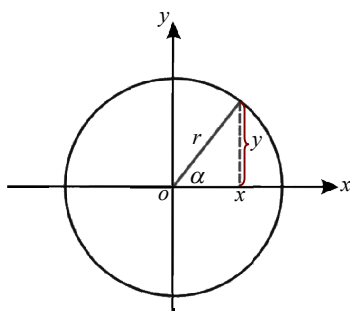
$$c) \frac{\sin \alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha} = \frac{\sin \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha}{1 + \cos \alpha + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \frac{\sin \alpha (1 + 2 \cos \alpha)}{1 + \cos \alpha + \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 1}$$

$$= \frac{\sin \alpha (1 + 2 \cos \alpha)}{\cos \alpha + 2 \cos^2 \alpha} = \frac{\sin \alpha (1 + 2 \cos \alpha)}{\cos \alpha (1 + 2 \cos \alpha)} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$$

$$d) \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \frac{1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{1}$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$$





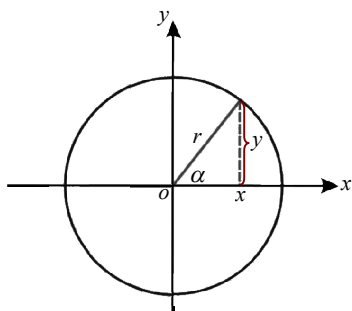
## دویم څپرکی: مثلثات

### مثلثاتي معادلې

د درسي کتاب (69) مخ

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- پوهنيزه</li> <li>- مهارتي</li> <li>- ذهني</li> </ul> <p>زده کوونکي به د لوست په پای کې وتوانېږي چې:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• د مثلثاتي معادلو په مفهوم پوه شي.</li> <li>• د مثلثاتي معادلو او د مثلثاتي مطابقتونو ترمنځ په توپير پوه شي.</li> <li>• مثلثاتي معادلې حل کړي.</li> <li>• د پورته پوهې او مهارتونو په لرلو سره په ځان باور پيدا کړي.</li> </ul>	
<p>2- د زده کړې لارې:</p> <p>پوښتنه او ځواب، انفرادي او ډله‌ييز کار</p>	
<p>3- مرستندويه مواد:</p>	
<p>4- د وړودي برخې توضیح (5 دقیقې)</p> <p>ښاغلی ښوونکی د لومړنيو فعالیتونو له سرته رسولو څخه وروسته وروډي پوښتنه له زده‌کوونکو څخه وپوښتې، ترڅو د پوښتنې په اړه فکر وکړي. په هغه صورت کې چې ځواب ونشي ویلای، ورته ووايي چې که چیرې <math>\alpha</math> ته مختلف قیمتونه ورکړو او د معادلې کینه خوا له ښې خوا سره مساوي شي؛ نو دا معادله یو مطابقت دی، ولې که چیرې د <math>\alpha</math> په ځینو قیمتونو سره ښې خوا له کینې خوا سره مساوي نه شي مطابقت نه دی، یوه معادله ده.</p>	
<p>5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې):</p> <p>ښاغلی ښوونکی، زده‌کوونکي په مناسبو ډلو ووېشي چې د کتاب د 69 مخ فعالیت له یو بل سره په مشوره حل کړي، د زده‌کوونکو له ډله‌ييز کار څخه څارنه وکړي، فعالې ډلې تشويق او له ضعیفو ډلو سره مرسته وکړي.</p> <p>د فعالیت په پای کې د یوې ډلې استازی راوغواړي چې خپل ډله‌ييز فعالیت نورو زده‌کوونکو ته توضیح کړي. د تېروتنې په صورت کې مرسته ورسره وکړي.</p> <p>ښاغلی ښوونکی د کتاب 70 مخ لومړی مثال چې د لومړي حالت (<math>a \sin x + b = 0</math>) سره مطابقت لري د پوښتنې او ځواب په طریقه په ټولگي کې حل کړي.</p>	
<p>6- د زده کړې تحکیم: (7 دقیقې)</p> <p>ښاغلی ښوونکی: لوست ته د لاینه تحکیم ورکولو لپاره د 71 مخ دویم مثال د پوښتنو او ځوابونو په شکل په ټولگي کې حل کړي.</p>	
<p>7- د لوست د پایلې ارزونه: (5 دقیقې)</p> <p>ښاغلی ښوونکی ددې لپاره چې ډاډمن شي، ایا زده‌کوونکو لوست ښه زده کړی دی او که نه؟ له هغوی څخه په لاندې ډول وپوښتې:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. څوک کولای شي چې د ساین له جنسه د یوې مثلثاتي معادلې عمومي شکل ولیکي؟</li> <li>2. څوک د <math>5 \sin x - 2 = 0</math> او <math>2 \sin x - 5 = 0</math> معادلو د حل په اړه مناقشه کوي؟</li> <li>3. د یوې زاوېې د ساین د تحول ساحه څوک لیکي؟</li> </ol>	



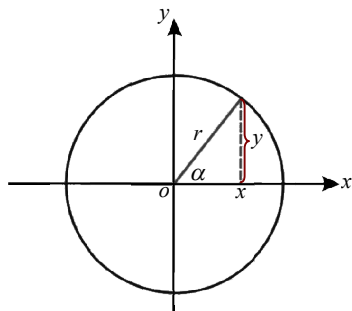
## دویم څپرکی: مثلثات

د مثلثاتي معادلو دویم حالت  $a \cos x + b = 0$

د درسي کتاب (71) مخ

د لوست وخت: (یو درسي ساعت)

<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• زده کوونکي به د لوست په پای کې وتوانېږي چې:</li> <li>• د مثلثاتي معادلو مختلف شکلو ته وپېژني.</li> <li>• مثلثاتي معادلې حل کړي.</li> <li>• د مثلثاتي معادلو له حلولو څخه خوښ شي.</li> </ul>	<p>- پوهنيزه</p> <p>- مهارتي</p> <p>- ذهنيتي</p>
<p>2- د زده کړې لارې:</p> <p>پوښتنه او ځواب، انفرادي او ډلېبیز کار</p>	
<p>3- مرستندويه مواد:</p> <p>د کتاب د 71 مخ د شکل چارټ</p>	
<p>4- د ورودې برخې توضیح (5 دقیقې)</p> <p>دول پیل کړئ.</p> <p>بناغلی ښوونکی د لومړنیو فعالیتونو له سرته رسولو څخه وروسته د لوست بهیر په لاندې ډول پیل کړی.</p>	
<p>5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې):</p> <p>بناغلی ښوونکی، د کتاب 71 مخ د شکل چارټ د ټولګي په مخ کې وڅړوی او لومړی مثال د پوښتنو او ځوابونو په توګه په ټولګي کې حل کړی.</p>	
<p>6- د زده کړې تحکیم: (7 دقیقې)</p> <p>بناغلی ښوونکی: لوست ته د لاسه تحکیم ورکولو لپاره د کتاب 72 مخ دویم مثال یوه زده کوونکي ته ورکړی چې پر تخته یې حل کړي، په عین وخت کې دغه مثال نورو زده کوونکو ته هم ورکړی چې له کتاب څخه له کار اخیستنې پرته یې په خپلو کتابچو کې حل کړي. په پای کې تخته ته ولاړ زده کوونکی دې خپل فعالیت توضیح کړي، که چیرې حل یې سم وي، نو هغو زده کوونکو ته چې تېروتنې یې کړي دي، خپلې تېروتنې دې اصلاح کړي.</p>	
<p>7- د لوست د پایلې ارزونه: (5 دقیقې)</p> <p>بناغلی ښوونکی ددې لپاره چې د زده کوونکو له زده کړې ډاډه شي، لاندې پوښتنې ترې وپوښتی:</p> <p>1. <math>\alpha = \frac{\pi}{6} \text{ rad}</math> له کومې درجې سره مطابقت لري؟</p> <p>2. څوک د <math>2 \cos x - \sqrt{3} = 0</math> معادلې د حل سټ لیکلای شي؟</p>	



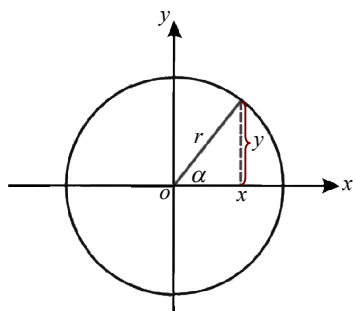
## دویم څپرکی: مثلثات

د مثلثاتي معادلو دریم حالت  $a \tan x + b = 0$

د درسي کتاب (72) مخ

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- پوهنيزه</li> <li>- مهارتي</li> <li>- ذهني</li> </ul> <p>زده کوونکي به د لوست په پای کې وتوانېږي چې:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• د مثلثاتي معادلو د دریم حالت د حل په طریقې پوه شي.</li> <li>• مثلثاتي معادلې حل کړای شي.</li> <li>• د پورتنۍ معادلې د حل سټ وټاکلای شي.</li> <li>• د مثلثاتي معادلو له حلو له څخه د ریاضي د پوهې له حاصلولو سره مینه پیدا کړي.</li> </ul>	
<p>2- د زده کړې لارې:</p> <p>پوښتنه او ځواب، انفرادي او ډله‌ییز کار</p>	
<p>3- مرستندويه مواد:</p> <p>د کتاب د 72 مخ د مثال چارټ</p>	
<p>4- د وړودي برخې</p> <p>توضیح (5 دقیقې)</p> <p>بناغلی ښوونکی دې لومړني فعالیتونه سرته ورسوي. (سلام، احوال پوښتنې، تنظیمول...)</p>	
<p>5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې):</p> <p>بناغلی ښوونکی لومړی مثال چې په هغه کې <math>a = 1</math> او <math>b = -\sqrt{3}</math> ده، د پوښتنې او ځواب په توګه په ټولګي کې حل کړي او د معادلې د حل سټ چې کوترمینل زاویې دې ولیکي.</p> <p>بناغلی ښوونکی دې زده‌کوونکو ته ووايي چې خپل کتابونه وتری او یوه زده‌کوونکي ته دنده ورکړي چې د کتاب د 73 مخ دویم مثال پر تخته حل کړي، په عین وخت کې دغه مثال نورو زده‌کوونکو ته هم ورکړي چې په خپلو کتابچو کې یې حل کړي. په پای کې تخته ته ولاړ زده‌کوونکی دې خپل حل نورو زده‌کوونکو ته توضیح کړي او د معادلې د حل سټ دې هم پر تخته ولیکي، که چیرې ستونزه ولري بل داؤطلب زده‌کوونکي ته دنده ورکړي چې نوموړی مثال حل کړي. بناغلی ښوونکی د اړتیا په صورت کې زده‌کوونکي ته لارښوونه وکړي.</p>	
<p>6- د زده کړې تحکیم: (7 دقیقې)</p> <p>بناغلی ښوونکی د لوست د لاینه تحکیم لپاره زده‌کوونکي په مناسبو ډلو ووېشي چې د یو بل په مشوره د کتاب د 73 مخ دریم مثال حل کړي.</p> <p>بناغلی ښوونکی د فعالیت په بهیر کې د زده‌کوونکو له ډله‌ییز کار څخه څارنه کوي، فعالې ډلې تشویق او له ضعیفو ډلو سره دې مرسته وکړي، د فعالیت په پای کې د یوې ډلې استازي ته دنده ورکړي چې خپل ډله‌ییز کار نورو زده‌کوونکو ته توضیح کړي، که چیرې دده په فعالیت کې تېروتنه شتون ولري لارښوونه ورته وکړي او یا بل زده‌کوونکي ته دنده ورکړي چې پوښتنه سمه حل کړي.</p>	
<p>7- د لوست د پایلې ارزونه: (5 دقیقې)</p> <p>بناغلی ښوونکی ددې لپاره چې د زده‌کوونکو د پوهې او مهارت له زده‌کړې څخه ځان ډاډمن کړي، نولاندې پوښتنې له هغوی څخه وپوښتي:</p> <p>1. د <math>\tan(2x - \frac{\pi}{4}) = \tan(x + \frac{\pi}{3})</math> معادلې عمومي حل عبارت دی له <math>x = K\pi + \frac{7\pi}{12}</math>. څوک کولای شي چې د <math>K = 3</math> لپاره د معادلې حل پیدا کړي.</p>	



## دویم څپرکی: مثلثات

د مثلثاتي معادلو څلورم حالت  $a \cot x + b = 0$

د درسي کتاب (73) مخ

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- پوهنيزه</li> <li>- مهارتي</li> <li>- ذهنيته</li> </ul> <p>زده کوونکي به د لوست په پای کې وتوانېږي چې:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• د مثلثاتي معادلو د څلورم حالت د حل په طريقه پوه شي.</li> <li>• هغه معادلې چې <math>a \cot x + b = 0</math> شکل ولري، حل کړای شي.</li> <li>• له پورته معادلې سره د مشابه معادلو د حل په سټ پوه شي او د پورته معادلو له حلولو څخه خوښ شي.</li> </ul>	
<p>2- د زده کړې لارې:</p> <p>پوښتنه او ځواب، انفرادي او ډله‌ييز کار</p>	
<p>3- مرستندويه مواد:</p> <p>د کتاب د 74 مخ د دريم مثال چارټ</p>	
<p>4- د ورودي برخې توضیح (5 دقيقې)</p> <p>بناغلی ښوونکی د لومړنيو فعاليتونو له سرته رسولو څخه وروسته لومړی مثال چې د <math>a \cot x + b = 0</math> معادلې ته ورته دی او په هغه کې <math>a = 1</math> او <math>b = -1</math> ده پرتخته وليکي او بيا د لوست بهير پيل کړي.</p>	
<p>5- د لوست بهير او فعاليت (28 دقيقې):</p> <p>بناغلی ښوونکی د کتاب د 74 مخ د شکل چارټ د ټولگي په مخکې وڅړوی او د 73 مخ لومړی مثال د پوښتنو او ځوابونو په شکل په ټولگي کې حل کړي. (زده‌کوونکو ته د مثال په حلولو کې برخه ورکړي.)</p>	
<p>6- د زده کړې تحکيم: (7 دقيقې)</p> <p>لوست ته د لابنه تحکيم ورکولو لپاره دويم مثال يعنې د <math>\cot 3x = \cot x</math> معادله د يوه زده‌کوونکي په واسطه په ټولگي کې حل کړي د تېروتنې په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړي.</p>	
<p>7- د لوست د پايلې ارزونه: (5 دقيقې)</p> <p>بناغلی ښوونکی ددې لپاره چې د زده‌کوونکو له زده‌کړې څخه ډاډمن شي، د خپل ډاډ لپاره د 74 مخ د پوښتنو <math>a</math> جزء په ډله‌ييزه توگه په زده‌کوونکو باندې حل کړي.</p> <p>په پای کې د يوې ډلې استازی راوغواړي چې د خپل ډله‌ييز کار توضیح وکړي.</p>	
<p>8- د تمرين او پوښتنو ځوابونه:</p> <p>د لاندې معادلو د عمومي حل ځوابونه پيدا کړي:</p> <p>a) <math>3 \cos x + 5 = 0</math>      b) <math>4 \tan x + \cot x - 5 = 0</math>      c) <math>\tan x = \sqrt{3}</math></p>	

**حل (a):**

$$3 \cos x = -5$$

$$\cos x = \frac{-5}{3} = -1.6$$

څرنگه چې  $\cos x$  د هرې زاوېې د  $[-1, 1]$  په انټروال کې تحول کوي؛ یعنې:  $-1 \leq \cos x \leq 1$  نو داسې زاوېه نشته چې کوساین یې  $-1.6$  وي، نو پورتنی معادله حل نه لري.

**حل (b):**

$$4 \tan x + \cot x - 5 = 0$$

لومړی معلومو چې معادله د حل وړ ده او که نه، ددې لپاره د معادلې د حل د امکان شرط تطبیقوو: نو باید چې:  $c^2 \geq 4ab$  وي.

$$a = 4, \quad b = 1, \quad c = 5$$

$$c^2 = 25, \quad 4ab = 4 \cdot 4 \cdot 1 = 16$$

څرنگه چې  $c^2 \geq 4ab$  ده؛ نو معادله د حل وړ ده، لیکلای شو چې:

$$4 \tan x + \frac{1}{\tan x} = 5 \cdot \tan x$$

$$4 \tan^2 x + 1 = 5 \tan x \Rightarrow 4 \tan^2 x - 5 \tan x + 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 25 - 16 = 9$$

$$\sqrt{\Delta} = \pm 3$$

$$\tan x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 + 3}{2 \cdot 4} = \frac{8}{8} = 1$$

هغه کوچنی مثبت زاوېه یا قوس چې تانجنټ یې (1) وي، هغه له  $45^\circ$  یا  $\frac{\pi}{4}$  څخه عبارت ده؛ یعنې:

$$\tan x = \tan \frac{\pi}{4} = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{نو: } x = n\pi + \frac{\pi}{4}$$

$$\tan x = \frac{5-3}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$x = \tan^{-1} \frac{1}{4} \Rightarrow x = 14.03^\circ$$

هغه کوچنی مثبت زاوېه چې تانجنټ یې  $\frac{1}{4}$  دی عبارت ده له  $14.03^\circ$  څخه، نو عمومي حالت یې:  $x = n\pi + \frac{\pi}{4}$

**حل (c):**

$$\tan x = \sqrt{3}, \quad x = \tan^{-1} \sqrt{3} \Rightarrow x = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$$

هغه کوچنی مثبت زاوېه چې تانجنټ یې  $\sqrt{3}$  دی عبارت دی له  $\frac{\pi}{3}$ ؛ نو عمومي حل یې عبارت دی له:  $x = n\pi + \frac{\pi}{3}$

## دویم څپرکی: مثلثات

$$a \sin^2 x + b \cos^2 x + c \sin x \cos x = d$$

دویمه درجه مثلثاتي معادلې

د درسي کتاب (75) مخ

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• د مثلثاتي دویمه درجه معادلې په مفهوم پوه شي.</li> <li>• دویمه درجه معادله حل کړای شي.</li> <li>• د پورته پوهې او مهارت په حاصلولو سره د رياضي له علم سره علاقمند شي.</li> </ul>	<p>د زده کونکي به د لوست په پای کې وتوانېږي چې:</p>
<p>2- د زده کړې لارې:</p>	<p>پوښتنه او ځواب، انفرادي او ډله‌ييز کار</p>
<p>3- مرستندويه مواد:</p>	
<p>4- د ورودي برخې توضیح (5 دقیقې)</p>	<p>د لومړنيو فعالیتونو له سرته رسولو څخه وروسته د لوست بهیر پیل کړی. ځکه چې ورودی پوښتنه شتون نه لري، چې د هغې په اړه توضیحات ورکړل شي.</p>
<p>5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې):</p> <p>د کتاب 75 مخ لومړی مثال د پوښتنې او ځواب په طریقه په ټولگي کې حل کړی. زده‌کونکي په مناسبو ډلو و وېشي چې د کتاب د 76 مخ دویم مثال په ډله‌ييزه توگه د یو بل په مشوره حل کړي. ښاغلی ښوونکی له زده‌کونکو څخه څارنه وکړي چې له کتاب څخه کار وانخلي. په پای کې د یوې ډلې استازی راوغواړي چې خپل ډله‌ييزه فعالیت نورو زده‌کونکو ته توضیح کړي او تاسې مرسته ورسره وکړي.</p>	
<p>6- د زده کړې تحکیم: (7 دقیقې)</p> <p>ښاغلی ښوونکی زده‌کونکو ته و وایي چې د لوست کتابونه وتړي. لوست ته د لابنه تحکیم ورکولو لپاره د کتاب د 77 مخ دریم مثال یوه زده‌کونکي ته ورکړي چې پر تخته یې حل کړي. په عین وخت کې دغه مثال دې نور زده‌کونکي هم په خپلو کتابچو کې حل کړي. د فعالیت په پای کې هغه زده‌کونکي چې تختې ته ولاړ دي خپل فعالیت دې نورو زده‌کونکو ته توضیح کړي، که چیرې دده په کار کې تېروتنه شتون ولري، بل زده‌کونکي ته دنده ورکړي چې تېروتنه یې اصلاح کړي.</p>	
<p>7- د لوست د پایلې ارزونه: (5 دقیقې)</p> <p>د زده‌کونکو له زده‌کړې د خپل ډاډ لپاره زده‌کونکي په لاندې پوښتنو سره ارزوي:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. څوک کولای شي چې د دویمې درجې مثلثاتي معادلې عمومي شکل و وایي؟</li> <li>2. څوک د لومړی درجه او دویمې درجې مثلثاتي معادلو توپیر پر تخته لیکلای شي؟</li> <li>3. څوک کولای شي چې په دویمه درجه مثلثاتي معادله کې ثابت عددونه وښيي.</li> </ol>	

## 8- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

د لاندې معادلو د حل ستونزه پیدا کړئ.

$$\cos 2x + 1 = 2 \sin^2 \frac{x}{2} - 1$$

$$3 \cos^2 x + 2 \cos x - 5 = 0 \quad -2$$

$$\sin^2 x - (1 - \sqrt{3}) \sin x \cdot \cos x - \sqrt{3} \cos^2 x = 0 \quad -3$$

حل 1:

$$\cos 2x + 1 = 2 \sin^2 \frac{x}{2} \Rightarrow \cos 2x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} - 1 / \cdot (-1)$$

$$-\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}$$

پوهېږو چې  $1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} = \cos x$  دی؛ نو په ځای یې ږدو:

$$-\cos 2x = \cos x \Rightarrow -\cos 2x - \cos x = 0$$

$$\cos 2x + \cos x = 0 \Rightarrow 2 \cos^2 x - 1 + \cos x = 0$$

$$2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$

اوس که  $\cos x = y$  وضع کړو؛ نو لرو چې:

$$2y^2 + y - 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 1 + 8 = 9$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = \pm 3$$

$$y_1 = \frac{-1+3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad y_2 = \frac{-1-3}{4} = \frac{-4}{4} = -1$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \cos^{-1} \frac{1}{2} \Rightarrow x = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$$

$$A_1 = \left\{ \frac{\pi}{3}, 2\pi + \frac{\pi}{3}, 4\pi + \frac{\pi}{3}, \dots, 2k\pi + \frac{\pi}{3}, k \in IZ \right\}$$

$$\cos x = -1 \Rightarrow x = \cos^{-1}(-1), \quad x = \pi$$

$$A_2 = \{2k\pi + \pi / k \in IZ\}, \quad A = A_1 \cup A_2 = \left\{ 2k\pi + \frac{\pi}{3}, 2k\pi + \pi / k \in IZ \right\}$$

حل 2:

$$3 \cos^2 x + 2 \cos x - 5 = 0$$

که چېرې  $\cos x = y$  وضع کړو؛ نو:

$$3y^2 + 2y - 5 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-5) = 4 + 60 = 64$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{64} = \pm 8$$

د  $\Delta$  له قیمت څخه معلومه شوه چې پورتنۍ معادله د حل وړ ده.

$$y_1 = \frac{-2+8}{6} = \frac{6}{6} = 1, \quad y_2 = \frac{-2-8}{6} = \frac{-10}{6} = \frac{-5}{3}$$

$$\cos x = 1 \Rightarrow x = \cos^{-1}(1) \Rightarrow x = 0^\circ$$

هغه کوچنۍ زاویه چې د هغې کوساین 1 وي، له  $0^\circ$  څخه عبارت ده او د حل سټ یې:

$$A = \{2k\pi + 0^\circ, k \in IZ\}$$

$$\cos x = \frac{-5}{3}$$

او  $\cos x = \frac{-5}{3}$  امکان نه لري؛ ځکه د هرې زاوېې کوساین د +1 او -1 ترمنځ تحول کوي، نو د حلونو سټ یې د  $A$  له

سټ څخه عبارت دی.

حل 3:

$$\sin^2 x - (1 - \sqrt{3}) \sin x \cos x - \sqrt{3} \cos^2 x = 0 \div \cos^2 x$$

$$\tan^2 x - (1 - \sqrt{3}) \tan x - \sqrt{3} = 0$$

$$\tan^2 x + 0.73 \tan x - 1.73 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (0.73)^2 - 4(1)(-1.73) = 0.53 + 6.92 = 7.45$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{7.45} = \pm 2.73$$

$$\tan x = \frac{-0.73 + 2.73}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$x = \tan^{-1}(1) \Rightarrow x = 45^\circ \quad \text{یا} \quad x = \frac{\pi}{4}$$

$$x = \left\{ 2k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in IZ \right\}$$

$$\tan x = \frac{-0.73 - 2.73}{2} = \frac{-3.46}{2} = -1.73$$

$$x = \arctan(-1.73) = \tan^{-1}(-1.73) \Rightarrow x = -60^\circ = -\frac{\pi}{3}$$

$$x = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ = \frac{2\pi}{3}$$

$$x = \left\{ (2k-1)\pi + \frac{2\pi}{3}, k \in IZ \right\}$$



$$\begin{cases} \sin x \pm \sin y = a \\ x \pm y = \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x \pm \cos y = a \\ x \pm y = \alpha \end{cases}$$

## دویم څپرکی: مثلثات

د دوه مجهوله مثلثاتي معادلو سېسټمونو حل (لومړی او دویم ډولونه)

د درسي کتاب (79-81) مخ

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

<p>زده کونکي به د لوست په پای کې وټوانېږي چې:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• د دوه مجهوله مثلثاتي معادلو سېسټم او يا د هغه ډولونه وپېژني.</li> <li>• په دې پوه شي چې <math>\begin{cases} \sin x + \sin y = a \\ x + y = \alpha \end{cases}</math> او <math>\begin{cases} \sin x - \sin y = a \\ x - y = \alpha \end{cases}</math> هر يو يو سېسټم دی.</li> <li>• د دوه مجهوله معادلو سېسټم حل او د هغه له حلولو څخه د خوښی احساس وکړي.</li> </ul>	<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- پوهنيزه</li> <li>- مهارتي</li> <li>- ذهنيتي</li> </ul>
<p>پوښتنه او ځواب، انفرادي او ډله‌ييز کار</p>	<p>2- د زده کړې لارې:</p>
<p>د وروډي پوښتنې اړونده معادلو د سېسټمونو چارټ په روښانه ليک.</p>	<p>3- مرستندويه مواد:</p>
<p>ښاغلی ښوونکی د لومړنيو فعاليتونو له سرته رسولو څخه وروسته وروډي پوښتنه له زده‌کونکو څخه وپوښتې چې د هغې په اړه فکر وکړي او له زده‌کونکو څخه پوښتنه وکړي چې د چارټ پر مخ ليکل شوې معادلې له څو سېسټمونو څخه جوړې شوې دي؟ د وروډي پوښتنې ځواب دا دی، هو: کولای شو چې د مثلثاتي معادلو سېسټم حل کړو. د مثالونو په حلولو سره د هو ځواب په حقيقت بدلېږي، خو د پوښتنې دويمه برخه په اضافي معلوماتو کې ورکړل شوې ده او توضيح کېږي.</p>	<p>4- د وروډي برخې توضيح (5 دقيقې)</p>
<p>5- د لوست بهير او فعاليت (28 دقيقې):</p> <p>ښاغلی ښوونکی عنوان (لومړی ډول معادله) پر تخته وليکي، د پوښتنې او ځواب په طريقه دغه لوست پای ته ورسوي.</p> <p>د کتاب د 80 مخ لومړی مثال چې <math>\begin{cases} \sin x + \sin y = 1 \\ x + y = \frac{\pi}{2} \end{cases}</math> دی، پر تخته وليکي او له يوه زده‌کونکي څخه وغواړي چې د چارټ پر مخ له ليکل شوو معادلو سره يې پرتله کړي په هغو کې د <math>a</math> او <math>\alpha</math> قيمتونه وليکي.</p> <p>که چيرې زده‌کونکي ستونزې ولري، ښاغلی ښوونکی دې ووايي چې چارټ او ورکړل شوي مثال ته په کتو سره <math>a = 1</math> او <math>\alpha = \frac{\pi}{2}</math> ده. په همدې ډول د پوښتنې او ځواب په طريقه او زده‌کونکو ته په فعال برخه ورکولو سره مثال په ټولگي کې حل کړي.</p> <p>ښاغلی ښوونکی وروسته له دې چې د دويم ډول معادلو سېسټم مو زده‌کونکو ته توضيح کړ، دويم مثال د لوست د تحکيم لپاره حل کړي.</p>	

6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

لوست ته د لابنه تحکیم ورکولو لپاره زده کوونکي په مناسبو ډلو و وېشي، ترڅو د یو بل په مشوره دویم مثال حل کړي. (په دې وخت کې د زده کوونکو کتابونه باید تړلي وي.)

ښاغلی ښوونکی د ډله ییز کار په پای کې د یوې ډلې استازی راوغواړي چې خپل ډله ییز فعالیت توضیح کړي. البته د اړتیا په صورت کې مرسته ورسره وکړي.

7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

د زده کوونکو له زده کړې څخه د ډاډ لپاره زده کوونکي د لاندې پوښتنو په واسطه و ارزوي:

1. څوک کولای شي چې د دوه مجهوله مثلثاتي معادلو سېسټم وليکي؟
2. څوک ویلای شي چې د لومړي ډول د مثلثاتي معادلو سېسټم له څو سېسټمونو څخه جوړ شوی دی؟
3. څوک د لومړي ډول اړوند د مثلثاتي معادلو سېسټمونه لیکي؟

8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات:

د لومړي ډول د مثلثاتي معادلو اته سېسټمونه چې په متن کې یې نومونه اخیستل شوي دي په لاندې ډول دي:

- |  |  |
|--|--|
| 1) $\begin{cases} \sin x + \sin y = a \\ x + y = \alpha \end{cases}$ | 2) $\begin{cases} \sin x - \sin y = a \\ x - y = \alpha \end{cases}$ |
| 3) $\begin{cases} \sin x + \sin y = a \\ x - y = \alpha \end{cases}$ | 4) $\begin{cases} \sin x - \sin y = a \\ x + y = \alpha \end{cases}$ |
| 5) $\begin{cases} \cos x + \cos y = a \\ x + y = \alpha \end{cases}$ | 6) $\begin{cases} \cos x - \cos y = a \\ x - y = \alpha \end{cases}$ |
| 7) $\begin{cases} \cos x + \cos y = a \\ x - y = \alpha \end{cases}$ | 8) $\begin{cases} \cos x - \cos y = a \\ x + y = \alpha \end{cases}$ |

$$\begin{cases} \sin x \pm \sin y = a \\ x \pm y = \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x \pm \cos y = a \\ x \pm y = \alpha \end{cases}$$

## دویم څپرکی: مثلثات

د دوه مجهوله مثلثاتي معادلو سېسټمونو حل (درېم او څلورم ډول)

د درسي کتاب (82-84) مخ

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- پوهنيزه</li> <li>- مهارتي</li> <li>- ذهنيتي</li> </ul> <p>زده کوونکي به د لوست په پای کې وتوانېږي چې:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• د درېم او څلورم ډول د معادلو سېسټمونه وپېژني.</li> <li>• د پورته یاد شویو معادلو سېسټم حل کړای شي.</li> <li>• د پورته معادلو له پېژندلو او حلولو څخه په خپل نفس باورمند شي.</li> </ul>	
<p>2- د زده کړې لارې:</p> <p>پوښتنه او ځواب</p>	
<p>3- مرستندويه مواد:</p> <p>د دوه مجهوله معادلو د سېسټم درېم او څلورم ډول چارټونه.</p>	
<p>4- د وړودي برخې</p> <p>توضیح (5 دقیقې)</p> <p>د لومړنیو فعالیتونو له سرته رسولو څخه وروسته په لاندې ډول د لوست بهیر پیل کړئ.</p>	
<p>5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې):</p> <p>ښاغلی ښوونکی د لوست عنوان (د دوه مجهوله مثلثاتي معادلو سېسټم درېم ډول) پر تخته وليکئ او د درېم ډول د معادلو د سېسټم اړونده چارټ د ټولګي په مخکې وځړوی. وروسته درېم مثال پر تخته وليکي له یوه زده کوونکي څخه وغواړئ چې د <math>a</math> او <math>\alpha</math> قیمتونه په ورکړل شوي مثال کې ونیسي. وروسته د پوښتنو او ځوابونو په طریقه نوموړی مثال په ټولګي کې حل کړئ.</p> <p>ښاغلی ښوونکی د څلورم ډول د معادلو سېسټم پر تخته وليکئ په داسې حال کې چې د څلورم ډول د معادلو د سېسټم چارټ د ټولګي په مخکې ځوړند وي، ددې سېسټم د حل شرطونه هم پر تخته وليکئ او د پوښتنو او ځوابونو په طریقه زده کوونکو ته په فعال برخه ورکولو سره څلورم مثال په ټولګي کې حل کړئ.</p>	
<p>6- د زده کړې تحکیم: (7 دقیقې)</p> <p>ښاغلی ښوونکی لوست ته د لاینه تحکیم ورکولو لپاره څلورم مثال د یوه داوطلب زده کوونکي په واسطه په تکراري ډول حل کړئ.</p>	
<p>7- د لوست د پایلې ارزونه: (5 دقیقې)</p> <p>ددې لپاره چې ښاغلی ښوونکی د زده کړې په هکله ډاډمن شي، نو زده کوونکي دې په لاندې پوښتنو سره وازوي:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. څوک د درېم ډول د مثلثاتي معادلو سېسټم لیکلای شي؟</li> <li>2. څوک د څلورم ډول د مثلثاتي معادلو سېسټم لیکلای شي؟</li> </ol>	

$$\begin{cases} \sin x \pm \sin y = a \\ x \pm y = \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x \pm \cos y = a \\ x \pm y = \alpha \end{cases}$$

## دویم څپرکی: مثلثات

د دوه مجهوله مثلثاتي معادلو سېسټمونو حل (پنځم او شپږم ډولونه)

د درسي کتاب (85-87) مخ

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

<p>زده کونکي به د لوست په پای کې وتوانېږي چې:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• د پنځم او شپږم ډول سېسټمونه له نورو ډولونو سره تشخیص کړای شي.</li> <li>• دا ډول معادلې حل کړای شي.</li> <li>• د پورته دوو ډولونو د سېسټمونو د حل په شرط پوه شي.</li> </ul>	<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- پوهنيزه</li> <li>- مهارتي</li> <li>- ذهني</li> </ul>
<p>پوښتنه او ځواب</p>	<p>2- د زده کړې لارې:</p>
<p>هغه چارې چې په هغه کې پنځم او شپږم ډول لیکل شوي وي.</p>	<p>3- مرستندويه مواد:</p>
<p>د لومړنيو فعالیتونو له سرته رسولو څخه وروسته د پنځم ډول د معادلو د سېسټم چارې د ټولګي په مخ کې وځړوي او له زده کونکو څخه داسې پوښتنې څوک کولای شي چې په پنځم ډول کې دوه سېسټمونه په جلا، جلا توګه وليکي؟ که چیرې زده کونکي ونه شو کړای په هغه صورت کې <math>\begin{cases} x + y = \alpha \\ \tan x \cdot \tan y = 0 \end{cases}</math> د يوه سېسټم په توګه او <math>\begin{cases} x - y = \alpha \\ \tan x \cdot \tan y = 0 \end{cases}</math> د بل سېسټم په توګه وروپېژني.</p>	<p>4- د ورودي برخې توضیح (5 دقیقې)</p>
<p>5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې):</p> <p>ښاغلی ښوونکی د کتاب د 85 مخ پنځم مثال د پوښتنې او ځواب په طریقه د زده کونکو په ګډون په ټولګي کې حل کړی. د شپږم ډول معادلو د سېسټم چارې د ټولګي په مخ کې ځوړند کړې او د کتاب د 87 مخ شپږم مثال چې د شپږم ډول معادلو له سېسټم سره مطابقت لري، هم د پوښتنې او ځواب په طریقه په ټولګي کې حل کړی.</p>	
<p>6- د زده کړې تحکیم: (7 دقیقې)</p> <p>ښاغلی ښوونکی د لوست د لاینه تحکیم لپاره شپږم مثال په یوه داوطلب زده کونکي باندې په ټولګي کې حل کړی.</p>	
<p>7- د لوست د پایلې ارزونه: (5 دقیقې)</p> <p>ښاغلی ښوونکی ددې لپاره چې د زده کړې په هکله ډاډمن شي، نو زده کونکي د لاندې پوښتنو په واسطه و ارزوي:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. څوک د پنځم ډول د معادلو سېسټم پر تخته لیکي؟</li> <li>2. څوک د شپږم ډول د معادلو سېسټم پر تخته لیکي؟</li> </ol>	

## 8- د بنوونکي لپاره اضافي معلومات:

د کتاب د 87 مخ د شپږم مثال توضیح:

$$\frac{\tan x - \tan y}{\tan x + \tan y} = 2$$

په صورت او مخرچ کې د  $\tan x$  او  $\tan y$  قیمتونه لیکو:

$$\frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\sin y}{\cos y}}{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y}} = 2 \Rightarrow \frac{\frac{\sin x \cos y - \cos x \sin y}{\cos x \cdot \cos y}}{\frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cdot \cos y}} = 2$$

پوهېږو چې  $\sin x \cos y - \cos x \sin y = \sin(x - y)$  او همدارنگه  $\sin x \cos y + \cos x \sin y = \sin(x + y)$  دی؛ نو:

$$\frac{\sin(x - y)}{\sin(x + y)} = 2 \Rightarrow 2 \sin(x + y) = \sin(x - y)$$

څرنگه چې  $x - y = \frac{\pi}{2}$  دی؛ نو:

$$2 \sin(x + y) = \sin \frac{\pi}{2}$$

$$2 \sin(x + y) = 1$$

$$\sin(x + y) = \frac{1}{2} \Rightarrow x + y = \frac{\pi}{6}, \quad x - y = \frac{\pi}{2}$$

## 9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

د لاندې مثلثاتي معادلو سیستمونه حل او وویاست چې په کوم ډول پورې اړه لري؟

$$a) \begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4} \\ \tan x + \tan y = 1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x - y = \frac{\pi}{3} \\ \frac{\sin x}{\cos x} = 2 \end{cases}$$

حل (a) د:  $x + y = \frac{\pi}{4}$  معادلې د دواړو خواوو تانجنټ نیسو:

$$\tan(x + y) = \tan \frac{\pi}{4}$$

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y} = 1$$

$$\frac{1}{1 - \tan x \cdot \tan y} = 1 \Rightarrow 1 - \tan x \cdot \tan y = 1$$

$$- \tan x \cdot \tan y = 1 - 1$$

$$\tan x \cdot \tan y = 0 \quad \dots \quad I$$

$$\tan x + \tan y = 1 \quad \dots \quad II$$

له II رابطې څخه د  $\tan x$  قیمت په لاس راوړو او په I رابطه کې ږدو:

$$\tan x = 1 - \tan y$$

$$(1 - \tan y) \cdot \tan y = 0 \Rightarrow \tan y - \tan^2 y = 0$$

$$\tan y(1 - \tan y) = 0, \quad \tan y = 0 \Rightarrow y = \tan^{-1} 0 = 0^\circ, \quad 1 - \tan y = 0 \Rightarrow \tan y = 1$$

$$y = \tan^{-1}(1) \Rightarrow y = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$$

اوس د  $y$  قیمتونه په I معادله کې ږدو او د  $x$  قیمتونو لپاره زاویه (قوس) په لاس راوړو.

$$\tan x \cdot \tan y = 0$$

$$y = 0^\circ \Rightarrow \tan x = 0 \Rightarrow x = 0^\circ$$

$$y = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \tan x \cdot 1 = 0 \Rightarrow \tan x = 0, \quad x = 0^\circ$$

او ناوېلی پاتې نشي چې نوموړی سېسټم په څلورم ډول پورې تړلی دی.

حل (b):

$$\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{3} \\ \frac{\sin x}{\cos x} = 2 \end{cases}$$

پورتني سېسټم په هېڅ يو له شپږ ډولونو څخه چې لوستی مو دی اړه نه لري.

$$\frac{\sin x}{\cos x} = 2 \Rightarrow \tan x = 2 \Rightarrow x = \arctan 2 = 63.434^\circ$$

نو  $x = 63.434^\circ$  دی، اوس د  $x$  قیمت په لومړي معادله کې وضع کوو:

$$x - y = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$$

$$63.434^\circ - y = 60^\circ \Rightarrow y = 63.434^\circ - 60^\circ = 3.434^\circ \Rightarrow y = 3.434^\circ$$

## د دویم څپرکي د عمومي پوښتنو حل (اووه درسي ساعتونه)

لاندې پوښتنې په څېر سره ولولئ، هرې یوې ته څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، سم ځواب یې په نښه کړئ.

1. که چیرې  $A = 20^\circ$  ،  $b = 10\text{cm}$  او  $c = 7\text{cm}$  وي، د  $a$  د ضلعې اوږدوالی عبارت دی له:
 

a)  $16.4\text{cm}$       b)  $16\text{cm}$       c)  $15.9\text{cm}$       **(d)**  $4.176\text{cm}$
2. که چیرې  $a = 8$  ،  $b = 5$  او  $c = 10$  وي، د  $B$  زاویې اندازه عبارت ده له:
 

a)  $28^\circ$       b)  $29^\circ$       **(c)**  $29.4^\circ$       d)  $28.5^\circ$
3. که چیرې  $A = 48^\circ$  ،  $B = 22^\circ$  ،  $a = 5\text{ft}$  وي، د  $b$  اوږدوالی عبارت دی له:
 

a)  $8\text{ft}$       **(b)**  $8.5\text{ft}$       c)  $9\text{ft}$       d)  $-9.5\text{ft}$
4. د  $\sec x(\sec x - \cos x)$  مثلثاتي مطابقت مساوي دی له:
 

a)  $\tan x$       b)  $\frac{1}{\tan x}$       c)  $\cot x$       **(d)**  $\tan^2 x$

لاندې پوښتنې حل کړئ.

1. که چیرې د  $A = 30^\circ$  ،  $c = 8$  ،  $b = 5$  واحد وي، د  $a$  ضلع او  $\sin C$  پیدا کړئ.

حل:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$a^2 = 25 + 64 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cos 30^\circ$$

$$a^2 = 89 - 80 \frac{\sqrt{3}}{2} = 89 - 40\sqrt{3} = 89 - 40 \cdot 1.73 = 89 - 69 = 20$$

$$a = \sqrt{20} = 4.47$$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c} \Rightarrow \sin C = \frac{c \sin A}{a} = \frac{8 \cdot \sin 30^\circ}{\sqrt{20}}$$

$$\sin C = \frac{8 \cdot \frac{1}{2}}{2 \cdot \sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} = 0.8945$$

$$\sin C = 0.8945$$

2. که په یوه مثلث کې  $a = 8$  ،  $b = 5$  ،  $c = 10$  واحد وي، د  $B$  زاویې اندازه پیدا کړئ.

حل: د کوساین له قانون څخه په کار اخیستنې سره لرو چې:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \Rightarrow \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos B = \frac{64 + 100 - 25}{2 \cdot 8 \cdot 10} = \frac{164 - 25}{160} = \frac{139}{160} = 0.8687$$

$$\cos B = 0.8687 \Rightarrow \hat{B} = \cos^{-1}(0.8687)$$

$$\hat{B} = 29.7^\circ \approx 30^\circ$$

3. د  $ABC$  په مثلث کې که  $\frac{c}{b} = \frac{\sqrt{3}}{2}$  او  $A = 30^\circ$  وي، د  $B$  او  $C$  زاویو اندازه پیدا کړئ.

حل:

$$\frac{c}{b} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow c = \sqrt{3}, \quad b = 2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$a^2 = 4 + 3 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \cos 30^\circ$$

$$a^2 = 7 - 4 \cdot \sqrt{3} \frac{\sqrt{3}}{2} = 7 - 6 = 1 \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \Rightarrow \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

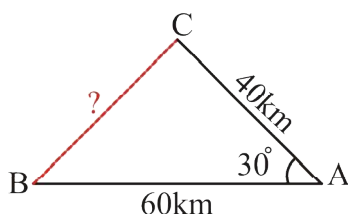
$$\cos B = \frac{1 + 3 - 4}{2 \cdot 1 \cdot \sqrt{3}} = \frac{4 - 4}{2\sqrt{3}} = \frac{0}{2\sqrt{3}} = 0$$

$$\hat{B} = \cos^{-1}(0^\circ) \Rightarrow \boxed{\hat{B} = 90^\circ}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \Rightarrow \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$\cos C = \frac{1 + 4 - 3}{2 \cdot 1 \cdot 2} = \frac{5 - 3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\hat{C} = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \boxed{\hat{C} = 60^\circ}$$



4. دوې بهرې د  $A$  له ټکي څخه په دوو مختلفو خواوو داسې په حرکت پیل کوي چې د منځ زاویه یې  $30^\circ$  ده، که له یوه ساعت څخه وروسته، لومړی بهرې  $40 \text{ km}$  او دویمه بهرې  $60 \text{ km}$  واټن وهلی وي، د دوو بهرېو ترمنځ واټن پیدا کړئ.

حل: د کوساین له قانون څخه گټه اخلو:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$a^2 = (40)^2 + (60)^2 - 2 \cdot 40 \cdot 60 \cos 30^\circ \Rightarrow a^2 = 1600 + 3600 - 4800 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$a^2 = 5200 - 2400 \cdot 1.73 = 5200 - 4152 \Rightarrow a^2 = 1048 \Rightarrow a = \sqrt{1048} = 32.37 \text{ km}$$

$$\boxed{a = 32.37 \text{ km}}$$

5.  $\cot^2 \beta$  د  $\sin \beta$  او  $\cos \beta$  له جنسه محاسبه کړئ.

حل:

$$\cot^2 \beta = \left(\frac{\cos \beta}{\sin \beta}\right)^2 = \frac{\cos^2 \beta}{\sin^2 \beta} = \frac{1 - \sin^2 \beta}{\sin^2 \beta} = \frac{1}{\sin^2 \beta} - 1 \Rightarrow \cot^2 \beta = \frac{1}{\sin^2 \beta} - 1$$

$$\cot^2 \beta = \left(\frac{\cos \beta}{\sin \beta}\right)^2 = \frac{\cos^2 \beta}{\sin^2 \beta} = \frac{\cos^2 \beta}{1 - \cos^2 \beta} \Rightarrow \cot^2 \beta = \frac{\cos^2 \beta}{1 - \cos^2 \beta}$$



6. لاندې مطابقونو سادہ کریں۔

a)  $\frac{\sin 2A}{1 + \cos 2A} = \tan A$

b)  $\frac{1 - \cos 2A}{1 + \cos 2A} = \tan^2 A$

c)  $\tan A + \cot A = 2 \csc 2A$

d)  $\frac{1 - \cos A + \cos B - \cos(A+B)}{1 + \cos A - \cos B - \cos(A+B)} = \tan \frac{A}{2} \cdot \cot \frac{B}{2}$

e)  $\frac{\cos A}{1 - \sin A} = \tan(45 + \frac{A}{2})$

f)  $\cos \alpha \cos(60 - \alpha) \cos(60 + \alpha) = \frac{1}{4} \cos 3\alpha$

حل:

یادونہ: د a جز پہ درسی کتاب کی غلط شوی دی، سم یی دا دی:

a)  $\frac{\sin 2A}{1 + \cos 2A} = \tan A$

$$\frac{\sin 2A}{1 + \cos 2A} = \frac{2 \sin A \cos A}{1 + \cos^2 A - \sin^2 A} = \frac{2 \sin A \cos A}{\sin^2 A + \cos^2 A + \cos^2 A - \sin^2 A} = \frac{2 \sin A \cos A}{2 \cos^2 A} = \frac{\sin A}{\cos A} = \tan A$$

b)  $\frac{1 - \cos 2A}{1 + \cos 2A} = \tan^2 A$

$$\frac{1 - (1 - 2 \sin^2 A)}{1 + (2 \cos^2 A - 1)} = \frac{1 - 1 + 2 \sin^2 A}{1 + 2 \cos^2 A - 1} = \frac{2 \sin^2 A}{2 \cos^2 A} = \tan^2 A$$

c)  $\tan A + \cot A = 2 \csc 2A$

$$\frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{\sin^2 A + \cos^2 A}{\cos A \sin A} = \frac{1}{\cos A \sin A}$$

کہ صورت او مخرج دواړه په 2 کې ضرب کړو، نو لرو چې:

$$\tan A + \cot A = \frac{2}{2 \sin A \cdot \cos A} = \frac{2}{\sin 2A} = 2 \cdot \frac{1}{\sin 2A} = 2 \csc 2A$$

په پایله کې:  $\tan A + \cot A = 2 \csc 2A$ 

d)  $\frac{1 - \cos A + \cos B - \cos(A+B)}{1 + \cos A - \cos B - \cos(A+B)} = \tan \frac{A}{2} \cdot \cot \frac{B}{2}$

صورت ته په بېل ډول او مخرج ته په بېل ډول انکشاف ورکړو:

$$\begin{aligned}
& 1 - \cos A + \cos B - \cos(A+B) \\
& 1 - 2 \cos^2 \frac{A}{2} + 1 + 2 \cos^2 \frac{B}{2} - 1 - \cos A \cos B + \sin A \sin B \\
& = 1 - 2 \cos^2 \frac{A}{2} + 1 + 2 \cos^2 \frac{B}{2} - 1 - (2 \cos^2 \frac{A}{2} - 1)(2 \cos^2 \frac{B}{2} - 1) + 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} \cdot 2 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} \\
& = 1 - 2 \cos^2 \frac{A}{2} + 1 + 2 \cos^2 \frac{B}{2} - 1 - (4 \cos^2 \frac{A}{2} \cos^2 \frac{B}{2} - 2 \cos^2 \frac{A}{2} - 2 \cos^2 \frac{B}{2} + 1) + 4 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} \\
& = 1 - 2 \cos^2 \frac{A}{2} + 1 + 2 \cos^2 \frac{B}{2} - 1 - 4 \cos^2 \frac{A}{2} \cos^2 \frac{B}{2} + 2 \cos^2 \frac{A}{2} + 2 \cos^2 \frac{B}{2} - 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} \\
& = 4 \cos^2 \frac{B}{2} - 4 \cos^2 \frac{A}{2} \cos^2 \frac{B}{2} + 4 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} \\
& = 4 \cos^2 \frac{B}{2} (1 - \cos^2 \frac{A}{2}) + 4 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} = 4 \cos^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{A}{2} + 4 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} \\
& = 4 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} (\sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}) = 4 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin(\frac{A}{2} + \frac{B}{2})
\end{aligned}$$

نو صورت ته له انكشاف وركولو څخه وروسته:  $1 - \cos A + \cos B - \cos(A+B) = 4 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin(\frac{A}{2} + \frac{B}{2})$   
 اوس مخرج ته په لاندې ډول انكشاف وركوو:

$$\begin{aligned} 1 + \cos A - \cos B - \cos(A+B) &= 1 + 2 \cos^2 \frac{A}{2} - 1 - 2 \cos^2 \frac{B}{2} + 1 - \cos A \cos B + \sin A \sin B \\ &= 2 \cos^2 \frac{A}{2} - 2 \cos^2 \frac{B}{2} + 1 - (2 \cos^2 \frac{A}{2} - 1)(2 \cos^2 \frac{B}{2} - 1) + 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} 2 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} \\ &= 2 \cos^2 \frac{A}{2} - 2 \cos^2 \frac{B}{2} + 1 - (4 \cos^2 \frac{A}{2} \cos^2 \frac{B}{2} - 2 \cos^2 \frac{A}{2} - 2 \cos^2 \frac{B}{2} + 1) + 4 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} \\ &= 2 \cos^2 \frac{A}{2} - 2 \cos^2 \frac{B}{2} + 1 - 4 \cos^2 \frac{A}{2} \cos^2 \frac{B}{2} + 2 \cos^2 \frac{A}{2} + 2 \cos^2 \frac{B}{2} - 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} \\ &= 4 \cos^2 \frac{A}{2} - 4 \cos^2 \frac{A}{2} \cos^2 \frac{B}{2} + 4 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} \\ &= 4 \cos^2 \frac{A}{2} (1 - \cos^2 \frac{B}{2}) + 4 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} = 4 \cos^2 \frac{A}{2} \sin^2 \frac{B}{2} + 4 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} \\ &= 4 \cos^2 \frac{A}{2} \sin^2 \frac{B}{2} + 4 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} = 4 \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} (\cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}) \\ &= 4 \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cdot \sin(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}) \end{aligned}$$

مخرج ته له انكشاف وركولو څخه وروسته لرو:

$$1 + \cos A - \cos B - \cos(A+B) = 4 \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cdot \sin(\frac{A}{2} + \frac{B}{2})$$

اوس د صورت او مخرج قيمتونه په اصل مطابقت کې ږدو:

$$\frac{1 - \cos A + \cos B - \cos(A+B)}{1 + \cos A - \cos B - \cos(A+B)} = \frac{4 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin(\frac{A}{2} + \frac{B}{2})}{4 \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin(\frac{A}{2} + \frac{B}{2})} = \frac{\sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}}{\cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}} = \tan \frac{A}{2} \cdot \cot \frac{B}{2}$$

په پايله کې:  $\frac{1 - \cos A + \cos B - \cos(A+B)}{1 + \cos A - \cos B - \cos(A+B)} = \tan \frac{A}{2} \cdot \cot \frac{B}{2}$

**يادونه: د e جز مطابقت په درسي کتاب کې په لاندې ډول اصلاح کړئ:**

ددې مطابقت د حل لپاره له بني لوري څخه کين لوري په لاس راوړو:

$$\begin{aligned} e) \frac{\cos A}{1 - \sin A} &= \tan(45 + \frac{A}{2}) \\ \tan(45 + \frac{A}{2}) &= \frac{\tan 45^\circ + \tan \frac{A}{2}}{1 - \tan 45^\circ \cdot \tan \frac{A}{2}} = \frac{1 + \tan \frac{A}{2}}{1 - \tan \frac{A}{2}} = \frac{1 + \frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{A}{2}}}{1 - \frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{A}{2}}} = \frac{\frac{\cos \frac{A}{2} + \sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{A}{2}}}{\frac{\cos \frac{A}{2} - \sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{A}{2}}} = \frac{\cos \frac{A}{2} + \sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{A}{2} - \sin \frac{A}{2}} \end{aligned}$$

اوس د کسر صورت او مخرج د صورت په مزدوج کې ضربوو:

$$\tan\left(45^\circ + \frac{A}{2}\right) = \frac{\left(\cos \frac{A}{2} + \sin \frac{A}{2}\right) \left(\cos \frac{A}{2} - \sin \frac{A}{2}\right)}{\left(\cos \frac{A}{2} - \sin \frac{A}{2}\right) \left(\cos \frac{A}{2} - \sin \frac{A}{2}\right)}$$

$$\tan\left(45^\circ + \frac{A}{2}\right) = \frac{\cos^2 \frac{A}{2} - \sin^2 \frac{A}{2}}{\cos^2 \frac{A}{2} - 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{A}{2}} = \frac{\cos^2 \frac{A}{2} - \sin^2 \frac{A}{2}}{1 - 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}} = \frac{\cos A}{1 - \sin A}$$

$$\text{نو: } \tan\left(45^\circ + \frac{A}{2}\right) = \frac{\cos A}{1 - \sin A}$$

يادونه: په کتاب کې غلطه تايپ شوېده، اصلاح يې کړئ.

$$f) \cos \alpha \cdot \cos(60^\circ - \alpha) \cdot \cos(60^\circ + \alpha) = \frac{1}{4} \cos 3\alpha$$

$$\begin{aligned} & \cos \alpha \cdot (\cos 60^\circ \cos \alpha + \sin 60^\circ \sin \alpha)(\cos 60^\circ \cos \alpha - \sin 60^\circ \sin \alpha) \\ &= \cos \alpha \cdot \left(\frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha\right) \left(\frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha\right) = \cos \alpha \cdot \left(\frac{1}{4} \cos^2 \alpha - \frac{3}{4} \sin^2 \alpha\right) \\ &= \frac{1}{4} \cos^3 \alpha - \frac{3}{4} \sin^2 \alpha \cos \alpha = \frac{1}{4} \cos^3 \alpha - \frac{3}{4} \cos \alpha (1 - \cos^2 \alpha) = \frac{1}{4} \cos^3 \alpha - \frac{3}{4} \cos \alpha + \frac{3}{4} \cos^3 \alpha \\ &= \cos^3 \alpha + \frac{3}{4} \cos \alpha = \frac{1}{4} (4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha) \end{aligned}$$

خرنگه چې  $4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha = \cos 3\alpha$  دی؛ نو:

$$\cos \alpha \cdot \cos(60^\circ - \alpha) \cdot \cos(60^\circ + \alpha) = \frac{1}{4} \cos 3\alpha$$

7. لاندي مثلثاتي معادلې حل کړئ.

$$a) \cos^2 x + 3 \cos x + 2 = 0$$

$$b) \cos^2 x + \cos^4 x = 0$$

$$c) 4 \cos \beta - 2 = 0$$

$$d) \cos x - \sqrt{3} \sin x = 1$$

$$e) \cos^2 x + 3 \sin x \cdot \cos x = -1$$

حل (a): لومړی  $\cos x = y$  سره تعريزوو:

$$y^2 - 3y + 2 = (y - 2)(y - 1) = 0$$

$$y_1 = 2, \quad y_2 = 1$$

امکان نه لري  $\cos x = y = 2$

$$\cos x = y = 1 \Rightarrow x = \cos^{-1} 1 = 0^\circ$$

د معادلې د حل سټ عبارت دی له:

$$A = \{x / x = 0^\circ + 2\pi, 0^\circ + 4\pi, \dots\}$$

$$A = \{x / x = 0^\circ + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$b) \cos^2 x + \cos^4 x = 0$$

حل (b):

$$\cos^2 x(1 + \cos^2 x) = 0 \Rightarrow \cos^2 x = 0, \cos^2 x + 1 = 0$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\cos^2 x = -1 \Rightarrow \cos x = \sqrt{-1} \text{ امکان نه لري}$$

د حل ستې يې عبارت دی له:

$$A_1 = \left\{ x / x = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2\pi, \frac{\pi}{2} + 4\pi, \dots \right\}$$

$$A_2 = \left\{ x / x = 2\pi - \frac{\pi}{2}, 4\pi - \frac{\pi}{2}, \dots \right\}$$

$$A = A_1 \cup A_2 = \left\{ x / x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}, k \in IZ \right\}$$

$$c) 4 \cos \beta - 2 = 0$$

حل (c):

$$4 \cos \beta - 2 = 0 \Rightarrow 4 \cos \beta = 2 / \div 4$$

$$\cos \beta = \frac{1}{2} \Rightarrow \beta = \arccos \frac{1}{2}$$

$$\beta = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$$

$$A_1 = \left\{ \beta / \beta = \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} + 2\pi, \frac{\pi}{3} + 4\pi, \dots \right\}$$

$$A_2 = \left\{ \beta / \beta = 2\pi - \frac{\pi}{3}, 4\pi - \frac{\pi}{3}, \dots \right\}$$

$$A = A_1 \cup A_2 = \left\{ \beta / \beta = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, k \in IZ \right\}$$

$$d) \cos x - \sqrt{3} \sin x = 1$$

حل (d):

$$\cos x - \sqrt{3}(\sqrt{1 - \cos^2 x}) = 1$$

$$-\sqrt{3}(\sqrt{1 - \cos^2 x}) = 1 - \cos x / \cdot -1$$

$$\sqrt{3}(\sqrt{1 - \cos^2 x}) = \cos x - 1 \text{ دواړه خواوې مربع کوو:}$$

$$3(1 - \cos^2 x) = \cos^2 x - 2 \cos x + 1$$

$$3 - 3 \cos^2 x - \cos^2 x + 2 \cos x - 1 = 0$$

$$-4 \cos^2 x + 2 \cos x + 2 = 0 / \cdot (-1)$$

$$4 \cos^2 x - 2 \cos x - 2 = 0$$

اوس  $\cos x = y$  وضع کوو:

$$4y^2 - 2y - 2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4(4)(-2) = 4 + 32 = 36$$

$$\sqrt{\Delta} = \pm 6$$

$$y_{1,2} = \frac{+2 \pm 6}{2 \cdot 4}$$

$$y_1 = \frac{8}{8} = 1$$

$$y_2 = \frac{2-6}{8} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$$

$$\cos x = y_1 = 1 \Rightarrow x = \cos^{-1} 1, \quad x_1 = 0^\circ$$

$$\cos x = y_2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right), \quad x_2 = 120^\circ$$

$$e) \cos^2 x + 3 \sin x \cdot \cos x = -1$$

**حل e)** پوهېږو چې  $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$  دی:  $\cos^2 x + 3 \cos x \sqrt{1 - \cos^2 x} + 1 = 0$

دواړه خواوې مربع کوو:  $\cos^2 x + 1 = -3 \cos x \sqrt{1 - \cos^2 x}$

$$\cos^4 x + 2 \cos^2 x + 1 = 9 \cos^2 x (1 - \cos^2 x) \Rightarrow \cos^4 x + 2 \cos^2 x + 1 = 9 \cos^2 x - 9 \cos^4 x$$

$$\cos^4 x + 9 \cos^4 x + 2 \cos^2 x - 9 \cos^2 x + 1 = 0$$

$$10 \cos^4 x - 7 \cos^2 x + 1 = 0$$

که چیرې  $\cos^2 x = y$  سره تعویض کړو، نو:

$$10y^2 - 7y + 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 49 - 4(10)(1) = 49 - 40 = 9$$

$$\Delta = 9 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \pm 3$$

$$y_1 = \frac{7+3}{2 \cdot 10} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

$$y_2 = \frac{7-3}{2 \cdot 10} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad x_{1,2} = \arccos\left(\pm \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$$

$$x_1 = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$$

$$x_2 = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 135^\circ$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{5} \Rightarrow \cos x = \pm \sqrt{\frac{1}{5}}, \quad x_{3,3} = \arccos\left(\pm \sqrt{\frac{1}{5}}\right)$$

$$x_3 = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \arccos\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = 63^\circ$$

$$x_4 = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \arccos\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = 116^\circ$$

8. ایا د  $2\sin^2 x - \cos x = 2\cos 2x + \sin x$  مساوات یو مطابقت دی او که معادله؟

**حل:** ددې لپاره چې ثبوت کړو ایا پورتنی رابطه مطابقت دی او که معادله؛ نو د څو مختلفو زاویو قیمتونه په کې پرېکړه چېرې په ټولو قیمتونو کې مساوات صدق وکړي؛ نو مطابقت دی او که په ټولو قیمتونو کې مساوات صدق ونه کړي، نو معادله ده. څو لاندې قیمتونه په پام کې نیسو:

$$x = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 100^\circ, 120^\circ, 180^\circ, 230^\circ, 280^\circ, 360^\circ$$

$$x = 30^\circ \Rightarrow 2(\sin 30^\circ)^2 - \cos(30^\circ) = 2\cos(2 \cdot 30^\circ) + \sin 30^\circ \Rightarrow 2 \cdot \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\frac{1 - \sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow 1 - \sqrt{3} \neq 3$$

$$x = 45^\circ \Rightarrow 2\sin^2(45^\circ) - \cos(45^\circ) = 2\cos(2 \cdot 45^\circ) + \sin 45^\circ$$

$$2 \cdot \frac{2}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{2 - \sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 2 - \sqrt{2} \neq \sqrt{2}$$

$$x = 60^\circ \Rightarrow 2\sin^2(60^\circ) - \cos 60^\circ = 2\cos(2 \cdot 60^\circ) + \sin 60^\circ$$

$$2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = 2\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2 \cdot \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = -1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$1 \neq \frac{-2 + \sqrt{3}}{2} \quad \text{یا} \quad 2 \neq -2 + \sqrt{3}$$

څرنگه چې معلومېږي د څو قیمتونو په اېښودلو سره مساوات صدق نه کوي؛ نو پورتنی اړیکه مطابقت نه دی، بلکې یوه معادله ده.

9. لاندې معادلې حل کړئ.

$a, d, c, a$  او  $e$  جزونه په اوومه پوښتنه کې حل شوي دي، دلته یوازې د  $b$  جز حلوو:

$$b) \tan^2 x - 4 \tan x + 3 = 0$$

**حل:** که چېرې  $\tan x = y$  وضع کړو، نو:

$$y^2 - 4y + 3 = 0$$

$$(y - 3)(y - 1) = 0 \Rightarrow y_1 = 3, \quad y_2 = 1$$

$$\tan x = 1 \Rightarrow x_1 = \tan^{-1} 1 = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$$

$$\tan x = 3 \Rightarrow x_2 = \tan^{-1} 3 = 71.56^\circ$$

10. لاندې افادې ساده کړئ.

$$a) \frac{2 \tan 15^\circ}{1 - \tan^2 15^\circ}$$

$$b) 1 - 2 \sin^2 \alpha + \cos 2\alpha = ?$$

$$c) \cos 4x + 2 \sin^2 2x$$

$$d) (\cos^2 x + 2 \sin x \cos x - \sin^2 x)^2$$

حل (a):

$$a) \frac{2 \tan 15^\circ}{1 - \tan^2 15^\circ} = \frac{\tan 15^\circ + \tan 15^\circ}{1 - \tan 15^\circ \cdot \tan 15^\circ} = \tan(15^\circ + 15^\circ) = \tan 30^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

حل (b): پوهېږو چې  $1 - 2 \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$  دی؛ نو:

$$b) 1 - 2 \sin^2 \alpha + \cos 2\alpha = \cos 2\alpha + \cos 2\alpha = 2 \cos 2\alpha$$

حل (c):

$$c) \cos 4x + 2 \sin^2 2x$$

$$\cos 4x = \cos(2x + 2x) = \cos^2 2x - \sin^2 2x$$

$$1 - \sin^2 2x - \sin^2 2x = 1 - 2 \sin^2 2x \dots *$$

$$\cos 4x + 2 \sin^2 2x = 1 - 2 \sin^2 2x + 2 \sin^2 2x = 1$$

حل (d):

$$d) (\cos^2 x + 2 \sin x \cos x - \sin^2 x)^2 = (\cos^2 x - \sin^2 x + 2 \sin x \cos x)^2$$

$$(\cos 2x + \sin 2x)^2 = \cos^2 2x + 2 \sin 2x \cos 2x + \sin^2 2x$$

$$\cos^2 2x + \sin^2 2x + 2 \sin 2x \cos 2x = 1 + 2 \sin 2x \cos 2x = 1 + \sin 4x$$

11. د لاندې مثلثاتي معادلو سیستمونه لومړی تشخیص او بیا یې حل کړئ.

$$a) \begin{cases} \tan x + \tan y = 1 \\ \cos x \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \sin(x + y) = \cos(x - y) \\ \tan x - \tan y = 1 \end{cases}$$

یادونه: په درسي کتاب کې د  $\begin{cases} \sin x + \sin y = 1 \\ \cos x \cos y = \frac{3}{4} \end{cases}$  جز اضافي تایپ شوی دی.

حل (a):

$$a) \tan x + \tan y = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y}$$

$$= \frac{\sin(x + y)}{\cos x \cos y} = 1 \Rightarrow \sin(x + y) = \cos x \cos y$$

څرنگه چې په خپله پوښتنه کې  $\cos x \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2}$  دی؛ نو:

$$\sin(x + y) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \boxed{x + y = 45^\circ = \frac{\pi}{4}}$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x + y) + \cos(x - y)]$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \cos \frac{\pi}{4} + \cos(x - y) \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} + \cos(x - y) \right\} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2} \cos(x - y) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} \cos(x-y) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} \cos(x-y) = \frac{\sqrt{2}}{4} \quad / \cdot 2$$

$$\cos(x-y) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \boxed{(x-y) = 45^\circ = \frac{\pi}{4}}$$

$$x + y = \frac{\pi}{4} \quad \dots (1)$$

$$x - y = \frac{\pi}{4} \quad \dots (2)$$

د 1 او 2 رابطې خوا په خوا سره جمع کوو:

$$2x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{4}}$$

$$x + y = \frac{\pi}{4}$$

$$y = \frac{\pi}{4} - x$$

$$y = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \Rightarrow \boxed{y = 0^\circ}$$

حل (b):

$$b) \tan x - \tan y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y} = 1$$

$$\sin(x-y) = \cos x \cos y \quad \dots *$$

$$\sin(x+y) = \cos(x-y)$$

$$\sin x \cos y + \cos x \sin y = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

له \* رابطې څخه په کار اخیستنې سره لرو، چې:

$$\sin x \cos y + \cos x \sin y = \sin(x-y) + \sin x \sin y$$

$$\sin x \cos y + \cos x \sin y = \sin x \cos y - \cos x \sin y + \sin x \sin y$$

$$\sin x \cos y + \cos x \sin y - \sin x \cos y + \cos x \sin y = \sin x \sin y$$

$$2 \cos x \sin y = \sin x \sin y \quad / \div \sin x \sin y$$

$$\frac{2 \cos x}{\sin x} = 1$$

$$2 \cot x = 1 \Rightarrow \cot x = \frac{1}{2} \quad \text{یا} \quad \frac{1}{\cot x} = 2$$

$$\tan x = 2 \Rightarrow x = \arctan 2 \Rightarrow \boxed{x = (63.43^\circ)}$$

$$\tan x - \tan y = 1$$

$$\tan y = \tan x - 1 = 2 - 1$$

$$\tan y = 1 \Rightarrow \boxed{y = \frac{\pi}{4}}$$





## دریم څپرکی: فضايي هندسه

اساسي مفهومونه او اکسيومونه

د درسي کتاب (95) مخ

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• د پوهنيزې</li> <li>• مهارتي</li> <li>• ذهني</li> </ul> <p>د زده کوونکي به د لوست په پای کې و توانېږي چې:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• د اساسي مفهومونو او اکسيومونو په مفهوم پوه شي.</li> <li>• د اساسي مفهومونو او اکسيومونو توپير وکړای شي.</li> <li>• له اساسي مفهومونو او اکسيومونو څخه په ورځني ژونده کې کار واخلي.</li> </ul>	
<p>2- د زده کړې لارې:</p> <p>ډله‌ييز، انفرادي، پوښتنې او ځوابونه</p>	
<p>3- مرستندويه مواد:</p> <p>د مستوي چارټ</p>	
<p>4- د وړودي برخې توضیح (5 دقيقې)</p> <p>بناغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته د نوي څپرکي لومړی لوست داسې پيل کړی:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• د اقليدس په نامه د رياضي نامتو عالم څوک پېژني؟</li> <li>• په عمومي توگه اقليدس د هندسې په کومو برخو کې نړيوالو ته خدمت کړی دی؟</li> </ul> <p>که چيرې زده‌کوونکي ځواب و وايي ښه به وي له هغه پرته تاسو ورته و وایاست چې يوناني اقليدس له ميلاد څخه 325-270 کاله مخکې د مصر په سکندريه کې ژوند کړی، نوموړي د سطح او فضايي هندسې يو نامتو پوه او عالم ؤ و چې په خپل ټول عمر کې يې د رياضياتو خصوصاً د هندسې په برخه کې خدمت کړی دی چې تراوسه نړيواله کچه د هغه هندسي مفاهيم او زده‌کړو څخه د ژوندانه په چارو کې کار اخلي. هغه د هندسې د مفاهيمو په برخه کې څېړنې ترسره کړي دي:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. په دوو بُعدونو کې د مسطحې هندسې په نامه يادېږي.</li> <li>2. هغه هندسي مفاهيم، چې په دريو اړخونو(بعدونو) کې څېړل کېږي فضا يې هندسه نومېږي.</li> </ol>	
<p>5- د لوست بهير او فعاليت (28 دقيقې):</p> <p>بناغلی ښوونکی دې اساسي مفهومونو په برخه کې لکه اوليه اصطلاح گانو، قضيو او اکسيومونو په برخه کې په لنډ ډول معلومات ورکړي او زيار دې وباسي چې د امکان تر حده له هر بيان سره سم مثال و وايي.</p> <p>همدارنگه د منلو شوو اوليه اصطلاح گانو(تعريف شوی نه دي) په برخه کې د زده‌کوونکو په فعالې برخه اخېستنې او گډون سره گام په گام کار وکړي. چې هغوی د پورته شیانو هر يوه په مفهوم پوه شي.</p> <p>بيا دې لومړی، دويم او دريم اصلونه د زده‌کوونکو په واسطه بيان شي د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړي.</p> <p>بناغلی ښوونکی دې د مستوي مفهوم د محيطي(چاپيريال) ساده مثالونو په ويلو سره څرگند کړي او مستوي دې په شکل يا هغه چارټ کې چې مخکې يې جوړ کړی دی، زده‌کوونکو ته وروښيي، وروسته دې د مستوي لومړی، دويم او دريم اصلونه</p>	

له زدهكو ونكو څخه وپوښتل شي.

كولای شی د كاغذ مخ، تخته، د ولاړو اوبو سطح د مستوي په توگه ومنئ او اكسيومونه يې په عملي ډول كار وكړئ. همدا ډول د متقاطع مستويگانو اكسيومونه په هكله چې يو گډ فصل جوړوي معلومات وركړئ.

په پای کې د مسطحې هندسې او فضايي هندسې په برخه کې داسې معلومات وركړئ.

په مسطحه هندسه کې د مستوي رسم كولو ته اړتيا نشته، خو په فضايي هندسه کې ورته اړتيا شته، زياتره په فضايي هندسه کې مستوي د مستطيل يا متوازي الاضلاع په ډول ښيي، هغه مستويگانې چې په شكلونو کې ښودل شوي دي، په همدې پراخوالي سره نه دي، بلکې تر لايتناهي پورې امتداد لري؛ خو دا د يوې اوارې سطحې ښوونه ده، هغه اكسيومونه چې په مسطحه هندسه کې شتوالی لري، په فضايي هندسه کې هم كار وړڅخه اخېستل كېږي، په فضايي هندسه کې ځانگړي اكسيومونه هم شته چې هر يو يې په كتاب کې بيان شوی دی.

### 6- د زده كړې تحکيم: (7) دقيقې

د لوست د لارښه تحکيم لپاره په انفرادي توگه له زدهكو ونكو څخه د اوليه اصطلاحگانو، اكسيومونو په برخه کې پوښتنې وكړئ، كوښښ وكړئ چې ځوابونه له زدهكو ونكو څخه واوړئ. دستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وكړئ.

### 7- د لوست د پايلې ارزونه: (5) دقيقې

ښاغلی ښوونکی ددې لپاره چې ډاډمن شی چې زدهكړه شوې ده او كه نه؟ له زدهكو ونكو څخه لاندې پوښتنې وكړئ او ځوابونه يې په لاس راوړئ:

1. د ليل او برهان څه شی دی؟
2. د قضیې د سموالي لپاره څه شی ته اړتيا ده؟
3. څوك د خط لومړی اكسيوم وايي؟
4. د مستوي د ښوولو لپاره څوك مثال ويلي شي؟

د ستونزو په صورت کې مرسته وكړئ.

### 9- د تمرين او پوښتنو ځوابونه:

1. څرگنده كړئ چې ولې درې پښې لرونکی مېز د څلورو پښو لرونکی مېز په پرتله تېنگ دی؟

**حل** څرنگه چې له هر دريو ټكو څخه يوه مستوي تېرېږي؛ نو د څلورو پښو مېز كله ناكله يوه پښه يې په سطح نه لگېږي، خو درې پښې لرونکی مېز له دغې نيمگړتيا څخه خلاص دی.

2. ولې نقطه، خط او مستوي لومړنی اصطلاحگانې بولي؟

**حل** څرنگه چې نقطه د يوه ذهني مفهوم په توگه پېژنو او هغه تعريف شوې نه ده؛ نو د لومړی اصطلاح په توگه يې پېژنو. همدارنگه د مستقيم خط بېلېدونکي علامې دا دي چې له دوو راکړل شوو ټكو څخه يوازې او يوازې يو مستقيم خط تېرېدلای شي كوم ځانگړی تعريف نه لري (تعريف شوی نه دی)؛ نو مستقيم خط هم د لومړنی اصطلاحگانو په توگه پېژنو.

3. له دوو نقطو څخه څو مستويگانې تېرېدلای شي چې دواړه نقطې په کې پرتې وي؟

**حل** له دوو نقطو څخه بې شمېره مستويگانې تېرېدلای شي، چې دغه دوه نقطې په کې پرتې وي.



## دریم څپرکی: فضايي هندسه

په درې بُعدي فضا کې خط او مستوي (لومړی برخه)

د درسي کتاب (97) مخ

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- پوهنيزې</li> <li>- مهارتي</li> <li>- ذهني</li> </ul> <p>زده کوونکي به د لوست په پای کې و توانېږي چې:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• په درې بُعدي فضا کې د خط او مستوي په مفهوم پوه شي.</li> <li>• پوه شي چې په درې بُعدي فضا کې ژوند کوو.</li> <li>• په درې بُعدي فضا کې خط او مستوي تشخيص کړای شي.</li> <li>• په درې بُعدي فضا کې د ژوند ټولې چارې سرته ورسوي.</li> </ul>	
<p>2- د زده کړې لارې:</p> <p>انفرادي، ډله ییز، پوښتنه او ځواب</p>	
<p>3- مرستندويه مواد:</p> <p>قلمونه یا لښتې، د کاغذ پانې</p>	
<p>4- د وړودي برخې</p> <p>توضیح (5 دقیقې)</p> <p>بناغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې وروسته د زده کوونکو پام د کتاب وړودي برخې ته راوگرځوی او داسې وپوښتي:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. په فضا کې دوه قلمونه په خپل منځ کې کوم یا څو حالتونه لري؟</li> <li>2. په فضا کې دوه کتابونه په خپل منځ کې کوم یا څو حالتونه لري؟</li> <li>3. په فضا کې یو قلم او یو کتاب یا د کاغذ پاڼه کوم یا څو حالتونه لري؟</li> </ol> <p>کوښښ وکړئ چې ځوابونه له زده کوونکو څخه واورئ او له هغه پرته تاسو درې واړه حالتونه، متقاطع، منطبق او موازي ورته څرگند او تشریح کړئ.</p>	
<p>5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې):</p> <p>بناغلی ښوونکی د درې بُعدي فضا مفهوم زده کوونکو ته ووايست، چې یوه له نه تعریف شوي او له لومړنیو اصطلاحگانو څخه ده او یادونه وکړئ د لایتناهي نقطو مجموعې ته فضا وايي. همدارنگه د یوې مستقیمې کرښې او یوې مستوي نسبي حالت چې په ترتیب سره یو بعد او دوه بعدونه لري او هر یو د فضا د سیت یوه برخه (جز) ده، په عملي توګه داسې وروښیاست چې د کاغذ مخ د یوې مستوي په توګه او قلم د یوه مستقیم خط په توګه ومني، زده کوونکي په دريو ډلو ووېشئ ورته ووايست:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• لومړی ډله دې قلم پر کاغذي مستوي باندې داسې کېږدي چې قلم له کاغذ څخه تېر یعنې کاغذ سوری کړي او حالت دې بیان کړي.</li> <li>• دویمه ډله دې قلم پر کاغذي مستوي باندې داسې کېږدي چې د قلم او کاغذي مستوي ټولې نقطې ګډې وي او حالت دې بیان کړي.</li> </ul>	

• دریمه ډله دې قلم او کاغذي مستوي په فضا کې داسې ونیسي چې هیڅ مشترکه نقطه ونه لري یعنی امتداد یې هم یو بل قطع نه کړي او حالت دې بیان کړي.

که چیرې زده‌کوونکي ستونزې ولري مرسته او لارښوونه وکړئ په عملي توګه سرته ورسوئ، درې واړه حالتونه ورته بیان او د هر یوه حالت شکل پر تخته باندې رسم کړئ چې زده‌کوونکي یې د متقاطع، منطبق او موازي حالتونو په ډول پوه او وپېژني.

#### 6- د زده‌کړې تحکیم: (7) دقیقې

بناغلی ښوونکی د لوست لائحېم او زده‌کړې لپاره په انفرادي ډول له زده‌کوونکو څخه داسې وپوښتی:

- که چیرې مستوي او مستقیم خط یو په بل منطبق وي، په دې صورت کې څو مشترکې نقطې لري؟
- که چیرې مستوي او مستقیم خط متقاطع وي، څو مشترکې نقطې لري؟
- که چیرې مستوي او مستقیم خط هیڅ مشترکه نقطه ونه لري کوم حالت غوره کوي؟

کوښښ وکړئ چې ځوابونه له زده‌کوونکو څخه په لاس راوړئ، شکلونه یې رسم کړئ، د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړئ.

#### 7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ددې لپاره چې ښوونکی ډاډمن شي چې ایا زده‌کړې صورت موندلی دی او که نه؟ د لاندې پوښتنو ځوابونه له زده‌کوونکو څخه په لاس راوړئ.

1. څوک ویلی شي که چیرې یو مستقیم خط او مستوي یوه مشترکه نقطه ولري کوم حالت بلل کېږي؟
2. څوک یو مستقیم خط او مستوي داسې رسمولای شي چې یو پر بل منطبق وي؟
3. څوک کولای شي یو مستقیم خط او یوه مستوي داسې رسم کړي چې یو له بل سره موازي وي؟

## دریم څپرکی: فضايي هندسه

د دوو مستقیمو کرښو او دوو مستوي گانو نسبي حالتونه (دویمه برخه)

د درسي کتاب (98-99) مخونه

د لوست وخت: (یو درسي ساعت)

<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- پوهنيزه</li> <li>- مهارتي</li> <li>- ذهني</li> </ul>	<p>زده کوونکي به د لوست په پای کې و توانېږي چې:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• د دوو مستقیمو کرښو او دوو مستوي گانو د نسبي حالتونو په مفهوم پوه شي.</li> <li>• د دوو مستقیمو کرښو حالتونه رسم کړای شي.</li> <li>• د دوو مستوي گانو حالتونه رسم کړای شي.</li> <li>• پورتنۍ پوهه او مهارت په ورځنی ژوند کې وکاروي.</li> </ul>
<p>2- د زده کړې لارې:</p>	<p>انفرادي، ډله ییز کار، پوښتنه او ځواب</p>
<p>3- مرستندويه مواد:</p>	<p>د کاغذ پانې، لښتې</p>
<p>4- د وړودي برخې توضیح (5 دقیقې)</p>	<p>ښاغلی ښوونکی: له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته لوست د لاندې پوښتنو په کولو سره پیل کړئ:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. څوک کولای شي په فضا کې د موازي خطونو ډول وښيي؟</li> <li>2. څوک په فضا کې د متقاطع خطونو ډول ښودلای شي؟</li> <li>3. څوک په فضا کې دوې مستوي چې یو پر بل منطبق وي، ښودلای شي؟</li> </ol> <p>کوښښ وکړئ چې ځوابونه له زده کوونکو څخه واورئ او له هغه پرته تاسو د لښتو او کاغذي پانې په کارولو سره مثالونه ورته و وایاست او د لوست بهیر داسې پیل کړئ.</p>
<p>5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې):</p> <p>ښاغلی ښوونکی: زده کوونکو ته و وایاست چې د میز مخ د یوې مستوي او لښتې د مستقیمو کرښو په توگه منو. بیا یوه زده کوونکي ته بلنه ورکړئ ورته و وایاست دا دوه لښتې د مېز پر مخ داسې کېږدي چې گډ ټکي ونلري او امتداد ورکوونکي هم یو بل قطع نکړي. که چیرې زده کوونکي وکولای شي ښه به وي له هغه پرته تاسو مرسته وکړي، په همدې ډول یو بل داوطلب زده کوونکی راوغواړئ چې همدا دوه لښتې د میز پر مخ داسې کېږدي چې یوه مشترکه نقطه ولري. خو د ستونزو په صورت کې مرسته وکړي.</p> <p>بیا دریم داوطلب زده کوونکی راوغواړئ چې یوه لښتې د مېز څخه پر مخ او بله له میز د باندې داسې کېږدي، چې کومه مشترکه نقطه ونه لري او متناظر حالت وښيي.</p> <p>په پای کې هغه درې حالتونه (موازي، متقاطع، متناظر) چې دوه مستقیم خطونه په یوه مستوي کې یو له بل سره لري د کتاب له مخې تشریح او درې واړه حالتونه یې پر تخته باندې رسم او وښایاست. په همدې ډول بیا درې نور داوطلب زده کوونکي په</p>	

وار سره د ټولگي مخې ته راوغواړئ د کاغذ دوه پانې چې هره یوه یې د مستوي په توگه منلي دي، ورکړې، چې د دوو مستويگانو درې حالتونه متقاطع، منطبق او موازي ونښي، د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړئ. په پای کې ښوونکی دې درې واړه حالتونه پرتخته باندې د شکلونو له مخې تشریح او تعریف کړي.

- زده‌کونکي په مناسبو ډلو ووېشي ورته وویاست چې هره ډله دې د مستقیم خط او مستوي درې واړه حالتونه او هم د دوو مستويگانو ترمنځ درې واړه حالتونه په خپلو کتابچو کې رسم کړي او ښوونکي دې د کار څارنه وکړي، په پای کې د دوو ډلو استازي د تختې څنگ ته راځي او د خپل د فعالیت په برخه کې نورو ډلو ته معلومات ورکوي، که چیرې کومه ډله تېروتنه کوي د هغوی پام تېروتنې ته راوړوي او سم ډول یې ورته وښیاست.

### 6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

د لوست د لاینه تحکیم لپاره زده‌کونکو ته په لاندې ډول پوښتنې ورکړئ او ځوابونه یې له زده‌کونکو څخه په لاس راوړئ:

- که چیرې دوه مستقیم خطونه لږ تر لږه دوه مشترکې نقطې ولري کوم حالت غوره کوي؟
  - که چیرې دوی مستويگانې لږ تر لږه درې مشترکې ټکي (نقطې) ولري، داسې چې ټکي د یوه مستقیم خط په امتداد پرتې نه وي، څه ډول مستويگانې بلل کېږي.
  - که چیرې دوه مستقیم خطونه هېڅ مشترکه نقطه ونلري څه ډول خطونه بلل کېږي؟
- کوښښ وکړئ چې پورته پوښتنو ته زده‌کونکي ځوابونه ورکړي، د ستونزو په صورت کې مرسته وکړي.

### 7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ددې لپاره چې ښاغلی ښوونکی د لوست پایله وازموي او ډاډمن شي؛ نو له زده‌کونکو څخه دې په لاندې ډول وپوښتي:

1. په فضا کې له یوې نقطې څخه څو مستقیم خطونه تېرېږي؟
2. له دوو نقطو څخه څو مستقیم خطونه تېرېږي؟
3. په کوم حالت کې دوه مستويگانې یو پر بل باندې منطبق کېدای شي؟
4. د دوو مستويگانو تقاطع یو ټکی دی او که یو خط؟

### 9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

1- د  $R$  او  $T$  نقطې د  $P$  په مستوي کې پرتې دي، د کوم دلیل له مخې د  $\overline{RT}$  خط د  $P$  په مستوي کې پروت دی؟

**حل** پوهېږو چې له دوو نقطو څخه یوازې او یوازې یو مستقیم خط تېرېدلای شي؛ نو څرنگه چې د  $R$  او  $T$  له نقطو څخه د  $\overline{RT}$  خط تېرېږي او نوموړي نقطې په مستوي کې پرتې دي؛ نو د هغو ترمنځ مستقیم خط یعنې  $\overline{RT}$  مستقیم خط په مستوي کې پروت دی.

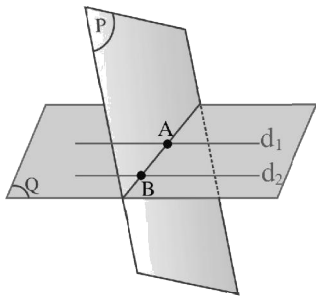
2- که د  $\Delta$  مستقیم خط د  $P$  په مستوي کې پروت نه وي، د  $\Delta$  مستقیم خط به د  $P$  مستوي په خو نقطو کې قطع کړي؟  
**حل** که چيرې د  $\Delta$  مستقیم خط د  $P$  په مستوي کې پروت نه وي په دې صورت کې د  $P$  مستوي په يوه نقطه کې قطع کولای شي.

3- که چيرې د  $AB$  مستقیم خط او د  $P$  مستوي د  $M$  او  $K$  دوې گډې نقطې ولري، د  $\overline{AB}$  مستقیم خط د  $P$  په مستوي کې پروت دی؟

**حل** که چيرې د  $\overline{AB}$  مستقیم خط له  $P$  مستوي سره دوې گډې نقطې ولري نو د  $\overline{AB}$  مستقیم خط ټول ټکي د  $P$  پر مستوي پراته دي يا ويل کېږي چې مستقیم خط له مستوي سره منطبق او يا مستقیم خط په مستوي کې پروت دی.

4- د  $A, B$  او  $C$  نقطې د  $P$  په مستوي کې واقع دي او همدارنگه د  $A, B$  او  $C$  نقطې د  $p'$  په مستوي کې هم پرتې دي، د  $p'$  او  $P$  مستوي گانې يوه له بلې سره څه اړيکه لري؟

**حل** ليدل کېږي چې د  $P$  او  $P'$  مستوي گانې دوې گډې نقطې لري په داسې حال کې چې نوموړي نقطې د يوه مستقیم خط په امتداد پرتې نه دي، نو د  $P$  او  $P'$  مستوي گانې يو په بل باندې منطبق دي.



## دریم څپرکی: فضاي هندسه

په فضا کې موازي مستقيم خطونه (لومړی برخه)

د درسي کتاب (101) مخ

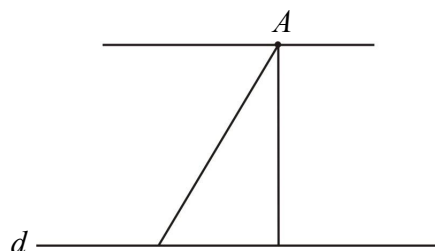
د لوست وخت: (دوه درسي ساعتونه)

<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• زده کوونکي به د لوست په پای کې و توانېږي چې:</li> <li>• په فضا کې د موازي مستقيم خطونو په مفهوم پوه شي.</li> <li>• په فضا کې موازي مستقيم خطونه رسم کړای شي.</li> <li>• د اړتيا په وخت کې يې وکاروي او خوښي وکړي.</li> </ul>	<p>- پوهنيزه</p> <p>- مهارتي</p> <p>- ذهنيتي</p>
<p>2- د زده کړې لارې:</p> <p>ډله‌يز او انفرادي کار</p>	
<p>3- مرستندويه مواد:</p> <p>د اړتيا وړ مواد.</p>	
<p>4- د وړودي برخې</p> <p>توضیح (5 دقيقې)</p> <p>بناغلی ښوونکی: له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته د زده‌کوونکو پام د لوست عنوان او وړودي شکل ته راوگرزوي او وپوښتي:</p> <p>1. په وړودي شکل کې څو مستوي گانې ليدل کېږي؟</p> <p>2. په وړودي شکل کې څه ډول مستقيمونه ليدل کېږي؟ او يو له بل سره کوم حالت لري؟</p> <p>که چيرې زده‌کوونکي ځوابونه ووايي ښه به وي، له هغه پرته تاسو د هغو په برخه کې لنډ معلومات ورکړی او د هغه په ادامه د لوست پيل وکړی.</p>	

### 5- د لوست بهير او فعاليت (28 دقيقې):

لومړی د موازي خطونو اکسيوم له زده‌کوونکو څخه وپوښتي ښايي چې ځواب ووايي، وروسته زده‌کوونکي په مناسبو ډلو وېشي او د کتاب (101) مخ فعاليت ورکړی چې په خپلو کتابچو کې له بحث او خبرو وروسته يې سرته ورسوي. د فعاليت له سرته رسولو وروسته دې د دوو ډلو استازي خپل ډله‌يز فعاليت نورو ته تشریح کړي که چيرې کومې ډلې تېروتنه کړي وي، تېروتنه يې د هغې ډلې په واسطه صحيح او اصلاح کړی چې صحيح کار يې کړی وي.

بيا ورپسې زده‌کوونکو ته هغه قضيه چې له يوې خارجي نقطې څخه له يوه مستقيم خط سره يوازې او يوازې يو موازي مستقيم خط رسمولای شو او بس، بيان کړی او معلومات ورکړی. د لابنه پوهېدو لپاره پر تخته باندې يو مستقيم خط  $d$  او يوه نقطه  $A$  چې په مستقيم پرته نه وي داسې رسم کړی.





وروسته درې داوطلب زده‌کونکي په وار سره راوغوړئ، ورته ووايست یو یې د  $A$  له نقطې څخه پر  $d$  باندې عمود، دویم یې د  $A$  له نقطې څخه د غیر موازي (متقاطع) او دریم یې د  $A$  له نقطې څخه له  $d$  سره موازي رسم کړي. بیا پوښتنه وکړئ: څوک ویلای شي د  $A$  له نقطې څو نور موازي مستقیمونه رسمولای شو؟

که زده‌کونکي ځواب ووايي ښه ترښه، له هغه پرته تاسو ورته ووايست له یوې نقطې څخه په یوه خط باندې لایتناهي متقاطع رسم کولی شو، خو یوازې او یوازې یو موازي او یو عمودي رسم کیدای شي او بس.

په پای کې دا هم ورته ووايست د  $A$  له یوې نقطې او  $d$  مستقیم څخه یوازې یوه مستوي تېرېږي.

**6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې**

ښاغلی ښوونکی د لوست د لاینه تحکیم لپاره یو زده‌کونکی تختې ته راوغوړئ چې د نوموړي قضیې شکل پر تخته رسم کړي، نور زده‌کونکي دې دا کار په خپلو کتابچو کې سرته ورسوي. که چیرې کوم زده‌کونکی د قضیې ثبوت وکولای شي ودې کړي.

له هغه پرته تاسو یې د شکل له مخې ثبوت او زده‌کونکي ورباندې پوه کړئ.

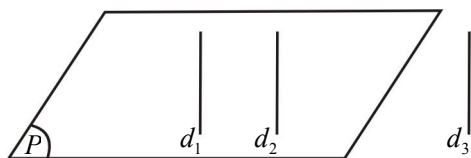
په انفرادي توگه له زده‌کونکو څخه دقضیې په اړه پوښتنې وکړئ او په شفاهي توگه ځوابونه په لاس راوړئ، د ستونزو په صورت کې مرسته اولارښوونه وکړئ.

**7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې**

- ښاغلی ښوونکی ددې لپاره چې ډاډمن شي چې زده‌کړه شوي ده او که نه؟ نو د لاندې پوښتنو په کولو سره ارزونه وکړي.
1. له یوې خارجي نقطې څخه له یوه مستقیم سره څو موازي مستقیمونه رسمولای شو؟
  2. څوک کولای شي له یوې خارجي نقطې څخه له یوه مستقیم خط سره موازي خط رسم کړي؟
- کوښښ وکړئ چې ځوابونه له زده‌کونکو څخه په لاس راوړئ د ستونزو په صورت کې مرسته وکړئ.

**9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:**

1- که چیرې دوه مستقیم خطونه له یوه دریم مستقیم خط سره موازي وي، ثبوت کړئ چې دا مستقیم خطونه په خپل منځ کې هم موازي دي؟



**حل** څرنگه چې  $d_2 // d_3$  دی، غواړو ثبوت کړو چې  $d_1 // d_2$ .

که چیرې د  $d_1$  خط د  $d_2$  له خط سره موازي وي؛ نو دواړه د  $P$  په مستوي کې پراته دي او که چیرې د  $d_1$  خط د  $d_2$  له خط سره موازي نه وي، په دې صورت کې د  $P$  مستوي چې د  $d_1$  خط په کې پروت دی د  $d_2$  خط د  $A$  په ټکي کې قطع کوي.

لیدل کېږي چې د  $d_2$  خط د  $d_3$  له خط سره موازي دی، نو  $d_3$  د  $P$  مستوي هم قطع کوي، په داسې حال کې چې د  $P$  مستوي د  $d_3$  خط نشي قطع کولی، ځکه چې  $d_1$  او  $d_3$  خطونه یو له بل سره موازي او د  $P$  په متسوي کې پراته دي. له بلې خوا پوهېږو چې  $d_2 // d_3$  دی؛ نو د  $P$  مستوي د  $d_2$  مستقیم خط هم نشي قطع کولای، په دې صورت کې ویلای شو

چې د  $d_1$  او  $d_2$  مستقيم خطونه د  $P$  په مستوي کې شامل او يو له بل سره موازي دي.

اوس نښو چې د  $d_1$  او  $d_2$  مستقيم خطونه يو له بل سره هېڅ گډ ټکي نه لري. فرض کوو چې  $d_1$  او  $d_2$  مستقيم خطونو گډ ټکي  $(O)$  وي، کولای شو د  $(O)$  له ټکي څخه دوه موازي خطونه له  $d_3$  خط سره رسم کړو. چې دا نظر د 102 مخ قضیې ته چې مخکې تاسو لوستې ده، نا شونې ده؛ نو په نتیجه کې د  $d_1$  او  $d_2$  مستقيم خطونه يو له بل سره موازي دي؛  
يعنې  $d_1 // d_2$

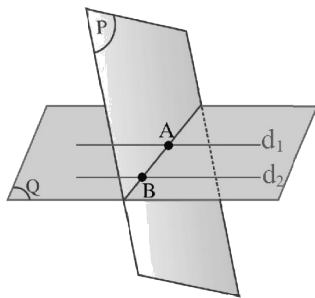
2- که چيرې د  $E$  او  $F$  مستوي گانې سره موازي وي او د  $L_1$  مستقيم خط د  $E$  په مستوي کې او د  $L_2$  مستقيم خط د  $F$  په مستوي کې واقع وي ايا  $L_2 // L_1$  دی؟

**حل** څرنگه چې د  $E$  او  $F$  مستوي گانې يو له بل سره موازي دي د  $L_1$  او  $L_2$  مستقيم خطونه چې په ترتيب د  $E$  او  $F$  په مستوي گانو کې واقع دي؛ نو ويلای شو چې د  $L_1$  او  $L_2$  مستقيم خطونه هم يوله بل سره موازي يا يوله بل سره متناظر دي.

3- که چيرې د  $E$  او  $F$  مستوي گانې سره متقاطع او د  $P$  مستوي هغوی دواړه قطع کړي، آيا د  $E$  او همدارنگه د  $F$  گډ فصل د  $E$  او  $P$  له مشترک فصل او د  $F$  او  $P$  له مشترک فصل سره موازي دی؟

**حل**

ددې پوښتنې په حل کې ويلای شو چې د نوموړو مستويگانو په موقعيت يا نسبي حالتونو پورې اړه لري، کېدای شي چې موازي او هم کېدای شي چې متقاطع شي؛ يعنې که چيرې له گډ فصل سره يې موازي قطع کړي؛ نو گډ فصلونه سره موازي او له هغه پرته گډ فصلونه متقاطع دي.



## دریم څپرکی: فضاي هندسه

په فضا کې موازي مستقیمونه (دویمه برخه)

د درسي کتاب (101) مخ

د لوست وخت: (دوه درسي ساعت)

<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• زده کوونکي به د لوست په پای کې و توانېږي چې:</li> <li>• د دوو موازي مستقیمونو او متقاطع مستوي گانو په مفهوم پوه شي.</li> <li>• دوه موازي مستقیمونه د يوې مستوي په واسطه قطع کړاي شي.</li> <li>• د تقاطع حالت يې پيدا کړاي شي.</li> <li>• د پورته حالتونو په سرته رسولو خوښي ښکاره کړي او خوند ورځني واخلي.</li> </ul>	<p>- پوهنيزي</p> <p>- مهارتي</p> <p>- ذهني</p>
<p>2- د زده کړې لارې:</p> <p>ډله ییز او انفرادي کار</p>	
<p>3- مرستندويه مواد:</p> <p>د اړتيا وړ مواد.</p>	
<p>4- د وړودي برخې</p> <p>توضیح (5 دقیقې)</p> <p>ښاغلی ښوونکی: له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته د لومړي برخې په ادامه ورسېږي بل لوست داسې پیل کړی:</p> <p>چې د تېر لوست لنډه یادونه د پوښتنو په کولو سره وکړي او زده کوونکي دې ځوابونه ووايي.</p> <p>ډېره پاملرنه وکړئ چې زده کوونکي سم ځواب ووايي او که نه؟ د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړئ.</p>	
<p>5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې):</p> <p>ښاغلی ښوونکی زده کوونکي په مناسبو ډلو و وېشي ورته و وایاست چې د درسي کتاب د 102 مخ فعالیت سرته ورسوي.</p> <p>په ډلو کې د فعالیت له سرته رسولو وروسته د هرې ډلې استازی خپل فعالیت نورو ته تشریح کوي، که چیرې کومې ډلې تېروتنه کړي وي د هغوی پام تېروتنې ته راواړوي. چې صحیح یې کړي بیا نوموړی فعالیت په عملي توگه دیوه داؤ طلب زده کوونکي په واسطه داسې سرته ورسوي چې دوه لښتې په موازي ډول د میز په سطحې باندې کښېږدي او د یوې پانې په واسطه یې قطع کړی، له نورو زده کوونکو څخه وپوښتئ د کاغذ د پانې او لښتې چې په یوه مستوي کې دي، ایا تقاطع یې ټکي دي که خط؟ که زده کوونکي ستونزې ولري تاسو شکل پر تخته رسم او تشریح یې کړي.</p> <p>په پای کې د اړوند فعالیت قضیه د کتاب له مخې بیان او مفهوم یې تشریح کړئ، چې زده کوونکي یې پر مفهوم باندې پوه او د یو بل په مقابل کې استدلال وکړاي شي. وروسته یو داؤ طلب زده کوونکي تخته راوغواړئ چې قضیه د شکل له مخې داسې ثبوت او تشریح کړي چې نور زده کوونکي هم په کې فعاله ونډه واخلي.</p>	

### 6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

ښاغلی ښوونکی: د لوست د لارښه تحکیم لپاره له زده‌کوونکو څخه په انفرادي ډول داسې پوښتنې وکړئ:

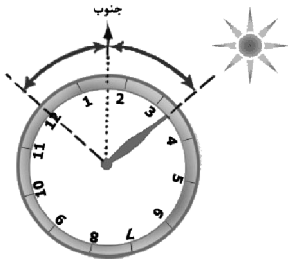
1. که چیرې دوه مستقیم خطونه موازي وي او د  $P$  مستوي یوله هغو څخه قطع کړي ایا بل یې هغه قطع کولای شي؟
2. که چیرې یوه مستوي دوه موازي خطونه قطع کړي، ایا دا دواړه مستقیم خطونه په یوه مستوي کې پراته دي، که په بېل بېل مستوي‌گانو کې؟

کوښښ وکړئ چې څوابونه له زده‌کوونکو څخه په لاس راوړئ، د ستونزو په صورت کې لارښوونه وکړئ.

### 7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ښاغلی ښوونکی ددې لپاره چې ډاډمن شي چې زده‌کړه شوي ده او که نه؟ نو د لاندې پوښتنو په کولو سره ارزونه وکړئ.

1. که چیرې دوه مستوي‌گانې متقاطع وي، ایا ویلای شو چې تقاطع یې یوه نقطه ده که یو خط؟
2. د دوو مستوي‌گانو د تقاطع فصل په یوه مستوي کې وي او که په دواړو کې؟



## دریم څپرکی: فضايي هندسه

په فضا کې د دوو مستقیمو کرښو ترمنځ زاویه

د درسي کتاب (103) مخ

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• زده کوونکي به د لوست په پای کې و توانېږي چې:</li> <li>• په فضا کې د دوو مستقیمو کرښو ترمنځ د زاويې پر مفهوم پوه شي.</li> <li>• زده کوونکي د موازي ضلعو په رسمولو سره مساوي زاويې رسم کړای شي.</li> <li>• له پورته پوهې او مهارت څخه په مسطحه هندسې کې هم کار واخېستلای شي.</li> </ul>	<p>- پوهنيزه</p> <p>- مهارتي</p> <p>- ذهني</p>
<p>2- د زده کړې لارې:</p> <p>ډله یيز او انفرادي کار، پوښتنه او ځواب</p>	
<p>3- مرستندويه مواد:</p> <p>د اړتيا وړ مواد</p>	
<p>4- د وړودي برخې توضیح (5 دقیقې)</p> <p>ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې وروسته د زده کوونکو پام د کتاب عنوان او وړودي برخې ته راوړی او ورڅخه وپوښتی:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• څوک ویلای شي که چیرې د یوې زاويې د دویمې ضلعي دوران د ساعت له عقربې سره سم (عین لور) حرکت وکړي زاویه مثبت ده او که منفي؟</li> <li>• څوک ویلای شي که چیرې د یوې زاويې د دویمې ضلعي دوران د ساعت د عقربې په مخالف لوري حرکت وکړي، زاویه مثبت ده او که منفي؟</li> </ul> <p>کوښښ وکړئ چې ځوابونه له زده کوونکو څخه په لاس راوړئ له هغه پرته تاسو ځوابونه ورته وایاست د لوست بهیر او فعالیت پیل کړئ.</p>	
<p>5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې):</p> <p>ښاغلی ښوونکی: زده کوونکي په مناسبو ډلو ووېشي، دنده ورکړي چې د کتاب (103) مخ فعالیت له هدایت سره سم سرته ورسوي. د زده کوونکو د کار څارنه وکړي که چیرې کومه ډله پوښتنه کړي لارښوونه وکړي. د فعالیت د سرته رسولو وروسته د هرې ډلې استازی خپل فعالیت پر تخته نورو ډلو ته تشریح کوي که چیرې کومې ډلې تېروتنه کړي وي، د یوې بلې ډلې یا یو داوطلب زده کوونکي په واسطه یې اصلاح کړي.</p> <p>بیا یو داوطلب زده کوونکی راوغواړي چې د همدې فعالیت د اړوندې قضیې شکل پر تخته رسم کړي؛ نور زده کوونکي دې په خپل کتابچو کې رسم کړي، د شکل د سموالي لپاره دې زده کوونکي شکلونه د تختې له شکل سره پرتله کړي، وروسته تاسو د قضیې مفهوم ورته بیان او تعریف کړئ. ثبوت یې د شکل له مخې د زده کوونکو په فعال گډون او برخې اخېستنې سره سرته ورسوئ. بیا یو زده کوونکی تختې ته راوغواړئ ورته وایاست چې موازي ضلعي او مساوي زاويې په نښه کړي، په همدې ډول دوه نور داوطلب زده کوونکي په وار سره راوغواړي چې د قضیې لومړی او دویمه پایله بیان، شکلونه یې پر تخته رسم کړي، که چیرې زده کوونکي له ستونزو سره مخامخ کېږي مرسته او لارښوونه وکړئ.</p>	

**6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې**

ښاغلی ښوونکی: د لوست د لاندې پوښتنې چې له نوي لوست سره اړیکې لري ورکړئ او ځوابونه دې زده‌کوونکي ووايي.

1. هغه زاوې چې په ترتیب سره یې ضلعې یوه په یوه موازي او هم جهت وي، نوموړي زاوې تل یو له بله سره مساوي دي؟

2. هغه زاوې چې ضلعې یې یوه په یوه موازي او مختلف جهت وي، تل یو له بله سره مساوي دي؟

له ځواب ویلو وروسته دوه زده‌کوونکي په وار سره راوغوړئ چې نوموړي زاوې پر تخته باندې رسم او اندازه کړي او نور زده‌کوونکي دې خپلې تېروتنې سمې کړي.

**7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې**

ښاغلی ښوونکی ددې لپاره چې ډاډمن شي چې زده‌کړه شوي ده او که نه؟ نو د لاندې پوښتنو په کولو سره ارزونه وکړئ:

1. څوک کولای شي دوه مساوي زاوې چې ضلعې یې یوه په یوه موازي او هم جهت وي، رسم کړي؟

2. څوک کولای شي داسې دوه زاوې چې ضلعې یې یوه په یوه موازي او مختلف جهت وي، رسم کړي؟

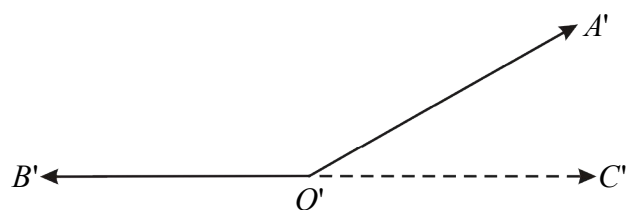
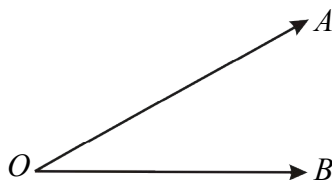
پوښتنې د زده‌کوونکو په واسطه حل او ځوابونه په لاس راوړئ.

**8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات:**

که چیرې د دوو زاویو یوه، یوه ضلع موازي او هم جهت او د هغوی یوه، یوه ضلع موازي او مختلف جهت ولري، ددې

دواړو زاویو مجموعه  $180^\circ$  دي، داسې ثبوتوو:

لومړی شکلونه رسموو، غواړو ثبوت کړو چې:



$$\hat{A}OB + \hat{A}'O'B' = 180^\circ$$

د  $O$  له نقطې څخه د  $OB$  له ضلعې سره موازي او مختلف جهت رسموو.

په شکلونو کې لیدل کېږي چې  $OA \parallel O'A'$ ،  $OB \parallel O'B'$  دي، همدارنگه  $OA$  او  $O'A'$  ضلعې هم جهت،  $OB$  او

$O'B'$  ضلعې مختلف جهت دي، د مخکې قضیې له مخې لیکلای شو:  $\hat{A}OB = \hat{A}'O'C'$

له بلې خوا پوهېږو چې  $\hat{A}'O'C' + \hat{A}'O'B' = 180^\circ$

اوس له پورتنۍ مساوات څخه د  $\hat{A}'O'C'$  زاوې مساوي قیمت په لیکلو سره لیکو:  $\hat{A}OB + \hat{A}'O'B' = 180^\circ$

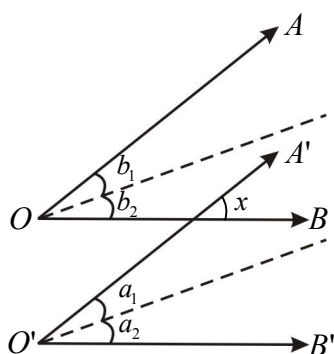
### 9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

1- که د دوو زاویو پراخوالی سره مساوي وي او د یوې زاویې یوه ضلع د بلې زاویې له ضلعې سره موازي وي، ایا د هغو زاویو نورې ضلعې هم یوه له بلې سره موازي دي. ولې؟

**حل:** د تېر لوست، د لوستل شوي قضیې له مخې (په فضا کې د دې زاویې چې دوه په دوه موازي او هم جهت ضلعې ولري یو له بل سره مساوي دی).

څرنگه چې د دوو زاویو پراخوالی سره مساوي دي او د یوې زاویې یوه ضلع د بلې زاویې له یوې ضلعې سره موازي ده؛ نو نورې ضلعې یې هم سره موازي دي.

2- که د دوو زاویو ضلعې سره موازي وي، ثابت کړئ چې د دغو زاویو، ناصف الزاویې هم یو له بل سره موازي او ایا یو پر بل عمود دي.



**حل:** په  $\hat{A}OB$  زاویه کې  $\hat{b}_1 = \hat{b}_2$

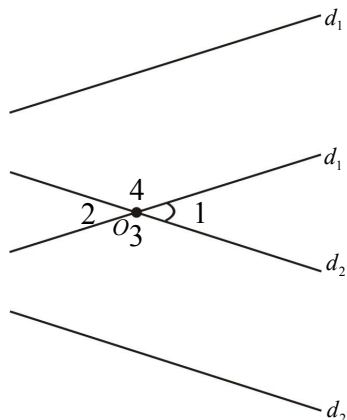
او په  $\hat{A}'O'B'$  زاویه کې  $\hat{a}_1 = \hat{a}_2$

څرنگه چې  $\hat{x} = \hat{a}_1 + \hat{a}_2 \dots$  (متواقي له مخې) او همدارنگه  $\hat{x} = \hat{b}_1 + \hat{b}_2 \dots$  (متواقي له مخې) کېږي؛ نو له بلې خوا پوهېږو چې  $\hat{a}_1 = \hat{a}_2$  او  $\hat{b}_1 = \hat{b}_2$  ده؛ نو:

$$2\hat{a}_1 = 2\hat{b}_1 \Rightarrow \hat{a}_1 = \hat{b}_1, \quad \hat{a}_2 = \hat{b}_2$$

همدارنگه له پوښتنې څخه پوهېږو چې  $\overline{OB}$  او  $\overline{O'B'}$  سره موازي دي او ونښول شو چې  $\hat{a}_1 = \hat{b}_1$  ده؛ نو که چیرې د دې زاویې سره مساوي او یوه، یوه ضلع یې موازي وي؛ نو بله ضلع یې هم خامخا یو له بله سره موازي ده.

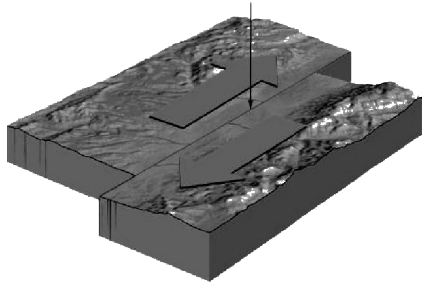
په نتیجه کې که چیرې د دوو زاویو ضلعې دوه په دوه سره موازي وي؛ نو د هغو زاویو ناصف الزاویې هم سره موازي دي.



3-  $d_1, d_2$  دوو متنافرو مستقیمونو ترمنځ زاویه پیدا کړئ.

**حل:** د  $d_1$  او  $d_2$  دوه متناظر خطونه په فضا کې په پام کې نیسو،

د مستوي د  $(O)$  له اختیاري ټکي څخه د  $Od_1$  او  $Od_2$  خطونه په ترتیب له  $d_1$  او  $d_2$  سره موازي رسموو، لکه په شکل کې څلور زاویې چې د  $Od_1$  او  $Od_2$  خطونو په واسطه جوړېږي، دوه په دوه یو له بل سره مساوي او یا یو د بل متمي دي.



## دریم څپرکی: فضايي هندسه

په فضا کې موازي مستقيم خطونه او موازي مستوي گانې

د درسي کتاب (105) مخ

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- پوهنيزه</li> <li>- مهارتي</li> <li>- ذهنيته</li> </ul> <p>زده کوونکي به د لوست په پای کې و توانېږي چې:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• په فضا کې د مستقيم خطونو او مستوي گانو په موازي حالتونو پوه شي.</li> <li>• د متقاطع مستوي گانو له گډ فصل سره موازي مستقيم رسم کړای شي.</li> <li>• له پورتنۍ پوهې او مهارت څخه په ورځنی ژوند کې کار واخېستلای شي او خوښي ښکاره کوي.</li> </ul>	
<p>2- د زده کړې لارې:</p> <p>ډله ییز او انفرادي کار، پوښتنه او ځواب</p>	
<p>3- مرستندويه مواد:</p> <p>د کاغذ دوي پانې- لښتې او ميز</p>	
<p>4- د وړودي برخې توضیح (5 دقيقې)</p> <p>ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې وروسته د زده کوونکو پام د کتاب عنوان او وړودي برخې ته راواړوي او ورڅخه پوښتنې:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• څوک ويلای شي څه وخت يو مستقيم خط له يوې مستوي سره موازي بلل کېږي؟</li> <li>• کوم دوه مستقيم خطونو ته يو له بل سره موازي ويل کېږي؟</li> <li>• کيدای شي چې په فضا کې دوي مستوي گانې يوه له بلې سره موازي وي؟</li> </ul> <p>زده کوونکو ته وخت ورکړی چې پورتنۍ ځوابونه ووايي له هغه پرته تاسو په لنډه توگه معلومات ورکړئ، بيا د لوست بهير او فعاليت پيل کړئ.</p>	
<p>5- د لوست بهير او فعاليت (28 دقيقې):</p> <p>ښاغلی ښوونکی زده کوونکي په مناسبو ډلو و وېشي، دنده ورکړی چې د کتاب (105) مخ فعاليت له بحث او خبرو وروسته سرته ورسوي. په یاد ولری چې دا فعاليت په درې قضيو پورې اړه لري. له فعاليت وروسته د دوو ډلو استازي راځي او د خپل ډلې کارونه ته تشریح او څرگندوي، د تېروتنې په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړی. وروسته په عملي توگه د زده کوونکو په گډون سره داسې کار وکړی يو داوطلب زده کوونکی د ټولگي مخې ته راوغواړی ورته ووايست چې دا دوي لښتې د خطونو په توگه او د مېز سطح د يوې مستوي په توگه ومني.</p> <p>غوښتل شوي زده کوونکي ته ووايست چې يوه لښته د مېز په سطحې باندې کېښېږدي او بله لښته په فضا کې داسې ونيسي چې د نوموړې لښتې سره موازي وي، که زده کوونکی ستونزه ولري، مرسته او لارښوونه وکړی، بيا له زده کوونکو څخه پوښتنه وکړی:</p> <p>ايا دا لښته يوازې د مېز په سطحې باندې له پرتې لښتې سره موازي ده او که د مېز له سطحې سره هم موازي ده؟</p>	



ښايي چې زده‌کونکي ځواب ووايي له هغه پرته شکل په تخته باندې رسم د قضیې مفهوم ورته بيان او ثبوت يې د زده‌کونکو په فعالې برخې اخیستنې سره وکړي. په همدې ډول دويم داوطلب زده‌کونکي د ټولگي مخې ته راوغواړي يوه لښته او دوي پانې د کاغذ ورکړي د کاغذ دواړه پانې دې څنگ، په څنگ داسې ونيسي چې له تقاطع يې يو گډ فصل منځ ته راشي او لښته دې په فضا کې داسې ونيسي چې له گډ فصل سره موازي ډول غوره کړي او پوښتي؛ دا لښته يوازې له گډ فصل سره موازي ده که له مستوي گانو سره هم موازي ده؟ که زده‌کونکي ځواب ووايي ښه به وي، له هغه پرته تاسو ورته ووايست دا لښته له مستوي گانو سره هم موازي ده.

په پای کې ددې فعاليت د اړوند قضیې مفهوم بيان او شکل يې پر تخته باندې رسم د شکل له مخې د زده‌کونکو په گډون او فعالې برخې اخیستنې سره ثبوت کړي.

په همدې ډول د درسي کتاب 106 مخ وروستی قضیه د پوښتنې او ځواب په توگه د زده‌کونکو په فعالې برخې اخیستنې سره د شکل له مخې پر تخته باندې ثبوت کړي او مفهوم يې له زده‌کونکو څخه وپوښتي.

**6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې**

ښاغلی ښوونکی د لوست د لارښوونې لپاره څو تنه زده‌کونکي په وار سره تختې ته راوغواړي د هرې قضیې مفهوم او بيان ورکړي ورته ووايست چې د قضیو له بيان سره سم شکلونه پر تختې باندې رسم کړي د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړي.

**7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې**

ښاغلی ښوونکی ددې لپاره چې ډاډمن شي چې زده‌کړه شوي ده او که نه؟ د لوست په اړه داسې پوښتنې وکړي:

1. که چیرې  $\Delta$  د يو مستقیم خط له يوې مستوي سره موازي وي، ایا د  $\Delta$  مستقیم له هغه خطونو سره چې په مستوي کې پراته دي موازي دي؟ (ځواب هو)

2. که چیرې د  $\Delta$  مستیم خط له دوو متقاطع مستويگانو سره موازي وي، ایا د  $\Delta$  مستقیم خط د نوموړي مستويگانو له گډ فصل سره هم موازي دی؟ (ځواب هو)

کوبښې وکړي چې ځوابونه له زده‌کونکو څخه په لاس راوړي.

**9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:**

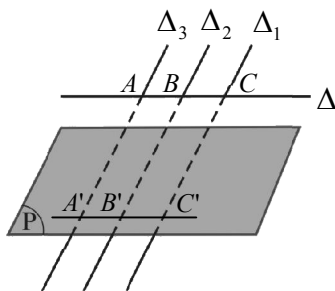
1- که چیرې د  $d_1$  او  $d_2$  مستقیم خطونه سره موازي وي، څو موازي مستويگانې له هغو سره رسمولای شئ؟

**حل:** که چیرې دوه خطونه سره موازي وي له هغو سره بې

شمېره موازي مستويگانې رسم کېدای شي.

$d_1$  \_\_\_\_\_

$d_2$  \_\_\_\_\_



2- که چیرې د  $\Delta_1$ ،  $\Delta_2$  او  $\Delta_3$  موازي خطونه د  $P$  مستوي او د  $\Delta$  مستقیمې کرښې په واسطه په داسې حال کې چې د  $\Delta$  مستقیمه کرښه د  $P$  له مستوي سره موازي ده، قطع شي، ثبوت کړئ چې مخامخ قطع شوي قطعات یو له بل سره مساوي دي.

**حل:** که چیرې د  $\Delta_1$ ،  $\Delta_2$  او  $\Delta_3$  موازي خطونه د  $\Delta$  مستقیم خط د  $A$ ،  $B$  او  $C$  په ټکو کې قطع کړي او د  $P$  مستوي نوموړي خطونه د  $A'$ ،  $B'$  او  $C'$  په ټکو کې قطع کوي، نو د  $\overline{AB}$  او  $\overline{A'B'}$  خطونه سره موازي دي، څرنگه چې د  $\Delta$  مستقیمه کرښه د  $P$  له مستوي سره موازي ده، نو  $AA'BB'$  شکل یوه متوازي الاضلاع ده، همدارنگه د  $\overline{BC}$  او  $\overline{B'C'}$  خطونه سره موازي دي؛ له دې امله  $\overline{AB} = \overline{A'B'}$  دی، همدارنگه د  $\overline{BC}$  او  $\overline{B'C'}$  خطونه سره موازي دي، نو د  $BB'CC'$  شکل هم یوه متوازي الاضلاع ده؛ چې په نتیجه کې  $\overline{BC} = \overline{B'C'}$  دی.



## دریم څپرکی: فضايي هندسه

په فضا کې متعامدې مستقیمې کرنيې او مستوي گانې

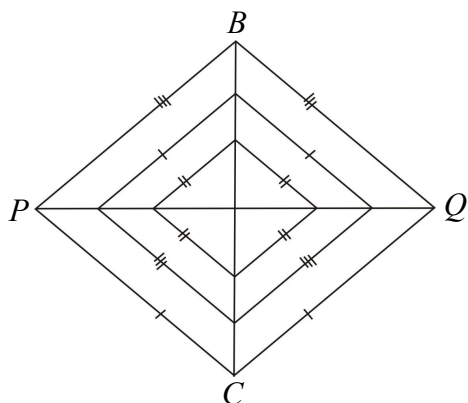
د درسي کتاب (107) مخ

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- پوهنيزه</li> <li>- مهارتي</li> <li>- ذهني</li> </ul>	<p>زده کوونکي به د لوست په پای کې و توانېږي چې:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• په فضا کې د متعامد مستقیمو کرنيو او مستوي گانو په مفهوم پوه شي.</li> <li>• په فضا کې یو پر بل باندې متعامد مستقیم خطونه او مستوي گانې رسم کړای شي.</li> <li>• د اړتیا په وخت کې له متعامدو مستقیم خطونو او مستوي گانو څخه کار واخېستلای شي.</li> </ul>
<p>2- د زده کړې لارې:</p>	<p>ډله ییز او انفرادي کار</p>
<p>3- مرستندويه مواد:</p>	<p>چارټ</p>
<p>4- د وړودي برخې توضیح (5 دقیقې)</p>	<p>ښاغلی ښوونکی: د سلام او احوال پوښتنې وروسته د زده کوونکو پام د کتاب عنوان او وړودي برخې ته راوگرځوی او وپوښتی:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• که چیرې د <math>\Delta</math> مستقیمه کرښه د <math>P</math> په مستوي باندې د <math>(O)</math> په ټکي کې عمود وي، ایا هغه ټول مستقیم خطونه چې د مستوي د همدې <math>(O)</math> له ټکي څخه تېرېږي د <math>\Delta</math> پر مستقیمې کرښې عمود دي؟</li> </ul> <p>ښاغلی ښوونکی که چیرې زده کوونکي ځواب ووايي ښه به وي، پرته له هغه کوبښن وکړي چې د پوښتنې ځواب په لنډه توگه ووايست، هو ټول هغه مستقیمونه چې د مستوي د <math>(O)</math> له نقطې څخه تېرېږي، د <math>\Delta</math> پر مستقیم باندې عمود دي.</p>
<p>5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې):</p>	<p>ښاغلی ښوونکی زده کوونکي په مناسبو ډلو ووېشي ورته ووايست چې د درسي کتاب (107) مخ فعالیت له بحث او خبرو وروسته سرته ورسوي او شکل یې په بشپړ ډول رسم کړي. وروسته دې د دوو ډلو استازي د رسم شوي شکل طریقه نورو ته تشریح او توضیح کړي. که چیرې کومې ډلې تېروتنه کړي وي. کوبښن وکړی چې تېروتنه یې د دوستي په فضا کې د بلې ډلې په واسطه سمه شي؛ یعنې د یوه سالم رقابت په منځ ته راوړلو یوه ډله د بلې ډلې تېروتنې سمې کړي، په پای کې ښوونکی د همدې مخ د قضیې مفهوم ورته بیان او شکل دې مرحله په مرحله په بشپړ ډول پر تخته باندې رسم کړي او ثبوت دې د شکل له مخې د زده کوونکي څخه د پوښتنې او ځواب په ډول وشي.</p> <p>ښاغلی ښوونکی کوبښن وکړی هغه کرښې یو پر بل عمود یا یو له بل سره مساوي او همدارنگه هغه شکلونه چې یو په بل انطباق منونکي وي، د زده کوونکو په واسطه پیدا کړی، که چیرې زده کوونکي ستونزې ولري، تاسو یې په جلا، جلا ډول ورته پیدا او وښايست. په پای کې یې ثبوت د هغه چارټ له مخې چې مخکې مو جوړ کړی دی د زده کوونکو په گډون او فعالې ونډې اخېستنې سره سرته ورسوی.</p>

### 6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

ښاغلی ښوونکی د لوست د لابنه تحکیم او پوځوالي لپاره د کتاب د 108 مخ فعالیت زده کوونکو ته ورکړی چې هر یو یې



په انفرادي ډول په خپلو کتابچو کې سرته ورسوي، وروسته درې تنه زده کوونکي په وار سره تختې ته راوغواړئ چې هر یو یې د فعالیت یوه، یوه برخه سرته ورسوي او تشریح یې کړي، که چیرې ستونزې ولري، مرسته او لارښوونه وکړئ او مخامخ شکل پر تخته باندې رسم مساوي اندازې یې وروښایاست.

### 7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ښاغلی ښوونکی ددې لپاره چې ډاډمن شي چې زده کړه شوي ده او که نه؟ د لوست په اړه داسې پوښتنې وکړئ:

1. که چیرې د  $\Delta$  مستقیمه کرښه د  $P$  پر مستوي باندې د  $(O)$  په ټکي کې عمود وي، ایا کیدای شي ټول هغه مستقیمونه چې د  $(O)$  له ټکي څخه تېرېږي د  $\Delta$  پر مستقیم عمود وي؟

2. که چیرې دوه مستقیم خطونه د  $\Delta$  پر مستقیم خط چې د مستوي د  $(O)$  له نقطې څخه تېرېږي عمود وي، ایا د  $\Delta$  مستقیم په هغه مستوي باندې چې ددې دوو مستقیمو له تقاطع څخه تېرېږي، هم عمود دي؟

کوښښ وکړئ چې ځوابونه له زده کوونکو څخه په لاس راوړئ او شکلونه یې پر تخته باندې رسم کړئ، د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړئ.

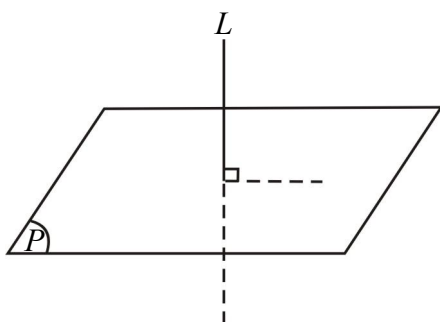
### 9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

1- که چیرې د  $d_1$  او  $d_2$  خطونه یو له بل سره موازي وي، له هغو سره څو موازي مستوي گانې رسمولای شئ؟  
**حل:** که چیرې دوه خطونه سره موازي وي، له هغو سره بهي شمېره موازي مستوي گانې رسمولای شو.

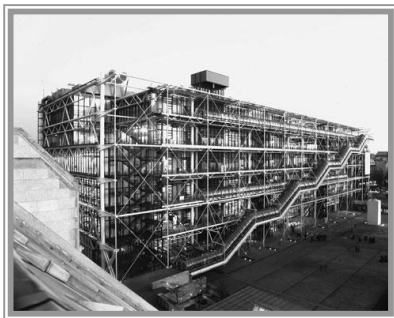
$d_1$  \_\_\_\_\_

$d_2$  \_\_\_\_\_

2- که د  $L$  خط د  $P$  پر مستوي عمود وي، آیا ټولې هغه مستوي گانې چې د  $L$  خط په کې پروت دي، د  $P$  پر مستوي باندې عمود دي؟



**حل:** (هو) که چیرې د  $L$  خط د  $P$  پر مستوي عمود وي، په دې صورت کې ټولې هغه مستوي گانې چې د  $L$  خط په کې پروت دي، د  $P$  پر مستوي باندې عمود دي.



## دریم څپرکی: فضايي هندسه

په فضا کې موازي مستوي گانې

د درسي کتاب (109) مخ

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- پوهنيزه</li> <li>- مهارتي</li> <li>- ذهنيته</li> </ul>	<p>زده کوونکي به د لوست په پای کې و توانېږي چې:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• په فضا کې د دوو موازي مستوي گانو په مفهوم پوه شي.</li> <li>• په فضا کې د دوو موازي مستوي گانو په جوړښت به پوه شي.</li> <li>• په فضا کې موازي مستوي گانې به رسم کړای شي.</li> <li>• د اړتيا په وخت کې موازي مستوي گانې وکارولای شي.</li> </ul>
<p>2- د زده کړې لارې:</p>	<p>ډله ییز او انفرادي کار، پوښتنه او ځواب</p>
<p>3- مرستندويه مواد:</p>	<p>د اړتيا وړ مواد</p>
<p>4- د ورودي برخې توضیح (5 دقیقې)</p>	<p>ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې وروسته د زده کوونکو پام د کتاب عنوان او ورودي برخې ته راوگرځوي او وپوښتي:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• د کتاب د ورودي برخې مخامخ شکل څو پوره (طبقي) لري؟</li> <li>• د پورته پور کړکي، د کښته پور له کړکيو سره څه ډول حالت لري؟</li> </ul> <p>کوښښ وکړئ چې ځوابونه له زده کوونکو څخه په لاس راوړئ، له هغه پرته د هغو د موازي والي حالتونه تشریح او څرگند کړئ.</p>
<p>5- د لوست بهير او فعاليت (28 دقیقې):</p> <p>ښاغلی ښوونکی زده کوونکي په مناسبو ډلو و وېشي ورته و وایست چې د درسي کتاب 109 مخ فعالیت له بحث او خبرو وروسته سرته ورسوي، د فعالیت له سرته رسولو وروسته د دريو ډلو استازي راوغواړي چې خپل سرته رسولی فعالیت نورو ته توضیح کړي، د کومې ډلې د تېروتنې په صورت کې بله داوطلب ډله دې هغه داسې اصلاح کړي چې د ټولو د قناعت وړ وگرځي.</p> <p>بيا د يوه زده کوونکي په واسطه د (110) مخ هغه دوه شکلونه چې په فعالیت کې <math>d_1 // \Delta_1</math> او <math>d_2 // \Delta_2</math> دي، پر تخته رسم کړی د ستونزو په صورت کې مرسته اولارښوونه وکړئ.</p> <p>همدارنگه يو داوطلب زده کوونکی تختې ته راوغواړئ چې دوې موازي مستوي گانې د شرطونو له مخې پر تخته او نور زده کوونکي دې په خپلو کتابچو کې رسم کړي، يو له بل سره دې پرتله کړي. په پای کې د شکلونو له مخې د قضیې مفهوم او پایله ورته بیان او ثبوت يې د زده کوونکو په گډون او فعالې برخې اخېستنې سره، دپوښتنې او ځواب په ډول سرته ورسوي، ترڅو زده کوونکي د قضیې په مطلب ښه پوه شي.</p>	

6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

بناغلی بنوونکی د لوست د لابنه تحکیم لپاره له زده‌کوونکو څخه په لاندې ډول پوښتنې وکړې، چې ځوابونه ووايي:

- څوک کولای شي څلور مستقیم خطونه داسې رسم کړي چې نوموړي خطونه دوه په دوه متقاطع او هم دوه په دوه یو له بل سره موازي وي؟
  - ایا د پورته هرې متقاطع جوړې خطونو څخه یوه مستوي تېرېږي؟
- کوبښښ وکړې چې ځوابونه په انفرادي ډول له زده‌کوونکو څخه په لاس راوړې، که چیرې کوم زده‌کوونکی تېروتنه کوي د بل داوطلب زده‌کوونکي په واسطه یې تېروتنه اصلاح کړې.

7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

بناغلی بنوونکی ددې لپاره چې ډاډمن شي چې زده‌کړه شوي ده او که نه؟ د ارزونې لپاره داسې پوښتنې وکړې:

1. په فضا کې د دوو موازي مستويگانو امکان شته؟
  2. څوک دوي موازي مستويگانې رسمولای شي؟
  3. موازي مستويگانې څو مشترکې نقطې لري؟
- کولای شئ په همدې ډول نورې پوښتنې وکړې او ځوابونه یې له زده‌کوونکو څخه په لاس راوړې، تر څو سمه ارزونه وشي.

9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

که چیرې د  $E$  او  $F$  مستويگانې سره موازي وي او د  $L_1$  مستقیمه کرښه د  $E$  په مستوي او د  $L_2$  مستقیمه کرښه د  $F$  په مستوي کې پرتې وي، آیا  $L_1 // L_2$  دی؟

**حل:** که چیرې  $E$  او  $F$  مستويگانې سره موازي وي او د  $L_1$  او  $L_2$  مستقیم خطونه په اختیاري لورې په ترتیب سره د  $E$  او  $F$  په مستويگانو کې واقع وي، څرنگه د  $E$  مستوي د  $F$  له مستوي سره موازي ده؛ نو ټول هغه خطونه چې د  $E$  په مستوي کې پراته دي، له هغه ټولو خطونو سره چې د  $F$  په مستوي کې دي موازي دي، په پایله کې ویلای شو  $L_1 // L_2$  دي.

## د دریم څپرکي د عمومي پوښتنو حل (څلور درسي ساعتونه)

هرې پوښتنې ته څلور ځوابونه ورکړل شوي، سم ځواب يې پيدا او کړۍ ترې تاو کړۍ.

1- د  $P$  مستوي د  $A$  او  $B$  نقطې مفروض دي. که د  $A$  او  $B$  د نقطو فاصله له  $p$  مستوي څخه مساوي وي، د  $P$  مستوي په هر حال کې:

- (a) د  $AB$  له خط سره موازي ده. د  $AB$  خط يې له منځه تيرېږي.
- (c) د  $AB$  خط عمودي ناصف دی. د  $AB$  له خط سره موازي دي يا له  $AB$  څخه تيرېږي. (d)

2- که د  $\Delta$  خط د  $P$  په مستوي باندې عمود وي، نو:

- (a) د  $\Delta$  خط د مستوي پر ټولو خطونو عمود دی.
- (b) د  $\Delta$  خط يوازې د  $P$  مستوي پر دوو خطونو عمود دی.
- (c) د  $\Delta$  خط د  $P$  مستوي له بې شمېره خطونو سره موازي دی.
- (d) د  $\Delta$  خط يوازې د  $P$  مستوي له يوه خط سره موازي ده.

3- په دقيق ډول له لاندې کومو اجزاو څخه يوه مستوي نه تيرېږي له:

- (a) له هغو درې نقطو څخه چې پر يو مسقيم واقع دی.
- (b) له دوو متقاطع خطونو څخه.
- (c) د يو خط او دهغې له خارجې نقطې څخه.
- (d) څلور متمایزې (مختلفې نقطې)

4- له لاندې ځوابونو څخه کوم يو يې هر وخت سم نه وي.

(a) که د  $\Delta$  مستقيم خط د  $P$  له مستوي سره موازي وي او له هغه خط څخه يوه مستوي تېره کړو، دا مستوي د  $P$  له مستوي سره موازي ده.

(b) که د  $\Delta$  او  $\Delta'$  دوه خطونه د  $d$  له خط سره موازي وي، هغه وخت  $\Delta$  او  $\Delta'$  يو له بل سره موازي دي.

(c) که د  $\Delta$  او  $\Delta'$  دوه خطونه موازي وي او د  $P$  مستوي د  $\Delta$  خط قطع کړي، د  $\Delta'$  خط هم قطع کولای شي.

(d) که دوي مختلفې مستوي گانې په يوه نقطه کې شريکې وي، نو نوموړي مستوي گانې د ياد شوې ټکي په امتداد شريکې دي.

5- د  $\Delta$  خط د  $P$  مستوي قطع کوي، خو د  $P$  پر مستوي عمود نه دی. دا خط د  $P$  مستوي په څو خطونو باندې عمود دی؟

- (a) 0
- (b) 1
- (c) 2
- (d) بې شمېره

6- له لاندې ځوابونو څخه کوم يو يې هر وخت سم نه دی.

(a) که کوم خط د مستوي له خطونو سره موازي وي او متمایز وي، نوموړی خط د هغې له مستوي سره موازي دی.

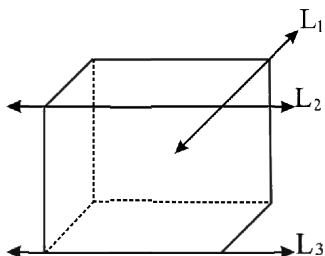
(b) که يو خط يوه له متقاطع مستويگانو څخه قطع کړي، بله هم قطع کوي.

(c) که يو خط يوه له دوو موازي مستويگانو څخه قطع کړي، بله يې هم قطع کوي.

(d) که يوه مستوي يوه له دوو موازي مستويگانو څخه قطع کړي، بله يې هم قطع کوي.

### لاندي سوالونه حل کړئ.

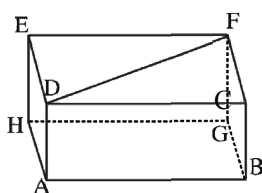
1- که دوه مستقیم خطونه له یوې مستوي سره موازي وي، نوموړي مستقیم خطونه په خپل منځ کې عمود کېدای شي؟  
**حل:** نوموړي خطونه په خپلو منځو کې عمود کېدای نشي.



2- په لاندي مستطیل کې د  $L_1, L_2, L_3$  خطونو موقعیت نظریو بل ته څرگند کړئ. د دې خطونو کومې جوړې متقاطع، کومې جوړې یې موازي او کومې جوړې متنافرې دي؟

**حل:** د  $L_1$  او  $L_2$  خطونه په یوه سطح کې دي، خو د  $L_3$  خط د  $L_1$  او  $L_2$  خطونه بنسټه خواته موقعیت لري.  $L_1$  او  $L_2$  خطونه متقاطع خو د  $L_2$  او  $L_3$  خطونه موازي دي، نو  $L_1$  او  $L_3$  خطونه متنافر دي.

3- که د  $P_1$  او  $P_2$  مستوي گانې د  $P$  پر مستوي باندې عمود وي، د  $P_1$  او  $P_2$  مستوي گانې په خپل منځ کې موازي دي؟  
**حل:** هو، که چېرې د  $P_1$  او  $P_2$  مستوي گانې د  $P$  پر مستوي باندې عمود وي؛ نو  $P_1$  او  $P_2$  مستوي گانې پخپل منځ کې سره موازي دي.



4- په مخامخ شکل کې هر څلور ضلعي یو مستطیل دی.

(a) د دوو مستوي گانو نومونه واخلي چې پر  $\overline{AD}$  عمود وي او ووايي ولې عمود دي؟

(b) د دريو قطعه خطونو، نومونه واخلي چې پر  $ABCD$  مستوي باندې عمود وي.

(c) د  $\hat{E}DF$  زاويه قايمه ده.

(d) د  $\hat{D}FC$  زاويه قايمه ده.

**حل:**

(a) د  $ABGH$  او  $DCFE$  مستوي گانې د معکب مستطیل دوې سطحې دي او یو له بل سره موازي دي. د یوې قضیې په اساس چې وایې که چېرې دوې مستوي گانې په یو خط عمود وي، په خپل منځ کې موازي دي. نو څرنگه چې نوموړي دواړه مستوي گانې موازي دي؛ نو ځکه په  $\overline{AD}$  خط عمودي دي.

(b)  $\overline{ED}, \overline{AH}$  او  $\overline{FC}$  خطونه پر  $ABCD$  مستوي باندې عمود دي

(c) د  $\hat{E}DF$  زاويه قايمه نه ده؛ ځکه چې پورتنی شکل یو معکب مستطیل دی، د  $\hat{E}DC$  زاويه یوه قايمه ده، په داسې حال

کې چې د  $\hat{E}DF$  زاويه د  $\hat{E}DC$  له زاويې څخه کوچنی ده.

(d) د  $\hat{D}FC$  زاويه قايمه نه ده؛ ځکه چې  $\hat{E}FC$  زاويه قايمه؛ يعنې  $90^\circ$  ده، ولې د  $\hat{D}FC$  زاويه د  $\hat{E}FC$  له زاويې څخه کوچنی ده؛ نو ځکه قايمه نشي کېدلای.





# څلورم څپرکی: ترادفونه

ترادفونه Sequences

د درسي کتاب (117) مخ

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- پوهنيزه</li> <li>- مهارتي</li> <li>- ذهني</li> </ul> <p>زده کوونکي به د لوست په پای کې و توانېږي چې:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• د ترادفونو، متزايد ترادفونو او متناقصو ترادفونو په مفهوم پوه شي.</li> <li>• ترادفونه جوړ او <math>a_n</math> حدیې پیدا کړای شي.</li> <li>• د ترادفونو په جوړولو او <math>n</math>-ام حد په پیدا کولو سره خوښي ښکاره او په ځان باور پیدا کړي.</li> </ul>	
<p>2- د زده کړې لارې:</p> <p>انفرادي، ډله ییز، پوښتنه او ځواب ...</p>	
<p>3- مرستندويه مواد:</p> <p>د اړتیا وړ مواد ...</p>	
<p>4- د وړودي برخې توضیح (5 دقیقې)</p> <p>ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته د زده کوونکو پام د کتاب وړودي برخې ته راوړوي او وپوښتي:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• څوک کولای شي ووايي چې د طبیعي عددونو د هر وروستیو او مخکینیو عددونو ترمنځ توپیر څو دي؟</li> <li>• څوک کولای شي په ترتیب 8 عددونه له کوچني څخه د لوی خواته وليکي؟</li> <li>• څوک کولای شي 12 عددونه له لوی څخه د کوچني خواته وليکي؟</li> </ul> <p>همدارنگه د کتاب د وړودي شکل په برخه کې معلومات و غواړي او کوبښ وکړي چې ځوابونه له زده کوونکو څخه په لاس راوړي، له هغه پرته تاسولنډ معلومات ورکړي.</p>	
<p>5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې):</p> <p>ښاغلی ښوونکی یوه داوطلب زده کوونکي ته بلنه ورکړي چې په ترتیب سره تر شلو پورې ټول جفت عددونه وليکي او بیا وپوښتي چې د هر دوو پرله پسې عددونو ترمنځ توپیر څو دي؟</p> <p>که چیرې زده کوونکي ځواب ووايي ښه به وي له هغه پرته تاسو ځواب ووايست. په همدې ډول یو بل زده کوونکي راو غواړي چې په ترتیب سره تر شلو پورې ټول طاق عددونه پر تخته وليکي، بیا وپوښتي چې د هر دوو پرله پسې عددونو ترمنځ توپیر څو دي؟</p> <p>ښايي زده کوونکي ځواب ووايي د ځواب د نه ویلو په صورت کې تاسو ځواب ووايست او هم ووايست چې لومړی یې د جفت عددونو د ترادف په نامه او دویم یې د طاق عددونو د ترادف په نامه یادېږي، چې د جفت عددونو ترادف د <math>2n</math> او د طاق عددونو ترادف د <math>2n-1</math> په واسطه په لاس راځي. په پای کې د ترادف تعریف ورته بیان او د تعریف ناحیه یې (طبیعي</p>	

عددونه) د قیمتونو ناحیه یې (حقیقي عددونه) ورته و وایاست او دا ترادف یعني  $a_1, a_2, a_3 \dots a_n$  چې د ترادف په نامه یادېږي پر تخته ولیکئ او هم ورته و وایاست ترادف باید مرتب او منظم شکل ولري، نه نامرتب او غیر منظم شکل. زده‌کوونکي په مناسبو ډلو و وېشي د کتاب 117 مخ فعالیت ورکړئ چې د بحث او خبرو وروسته د هریوه ترادف پراختیایي شکل ولیکي، وروسته د متزایدو او متناقصو ترادفونو په برخه کې پوښتنې وکړئ چې هره ډله په وار سره ځواب و وایي، د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړئ.

بیا دوه زده‌کوونکي په وار سره تختې ته راوغواړئ چې یو یې د  $a_n = n^2$  ترادف او بل یې د  $b_n = \frac{n}{3}$  ترادف د  $n = 1, 2, 3, 4, \dots$  لپاره پیدا کړي، دریم زده‌کوونکی دې په هغو کې متزاید او متناقص ترادف وښيي.

### 6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

ښاغلی ښوونکی: د لوست د لاینه تحکیم او زده‌کړې لپاره د کتاب 118 مخ دویم مثال د یو داوطلب زده‌کوونکي په واسطه حل کړئ او نور زده‌کوونکي دې په خپل کتابچو کې د کتاب له لېدو پرته حل کړي، په پای کې دې خپل حلونه د تختې له حل سره پرتله کړي.

پاملرنه وکړئ چې زده‌کوونکي ترادف په منظم او مرتب ډول لیکي او که نه؟ د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړئ.

### 7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ددې لپاره چې ښوونکی ډاډ من شي ایا زده‌کړه شوې ده او که نه؟ نو زده‌کوونکي دې د لاندې پوښتنو په کولو سره وازموي:

1. د ترادف د تعریف ناحیه کوم عددونه کیدای شي؟
2. د ترادف د قیمتونو ناحیه کوم عددونه کیدای شي؟
3. ایا نامرتب یا غیر منظم عددونه یو ترادف جوړولای شي؟

کوښښ وکړئ چې هر ځواب په وار سره له زده‌کوونکو څخه په لاس راوړئ، د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړئ.

### 8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات:

ښاغلی ښوونکی دې په ردیفونو کې د عددونو ترتیب په پام کې ونیسي؛ لکه:

$$1) 1, 3, 5, 7, 9 \dots$$

$$2) 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$$

$$3) 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, \dots$$

چې د ردیفونو مثالونه دي. ټکی، ټکی او درې ټکی (...). رښیې چې عددونه دوام لري په عمومي ډول د عددونو ترتیب:  $a_1, a_2, a_3 \dots a_n$  تر یوې ځانگړې قاعدې لاندې د ردیف یا Sequence په نامه یادېږي.

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  عددونه دي چې هر یو یې د ردیف د حد په نامه یادېږي، څرنگه چې د طبیعي عددونو شمېر نه ختمېږي، نو ددې ردیف د حدونو شمېر هم بې شمېره او اخري حد یې نه شو ټاکلی، معمولاً یو ردیف د هغه د  $n$  - ام حد یعنې  $a_n$  په مرسته تعریفېږي چې د لاندې سلسلې حدونه داسې ښوول کېږي، په داسې حال کې چې  $n > 0$  وي:

$$0, 1, 0, 1, 0, \dots, \frac{1+(-1)^n}{2}$$

$$0, 2, 0, 2, 0, \dots, [1+(-1)^n]$$

### 9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

1- په لاندې ترادفونو کې  $n$  - ام حد وټاکئ؟

$$\left. \begin{array}{l} 1, 3, 5, 7, \dots \\ \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \dots \end{array} \right\}$$

حل:

$$\left. \begin{array}{l} 1, 3, 5, 7, \dots, 2n-1 \\ \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \dots, \frac{1}{3n} \end{array} \right\} n=1, 2, 3, \dots$$

2- که یو ترادف د  $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$  راکړل شوی وي، 6 لومړني پرله پسې حدونه یې ولیکئ.

حل  $n$  ته له طبیعي عددونو څخه قیمت ورکوو:

$$a_1 = \frac{(-1)^{1+1}}{1} = \frac{(-1)^{1+1}}{1} = \frac{(-1)^2}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

$$a_2 = \frac{(-1)^{2+1}}{2} = \frac{(-1)^3}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$a_3 = \frac{(-1)^{3+1}}{3} = \frac{(-1)^4}{3} = \frac{1}{3}$$

$$a_4 = \frac{(-1)^{4+1}}{4} = \frac{(-1)^5}{4} = -\frac{1}{4}$$

$$a_5 = \frac{(-1)^{5+1}}{5} = \frac{(-1)^6}{5} = \frac{1}{5}$$

$$a_6 = \frac{(-1)^{6+1}}{6} = \frac{(-1)^7}{6} = -\frac{1}{6}$$

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \dots, \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

# څلورم څپرکی: ترادفونه

حسابي ترادف *Arithmetic sequence*

د درسي کتاب (119) مخ

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)



<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• د حسابي ترادف په مفهوم پوه شي.</li> <li>• حسابي ترادفونه جوړ او هر حد يې پيدا کړای شي.</li> <li>• د حسابي ترادفونو په اړوند پوښتنې وکړای شي.</li> <li>• ددې پوهې او مهارت په سرته رسولو سره په ځان باور پيدا او خوښي ښکاره کړي.</li> </ul>	<p>- پوهنيزې</p> <p>- مهارتي</p> <p>- ذهني</p>
<p>2- د زده کړې لارې:</p> <p>ډله ييز، انفرادي، پوښتنه او ځواب ...</p>	
<p>3- مرستندويه مواد:</p> <p>د اړتيا وړ مواد ...</p>	
<p>4- د وړودي برخې</p> <p>توضیح (5 دقیقې)</p> <p>ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته د زده کوونکو پام د کتاب وړودي برخې ته راوړوئ او وپوښتئ:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• مخامخ څو شکلونه وینئ؟</li> <li>• په هر شکل کې څو کړۍ (حلقې) لیدل کېږي؟</li> <li>• د هر دوو پرله پسې شکلونو د کړيو ترمنځ توپیر څو دي؟</li> <li>• ایا توپيرونه مساوي دي او که نه؟</li> </ul> <p>زده کوونکي د هر شکل کړۍ شمېرې او د هر دوو پرله پسې شکلونو د حلقو توپير په گوته کوي د ستونزو په صورت کې مرسته وکړي او ورته ووايست چې توپيرونه یو ثابت عدد دی.</p>	
<p>5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې):</p> <p>ښاغلی ښوونکی زده کوونکي په مناسبو ډلو ووېشي د کتاب 119 مخ فعالیت ورکړي چې له خبرو او بحث وروسته فعالیت سرته ورسوي، د فعالیت د سرته رسولو په وخت کې څارنه او د ستونزو په صورت کې مرسته وکړي په پای کې د دريو ډلو استازی خپل سرته رسولي فعالیت نورو ته د يو مثال په ورکولو سره توضیح کوي. که کومې ډلې تېروتنه کړي وي کوښښ وکړي تېروتنه يې د يوې بلې ډلې په واسطه اصلاح کړي، بیا تاسو د حسابي ترادف تعريف ورته بيان او په هغو کې گډ توپير (<i>Common differents</i>) لومړی حد (<math>a_1</math>) وروښايست داسې چې د متزايد او متناقص ترادفونو خاصیتونه د (<math>d</math>) په اشارې پورې اړه لري د کتاب د مثالونو په واسطه چې <math>d &lt; 0, d &gt; 0</math> وي، تشریح او توضیح کړي.</p> <p>يو داوطلب زده کوونکي ته بلنه ورکړي چې د کتاب د 120 مخ لومړی مثال پر تخته حل او نور زده کوونکي دې په خپلو کتابچو کې د کتاب له لېدو پرته حل کړي د تېروتنې په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړي، په پای کې زده کوونکي خپل حلونه د تختې له حل سره پرتله کوي، د تېروتنې په صورت کې هغه اصلاح او ځانونه پرې وپوهوي.</p>	

**6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې**

بناغلی بنوونکی د لوست د لابنه تحکیم او پوهې لپاره زده‌کوونکي په وارسره تختې ته راوغواړي چې د کتاب دویم مثال د  $(a)$  او  $(b)$  اجزای پر تخته حل کړي او څرگندی یې کړي چې کوم یو یې ترادف دی او کوم یو یې ترادف نه دی، په عین وخت کې دې نور زده‌کوونکي په خپلو کتابچو کې د کتاب له لېدو پرته حل کړي او په پای کې دې خپل حلونه د تختې له حل سره پرتله کړي.

**7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې**

ددې لپاره چې بنوونکی ډاډ من شي ایسا زده‌کوونکو لوست زده کړی او که نه؟ نو د لاندې پوښتنو په کولو سره دې زده‌کوونکي و ارزوي:

1. که چیرې  $d < 0$  وي، ترادف متزاید دی او که متناقص؟
  2. که چیرې  $d > 0$  وي، ویلای شی چې ترادف متزاید دی او که متناقص؟
  3. که چیرې د هرو دوو پرله پسې حدونو توپیر ثابت عددونه وي؛ حسابي ترادف کیدای شي؟
  4. څوک د حسابي ترادف تعریف ویلی شي؟
- کوښښ وکړئ چې څو ابونه له زده‌کوونکو څخه په لاس راوړئ له هغه پرته تاسو یې بیا هم ورته توضیح کړئ.

**8- د بنوونکي لپاره اضافي معلومات:**

بناغلی بنوونکی د ریښوونو د هرو دوو پرله پسې حدونو فرق یو پېژندل شوی او ثابت عدد دی د  $a_1, a_2, a_3 \dots a_n$  ریښ چې د حسابي ریښ (*Arithmetic sequence*) یا حسابي تصاعد (*Arithmetic progression*) په نامه یادېږي او هر حد یې نظر د هغه مخکني حد څخه یو ثابت او پېژندل شوی فرق لري چې د مشترک تفاضل په نامه یادېږي او په  $d$  سره بنوول کېږي کیدای شي  $d$  یو مثبت یا منفي عدد او یا هم صفر وي.

په همدې ډول که چیرې پوښتنه وشي په کوم صورت کې د  $b, a$  او  $c$  عددونه یو حسابي ریښ جوړوي. باید ورته ووايست د تصاعد د تعریف په پام کې نیولو سره تل په یو حسابي تصاعد کې داسې رابطه شتوالی ولري:

$$b - a = c - b$$

همدارنگه پورته رابطه د حسابي تصاعد وسطي حد په لاس راوړو چې په ټولو حسابي ریښو کې مطابقت کوي.

$$b - a = c - b \Rightarrow b + b = c + a$$

$$2b = c + a \Rightarrow b = \frac{c + a}{2}$$

$b$  د یو ریښ د دوو حدونو ترمنځ وسطي عدد دی چې د  $a$  او  $c$  په منځ کې قرار لري او دا خاصیت په ټولو حسابي ریښو کې صدق کوي.

## 9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

د درسي کتاب (126) مخ د دويمې او څلورمې پوښتنې حل.

2- ايا  $\frac{3}{4}$ ,  $1$ ,  $\frac{5}{4}$  يو حسابي ترادف تشکيلوي؟ د پوښتنې د سموالي په صورت کې يې مشترک توپير پيدا کړئ.

**حل** ددې پوښتنې د پوهېدو لپاره چې پورتنی ترادف حسابي ترادف دی او که نه؟ بايد د هر دوو پرله پسې حدونو ترمنځ گډ توپير ثابت عدد وي.

$$1 - \frac{3}{4} = \frac{4-3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{5}{4} - 1 = \frac{5-4}{4} = \frac{1}{4}$$

څرنگ چې گډ توپير ثابت عدد يعنې  $\frac{1}{4}$  دی، نو راکړل شوی ترادف، حسابي ترادف دی.

4- که  $a_1 = -\frac{1}{2}$ ،  $a_{10} = \frac{84}{2}$  وي، د  $d$  قيمت په لاس راوړئ.

**حل:**

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = -\frac{1}{2} \\ n = 10 \\ a_{10} = \frac{84}{2} = 42 \\ d = ? \end{array} \right\} \begin{array}{l} a_n = a_1(n-1)d \\ a_n - a_1 = (n-1)d \\ d = \frac{a_n - a_1}{n-1} = \frac{42 - (-\frac{1}{2})}{10-1} = \frac{42 + \frac{1}{2}}{9} = \frac{\frac{84+1}{2}}{9} = \frac{85}{18} = 4.\overline{72} \end{array}$$

## څلورم څپرکی: ترادفونه



په یوه حسابي ترادف کې  $n$  - ام حد پیدا کول

د درسي کتاب (121) مخ

د لوست وخت: (یو درسي ساعت)

<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• زده کوونکي به د لوست په پای کې و توانېږي چې:</li> <li>• د <math>a_n = a + (n-1)d</math> په رابطه کې <math>n, a, a_n</math> او <math>d</math> وپېژني.</li> <li>• په نوموړي رابطه کې نامعلوم یا غوښتل شوي حد یا برخه پیدا کړای شي.</li> <li>• د اړتیا په وخت کې لاس ته راغلی فورمول او نورې برخې یې وکاروي.</li> </ul>	<p>- پوهنیزه</p> <p>- مهارتي</p> <p>- ذهنيتي</p>
<p>2- د زده کړې لارې:</p> <p>ډلېبیز، انفرادي، پوښتنه او ځواب ...</p>	
<p>3- مرستندويه مواد:</p> <p>د اړتیا وړ مواد ...</p>	
<p>4- د ورودی برخې توضیح (5 دقیقې)</p> <p>بناغلی ښوونکي: له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته یو ځل بیا د زده کوونکو پام د تېر لوست شکل ته راوگرځوی او وپوښتي:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• که چیرې په یوه حسابي ترادف کې لومړی حدی (<math>a</math>)، گډ توپیر (<math>d</math>) راکړل شوی وي، څوک کولای شي <math>n</math> - ام حدی پیدا کړي؟</li> <li>• څوک د <math>a_n = 2, 6, 10, \dots</math> په ترادف کې لومړی او گډ توپیر ښودلای شي.</li> </ul> <p>ښایي چې زده کوونکي ځوابونه ووايي له هغه پرته تاسو ځوابونه ورته و وایاست او بیا د لوست بهیر پیل کړئ.</p>	
<p>5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې):</p> <p>بناغلی ښوونکي زده کوونکي په مناسبو ډلو و وېشي او د کتاب حسابي ترادف یعنی <math>5, 7, 9, 11, 13, \dots</math> پر تخته ولیکي ورته و وایاست چې هره ډله دې له خبرو او بحث وروسته په نوموړي ترادف کې لومړی حد، گډ توپیر پیدا او بیا دې د یوې رابطې له مخې دویم حد، دریم حد، څلورم حد، پنځم حد، شپږم حد... ونیسي او هره ډله دې کونښن وکړي چې د پیدا شوو رابطو له مخې د <math>a_n</math> عمومي رابطه هم په لاس راوړي. د فعالیت له سرته رسولو وروسته د دوو ډلو استازي خپل سرته رسولی فعالیت نورو ته تشریح کوي د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړي.</p> <p>د موضوع د مهموالي له امله تاسو هم په بشپړ ډول د <math>n</math> - ام حد پیدا کولو لپاره گام په گام کار وکړئ چې په پایله کې د <math>a_n = a + (n-1)d</math> عمومي فارمول ثبوت او په لاس راوړئ، ترڅو زده کوونکي وکولای شي په نوموړي رابطه کې <math>n, a, d</math> او <math>a_n</math> وپېژني، بیا دوه داوطلب زده کوونکي په وارسره تختې ته راوغواړئ چې هر یو د په ترتیب سره لومړی مثال او دویم مثال پر تخته حل کړي او نور زده کوونکي دې هم عینې مثالونه د کتاب له لېدو پرته په خپلو کتابچو کې حل کړي. که چیرې د تختې په حل کې کومه تېروتنه وي، د یو بل داوطلب زده کوونکي په واسطه یې اصلاح کړئ، د ستونزو په</p>	

صورت کې مرسته او لارښوونه وکړئ، په پای کې دې زده‌کونکي خپل حلونه د تختې له حل سره پرتله او تېروتنې دې اصلاح کړي.

### 6- د زده‌کړې تحکیم: (7) دقیقې

ښاغلی ښوونکی د لوست د لارښه تحکیم او پوهې لپاره د کتاب 123 مخ فعالیت په لاندې ډول زده‌کونکو ته ورکړئ چې په خپلو کتابچو کې حل کړي:

$$a_4 = 3, \quad a_{25} = 87, \quad -315 \text{ ام حد یې په لاس راوړی.}$$

$$a_4 = a + (n-1)d = a + (4-1)d \Rightarrow a + 3d = 3$$

$$a_{25} = a + (n-1)d = a + (25-1)d \Rightarrow \pm a \pm 24d = \pm 87$$

$$-21d = -84 \Rightarrow d = \frac{-84}{-21} = 4$$

په پورته معادلو کې لومړی  $a$  او  $d$  پیدا، وروسته 315 حد دې پیدا کړي، لومړی دې زده‌کونکي په خپلو کتابچو کې حل او په پای کې دې یو داوطلب زده‌کونکی هغه پر تخته حل کړي، ترڅو زده‌کونکي په خپلو تېروتنو پوه شي.

### 7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

د دې لپاره چې ښاغلی ښوونکی د زده‌کړې په هکله ډاډمن شي، نو د لاندې پوښتنو په کولو سره دې زده‌کونکي و ارزوي:

$$1. \text{ د } a_n = a + (n-1)d \text{ رابطه په پام کې ونیسئ:}$$

-  $a_n$  د ترادف څوم حد ښيي؟

-  $a$  د ترادف کوم حد ښيي؟

-  $n$  په یوه ترادف کې څه شي ښيي.

-  $d$  په یوه ترادف کې څه شي ښيي.

کوښښ وکړئ چې ځوابونه له زده‌کونکو څخه په لاس راوړئ.

### 8- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

1- د مخامخ ترادف 35-ام حد پیدا کړئ.  $\dots, 12, 5, -2$

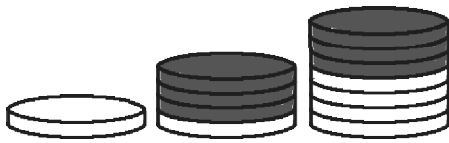
**حل** پوهېږو چې پورتنۍ ترادف یو حسابي ترادف او گډ توپیر یې 7 دی، نو د  $n$ -ام حد پیدا کولو له فورمول څخه کار اخلو.

$$\left. \begin{array}{l} a = -2 \\ d = 7 \\ n = 35 \\ a_{35} = ? \end{array} \right\} \begin{array}{l} a_n = a + (n-1)d \\ a_{35} = -2 + (35-1) \cdot 7 \\ a_{35} = -2 + 34 \cdot 7 \\ a_{35} = -2 + 228 = 236 \end{array}$$

$$a_{35} = 236$$



## څلورم څپرکی: ترادفونه



د حسابي ترادف وسطي حد

د درسي کتاب (123) مخ

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• د حسابي ترادف د وسطي حد هارمونيکي ترادف پر مفهوم پوه شي.</li> <li>• د حسابي ترادف وسطي حد او هارمونيکي پوښتنې حل کړای شي.</li> <li>• د پورته پوهې او مهارت په درلودلو سره د موضوع په اړه ورځني ستونزې حل او په ځان ډاډمن شي.</li> </ul>	<p>- پوهنيزې</p> <p>- مهارتي</p> <p>- ذهني</p>
<p>2- د زده کړې لارې:</p> <p>ډله‌ييز، انفرادي، پوښتنه او ځواب ...</p>	
<p>3- مرستندويه مواد:</p> <p>د اړتيا وړ مواد ...</p>	
<p>4- د وړودي برخې</p> <p>توضیح (5 دقيقې)</p> <p>ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې وروسته د موضوع د ښه پوهېدو لپاره د زده‌کوونکو پام لاندې پوښتنو ته راوگرزوي:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• څوک کولای شي د 5 او 7 عددونو حسابي وسط پيدا کړي.</li> <li>• د 19 او 17 عددونو ترمنځ کوم عدد دی؟</li> </ul> <p>کوښښ وکړئ چې ځوابونه له زده‌کوونکو څخه په لاس راوړئ له هغه پرته تاسو د هرې پوښتنې ځواب د اړوندې عمليې په واسطه پيدا کړئ.</p>	
<p>5- د لوست بهير او فعاليت (28 دقيقې):</p> <p>ښاغلی ښوونکی زده‌کوونکي په مناسبو ډلو ووېشي ورته ووايست که چيرې د يوه حسابي ترادف درې پرله پسې حدونه؛ لکه: <math>a_n, a_{n+1}</math> او <math>a_{n-1}</math> ولرو، په داسې حال کې چې <math>a_{n-1}</math> او <math>a_{n+1}</math> معلوم وي، څرنگه کولای شو د <math>a_n</math> يعنې وسطي حد پيدا کړو.</p> <p>زده‌کوونکي له کتاب څخه استفاده نه کوي په خپلو ډلو کې دې بحث ورباندې وکړي او فعاليت دې سرته ورسوي، په پای کې د دريو ډلې استازي خپل کار نور و ته توضيح کوي د تېروتنې په صورت کې مرسته وکړي که چيرې ټولو ډلو تېروتنې کړي وي، تاسو د <math>\frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}</math> په افاده کې د هر يوه قيمت په اېښودلو سره <math>a_n</math> وسطي حد په لاس راوړئ.</p> <p>يو داوطلب زده‌کوونکي ته بلنه ورکړي چې د فورمول په تطبيق کولو سره لومړی مثال پر تخته حل کړي په همدې ډول دويم داوطلب زده‌کوونکي تخته ته راوغواړي چې دويم مثال پر تخته حل او د <math>x</math> قيمت له پيدا کولو وروسته يې ترادف وليکي او نور زده‌کوونکي دې عين کار د کتاب له لېدو پرته په خپلو کتابچو کې سرته ورسوي. په پای کې دې خپل حلونه له تخته سره پرته او تېروتنې دې اصلاح کړي.</p>	

په همدې ډول د 123 مخ يادونه چې د يوه حسابي ترادف له لومړي حده پرته دوه نور حدونه ورکړل شوي دي. د هغو له مخې دې گډ توپير په لاس راوړي. (ثبوت يې د زده‌کوونکو دنده ده) که چيرې زده‌کوونکي ونه شي کولای، تاسو يې له اضافي معلوماتو څخه په استفادې سره ثبوت کړئ.

### 6- د زده کړې تحکيم: (7) دقيقې

بناغلی بنوونکی د لوست د لابنه تحکيم او پوهې لپاره د کتاب 124 مخ لومړی مثال زده‌کوونکو ته ورکړي چې د کتاب له لېدو پرته يې په خپلو کتابچو کې حل کړي او ترادف يې بشپړ کړي. د کار څارنه وکړي. په پای کې يو داوطلب زده‌کوونکی نوموړی مثال پر تخته حل کړي او نور زده‌کوونکي دې خپل حلونه ورسره پرته کړي.

### 7- د لوست د پايلې ارزونه: (5) دقيقې

ددې لپاره چې بنوونکی د زده‌کړې په هکله ډاډمن شي، نو زده‌کوونکي دې د لاندې پوښتنو په کولو سره و ارزوي:

1. که چيرې  $a_n$  د يوه حسابي ترادف وسطي حد وي د هغه مخکنی او وروستی حد په څه شي سره بنودلای شو؟
2. د يوه حسابي ترادف وسطي حد د يوه حسابي ترادف د دوو پرله پسې حدونو له مجموع سره مساوي کيدا شي؟
3. که د يوه ترادف درې پرله پسې حدونه د  $a_n, a_{n-1}$  او  $a_{n+1}$  ولرو د نوموړي حسابي ترادف وسطي حد د کوم فورمول په واسطه افاده کېږي.

کوښښ وکړئ چې ځوابونه له زده‌کوونکو څخه په لاس راوړئ له هغه پرته تاسو ورته تشریح او توضیح کړئ.

### 8- د بنوونکي لپاره اضافي معلومات:

بناغلی بنوونکی که چيرې په حسابي ترادف کې يوازې د  $n$ -ام او  $m$ -ام حدونه معلوم وي؛ نو گډ توپير يې داسې په لاس راوړو:

$$a_n = a + (n-1) \cdot d \quad \dots \text{ I}$$

$$a_m = a + (m-1) \cdot d \quad \dots \text{ II}$$

له I معادلې څخه II معادله تفریقوو:

$$\begin{aligned} a_n - a_m &= a + (n-1) \cdot d - \{a + (m-1) \cdot d\} \\ &= a + (n-1) \cdot d - a - (m-1) \cdot d \\ &= a + nd - d - a - md + d \\ &= nd - md = (n-m)d \end{aligned}$$

$$a_n - a_m = (n-m)d \Rightarrow d = \frac{a_n - a_m}{n-m}$$

### 9- د تمرين او پوښتنو ځوابونه:

د درسي کتاب د 126 مخ دريمې پوښتنې حل.

3- د  $2\sqrt{2}$  او  $16\sqrt{2}$  تر منځ حسابي وسط په لاس راوړئ.

**حل** د حسابي وسط له عمومي فورمول څخه په کار اخېستني سره لرو چې:

$$\text{وسطی حد } a_n = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}$$

$$A = \frac{a_1 + a_2}{2} = \frac{2\sqrt{2} + 16\sqrt{2}}{2} = \frac{18\sqrt{2}}{2} \Rightarrow A = 9 \cdot \sqrt{2}$$

## څلورم څپرکی: ترادفونه

هارمونيکي ترادف

د درسي کتاب (124) مخ

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• د هارمونيکي ترادف او هارمونيکي حسابي ترادف په مفهومونو پوه شي.</li> <li>• هارمونيکي ترادفونه او د هغه عکس تشخيص کړای شي.</li> <li>• د يوه حسابي ترادف لپاره هارمونيکي ترادف په پيدا کولو سره خوښي ښکاره کوي.</li> </ul>	<p>- پوهنيزه</p> <p>- مهارتي</p> <p>- ذهني</p>
<p>2- د زده کړې لارې:</p> <p>انفرادي، ډله‌ييز، پوښتنه او ځواب ...</p>	
<p>3- مرستندويه مواد:</p> <p>د اړتيا وړ مواد ...</p>	
<p>4- د وړودي برخې</p> <p>توضیح (5 دقيقې)</p> <p>ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې وروسته د زده‌کوونکو پام لاندې پوښتنو ته راوگرزوي:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• څوک د 5 عدد معکوس عدد پرتخته لیکي؟</li> <li>• څوک ویلای شي چې <math>\frac{1}{25}</math> د کوم عدد معکوس دی؟</li> <li>• که چیرې <math>a</math> هر حقيقي عدد وي، څوک ویلای شي د هغه معکوس څه ډول لیکلای شو؟</li> </ul> <p>کونښن وکړی چې څو ابونه له زده‌کوونکو څخه په لاس راوړی له هغه پرته تاسو مرسته وکړی.</p>	
<p>5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقيقې):</p> <p>ښاغلی ښوونکی یو حسابي ترادف پرتخته ولیکي او یو داوطلب زده‌کوونکی تختې ته راوغواړی چې ددې ترادف د هر حد معکوس په پرله پسې ډول چې ترادف جوړ کړي، ولیکي. که چیرې زده‌کوونکي یې ولیکي ښه به وي له هغه پرته تاسو یې په بشپړ ډول ورته ولیکي او د هغه له مخې د هارمونيکي ترادف تعریف وکړی.</p> <p>همدارنگه ورته ووايست که چیرې <math>a_n</math> یو حسابي ترادف وي او د هغه معکوس <math>\frac{1}{a_n}</math> هم یو ترادف وي، نو نوموړی ترادف یو هارمونيکي ترادف بلل کېږي.</p> <p>همدارنگه درې داوطلب زده‌کوونکي په وارسره تختې ته راوغواړی چې یو یې لومړی مثال بل یې دویم مثال او دریم یې، دریم مثال پرتخته حل کړي، نور زده‌کوونکي دې د کتاب له لېدو پرته په خپلو کتابچو کې کار وکړي او خپل حلونه دې له تختې سره پرتله کړي، د ستونزې په صورت کې مرسته وکړی.</p> <p>زده‌کوونکي په مناسبو ډلو ووېشي ورته ووايست د هارمونيکي حسابي وسط فورمول د درې پرله پسې حدونو؛ لکه <math>a_{n-1}, a_n, a_{n+1}</math> په داسې حال کې چې <math>n = 2, 3, 4, \dots</math> وي پيدا کړی، زده‌کوونکي په خپلو ډلو کې بحث ورباندې کوي او فعالیت سرته رسوي.</p>	

د فعالیت په پای کې د دريو ډلو استازي خپل کار نورو ته توضیح او معلومات ورکوي، د تېروتنې په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړي، په پای کې ښوونکي د مخکینیو معلوماتو له مخې عمومي فورمول؛ یعنې  $a_n = \frac{2(a_{n-1})(a_{n+1})}{a_{n-1} + a_{n+1}}$  ورته توضیح او تشریح کوي او نوموړي افاده په لاس راوړي اړوند مثال دې پر تخته حل کوي.

### 6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

ښاغلی ښوونکي د لوست د لاینه تحکیم او پوهې لپاره د هارمونيکي ترادف او هارمونيکي حسابي وسط په اړه لاندې پوښتنې زده کوونکو ته ورکړي چې په خپلو کتابچو کې حل یې کړي:

- د ... 4, 7, 10, 13, 16 حسابي ترادف، هارمونيکي ترادف وليکئ.
- د 4 او 10 عددونو هارمونيکي حسابي وسط پیدا کړئ د ستونزو په صورت کې مرسته وکړئ.

د کار څارنه وکړئ په پای کې دې داوطلب زده کوونکي نوموړي پوښتنې پر تخته حل کړي او نور زده کوونکي دې خپل حلونه ورسره پر تله کړي.

### 7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ددې لپاره چې ښوونکي ډاډمن شي ایا زده کړه شوې ده او که نه؟ نو د لاندې پوښتنو په کولو سره دې زده کوونکي وازموي:

1. څوک هارمونيکي ترادف تعریفوي؟
2. که چیرې په یوه هارمونيکي ترادف کې  $a_1 = \frac{1}{2}$  او  $d = -2$  وي، هارمونيکي ترادف یې پیدا کړئ.
3. ایا هر حسابي ترادف هارمونيکي ترادف لري؟

کوښښ وکړئ چې څو اوبونه له زده کوونکو څخه په لاس راوړئ او د زده کړې په هکله ځان ډاډمن کړئ.

### 8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات:

ښاغلی ښوونکي ښايي چې زده کوونکي ددې پوښتنې په برخه کې ستونزې ولري، ایا د طبیعي طاقو عددونو معکوس ترادف، یو هارمونيکي ترادف کیدای شي  $n$  - ام حد یې وليکئ.

طبیعي طاق عددونه:  $1, 3, 5, 7, 9, \dots, 2n+1$

په پورته ترادف کې  $d = 2, a = 1$  دی؛ نو معکوس یې عبارت دی له:  $\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{9}, \frac{1}{7}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}, 1$  په دې صورت کې پورتنی ترادف یو هارمونيکي ترادف دی  $n$  - ام حد یې له  $\frac{1}{2n+1}$  څخه عبارت دی چې  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

قیمتونه اڅپستلای شي او پورتنی ردیف په لاس راتلای شي.

9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

د درسي کتاب د 126 مخ د پنځمې پوښتنې حل.

5- له لاندې ترادفونو څخه کوم یو حسابي ترادف دی؟

a)  $2, \frac{9}{4}, \frac{5}{2}, \frac{11}{4}, \dots$

b)  $3, 6, 9, 12, \dots$

**حل** که چېرې د دواړو ترادفونو د هر دوو پرله پسې حدونو گډ توپیر ثابت عدد وي؛ نو نوموړي ترادفونه حسابي ترادف کیدای شي.

د a جزء حل

$$d = \frac{9}{4} - \frac{2}{1} = \frac{9-8}{4} = \frac{1}{4}$$

$$d = \frac{5}{2} - \frac{9}{4} = \frac{10-9}{4} = \frac{1}{4}$$

$$d = \frac{11}{4} - \frac{5}{2} = \frac{11-10}{4} = \frac{1}{4}$$

د a جزء ترادف حسابي ترادف دی او گډ توپیر یې  $\frac{1}{4}$  دی.

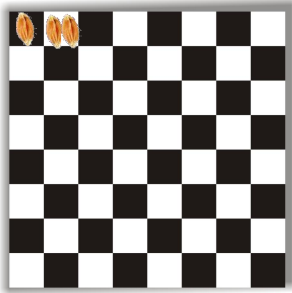
د b جزء حل

$$d = 6 - 3 = 3$$

$$d = 9 - 6 = 3$$

$$d = 12 - 9 = 3$$

د b جزء ترادف هم حسابي ترادف دی او گډ توپیر یې عبارت له 3 څخه دی.



## څلورم څپرکی: ترادفونه

هندسي ترادف (Geometric sequences)

د درسي کتاب (127) مخ

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• د هندسي ترادف په مفهوم پوه شي.</li> <li>• د هندسي ترادف په اړه پوښتنې حل او له حسابي ترادف سره يې توپير وکړای شي.</li> <li>• د پورته پوهې او مهارت په پيدا کولو سره په ځان باور پيدا کوي.</li> </ul>	<p>- پوهنيزه</p> <p>- مهارتي</p> <p>- ذهني</p>
<p>2- د زده کړې لارې:</p> <p>ډله‌ييز، انفرادي، پوښتنه او ځواب ...</p>	
<p>3- مرستندويه مواد:</p> <p>د اړتيا وړ مواد ...</p>	
<p>4- د وړودي برخې</p> <p>توضیح (5 دقيقې)</p> <p>بناغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته د زده‌کوونکو پام د کتاب وړودي شکل ته راوگرزوي او د شطرنج تخته او دهغه خانې (کورونه) روپېژني. بيا داسې ورته ووايست او وپوښتي:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• که چيرې د يوې تختې په لومړۍ خانه کې يوه دانه غنم په دويمه خانه کې دوه دانې غنم په همدې ترتيب په هره وروستۍ خانه کې د مخکينۍ خانې دوه برابره غنم کېښودل شي ووايست چې:</li> </ul> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. په دريمه خانه کې څو دانې غنم کېږي؟</li> <li>2. په شپږمه خانه کې څو دانې غنم کېږي؟</li> <li>3. په اتمه خانه کې څو دانې غنم کېږي؟</li> <li>4. په 64 خانه کې څو دانې غنم کېږي؟</li> </ol> <p>ښايي چې زده‌کوونکي د درې لومړيو پوښتنو ځوابونه ووايي؛ خو د 64 خانې د غنمو شمېر پيدا کول ستونزمن کار دی.</p>	
<p>5- د لوست بهير او فعاليت (28 دقيقې):</p> <p>زده‌کوونکي په مناسبو ډلو ووېشي ورته ووايست چې د کتاب 127 مخ فعاليت په خپلو ډلو کې له بحث او خبرو وروسته سرته ورسوي، د فعاليت په پای کې د دريو ډلو استازي خپل فعاليت نورو ته توضيح او تشریح کوي، د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړي. په پای کې تاسو موضوع داسې تشریح کړي:</p> <p>که چيرې <math>a_1</math> د هندسي ترادف لومړی حد او <math>q</math> يو ثابت عدد وي په عمومي ډول يو هندسي ترادف داسې ليکل کېږي:</p> $a_1, a_1q, a_1q^2, a_1q^3, a_1q^4, \dots, a_1q^{n-1}$	

چې دلته  $a_1$  لومړی حد او  $q$  گډ نسبت دی، یو هندسي ترادف د گډ نسبت او لومړي حد په درلودلو سره پېژندل کېږي او داسې تعريف کېږي:

هغه ترادف چې د دوو پرله پسې حدونو ترمنځ نسبت یو ثابت عدد ( $q$ ) وي، د هندسي ترادف په نامه یادېږي. ورته وایاست د حسابي ترادف په شان، په هندسي ترادف کې هم متزايد او متناقص ترادف شته چې د ( $q$ ) د لاندې په خصوصیت سره پېژندل کېږي:

- که چېرې  $q > 1$  وي، ترادف متزايد دی، د یوه مثال په واسطه یې توضیح کړی.
- که چېرې  $q < 1$  وي، ترادف متناقص دی، په یوه مثال کې وښایاست.
- که چېرې  $q = 1$  وي، ثابت ترادف په لاس راځي.

بیا یو داوطلب زده‌کوونکی تختې ته راوغوړی چې د کتاب د 128 مخ لومړی مثال پر تخته حل کړي، نور زده‌کوونکي دې د کتاب له لېدو پرته په خپلو کتابچو کې حل کړي او د تختې له حل سره دې پرتله کړي، د ستونزو په صورت کې مرسته وکړی.

### 6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

ښاغلی ښوونکی د لوست د لابنه تحکیم او پوهې لپاره د کتاب د 128 مخ دا فعالیت ورکړی چې په خپلو کتابچو کې یې حل کړي.

- په یوه هندسي ترادف کې  $a_1 = 2$  او  $q = 3$  دي  $a_2, a_3, a_4$  حدونه پیدا کړی.

**حل:**

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = a_1 q = 2 \cdot 3 = 6$$

$$a_3 = a_1 q^2 = 2 \cdot 3^2 = 2 \cdot 9 = 18$$

$$a_4 = a_1 q^3 = 2 \cdot 3^3 = 2 \cdot 27 = 54$$

په پای کې دې یو داوطلب زده‌کوونکی پورتنی پوښتنه پر تخته حل کړي او نور زده‌کوونکي دې خپل تېروتنې اصلاح کړي.

### 7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

د دې لپاره چې ښوونکی د زده‌کړې په هکله ډاډمن شي د کتاب د 128 مخ دویم مثال زده‌کوونکو ته ورکړي چې په خپلو کتابچو کې حل او د  $q$  ثابت عدد له مخې متزايد ترادف او متناقص ترادف وښيي.

### 8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات:

ښاغلی ښوونکی د ریښوونو بل ډول له هندسي ریښوونو څخه عبارت دی د  $a_1, a_2, \dots, a_n$  یو ریښوونکی هندسي ریښوونکی (*Geometric sequences*) یا هندسي تصاعد (*Geometric progression*) په نامه یادېږي چې هر حد یې د مخکیني حد له ضربولو څخه په یو مشخص او ثابت عدد کې حاصل شي او  $n$ -ام حد یې عبارت دی له  $aq^{n-1}$  څخه. تاسو پوهېږئ چې په عمومي ډول یو هندسي ریښوونکی د لاندې شکل لرونکی دی:

$$a, a \cdot q, a \cdot q^2, a \cdot q^3, \dots, aq^{n-1}$$

$q$  مشترک نسبت بلل کېږي.

همدارنگه که چېرې څوک پوښتي که  $b, a$  او  $c$  یو هندسي ریښوونکی جوړ کړي، د هغو ترمنځ به څه ډول رابطه شتوالی

ولري. ( $q$  د هغو مشترک نسبت دی)

$$b = aq \quad c = bq = (aq) \cdot q = aq^2$$

$$b^2 = a^2 \cdot q^2 \Rightarrow b^2 = a \cdot a \cdot q^2 \Rightarrow b^2 = a \cdot c, \quad aq^2 = c \Rightarrow b^2 = ac$$

يعنې  $b$  د  $a$  او  $c$  وسطي حد دی.

### 9- د تمرين او پوښتنو ځوابونه:

د درسي کتاب د 132 مخ د لومړي او دويمې پوښتنې حل.

1. د هندسي ترادف 5 حدونه داسې وليکئ چې لومړی حد يې 5 او اخيري حد يې  $\frac{5}{16}$  وي.

**حل**

$$\left. \begin{array}{l} a = 5 \\ n = 5 \\ a_n = \frac{5}{16} \\ q = ? \end{array} \right\} \begin{array}{l} a_n = a \cdot q^{n-1} \Rightarrow \frac{5}{16} = 5 \cdot q^{5-1} \\ \frac{5}{16} = 5 \cdot q^4 \Rightarrow q^4 = \frac{5}{16 \cdot 5} = \frac{5}{80} \\ \sqrt[4]{q^4} = \sqrt[4]{\frac{5}{80}} \Rightarrow q \approx \frac{1.5}{3} \approx \frac{1}{2} \end{array}$$

$$5, 5\left(\frac{1}{2}\right), 5\left(\frac{1}{2}\right)^2, 5\left(\frac{1}{2}\right)^3, 5\left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$$5, \frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{8}, \frac{5}{16}$$

ترادف عبارت دی له:

2. له لاندې ترادفونو څخه کوم يو يې هندسي ترادف دی؟

$$a) \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \dots$$

$$b) -4, -2, 0, 2, 4, \dots$$

**حل (a)** که چيرې د دواړو ترادفونو د هر دوو پرله پسې حدونو گډ نسبت ثابت عدد وي؛ نو نوموړي ترادفونه هندسي ترادفونه کېدای شي.

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}} = -\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{3}{2}\right) = -1$$

$$q = \frac{a_3}{a_2} = \frac{\frac{2}{3}}{-\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -1 \Rightarrow q = \frac{a_4}{a_3} = \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}} = -\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{3}{2}\right) = -1$$

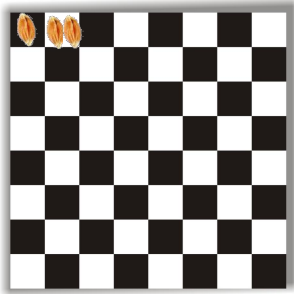
د  $a$  جزء يو هندسي ترادف دی.

**حل (b)**

$$q = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}, \quad q = \frac{0}{-2} = 0, \quad q = \frac{4}{2} = 2$$

له گډ نسبت څخه موږ لرو چې د  $b$  جزء ترادف، هندسي ترادف نه دی.





## څلورم څپرکی: ترادفونه

په هندسي ترادف کې د  $n$  - ام حد پيدا کول او د هندسي ترادف وسطي حد

د درسي کتاب (130) مخ

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• په هندسي ترادف کې د <math>n</math> - ام حد او وسطي حد په مفهومونو پوه شي.</li> <li>• په هندسي ترادف کې د <math>n</math> - ام حد او وسطي حد تشخيص او پوښتنې حل کړای شي.</li> <li>• د پورتنیو مفهومونو په پوهېدو سره خوښ او په ځان باور پيدا کوي.</li> </ul>	<p>د زده کونکي به د لوست په پای کې و توانېږي چې:</p>
<p>2- د زده کړې لارې:</p> <p>ډله‌ييز، انفرادي، پوښتنه او ځواب ...</p>	
<p>3- مرستندويه مواد:</p> <p>د اړتيا وړ مواد ...</p>	
<p>4- د ورودی برخې توضیح (5 دقیقې)</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• په يوه هندسي ترادف کې <math>a</math> څه شی بڼیې؟</li> <li>• په يوه هندسي ترادف کې <math>q</math> څه شی بڼیې؟</li> <li>• په يوه هندسي ترادف کې <math>a_n</math> څه شی بڼیې؟</li> </ul> <p>کونښن وکړئ چې څو اېونه له زده‌کوونکو څخه واورئ له هغه پرته تاسو هریو وروپېژنئ.</p>	
<p>5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې):</p> <p>زده‌کوونکي په مناسبو ډلو و وېشئ او د هندسي ترادف لاندې حدونه پر تختې وليکئ:</p> $a, a \cdot q, a \cdot q^2, a \cdot q^3, a \cdot q^4, \dots$ <p>ورته و وایاست په خپلو ډلو کې له خبرو او بحث وروسته د پورتنی هندسي ترادف <math>n</math> - ام حد پيدا کړئ، همدارنگه د دوو پرله‌پسې حدونو له وېشلو څخه د <math>q</math> گډ نسبت په لاس راوړئ، بیا د دوو ډلو استازي راځي او خپل سرته رسولي فعالیت نور و تشریح کوي که چیرې کومې ډلې تېروتنه کړي وي مرسته او لارښوونه وکړئ.</p> <p>په پای کې تاسو د عمومي نظر په اچولو سره <math>n</math> - ام حد یعنی <math>a_n = a \cdot q^{n-1}</math> د پيدا کولو طریقه توضیح او معلومات ورکړئ، ترڅو زده‌کوونکي د هغه په مفهوم لاینه پوه شي.</p> <p>بیا دوه داوطلب زده‌کوونکي په وار سره راوغواړئ چې یو یې لومړی مثال او بل یې دویم مثال پر تخته حل او تشریح کړي نور زده‌کوونکي د کتاب له لېدلو پرته په خپلو کتابچو کې حل او خپل حلونه دې له تختې سره پرتله کړي.</p> <p>په همدې ډول زده‌کوونکو ته و وایاست که چیرې <math>M</math> د یو تناسب طرفین <math>a</math> او <math>b</math> وسطین وي، په څه ډول کولای شو د <math>M</math> قیمت د <math>a</math> او <math>b</math> حقیقي مثبتو عددونو په واسطه پيدا کړو په خپلو ډلو کې دې کار وکړي، چې د <math>M</math> قیمت د <math>a</math> او <math>b</math> له جنسه پيدا کړي. زده‌کوونکي په خپلو ډلو کې کار کوي او بیا د درېو ډلو استازي خپل فعالیت نورو ته تشریح کوي د ستونزو په صورت کې دې مرسته او لارښوونه وکړي.</p>	

په پای کې تاسو د تناسب په جوړلو سره د  $M = \sqrt{a \cdot b}$  رابطه تشریح او معلومات ورکړئ همدارنگه ورته و وایاست که چیرې د هندسي ترادف درې پرله پسې حدونه؛ لکه:  $a_n, a_{n+1}$  او  $a_{n-1}$  ولرو په دې صورت کې لیکلای شو چې:

$$q = \frac{a_n}{a_{n-1}} \dots \text{I}$$

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n} \dots \text{II}$$

همدارنگه:

د I او II له پرتلې لیکو:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \Rightarrow a_n^2 = (a_{n+1})(a_{n-1}) \Rightarrow a_n = \sqrt{(a_{n+1})(a_{n-1})}$$

پورتني دواړه رابطې د يو هندسي ترادف د وسطي حد د پيدا کولو طريقه ده. په پای کې يو داوطلب زده‌کونکی راوغواړي چې د کتاب د 131 مخ دريم مثال پر تخته حل کړي او نور زده‌کونکي دې هم دا مثال د کتاب له لېدلو پرته حل، او حلونه دې له تختې سره پرتله کړي، تېروتنې دې وپوښتي او اصلاح دې کړي.

### 6- د زده کړې تحکيم: (7) دقيقې

بناغلی ښوونکی د لوست د لاینه تحکيم لپاره د کتاب 131 مخ څلورم مثال پر تخته وليکي، زده‌کونکو ته و وایاست چې د کتاب له لېدو پرته يې په انفرادي توگه په خپلو کتابچو کې حل کړي، بيا يو داوطلب زده‌کونکی راوغواړي چې پر تخته يې حل کړي که چیرې تېروتنه کوي، مرسته او لارښوونه وکړي.

### 7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقيقې

ددې لپاره چې ښوونکی ډاډمن شي ایا زده‌کړه شوې ده او که نه؟ د کتاب 131 مخ وروستی فعالیت دې له مثال سره ورکړي چې په خپلو کتابچو کې يې حل کړي، د کار څارنه وکړي، که چیرې کوم زده‌کونکی پوښتنه کوي، ښوونکی دې مرسته وکړي. په پای کې دې دوه زده‌کونکي په وارسره راوغوښتل شي چې پر تخته يې حل کړي.

### 8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات:

بناغلی ښوونکی د درسي کتاب د 131 مخ فعالیت په لاندې توگه سرته ورسوي:

$$a, a \cdot q, a \cdot q^2, a \cdot q^3, a \cdot q^4, \dots$$

$$a_n = a \cdot q^{n-1}$$

$$\frac{a_n}{a} = q^{n-1}$$

$$\sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a}} = q$$

په همدې ډول که چیرې درې پرله پسې حدونه  $a_{n-1}, a_n, a_{n+1}$  ولرو؛ نو  $q$  په لاندې ډول هم په لاس راځي:

$$q = \frac{a_n}{a_{n-1}}, \quad q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

په دې ځای  $a_{n-1}$  د  $a_n$  مخکینۍ حد او همدارنگه  $a_n$  د  $a_{n+1}$  مخکینۍ حد دی.

## 9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

د درسي کتاب د 132 مخ د دريمې، څلورمې او پنځمې پوښتنې حل.

3- د  $5, \frac{5}{2}, \frac{5}{8}, \dots$  هندسي ترادف دولسم حد پيدا کړئ.

**حل**

$$a = 5$$

$$n = 12$$

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{5}{2}}{5} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{2}$$

$$a_{12} = a_1 \cdot q^{12-1} = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{11} = 5 \left(\frac{1}{2}\right)^{11} = \frac{5}{2048}$$

4- د  $\sqrt{3}$ ،  $\frac{\sqrt{3}}{4}$  هندسي وسط په لاس راوړئ.

**حل**

$$M = \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{3})^2}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

5- د 27، ؟، ؟، ؟، ؟،  $\frac{1}{3}$  حدونو تر منځ درې هندسي وسطونه په لاس راوړئ.

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = \frac{1}{3} \\ n = 5 \\ a_5 = 27 \\ q = ? \end{array} \right\} \begin{array}{l} a_5 = a_1 \cdot q^{5-1} = a_1 q^4 \\ 27 = \frac{1}{3} \cdot q^4 \\ 81 = q^4 \Rightarrow \sqrt[4]{81} = \sqrt{q^4} \Rightarrow q = 3 \end{array}$$

$$a_1 = \frac{1}{3}$$

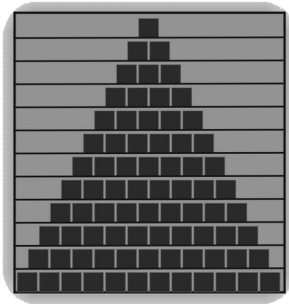
$$a_2 = a_1 \cdot q = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1$$

$$a_3 = a_1 \cdot q^2 = \frac{1}{3} \cdot 3^2 = \frac{1}{3} \cdot 9 = 3$$

$$a_4 = a_1 \cdot q^3 = \frac{1}{3} (3^3) = \frac{1}{3} \cdot 27 = 9$$

$$a_5 = a_1 \cdot q^4 = \frac{1}{3} \cdot 3^4 = \frac{1}{3} \cdot 81 = 27$$

$$\frac{1}{3}, 1, 3, 9, 27, \dots$$



## څلورم څپرکی: ترادفونه

د ترادفونو قسمي مجموعه

د درسي کتاب (133) مخ

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

<p>زده کوونکي به د لوست په پای کې و توانېږي چې:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• د ترادفونو د قسمي مجموعې په مفهوم پوه شي.</li> <li>• د ترادفونو د قسمي مجموعې پوښتنې حل کړای شي.</li> <li>• زده کوونکي د پورته پوهې اڅېستلو او مهارت په سرته رسولو سره خوښی ښکاره کوي او په ځان باور پیدا کوي.</li> </ul>	<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- پوهنيزې</li> <li>- مهارتي</li> <li>- ذهني</li> </ul>
<p>دلەبیز، انفرادي، پوښتنه او ځواب ...</p>	<p>2- د زده کړې لارې:</p>
<p>د اړتیا وړ مواد ...</p>	<p>3- مرستندويه مواد:</p>
<p>ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې وروسته د زده کوونکو پام د کتاب وروډي موضوع ته راوگرزوي او وپوښتي:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• یوه زده کوونکي ته و وایاست چې له پورته څخه کښته خواته د الماری د لسم کتار د قوطیو شمېر څو دي؟</li> <li>• زده کوونکي هغه شمېرې، د قوطیو له شمېرلو وروسته ځواب وایي.</li> <li>• په همدې ډول زده کوونکو ته و وایاست تاسو هر یو په الماری کې د ټولو قوطیو شمېر پیدا کړئ.</li> </ul> <p>زده کوونکي شمېرې، هر یو په وار سره خپل ځواب وایي، وگورئ چې ځوابونه یې سم دي او که نه؟ په پای کې سم ځواب پر تخته ولیکئ او بیا د لوست بهیر پیل کړئ.</p>	<p>4- د وروډي برخې توضیح (5 دقیقې)</p>
<p>5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې):</p> <p>زده کوونکي په مناسبو ډلو ووېشي او ورته و وایاست چې د کتاب د 133 مخ فعالیت له خبرو او بحث وروسته په خپلو ډلو کې سرته ورسوي، بیا د هرې ډلې استازی راځي د خپلې ډلې کار نورو ته توضیح کوي، ښایي چې د لومړي او دویمې پوښتنو ځوابونه د هغوی لپاره اسانه وي، خو د <math>n</math> - ام حد د جمعې حاصل پیدا کول به ورته ستونزمن کار وي، تاسو ورته و وایاست چې حقیقتاً د یو ترادف د زیاتو یادې نهایت د حدونو د جمعې حاصل پیدا کول ستونزمن کار دی؛ خو په عمومي ډول د <math>a_1, a_2, a_3, \dots, a_n</math> ترادف د <math>n</math> لومړیو حدونو د جمعې حاصل داسې لیکو:</p> $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i$	

چې په پورته افاده کې  $\sum$  سېگما د یوې مجموعې په توګه د محاسبې د اسانتیا او لنډولو لپاره په کار وړل شوې ده او  $i$  د هغه د انډکس په نامه یادېږي چې  $i$  له یو څخه تر  $n$  پورې قیمتونه اخیستلای شي، یوازې  $i$  د انډکس په توګه نه استعمالېږي بلکې نور توري هم په کار وړي، خو  $i, n, k$  ډېر د پام وړ او معمول دي؛ لکه:  $\sum_{j=1}^n 2j$  او  $\sum_{i=1}^n 2i, \sum_{k=1}^n 2k$  هر یو یې له 1 څخه تر  $n$  پورې قیمت اخلي او جمع کېږي، لکه:

$$\sum_{j=1}^n 2j = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + 2n = 2 + 4 + 6 + \dots + 2n$$

همدارنگه د لومړي مثال  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{10}$  په غزیدلي شکل د جمعې حاصل پیدا او حل کړی. چې د موضوع پر مفهوم ښه پوه شي، د مثال له حل وروسته د دویم مثال دواړه اجزاوې پر تخته ولیکئ او دوه داوطلب زده‌کوونکي په وار سره تختې ته راوغواړئ چې یو یې د  $a$  جزء او بل یې د  $b$  جزء پر تخته حل کړي. نور زده‌کوونکي دې همدا مثال د کتاب له لېدلو پرته په خپلو کتابچو کې حل کړي، د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړئ په پای کې زده‌کوونکي خپل حل د تختې له حل سره پرتله او تېروتنې سموي.

#### 6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

ښاغلی ښوونکی د لوست د لارښه تحکیم او پوهېدو لپاره د کتاب 134 مخ دویم او څلورم مثالونه زده‌کوونکو ته ورکړئ چې د کتاب له لېدو پرته یې په خپلو کتابچو کې حل کړي، بیا دوه داوطلب زده‌کوونکي تختې ته راوغواړئ چې پر تخته یې حل او توضیح یې کړي، د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړئ.

#### 7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ددې لپاره چې ښاغلی ښوونکی ډاډمن شي چې ایا زده‌کوونکو لوست زده‌کړی دی او که نه؟ نو زده‌کوونکي دې د لاندې پوښتنو په کولو سره وازموي:

- په عمومي ډول د ترادف  $n$  لومړیو حدونو د جمعې د حاصل په ډول لیکلای شو:  $\sum_{i=1}^n ai$

- په  $\sum_{i=1}^n ai$  کې  $(i)$  د څه په نامه یادېږي؟

- په پورته افاده کې  $i$  کوم قیمتونه اخیستلای شي؟

کوښښ وکړئ چې څو اوبونه له زده‌کوونکو څخه په لاس راوړئ.

#### 8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات:

ښاغلی ښوونکی د پوښتنو په صورت کې زده‌کوونکو ته ویلای شي، کولای شو د  $n$  متحول په تعویض سره د  $L$  له جنس چې وروستی حد دی، د جفتو عددونو د ترادفونو قسمي مجموعه په لاس راوړو، د جفت عددونو لپاره  $a=2$  او  $d=2$  دي، اوس د  $L$  وروستی حد فارمول په پام کې نیولو سره د  $n$  قیمت په لاس راوړو:

$$L = a + (n-1) \cdot d \Rightarrow 2 + (n-1) \cdot 2 = 2 + 2n - 2$$

$$L = 2n \Rightarrow n = \frac{L}{2}$$

اوس  $S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$  په عمومي فورمول کې د  $n$  پر ځای  $\frac{L}{2}$  لیکو:

$$S = \frac{\frac{L}{2}}{2} \left[ 2a + \left( \frac{L}{2} - 1 \right) \cdot d \right] \Rightarrow \frac{\frac{L}{2}}{2} \left[ 2a + \left( \frac{L-2}{2} \right) 2 \right]$$

$$S = \frac{L}{4} (2a + l - 2) = \frac{2aL + L^2 - 2L}{4}$$

$$S = \frac{2L(a-1) + L^2}{4} = \frac{2l(2-1) + L^2}{4} = \frac{2l + l^2}{4} = \frac{l(l+2)}{4}$$

د دوو قوسونو په شکل داسې لیکلای شو:

$$S = \frac{(L+a)(l-a+2)}{4}$$

اوس غواړو چې د  $1, 3, 5, 7, 9, \dots$  طاق عددونو لپاره هم د  $L$  له جنس فورمول لاس ته راوړو، چې  $a=1$  او  $d=2$  کېږي، لرو چې:

$$L = a + (n-1)d$$

$$L = 1 + (n-1) \cdot 2 = 1 + 2n - 2 = 2n - 1 \Rightarrow L + 1 = 2n \Rightarrow n = \frac{L+1}{2}$$

$$S = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d] = \frac{1}{2} \cdot \frac{L+1}{2} \left[ 2a + \left( \frac{L+1}{2} - 1 \right) \cdot 2 \right]$$

$$S = \frac{L+1}{4} \left[ 2a + \frac{L+1-2}{2} \cdot 2 \right] = \frac{L+1}{4} (2a + L - 1) = \frac{(L+a)(2 \cdot a + l - 1)}{4} = \frac{(L+a)(2 \cdot 1 - L - 1)}{4}$$

$$S = \frac{(L+a)(l+1)}{4} = \frac{(L+a)(L+a-1+1)}{4} = \frac{(l+a)(l-1+2)}{4}$$

$$S = \frac{(l+a)(l-a+2)}{4}$$

په دریم حالت کې غواړو له وروستي حد څخه په کار اخیستنې د مسلسلو عددونو لپاره فورمول په لاس راوړو؛ یعنې د  $1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$  په پام کې نیسو، مونږ لرو چې:  $a=1$  او  $d=1$  دی.

$$L = a + (n-1) \cdot d = 1 + (n-1) \cdot 1 = 1 + n - 1$$

$$L = n$$

اوس په  $S = \frac{n}{2} [2a + (n-1) \cdot d]$  په فارمول کې د  $n$  پر ځای  $L$  ږدو:

$$S = \frac{n}{2} [2a + (n-1) \cdot d] = \frac{l}{2} [2a + (L-1) \cdot 1]$$

$$S = \frac{l}{2} (2a + L - 1) = \frac{l}{2} (2 \cdot 1 + L - 1) = \frac{L}{2} (l + 1)$$

$$S = \frac{L(L+1)}{2} \quad \text{یا} \quad S = \frac{(L+1)(L-1+1)}{2}$$

$$S = \frac{(L+1)(L-a+1)}{2}$$

## 9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

د درسي کتاب د 136 مخ د پوښتنو حل.

1. لاندې مجموعې حساب کړئ:

$$a) \sum_{i=1}^6 \sqrt{i} \quad b) 3 \sum_{i=1}^6 \frac{1}{i+1} \quad c) \sum_{k=1}^3 (4k^2 - 3k)$$

حل

$$a) \sum_{i=1}^6 \sqrt{i} = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + 2 + \sqrt{5} + \sqrt{6} = 3 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{6}$$

$$= 3 + 1.4 + 1.73 + 2.23 + 2.44 = 10.81$$

$$b) 3 \sum_{i=1}^6 \frac{1}{i+1} = 3 \left( \frac{1}{1+1} + \frac{1}{2+1} + \frac{1}{3+1} + \frac{1}{4+1} + \frac{1}{5+1} + \frac{1}{6+1} \right) = 3 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \right)$$

$$= 3 \left( \frac{420 + 280 + 210 + 168 + 140 + 120}{840} \right) = 3 \left( \frac{1338}{840} \right) = \frac{4041}{840} = 4.77$$

$$c) \sum_{k=1}^3 (4k^2 - 3k) = (4 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1) + (4 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2) + (4 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3) = (4 - 3) + (16 - 6) + (36 - 9)$$

$$= 1 + 10 + 27 = 38$$

2. لاندې مجموعې د  $\sum$  په شکل کې وليکئ.

$$a) \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{19}{20}$$

$$b) 1 + 4 + 9 + \dots + n^2$$

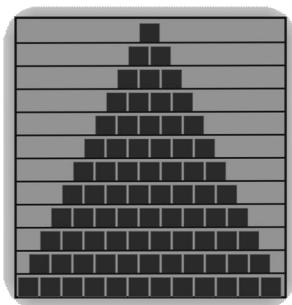
$$c) 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1)$$

حل

$$a) \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{19}{20} = \sum_{k=2}^{20} \frac{k-1}{k}$$

$$b) 1 + 4 + 9 + \dots + n^2 = \sum_{k=1}^n k^2$$

$$c) 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1) = \sum_{k=1}^n (2k - 1)$$



## څلورم څپرکی: ترادفونه

د ترادفونو قسمي مجموعه

د درسي کتاب (133) مخ

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• پوهنيزې</li> <li>• مهارتي</li> <li>• ذهني</li> </ul> <p>زده کوونکي به د لوست په پای کې و توانېږي چې:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• د يوه ترادف د قسمتي حدونو د جمعې حاصل په مفهوم پوه شي.</li> <li>• د يوه ترادف د قسمي حدونو د جمعې حاصل پوښتنې حل کړای شي.</li> <li>• د ترادفونو قسمي مجموعې او ټولو حدونو مجموعې توپير وکړای شي.</li> <li>• د پورته دواړو مجموع له توپير پيدا کولو سره په ځان باور پيدا کوي.</li> </ul>	
<p>2- د زده کړې لارې:</p> <p>انفرادي، تشریحي، پوښتنه او ځواب ...</p>	
<p>3- مرستندويه مواد:</p> <p>د اړتيا وړ مواد ...</p>	
<p>4- د وړودي برخې</p> <p>توضیح (5 دقیقې)</p> <p>بناغلی بنسټونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته د زده کوونکو پام بیا یو ځلې وړودي موضوع ته راوگرځوی او وپوښتی:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• له یوه زده کوونکي څخه پوښتنه وکړی د اتم کتار د قوطیو شمېر څو دي؟</li> <li>• ایا کولای شئ د قوطیو د ټولو کتارونو له مخې دهغه ترادف ولیکی؟</li> </ul> <p>ښایي چې زده کوونکي د تېر لوست په پوهېدو ځوابونه ووايي او که ستونزه ولري، تاسو مرسته او لارښوونه وکړی.</p>	
<p>5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې):</p> <p>بناغلی بنسټونکی د زده کوونکو پام موضوع ته راوگرزوی او ووايېست، تراوسه مویوازي د یوه ترادف <math>n</math> حدونو د جمعې حاصل ترلاسه کړ، که وغواړو د <math>\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}</math> د ټولو حدونو د جمعې حاصل پیدا کړو، ایا د حدونو د جمعې حاصل د افادې په ډول ورته لیکلای شو؟</p> <p>که چیرې زده کوونکي ځواب ووايي ښه به وي، له هغه پرته یې تاسو یې داسې ولیکی:</p> $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$ <p>په دې صورت کې <math>i</math> ټول طبیعي عددونه اخیستلای شي چې <math>\sum_{i=1}^{\infty} a_i</math> د بې نهایت سلسلې یا (Series) په نامه یادېږي.</p> <p>کولای شو په ریاضي کې د عددونو د بې نهایت شمېر جمع کول د ریاضي د ځینو قاعدو په کارولو سره د یوې سلسلې د <math>n</math> لومړیو عناصرو مجموعه پیدا کړو؛ لکه:</p> $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$	



چې د نوموړي سلسلې د  $n$  حدونو د قسمي مجموعې په نامه يادېږي، پيدا کړو که هغه په  $S_n$  سره وښيو داسې لیکو:

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i$$

بيا يو داوطلب زده‌کوونکی تختې ته راوغوړی چې د کتاب 135 مخ مثال پر تختې حل کړي، د لوست په پای کې د سلسلو درې واړه خاصیتونه چې د کتاب 136 مخ کې دي، درې زده‌کوونکي دې په وار سره تشریح کړي، د ستونزو په صورت مرسته او لارښوونه وکړی.

### 6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

ښاغلی ښوونکی د لوست د لاسه تحکیم او پوهېدو لپاره په لاندې ډول پوښتنې زده‌کوونکوی ته ورکړی چې په خپلو کتابچو کې کار ورباندې وکړي.

د  $1 + 2 + 3 + \dots + n + \dots$  سلسلې  $S_5$  او  $S_{10}$  محاسبه کړي.

زده‌کوونکي په خپلو کتابچو کې کار کوي، بیا دې يو داوطلب زده‌کوونکی نوموړی پوښتنه پر تخته حل کړي، که چیرې کوم زده‌کوونکي تېروتنه کړي وي اصلاح دې کړي.

### 7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

د دې لپاره چې ښاغلی ښوونکی ډاډمن شي ایا زده‌کوونکو لوست زده‌کړی دی او که نه؟ نو د لاندې پوښتنو په کولو سره دې وازموي:

•  $\sum_{i=1}^n a_i$  د څه په نامه او کوم قیمتونه اخېستلای شي؟

•  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  د څه په نامه او کوم قیمتونه اخېستلای شي؟

کوښښ وکړی چې ځوابونه له زده‌کوونکو څخه په لاس راوړی.

### 8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات:

ښاغلی ښوونکی که چیرې په یوه ترادف کې وروستی حد وپېژنو، د جفتو او طاقو عددونو مجموعه د وروستی حد له جنسه هم په لاس راوړلای شو،  $L$  وروستی حد،  $d$  گډ توپیر دی، غواړو چې د ترادف د مجموعې فورمول د  $L$  له جنس پيدا کړو، اوس د  $n$  قیمت پيدا کوو:

$$L = a + (n-1) \cdot d$$

$$L - a = nd - d \Rightarrow L - a + d = nd \Rightarrow n = \frac{L - a + d}{d}$$

$$n = \frac{L - 2 + 2}{2} \Rightarrow n = \frac{L}{2}$$

څرنگه چې په جفتو عددونو کې  $a = 2$  او  $d = 2$  کېږي؛ نو لرو:

اوس د  $S = n(n+1)$  په فورمول کې د  $n$  په ځای  $\frac{1}{2}L$  بدو:  $S = \frac{L^2 - 2L}{4}$   $\Rightarrow S = \frac{1}{2}L(\frac{1}{2}L + 1) = \frac{1}{4}L^2 - \frac{1}{2}L$

پوهېږو چې  $d = 2$  ده:  $S = \frac{L^2 + 2L}{2 \cdot 2} \Rightarrow S = \frac{l^2 + 2l}{2 \cdot d}$

همدارنگه په طاقتو عددونو د  $1, 3, 5, 7, 9, \dots$  کې  $a = 1$  او  $d = 2$  ده موږ لرو چې:

$$L = a + (n-1) \cdot d \Rightarrow L = 1 + 2n - 2 \quad \text{يا} \quad L = 2n - 1 \Rightarrow L + 1 = 2n \Rightarrow \boxed{n = \frac{L+1}{2}}$$

اوس د  $S = n^2$  په فورمول کې د  $n$  پر ځای  $\frac{L+1}{2}$  لیکو:  $S = (\frac{L+1}{2})^2$  يا  $(\frac{L+a}{2})^2$

پوهېږو چې  $d = 2$  ده؛ نو:  $S = (\frac{L+a}{d})^d$

### 9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

د درسي کتاب د 136 مخ د دريمې پوښتنې حل.

3. لاندې قسمي مجموعې په لاس راوړئ.

a)  $\sum_{i=4}^n i(i+2)$

b)  $\sum_{i=1}^n (3i-2)$

c)  $\sum_{i=1}^n (2+5i)$

**حل**

a)  $\sum_{i=4}^n i(i+2) = 4(4+2) + 5(5+2) + 6(6+2) + \dots + n(n+2) = 4 \cdot 6 + 5 \cdot 7 + 6 \cdot 8 + \dots + n(n+2)$   
 $= 24 + 35 + 48 + \dots + n(n+2)$

b)  $\sum_{i=1}^n (3i-2) = (3 \cdot 1 - 2) + (3 \cdot 2 - 2) + \dots + (3n - 2) = 1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 2)$

c)  $\sum_{i=1}^n (2+5i) = (2+5 \cdot 1) + (2+5 \cdot 2) + (2+5 \cdot 3) + \dots + (2+5n) = 7 + 12 + 17 + \dots + (2+5n)$

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \\ d &= \\ a_n &= \end{aligned} \right\} ?$$

$$1+2+3+4+ \dots +n=$$

$$\frac{n}{2} \cdot [2a+(n-1) \cdot d]$$

## څلورم څپرکی: ترادفونه

د حسابي ترادف د  $n$  لومړيو حدونو قسمي مجموعه

د درسي کتاب (137) مخ

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>پوهنيزې</li> <li>مهاري</li> <li>ذهنيتي</li> </ul> <p>زده کوونکي به د لوست په پای کې و توانېږي چې:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>د حسابي ترادف د حدونو د مجموعې يا حسابي سلسلې په مفهوم پوه شي.</li> <li>د حسابي سلسلې اړوند پوښتنې حل کړای شي.</li> <li>د حسابي سلسلې د مفهوم په پوهېدو او د هغو د پوښتنو په حلولو سره خوښي ښکاره کوي.</li> </ul>	
<p>2- د زده کړې لارې:</p> <p>ډله‌ييز، انفرادي، پوښتنه او ځواب ... .</p>	
<p>3- مرستندويه مواد:</p> <p>د اړتيا وړ مواد... .</p>	
<p>4- د وړودي برخې توضیح (5 دقيقې)</p> <p>ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې وروسته د زده‌کوونکو پام د کتاب وړودي برخې ته راوگرځوي او پوښتي:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>په کتاب کې د <math>a = ?</math>, <math>d = ?</math>, <math>a_n = ?</math> هر يو څه شی افاده کوي؟</li> <li>د <math>1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n</math> افاده کومه مجموعه ښيي؟</li> <li>که چيرې <math>a_1, a_2, a_3, \dots, a_n</math> يو ترادف وي، ايا <math>a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n</math> د پورته ترادف قسمي مجموع کيدای شي؟</li> </ul> <p>کوښښ وکړئ چې ځوابونه له زده‌کوونکو څخه په لاس راوړئ له هغه پرته تاسو يې تشریح کړئ.</p>	
<p>5- د لوست بهير او فعاليت (28 دقيقې):</p> <p>زده‌کوونکي په مناسبو ډلو و وېشئ چې د کتاب (137) مخ د حدونو د جمعې لپاره عمومي فورمول په خپلو ډلو کې له بحث او خبرو وروسته ثبوت کړي او بيا دې د يوې ډلې داوطلب استازی هغه پر تخته ثبوت کړي، که چيرې نوموړی زده‌کوونکی تېروتنه کوي د بلې ډلې په واسطه دې اصلاح شي.</p> <p>له ډله‌ييز فعاليت وروسته تاسو د فارمول له مخې د حسابي سلسلې تعريف وکړئ، چې زده‌کوونکي د حسابي سلسلې په مفهوم ښه پوه شي.</p> <p>بيا دوه داوطلب زده‌کوونکي په وار سره راوغواړئ چې يو يې لومړی مثال او بل يې دويم مثال پر تخته حل کړي او نور زده‌کوونکي دې په خپلو کتابچو کې حل کړي، پاملرنه وکړئ چې زده‌کوونکي د کتاب له حل څخه گټه وانه خلي، په پای کې دې زده‌کوونکي خپل حلونه د تختې له حل سره پرتله کړي، د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړئ.</p>	

په همدې ډول د کتاب د 139 مخ لومړۍ فعالیت زده‌کوونکو ته ورکړې چې په خپلو کتابچو کې کار ورباندې وکړي چې د طبیعي پرله پسې عددونو د جمعې د حاصل؛ یعنې د  $S = \frac{n}{2}(n+1)$  فارمول په لاس راوړي، که زده‌کوونکي ستونزې ولري تاسو یې داسې ثبوت کړئ، په طبیعي پرله پسې عددونو کې  $a = 1$  او  $d = 1$  په پام کې ونیسئ د  $S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$  په فورمول کې محاسبه سرته ورسوئ.

### 6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

ښاغلی ښوونکی د لوست د لابنه تحکیم لپاره د کتاب 139 مخ کې د طبیعي جفت پرله پسې عددونو د جمعې په اړوند مثال او همدارنگه دریم مثال زده‌کوونکو ته ورکړې چې په خپلو کتابچو کې د کتاب له لېدو پرته حل کړي، بیا دې یو داوطلب زده‌کوونکی هغه پر تخته حل کړي او نور زده‌کوونکي دې خپل حلونه ورسره پرتله کړي. د ستونزو په صورت کې مرسته وکړئ.

### 7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ددې لپاره چې ښاغلی ښوونکی ډاډمن شي، ایا زده‌کوونکو لوست زده‌کړې دی او که نه؟ نو زده‌کوونکي دې د لاندې پوښتنو په واسطه وازمويي:

- څوک کولای شي د طبیعي طاقو پرله پسې عددونو د جمعې د حاصل فورمول پر تخته ولیکي؟
- په لاندې افادو کې کومه یوه حسابي سلسله او کومه یوه یې حسابي ترادف ده:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

### 8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات:

ښاغلی ښوونکی د حسابي ردیف د  $n$  لومړیو حدونو د قسمي مجموعې لپاره لاندې دوه فورمولونه پیدا شول:

$$S_n = \frac{n(a+a_n)}{2} \dots (I) \quad S_n = \frac{n[2a+(n-1)d]}{2} \dots (II)$$

له  $I$  فورمول څخه هغه وخت کار اخېستل کېږي چې لومړی حد،  $n$ -ام حد او د حدونو شمېر یې معلوم وي.

اوله  $(II)$  فورمول څخه هغه وخت کار اخېستل کېږي چې لومړی حد، گډ توپیر او د حدونو شمېر معلوم وي؛ لکه لاندې مثالونه:

(1) د  $2, 5, 8, \dots$  په حسابي ردیف کې د 8 حدونو مجموعه پیدا کړئ:

په نوموړي ردیف کې  $n = 8$ ،  $d = 5 - 2 = 3$ ،  $a = 2$  نو د (2) فورمول په کار اخېستنې سره لیکو:

$$S_8 = \frac{8[(2 \cdot 2 + (8-1) \cdot 3)]}{2} = \frac{8[4 + (7) \cdot 3]}{2} = \frac{8 \cdot (4+21)}{2} = \frac{8 \cdot 25}{2}$$

$$S_8 = \frac{200}{2} = 100$$

(2) د  $21, 17, 13, 9, 5$  حسابي ردیف مجموع پیدا کړئ:

په لومړي ردیف کې  $n = 5$ ،  $a_n = 5$ ،  $a = 21$ ، نو د (1) فورمول په کار اخېستنې سره لیکو:

$$S_5 = \frac{5(21+5)}{2} = \frac{5(26)}{2} = \frac{130}{2} \Rightarrow S_5 = 65$$

## 9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

د درسي کتاب د 140 مخ د پوښتنو حل.

1. دلاندې حسابي ترادفونو لسم او  $n$ -ام حدونه پیدا او همدارنگه د نوموړو ترادفونو د لسو حدونو د جمعې حاصل په لاس راوړئ.

$$\left. \begin{array}{l} i) 2, 0, -2, -4, \dots \\ ii) 1, 5, 9, 13, \dots \\ iii) -2, -1, 0, 1, 2, \dots \end{array} \right\} \begin{array}{l} a_1 = 2 \\ n = 10 \\ d = -2 \\ a_{10} = ? \end{array}$$

(i) حل

$$a_{10} = a_1 + (n-1)d = 2 + (10-1)(-2) = 2 + 9(-2) = 2 - 18 = -16$$

$$S_{10} = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] = \frac{10}{2}[2 \cdot 2 + (10-1)(-2)]$$

$$S_{10} = 5[4 + 9(-2)] = 5(4 - 18) = 5(-14) = -70$$

(ii) حل

$$\left. \begin{array}{l} a = 1 \\ d = 4 \\ n = 10 \\ a_{10} = ? \\ S_{10} = ? \end{array} \right\} \begin{array}{l} a_{10} = 1 + (10-1)4 = 1 + 9 \cdot 4 = (1 + 36) = 37 \\ a_n = a + (n-1)d = 1 + (n-1)4 = 1 + 4n - 4 = 4n - 3 \\ S_{10} = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] = \frac{10}{2}[2 \cdot 1 + (10-1)4] = 5[2 + 9 \cdot (4)] = 5(2 + 36) \\ S_{10} = 5 \cdot 38 = 190 \end{array}$$

(iii) حل

$$\left. \begin{array}{l} a = -2 \\ d = 1 \\ n = 10 \\ a_{10} = ? \\ S_{10} = ? \end{array} \right\} \begin{array}{l} a_{10} = a + (n-1)d = -2 + (10-1) \cdot 1 = -2 + 9 \cdot 1 = -2 + 9 = 7 \\ a_n = a + (n-1)d = -2 + (n-1) \cdot 1 = -2 + n - 1 = n - 3 \\ S_{10} = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] = \frac{10}{2}[2(-2) + (10-1) \cdot 1] = 5[-4 + 9] = 5 \cdot 5 = 25 \end{array}$$

2. که یو ترادف د ... 2, 5, 8, 11, په ډول راکړل شوی وي. دلاندې مجموعو قیمتونه حساب کړئ.

a)  $S_8 = ?$

b)  $S_{10} = ?$

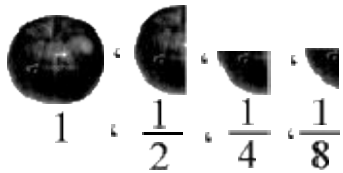
(a) حل

$$\left. \begin{array}{l} a = 2 \\ d = 3 \\ n = 8 \\ S_8 = ? \end{array} \right\} \begin{array}{l} S_8 = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] = \frac{8}{2}[2 \cdot 2 + (8-1) \cdot 3] = 4(4 + 7 \cdot 3) = 4(4 + 21) \\ S_8 = 4 \cdot 25 = 100 \end{array}$$

(b) حل

$$\left. \begin{array}{l} a = 2 \\ d = 3 \\ n = 10 \\ S_{10} = ? \end{array} \right\} \begin{array}{l} S_{10} = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] = \frac{10}{2}[2 \cdot 2 + (10-1) \cdot 3] = 5(4 + 9 \cdot 3) = 5(4 + 27) \\ S_{10} = 5 \cdot 31 = 155 \end{array}$$

## څلورم څپرکی: ترادفونه



د یوه هندسي ترادف د  $n$  حدونو د جمعې حاصل

د درسي کتاب (141) مخ

د لوست وخت: (یو درسي ساعت)

<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>پوهنيزه</li> <li>مهاري</li> <li>ذهنيتي</li> </ul> <p>زده کوونکي به د لوست په پای کې و توانېږي چې:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>د هندسي ترادف د جمعې حاصل يا هندسي سلسلې په مفهوم پوه شي.</li> <li>د هندسي سلسلې اړوند پوښتنې حل کړای شي.</li> <li>د هندسي سلسلې په پوهېدو او د هغو د پوښتنو په حلولو سره خوښی ښکاره او په ځان باور پيدا کړي.</li> </ul>	
<p>2- د زده کړې لارې:</p> <p>ډلېبیز، انفرادي کار، تشریحي، پوښتنه او ځواب ...</p>	
<p>3- مرستندويه مواد:</p> <p>د اړتیا وړ مواد ...</p>	
<p>4- د وړودي برخې توضیح (5 دقیقې)</p> <p>ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې وروسته د زده کوونکو پام د کتاب وړودي برخې ته راوگرزوي او وپوښتي:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>څوک ویلای شي دوه نیمایي (<math>\frac{1}{2}, \frac{1}{2}</math>) څو کېږي؟</li> <li>څوک ویلای شي <math>\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}</math> او <math>\frac{1}{4}</math> څو کېږي؟</li> <li>څوک ویلای شي <math>\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}</math> او <math>\frac{1}{16}</math> څو کېږي؟</li> <li>ایا ویلای شی چې په وروستی افاده کې هر یو حد له بل حد څخه څه ډول لاس ته راځي؟ کونښن وکړی چې ځوابونه له زده کوونکو څخه په لاس راوړی له هغه پرته تاسو ورته وایاست په هره پوښتنه کې ټول حدونه سره جمع کوو، خو په وروستی افاده کې هر حد په <math>\frac{1}{2}</math> کې ضرب او وروستی حد لاسته راغلی دی.</li> </ul>	
<p>5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې):</p> <p>ښاغلی ښوونکی زده کوونکي په مناسبو ډلو ووېشي ورته وایاست چې د کتاب 141 مخ فعالیت په خپلو کتابچو کې له خبرو او بحث وروسته سرته ورسوي او په پای کې د هندسي ترادف د <math>n</math> حدونو د جمعې حاصل يا د هندسي سلسلې فورمول په لاس راوړي. بیا د دوو ډلو استازي راځي او خپل سرته رسولی فعالیت نورو ته توضیح کوي که چیرې کومې ډلې تېروتنه کړي وي، هغه د بلې ډلې په واسطه د دوستۍ په فضا کې اصلاح کړی. د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړی او بیا تاسو همدا فعالیت په بشپړ توګه ورته تشریح او توضیح کړی د ټولو مراحلو په پام کې نیولو سره د <math>S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}</math> عمومي فارمول په داسې حال کې چې <math>q \neq 1</math> وي، په لاس راوړی او د زده کوونکو پوښتنو ته ځوابونه وایاست.</p>	

بيا دوه داوطلب زدهكوونكي په وار سره راوغواړئ چې يو يې لومړی مثال او بل يې دويم مثال پر تخته حل كړي او نور زدهكوونكي دې په عين وخت كې د كتاب له لېدو پرته په خپلو كتابچو كې حل كړي او بيا دې خپل حلونه د تخته له حل سره پرتله او تېروتنې دې اصلاح كړي، د اړتيا په صورت كې مرسته او لارښوونه وكړئ.

### 6- د زده كړې تحكيم: (7) دقيقې

ښاغلی ښوونكو د لوست د لارښه تحكيم او زده كړې لپاره زدهكوونكو ته په لاندې ډول پوښتنه وركړې چې په خپلو كتابچو كې يې حل كړي:

- كه په يوې هندسي سلسلې كې  $a_1 = 3$  او  $q = 2$  وي، په دې صورت كې  $S_6$  پيدا كړئ.
- ښاغلی ښوونكي د كار څارنه كوي او په پای كې يو داوطلب زدهكوونكي دې پوښتنه پر تخته حل كړي.

### 7- د لوست د پايلې ارزونه: (5) دقيقې

ددې لپاره چې ښاغلی ښوونكي د لوست له زده كړې څخه ځان ډاډمن كړي؛ نو زدهكوونكي دې د لاندې پوښتنو په واسطه وازمويي:

$$1- \text{ په هندسي سلسله د } S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \text{ كې ووايست:}$$

•  $a_1$  څه شي نښي؟

•  $q$  څه شي نښي؟

•  $S_n$  څه شي نښي؟

2- د ... 2, 6, 18, 54 په ترادف كې د 10 حدونو د جمعې حاصل پيدا كړئ.

كوښښ وكړئ چې زدهكوونكي هر يو يې په خپلو كتابچو كې حل كړي.

### 8- د ښوونكي لپاره اضافي معلومات:

ښاغلی ښوونكي د  $S_n = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$  فورمول د يوه هندسي ترادف د  $n$  حدونو د جمعې حاصل نښي، د نوموړي فورمول

تطبيقول په پوښتنو كې په لاندې ډول كېدای شي:

(1) د ... 3, 6, 12, په هندسي تصاعد كې د لس لومړيو حدونو د جمعې حاصل پيدا كړئ.

په دې تصاعد كې  $a = 3$ ,  $q = \frac{6}{3} = 2$ , او  $n = 10$  دي.

$$S_{10} = \frac{3(2^{10} - 1)}{2 - 1} = \frac{3(1024 - 1)}{1} = 3 \cdot 1023 = 3069$$

(2) كه چيرې په يو هندسي تصاعد كې لومړی حد 2، گډ نسبت يې (-2) وي، د څو حدونو د جمعې حاصل يې 22 كېږي؟

$$a = 2, \quad q = -2, \quad S_n = 22, \quad n = ?$$

$$S_n = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{2[(-2)^n - 1]}{-2 - 1} = 22$$

مساوات دواړه خواوې په  $\frac{1}{2}$  كې ضربوو:

$$\Rightarrow \left\{ \frac{2[(-2)^n - 1]}{-3} \right\} \frac{1}{2} = 22 \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{(-2)^n - 1}{-3} = 11 \Rightarrow (-2)^n - 1 = -33$$

$$\Rightarrow (-2)^n = -33 + 1 \Rightarrow (-2)^n = -32 \Rightarrow (-2)^n = (-2)^5 \Rightarrow \boxed{n = 5}$$

## 9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

د درسي کتاب د 142 مخ د پوښتنو حل.

1. په  $2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \dots$  هندسي ترادف کې د 10 جملو د جمعې حاصل په لاس راوړئ.

حل

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{array}{l} a = 2 \\ q = \frac{1}{3} \\ n = 10 \\ S_{10} = ? \end{array} \right\} S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q} \\
 & S_{10} = \frac{2(1-\frac{1}{3})^{10}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{2\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\right]}{\frac{3-1}{3}} = \frac{2\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\right]}{\frac{2}{3}} = \frac{2 \cdot 3\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\right]}{2} = 3 \cdot \left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\right] \\
 & S_{10} = 3 - 3 \cdot 3^{-10} = 3 - 3^{-9} = 3 - \frac{1}{3^9} = 3 - \frac{1}{19683} = \frac{3 \cdot 19683 - 1}{19683} \\
 & S_{10} = \frac{59049}{19683} = 3
 \end{aligned}$$

2. د  $3, 6, 12, \dots, 384$  په هندسي ترادف کې د حدونو شمېر او مجموعه پیدا کړئ.

حل

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{array}{l} a = 3 \\ q = 2 \\ a_n = 384 \\ n = ? \\ S_n = ? \end{array} \right\} a_n = a \cdot q^{n-1} \Rightarrow 384 = 3 \cdot 2^{n-1} / \div 3 \Rightarrow 2^{n-1} = 128 \Rightarrow 2^n \cdot 2^{-1} = 128 \\
 & \Rightarrow \frac{2^n}{2} = 128 \Rightarrow 2^n = 256 \Rightarrow 2^n = 2^8 \Rightarrow \boxed{n=8} \\
 & S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q} \\
 & S_8 = \frac{3(1-2^8)}{1-2} = \frac{3(1-256)}{-1} = \frac{3(-255)}{-1} \Rightarrow \boxed{S_8 = 765}
 \end{aligned}$$

3. د  $4, 12, 36, \dots$  په ترادف کې د څو جملو د جمعې حاصل 484 کېږي، د  $n$ -ام حد قیمت پیدا کړئ.

حل

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{array}{l} a = 4 \\ q = 3 \\ S_n = 484 \\ n = ? \\ a_n = ? \end{array} \right\} S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{4(1-3^n)}{1-3} = 484 \quad \text{یا} \quad \frac{4(3^n-1)}{3-1} = 484 \\
 & = \frac{4 \cdot (3^n-1)}{2} \cdot 2 = 484 / \cdot 2 \Rightarrow 4 \cdot (3^n-1) = 968 \Rightarrow 4 \cdot 3^n - 4 = 968 \\
 & 4 \cdot 3^n = 968 + 4 \Rightarrow 4 \cdot 3^n = 972 / \div 4 \\
 & 3^n = 243 \Rightarrow 3^n = 3^5 \Rightarrow \boxed{n=5} \\
 & a_n = a \cdot q^{n-1} = 4 \cdot 3^{5-1} = 4 \cdot 3^4 = 4 \cdot 81 = 324
 \end{aligned}$$



## څلورم څپرکی: ترادفونه

$$S_{\infty} = \frac{a}{1-q}, |q| < 1$$

لايتناهي هندسي سلسلې

د درسي کتاب (143) مخ

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- پوهنيزه</li> <li>- مهارتي</li> <li>- ذهني</li> </ul>	<p>زده کوونکي به د لوست په پای کې و توانېږي چې:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• د هندسي سلسلې د متباعد او متقارب سلسلو په مفهوم پوه شي.</li> <li>• متباعد او متقارب سلسلې تشخيص او يو له بله يې توپير وکړای شي.</li> <li>• د متباعد او متقاربو سلسلو په پوهېدو سره خوښي ښکاره او په ځان باور پيدا کوي.</li> </ul>
<p>2- د زده کړې لارې:</p>	<p>ډله‌ييز، انفرادي، پوښتنه او ځواب ...</p>
<p>3- مرستندويه مواد:</p>	<p>د اړتيا وړ مواد ...</p>
<p>4- د ورودې برخې توضیح (5 دقيقې)</p>	<p>ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې وروسته د زده‌کوونکو پام د کتاب ورودې برخې ته راوگرزوي:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• که يو ترادف په ترتيب حد په حد کوچنی شي څه ډول ترادف بلل کېږي؟</li> <li>• که يو ترادف په ترتيب حد په حد لوی شي څه ډول ترادف بلل کېږي؟</li> </ul> <p>کوښښ وکړئ چې ځوابونه له زده‌کوونکو څخه واورئ له هغه پرته تاسو ځوابونه ووايست (يعنې لومړی يې متقارب او دويم يې متباعد دی)</p>

### 5- د لوست بهير او فعاليت (28 دقيقې):

ښاغلی ښوونکی يو داوطلب زده‌کوونکی تختې ته راوغواړئ او داسې پوښتنه وکړئ که  $a = 3, q = \frac{1}{2}$  وي، هندسي ترادف يې پيدا کړئ او د هندسي سلسلې عمومي فورمول يعنې د  $a\left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right)$  په تطبيقولو سره د پنځو لومړيو حدونو د جمعې حاصل په لاس راوړئ.

که چيرې زده‌کوونکي ستونزې ولري، تاسو مرسته وکړئ او داسې يې حل کړئ:

$$S_5 = \frac{3\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^5 - 1\right\}}{\frac{1}{2} - 1} = 3 \frac{3\left(\frac{1}{32} - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} = 3 \cdot \left(-\frac{32}{2}\right) = \frac{3 \cdot (-32)}{-1} = 3 \cdot \left(-\frac{32}{1}\right) = 3 \cdot \left(-\frac{32}{1} \cdot \frac{-2}{-2}\right) = 3 \cdot \left(\frac{31}{16}\right) = \frac{93}{16}$$

په همدې ډول يو بل داوطلب زده‌کوونکی تختې ته راوغواړئ ورته ووايست که چيرې  $a = 3$  او  $q = 2$  وي، هندسي ترادف يې پيدا او د هندسي سلسلې د عمومي فورمول په تطبيقولو سره د پنځو لومړيو حدونو د جمعې حاصل پيدا کړئ که

$$S_5 = \frac{3 \cdot (2^5 - 1)}{2 - 1} = \frac{3(32 - 1)}{1} = 3 \cdot 31 = 93$$

بيا هم ستونزه ولري، تاسو يې داسې حل کړئ:  $S_5 = \frac{3 \cdot (2^5 - 1)}{2 - 1} = \frac{3(32 - 1)}{1} = 3 \cdot 31 = 93$

بيا له زده‌کوونکو څخه پوښتنه وکړئ په لومړی او دويم ځواب کې څه توپير ويني. کوم يو يې کوچنی او کوم يو يې زيات دی او په هره يوه ډله کې گډ نسبت څومره دی، ښايي ټول زده‌کوونکي ځوابونه ووايي بيا هم تاسو د لارښه پوهېدو لپاره له پورته مثالونو څخه په گټې اخېستنې سره موضوع داسې تشریح کړئ:

که چیرې په یوه هندسي سلسله کې  $|q| > 1$  وي او د حدونو شمېرې معلوم نه وي، د متباعدي (Divergent series) په نامه یادېږي. او که چیرې  $|q| < 1$  وي هغه د متقارې (convergent series) په نامه یادېږي او د دواړو د جمعې حاصل د  $S = a \left( \frac{q^n - 1}{q - 1} \right)$  په واسطه پیدا کېږي. د لوست په پای کې دوه داوطلب زده‌کوونکي په وار سره راوغواړئ چې یو یې د 144 مخ لومړی مثال او بل یې دویم مثال پر تخته حل کړي او نور زده‌کوونکي دې د کتاب له لېدو پرته په خپلو کتابچو کې حل کړي، د کار څارنه وکړئ د پوښتنو او تېروتنې په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړئ په پای کې دې زده‌کوونکي هر یو خپل حل د تخته له حل سره پرتله او تېروتنې دې اصلاح کړي.

### 6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

د لوست د لاینه تحکیم او پوهېدو لپاره ښاغلی ښوونکی دې د کتاب دریم او څلورم مثالونه د زده‌کوونکو په فعالې برخې اخیستنې سره پر تخته حل کړي په داسې حال کې چې د مثالونو ټولې مرحلې گام په گام په پام کې ونیسي.

### 7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ددې لپاره چې ښاغلی ښوونکی ځان ډاډمن کړي چې زده‌کړه شوې ده او که نه؟ نو زده‌کوونکي دې د لاندې پوښتنو په کولو سره وازموي.

• که چیرې د  $\left(\frac{1}{2}\right)$  عدد د 3, 2 او 5 په توانونو رفع شي، لاس ته راغلي عددونه په ترتیب زیاتېږي او که کوچني کېږي؟

• که چیرې د 2 عدد په ترتیب د 3, 2 او 5 په توانونو رفع شي، لاس ته راغلي عددونه په ترتیب زیاتېږي او که کوچني کېږي؟

• که  $|q| < 1$  وي او د حدونو شمېر معلوم نه وي کومه سلسله جوړوي؟

• که  $|q| > 1$  وي او د حدونو شمېر معلوم نه وي کومه سلسله جوړوي؟

کوبښ وکړئ چې څو اېونه له زده‌کوونکو څخه په لاس راوړئ د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړئ.

### 8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات:

ښاغلی ښوونکی د هندسي ترادف تر عنوان لاندې د 127 مخ وروډي برخې کې د شطرنج د تخته په 64 کور کې د غنمو شمېر او همدارنگه د ټولو غنمو شمېر په لاندې ډول معلومولای شو:

حل:  $q = 2, a = 1$  او  $n = 64$  دی؛ نو:

$$a_{64} = 1 \cdot 2^{64-1} = 2^{63} = 9.22337 \cdot 10^{18} \text{ دانې غنم}$$

اوس بیا مطالعه کوو چې د شطرنج په ټولو خانو کې مجموعاً څو دانې غنم دي؟

حل: څرنگه چې  $q = 2, a = 1$  او  $n = 64$  دي، نو د عمومي فورمول له مخې لیکو:

$$S_{64} = \frac{a \cdot (q^n - 1)}{q - 1} = \frac{1 \cdot (2^{64} - 1)}{2 - 1} = 2^{64} - 1 = 1.84467 \cdot 10^{19} - 1 \approx 1.84467 \cdot 10^{19} \text{ دانې غنم}$$

### 9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

1. لاندې هندسي مجموعې په لاس راوړئ.

i)  $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots$

ii)  $5 + 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots$

**حل (i)** سلسله متقاربه ده:

$$\left. \begin{array}{l} a=1 \\ q=\frac{1}{3} \\ S_n=? \end{array} \right\} \begin{array}{l} |q| = \left| \frac{1}{3} \right| = \frac{1}{3} < 1 \\ S_n = \frac{a}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{3-1}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{1 \cdot 3}{2} = \frac{3}{2} \end{array}$$

**حل (ii)** سلسله متقاربه ده:

$$\left. \begin{array}{l} a=5 \\ q=\frac{1}{5} \\ S_n=? \end{array} \right\} \begin{array}{l} |q| = \left| \frac{1}{5} \right| = \frac{1}{5} < 1 \\ S_n = \frac{a}{1-q} = \frac{5}{1-\frac{1}{5}} = \frac{5}{\frac{5-1}{5}} = \frac{5}{\frac{4}{5}} = \frac{5 \cdot 5}{4} = \frac{25}{4} = 6.25 \end{array}$$

2. لاندې اعشاري پيربويك (متوالي) كسرونه په عام كسر واروي.

a)  $0.2\bar{4}$

b)  $0.\bar{5}$

**حل (a)**

$$0.2\bar{4} = 0.2444 \dots = 0.2 + 0.04 + 0.004 + 0.0004 + \dots = \frac{2}{10} + \frac{4}{100} + \frac{4}{1000} + \frac{4}{10000} + \dots$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{4}{100} \left[ 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots \right]$$

$$S_n = ? , \quad a = 1 , \quad q = \frac{1}{10} , \quad \text{د قوس په دننه كې يوه بې نهايت هندسي سلسله ده؛ يعنې:}$$

$$\text{نو سلسله متقاربه ده: } |q| = \left| \frac{1}{10} \right| = \frac{1}{10} < 1$$

$$S_n = \frac{a}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{1}{\frac{10-1}{10}} = \frac{1}{\frac{9}{10}} = \frac{1 \cdot 10}{9} = \frac{10}{9}$$

$$0.2\bar{4} = \frac{1}{5} + \frac{4}{100} \cdot \frac{10}{9} = \frac{1}{5} + \frac{4}{90} = \frac{18+4}{90} = \frac{22}{90} = \frac{11}{45} \Rightarrow \boxed{0.2\bar{4} = \frac{11}{45}}$$

**حل (b)**

$0.\bar{5} = 0.5555 \dots$

$$0.5 = 0.5 + 0.05 + 0.005 + 0.0005 + \dots = \frac{5}{10} + \frac{5}{100} + \frac{5}{1000} + \frac{5}{10000} + \dots$$

$$= \frac{5}{10} \left( 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10000} + \dots \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} a=1 \\ q=\frac{1}{10} \\ S_n=? \end{array} \right\} |q| = \left| \frac{1}{10} \right| = \frac{1}{10} < 1$$

نو سلسله متقاربه ده.

د قوس په دننه كې يوه بې نهايت هندسي سلسله ده، چې:

$$S_n = \frac{5}{10} \cdot \frac{a}{1-q} = \frac{5}{10} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{5}{10} \cdot \frac{1}{\frac{10-1}{10}} = \frac{5}{10} \cdot \frac{1}{\frac{9}{10}} = \frac{5 \cdot 10}{10 \cdot 9} = \frac{5}{9} \Rightarrow \boxed{S_n = \frac{5}{9} = 0.\bar{5}}$$

## د څلورم څپرکي د عمومي پوښتنو حل (اووه درسي ساعتونه)

لاندي پوښتنې ولولئ، د هرې پوښتنې لپاره څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، سم ځواب يې پيدا او له هغه څخه کرې-تو کرې.

1. د  $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \dots$  ترادف  $n$ -ام حد کوم دی؟

a)  $\frac{\sqrt{n}-1}{n}$       b)  $\frac{\sqrt{n}+3}{n+2}$       c)  $\frac{n}{n-1}$       d)  $\frac{n+1}{n}$

2. که  $a_n = \frac{3n-1}{2n-1}$  د ترادف  $n$ -ام حد وي، د دغه ترادف څووم حد  $\frac{11}{7}$  دی؟

a) 3      b) 4      c) 5      d) 6

3. د  $3, -1, -5, -9, \dots$  حسابي ترادف دو لسم حد عبارت دی، له:

a) 35      b) 38      c) -35      d) -38

4. د  $0.1, 0.4, 0.7, 1, 1.3, \dots$  حسابي ترادف گډ توپير عبارت دی، له:

a) 0.3      b) 0.1      c)  $\frac{2}{3}$       d)  $-\frac{2}{3}$

5. د  $6, 12, 24, 48, 96$  هندسي ترادف گډ نسبت عبارت له:

a)  $-\frac{1}{2}$       b)  $\frac{1}{2}$       c)  $\frac{2}{3}$       d)  $-\frac{2}{3}$

6. د  $5, \frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{8}, \frac{5}{16}, \dots$  هندسي ترادف لسم حد عبارت دی، له:

a)  $\frac{3}{512}$       b)  $\frac{5}{510}$       c)  $-\frac{5}{512}$       d)  $\frac{5}{512}$

7. د یوه هندسي ترادف د  $n$  جملو د جمعې د حاصل فورمول عبارت دی، له:

a)  $S_n = a \frac{1+q^n}{1-q}$       b)  $S = a \frac{q^n - 1}{q - 1}$       c)  $S = a \frac{1+q^n}{1+q}$       d) هيڅ يو

8. په بې نهايت هندسي متقاربو سلسلو کې گډ نسبت عبارت دی، له:

a)  $q = 0$       b)  $|q| > 1$       c)  $|q| < 1$       d) هيڅ يو

### لاندي پوښتنې حل کرې.

1. څو دوه رقمي طبيعي عددونه لرو چې د څلورو مضرب وي؟

حل: لومړی دوه رقمي طبيعي عددونه لیکو:

10 , 11 , 12 , 13 , 14 , 15 , 16 , 17 , 18 , 19 , 20 , 21 , 22 , 23  
 24 , 25 , 26 , 27 , 28 , 29 , 30 , 31 , 32 , 33 , 34 , 35 , 36 , 37  
 38 , 39 , 40 , 41 , 42 , 43 , 44 , 45 , 46 , 47 , 48 , 49 , 50 , 51  
 52 , 53 , 54 , 55 , 56 , 57 , 58 , 59 , 60 , 61 , 62 , 63 , 64 , 65  
 66 , 67 , 68 , 69 , 70 , 71 , 72 , 73 , 74 , 75 , 76 , 77 , 78 , 79  
 80 , 81 , 82 , 83 , 84 , 85 , 86 , 87 , 88 , 89 , 90 , 91 , 92 , 93  
 94 , 95 , 96 , 97 , 98 , 99

دوه ويشت دوه رقمي عددونه لرو چې د 4 مضرب دي.

2. د 21 او 31 ترمنځ په بېل بېل ډول درې حسابي وسطونه وليکئ. 21, , , , 31

حل:

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = 21 \\ a_1 + 4d = 31 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 4d = 31 - 21 = 10 \\ d = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} = 2.5 \end{array}$$

21, 23.5, 26, 28.5, 31

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

$$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2} = \frac{21 + 26}{2} = \frac{47}{2} = 23.5$$

$$a_3 = \frac{21 + 31}{2} = \frac{52}{2} = 26$$

$a_3$  وسطي حد دی، نو:

$$a_4 = \frac{a_3 + a_5}{2} = \frac{26 + 31}{2} = \frac{57}{2} = 28.5$$

3. که د یوه حسابي ترادف د لومړي او وروستي جملې مجموعه ( $a_1 + a_n = 24$ ) او د  $n$  لومړيو جملو مجموعه يې 3720 وي، د نوموړي ترادف د حدونو شمېر وټاکئ؟

حل: پوهېږو چې د  $n$  لومړيو جملو مجموعه له  $S_n = \frac{n}{2}[a_1 + a_n]$  فارمول څخه لاسته راځي، نو:

$$a_1 + a_n = 24$$

$$S_n = \frac{n}{2}[a_1 + a_n] = 3720 \Rightarrow \frac{n}{2}[24] = 3720$$

$$12n = 3720 \Rightarrow n = \frac{3720}{12} = \frac{1240}{4} = 310 \Rightarrow \boxed{n = 310}$$

4. دلاندې ترادف د 100 جملو د جمعې حاصل په لاس راوړئ.

3, 5, 7, 9, 11, ...

حل:

$$\left. \begin{array}{l} a = 3 \\ d = 2 \\ n = 100 \\ S_{100} = ? \end{array} \right\} \begin{array}{l} S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] = \frac{100}{2}[2 \cdot 3 + (100-1)2] \\ S_{100} = 50[6 + 99 \cdot 2] = 50[6 + 198] = 50[204] \\ \boxed{S_{100} = 10200} \end{array}$$

5. که د یوه هندسي ترادف دویمه جمله 6 او اوومه جمله يې 192 وي، گډ نسبت يې وټاکئ.

حل:

$$\left. \begin{array}{l} aq = 6 \\ aq^6 = 192 \end{array} \right\} \begin{array}{l} (aq)q^5 = 192 \\ 6q^5 = 192 / \div 6 \Rightarrow q^5 = 32 \Rightarrow q^5 = 2^5 \Rightarrow \boxed{q = 2} \end{array}$$

6. دیوه هندسي ترادف د 8 لومړيو جملو د جمعي قسمي حاصل 17 برابره، دهغه د څلورو لومړيو جملو دی، د نوموړي ترادف گډ نسبت حساب کړئ.

حل:

$$\left. \begin{aligned} S_8 &= a \frac{1-q^8}{1-q} \\ S_4 &= a \frac{1-q^4}{1-q} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} a \frac{1-q^8}{1-q} &= 17a \frac{1-q^4}{1-q} \cdot (1-q) \\ 1-q^8 &= 17-17q^4 \Rightarrow 1-q^8-17+17q^4=0 \Rightarrow -q^8+17q^4-16=0 \cdot (-1) \\ q^8-17q^4+16 &= 0 \end{aligned}$$

که چیرې  $q^4 = y$  وضع کړو، نو:

$$y^2 - 17y + 16 = 0$$

$$\Delta = 289 - 64 = 225 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \pm 15$$

$$y = \frac{17+15}{2} = \frac{32}{2} = 16$$

$$q^4 = 16 \Rightarrow q^4 = 2^4 \Rightarrow \boxed{q=2}$$

7. د لاندي سلسلي د جمعي قسمي حاصل په لاس راوړئ.

$$0.1 + 0.01 + 0.001 + 0.0001 + \dots$$

حل:

$$\begin{aligned} 0.1 + 0.01 + 0.001 + 0.0001 &= \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10000} + \dots \\ &= \frac{1}{10} \left[ 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10000} + \dots \right] \\ &= \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{1-q} = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{1}{10} \cdot \frac{10}{9} = \frac{1}{10} \cdot \frac{10}{9} = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

8. دیوه ناپايه هندسي ترادف لومړی حد 9 او پنځم حد يې  $\frac{1}{9}$  دی، د نوموړي ترادف د حدونو د جمعي حاصل پيدا کړئ.

حل:

$$\left. \begin{aligned} a &= 9 \\ aq^4 &= \frac{1}{9} \\ S_n &=? \end{aligned} \right\} \begin{aligned} aq^4 = \frac{1}{9} &\Rightarrow aq^4 = \frac{1}{9} \Rightarrow 81q^4 = 1 \\ q^4 = \frac{1}{81} &\Rightarrow q^4 = \left(\frac{1}{3}\right)^4 \Rightarrow \boxed{q = \frac{1}{3}} \end{aligned}$$

$$S_n = 9 \frac{1-q^n}{1-q} = 9 \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^5}{1-\frac{1}{3}} = 9 \frac{1-\frac{1}{243}}{\frac{2}{3}} = 9 \frac{\frac{243-1}{243}}{\frac{2}{3}} = 9 \frac{242}{243} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9 \cdot 242}{162} = \frac{1089}{81} = 13.\bar{4}$$

9. د 3 او 96 عددونو ترمنځ 4 هندسي وسطونه په بېل بېل ډول وليکئ.

$$3, \square, \square, \square, \square, 96$$

حل:

$$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \quad a_6$$

$$\left. \begin{array}{l} a = 3 \\ aq^5 = 96 \\ n = 6 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3q^5 = 96 \quad / \div 3 \\ q^5 = 32 \Rightarrow q^5 = 2^5 \Rightarrow \boxed{q = 2} \end{array}$$

$$3, 6, 12, 24, 48, 96$$

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$$

$$a_2 = \sqrt{a_1 \cdot a_3} = \sqrt{3 \cdot 12} = \sqrt{36} = 6$$

$$a_3 = \sqrt{a_2 \cdot a_4} = \sqrt{6 \cdot 24} = \sqrt{144} = 12$$

$$a_4 = \sqrt{a_3 \cdot a_5} = \sqrt{12 \cdot 48} = \sqrt{576} = 24$$

$$a_5 = \sqrt{a_4 \cdot a_6} = \sqrt{24 \cdot 96} = \sqrt{2304} = 48$$

10. د  $2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \dots$  هندسي سلسلې د اتو لومړيو حدونو د جمعې حاصل په لاس راوړئ.

$$S_n = a \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

حل:

$$\left. \begin{array}{l} a = 2 \\ q = \frac{1}{3} \\ n = 8 \\ S_8 = ? \end{array} \right\} \begin{array}{l} S_8 = 2 \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^8}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)} \\ S_8 = 2 \frac{1 - \frac{1}{6561}}{\frac{2}{3}} = 2 \frac{\frac{6560}{6561}}{\frac{2}{3}} = 2 \frac{6560}{6561} \cdot \frac{3}{2} = \frac{19680}{6561} = 2.9995\bar{4} \Rightarrow \boxed{S_8 \approx 3} \end{array}$$

11. که  $a = 4$  او  $d = 3$  وي، هارمونيکي ترادف د  $n = 12$  لپاره په لاس راوړئ.

حل:

$$4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34, 37$$

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{7}, \frac{1}{10}, \frac{1}{13}, \frac{1}{16}, \frac{1}{19}, \frac{1}{22}, \frac{1}{25}, \frac{1}{28}, \frac{1}{31}, \frac{1}{34}, \frac{1}{37}$$

لاندي پيرويډيک (متوالي) کسرونه په عامو کسرونو واړوئ.

a)  $2.\bar{8}$

b)  $3.\bar{57}$

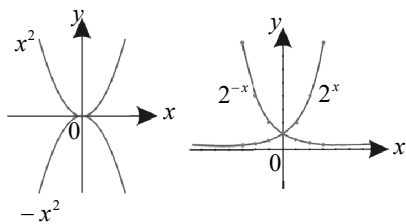
: (a حل

$$\begin{aligned}2.\bar{8} &= 2.8888 \dots = 2 + 0.8 + 0.08 + 0.008 + 0.0008 + \dots \\&= 2 + \frac{8}{10} + \frac{8}{100} + \frac{8}{1000} + \frac{8}{10000} + \dots \\&= 2 + \frac{8}{10} \cdot \left[ 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10000} + \dots \right] = 2 + \frac{8}{10} \cdot \frac{1}{9} \\&= 2 + \frac{8}{10} \cdot \frac{10}{9} = 2 + \frac{8}{9} = \frac{18+8}{9} = \frac{26}{9}\end{aligned}$$

: (b حل

$$\begin{aligned}3.5\bar{7} &= 3.57575757 \dots \\&= 3 + 0.57 + 0.0057 + 0.000057 + 0.00000057 + \dots \\&= 3 + \frac{57}{100} + \frac{57}{10000} + \frac{57}{1000000} + \frac{57}{100000000} + \dots \\&= 3 + \frac{57}{100} \cdot \left[ 1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{10000} + \frac{1}{1000000} + \frac{1}{100000000} + \dots \right] \\&= 3 + \frac{57}{100} \cdot \frac{1}{99} = 3 + \frac{57}{100} \cdot \frac{100}{99} = 3 + \frac{57}{99} = \frac{297+57}{99} = \frac{354}{99} = \frac{118}{33} \Rightarrow \boxed{3.5\bar{7} = \frac{118}{33}}\end{aligned}$$





## پنځم څپرکی: لوگاریتم

اکسپوننشیل تابعگانې (Exponential functions)

د درسي کتاب (153) مخ

د لوست وخت: (دوه درسي ساعتونه) لومړی درسي ساعت

<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- پوهنيزې</li> <li>- مهارتي</li> <li>- ذهني</li> </ul> <p>زده کوونکي به د لوست په پای کې و توانېږي چې:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• د اکسپوننشیل تابعگانو په مفهوم پوه شي.</li> <li>• د اکسپوننشیل تابعگانو گرافونه رسم او پوښتنې حل کړای شي.</li> <li>• د اکسپوننشیل تابعگانو په پوهېدو او د هغو گرافونو په رسمولو خوښي ښکاره او په ځان باور پيدا کوي.</li> </ul>	
<p>2- د زده کړې لارې:</p> <p>پوښتنه او ځواب، ډله ییز او یو کسيز کار...</p>	
<p>3- مرستندويه مواد:</p> <p>د وروډي شکل چارټ</p>	
<p>4- د وروډي برخې توضیح (5 دقیقې)</p> <p>ښاغلی ښوونکی: له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته د زده کوونکو پام د کتاب وروډي برخې ته راوگرځوی او وپوښتی:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• تاسو له تېر ټولگي څخه پوهېږی چې د <math>f(x) = x^2</math> او <math>f(x) = -x^2</math> گرافونه نظر د <math>y</math> محور ته یو د بل متناظر دي.</li> <li>• ایا ویلای شئ د کتاب د وروډي برخې له شکلونو څخه کوم یو شکل په دې تابعگانو پورې اړه لري؟</li> </ul> <p>په همدې ډول په وروډي شکل کې یو بل شکل هم لیدل کېږي، ایا هغه هم یو د بل متناظر دي؟ که زده کوونکي ستونزې ولري، تاسو ورته وواياست. وروسته به ثابت شي چې د <math>f(x) = 2^x</math> او <math>f(x) = 2^{-x}</math> تابعگانو گرافونه هم یو د بل متناظر دي.</p>	
<p>5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې):</p> <p>ښاغلی ښوونکی د فعالیت په پای کې د تابع عمومي شکل یعنی <math>f(x) = a^x</math> تعریف د کتاب له مخې زده کوونکو ته بیان او ورته وواياست چې پورتنی تابعگانې د اکسپوننشیل تابع د <math>a</math> په قاعده بولي.</p> <p>زده کوونکي په مناسبو ډلو ووېشي د کتاب 153 مخ فعالیت ورکړی چې د <math>f(x) = 2^x</math> تابع د <math>x \in \mathbb{Z}</math> مختلفو قیمتونو لپاره گراف رسم او د <math>y</math> له محور سره د تقاطع ټکی په لاس راوړي.</p> <p>بیا په همدې ډول دې د <math>f(x) = 2^{-x}</math> تابع گراف رسم کړي او د دواړو تابعگانو گرافونه او قیمتونه دې یو له بل سره پرتله کړي، چې د قیمتونو له مخې متزایده او متناقصه تابع وښيي.</p> <p>په پای کې د دوو ډلو له استازو څخه وغواړی چې خپل سرته رسولی فعالیت نورو ته توضیح او تشریح کړي، که چیرې</p>	

کومې ډلې تېروتنه کړې وي د بلې ډلې په واسطه يې اصلاح کړئ.

يو داوطلب زده‌کوونکی تختې ته راوغوړی چې پورتنی فعالیت د  $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  تابع لپاره سرته ورسوي، د ستونزې په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړئ.

### 6- د زده‌کړې تحکیم: (7) دقیقې

ښاغلی ښوونکی څرنگه چې د اکسپوننشل تابع د زده‌کوونکو لپاره نوي موضوع او څه نا څه ستونزمنه هم ده، د لوست د لاینه تحکیم او زده‌کړې لپاره تاسو یو ځل بیا د زده‌کوونکو په فعالې برخې اخیستنې سره (د پوښتنې او ځواب په توگه) موضوع تکرار کړی، چې زده‌کوونکي د اکسپوننشل تابع په هکله ښه پوه شي.

### 7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ددې لپاره چې ښاغلی ښوونکی د زده‌کړې په هکله ډاډه شي، نو زده‌کوونکي دې د لاندې پوښتنو په کولو سره وازموي:

1. د  $f(x) = x^2$  او  $f(x) = -x^2$  گرافونه نظر کوم محور ته یو د بل متناظر دي؟

2. د  $f(x) = x^2$  په تابع کې  $x \in Z$  ټولو قیمتونو لپاره تل مثبت دي او که منفي؟

3. د  $f(x) = a^x$  په تابع کې  $a = 1$  کېدای شي او که  $a \neq 1$  وي؟

کوښښ وکړئ چې ځوابونه په وار سره له زده‌کوونکو څخه په لاس راوړئ د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړئ.

### 8- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

دلاندې اکسپوننشل تابع گانو گرافونه په قایمو مختصاتو کې رسم کړئ.

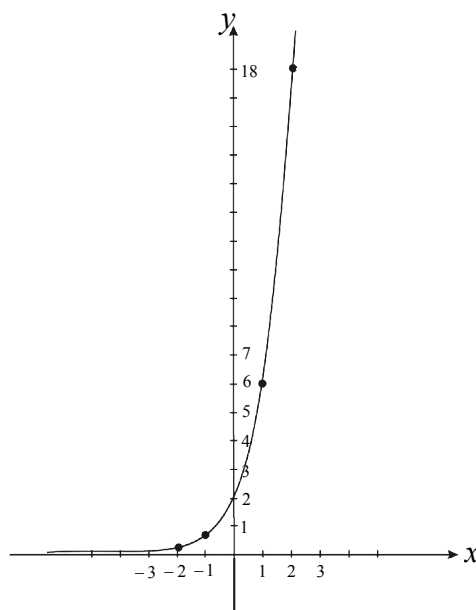
a)  $f(x) = 2 \cdot 3^x$

b)  $f(x) = 2 \cdot 3^{-x}$

**د (a) حل:** په هره تابع کې  $x$  ته څو تام مثبت او منفي قیمتونه ورکوو او د تابع قیمت په لاس راوړو:

$x$	$f(x)$
0	2
1	6
-1	$\frac{2}{3}$
2	18
-2	$\frac{2}{9}$

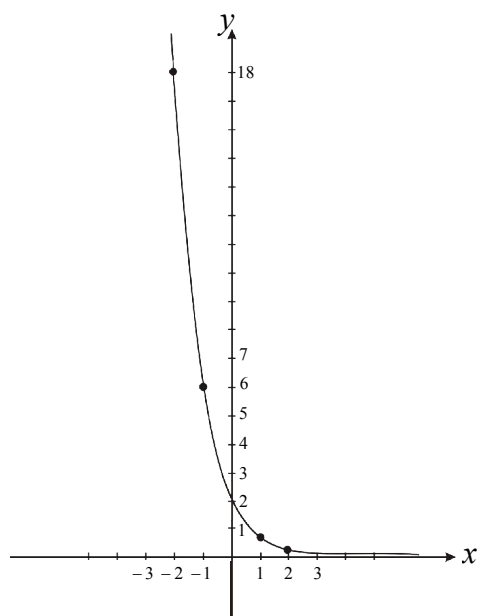
$$f(x) = 2 \cdot 3^x$$

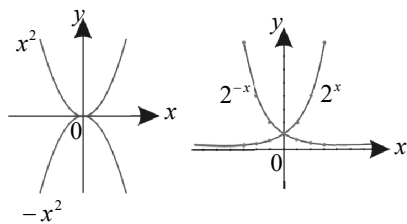


د (b) حل:

$x$	$f(x)$
0	2
1	$\frac{2}{3}$
2	$\frac{2}{9}$
-1	6
-2	18

$$f(x) = 2 \cdot 3^{-x}$$





## پنجم څپرکی: لوگاریتم

اکسپوننشیل تابعگانې (Exponential functions)

د درسي کتاب (154) مخ

د لوست وخت: (دوه درسي ساعتونه) دویم درسي ساعت

<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• د اکسپوننشیل په تابع کې متزایده او متناقصه تابع وپېژني.</li> <li>• متزاید او متناقصې تابعگانې تشخیص او توپیریې وکړای شي.</li> <li>• ددې پوهې او مهارت له سرته رسولو څخه خوښي ښکاره کوي.</li> </ul>	<p>- پوهنیزه</p> <p>- مهارتي</p> <p>- ذهنيتي</p>
<p>انفرادي، ډله ییز، پوښتنه او ځواب</p>	<p>2- د زده کړې لارې:</p>
<p>د اړتیا وړ مواد (چارټ)</p>	<p>3- مرستندويه مواد:</p>
<p>4- د ورودی برخې توضیح (5 دقیقې)</p> <p>ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته د زده کونکو پام د کتاب عنوان او ورودی برخې ته راوگرځوي او وپوښتي:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• د <math>f(x) = 2^x</math> تابع د <math>y</math> محور په کوم ټکي کې قطع کوي؟</li> <li>• د <math>f(x) = 2^{-x}</math> تابع د <math>y</math> محور په کوم ټکي کې قطع کوي؟</li> <li>• ایا دا دواړه تابعگانې نظر کوم محور ته یو د بل متناظر دي؟</li> </ul> <p>ښایي چې زده کونکي ځوابونه ووايي، له هغه پرته تاسو له تېر لوست څخه په گټې اخیستنې سره ځوابونه ورته وواياست.</p>	
<p>5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې):</p> <p>ښاغلی ښوونکی لوست د پوښتنې او ځواب په توگه داسې پیل کړی:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• څوک ویلای شي د <math>f(x) = a^x</math> په تابع کې که <math>a &gt; 1</math> وي، تابع متزایده ده او که متناقصه؟</li> <li>• څوک ویلای شي د <math>f(x) = a^x</math> په تابع کې که <math>a &lt; 1</math> وي، تابع متزایده ده او که متناقصه؟</li> </ul> <p>که چیرې زده کونکي ځوابونه ووايي ښه به وي او که نه تاسو داسې ورته تشریح کړی:</p> <p>که چیرې د اکسپوننشیل په تابع کې <math>a &gt; 1</math> وي، تابع متزایده او که <math>a &lt; 1</math> وي، تابع متناقصه او که <math>a = 1</math> وي؛ نو تابع ثابت ده.</p> <p>زده کونکي په مناسبو ډلو وپوښی د کتاب د 154 مخ جدولونه چې یو یې د <math>f(x) = 2^x</math> او بل یې د <math>f(x) = 2^{-x}</math> تابع پورې اړه لري، په کمیات وضعیه کې د هر ټکي د کمیاتو په ټاکلو سره د دواړو تابعگانو گرافونه رسم او په هغو کې دې متزایده او متناقصه منحنی لومړی د قیمتونو له مخې او بیا په گرافونو کې وښيي، ددې فعالیت له سرته رسولو وروسته د دوو ډلو استازي راوغوړی او خپل سرته رسولي فعالیت دې د غوښتنو سره سم نورو ډلو ته تشریح کړي، که چیرې کومې ډلې تېروتنه کړي وي د یوې بلې ډلې په واسطه یې اصلاح کړی.</p>	

بیا یو داوطلب زده‌کوونکی تختې ته راوغواړئ چې د کتاب 154 مخ مثال جدول جوړ او گراف یې د جدول له مخې په دقیقه توگه رسم کړي او نور زده‌کوونکي دې د کتاب له لیدو پرته په خپلو کتابچو کې حل کړي. که کوم زده‌کوونکی پوښتنه کوي، مرسته ورسره وکړئ، په پای کې د اکسپوننشیل تابع خاصیتونه یو په یو ورته وواياست چې زده‌کوونکي ورباندې پوه شي.

### 6- د زده‌کړې تحکیم: (7) دقیقې

د لوست د لاینه تحکیم لپاره د  $f(x) = 2^x$  ،  $f(x) = \frac{1}{2^x}$  تابعگانې زده‌کوونکو ته ورکړئ چې په هغوی کې متزایدې او متناقصې ساحې وښيي او هم د  $y$  له محور سره د تقاطع ټکی پیدا کړي، د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړئ.

### 7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ددې لپاره چې ښاغلی ښوونکی د زده‌کړې په هکله ډاډه شي، نو زده‌کوونکي دې د لاندې پوښتنو په پوښتلو سره ازمويي:

1. د اکسپوننشیل هره تابع د  $a > 1$  قیمتونو لپاره متزایده ده؟
2. که د هرې اکسپوننشیل تابع د تعریف ناحیه ټول حقیقي عددونه وي، د قیمتونو ناحیه یې څه ډول عددونه کېدای شي؟
3. ایا هره اکسپوننشیل تابع، معکوس تابع لري؟

### 8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات:

ښاغلی ښوونکی د کتاب 155 مخ فعالیت په لاندې ډول ثبوت کېږي، که زده‌کوونکي ونشي کولای تاسو یې ورته ثبوت کړئ؟

$$1) f(x+y) = f(x) \cdot f(y) \quad , \quad 2) f(x-y) = \frac{f(x)}{f(y)}$$

$$3) f(a \cdot x) = (f(x))^a$$

که  $(x, y) \in R$  وي؛ نو:

$$1) f(x+y) = a^{(x+y)} = a^x \cdot a^y = f(x) \cdot f(y) \Rightarrow f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$$

$$2) f(x-y) = a^{(x-y)} = a^x \cdot a^{-y} = a^x (a^y)^{-1} = a^x \cdot \frac{1}{a^y} = f(x) \cdot \frac{1}{f(y)} = \frac{f(x)}{f(y)} \Rightarrow f(x-y) = \frac{f(x)}{f(y)}$$

$$3) f(a \cdot x) = a^{ax} = (a^x)^a = (f(x))^a \Rightarrow f(a \cdot x) = (f(x))^a$$

### 9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

دلاندې اکسپوننشیل تابع گانو گرافونه په قایمو مختصاتو کې رسم کړئ.

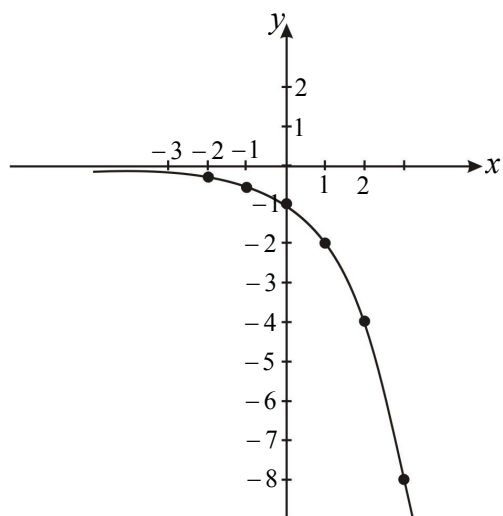
$$c) f(x) = -2^x$$

$$d) f(x) = -2^{-x}$$

د (c) حل: په هر هره تابع کې  $x$  ته څو تام مثبت او منفي قیمتونه ورکولو او د تابع قیمت په لاس راوړو:

$x$	$f(x)$
0	-1
1	-2
2	-4
3	-8
-1	$-\frac{1}{2}$
-2	$-\frac{1}{4}$

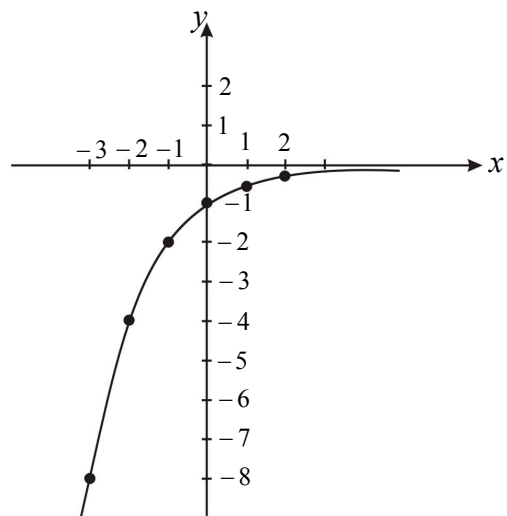
$$f(x) = -2^x$$



د (d) حل:

$x$	$f(x)$
0	-1
1	$-\frac{1}{2}$
2	$-\frac{1}{4}$
-1	-2
-2	-4
-3	-8

$$f(x) = -2^{-x}$$



## پنجم څپرکی: لوگارېتم

$$y = a^x \Leftrightarrow \log_a y = x$$

لوگارېتم

د درسي کتاب (157) مخ

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

<ul style="list-style-type: none"> <li>• زده‌کونکي د لوگارېتم په مفهوم پوه شي.</li> <li>• زده‌کونکي په طاقت لرونکو عددونو کې لوگارېتمي قيمتونه تشخيص او وټاکي.</li> <li>• زده‌کونکي د عددونو لوگارېتمي قيمتونه پيدا کړای شي.</li> <li>• زده‌کونکي د پورته مهارت په سرته رسولو سره خوښي ښکاره او په ځان به باور پيدا کړي.</li> </ul>	<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- پوهنيزې</li> <li>- مهارتي</li> <li>- ذهني</li> </ul>
<p>دلهيز، انفرادي، پوښتنه او ځواب</p>	<p>2- د زده کړې لارې:</p>
<p>د اړتيا وړ مواد (چارت)</p>	<p>3- مرستندويه مواد:</p>
<p>ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته د زده‌کونکو پام د کتاب عنوان او وړودي برخې ته راوگرځوي او وپوښتي:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• د <math>y = x^3</math> په افاده کې د <math>x = 2, 3, 4</math> په قيمتونو سره <math>y</math> کوم قيمتونه غوره کوي؟</li> <li>• ايا د <math>y = a^x</math> تابع په کوم بل ډول هم ليکلای شو؟</li> </ul> <p>که چيرې زده‌کونکي ځوابونه ووايي ښه به وي، له هغه پرته تاسو ورته ووايست او بيان يې کړئ.</p>	<p>4- د وړودي برخې توضیح (5 دقيقې)</p>
<p>5- د لوست بهير او فعاليت (28 دقيقې):</p> <p>ښاغلی ښوونکی زده‌کونکي په مناسبو ډلو و وېشي د کتاب د 157 مخ فعاليت ورکړي چې په خپلو ډلو کې يې له بحث او مشورې وروسته جدول بشپړ کړي او پوښتنو ته سم ځوابونه پيدا کړي.</p> <p>بيا د درې ډلو استازي راوغواړي چې د خپلې ډلې سرته رسولي فعاليت او ځوابونه نورو ته توضيح کړي. که چيرې کومې ډلې تېروتنه کړي وي د بلې ډلې په واسطه يې اصلاح کړي، د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړي.</p> <p>په پای کې تاسو د لوگارېتم عمومي حالت او تعريف د <math>y = a^x \Leftrightarrow \log_a y = x</math> افادې له مخې زده‌کونکو ته تشریح کړي، ترڅو هغوی د لوگارېتم په مفهوم او ضرورت ښه پوه شي.</p> <p>له هغه وروسته اړوند مثالونه يعنې <math>\log_2 8 = 3</math> او <math>\log_{10} 1000 = 3</math> پر تخته حل او تشریح کړي.</p>	
<p>6- د زده کړې تحکيم: (7 دقيقې)</p> <p>ښاغلی ښوونکی: د لوست د لاینه پوهېدو لپاره د حل شوي مثال په ډول پوښتنې پر تخته وليکي، زده‌کونکو ته ووايست چې په خپلو کتابچو کې يې حل کړي، تاسو دکار څارنه او کنترول وکړي.</p>	

په پای کې یو داوطلب زده‌کوونکی تختې ته راوغواړی چې پر تخته یې حل کړي. د ستونزې په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړي. نور زده‌کوونکي دې خپل ځوابونه د تختې له حل سره پرتله او د تېروتنې په صورت کې دې اصلاح کړي.

### 7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ددې لپاره چې ښاغلی ښوونکی د زده‌کړې په هکله ډاډه شي، نو زده‌کوونکي دې د لاندې پوښتنو په واسطه سره وازمويي:

1)  $\log_3 9 = ?$

2)  $\log_2 16 = ?$

3)  $\log_3 27 = ?$

### 8- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

1. لاندې لوگاریتمي اړیکې د هغوی په اړوندو افادو واروی:

a)  $\log_{10} N = x$

b)  $\log_{\frac{1}{6}} 36 = -2$

c)  $\log_9 81 = 2$

d)  $\log_5 5 = 1$

**حل:** څرنگه چې لوگاریتم د طاقت یو بېل ډول ښوونه ده، نو اړوند افادې یې د طاقت په شکل په لاس راوړو:

a)  $\log_{10} N = x \Rightarrow N = 10^x$

b)  $\log_{\frac{1}{6}} 36 = -2 \Rightarrow 36 = \left(\frac{1}{6}\right)^{-2}$

c)  $\log_9 81 = 2 \Rightarrow 81 = 9^2$

d)  $\log_5 5 = 1 \Rightarrow 5 = 5^1$

2. د لوگاریتم په کارونې سره د لاندې افادو (طاقت لرونکو عددونو) معادل شکل ولیکئ:

**حل:**

a)  $4^3 = 256 \Rightarrow \log_4 256 = 3$

b)  $2^5 = 32 \Rightarrow \log_2 32 = 5$

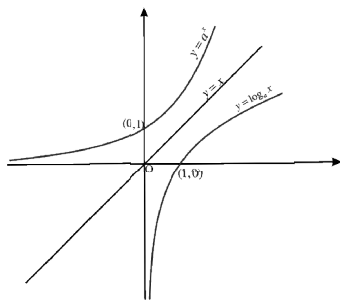
c)  $10^4 = 10000 \Rightarrow \log_{10} 10000 = 4$

d)  $10^{-1} = 10^y \Rightarrow \log_{10} 10^{-1} = y$

e)  $y = 2^x \Rightarrow \log_2 y = x$

f)  $y = 3^x \Rightarrow \log_3 y = x$





## پنجم څپرکی: لوگاریتم

لوگاریتمي تابع گانې

د درسي کتاب (159) مخ

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

<ul style="list-style-type: none"> <li>• زده‌کونکي د لوگاریتمي تابع گانو په مفهوم پوه شي.</li> <li>• زده‌کونکي د لوگاریتمي تابع گانو پوښتنې حل او گرافونه به يې رسم کړای شي.</li> <li>• زده‌کونکي د اړتيا په وخت کې له لوگاریتمي تابع گانو څخه کار واخلي او خوښي به ښکاره کړي.</li> </ul>	<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- پوهنيزې</li> <li>- مهارتي</li> <li>- ذهني</li> </ul>
<p>د لاهيز، انفرادي، پوښتنه او ځواب</p>	<p>2- د زده کړې لارې:</p>
<p>د اړتيا وړ مواد (چارت)</p>	<p>3- مرستندويه مواد:</p>
<p>ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته د زده‌کونکو پام د کتاب عنوان او ورودې برخې ته د لاندې پوښتنو په طرح کولو سره راوگرځوي:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• څوک ويلاي شي د 8 عدد، معکوس عدد، کوم عدد دی؟</li> <li>• څوک ويلاي شي د <math>\frac{2}{3}</math> عدد، معکوس عدد کوم عدد دی؟</li> <li>• څوک ويلاي شي کوم ډول تابعگانې معکوسې تابعگانې لري؟</li> </ul> <p>کوښښ وکړئ چې ځوابونه له زده‌کونکو څخه په لاس راوړئ، د ستونزې په صورت کې تاسو ورته لنډ معلومات ورکړئ.</p>	<p>4- د ورودې برخې توضیح (5 دقيقې)</p>
<p>5- د لوست بهير او فعاليت (28 دقيقې):</p> <p>ښاغلی ښوونکی لومړی د اکسپوننشيال تابع معکوسه تابع چې د لوگاریتمي تابع په نامه يادېږي، ددې تعريف او شرايطو په برخه کې زده‌کونکو ته بشپړ معلومات ورکړي، وروسته د <math>f(x) = a^x</math> او <math>g(x) = \log_a x</math> تابعگانې چې د يو بل معکوسې تابعگانې بلل کېږي وروپېژني او گرافونه يې رسم کړي، وروښايست چې دا گرافونه د <math>y = x</math> مستقيم ته متناظر دي، بشپړ توضیحات ورته ورکړي.</p> <p>وروسته زده‌کونکو ته دنده ورکړي چې د درسي کتاب 160 مخ لومړی مثال د کتاب له ليدو پرته په خپلو کتابچو کې حل او گراف يې رسم کړي. د کار څارنه وکړي، د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړي، بيا يو داوطلب زده‌کونکی تختې ته راوغواړي چې پر تخته يې حل کړي، د تېروتنې په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړي، نور زده‌کونکي دې خپل حلونه د تختې له حل سره پرتله او تېروتنې دې اصلاح کړي.</p> <p>زده‌کونکي په مناسبو ډلو ووېشي، ورته ووايست چې د کتاب د همدې مخ فعاليت په خپلو ډلو کې د بحث او مشورې په کولو سره سرته ورسوي. د فعاليت په پای کې د دوو يا دريو ډلو استازي خپل سرته رسولي فعاليت نورو ته توضیح کوي. که</p>	

چیرې کومې ډلې تېروتنه کړې وي، د یوې بلې ډلې په واسطه یې اصلاح کړې (ددې فعالیت بشپړ حل تاسو ته په اضافي معلوماتو کې درکړل شوی دی).

د لوست په پای کې دې ښاغلی ښوونکی د لوگاریتمي تابعگانو خاصیتونه، هر یو جلا جلا توضیح او تشریح کړي. ترڅو زده-کونکي د لوگاریتمي تابع په مفهوم او خاصیتونو ښه پوه شي او هغه مثال چې د 2 په قاعده، لوگاریتمي قیمتونه یې غوښتل شوي حل او ځوابونه یې په لاس راوړي.

### 6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

ښاغلی ښوونکي د لوست د لاینه تحکیم او پوهېدو لپاره دویم مثال پر تخته ولیکي، زده‌کونکو ته ووايست چې د کتاب له لیدو پرته یې په خپلو کتابچو کې حل کړي. په پای کې دې یو داوطلب زده‌کونکی نوموړی مثال پر تخته حل او نور زده-کونکي دې خپل حلونه ورسره پرتله کړي. د ستونزو په صورت کې مرسته وکړئ.

### 7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ښاغلی ښوونکی ددې لپاره چې د زده‌کړې په هکله ډاډه شي، د لوست دریم مثال پر تخته ولیکي، زده‌کونکو ته ووايست چې د کتاب له لیدو پرته یې په خپلو کتابچو کې حل کړي. د کار څارنه وکړئ، په پای کې یو زده‌کونکی راوغواړئ چې پر تخته یې حل کړي د ستونزو په صورت کې مرسته وکړئ.

### 8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات:

ښاغلی ښوونکی د کتاب 160 مخ فعالیت چې د  $2^x$ ,  $(\frac{1}{2})^x$  اکسپوننشیل تابعگانې دي، گرافونه او معکوس تابعگانې په لاندې ډول دي:

$y = 2^x$  تابع په پام کې نیسو:

$x$	-2	-1	0	1	2
$y = 2^x$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4

$$x = 1 \left. \vphantom{x} \right\} (1, 2), \quad x = 2 \left. \vphantom{x} \right\} (2, 4)$$

$$y = 2 \left. \vphantom{y} \right\} (1, 2), \quad y = 4 \left. \vphantom{y} \right\} (2, 4)$$

د  $y = 2^x$  تابع معکوسه تابع  $f(x) = \log_2 x$  ده.

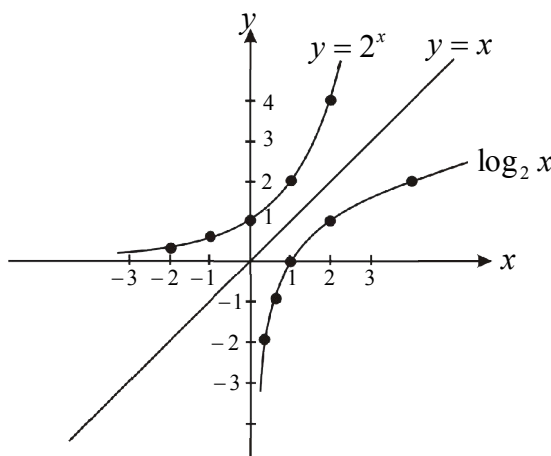
$x$	1	2
$f(x)$	0	1

$$x = 1 \left. \vphantom{x} \right\} (1, 0)$$

$$f(x) = \log_2^x = 0$$

$$x = 2 \left. \vphantom{x} \right\} (2, 1)$$

$$f(x) = 1$$



اوس د  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  تابع په پام کې نیسو:

$x$	0	1	2
$y$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$$x = 0 \left. \vphantom{x} \right\} (0, 1)$$

$$x = 1 \left. \vphantom{x} \right\} \left(1, \frac{1}{2}\right)$$

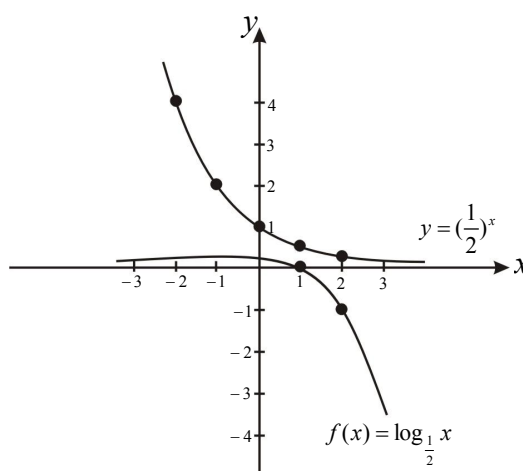
$$x = 2 \left. \vphantom{x} \right\} \left(2, \frac{1}{4}\right)$$

د  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  تابع معکوسه تابع عبارت له  $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$  څخه ده.

$x$	1	2
$f(x)$	0	-1

$$x = 1 \left. \vphantom{x} \right\} (1, 0)$$

$$x = 2 \left. \vphantom{x} \right\} (2, -1)$$



9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

1. د  $f(x) = \log_2 x$  تابع قیمتونه په  $f(2)$ ,  $f(1)$ ,  $f\left(\frac{1}{32}\right)$ ,  $f(32)$  کې پیدا کړئ.

حل:

$$f(x) = \log_2 x$$

$$f(2) = \log_2 2 = 1$$

$$f(1) = \log_2 1 = 0$$

$$f\left(\frac{1}{32}\right) = \log_2 \frac{1}{32} = \log_2 2^{-5} = -5 \log_2 2 = -5 \cdot 1 = -5$$

$$f(32) = \log_2 32 = \log_2 2^5 = 5 \cdot \log_2 2 = 5 \cdot 1 = 5$$

2. د  $f(x) = \log_3 x$  تابع قیمتونه په  $f(1)$  او  $f\left(\frac{1}{81}\right)$  کې په لاس راوړئ.

حل:

$$f(x) = \log_3 x$$

$$f(1) = \log_3 1 = 0$$

$$f\left(\frac{1}{81}\right) = \log_3 \left(\frac{1}{81}\right) = \log_3 3^{-4} = -4 \cdot \log_3 3 = -4 \cdot 1 = -4$$

## پنځم څپرکی: لوگاریتم

معمولي لوگاریتم او طبیعي لوگاریتم

د درسي کتاب (163) مخ

د لوست وخت: (یو درسي ساعت)

$$\left. \begin{array}{l} \log_e N \\ \log_{10} 10^3 \end{array} \right\} = ?$$

<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• پوهنيزه</li> <li>• مهارتي</li> <li>• ذهني</li> </ul> <p>زده کوونکي به د لوست په پای کې و توانېږي چې:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• د معمولي او طبیعي لوگاریتمونو په مفهومونو پوه شي.</li> <li>• معمولي او طبیعي لوگاریتمونه یو له بله تفکیک، د هر یوه پوښتنې حل او گرافونه یې رسم کړای شي.</li> <li>• د اړتیا په وخت کې له هر یو لوگاریتم څخه کار واخلي او خپلې ستونزې حل کوي.</li> </ul>	
<p>2- د زده کړې لارې:</p> <p>ډله‌ییز، انفرادي، پوښتنه او ځواب</p>	
<p>3- مرستندويه مواد:</p> <p>د اړتیا وړ مواد</p>	
<p>4- د وروډي برخې توضیح (5 دقیقې)</p> <p>بناغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته د زده‌کوونکو پام د کتاب عنوان او وروډي برخې ته راوگرځوي او وپوښتي:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• په کومو قاعدو سره لوگاریتمونه پېژني؟</li> <li>• ایا د لوگاریتمونو قاعدې یوازې 2 او 3 دي، که نور عددونه هم د لوگاریتم قاعده کېدای شي؟</li> <li>• ایا تاسو د معمولي لوگاریتم او طبیعي لوگاریتم سره بلډیت لرئ.</li> </ul> <p>کوښښ وکړئ چې ځوابونه له زده‌کوونکو څخه په لاس راوړئ، له هغه پرته تاسو معلومات ورکړئ او یوه انگیزه پیدا کړئ.</p>	
<p>5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې):</p> <p>بناغلی ښوونکی لومړی د لوگاریتم تعریف او د هغوی ډولونه (معمولي لوگاریتم، طبیعي لوگاریتم) ورته توضیح کړی، بیا معمولي لوگاریتم چې قاعده یې 10 ده، ورته تعریف او لازم توضیحات ورکړی د همدې په اړوند مثال کې <math>10^0</math> او <math>10^2</math> لوگاریتمونه ورته پیدا کړی، د نورو عددونو لوگاریتمونه دې زده‌کوونکي هر یو په خپلو کتابچو کې په لاس راوړي او گراف دې په خپلو کتابچو کې رسم کړي. د کار څارنه وکړی، د ستونزې په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړی.</p> <p>په پای کې څو داوطلب زده‌کوونکي دې د نوموړو عددونو لوگاریتمونه پر تخته پیدا کړي، ستاسو په مرسته دې گراف پر تخته رسم کړي.</p> <p>په همدې ډول طبیعي لوگاریتم چې قاعده یې <math>e</math> ده ورته تعریف او د <math>e</math> قیمت چې <math>e = 2.71828182\dots</math> ده، ورته په گوته کړی (پیدا کول یې د همدې ټولگي کار نه دی).</p> <p>زده‌کوونکي په مناسبو ډلو وپېشي د <math>y = e^x</math> او <math>y = e^{-x}</math> تابع گرافونه دې د <math>x = -2, -1, 0, 1, 2</math> قیمتونو لپاره رسم کړي، د فعالیت له سرته رسولو وروسته د دوو ډلو استازي راوغواړئ چې د خپل سرته رسولي فعالیت په برخه کې نورو ته معلومات ورکړي د اړتیا په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړي.</p> <p>وروسته بناغلی ښوونکی دې د کتاب د 165 مخ د همدې اړوند مثال پر تخته حل او گراف دې رسم کړي، ترڅو زده‌کوونکي د دواړو موضوعگانو په مفهوم ښه پوه شي.</p>	

**6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې**

د لوست د لارښه تحکیم لپاره زده کوونکو ته د  $10^4, 10^5, 10^{-3}$  او  $\ln e^4$  پوښتنې ورکړې چې د نوموړو عددونو لوگاریتمونه په خپلو کتابچو کې پیدا کړي، بیا یو داوطلب زده کوونکی تختې ته راوغواړي چې هغه پر تخته حل او نور زده کوونکي دې خپل حلونه ورسره پرتله کړي. د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړي.

**7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې**

ښاغلی ښوونکی: ددې لپاره چې د زده کړې په هکله ډاډمن شي، نو زده کوونکي د لاندې پوښتنو په کولو سره وازمويي:

• هغه لوگاریتم چې قاعده یې 10 ده په څه نوم یادېږي؟

• هغه لوگاریتم چې قاعده یې  $e$  ده په څه نوم یادېږي؟

• ایا د 1 عدد هم د لوگاریتم قاعده کېدای شي؟

کوښښ وکړي چې څو اېونه په شفاهي توګه له زده کوونکو څخه په لاس راوړي.

**8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات:**

ښاغلی ښوونکی د کتاب د 162 مخ فعالیت په لاندې توګه حلېږي:

د  $f(x) = \log_2 x$  تابع قیمت د  $\sqrt{2}$ ،  $x = 28$  لپاره په لاس راوړي.

**حل:**

$$f(\sqrt{2}) = \log_2 \sqrt{2} = \log_2 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_2 2 = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} f(28) &= \log_2 28 = \log_2 4 \cdot 7 = \log_2 4 + \log_2 7 = \log_2 2^2 + \log_2 7 \\ &= 2 \cdot \log_2 2 + \log_2 7 = 2 \cdot 1 + \log_2 7 = 2 + \log_2 7 \end{aligned}$$

ښاغلی ښوونکی د 166 مخ فعالیت په لاندې توګه سرته ورسوي:

$$a) y = \ln \frac{1}{e^7} = \log_e \frac{1}{e^7} = \log_e e^{-7} = -7 \log_e e = -7 \cdot 1 = -7$$

$$b) \log 0.0001 = \log 10^{-4} = -4 \cdot \log 10 = -4 \cdot 1 = -4$$

**9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:**

لاندې لوگاریتمونه حساب کړي.

$$a) \log_e e^8$$

$$b) \ln \frac{1}{e^{-3}}$$

$$c) \log 0.01$$

$$d) \log \frac{1}{10^{-2}}$$

**حل:**

$$a) \log_e e^8 = 8 \cdot \log_e e = 8 \cdot 1 = 8$$

$$b) \ln \frac{1}{e^{-3}} = \ln e^3 = 3 \ln e = 3$$

$$c) \log 0.001 = \log 10^{-3} = -3 \cdot \log 10 = -3$$

$$d) = -2 \log \frac{1}{10^{-2}} = \log 10^2 = 2 \cdot \log 10 = 2$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$\log(x \cdot y) = \log x + \log y$$

$$\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y$$

## پنځم څپرکی: لوگاریتم

د لوگاریتم قوانین

د درسي کتاب (167) مخ

د لوست وخت: (یو درسي ساعت)

<ul style="list-style-type: none"> <li>• زده‌کونکي به د لوگاریتم د قوانینو په مفهوم پوه شي.</li> <li>• زده‌کونکي د لوگاریتم د قوانینو په تطبیق سره پوښتنې حل کړای شي.</li> <li>• زده‌کونکي د اړتیا په وخت کې لوگاریتمي قوانین وکاروي او په ځان باور پیدا کوي.</li> </ul>	<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- پوهنيزې</li> <li>- مهارتي</li> <li>- ذهني</li> </ul>
<p>د لاندې، پوښتنه او ځواب</p>	<p>2- د زده کړې لارې:</p>
<p>د اړتیا وړ مواد (چارت)</p>	<p>3- مرستندويه مواد:</p>
<p>ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته د زده‌کونکو پام د کتاب عنوان او ورودی برخې ته د لاندې پوښتنو په کولو سره راوگرځوي:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• په ضرب کې د مساوي قاعدو لپاره د توانونو قانون څه ډول دی؟</li> <li>• ایا د <math>\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y</math> له افادې سره بلديت لري.</li> </ul> <p>کوښښ وکړئ چې ځوابونه له زده‌کونکو څخه په لاس راوړئ، د ستونزو په صورت کې تاسو داسې معلومات ورکړئ چې د یوې انگیزې د پیدا کولو سبب وگرځي.</p>	<p>4- د ورودی برخې توضیح (5 دقیقې)</p>
<p>5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې):</p> <p>ښاغلی ښوونکی: زده‌کونکي په مناسبو ډلو ووېشي ورته ووايست چې د کتاب 167 مخ فعالیت په خپلو ډلو کې د بحث او مذاکرې په کولو سره سرته ورسوي، د فعالیت له پای ته رسولو وروسته د دريو ډلو استازي راوغواړئ چې خپل سرته رسولی فعالیت نورو ته پر تخته توضیح او تشریح کړي، د ستونزو او تېروتنې په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړئ. بیا دوو زده‌کونکو ته هدایت ورکړئ چې په وار سره لومړی او دویم قوانین ولولي او مفهوم یې په ورکړل شوو مثالونو کې پر تخته توضیح کړي، که اړتیا وي لارښوونه ورته وکړئ، وروسته تاسو دریم قانون (چې د دوو یا څو عددونو د حاصل ضرب لوگاریتم دی) د مفهوم له توضیح کولو وروسته د زده‌کونکو په فعال ګډون سره مرحله په مرحله ثبوت کړي، ورپسې د کتاب لومړی مثال پر تخته حل او توضیح کړئ، چې زده‌کونکي د نوموړي قانون په مفهوم پوه شي، په همدې ډول د کتاب د 168 مخ فعالیت ورکړئ چې په خپلو کتابچو کې بحث او مذاکره ورباندې وکړي او فعالیت د عددي مثالونو په واسطه سرته ورسوي، که چیرې ستونزې ولري، له اضافي معلوماتو څخه په کار اخیستنې سره یې تاسو ورته توضیح کړئ.</p>	

**6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې**

ښاغلی ښوونکی د لوست د لابنه تحکیم لپاره دویم مثال پر تخته ولیکئ او زده کوونکو ته و وایاست چې هر یو یې په خپله کتابچه کې حل کړي، د کار څارنه وکړئ، د ستونزو په صورت کې مرسته وکړئ په پای کې یو داوطلب زده کوونکی دا پوښتنه پر تخته حل او نور زده کوونکي دې خپل حلونه ورسره پرتله کړي.

**7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې**

ښاغلی ښوونکی: ددې لپاره چې د زده کړې په هکله ډاډمن شي، نو زده کوونکي د لاندې پوښتنو په کولو سره وازمويي:

$$\log_{10}(100 \cdot 5) = ? \quad \log_{116} 1 = ? \quad \log_2 8$$

**8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات:**

ښاغلی ښوونکی د 168 مخ فعالیت په لاندې توگه سرته ورسوي:

**حل:**

$$1) \log(x + y) \neq \log_a x + \log_a y$$

$$2) \log(x \cdot y) \neq \log x \cdot \log y$$

د پورته مساوات سموالی د عددي مثال په واسطه ښیو:

$$1) \log(10+100) \neq \log 10 + \log 100$$

$$\log 110 \neq 1 + 2 \Rightarrow 2.414 \neq 3$$

$$2) \log(10 \cdot 100) \neq \log 10 \cdot \log 100$$

$$\log(1000) \neq 1 \cdot 2$$

$$3 \neq 2$$

**9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:**

1. لاندې ضربې افادې د جمعې د حاصل په شکل او د جمعې د حاصل افادې د حاصل ضرب په شکل ولیکئ او د امکان په صورت کې یې وروستی قیمت په لاس راوړئ.

**حل:**

$$a) \log_4(5x^2) = \log_4 5 + \log_4 x^2 = \log_4 5 + \log_4 x + \log_4 x = \log_4 5 + 2\log_4 x$$

$$b) \log_{10}(10x^2y) = \log_{10} 10 + \log_{10} x^2 + \log_{10} y = 1 + \log_{10} x + \log_{10} x + \log_{10} y$$

$$c) \log_{10} 5 + \log_{10} 20 = \log_{10}(5 \cdot 20) = \log_{10} 100 = \log_{10} 10^2 = 2$$

$$d) \log_{12} 36 + \log_{12} 4 = \log_{12}(36 \cdot 4) = \log_{12} 144 = \log_{12} 12^2 = \log_{12} 12 + \log_{12} 12 = 1 + 1 = 2$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$\log(x \cdot y) = \log x + \log y$$

$$\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y$$

## پنځم څپرکی: لوگارېتم

د لوگارېتم قوانین

د درسي کتاب (168) مخ

د لوست وخت: (یو درسي ساعت)

<ul style="list-style-type: none"> <li>• زده‌کونکي د لوگارېتم د څلورم او پنځم قانون په مفهوم پوه شي.</li> <li>• زده‌کونکي د پورته قوانینو اړوند پوښتنې حل کړای شي.</li> <li>• زده‌کونکي پورتنی قوانین د مسایلو په حل کې وکاروي او خپلې ستونزې حل کړي.</li> </ul>	<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- پوهنیزه</li> <li>- مهارتي</li> <li>- ذهنيتي</li> </ul>
<p>تشریحي، انفرادي، پوښتنه او ځواب...</p>	<p>2- د زده کړې لارې:</p>
<p>د اړتیا وړ مواد</p>	<p>3- مرستندویه مواد:</p>
<p>بناغلی بنوونکي له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته د یوې انگیزې پیدا کولو لپاره د زده‌کونکو پام لاندې پوښتنو ته راوگرځوئ:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• په تقسیم کې د مساوي قاعدو لپاره د توانونو قوانین څه ډول دی؟</li> <li>• ایا له <math>\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y</math> او <math>\log x^n = n \log x</math> افادو سره بلديت لری.</li> </ul> <p>کوښښ وکړئ چې ځوابونه له زده‌کونکو څخه په لاس راوړئ، د ستونزو په صورت کې تاسو معلومات ورکړئ.</p>	<p>4- د وړودي برخې توضیح (5 دقیقې)</p>
<p>5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې):</p> <p>بناغلی بنوونکي په 168 مخ کې د لوگارېتم څلورم قانون (چې د دوو عددونو د لوگارېتم تقسیم دی) د یوه زده‌کونکي په واسطه ولولئ، کوښښ وکړئ چې زده‌کونکي د هغه مفهوم په فارمولي ډول پر تخته وليکي، له هغه پرته تاسو مفهوم ورته توضیح او فارمول یې پر تخته وليکئ او مرحله په مرحله د زده‌کونکو په فعال گډون سره یې پر تخته ثبوت کړئ. بیا دوه زده‌کونکي په وار سره راوغواړئ چې لومړی او دویم مثالونه د فارمول په تطبیق کولو سره پر تخته حل کړي. د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړئ.</p> <p>په همدې ډول د لوگارېتم پنځم قانون (چې د یوه توان لرونکي عدد لوگارېتم دی) د یوه بل زده‌کونکي په واسطه ولولئ او مفهوم دې بیان کړي. که چیرې زده‌کونکي ستونزه ولري، تاسو ورته بیان او مفهوم په فارمولي ډول پر تخته وليکئ او د <math>\log x^n = n \cdot \log x</math> فارمول ثبوت د زده‌کونکو په فعال گډون سره مرحله په مرحله توضیح او تشریح کړئ او پایله په لاس راوړئ، له همدې قانون څخه په کار اخیستنې سره د <math>\sqrt[n]{x}</math> لوگارېتم یعنې <math>\frac{1}{n} \log x</math> په لنډ ډول وليکئ او په پای کې لومړی مثال ورته حل او توضیح کړئ، چې زده‌کونکي د لوست په مفهوم پوه او هغه وکاروي.</p>	



**6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې**

ښاغلی ښوونکی: د لوست د لاینه تحکیم لپاره د 169 مخ وروستی دویم مثال پر تخته ولیکئ او زده‌کوونکو ته وایاست چې د کتاب له لیدو پرته یې په خپلو کتابچو کې حل کړي وروسته یو داوطلب زده‌کوونکی تخته ته راوغوړئ چې پر تخته باندې یې حل کړي. نور زده‌کوونکي دې خپل حلونه ورسره پرتله او تېروتنې دې اصلاح کړي.

**7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې**

ښاغلی ښوونکی: ددې لپاره چې د زده‌کړې په هکله ډاډمن شي، نو زده‌کوونکي د لاندې پوښتنو په کولو سره وازمويي:

$$\log\left(\frac{A}{B}\right) = ? \quad \log(A)^n = ? \quad \log\left(\frac{100}{10}\right) = ?$$

**8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات:**

ښاغلی ښوونکی: د کتاب 169 مخ وروستی فعالیت په لاندې توگه حلېږي:

**حل:**

$$a) \log_3(0.12) = \log_3\left(\frac{12}{100}\right) = \log_3\left(\frac{3}{25}\right) = \log_3 3 - \log_3 25 = 1 - \log_3 25$$

$$b) \log_5 \sqrt{8} = \log_5 (8)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \log_5 8$$

**9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:**

2. لاندې د خارج قسمت افادې په تفاضل او د تفاضل افادې په خارج قسمت واړوئ، د امکان په صورت کې وروستې ځوابونه په لاس راوړئ.

**حل:**

$$a) \log_7 \frac{63}{49} = \log_7 63 - \log_7 49 = \log_7 (7 \cdot 9) - \log_7 7^2 \\ = \log_7 7 + \log_7 9 - 2 \cdot \log_7 7 = 1 + \log_7 9 - 2 = \log_7 9 - 1$$

$$b) \log \frac{125}{80} = \log 125 - \log 80 = \log 125 - \log (10 \cdot 8) \\ = \log 125 - \log 10 - \log 8 = \log 125 - 1 - \log 8$$

$$c) \log_a (x^2 a) - \log_a x^2 = \log_a \frac{x^2 \cdot a}{x^2} = \log_a a = 1$$

$$d) \log_{10} 1000 - \log_{10} 100 = \log_{10} \frac{1000}{100} = \log_{10} 10 = 1$$

3. لاندې لوگاریتمونه حساب کړئ.

$$a) \log_{10}(0.0001) = ? \quad b) \log_2(8)^{\frac{1}{3}} = ?$$

**حل:**

$$a) \log_{10}(0.0001) = \log_{10} \frac{1}{10000} = \log_{10} \frac{1}{10^4} = \log_{10} 10^{-4} = -4 \log_{10} 10 = -4 \cdot 1 = -4$$

$$b) \log_2(8)^{\frac{1}{3}} = \log_2(2^3)^{\frac{1}{3}} = \log_2 2^{\frac{3}{3}} = \log_2 2 = 1$$

## پنځم څپرکی: لوگاریتم

$$\log_b m = \frac{\log_a m}{\log_a b}$$

د لوگاریتم د یوې قاعدې اړول په بله قاعده

د درسي کتاب (171) مخ

د لوست وخت: (یو درسي ساعت)

<ul style="list-style-type: none"> <li>• زده‌کونکي د یوه عدد لوگاریتم په یوه مشخصه قاعده وپېژني.</li> <li>• زده‌کونکي د شپږم او اووم قانون په مفهوم پوه شي.</li> <li>• زده‌کونکي یو لوگاریتم له یوې قاعدې څخه بلې قاعدې ته واړوي.</li> <li>• زده‌کونکي ددې قاعدو په اړولو سره خوښي ښکاره او په ځان باور پیدا کړي.</li> </ul>	<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- پوهنیزه</li> <li>- مهارتي</li> <li>- ذهنيتي</li> </ul>
<p>تشریحي، انفرادي، پوښتنه او ځواب...</p>	<p>2- د زده کړې لارې:</p>
<p>د اړتیا وړ مواد (چارت)</p>	<p>3- مرستندويه مواد:</p>
<p>ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته د زده‌کونکو پام وروږي برخې ته راوگرځوي او وپوښتي:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• څوک ویلای شي چې <math>4^2</math> او <math>2^4</math> یو له بله سره څه توپیر لري؟ او حاصلونه یې پیدا کړي.</li> <li>• څوک کولای شي د <math>\log_b m = \frac{\log_a m}{\log_a b}</math> افاده توضیح کړي.</li> <li>• ایا په لوگاریتم کې د قاعدو د اړولو امکان شته؟</li> </ul> <p>کوښښ وکړئ چې ځوابونه له زده‌کونکو څخه په لاس راوړئ، که چیرې ستونزې ولري تاسو ځوابونه ورته ووايست.</p>	<p>4- د وروږي برخې توضیح (5 دقیقې)</p>
<p>5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې):</p> <p>ښاغلی ښوونکی: شپږم قانون چې د لوگاریتم د یوې قاعدې اړول بلې قاعدې ته دي، په درسي کتاب کې له تعریف څخه مفهوم اخیستل یوه اندازه ستونزمن دی، نو زده‌کونکي داسې وپوهوي:</p> <p>که چیرې <math>\log_a m</math> ولرو غواړو د قاعدې په بدلولو سره یعنې <math>\log_b m</math> پیدا کړو.</p> <p>ثبوت یې مرحله په مرحله د زده‌کونکو په فعال گډون سره پر تخته توضیح او تشریح کړئ، وروسته دوه زده‌کونکي په وار سره تخته ته راوغواړئ چې لومړی او دویم مثالونه پر تخته حل کړي، د ستونزو په صورت کې مرسته اولارښوونه وکړئ. په همدې ډول د لوگاریتم اووم قانون چې د یوه معکوس لوگاریتم پیدا کول دی ورته تعریف او فارمولي شکل یې پر تخته ولیکئ.</p> <p>ددې ثبوت هم د زده‌کونکو په فعال گډون او برخې اخیستنې سره سرته ورسوئ. کوښښ وکړئ چې د ثبوت په وخت کې د پوښتنې او ځواب په توگه د زده‌کونکو پام لوست ته راواړوئ.</p> <p>په پای کې د موضوع اړوند مثال د یوه داوطلب زده‌کونکي په واسطه پر تخته حل کړئ، چې زده‌کونکي په مطلب پوه شي.</p>	

**6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې**

د لوست لابنه تحکیم لپاره ددې لوست وروستنی فعالیت یعنی د 172 مخ فعالیت پوښتنې پر تخته ولیکئ او زده‌کوونکو ته ووايست چې په خپلو کتابچو کې یې حل کړي، د ستونزو په صورت کې یې تاسو پر تخته حل او توضیح کړئ او زده‌کوونکي دې خپل حلونه ورسره پرته او تېروتنې دې اصلاح کړي.

**7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې**

ښاغلی ښوونکی: ددې لپاره چې د زده‌کړې په هکله ډاډمن شي، نو زده‌کوونکي د لاندې پوښتنو په واسطه د

$$\log_a M = \frac{1}{\log_M a} \text{ له فارمول تطبیق سره وازمويي:}$$

$$a) \log_{32} 2 = ? \quad b) \log_{27} \sqrt{3} = ?$$

**حل:**

$$\log_{32} 2 = \frac{1}{\log_2 32} = \frac{1}{\log_2 2^5} = \frac{1}{5 \cdot \log_2 2} = \frac{1}{5 \cdot 1} = \frac{1}{5}$$

$$\log_{27} \sqrt{3} = \log_{27} (3)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_{27} 3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\log_3 27} = \frac{1}{2 \cdot \log_3 3^3} = \frac{1}{2 \cdot 3 \log_3 3} = \frac{1}{6 \cdot 1} = \frac{1}{6}$$

**8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات:**

ښاغلی ښوونکی هغه فعالیت چې د لوست د تحکیم لپاره درکړل شوی دی داسې حلېږي:

**حل:**

$$a) \log_{64} 2 = \frac{1}{\log_2 64} = \frac{1}{\log_2 2^6} = \frac{1}{6 \cdot \log_2 2} \Rightarrow \log_{64} 2 = \frac{1}{6 \cdot 1} = \frac{1}{6}$$

$$b) \log_4 \sqrt{(25)^6} = \log_4 (25^6)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_4 (25)^6 = \frac{6}{2} \cdot \log_4 25 = 3 \cdot \log_4 25 = 3 \cdot \log_4 5^2 = 3 \cdot 2 \log_4 5 = 6 \log_4 5 = \frac{6}{\log_5 4}$$

**9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:**

لاندې لوگاریتمونه ساده کړئ:

**حل:**

$$d) \log_{121} 14641 = \log_{(11)^2} (11)^4 = \frac{4}{2} \log_{11} 11 = 2 \cdot 1 = 2$$

$$e) \ln x = 2.3026 \cdot \log x = \ln 672000 = 2.3026 \cdot \log 672000 = 2.3026 \cdot \log 6.72 \cdot 10^5 \\ = 2.3026(\log 6.72 + \log(10^5)) = 2.3026(\log 6.72 + 5) = 2.3026 \log 6.72 + 11.513$$

$$f) \ln 0.00927 = 2.3026 \cdot \log 0.00927 = 2.3026 \cdot \log(9.27 \cdot 10^{-3}) = 2.3026 \cdot \log 9.27 + 2.3026 \cdot \log 10^{-3} \\ = 2.3026 \cdot \log 9.27 + 2.3026(-3) \log 10 = 2.3026 \log 9.27 - 6.9078$$

$$g) \ln 0.235 = 2.3026 \log 0.235 = 2.3026 \log(2.35 \cdot 10^{-1}) \\ = 2.3026(\log 2.35 - 1) = 2.306 \cdot \log 2.35 - 2.3026$$

## پنځم څپرکی: لوگارېتم

د لوگارېتم قوانین

د درسي کتاب (172) مخ

د لوست وخت: (یو درسي ساعت)

<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• زده‌کوونکي د لوگارېتم د اتم قانون په مفهوم پوه شي.</li> <li>• زده‌کوونکي د اتم قانون مطابق پوښتنې حل کړای شي.</li> <li>• زده‌کوونکي د اړتیا په وخت نوموړی قانون وکاروي.</li> </ul> <p>- پوهنيزې</p> <p>- مهارتي</p> <p>- ذهني</p>	
<p>2- د زده کړې لارې:</p> <p>انفرادي، ډله‌ييز، پوښتنه او ځواب</p>	
<p>3- مرستندويه مواد:</p> <p>د اړتیا وړ مواد</p>	
<p>4- د وړودي برخې</p> <p>توضیح (5 دقیقې)</p> <p>بناغلی بنوونکی له سلام او احوال پوښتنې وروسته د زده‌کوونکو پام لاندې پوښتنو ته راوگرځوي:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• څوک ویلای شي، د یوه توان لرونکي عدد لوگارېتم مساوي له څه شي سره دی؟</li> <li>• څوک د <math>\sqrt{10}</math> لوگارېتمی قیمت پیدا کولای شي؟</li> <li>• ایا د <math>\log_a x</math> (قاعدۀ توان لرونکی وي) افادې سره بلديت لری.</li> </ul> <p>کوښښ وکړئ چې د یوې انگیزې پیدا کولو لپاره ځوابونه له زده‌کوونکو څخه په لاس راوړئ، د ستونزو په صورت کې د هرې پوښتنې ځواب ورته وویاست او هم یادونه وکړئ چې د <math>\log_a x</math> افادې قیمت پیدا کېدای شي.</p>	
<p>5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې):</p> <p>بناغلی بنوونکی اتم قانون چې په یوه لوگارېتمی افاده کې قاعدۀ یې توان لرونکی وي کولای شو، لوگارېتمی قیمت یې پیدا کړو چې عبارت دی د قاعدې د توان معکوس ضرب د هغه عدد په لوگارېتمی قیمت کې یعنی: <math>\log_a x = \frac{1}{n} \cdot \log_a x</math></p> <p>ددې مفهوم له توضیح کولو وروسته ثبوت یې مرحله په مرحله د زده‌کوونکو په فعال گډون سره توضیح او تشریح کړئ. ترڅو مطلوب په لاس راشي.</p> <p>وروسته هغه پایلې چې د پورتنی قانون له ثبوت څخه په لاس راځي هر یو تشریح او معلومات ورکړئ. بیا دوه زده‌کوونکي په وار سره تختې ته راوغواړئ چې د لوست اړوند لومړی او دویم مثالونه پر تخته حل کړي، د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړئ.</p> <p>زده‌کوونکي په مناسبو ډلو وېشي چې د کتاب 173 مخ فعالیت په خپلو ډلو کې له بحث او مذاکرې وروسته سرته ورسوي د فعالیت له سرته رسولو وروسته د دوو ډلو استازي راوغواړئ چې د خپل سرته رسولی فعالیت په برخه کې نورو</p>	

ته معلومات ورکړي، دستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړي.

ښاغلی ښوونکی په همدې توګه د معمولي او طبيعي لوګارېتمونو ترمنځ اړیکه د لوګارېتمونو د یوې قاعدې اړول بلې قاعدې ته په ګټه اخیستنې سره داسې ثبوت کړی چې زده‌کوونکي فعال ګډون ولري او بیایي لومړی مثال پر تخته حل کړي.

### 6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

ښاغلی ښوونکی: د لوست د لاینه تحکیم او پوهېدو لپاره د لوست دویم مثال پر تخته ولیکي او زده‌کوونکو ته وایاست چې د کتاب له لیدو پرته یې خپلو کتابچو کې حل کړي، بیایو داوطلب زده‌کوونکي تختې ته راوغواړي چې پر تخته یې توضیح او حل کړي. نور زده‌کوونکي دې خپل حلونه ورسره پرتله کړي.

### 7- د لوست د پایلي ارزونه: (5) دقیقې

دې لپاره چې ښوونکی د زده‌کړې په هکله ډاډمن شي د ورکړ شوو مثالونو په ډول پوښتنې دې پر تخته ولیکي او زده‌کوونکي دې په خپلو کتابچو کې حل کړي، د کار څارنه وکړي د تېروتنې په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړي ترڅو پایله لاسته راشي.

### 8- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

$$a) \log_{\frac{1}{3}} 3^{-4} = \log_{3^{-1}} 3^{-4} = \frac{-4}{-1} \log_3 3 = \frac{4}{1} \cdot 1 = 4$$

$$b) \log_9 27 = \log_{3^2} 3^3 = \frac{3}{2} \log_3 3 = \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2}$$

$$c) \log_8 4 = \log_{2^3} 2^2 = \frac{2}{3} \log_2 2 = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}$$

## پنځم څپرکی: لوگاریتم

$$\log_{10} 10 = 1$$

$$\log_{10} 100 = 2$$

کرکترستیک او مانتیس

د درسي کتاب (175) مخ

د لوست وخت: (یو درسي ساعت)

<ul style="list-style-type: none"> <li>• زده‌کونکي د کرکترستیک او مانتیس په مفهومونو پوه شي.</li> <li>• زده‌کونکي د یوه عدد په لوگاریتمي قیمت کې کرکترستیک او مانتیس تشخیص کړای شي.</li> <li>• زده‌کونکي د اړتیا په وخت کې کرکترستیک او مانتیس هر یو وکاروي.</li> </ul>	<p>1- د زده کړې موخې</p> <p>- پوهنیزه</p> <p>- مهارتي</p> <p>- ذهنيتي</p>
<p>د لږه پوهې، انفرادي، پوښتنه او ځواب...</p>	<p>2- د زده کړې لارې:</p>
<p>د اړتیا وړ مواد</p>	<p>3- مرستندويه مواد:</p>
<p>ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته د زده‌کونکو پام وروډي برخې ته راوگرځوي او وپوښتي:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• څوک ویلای شي چې <math>\log_{10} 100 = ?</math>, <math>\log_{10} 1000 = ?</math> او <math>\log_{10} 10000 = ?</math></li> <li>• وایاست چې د پورته عددونو د ارقامو د شمېر او صحیح لوگاریتمي قیمتونو ترمنځ کومه اړیکه یا توپیر لیدل کېږي؟</li> </ul> <p>کونښن وکړئ چې ځوابونه له زده‌کونکو څخه په لاس راوړئ، د ستونزو په صورت کې د صحیح لوگاریتمي او د عددي ارقامو د شمېر توپیر په لنډ ډول ورته وایاست.</p>	<p>4- د وروډي برخې توضیح (5 دقیقې)</p>
<p>5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې):</p> <p>ښاغلی ښوونکی لومړی د موضوع تعریف د یوه زده‌کونکي په واسطه داسې ولولئ چې ټول زده‌کونکي یې واورې. له هغه وروسته تاسو په دې برخه کې لنډ معلومات ورکړئ ورته وایاست:</p> <p>په لوگاریتمي قیمتونو کې دوه برخې لیدل کېږي، یو یې صحیح عدد چې کرکترستیک نومېږي، بله یې مانتیس ده چې اعشاري برخه ده.</p> <p>په حقیقت کې د یوه عدد لوگاریتمي قیمت د هغه کرکترستیک او مانتیس له مجموع څخه عبارت دی.</p> <p>زده‌کونکي په مناسبو ډلو ووېشي ورته وایاست چې هره ډله دې د کتاب د 175 مخ جدول بشپړ کړي او تش ځایونه دې د مناسبو عددونو په واسطه ډک کړي. د لږه پوهې فعالیت له سرته رسولو وروسته د دوو ډلو استازي راوغواړئ چې د خپل ډلې سرته رسولي کار نور و ته توضیح او تشریح کړئ د تېروتنې په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړئ.</p> <p>وروسته هغه پوښتنې چې په دې اړه د کتاب په 176 مخ کې راغلي، د پوښتنې او ځواب په توګه له زده‌کونکو څخه وپوښتي او صحیح ځوابونه په لاس راوړئ او پایله یې توضیح کړئ، په پای کې د عدد لیکنې علمي طریقه (scientific notation) ورته</p>	

ولیکې او ورته وویاست هر عدد، د 10 پرتوان یعنی د  $N = a \cdot 10^n$  په شکل لیکلای شو، په داسې حال کې چې  $1 \leq a < 10$  او  $n$  یو تام عدد دی، پوره معلومات ورکړی او په دې اړه لومړی مثال چې درې اجزای لري، په ترتیب حل او زده‌کونکي ورباندې پوه کړی.

### 6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

ښاغلی ښوونکی د لوست د لاینه تحکیم او زده‌کړې لپاره دویم مثال پر تخته ولیکې او زده‌کونکو ته وویاست چې د کتاب له لیدو پرته په خپلو کتابچو کې حل کړي، په پای کې یو داوطلب زده‌کونکی تختې ته راوغوړی چې پر تخته یې حل کړي، د تېروتنې په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړی او نور زده‌کونکي دې خپل حلونه ورسره پرتله کړي.

### 7- د لوست د پایلي ارزونه: (5) دقیقې

ښاغلی ښوونکی ددې لپاره چې د زده‌کړې په هکله ډاډمن شي د کتاب د 177 مخ دریم مثال پر تخته ولیکې او زده‌کونکو ته وویاست چې په خپلو کتابچو کې یې حل کړي، همدارنگه د 0.995, 56.784, 89.435 او 0.0789 عددونو کرکترستیک په شفاهي توگه وپوښتی او زده‌کونکي وازموي.

### 8- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

دلاندې لوگاریتمونو کرکترستیک په شفاهي ډول وویاست؟

- |                  |                     |
|------------------|---------------------|
| a) $\log 0.9560$ | b) $\log 956.0$     |
| c) $\log 2345$   | e) $\log 9560$      |
| d) $\log 3.875$  | f) $\log 0.0009560$ |

حل:

(a): له یوه څخه کوچنی عدد کرکترستیک منفي علامه لري او قیمت یې د اعشاري علامې ښي خوا د صفرونو له شمېر څخه دیو په اندازه زیات دی، څرنگه چې د اعشاري ښي لوري ته صفرونه نشته، نو کرکترستیک یې منفي یو دی.

(b): که چیرې د یوه عدد صحیح برخه چې د صفر خلاف وي، نو د هغه عددونو لوگاریتم کرکترستیک مساوي دی د صحیح برخې د ارقامو شمېر منفي یو دی، نو کرکترستیک یې 2 دی.

(c): څرنگه چې د صحیح ارقامو شمېر 4 دي، نو کرکترستیک یې 3 دی.

(d): بیا هم د صحیح ارقامو شمېر 1 او که یو ورڅخه کم شي، نو کرکترستیک یې صفر دی.

(e): کرکترستیک 3 دی.

(f): د اعشاري علامې ښي لوري صفرونه 3 دي، که یو ورسره جمع شي 4 کېږي، څرنگه چې عدد له یوه څخه کوچنی دی، نو کرکترستیک یې 4- دی.

$$\left. \begin{array}{l} \log 0.501 \\ \log 5.01 \\ \log 50.1 \\ \log 501 \end{array} \right\} = ?$$

## پنځم څپرکی: لوگاریتم

د لوگاریتم جدول

د درسي کتاب (179) مخ

د لوست وخت: (یو درسي ساعت)

<ul style="list-style-type: none"> <li>• زده‌کونکي په لوگاریتمي جدول کې د مانتیسا پیدا کولو په طریقه پوه شي.</li> <li>• زده‌کونکي لوگاریتمي جدول وکارولای شي او د عددونو مانتیسا قیمت به پیدا کړای شي.</li> <li>• زده‌کونکي د اړتیا په وخت کې په لوگاریتمي محاسبو کې له جدول څخه گټه واخېستلای شي.</li> </ul>	<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- پوهنیزه</li> <li>- مهارتي</li> <li>- ذهنيتي</li> </ul>
<p>تشریحي، ډله‌ییز، انفرادي، پوښتنه او ځواب...</p>	<p>2- د زده کړې لارې:</p>
<p>د اړتیا وړ مواد</p>	<p>3- مرستندویه مواد:</p>
<p>بناغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته د زده‌کونکو پام د کتاب وړودي برخې ته راوگرځوی او وپوښتی:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• د یوه عدد په لوگاریتمي قیمت کې کرکترستیک برخه څه ډول پیدا کولای شو؟</li> <li>• ایا د مانتیس برخې ټاکلو لپاره هم کومه طریقه شته؟</li> <li>• د <math>0.501, 5.01, 50.1</math> او <math>501</math> عددونو هر یوه کرکترستیک وټاکئ و وایاست د کرکترستیکونو توپیر په څه شي کې دي؟</li> </ul> <p>کوښښ وکړئ چې ځوابونه له زده‌کونکو څخه په لاس راوړئ، د ستونزو په صورت کې د تېر لوست په مرسته لنډ معلومات ورکړئ.</p>	<p>4- د وړودي برخې توضیح (5 دقیقې)</p>
<p>5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې):</p> <p>بناغلی ښوونکی د مانتیس د پیدا کولو طریقي پوهېدو لپاره لومړی د لوگاریتمي عدد دوه برخې یعنی صحیح او اعشاري برخې ورته تشریح کړی، ورته و وایاست صحیح برخه یا مشخصه د ارقامو د شمېر له مخې په یوه طریقه سره چې مخ کې لوستل شوې ده او مانتیسا یوازې او یوازې د جدول له مخې په یوه خاصه طریقه سره پیدا کېږي، له جدول څخه پرته بله کومه طریقه نه لري چې د یوه عدد، د مانتیسا برخه پیدا شي.</p> <p>جدولونه مخکې جوړ شوي چې د مختلفو ارقامو درلودونکي دي، یعنی ځینې 7 رقمي، ځینې 5 رقمي، ځینې 4 او یا 3 رقمي اعشاري خانې لري. چې د مانتیسا پیدا کولو لپاره کار ورڅخه اخېستل کېږي، په جدول کې ستون او سطر په نښه شوي دي چې د ستون او سطر له مخې مانتیسا داسې ټاکل کېږي، په کوم عدد کې چې د هغو تقاطع مطابقت کوي، مانتیسا بلل کېږي، چې دا موضوع په درسي کتاب کې هم په څرگنده توگه تشریح شوې ده.</p> <p>له څرگندونو وروسته اړوند مثال یې ورته حل کړی د جدول له مخې د 76 سطر او 5 ستون د تقاطع عدد چې له مانتیسا څخه عبارت ده په گوته کړی.</p>	



**6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې**

ښاغلی ښوونکی د لوست د تحکیم لپاره د کتاب د 180 مخ دویم او دریم مثالونه پر تخته ولیکي او زده‌کوونکو ته وایاست چې له کتاب څخه د نه استفادې په صورت کې یې په خپلو کتابچو کې حل کړي. بیا دې دوه زده‌کوونکي په وار سره مثالونه پر تخته حل کړي او نور زده‌کوونکي دې خپلې تېروتنې اصلاح کړي.

**7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې**

ښاغلی ښوونکی: ددې لپاره چې د زده‌کړې په هکله ډاډمن شي، نو د زده‌کوونکو د ازموینو لپاره د کتاب څلورم مثال عددونه پر تخته ولیکي چې لوگاریتمي قیمتونه یې به خپلو کتابچو کې پیدا کړي، د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړي.

**8- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:**

1. دلاندې لوگاریتمونو کرکترستیک په شفاهي ډول وایاست او مانتیس یې د جدول له مخې پیدا کړئ:

- |                   |                 |
|-------------------|-----------------|
| a) $\log 222$     | b) $\log 0.921$ |
| c) $\log 928$     | d) $\log 527$   |
| e) $\log 0.024$   | f) $\log 2400$  |
| h) $\log 0.00024$ | j) $\log 24$    |

**حل:**

a): کرکترستیک یې 2 او مانتیسا یې د جدول له مخې پیدا کوو، یعنی:

$$\log 222 = \log(2.22 \cdot 10^2) = \log 2.22 + 2$$

اوس د 2.22 عدد مانتیس د جدول په 22 سطر او 2 ستون کې لټوو چې د هغو تقاطع له 3464 عدد سره مطابقت کوي، په پای کې لوگاریتم داسې محاسبه کوو:

$$\log 222 = \log 2.22 + 2 = 0.3436 + 2 = 2.3436$$

(b): د b جز کرکترستیک 1- دی.

$$\log 0.921 = \log(9.21 \cdot 10^{-1}) = \log 9.21$$

د 9.21 عدد مانتیسا په جدول کې د لومړي ستون او 92-ام سطر د تقاطع عدد دی چې عبارت دی له 9643 څخه یعنی:

$$\log 0.921 = \log 9.21 - 1 = 0.9643 - 1 = \bar{1}.9643$$

(c): د c جزء کرکترستیک 2 دی.

$$\log 928 = \log(9.28 \cdot 10^2) = \log 9.28 + 2$$

د 9.28 مانتیس د لوگاریتم جدول د اتم ستون او 92-ام سطر د تقاطع عدد دی، یعنی:  $\log 9.28 = 0.9814$

$$\log 928 = \log 9.28 + 2 = 0.9814 + 2 = 2.9814$$

(d): د d جزء کرکترستیک 2 دی.

$$\log 527 = \log(5.27 \cdot 10^2) = \log 5.27 + 2$$

د 5.27 عدد مانتیسا په جدول کې د 7-ام ستون او 52-ام سطر په تقاطع کې گورو، معلومېږي چې:

$$\log 527 = \log(5.27 + 2) = 0.7218 + 2 = 2.7218$$

(e) د:  $e$  جزء کرکترستیک  $-2$  دی.

$$\log 0.024 = \log 2.4 \cdot 10^{-2} = \log 2.4 - 2$$

خرنگه چې  $\log 2.4 = 0.3802$  دی، نو:

$$\log 0.024 = \log 2.4 - 2 = 0.3802 - 2 = \bar{2}.3802$$

(f) د:  $f$  جزء کرکترستیک  $3$  دی.

$$\log 2400 = \log(2.4 \cdot 10^3) = \log 2.4 + 3$$

خرنگه چې  $\log 2.4 = 0.3802$  دی، نو:

$$\log 2400 = \log 2.4 + 3 = 0.3802 + 3 = 3.3802$$

(h) د:  $h$  جزء کرکترستیک  $-4$  دی.

$$\log 0.00024 = \log(2.4 \cdot 10^{-4}) = \log 2.4 - 4$$

$e$  او  $f$  جزونو څخه پوهېږو چې  $\log 2.4 = 0.3802$  دی، نو:

$$\log 0.00024 = \log 2.4 - 4 = 0.3802 - 4 = \bar{4}.3802$$

(j) د:  $j$  جزء کرکترستیک  $1$  دی.

$$\log 24 = \log(2.4 \cdot 10) = \log 2.4 + 1 = 0.3802 + 1 = 1.3802$$

2. د لاندې لوگاریتمونو قیمتونه په لاس راوړئ.

a)  $\log(2.73)^3$

b)  $\log \sqrt[5]{0.0762}$

حل:

a)  $\log(2.73)^3 = 3 \log(2.73) = 3(0.4362) = 1.3086$

b)  $\log \sqrt[5]{0.0762} = \log(0.0762)^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5} \log(0.0762) = \frac{1}{5} \log(7.62 \cdot 10^{-2}) = \frac{1}{5} [\log 7.62 - 2]$   
 $= \frac{1}{5} [0.8820 - 2] = \frac{1}{5} [-1.118] = -0.2236 \pm 1 = \bar{1}.7764$

## پنجم څپرکی: لوگارېټم

$$\log 481 = 2.6821$$

$$\log N = 1.6580$$

$$N = ?$$

انتي لوگارېټم

د درسي کتاب (183) مخ

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

<ul style="list-style-type: none"> <li>• زده‌کونکي د انتي لوگارېټم په مفهوم پوه شي.</li> <li>• زده‌کونکي وکړای شي د ورکړل شوو لوگارېټمونو له مخې اړوند عددونه پيدا کړي.</li> <li>• زده‌کونکي د اړتيا په وخت کې له نوموړي عمليې څخه کار واخلي او په ځان باور پيدا کړي.</li> </ul>	<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- پوهنيزه</li> <li>- مهارتي</li> <li>- ذهني</li> </ul>
<p>د لږه بيز، انفرادي، پوښتنه او ځواب...</p>	<p>2- د زده کړې لارې:</p>
<p>د اړتيا وړ مواد</p>	<p>3- مرستندويه مواد:</p>
<p>ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته د زده‌کونکو پام د لاندې پوښتنو په کولو سره د کتاب وړودي برخې ته راوگرځوي:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• څوک ويلاي شي که لوگارېټمي قيمت ولرو د اړوند عدد پيدا کول ممکن دي؟ (هو)</li> <li>• د لوگارېټمي کوم قيمت له مخې ويلاي شو چې عدد څو رقمي دي؟ (د کرکترستيک له مخې)</li> </ul> <p>کوښښ وکړئ چې ځوابونه له زده‌کونکو څخه په لاس راوړئ، د ستونزو په صورت کې تاسو لنډ معلومات ورکړئ بيا د لوست فعاليت پيل کړئ.</p>	<p>4- د وړودي برخې توضیح (5 دقيقې)</p>
<p>5- د لوست بهير او فعاليت (28 دقيقې):</p> <p>ښاغلی ښوونکی: لومړی د انتي لوگارېټم تعريف ورته ووايست او بيا د داسې مثال په ورکولو سره تشریح کړي که چيرې <math>\log_{10} 20 = 1.30103</math> وي، نو <math>1.30103</math> د <math>20</math> د عدد لوگارېټم بلل کېږي او د <math>20</math> عدد، د <math>1.30103</math> انتي لوگارېټم بلل کېږي. وروسته زده‌کونکي په مناسبو ډلو و وېشي چې هره ډله د کتاب 183 مخ فعاليت د بحث او مشورې وروسته سرته ورسوي، د کار څارنه وکړي.</p> <p>د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړي په پای کې د دوو ډلو استازي تختې ته راوغواړي چې په وار سره خپل سرته رسولي فعاليت نورو ته توضیح کړي او تېروتنې اصلاح شي.</p> <p>ورپسې اړوند مثال پر تخته حل کړي او په جدول کې د عدد د پيدا کولو طريقه د پوښتنې او ځواب په توگه وروښايست چې زده‌کونکي د انتي لوگارېټم په پيدا کولو کې مهارت پيدا کړي.</p>	

**6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې**

ښاغلی ښوونکی: د لوست د لابنه تحکیم او پوهېدو لپاره دویم او دریم مثالونه پر تخته باندې ولیکئ، زده‌کوونکو ته ووايست چې د کتاب له لیدو پرته په خپلو کتابچو کې حل کړي، د زیات ستونزو په صورت کې تاسو یې بیا پر تخته حل او تشریح کړئ چې زده‌کوونکي تېروتنې اصلاح کړي.

**7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې**

ښاغلی ښوونکی: ددې لپاره چې د زده‌کړې په هکله ډاډمن شي، نو د زده‌کوونکو د ازموینو لپاره د کتاب څلورم مثال عددونه پر تخته ولیکي یو داوطلب زده‌کوونکی راوغواړئ چې پر تخته یې حل کړي او لوست وازمويي.

**8- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:**

دلاندې هر یوه انتي لوگارتم قیمت په لاس راوړئ.

$$a) \text{anti log } 4.9479$$

$$b) \text{anti log}(-5.0521)$$

حل (a):

$$\text{anti log } 4.9479 = N \Rightarrow \log N = 4.9479$$

د نوموړي لوگارتم د مانتیس برخه یعنې 0.9479 د لوگارتم په جدول کې پیدا کوو، په جدول کې گورو چې د کوم سطر او ستون تقاطع دی، دغه د سطر او ستون د تقاطع عدد داسې لیکو چې د ستون عدد اړوند عدد ښي لوري ته قرار ولري چې عبارت دی له 8.87 عدد څخه، یعنې:  $\log 8.87 = 0.9497$

څرنگه چې کرکترستیک 4 دی، نو د صحیح رقمونو شمېر 5 دی، په پایله کې  $N = 88700$  دی:

$$\text{anti log } 4.9497 = 88700$$

حل (b):

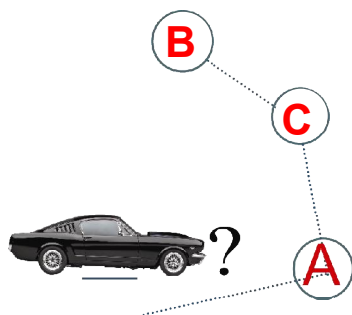
$$\text{anti log}(-5, 0521) = N \Rightarrow \log N = -5, 0521, N = ?$$

څرنگه چې مانتیسا باید منفي نه وي، ددې لپاره لیکو:  $(-5 - 1 + 1 - 5.052) = -6 + 9479$

اوس د نوموړي لوگارتم د مانتیس برخه یعنې 0.9497 د لوگارتم په جدول کې پیدا کوو چې عبارت دی له 8.87 عدد څخه، نو په پایله کې:

$$N = (8,87 \cdot 10^{-6}) = 0.00000887 \Rightarrow N = 0.00000887$$

$$\Rightarrow \text{anti log}(-5, 0521) = 0.00000887$$



## پنځم څپرکی: لوگاریتم

خطي انټرپولېشن

د درسي کتاب (185) مخ

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• زده‌کونکي د خطي انټرپولېشن په مفهوم پوه شي.</li> <li>• زده‌کونکي د هغو عددونو لوگاریتم چې په جدول کې نشته د انټرپولېشن په طريقه پيدا کړي.</li> <li>• زده‌کونکي د اړتيا په وخت کې د خطي انټرپولېشن طريقه په مناسب ډول وکاروي.</li> </ul>	<p>- پوهنيزه</p> <p>- مهارتي</p> <p>- ذهني</p>
<p>2- د زده کړې لارې:</p> <p>ډله‌بیز، انفرادي، پوښتنه او ځواب...</p>	
<p>3- مرستندويه مواد:</p> <p>د اړتيا وړ مواد (چارت)</p>	
<p>4- د وړودي برخې توضیح (5 دقیقې)</p> <p>بناغلی بنوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته د زده‌کونکو پام د کتاب وړودي برخې ته راوگرځوي، بیا د <math>A</math>، <math>B</math> او <math>C</math> ټکي پر تخته رسم او له زده‌کونکو څخه وپوښتي: که د <math>C</math> ټکی د <math>A</math> او <math>B</math> ټکو منځنی (وسطي) ټکی وي:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• د <math>A</math> او <math>C</math> ټکو ترمنځ فاصله په همدې ثابت سرعت سره په څومره وخت کې وهي؟</li> <li>• د <math>C</math> او <math>B</math> ټکو ترمنځ فاصله په همدې ثابت سرعت سره په څومره وخت کې وهي؟</li> </ul> <p>ځوابونه له زده‌کونکو څخه په لاس راوړي له هغه پرته تاسو وایاست چې د <math>A</math> او <math>B</math> بنارونو ترمنځ د وخت په نیمایي کولو سره د <math>A</math> او <math>C</math>، همدارنگه د <math>C</math> او <math>B</math> بنارونو ترمنځ وختونه ټاکل کېدای شي.</p>	
<p>5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې):</p> <p>بناغلی بنوونکی: زده‌کونکي په مناسبو ډلو ووېشي، د کتاب د 185 مخ فعالیت ورکړي چې له بحث او مذاکرې وروسته یې سرته ورسوي او ځوابونه یې پيدا کړي. بیا د دوو یا دريو ډلو استازي تختې ته راوغواړي چې خپل سرته رسولی فعالیت نورو ته تشریح او توضیح کړي، د تېروتنې په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړي. وروسته تاسو دا پایله که چیرې د یو نامعلوم قیمت پيدا کولو لپاره چې د دوو معلومو عددونو ترمنځ پروت وي، د معلومو عددونو په مرسته د نامعلوم عدد قیمت پيدا کړو، په لنډ ډول توضیح کړي او خطي انټرپولېشن ورته تعریف، زده‌کونکي د هغه په مفهوم پوه کړي. په پای کې د هغه په اړوند لومړی مثال چې په هغه کې خطي انټرپولېشن توضیح شوی ده، پر تخته مرحله په مرحله یعنی د عددونو او مانټیسونو توپيرونو پيدا کول او تناسب جوړول د زده‌کونکو په فعال ګډون سره سرته ورسوي.</p>	

**6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې**

د لوست د لاینه تحکیم او پوهېدو لپاره د کتاب دویم مثال پر تخته ولیکئ ورته وویاست چې د کتاب له لیدو پرته په خپلو کتابچو کې حل کړي. وروسته یو داوطلب زده کوونکی تختې ته راوغوړئ چې پر تخته یې حل کړي او نور زده کوونکي دې خپل حلونه ورسره پرتله کړي، د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړئ.

**7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې**

ښاغلی ښوونکی ددې لپاره چې د زده کړې په هکله ډاډمن شي چې ایا زده کوونکو لوست زده کړی او که نه؟ د کتاب دریم مثال پر تخته ولیکئ او یو زده کوونکی راوغوړئ چې پر تخته یې حل کړي همدارنگه څو پوښتنې په شفاهي توګه وپوښتئ او زده کوونکي وازمويي.

**8- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:**

په لاندې اړیکو کې د X او Z قیمتونه پیدا کړئ.

$$a) z = \log 0.001582 \quad b) x = \log 6.289$$

حل (a):

$$\log 0.001582 = \log(1.582 \cdot 10^{-3}) = \log 1.582 - 3$$

څرنگه چې د 1.582 عدد لوګاریتم په جدول کې نشته، نو له خطي انټرپولېشن څخه کار اخلو یعنې د 1.580 او 1.590 عددونو لوګاریتم په جدول کې شته.

نو څرنگه چې:  $1,580 < 1,582 < 1,590$  دی.

$$\left. \begin{aligned} \log 1.580 &= 0.1987 \\ \log 1.590 &= 0.2014 \end{aligned} \right\}$$

$$\log 1.580 < \log 1.582 < \log 1.590$$

$$0.1987 < \log 1.582 < 0.2014$$

له بلې خوا له جدول څخه پوهېږو چې:

$$\text{که } \log 1.582 = x \text{ سره وښیو، نو } 0.1987 < x < 0.2014$$

د عددونو او لوګاریتمونو د توپیر په پام کې نیولو سره داسې لیکو:

عددونه	لوګاریتمونه
1.590	0.2014
0.002 $\left[ \begin{array}{c} 1.582 \\ 1.580 \end{array} \right]$	$\left[ \begin{array}{c} x \\ 0.1987 \end{array} \right] d$
$\frac{d}{0.0027} = \frac{0.002}{0.01} \Rightarrow d = \frac{0.0027 \cdot 0.002}{0.01} = 0.00054$	

اوس د d قیمت د کوچني عدد له مانتیس سره جمع کوو چې حاصل یې د مطلوب عدد لوګاریتم دی.

$$0.1987 + d = 0.1987 + 0.00054 = 0.1992 \Rightarrow \log 1.582 = 0.1992$$

$$= \log 0.001582 = \log 1.582 - 3 = 0.1992 - 3 = -2.8008 \pm 1$$

$$\Rightarrow z = \log 0.001582 = -3 + 0.1992 = \bar{3}.1992$$

حل (b):

$$x = \log 6.289$$

د 6.289 عدد لوگاریتم په جدول کې نشته، خو د 6.280 او 6.290 عددونو لوگاریتمونه په جدول کې شته، یعنې:

$$\log 6.280 = 0.7980$$

$$\log 6.290 = 0.7987$$

پوهېږو چې:

$$6.280 < 6.289 < 6.290$$

$$\log 6.280 < \log 6.289 < \log 6.290$$

$$0.7980 < \log 6.289 < 0.7987$$

که  $\log 6.289 = x$  وضع کړو، نو  $0.7980 < x < 0.7987$

عددونه	لوگاریتمونه
6.290	0.7987
$0.01 \left[ \begin{array}{c} 6.289 \\ 0.009 \left[ \begin{array}{c} 6.289 \\ 6.280 \end{array} \right] d \end{array} \right] 0.0007$	$x$
6.280	0.7980

$$\frac{d}{0.0007} = \frac{0.009}{0.01} \Rightarrow d = \frac{0.0007 \cdot 0.009}{0.01} = 0.00063$$

$$0.7980 + d = 0.7980 + 0.00063 = 0.7986 \Rightarrow x = \log 6.289 = 0.7986$$

## پنځم څپرکی: لوگاریتم

$$\log_2(x^2 - 1) = 3$$

$$5^x = 5^{2^{\frac{1}{x-2}}}$$

د لوگاریتمی او اکسپوننشیل معادلو حل (اکسپوننشیل معادلې)

د درسي کتاب (189) مخ

د لوست وخت: (یو درسي ساعت)

<ul style="list-style-type: none"> <li>• زده‌کوونکي د اکسپوننشیل معادلو په مفهوم پوه شي.</li> <li>• زده‌کوونکي اکسپوننشیل معادلې حل کړای شي.</li> <li>• زده‌کوونکي د اکسپوننشیل معادلو د حل طریقه په ریاضیکي مسایلو کې وکاروي او په ځان باور پیدا کړي.</li> </ul>	<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- پوهنیزه</li> <li>- مهارتي</li> <li>- ذهنيتي</li> </ul>
<p>انفرادي، تشریحي، پوښتنه او ځواب...</p>	<p>2- د زده کړې لارې:</p>
<p>د اړتیا وړ مواد</p>	<p>3- مرستندویه مواد:</p>
<p>بناغلی بنوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته د زده‌کوونکو پام د کتاب وروډي برخې ته راوگرځوي، داسې چې د وروډي برخې معادلې پر تخته ولیکي:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• څوک ویلای شي د <math>2x + 4 = 20</math> په معادله کې مجهول څه شی ده؟</li> <li>• د <math>5^x = 5^{2^{\frac{1}{x-2}}}</math> په معادله کې مجهول څه شی ده؟</li> </ul> <p>کوښښ وکړئ چې ځوابونه له زده‌کوونکو څخه په لاس راوړئ، د ستونزو په صورت کې په لنډ ډول ورته ووايست په دواړو معادلو کې <math>x</math> مجهول دی، خو په لومړي معادله کې <math>x</math> د یو حد ضربی عامل په ډول او په دویمه معادله کې <math>x</math> د مساوات دواړه خواوو ته د توان په شکل دی او په دواړو معادلو کې د <math>x</math> لپاره هغه قیمتونه پیدا کوو چې د معادلو تعادل برقرار شي.</p>	<p>4- د وروډي برخې توضیح (5 دقیقې)</p>
<p>5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې):</p> <p>بناغلی بنوونکی د <math>5^x = 5^{2^{\frac{1}{x-2}}}</math> اکسپوننشیل معادله پر تخته ولیکي او زده‌کوونکو ته ووايست چې په دې اړه فکر وکړئ بیا له زده‌کوونکو څخه پوښتنې:</p> <p>د <math>x</math> په کومو قیمتونو سره د مساوات دواړه خواوې یو له بل سره مساوي کېږي؟</p> <p>څرنگه کولای شو په دې ډول معادلو کې د <math>x</math> مجهول لپاره قیمت پیدا کړو؟</p> <p>بنیایي چې ځینې زده‌کوونکي ځوابونه ووايي، خو بیا هم د اکسپوننشیل معادلو تعریف ورته وکړئ او داسې ورته ووايست: د اکسپوننشیل معادلو د حل لپاره د دواړه خواوو قاعدې سره مساوي کوو او بیا د توان د قوانینو له مخې چې قاعدې مساوي وي، نو توانونه یې هم خامخا یو له بل سره مساوي کېږي، توانونه یو له بله سره مساوي ونیسی او حل یې کړئ. بیا د تعریف او راکړل شوي معلومات په اړه د کتاب لومړی مثال پر تخته ولیکئ او د زده‌کوونکو په فعال گډون سره مرحله</p>	



په مرحله پر تخته حل کړئ، ترڅو زده‌کوونکي د قاعدو په مساوي کولو پوه شي، او قاعدې مساوي کړای شي، په پایله کې د مجهول توان لپاره قیمت پیدا کړي.

### 6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

د لوست د لاینه تحکیم او پوهېدو لپاره د  $8^{3x-1} = 2^4$  اکسپوننشیل معادله پر تخته ولیکئ او زده‌کوونکو ته وایاست چې په خپلو کتابچو کې یې حل کړي، وروسته یو داوطلب زده‌کوونکی تختې ته راوغوړئ چې پر تخته یې حل کړي، د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړئ.

### 7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

بناغلی ښوونکی ددې لپاره چې د زده‌کړې په هکله ډاډمن شي، نو زده‌کوونکي د  $16^{x+1} = 64^{x-2}$  اکسپوننشیل معادلې په واسطه وازموي چې په خپلو کتابچو کې یې حل کړي، د ستونزو په صورت کې مرسته وکړئ.

### 8- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

په لاندې اکسپوننشیل معادلو کې د  $x$  قیمت په لاس راوړئ.

$$a) (11)^{3x-1} = 11$$

$$b) 7^{2x-1} = 3^{x+3}$$

حل (a):

$$(11)^{3x-1} = 11 \Rightarrow 11^{3x} \cdot 11^{-1} = \frac{11^{3x}}{11} = 11 \Rightarrow 11^{3x} = 121 \Rightarrow 11^{3x} = 11^2$$

قاعدې مساوي دی، نو توانونه هم مساوي کېږي:

$$3x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

حل (b):

$$7^{2x-1} = 3^{3x+3} \Rightarrow 7^{2x} \cdot 7^{-1} = 3^{3x} \cdot 3^3 \Rightarrow \frac{7^{2x}}{7} = 27 \cdot 3^x \Rightarrow 7^{2x} = 7 \cdot 27 \cdot 3^x \Rightarrow 7^{2x} = 189 \cdot 3^x$$

$$\Rightarrow \log 7^{2x} = \log(189 \cdot 3^x) \Rightarrow 2x \cdot \log 7 = \log 189 + \log 3^x$$

$$\Rightarrow 2x(0.8451) = 2.2765 + x \cdot \log 3$$

$$\Rightarrow 1.6902x = 2.2765 + x(0.4771) = 1.6902x - 0.4771x = 2.2765$$

$$\Rightarrow 1.2131x = 2.2765 \Rightarrow x = \frac{2.2765}{1.2131} \Rightarrow x = 1.8765$$

## پنځم څپرکی: لوگاریتم

لوگاریتمي معادلې

د درسي کتاب (190) مخ

د لوست وخت: (یو درسي ساعت)

$$\log_2(x^2 - 1) = 3$$

$$5^x = 5^{\frac{1}{2}x-2}$$

<ul style="list-style-type: none"> <li>• زده‌کونکي په لوگاریتمي معادلو کې د متحول یا مجهول په مفهوم پوه شي.</li> <li>• زده‌کونکي لوگاریتمي معادلې حل کړای شي او طریقه یې وکاروي.</li> <li>• زده‌کونکي لوگاریتمي معادلې د اړتیا په وخت کې په ریاضیکي مسایلو کې وکاروي او خپلې ستونزې په خوښی سره حل کړی.</li> </ul>	<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- پوهنیزه</li> <li>- مهارتي</li> <li>- ذهنيتي</li> </ul>
<p>دلهیز، انفرادي، تشریحي، پوښتنه او ځواب...</p>	<p>2- د زده کړې لارې:</p>
<p>د اړتیا وړ مواد</p>	<p>3- مرستندویه مواد:</p>
<p>بناغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته د زده‌کونکو پام د ورودی برخې لاندې پوښتنو ته راوگرځوی:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• د <math>8^{3x-1} = 2^4</math> معادله د کومې معادلې په نامه یادېږي؟</li> <li>• د <math>\log_2(x^2 - 1) = 3</math> معادله د کومې معادلې په نامه یادېږي؟</li> <li>• د <math>\log_2(x^2 - 1) = 3</math> معادلې معادل شکل لیکلای شی؟</li> </ul> <p>بناغلی ښوونکی کوښښ وکړی چې ځوابونه له زده‌کونکو څخه په لاس راوړی د ستونزو په صورت کې تاسو لومړی ته د اکسپوننشنیل معادله دویمې ته لوگاریتمي معادله ووايي او دویمې معادلې، معادل شکل چې له <math>x^{2-1} = 3^2</math> څخه عبارت دی او دلوست د پیل لپاره ښه انگیزه کېدای شي، ولیکي.</p>	<p>4- د ورودی برخې توضیح (5 دقیقې)</p>
<p>5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې):</p> <p>بناغلی ښوونکی لومړی لوگاریتمي افادې یا هغه لوگاریتمي معادلې چې مجهول لرونکی وي، زده‌کونکي ته تعریف او د لوگاریتمي معادلو ډولونه وروښیاست، بیا د زده‌کونکو په فعال ګډون سره لومړی د څو لوگاریتمي معادلو، معادل شکلونه پیدا کړی او وروسته دهغه د حل طریقه د لوگاریتمي قوانینو له مخې ساده او بیا چې د اکسپوننشنیل په معادله بدلېږي، طریقه یې کار وکړی.</p> <p>د اکسپوننشنیل معادلو د حل طریقي په کار اخیستنې سره د مجهول قیمت په لاس راوړی.</p> <p>د پوښتنې او ځواب په ډول توضیح او تشریح کړی او ورپسې د لوست لومړی مثال پر تخته د زده‌کونکو په فعال ګډون سره مرحله په مرحله حل کړی او د <math>x</math> قیمتونه په لاس راوړی.</p> <p>وروسته دوه داوطلب زده‌کونکي تختې ته راوغواړی چې دویم او دریم مثالونه په وار سره پر تخته حل کړي، د ستونزو او تېروتنو په صورت کې لارښوونه وکړی.</p>	

**6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې**

ښاغلی ښونکی د لوست د لاینه تحکیم او پوهېدو لپاره د کتاب څلورم مثال پر تخته ولیکي، څرنگه چې پوښتنه یوه اندازه ستونزمنه ده، لومړی یو څه معلومات ورکړي، وروسته یو زده‌کوونکی تخته ته راوغواړي چې پر تخته یې حل کړي او نور زده‌کوونکي دې کتاب له لیدو پرته په خپلو کتابچو کې حل کړي، د تېروتنې په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړي.

**7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې**

د دې لپاره چې ښوونکی د زده‌کړې په هکله ډاډمن شي، نو زده‌کوونکي دې د  $\log(x^2 + 36) - 2\log(-x) = 1$  معادلې په واسطه ارزوي چې په خپلو کتابچو کې حل او د  $x$  قیمت په لاس راوړي.

**حل:**

$$\log \frac{x^2 + 36}{x^2} = \log 10 \Rightarrow \frac{x^2 + 36}{x^2} = 10 \Rightarrow x^2 + 36 = 10x^2$$

$$\Rightarrow -x^2 + 10x^2 - 36 = 0 \Rightarrow 9x^2 = 36, \quad x_{1,2} = \pm 2 \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{matrix}$$

**8- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:**

په لاندې لوگاریتمي معادلو کې د  $x$  قیمت په لاس راوړي.

c)  $\log \sqrt{x} + 3 = 4$

d)  $\log_5 \frac{x-1}{x-2} = 2$

**حل (c):**

$$\log \sqrt{x} + 3 = 4 \Rightarrow \log \sqrt{x} = 4 - 3 \Rightarrow \log \sqrt{x} = 1$$

$$\sqrt{x} = 10^1 \Rightarrow \sqrt{x} = 10 \Rightarrow (\sqrt{x})^2 = 10^2 \Rightarrow x = 100$$

**حل (d):**

$$\log_5 \frac{x-1}{x-2} = 2$$

$$\frac{x-1}{x-2} = 5^2 \Rightarrow \frac{x-1}{x-2} = 25$$

$$x-1 = 25(x-2) \Rightarrow x-1 = 25x-50$$

$$x-25x = -50+1 \Rightarrow -24x = -49$$

$$24x = 49 \Rightarrow x = \frac{49}{24}$$

$$\left. \begin{array}{l} 28.8 \\ 78.8 \\ 3.17 \cdot 88.2 \end{array} \right\} = ?$$

## پنځم څپرکی: لوگاریتم

د ریاضیکي عملیو په سرته رسولو کې له لوگاریتم څخه کار اخیستنه

د درسي کتاب (193) مخ

د لوست وخت: (یو درسي ساعت)

<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- پوهنیزه</li> <li>- مهارتي</li> <li>- ذهنيتي</li> </ul> <p>• د ریاضیکي عملیو په سرته رسولو کې له لوگاریتم څخه د کار اخیستنې په طریقه پوه شي.</p> <p>• د هرې عملیې اړوند لوگاریتمي قانون تشخیص، تطبیق او پوښتنې حل کړای شي.</p> <p>• ددې عملیو په سرته رسولو او د لوگاریتمي قوانینو تطبیق په کارولو خوښي ښکاره کوي.</p>	<p>زده‌کونکي به د لوست په پای کې وتوانېږي چې:</p>
<p>2- د زده کړې لارې:</p> <p>انفرادي، ډله‌ییز، تشریحي، پوښتنه او ځواب...</p>	
<p>3- مرستندویه مواد:</p> <p>د اړتیا وړ مواد</p>	
<p>4- د ورودی برخې توضیح (5 دقیقې)</p> <p>ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته د زده‌کونکو پام د کتاب ورودی برخې ته راوگرځوی او وپوښتی:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• ایا په ضرب او تقسیم کې د اعشاري عددونو عملیې د لوگاریتم په کارولو سره سرته رسولای شو؟</li> <li>• ایا د لوگاریتم په واسطه د توان او جذر عملیې په اسانۍ سره سرته رسولای شو؟</li> </ul> <p>کوبښن وکړی چې ځوابونه له زده‌کونکو څخه په لاس راوړی، پرته له هغه تاسو ځوابونه ورکړی، ورته وواياست. هو کولای شو د لوگاریتم په مرسته پورتنی عملیې په اسانۍ سره سرته ورسوو.</p>	
<p>5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې):</p> <p>ښاغلی ښوونکی لومړی یو زده‌کونکی تختې ته راوغواړی چې په لوگاریتم کې د ضرب قانون پر تخته ولیکي، وروسته ورته وواياست چې د کتاب لومړی مثال یعنی د ضرب د حاصل لوگاریتم په مرسته له جدول څخه په کار اخیستنې حل کړي. زده‌کونکی پر تخته کار کوي. په پای کې لیدل کېږي چې د لاس ته راغلي مانیتیس عدد په جدول کې نشته، ورته وواياست چې د انټرپولېشن په مرسته د لوی او کوچني مانیتسونو عددونو په پام کې نیولو سره اړونده عدد په لاس راوړی. زده‌کونکي له تېر لوست څخه په کار اخیستنې سره عملیې سرته رسوي او مطلوب په لاس راوړي، وروسته په دې هکله تاسو د مرحلو په پام کې نیولو سره لنډ معلومات ورکړی. په همدې ډول یو بل زده‌کونکی راوغواړی چې په لوگاریتم کې د یو خارج قسمت پیدا کولو قانون پر تخته ولیکي، لکه په ضرب کې د قانون ټولې مرحلې دې د کتاب په اړوند مثال باندې سرته ورسوي. وروسته تاسو د ټولو مرحلو په پام کې نیولو سره لنډ معلومات ورکړی چې زده‌کونکي د تقسیم په عملیې کې له لوگاریتم څخه په کار اخیستنې سره پوه شي.</p>	

همدارنگه دريم داوطلب زده‌کونکی تختې ته راوغواړئ ورته وواياست چې د لوگارېتم د توان لرونکي عددونو قانون پر تخته وليکي او د همدې قانون په اړوند مثال پر تخته حل کړي. د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړئ. زده‌کونکي په مناسبو ډلو ووېشي، د کتاب د 194 او 195 مخونو فعاليتونه چې ضرب او تقسيم دي ورکړئ چې له بحث او مذاکرې وروسته هره ډله فعاليتونه سرته ورسوي، وروسته د دوو ډلو استازي تختې ته راوغواړئ چې يو يې د ضرب په برخه کې او بل يې د تقسيم په برخه کې خپل د ډلې کار نورو ته توضیح کړي، د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړي.

#### 6- د زده کړې تحکيم: (7) دقيقې

د لوست د لارښوونې تحکيم لپاره د کتاب 195 مخ فعاليت چې يو توان لرونکی عدد دی پر تخته وليکئ او زده‌کونکي دې په خپلو کتابچو کې حل کړي، وروسته يو داوطلب زده‌کونکی تختې ته راوغواړئ چې پر تخته يې حل کړي او نور زده‌کونکي دې خپلې تېروتنې اصلاح کړي، د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړي.

#### 7- د لوست د پايلې ارزونه: (5) دقيقې

د دې لپاره چې ښاغلی ښوونکی د زده‌کړې په هکله ډاډمن شي، نو زده‌کونکي دې د لاندې شفاهي پوښتنو په واسطه وازموي:

- آیا کولای شو د ضرب د عمليې د ساده کولو لپاره له لوگارېتم څخه کار واخلو؟
- آیا د تقسيم د عمليې د اسانه کولو لپاره له لوگارېتم څخه کار اخېستلای شو؟
- آیا د لوگارېتم په واسطه د توان لرونکي عددونو محاسبه سرته رسولای شو؟

کوښښ وکړئ چې ځوابونه له زده‌کونکو څخه په لاس راوړئ، د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړي.

#### 8- د تمرين او پوښتنو ځوابونه:

1. لاندې د ضرب حاصل د لوگارېتم په واسطه محاسبه کړئ.

$$0.097 \cdot 7.78 = ?$$

حل:

$$\log 0.097 \cdot 7.78 = \log 0.097 + \log 7.78 = \log(9.7 \cdot 10^{-2}) + \log 7.78$$

$$= \log 9.7 + \log 7.78 - 2 = 0.9868 + 0.8910 - 2$$

$$1.8778 - 2 = \pm 1 - 0.1222 = -1 + 0.8778 = \bar{1}.8778$$

$$\text{anti log}(-0.1222) = \text{anti log}(-1.8778)$$

$$\text{anti log}(-1) = 10^{-1}$$

$$\text{anti log}(-0.1222) = 7.55 \cdot 10^{-1} = 0.755 = \bar{1}.8778$$

$$\text{anti log}(-0.1222) = 0.755 \Rightarrow 0.097 \cdot 7.78 = 0.755$$

2. لاندې د تقسیم حاصل د لوگاریتم په واسطه حساب کری.

$$a) \frac{8}{737} = ? \quad b) \frac{32.2}{25.1} = ?$$

حل (a):

$$\begin{aligned} \log \frac{32.2}{25.1} &= \log 32.2 - \log 25.1 = \log 3.22 \cdot 10 - \log 2.51 \cdot 10 \\ &= \log 3.22 + \log 10 - \log 2.51 - \log 10 = \log 3.22 + 1 - \log 2.51 - 1 \\ &= 0.5079 - 0.3997 = 0.1082 \end{aligned}$$

$$\text{anti log } 0.1082 = 1.28 \Rightarrow \frac{32.2}{25.1} = 1.28$$

حل (b):

$$\begin{aligned} \log \frac{32.2}{25.1} &= \log 32.2 - \log 25.1 = \log 3.22 \cdot 10 - \log 2.51 \cdot 10 + 1 - 1 \\ &= \log 3.22 + 1 - \log 2.51 - 1 = 0.5079 - 0.3997 = 0.1082 \end{aligned}$$

$$\text{anti log } 0.1082 = 1.28 \Rightarrow \frac{32.2}{25.1} = 1.28$$

3. لاندې توان لرونکي عدد د لوگاریتم په واسطه محاسبه کری.

$$(964)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(964)^2} = ?$$

حل:

$$\begin{aligned} \log(964)^{\frac{2}{3}} &= \frac{2}{3} \log 964 = \frac{2}{3} \log(9.64 \cdot 10^2) = \frac{2}{3} \log 9.64 + \frac{4}{3} = \frac{2}{3} \cdot 0.9841 + \frac{4}{3} \\ &= 0.6560 + 1.3333 = 1.9893 = 0.9893 + 1 \end{aligned}$$

$$\text{anti log } 1.9893 = 9.76 \cdot 10 = 97.6 \Rightarrow (964)^{\frac{2}{3}} = 97.6$$

## د پنځم څپرکي د عمومي پوښتنو حل (شپږ درسي ساعتونه)

لاندي پوښتنې په غور ولولئ، د هرې پوښتنې لپاره څلور ځوابونه ورکړل شوي، سم ځواب يې پيدا اوله هغه څخه کړئ. تاو کړئ.

1.  $\log_{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{4}\right)$  مساوي له څو سره دی؟

- a) 4      **b) -4**      c) 3      d) -3

2. د  $\log_b \sqrt[4]{81} = \frac{1}{4}$  اړیکه کې د b قیمت عبارت دی له:

- a)  $\frac{1}{4}$       **b) 81**      c)  $\sqrt{81}$       d) -4

3. د  $\log_3 81 - \log 0.01$  افادې قیمت په لاس راوړئ.

- a) 0      b) 4      **c) 6**      d) 9

4. د x قیمت په  $\log 81 - \log 2x = \log 3$  افاده کې مساوي له څو سره دی.

- a) 2      b) 3      c) 4      **d) 13.5**

5.  $\log_2 16 = ?$

- a) 4**      b) 3      c) 5      d) -4

6.  $\log_{\frac{1}{5}} 125$

- a) 3      **b) -3**      c) 4      d) 5

7. د  $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$  قیمت عبارت دی له :

- a)  $\frac{1}{2}$       b)  $-\frac{1}{2}$       **c) 1**      d) -1

8. د x قیمت د  $3^{x-1} = 9$  په معادله کې عبارت دی له :

- a)  $x = -3$       b)  $x = 9$       c)  $x = -9$       **d)  $x = 3$**

9. د  $\log 234.21$  مشخصه یا کرکترستیک عبارت دی له:

- a) 0      b) 1      **c) 2**      d) 3

10. د یوه عدد د لوگارتم معکوس عبارت دی له:

- a)  $\log_a m = \frac{1}{\log_a m}$       b)  $\log_a m = -\frac{1}{\log_a m}$       **c)  $\log_a m = \frac{1}{\log_m a}$**       d) هیڅ یو

1. په لاندي معادلو کې د x قیمت پيدا کړئ

a)  $3^x = 3^{3x+2}$

b)  $3^{2x} = 9^{4x-1}$

c)  $\log_3(x+2) = 2\log_3 9$

d)  $16^{x+1} = 64^{x-2}$

e)  $15^{2x-1} = 7^{x+1}$

f)  $\log \sqrt{x+1} = 1 - \frac{1}{2} \log x$

g)  $\log(4x-3) = 2 - \log 20$

h)  $\log_5(x-1) - \log_5(x-2) = \log_5 2$

: (a حل

$$3^x = 3^{3x+2} \Rightarrow 3x+2 = x \Rightarrow 3x-x+2=0 \Rightarrow 2x+2=0 \Rightarrow 2x=-2 \Rightarrow x=-1$$

: (b حل

$$3^{2x} = 9^{4x-1} \Rightarrow 3^{2x} = (3^2)^{4x-1} \Rightarrow 3^{2x} = 3^{2(4x-1)} \Rightarrow 2(4x-1) = 2x$$

$$8x-2 = 2x \Rightarrow 8x-2x = 2 \Rightarrow 6x = 2$$

$$x = \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

: (c حل

$$\log_3(x+2) = 2 \log_3 9$$

$$\log_3(x+2) = \log_3 9^2$$

که چیرې په لوگاریتم کې قاعدې سره برابر وي، نو خپله اعداد هم سره برابر وي، نو:

$$x+2 = 9^2 = 81$$

$$x = 81 - 2 = 79 \Rightarrow x = 79$$

: (d حل

$$16^{x+1} = 64^{x-2}$$

$$((4)^2)^{x+1} = ((4)^3)^{x-2} \Rightarrow 4^{2(x+1)} = 4^{3(x-2)} \Rightarrow 2x+2 = 3x-6 \Rightarrow 8 = x \Rightarrow x = 8$$

: (e حل

$$(15)^{2x-1} = 7^{x+1} \Rightarrow \log(15)^{2x-1} = \log 7^{x+1} \Rightarrow (2x-1)\log 15 = (x+1)\log 7$$

$$\Rightarrow (2x-1)(1.1761) = (x+1)(0.8451) \Rightarrow 2.3522x - 1.1761 = 0.8451x + 0.8451$$

$$\Rightarrow 2.3522x - 0.8451x = 1.1761 + 0.8451 \Rightarrow 1.5071x = 2.0212 \Rightarrow x = \frac{2.0212}{1.5071}$$

: (f حل

$$\log \sqrt{x+1} = 1 - \frac{1}{2} \log x$$

$$\log \sqrt{x+1} + \frac{1}{2} \log x = 1 \Rightarrow \log \sqrt{x+1} + \log x^{\frac{1}{2}} = 1$$

$$\log(\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x}) = 1 \Rightarrow \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x} = 10^1$$

$$(x+1) \cdot x = 100 \Rightarrow x^2 + x - 100 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4(1)(-100) = 1 + 400 = 401$$

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{401}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-1 - \sqrt{401}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-1 + 20.02}{2} = \frac{19.02}{2} = 9.51$$

$$x_2 = \frac{-1 - 20.02}{2} = \frac{-21.02}{2} = -10.51$$

: (g حل

$$\log(4x-3) = 2 - \log 20 \Rightarrow \log(4x-3) + \log 20 = 2$$

$$\log[(4x-3) \cdot 20] = 2 \Rightarrow 20(4x-3) = 10^2$$

$$80x - 60 = 100 \Rightarrow 80x = 160 \Rightarrow x = 2$$



حل (h):

$$\log_5(x-1) - \log_5(x-2) = \log_5 2 \Rightarrow \log_5 \frac{x-1}{x-2} = \log_5 2$$

څرنگه چې قاعدې سره مساوي دي، نو خپله لوگاریتمي عددونه هم سره مساوي دي:

$$\frac{x-1}{x-2} = 2 \Rightarrow x-1 = 2x-4$$

$$x-1-2x+4=0 \Rightarrow -x+3=0 \Rightarrow -x=-3 \Rightarrow x=3$$

2- لاندې لوگاریتمي افادې د لوگاریتم د قوانینو په کارولو سره ساده کړئ.

$$a) \log_8 3\sqrt{4} = ?$$

$$b) \log_3 \frac{1}{243} = ?$$

$$c) \log_{10} \sqrt[4]{100} = ?$$

$$d) \log\left(\frac{8}{\sqrt{128}}\right) = ?$$

$$e) \log_{10} \frac{\sqrt[3]{10}}{0.1} = ?$$

حل (a):

$$\log_8 \sqrt[3]{4} = \log_{2^3} 2^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \log_2 2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

حل (b):

$$\log_3 \frac{1}{243} = \log_3 1 - \log_3 243 = 0 - \log_3 3^5 = -\log_3 3^5 = -5 \log_3 3 = -5 \cdot 1 = -5$$

حل (c):

$$\log_{10} \sqrt[4]{100} = \log_{10} (100)^{\frac{1}{4}} = \log_{10} 10^{\frac{2}{4}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

حل (d):

$$\begin{aligned} \log \frac{8}{\sqrt{128}} &= \log 8 - \log \sqrt{128} = \log 8 - \log (128)^{\frac{1}{2}} = \log 8 - \frac{1}{2} \log 128 = \log 8 - \frac{1}{2} \cdot \log 1.28 \cdot 10^2 \\ &= \log 8 - \frac{1}{2} \log 1.28 + 2 = 0.9031 - 0.5(0.1072) + 2 \\ &= 0.9031 - 0.0536 + 2 = 0.8495 + 2 = 2.8495 \end{aligned}$$

حل (e):

$$\begin{aligned} \log \frac{\sqrt[3]{10}}{0.1} &= \log \sqrt[3]{10} - \log 0.1 = \frac{1}{3} \log 10 - \log 10^{-1} = \frac{1}{3} \cdot 1 - (-1) \log 10 \\ &= \frac{1}{3} + 1 = \frac{1+3}{3} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

3. لاندې لوگارېتمونه محاسبه کړئ. (دا پوښتنې تکراري دي)

a)  $\log_8 \sqrt[3]{4} = ?$       b)  $\log_3 \frac{1}{243} = ?$   
c)  $\log_{10} \sqrt[4]{100} = ?$       d)  $\log_{10} \frac{\sqrt[3]{10}}{0.1} = ?$       e)  $\log \frac{8}{\sqrt{128}} = ?$

4. لاندې انتي لوگارېتمونه پیدا کړئ:

a) 1.7300    b) 0.8954    c) 4.5682    d)  $\bar{2}.1987$

حل (a): په جدول کې د 1.7300 لوگارېتم اړوند عدد پیدا کوو:

$$\text{anti log } 1.7300 = \text{anti log}(0.7300 + 1) = 5.37 \cdot 10 = 53.7$$

$$\text{anti log } 1.7300 = 53.7 \Rightarrow \log 53.7 = 1.7300$$

حل (b):

$$\text{anti log}(0.8954)$$

$$\text{anti log } 0.8954 = 7.86$$

حل (c):

$$\text{anti log } 4.5682 = \text{anti log}(0.5682 + 4) = 3.7000 \cdot 10^4 = 37000$$

حل (d):

$$\text{anti log } \bar{2}.1987 = \text{nati log}(0.1987 - 2) = (1.58 \cdot 10^{-2}) = 0.0158$$

$$\text{anti log } \bar{2}.1987 = 0.0158$$

5. دلاندې هر عدد لوگارېتم حساب کړئ:

a) 89500    b) 91    c) 3065.3    d)  $\log 0.002$

حل (a):

$$\begin{aligned} \log 89500 &= \log(8.59 \cdot 10^4) = \log 8.59 + 4 \\ &= 0.9518 + 4 = 4.9518 \end{aligned}$$

حل (b):

$$\begin{aligned} \log 91 &= \log(9.1 \cdot 10) = \log 9.1 + 1 = 0.9590 + 1 \\ &= 1.9590 \end{aligned}$$

حل (c):

$$\begin{aligned} \log 65.3 &= \log 6.53 \cdot 10 = \log 6.53 + 1 \\ &= 0.8149 + 1 = 1.8149 \end{aligned}$$

حل (d):

$$\begin{aligned} \log 0.002 &= \log(2.00 \cdot 10^{-3}) = \log 2.00 - 3 \\ &= 0.3010 - 3 = \bar{3}.3010 \end{aligned}$$

6. د لوگاریتم په مرسته لاندې حاصل ضرب پیدا کړئ.

$$a) 2.01 \cdot 52.9 \qquad b) (0.0062)(-34.8)$$

حل (a):

$$\begin{aligned} \log 2.01 \cdot 52.9 &= \log 2.01 + \log 52.9 = \log 2.01 + \log(5.29 \cdot 10) \\ &= \log 2.01 + \log 5.29 + 1 \\ &= 0.3032 + 0.7235 + 1 = 2.0267 \end{aligned}$$

$$\text{anti log } 2.0267 = \text{anti log}(0.0267 + 2) = 1.06 \cdot 100 = 106 \Rightarrow 2.01 \cdot 52.9 = 106$$

حل (b): څرنگه چې د  $b$  په جز کې د ضرب حاصل یو منفي عدد کېږي، منفي عددونه لوگاریتمي قیمت نه لري او په جدول کې هم نشته له دې امله د لوگاریتمي له طریقې د هغه حل نا ممکن دی.

7. د لاندې تقسیم حاصل د لوگاریتم په مرسته پیدا کړئ.

حل (a):

$$\begin{aligned} \log \frac{0.888}{256} &= \log 0.888 - \log 256 = \log 0.888 - \log(2.56 \cdot 10^2) = \log 0.888 - [\log(2.56 \cdot 10^2)] \\ &= \log(8.88 \cdot 10^{-1}) - \log 2.56 - 2 = \log 8.88 - 1 - \log 2.56 - 2 \\ &= \log 8.88 - \log 2.56 - 3 = 0.9484 - 0.4082 - 3 \\ &= 0.5402 - 3 = \bar{3}.5402 \end{aligned}$$

$$\text{anti log}(-2.4598) = \text{anti log}(0.5402 - 3) = 3.47 \cdot 10^{-3} = 0.00347$$

$$\Rightarrow 0.888 \div 256 = 0.00347$$

حل (b):

$$\begin{aligned} \log \frac{17.3}{7.47} &= \log 17.3 - \log 7.47 = \log(1.73 \cdot 10) - \log 7.47 = \log 1.73 - \log 7.47 + 1 \\ &= 0.2380 - 0.8733 + 1 = 0.3647. \end{aligned}$$

$$\text{anti log } 0.3647 = 2.32 \Rightarrow 17.3 \div 7.47 = 2.32$$

8. د لاندې توان لرونکو عددونو قیمتونه د لوگاریتم په مرسته پیدا کړئ.

$$a) (7.42)^3 \qquad b) (-84.7)^2 \qquad c) \sqrt{418} \qquad d) \sqrt{0.21}$$

حل (a):

$$\log(7.42)^3 = 3 \log 7.42 = 3(0.8704) = 2.6112$$

$$\text{anti log}(2.6112) = \text{anti log}(0.6112 + 2) = 4.09 \cdot 100 = 409$$

$$\Rightarrow (7.42)^3 = 409$$

**حل (b):**

$$\begin{aligned}\log(-84.7)^2 &= 2\log(-84.7) = 2\log(-8.47 \cdot 10) = 2\log(-8.47) + 2\log 10 \\ &= 2\log(-8.47) + 2\end{aligned}$$

پوهېرو چې عدد په توان د جفت مساوي له يوه مثبت عدد سره دی، د منفي علامې په پام کې نه نيولو سره لوگارېتمي عمليې سرته رسوو چې د 8.47 مانتيس عبارت دی له 0.9279 څخه، نو:

$$2(0.9279) + 2 = 1.8558 + 2 = 3.8558$$

مانتيس يعنې 0.8558 په جدول کې نه ليدل کېږي، نو د انټرپولېشن عمليې ته اړتيا ده او دا وروستی موضوع ده چې راځي.

**حل (c):**

$$\begin{aligned}\log \sqrt{418} &= \log(418)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log 418 = 0.5 \log(4.18 \cdot 10^2) = 0.5 \log 4.18 + 0.5 \cdot 2 \\ &= 0.5(0.6212) + 1 = 0.3106 + 1 = 1.3106\end{aligned}$$

$$\text{anti log } 1.3106 = \text{anti log}(0.3106 + 1) = 2.05 \cdot 10 = 20.5$$

$$\Rightarrow \sqrt{418} = 20.5$$

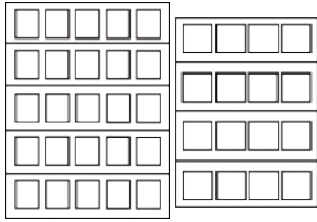
**حل (d):**

$$\begin{aligned}\log \sqrt{0.21} &= \log(0.21)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log 0.21 = 0.5 \log(2.1 \cdot 10^{-1}) = 0.5 \log 2.1 + 0.5(-1) \\ &= 0.5(0.3222 - 1) = 0.5(-0.6778) = -0.33890\end{aligned}$$

څرنگه چې مانتيسا بايد مثبت وي، نو د -0.33890 سره د مثبت او منفي يو عدد جمع کوو:

$$-0.33890 + 1 - 1 = 0.6611 - 1 = \bar{1}.6611$$

$$\text{anti log}(\bar{1}.6611) \approx 0.459 \Rightarrow \sqrt{0.21} \approx 0.459$$



## شپږم څپرکی: متریکسونه

متریکسونه (Matrices)

د درسي کتاب (205) مخ

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• د متریکسونو په مفهوم پوه شي.</li> <li>• د <math>M</math> نقطې متناظر نظر د <math>x</math> یا <math>y</math> محور ته پیدا کړای شي، همدارنگه ضرایب په جدول کې وښودلای شي.</li> <li>• د متریکسونو په کارولو سره د ریاضي له علم سره مینه پیدا کړي.</li> </ul>	<p>- پوهنیزه</p> <p>- مهارتي</p> <p>- ذهنيتي</p>
<p>2- د زده کړې لارې:</p> <p>پوښتنه او ځواب، ډله ییز او یو کسيز کار...</p>	
<p>3- مرستندويه مواد:</p> <p>د وروډي شکل چارټ، د 206 مخ د متریکسونو چارټ</p>	
<p>4- د وروډي برخې</p> <p>توضیح (5 دقیقې)</p> <p>ښاغلی ښوونکی د لومړنیو فعالیتونو له سرته رسولو څخه وروسته هغه چارټ چې مخکې له مخکې مو جوړ کړی دی، د ټولگي مخې ته وځړوي او وروډي پوښتنه له زده کوونکو څخه وپوښتی. طبیعي ده چې زده کوونکي پوښتنې ته ځواب وایي، ځکه ډېره ساده پوښتنه ده.</p>	
<p>5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې):</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• ښاغلي ښوونکی، زده کوونکي په مناسبو ډلو ووېشي چې د کتاب 205 مخ فعالیت په خپلو کتابچو کې سرته ورسوي.</li> <li>• د فعالیت په بهیر کې د ډلو له کار او فعالیت څخه کتنه وکړي او د اړتیا په صورت کې مرسته ورسره وکړي.</li> <li>• د ډله ییز کار په پای کې یو زده کوونکی راوغواړي چې خپل ډله ییز فعالیت نورو ته توضیح کړي، د تېروتنې په صورت کې تاسو د پوښتنې او ځواب په طریقه د زده کوونکو فعالیت اصلاح کړي.</li> <li>• ښاغلی ښوونکی د متریکس تعریف زده کوونکو ته ووايي او د کتاب د 206 مخ د <math>A, B</math> او <math>C</math> متریکسونو سطرونه او ستونونه په داسې حال کې چې چارټونه یې د ټولگي په مخکې ځوړند دي، زده کوونکو ته وروپېژني.</li> <li>• له زده کوونکو څخه وپوښتی چې د متریکس مرتبه څه شی ده، که چیرې کوم زده کوونکی ځواب ورکړ ښه ده، که چیرې ځواب یې ورنه کړ د متریکس مرتبه هم زده کوونکو ته وروپېژني.</li> <li>• د کتاب د 207 مخ د فعالیت اړوند <math>A, B, C</math> او <math>D</math> متریکسونه یو زده کوونکي ته ورکړي چې پر تخته د هغو مرتبه وټاکي، په عین وخت کې نورو زده کوونکو ته ووايست چې د نوموړو متریکسونو مرتبه په خپلو کتابچو کې وټاکي. په پای کې تخته ته ولاړ زده کوونکی دې خپل فعالیت نورو زده کوونکو ته توضیح کړي، د تېروتنې په صورت کې بل زده کوونکی دې د نوموړو متریکسونو مرتبه پر تخته وټاکي.</li> </ul>	

## 6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

بناغلی بنوونکی لوست ته د بڼه تحکیم ورکولو لپاره د کتاب د 207 مخ مثال د پوښتنې او ځواب په طریقه په ټولگي کې حل کړئ.

## 7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

بناغلی بنوونکی ددې لپاره چې د زده کوونکو له زده کړې څخه ډاډمن شي، نو زده کوونکي په لاندې پوښتنو سره ارزوي:

1. متریکس څه ته وايي؟ یو زده کوونکی دې تعریف کړي.

2. یو زده کوونکی دې د  $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$  متریکس مرتبه ولیکي.

## 8- د بنوونکي لپاره اضافي معلومات:

د  $A$  متریکس د  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  یا  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  په واسطه ښودل کېږي او که مرتبه یې معلومه وي د  $[a_{ij}]$  یا  $(a_{ij})$  په شکل لیکو، څرگنده ده چې د  $m \times n$  مرتبې متریکس د  $m \cdot n$  په شمېر عناصر لري.

مثال: یو متریکس چې 12 عنصره ولري، څو ممکنه ترتیبونه به ولري؟

حل: څرنگه چې د  $m \times n$  مرتبې متریکس د  $m \cdot n$  په شمېر عناصر لري، نو یو متریکس چې 12 عنصره ولري دهغه ټولې مرتبې جوړې داسې په لاس راوړو چې د ضرب حاصل یې 12 شي.

(1,12), (12,1), (2,6), (6,2), (3,4), (4,3)

$1 \times 12$ ,  $12 \times 1$ ,  $2 \times 6$ ,  $6 \times 2$ ,  $3 \times 4$ ,  $4 \times 3$

نو ددغه متریکس ممکنه مرتبې

دي، چې په ترتیب سره د کینې خوا فکتورونه د سطرونو شمېر او ښي خوا فکتورونه د ستونونو شمېر ښيي.

## 9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

1. د لاندې متریکسونو مرتبې ولیکئ:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

حل: پوهېږو چې د یو متریکس مرتبه د  $m \times n$  په شکل ښودل کېږي، داسې چې  $m$  د سطرونو او  $n$  د ستونونو شمېر رابښي، نو:

$$A_{m \times n} = A_{3 \times 3} \quad , \quad B_{m \times n} = B_{2 \times 3}$$

2. لاندې متریکسونه د مستطیلي جدول په شکل ولیکئ.

$$a) (a_{ij})_{3 \times 3} = (2i + 3j)_{3 \times 3} \quad b) (a_{ij})_{2 \times 3} = \left(\frac{i}{j}\right)_{2 \times 3}$$

**حل (a):** د  $(a_{ij})_{3 \times 3}$  متريکس عمومي حالت لیکو او پوهېږو چې  $i$  د عنصر ځای په سطر کې او  $j$  د عنصر ځای په ستون کې نيسي:

$$(a_{ij})_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = (2i + 3j)_{3 \times 3}$$

$$a_{11}, i=1, j=1 \Rightarrow 2i+3j=2+3=5$$

$$a_{12}, i=1, j=2 \Rightarrow 2i+3j=2+6=8$$

$$a_{13}, i=1, j=3 \Rightarrow 2i+3j=2+9=11$$

$$a_{21}, i=2, j=1 \Rightarrow 2i+3j=4+3=7$$

$$a_{22}, i=2, j=2 \Rightarrow 2i+3j=4+6=10$$

$$a_{23}, i=2, j=3 \Rightarrow 2i+3j=4+9=13$$

$$a_{31}, i=3, j=1 \Rightarrow 2i+3j=6+3=9$$

$$a_{32}, i=3, j=2 \Rightarrow 2i+3j=6+6=12$$

$$a_{33}, i=3, j=3 \Rightarrow 2i+3j=6+9=15$$

$$(a_{ij})_{3 \times 3} = (2i + 3j)_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 11 \\ 7 & 10 & 13 \\ 9 & 12 & 15 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

**حل (b):**

$$(a_{ij})_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \left(\frac{i}{j}\right)_{2 \times 3}$$

$$a_{11}, i=1, j=1 \Rightarrow \frac{i}{j} = \frac{1}{1} = 1$$

$$a_{12}, i=1, j=2 \Rightarrow \frac{i}{j} = \frac{1}{2}$$

$$a_{13}, i=1, j=3 \Rightarrow \frac{i}{j} = \frac{1}{3}$$

$$a_{21}, i=2, j=1 \Rightarrow \frac{i}{j} = 2$$

$$a_{22}, i=2, j=2 \Rightarrow \frac{i}{j} = \frac{2}{2} = 1$$

$$a_{23}, i=2, j=3 \Rightarrow \frac{i}{j} = \frac{2}{3}$$

$$(a_{ij})_{2 \times 3} = \left(\frac{i}{j}\right)_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \quad (4 \ 5 \ 6) \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## شپږم څپرکی: متریکسونه

د متریکس ډولونه

د درسي کتاب (209) مخ

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• پوهنيزه</li> <li>• مهارتي</li> <li>• ذهنيته</li> </ul> <p>زده کوونکي به دلوست په پای کې و توانېږي چې:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• د متریکس ډولونه وپېژني.</li> <li>• متریکسونه له یو بل سره تشخیص کړای شي.</li> <li>• په ژوند کې د متریکسونو په ارزښت پوه شي.</li> </ul>	
<p>2- د زده کړې لارې:</p> <p>پوښتنه او ځواب، ډله‌ییز او یو کسيز کار...</p>	
<p>3- مرستندويه مواد:</p> <p>د ورودي شکل چارټ</p>	
<p>4- د ورودي برخې توضیح (5 دقیقې)</p> <p>بناغلی بنوونکی د لومړنیو فعالیتونو له سرته رسولو څخه وروسته ورودي پوښتنه له زده‌کوونکو څخه وپوښتی چې زده‌کوونکي د هغې په اړه فکر وکړي. د پوښتنې لومړي جز ته زده‌کوونکي ځواب ویلای شي، خو د دویم جز ځواب د فعالیت له سرته رسولو څخه وروسته روښانه کېږي.</p>	
<p>5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې):</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• بناغلی بنوونکی په ترتیب سره د متریکسونو عنوانونه پر تخته ولیکي او په نوبت سره له زده‌کوونکو څخه وغواړي چې د هر متریکس بېلگه پر تخته ولیکي، که چېرې ستونزې ولري لارښوونه ورته وکړي.</li> <li>• بناغلی بنوونکی زده‌کوونکي په مناسبو ډلو ووېشي چې د کتاب 211 مخ فعالیت د یو بل په مشوره سرته ورسوي. د ډله‌ییز کار په پای کې د یوې ډلې استازی راوغواړي چې خپل ډله‌ییز کار پر تخته نورو زده‌کوونکو ته توضیح کړي، که چېرې د نوموړي توضیحاتو د زده‌کوونکو قناعت حاصل نه کړ، بل داوطلب زده‌کوونکی دې دغه فعالیت توضیح کړي.</li> </ul>	
<p>6- د زده کړې تحکیم: (7 دقیقې)</p> <p>بناغلی بنوونکی لوست ته د ښه تحکیم ورکولو لپاره د کتاب 212 مخ له پوښتنو څخه د <math>a</math> او <math>b</math> جزونه د پوښتنې او ځواب په طریقه په زده‌کوونکو باندې حل کړي.</p>	
<p>7- د لوست د پایلې ارزونه: (5 دقیقې)</p> <p>بناغلی بنوونکی د خپل ډاډ لپاره له زده‌کوونکو څخه لاندې پوښتنې وپوښتی:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. یو زده‌کوونکی دې د متریکسونو ډولونه پر تخته ولیکي.</li> <li>2. یو زده‌کوونکی تختې ته راوغواړي چې د یو متریکس اصلي قطر او فرعي قطر راوښيي.</li> <li>3. یو زده‌کوونکی دې د کتاب د 212 مخ د پوښتنو <math>c</math> جز حل کړي، یعنې نوم او مرتبه دې مشخصه کړي.</li> </ol>	



## 8- د بنوونکي لپاره اضافي معلومات:

د دوه قطري متریکسونو د جمعې حاصل بیا هم یو قطري متریکس دی.

**ثبوت:** څرنگه چې د قطري متریکس ټول عناصر له اصلي قطر پرته ټول صفرونه دي، نو فرضوو چې  $A = (a_{ii})$  او  $B = (b_{ii})$  قطري متریکسونه دي، په دې حالت کې په اسانۍ سره لیدل کېږي چې:

$$C = A + B = (a_{ii} + b_{ii}) = ((a + b)_{ii}) = (c_{ii}) \Rightarrow C = (c_{ii})$$

**مثال:** که چېرې  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$  او  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$  قطري متریکسونه وي، نو:

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 & 0+0 & 0+0 \\ 0+0 & 4+3 & 0+0 \\ 0+0 & 0+0 & 6+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$$

ولیدل شو  $A + B$  یو قطري متریکس دی.

## 9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

1. لاندې متریکسونه په پام کې ونیسئ، مرتبې او اړوند نومونه یې وټاکئ:

$$a) A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b) B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$c) C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$d) D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$e) E = (5 \quad -6 \quad 7 \quad 8)$$

$$f) F = (1 \quad 2)$$

$$g) G = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$h) H = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

**حل (a):** د  $a$  جز متریکس مرتبه  $m \times n = 3 \times 3$  او مربعي متریکس دی.

**حل (b):** د  $b$  جز متریکس مرتبه  $O_{m \times n} = O_{3 \times 3}$  او صفري متریکس دی.

**حل (c):** د  $c$  جز متریکس مرتبه  $m \times n = 3 \times 3$  او واحد متریکس دی.

**حل (d):** د  $d$  جز متریکس مرتبه  $m \times n = 3 \times 3$  او سکالري متریکس دی.

**حل (e):** د  $e$  جز متریکس مرتبه  $m \times n = 1 \times 4$  او سطري متریکس دی.

**حل (f):** د  $f$  جز متریکس مرتبه  $m \times n = 1 \times 2$  او سطري متریکس دی.

**حل (g):** د  $g$  جز متریکس مرتبه  $m \times n = 4 \times 1$  او ستوني متریکس دی.

**حل (h):** د  $h$  جز متریکس مرتبه  $m \times n = 2 \times 2$  او له مربعي متریکس څخه عبارت دی.

$$\left. \begin{array}{l} A + A = \\ A - A = \\ \dots\dots\dots \\ A + B = \\ A - B = \\ \dots\dots\dots \\ B + B = \\ B - B = \end{array} \right\} ?$$

## شپږم څپرکی: متریکسونه

د متریکسونو جمع او تفریق

د درسي کتاب (213) مخ

د لوست وخت: (یو درسي ساعت)

<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- پوهنیزه</li> <li>- مهارتي</li> <li>- ذهنيتي</li> </ul> <p>زده کوونکي به د لوست په پای کې و توانېږي چې:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• د متریکسونو د جمعې او تفریق په طریقه پوه شي.</li> <li>• د متریکسونو د جمعې او تفریق عملیه سرته ورسوي.</li> <li>• په بریالیتوب سره د ریاضي د عملیو په سرته رسولو سره خوښي وکړي.</li> </ul>	
<p>2- د زده کړې لارې:</p> <p>پوښتنه او ځواب، ډله ییز او یو کسيز کار...</p>	
<p>3- مرستندويه مواد:</p> <p>د وروډي افادو چارټ</p>	
<p>4- د وروډي برخې</p> <p>توضیح (5 دقیقې)</p> <p>ښاغلی ښوونکی د لومړنیو فعالیتونو له سرته رسولو څخه وروسته د وروډي افادو چارټ د ټولګي په مخکې وځړوی او د وروډي پوښتنې په اړه له زده کوونکو څخه وپوښتی، زده کوونکي دې له فکر کولو څخه وروسته ځواب ووايي، که چیرې سم ځواب ورنه شي کړای د متریکسونو د جمعې لومړی مثال د وروډي پوښتنې حل دی.</p>	
<p>5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې):</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• ښاغلی ښوونکی (د متریکسونو جمع) عنوان پر تخته ولیکي او له لنډو توضیحاتو څخه وروسته د مثال حل د پوښتنې او ځواب په طریقه حل کړی.</li> <li>• زده کوونکي په مناسبو ډلو و وېشي چې د کتاب 213 مخ فعالیت د یو بل په مشوره په خپلو ډلو کې سرته ورسوي، په پای کې د یوې ډلې استازي ته دنده ورکړی چې خپل ډله ییز فعالیت نورو زده کوونکو ته توضیح کړي، که چیرې زده کوونکو تېروتنه وکړه لارښوونه ورته وکړی.</li> <li>• د متریکسونو د جمعې او تفریق د خاصیتونو عنوان پر تخته ولیکي، د پوښتنې او ځواب په طریقه د لوست بهیر ته ادامه ورکړی.</li> <li>• په داسې حال کې چې زده کوونکو کتابونه تړلي وي، د کتاب 214 مخ لومړی مثال دې د یو کسيز فعالیت په توګه سرته ورسوي، د فعالیت په پای کې یو زده کوونکی دې خپل فعالیت پر تخته نورو زده کوونکو ته توضیح کړي، د تېروتنې په صورت کې تاسو مرسته وکړی.</li> </ul>	
<p>6- د زده کړې تحکیم: (7 دقیقې)</p> <p>ښاغلی ښوونکی لوست ته د ښه تحکیم ورکولو لپاره د کتاب 214 مخ د فعالیت دویم مثال د پوښتنې او ځواب په طریقه د زده کوونکو په فعال ګډون سره په ټولګي کې کار وکړی.</p>	

## 7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

بناغلی بنوونکی د زده‌کوونکو له زده‌کړې څخه د خپل ډاډ لپاره زده‌کوونکي په لاندې پوښتنو سره ارزوي:

1. له یوه زده‌کوونکي څخه وغواړئ چې د  $A_{2 \times 2}$  متریکس پر تخته ولیکي.
2. له یوه زده‌کوونکي څخه وغواړئ چې د  $B_{2 \times 3}$  متریکس پر تخته ولیکي.
3. یو زده‌کوونکی راوغواړئ چې د کتاب 214 مخ د پوښتنو د  $a$  جز اړوند  $A$  او  $B$  متریکسونه سره جمع کړي.

## 8- د بنوونکي لپاره اضافي معلومات:

د کتاب د 214 مخ د فعالیت حل:

**فعالیت:** د یوه مثال په واسطه وښایاست چې  $A - B \neq B - A$

**حل:** که چېرې  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 8 & 7 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}$  او  $B = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 9 \\ 8 & 10 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$  وي، نو:

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 8 & 7 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 7 & 9 \\ 8 & 10 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-0 & 2-7 & 4-9 \\ 5-8 & 8-10 & 7-4 \\ 6-3 & 3-5 & 9-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -5 \\ -3 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B - A = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 9 \\ 8 & 10 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 8 & 7 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-1 & 7-2 & 9-4 \\ 8-5 & 10-8 & 4-7 \\ 3-6 & 5-3 & 6-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & -3 \\ -3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A - B \neq B - A$$

## 9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

لاندې متریکسونه د امکان تر حده جمع او تفریق کړئ:

$$a) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b) A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$c) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**حل:** دوه متریکسونه هغه وخت سره جمع او تفریق کېدلای شي چې یو شان مرتبه ولري.

$$a) A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3 & 2-1 & 3+0 \\ 4+0 & -1+(-1) & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-3 & 2+1 & 3-0 \\ 4-0 & -1+1 & 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$b) A + B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2 & 2+2 \\ -1+1 & -1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2 & 2-2 \\ -1-1 & -1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

(a): څرنگه چې لیدل کېږي د  $c$  جز اړونده  $A$  او  $B$  متریکسونه هم مرتبه نه دي، نو د نوموړو متریکسونو د جمعې او

تفریق حاصل په لاس نه شو راوړای، یعنې جمع او تفریق کېدای نه شي.

$$K \cdot A = K \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}$$

## شپږم څپرکی: متریکسونه

په متریکس کې د سکالر ضرب

د درسي کتاب (215) مخ

د لوست وخت: (یو درسي ساعت)

<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• زده کوونکي به د لوست په پای کې و توانېږي چې:</li> <li>• په یوه متریکس کې د سکالر د ضرب په مفهوم پوه شي.</li> <li>• په یوه متریکس کې سکالر ضرب کړای شي.</li> <li>• د پورته پوهې او مهارت په لرلو سره د ریاضي له علم سره مینه پیدا کړي.</li> </ul>	<p>- پوهنیزه</p> <p>- مهارتي</p> <p>- ذهنيتي</p>
<p>2- د زده کړې لارې:</p> <p>پوښتنه او ځواب، ډله‌ییز او یو کسيز کار...</p>	
<p>3- مرستندويه مواد:</p> <p>د وروډي شکل چارټ، په 216 مخ کې د <math>b, a</math> او <math>c</math> افادو چارټ</p>	
<p>4- د وروډي برخې توضیح (5 دقیقې)</p> <p>ښاغلی ښوونکی د لومړنيو فعالیتونو له سرته رسولو څخه وروسته د وروډي برخې چارټ د ټولګي په مخکې وڅړوی او وروډي پوښتنه له زده‌کوونکو څخه وپوښتی، طبیعي ده چې زده‌کوونکو ته انگیزه پیدا کړي او د پوښتنې په اړه فکر کوي، که چېرې زده‌کوونکي ځواب ونه شي ویلای د فعالیت له سرته رسولو څخه وروسته د وروډي پوښتنې ځواب په لاس راځي.</p>	
<p>5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې):</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• ښاغلی ښوونکی زده‌کوونکي په مناسبو ډلو و وېشي چې د کتاب 215 مخ فعالیت د یو بل په مشوره سرته ورسوي.</li> <li>• د ډلو د فعالیت له بهیر څخه څارنه وکړي، فعالې ډلې تشویق او له ضعیفو ډلو سره مرسته وکړي.</li> <li>• د فعالیت په پای کې د یوې ډلې استازی راوغوړي چې خپل ډله‌ییز فعالیت نورو زده‌کوونکو ته توضیح کړي، که چېرې ستونزې ولري لارښوونه ورته وکړي.</li> <li>• ښاغلی ښوونکی هغه تعریف چې د فعالیت پایله ده، زده‌کوونکو ته وایاست.</li> <li>• د کتاب د 215 مخ مثال د پوښتنو او ځواب په طریقه په زده‌کوونکو حل کړي.</li> <li>• د کتاب د 216 مخ په متریکس کې د سکالر د ضرب خاصیتونه) عنوان پر تخته ولیکي او د اړونده افادو چارټ د ټولګي په مخکې وڅړوی او د هغه په اړه اړین توضیحات ورکړي.</li> </ul>	
<p>6- د زده کړې تحکیم: (7 دقیقې)</p> <p>ښاغلی ښوونکی لوست ته د ښه تحکیم ورکولو لپاره درې زده‌کوونکي په وار سره راوغوړي، چې یو زده‌کوونکی <math>\alpha(\beta \cdot A)</math>، دویم زده‌کوونکی <math>(\alpha\beta)A</math> او دریم زده‌کوونکی <math>\beta(\alpha \cdot A)</math> پیدا کړي او په پای کې پایلې یې سره پرتله کړي، معلوم به شي، چې: <math>\alpha(\beta A) = (\alpha \cdot \beta)A = \beta(\alpha A)</math> کپړي.</p> <p>ښاغلی ښوونکی زده‌کوونکو ته و وایاست چې له کتاب څخه کار وانه خلي.</p>	

## 7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

بناغلی شوونکی د زده‌کوونکو له زده‌کړې څخه د خپل ډاډ لپاره زده‌کوونکي په لاندې پوښتنو سره و ارزوی:

1. یو زده‌کوونکی دې په یو متریکس کې د یو سکالر د ضرب قاعده بیان کړي.

2. یو زده‌کوونکی دې لاندې مساواتونه بشپړ کړي:

$$\alpha(A+B) = ?$$

$$(\alpha + \beta)A = ?$$

$$\alpha(\beta A) = ?$$

## 8- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

1. که چیرې  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\alpha = 2$  او  $\beta = 1$  راکړل شوي وي. په متریکس کې د سکالر د

ضرب درې خاصیتونه تطبیق کړئ؟

حل:

a)  $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$

$$2 \left[ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] = 2 \left[ \begin{pmatrix} 2-1 & 0+0 \\ 1+1 & -1+0 \end{pmatrix} \right] = 2 \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\alpha A = 2 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 & 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 1 & 2(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\alpha B = 2 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(-1) & 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha A + \alpha B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-2 & 0+0 \\ 2+2 & -2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

b)  $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

$$(\alpha + \beta)A = (2+1) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 & 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot 1 & 3(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\alpha A = 2 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 & 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 1 & 2(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\beta A = 1 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 & 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 & 1 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha A + \beta A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+2 & 0+0 \\ 2+1 & -2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$c) \alpha(\beta A) = (\alpha \beta)A = \beta(\alpha A)$$

$$\alpha(\beta A) = 2 \left[ 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right] = 2 \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 & 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 & 1 \cdot (-1) \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 & 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(\alpha \beta)A = (2 \cdot 1) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 & 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\beta(\alpha A) = 1 \left[ 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right] = 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 & 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot (-1) \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 & 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 2 & 1 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

2. کہ  $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  اور  $K=3$  وي،  $KA$  اور  $\frac{1}{K}A$  پيدا كړئ:

حل:

$$KA = 3 \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 5 & 3 \cdot 1 & 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 0 & 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 0 & 3 \cdot 0 & 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{K}A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \cdot 5 & \frac{1}{3} \cdot 1 & \frac{1}{3} \cdot 1 \\ \frac{1}{3} \cdot 0 & \frac{1}{3} \cdot 1 & \frac{1}{3} \cdot 2 \\ \frac{1}{3} \cdot 0 & \frac{1}{3} \cdot 0 & \frac{1}{3} \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = ?$$

## شپږم څپرکی: متریکسونه

د دوو متریکسونو ضرب

د درسي کتاب (217) مخ

د لوست وخت: (یو درسي ساعت)

<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- پوهنیزه</li> <li>- مهارتي</li> <li>- ذهنيتي</li> </ul> <p>زده کوونکي به دلوست په پای کې و توانېږي چې:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• د دوو متریکسونو د ضرب په طريقه پوه شي.</li> <li>• دوه ورکړ شوي متریکسونه سره ضرب کړای شي.</li> <li>• د پورته پوهې او مهارت او د فعاليتونو له سرته رسولو څخه خوښي وکړي.</li> </ul>	
<p>2- د زده کړې لارې:</p> <p>پوښتنه او ځواب، ډله ییز او یو کسيز کار...</p>	
<p>3- مرستندويه مواد:</p> <p>د وړو دي شکل چارټ</p>	
<p>4- د وړو دي برخې</p> <p>توضیح (5 دقیقې)</p> <p>بناغلی ښوونکی د لومړنیو فعاليتونو له سرته رسولو څخه وروسته د وړو دي برخې چارټ د ټولگي په مخکې ځوړند کړی او وړو دي پوښتنه له زده کوونکو څخه وپوښتی، چې دهغې په اړه فکر وکړي او ځواب ووايي، که ځواب ونه شي ویلای، د توضیحاتو او د مثال له حلولو څخه وروسته به د وړو دي پوښتنې په ځواب پوه شي.</p>	
<p>5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې):</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• بناغلی ښوونکی د دوو متریکسونو د ضرب په اړه له لنډو توضیحاتو څخه وروسته د کتاب د 218 مخ لومړی مثال د پوښتنو او ځوابونو په طريقه داسې چې خپل توضیحات مو په کې تطبیق کړی وي، حل کړی.</li> <li>• د کتاب د 218 مخ دویم مثال د پوښتنو او ځوابونو په طريقه په ټولگي کې حل کړی.</li> <li>• بناغلی ښوونکی زده کوونکي په مناسبو ډلو ووېشي، زده کوونکي دې کتابونه وتری، ترڅو د یو بل په مشوره د کتاب د 218 مخ دریم مثال حل کړي. په پای کې د یوې ډلې استازی راوغوړی چې خپل ډله ییز کار نورو زده کوونکو ته توضیح کړي.</li> <li>• د کتاب د 219 مخ فعالیت یوه زده کوونکي ته ورکړی چې پر تخته کار وکړي په عین وخت کې دغه فعالیت نورو زده کوونکو ته هم ورکړی چې په خپلو کتابچو کې یې په انفرادي ډول حل کړي. په پای کې تخته ته ولاړ زده کوونکی دې د نورو زده کوونکو پام ځان ته واړوي او خپل فعالیت دې هغو ته توضیح کړي. د اړتیا په صورت کې تاسو لارښوونه وکړی.</li> </ul>	
<p>6- د زده کړې تحکیم: (7 دقیقې)</p> <p>بناغلی ښوونکی لوست ته د ښه تحکیم ورکولو لپاره د کتاب 219 مخ څلورم مثال د پوښتنې او ځوابونو په طريقه د زده کوونکو په فعال گډون سره حل کړی او دا چې په عمومي ډول د دوو متریکسونو په ضرب کې د بدلون خاصیت صدق نه کوي، زده کوونکو ته بیان کړی چې دا د وړو دي پوښتنې ځواب دی.</p>	

ښوونکي دې د مټریکسونو د ضرب خاصیتونه د افادو په پام کې نیولو سره یعنې:

$$A(B+C) = AB + AC, \quad K(AB) = (KA)B = A(KB)$$

$$(A+B)C = AC + BC, \quad IA = AI = A$$

زده‌کونکو ته توضیح کړي.

### 7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ښاغلی ښوونکي د زده‌کونکو له زده‌کړې څخه د خپل ډاډ لپاره زده‌کونکي په لاندې پوښتنو وازوی:

1. یو زده‌کونکي دې ووايي چې د دوو مټریکسونو د ضربولو لپاره کوم شرط ضروري دی؟

2. یو زده‌کونکي دې د مټریکسونو د ضرب خاصیتونه ووايي.

3. که چیرې د  $A, B$  او  $C$  درې مټریکسونه ولرو، یو زده‌کونکي دې د راکړل شوو مټریکسونو توزیعي خاصیت

ولیکي.

### 8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات:

(i): که چیرې  $n$  یو طبیعي عدد او  $A$  یو مربعي مټریکس وي، په دې حالت کې که  $A^{n+1} = A$  وي وایي چې د  $A$  مټریکس پریودي (Periodic) دی او پریودی  $n$  دی. د  $n=1$  لپاره  $A^2 = A$  کېږي. په دې حالت کې  $A$  مټریکس ته Idempotent مټریکس وایي.

(ii): که چیرې  $A$  یو مربعي مټریکس وي او  $n \in \mathbb{N}$  وي، نو که  $A^n = 0$  شي په دې حالت کې  $A$  مټریکس ته Nilpotent مټریکس وایي، داسې چې انډکس یې  $n$  دی. یا په بل عبارت د  $A$  مټریکس ته Nilpotent د  $n$  انډکس سره وایي.

مثال (i): وښایاست چې  $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$  مټریکس Idempotent دی.

حل:

$$\begin{aligned} A^2 = A \cdot A &= \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+2-4 & -4-6+8 & -8-8+12 \\ -2-3+4 & 2+9-8 & 4+12-12 \\ 2+2-3 & -2-6+6 & -4-8+9 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} = A \Rightarrow A^2 = A \end{aligned}$$

څرنگه چې  $A^2 = A$  په لاس راغی، نو د  $A$  مټریکس Idempotent دی.

مثال (ii): وښایاست چې  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$  مټریکس Nilpotent او انډکس یې 3 دی.



حل:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+5-6 & 1+2-3 & 3+6-9 \\ 5+10-12 & 5+4-6 & 15+12-18 \\ -2-5+6 & -2-2+3 & -6-6+9 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+0 \\ 3+15-18 & 3+6-9 & 9+18-27 \\ -1-5+6 & -1-2+3 & -3-6+9 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

څرنگه چې  $A^3 = 0$  شو، نو د  $A$  متریکس د 3 له انډکس سره Nilpotent دی.

### 9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

د لاندې متریکسونو د ضرب حاصل په لاس راوړئ.

$$a) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = ?$$

$$b) \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = ?$$

$$c) \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = ?$$

$$d) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = ?$$

حل (a): هغه وخت دوه متریکسونه یو له بل سره ضربولای شو چې د لومړي متریکس د ستونونو شمېر د دویم متریکس د

سطرونو له شمېر سره برابر (مساوي) وي او دریم متریکس چې له ضرب څخه په لاس راځي.

د سطرونو شمېر یې د لومړي متریکس د سطرونو او د ستونونو شمېر یې د دویم متریکس د ستونونو له شمېر سره برابر دی:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 5 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \\ 2 \cdot 5 + 0 \cdot 0 & 2 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0 & 0+1 \\ 10+0 & 0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) جز حل:

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 \\ -1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 + 12 \\ -3 + 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(c) جز حل:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (3 \cdot (-2) + (-2) \cdot 1 + 1 \cdot 1) = (-6 - 2 + 1) = (-7)$$

(d) جز حل:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-3) + 3 \cdot 2 \\ 4 \cdot (-3) + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 + 6 \\ -12 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

## شپږم څپرکی: متریکسونه

د یوه متریکس ټرانسپوز متریکس

د درسي کتاب (217) مخ

د لوست وخت: (یو درسي ساعت)

<p>زده کوونکي به دلوست په پای کې وتوانېږي چې:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• د یوه متریکس د ټرانسپوز متریکس په مفهوم پوه شي.</li> <li>• متناظر متریکسونه وپېژني.</li> <li>• د ټرانسپوز متریکس له خاصیتونو سره بلدتیا پیدا کړي.</li> <li>• د یوه متریکس ټرانسپوز او همدارنگه متناظر متریکس ولیکلای شي.</li> <li>• د پورتنیو مفهومونو د پوهېدو له امله به خوښ شي.</li> </ul>	<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- پوهنیزه</li> <li>- مهارتي</li> <li>- ذهنيتي</li> </ul>
<p>پوښتنه او ځواب، ډله ییز او یو کسيز کار...</p>	<p>2- د زده کړې لارې:</p>
<p>د وروډي پوښتنې چارټ، د(متناظر متریکس پېژندل) عنوان اړونده چارټ</p>	<p>3- مرستندويه مواد:</p>
<p>بناغلی ښوونکی د لومړنیو فعالیتونو له سرته رسولو څخه وروسته د وروډي پوښتنې چارټ د ټولگي په مخکې وڅړوئ او وروډي پوښتنه له زده کوونکو څخه وپوښتی، د زده کوونکو پام پوښتنې ته راواړوئ چې د هغې په اړه فکر وکړي که چیرې زده کوونکي ځواب ونشي ویلای د فعالیت له سرته رسولو څخه وروسته به د پوښتنې ځواب په لاس راوړي.</p>	<p>4- د وروډي برخې توضیح (5 دقیقې)</p>
<p>5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې):</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• بناغلی ښوونکی زده کوونکي په مناسبو ډلو و وېشي چې د کتاب 221 مخ فعالیت د یو بل په مشوره سرته ورسوي.</li> <li>• د فعالیت له بهیر څخه څارنه وکړي، فعالې ډلې تشویق او ضعیفو ډلو ته لارښوونه وکړي، په پای کې د یوې ډلې استازی راوغواړي چې خپل ډله ییز فعالیت نورو زده کوونکو ته توضیح کړي، د تېروتنې په صورت کې لارښوونه وکړي.</li> <li>• بناغلی ښوونکی دلوست عنوان(متناظر متریکس پېژندل) پر تخته ولیکي او اړونده چارټ یې د ټولگي په مخکې وڅړوئ، په وار سره دوه، دوه زده کوونکي راوغواړي چې لومړی د متریکس اصلي او فرعي قطرونه او وروسته په متناظر و متریکسونو کې عناصر نظر اصلي قطر ته خپلو ټولگیو الو ته وروپېژني.</li> <li>• بناغلی ښوونکی د ټرانسپوز متریکس د خواصو عنوان پر تخته ولیکي او د خاصیتونو په اړه زده کوونکو ته توضیحات ورکړي.</li> <li>• د کتاب د 222 مخ فعالیت یوه زده کوونکي ته ورکړي چې پر تخته کار وکړي په عین وخت کې دغه فعالیت نورو زده کوونکو ته هم ورکړي چې په خپلو کتابچو کې پرې کار وکړي، په پای کې تخته ته ولاړ زده کوونکی دې خپل فعالیت نورو زده کوونکو ته توضیح کړي.</li> </ul>	

## 6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

ښاغلی ښوونکی لوست ته د لا ښه تحکیم ورکولو لپاره د کتاب 222 مخ مثال د پوښتنو او ځوابونو په طریقه په ټولگي کې حل کړی.

## 7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ښاغلی ښوونکی د زده کوونکو له زده کړې څخه د خپل ډاډ لپاره زده کوونکي په لاندې پوښتنو سره و ارزوی:

1. د یو متریکس ترانسپوز څه ته وایي؟
2. یو زده کوونکی دې پر تخته یو متناظر متریکس په رقمونو ولیکي؟
3. د ترانسپوز متریکس هر یو خاصیت دې یو زده کوونکی پر تخته ولیکي.

## 9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

1. د  $A$  او  $B$  متریکسونه په پام کې ونیسئ، د هغوی ترانسپوز متریکسونه په لاس راوړئ:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}_{3 \times 3}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

حل:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}_{3 \times 3}, \quad B^T = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

2. په پورتنیو متریکسونو باندې د 3 عدد لپاره د ترانسپوز متریکس د څلورم خاصیت سموالی وښایاست.

حل:

$$(\alpha A)^T = \alpha A^T, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$(\alpha A)^T = \left[ 3 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \right]^T = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 0 & 3 & 15 \\ 0 & 6 & 9 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 6 \\ 9 & 15 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\alpha A^T = 3 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}^T = 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 6 \\ 9 & 15 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (3A)^T = 3A^T$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

## شپږم څپرکی: متریکسونه

ډیټرمینانت

د درسي کتاب (223) مخ

د لوست وخت: (یو درسي ساعت)

<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- پوهنیزه</li> <li>- مهارتي</li> <li>- ذهنيتي</li> </ul> <p>زده کوونکي به د لوست په پای کې و توانېږي چې:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• د ډیټرمینانت په مفهوم پوه شي.</li> <li>• د ډیټرمینانت اړونده پوښتنې حل کړای شي.</li> <li>• د پوښتنو له حلولو څخه خوښ شي.</li> </ul>	
<p>2- د زده کړې لارې:</p> <p>پوښتنه او ځواب، ډله ییز او یو کسيز کار...</p>	
<p>3- مرستندويه مواد:</p> <p>د وروډي پوښتنې چارټ، د <math>3 \times 3</math> متریکسونو د ډیټرمینانت د محاسبې اړونده چارټ</p>	
<p>4- د وروډي برخې</p> <p>توضیح (5 دقیقې)</p> <p>بناغلی ښوونکی د لومړنیو فعالیتونو له سرته رسولو څخه وروسته د پوښتنې چارټ د ټولگي په مخکې څوړند کړی او له زده کوونکو څخه وپوښتی:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• څوک کولای شي چې یو مربعي متریکس داسې وټاکي چې <math>ad - cb = 0</math> شي؟</li> </ul> <p>زده کوونکي پرېږدی چې د وروډي پوښتنې د حل په اړه فکر وکړي، که چیرې زده کوونکي په دې و نتوانېږي، نو بناغلی ښوونکی دې د اصلي قطر او فرعي قطر عددونه داسې وټاکي، چې د دواړو قطرونو د ضرب حاصل یې عین عدد شي، لکه:</p> $\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 7 \cdot 5 - 5 \cdot 7 = 35 - 35 = 0$	
<p>5- د لوست بهیر او فعالیت (28) دقیقې:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• بناغلی ښوونکی د هغه تعریف له مخې چې د <math>A</math> له متریکس څخه د یوه ډیټرمینانت نسبت ورکړل شوی دی، توضیح کړی، وروسته د کتاب هغه عنوان چې د <math>(2 \times 2)</math> مرتبې متریکسونو د ډیټرمینانت محاسبه ده، پر تخته ولیکي او اړونده مثال یې د پوښتنې او ځوابونو په طریقه حل کړی.</li> <li>• د کتاب د 223 مخ فعالیت په ډله ییزه توګه په زده کوونکو باندې کار وکړی.</li> <li>• د کتاب عنوان د <math>(3 \times 3)</math> متریکسونو ډیټرمینانت محاسبه پر تخته ولیکي او له اړونده چارټ څخه په کار اخیستنې سره د حل ټول پړاوونه یې گام په گام سرته ورسوي او زده کوونکو ته د حل په بهیر کې برخه ورکړی.</li> <li>• د کتاب 225 مخ مثال په ټولگي کې د پوښتنو او ځوابونو په طریقه حل کړی.</li> <li>• زده کوونکي په مناسبو ډلو و وېشي چې د 225 مخ فعالیت د یو بل په مشوره سرته ورسوي.</li> <li>• د کتاب د 226 مخ دویم مثال د پوښتنو او ځوابونو په طریقه په ټولگي کې حل کړی.</li> </ul>	

## 6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

ښاغلی ښوونکی لوست ته د لابنه تحکیم ورکولو لپاره د کتاب 226 مخ فعالیت په انفرادي ډول په ټولگي کې کار وکړی (انفرادي ډول، هغه ډول دی چې ښاغلی ښوونکی ورسره بلدتیا لري).

## 7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ښاغلی ښوونکی د زده کوونکو له زده کړې څخه د خپل ډاډ لپاره زده کوونکي په لاندې پوښتنو سره ارزوی:

1. یو زده کوونکی دې د  $3 \times 3$  متریکس ډیترمینانت پر تخته ولیکي؟
2. یو زده کوونکی دې د ساروس په طریقه د ډیترمینانت محاسبه توضیح کړي؟

## 9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

1. د لاندې ډیترمینانتونو مقدار په لنډ ډول محاسبه کړئ.

$$a) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}, \quad b) \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}, \quad c) \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix}, \quad d) \begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -5 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

حل:

$$a) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 0 = 4 - 0 = 4$$

$$b) \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 5 \cdot 7 - (-2) \cdot 3 = 35 + 6 = 41$$

$$c) \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix} = -1(1 \cdot 6 - 3 \cdot 5) = -1(6 - 15) = -1(-9) = 9 \dots I$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix} = -1(2 \cdot 6 - 1 \cdot 3) = -(12 - 3) = -9 \dots II$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0(2 \cdot 5 - 1 \cdot 1) = 0(10 - 1) = 0 \cdot 9 = 0 \dots III$$

$$I + II + III = 9 - 9 + 0 = 0$$

$$d) \begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -5 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0(5 - 3) = 0 \cdot 2 = 0 \dots I$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -5 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -(-25 - 6) \cdot 4 = -(-31)4 = 124 \dots II$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -5 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = (-5 - 2) \cdot 2 = (-7) \cdot 2 = -14 \dots III$$

$$I + II + III = 0 + 124 - 14 = 110$$

2. دلاندي ديترمېنانتونو مقدار د ساروس په طريقه په لاس راوړئ.

$$a) \begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 7 \end{vmatrix}, \quad b) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

حل:

$$a) \begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 7 \end{vmatrix} = (42 + 0 - 6) - (-48 + 0 - 35) = 36 + 83 = 119$$

$$b) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = (-3 + 14 - 30) - (-3 + 14 - 30) = -19 + 19 = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

## شپږم څپرکی: متریکسونه

د ډیټرمینانت خاصیتونه

د درسي کتاب (227) مخ

د لوست وخت: (یو درسي ساعت)

<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>پوهنیزه</li> <li>مهاري</li> <li>ذهنیتي</li> </ul> <p>زده کوونکي به د لوست په پای کې و توانېږي چې:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>د ډیټرمینانت په خاصیتونو پوه شي.</li> <li>د ډیټرمینانت له خاصیتونو څخه د پوښتنو په حل کې کار واخلي.</li> <li>په اړونده موضوع کې د پوهې او مهارت په لرلو سره خوښ شي.</li> </ul>	
<p>2- د زده کړې لارې:</p> <p>پوښتنه او ځواب، ډله ییز او یو کسيز کار...</p>	
<p>3- مرستندويه مواد:</p> <p>د وروډي پوښتنې چارټ</p>	
<p>4- د وروډي برخې</p> <p>توضیح (5 دقیقې)</p> <p>ښاغلی ښوونکی د لومړنیو فعالیتونو له سرته رسولو څخه وروسته وروډي برخې چارټ د ټولګي په مخکې ځوړند کړی او وروډي پوښتنه له زده کوونکو څخه وپوښتې چې د هغې په اړه فکر وکړي. که چیرې زده کوونکي ځواب ونشي ویلای. د کتاب د 228 مخ د لومړي مثال له حلولو وروسته به د وروډي پوښتنې په ځواب پوه شي.</p>	
<p>5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې):</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>ښاغلی ښوونکی زده کوونکي په مناسبو ډلو و وېشي چې د کتاب 227 مخ فعالیت د یو بل په مشوره سرته ورسوي.</li> <li>د فعالیت په بهیر کې د زده کوونکو له ډله ییز کار څخه څارنه وکړي، فعالې ډلې تشویق او ضعیفو ډلو ته لارښوونه وکړي، په پای کې د یوې ډلې استازی راوغواړي چې خپل ډله ییز کار نورو زده کوونکو ته توضیح کړي، د تېروتنې په صورت کې دې ښاغلی ښوونکی مرسته ورسره وکړي.</li> <li>ښاغلی ښوونکی د فعالیت له سرته رسولو څخه وروسته د ډیټرمینانت خاصیتونه زده کوونکو ته توضیح کړي او د کتاب د 227 مخ لومړی خاصیت په انفرادي ډول په زده کوونکو باندې سرته ورسوي، ترڅو د نوموړي خاصیت سموالی په عملي ډول ویني.</li> <li>ښاغلی ښوونکی لومړی مثال د پوښتنو او ځوابونو په طریقه په ټولګي کې حل کړي چې د دې مثال له حل څخه د وروډي پوښتنې حل څرګندېږي.</li> <li>د کتاب د 228 مخ دویم مثال د ډیټرمینانت ګډ ضربي عامل پیدا کړي او له زده کوونکو څخه وپوښتې چې ایا ددې ډیټرمینانت د کوم بل سطر یا ستون ګډ ضربي عامل پیدا کولای شو او که نه؟ زده کوونکي دې استدلال وکړي.</li> </ul>	

## 6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

ښاغلی ښوونکی لوست ته د لاینه تحکیم ورکولو لپاره د کتاب 228 مخ د پوښتنې د  $a$  جز ډیترمینانت د زده‌کوونکو په فعال گډون سره په ټولگي کې حل کړی.

## 7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ښاغلی ښوونکی د زده‌کوونکو له زده‌کړې څخه د خپل ډاډ لپاره زده‌کوونکي په لاندې پوښتنو سره ارزوی:

1. یو زده‌کوونکی دې ډیترمینانت لومړی او دویم خاصیتونه ووايي.

$$2. \text{ یو زده‌کوونکی دې د } A = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & 15 & 3 \\ 3 & 25 & 7 \end{vmatrix} \text{ ډیترمینانت گډ ضربی عامل پیدا کړي.}$$

## 9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

د ډیترمینانت د خواصو په مرسته د لاندې ډیترمینانتونو قیمت په لاس راوړئ.

$$a) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$b) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 7 & 9 & 11 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$c) \begin{vmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

حل (a): د  $a$  جز د ډیترمینانت د لومړي ستون ټول عناصر صفرونه دي، نو نوموړی ډیترمینانت له صفر سره مساوي دی.

حل (b): څرنگه چې د  $b$  جز د ډیترمینانت د دریم سطر ټول عناصر صفرونه دي، نو ډیترمینانت له صفر سره مساوي دی.

حل (c):

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (3 \cdot 4 - 0 \cdot 5) = 12$$

یا په بله طریقه:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (12 + 0 + 0) - (0 + 0 + 0) = 12 - 0 = 12$$



## شپږم څپرکی: متریکسونه

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

د  $2 \times 2$  مرتبې متریکسونو ضربې معکوس

د درسي کتاب (229) مخ

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>پوهنيزه</li> <li>مهاري</li> <li>ذهنيتي</li> </ul> <p>زده کوونکي به د لوست په پای کې و توانېږي چې:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>د <math>2 \times 2</math> مرتبې متریکسونو د ضربې معکوس په مفهوم پوه شي.</li> <li>د نوموړو متریکسونو ضربې معکوس پیدا کړای شي.</li> <li>د <math>2 \times 2</math> مرتبې متریکسونو د ضربې معکوس له پیدا کولو څخه خوښ شي.</li> </ul>	
<p>2- د زده کړې لارې:</p> <p>پوښتنه او ځواب، ډله ییز او یو کسيز کار...</p>	
<p>3- مرستندويه مواد:</p> <p>د وړودي برخې د شکل چارټ</p>	
<p>4- د وړودي برخې توضیح (5 دقیقې)</p> <p>بناغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته د وړودي برخې د شکل چارټ د ټولگي په مخکې وڅړوی او وړودي پوښتنه له زده کوونکو څخه وپوښتی ترڅو فکر وکړي او ځواب ووايي له هغه پرته د فعالیت له سرته رسولو څخه به وروسته د وړودي پوښتنې په ځواب پوه شي.</p>	
<p>5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې):</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>بناغلی ښوونکی زده کوونکي په مناسبو ډلو ووېشي چې د کتاب 229 مخ فعالیت د یو بل په مشوره سرته ورسوي. د فعالیت په پایله کې د یوې ډلې له استازي و غواړی چې خپل ډله ییز کار نورو زده کوونکو ته توضیح کړي، د تېروتنې په صورت کې لارښوونه ورته وکړی.</li> <li>بناغلی ښوونکی د فعالیت پایله چې د وړودي پوښتنې ځواب دی او تعریف هم له هغه څخه په لاس راځي، زده کوونکو ته ووايست. وروسته د کتاب د 229 مخ لومړی مثال د پوښتنې او ځواب په طریقه زده کوونکو ته حل کړی.</li> <li>د الحاقی متریکس (Adjoint matrix) عنوان پر تخته ولیکي او د لوست بهیر د زده کوونکو په فعال ګډون سره یې پر مخ بوزی.</li> </ul>	
<p>6- د زده کړې تحکیم: (7 دقیقې)</p> <p>بناغلی ښوونکی لوست ته د لابنه تحکیم ورکولو لپاره د کتاب د 230 مخ لومړی مثال د پوښتنو او ځوابونو په طریقه حل کړي.</p>	
<p>7- د لوست د پایلې ارزونه: (5 دقیقې)</p> <p>بناغلی ښوونکی د زده کوونکو له زده کړې څخه د خپل ډاډ لپاره زده کوونکي په لاندې پوښتنو سره ارزوي:</p> <p>1. یو زده کوونکی دې د معکوس منوونکي متریکس شرطونه ووايي.</p>	

2. یو زده‌کونکی دې ووايي چې د دوو مربعي متريکسونو یعنی د  $A$  او  $B$  د ضربولو په صورت کې کوم ډول متريکس لاس ته راځي؟

3. یو زده‌کونکی دې ووايي چې د یوه متريکس د الحاقی متريکس پیدا کولو لپاره څه باید وکړو؟

### 9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

1. له لاندې متريکسونو څخه کوم یو متريکس معکوس لري؟

$$a) A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -10 & -2 \end{pmatrix} \quad b) B = \begin{pmatrix} 5 & 19 \\ 4 & 15 \end{pmatrix}$$

حل (a): هغه وخت یو متريکس معکوس متريکس لري چې:

- متريکس مربعي وي.
- ډیټرمنانت یې خلاف د صفر وي.

$$A = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -10 & -2 \end{vmatrix} = -10 - (-10) = -10 + 10 = 0$$

د  $a$  جز د متريکس اړونده ډیټرمنانت صفر دی، نو معکوس نه لري.

$$|B| = \begin{vmatrix} 5 & 19 \\ 4 & 15 \end{vmatrix} = 75 - 76 = -1 \neq 0 \quad \text{حل (b):}$$

څرنگه چې ډیټرمنانت د صفر خلاف دی، نو د  $b$  جز متريکس معکوس متريکس لري او په لاندې ډول یې په لاس راوړ:

$$\text{Adj}B = \begin{pmatrix} 15 & -19 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|} \text{adj}B = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 15 & -19 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 15 & -19 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -15 & 19 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$$

2. د لاندې متريکسونو معکوس متريکس په لاس راوړئ او ویې ازموئ:

$$1) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad 2) B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad 3) C = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

حل (1):

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 6 = -5 \neq 0$$

$$\text{adj}A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}A = \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{-1}{5} \end{pmatrix}$$

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{-1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{5} + \frac{6}{5} & \frac{2}{5} - \frac{2}{5} \\ \frac{-3}{5} + \frac{3}{5} & \frac{6}{5} - \frac{1}{5} \end{pmatrix} \Rightarrow AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

: (حل 2)

$$|B| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -3 - 2 = -5 \neq 0$$

$$\text{adj}B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|} \text{adj}B = \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$BB^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} + \frac{2}{5} & \frac{-2}{5} + \frac{2}{5} \\ \frac{-3}{5} + \frac{3}{5} & \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{5} & 0 \\ 0 & \frac{5}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

: (حل 3)

$$|C| = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 3 = 2 \neq 0$$

$$\text{adj}C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C^{-1} = \frac{1}{|C|} \text{adj}C = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$CC^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} & \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot B$$

## شپږم څپرکی: متریکسونه

له معکوس متریکس څخه په کار اخیستنې سره د خطي معادلو د سېسټم حل

د درسي کتاب (231) مخ

د لوست وخت: (یو درسي ساعت)

<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• زده کوونکي به د لوست په پای کې و توانېږي چې:</li> <li>• له معکوس متریکس څخه په کار اخیستنې سره د خطي معادلو د سېسټم د حل په طریقه پوه شي.</li> <li>• له معکوس متریکس څخه د کار اخیستنې په صورت کې د خطي معادلو سېسټم حل کړي.</li> <li>• د پورته پوهې او مهارت په لرلو سره په ځان ډاډمن شي.</li> </ul>	<p>- پوهنیزه</p> <p>- مهارتي</p> <p>- ذهنيتي</p>
<p>2- د زده کړې لارې:</p> <p>پوښتنه او ځواب، ډله ییز او یو کسيز کار...</p>	
<p>3- مرستندويه مواد:</p> <p>د وړودي برخې د شکل چارټ</p>	
<p>4- د وړودي برخې توضیح (5 دقیقې)</p> <p>ښاغلی ښوونکي د لومړنیو فعالیتونو له سرته رسولو څخه وروسته د وړودي برخې چارټ د ټولګي په مخکې څوړند کړی او له زده کوونکو څخه وړودي پوښتنه وپوښتی، چې زده کوونکي د وړودي پوښتنې په اړه فکر وکړي. امکان لري چې زده کوونکي ځواب ونه شي ویلای، خو د دوی فکر موضوع ته راټولېږي، د فعالیت له سرته رسولو او د لومړي مثال له حلولو وروسته د وړودي پوښتنې ځواب په لاس راځي او د زده کوونکو په ذهن کې ځای نیسي.</p>	
<p>5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې):</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• ښاغلی ښوونکي، زده کوونکي په مناسبو ډلو و وېشي چې د کتاب د 231 مخ فعالیت د یو بل په مشوره سرته ورسوي.</li> <li>• د زده کوونکو له ډله ییز کار او فعالیت څخه څارنه وکړی او د زده کوونکو هغه ډلې چې ستونزې لري لارښوونه ورته وکړی. د فعالیت په پای کې د یوې ډلې استازی راوغواړی، چې خپل ډله ییز کار نورو زده کوونکو ته توضیح کړي.</li> <li>• د کتاب د 232 مخ لومړی مثال د موضوع د څرګندوالي لپاره د پوښتنې او ځوابونو په طریقه په ټولګي کې حل کړی.</li> <li>• د کتاب د 232 مخ دویم مثال یوه زده کوونکي ته ورکړی چې پر تخته یې حل کړي. په عین وخت کې دغه مثال نورو زده کوونکو ته هم ورکړی چې په خپلو کتابچو کې حل کړي. (البته د زده کوونکو کتابونه به تړلي وي.) په پای کې تخته ته ولاړ زده کوونکي دې خپل فعالیت نورو زده کوونکو ته توضیح کړي، د تېروتنې په صورت کې، ښاغلی ښوونکي یو داوطلب زده کوونکي ته لارښوونه وکړی چې مثال په صحیح ډول حل کړي.</li> </ul>	
<p>6- د زده کړې تحکیم: (7 دقیقې)</p> <p>ښاغلی ښوونکي لوست ته د لاینه تحکیم ورکولو لپاره د کتاب د 233 مخ دریم مثال د پوښتنو او ځوابونو په ډول په ټولګي کې حل کړی.</p>	

## 7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

بناغلی ښوونکی د زده‌کوونکو له زده‌کړې څخه د خپل ډاډ لپاره زده‌کوونکي په لاندې پوښتنو سره و ارزوي:

1. یو زده‌کوونکی دې ووايي چې د معادلو سیستم له څو معادلو څخه جوړ شوی وي؟
2. یو زده‌کوونکی دې د معادلو یو سیستم پر تخته وليکي.
3. یو زده‌کوونکی دې د دویمې پوښتنې اړونده معادلو سیستم د ضریبونو متریکس، د معادلو د ښي خوا د ثابتو عددونو ستوني متریکس او همدارنگه د مجهولو عددونو ستوني متریکس پر تخته وليکي.

## 9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

له معکوس متریکس څخه په گټه اخیستنې، د لاندې خطي معادلو سیستمونه حل کړئ.

$$a) \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 5x - 2y = 2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 3p - 5q = 7 \\ 2p - 4q = 6 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} a + b = 11 \\ 4a - b = 9 \end{cases}$$

حل (a):

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}B$$

هغه وخت یو سیستم حل لري، چې د متحولینو د ضریبونو د متریکس ډیترمینانټ د صفر خلاف وي.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 5 = 1 \neq 0$$

څرنگه چې  $|A| \neq 0$  دی، نو سیستم حل لري.

$$\text{adj}A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}A = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+2 \\ -5+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow x = 0, \quad y = -1$$

$$b) \begin{cases} 3p - 5q = 7 \\ 2p - 4q = 6 \end{cases}$$

حل (b):

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -12 + 10 = -2 \neq 0$$

ليدل كهڀري چې  $|A| \neq 0$  دى، نو سيستم حل لري.

$$\text{adj}A = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}A = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{2} \\ 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{2} \\ 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14-15 \\ 7-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow p = -1, \quad q = -2$$

$$c) \begin{cases} a+b=11 \\ 4a-b=9 \end{cases}$$

حل (c):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -1-4 = -5 \neq 0$$

څرنگه چې  $|A| \neq 0$  دى، نو سيستم حل لري.

$$\text{adj}A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}A = \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{5} + \frac{9}{5} \\ \frac{44}{5} - \frac{9}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{20}{5} \\ \frac{35}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} \Rightarrow a = 4, \quad b = 7 \quad \text{ځ} \quad (a, b) = (4, 7)$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|}$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|}$$

$$z = \frac{|A_z|}{|A|}$$

## شپږم څپرکی: متریکسونه

د خطي معادلو سیستم د کرامر په طریقه (Crammer's rule)

د درسي کتاب (235) مخ

د لوست وخت: (یو درسي ساعت)

<p>زده کوونکي به د لوست په پای کې و توانېږي چې:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• د خطي معادلو د سیستم حل د کرامر په طریقه پوه شي.</li> <li>• د معادلو سیستم د کرامر په طریقه حل کړي.</li> <li>• د کرامر په طریقه د معادلو د سیستم له حلولو خوښ شي.</li> </ul>	<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- پوهنیزه</li> <li>- مهارتي</li> <li>- ذهنيتي</li> </ul>
<p>پوښتنه او ځواب، ډله ییز او یو کسيز کار...</p>	<p>2- د زده کړې لارې:</p>
<p>د وروډي پوښتنې شکل چارټ او د درې مجهوله معادلو د سپښتم چارټ</p>	<p>3- مرستندويه مواد:</p>
<p>ښاغلی ښوونکی د لومړنيو فعالیتونو له سرته رسولو څخه وروسته وروډي چارټ د ټولگي په مخکې وڅړوی او وروډي پوښتنه له زده کوونکو څخه وپوښتی، چې زده کوونکي د پوښتنې په اړه فکر وکړي که چیرې زده کوونکي ځواب ونه شي ویلای، د لوست د بهیر له توضیحاتو څخه وروسته به د وروډي پوښتنې په ځواب پوه شي.</p>	<p>4- د وروډي برخې توضیح (5 دقیقې)</p>
<p>5- د لوست بهیر او فعالیت (28) دقیقې:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• د معادلو د سیستم چارټ د ټولگي په مخکې وڅړوی او له زده کوونکو څخه وغواړی چې د ضربونو متریکس یعنی <math>A</math> پر تخته ولیکي. که چیرې زده کوونکي ونشي کولای، ښاغلی ښوونکی دې د لوست بهیر د پوښتنو او ځوابونو په طریقه څرگند کړي.</li> <li>• ښاغلی ښوونکی دې زده کوونکي په مناسبو ډلو و وېشي او د کتاب د 236 مخ فعالیت په ډله ییزه توگه په زده کوونکو سرته ورسوي د فعالیت په پای کې د یوې ډلې استازی راوغواړی چې خپل ډله ییز کار نورو زده کوونکو ته توضیح کړي، د ستونزو د لرلو په صورت کې لارښوونه ورته وکړي.</li> <li>• د <math> A_x </math>, <math> A_y </math>, او <math> A_z </math> ډیترمینانټونو د محاسبې لپاره د لومړي مثال پر ځای لومړی دویم مثال د پوښتنو او ځوابونو په طریقه کار وکړی، ځکه چې لومړی مثال د 236 مخ <math> A_x </math>, <math> A_y </math>, او <math> A_z </math> ډیترمینانټونو د محاسبو په اړه له ویناوو سره مطابقت نه لري.</li> <li>• د کتاب د 236 مخ د لومړي مثال <math>\begin{cases} x - 3y = 3 \\ 2x + y = 2 \end{cases}</math> سیستم د پوښتنو او ځوابونو په طریقه په ټولگي کې حل کړی.</li> </ul>	

## 6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

بناغلی بنوونکی لوست ته د لارښه تحکیم ورکولو لپاره یوه زده‌کوونکي ته دنده ورکړې چې د معادلو سیستم  $\begin{cases} x-3y=3 \\ x+2y=5 \end{cases}$  په پای د کرامر په طریقه پر تخته حل کړي، په عین وخت کې دغه د معادلو سیستم دې نور زده‌کوونکي په کتابچو کې حل کړي، په پای کې تخته ته ولاړ زده‌کوونکي دې خپل فعالیت نورو زده‌کوونکو ته توضیح کړي، د تېروتنې په صورت یوه داوطلب زده‌کوونکي ته ووايست چې تېروتنې یې اصلاح کړي.

## 7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

بناغلی بنوونکی د زده‌کوونکو له زده‌کړې څخه د خپل ډاډ لپاره زده‌کوونکي په لاندې پوښتنو سره و ارزوي:

1. یو زده‌کوونکی دې د درې مجهوله معادلې عمومي شکل (په حرفونو) پر تخته ولیکي.
2. یو زده‌کوونکی دې د  $y, x$  او  $z$  ضریبونه چې په عمومي معادله کې لیکل شوي دي، پر تخته ولیکي.

## 9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

د لاندې معادلو سیستمونه حل کړئ.

$$a) \begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y-z=2 \\ 2x+y-2z=1 \end{cases} \quad b) \begin{cases} x+y-az=0 \\ ax+2y-z=0 \\ 2x+ay+2z=0 \end{cases}$$

حل (a):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1(-1-2) - (-2-2) = -3 - (-4) = -3 + 4 = 1 \neq 0$$

څرنگه چې  $|A| = 1 \neq 0$  نو سیستم د حل وړ دی.

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (2-1+2) - (-1-1-4) = 3 - (-6) = 3+6=9$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-4-2+1) - (4-1-2) = -5 - 1 = -6$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1+4+1) - (-2+2+1) = 4 - 1 = 3$$



$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} \\ y &= \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{-6}{6} = -1 \\ z &= \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow (x, y, z) = \left(\frac{3}{2}, -1, \frac{1}{2}\right)$$

حل (b):

$$\begin{cases} x + y - az = 0 \\ ax + 2y - z = 0 \\ 2x + ay + 2z = 0 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -a \\ a & 2 & -1 \\ 2 & a & 2 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -a \\ a & 2 & -1 \\ 2 & a & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & 2 \\ 2 & a \end{vmatrix} = (4 - 2 - a^3) - (-4a - a + 2a) = 2 - a^3 + 3a$$

پورته سیستم هغه وخت د حل وړ دی چې  $2 + 3a - a^3 \neq 0$  وي.

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -a \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & a & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -a \\ a & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad |A_z| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 2 & 0 \\ 2 & a & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{0}{|A|} = 0, \quad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{0}{|A|} = 0, \quad z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{0}{|A|} = 0$$

$$(x, y, z) = (0, 0, 0)$$

## شپږم څپرکی: متریکسونه

د معادلو د سیستم حل د گوس (Gouse) په طریقه

د درسي کتاب (239) مخ

د لوست وخت: (یو درسي ساعت)

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$$

<p>زده کوونکي به دلوست په پای کې و توانېږي چې:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• د گوس (Gouse) په طریقه د معادلو د سیستم په حل پوه شي.</li> <li>• د گوس (Gouse) په طریقه د معادلو سیستم حل کړای شي.</li> <li>• د معادلو د سیستم د حلولو څخه خوښ شي.</li> </ul>	<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- پوهنیزه</li> <li>- مهارتي</li> <li>- ذهنيتي</li> </ul>
<p>پوښتنه او ځواب، ډله ییز او یو کسيز کار...</p>	<p>2- د زده کړې لارې:</p>
<p>د وروډي برخې د معادلو سیستم چارټ</p>	<p>3- مرستندويه مواد:</p>
<p>ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته وروډي پوښتنه له زده کوونکو څخه وپوښتې، ترڅو زده کوونکي موضوع ته ځیر شي، ځکه کله چې د مثال له حل څخه وروسته د وروډي پوښتنې ځواب ووايست، موضوع به د زده کوونکو په ذهن کې وي.</p>	<p>4- د وروډي برخې توضیح (5 دقیقې)</p>
<p>5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې):</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• ښاغلی ښوونکی د کتاب د 239 مخ مثال په ټولگي کې حل کړی.</li> <li>• زده کوونکي په مناسبو ډلو و وېشي، ترڅو د کتاب د 239 مخ فعالیت د یو بل په مشوره سرته ورسوي. په پای کې د یوې ډلې استازی راوغوړی چې خپل ډله ییز فعالیت نورو زده کوونکو ته توضیح کړي. د تېروتنې په صورت کې (که چیرې وخت شتون ولري، د بلې ډلې استازي ته دنده ورکړی) لارښوونه ورته وکړی او تېروتنې یې اصلاح کړی.</li> <li>• د کتاب د 240 مخ دویم مثال د زده کوونکو په گډون سره په ټولگي کې حل کړی.</li> <li>• ښاغلی ښوونکی یوه زده کوونکي ته ووايست چې د کتاب د 240 مخ فعالیت پر تخته سرته ورسوي. په پای کې هغه زده کوونکی چې تختې ته ولاړ دی، خپل فعالیت دې نورو زده کوونکو ته توضیح کړي. که چیرې د فعالیت په بهیر کې تېروتنه ولیدل شي، لارښوونه ورته وکړی.</li> </ul>	
<p>6- د زده کړې تحکیم: (7 دقیقې)</p> <p>ښاغلی ښوونکی لوست ته د ښه تحکیم ورکولو لپاره د کتاب د 241 مخ دریم مثال د زده کوونکو په فعال گډون سره د پوښتنو او ځوابونو په طریقه په ټولگي کې حل کړی.</p>	
<p>7- د لوست د پایلې ارزونه: (5 دقیقې)</p> <p>ښاغلی ښوونکی ددې لپاره چې د زده کوونکو له زده کړې څخه ډاډه شي له زده کوونکو څخه لاندې پوښتنې وکړی:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. یو زده کوونکی دې د معادلو په یو سیستم کې د مجهولو عددونو ضربونه او ثابت عددونه وښيي.</li> <li>2. یو زده کوونکی دې په لنډ ډول د معادلو د سیستم حل د (Gouse) په طریقه توضیح کړي.</li> </ol>	
<p>8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات</p> $\begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$	

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 - R_3 \rightarrow R_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 + R_1 \rightarrow R_1} \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$2x_3 = 2 \Rightarrow \boxed{x_3 = 1}$$

$$-x_2 + x_3 = 2 \Rightarrow -x_2 + 1 = 2 \Rightarrow -x_2 = 1 \Rightarrow \boxed{x_2 = -1}$$

$$x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_1 - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x_1 = 1}$$

### 9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

دلاندې خطي معادلو سیستمونه د گوس په طریقه حل کړئ:

$$a) \begin{cases} 3x - y = -5 \\ x + 3y = 5 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2x + 4y - 10z = -2 \\ 3x + 9y - 21z = 0 \\ x + 5y - 12z = 1 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 2x + 2y = 2 \\ x + 2y = 3 \\ -3y = -6 \end{cases}$$

حل (a):

$$\left( \begin{array}{cc|c} 3 & -1 & -5 \\ 1 & 3 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{-3R_2 \rightarrow R_2} \left( \begin{array}{cc|c} 3 & -1 & -5 \\ -3 & -9 & -15 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 + R_2 \rightarrow R_2} \left( \begin{array}{cc|c} 3 & -1 & -5 \\ 0 & -10 & -20 \end{array} \right)$$

$$-10y = -20 \Rightarrow y = 2$$

$$3x - y = -5$$

$$3x - 2 = -5 \Rightarrow 3x = -3 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow (x, y) = (-1, 2)$$

حل (b):

$$\left( \begin{array}{cccc} 2 & 4 & -10 & -2 \\ 3 & 9 & -21 & 0 \\ 1 & 5 & -12 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{-R_1 \rightarrow R_1} \left( \begin{array}{cccc} -2 & -4 & 10 & 2 \\ 3 & 9 & -21 & 0 \\ 1 & 5 & -12 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 + R_2 \rightarrow R_2} \left( \begin{array}{cccc} -2 & -4 & 10 & 2 \\ 1 & 5 & -11 & 2 \\ 1 & 5 & -12 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{-R_2 + R_3 \rightarrow R_3} \left( \begin{array}{cccc} -2 & -4 & 10 & 2 \\ 1 & 5 & -11 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{2R_2 + R_1 \rightarrow R_2} \left( \begin{array}{cccc} -2 & -4 & 10 & 2 \\ 0 & 6 & -12 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right)$$

$$-z = -1 \Rightarrow \boxed{z = 1}$$

$$6y - 12z = 6 \Rightarrow 6y - 12 \cdot 1 = 6 \Rightarrow 6y = 6 + 12 \Rightarrow 6y = 18 \Rightarrow \boxed{y = 3}$$

$$-2x - 4y + 10z = 2 \Rightarrow -2x - 4 \cdot 3 + 10 \cdot 1 = 2 \Rightarrow -2x - 12 + 10 = 2$$

$$-2x - 2 = 2 \Rightarrow -2x = 4 \Rightarrow \boxed{x = -2}$$

$$(x, y, z) = (-2, 3, 1)$$

حل (c): دغه سیستم تقریباً حل دی، ځکه چې:

$$-3y = -6 \Rightarrow y = 2$$

$$x + 2y = 3$$

$$x + 4 = 3 \Rightarrow x = -1$$

$$(x, y) = (-1, 2)$$

## د شپږم څپرکي د عمومي پوښتنو حل (اووه درسي ساعتونه)

لاندې پوښتنو ته څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، له سم ځواب څخه کرې تاو کرې.

1. که  $|A|=3$  وي، نو  $|A^{-1}|$  پیدا کړئ.

- a)  $\frac{1}{3}$       b) 9      c)  $\frac{1}{9}$       d) 3

2. که  $A = \begin{pmatrix} 2m-3 & -1 \\ 1 & m \end{pmatrix}$  معکوس منوونکی متريکس وي، نو د  $m$  قیمت به څو وي؟

- a)  $m=1, \frac{1}{2}$       b)  $m \neq 1$       c)  $m=0$       d)  $m \neq 1, \frac{1}{2}$

3. که  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$  وي، د  $x$  هغه متريکس په لاس راوړئ چې په دغه رابطه کې  $Ax = A^{-1}$  صدق وکړي.

- a)  $\begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 25 & 14 \end{pmatrix}$       b)  $\begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -25 & 14 \end{pmatrix}$       c)  $\begin{pmatrix} 9 & 5 \\ -25 & -16 \end{pmatrix}$       d)  $\begin{pmatrix} -9 & 5 \\ -25 & -12 \end{pmatrix}$

4. د  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$  متريکس لاندې د  $y = 2x$  د خط بدلون منوونکي خط پیدا کړئ.

(a) د  $y$  محور      (b) د  $x$  محور      (c)  $y + 2x = 0$       (d)  $y = 0$

5. د  $x$  په کومو قیمتونو دغه دیترمینانت صفر دی؟

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix}$$

- a)  $x = 1, 2$       b)  $x = 3, 1$       c)  $x = \frac{1}{2}, 3$       d)  $x = 3, 2$

6. د  $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$  دیترمینانت حاصل په لاس راوړئ.

- a) 29      b) 39      c) 19      d) 9

### لاندې پوښتنې حل کړئ.

1. که  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$  او  $B = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$  وي، لاندې محاسبې غوښتل شوي دي:

- a)  $3A - 2B$       b)  $-4A + 3B$

حل (a):

$$3A - 2B = 3 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -10 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+10 & 9-2 \\ 0-4 & 12-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 7 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$$

حل (b):

$$\begin{aligned} -4A + 3B &= -4 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -12 \\ 0 & -16 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -15 & 3 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4-15 & -12+3 \\ 0+6 & -16+9 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -19 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. که چیرې  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$  او  $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$  راکړل شوی وي، نو  $AB$  او  $BA$  محاسبه کړئ او ووايست چې

$AB = BA$  دی او که نه؟

حل:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+0+4 & 0+0-2 \\ -2+0+6 & 0+0-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+0 & 0+0 & 4+0 \\ -1-3 & 0+0 & -2+9 \\ 2+1 & 0+0 & 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -4 & 0 & 7 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

نو وبلای شو چې  $AB \neq BA$  دی.

3. لاندې متریکسونه په پام کې ونیسي:

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

اشتراکي خاصیت، توزیعي خاصیت او د متریکسونو ضرب د درېو متریکسونو لپاره وښايست.

حل:

$$A(B+C) = AB + AC$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-8 & 16+4 \\ 0-2 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 20 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-8 & 8+8 \\ 0-2 & 0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 16 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$AC = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4+0 & 8-4 \\ 0+0 & 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$AB + AC = \begin{pmatrix} -2 & 16 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 20 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A(B+C) = AB + AC$$

$$(A+B)C = AC + BC$$

$$\left[ \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10+0 & 20-8 \\ 4+0 & -8-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 12 \\ 4 & -11 \end{pmatrix}$$

$$AC = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4+0 & 8-4 \\ 0+0 & 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$BC = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6+0 & 12-4 \\ 4+0 & -8-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 8 \\ 4 & -10 \end{pmatrix}$$

$$AC + BC = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 8 \\ 4 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 12 \\ 4 & -11 \end{pmatrix} \Rightarrow (A+B)C = AC + BC$$

اوس د مټریکسونو ضرب د دريو مټریکسونو لپاره نښو:

$$\begin{aligned}
 ABC &= \left[ \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-8 & 8+8 \\ 0-2 & 0+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -2 & 16 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+0 & -8-16 \\ 4+0 & -8-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -24 \\ 4 & -10 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 & -12 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 1 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

4. لاندې دټرمینانت په لنډ ډول محاسبه کړئ.

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

حل:

$$\begin{aligned}
 &\begin{vmatrix} \textcircled{1} & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1(0-2) = -2 \dots I \\
 &\begin{vmatrix} 1 & \textcircled{2} & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2(1-4) = -2(-3) = 6 \dots II \\
 &\begin{vmatrix} 1 & 2 & \textcircled{1} \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1(1-0) = -1 \dots III
 \end{aligned}$$

$$I + II + III = -2 + 6 - 1 = 3 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

5. د لاندې مټریکس معکوس مټریکس د الحاق (ad joint) په طریقه پیدا کړئ.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$$

حل:

$$\text{adj}M = \begin{pmatrix} -9 & 5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -9 \end{vmatrix} = -18 + 15 = -3 \neq 0$$

څرنگه چې  $|M| \neq 0$  دی، نو  $M$  مټریکس معکوس منوونکی دی.

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|} \cdot \text{adj}M$$

$$M^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} -9 & 5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{5}{3} \\ 1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{5}{3} \\ 1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

6. دلاندي خطي معادلو سيستمونه دگرامر په طريقه حل كړئ.

$$a) \begin{cases} 2x + y + z = 6 \\ x - 2y + 2z = 10 \\ 3x - y - z = 4 \end{cases} \quad b) \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 = 5 \end{cases}$$

حل (a):

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 2(-2) = -4 + 6 = 2 \Rightarrow |A| = 20$$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 & 6 & 1 \\ 10 & -2 & 2 & 10 & -2 \\ 4 & -1 & -1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 6(-2) = -12 + 8 = -4 \Rightarrow |A_x| = 40$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 & 2 & 6 \\ 1 & 10 & 2 & 1 & 10 \\ 3 & 4 & -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2(10) = 20 - 36 = -16 \Rightarrow |A_y| = -20$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 6 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 10 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 2(-2) = -4 + 30 = 26 \Rightarrow |A_z| = 60$$

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{40}{20} = 2 \\ y &= \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{-20}{20} = -1 \\ z &= \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{60}{20} = 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (x, y, z) = (2, -1, 3)$$

حل (b):

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 = 5 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 + 4 = 8 \neq 0$$

$$|A_{x_1}| = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 16 + 10 = 26 \Rightarrow |A_{x_1}| = 26$$

$$|A_{x_2}| = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 8 = -3 \neq 0 \Rightarrow |A_{x_2}| = -3$$

$$x_1 = \frac{|A_{x_1}|}{|A|} = \frac{26}{8} = \frac{13}{4}, \quad x_2 = \frac{|A_{x_2}|}{|A|} = \frac{-3}{8} \Rightarrow (x_1, x_2) = \left(\frac{13}{4}, -\frac{3}{8}\right)$$

ميزان:

$$x_1 - 2x_2 = 4$$

$$\frac{13}{4} - 2 \cdot \left(-\frac{3}{8}\right) = \frac{13}{4} + \frac{3}{4} = \frac{16}{4} = 4$$

$$2x_1 + 4x_2 = 5$$

$$2 \cdot \frac{13}{4} + 4 \cdot \left(-\frac{3}{8}\right) = \frac{13}{2} - \frac{3}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

7. دلاندي خطي معادلو سيستمونه دگوس په طريقه حل كړئ.

$$a) \begin{cases} 2x - 3y + 3z = 0 \\ 3x + 2y - 5z = 0 \\ 5x - 4y - 2z = 0 \end{cases} \quad b) \begin{cases} 2x + 3y - 7 = 1 \\ 2y + 27 = -2 \end{cases}$$

حل (a):

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 & | & 0 \\ 3 & 2 & -5 & | & 0 \\ 5 & -4 & -2 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}R_1 \rightarrow R_1} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & | & 0 \\ 3 & 2 & -5 & | & 0 \\ 5 & -4 & -2 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-3R_1 + R_2 \rightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & | & 0 \\ 0 & \frac{9}{2} + 2 & \frac{-9}{2} - 5 & | & 0 \\ 5 & -4 & -2 & | & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & | & 0 \\ 0 & \frac{13}{2} & \frac{-19}{2} & | & 0 \\ 5 & -4 & -2 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-5R_1 + R_3 \rightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & | & 0 \\ 0 & \frac{13}{2} & \frac{-19}{2} & | & 0 \\ 0 & \frac{15}{2} - 4 & \frac{-15}{2} - 2 & | & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & | & 0 \\ 0 & \frac{13}{2} & \frac{-19}{2} & | & 0 \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{-19}{2} & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-R_2 + R_3 \rightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & | & 0 \\ 0 & \frac{13}{2} & \frac{-19}{2} & | & 0 \\ 0 & \frac{7}{2} - \frac{13}{2} & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & | & 0 \\ 0 & \frac{13}{2} & \frac{-19}{2} & | & 0 \\ 0 & -3 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$-3y = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$\frac{13}{2}y - \frac{19}{2}z = 0 \Rightarrow -\frac{19}{2}z = 0 \Rightarrow z = 0$$

$$2x - 3y + 3z = 0 \Rightarrow 2x - 3 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (x, y, z) = (0, 0, 0)$$



(حل b):

$$\begin{cases} 2z + 3y - 7 = 1 \\ 2y + 27 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 0 \cdot x + 2y = -29 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 0 & 2 & -29 \end{pmatrix}$$

$$2y = -29 \Rightarrow y = -\frac{29}{2}$$

$$2x + 3y = 8 \Rightarrow 2x + 3 \cdot \frac{-29}{2} = 8 \Rightarrow 2x - \frac{87}{2} = 8 \Rightarrow 2x = 8 + \frac{87}{2} \Rightarrow 2x = \frac{16 + 87}{2} = \frac{103}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{130}{4} \Rightarrow (x, y) = \left(\frac{103}{4}, -\frac{29}{2}\right)$$

8. د لاندې خطي معادلو سیستمونه د معکوس متریکس په طریقہ حل کریئ:

$$a) \begin{cases} 3x + y + 1 = 0 \\ 4x + 3y - 2 = 0 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x - y = 2 \\ x + 2y = -1 \end{cases}$$

(حل a):

$$\begin{cases} 3x + y + 1 = 0 \\ 4x + 3y - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + y = -1 \\ 4x + 3y = 2 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}B$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 4 = 5$$

$$\text{adj}A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{adj}A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-1}{5} \\ \frac{-4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-1}{5} \\ \frac{-4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} - \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} + \frac{6}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-5}{5} \\ \frac{10}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow x = -1, \quad y = 2$$

$$(x, y) = (-1, 2)$$

حل (b):

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ x + 2y = -1 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 1 = 3$$

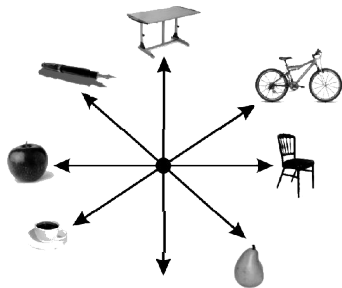
$$\text{adj}A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{adj}A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} - \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{3} \\ -\frac{3}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow x = 1, \quad y = -1$$

$$\Rightarrow (x, y) = (1, -1)$$



## اووم خپرکی: وکتورنه

د وضعیه کمیاتو په قایم سبستم کې وکتورونه

د درسي کتاب (249) مخ

د لوست وخت: (یو درسي ساعت)

<ul style="list-style-type: none"> <li>• زده‌کونکي د وکتور په مفهوم پوه شي.</li> <li>• زده‌کونکي وکولای شي د وکتور په اړه مثال حل کړای شي.</li> <li>• زده‌کونکي له وکتور څخه په ورځني ژوند کې کار واخلي او ورڅخه خوښي ښکاره کړي.</li> </ul>	<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- پوهنیزه</li> <li>- مهارتي</li> <li>- ذهنيتي</li> </ul>
<p>د لښیز کار، پوښتنه او ځواب</p>	<p>2- د زده کړې لارې:</p>
<p>د ورودي شکل چارټ</p>	<p>3- مرستندويه مواد:</p>
<p>ښاغلی ښوونکی له سلام او روغې وروسته د زده‌کونکو پام د ورودي شکل چارټ ته چې له مخکې څخه مو تیار کړی دی راوړی او وپوښتی:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• په ورودي شکل کې څه شی وینی؟</li> <li>• په ځینو دیوالونو باندې به مو دغه → نښه لیدلی وي، څه معنا لري؟</li> <li>• ستاسو په فکر یا نظر وکتور له قطعه خط سره څه توپیر لري؟</li> </ul> <p>کوبښن وکړی چې څو اېونه له زده‌کونکو څخه په لاس راوړی، د ستونزو په صورت کې لنډ معلومات ورکړی.</p>	<p>4- د ورودي برخې توضیح (5 دقیقې)</p>
<p>5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې):</p> <p>ښاغلی ښوونکی، زده‌کونکي په مناسبو ډلو ووېشي، ورته ووايېست چې د کتاب 249 مخ فعالیت په خپلو ډلو کې له خبرو او بحث وروسته سرته ورسوي. بیا د هرې ډلې استازی خپل سرته رسولي فعالیت نورو ته توضیح کوي، که چیرې کومې ډلې تېروتنه کړي وي، هغه د بلې ډلې په واسطه په دوستانه فضا کې پر تخته اصلاح کړي، د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړي او خپل لوست داسې پیل کړي:</p> <p>جهت لرونکی قطعه خط ته وکتور وايي، یا په بل عبارت هغه کمیت چې هم مقدار لري او هم جهت لري؛ لکه تعجیل، فاصله، قوه او داسې نور او هر غشی د یوه وکتور ممثل دی.</p> <p>هغه وکتور چې مبداء یې د وضعیه کمیونو د قایم سبستم په مبداء کې وي، د شعاع وکتور (<i>Position vector</i>) په نوم یادېږي، هغه وکتور چې طول یې اوږدوالی یې صفر وي، له صفر وکتور (<i>Zero vector</i>) څخه عبارت دی.</p>	
<p>6- د زده کړې تحکیم: (7 دقیقې)</p> <p>د لوست د لښه تحکیم لپاره د درسي کتاب 250 مخ مثال زده‌کونکو ته په یو کسيز ډول ورکړی، هر زده‌کونکی دې په</p>	

بېل بېل ډول د کتاب له لیدلو پرته په خپلو کتابچو کې حل کړې بیا تاسو څو تنه زده‌کوونکي په وارسره تختې ته راوغواړئ چې پر تخته یې حل کړي، نور زده‌کوونکي دې خپل حلونه ورسره مقایسه کړي، تاسو څارنه وکړئ، د ستونزو او تېروتنو په صورت کې لوست یو ځل بیا ورته توضیح کړئ.

### 7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ښاغلی ښوونکی ددې لپاره چې ډاډمن شي ایا زده‌کړه شوې ده او که نه؟ نو زده‌کوونکي د لاندې پوښتنو په واسطه و ارزوي:

1. څوک وکتور تعریف کولای شي؟
2. د وکتور تیر د څه شی په معنا دی؟
3. که د یوه وکتور اوږدوالی صفر وي، کوم وکتور ته ویلای شو؟
4. که چیرې د یوه وکتور مبداء د قایمو مختصاتو په مبداء کې واقع وي، دغه ډول وکتور ته څه وايي؟ کوبښ وکړی چې ځوابونه له زده‌کوونکو څخه په لاس راوړئ د ستونزو په صورت کې ورسره مرسته وکړئ.

### 8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات:

ښاغلی ښوونکی د وکتور بحث له ډېرو مهمو بحثونو څخه شمېرل کېږي، زیاتې کارونې یې په فزیک کې دي، ځکه هغه کمیتونه چې هم مقدار لري او هم جهت لري وکتوري کمیتونه دي، لکه د نیوټن قانون کې چې قوه مساوي ده د کتلې او تعجیل له حاصل ضرب څخه یا په سمبولیک ډول  $\vec{F} = m \vec{a}$  یعنې هم قوه او هم تعجیل وکتوري کمیتونه دي، همدارنگه کار چې فارمول یې  $\vec{W} = \vec{F} \cdot d \cdot \cos\theta$  دی یو وکتوري کمیت دی. مقناطیسي ساحه هم یوه وکتوري فضا تشکیلوي. د وکتور اوږدوالی د هغه وکتور له طول څخه عبارت دی. دوه وکتورونه هغه وخت سره مساوي بلل کېږي، چې عین جهت ولري او اوږدوالی یې سره برابر وي که چیرې د وکتور جهت بدلون ومومي منفي کېږي؛ لکه په لاندې ډول:

$$\vec{OB} = \vec{a} \quad O \xrightarrow{\vec{a}} B$$

$$\vec{BO} = -\vec{a} \quad O \xleftarrow{-\vec{a}} B$$

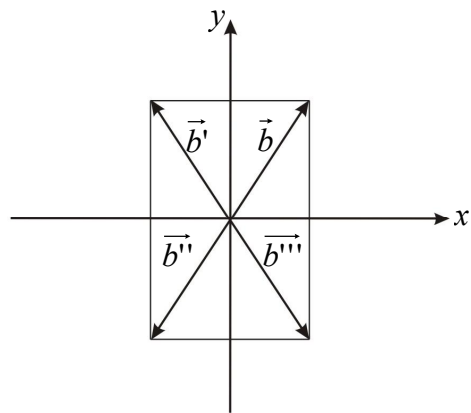
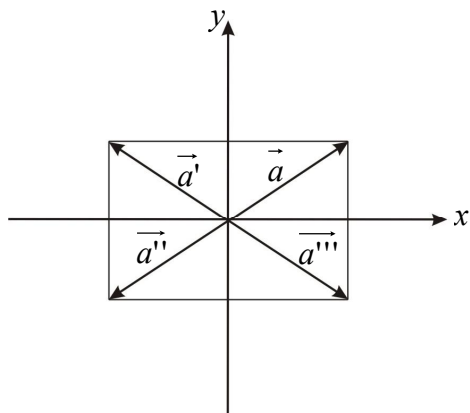
وکتور په دوه ډوله ښوول کېږي:

1. د وکتور ستوني ښوونه.
2. د وکتور سطرې ښوونه.

### 9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

1. د هغو وکتورونو لپاره چې په لومړي مثال کې ورکړل شوي دي، مطلوب دي:
  - a. د هر یوه وکتور درې ممثل وکتورونه رسم کړئ.
  - b. دواړه وکتورونه د شعاع وکتور په موقعیت کې رسم کړئ.
  - c. د هغوی مخالف وکتورونه کوم وکتورونه دي؟

حل (a): د لومړۍ مثال وکتورونه عبارت دي له  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$  او  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$



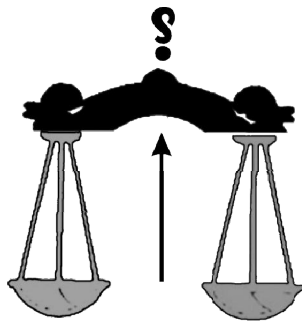
د  $\vec{a}$  درې ممثل وکتورونه عبارت دي له  $\vec{a}'$ ،  $\vec{a}''$  او  $\vec{a}'''$  او د  $\vec{b}$  درې ممثل وکتورونه عبارت دي له  $\vec{b}'$ ،  $\vec{b}''$  او  $\vec{b}'''$  وکتورونو څخه.

حل (b): د  $b$  جزء پوښتنه د کتاب په 250 مخ کې حل شوی (کوم وکتورونه چې رسم شوي دي د شعاع وکتور په موقعیت کې رسم شوي دي).

حل (c): پوهېږو چې  $\vec{a} = -\vec{a}$  یو ډبل خلاف وکتورونه دي؛ نو:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad -\vec{a} = -\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad -\vec{b} = -\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$



## اووم څپرکی: وکتورنه

د دوو ټکو ترمنځ واټن او منځنی ټکی

د درسي کتاب (251) مخ

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

<ul style="list-style-type: none"> <li>• زده‌کونکي د دوو ټکو ترمنځ د واټن او منځنی ټکي په مفهوم پوه شي.</li> <li>• زده‌کونکي د اړوندې موضوع پوښتنې حل کړای شي.</li> <li>• زده‌کونکي د پورته پوهې او مهارت په درلودلو سره وکولای شي ورځنی مسایل حل او ورڅخه خوښي ښکاره کړي.</li> </ul>	<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- پوهنيزه</li> <li>- مهارتي</li> <li>- ذهني</li> </ul>
<p>د لويهيز، يوکسيزکار، پوښتنه او ځواب</p>	<p>2- د زده کړې لارې:</p>
<p>د وروډي شکل چارټ</p>	<p>3- مرستندويه مواد:</p>
<p>ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته د تېر لوست له مهمو ټکو څخه لنډه يادونه وکړې او د زده‌کونکو پام د وروډي شکل چارټ ته چې له مخکې مو تيار کړی راواړوئ او وپوښتئ:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• ايا کولای شئ د دوو معلومو ټکو ترمنځ واټن پيدا کړئ؟</li> <li>• هغه فارمول چې د دوو ټکو ترمنځ واټن پرې معلومېږي څه شی دی؟</li> <li>• د خط کش پر مخ هغه ټکي وټاکئ چې د شهادت د ګوتې په واسطه يې تعادل وساتل شي؟ کونښن وکړئ چې ځوابونه له زده‌کونکو څخه په لاس راوړئ، له هغه پرته تاسو ورسره مرسته وکړئ؟</li> </ul>	<p>4- د وروډي برخې توضیح (5 دقيقې)</p>
<p>5- د لوست بهير او فعاليت (28 دقيقې):</p> <p>ښاغلی ښوونکی، زده‌کونکي په مناسبو ډلو ووېشي، ورته وواياست چې د کتاب 251 مخ فعالیت په خپلو ډلو کې له خبرو او بحث وروسته سرته ورسوي، بيا دې د يويا دوو ډلو استازی خپل سرته رسولی فعالیت نورو ته توضیح کړي، که چيرې کومه ډله تېروتنه کوي، هغه د بلې ډلې په واسطه اصلاح کړي، د ستونزې په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړي او خپل د لوست بهير داسې پيل کړي:</p> <p>د دوو ټکو ترمنځ واټن او منځنی ټکی:</p> <p>د دوو ټکو ترمنځ واټن د <math>\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}</math> فارمول په واسطه لاس ته راځي چې دلته <math>x_1</math> لومړی مرکبه او <math>y_1</math> دويمه مرکبه او همدارنگه <math>x_2</math> لومړی مرکبه او <math>y_2</math> دويمه مرکبه ښيي.</p> <p>او د دوو ټکو يعنې <math>(x_1, y_1)</math> او <math>(x_2, y_2)</math> منځنی ټکی فورمول</p> $X_m = \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1 + x_2}{2} \\ \frac{y_1 + y_2}{2} \end{pmatrix}$ <p>دی چې <math>X_m</math> د همدې خط يا</p> <p>وکتور منځنی ټکی دی <math>X_m = (x_m, y_m) = \left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)</math></p>	

## 6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

د لوست د لاینه تحکیم لپاره د درسي کتاب 252 مخ لومړی مثال زده کوونکو ته په گروپي ډول ورکړی، هر زده کوونکی دې په بېل بېل ډول په خپل گروپ کې د کتاب له لیدو پرته فکر ورباندې وکړي. بیا تاسوپه وار سره دیو یا دوو ډلو استازی د تختې مخې ته راوغوړئ چې نوموړی مثال پر تخته حل کړئ که د کومې ډلې استازي تېروتنه کوي، تېروتنه یې دیو بل گروپ په واسطه حل کړئ.

تاسو د کار څارنه وکړئ، د ستونزو او تېروتنو په صورت کې لوست ورته یو ځل بیا توضیح او تشریح کړئ.

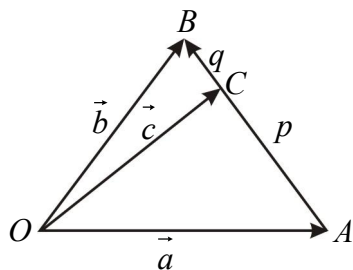
## 7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

بناغلی بنوونکی ددې لپاره چې ډاډمن شی ایا زده کړه شوې ده او که نه؟ نو زده کوونکي د لاندې پوښتنو په پوښتلو سره وارزوی:

1. ایا له دوو  $(x_1, y_1)$  او  $(x_2, y_2)$  ټکو څخه همېشه یوه کرښه تېرېږي؟
2. د نوموړي کرښې ریاضیکي معادله کوم شکل لري؟
3. د هغه ټکي فارمول و وایاست چې نیمایي خط یې ښي لوري او نیمایي خط یې کین لوري ته پراته دي. کونښن وکړئ چې څو اوبونه له زده کوونکو څخه په لاس راوړئ د ستونزو په صورت کې ورسره مرسته وکړئ.

## 8- د بنوونکي لپاره اضافي معلومات:

بناغلی بنوونکی ددې لپاره چې ستاسو په معلوماتو کې زیاتوالی راغلی وي، مونږ لاندې قضیه په پام کې نیسو:



**قضیه:** که چیرې  $\vec{a}$  او  $\vec{b}$  د  $A$  او  $B$  ټکو شعاع وکتورونه وي،  $C$  ټکی د  $AB$  خط داخليد  $\frac{p}{q}$  په نسبت ویشي، نو د  $\vec{c}$  شعاع

$$\vec{c} = \frac{qa + pb}{q + p}$$

وکتور د  $C$  په ټکي کې عبارت دی له:  $p = q$  سره شي،  $C$  ټکی د  $AB$  خط منځنی ټکی دی.

$$\frac{AC}{BC} = \frac{p}{q} \Rightarrow q \cdot AC = p \cdot BC$$

**ثبوت:** که  $C$  د  $AB$  کرښه داخليد  $\frac{p}{q}$  په نسبت ویشي؛ نو:

د  $OAC$  له مثلث څخه پوهېږو چې:

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC}$$

$$\vec{OC} = \vec{a} + \vec{p} = \vec{a} + \frac{p}{AB} \cdot \vec{AB} = \vec{a} + \frac{p}{p+q} \cdot \vec{AB}$$

$$\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a} \text{ چې پوهېږو چې}$$

$$\vec{OC} = \vec{a} + \frac{p}{p+q} (\vec{b} - \vec{a}) = \vec{a} + \frac{pb - a p}{p+q}$$

$$\vec{OC} = \frac{\vec{a} p + \vec{a} q + p \vec{b} - \vec{a} p}{p+q} = \frac{\vec{a} q + p \vec{b}}{p+q}$$

## 9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

د لاندې درکړ شوو ټکو ترمنځ واټن او همدارنگه منځني ټکي یې پیدا کړئ:

$$i) B(2,7) \quad , \quad A(3,4)$$

$$ii) N(5,1) \quad , \quad M(1,5)$$

$$iii) Q(8,8) \quad , \quad P(1,8)$$

حل:

$$i) |\overline{AB}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(2-3)^2 + (7-4)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

$$M = \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1 + x_2}{2} \\ \frac{y_1 + y_2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3+2}{2} \\ \frac{4+7}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{11}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 2.5 \end{pmatrix}$$

$$ii) |\overline{MN}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(5-1)^2 + (1-5)^2}$$

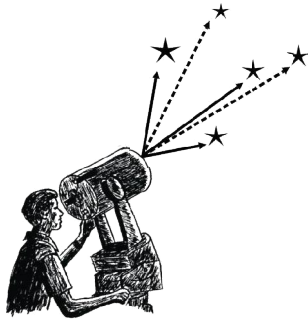
$$|\overline{MN}| = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = \sqrt{4 \cdot 4 \cdot 2} = 4\sqrt{2}$$

$$M = \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1 + x_2}{2} \\ \frac{y_1 + y_2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+5}{2} \\ \frac{5+1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$iii) |\overline{PQ}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(8-1)^2 + (8-8)^2} \Rightarrow |\overline{PQ}| = \sqrt{49+0} = 7$$

$$M = \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1 + x_2}{2} \\ \frac{y_1 + y_2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8+1}{2} \\ \frac{8+8}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ \frac{16}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.5 \\ 8 \end{pmatrix}$$





## اووم څپرکی: وکتورونه

وکتورونه په سطح او فضاء کې

د درسي کتاب (253-254) مخونه

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

<ul style="list-style-type: none"> <li>• زده‌کونکي په سطح او فضا کې د وکتورونو په مفهوم پوه شي.</li> <li>• زده‌کونکي وکړای شي په دې اړه پوښتنې حل کړي.</li> <li>• زده‌کونکي د سطحې او فضا د وکتورونو ترمنځ توپير وکړای شي او ورڅخه په ورځني ژوند کې کار واخلي.</li> </ul>	<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- پوهنيزه</li> <li>- مهارتي</li> <li>- ذهني</li> </ul>
<p>پوښتنه او ځواب ډله‌ييز او يوکسيز کار</p>	<p>2- د زده کړې لارې:</p>
<p>د اړتيا وړ مواد (د وروډي شکل چارټ)</p>	<p>3- مرستندويه مواد:</p>
<p>ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته د تېر لوست لنډه يادونه وکړې او د زده‌کونکو پام د وروډي شکل چارټ ته چې مخکې مو تيار کړی راوړی او وپوښتی:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• په سطح او فضا کې وکتورونه يو له بل سره څه توپير لري؟</li> <li>• ايا د يوه وکتور ستوني او سطري ښوونه د وکتور په طول کومه اغيزه لري؟</li> </ul> <p>کوښښ وکړی چې ځوابونه له زده‌کونکو څخه په لاس راوړی له هغه پرته تاسو ورسره مرسته وکړی.</p>	<p>4- د وروډي برخې توضیح (5 دقيقې)</p>
<p>5- د لوست بهير او فعاليت (28 دقيقې):</p> <p>ښاغلی ښوونکی، زده‌کونکي په مناسبو ډلو ووېشي ورته وواياست چې د کتاب 253 مخ فعاليت په خپلو ډلو کې له خبرو او بحث وروسته سرته ورسوی، بيا دې د يوې يا دوو ډلو استازي خپل سرته رسولي فعاليت نورو ته توضیح کړي، که چيرې کومه ډله تېروتنه کوي هغه د بلې ډلې په واسطه اصلاح کړی، د ستونزې په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړی وروسته د</p> $\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix} \quad \text{(د جمعې قاعده)} \quad \text{i}$ $a \cdot \vec{u} = a \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ ay \end{pmatrix} \quad \text{(د سکالري ضرب قاعده)} \quad \text{ii}$ <p>قاعدې په بشپړه توگه تشریح او توضیح کړی.</p> <p>د هغو ټولو مرتبو جوړو سيټ چې د پورته قاعدې په څېر د جمعې او سکالري ضرب قاعدې پرې تطبيق وي، د <math>1R^2</math> (مستوي) د وکتورونو فضا او يا په مستوي کې د وکتور په نامه يادېږي.</p> <p>د دوو ځانگړو وکتورونو <math>\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}</math> او <math>\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}</math> په پام کې نيولو سره چې اوږدوالی يې يو واحد او <math> \vec{i}  =  \vec{j}  = 1</math> دی</p>	

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

هر اختیاري وکتور لپاره او  $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  واحد وکتورونه دي چې د  $x$  او  $y$  محورونو په امتداد پراته دي.

### 6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

د لوست د لاینه تحکیم او پوهې لپاره د درسي کتاب 254 مخ لومړی مثال ii او iii جزونه زده کوونکو ته په یو کسيز ډول ورکړی چې د کتاب له لیدو پرته یې په خپلو کتابچو کې حل کړي، بیا وروسته خو زده کوونکي په وارسره تختې ته راوغواړی چې نوموړي مثالونه پر تخته حل کړي، نور زده کوونکي دې خپل حلونه د تختې له حل سره پرتله کړي، که کوم زده کوونکي تېروتنه کړی وي، تېروتنه دې له تختې څخه اصلاح کړي، تاسو د کار څارنه وکړی او د ستونزو په صورت کې ورسره مرسته وکړی.

### 7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ښاغلی ښوونکی ددې لپاره چې ډاډمن شی ایا زده کړه شوې ده او که نه؟ نو زده کوونکي د لاندې پوښتنو په پوښتلو سره وارسوئ:

1. له وکتور څخه په سطحه کې څه ډول استفاده کېږي؟
  2. د وکتور ستوني ښوونه او سطري ښوونه یو له بل سره څه توپیر لري؟
  3. له واحد وکتور څخه په کوم ځای کې کار اخیستل کېږي؟
- کوښښ وکړی چې ځوابونه له زده کوونکو څخه لاس ته راوړی له هغه پرته تاسو مرسته ورسره وکړی.

### 8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات:

ښاغلی ښوونکی ددې لپاره چې ستاسو په معلوماتو کې زیاتوالی راغلی وي؛ نو د واحد وکتور په اړه لنډ معلومات په لاندې ډول دی:

واحد وکتور له هغه وکتور څخه عبارت دی چې طول یې یو واحد او د مختصې د جهت د تزايد لپاره ترې کار اخلي، ټولې مقناطیسي او برقي ساحې وکتوري ساحې دي، چې له واحد وکتور څخه گټه اخلي. دیوه وکتور واحد وکتور عبارت دی د

$$\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \quad \text{یا} \quad \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{e}_a$$

هغه وکتور نسبت د وکتور پر اوږدوالي یعنی د  $\vec{a}$  واحد وکتور عبارت دی له:

یعنې د  $\vec{a}$  یو وکتور مساوي دی د هغه وکتور له طول، ضرب د نوموړی په واحد وکتور کې په سطح کې د  $x$  او  $y$  محورونو واحد وکتورونه  $\vec{i}$  او  $\vec{j}$  دی چې  $\vec{i} = (1, 0)$  او  $\vec{j} = (0, 1)$ .

مثال: د  $\vec{a} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$  راکړل شوی واحد وکتور یې په لاندې ډول په لاس راوړو:

$$\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{2\vec{i} + 4\vec{j}}{\sqrt{4+16}} = \frac{2\vec{i} + 4\vec{j}}{\sqrt{20}} = \frac{2\vec{i} + 4\vec{j}}{2\sqrt{5}} = \frac{2\vec{i}}{2\sqrt{5}} + \frac{4\vec{j}}{2\sqrt{5}}$$

$$\vec{e}_a = \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}$$

د  $\vec{a}$  د وکتور واحد وکتور

9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

1. که  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  او  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$  وي،  $\vec{u} + 2\vec{v}$ ،  $\vec{u} - 2\vec{v}$  او  $2\vec{u} + 4\vec{v}$  پیدا کړئ.

حل:

$$2\vec{u} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 \\ 2(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

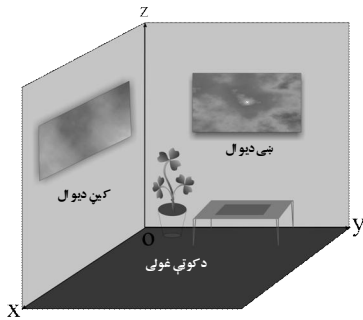
$$2\vec{v} = 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$4\vec{v} = 4 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 3 \\ 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} + 2\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+6 \\ -1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} - 2\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-6 \\ -1-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$2\vec{u} + 4\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+12 \\ -2+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 6 \end{pmatrix}$$



# اووم څپرکی: وکتورنه

په درې بعدي فضا کې د ټکي مختصات

د درسي کتاب (255-258) مخونه

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

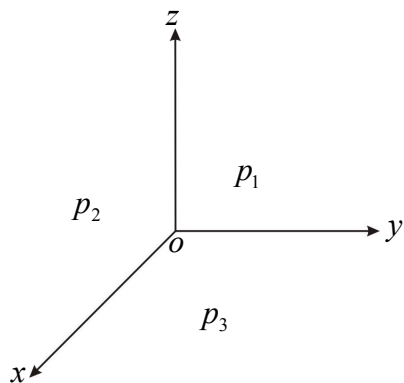
<ul style="list-style-type: none"> <li>• زده‌کونکي په درې بعدي فضا کې د ټکي د مختصاتو په مفهوم پوه شي.</li> <li>• زده‌کونکي وکړای شي يو ټکی په درې بعدي فضا کې وټاکي.</li> <li>• زده‌کونکي د پورتنۍ پوهې او مهارت په درلودلو سره وکړای شي په ورځني ژوند کې ورڅخه کار واخلي او ترې خوښي ښکاره کړي.</li> </ul>	<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- پوهنيزه</li> <li>- مهارتي</li> <li>- ذهني</li> </ul>
<p>پوښتنه او ځواب ډله‌بیز او يوکسيز کار</p>	<p>2- د زده کړې لارې:</p>
<p>د اړتيا وړ مواد (د وروډي شکل چارټ)</p>	<p>3- مرستندويه مواد:</p>
<p>ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته د تېر لوست له مهمو ټکو څخه لنډه يادونه وکړې او د زده‌کونکو پام د وروډي شکل چارټ ته چې له مخکې مو تيار کړی راواړوی او وپوښتی:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• تاسو په شکل کې څه وینئ؟</li> <li>• کينډیوال، ښي ديوال او د ټولگي غولې يو له بل سره څه اړيکه لري؟</li> <li>• په شکل کې څو مستوي گانې وینئ؟</li> </ul> <p>کوښښ وکړئ چې ځوابونه له زده‌کونکو څخه په لاس راوړئ، له هغه پرته تاسو ورسره مرسته وکړئ.</p>	<p>4- د وروډي برخې توضیح (5 دقيقې)</p>

## 5- د لوست بهير او فعاليت (28) دقيقې:

ښاغلی ښوونکی د خپل لوست بهير داسې پيل کړی:

هغه فضا چې موږ په کې ژوند کوو د درې بعدي فضا په نامه يادېږي، درې بعدي ( $IR^3$ ) فضا د ټولو هغو مرتبو درې

$$IR^3 = IR \times IR \times IR = \{(x, y, z) / x, y, z \in IR\}$$



درې بعدي فضا د درې محورونو  $x, y, z$  او په واسطه تعريفېږي، دغه

محورونه د  $O$  په ټکي کې يو پر بل عمود دي او له دغو محورونو څخه درې

د  $P_1, P_2$  او  $P_3$  مستويگانې لاس ته راځي. د درې بعدي فضا قايم مختصات

داسې نوموي چې که يو تن ودرېږي، هغه محور چې د ليدونکي د تنې په لور

دی د  $z$  محور او هغه محور چې د ليدونکي د ليد په لوري دی د  $y$  محور

او هغه محور چې د ليدونکو د ښي لاس په لوري پروت دی، د  $x$  محور دی.

د دغو درې واړو محورونو د تقاطع ټکي ( $O$ ) د مختصاتو مبدا ده، په پای کې

د يوه ټکي ټاکل په درې بعدي فضا کې ورته توضیح کړی.

### 6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

د لوست د لارښه تحکیم او پوهې لپاره د درسي کتاب 255 مخ هغه معلومات چې د یوه ټکي د ټاکلو لپاره ورکړ شوي دي (په درې بعدي فضا کې د یوه ټکي د ځای ټاکل) مرحله په مرحله یې د زده کوونکو په گډون پر تخته باندې په عملي توگه تطبیق کړی، وروسته ورته په درې بعدي فضا کې د  $(x, y, z) = (2, 3, 1)$  ټکي د زده کوونکو په مرسته وټاکئ.

### 7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ښاغلی ښوونکی ددې لپاره چې ډاډمن شی ایا زده کړه شوې ده او که نه؟ نو زده کوونکي د لاندې پوښتنو په پوښتلو سره وازروئ:

1. ایا کولای شئ د  $(x, y)$  ټکي د وضعیه کمیاتو په مستوي کې وټاکئ؟

2. دوه بعدي فضا له درې بعدي فضا سره څه توپیر لري؟

3. ایا کولای شئ چې د  $(6, 3, 7)$  ټکي په درې بعدي فضا کې وښایاست؟

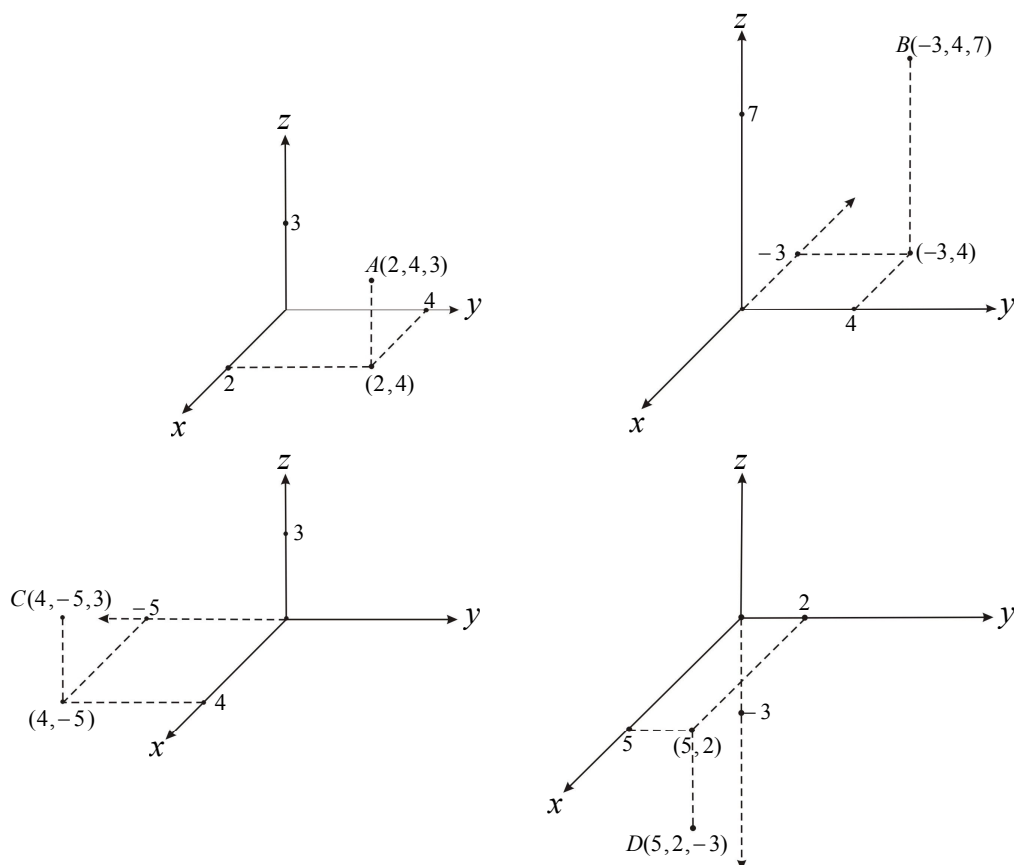
کوښښ وکړئ چې ځوابونه له زده کوونکو څخه تر لاسه کړئ، د ځواب دنه ویلو په صورت کې ورسره مرسته او د لوست له مهمو ټکو څخه لنډه یادونه وکړئ.

### 8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات:

ښاغلی ښوونکی ددې لپاره چې ستاسو په معلوماتو کې زیاتوالی راغلی وي؛ نو لاندې څو مثالونه په پام کې ونیسئ:

**مثال:** د  $A(2, 4, 3)$ ،  $B(-3, 4, 7)$ ،  $C(4, -5, 3)$  او  $D(5, 2, -3)$  ټکي په درې بعدي فضا کې وښایاست.

**حل:** پوهېږو چې د هر محور منفي جهت د هغه محور له امتداد یافته څخه حاصلېږي.



## 9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

1. لومړی پوښتنه تکرار راغلی دی.

2. که  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  او  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$  وي د  $\vec{u}$  او  $\vec{v}$  وکتورونو جهت ته واحد وکتور پیدا کړئ.**حل:** له واحد وکتور څخه د مختصې د جهت د تزیاید لپاره استفاده کېږي او واحد وکتور عبارت دی له نسبت د وکتور پرنورم د وکتور یا په سمبولیک ډول د  $\vec{a}$  وکتور واحد وکتور عبارت دی له:  $\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ 

$$\vec{e}_u = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}}{\sqrt{2^2 + 1}} = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_v = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}}{\sqrt{13}} = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{13}} \\ \frac{2}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}$$

3. که د  $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$ ،  $\vec{v} = 4\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k}$  او  $\vec{w} = 6\vec{i} - 9\vec{j} - 3\vec{k}$  درکړل شوي وکتورونه په پام کې ونیسئ او

لاندې پوښتنو ته ځوابونه ومومئ.

$$a) 2\vec{u} - 6\vec{v} + 4\vec{w} = ? \quad b) \left| \vec{u} - \frac{1}{3}\vec{v} - 2\vec{w} \right| = ?$$

**یادونه:** ددې پوښتنې  $a$  او  $b$  جزونه په کتاب کې نه دي چاپ شوي.**حل:**

$$\begin{aligned} a) 2\vec{u} - 6\vec{v} + 4\vec{w} &= 2(2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}) - 6(4\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k}) + 4(6\vec{i} - 9\vec{j} - 3\vec{k}) \\ &= 4\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k} - 24\vec{i} - 36\vec{j} - 12\vec{k} + 24\vec{i} - 36\vec{j} - 12\vec{k} \\ &= (4 - 24 + 24)\vec{i} + (6 - 36 - 36)\vec{j} + (2 - 12 - 12)\vec{k} \\ &= 4\vec{i} - 66\vec{j} - 22\vec{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \left| \vec{u} - \frac{1}{3}\vec{v} - 2\vec{w} \right| &= \left| (2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}) - \frac{1}{3}(4\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k}) - 2(6\vec{i} - 9\vec{j} - 3\vec{k}) \right| \\ &= \left| (2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}) - \frac{4}{3}\vec{i} - 2\vec{j} - \frac{2}{3}\vec{k} - 12\vec{i} + 18\vec{j} + 6\vec{k} \right| \\ &= \left| \left(2 - \frac{4}{3} - 12\right)\vec{i} + (3 - 2 + 18)\vec{j} + \left(1 - \frac{2}{3} + 6\right)\vec{k} \right| = \left| -\frac{34}{3}\vec{i} + 19\vec{j} + \frac{19}{3}\vec{k} \right| \\ &= \sqrt{\left(-\frac{34}{3}\right)^2 + (19)^2 + \left(\frac{19}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1156}{9} + 361 + \frac{361}{9}} = \sqrt{361 + \frac{1517}{9}} = \sqrt{\frac{3249 + 1517}{9}} \\ &= \sqrt{\frac{4766}{9}} = \frac{69.036}{3} \end{aligned}$$

4.  $\vec{u}$  او  $\vec{v}$ ،  $\vec{v}$  او  $\vec{w}$ ،  $\vec{w}$  او  $\vec{u}$  وکتورونو ترمنځ واټن پيدا کړئ.

حل:

$$|\vec{uv}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$|\vec{uv}| = \sqrt{(4-2)^2 + (6-3)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{14} \Rightarrow \boxed{|\vec{uv}| = \sqrt{14}}$$

$$|\vec{vw}| = \sqrt{(6-4)^2 + (-9-6)^2 + (-3-2)^2} = \sqrt{2^2 + 15^2 + 5^2} = \sqrt{4 + 225 + 25} = \sqrt{254}$$

$$\Rightarrow \boxed{|\vec{vw}| = \sqrt{254}}$$

$$|\vec{wu}| = \sqrt{(2-6)^2 + (3+9)^2 + (1+3)^2} = \sqrt{4^2 + 12^2 + 4^2} = \sqrt{16 + 144 + 16} = \sqrt{176} = 4\sqrt{11}$$

$$\Rightarrow \boxed{|\vec{wu}| = 4\sqrt{11}}$$

5. هغه وکتور واحدونه پيدا کړئ چې د  $\vec{v}$ ،  $\vec{u}$  او  $\vec{w}$  وکتورونو په جهت پراته وي؟

حل:

$$\vec{e}_u = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{14}} = \frac{1}{\sqrt{14}}(2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}) = \frac{2}{\sqrt{14}}\vec{i} + \frac{3}{\sqrt{14}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{14}}\vec{k}$$

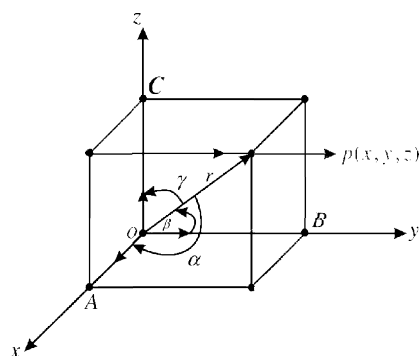
$$\Rightarrow \vec{e}_u = \frac{2}{\sqrt{14}}\vec{i} + \frac{3}{\sqrt{14}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{14}}\vec{k}$$

$$\vec{e}_v = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{4\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k}}{\sqrt{4^2 + 6^2 + 2^2}} = \frac{4\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k}}{\sqrt{16 + 36 + 4}} = \frac{4\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k}}{\sqrt{56}} = \frac{4\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k}}{2\sqrt{14}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{14}}\vec{i} + \frac{3}{\sqrt{14}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{14}}\vec{k} \Rightarrow \vec{e}_v = \frac{2}{\sqrt{14}}\vec{i} + \frac{3}{\sqrt{14}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{14}}\vec{k}$$

$$\vec{e}_w = \frac{\vec{w}}{|\vec{w}|} = \frac{6\vec{i} - 9\vec{j} - 3\vec{k}}{\sqrt{6^2 + (-9)^2 + (-3)^2}} = \frac{6\vec{i} - 9\vec{j} - 3\vec{k}}{\sqrt{36 + 81 + 9}} = \frac{6\vec{i} - 9\vec{j} - 3\vec{k}}{\sqrt{126}} = \frac{6\vec{i} - 9\vec{j} - 3\vec{k}}{3\sqrt{14}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{14}}\vec{i} - \frac{3}{\sqrt{14}}\vec{j} - \frac{1}{\sqrt{14}}\vec{k} \Rightarrow \vec{e}_w = \frac{2}{\sqrt{14}}\vec{i} - \frac{3}{\sqrt{14}}\vec{j} - \frac{1}{\sqrt{14}}\vec{k}$$



## اووم خپرکی: وکتورونه

د یوه وکتور د جهت زاویې او کوساینونه

د درسي کتاب (259) مخ

د لوست وخت: (یو درسي ساعت)

<ul style="list-style-type: none"> <li>• زده‌کونکي به د یوه وکتور د جهت زاویو او کوساینونو په مفهوم پوه شي.</li> <li>• زده‌کونکي به د یوه وکتور د جهت زاویو او کوساینونو اړوند پوښتنې حل کړای شي.</li> <li>• د پورتنی پوهې او مهارت په درلودلو سره په ځان باور پیدا کړي او ورڅخه خوښي ښکاره کړي.</li> </ul>	<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- پوهنیزه</li> <li>- مهارتي</li> <li>- ذهنيتي</li> </ul>
<p>پوښتنه او ځواب ډله‌ییز او یوکسیزکار</p>	<p>2- د زده کړې لارې:</p>
<p>د اړتیا وړ مواد (د ورودی شکل چارټ)</p>	<p>3- مرستندویه مواد:</p>
<p>ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته د تېر لوست له مهمو ټکو څخه لنډه یادونه وکړې او د زده‌کونکو پام د ورودی شکل چارټ ته چې مخکې مو تیار کړی دی راواړوئ او وپوښتئ:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• په چارټ کې څه شی وینئ؟</li> <li>• د شعاع وکتور په واسطه په فضا کې څو زاویې جوړېږي؟</li> </ul> <p>کوښښ وکړئ چې ځوابونه له زده‌کونکو څخه په لاس راوړئ.</p>	<p>4- د ورودی برخې توضیح (5 دقیقې)</p>
<p>5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې):</p>	
<p>ښاغلی ښوونکی زده‌کونکي په مناسبو ډلو ووېشئ، ورته ووايست چې د کتاب 259 مخ فعالیت په خپلو ډلو کې له خبرو او بحث وروسته سرته ورسوئ، بیا دې د یو یا دوو ډلو استازي خپل سرته رسولی فعالیت نورو ته توضیح کړي، که چیرې کومه ډله تېروتنه کوي، هغه د بلې ډلې په واسطه اصلاح کړي، د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړي او د لوست بهیر داسې پیل کړي:</p>	
<p>که د شعاع وکتور د قایمو مختصاتو له محورو سره په ترتیب د <math>\alpha</math>, <math>\beta</math>, او <math>\gamma</math> زاویې جوړې کړي، په دې صورت کې لیکلای شو:</p> $\vec{OP} = \vec{r}, \quad \vec{OA} = \vec{r}_x, \quad \vec{OB} = \vec{r}_y, \quad \vec{OC} = \vec{r}_z$	
<p>کولای شو د <math>\vec{r}</math> د وکتور د جهت کوساینونه په لاندې ډول ولیکو:</p>	
$\cos \alpha = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r \cos \alpha$	
$\cos \beta = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r \cos \beta$	
$\cos \gamma = \frac{z}{r} \Rightarrow z = r \cos \gamma$	



**6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې**

د لوست د لاینه تحکیم او پوهې لپاره زده‌کوونکي په مناسبو ډلو و وېشئ چې هره ډله په درې بعدی فضا کې یوه نقطه وښيي، همدارنگه د نوموړي نقطې شعاع وکتور رسم کړي، بیا دې د نوموړي وکتور د جهت زاويې او کوساینونه پیدا کړي، تاسو څارنه وکړئ یعنې له ډلو څخه لیدنه وکړئ، د ستونزو او تېروتنو په صورت کې ورسره مرسته او لارښوونه وکړئ.

**7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې**

ښاغلی ښوونکی ددې لپاره چې ډاډمن شي ایا زده‌کړه شوې ده او که نه؟ نو زده‌کوونکي د لاندې پوښتنو په واسطه و ارزوئ:

1. دکوم ډول وکتور د جهت زاويې او کوساینونه پیدا کولای شو؟
  2. د  $\alpha$  زاویه له کوم محور سره جوړېږي؟
  3. د  $\beta$  زاویه د څه شی په واسطه لاس ته راځي؟
  4. د  $\gamma$  زاویه له شعاع وکتور سره څه ډول اړیکه لري؟
- کوبښئ وکړئ چې ځوابونه له زده‌کوونکو څخه تر لاسه کړئ د ځواب د نه ویلو په صورت کې ورسره مرسته وکړئ.

**8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات:**

ښاغلی ښوونکی ددې لپاره چې ستاسو په معلوماتو کې زیاتوالی راغلی وي، لاندې تعریف په پام کې نیسو:

**شعاع وکتور:** هغه وکتور چې مبداء یې د درې بعدی فضا د وضعیه کمیاتو په مبداء کې واقع وي،  $\alpha$  هغه زاویه ده چې شعاع وکتور یې د  $x$  له محور سره جوړ وي.

$\beta$ : هغه زاویه ده چې شعاع وکتور یې د  $y$  له محور سره جوړ وي.

$\gamma$ : هغه زاویه ده چې شعاع وکتور یې د  $z$  له محور سره جوړ وي.

همدارنگه  $\vec{i}$ ،  $\vec{j}$  او  $\vec{k}$  په درې بعدی فضا کې واحد وکتورونه دي.  $\vec{i}$  د  $x$  د محور واحد وکتور  $\vec{j}$  د  $y$  د محور واحد وکتور او  $\vec{k}$  د  $z$  د محور واحد وکتور دی، قیمتونه یې په لاندې ډول دی:

$$\vec{i} = (1, 0, 0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{j} = (0, 1, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{k} = (0, 0, 1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:**

1. که  $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ ،  $\vec{v} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$  او  $\vec{w} = 5\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$  وي، پیدا کړئ؟

a)  $\vec{u} + 2\vec{v} + \vec{w} = ?$

b)  $\vec{v} - 3\vec{w} = ?$

c)  $\left| 3\vec{v} + \vec{w} \right| = ?$

حل:

$$\begin{aligned}
 a) \quad \vec{u} + 2\vec{v} + \vec{w} &= \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k} + 2(3\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}) + 5\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k} \\
 &= \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k} + 6\vec{i} - 4\vec{j} + 4\vec{k} + 5\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k} = 12\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k} \\
 &\Rightarrow \boxed{\vec{u} + 2\vec{v} + \vec{w} = 12\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b) \quad \vec{v} - 3\vec{w} &= 3\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k} - 3(5\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}) = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k} - 15\vec{i} + 3\vec{j} - 9\vec{k} \\
 &= -12\vec{i} + \vec{j} - 7\vec{k} \Rightarrow \boxed{\vec{v} - 3\vec{w} = -12\vec{i} + \vec{j} - 7\vec{k}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c) \quad \left| 3\vec{v} + \vec{w} \right| &= \left| 3(3\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}) + 5\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k} \right| = \left| 9\vec{i} - 6\vec{j} + 6\vec{k} + 5\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k} \right| \\
 &= \left| 14\vec{i} - 7\vec{j} + 9\vec{k} \right| = \sqrt{14^2 + (-7)^2 + 9^2} = \sqrt{196 + 49 + 81} = \sqrt{326} \\
 &\Rightarrow \boxed{\left| 3\vec{v} + \vec{w} \right| = \sqrt{326}}
 \end{aligned}$$

2. د  $\alpha$  اندازہ داسې پيدا کړئ چې د  $\alpha\vec{i} + (\alpha+1)\vec{j} + 2\vec{k}$  وکتور اوږدوالی مساوي په 3 وي.

حل:

$$\begin{aligned}
 \left| \alpha\vec{i} + (\alpha+1)\vec{j} + 2\vec{k} \right| &= 3 \\
 \sqrt{\alpha^2 + (\alpha+1)^2 + 2^2} &= 3 \\
 \sqrt{\alpha^2 + \alpha^2 + 2\alpha + 1 + 4} = 3 &\Rightarrow (\sqrt{2\alpha^2 + 2\alpha + 5})^2 = 3^2 \Rightarrow 2\alpha^2 + 2\alpha + 5 = 9 \\
 &\Rightarrow 2\alpha^2 + 2\alpha - 4 = 0 \Rightarrow \alpha^2 + \alpha - 2 = 0 \Rightarrow (\alpha-1)(\alpha+2) = 0 \\
 &\Rightarrow \begin{cases} \alpha - 1 = 0 \Rightarrow \alpha = 1 \\ \alpha + 2 = 0 \Rightarrow \alpha = -2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

## اووم خپرکی: وکتورنه

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\theta$$

د دوو وکتورونو د سکالري ضرب حاصل

د درسي کتاب (261) مخ

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

<ul style="list-style-type: none"> <li>• زده‌کونکي د دوو وکتورونو د سکالري ضرب په مفهوم پوه شي.</li> <li>• زده‌کونکي د دوو وکتورونو سکالري ضرب په يوه عددي پوښتنه کې تطبيق کړای شي.</li> <li>• زده‌کونکي د پورتنی پوهې او مهارت په درلودلو سره په ځان باورمن او ډاډ پیدا کړي.</li> </ul>	<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- پوهنيزه</li> <li>- مهارتي</li> <li>- ذهني</li> </ul>
<p>پوښتنه او ځواب ډله‌ييز او يوکسيز کار</p>	<p>2- د زده کړې لارې:</p>
<p>د اړتيا وړ مواد، د وروډي شکل چارټ</p>	<p>3- مرستندويه مواد:</p>
<p>ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته د تېر لوست لنده يادونه وکړې او د زده‌کونکو پام د وروډي شکل چارټ ته چې له مخکې مو تيار کړی دی رااوړی او وپوښتی:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• ايا کولای شئ د دوو حقيقي عددونو ضرب حاصل په لاس راوړئ.</li> <li>• تاسو د دوو يا څو حقيقي عددونو د ضرب لپاره دغو دوو (<math>\times, \cdot</math>) علامو څخه کار اخېستی دی ايا د دوو وکتورونو د ضرب لپاره هم کولای شئ، له نوموړو علامو څخه کار واخلئ.</li> <li>• کوبښ وکړئ چې څو ابونه له زده‌کونکو څخه ترلاسه کړئ له هغه پرته تاسو ورسره مرسته وکړئ.</li> </ul>	<p>4- د وروډي برخې توضیح (5 دقيقې)</p>
<p>5- د لوست بهير او فعاليت (28 دقيقې):</p> <p>ښاغلی ښوونکی زده‌کونکي په مناسبو ډلو و وېشئ ورته و وایاست چې د کتاب 261 مخ فعالیت په خپلو ډلو کې له خبرو او بحث وروسته سرته ورسوئ بیا دې د يو يا دوو ډلو استازي خپل سرته رسولی فعالیت نورو ته توضیح کړي که چيرې کومه ډله تېروتنه کوي، هغه د بلې ډلې په واسطه اصلاح کړئ، د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړئ او د لوست بهير داسې پيل کړئ:</p> <p>که <math>\vec{u}</math> او <math>\vec{v}</math> دوه وکتورونه چې صفر نه وي په مستوي يا فضا کې په پام کې نيسو د <math>\vec{u}</math> او <math>\vec{v}</math> سکالري ضرب په (<math>\cdot</math>) سره ښيي، که <math>\vec{u}</math> او <math>\vec{v}</math> دوه وکتورونه وي او وغواړو د سکالري ضرب حاصل يې په لاس راوړو نو:</p> $\vec{u} \cdot \vec{v} =  \vec{u}  \cdot  \vec{v}  \cdot \cos\theta$ <p>په داسې حال کې چې <math> \vec{u} </math> د <math>\vec{u}</math> وکتور اوږدوالی او <math> \vec{v} </math> د <math>\vec{v}</math> وکتور اوږدوالی او <math>\theta</math> د <math>\vec{u}</math> او <math>\vec{v}</math> وکتورونو ترمنځ زاويه ده. په داسې حال کې چې (<math>0 \leq \theta \leq \pi</math>) سره وي. که وغواړو د دوو وکتورونو ترمنځ زاويه په لاس راوړو له دغه فورمول <math>\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{ \vec{u}  \cdot  \vec{v} }</math> څخه کار اخلو.</p>	

په پای کې د درسي کتاب 262 مخ لومړی مثال د سکالري ضرب د تعريف په پام کې نيولو سره ورته مرحله په مرحله حل له خواصو سره يې تشریح او توضیح کړی.

### 6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

بناغلی بنوونکی د لوست د لاینه تحکیم او پوهې لپاره زده کوونکو ته په یو کسيزه توگه دنده ورکړې چې د کتاب له لیدلو پرته د درسي کتاب 263 مخ دریم مثال حل کړي، تاسو د ټولگي څارنه وکړئ او د ستونزو په صورت کې ورسره مرسته وکړئ.

### 7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

بناغلی بنوونکی ددې لپاره چې ډاډمن شی ایا زده کړه شوې ده او که نه؟ نو له زده کوونکو څخه لاندې پوښتنې وکړئ:

1. د دوو حقيقي عددونو د ضرب حاصل کوم عدد دی؟
  2. ایا د دوو وکتورونو د سکالري ضرب حاصل وکتوري کمیت دی او که سکالري کمیت؟
  3. په حقيقي عددونو کې تبادلوي خاصیت یعنې  $2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$  یا  $a \cdot b = b \cdot a$  دی، ایا د دوو وکتورونو په سکالري ضرب کې تبادلوي خاصیت  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$  هم صدق کوي؟
- کوښښ وکړئ چې څو اوبونه له زده کوونکو څخه تر لاسه کړئ، د ستونزو په صورت کې ورسره مرسته وکړئ.

### 8- د بنوونکي لپاره اضافي معلومات:

بناغلی بنوونکی ددې لپاره چې ستاسو معلومات په دې اړه زیات شوی وي، همدارنگه ځینې پوښتنې په تمرین کې راغلي دي چې حل یې د لاندې معلوماتو په واسطه کېږي.

**د یوه وکتور تصویر (ارتسام) په ټاکلي جهت:** که د  $\vec{a}$  او  $\vec{b}$  وکتورونو ترمنځ زاویه په  $\theta$  سره ونیسو، نو د  $\vec{a}$  د

وکتور تصویر (ارتسام)  $(projection)$  د  $\vec{b}$  وکتور په جهت عبارت دی، له:

$$P_b^a = |\vec{a}| \cos \theta \vec{e}_b$$

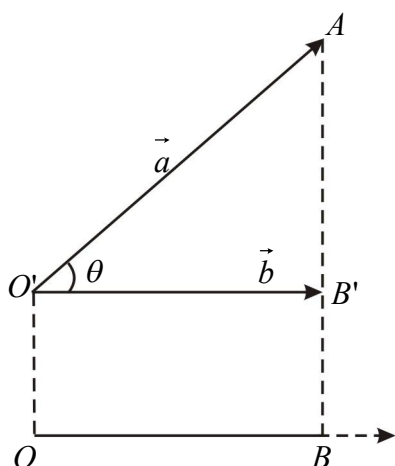
پوهېږو چې:

$$\vec{e}_b = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

$$P_b^a = |\vec{a}| \cos \theta \cdot \vec{e}_b = |\vec{a}| \cdot \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \cdot \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}| |\vec{b}|} \cdot \vec{b}$$

$$P_b^a = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}| |\vec{b}|} \vec{b} \quad \text{د } \vec{a} \text{ وکتور مرتسم (تصویر) د } \vec{b} \text{ په جهت.}$$



## 9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

1. وښایاست چې د  $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$  د وکتور مرتسمونه د  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  واحد وکتورونو په امتداد په ترتیب سره له  $c, b, a$  سره مساوي دي.

حل: د  $\vec{a}$  وکتور مرتسم د  $\vec{b}$  د وکتور په امتداد په لاندې ډول دی:

$$P_{\vec{b}}^{\vec{a}} = \frac{\vec{b} \cdot \vec{a}}{|\vec{b}| \cdot |\vec{b}|} \cdot \vec{b}$$

نولرو چې:

$$P_{\vec{i}}^{\vec{v}} = \frac{\vec{i} \cdot \vec{v}}{\vec{i} \cdot \vec{i}} \cdot \vec{i} = \frac{\vec{i}(a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k})}{1} \cdot \vec{i} = (a\vec{i} \cdot \vec{i} + b\vec{j} \cdot \vec{i} + c\vec{k} \cdot \vec{i})\vec{i} = (a + b \cdot 0 + c \cdot 0) \cdot \vec{i} = a\vec{i}$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{\vec{i}}^{\vec{v}} = a\vec{i}}$$

$$P_{\vec{j}}^{\vec{v}} = \frac{\vec{j} \cdot \vec{v}}{\vec{j} \cdot \vec{j}} \cdot \vec{j} = \frac{\vec{j}(a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k})}{1} \cdot \vec{j} = (a\vec{i} \cdot \vec{j} + b\vec{j} \cdot \vec{j} + c\vec{k} \cdot \vec{j})\vec{j} = (a \cdot 0 + b + c \cdot 0)\vec{j} = b\vec{j}$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{\vec{j}}^{\vec{v}} = b\vec{j}}$$

$$P_{\vec{k}}^{\vec{v}} = \frac{\vec{k} \cdot \vec{v}}{\vec{k} \cdot \vec{k}} \cdot \vec{k} = \frac{\vec{k}(a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k})}{1} \cdot \vec{k} = (a\vec{i} \cdot \vec{k} + b\vec{j} \cdot \vec{k} + c\vec{k} \cdot \vec{k})\vec{k} = (a \cdot 0 + b \cdot 0 + c)\vec{k} = c\vec{k}$$

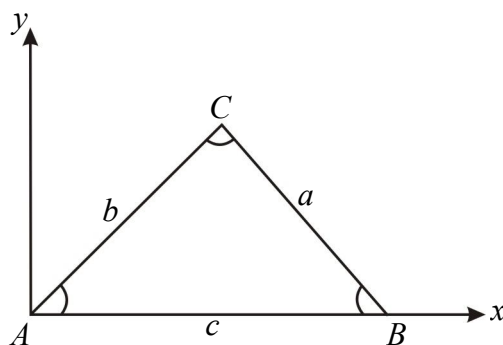
$$\Rightarrow \boxed{P_{\vec{k}}^{\vec{v}} = c\vec{k}}$$

2. وښایاست چې په هر  $\triangle ABC$  کې لاندې اړیکې وجود لري:

$$i) a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

$$ii) a = b \cdot \cos C + c \cdot \cos B$$

حل:



i)

$$a = |\overline{BC}| = \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

څرنگه چې  $x = b \cos A$  او  $y = b \sin A$  دی؛ نو:

$$a = \sqrt{(b \cos A - c)^2 + (b \sin A)^2} \Rightarrow a = \sqrt{b^2 \cos^2 A - 2bc \cos A + c^2 + b^2 \sin^2 A}$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 (\cos^2 A + \sin^2 A) - 2bc \cos A + c^2$$

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A}$$

ii)

$$\overrightarrow{BC} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{CA} = \vec{b}, \quad \overrightarrow{AB} = \vec{c}$$

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0} \quad / \cdot \vec{a}$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{0} = 0$$

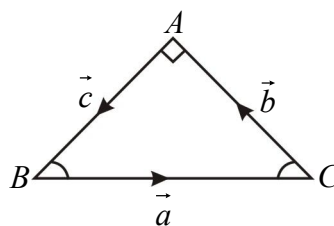
$$\vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} = 0$$

$$|\vec{a}| \cdot |\vec{a}| + |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(180^\circ - C) + |\vec{a}| |\vec{c}| \cos(180^\circ - B) = 0$$

$$a \cdot a - ab \cos C - ac \cos B = 0$$

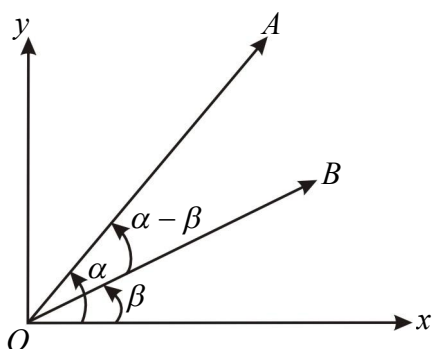
$$a^2 - ab \cos C - ac \cos B = 0 / \div a$$

$$a - b \cos C - c \cos B = 0 \Rightarrow a = b \cos C + c \cos B$$



3. ثبوت کړئ چې:  $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$

حل:



$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

که چیرې  $\vec{OA} = \vec{a}$  او  $\vec{OB} = \vec{b}$  دوه واحد وکتورونه د  $xy$

په مستوي کې وي، دغه دوه واحد وکتورونه د  $xy$  په

مستوي کې د  $\alpha$  او  $\beta$  زاویې جوړوي، همدارنگه پوهېږو

$$\vec{a} = a_1 i + a_2 j = xi + yj \quad \text{چې:}$$

د  $\vec{a}$  د وکتور مرکبه د  $x$  پر محور عبارت دی له  $a_1 = x = \cos \alpha$ ، همدارنگه د  $\vec{a}$  د وکتور مرکبه د  $y$  پر محور عبارت

دی له  $a_2 = y = \sin \alpha$  او د  $\vec{b}$  او  $\vec{a}$  وکتورونو نورم یا طول عبارت دی له  $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$  دی؛ نو لیکلای شو:

$$\vec{a} = a_1 i + a_2 j = xi + yj = \cos \alpha i + \sin \alpha j \quad \dots \text{ I}$$

$$\vec{b} = b_1 i + b_2 j = xi + yj = \cos \beta i + \sin \beta j \quad \dots \text{ II}$$

د  $\vec{a}$  او  $\vec{b}$  وکتورونو ترمنځ زاویه عبارت ده له:  $(\alpha - \beta)$  او د  $\vec{a}$  او  $\vec{b}$  وکتورونو سکالري ضرب په لاس راوړو:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\alpha - \beta) = 1 \cdot 1 \cdot \cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha - \beta) \quad \dots \text{ III}$$

که د I او II اړیکې له یو بل سره ضرب کړو، په لاس راځي:

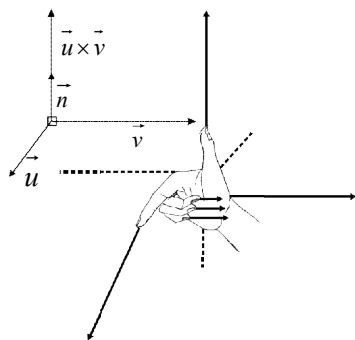
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (\cos \alpha i + \sin \alpha j) \cdot (\cos \beta i + \sin \beta j)$$

$$= \cos \alpha i \cos \beta i + \cos \alpha i \sin \beta j + \sin \alpha j \cos \beta i + \sin \alpha j \sin \beta j$$

$$= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \quad \dots \text{ IV}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

له III او IV اړیکو څخه لیکلای شو، چې



## اووم خپرکی: وکتورنه

د وکتوري ضرب حاصل

د درسي کتاب (265) مخ

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

<ul style="list-style-type: none"> <li>• زده‌کونکي د وکتوري ضرب په مفهوم پوه شي.</li> <li>• زده‌کونکي د دوو وکتورونو وکتوري ضرب په لاس راوړای شي.</li> <li>• زده‌کونکي د پورتنی پوهې او مهارت په درلودلو سره په ځان ډاډمن او ورڅخه خوښي ښکاره کړي.</li> </ul>	<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- پوهنيزه</li> <li>- مهارتي</li> <li>- ذهنيتي</li> </ul>
<p>پوښتنه او ځواب ډله‌ييز او يوکسيز کار</p>	<p>2- د زده کړې لارې:</p>
<p>د وروډي شکل چارټ</p>	<p>3- مرستندويه مواد:</p>
<p>ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته د تېر لوست لنډه یادونه وکړې او د زده‌کونکو پام د وروډي شکل چارټ ته چې مخکې مو تيار کړی دی راوړی او وپوښتی:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• په چارټ کې څه وینئ؟</li> <li>• په چارټ کې څو وکتورونه وینئ او یو له بل سره څه اړیکه لري؟</li> </ul> <p>کوښښ وکړئ چې څو اېونه له زده‌کونکو څخه په لاس راوړئ د ستونزو په صورت کې ورسره مرسته وکړئ.</p>	<p>4- د وروډي برخې توضیح (5 دقیقې)</p>
<p>5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې):</p> <p>ښاغلی ښوونکی د لوست بهیر داسې پیل کړی:</p> <p>د <math>\vec{u}</math> او <math>\vec{v}</math> وکتورونه چې د صفر خلاف وي په پام کې نیسو د <math>\vec{u}</math> او <math>\vec{v}</math> دوو وکتورونو د وکتوري ضرب حاصل په <math>\vec{u} \times \vec{v}</math> سره ښيي او په لاندې ډول تعریفېږي: <math>\vec{u} \times \vec{v} =  \vec{u}   \vec{v}  \sin \theta \vec{n}</math></p> <p>په داسې حال کې چې <math>\theta</math> د <math>\vec{u}</math> او <math>\vec{v}</math> ترمنځ زاویه او <math>\vec{n}</math> د <math>\vec{u}</math> او <math>\vec{v}</math> وکتورونو په واسطه د جوړې شوې مستوي له عمود واحد وکتور څخه عبارت دی، یا په بل عبارت د <math>\vec{u}</math> او <math>\vec{v}</math> وکتورونو وکتوري ضرب له هغه دریم وکتور څخه عبارت دی چې ددوی په مبدا باندې عمود دی.</p> <p>یو مهم توپیر د سکالري او وکتوري ضرب دا دی چې د دوو وکتورونو سکالري ضرب یو سکالر دی او د دوو وکتورونو د وکتوري ضرب حاصل یو وکتور دی.</p> <p>د دوو وکتورونو خطي ترکیب:</p> <p>د یوه سیټ د وکتورونو د سکالري ضربونو مجموعه د همغه سیټ د وکتورونو د خطي ترکیب په نامه یادېږي. که <math>\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n</math> د یوه سیټ وکتورونه او <math>\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}</math> سکالرونه وي، په دې صورت کې د <math>\vec{a}</math> وکتور په</p>	

داسې حال کې چې  $\vec{a} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n$  وي، د  $\vec{a}$  وکتور د  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  وکتورونو د خطي ترکیب په نامه یادېږي.

که چیرې په یوه خطي ترکیب کې  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$  وي، وکتورونه خطي خپلواکي لري او که یو د  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) د صفر خلاف وي، وکتورونه خطي خپلواکي نه لري.

په پای کې د درسي کتاب 265 مخ لومړی مثال د  $\vec{a}_1$  او  $\vec{a}_2$  وکتورونو د وکتوري ضرب حاصل په لاس راوړئ او په دویم پړاو کې د نوموړو وکتورونو خطي ترکیب، خطي خپلواکي او خطي غیر خپلواکي ورته په لاس راوړئ.

### 6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

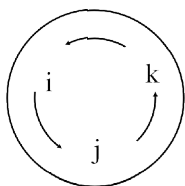
د لوست د لاینه تحکیم او پوهې په موخه د درسي کتاب 266 مخ دویم مثال زده کوونکو ته په یو کسيزه توگه ورکړی چې د کتاب له لیدلو پرته یې حل کړي، په پای کې یو داوطلب زده کوونکی د تختې مخې ته راوغوړئ چې نوموړی مثال پر تخته باندې حل کړي، نور زده کوونکي دې خپل حلونه د تختې له حل سره پرتله کړي، د ټولگي څارنه وکړئ، د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړئ.

### 7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ښاغلی ښوونکی ددې لپاره چې ډاډمن شی ایا زده کړه شوې ده او که نه؟ د لاندې پوښتنو په کولو سره زده کوونکي ارزوي:

1. د دوو وکتورونو وکتوري او سکالري ضرب یو له بل سره څه توپیر لري؟
  2. که چیرې  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$  سره وي، ایا وکتورونه خطي خپلواکي لري او که نه؟
  3. که یو د  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) خلاف د صفر وي، ایا وکتورونه خطي خپلواکي لري او که نه؟
  4. ایا د دوو وکتورونو وکتوري ضرب حاصل وکتوري کمیت دی او که سکالري؟
- کوښښ وکړئ چې ځوابونه له زده کوونکو څخه تر لاسه کړئ د ستونزو په صورت کې ورسره مرسته او لوست ورته یو ځل بیا توضیح او تشریح کړئ.

### 8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات:



ښاغلی ښوونکی ددې لپاره چې ستاسو په معلوماتو کې زیاتوالی راغلی وي، یو ځل بیا د واحد وکتورونو د تشکیل لپاره هغه ډایروي جوړښت چې په درسي کتاب کې هم راغلی لیکو:

او د دوو وکتورونو وکتوري ضرب تعریف چې وایي د دوو وکتورونو وکتوري ضرب له هغه دریم وکتور څخه عبارت دی چې د نوموړو وکتورونو په مبداء باندې عمود دی؛ یعنې:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cdot \sin \theta \vec{n}$$

د درسي کتاب 270 مخ کې  $\vec{i} \times \vec{i} = 0$ ،  $\vec{j} \times \vec{j} = 0$  او  $\vec{k} \times \vec{k} = 0$  دی.

$$\vec{i} \times \vec{i} = |\vec{i}| \cdot |\vec{i}| \cdot \sin 0^\circ = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$\vec{j} \times \vec{j} = |\vec{j}| \cdot |\vec{j}| \cdot \sin 0^\circ = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$\vec{k} \times \vec{k} = |\vec{k}| \cdot |\vec{k}| \cdot \sin 0^\circ = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$$



## اووم خپرکی: وکتورنه

د طبیعي واحد وکتورونو د خطي ترکیب په واسطه د یوه وکتور بنودل

د درسي کتاب (267) مخ

د لوست وخت: (یو درسي ساعت)

<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- پوهنیزه</li> <li>- مهارتي</li> <li>- ذهنيتي</li> </ul>	<p>زده کوونکي به دلوست په پای کې و توانېږي چې:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• د طبیعي واحد وکتورونو د خطي ترکیب په واسطه د یوه وکتور د بنودلو په مفهوم پوه شي.</li> <li>• په دوه بُعدی، درې بُعدی او بالاخره په <math>n</math> بُعدی فضا کې طبیعي واحد وکتورونه وپېژني.</li> <li>• یو وکتور د طبیعي واحد وکتورونو د خطي ترکیب په شکل و بنودلای شي.</li> <li>• د پورته پوهې او مهارت له حاصلولو څخه خوښ شي.</li> </ul>
<p>2- د زده کړې لارې:</p>	<p>ډله ییز او یوکسیز کار</p>
<p>3- مرستندویه مواد:</p>	<p>د ورودی شکل چارټ</p>
<p>4- د ورودی برخې توضیح (5 دقیقې)</p>	<p>ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته د تېر لوست چې د وکتورونو خطي ترکیب دی، زده کوونکو ته په لنډ ډول تکرار کړی، وروسته له زده کوونکو څخه وپوښتی:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• ایا د <math>(x_1, x_2, x_3)</math> وکتور د طبیعي واحد وکتورونو د خطي ترکیب په شکل بنودلای شو؟</li> </ul> <p>ښاغلی ښوونکی که چیرې زده کوونکي ځواب و وایي ښه به وي، له هغه پرته تاسې یې حل کړئ.</p>
<p>5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې):</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• ښاغلی ښوونکی په دوه بُعدی، درې بُعدی او بالاخره په عمومي حالت یعنی <math>n</math> بُعدی فضا کې د ورکړ شوو وکتورونو بنودل د واحد وکتورونو د ضربونو د مجموعې په شکل زده کوونکو ته توضیح او تشریح کړی.</li> <li>• ښاغلی ښوونکی هغه عنوان چې د (وکتورونو خطي خپلواکي) ده، پر تخته باندې ولیکي او زده کوونکو ته و وایي چې د <math>\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n</math> وکتورونه په یوه وکتوري ساحه کې خطي خپلواکي لري، که چیرې دغه خطي ترکیب <math>\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n = 0</math> مساوي صفر وي، نو په دې صورت کې <math>\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0</math> سره شي. وروسته د (غیر خپلواک) عنوان پر تخته ولیکي، زده کوونکو ته یې تعریف او توضیح کړی، ورپسې هغه یادونه چې په کې د یوه سټ د وکتورونو د خطي خپلواکي په لاس راوړلو پړاو ونه دي، د 268 مخ مثال په حلولو سره په ټولگي کې توضیح او تشریح کړی، تر څو زده کوونکي د وکتورونو د خطي خپلواکي په مفهوم ښه پوه شي.</li> <li>• ښاغلی ښوونکی زده کوونکي په مناسبو ډلو و وېشي چې د کتاب د 269 مخ فعالیت په خپلو ډلو کې د یو بل په مشوره سرته ورسوي. وروسته د یوې ډلې استازي راو غواړي چې خپل ډله ییز کار نورو زده کوونکو ته توضیح کړي. بیا تاسې د فعالیت پایله ورته توضیح او ددې مخ لومړی مثال پر تخته مرحله په مرحله حل کړئ.</li> </ul>	

6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

بناغلی بنوونکی د کتاب 270 مخ دویم مثال زده‌کوونکو ته ورکړی چې په انفرادي توگه یې د کتاب له لیدو پرته په خپلو کتابچو کې حل کړي. وروسته یو داوطلب زده‌کوونکی دې نوموړی مثال پر تخته حل او د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړی.

7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

بناغلی بنوونکی ددې لپاره چې ډاډه شی ایا زده‌کړه شوې ده او که نه؟ د لاندې پوښتنو په کولو سره زده‌کوونکي و ارزوی:

1. یو زده‌کوونکی دې په درې بعدي فضا کې طبیعي واحد وکتور پر تخته ولیکي؟
2. یو زده‌کوونکی دې د  $\vec{a} = (2, 3)$  وکتور د طبیعي واحد وکتورونو د خطي ترکیب په شکل ولیکي؟

8- د بنوونکي لپاره اضافي معلومات:

د درسي کتاب د 267 مخ د فعالیت حل:

$$S = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

$$\alpha_1(1, 0, 0) + \alpha_2(0, 1, 0) + \alpha_3(0, 0, 1) = 0$$

$$(\alpha_1, 0, 0) + (0, \alpha_2, 0) + (0, 0, \alpha_3) = 0$$

$$(\alpha_1 + 0 + 0, 0 + \alpha_2 + 0, 0 + 0 + \alpha_3) = 0$$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$$

څرنگه چې  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$  دی، نو  $S$  خطي خپلواکي لري.

## اووم خپرکی: وکتورنه

د مخلوط ضرب حاصل یا درې گونی ضرب (Triple product)

د درسي کتاب (270) مخ

د لوست وخت: (یو درسي ساعت)

<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>پوهنيزه</li> <li>مهارتي</li> <li>ذهنيتي</li> </ul> <p>زده کوونکي به دلوست په پای کې و توانېږي چې:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>د مخلوط ضرب حاصل په مفهوم پوه شي.</li> <li>په مخلوط ضرب پورې اړونده پوښتنې حل کړای شي.</li> <li>د پورته پوهې او مهارت په لاس ته راوړلو سره خوښي ښکاره کوي.</li> </ul>	
<p>2- د زده کړې لارې:</p> <p>ډله ییز او یوکسیز کار</p>	
<p>3- مرستندويه مواد:</p> <p>د وروډي شکل چارټ</p>	
<p>4- د وروډي برخې توضیح (5 دقیقې)</p> <p>ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته تېر لوست په لنډ ډول تکرار کړی او ددې لپاره چې د زده کوونکو پام موضوع ته راوړي، په لاندې ډول وپوښتي:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>د <math>(\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}</math> د ضرب حاصل وکتور دی او که سکالر؟</li> <li>ایا <math>(\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}</math> له <math>(\vec{b} \cdot \vec{c}) \vec{a}</math> سره مساوي دي؟</li> </ul> <p>که چیرې زده کوونکي ځوابونه ووايي ښه به وي، له هغه پرته تاسو په لنډ ډول معلومات ورکړئ.</p>	
<p>5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې):</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>ښاغلی ښوونکی د لوست عنوان (د مخلوط ضرب حاصل) پر تخته باندې ولیکي او زده کوونکو ته د دوو یا څو وکتورونو د ضربولو ټول حالتونه توضیح او تشریح کړي، بیا زده کوونکو ته ووايي چې د <math>\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c})</math> اړیکه د متوازي السطوح له حجم څخه عبارت ده، په داسې حال کې چې د <math>\vec{a}</math>، <math>\vec{b}</math> او <math>\vec{c}</math> وکتورونه د متوازي السطوح ضلعي وي.</li> <li>ښاغلی ښوونکی د درسي کتاب 271 مخ د تطبیقاتي مسئلې عنوان پر تخته ولیکي او د 1، 2 او 3 مسئلې د پوښتنو او ځوابونو په طریقه د زده کوونکو په فعال گډون سره حل کړي.</li> </ul>	
<p>6- د زده کړې تحکیم: (7 دقیقې)</p> <p>ښاغلی ښوونکی د لوست د لاندې ښه تحکیم لپاره د کتاب 273 مخ څلورم مثال چې د یوې متوازي السطوح مساحت شکل یې پر تخته رسم کړی او یو داوطلب زده کوونکي ته ووايې چې پر تخته یې حل کړي، نور زده کوونکي دې یې د کتاب له لیدو پرته په خپلو کتابچو کې حل کړي. د تېروتنې په صورت کې مرسته وکړي. په پای کې دې زده کوونکي خپل حلونه د تخته له حل سره پرتله کړي او تېروتنې دې اصلاح کړي.</p>	

## 7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

بناغلی شوونکی ددې لپاره چې ډاډه شی ایا زده‌کړه شوې ده او که نه؟ د لاندې پوښتنو په کولو سره زده‌کوونکي و ارزوئ:

1. د  $(\vec{c} \cdot \vec{a}) \vec{b}$  د ضرب حاصل وکتور دي او که سکالر؟

2. یو زده‌کوونکی دې  $\sin(\alpha + \beta)$  ته د تختې پر مخ انکشاف ورکړي.

## 9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

1. که  $\vec{a}_1 = t^2 + t + 2$ ,  $\vec{a}_2 = 2t^2 + t$ , او  $\vec{a}_3 = 3t^2 + 2t + 2$  وي، وښایاست چې نوموړي وکتورونه خطي خپلواکي لري؟

حل:

$$\begin{aligned} \alpha \vec{a}_1 + \beta \vec{a}_2 + \gamma \vec{a}_3 &= \alpha(t^2 + t + 2) + \beta(2t^2 + t) + \gamma(3t^2 + 2t + 2) = 0 \\ &= \alpha t^2 + \alpha t + 2\alpha + 2\beta t^2 + \beta t + 3\gamma t^2 + 2\gamma t + 2\gamma = 0 \\ &= (\alpha + 2\beta + 3\gamma)t^2 + (\alpha + \beta + 2\gamma)t + 2\alpha + 2\gamma = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta + 3\gamma = 0 \\ \alpha + \beta + 2\gamma = 0 \\ 2\alpha + 2\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow 2\alpha + 2\gamma = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = -\gamma}$$

$$\alpha + \beta + 2\gamma = 0 \Rightarrow -\gamma + \beta + 2\gamma = 0 \Rightarrow \beta + \gamma = 0 \Rightarrow \boxed{\beta = -\gamma}$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = \beta = -\gamma}$$

نو د  $\alpha = \beta = -\gamma$  د ټولو قیمتونو لپاره پورتنی خطي ترکیب صدق کوي او د  $\alpha, \beta$ , او  $\gamma$  لپاره داسې قیمتونه هم شتون لري چې صفر نه وي؛ نو په نتیجه کې نوموړي وکتورونه خطي خپلواکي نه لري.

2. وښایاست چې  $\vec{a} = 2i + 3j + 4k$  او  $\vec{b} = 4i + 6j + 8k$  وکتورونه یو له بل سره کوم ډول خطي اړیکه لري؟

حل:

$$\begin{aligned} \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} &= \alpha(2i + 3j + 4k) + \beta(4i + 6j + 8k) \\ &= 2\alpha i + 3\alpha j + 4\alpha k + 4\beta i + 6\beta j + 8\beta k = 0 \\ &= (2\alpha + 4\beta)i + (3\alpha + 6\beta)j + (4\alpha + 8\beta)k = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha + 4\beta = 0 \\ 3\alpha + 6\beta = 0 \\ 4\alpha + 8\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ \alpha + 2\beta = 0 \\ \alpha + 2\beta = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha = -2\beta$$

نو په نتیجه کې د  $\alpha = -2\beta$  په ټولو قیمتونو کې پورتنی خطي ترکیب صدق کوي او د  $\alpha$  او  $\beta$  لپاره د صفر خلاف قیمتونه هم موجود دي، نو د  $\vec{a}$  او  $\vec{b}$  وکتورونه خطي خپلواکي نه لري.

3. ثبوت کړئ چې  $\vec{a}_1 = 2i$  ,  $\vec{a}_2 = 5j$  , او  $\vec{a}_3 = 9k$  وکتورونه خطي خپلواکي لري.

حل:

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \alpha_3 \vec{a}_3 = 0$$

$$\alpha_1 2i + \alpha_2 5j + \alpha_3 9k = 0 \Rightarrow 2\alpha_1 = 0 \quad , \quad 5\alpha_2 = 0 \quad , \quad 9\alpha_3 = 0$$

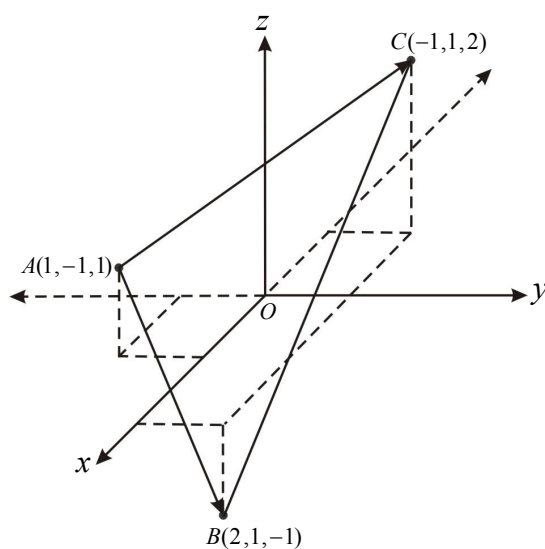
$$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

په پایله کې ویلی شو چې پورتنی وکتورونه خطي خپلواکي لري.

4. د هغه مثلث مساحت پیدا کړئ چې راسونه یې  $A(1,-1,1)$  ,  $B(2,1,-1)$  او  $C(-1,1,2)$  وکتورونو په واسطه درکړل

شوی وي، همدارنگه هغه واحد وکتور چې پر  $ABC$  مستوي عمود دی، مطلوب دی.

حل:



$$\vec{AB} = (2-1, 1-(-1), -1-1) = (1, 2, -2) = i + 2j - 2k$$

$$\vec{AC} = (-1-1, 1-(-1), 2-1) = (-2, 2, 1) = -2i + 2j + k$$

$$A(\triangle ABC) = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} |(i + 2j - 2k) \times (-2i + 2j + k)| = \frac{1}{2} |2k - j + 4k + 2i + 4j + 4i|$$

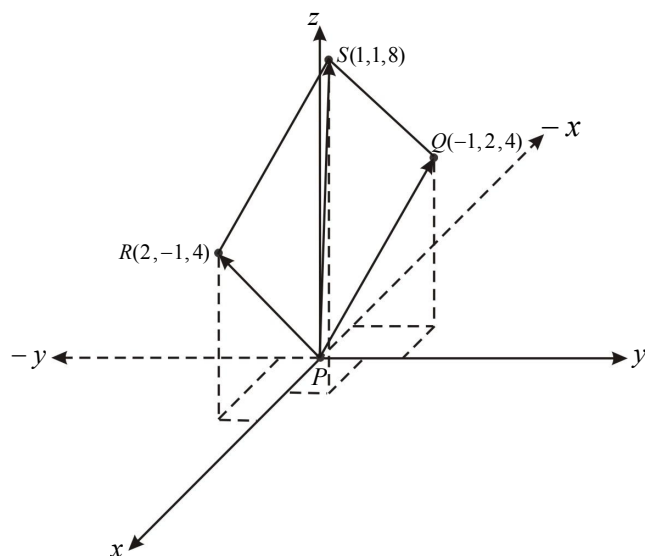
$$= \frac{1}{2} |6i + 3j + 6k| = \frac{1}{2} \sqrt{6^2 + 3^2 + 6^2} = \frac{1}{2} \sqrt{36 + 9 + 36}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{81} \Rightarrow \boxed{A(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \sqrt{81} = \frac{1}{2} \cdot 9 = 4.5 \text{ unit}^2}$$

هغه واحد وکتور چې د  $ABC$  پر مستوي عمود دی، دغه بحث د درسي کتاب او خصوصاً د دغه فصل له سوبې لور دی.

5. د هغې متوازي الاضلاع مساحت پيدا كړئ چې د  $P(0,0,0)$ ,  $Q(-1,2,4)$ ,  $R(2,-1,4)$  او  $S(1,1,8)$  وكتورونو په واسطه ځانگړی شوي وي.

حل:



$$\vec{PQ} = (-1-0, 2-0, 4-0) = (-1, 2, 4) = -i + 2j + 4k$$

$$\vec{PR} = (2-0, -1-0, 4-0) = (2, -1, 4) = 2i - j + 4k$$

$$\vec{PQ} \times \vec{PR} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= i(8+4) - j(-4-8) + k(1-4) = 12i + 12j - 3k$$

$$|\vec{PQ} \times \vec{PR}| = \sqrt{12^2 + 12^2 + (-3)^2} = \sqrt{144 + 144 + 9} = \sqrt{297} = 3\sqrt{33}$$

$$\text{د متوازي الاضلاع مساحت} = 3\sqrt{33}$$

6. که  $\vec{u} = 2i - j + k$ ،  $\vec{v} = 4i + 2j - k$  سره وي، د لاندې وكتورونو د ضرب حاصل پيدا كړئ؟

i)  $\vec{u} \times \vec{u}$

ii)  $\vec{u} \times \vec{v}$

iii)  $\vec{v} \times \vec{u}$

حل:

$$i) \vec{u} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-1+1)i - (2-2)j + (-2+2)k = 0$$

$$ii) \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (1-2)i - (-2-4)j + (4+4)k = -i + 6j + 8k$$

$$iii) \vec{v} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (2-1)i - (4+2)j + (-4-4)k = i - 6j - 8k = -(-i + 6j + 8k)$$

$$= -\vec{u} \times \vec{v}$$

## د اووم څپرکي د عمومي پوښتنو حل (اته درسي ساعتونه)

1: که  $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$  او  $\vec{b} = 4\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$  وي:

a)  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  : (a)  $\vec{b} \cdot \vec{a}$  : (b) مطلوب دی

حل:

$$a) \vec{a} \cdot \vec{b} = (3\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k})(4\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}) = 3 \cdot 4 + (-1)(3) + (5)(-2) \\ = 12 - 3 - 10 = 12 - 13 = -1$$

$$b) \vec{b} \cdot \vec{a} = (4\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k})(3\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}) = 12 - 3 - 10 = -1$$

2: که چېرې د  $P(2,3)$  او  $Q(6,-2)$  ټکي د  $\vec{OP}$  او  $\vec{OQ}$  شعاع وکتورونو پای وي، په دې صورت کې د  $P$  او  $Q$  په مستوي کې د  $xi + yj$  وکتور په څیر ولیکئ.

حل:

$$\vec{OP} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$$

$$\vec{OQ} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 6\vec{i} - 2\vec{j}$$

3: که چېرې  $A(1,-1)$ ،  $B(2,0)$ ،  $C(-1,3)$  او  $D(-2,2)$  درکړل شوي وي، د  $\vec{AB}$  او  $\vec{CD}$  وکتورونو حاصل جمع مطلوب دی.

حل:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{i} + \vec{j}$$

$$\vec{CD} = \begin{pmatrix} -2+1 \\ 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\vec{i} - \vec{j}$$

$$\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{i} - \vec{j} = 0$$

4: که چېرې  $A(2,5)$ ،  $B(-1,1)$  او  $C(2,-6)$  درکړل شوي وي، مطلوب دی:

i)  $\vec{AB} = ?$

ii)  $2\vec{AB} - \vec{CB} = ?$

iii)  $2\vec{CB} - 2\vec{CA} = ?$

حل:

$$i) \overrightarrow{AB} = (-1-2, 1-5) = (-3, -4) = -3\vec{i} - 4\vec{j}$$

$$ii) \overrightarrow{CB} = (-1-2, 1+6) = -3\vec{i} + 7\vec{j}$$

$$2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} = 2(-3\vec{i} - 4\vec{j}) - (-3\vec{i} + 7\vec{j}) = -6\vec{i} - 8\vec{j} + 3\vec{i} - 7\vec{j} = -3\vec{i} - 15\vec{j}$$

$$iii) \overrightarrow{CA} = (2-2, 5+6) = (0, 11) = +11\vec{j} \Rightarrow 2\overrightarrow{CB} - 2\overrightarrow{CA} = 2(-3\vec{i} + 7\vec{j}) - 2(11\vec{j}) \\ = -6\vec{i} + 14\vec{j} - 22\vec{j} = -6\vec{i} - 8\vec{j} \Rightarrow 2\overrightarrow{CB} - 2\overrightarrow{CA} = -6\vec{i} - 8\vec{j}$$

5: که چہرے  $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ ،  $\vec{v} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$  او  $\vec{w} = 5\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$  ورکړل شوی وي، مطلوب دی:

$$i) \vec{u} + 2\vec{v} + \vec{w}$$

$$ii) \vec{v} - 3\vec{w}$$

$$iii) |3\vec{v} + \vec{w}| = ?$$

حل:

$$i) \vec{u} + 2\vec{v} + \vec{w} = (\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}) + 2(3\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}) + 5\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k} \\ = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k} + 6\vec{i} - 4\vec{j} + 4\vec{k} + 5\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k} \\ = (1+6+5)\vec{i} + (2-4-1)\vec{j} + (-1+4+3)\vec{k} = 12\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{u} + 2\vec{v} + \vec{w} = 12\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}}$$

$$ii) \vec{v} - 3\vec{w} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k} - 3(5\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}) = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k} - 15\vec{i} + 3\vec{j} - 9\vec{k} \\ = -12\vec{i} + \vec{j} - 7\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{v} - 3\vec{w} = -12\vec{i} + \vec{j} - 7\vec{k}}$$

$$iii) |3\vec{v} + \vec{w}| = |3(3\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}) + 5\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}| = |9\vec{i} - 6\vec{j} + 6\vec{k} + 5\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}| \\ = |14\vec{i} - 7\vec{j} + 9\vec{k}| = \sqrt{14^2 + (-7)^2 + 9^2} = \sqrt{196 + 49 + 81} = \sqrt{326}$$

$$\boxed{|3\vec{v} + \vec{w}| = \sqrt{326}}$$

(iv) د  $\vec{u}$ ،  $\vec{v}$  او  $\vec{w}$  راکرل شوو وکتورونو په جهت واحد وکتورونه پیدا کړئ

$$\vec{e}_u = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\vec{j} - \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{k}$$

$$\vec{e}_v = \frac{3\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{3\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}}{\sqrt{9+4+4}} = \frac{3}{\sqrt{17}}\vec{i} - \frac{2}{\sqrt{17}}\vec{j} + \frac{2}{\sqrt{17}}\vec{k}$$

$$\vec{e}_w = \frac{5\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}}{\sqrt{5^2 + (-1)^2 + 3^2}} = \frac{5\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}}{\sqrt{25+1+9}} = \frac{5}{\sqrt{35}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{35}}\vec{j} + \frac{3}{\sqrt{35}}\vec{k}$$



6: د  $\vec{a}$  او  $\vec{b}$  درکړل شوو وکتورونو لپاره سکالري ضرب حاصل د  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ،  $\vec{b} \cdot \vec{a}$  او وکتوري ضرب حاصل د  $\vec{a} \times \vec{b}$  او  $\vec{b} \times \vec{a}$  پيدا او دوه په دوه يې پرتله کړئ، که چيرې  $\vec{a}$  او  $\vec{b}$  په لاندې توگه وي:

$$i) \begin{cases} \vec{a} = 2i + j - k \\ \vec{b} = i - j + k \end{cases}$$

$$ii) \begin{cases} a = i + j \\ b = i - j \end{cases}$$

$$iii) \begin{cases} \vec{a} = 3i - 2j + k \\ \vec{b} = i + j \end{cases}$$

$$iv) \begin{cases} \vec{a} = -4i + j - 2k \\ \vec{b} = 2i + j + k \end{cases}$$

حل:

$$i) \vec{a} \cdot \vec{b} = (2i + j - k)(i - j + k) = 2(i \cdot i) - j \cdot j - k \cdot k = 2 - 1 - 1 = 0$$

$$\vec{b} \cdot \vec{a} = (i - j + k)(2i + j - k) = 2 - 1 - 1 = 0 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (2i + j - k) \times (i - j + k) = 2i \times i - 2i \times j + 2i \times k + j \times i - j \times j + j \times k - k \times i + k \times j - k \times k \\ &= 2 \cdot 0 - 2k - 2j - k - 0 + i - j - i - 0 = -3j - 3k \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = -3j - 3k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{b} \times \vec{a} &= (i - j + k) \times (2i + j - k) = 2i \times i + i \times j - i \times k - j \times 2i - j \times j + j \times k + k \times 2i + k \times j - k \times k \\ &= 0 + k + j + 2k - 0 + i + 2j - i - 0 = 3j + 3k \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} \end{aligned}$$

$$ii) \vec{a} \cdot \vec{b} = (i + j)(i - j) = i \cdot i - j \cdot j = 1 - 1 = 0$$

$$\vec{b} \cdot \vec{a} = (i - j)(i + j) = i \cdot i - j \cdot j = 1 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (i + j) \times (i - j) = i \times i - i \times j + j \times i - j \times j = 0 - k - k + 0 = -2k$$

$$\vec{b} \times \vec{a} = (i - j) \times (i + j) = i \times i + i \times j - j \times i - j \times j = 0 + k + k = 2k$$

$$\Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

$$iii) \vec{a} \cdot \vec{b} = (3i - 2j + k)(i + j) = 3i \cdot i + 3i \cdot j - 2j \cdot i - 2j \cdot j + k \cdot i + k \cdot j = 3 - 2 = 1 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 1$$

$$\vec{b} \cdot \vec{a} = (i + j)(3i - 2j + k) = i \cdot 3i - i \cdot 2j + i \cdot k + j \cdot 3i - j \cdot 2j + j \cdot k = 3 - 0 + 0 + 3 \cdot 0 - 2 + 0$$

$$= 3 - 2 = 1 \Rightarrow \vec{b} \cdot \vec{a} = 1 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (3i - 2j + k) \times (i + j) = 3i \times i + 3i \times j - 2j \times i - 2j \times j + k \times i + k \times j$$

$$= 3 \cdot 0 + 3k + 2k - 2 \cdot 0 + j - i = -i + j + 5k$$

$$\vec{b} \times \vec{a} = (i + j) \times (3i - 2j + k) = 3i \times i - 2i \times j + i \times k + 3j \times i - 2j \times j + j \times k$$

$$= 0 - 2k - j - 3k - 2 \cdot 0 + j = i - j - 5k = -(-i + j + 5k) \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

$$\begin{aligned}
 \text{vi) } \vec{a} \cdot \vec{b} &= (-4\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k})(2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) \\
 &= -4 \cdot 2i \cdot i - 4i \cdot j - 4i \cdot k + 2j \cdot i + j \cdot j + j \cdot k - 2 \cdot 2k \cdot i - 2k \cdot j - 2k \cdot k \\
 &= -8 - 4 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 + 0 - 4 \cdot 0 - 2 \cdot 0 - 2 \cdot 1 = -8 + 1 - 2 = -9 \Rightarrow \boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = -9}
 \end{aligned}$$

$$\vec{b} \cdot \vec{a} = (2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})(-4\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}) = -2 \cdot 4 + 1 - 2 \cdot 1 = -8 + 1 - 2 = -9 \Rightarrow \boxed{\vec{b} \cdot \vec{a} = -9}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{a} \times \vec{b} &= (-4\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}) \times (2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) \\
 &= -4i \times 2i - 4i \times j - 4i \times k + j \times 2i + j \times j + j \times k - 2k \times 2i - 2k \times j - 2k \times k \\
 &= 0 - 4k - 4(-j) - 2k + 0 + i - 4j - 2(-i) + 0 = -4k + 4j - 2k + i - 4j + 2i = 3i - 6k
 \end{aligned}$$

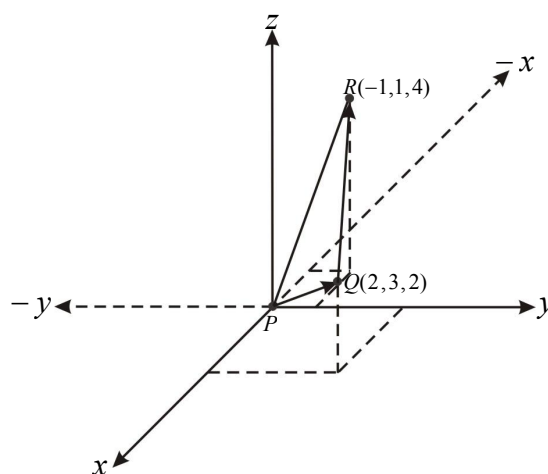
$$\begin{aligned}
 \vec{b} \times \vec{a} &= (2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) \times (-4\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}) \\
 &= 2i \times (-4i) + 2i \times j + 2i \times (-2k) + j \times (-4i) + j \times j + j \times (-2k) + k \times j + k \times (-2k) \\
 &= 0 + 2k + 4j + 4k + 0 - 2i - 4j - i + 0 = -3i + 6k = -(3i - 6k)
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}}$$

7: د هغو مثلثونو مساحت مطلوب دی چې راسونه یې د لاندې ټکو په واسطه ټاکل کېږي:

$$i): P(0,0,0), Q(2,3,2), R(-1,1,4)$$

$$ii): P(1,-1,-1), Q(2,0,-1), R(0,2,1)$$



(i) حل:

$$\vec{PQ} = (2-0, 3-0, 2-0) = (2, 3, 2) = 2i + 3j + 2k$$

$$\vec{QR} = (-1-2, 1-3, 4-2) = (-3, -2, 2) = -3i - 2j + 2k$$

$$\begin{aligned}
 A(\triangle PQR) &= \frac{1}{2} |\vec{PQ} \times \vec{QR}| = \frac{1}{2} |(2i + 3j + 2k) \times (-3i - 2j + 2k)| \\
 &= \frac{1}{2} |-4k - 4j + 9k + 6i - 6j + 4i| = \frac{1}{2} |10i - 10j + 5k| \\
 &= \frac{1}{2} \sqrt{10^2 + (-10)^2 + 5^2} = \frac{1}{2} \sqrt{100 + 100 + 25} = \frac{1}{2} \sqrt{225}
 \end{aligned}$$

$$A(\triangle PQR) = \frac{15}{2} = 7.5$$

حل (ii):

$$\overrightarrow{PQ} = (2-1, 0-(-1), -1-(-1)) = (1, 1, 0) = i + j$$

$$\overrightarrow{PQ} = i + j$$

$$\overrightarrow{PR} = (0-1, 2-(-1), 1-(-1)) = (-1, 3, 2)$$

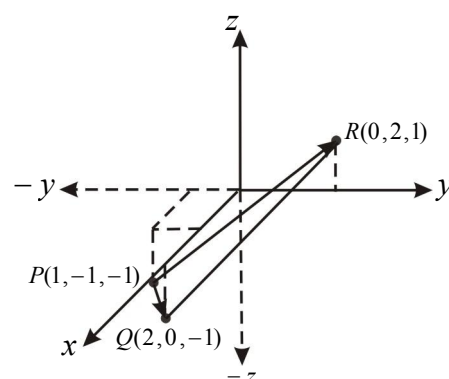
$$\overrightarrow{PR} = -i + 3j + 2k$$

$$A(\triangle PQR) = \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} \right| = \frac{1}{2} \left| (i + j) \times (-i + 3j + 2k) \right|$$

$$= \frac{1}{2} |3k - 2j + k + 2i| = \frac{1}{2} |2i - 2j + 4k|$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 4^2} = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 4 + 16} = \frac{1}{2} \sqrt{24} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{6} = \sqrt{6}$$

$$A(\triangle PQR) = \sqrt{6}$$



8: دهغه متوازي الاضلاع مساحت مطلوب دی چې راسونه یې د لاندې ټکو په واسطه ټاکل شوي وي.

i)  $A(0,0,0)$  ,  $B(1,2,3)$  ,  $C(2,-1,1)$  ,  $D(3,1,4)$

ii)  $A(1,2,-1)$  ,  $B(4,2,-3)$  ,  $C(6,-5,2)$  ,  $D(9,-5,0)$

iii)  $A(1,-1,1)$  ,  $B(-1,2,2)$  ,  $C(-3,4,-5)$  ,  $D(-3,5,-4)$

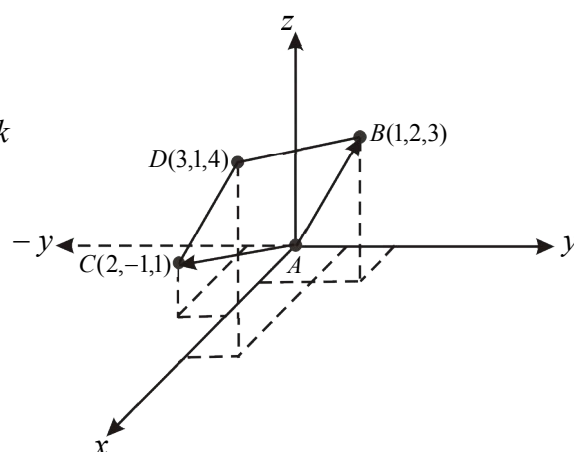
حل (i):

$$\overrightarrow{AB} = (1-0, 2-0, 3-0) = (1, 2, 3) = i + 2j + 3k$$

$$\overrightarrow{AB} = i + 2j + 3k$$

$$\overrightarrow{AC} = (2-0, -1-0, 1-0) = (2, -1, 1) = 2i - j + k$$

$$\overrightarrow{AC} = 2i - j + k$$



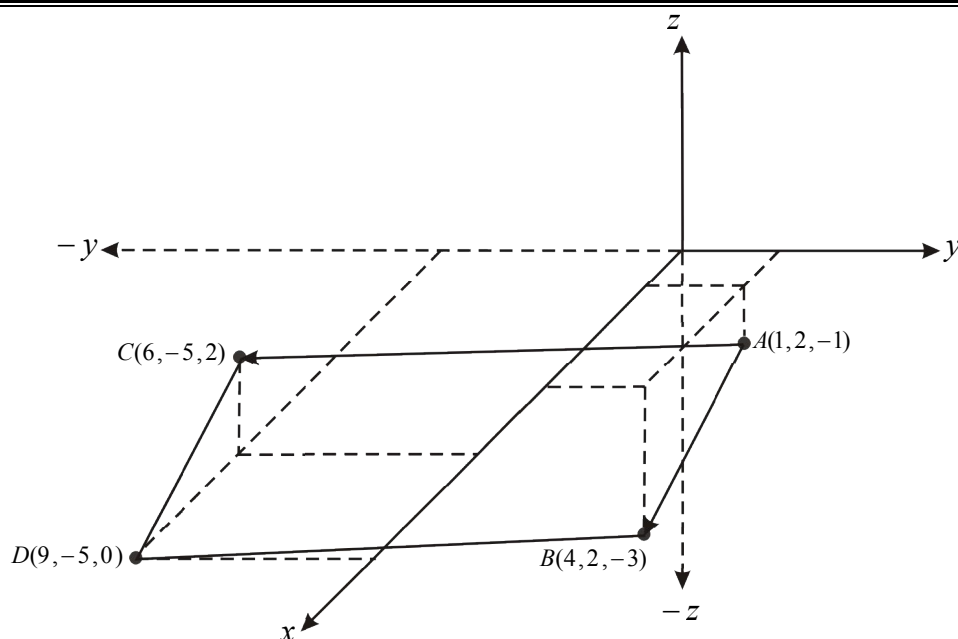
$$\text{مساحت د متوازي الاضلاع} = A = \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right| = \left| (i + 2j + 3k) \times (2i - j + k) \right|$$

$$= \left| -k - j - 4k + 2i + 6j + 3i \right| = \left| 5i + 5j - 5k \right|$$

$$= \sqrt{5^2 + 5^2 + (-5)^2} = \sqrt{25 + 25 + 25}$$

$$\text{مساحت د متوازي الاضلاع} = A = \sqrt{75}$$

حل (ii) :



$$\overrightarrow{AB} = (4-1, 2-2, -3-(-1)) = (3, 0, -2) = 3i - 2k$$

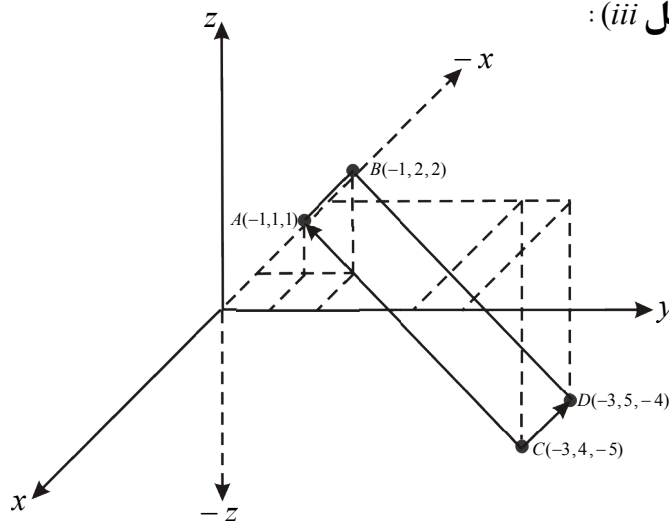
$$\overrightarrow{AC} = (6-1, -5-2, 2-(-1)) = (5, -7, 3) = 5i - 7j + 3k$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| &= |(3i - 2k) \times (5i - 7j + 3k)| = |15i \times i - 21i \times j + 9i \times k - 10k \times i + 14k \times j - 6k \times k| \\ &= |0 - 21k - 9j - 10j - 14i - 0| = |-14i - 19j - 21k| \end{aligned}$$

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-14)^2 + (-19)^2 + (-21)^2} = \sqrt{196 + 361 + 441} = \sqrt{998} = 31.591$$

مساحت د متوازي الاضلاع = 31.591

حل (iii) :



$$\begin{aligned} \overrightarrow{CD} &= (-3 - (-3), 4 - 5, -5 - (-4)) \\ &= (0, -1, -1) = -j - k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CA} &= (-3 - (-1), 4 - 1, -5 - 1) \\ &= (-2, 3, -6) = -2i + 3j - 6k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CD}| &= |(-2i + 3j - 6k) \times (-j - k)| \\ &= |-2k + 2(-j) + 3 \times 0 - 3j - 6(-i) + 6 \times 0| \\ &= 6i - 5j - 2k = \sqrt{6^2 + (-5)^2 + (-2)^2} \\ &= \sqrt{36 + 25 + 4} = \sqrt{65} = 8.062 \end{aligned}$$

مساحت د متوازي الاضلاع = 8.062 unit<sup>2</sup>

9: کوم وکتورونه عمود او کوم موازي دي؟

$$i) \vec{u} = 5i - j + k, \quad \vec{v} = j - 5k, \quad \vec{w} = -15i + 3j - 3k$$

$$ii) \vec{u} = i + 2j - k, \quad \vec{v} = i + j + k, \quad \vec{w} = -\frac{\pi}{2}\vec{i} + \frac{\pi}{2}\vec{j}$$

پوهېږو چې دوو  $\vec{u}$  او  $\vec{v}$  وکتورونو د سکالري ضرب حاصل عبارت دی له:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

اوس که چېرې  $\cos \theta = \pm 1$  وي، د  $\vec{u}$  او  $\vec{v}$  وکتورونه یو له بل سره موازي او که چېرې  $\cos \theta = 0$  شي، نوموړي وکتورونه یو پر بل عمود دي.

حل (i): ټول وکتورونه دوه پر دوه تر څېړنې لاندې نیسو:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{(5i - j + k)(j - 5k)}{\sqrt{5^2 + (-1)^2 + 1^2} \sqrt{1^2 + (-5)^2}} = \frac{-1 - 5}{\sqrt{25 + 1 + 1} \sqrt{1 + 25}} \\ &= \frac{-6}{\sqrt{27} \cdot 26} = \frac{-6}{26.49} = -0.226 \Rightarrow \cos \theta = -0.226 \end{aligned}$$

نو د  $\vec{u}$  او  $\vec{v}$  وکتورونه نه سره موازي او نه یو پر بل عمود دي.

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = |\vec{u}| \cdot |\vec{w}| \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{w}|}$$

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{(5i - j + k)(-15i + 3j - 3k)}{\sqrt{5^2 + (-1)^2 + 1^2} \sqrt{(-15)^2 + 3^2 + (-3)^2}} = \frac{-75 - 3 - 3}{\sqrt{27} \sqrt{243}} = \frac{-81}{\sqrt{27} \cdot 243} \\ &= \frac{-81}{\sqrt{6561}} = \frac{-81}{81} = -1 \Rightarrow \cos \theta = -1 \end{aligned}$$

څرنگه چې  $\cos \theta = -1$  دی، نو د  $\vec{u}$  او  $\vec{w}$  سره موازي خو جھتونه مخالف دي.

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|}$$

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{(j - 5k)(-15i + 3j - 3k)}{\sqrt{1 + (-5)^2} \sqrt{(-15)^2 + 3^2 + (-3)^2}} = \frac{3 + 15}{\sqrt{26} \sqrt{243}} = \frac{18}{\sqrt{26} \cdot 243} \\ &= \frac{18}{\sqrt{6381}} = \frac{18}{97.485} = 0.2265 \Rightarrow \cos \theta = 0.2265 \end{aligned}$$

څرنگه چې  $\cos \theta = 0.2265$  دي، نو د  $\vec{v}$  او  $\vec{w}$  وکتورونه نه سره موازي او نه یو پر بل عمود دي.

حل (ii):

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{(i+2j-k)(i+j+k)}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2} \sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{1+2-1}{\sqrt{1+4+1} \sqrt{1+1+1}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{6} \cdot 3} = \frac{2}{\sqrt{18}} = \frac{2}{4.242} = 0.4715 \Rightarrow \cos \theta = 0.4715 \end{aligned}$$

څرنگه چې  $\cos \theta = 0.4715$  دي، نو د  $\vec{u}$  او  $\vec{v}$  وکتورونه نه سره موازي او نه یو پر بل عمود دي.

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = |\vec{u}| \cdot |\vec{w}| \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{w}|}$$

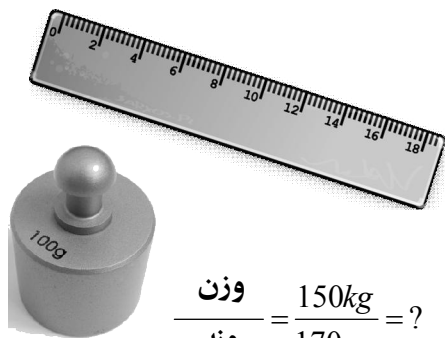
$$\cos \theta = \frac{(i+2j-k)(-\frac{\pi}{2}i + \frac{\pi}{2}j)}{\sqrt{6} \sqrt{\frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{4}}} = \frac{-\frac{\pi}{2} + \pi}{\sqrt{6} \sqrt{\frac{\pi^2}{2}}} = \frac{-\frac{\pi}{2}}{\sqrt{6} \cdot \frac{\pi}{2}} = \frac{-\frac{\pi}{2}}{\sqrt{3}\pi} = \frac{-\frac{\pi}{2}}{\pi\sqrt{3}} = \frac{-1}{2\sqrt{3}} \Rightarrow \cos \theta = \frac{-1}{2\sqrt{3}}$$

نو د  $\vec{u}$  او  $\vec{w}$  وکتورونه نه سره موازي او نه یو پر بل عمود دي.

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|}$$

$$\cos \theta = \frac{(i+j+k)(-\frac{\pi}{2}i + \frac{\pi}{2}j)}{\sqrt{1^2+1^2+1^2} \sqrt{\frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{4}}} = \frac{-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}}{\sqrt{3} \sqrt{\frac{\pi^2}{2}}} = \frac{0}{\sqrt{3} \sqrt{\frac{\pi^2}{2}}} \Rightarrow \cos \theta = 0$$

څرنگه چې  $\cos \theta = 0$  په لاس راغی، نو  $\vec{v}$  او  $\vec{w}$  وکتورونه یو پر بل عمود دي.



$$\frac{\text{وزن}}{\text{ونه}} = \frac{150\text{kg}}{170\text{cm}} = ?$$

## اتم څپرکی: احصائیه

د بدلونونو ضریب (Coefficient Variations)

د درسي کتاب (281-282) مخونه

د لوست وخت: (یو درسي ساعت)

<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- پوهنیزه</li> <li>- مهارتي</li> <li>- ذهنيتي</li> </ul> <p>زده کوونکي به د لوست په پای کې و توانېږي چې:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• د بدلون (تغیراتو) د ضریب په مفهوم پوه شي.</li> <li>• د یوې ټولني د بدلون ضریب پیدا کړای شي.</li> <li>• د بدلون د ضریب په مفهوم پوه او له محاسبې څخه یې په ورځني ژوند کې گټه واخلي او د خوښی احساس وکړي.</li> </ul>	
<p>2- د زده کړې لارې:</p> <p>پوښتنه او ځواب، ډله ییز او یوکسیزکار...</p>	
<p>3- مرستندویه مواد:</p> <p>د اړتیا وړ مواد...</p>	
<p>4- د وړودي برخې توضیح (5 دقیقې)</p> <p>بناغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته د زده کوونکو پام د کتاب وړودي برخې ته راوړوي او وپوښتي:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• څوک کولای شي چې و وایي که چیرې د یوې ټولني اندازه په متر او د بلې ټولني اندازه په کیلو گرام اندازه شوي وي ایا دا دوه ټولني سره د پرتلې (مقایسې) وړ دي.</li> <li>• څوک کولای شي و وایي چې دوه ټولني څه وخت یو د بل سره د پرتلې (مقایسې) وړ دي.</li> </ul> <p>همدارنگه د کتاب د وړودي شکل په اړه معلومات وغواړي او کوښښ وکړي چې ځوابونه له زده کوونکو څخه ترلاسه کړي، د ستونزو په صورت کې مرسته او معلومات ورکړي.</p>	

### 5- د لوست بهیر او فعالیت (28) دقیقې:

بناغلی ښوونکی یو داوطلب زده کوونکي ته دنده ورکړې چې په ټولگي کې لس تنه زده کوونکي ناڅاپه وټاکي، په همدې ډول یو بل زده کوونکی راوغواړي چې په ترتیب سره د دغو لس تنو زده کوونکو د ونې او وزن پوښتنه وکړي او پر تخته یې ولیکي؛ بیا نورو زده کوونکو ته و وایست چې هر تن دې د ونې او وزن اوسط او معیاري انحراف په خپلو کتابچو کې په لاس راوړي او له زده کوونکو وپوښتي؛ څوک کولای شي د تختې پر مخ د لیکلې ډېټا اوسط او معیاري انحراف په لاس راوړي؟ که چیرې داوطلب زده کوونکی پیدا شي اجازه ورکړې چې په لاس یې راوړي او د نه شتون په صورت کې تاسو پخپله د نوموړي ډېټا اوسط او معیاري انحراف په لاس راوړي وروسته دې زده کوونکي خپل حلونه د تختې له حل سره پرتله کړي.

په پای کې تاسو ورته د بدلون ضریب تعریف؛ یعنی د بدلون یا تغیراتو ضریب چې په C.V ښودل کېږي او له هغه نسبت

څخه عبارت دی چې د معیاري انحراف او اوسط له تقسیم څخه په لاس راځي او مطلق یو بې واحد عدد دی چې د دوو نامتجانسو ټولنو د پرتلې لپاره کارول کېږي او په سمبولیک ډول یې  $C \cdot V = \frac{S}{\bar{x}}$  پر تخته ولیکئ چې له لاس ته راغلي ډېټا اوسط او معیاري انحراف څخه پیدا شوی دی، نسبت یې په لاس راوړئ.

زده‌کوونکي په مناسبو ډلو ووېشي او د درسي کتاب (281) مخ فعالیت ورکړئ چې له بحث او خبرو وروسته د بدلون ضریب ولیکي او هره ډله دې په وار سره ځواب ووايي، د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړئ.

### 6- د زده‌کړې تحکیم: (7) دقیقې

د لوست د لاپوځوالي لپاره د درسي کتاب (282) مخ لومړی مثال د داوطلب زده‌کوونکي په واسطه حل کړئ او نور زده‌کوونکي دې په خپلو کتابچو کې د درسي کتاب له لیدو پرته حل کړي.

په پای کې دې زده‌کوونکي خپل حلونه د تختې له حل سره پرتله کړي.

پاملرنه وکړئ چې زده‌کوونکي اوسط او معیاري انحراف سم په لاس راوړای شي او که نه؟

د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړئ.

### 7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ددې لپاره چې ډاډمن شئ، ایا زده‌کوونکو لوست زده‌کړی دی او که نه؟ د لوست په اړوند له زده‌کوونکو څخه لاندې پوښتنې وکړئ او کوبنس وکړئ چې سم ځواب له زده‌کوونکو څخه ترلاسه کړئ:

1. دیوې ټولني د بدلون ضریب څه مفهوم لري؟
2. که چیرې دیوې ټولني د بدلون ضریب زیات وي دا په څه معنا ده؟
3. که چیرې ټوله ډېټا سره برابره وي، د بدلون ضریب مساوي له څو سره کېږي؟

### 8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات:

ښاغلی ښوونکی کوم فرمول چې د بدلون ضریب لپاره په درسي کتاب کې لیکل شوی دی او دوه مثالونه هم په همدې اړوند حل شوي دي، که چیرې ډېټا د فریکونسي ډیو جدول په شکل راکړل شوی وي یا زده‌کوونکي پوښتنه وکړه چې د دغه جدول د بدلون ضریب څرنګه محاسبه کولای شو، د دې پوښتنې د ځواب لپاره بیا هم د بدلون د ضریب فرمول په پام کې نیسو چې  $C \cdot V = \frac{S}{\bar{x}}$  دی،  $S$  معیاري انحراف او  $\bar{x}$  اوسط ښيي.

د فریکونسي ډ جدول اوسط د  $\bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i}$  فرمول په واسطه لاسته راځي، چې  $x_i$  د دستو (ګډیو) مرکز  $f_i$  یې اړونده

فریکونسي ښيي یا په بل عبارت  $\bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + \dots + x_n f_n}{f_1 + f_2 + \dots + f_n}$  او د فریکونسي ډ جدول معیاري انحراف د

فرمول په واسطه محاسبه کوو او  $S = \sqrt{\frac{f_1(x_1 - \bar{x})^2 + f_2(x_2 - \bar{x})^2 + \dots + f_n(x_n - \bar{x})^2}{f_1 + f_2 + \dots + f_n}} = \sqrt{\frac{\sum f_i(x_i - \bar{x})^2}{\sum f_i}}$

وروسته له محاسبې څخه د بدلون ضریب د  $C \cdot V = \frac{S}{\bar{x}}$  فرمول په واسطه په لاس راوړو.



## 9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

1. دلاندې ډېټا د بدلونونو یا تغیراتو ضریب حساب کړئ؟

1 3 4 5 6

**حل** پوهېږو چې د بدلونونو یا تغیراتو د ضریب فرمول عبارت دی؛ له  $C \cdot V = \frac{S}{\bar{x}}$  چې په ذکر شوي فرمول کې  $S$  معیاري

انحراف او  $\bar{x}$  اوسط ښیي.

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{1+3+4+5+6}{5} = \frac{19}{5} = 3\frac{4}{5} = 3.8$$

$$S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{(1-3.8)^2 + (3-3.8)^2 + (4-3.8)^2 + (5-3.8)^2 + (6-3.8)^2}{5}$$

$$S^2 = \frac{(-2.8)^2 + (-0.8)^2 + (0.2)^2 + (1.2)^2 + (2.2)^2}{5} = \frac{7.84 + 0.64 + 0.04 + 1.44 + 4.84}{5} = \frac{14.8}{5}$$

$$S^2 = 2.96 \Rightarrow S = \sqrt{2.96}$$

$$C \cdot V = \frac{S}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{2.96}}{3.8} = \frac{1.72}{3.8} = 0.452$$

که د تغیراتو ضریب په 100 کې ضرب شي، د تحول ضریب په لاس راځي:

$$C \cdot V = \frac{\sqrt{2.96}}{3.8} \cdot 100 = 0.452 \cdot 100 = 45.2\%$$

2. که چیرې اوسط مساوي په 4 او معیاري انحراف مساوي په 6 وي، د بدلون یا تغیراتو ضریب څو دي؟

**حل:**

$$\left. \begin{array}{l} \bar{x} = 4 \\ S = 6 \\ C \cdot V = ? \end{array} \right\}$$

$$C \cdot V = \frac{S}{\bar{x}}$$

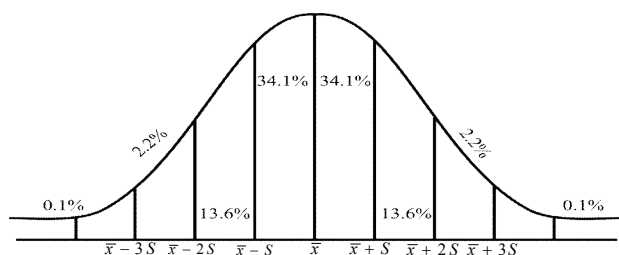
$$C \cdot V = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2} = 1.5$$

3. ستاسو د ټولګي د زده‌کوونکو د سن د بدلون ضریب 10 کاله وروسته څومره تغیر یا بدلون کوي؟ کمېږي او که

ډېرېږي؟

4. **حل** څرنگه چې د ټولګي د زده‌کوونکو شمېر تغیر نه کوي او سن یې لوړېږي، په دې معنا چې اوسط یې زیاتېږي؛ نو د

بدلون یا تغیراتو ضریب کمېږي.



## اتم څپرکی: احصائیه

په نورمال منحنی کې تبتوالی (پراگنده گی)

د درسي کتاب (283-284) مخونه

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• زده کوونکي به د لوست په پای کې و توانېږي چې:</li> <li>• د نورمال منحنی، پراگندگی (تبتوالی) په مفهوم پوه شي.</li> <li>• د نورماله منحنی او غیر نورمالې منحنی توپیر وکړای شي.</li> <li>• د پورته پوهې او مهارت په پیدا کولو سره په ځان باور پیدا کړي.</li> </ul>	<p>- پوهنیزه</p> <p>- مهارتي</p> <p>- ذهنيتي</p>
<p>2- د زده کړې لارې:</p> <p>پوښتنه او ځواب، ډلېز او یو کسيزکار . . . .</p>	
<p>3- مرستندويه مواد:</p> <p>د اړتیا وړ مواد . . . .</p>	
<p>4- د وړودي برخې</p> <p>توضیح (5 دقیقې)</p> <p>ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته د زده کوونکو پام د کتاب وړودي برخې ته راواړوي او په نورمال منحنی کې د ډېټا د توزیع سلنه په بېلو بېلو انټروالونو کې وښیاست او داسې پوښتنه وکړي، که چیرې د ټولې ډېټا توزیع د یوې نورمال منحنی په شکل وي؛ څومره ډېټا په <math>(\bar{x} - S, \bar{x} + S)</math> انټروال کې او څو سلنه ډېټا په <math>(\bar{x} - 2S, \bar{x} + 2S)</math> انټروال کې پرته ده.</p> <p>کوبښښ وکړي چې ځوابونه له زده کوونکو څخه په لاس راوړي، له هغه پرته تاسو ورسره مرسته وکړي.</p>	
<p>5- د لوست بهیر او فعالیت (28) دقیقې:</p> <p>ښاغلی ښوونکی زده کوونکي په مناسبو ډلو و وېشي په کتاب کې د A او B شرکت د حقوقو د تادیبې گراف په بېل بېل ډول پر تخته رسم کړي او له زده کوونکو وغواړي چې هره ډله دې د گراف له مخې د شرکتونو د تادیبې په اړه بحث وکړي او ووايي چې کوم شرکت د حقوقو په ورکړه کې زیاته پراگندگی لري، وروسته د هرې ډلې استازی دې خپل سرته رسولی فعالیت نورو ته تشریح کړي، د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړي.</p> <p>د موضوع د مهم والی له امله تاسو هم په بشپړه توگه د نورمالې توزیع په هکله گام په گام توضیحات ورکړي، داسې چې که چیرې مونږ د یوې ټولني راتول شوې ډېټا د یوې منحنی په شکل سره وښیو، دغه منحنی به کوم شکل غوره کړي او د منحنی نورمال حالت مونږ ته د ډېټا په هکله کوم معلومات راکولای شي.</p> <p>بیا دوه داوطلب زده کوونکي په وار سره تختې ته راوغواړي چې هر یو په ترتیب سره د درسي کتاب د مثال د لومړی او دویم جزونه پر تخته حل کړي او نور زده کوونکي دې هم نوموړی مثال په خپلو کتابچو کې د کتاب له لیدو پرته حل کړي که چیرې د تختې په حل کې څه ستونزه وي د یو بل داوطلب زده کوونکي په مرسته یې اصلاح کړي، تاسو مرسته وکړي او په پای کې دې زده کوونکي خپل حلونه د تختې له حل سره پرتله او تېروتنې دې اصلاح کړي.</p>	

**6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې**

بناغلی بنوونکی د لوست د لاپو خوالي لپاره د درسي کتاب د (283) مخ فعالیت په لاندې ډول زده‌کوونکو ته ورکړي، چې په خپلو کتابچو کې یې حل کړي:

1. په اوسط ډول دکوم شرکت د حقوقو تادیه ډېره ده؟
  2. کوم شرکت د حقوقو د تادیه په میزان کې خپلو کارکوونکو ته لږه پراگندګي لري؟
  3. د دواړو شرکتونو د حقوقو تادیات سره پرتله کړئ؟
- تاسو د کار څارنه وکړئ او په پای کې یو داوطلب زده‌کوونکی دې نوموړي پوښتنې پر تخته حل کړي او نور زده‌کوونکي دې خپل حلونه ورسره پرتله کړي.

**7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې**

ددې لپاره چې ډاډمن شئ، ایبا زده‌کوونکو لوست زده کړی دی او که نه؟ د لوست په اړوند له زده‌کوونکو څخه لاندې پوښتنې وکړئ او کوبښنې وکړئ چې سم ځواب له زده‌کوونکو څخه ترلاسه کړئ:

- د نورمال توزیع منحنی په  $(\bar{x} - S, \bar{x} + S)$  انټروال کې څو سلنه ډېټا پرتله ده؟
- د نورمال منحنی په  $(\bar{x} - 2S, \bar{x} + 2S)$  انټروال کې څومره ډېټا پرتله ده؟
- د نورمال منحنی په  $(\bar{x} - 3S, \bar{x} + 3S)$  انټروال کې څوسلنه (فیصده) ډېټا پرتله ده؟
- په یوه نورمال منحنی کې له  $2S$  ډېر انحراف او له  $3S$  څخه زیات انحراف د څه شي په معنا ده؟
- هغه ډېټا چې د  $3S$  په اندازه له اوسط څخه واټن ولري دکوم ډول ډېټا په نوم یادېږي؟

**8- د بنوونکي لپاره اضافي معلومات:**

بناغلی بنوونکی پوهانو نارمل منحنی د یو مودول په شکل منلي او د مشاهدو او د ناڅاپي پېښو د پایلو له مخې یې د خطاګانو قانون ته پراختیا ورکړې ده، په لومړۍ پړاو کې د خطاګانو قانون محض د عمومياتو د یوې مجموعې په شکل چې په اکثر مواردو او حادثاتو کې به یې صدق کاوه، منلی وه Abraham Demoiver (1667-1745م) تقریباً دوه سوه کاله د مخه کله چې د نارمل منحنی معادله استخراج کړه، د خطاګانو قانون یې د ریاضي په شکل تعریف کړ.

**د نارمل منحنی معادله:** د متحولینو ترمنځ د اړیکې څېړل په حقیقت کې د علمي فعالیتونو اساسي موضوع ده او هره تابع دا ډول اړیکې (رابطې) افاده کوي، پوهېږو چې یوه تابع معمولاً د  $y = f(x)$  په شکل ښودل کېږي دا فرمول نښي چې  $y$  د  $x$  تابع ده.

د نارمل منحنی گراف د ریاضي یوه ستونزمنه تابع ده چې د منحنی ګانو یو صنف ورکوي او شمېر یې بې‌نهایت زیات دی چې

د حسابي اوسط او معیاري انحراف په قیمتونو سره ټاکل کېږي، د نارمل منحنی معادله دا ده: 
$$y = \frac{1}{S\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2S^2}}$$
 په دې تابع کې:

- $y$ : د منحنی جگوالی دی چې د  $x$  له یوه ټاکلي قیمت سره تطابق کوي.
- $x$ : یو عدد یا رقم (په ازموینه کې نمره) ده چې د  $y$  له یو ټاکلي قیمت سره مطابقت کوي.
- $\bar{x}$ : د  $x$  متحول حسابي اوسط دی.

$S$ : د  $x$  متحول معیاري انحراف دی.

$\pi$ : یو ثابت عدد دی چې عددی قیمت یې تقریباً... 3.1416 دی.

$e$ : یو ثابت عدد دی چې عددی قیمت یې تقریباً... 2.7183 دی.

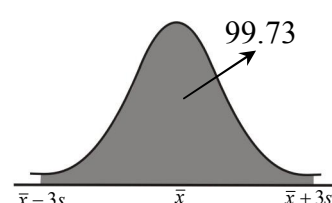
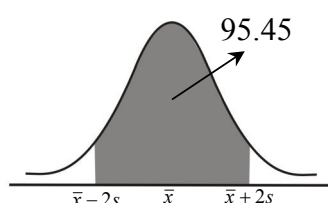
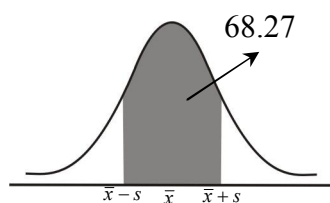
### 9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

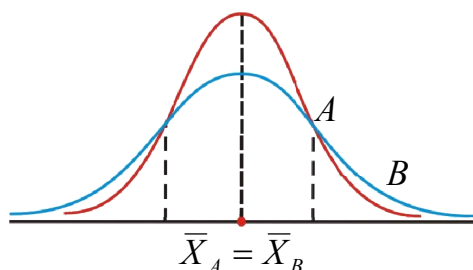
که چیرې 68.28% فیصده مشاهدات د  $(\bar{x} - S, \bar{x} + S)$  په فاصله کې پراته وي، ایا ویلای شئ، چې

95.45% او 99.73% مشاهدات په کومه فاصله کې قرار لري؟ انټروالونه له نورمالې منحني سره وښایاست؟

**حل:** ویلای شو چې 95.45% مشاهدات په  $(\bar{x} - 2S, \bar{x} + 2S)$  انټروال کې پراته دي او 99.73% مشاهدات په

$(\bar{x} - 3S, \bar{x} + 3S)$  واکون (فاصله) کې پراته دي او گرافونه یې په لاندې ډول دي:





## اتم څپرکی: احصائیه

د نورمال توزیع د ډول شاخصونه

د درسي کتاب (285) مخ

د لوست وخت: (یو درسي ساعت)

<p>زده کوونکي به دلوست په پای کې و توانېږي چې:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• د نورمالې توزیع په شاخصونو او د هغوی د موقعیت په مفهوم پوه شي.</li> <li>• د نورمالې توزیع توپیر له غیرنورمالې توزیع سره وکړای شي.</li> <li>• د اړتیا په وخت کې لاس ته راغلي فرمول او نورې اجزاوې یې پیدا کړای شي او ورسره د خوښی احساس وکړي.</li> </ul>	<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- پوهنیزه</li> <li>- مهارتي</li> <li>- ذهنيتي</li> </ul>
<p>پوښتنه او ځواب، ډله ییز او یو کسيزکار ...</p>	<p>2- د زده کړې لارې:</p>
<p>د اړتیا وړ مواد ...</p>	<p>3- مرستندويه مواد:</p>
<p>ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته یو ځل بیا د زده کوونکو پام د تېر لوست شکل ته راوگرځوی او پوښتی:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• د نورمالې توزیع منحنی کوم شکل لري او څه وخت متناظره بلل کېږي؟</li> <li>• ددې لپاره چې د یوې احصایوي مجموعې اطلاعات متناظر د مثبت او منفي اشارو لرونکی وي؛ نو له کوم ډول منحنی څخه باید کار واخلو؟</li> <li>• ایا ویلای شئ چې اوسط، وسط او موډ په نورماله توزیع کې چیرې موقعیت لري؟</li> </ul> <p>ښایي چې زده کوونکي ځوابونه ووايي له هغه پرته تاسو ځوابونه ورته ووايست او دلوست بهیر پیل کړئ.</p>	<p>4- د ورودی برخې توضیح (5 دقیقې)</p>
<p>5- د لوست بهیر او فعالیت (28) دقیقې:</p> <p>ښاغلی ښوونکی زده کوونکي په مناسبو ډلو ووېشئ ورته ووايست چې د درسي کتاب (285) مخ فعالیت پخپلو ډلو کې له بحث او خبرو وروسته سرته ورسوي. د فعالیت د سرته رسولو په پای کې دې د هرې ډلې استازی خپل فعالیت نورو ته توضیح او تشریح کړي، د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړئ په پای کې تاسو موضوع داسې تشریح کړئ:</p> <p>هغه توزیع چې د اوسط په دواړو خواوو متناظره نه وي، خمېدل نومېږي چې په لاندې دوو ضریبونو سره ښودل کېږي:</p> $\alpha_3 = \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^3 / S^3 \quad \text{الف)}$ <p>یاوې د پرتله کولو لپاره ترې کار اخېستل کېږي که <math>\alpha_3 = 0</math> وي؛ نو توزیع متناظره ده او که <math>\alpha_3 &gt; 0</math> وي، توزیع مثبت خمېدگي <i>Positive skewness</i> لري، یعنې د توزیع منحنی ښی لوري ته پرته ده او که <math>\alpha_3 &lt; 0</math> وي؛ نو د توزیع منحنی کښې خوا ته خمېدگي لري.</p>	

(ب)  $SK_{(P)} = \frac{3(\bar{x} - med)}{S}$  دا فرمول د پیرسن د فرمول په نامه یادېږي، په متناظره توزیع کې د پیرسن د خمېدلو ضریب مساوي له صفر سره دی که  $SK_{(P)} > 0$  وي، د توزیع منحنی ښي لوري ته پرته ده او که  $SK_{(P)} < 0$  وي، د توزیع منحنی کینې لوري ته پرته ده.

یوه داوطلب زده‌کوونکي ته بلنه ورکړې چې د  $\{6, 9, 5, 4, 3, 12, 19, 30\}$  ډېټا د خمېدلو میزان د  $\alpha_3$  په واسطه په لاس راوړي او نور زده‌کوونکي دې په خپلو کتابچو کې حل کړي، په پای کې دې زده‌کوونکي خپل حلونه د تختې له حل سره پرتله کړي، د تېروتنې په صورت کې ورسره مرسته او لاروښوونه وکړي.

### 6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

ښاغلي ښوونکی د لوست د لا پوځوالي لپاره له زده‌کوونکو څخه په وار سره وپوښتي:

1. هغه توزیع چې د اوسط په دواړو خواوو کې متناظره نه وي په څه نوم یادېږي؟
  2. هغه شاخص چې د توزیع حالت څرگندوي په څو ډوله دی؟
  3. که چیرې  $\alpha_3 > 0$  وي، توزیع څه ډول توزیع ده؟
  4. که چیرې  $\alpha_3 = 0$  وي، توزیع کوم حالت لري؟
  5.  $SK_{(P)}$  د څه شي شاخص دی او په کوم نوم یادېږي؟
  6. که چیرې  $SK_{(P)} < 0$  وي، د توزیع حالت څرگند کړئ؟
  7. که چیرې  $SK_{(P)} = 0$  وي اوسط، وسط او موډیو له بل سره څه ډول اړیکه لري؟
  8. که چیرې  $SK_{(P)} > 0$  وي ایا اوسط او وسط یو له بل سره برابر دي؟
- د ځواب نه ویلو په صورت کې ښوونکی دې ورته تشریح او توضیح کړي.

### 7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ددې لپاره چې ډاډمن شي، ایا زده‌کوونکو لوست زده کړی دی او که نه؟ د لوست په اړوند له زده‌کوونکو څخه لاندې پوښتنې وکړئ او کوښښ وکړئ چې سم ځواب له زده‌کوونکو څخه ترلاسه کړئ:

- یوه توزیع څه وخت نورماله توزیع ده؟
- د پیرسن فرمول څه رابښي؟ ویې لیکئ.
- که چیرې د  $\alpha_3$  په فرمول کې  $x_i = \bar{x}$  سره شي د توزیع منحنی کوم حالت لري؟

### 8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات:

ښاغلی ښوونکی د خمېدلو کوم فرمول چې په درسي کتاب کې تشریح شوی دی د خامې ډېټا لپاره صدق کوي خو که چیرې د فریکونسي جدول درکړل شوی وي او د خمېدلو ضریب پیدا کول مطلوب وي د هغې لپاره د  $\alpha_3$  فرمول داسې بڼه (شکل)

لري  $\alpha_3 = \frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^3}{S^3}$  چې د لته  $f_i$  د اړوندو صنډونو فریکونسي ښيي او پراختیایي شکل یې په لاندې ډول دی:

$$\alpha_3 = \frac{1}{n} \frac{[f_1(x_1 - \bar{x})^3 + f_2(x_2 - \bar{x})^3 + \dots + f_n(x_n - \bar{x})^3]}{S^3}$$

مهمه خبره دا ده چې د پیرسن ضریب د خمېدگي بڼه شاخص دی؛ یعنی  $SK_{(P)} = \frac{3(\bar{x} - med)}{S}$  فرمول کې له  $med$  څخه کار اخیستل شوي او په درسي کتاب کې  $med$  د خامې ډېټا لپاره کار شوی مگر د فریکونسي جدول لپاره نه دی کار شوی دا به د راتلونکي لوست په اضافي معلوماتو کې توضیح شي چې څرنگه کولای شو د فریکونسي جدول لپاره  $med$  په لاس راوړو او همدارنگه که چیرې توزیع نارمل وي؛ نو:  $SK_{(P)} = 0$

$$SK_{(P)} = 0 \Rightarrow \frac{3(\bar{x} - med)}{S} = 0 \Rightarrow 3\bar{x} - 3med = 0$$

$$3\bar{x} = 3med \Rightarrow \bar{x} = med$$

یعني په نورمال توزیع کې اوسط له وسط سره برابر دی.

همدارنگه که چیرې توزیع بڼي لوري ته خمېدگي ولري؛ یعنی  $SK_{(P)} > 0$  دی نو په دې حالت کې اوسط له وسط څخه لوی دی:

$$SK_{(P)} > 0 \Rightarrow \frac{3(\bar{x} - med)}{S} > 0 \Rightarrow 3\bar{x} - 3med > 0 \Rightarrow \bar{x} > med$$

او که چیرې توزیع کین لوري ته خمېدگي ولري په دې معنی چې  $SK_{(P)} < 0$  دی؛ نو اوسط له وسط څخه کوچنی دی:

$$SK_{(P)} < 0 \Rightarrow \frac{3(\bar{x} - med)}{S} < 0 \Rightarrow 3\bar{x} - 3med < 0 \Rightarrow \bar{x} < med$$

### 9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

د یوه ټولگي د زده‌کوونکو د احصایې د مضمون نمړې په لاندې ډول ورکړ شوي دي، د پیرسون د پړسوب ضریب حساب کړئ:

نمړې	د زده‌کوونکو شمېر
40-50	4
50-60	6
60-70	10
70-80	4
80-90	4
90-100	2

**حل:** په لومړي ځل د خمېدلو ضریب په لاس راوړو:

$$\alpha_3 = \frac{\frac{1}{n} \sum f_i (x_i - \bar{x})^3}{S^3}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{4 \cdot 45 + 6 \cdot 55 + 10 \cdot 65 + 4 \cdot 75 + 4 \cdot 85 + 2 \cdot 95}{4 + 6 + 10 + 4 + 4 + 2} = \frac{1990}{30} = 66 \frac{1}{3} = 66.3$$

$$S^2 = \frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum f_i} = \frac{4(45 - 66.3)^2 + 6(55 - 66.3)^2 + 10(65 - 66.3)^2 + 4(75 - 66.3)^2 + 4(85 - 66.3)^2 + 2(95 - 66.3)^2}{30}$$

$$= \frac{4 \cdot 453.7 + 6 \cdot 127.7 + 10 \cdot 1.7 + 4 \cdot 75.7 + 4 \cdot 349.7 + 2 \cdot 823.7}{30}$$

$$= \frac{1814.8 + 766.2 + 17 + 302.8 + 1398.8 + 1647.4}{30} = \frac{5947}{30} = 198.23 \Rightarrow \boxed{S = 14.07}$$

$$\sum f_i (x_i - \bar{x})^3 = 4(45 - 66.3)^3 + 6(55 - 66.3)^3 + 10(65 - 66.3)^3 + 4(75 - 66.3)^3 + 4(85 - 66.3)^3 + 2(95 - 66.3)^3$$

$$= 4 \cdot 9663.6 + 6 \cdot 1442.9 + 10 \cdot 2.2 + 4 \cdot 658.5 + 4 \cdot 6539.2 + 2 \cdot 23639.9$$

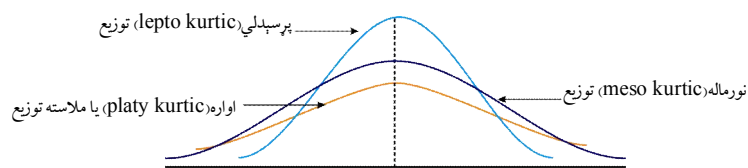
$$= 38654.4 + 8657.4 + 22 + 2634 + 26156.8 + 47279.8 = 123404.4$$

$$\frac{1}{n} \sum f_i (x_i - \bar{x})^3 = \frac{123404.4}{30} = 4113.48$$

$$\alpha_3 = \frac{\frac{1}{n} \sum f_i (x_i - \bar{x})^3}{S^3} = \frac{4113.48}{(14.07)^3} = \frac{4113.48}{2785.36} = 1.47$$

خرنگه چې  $\alpha_3 > 0$  دی؛ نو منحني بني لوري ته خمېدگي (*positive skewness*) لري.





## اتم څپرکی: احصائیه

د پرسوب (kurtosis) شاخص

د درسي کتاب (286) مخ

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- پوهنيزه</li> <li>- مهارتي</li> <li>- ذهنيته</li> </ul> <p>زده کوونکي به د لوست په پای کې و توانېږي چې:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• د پرسوب د شاخص په مفهوم پوه شي.</li> <li>• د توزیع منحني تشخیص کړای شي.</li> <li>• د پورته پوهې په درلودلو سره د موضوع په اړه ورځنی ستونزې حل او په ځان باور پیدا کړي.</li> </ul>	
<p>2- د زده کړې لارې:</p> <p>پوښتنه او ځواب، ډله ییز او یو کسيز کار...</p>	
<p>3- مرستندويه مواد:</p> <p>د 286 مخ د شکل چارټ ...</p>	
<p>4- د وړودي برخې توضیح (5 دقیقې)</p> <p>بناغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته یو ځل بیا د زده کوونکو پام د تېر لوست شکل ته راوگرځوی او وپوښتی:</p> <p>په تېرو لوست کې مو د توزیع د منحني نورمال حالت د توزیع د منحني خمېدل ښي لورته او کيڼ لوري ته او اړوند شاخصونه مو مطالعه کړل، اوس یو بل شاخص چې د نورمال منحني جگوالی او تېټ والی پرې څرگندېږي، تر څېړنې لاندې نیسو، له زده کوونکو وپوښتی:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• څوک ویلای شي چې د منحني لوړوالی او تېټ والی په کومو کمیتونو پورې اړه لري؟</li> </ul> <p>ښایي چې زده کوونکي ځواب ونه وایي له هغه پرته تاسو ځواب ورته وایاست او د لوست بهیر پیل کړئ.</p>	
<p>5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې):</p> <p>بناغلی ښوونکی زده کوونکي په مناسبو ډلو و وېشي ورته وایاست که چیرې د توزیع منحني د یوې ډېټا لپاره رسم شي جگوالی او تېټ والی یې په څه پورې اړه لري، په (داسې حال کې چې د منحني خمېدگی ښي او کيڼ لوري ته د پوښتنې وړ نه ده)، جگوالی یې په ډېټا کومه اغېزه لري او هغه درې شاخصونه چې عبارت دي له اوسط، وسط او موډ څخه ایا په دغه ډول منحني کې سره برابر دي او که نه؟</p> <p>زده کوونکي له کتاب څخه گټه نه اخلي، په خپلو ډلو کې دې بحث ورباندې وکړي او فعالیت دې سرته ورسوي، په پای کې د هرې ډلې استازی دې خپل کارونه نور وروته توضیح کړي، د تېروتنې په صورت کې مرسته وکړئ که چیرې ټولو ډلو تېروتنې کړي وي؛ نو تاسو ورته توضیح او تشریح ورکړئ:</p>	

د منحنی د جگوالی او تېټ والی لپاره یو بل شاخص چې په لاندې ډول دی:

$$\alpha_4 = \frac{\frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^4}{S^4} = \frac{\frac{1}{n} [(x_1 - \bar{x})^4 + (x_2 - \bar{x})^4 + (x_3 - \bar{x})^4 + \dots + (x_n - \bar{x})^4]}{S^4}$$

ترې کار اخیستل کېږي او د منحنی جگوالی او تېټ والی پرې تشخیص کېږي؛ یعنې که  $\alpha_4 = 3$  وي؛ د توزیع منحنی نارمل حالت لري او که چیرې  $\alpha_4 < 3$  وي؛ منحنی د نارمل منحنی په پرتله تېټ والی لري او که  $\alpha_4 > 3$  وي؛ منحنی د نارمل منحنی په پرتله جگوالی لري.

#### 6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

بناغلی بنوونکی د لوست د لا پوخوالي او پیاړتیا د درسي کتاب 286 مخ مثال زده کوونکو ته ورکړې چې د درسي کتاب له لیدلو پرته یې په خپلو کتابچو کې حل کړي، د کار څارنه وکړي، په پای کې دې یو داوطلب زده کوونکی نوموړي مثال پر تخته حل کړي او نور زده کوونکي دې خپل حلونه د تخته له حل سره پرتله کړي، تاسو وگورئ که چیرې زده کوونکو د مثال له حل سره ستونزې درلودې، تاسو نوموړی مثال پر تخته حل کړي.

#### 7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ددې لپاره چې ډاډمن شئ، چې ایا زده کوونکو لوست زده کړی دی او که نه؟ د لوست په اړوند له زده کوونکو څخه لاندې پوښتنې وکړئ او کوښښ وکړئ چې سم ځوابونه له زده کوونکو څخه ترلاسه کړئ:

- که چیرې  $\alpha_4 = 3$  وي؛ د توزیع منحنی کوم شکل ځانته غوره کوي؟
- که چیرې  $\alpha_4 > 3$  وي؛ د توزیع منحنی د نارمل منحنی په پرتله جگوالی لري او که تېټ والی لري؟
- که چیرې  $\alpha_4 < 3$  وي؛ د توزیع منحنی د نارمل منحنی په پرتله جگوالی لري او که تېټ والی لري؟

#### 8- د بنوونکي لپاره اضافي معلومات:

بناغلی بنوونکی په درسي کتاب کې د منحنی د جگوالي او تېټ والی لپاره یو مثال کار شوی او هغه هم د خامې ډېټا لپاره، که چیرې د کثرت جدول موجود وي، د منحنی د جگوالي او تېټ والی شاخص ( $\alpha_4$ ) د لاندې فرمول په واسطه چې  $f_i$  د اړوندو صنفونو فریکونسي نښې په لاس راځي:

$$\alpha_4 = \frac{\frac{1}{n} \sum f_i (x_i - \bar{x})^4}{S^4} = \frac{\frac{1}{n} [f_1 (x_1 - \bar{x})^4 + f_2 (x_2 - \bar{x})^4 + f_3 (x_3 - \bar{x})^4 + \dots + f_n (x_n - \bar{x})^4]}{S^4}$$

او بله مهمه خبره دا ده چې په پوښتنو کې د فریکونسي جدول درکړل شوی او د پیرسن ضریب غوښتل شوی چې په نوموړي فرمول کې وسط ( $med$ ) ته اړتیا ده او وسط د فریکونسي په جدول کې نه دی تطبیق شوی، نو که چیرې د فریکونسي جدول

$$med = L + C \left( \frac{\frac{N}{2} - fc}{fm} \right) \text{ : په لاس راځي: له لاندې فرمول څخه په لاس راځي:}$$

چې په پورتنی فرمول کې:

$L$ : د وسط د صنف ټيکنی سرحد دی.

$C$ : د وسط د صنف وسعت دی.

$N$ : د ټول جدول مجموعي فریکونسي ټيکنی.

$fc$ : د وسط صنف تجمعي فریکونسي ده.

$fm$ : د وسط صنف فریکونسي ده.

**نوټ** د وسط صنف له هغه لومړنی صنف څخه عبارت دی چې د هغه تجمعي فریکونسي له  $\frac{N}{2}$  څخه زیاته وي.

### 9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

په تیر لوست کې مو د خمېدګي اړوند پوښتنې حل کړي، هغه پوښتنې چې په جګوالي پورې اړه لري په لاندې ډول یې حلوو.

**حل:** اوس د پرسوب (kurtosis) ضریب په لاس راوړو:

$$\alpha_4 = \frac{\frac{1}{n} \sum f_i (x_i - \bar{x})^4}{S^4}$$

$$\sum f_i (x_i - \bar{x})^4 = 4(45 - 66.3)^4 + 6(55 - 66.3)^4 + 10(65 - 66.3)^4 + 4(75 - 66.3)^4 + 4(85 - 66.3)^4 + 2(95 - 66.3)^4$$

$$= 823338.46 + 97828.41 + 28.56 + 22915.90 + 489132.38 + 1356930.43 = 2790174.14$$

$$\frac{1}{n} \sum f_i (x_i - \bar{x})^4 = \frac{2790174.14}{30} = 93005.80$$

$$\alpha_4 = \frac{\frac{1}{n} \sum f_i (x_i - \bar{x})^4}{S^4} = \frac{93005.80}{(14.07)^4} = \frac{93005.80}{39190.10}$$

$$\alpha_4 = 2.37$$

څرنگه چې  $\alpha_4 < 3$  دی؛ نو نظر نورمال منحنی ته د منحنی پرسوب کم دی؛ یعنې نظر نارمل منحنی ته ټیټوالی لري.

اوس د پیرسن د خمېدګي (خمېدل) ضریب په لاس راوړو او پوهېږو چې دریم صنف د وسط صنف دی، ځکه تجمعي

فریکونسي یې له  $\frac{N}{2}$  څخه زیاته ده.

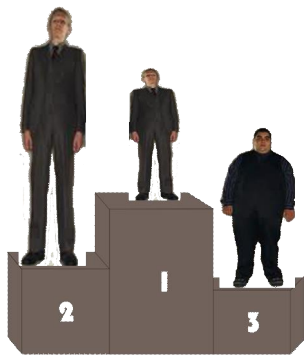
$$\left. \begin{array}{l} N = 30 \Rightarrow \frac{N}{2} = 15 \\ fc = 10 \\ fm = 10 \\ L = 60 \\ C = 10 \end{array} \right\} \begin{array}{l} SK_{(P)} = \frac{3(\bar{x} - med)}{S} \\ med = L + C \left( \frac{\frac{N}{2} - fc}{fm} \right) \end{array}$$

$$med = 60 + 10 \left( \frac{15 - 10}{10} \right) = 60 + 5 = 65$$

$$SK_{(P)} = \frac{3(\bar{x} - med)}{S} = \frac{3(66.3 - 65)}{14.07} = \frac{3(1.3)}{14.07} = \frac{3.9}{14.07}$$

$$SK_{(P)} = 0.277$$

څرنگه چې  $SK_{(P)} = 0.277 > 0$  دی؛ نو د توزیع منحنی مثبت خمېدګي یا ټيکنی لوري ته پرته ده.



## اتم څپرکی: احصائیه

څو متحوله ټولنې

د درسي کتاب (287-288) مخونه

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- پوهنيزه</li> <li>- مهارتي</li> <li>- ذهنيته</li> </ul> <p>زده کوونکي به د لوست په پای کې و توانېږي چې:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• د څو متحوله ټولنې په مفهوم پوه شي.</li> <li>• يو متحوله، دوه متحوله، درې متحوله... ټولنې يو له بل څخه توپير وکړای شي.</li> <li>• د دوه متحوله ټولنې د متحولينو ترمنځ د اړیکې له پيدا کولو څخه په خپل ورځني ژوند کې کار واخېلستلای او ورڅخه خوښي ښکاري کړي.</li> </ul>	
<p>2- د زده کړې لارې:</p> <p>پوښتنه او ځواب، ډله یيز او يو کسيز کار....</p>	
<p>3- مرستندويه مواد:</p> <p>د وروډي شکل چارټ(د اړتيا مواد)....</p>	
<p>4- د وروډي برخې توضیح(5 دقیقې)</p> <p>ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته د زده کوونکو پام د درسي کتاب وروډي شکل ته چې تاسو ورته د چارټ په شکل تنظيم کړی راوگرځوئ، بیا داسې وپوښتئ:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• په څوړند شوي چارټ کې څه شی وینئ؟</li> <li>• که چیرې د یوه تن وزن معلوم وي کولای شی د ونې اندازه یې وټاکئ؟</li> <li>• که چیرې د یوه تن د ونې اندازه معلومه وي، ایا کولای شی وزن یې پیدا کړئ؟</li> <li>• دغه ټولنه څو متحولین لري؟ او کوم دي؟</li> </ul> <p>کوبنسېن وکړئ چې څو اوبونه له زده کوونکو څخه په لاس راوړئ له هغه پرته تاسو ورته لارښوونه او مرسته وکړئ او خپل درسي بهیر پیل کړئ.</p>	
<p>5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې):</p> <p>ښاغلی ښوونکی زده کوونکي په مناسبو ډلو و وېشئ د درسي کتاب 287 مخ فعالیت ورکړی چې له خبرو او بحث وروسته یې سرته ورسوي، د فعالیت د سرته رسولو په وخت کې څارنه او د ستونزو په صورت کې مرسته وکړئ، په پای کې د هرې ډلې استازی دې خپل سرته رسولی فعالیت نورو ته د یوه مثال په ورکولو سره توضیح کړي که کومې ډلې تېروتنه کړي وي، تېروتنه یې د بلې ډلې په واسطه اصلاح کړي، بیا یې تاسو داسې تشریح کړئ:</p> <p>څو متحوله ټولنې له هغو ټولنو څخه عبارت دی چې په هغو کې څو متحولین موجود وي هر هغه شی چې د اندازې وړ وي متحول بلل کېږي؛ خو په دغه لوست کې موږ دوه متحوله ټولنې تر څېړنې لاندې نیسو، لکه د ونې او وزن ترمنځ اړیکه چې د یوه دوه متحوله ټولنه ده، غواړو چې د دغو دوو متحولینو(ونې او وزن) ترمنځ اړیکه پیدا کړو په دې معنا چې که یو یې معلوم وي بل یې په څه ډول پیدا کولای شو؟</p> <p>ددې لپاره په لومړي گام کې دې د معادلو د جوړېدو لپاره لازم معلومات راټول شي او په دویم گام کې دې راټول شوي</p>	

معلومات د ارزښت لرونکو متحولینو په څېر قایم مختصات په یوه مستوي کې راټول او په نښه کېږي، هغه شکل چې د دغو ټکوله نښلېدو څخه په لاس راځي مور ته یو د گراف رانښيي.

### 6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

ښاغلی ښوونکی دلوست د لا پوخوالي او پیاوړتیا لپاره د درسي کتاب 287 مخ مثال زده کوونکو ته ورکړی چې د درسي کتاب له لیدلو پرته یې په خپلو کتابچو کې حل کړی د کار څارنه وکړی، په پای کې دې یو داوطلب زده کوونکی نوموړي مثال پر تخته حل کړي او نور زده کوونکي دې خپل حلونه د تخته له حل سره پرتله کړي، تاسو وگورئ که چیرې زده کوونکو د مثال له حل سره ستونزې درلودې تاسو نوموړی مثال پر تخته حل کړئ.

### 7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ښاغلی ښوونکی ددې لپاره چې ډاډمن شي، چې ایبا زده کوونکو لوست زده کړی دی او که نه؟ د لوست په اړوند له زده کوونکو څخه لاندې پوښتنې وکړئ او کوبښښ وکړئ چې سم ځوابونه له زده کوونکو څخه ترلاسه کړئ:

- که چیرې د خپل یوه ټولگي وال د ونې په اندازه وپوهېږئ کولای شی د هغه د وزن اندازه په لاس راوړی؟
- که وغواړو د یوه ټولگي د زده کوونکو د ونې او وزن مقدار یو ځای وڅېړو؛ نو دغه څه ډول یوه ټولنه ده؟
- د احصایې له نظره متحول تعریف کړئ.
- د داسې یوې ټولنې نوم واخلئ چې یوازې او یوازې یو متحول ولري.
- په تېر حل شوي مثال کې لومړی او دویمه مختصه څه شی رانښيي؟
- ایبا کولای شی چې د یوې درې متحوله ټولنې نوم واخلئ.

### 8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات:

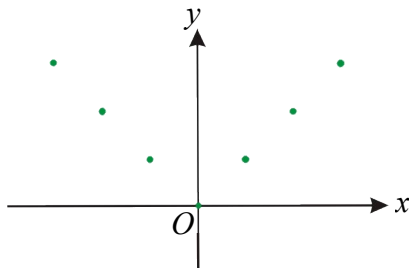
ښاغلی ښوونکی ددې لپاره چې ستاسو په معلوماتو کې زیاتوالی راغلی وي؛ یعنی څرنگه کولای شو د دوو متحولینو ترمنځ اړیکه پیدا کړو؟

ددې لپاره چې یو متحول د بل متحول له مخې وړاند وینه وکړو؛ نو باید د دواړو متحولینو ترمنځ د اړیکو په هکله پوره معلومات ولرو؛ یعنی لومړی باید د یوې ټولنې د ټولو غړو په هکله چې د اندازې په هکله یې کومې پایلې موجودې وي، تر کتنې لاندې ونيول شي او وروسته ددې متحول له مخې د بل متحول لپاره وړاندوینه کیدای شي د وړاندوینې په پروسه کې چې یوه مهمه فرضیه موجوده ده او باید هغه موږ ترکتني لاندې ونیسو، د دوو متحولینو ترمنځ خطي اړیکه ده، دا اړیکه د یوې مستقیمې کرښې په شکل ښودل کېږي او پوهېږو چې د مستقیمې کرښې معادله  $y = a + bx$  شکل لري، په دې معادله کې  $a$  یو ثابت مقدار دی، که  $x = 0$  شي؛ نو  $y = a$  کېږي او هغه معادله چې د متحولینو ترمنځ اړیکه افاده کوي د تخمین یا د سنجش د معادلې په نوم یادېږي.

### 9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

د زراعتي محصولاتو د لوروالي لپاره فکتورونه، لکه اوبه، دکود اندازه، دکود ډول، لمر او د خاورې ډول موثر گڼل کېږي، ایبا ویلی شی چې په دغه ټولنه کې لږ تر لږه له څو ډوله متحولینو سره سر اوکار لری؟

**حل:** په دې ټولنه کې لږ تر لږه پنځه ډوله متحولین موجود دي؛ ځکه چې په احصایه کې یې متحول داسې تعریف کړی دی: هر شی چې د اندازې وړ وي متحول دی؛ نو په نوموړي ټولنه کې پنځه متحولین چې عبارت دي له: اوبه، کود، دکود ډول، لمر او د خاورې ډول.



## اتم څپرکی: احصائیه

د پراگنده‌گی گراف

د درسي کتاب (289-290) مخونه

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• زده کوونکي و توانېږي:</li> <li>• د پراگنده‌گی د گراف په مفهوم پوه شي.</li> <li>• د يوې دوه متحوله ټولنې د پراگنده‌گی گراف د قايمو مختصاتو په سېسټم کې رسم کړای شي.</li> <li>• د پورته پوهې او مهارت په سرته رسولو سره په ځان باور پيدا کړي او د پراگنده‌گی د گراف له رسم څخه د خوښی احساس وکړي.</li> </ul>	<p>- پوهنيزه</p> <p>- مهارتي</p> <p>- ذهنيته</p>
<p>2- د زده کړې لارې:</p> <p>پوښتنه او ځواب، ډله‌ييز او يو کسيز کار...</p>	
<p>3- مرستندويه مواد:</p> <p>د وروډي شکل چارټ (د اړتيا مواد) ...</p>	
<p>4- د وروډي برخې</p> <p>توضیح (5 دقیقې)</p> <p>ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته د تېر لوست له مهمو ټکو څخه یادونه وکړې او د زده‌کوونکو پام د درسي کتاب وروډي شکل ته چې تاسو ورته د چارټ په شکل چمتو کړې راوگرځوئ بیا داسې وپوښتئ:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• ایا په گراف کې ټول ټکي په یوه مستقیمه کرښه پراته دي؟</li> <li>• ولې دغه ډول گراف ته د پراگنده‌گی گراف وايي؟</li> <li>• کولای شئ د گراف ټول ټکي د مرتبو جوړو په شکل وښايست؟</li> <li>• کولای شئ د دغه گراف رياضيکي معادله په لاس راوړئ.</li> </ul> <p>کوبنس وکړئ چې څو ابونه له زده‌کوونکو څخه په لاس راوړئ له هغه پرته تاسو ورته لارښوونه او مرسته وکړئ او خپل درسي بهير پيل کړئ.</p>	
<p>5- د لوست بهير او فعاليت (28) دقيقې:</p> <p>ښاغلی ښوونکی زده‌کوونکي په مناسبو ډلو و وېشئ د درسي کتاب 289 مخ فعاليت ورکړئ چې له خبرو او بحث وروسته فعاليت سرته ورسوي د فعاليت د سرته رسولو په وخت کې څارنه او د ستونزو په صورت کې مرسته وکړئ په پای کې د هرې ډلې استازی دې خپل سرته رسولي فعاليت نورو ته د يوه مثال په ورکولو سره توضيح کړي. که کومې ډلې تېروتنه کړي وي، کوبنس وکړئ چې تېروتنه يې د يوې بلې ډلې په واسطه اصلاح کړئ، بيا تاسو د پراگنده‌گی د گراف په هکله داسې معلومات ورکړئ د پراگنده‌گی گراف ته ځکه د پراگنده‌گی گراف وايي چې په دغه گراف کې ټول ټکي تيت او پاشان دي د يوې مستقيمي کرښې په امتداد نه دي پراته.</p> <p>همدارنگه يو داوطلب زده‌کوونکی تختې ته راوغواړئ چې د 289 مخ مثال پر تختې حل کړي، نور زده‌کوونکي دې د کتاب</p>	

له لیدو پرته همدغه مثال په خپلو کتابچو کې حل کړي او خپل حلونه دې د تختې له حل سره پرتله کړي، د ستونزو په صورت کې مرسته ورسره وکړي، په پای کې ټولو زده‌کوونکو ته په یو کسيزه توگه دنده ورکړي چې د  $\{(1,5), (3,2), (5,2), (4,5)\}$  ټکي د پراگندهگي په گراف کې رسم کړي، تاسو څارنه وکړئ او د ستونزو په صورت کې ورسره مرسته وکړئ.

### 6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

بناغلی بنوونکی د لوست د لاپوځوالي او پیاوړتیا لپاره یو داوطلب زده‌کوونکی تختې ته راوغواړئ چې د درسي کتاب 290 مخ د الف او ه اجزاوې د پراگندهگي د گرافونو اړوندې مرتبې جوړې او په لاس راوړي، نور زده‌کوونکي دې په خپلو کتابچو کې حل کړي، په پای کې دې خپل حلونه د تختې له حل سره پرتله کړي. تاسو څارنه وکړئ، د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه ورته وکړئ.

### 7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

بناغلی بنوونکی: ددې لپاره چې ډاډمن شي، چې ایا زده‌کوونکو لوست زده کړی دی او که نه؟ د لوست په اړوند له زده‌کوونکو څخه لاندې پوښتنې وکړئ او کوښښ وکړئ چې سم ځوابونه ترلاسه کړئ د ستونزو په صورت کې ورسره مرسته وکړئ:

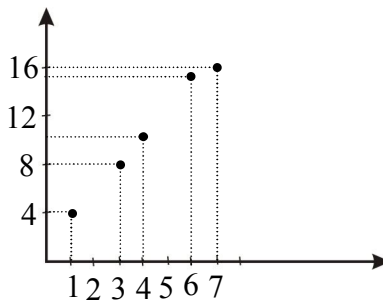
- د پراگندهگي گراف ته ولې د پراگندهگي گراف وايي؟
- که چيرې د پراگندهگي گراف درکړل شوی وي، تاسو يې اړوندې مرتبې جوړې او په لاس راوړلای شئ؟
- ایا د پراگندهگي په گراف کې ټول ټکي د یو خط په امتداد واقع دي؟
- ایا حتمي ده چې د پراگندهگي په گراف کې به ټول ټکي د یو مستقیم خط په امتداد پراته نه وي؟
- د 290 مخ د (ج) جزء د پراگندهگي په گراف کې اړوندې مرتبې جوړې، کومې دي؟
- د ب جزء د پراگندهگي د گراف د ټولو ټکو له نښلېدو څخه کوم ډول شکل لاس ته راځي؟

### 8- د بنوونکي لپاره اضافي معلومات:

بناغلی بنوونکی د پراگندگي د گراف په اړه اضافي معلوماتو ته اړتیا نشته؛ ځکه دا داسې یوه موضوع ده چې د پیوستون له ضریب سره کمک کوي؛ نو موږ په دغه ځای کې په یوه مثال باندې بسنه کوو.

که د یو شمېر زده‌کوونکو د دوو ازموینو پایلې په پام کې ونیسو او د لومړي ازموینې پایلې په  $x$  او د دویمې ازموینې پایلې په  $y$  سره وښیو د  $x$  او  $y$  ترمنځ اړیکه د قایمو مختصاتو په افقي او عمودي محور باندې ښودلای شو، داسې چې د نمر و هره جوړه په قایمو مختصاتو کې یوه نقطه ورکوي، د نمر و لاندې جدول د هغه له گراف سره په پام کې نیسو:

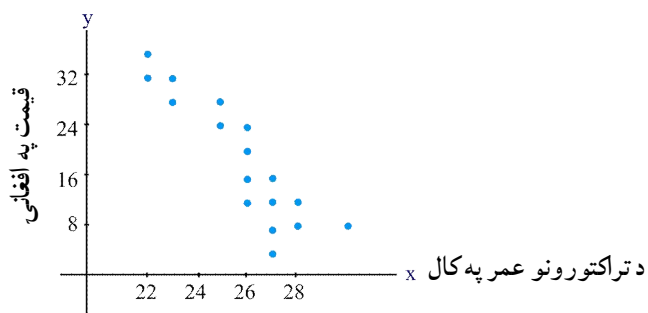
$x$	1	3	4	6	7
$y$	4	8	10	14	16



**پایله** د دغه بحث مهم ټکي دا دي چې د پراگندهگي په گراف کې هر ټکي يوه مرتبه جوړه او هره مرتبه جوړه يو ټکي د پراگندهگي په گراف کې را په گوته کوي.

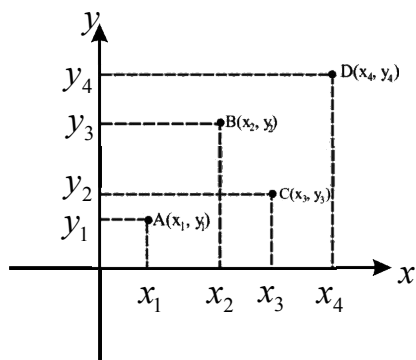
### 9- د تمرين او پوښتنو ځوابونه:

لاندې گراف ديو شمير تراکتورونو عمر رانيسي، ايا ددي دوو متحولينو ترمنځ کومه اړيکه يا ارتباط ويني؟ توضيح يې کړئ.



**حل** څرنگه چې له پوښتنې څخه څرگندېږي په دغه ټولنه کې دوه متحولين موجود دي، يو يې د تراکتورونو عمر او بل يې د تراکتورونو قيمت دی، څرنگه چې په گراف کې معلومېږي ټول ټکي تقريباً په يوه خط پراته دي (ځينې يې د خط پاس او ځينې يې د خط ښکته لور ته واقع دي)؛ نو د دواړو متحولينو ترمنځ هغه وخت قوي اړيکه شتون لري چې ټکي خط ته نږدی يا په خط باندې پراته وي.





## اتم څپرکی: احصائیه

پیوستون او د پیوستون ضریب

د درسي کتاب (291-294) مخونه

د لوست وخت: (یو درسي ساعت)

<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- پوهنیزه</li> <li>- مهارتي</li> <li>- ذهنيتي</li> </ul> <p>زده کوونکي به د لوست په پای کې و توانېږي چې:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• د پیوستون او د پیوستون د ضریب په مفهوم پوه شي.</li> <li>• د یوې ټولني د متحولینو ترمنځ د لږ پیوستون او ډېر پیوستون توپیر وکړای شي.</li> <li>• د پورته پوهې او مهارت په درلودلو سره وکړای شي چې په ورځنیو چارو کې ترې گټه واخلي او په ځان ډاډمن شي.</li> </ul>	
<p>2- د زده کړې لارې:</p> <p>پوښتنه او ځواب، ډله ییز او یوکسیزکار...</p>	
<p>3- مرستندویه مواد:</p> <p>د وروډي شکل چارټ (د اړتیا مواد) ...</p>	
<p>4- د وروډي برخې</p> <p>توضیح (5 دقیقې)</p> <p>بناغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته د موضوع د ښه پوهېدو لپاره د تېر لوست لنډه یادونه اړینه ده، د زده کوونکو پام د درسي کتاب وروډي شکل ته چې تاسو ورته د چارټ په شکل چمتو کړی راوگرځوئ، بیا داسې پوښتنې:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• ایا شونې ده چې د چارټ گراف ټول ټکي د یوې مستقیمې کرنيې په واسطه سره ونښلول شي؟ ولې؟</li> <li>• ایا داسې کومه کرنيه شتون لري چې له دغو ټکو څخه تېره شي او ټول ټکي ورته نږدی واټن ولري؟</li> <li>• ووايست چې د مناسبې کرنيې معادله به کوم شکل ولري چې ټولو ټکو ته نږدی وي؟ کونښن وکړئ چې څو ابونه له زده کوونکو څخه په لاس راوړئ له هغه پرته تاسو ورته لارښوونه او مرسته وکړئ او خپل درسي بهیر پیل کړئ.</li> </ul>	
<p>5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې):</p> <p>بناغلی ښوونکی زده کوونکي په مناسبو ډلو و وېشي د درسي کتاب 291 مخ فعالیت ورکړئ چې له خبرو او بحث وروسته فعالیت سرته ورسوي، د فعالیت د سرته رسولو په وخت کې څارنه او د ستونزو په صورت کې مرسته وکړئ، په پای کې د هرې ډلې استازی خپل سرته رسولي فعالیت نورو ته دیوه مثال په ورکولو سره توضیح کړي. که کومې ډلې تېروتنه کړي وي، کونښن وکړئ چې تېروتنه یې د یوې بلې ډلې په واسطه اصلاح کړئ، په پای کې تاسو موضوع داسې توضیح کړئ: که چیرې یوه دوه متحوله ټولنه ولری او وغواړئ چې ددغې ټولني د متحولینو ترمنځ اړیکه پیدا کړي؛ نو باید د ټولني د پراگندهگي گراف رسم شي، په هره اندازه چې د پراگندهگي د گراف ټکی دیوه مستقیم خط په امتداد واقع وي د متحولینو</p>	

ترمنخ پيوستون زيات دى او په هره اندازه چې ټكي له مستقيمي كرښې څخه لري پراته وي، د متحولينو ترمنخ د پيوستون اړيکه كمه ده؛ نو هغه شاخص چې د دوو متحولينو ترمنخ پيوستون نسبي د پيوستون له ضريب څخه عبارت دى او په  $r$  سره

$$\text{نښودل كېږي چې فرمول يې } r = \frac{\frac{1}{n} \sum xy - \bar{x} \bar{y}}{S_x \cdot S_y} \text{ دى.}$$

د موضوع د مهم والي له امله ښاغلى ښوونكى دې د درسي كتاب 292 مخ مثال پر تخته حل كړي او د فرمول اجزاوې؛ لکه  $\frac{1}{n} \sum xy, \bar{x}, \bar{y}, S_x, S_y$  د زده‌كوونكو په واسطه په لاس راوړي، زده‌كوونكي دې په خپلو كتابچو كې نوټ كړي. د فرمول د اجزاوو د په لاس راوړلو په وخت كې كه كومې ستونزې پيدا شي، تاسو ورسره مرسته او لارښوونه وكړئ.

#### 6- د زده كړې تحكيم: (7) دقيقې

ښاغلى ښوونكى د لوست د لا پوخوالي لپاره د درسي كتاب 293 مخ مثال د يو داوطلب زده‌كوونكي په واسطه حل كړى او نور زده‌كوونكي دې همدغه مثال په خپلو كتابچو كې د كتاب له لېدلو پرته حل كړي، په پاى كې زده‌كوونكي دې خپل حلونه د تختې له حل سره پرتله كړي. پاملرنه وكړئ چې زده‌كوونكي د پيوستون د ضريب د فرمول اجزاوې په سمه توگه په لاس راوړلى شي او كه نه؟ د ستونزو په صورت كې تاسو مرسته او لارښوونه وكړئ.

#### 7- د لوست د پايلې ارزونه: (5) دقيقې

ددې لپاره چې ډاډمن شى، ايا زده‌كوونكو لوست زده كړى دى او كه نه؟ د لوست په اړوند له زده‌كوونكو څخه لاندې پوښتنې وكړئ او كوښښ وكړئ چې سم ځوابونه له زده‌كوونكو څخه ترلاسه كړئ:

- پيوستون او د پيوستون ضريب څه مفهوم لري او كوم وخت پكارېږي؟
- كه چيرې د پراگندهگى د گراف ټول ټكي په يوه كرښه پراته وي د  $r$  قيمت څو دى؟
- كه  $r$  مثبت وي؛ نو د  $x$  د قيمتونو په ډېرو والي  $y$  كمېږي او كه زياتېږي؟

#### 8- د ښوونكي لپاره اضافي معلومات:

ښاغلى ښوونكى د پيوستون (اړيکې ضريب) د متحولينو د اړيکو ترمنخ يو شاخص دى چې مختلف ډولونه لري؛ خو د هغوى اکثریت ځينې مشترک صفتونه لري، که دوه متحول په خپل منځ کې مثبتې اړيکه ولري؛ نو د هغوى د پيوستون ضريب مثبت 1 دى او که منفي اړيکه ولري؛ نو د پيوستن ضريب يې 1- دى او که دوه متحول په خپل منځ کې هيڅ اړيکه ونلري؛ نو د پيوستون ضريب يې صفر دى، په دې ډول که د پيوستون ضريب په  $r$  وښيو؛ نو  $-1 \leq r \leq +1$  په لنډه توگه که  $r = +1$  وي؛ نو د دوو متحولينو ترمنخ اړيکه کاملاً مثبت او که  $r = -1$  وي، نو اړيکه کاملاً منفي او که  $r = 0$  وي؛ نو د دواړو متحولينو ترمنخ اړيکه شتون نلري.

په نورو حالتونو کې چې ټكي په بشپړه توگه په مستقيمه كرښه نه وي، كيدای شي چې اړيکه مثبت، كيدای شي اړيکه منفي او كيدای شي چې اړيکه د منحنی كرښې په شكل وي او يا دا چې هيڅ اړيکه شتون ونه لري.

هرڅومره چې ټکي مستقيمي کړنې ته نږدې کېږي د پيوستون درجه لوړېږي، د پيوستون ضريب ددې فرمول په واسطه چې د

$$\text{انحرافي ارقامو په نوم يادېږي، هم محاسبه کېږي } r = \frac{\sum xy}{\sum x^2 \cdot \sum y^2} \text{ چې دلته } x = X - \bar{X} \text{ او } y = Y - \bar{Y} \text{ نښي.}$$

### 9- د تمرين او پوښتنو ځوابونه:

1- لاندې ډېټا راکړل شوې ده، د ډېټا د پيوستون ضريب محاسبه کړئ.

$x$	1	2	3	4	5
$y$	4	3	2	1	0

**حل :**

$$\bar{x} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\bar{y} = \frac{4+3+2+1+0}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

$$S_x^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{(1-3)^2 + (2-3)^2 + (3-3)^2 + (4-3)^2 + (5-3)^2}{5} = \frac{4+1+0+1+4}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

$$S_y^2 = \frac{(4-2)^2 + (3-2)^2 + (2-2)^2 + (1-2)^2 + (0-2)^2}{5} = \frac{4+1+0+1+4}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

$$\Rightarrow S_x = \sqrt{2} \quad , \quad S_y = \sqrt{2}$$

$$\text{مورد ويلي و وکه چيرې د پيوستون ضريب قيمت } \pm 1 \text{ شي، نو ټول ټکي پر خط باندې پراته دي او د } y \text{ ځانگړو د ضرب حاصل}$$

$$r = \frac{\sum x \cdot y - \bar{x} \cdot \bar{y}}{S_x \cdot S_y}$$

$$r = \frac{\frac{20}{5} - 3 \cdot 2}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{4-6}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

مورد ويلي و وکه چيرې د پيوستون ضريب قيمت  $\pm 1$  شي، نو ټول ټکي پر خط باندې پراته دي او د  $y$  خطا شتون نه لري.

2- د خپلو ټولگيو الو د ونې او وزن تر منځ د پيوستون ضريب حساب کړئ؟

**حل** که چيرې د زده‌کونکو ونې په  $x$  او وزن يې په  $y$  سره وښيو؛ نو د ټولگي د زده‌کونکو لپاره لاندې جدول يو فرضي

ټولگي د لس تنو زده‌کونکو لپاره په پام کې نيسو:

$x(\text{cm})$	163	165	167	169	171	145	142	140	130	147
$y(\text{kg})$	62	65	70	75	80	70	75	60	55	50

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i}{n} = \frac{163+165+167+169+171+145+142+140+130+147}{10} = \frac{1539}{10} = 153.9$$

$$\bar{y} = \frac{62+65+70+75+80+70+75+60+55+50}{10} = \frac{662}{10} = 66.2$$

$$S_x^2 = \frac{(163-153.9)^2 + (165-153.9)^2 + (167-153.9)^2 + (169-153.9)^2 + (171-153.9)^2 + (145-153.9)^2 + (142-153.9)^2 + (140-153.9)^2 + (130-153.9)^2 + (147-153.9)^2}{10}$$

$$S_x^2 = \frac{82.81+123.21+171.61+228.01+292.41+79.21+141.61+193.21+571.21+47.61}{10}$$

$$S_x^2 = \frac{1930.9}{10} \Rightarrow \boxed{S_x = 13.89}$$

$$S_y^2 = \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n} = \frac{(62-66.2)^2 + (65-66.2)^2 + (70-66.2)^2 + (75-66.2)^2 + (80-66.2)^2 + (70-66.2)^2 + (75-66.2)^2 + (60-66.2)^2 + (55-66.2)^2 + (50-66.2)^2}{10}$$

$$S_y^2 = \frac{17.64+1.44+14.44+77.44+190.44+14.44+77.44+38.44+125.44+262.44}{10}$$

$$S_y^2 = \frac{819.6}{10} = 81.96 \Rightarrow S_y = 9.05$$

$$\sum x \cdot y = 163 \cdot 62 + 165 \cdot 65 + 167 \cdot 70 + 169 \cdot 75 + 171 \cdot 80 + 145 \cdot 70 + 142 \cdot 75 + 140 \cdot 60 + 130 \cdot 55 + 147 \cdot 50$$

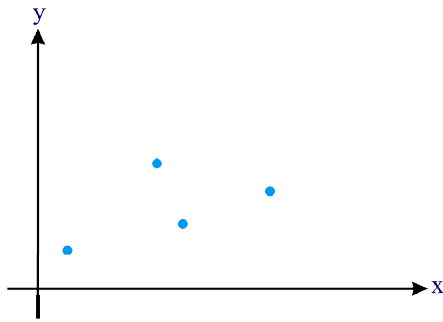
$$\sum x \cdot y = 10106 + 10725 + 11690 + 12675 + 13680 + 10150 + 10650 + 8400 + 7150 + 7350$$

$$\sum x \cdot y = 102576$$

$$\frac{\sum x \cdot y}{n} = \frac{102576}{10} = 10257.6$$

$$r = \frac{\frac{\sum x \cdot y}{n} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{S_x \cdot S_y} = \frac{10257.6 - 10188.18}{13.89 \cdot 9.05} = \frac{69.42}{125.704} \Rightarrow r = 0.552$$

د 0.552 عدد رابښي د ټکو نيمایي يې د خط پورته خواته او نيمایي نوريې د خط ښکته خواته پراته دي، يعنې ويلي شو چې د  $x$  (ونې) او  $y$  (وزن) ترمنځ 55% اړيکه شتون لري.



## اتم څپرکی: احصائیه

د خطي ميلان معادله (The linear regression equation)

د درسي کتاب (295-298) مخونه

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

<p>زده کوونکي به د لوست په پای کې و توانېږي چې:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• د خطي ميلان معادلې په مفهوم پوه شي.</li> <li>• د يوې ډېټا (چې په هر ارتباط وي) د خطي ميلان معادله پيدا کړای شي.</li> <li>• د پورته پوهې او مهارت په درلودلو سره وکړای شي له هغه څخه په ورځنيو چارو کې کار واخلي او ورڅخه خوښي ښکاره کړي.</li> </ul>	<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- پوهنيزه</li> <li>- مهارتي</li> <li>- ذهنيته</li> </ul>
<p>پوښتنه او ځواب، ډله یيز او يو کسيز کار...</p>	<p>2- د زده کړې لارې:</p>
<p>د وروډي شکل چارټ (د اړتيا مواد) ...</p>	<p>3- مرستندويه مواد:</p>
<p>ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته له زده کوونکو څخه د تېر لوست پوښتنه وکړې او پام يې د درسي کتاب وروډي شکل ته چې تاسو ورته د چارټ په شکل چمتو کړی راوگرځوئ، بيا داسې وپوښتئ:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• په مخامخ چارټ کې څه شی وينئ؟</li> <li>• ايا ټول ټکي د يوې مستقيمي کرښې په امتداد پراته دي؟</li> <li>• کولای شئ و وایاست چې که چيرې د پراگندگي گراف موجود وي، تاسو يې د په نښو شوو ټکو له نښلو لو څخه د منحنی معادله لاس ته راوړئ؟</li> <li>• ايا په مخامخ شکل کې داسې يوه کرښه رسمېدلای شي چې ټول ټکي ورته نږدی وي؟</li> </ul> <p>کوښښ وکړئ چې ځوابونه له زده کوونکو څخه په لاس راوړئ له هغه پرته تاسو ورته لارښوونه او مرسته وکړئ او خپل درسي بهير پيل کړئ.</p>	<p>4- د وروډي برخې توضیح (5 دقيقې)</p>
<p>5- د لوست بهير او فعاليت (28 دقيقې):</p> <p>ښاغلی ښوونکی زده کوونکي په مناسبو ډلو ووېشي ورته و وایاست چې د درسي کتاب د 295 مخ فعالیت په خپلو ډلو کې د بحث او خبرو وروسته سرته ورسوي، د فعالیت په پای کې د هرې ډلې استازی دې خپل فعالیت نورو ته توضیح او تشریح کړي د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړي، په پای کې تاسو موضوع داسې تشریح کړئ:</p> <p>د خطي ميلان معادله څرنگه چې له نوم څخه يې هم څرگنده ده د هغه مناسب خط معادله ښيي چې د پراگندگي د گراف ټول</p>	

ټکي ورته نږدی پراته وي، د پراگندهگي په گراف کې ټول ټکي په يوه خط نه وي پراته، بلکې له هر ټکي څخه يوه کرښه تېرېدلای شي، نو ددې لپاره بايد داسې يوه کرښه چې ټولو ټکو ته نږدی وي په لاس راوړو چې دغه کرښه د خطي ميلان په نوم يادېږي د خطي ميلان معادلې په لاس راوړلو لپاره بايد  $a$  او  $b$  معلوم وي او همدارنگه پوهېږو چې د هر خطي گراف معادله  $y = ax + b$  دی؛ نو بايد  $a$  او  $b$  معلوم وي، نو  $a = r \frac{S_y}{S_x}$  او  $b = \bar{y} - a\bar{x}$  چې دلته  $r$  د پيوستون ضريب  $\bar{y}$  د  $y$  متحول اوسط،  $\bar{x}$  د  $x$  د متحول اوسط،  $S_y$  د  $y$  د متحول معياري انحراف او  $S_x$  د  $x$  د متحول معياري انحراف دی،  $a$  او  $b$  لاس ته راوړلو څخه وروسته د  $y = ax + b$  په معادله کې د  $a$  او  $b$  قيمتونه ږدو او په لاس راغلي معادله د خطي ميلان له معادلې څخه عبارت ده.

### 6- د زده کړې تحکيم: (7) دقيقې

ښاغلی ښوونکی د لوست د لا پوځوالي لپاره د درسي کتاب 298 مخ مثال د يو داوطلب زده کوونکي په واسطه حل کړی او نور زده کوونکي دې همدغه مثال په خپلو کتابچو کې د کتاب له لېدو پرته حل کړي، په پای کې دې زده کوونکي خپل حلونه د تختې له حل سره پرتله کړي.

تاسو د کار څارنه وکړئ، دستونزو په صورت کې يو ځل بيا لوست توضيح کړئ او مثال ورته حل کړئ.

پاملرنه وکړئ چې زده کوونکي په سمه توگه  $\bar{x}, \bar{y}, r, S_x, S_y, a, b$  په لاس راوړلی شي او که نه؟ بيا هم د دستونزو په صورت کې ورته لارښوونه وکړئ.

### 7- د لوست د پايلې ارزونه: (5) دقيقې

ښاغلی ښوونکی ددې لپاره چې ډاډمن شی، چې ايا زده کوونکو لوست زده کړی دی او که نه؟ د لوست په اړوند له زده کوونکو څخه لاندې پوښتنې وکړئ او کوښښ وکړئ چې سم ځوابونه له زده کوونکو څخه ترلاسه کړئ:

- د خطي ميلان معادله څه شی رانښيي؟
- ايا د پراگندهگي په گراف کې ټول ټکي په يوه کرښه واقع کېدای شي؟
- ايا د پراگندهگي په گراف کې داسې کرښه رسمولای شي چې له ټولو ټکو تېره شي؟

### 8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات:

ښاغلی ښوونکی يو بل مفهوم چې د پيوستون په موضوع کې د يادونې وړ دی، د رجعت مفهوم دی چې دا د ميلان په مفهوم هم يادوي په احصائيه کې د پيوستون او ميلان (*Regression*) موضوعات يو له بل سره دومره نږدی اړيکه لري چې اکثراً يود بل پر ځای په کار وړل کېږي.

د پيوستون اصطلاح د دوو متحولينو د ارتباط درجې ته اطلاق کېږي.

کله چې دوه متحوله يو له بل سره ارتباط ولري، نو د يو متحول له مخې د بل متحول وړاندوښه کېدای شي، خو د ميلان

کلمه د یوې پېښې د متحولینو هغو صفاتو او مشخصاتو ته اطلاقېږي چې د دوو متحولینو ترمنځ ارتباط بشپړ نه وي. د وړاندوینې په پروسه کې چې یوه مهمه فرضیه موجوده ده او باید هغه مورېبې ترکتني لاندې ونیسو، د دوو متحولینو ترمنځ خطي رابطه ده، دا رابطه د یوه مستقیم خط په شکل بنودل کېږي او پوهېږو چې د مستقیم خط معادله د  $y = ax + b$  شکل لري، په دې معادله کې  $a$  یو ثابت مقدار دی که  $x = 0$  شي، نو  $y = b$  کېږي، که د پراگنده‌ګۍ (متفرق دیاگرام *scater diagram*) په ګراف کې ټولې نقطې په یوه مستقیم خط قرار ولري چې د متحولینو ترمنځ خطي ارتباط او پیوستون (*Linear Regression*) موجود دی کیدای شي ساده یا خو خطي بلل کېږي. په دې خصوصیت سره نوموړی منحنی ته په احصائیه کې (*Least Squares Curves*) او یا (*Least Square Regression*) وايي.

### 9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

که چېرې  $y = 2x + 3$  د  $y$  د ریګریشن معادله نظر  $x$  ته او د  $x$  اوسط مساوي په 2 راکړل شوی وي، د  $y$  اوسط څومره دي؟

**حل** د خطي میلان د معادلې په پام کې نیولو سره:

$$y = 2x + 3 \Rightarrow a = 2, b = 3$$

$$\left. \begin{array}{l} \bar{x} = 2 \\ \bar{y} = ? \end{array} \right\} b = \bar{y} - a\bar{x}$$

$$b - \bar{y} = -a\bar{x}$$

$$-\bar{y} = -a\bar{x} - b / \cdot (-1)$$

$$\bar{y} = a\bar{x} + b = 2 \cdot 2 + 3 = 4 + 3 = 7 \Rightarrow \boxed{\bar{y} = 7}$$

## د اتم خپرکي د عمومي پوښتنو حل (شپږ درسي ساعتونه)

1- که چیرې په یوه ټولنه کې چې اوسط یې  $\bar{x} = 50$  او واریانس یې  $S^2 = 64$  سره وي، د بدلون ضریب  $y$  چې له  $y = 2x + 10$  رابطې سره سم بدلون مومي څو دی؟

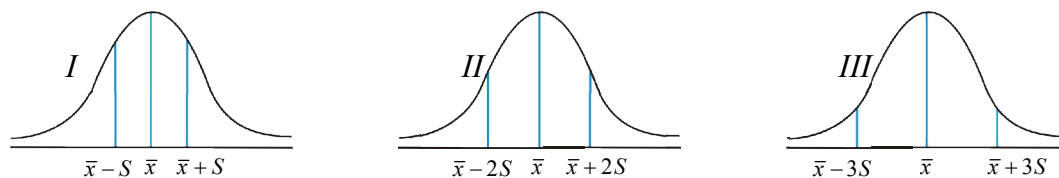
**حل:**

$$\left. \begin{array}{l} \bar{x} = 50 \\ S^2 = 64 \Rightarrow S = 8 \end{array} \right\} \begin{array}{l} C \cdot V = \frac{S}{\bar{x}} = \frac{8}{50} \\ C \cdot V = 0.16 \\ C \cdot V = 16\% \end{array}$$

2- که چیرې د هر زده کوونکي په نمره کې 20% نمرې ورزیاتې شي، نو د نمره د بدلون په ضریب څه اغیزه کوي؟

**حل:** که چیرې د هر زده کوونکي په نمره باندې 20% ورزیاتې شي، نو اوسط یې زیاتېږي څرنگه چې  $\bar{x}$  د بدلون په ضریب کې  $C \cdot V = \frac{S}{\bar{x}}$  په مخکې کې قرار لري، نو د بدلون یا تغیراتو ضریب یې هم کمېږي.

3- د هغو ټولنو فیصدي چې په لاندې درکړل شوو منحنی گانو کې پرتې دي، ولیکئ؟



**حل:** په I ټولنه کې د پلټنې ټول موارد په  $(\bar{x} - S, \bar{x} + S)$  کې 68% دی په II ټولنه کې ټول د پلټنې موارد چې په  $(\bar{x} - 2S, \bar{x} + 2S)$  انټروال کې پراته دي، 96% دی.

او په III منحنی گراف کې هغه ډېټا چې په  $(\bar{x} - 3S, \bar{x} + 3S)$  انټروال کې پرته ده 99% ده.

4- لاندې اړیکو ته په پاملرنې سره ووايست چې کومه یوه له دغو اړیکو څخه یو متحوله، دوه متحوله او درې متحوله اړیکې دي.

**الف:** ستاسو د ټولگيو الو د ونو اندازه؟

**ب:** د یو شی د عمومي مصرف او جنس ترمنځ اړیکه؟

**ج:** د یوې استوانې د حجم، جگوالي او د قاعدې د مساحت ترمنځ اړیکې؟

**حل:** هر شی (عنصر) چې د اندازې وړ وي متحول بلل کېږي.

**الف:** یو متحوله اړیکه ده او متحول یې د ټولگي د زده کوونکو د ونو اندازې دي.

**ب:** دوه متحوله اړیکه ده او متحولین یې عمومي مصرف او جنس دي.

**ج:** درې متحوله اړیکه ده او متحولین یې حجم، جگوالی او د قاعدې مساحت دي.



5- د یو ټولګي د مصرف شوو ساعتونو د شمېر او د زدکونکو د نمبرو تر منځ چې د 20% له مخې اخیستل شوي دي، د مرتبو جوړو په شکل په لاندې ډول دی:

(2,10) , (3,10) , (3,14) , (4,10) , (4,14)  
 (5,14) , (5,16) , (6,12) , (6,16) , (6,18)  
 (7,14) , (7,18) , (7,20) , (8,16) , (8,18)

د زده کونکو د مصرف شوو ساعتونو او نمبرو تر منځ د اړیکو له مخې ګراف رسم او خپلې پایلې وڅېړئ؟

**حل:** تر هر څه د مخه لومړی د وضعیه کمیاتو سېسټم رسمو، د  $x$  پر محور مصرف شوی ساعتونه او د  $y$  پر محور د زده کونکو نمبرې نښو او ګراف یې په لاندې ډول رسمو:



له پورته ګراف څخه دا پایله په لاس راځي چې د مصرف شوو ساعتونو په زیاتوالي د زده کونکو نمبرې هم زیاتېږي.

6- مخامخ ډېټا په پام کې ونیسئ:

$x$	1	1	2	3
$y$	1	5	4	2

په ورکړ شوي ډېټا کې د پيوستون ضریب حساب کړئ؟

**حل:**

$$\bar{x} = \frac{1+1+2+3}{4} = \frac{7}{4} = 1.75$$

$$\bar{y} = \frac{1+5+4+2}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

$$S_x^2 = \frac{(1-1.75)^2 + (1-1.75)^2 + (2-1.75)^2 + (3-1.75)^2}{4} = \frac{0.56+0.56+0.06+1.56}{4} = \frac{2.74}{4}$$

$$S_x = 0.82$$

$$S_y^2 = \frac{(1-3)^2 + (5-3)^2 + (4-3)^2 + (2-3)^2}{4} = \frac{4+4+1+1}{4} = \frac{10}{4} = 2.5 \Rightarrow S_y = 1.58$$

$$\sum x \cdot y = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 = 1 + 5 + 8 + 6 = 20$$

$$\frac{1}{n} \sum x \cdot y = \frac{20}{4} = 5$$

$$r = \frac{\frac{\sum x \cdot y}{n} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{S_x \cdot S_y} = \frac{5 - 1.75 \cdot 3}{0.82 \cdot 1.58} = \frac{5 - 5.25}{1.29} = \frac{-0.25}{1.29} \Rightarrow r = -0.19$$

7- که چیرې د پیوستون ضریب صفر ته نږدې وي، نو خطا ډېره، که لږه ده؟

**حل:** هر څومره چې د پیوستون ضریب صفر ته نږدې وي، په دې معنی دی چې د متفرق ډیگرام ټول ټکي له خط څخه زیاته فاصله لري، نو خطا ډېره ده.

8- که چیرې د پیوستون ضریب د  $+1$  او  $-1$  عدد ته نږدې وي، نو د  $y$  خطا په اړوند څه وایئ؟

**حل:** که چیرې  $r = \pm 1$  وي، نو ټول ټکي د  $y = ax + b$  په خط باندې پراته دي او خطا هېڅ شتون نه لري.

9- د سروې له مخې چې د یوه ښوونځي د  $A$  او  $B$  په دوو ټولګیو کې شوې ده، لاندې عددونه د کیلوګرام په حساب د زده‌کونکو د وزن لپاره راټول شوي دي:

A:	65	63	67	64	62	70	66	68	67	78	69	71
B:	68	66	68	65	69	66	68	65	71	67	68	70

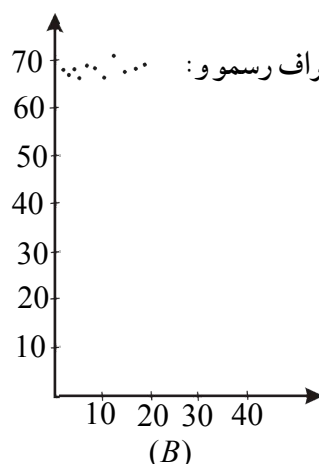
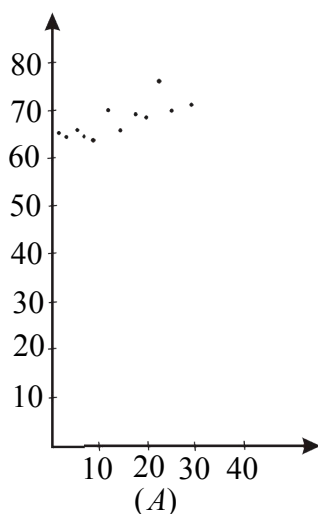
د پاسنیو عددونو په پام کې نیولو سره:

**الف:** د ډېټا د پراگندګي ګراف رسم کړئ؟

**ب:** د اړوندې مستقیمې کرښې معادله په لاس راوړئ  $a$  او  $b$  وټاکئ؟

**ج:** اړونده مستقیمه کرښه نظر د ریګریشن معادلې ته رسم کړئ؟

**حل:**



**ب)**

$$A_{\bar{x}} = \frac{65 + 63 + 67 + 64 + 62 + 70 + 66 + 68 + 67 + 78 + 69 + 71}{12} = \frac{810}{12} = 67.50$$

$$B_{\bar{y}} = \frac{68 + 66 + 68 + 65 + 69 + 66 + 68 + 65 + 71 + 67 + 68 + 70}{12} = \frac{811}{12} = 67.58$$

$$S_x^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{(65 - 67.5)^2 + (63 - 67.5)^2 + (67 - 67.5)^2 + (64 - 67.5)^2 + (62 - 67.5)^2 + (70 - 67.5)^2 + (66 - 67.5)^2 + (68 - 67.5)^2 + (67 - 67.5)^2 + (78 - 67.5)^2 + (69 - 67.5)^2 + (71 - 67.5)^2}{12}$$

$$= \frac{6.25 + 20.25 + 0.25 + 12.25 + 30.25 + 6.25 + 2.25 + 0.25 + 0.25 + 110.25 + 2.25 + 12.25}{12}$$

$$= \frac{203}{12} = 16.9 \Rightarrow S_x = 4.1$$

$$S_y^2 = \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n} = \frac{(68-67.58)^2 + (66-67.58)^2 + (68-67.58)^2 + (65-67.58)^2 + (69-67.58)^2 + (66-67.58)^2 + (68-67.58)^2 + (65-67.58)^2 + (71-67.58)^2 + (67-67.58)^2 + (68-67.58)^2 + (70-67.58)^2}{12}$$

$$= \frac{0.176 + 2.496 + 0.176 + 6.656 + 2.016 + 2.496 + 0.176 + 6.656 + 11.696 + 0.336 + 0.176 + 5.856}{12}$$

$$= \frac{38.91}{12} = 3.24 \Rightarrow S_y = 1.8$$

$$\sum A_x B_y = 65 \cdot 68 + 63 \cdot 66 + 67 \cdot 68 + 64 \cdot 65 + 62 \cdot 69 + 70 \cdot 66 + 66 \cdot 68 + 68 \cdot 65 + 67 \cdot 71 + 78 \cdot 67 + 69 \cdot 68 + 71 \cdot 70$$

$$= 4420 + 4158 + 4556 + 4160 + 4278 + 4620 + 4488 + 4420 + 4757 + 5226 + 4692 + 4970$$

$$\sum A_x B_y = 54745 \Rightarrow \frac{\sum A_x B_y}{n} = 4562.08$$

$$r = \frac{\frac{\sum A_x B_y}{n} - A_x \cdot B_y}{S_x \cdot S_y} = \frac{4562.08 - 67.50 \cdot 67.58}{4.1 \cdot 1.8} = \frac{4562.08 - 4561.65}{7.38} = \frac{0.43}{7.38} = 0.058$$

$$a = r \frac{S_y}{S_x} = 0.058 \frac{1.8}{4.1} = 0.0256$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x} = 1.8 - (0.0256)(4.1) = 1.8 - 0.105 = 1.69$$

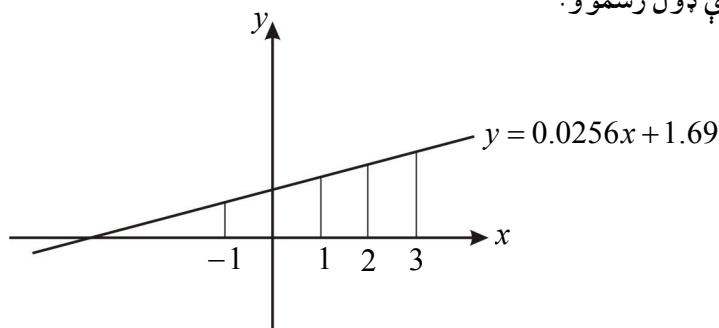
$$y = ax + b$$

$$y = 0.0256x + 1.69 \quad \text{د رېگرېشن معادله}$$

**ج:** څرنگه چې د رېگرېشن معادله چې له  $y = 0.0256x + 1.69$  څخه عبارت ده، په لاس راوړو او س خط يې د قيمتونو له

مخې په لاندې ډول رسمو:

$x$	$y$
1	1.71
2	1.74
3	1.76
-1	1.6



10- که چېرې  $x$  او  $y$  سره بشپړ پیوستون او معکوس ولري، یعنې  $S_x = S_y$ ، نو د  $y$  د رېگرېشن خط نسبت  $x$  ته کوم دی؟

1)  $y = -\frac{1}{2}x + b$

2)  $y = \frac{1}{2}x + b$

③)  $y = x + b$

④)  $y = -x + b$

**حل:** که چېرې  $x$  او  $y$  بشپړ پیوستون ولري، په دې معنا دی چې د تغیراتو ضریب  $r = \pm 1$  دی، نو:

$$a = r \frac{S_y}{S_x} = \pm \frac{S_y}{S_x}$$

څرنگه چې  $S_x = S_y$  دی، نو:

$$a = \pm \frac{S_y}{S_x} = \pm 1$$

$$y = ax + b$$

$$y = \pm x + b \Rightarrow y = x + b, \quad y = -x + b$$

11- د 20 تنو زده کوونکو درياضي او فزيک د مضمون 20% د آزمويڼې پايلې چې په لاندې ډول ورکړ شوي، رسم کړئ؟

11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	زده کوونکي
12	10	16	6	10	6	16	18	12	8	18	د رياضي نمرې (x)
10	14	10	6	10	10	14	18	8	10	16	د فزيک نمرې (y)

20	19	18	17	16	15	14	13	12	زده کوونکي
12	14	14	6	12	18	16	10	12	د رياضي نمرې (x)
16	14	12	8	12	12	16	12	6	د فزيک نمرې (y)

– د ريگریشن د کرښې معادله په لاس راوړئ؟

– آیا د دوو آزمويڼو د پايلو تر منځ اړيکې شتون لري؟

**حل:**

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{20} x_i}{20} = \frac{246}{20} = 12.3$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{20} y_i}{20} = \frac{234}{20} = 11.7$$

$$S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{(18-12.3)^2 + (8-12.3)^2 + (12-12.3)^2 + (18-12.3)^2 + (16-12.3)^2 + (6-12.3)^2 + (10-12.3)^2 + (6-12.3)^2 + (16-12.3)^2 + (10-12.3)^2 + (12-12.3)^2 + (12-12.3)^2 + (10-12.3)^2 + (16-12.3)^2 + (18-12.3)^2 + (12-12.3)^2 + (6-12.3)^2 + (14-12.3)^2 + (14-12.3)^2 + (12-12.3)^2}{20}$$

$$= \frac{32.49 + 18.49 + 0.09 + 32.49 + 13.69 + 39.69 + 5.29 + 39.69 + 13.69 + 5.29 + 0.09 + 0.09 + 5.29 + 13.69 + 32.49 + 0.09 + 39.69 + 2.89 + 2.89 + 0.09}{20} = \frac{258.51}{20} = 12.92 \Rightarrow S_x = 3.59$$

$$S_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^{20} (y_i - \bar{y})^2}{n} = \frac{(16-11.7)^2 + (10-11.7)^2 + (8-11.7)^2 + (18-11.7)^2 + (14-11.7)^2 + (10-11.7)^2 + (10-11.7)^2 + (6-11.7)^2 + (10-11.7)^2 + (14-11.7)^2 + (10-11.7)^2 + (6-11.7)^2 + (12-11.7)^2 + (16-11.7)^2 + (12-11.7)^2 + (12-11.7)^2 + (8-11.7)^2 + (12-11.7)^2 + (14-11.7)^2 + (16-11.7)^2}{20}$$

$$S_y^2 = \frac{18.49 + 2.89 + 13.69 + 39.69 + 5.29 + 2.89 + 2.89 + 32.49 + 2.89 + 5.29 + 2.89 + 32.49 + 0.09 + 18.49 + 0.09 + 0.09 + 13.69 + 0.09 + 5.29 + 18.49}{20}$$

$$S_y^2 = \frac{218.2}{20} = 10.91 \Rightarrow S_y = 3.3$$

$$\begin{aligned} \sum x \cdot y &= 18 \cdot 16 + 8 \cdot 10 + 12 \cdot 8 + 18 \cdot 18 + 16 \cdot 14 + 6 \cdot 10 + 10 \cdot 10 + 6 \cdot 6 + 16 \cdot 10 + 10 \cdot 14 + 12 \cdot 10 + 12 \cdot 6 \\ &\quad + 10 \cdot 12 + 16 \cdot 16 + 18 \cdot 12 + 12 \cdot 12 + 6 \cdot 8 + 14 \cdot 12 + 14 \cdot 14 + 12 \cdot 16 \\ &= 288 + 80 + 96 + 324 + 224 + 60 + 100 + 36 + 160 + 140 + 120 + 72 + 120 + 256 + 216 + 144 + 48 + 168 + 196 + 192 \end{aligned}$$

$$\sum x \cdot y = 3040, \quad \frac{\sum x \cdot y}{n} = \frac{3040}{20} = 152$$

$$r = \frac{\frac{\sum x \cdot y}{n} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{S_x \cdot S_y} = \frac{152 - 12.3 \cdot 11.7}{3.59 \cdot 3.3} = \frac{152 - 143.91}{11.847} = \frac{8.09}{11.847} = 0.68$$

د پیوستون له ضریب څخه لاندې پایله په لاس راځي.

- د  $x$  قیمت په ډېروالي د  $y$  قیمت هم ډېرېږي.
- یعنې  $x$  او  $y$  ترمنځ تقریباً 68% پیوستون شتون لري.

$$a = r \frac{S_y}{S_x} = 0.68 \frac{3.3}{3.59} = \frac{2.244}{3.59} = 0.625$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x} = 11.7 - 0.625(12.3) = 11.7 - 7.687 = 4.013$$

$$y = ax + b \Rightarrow y = 0.625x + 4.013$$

هو، د دوو ازموینو ترمنځ ( $y = 0.625x + 4.013$ ) اړیکه شتون لري.

12- پر چنگښو د خوراک د مالګې د 5 او 1 فیصده محلول اغیزې د یون پلازما پر میزان د هغوی په بدن کې په لاندې جدول کې ثبت شوي دي؟

0	5	10	20	30	40	50	د مالګې په محلول کې د پاتې کېدو وخت
90	110	118	122	126	132	136	د یون پلازما میزان (mm)

– په پاسنی جدول کې متحولین وڅېړئ؟

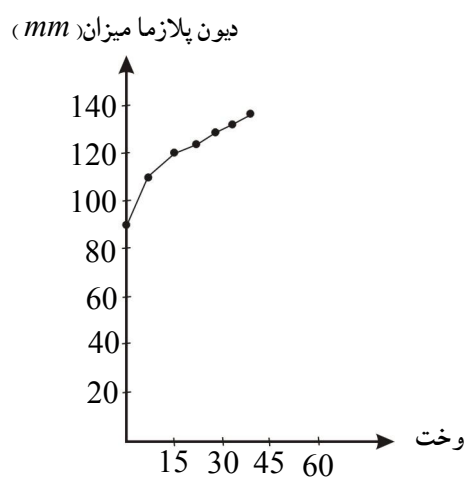
– په پورتنیو متحولینو کې کوم یو خپلواک او کوم یو ناخپلواک متحول دی؟

– د دې گراف په رسم کې خپلواک متحول په افقي محور وښایاست؟

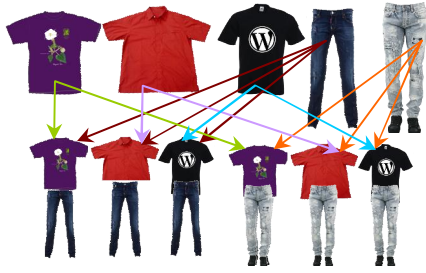
– یو داسې گراف رسم کړئ چې د دواړو متحولینو ترمنځ اړیکه وښيي؟

**حل:**

- په پورتنی جدول کې دوه ډوله متحولین دي لومړی یې وخت دویم متحول یې د یون پلازما میزان دی.
- په پورتنیو متحولینو کې وخت خپلواک متحول او یون پلازما ناخپلواک متحول دی.



له پورتنی گراف څخه څرگندېږي چې د وخت په زیاتېدو سره د یون پلازما میزان هم زیاتېږي.



## نهم څپرکی: احتمالات

پرموتېشن یا ترتیب (Permutation)

د درسي کتاب (305-308) مخونه

د لوست وخت: (یو درسي ساعت)

<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- پوهنيزه</li> <li>- مهارتي</li> <li>- ذهني</li> </ul> <p>زده کوونکي به د لوست په پای کې و توانېږي چې:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• د پرموتېشن یا ترتیب په مفهوم پوه شي.</li> <li>• د پرموتېشن یا ترتیب په اړه پوښتنې حل کړي.</li> <li>• د پورته پوهې او مهارت په پیدا کولو سره په ځان باور پیدا کړي او په ورځنيو مسائلو کې ترې کار واخلي.</li> </ul>	
<p>2- د زده کړې لارې:</p> <p>پوښتنه او ځواب، ډله ییز او یو کسيز کار...</p>	
<p>3- مرستندويه مواد:</p> <p>د اړتیا وړ مواد...</p>	
<p>4- د وړودي برخې</p> <p>توضیح (5 دقیقې)</p> <p>بناغلی ښوونکي له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته د زده کوونکو پام د کتاب وړودي برخې ته راوړوي او وپوښتي:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• څوک ویلای شي په څو ډوله کولای شو درې قلمونه د قلمونو په بکسه کې سره خوا په خوا کېږدئ؟</li> <li>• په څو ډوله کولای شئ درې قلمونه د قلمونو په بکسه کې سره خوا په خوا کېږدئ؟</li> <li>• له <math>\{2, 5, 7\}</math> عددونو څخه څو درې رقمي عددونه جوړېدای شي؟ په دې شرط چې عدد په کې تکراري نه وي.</li> </ul> <p>کوښښ وکړئ چې څو اېونه له زده کوونکو څخه په لاس راوړئ، د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړئ.</p>	
<p>5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې):</p> <p>بناغلی ښوونکي دې زده کوونکي په مناسبو ډلو ووېشي، د درسي کتاب 305 مخ فعالیت ورکړی چې له خبرو او بحث وروسته فعالیت سرته ورسوي، د فعالیت د سرته رسولو په وخت کې څارنه او د ستونزو په صورت کې مرسته وکړئ، په پای کې د هرې ډلې استازی دې سرته رسولی فعالیت نورو ته دیوه مثال په ورکولو سره توضیح کړي، که کومې ډلې تېروتنه کړي وي، کوښښ وکړئ، تېروتنه یې د یوې بلې ډلې په واسطه اصلاح کړئ، بیا تاسې د پرموتېشن یا ترتیب تعریف داسې ورته وکړئ:</p> <p>په یوه کتار کې یو د بل څنګ ته د <math>n</math> متمایزو شیانو تنظیم داسې چې د هغوی د اېښودلو ترتیب په پام کې وي، د ترتیب په نامه یادېږي.</p>	

که په ترتیب کې تکرار مجاز نه وي، نو مساوي په  $P_n = n!$  او که چیرې تکرار مجاز وي، نو مساوي په  $P_n = n^n$  دی. د لاندې پوهې لپاره زده‌کونکي دې د 306 مخ لومړی مثال په خپلو کتابچو کې حل کړي او ورپسې تاسو نوموړی مثال پر تخته باندې حل کړئ چې زده‌کونکي خپل حل د تختې له حل سره پرتله او تېروتنې اصلاح کړي.

### 6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

بناغلی بنسټونکي د لوست د لا پوخوالي لپاره زده‌کونکي په وار سره تختې ته راوغواړئ چې د کتاب دویم، دریم او څلورم مثالونه پر تخته حل کړي، په عین وخت کې دې نور زده‌کونکي په خپلو کتابچو کې د کتاب له لېدو پرته حل کړي او په پای کې دې خپل حلونه د تختې له حل سره پرتله کړي. د ستونزو په صورت کې لارښوونه او مرسته وکړئ.

### 7- د لوست د پایلي ارزونه: (5) دقیقې

بناغلی بنسټونکي ددې لپاره چې ډاډمن شي، چې ایسا زده‌کونکو لوست زده کړی دی او که نه؟ د لوست په اړوند له زده‌کونکو څخه لاندې پوښتنې وکړئ او کوښښ وکړئ چې سم ځواب له زده‌کونکو څخه ترلاسه کړئ:

1. څوک پرموتېشن یا ترتیب تعریفولای شي؟
2. 5! مساوي له کوم عدد سره دی؟
3. له 2, 3, 4, 7, 8 عددونو څخه څو پنځه رقمي عددونه جوړېدای شي؟ (تکراري رقم نه وي).
4. په څو ډوله کولای شو چې د  $A, B$  او  $C$  هېوادونو بیرغونه په یوه کتار کې سره خوا په خوا کېږدو؟

### 8- د بنسټونکي لپاره اضافي معلومات:

بناغلی بنسټونکي د یوه طبیعي عدد لپاره د  $(n-1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 1$  حاصل ضرب په لنډ ډول په  $n!$ ، ( $n$  - فکتوریل) بنسټونکي او د تعریف له مخې  $1! = 1$  او  $0! = 1$  دی.

$$2! = 2 \cdot 1 = 2$$

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

$$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$

$$n! = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) \dots 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$1) \frac{4! \cdot 6!}{8!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 6!}{8 \cdot 7 \cdot 6!} = \frac{8 \cdot 3}{8 \cdot 7} = \frac{3}{7}$$

$$2) \frac{(n+1)(n+2)!}{(n+3)!} = \frac{(n+1)(n+2)!}{(n+3)(n+2)!} = \frac{n+1}{n+3}$$

$$3) \frac{6!}{7! - 6!} = \frac{6!}{6!(7-1)} = \frac{6!}{6! \cdot 6} = \frac{1}{6}$$

$$4) \frac{2n!(n-2)!}{4(2n-2)!n!} = \frac{2n(2n-1)(2n-2)!(n-2)!}{4(2n-2)!n(n-1)(n-2)!} \\ = \frac{2n(2n-1)}{4n(n-1)} = \frac{2n-1}{2(n-1)}$$

د لوست په اړوند د لازياتو معلوماتو لپاره یو مثال په پام کې نیسو.

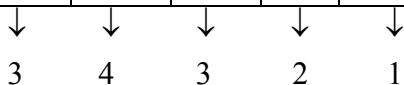


**مثال:** له  $\{1,5,4,2,8\}$  عددونو څخه څو پنځه رقمي عددونه پرته له تکراري رقم څخه چې له 30000 څخه لوی وي جوړولای شو.

**حل:** د پنځو رقمونو لپاره پنځه تش ځایونه په پام کې نیسو او دغو پنځو ځایونو ته عددونه داسې ټاکو چې له 30000 څخه لوی وي.

د لس زریز خانې د ډکولو لپاره د راکړل شوو عددونو له سټ څخه درې امکانه شتون لري، چې دا درې د لس زریز خانې لاندې لیکو یعنې په لس زریز خانه کې د پوښتنې د شرط سره سم 4,5,8 رقمونه لیکلای شو او د لس زریز خانې د ډکولو لپاره له نوموړي سټ څخه د 1 او 2 رقمونه نشو ټاکلی ځکه چې غوښتل شوی پنځه رقمي عدد له 30000 کمېږي، څرنگه چې د لس زریز خانې د ډکولو لپاره یو له 5,4 او 8 رقمونو څخه وټاکل شو، په سټ کې څلور رقمونه پاتې کېږي، چې د زریز خانې د ډکولو لپاره له دغو څلورو رقمونو څخه هر یو رقم ټاکلی شو، یعنې د زریز خانې د ډکولو لپاره څلور امکانه شتون لري چې 4 د زریز خانې لاندې لیکو او همدارنگه د سلیز خانې د ډکولو لپاره درې رقمه پاتې کېږي چې د سلیز خانې د ډکولو لپاره درې امکانه شتون لري، چې په پورته ډول 3 د سلیز خانې لاندې لیکو، په همدې ډول د لسيز خانې د ډکولو لپاره دوه امکانه او یويز خانې لپاره یو امکان شتون لري چې په ترتیب سره 2 او 1 د لسيز او یويز خانو لاندې لیکو. په پای کې د نوموړو خانو د ډکولو لپاره د امکانانو د ضرب حاصل د غوښتل شوو پنځه رقمي عددونو و شمېر رابښي.

لس زریز	زریز	سلیز	لسیز	یویز
---------	------	------	------	------



$$N = 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 12 \cdot 6 = 72$$

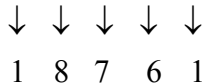
یعنې له پورته رقمونو څخه 72 پنځه رقمي عددونه چې تکرار په کې شونی نه وي په لاس راتلای شي.

### 9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

1. څو پنځه رقمي عددونه وجود لري چې لومړی رقم یې 2 او وروستی رقم یې مساوي په 4 وي، په عدد کې هیڅ رقم تکراري نه وي؟

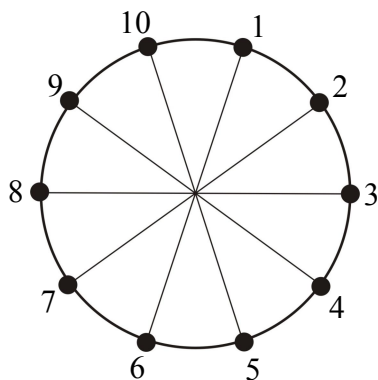
**حل:** پوهېږو چې ټول یو رقمي عددونه  $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$  دي، نو لاندې پنځه خالي ځایونه په پام کې نیسو:

--	--	--	--	--



$1 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 1 = 56 \cdot 6 = 336$  ټول پنځه رقمي عددونه چې لومړی رقم یې 2 او وروستی رقم یې 4 او تکرار هم مجاز نه وي.

2. په څو ډوله 10 نفره کولای شي، د یوه گردی میز په شاوخوا کښیني چې له دې جملې څخه 2 تنه غواړي په هر حالت کې سره خوا په خوا کیني.

**حل**

هغه دوه تنه چې غواړي هر وخت سره خوا په خوا کيښي، دوی دواړو ته یو حالت په پام کې نیول کېږي، نو کله چې دوه چوکۍ د دوو تنو په واسطه اشغال شي، نو 8 چوکۍ پاتې کېږي په 8! ډوله دوی ورباندې کښېناستلی شي او دوی دواړه هم دوه حالتونه لري، یعنې د دوی دواړو د ځای بدلون هم دوه حالتونه دي چې په 2 کې ضربېږي یعنې په لاندې ډول:

$$2(8!) = 2(8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) = 2(40320) = 80640$$

یعنې دوی په 80640 ډوله کولای شي د گردې میز په شاوخوا کښيښي.

3. په څو ډوله کولای شئ 3 سره توپونه، 2 آسماني او څلور زېر توپونه سره خوا په خوا په یو کتار کې کېږدو. (د هم رنگه

توپونو په کتار کې د هم رنگه توپونو ځای بدلول بل حالت نه شمېرل کېږي.)

**حل** دا پوښتنه په مرکب ترتیب باندې حلېږي، په کتاب کې له دغه نوم څخه یادونه نه ده شوې، ولې فرمول یې په کتاب کې شته.

$$P_n^{(k_1, k_2, \dots, k_n)} = \frac{n!}{(k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_n!)}$$

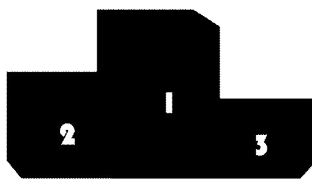
$$n = 3 + 2 + 4 = 9$$

$$k_1 = 3$$

$$k_2 = 2$$

$$k_3 = 4$$

$$P_9^{(3,2,4)} = \frac{9!}{3! \cdot 2! \cdot 4!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 9 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 5 = 36 \cdot 35 = 1260$$



## نهم څپرکی: احتمالات

ترکیب (Combination)

د درسي کتاب (310-309) مخونه

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>پوهنيزه</li> <li>مهاري</li> <li>ذهنيتي</li> </ul> <p>زده کوونکي به د لوست په پای کې وتوانېږي چې:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>د ترکیب په مفهوم پوه شي.</li> <li>د ترکیب په اړه پوښتنې حل او تشخیص کړای شي.</li> <li>د پورته پوهې او مهارت په پیدا کولو سره په ورځني ژوند کې ورڅخه کار واخلي او له امله یې خوښي ښکاره کړي.</li> </ul>	
<p>2- د زده کړې لارې:</p> <p>پوښتنه او ځواب، ډله ییز او یو کسبیزکار...</p>	
<p>3- مرستندویه مواد:</p> <p>د اړتیا وړ مواد...</p>	
<p>4- د وړودي برخې توضیح (5 دقیقې)</p> <p>ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته د تېر لوست په یادونې سره د زده کوونکو پام د کتاب وړودي برخې ته راوړوي او وپوښتي:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>د 2 او 3 عددونو ترکیب له کوم عدد سره مساوي دی؟</li> <li>ایا ستاسو له نظره ترتیب او ترکیب یو له بل سره څه اړیکه لري؟</li> <li>د دوو تابعگانو ترکیب په څه ډول او شرط یې کوم دی؟</li> </ul> <p>کوښښ وکړئ چې ځوابونه له زده کوونکو څخه په لاس راوړئ، د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړئ.</p>	
<p>5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې):</p> <p>ښاغلی ښوونکی زده کوونکي په مناسبو ډلو ووېشي د درسي کتاب 309 مخ فعالیت ورکړي، چې له خبرو او بحث وروسته فعالیت سرته ورسوي د فعالیت د سرته رسولو په وخت کې څارنه او د ستونزو په صورت کې مرسته وکړي، په پای کې د هرې ډلې استازی دې خپل سرته رسولی فعالیت نورو ته د یوه مثال په ورکولو سره توضیح کړي، که کومې ډلې تېروتنه کړي وي، کوښښ وکړي، تېروتنه یې د یوې بلې ډلې په واسطه اصلاح کړي، بیا تاسو داسې د ترکیب تعریف ورته وکړئ:</p> <p>له <math>n</math> متمایزو شیانو څخه د <math>r</math> شیانو ټاکل (<math>r \leq n</math>) داسې چې په هغو کې د ټاکلو (انتخاب) ترتیب په پام کې نیول شوی نه وي، ترکیب نومېږي او ترکیب د <math>C_r^n = C_n^r = \binom{n}{r}</math> په سمبول سره ښيي. او <math>\binom{n}{r}</math> داسې لوستل کېږي (<math>n</math> په <math>r</math>) او د تعریف له مخې <math>\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}</math> سره دی، وروسته ښاغلی ښوونکی دې د کتاب 310 مخ لومړی مثال په تخته حل کړي او له زده کوونکو څخه دې د حل شوي مثال په اړه توضیحات وغواړي.</p>	

**6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې**

بناغلی بنوونکی د لوست د لا پوخوالي لپاره یو داوطلب (چې په خپله وغواړي) زده‌کوونکی تختې ته راوغواړي چې د درسي کتاب دویم مثال پر تخته حل کړي، په عین وخت کې نور زده‌کوونکي دې په خپلو کتابچو کې د کتاب له لېدو پرته حل کړي او په پای کې دې خپل حلونه د تختې له حل سره پرتله کړي. د ستونزو په صورت کې لارښوونه او مرسته وکړي.

**7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې**

بناغلی بنوونکی ددې لپاره چې ډاډمن شي، چې ایا زده‌کوونکو لوست زده کړی دی او که نه؟ د لوست په اړوند له زده‌کوونکو څخه لاندې پوښتنې وکړي او کوبښنې وکړي چې سم ځوابونه له زده‌کوونکو څخه ترلاسه کړي:

1. د ترتیب او ترکیب ترمنځ څه توپیر دی؟

2.  $C_3^5 = \binom{5}{3}$  له کوم عدد سره مساوي دی؟

**8- د بنوونکي لپاره اضافي معلومات:**

بناغلی بنوونکی غواړو وښیو چې  $0! = 1$  دی، پوهېږو چې  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n = n!$  دی، نو لرو:

$$(n+1)! = (n+1)n!$$

که دلته  $n = 0$  شي، نو:

$$(0+1)! = (0+1)0!$$

$$1 = 1! = 1 \cdot 0! \Rightarrow 0! = 1! = 1$$

اوس غواړو ثابت کړو چې  $C_n^n = \binom{n}{n} = 1$ ،  $C_0^n = \binom{n}{0} = 1$  او  $\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} = \binom{n+1}{r}$  دی.

حل: د ترکیب له تعریف څخه په کار اخیستنې سره لرو چې:

$$C_0^n = \binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{1 \cdot n!} = 1$$

$$C_n^n = \binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = \frac{n!}{n! \cdot 1} = \frac{n!}{n!} = 1$$

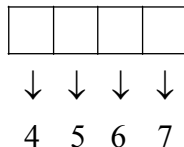
$$\begin{aligned} \binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} &= \frac{n!}{r!(n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!} = \frac{n!(n-r+1) + rn!}{r!(n-r+1)!} \\ &= \frac{n!(n-r+1+r)}{r!(n+1-r)!} = \frac{(n+1)n!}{r!(n+1-r)!} \end{aligned}$$

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} = \frac{(n+1)n!}{r!(n+1-r)!} = \frac{(n+1)!}{r!(n+1-r)!} = \binom{n+1}{r} = C_r^{n+1}$$

## 9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

1- له اوو تورو لکه د A, B, C, D, E, F او G څو 4 توري کلمې، پرته له تکراري توري څخه جوړولای شو؟

**حل** پوهېږو چې ټول توري 7 دي، نو د څلورو تورو د کلمو د جوړولو لپاره موږ څلور تش ځایونه په پام کې نیسو چې د لومړي تش ځای لپاره د 7 تورو له ډلې څخه 7 امکان شتون لري، یعنې:



$$= 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 42 \cdot 20 = 840$$

یعنې 840 ټولې څلور حرفي کلمې چې له پاسنیو تورو څخه په لاس راځي.

2- د والیبال په یوه لیگ کې، 7 تیمونه گډون لري. تیمونه په څو ډوله کولای شي لومړی، دویم او دریم مقام لاس ته راوړي؟

**حل**

لومړی مقام	دویم مقام	دریم مقام
↓	↓	↓
7	6	5

$$= 7 \cdot 6 \cdot 5 = 42 \cdot 5 = 210$$

یعنې تیمونه په 210 ډوله کولای شي لومړی، دویم او دریم مقام لاسته راوړي.

3- له 4 نارینه وو او 6 مېرمنو څخه 2 نارینه او 3 ښځې داسې ټاکو چې نارینه په کې یو رئیس او دویم یې مالي مسؤل وي.

**حل** له پوښتنې څخه معلومېږي چې له 4 نارینه وو او 6 مېرمنو څخه 2 نارینه او 3 مېرمنې داسې ټاکو چې لومړی نارینه رئیس او دویم نارینه مالي مسؤل وي، د نارینه وو په ټاکلو کې د ټاکلو ترتیب په پام کې دی، نو د نارینه وو ټاکل په تبدیل حلېږي او د مېرمنو ټاکل 3 تنه او د ټاکلو ترتیب یې هم په پام کې نه دی، نو د مېرمنو ټاکل په ترکیب باندې حلېږي.

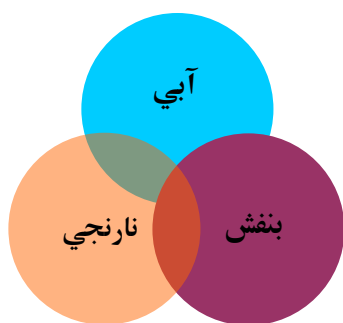
$$د نارینه وو ټاکل = P_2^4 = V_2^4 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 4 \cdot 3 = 12$$

$$د مېرمنو ټاکل = C_3^6 = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6} = 5 \cdot 4 = 20$$

$$له 4 نارینه وو او 6 مېرمنو څخه د 2 نارینه وو او 3 مېرمنو ټاکل = P_2^4 \cdot C_3^6 = 12 \cdot 20 = 240$$

په پایله کې ویلی شو چې موږ دوه نارینه او درې مېرمنې شرایطو ته په پاملرنې سره په 240 ډوله ټاکلی شو.

**نوټ:** ښاغلی ښوونکی، دریمه پوښتنه د تبدیل په عنوان پورې اړه لري، د تبدیل له لوست وروسته دې دا پوښتنه حل شي.



## نهم څپرکی: احتمالات

ترکیب (Combination)

د درسي کتاب (311) مخ

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- پوهنيزه</li> <li>- مهارتي</li> <li>- ذهني</li> </ul> <p>زده کوونکي به د لوست په پای کې وتوانېږي چې:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• د ترکیب په مفهوم پوه شي.</li> <li>• د ترکیب په اړه پوښتنې حل او تشخیص کړای شي.</li> <li>• د پورته پوهې او مهارت په پیدا کولو سره په ورځني ژوند کې ورڅخه کار واخلي او له امله یې خوښي ښکاره کړي.</li> </ul>	
<p>2- د زده کړې لارې:</p> <p>پوښتنه او ځواب، ډله ییز او یو کسيز کار...</p>	
<p>3- مرستندويه مواد:</p> <p>د اړتیا وړ مواد...</p>	
<p>4- د وړودي برخې توضیح (5 دقیقې)</p> <p>ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته د تېر لوست په یادونې د زده-کوونکو پام د کتاب وړودي برخې ته راوړی او وپوښتی:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• په شکل کې څو رنگونه وینئ؟</li> <li>• د ابي او نارنجي رنگ ترکیب کوم رنگ دی؟</li> <li>• ستاسو په نظر ژېړ رنگ د کومو رنگونو له ترکیبه جوړېږي؟</li> <li>• د 5 او 2 عددونو ترکیب کوم عددونه دي؟</li> </ul> <p>کوښښ وکړئ چې څو اېونه له زده کوونکو څخه په لاس راوړئ، د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړئ.</p>	
<p>5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې):</p> <p>ښاغلی ښوونکی زده کوونکي په مناسبو ډلو ووېشي، د درسي کتاب 311 مخ فعالیت ورکړی چې له خبرو او بحث وروسته فعالیت سرته ورسوي، د فعالیت د سرته رسولو په وخت کې څارنه او د ستونزو په صورت کې مرسته وکړی په پای کې تاسو موضوع داسې تشریح کړئ:</p> <p>ځینې وخت د بېلابېلو شیانو، اجزاوو، امکاناتو او شکلونو ترتیبول په مطلوب شکل هم د ترتیب او هم د ترکیب له لارې کیدای شي، مثلاً د بېلابېلو گلانو گډون د زینتې ساحې لپاره، د بېلابېلو گلانو غوره کول، د بېلابېلو هېوادونو د بیرغونو اېښودل داسې چې خپل لازم موقعیت ولري او داسې نور مثالونه، خو بیا هم ترکیب له ترتیب سره توپیر لري، موږ ترکیب داسې تعریفوو: د عددونو، شیانو یا اجزاوو داسې گروپ بندي ده چې په هغو کې سلسله مراتب او نوبت نه مراعات کېږي، یا په بل عبارت له <math>n</math> شیانو څخه <math>r</math> داسې چې <math>0 \leq r \leq n</math> شیانو ټاکل چې د ټاکلو ترتیب په کې په پام کې نه وي نیول شوی</p>	

$$\text{او فرمول يې } C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \text{ دى.}$$

د لانسې پوهې لپاره تاسو ورته د کتاب 312 مخ لومړی مثال پر تخته حل کړئ.

### 6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

بناغلی بنوونکی د لوست د لاپوځوالي لپاره یو داوطلب (چې په خپله و غواړي) زده‌کوونکی تختې ته راوغواړي چې د درسي کتاب 312 مخ دویم مثال پر تخته حل کړي، په عین وخت کې دې نور زده‌کوونکي په خپلو کتابچو کې د کتاب له لېدو پرته حل کړي او په پای کې دې خپل حلونه د تختې له حل سره پرتله کړي. د ستونزو په صورت کې لارښوونه او همکاري وکړئ.

### 7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ددې لپاره چې ډاډمن شی، چې ایا زده‌کوونکو لوست زده‌کړی او که نه؟ د لوست په اړوند له زده‌کوونکو څخه لاندې پوښتنې وکړئ او کوبنس وکړئ چې سم ځوابونه ترلاسه کړئ:

1. څوک ترکیب تعریفولای شي؟
2. ترکیب له ترتیب سره څه توپیر لري؟
3. د ترکیب  $C_2^6 = \binom{6}{2}$  حاصل له کوم عدد سره مساوي کېږي؟

### 8- د بنوونکي لپاره اضافي معلومات:

بناغلی بنوونکی د ترکیب اهمیت په دې کې دی چې د څېړنو لپاره د نمونو (*sample*) غوره کولو لپاره ضروري ده، ترڅو د عددونو له یوې مجموعې څخه ټول عددونه په نمونه کې ځای ونیسي او برعکس د بېلابېلو افرادو یا شیانو څخه یو جمعیت یا نفوس (*population*) ترکیب شي، نو ځکه دا دوه اړخیز اهمیت لري. په احتمالاتو کې موږ هم د جمعیت (نفوس) او هم د نمونې لپاره ځانگړی تعریف لرو: نفوس د هغوشیانو، افرادو، پېښو یا امکاناتو څخه عبارت دی چې مجموعه یې گډ خصوصیات لري. اوس څو مثالونه چې د ترکیب د بحث اړوند دي په پام کې نیسو.

غواړو وښیو چې د هر  $k \geq 1$  څخه  $\frac{k}{n} \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1}$  دی.

ثبوت:

$$\frac{k}{n} \left[ \frac{n!}{k!(n-k)!} \right] = \frac{k}{n} \left[ \frac{n(n-1)!}{k(k-1)!(n-k)!} \right] = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \dots *$$

$$\binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k+1)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \dots **$$

$$*, ** \Rightarrow \frac{k}{n} \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1}$$

همدارنگه غواړو ثبوت کړو چې  $(k+1) \binom{n}{k+1} = (n-k) \binom{n}{k}$

**ثبوت:**

$$\begin{aligned}
 (k+1) \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} &= (k+1) \frac{n!}{(k+1)k!(n-k-1)!} = \frac{n!}{k!(n-k-1)!} = \frac{(n-k)n!}{k!(n-k)(n-k-1)!} \\
 &= (n-k) \frac{n!}{k!(n-k)!} = (n-k) \binom{n}{k} \Rightarrow (k+1) \binom{n}{k+1} = (n-k) \binom{n}{k} \\
 \Rightarrow (k+1)! \binom{n}{k+1} &= (n-k) \binom{n}{k}
 \end{aligned}$$

**9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:**

1- که چیرې په یوه ازموینه کې له 10 پوښتنو څخه 7 پوښتنو ته ځوابونه مطلوب وي، په څو ډوله کولای شو چې له 10 پوښتنو څخه 7 پوښتنې د حل لپاره وټاکو؟

**حل** څرنگه چې له لس پوښتنو څخه 7 پوښتنو ته ځواب مطلوب دی، له دې څخه معلومېږي چې د انتخاب ترتیب په نظر کې نه دی، له دې امله دا پوښتنه د ترکیب په طریقه حلېږي.

$$\begin{aligned}
 C_r^n &= \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \\
 C_7^{10} &= \frac{10!}{7!(10-7)!} = \frac{10!}{7!3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{7! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \\
 C_7^{10} &= 10 \cdot 3 \cdot 4 = 120
 \end{aligned}$$

2- په یوه مستوي کې پنځه ټکي چې په یوه کرښه پراته نه دي، په پام کې ونیسئ د دې ټکو په نښه کولو سره په څو ډوله مثلث جوړولای شو.

**حل** دا پوښتنه د ترکیب په طریقه حلېږي، ځکه چې په همدې کې د انتخاب ترتیب په هغو کې په پام کې نه دی نیول شوی څرنگه چې مثلث له دريو ټکو څخه تېرېږي، نو:

$$\begin{aligned}
 C_3^5 &= \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2 \cdot 1} \\
 C_3^5 &= 5 \cdot 2 = 10
 \end{aligned}$$

یعنې په 10 ډوله کولای شو چې له ټکو څخه مثلثونه جوړ کړو.



3- که چیرې  $P(n, 2) - C_2^n = 36$  سره وي، د  $n$  قیمت پیدا کړئ؟

**حل**

$$P(n, 2) = \frac{n!}{(n-2)!}$$

$$C_2^n = \frac{n!}{2!(n-2)!}$$

$$\begin{aligned} P(n, 2) - C_2^n &= \frac{n!}{(n-2)!} - \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{2!n! - n!}{2!(n-2)!} = \frac{n!(2! - 1!)}{2!(n-2)!} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{2!(n-2)!} = 36 \\ &= \frac{n(n-1)}{2} = 36 \cdot 2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P(n, 2) - C_2^n = n^2 - n = 72$$

$$\Rightarrow n^2 - n - 72 = 0 \Rightarrow \Delta = 1^2 - 4(1)(-72)$$

$$\Delta = 1 + 288 = 289$$

$$\sqrt{\Delta} = \pm 17$$

$$n_1 = \frac{1+17}{2} = \frac{18}{2} = 9, \quad n_2 = \frac{1-17}{2} = \frac{-16}{2} = -8$$

څرنگه چې  $n$  منفي قیمت نه شي اخیستلای، نو  $n = 9$  دی.

**میزان:**

$$P(n, 2) - C_2^n = 36$$

$$P(9, 2) - C_2^9 = 36$$

$$P(9, 2) = \frac{9!}{(9-2)!} = \frac{9!}{7!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7!}{7!} = 9 \cdot 8 = 72$$

$$C_2^9 = \binom{9}{2} = \frac{9!}{2!(9-2)!} = \frac{9!}{2!7!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7!}{2 \cdot 1 \cdot 7!} = 9 \cdot 4 = 36$$

$$P(9, 2) - C_2^9 = 72 - 36 = 36$$



## نهم څپرکی: احتمالات

تبدیل (Variation)

د درسي کتاب (313-316) مخونه

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• د تبادل په مفهوم پوه شي.</li> <li>• د تبادل اړوند مثالونه حل کړای شي.</li> <li>• د تبادل د موضوع په اړه ورځنۍ ستونزې حل او په ځان باورمن شي.</li> </ul>	<p>- پوهنيزه</p> <p>- مهارتي</p> <p>- ذهني</p>
<p>2- د زده کړې لارې:</p> <p>پوښتنه او ځواب، ډله ییز او یوکسیزکار...</p>	
<p>3- مرستندويه مواد:</p> <p>د اړتیا وړ مواد...</p>	
<p>4- د وړودي برخې</p> <p>توضیح (5 دقیقې)</p> <p>ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته د زده کوونکو پام تېر لوست ته راوړوی او د کتاب د وړودي برخې په اړه داسې وپوښتی:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• د چارټ په شکل کې څه شی وښی او واضح یې کړی.</li> <li>• ستاسو په نظر تبدیل له ترکیب سره څه توپیر لري؟</li> <li>• له <math>\{a, b, c, d, e\}</math> تورو څخه څو درې حرفي کلمې جوړېدای شي؟</li> </ul> <p>کوښښ وکړی چې ځوابونه له زده کوونکو څخه په لاس راوړی، د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړی.</p>	
<p>5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې):</p> <p>ښاغلی ښوونکی زده کوونکي په مناسبو ډلو ووېشي، د درسي کتاب د 313 مخ فعالیت ورکړی چې له خبرو او بحث وروسته فعالیت سرته ورسوي، د فعالیت د سرته رسولو په وخت کې څارنه او د ستونزو په صورت کې مرسته وکړی په پای کې د یوې یا دوو ډلو استازي دې خپل سرته رسولی فعالیت نورو ته دیوه مثال په ورکولو سره توضیح کړي، که کومې تېروتنې وي، کوښښ وکړي، تېروتنې یې د یوې بلې ډلې په واسطه اصلاح کړي. بیا وروسته تاسې داسې د تبدیل تعریف وکړی:</p> <p>له <math>n</math> متمایزو شیانو څخه د <math>k</math> شیانو ټاکل داسې چې <math>k \leq n</math> وي او د ټاکلو ترتیب یې په پام کې وي، له تبدیل څخه عبارت دی او په <math>V_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}</math> فارمول سره، ښودل کېږي، یا په بل عبارت د عددونو، شیانو او اجزاوو داسې تنظیمول دي چې د نوبت سلسله په کې رعایت شي، د موضوع د لابنه پوهاوی لپاره د درسي کتاب د 313 مخ مثال پر تخته حل کړی او گام په گام د تبدیل فرمول ورباندې تطبیق کړی او لازم توضیحات ورکړی په پای کې یو داوطلب زده کوونکی تختې ته راوغوړی او ورته ووايست چې د پوهنتون له کلمې څخه څو درې حرفي کلمې پرته له تکراري توري څخه جوړېدای شي؟</p> <p>د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړی.</p>	

**6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې**

ښاغلی ښوونکی د لوست د لاپوځوالي لپاره یو داوطلب (چې په خپله وغواړي) زده‌کوونکي تختې ته راوغواړي چې د درسي کتاب 314 مخ مثال پر تخته حل کړي، په عین وخت کې دې نور زده‌کوونکي په خپلو کتابچو کې د کتاب له لېدو پرته قضیه حل کړي او په پای کې دې خپل حلونه د تختې له حل سره پرتله کړي. د ستونزو په صورت کې لارښوونه او مرسته وکړئ.

**7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې**

ښاغلی ښوونکی ددې لپاره چې ډاډمن شي، چې ایا زده‌کوونکو لوست زده‌کړی دی او که نه؟ د لوست په اړوند له زده‌کوونکو څخه لاندې پوښتنې وکړئ او کوبښنې وکړئ چې له زده‌کوونکو څخه سم ځوابونه ترلاسه کړئ:

1. د تبدیل او ترکیب ترمنځ څه توپیر وجود لري؟
2.  $V(5, 2) = V_2^5$  له کوم عدد سره مساوي دی؟
3. په څو مختلفو ډولونو کولای شو 5 تنه محصلین له یوه 17 کسيز ټولگي څخه یوه پنځه څانگیزه کورس ته نوم لیکنه وکړو؟

**8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات:**

ښاغلی ښوونکی تبدیل نه یوازې د پلټونو په تبدیل، نسل‌گیری، د بوټو د تنظیم، د یو شمېر عملیاتو، اوبه لگولو او نورو په هکله دگټې وړ دی، بلکې په ورزشي، سیاسي، کلتوري، گڼ شمېر مسائلو او نورو کې هم موږ ته د ښه تنظیمولو لپاره پوهه راکوي؛ مثلاً د هېواد د 34 ولايتونو ورزشي ټيمونه څو څو ځله یو له بل سره د مخامخ کېدو احتمال او چانس لري او څو لوبې باید ورته تنظیم شي، یا په هېواد کې د ټاکنو لپاره د وکیلانو، بهر ته د تلونکو هیاتونو د تبدیل په جوړولو، په نړیوالو غونډو کې د هېوادونو د بهرغونو اېښودلو شکل، د لویو غونډو لپاره د هر هېواد یا د هیات هر غړي ته یوه ورځ د ریاست مشري سپارل او نورو مسائلو کې هم ډېر کارول کېږي.

د موضوع د لاینه وضاحت لپاره لاندې مثال په پام کې نیسو.

فرضو چې د یو روغتون رئیس غواړي له 5 تنو ډاکټرانو څخه درې تنه ډاکټران داسې وټاکي چې تر ټولو ښه او لایق وي، نو د روغتون رئیس د 5 تنو څخه به لومړی ډاکټر د څلور تنو څخه به دویم ډاکټر او له درې تنو څخه دریم تن وټاکي، نو دلته 60 لارې (طریقي) شتون لري، ترڅو درې تنه ډاکټران له 5 تنو ډاکټرانو څخه وټاکل شي. دا 60 طریقي ددې فورمول په واسطه محاسبه کولای شو:

**حل:**

$$V_k^n = V(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$V_3^5 = V(5, 3) = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

## 9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

1. د فوټبال په یوه سیالی کې 12 ټیمونه گډون لري، په څو ډوله کولای شو گټونکي لومړی، دویم او دریم مقام ته وټاکو.

**حل** پورتنی پوښتنه په تبدیل پورې اړه لري، ځکه چې په هغه کې د انتخاب ترتیب په پام کې دی:

لومړی مقام	دویم مقام	دریم مقام
------------	-----------	-----------

↓                      ↓                      ↓

10                      11                      12

$$N = 12 \cdot 11 \cdot 10 = 12 \cdot 110 = 1320$$

له فورمول څخه هم همدغه ځواب لاسته راځي:

$$V_3^{12} = \frac{12!}{(12-3)!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9!}{9!} = 12 \cdot 11 \cdot 10 = 1320$$

2. د یوولسم ټولگي له 20 تنو زده‌کونکو څخه په څو ډوله دوه تنه، د ټولگي د استازي او د استازي د مشرمرستیال په

توگه ټاکلی شو.

**حل**

استازي                      د استازي مشرمرستیال

--	--

↓                      ↓

19                      20

$$N = 20 \cdot 19 = 380$$

یا د فورمول څخه هم په لاس راځي:

$$V_2^{20} = \frac{20!}{(20-2)!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18!}{18!} = 20 \cdot 19 = 380$$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

## نهم څپرکی: احتمالات

د بېنوم قضیه

د درسي کتاب (317-318) مخونه

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• د بېنوم د قضیې په مفهوم پوه شي.</li> <li>• د بېنوم د قضیې په مرسته د <math>(a \pm b)^n</math> مطابقت ته پراختیا ورکړای شي.</li> <li>• د پورته پوهې او مهارت په درلودلو سره په ځان باور پیدا کړي او په ورځني ژوند کې ترې کار واخلي.</li> </ul>	<p>د زده کوونکي به د لوست په پای کې وتوانېږي چې:</p>
<p>2- د زده کړې لارې:</p> <p>پوښتنه او ځواب، ډله ییز کار او یو کسيز...</p>	<p>د اړتیا وړ مواد...</p>
<p>3- مرستندويه مواد:</p>	<p>د اړتیا وړ مواد...</p>
<p>4- د وړودي برخې توضیح (5 دقیقې)</p> <p>بناغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته د تېر لوست لنده یادونه وکړي او د زده کوونکو پام د کتاب وړودي برخې ته راوړي او وپوښتي:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• په مخامخ شکل کې عددونه په کوم ترتیب تنظیم شوي دي؟</li> <li>• د څلورمې لیکې عددونه کوم دي؟</li> <li>• د <math>(a + b)^3</math> مطابقت ضریبونه په لاس راوړي.</li> </ul> <p>کوښښ وکړي چې ځوابونه له زده کوونکو څخه په لاس راوړي، ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړي.</p>	<p>بناغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته د تېر لوست لنده یادونه وکړي او د زده کوونکو پام د کتاب وړودي برخې ته راوړي او وپوښتي:</p>
<p>5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې):</p> <p>بناغلی ښوونکی زده کوونکي په مناسبو ډلو ووېشي د درسي کتاب 317 مخ فعالیت ورکړي چې له خبرو او بحث وروسته فعالیت سرته ورسوي، د فعالیت د سرته رسولو په وخت کې څارنه او د ستونزو په صورت کې مرسته وکړي، په پای کې دې د هرې ډلې استازی خپل سرته رسولی فعالیت نورو ته توضیح کړي، که کومې ډلې تېروتنې کړي وي، کوښښ وکړي تېروتنه یې د یوې بلې ډلې په واسطه اصلاح کړي. بیا وروسته تاسو موضوع داسې تشریح کړي:</p> <p>په یوه ناڅاپي تجربه کې چې د نمونې فضا غږي یې په مساوي احتمال په تجربه کې بیا بیا د تکرار وړ وي، د تجربې په <math>n</math> ځله تکرار کې د بېنوم د انکشاف <math>k - m</math> حد کې لاندې احتمال لري: <math>\binom{n}{k} P^k (1 - P)^{n-k}</math></p> <p>پورتنی بېنوم په <math>B(n, p, k)</math> سره ښودل کېږي چې د برنولي د احتمال په نامه یادېږي او داسې لیکل کېږي: <math>B(n, p, k) = \binom{n}{k} P^k (1 - P)^{n-k}</math></p>	

دغه فورمول د هغې پېښې لپاره کارول کېږي چې له دوو حالتونو څخه خالي نه وي یا کامیابي یا ناکامي مثلاً د یوې سکې په غورځېدو کې که د خط راتگ مطلوب وي؛ نو دلته دوه حالتونه شتون لري یا به خط راشي یا به شېر. او همدارنگه د یوې پېښې د پېښېدو احتمال  $P$  او د نه پېښېدو احتمال یې  $1 - p = q$  دی.

### 6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

ښاغلی ښوونکی د لوست د لا پوخوالي لپاره یو داوطلب (چې په خپله وغواړي) زده‌کوونکی تختې ته راوغواړي چې د درسي کتاب 318 مخ مثال پر تخته حل کړي، په عین وخت کې دې نور زده‌کوونکي په خپلو کتابچو کې د کتاب له لېدو پرته حل کړي او په پای کې دې خپل حلونه د تختې له حل سره پرتله کړي. د ستونزو په صورت کې لارښوونه او مرسته وکړي.

### 7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ښاغلی ښوونکی ددې لپاره چې ډاډمن شي، چې ایا زده‌کوونکو لوست زده کړی او که نه؟ د لوست په اړوند له زده‌کوونکو څخه لاندې پوښتنې وکړي او کوښښ وکړي چې له زده‌کوونکو څخه سم ځوابونه ترلاسه کړي:

1. کولای شو د هرې ناڅاپي تجربې نمونه یي فضا په داسې یوې نمونه یي فضا و اړو و چې دوه غړي ولري؟
2. که چیرې د یوې نمونه یي فضا د یوه غړي د پېښېدو احتمال  $P$  وي، د بلې پېښې احتمال به یې څو وي؟
3. که چیرې دا ډول تجربې  $n$  ځلې تکرار شي، نو د  $k - m$  ځلې وړل په  $n$  ځلې تکرار کې یې احتمال پیدا کړي؟

### 8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات:

ښاغلی ښوونکی تراوسه مو د بېنوم قضیې په هکله یو څه معلومات ترلاسه کړل، خو اوس غواړو پوه شو چې په احتمالاتو کې د بېنوم له قضیې څخه د څه شي لپاره استفاده کېږي، دا موضوع په یوه مثال کې ښیو:

مثال: یوه دوه مخیزه سکه په پام کې ونیسئ، یوه مخ ته یې شېر نوم ورکړئ او بل مخ ته یې خط و وایي، که د  $H$  حرف له شېر څخه او  $T$  حرف له خط څخه نمایندگي وکړي د  $H$  او  $T$  د فریکونسي وېش چې د سکې د څلور ځلې غورځولو په واسطه منځ ته راځي، د بېنوم د قضیې په کارولو سره یې محاسبه کوو.

$$(H + T)^4 = H^4 + 4H^3T + 6H^2T^2 + 4HT^3 + T^4$$

ددې مساوات ښی خوا د  $H$  او  $T$  د تورو توانونه د ترکیب له نوعیت څخه نمایندگي کوي، داسې چې ښی خوا د هر حد ضریبونه هغه فریکونسي ښیي، چې یو ترکیب مثلاً  $H^3$  یا  $H^2$  تکرارېږي، په دې ډول ویلای شو چې  $(H, H, H)H^3$  په کې 4 ځلې تکرار شوی دی او د پایلو مجموع د سکې د غورځولو په عملیه کې مساوي په 16 ده؛ یعنې د ټولو حدونو د ضریبونو مجموعه 16 کېږي.

## 9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

وښیئ چې:

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0 \quad (I)$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n \quad (II)$$

**حل I:** د  $I$  مساوات له ښی لوری څخه کین لوری په لاس راوړو او همدارنگه د نیوتن له بینوم څخه کار اخلو؛ یعنی:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n}b^n$$

$$0 = (1+(-1))^n = \binom{n}{0}1^n + \binom{n}{1}1^{n-1}(-1) + \binom{n}{2}1^{n-2}(-1)^2 + \binom{n}{3}1^{n-3}(-1)^3 + \dots + \binom{n}{n}(-1)^n$$

$$0 = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n}$$

**حل II:** پوهېږو چې  $1+1=2$  کېږي؛ نو بیا هم د نیوتن له بینوم څخه کار اخلو او له ښی لوری کین لوری په لاس

راوړو:

$$2^n = (1+1)^n = \binom{n}{0}1^n + \binom{n}{1}1^{n-1} \cdot 1 + \binom{n}{2}1^{n-2} \cdot 1^2 + \binom{n}{3}1^{n-3} \cdot 1^3 + \dots + \binom{n}{n}1^n$$

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n}$$



## نهم څپرکی: احتمالات

دوه جملهيي احتمال

د درسي کتاب (319-322) مخونه

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

<p>1- د زده کړې موخې</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• د دوه جملهيي احتمال په مفهوم پوه شي.</li> <li>• د دوه جملهيي احتمال په هکله اړوندې پوښتنې حل کړای شي.</li> <li>• له دوه جملهيي احتمال څخه په ورځني ژوند کې کار واخلي او ورڅخه خوښې ښکاره کړي.</li> </ul>	<p>- پوهنيزه - مهارتي - ذهني</p>
<p>2- د زده کړې لارې:</p> <p>پوښتنه او ځواب، ډله‌ييز کار او يو کسيز...</p>	
<p>3- مرستندويه مواد:</p> <p>د اړتيا وړ مواد...</p>	
<p>4- د وړودي برخې</p> <p>توضیح (5 دقیقې)</p> <p>ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته له تېر لوست څخه په یادونې سره د زده‌کوونکو پام د کتاب وړودي برخې ته راوړوی او وپوښتی:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• په چارټ کې کوم شکلونه گورئ؟</li> <li>• که چيرې يوه سکه پورته واچول شي، کله چې سکه بېرته په ځمکه لوېږي، کوم مخ به يې پورته خواته راشي (شېر که خط)؟</li> <li>• ايا د يوې سکې په اچولو سره به له شېر او خط راتلو څخه پرته کوم بل حالت راشي؟ کوبنس وکړئ چې څو اېونه له زده‌کوونکو څخه په لاس راوړی د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړئ.</li> </ul>	
<p>5- د لوست بهير او فعاليت (28) دقيقې:</p> <p>ښاغلی ښوونکی زده‌کوونکي په مناسبو ډلو ووېشي د درسي کتاب 319 مخ فعاليت ورکړی چې له خبرو او بحث وروسته فعاليت سرته ورسوي د فعاليت د سرته رسولو په وخت کې څارنه او د ستونزو په صورت کې مرسته وکړی په پای کې دې د هرې ډلې استازی خپل سرته رسولی فعاليت نورو ته د يوه مثال په ورکولو سره توضیح کړي، که کومې ډلې تېروتنې کړي وي، کوبنس وکړی چې تېروتنې يې د يوې بلې ډلې په واسطه اصلاح کړي. بيا وروسته تاسو موضوع داسې تشریح کړئ:</p> <p>کولای شو د هرې ناڅاپې تجربې نمونه يي فضا په داسې يوې نمونه يي فضا وړو چې دوه غړي لري. که چيرې دا ډول نمونه يي فضا د يوه غړي احتمال <math>P</math> وي، نو هر ورو د بل حالت احتمال <math>q = 1 - p</math> او ناکامې دي. که چيرې دا ډول تجربې <math>n</math> ځلې تکرار شي، نو د <math>k</math> - ام ځلې وړل (بريالی کېدل) په <math>n</math> ځلې تکرار کې <math>P</math> او له <math>n</math> ځلې څخه پاتې حالتونه چې د بايللو او ماتې خوړلو احتمال يعنې <math>q = 1 - p</math> دی.</p> <p>که چيرې دا ډول تجربې <math>n</math> ځلې تکرار کېږي، نو د <math>k</math> - ام ځلې وړل په <math>n</math> ځلې تکرار کې <math>P(k, n, p)</math> په پورته فورمول کې:</p>	



$P$ : د ناڅاپي پېښې د پېښېدو احتمال د نمونې په هر واحد کې

$k$ : ناڅاپي مطلوبه پایله

$n$ : د نمونې فضا شمېر

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ په مساوي دي په } \binom{n}{k}$$

وروسته تاسو د درسي کتاب 320 مخ لومړی مثال له فورمول څخه په کار اخېستنې سره د پوښتنې او ځواب په طريقه حل کړئ.

### 6- د زده کړې تحکيم: (7) دقيقې

ښاغلی ښوونکی د لوست د لا پوخوالي لپاره يو داوطلب (چې په خپله و غواړي) زده کوونکی تختې ته راوغواړئ چې د درسي کتاب 320 مخ دويم مثال په تخته حل کړي، په عين وخت کې دې نور زده کوونکي هم په خپلو کتابچو کې د کتاب له لېدو پرته حل کړي او په پای کې دې خپل حلونه د تختې له حل سره پرتله کړي. د ستونزو په صورت کې لارښوونه او مرسته وکړئ.

په پای کې داوطلب زده کوونکي په وارسره تختې ته راوغواړئ چې د درسي کتاب د 320 او 321 مخونه دريم، څلورم او پنځم مثالونه پر تخته حل کړي، تېروتنې يې د نورو زده کوونکو په واسطه اصلاح کړئ له هغه پرته تاسو ورسره مرسته وکړئ.

### 7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقيقې

ښاغلی ښوونکی ددې لپاره چې ډاډمن شي، چې ايا زده کوونکو لوست زده کړی دی او که نه؟ د لوست په اړوند له زده کوونکو څخه لاندې پوښتنې وکړئ او کوبښن وکړئ چې له زده کوونکو څخه سم ځوابونه ترلاسه کړئ:

1. که يوه سکه 5 ځلې واچول شي په دريم ځل کې يې د خط راتگ احتمال پيدا کړئ.
2. د دوه جملهيي احتمال فورمول و وياست او اجزاوې يې تشریح کړئ.
3. که يوه سکه 20 ځلې واچول شي، په 12 ام ځل کې يې د شپږ راتگ احتمال څومره دی؟
4. دوه جملهيي احتمال په احتمالاتو کې د څو احتمالي پېښو لپاره په کار ورل کېږي؟

### 8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات:

ښاغلی ښوونکی د دوه جملهيي احتمال هره هغه رياضيکي افاده ده چې دوه حده ولري؛ يعنې هغه ناڅاپي پېښه چې د پېښېدو احتمال يې له دوو حالتونو څخه خالي نه وي، يا کاميابي او يا ناکامي په احتمالاتو کې دوه جملهيي احتمال هغه وخت کارول کېږي چې کله موږ دوي مشاهدې سره يو ځای لیکو په ځانگړي توگه د احتمالاتو په سنجش کې ډېر معمول دی، د لابنه وضاحت لپاره لاندې مثال په پام کې نيسو.

**مثال:** که چيرې په 6 دانو هگيو کې د څلورو چرگانو او دوو چرگو د راوتلو احتمال پيدا کړو، نو په 6 واړو کې د ښځينه چرگو داسې محاسبه کوو:

$$P(k, n, p) = \binom{n}{k} P^k (1-P)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} P^k (1-p)^{n-k}$$

$k = 4$  ټولې ناڅاپې پېښې $n = 6$  ټولې هڅې $P = \frac{1}{2}$  د چرګ يا چرګې د وتلو احتمال يا په يوه هڅې کې 50% د چرګې او 50% د چرګ احتمال:

$$P(4, 6, \frac{1}{2}) = \binom{6}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{6!}{4!(6-4)!} \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{4} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{4}$$

$$P(4, 6, \frac{1}{2}) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{4} = \frac{15}{64} = 0.23 = 23\%$$

يعنې له 6 هڅيو څخه د ښځينه چرګورې راوتل 23% امکان لري.

**9- د تمرين او پوښتنو ځوابونه:**

يوه سکه څو ځله غورځوو، د دې احتمال پيدا کړي چې:

(i) په 4 ځله غورځېدو کې، 2 ځلې خط راشي.

(ii) په 6 ځله غورځېدو، 3 ځلې خط راشي

(iii) په 8 ځله غورځېدو کې، 4 ځلې خط راشي.

(iv) فکر وکړئ چې که سکه  $2n$  ځلې وغورځول شي او  $n$  ځلې خط راشي، د  $n$  په ډېرېدو، د  $p$  بدلون په څه ډول

دی؟

**حل (i):** د درسي کتاب د 316 مخ د خط راتگ له فورمول څخه په کار اخېستني سره لرو:د خط راتگ احتمال په  $k - m$  مرتبه کې  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$  (خط راتگ)  $P$ 

$$P(2) = \frac{\binom{4}{2}}{2^4} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2! \cdot 2!} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

$$P(3) = \frac{\binom{6}{3}}{2^6} = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3!} = \frac{20}{64} = \frac{5}{16}$$

**حل (ii)**

په همدې ډول:

$$P(4) = \frac{\binom{8}{4}}{2^8} = \frac{8!}{4! \cdot 4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4!} = \frac{7 \cdot 2 \cdot 5}{256} = \frac{70}{256} = \frac{35}{128}$$

**حل (iii)**

په عمومي توگه:

$$P(2n) = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} = \frac{(2n)!}{n! \cdot n!} = \frac{(2n)!}{2^{2n}}$$

**حل (iv)**يعنې ددې احتمال چې په  $2n$  ځلې غورځېدو کې  $n$  ځلې خط راشي عبارت دی له:  $\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}$

## د نهم خپرکي د عمومي پوښتنو حل (څلور درسي ساعتونه)

1- د لاندې عددونو سټ په پام کې ونیسئ:

$$S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

(i) په څو ډوله کولای شو له پورتنیو عددونو څخه 3 رقمي عددونه جوړ کړو.

(ii) ټول 3 رقمي جفت عددونه به څو وي؟

**حل (i):** د درې رقمي عددونو د جوړولو لپاره درې تش ځایونه په پام کې نیولی شو، اوس د سلیز خانې د ډکولو لپاره د  $S$  په سټ کې له راکړل شوو عددونو څخه شپږ امکانه شتون لري، ځکه چې یو رقم یې صفر دی، چې د سلیز په خانه کې یې نه شو لیکلای، ځکه درې رقمي عدد په لاس نه راځي. څرنگه چې په نوموړي سټ کې ټول اووه عددونه دي او یو یې په سلیز خانه کې ټاکل شوی دی، نو د لسیز خانې لپاره هم شپږ امکانه موجود دي، له هغه وروسته د یويز خانې د ډکولو لپاره پنځه عددونه پاتې کېږي، ویلای شو چې د یويز خانې د ډکولو لپاره پنځه امکانه شته، چې په لاندې ډول لیکل شوي دي:



6      6      5

$$6 \cdot 6 \cdot 5 = 36 \cdot 5 = 180$$

**حل (ii):** د ټولو درې رقمي جفتو عددونو د شمېر د پیدا کولو لپاره درې تش ځایونه په پام کې نیسو. له شرط سره سم لومړی د یويز خانې د ډکولو لپاره څلور امکانه شته، یعنې د یويز خانه د (0, 2, 4, 6) هر یوه عدد په واسطه ډکولای شو. د لومړي جزء په ډول د لسیز خانې ډکولو لپاره شپږ امکانه شتون لري، نو د سلیز خانې د ډکولو لپاره پنځه عددونه پاتې کېږي، خو څرنگه چې صفر د سلیز په خانه کې نه شو لیکلای، ځکه درې رقمي عدد نه راکوي، نو له دې امله د سلیز خانې د ډکولو لپاره څلور امکانه شتون لري، چې په لاندې ډول ښودل شوي دي:



4      6      4

$$4 \cdot 6 \cdot 4 = 24 \cdot 3 = 96$$

2- په څو ډوله 6 تنه زده‌کوونکي په یوه کتار کې څنگ په څنگ درېدلې شي؟

**حل:**



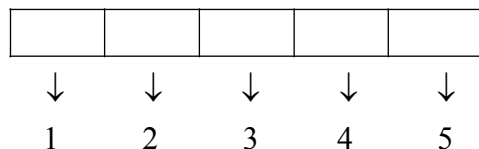
1      2      3      4      5      6

$$N = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 30 \cdot 24 = 720$$

یعنې په 720 ډوله کولای شي په یوه کتار کې ودرېږي.

3- په څو ډوله ابوبکر، زبیر، یاسر، حنظله او خبیب کولای شي، په یوه کتار کې خوا په خوا دیو یادگاري تصویر د اخیستلو لپاره ودرېږي؟

**حل:**



$$N = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 20 \cdot 6 = 120$$

یعنې ابوبکر، زبیر، یاسر، حنظله او خبیب کولای شي، د تصویر اخیستلو لپاره په یوه کتار کې په 120 ډوله ودرېږي.

4- په څو ډولونو کولای شو چې 9 تنه په درې 3 گروپونو ووېشو؟

**حل:**

$$N_1 = C_3^9 = \binom{9}{3} = \frac{9!}{3!(9-3)!} = \frac{9!}{3!6!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 6!} = 3 \cdot 4 \cdot 7 = 12 \cdot 7 = 84$$

$$N_2 = C_3^6 = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3!} = 5 \cdot 4 = 20$$

$$N_3 = C_3^3 = \binom{3}{3} = 1$$

$$N = N_1 \cdot N_2 \cdot N_3 = 84 \cdot 20 \cdot 1 = 1680$$

یعنې کولای شو 9 تنه په 1680 ډوله په 3 گروپونو باندي ووېشو.

5- د پاسکال د مثلث له مخې د  $(a+b)^7$  انکشاف په لاس راوړئ؟

**حل:**

1							
1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	
1	7	21	35	35	21	7	1

							1
						1	1
					1	2	1
				1	3	3	1
			1	4	6	4	1
		1	5	10	10	5	1
	1	6	15	20	15	6	1
1	7	21	35	35	21	7	1

$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$$

**Get more e-books from [www.ketabton.com](http://www.ketabton.com)  
Ketabton.com: The Digital Library**