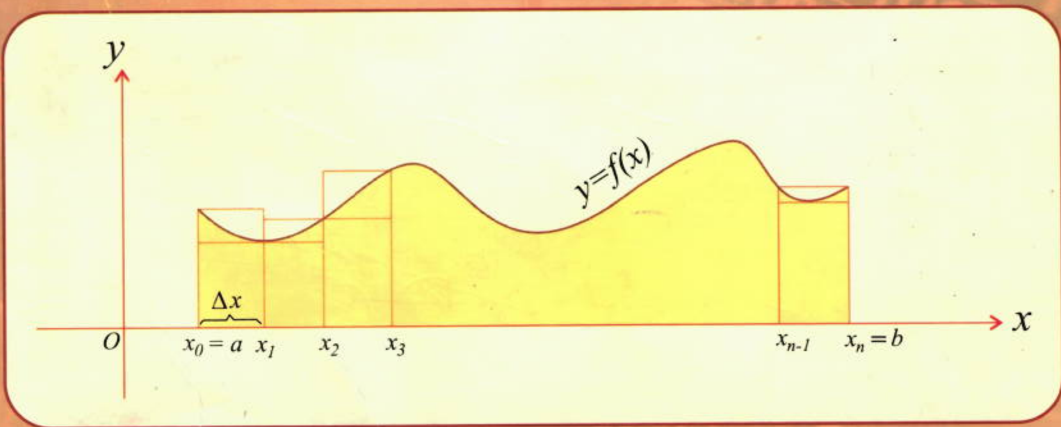
(نوی نصاب)

عمومي رياضي

له اووم ټولګي څخه تر دولسم ټولګي پورې



ارشمیدس

اراتوستنس

محمد بن موسی

اسحاق نیوټن

کوشي

Ketabton.com

مؤلف: استاد سردارمحمد (خوریانی)

(c) ketabton.com: The Digital Library

عمومي رياضي

(نوی نصاب)

استاد سردار محمد (خوږیانی)

سنځر کتابکور
0700202080
0700203080
آدرس: ټرنکي بازار، د قلم او کتاب مارکيټ. کندهار

(c) ketabton.com: The Digital Library

کتاب پېژندنه

د کتاب نوم/
عمومي رياضي (نوی نصاب)
مؤلف/
سردار محمد (خوږیاڼی)
ډيزاين/
الله یار تسل
خپرندوی/
میهن خپرندویه ټولنه
چاپکال/
۱۳۹۵ل
چاپشمېر/
۱۰۰۰ټوکه

آدرس
میهن خپرندویه ټولنه پېښور- جلال آباد
جلال آباد: اسحاقزی مارکیټ لاندې پوړ، لومړی دوکان
Email: Khorshidhimat@yahoo.com
Abdurashid.himat@gmail.com
Cell: ۰۳۰۰-۵۹۸۱۴۲۵- ۰۳۲۱۹۸۹۵۶۲۱
۰۷۸-۸۵۲۹۱۹۴ ۰۷۷۳۵۳۵۴۲۰

د چاپ حقوق له میهن خپرندویې ټولنې سره خوندي دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بسم الله الرحمن الرحیم

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

مقدمه

الحمد لله الذی فهمنا بعلوم الاشیاء والحوادث و علمنا بزیادات هم و النواقص و الصلوة و سلام علی رسوله بفهم الانسان باشرع فی الاعمال و المباحث.

اما بعد!

خوشحاله یم چې د نوي نصاب د ریاضي په لیکلو باندې د خدای (جل جلاله) په فضل او مهربانۍ باندې قادر شوم. د نصاب د اول څخه شوونکو او زده کوونکو د ریاضي په لندیز او وضاحت باندې اسرار کولو. دا دی د غه کتاب په د 1394 لمریز کال د سرطان په 23 نېټه بشپړ او چاپ ته چمتو شو. پدې کتاب کې د حساب څخه تر انتیګرالونو پورې ټول مباحث په جلا جلا توګه لیکل شوي او مثالونه یې حل شوي دي. که په غور سره ولوستل شي او مثالونه یې چې حل شویدي ځو ځو واره وکتل شي انشا الله د ریاضي په باب مو به ستونزې حل شي.

د کتاب تصحیح او سمون دوام او غور غواړي که څه هم مونږ دا کتاب ځو ځو واره په غور سره کتلي او کمی او نواقص مو د امکان تر حده سم کړي، که بیا هم په کتاب کې کوم نقص موجود ؤ، د کتاب سمون لپاره د سپین غر تعلیمي مرکز سره په لاندې پته تماس ونیسئ.

جلال اباد ښار- تالاشی چوک د حاجي زرخان پلازه

سردار محمد خوږیانی

د نصرت عالي لیسی د ریاضاتو استاد

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیک لړ

حساب

اول فصل

حساب........ 1
د حساب د علم موضوع........ 1
د مکمل اعدادو سیټ........ 1
د طبیعي اعدادو سیټ........ 2
د حساب د علم د زده کړې غرض........ 2
د حساب اصطلاحات........ 2
واحد........ 2
عدد........ 2
ارقام........ 4
طبقې........ 5
د صحیح عددونو څلور ګوني عملیې........ 6
1- د صحیح عددونو جمع........ 6
2- د صحیح عددونو تفریق........ 8
3- د صحیح عددونو ضرب........ 10
اضافي معلومات........ 12
4- د صحیح عددونو تقسیم........ 16

دویم فصل

کسر........ 21
اعشار کسر........ 21
د اعشار کسر څلور ګوني عملیې........ 21
عام کسر........ 24
د کسرونو مقایسه........ 26
تجنیس........ 26
د کسرونو اختصار........ 27
د عام کسر څلور ګوني عملیې........ 33

(c) ketabton.com: The Digital Library

کسر الکسر.......... 37
د کسرونو تبادله.......... 39
دریم فصل
طاقت لرونکی عددونه.......... 42
تجزیه.......... 44
جذر.......... 49
د اعدادو سیستمونه.......... 59
د 2 په قاعده د اعدادو سیستم.......... 60
د 5 په قاعده د اعدادو سیستم.......... 61
څلورم فصل
نسبت.......... 63
تناسب.......... 83
پنځم فصل
فیصد.......... 72
تخفیف.......... 73
أحدیت.......... 75
ربحه.......... 76
تنزیل.......... 79
مشارکت.......... 80
شپږم فصل
سیټ.......... 84
د سیټ د لیکلو طریقې.......... 84
د سیټ اقسام.......... 86
د روابطو له مخې د سیټونو اقسام.......... 86
د سیټونو عملیې.......... 89
الجبر
اول فصل
الجبر.......... 93
د الجبر اصطلاحات.......... 94

(c) ketabton.com: The Digital Library

پولینوم 95
د الجبري عددونو څلور ګوني عملیې 97
د پولینومونو څلور ګونې عملیې 100
د باقي مانده دعوه 102
ترکیبي تقسیم 104

دویم فصل

مساوات 106
مطابقت 106
تجزیه 110
الجبري کسرونه 116
د الجبري کسرو خواص 116
د الجبري کسرونو جمع 117
د الجبری کسرونو تفریق 117
د الجبري کسرونو اختصار 118
د الجبري کسرونو تقسیم 118
د کسرونو ګویا کول 119
قسمي کسرونه 122

دریم فصل

معادله یا شرطیه مساوات 127
د معادلې اقسام 127
یو مجهوله اوله درجه معادله 127
د معادلې خواص 128
جذري معادلی 129

څلورم فصل

دوه مجهوله معادلی 133
د اوله درجه دوه مجهوله معادلو حل 133
متریکس 138
د متریکس ډولونه 139
د متریکسونو جمع 141

(c) ketabton.com: The Digital Library

د متریکس تفریق........ 141
د دوه متریکسونو ضرب........ 143
د یوه متریکس ترانسپوز متریکس........ 144
دیترمینانت........ 145
د دیترمینانت د حل طریقه........ 145
د دیترمینانت خواص........ 147
الحاقي متریکس........ 148
پنځم فصل
دویمه درجه یومجهوله معادلې........ 151
د دویمه درجه یو مجهوله معادلو د عمومي شکل د حل طریقې........ 152
دجذرو له مخې د یو مجهوله دویمه درجه معادلې جوړول........ 161
د دویمه درجه یومجهوله معادلو دجذرو مطالعه کول........ 162
ددیکارت قاعده........ 163
شپږم فصل
غیرمساوات........ 173
د غیرمساوات خواص........ 173
دغیرمساوات اقسام........ 175
مطلقه قیمت........ 177
دبینوم داشاري ځېږل........ 177
د یو مجهوله غیرمساوات سیستم........ 183
دوه مجهوله غیرمساوات........ 184
ددوه مجهوله غیرمساوات سیستم........ 185
ددوه مجهوله غیرمساوات د سیستم د حل طریقه........ 185
یو مجهوله دویمه درجه غیرمساوات........ 186
ددویمه درجه غیرمساوات دحل طریقه........ 187
اووم فصل
پارامتریک معادلې........ 190
اتم فصل
اکسپوننشل (نمائي) معادلې........ 199

(c) ketabton.com: The Digital Library

نهم فصل

لوګاریتمي معادلې.......... 203
دقاعدې د بدلولو فارمول.......... 206
د لوګاریتم اقسام.......... 207
دیوه عدد د لوګاریتم پیداکول.......... 208
د یوه او صفر تر منځ د کسرونو لوګاریتم.......... 209
انتي لوګاریتم.......... 210
انټرپولېشن.......... 211
کولوګاریتم.......... 212
د لوګاریتمي معادلو د حل طریقه.......... 213

لسم فصل

توابع.......... 220
د تابع اقسام.......... 221
ناطقه تابع.......... 221
خطي تابع.......... 221
دخطي تابع د تعریف ناحیه.......... 222
د مستقیمې کرښې میل.......... 224
دمیل معادله.......... 225
محوري معادله.......... 227
پولینومي تابعګانې.......... 231

یوولسم فصل

دویمه درجه تابع.......... 233
د دویمه درجه تابع ګراف.......... 233
د دویمه درجه تابع د ګراف ترسیم.......... 233
د ګراف انتقال.......... 235
هوموګرافیک تابع.......... 248
مجانب.......... 248
د هوموګرافیک تابع د ګراف ترسیم.......... 250
اکسپوننشل تابع.......... 253
لوګاریتمي تابع.......... 255

(c) ketabton.com: The Digital Library

دولسم فصل

ردیف یا تصاعد........ 257
حسابي ردیف........ 257
د حسابي ردیف فارمول........ 257
حسابي ردیف ته د حدونو داخلول........ 259
هندسي ردیف........ 260
د هندسي ردیف فارمول........ 260
د هندسي ردیف خصوصیات........ 262
هارمونیکي ردیف........ 263
سلسلې........ 265
حسابي سلسله........ 265
د حسابي سلسلې فارمول........ 265
د مسلسلو عددونو فارمول........ 266
دجفتو عددو فارمول........ 267
د طاق عددونو فارمول........ 267
هندسي سلسله........ 269
د هندسي سلسلې فارمول........ 269

دیارلسم فصل

د ریاضي استقراء........ 274

څوارلسم فصل

فکتوریل........ 277
د بینوم قضیه........ 279

پنځلسم فصل

لیمیټ 281
انټروال........ 281
د لیمیټ تعریف........ 288
د لیمیټ د استعمال ځایونه........ 284
د لیمیټ پیدا کول........ 285
په (∞) کې د یوی تابع لیمیټ 287

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ليميټ قضيي........ 288
ابهام........ 295
د ابهام رفع کول........ 295
د مثلثاتي تابعګانو ليميټ........ 302
د تابعګانو متماديت (اتصال)........ 305
متمادي تابع........ 305
غير متمادي تابعګانې........ 305
د متماديت شرطونه........ 306
دښي لاس ليميټ........ 307
د چپ لاس ليميټ........ 307
د متمادي تابعګانو خواص........ 309

شپاړلسم فصل

مشتق........ 311
منحني يا وسطي تعبير........ 312
د يوې تابع مشتق........ 313
د مشتق تعريف........ 314
د مشتق هندسي تعبير........ 315
د مشتق قوانين........ 318
د يوې طاقت لرونکي تابع مشتق........ 318
د دوه تابعګانو د حاصل جمع مشتق........ 319
د دوه تابعګانو د تفاضل مشتق........ 320
د دوه تابعګانو د حاصل ضرب مشتق........ 321
د دوه تابعګانو د حاصل تقسيم مشتق........ 322
د جذري تابع مشتق........ 324
د مرکبې تابع مشتق........ 326
د مثلثاتي تابعګانو مشتق........ 329
ضمني مشتقات........ 333
د تابع دويم ضمني مشتق........ 334
متوالي مشتقات........ 336

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مشتق د استعمال ځایونه...337
د یوې تابع بحراني ټکي...339
د انعطاف نقطه...340
د تابع د ګراف د ترسیم طریقه...343
د انعطاف د نقطې پیدا کول...344
د دویمه درجه تابع ګراف...345
هوموګرافیک تابع...348
د مجانب د ټاکلو عمومي لار...351
د دریمه درجه یومجهوله تابع ګراف...352
د رول قضیه...355
د متوسط قیمت قضیه...357
د لوهپیتال قاعده...358
دبحراني ټکو تطبیق...359

اولسم فصل

انتیګرال...363
د ریمان مجموعه...363
د انتیګرال مفهوم...368
د انتیګرال اقسام...368
غیرمعین انتیګرال...368
د غیر معین انتیګرال خواص...369
معین انتیګرال...373
د معین انتیګرال خواص...375
دانتیګرال او مشتق اساسي قضیې...382
په تعویضي طریقې سره د انتیګرال نیول...385
قسمي انتیګرالونه...386
دلوګاریتمي او اکسپونتشل تابعګانو مشتق...387
د اعشاري لوګاریتم مشتق...388
د معکوسو تابعګانو مشتق...392
د معکوسومثلثاتي تابعګانومشتق...392

(c) ketabton.com: The Digital Library

قسمي کسرونه.......... 394
د اکسپوننشل تابعګانو انتیګرالونه.......... 396
د لوګاریتمي تابعګانو انتیګرال.......... 397
د منحني سطحې د مساحت پيدا کول.......... 401
د کروي اجسامو دحجمو محاسبه.......... 410
د انتيګرال پواسطه د کرې د حجم پيدا کول.......... 411
د انتيګرال پواسطه د مخروط دحجم پيدا کول.......... 411
د انتيګرال پواسطه دبيضوي دحجم پيدا کول.......... 412
د قوس د اوږدوالي محاسبه.......... 416
تفاضلي معادلې.......... 419
د ډيفرينشيال ترتيب.......... 420
د ډيفرينشيال معادلې درجه.......... 420
خطي ډيفرينشيال معادلې.......... 421

احصائيه

اتلسم فصل

احصائيه.......... 425
د اطلاعاتو د راټولو طريقه.......... 425
ټولنه او جامعه.......... 426
تصادفي نمونه.......... 426
تصادفي متحول او دولونه يې.......... 426
دفريکوئنسي جدول.......... 427
انځوريز ګراف يا تصويري ګراف.......... 427
موډ.......... 428
اوسط.......... 428
د مجزا داتا ګانو د کثرت جدول.......... 429
د کثرت د جدول د اجزاؤ خاصيتونه.......... 429
ډله ايز (تجمعي) کثرت.......... 430
نسبي کثرت.......... 430
ميله اي ګراف.......... 431

(c) ketabton.com: The Digital Library

د منکسري کرښي ګراف......431
د ګسسته یا غیر متصلو داتا ګانو اوسط......432
د جدول په مرسته د ښتو داتاګانو اوسط......433
د داتاګانو د ګېډۍ کولو طریقه......434
وسعت......434
د ګېډۍ اوږدوالی......434
میله ئي ګراف......434
د متصلو داتاګانو دسته بندي......434
وزني اوسط یا منځنی قیمت......435
مستطیلي ګراف......436
دایروي ګراف......437
میانه......438
د تحول ساحه......438
د انحراف اوسط......439
د څوضلعي فریکونسي ګراف......440
د ساقی او پاڼی ګراف......441
ربعی......442
صندوقچه یي ګراف......443
ربعي انحراف......446
واریانس......446
معیاري انحراف (مطلق تیتوالی)......448
د بدلون ضریب یا نسبي پراګنده ګي......450
په نورمال منحني کی تیتوالی......451
د نورماله توزیع مشخصات......452
څومتحوله تړلتیا......453
د پراګنده ګی ګراف......454
پیوستون او د پیوستون ضریب......454
د خطي مېلان معادله......456
د احتمال د تابع توزیع......459

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه جمله يي توزيع او د برنولي ازمايښت 461
د پواسن داحتمال توزيع 462
د نورمال توزيع 463
نمونه اخيستل 467
د نمونې د اوسط توزيع 468

احتمالات

نوولسم فصل

احتمالات 471
چانس 471
تصادفي پېښه 471
تجربوي احتمال 471
نظري احتمال 471
نسبي كثرت او احتمال 472
په نمونه يي فضا كې برابر او نابرابر چانس 472
د يوې نمونه يي فضا ناځاپي پېښه 472
د احتمال قاعدى 474
ونه ايز دياګرام 475
د ضرب د حاصل لومړۍ قاعده 475
د ناځاپي پېښو اتحاد 476
د ناځاپي پېښو تقاطع 477
د سيټونو او مډل جوړونه 478
د شمېرنې اصل 479
ترتيب (پرموټېشن) 480
تركيب 480
وريشن (تبديل) 481
د بينوم قضيه 483
د دوه جمله يي احتمال 484
متمادي او غېر متمادي فضاګانى 486
هم چانسه پېښې 487

(c) ketabton.com: The Digital Library

د متمادي فضاګانو احتمال...488
مشروط احتمال...488
د ناڅاپه پېښو استقلالیت...493

شلم فصل

موهومي عددونه...495
د اعدادو سیټونه...496
دموهومي عددونو څلورګوني عملیې...497
صفري مختلط عدد...498
د مختلطو عددونو څلورګونی عملیې...498
د مختلط عدد مزدوج...500
د مختلط عدد ضربي معکوس...500
دیوه مختلط عدد د مزدوج خاصیت...501
دمختلطو عددونود دویم جذر پیدا کول...505

یوویشتم فصل

د ریاضي منطق...507
د ریاضي استدلال...507
تمثیلي استدلال...507
استقرائي استدلال...507
استنتاجي استدلال...509
دحکم د نفی کولو استدلال...509
د ریاضي منطق او د بیان استنتاج...510
د بیانونو ترکیب...510

(c) ketabton.com: The Digital Library

حساب

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

اول فصل

رياضي

رياضي د رياض څخه اخيستل شويده په رياضي کی تر (ض) وروسته (ی) نسبتي ده رياض د روضة مجموعه ده نو د رياضي لغوي معنی باغونه يا باغچې دي.

او په اصطلاح کې رياضي هغه علم دی چې د اجسامود کيفيتو ، کميتو ، تغيراتو ، ارتباطاتو او تاثيراتو څخه بحث کوي.

رياضي ډېرې څانگې لري لکه :

1- حساب 2- الجبر 3- نجوم

4- هندسه 5- مثلثات 6- علم هيئت

او داسې نور.

څرنگه چې زمونږ د وطن په تعليمي نصاب کې حساب ، الجبر ، هندسه او مثلثات ټول ليکل شوي دي نو مونږ هم د نصاب مطابق همدغه څلور شيان په دی کتاب کې ليکو.

1- حساب :

حساب په لغت کې شمېرلو ته وايي او په اصطلاح کې حساب هغه علم دی چې په معلومو عددونو باندې يوه عمليه اجراء کوي او مجهول عدد پيدا کوي.

د حساب د علم موضوع:

د حساب د علم موضوع د مکمل اعدادو سيټ دی .

د مکمل اعدادو سيټ:

د صفر څخه تر (∞) پورې د اعدادو سيټ ته د مکمل اعدادو سيټ وايي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د طبيعي اعدادو سيټ:

د (1) څخه تر (∞) پورې د اعدادو سيټ ته د طبيعي اعدادو سيټ وايي.

د حساب د علم د زده کړې غرض:

د حساب د علم زده کړه په ورځنيو معاملاتو کې انسان د غلطۍ څخه ساتي، لکه اخيستل ، خرڅول ، په صحيح ډول د دوا ګانو ترکيب، حتی چې د حساب د زده کړې څخه په غير په فزيک ، کيميا ، هندسه او داسې نورو علومو کې پر مخ تګ نا ممکن دی.

د حساب اصطلاحات:

واحد:

د هر شي يوې دانې ته واحد وايي. لکه يو موټر ، يوه طياره يوه کښتۍ او داسې نور.

عدد:

واحد يا د واحدونو مجموعې ته عدد وايي . لکه (1) ، 13 ، 159 او داسې نور.

عدد ډېر قسمونه لري.

1- مشخص عدد: که د يوه عدد سره د کوم شي نوم ذکر وي دغسې عدد ته مشخص عدد وايي 12 کتابونه ، 107 شاګردان او داسې نور.

2- مجرد عدد: که د عدد سره د کوم شي نوم ذکر نه وي دغه ډول عدد ته مجرد عدد وايي. لکه 180 ، 240 او داسې نور،

3- جفت عدد: هغه عددونه چې په (2) باندې پوره تقسيميږي جفت عددونه دي لکه 170 ، 532 ، 714 ، 326 ، 748 او داسې نور ،

4- طاق عدد: هغه عدد دی چې په (2) باندې پوره نه ويشل کيږي لکه : 3 ، 41 ، 587 او داسې نور.

5- لمړني عدد: هغه عدد دی چې په ځان او په (1) پوره ويشل کيږي په نورو عددو پوره نه ويشل کيږی. لکه 2 ، 3، 5 ، 7 او داسې نور.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د (1) او 100 تر منځ لمړني عددونه 25 دی. دا عددونه یو یوناني عالم چې Eratosthenes نومېده په (273 -192) ق م کی یي یونان کی ژوند کاوه په یوه جدول کې پیدا کړی ؤ.

د (1) څخه تر 100 پورې عددونه یې په یوه مربعي جدول کې ولیکل بیا یې (2) پریښودل او هغه عددونه چې په (2) ویشل کیدل حذف کړل. بیا یې (3) پریښودل او هغه عددونه چې په (3) ویشل کیدل حذف کړل په همدې ترتیب په (5) او (7) باندې چه کوم عددونه ویشل کیدل حذف یې کړل په اخر کې یې په جدول کی پاتی شوي عددونه چې 25 عددونه وه په یوه پاڼه کې ولیکل او لمړني عددونه یې وبلل. عددونه دا دي.

2، 3، 5، 7، 11، 13، 17، 19، 23 ، 29 ، 31 ، 37 ، 41 ، 43 ، 47 ، 53 ، 59 ، 61 ، 67، 71، 73، 79، 83 ، 89 ، 97

6- مرکب عددونه : هغه عددونه چې له ځان او یوه څخه په غیر په نورو عددو هم ویشل کیږي مرکب عددونه بلل کیږي. لکه 4 ، 6 ، 8 ، 9 ، 10 او داسې نور .

د (1) او 100 تر منځ مرکب عددونه 74 دي.

(1) نه لمړني عدد دی او نه مرکب عدد دی.

7- تام عدد: که د یوه عدد ټول واحدادت پوره وي دغه عدد ته تام عدد وایې لکه 12 هنداونې ، 15 روپۍ.

8- کسري عدد: هغه عدد دي چې یو واحد یې نیم ګړې وي.

لکه $13\frac{1}{4}$ هندوانې، $17\frac{1}{2}$ډالر

کسري عددونه په درې قسمه دي.

a- مختوم کسر: که د کسر صورت په مخرج وویشل شي او باقي ونکړي دی کسر ته مختوم کسر وایې لکه $\frac{3}{4}$ ، $\frac{2}{5}$ ، چې $0.75 = \frac{3}{4}$ او $0.4 = \frac{2}{5}$ کیږي.

b- غیر مختوم متوالي کسر: هغه کسردی چې صورت په مخرج پوره تقسیم نه شي مګر د خارج قسمت رقمونه یې تکراري وي. لکه $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{6}$ او داسې نور .

چې $0.33\overline{3} = \frac{1}{3}$ کیږي او $0.166\overline{6} = \frac{1}{6}$ کیږی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

c- غير مختوم غير متوالي كسر: كه د يوه كسر صورت په مخرج پوره تقسيم نه شي او د خارج قسمت رقمونه يې هم تكراري نه وي دې كسر ته غير مختوم غير متوالي كسر وايې لكه $\frac{13}{47}$ چې ... $\frac{13}{47} = 0.27659574468085$ كيږي.

9- ناطق عدد: صحيح عدد، متوالي كسر او مختوم كسر ناطق عددونه دي. لكه 15 ، 28 ، $\frac{2}{3}$ ، $\frac{5}{6}$ ، $\frac{4}{5}$ ، $\frac{1}{2}$ او داسې نور.

10- غير ناطق عدد: غير مختوم غير متوالي كسر او هغه جذري عددونه چې پوره جذر نلري غير ناطق عددونه دي لكه $\frac{13}{49}$ ، $\frac{11}{47}$ ، $\sqrt{2}$ او $\sqrt{3}$ او داسې نور.

ارقام:

د اعدادو د ليكنې سمبول ته رقم وايې.

په ډېرو مما لكو كې د اعدادو د ليكنې لپاره سمبولونه ټاكل شوي دي چې په همغه مما لكو كې استعماليږي. مگر هغه رقمونه چې د نړۍ په زياتو مما لكو كې استعماليږي درې دي.

1- رومي رقمونه 2- هندو عربي رقمونه 3- اريک رقمونه.

1- رومي رقمونه:

د هندو عربيک رقمو تر ليكنې د مخه رومي رقمونه زيات استعماليدل. اوس رومي رقمونه په كتابونو كې د مختلفو مقاصدو لپاره استعماليږي. خو په حسابي او الجبري عمليو كې نه استعماليږي I د يو لپاره V د 5 لپاره X د 10 لپاره L د 50 لپاره C د 100 لپاره D د 500 لپاره او M د 1000 لپاره په سمبوليک ډول استعماليږي.

كه يو رقم دري واره څنګ په څنګ وليكل شي جمع كيږي لكه II دوه دي III دري دي كه X دري واره وليكل شي (30) كيږي كه L درې واره وليكل شي 150 كيږي كه دوه مختلف عددونه څنګ په څنګ وليكل شي كه د ښي خوا عدد زيات ؤ د چپې خوا عدد ور څخه منفي كيږي IV چې څلور دي IX نه دي $XL = 40$ دي $XC = 90$ دي او كه د چپې خوا عدد زيات ؤ د ښې خوا عدد ور سره جمع كيږي.

$VI = 6$ ، $VII = 7$ او $VIII = 8$ دي $XIX = 19$ او $CX = 110$ ، $LX = 60$ دي $CXXX = 130$ او $MDCXIX = 1619$ دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- اریک رقمونه :

هغه رقمونه دي چې اریائیانو لیکلي دي. دې رقمو ته شرقي رقمونه هم وایي. اریک رقمونه په لاندې ډول دي. ۰ ، ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵ ، ۶ ، ۷ ، ۸ ، ۹

ټول لس رقمونه دي.

3- هندو عربیک رقمونه :

هغه رقمونه چې مصریانو لیکلي دي او یوازې د صفر سمبول هندیانو لیکل دي دغه رقمو ته غربي رقمونه هم وایي دا رقمونه 10 دي او عبارت دي له 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 ، 9 دا رقمونه په دوه برخو ویشل شویدي.

1- معنی دار رقمونه   2- بې معنی رقم

1- معنی دار رقمونه : د 1 څخه تر 9 پورې رقمو ته معنی دار رقمونه وایي .

2- بې معنی رقم : صفر بې معنی رقم دې ځکه که یوازې هر څومره صفرونه ولیکو په کوم شي دلالت نه کوي لکه . 0000000

او که د عدد چپې خواته ولیکل شي هغه عدد نه ډیریږي او نه کمیږي .

لکه 0000013 چې 13 دي.

طبقې : د عددو د لیکلو او لوستلو لپاره ریاضي دانانو طبقې لیکلی دي چې هره طبقه درې مرتبې ده هره طبقه خپل نوم لري تر اوسه پورې په ریاضي کې 22 طبقې لیکل شویدي.

1- احادو طبقه	9- کوادریلیون	17- اوکتیلیون
2- زرو طبقه	10- کوادریلیارد	18- اوکتیلیارد
3- میلیون طبقه	11 - کوینتیلیون	19- نونیلیون
4- میلیاردو طبقه	12- کوینتیلیارد	20- نونیلیارد
5- بیلیون طبقه	13- سکستیلیون	21- د سیلیون
6- بیلیاردو طبقه	14- سکستیلیارد	22- دسیلیارد
7- تریلون طبقه	15- سپتیلیون	
8- تریلیارد طبقه	16- سپتیلیارد	

(c) ketabton.com: The Digital Library

چې تر اوسه پورې په نړۍ کې د دغه طبقو څخه اته طبقې استعمال شویدي یعنې تر تریلیارد پورې طبقې استعمال شویدي.

د عدد لوستل : عدد د ښۍ خوا څخه په طبقو ویشو او د چپې خوا څخه یې لولو اول د طبقې عدد لولو بیا دطبقې نوم اخلو. که طبقه یا مرتبه صفر وه نوم یې نه اخیستل کیږي. لکه:

450,347,825,601,234,004,000,801

او داسې ویل کیږي څلورسوه اوپنځوس تریلیارده دری سوه اواوه څلویښت تریلونه اته سوه اوپنځه ویشت بیلیارده شپږسوه اویوبیلونه دوه سوه اوڅلورد پرش میلیارده څلورمیلونه اواته سوه اویو.

د عددو لیکل : عدد د چپې خوا څخه لیکل کیږي هر عدد په خپله طبقه او مرتبه کی لیکل کیږي که د کومی طبقې یا مرتبې نوم وانه خیستل شي پر ځای صفرونه لیکل کیږي لکه.

درې سوه څوارلس تریلیارده اوه تریلیونه نه ویشت بیلونه یو سل او دولس میلیارده نه څلویښت زره او اته

314,007,000,029,112,000,049,008

د صحیح عددونو څلور ګونې عملیې:

1- د صحیح عددونو جمع:

جمع په لغت کې یو ځای کولو ته وایي.

او په اصطلاح کې د هم جنسو شیانو یو ځای کولو ته جمع وایې.

هغه عددونه چې جمع کیږي د جمع عوامل ورته وایي او هر عدد ته عامل وایې او هغه عدد چې د عواملو د جمع کېدو په نتیجه کې لاس ته راځي. د جمع حاصل ورته وایې.

د جمع د عملیې طریقه :

د جمع عوامل داسې یو تر بل لاندې لیکو چې هر طبقه د خپلې طبقې لاندې او هره مرتبه د خپلې مرتبې لاندې راشي. بیا د یویز مرتبو رقمونه جمع کوو که دجمع حاصل یې دوه رقمي شو لمړی رقم یې لیکو او دویم رقم یې دلسیز مرتبې د رقمو سره جمع کوو په همدې ترتیب تر اخره اجرائت کوو د جمع حاصل لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{array}{r} +456783456 \\ 789432187 \\ \hline 1246215643 \end{array}$$

د جمع د عمليې ميزان:

1- د جمع ميزان په جمع :

عوامل د لاندې خوا څخه پورته خواته جمع کوو که د جمع نوی حاصل د جمع د پخواني حاصل سره مساوي شو سوال صحيح حل شويدی.

$$\begin{array}{r} \underline{12349391} \\ +7894321 \\ 2578092 \\ 1876978 \\ \hline 12349391 \end{array}$$

2- د جمع ميزان په تفريق:

که د جمع عوامل دوه وه د جمع د حاصل څخه يو عامل منفي کوو که بل عامل لاس ته راشي سوال صحيح حل شويدی.

$$\begin{array}{r} +\ 489785 \\ 675974 \\ \hline 1165759 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -1165759 \\ 675974 \\ \hline 489785 \end{array}$$

3- د جمع ميزان په طرح نه :

د جمع عوامل طرح نه کوو د طرح نه حاصل يې د طرح نه د علامې په يوه طرف کې ليکو . بيا د جمع حاصل طرح نه کوو د طرح نه حاصل يې د عواملو د طرح نه د حاصل په مقابل کې ليکو. که دغه دوه عددونه مساوي شول سوال صحيح حل شويدی.

$$\begin{array}{r} +\ 5689247 \\ 7563785 \\ \hline 13253032 \end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دجمع دعمليې اساسي اصول:

1- د جمع عمليه د جمعې د تبديلي د قانون پيروي کوي يعنې که د جمع د عواملو ځايونه تغير شي د جمع په حاصل کې تغير نه راځي.

لکه:

$$\begin{array}{r} +451 \\ 238 \\ \hline 689 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +238 \\ 451 \\ \hline 689 \end{array}$$

2- د جمع عمليه د اتحادي قانون پيروي کوي.

يعنې که د جمع عوامل زيات وي په يوه وار يې جمع کول مشکل وي نو دا عددونه په ګروپو ويشو د هر ګروپ د جمع حاصل پيد اکوو او بيا دا جمع حاصلونه جمع کوو د راکړ شوو عددونو د جمع حاصل لاس ته راځي.

3- د اعدادو سيټ د جمع د عمليې لاندې يو تړلې سيټ دی.

4- د جمع دعمليې خنثې عنصر صفر دی.

2- د صحيح عددونو تفريق:

تفريق په لغت بيلولو ته وايي.

او په اصطلاح کې د دوه هم جنسو عددو د فرق د معلومولو طريقې ته تفريق وايي. لوی عدد ته مفروق منه وايي کوچنی عدد ته مفروق وايي د مفروق منه څخه د مفروق د کميدو په نتيجه کې چې کوم عدد لاس ته راځي د تفريق حاصل ورته وايي.

د تفريق د عمليې طريقه:

مفروق د مفروق منه لاندې داسې ليکو چې هره طبقه د خپلې طبقې لاندې او هره مرتبه د خپلې مرتبې لاندې راشي. بيا د مفروق منه د يويز مرتبې د رقم څخه د مفروق د يويز مرتبې رقم منفي کوو د لسيز مرتبې د رقم څخه يې دلسيز مرتبې رقم منفي کوو په همدې ترتيب تر اخره اجرائت کوو د تفريق حاصل لاس ته راځي.

$$\begin{array}{r} -78402138 \\ 14987675 \\ \hline 63414463 \end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تفریق د عملیې میزان:

1- د تفریق میزان په جمع :

د تفریق حاصل د مفروق سره جمع کوو که مفروق منه پلاس راغی سوال صحیح حل شویدی.

+30368784
17987998
48356782

−48356782
17987998
30368784

2- د تفریق میزان په تفریق:

د مفروق منه څخه د تفریق حاصل منفي کوو که مفروق لاس ته راغي سوال صحیح حل شویدی.

−7854321546
1789756798
6064564748

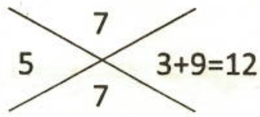
میزان

−7854321546
6064564748
1789756798

3- د تفریق میزان په طرح نه :

مفروق منه طرح نه کوو د طرح نه حاصل يې د طرح نه د علامې په یوه طرف کې لیکو بیا مفروق طرح نه کوو د طرح نه حاصل یط مفروق منه د طرح نه د حاصل په مقابل کې لیکو . او منفي کوو يې او په دریم طرف کې يې لیکو بیا د تفریق حاصل طرح نه کوو په څلورم طرف کې يې لیکو د دریم او څلوزم عددونه مساوي وه سوال صحیح حل شویدی.

−43756832109
12898098734
30858733375



(c) ketabton.com: The Digital Library

که د مفروق منه د طرح نه حاصل د مفروق د طرح نه د حاصل څخه کم ؤ د مفروق منه د طرح نه د حاصل سره 9 جمع کوو بيا دمفروق د طرح نه حاصل ور څخه منفي کوو.

د تفريق اساسي اصول:

1- که مفروق منه ثابت وي او مفروق زيات شي د تفريق حاصل کميږي.

$$\begin{array}{rcr} -450 & \qquad & -450 \\ 250 & & 200 \\ \hline 200 & & 250 \end{array}$$

2- که مفروق منه ثابت وي مفروق کم شي د تفريق حاصل زياتيږي.

$$\begin{array}{rcr} -450 & \qquad & -450 \\ 150 & & 200 \\ \hline 300 & & 250 \end{array}$$

3- که مفروق ثابت وي او مفروق منه زيات شي د تفريق حاصل ډيريږي.

$$\begin{array}{rcr} -500 & \qquad & -450 \\ 200 & & 200 \\ \hline 300 & & 250 \end{array}$$

4- که مفروق ثابت وي او مفروق منه کم شي د تفريق حاصل کميږي.

$$\begin{array}{r} -400 \\ 200 \\ \hline 200 \end{array}$$

5- که مفروق او مفروق منه په يوه اندازه زيات يا کم شي د تفريق په حاصل کې تغيز نه راځي.

$$\begin{array}{rcrcr} -400 & \qquad & -500 & \qquad & -450 \\ 200 & & 250 & & 200 \\ \hline 200 & & 250 & & 250 \end{array}$$

3- د صحيح عددونو ضرب:

ضرب په لغت کې وهلو ته وايي.

او په اصطلاح کې د مساوي عددونو د جمع لنډې طريقې ته ضرب وايي. د ضرب په عمليه کې اول عدد ته مضروب فيه او د دويم عدد ته مضروب وايي. په مضروب فيه کې د مضروب د ضرب په نتيجه کې چې کوم عدد لاس ته راځي د ضرب حاصل ورته وايي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ضرب د عمليې طريقه:

مضروب د مضروب فيه لاندې ليکو د مضروب لمړی رقم د مضروب فيه په ټولو رقمو کې په نوبت سره ضربوو. بيا د مضروف دويم رقم د مضروب فيه په ټولو رقمو کې په نوبت سره ضربوو په اخر کې دغه عددونه جمع کوو د راکړ شوو عددو د ضرب حاصل لاس ته راځي

```
×   4587
     896
   27522
  41283
 36696
 4109952
```

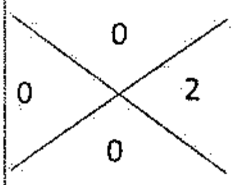
د ضرب د عمليې ميزان:

1- د ضرب ميزان په تقسيم:

د ضرب حاصل په مضروب فيه ويشو که مضروب لاس ته راغی سوال صحيح حل شوی دی او يا د ضرب حاصل په مضورب ويشو که مضروف فيه لاس ته راغي سوال حل شوی دي.

2- د ضرب ميزان په طرح نه :

مضروب فيه طرح نه کوو د طرح نه حاصل يې د طرح نه د علامې په يوه طرف کې ليکو بيا مضروب طرح نه کوو د طرح نه حاصل يې د مضروب فيه د طرح نه د حاصل په مقابل کې ليکو او ضربوو يې که د ضرب حاصل يې تر (9) ډېر شو طرح نه کوو يې په دريم طرف کې يې ليکو بيا د راکړ شوو عددو د ضرب حاصل طرح نه کوو په څلورم طرف کې يې ليکو که د دريم او څلورم طرفو عددونه مساوي شول د سوال حل صحيح دی.




```
×  56783
    5238
  454264
 170349
113566
283915
297429354
```

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ضرب د عمليې اساسي اصول:

1- د اعدادو سيټ د ضرب د عمليې لاندې يو تړلی سيټ دی.
2- د ضرب عمليه د تبديلی د قانون پيروي کوي.
3- د ضرب عمليه د اتحادي قانون پيروي کوی.
4- د ضرب عمليه د توزيعي خاصيت پيروي کوي.
5- د ضرب دعمليې خنثی عنصر (1) دی.

اضافي معلومات:

العاملي د بعضی عددونو د ضربولو په باره کې څو قاعدې په خلاصة الحساب کې ليکلي دي. موږ د شاګردادان د ذهن د انکشاف لپاره د دغه قاعدو څخه څو قاعدې رانقلوو.

بهاؤ الدين محمد بن الحسين چې مشهور په العاملي دی په 953 هـ ش کال په بعلبک کې زيږيدلی دی او په 1035 هـ ش په اصفهان کې وفات شويدی اصلاً د لبنان ؤ عامل په لبنان کې يو غر دی د بعلبک کلی پدې غره کې دی.

اوله قاعده :

د 5 او 10 تر منځ د عددونو د ضرب حاصل:

يو عدد په 10 کې ضربوو بل عدد د 10 څخه منفي کوو د تفريق حاصل په لمړني عدد کې ضربوو د ضرب حاصل يې د همدغه عدد د 10 چنده څخه منفي کوو مطلوب عدد لاس ته راځي.

1- مثال: د 7 او 9 د ضرب حاصل پيدا کړئ؟

حل:

$$10 \times 7 = 70$$
$$10 - 9 = 1$$
$$1 \times 7 = 7$$
$$70 - 7 = 63$$

2- مثال: د 6 او 8 د ضرب حاصل پيدا کړئ؟

$$10 \times 6 = 60$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$10 - 8 = 2$$
$$2 \times 6 = 12$$
$$60 - 12 = 48$$

دویمه قاعده:

عددونه جمع کوو د 10 څخه پورته برخه يې په 10 کې ضربوو د 10 څخه د عددو د تفاضل د ضرب حاصل ور سره جمع کوو مطلوب عدد لاس ته راځي.

حل:

$$6 + 8 = 14$$
$$10 \times 4 = 40$$
$$10 - 6 = 4$$
$$10 - 8 = 2$$
$$2 \times 4 = 8$$
$$40 + 8 = 48$$

دریمه قاعده:

د يو رقمي او د 10 او 20 تر منځ دوه رقمي عددو ضرب حاصل:

عددونه جمع کوو د 10 څخه پورته برخه يې په 10 کې ضربوو يو رقمي عدد د 10 څخه منفي کوو او د دوه رقمي عدد په لمړي رقم کې يې ضربوو او د اولني حاصل ضرب څخه يې منفي کوو مطلوب عدد لاس ته راځي.

مثال: د 7 او 19 د ضرب حاصل پيدا کړئ؟

$$19 + 7 = 26$$
$$16 \times 10 = 160$$
$$10 - 7 = 3$$
$$3 \times 9 = 27$$
$$160 - 27 = 133$$

مثال: د 8 او 17 د ضرب حاصل پيدا کړئ؟

$$8 + 17 = 25$$
$$15 \times 10 = 150$$
$$10 - 8 = 2$$
$$2 \times 7 = 14$$
$$150 - 14 = 136$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځلورمه قاعده:

د 10 او 20 تر منځ د دوه رقمي عددو د ضرب حاصل:

د يوه عدد ديويز رقم د بل عدد سره جمع کوو د جمع حاصل په 10 کې ضربوو او د دواړو عدد د د يويز مرتبو د رقمو د ضرب حاصل ورسره جمع کوو مطلوب عدد لاس ته راځي.

مثال: د 13 او 18 د ضرب حاصل پيدا کړئ؟

$$18 \times 3 = 21$$
$$21 \times 10 = 210$$
$$3 \times 8 = 24$$
$$210 + 24 = 234$$

پنځمه قاعده :

په 5 ، 50 او 500 کې د يوه عدد ضربول:

د عدد نيمايې په 10 کې ضربوو په 5 کې د هغه عدد د ضرب حاصل لاس ته راځي د عدد نيمايې په 100 کې ضربوو په 50 کې د هغه عدد د ضرب حاصل لاس ته راځي.

د عدد نيمايې په 1000 کې ضربوو په 500 کې د هغه عدد د ضرب حاصل لاس ته راځي.

مثالونه :

$$5 \times 28 = 10 \times 14 = 140$$
$$50 \times 36 = 100 \times 18 = 1800$$
$$500 \times 32 = 1000 \times 16 = 16000$$

شپږمه قاعده:

د دوه رقمي عددو د ضرب د حاصل پيدا کول چې يو يې د 10 او 20 تر منځ وي.

د کوچني عدد يويز د لوي عدد په لسيز کې ضربوو او د لوي عدد سره جمع کوو او 10 چنده کوو يې او د يويز مرتبو د رقمو د ضرب حاصل ور سره جمع کوو.

حل: د 17 او 59 د ضرب حاصل پيدا کړئ؟

$$7 \times 5 = 35$$
$$35 + 59 = 94$$
$$94 \times 10 = 940$$
$$7 \times 9 = 63$$
$$940 + 63 = 1003$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوومه قاعده:

د 20 او 100 تر منځ د هغه عددو د ضرب حاصل چې لسيز يې مساوي وي.

د يوه عدد يويز د بل عدد سره جمع کوو او په لسيز رقم کې يې ضربوو او 10 چنده کوو يې او د يويز رقمو د ضرب حاصل ورسره جمع کوو مطلوب عدد لاس ته راځي.

مثال: د 63 او 68 د ضرب حاصل پيدا کړئ؟

$$68 + 3 = 71$$
$$71 \times 6 = 426$$
$$426 \times 10 = 4260$$
$$4260 + 24 = 4284$$

اتمه قاعده:

د 20 او 100 تر منځ د هغه عددو د ضرب حاصل چې د لسيز مرتبې يې مختلفې وي.

د کوچني عدد لسيز په لوی عدد کې ضربوو د کوچني عدد د يويزمرتبې او دلوی عدد د لسيز مرتبې د ضرب حاصل ور سره جمع کوو او 10 چنده کوو يې او د يويز مرتبو د ضرب حاصل ورسره جمع کوو. مطلوب عدد لاس ته راځي.

مثال: د 27 او 69 د ضرب حاصل پيدا کړئ؟

$$69 \times 2 = 138$$
$$7 \times 6 = 42$$
$$138 + 42 = 180$$
$$180 \times 10 = 1800$$
$$7 \times 9 = 63$$
$$1800 + 63 = 1863$$

مثال: د 35 او 87 د ضرب حاصل پيدا کړئ؟

$$87 \times 3 = 261$$
$$5 \times 8 = 40$$
$$261 + 40 = 301$$
$$301 \times 10 = 3010$$
$$5 \times 7 = 35$$
$$3010 + 35 = 3045$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: 47او 95 د ضرب حاصل پيدا کړئ؟

$$95 \times 4 = 380$$
$$7 \times 9 = 63$$
$$380 + 63 = 443$$
$$443 \times 10 = 4430$$
$$7 \times 5 = 35$$
$$4430 + 35 = 4465$$

4- د صحيح عددونو تقسيم:

تقسيم په لغت کې ويشلو ته وايي.

او په اصطلاح کې د يوه عدد څخه د مساوي عددونو د تفريقولو لنډي طريقې ته تقسيم وايي.

هغه عدد چه ويشل کيږي مقسوم بلل کيږي هغه عدد چې مقسوم پرې ويشل کيږي مقسوم عليه بلل کيږي په مقسوم عليه باندې د مقسوم د تقسيميدو په نتيجه کې چې کوم عدد لاس ته راځي خارج قسمت بلل کيږي د مقسوم هغه برخه چې د مقسوم عليه څخه کمه شي او په مقسوم عليه نه ويشل کيږي باقي بلل کيږي.

د تقسيم د عمليې طريقه :

د مقسوم عليه مرتبې شمېرو د مقسوم د چپې خوا څخه همغومره مرتبې را بېلوو د مقسوم عليه سره يې مقايسه کوو که تر مقسوم عليه زيات و پرې ويشو يې حاصل يې په خارج قسمت کې ليکو په مقسوم عليه کې يې ضربوو د ضرب حاصل د مقسوم لاندې ليکو او منفي کوو يې. د تفريق د حاصل مخې ته د مقسوم يو رقم راکښته کوو نوی مقسوم جوړ وو که تر مقسوم عليه زيات و پرې ويشو يې او که کم ؤ خارج قمست ته صفر پورته کوو او د مقسوم څخه يو بل رقم راکښته کوو په همدې ترتيب تر اخره اجرائت کوو تر څو چې مقسوم ختم شي او يا د مقسوم عليه څخه کم شي دغې کمې شوې برخې ته باقي وايي.

(c) ketabton.com: The Digital Library


```
456340189 | 56342
450736    | 8099
---------
 560418
 507078
---------
  533409
  507078
---------
   26331
```

د تقسیم د عملیې میزان:

1- د تقسیم د عملیې میزان په ضرب:

خارج قسمت په مقسوم علیه کې ضربوو باقي ور سره جمع کوو که مقسوم لاس ته راغي سوال صحیح دی.

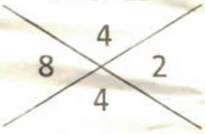
```
 × 56342
    8099
 --------
  507078
 507078
 00000
450736
 ----------
 456313858

+456313858
     26331
 ----------
 456340189
```

2- د تقسیم د عملیې میزان په طرح نه :

مقسوم علیه طرح نه کوو د طرح حاصل یې د طرح نه د علامې په یوه طرف کې لیکو بیا خارج قسمت طرح نه کوو د طرح نه حاصل یې د **مقسوم علیه د طرح نه** د حاصل په مقابل کې لیکو **او ضربوو یې. که د ضرب حاصل یې تر (9) ډېر شو طرح نه کوو یې د باقي د طرح نه حاصل ور** سره **جمع کوو که د جمع حاصل یې تر (9) ډېر شو طرح نه کوو یې په دریم طرف کې یې لیکو** **بیا** مقسوم طرح نه کوو په **څلورم طرف کې یې لیکو که د دریم څلورم طرفو عددونه مساوي** **شول سوال صحیح حل شوی دی.**

7+6=13



(c) ketabton.com: The Digital Library

نوټ: که د تقسیم عملیې باقي نه لرل او یا یې باقي تر مقسوم علیه کم وه نو د تقسیم میزان په تقسیم هم کولای شو.

مقسوم په خارج قسمت ویشو که مقسوم علیه لاس ته راغی سوال صحیح دی.

893001	197
788	4534
1050	
985	
650	
591	
591	
394	
197	

893001	4532
4532	197
44980	
40788	
39214	
31724	
197	

د تقسیم د عملیې اساسي اصول:

1- که مقسوم او مقسوم دواړه په یوه عدد کې ضرب شي په خارج قسمت کې تغیر نه راځي یوازي باقي په همغه عدد کې ضربیږي. لکه:

60	8
56	7
4	

300	50
280	7
20	

2- که مقسوم او مقسوم علیه په یوه عدد تقسیم شي په خارج قسمت کې تغیر نه راځي یوازي باقي په هغه عدد تقسیمیږي. مثال:

25	2
2	12
5	
4	
1	

250	20
20	12
50	
40	
10	

(c) ketabton.com: The Digital Library

3- که د دوه عددو څخه هر یو په یو دریم عدد ویشل کیږي مجموعه یې هم په هغه عدد ویشل کیږي خارج قسمت یې د دواړو خارج قسمتو مجموعه ده .

مثال:

1280 | 80
80 | 16
480
480
xxx

2000 | 80
160 | 25
400
400
xxx

3280 | 80
320 | 41
80
80
xxx

+1280
2000
3280

4- که د دوو عددو څخه هر یو په یو دریم عدد ویشل کیږي نو د هغوي تفاضل هم په هغه ویشل کیږي خارج قسمت یې د دواړو خارج قسمتو تفاضل دی.

−2000
1280
720

720 | 80
720 | 9
xxx

5- که د دوه عددو څخه یو په دریم عدد ویشل کیدلو د ضرب حاصل یې هم په هغه دریم عدد ویشل کیږي.

لکه 48 په 6 ویشل کیږي مگر 50 په 6 نه ویشل کیږي مگر $2400 = 48 \times 50$ په 6 ویشل کیږي.

2400 | 6
24 | 400
00

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرين:

1- د دري عددو مجموعه 180 ده د اول او دويم مجموعه 105 ده د دويم او دريم مجموعه 135 ده عددونه پيدا کړئ؟

2- کوم عدد د 35817 څخه منفي شي چې 18465 لاس ته راشي.

3- د دوه ښارو تر منځ فاصله $900km$ ده يو موټر د يو ښار څخه د $85km$ په سرعت د بل موټر خواته په 7 بجې روانيږي او دويم موټر د دويم ښار څخه د $95km$ په سرعت اول ښار ته روانيږي ووايإست چې پس له څه وخته به سره مخ شي.

4- عبدالوهاب دوه تانه رخت له يوه جنسه يو په $9000Rs$ او بل په $10500Rs$ واخيستل د تانونو فرق 5 متره دی ووايإست چې هر تان څو متره دی.

5- يو سړي دوه بوجۍ مميز له يوه جنسه يو په 37800 روپۍ او بل بوجۍ يې په $31500Rs$ واخيستل که د بوجيو فرق (9) منه وي د هرې بوجۍ اندازه پيدا کړئ؟

6- دوه طياري له يوه ميدان څخه په يوه وخت کې پرواز کوي د يوې سرعت $500km/_h$ او د بلې سرعت $750km/_h$ دی يوه د شرق او بله د غرب خواته ځي پس له 2 ساعتو به يې په منځ کې فاصله څومره شي؟

7- يو موټر په سهار په 7 بجې د کابل څخه حرکت کوي يو د شمال خواته او بل جنوب خواته ځي د يوه سرعت $70km/_h$ او د بلې سرعت $90km/_h$ دی پس له څو ساعتو به د دوي په منځ فاصله $960km$ شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم فصل

کسر:

کسر په لغت کې ماتولو ته وایي. او په اصطلاح کې که واحد په څو مساوي برخو وویشل شي دي عملیې ته کسر وایي.

کسر په دوه قسمه دی.

1- اعشار کسر 2- عام کسر

1- اعشار کسر:

که واحد په 10 یا د 10 په طاقت وویشل شي دی کسر ته اعشار کسر وایي. لکه 0.3 واحد په 10 برخو ویشل شویدی او 3 برخې ور څخه اخیستل شویدی.

0.13 واحد په 100 برخو ویشل شویدی او 13 برخې ترې اخیستل شویدی. 0.007 واحد په 1000 برخو ویشل شویدی او 7 برخې ور څخه اخیستل شویدی.

د اعشار کسر څلور ګونې عملیې:

1- د اعشار کسر جمع:

عددونه داسې یو تر بل لاندې لیکو چې صحیح عدد د صحیح عدد لاندې او اعشاري رقمونه د اعشاري رقمو لاندې راشي. بیا یې د صحیح عددونو د جمع په شان جمع کوو.

$$\begin{array}{r} +87965.38 \\ 32887.45 \\ \hline 120852.83 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +7678.3 \\ 6845.83 \\ \hline 14524.13 \end{array}$$

میزان یې د صحیح عددونو د جمع د میزان غوندې دی.

2- د اعشار کسر تفریق:

مفروق د مفروق منه لاندې داسې لیکو چې صحیح عدد د صحیح عدد لاندې او اعشاري رقمونه د اعشاري رقمو لاندې راشي بیا یې د صحیح عددو د تفریق په شان تفریقوو.

$$\begin{array}{r} -5345.870 \\ 2758.985 \\ \hline 2586.885 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -5345.87 \\ 2758.985 \\ \hline 2586.885 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -1467.23 \\ 894.85 \\ \hline 572.38 \end{array}$$

میزان یې د صحیح عددونو د تفریق د میزان غوندې دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

3- د اعشار کسر ضرب:

مضروب د مضروب فيه لاندې ليکو. د صحيح عددونو د ضرب په شان يې ضربوو د کسر د ضرب د حاصل څخه د مضروب او مضروب فيه د اعشاري رقمو د شمېر په اندازه اعشاري رقمونه را بيلوو د راکړ شوو اعشاري کسرو د ضرب حاصل لاس ته راځي.

```
      4563.85
       3278.3
     1369155
    3651080
   3194695
  912770
 1369155
-------------
 14961669.455
```

ميزان يې د صحيح عددونو د ضرب د ميزان غوندې دی.

4- د اعشار کسر تقسيم:

د اعشار کسر تقسيم په درې حالته کې مطالعه کوو.

1- چې په مقسوم کې اعشاريه وي او په مقسوم عليه که نه وي.

لکه

```
4587.5 | 345
       |-----
       |
```

د صحيح عددونو د تقسيم په شان يې تقسيموو کله چې اعشاريې ته ورسيږو اعشاريه خارج قسمت ته وړو او اعشاري رقم را کښته کوو عمليې ته تر درې اعشاري رقمو پورې ادامه ورکوؤ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

```
4587.5 | 345
345    | 13.297
1137
1035
1025
 690
 3350
 3105
  2450
  2415
    35
```

2- حالت: چې په مقسوم علیه کې اعشاریه وي په مقسوم کې نه وي.

لکه:

7562 | 34.2

د مقسوم علیه څخه اعشاریه حذفوو او د مقسوم علیه د اعشاري رقمو د شمېر په اندازه د مقسوم مخې ته صفرونه ږدو او د صحیح عدد د تقسیم په شان يې تقسیمو که باقي وکړل باقي ته صفر ږدو او خارج قسمت کې اعشاریه ږدو تر دري اعشاري رقمو پورې يې تقسیمو.

756920 | 347

3- چې په مقسوم او مقسوم علیه دواړو کې اعشاري رقمونه وي دلته دري حالته موجود دي.

الف: چې د مقسوم او مقسوم علیه د اعشاري رقمو شمېر مساوي وی لکه:

7843.82 | 9.23

د مقسوم او مقسوم علیه دواړو څخه اعشاریه حذفوو د صحیح عددونو د تقسیم په شان يې تقسیموو که عملیې باقي وکړل د باقي مخې ته صفر ږدو او په خارج قسمت کې اعشاریه لیکو تر دري اعشاري رقمو پورې يې تقسیموو.

784382 | 923

ب: چې د مقسوم د اعشاري رقمو شمېر زیات او د مقسوم علیه د اعشاري رقمو شمېر کم وي لکه:

845.234 | 85.7

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مقسوم علیه څخه اعشاریه حذفوو او د مقسوم علیه د اعشاري رقمو د شمیر په اندازه اعشاریه مخ ته وړو بیا یې د اعشار کسر د تقسیم د اول حالت په څیر تقسیموو.

8452.34 | 857

ج: چې د مقسوم علیه د اعشاري رقمو شمیر د مقسوم د اعشاري رقمو د شمیر څخه زیات وي لکه .

87635.3 | 0.456

د مقسوم او مقسوم علیه څخه اعشاریه حذفوو اود مقسوم علیه د اضافه اعشاري رقمو په اندازه د مقسوم مخې ته صفرونه ږدو.

87635300 | 456

د صحیح عددونو د تقسیم په شان یې تقسیموو.

میزان یې د صحیح عددونو د تقسیم د میزان غوندې دی.

2- عام کسر:

که واحد د 10 او او 10 د طاقت څخه په غیر په نورو عددو وویشل شي دی کسر ته عام کسر وایې لکه $\frac{2}{3}$، $\frac{5}{11}$، $\frac{7}{99}$، $\frac{4}{101}$، $\frac{17}{300}$ او داسې نور.

عام کسر په څلور قسمه دی.

1- اصل کسر یا واقعي کسر　　2- واحد کسر

3- غیر واجب کسر　　4- واجب کسر یا کسري عدد یا مخلوط کسر

1- واقعي کسر: هغه کسر دی چې صورت یې لږ مخرج یې ډیر وي.

لکه $\frac{5}{13}$، $\frac{7}{19}$، $\frac{13}{29}$ او داسې نور.

2- واحد کسر: هغه کسر دی چې صورت او مخرج یې مساوي وي لکه $\frac{8}{8}$، $\frac{9}{9}$ او داسې نور.

(c) ketabton.com: The Digital Library

3- غیر واجب کسر : هغه کسر دی چې صورت یې ډېر او مخرج یې کم وي. لکه $\frac{7}{2}$ ، $\frac{9}{4}$ ، $\frac{13}{5}$ او داسې نور.

4- واجب کسر: هغه کسر دی چې دیوه صحیح عدداو یوه اصل کسرڅخه جوړ شوی وي لکه $3\frac{1}{4}$ ، $7\frac{2}{3}$ ، $8\frac{4}{5}$ او داسې نور.

غیر واجبول:

په غیر واجب کسر باندې د واجب کسر بدلولو ته غیر واجبول وایي.

طریقه یې داسې ده چې مخرج په صحیح عدد کې ضربوو صورت ورسره جمع کوو او پر مخرج یې لیکو.

مثال: $9\frac{1}{7}$ واجب کسر غیر واجب کړئ؟

$$9\frac{1}{7} = \frac{7 \times 9 + 1}{7} = \frac{63 + 1}{7} = \frac{64}{7}$$

مثال: $8\frac{3}{5}$ غیر واجب یې کړئ؟

$$8\frac{3}{5} = \frac{5 \times 8 + 3}{5} = \frac{40 + 3}{5} = \frac{43}{5}$$

تصحیح:

په واجب کسر باندې د غیر واجب کسر بدلولو ته تصحیح وایي .

طریقه یې داسې ده چې صورت په مخرج ویشو.

مثال: $\frac{27}{5}$ غیر واجب کسر دی واجب یې کړئ؟

$$\begin{array}{r|l} 27 & 5 \\ \underline{25} & 5 \\ 2 & \end{array}$$

$$\frac{27}{5} = 5\frac{2}{5}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرین:

1- غیر واجب یې کړئ؟

1- $5\frac{3}{4}$ 2- $11\frac{6}{7}$ 3- $8\frac{2}{5}$ 4 – $9\frac{1}{8}$

2- تصحیح یې کړئ؟

1- $\frac{19}{3}$ 2- $\frac{48}{5}$ 3- $\frac{77}{8}$ 4- $\frac{46}{11}$ 5- $\frac{117}{11}$

د کسرونو مقایسه:

1- که د څو کسرو صورتونه مساوي او مخرجونه یې مختلف وي لکه $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{3}$ او $\frac{1}{4}$ پدې کسرو کې هغه کسر لوی دی چې مخرج یې کوچنی وي.

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4}$$

2- که د څو کسرو صورتونه مختلف او مخرجونه یې مساوي وي.

لکه:

$$\frac{4}{7} ، \frac{3}{7} ، \frac{2}{7} ، \frac{1}{7}$$

پدې کسرو کې هغه کسر لوی دی چې صورت یې ډېر وي.

$$\frac{4}{7} > \frac{3}{7} > \frac{2}{7} > \frac{1}{7}$$

3- که د څو کسرو صورتونه او مخرجونه مختلف وي د دې کسرو د مقایسې لپاره کسرونه تجنیسوؤ.

تجنیس :

تجنیس په لغت کې هم جنس کولو ته وایي.

او په اصطلاح کې که د یوه کسر صورت او مخرج د بل کسر په مخرج کې ضرب شي دې عملیې ته تجنیس وایي.

مثال: $\frac{4}{7}$ او $\frac{5}{9}$ کسرونه مقایسه کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{4}{7}=\frac{4\times 9}{7\times 9}=\frac{36}{63}$$

$$\frac{5}{9}=\frac{5\times 7}{9\times 7}=\frac{35}{63}$$

$$\frac{36}{63}>\frac{35}{63}$$

$$\frac{4}{7}>\frac{5}{9}$$

تمرین :

لاندې کسرونه مقایسه کړئ؟

1- $\frac{6}{11}$ او $\frac{9}{16}$ 2- $\frac{7}{9}$ او $\frac{8}{11}$ 3- $\frac{2}{5}$ او $\frac{3}{7}$ 4 - $\frac{5}{7}$ او $\frac{7}{9}$ او $\frac{9}{11}$

د کسرونو اختصار :

اختصار په لغت کې لنډولو ته وایي.

او په اصطلاح کې د یوه کسر صورت او مخرج په یوه عدد ویشلو ته اختصار وایي.

مثال: $\frac{12}{15}$ کسر اختصار کړئ؟

صورت او مخرج په (3) ویشو .

$$\frac{\overset{4}{\overline{12}}}{\underset{5}{\underline{15}}}=\frac{4}{5}$$

صورت او مخرج په 7 ویشو.

$$\frac{\overset{5}{\overline{35}}}{\underset{9}{\underline{63}}}=\frac{5}{9}$$

صورت او مخرج په 6 بیا په 4 ویشو.

$$\frac{\overset{\overset{5}{\overline{20}}}{\overline{120}}}{\underset{\underset{6}{\underline{24}}}{\underline{144}}}=\frac{5}{6}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

صورت او مخرج په 12 ویشو او بیا یې په (2) ویشو.

$$\frac{\frac{120}{10}}{\frac{144}{12}} = \frac{\frac{10}{5}}{\frac{12}{6}} = \frac{5}{6}$$

د کسر د اختصار لپاره د تقسیم د قابلیتونو زده کړه ضرور ده.

1- په (2) باندې د ویش قابلیت: که د یوه عدد لمړی رقم صفر یا جفت وي په (2) ویشل کیږي لکه 150، 158، 214، 102 او داسې نور.

2- په (3) باندې د ویش قابلیت: که د یوه عدد رقمو مجموعه په 3 ویشل کیدله دا عدد په (3) ویشل کیږي.

لکه 11124 ، 1032 ، 11508 او داسې نور.

3- په (4) باندې د ویش قابلیت: که د یوه عدد لمړی رقمونه صفرونه وه یا داسې دوه عددونه وي چې په څلورو ویشل کیږي. نو دا ټول په څلور ویشل کیږي . لکه 300 ، 712 ، 520 ، 316 ، 316 ، 728 او داسې نور.

4- په 5 باندې د ویش قابلیت: که د یوه عدد لمړی رقم صفر یا 5 وي دا عدد په 5 ویشل کیږي لکه 310 ، 715 او داسې نور.

5- په (6) باندې د ویش قابلیت :که یو عدد په 2 او 3 ویشل کیدلو دا عدد په (6) هم ویشل کیږي لکه 312 ، 414 ، 276 ، 1308 او داسې نور.

6- په (7) باندې د ویش قابلیت: لمړی رقم حذفوو د حذف شوی دوه چنده د متباقي عدد څخه منفي کوو په همدې ترتیب عملیې ته ادامه ورکوو که په اخر کې صفر یا داسې عدد پلاس راغی چې په (7) ویشل کیدلو نو دا ټول عدد په (7) ویشل کیږي.

لکه: 359156 په 7 ویشل کیږي او که نه:

```
359156
    12
------
 35903
     6
------
  3584
     8
------
   350
```

(c) ketabton.com: The Digital Library

څرنګه چې 350 په 7 ویشل کیږي نو راکړ شوی عدد هم په 7 ویشل کیږي.

7- په (8) باندې د ویش قابلیت : که د یوه عدد درې لمړي رقمونه صفرونه وه یا داسې درې عددونه وه چې په 8 ویشل کیدل نو دا ټول عدد په (8) ویشل کیږي.

لکه 11000 ، 13832 ، 15168 او داسې نور.

8- په (9) باندې د ویش قابلیت : که د یوه عدد د رقمو مجموعه په (9) ویشل کیداله نو دا عدد په 9 ویشل کیږي.

لکه 1115 ، 11385 ، 591102 او داسې نور.

9- په 10 باندې د ویش قابلیت : که د یوه عدد لمړی صفر وي په (10) ویشل کیږي لکه 1150 ، 210 او داسې نور.

10- په 11 باندې د ویش قابلیت: د طاق مرتبو رقمونه بیل جمع کوو او د جفت مرتبو رقمونه بیل جمع کوو یو دبل څخه یې منفي کوو که د تفریق حاصل صفر یا داسې عدد شو چې په 11 ویشل کیدلو نو دا ټول عدد په 11 ویشل کیږي.

لکه : 558998

11- په 12 باندې د ویش قابلیت: که یو عدد په 3 او 4 ویش کیدلو دا عدد په 12 هم ویشل کیږي لکه 8016

12- په 13 باندې د ویش قابلیت : د عدد لمړی رقم حذفوو څلور چنده یې د متباقي عدد سره جمع کوو په همدې ترتیب عملیې ته ادامه ورکوو که اخرنی عدد په 13 ویشل کیدلو نو راکړ شوي عدد هم په 13 ویشل کیږي.

لکه 593814 ، 739622 او داسې نور.

13- په 17 د ویش قابلیت : د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شو 5 چنده د متباقي عدد څخه منفي کوو په همدې ترتیب تر اخره عملیې ته ادامه ورکوو که په اخرکی صفر یا داسې یو عدد لاس ته راغی چې په 17 ویشل کیدلو نو دا ټول عدد په 17 ویشل کیږي.

لکه 77673 ، 96713 او داسې نور.

(c) ketabton.com: The Digital Library

14- په 19 د ويش قابليت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي دوه چنده د متباقي عدد سره جمع کوو په همدې ترتيب عمليې ته ادامه ورکوو که په اخر کې صفر يا داسې عدد په لاس راغلی چې په 19 ويشل کيدلو نو دا ټول عدد په 19 ويشل کيږي لکه (871701) او داسې نور.

15- په 23 د ويش قابليت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي اوه چنده د متباقي سره جمع کوو عمليې ته په همدې ډول ادامه ورکوو که اخرنی عدد په 23 ويشل کيدلو نو دا ټول عدد هم په 23 ويشل کيږي.

لکه 10510701 ، 1308562 او داسې نور.

16- په 29 باندې د ويش قابليت: لمړی رقم حذفوو حذف شوي دري چنده د متباقي عدد سره جمع کوو په همدې ډول عمليې ته ادامه ورکوو که اخري عدد په 29 ويشل کيدلو نو راکړ شوی عدد هم په 29 ويشل کيږي.

لکه 1324923 ، 13249288 او داسې نور.

17- په 31 د ويش قابليت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 3 چنده د متباقي عدد څخه منفي کوو په همدې ډول عمليې ته ادامه ورکوو که اخري عدد په 31 ويشل کيدلو نو دا ټول عدد هم په 31 ويشل کيږي لکه 1416297 ، 141422 او داسې نور.

18- په 37 باندې د ويش قابليت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي عدد 11 چنده د متباقي عدد څخه منفي کوو په همدې ډول عمليې ته ادامه ورکوو که په اخر کې صفر يا داسې عدد په لاس راغی په 37 ويشل کيدلو نو دا ټول عدد په 37 ويشل کيږي لکه 1690419 ، 210308 او داسې نور.

19- په 41 باندې د ويش قابليت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي څلور چنده د متباقي عدد څخه منفي کوو عمليې ته تر اخره ادامه ورکوو که اخرنی عدد په 41 ويشل کيدلو نو دا ټول عدد په 41 باندې ويشل کيږي.

لکه 1855988 ، 23160039 او داسې نور.

(c) ketabton.com: The Digital Library

20- په 43 باندې د ویش قابلیت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 13 چنده د متباقي عدد سره جمع کوو په همدې ترتیب عملیې ته ادامه ورکوو که په اخر کې په لاس راغلي عدد په 43 ویشل کیدلو نو ټول عدد په 43 ویشل کیږي.

لکه 2526078 ، 2531109 او داسې نور.

21- په 47 باندې د ویش قابلیت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 14 چنده د متباقي عدد څخه منفي کوو په همدې ډول عملیې ته ادامه ورکوو که اخرني عدد صفر یا داسې یو عدد شو چې په 47 ویشل کیدلو نو دا ټول عدد په 47 ویشل کیږي.

لکه 2462048 ، 3766628 او داسې نور.

22- په 53 د ویش قابلیت : د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 16 د متباقي عدد سره جمع کوو په همدې ترتیب عملیې ته ادامه ورکوو که په اخر کې صفر یا داسې عدد لاس ته راغي چې په 53 ویشل کیدلو نو دا ټول عدد په 53 ویشل کیږي لکه 24220311 ، 13383825 او داسې نور.

23- په 59 د ویش قابلیت : د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 6 چنده د پاتې عدد سره جمع کوو که اخري عدد په 59 ویشل کېدلو نو راکړ شوی عدد په 59 ویشل کیږي لکه 26962233 ، 5166158 او داسې نور.

24- په 61 باندې د ویش قابلیت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 6 چنده د متباقي عدد څخه منفي کوو که په اخر کې صفر یا داسې عدد پلاس راغی چې په 61 ویشل کیدلو نو دا ټول عدد هم په 61 ویشل کیږي.

لکه 397964 ، 3347192 او داسې نور.

25- په 67 باندې د ویش قابلیت : د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 20 چنده د پاتې عدد څخه منفي کوو که په اخر کې داسې عدد لاس ته راغلي چې په 67 ویشل کیدلو او یا صفر ؤ نو دا عدد په 67 ویشل کیږي.

لکه 30618129 ، 36648129 او داسې نور.

(c) ketabton.com: The Digital Library

26- په 71 باندې د ویش قابلیت: د عدد لمړی رقم حذفوو حذف شوي اوه چنده د متباقي عدد څخه منفي کوو که د عملیې په اخر کې که صفر یا داسې عدد لاس ته راغی چې په 71 ویشل کیږي نو دا ټول په 71 ویشل کیږي.

لکه 3243919 ، 3719477 او داسې نور.

27- په 73 د ویش قابلیت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي عدد 22 چنده د متباقي عدد سره جمع کوو په همدې ترتیب عملیې ته ادامه ورکوو که د عملیې په اخر کې صفر یا داسې عدد لاس ته راغی چې په 73 ویشل کیدلو نو راکړ شوي عدد په 73 ویشل کیږي.

لکه 333537 ، 42921372 او داسې نور.

28- په 79 باندې د ویش قابلیت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 8 چنده د متباقي عدد سره جمع کوو که د عملیې په اخر کې صفر یا داسې عدد لاس ته راغي چې په 79 ویشل کیدلو نو دا ټول عدد په 79 ویشل کیږي.

20066 ، 67828215 او داسې نور.

29- په 83 باندې د ویش قابلیت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 25 چنده د متباقي عدد سره جمع کوو عملیه تر اخره اجراء کوو که اخرني عدد په 83 ویشل کیدلو نو دا ټول عدد په 83 ویشل کیږي.

لکه 629638 ، 379144 او داسې نور.

30- په 89 باندې د ویش قابلیت : لمړی رقم حذفوو د حذف شوي (9) چنده د متباقي عدد سره جمع کوو که اخري عدد په 89 ویشل کیدلو نو راکړ شوي عدد هم په 89 ویشل کیږي.
لکه 406107 ، 6990594 او داسې نور.

31- په 97 باندې د تقسیم قابلیت: لمړی رقم حذفوو د حذف شوي عدد 29 چنده د متباقي عدد څخه منفي کوو عملیه تر اجره اجراء کوو که اخرني عدد صفر شو او یا داسې یو عدد شو چې په 97 ویشل کیدلو نو دا ټول عدد بعضې راکړ شوي عدد په 97 ویشل کیږي.
لکه 530396 ، 5127808 او داسې نور.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د عام کسر څلور ګوني عملیې

1- د عام کسر جمع او تفریق :

د څو کسرو د جمع کولو او تفریقولو لپاره لمړی مخرج مشترک پیدا کوو مخرج مشترک د هر کسر په مخرج ویشو د هغه کسر په صورت کې یې ضربوو د مخرج مشترک پر سر یې لیکو د جمع په سوال کې د جمع علامه لیکو .او د تفریق په سوال کې د تفریق علامه لیکو په همدې ترتیب عملیې ته ادامه ورکوو بالاخره د کسرونو د جمع حاصل یا د تفریق حاصل لاس ته راځي.

خو د مخرج مشترک د پیدا کولو لپاره د مخرجو پیژندل ضرور دي.

مخرجونه په څلور قسمه دي.

1- متماثل مخرجونه : مساوي مخرجو ته متماثل مخرجونه وایې.

$$4\frac{5}{9}+3\frac{7}{9}+8\frac{8}{9}$$

$$\frac{41}{9}+\frac{34}{9}+\frac{80}{9}=\frac{41+34+80}{9}=\frac{155}{9}=17\frac{2}{9}$$

$$\begin{array}{r|l} 155 & 9 \\ \underline{9} & \overline{17} \\ 65 & \\ \underline{63} & \\ 2 & \end{array}$$

$$19\frac{3}{5}-8\frac{4}{5}$$

$$\frac{98}{5}-\frac{44}{5}=\frac{98-44}{5}=\frac{54}{5}=10\frac{4}{5}$$

$$\begin{array}{r|l} 54 & 5 \\ \underline{5} & \overline{10} \\ 4 & \end{array}$$

2- متداخل مخرجونه : هغه مخرجونه دي چې لوي مخرج په کوچني مخرج پوره تقسیم شي لکه:

$$5\frac{7}{12}+8\frac{3}{4}+7\frac{5}{6}+8\frac{1}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مخرج مشترک يې لوی مخرج دی.

$$\frac{67}{12}+\frac{35}{4}+\frac{47}{6}+\frac{17}{2}=\frac{67+105+94+102}{12}=\frac{368}{12}$$

$$30\frac{8}{12}=30\frac{2}{3}$$

$$\begin{array}{r|l} 368 & 12 \\ \underline{36} & 30 \\ 8 & \end{array}$$

$$11\frac{5}{8}-4\frac{3}{4}$$

$$\frac{93}{8}-\frac{19}{4}=\frac{93-38}{8}=\frac{55}{8}=6\frac{7}{8}$$

$$\begin{array}{r|l} 55 & 8 \\ \underline{48} & 6 \\ 7 & \end{array}$$

3- **متوافق مخرجونه** : هغه مخرجونه دي چې ټول په يوه عدد ويشل کيږي لکه $8\frac{5}{9}+7\frac{5}{6}$

مخرج مشترک يې په ذو اضعاف اقل پيدا کيږي.

$$15\frac{5}{6}-7\frac{3}{4}$$

$$\begin{array}{r|l} 97 & 12 \\ \underline{96} & 8 \\ 1 & \end{array}$$

$$2\ \Big)\ \frac{95}{6}+\frac{31}{4}=\frac{190-93}{12}=\frac{97}{12}=8\frac{1}{12}$$

$$3 \quad 2$$

4- **متباين مخرجونه** : هغه مخرجونه دي چې نه متماثل وي نه متداخل وي او نه متوافق وي لکه

$$9\frac{2}{3}+7\frac{3}{4}+7\frac{2}{5}$$

مخرج مشترک يې په حاصل ضرب پيدا کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{29}{3}+\frac{31}{4}+\frac{37}{5}=\frac{580+456+444}{60}=\frac{1480}{60}=24\frac{40}{60}=24\frac{2}{3}$$

$$\begin{array}{r|l} 1480 & 60 \\ \underline{120} & 24 \\ 280 & \\ \underline{240} & \\ 40 & \end{array}$$

$$19\frac{1}{2}-8\frac{2}{3}$$

$$\frac{39}{2}-\frac{26}{3}=\frac{117-52}{6}=\frac{65}{6}=10\frac{5}{6}$$

$$\begin{array}{r|l} 65 & 6 \\ \underline{6} & 10 \\ 5 & \end{array}$$

تمرین :

لاندې سوالونه حل کړئ

$9\frac{4}{11}+8\frac{5}{11}+4\frac{7}{11}$ .1

$12\frac{1}{3}-4\frac{2}{3}$ .2

$9\frac{5}{6}+4\frac{1}{2}+3\frac{2}{3}$ .3

$14\frac{5}{8}-7\frac{1}{2}$ .4

$6\frac{2}{9}+4\frac{1}{2}+3\frac{2}{3}$ .5

$8\frac{1}{4}-3\frac{5}{6}$ .6

2- د عام کسر ضرب:

که کسرونه واجب وه غیر واجبوو یې بیا صورت په صورت کې او مخرج په مخرج کې ضربوو.

- $9\frac{2}{3}\times 5\frac{1}{4}$ 1

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{29}{3}\times\frac{21}{4}=\frac{29\times 21}{3\times 4}=\frac{609}{12}=50\frac{9}{12}=50\frac{3}{4}$$

$$\begin{array}{r|l} 609 & 12 \\ \underline{60} & 50 \\ 9 & \end{array}$$

تمرین:

لاندي سوالونه حل کړئ؟

$12\frac{3}{4}\times 8\frac{7}{9}$ -1

$6\frac{1}{8}\times\frac{11}{13}$ -2

$2\times 4\frac{3}{4}$ -3

$6\frac{1}{8}\times 7$ -4

3- د عام کسرتقسیم:

که کسرونه واجب وه غیر واجبوو یې بیا د تقسیم علامه په ضرب بدلوو او مقسوم علیه سرچپه کوؤ.

$19\frac{1}{2}\div 3\frac{1}{8}$ -1

$$\frac{39}{2}\div\frac{25}{8}=\frac{39}{2}\times\frac{8}{25}=\frac{312}{50}=6\frac{12}{50}=6\frac{6}{25}$$

$$\begin{array}{r|l} 312 & 50 \\ \underline{300} & 6 \\ 12 & \end{array}$$

$8\frac{1}{4}\div\frac{2}{3}$ -2

$$\frac{33}{4}\times\frac{3}{2}=\frac{99}{8}=12\frac{3}{8}$$

$$\begin{array}{r|l} 99 & 8 \\ \underline{8} & 12 \\ 19 & \\ \underline{16} & \\ 3 & \end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

3- $15\frac{4}{9} \div 3$

$$\frac{139}{9} \times \frac{1}{3} = \frac{139}{27} = 5\frac{4}{27}$$

139	27
135	5
4	

4- $8 \div \frac{1}{2} = 8 \times \frac{2}{1} = 16$

تمرین:

1- $20\frac{2}{3} \div 8\frac{5}{6}$

2- $41\frac{2}{5} \div 3\frac{1}{5}$

3- $16\frac{1}{2} \div \frac{3}{4}$

4- $111 \div 1\frac{1}{2}$

5- $14\frac{1}{5} \div \frac{2}{3}$

کسر الکسر یا مرکب کسر:

هغه کسر دی چې په صورت یا مخرج او یا په دواړو کې یې کسر وي.

لکه:

$\frac{\frac{2}{3}}{7}$ یا $\frac{5}{\frac{3}{4}}$ ، $\frac{\frac{7}{11}}{\frac{8}{13}}$

که د یوه کسر په صورت یا مخرج کې کسر نه وي نو مخرج یې یو دی.

$$\frac{\frac{2}{3}}{7} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{7}{1}}$$

$$\frac{5}{\frac{3}{4}} = \frac{\frac{5}{1}}{\frac{3}{4}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کسر الکسر د ساده کولو لپاره د طرفينو حاصل ضرب په صورت کې او د وسطينو حاصل ضرب په مخرج کې ليکو.

$$\frac{\frac{2}{3}}{7}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{7}{1}}=\frac{1\times 2}{3\times 7}=\frac{2}{21}$$

$$\frac{5}{\frac{3}{4}}=\frac{\frac{5}{1}}{\frac{3}{4}}=\frac{4\times 5}{3\times 1}=\frac{20}{3}$$

$$\frac{\frac{7}{11}}{\frac{8}{13}}=\frac{7\times 13}{8\times 11}=\frac{91}{88}$$

هغه کسرچه صورت او مخرج لري ساده کسر ورته وايي.

لکه: $\frac{2}{3}$

تمرين: لاندې کسرونه ساده کړئ؟

-1 $\frac{\frac{6}{11}}{\frac{9}{22}}$

-2 $\frac{9\frac{1}{8}+5\frac{1}{3}}{7\frac{1}{2}}$

-3 $\frac{11\frac{1}{4}-2\frac{1}{3}}{4\frac{1}{5}}$

-4 $\frac{4\frac{1}{2}\times 6\frac{1}{2}}{9\frac{1}{4}\div 2\frac{1}{3}}$

-5 $\frac{6+7\frac{1}{2}}{9-3\frac{1}{4}}$

-6 $\frac{\frac{2}{3}\div\frac{1}{2}}{\frac{2}{5}\div\frac{1}{4}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کسرونو تبادله:

1- د عام کسر بدلول په اعشار کسر:

صورت په مخرج ویشو.

مثال: $\frac{4}{5}$ عام کسر اعشار کسر ته واړوئ؟

$$\frac{4}{5} = 0.8$$

$$\begin{array}{r|l} 40 & 5 \\ \underline{40} & \overline{0.8} \\ 4 & \end{array}$$

مثال: $\frac{1}{6}$ اعشار کسر ته واړوئ؟

$$\frac{1}{6} = 0.1\overline{6}$$

$$\begin{array}{r|l} 10 & 6 \\ \underline{6} & \overline{0.16} \\ 40 & \\ \underline{36} & \\ 4 & \end{array}$$

مثال: $\frac{3}{8}$ کسر اعشار کسر ته واړوئ؟

$$\frac{3}{8} = 0.375$$

$$\begin{array}{r|l} 30 & 8 \\ \underline{24} & \overline{0.375} \\ 60 & \\ \underline{56} & \\ 40 & \\ \underline{40} & \\ xx & \end{array}$$

2- د اعشار کسر بدلول په عام کسر:

د اعشاري رقمو لاندې خط کشوو بیا د اعشاري رقمو په عوض خط لاندې صفرونه ږدو او د اعشاریې د علامې په عوض یو لیکو او اختصار وؤ یې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

1- مثال: 0.375 په عام کسر بدل کړئ.

$$\frac{0.375}{1000}=\frac{\cancel{375}}{\cancel{1000}}=\frac{3}{8}$$

(375 → 75 → 15 → 3 ؛ 1000 → 200 → 40 → 8)

2- مثال: $0.\overline{3}$ په عام کسر بدل کړئ؟

حل: پوهیږو چې دا اعشار د $\frac{1}{3}$ عام کسر څخه جوړ شویدی د 0.3 لاندي خط کشوو بیا صورت او مخرج د $\frac{1}{3}$ د کسر په مخرج کې ضربوو او د صورت سره باقي جمع کوو.

$$\frac{0.3}{10}=\frac{3\times3+1}{10\times3}=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$$

یا دا چه د متوالي عدد لاندي 9 لیکو

$$\frac{0.3}{9}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$$

مثال: $0.1\overline{6}$ عام کسر ته واړوئ؟

$$\frac{0.16}{100}=\frac{16\times6+4}{100\times6}=\frac{96+4}{600}=\frac{100}{600}=\frac{1}{6}$$

$$\frac{0.16}{90}=\frac{16-1}{90}=\frac{15}{90}=\frac{1}{6}$$

تمرین:

1- اعشار کسر ته یې واړوئ؟

1- $\frac{4}{7}$ 2- $\frac{3}{5}$ 3- $\frac{7}{8}$ 4- $\frac{5}{6}$ 5- $\frac{11}{15}$

2- عام کسر ته یې واړوئ؟

1- $0.\overline{27}$ 2- $0.7\overline{3}$ 3- $0.95\overline{45}$ 4- $0.4\overline{6}$

5- $0.3\overline{8}$ 6- $0.4\overline{16}$ 7- $0.9\overline{1}$ 8- $0.\overline{814}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

عبارتي سوالونه:

1- احمد د يوې هنداونې $\frac{3}{7}$ برخه واخيسته پاتې شوې برخه يې پيدا کړئ؟

2- د تيلو د ټانک $\frac{7}{9}$ برخه ډکه ده که د $200li$ ګنجايش ولري وواياست په ټانک کې به ټول تيل څومره وي؟

3- د غوړيو د بيلر $\frac{2}{5}$ برخه د غوړيو څخه ډکه ده د ډکې برخې دريمه برخه يې $30kg$ ده د بيلر ګنجايش څو دی؟

4- احمد د $200\frac{1}{2}$ روپو بوره د $300\frac{1}{4}$ روپۍ يې چای د $700\frac{3}{4}$ روپۍ غوښه $30\frac{1}{2}$ روپۍ يې مالګه او اورلګيت واخيست که د نوموړي تنخوا 2000 روپۍ وي وواياست چې څو روپۍ ور پاته دي؟

5- امين $10\frac{1}{2}kg$ غوښه واخيسته که غوښه کيلو ګرام په $300\frac{1}{4}$ روپۍ وي وواياست چې قصاب څو روپۍ ور څخه اخيستي دي؟

6- چای خرڅوونکی د چايو يو پيټی چې $50kg$ چای پکې دی خلاصه کړه احمد ته $2\frac{3}{4}kg$ چای عمود ته يې $3\frac{1}{4}kg$ چای او يو دکاندار ورڅخه $20\frac{1}{4}$ کيلو ګارم چای واخيستی دوست چې په پيټی کې څومره چای پاتې دی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

دريم فصل

طاقت، تجزيه او جذر

طاقت لرونکی عددونه :

هغه عددونه دي چې څو واره په خپل ځان کې ضرب شوي وي.

لکه:

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$$

هغه عدد چې په خپل ځان کې ضربيږي د طاقت لرونکي عدد قاعده ورته وايي او د ضربيدو کرتو ته توان وايي.

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5$$

د طاقت قوانين:

1- که څو طاقت لرونکي عددونه د ضرب په حال کې وي قاعدې يې مساوي او توانونه يې مختلف وي . د قاعدوڅخه يوه قاعده ليکو او توانونه يې جمع کوو.

$$2^3 \times 2^5 \times 2^7 \times 2 = 2^{3+5+7+1} = 2^{16}$$

2- که څو طاقت لروکي عددونه د ضرب په حال کې وي قاعدې يې مختلفي او توانونه يې مساوي وي قاعدې سره ضربوؤ او د توانو څخه يو توان راخلو.

$$2^7 \times 3^7 \times 5^7 = (2 \times 3 \times 5)^7 = 30^7$$

3- که دوه طاقت لرونکي عددونه د تقسيم په حال کې وي قاعدې يې مساوي او توانونه يې مختلف وي د قاعدو څخه يوه قاعده ليکو او توانونه يې منفي کوو.

$$\frac{7^{11}}{7^5} = 7^{11-5} = 7^6$$

4- که دوه طاقت لرونکي عددونه د تقسيم په حال کې وي قاعدې يې مختلفي او توانونه يې مساوي وي قاعدې يې يو پر بل ليکو او د توانو څخه يو توان راخلو.

1- $\frac{6^5}{3^5} = \left(\frac{6}{3}\right)^5 = 2^5$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- $\frac{16^7}{12^7} = (\frac{16}{12})^7 = (\frac{4}{3})^7$

3- $\frac{5^8}{3^8} = (\frac{5}{3})^8$

5- که یو طاقت لرونکی عدد په بل توان رفع شي توانونه يې ضربيږي.

$$(2^3)^4 = 2^{3\times4} = 2^{12}$$

6- هر عدد په توان د صفر يو کيږي.

$\{(5^3)^7\}^0 = 5^0 = 1$

$5^0 = 1$

$\frac{5^3}{5^3} = 1 \ldots\ldots\ldots I$

$\frac{5^3}{5^3} = 5^{3-3} = 5^0 \ldots\ldots\ldots II$

د I او II رابطو چپ طرفونه مساوي دی نو ښي طرفونه يې هم مساوي دي. يعني $5^0 = 1$ کيږي.

2- که یو طاقت لرونکی عدد د صورت څخه مخرج ته یاد مخرج څخه صورت ته ویوړل شي د توان علامه يې تغير خوري.

$2^5 = \frac{1}{2^{-5}}$

$3^{-7} = \frac{1}{3^7}$

$\frac{1}{2^3} = 2^{-3}$

$\frac{1}{4^{-6}} = 4^6$

د $2^5 = \frac{1}{2^{-5}}$ ثبوت:

$$2^5 = \frac{2^5 \times 2^{-5}}{2^{-5}} = \frac{2^0}{2^{-5}} = \frac{1}{2^{-5}}$$

د $\frac{1}{4^{-6}} = 4^6$ ثبوت:

$$\frac{1}{4^{-6}} = \frac{1 \times 4^6}{4^{-6} \times 4^6} = \frac{4^6}{4^0} = \frac{4^6}{1} = 4^6$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تجزيه :

تجزیه په لغت کې ټوټه ټوټه کولو ته وايي.

او په اصطلاح کې د يوه مرکب عدد د ضربي عواملو د پيدا کولو طريقې ته تجزيه وايي.

د تجزيي طريقه:

عدد ليکو خط يې لاندې کشوو چپې خواته يې عمودي خط رسموو د عمودي خط چپې خواته هغه لمړنی عدد ليکو چې د راکړ شوي عدد په ضربي عواملو کې د ټولو څخه کوچنی وي. راکړ شوی پدې لمړني عدد ويشو حاصل يې د خط لاندې ليکو په همدې ترتيب عمليې ته تر هغه وخته پورې ادامه ورکوؤ تر څو چې د عدد په ستون کې يو لاس ته راشي. د عمودي خط د چپې خوا عددونه د راکړ شوي عدد ضربي عوامل دي.

2	450
3	225
3	75
5	25
5	5
	1

$$450 = 2 \times 3^2 \times 5^2$$

د 55125 تجزيه کړئ؟

3	55125
3	18375
5	6125
5	1225
5	245
7	49
7	7
	1

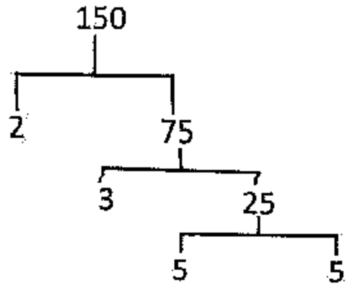
$$55125 = 3^2 \times 5^3 \times 7^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دیا ګرام په طریقه د یوه عدد تجزیه کول:

عدد لیکو په دوه برخو یې داسې ویشو چه یو یې لمړنی عدد او بل یې مرکب عدد وي مرکب عدد بیا په دوه برخو ویشو په همدې ډول دمرکب عدد ضربي عوامل لاس ته راځي.

مثال: 150 د دیاګرام په طریقه تجزیه کړئ؟



$$150 = 2 \times 3 \times 5^2$$

د تجزیې د استعمال ځایونه:

تجزیه د څو عددو د لوی مشترک قاسم او کوچني مشترک مضرب د پیدا کولو لپاره استعمالیږي.

لوی مشترک قاسم: دڅوعددولوی مشتر ک قاسم هغه عدد دی چې ترهغه په بل لوی عددباندې دا عددونه تقسیم نه شي.

لکه د 150 او 210 لوی مشترک قاسم 30 دی ځکه چې 150 او 210 تر 30 په بل غټ عدد نه ویشل کیږي.

کوچني مشترک مضرب: د څو عددو کوچنی مشترک مضرب هغه عدد دی چې تر هغه بل کوچنی عدد په دې عددو باندې تقسیم نه شي.

لکه 150 او 210 کوچنی مشترک مضرب 1050 دی، ځکه چې تر 1050 بل کوچنی عدد نشته چې په 150 او 210 باندې وویشل شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لوی مشترک قاسم او کوچنی مشترک مضرب پیدا کول:

عددونه تجزیه کوو په ضربي عواملو کې يې مشترک او غیر مشترک پیدا کوو په مشترکو ضربي عواملو کې د کوچني توان والا ضربي عوامل راخلو ضربوويې لوی مشترک قاسم لاس ته راځي.

او که په مشترکو ضربي عواملو کې د لوړ توان والا ضربي او غیر مشترک ضربي عوامل سره ضرب کړو کوچنی مشترک مضرب لاس ته راځي.

مثال: 150 او 210 لوی مشترک قاسم او کوچنی مشترک مضرب پیدا کړئ؟

2	150
3	75
5	25
5	5
	1

2	210
3	105
5	35
7	7
	1

$$150 = 2 \times 3 \times 5^2$$
$$210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$$
$$G.C.D = 2 \times 3 \times 5 = 30$$
$$L.C.M = 2 \times 3 \times 5^2 \times 7 = 1050$$

2- د 660 او 840 لوی مشترک قاسم (G.C.D) او کوچنی مشترک مضرب (L.C.M) پیدا کړئ؟

2	660
2	330
3	165
5	55
11	11
	1

2	840
2	420
2	210
3	105
5	35
7	7
	1

$$660 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 11$$
$$840 = 2^3 \times 3 \times 5 \times 7$$
$$G.C.D = 2^2 \times 3 \times 5 = 60$$
$$L.C.M = 2^3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 = 9240$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرین :

د لاندې عددونو لوی مشترک قاسم او کوچنی مشترک مضرب پیدا کړئ؟

1- 630 او 450

2- 780 او 540

3- 960 او 660

5- 1440 او 1260

د اقلیدس په طریقه د لوی مشترک قاسم او کوچني مشترک مضرب پیدا کول:

لوی عدد په کوچني عدد ویشو که د تقسیم عملیه باقي وکړي مقسوم علیه په باقي ویشو په همدې ترتیب عملیې ته ادامه ورکوو کله چې باقي صفر شي اخرنی مقسوم علیه لوی مشترک قاسم دی

مثال: د 1080 او 780 لوی مشترک قسام او کوچنی مشترک مضرب د اقلیدس به طریقه پیدا کړئ؟

$$\begin{array}{r|l} 1080 & 780 \\ \underline{780} & 1 \\ 300 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 780 & 300 \\ \underline{600} & 2 \\ 180 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 300 & 180 \\ \underline{180} & 1 \\ 120 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 180 & 120 \\ \underline{120} & 1 \\ 60 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 120 & 60 \\ \underline{120} & 2 \end{array}$$

$$G.C.D = 60$$

عددونه سره ضربوو په لوی مشترک قاسم یې ویشو $L.C.M$ لاس ته راځي

$$L.C.M = \frac{\text{د عددونو حاصل ضرب}}{G.C.D}$$

$$G.C.D = \frac{\text{د عددونو حاصل ضرب}}{L.C.M}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د راکړ شوي سوال $L.C.M$ په لاندې ډول پيدا کوؤ.

$$L.C.M = \frac{\overset{13}{780} \times 1080}{\underset{1}{60}} = 13 \times 1080 = 14040$$

$$L.C.M = 1404$$

په يوه جدول کې د لوی مشترک قاسم او کوچني مشترک مضرب پيدا کول:

عددونه په يوه کرښه کې ليکو خط ور لاندې کشوو چپې خواته يې عمودي خط رسموؤ د عمودي خط چپې خواته هغه لمړنی عدد ليکو چې د دوي په ضربي عواملو کې د ټولو څخه کوچنی وي راکړ شوي عددونه په دغه لمړني عدد ويشو حاصل يې د خط لاندې ليکو تر هغو پورې عمليې ته ادامه ورکوو تر څو چې ټول په يوه عدد ويشل کيږي د عمليې په اخر کې که د عمودي خط د چپې خوا عددونه ضرب کړو لوی مشترک قاسم لاس ته راځي. او که د افقي خط لاندې عددونه هم پکې ضرب کړو کوچنی مشترک مضرب لاس ته راځي.

مثال: د 780 او 1080 لوی مشترک قاسم او کوچنی مشترک مضرب پيدا کړئ؟

2	780	1080
2	390	540
3	195	270
5	65	90
	13	18

$$G.C.D = 2^2 \times 3 \times 5 = 60$$

$$L.C.M = 60 \times 13 \times 18 = 14040$$

تمرين:

د لاندې عددونه لوی مشترک قاسم او کوچنی مشترک مضرب د اقليدس په طريقه پيدا کړئ؟

1- 1350 او 750

2- 930 او 870

3- 540 او 420

4- 900 او 720

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لاندې عددونو کوچنۍ مضرب او لوی مشترک قاسم په یوه جدول کې پیدا کړئ؟

1- 960 او 1530

2- 210 او 180 او 150

3- 225 او 135 او 120

4- 240 او 330 او 90

جذر :

جذر په لغت کې ولې، ریښه یا جرړې ته وایي.

او په اصطلاح کې د یوه عدد جذر هغه عدد دی چې د جذر په درجه رفع شي او د جذر لاندې عدد پلاس راشي لکه که $\sqrt[n]{a} = b$ وي

نو $b^n = a$ کیږي.

د یو عدد دویم جذر : هغه عدد دی چې د (2)په توان رفع شي او د جذر لاندې عدد پلاس راشي . لکه:

1- $\sqrt{64} = 8$
$8^2 = 64$
2- $\sqrt{169} = 13$
$13^2 = 169$

د یو عدد دریم جذر:

هغه عدد دی چې د درې په توان رفع شي او د جذر لاندې عدد په لاس راشي لکه که

$\sqrt[3]{64} = 4$

نو $64 = 4^3$ کیږي.

ددویم جذرپیدا کول:

دیوه عدد دویم جذر په دوه طریقو پیدا کیږي.

1- د تجزیې پواسطه   2- په عمومي طریقه

(c) ketabton.com: The Digital Library

1- د تجزيي پواسطه د يوه عدد د دويم جذر پيدا کول:

عدد تجزيه کوو په مساوي ضربي عواملو کې دوه ، دوه جوړه کوو د هرې جوړې څخه يو عدد راخلو او ضربوو يې د هغه عدد دويم جذر لاس ته راځي.

1- مثال: د (324) دويم جذر پيدا کړئ؟

2	2	324
	2	162
3	3	81
	3	27
3	3	9
	3	3
		1

$$324 = 2 \times 3^{2}$$

د يوه عدد د دريم جذر پيدا کول په

عدد تجزيه کوو مساوي ضربي عوامل ئي درې،درې جوړه کوو د هرې جوړې څخه يو عدد راخلو ضربوو يې د هغه عدد دريم جذر لاس ته راځي.

مثال: د (1000) دريم جذر پيدا کړئ؟

2	2	1000
	2	500
	2	250
5	5	125
	5	25
	5	5
		1

$$\sqrt[3]{1000} = 2 \times 5 = 10$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یو عدد څلورم جذر:

عدد تجزیه کوو مساوي ضربي عوامل څلور څلور جوړه کوؤ، د هرې جوړې څخه یو عدد راخلو او ضربوو د هغه عدد څلورم جذر لاس ته راځي.

مثال: 1296 څلورم جذر پیدا کړئ؟

2	2	1296
	2	648
	2	324
	2	162
3	3	81
	3	27
	3	9
	3	3
		1

$$\sqrt[4]{1296} = 2 \times 3 = 6$$

نوټ: په همدغه ډول د تجزیې پواسطه ، پنځم ، شپږم او نور جذرونه پیدا کولای شو.

2- په عمومي ډول د یوه عدد د دویم جذر پیدا کول:

عدد لیکو ښي خواته یې د تقسیم علامه او چپې خواته یې یو عمودي خط رسموؤ بیا د عدد د ښي خوا څخه دوه ، دوه مرتبې جوړه کوؤ اخر ته به هم یادوه مرتبې جوړه شي او یا به یوه مرتبه یواځې پاتې شي په دواړه حالتو کې یو داسې عدد پیدا کوو چې په خپل ځان کې ضرب شي او دغه عدد پوره کړي او یا لږ کم شي دا عدد د تقسیم د علامې په سر او د عمودي خط چپې خواته لیکو او سره ضربوو یې د ضرب حاصل د راکړ شوي عدد د اخرني جوړې یا اخرنی عدد لاندې لیکو منفي کوو یې د تفریق د حاصل مخې ته دوه رقمونه کښته او د مقسوم په څیر یې استعمالوو د عمودي خط د چپې خوا عدد دوه چنده کوو او د مقسوم علیه کار ورڅخه اخلو مقسوم په مقسوم علیه ویشو حاصل یې د خارج قسمت د مخکینې عدد مخې ته او د عمودي خط د چپې د خوا د عدد مخې ته لیکو. په خارج قسمت کې دغه نوی عدد د عمودي خط د چپې خوا ته په ټول عدد کې ضربوو د ضرب حاصل یې د مقسوم لاندې لیکو او منفي کوو د

(c) ketabton.com: The Digital Library

تفریق د حاصل مخې دوه نور رقمونه راکښته کوو د عمودي خط د چپې نوی رقم دوه چند کوو په همدې ترتیب تر اخره اجرائت کوو که عملیې باقي ونکړل د تقسیم د عملیې پر سر عدد د راکړ شوي عدد دویم جذر دی. که عملیې باقي وکړل د تفریق د حاصل مخې ته دوه صفرونه ږدو او خارج قسمت ته اعشاریه پورته کوو.

$$\sqrt{209764} = 458$$

4	20 97 64	458
85	16	
805	497	
	425	
	7264	
	7264	
	xxxx	

$$\sqrt{502681} = 709$$

7	50 26 81	709
1409	49	
	12681	
	12681	
	xxxx	

تمرین:

د لاندې عددونو دویم جذر په عمومي طریقه پیدا کړئ؟

1- $\sqrt{298116} = ?$

2- $\sqrt{318096} = ?$

3- $\sqrt{734449} = ?$

4- $\sqrt{2047.5625} = ?$

5- $\sqrt{5484.8836} = ?$

تقریبي جذر :

که د یوه عدد جذر په خپل ځان کې ضرب شي د ضرب حاصل یې هغه عدد پوره نکړي چې جذر یې نیول شویدی نو دغه جذر ته تقریبي جذر وایې د یوه عدد تقریبي جذر په دوه طریقو پیدا کیږي.

1- په عمومي طریقه　　2- د اوسط په طریقه

(c) ketabton.com: The Digital Library

1- په عمومي طريقه :

د عدد جذر په عمومي طريقه پيدا کوؤ که باقي يې وکړل د باقي مخې ته دوه صفرونه ږدو او خارج قسمت ته اعشاريه پورته کوو او د جذر عمليې ته ادامه ورکوو پلاس راغلي جذر ته تقريبي جذر وايي.

مثال: د 128968 جذر پيدا کړئ؟

3	128968	359.1
65	9	
709	389	
7169	325	
	6468	
	6381	
	8600	
	7169	
	باقي 1431	

359.1 د 128968 تقريبي جذر دی.

2- د اوسط په طريقه :

د کوچنيو عددونو تقريبي جذر د اوسط په طريقه پيدا کيږي طريقه يې داسې ده د راکړ شوي عدد څخه لاندې باندې دوه داسې عددونه پيدا کوو چې پوره جذر ولري جذرونه يې جمع کوو او اوسط يې پيدا کوو اوسط يې مربع کوو که مربع يې کوچني عدد ته نژدې ؤ نو جذر يې د کوچني عدد د جذر سره جمع کوو او اوسط يې پيدا کوو اوسط يې د راکړ شوي عدد تقريبي جذر دی.

مثال: د 5 تقريبي جذر پيدا کړئ؟

حل: د 5 څخه لاندې هغه عدد چې پوره جذر لري 4 دی چې جذر يې 2 دی د 5 څخه پورته عدد چې پوره جذر لري 9 دی او جذر يې دري (3) دی 2 او 3 جمع کوو او اوسط يې پيدا کوو $2.5 = \frac{5}{2} = \frac{2+3}{2}$ اوسط يې 2.5 دی 2.5 مربع کوو مربع يې 6.25 ده 6.25 د 9 څخه 4 ته نژدې ده نو د 6.25 جذر د 4 د جذر سره جمع کوو او اوسط يې پيدا کوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{2.5+2}{2}=\frac{4.5}{2}=2.25$$

2.25 د 5 تقريبي جذر دی.

نوټ: د 5 او 6 تقريبي 2.25جذر دی د 7 او 8 تقريبي جذر 2.75 دی.

د اعشاري عدد دويم جذر پيدا کول

صحيح عدد يې د ښي خوا څخه دوه دوه مرتبې جوړه کوو او اعشاري رقمونه يې د چپې خوا څخه دوه دوه جوړه کوو که اعشاري رقمونه يې طاق وي مخې ته يو صفر ږدو. کله چې د اعشار يې د علامې څخه اوړو اعشاريه خارج قسمت ته وړو.

مثال: 903.6036 دويم جذر پيدا کړئ؟

3	9 03.6036	30.06
6006	9	
	036036	
	36036	
	xxxxx	

تمرين:

لاندې عددو تقريبي جذر په عمومي طريقه پيدا کړئ؟

1- 4716　　2- 35811　　3-7504　　4- 9814　　5- 6763

2- د لاندې عددو تقريبي جذر د اوسط په طريقه پيدا کړئ؟

1- 11　　2- 13　　3- 19　　4- 29　　5-34

3- د لاندې اعشاري عدد دويم جذر پيدا کړئ؟

1- 457.96　　2- 1229.9049　　3- 337444.81　　4- 48830.25

5- 2605.0816　　6- 64.048009　　7- 2711.2849

(c) ketabton.com: The Digital Library

د جذر قوانین:

1- که څو جذري عددونه د ضرب په حال کې وي د جذر لاندي عددونه يې مساوي او د جذر درجې يې مختلفي وي. که وغواړو چې تر يوه جذر يې لاندې کړو په طاقت لرونکو عددو يې بدلوود طاقت قوانين پرې تطبيقوو اخري عدد بيرته تر جذر لاندې کوو.

$$\sqrt{2}\times\sqrt[3]{2}\times\sqrt[5]{2}=\sqrt[30]{2^{31}}$$
$$2^{\frac{1}{2}}\times 2^{\frac{1}{3}}\times 2^{\frac{1}{5}}=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}=2^{\frac{15+10+6}{30}}=2^{\frac{31}{30}}=\sqrt[30]{2^{31}}$$

2- که څو جذري عددونه د ضرب په حال کې وي د جذر لاندي عددونه يې مختلف او د جذر درجې يې مساوي وي. د طاقت د قوانينو سره سم کولای شو چې تر يوه جذر يې لاندې کړو.

$$\sqrt[7]{2}\times\sqrt[7]{3}\times\sqrt[7]{5}=\sqrt[7]{2\times3\times5}=\sqrt[7]{30}$$
$$2^{\frac{1}{7}}\times 3^{\frac{1}{7}}\times 5^{\frac{1}{7}}=(2\times3\times5)^{\frac{1}{7}}=30^{\frac{1}{7}}=\sqrt[7]{30}$$

3-که دوه جذري عددونه د تقسيم په حال کې وي د جذر لاندې عددونه يې مساوي او د جذر درجې يې مختلفې وي د طاقت د قوانينو په اساس کولای شو چې تر يوه جذر يې لاندې کړو.

$$\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[7]{5}}=\sqrt[35]{5^4}$$
$$\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[7]{5}}=\frac{5^{\frac{1}{3}}}{5^{\frac{1}{7}}}=5^{\frac{1}{3}-\frac{1}{7}}=5^{\frac{7-3}{21}}=5^{\frac{4}{21}}=\sqrt[21]{5^4}$$

4- که دوه جذري عددونه تقسيم په حال کې وي د جذر لاندې عددونه يې مختلف او د جذر درجې يې مساوي وي د طاقت د قوانينو سر سم يې تر يوه جذر لاندې ليکو.

$$\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{6}}=\sqrt[3]{\frac{5}{6}}$$
$$\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{6}}=\frac{5^{\frac{1}{3}}}{6^{\frac{1}{3}}}=\left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{\frac{5}{6}}$$

5- که جذري عدد د جذر په درجه رفع شي د جذر لاندې عدد لاس ته راځي

$$\left(\sqrt[7]{5}\right)^7=5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(\sqrt[7]{5})^7 = \left(5^{\frac{1}{7}}\right)^7 = 5^{\frac{1}{7}\times\frac{7}{1}} = 5^{\frac{7}{7}} = 5^1 = 5$$

6- که یو عدد تر مختلفو جذرو لاندې وي د طاقت د قوانینو سره سم یې تر یوه جذر لاندې کوو.

$$\sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt{2}}} = \sqrt[30]{2}$$

$$\sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt{2}}} = \left\{(2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}\right\}^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}} = 2^{\frac{1}{30}} = \sqrt[30]{2}$$

تمرین:

تر یوه جذر یې لاندې کړئ؟

1- $\sqrt{3}\times\sqrt[3]{3}\times\sqrt[5]{3}$ 2- $\sqrt[7]{2}\times\sqrt[7]{3}\times\sqrt[7]{5}$ 3- $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[9]{2}}$

4- $\frac{\sqrt[6]{5}}{\sqrt[6]{7}}$ 5- $\sqrt[6]{\sqrt[5]{\sqrt{3}}}$

د حسابي افادو د قیمت پیدا کول:

حسابي افاده: که په یوه حسابي جمله کې څو عملیې (جمع ، تفریق ، ضرب ، تقسیم) او قوسونه طاقت او جذر موجود وي د دغسې افادې د قیمت د پیدا کولو لپاره لمړی طاقت او جذر د منځه ورو بیا قوسونه خلاصوو دریم قدم کې د ضرب او تقسیم عملیې او په اخر د جمع او تفریق عملیې اجراء کوو.

قوس: یو سمبول دی چې څو عددونه تر یوه حکم لاندې کوي قوسونه په درې قسمه دي.

1- کوچني قوسونه چې شکل یې ( ) دی.

2- منځنی قوسونه چې شکل یې { } دی.

3- لوی قوسونه چې شکل یې [ ] دی.

مثال:

$$(8-11)(4-5)+8-2\div 2-11$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-3(-1)+8-1-11$$
$$3+8-12$$
$$11-12=-1$$

هم درجه کول:

که څو جذري عددونه د ضرب یا تقسیم په حال کی وي د جذر لاندي عددونه مختلفي او درجې یې هم مختلفي وي که وغواړو چې تر یوه جذر یې لاندې کړو لمړی یې هم درجه کوو.
طریقه یې دا ده چې د ټولو جذرو درجې سره ضربوو چې د جذر عمومي درجه لاس ته راشي دا عمومي درجه د هر جذر په درجه تقسیموو د همغه جذري عدد توان لاس ته راځي.

1- مثال: $\sqrt[5]{3}\times\sqrt{2}$ تر یوه جذر لاندې کړئ؟

حل : لمړی یې هم درجه کوو.

$$\sqrt[10]{2^5}\times\sqrt[10]{3^2}=\sqrt[10]{2^5\times 3^2}=\sqrt[10]{32\times 9}=\sqrt[10]{288}$$

2- $\frac{\sqrt[7]{2}}{\sqrt{3}}$ هم درجه یې کړئ؟

$$\frac{\sqrt[14]{2^2}}{\sqrt[14]{3^7}}=\sqrt[14]{\frac{2^2}{3^7}}$$

تمرین : هم درجه یې کړئ؟

1- $\sqrt[3]{3}\times\sqrt{2}$ 2- $\sqrt{3}\times\sqrt[3]{2}$ 3- $\sqrt[3]{4}\times\sqrt[4]{5}$ 4- $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}}$

5- $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt[3]{5}}$ 6- $\frac{\sqrt[3]{\sqrt{5}}}{\sqrt[3]{6}}$ 7- $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}}$

د جذري عددونو جمع کول او تفریقول:

هغه جذري عددونه جمع کولای او تفریقولای شو چې د جذر لاندي عددونه مساوی وي او د جذر درجې یې هم مساوي وي.

مثال:

$$7\sqrt[3]{2}+11\sqrt[3]{2}+6\sqrt[3]{2}-15\sqrt[3]{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$(7+11+6)\sqrt[3]{2}-15\sqrt[3]{2}$

$24\sqrt[3]{2}-15\sqrt[3]{2}$

$(24-15)\sqrt[3]{2}=9\sqrt[3]{2}$

2- $5\sqrt{32}+7\sqrt{128}+5\sqrt{8}-20\sqrt{2}$ لازمي عمليې پرې اجراء کړئ؟

$5\sqrt{16\times 2}+7\sqrt{64\times 2}+5\sqrt{4\times 2}-20\sqrt{2}$

$5\times 4\sqrt{2}+7\times 8\sqrt{2}+5\times 2\sqrt{2}-20\sqrt{2}$

$(20+56+10-20)\sqrt{2}=66\sqrt{2}$

تمرين:

لاندې جذري عددونه جمع او تفريق کړئ؟

1- $11\sqrt{5}+19\sqrt{5}+8\sqrt{5}-25\sqrt{5}$

2- $\sqrt{128}+3\sqrt{8}-5\sqrt{32}$

3- $13\sqrt{27}+5\sqrt{243}-20\sqrt{3}$

ګويا کول:

که د يوه کسر په صورت يا مخرج کې جذري حد يا عدد موجود وي کولای شو چې ګويا يې کړو. مګر مشهور په رياضي کې د مخرج ګويا کول دي د کسر د مخرج ګويا کول په حساب کې دوه حالتونه لري.

1- چې د کسر په مخرج کې يو جذري عدد موجود وي او د جذر درجه يې 2 وي لکه $\frac{5}{\sqrt{15}}$. صورت او مخرج د مخرج په جذري عدد کې ضربوو.

$$\frac{5}{\sqrt{15}}=\frac{5\sqrt{15}}{\sqrt{15}\times\sqrt{15}}=\frac{5\sqrt{15}}{\sqrt{15^2}}=\frac{5\sqrt{15}}{15}=\frac{\sqrt{15}}{3}$$

2- چې د کسر په مخرج کې يو جذري عدد موجود وي او د جذر درجه يې د (2) څخه ډېره وي لکه $\frac{3}{\sqrt[5]{12}}$ د دغه ډول کسرو د مخرجو د ګويا کول لپاره صورت او مخرج د مخرج په جذري عدد کې ضربوو د جذر د درجې او جذري عدد د توان د تفاضل په اندازه توان ورکوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{2}{\sqrt[5]{12}} = \frac{2}{\sqrt[5]{12}\times\sqrt[5]{12^4}} = \frac{2\sqrt[5]{12^4}}{\sqrt[5]{12\times 12^4}} = \frac{2\sqrt[5]{12^4}}{\sqrt[5]{12^5}} = \frac{2\sqrt[5]{12^4}}{12}$$

$$\frac{2}{\sqrt[5]{12}} = \frac{\sqrt[5]{12^4}}{6}$$

تمرین : ګویا یې کړئ؟

1- $\frac{2}{\sqrt{6}}$ 2- $\frac{3}{\sqrt{12}}$ 3- $\frac{14}{\sqrt{7}}$ 4- $\frac{15}{\sqrt{5}}$ 5- $\frac{2}{\sqrt{2}}$

6- $\frac{2}{\sqrt[3]{6}}$ 7- $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt[4]{5}}$ 8- $\frac{12}{\sqrt[5]{3}}$ 9- $\frac{14}{\sqrt[5]{7}}$ 10- $\frac{2}{\sqrt[3]{2}}$

د اعدادو سیستمونه:

څرنګه چې په حساب کې 10 رقمونه لیکل شویدی نو له همدې کبله هغه عددونه چې په روزمره ژوند کې استعمالیږي د 10 په قاعده د اعدادو سیستم او یا اعشاري سیستم بلل کیږي.

مثلاً 5918 یو عدد راکړ شویدی د دې د پاره چې معلوم کړو چې د دغه عدد قاعده معلومه کړو څرنګه چه رقمونه یې څلور دي نو راکړ شوي عدد څلور ځایه کوو او هر رقم په خپله مرتبه کې لیکو.

$$5918 = 5000 + 900 + 10 + 8$$
$$= 5\times 10^3 + 9\times 10^2 + 1\times 10^1 + 8\times 10^0$$

که ضریبونه څنګ په څنګ په ترتیب سره ولیکل شي نو بیرته لمړنی عدد لاس ته راځي.

همدغه ډول که راکړ شوی عدد په مسلسله توګه په 10 وویشو او باقیات د تقسیم په مقابل کې د پاس څخه کښته خواته ولیکو. او بیا دباقیاتو د ستون رقمونه په افقي کرښه کې داسې ولیکو چې د ستون د سر رقم یې په سر کې راشي. او نور رقمونه یې په ترتیب سره ورپسې ولیکل شي بیرته راکړ شوی عدد لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

10	5918	
10	591	8
10	59	1
10	5	9
	0	5

$5918_{10} = 5918$

نو معلومه شوه چې په روزمره ژوند کې د مستعمل عددونو قاعده 10 ده په کمپيوټري معايناتو کې د امراضو د تشخيص لپاره دوه نور سيستمونه هم ليکل شويدي چې د 2 په قاعده د اعدادو سيستم او بل د 5 په قاعده د اعدادو سيستم دی

1- د 2 په قاعده د اعدادو سيستم:

که وغواړو چې يو عدد د 2 په قاعده د اعدادو سيستم ته واړوو عدد په مسلسل ډول په (2) ويشو باقيات يې د تقسيم د عمليې په مقابل کې دپاس څخه کښته خواته ليکو که د باقياتو د ستون رقمونه په افقي ډول وليکل شي د (2) په قاعده د اعدادو سيستم لاس ته راځي.

مثال:- 31 د 2 په قاعده د اعدادو سيستم ته واړوئ؟

2	31	
2	15	1
2	7	1
2	3	1
2	1	1
	0	1

$31_{10} = 11111_2$

يا دا چې د طاقت د قوانينو څخه استفاده کوو.

$31 = 16 + 8 + 4 + 2 + 1$

$31 = 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1$

$31 = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1 \times 2^0$

$31_{10} = 11111_2$

د 2 د قاعدې اساسي رقمونه (2)دي چې عبارت له (0,1) څخه دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- د 5 په قاعده د اعدادو سیستم:

عدد په مسلسل ډول په 5 ویشو د باقیاتو د ستون رقمونه په ترتیب سره په افقي کرښه کې لیکو د 5 په قاعده د اعدادو سیستم لاس ته راځي.

مثال: 251 د 5 قاعدې ته واړوئ؟

حل:

5	251	
5	50	1
5	10	0
5	2	0
	0	2

$251_{10} = 2001_5$

$251 = 2 \times 125 + 1$

$251 = 2 \times 5^3 + 0 \times 5^2 + 0 \times 5^1 + 1 \times 5^0$

$251 = 2001_5$

د 5 د قاعدې اساسي رقمونه 5 دي چې عبارت دي له 4 ، 3 ، 2 ، 1 ، 0 څخه

تمرین:

لاندې عددونه د 2 په قاعده باندې د اعدادو سیستم ته واړوئ؟

33-1　　47 -2　　65 -3

77-4　　71-5　　97-6

لاندې عددونه د 5 په قاعده باندې د اعدادو سیستم ته واړوئ؟

211-1　　314 -2　　97 -3

86 -4　　98 -5　　101 -6

د 2 د قاعدې څخه د 10 قاعدې ته د یوه عدد اړول:

د 2 د قاعدې د عدد ټول رقمونه په ترتیب سره د 2 په مختلفو رقمو کې ضربوو د 10 په قاعده مربوطه عدد لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: 111011_2 د 10 قاعدې ته واړوئ:

$$1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$$
$$32 + 16 + 8 + 0 + 2 + 1 = 59$$
$$59_{10} = 111011_2$$

د 5 د قاعدې څخه د 10 قاعدې ته د یوه عدد اړول

د 5 د قاعدې د عدد ټول رقمونه په ترتیب سره د 5 په مختلفو طاقتو کې داسې ضربوو چې لمړی رقم په 5^0کې دریم رقم 5^1 کې .... په همدې ترتیب تر اخره ضربوو د ضرب حاصلونه یې جمع کوؤ د 10 د قاعدې مربوطه عدد لاس ته راځي.

مثال: 32104_5 د 10 قاعدې ته واړو.

$$3 \times 5^4 + 2 \times 5^3 + 1 \times 5^2 + 0 \times 5^1 + 4 \times 5^0$$
$$3 \times 625 + 2 \times 125 + 1 \times 25 + 0 \times 5 + 4 \times 1$$
$$1875 + 250 + 25 + 0 + 4 = 2154$$

تمرین:

لاندې عددونه د 2 د قاعدې څخه د 10 قاعدې ته واړوئ؟

1- 101111_2 2- 111011_2 3- 111111_2

4- 1010001_2 5- 100011_2

لاندې عددونه د 5 د قاعدې څخه د 10 قاعدې ته واړوئ؟

1- 231_5 2- 341_5 3- 423_5 4- 143_5 5- 234_5

(c) ketabton.com: The Digital Library

څلورم فصل

نسبت او تناسب

نسبت:

نسبت په لغت کې رابطې ته وايي.

او په اصطلاح کې د دوه هم جنسو عددو تر منځ رابطې ته نسبت وايي. لکه:

$$\frac{a}{b}$$

a ته اول حد يا صورت يا مقدم وايي b ته دويم حد يا مخرج يا مؤخر وايي.

نسبت مجرد عدد دی واحد نلري.

نسبت د فيصد په شکل اود اعشار کسر په شکل هم ليکلای شو .

اوله قاعده - د نسبت پيدا کول: که دوه عددونه راکړ شوي وي او وغواړو چې نسبت يې پيدا کړو يو پر بل يې ليکو او اختصاروؤ يې.

$$\text{نسبت} = \frac{\text{اول حد}}{\text{دويم حد}}$$

مثال: احمد 210 روپۍ او محمد 270 روپۍ لري نسبت يې پيدا کړئ؟

$$\text{نسبت} = \frac{\text{د احمد روپۍ}}{\text{د محمد روپۍ}} = \frac{210}{270} = \frac{7}{9}$$

دويمه قاعده: چې د دوه کميتو نسبت او اول حد معلوم وي دويم حد معلوم نه وي. دويم حد په لاندې ډول پيدا کوؤ.

$$\text{دويم حد} = \text{اول حد} \div \text{نسبت}$$

مثال: د احمد او محمود د پيسو نسبت $\frac{5}{8}$ دی که د احمد روپۍ 430 وي د محمود روپۍ څو دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\text{نسبت} = \frac{5}{8}$ $\text{د محمود روپۍ} = 430 \div \frac{5}{8} = 430 \times \frac{8}{5} = \frac{3440}{5} = 688$

$\text{احمد روپۍ} = 430$ $\text{د محمود روپۍ} = 688Rs$

$\text{د محمود روپۍ} = ?$

دريمه قاده: چې د دوه کميتو نسبت او دويم حد معلوم وي او اول حد معلوم نه وي.

$$\text{اول حد} = \text{دويم حد} \times \text{نسبت}$$

مثال: د احمد او محمود پيسو نسبت $\frac{5}{8}$ دی د محمود روپۍ 688 دي د احمد روپۍ څو دي؟

$\text{نسبت} = \frac{5}{8}$ $\text{احمد روپۍ} = 688 \times \frac{5}{8} = \frac{3440}{8} = 430Rs$

$\text{محمود روپۍ} = 688$ $\text{احمد روپۍ} = 430Rs$

$\text{احمد روپۍ} = ?$

څلورمه قاعده: چې د دوه کميتو نسبت او مجموعه معلوم وي او کميتونه معلوم نه وي د کميتو د لاس ته راوړلو لپاره د کميتو مجموعه د صورت او مخرج په مجموعه ويشو که خارج قسمت په صورت کې ضرب کړو اول حد لاس ته راځي او که په مخرج کې يې ضرب کړو دويم حد لاس ته راځي.

مثال:- د اکرم او انور د پيسو نسبت $\frac{3}{5}$ دی او د پيسو مجموعه 4080 ده د هر يوه روپۍ څو دي؟

$$\text{نسبت} = \frac{\text{د اکرم روپۍ}}{\text{د انور روپۍ}} = \frac{3}{5}$$

$\text{مجموعه} = 4080$ $\text{اکرم روپۍ} = \frac{3 \times 4080}{3+5} = \frac{12240}{8} = 1530$

$\text{د اکرم روپۍ} = ?$ $\text{انور روپۍ} = \frac{5 \times 4080Rs}{3+5} = \frac{20400}{8} = 2550$

$\text{د انور روپۍ} = ?$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځمه قاعده: چې د دوه کميتو نسبت او تفاضل معلوم وي کميتونه معلوم نه وي د کميتو د لاس ته راوړلو لپاره د کميتو تفاضل د صورت او مخرج په تفاضل ويشو که خارج قسمت په صورت کې ضرب شي اول حد لاس ته راځي او که په مخرج کې ضرب شي دويم حد لاس ته راځي.

مثال: د عبدالهادي او عبدالباري د پيسو نسبت $\frac{6}{11}$ دی او د پيسو فرق يې 750 دی د هر يوه پيسي څو دي؟

نسبت $= \frac{6}{11}$

تفاضل $= 750$

عبدالهادي روپۍ $= ?$

عبدالباري $= ?$

عبدالهادي روپۍ $= \frac{6 \times 750}{11 - 6} = \frac{4500}{5} = 900$

عبدالباري روپۍ $= \frac{11 \times 750}{11 - 6} = \frac{8250}{5} = 1650$

شپږمه قاعده : چې د دوه کميتو نسبت او د ضرب حاصل معلوم وي کميتونه معلوم نه وي د کميتو د ضرب حاصل د صورت او مخرج په حاصل ضرب ويشو که د خارج قسمت جذر په صورت کې ضرب شي اول حد لاس ته راځي او که په مخرج کې ضرب شي دويم حد لاس ته راځي.

مثال:- د احمد او محمود د نسبت $\frac{5}{7}$ دی او د ضرب حاصل يې 2240 دی د هر يوه روپۍ پيدا کړئ؟

نسبت $= \frac{5}{7}$

د ضرب حاصل $= 2240$

د احمد روپۍ $= 5\sqrt{\frac{2240}{5 \times 7}} = 5\sqrt{64} = 5 \times 8 = 40$

د محمد روپۍ $= 7\sqrt{\frac{2240}{5 \times 7}} = 7\sqrt{64} = 7 \times 8 = 56$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوومه قاعده - معکوس نسبتونه:

که دوه یا څو کسرونه ولرو چې د اول کسر مخرج د دویم کسر صورت په همدې ترتیب اخره وي دی کسروته معکوس نسبت وایې لکه $\frac{a}{b}$ او $\frac{b}{c}$ د معکوس نسبتود ضرب حاصل څخه د اول او اخر حد نسبت لاس ته راځي.

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{a}{c}$$

$$\frac{a}{\cancel{b}} \times \frac{\cancel{b}}{\cancel{c}} \times \frac{\cancel{c}}{\cancel{d}} \times \frac{\cancel{d}}{e} = \frac{a}{e}$$

مثال: که د احمد محمود د پیسو نسبت $\frac{3}{4}$ دی د محمود او حامد د پیسو نسبت $\frac{5}{7}$ دی که د احمد روپی 300 وي د حامد روپی څو دی؟

$$\text{نسبت} = \frac{\text{د احمد روپی}}{\text{دمحمودروپی}} = \frac{3}{4}$$

$$\text{نسبت} = \frac{\text{محمود روپی}}{\text{حامد روپی}} = \frac{5}{7}$$

$$\frac{\text{احمد}}{\cancel{\text{محمود}}} \times \frac{\cancel{\text{محمود}}}{\text{حامد}} = \frac{\text{احمد}}{\text{حامد}} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{7}$$

$$\frac{\text{احمد}}{\text{حامد}} = \frac{15}{28}$$

$\text{احمد روپی} = 300Rs$ $\qquad$ $\text{نسبت} = \frac{\text{احمد}}{\text{حامد}} = \frac{15}{28}$ $\qquad$ $\text{د حامد روپی} = 300 \div \frac{15}{28}$

$\text{حامد روپی} = ?$

$\text{دحامد روپی} = 300 \times \frac{28}{15} = 20 \times 28 = 560$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرین:

1- یو سړي 42 منه ممیز د 70 منه نخودو سره ګډ وي نسبت یې پیدا کړئ؟

2- د جوار او غنمو نسبت $\frac{3}{7}$ دی که مجموعاً 600 منه وي جوار څومره دي او غنم څومره دي؟

3- یو دکاندار دوه قسمه چای سره ګډ وي چې نسبت $\frac{3}{8}$ دی که ګډ شوي چای تفاضل 50 منه وي د چای د هر قسم مقدار پیدا کړئ؟

4- د میو او وریجو نسبت $\frac{1}{5}$ دی که وریجې 50 منه وي مې به څومره وي او څومره مې زیاتې شي چې نسبت یې $\frac{3}{8}$ شي؟

5- د احمد او محمود د پیسو نسبت $\frac{5}{8}$ دی او د ضرب حاصل یې 36000 دی د هر یوه روپۍ څو دي؟

6- د بادامو او پستې د قیمتو نسبت $\frac{2}{3}$ دی د پیستې د یو من قیمت 12800 دی د بادامو من په څو دی؟

7- د احمد او اکرم د پیسو نسبت $\frac{3}{5}$ د اکرم او انور د پیسو نسبت $\frac{7}{8}$ دی که د احمد روپۍ 3000 وي د انور روپۍ به څو وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

تناسب :

د دوه نسبتو مساوات ته تناسب وايي.

لکه $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ یا $a:b::c:d$

اول او اخر حدو ته طرفين وايي دويم او دريم حدوته وسطين وايي.

a او d طرفين دي b او c وسطين دي.

د تناسب خواص:

1- په تناسب کې د طرفينو د ضرب حاصل د وسطينو د ضرب د حاصل سره مساوي وي.

لکه:

$$\frac{2}{3} = \frac{16}{24}$$
$$2 \times 24 = 3 \times 16$$
$$48 = 48$$

2- که په تناسب کې د طرفينو ځايونه تغير شي په تناسب کې تغير نه راځي.

3- که په تناسب کې د وسطينو ځايونه تغير شي په تناسب کې تغير نه راځي.

4- که په تناسب کې د صورت او مخرج ځايونه تغير شي په تناسب کې تغير نه راځي.

5- که په تناسب کې د صورتو مجموعه د مخرجو پر مجموعه وليکل شي نوی نسبت د تناسب د هر نسبت سره تناسب جوړوي.

6- که د صورت او مخرج مجموعه پر مخرج وليکل شي دتناسب خواص تغير نه خوري .

7- که د صورت او مخرج تفاضل پر مخرج وليکل د تناسب خواص تغير نه خوري.

د تناسب اقسام:

د تناسب اقسام په دري حالتو کې مطالعه کوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

1- د نسبتو د شمېر په لحاظ د تناسب اقسام:

د نسبتو د شمېر په لحاظ تناسب په دوه قسمه دي.

a- بسيط يا ساده تناسب b- مرکب تناسب

a- بسيط تناسب: هغه تناسب دی چې د نسبتونو شمېر يې دوه وي لکه $\frac{3}{4}=\frac{15}{20}$

b- مرکب تناسب: که د تناسب د نسبتونو شمېر تر دوو زيات وي دې تناسب ته مرکب تناسب وايي.

لکه .... $\frac{5}{8}=\frac{35}{56}=\frac{45}{72}$

2- د حدو د ارتباط له کبله د تناسب اقسام:

د حدو د ارتباط له کبله تناسب په دوه قسمه دی.

a- مستقيم تناسب b- معکوس تناسب

a- مستقيم تناسب: که په يوه تناسب کې د يوه نسبت د يوه حد په ډېريدو د بل نسبت مربوطه حد ډېريدلو او په کميدلو سره يې کميدلو دی تناسب ته مستقيم تناسب وايي.

لکه 8 ګزه رخت په 1600 روپۍ دی او 12 ګزه رخت په 2400 روپۍ دي.

$$\frac{8}{12}=\frac{1600}{2400}$$

b- معکوس تناسب: که په يوه تناسب کې د يوه نسبت د يوه حد په کميدو سره د بل نسبت مربوطه حد ډېريدولو او په ډېريدو سره يې کميدلو دې تناسب ته معکوس تناسب وايي.

لکه 12 کسه يو کار په 18 ورځو کې کوي 6 کسه دا کار به 36 ورځو کې کوي

$$\frac{12}{6}=\frac{18}{36}$$

3- د حدو د ورکيدو له کبله دتناسب اقسام:

د حدو د ورکېدو له کبله تناسب په درې قسمه دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف- څلورم تناسب: که په یوه تناسب کې یوه حد ورک ؤ دی تناسب ته څلورم تناسب وایي لکه:

$$\frac{5}{8}=\frac{45}{x}$$

د مجهول د لاس ته راوړلو لپاره د تناسب د اول خاصیت څخه استفاده کوو.

$$5x = 8 \times 45$$

$$5x = 360$$

$$\frac{5x}{5}=\frac{360}{5}$$

$$x = 72$$

ب- دریم تناسب: که په یوه تناسب کې وسطین مساوي وي دی تناسب ته دریم تناسب وایي.

مثال: د 5 او 30 دریم تناسب پیدا کړئ؟

$$\frac{5}{30}=\frac{30}{x}$$

$$x=\frac{30 \times 30}{5}=\frac{900}{5}=180$$

$$x = 180$$

ج- هندسي وسط: که په یو تناسب کې طرفین معلوم او وسطین معلوم نه وي دې تناسب ته هندسي وسط وایي.

مثال: د 5 او 180 هندسي وسط پیدا کړئ؟

$$\frac{5}{x}=\frac{x}{180}$$

$$x^2 = 5 \times 180 \qquad x^2 = 900 \qquad \sqrt{x^2}=\sqrt{900}$$

$$x = 30$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرین:

1- د $10kg$ غوښې قیمت $3500Rs$ دی وواياست $16kg$ غوښه به په څو روپۍ وشي؟

2- اته کسه يو کار په 20 ورځو کوي وواياست چې 12 کسه به دا کار په څو ورځوکې وکړي؟

3- احمد يو کار په 4 ورځو او حامد يې په 12 ورځو کې کوي وواياست چې دواړه به يې په شريکه په څو ورځو کې وکړي؟

4- احمد او محمود په شريکه يو کار په 3 ورځو کې کوي که احمد يې يوازې په 12 ورځو کې وکړي محمود به يې په څو ورځو کې وکړي؟

5-احمد يو کار په 6 ورځو کې محمود يې په 9 ورځو کې او حامد يې په 12 ورځو کې کوي وواياست چې ټول به يې په څو ورځو کې سرته ورسوي؟

6- 8 کسه د ورځې 6 ساعته کار کوي او يو کار په 15 ورځو کې خلاصوي وواېه چه 10 کسه د ورځې څو ساعته کار وکړي چې همدغه کار په 15 ورځو کې خلاص کړي؟

7- د 8 او 12 دريم تناسب پيدا کړئ؟

8- د 8 او 18 هندسي وسط څو دي؟

9- د 20 او 80 هندسي وسط پيدا کړئ؟

10- 12 کسه د ورځې 4 ساعته کار کوي او يوه ځمکه چې $200m$ طول او $150m$ سور لري په 10 ورځو کې اړوي. وواياست چې که 16 کسه د ورځو 3 ساعته کار وکړي او يوه ځمکه چې 180 متره طول او $120m$ سور لري په څو ورځو کې واړوي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم فصل

فیصد:

د 100 له قراره د یوې تجارتي معاملې د ګټې یا تاوان معلومولو ته فیصد وایې.

یا داچه په یوه مرکبه ماده، مخلوط یا محلول کې د 100 له قراره د هغوی د اجزاؤ د مقدار معلومولو ته فیصد وایې.

د فیصد فارمولونه دا دي.

$$\text{ګټه} = \frac{\text{سرمایه} \times \text{نرخ}}{100}$$

په مرکبه ماده یا مخلوط یا محلول کې د هغوي مقدار د سرمایې حیثیت لري د اجزاو فیصدي نرخ دی او په ټوله ماده کې د هغه جز مقدار د ګټې حیثیت لري.

$$\text{نرخ} = \frac{100 \times \text{ګټه}}{\text{سرمایه}}$$

$$\text{سرمایه} = \frac{100 \times \text{ګټه}}{\text{نرخ}}$$

مثال: 8000 روپۍ ګټه د 3 فیصد په نرخ پیدا کړئ؟

$$\text{ګټه} = \frac{3 \times 8000}{100} = 240$$

2- مثال: یو سړي په 12000 روپیو کی 960 روپۍ وګټلې نرخ کې څو دی؟

$$\text{نرخ} = \frac{100 \times 960Rs}{12000Rs} = 8$$

$\text{سرمایه} = 12000Rs$

$\text{ګټه} = 960Rs$

$\text{نرخ} = ?$

(c) ketabton.com: The Digital Library

3- مثال: یو سړي 15000 روپۍ د 6% په نرخ ګټلي سرمایه یې پیدا کړئ؟

ګټه $= 15000$ $\quad$ سرمایه $= \frac{100 \times 15000}{6} = 250000$

نرخ $= 6$ $\quad$ سرمایه $= 250000$

سرمایه $= ?$

4- د یوه سړي د ګټې او سرمایې مجموعه $28000Rs$ ده که نرخ یې 12% وي سرمایه او ګټه یې معلومه کړئ؟

حل:

ګټه او سرمایه $= 28000Rs$ $\quad 100 + 12 = 112$

نرخ $= 12$ $\quad \frac{100}{x} = \frac{112}{28000}$

سرمایه $= ?$ $\quad x = \frac{28000 \times 100}{112} = \frac{2800000}{112} = 25000$

ګټه $= ?$ $\quad$ سرمایه $= x = 250000Rs$

ګټه $= 28000 - 25000 = 3000$

ګټه $= 3000$

پوښتنه:- په $40kg$ مخلوط کې 8% ممیز او نور نخود دي د ممیزو او نخودو مقدار پیدا کړئ؟

تخفیف:

تخفیف په لغت کې سپکولو ته وایي.

او په اصطلاح کې هغه پیسې چې خرڅوونکي یې د جنس د اصلي قیمت څخه د معلوم نرخ له مخې اخیستونکي ته پریږدي. تخفیف بلل کیږي.

د تخفیف فارمولونه عیناً د فیصد د فارمولو غوندې دي خو د جنس اصلي قیمت د سرمایې په عوض او د ګټې یا تاوان په عوض تخفیف لیکل کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\text{تخفيف} = \frac{\text{اصلي قيمت} \times \text{نرخ}}{100}$$

$$\text{نرخ} = \frac{\text{تخفيف} \times 100}{\text{اصلي قيمت}}$$

$$\text{اصلي قيمت} = \frac{\text{تخفيف} \times 100}{\text{نرخ}}$$

اصلي قيمت −

تخفيف

فعلي قيمت

مثال: د يوه موټر اصلي قيمت $300000Rs$ دی خرڅوونکی اخيستونکی ته په 100 کې 8 روپۍ پرېښودی تخفيف او اصلي قيمت يې پيدا کړئ؟

اصلي قيمت = 300000

نرخ = 8٪

تخفيف =?

فعلي قيمت =?

$$\text{تخفيف} = \frac{8 \times 300000}{100} = 24000$$

تخفيف = 24000

فعلي قيمت $= 300000 - 24000 = 276000Rs$

2- د يوه اس اصلي قيمت $240000Rs$ دي که تخفيف يې $16800Rs$ وي نرخ يې پيدا کړئ؟

$$\text{نرخ} = \frac{100 \times 16800}{240000} = 7$$

نرخ = 7

3- د يوه موټر تخفيف $80000Rs$ دی نرخ يې 8 دی اصلي قيمت يې څو دی؟

تخفيف $= 80000R_s$

نرخ = 8

اصلي قيمت = ?

$$\text{اصلي قيمت} = \frac{\text{تخفيف} \times 100}{8} = \frac{80000 \times 100}{8} = 1000000R_s$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

احدیت:

په لغت کې تنهایي او یوازي والي ته وایې.

او په اصطلاح کې د ډېرو هم جنسو شیانو د مجموعي قیمت څخه د یوه شي د قیمت پیدا کولو ته احدیت وایې.

طریقه یې داسې ده چې مجموعي قیمت د شیانو په شمېر ویشو.

$$\text{احدیت} = \frac{\text{مجموعي قیمت}}{\text{د شیانو شمېر}}$$

مثال: یو خیاط په څلور ورځو کې 28 کمیسونه وګنډل ووایاست چې په یوه ورځ کې به یې څو کمیسونه ګنډلي وي؟

ورځې	کمیسونه
$\frac{4}{1}$	$= \frac{28}{x}$

$$x = \frac{1 \times 28}{4} = 7$$

په یوه ورځ کې یې 7 کمیسونه ګنډلي دي.

2- یو درجن قلمونه چې (12) دانې دي په $240Rs$ کیږي 7 دانې به په څو روپۍ وشي.

حل: که څه دغه رنګه سوالونه په تناسب کې ډېر اسانه حل کیږي خو د احدیت په طریقه داسې حلیږي اول د یو پنسل قیمت پیدا کوو بیا یې په 7 کې ضربوو.

$$\text{د پنسل قیمت} = \frac{240}{12} = 20$$

$$\text{د 7 پنسلو قیمت} = 7 \times 20 = 140$$

مثال: که 3 متره رخت قیمت 360 روپۍ وي د یو متر رخت قیمت څو دی او بیا د 5 مترو قیمت یې پیدا کړئ؟

$$\text{د یوه متر قیمت} = \frac{360}{3} = 120$$

$$\text{د 5 مترو قیمت} = 5 \times 120Rs = 600$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ربحه يا ربح:

ربح په لغت کې سود يا ګټې ته وايي.

او په اصطلاح کې په يوه ټاکلې موده کې د معلوم نرخ له مخې د يوې سرمايې د ګټې د پيدا کولو طريقې ته ربح وايي. ربح په دوه ډوله ده.

1- ساده ربح 2- مرکبه ربحه

1- ساده ربحه:

هغه ربحه ده چه د مودې تر رسيدلو وروسته ګټه اخيستل کيږي او سرمايه بيا په ربحه اچول کيږي

د ساده ربحې فارمولونه څلور دي.

$$ربح = \frac{سرمايه \times موده \times نرخ}{12 \times 100}$$

$$نرخ = \frac{1200 \times ربح}{موده \times سرمايه}$$

$$موده = \frac{1200 \times ربحه}{سرمايه \times نرخ}$$

$$سرمايه = \frac{1200 \times ربحه}{موده \times نرخ}$$

مثال: د 20000 روپيو ربحه د 15٪ په نرخ په 8 مياشتو کې پيدا کړئ؟

$$ربحه = \frac{8 \times 15 \times 20000}{1200} = 2000 \qquad ربحه = 2000Rs$$

مثال: يو سړي د 8 مياشتو لپاره $20000Rs$ په مرابحه واچوي پس له 8 مياشتو يې ربحه $2000Rs$ شوه نرخ يې پيدا کړئ؟

$$نرخ = \frac{1200 \times 2000}{8 \times 20000} = \frac{120}{8} = 15 \qquad نرخ = 15\%$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د 20000 روپیو ربحه د 15% په نرخ 2000 روپۍ ده موده یې پیدا کړئ؟

$$\text{موده} = \frac{1200 \times 2000}{15 \times 20000} = \frac{120}{15} = 8 \qquad 8 \text{ میاشتې} = \text{موده}$$

مثال: یو سړي یوه سرمایه په مراجعه واچوله پس له 8 میاشتو یې د 15% په نرخ 2000 روپۍ ربحه واخیسته سرمایه یې پیدا کړئ؟

$$\text{سرمایه} = \frac{1200 \times 2000}{5 \times 15} = \frac{50 \times 2000}{5} = 20000Rs$$

$$\text{سرمایه} = 20000\text{Rs}$$

2- مرکبه ربحه :

که د مرابحې د وخت تر را رسیدلو وروسته ربحه او سرمایه بیا په ربحه واچول شي دې ربحې ته مرکبه ربحه وایې.

د مرکبې ربحې فارمول دی.

$$A = C(1+r)^n$$

A د سرمایې او ربحې مجموعه ده C اولنۍ سرمایه ده r نرخ دی او n د کلونو شمېر دی.

C سرمایه او Cr گټه او A د دواړو مجموعه ده.

$$A_1 = C + Cr$$
$$A_1 = C(1+r)$$
$$A_2 = C(1+r) + C(1+r)r$$
$$A_2 = C(1+r)(1+r) = c(1+r)^2$$
$$A_3 = C(1+r)^2 + C(1+r)^2 r$$
$$A_3 = C(1+r)^2(1+r) = C(1+r)^3$$

په همدې ډول کولای شو چې د n کلو د سرمایې او ربحې مجموعه پیدا کړو.

په عمومي صورت لیکو چې:

$$A = C(1+r)^n$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: يو سړي $50000Rs$ د 5% په نرخ د 3 کلو لپاره په ربحه واچولی ګټه او سرمايه يې پيدا کړئ؟

$$A = 50000(1 + \frac{5}{100})^3$$

$$A = 50000(\frac{100 + 5}{100})^3$$

$$A = 50000\left(\frac{105}{100}\right)^3 = 50000\left(\frac{121550625}{1000000}\right)$$

$$A = \frac{5 \times 1157625}{100} = \frac{1157625}{20} = \frac{231525}{4}$$

$$A = 57881.25$$

تمرين:

1- د 10000 روپيو ربحه 8٪ په نرخ په 9 مياشتو کې څو ده ؟

2- د 50000 روپيو ګټه په 6 مياشتو کې 5250 روپۍ شوه نرخ يې پيدا کړئ؟

3- د 20000 روپيو ګټه د اوه مياشتو په موده کې 1750 روپۍ ده نرخ يې څو دی؟

4- د 18000 او ګټې د 18٪ په نرخ 1750 روپۍ ده موده يې پيدا کړئ؟

5- لوی سرمايې په 8 مياشتو کې د 15٪ په نرخ 3000 ګټې سرمايه څو ده ؟

6- احمد 5000 روپۍ د 20٪ په نرخ د 4 کلو لپاره په مرکبه ربحه واچولي ګټه او سرمايه يې څو ده؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

تنزيل:

تنزيل په لغت کې کښېنته کولو ته وايي.

او په اصطلاح کې هغه پيسې چې سند خرڅوونکي يې سند اخيستونکي ته په يوه ټاکلي موده کې د معلوم نرخ له مخې پرېږدي تنزيل بلل کيږي.

د تنزيل فارمولونه دا دي.

$$\text{تنزيل} = \frac{\text{اصلي قيمت} \times \text{موده} \times \text{نرخ}}{12 \times 100}$$

$$\text{نرخ} = \frac{1200 \times \text{تنزيل}}{\text{موده} \times \text{اصلي قيمت}}$$

$$\text{موده} = \frac{1200 \times \text{تنزيل}}{\text{اصلي قيمت} \times \text{نرخ}}$$

$$\text{اصلي قيمت} = \frac{1200 \times \text{تنزيل}}{\text{موده} \times \text{نرخ}}$$

$$\text{تنزيل} - \text{اصلي قيمت} = \text{فعلي قيمت}$$

مثال: د سند اصلي قيمت $300000Rs$ دی مودې ته يې 9 مياشتې دي نرخ يې 15٪ دي تنزيل يې څو دي؟

$$\text{تنزيل} = \frac{15 \times 9 \times 300000}{12 \times 100} = 33750$$

2- د سند اصلي قيمت 50000 دی په 9 مياشتو کې يې تنزيل $3000Rs$ دی نرخ يې څو دی؟

$$\text{نرخ} = \frac{1200 \times 3000}{9 \times 50000} = \frac{40}{5} = 8 \qquad \text{نرخ} = 8$$

3- د 20000 د تنزيل د 15% په نرخ 1500 روپۍ وي موده يې پيدا کړئ؟

$$\text{موده} = \frac{1200 \times 1500}{15 \times 20000} = 6 \qquad \text{شپږ مياشتې} = \text{موده}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

4- د يوه سند تنزيل د 15% په نرخ چې موديې ته يې 6 مياشتې پاتې دي 3375 روپۍ شو د سند اصلي قيمت څو دی؟

$$\text{اصلي قيمت} = \frac{1200 \times 3375}{6 \times 15} = 45000$$

$$\text{اصلي قيمت} = 45000Rs$$

تمرين:

1- د يوه سند اصلي قيمت $450000Rs$ موديې ته يې 6 مياشتې پاتې دي د 15% په نرخ يې تنزيل څو دی؟

2- د يوه سند اصلي قيمت $75000Rs$ دی د 4% په نرخ يې تنزيل $2250Rs$ شو موديې ته يې څومره وخت پاتې دی.

3- د يو سند اصلي قيمت $90000Rs$ دی موديې ته يې 8 مياشتې دی که تنزيل $3000Rs$ وي نرخ يې پيدا کړئ؟

4- د يوه سند تنزيل په 8 مياشتو کې د 7% په نرخ $5600Rs$ شوي اصلي قيمت يې څو دي.

مشارکت:

که څو کسه په يوه تجارتي معامله لاس پورې کړي ګټه او تاوان يې سره شريک وي دې تجارتي معاملې ته مشارکت وايي.

د شراکت د ګټې تقسيم په څلور حالتو کې مطالعه کوؤ.

اول حالت:

چې سرمايې او موديې يې مساوي وی. ګټه په نفرو ويشل کيږي.

مثال: احمد ، محمود او حامد هر يوه $500000Rs$لري د حمل په اول يې په تجارت پيل وکړ د کال تر اخره پورې $900000Rs$ روپۍ وګټلې د هر يوه ګټه څو ده.

حل:

$$\text{د هريوه ګټه} = \frac{900000}{3} = 300000Rs$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم حالت:

چې مودې یې مساوي او سرمایې یې مختلفې وي ګټه د سرمایو په مجموعه ویشل کیږي بیا په خارج قسمت د هر چا په سرمایه کې ضرب شي د هغه ګټه لاس ته راځي.

مثال: احمد 40000 محمود 50000 او حامد $60000Rs$ لږ په اول د حمل یې په تجارت پیل وکړ د کال تر اخره یې $300000Rs$ روپۍ وګټلې د هر یوه ګټه پیدا کړئ.

د احمد سرمایه $= 40000Rs$ — 1/حمل

د محمود سرمایه $= 50000Rs$ — 1/حمل

د حامد سرمایه $= 60000Rs$ — 1/حمل

ګټه $= 300000Rs$

د هر یوه ګټه $=?$ — $4 + 5 + 6 = 15$

$$\frac{300000}{15} = 20000$$

د احمد ګټه $= 4 \times 20000Rs = 80000Rs$

د محمود ګټه $= 5 \times 20000Rs = 100000Rs$

د حامد ګټه $= 6 \times 20000Rs = 120000Rs$

دریم حالت:

چې سرمایې یې مساوي او مودې یې مختلفې وي ګټه د مودو په مجموعه ویشل کیږي بیا په خارج قسمت د هر چا په موده کې ضرب شي د هغه ګټه لاس ته راځي.

مثال: احمد $150000Rs$ لرلې د حمل په اول یې په تجارت شروع وکړه محمود د $150000Rs$ په سرمایه د اسد په اول ور سره شریک شو حامد د $150000Rs$ په سرمایه د عقرب په اول ور سره شریک شود کال تر اخره یې 500000 روپۍ وګټلې د هر یوه ګټه پیدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library -

حل:

احمد	150000	1/ حمل/	12
محمود	150000	1/ اسد/	8
حامد	150000	1/عقرب/	$\frac{5}{25}$

گټه = 500000

د هر یوه گټه =?

$$\frac{500000}{25} = 20000$$

د احمد گټه = $12 \times 20000 = 240000$

د محمود گټه = $8 \times 20000 = 16000$

د حامد گټه = $5 \times 20000 = 100000$

څلورم حالت:

چې مودې او سرمايې مختلفې وي.

د هر سړي موده د هغه به سرمایه کې ضربیږي د ضرب حاصلونه یې جمع کیږی گټه په دغه مجموعه ویشل کیږي. خارج قسمت چې د هر چا د مودې او سرمایې په حاصل ضرب کې ضرب شي د هغه گټه لاس ته راځي.

مثال: احمد 50000 افغانی. لرلی د حمل په اول یې په تجارت شروع وکړه محمود د 80000 افغانیو په سرمایه د میزان په اول ور سره شریک شو د کال تر اخره یې 216000 افغانی. وگټلی د هر یوه گټه څو ده؟

احمد = 50000		1/حمل/
محمود = 80000		1/میزان/
گټه = 216000		

د هر یوه گټه =?

$$5 \times 12 + 8 \times 6 = 60 + 48 = 108$$

$$\text{د قسط اندازه} = \frac{216000}{108} = 2000$$

$$\text{د احمد ګټه} = 2000 \times 60 = 120000$$

$$\text{د محمود ګټه} = 2000 \times 48 = 96000$$

تمرین:

1- څلور کسان هر یو 200000 روپۍ لرلی. په اول د حمل یې تجارت شروع کړ د کال تر اخره یې [illegible] روپۍ وګټلی د هر یوه ګټه څو ده؟

2- احمد 20000 روپۍ لرلی د حمل په اول یې تجارت شروع کړ محمود 20000 روپیو په سرمایه په اول دسنبله ور سره شریک شو د کال تر اخره یې 120000 روپۍ وګټلې د هر یوه ګټه پیدا کړئ؟

3- احمد 12000 روپۍ محمود 18000 روپۍ لرلی په اول د ثور یې تجارت شروع کړ د کال تر اخره یې 150000 روپۍ وګټلی د هر یوه ګټه پیدا کړئ؟

4- احمد 8000 روپۍ لرلی په اول د جوزا یې تجارت شروع کړ ، محمود د 10000 روپیو په سرمایه په اول د میزان ور سره شریک شو د کال تر اخره یې 112000 روپۍ وګټلی د هر یوه ګټه پیدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

شپږم فصل

سيټ (Set):

سيټ يو انګليسي لفظ دی چې مفهوم يې د ټولګې ، صنف ، لښکر ، ګلې او رمې سره برابر دی.

په اصطلاح کې سيټ د هغو شيانو مجموعه يا ټولګه ده چې په کافي ډول د تشخيص وړ وي. سيټ د الفباء د غټو تورو پواسطه ښودل کېږي لکه د A ، B ، C ، M ، .... او داسې نور.

د سيټ نظريه د Gorge cantor (1845 – 1919) م پواسطه په رياضي کې داخل او معرفي شوه.

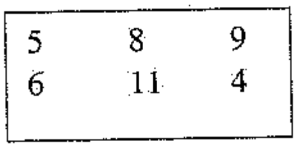
د سيټ عناصر Element of set:

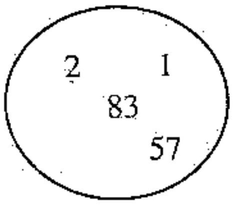
په سيټ کې شاملو شيانو ته د سيټ عناصر وايي. مثلاً $A = \{2,3,a,b\}$

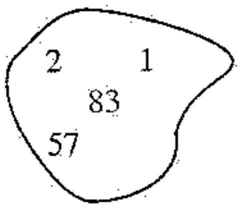
چې 2، 3، a او b د سيټ عناصر دي.

د سيټ نمايش:

Venn برطانوي عالم سيټ د هندسي او غير هندسي شکلو پواسطه رواج کړ چې دسيټ دغه نمايش Venn diagram وايي.







د سيټ د ليکلو طريقې:

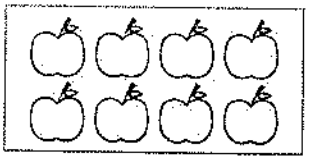
د سيټ د ليکلو طريقې څلور دي.

1- Picture Method:

پدې ميتود کې د سيټ د عناصرو شکلونه رسموي دا ميتود په کښته ټولګيو کې استعماليږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لکه:



2- د Descriptive Method:

که د سیټ د عناصرو په منځ کې یو صفت موجود وي نو د دغه سیټ د توصیفي میتود پواسطه لیکل کیږي یعني د سیټ د عناصرو مشترک صفت د یوې جملې پواسطه لیکل کیږي

د E ژبې د بې اوازه تورو سیټ په A ښیو.

$$A = \{\text{د } E \text{ بی اوازه توری}\}$$

$$B = \{\text{حسابي ارقام}\}$$

3- د Listing Method پواسطه:

که د سیټ عناصر محدود وي نو د قوس په داخل کې د عناصرو نومونه یا سمبولونه لیکي.

لکه:

$$A = \{a, e, i, o, u\}$$
$$B = \{1,2,3,4,5\}$$

4- Set Builder Notation په طریقه:

په دې طریقه کې د سیټ عناصر په یو سمبول یا حرف مثلاً په (x) ښیي فرضاً د A د سیټ عناصر د 15 او 120 تر منځ واقع دي نو x د 15 او 120 تر منځ لیکي او د $(<)$ او $(>)$ د علامو پواسطه یې سره بیلوي.

$$A = \{x/15 < x < 120\}$$

او داسې ویل کیږي چې د A د سیټ عناصر x دي داسې چې د 120 څخه کم او د 15 څخه زیات دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د سيټ اقسام:

سيټ په څلور قسمه دي.

1- خالي سيټ
2- يو عنصره سيټ
3- معين سيټ
4- غير معين سيټ

1- خالي سيټ: هغه سيټ چه عناصر نلري د خالي سيټ په نوم ياديږي لکه $A = \{\ \ \}$ خالي سيټ د ϕ د علامې پواسطه ښودل کيږي.

2- يو عنصره سيټ: که کوم سيټ يو عنصر ولري دې سيټ ته يو عنصره سيټ وايې. لکه $A = \{لمر\}$ يا $B = \{3\}$

3- معين سيټ: هغه سيټ چې عناصر يې د شمېرلو وړ وي لکه: د حسابي ارقامو سيټ.

$$A = \{0,1,2,3,,4,5,6,7,8,9\}$$
$$B = \{a, e, i, o, u\}$$

غير معين سيټ:

هغه سيټ چې عناصرئې د شمېرلو وړ نه وي لکه: د طبعي اعدادو سيټ.

$$A = \{IN \text{ د طبيعي اعدادو سيټ}\}$$
$$B = \{IR\}$$

د روابطو له مخې د سيټونو اقسام:

د ارتباطاتو له مخې سيټونه په 8 اته قسمه دي.

1- فرعي سيټ　2- کلي سيټ　3- مکمله سيټ
4- طاقت لرونکي سيټ　5- مساوی سيټونه　6- معادل سيټونه
7- منفصل سيټونه　8- غير منفصل سيټونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

1- فرعي سيټ: که د A او B دوه داسې سيټونه ولرو چې د B د سيټ هر عنصر د A په سيټ کې شامل وي نو د B سيټ د A د سيټ فرعي سيټ بلل کيږي لکه

$A = \{x\epsilon IR/1 < x < 12\}$ او د $B = \{4,6,8,10\}$

څرنګه چې د B د سيټ هر عنصر په A کې شامل دی نو د B سيټ د A د سيټ فرعي سيټ دی او داسې ليکل کيږي. $B \subset A$

فرعي سيټ په دوه قسمه دی.

a- واقعي فرعي سيټ   b- غير واقعي فرعي سيټ

a- واقعي فرعي سيټ: که ديوه سيټ ټول عناصر په بل سيټ کې شامل وي او په دويم سيټ کې داسې عناصر وي چې په لمړی سيټ کې نه وي. لکه:

$A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ او د $B = \{3,4,5,6\}$ نو $B \subset A$

b- غير واقعي فرعي سيټ: که دوه داسې سيټونه ولرو چې د اول سيټ ټول عناصر په دويم سيټ کې او د دويم سيټ هر عنصر په اول سيټ کې شامل وي دغه سيټونه يو دبل غير واقعي فرعي سيټونه دي. لکه:

$A = \{2,4,6,8,10\}$ او $B = \{10,8,2,6,4\}$ نو $B \subseteq A$ او $A \subseteq B$.

2- کلي سيټ: که يو سيټ څو فرعي سيټونه ولري دې سيټ ته کلي سيټ وايي لکه $A = \{3,4,5,6,7,8,9,10\}$ چې $B = \{3,4\}$ او $C = \{5,6,7\}$ او د $D = \{8,9,10\}$ فرعي سيټونه دي نو د A سيټ کلي سيټ وي.

3- مکمله سيټ: که يو کلي سيټ يو واقعي سيټ ولري نو د کلي سيټ د پاتې عناصرو سيټ د فرعي سيټ مکمله سيټ دی.

مثلاً $A = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ او $B = \{2,3,4,5,6\}$ دوه سټونه لرو چې $B \subset A$ دی نو د B د سيټ مکمله سيټ چې په د B' ښودل کيږي عبارت $B' = \{7,8,9,10,11,12\}$ دی.

4- طاقت لرونکی سيټونه: هر کلي سيټ د خپلو فرعي سيټونو طاقت لرونکي سيټ يا $Power\ Set$ دی لکه $A = \{\Delta, \odot, \boxdot\}$ او $A_1 = \{\Delta\}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$A_2 = \{\odot\}$ ، $A_3 = \{\boxdot\}$ ، $A_4 = \{\Delta,\odot\}$ ، $A_5 = \{\Delta,\boxdot\}$ ، $A_6 = \{\odot,\boxdot\}$ ،
$A_7 = \{\Delta,\odot,\boxdot\}$ او $A_8 = \{\}$

ستونه لرو چې A سیټ ئې کلي سیټ او نور یې فرعي سیټونه دي.

یعني $P(A) = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8\}$

د یوه سیټ د فرعي سیټونو شمېر د 2^n پواسطه پیدا کیږي n د سیټ د عناصرو شمېر دی.

مثال: د B د سیټ عناصر څلور دي د فرعي سیټونو شمېر یې پیدا کړئ؟

$n = 4$ $P(B) = 2^n$

$P(B) = ?$ $P(B) = 2^4 = 16$

$P(B) = 16$

5- **مساوي سیټونه:** که د A او B دوه داسې سیټونه ولرو چې د A د سیټ هر عنصر د B په سیټ کې او د B دسیټ هر عنصر د A په سیټ کې شامل وي . نو دې سیټونو ته مساوي سیټونه وايي.

یعني که $A \subseteq B$ او $B \subseteq A$ نو $A = B$ دی.

6- **معادل سیټونه:** هغه سیټونه دي چې د عناصرو شمېر یې مساوي او مختلف وي لکه $A = \{4,5,8\}$ او $B = \{E, F, G\}$

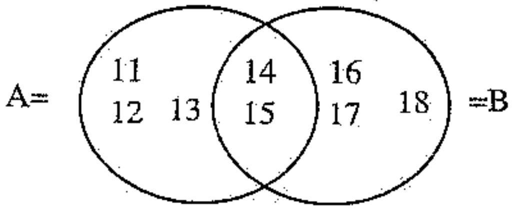
7- **منفصل سیټونه:** هغه سیټونه دي چې د هر سیټ هیڅ عنصر په بل سیټ کې نه وي.

لکه $A = \{1,3,5,7,99,11,13\}$ او $B = \{2,4,6,8,10,12\}$

8- **غیر منفصل سیټونه:** که د دوه یا څو سیټونو یو یا څو عناصر سره شریک وي دې سیټونو ته غیر منفصل سیټونه وايي.

لکه $A = \{11,12,13,14,15\}$ او $B = \{14,15,16,17,18\}$ چې $\{14,15\}$ په دواړه کې شامل وي نو د A او B سیټونه غیر منفصل دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د سیټونو عملیې:

په حساب کې د سیټونو عملیې درې دي.

1- د سیټونو اتحاد 2- د سیټونو تقاطع 3- د سیټونو تفاضل

1- دسیټونو اتحاد:

د دوه یا ډېرو سیټونو اتحاد د هغه عناصرو سیټ دی چې اقلاً هغه عناصر په دغه سیټونو کې یو وار شامل وي یعنې که بعضي په دوه یا درې سیټونو کې شامل وي د اتحاد په وخت کې یو وار لیکل کیږي. لکه:

$B = \{8,9,10,11,12,13\}$ او $A = \{4,5,6,7,8,9\}$

$A \cup B = \{4,5,6,7,8,9\} \cup \{8,9,10,11,12,13\} = \{4,5,6,7,8,9,10,11,12,13\}$

$A \cup B = \{x/x \in A \vee x \in B\}$

2- د سیټونو تقاطع:

د هغه عناصرو سیټ دی چې په دوه یا څو سیټونو کې شامل وي. لکه $A = \{3,4,5,6,7\}$ او $B = \{6,7,8,9,10\}$

$$A \cap B = \{6,7\}$$

$$A \cap B = \{x/x \in A \wedge x \in B\}$$

3- د سیټونو تفاضل:

د هغه عناصرو سیټ دی چې په مفروق منه کې وي او په مفروق کې نه وي.

$B = \{4,5,6,7,8,9\}$ او $A = \{1,2,3,4,5,6\}$

$$A - B = \{1,2,3,4,5,6\} - \{4,5,6,7,8,9\} = \{1,2,3\}$$

$$A - B = \{1,2,3\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

الجبر

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

اول فصل

الجبر

الجبر د جبر څخه اخیستل شویدی چې جبر د مات هډوکي ترلو ته وایي.

او په اصطلاح کې الجبر هغه علم دی چې د حساب د ناحله مسایلو د حل لپاره معادلې او فارمولونه جوړوي.

د الجبر د علم موضوع:

د الجبر د علم موضوع د حقیقي اعدادو سیټ دی چې په IR سره ښودل کیږي.

د حقیقي اعدادو سیټ IR :

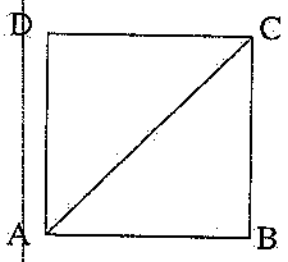
د $(-\infty)$ څخه تر $(+\infty)$ پورې د اعدادو سیټ ته د حقیقي اعدادو سیټ وایي.

$$IR = (-\infty, +\infty)$$

یا دا چې د ناطق او غیر ناطق عددونو سیټ ته د حقیقي عددونو سیټ وایي که ناطق عدد په Q او غیر ناطق په Q' وښیو نو $IR = [Q \cup Q']$

صحیح عددونه او کسري عددونه د عددو په کرښه کې په یوه نقطه کې مطابقت کوي.

مګر د غیر ناطقو عددونه لپاره نقطې د عدد په محور ندی پیدا شوي. مثلاً د $\sqrt{2}$ لپاره د عددو په کرښه کومه نقطه نده ټاکل شوې چه د $\sqrt{2}$ د نقطې د پیدا کولو لپاره د هندسي طریقې څخه استفاده کوو. $ABCD$ یوه مربع چې هره ضلع یې یو واحد ده داسې رسموو چې یو راس یې په مبداء واقع وي د دې مربع مساحت $1cm^2$ دي که د A نقطه د C سره وصل کړو نو AC د مربع وتر لاس ته راځي چې



$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2$$

$$\overline{AC}^2 = 1^2 + 1^2$$

$$\overline{AC}^2 = 1 + 1r$$

$$\overline{AC}^2 = 2 \qquad \overline{AC} = \sqrt{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\sqrt{2}$ د پاره د عددو په کرښه د نقطې پیدا کولو لپاره د A نقطه مرکز نیسو او د $\overline{AC} = \sqrt{2}$ په اندازه د پرکار خوله خلاصوو او یوه دایره رسموو چه د عددو کرښه قطع کړی دغه د تقاطع نقطه د $\sqrt{2}$ مربوطه نقطه ده په همدې ترتیب کولای شو چې دغیر ناطقو عدد و نقطې د عددو په کرښه پیدا کړو.

مثلاً د $\sqrt{3}$ غیر ناطق عدد نقطې د پیدا کولو لپاره د $\sqrt{2}$ په نقطه کې د واحد په اندازه عمود رسموو د عمود انجام د مبداء سره وصلوؤد پرکارخوله په همدغه شعاع خلاصووا و قوس وهو د XX' د محور سره یې د تقاطع نقطه د $\sqrt{3}$ مربوطه نقطه ده.

د $\sqrt{5}$ د نقطې د پیدا کولو لپاره د $\sqrt{3}$ په نقطه کې د $\sqrt{2}$ په اندازه عمود رسموو د عمود انجام د مبداء سره وصلوو او د پرکار خوله په همدغه اندازه خلاصوو او قوس وهو د XX' د محور سره د قوس د تقاطع نقطه د $\sqrt{5}$ مربوطه نقطه ده.

د الجبر د زده کړې غرض:

1- په حساب کې د عدد سره علامه نه لیکل کیږي مګر په الجبر کې عدد او علامه دواړه یو الجبري عدد دی.

مثلاً 19 حسابي عدد دی مګر 19− او 19+ الجبري عددونه دي.

2- په حساب کې حروف نه استعمالیږي مګر الجبري معادلې او فارمولونه د حروفو څخه جوړیږي.

لکه $4x - 5$ ، $7x^2 + 6x + 7 = 0$ ، $y = 3x - 4$ او داسې نور.

3- د حساب قوانین بشپړ شویدي زیادت نه قبلوي مګر الجبر د تمدن تابع دي د تخنیک او تکنالوژۍ د پرمختګ سره سم یې قوانین او فارمولونه د جوړیږي او انکشاف کوي.

د الجبر اصطلاحات:

حد Term: الجبري عدد، حرف او د حرف او عدد د ضرب، تقسیم، جذر او طاقت حالتو ته حد وایي.

لکه: -3 ، x ، $4x$ ، $\frac{6}{x}$ ، $\frac{x}{2}$ ، x^3 ، $\sqrt[3]{x}$ او $\frac{2\sqrt[3]{x^2}}{-5\sqrt{x^3}}$ او داسې نور.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مشابه حدونه: هغه حدونه دي چې د عين حروفو توانونه يې مساوي وي. لکه $7xy^2$ او $-15xy^2$ يا $7x^2y^2$ او $11x^2y^2$ يا $7x$ او $20x$ او داسې نور.

افاده: د حدونو د جمع او تفريق حالتو ته افاده وايي لکه $11x - 8$

يو حده افادې ته مونوم وايي لکه $20x$

دوه حده افادي ته بينوم وايي. لکه $19x - 20$

دري حده افدې ته ترينوم وايي.لکه $9x^2 - 10x + 7$

هغه افاده چې تر دريو زيات حدونه ولري کثير الحده افاده ورته وايي. لکه
$7x^4 - 10x^3 + 7x^2 - 8x + 7$

په عمومي صورت دغه ټولو افادو ته پولينوم وايي.

پولينوم:

هغه افاده ده چې د حروفو توانونه يې تام عددونه وي کسري عددونه نه وي.

عمومي شکل يې دادي.

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_0$$

د پولينوم د هر حد ضريب د همغه پولينوم د توان په نوم يادېږي.

لکه:

$$7x^5 - 12x^4 + 13x^3 - 2x + 15$$

$a_5 = 7 \quad , a_4 = -12 \quad , \quad a_3 = 13 \quad , \quad a_2 = 0 \quad , a_1 = -2 \quad , \quad a_0 = 15$

پولينوم په اته قسمه دي.

1- کامل پولينوم: هغه پولينوم دی چې د کوچني توان څخه تر لوړ توان پورې ټول توانونه پکې موجود وي لکه $7x - 20x^3 + 8x^2 - 8x^4 + 7$ پدې پولينوم کې کوچني توان صفر دی او لوړ توان يې (4) دی د صفر او (4) تر منځ عددونه 1 ، 2 ، 3 دي چې دري واړه پکې موجود دي نو پورتنې پولينوم کامل پولينوم دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- ناقص پولينوم: هغه پولينوم دی چې د کوچني توان او لوړ توان تر منځ ټولو توانونه يکې موجود نه وي لکه.

$$7x^3 - 4x + 9$$

3- تام پولينوم: هغه پولينوم دی چې په مخرج کې يې حرف موجود نه وي. لکه:

$$7x^3 + 4x^2 + 11x + 8$$

$$\frac{3x^2 + 11x^2 - 20x + 17}{5}$$

4- کسري پولينوم: هغه پولينوم دی چې په مخرج کې حرف موجود وي لکه :

$$\frac{8}{x^2 + 3x - 1}, \frac{2x^2 + 41x + 1}{x + 3}, \frac{4x - 1}{x}$$

5- منظم پولينوم: هغه پولينوم دی چې حروف يې د توانونو په اساس په صعودي يا نزولي ډول ترتيب شوي وي.

لکه $2 - 4x + 11x^2 + 8x^3 + 8x^4$ په صعودي ډول منظم دي.

$7x^4 - 16x^3 + 8x^2 - 12x + 5$ په نزولي ډول منظم شوي دي.

6- غير منظم پولينوم: هغه پولينوم دی چې حروف يې د توانونو په اساس ترتيب شوي نه وي.

لکه: $3x - 8x^3 + 7 + 3x^2$

7- ناطق پولينوم: هغه پولينوم دی چې حروف يې تر جذر لاندې نه وي لکه $7x^2 + 8x - 5$ او $7x^2 - 31x + \sqrt{2}$.

8- غير ناطق پولينوم: هغه پولينوم دی چې کوم حرف يې تر جذر لاندې وي. لکه :

$$7\sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt[3]{x}$$

که په طاقت لرونکو عدد بدل شي توانونه يې کسري کيږي.

$$7x^{\frac{2}{3}} + 3x^{\frac{1}{3}} - 6$$

غير ناطق پولينوم ته ملتي نوم هم وايي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ملتي نوم: ملتي نوم هغه افاده ده چې کوم حرف يې ترجذر لاندې وي که دطاقت په شکل وليکل شي توانونه يې کسري کيږي.

د مونوم درجه: د يو مجهوله مونوم درجه د مجهول درجه ده لکه د $7x^3$ دريمه درجه مونوم دی.

د دوه مجهوله يا څو مجهوله مونوم درجه د حروفو د توانونو مجموعه ده.

لکه: $5x^3y^2$ يو $3+2=5$ درجه مونوم دی.

د پولينوم درجه: *Degree of a Polynome* د پولينوم درجه د هغه مونوم درجه ده چې هغه مونوم د پولينوم په ټولو حدو کې لوړه درجه ولري لکه $3xy^2+5x^2y^3+8x^3y^4$ چې اومه درجه پولينوم دی. $8x^3+5x^2-4x+2$ يو دريمه درجه پولينوم دی.

هوموجن: هغه افاده ده چې د ټولو حدونو درجې يې مساوي وي. لکه $x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4$

که په يوه هوموجن د کوم حد توان مجهول وي د مجهول قيمت د هغه حد د توان څخه پيدا کوو چې توان يې معلوم وي.

لکه $x^3+x^my+x^ny^2+y^3$

حل:

$m+1=3 \qquad m=3-1 \qquad m=2$

$n+2=3 \qquad n=3-2 \qquad n=1$

د الجبري عددونو څلور ګوني عمليې

د الجبري عددونو جمع:

الجبري عددونه په افقي ډول او هم په عمودي ډول جمع کولای شو . هم علامه عددونه جمع کيږي او علامه يې شريکه علامه ليکل کيږي.

$$\begin{array}{r} -435 \\ -387 \\ \hline -822 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +215 \\ +416 \\ \hline +631 \end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مختلف العلامه عددونه یو د بل څخه منفي کیږي او علامه د لوی عدد لیکل کیږي.

$$\begin{array}{r} +235 \\ \underline{-416} \\ -181 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +436 \\ \underline{-168} \\ +268 \end{array}$$

د الجبري عددونو تفریق:

مفروق د مفروق منه لاندې داسې لیکو چې هره طبقه د خپلې طبقې لاندې او هره مرتبه د خپلې مرتبې لاندې راشي بیا د مفروق علامو ته تغیر ورکوو. او د جمعې عملیه پرې اجراء کوؤ.

$$\begin{array}{r} +731 \\ \underline{\pm 263} \\ +468 \end{array} \quad \begin{array}{r} -216 \\ \underline{\mp 418} \\ +202 \end{array} \quad \begin{array}{r} -485 \\ \underline{\pm 316} \\ -801 \end{array} \quad \begin{array}{r} +465 \\ \underline{\mp 317} \\ +782 \end{array}$$

د الجبري عددونو ضرب:

د الجبري عددونو د ضربولو په وخت کې علامه په علامه کې او عدد په عدد کې ضربوو.

د علامو ضربول په یوه جدول کې مطالعه کوو.

$+ \times + = +$ $- \times - = +$	د عین علامو د ضرب حاصل مثبت دی.
$+ \times - = -$ $- \times + = -$	او د مختلفو علامو د ضرب حاصل منفي دی.

د $+ = - \times -$ ثبوت:

اول د $+ = - \times -$ ثبوت په عدد:

$$5 \times 8 = 40$$

$$(6-1)(9-1) = 40$$

$$54 - 6 - 9 \boxdot 1 = 40$$

$$54 - 15 \boxdot 1 = 40$$

$$39 \boxdot 1 = 40$$

که په خالي خانه کې + علامه ولیکل شي د مساوات دواړه خواوي مساوي کیږي نو معلومه شوه چې:

$$(-1)(-1) = +1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم د $+ = - \times -$ ثبوت په حروف:

$$(-a)(-b) = ab$$
$$(-a)(-b) = x \ldots\ldots\ldots\ldots I$$
$$(-a)(-b) - ab = x - ab$$
$$-a(-b + b) = x - ab$$
$$-a(0) = x - ab$$
$$0 = x - ab$$
$$ab = x$$

په I رابطه کې د x په عوض ab وضع کوؤ.

$$(-a)(-b) = ab$$

ثابته شوه چې $+ = - \times -$ کیږي.

د $- = - \times +$ ثبوت:

$$(+3)(+4) = 12$$
$$(+3)(+3) = 9$$
$$(+3)(+2) = 6$$
$$(+3)(+1) = 3$$
$$(+3)(\ 0\ ) = 0$$
$$(+3)(-1) = -3$$
$$(+3)(-2) = -6$$

ثابته شوه چې $- = - \times +$

مثال:

$$(+5)(+6) = 30$$
$$(-8)(-9) = 72$$
$$(-5)(+3) = -5$$
$$(+4)(-7) = -28$$

$$\begin{array}{cccc} -13 & +3 & -9 & +8 \\ \underline{-\ 5} & \underline{-4} & \underline{+3} & \underline{+7} \\ +65 & -12 & -27 & +56 \end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د الجبري عددونو تقسیم:

علامه په علامه او عدد په عدد ویشو لمړی د علامو خارج قسمت په یوه جدول کې مطالعه کوؤ.

$$\frac{+}{+}=+ \qquad \frac{-}{-}=+ \qquad \frac{+}{-}=- \qquad \frac{-}{+}=-$$

$$\frac{+18}{+3}=+6 \qquad \frac{-15}{-5}=+3 \qquad \frac{+12}{-6}=-2 \qquad \frac{-10}{+2}=-5$$

د پولینومونو څلور ګونې عملیې

1- د پولینومونو جمع:

د جمع عوامل داسې یو تر بل لاندې لیکو چې مشابه حدونه یو تر بل لاندې راشي بیا هم علامه مشابه حدونه جمع کوو او علامه یې شریکه علامه لیکو او مختلف العلامه مشابه حدونه یو د بل څخه منفي کوو علامه د لوی عدد لیکو.

$$\begin{array}{r} 7x^3+8x^2-11x+8 \\ \underline{11x^3+9x^2+15x-3} \\ 18x^3+17x^2+4x+5 \end{array}$$

2- د پولینومونو تفریق:

مفروق د مفروق منه لاندې داسې لیکو چې مشابه حدونه یو د بل لاندې راشي بیا د مفروق علامو ته تغیر ور کوؤ او د جمع عملیه پرې تطبیقوو.

مثال:

$$\begin{array}{r} 13x^4-15x^3+8x^2-20x+\ \ 8 \\ \underline{\pm 35x^4 \pm 9x^3 \pm 11x^2 \pm\ \ 9x \mp 16} \\ -22x^4-24x^3\ \ -3x^2-29x+24 \end{array}$$

3- د پولینومونو ضرب :

مضروب د مضروب فیه لاندې لیکو بیا علامه په علامه کې او عدد په عدد کې او حرف په حرف کې ضربوو په اخر کې مشابه حدونه جمع کوؤ د پولینومونو دضرب حاصل لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال:

$$
\begin{array}{r}
3x^3 - 5x^2 + 7x - 7 \\
7x^2 - 8x + 9 \\
\hline
21x^5 - 35x^4 + 49x^3 - 49x^2 \\
-24x^4 + 40x^3 - 56x^2 + 56x \\
27x^3 - 45x^2 + 63x - 63 \\
\hline
21x^5 - 59x^4 + 116x^3 - 150x^2 + 119x - 63
\end{array}
$$

4- د پولینومو تقسیم:

د مقسوم اول حد د مقسوم علیه په اول حد ویشو حاصل یې په خارج قسمت کې لیکو په مقسوم علیه کې یې ضربوو د ضرب حاصل د مقسوم لاندې لیکو او منفي کوونې د تفریق د حاصل مخې ته د مقسوم یو حد را کښته کوو نوی مقسوم جوړو په همدې ترتیب تر اخره اجرائت کوو تر څو چې مقسوم ختم شي او یا یې درجه د مقسوم علیه د درجې څخه کمه شي دغې پاتې شوې برخې ته باقي وایې.

مثال:

$$
\begin{array}{r|l}
72x^5 + 95x^4 - 39x^3 + 9x^2 + 64x - 21 & 8x^2 + 7x - 3 \\
\cline{2-2}
\pm 72x^5 \pm 63x^4 \mp 27x^3 \qquad\qquad\qquad & 9x^3 + 4x^2 - 5x + 7 \\
\cline{1-1}
32x^4 - 12x^3 + 9x^2 \qquad\qquad & \\
\pm 32x^4 \pm 28x^3 \mp 12x^2 \qquad\qquad & \\
\cline{1-1}
-40x^3 + 21x^2 + 64x \qquad & \\
\mp 40x^3 \mp 35x^2 \pm 15x \qquad & \\
\cline{1-1}
56x^2 + 49x - 21 & \\
\pm 56x^2 \pm 49x \mp 21 & \\
\cline{1-1}
\end{array}
$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د باقي مانده دعوه :

د صحيح عددونود تقسيم میزان په لاندی ډول دی

باقي + خارج قسمت × مقسوم علیه = مقسوم

که مقسوم په $P(x)$ اومقسوم علیه په $(x-a)$ اوخارج قسمت په $Q(x)$ او باقي په R وښیونو لیکو چې

$$P(x) = (x-a)Q(x) + R$$

که $x = a$ وي نو د x په عوض a وضع کوو نو :

$$P(a) = (a-a)Q(a) + R$$
$$Q(a) = R$$

دی دعوی ته د باقیمانده دعوه یا $Remainder's\ Theorem$ وائي.

مثال: وښیاست چه $x + 2$ د $P(x) = 3x^2 + 5x^2 - 4x - 4$ د پولینوم جذر دی او که نه دی؟

حل: د $x + 2$ جذر پیدا کوو.

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

د $P(x)$ په پولینوم کې د x په عوض (-2) وضع کوو که $f(x) = 0$ شونو (-2) د پولینوم جذر دی او $x + 2$ د پولینوم فکتور دی.

$$P(-2) = 3(-2)^3 + 5(-2)^2 - 4(-2) - 4$$
$$P(-2) = 3(-8) + 5(4) + 8 - 4$$
$$P(-2) = -24 + 20 + 8 - 4$$
$$P(-2) = -28 + 28$$
$$P(-2) = 0$$
$$R = 0$$

$x + 2$ د $P(x)$ د پولینوم فکتور دی او (-2) ئي جذر دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: هغه افاده پیدا کړئ چه په $x-1$ باندی وویشل شي باقي ئي (-3) شي او که په $x+2$ باندې وویشل شي باقي ئي -9 شي.

$p(x) = ax + b$

$p(1) = a.1 + b = -3$

$p(-2) = a(-2) + b = -9$

$$\begin{array}{l} a + b = -3 \\ \underline{\mp 2a \pm = \mp 9} \\ \quad 3a = 6 \end{array}$$

$3a = 6 \Rightarrow a = 2$

$a + b = -3 \Rightarrow 2 + b = -3 \Rightarrow b = -3 - 2 = -5$

$b = -5$

مطلوبه افاده $(2x-5)$ ده.

تمرين:

1- جمع يې کړئ؟

a- $$\begin{array}{r} 11x^3 - 11x^2 + 7x - 9 \\ 8x^3 + 16x^2 - 11x + 13 \\ \underline{9x^3 - 4x^2 + x - 2} \end{array}$$

b- $$\begin{array}{r} 3x^2 - 4x + 16 \\ 7x^2 - 20x + 8 \\ \underline{5x^2 + 3x - 11} \end{array}$$

2- تفريق کړئ؟

a- $$\begin{array}{r} 8x^4 - 12x^3 + 7x^2 - 3x + 15 \\ \underline{7x^4 - 20x^3 - 8x^2 + 9x - 20} \end{array}$$

b- $$\begin{array}{r} 11x^3 - 13x^2 + 20x - 8 \\ \underline{5x^3 + 15x^2 + 8x + 11} \end{array}$$

3- ضرب يې کړئ؟

a- $$\begin{array}{r} 4x^3 - 8x^2 + 5x - 2 \\ \underline{7x^2 - 8x + 6} \end{array}$$

b- $$\begin{array}{r} 2x^2 - 4x + 7 \\ \underline{3x^2 + 7x - 8} \end{array}$$

c- $$\begin{array}{r} 6x^3 + 2x^2 - 4x + 7 \\ \underline{3x^3 - 8x^2 + 6x - 8} \end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

4- تقسيم يې کړئ؟

$$a- \frac{15x^5+16x^4-73x^3+101x^2-5x+6}{3x^2+8x-6}$$

$$b- \frac{21x^4+67x^3-58x^2-119x+77}{7x^2+6x-11}$$

$$c- \frac{35x^6-59x^5+36x^4+35x^3-74x^2+60x-24}{5x^3-7x^2+6x-3}$$

$$d- \frac{16x^4+96x^3y+216x^2y^2+216xy^3+81y^4}{2x+37}$$

ترکيبي تقسيم *Synthetic Division*

هغه تقسيم دی چه د خارج قسمت د ضريبو د پيدا کولو لپاره د مقسوم ضريبونه ټول په يوه وار استعماليږي.

طريقه يي داسی ده چه د مقسوم ضريبونه په يوه افقي کرښه کي ليکود کرښی په اخر کي په يوه کنج کي د قيمت ليکوبيا يوی کرښی ته ځای پريږدو او يو خط کشوو دمقسوم د پولينوم د اول حد ضريب بی له کوم تغيره راکښته کوو. د x په قيمت کي يي ضربوو د دويم حد دضريب لاندی يي ليکو او ورسره جمع کوو يي. د جمع حاصل د x په قيمت کي ضربوو. په همدی ترتيب تر اخره اجراات کوو. د خط لاندی اخرني عدد د R قيمت دی. او نور عددونه د خارج قسمت ضريبونه دي د خارج قسمت درجه د مقسوم د درجی څخه يوه کمه ده.

که R=0 وي نو x-a د مقسوم دپولينوم فکتور دی. او د قيمت د پولينوم جذر دي.

مثال:-د ترکيبي تقسيم پواسطه وښياست چه $(x-2)$ د $P(x)=x^4+6x^3-8x^2-12x-8$ د پولينوم فکتور دي.

1	+6	-8	-12	-8	2
	2	16	16	8	
1	8	8	4	0	

$R=0$ نو $(x-2)$ د $P(x)$ د پولينوم فکتور دی او (2) د پولينوم جذر دی او $q(x)=x^3+8x^2+8x+4$ د خارج قسمت پولينوم دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که بینوم د $(x-a)$ شکل لرلو و نو په زاویه کې $(+a)$ لیکل کیږي او که بینوم د $(x+a)$ شکل لرلوو نو په زاویه کې $(-a)$ لیکل کیږي او که بینوم د $(ax \pm b)$ شکل لرلو نو په زاویه کې $\left(\pm\frac{b}{a}\right)$ لیکل کیږي نوره طریقه کې کوم فرق نه لري.

تمرین

1 : د باقیمانده دعوی پواسطه یې حل کړئ؟

کومه افاده ده چه که په $(x+3)$ وویشل شي باقي یې (-24) شي او که په $(2x-3)$ وویشل شي باقي یې (-6) شي

2 : د ترکیبي تقسیم پواسطه یې حل کړئ؟

a: $\dfrac{x^4-6x^3+15x^2-6x-40}{x-3}$

b: $\dfrac{2x^4-13x^3+4x^2+24x-28}{2x+3}$

c: $\dfrac{6x^3+4x^2-84x-9}{x+4}$

d: $\dfrac{12x^4-x^3-20x^2+8}{3x-2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم فصل

مساوات

د دوه افادو د عددي قیمتو برابری ته مساوات وایي.

مساوات په دوه قسمه دی.

1- مطابقت 2- شرطیه مساوات یا معادله

1- مطابقت :

مطابقت هغه مساوات دی چې د مجهول په ټولو قیمتو باندې یې دواړه خواوې مساوي وي.

د اسانتیا لپاره مطابقتونه په شپږو ګروپو کې مطالعه کوو.

1 ګروپ: هغه مطابقتونه چې د $(a+b)^n$ شمکل ولري.

د دې ګروپ ټول مطابقتونه په انکشاف $n+1$ حدونه لري د ټولو حدونو علامې یې مثبت دي په اول حد کې د a توان n د b توان صفر دی په نورو حدو کې د a د توان څخه یو کمیږي b ته ورکول کیږي تر څو چې د a توان صفر او د b توان n شي د اول حد ضریب یو دی د دویم حد ضریب n دی د نورو حدو د ضریبو د لاس ته راوړلو لپاره د مخکیني حد ضریب د a په توان کې ضربوو د مخکینو حدو په شمېر یې ویشو.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$
$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$
$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$$
$$(a+b)^8 = a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8ab^7 + b^8$$
$$(a+b)^9 = ?$$
$$(a+b)^{10} = ?$$
$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + n(n-1)a^{n-2}b^2 + \dots\dots + nab^{n-1} + b^n$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- ګروپ: هغه مطابقتونه چې د $(a-b)^n$ شکل ولري:

د دې ګروپ ټول مطابقتونه په انکشاف کې د اول ګروپ د مطابقتو په څير دي. صرف د اول ګروپ د ټول حدو علامې مثبت دی او د دويم ګروب د هر مطابقت د اول حد علامه مثبت د دويم حد علامه منفي ده د دريم علامه مثبت د څلورم حد علامه منفي ده په همدې ترتيب د طاق حدو علامې مثبت او د جفت حدو علامې منفي دي.

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$

$(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$

$(a-b)^6 = a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6$

$(a-b)^7 = a^7 - 7a^6b + 21a^5b^2 - 35a^4b^3 + 35a^3b^4 - 21a^2b^5 + 7ab^6 - b^7$

$(a-b)^8 = a^8 - 8a^7b + 28a^6b^2 - 56a^5b^3 + 70a^4b^4 - 56a^3b^5 + 28a^2b^6 - 8ab^7 + b^8$

$(a-b)^9 = ?$

$(a-b)^{10} = ?$

$(a-b)^n = a^n - na^{n-1}b + n(n-1)a^{n-2}b^2 \ldots\ldots + nab^{n-1} - b^n$

3- دريم ګروپ: هغه مطابقتونه چې د $a^n - b^n$ شکل لري:

د دې ګروپ ټول مطابقتونه د دوه قوسو په حاصل ضرب تجزيه کيږي اول قوس د دواړه حدو د قاعدو تفاضل دی دويم قوس n حدونه لري د ټول حدو علامې مثبت دي په اول حد کې د a توان $n-1$ دی د b توان صفر دی په نورو حدو کې د a د توان څخه يو کميږي b ته ورکول کيږي تر څو چې د a توان صفر او د b توان $(n-1)$ شي.

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$

$a^5 - b^5 = (a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a^6 - b^6 = (a-b)(a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5)$
$a^7 - b^7 = (a-b)(a^6 + a^5b + a^4b^2 + a^3b^3 + a^2b^4 + ab^5 + b^6)$

|

|

|

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{a-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots\ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$

4- ګروپ: هغه مطابقتونه چې د $a^n + b^n$ شکل ولري او n طاق وي د دې ګروپ ټول مطابقتونه د دوه قوسو په حاصل ضرب تجزیه کیږي اول قوس د دواړو حدو د قاعدو مجموعه ده دويم قوس n حدونه لري د اول حد علامه مثبت د دويم حد علامه منفي ده د دريم حد علامه مثبت د څلورم حد علامه منفي ده د طاق حدو علامې مثبت او د جفت حدو علامې منفي دي. په اول حد کې د a توان $n-1$ دی د b توان صفر دی په نورو حدو کې د a د توان څخه يو کميږي b ته ورکول کيږي تر څو چې د a توان صفر شي او د b توان $n-1$ شي.

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
$a^4 + b^4 = (a+b)(a^3 - a^2b + ab^2 - b^3)$
$a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$
$a^6 + b^6 = (a+b)(a^5 - a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 + ab^4 - b^5)$
$a^7 + b^7 = (a+b)(a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6)$

$a^9 + b^9 = ?$

$a^{11} + b^{11} = ?$

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{a-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots\ldots + a^2b^{n-3} - ab^{n-2} + b^{n-1})$$

5- ګروپ: هغه مطابقتونه چې د $a^n + b^n$ شکل ولري او n جفت وي د دې ګروپ ټول مطابقتونه د دوه مزدوجو قوسو په حاصل ضرب تجزيه کيږي د هر قوس اول حد د دواړو حدودقاعدو مجموعه ده او دويم حد يې د دواړو حدو د قاعدو د حاصل ضرب د دوه چند جذر دی.

$a^2 + b^2 = \left(a + b - \sqrt{2ab}\right)\left(a + b + \sqrt{2ab}\right)$
$a^4 + b^4 = (a^2)^2 + (b^2)^2 = \left(a^2 + b^2 - \sqrt{2a^2b^2}\right)\left(a^2 + b^2 + \sqrt{2a^2b^2}\right)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$= (a^2 + b^2 - \sqrt{2}ab)(a^2 + b^2 + \sqrt{2}ab)$

$a^6 + b^6 = (a^3)^2 + (b^3)^2 = (a^3 + b^3 - \sqrt{2a^3b^3})(a^3 + b^3 + \sqrt{2a^3b^3})$

شپږم ګروپ: هغه مطابقتونه چې د $(a + b + c)^2$ شکل ولري د دې ګروپ ټول مطابقتونه په انکشاف کې شپږ حدونه لري درې لمړي حدونه يې مربعګاني دي درې وروستي حدونه يې د دوه حدو د حاصل ضرب دوه چند دي.

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

$(a + b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$

$(a - b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc$

مثال: انکشاف ورکړئ؟

1: $(2x + 3y)^2 = (2x)^3 + 3(2x)^2 3y + 3(2x)(3y)^2 + (3y)^2$

$= 8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$

2: $(4x - 5y)^4 = (4x)^4 - 4(4x)^3(5y) + 6(4x)^2(5y)^2 - 4(4x)(5y)^3 + (5y)^4$

$= 256x^4 - 1280x^3y + 2400x^2y^2 - 2000xy^3 + 625y^4$

3: $(2x + 3y + 5z)^2 = (2x)^2 + (3y)^2 + (5z)^2 + 2 \times 2x \times 3y$

$+2 \times 2x \times 5y + 2 \times 3y \times 5z$

$= 4x^2 + 9y^2 + 25y^2 + 12xy + 20xz + 30yz$

2- مثال: تجزيه يې کړئ؟

1: $4x^2 - 9y^2 = (2x)^2 - (3y)^2 = (2x - 3y)(2x + 3y)$

5: $9x^4 + 36y^4 = (3x^2)^2 + (6y^2)^2 = \left(3x^2 + 6y^2 - \sqrt{2 \times 3x^2 \times 6y^2}\right)$

$(3x^2 + 6y^2 + \sqrt{2 \times 3x^2 \times 6y^2})$

$(3x^2 + 6y^2 - 6xy)(3x^2 + 6y^2 + 6xy)$

تمرين:

انکشاف ورکړئ

1- $(3x + 5y)^2$ 2- $(2x + 7y)^3$ 3- $(4x + 5y)^4$

4- $(4x - 5y)^5$ 5- $(3x - 7y)^4$ 6- $(2x - 3y)^6$

(c) ketabton.com: The Digital Library

-7 $7x^2-9y^2$ -8 $8m^3-125n^3$ -9 $\frac{8}{125}x^3-\frac{216}{1331}y^3$

-10 $8x^3+27y^3$ -11 $64m^3+1000n^3$ -12 $\frac{125}{216}x^3+\frac{729}{1728}y^3$

-13 $4x^2+y^2$ -14 $16x^4+256y^4$ -15 $\frac{81}{625}m^4+\frac{1296}{2401}n^4$

-16 $(2x+3y+5z)^2$ -17 $(3x+2y-5z)^2$ -18 $(\frac{2}{8}x-\frac{4}{5}y-\frac{7}{8}z)^2$

تجزیه:

تجزیه په لغت کې توټه ، توټه کولو ته وايي.

او په اصطلاح کې د يوې افادې د ضربي عواملو د پيدا کولو طريقې ته تجزيه وايي.

1- د مشترک نیولو پواسطه د یوی افادې تجزیه کول:

که د يوې افادې په ټولو حدو کې کوم عدد يا حرف شامل وي دا شامل مشترک نيسو د قوس د باندې يې ليکو بيا د افادې هر حد په دې مشترک ويشو د قوس په داخل کې يې ليکو افاده تجزيه کيږي.

1: $3x^2-15=3(x^2-5)$

2: $5x^2-15x+10=5(x^2-3x+2)$

3: $4x^3+24x^2-36x=4x(x^2+6x-9)$

4: $\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{4}x=\frac{1}{4}x(x-3)$

2- د a^2-b^2 د مطابقت پواسطه د يوې افادې تجزيه کول:

1: $4x^2-25y^2=(2x)^2-(5y)^2=(2x-5y)(2x+5y)$

2: $\frac{4}{25}m^2-\frac{9}{49}n^2=\left(\frac{2}{5}m\right)^2-\left(\frac{3}{7}n\right)^2=\left(\frac{2}{5}m-\frac{3}{7}n\right)\left(\frac{2}{5}m+\frac{3}{7}n\right)$

3: $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{49}=\left(\frac{x}{6}\right)^2-\left(\frac{y}{7}\right)^2=\left(\frac{x}{6}-\frac{y}{7}\right)\left(\frac{x}{6}+\frac{y}{7}\right)$

3- د a^3-b^3 د مطابقت پواسطه د يوې افادې تجزيه کول:

1: $8x^3-27y^3=(2x)^3-(3y)^3=(2x-3y)(4x^2+6xy+9y^2)$

2: $64x^3-125y^3=(4x)^3-(5y)^3=(4x-5y)(16x^2+20xy+25y^2)$

3: $216m^3-343n^3=(6m)^3-(7n)^3=(6m-7n)(36m^2+42mn+49n^2)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

4- د $a^3 + b^3$ د مطابقت پواسطه د يوې افادې تجزيه کول:

$$1:\ 8x^3 + 27y^3 = (2x)^3 + (3y)^3 = (2x + 3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2)$$

$$2:\ 216m^3 + 343y^3 = (6m)^3 + (7y)^3$$

$$= (6m + 7y)(36m^2 - 42my + 49y^2)$$

$$3:\ \frac{8}{27}x^3 + \frac{125}{216}y^3 = \left(\frac{2}{3}x\right)^3 + \left(\frac{5}{6}y\right)^3 = \left(\frac{2}{3}x + \frac{5}{6}y\right)\left(\frac{4}{9}x^2 - \frac{5}{9}xy + \frac{25}{36}y^2\right)$$

ترينوم:

دري حده افادې ته ترينوم وايي.

عمومي شکل يې $ax^2 + bx + c$ دی.

د ترينوم تجزيه:

د ترينوم تجزيه په دوه حالته کې مطالعه کوو.

1- چې $a = 1$ وي

2- $a \neq 1$ وي

1- چې $a = 1$ وي ترينوم د $x^2 - bx + c$ شکل غوره کوي د ترينوم د دغه شکل د تجزيې لپاره داسې دوه عدده پيدا کوو چې د ضرب حاصل يې c او د جمع حاصل يې b شي. فرضاً m او n داسې دوه عددونه دي.

يعنې $b = m + n$ او $c = mn$ دي نو:

$$x^2 + (m + n)x + mn$$

قوس خلاصوو

$$x^2 + mx + nx + mn$$

گروپ بندي کوو يې:

$$x(x + m) + n(x + n)$$

$$(x + m)(x + n)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1- مثال:

$x^2 + 11x + 30$

$x^2 + 5x + 6x + 30$

$x(x + 5) + 6(x + 5)$

$(x + 5)(x + 6)$

2- مثال:

$x^2 - 11x + 30$

$x^2 - 5x + 6x + 30$

$x(x - 5) - 6(x - 5)$

$(x - 5)(x - 6)$

نوټ: که په ترينوم کې د (c)علامه $(+)$وه هغه عددونه چې د ترينوم د تجزيې لپاره استعماليږي هم علامه دي.بيا د b علامې ته ګورو که د b علامه $(+)$ وه عددونه دواړه مثبت دي او که د b علامه منفي وه عددونه دواړه منفي دي.

1: $x^2 + 15x + 36$

$x^2 + 12x + 3x + 36$

$x(x + 12) + 3(x + 12)$

$(x + 12)(x + 3)$

2: $x^2 - 13x + 40$

$x^2 - 8x - 5x + 40$

$x(x - 8) - 5(x - 8)$

$(x - 8)(x - 5)$

2- که په ترينوم کې د c علامه منفي وه نو عددونه چې د ترينوم د تجزيې لپاره استعماليږي مختلف العلامه دي بيا د b علامې ته ګورو که د b علامه $(+)$ وه لوی عدد مثبت دی او که د b علامه منفي وه لوی عدد منفي وي.

1: $x^2 + 5x - 66$

$x^2 - 6x + 11x - 66$

$x(x - 6) + 11(x - 6)$

$(x - 6)(x + 11)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2: $x^2 - 5x - 66$
$x^2 - 11x + 6x - 66$
$x(x-11) + 6(x-11)$
$(x-11)(x+6)$

تمرین:

$x^2 + 15x + 44$ -1 $x^2 + 19x + 70$ -2 $x^2 + 29x + 180$ -3

$x^2 - 16x + 55$-4 $x^2 - 21x + 90$-5 $x^2 - 13x + 36$-6

$x^2 + 6x - 135$ -7 $x^2 + 11x - 210$-8 $x^2 + 31x - 630$ -9

$x^2 - 7x - 170$ -10 $x^2 - 9x - 400$ -11 $x^2 - 25x - 186$-12

2- حالت چې $a \neq 1$ وي.

د ترینوم د دغه حالت د تجزیې لپاره داسې دوه عددونه پیدا کوو چې د ضرب حاصل یې acاو د جمع حاصل یې b شي؟

1. $3x^2 + 11x + 10$
 $ac = 3(10) = 30$
 $b = 11$
 $3x^2 + 6x + 5x + 10$
 $3x(x+2) + 5(x+2)$
 $(x+2)(3x+5)$
2. $5x^2 - 19x + 12$
 $ac = 5(12) = 60$
 $b = -19$
 $5x^2 - 15x - 4x + 12$
 $5x(x-3) - 4(x-3)$
 $(x-3)(5x-4)$
3. $7x^2 + 3x - 34$
 $ac = 7(-34) = -238$
 $7x^2 - 14x \qquad x - 34$
 $7x(x-2) + 17(x-2)$
 $(x-2)(7x+17)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

4. $11x^2 - 23x - 30$
$ac = 11(-30) = 330$
$b = -23$
$11x^2 - 33x + 10x - 3$
$11x(x-3) + 10(x-3)$
$(x-3)(10x+10)$

تمرين:

لاندې ترينومونه حل کړئ؟

1- $5x^2 + 11x + 2$	2- $7x^2 + 24x + 9$	3- $3x^2 + 31x + 80$
4- $7x^2 - 19x + 10$	5- $5x^2 - 22x + 21$	6- $2x^2 - 17x + 35$
7- $3x^2 + 2x - 33$	8- $4x^2 + 7x - 57$	9- $7x^2 + 3x - 34$
10- $5x^2 - 10x - 54$	11- $7x^2 - 11x - 30$	12- $8x^2 - 23x - 85$

د ګروپ بندۍ پواسطه د يوې افادې تجزيه کول:

که د يوې افادې حدونه تر درې حدو زيات وه او په ټولو حدو کې يو کوم حرف يا عدد شامل نه ؤ مګر په بعضو حدو کې شامل ؤ دغسې افاده په ګروپو ويشو په هر ګروپ کې شامل مشترک نيسو تر مشترک نيولو وروسته بايد قوسونه مساوي وي قوسونه مشترک نيسو افاده په قوسو تجزيه کيږي.

$x^3 + 5x^2 + 3x + 15$
$x^2(x+5) + 3(x+5)$
$(x+5)(x^2+3)$

د تجزيې د استعمال ځايونه:

تجزيه د څو افاده د لوی مشترک قاسم او کوچني مشترک د پيدا کولو لپاره استعماليږي.

لوی مشترک قاسم G.C.D:

د څو افادو لوی مشترک قاسم هغه افاده ده چې تر هغې په بله غټه افاده باندې راکړ شوي افادې تقسيم نشي لکه $x^2 + 7x + 12$ او $x^2 + 10x + 21$ چې په $x + 3$ باندې ويشل کيږي نو $x + 3$ د پورته افادو لوی مشترک قاسم وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

کوچني مشترک مضرب L.C.M:

د څو افادو کوچنی مشترک مضرب هغه افاده ده چې تر هغې بله کوچنۍ افاده په راکړ شو افادو باندې تقسیم نه شي. لکه $x^3 + 14x^2 + 61x + 84$ چې په $x^2 + 7x + 12$ او $x^2 + 10x + 21$ باندې تقسیمیږي او تر دې بله کوچنۍ افاده په راکړ شوو افادو باندې نه تقسیمیږي دې افادې ته د راکړ شوو افادو کوچنی مشترک مضرب دی.

د لوی مشترک قاسم او کوچنی مشترک مضرب پیدا کول:

افادې تجزیه کوو په ضربي عواملوکې یې مشترک او غیرمشترک پیدا کووکه په مشترکو ضربي عواملوکې د (کوچني) توان والا ضربي عوامل ضرب کړو لوی مشترک قاسم لاس ته راځي او که د لوړ توان والا ضربي او غیر مشترک ضربي عوامل سره ضرب کړو کوچنی مشترک مضرب لاس ته راځي.

مثال: د لاندې افادو لوی مشترک قاسم او کوچنی مشترک مضرب پیدا کړئ؟

1: $(x^2 + 2x)^2$

2: $2x^4 + 3x^3 - 2x^2$

3: $2x^3 - 3x^2 - 14x$

حل:

1: $(x^2 + 2x)^2 = \{x(x+2)\}^2 = x^2(x+2)^2$

2: $2x^4 + 3x^3 - 2x^2 = x^2(2x^2 + 3x - 2) = x^2(x+2)(2x-1)$

3: $2x^3 - 3x^2 - 14x = x(2x^2 - 3x - 14) = x(x+2)(2x-7)$

$G.C.D = x(x+2) = x^2 + 2x$

$L.C.M = x^2(x+2)^2(2x-1)(2x-7)$

تمرین:

لوی مشترک قاسم او کوچنی مشترک مضرب یې پیدا کړئ؟

1- $2ax^3 - 4a^3x - 6a^3$

2- $ax^2 + 2a^2x + a^3$

3- $3a^2(x+a)^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

الجبري کسرونه

الجبري کسر هغه افاده ده چې په مخرج کې یې حرف موجود وي لکه:

$$\frac{x^2+3x-2}{x} \quad , \quad \frac{3}{x+1}$$

الجبري کسرونه په دوه قسمه دي.

1- ناطق الجبري کسرونه   2- غیر ناطق الجبري کسرونه

2- ناطق الجبري کسرونه :

هغه الجبري کسرونه دي چې کوم حرف یې تر جذر لاندې نه وي.

ناطق الجبري کسرونه په دوه قسمه دي.

a- واقعي ناطق الجبري کسرونه b- غیر واقعي ناطق الجبري کسرونه

a- واقعي ناطق الجبري کسرونه: هغه کسرونه دي چې د صورت درجه یې د مخرج د درجې څخه کوچنی وي لکه $\frac{x}{x^2+5x+1}$ یا $\frac{2}{x+3}$

b- غیر واقعي ناطق الجبري کسرونه: هغه کسرونه دي چې د صورت درجه یې د مخرج د درجې څخه زیاته یا ورسره مساوي وي. لکه:

$$\frac{4x^2+5x-1}{x^2+3x-4}, \frac{3x^2+5x+3}{x+5}$$

2- غیر ناطق الجبري کسرونه :

هغه کسرونه دي چې کوم حرف یې تر جذر لاندې وي.

لکه $\frac{3\sqrt{x}+1}{x+2}$ ، $\frac{x+5}{\sqrt{x}+3}$

د الجبري کسرو خواص:

1- که د یوه کسر صورت او مخرج په یوه افاده کې ضرب شي په کسر کې تغیر نه راځي.

$$\frac{x+3}{x+7} = \frac{(x+3)(x-1)}{(x+7)(x-1)} = \frac{x^2+2x-3}{x^2+6x-7}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- که د یوه کسر صورت او مخرج په یوه افاده تقسیم شي په کسر کې تغیر نه راځي.

$$\frac{x^2+11x+24}{x^2+5x+6}=\frac{\frac{x^2+11x+24}{x+3}}{\frac{x^2+5x+6}{x+3}}=\frac{\frac{(x+3)(x+8)}{x+3}}{\frac{(x+3)(x+2)}{x+3}}=\frac{x+8}{x+2}$$

3- هر کسر درې علامې لري یوه د صورت علامه ده دویم د مخرج علامه ده او دریم د ټول کسر علامه ده که په دې درې علامو کې دوه علامو ته تغیر ورکړو په کسر کې تغیر نه راځي.

$$-\frac{-x}{-y}=-\frac{x}{y}=+\frac{x}{-y}=+\frac{-x}{y}=-\frac{x}{y}$$

د الجبري کسرونو جمع:

د کسرونو مخرج مشترک پیدا کوو او د حسابي کسرونو په څیر عملیه پرې اجراء کوؤ

1: $\frac{x}{x+5}+\frac{3x-1}{x+5}-\frac{x+3}{x+5}=\frac{x+3x-1-x-3}{x+5}=\frac{3x-4}{x+5}$

2: $\frac{x+3}{x^2-4}+\frac{x-1}{x-2}+\frac{x+7}{x+2}=\frac{x+3+x^2+x-2+x^2+5x-14}{(x-2)(x+2)}$

$$=\frac{2x^2+7x-13+1}{x^2-4}$$

3: $\frac{x}{x+1}+\frac{x+3}{x+2}=\frac{x(x+2)+(x+3)(x+1)}{(x+1)(x+2)}=\frac{x^2+2x+x^2+4x+3}{x^2+3x+2}$

$$=\frac{2x^2+6x+3}{x^2+3x+2}$$

د الجبری کسرونو تفریق:

که وغواړو چې د یوه الجبري کسر څخه بل الجبري کسر تفریق کړ د مفروق علامو ته تغیر ورکوو او د جمع عملیه پرې تطبیقوو.

د الجبري کسرونو ضرب:

صورت په صورت کې او مخرج په مخرج کې ضربوو.

که د یوه کسر صورت د بل کسر د مخرج سره اختصاریدلو اختصاروو بیا یې ضربوو.

1: $\frac{x+3}{x+1}\times\frac{x-3}{x+5}=\frac{(x+3)(x-3)}{(x+1)(x+5)}=\frac{x^2-9}{x^2+6x+5}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$2:\quad \frac{x^2-2x}{x+2}\times\frac{x^2+3x+2}{x^2+3x-10}=\frac{x(x-2)}{x+2}\times\frac{(x+2)(x+1)}{(x-2)(x+5)}=\frac{x(x+1)}{x+5}$$
$$=\frac{x^2+x}{x+5}$$

د الجبري کسرونو اختصار:

صورت او مخرج تجزيه کوو مساوي ضربي عوامل د صورت او مخرج څخه حذفوو.

$$1:\quad \frac{x^2+3x-28}{x^2+9x+14}=\frac{(x+7)(x-4)}{(x+7)(x+2)}=\frac{x-4}{x+2}$$

$$2:\quad \frac{x^2+3x}{x^2+11x+24}=\frac{x(x+3)}{(x+3)(x+8)}=\frac{x}{x+8}$$

د الجبري کسرونو تقسيم:

د تقسيم علامه په ضرب بدلوو او مقسوم عليه سرچپه کوو.

$$1:\quad \frac{x^2+13x+30}{x+5}\div\frac{x^2+8x+15}{x^2+6x+15}$$
$$\frac{x^2+13x+30}{x+5}\times\frac{x^2+6x+5}{x^2+8x+15}$$
$$\frac{(x+3)(x+10)}{x+5}\times\frac{(x+1)(x+5)}{(x+3)(x+5)}=\frac{(x+10)(x+1)}{x+5}=\frac{x^2+11x+10}{x+5}$$

$$2:\quad \frac{x^2-11x+18}{x-3}\div\frac{x^2+7x-18}{x^2-9}$$
$$\frac{x^2-11x+18}{x-3}\times\frac{x^2-9}{x^2+7x-18}$$
$$\frac{(x-2)(x-9)}{x-3}\times\frac{(x-3)(x+3)}{(x+9)(x-2)}=\frac{(x-9)(x+3)}{x+9}=\frac{x^2-6x-27}{x+9}$$

تمرين:

1- لاندي کسرونه جمع کړئ؟

1- $\frac{2x-3y}{6y^2}+\frac{18xy-9y^2}{9y^2}$

2- $\frac{x+5}{x^2}+\frac{x-3}{x}-\frac{x+7}{x^3}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

3- $\frac{x+11}{x+3}+\frac{x-1}{x+2}$ 　　 4- $\frac{2x+1}{x^2-16}+\frac{x+3}{x-4}+\frac{x-1}{x+4}$

5- $\frac{x}{x+5}+\frac{3x+1}{x+5}-\frac{x-2}{x+5}$ 　　 6- $\frac{2}{x+7}+\frac{3}{x-7}$

2- لاندې کسرونه اختصار کړئ؟

1- $\frac{x^2-3x}{x^2-9}$ 　　 2- $\frac{x^2+5x-24}{x+8}$ 　　 3- $\frac{x^2-7x-44}{x^2-9x-22}$

3- لاندې کسرونه ضرب کړئ؟

1- $\frac{x^2+5x+6}{x+5}\times\frac{x^2+7x+6}{x^2+x-6}$ 　　 2- $\frac{x^2+x}{x-1}\times\frac{x^2-1}{x^2+5x+4}$

3- $\frac{x^2-3x-28}{x-7}\times\frac{x+5}{x+4}$ 　　 4- $\frac{x^2+3x-40}{x+8}\times\frac{x-3}{x+5}$

4- لاندې کسرونه تقسیم کړئ؟

1- $\frac{x^2+13x+6}{x+5}\div\frac{x^2+11x+28}{x^2+12x+35}$ 　　 2- $\frac{x}{x+1}\div\frac{x+1}{x}$

3- $\frac{x^2}{x-1}\div\frac{x}{x^2-1}$ 　　 4- $\frac{x}{x+3}\div\frac{x^2}{x^2-9}$

5- $\frac{x+5}{x}\div\frac{x+5}{x}$

د کسرونو ګویا کول:

د یوه کسر د صورت یا مخرج څخه د جذر د منځه وړلو ته د کسر ګویا کول وایي. معمول په ریاضي کې د مخرج ګویا کول دي.

د کسر د مخرج ګویا کول څلور حالتونه لري.

1- چې د کسر په مخرج کې یو جذري حد وي او د جذر درجه یې (2) وي. لکه $\frac{3x}{\sqrt{x}}$ ، $\frac{2}{\sqrt{2x}}$ ، $\frac{3}{\sqrt{x^3}}$ او داسې نور.

د داسې کسرو د مخرجو ګویا کولو لپاره صورت او مخرج د مخرج په جذري حد کې ضربوو.

$$\frac{3x}{\sqrt{x}}=\frac{3x\sqrt{x}}{\sqrt{x}\times\sqrt{x}}=\frac{3x\times\sqrt{x}}{\sqrt{x^2}}=\frac{3x\times\sqrt{x}}{x}=3\sqrt{x}$$

$$\frac{2}{\sqrt{2x}}=\frac{2\times\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}\times\sqrt{2x}}=\frac{2\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}^2}=\frac{2\sqrt{2x}}{2x}=\frac{\sqrt{2x}}{x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{3}{\sqrt{x^3}}=\frac{3\sqrt{x^3}}{\sqrt{x^3}\times\sqrt{x^3}}=\frac{3\sqrt{x^3}}{\sqrt{x^3}^2}=\frac{3\sqrt{x^3}}{x^3}$$

2- چې دکسر په مخرج کې يو جذري حل موجود وي او د جذر درجه يې د (2) څخه ډېره وي لکه $\frac{x}{\sqrt[3]{3}}$ ، $\frac{3}{\sqrt[5]{x}}$ ، $\frac{2x^2}{\sqrt[7]{x}}$ او داسې نور.

د داسې کسرو د مخرجو د ګويا کولو لپاره صورت او مخرج د مخرج په جذري حد کې ضربوو. او د جذر د درجې او د توان د تفاضل په اندازه توان ورکوؤ.

$$1-\frac{x}{\sqrt[3]{x}}=\frac{x\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}\times\sqrt[3]{x^2}}=\frac{x\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x\times x^2}}=\frac{x\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^3}}=\frac{x\sqrt[3]{x^2}}{x}=\sqrt[3]{x^2}$$

$$2-\frac{3}{\sqrt[5]{x}}=\frac{3\sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[5]{x}\times\sqrt[5]{x^4}}=\frac{3\sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[5]{x\times x^4}}=\frac{3\sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[5]{x^5}}=\frac{3\sqrt[5]{x^4}}{x}$$

$$3-\frac{2x^2}{\sqrt[7]{x}}=\frac{2x^2\times\sqrt[7]{x^6}}{\sqrt[7]{x}\times\sqrt[7]{x^6}}=\frac{2x^2\times\sqrt[7]{x^6}}{\sqrt[7]{x\times x^6}}=\frac{2x^2\sqrt[7]{x^6}}{\sqrt[7]{x^7}}=\frac{2x^2\sqrt[7]{x^6}}{x}=2x\sqrt[7]{x^6}$$

3- چې د کسر مخرج کې دوه جذري حدونه موجود وي او د جذر درجه يې (2) وي.

لکه $\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ ، $\frac{x-11}{\sqrt{x}-\sqrt{11}}$ ، $\frac{x^3-x}{\sqrt{x^3}-\sqrt{x}}$ او داسې نور.

صورت او مخرج د مخرج په مزدوج کې ضربوو.

$$1:\quad \frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{(x-y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}=\frac{(x-y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{\sqrt{x}^2-\sqrt{y}^2}$$
$$=\frac{(x-y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{x-y}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$$

$$2:\quad \frac{x-11}{\sqrt{x}-\sqrt{11}}=\frac{(x-11)(\sqrt{x}+\sqrt{11})}{(\sqrt{x}-\sqrt{11})(\sqrt{x}+\sqrt{11})}=\frac{(x-11)(\sqrt{x}+\sqrt{11})}{\sqrt{x}^2-\sqrt{11}^2}$$
$$=\frac{(x-11)(\sqrt{x}+\sqrt{11})}{x-11}=\sqrt{x}+\sqrt{11}$$

$$3:\quad \frac{x^3-x}{\sqrt{x^3}-\sqrt{x}}=\frac{(x^3-x)(\sqrt{x^3}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x^3}-\sqrt{x})(\sqrt{x^3}+\sqrt{x})}=\frac{(x^3-x)(\sqrt{x^3}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x^3})^2-(\sqrt{x})^2}$$
$$=\frac{(x^3-x)(\sqrt{x^3}+\sqrt{x})}{x^3-x}=\sqrt{x^3}+\sqrt{x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

4- چې د کسر په مخرج کې دوه حدونه موجود وي او د جذر درجې يې د (2)څخه زياتې وي ،

لکه: $\frac{x-3}{\sqrt[5]{x}+\sqrt[5]{3}}$ ، $\frac{1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{5}}$

که د جذري حدو تر منځ علامه منفي وه د $a^n - b^n$ د مطابقت د تجزيې دويم قوس کې صورت او مخرج ضربوو او که د منځ علامه يې مثبت وه نو د $a^n + b^n$ د مطابقت د تجزيې دويم قوس کې صورت او مخرج ضربوو.

$$1:\quad \frac{1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{5}}=\frac{1\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{5x}+\sqrt[3]{5^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{5}\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{5x}+\sqrt[3]{5^2}\right)}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{5x}+\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{x^3}+\sqrt[3]{5x^2}+\sqrt[3]{25x}-\sqrt[3]{5x^2}-\sqrt[3]{25x}-\sqrt[3]{5^3}}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{5x}+\sqrt[3]{25}}{x-5}$$

$$2:\quad \frac{x-3}{\sqrt[5]{x}+\sqrt[5]{3}}=\frac{(x-3)\left(\sqrt[5]{x^4}-\sqrt[5]{3x^3}+\sqrt[5]{9x^2}-\sqrt[5]{27x}+\sqrt[5]{81}\right)}{\left(\sqrt[5]{x}+\sqrt[5]{3}\right)\left(\sqrt[5]{x^4}-\sqrt[5]{3x^3}+\sqrt[5]{9x^2}-\sqrt[5]{27x}+\sqrt[5]{81}\right)}$$

$$=\frac{(x-3)\left(\sqrt[5]{x^4}-\sqrt[5]{3x^3}+\sqrt[5]{9x^2}-\sqrt[5]{27x}+\sqrt[5]{81}\right)}{\sqrt[5]{x^5}-\sqrt[5]{3x^4}+\sqrt[5]{9x^3}-\sqrt[5]{27x^2}+\sqrt[5]{81x}+\sqrt[5]{3x^4}-\sqrt[5]{9x^3}+\sqrt[5]{27x^2}-\sqrt[5]{81x}+\sqrt[5]{243}}$$

$$=\frac{(x+3)(\sqrt[5]{x^4}-\sqrt[5]{3x^3}+\sqrt[5]{9x^2}-\sqrt[5]{27x}+\sqrt[5]{81}}{x+3}$$

$$=\sqrt[5]{x^4}-\sqrt[5]{3x^3}+\sqrt[5]{9x^2}-\sqrt[5]{27x}+\sqrt[5]{81}$$

تمرین:

د لاندې کسرو مخرجونه ګويا کړئ؟

1- $\frac{2}{\sqrt{x}}$ 2- $\frac{x}{\sqrt{x}}$ 3- $\frac{x-1}{\sqrt{x}}$ 4- $\frac{3x}{\sqrt{x}}$ 5- $\frac{3}{\sqrt[3]{x}}$

6- $\frac{2x}{\sqrt[4]{x}}$ 7- $\frac{x+1}{\sqrt[5]{x}}$ 8- $\frac{x-1}{\sqrt[5]{x}}$ 9- $\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}$ 10- $\frac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$

11- $\frac{x}{\sqrt{x^3}+\sqrt{x}}$ 12- $\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$ 13- $\frac{x+2}{\sqrt[5]{x}+\sqrt[5]{2}}$ 14- $\frac{m-n}{\sqrt[3]{m}-\sqrt[3]{n}}$ 15- $\frac{x}{\sqrt{x^3}-\sqrt{x}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

قسمي كسرونه:

كه د دوه كسرونو د مجموعې څخه يو واقعي كسر جوړ شي. دغه كسرونه د واقعي كسر قسمي كسرونه دي.

$$\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x+5}=\frac{2(x+5)+3(x+1)}{(x+1)(x+5)}=\frac{2x+10+3x+3}{x^2+6x+5}=\frac{5x+13}{x^2+6x+5}$$

$\frac{5x+13}{x^2+6x+5}$ يو واقعي كسر دى د $\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x+5}$ څخه لاس ته راغلی دی نو $\frac{2}{x+1}$ او $\frac{3}{x+5}$ كسرونه يې قسمي كسرونه دي.

د يوه واقعي كسر د قسمي كسرو پيدا كول:

د قسمي كسرو د پيدا كولو لپاره د واقعي كسر مخرج تجزيه كوو د مخرج د ضربي عواملو شمېر د قسمي كسرونو شمېر ښيي. د مخرج د ضربي عواملو په لحاظ د واقعي كسر د قسمي كسرو پيدا كول په څلورو حالتو كې مطالعه كوؤ.

1- چې د كسر د مخرج ضربي عوامل غير تكراري بينومونه وي هر بينوم د يوه كسر مخرج دی صورت يې د الفباء په غټو حروفو ښيو عمليې پرې اجراء كوو د حروفو قيمتونه پيدا كوو د هغوي په عوض يې وضع كوو د واقعي كسر قسمي كسرونه لاس ته راځي. $\frac{8x+51}{x^2+13x+42}$ قسمي كسرونه پيدا كړئ؟

$$\frac{8x+51}{x^2+13x+42}=\frac{8x+51}{(x+6)(x+7)}=\frac{A}{x+6}+\frac{B}{x+7}=\frac{A(x+7)+B(x+6)}{(x+6)(x+7)}$$

$$\frac{8x+51}{x^2+13x+42}=\frac{A(x+7)+B(x+6)}{x^2+13x+42}$$

مخرجونه يې مساوي دی نو $8x+51=A(x+7)+B(x+6)$

د A او B د قيمتو د پيدا كولو لپاره دوه حالتونه موجود دي.

الف: د جذر پواسطه د A او د B قيمتونه پيدا كوو نو د هر قوس جذر پيدا كوو.

$x+7=0$

$x=-7$

-7 د x په عوض وضع كوؤ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$8(-7)+51=A(-7+7)+B(-7+6)$

$-56+51=A(0)+B(-1)$

$-5=0-B$

$-B=-5 \qquad B=5$

$x+6=0 \qquad x=-6$

6- په معادله کې د x په عوض وضع کوؤ.

$8(-6)+51=A(-6+7)+B(-6+6)$

$-48+51=A(1)+B(0)$

$3=A \qquad A=3$

د A په عوض 3 او د B په عوض 5 وضع کوؤ.

$$\frac{3}{x+6}+\frac{5}{x+7}$$

پورتنی کسرونه د $\frac{8x+51}{x^2+13x+42}$ قسمي کسرونه دي.

ب: د عينيت پواسطه:

$8x+51=A(x+7)+B(x+6)$

$8x+51=Ax+7A+Bx+6B$

$8x+51=Ax+Bx+7A+6B$

$8x+51=(A+B)x+7A+6B$

په عينيت کې د مشابه حدو ضريبونه مساوي وي.

$$\begin{aligned} A+B&=8 \\ 7A+6B&=51 \\ \hline 7A+7B&=56 \\ -7A\pm 6B&=\pm 51 \\ \hline B&=5 \end{aligned}$$

$A+B=8 \rightarrow A=8-5=3$

$A=3$

2- چې د کسر د مخرج ضربي عوامل تکراري بينومونه وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: $\frac{5x^2+12x+2}{x^3+2x^2+x}$ قسمي کسرونه پيدا کړئ؟

$$\frac{5x^2+12x+2}{x^3+2x^2+x}=\frac{5x^2+12x+2}{x(x^2+2x+1)}=\frac{5x^2+12x+2}{x(x+1)^2}$$

$$\frac{5x^2+12x+2}{x^3+2x^2+x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}$$

$$\frac{5x^2+12x+2}{x(x+1)^2}=\frac{A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx}{x(x+1)^2}$$

مخرجونه يې مساوي دي نو صورتونه يې هم مساوي دي.

$$5x^2+12x+2=A(x^2+2x+1)+Bx^2+Bx+Cx$$
$$=Ax^2+2Ax+A+Bx^2+Bx+Cx$$
$$=Ax^2+Bx^2+2Ax+Bx+Cx+A$$
$$5x^2+12x+2=(A+B)x^2+(2A+B+C)x+A$$
$$A+B=5$$
$$2A+B+C=12$$
$$A=2$$
$$A+B=5\rightarrow 2+B=5 \qquad B=5-2=3$$
$$B=3$$
$$2A+B+C=12$$
$$2\times 2+3+C=12$$
$$4+3+C=12$$
$$7+C=12$$
$$C=12-7$$
$$C=5$$
$$\frac{2}{x}+\frac{3}{x+1}+\frac{5}{(x+1)^2}$$

3- چې د کسر د مخرج ضربي عوامل غير تکراري ترينومونه وي. او د تجزيې وړ هم نه وي هغه کسر چې مخرج يې ترينوم وي په صورت کې يې بينوم ليکو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: $\frac{5x^2+20x+21}{x(x^2+5x+7)}$ قسمي کسرونه پیدا کړئ؟

$$\frac{5x^2+20x+21}{x(x^2+5x+7)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+5x+7}=\frac{A(x^2+5x+7)+x(Bx+C)}{x(x^2+5x+7)}$$

$$\frac{5x^2+20x+21}{x(x^2+5x+7)}=\frac{A(x^2+5x+7)+x(Bx+C)}{x(x^2+5x+7)}$$

مخرجونه يې مساوي دي نو.

$$5x^2+20x+21=A(x^2+5x+7)+x(Bx+C)$$

$$5x^2+20x+21=Ax^2+5Ax+7A+Bx^2+Cx$$

$$5x^2+20x+21=Ax^2+5Ax+7A+Bx^2+Cx$$

$$5x^2+20x+21=(A+B)x^2+(5A+C)x+7A$$

$$A+B=5$$

$$5A+C=20$$

$$7A=21$$

$$A=3$$

$$A+B=5\Rightarrow 3+B=5\Longrightarrow B=5-3=2$$

$$B=2$$

$$5A+C=20$$

$$5\times 3+C=20$$

$$15+c=20 \qquad C=20-15$$

$$C=5$$

$$\frac{3}{x}+\frac{2x+5}{x^2+5x+7}$$

پورتني کسرونه د راکړ شوي واقعي کسر قسمي کسرونه دي.

4- چې د کسر د مخرج ضربي عوامل تکراري ترينومونه وي. لکه:

$$\frac{2x^3+7x^2+14x+5}{(x^2+3x+5)^2}$$

قسمي کسرونه يې داسې پيدا کوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{2x^3+7x^2+14x+5}{(x^2+3x+5)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+3x+5}+\frac{Cx+D}{(x^2+3x+5)^2}$$

$$=\frac{(Ax+B)(x^2+3x+5)+Cx+D}{(x^2+3x+5)^2}$$

$$\frac{2x^3+7x^2+14x+5}{(x^2+3x+5)^2}=\frac{Ax^3+3Ax^2+5Ax++Bx^2+3Bx+5B+Cx+D}{(x^2+3x+5)^2}$$

مخرجونه يې مساوي دي نو :

$$2x^3+7x^2+14x+5=Ax^3+3Ax^2+Bx^2+5Ax+3Bx+Cx+D+5B$$

$$2x^3+7x^2+14x+5=Ax^3+(3A+B)x^2+(5A+3B+C)x+D+5B$$

$$A=2$$

$$3A+B=7$$

$$3\times 2+B=7\Longrightarrow 6+B=7\Longrightarrow B=7-6$$

$$B=1$$

$$5A+3B+C=14$$

$$5\times 2+3\times 1+C=14$$

$$10+3+C=14$$

$$3+C=14$$

$$C=14-13$$

$$C=1$$

$$5B+D=5$$

$$5\times 1+D=5$$

$$5+D=5$$

$$D=5-5$$

$$D=0$$

$$\frac{2x+1}{x^2+3x+5}+\frac{x}{(x^2+3x+5)^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دريم فصل

معادله يا شرطيه مساوات

معادله هغه مساوات دی چې د مجهول په بعضو قيمتو يې دواړه خواوي مساوي وي.

لکه $5x + 3 = 13$ چې د $x = 2$ لپاره يې دواړه خواوي مساوي دي.

دغسې مساوات ته شرطيه مساوات وايي.

د معادلې اقسام:

معادله په پر قسمونه لري.

1- يو مجهوله اوله درجه معادله
2- دوه مجهوله اوله درجه معادله
3- درې مجهوله اوله درجه معادله
4- څلور مجهوله اوله درجه معادله
5- يو مجهوله دويمه درجه معادله
6- يو مجهوله دريمه درجه معادله
7- يو مجهوله څلورمه درجه معادله
8- جذري معادلې
9- اکسپونېنشل معادلې
10- لوګاريتمي معادلې
11- مثلثاتي معادلې

اول: يو مجهوله اوله درجه معادله:

هغه معادله ده چې مجهول يې يو او د مجهول درجه يې هم يوه وي.

عمومي شکل يې دا دی $ax + b$ چه a او b ثابت عددونه دي او x مجهول دی څرنګه چې د x توان يو دی نو ځکه ورته يو مجهوله اوله درجه معادله وايي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د معادلې خواص:

1- که د معادلې د دواړو خواو سره عین عدد جمع شي په معادله کې تغیر نه راځي.

2- که د معادلې د دواړو خواو څخه عین عدد منفي شي په معادله کې تغیر نه راځي.

3- که د معادلې دواړه خواوي په عین عدد کې ضرب شي په معادله کې تغیر نه راځي.

4- که د معادلې دواړه خواوي په عین عدد تقسیم شي په معادله کې تغیر نه راځي.

5- که د معادلې دواړه خواوي په عین توان رفع شي په معادلې کې تغیر نه راځي.

6- که د معادلې دواړه خواوي تر عین جذر لاندې شي په معادله کې تغیر نه راځي.

د یو مجهوله اوله درجه معادلې د حل طریقه:

که د معادلې دواړه خواو ته حدونه موجود وي نو معلوم عددونه د مساوات ښۍ خواته او مجهول حدونه د مساوات چپې خواته وړو.

هر حد چې د مساوات د یوې خوا څخه بلې خوا ته وړل کیږي که مثبت وي منفي کیږي که منفي وي مثبت کیږي که د ضرب په حالت کې وي په بل طرف کې مخرج ته ځي او که په مخرج کې وي په بل طرف کې ضربیږي.

مثال:

1: $x + 5 = 8$ $\quad x = 8 - 5$ $\quad x = 3$

2: $x - 7 = 11$ $\quad x = 11 + 7$ $\quad x = 18$

3: $3x = 36$ $\quad \frac{3x}{3} = \frac{36}{3}$ $\quad x = 12$

4: $\frac{x}{5} = 4$ $\quad 5 \times \frac{x}{5} = 4 \times 5$ $\quad x = 20$

5: $\frac{5}{x} - 3 = -2$ $\quad \frac{5}{x} = -2 + 3$ $\quad \frac{5}{x} = \frac{1}{1}$ $\quad x = 5$

6: $\frac{3}{x} + \frac{7}{x} + \frac{2}{x} = 36$

$$\frac{3 + 7 + 2}{x} = 36$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\frac{12}{x} = 36$ $\frac{12}{x} = \frac{36}{1}$ $36x = 12$

$\frac{36x}{36} = \frac{12}{36}$ $x = \frac{1}{3}$

جذري معادلې

هغه معادلې دي چې مجهول يې تر جذر لاندې وي

لکه $\sqrt{3x+30} + 11 = 17$

د جذري معادلو د حل طريقه:

يو جذري حد د مساوات يوې خواته پرېږدو نور جذري او غېرجذري حدونه د مساوات بلې خواته ورو. بيا د مساوات دواړه خواوې د جذر په درجه رفع کوو جذر د منځه ځي .که بيا هم په معادله کې جذر موجود ؤ عمليه تکراروو .

1- مثال:

$\sqrt{5x-4} + 8 = 14$

$\sqrt{5x-4} = 14 - 8 = 6$

$\sqrt{5x-4} = 6$

$\left(\sqrt{5x-4}\right)^2 = 6^2$

$5x - 4 = 36$

$5x = 36 + 4 = 40 \Rightarrow 5x = 40 \Rightarrow \frac{5x}{5} = \frac{40}{5} \Rightarrow x = 8$

$x = 8$

2- مثال:

$\sqrt{3x-2} + \sqrt{5x+6} = 10$

$\sqrt{3x-2} = 10 - \sqrt{5x+6}$

$\left(\sqrt{3x-2}\right)^2 = \left(10 - \sqrt{5x+6}\right)^2$

$3x - 2 = 100 - 20\sqrt{5x+6} + 5x + 6$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$2x + 108 = -20\sqrt{5x+6}$$
$$\frac{2x+108}{2} = \frac{-20\sqrt{5x+6}}{2}$$
$$x + 54 = -10\sqrt{5x+6}$$
$$(x+54)^2 = \left(-10\sqrt{5x+6}\right)^2$$
$$x^2 + 108x + 2916 = 100(5x+6)$$
$$x^2 + 108x + 2916 = 500x + 600$$
$$x^2 + 108x - 500x + 2916 - 600 = 0$$
$$x^2 - 392x + 2316 = 0$$
$$\acute{\Delta} = \acute{b}^2 - ac = 196^2 - 1 \times (2316)$$
$$\acute{\Delta} = 38416 - 2316 = 36100$$
$$\acute{\Delta} = 36100$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\acute{\Delta}}}{2a} = \frac{-(-196) \pm \sqrt{36100}}{2 \times 1} = \frac{196 \pm 190}{2}$$
$$x_1 = \frac{386}{2} = 193$$
$$x_2 = \frac{196-190}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

3- مثال:

$$\sqrt{3x-1} - \sqrt{3x+4} = -1 \; \sqrt{3x-1} = \sqrt{3x+4} - 1$$
$$\left(\sqrt{3x-1}\right)^2 = \left(\sqrt{3x+4} - 1\right)^2$$
$$3x - 1 = 3x + 4 - 2\sqrt{3x+4} + 1$$
$$2\sqrt{3x+4} = 6$$
$$\left(2\sqrt{3x+4}\right)^2 = 6^2$$
$$4(3x+4) = 36$$
$$12x + 16 = 36 \Rightarrow 12x = 36 - 16 \Rightarrow 12x = 20 \Rightarrow \frac{12x}{4} = \frac{20}{4}$$
$$3x = 5 \quad \Rightarrow x = \frac{5}{3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

3- مثال:

$$\sqrt{x}+\sqrt{x-7}=\frac{21}{\sqrt{x-7}}$$

$$\sqrt{x}=\frac{21}{\sqrt{x-7}}-\sqrt{x-7}$$

$$\left(\sqrt{x}\right)^2=\left(\frac{21}{\sqrt{x-7}}-\sqrt{x-7}\right)^2$$

$$x=\frac{441}{x-7}-2\left(\frac{21}{\sqrt{x-7}}\times\sqrt{x-7}\right)+x-7$$

$$\frac{441}{x-7}-49=0\Rightarrow 49x-343=441\Rightarrow 49x=441+343=784$$

$$49x=784$$

$$\frac{49x}{49}=\frac{784}{49}\quad\Rightarrow x=16$$

$$x=16$$

تمرين

لاندې جذري معادلې حل کړئ

1. $\sqrt{x^2+7x}-\sqrt{x+9}=0$ $\qquad x=1$

2. $\frac{2x^2-128}{\sqrt{3+x^2}}=0$ $\qquad x=8$

3. $\sqrt{x}+\sqrt{x+3}=\frac{91}{\sqrt{x+13}}$ $\qquad x=36$

4. $\frac{ax-1}{\sqrt{ax}+1}=4+\frac{\sqrt{ax}-1}{2}$ $\qquad x=\frac{81}{a}$

5. $\sqrt[5]{x+8}=\sqrt[10]{x^2+64x+36}$ $\qquad x=\frac{7}{12}$

6. $\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}=4+\frac{\sqrt{x}-1}{2}$ $\qquad x=81$

7. $\sqrt{x+13}-\sqrt{2x+1}=0$ $\qquad x=12$

8. $\sqrt{x}+\sqrt{x-\sqrt{1-x}}=1$ $\qquad x=\frac{16}{25}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

9. $\sqrt{x} + 5 = 6 - \sqrt{x+7}$ $\quad x = 9$

10. $2(x+2) = 1 + \sqrt{4x^2 + 9x + 14}$ $\quad x = \frac{5}{3}$

تمرین:

1. $\frac{5-x}{4} + \frac{x}{8} = 1$
2. $\frac{2}{x} - 3 = \frac{3}{x} - 8$
3. $\frac{4}{x-3} + \frac{5}{x-3} + \frac{7}{x-3} = 6$
4. $\frac{x}{2} - \frac{2x-8}{5} + \frac{4}{5} = 3$
5. $\frac{x-1}{4} + \frac{x-2}{3} + \frac{x-3}{2} + x - 4 = 4$
6. $\frac{2}{x} + \frac{3}{x+1} = 2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

څلورم فصل

دوه مجهوله معادلې

هغه معادلې دي چې دوه مجهوله ولري او د هر مجهول توان يې يو وي عمومي شکل يې دا دی.

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

a_1 ، a_2 ، b_2 ، b_2 ، c_1 او c_2 ثابت عددونه دي x او y مجهولونه دي څرنګه چې د هر مجهول توان يو دی نو ځکه ورته اوله درجه دوه مجهوله معادلې وايي.

مناقشه:

1- که $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ وي سيستم زيات حلونه لري.

2- که $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_1} \neq \frac{c_1}{c_2}$ وي سيستم حل نلري.

3- که $\frac{b_1}{b_2} \neq \frac{a_1}{a_2}$ وي سيستم يو حل لري.

د اوله درجه دوه مجهوله معادلو حل:

اوله درجه دوه مجهوله معادلې په (6) طريقو حليږي.

1- د جمع يا افناء په طريقه:

په دواړو معادلو کې د يوه مجهول ضريبونه مساوي کوؤ. که هم علامه ود معادلې يو د بل څخه منفي کوو او که مختلف العلامه وه معادلې جمع کوو پدې ترتيب د دوه مجهوله معادلو سيستم په يو مجهوله معادله بدليږي يو مجهوله معادله حلوو او د مجهول قيمت يې پيدا کوو بيا دا جذر د سيستم په يوه معادله کې وضع کوو د دويم مجهول قيمت لاس ته راځي.

مثال: لاندې سيستم حل کړئ؟

$$7x + 8y = 38$$
$$5x + 3y = 19$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$5(7x + 8y = 38)$$
$$7(5x + 3y = 19)$$
$$35x + 40y = 190$$
$$\pm 35x \pm 21y = \pm 133$$
$$19y = 57$$
$$y = 3$$
$$7x + 8y = 38$$
$$7x + 8 \times 3 = 38$$
$$7x + 24 = 38$$
$$7x = 38 - 24$$
$$7x = 14$$
$$x = 2$$

2- مثال:

$$3x - 5y = 2$$
$$4x + 2y = 20$$
$$2(3x - 5y = 2)$$
$$5(4x + 2y = 20)$$
$$6x - 10y = 4$$
$$20x + 10y = 100$$
$$26x = 104$$
$$x = 4$$
$$4(4) + 2y = 20$$
$$16 + 2y = 20$$
$$2y = 20 - 16$$
$$2y = 4$$
$$y = 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرين:

لاندې سيستمونه د افناء په طريقه حل کړئ؟

1- $\begin{array}{l} 5x + 4y = 32 \\ 8x - y = 29 \end{array}$

2- $\begin{array}{l} 6x - 8y = 4 \\ 7x - 2y = 12 \end{array}$

3- $\begin{array}{l} 6x + 3y = 21 \\ 5x + 7y = 26 \end{array}$

4- $\begin{array}{l} 9x - 2y = -3 \\ 4x + 3y = 57 \end{array}$

2- په تعويضي طريقه د دوه مجهوله معادلو حل:

د يوې معادلې څخه د يو مجهول قيمت د بل له جنسه پيدا کوو او په بله معادله کې يې د همغه مجهول په عوض وضع کوو د دوه مجهوله معادلو سيستم په يو مجهوله معادله بدليږي يو مجهوله معادله حلوؤ د مجهول قيمت يې پيدا کوو د مجهول دا قيمت د سيستم په يوه معادله کې وضع کوو د بل مجهول قيمت په لاس راځي.

مثال:

$$\begin{array}{l} 3x - 11y = 10 \\ 4x + 2y = 30 \end{array}$$

$$x = \frac{11y + 10}{3}$$

$$4\left(\frac{11y + 10}{3}\right) + 2y = 30$$

$$44y + 40 + 6y = 90$$

$$50y = 50$$

$$y = 1$$

$$3x - 11y = 10$$

$$3x - 11 \times 1 = 10$$

$$3x - 11 = 10$$

$$3x = 10 + 11$$

$$3x = 21$$

$$x = 7$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرين:

لاندې سیستمونه په تعویضي طریقه حل کړئ؟

-1 $\begin{aligned}3x + 13y &= 25\\ 2x + 2y &= 10\end{aligned}$

-2 $\begin{aligned}6x - 5y &= 20\\ 7x + 3y &= 41\end{aligned}$

-3 $\begin{aligned}11x + 5y &= 53\\ 8x - 9y &= -12\end{aligned}$

-4 $\begin{aligned}x - 2y &= 1\\ 2x + y &= 12\end{aligned}$

3- د مساوات په طریقه د اوله درجه دوه مجهوله معادلو حل:

د دواړو معادلو څخه د یو مجهول قیمت د بل مجهول له جنسه پیدا کوو او سره مساوي کوو یې د دوه مجهوله معادلو سیستم په اوله درجه یو مجهوله معادله بدلیږي یو مجهوله معادله حلوو د مجهول قیمت یې پیدا کوو د مجهول دغه قیمت د سیستم په یوه معادله کې وضع کوو د بل مجهول قیمت لاس ته راځي.

مثال: لاندې سیستم حل کړئ؟

$$\begin{aligned}3x + 7y &= 19\\ 5x - 2y &= 18\end{aligned}$$

$$3x + 7y = 19 \qquad\qquad 5x - 2y = 18$$

$$3x = 19 - 7y \qquad\qquad 5x = 18 + 2y$$

$$x = \frac{19 - 7y}{3} \ldots\ldots I \qquad\qquad x = \frac{18 + 2y}{5} \ldots\ldots II$$

څرنګه چې په I او II نمبر مساواتو کې چپ طرفونه مساوي دي نو ښي طرفونه یې هم مساوي دي نو لیکو.

$$\frac{19 - 7y}{3} = \frac{18 + 2y}{5}$$

$$3(18 + 2y) = 5(19 - 7y)$$

$$54 + 6y = 95 - 35y$$

$$6y + 35y = -54 + 95$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$41y = 41$$

$$\frac{41y}{41} = \frac{41}{41}$$

$$y = 1$$

$$3x + 7y = 19$$

$$3x + 7 \times 1 = 19$$

$$3x + 7 = 19$$

$$3x = 19 - 7$$

$$3x = 12$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{12}{3} \quad ; \quad x = 4$$

تمرین:

-1 $\begin{matrix} 4x + 2y = 14 \\ 15x - y = 10 \end{matrix}$ -2 $\begin{matrix} 7x - 3y = 5 \\ 8x - 4y = 0 \end{matrix}$

-3 $\begin{matrix} 11x + 6y = 40 \\ 2x + 9y = 31 \end{matrix}$ -4 $\begin{matrix} 9x - 3y = 21 \\ 8x + 7y = 38 \end{matrix}$

4-د دیترمینانت په طریقه د دوه مجهوله اوله درجه معادلو حل:

دیترمینانت په لغت کې (معین یا ثابت) ته وایي او په اصطلاح کې د اعدادو مربعي ترتیب ته د یترمینانت وایي لکه $D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$

د دیترمینانت پواسطه د دوه مجهوله معادلو حل :

د x او y د ضریبو دیترمینانت په D ښیو او قیمت یې پیدا کوو . د x د ضریبو په عوض ثابت عددونه لیکو په D_x یې ښیو قیمت یې پیدا کوو بیا د D په دیتر مینانت د y د ضریبو په عوض ثابت عددونه لیکو په D_y یې نیسو او قیمت یې پیدا کوو د $\frac{D_x}{D}$ څخه د x قیمت لاس ته راځي د $\frac{D_y}{D}$ څخه د y قیمت لاس ته راځي.

مثال: $\begin{matrix} 3x - 5y = 2 \\ 5x + y = 22 \end{matrix}$ د دیترمینانت پواسطه حل کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$D = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

$$D = a_1b_2 - a_2b_1 = 3 \times 1 - 5(-5) = 3 + 25 = 28 \Rightarrow D = 28$$

$$D_x = \begin{pmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{pmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1$$

$$D_x = 2 \times 1 - 22(-5) = 2 + 110 = 112 \qquad D_x = 112$$

$$D_y = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{pmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1$$

$$D_y = 3 \times 22 - 5(2) = 66 - 10 = 56 \qquad D_y = 56$$

$$x = \frac{Dx}{D} = \frac{112}{28} = 4 \qquad x = 4$$

$$y = \frac{Dy}{D} = \frac{56}{28} = 2 \qquad y = 2$$

5- دګراف پواسطه د اوله درجه دوه مجهوله معادلو حل:

په (   ) صفحه د تابع په بحث کې وګورئ.

6- د متریکس پواسطه د اوله درجه دوه مجهوله معادلو حل:

متریکس($Matrixes$):

او په اصطلاح کې د اعدادو مستطیلي ته وايي ترتيب ته متريکس وايي. لکه:

$$A = \begin{Bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{Bmatrix}$$

د متریکس په غتو خروفو ښودل کیږي او هغه اعداد یا حروف چې په متریکس کې لیکل کیږي د متریکس د عناصرو په نوم یادیږي.

هغه عناصر چې په افقي ډول لیکل شوی وي د متریکس د سطر په نوم یادیږي او هغه عددونه چې په عمودي ډول لیکل شوی وي د متریکس د ستن په نوم یادیږي د سطرونو شمیر په i او د ستونونو شمیر په j ښيئ چې i او j طبیعي عددونه دي. لکه:

$$A = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \dots \dots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \dots \dots a_{mn} \end{Bmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د متریکس مرتبه:

که د متریکس د سطرونو شمېر m او د ستونو شمېر یې n وي دغه متریکس ته $m \times n$ مرتبه متریکس وایي.

او داسې لیکل کیږي $A = \{a_{ij}\}_{m \times n}$

مثال: لاندې متریکسونه حل کړئ؟

$(a_{ij})_{2\times2} = (i+j)_{2\times2}$ -1 $\qquad$ $(a_{ij})_{3\times2} = (i+j)_{3\times2}$ -2

حل:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$a_{ij} = i + j$ $\qquad$ $a_{12} = 1 + 2 = 3$ $\qquad$ $a_{21} = 2 + 1 = 3$

$a_{11} = 1 + 1 = 2$

$a_{22} = 2 + 2 = 4$

په نتیجه کې لاندې متریکس لاس ته راځي.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

د متریکس ډولونه:

متریکس په اوه ډوله دی.

1- سطري متریکس: هغه متریکس چې یوازې یو سطر ولري لکه $A = [4 \quad 5 \quad 9]_{1\times3}$

2- ستوني متریکس: هغه متریکس دی چې یو ستون ولري لکه $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}_{3\times1}$

3- صفري متیریکس: هغه متریکس دی چې ټول عناصر یې صفر وي.

$$0_{3\times2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 0_{3\times2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4- مربعي متیریکس: هغه متریکس دی چې د سطرونو شمېر یې د ستونو د شمېر سره مساوي وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لکه :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 9 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

مربعي یا مستطیلي متریکسونه دوه قطرونه لري ، چې یوه ته اصلي قطر یا (Mean diagonal) او بل ته (*Minor diagonal*) فرعي قطر وایي.

$a_{11}, a_{22} \ldots\ldots\ldots a_{nn}$ اصلي قطر دی او $a_{nn} \ldots\ldots\ldots a_{12}$ ، a_{21} فرعي قطر دی.

لاندي متریکسونه څه ډول متریکسونه دي. 3×1 او 1×4

5- قطري متریکس: هغه متریکس دی چې د اصلي قطر څخه په غیر نور عناصر یې صفرونه وي.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

6- سکالر متریکس: که د قطري متریکس د اصلي قطر عناصر مساوي وي دې متریکس ته سکالر متریکس وایي.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

7- واحد متریکس: که د قطري متریکس داسې قطر عناصر یو (1) وي نو دې متریکس ته واحد متریکس وایي.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مثلثي متریکس: که د یوه متریکس د اصلي قطر لاندې او یا پورته عناصر صفرونه وي دې متریکس ته مثلثي متریککس وایي لکه.

پورتنی مثلثي متریکس په لاندې ډول دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 8 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

لاندې مثلثي متريکس دی.

په انګليسي کې ورته *Upper Tringolar matrix* او *Lower Tringolar matrix* وايي.

متقابل یا متضاد متریکس:

هغه متريکسونه چې عناصر يې يو د بل متضاد وي لکه: $A(a_{ij})_{m\times n} = A(-a_{ij})_{m\times n}$

$$-A = \begin{bmatrix} -2 & -4 & +4 \\ -3 & -5 & 2 \\ 1 & -6 & -7 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 3 & 5 & -2 \\ -1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

د متريکسونو جمع:

د متريکسونو په جمع کې د متريکسو د مرتبې مساوات ضرور دي يعني که a_{ij} او b_{ij} دوه متريکسونه ولرو کولای شو چې دغه دوول متريکسونه جمع کړو $a_{ij} + b_{ij} = c_{ij}$

مثال: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$ او $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ متريکسونه جمع کړئ؟

حل:

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+3 & 2+2 \\ -2+1 & 0+2 \\ 1+0 & 7-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

د متريکس تفريق:

په تفريق کې هم د متريکس د تفريقولو لپاره د متريکس د مرتبو مساوات ضرور دی.

که a_{ij} او b_{ij} وي نو

$$a_{ij} - b_{ij} = c_{ij}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ او $B = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 04 \end{bmatrix}$ دوه متریکسونه راکړ شویدي $A - B$ متریکس پیدا کړئ؟

$$A - B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 2-(-2) & -1-(-1) \\ 3-3 & 1-(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+2 & -1+1 \\ 3-3 & +1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

د متریکسونو د جمع او تفریق خاصیتونه:

1- د متریکسونو جمع د تبدیلی د قانون پیروي کوي مګر د متریکسونو تفریق د تبدیلی د قانون پیروي نه کوي. لکه

$A + B = B + A$

$A - B \neq B - A$

2- د متریکسونو جمع او تفریق د تبدیلی د خاصیت پیروي کوي.

$(A \pm B) \pm C = A \pm (B \pm C)$

3- د عینیت عنصر *Identity element*: په جمع کې صدق کوي مګر د متریکسونو په تفریق کې ی‌ې نه کوي.

$A + 0 = 0 + A = A$

په متریکسونو کې د سکالر ضرب:

په یوه متریکس کې کولای شو چې حقیقي عدد ضرب کړو یعنی که $A = a_{ij}$ او $K \in IR$ وي نو KA د C سره مساوي دی.

مثال: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ او $k = 2$ وي KA پیدا کړئ؟

$$KA = 2\begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times1 & 2\times3 & 2\times6 \\ 2\times2 & 2\times1 & 2\times0 \\ 2\times1 & 2\times0 & 2(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 12 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه متریکسونو ضرب:

د متریکس د ضرب لپاره باید د یوه متریکس د سطرونو شمیر د بل متریکس د ستونو د شمیر سره مساوي وي یعنی که $A = (a_{ij})_{m\times n}$ او $B = (b_{ij})_{n\times p}$ وي کولای شو چې ضرب یې کړو.

$$A_{m\times n} \times B_{n\times p} = C_{m\times p}$$

طریقه یې داسې ده چې د یوه متریکس لمړی سطر د دویم متریکس په ټولو ستونو کې په نوبت سره ضربوو او په اول سطر کې یې لیکو او په همدې ترتیب تر اخره اجرائت کوو د متریکسونو د ضرب حاصل لاس ته راځي.

مثال: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ او $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ وي $A \times B$ پیدا کړئ؟

حل:

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times 1 + 2\times 0 + 1(-1) \\ -1\times 1 + 0\times 0 + 0(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0+1 \\ -1+0+0 \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

مثال: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ او $B = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$ وي $A \times B$ پیدا کړئ؟

$$A \times B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(-3) + (-1)(-4) & 2\times 4 + (-1)(-3) \\ 1(-3) + 2(-4) & 1\times 4 + 2(-3) \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} -6+4 & 8+3 \\ -3-8 & 4-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 11 \\ -11 & -2 \end{bmatrix}$$

د متریکس د ضرب خواص:

1- د متریکس ضرب عمیله د تبدیلی د قانون پیروي نه کوي یعني:

$$A \times B \neq B \times A$$

2- د متریکسونو ضرب د اتحادي خاصیت پیروي کوي

$$(A \times B)C = A(B \times C)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

3- د متريکسونو ضرب د توزيعي خاصيت پيروي کوي.

$$A(B+C) = AB + Ac$$

د يوه متريکس ترانسپوز متريکس:

که د يوه متريکس سطر په ستون او ستون يې په سطر بدل شي نوی متريکس ته ترانسپوز متريکس وايي.

که $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ وي نو $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ته ترانسپوز متريکس وايي په A^T ښودل کيږي.

که $A = A^T$ وي نو په دې صورت کې A ته متناظر متريکس وايي.

لکه $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ يو متناظر متريکس دی ځکه $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

د ترانسپوز متريکس خواص:

1- ترانسپوز متريکس د خپل لمړني متريکس سره مساوي وي.

$$(A^T)^T = A = \left[(a_{ij})^T\right]^T = (a_{ij})A$$

2- د دوه يا څو ترانسپوز متريکسو د جمع او تفريق حاصلونه د لمړنيو متريکسو د جمع د حاصلو او تفريق د حاصلو د ترانسپوزو سره مساوي دي.

$$(A \pm B \pm C \pm \ldots\ldots)^T = A^T + B^T + C \ldots\ldots\ldots$$

3- $(AB)^T = A^T \times B^T$

4- $(\alpha A)^T = \alpha \times A^T$

5- $(-A)^T = -A^T$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ديترمينانت

مربعي متريكس ته ديترمينانت وايي.

لکه که $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ متريکس ولرو نو $A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ يو ديترمينانت دی او په $|A|$ سره ښودل کيږي.

$a_{11}a_{22}$ اصلي قطراو $a_{12}a_{21}$ ته فرعي قطر وايي.

د ديترمينانت محاسبه

د اصلي قطر څخه فرعي قطر منفي کوو $|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$

مثال: $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}$ قيمت پيدا کړئ

حل: $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 3 \times 2 - 7 \times 4 = 6 - 28 = -22$

د ديترمينانت د حل طريقه

ديترمينانت په دوه طريقو حليږي.

1- دساروس په طريقه 2- دکرامر په طريقه

1- دساروس د ديترمينانت په طريقه لول

اول ستون او دريم سطر د منځه وړواو پاتي 2×2 مرتبي ديترمينانت محاسبه کوواو دتقاطع عدد کې يې ضربوو.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})a_{31}$$

دويم ستون او دريم سطر د منځه وړو او د تقاطع عدد کې يې ضربوو.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21})a_{32}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم ستون او دریم سطر د منځه ورو. او دتقاطع په عدد کې یې ضربوو.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})a_{33}$$

په لاس راغلي عددونه جمع کوو د دیترمینانت قیمت لاس ته راځي

$$|A| = (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})a_{31} + (a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21})a_{32} + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})a_{33}$$

$$|A| = a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{21}a_{32} + a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

مثال: د $|B| = \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & +2 \\ 4 & -1 & +7 \end{vmatrix}$ دیترمینانت حل کړئ

$$1)\ \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix} = 4\big(6 \times 2 - (-3 \times 1)\big) = 4(12 + 3) = 4 \times 15 = 60$$

$$2)\ \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix} = -1\{2 \times 2 - 5(-3)\} = -1(4 + 15) = -1(19) = -19$$

$$3)\ \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix} = 7(2 \times 1 - 6 \times 5) = 7(2 - 30) = 7(-28) = -196$$

$$|A| = 60 - 19 - 196 = 60 - 215 = -155$$

دویم- د کرامر په طریقه:

د دیترمینانت دوه لمړي ستونونه د دیترمینانت د باندي لیکو د اصلي قطرو د مجموعی څخه د فرعي قطرومجموعه منفي کوو د دیترمینانت قیمت لاس ته راځي.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$|A| = \{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}\} - \{a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال:
$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$|B| = \{2 \times 1 \times 7 + 6 \times 2 \times 4 + (-3) \times 5(-1)\}$$
$$-\{6 \times 5 \times 7 + 2 \times 2(-1) + (-3) \times 1 \times 4\}$$
$$|B| = (14 + 48 + 15) - (210 - 4 - 12) = 77 - (210 - 16) = 77 - 194$$
$$= -117$$
$$|B| = -117$$

د دیترمینانت خواص

1-که د $A_{n\times n}$ د متریکس د یوه سطر یا یوه ستون ټول عناصر صفر وي نو د دیترمینانت د صفر سره مساوي دی.

$$|B| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0 \quad \text{او} \quad |A| = \begin{vmatrix} 0 & a & d \\ 0 & b & e \\ 0 & c & f \end{vmatrix} = 0$$

1- که د $A_{n\times n}$ متریکس دوه سطرونه یا دوه ستونونه سره مساوي وي نو اړوند دیترمینانت یې صفر دي

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = |A| = \begin{vmatrix} a & a & d \\ b & b & e \\ c & c & f \end{vmatrix} = 0$$

2- که د $A_{n\times n}$ د متریکس د یوه ستون یا یوه سطر عناصر د بل ستون یا سطر د عناصرو سره ګډ فکتور ولري نو $|A| = 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ \lambda a & \lambda b & \lambda c \\ d & e & f \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = \lambda(0) = 0$$

3- د A د متریکس دیترمینانت د A^T دمتریکس د دیترمینانت سره مساوي دی

د 2×2 مرتبي متریکس ضربي معکوس د معکوس متریکس سره د مربعي متریکس د ضرب حاصل (1) کیږي.

$$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د متریکس قیمت $|A| = 0$ وي نودی متریکس ته *Singular Matrix* وائي اوکه $|A| \neq 0$ وي نو دی متریکس ته *Non singular Matrix* وایي.

هغه متریکسونه چې معکوس لري .

1- چې متریکسونه مربعي وي یعنی د $A_{n\times n}$ شکل ولري.

2- چې $|A| \neq 0$ وي.

مثال: $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$ او $B = \begin{bmatrix} -7 & -3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ متریکسونه یو د بل معکوس دي .

حل:-

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -7 & -3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} (-1)(-7) + 3(-2) & (-1)(-3) + 3(-1) \\ 2(-7) + (-7)(-2) & 2(-3) + (-7)(-1) \end{bmatrix}$$
$$AB = \begin{bmatrix} 7-6 & 3-3 \\ -14+14 & -6+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$BA = \begin{bmatrix} -7 & -3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7-6 & -21+21 \\ 2-2 & -6+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

لیدل کیږي چې $AB = BA = 1$ دي نو A او B یو د بل معکوس دي.

الحاقي متریکس Adjoin of Matrix

که د یوه متریکس د اصلي قطر د عناصرو ځایونه بدل شي او د فرعي قطر د عناصرو علامی تغیر شي دغه متریکس ته الحاقي متریکس وایي.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow AdjA = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$
$$K = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow AdjA = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

الحاقي متریکس د یوه متریکس د معکوس متریکس د لاس ته راوړلو لپاره استعمالیږي طریقه یې داسې ده چې دالحاقي متریکس د دیترمینانت دقیمت په معکوس کې ضربوو د راکړشوي متریکس معکوس متریکس لاس ته راځي.

$$A^{-1} = \frac{AdjA}{|A|}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال :- د $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ معکوس متریکس پیدا کړئ؟

حل:- $|A| = -3(6) - (-2)(5) = -18 + 10 = -8$

$$A^{-1} = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{8} & -\frac{2}{8} \\ \frac{-5}{-8} & \frac{-3}{-8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{9}{4} - \frac{5}{4} & \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \\ -\frac{15}{4} + \frac{15}{4} & -\frac{5}{4} + \frac{9}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

په عمومي ډول ویلای شوچې که د $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ په متریکس کې $|A| \neq 0$ وي نو دغه متریکس معکوس لري او د لاندې فارمول پواسطه پیدا کیږي.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

تمرین

د لاندې متریکسو معکوس متریکس پیدا کړئ

a: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -10 & -2 \end{pmatrix}$

b: $B = \begin{pmatrix} 5 & 19 \\ 4 & 15 \end{pmatrix}$

د متریکس پواسطه ددوه مجهوله معادلو حل

$$a_1x + b_1yc = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

په پورته ډول د دوه مجهوله معادلو یو سیستم راکړ شوی دې غواړو چې دمتریکس پواسطه یې حل کړو د x او y د ضریبو متریکس په A ښیو $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ د ثابت عددو متریکس په B ښیي. اود x او y متریکس په X ښیو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ او } B = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

نو ليکو چې:

$$AX = B \Longrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B = (A^{-1}A)X = A^{-1}B \Rightarrow 1X = A^{-1}B$$

يا $X = A^{-1}B$

مثال: لاندې ددوه مجهوله معادلو سيستم د متريکس په طريقه حل کړئ؟

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$$

حل:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0$$

$$Adj\ A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 5 & -2 \times 7 \\ -1 \times 5 & 1 \times 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -14 \\ -5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$x = 1$ & $y = 2$

تمرين

لاندې د دوه مجهوله معادلو سيستمونه د متريکس په طريقه حل کړئ:

$$\begin{cases} 5x - 2y = 2 \\ 3x - y = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 4x - 6y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3p - 5q = 7 \\ 2p - 4q = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 5x - 2y = 2 \end{cases}$$

د ګوس Goose طريقه د افناً طريقه ده.

په همدی ترتيب کولای شو چې خلورمجهوله،پنځه مجهوله او نوری څو مجهوله معادلی په مختلفو طريقو حل کړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم فصل

دویمه درجه یومجهوله معادلې

هغه معادلې دي چې یو مجهول ولري او د مجهول توان یې دوه وي. عمومي شکل یې دا دي:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

په دغه عمومي شکل کې b, a او c ثابت عددونه دي (x) مجهول دي څرنګه چې د مجهول توان دوه دی نو ځکه ورته دویمه درجه یو مجهوله معادله وایي.

خصوصي حالتونه

1- که b=c=0 وي معادله لاندې شکل غوره کوي $ax^2 = 0$ ددغې معادلې دواړه جذرونه صفر دي یعنې :

$$x_1 = 0 \qquad \& \qquad x_2 = 0$$

2- که $c = 0$ وي نو معادله لاندې شکل غوره کوي:

$$ax^2 + bx = 0$$

(x) مشترک نیسو او معادله د دوه قوسو په حاصل ضرب بدلوو بیا هر قوس په نوبت سره دصفر سره مساوي کووا و د معادلې جذرونه پیدا کوو.

$$ax^2 + bx = x(ax + b) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$ax + b = 0$$

$$ax = -b$$

$$\frac{ax}{a} = \frac{-b}{a}$$

$$x_2 = -\frac{b}{a}$$

مثال: $5x^2 + 11x = 0$ معادله حل کړئ.

حل:

$$5x^2 + 11x = x(5x + 11) = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$cx_1 = 0$$
$$5x + 11 = 0$$
$$5x = -11$$
$$\frac{5x}{5} = \frac{-11}{5}$$
$$x_2 = -\frac{11}{5}$$

3- که $b = 0$ وي نو معادله لاندې شکل غوره کوي $ax^2 + c = 0$

د دغسې معادلو د حل کافي او لازمي شرط دادې چې a او c باید مختلف العلامه وي .اوکه نه نو د حقیقي اعدادو په سیټ کې حل نلري .د مختلطو اعدادو په سیټ کې حل لري.

مثال: $3x^2 - 12 = 0$ معادله حل کړئ

حل:

$$3x^2 - 12 = 0$$
$$3x^2 = 12$$
$$\frac{3x^2}{3} = \frac{12}{3}$$
$$x^2 = 4$$
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{4}$$
$$x_1 = 2 \quad \& \quad x_2 = -2$$

تمرین

لاندې معادلې حل کړئ؟

1: $5x^2 + 21x = 0$ 2: $11x^2 - 22x = 0$ 3: $2x^2 + 28x = 0$

4: $7x^2 - 63 = 0$ 5: $4x^2 + 16 = 0$ 6: $-7x^2 + 28 = 0$

د دویمه درجه یو مجهوله معادلو د عمومي شکل د حل طریقې

دویمه درجه یو مجهوله معادلې په څلورو طریقو حلیږي.

1- د تجزیې پواسطه ددویمه درجه یو مجهوله معادلو حلول

2- د تکمیل مربع پواسطه ددویمه درجه یو مجهوله معادلوحلول

(c) ketabton.com: The Digital Library

3- د محمد بن موسی دفارمول پواسطه د دویمه درجه یو مجهوله معادلو حلول

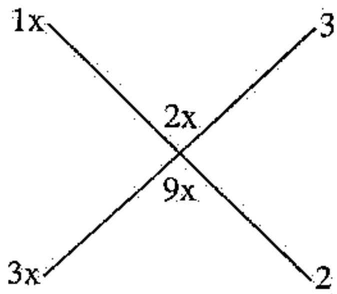
4- دګراف پواسطه ددویمه درجه یو مجهوله معادلو حلول

1- د تجزیې پواسطه دیو مجهوله دویمه درجه معادلوحل:

(a) او (c) تجزیه کوو د ضربي عواملو څخه يي داسې یوه یوه جوړه ضربي عوامل راخلو چې د ضرب حاصلونو مجموعه يي (b) شي بیا دغه ضربي عوامل په چارت کې لیکواو د چارت له مخې قوسونه جوړوو او د هر قوس جذر پیدا کوو د معادلې جذرونه لاس ته راځي

مثال:- $3x^2 + 11x + 6 = 0$ معادله د تجزیې پواسطه حل کړئ.

$$a = 3 = 1.3 = -1(-3)$$
$$c = 6 = 2.3 = 1.6 = -2(-3) = -1(-6)$$
$$b = 11$$



$$(x+3)(3x+2) = 0$$
$$x + 3 = 0$$
$$x_{1=-3}$$
$$3x + 2 = 0$$
$$3x = -2$$
$$\frac{3x}{3} = \frac{-2}{3} \qquad x_2 = -\frac{2}{3}$$

2- د تکمیل مربع پواسطه د دویمه درجه یو مجهوله معادلو حل:

فرضاً د $5x^2 - 17x + 6 = 0$ معادله راکړشوی ده غواړو چې د تکمیل مربع پواسطه يي حل کړو ټول حدونه د x^2 په ضریب ویشو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{5x^2}{5}-\frac{17x}{5}+\frac{6}{5}=0$$

$$x^2-\frac{17}{5}x+\frac{6}{5}=0$$

$$x^2-\frac{17}{5}x=-\frac{6}{5}$$

$$x^2-\frac{17}{5}x+\left(\frac{17}{10}\right)^2=\left(\frac{17}{10}\right)^2-\frac{6}{5}$$

$$\left(x-\frac{17}{10}\right)^2=\frac{289}{100}-\frac{6}{5}=\frac{289-120}{100}=\frac{169}{100}$$

$$\sqrt{\left(x-\frac{17}{10}\right)^2}=\sqrt{\frac{169}{100}}$$

$$x-\frac{17}{10}=\pm\frac{13}{10}$$

$$x=\frac{17}{10}\pm\frac{13}{10}=\frac{17\pm 13}{10}$$

$$x_1=3 \qquad x_2=\frac{2}{5}=0.4$$

3- د محمد بن موسی د فارمول پواسطه ددویمه درجه یو مجهوله معادلو حل:

لمړی د محمد بن موسی فارمول ثبوتوو.

$$ax^2+bx+c=0$$

$$\frac{ax^2}{a}+\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}=\frac{0}{a}$$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}=\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

داسانتیا لپاره b^2-4ac په Δ ښیو:

$$\Delta=b^2-4ac$$

نو:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

د (Δ) په باب دری حالته موجود دي.

1- چې $\Delta > 0$ وي معادله دوه جذرونه لري اوجذرونه یې:

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

په واسطه پیدا کیږي.

2- چې $\Delta = 0$ وي معادله یو جذر لري اوجذر یې د $x=\frac{-b}{2a}$ پواسطه پیدا کیږي.

3- چې $\Delta < 0$ وي معادله دحقیقي اعدادو په سیټ کې جذر نه لري.

مثال: لاندې معادله حل کړئ؟

$$7x^2-13x-24=0$$

حل:

$$\Delta=b^2-4ac=(-13)^2-4\times7\times(-24)$$

$$\Delta=169+672=841$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-13)+\sqrt{841}}{2\times 7}=\frac{13+29}{14}=\frac{42}{14}=3$$

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-13)-\sqrt{841}}{2\times 7}=\frac{13-29}{14}=\frac{-16}{14}=-\frac{8}{7}$$

$x_{1=3}$ $\quad x_2=-\frac{8}{7}$

مثال: لاندي معادله حل کړئ؟

$$9x^2+30x+25=0$$

حل:

$$\Delta=b^2-4ac=30^2-4\times 9\times 25=900-900=0$$
$$\Delta=0$$

معادله يوجذر لري.

$$x=\frac{-b}{2a}=-\frac{30}{2\times 9}=-\frac{5}{3}$$

مثال: $2x^2+3x+10=0$ معادله حل کړئ؟

حل:

$$\Delta=b^2-4ac=3^2-4\times 2\times 10=9-80=-71$$

ځرنګه چې $0>\Delta$ دي نومعادله جذر نه لري.

تمرين

لاندې معادلی د تجزيې پواسطه حل کړئ.

1: $3x^2+5x-42=0$ 2: $7x^2-29x+4=0$ 3: $2x^2+3x-14=0$

لاندې معادلی دتکميل مربع پواسطه حل کړئ.

1: $11x^2-17x-48=0$ 2: $13x^2+7x-360=0$ 3: $8x^2-65x+102=0$

لاندې معادلی د محمد بن موسی د فارمول پواسطه حل کړئ.

1: $2x^2+3x-65=0$ 2: $9x^2-43x+48=0$

3: $25x^2-11x-192=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دمحمد بن موسی په فارمول کې اختصار

که b جفت وي د b نیمایي په $\acute{b}$ ښیو $\frac{b}{2}=\acute{b}$ او $b=2\acute{b}$ کیږي نو د محمد بن موسی په فارمول کې د b په عوض $(2\acute{b})$ لیکو:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(2\acute{b})\pm\sqrt{(2\acute{b})^2-4ac}}{2a}=\frac{-2\acute{b}\pm\pm\sqrt{4\acute{b}^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-2\acute{b}\pm\sqrt{4(\acute{b}^2-ac)}}{2a}=\frac{-2\acute{b}\pm2\sqrt{\acute{b}^2-ac}}{2a}=\frac{2\left(-\acute{b}\pm\sqrt{\acute{b}^2-ac}\right)}{2a}$$

$$=\frac{-\acute{b}\pm\sqrt{\acute{b}^2-ac}}{a}$$

$$x=\frac{-\acute{b}\pm\sqrt{\acute{b}^2-ac}}{a}$$

داسانتیا لپاره $\acute{b}^2-\mathrm{ac}$ په $\acute{\Delta}$ ښیو یعنې:

$$\acute{\Delta}=\acute{b}^2-ac$$

د $\acute{\Delta}$ په باب هم دری حالته موجود دي.

1- که $\acute{\Delta}>0$ وي معادله دوه جذره لري اوجذرونه یې د $x=\frac{-\acute{b}\pm\sqrt{\acute{\Delta}}}{a}$ پواسطه پیدا کیږي.

2- که $\acute{\Delta}=0$ وي معادله یوجذرلري، اوجذر یې د $x=\frac{-\acute{b}}{a}$ پواسطه پیدا کیږي

3- که $\acute{\Delta}<0$ وي معادله جذرنه لري.

مثال:- $3x^2+14\mathrm{x}-40=0$

$$\acute{\Delta}=\acute{b}^2-\mathrm{ac}=7^2-3(-40)=49+120=169$$

$$x=\frac{-\acute{b}\pm\sqrt{\acute{\Delta}}}{a}=\frac{-14\pm13}{3}$$

$$x_1=-\frac{1}{3}\qquad x_2=-9$$

مثال:- $4x^2+12\mathrm{x}+9=0$ معادله حل کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\acute{\Delta}= \acute{b}^2 - ac = 6^2 - 4 \times 9 = 36 - 36 = 0$$

$$\acute{\Delta}= 0$$

معادله يو جذر لري.

$$x = -\frac{\acute{b}}{a} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \quad so \quad x = \frac{3}{2}$$

مثال:- لاندې معادله حل کړئ؟

$$5x^2 - 2x + 4 = 0$$

$$\acute{\Delta}= \acute{b}^2 - ac = (-1)^2 - 5 \times 4 = 1 - 20 = -19$$

$$\acute{\Delta}= -19$$

$$\acute{\Delta}< 0$$

معادله جذر نه لري.

تمرين

1: $3x^2 + 8x - 28 = 0$

2: $11x^2 - 12x - 63 = 0$

3: $7x^2 + 14x - 56 = 0$

د يو مجهوله دويمه درجه معادلو د جذرو او ضريبو تر منځ ارتباط:

1: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

2: $x_1 x_2 = \frac{b}{a}$

3: $x_1{}^2 + x_2{}^2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2} = s^2 - 2p$

4: $x_1{}^3 + x_2{}^3 = s^3 - 3sp = \frac{3abc - b^3}{a^3}$

5: $x_1{}^4 + x_2{}^4 = s^4 - 4s^2 p + 2p^2 = \frac{b^4 - 4ab^2c + 2a^2c^2}{a^4}$

1- د $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ثبوت

دمحمد بن موسی فارمولونه ليکو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

فارمولونه طرف په طرف جمع کوو:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

2- د $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ ثبوت

د محمد بن موسی فارمولونه لیکو:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

فارمولونه طرف په طرف ضربوو:

$$x_1 . x_2 = \left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

$$x_1 . x_2 = \frac{b^2 - \sqrt{\Delta}^2}{4a^2} = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4aa} = \frac{c}{a}$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

3: د $x_1{}^2 + x_2{}^2 = \frac{b^2-2ac}{a^2}$ ثبوت

$$x_1{}^2 + 2x_1x_2 + x_2{}^2 = (x_1 + x)^2$$

$$x_1{}^2 + x_2{}^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_1{}^2+x_2{}^2=\left(-\frac{b}{a}\right)^2-2\left(\frac{c}{a}\right)=\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}=\frac{b^2-2ac}{a^2}$$

$$x_1{}^2+x_2{}^2=\frac{b^2-2ac}{a^2}$$

4: د $x_1{}^3+x_2{}^3=s^3-3sp=\frac{3abc-b^3}{a^3}$ ثبوت

$$x_1{}^3+3x_1{}^2x_2+3x_1x_2{}^2+x_2{}^3=(x_1+x_2)^3$$

$$x_1{}^3+x_2{}^3=(x_1+x_2)^3-3x_1{}^2x_2-3x_1x_2{}^2$$

$$x_1{}^3+x_2{}^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)$$

$$x_1{}^3+x_2{}^3=\left(-\frac{b}{a}\right)^3-3\left(\frac{c}{a}\right)\left(-\frac{b}{a}\right)$$

$$x_1{}^3+x_2{}^3=-\frac{b^3}{a^3}+\frac{3bc}{a^2}=\frac{-b^3+3abc}{a^3}=\frac{3abc-b^3}{a^3}$$

$$x_1{}^2+x_2{}^2=\frac{3abc}{a^3}$$

5: د $x_1{}^4+x_2{}^4=s^4-4s^2p+2p^2=\frac{b^4-4ab^2c+2a^2c^2}{a^4}$ ثبوت

$$x_1{}^4+2x_1{}^2x_2{}^2+x_2{}^4=(x_1{}^2+x_2{}^2)^2$$

$$x_1{}^4+x_2{}^4=(x_1{}^2+x_2{}^2)^2-2x_1{}^2x_2{}^2$$

$$x_1{}^4+x_2{}^4=(x_1{}^2+x_2{}^2)^2-2(x_1x_2)^2$$

$$x_1{}^4+x_2{}^4=\left(\frac{b^2-2ac}{a^2}\right)^2-2\left(\frac{c}{a}\right)^2$$

$$x_1{}^4+x_2{}^4=\frac{b^4-4ab^2c+4a^2c^2}{a^4}-\frac{2c^2}{a^2}$$

$$x_1{}^4+x_2{}^4=\frac{b^4-4ab^2c+4a^2c^2-2a^2c^2}{a^4}$$

$$x_1{}^4+x_2{}^4=\frac{b^4-4ab^2c+2a^2c^2}{a^4}$$

مثال: د لاندې معادلې د جذرونو مجموعه،د جذرونو د ضرب حاصل، دجذرو د مربعګانو مجموعه پیدا کړئ:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$5x^2 + 7x - 34 = 0$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = -\frac{7}{5}$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-34}{5}$$

$$x_1{}^2 + x_2{}^2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2} = \frac{7^2 - 2 \times 5 \times (-34)}{5^2} == \frac{49 + 340}{25} = \frac{389}{25}$$

$$x_1{}^2 + x_2{}^2 = \frac{389}{25}$$

$$x_1{}^3 + x_2{}^3 = \frac{3abc - b^3}{a^3} = \frac{3 \times 5 \times 7 \times (-34) - 7^3}{5^3} = \frac{-3570 - 343}{125} = \frac{3913}{125}$$

دجذرو له مخې د يو مجهوله دويمه درجه معادلې جوړول

که د يوې معادلې جذرونه راکړ شوي وي او وغواړو چې معادله يې پيدا کړو نو جذرونه د معادلې د جوړولو په فارمول کې وضع کوو د راکړشوو جذرو مربوطه معادله لاس ته راځي . د معادلې د جوړولو فارمولونه دوه دي:-

1: $x^2 + (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0$

2: $(x - x_1)(x - x_2) = 0$

د $x^2 + (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0$ ثبوت

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = \frac{0}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0$$

مثال:- د يوې معادلې جذرونه په ترتيب سره $x_1 = 5$ او $x_2=-7$ دي معادله يې پيدا کړئ

حل:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0$$
$$x^2-(5-7)x+(5)(-7)=0$$
$$x^2-(-2)x-35=0$$
$$x^2+2x-35=0$$

تمرين

په لاندې ډول د معادلو جذرونه راکړ شوي دي معادلی حل معادلې په لاس راوړئ؟

1: $x_1=3$ & $x_2=\frac{3}{5}$ 2: $x_1=\frac{7}{3}$ & $x_2=5$

3: $x_1=\sqrt{3}$ & $x_2=2$

د دويمه درجه يومجهوله معادلو دجذرو مطالعه کول

دجذرو علامی په يوه جدول مطالعه کوو

که $S>0$ وي دواړه جذرونه مثبت دي	که $P>0$ وي جذرونه هم علامه دي	که $\Delta>0$ وي معادله دوه جذره لري
که $S<0$ وي دواړه جذرونه منفي دي	که $P>0$ وي جذرونه هم علامه دي	که $\Delta>0$ وي معادله دوه جذره لري
که $S>0$ وي لوی جذر مثبت دي	که $P<0$ وي جذرونه مختلف العلامه دي	که $\Delta>0$ وي معادله دوه جذره لري
که $S<0$ وي لوی جذر منفي دي	که $P<0$ وي جذرونه مختلف العلامه دي	که $\Delta>0$ وي معادله دوه جذره لري
که $S>0$ وي لوی جذر مثبت دي		$\Delta=0$ وي معادله يو جذر لري
که $S<0$ وي لوی جذر منفي دي		$\Delta=0$ وي معادله يو جذر لري
	معادله جذر نه لري	$\Delta<0$ وي

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د $3x^2 + 5x - 22 = 0$ دجذروعلامي مطالعه کړئ؟

$$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \times 3 \times (-22) = 25 + 264 = 289$$

$$\Delta = 289$$

$\Delta > 0$ معادله دوه جذره لري.

$$p = \frac{c}{a} = \frac{-22}{3}$$

$p < 0$ جذرونه مختلف العلامه دي.

$$s = \frac{-b}{a} = \frac{-5}{3}$$

$s < 0$ لوی جذر یي منفي دی.

د دیکارت قاعده

دیکارت ددویمه درجه معادلو د علامو تغیر ته تحول وایي.

دیکارت وایي:

1- که دویمه درجه معادلو دعلامو دوه تحوله لرل دمعادلی دواړه جذرونه مثبت دي

2- که د علامو تحول یو ؤ د معادلی یو جذر مثبت دي.

3- که په معادله د علامو تحول نه ؤ نو معادله مثبت جذر نه لري دواړه جذرونه یي منفي دي.

لکه:

$5x^2 - 17x + 6 = 0$ دواړه جذرونه یي مثبت دي.

$3x^2 + 7x - 26 = 0$ یو جذر یي مثبت دي.

$x^2 + 169x + 4 = 0$ دواړه جذرونه یي منفي دي.

دهغه معادلو حلول چې په دویمه درجه یو مجهوله معادلو بدلیږي:

شپږ قسمه معادلې په دویمه درجه یو مجهوله معادلو بدلیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

1- دریمه درجه معادلې:

هغه دریمه درجه معادلې چې د $ax^3 + bx^2 + cx = 0$ شکل ولري.دداسې معادلود حل لپاره x مشترک نیسو.اومعادله د دوه فکتورو په حاصل ضرب بدلوو.هر فکتورد صفر سره مساوي کووډمعادلې جذرونه لاس ته راځي.

مثال:- $5x^3 + 3x^2 - 14x = 0$

$$x(5x^2 + 3x - 14) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$5x^2 + 3x - 14 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 5 \times (-14) = 9 + 280 = 289$$

$$\Delta = 289$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{289}}{2 \times 5} = \frac{-3 \pm 17}{10}$$

$$x_2 = \frac{7}{5} \qquad x_3 = -2$$

2- څلورمه درجه معادلې:

هغه څلورمه درجه معادلې چې $ax^4 + bx^2 + c = 0$ شکل ولري په دويمه درجه معادله بدليږي.طريقه يې داسې ده چې x^2 په y سره بدلوو.څلورمه درجه معادله په دويمه درجه معادله بدليږي.دلته څلور حالتونه موجود دي.

1- که دويمه درجه معادلې دوه مثبت جذرونه لرل نو څلورمه درجه معادله څلور جذرونه لري چې دوه به يې مثبت او دوه به يې منفي وي.

2- که د دويمه درجه معادلې يو جذر مثبت ؤ نو څلورمه درجه معادله دوه جذرونه لري چې يو به يې مثبت اوبل به يې منفي وي.

3- که دويمه درجه معادلې مثبت جذر نه لرلو نو څلورمه درجه معادله جذر نلري.

4- که دويمه درجه معادلې جذر نه لرلو نو څلورمه درجه هم جذر نه لري.

مثال:- لاندې څلورمه درجه معادله حل کړئ؟

$$3x^4 - 7x^2 - 20 = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل : x^2 په y بنیو نو $x^4 = y^2$ کیږي

$3y^2 - 7y - 20 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 3 \times (-20) = 49 + 240 = 289$

$\Delta = 289$

$\Delta > 0$

معادله دوه جذره لري یوجذر یي مثبت او بل یي منفي دي نو څلورمه درجه معادله دوه جذرونه لري.

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{49}}{2 \times 3} = \frac{7 \pm 17}{6}$$

$y_1 = 4 \qquad y_2 = -\frac{5}{3}$

$x^2 = y = y_1 = 4$

$x^2 = 4 \qquad \sqrt{x^2} = \sqrt{4} \qquad x_1 = 2 \qquad x_2 = -2$

تمرین

لاندې معادلې حل کړئ

1- $4x^2 + 3x - 45 = 0$ 2- $7x^2 - 11x - 6 = 0$

3- $5x^2 + 13x + 6 = 0$ 4- $13x^2 + x - 14 = 0$

5- $x^4 - 8x^2 + 16 = 0$ 6- $7x^4 + 3x^2 - 594 = 0$

3- جذري معادلې :

هغه جذري معادلې چې د $ax + b\sqrt{x} + c = 0$ شکل ولري په دویمه درجه معادلو بدلیدلای شي طریقه یي داسې ده چې $\sqrt{x}$ په y بنیو بیا دواړه خواوې مربع کوو چې $x = y^2$ کیږي اودویمه درجه معادله لاس ته راځي.

مثال :- $7x - 8\sqrt{x} - 12 = 0$ جذري معادله په دویمه درجه معادله بدله کړئ اوحل یي کړئ؟

حل: $y = \sqrt{x}$ بنیو نو $x = y^2$ کیږي د (x) په عوض (y^2) او د $(\sqrt{x})$ په عوض (y) وضع کوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$7y^2 - 8y - 12 = 0$$
$$\acute{\Delta} = \acute{b}^2 - ac$$
$$\acute{\Delta} = (-4)^2 - 7(-12) = 16 + 84 = 100$$
$$\acute{\Delta} = 100$$
$$x = \frac{-\acute{b} \pm \sqrt{\acute{\Delta}}}{a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{100}}{7} = \frac{4 \pm 10}{7}$$
$$x_1 = 2 \qquad \& \qquad x_2 = -\frac{6}{7}$$

۴- هغه معادلې چې توانونه يې کسري وي اود يو مجهول توان د بل مجهول د توان دوه چنده وي. لکه:

$$5x^{\frac{2}{3}} + 3x^{\frac{1}{3}} - 26 = 0$$

$x^{\frac{1}{3}}$ په (y) ښيو بيا دواړه خواوې مربع کوو نو $\left(x^{\frac{2}{3}} = y^2\right)$ کيږي.

$$5y^2 + 3y - 26 = 0$$
$$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 5 \times (-26) = 9 + 520 = 529$$
$$\Delta = 529$$
$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{529}}{2 \times 5} = \frac{-3 \pm 23}{10}$$
$$y_1 = \frac{-3 + 23}{10} = \frac{20}{10} = 2 \qquad \therefore \quad y_1 = 2$$
$$y_2 = \frac{-3 - 23}{10} = \frac{-26}{10} = -2\frac{3}{5} \qquad \therefore \quad y_2 = -2\frac{3}{5}$$
$$x^{\frac{1}{3}} = y = y_1 = 2 \qquad x^{\frac{1}{3}} = 2 \qquad \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 2^3$$
$$x_1 = 8$$

تمرين:

لاندې معادلې حل کړئ.

1- $x^{\frac{2}{5}} + 3x^{\frac{1}{5}} - 10 = 0$

2- $4x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}} - 27 = 0$

3- $4x^{\frac{2}{3}} - 7x^{\frac{1}{3}} - 2 = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵- هغه معادلې چې توانونه يې کسري وي:

هغه معادلې چې د $ax^{\frac{m}{n}} + bx^{\frac{m}{2n}} + c = 0$ شکل ولري په دويمه درجه معادله بدلیږي.

$x^{\frac{m}{2n}}$ په y او $x^{\frac{m}{n}}$ په y^2 بنيو پورتنۍ معادله لاندې شکل غوره کوي $ay^2 + by + c = 0$

دغه معادله د محمد بن موسی په فارمول یا په کومه بله طريقه حلوو قيمتونه يې پيدا کوو د y

د قيمت له مخې د $x^{\frac{m}{2n}}$ قيمت پيدا کوو دمعادلې جذرونه لاس ته راځي.

مثال :- د $2x^{\frac{2}{3}} + 5x^{\frac{1}{3}} - 33 = 0$ معادلې جذرونه پيدا کړئ؟

$x^{\frac{1}{3}} = y$ بنيو نو $x^{\frac{2}{3}} = y^2$ کيږي.

$$2x^{\frac{2}{3}} + 5x^{\frac{1}{3}} - 33 = 0$$
$$2y^2 + 5y - 33 = 0$$
$$\Delta = b^2 - 4ac = (5)^2 - 4 \times 2 \times (-33) = 25 + 264 = 289$$
$$\Delta = 289$$
$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{289}}{2 \times 2} = \frac{-5 \pm 17}{4}$$
$$y_1 = 3 \qquad y_2 = -\frac{11}{2}$$
$$\because\ x^{\frac{1}{3}} = y = y_1 = 3 \qquad \therefore\ x^{\frac{1}{3}} = 3 \Rightarrow \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 3^3 \qquad \&\ x_1 = 27$$
$$\because\ x^{\frac{1}{3}} = y = y_2 = -\frac{11}{2} \qquad \therefore\ x^{\frac{1}{3}} = -\frac{11}{2},$$
$$\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 = \left(-\frac{11}{2}\right)^3 = -\frac{1331}{8}$$
$$x_2 = -\frac{1331}{8}$$

تمرين :

لاندې معادلې دويمه درجه معادلو ته واړوئ؟

1: $5x^{\frac{2}{5}} - 3x^{\frac{1}{5}} - 14 = 0$ 2: $4x^{\frac{2}{7}} + 3x^{\frac{1}{7}} - 22 = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

عبارتي سوالونه

1: د (A)او (B) ددوه ښارو تر منځ فاصله (450) کېلومتره ده يو موټر سهار په اوه بجي په يوسرعت د (A) د ښار څخه د (B) ښار ته حرکت وکړ او بل موټر سهار په اته بجي د $(x+15)$ کېلو مترو په سرعت حرکت وکړ دواړه په يو وخت کې د (B)ښار ته ورسيدل د هر يوه سرعت څو دي؟

حل:

$$\frac{450}{x}-\frac{450}{x+15}=1$$
$$\frac{450(x+15)-450x}{x(x+15)}=1$$
$$\frac{450x+6750-450x}{x(x+15)}=1$$
$$\frac{6750}{x(x+15)}=\frac{1}{1}$$
$$x^2+15x=6750$$
$$x^2+15x-6750=0$$
$$\Delta=b^2-4ac=(15)^2-4\times1\times(-6750)=225+27000=27225$$
$$\Delta=27225$$
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-15\pm\sqrt{27225}}{2\times1}=\frac{-15\pm165}{2}$$
$$x_1=\frac{-15+165}{2}=\frac{150}{2}=75$$
$$x_2=\frac{-15-165}{2}=\frac{-180}{2}=-90$$

2- د يوه قايم الزاويه مثلث ضلعي په ترتيب سره $(x+1)$ ، $(x+2)$ او $(x+3)$ دي دمثلث ضلعي پيدا کړئ؟

حل:

$$(x+1)^2+(x+2)^2=(x+3)^2$$
$$x^2+2x+1+x^2+4x+4=x^2+6x+9$$
$$x^2=4$$
$$x_1=2 \qquad \& \qquad x_2=-2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳- د دوه مثلثو قاعدی مساوي دي د یوه ارتفاع د قاعدی څخه یو متر او د بل ارتفاع دقاعدی څخه دری متره زیاته ده او د مساحتو تفاضل یي اوه مترمربع دی ذهر یوه مساحته قاعده او ارتفاع پیدا کړئ

حل:

$$\frac{x(x+3)}{2}-\frac{x(x+1)}{2}=7$$
$$\frac{x^2+3x-x^2-x}{2}=7 \Rightarrow \frac{2x}{2}=7 \Rightarrow x=7$$

قاعده $x=7$

$x+1=8$ د کوچني مثلث ارتفاع

$x+3=10$ د لوی مثلث ارتفاع

۴- د یوه عدد د طرفینو د ضرب حاصل (323) عدد پیدا کړئ؟

حل:

$$(x-1)(x+1)=323$$
$$x^2-1=323$$
$$x^2=323+1=324$$
$$\sqrt{x^2}=\sqrt{324}$$
$$x=18$$

۵- دیوه مستطیل اوږدوالی تر سور دری متره زیات دی که مساحت یي (88) سانتي مترمربع وي سور او اوږدوالی یي پیدا کړئ؟

حل:

$$x(x+3)=88$$
$$x^2+3x-88=0$$
$$\Delta = x^2-4ac=3^2-4\times 1\times(-88)=$$
$$9+352=361$$
$$\Delta = 361$$
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=-3\pm\frac{\sqrt{361}}{2\times 1}=\frac{-3\pm 19}{2}\Rightarrow x_1=8\Rightarrow x_2=-11$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

6- يو سړی د (A) د ښار څخه د (B) ښار ته په يوه سرعت روان شوبله ورځ يې په خپل سرعت کې دوه متره زيادت راوست نيم ساعت مخکې ورسېدو که د ښارو تر منځ فاصله (20) کېلومتره وي د نوموړي اولنی او اخرنی سرعت پيدا کړئ؟

حل:

$$\frac{20}{x}-\frac{20}{x+2}=\frac{1}{2}$$
$$\frac{20(x+2)-20x}{x(x+2)}=\frac{1}{2}$$
$$\frac{20x+40-20x}{x(x+2)}=\frac{1}{2}$$
$$\frac{40}{x^2+2x}=\frac{1}{2}$$
$$x^2+2x=80$$
$$x^2+2x-80=0$$
$$\acute{\Delta}=\acute{b}^2-ac=1^2-1(-80)=1+80=81$$
$$\acute{\Delta}=81$$
$$x=\frac{-\acute{b}\pm\sqrt{\acute{\Delta}}}{a}=\frac{-1\pm\sqrt{81}}{1}=-1\pm 9=8$$

اولنی سرعت $x=8$

اخرنی سرعت $x+2=10$

7- د يوې دايرې مساحت (154) سانتي مترمربع دې شعاع يې څو ده؟

حل:

$$\pi r^2=154$$
$$\frac{22}{7}r^2=154$$
$$\frac{7}{22}\times\frac{22}{7}r^2=154\times\frac{7}{22}$$
$$r^2=49$$
$$\sqrt{r^2}=\sqrt{49}$$
$$r=7$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

عبارتي سوالونه

1- د يوه مثلث ارتفاع د هغه د قاعدي څخه $(3cm)$ زياته ده مساحت يې $27cm^2$ دې قاعده او ارتفاع يې پيدا کړئ؟

2- د يوه مستطيل طول د هغه د سور څخه $(5cm)$ زيات دی مساحت يې $(24cm^2)$ دی سور او طول يې پيدا کړئ؟

3- ديوی دايری مساحت (616) سانتي مترمربع ده شعاع يې څو ده؟

4- د A او B د ښارو تر منځ فاصله $800m$ ده يو موټروان په يوه سرعت سره دا فاصله طی کوي دبېرته راتګ په وخت کی $5m$ په خپل سرعت کی تغير راولي يو ساعت مخکی رارسيږي دتګ او راتګ سرعت يې پيدا کړئ؟

5- احمد د محمود څخه يوه روپۍ زياته لري که د پيسو د ضرب حاصل يې (840) وي دهر يوه روپۍ پيدا کړئ؟

6- يو سړی په خپله ځمکه باندی دېوال تاووي د دېوال سور نيم متر دې که د دېوال تر تاوولو وروسته يې ځمکه $(29cm^2)$ کمه شي تر دېوال د مخه او وروسته به د ځمکی مساحت څو وي؟

7- د يوې دايرې مساحت د هغی تر محيط (5) واره زيات دې ضلعه يې پيدا کړئ؟

8- د يوه عدد او د هغه د معکوس مجموعه $\left(\frac{82}{9}\right)$ ده عدد پيدا کړئ؟

9- د کوم عدد مربع د هغه عدد (19) چنده ده؟

10- د دوه مثلثو قاعدی مساوي دي ديوه ارتفاع دقاعدی څخه د واحد په اندازه او د بل ارتفاع د قاعدی څخه د دوه واحدو په اندازه زياته ده که مساحتونه يې جمع شي $(76cm^2)$ کيږي د مثلثو قاعدی او ارتفاعګانی پيدا کړئ؟

11- احمد دمحمود دری چنده کار کوي که دواړه په شريکه يو کار په (3) ورځو کی وکړي ووایاست چه هر يو به دا کار په څو ورځو کی وکړي؟

12- که د يوه عدد سره دهغه د معکوس دوه چنده جمع شي (3) کيږي عدد پيدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

13- که د یوه سړي اجوره دهغه تر ورځو (5) ډېره وي که (50) روپۍ یې ګټلې وي وواياست چه څو ورځی کار يې کړی دی؟

14- د یوه عدد څلورمه برخه د هغه عدد د معکوس سره مساوي ده عدد پیدا کړئ؟

15- د احمد او محمود د پیسو مجموعه (50) ده او د ضرب حاصل يې (609) ده د هر یوه پیسې څو دي؟

16- د احمد او محمود اجوره مساوي ده که د احمد اجوره (5) روپۍ زیاتې او د محمود روپۍ (5)کمې شي د یوې ورځې د اجورې د ضرب حاصل یې (2475) روپۍ کیږي د هر یوه اجوره څو ده ؟

17- احمد او محمود په دوه مساوي کارونو لګیا دي احمد خپل کار تر محمود درې ورځې د مخه خلاصوي که په شریکه يې په دوه ورځو کې وکړي وواياست چه هر یو به دا کار په څو ورځو کې وکړي؟

18- د مربع مساحت ($125316cm^2$)دی ضلعه یې پیدا کړئ؟

19- د یوه مثلث قاعده تر ارتفاع (15) سانتي متره زیاته ده که مساحت یې ($675cm^2$) وي قاعده او ارتفاع به یې څو وي؟

20- یو موټر سهار په اته بجې حرکت کوي بل موټر یوساعت وروسته (10)کېلو متر سرعت په زیادت وریسی روان شوکه دواړه په یوه وخت کې مطلوب ته رسیږي که وهل شوی فاصله (900) کیلو متره وي د هریوه سرعت پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

شپږم فصل

غیرمساوات

د دوه افادو د عددي قیمتونه برابری ته غیرمساوات وایي.

د غیر مساوات علامه دا ($>$) یا دا ($<$) ده هره افاده چې ددی علامی مخی ته لیکل شوی وي لویه ده تر هغه افادی چې د علامی شاته لیکل شوی وي. لکه:

$$3x^2 + 12x > x^2 - 4x$$

یا لکه $18 < 45$ او داسې نور.

د غیرمساوات خواص:

1- که د غیرمساوات د دواړو خواو سره عین عدد جمع شي دغیرمساوات علامه تغیر نه خوري. لکه:

$$11 < 19$$
$$11 + 8 < 19 + 8$$
$$19 < 27$$

2- که د غیرمساوات د دواړو خواو څخه عین عدد منفي شي د غیرمساوات علامه تغیر نه خوري. لکه:

$$13 > 9$$
$$13 - 10 > 9 - 10$$
$$3 > -1$$

3- که دغیرمساوات دواړه خواوی په مثبت عدد کی ضرب شي دغیرمساوات علامه تغیر نه خوري. لکه:

$$12 > 4$$
$$+2(12) > +2(4)$$
$$24 > 8$$

4- که د غیرمساوات دواړه خواوي په منفي عدد کی ضرب شي دغیرمساوات علامه تغیر خوري. لکه:

$$15 < 21$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$15(-2) > 21(-2)$$
$$-30 > -42$$

5- که د غیرمساوات دواړه خواوی په مثبت عدد تقسیم شي د غیرمساوات علامه تغیر نه خوري. لکه:

$$9 < 15$$
$$\frac{9}{3} < \frac{15}{3}$$
$$3 < 5$$

که د غیرمساوات دواړه خواوی په منفي عدد تقسیم شي د غیرمساوات علامه تغیر خوري. لکه:

$$30 > 24$$
$$\frac{30}{-2} < \frac{24}{-2}$$
$$-15 < -12$$

7- که دغیرمساوات دواړه خواوی معکوس شي دغیرمساوات علامه تغیر خوري. لکه:

$$5 < 7$$
$$\frac{1}{5} > \frac{1}{7}$$

8- که د غیرمساوات دواړه خواوی د طاق عدد په توان رفع شي د غیرمساوات علامه تغیر نه خوري. لکه:

$$2 > -9$$
$$(2)^3 > (-9)^3$$
$$8 > -729$$

9- که د غیرمساوات دواړه خواوی د جفت عدد په توان رفع شي دلته دری حالتونه موجود دي.

الف: که د غیرمساوات دواړه خواوی مثبت وي د غیرمساوات علامه تغیر نه خوري. لکه :

$$5 > 3$$
$$5^2 > 3^2$$
$$25 > 9$$

ب: که د غیرمساوات دواړه خواوی منفي وي د غیرمساوات علامه تغیر خوري. لکه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-2 > -5$$
$$(-2)^2 < (-5)^2$$
$$4 < 25$$

ج: که د غیرمساوات د یوی خوا عدد مثبت او د بلی خوا عدد منفي وي دلته دری حالته موجود دي.

a- که د مثبت عدد مطلقه قیمت د منفي عدد د مطلقه قیمت څخه زیات وي د غیرمساوات علامه تغیر نه خوري. لکه:

$$7 > -5$$
$$(7)^2 > (-5)^2$$
$$49 > 25$$

b- که د منفي عدد مطلقه قیمت د مثبت عدد د مطلقه څخه زیات وي د غیرمساوات علامه تغیر خوري. لکه:

$$4 > -7$$
$$(4)^2 < (-7)^2$$
$$16 < 49$$

c- که د مثبت مطلقه قیمت د منفي عدد د مطلقه سره مساوي وي غیرمساوات په مساوات بدلیږي. لکه:

$$6 > -6$$
$$(6)^2 = (-6)^2$$

دغیر مساوات دحل سیټ:

د حقیقي اعدادو هغه سیټ چې په راکړشوی غیر مساوات کی صدق کوي د غیر مساوات د حل سیټ بلل کیږي.

دغیرمساوات اقسام

په دی کتاب کی موږ دري قسمه غیر مساواتونه مطالعه کوو.

1- یومجهوله اوله درجه غیر مساوات

2- دوه مجهوله اوله درجه غیرمساوات

3- یومجهوله دویمه درجه غیرمساوات

(c) ketabton.com: The Digital Library

1- يومجهوله اوله درجه غیر مساوات:

هغه غیرمساوات دي چې مجهول يي يو او د مجهول درجه يي يوه وي عمومي شکل يي دا $ax + b \geq 0$ يا دا $ax + b \leq 0$ دی.

ديومجهوله غیرمساوات د حل طریقه:

معلوم دغیرمساوات ښي خواته او مجهول د غیرمساوات چپې خواته وروړلازمی عملیي پری اجراء کوو په اخر کی د غیرمساوات دواړه خواوی د x په ضریب ویشو د غیرمساوات دحل سیټ لاس ته راځي.

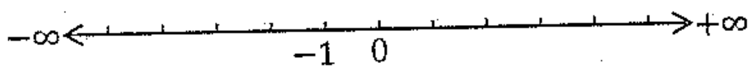
مثال: لاندې غیرمساوات حل کړئ.

$$3(4x + 11) - 2x + 6 \leq 15x + 44$$
$$12x + 33 - 2x + 6 \leq 15x + 44$$
$$10x + 39 \leq 15x + 44$$
$$10x - 15x \leq 44 - 39$$
$$-5x \leq 5$$
$$\frac{-5x}{-5} \geq \frac{5}{-5}$$
$$x \geq -1$$

د حل سیټ یي عبارت دی له:

$$A = \{x / -1 \leq x \leq \infty\}$$

د عددو په کرښه داسې ښودل کیږي.



تمرین:

لاندې غیرمساواتونه حل کړئ.

1: $8(3x - 4) + 7x - 11 \geq 9x + 23$

2: $6x + 14 < 8x - 4$ 3: $x + 5 \geq 3x - 1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مطلقه قیمت:

د یوه الجبري عدد حسابي برخی ته دهغه الجبري عدد مطلقه قیمت وایي.د مطلقه قیمت علامه دوه عمود خطونه دي هغه عدد چې مطلقه قیمت یي مطلوب وي د عمود خطونو ترمنځ لیکل کیږي. لکه $|-15|$ یا $|+15|$ چې دغه دواړه د مطلقه قیمت معنی ورکوي او داسې لیکل کیږي.

$$|\pm 15| = 15$$

مثال: لاندې غیرمساوات حل کړئ؟

$$|3x - 11| > 19$$

حل: یو وار افاده د راکړشوي عدد څخه لویه او بیایي دعدد د متناظرڅخه کوچنی فرضوو.

$3x - 11 > 19$

$3x > 19 + 11$

$3x > 30$

$\frac{3x}{3} > \frac{30}{3}$

$x > 10$

$A = \{x/x > 10\}$

$3x - 11 < -19 \Rightarrow 3x < -19 + 11 \Rightarrow 3x < -8$

$\frac{3x}{3} < \frac{-8}{3} \Rightarrow x < -\frac{8}{3}$

$B = \left\{x/x < -\frac{8}{3}\right\}$

$C = A \cup B \left\{x/x > 10 \vee x < -\frac{8}{3}\right\}$

دبینوم داشاری څېړل

د بینوم عمومي شکل$(ax + b)$ دې د بینوم داشاری د څېړلو لپاره (a) مشترک نیسو د قوس د باندی یي لیکو د بینوم هر حد په دی مشترک وېشو او د قوس په داخل کی یي لیکو.دقوس جذر پیدا کوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$ax + b = a\left(x + \frac{b}{a}\right)$$

دلته د (a) په باب دوه حالتونه موجود دي.

1- چې $a > 0$ وي

$$x + \frac{b}{a} = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

$$a > 0$$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$x + \frac{b}{a}$	$-$	0	$+$
$a\left(x + \frac{b}{a}\right)$	$-$	0	$+$

دبینوم اشاره د جذر څخه کښته منفي اوپورته مثبت ده.

2- چې $a < 0$ وي

$$x + \frac{b}{a} = 0 \quad \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

$$a < 0$$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$x + \frac{b}{a}$	$-$	0	$+$
$a\left(x + \frac{b}{a}\right)$	$+$	0	$-$

د بینوم اشاره د جذر څخه کښته مثبت او پورته منفي ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د $(3x-6)$ اشاره وڅېړئ؟

حل: $3x-6=0 \quad \Rightarrow 3(x-2) \quad \Rightarrow x-2=0 \Rightarrow x=2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$x-2$	$-$	0	$+$
$3(x-2)$	$-$	0	$+$

دجذر څخه کښته د بينوم اشاره منفي او پورته مثبت ده.

مثال: د $-5x+15$ اشاره وڅېړئ ؟

حل:

$$-5x+15=-5(x-3)$$
$$x-3=0 \Rightarrow x=3$$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$x-3$	$-$	0	$+$
$-5(x-3)$	$+$	0	$-$

دجذر څخه کښته د بينوم اشاره مثبت او پورته منفي ده.

تمرين:

د لاندې بينومونو اشارې وڅېړئ؟

1- $2x-12$ 2- $3-x$ 3- $-4x+12$

4- $4x-20$ 5- $-6x-18$

د هغه افادو د اشارو څېړل چې د څو بينومو د ضرب په شکل وي:

د هرې افادې اشاره پيدا کوو او ضربوو يې د حاصل ضرب اشاره لاس ته راځي

مثال:- $(4-x)(x+4)$ اشاره وڅېړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$4-x=0 \quad \Rightarrow -x=-4 \quad \Rightarrow x=4$

$x+4=0 \quad \Rightarrow x=-4$

x	$-\infty$	-4		$+4$	$+\infty$
$4-x$	+		+	0	−
$x+4$	−	0	+		+
$(4-x)(x+4)$	−	0	+	0	−

دجذرو منځ کې د حاصل ضرب اشاره مثبت او په خارج کې منفي ده.

تمرين:

د لاندې بېنومونه د حاصل ضرب په شکل راکړشوي دي اشاره يې وځېرئ؟

1- $(2x-12)(3-x)$

2- $(3-x)(x+7)$

3- $(-4x+12)(x+8)$

3- $(-6x-18)(x+5)$

د کسري افادو د اشارو ځېړل:

د صورت او مخرج اشارې پيدا کوو او يو پر بل يې ويشو د کسر اشاره لاس ته راځي.

مثال: د $\frac{x+4}{2x-6}$ اشاره وځېرئ؟

$x+4=0 \quad \Rightarrow x=-4$

$2x-6=0$

$2x=6 \quad \Rightarrow \frac{2x}{2}=\frac{6}{2} \quad \Rightarrow x=3$

x	$-\infty$	-4		3	$+\infty$
$x+4$	−	0	+		+
$2x-6$	−		−	0	+
$\frac{x+4}{2x-6}$	+	0	−	0	+

دجذرو منځ کې د کسر اشاره منفي او په خارج کې مثبت ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرین:

د لاندې کسرو اشارې وخیرئ:

1: $\dfrac{2x+6}{x-1}$ 2: $\dfrac{3x+4}{2-x}$

3: $\dfrac{x+2}{12x-18}$ 4: $\dfrac{-x-1}{1-2x}+3$

دهغه غیرمساوات دحل دسیټ پیدا کول چې د بینومو د حاصل ضرب په شکل وي:

د بینومو اشارې پیدا کوو او سره ضربوو یې دحاصل ضرب اشارې لاس ته راځي.دغه اشارې د غیرمساوات د علامې سره مقایسه کوو هره اشاره چې دغیرمساوات دعلامې سره موافق وه همغه یې د حل سیټ دی

مثال:

$$(x+3)(x-4)>0$$
$$x+3=0\Rightarrow x=-3$$
$$x-4=0\Rightarrow x=4$$

x	$-\infty$	-3		4	$+\infty$
$x+3$	$-$	0	$+$		$+$
$x-4$	$-$		$-$	0	$+$
$(x+3)(x-4)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$(x+3)(x-4)>0$	د حل سیټ		د حل سیټ نه دی		د حل سیټ

تمرین:

د لاندې غیرمساواتونو د حل سیټ پیدا کړئ:

1: $(x-8)(2-x)<0$ 2: $(3x-6)(12-x)>0$

3: $(x-1)(1-x)\leq 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دهغه غیرمساوات دحل د سیټ پیدا کول چې د کسر په شکل وي:

دصورت او مخرج اشاري پیدا کوو دصورت اشاره د مخرج په اشاره ویشود کسر اشاري لاس ته راځي. دغه اشاري د غیرمساوات د علامې سره مقایسه کوو د غیر مساوات د حل سیټ لاس ته راځي.

مثال: د لاندې کسري غیرمساوات د حل سیټ پیدا کړئ

$$\frac{x+4}{x-2}+1<0$$

$$\frac{x+4+x-2}{x-2}<0$$

$$\frac{2x+2}{x-2}<0$$

$$2x+2=0 \Rightarrow 2x=-2 \Rightarrow \frac{2x}{2}=\frac{-2}{2} \Rightarrow x=-1$$

$$x-2=0 \Rightarrow x=2$$

x	$-\infty$	-1		2	$+\infty$
$2x+2$	$-$	0	$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$
$\frac{2x+2}{x-2}$	$+$	0	$-$	0	$+$
$\frac{2x+2}{x-2}<0$	د حل سیټ نه دی		د حل سیټ		د حل سیټ نه دی

تمرین:

د لاندې کسري غیرمساواتو دحل سیټ پیدا کړئ.

1: $\frac{2x+1}{x-1}+2>0$

2: $\frac{4x+7}{2x-3}-1<0$

3: $\frac{x-6}{x+2}-2\geq 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دیو مجهوله غیرمساوات سیستم:

دوه یو مجهوله غیرمساواتو ته د یو مجهوله غیرمساوات سیستم وایي.

د هر غیر مساوات د حل سیټ پیدا کوو هغه سیټ چې په دواړو غیر مساواتو صدق کوي، د سیستم د حل سیټ دی.

مثال: د لاندې غیرمساوات سیستم حل کړئ.

$$3x - 6 < 0$$
$$5x + 8 < 0$$

حل:-

$3x - 6 = 0 \quad \Rightarrow 3x = 6 \quad \Rightarrow x = 2$

$5x + 20 = 0 \quad \Rightarrow 5x = -20 \quad \Rightarrow x = -4$

x	$-\infty$	-4		2	$+\infty$
$3x - 6 < 0$	$-$		$-$	0	$+$
$5x + 20 < 0$	$-$	0	$+$		$+$
	د حل سیټ				

تمرین:

په لاندې ډول دیو مجهوله غیرمساوات سیستمونه راکړ شویدي حل یي کړئ.

1- $7x - 11 > 0$ & $4x + 13 > 0$

2- 2: $13x + 2 > 0$ & $5x - 8 < 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دوه مجهوله غېرمساوات

هغه غېرمساوات دی چې مجهولونه يې دوه او د هر مجهول درجه يې يوه وي عمومي شکل يې دا $ax + by \geq c$ يا دا $ax + by \leq c$ دي.

د دغه رنګه غېرمساوات دحل د سيټ د لاس ته راوړلو لپاره دغېرمساوات ګراف رسموو ګراف مستوي په دوه برخو ويشي يوه برخه يې په غېرمساوات کې صدق کوي او بله برخه يې نه کوي دغه برخه يې کرښې، کرښې کوو بله برخه يې دغېر مساوات د حل سيټ دی.

مثال: $2y + 3x < 6$ دوه مجهوله غېرمساوات حل کړئ.

حل: غېرمساوات په مساوات بدلوو اوګراف يې رسموو.

$$2y + 3x = 6$$

1- $x = 0$ نو:

$$2y = 6 \quad \Rightarrow y = \frac{6}{2} = 3$$

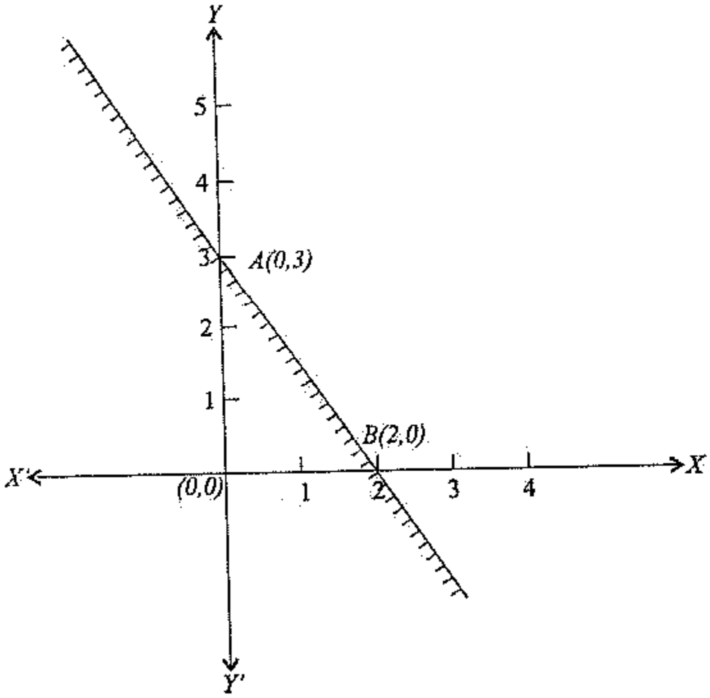
$$A(0,3)$$

2- $y = 0$ فرضوو نو:

$$3x = 6$$

$$x = \frac{6}{3} = 2$$

$$B(2,0)$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

ددوه مجهوله غیرمساوات سیستم:

په یوه کارتیزني مستوي کې دوه غیرمساواتونه د غیرمساوات سیستم وایي.

لکه: $2x - 3y > 6$ او $3x + 5y < 15$

دغه دوه غیرمساواتو ته د غیرمساوات سیستم وایي.

ددوه مجهوله غیرمساوات د سیستم د حل طریقه:

غیرمساواتونه په مساواتو بدلوو اود هر مساوات گرښه یعنی گراف رسموو هر گراف مستوي په دوه برخو ویشي چې یوه برخه یې په مربوطه غیرمساوات کې صدق کوي.دهر غیرمساوات د حل سیټ پیدا کوو. څرنگه چې د غیرمساواتو گرافونه مستوي په څلورو برخو ویشي چې یوه برخه یې په دواړو غیرمساواتو کې صدق کوي چې همدغه برخه د سیستم د حل سیټ دی.

-1

$$3x + 5y < 15 \qquad \Longrightarrow 3x + 5y = 15$$

$x = 0$ فرضوو نو:

$$5y = 15 \qquad y = \frac{15}{5} = 3$$

$$A(0,3)$$

$$y = 0$$

$$3x = 15 \qquad x = \frac{15}{3} = 5$$

$$B(5,0)$$

-2

$$2x - 3y > 6 \qquad 2x - 3y = 6$$

$$x = 0$$

$$-3y = 6 \quad y = \frac{6}{-3} = -2$$

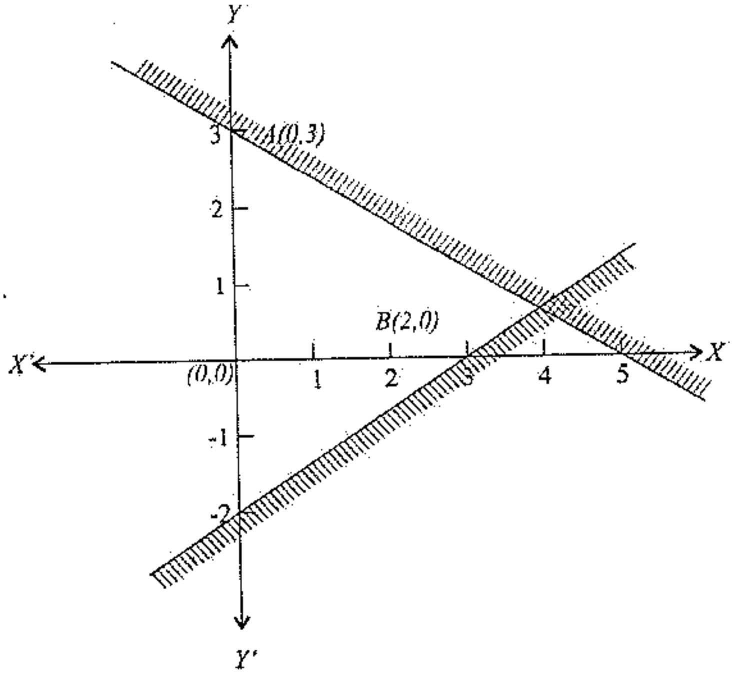
$$C(0,-2)$$

$$y = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$2x = 6 \quad \Rightarrow x = \frac{6}{2} = 3$$

$$D(3,0)$$



كه درې دوه مجهوله غېرمساواتونه راكړ شوي وي د ګراف د ترسيم په وخت کې مثلث لاس ته راځي د څلور غېرمساواتونوځخه څلور ضلعي په همدې ترتيب د دوه مجهوله غېرمساواتونو شمېر دمضلعګانو دضلعو شمېر رابښيئ.

يو مجهوله دويمه درجه غيرمساوات

هغه غېرمساوات دي چې مجهول يې يو او د مجهول درجه يې دوه وي عمومي شكل يې دا $ax^2 + bx + c \geq 0$ يا دا $ax^2 + bx + c \leq 0$ دي

د غېرمساوات د حل ځخه مطلب د هغه سيټ پيدا كول دي چې په غېرمساوات کې وضع شي اوپه غېرمساوات کې صدق وكړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ددویمه درجه غیرمساوات دحل طریقه

که د غیرمساوات دواړو خواو ته حدونه موجود وي ټول د غیر مساوات چپی خواته وروازمی عملیي پری اجراء کوو اود تربنوم شکل ته یي راړوو اوتجزیه کوویي. د هر قوس جذر پیدا کوو د حل سیټ یي په دوه طریقوپیدا کیږي.

1- د جدول په طریقه　　　　2- د سیټ بلډر په طریقه

1- د جدول په طریقه:

جدول جوړوو کوچنی جذر چپی خواته او لوی جذر ښی خواته لیکوکه د (a)علامه مثبت وه د جذر څخه کښته دقوس علامه منفي اوپورته مثبت ده اوکه د(a) علامه منفي وه نو د جذرڅخه کښته د قوسعلامه مثبت او پورته منفي ده.

مثال: د لاندي دویمه درجه غیرمساوات د حل سیټ پیدا کړئ.

$$3x^2 + 13x - 38 < 0$$
$$3x^2 - 6x + 19x - 38 < 0$$
$$3x(x-2) + 19(x-2) < 0$$
$$(x-2)(3x+19) < 0$$
$$x - 2 = 0 \quad \Rightarrow x = 2$$
$$3x + 19 = 0 \quad \Rightarrow 3x = -19 \quad \Rightarrow \frac{3x}{3} = \frac{-19}{3} \Rightarrow x = -\frac{19}{3}$$

x	$-\infty$	$-\frac{19}{3}$		2	$+\infty$
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$
$3x+19$	$-$	0	$+$		$+$
$(x-2)(3x+19)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$(x-2)(3x+19) < 0$	د حل سیټ ندی		د حل سیټ		د حل سیټ ندی

(c) ketabton.com: The Digital Library

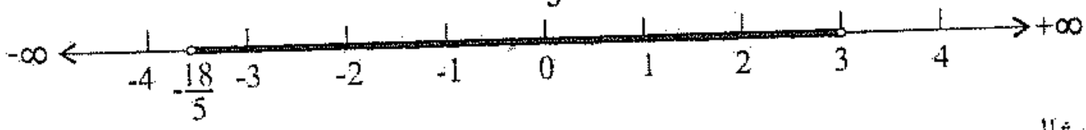
2- د سيټ بلدېر په طريقه د دويمه درجه غېرمساوات حلول:

تر تجزيه كولو وروسته د غېرمساوات علامې ته ګورو كه د غېرمساوات علامه مثبت وه نو قوسونه هم علامه دي يو وار دواړه مثبت اوبل واردواړه منفي فرضوو.او كه د غېرمساوات علامه منفي وه نو قوسونه مختلف العلامه دي په نوبت سره يو مثبت او بل منفي فرضوو.

مثال: $5x^2+3x-54<0$

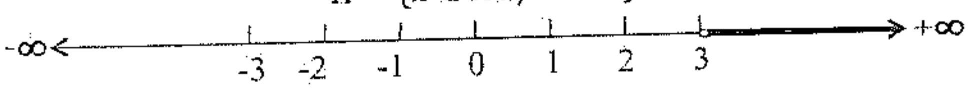
حل:

$$5x^2-15x+18x-54<0$$
$$5x(x-3)+18(x-3)<0$$
$$(x-3)(5x+18)<0$$
$$x-3<0 \Rightarrow x<3$$
$$5x+18>0 \Longrightarrow 5x>-18 \Rightarrow \frac{5x}{5}>\frac{-18}{5} \Rightarrow x>-\frac{18}{5}$$
$$A=\{x\,/-\frac{18}{5}<x<3\}$$



مثال:

$$3x^2-13x+12>0$$
$$3x^2-9x-4x+12>0$$
$$3x(x-3)-4(x-3)>0$$
$$(x-3)(3x-4)>0$$
$$x-3>0 \qquad \Longrightarrow x>3$$
$$3x-4>0 \qquad \Longrightarrow 3x>4$$
$$\frac{3x}{3}>\frac{4}{3} \qquad \Longrightarrow x>\frac{4}{3}$$
$$A=\{x\in I\mathcal{R}\,/\,x>3\}$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرین

لاندې دویمه درجه غیرمساواتونه حل کړئ؟

1. $3x^2 - 11x + 1 > x^2 - 12$
2. $4x^2 + 3x - 22 \geq 0$
3. $\frac{3x+1}{x+2} \leq 2x + 3$
4. $7x^2 + \frac{x+5}{2} - 10 \leq 0$
5. $3x^2 - 17x + 13 > 3x - 15$
6. $\frac{x+1}{x} > 2$
7. $3x^2 + 7x - 48 \geq 0$
8. $11x - 4x^2 - 20 < 8 < x^2 + 3x + 12$
9. $13x - x^2 - 30 \geq 0$
10. $5(x^2 - 13x) \leq 6$
11. $9x + 5x^2 - 38 \leq 0$
12. $13x^2 + 5\left(\frac{2x+3}{3}\right) - 14 \geq 0$
13. $15x^2 + x - 12 \geq 4x^2 + 13x + 8$
14. $7x^2 + 3x \geq 0$
15. $9x^2 + x - 20 \leq 3x^2 + 3x + 2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اووم فصل

پارامتریک معادلی

پارامتر په لغت کی معین غیرمشخص مقدار ته وایي

اوپه اصطلاح کی که په یوه معادله کی د اصلي متحول څخه په غیر یو بل داسی حرف موجود وي چه د هغه حرف د قیمت په تغیر سره د معادلی په جذرو کی تغیر راشي دغه حرف ته پارامتر اودغې معادلی ته پارامتریک معادله وایي. لکه:

$$(m+3)x^2+3(m-3)x-19m-6=0$$

د پارامتریک معادلی حلول:

پارامتریک معادلی په دوه طریقو حلیږي.

1- د پارامتر له جنسه د معادلی حلول

2- د پرامتر د قیمت له جنسه د معادلی حلول

1- د پارامتر له جنسه د معادلی حلول:

که پارامتریک معادله د دویمه درجه معادلی د حلولوپه هره طریقه حلیدله حلوو یې.

مګر ښه او اسانه طریقه یې د محمدبن موسی فارمول دی.

مثال: لاندې پارامتریک معادله حل کړئ؟

$$x^2+mx-(6m^2+10m+4)=0$$

حل:

$\Delta = b^2-4ac$

$\Delta = m^2-4\{-(6m^2+10m+4)$

$\Delta = m^2+24m^2+40m+16$

$\Delta = 25m^2+40m+16$

$\Delta = (5m+4)^2$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-m\pm\sqrt{(5m+4)^2}}{2\times1}=\frac{-m\pm(5m+4)}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_1 = \frac{-m + 5m + 4}{2} = \frac{4m + 4}{2} = \frac{4(m + 1)}{2} = 2(m + 1) = 2m + 2$$

$$x_1 = 2m + 2$$

$$x_2 = \frac{-m - 5m - 4}{2} = \frac{-6m - 4}{2} = \frac{2(-3m - 2)}{2} = -3m - 2$$

$$x_2 = -3m - 2 = -(3m + 2)$$

تمرین:

لاندې پارامتریک معادلو جذرونه د m له جنسه پیدا کړئ؟

$$1:\ (2m + 1)x^2 + 2mx - (4m + 1) = 0$$

$2:\ (m + 4)x^2 + 6mx - (7m + 4) = 0$

$3:\ (2m + 4)x^2 + 4mx - (2m + 4) = 0$

$4:\ x^2 + (2m + 5)x + m^2 + 5m + 6 = 0$

$5:\ x^2 - 5mx + 6m^2 = 0$

2- د پارامتر د قیمت له مخې د مجهول د قیمت پیدا کول:

د یوه شرط له مخې د پارامتر قیمت پیدا کوو او په معادله کې یې وضع کوو یو مجهوله دویمه درجه معادله لاس ته راځي. د غه معادله حلوو د معادلې د اصلي مجهول قیمت لاس ته راځي.

1- مثال: د $(m - 1)x^2 + (2m + 1)x - 5m = 0$ په معادله کې د جذرو مجموعه $\left(-\frac{7}{2}\right)$ ده په معادله د (m) کړئ؟

حل:

$$x_1 + x_2 = -\frac{7}{2}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{2m + 1}{m - 1}$$

$$-\frac{2m + 1}{m - 1} = -\frac{7}{2}$$

$$7m - 7 = 4m + 2$$

$$7m - 4m = 2 + 7$$

$$3m = 9 \quad \Rightarrow \frac{3m}{3} = \frac{9}{3} \quad \Rightarrow m = 3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(m-1)x^2+(2m+1)x-5m=0$$
$$(3-1)x^2+(2\times 3+1)x-5\times 3=0$$
$$2x^2+7x-15=0$$
$$\Delta= b^2-4ac=7^2-4\times 2\times(-15)$$
$$\Delta= 49+120=169$$
$$\Delta= 169$$
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-7\pm\sqrt{169}}{2\times 2}=\frac{-7\pm 13}{4}$$
$$x_1=\frac{-7+13}{4}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$
$$x_2=\frac{-7-13}{4}=\frac{-20}{4}=-5$$

2- مثال: د $(m-2)x^2-(m-1)x-4m-3=0$ معادلې دجذرو دضرب حاصل (15−) معادله حل کړئ؟

حل:

$$x_1x_2=-15$$
$$x_1x_2=\frac{c}{a}=-15$$
$$\frac{c}{a}=\frac{-4m-3}{m-2}=-15 \Rightarrow -15m+30=-4m-3$$
$$-15m+4m=-3-30$$
$$-11m=-33$$
$$\frac{-11m}{-11}=\frac{-33}{-11}$$
$$m=3$$
$$(m-2)x^2-(m-1)x-4m-3=0$$
$$(3-2)x^2-(3-1)x-4\times 3-3=0$$
$$x^2-2x-15=0$$
$$\acute{\Delta}= \acute{b}^2-ac=(-1)^2-1(-15)=1+15=16$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\acute{\Delta} = 16$$

$$x = \frac{-\acute{b} \pm \sqrt{\acute{\Delta}}}{a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{16}}{1} = \frac{1 \pm 4}{1}$$

$$x_1 = \frac{1+4}{1} = \frac{5}{1} = 5 \qquad \Rightarrow x_1 = 5$$

$$x_2 = \frac{1-4}{1} = \frac{-3}{1} = -3 \qquad \Rightarrow x_2 = -3$$

3- مثال: د $(m-3)x^2 - 3mx + 9m - 1 = 0$ په معادله کې $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{12}{35}$ رابطه کې معادله حل کړئ؟

حل:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{12}{35}$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 x_2} = \frac{12}{35}$$

$$\frac{-\frac{b}{a}}{+\frac{c}{a}} = \frac{-b}{+c} = \frac{-(-3m)}{9m-1} = \frac{+3m}{9m-1} = \frac{12}{35}$$

$$108m - 12 = 105m$$
$$108m - 105m = 12$$
$$3m = 12$$
$$\frac{3m}{3} = \frac{12}{3} \quad \Rightarrow m = 4$$

$$(m-3)x^2 - 3mx + 9n - 1 = 0$$
$$(4-3)x^2 - 3 \times 4x + 9 \times 4 - 1 = 0$$
$$x^2 - 12x + 35 = 0$$

$$\acute{\Delta} = \acute{b}^2 - ac = (-6)^2 - 1(35) = 36 - 35 = 1$$
$$\acute{\Delta} = 1$$

$$x = \frac{-\acute{b} \pm \sqrt{\acute{\Delta}}}{a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{1}}{1} = 6 \pm 1$$

$$x_1 = 6 + 1 = 7 \quad \Rightarrow x_1 = 7$$
$$x_2 = 6 - 1 = 5 \quad \Rightarrow x_2 = 5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

4- مثال: $(m-1)x^2-(3m+1)x+5m=0$ معادلې جذرونه د $(3x_1-1)(3x_2-1)=70$ په رابطه کې صدق کوي د معادلې جذرونه پیدا کړئ؟

حل:

$$(3x_1-1)(3x_2-1)=70$$
$$9x_1x_2-3x_1-3x_2+1=70$$
$$9x_1x_2-3(x_1+x_2)+1=70$$
$$9\left(\frac{c}{a}\right)-3\left(\frac{-b}{a}\right)=70-1$$
$$9\left(\frac{5m}{m-1}\right)-3\left(\frac{-\{-(3m+1)\}}{m-1}\right)=69$$
$$\frac{45m}{m-1}-\frac{9m+3}{m-1}=69$$
$$\frac{45m-9m-3}{m-1}=69$$
$$\frac{36m-3}{m-1}=\frac{69}{1}$$
$$69m-69=36m-3$$
$$69m-36m=-3+69$$
$$33m=66 \qquad \Rightarrow m=2$$
$$(m-1)x^2-(3m+1)x+5m=0$$
$$(2-1)x^2-(3\times 2+1)x+5\times 2=0$$
$$x^2-7x+10=0$$
$$\Delta=b^2-4ac=(-7)^2-4\times 1\times 10=49-40=9$$
$$\Delta=9$$
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-7\pm\sqrt{9})}{2\times 1}=\frac{7\pm 3}{2}$$
$$x_1=\frac{10}{2}=5 \ \Rightarrow\ x_1=5$$
$$x_2=\frac{7-3}{2}=\frac{4}{2}=2 \ \Rightarrow x_2=2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

5- مثال: د $(m-4)x^2 - mx - 5m + 1 = 0$ په معادله کې د معادلې یو جذر (8) دی د m قیمت پیدا کړئ؟

حل:

$$(m-4)8^2 - m \times 8 - 5m + 1$$
$$(m-4)64 - 8m - 5m + 1 = 0$$
$$64m - 256 - 13m + 1 = 0$$
$$51m - 255 = 0$$
$$51m = 255 \quad \Rightarrow m = 5$$

7- مثال: د m په کوم قیمت باندې $(m-2)x^2 - (m-3)x - 8m - 1 = 0$ معادله دوه مساوي مختلف العلامه جذرونه لري؟

حل:

$$-\{-(m-3)\} = 0$$
$$m - 3 = 0 \quad \Rightarrow m = 3$$

7- مثال: د (m) قیمت د $(2m-1)x^2 - (2m+1)x + 2m - 4 = 0$ څخه داسې پیدا کړئ چه د معادلې یو جذر صفر وي؟

حل: هغه وخت د معادلې یو جذر صفر کیږي چه $c = 0$ شي

$$-(2m+1) = 0$$
$$2m - 4 = 0 \ \Rightarrow 2m = 4 \quad \Rightarrow \frac{2m}{2} = \frac{4}{2} = 2$$
$$m = 2$$

8- مثال: د (m) په کوم قیمت $(2m+1)x^2 - (7m+2)x + 6m + 1 = 0$ معادله یو جذر لري؟

حل: کله چه $\Delta = 0$ شي.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = \{-(7m+2)\}^2 - 4(2m+1)(6m+1)$$
$$\Delta = 49m^2 + 28m + 4 - 48m^2 - 32m - 4$$
$$\Delta = m^2 - 4m$$
$$\Delta = 0 \quad \therefore \ m^2 - 4m = 0 \Rightarrow m(m-4) = 0$$
$$m_1 = 0$$
$$m - 4 = 0 \quad \Rightarrow m = 4$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

9- مثال: د پـه (m)كومو قيمتو باندې $(m-1)x^2-(2m+2)x+2m-5=0$ معادله دوه معکوس جذرونه لري؟

حل: کله چه $a=c$ شي

$$m-1=2m-5$$
$$m-2m=-5+1$$
$$-m=-4 \quad \Rightarrow m=4$$

10- مثال: د(m) په كومو قيمتونو باندې $(m+1)x^2-mx-4m=0$ معادله دوه مختلف الاشاره جذرونه لري؟

حل:- کله چه $p<0$ وي

$$x_1x_2=\frac{c}{a}=\frac{-4m}{m+1}<0$$
$$(m+1)^2\left(\frac{-4m}{m+1}\right)<0\times(m+1)^2$$
$$-4m(m+1)<0$$
$$-4m<0$$
$$\frac{-4m}{-4}>\frac{0}{-4}$$
$$m>0$$
$$m+1>0 \quad \Rightarrow m>-1$$
$$A=\{m\in IR/m>-1\}$$

11- مثال: د (m) په كومو قيمتونو باندې $(m-3)x^2-(m-2)x-2m+8=0$ معادله دوه حقيقي جذرونه لري؟

حل:- کله چه $(\Delta>0)$ تر صفر وي

$$\Delta=b^2-4ac$$
$$\Delta=\{-(m-2)\}^2-4(m-3)(-2m+8)$$
$$\Delta=m^2-4m+4+8m^2-32m-24m+96$$
$$\Delta=9m^2-60m+100=(3m-10)^2$$
$$\Delta>0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(3m-10)^2 > 0$$
$$3m-10 > 0$$
$$3m > 10 \quad \Rightarrow m > \frac{10}{3}$$
$$A = \{m \in IR \ / \ m > \frac{10}{3}\}$$

12- مثال: د (m) په کوم قیمت د $(m-2)x^2-(m-1)x-5m=0$ معادلې لوی جذر مثبت دي؟

حل:- کله چه $(b \ \& \ c)$ دواړه منفي وي

$$\Delta = b^2-4ac$$
$$\Delta = \{-(m-5)\}^2-4(m-2)(-6m)$$
$$\Delta = m^2-10m+25+24m^2-40m$$
$$\Delta = 25m^2-50m+25=(5m-5)^2$$

$$\Delta = (5m-5)^2 \Rightarrow \Delta = 5m-5 \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow 5m-5>0 \Rightarrow 5m>+5 \Rightarrow m>1$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\{-(m-5) \pm \sqrt{(5m-5)^2}}{2(m-2)} = \frac{m-5 \pm (5m-5)}{2(m-2)}$$
$$x_1 = \frac{m-5+5m-5}{2(m-2)} = \frac{6m-10}{2m-4}$$
$$x_2 = \frac{m-5-5m+5}{2m-4} = \frac{-4m}{2m-4}$$

تمرین:

لاندې پارامتریک معادلو کې د (m) قیمت داسې تعین چه معادله دوه مختلف الاشاره جذرونه ولري.

1: $x^2-5x-3m+1=0$

2: $(2+3)x^2-mx-25m+4=0$

3: $mx^2-2(m+1)x+m+15=0$

4: $mx^2-(2m+1)x+m=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لاندې معادلو څخه د (m) قیمت داسې پیدا کړئ چه معادله دوه حقیقي جذرونه ولري.

5: $x^2 - 2(m-3)x + m + 9 = 0$

6: $(m+1)x^2 - 2(m+2)x + m + 3 = 0$

7: $3x^2 - 10x - 3m + 2 = 0$

8: $mx^2 - 2(m+1)x + m + 3 = 0$

9: $(2m+1)x^2 - 4mx + 2m - 3 = 0$

10: $2x^2 - mx + 1 = 0$

د لاندې معادلو څخه د (m) قیمت داسې پیدا کړئ چه معادله دوه موهومي جذرونه ولري.

11: $mx^2 - (2m+1)x + 2m = 0$

12: $4x^2 + 4mx - 3m^2 = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اتم فصل

اکسپوننشل (نمائي) معادلې

اکسپونشل معادلې هغه معادلې دي چه توان يي مجهول وي عمومي شکل يې دا دی:

$$a^x = y$$

د اکسپوننشل معادلو قاعده خلاف د (1) وي يعنی $(a \neq 1)$ وي که $(a > 1)$ وي معادله متزايده ده او که $(a < 1)$ وي معادله متناقصه ده.

داکسپوننشل معادلو د حلولو لپاره مجهول حدونه د مساوات چپې خواته وړو او معلوم دمساوات ښۍ خواته وړو. لازمي عمليې پرې اجراء کوو په د مساوات د دواړو خواو عددونه په داسې طاقت لرونکو عددو بدلوو چه قاعدې يې سره مساوي وي. نو توانونه يې هم مساوي دي دلته څو حالتونه موجود دي

1- چه د مساوات په چپ طرف کې توان مونوم يا بينوم وي نو يو مجهوله اوله درجه معادله لاس ته راځي دغه معادله حلوو او جذرونه يې پيدا کوو

1- مثال: لاندې معادله حل کړئ؟

$$5 \times 3^x + 11 \times 3^x - 14 \times 3^x = 18$$
$$(5 + 11 - 14)3^x = 18$$
$$2 \times 3^x = 18 \quad \Rightarrow \frac{2 \times 3^x}{2} = \frac{18}{2} \quad \Rightarrow 3^x = 9 \quad \Rightarrow 3^x = 3^2$$

قاعدې يې مساوي دي نو توانونه يې هم مساوي دي.

$$x = 2$$

2- مثال: لاندې معادله حل کړئ؟

$$3^{x+1} - 4 \cdot 3^{x-1} = 45$$
$$3^x \cdot 3 - 4 \cdot 3^x \cdot 3^{-1} = 45$$
$$3^x(3 - 4 \cdot 3^{-1}) = 45$$
$$3^x\left(3 - \frac{4}{3}\right) = 45 \Longrightarrow 3^x\left(\frac{9-4}{3}\right) = 45 \Longrightarrow 3^x\left(\frac{5}{3}\right) = 45$$

د مساوات دواړه خواوې په $\frac{3}{5}$ کې ضربوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{3}{5}\left\{3^x\left(\frac{5}{3}\right)\right\} = 45 \times \frac{3}{5}$$
$$3^x = 27 = 3^3$$
$$3^x = 3^3$$
$$x = 3$$

2- چه د مساوات په چپ طرف کی دوه یا څو حده وي قاعدی يي مساوي اود يوه توان د بل د توان دوه چنده وي دغه ډول معادلی په دويمه درجه معادلو بدلوو. دغه معادلی حلوو اود جذرو له مخی يي د اکسپوننشل معادلی جذرونه پيدا کوو.

مثال:

$$3^{2x} - 3^x = 702$$
$$(3^x)^2 - 3^x = 702$$

$3^x = y$ وضع کوو.

$$y^2 - y - 702 = 0$$
$$(y - 27)(y + 26) = 0$$
$$y_1 = 27$$
$$x_2 = -26$$
$$y_1 = 3^x = 27 = 3^3$$
$$3^x = 3^3$$
$$x = 3$$
$$y_2 = 3^x = -26$$

د اکسپوننشل معادلی دومېن همېشه مثبت وي نود (y_2) د قيمت څخه دمعادلی جذرنه پيدا کيږي.

3- چه د مساوات په چپ طرف کی دوه یا څو حدونه موجود وي او توانونه يي جذري حدونه وي .دغه ډول معادلی هم په دويمه درجه يو مجهوله معادله بدلولای شو.

مثال:

$$27^{2\sqrt{x}} = 4 \cdot 3^{\sqrt{9x}} - 3$$
$$27^{2\sqrt{x}} - 4 \cdot 3^{3\sqrt{x}} + 3 = 0$$
$$27^{2\sqrt{x}} - 4 \cdot 27^{\sqrt{x}} + 3 = 0$$
$$\left(27^{\sqrt{x}}\right)^2 - 4 \cdot 27^{\sqrt{x}} + 3 = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$27^{\sqrt{x}} = y$ وضع کوو.

$$y^2 - 4y + 3 = 0$$
$$(y-1)(y-3) = 0$$
$$y_1 = 1 \quad \& \quad y_2 = 3$$
$$27^{\sqrt{x}} = 1 = 27^0$$
$$\sqrt{x} = 0 \Longrightarrow x = 0$$
$$27^{\sqrt{x}} = 3 \Longrightarrow 3^{3\sqrt{x}} = 3^1$$
$$3\sqrt{x} = 1 \quad \Longrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{3}$$
$$x = \frac{1}{9}$$
$$S = \left\{x \in IR / x = 0 \vee x = \frac{1}{9}\right\}$$

4- چه دوه داسې اکسپوننشل معادلې راکړ شویوي چه چپ طرف یې د دوه داسې طاقت لرونکوعددو د ضرب حاصل وي چه قاعدې یې مساوي او توانونه یې مختلف وي دغسې معادلې په اوله درجه دوه مجهوله معادلو بدلوو.

مثال:

$$2^x \cdot 2^y = 16$$
$$2^{2x} \cdot 2^{3y} = 32768$$
$$2^{x+y} = 2^4$$

$$2^{x+y} = 2^4$$
$$\underline{2^{2x+3y} = 2^{15}}$$

$$x + y = 4$$
$$\underline{2x + 3y = 15}$$

$$2(x + y = 4)$$
$$2x + 2y = 8$$
$$\underline{\pm 2x \pm 3y = \pm 15}$$
$$-y = -7$$
$$y = 7$$
$$x + 7 = 4$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x = 4 - 7 = -3$$
$$x = -3$$

تمرین

1. $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} = 3^x - 3^{x-1} + 3^{x-2}$
2. $9^x - 5 \cdot 3^x + 6 = 0$
3. $9^{x+1} + 9^{2x-1} = 54 \cdot 27^{x-1}$
4. $5^{2x-1} + 5^{x+1} = 250$
5. $\frac{1-2^x}{2^x} = 1$
6. $4 \cdot 3^{2x} + 3^x = 2 \cdot 3^{2x} - 3 \cdot 3^x + 198$
7. $5^{2y} - 5^y - 600 = 0$
8. $\begin{array}{l} 3^{2x} \cdot 3^{5y} = 19683 \\ 3^x \cdot 3^{3y} = 243 \end{array}$
9. $9^x - 5 \cdot 3^x - 46 = 0$
10. $2^{x+3} + 2^{x-1} = 17$
11. $\begin{array}{l} 2^{3x+1} \cdot 2^{y+1} = 128 \\ 2^{x+5} \cdot 2^{y+2} = 1024 \end{array}$
12. $\frac{3^{2x+3}}{3^x} \cdot \frac{3^{3y+1}}{3^y} = 2187$
13. $2^{3x-2} \cdot 2^{y+5} = 128$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نهم فصل

لوګاریتمي معادلی Logarithm's Equation:

لوګاریتم په لغت کی د متناسبو عددو شمېرلو ته وایي.

او په اصطلاح کی داکسپوننشل معادلو معکوسي معادلی ته لوګارتمي معادله وايي.

فرضاً $(b = a^x)$ یوه اکسپوننشل معادله لرو معکوسه معادله يي لوګاریتمي معادله ده.

چه داسی لیکل کیږي.

$$log_a b = x$$

a ته د $log\ b$ قاعده وایي.

کولای شو چه اکسپوننشل تابع په لوګاریتمي تابع او لوګاریتمي تابع په اکسپوننشل تابع بدله کړو.لکه $(x = 2^3)$ یوه اکسپوننشل تابع ده لوګاریتمي تابع يي عبارت له $(log_2 x = 3)$ څخه ده.

اوهمدا ډول $(log_2 8 = x)$ یوه لوګاریتمي تابع ده اکسپوننشل تابع يي عبارت له $(8 = 2^x)$ څخه ده.

د لوګاریتم خواص:

1- د (1) لوګاریتم د هر مثبت عدد په قاعده باندی صفر (0) کیږي.

$$\begin{pmatrix} log_b 1 = 0 \\ b \neq 1 \end{pmatrix}$$

2- د هر مثبت لوګاریتم په خپله قاعده باندی (1) کیږي. $\begin{pmatrix} log_b b = .1 \\ b \neq 1 \end{pmatrix}$ دا ځکه چه $(b = b^1)$ کیږي.

مثال:

$$log_8 8 = 1 \qquad\qquad log_x x = 1$$

3- د یوه طاقت لرونکي عدد لوګاریتم په خپله قاعده باندی د توان څخه عبارت دی. $\begin{pmatrix} log_b b^r = r \\ b \neq 1 \end{pmatrix}$ ځکه چه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$b^r = b^r$$

4- د يوه حاصل ضرب لوګاريتم په يوه قاعده باندی دضربي عواملو د لوګاريتمو د مجموعی سره مساوي دي په همغه قاعده باندی:

$$log_a(M \cdot N) = log_a M + log_a N.$$

$$log_a M = x \qquad M = a^X$$

$$log_a N = y \qquad N = a^Y$$

اکسپوننشل معادلی طرف په طرف ضربوو.

$$M \cdot N = a^x \cdot a^y$$

$$M \cdot N = a^{x+y}$$

دچپ طرف لوګاريتم نيسو.

$$log_a MN = x + y$$

$$log_a MN = log_a M + log_a N$$

1- مثال: ?= $log_2(2x)$ لوګاريتم پيدا کړئ

حل:

$$log_2(2x) = log_2 2 + log_2 x = 1 + log_2 x$$

2- مثال:لاندي لوګاريتم پيدا کړئ ؟

$$log_x(xy) = ?$$

$$log_x(xy) = log_x x + log_x y = 1 + log_x y$$

5- د يوه خارج قسمت لوګاريتم په يوه قاعده باندی د صورت او مخرج د لوګاريتمو د تفاضل سره مساوي دی په همغه قاعده باندی.

$$log_a \frac{M}{N} = log_a M - log_A N$$

$$log_a M = x \qquad M = a^x$$

$$log_a N = y \qquad N = a^y$$

اکسپوننشل معادلی طرف په طرف يو پر بل ويشو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{M}{N}=\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$$

د چپ طرف لوګاریتم نیسو.

$$log_a\frac{M}{N}=x-y=log_a M-log_a N$$

1- مثال: لاندې لوګاریتم حل کړئ؟

$$log_2\frac{x}{2}=?$$

$$log_2\frac{x}{2}=log_2 x-log_2 2=log_2 x-1$$

2- مثال:

$$log_x\frac{5x}{y}=log_x(5x)-log_x y=log_x x+log_x 5-log_x y$$

$$log_x\frac{5x}{y}=log_x(5x)-log_x y=1+log_x 5-log_x y$$

6- که د یوه طاقت لرونکي عدد لوګاریتم په بله قاعده ونیول شي لوګاریتم یې عبارت دي توان ضرب یې دهغه لوګاریتم په همغه قاعده.

$$log_b M^r=r\,log_b M$$
$$log_b M=x$$
$$M=b^x$$
$$M^r=(b^x)^r\Longrightarrow M^r=b^{rx}$$
$$log_b M^r=rx$$
$$log_b M^r=r\,log_b M$$

1- مثال:

$$log_3 81^7=?$$
$$log_3 81^7=7\,log_3 81=7\,log_3 3^4=4\times 7\,log_3 3=28\times 1=28$$

2- مثال:

$$log_3(3x)^5=?$$
$$log_3(3x)^5=5\,log_3(3x)=5(log_3 3+log_3 x)$$
$$=5(1+log_3 x)=5+5\,log_3 x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

7- دیوه عدد لوګاریتم د یوه طاقت لرونکي عدد په قاعده باندی عبارت دي د قاعدی د توان معکوس ضرب یي دهغه عدد لوګاریتم د قاعدی دقاعدی په قاعده.

$$\log_{a^b} M = \frac{1}{b}\log_a m$$

$$x = \log_{a^b} M$$

$$(a^b)^x = M$$

$$(a^x)^b = M \qquad \Longrightarrow \sqrt[b]{(a^x)^b} = \sqrt[b]{M} \Longrightarrow a^x = \sqrt[b]{M}$$

$$x = \log_a M^{\frac{1}{b}} = \frac{1}{b}\log_a M$$

$$\log_{a^b} M = \frac{1}{b}\log_a M$$

مثال:

$$\log_{16} 32 = ?$$

$$\log_{16} 32 = \log_{2^4} 32 = \frac{1}{4}\log_2 32$$

$$= \frac{1}{4}\log_2 2^5 = 5 \times \frac{1}{4}\log_2 2 = \frac{5}{4} \times 1 = \frac{5}{4}$$

$$\log_{16} 32 = \frac{5}{4}$$

دقاعدی د بدلولو فارمول:

که د یوه عدد لوګاریتم په یو ه قاعده غوښتل شوی وي مګر په دغه قاعده باندی د راکړ شوي عدد د لوګاریتم پیدا کول مشکل وي نو د راکړشوي عدد او د لوګاریتم د قاعدی لوګاریتم په یوه بله قاعده باندی پیدا کوو د عدد لوګاریتم د لوګاریتم د قاعدی په لوګاریتم ویشو د راکړ شوي عدد لوګاریتم په را کړشوی قاعده باندی لاس ته راځي.

مثلاً $\log_b M$ غوښتل شوی دی لوګاریتم یي د لاندی فارمول پواسطه پیدا کیږي.

$$\log_b M = \frac{\log_a M}{\log_a b}$$

ثبوت: $\log_b M$ په x ښیو.

$$\log_b M = x \qquad \Longrightarrow M = b^x$$

$$\log_a M = \log_a b^x = x\log_a b$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\log_a M = \log_b M \log_a b$$
$$\frac{\log_b M \log_a b}{\log_a b} = \frac{\log_a M}{\log_a b}$$
$$\log_b M = \frac{\log_a M}{\log_a b}$$

1- مثال:

$$\log_{27} 81 = ?$$
$$\log_{27} 81 = \frac{\log_3 81}{\log_3 27} = \frac{\log_3 3^4}{\log_3 3^3} = \frac{4 \log_3 3}{3 \log_3 3} = \frac{4 \times 1}{3 \times 1} = \frac{4}{3}$$

2- مثال:

$$\log_{32} 128 = ?$$
$$\log_{32} 128 = \frac{\log_2 128}{\log_2 32} = \frac{\log_2 2^7}{\log_2 2^5} = \frac{7 \log_2 2}{5 \log_2 2} = \frac{7 \times 1}{5 \times 1} = \frac{7}{5}$$

د لوګاریتم اقسام

لوګاریتم د قاعدې له مخې په دوه قسمه دی.

1- اعشاري لوګاریتم یا معمولي لوګاریتم *Common logarithm*

2- طبعي لوګاریتم *Natural logarithm*

1- اعشاري لوګاریتم:

که د لوګاریتم قاعده (10) وه دی لوګاریتم ته اعشاري لوګاریتم وايي.

$\log x$

2- طبعي لوګاریتم:

هغه لوګاریتم دی چه قاعده یې (e) وي.

څرنګه چه د دوارو قسمو قاعدې معلومې دي نو قاعده یې نه لیکل کیږي.

$\ln x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ديوه عدد د لوګاريتم پيداکول:

د طاقت لرونکو عددو څخه په غېر د نورو عددو لوګاريتم دوه برخې لري.يوه برخه يې صحيح او بله برخه يې اعشاري ده .صحيح برخې ته کرکترستيک ($Characteristic$) او اعشاري برخې ته يې مانتيس ($Mantesa$) وايي .کرکترستيک د محاسبې پواسطه او مانتيس د جدول او يا د حساب د ماشين پواسطه پيدا کيږي.که دطاقت لرونکي عدد قاعده لس وي يوازې کرکترستيک لري او مانتيس نه لري

1- مثال : ?= $log(1000000)$ څو دی؟

$$log(1000000) = log\,10^6 = 6$$

کرکترستيک د ارقامو د شمېر څخه يو کم وي.

2- مثال: ?= $log(0.000000001)$ څو دی؟

$$log(0.000000001) = log\,10^{-9} = -9$$

کرکترستيک يې د اعشاريې د علامې د دواړو خواو د صفرو د شمېر سره مساوي دی او علامه يې منفي ده.

که عدد طاقت لرونکی نه ؤ نو دغه عدد مانتيس او کرکترستيک دواړه لري.لکه $log(4560000)$ د داسې عدد د لوګاريتم د پيدا کولو لپاره راکړشوی عدد په داسې اعشاري عدد بدلوو چه يو رقم يې صحيح او نور رقمونه يې اعشاري شي. د راکړشوي عدد د رقمونو شمېر ته ګورو عدد اوه رقمي دی نو په ($10^6 = 1000000$) کې يې ضربوو په دې ترتيب کولای شو چه کرکترستيک يې پيدا کړو.

$$log(4560000) = log(4.56 + 10^6) = log\,4.56 + log\,10^6 = log\,4.56 + 6$$

(6) د راکړشوي عدد کرکترستيک دی.مانتيس يې د ($log\,4.56$) څخه لاس ته راوړو.طريقه يې داسې ده چه (6) د درې رقمي عددو د لوګاريتمي دجدول په پورتنۍ کرښه کې پيدا کوواو (4.5) د جدول د چپ طرف په ستون کې پيداکوو او د مخکيني ليکل شوي عدد شاته يې ليکو بيا کرکترستيک ته ګورو که مثبت ؤ نو د کرکترستيک په اندازه د جدول څخه د پيدا شوي عدد مخې ته صفرونه ږدو. اوکه کرکترستيک منفي ؤ د پيدا شوي عدد شاته د اعشاريې د علامې دواړو خواو ته صفرونه ږدو.

$$log(4560000) = log\,4.56 + 6 = 0.6590 + 6 = 6.6590$$
$$log(4560000) = 6.6590$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه او صفر تر منځ د کسرونو لوګاریتم:

د صفر او یوه تر منځ د راکړشوي کسر کرکترستیک منفي او مانتیس یې مثبت دی. که راکړشوی کسر عام وي په اعشار کسر یې بدلوو او د مخکیني سوال په څېر یې حلوو.

مثال: $log(0.00567)$ پیداکړئ؟

حل:

$$log(0.00567) = log(5.67 \times 10^{-3}) = log\,5.67 + log\,10^{-3}$$
$$= log\,5.67 - 3 = 0.3690 - 3$$

د راکړشوي عدد لوګاریتم $(0.3690 - 3)$ دی مګر که وغواړو چه د کرکترستیک او مانتیس څخه یو عدد جوړ کړو نود کرکترستیک پر سر منفي علامه لیکو چه علامه په دی دلالت کوي چه کرکترستیک منفي دی$(\bar{3}.3690)$ او که وغواړو چه مانتیس او کرکترستیک تر یو علامه لاندی کړو نو د کرکترستیک سره (1) جمع کوو او دمانتیس څخه یې منفي کوو نو:

$$(-2.6310)$$
$$log(0.00567) = 0.3690 - 3 = \bar{3}.3690 = -2.6310$$

تمرین

د لاندی صحیح عددونو لوګاریتم پیدا کړئ؟

1- 456000
2- $log\,5890000$
3- $log\,69200$
4- $log\,73400$

د لاندی اعشاري عددونو لوګاریتم پیدا کړئ؟

1- $log\,0.00234$
2- $log\,0.0598$
3- $log\,0.000568$
4- $log\,0.008$

د صفر لوګاریتم:

$$0 = \frac{1}{10^{\infty}} = 10^{-\infty}$$
$$log_{10}\,0 = -\infty$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

انتي لوګاريتم:

هر عدد د خپل لوګاريتم انتي لوګاريتم دي.

مثلاً $(\log 1000 = 3)$ دی او $anti\ log\ 3 = 1000$ دی.

انتي لوګاريتم پيدا کول:

مانتيس په جدول کی پيدا کووهغه عدد چه د مانتيس په ستون کی ليکل شوی دي ليکو بيا هغه عدد د مانتيس په کرښه کی دی په لسيز او سليز مرتبو کی ليکو کرکترستيک ته ګوروکه مثبت ؤ کرکترستيک د عدد د ارقامو دشمېر څخه يو کم دی يعنی تر کرکترستيک يو صفر اضافه ورکوو. او که کرکترستيک منفي و نو دعدد شاته د کرکترستيک په اندازه د اعشاريي دواړو خواو ته صفرونه ږدو.

مثال:

$$antilog(2.3690) = ?$$
$$anti\ log(0.3690) = 2.338837239$$
$$anti\ log(2.3690) = 233.8837239$$

مثال:

$$anti\ log\ \bar{6}.3710 = ?$$
$$anti\ log\ 0.3710 = 2.35$$
$$anti\ log(\bar{6}.3710) = 0.00000235$$

تمرين:

1- $anti\ log(3.4581)$

2- $anti\ log(\bar{2}.6589)$

3- $anti\ log(-4.2907)$

4- $anti\ log(0.7551-4)$

د لوګ (log) اولن (ln) پيدا کول يو د بل له جنسه:

د قاعدی د بدلولو فارمول ليکو:

$$\log_b M = \frac{\log_a M}{\log_a b}$$
$$\log_b M \cdot \log_a b = \log_a M$$

د (a) په عوض (10) او د (b) په عوض (e) ليکو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\log_e M \cdot \log_{10} e = \log_{10} M$$
$$\ln M \cdot \log 2.72 = \log M$$
$$\ln M \cdot 0.4343 = \log M$$

مثال: ($\ln 6.73 = 1.9066$) دی ($\log 6.73$) پیدا کړئ؟

حل:

$$\log M = \ln M \cdot 0.4343$$
$$\log 6.73 = \ln 6.73 \cdot 0.4343$$
$$\log 6.73 = 1.9066 \cdot 0.4343$$
$$\log 6.73 = 0.8280$$

د $\log$ څخه د $\ln$ د پیدا کولو لپاره د مساوات دواړه خواوی په (0.4343) ویشو.

$$\frac{\ln M \cdot 0.4343}{0.4343} = \frac{\log M}{0.4343} = \frac{1}{0.4343}\log M$$
$$\frac{1}{0.4343} = 2.3026$$
$$\ln M = 2.3026 \cdot \log M$$

مثال:

$$\ln 563 = ?$$
$$\ln 563 = \log 563 \cdot 2.3026$$
$$\ln 563 = 2.7505 \cdot 2.3026 = 6.3$$

انترپولېشن *Interpolation*:

انترپولېشن په نوي عبارت باندی د یوی موضوع بیانولو ته وایي.

او په اصطلاح کی انترپولېشن هغه عملیه ده چه د هغه عددو لوگاریتم پیدا کوي چه لوگاریتمي جدول یې ترتیب شوی نه وي طریقه یې داسی ده چه عدد لیکو مانتیس یې په یوه حرف ښیو د راکړشوي عدد څخه لاندی باندی عددونه په دری رقمي عدد کی پیدا کوو او لیکویې او مانتیس یې د جدول څخه لیکو په دی ترتیب شپږ عددونه لاس ته راځي چه یو به یې مجهول وي بیا د دوه هم جنسو عددو تفاضل پیدا کوو په نتیجه کی څلور عددونه لاس ته راځي چه یو به یې مجهول وي د غه مجهول عدد د تناسب په واسطه پیدا کوو او د کوچني عدد د مانتیس سره یې جمع کوود راکړشوي عدد مانتیس لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال:- $log\ 4567$ پیدا کړئ؟

$$0.01\left[0.007\begin{pmatrix} log\,4.57 & 0.6599\\ log\,4.567 & m\\ log\,4.56 & 0.6589\end{pmatrix}d\right]0.0010$$

$$\frac{0.01}{0.007}=\frac{d}{0.0010}\Longrightarrow d=\frac{0.01\cdot 0.0010}{0.007}=\frac{10}{7000}=\frac{1}{700}=0.00143$$

$$d=0.00143$$
$$m-0.6589=0.00143$$
$$m=0.00143+0.6589=0.6603$$
$$log\,4567=3.6603$$

دانترپولیشن پواسطه د انتي لوګاریتم پیدا کول:

د انتي لوګاریتم د پیدا کولو لپاره مانتیس په جدول کې لټوو که په جدول کې نه ؤ نو د دغه مانتیس انتي لوګاریتم په یوه حرف ښیو د مانتیس څخه لاندې باندې مانتیسونه په جدول کې پیدا کوو په نتیجه کې شپږ عددونه لاس ته راځي چه یو به یې مجهول وي پیا د دوه، دوه هم جنسو عددو تفاضل پیدا کوو شپږ عددونه په څلورو عددو بدلیږي. چه یو به یې مجهول وي دغه مجهول عدد د تناسب پواسطه پیدا کوو اود کوچني عدد د انتي لوګاریتم سره یې جمع کوو د راکړشوي لوګاریتم انتي لوګ لاس ته راځي.

مثال:- د یوه عدد لوګاریتم (3.7351) دی انتي لوګ یې پیدا کړئ؟

$$0.01\left[d\begin{pmatrix} 5.44 & 0.735\\ m & 0.7352\\ 5.43 & 0.7348\end{pmatrix}0.0004\right]0.0008$$

$$\frac{0.01}{d}=\frac{0.0008}{0.0004}$$

$$d=\frac{0.0004\cdot 0.01}{0.0008}=\frac{4}{800}=\frac{1}{200}=0.005$$

$$m-5.43=d$$
$$m=d+5.43$$
$$m=0.005+5.43$$
$$m=5.435$$

کولوګاریتم $Cologarthm$:

د یوه عدد د معکوس لوګاریتم ته د هغه عدد کولوګاریتم وایي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثلاً (a) او $\left(\frac{1}{a}\right)$ عددونه یو د بل معکوس دي نو د $\left(\frac{1}{a}\right)$ لوګاریتم د (a) د کولوګاریتم په نوم نوم یادیږي.

$$co\log a = \log\frac{1}{a} = \log 1 - \log a = 0 - \log a = -\log a$$
$$co\log a = -\log a$$

نو معلومه شوه چه د یوه عدد کولوګاریتم دهغه عدد منفي لوګاریتم دي.

د لوګاریتمي معادلو د حل طریقه:

د لوګاریتمي معادلو په حلولو کې د لوګارتم څخه استفاده کوو.

1- مثال:

$$\log_a(x+6) - \log_a(x+2) = \log_a x$$
$$\log_a\frac{x+6}{x+2} = \log_a x$$
$$\frac{x+6}{x+2} = x$$
$$x^2 + 2x = x + 6$$
$$x^2 + 2x - x - 6 = 0 \Longrightarrow x^2 + x - 6 = 0$$
$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4\times 1\times(-6) = 1 + 24 = 25$$
$$\Delta = 25$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2\times 1} = \frac{-1 \pm 5}{2}$$
$$x_1 = \frac{-1+5}{2} = \frac{4}{2} = 2 \qquad x_1 = 2$$
$$x_2 = \frac{-1-5}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

2- مثال:

$$x^{2\log x} = 10x$$
$$\log x^{2\log x} = \log 10x$$
$$2\log x \times \log x = \log 10x \Longrightarrow 2\log^2 x = \log 10 + \log x$$
$$2\log^2 x - \log x - 1 = 0$$
$$2y^2 - y - 1 = 0$$
$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(2)(-1) = 1 + 8 = 9$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2 \times 2} = \frac{1 \pm 3}{4}$$

$$y_1 = \frac{1+3}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$y_2 = \frac{1-3}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$log\, x = y = y_1 = 1$$

$$log_{10} x = 1$$

$$x = 10^1 = 10 \qquad x_1 = 10$$

$$log_{10} x = y = y_2 = -\frac{1}{2}$$

$$log_{10} x = -\frac{1}{2}$$

$$x_2 = 10^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{10^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \qquad x_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

3- مثال:

$$\frac{log(35 - x^3)}{log(5 - x)} = 3$$

$$3\, log(5 - x) = log(35 - x^3)$$

$$log(5 - x)^3 = log(35 - x^3)$$

$$(5 - x)^3 = 35 - x^3$$

$$125 - 75x + 15x^2 - x^3 = 35 - x^3$$

$$15x^2 - 75x + 90 = 0$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$(x - 2)(x - 3) = 0$$

$$x_1 = 2 \qquad x_2 = 3$$

4- مثال:

$$log_5\left(log_{10}\sqrt{x^2 + 19}\right) = 0$$

$$log_{10}\sqrt{x^2 + 19} = 5^0 = 1$$

$$\sqrt{x^2 + 19} = 10^1 = 10$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\left(\sqrt{x^2+19}\right)^2 = 10^2$$
$$x^2 + 19 = 100$$
$$x^2 = 100 - 19 = 81$$
$$x^2 = 81$$
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{81}$$
$$x = \pm 9$$

5- مثال:

$$log_3 x + log_9 x + log_{27} x = 5.5$$
$$log_3 x + log_{3^2} x + log_{3^3} x = 5.5$$
$$log_3 x + \frac{1}{2} log_3 x + \frac{1}{3} log_3 x = 5.5$$
$$log_3 x\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = 5.5$$
$$log_3 x\left(\frac{6+3+2}{6}\right) = \frac{11}{2}$$
$$log_3 x\left(\frac{11}{6}\right) = \frac{11}{2} \qquad \Rightarrow \frac{11}{6} log_3 x = \frac{11}{2}$$
$$log_3 x = \frac{\frac{11}{2}}{\frac{11}{6}} = \frac{6 \times 11}{2 \times 11} = \frac{6}{2} = 3$$
$$log_3 x = 3$$
$$x = 3^3 = 27$$

6- مثال:

$$log_2(11x - 1) = 5$$
$$11x - 1 = 2^5$$
$$11x = 32 + 1 = 33$$
$$\frac{11x}{11} = \frac{33}{11}$$
$$x = 11$$

7- مثال:

$$log_3(2^x - 7) = 2$$
$$2^x - 7 = 2$$
$$2^x = 2 + 7 = 9 = 3^3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$x = 3$

8- مثال:

$$log_{\sqrt[3]{x}} 25 = 18$$
$$25 = \sqrt[3]{x}^{18} = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{18} = x^6$$
$$5^2 = (x^3)^2$$
$$x^3 = 5$$
$$\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{5} \qquad \Longrightarrow \quad x = \sqrt[3]{5}$$

9- مثال:

$$log_{10}\sqrt{x+1} + log_{10}\sqrt{x-1} - log_{10} 5 = 0$$
$$log_{10}\frac{\sqrt{(x+1)(x-1)}}{5} = 0$$
$$\frac{\sqrt{(x+1)(x-1)}}{5} = 10^0 = 1$$
$$\sqrt{(x+1)(x-1)} = 5$$
$$\left(\sqrt{(x+1)(x-1)}\right)^2 = 5^2$$
$$x^2 - 1 = 25 \quad \Longrightarrow x^2 = 25 + 1 = 26$$
$$x^2 = 26 \quad \Longrightarrow x = \pm\sqrt{26}$$

10- مثال:

$$log(x^2 - 1) - log(x + 1) = log\, 2$$
$$Log\frac{x^2 - 1}{x + 1} = log\, 2$$
$$\frac{x^2 - 1}{x + 1} = 2 \quad \Longrightarrow \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} = 2 \qquad \Longrightarrow x - 1 = 2\ ,\ \ x = 3$$

11- مثال:

$$x^{log_{10} x} = 10$$
$$log\, x^{log_{10} x} = log\, 10$$
$$log_{10} x\, log_{10} x = 1 \quad \Longrightarrow log^2{}_{10}\, x = 1 \quad \Longrightarrow x = 10$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

12- مثال:

$$log_3(x+1) - log_3(x-1) = 1$$
$$\frac{x+1}{x-1} = 3^1 \quad \Rightarrow x+1 = 3(x-1) \quad \Rightarrow x+1 = 3x-3$$
$$x - 3x = -3 - 1 \quad \Rightarrow -2x = -4 \quad \Rightarrow \frac{-2x}{-2} = \frac{-4}{-2} \Rightarrow x = 2$$

13- مثال:

$$log_4(3x-3) = log_2 3$$
$$log_{2^2}(3x-3) = log_2 3$$
$$\frac{1}{2} log_2(3x-3) = log_2 3$$
$$log_2(3x-3)^{\frac{1}{2}} = log_2 3$$
$$\sqrt{3x-3} = 3 \quad \Rightarrow \sqrt{(3x-3)}^2 = 3^2$$
$$3x - 3 = 9 \quad \Rightarrow 3x = 9 + 3 = 12 \Rightarrow\Rightarrow \frac{3x}{3} = \frac{12}{3} \Rightarrow x = 4$$

14- مثال:

$$log_3\left(2+\frac{1}{x}\right) = log_2 4$$
$$log_3\left(2+\frac{1}{x}\right) = log_2 2^2 \Rightarrow log_3\left(2+\frac{1}{x}\right) = 2\,log_2 2 = 2 \times 1 = 2$$
$$log_3\left(2+\frac{1}{x}\right) = 2 \quad \Rightarrow 2 + \frac{1}{x} = 3^2 = 9 \Rightarrow \frac{1}{x} = 9 - 2 = 7$$
$$\frac{1}{x} = 7 \Rightarrow 7x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{7}$$

15- مثال:

$$log\,\sqrt{x} + log\,x^{\frac{3}{2}} = log\,100$$
$$log\,\sqrt{x} \cdot \sqrt{x^3} = log\,100 \Rightarrow log\,\sqrt{x \cdot x^3} = log\,100$$
$$x^2 = 10^2 \Rightarrow x = 10$$

16- مثال:

$$log_{(x^2-x+4)}(x^2+5x-1) = 1$$
$$x^2 + 5x - 1 = x^2 - x + 4 \qquad \Rightarrow 5x - 1 = -x + 4$$
$$\Rightarrow 6x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{6}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

17- مثال:

$$log_9 3 \cdot log_2 x = 1$$
$$log_{3^2} 3 \cdot log_2 x = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} log_3 3 \cdot log_2 x = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot log_2 x$$
$$= log_2 x^{\frac{1}{2}} = 1 \Rightarrow x^{\frac{1}{2}} = 2^1 = 2 = \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4$$

x^(1/2)=2^1⟹x^(1/2)=2⟹(x^(1/2))^2=2^2⟹ x=4

18- مثال:

$$log_3 log_2(x-1) = 2$$
$$log_2(x-1) = 3^2 \Longrightarrow x - 1 = 2^9 \Longrightarrow x = 2^9 + 1$$
$$= 513 \Longrightarrow x = 513$$

19- مثال:

$$log_{10} x = \frac{log_3 12}{log_3 10}$$
$$log_{10} x = log_{10} 12$$
$$x = 12$$

20- مثال:

$$3^{log_4 16} = 27^x$$
$$3^{log_4 16} = 3^{3x}$$
$$log_4 16 = 3x \Longrightarrow 16 = 4^{3x} \Longrightarrow 2^4 = 2^{6x} \Longrightarrow 6x = 4 \Longrightarrow x = \frac{4}{6}$$
$$x = \frac{2}{3}$$

تمرين:

لاندې معادلې حل کړئ؟

1) $x \log 3 - 1 = 2 \log 3 - \log\left(\frac{x}{3} + 1\right)$

2) $\log \sqrt{2x^2} - 1 = \frac{1}{2}$

3) $\log(x-3) = 1 - \log x$

4) $\ln(y+1) = \ln(y-7) + \ln 4$

5) $\log_2 x + \log_x 2 = 2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

6) $log_2 x + log_3 x = 1$

7) $log_3 x + log_5 x = log_{10} 15$

8) $log^2{}_2 (x-1)^2 - log_{\frac{1}{2}}(x-1) = 5$

9) $\begin{cases} log_3 x + log_3 y = -3 \\ log_{10} x^3 - log_{10} y^2 = 7 \end{cases}$

10) $\begin{cases} x^y + 5x = -4 \\ log_x 16 = y \end{cases}$

11) $\begin{cases} log_4 x - log_2 y = 0 \\ x^2 - 4y^2 + 4 = 0 \end{cases}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لسم فصل

توابع

تابع په لغت کې پیرو ته وایي.

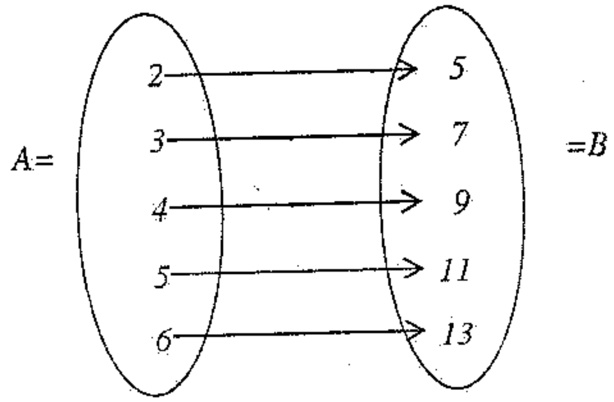
او په اصطلاح کې که د (A) او (B) دوه داسې سیټونه ولروچه د (A) دسیټ هر عنصر د (B) د سیټ د یوه عنصر سره تعلق ولري. دغسې تعلق یا رابطې ته تابع وایي.

لکه: $A = (2,3,4,5,6)$ او $B = (5,7,9,11,13)$

سیټونه د لاندې رابطې پیروي کوي.

$$y = 2x + 1$$

نو دغه ډول رابطې ته تابع وایي.



په تابع کې اول سیټ ته د تعریف ناحیه ،د قیمتونو سیټ اویا ډومېن $(Domain)$ وایي.

دویم سیټ ته د تصویرونو سیټ ، رنج $(Range)$ او کوډومېن $(Codomain)$ وایي.

رنج : د تعریف د ناحیې د عناصرو دتصویرونو سیټ ته رنج وایي.

کوډومین: د دویم سیټ د ټولو عناصرو سیټ ته کوډومېن وایي.

کله کله د ډومېن ټول عناصر د کوډومېن د ټولو عناصرو سره رابطه لري په دی صورت کې دویم سیټ هم رنج دی او هم کوډومېن دی.لکه پورتني سیټونه .

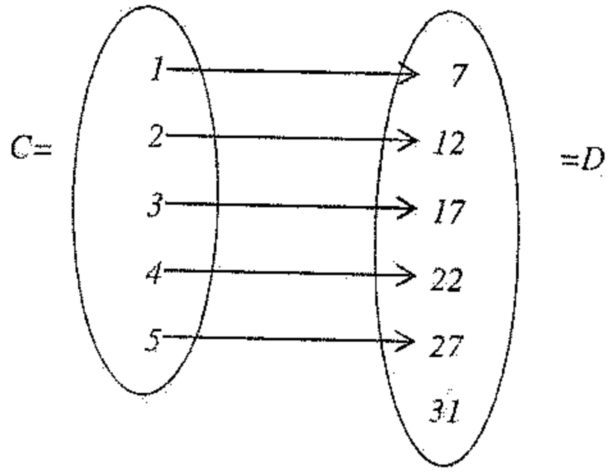
او که د دویم سیټ ټول عناصر د اول سیټ د عناصرو سره تعلق ونلري پدی صورت کې د دویم

(c) ketabton.com: The Digital Library

سیټ هغه عناصر چه د اول سیټ د عناصرو سره تعلق لري د تصویرونو سیټ یا رنج بلل کیږي
او د دویم سیټ ټول عناصر د کوډومین په نوم یادیږي.

$C = (1,2,3,4,5)$

$D = (7,12,17,22,27,31)$



په دغه حالت کې د رنج او کوډومین تر منځ لاندې رابطه موجوده ده.

$Range \subseteq Codomain$

د تابع اقسام :

تابع په دوه قسمه ده.

1- ناطقه تابع　　　　2- ترانسندنتل تابع

1- ناطقه تابع :

خطي تابع ، دویمه درجه تابع او هوموګرافیک تابعګانې ناطقې تابعګانې دي.

a- خطي تابع:

هغه تابع ده چه ګراف یې مستقیم خط وي. عمومي شکل یې دا دی.

$y = ax + b$

$y = mx + b$

(a) او (b) ثابت عددونه دي (x) متحول دی (y) د (x) تابع دی. a او m دواړه یو شی دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دخطي تابع د تعريف ناحيه :

د خطي تابع د تعريف ناحيه د حقيقي اعدادو سيټ دی په (IR) سره يي ښيي يعني:

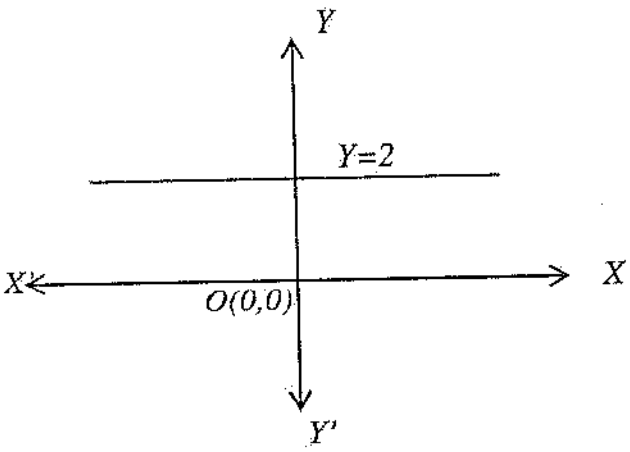
$$IR = (-\infty ، +\infty)$$

د خطي تابع ميل د (x) ضريب يعني (m) دی.

خصوصي حالتونه:

1- که په يوه تابع کې $m = 0$ تابع لاندې شکل غوره کوي $(y = b)$ دی تابع ته ثابته تابع وايي.ګراف يي د $X\acute{X}$ د محورسره موازي دی.

مثال:- $Y = 2$ ګراف رسم کړئ؟



2- چه $m = 1$ او $b = 0$ وي تابع لاندې شکل غوره کوي.

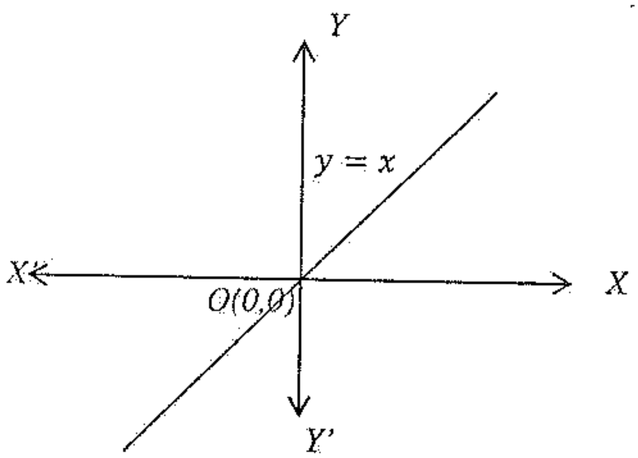
$$y = mx + b \Longrightarrow 1.x + 0 = x$$
$$y = x$$

دغې تابع ته د عينيت تابع وايي ګراف يي اوله او دريمه ربعه نيمايي کوي .

مثال:- $y = x$ د تابع ګراف رسم کړئ؟

x	-1	0	$+1$
y	-1	0	$+1$

(c) ketabton.com: The Digital Library



دخطي تابع د عمومي شکل د ګراف ترسیم:

1- د $X\acute{X}$ محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پيدا کوو نو $y = 0$ فرضوو.

2- د $Y\acute{Y}$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پيدا کوو نو $X = 0$ فرضوو.

پيدا شوي نقطې وصلوو د راکړشوی تابع ګراف لاس ته راځي.

مثال: د $y = 3x + 6$ د تابع ګراف رسم کړئ

حل:

1- $x = 0$ فرضوو نو $y = 6$ کيږي نود (YY') د محور سره د تابع د تقاطع نقطه عبارت له $A(0,6)$ څخه ده.

2- $y = 0$ فرضوو نو:

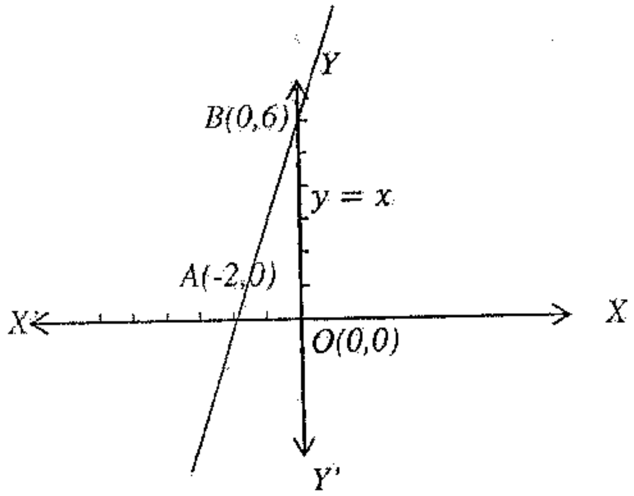
$$3x + 6 = 0$$

$$3x = -6 \Rightarrow \frac{3x}{3} = -\frac{6}{3} \Rightarrow x = -2$$

$$B(-2,0)$$

دا نقطه د (XX') د محور سره د ګراف د تقاطع نقطه ده د وضعيه کميتونو د محورونو په مستوي کې يې د وضعيه کميتونو د محورونو پر مخ يې پيدا کوو او و صلوو يې غوښتل شوی ګراف لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



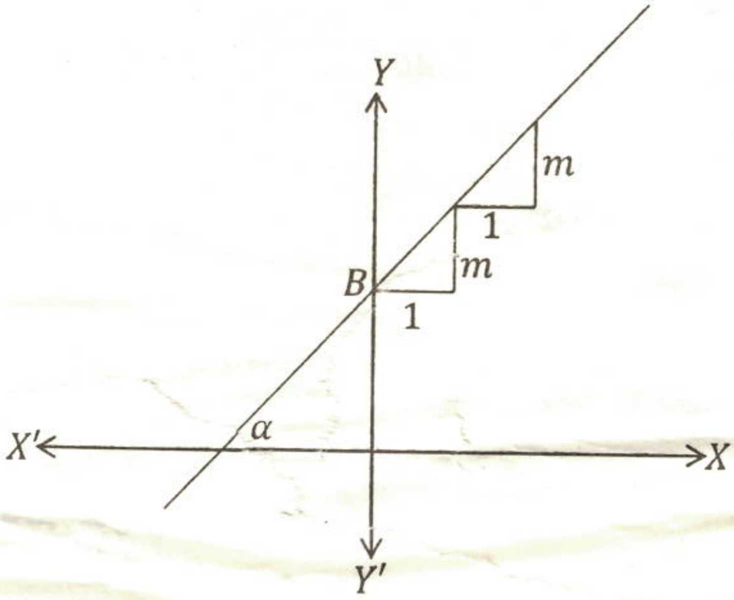
د مستقیمې کرښې میل:

د مستقیمې کرښې میل د هغه زاویې تانجانت دی چه مستقیمه کرښه یې د $X\acute{X}$ د محور سره جوړوي.

په عمومي صورت د متحول ضریب د مستقیمې کرښې میل دی.ددی خبری دثبوت لپاره د وضعیه کمیتونو په مستوي کې د وضعیه کمیتونو محورونه د (Δ)د مستقیم پواسطه قطع کوو چه د $Y\acute{Y}$ محور د B په نقطه کې قطع کړي او $X\acute{X}$ د محور سره د (α) په اندازه زاویه جوړه کړي بیا د $X\acute{X}$او $Y\acute{Y}$ د محورونو سره موازي خطونه رسموو په افقي خطو باندی د واحد په اندازه او په عمودي محورو باندی د (m) په اندازه توټې را بېلو او د (α) د زاویې تانجانت پیدا کوو چه همدغه تانجانت د مستقیمې کرښې میل دی.

$$\tan\alpha = \frac{m}{1} = m$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



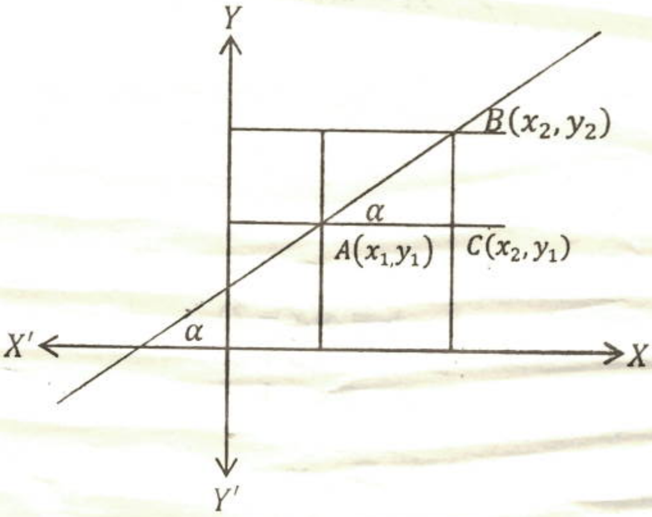
دمیل معادله

فرضاً د $A(x_1, y_1)$ او $B(x_2, y_2)$ نقطې د مستقیمې دوه نقطې دي

د (A) او (B) د نقطو څخه د $X\acute{X}$ او $Y\acute{Y}$ د محورو سره موازي خطونه رسموو چه یو

او $B(X_2, Y_2)$ بل د $C(x_1, y_2)$ په نقطه کې قطع کړي د ABC

په مثلث کې د α دزاویې تانجانت پیدا کوو.



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\tan\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\tan\alpha = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

مثال: $A(5,9)$ او $B(-2,-5)$ دیوی مستقیمی کرښی دوه نقطی دي مېل يي پيدا کړئ؟

حل:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-5-9}{-2-5} = \frac{-14}{-7} = 2 \Rightarrow m = 2$$

د هغه مستقيمي کرښې معادله چه مېل او يوه نقطه يي معلومه وي:

د مستقيمی کرښی عمومي معادله ليکو.

$$y = mx + b \ldots 1$$

فرضاً $A(x_1, y_1)$ د يوې مستقيمی کرښی يوه نقطه ده په عمومي معادله کې يي وضع کوو.

$$y_1 = mx_1 + b \cdots 2$$

(2) رابطه د (1) رابطی څخه منفي کوو.

$$\begin{aligned} y &= mx + b \\ \pm y_1 &= \pm m x_1 \pm b \\ \hline y - y_1 &= mx - mx_1 \end{aligned}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

مثال: د هغه مستقيمی کرښی معادله پيدا کړئ چه $m = 3$ وي او د $A(2,5)$ د نقطې څخه تېره شي؟

حل:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 5 = 3(x - 2)$$
$$y = 3x - 6 + 5$$
$$y = 3x - 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هغه مستقیمې کرښې د معادلې پیدا کول چه دوه نقطې یې معلومې وي:

د هغه مستقیمې کرښې معادله لیکو چه میل او یوه نقطه یې معلومه وي

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

د (m) په عوض یې قیمت لیکو:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

مثال: د هغه مستقیمې کرښې معادله پیدا کړئ چه دوه نقطې یې $A(-4,14)$ او $B(4,8)$ وي.

حل:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y - 14 = \frac{8 - 14}{4 - (-4)}\{x - (-4)\}$$

$$y = \frac{-6}{4 + 4}(x + 4) + 14$$

$$y = \frac{-6}{8}(x + 4) + 14$$

$$y = -\frac{3}{4}(x + 4) + 14 = -\frac{3}{4}x - \frac{3}{4} \cdot 4 + 14 = -\frac{3}{4}x - 3 + 14$$

$$= -\frac{3}{4}x + 8$$

محوري معادله

محوري معادله هغه معادله ده چه د محورونو سره یې د تقاطع نقطې معلومې وي.

معادله یې په لاندې ډول ده.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

ثبوت: فرضاً د $X\acute{X}$ دمحور سره یې د تقاطع نقطه $A(a,0)$ ده او د $Y\acute{Y}$ سره یې د تقاطع نقطه $B(0,b)$ ده دا نقطې په هغه معادله کې وضع کوو چه دوه نقطې یې معلومې وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y - 0 = \frac{b - 0}{0 - a}(x - a)$$

$$y = \frac{b}{-a}(x - a)$$

$$-ay = bx - ab$$

$$-bx - ay = -ab$$

$$\frac{-bx}{-ab} - \frac{ay}{-ab} = \frac{-ab}{-ab}$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

مثال: د يوې مستقيمې کرښې دوه نقطې $A(5,0)$ او $B(0,10)$ دي معادله يې پيدا کړئ؟

حل:

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{10} = 1$$

$$\frac{2x + y}{10} = 1$$

$$y = -2x + 10$$

تمرين:

1- په لاندې ډول د کرښو نقطې راکړ شويدي ميل يې پيدا کړئ؟

1- $A(3,5)$, $B(4,-11)$ 2- $C(9,3)$, $D(2,7)$

3- $E(9,3)$, $F(3,-5)$

2- په لاندې ډول د مستقيمې کرښې يوه نقطه او ميل راکړشوی دي معادله يې پيدا کړئ؟

1- $A(5,4)$, $m = 4$ 2- $B(5,8)$, $m = 2$

3- $C(-3,7)$, $m = \frac{1}{2}$

3- په لاندې ډول د مستقيمې کرښې دوه نقطې راکړ شويدي معادله يې پيدا کړئ؟

1: $A(3,4)$, $B(6,2)$ 2: $C(8,12)$, $D(4,-7)$

3: $E(2,-1)$, $F(3,-4)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

4- په لاندې ډول د محورېنوسره د مستقیمې کرښې د تقاطع نقطې راکړشویدي محوري معادلې یې پیدا کړئ؟

1- $A(4,0)$, $B(0,8)$ 2- $C(3,0)$, $D(0,12)$

3- $E(8,0)$, $F(0,24)$

جفته تابع:

که یوه تابع د او لپاره یو شان وي دی تابع ته جفته تابع وایي. لکه $y = x^2$ چې:

$$f(x) = x^2$$
$$f(-x) = (-x)^2 = x^2$$

یعنی:

$$f(x) = f(-x)$$

طاقه تابع:

هغه تابع ده چه او لپاره یو شان نه وي. لکه $y = x^2 + 5x$ چه د (x) او لپاره یو شان نه ده یعني د (x) لپاره $f(x) = x^2 + 5x$ او د $(-x)$ لپاره $f(-x) = x^2 - 5x$ ده نو $f(x) \neq f(-x)$ نو دغه تابع طاق تابع ده.

معکوسه تابع:

دوه تابعګانې هغه وخت یو د بل معکوسې دي چه د یوې ډومېن دبلې کوډومېن وي او کوډومېن دبلې تابع ډومېن وي.

د معکوسې تابع جوړول:

د تابع څخه د (x) قیمت د (y) له جنسه پیدا کوو اوبیا د (x) او (y) ځایونه بدلوو معکوسه تابع لاس ته راځي.

مثال: د $y = 3x - 7$ معکوسه تابع پیدا کړئ.

حل:

$$3x - 7 = y$$
$$3x = y + 7$$
$$x = \frac{y + 7}{3}$$
$$y = \frac{x + 7}{3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مرکبه تابع:

هغه تابع ده چه متحول يې د بل متحول تابع وي يا دا چه د تابع ،تابع ته مرکبه تابع وايي.

که وغواړو چه د دوه تابعګانو څخه مرکبه تابع جوړه کړو نو يوه تابع په بله تابع کې د متحول په عوض وضع کوو.مرکبه تابع لاس ته راځي اوداسې ليکل کيږي.

$$fog$$

مثال: $f(x) = 3x - 5$ او $g(x) = 3x^2 - 1$ دوه تابعګانې راکړشويدي fog او gof پيدا کړئ؟

$$fog = f\{g(x)\} = f(3x^2 - 1) = 3(3x^2 - 1) - 5 = 9x^2 - 3 - 5 = 9x^2 - 8$$

$$fog = 9x^2 - 8$$

$$gof = g\{f(x)\} = g(3x - 5) = 3(3x^2 - 1)^2 - 5 = 3(9x^2 - 6x + 1) - 5$$
$$= 27x^2 - 18x + 1 - 5$$

$$gof = 27x^2 - 18x - 4$$

د مرکبې تابع د تعريف ناحيه

د مرکبې تابع د تعريف ناحيه د اولى تابع د تعريف د ناحيې د هغه عناصرو سيټ دی چه په مرکبه تابع کې تصوير ولري.

مثال: $f(x) = \sqrt{4x - 1}$ او $h(x) = x^2 + \frac{1}{4}$ دوه تابعګانې لرو چې $domf(x) = \left[\frac{1}{3}, \infty\right]$ او $domh(x) = IR$ دی، hof او foh او ډومېنونه يې پيدا کړئ؟

حل:

$$hof = h\{f(x)\} = h\left(\sqrt{4x - 1}\right) = \left(\sqrt{4x - 1}\right)^2 + \frac{1}{4} = 4x - 1 + \frac{1}{4} = 4x - \frac{3}{4}$$

$$hof = 4x - \frac{3}{4} \qquad ; \; domh\{f(x)\} = \left[\frac{1}{3}, \infty\right[$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$foh = f\{h(x)\} = f\left(x^2+\frac{1}{4}\right) = \sqrt{4\left(x^2+\frac{1}{4}\right)-1} = \sqrt{4x^2+4\times\frac{1}{4}-1}$$

$$= \sqrt{4x^2+1-1}$$

$$foh = 2x \quad ; \quad domf\{h(x)\} = IR$$

تمرين:

د لاندې تابعګانو معکوسې تابعګانې پیدا کړئ؟

$1\text{- } y = 4x - 3$ $\qquad$ $2\text{- } y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{12}$

$3\text{- } y = x - \frac{1}{2}$ $\qquad$ $4\text{- } y = 5x - 8$

د لاندې تابعګانو ترکیب او دومېنونه پیدا کړئ؟

$1\text{- } f(x) = 3x - 4 \;,\; g(x) = \sqrt{3x^2+4}$

$2\text{- } f(x) = x^2 + 1 \;,\; h(x) = \sqrt{x}$

پولینومي تابعګانې

څو شاخه اي تابعګانو ته پولینومي تابع وايي.لکه

$$y = \begin{cases} x+1 & : x < -2 \\ x+3 & : x > 2 \\ x-1 & : x < 1 \end{cases}$$

حل:

$$y = x + 3 \quad : x > 2$$

x	3	4
y	6	7

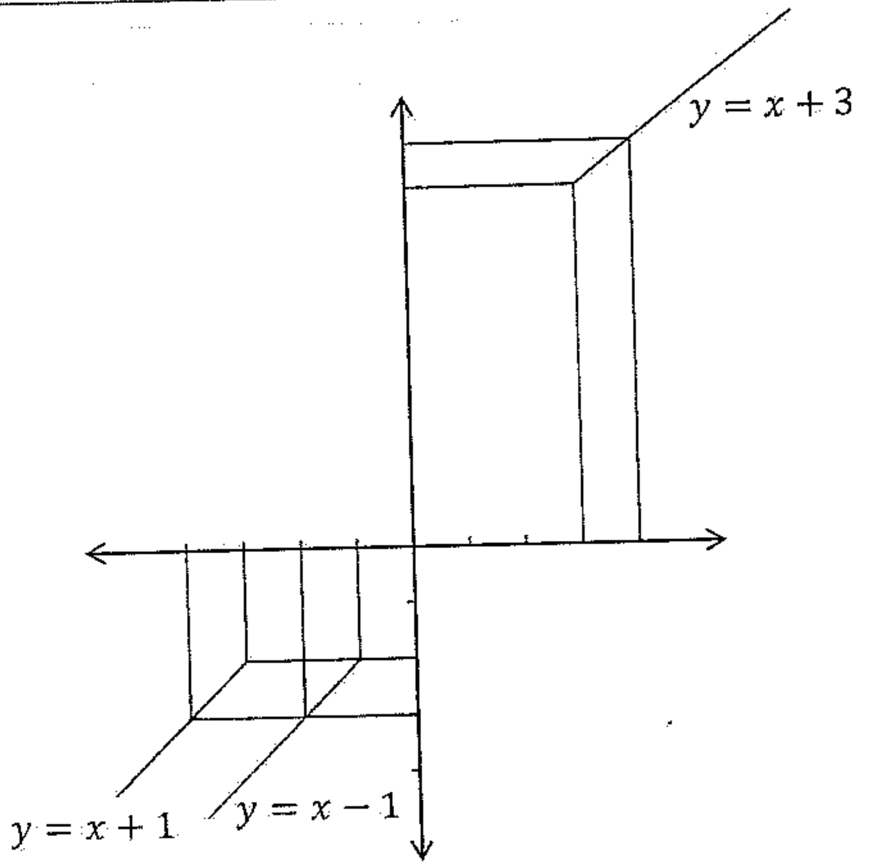
$$y = x + 1 \quad : x < -2$$

x	−4	−3
y	−3	−2

$$y = x - 1 \quad : x < 1$$

x	−2	−1
y	−3	−2

(c) ketabton.com: The Digital Library



تمرين

د لاندې تابعګانو ګرافونه رسم کړئ؟

1- $y = \begin{cases} x+2 & : x > 3 \\ x-2 & : x < 3 \end{cases}$

2- $y = \begin{cases} x-1 & : x > 2 \\ x+1 & : x < 2 \\ x+2 & : x > 5 \end{cases}$

3- $y = \begin{cases} x+4 & : x < 2 \\ x-1 & : x > 0 \end{cases}$

4- $y = \begin{cases} \frac{x+2}{3} & : x < 6 \\ \frac{x-2}{4} & : x > 6 \end{cases}$

5- $y = \begin{cases} x+4 & " \quad x < 3 \\ x-4 & " \quad x > 3 \end{cases}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

يوولسم فصل

دويمه درجه تابع

دويمه درجه تابع هغه تابع ده چه د متحول درجه يي دوه وي.

عمومي شکل يې دا دی.

$$\begin{pmatrix} y = ax^2 + bx + c \\ a \neq 0 \end{pmatrix}$$

a، b او c ثابت عددونه دي او (x) متحول دی او (y) د (x) تابع دی.

د دويمه درجه تابع د تعريف ناحيه:

د دويمه درجه تابع د تعريف ناحيه د حقيقي اعدادو سيټ دی او په IR سره يې ښيي. د تعريف ناحيې ته د قيمتونوسيټ او ډومين $(Domain)$ هم وايي.

د دويمه درجه تابع ګراف:

د دويمه درجه تابع ګراف ته پارابول وايي.

که په دويمه درجه تابع کې $a > 0$ وي تابع ګراف اصغري نقطه لري او د پارابول خوله پورته خواته خلاصيږي. او که $a < 0$ وي نو پارابول اعظمي نقطه لري او د پارابول خوله کښته خواته خلاصيږي.

اعظمي او اصغري نقطو ته د پارابول راس $(Vertex)$ وايي.

د دويمه درجه تابع د ګراف ترسيم:

د دويمه درجه تابع د ګراف ترسيم په درې حالته کې مطالعه کوو.

1- د $y = ax^2$ د تابع د ګراف ترسيم

2- د $y = ax^2 + c$ د تابع د ګراف ترسيم

3- د $\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = ax^2 + bx \end{cases}$ د تابع ګراف رسم کړئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

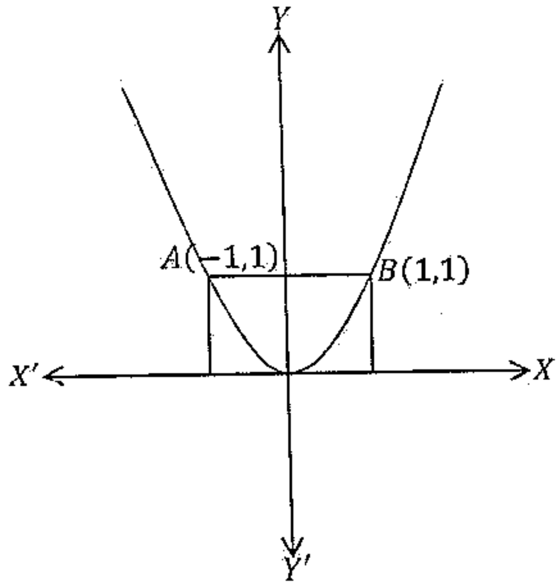
1- د $y = ax^2$ د تابع د ګراف ترسیم:

x ته څو قیمتونه ورکوو او د (y) قیمتونه پیدا کوو. بیا د تابع د ګراف وضعیت په یوه جدول کې مطالعه کوو.

مثال:- د $y = x^2$ ګراف رسم کړئ؟

x ته څو قیمتونه ورکوو او د y قیمتونه پیدا کوو. او د تابع وضعیت په یوه جدول کې مطالعه کوو:

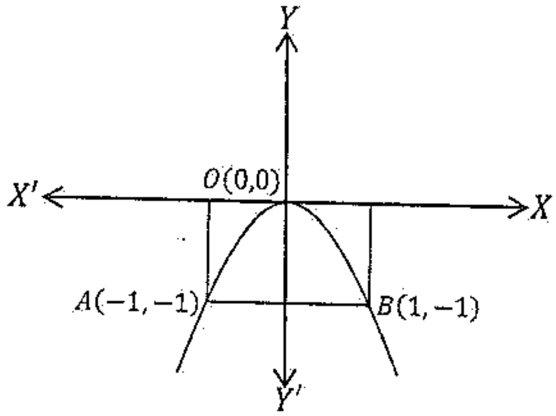
x	-1	0	1
y	-1	0	$+1$



(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال:- د $y = -x^2$ د تابع ګراف رسم کړئ؟

x	-1	0	$+1$
y	-1	0	$+1$



نوټ:

که $(1 > a)$وي نو د تابع ګراف پلن او سورور وي او که $(a > 1)$ وي نو د تابع ګراف نري او کم سوری وي.

تمرین:

لاندې ګرافونه رسم کړئ؟

1- $y = 3x^2$ 2- $y = 2x^2$ 3- $y = -4x^2$

4- $y = \frac{1}{2}x^2$ 5- $-\frac{2}{3}x^2$

د ګراف انتقال:

د $(X\acute{X})$ او $(Y\acute{Y})$ په محورو باندې د تابع د ګراف حرکت ته د تابع دګراف انتقال وایي.

1- د $(X\acute{X})$ پر محور باندې د تابع د ګراف انتقال :

که وغواړو چه د $(X\acute{X})$ پر محور باندې د تابع ګراف ته انتقال ورکړو نو مطلوب عدد د تابع سره جمع یا تفریقوو او ګراف یې رسموو.

مثال:- د $y = x^2$ د تابع ګراف ته د (3) په اندازه چپې او ښی خواته انتقال ورکړئ؟

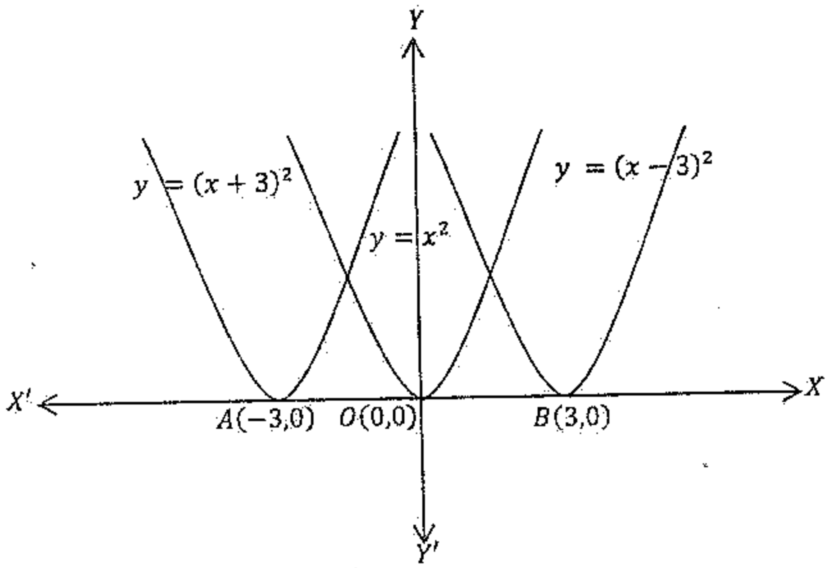
(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: چپې خواته د 3 په اندازه انتقال ورکوو نو 3 ورسره جمع کوو.

$$y = (x+3)^2$$
$$x + 3 = 0$$
$$x = -3$$
$$A(-3,0)$$

ښۍ خواته د انتقال لپاره (3) د متحول څخه منفي کوو:

$$y = (x-3)^2$$
$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$



2- د YY' په محور باندې د تابع د ګراف انتقال:

که وغواړو چه د $y = x^2$ د تابع ګراف ته د ($y\acute{y}$) په محور باندې انتقال ورکړو نو مطلوب عدد د تابع سره جمع یا تفریقوو.

مثال:- د $y = x^2$ د تابع ګراف ته د (2) په اندازه پورته او کښته خواته انتقال ورکړئ؟

حل:

که وغواړو چه (2) په اندازه ګراف ته پورته خواته انتقال ورکړو نو (2) د تابع سره جمع کوو.

$$y = x^2 + 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

... د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوونو $y = 0$ فرضوو

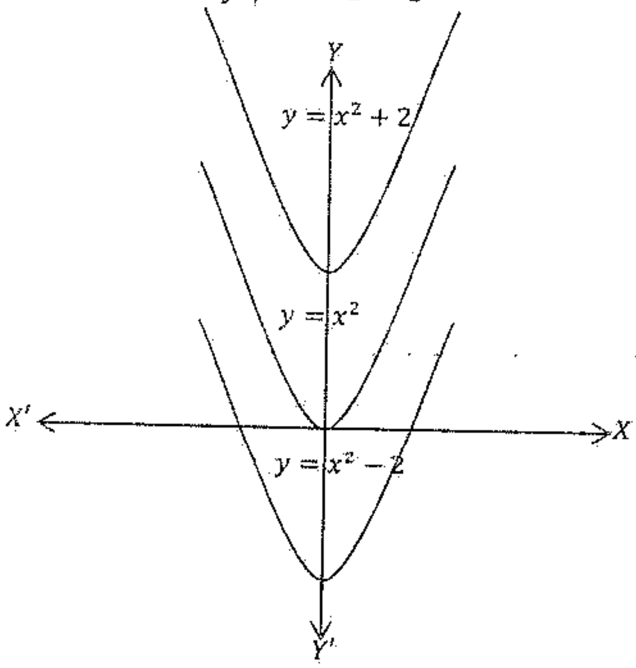
$$x^2 + 2 = 0$$
$$x^2 = -2$$

ځرنګه چه منفي عدد جذر نه لري نو د تابع ګراف د $(X\acute{X})$ محور نه قطع کوي.

د ګراف د ښه ترسیم لپاره (x) ته څو قیمتونه ورکوو او د (y) قیمتونه پیدا کوو

2- د $(Y\acute{Y})$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $x = 0$ فرضوو په نتیجه کې $y = 2$ کیږي چه د $Y\acute{Y}$ د محور سره د ګراف د تقاطع نقطه $A(0,2)$ ده.

x	-1	0	$+1$
y	3	2	3



تمرین:

لاندې تابعګانې رسم کړئ؟

1- د $y = 2x^2$ تابع ګراف ته د (3) په اندازه ښۍ او چپې خواته انتقال ورکړئ؟

2- د $y = 3x^2$ تابع ګراف ته د $\left(\frac{3}{2}\right)$ په اندازه کښته او پورته خواته انتقال ورکړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- د $y = ax^2 + c$ د تابع د ګراف ترسيم:

1- د $(X\acute{X})$ د محور سره د تابع دګراف د تقاطع نقطه پيدا کوو نو $y = 0$ فرضوو د تقاطع نقطې يې عبارت دي.

$$A\left(+\sqrt{\frac{-c}{a}}, 0\right)$$

$$B\left(-\sqrt{\frac{-C}{A}}, 0\right)$$

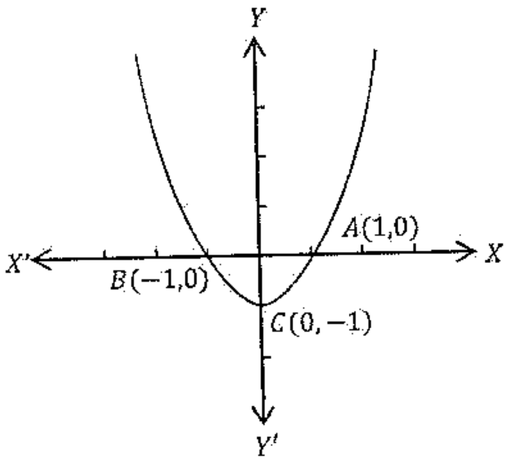
2- د $(Y\acute{Y})$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پيدا کوونو $x = 0$ فرضوو د تقاطع نقطه يې عبارت ده له $M(0, C)$ دغه نقطه د تابع د ګراف راس هم دي.

د (A) نقطه د (C)سره او د (C) نقطه د (B) سره وصلوو د تابع ګراف لاس ته راځي.

مثال: د $y = x^2 - 1$ د تابع ګراف رسم کړئ؟

1- د $(X\acute{X})$ دمحور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پيدا کوو نو $y = 0$ فرضوو.

$x^2 - 1 = 0$
$x^2 = 1$
$\sqrt{x^2} = \sqrt{1}$
$x_1 = 1$
$x_2 = -1$



(c) ketabton.com: The Digital Library

د xx' د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطې عبارت دي:

$$A(1,0) \qquad B(-1,0)$$

2- د $(Y\acute{Y})$ دمحور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $x = 0$ فرضوو. چې $y = -1$ کیږي نو د $(Y\acute{Y})$ سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه عبارت ده له $C(0,-1)$ څخه

مثال: د $y = x^2 + 1$ د تابع ګراف رسم کړئ؟

حل: د $(X\acute{X})$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $y = 0$ فرضوو.

$$x^2 + 1 = 0$$
$$x^2 = -1$$
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{-1}$$

څرنګه چه منفي عدد جذر نه لري نو د تابع ګراف د xx' د محور سره د تقاطع نقطه نلري.

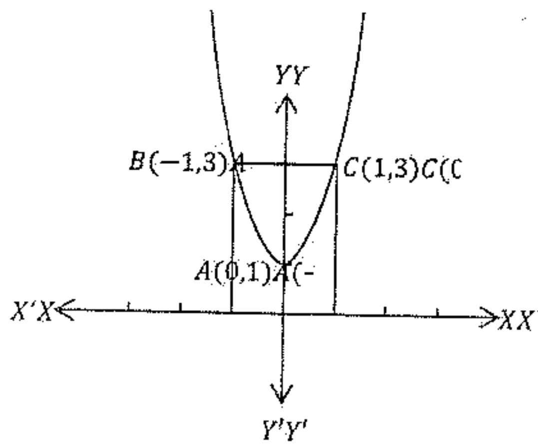
د $(Y\acute{Y})$ د محور سره دتابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $x = 0$ فرضوو نو د $(Y\acute{Y})$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه عبارت ده.

$$A(0,1)$$

د ګراف د دقیق ترسیم لپاره (x) ته څو قیمتونه ورکوو او د (y) قیمت پیدا کوو.

x	-1	0	$+1$
y	2	0	2

$B(-1,2) \qquad O(0,1) \qquad C(1,2)$



(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د $y = -x^2 + 1$ د تابع ګراف رسم کړئ؟

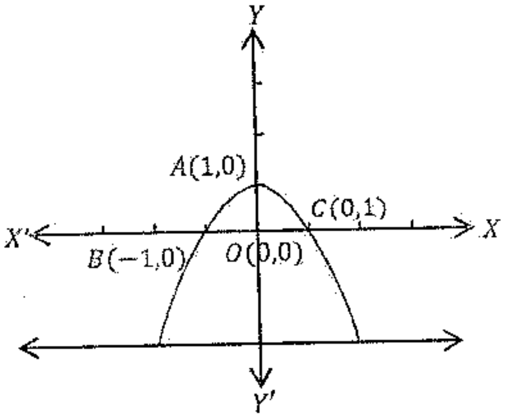
حل:

1- د $(X\acute{X})$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $y = 0$ فرضوو.

$-x^2 + 1 = 0$
$-x^2 = -1$
$x^2 = 1$
$\sqrt{x^2} = \sqrt{1}$
$x_1 = 1$
$x_2 = -1$
$A(1,0) \quad B(-1,0)$

2- د $(Y\acute{Y})$ د محور سره دتابع د ګراف نقطه پیدا کوو نو $x = 0$ فرضوو. نو $y = 1$ کیږي د تقاطع نقطه يي عبارت ده.

$C(0,1)$



مثال: د $y = -x^2 - 1$ د تابع ګراف رسم کړئ؟

حل:

1- د $(X\acute{X})$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $y = 0$ فرضوو.

$-x^2 - 1 = 0$
$-x^2 = 1$
$x^2 = -1$
$\sqrt{x^2} = \sqrt{-1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځکه چه منفي عدد جذر نلري نو د تابع ګراف د $(X\acute{X})$ محور نه قطع کوي.

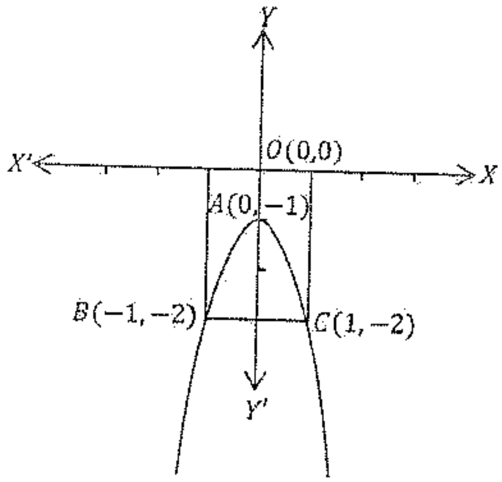
2- د $Y\acute{Y}$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $x = 0$ فرضوو نو $y = -1$ نو د X د محور سره د تقاطع نقطه عبارت ده.

$$A(0, -1)$$

د ګراف د دقیق ترسیم لپاره (x) ته څو قیمتونه ورکوو او د (y) قیمت پیدا کوو.

x	-1	0	1
y	-2	-1	-2

$B(-1, -2)$ $\quad O(0,0)$ $\quad C(1, -2)$



3- د $\begin{cases} y = ax^2 + bx \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases}$ د تابعګانو د ترسیم طریقه:

1- د $(X\acute{X})$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $(y = 0)$ فرضوو. په نتیجه کې $ax^2 + bx + c = 0$ دویمه درجه معادله لاس ته راځي . د دغه معادلی د حل لپاره د (Δ) قیمت پیدا کوو د (Δ) په باب دری حالته موجود دي.

a- که $\Delta > 0$ وي نو معادله دوه جذره لري او جذرونه یې د $x = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ پواسطه پیدا کیږي او د تقاطع نقطې یې عبارت دي له : $A(X_1, 0)$ او $B(X_2, 0)$

b- که $(\Delta = 0)$ وي معادله یو جذر لري او د لاندې فارمول پواسطه پیدا کیږي $x = \frac{-b}{a}$ نو د تقاطع نقطه یې عبارت ده له : $A(x, 0)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

c- كه $(\Delta = 0)$ وي معادله جذر نه لري نو د تابع ګراف د $(X\acute{X})$ محور نه قطع كوي په دغه حالت كې د پاره ددى چه د $(Y\acute{Y})$ د محور يوى او بلى خواته دګراف خط السير تعين شي نو (x) ته يو منفي او يو مثبت قيمت وركوو اود (y) قيمتونه پيدا كوو د $(Y\acute{Y})$ د محور يوى او بلى خواته دوه نقطى لاس ته راځي چه د تابع د ګراف خط السير تعينوي.

2- د $(Y\acute{Y})$ دمحورسره دتابع د ګراف د تقاطع نقطه پيدا كوونو $x = 0$ فرضوود $(Y\acute{Y})$ د محورسره دتابع دګراف دتقاطع نقطه عبارت ده له: $M(0, c)$

3- د تابع د ګراف د راس نقطه

$$y = ax^2 + bx + c \quad \Rightarrow a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

$$y = a\left\{x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right\}$$

$$y = a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right\}$$

$$y = a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right\}$$

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

كه $a > 0$ وي

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 > 0 \qquad \therefore \quad a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 > 0$$

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} > -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$y > -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

كه $x + \frac{b}{2a} = 0$ شي نو $x = -\frac{b}{2a}$ كيږي.نو د راس نقطه عبارت ده.

$$V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که $a < 0$ وي بيا هم $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 > 0$ كيږي مګر $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 < 0$ کيږي. دواړه خواوې ته $\frac{4ac-b^2}{4a}$ منفي کوو:

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{4ac-b^2}{4a}<-\frac{4ac-b^2}{4a}$$

$$y<-\frac{4ac-b^2}{4a}$$

که $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$ او $x=\frac{-b}{2a}$ شي نو $y=\frac{4ac-b^2}{4a}$ کيږي. نو د راس نقطه عبارت ده.

$$V\left(\frac{-b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$$

مثال: د $y=2x^2-3x-2$ د تابع ګراف رسم کړئ؟

حل: د $(X\acute{X})$ د محور سره د تابع د ګراف د د قاطع نقطه پيدا کوو نو $y=0$ فرضوو.

$2x^2-3x-2=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times2\times(-2)=9+16=25$

$\Delta=1$

$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-3)\pm5}{2\times2}=\frac{3\pm5}{4}$

$x_1=\frac{3+5}{4}=\frac{8}{4}=2 \quad \therefore\ x_1=2$

$x_2=\frac{3-5}{4}=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2} \quad \therefore\ x_2=\frac{-1}{2}$

نو د محور سره دګراف د د تقاطع نقطې عبارت دي:

$$A(2,0) \qquad B\left(\frac{-1}{2},0\right)$$

د $(X\acute{X})$ د محور سره د ګراف د تقاطع نقطه پيدا کوو نو $y=0$ فرضوو. نو $y=6$ کيږي نو

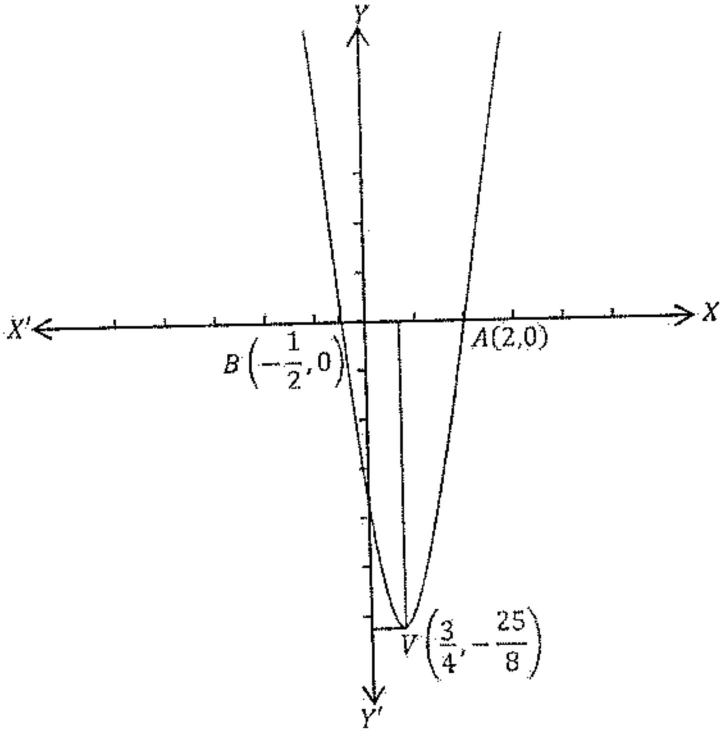
د $(Y\acute{Y})$ د محور سره د ګراف د تقاطع نقطه عبارت ده. $C(0,-2)$

د تابع د ګراف د راس نقطه پيدا کوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$V\left(\frac{-b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)=\left(\frac{3}{4},\frac{4\times2\times(-2)-(-3)^2}{4\times2}=\frac{-16-9}{8}=-\frac{25}{8}\right)$$

$$V\left(\frac{3}{4},-\frac{25}{8}\right)$$



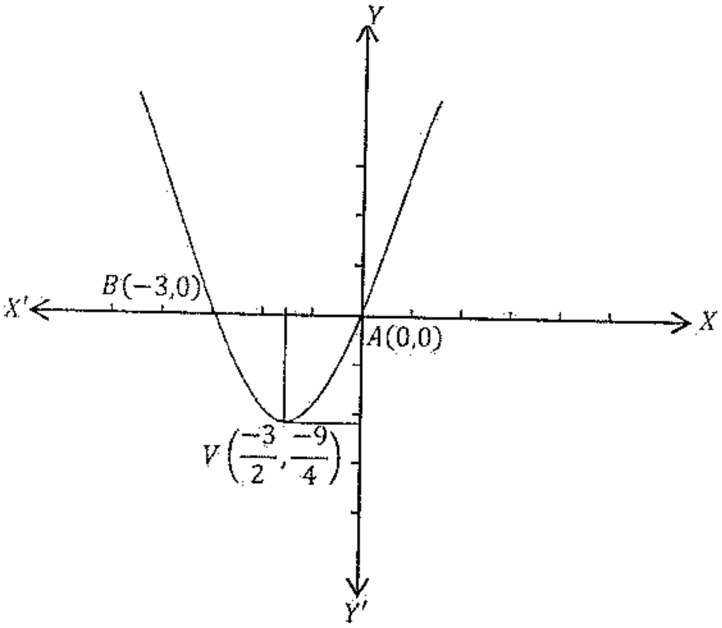
مثال: $y=x^2+3x$ گراف رسم کړئ؟

حل:

$y=0$
$x^2+3x=0$
$x(x+3)=0$
$x_1=0$
$x_2=-3$
$A(0,0)\quad B(-3,0)$

$$V\left(\frac{-b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)=\left(\frac{-3}{2},\frac{4\times1\times0-3^2}{4\times1}\right)=\left(\frac{-3}{2},\frac{-9}{4}\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



مثال: $y = -x^2 + 4x - 3$ ګراف رسم کړئ؟

حل:

1- $y = 0$ فرضوو نو:

$$-x^2 + 4x - 3 = 0$$
$$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times (-1) \times (-3) = 16 - 12 = 4$$
$$\Delta = 4$$
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 \pm 2}{-2 \times 1}$$
$$x_1 = \frac{-4+2}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1 \quad : \quad x_1 = 1 \qquad A(1,0)$$
$$X_2 = \frac{-4-2}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3 \quad : \quad x_2 = 3 \qquad B(3,0)$$

2- $x = 0$ فرضوو نو:

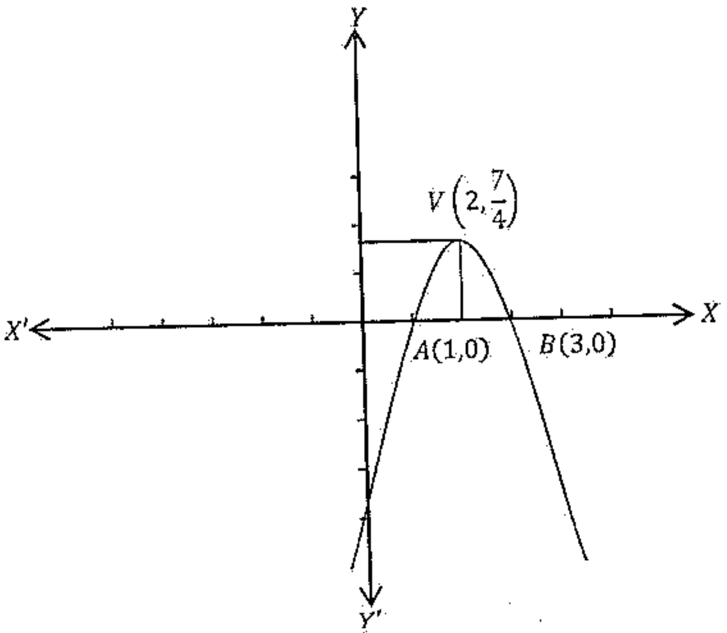
$$y = -3 \qquad C(0,-3)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اصغري او اعظمي ټکي یې پیدا کوؤ:

$$V\left(\frac{-b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)=\left(\frac{-4}{-2},\frac{4(-1)(-3)}{4(-1)}\right)=\left(2.\frac{7}{4}\right)$$

$$V\left(2,\frac{7}{4}\right)$$



مثال: $y=x^2+2x+1$ د تابع ګراف رسم کړئ؟

حل:

1- $y=0$ فرضوو نو:

$$x^2+2x+1=0$$

$$\Delta=b^2-4ac=2^2-4\times1\times1=4-4=0$$

$$\Delta=0$$

معادله یو جذر لري.

$$x=\frac{-b}{2a}=\frac{-2}{2\times1}=\frac{-2}{2}=-1$$

$$A(-1,0)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

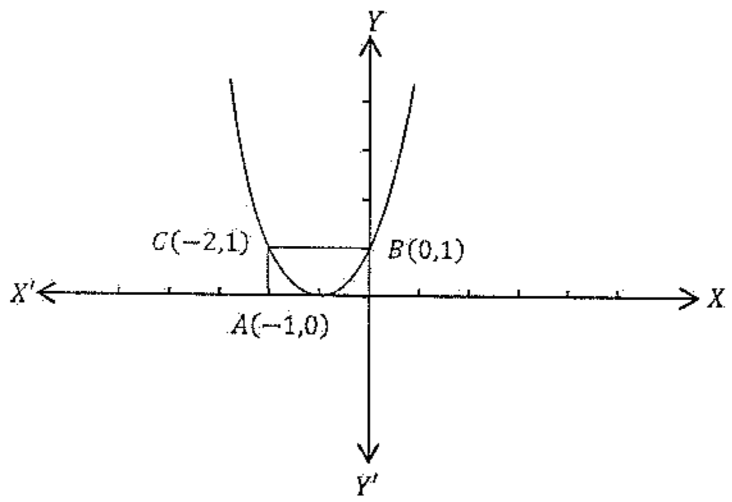
2- $x = 0$ فرضوو نو:

$$y = 1$$

$$B(0,1)$$

x	-2
y	4

$$C(-2,1)$$



تمرین:

د لاندې تابعګانو ګراف رسم کړئ؟

1- $y = 3x^2 + 6x$

2- $5x^2 - 13x + 6$

3- $4x^2 - 4x + 1$

4- $-x^2 + 5x - 6$

5- $-2x^2 - 3x + 14$

6- $3x^2$

7- $4x^2 + 8x$

8- $6x^2 + x - 57$

9- $11x^2 - 13x - 18$

10- $2x^2 - 6x$

11- $2x^2 + x - 21$

12- $-x^2 + 4$

13- $11x^2 - 13x - 18$

14- $3x^2 - x - 10$

15- $5x^2 + 2x - 51$

16- $-9x^2 + 17x + 2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

هوموګرافیک تابع

هغه تابع ده چه د بهنومو د نسبت څخه جوړه شوې وي. عمومي شکل یې دا دې.

$$f(x)=\frac{ax+b}{\acute{a}x+\acute{b}}$$ زوړنصاب

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$$ نوی نصاب

a، b، c او d ثابت عددونه دي (x) متحول دی او (y) د (x) تابع دی.

مجانب $Asymptotes$:

که د یو مستقیم او یوه منحني ترمنځ فاصله په لایتناهي(∞) کې صفرشي دا مستقیم د دی منحني مجانب دی.

مجانب په دری قسمه دی.

1- عمودي مجانب $Vertical\ Asymptotes$

2- افقي مجانب $Horizntil\ Asymptotes$

3- مایل مجانب $Slant\ or\ obligue\ Asymptotes$

1- عمودي مجانب:

هغه خط چه د (x) په فاصله باندی د $(Y\acute{Y})$د محور سره موازي رسمیږي د تابع د ګراف عمودي مجانب بلل میږي.

د عمودي مجانب فارمول:

مخرج د صفر سره مساوي کوود عمودي مجانب لاس ته راځي.

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$$
$$cx+d=0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$cx = -d$$
$$x = \frac{-d}{c}$$

د عمودي مجانب فارمول دا دي:

$$x = \frac{-d}{c}$$

مثال:- د $g(x) = \frac{2x+3}{3x-6}$ د تابع عمودي مجانب پيدا کړئ؟

حل:

$$x = -\frac{d}{c} = -\frac{-6}{3} = 2 \Longrightarrow x = 2$$

2- افقي مجانب :

هغه خط چه د(y) په ترتيب د$(Y\acute{Y})$ د محور سره موازي رسميږي د تابع د ګراف افقي مجانب دي.

د افقي مجانب فارمول:

د $F(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ په تابع کې صورت په مخرج ويشو خارج قسمت يي په (m)ښيو او باقي په (p) ښيو نو ليکو چه:

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = m + \frac{p}{cx+d} = \frac{mcx+md+p}{cx+d}$$
$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{mcx+md+p}{cx+d}$$

مخرجونه يې مساوي دي نو صورتونه يي هم مساوي دي.

$$ax + b = mcx + md + p$$
$$a = mc \Rightarrow m = \frac{a}{c}$$

دباقي د پيدا کولو لپاره ثابت عدد د ثابت عدد سره مساوي کوو.

$$md + p = b \Longrightarrow p = b - md = b - \frac{ad}{c} = \frac{bc - ad}{c}$$
$$p = \frac{bc - ad}{c}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د $h(x)=\frac{8x-3}{4x-9}$ تابع افقي مجانب او باقي مانده پيدا کړئ؟

حل:

$$m=\frac{a}{c}=\frac{8}{4}=2$$
$$m=2$$
$$p=\frac{bc-ad}{c}=\frac{-3\times 4-8(-9)}{4}=\frac{-12+72}{4}=\frac{60}{4}=15$$

3- مایل مجانب $Slant\ or\ Oblique\ Asymptotes$:

که د یوې تابع د صورت درجه د مخرج د درجې څخه د واحد په اندازه زیاته وي دغه ډول تابعګانې مایل مجانب لري او د مجانب د معادلې د لاس ته راوړلو لپاره صورت په مخرج ویشو.

مثال: د $g(x)=\frac{6x^2-24}{x+2}$ تابع عمودي مجانب ، افقي مجانب،مایل مجانب يې پيدا کړئ؟

حل: عمودي مجانب:

$$x=\frac{-d}{c}=\frac{-2}{1}=-2$$

افقي مجانب نلري، مایل مجانب معادله يې دا ده.

$$\frac{6x^2-24}{x+2}=6x-12$$

د هوموګرافیک تابع د ګراف ترسیم:

1- عمودي مجانب پيدا کوو او رسموويې.

2- افقي مجانب پيدا کوو او رسموو يې.

3- د $(X\acute{X})$ دمحور سره د ګراف دتقاطع نقطه پيدا کوو.

4- د $(Y\acute{Y})$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پيدا کوو.

5- د ګراف د ښه دقيق ترسيم لپاره (x) ته څو قيمتونه ورکوو او د (y) قيمتونه پيدا کوو.

6- پيدا شوی نقطې دوضعيه کميتونود محورونو په مستوي کې پيدا کوو او وصلوو يې د راکړ شوی تابع ګراف لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د $f(x) = \frac{2x+4}{x-2}$ د تابع ګراف رسم کړئ؟

حل:عمودي مجانب:

$$x = -\frac{d}{c} = -\left(\frac{-2}{1}\right) = \frac{2}{1} = 2$$

افقي مجانب:

$$m = \frac{a}{c} = \frac{2}{1} = 2$$

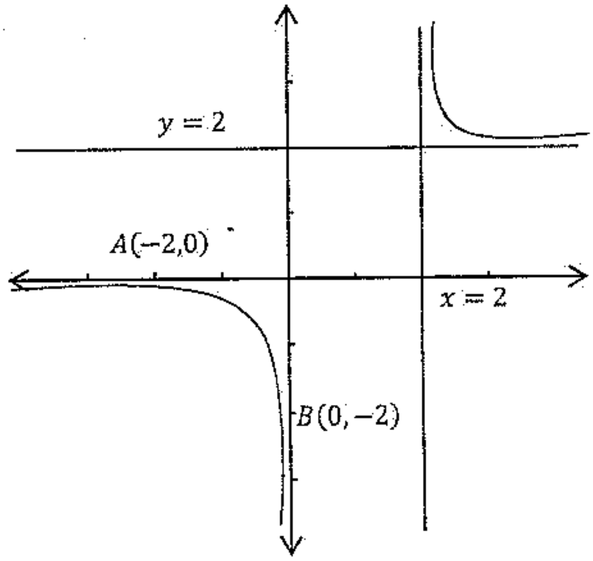
د $(X\acute{X})$ سره تقاطع پیدا کوونو $(y = 0)$ فرضوو:

$$\frac{2x+4}{x-2} = 0$$
$$(x-2)\left(\frac{2x+4}{x-2}\right) = 0(x-2)$$
$$2x + 4 = 0$$
$$2x = -4$$
$$\frac{2x}{2} = \frac{-4}{2}$$
$$x = -2 \qquad \therefore \quad A(-2,0)$$

د $(Y\acute{Y})$ سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوونو $x = 0$ فرضوو.

نو $y = -2$ کیږي او د تقاطع نقطه یې: $B(0,-2)$

(c) ketabton.com: The Digital Library



تمرين:

دلاندې تابعګانو ګراف رسم کړئ

$$1: G(x) = \frac{4x-3}{2x+1} \qquad 2: F(x) = \frac{2x-6}{3x+6} \qquad 3: h(x) = \frac{3x+9}{x-6}$$

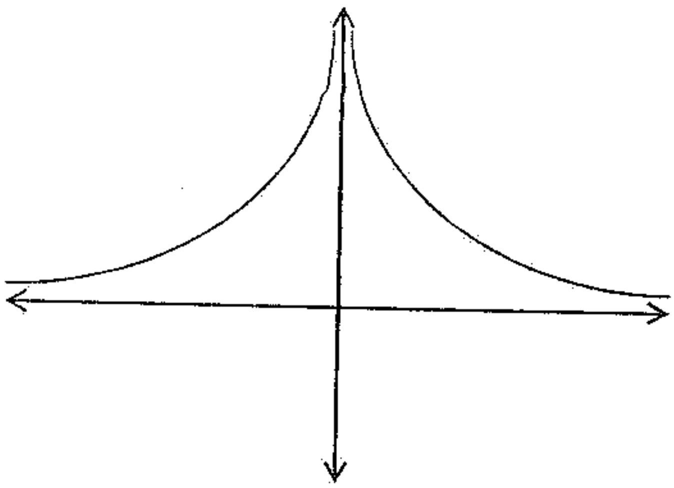
مثال: د $y = \frac{1}{x^2}$ د تابع ګراف رسم کړئ؟

حل:

x	-2	-1	1	2
y	$\frac{1}{4}$	1	1	$\frac{1}{4}$

$$A\left(-2,\frac{1}{4}\right) \quad B(-1,1) \quad C(1,1) \quad D\left(2,\frac{1}{4}\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



تمرین:

د لاندې تابعګانو ګراف رسم کړئ

1) $F(x) = 3x^2 + 7x - 10$
2) $g(x) = \frac{2x-3}{x+2}$
3) $h(x) = x^2 - 9$
4) $y = 6^x$
5) $y = \left(\frac{5}{3}\right)^x$

اکسپوننشل تابع $Exponintiol\ function$:

اکسپوننشل تابع هغه تابع ده چه مجهول یې په توان کې وي. عمومي شکل یې دا دی.

$$y = a^x$$

a ثابت عدد دی (x) متحول دی او (y) د (x) تابع دی.

که $(a > 1)$ وي تابع متزایده ده او که $(a < 1)$ وي نو تابع متناقصه ده.

د تعریف ناحیه یې د حقیقي اعدادو سیټ دی او رنج یې د مثبت اعدادو سیټ دی. د ګراف د ترسیم لپاره یې (x) ته څو قیمتونه ورکوو او د (y) قیمتونه پیدا کوو. د او یوه جوړه قیمتونه د وضعیه کمیتونو په مستوي کې یوه نقطه تعینوي دا نقطې پیدا کوو او وصلوو یې د راکړشوی تابع ګراف لاس ته راځي.

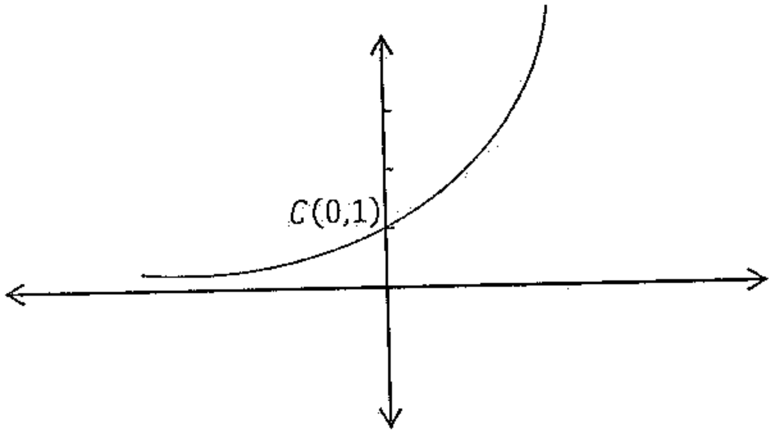
(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: $y = 2^x$ د تابع ګراف رسم کړئ؟

حل:

x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4

$A\left(-2,\frac{1}{4}\right)$ $B\left(-1,\frac{1}{2}\right)$ $C(0,1)$ $D(1,2)$ $E(2,4)$



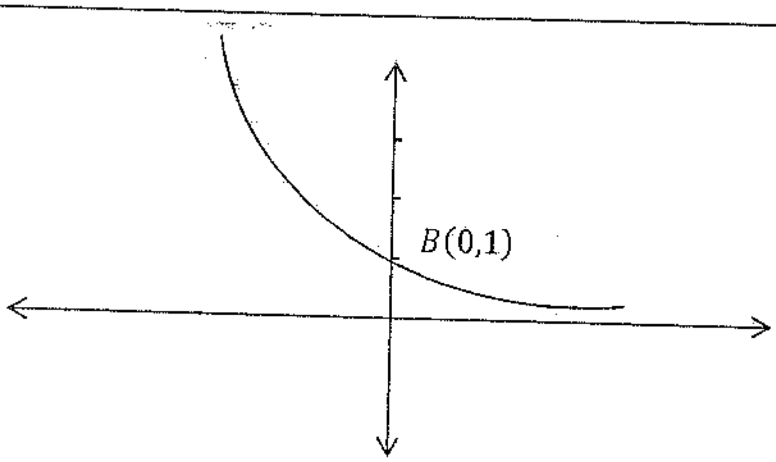
مثال: $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ګراف رسم کړئ؟

حل:

x	-1	0	1	2
y	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$A(-1,2)$ $B(0,1)$ $C\left(1,\frac{1}{2}\right)$ $D\left(2,\frac{1}{4}\right)$ $E\left(3,\frac{1}{8}\right)$

(c) ketabton.com: The Digital Library



تمرين:

د لاندې تابعګانو ګراف رسم کړئ؟

$1\text{-}\ y = 3^x$ $\quad$ $2\text{-}\ y = 5^x$ $\quad$ $3\text{-}\ y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

$4\text{-}\ \left(\frac{1}{3}\right)^x$

$5\text{-}\ y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ $\quad$ $6\text{-}\ y = \left(\frac{3}{4}\right)^x$ $\quad$ $7\text{-}\ y = 5^x$

$8\text{-}\ y = \left(\frac{3}{5}\right)^x$

لوګاريتمي تابع $Logarithmical\ functions$:

لوګاريتمي تابع د اکسپوننشل تابع معکوسه تابع ده.

د تعريف ناحيه يې د مکمل اعدادو سيټ دي او د تصويرونو سيټ يې د حقيقي اعدادو سيټ دی. ګراف يې په اوله او څلورمه ربعه کې رسميږي.

د ګراف د ترسيم لپاره x ته څو قيمتونه ورکوو او د y قيمت پيدا کوو.

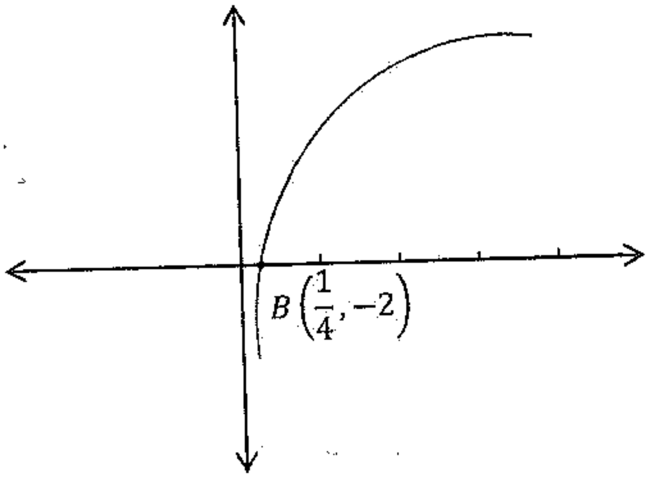
مثال:- $\log_2 x = y$ ګراف رسم کړئ؟

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	-3	-2	-1	0	1	2

(c) ketabton.com: The Digital Library

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	-3	-2	-1	0	1	2

$A\left(\frac{1}{8}, -3\right)$ $B\left(\frac{1}{4}, -2\right)$ $C\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ $D(1,0)$ $E(2.1)$ $F(4,2)$



تمرین

دلاندې تابعګانو ګرافونه رسم کړئ؟

1- $\log_3 x = y$ 2- $log_2 x = y$ 3- $log_4 x =$
y

4- $\log_5 x = y$ 5- $log_2 x = y$ 6- $\log_8 x =$
y

7- $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ 8- $y = 3^{2x}$ 9- $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دولسم فصل

ردیف یا تصاعد

ردیف په لغت کې په اس یا موټرسایکل باندی یو په بل پسی سپرېدلو ته وایي.

او په اصطلاح کې د یوی قاعدی لاندې د اعدادو ترتیب ته ردیف وایي.

لکه: 2,7,12,17,22

یا لکه: 5,15,75,375,1875

که د ردیف حدونه معلوم وي معین ردیف ورته وائي. لکه:

7 , 21 , 63 ,189,567

او که د ردیف حدونه معلوم نه وي غیر معین ردیف ورته وائي. لکه :

1, 5, 9, 13, 17 ...

دغیر معین ردیف په اخر کې درې نقطې لیکي.

ردیف په دری قسمه دی.

1- حسابي ردیف *Arithmetic Sequences*

2- هندسي ردیف *Geometrical Sequences*

3- هارمونیکي ردیف *Harmonecal Sequences*

1- حسابي ردیف :

هغه ردیف دی چه هر وروستني حد یي د مخکیني حد سره د یوه ثابت د جمع کېدلو په نتیجه کې لاس ته راځي. او یا دا چه د دوه عددو تفاضل یي ثابت وي. لکه:

7, 15, 23, 31, 39

د حسابي ردیف فارمول:

اول حد په (a_1) او مشترک تفاضل په (d) او دحدونو شمېر په (n) ښیو نو فارمول یي په لاندې ډول پیدا کوو.

$$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, a_1 + 4d$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د ضریب ته متوجه شوو (d) ضریب د حدو تر شمیر یو کم دي نو که د حدونو شمېر (n) وي نو د (d) ضریب به $(n-1)$ وي فارمول یې په لاندي ډول دی.

$$a_1\ , a_1 + d\ , a_1 + 2d\ , a_1 + 3d\ , a_1 + 4d, \ldots + (n-1)d$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

مثال: د یوه حسابي ردیف اول حد (30) دي مشترک تفاضل یې (17) دی (51) حد یې څو دی؟

$a_1 = 30$
$d = 17$
$n = 51$
$a_{51} = ؟$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$a_{51} = 30 + (51-1)17 = 30 + 50 \times 17$$
$$a_{51} = 30 + 850 = 880$$
$$a_{51} = 880$$

د (d) ، (a_1) او (n) فارمولونه په لاندي ډول دي.

$$d = \frac{a_n - a_1}{n-1}$$
$$a_1 = a_n - (n-1)d$$
$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$$

مثال: دیوه حسابي ردیف اول حد (15) دي (31) حد یې (585) دي مشترک تفاضل یې پیدا کړئ؟

$$d = \frac{585 - 15}{31 - 1} = \frac{570}{30} = 19$$

تبصره: د حسابي ردیف منځني حد دطرفینو اوسط دي.

مثال:- د یوه حسابي ردیف (50)ام حد (1973) دی مشترک تفاضل یې (40) دی اول حد یې څو دي؟

حل:

$$a_1 = a_n - (n-1)d$$
$$a_1 = 1973 - (50-1)40 = 1973 - (49)40 = 1973 - 1960 = 13$$
$$a_1 = 13$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د یوه حسابي ردیف اول حد (17) او اخري حدیي (2117) دی او مشترک تفاضل یي (21) دی د حدونو شمېر یي پیدا کړئ؟

حل:

$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$$

$$n = \frac{2117 - 17}{21} + 1 = \frac{2100}{21} + 1 = 100 + 1 = 101$$

$$n = 101$$

حسابي ردیف ته د حدونو داخلول

د حدونو د داخلولو لپاره مشترک تفاضل پیدا کوویعنی په $d = \frac{a_n - a_1}{n-1}$ کی دداخل شوي حدونه په (m) ښیواودوه زاړه حدونه ورسره جمع کوو او د په عوض یي لیکو د (d) قیمت لاس ته راځي.

$$d = \frac{a_n - a_1}{m + 1}$$

$$d = \frac{a_n - a_1}{n - 1} = \frac{a_n - a_1}{m + 2 - 1} \implies d = \frac{a_n - a_1}{m + 1}$$

مثال:- د یوه حسابي ردیف دوه حدونه عبارت له (3) او (35) څخه دي څلور نور حدونه یي منځ ته ورداخل کړئ.

حل :

$$d = \frac{a_n - a_1}{m + 1} = \frac{35 - 3}{4 + 1} = \frac{32}{5} = 6.4$$

$$d = 6.4$$

$3 \ , \ 9.4 \ , \ 15.8 \ , \ 22.2 \ , \ 28.4 \ , \ 35$

تمرین:

لاندې عبارتي سوالونه حل کړئ؟

1- د یوه حسابي ردیف دوه حدونه عبارت له (4) او (324) دي (3) حدونه یي منځ ته ورداخل کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- د يوه حسابي رديف دوه حدونه عبارت له (5) او (675) څخه دي شپږ نور حدونه يي منځ ته ورداخل کړئ؟

لاندې سوالونه حل کړئ؟

1) $a_1 = 9, d = 13, n = 65, a_n = ?$
2) $d = 5, n = 11, a_{11} = 53, a_1 = ?$
3) $a_1 = 27, n = 31, a_{31} = 267, d = ?$
4) $a_1 = 7, a_{91} = 727, d = 8, n = ?$
5) $a_1 = 5, a_3 = 19, a_n = 110, n = ?$

2- هندسي رديف:

هغه رديف دی چه هر وروستنی حد يي د مخکيني حد سره ديوه ثابت عدد د ضربيدو په نتيجه کې په لاس راغلې وي يا دا چه د دوه مسلسلو حدو تفاضل يې ثابت وي. لکه:

2,8,32,128,512 ...

د هندسي رديف اول حد (a_1) په مشترک نسبت يي په (r) ښيي.

د هندسي رديف فارمول:

هغه رديف دی چه هر وروستنی حد يي د مخکيني حد سره د يوه ثابت عدد د ضربېدو په نتيجه کې لاس ته راغلی وي او يا دا چه د دوه حدو تفاضل يې ثابت وي. لکه:

$$3, 12, 48, 192, 768$$

$$5, 10, 20, 40, 80, 160 \cdots$$

د هندسي رديف فامول:

اول حد يي په (a_1) او مشترک فصل په (r) او ورستنی حد په (a_n) ښيو نو.

$$a_1, a_x r, a_1 r^2, a_1 r^3, a_1 r^4$$

که د (r) توان ته ځير شو د (r) توان د حدو د شمېرڅخه يو کم دې نوکه دحدونو شمېر (n)وي نو د (r) توان به $(n-1)$ وي نو:

$$a_1, a_1 r, a_1 r^2, a_1 r^3, a_1 r^4, \dots \dots a_1 r^{n-1}$$
$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د یوه هندسي ردیف اول حد $a_1 = 2$ او مشترک نسبت یې $r = 3$ دی اوم حد (a_7) یې څو دی؟

$$a_7 = a_1 r^{7-1} = 2 \times 3^6 = 2 \times 729 = 1458$$

د (a_1) او (r) قیمتونه د لاندې فارمولو پواسطه پیدا کیږي.

$$a_1 = \frac{a_n}{r^{n-1}}$$

$$r = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}}$$

مثال: د یوه هندسي ردیف اتم حد $(a_8 = 384)$ دي مشترک نسبت یې $(r = 2)$ دی اول حد یې څو دی؟

حل:

$$a_1 = \frac{a_n}{r^{n-1}} = \frac{384}{2^{8-1}} = \frac{384}{128} = 3$$

$$a_1 = 3$$

مثال: د یوه هندسي ردیف اول حد $(a_1 = 8)$ دی اوم حد یې (5832) دی مشترک نسبت یې پیدا کړئ؟

حل:

$$r = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}} = \sqrt[6]{\frac{5832}{8}} = \sqrt[6]{729} = 3$$

مثال: د یوه هندسي ردیف اول حد $(a_1 = 10)$ دی (n) ام حد یې $a_n = 1280$ دی مشترک نسبت یې (2) دی د حدونو شمېر یې څو دی؟

حل:

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$1280 = 10 \times 2^{n-1}$$

$$\frac{1280}{10} = \frac{10 \times 2^{n-1}}{10} \Rightarrow 128 = 2^{n-1} \Rightarrow 2^7 = 2^{n-1}$$

$$n - 1 = 7 \Rightarrow n = 7 + 1 = 8 \Rightarrow n = 8$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1- د یوه هندسي ردیف دوه لمړي حدونه (2) او (1) دي څویم حد يي $\frac{1}{16}$ دي؟

$a_1 = 2$ $\qquad$ $a_1 r^{n-1} = a_n$

$a_2 = 1$ $\qquad$ $2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{16} \Rightarrow \frac{2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{2}$

$r = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\frac{2}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{32} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^5} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^5$

$a_n = \frac{1}{16}$ $\qquad$ $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^5$

$n = ?$ $\qquad$ $n - 1 = 5 \Rightarrow n = 5 + 1 = 6 \quad \Rightarrow n = 6$

د هندسي ردیف خصوصیات:

1- په هندسي ردیف کې هر حد د طرفينو د حاصل ضرب جذر دي.

مثال: (3, 6,12,24,24) د یوه هندسي ردیف حدونه دي نو لیکو چه:

$$\sqrt{3(12)} = 6 \quad and \quad \sqrt{6(24)} = 12$$

2- که په یوه هندسي ردیف کې اول او اخر حدونه ضرب شي او د حدو د شمېر په توان رفع شي او دويم جذر يي ونيول شي د ردیف د ټولو حدونو د ضرب حاصل لاس ته راځي.

مثال :-لکه (2, 6, 18, 54) یو هندسي ردیف دی نو د دویم خاصیت سره سم لیکو چه:

$$(2)(6)(18)(54) = \sqrt{\{2(54)\}^4}$$
$$11664 = 11664$$

3- که یو هندسي ردیف طاق حدونه ولري نو د منځني حدمربع يي د اول او اخر حدو د حاصل ضرب سره مساوي ده. لکه: (5, 10, 20, 40, 80) یو هندسي ردیف دی نو د دريم خاصیت سره سم لیکو:

$$(20)^2 = 5(80)$$
$$400 = 400$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په هندسي ردیف کې د حدو داخلول:

که د یوه هندسي ردیف حدونه دوه وي او وغواړو چه څو حدونه یې منځ ته ورداخل کړو نو د هندسي ردیف دفارمول څخه د (r) قیمت پیدا کوو. د حدو تر دخول د مخه د حدونو شمیر (n) اوتر دخول وروسته د حدو شمیر $(m+2)$ دی نو د (n) په عوض په فارمول کې $(m+2)$ لیکو. نو $r = \sqrt[m+2-1]{\frac{a_n}{a_1}} = \sqrt[m+1]{\frac{a_n}{a_1}}$ لاس ته راځي.

مثال: د یوه هندسي ردیف دوه حدونه (3) او (96) دي څلور نور حدونه یې منځ ته ورداخل کړئ؟

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_2 = 96 \\ m = 4 \\ r = ? \end{cases} \qquad r = \sqrt[m+1]{\frac{a_n}{a_1}} = \sqrt[4+1]{\frac{96}{3}} = \sqrt[5]{32} = 2$$

3,6, 12 ,24 , 48 , 96

مثال: درې داسې عددونه پیدا کړئ چه دویم حد یې د اول حد څخه د (3) په اندازه او دریم حد یې د دویم حد څخه د (6) په اندازه زیات وي او یو هندسي تصاعد جوړ کړي؟

حل:

$$\begin{cases} x \\ x+3 \\ x+9 \end{cases}$$

$$\frac{x+3}{x} = \frac{x+9}{x+3} \Rightarrow x(x+9) = x^2 + 6x + 9$$

$$x^2 + 9x = x^2 + 6x + 9$$

$$9x = 6x + 9 \Rightarrow 9x - 6x = 9 \Rightarrow 3x = 9$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{9}{3} \Rightarrow x = 3$$

$$x = 3 \qquad x + 3 = 6 \qquad x + 6 = 9$$

3- هارمونیکي ردیف:

د حسابي ردیف معکوس ته هارمونیکي ردیف وایي. مثلاً لاندې ردیف یوحسابي ردیف دی. لکه:

(2,4,6,8 ,10)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دغه رديف معکوس رديف عبارت له $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{6},\frac{1}{8},\frac{1}{10}$ څخه دی دغه رديف ته هارمونيکي رديف وايي.

مثال: په يوه هارمونيکي رديف کې $a_1=\frac{1}{4}$ دی او مشترک تفاضل يې $d=-3$ دی ترادف يې جوړ کړئ؟

حل:

$$\frac{1}{4}\ ,\frac{1}{4}-3\ ,\frac{1}{4}-6\ ,\frac{1}{4}-9\ ,\frac{1}{4}-12\ ,\cdots$$

$$\frac{1}{4}\ ,\frac{1-12}{4}\ ,\frac{1-24}{4}\ ,\frac{1-36}{4}\ \cdots$$

$$\frac{1}{4}\ ,\frac{-11}{4}\ ,\frac{-23}{4}\ ,\frac{-35}{4}\ \cdots$$

د هارمونيکي رديف حسابي اوسط:

$\frac{1}{a_{n+1}}\ ,\frac{1}{a_n}\ ,\frac{1}{a_{n-1}}$ د هارمونيکي رديف درې حدونه دي د منځني حد د لاس ته راوړلو لپاره اول او دريم حدونو اوسط پيدا کوو.

$$\frac{1}{a_n}=\frac{\frac{1}{a_{n+1}}+\frac{1}{a_{n-1}}}{2}=\frac{\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{(a_{n+1})(a_{n-1})}}{2}=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2a_{n+1}a_{n-1}}$$

$$a_n=\frac{2(a_{n+1})(a_{n-1})}{a_{n-1}+a_{n+1}}$$

مثال: د (2) او (8) هارمونيکي اوسط پيدا کړئ

حل: $a_n=\frac{2(2\times8)}{2+8}=\frac{32}{10}=3.2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

سلسلې $Series$:

د ردیف د حدونو مجموعې ته سلسله وایي.

سلسلې په دوه ډوله دي.

1- حسابي سلسله $Arithmetc\ Series$

2- هندسي سلسله $Geometric\ Series$

1- حسابي سلسله :

د حسابي ردیف د حدونو مجموعې ته حسابي سلسله وایي.

د حسابي سلسلې فارمول:

د سلسلو مجموعه په S_n ښیي، او داسې یې پیدا کوي.

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) \cdots + \{a_1 + (n-1)d\}$$

د عددونو مجموعه په منظم ډول داسې لیکو چه اخر حد یې په سر کې راشي بیا یې د ولنې مجموعې سره جمع کوو.

$$\begin{aligned} S_n &= \{a_1 + (n-1)d\} + \{a_1 + (n-2)d\} + \{a_1 + (n-3)d\} + \cdots + a_1 \\ S_n &= a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + \{a_1 + (n-1)d\} \\ \hline 2S_n &= \{2a_1 + (n-1)d\} + \{2a_1 + (n-1)d\} + \{2a_1 + (n-1)d\} + \cdots + \{2a_1 + (n-1)d\} \end{aligned}$$

$$2S_n = n\{2a_1 + (n-1)d\}$$

$$\frac{2S_n}{2} = \frac{n}{2}\{2a_1 + (n-1)d\} \Longrightarrow S_n = \frac{n}{2}\{2a_1 + (n-1)d\}$$

دغه فارمول د حسابي سلسلې عمومي فارمول دی.

که $(2a_1)$ بیل، بیل ولیکو نو لاندې فارمول لاس ته راځي.

$$S_n = \frac{n}{2}\{a_1 + a_1 + (n-1)d\} \Longrightarrow S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

مثال: د یوه هندسي ردیف $(a_1 = 7)$ او $(d = 6)$ دی د (20) حدو مجموعه یې پیدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$$S_n = \frac{n}{2}\{2a_1 + (n-1)d\}$$
$$S_{20} = \frac{20}{2}\{2 \times 7 + (20-1)6\} = 10\{14 + (19)6\} = 10(14 + 114)$$
$$S_{20} = 10(128) = 1280$$
$$S_{20} = 1280$$

مثال : د يوه حسابي رديف اول حد $(a_1 = 11)$ او يوپنځوسم حد يې $(a_{51} = 10761)$ دی د (51) حدو مجموعه يې پيدا کړئ؟

حل :

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$
$$S_{51} = \frac{51}{2}(11 + 311) = \frac{51}{2}(11 + 411) = \frac{51}{2}(422) = 51 \times 261 = 10761$$
$$S_{51} = 10761$$

د مسلسلو عددونو فارمول:

په مسلسلو عددونو کی $a_1 = 1$ او $(d = 1)$ دی دغه قيمتونه دحسابي په عمومي فارمول کی وضع کوو

$$S_n = \frac{n}{2}\{2a_1 + (n-1)d\}$$
$$S_n = \frac{n}{2}\{2 \cdot 1 + (n-1)1\} = \frac{n}{2}(2 + n - 1) = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

مثال: په يوه ټولګي کی 50 کسه شاګردان دي د اول شاګرد سره يوه دويم شاګرد سره دوه په همدې ترتيب تر اخره روپې دي وواياست چه د ټولو سره څو روپې دي؟

حل:

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$S_{50} = \frac{50(50+1)}{2} = 25 \cdot 51 = 1275$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دجفتو عددو فارمول:

په جفتو عددو کې $a_1 = 2$ او $d = 2$ دی دغه عددونه د حسابي سلسلې په عمومي فارمول کې وضع کوو.

$$S_n = \frac{n}{2}\{2a_1 + (n-1)d\}$$
$$S_n = \frac{n}{2}\{2\cdot 2 + (n-1)2\} = \frac{n}{2}(4 + 2n - 2) = \frac{n}{2}(2n+2) = \frac{n}{2}\times 2(n+1)$$
$$S_n = n(n+1)$$

مثال: سل کسانو يوه مسجد ته اعانه ورکړه که اول سړي 2 روپۍ دويم سړي 4 روپۍ په همدې ترتيب تر اخره مرسته کړې وي وواياست چه ټولو به څو روپۍ ورکړې وي؟

حل:

$$S_n = n(n+1)$$
$$S_{100} = 100(100+1) = 100\times 101 = 10100$$

د طاق عددونو فارمول:

په طاق عددو کې اول حد (1) اومشترک تفاضل يې (2) دی دغه عددونه د حسابي سلسلې په عمومي فارمول کې وضع کوو د طاق عددو فارمول لاس ته راځي.

$$S_n = \frac{n}{2}\{2a_1 + (n-1)d\}$$
$$S_n = \frac{n}{2}\{2\cdot 1 + (n-1)2\} = \frac{n}{2}(2 + 2n - 2) = \frac{n}{2}\cdot 2n = n^2$$
$$S_n = n^2$$

مثال: د (30) طاقو عددو مجموعه څو ده

حل:

$$S_n = n^2$$
$$S_{30} = 30^2 = 900$$

تبصره:

که د يوه حسابي رديف حدونه طاق وي که منځني حد يې د حدونو په شمېرکې ضرب شي دحدونو مجموعه لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال : د يوه حسابي رديف د حدونو شمېر 41 او منځني حد يې 145 دې د حدونو مجموعه يې پيدا کړئ؟

حل:

$$S_n = n\left(a_{\frac{n-1}{2}+1}\right)$$

$$S_{41} = 41(145) = 5945$$

دويمه تبصره:

همدا ډول د اول او اخر حدو مجموعه د منځني حد د دوه چند سره مساوي دي.

$$a_1 + a_n = 2\left(a_{\frac{n-1}{2}+1}\right)$$

مثال: د يوه حسابي رديف $a_1 = 7$ او $a_9 = 47$ دی او منځني حد يې $a_5 = 27$ دی د اول اخر مجموعه يې پيدا کړئ؟

حل:

$$a_1 + a_n = 2\left(a_{\frac{n-1}{2}+1}\right)$$

$$a_1 + a_9 = 2(a_5) = 2(27) = 54$$

دريمه تبصره:

کله، کله د څو اولو حدو او په همغه شمېر د اخرو حدو مجموعه معلومه وي اول او اخر حد معلوم نه وي. د اول او اخر حدو مجموعه د لاندې فارمول پواسطه پيدا کيږي.

$$a_1 + a_n = \frac{S_{m_1} + S_{m_2}}{m}$$

m_1 د شپږو اولو حدو مجموعه او m_2 د شپږو اخرو حدو مجموعه ده او (m) د حدو شمېر دی.

مثال: يو حسابي رديف n حدونه لري د 4 لمړيو حدو مجموعه يې 62 او د 4 وروستيو حدو مجموعه يې 482 ده د ټولو حدو مجموعه يې څو ده؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$S_{m_1} = 62$

$S_{m_2} = 482$

$m = 19$

$S_{19} = ?$

$$a_1 + a_{19} = \frac{S_{m_1} + S_{m_2}}{m} = \frac{62 + 482}{4} = \frac{544}{4} = 136$$

$$S_{19} = \frac{19}{2}(136) = 1292$$

$$S_{19} = 1292$$

2- هندسي سلسله Geometric Series:

د هندسي رديف د حدونو مجموعی هندسي سلسله وايي.

د هندسي سلسلی فارمول:

$$S_n = a_1 + a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 + \cdots + a_1r^{n-1} \ldots\ldots\ldots I$$

دواړه خواوی په (r) کی ضربوو اوبيا (I) رابطه ورڅخه منفي کوو.

$$rS_n = a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 + a_1r^4 + \cdots + a_1r^n \ldots\ldots\ldots II$$

$$\pm S_n = \pm a_1 \pm a_1r \pm a_1r^2 \pm a_1r^3 \pm \cdots \pm a_1r^{n-1} \ldots\ldots\ldots I$$

$$rS_n - S_n = a_1r^n - a_1$$

$$S_n(r-1) = a_1(r^n - 1)$$

$$\frac{S_n(r-1)}{r-1} = \frac{a_1(r^n-1)}{r-1} \Longrightarrow S_n = \frac{a_1(r^n-1)}{r-1}$$

$$S_n = \frac{a_1(r^2-1)}{r-1}$$

دغه سلسلی ته متزايده سلسله وايي.

مثال: د يوی هندسي سلسلی $a_1 = 5$ او مسترک نسبت يي $r = 3$ دي د $n = 7$ حدو مجموعه يي پيدا کړئ؟

حل:

$$S_7 = \frac{5(3^7-1)}{3-1} = \frac{5(2187-1)}{2} = \frac{5 \times 2186}{2} = 5 \times 1093 = 5465$$

$$S_7 = 5465$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او که د I رابطي څخه II رابطه منفي کړو نو:

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

سلسله لاس ته راځي. دغه سلسلي ته متناقصه سلسله وايي.

مثال: د یوه هندسي ردیف اول حد $a_1 = 8$ دی مشترک نسبت یي $r = \frac{1}{2}$ دی د (5) حدو مجموعه یي پیدا کړئ؟

حل:

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

$$S_5 = \frac{8\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^5\right\}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{8\left(1-\frac{1}{32}\right)}{\frac{1}{2}} = \frac{8\left(\frac{32-1}{32}\right)}{\frac{1}{2}} = \frac{8\left(\frac{31}{32}\right)}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{248}{32}}{\frac{1}{2}} = \frac{496}{32}$$

$$S_5 = 15.5$$

مثال: د یوې هندسي سلسلی د څلورو حدو مجموعه 120 ده او اول حد یي 5 دی مشترک نسبت یي څو دی؟

حل:

$a_1 = 8$

$S_8 = 120$

$n = 4$

$r = ?$

$$120 = \frac{(r-1)(r^3+r^2+r+1)}{r-1} = 15$$

$$r^3 + r^2 + r + 1 = 15$$

$$r^3 + r^2 + r + 1 - 15 = 0 \Rightarrow r^3 + r^2 + r - 14 = 0$$

1	1	1	−14	2
	2	6	14	
1	3	7	0	

$$r = 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هندسي سلسلې پواسطه په عام کسر باندې داعشار کسر بدلول:

د متناقصې هندسي سلسلې فارمول ليکو:

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

په دغه فارمول کې $(r^n \to 0)$ صفر کيږي. نو $S_n = \frac{a_1}{1-r}$ کيږي د دغه فارمول پواسطه کولای شو چه اعشار کسر په عام کسر بدل کړو.

مثال: $0.\overline{3}$ اعشارکسردی . په عام کسر يي بدل کړئ؟

حل:

$a_1 = o.\overline{3} = \frac{3}{10}$

$r = \frac{1}{10}$

$n = \infty$ $\quad S_n = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{3}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{10-1}{10}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{10 \times 3}{10 \times 9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

$S_n = ?$ $\quad S_n = \frac{1}{3}$

مثال: $0.8\overline{3}$ اعشار کسر دی په عام کسر يي بدل کړئ؟

حل:

$a = \frac{8}{10}$

$a_1 = \frac{3}{100}$ $\quad S_\infty = \frac{8}{10} + \frac{\frac{3}{100}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{8}{10} + \frac{\frac{3}{100}}{\frac{10-1}{10}}$

$r = \frac{1}{10}$ $\quad = \frac{8}{10} + \frac{\frac{3}{100}}{\frac{9}{10}} = \frac{8}{10} + \frac{10 \times 3}{100 \times 9} = \frac{8}{10} + \frac{1}{30}$

$S_n = ?$ $\quad S_\infty = \frac{24+1}{30} = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرين

1- د (20)او (800) تر منځ د هغه عددو مجموعه پیدا کړئ چه لمړی رقم یې (3) وي؟

2- یو دیوالي ساعت د ساعتو په شمېر زنګونه وهي ووایاست چه په شواروز کی څو زنګونه وهي؟

3- د یوه حسابي ردیف د دری حدومجموعه (33) او د ضرب حاصل یې (1287) دی عددونه یې پیدا کړئ؟

4- د یوه حسابي ردیف د څلورو حدومجموعه (26) او د مربعاتو مجموعه یې (214) ده عددونه پیدا کړئ؟

5- د یوه حسابي ردیف څلورو حدو دضرب حاصل (945) او مشترک تفاضل یې (2) دی عددونه پیدا کړئ؟

6- (3003) کسان په یوه ځای کی د مثلث په ډول ولاړ دي د مثلث په راس کی یو نفربیا دوه بیا دری.......په همدی ترتیب تر اخره ولاړ دي ووایاست چه څو قطارونه جوړوي؟

7- د جفت عددو مجموعه د (40) څخه تر (540) پوری څو ده؟

8- د طاق عددونو مجموعه د (31) څخه تر (451) پوری څو ده؟

9- a , b او c په کوم شرط په یوه حسابي ردیف کی شامل دي؟

10- د یوه ردیف د اول اخر حدو د ضرب حاصل (253) او د منځنیو حدو د ضرب حاصل یې(285) دی عدونه پیدا کړئ؟

11- (3) او (243) د یوه هندسي تصاعد دوه جملی دي دری حدونه پکی داخل کړئ؟

12- (221) په دری برخو داسی ووېشئ چه د دریم او اول حد تفاضل یې (136) وي؟

13- د یوه متوازي السطوح حجم (3375) دی اودابعادو مجموعه یې(65) ده ابعاد یې پیدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

14- دوه کسه دیوه سړي سره مزدوران شول یو سړی د ورځی (20) اجوره لري اوبل سړی اول ورځ یوه روپۍ په دویمه ورځ دوه روپۍ په همدی ترتیب تراخره روپۍ اخلي ووایاست چه په څویمه ورځ به ددوی پیسی مساوي شي ؟

15- یو هندسي تصاعد اوه حدونه لري د شپږو اخرنیو حدو مجموعه یي دشپږو اولنیو حدو د مجموعی دوچنده دي که د اخرنیو شپږو حدو مجموعه یي(126) وي تصاعد معین کړئ؟

16- $0.\overline{123}$ ، $0.\overline{925}$، $0.\overline{27}$ کسرونه په عام کسر بدل کړئ؟

17- $0.1\overline{36}$, $0.41\overline{6}$, $0.6\overline{36}$ اعشار کسرونه په عام کسرو بدل کړئ؟

18- د یوه قایم الزاویه مثلث زاویي د هندسي تصاعد حدونه دي تصاعد پیدا کړئ؟

19- د یوی څلور ضلعي زاویي هندسي تصاعد دی که څلورمه زاویه د دویمی زاویي (9) برابره وي د هری زاویي پراخوالی پیدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

دیارلسم فصل

د رياضي استقراء Induction of Math

د ټولو طبعي عددو لپاره د يوه فارمول ثبوتولو ته د رياضي استقراء وايي.

څرنګه چه د ټولو عددو لپاره د يوه فارمول ثبوتول ډېر مشکل دي نو د يوه فارمول د ثبوتولو لپاره په لاندې ډول اجرائت کوو.

1- د يو لپاره فارمول ثبوتوو.

2- د (n) لپاره فارمول صحيح فرضوو.

3- د $(n+1)$ لپاره فارمول ثبوتوو

مثال: ثبوت کړئ چه $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ د ټولو طبعي عددو لپاره صحيح دی

حل: د (1) لپاره يې ثبوتوو:

$$1=\frac{1(1+1)}{2}=\frac{1\times 2}{2}=\frac{2}{2}=1$$

د (1) لپاره صحيح دی. د (n) لپاره يې صحيح فرضوو.

د $(n+1)$ لپاره يې ثبوتوو.

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$1+2+3+\cdots+n+(n+1)=\frac{1}{2}n(n+1)+(n+1)$$

$$=\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}$$

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}=\frac{(n+1)\{(n+1)+1\}}{2}$$

$$S_{n+1}=\frac{1}{2}(n+1)\{(n+1)+1\}$$

مثال: ثبوت کړئ چه $1+4+7+\cdots+(3n-2)=\frac{n(3n-1)}{2}$ د ټولو طبيعي عددو لپاره صحيح دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: د (1)لپاره يې ثبوتوو.

$$1=\frac{1(3\times1-1)}{2}=\frac{2}{2}=1$$

د (n) لپاره يې صحيح فرضوو، د $(n+1)$ لپاره يې ثبوتوو:

$$1+4+7+\cdots+(3n-2)+\{3(n+1)-2\}=\frac{n(3n-1)}{2}+\{3(n+1)-2\}$$

$$S_n=\frac{3n^2-n+6n+2}{2}=\frac{3n^2+5n+2}{2}=\frac{3n^2+3n+2n+2}{2}$$

$$S_n=\frac{3n(n+1)+2(n+1)}{2}=\frac{(n+1)(3n+2)}{2}=\frac{(n+1)\{3(n+1)-1\}}{2}$$

$$S_n=\frac{(n+1)\{3(n+1)-1\}}{2}$$

مثال: ثابت کړئ چه لاندې مساوات د هر طبعي (n)لپاره صحيح دی.

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

حل: د (1) لپاره پورتنی رابطه صحيح ده څکه چه:

$$1^2=\frac{1}{6}\times1(1+1)(2\times1+1)=\frac{1}{6}(2)(3)=\frac{1}{6}\times6=\frac{6}{6}=1$$

د (n) لپاره يې صحيح فرضوو. او د $(n+1)$ لپاره يې ثبوتوو

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2+(n+1)^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+(n+1)^2$$

$$S_{n+1}=\frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}=\frac{2n^3+n^2+2n^2+n+6(n+1)^2}{6}$$

$$S_{n+1}=\frac{2n^3+9n^2+13n+6}{6}=\frac{2n^3+4n^2+5n^2+10n+3n+6}{6}$$

$$S_{n+1}=\frac{2n^2(n+2)+5n(n+2)+3(n+2)}{6}=\frac{(n+2)(2n^2+5n+3)}{6}$$

$$S_{n+1}=\frac{(n+2)(2n^2+2n+3n+3)}{6}=\frac{(n+2)\{2n(n+1)+3(n+1)\}}{6}$$

$$S_{n+1}=\frac{(n+2)(n+1)(2n+3)}{6}=\frac{1}{6}(n+1)\{(n+1)+1\}\{2(n+1)+1\}$$

ثابته شوه چه پورتنی مساوات د ټولو طبعي عددو لپاره صحيح دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: ثبوت کړئ چه لاندی فارمول د ټولو طبعي عددو لپاره صحيح دی.

$$a+a^2+a^3+\cdots+a^n=\frac{a}{a-1}(a^n-1)\quad ,\ a\neq 1$$

حل: د اول حد لپاره يې ثبوتوو.

$$a=\frac{a}{a-1}(a^1-1)=\frac{a(a-1)}{a-1}=a$$

د لپاره يې صحيح فرضوو.

د لپاره يې ثبوتوو.

$$a+a^2+a^3+\cdots+a^n+a^{n+1}=\frac{a}{a-1}(a^n-1)+a^{n+1}$$

$$S_{n+1}=\frac{a(a^n-1)+a^{n+1}(a-1)}{a-1}=\frac{a^{n+1}-a+a^{n+2}-a^{n+1}}{a-1}=\frac{a^{n+2}-a}{a-1}$$

$$S_{n+1}=\frac{a(a^{n+1}-1)}{a-1}=\frac{a}{a-1}(a^{n+1}-1)$$

تمرين

لاندې فارمولونه د رياضي د استقراء پواسطه ثبوت کړئ

1) $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$

2) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{1}{4}\cdot n^2(n+1)^2=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

3) $2+4+6+\cdots+2n=n^2+n$

4) $1^2+3^2+5^2+\cdots+(n)^2=\frac{1}{3}+n(2n-1)(2n+1)$

5) $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

6) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$

7) $4+4^2+4^3+\cdots+4^n=\frac{4}{3}(4^n-1)$

8) $1+5+5^2+\cdots+5^{n-1}=\frac{1}{4}(5^n-1)$

9) $2+2^2+2^3+\cdots+2^n=2(2^n-1)$

10) $1\cdot 3+2\cdot 4+3\cdot 6+\cdots+n(n+2)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+7)$

11) $2+5+10+\cdots+(n^2+1)=\frac{n(2n^2+3n+7)}{6}$

12) $a+(a+d)+(a+2d)+\cdots+\{a+(n-1)d\}=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

څوارلسم فصل

فکتوریل Factorial

د طبعي مسلسلو عددو د ضرب حاصل ته فکتوریل وایي.

د فکتوریل علامه دا (!) ده.

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \ldots \times n$$

قضیه: $0! = 1$ کیږي

ثبوت: پوهیږو چه که یو فکتوریل په خپل اخري عدد تقسیم شي تر هغه د مخه فکتوریل لاس ته راځي. لکه:

$$\frac{5!}{5} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{5} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1} = 4!$$

$$\frac{n!}{n} = (n-1)!$$

$$\frac{1!}{1} = \frac{1}{1} \Rightarrow 0! = 1$$

قضیه:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

په دغه قضیه کې باید د $n > k$ څخه کوچنی وي.

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!\,(7-3)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 35$$

$$\binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{n}{n} = 1$$

د $\binom{n}{0} = 1$ ثبوت:

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,(n-0)!} = \frac{n!}{1 \cdot n!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\binom{n}{n}=1$ ثبوت:

$$\binom{n}{n}=\frac{n!}{n!\,(n-n)!}=\frac{n!}{n!\cdot 0!}=\frac{n!}{n!\cdot 1}=\frac{n!}{n!}=1$$

ثبوت کړئ چه $\binom{n}{n-1}=n$ کیږي؟

$$\binom{n}{n-1}=\frac{n!}{(n-1)!\,\{n-(n-1)\}!}=\frac{n!}{(n-1)!\,(n-n+1)!}$$

$$\binom{n}{n-1}=\frac{n!}{(n-1)!\cdot 1!}=\frac{(n-1)!\cdot n}{(n-1)!\cdot 1}=n$$

ثبوت کړئ چه $\binom{n}{0}=\binom{n+1}{0}$ کیږي؟

$$\binom{n}{0}=\frac{n!}{0!\,(n-0)!}=\frac{n!}{1\cdot n!}=\frac{n!}{n!}=\frac{(n+1)!}{(n+1)!}=\frac{(n+1)!}{0!\,(n+1-0)!}$$

$$\binom{n}{0}=\binom{n+1}{0}$$

ثبوت کړئ چه $\binom{n}{n}=\binom{n+1}{n+1}$ کیږي؟

$$\binom{n}{n}=\frac{n!}{n!\,(n-n)!}=\frac{n!}{n!\cdot 0!}=\frac{n!}{n!}=\frac{(n+1)!}{(n+1)!}=\frac{(n+1)!}{(n+1)!\cdot 0!}$$

$$\binom{n}{n}=\frac{(n+1)!}{(n+1)!\,\{(n+1)-(n+1)\}!}=\binom{n+1}{n+1}$$

ثبوت کړئ چه $\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k}$ کیږي؟

$$\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=\frac{n!}{(k-1)!\,\{n-(k-1)\}!}+\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$=\frac{(k-1)!\cdot k(k+1)!\cdots n}{(k-1)!\,(n-k+1)!}+\frac{(n-k)!\,(n-k+1)\cdots n}{k!\,(n-k)!}$$

$$=\frac{k(k+1)\cdots n}{(n-k+1)!}+\frac{(n-k+1)\cdots n}{k!}$$

$$=\frac{k!\,\{k\cdot(k+1)\cdot\ldots\cdot n\}+(n-k+1)!\cdot(n-k+1)\cdot\ldots\cdot n}{(n-k+1)!\cdot k!}$$

$$=\frac{k!\cdot\{k(k+1)\cdot\ldots\cdot n\}+(n-k+1)!\cdot\{(n-k+2)\cdot\ldots\cdot n\}}{(n-k+1)!\cdot k!}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \frac{k \cdot n! + (n-k+1)\cdot n!}{k!\,(n-k+1)!} = \frac{n!\,(k+n-k+1)}{k!\,(n-k+1)!} = \frac{n!\,(n+1)}{k!\,(n-k+1)!}$$

$$= \frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}$$

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

د بینوم قضیه $Binomial\ Theorem$:

که چېرته (a) او b حقیقي عددونه او (n) یو طبعي عدد وي نو

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \cdots + \binom{n}{n}b^n \cdots 1$$

د ریاضي د استقراء پواسطه د پورتني قضیې ثبوت پورتنی قضیه د(1) لپاره ثبوتوو.

$$(a+b)^1 = a^1 + b^1 = 1\cdot a^1 + 1\cdot b^1 = \binom{1}{0}a^1 + \binom{1}{1}b^1$$

د(n) لپاره یې صحیح فرضوو.او د $(n+1)$ لپاره یي ثبوتوو.

د (1) مساوات دواړه خواوې په $(a+b)$ کې ضربوو.

$$(a+b)^n(a+b) = (a+b)\left\{\binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \cdots + \binom{n}{n}b^n\right\}$$

$$= \binom{n}{0}(a^{n+1} + a^n b) + \binom{n}{1}(a^n b + a^{n-1}b^2) + \cdots$$
$$+ \binom{n}{k}\left(a^{n-k+1}b^k + a^{n-k}b^{k+1} + \binom{n}{n}(ab^n + b^{n+1})\right)$$

$$= \binom{n}{0}a^{n+1} + \left\{\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\right\}a^n b + \left\{\binom{n}{1} + \binom{n}{2}\right\}a^{n-1}b^2 + \cdots + \left\{\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right\}a^{n+1-k}b^k$$
$$+ \cdots + \binom{n}{n}b^{n+1}$$

$$= \binom{n+1}{0}a^{n+1} + \binom{n+1}{1}a^n b + \cdots + \binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^k + \cdots + \binom{n+1}{n+1}b^{n+1}$$

که دغه مجموعه په $\sum$ وښیونو لیکو چه

$$(a+b)^n = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د دوه جمله يي د دعوی په اساس انکشاف ورکړئ

$(x+y)^5$

$$(x+y)^5 = \sum_{n=1}^{5} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

$$(x+y)^5 = \binom{5}{0} x^5 + \binom{5}{1} x^4 y + \binom{5}{2} x^3 y^2 + \binom{5}{3} x^2 y^3 + \binom{5}{4} x y^4 + \binom{5}{5} y^5$$

$$(x+y)^5 = x^5 + 5x^4 y + 10x^3 y^2 + 10x^2 y^3 + 5xy^4 + y^5$$

ثبوت کړئ چه $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ کیږي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځلسم فصل

لیمیټ limit

انټروال *Interval*:

د دوو مختلفو نقطو تر منځ فاصلې ته انټروال وايي.

انټروال په درې قسمه دي.

1- تړلی انټروال *Closed Interval* :

هغه انټروال دی چه د دواړو انجامو نقطې پکې شاملې وي.

اوپه غټو قوسو ښودل کیږي. لکه:

$$A = [1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,]$$

او د سیټ په شکل داسې لیکل کیږي.

$$A = [x \epsilon IR / 1 < x < 10]$$

2- نیم کښې انټروال *Half Open Interval*:

هغه انټروال دی چه د یوه انجام نقطه پکې شامله او د بل انجام نقطه پکې شامله نه وي. لکه:

$$A = [4, 5,6,7,8,9,10,11,12,13,14)$$

اود سیټ په شکل داسې لیکل کیږي. $A = [x \epsilon IR / 4 \leq x < 14]$

3- خلاص انټروال *Open Interval*:

هغه انټروال دي چه د دواړو انجامو نقطې پکې شاملې نه وي. لکه:

$$A = (4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16)$$

او د سیټ په شکل داسې لیکل کیږي.

$$A = (x \epsilon IR / 4 < x < 16)$$

مجاورت *Vicinity*:

هر خلاص انټروال د خپلو ټولو شاملو عناصرو مجاورت دی. که یوه نقطه د یوه انټروال په وسطي نقطه کې واقع وي نو دا انټروال د دی نقطې متناظر مجاورت دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لکه (1)د (5)او (3) متناظر مجاورت دی. په یوه مجاورت کې هره نقطه زیات متناظر مجاورتونه لري.

د لیمیټ تعریف:

$Kart\ weierstras$ کارت ویرس ترس انګلیسي ریاضیدان چه په (1897 – 1815) م سنه کې اوسېده دلیمیټ تعریف داسی کړېدې.

دیوی تابع لیمیټ په یوه نقطه کی هغه عدد دې چه د دغه عدد د هر مجاورت لپاره د تابع د تعریف په ناحیه یو داسی مجاورت موجود وي چه د دغه مجاورت د هر عنصر تصویر د تابع د لیمیټ په مجاورت کی شامل وي.

یعنی د $F(x)$ دتابع لیمیټ د (a) په نقطه کی (b) دې په دی شرط چه د (b) دهر مجاورت (N) لپاره د تابع د تعریف په ناحیه کی د (D) یو داسی مجاورت موجود وي چه د(D) دهر عنصر تصویر په (N)کی شامل وي. او داسی لیکل کیږي.

$$\lim_{x\to 0} F(x) = b$$

مثال: د $F(x) = 5x + 3$ تابع لیمیټ د $x \to 1$ په نقطه کی پیدا کړئ؟

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}(5x + 3) = 5 \cdot 1 + 3 = 5 + 3 = 8$$

دپورته تابع د لیمیټ ثبوت په دوه طریقو کیږي.

1- د جدول پواسطه 2- د مجاورت په طریقه

1- د جدول په طریقه د تابع د لیمیټ ثبوت:

(x) ته د دواړه خواوڅخه قیمتونه ورکوواو د (y) قیمتونه پیدا کوو.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	-12	-7	-2	3	8	13	16	23	28

دپورته جدول څخه معلومیږي چه (x)ته په هره اندازه چه (1) ته نژدی قیمت ورکړشي په همغه اندازه د (y)قیمت (8) ته نژدی کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

1- د مجاورت په طریقه د تابع د لیمیټ ثبوت:

د تابع لیمیټ (8) ته د (ε) په اندازه مجاورت ورکوو.

$$N = (8-\varepsilon, 8+\varepsilon)$$

د (D) د مجاورت د پیدا کولو لپاره تابع د (8) د مجاورت په منځ کې لیکو

$$8-\varepsilon < 5x+3 < 8+\varepsilon$$
$$8-\varepsilon-3 < 5x < 8+\varepsilon-3$$
$$5-\varepsilon < 5x < 5+\varepsilon$$
$$\frac{5}{5}-\frac{\varepsilon}{5} < \frac{5x}{5} < \frac{5}{5}+\frac{\varepsilon}{5}$$
$$1-\frac{\varepsilon}{5} < x < 1+\frac{\varepsilon}{5}$$
$$D = \left(1-\frac{\varepsilon}{5}, 1+\frac{\varepsilon}{5}\right)$$

(ε) ته $\left(0.5 = \frac{1}{2}\right)$ قیمت ورکوو.

$$N = \left(8-0.5, 8+0.5\right)$$
$$N = (7.5, 8.5)$$
$$D = \left(1-\frac{\frac{1}{2}}{5}, 1+\frac{\frac{1}{2}}{5}\right) = \left(1-\frac{1}{10}, 1+\frac{1}{10}\right) = (0.9, 1.1)$$
$$D = (0.9, 1.1)$$
$$\lim_{x\to 0.9}(5x+3) = 5\times 0.9+3 = 7.5$$
$$\lim_{1.1}(5x+3) = 5.5+3 = 8.5$$

ثابته شوه چه (8) د (1) په نقطه کې د تابع لیمیټ دی.

مثال: ثبوت کړئ چه $\lim_{x\to 1}\left(3-\frac{1}{x}\right) = 2$ کیږي؟

$$N = (2-\varepsilon, 2+\varepsilon)$$
$$2-\varepsilon < 3-\frac{1}{x} < 2+\varepsilon$$
$$2-3-\varepsilon < -\frac{1}{x} < 2-3+\varepsilon$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-1-\varepsilon < -\frac{1}{x} < -1+\varepsilon$$

$$\frac{1}{-(1+\varepsilon)} > -x > \frac{1}{-(1-\varepsilon)}$$

$$\frac{1}{1+\varepsilon} < x < \frac{1}{1-\varepsilon}$$

$$D = \left(\frac{1}{1+\varepsilon}, \frac{1}{1-\varepsilon}\right)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{4}$$

$$N = (2-\varepsilon, 2+\varepsilon) = \left(2-\frac{1}{4}, 2+\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{7}{4}, \frac{9}{4}\right)$$

$$D = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{4}}, \frac{1}{1-\frac{1}{4}}\right) = \left(\frac{1}{\frac{5}{4}}, \frac{1}{\frac{3}{4}}\right) = \left(\frac{4}{5}, \frac{4}{3}\right)$$

$$\lim_{x\to\frac{4}{5}}\left(3-\frac{1}{x}\right) = 3-\frac{1}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{1}-\frac{5}{4} = \frac{12-5}{4} = \frac{7}{4}$$

$$\lim_{x\to\frac{4}{3}}\left(3-\frac{1}{x}\right) = 3-\frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{1}-\frac{3}{4} = \frac{12-3}{4} = \frac{9}{4}$$

د ليميټ د استعمال ځايونه *Utilization of limit*:

اسحق نيوټن (Isaac Newton) (1642 – 1727) م او لايبنز (Leibniz) په (1646 -1716) م کالونو کې د ليميټ پواسطه د انتيګرال او ديفرينسيال مسايل حلول يعنی دليميټ داستعمال ډېر مهم ځايونه د ديفرينسيال اوانتيګرال د مسايلو حلول دي. او هم د مشتق تعريف دليميټ څخه په غير ناممکن دی.

ارشميدس د دايری دمحيط د اندازه کولو لپاره داسی محاطي مضلعګانی په دايره کی رسمولی چه ضلعی يي بی اندازه کوچنی وي په دی ترتيب يي د (2π) تقريبي قيمت پيداکړ .نوموړي هم د ليميټ د استعمال څخه استفاده کړی وه.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لیمیټ پیدا کول:

که وغواړو چه په یوه نقطه کی د یوی تابع لیمیټ پیدا کړو.نقطه په تابع کی د متحول په عوض وضع کوو.

مثال: د $f(x) = 5x - 8$ دتابع لیمیټ د $(x \to 3)$ په نقطه کی پیدا کړئ؟

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3}(5x-8) = 5\times 3 - 8 = 15 - 8 = 7$$

1- مثال: $g(x) = x$ د تابع لیمیټ $(x \to -3)$ په نقطه کی پیدا کړئ؟

$$\lim_{x\to -3} g(x) = \lim_{x\to -3} x = -3$$

2- مثال: د $h(x) = 4 - \frac{5}{x+2}$ تابع لیمیټ په $x \to 3$ کی پیداکړئ؟

حل:

$$\lim_{x\to 3} h(x) = \lim_{x\to 3}\left(4 - \frac{5}{x+2}\right) = 4 - \frac{5}{3+2} = 4 - \frac{5}{5} = 3$$

دصفر په نقطه کی د یوی تابع د لیمیټ پیدا کول

1- د صفر په نقطه کې د تامې تابع دلیمیټ پیدا کول:

که په تابع کی ثابت عدد موجود ؤ نو په صفر کی یي لیمیټ همدغه ثابت عدد دي.

مثال: $\lim_{x\to 0}(7x^3 - 3x^2 + 2x - 5) = -5$

که په تابع کی ثابت عدد نهٔ ؤ لیمیټ یي په صفر کی صفر دي.

مثال: $\lim_{x\to 0}(3x^3 + 11x^2 - 8x) = 0$

2- د صفر په نقطه کې د کسري تابع لیمیټ:

دلته څو حالتونه موجود دي.

الف: چه په صورت اومخرج دواړو کی ثابت عددونه موجود وي لیمیټ یي په صفر کی د همدغه ثابت عدد و نسبت دی.

مثال:

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x^3 + 7x^2 - 20x - 12}{2x^2 + 5x - 3} = \frac{-12}{-3} = 4$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب: چه په صورت کی ثابت عدد وي او په مخرج کی نه وي لیمیټ یې په صفر کی لایتناهي دي.

مثال:

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x^2-4x+7}{2x^2-3x}=\frac{7}{0}=\infty$$

ج: چه په صورت کی ثابت عدد نه وي او په مخرج کی وي لیمیټ یې په صفر کی صفر دی.

مثال:

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x^2+7x}{2x^2+7x-11}=\frac{0}{-11}=0$$

د: چه په صورت او مخرج دواړو کی ثابت عدد نه وي دلته بیا څو حالتونه موجود دي.

a- چه دصورت اومخرج دټیټ حد درجی مساوي وي لیمیټ یې په صفر کی د کوچني توان حدو دضریبونسبت دي.

مثال:

$$\lim_{x\to 0}\frac{7x^3-6x^2+12x}{5x^3+3x^2-6x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(7x^2-6x+12)}{x(5x^2+3x-6)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{7x^2-6x+12}{5x^2+3x-6}=\frac{12}{-6}=-2$$

b- چه د کسر د صورت د ټیټ حد درجه د مخرج د ټیټ حد د درجی څخه ډېره وي لیمیټ یې په صفر کی صفر دی.

مثال:

$$\lim_{x\to 0}\frac{11x^4+5x^3-4x^2}{8x^3-4x^2-3x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(11x^3+5x^2-4x)}{x(8x^2-4x-3)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{11x^3+5x^2-4x}{8x^2-4x-3}=\frac{0}{-3}=0$$

چه د کسر د صورت د ټیټ حد درجه د مخرج دټیټ حد د درجی څخه کمه وي لیمیټ یې په صفر کی (∞) دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال:

$$\lim_{x\to 0}\frac{7x^3+5x^2-4x}{2x^4+2x^3+5x^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(7x^2+5x-4)}{x(2x^3+2x^2+5x)}=\lim_{x\to 0}\frac{7x^2+5x-4}{2x^3+2x^2+5x}$$

$$=\frac{-4}{0}=-\infty$$

په (∞) کې د یوی تابع لیمیټ:

په (∞) د یوې تابع لیمیټ په دوه حالته کې مطالعه کوو.

الف: په (∞) کې د تامې تابع لیمیټ: د تامې تابع لیمیټ په (∞) کې (∞) دی.

مثال:

$$\lim_{x\to\infty}(3x^3-7x^2+7x-17)=\lim_{x\to\infty}x^3\left(3-\frac{7}{x}+\frac{7}{x^2}-\frac{17}{x^3}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}x^3\left(3-\frac{7}{\infty}+\frac{7}{\infty^2}-\frac{17}{\infty^3}\right)=\lim_{x\to\infty}3x^3=3\cdot\infty^3=\infty$$

ب: په (∞) کې د کسري تابع لیمیټ: د کسري تابع لیمیټ په (∞) کې په درې حالته کې مطالعه کوو.

a- که د کسر د صورت درجه د مخرج د درجې څخه لوړه وه لیمیټ يې په (∞) کې (∞) دي.

مثال:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^3-8x^2+6x-30}{2x^2+5x-21}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7-\frac{8}{x}+\frac{6}{x^2}-\frac{30}{x^3}}{\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}-\frac{21}{x^3}}=\frac{7-\frac{8}{\infty}+\frac{6}{\infty^2}-\frac{30}{\infty^3}}{\frac{2}{\infty}+\frac{5}{\infty^2}-\frac{21}{\infty^3}}=\frac{7}{0}=\infty$$

b- که د کسر د صورت درجه د مخرج د درجې سره مساوي وي نولیمټ يې په (∞) کې د لوړ توان والاحدود ضریبو نسبت دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{8x^3-8x^2+6x-30}{2x^3+5x^2-21x+3}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{8-\frac{8}{x}+\frac{6}{x^2}-\frac{30}{x^3}}{2+\frac{5}{x}-\frac{21}{x^2}+\frac{3}{x^3}}=\frac{8-\frac{8}{\infty}+\frac{6}{\infty^2}-\frac{30}{\infty^3}}{2+\frac{5}{\infty}-\frac{21}{\infty^2}+\frac{3}{\infty^3}}=\frac{8}{2}=4$$

c- که د کسر دصورت درجه دمخرج د درجې څخه کمه وي لیمیټ یې په (∞) کې صفر دی.

مثال:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x-8}{x^3+2x^2-3x+7}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x^2}-\frac{8}{x^3}}{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{7}{x^3}}=\frac{0}{1}=0$$

د لیمیټ قضیې *Theorms of limit*:

اوله قضیه:

د ثابتې تابع لیمیټ په یوه نقطه کې په خپله همغه عدد دی.

مثال:

$$\lim_{3}12=12$$

دویمه قضیه:

د یوه عدد او یوې تابع د حاصل ضرب لیمیټ د تابع د لیمیټ او ثابت عدد د حاصل ضرب سره مساوي دی.

$$\lim_{x\to a}kf(x)=k\lim_{x\to a}f(x)=kb$$

مثال:

$$\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}6x^2=6\lim_{x\to2}x^2=6\times2^2=24$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریمه قضیه:

ددوه تابعګانو د مجموعی لیمیټ په یوه نقطه کی د تابعګانو د لیمیټو د مجموعی سره مساوي دی په همغه نقطه کې.

$$\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x)=b+c$$

مثال:

$$\lim_{x\to 2}(5x^2+7x^3)=\lim_{x\to 2}5x^2+\lim_{x\to 2}7x^3$$
$$(5\cdot 2^2+7\cdot x^3)=5\cdot 2^2+7\cdot 2^3$$
$$(5\cdot 4+7\cdot 8)=5\cdot 4+7\cdot 8$$
$$(20+56)=20+56$$
$$(76)=76$$

ځلورمه قضیه:

ددوه تابعګانو د حاصل ضرب لیمیټ په یوه نقطه کی د تابعګانو د لیمیټو د حاصل ضرب سره مساوي دی په همغه نقطه کی.

$$\lim_{x\to a}\{f(x)\cdot h(x)\}=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}h(x)=b\cdot c$$

مثال:

$$\lim_{x\to -1}(x-1)^2=\lim_{x\to -1}(x-1)\cdot\lim_{x\to -1}(x-1)$$
$$=(-1-1)^2=(-1-1)\cdot(-1-1)$$
$$(-2)^2=(-2)(-2)\Rightarrow 4=4$$

پنځمه قضیه:

د دوه تابعګانو د خارج قسمت لیمیټ په یوه نقطه کی د تابعګانو د لیمیټو د خارج قسمت سره مساوي دی په همغه نقطه کی.

$$\lim_{x\to a}\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}=\frac{b}{c}$$

$$\left(\lim_{x\to a}g(x)=c\neq 0\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال:

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x-3}{x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}4x-\lim\limits_{x\to 0}3}{\lim\limits_{x\to 0}x+\lim\limits_{x\to 0}1}=\frac{0-3}{0+1}=-3$$

شپږمه قضیه:

د یوې جذري تابع لیمیټ په یوه نقطه کې دتابع دلیمیټ دجذر سره مساوي دی په همغه نقطه کې:

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to a}f(x)}=\sqrt[n]{b}$$

مثال:

$$\lim_{x\to 2}\sqrt[3]{8x^6}=\sqrt[3]{\lim_{x\to 2}8x^6}=\sqrt[3]{8\cdot 2^6}=2\cdot 2^3=16$$

بې نهایت کوچنۍ تابع: که د یوې تابع لیمیټ په یوه نقطه کې صفر شي دی تابع ته بی نهایت کوچنۍ تابع وایي. لکه:

$$\lim_{x\to a}\varepsilon(x)=0$$

تبصره :

a- د بی نهایت کوچنۍ تابع ګانو مجموعه یوه بی نهایت کوچنۍ تابع ده.

b- د بی نهایت کوچنۍ تابعګانو دضرب حاصل هم یوه بی نهایت کوچنۍ تابع ده.

c- که $\varepsilon(x)$ تابع د $x\to a$ په صورت کی یوه بی نهایت کوچنۍ تابع وي نو:

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{\varepsilon(x)}=\infty$$

d- که چیرې $\varepsilon(x)$ یوه بی نهایت کوچنۍ تابع وي او $u(x)\neq 0$ وي نو $v(x)=\frac{\varepsilon(x)}{u(x)}$ یوه بې نهایت کوچنۍ تابع ده.

مثال: د (3) په نقطه کی د $\lim_{x\to 3}(x^2-9)$ تابع لیمیټ پیدا کړئ؟

$$\lim_{x\to 3}(x^2-9)=3^2-9=9-9=0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د $\varepsilon(x)=\frac{1}{2x}$ تابع لیمیټ په $x\to\infty$ کې پیدا کړئ؟

$$\lim_{x\to\infty}\varepsilon(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x}=\frac{1}{2\cdot\infty}=\frac{1}{\infty}=0$$

1- د $lim_{x\to a}f(x)=b$ ثبوت:

$\lim_{x\to a}f(x)=b+\varepsilon(x)$ فرضوو او دا چه $\lim_{x\to a}\varepsilon(x)=0$ دي نو:

$$\lim_{x\to a}f(x)=b$$

2- د $\lim_{x\to a}\{f(x_1)+f(x_2)\}=\lim_{x\to a}f(x_1)+\lim_{x\to a}f(x_2)$ ثبوت:

$$\lim_{x\to a}f(x_1)=b_1+\varepsilon_1$$
$$\lim_{x\to a}f(x_2)=b_2+\varepsilon_2$$
$$\lim_{x\to a}\{f(x_1)+f(x_2)\}=\lim_{x\to a}f(x_1)+\lim_{x\to a}f(x_2)=\{b_1+\varepsilon_1\}+\{b_2+\varepsilon_2\}$$
$$\lim_{x\to a}\{f(x_1)+f(x_2)\}=b_1+b_2+\{\varepsilon_1+\varepsilon_2\}$$
$$\{\varepsilon_1+\varepsilon_2\}=0$$
$$\lim_{x\to a}\{f(x_1)+f(x_2)\}=b_1+b_2$$

3- د دوه تابعګانو د حاصل ضرب لیمیټ په یوه نقطه کې د تابعګانو لیمیټو دحاصل ضرب سره مساوي دی په همغه نقطه کې.

ثبوت:

$$\lim_{x\to a}\{f(x)\cdot g(x)\}=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x)$$
$$\lim_{x\to a}f(x)=b_1+\varepsilon_1$$
$$\lim_{x\to a}g(x)=b_2+\varepsilon_2$$
$$\lim_{x\to a}\{f(x)\cdot g(x)\}=\lim_{x\to a}f(x)\lim_{x\to a}g(x)=(b_1+\varepsilon_1)(b_2+\varepsilon_2)$$
$$\lim_{x\to a}\{f(x)\cdot g(x)\}=b_1b_2+b_1\varepsilon_2+b_2\varepsilon_1+\varepsilon_1\varepsilon_2$$
$$\varepsilon_1\varepsilon_2=0\quad\&\quad b_1\cdot\varepsilon_2=0\quad\&\quad b_2\varepsilon_1=0$$
$$\lim_{x\to a}\{f(x)\cdot g(x)\}=b_1b_2$$

4- د دوه تابعګانو د نسبت لیمیټ په یوه نقطه کې د تابعګانو د لیمیټود نسبت سره مساوي دی په همغه نقطه کې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g\,(x)}=\frac{b_1}{b_2}$$
$$\lim_{x\to a}g(x)\neq 0$$

ثبوت:

$$f(x)=b_1+\varepsilon_1$$
$$g(x)=b_2+\varepsilon_2$$
$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{b_1+\varepsilon_1}{b_2+\varepsilon_2}$$

د مساوات د دواړو خواو څخه $\frac{b_1}{b_2}$ منفي کوو.

$$\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{b_1}{b_2}=\frac{b_1+\varepsilon_1}{b_2+\varepsilon_2}-\frac{b_1}{b_2}=\frac{b_2(b_1+\varepsilon_1)-b_1(b_2+\varepsilon_2)}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}$$
$$=\frac{b_1b_2+b_2\varepsilon_1-b_1b_2-b_1\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}=\frac{b_2\varepsilon_1-b_1\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}$$
$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{b_2\varepsilon_1-b_1\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}+\frac{b_1}{b_2}=\frac{b_2\varepsilon_1-b_1\varepsilon_2+b_1b_2+b_1\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}=\frac{b_2\varepsilon_1+b_1b_2}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}$$
$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{b_2(b_1+\varepsilon_1)}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}=\frac{b_1+\varepsilon_1}{b_2+\varepsilon_2}$$

څرنګه چه ε_1 او ε_2 ډېر کوچني مثبت عددونه دي نوصفر کيږي. نو ثابته شوه چه:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}=\frac{b_1}{b_2}$$

اومه قضيه يا د ساندويچ قضيه:

که $g(x), f(x)$ او $h(x)$ دری تابعګانی ولرو چه $f(x)\leq g(x)\leq h(x)$ وي که:

$$\lim_{x\to a}f(x)=b=\lim_{x\to a}h(x)$$

نو $\lim_{x\to a}g(x)=b$ کيږي.

مثال: که $\left(1-\frac{x^2}{4}\right)\leq u(x)\leq\left(1+\frac{x^2}{4}\right)$ وي نو $\lim_{x\to 0}u(x)=?$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

وي نو دسانډويچ د قضيې سره سم د $\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{x^2}{4}\right)=1=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x^2}{4}\right)$ $u(x)$ قيمت پيدا کړئ؟

حل:

$$\lim_{x\to a} u(x)=1$$

تمرين:

لاندې ليميټونه حل کړئ؟

1- $\lim_{x\to 0}(x^2-2x^2+5x+3)$

2- $\lim_{x\to -1}(x^2-2x-5)$

3- $\lim_{x\to 0}\frac{(9x+2)^2-4}{x}$

4- $\lim_{x\to 0}\frac{3x^3-4x^2+7x-14}{2x^2-11x+7}$

5- $\lim_{x\to 0}\frac{4x^2-21x}{3x^3+5x^2+7x}$

6- $\lim_{x\to 0}\frac{5x^3-4x^2}{7x^2-3x}$

7- $\lim_{x\to \infty}\frac{x^2+7x-3}{2x^2-3x+1}$

8- $\lim_{x\to \infty}\frac{5x^2-4x+5}{3x-1}$

9- $\lim_{x\to \infty}\frac{2x^2+6x-11}{2x^3+3x^2-4x+7}$

10- $\lim_{x\to \infty}(4x^3-3x^2+4x-12)$

11- $\lim_{x\to 3}\frac{3x^2-3x+7}{1+\frac{2-x}{x}}$

12- $\lim_{x\to 4}\left(\frac{x-3}{x-5}+\frac{x}{x+5}+\frac{x+4}{x}\right)$

اتمه قضيه:

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=na^{n-1}$$

په داسې حال کې چه (n) يو طبيعي عدد او (a) يو حقيقي عدد دې.

ثبوت:

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\cdots+a^{n-1})}{x-a}$$

$$\lim_{x\to a}(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\cdots+a^{n-1})$$

$$\lim_{x\to a}x^{n-1}+a\lim_{x\to a}x^{n-2}+a^2\lim_{x\to a}x^{n-3}+\cdots+a^{n-2}\lim_{x\to a}x+\lim_{x\to a}a^{n-1}$$

$$=a^{n-1}+a\cdot a^{n-2}+\cdots+a^{n-2}\cdot a+a^{n-1}$$

$$=a^{n-1}+a^{n-1}+a^{n-1}+\cdots+a^{n-1}+a^{n-1}=na^{n-1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دغه قضيه د ټولو جذري افادود ليميټ د پيدا کولو لپاره استعمالولای شو.

مثال:

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}}{x-a}=\frac{1}{n\sqrt[n]{a^{n-1}}}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n}}}{x-a}=\frac{1}{n}a^{\frac{1}{n}-1}=\frac{1}{n}a^{\frac{1-n}{n}}=\frac{1}{n}a^{\frac{-(n-1)}{n}}=\frac{1}{n\sqrt[n]{a^{n-1}}}$$

مثال:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt[5]{x}-\sqrt[5]{3}}{x-3}=?$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt[5]{x}-\sqrt[5]{3}}{x-3}=\frac{1}{5}\cdot 3^{\frac{1}{5}-1}=\frac{1}{5}\cdot 3^{\frac{1-5}{5}}=\frac{1}{5}\cdot 3^{\frac{-4}{5}}=\frac{1}{5\cdot\sqrt[5]{3^4}}$$

مثال:

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}=?$$

د دغه سوال د حل لپاره $(x=y^6)$ او $a=b^6$ ښيو:

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}=\lim_{y\to b}\frac{\sqrt[3]{y^6}-\sqrt[3]{b^6}}{\sqrt{y^6}-\sqrt{b^6}}=\lim_{y\to b}\frac{y^2-b^2}{y^3-b^3}$$

$$=\lim_{y\to b}\frac{(y-b)(y+b)}{(y-b)(y^2+by+b^2)}$$

$$\lim_{y\to b}\frac{y+b}{y^2+by+b^2}=\frac{b+b}{b^2+b^2+b^2}=\frac{2b}{3b^2}=\frac{2}{3b}$$

$$\therefore\quad b^6=a\quad\because\quad b=\sqrt[6]{a}$$

$$=\frac{2}{3\sqrt[6]{a}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ابهام $Uncertainty$:

په اعدادو یا (∞) باندې د عملیو د نتایجو عدم قاطعیت یا نامعلومي ته ابهام وائي.

مبهم اشکال په لاندې ډول دي.

$$\frac{\infty}{\infty} ، \frac{0}{0} ، 0\cdot\infty ، \infty-\infty ، 0^0 ، \infty^0 ، 1^0$$

د ابهام رفع کول:

د څلورو لمړيو شکلو یعنې $\left(\infty-\infty \ ، \ 0\cdot\infty \ ، \ \frac{0}{0} \ \frac{\infty}{\infty}\right)$ ابهام په څلورو طريقو رفع کیږي.

1- د تقسيم پواسطه

2- د مزدوج د ضربېدو پواسطه

3- د تجزئي پواسطه

4- د لوهسپيتال په طريقه

1- د تقسيم پواسطه د ابهام رفع کول:

که په یوه کسري تابع کې د لیمیټ د پیدا کولو په وخت کې ابهام منځ ته راشي صورت او مخرج په هغه متحول ويشو چه درجه يي لوړه وي.

مثال:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{3x^2-2}=\frac{\infty-1}{\infty-2}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{3x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x^2}}{3-\frac{1}{x^2}}=\frac{1-\frac{1}{\infty}}{3-\frac{1}{\infty}}=\frac{1}{3}$$

2- د تجزيي پواسطه د ابهام رفع کول:

که یوه کسري تابع د لیمیټ د پیدا کولو په وخت کې مبهم شکل غوره کړي او د تجزيي وړ وي تجزيه کوو يي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال:

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^2-4}{x+2}=\frac{(-2)^2-4}{-2+2}=\frac{4-4}{-2+2}=\frac{0}{0}$$
$$\lim_{x\to-2}\frac{x^2-4}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{x^2-2^2}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{(x-2)(x+2)}{x+2}$$
$$\lim_{x\to-2}(x-2)=-2-2=-4$$

مثال:

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-6x+8}{x-2}=\frac{2^2-6\cdot2+8}{2-2}=\frac{0}{0}$$
$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-6x+8}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{x^2-2x-4x+8}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{x(x-2)-4(x-2)}{x-2}$$
$$\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x-4)}{x-2}=\lim_{x\to2}(x-4)=2-4=-2$$

3- د مزدوج د ضربولو پواسطه د ابهام رفع کول:

که د یوی تابع ابهام د تقسیم او تجزیي پواسطه نه رفع کېدلو په مزدوج کی یې ضربوو.

مثال:

$$\lim_{x\to16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}=\frac{\sqrt{16}-4}{16-16}=\frac{0}{0}$$
$$\lim_{x\to16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}=\lim_{x\to16}\frac{(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+4)}{(x-16)(\sqrt{x}+4)}=\lim_{x\to16}\frac{(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+4)}{(x-16)(\sqrt{x}+4)}$$
$$\lim_{x\to16}\frac{\sqrt{x}^2-16}{(x-16)(\sqrt{x}+4)}=\lim_{x\to16}\frac{x-16}{(x-16)(\sqrt{x}+4)}$$
$$\lim_{x\to16}\frac{1}{\sqrt{x}+4}=\frac{1}{\sqrt{16}+4}=\frac{1}{8}$$

مثال:

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})=\infty-\infty$$
$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+1}^2 - \sqrt{x}^2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

مثال:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} = ?$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{\sqrt{x+1}^2-4}$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{x-3} = \lim_{x\to 3}(\sqrt{x+1}+2)$$

$$= \sqrt{3+1}+2$$

$$\sqrt{4}+2 = 2+2 = 4$$

مثال:

$$\lim_{x\to 2} \frac{\frac{2x}{x^2+1} - \frac{4}{5}}{x-2} = ?$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{\frac{2x}{x^2+1} - \frac{4}{5}}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{\frac{10x-4x^2-4}{5(x^2+1)}}{x-2}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{(-4x^2+10x-4)}{5(x^2+1)(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{(-4x^2+2x+8x-4)}{5(x^2+1)(x-2)}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{\{-2x(2x-1)+4(2x-1)\}}{5(x^2+1)(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{-2(x-2)(2x-1)}{5(x^2+1)(x-2)}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{-2(2x-1)}{5(x^2+1)} = \frac{-2(2\cdot 2-1)}{5(2^2+1)} = \frac{-6}{25}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\left(1^{\infty}، \infty^{0}، 0^{0}\right)$ اشکالو د ابهام رفع کول:

ددغه اشکالو د رفع کولو لپاره د $lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ کار اخيستل کيږي. چه:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$$

د $e=2.718281828$ عدد د يوه جرمني عالم ايولر $Euler$ پواسطه کشف شويدی.

مثال: ثبوت کړئ چې:

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$$

د پاره د دې چې پوښتنه د ايولر د فارمول شکل ته ورواړوو نو $\frac{1}{\alpha}$ په x ښيو:

$$x=\frac{1}{\alpha}\Longrightarrow\because\quad \alpha\to 0\quad\therefore\quad x\to\infty$$

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

مثال:ثبوت کړئ چې:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{\beta x}=e^{\alpha\beta}$$

حل:

$$u=\frac{\alpha}{x}\quad\Longrightarrow\ \therefore\ x\to\infty\quad\because\quad u\to 0\ \Longrightarrow x=\frac{\alpha}{u}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{\beta x}=\lim_{u\to 0}(1+u)^{\beta\frac{\alpha}{u}}=\lim_{u\to 0}\left\{(1+u)^{\frac{1}{u}}\right\}^{\alpha\beta}$$

$$\frac{1}{u}=x\Longrightarrow u=\frac{1}{x}\quad\therefore\ u\to 0\quad\because x\to\infty$$

$$\lim_{u\to 0}\left\{(1+u)^{\frac{1}{u}}\right\}^{\alpha\beta}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right\}^{\alpha\beta}=e^{\alpha\beta}$$

مثال:ثبوت کړئ چې:

$$\lim_{x\to 0}\frac{Ln(1+x)}{x}=1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$$\lim_{x\to 0}\frac{Ln(1+x)}{x} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\left\{\frac{1}{x}ln(1+x)\right\} = \lim_{x\to 0}\left\{ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\right\} = ln\left\{\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right\}$$

$$\frac{1}{x} = u \Rightarrow x = \frac{1}{u} \qquad \therefore\ x\to 0 \quad \because\ u \longrightarrow \infty$$

$$= ln\left\{\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right\} = ln\left\{\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}\right\} = lne = 1$$

مثال: ثبوت کړئ چې:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$$

د سوال د حل لپاره (e^x-1) په (y) ښیو:

$$e^x - 1 = y \Rightarrow e^x = 1+y \Rightarrow \ln e^x = \ln(1+y) = x\ln e = \ln(1+y)$$

$$x = \ln(1+y)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)} = \frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\frac{1}{y}\ln(1+y)} = \frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\ln(1+y)^{\frac{1}{y}}}$$

$$\frac{1}{y} = x \Rightarrow y = \frac{1}{x}$$

$$\therefore\ y\to 0 \quad \because\ x\to\infty$$

$$= \frac{1}{\ln\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}} = \frac{1}{\ln e} = \frac{1}{1} = 1$$

تبصره:

که یوه تابع د $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ شکل ولري د لیمیټ د لاس ته راوړلو لپاره یې طبعي لوګاریتم نیسو او د پورتنیو مبهمو شکلو څخه چې که هر شکل یې لرلو د $(0\cdot\infty)$ شکل ته ئي را اړوو او د مخکینیو څلورو حالتو څخه چه په هر حالت ئي ابهام د منځه تللو ابهام ئي د منځه وړو.

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \ln\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a}\ln f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a}\{g(x)\ln f(x)\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مبهم شکل عمومي حالت :-که $\lim_{x\to a}\{u(x)\}^{v(x)} = 1^{\infty}$ وي په دی حالت کی (α) په $(u-1)$ ښيو:

$$(\alpha = u - 1)$$

$$\lim_{x\to a} u^v = \lim_{x\to a}(1+u-1)^{\frac{v}{u-1}\cdot u-1} = \lim_{x\to a}\left\{(1+\alpha)^{\frac{v}{\alpha}\cdot\alpha}\right\}$$

$$= \lim_{x\to a}\left\{(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right\}^{\lim\limits_{x\to a}(v\alpha)}$$

څرنګه چه $(\alpha = u-1)$ دی نو که $(u \to 1)$ وګړي په نتيجه کی $(\alpha \to 0)$ کوي په نتيجه کی ليکو چې:

$$\lim_{x\to a}\{u(x)\}^{v(x)} = \left\{\lim_{x\to a}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right\}^{\lim\limits_{x\to a} v(u-1)} = e^{\lim\limits_{x\to a} v(u-1)} = e^p$$

$$\lim_{x\to a}\{u(x)\}^{v(x)} = e^p \qquad , \qquad p = \lim_{x\to a}\{v(u-1)\}$$

1- مثال :د $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$ پيدا کړئ؟

حل:

$$u = 1 + \frac{2}{x} \qquad , \qquad v = x$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x = e^p \qquad , \qquad p = \lim_{x\to\infty}\left\{x\left(1+\frac{2}{x}-1\right)\right\} = \lim_{x\to a} x\left(\frac{2}{x}\right) = 2$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x = e^p = e^2$$

2- مثال :د $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x-5}{2}}$ قيمت محاسبه کړئ؟

حل: لمړی د ليميټ بڼه ليکو:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x-5}{2}} = 1^{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x-5}{2}} = e^p$$

$$p = \lim_{x\to a} v(u-1) = \lim_{x\to\infty}\frac{x-5}{2}\left(1+\frac{1}{x}-1\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x-5}{2}\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x-5}{2x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x}-\frac{5}{x}}{\frac{2x}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{5}{x}}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x-5}{2}}=e^{p}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

3- مثال: $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=?$

حل:

$$u=\cos x \quad , \quad v=\frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=e^{p}$$

$$p=\lim_{x\to 0}\{v(u-1)\}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{1}{x}(\cos x-1)\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)(\cos x+1)}{x(\cos x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{cos^{2}x-1}{x(\cos x+1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-sin^{2}x}{x(\cos x+1)}=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x+1}=1\cdot\frac{0}{1}=1\cdot 0=0$$

$$\lim_{x\to 0}(\cos x+1)^{\frac{1}{x}}=e^{p}=e^{0}=1$$

مثال: $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+2}=?$

حل:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+2}=\lim_{x\to\infty}(x+2)\left(1+\frac{1}{x}-1\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{x}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}{\frac{x}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1+\frac{1}{\infty}=1+0=1$$

مثال: $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+2}=?$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+2}=\lim_{x\to\infty}(x+2)\left(\frac{x+3}{x-1}-1\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}(x+2)\left(\frac{x+3-x+1}{x-1}\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to\infty}(x+2)\left(\frac{4}{x-1}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{4(x+2)}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x+8}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4x}{x}+\frac{8}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4+\frac{8}{x}}{1-\frac{1}{x}}=\frac{4+\frac{8}{\infty}}{1-\frac{1}{\infty}}=\frac{4}{1}=4$$

مثال: $\lim_{x\to\infty}(\cos 2x)^{\frac{1}{x}}=?$

حل:

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}(\cos 2x-1)=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-2\sin^2 x-1}{x}=-2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to\infty}\sin x$$

$$=-2\cdot 1\cdot 0=0$$

مثال: $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln x}=?$

حل:

$$x-1=y\Rightarrow x=1+y$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(1+y)}{y}}=\frac{1}{\lim_{y\to 0}\frac{1}{y}\ln(1+y)}=\frac{1}{\lim_{y\to 0}\ln(1+y)^{\frac{1}{y}}}$$

$$\frac{1}{y}=u\Rightarrow y=\frac{1}{u}\qquad\therefore\ y\to 0\quad\because\quad u\to\infty$$

$$\frac{1}{\ln\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}}=e$$

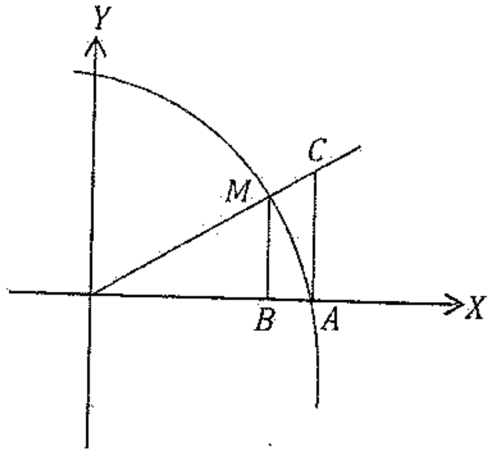
د مثلثاتي تابعګانو ليميټ :limit of Trigono metrical Functions

د يوې زاويې د ساين او هغه زاويې د نسبت ليميټ په صفر کې (1) دې. يعنې:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ثبوت:په یوه دایره کې یو داخلي او یو خارجي مثلثونه رسموو اوهم ددی مثلثو تر منځ یوه قطاع په نظر کې نیسو، مساحتونه ئي پیدا کوو او مقایسه کوویې.



$$A_{OBM} < A_{OAM} < A_{OAC}$$

$$\frac{1}{2}\cdot \overline{OB}\cdot \overline{MB} < \frac{1}{2}\cdot \overline{OA}\cdot \widehat{AM} < \frac{1}{2}\cdot \overline{OA}\cdot \overline{AC}$$

$$\overline{OB} = \cos x \quad , \quad \overline{MB} = \sin x \ , \quad \overline{OA} = 1 \quad , \widehat{AM} = x$$

$$\sin x \cos x < x < \tan x$$

$$\frac{\sin x \cos x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x}$$

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$\frac{1}{\cos x} > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} > \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} > \lim_{x\to 0}\cos x$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1 = \lim_{x\to 0}\cos x$$

د ساندویچ د قضیې سره سم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1- مثال: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=?$

حل:

$$2x=\alpha \Longrightarrow x=\frac{\alpha}{2} \qquad \therefore\ x\longrightarrow 0 \qquad \because\quad \alpha\longrightarrow 0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\frac{\alpha}{2}}=2\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=2\cdot 1=2$$

2- مثال: $\lim_{x\to 0}\frac{5\tan 2x}{7x}=?$

حل:

$$\lim_{x\to 0}\frac{5\tan 2x}{7x}=\lim_{x\to 0}\frac{5\frac{\sin 2x}{\cos 2x}}{7x}=\lim_{x\to 0}\frac{5\sin 2x}{7x\cos 2x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{5\cdot 2x\cdot\frac{\sin 2x}{2x}}{7x\cos 2x}=\frac{10}{7}\frac{\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}}{\lim_{x\to 0}\cos 2x}=\frac{10}{7}$$

3- مثال: $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x}=?$

حل:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-(1-2sin^2x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-1+2sin^2x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2sin^2x}{x}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\sin x=2\cdot 1\cdot 0=0$$

څلورم مثال: $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\sin 5x}=?$

حل:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3x\cdot\frac{\sin 3x}{3x}}{\cos 3x}}{5x\cdot\frac{\sin 5x}{5x}}=\frac{\frac{3x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}}{\lim_{x\to 0}\cos 3x}}{5x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}}=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{1}=\frac{3}{5}$$

5- مثال: $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 4x-\cos 6x}{x^2}=?$

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$$\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin\frac{4x+6x}{2}\sin\frac{4x-6x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 5x\sin(-x)}{x^2}$$

$$2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{5\sin 5x}{5x}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=10\cdot 1\cdot 1=10$$

6- مثال: $\lim_{x\to 0}\sqrt{\cos 2x-\cos x+1}=?$

حل:

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{2cos^2x-1-cosx+1}=\lim_{x\to 0}\sqrt{2cos^2x-cosx}$$

$$=\sqrt{2(1^2)-1}=\sqrt{2\cdot 1-1}=\sqrt{2-1}=1$$

د تابعګانو متماديت (اتصال):

د اتصال له مخې تابع په دوه ډوله ده.

1- متمادي تابع   2- غیر متمادي تابع

1- متمادي تابع :

هغه تابع ده چه دګراف د ترسیم په وخت کی یي د پنسل څوکه د کاغذ څخه نه پورته کیږي یعنی ګراف یي پریکړون نه لري.په عمومي ډول خطي تابع، دویمه درجه تابع، اکسپوننشل تابع، لوګاریتمي تابع، د ساین او کوساین تابعګانې متمادي تابعګانی دي په دې شرط چه کومه نقطه ورڅخه وتلی نه وي .

2- غیر متمادي تابعګانی:

هغه تابعګانی دي چه ګراف یي څو ټوټې وي. لکه هوموګرافیک تابع، د تانجانت، کوتانجانت، سیکېنټ او کوسیکېنټ تابعګانې.

کولای شو چې متمادي تابګانی په غیرمتمادي تابګانو بدلی کړو مګر نشو کولای چې غیر متمادي تابعګانی په متمادي تابعګانو بدلې کړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د متمادیت شرطونه:

د متمادیت شرطونه دری دي .

1- د (a) نقطه باید په $\lim_{x\to a} f(x)$ کی شامل وي.

2- $\lim_{x\to a} f(x)$ باید موجود وي.

3- د تابع لیمیټ په یوه نقطه کی باید د تابع د قیمت سره مساوي وي په همغه نقطه کې.

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

که پورتني دری واړه شرطونه په یوه تابع کی موجود وه تابع متمادي ده او که د دغه درې شرطو څخه یو یکی موجود نه و تابع متمادي نه ده غېرمتمادي ده.

1- مثال: وښیاست چه $f(x) = x^2 + 2x - 1$ تابع د $x \to 2$ په نقطه کی متمادي ده.

حل:

1- $2 \in IR \because 2\epsilon dom f(x)$

2- $\lim_{x\to 2}(x^2 + 2x - 1) = 2^2 + 2\cdot 2 - 1 = 7$

3- $f(2) = 2^2 + 2\cdot 2 - 1 = 7$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$$

نو تابع متمادي ده.

2- مثال: د $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ د تابع متمادیت د $(x = -1)$ په ټکي کی وڅېړئ؟

حل: څرنګه چه د تابع مخرج په (-1) کې صفر کیږي او هر هغه عدد چه د تابع مخرج صفر کوي د تابع د تعریف په ناحیه کی شامل نه دی $(-1 \notin dom f(x))$ نو تابع متمادي نه ده

د تابع د لیمیټ شرطونه :که دیوی تابع د ښي لاس لیمیټ د تابع دچپ لاس د لیمیټ سره مساوي وي نوتابع لیمیټ لري. اوکه د ښي لاس لیمیټ د چپ لاس د لیمیټ سره مساوي نه ؤ لیمیټ نه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ښي لاس ليميټ :

د (b) عدد د (a) په نقطه کې د $f(x)$ د تابع د ښي لاس ليميټ دې په دې شرط چه د (b) د هر مجاورت (N) لپاره د تابع د تعريف په ناحيه کې د $(a, a+\delta)$ يو خلاص انټروال موجود وي چه د دې انټروال د هرعنصرتصويرد (N) په مجاورت شامل وي او داسې ليکل کيږي.

$$\lim_{x \to a+} f(x)$$

د چپ لاس ليميټ:

د (b) عدد د (a) په نقطه کې د $f(x)$ د تابع د چپ لاس ليميټ دي پدې شرط چه د (b) د هر مجاورت (N) لپاره د تابع د تعريف په ناحيه کې د $(-\infty - a, a)$ يو انټروال موجود وي چه د دې مجاورت د هر عنصر تصويرد (N) په مجاورت کې شامل وي او داسې ليکل کيږي.

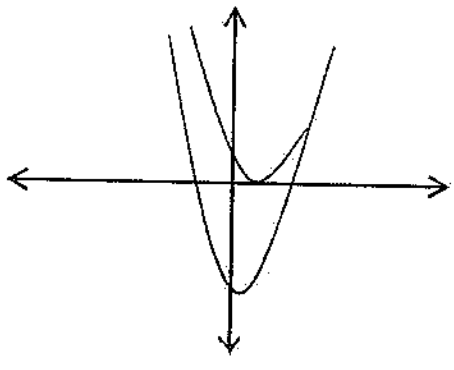
$$\lim_{x \to a-} f(x)$$

مثال:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & ; \quad x < 2 \\ x^2 - 3 & ; \quad x \geq 2 \end{cases}$$

حل:

$$\lim_{x \to 2+} f(x) = \lim_{x \to 2+} (x^2 - 2x + 1) = 1$$
$$\lim_{x \to 2-} f(x) = \lim_{x \to 2-} (x^2 - 3) = 1$$
$$\lim_{x \to 2-} f(x) = \lim_{x \to 2-} f(x)$$
$$\lim_{x \to 2} f(x) = \exists$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

4- مثال: $f(x)=\begin{cases}2x+1 & ; \ x\geq 1\\ 1-x & ; \ x<1\end{cases}$ تابع په راکړ شوو ټکو کې یې متمادیت وڅېړئ؟

حل:

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1+}(2x+1)=3\\ \lim\limits_{x\to 1-}(1-x)=0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1+} f(x)\neq \lim_{x\to 1-} f(x)$$

نو $\lim_{x\to 1} f(x)=\nexists$ تابع لیمیټ نه لري.

نو تابع د $(x=1)$ په نقطه کې غیرمتمادي ده.

تبصره:

1- که $g(x)$ تابع د $(x=a)$ په نقطه کې متمادي وي او $f(x)$ په $(x=g(a))$ کې متمادي وي نو $f(g(x))$ هم په $(x=a)$ کې متمادي ده.

$$\lim_{x\to a} f(g(x))=f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)=f(g(a))$$

2- د یوې طاقت لرونکې تابع د لیمیټ دپیدا کولو لپاره لمړی دتابع لیمیټ پیدا کوو او بیا یې په همغه توان رفع کوو.

$$\lim_{x\to a}(f(x))^{a}=\left(\lim_{x\to a} f(x)\right)^{a}$$

3- د اکسپوننشل تابع د لیمیټ دپیدا کولو لپاره قاعده دتابع دتوان دلیمیټ په توان لیکو.

$$\lim_{x\to a}(b)^{f(x)}=b^{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$$

4- د لوګاریتمي تابع لیمیټ په یوه نقطه کې دتابع دلیمیټ دلوګاریتم سره مساوي دی په همغه نقطه کې.

$$\lim_{x\to a}\log_b f(x)=\log_b \lim_{x\to a} f(x)$$

5- د یوې مثلثاتي تابع لیمیټ په یوه نقطه کې د هغه تابع دلیمیټ دمثلثاتي نسبت سره مساوي دی په همغه نقطه کې.

$$\lim_{x\to a}\sin f(x)=\sin \lim_{x\to a} f(x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د متمادي تابعګانو خواص:

که د دوه تابعګانو څخه هره یوه په یوه نقطه کی متمادي وي نو د دوی مجموعه ،تفاضل ، حاصل ضرب او خارج قسمت هم په همغه نقطه کی متمادي دی.

مثال: که $f(x) = x^2 + 3$ او $g(x) = x^2 + 3x - 2$ دوه تابعګاني متمادي وي نو ثبوت کړئ چې $g(x) \neq 0$; $\frac{f(x)}{g(x)}$, $f(x) \cdot g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x) + g(x)$ هم متمادي دي.

حل:

$$1: Df(x) = IR$$
$$2: \lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}(x^2 + 3) = 1^2 + 3 = 4$$
$$3: f(1) = (1^2 + 3) = 4$$

نو د $f(x)$ تابع د $x = 1$ په نقطه کې متمادي ده.

$$1: Dg(x) = IR$$
$$2: \lim_{x\to 1}(x^2 + 3x - 2) = 1^2 + 3 \cdot 1 - 2 = 2$$
$$3: g(1) = (1^2 + 3 \cdot 1 - 2) = 2$$

نو د $g(x)$ تابع د $x = 1$ په نقطه کی متمادي ده.

اوس د تابعګانو دمجموعی او حاصل ضرب متمادیت څېړو.

الف:

$$f(x) + g(x) = x^2 + 3 + x^2 + 3x - 2 = 2x^2 + 3x + 1$$
$$1: D\{f(x) + g(x)\} = IR$$
$$2: \lim_{x\to 1}\{f(x) + g(x)\} = \lim_{x\to 1}(2x^2 + 3x + 1) = 6$$
$$3: f(1) + g(1) = (2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1) = 2 + 3 + 1 = 6$$
$$\lim_{x\to 1}\big(f(x) + g(x)\big) = f(1) + g(1) = 6$$

ب: د او تابعګانو دحاصل ضرب متمادیت وڅېړئ؟

$$1: Df(x) \cdot g(x) = IR$$
$$2: \lim_{x\to 1}\{f(x) \cdot g(x)\} = \lim_{x\to 1}(x^2 + 3x - 2)(x^2 + 3) = 2 \cdot 4 = 8$$
$$3: f(1) \cdot g(1) = 2 \cdot 4 = 8$$

د تابعګانو حاصل ضرب هم متمادي دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرین

د لاندې تابعګانو لیمیټ پیدا کړئ؟

1: $\lim_{x\to\infty}(x^2 - 2x + 17)$

2: $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2 - 6x + 3}{x + 1}$

3: $\lim_{x\to 1}(x^3 + 5x^2 - 11x + 1)$

4: $\lim_{x\to 1}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

شپاړلسم فصل

مشتق

مشتق مفعوله صیغه ده د اشتقاق څخه اخیستل شوی ده.

او په اصطلاح کې په عربي ژبه کی د مصدر څخه د نورو افعالو او اسماؤ اخیستلو ته اشتقاق وایي. د مشتق څخه مقصد د دوه یمی درجی ،دریمی درجی اوداسی نورو تابعګانو د میل پیدا کول دي.

د خطي تابع میل:

په خطي تابع کی د مستقیم خط میل د $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ پواسطه پیدا کیږي.

مثال: $A(3,7)$ او $B(5,9)$ د مستقیمی کرښی دوه نقطی دي میل یې پیدا کړئ؟

حل:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{9-7}{5-3} = \frac{2}{2} = 1$$

خو څرنګه چه په منحني خطو کی دوه نقطی په یوه استقامت واقع نه وي نو له همدی امله دمنحني خطو دمیل د پیدا کولو لپاره د مستقیم خط د میل څخه استفاده کوي.نو ځکه د منحني میل ته مشتق وایي.

مثلاً $f(x) = x^2$ یوه تابع راکړشوی ده د میل ددغه تابع د ګراف دوه نقطی په یوه استقامت وجود نلري نو په تقریبي ډول دوه نقطی پیداکواو میل یې لاسته راوړو فرضاً $A(x, f(x))$ او $B(x+h, f(x+h))$ دمنحني خط دوه نقطی دي نود مستقیم خط د میل څخه استفاده کوونو لیکو چه:

$$m_{AB} = \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

د منحني خط دهری اختیاري نقطی میل عبارت $\lim_{x\to a} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ دی.

1- مثال: د $f(x) = 2x - x^2$ تابع د ګراف میل د $P(3,-3)$ په نقطه کی پیدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: څرنګه چې د $P(3,-3)$ په نقطه کې $x=3$ دی نو کولای شو چه د میل په فارمول کې د (x) په عوض (3) وضع کړو.

$$m=\lim_{x\to a}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$m=\lim_{h\to 0}\frac{2(3+h)-(3+h)^2-(2\cdot 3-3^2)}{h}$$

$$m=\lim_{h\to 0}\frac{6+2h-(9+6h+h^2)-6+9}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2h-9-6h-h^2+9}{h}$$

$$m=\lim_{h\to 0}\frac{h(-4-h)}{h}=\lim_{h\to 0}(-4-h)=-4\Rightarrow m=-4$$

2- مثال: د $f(x)=x^3-1$ د تابع میل د $(x=-3)$ په نقطه کې پیدا کړئ؟

حل:

$$m=\lim_{x\to -3}\frac{f(-3+h)-f(-3)}{h}=\lim_{x\to -3}\frac{\{(-3+h)^3-1\}-\{(-3)^3-1\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-27+27h-9h^2+h^3-1+27+1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^3-9h^2+27h}{h}$$

$$m=\lim_{h\to 0}\frac{h(h^2-9h+27)}{h}=\lim_{h\to 0}(h^2-9h+27)=27$$

منحنی یا وسطي تعبیر:

د متحرک پواسطه وهل شوی فاصله د وخت تابع ده. یعني:

$$S=f(t)$$

د t_1 او t_2 په وختونو کې د وهل شوو فاصلود تفاضل او وختو د تفاض نسبت ته د متحرک وسطي سرعت یا متوسط سرعت وایي. یاداچه دتابع اومتحول دزیادت نسبت ته متوسط سرعت وایي.

$$\bar{v}=\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}$$

د متوسط سرعت لیمیټ ته لحظوي سرعت وایي

$$\lim_{t\to t_0}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}=\lim_{t\to t_0}\frac{S-S_0}{t-t_0}=\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1- مثال: د $y = f(x) = x^2$ په تابع کی متوسط تغیرات د [2,5] په انټروال کی پیدا کړئ؟

حل:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{25 - 4}{3} = \frac{21}{3} = 7$$

2- مثال: د $f(t) = 5t^2 - 3t + 1$ د تابع متوسط سرعت د $[2,4]$ په انټروال کی پیدا کړئ؟

حل:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{(5 \cdot 4^2 - 3 \cdot 4 + 1) - (5 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 1)}{4 - 2} = \frac{69 - 15}{2} = 27$$

د یوې تابع مشتق:

که $y = f(x)$ یوه تابع ولرو نو که (x) د (Δx) په اندازه زیادت وکړي نو (y) د (Δy) په اندازه زیادت کوي.

$$y = f(x)$$
$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$
$$\Delta y = f(x + \Delta x) - y$$
$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

دغه لیمیټ ته مشتق وایي.

د مشتق په باب لمړنی تصور پیری فرماټ (Pierre fermat) فرانسوي عالم په (1601 – 1665)م کې کړی ؤ نوموړي خپلی لیکلنی د نړی ریاضیدانانو ته پېشنهاد کړلی. وروسته بیا اسحق نیوټن (1642 – 1727)م او جورج ویلیم لایبنز(1664 – 1715)م د مشتق د موجودیت ضرورت په ریاضي کی ثابت او د ساینسدانانو کمیسون ته یي پېشنهاد کړاو د مشتق د تعریف وضاحت یي په ډېر ښه ډول وکړ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مشتق تعريف:

د صفر په نقطه کې د تابع اومتحول د زیادت دنسبت لیمیټ ته مشتق وايي. لکه $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$
او په $\acute{f}(x)$ يا $\acute{y}$ ، $\frac{dy}{dx},\frac{df}{dx}$ ښودل کيږي.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}=\frac{df(x)}{dx}=\acute{y}=\acute{f}(x)$$

1- مثال: د $f(x)=2x$ تابع مشتق پيدا کړئ؟

حل:

$$\acute{f}(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2(x+\Delta x)-2x}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x+2\Delta x-2x}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x}{\Delta x}=2$$

2- مثال: د $f(x)=x^3$ تابع مشتق پيدا کړئ؟

حل:

$$\acute{f}(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^3+3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}(3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2)=3x^2\quad\Rightarrow\acute{f}(x)=3x^2$$

3- مثال: د $f(x)=\sqrt{x}\,;\,x\geq 0$ مشتق پيدا کړئ؟

حل:

$$\acute{f}(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

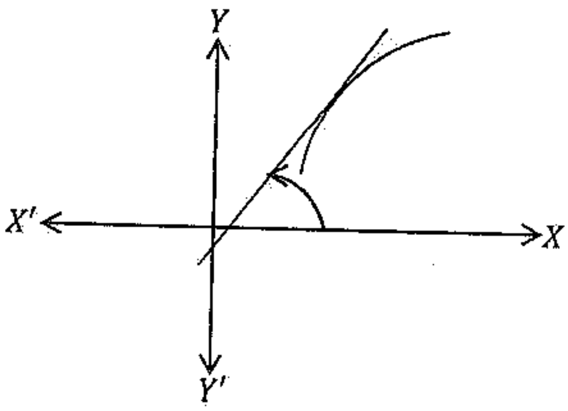
4- مثال: د $f(x)=2x^2+x$ د تابع مشتق د تعریف په مرسته وڅېرئ؟

حل:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$
$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{2(x+\Delta x)^2+(x+\Delta x)\}-(2x^2+x)}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta\to x 0}\frac{2x^2+4x\Delta x+2(\Delta x)^2+x+\Delta x-2x^2-x}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{4x\Delta x+2(\Delta x)^2+\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(4x+2\Delta x+1)}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}(4x+2\Delta x+1)=4x+1 \quad \Rightarrow f'(x)=4x+1$$

د مشتق هندسي تعبير

په یوه نقطه کې د یوه منحني خط مېل دهغه زاویې تانجانت دی چه مستقیمه کرښه یې د (XX') د محور دمثبت جهت سره جوړوي.



1- مثال: د هغه مماس مېل او معادله پیدا کړئ چې د $f(x)=2x^3-1$ په منحني باندې د $A(1,1)$ په نقطه کې رسمیږي.

حل:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$m = \acute{f}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\{2(x + \Delta x)^3 - 1\} - (2x^3 - 1)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x^3 + 6x^2\Delta x + 6x(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3 - 1 - (2x^3 - 1)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x^3 + 6x^2\Delta x + 6x(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3 - 1 - 2x^3 + 1}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{6x^2\Delta x + 6x(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(6x^2 + 6x\Delta x + 2(\Delta x)^2)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} (6x^2 + 6x\Delta x + 2(\Delta x)^2) = 6x^2$$

د $A(1,1)$ په ټکي کې د مماس میل $6 = 6 \cdot 1 = 6(1)^2 = \acute{f}(1) = \acute{f}(x) = m$ دی او معادله یې په لاندې ډول ده.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = 6(x - 1) \qquad \Rightarrow y = 6x - 6 + 1 = 6x - 5 \Rightarrow y = 6x - 5$$

2- مثال: د $y = x^2 + 1$ د تابع د مماس میل د $x_0 = 2$ په نقطه کې پیدا کړئ؟

$$\acute{y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 + 1 - (x_0^2 + 1)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 + 1 - x_0^2 - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0 = 2 \cdot 2 = 4$$

3- مثال: د $y = f(x) = x^2$ تابع راکړشوی ده د $x = x_0$ په نقطه کې اوخصوصاً د $x_0 = 2$ په نقطه کې یې مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$$

$$= \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$$

$$\acute{f}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0 = 2 \cdot 2 = 4$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

4- مثال: د $f(x) = \frac{1}{x}$ د تابع مشتق د (x_0) په نقطه کې پیدا کړئ؟

حل:

$$y = f(x_0)$$
$$y + \Delta y = f(x_0 + \Delta x) = \frac{1}{x_0 + \Delta x}$$
$$\Delta y = \frac{1}{x_0 + \Delta x} - \frac{1}{x_0} = \frac{x_0 - x_0 - \Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)} = \frac{-\Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\frac{\Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)}}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{\Delta x x_0(x_0 + \Delta x)} = \frac{-1}{x_0(x_0 + \Delta x)}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{x_0(x_0 + \Delta x)} = -\frac{1}{{x_0}^2} \quad \Rightarrow \acute{f}(x) = -\frac{1}{{x_0}^2}$$

5- مثال: د $f(x) = 4x^2 - 3$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$y = f(x)$$
$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$
$$\Delta y = f(x + \Delta x) - y$$
$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\{4(x + \Delta x)^2 - 3\} - (4x^2 - 3)}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\{4(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2) - 3\} - (4x^2 - 3)}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4x^2 + 8x\Delta x + 4(\Delta x)^2 - 3 - 4x^2 + 3}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{8x\Delta x + 4(\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(8x + 4\Delta x)}{\Delta x}$$
$$\acute{f}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} (8x + 4\Delta x) = 8x$$

تمرین:

د لاندې تابعگانو مشتق پیدا کړئ؟

1- $f(x) = \sqrt{x + 1}$ 2- $f(x) = \frac{x^2 - 5}{x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

3- $f(x) = 1 - \frac{3}{x}$

4- $f(x) = \frac{2}{x^2+5x-7}$

5- $f(x) = x - \frac{1}{x}$

6- $f(x) = 5x - 1$

د مشتق قوانین:

اوله قضیه:

د ثابت عدد مشتق صفر دی.

مفروض : $y = c$ یوه تابع لرو.

مطلوب : ثبوتوو چه $\acute{y} = 0$

ثبوت:

$$y + \Delta y = c \quad \Rightarrow \Delta y = c - y = c - c$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{c - c}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0$$

د یوې طاقت لرونکی تابع مشتق:

مفروض : $y = f(x) = x^n$ یوه طاقت لرونکی تابع ده.

مطلوب : ثبوتوو چه $\acute{y} = \acute{f}(x) = nx^{n-1}$

ثبوت:

$$y = x^n$$

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^n \quad \Rightarrow \Delta y = (x + \Delta x)^n - y = (x + \Delta x)^n - x^n$$

$$\Delta y = (x + \Delta x - x)\{(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2} \cdot x + (x + \Delta x)^{n-3} \cdot x^2 \cdots + x^{n-1}\}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x\{(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2} \cdot x + (x + \Delta x)^{n-3} \cdot x^2 + \cdots + x^{n-1}\}}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \{(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2} \cdot x + (x + \Delta x)^{n-3} \cdot x^2 + \cdots + x^{n-1}\}$$

$$\acute{y} = x^{n-1} + x^{n-1} + x^{n-1} + \cdots + x^{n-1} = nx^{n-1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1- مثال: د $f(x) = x^5$ تابع مشتق $x = \frac{1}{2}$ په ټکي کې پیدا کړئ؟

$$f(x) = x^5$$
$$f'(x) = 5x^{5-1} = 5x^4$$
$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 5\left(\frac{1}{2}\right)^4 = 5\left(\frac{1}{16}\right) = \frac{5}{16}$$

2- مثال: د $f(x) = x^{-2}$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

$$f'(x) = -2x^{-2-1} = -2x^{-3}$$

3- مثال: د $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ مشتق پیدا کړئ؟

$$f'(x) = \frac{2}{3}\cdot x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}\cdot x^{\frac{2-3}{3}} = \frac{2}{3}\cdot x^{\frac{-1}{3}} = \frac{2}{3\cdot x^{\frac{1}{3}}} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

د دوه تابعګانو د حاصل جمع مشتق:

د دوه تابعګانو د مجموعی مشتق د تابعګانو دمشتقو د مجموعی سره مساوي دی.

مفروض: (u) او (v) دوه تابعګانی لرو.

مطلوب: ثبوتوو چه $y' = u' + v'$

ثبوت: د تابعګانو د جمع حاصل په (y) ښیو:

$$y = u + v$$
$$y + \Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v$$
$$\Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v - y$$
$$\Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v - u - v$$
$$\Delta y = \Delta u + \Delta v$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}$$
$$y' = u' + v'$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه تابعګانو دتفاضل مشتق

د دوه تابعګانو دتفاضل مشتق د تابعګانو د مشتقو د تفاضل سره مساوي دی.

مفروض: (u) او (v) دوه تابعګانې لرو.

مطلوب: ثبوتوو چه: $\acute{y} = \acute{u} - \acute{v}$

ثبوت: د (u) او (v) تابعګانو تفاضل په (y) ښیو.

$$y = u - v$$
$$y + \Delta y = (u + \Delta u) - (v + \Delta v)$$
$$\Delta y = (u + \Delta u) - (v + \Delta v) - u + v$$
$$\Delta y = u + \Delta u - v - \Delta v - u + v$$
$$\Delta y = \Delta u - \Delta v$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u - \Delta v}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} - \frac{\Delta v}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$
$$\acute{y} = \acute{u} - \acute{v}$$

1- مثال: د $y = 2x + 1$ د تابع مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$u = 2x \qquad \& \qquad v = 1$$
$$\acute{u} = 1 \cdot 2x^{1-1} = 2x^0 = 2$$
$$\acute{v} = 0 \qquad \because \ \acute{y} = 2$$

2- مثال: د $f(x) = 4x^2 - 3x + 5$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$u = 4x^2 \ , \quad v = -3x \ , \ w = 5$$
$$\acute{y} = \acute{u} + \acute{v} + \acute{w}$$
$$\acute{y} = (4x^2)' - (-3x)' + 5'$$
$$\acute{y} = 8x - 3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د حاصل ضرب مشتق:

د دوه تابعګانو د حاصل ضرب مشتق مساوي دي د اولی تابع مشتق ضرب دويمه تابع جمع د دويمې تابع مشتق ضرب اوله تابع.

مفروض: د (u) او (v) دوه تابعګانی لرو او د حاصل ضرب تابع يې په (y) ښيو.

$$y = u \cdot v$$

مطلوب: ثبوتوو چه: $\acute{y} = \acute{u}v + \acute{v}u$

ثبوت:

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v)$$
$$\Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - u \cdot v$$
$$\Delta y = u \cdot v + u \cdot \Delta v + v\Delta u + \Delta u \cdot \Delta v - u \cdot v$$
$$\Delta y = u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta v}{\Delta x} = u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = v \lim_{\Delta x 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + u \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \Delta u \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$
$$\acute{y} = v\acute{u} + \acute{v}u + 0 \cdot \acute{v}$$
$$\acute{y} = \acute{u}v + \acute{v}u$$

1- مثال: د $y = x^3(x^2 - 3)$ تابع مشتق پيدا کړئ؟

حل:

$$u = x^3 \Rightarrow \acute{u} = 3x^2$$
$$v = x^2 - 3 \Rightarrow \acute{v} = 3x$$
$$\acute{y} = \acute{u}v + \acute{v}u$$
$$\acute{y} = 3x^2(x^2 - 3) + 2x(x^3)$$
$$\acute{y} = 3x^4 - 9x^2 + 2x^4 = 5x^4 - 9x^2$$

2- مثال: د $f(x) = (2x^2 - 5x + 7)(3x - 15)$ تابع مشتق پيدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$$u = 2x^2 - 5x + 7 \;\Rightarrow \acute{u} = 4x - 5$$
$$v = 3x - 15 \;\Rightarrow \acute{v} = 3$$
$$\acute{f}(x) = (4x - 5)(3x - 15) + 3(2x^2 - 5x + 7)$$
$$\acute{f}(x) = 12x^2 - 60x - 15x + 75 + 6x^2 - 15x + 21$$
$$\acute{f}(x) = 18x^2 - 90x + 96$$

د حاصل تقسیم مشتق:

د دوه تابعګانو د خارج قسمت مشتق عبارت دی دصورت مشتق ضرب مخرج منفي د مخرج مشتق ضرب صورت پر مخرج مربع باندی.

مفروض: د (u) او (v) دوه تابعګانی لرود خارج قسمت تابع يې په (y) ښيو. نو:

$$y = \frac{u}{v}$$

مطلوب: ثبوتوو چې:

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}v - \acute{v}u}{v^2}$$

ثبوت:

$$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v}$$

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - y$$

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{uv + v\Delta u - uv - u\Delta v}{v(v + \Delta v)} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)}}{\Delta x} = \frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)} = \frac{v \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v \lim_{\Delta x \to 0} (v + \Delta v)}$$

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}v - \acute{v}u}{v^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1- مثال: د $y = \frac{2+3x}{1-2x}$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$u = 2 + 3x \quad \Rightarrow \acute{u} = 3$$
$$v = 1 - 2x \quad \Rightarrow \acute{v} = -2$$
$$y = \frac{u}{v} \quad \Rightarrow \acute{y} = \frac{\acute{u}v - \acute{v}u}{v^2}$$
$$\acute{y} = \frac{3(1-2x) - \{-2(2+3x)\}}{(1-2x)^2} = \frac{3 - 6x + 4 + 6x}{(1-2x)^2} = \frac{7}{(1-2x)^2}$$

2- مثال: د $f(x) = \frac{7x-15}{2x^2+3x}$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$u = 7x - 15 \quad \Rightarrow \acute{u} = 7$$
$$v = 2x^2 + 3x \quad \Rightarrow \acute{v} = 4x + 3$$
$$\acute{f}(x) = \frac{7(2x^2+3x) - (4x+3)(7x-15)}{(2x^2+3x)^2}$$
$$\acute{f}(x) = \frac{14x^2 + 21x - 28x^2 + 60x - 21x + 45}{(2x^2+3x)^2}$$
$$\acute{f}(x) = \frac{-14x^2 + 60x + 45}{(2x^2+3x)^2}$$

3- مثال: د $y = \frac{x^2}{3x+1}$ مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$u = x^2 \quad \Rightarrow \acute{u} = 2x$$
$$v = x + 1 \quad \Rightarrow \acute{v} = 3$$
$$\acute{y} = \frac{2x(3x+1) - 3 \cdot x^2}{(3x+1)^2} = \frac{6x^2 + 2x - 3x^2}{(3x+1)^2}$$
$$u = x^2 \quad \Rightarrow \acute{u} = 2x$$
$$v = x + 1 \quad \Rightarrow \acute{v} = 3$$
$$\acute{y} = \frac{2x(3x+1) - 3 \cdot x^2}{(3x+1)^2} = \frac{6x^2 + 2x - 3x^2}{(3x+1)^2} = \frac{3x^2 + 2x}{(3x+1)^2}$$
$$\acute{y} = \frac{3x^2 + 2x}{(3x+1)^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د جذري تابع مشتق:

1- د هغه جذري تابع مشتق چې د جذر درجه یې دوه وي. لکه:

$$y = \sqrt{x}$$

مشتق یې عبارت دی د جذر د داخل مشتق پر دوه ضرب تابع .

فارمول یې په لاندي ډول دی.

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}}{2\sqrt{u}}$$

مفروض: $y = \sqrt{u}$ یوه تابع راکړ شوی ده.

مطلوب: ثبوتوو چې:

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}}{2\sqrt{u}}$$

ثبوت:

$$y + \Delta y = \sqrt{u + \Delta u}$$
$$\Delta y = \sqrt{u + \Delta u} - y = \sqrt{u + \Delta u} - \sqrt{u}$$
$$\Delta y = \frac{(\sqrt{u + \Delta u} - \sqrt{u})(\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u})}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}} = \frac{u + \Delta u - u}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}} = \frac{\Delta u}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta u}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}}}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x}}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x}}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}} = \frac{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}}{\lim_{\Delta x \to 0} (\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u})} = \frac{\acute{u}}{\sqrt{u} + \sqrt{u}} = \frac{\acute{u}}{2\sqrt{u}}$$
$$\acute{y} = \frac{\acute{u}}{2\sqrt{u}}$$

مثال:- د $y = \sqrt{x}$ مشتق پیدا کړئ؟

د پورته تابع مشتق عبارت دی.

$$\acute{y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ثبوت:

$$y + \Delta y = \sqrt{x + \Delta x}$$

$$\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - y$$

$$\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x} = \frac{\left(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}\right)}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{\Delta x}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta x}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

مثال: $y = \sqrt{x^2 + 1}$ مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$y + \Delta y = \sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}}$$

$$\Delta y = \sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} - y$$

$$\Delta y = \sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} - \sqrt{x^2 + 1}$$

$$= \frac{\left[\sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} - \sqrt{x^2 + 1}\right]\left[\sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} + \sqrt{x^2 + 1}\right]}{\sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} + \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\Delta y = \frac{(x + \Delta x)^2 + 1 - x^2 - 1}{\sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} + \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\Delta y = \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 1 - x^2 - 1}{\sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} + \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} + \sqrt{x^2 + 1}}}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}}{\sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} + \sqrt{x^2 + 1}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)}{\lim_{\Delta x\to 0}\left(\sqrt{(x+\Delta x)^2+1}+\sqrt{x^2+1}\right)}=\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$$

مثال: د $f(x)=\sqrt{2x^3-3x^2+4x-11}$ مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$\acute{f}(x)=\frac{6x^2-6x+4}{2\sqrt{2x^3-3x^2+4x-11}}$$

د مرکبې تابع مشتق:

مرکبه تابع هغه تابع ده چه متحول يي د بل متحول تابع وي يا دا چه دتابع ، تابع ته مرکبه تابع وايي.لکه که د f تابع د $g(x)$ تابع وي او g د x تابع وي نودغه تابع ته مرکبه تابع وايي.

د مرکبې تابع د مشتق دفارمول د پيدا کولو لپاره په لاندې ډول اجراٸت کوو.

$$\Delta y=\Delta y\Rightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta u}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\acute{y}_{(x)}\Rightarrow\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=\acute{y}_{(u)}\Rightarrow\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\acute{u}_{(x)}$$

$$\acute{y}_{(x)}=\acute{y}_{(u)}\cdot\acute{u}_{(x)}$$

نو په دې اساس که $y=u^n$ وي مشتق يي $\acute{y}=nu^{n-1}\cdot\acute{u}$ دی.

او که $y=\sqrt[n]{u}$ وي نو:

$$\acute{y}=\frac{\acute{u}}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1- مثال :

$y = (2x^2 - 1)^3$
$\acute{y} = 3(2x^2 - 1)^{3-1} \cdot 4x = 3(2x^2 - 1)^2 \cdot 4x = 3(4x^4 - 4x^2 + 1) \cdot 4x$
$= (12x^4 - 12x^2 + 3) \cdot 4x$
$\acute{y} = 48x^5 - 48x^3 + 12x$

2- مثال:

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

حل:

$$\acute{y} = \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

3- مثال:

$$y = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2}$$

حل:

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}} \quad , \quad \acute{y} = \frac{3x^2 - 4x}{3\sqrt[3]{x^3 - 2x^2}}$$

څلورم مثال:

$$y = (x^2 - 2)^{-3}$$

حل:

$\acute{y} = -3(x^2 - 2)^{-3-1} \cdot 2x = -3(x^2 - 2)^{-4} \cdot 2x$
$= \frac{-6x}{(x^2 - 2)^4}$

نوټ:

که د (f) تابع د (x_0) په نقطه کې مشتق ولري نو $\acute{f}(x)$ دهغه مماس میل دی چه د $[x_0, f(x_0)]$ په نقطه په منحني باندی مماس وي.

مثال: د $f(x) = x^3$ دتابع میل د $x_0 = 1$ په نقطه کې پیدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: څرنګه چه $x_0 = 1$ دی نو $f(x_0) = 1$ کیږي نو $P(1,1)$ د تماس ټکی دی نو مېل یې عبارت دی.

$$f'(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$
$$= \lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}$$
$$\lim_{x\to 1}(x^2+x+1) = 1^2+1+1 = 3$$

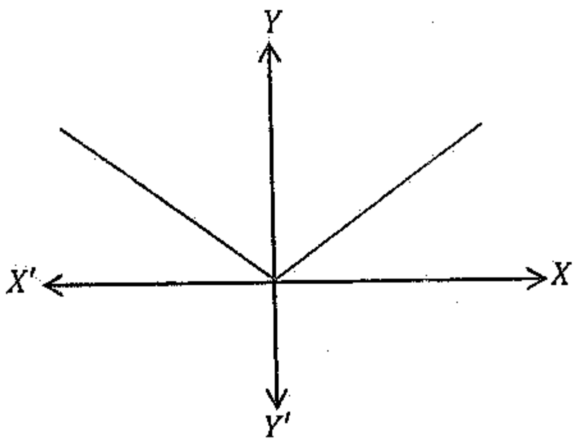
که یوه تابع د $x = x_0$ په نقطه کی د مشتق وړ وي نو دا تابع په دی نقطه کی متمادي ده مګر ممکن یوه تابع په یوه نقطه کی متمادي وي مګر مشتق دی ونلري.

مثال: د $f(x) = |x|$ دتابع مشتق د $x = 0$ په نقطه کی پیدا کړئ

$$f'(0) = \lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0+}\frac{|x|}{x} = 1$$
$$f'(0) = \lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0-}\frac{|x|}{x} = -1$$
$$\lim_{x\to 0+} f(x) \neq \lim_{x\to 0-} f(x)$$

لیمیټ نلري نو مشتق هم نلري.

$$f(x) = |x|$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

د مثلثاتي تابعګانو مشتق:

د $y = \sin x$ تابع مشتق:

د $y = \sin x$ مشتق عبارت دی له $y' = \cos x$ څخه

ثبوت:

$$y = \sin x$$
$$y + \Delta y = \sin(x + \Delta x)$$
$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - y$$
$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x$$
$$= 2\cos\frac{x + \Delta x + x}{2} \cdot \sin\frac{x + \Delta x - x}{2} = 2\cos\frac{2x + \Delta x}{2}\sin\frac{\Delta x}{2}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \cdot 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin\frac{\Delta x}{2} = 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x \cdot 1 = \cos x$$
$$\acute{y} = \cos x$$

که $f(x) = \sin u$ وي او (u) د (x) تابع وي نو مشتق یې عبارت دی له:

$$\acute{f}(x) = \acute{u}\cos u$$

1- مثال: د $f(x) = \sin 4x$ مشتق پیدا کړئ؟

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = \sin 4x \\ u = 4x \Rightarrow \acute{u} = 4 \\ \acute{f}(x) = \acute{u}\cos u \end{array}\right| \qquad \acute{f}(x) = 4\cos 4x$$

2- مثال :- د $f(x) = x^3 \csc x$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

$$f(x) = x^3 \cdot \csc x = x^3 \cdot \frac{1}{\sin x}$$
$$g(x) = x^3 \Rightarrow \acute{g}(x) = 3x^2$$
$$h(x) = \csc x = \frac{1}{\sin x} \Rightarrow \acute{h}(x) = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} = -\cot x \csc x$$
$$\acute{f}(x) = 3x^2 \cdot \csc x + x^3 \cdot (-\cot x \csc x)$$
$$\acute{f}(x) = 3x^2 \cdot \csc x - x^3 \cot x \csc x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

3-مثال: د $y = \frac{\sin x}{1+x}$ مشتق پیدا کړئ؟

$$u = \sin x \Rightarrow \acute{u} = \cos x$$
$$v = 1 + x \Rightarrow \acute{v} = 1$$
$$\acute{y} = \frac{\cos x(1+x) - 1 \cdot \sin x}{(1+x)^2}$$

د $y = \cos x$ تابع مشتق:

د $y = \cos x$ تابع مشتق $\acute{y} = -\sin x$ دی.

ثبوت:

$$y = \cos x$$
$$y + \Delta y = \cos(x + \Delta x)$$
$$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - y = \cos(x + \Delta x) - \cos x$$
$$\Delta y = -2\sin\frac{x + \Delta x + x}{2}\sin\frac{x + \Delta x - x}{2} = -2\sin\frac{2x + \Delta x}{2}\sin\frac{\Delta x}{2}$$
$$\Delta y = -2\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x \to 0}\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \lim_{\Delta x \to 0}\sin\frac{\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = -\sin x \cdot 1 = -\sin x$$
$$y = \cos x \Rightarrow \acute{y} = -$$

پورتني مشتق په لاندې ډول هم ثبوتولای شو.

$$sin^2x + cos^2x = 1$$
$$\cos x = \sqrt{1 - sin^2x} = (1 - sin^2x)^{\frac{1}{2}}$$
$$(\cos x)' = \frac{1}{2}(1 - \sin^2 x)^{-\frac{1}{2}}(-2\sin x\cos x) = \frac{-2\sin x\cos x}{2(1 - sin^2x)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{\sin x\cos x}{\sqrt{cos^2x}}$$
$$= -\frac{\sin x\cos x}{\cos x} = -\sin x$$

1-مثال: $f(x) = \sin 2x$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

$$f(x) = \sin 2x = 2\sin x\cos x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$u = \sin x \Rightarrow \acute{u} = \cos x$

$v = \cos x \Rightarrow \acute{v} = -\sin x$

$\acute{f}(x) = \acute{u}v + \acute{v}u$

$\acute{f}(x) = 2[\cos x \cos x + \sin x(-\sin x)]$

$\acute{f}(x) = 2(cos^2x - sin^2x) = 2\cos 2x$

2- مثال: د $f(x) = x - \sin x \cos x$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

$y = x \Rightarrow \acute{y} = 1$

$u = \sin x \Rightarrow \acute{u} = \cos x$

$v = \cos x \Rightarrow \acute{v} = -\sin x$

$\acute{f}(x) = 1 - \{\cos x \cos x + \sin x(-\sin x)\}$

$\acute{f}(x) = 1 - (cos^2x - sin^2x) = 1 - \cos 2x$

3- مثال: $f(x) = (\sec 2x + \tan 2x)^2 = ?$

$\acute{f}(x) = 2(2\sec 2x \tan 2x + 2sec^2 2x) = 4\sec 2x(\tan 2x + \sec 2x)$

د $y = \tan x$ تابع مشتق:

$y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$u = \sin x \Rightarrow \acute{u} = \cos x$

$v = \cos x \Rightarrow \acute{v} = -\sin x$

$\acute{y} = \frac{\cos x \cos x - (-\sin x)\sin x}{cos^2x} = \frac{cos^2x + sin^2x}{cos^2x}$

$\acute{y} = \frac{1}{cos^2x} = sec^2x$

څلورم د $y = \cot x$ تابع مشتق

ثبوت:

$y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

$u = \cos x \Rightarrow \acute{u} = -\sin x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$v = \sin x \Rightarrow \acute{v} = \cos x$

$\acute{y} = ?$

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}v - \acute{v}u}{v^2} = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{sin^2 x} = \frac{-(sin^2 x + cos^2 x)}{sin^2 x}$$

$$\acute{y} = -\frac{1}{sin^2 x} = -csc^2 x \qquad \therefore \quad co\acute{t}gx = -csc^2 x$$

د $y = \sec x$ تابع مشتق:

ثبوت:

$$y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$u = 1 \Rightarrow \acute{u} = 0$

$v = \cos x \Rightarrow \acute{v} = -\sin x$

$\acute{y} = ?$

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}v - \acute{v}u}{v^2} = \frac{0 \cdot \cos x - (-\sin x) \cdot 1}{cos^2 x} = \frac{\sin x}{cos^2 x}$$

$$\acute{y} = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \tan x \sec x$$

د $y = \csc x$ تابع مشتق:

ثبوت:

$$y = \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

$u = 1 \Rightarrow \acute{u} = 0$

$v = \sin x \Rightarrow \acute{v} = \cos x$

$\acute{y} = ?$

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}v - \acute{v}u}{v^2} = \frac{0 \cdot \sin x - \cos x \cdot 1}{sin^2 x} = \frac{-\cos x}{sin^2 x} = -\frac{\cos x}{\sin x}\frac{1}{\sin x}$$

$$\acute{y} = -\cot x \csc x \ v$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که په یوه تابع کې څو متحوله موجود وي او د ضرب یا تقسیم په حال کې وي نو کله چه د دغه ډول تابعګانو مشتق پیدا کوو نو په نوبت سره دیوی تابع مشتق نظر یوه متحول ته نیول کیږي بل متحول ثابت فرض کیږي دغه ډول مشتقاتو ته ضمني مشتقات وایي او مشتق یې د لاندې فارمول پواسطه پیدا کیږي.

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}$$

لمړی مثال: د $y = \sin\frac{x}{y} + 1$ تابع ضمني مشتق د $(\pi, 1)$ په ټکي کې پیدا کړئ؟

حل: د $y = \sin\frac{x}{y} + 1$ تابع مشتق د $y'_{(x)} = \frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}$ رابطې څخه پیدا کوو.

$$y - \sin\frac{x}{y} - 1 = 0$$

$$f'_{(x)} = y'_{(x)} - \left(\sin\frac{x}{y}\right)'_x - (1)_x = 0 - \frac{1}{y}\cos\frac{x}{y} - 0 = -\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}$$

$$f'_{(y)} = y'_y - \left(\sin\frac{x}{y}\right)'_y - (1)_y = 1 - \frac{x}{1}\cos\frac{x}{y} - 0 = 1 - x\cdot\cos\frac{x}{y}$$

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{-\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}}{1 - x\cdot\cos\frac{x}{y}} = \frac{\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}}{1 - x\cdot\cos\frac{x}{y}}$$

اوس په $y'_{(x)}$ رابطه کې د (x) او (y) قیمتونه وضع کوو چه $y'(\pi, 1)$ په لاس راشي

$$y'_{(\pi.1)} = \frac{\frac{1}{1}\cos\frac{\pi}{1}}{1 + \pi\cos\frac{\pi}{1}} = \frac{\cos\pi}{1 + \pi\cos\pi} = \frac{-1}{1 - \pi} = \frac{1}{\pi - 1}$$

دویم مثال: د $x^2y + 2y^3 = 3x + 2$ رابطې ضمني مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$x^2y + 2y^3 - 3x - 2 = 0$$
$$f'_{(x)} = 2xy + 0 - 3 - 0 = 2xy - 3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\acute{f}_{(y)} = x^2 + 6y^2 - 0 = x^2 + 6y^2$$

$$\acute{f}_{(x)} = -\frac{\acute{f}_{(x)}}{\acute{f}_{(y)}} = -\frac{2xy - 3}{x^2 + 6y^2} = \frac{3 - 2xy}{x^2 + 6y^2}$$

دريم مثال: د $y^6 - y - x^2 = 0$ ضمني مشتق پيدا کړئ؟

حل:

$$\acute{f}_{(x)} = -2x$$

$$\acute{f}_{(y)} = 6y^5 - 1$$

$$\acute{y}_{(x)} = -\frac{\acute{f}_{(x)}}{\acute{f}_{(y)}} = -\frac{-2x}{6y^5 - 1} = \frac{2x}{6y^5 - 1}$$

دپورتني تابع ضمني مشتق په لاندې ډول هم لاس ته راوړلای شو.

$$y^6 - y - x^2 = 0$$

$$6y^5\acute{y} - \acute{y} - 2x = 0$$

$$\acute{y}(6y^5 - 1) = 2x$$

$$\acute{y} = \frac{2x}{6y^5 - 1}$$

د تابع دويم ضمني مشتق:

که يوه دويمه درجه دوه مجهوله تابع راکړشوی وي او وغواړو چه دويم ضمني مشتق يي پيدا کړو نو اول ضمني مشتق يي د فارمول پواسطه پيدا کوو.او بيا د مشتق دفارمولو پواسطه دويم ضمني مشتق پيدا کوو.

مثال: د $x^2 - y^2 = 1$ تابع دويم ضمني مشتق پيدا کړئ

حل:

$$x^2 - y^2 = 1$$

$$x^2 - y^2 - 1 = 0$$

$$\acute{f}_{(x)} = 2x$$

$$\acute{f}_{(y)} = -2y$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\acute{y}_{(x)} = -\frac{\acute{f}_{(x)}}{\acute{f}_{(y)}} = -\frac{2x}{-2y} = \frac{x}{y}$$

اوس د $\acute{y}_{(x)}$ د رابطی $y''_{(x)}$ پیدا کوو

$$y''_{(x)} = \frac{\acute{x}y - \acute{y}x}{y^2} = \frac{y - \acute{y}x}{y^2} = \frac{y - \frac{x}{y}\cdot x}{y^2} = \frac{y^2 - x^2}{y^3} = \frac{-1}{y^3} \Rightarrow y''_{(x)} = -\frac{1}{y^3}$$

دویم مثال: د $x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$ په معادله کی د (y) مشتق نظر (x) ته د $(1,1)$ په ټکي کی پیدا کړئ او د منحني د مماس معادله پیدا کړئ؟

حل:

$$\acute{f}_{(x)} = 2x + y$$
$$\acute{f}_{(y)} = x + 2y$$
$$\acute{y}_{(x)} = -\frac{\acute{f}_{(x)}}{\acute{f}_{(y)}} = -\frac{2x + y}{x + 2y} \qquad \Rightarrow x + 2y \neq 0$$
$$\acute{y} = -\frac{2x + y}{x + 2y} = -\frac{2\cdot 1 + 1}{1 + 2\cdot 1} = -\frac{2 + 1}{1 + 2} = -\frac{3}{3} = -1$$
$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 1 = -1\cdot(x - 1) \Rightarrow y = -x + 2$$

د پورته معادلی ضمني مشتق په لاندی ډول هم پیدا کولای شو.

$$x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$$
$$2x + y + x\acute{y} + 2y\acute{y} = 0 \Rightarrow 2x + y + (x + 2y)\acute{y} = 0$$
$$\acute{y} = \frac{-2x - y}{x + 2y} = -\frac{2x + y}{x + 2y}$$

دریم مثال: د $x^2y^3 = 5y^3 + x$ ضمني مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$x^2y^3 - 5y^3 - x = 0$$
$$\acute{f}_{(x)} = 2xy^3 - 0 - 1 = 2xy^3 - 1$$
$$\acute{f}_{(y)} = 3x^2y^2 - 15y^2 - 0 = 3x^2y^2 - 15y^2$$
$$\acute{y}_{(x)} = -\frac{\acute{f}_{(x)}}{\acute{f}_{(y)}} = -\frac{2xy^3 - 1}{3x^2y^2 - 15y^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

متوالي مشتقات:

د مشتق مشتق ته متوالي مشتقات وايي کولای شو چه د یوی تابع دویم ،دریم، څلورم ... او نور مشتقات ونیسو ترڅو چه مشتق یي صفر شي.

لمړی مثال: د $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ تابع دریم مشتق ونیسئ؟

حل:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$$

$$f'_{(x)} = 3x^2 - 6x + 4$$

$$f''_{(x)} = 6x - 6$$

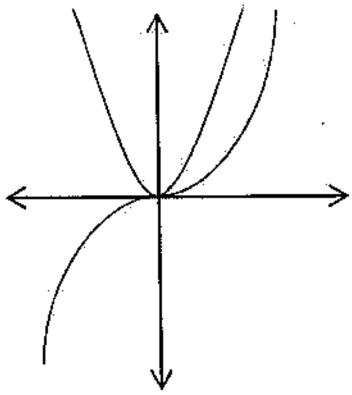
$$f'''_{(x)} = 6$$

دویم مثال: د $y = \frac{1}{3}x^3$ تابع ګراف اود هغی دلمړی مرتبی مشتق پیدا کړئ؟ او ګراف یي رسم کړئ؟

حل:

$$y' = x^2 \qquad y = \frac{1}{3}x^3$$

$$y' = 3 \cdot \frac{1}{3}x^2 = x^2$$



دویم مثال: که $y = \sin x + \cos x$ وي نود $\left(y^{(9)}\right)^2 + y^2$ قیمت پیدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$$y = \sin x + \cos x$$
$$\acute{y}_{(x)} = \cos x + (-\sin x) = \cos x - \sin x$$
$$y''_{(x)} = -\sin x - \cos x$$
$$y'''_{(x)} = -\cos x - (-\sin x) = -\cos x + \sin x = \sin x - \cos x$$
$$\vdots$$
$$y'(9)_{(x)} = \cos x - \sin x$$
$$\left(y^{(9)}\right)^2_{(x)} + y^2 = (\cos x - \sin x)^2 + (\sin x + \cos x)^2$$
$$= cos^2x - 2\sin x\cos x + sin^2x + sin^2x + 2\sin x\cos x + cos^2x$$
$$= 2sin^2x + 2cos^2x = 2(sin^2x + cos^2x) = 2 \cdot 1 = 2$$

د مشتق د استعمال ځایونه:

د مشتق د استعمال موارد په لاندې ډول دي:

1- د توابعو دتزاید او تناقص لپاره.

2- د اعظمي نقطو ،اصغري نقطو ،اعظمي حجم، د لنډې فاصلې ،اعظمي مساحت اوداسې نورو شیانو دپیدا کولو لپاره.

3- د لوړې درجې تابعګانو د ګراف د ترسیم لپاره.

4- د مبهمو اشکالو دلیمیټ د پیداکولو لپاره.

لنډه دا چه د مشتق استعمال په فزیک، کیمیا، هندسه اونورو علومو کې زیات کتور دی.

1- دتوابعو د تزاید او تناقص لپاره د مشتق استعمال:

که د $f(x)$ یوه تابع د $[a, b]$ په تړلي انتروال کې متمادي وي او په (a, b) انتروال کې مشتق ولري نو که $\acute{f}(x) > 0$ وي نو تابع په دغه انتروال متزایده ده.او که $\acute{f}(x) < 0$ وي تابع متناقصه ده.

اول مثال: وښیئ چه د $f(x) = x^3 + 3x + 1$ تابع ګراف متزاید دي؟

حل: څرنګه چه تابع تامه ده نو $domf(x) = IR$ دي مشتق یې په لاندې ډول دي.

$$f(x) = x^3 + 3x + 1$$
$$\acute{f}(x) = 3x^2 + 3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که په مشتق کې د (x) په عوض هر ډول عدد وضع کړو مثبت کیږي نو $\acute{f}(x) > 0$ دی په نتیجه کې تابع متزایده ده.

دویم مثال: د $f(x) = x^3 - 3x + 5$ تابع په کوم انټروال کې متناقصه ده؟

حل: د $f(x)$ تابع متمادي ده اومشتق لري د تناقص د انټروال د معلوموملو لپاره $\acute{f}(x) < 0$ پیدا کوو.

$$\acute{f}(x) = 3x^2 - 3 < 0$$

$$\acute{f}(x) = 0 \quad \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \quad \Rightarrow 3x^2 = 3 \quad \Rightarrow \frac{3x^2}{3} = \frac{3}{3} \Rightarrow x^2 = 1 \quad \Rightarrow x = \pm 1$$

د تابع مشتق د $-1 < x < 1$ په انټروال کې منفي دی نو تابع په همدی انټروال $(-1,1)$کی متناقصه ده.

دریم مثال: د $f(x) = 5x - 4$ تابع تحولات وڅېړئ؟

حل:

$$D_{f(x)} = IR$$
$$f(x) = 5x - 4$$
$$\acute{f}(x) = 5 > 0$$

تابع متزایده ده.

څلورم مثال: د $y = x^2$ تابع په کوم انټروال کې متزایده او په کوم انټروال کې متناقصه ده.

حل: که $\acute{y} < 0$وي تابع متناقصه ده او که $\acute{y} > 0$ وي تابع متزایده ده.

$y = x^2$

$\acute{y} = 2x$

$\acute{y} < 0 \Rightarrow 2x < 0 \Rightarrow x < 0$ د تناقص شرط

$\acute{y} > 0 \Rightarrow 2x > 0 \Rightarrow x > 0$ د تزاید شرط

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	$+2$	$+\infty$
$\acute{y}$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y	$+\infty$ ↘	4 ↘	1 ↘	0	1 ↗	4 ↗	$+\infty$ ↗

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوې تابع بحراني ټکي

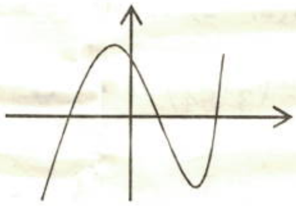
د يوې تابع اعظمي او اصغري ټکو ته بحراني ټکي وايي.

اعظمي نقطه *Maximum point* :

د تابع د ګراف تر ټولو جګې نقطې ته اعظمي نقطه وايي.

اصغري نقطه *Minimum point* :

د تابع دګراف تر ټولو ټيټې نقطې ته اصغري نقطه وايي.



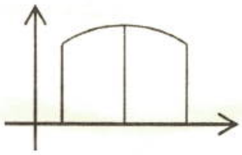
ثابته تابع :

هغه تابع ده چې مشتق يي صفر وي.

$y' > 0 \quad y' < 0$

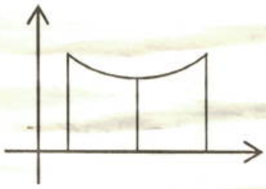
متزايده تابع :

که د (a, b) په فاصله کې $\acute{y} > 0$ وي، تابع متزايده ده.



متناقصه تابع :- که د (a, b) په فاصله کې $\acute{y} < 0$ وي تابع متناقصه ده.

$\acute{y} < 0 \ \acute{y} > 0$



(c) ketabton.com: The Digital Library

د انعطاف نقطه:

هغه نقطه ده چه په دی نقطه کی د تابع ګراف خپل جهت ته تغیرورکوي.

لمړی مثال: د $f(x) = x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 2x$ یوه تابع راکړ شوی ده وواياست چه ددی تابع ګراف
څو بحراني ټکي لري.

حل: د تابع لمړی مشتق پیدا کوو اود (x) قیمتونه پیدا کوو.

$$\acute{f}(x) = 3x^2 - 7x + 2$$
$$\acute{f}(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 7x + 2 = (x-2)(3x-1)$$
$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \quad \therefore \quad A(2,-2)$$ اصغري نقطه ده
$$3x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \quad \therefore \quad B\left(\frac{1}{3}, \frac{17}{54}\right)$$ اعظمي نقطه ده

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		2		$+\infty$
$\acute{f}(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$		$\frac{17}{54}$		-2		-2		$+\infty$

دویم مثال: د $f(x) = \frac{x+1}{x^2-2x}$ تابع بحراني نقطه يا نسبتي نقطه پيدا کړئ؟

حل: د تابع مشتق پیدا اوعلامی یي مطالعه کوو.

$$y = \frac{u}{v}$$
$$\acute{y} = \frac{\acute{u}v - \acute{v}u}{v^2}$$
$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-2x}$$
$$\acute{f}(x) = \frac{1\cdot(x^2-2x) - (2x-2)(x+1)}{(x^2-2x)^2} = \frac{(x^2-2x) - 2(x^2-1)}{(x^2-2x)^2}$$
$$\acute{f}(x) = \frac{x^2 - 2x - 2x^2 + 2}{(x^2-2x)^2} = \frac{-x^2 - 2x + 2}{(x^2-2x)^2}$$

په اعظمي او اصغري نقطو کی د تابع مشتق صفر وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$-x^2-2x+2=0 \Leftarrow f(x)=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4\cdot(-1)\cdot 2=4+8=12$

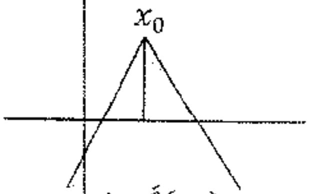
$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2+\sqrt{12}}{2(-1)}=\frac{2+\sqrt{3.4}}{-2}=\frac{2+2\sqrt{3}}{-2}=\frac{2\left(1+\sqrt{3}\right)}{-2}=-2.73$$

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2-\sqrt{12}}{2(-1)}=\frac{2-\sqrt{3.4}}{-2}=\frac{2-2\sqrt{3}}{-2}=\frac{2(1-\sqrt{3})}{-2}=0.73$$

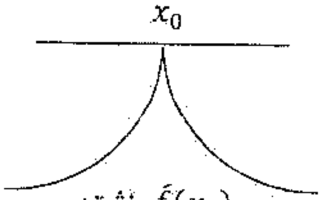
x		-3		-2.73		-1		0.73			
$f'(x)$	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$
$f(x)$	↘	$\frac{2}{15}$	↘	min	↗	0	↗	max	↘	-2	↘

د کسر اشاره دجذرو منځ کې مثبت او په خارج منفي ده.

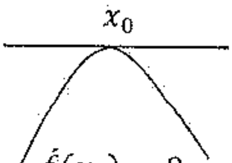
مطلق اعظمي $Maximum$ د $f(x)$ په تابع کې که د هر (x) لپاره $f(x)\le f(x_0)$ وي نو $\left(x_0,f(x_0)\right)$ ټکي ته مطلق اعظمي وايي.



$f'(x_0)$ نشته

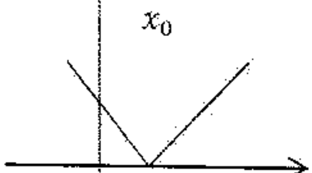


$f'(x_0)$ نشته



$f'(x_0)=0$

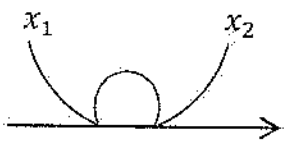
مطلق اصغري $Minimum$ که د $f(x)$ د تابع دتعریف د ناحیې د هر (x) لپاره $f(x)\ge f(x_0)$ وي نو $\left(x_0,f(x_0)\right)$ نقطې ته مطلق اصغري وايي.



$f(x_0)$ نشته

$f'(x)=0$

مطلق اصغري



f(0) او f(x$_1$) نشته

(c) ketabton.com: The Digital Library

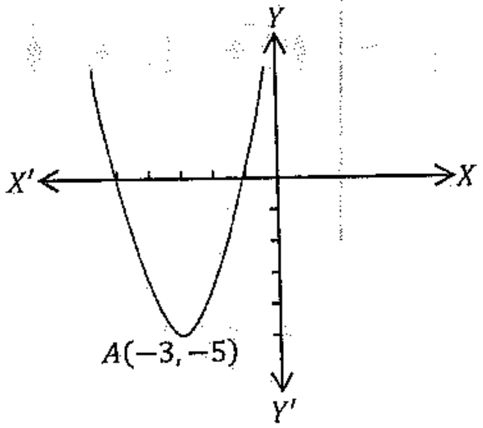
لمړی مثال: د $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{2}$ تابع مطلق اصغري پیدا کړئ؟

حل:

$\acute{f}(x) = x + 3 \quad \because \acute{f}(x) = 0 \quad \therefore \quad x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$

$f(-3) = \frac{1}{2}(-3)^2 + 3(-3) - \frac{1}{2} = \frac{9}{2} - 9 - \frac{1}{2} = \frac{9 - 18 - 1}{2} = -5$

$A(-3, -5)$



دویم مثال: د $f(x) = x^3 - 3x + 2$ د تابع اعظمي او اصغري نقطی پیدا کړئ؟

حل:

$$\acute{f}(x) = 3x^2 - 3$$

په اعظمي او اصغري نقطو کی د تابع مشتق صفر وي.

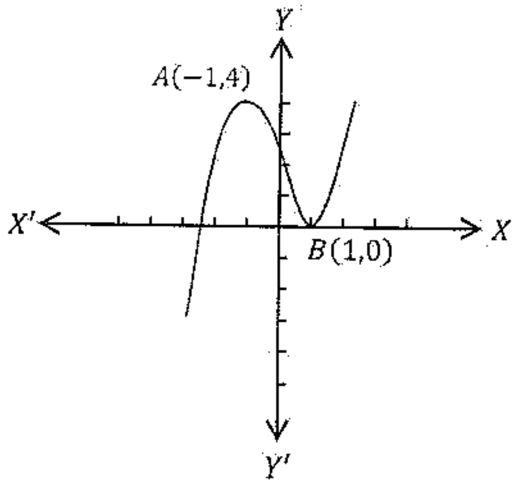
$\acute{f}(x) = 0$

$3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow \frac{3x^2}{3} = \frac{3}{3} \Rightarrow x^2 = 1$

اصغري ده $x_1 = 1 \quad \Rightarrow A(1,0)$

اعظمي ده $x_2 = -1 \quad \Rightarrow B(-1,4)$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د تابع د ګراف د ترسيم طريقه:

1- د تابع اتصال مطالعه کوو.

2- د محورونو سره د ګراف د تقاطع نقطې پيدا کوو.

3- د تزايد او تناقص د انټروال د معلومولو لپاره د مشتق اشارې مطالعه کوو.

4- د ګراف مجانبونه معلوموو.

5- د دقيق ترسيم لپاره (x) ته څو قيمتونه ورکوو او د (y) قيمتونه پيدا کوو.

6- په جدول کې د تابع د ګراف وضعيت مطالعه کوو.

7- پيدا شوې نقطې د وضعيه کميتونو په مستوي کې پيدا کوو او وصلوو يې.

دريم مثال: د $y = 2 + x - x^2$ د تابع ګراف رسم کړئ؟

1- د $(X\bar{X})$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پيدا کوو نو $y = 0$ فرضوو.

$$2 + x - x^2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4(-1)(2) = 1 + 8 = 9 \quad \Rightarrow \Delta = 9$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2(-1)} = \frac{-1 \pm 3}{-2}$$

$$x_1 = \frac{-1 + 3}{-2} = \frac{2}{-2} = -1 \ \& \ x_2 = \frac{-1 - 3}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2$$

د $(X\bar{X})$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطې $A(-1,0)$ او $B(2,0)$ دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- د $Y\acute{Y}$ د محور سره د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو. نو $x = 0$ فرضوو.

$$y = 2 + x - x^2 = 2 + 0 + 0^2 = 2$$

د $Y\acute{Y}$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه $C(0,2)$ ده.

3- د تا بع د ګراف اعظمي یا اصغري نقطې د پیدا کولو لپاره د تابع مشتق نیسو.

$$\acute{y} = 1 - 2x$$
$$\acute{y} = 0 \quad \therefore \quad 1 - 2x = 0 \;\Rightarrow -2x = -1 \;\Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

د (x) دغه قیمت په تابع کې وضع کوو د (y) قیمت لاس ته راورو.

$$y = 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{8 + 2 - 1}{4} = 2\frac{1}{4}$$

نو د $D\left(\frac{1}{2}, 2\frac{1}{4}\right)$ نقطه یا اعظمي ده یا اصغري ده.د تابع دویم مشتق پیدا کووکه $y" > 0$ ؤاصغري نقطه ده اوکه $y" < 0$ ؤ نو اعظمي نقطه ده.

$y" = -2$ څرنګه چه همېشه منفي دې نو د $D\left(\frac{1}{2}, 2\frac{1}{4}\right)$ نقطه اعظمي نقطه ده.

$$D\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right) \quad D\left(\frac{1}{2}\,,\frac{9}{4}\quad\right)$$

د انعطاف د نقطې پیدا کول:

د تابع دویم مشتق نیسو او قیمت یې پیدا کوو بیا یې په معادله کې وضع کوو د انعطاف د نقطې وضعیه کمیات لاس ته راځي.

مثال: د $y = x^3 + 9x^2 - 6x + 1$ تابع د انعطاف نقطه یې پیدا کړئ؟

حل:

$$\acute{y} = 3x^2 + 18x - 6$$
$$y" = 6x + 18$$
$$y" = 0 \Rightarrow 6x + 18 = 0 \Rightarrow 6x = -18 \Rightarrow \frac{6x}{6} = \frac{-18}{6} \Rightarrow x = -3$$
$$f(-3) = (-3)^3 + 9(-3)^2 - 6(-3) + 1 = -27 + 81 + 18 + 1 = 73$$

$A(-3,73)$ انعطاف نقطه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دویمه درجه تابع ګراف:

د دویمه درجه تابع عمومي شکل $ax^2 + bx + c = 0$ دی.

ډومېن يې د حقيقي اعدادو سيټ دی. $D_f = (-\infty, +\infty)$ چه په دغه ساحه کې تابع متمادي ده. د تناظر محور يې د اول مشتق پواسطه پيدا کيږي.

$$\acute{f}(x) = 2ax + b$$
$$\acute{f}(x) = 0$$
$$2ax + b = 0 \Rightarrow 2ax = -b$$
$$x = -\frac{b}{2a}$$

د تناظر محوردی.

د راس د نقطې د پيدا کولو لپاره د تناظر په محور کې د x قيمت په تابع کې وضع کوو د راس د نقطېوضعيه کميتونه لاس ته راځي.

$$f(x) = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = a\left(\frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c$$

$$f(x) = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

د راس نقطه يې $V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ ده.

که $a > 0$ وي د تابع ګراف مقعر دی يعنی ګراف اصغري نقطه لري. که $a < 0$ وي د تابع ګراف محدب دي يعنی ګراف اعظمي نقطه لري

لمړی مثال: د $f(x) = x^2 - 4x + 3$ د تابع تحولات مطالعه کړئ او ګراف يې رسم کړئ؟

حل:

1- $D_f = (-\infty, +\infty)$

2- د $X\acute{X}$ د محور سره د تقاطع نقطه پيدا کوو:

$$y = 0$$
$$x^2 - 4x + 3 = 0$$
$$(x-1)(x-3) = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

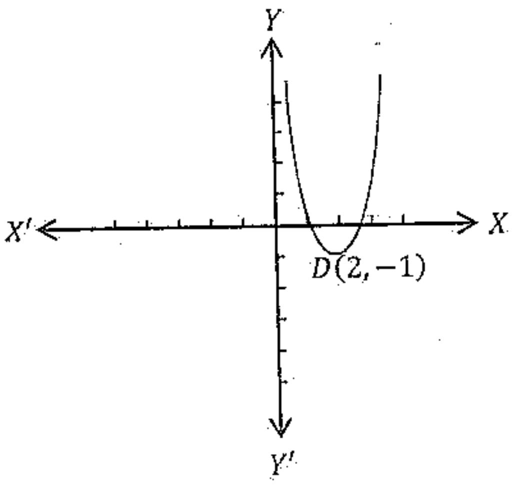
$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$
$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$
$$A(1,0) \quad , \quad B(3,0)$$

3- د $(Y\acute{Y})$ د محورسره دتابع د تقاطع نقطه پیدا کوو.

$x = 0$
$y = 0 - 4 \cdot 0 + 3$
$y = 3$
$C(0,3)$

4- د بحراني نقطی دپیدا کولو لپاره د تابع مشتق نیسو او د (x) قیمت پیدا کوودا قیمت په تابع کې وضع کوو د (y) قیمت لاس ته راځي د (x) او (y) یوه جوړه قیمتونه بحراني نقطه تعینوي بیا یې دویم مشتق پیدا کوو که $y'' > 0$ ؤ بحراني نقطه اصغري ده او که $y'' < 0$ ؤ نوبحراني نقطه اعظمي ده.

$f'(x) = 2x - 4 \Rightarrow x = 2$
$f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = 4 - 8 + 3 = -1 \Rightarrow D(2,-1)$



دویم مثال: $f(x) = -x^2 + 2x + 2$ د تابع تحولات مطالعه او ګراف یې رسم کړئ؟

حل:

1- $D_f = (-\infty, +\infty)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- د XX́ سره تقاطع:

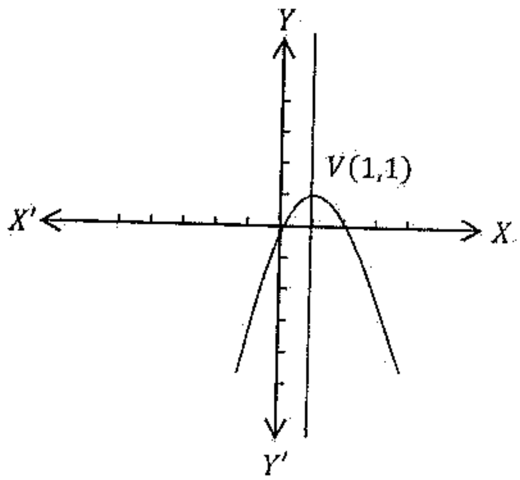
$f(x) = 0$
$-x^2 + 2x = 0$
$x(-x + 2) = 0$
$x_1 = 0$
$-x + 2 = 0$
$-x = -2 \Rightarrow x = 2$
$A(0,0)$ & $B(2,0)$

3- د YY′ سره تقاطع:

$x = 0$
$f(x) = 0 + 2 \cdot 0 = 0$
$C(0,0)$

4- بحراني نقطه يې پيدا کوو. نومشتق يې نيسو.

$f'(x) = -2x + 2$
$f'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 2 = 0 \Rightarrow -2x = -2 \Rightarrow x = 1$
$f(1) = -(1)^2 + 2 \cdot 1 = -1 + 2 = 1$
$V(1,1)$



(c) ketabton.com: The Digital Library

هوموگرا فیک تابع

هغه تابع ده چه د دوه بېنومو د نسبت څخه جوړه شوی وي عمومي شکل يې دادی

$$f(x) = \frac{ax+b}{\acute{a}x+\acute{b}} = \frac{ax+b}{cx+d}$$

مجانب:- $Asymptote$: که د يوه مستقيم او يوه منحني تر منځ فاصله په لايتناهي کی صفر شي دا مستقيم د دی منحني مجانب دي.

مجانب د منحني لپاره لاربسود دي.

مجانب په دری قسمه دی.

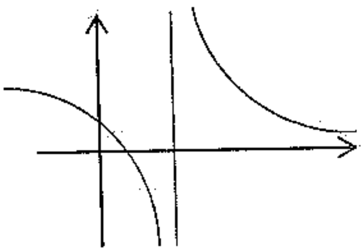
1- عمودي مجانب $(Vertical\ Asymptote)$

2- افقي مجانب $(Horizontal\ asymptote)$

3- مايل مجانب(Slant Asymptote)

1- عمودي مجانب:

که په يوه ثابت عدد کی د تابع ليميټ (∞) شي هغه خط چه د دغه ثابت عدد په فاصله باندی د $Y\acute{Y}$ د محور سره موازي رسميږي د تابع دګراف عمودي مجانب دی. يعني که $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ وي نو $x = a$ عمودي مجانب دی.



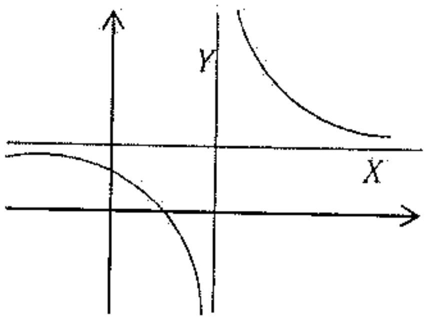
(c) ketabton.com: The Digital Library

2- افقي مجانب:

که په لایتناهي کی دیوی تابع لیمیټ یو ثابت عدد ؤ نو هغه خط چه ددی ثابت عدد په ترتیب د YY' دمحور سره موازي رسمیږي د راکړشوی تابع افقي مجانب دی. یعنی که:

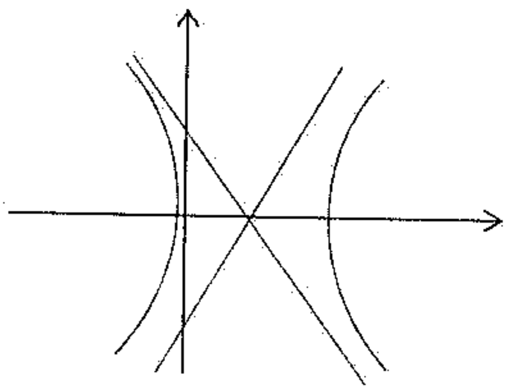
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b$$

نو $y = b$ د تابع د ګراف افقي مجانب دی.



3- مایل مجانب $Slant\ Asymptote$:

په کسري تابعګانو کی که دصورت درجه د مخرج د درجي څخه د واحد په اندازه ډیره وه نو دغه ډول تابعګانی مایل مجانب لري دمایل مجانب د ترسیم لپاره صورت په مخرج ویشو خارج قسمت د مایل مجانب معادله ده.



لمړی مثال: د $f(x) = \frac{x+1}{2x-4}$ د تابع عمودي مجانب پیدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

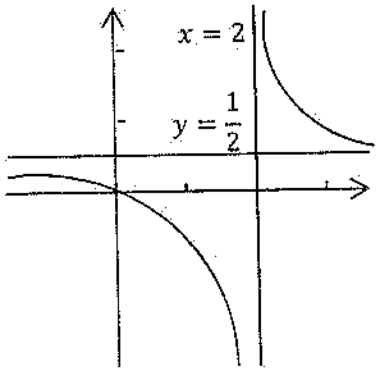
$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\frac{x+1}{2x-4} = \frac{2+1}{2\cdot 2-4} = \frac{3}{0} = \infty$$

$x = 2$ عمودي مجانب دی.

مایل مجانب یې پیدا کوؤ.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{2x-4} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}{\frac{2x}{x}-\frac{4}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{2-\frac{4}{x}} = \frac{1+\frac{1}{\infty}}{2-\frac{4}{\infty}} = \frac{1+0}{2-0}\frac{1}{2}$$

$y = \frac{1}{2}$ افقي مجانب دی.



دویم مثال: د $y = \frac{x^2+2x-1}{x}$ تابع د منحني مجانبونه وټاکئ؟

حل: مایل مجانب:

$$y = \frac{x^2+2x-1}{x} = x+2-\frac{1}{2} \Rightarrow y = x+2$$

عمودي مجانب:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2x-1}{x} = \infty$$

نو $x = 0$ عمودي مجانب دی.

افقي مجانب نلري ځکه د هری تابع ګراف چه مایل مجانب و لري افقي مجانب نلري.

دریم مثال: د $f(x) = \frac{(x-3)(x+2)}{(x+1)(x-2)}$ تابع مجانبونه پیدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

عمودي مجانب

$$\lim_{x\to -1}\frac{(x-3)(x+2)}{(x+1)(x-2)}=\infty$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-3)(x+2)}{(x+1)(x-2)}=\infty$$

بالاخره $x=-1$ او $x=2$ عمودي مجانبونه دي.

مایل مجانب نلري.

د مجانب د ټاکلو عمومي لار:

1- که د $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ په هوموګرافیک تابع کی (m) دصورت درجه او (n) دمخرج درجه وي نو

الف: که $m<n$ وي نو د (x) محورافقي مجانب دی.

ب: که $m=n$ وي نو $y=b$ افقي مجانب دی (b) د صورت اومخرج دمساوي درجوولا حدودضریبونو نسبت دي.

ج: که $m>n$ وي افقي مجانب نلري د مایل مجانب احتمال شته.

د: که د صورت درجه د مخرج ددرجی څخه د واحد په اندازه ډیره وي مایل مجانب لري او افقي مجانب نلري.

مثال: $f(x)=\frac{2x-5}{x}$ د تابع د تزاید او تناقص په باب خپل نظر ولیکئ؟

حل:

$$\acute{f}(x)=\frac{2\cdot x-1(2x-5)}{x^2}=\frac{2x-2x+5}{x^2}=\frac{5}{x^2}$$

$$\acute{f}(x)=\frac{5}{x^2}>0$$

تابع متزایده ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

انعطاف نقطه يې داسې پيدا کيږي.

$$\acute{f}(x) = 0$$
$$3ax^2 + 2bx + c = 0$$
$$f''(x) = 6ax + 2b$$
$$f''(x) = 0$$
$$6ax + 2b = 0 \Rightarrow 6ax = -2b \Rightarrow x = \frac{-2b}{6a} = -\frac{b}{3a}$$
$$y = a\left(-\frac{b}{3a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{3a}\right) + c = a\left(\frac{b^2}{9a^2}\right) - \frac{b^2}{3a} + c$$
$$y = \frac{ab^2}{9a^2} - \frac{b^2}{3a} + c = \frac{b^2}{9a} - \frac{b^2}{3a} + c = \frac{b^2 - 3b^2 + 9ac}{9a} = \frac{9ac - 2b^2}{9a}$$
$$M\left(-\frac{b}{3a}, \frac{9ac - 2b^2}{9a}\right)$$

1- مثال: د $f(x) = (x-1)(x+2)^2$ تابع تحولات وڅیړئ او ګراف يې رسم کړئ؟

حل:

$$f(x) = (x-1)(x+2)^2 = (x-1)(x^2+4x+4)$$
$$= x^3 + 4x^2 + 4x - x^2 - 4x - 4$$
$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$$
$$\acute{f}(x) = 3x^2 + 6x$$
$$\acute{f}(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 6x = 0 \Rightarrow 3x(x+2) = 0 \Rightarrow 3x = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$
$$x + 2 = 0 \Rightarrow x_2 = -2$$
$$f(0) = 0^3 + 3 \cdot 0^2 - 4 = -4 \Rightarrow y_1 = -4$$

$A(0,-4)$ اصغري نقطه ده.

$$f(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 - 4 = -8 + 12 - 4 = 0$$
$$y_2 = 0$$

$B(-2,0)$ اعظمي نقطه ده.

انعطاف نقطه پيدا کوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f''(x) = 6x + 6$

$f''(x) = 0$

$6x + 6 = 0$

$x = -1$

$f(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 - 4 = -1 + 3 - 4 = -2$

$C(-1,-2)$ انعطاف نقطه ده.

د $X\acute{X}$ سره تقاطع: $y = 0$ فرضوو.

$y = 0$

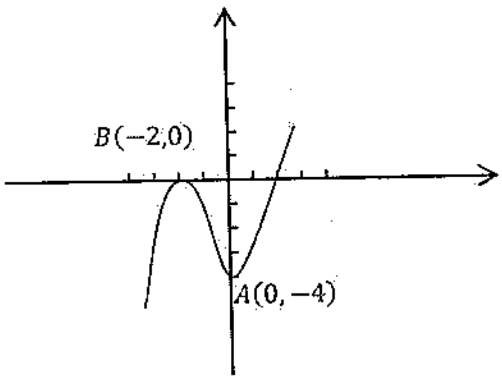
$(x-1)(x+2)^2 = 0$

$$\left.\begin{matrix} x - 1 = 0 \\ x = 1 \\ C(1,0) \end{matrix}\right\} \qquad \left.\begin{matrix} (x+2)^2 = 0 \\ x + 2 = 0 \\ x = -2 \\ D(-2,0) \end{matrix}\right\}$$

د $Y\acute{Y}$ سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو $x = 0$ فرضوو.

$y = 0^3 + 3 \cdot x^2 - 4 = -4$

$E(0,-4)$



دویم مثال: د $f(x) = -x^3 + 3x^2$ تابع تحولات وڅېړئ او ګراف یې رسم کړئ؟

حل:

$f(x) = -x^3 + 3x^2$

$f'(x) = -3x^2 + 6x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\acute{f}(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad -3x^2 + 6x = 0 \ \Rightarrow -3x(x-2)$

$-3x = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \ \Rightarrow x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2$

$A(2,4)$ اعظمي نقطه ده او $O(0,0)$ اصغري نقطه ده.

د $X\acute{X}$ سره تقاطع پیدا کوو $y = 0$ فرضوو.

$f(x) = 0$

$-x^3 + 3x^2 = 0 \ \Rightarrow -x^2(x-3) = 0 \quad \Rightarrow x_1 = 0 \quad \Rightarrow x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

$O(0,0) \ \Rightarrow B(3,0)$

د $(Y\acute{Y})$ د محور سره دتابع د ګراف د تقاطع نقطه $(x = 0)$ فرضوو.

$f(x) = -x^3 + 3x^2 = -0^3 + 3 \cdot 0^2 = 0 \Rightarrow (0,0)$

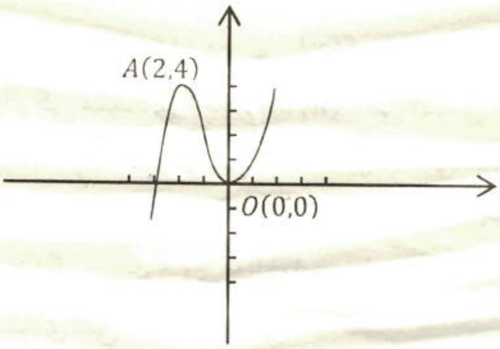
انعطاف نقطه پیدا کوو دویم جذر يي پيدا کوو.

$f''(x) = -6x + 6$

$x = 1$

$f(1) = 2$

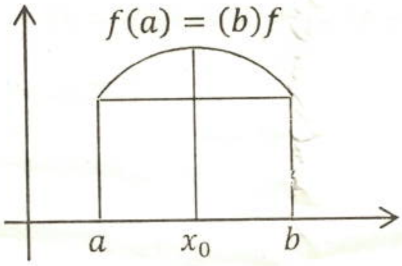
$C(1,2)$



د رول قضیه: *Theorem of Rolle*:

که چېرې د $f(x)$ تابع د $a \le x \le b$ انټروال کې متمادي وي او د $a < x < b$ په انټروال کې د مشتق وړ وي او $f(a) = f(b)$ وي نود $a < x < b$ په انټروال کې $(x_0, f(x_0))$ یو ټکی شته چه $\acute{f}(x) = 0$ وي

(c) ketabton.com: The Digital Library



ثبوت: هره تابع چه متمادي وي او د مشتق وړ وي.نودغه تابع بحراني نقطه لري.

1- که تابع ثابته وي نو $\acute{f}(x) = 0$ دی.

2- که $f(x)$ تابع ثابته نه وي او $x_2, x_1 \in (a,b)$ او $f(x_1) > 0$ وي نو تابع په $x_0 \in [a,b]$ نقطه کی $Maximum$ لري چه $f(x_0) \geq f(x_1) \geq 0$ وي او $f(x_2) < 0$ وي نو تابع يوه اصغري نقطه لري په اعظمي او اصغري نقطو کی $\acute{f}(x_0) = 0$ وي.

لمړی مثال: د $f(x) = \cos x$ تابع راکړشوی ده د $[a,b] = [\pi, 5\pi]$ په انټروال کی د $Rolle$ قضيه پری تطبيق کړئ؟

حل: پوهيږو چه $f(\pi) = f(5\pi) = -1$ دی نو $f(x)$ د هر (x) لپاره د مشتق وړ ده نو دا تابع د $[\pi, 5\pi]$ په انټروال کی متمادي اوپه $(\pi, 5\pi)$ کی مشتق منونکی ده نود $Rolle$ د قضيي سره سم د $(\pi, 5\pi)$ په انټروال کی اقلاً د (x_0) يوه نقطه بايد موجود وي چه $(\cos x)' = -\sin x$ شي څرنګه چه $-\sin x = 0$ دی نو د $f(x) = \cos x$ د معادلی اقلاً يو حل بايد په $(\pi, 5\pi)$ کی موجود وي حال دا چه دا معادله په $(\pi, 5\pi)$ انټروال کی دری ځله دا قيمتونه اخيستلای شي.

دويم مثال: د $[a,b] = [-1,1]$ په انټروال کی د $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ په تابع باندی د $Rolle$ قضيه تطبيق کړئ؟

حل: دانټروال د پيل او انجام په نقطو کی تابع مشتق پذيره نده مګرد رول قضيه پری دتطبيق وړ ده ځکه چه $f(-1) = f(1) = 0$ او $f(0)$ تابع په $[-1,1]$ متمادي ده او د $[-1,1]$ په انټروال کی د (x_0) يو عدد شته چه $\acute{f}(x_0) = 0$ شي اوهغه $x_0 = 0$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\acute{y}(x) = \frac{\acute{u}(x)}{2\sqrt{u}}$ څخه استفاده کوو.

$$\acute{f}(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \acute{f}(0) = \frac{0}{\sqrt{1-0^2}} = 0$$

د متوسط قیمت قضیه:

که چېرې د $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انټروال کې متمادي وي او د (a,b) په انټروال کې دمشتق وړ وي نو د (a,b) په انټروال کې د (c) یو عدد شته چه لاندې رابطه تحقیق کړي.

$f(b) - f(a) = \acute{f}(c)(b-a)$ یعني $\acute{f}(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ دی.

ثبوت :- $f(x) - \acute{f}(x) \cdot x$ په $g(x)$ ښیو:

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot x$$

$$g(a) = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot a = \frac{f(a)b - f(a)a - f(b)a + f(a)a}{b-a}$$

$$g(a) = \frac{f(a)b - f(b)a}{b-a} \cdots\cdots\cdots I$$

$$g(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot b = \frac{f(b)b - f(b)a - f(b)b + f(a)b}{b-a}$$

$$g(b) = \frac{f(a)b - f(b)a}{b-a} \cdots\cdots\cdots II$$

د (I) او (II) رابطې د مقایسې څخه څرګندیږي چه $g(a) = g(b)$ دی نو د رول دقضیې سره سم د $[a,b]$ په انټروال کې د (c) یوداسې عدد شته چه $\acute{g}(c) = 0$ دی نو لیکو چه

$$\acute{g}(x) = \acute{f}(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow \acute{g}(c) = \acute{f}(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\acute{g}(c) = 0$$

$$\acute{f}(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \Rightarrow \acute{f}(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$f(b) - f(a) = \acute{f}(c)(b-a)$$

مثال: د $f(x) = 2x^3 - 8x + 1$ په تابع کې دمتوسط قیمت قضیه د $[a,b] = [1,3]$ په انټروال کې وڅېړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: د $f(x)$ تابع د $[1,3]$ په انټروال کی متمادي ده او د $(1,3)$ په انټروال کی د مشتق وړ ده نو د متوسط قیمت د قضیي سره سم د $(1,3)$ په انټروال کی یو (x_0) شته چه

$$f(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{36}{2} = 18$$

د (c) دپیدا کولو لپاره د تابع مشتق نیسو.

$$f'(x_0) = 6x^2 - 8 = 18 \Rightarrow 6x^2 = 18 + 8 = 26 \Rightarrow x^2 = \frac{26}{6}$$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{26}{6}} = \pm\sqrt{\frac{13}{3}}$$

$x = +\sqrt{\frac{13}{3}}$ عدد د $(1،3)$ په انټروال کی شامل دی نو $x_0 = \sqrt{\frac{13}{3}}$ ده مګر $x = -\sqrt{\frac{13}{3}}$ عدد د $(1،3)$ په انټروال کی شامل نه دی نو د سوال حل نه بلل کیږي.

د لوهپیتال قاعده:

که د کسري تابعګانو لیمیټ د $\left(\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}\right)$ مبهم شکل غوره کړي. نو د لوپیتال په طریقه کولای شو چه لیمیټ یي پیدا کړو.

دیوی تابع لیمیټ په یوه نقطه کی د تابع د مشتق دلیمیټ سره مساوي دی په همغه نقطه کی .که تر اول مشتق وروسته بیا هم ابهام موجود ؤ دویم مشتق یي نیسو په همدی ترتیب عملیه تر هغه وخته اجراء کووتر څو چه ابهام رفع شي.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \cdots\cdots$$

مثال:

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2 + x - 10}{x^2 - 4} = \frac{2\cdot 2^2 + 2 - 10}{2^2 - 4} = \frac{8 + 2 - 10}{4 - 4} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2 + x - 10}{x^2 - 4} = \lim_{x\to 2}\frac{2x^2 - 4x + 5x - 10}{x^2 - 2^2} = \lim_{x\to 2}\frac{2x(x-2) + 5(x-2)}{(x-2)(x+2)}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(2x+5)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2}\frac{2x+5}{x+2} = \frac{2\cdot 2 + 5}{2 + 2} = \frac{9}{4}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لمړی مثال:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin 2x}{x-\sin 2x}=\frac{0+\sin 2\cdot 0}{0-\sin 2\cdot 0}=\frac{0}{0}$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+\sin 2x)'}{(x+\sin 2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1+2\cos 2x}{1-2\cos 2x}=\frac{1+2}{1-2}=\frac{3}{-1}=-3$$

دویم مثال:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^4-81}{x-3}=\frac{3^4-81}{3-3}=\frac{81-81}{3-3}=\frac{0}{0}$$
$$\lim_{x\to 3}\frac{x^4-81}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x^4-81)'}{(x-3)'}=\lim_{x\to 3}\frac{4x^3}{1}=4\cdot 3^3=4\cdot 27=108$$

دریم مثال:

$$\lim_{x\to \infty}\frac{3x^2-4x+6}{7x^2-2x+1}=\frac{\infty}{\infty}$$
$$\lim_{x\to \infty}\frac{3x^2-4x+6}{7x^2-2x+1}=\lim_{x\to \infty}\frac{(3x^2-4x+6)'}{(7x^2-2x+1)'}=\lim_{x\to \infty}\frac{(6x-4)'}{(14x-2)'}=\frac{6}{14}=\frac{3}{7}$$

دبحراني ټکو تطبیق:

1- داسې دوه عددونه پیدا کړئ چه د جمع حاصل یې (20) او د ضرب حاصل یې اعظمي وي؟

حل:

$x =$ اول عدد

$20-x =$ دویم عدد

$f(x)=x(20-x)=20x-x^2 =$ د ضرب حاصل

$$f'(x)=20-2x$$
$$f'(x)=0$$
$$20-2x=0\Rightarrow -2x=-20\Rightarrow x=10$$
$$f(10)=20\cdot 10-10^2=200-100=100$$
$$f(0)=20\cdot 0-0^2=0$$
$$f(20)=20\cdot 20-20^2=400-400=0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اعظمي نقطه $[10،100]$ ده او مطلوب عددونه $x_1 = 10$ او $x_2 = 10$ دي چه د ضرب حاصل يي (100) دي.

2- د يوه متحرک معادله $x = (t-2)(t-3)$ ده متوسط سرعت يي د $t_1 = 3$ او $t_2 = 4$ د وخت په واټنو کې پيدا کړئ؟

حل: د منځني سرعت د فارمول څخه استفاده کوو.

$$\text{منځني سرعت} = \frac{x_{(t_2)} - x_{(t_1)}}{t_2 - t_1} = \frac{x_{(4)} - x_{(3)}}{4-3} = \frac{2-0}{4-3} = 2$$

3- د کرې دحجم او سطحې تر منځ نسبت پيدا کړئ؟

حل:

$$\text{د کرې حجم} = v_{(r)} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\text{د کرې مساحت} = \left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)' = 4\pi r^2$$

$$\frac{v_{sphere}}{A_{Sphere}} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{4\pi r^2} = \frac{1}{3}r$$

4- د سانتي ګيريد او فارنهايټ تر منځ $C = \frac{5}{9}(F-32)$ رابطه موجود ده د سانتي ګيريد او فارنهايټ تر منځ منځني نسبت پيدا کړئ؟

حل: د منځني سرعت د تعريف $V_m = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ سره سم ليکو چه:

$$\frac{\Delta C}{\Delta F} = \frac{C(F+\Delta F) - CF}{\Delta F} = \frac{\frac{5}{9}(F+\Delta F-32) - \frac{5}{9}(F-32)}{\Delta F} = \frac{5}{9}$$

5- د يوې مستطيلي ځمکې محيط (200) دی اعظمي مساحت يي پيدا کړئ؟

حل:

$\text{د مستطيل طول} = x$

$\text{د مستطيل عرض} = y$

$\text{د مستطيل مساحت} = S$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$محیط = 2x + 2y = 200$

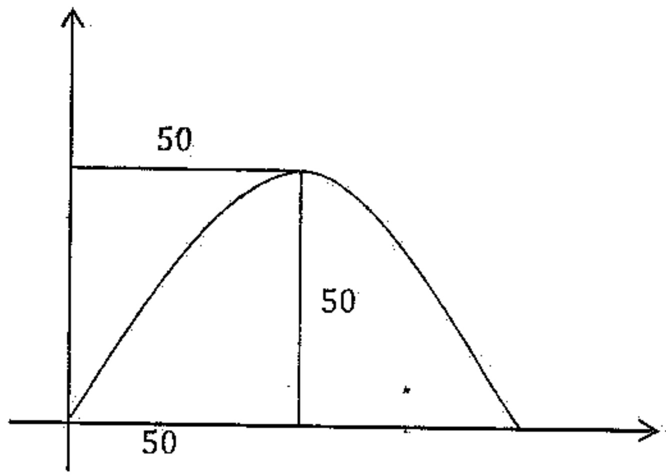
$محیط = x + y = 100 \Rightarrow y = 100 - x$

$S = x \cdot y \Rightarrow x(100 - x) = 100x - x^2 \quad ,D_f = IR$

د $[0.100]$ په انتروال کې دتابع اعظمي مساحت پیدا کوو.

$\acute{S} = 100 - 2x$

$\acute{S} = 0 \Rightarrow 100 - 2x \Rightarrow -2x = 100 \Rightarrow x = 50 \Rightarrow S_{(50)} = 2500$



6- د (A) ټکی د $y = \frac{2}{x}$ دمنحني دپاسه حرکت کوي ووایاست چه څه وخت به د (A) او مبداء تر منځ فاصله اصغري شي؟

حل:

$A\left(x, \frac{2}{x}\right)$

$\overline{OA} = \sqrt{x^2{}_{(A)} + y^2{}_{(A)}} = \sqrt{x^2 + \frac{4}{x^2}} \Rightarrow \overline{OA}^2 = x^2 + \frac{4}{x^2} = d^2$

$\acute{d}_{(x)} = (x^2)' + \left(\frac{4}{x^2}\right)' = 2x - \frac{8x}{x^4} = 2x - \frac{8}{x^3} = \frac{2x^4 - 8}{x^3}$

$\acute{d}_{(x)} = 0 \Rightarrow \frac{2x^4 - 8}{x^3} = 0 \Rightarrow 2x^4 - 8 = 0 \Rightarrow 2x^4 = 8$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \frac{2x^4}{2} = \frac{8}{2} \quad \Rightarrow x^4 = 4 \quad \Rightarrow \sqrt[4]{x^4} = \sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{2^2}$$

$$x_1 = \sqrt{2} \quad \& \quad x_2 = -\sqrt{2}$$

$$d_{\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2}\right)^2 + \frac{4}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = 2 + \frac{4}{2} = 4$$

$$d_{-\sqrt{2}} = 4$$

يو مربع القاعده مکعب مستطیل لروچه د درې واړه بعدونو مجموعه یې (24)ده اعظمي حجم یې پیدا کړئ؟

حل: دقاعدې اوږدوالی په (x)او ارتفاع په (y) ښیو.

$$x + x + y = 24 \ \Rightarrow y = 24 - 2x$$
$$y \geq 0 \quad \& \quad 0 \leq x \leq 12$$
$$V = x^2 \cdot y = x^2(24 - 2x) = 24x^2 - 2x^3$$
$$\acute{V}(x) = 48x - 6x^2 \quad \because \ \acute{V}(x) = 0 \quad \therefore \quad 48x - 6x^2 = 0$$
$$x(48 - 6x) = 0 \quad , \quad x_1 = 0 \ \& \ x_2 = 8$$
$$V(0) = 24 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0^3 = 0$$
$$V(8) = 24 \cdot 8^2 - 2 \cdot 8^3 = 1536 - 1024 = 512$$
$$V(12) = 24 \cdot 12^2 - 2 \cdot 12^3 = 3456 - 3456 = 0$$

د مکعب مستطیل اعظمي حجم $(512cm^3)$ او هره ضلعه یې $(8cm)$ ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

اولسم فصل

انتیګرال *Integral*

انتیګرال په لغت کی جامع ، مکمل او بشپړوونکي ته وائي.

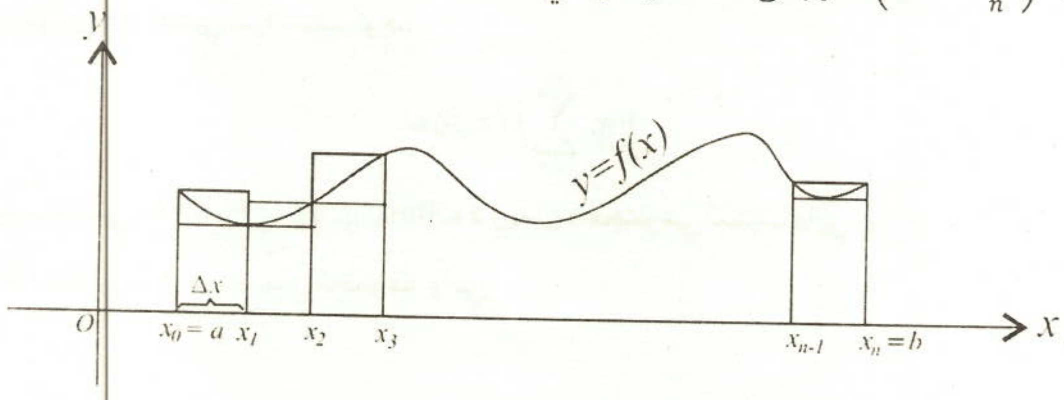
اوپه اصطلاح کی د مشتق دعمليي معکوسی عمليي ته انتیګرال وائي.یعنی د اولنی تابع د پیدا کولو طریقی ته انتیګرال وايي.

ارشیمیدس چه په (287 – 212)ق م کی یي ژوند کاوه د سطحو ، ناحیو او دجامداتو دحجمو دمحاسبی لپاره فارمولونه ترتیب کړل دنوموړي انتیګرال نیونه استثنائي او فوق العاده وه.ریمان (1866 – 1826) اولایبنز (1941 – 1875) معین انتیګرال کشف کړ.

دانتیګرال علامه لایبنز(∫) لیکلی ده. چه د ریمان دمجموعی (sum)د لمړي توري غزېدلی شکل دی.غیر معین انتیګرال لیووبل (1882 – 1809)کشف کړی دي. ګانوس (1855 – 1777) دانتیګرال اولین جدول ترتیب کړي دي.د کمپیوټر د منځ ته راتلو سره سم د انتیګرال په باب زیات پرمختګ وشو.

د ریمان مجموعه *Riemann's sum*:

فرضاً $y = f(x)$ تابع د $[a, b]$ په انټروال کی متمادي او تعریف شوی تابع ده.دهغه سطحی د مساحت دپیدا کولو لپاره چه د $X\acute{X}$دمحور او $y = f(x)$ تابع دګراف تر منځ واقع دي که منظم هندسي شکل یي لرلو نو هندسي فارمولو پواسطه یي مساحت پیدا کیږي.او هندسي شکل یي نه لرلو نو د $[a , b]$ ترلی انټروال په مستطیلو ویشو د هر مستطیل عرض د $\left(\Delta x = \frac{b-a}{n}\right)$ رابطی څخه لاس ته راځي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د هرمستطیل دهر انټروال اوږدوالی د $i = 1,2,3,4, \cdots, n$ لپاره په لاندی ډول دی.

$$x_0 = a\,, \quad x_1 = a + \Delta x \quad , \quad x_2 = a + 2\Delta x, \quad x_i = a + i\Delta x, \cdots, x_n = b$$

$$[x_0, x_1] \;, [x_1, x_2] \;, [x_2, x_3], \cdots, [x_{i-1}, x_i], \cdots, [x_{n-1}, x_n]$$

په شکل کی د لاندینیو مستطیلونو مساحت په $f(x_{i-1})\Delta x$ او د پورتنیو مستطیلو مساحت په $f(x_i)\Delta x$ ښیو نو لیکو چه:

$$\text{د لاندینیو مستطیلونو د مساحتونه مجموعه} = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\Delta x$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x$$

$$\text{د پورتنیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه} = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

که محصور شوي مساحتونه په A وښیونو:

$$\sum_{i=1}^{n} f\,(x_{i-1})\Delta x < A < \sum_{i=1}^{n} f\,(x_i)\Delta x$$

د رابطی د اطراف لیمیټ نیسو.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x \le \lim_{N\to\infty} A \le \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\,(x_i)\,\Delta x$$

د ساندویچ د قضیي سره سم لیکوچه:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

لیمیټ یعني $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ ته د ریمان د مجموعې لیمیټ وايي.

$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$ ته د ریمان مجموعه وايي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د $[0.2]$ انټروال په څلورو مساوي برخو وویشئ د $y = x^2 + 1$ د منحني او (xx') د محور تر منځ د سطحې مساحت پیدا کړئ؟

حل: د $[0،2]$ انټروال په څلورو برابرو برخو ویشو.

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}$$

د مستطیل د هر انټروال اوږدوالی عبارت دی له:

$$x_0 = a = 0 \quad , \qquad x_1 = a + \Delta x = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = a + 2\Delta x = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$x_3 = a + 3\Delta x = \frac{3}{2}$$

$$x_4 = a + 4\Delta x = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

$$[x_0, x_1] \;, \qquad [x_1, x_2] \;, \qquad [x_2, x_3] \;, \qquad [x_3, x_4]$$

$$\left[0, \frac{1}{2}\right] \;, \qquad \left[\frac{1}{2}, 1\right] \;, \qquad \left[1, \frac{3}{2}\right] \;, \qquad \left[\frac{3}{2}, 2\right]$$

د ګراف د ترسیم لپاره د (x) قیمتونه په تابع کې وضع کوو او د (y) قیمتونه پیدا کوو.

$$f(x) = x^2 + 1 = 0^2 + 1 = 1 \qquad , \; A(0,1)$$

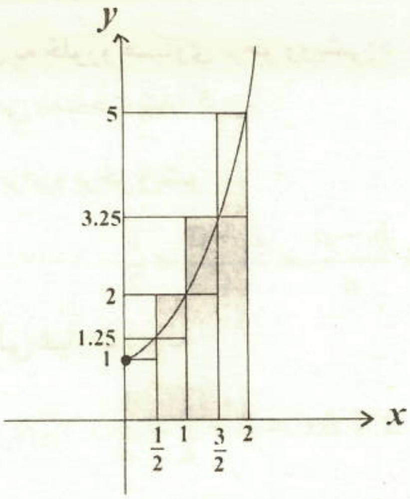
$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \frac{1}{4} + 1 = 1\frac{1}{4} = 1.25 \quad , \qquad B\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right) = (0.5, 1.25)$$

$$f(1) = 1^2 + 1 = 1 + 1 = 2 \qquad , \quad C(1,2)$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1 = \frac{9}{4} + 1 = \frac{9+4}{4} = \frac{13}{4} = 3.25 \qquad D\left(\frac{3}{2}, \frac{13}{4}\right) = (1.5, 3.25)$$

$$f(2) = 2^2 + 1 = 4 + 1 = 5 \qquad E(2,5)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$\text{د لاندينيو مستطيلونو د مساحتونو مجموعه} = 1\cdot\frac{1}{2}+1.25\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2}+3.25\cdot\frac{1}{2} = 3.75$$

$$\text{د پورتنيو مستطيلونو د مساحتونو مجموعه} = 1.25\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{2}+3.25\times\frac{1}{2}+5\times\frac{1}{2} = 5.75$$

$$3.75 < A < 5.75$$

دويم مثال: د $f(x) = 1 + x$ تابع د ريمان د مجموعې ليميټ د $[1\text{،}10]$ په انټروال کې پيدا کړئ؟

حل: پوهيږو چه:

$$\sum_{i=1}^{n} c = nc$$
$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{10-1}{n} = \frac{9}{n}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_i = a + \Delta x_i = 1 + \left[\frac{9}{n}\right] \quad , \quad i = 0,1,2,3,4,5 \cdots$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n}(1+x_i)\,\Delta x\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\Delta x\sum_{i=1}^{n}(1+x_i)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\Delta x\sum_{i=1}^{n}1 + \Delta x\sum_{i=1}^{n}x_i\right]$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n}1 + \frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n}(a+x_i)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n}1 + \frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{9}{n}i\right)\right]$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n}1 + \frac{9}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}1 + \frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n}i\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{9}{n}\cdot n + \frac{9}{n}\left(n + \frac{9}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right)\right]$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[9 + \frac{9}{n}\left(n + \frac{9n^2+9n}{2n}\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[9 + \frac{9}{n}\left(\frac{2n^2+9n^2+9n}{2n}\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[9 + \frac{9}{n}\left(\frac{11n^2+9n}{2n}\right)\right]$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[9 + \frac{99n^2+81n}{2n^2}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[9 + \frac{99n^2}{2n^2} + \frac{81n}{2n^2}\right] = 9 + \frac{99}{2} + \frac{81}{2n} = 58.5$$

دويم مثال: د $[0,3]$ انټروال په شپږو مساوي برخو ووېشئ او $y = 3x$ د مستقيم خط او د $(X\acute{X})$ د محور تر منځ مساحت محاسبه کړئ؟

حل:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-0}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$x_0 = 0 \quad , x_1 = a + 2\Delta x = 0 + 2\cdot\frac{1}{2} = 1 \Rightarrow x_1 = 1 \quad , x_2 = 3\Delta x = 3\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$x_2 = \frac{3}{2}$$

$$x_3 = 0 + 4\cdot\frac{1}{2} = 2 \Rightarrow x_3 = 2 \quad , x_4 = 0 + 5\cdot\frac{1}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow x_4 = \frac{5}{2}$$

$$x_5 = 0 + 6\cdot\frac{1}{2} = 3 \Rightarrow x_5 = 3 \quad , x_6 = 0 + 7\cdot\frac{1}{2} = \frac{7}{2} \Rightarrow x_6 = \frac{7}{2}$$

$$[x_0, x_1] \quad , [x_1, x_2] \quad , [x_2, x_3] \quad , [x_3, x_4] \quad , [x_4, x_5] \quad , [x_5, x_6]$$

$$[0,1] \quad , \quad \left[1, \frac{3}{2}\right] \quad , \quad \left[\frac{3}{2}, 2\right] \quad , \quad \left[2, \frac{5}{2}\right] \quad , \quad \left[\frac{5}{2}, 3\right] \quad , \left[3, \frac{7}{2}\right]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f(0) = 0\,,\qquad A(0,0),\qquad f(1) = 3(1) = 3\qquad B(1,3)$

$f\left(\frac{3}{2}\right) = 3\cdot\frac{3}{2} = \frac{9}{2} \Rightarrow C\left(\frac{3}{2},\frac{9}{2}\right)\quad, f(2) = 3\cdot 2 = 6\ \Rightarrow D(2,6)$

$f\left(\frac{5}{2}\right) = 3\cdot\frac{5}{2} = \frac{15}{2}\ \Rightarrow E\left(\frac{5}{2},\frac{15}{2}\right)\,, f(3) = 3\cdot 3 = 9\ \Rightarrow F(3,9)$

د انتيګرال مفهوم $Concept\ of\ Integral$:

انتيګرال دهغه تابع پيدا کول دي چه مشتق يې موجود وي يا د ريمان د مجموعې ليميټ ته انتيګرال وايي. د انتيګرال علامه دا ($\int$)ده،چه د ريمان دمجموعې Sum د لمړي توري غزېدلی شکل دی. لکه:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \int f(x)\,dx$$

چه دلته $f(x)$ دانتيګرال تابع ده او dx نظر (x) ته د $f(x)$ دتابع د انتيګرال متحول دي.

د انتيګرال اقسام:

انتيګرال په دوه قسمه دی.

1- غېرمعين انتيګرال

2- معين انتيګرال

1- غېرمعين انتيګرال $Indefinite\ Integral$:

که د $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انټروال کی تعريف او $F(x)$ د $f(x)$ د تابع يوه لمرنی تابع وي نو د $F(x)+c$ دتابعګانو سيټ د $f(x)$ دتابع غېرمعين انتيګرال دی. اوداسی ليکل کيږي.

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

لمړی مثال: $\int xdx$ پيدا کړئ؟

حل:

$$\int xdx = \frac{x^{1+1}}{1+1} + c = \frac{x^2}{2} + c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال: $\int \frac{1}{\sqrt[7]{x^3}}dx$ حساب کړئ؟

حل:

$$\int \frac{1}{\sqrt[7]{x^3}}dx = \int x^{-\frac{3}{7}}dx = \frac{x^{-\frac{3}{7}+1}}{-\frac{3}{7}+1} + c = \frac{x^{\frac{4}{7}}}{\frac{4}{7}} + c = \frac{7}{4}\sqrt[7]{x^4} + c$$

دریم مثال:

$$\int \sqrt[8]{x^4} \cdot xdx = \int \sqrt[8]{x^6}dx = \frac{x^{\frac{3}{4}+1}}{\frac{3}{4}+1} + c = \frac{x^{\frac{7}{4}}}{\frac{7}{4}} + c = \frac{4}{7}\sqrt[7]{x^4} + c$$

دریم مثال:

$$\int \frac{\sqrt[6]{x^2}}{\sqrt[3]{x}}dx = \int x^{\frac{2}{6}} \cdot x^{-\frac{1}{3}}dx = \frac{x^{\frac{2}{6}+1}}{\frac{2}{6}+1} \cdot \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + c = \frac{x^{\frac{8}{6}}}{\frac{8}{6}} \cdot \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + c$$
$$= \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} \cdot \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + c = \frac{9}{16}\sqrt[3]{x^4 \cdot x^4} + c$$
$$= \frac{9}{16}\sqrt[3]{x^8} + c$$

د غیر معین انتیګرال خواص:

لکه څرنګه چه د تابعګانو مشتق د خاصو قوانینو پواسطه نیول کېدلو په همدغه ډول غیر معین انتیګرال هم ځانګړي خواص لري چه بې د ثبوته منل شوي دي.

1- که (k) یو ثابت عدد وي نو غیر معین انتیګرال یې داسې پیدا کیږي.

$$\int kdx = k\int dx = kx + c$$

مثال: د $\int 5dx$ انتیګرال پیدا کړئ؟

حل:

$$\int 5dx = 5\int dx = 5x + c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- که چېرې $n \neq -1$ وي نو:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

مثال: د $\int x^4 dx$ انتیګرال پیدا کړئ؟

حل:

$$\int x^4 dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} + c = \frac{1}{5}x^5 + c$$

3- که a یو ثابت عدد او $f(x)$ یوه تابع وي نو:

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx$$

مثال: د $\int 2x^2 dx$ انتیګرال محاسبه کړئ؟

حل:

$$\int 2x^2 dx = 2\int x^2 dx = 2\cdot\frac{x^3}{3} + c = \frac{2}{3}x^3 + c$$

4- که $f(x)$ او $g(x)$ دوه تابعګانې وي دتابعګانو دمجموعې اوتفاضل انتیګرال د تابعګانو د انتیګرالو د مجموعې اوتفاضل سره مساوي دي.

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

مثال:

$$\int (2x^2+3)dx = \int 2x^2 dx + \int 3dx = \frac{2x^3}{3} + 3x + c$$

مثال:

$$\int (8-2x)dx = 8\int dx - 2\int xdx = 8x - x^2 + c$$

5- که چېرې د تابعګانو ترادف تر انتیګرال لاندې وي نو انتیګرال يې د ټولو حدونو د انتیګرالونو مجموعه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int[f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x)]\,dx=\int f_1(x)dx+\int f_2(x)dx+\cdots+\int f_n(x)\,dx$$

مثال:

$$\int(x^3-6x^2+9x+1)dx=\int x^3dx-\int 6x^2+\int 9xdx+\int dx$$
$$\frac{x^4}{4}-\frac{6x^3}{3}+\frac{9x^2}{2}+x+c$$

6- د دوه تابعګانو دحاصل ضرب انتیګرال د تابعګانو د انتیګرالو د حاصل ضرب سره مساوي نه دي

$$\int[f(x)\cdot g(x)]dx\neq\int f(x)dx\cdot\int g(x)dx$$

مثال: که چیرې $f(x)=x+1$ او $g(x)=x-2$ وي

الف: لمړی یې ضربوو بیایې انتیګرال نیسو.

$$\int[f(x)\cdot g(x)]dx=\int[(x+1)(x-2)]dx$$
$$=\int(x^2-x-2)dx=\int x^2dx-\int xdx-2\int dx$$
$$=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x+c$$

ب: د هرې تابع انتیګرال پیدا او بیا یې ضربوو.

$$\int f(x)dx\cdot\int g(x)dx=\int(x+1)dx\cdot\int(x-2)dx$$
$$=\left[\int xdx+\int dx\right]\left[\int xdx-2\int dx\right]$$
$$=\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\left(\frac{x^2}{2}-2x\right)+c=\left(\frac{x^2+2x}{2}\right)\left(\frac{x^2-4x}{2}\right)+c$$
$$\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x+c\neq\left(\frac{x^2+2x}{2}\right)\left(\frac{x^2-4x}{2}\right)+c$$

7- د تابعګانو د خارج قسمت انتیګرال د تابعګانو د انتیګرالو د خارج قسمت سره مساوي نه دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: $f(x) = x^2 + 2x + 1$ او $g(x) = x + 1$ تابعګانې راکړشوي دي.

ثبوتوو چې د تابعګانو د خارج قسمت انتیګرال د تابعګانو د انتیګرالو د خارج قسمت سره مساوي نه دي.

$$\int (x^2 + 2x + 1)dx = \int x^2 dx + \int 2xdx + \int dx$$

$$= \int x^2 dx + 2\int xdx + \int dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + x$$

$$\int (1 + x)dx = \int dx + \int xdx = x + \frac{x^2}{2}$$

$$\frac{\int (x+1)^2}{\int (x+1)} = \frac{\frac{x^3}{3} + x^2 + x}{x + \frac{x^2}{2}}$$

$$\int \frac{(x+1)^2}{x+1} = \int (x+1) = \int xdx + \int dx = \frac{x^2}{2} + x$$

$$\frac{\int (x+1)^2}{\int (x+1)} \neq \int \frac{(x+1)^2}{x+1}$$

8- د $\int (ax+b)^2 m + dx = \frac{(ax+b)^{m+1}}{a(m+1)} + c$ پواسطه د تابعګانو د انتیګرال پیدا کول.

مثال: د $\int (2x-1)^5 dx$ انتیګرال پیدا کړئ؟

حل:

$$\int (2x-1)^5 dx = \frac{(2x-1)^{5+1}}{2(5+1)} + c = \frac{(2x-1)^6}{12} + c$$

مثال: $\int \frac{2dx}{\sqrt[5]{1-2x}}$ انتیګرال پیدا کړئ؟

$$\int \frac{2dx}{\sqrt[5]{1-2x}} = 2\int (1-2x)^{-\frac{1}{5}} dx = 2 \cdot \frac{(1-2x)^{-\frac{1}{5}+1}}{-2\left(-\frac{1}{5}+1\right)} + c = -\frac{(1-2x)^{\frac{4}{5}}}{\frac{4}{5}} + c$$

9- د $\int e^x dx = e^x + c$ پواسطه د انتیګرال پیدا کول:

مثال: $\int 4e^x dx = 4e^x + c$

د $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$ پواسطه د انتیګرال پیدا کول:

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال:

$$\int 7^{4x-3}dx = ?$$

$$\int 7^{4x-3}dx = \int \frac{(7^4)^x}{7^3}dx = \frac{(7^4)^x}{7^3 \cdot \ln 7^4} + c = \frac{7^{4x-3}}{\ln 7^4} + c$$

معین انتیګرال *Definite Integral*

که چیرې د $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انټروال کې متمادي وي او د $f(x)$ د تابع ریمان د مجموعې لیمیټ ته کله چه $n \to \infty$ او د فرعي انټروالونو اوږدوالی $\Delta x \to 0$ ته وکړي نو $x = a$ څخه تر $x = b$ پورې انتیګرال ته معین انتیګرال وایي.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]\,_a^b = F(b) - F(a)$$

(a) ته د انتیګرال لاندیني سرحد او (b) ته د انتیګرال پورتني سرحد وایي.

لومړی مثال: د $\int_1^3 x^2dx$ معین انتیګرال پیدا کړئ؟

$$\int_1^3 x^2dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{27-1}{3} = \frac{26}{3}$$

دویم مثال : د $y = 3$ مستقیم او د $(X\acute{X})$ د محور تر منځ د مضلع مساحت د $[-1,4]$ په انټروال کې پیدا کړئ؟

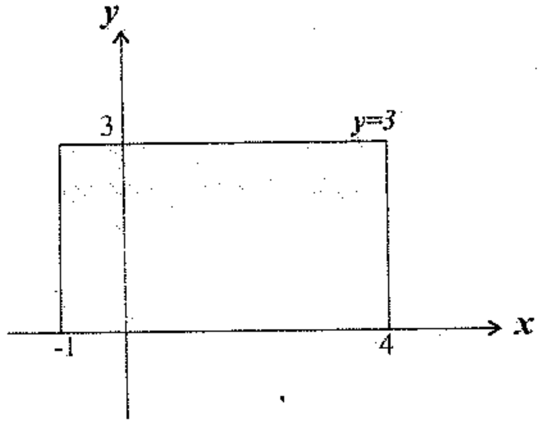
$\int_{-1}^3 3dx$ د مستطیل مساحت رانښيي.

د مستطیل مساحت $= 3[4-(-1)] = 3 \cdot 5 = 15$

د انتیګرال پواسطه یې مساحت په لاندې ډول پیدا کوو.

$$\int_{-1}^3 3dx = [3x]\,_{-1}^4 = 3[4-(-1)] = 15$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



دریم مثال: هغه سطحه چه د $y = x - 1$ مستقیم او $(X\acute{X})$ د محور ترمنځ په $[0,3]$ انټروال کی جوړیږي محاسبه کړئ

$$A_1 = \frac{1}{2}(2 \cdot 2) = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$$
$$A_2 = \frac{1}{2}[1(-1)] = -\frac{1}{2}$$
$$A_1 + A_2 = 2 - \frac{1}{2} = 1.5$$
$$\int_0^3 (x-1)dx = \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_0^3 = \left[\frac{3^2}{2} - 3\right] - 0 = \frac{9-6}{2} = \frac{3}{2} = 1.5$$

څلورم مثال: د هغه سطحی مساحت پیدا کړئ چه د $y = -2x + 1$ او $(X\acute{X})$ دمحور تر منځ د $[1,2]$ په انټروال کی محصور وي؟

$$A_1 = \frac{2(-1-3)}{2} = -4$$
$$A_2 = 1(-1) = -1$$
$$A = A_1 - A_2 = -4 - (-1) = -4 + 1 = -3$$
$$\int_1^2 (-2x+1)dx = \left[-2 \cdot \frac{x^2}{2} + x\right]_1^2 = [-x^2 + x]_1^2$$
$$= (-2^2 + 2) + (-2 \cdot 1^2 + 1) = -2 - 1 = -3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د معین انتیګرال خواص $Properties\ of\ definite\ integral$:

1- د $[a,b]$ په انټروال کی د ثابتی تابع انتیګرال یعني $\int_a^b cdx$ عبارت دی.

$$\int_a^b Cdx = C\int_a^b dx = c[x]_a^b = c(b-a)$$

ثبوت: د $[a,b]$ انټروال په (n) مساوي برخو ویشویعنی $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$ بیا د هر (x_i) لپاره د $i-$ ام انټروال څخه لرو.

$$f(x_i) = c \qquad , \qquad i = 1,2,3,\cdots n$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} C\Delta x_i = C(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$$

$$= C\left(\frac{b-a}{n} + \frac{b-a}{n} + \cdots + \frac{b-a}{n}\right)$$

$$C(b-a)\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = C(b-a)\frac{n}{n} = C(b-a)$$

مثال: $\int_3^4 dx$ انتیګرال حساب کړئ؟

$$\int_3^4 dx = [x]_3^4 = 4-3 = 1$$

2- د یوه ثابت عدد اویوی تابع د حاصل ضرب انتیګرال د ثابت عدد او هغه تابع د انتیګرال د حاصل ضرب سره مساوي دي.

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

ثبوت: که د $[a,b]$ انټروال د x_i چه $i = 1,2,3,4,\cdots,n$ وي په (n) مساوي برخو وویشونو د ریمان دمجموعی او انتیګرال دتعریف سره سم لیکو چه:

$$\lim_{N\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} kf(x_i)\,\Delta x = \lim_{n\to\infty} k\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= k \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = k \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k \int_a^b f(x)dx$$

مثال: د $\int_{-2}^{2} 4dx$ انتیګرال محاسبه کړئ؟

$$\int_{-2}^{2} 4dx = 4 \int_{-2}^{2} dx = 4[2-(-2)] = 4\cdot 4 = 16$$

3- که د $F(x)$ تابع د $f(x)$ د تابع یوه لمړنی تابع او په $[a,b]$ کې متمادي وي نو:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

ثبوت:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = -\{-F(b) + F(a)\}$$

$$= -\{F(a) - F(b)\} = -\int_b^a f(x)dx \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

مثال: د $\int_2^3 2xdx = -\int_3^2 2xdx$ انتیګرالونو مساوات پیدا کړئ؟

$$\int_2^3 2xdx = \left[\frac{2x^2}{2}\right]_2^3 = \frac{2(3)^2}{2} - \frac{2(2)^2}{2} = \frac{2(9)}{2} - \frac{2(4)}{2}$$

$$= \frac{18}{2} - \frac{8}{2} = \frac{18-8}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$\int_3^2 2xdx = \left[\frac{2x^2}{2}\right]_3^2 = \frac{2(2)^2}{2} - \frac{2(3)^2}{2}$$

$$= \frac{2(4)}{2} - \frac{2(9)}{2} = \frac{8}{2} - \frac{18}{2} = \frac{8-18}{2} = -\frac{10}{2} = -5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_{2}^{3} 2xdx = -\int_{3}^{2} 2xdx$$

4- که د $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انټروال کې متمادي وي او $a = b$ وي نوانټیګرال یې صفر دی.

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{a} f(x)\,dx = F(a) - F(a) = 0$$

مثال: د $\int_3^3 3x^2dx$ انټیګرال محاسبه کړئ؟

$$\int_{3}^{3} 3x^2dx = \left[\frac{3x^3}{3}\right]_3^3 = [3^3 - 3^3] = 27 - 27 = 0$$

5- د دوه تابعګانو د مجموعې او تفاضل انټیګرال په یوه انټروال کې د تابعګانو د انټیګرالو د مجموعې او تفاضل د انټیګرالو سره مساوي دی په همغه انټروال کې.

مثلاً د $f(x)$ او $g(x)$ تابعګانو انټیګرال د $[a,b]$ په انټروال کې نیول شوی دي نو:

$$\int_{a}^{b} \{f(x) \pm g(x)\}dx = \int_{a}^{b} f(x)dx \pm \int_{a}^{b} g(x)\,dx$$

ثبوت:

$$\int_{a}^{b} \{f(x) \pm g(x)\}dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \{f(x_i) \pm g(x_i)\}\,\Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \pm \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\right\}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x \pm \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} g(x_i) = \int_{a}^{b} f\,(x)dx \pm \int_{a}^{b} g(x_i)dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثالونه:

$$\int_0^1 (4+3x^2)dx = \int_0^1 4dx + \int_0^1 3x^2dx$$

$$= 4\int_0^1 dx + 3\int_0^1 x^2dx = 4[x]_0^1 + 3\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 4+1 = 5$$

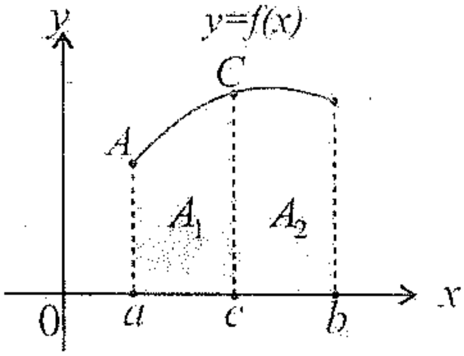
$$\int_0^3 (x^2-1)\,dx = \int_0^3 x^2dx - \int_0^3 dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 - [x]_0^3 = \frac{27}{3} - 3 = \frac{27-9}{3} = \frac{18}{3} = 6$$

6- که چېرته د $f(x)$ یوه تابع چه په یوه تړلي انټروال چه د a , b او (c) ټکي پکی شامل وي او انتیګرال منونکي وي. نود ټول انټروال انتیګرال دانټروال دټوټو د انتیګرالو د مجموعی سره مساوي دی.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

ثبوت: د $[a,b]$ انټروال د $[a,c]$ او $[b,c]$ په دوه انټروالو ویشو:



$A = \int_a^b f(x)dx$ د هغې سطحی مساحت دی چه د $f(x)$ دتابع د ګراف او $(X\acute{X})$ دمحور ترمنځ د $[a,b]$ په انټروال کی واقع دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A_1 = \int_a^c f(x)dx \quad \text{او} \quad A_2 \int_c^b f(x)dx$$

د تابع د گراف د توټو مساحت دي. نو ليکو چه:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_x^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

مثال: که $\int_0^{10} f(x)dx = 17$ او $\int_0^8 f(x)dx = 12$ وي نو $\int_8^{10} f(x)dx = ?$ محاسبه کړئ؟

$$\int_8^{10} f(x)dx = \int_0^{10} f(x)dx - \int_0^8 f(x)dx = 17 - 12 = 5$$

7- که $f(x) \le g(x)$ تابعګانې په $[a, b]$ کې انتيګرال منونکي وي او $g(x) \ge f(x)$ او $\Delta x \ge 0$ وي نو د سلسلې هر حد مثبت دې پس ليميټ يې هم مثبت وي.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}[g(x_i) - f(x_i)]\Delta x \ge 0 \Rightarrow \int_a^b [g(x) - f(x)]dx \ge 0$$

$$\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx \ge 0 \Rightarrow \int_a^b g(x)dx \ge \int_a^b f(x)dx$$

مثال: که $f(x) = 1 - \frac{x^2}{4}$ او $g(x) = 1 + \frac{x^2}{2}$ وي د $x > 1$ لپاره وښياست چه

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) \le \int_a^b \left(1 + \frac{x^2}{2}\right) \Rightarrow \int_a^b dx - \int_a^b \frac{x^2}{4}dx \le \int_a^b dx + \int_a^b \frac{x^2}{2}dx$$

$$[x]_a^b - \frac{1}{12}[x^3]_a^b \le [x]_a^b + \frac{1}{6}[x^3]_a^b$$

$$(b-a) - \frac{1}{12}(b^3 - a^3) \le (b-a) + \frac{1}{6}(b^3 - a^3)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اطراف په $(b-a)$ ویشو.

$$1-\frac{1}{12}(b^2-a^2)\leq 1+\frac{1}{6}(b^2-a^2)$$
$$-\frac{1}{12}(b^2-a^2)\leq \frac{1}{6}(b^2-a^2)$$
$$-\frac{1}{12}<\frac{1}{6}\quad \Rightarrow -1<2$$

8- که $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انتروال کې متمادي وي او (m) اصغري نقطه او (M) اعظمي نقطه وي نو

$$m(b-a)\leq \int_a^b f(x)dx\leq M(b-a)$$

ثبوت :

$$\int_a^b m dx\leq \int_a^b f(x)dx\leq \int_a^b M dx$$
$$m(b-a)\leq \int_a^b f(x)dx\leq M(b-a)$$

دغه قضیه د انتیګرال د تخمیني قضیې په نوم یادیږي.

مثال: $\int_0^1 e^{-x^2}$ انتیګرال په تخمیني توګه حساب کړئ؟

څرنګه چه د $f(x)=e^{-x^2}$ تابع په $[0,1]$ انتروال کی متمادي ده او $M=f(0)=e^0=1$ مطلق اعظمي او $m=f(1)=e^{-1}$ مطلق اصغري ده نو لیکو چه:

$$m(b-a)\leq \int_a^b f(x)dx\leq M(b-a)$$
$$e^{-1}(1-0)\leq \int_0^1 e^{-x^2}dx\leq 1(1-0)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

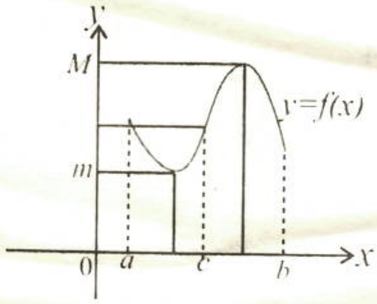
$$e^{-1} \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{e} \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx \leq 1$$

$$\frac{1}{e} = 0.3679$$

$$0.3679 \leq \int_0^1 f(x) dx \leq 1$$

9- که $f(x)$ تابع په $[a,b]$ کی متمادي وي نو د (c) یو عدد موجود دی چه $a < c < b$ دی نو:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$



ثبوت: د $a < b$ لپاره د (m) او (M) قیمتونه په ترتیب سره د $[a,b]$ په انتروال کی د تابع اصغري او اعظمي نقطی دي او $c \in [a,b]$ دی

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq M(b-a) \Rightarrow m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$$

فرضوو چه $k = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$ دی نو $m \leq k \leq M$ دی او د هر (c) حقیقي عدد لپاره $a \leq c \leq b$ دی نو لرو چه $k = f(c)$ نو:

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پورته رابطه د متوسط قیمت درابطی په نوم یادیږي. $f(c)$ طول او $(b-a)$ عرض دي.او حاصل ضرب يي د مستطيل مساحت دی. یعنی:

$$A = f(c)(b-a)$$

مثال: د $[1.4]$ په انټروال کې د $f(x) = x^2$ تابع اولاندی رابطه راکړ شوی ده د (c)قیمت په لاس راوړئ؟

$$\int_1^4 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^4 = \left[\frac{64}{3} - \frac{1}{3}\right] = \left[\frac{64-1}{3}\right] = \frac{63}{3} = 21$$

د (x)په عوض (c) وضع کوواو د متوسط قیمت د قضيي څخه استفاده کوو.

$$\int_a^b x^2 dx = c^2(4-1) \Rightarrow 3c^2 = 21 \Rightarrow c^2 = 7 \Rightarrow c = \sqrt{7}$$

$$a < c < b = 1 < \sqrt{7} < 4$$

$$f(c) = c^2 = \sqrt{7}^2 = 7$$

$$A = f(c)(b-a) = 7 \cdot \sqrt{7} = 7\sqrt{7}$$

دانتيگرال او مشتق اساسي قضيي:

اوله قضيه :

که $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انټروال کی متمادي وي او(x) په دی انټروال شامل وي که $x \in [a,b]$ نوليکلای شو چه:

$$\acute{F}(x) = f(x)$$

$$\acute{F}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h) - F(a) + F(a) - F(x)}{h}$$

$$\acute{F}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h) - F(a) - F(x) - F(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{F(x)|_a^{x+h} - F(x)|_a^x}{h}$$

د $F(x)$ په $F(t)$ بنيبو:

$$\acute{F}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F\left(t\Big|_a^{x+h} - F(t)\Big|_a^x\right)}{h}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\acute{F}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{h}$$

$$\acute{F}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h}$$

د متوسط قیمت د قضیي څخه لیکو چه:

$$f(c) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt$$

نو معلومه شوه چه $x < c < x + h$

$$\acute{F}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt = \lim_{c\to x} f(c) = f(x)$$

مثال: د $f(x) = \int_2^{x^2+1}\frac{1}{x^2+1}$ مشتق پیدا کړئ؟

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt = F(x) = \int_a^{g(x)} f(t)dt$$

$$u = g(x) = x^2 + 1$$

$$f(t) = \frac{1}{t^2+1}$$

$$\acute{F}(x) = f(g(x))\cdot \acute{g}(x)$$

$$\acute{F}(x) = \frac{1}{(x^2+1)^2+1}\cdot(x^2+1)' = \frac{1}{(x^2+1)^2+1}\cdot 2x$$

$$\acute{F}(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2+1}$$

دویمه قضیه:

که $F(x)$ تابع د $f(x)$ د تابع اولنی تابع او د $[a,b]$ په انټروال کی متمادي وي په دی صورت کی لیکلای شو چه:

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ثبوت: که $F(x)=\int_a^b f(t)dt$ وي نو د هر $x\in[a,b]$ لپاره $\acute{F}(x)=f(x)$ دی د تابعګانو تفاضل په (k) ښیو:

$$f(x)-F(x)=k\Rightarrow f(x)=F(x)+k$$

$$\acute{F}(x)=\int_a^b f(t)dt=f(x)=F(x)+k$$

$$\int_a^b f(t)dt-F(x)=k\cdots 1$$

د (x) په عوض (a) وضع کوو:

$$\int_a^b f(t)dt-F(a)=k\Rightarrow 0-F(a)=k\Rightarrow k=-F(a)$$

د k قیمت په (1) رابطه کی وضع کوو.

$$\int_a^b f(t)dt-F(x)=-F(a)$$

د (x) په عوض (b) وضع کوو.

$$\int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a)$$

اخري رابطه د $\int_a^b f(t)dt=[F(x)]_a^b$ شکل ښودل کیږي. دغه رابطه د اولنی تابع او $\int_a^b f(t)dt$ انتیګرال تر منځ رابطه ښیي چه د نیوټن (لایبنز) په نوم یادیږي.

مثال: $\int_0^1 x^2dx$ انتیګرال لاس ته راوړئ؟

$$\int_0^1 x^2\,dx=F(1)-F(0)=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}\cdot 1^3-\frac{1}{3}\cdot 0^3=\frac{1}{3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په تعویضي طریقې سره د انتیګرال نیول:

... انتګرال دلاس ته راوړلو لپاره يي

$u = g(x)$ او $\acute{F}(x) = f(x)$ بنیبو $\frac{du}{dx} = \acute{g}(x)$ او $du = \acute{g}(x)dx$ بنیبو:

$$\int_a^b f\{g(x)\}\,\acute{g}(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

لمړی مثال: $\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2}$ انتیګرال پیدا کړئ؟

$$u = 3 - 5x \quad , \quad \frac{du}{dx} = -5 \Rightarrow dx = -\frac{du}{5}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ u = 3 - 5x \Rightarrow 3 - 5 \cdot 1 = -2 \Rightarrow u = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ u = 3 - 5x \Rightarrow u = 3 - 5 \cdot 2 = -7 \Rightarrow u = -7 \end{cases}$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2} = \int_{-2}^{-7} \frac{1}{u^2}\left(-\frac{1}{5}\right)du = -\frac{1}{5}\int_{-2}^{-7}\frac{du}{u^2} = -\frac{1}{5}\left[\frac{1}{u}\right]_{-2}^{-7} = -\frac{1}{5}\left[\frac{1}{7} - \frac{1}{2}\right]$$

$$= -\frac{1}{5}\left[\frac{2-7}{14}\right] = -\frac{1}{5}\left[\frac{-5}{14}\right] = \frac{1}{14}$$

دویم مثال: د $\int_0^1 x^3(1+2x^3)^5dx$ انتیګرال حساب کړئ؟

$$u = 1 + 2x^3 \quad , \quad \frac{du}{dx} = 6x^2 \quad , \quad x^2dx = \frac{1}{6}du$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ u = 1 + 2x^2 \Rightarrow 1 + 2 \cdot 0 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ u = 1 + 2x^2 \Rightarrow u = 1 + 2 \cdot 1 = 3 \Rightarrow u = 3 \end{cases}$$

$$\int_0^1 x^2(1+2x^3)^5dx = \int_1^3 u^5 \cdot \frac{1}{6} \cdot du = \frac{1}{6}\int_1^3 u^5du = \frac{1}{6}\left[\frac{u^6}{6}\right]_1^3 = \frac{1}{6}\left[\frac{3^6}{6} - \frac{1}{6}\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[\frac{729-1}{6}\right] = \frac{728}{36} = \frac{182}{9} = 20.\overline{2}$$

پورته فارمول په غیر معین انتیګرال کې هم د تطبیق وړ دي.

مثال: $\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$ انتیګرال حساب کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$u = 1 - 4x^2 \quad , \quad \frac{du}{dx} = -8x \quad , \quad xdx = -\frac{1}{8}du$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} \cdot xdx = \int \frac{1}{\sqrt{u}}\left(-\frac{1}{8}du\right)$$

$$= -\frac{1}{8}\int \frac{1}{\sqrt{u}}du = -\frac{1}{8}\int u^{-\frac{1}{2}}du$$

$$= -\frac{1}{8}\left(\frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right) + C = -\frac{1}{8}\left(\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right) + C = -\frac{1}{8}\left(\frac{\sqrt{u}}{\frac{1}{2}}\right) + C = -\frac{1}{8}(2\sqrt{u}) + C$$

$$= -\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2} + C$$

دویم مثال: $\int x^3 \cos(x^4+2)\, dx$ انتیګرال حساب کړئ؟

$$u = x^4 + 2 \quad , \quad \frac{du}{dx} = 4x^3 \quad , \quad x^3dx = \frac{1}{4}du$$

$$\int x^3 \cos((x^4+2)dx) = \int cosux^3dx = \int cosu \cdot \frac{1}{4}du$$

$$= \frac{1}{4}\int cosudu = \frac{1}{4}\sin u + C$$

$$\int x^3 \cos(x^4+2)\, dx = \frac{1}{4}\sin(x^4+2) + C$$

قسمي انتیګرالونه:

د $\int f(x)g(x)dx$ په انتیګرال کې $f(x) = u$ او $g(x) = v$ نښیو او دحاصل ضرب مشتق يي پیدا کوو.

$$(u \cdot v)' = \acute{u}v + \acute{v}u \quad \Rightarrow \acute{v}u = (u \cdot v)' - \acute{u}v$$

$$\int \acute{v}\, udx = u \cdot v - \int \acute{u}\, vdx$$

$$\int udv = u \cdot v - \int vdu$$

پورته رابطه په قسمي طریقه د غیر معین انتیګرال فارمول دی.

که (u) او (v) تابعګانې د $[a, b]$ په انتروال کې تعریف شوی وي نود معین انتیګرال فارمول په قسمي طریقه په لاندی ډول دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_a^b \acute{v}\, u dx = u \cdot v|_a^b - \int_a^b v\acute{u}\, dx \quad \vee \quad \int_a^b u dv = u \cdot v|_a^b - \int_a^b v du$$

لمړی مثال : د $\int x \sin x dx$ انتیګرال پیدا کړئ؟

$$u = x \quad , \quad du = dx$$

$$v = -\cos x \quad , \quad \frac{dv}{dx} = \sin x \quad \Rightarrow dv = \sin x dx$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\int x \sin x dx = x(-\cos x) - \int -\cos x dx = -x\cos x + \sin x + C$$

دویم مثال: د $\int_0^1 -xe^x dx$ انتیګرال حساب کړئ؟

$$u = -x \quad \Rightarrow \frac{du}{dx} = -1 \quad \Rightarrow du = -dx$$

$$v = e^x \quad \Rightarrow \frac{dv}{dx} = e^x \Rightarrow dv = e^x dx$$

$$h \int_a^b \acute{v}\, u dx = uv|_a^b - \int_a^b v\acute{u}\, dx$$

$$\int_0^1 -xe^x\, dx = [-xe^x]_0^1 + \int_0^1 e^x dx$$

$$= -e^1 + 0 \cdot e^0 + [e^x]_0^1 = -e^1 + e^1 - e^0 = -e^0 = -1$$

دلوګاریتمي او اکسپوننشل تابعګانو مشتق:

1- که $f(x) = \ln x$ وي نو $\acute{f}(x) = \frac{1}{x}$ کیږي.

ثبوت:

$$\acute{f}(x) = (\ln x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln \frac{x+h}{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \ln\left(\frac{x+h}{x}\right)$$

$$\frac{1}{x} \lim_{h\to 0} \frac{x}{h} \ln\left(\frac{x}{x} + \frac{h}{x}\right) = \frac{1}{x} \lim_{h\to 0} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که $u=\frac{x}{h}$ وضع شي نو $\frac{h}{x}=\frac{1}{u}$ کيږي او څرنګه چه $h\to 0$ تقرب وکړي نو $u\to\infty$ ته تقرب کوي

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}\lim_{u\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}=\frac{1}{x}\ln\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}=\frac{1}{x}\ln e=\frac{1}{x}\cdot 1=\frac{1}{x}$$

2- که $g(x)=a^{x}$ وي نومشتق يې دلاندې فارمول پواسطه پيدا کيږي.

$$\acute{g}(x)=a^{x}\ln a$$
$$\ln y=\ln a^{x}=x\ln a$$
$$(\ln y)'=(x\ln a)'$$
$$\frac{\acute{y}}{y}=1\cdot\ln a+x\cdot 0=\ln a$$
$$\acute{y}=y\ln a=a^{x}\ln a$$

د اعشاري لوګاريتم مشتق:

د $f(x)=\log_a x$ تابع مشتق عبارت دې له :

$$\acute{f}(x)=\frac{1}{x}\log_a e$$

$$\acute{f}(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_a\left(\frac{x+h}{x}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)=\lim_{h\to 0}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}$$

که $u=\frac{x}{h}$ وضع شي نو $\frac{h}{x}=\frac{1}{u}$ کيږي او کله چه $h\to 0$ تقرب وکړي نو $u\to\infty$ تقرب کوي.

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}=\frac{1}{x}\log_a e$$

غواړو چه ثبوت کړو چه:

$$\{\log_a g(x)\}'=\frac{\acute{g}(x)}{g(x)}\log_a e$$
$$\acute{f}(x)=\{\log_a g(x)\}'=\{\log_a g(x)\}'\cdot\acute{g}(x)$$
$$=\frac{1}{g(x)}\log_a e\cdot\acute{g}(x)=\frac{\acute{g}(x)}{g(x)}\log_a e$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که $a = e$ وضع شي نو:

$$\{\log_e g(x)\}' = \{\ln g(x)\}' = \frac{\acute{g}(x)}{g(x)}$$

1- د $y = e^x$ مشتق

$$\ln y = \ln e^x = x \ln e = x$$

$$(\ln y)' = \acute{x} \Rightarrow \frac{\acute{y}}{y} = 1 \Rightarrow \acute{y} = y \cdot 1 = y \Rightarrow \acute{y} = e^x$$

2- که $y = a^u$ وي کله چه $a > 0$ او $a \neq 1$ وي نو:

$$\acute{y} = \acute{u} \cdot a^u \ln a$$

3- که په لوګاریتمي تابعګانو کی د لوګاریتم قاعده د طبعي لوګاریتم څخه اعشاري لوګاریتم ته بدله شي ټول لوګاریتمي عددونه دصورت څخه مخرج ته اویا د مخرج څخه صورت ته ځي. لکه:

$$y = \log_a u$$

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}}{u} \log_a e = \frac{\acute{u}}{u \log_e a} = \frac{\acute{u}}{u \ln a}$$

لمړی مثال: د $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$g(x) = x^2 + 1 \Rightarrow \acute{g}(x) = 2x$$

$$\{\ln g(x)\}' = \frac{\acute{g}(x)}{g(x)}$$

$$\{\ln(x^2 + 1)\}' = \frac{(x^2 + 1)'}{x^2 + 1} = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

دويم مثال:

$$f(x) = \ln(x^2 - 5x + 4) \quad \Rightarrow \acute{f}(x) = \frac{(x^2 - 5x + 4)'}{x^2 - 5x + 4} = \frac{2x - 5}{x^2 - 5x + 4}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم مثال:

$$f(x) = \log_a \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}} = \log_a \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{1}{2}\log_a \frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\{\log_a(x^2+1) - \log_a(x^2-1)\}$$
$$f'(x) = \left(\log_a \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}\right)' = \frac{1}{2}\{\log_a(x^2+1) - \log_a(x^2-1)\}'$$
$$\frac{1}{2}\left\{\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}\log_a e - \frac{(x^2-1)'}{x^2-1}\log_a e\right\} = \frac{1}{2}\left\{\frac{2x}{x^2+1}\log_a e - \frac{2x}{x^2-1}\log_a e\right\}$$
$$\frac{1}{2}\cdot 2x\log_a e\left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2-1}\right)$$
$$= x\log_a e\left(\frac{x^2-1-x^2-1}{x^4-1}\right) = \frac{-2x}{x^4-1}\log_a e$$

$$f(x) = \ln\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}} = \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\{\ln(x^2+1) - \ln(x^2-1)\}$$

$$f'(x) = \left(\ln\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}\right)' = \frac{1}{2}\{\ln(x^2+1) - \ln(x^2-1)\}'$$

$$= \frac{1}{2}[\{\ln(x^2+1)\}' - \{\ln(x^2-1)\}']$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2x}{x^2+1} - \frac{2x}{x^2-1}\right) = \frac{-2x}{x^4-1}$$

څلورم مثال: د $y = e^{x^2+1}$ مشتق پیدا کړئ؟

$$y' = (x^2+1)'\cdot e^{x^2+1} = 2x\cdot e^{x^2+1}$$

پنځم مثال: د $y = \sqrt[x]{2}$ مشتق پیدا کړئ؟

$$y = \sqrt[x]{2}$$
$$\ln y = \ln\sqrt[x]{2} = \ln 2^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}\ln 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(\ln y)' = \left(\frac{1}{x}\ln 2\right)'$$

$$\frac{\acute{y}}{y} = \left(\frac{1}{x}\right)' \cdot \ln 2 + \frac{1}{x}\cdot(\ln 2)' = \frac{0\cdot x - 1\cdot 1}{x^2}\cdot \ln 2 + \frac{1}{x}\cdot 0 = -\frac{1}{x^2}\cdot \ln 2 + 0$$

$$\frac{\acute{y}}{y} = -\frac{1}{x^2}\ln 2 \Rightarrow \acute{y} = -\frac{1}{x^2}\cdot \ln 2\cdot y = -\frac{1}{x^2}\cdot\sqrt[x]{2}\cdot \ln 2$$

شپږم مثال: د $y = x^{2x}$ مشتق پیدا کړئ؟

$$y = x^{2x}$$

$$\ln y = \ln x^{2x} = 2x\ln x$$

$$(\ln y)' = (2x\cdot\ln x)' \Rightarrow \frac{\acute{y}}{y} = 2\cdot\ln x + 2x\cdot\frac{1}{x} = 2\ln x + 2 = 2(\ln x + 1)$$

$$\frac{\acute{y}}{y} = 2(\ln x + 1) \Rightarrow \acute{y} = 2(\ln x + 1)\cdot y \Rightarrow \acute{y} = 2(\ln x + 1)\cdot x^{2x}$$

اوم مثال:

$$y = \log_{10}(x^4 + 1)$$

$$\acute{y} = ?$$

$$x^4 + 1 = u$$

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}}{u}\log_{10} e = \frac{4x^3}{x^4+1}\log_{10} e = \frac{4x^3}{(x^4+1)\ln 10}$$

اتم مثال:

$$y = \log_3(\log_2 x)$$

$$\acute{y} = ?$$

$$\log_2 x = u$$

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}}{u}\log_a e = \frac{\frac{1}{x}\log_2 e}{\log_2 x}\log_3 e = \frac{1}{x\log_2 x\ln 2\ln 3} = \frac{1}{x\frac{\log_e x}{\log_e 2}\cdot\ln 2\ln 3}$$

$$\acute{y} = \frac{1}{x\frac{\ln x}{\ln 2}\ln 2\ln 3} = \frac{1}{x\ln x\ln 3}$$

نهم مثال:

$$y = \log_{(x^2-1)}(x^2+1)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\acute{y} = ?$

$x^2 + 1 = u$

$\acute{y} = \frac{\acute{u}}{u}\log_a e = \frac{2x}{x^2+1}\log_{(x^2-1)} e$

د معکوسو تابعګانو مشتق:

که دوه تابعګانی یو د بل معکوس وي نو مشتقونه يي هم يو د بل معکوس دي.

مثلاً که $y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$ وي نو:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

يا:

$$\acute{y}_{(x)} = \frac{1}{\acute{x}_{(y)}}$$

نو د ضمني تابعګانو د مشتق له مخی ليکو.

$$\left.\begin{matrix} y = f(x) \\ x = g(y) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \acute{y}_x \cdot \acute{x}_y = \acute{y}_y \Rightarrow \acute{y}_x \cdot \acute{x}_y = 1 \Rightarrow \acute{y}_x = \frac{1}{\acute{x}_y}$$

مثال: د $y = a^x$ د تابع مشتق د هغې د معکوسی تابع له مخی پيدا کړئ؟

$y = a^x \Rightarrow x = \log_a y$

$\acute{y}_x = \frac{1}{\acute{x}_y} = \frac{1}{(\log_a y)'} = \frac{1}{\frac{1}{y}\log_a e} = \frac{1}{\frac{1}{y}}\log_e a = y\ln a = a^x \ln a$

د معکوسومثلثاتي تابعګانومشتق:

د معکوسو مثلثاتي تابعګانو مشتق دلاندی رابطو پواسطه پيدا کيږي.

1- $(arc\sin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

2- $(arc\cos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

3- $(arc\tan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

4- $(arc\cot x)' = \frac{-1}{1+x^2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

-1

$y = arc\sin x \Leftrightarrow x = \sin y$

$(arc\sin x)' = ?$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \Rightarrow \acute{y}_x = \frac{1}{\acute{x}_y} = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-sin^2y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

-2

$y = arc\cos x \quad \Leftrightarrow x = \cos y$

$(arc\cos x)' = ?$

$$\acute{y}_x = \frac{1}{\acute{x}_y} = \frac{1}{(\cos y)'} = \frac{1}{-\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1-cos^2y}} \Rightarrow (arc\cos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

-3

$$y = arc\tan x \Leftrightarrow x = \tan y \Rightarrow (arc\tan x)' = \acute{y}_x = \frac{1}{\acute{x}_y} = \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{\frac{1}{cos^2y}}$$

$$= cos^2y = \frac{cos^2y}{1} = \frac{cos^2y}{sin^2y + cos^2y}$$

$$= \frac{\frac{cos^2y}{cos^2y}}{\frac{sin^2y}{cos^2y} + \frac{cos^2y}{cos^2y}} = \frac{1}{tan^2y + 1} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(arc\tan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

-4

$y = arc\cot x \Leftrightarrow x = \cot y$

$(arc\cot x)' = ?$

$$(arc\cot x)' = \acute{y}_x = \frac{1}{\acute{x}_y} = \frac{1}{(\cot y)'} = \frac{1}{\frac{-1}{sin^2y}}$$

$$= -sin^2y = \frac{-sin^2y}{1} = \frac{-sin^2y}{sin^2y + cos^2y}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \frac{\frac{-sin^2y}{sin^2y}}{\frac{sin^2y}{sin^2y}+\frac{cos^2y}{sin^2y}} = \frac{-1}{1+cot^2y} = -\frac{1}{1+x^2}$$

لمړی مثال:- د $y = (arc\tan x)^5$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

$$\acute{y} = 5(arctanx)^4\frac{1}{1+x^2}$$

دویم مثال:- د $y = \log_5(arc\tan x)$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

$$\acute{y} = \{\log_5(arc\tan x)\}' = \log_5 u = \frac{\acute{u}}{u\ln a}$$

$$= \frac{\frac{1}{1+x^2}}{arc\tan x\ln 5} = \frac{1}{(1+x^2)(arc\tan x\ln 5)}$$

دریم مثال:- د $y = arctane^x$ تابع مشتق د $x = 0$ په نقطه کې پیدا کړئ؟

$$\acute{y} = (arc\tan e^x)' = (arc\tan u)' = \frac{\acute{u}}{1+u^2} = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$$

$$\acute{y}(0) = \frac{e^0}{1+e^{2\cdot 0}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

قسمي کسرونه:

د یوه واقعي کسر قسمي کسرونه هغه کسرونه دي چه د هغوی دمجموعی څخه دغه واقعي کسر جوړشوی وي. دواقعي کسرد قسمي کسرو پیدا کول دری حالته لري.

اول حالت:

چه د واقعي کسرد مخرج ضربي عوامل غیر تکراري بینومونه وي. لکه

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10} = \frac{A}{x-5}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}$$

$$= \frac{A(x^2+x-2)+B(x^2-3x-10)+C(x^2-6x+5)}{(x-5)(x-1)(x+2)}$$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10} = \frac{Ax^2+Ax-2A+Bx^2-3Bx-10B+Cx^2-6Cx+5C}{(x-5)(x-1)(x+2)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{(A+B+C)x^2+(A-3B-6C)x-2A-10B+5C}{(x-5)(x-1)(x+2)}$$

$$4x^2-x-39=(A+B+C)x^2+(A-3B-6C)x-2A-10B+5C$$

$A+B+C=4$

$A-3B-6C=-1$

$-2A-10B+5C=-39$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{2}{x-5}+\frac{3}{x-1}-\frac{1}{x+2}$$

دویم حالت:

چه دکسر د مخرج په ضربي عواملو کې تکراري بېنومونه وي.

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{A(x-1)^2+B(x-2)(x-1)+C(x-2)}{(x-2)(x-1)^2}$$

$$3x^2-6x+2=A(x^2-2x+1)+B(x^2-3x+2)+C(x-2)$$

$$3x^2-6x+2=Ax^2-2Ax+A+Bx^2-3Bx+2B+Cx-2C$$

$$3x^2-6x+2=(A+B)x^2-(2A+3B-C)x+A+2B-2C$$

$A+B=3$

$-2A-3B$

$+C=-6$

$A+2B-2C=2$

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

دریم حالت:

چه د کسرد مخرج ضربي عوامل غېرتکراري ترینومونه وي،په صورت کې یې بېنوم لیکل کیږي.

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{Ax+B}{x^2+2x+4}+\frac{C}{x+1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \frac{(Ax+B)(x+1)+C(x^2+2x+4)}{(x^2+2x+4)(x+1)}$$

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4} = \frac{(A+C)x^2+(A+B+2C)x+B+4C}{(x^2+2x+4)(x+1)}$$

$$= 5x^2+8x+9 = (A+C)x^2+(A+B+2C)x+B+4C$$

$A+C=5$

$A+B+2C=8$

$B+4C=9$

$A=3 \quad , \ B=1 \quad , \ C=1$

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4} = \frac{3X+1}{x^2+2x+4} + \frac{2}{x+1}$$

د اکسپوننشل تابعګانو انتیګرالونه:

د $f(x)=e^x$ طبعي اکسپوننشل تابع لپاره لرورچه

$$\int e^x dx = e^x + c$$

په عمومي ډول

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} \quad , \ a \neq 1 \ \& \ a \in IR$$

ثبوت:

$$\int a^x dx$$

$u=1 \quad , \ \frac{du}{dx}=0 \quad , \ du=0\cdot dx$

$v=a^x \quad , \ \frac{dv}{dx}=\frac{a^x}{\ln a} \quad , \quad dv=\frac{a^x}{\ln a}dx$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} - \int \frac{a^x}{\ln a}\cdot 0\cdot dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

لمړی مثال: د $f(x)=2^{x-3}$ اکسپوننشل تابع انتیګرال پیدا کړئ؟

$$2^{x-3} = \frac{2^x}{2^3} = \frac{2^x}{8} = \frac{1}{8}\cdot 2^x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int 2^{x-3}dx = \int \frac{1}{8}\cdot 2^x dx = \frac{1}{8}\int 2^x dx = \frac{1}{8}\cdot\frac{2^x}{\ln 2}+C$$

دویم مثال:

$$\int 3^{x+1}dx = ?$$

$$\int 3^{x+1}dx = \int 3^x\cdot 3dx = 3\int 3^x dx = 3\cdot\frac{3^x}{\ln 3}+C$$

د لوګاریتمي تابعګانو انتیګرال:

که $(x \in IR^+)$ $f(x) = \ln x$ وي نوانتیګرال يې په لاندې ډول دی.

$$\int \ln dx = x\ln x - x + C$$

که $(x, a \in IR^+)$ $f(x) = \log_a x$ وي نو انتیګرال يې داسې پیدا کوو.

$$\int \log_a x\, dx = x\log_a \frac{x}{e}$$

ثبوت:

1- که $a = e$ وضع شي

$$\int \log_a x\, dx = x\log_a \frac{x}{e} + C$$

$$\int \log_e x\, dx = \int \ln x dx = x\log_e \frac{x}{e} = x(\log_e x - \log_e e) = x(\ln x - 1) + C$$

2- حالت:

$$\int \log_a x\, dx = x\log_a \frac{x}{e} + C$$

$$u = \log_a x \;,\; \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}\log_a e \;,\; du = \frac{1}{x}\log_a e\, dx$$

$$v = x \;,\; \frac{dv}{dx} = 1 \Rightarrow dv = dx$$

$$\int \log_a x\, dx = x\log_a x - \int x\cdot\frac{1}{x}\log_a e\, dx = x\log_a x - \log_a e\int dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= x\log_a x - x\log_a e = x(\log_a x - \log_a e) = x\log_a \frac{x}{e} + C$$

$$\int \log_A x dx = x\log_a \frac{x}{e}$$

مثال: د $\int \ln 3x dx$ غیرمعین انتیگرال پیدا کړئ؟

حل:

$$\int \ln 3x dx = \int (\ln 3 + \ln x) dx = \int \ln 3 dx + \ln x dx$$

$$= x\ln 3 + x\ln x - x = x(\ln 3 + \ln x) - x = x(\ln 3x - 1)$$

په تعویضي طریقه هم کولای شوچه د غیرمعین انتیګرال قیمت پیدا کړو.

لمړی مثال:

$$\int \frac{1}{2}e^{-2x-3}\,dx = ?$$

$$u = -2x - 3 \quad , \quad \frac{du}{dx} = -2 \quad , \quad dx = -\frac{1}{2}du$$

$$\int \frac{1}{2}e^u\left(-\frac{1}{2}\right)du = -\frac{1}{4}\int e^u du = -\frac{1}{4}e^u + C$$

دویم مثال:

$$\int \frac{2dx}{x+2} = ?$$

$$x + 2 = u \quad , \quad \frac{du}{dx} = 1 \quad , \quad du = dx$$

$$\int \frac{2du}{u} = 2\int \frac{du}{u} = 2\ln|u| + C = 2\ln|x+2| + C$$

دریم مثال: د $f(x) = e^{2x}$ تابع انتیګرال پیدا کړئ؟

$$\int f(xdx) = \int e^{2x}dx = ?$$

$$2x = u \quad , \quad \frac{du}{dx} = 2 \quad , dx = \frac{du}{2}$$

$$\int f(x)dx = \int e^u \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int e^u du = \frac{e^u}{2} + C = \frac{1}{2}\cdot e^{2x} + C$$

څلورم مثال: د $f(x) = x\cdot\ln x^2$ انتیګرال حساب کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int f(x)dx = \int (x \ln x^2)dx = ?$$

$$x^2 = u \quad , \quad \frac{du}{dx} = 2x \quad , \quad dx = \frac{1}{2x}du$$

$$\int f(x)dx = \int x \ln u \cdot \frac{1}{2x}du = \frac{1}{2}\int \ln u du = \frac{1}{2}[u \cdot \ln u - u + C]$$

$$= \frac{1}{2}u \cdot \ln u - \frac{1}{2}u + C = \frac{1}{2}x^2 \ln x^2 - \frac{1}{2}x^2 + C$$

معین انتیګرالونه هم په تعویضي طریقه حلولای شو.

$$\int_{-1}^{1} e^{2x}dx = ?$$

$$u = 2x \quad , \quad \frac{du}{dx} = 2 \quad , \quad dx = \frac{1}{2}du$$

$$\begin{cases} x = -1 \ , & u = 2x = 2(-1) = -2 \\ x = 1 & , \ u = 2x = 2(1) = 2 \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{1} e^{2x}dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} e^u du = \frac{1}{2}[e^u]_{-2}^{2} = 3.627$$

دویم مثال:

$$\int_{1}^{2} 2x \cdot \ln x^2 dx = ?$$

$$x^2 = u \quad , \quad \frac{du}{dx} = 2x \quad , \quad dx = \frac{1}{2x}du$$

$$x = 1 \quad , \quad u = x^2 = 1$$

$$x = 2 \qquad u = x^2 = 4$$

$$\int_{1}^{2} 2x \ln x^2 dx = \int_{1}^{4} 2x \cdot \ln u \cdot \frac{1}{2x}du = \int_{1}^{4} \ln u du$$

$$= [u \cdot \ln u - u]_{1}^{4} = [4 \cdot \ln 4 - 4] - [1 \cdot \ln 1 - 1] = 2.545$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د قسمي کسروپواسطه دواقعي کسرد انتيګرال لاس ته راوړل که وغواړو چه د يوه واقعي کسر انتيګرال پيدا کړو نو لمړی يي قسمي کسرونه پيدا کوو بيا د قسمي کسرو انتيګرالونه پيدا کوو او جمع کوو يې.

لمړی مثال: $\int \frac{7x-12}{x^2-6x+8}$ محاسبه کړئ؟

$$\frac{7x-12}{x^2-6x+8}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-4}=\frac{A(x-4)+B(x-2)}{(x-2)(x-4)}$$
$$=\frac{Ax-4A+Bx-2B}{(x-2)(x-4)}$$
$$\frac{7x-12}{x^2-6x+8}=\frac{(A+B)x-4A-2B}{(x-2)(x-4)}$$
$$7x-12=(A+B)x-4A-2B$$
$$A+B=7$$
$$-4A-2B=-12 \Rightarrow 4A+2B=12 \cdots\cdots\cdots 1$$
$$A=7-B \Longrightarrow 4(7-B)+2B=12$$
$$28-4B+2B=12$$
$$-2B=12-28=-16 \Rightarrow B=8$$
$$A=7-B=7-8=-1 \Rightarrow A=-1$$
$$\frac{7x-12}{x^2-6x+8}=-\frac{1}{x-2}+\frac{8}{x-4}$$
$$\int \frac{7x-12}{x^2-6x+8}dx=\int \frac{-1}{x-2}dx+\int \frac{8}{x-4}dx$$
$$\int \frac{7x-12}{x^2-6x+8}dx=-\int \frac{1}{x-2}dx+8\int \frac{1}{x-4}dx$$
$$=-\ln|x-2|+8\ln|x-4|+C=\ln(x-2)^{-1}+\ln(x-4)^8+C$$
$$=\ln\{(x-2)^{-1}\cdot(x-4)^8\}=\ln\left\{\frac{(x-4)^8}{x-2}\right\}+C$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د منحني سطحی د مساحت پیدا کول

Acconting area of curve plane

هغه مستوي چه د $(X\acute{X})$ د محور او د $Y = F(x)$ د تابع د ګراف او $x = a$ او $x = b$ د کربښو تر منځ محصور وي مساحت يي دلاندی فارمول پواسطه پیدا کیږي.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

که $y = f(x)$ تابع د $[a, b]$ په انټروال کی مثبت اومتمادي وي يعنی $0 \geq y = f(x)$ وي پدی صورت کی د $f(x)$دتابع ګراف د $(X\acute{X})$ دمحورپه پورتني طرف کی پروت دی او که $0 \leq y = f(x)$ وي پدی صورت کی د $f(x)$ تابع ګراف د $(X\acute{X})$ دمحورپه کښتني طرف کی پروت دی.

لمړی مثال: د $x = 4 - y^2$ د تابع د ګراف او د $(Y\acute{Y})$ د محور تر منځ د سطحی مساحت پیدا کړئ؟

د تابع د ګراف بحراني ټکی او د $(Y\acute{Y})$ د محور سره دتابع د ګراف د تقاطع ټکي پیدا کوو.

$x = 4 - y^2$

$\acute{x} = 0 - 2y = -2y$

په بحراني نقطه دتابع مشتق صفر وي نو $\acute{x} = 0$ نو:

$-2y = 0 \Rightarrow y = 0$

د (y) قیمت په اوله معادله کی وضع کوود (x) قیمت لاس ته راځي

$x = 4 - y^2 = 4 - (0)^2 = 4 - 0 = 4$
$x = 4$

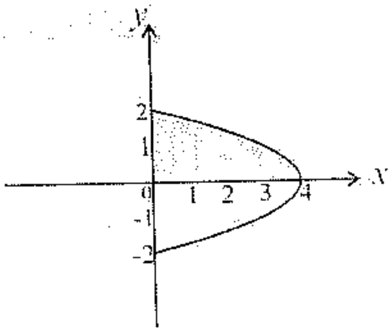
$A(4,0)$ نقطه بحراني نقطه ده.د $Y\acute{Y}$ دمحور سره دتابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $x = 0$ فرضوو او د yقیمت لاس ته راځي

$x = 0$

$4 - y^2 = 0 \quad \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2$

$B(0,2) \qquad C(0, -2)$

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$A = \int_{-2}^{2} (4 - Y^2)dy = 2\int_{0}^{2} (4 - y^2)\,dy = 2\left[4y - \frac{y^3}{3}\right]_0^2$$

$$A = 2\left[\left(4 \cdot 2 - \frac{2^3}{3}\right) - 0\right] = 2\left(8 - \frac{8}{3}\right) = 2\left(\frac{24 - 8}{3}\right) = 2\left(\frac{16}{3}\right) = \frac{32}{3}$$

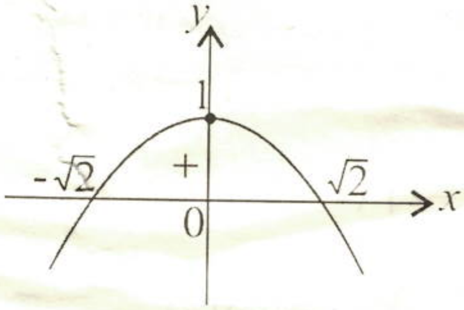
دویم مثال: د $(X\acute{X})$ دمحور او $Y = 1 - \frac{1}{2}x^2$ دتابع دګراف پواسطه د محصورې سطحې مساحت محاسبه کړئ؟

$$y = 1 - \frac{1}{2}x^2$$
$$\acute{y} = -x$$
$$\acute{y} = 0 \qquad x = 0$$
$$y = 1 - \frac{1}{2}(0)^2 = 1$$

$A(0,1)$ بحراني نقطه ده. اوس د $(X\acute{X})$ دمحور سره د تابع دګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو. $Y = 0$ فرضوو.

$$y = 0$$
$$1 - \frac{1}{2}x^2 = 0 \qquad \Rightarrow -\frac{1}{2}x^2 = -1 \qquad \Rightarrow x^2 = 2$$
$$x = \pm\sqrt{2}$$
$$(\sqrt{2}, 0) \qquad\qquad C(-\sqrt{2}, 0)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$A=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)dx=2\int_{0}^{\sqrt{2}}\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)dx=2\left(\left[x-\frac{1}{6}x^3\right]_0^{\sqrt{2}}\right)$$

$$A=2\left(\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}^3}{6}-0\right)=2\left(\frac{6\sqrt{2}-\left(\sqrt{2}\right)^3}{6}\right)=2\left(\frac{6\sqrt{2}-2\sqrt{2}}{6}\right)=\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

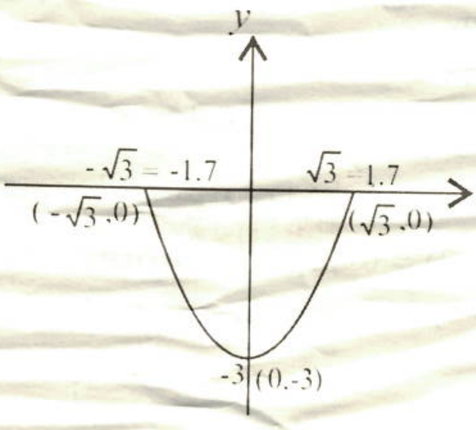
دریم مثال: د هغه سطحې مساحت پیدا کړئ چه د $y=x^2-3$ د تابع دګراف او $(X\acute{X})$ دمحور تر منځ محصوروي.

حل:

$y=x^2-3 \quad , \quad \acute{y}=2x$
$\acute{y}=0 \quad \therefore \; x=0$
$y=0^2-3=-3 \quad , \quad A(0,-3)$
$y=0$

$$x^2-3=0\Rightarrow x^2=3\Longrightarrow x=\pm\sqrt{3}$$

$B(\sqrt{3},0) \qquad C(-\sqrt{3},0)$



(c) ketabton.com: The Digital Library

ځرنګه چه ګراف يې د $y = x^2 - 3$ د محور لاندې واقع دی نو انتیګرال یې منفي دی. او ځرنګه چه $\sqrt{3}$ او $-\sqrt{3}$ متناظر دي نو مساحت یې د سر حداتو دنیمايي څخه پیدا کوو.

$$A = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (x^2 - 3)dx = -2\int_{0}^{\sqrt{3}} (x^2 - 3)$$

$$= -2\left(\int_{0}^{\sqrt{3}} x^2dx - 3\int_{0}^{\sqrt{3}} dx\right) = -2\left(\left[\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{\sqrt{3}} - [3x]_{0}^{\sqrt{3}}\right)$$

$$= -2\left(\frac{1}{3}\left[\sqrt{3}^3 - 0\right] - 3[\sqrt{3} - 0]\right) = -2\left(\frac{1}{3}(\sqrt{3})^3 - 3\sqrt{3}\right)$$

$$= -\frac{2}{3}(\sqrt{3})^3 + 6\sqrt{3} = \frac{2}{3}(1.7)^3 + 6(1.7)$$

$$= -\frac{2}{3}(4.913) + 10.2 = \frac{9.826}{3} + 10.2 = -3.2753 + 10.2 = 6.9247$$

ځلورم مثال: د $y = x^2 - 3x$ د تابع ګراف رسم کړئ او د منحني او $(X\acute{X})$ دمحور تر منځ فاصله پیدا کړئ؟

$$y = x^2 - 3x$$
$$\acute{y} = 2x - 3 \ \Rightarrow \acute{y} = 0$$
$$2x - 3 = 0 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$
$$y = x^2 - 3x = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} = \frac{9 - 18}{4} = \frac{-9}{4}$$

$A\left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{4}\right)$ بحراني نقطه

ځرنګه چه $y'' = 2 > 0$ دی نو بحراني نقطه اصغري نقطه ده.

د $(X\acute{X})$ دمحور سره د ګراف د تقاطع د نقطې د پیدا کولو لپاره $y = 0$ فرضوو

$$x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x - 3) = 0 \ \ , x_1 = 0 \quad , O(0,0)$$
$$x - 3 = 0 \ \Rightarrow x = 3 \quad , \ B(3,0)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A = A_1 - A_2 + A_3 = \int_{-1}^{0}(x^2 - 3x)dx - \int_{0}^{3}(x^2 - 3x)dx + \int_{3}^{4}(x^2 - 3x)dx$$

$$A = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^{0} - \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2\right]_{0}^{3} + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2\right]_{3}^{4}$$

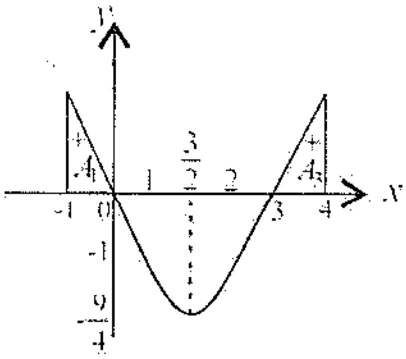
$$A = \left[\left(\frac{1}{3}\cdot 0 - \frac{3}{2}\cdot 0\right) - \left\{\frac{1}{3}\cdot(-1)^3 - \frac{3}{2}(-1)^2\right\}\right] - \left[\left(\frac{1}{3}\cdot 3^3 - \frac{3}{2}\cdot 3^2\right) - \left(\frac{1}{3}\cdot 0 - \frac{3}{2}\cdot 0\right)\right] + \left[\frac{1}{3}\cdot(4)^3 - \frac{3}{2}\cdot 4^2 - \left\{\frac{1}{3}(3)^3 - \frac{3}{2}\cdot 3^2\right\}\right]$$

$$= -\left(-\frac{1}{3} - \frac{3}{2}\right) - \left(\frac{1}{3}\cdot 27 - \frac{3}{2}\cdot 9\right) + \left\{\left(\frac{1}{3}\cdot 64 - \frac{3}{2}\cdot 16\right) - \left(\frac{1}{3}\cdot 27 - \frac{3}{2}\cdot 9\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{3}{2} - \frac{27}{3} + \frac{27}{2} + \frac{64}{3} - \frac{48}{2} - \frac{27}{3} + \frac{27}{2}$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{27}{3} + \frac{64}{3} - \frac{27}{3} + \frac{3}{2} + \frac{27}{2} - \frac{48}{2} + \frac{27}{2}$$

$$= \frac{1 - 27 + 64 - 27}{3} + \frac{3 + 27 - 48 + 27}{2} = \frac{11}{3} + \frac{9}{2} = \frac{22 + 27}{6} = \frac{49}{6}$$



پنځم مثال: د $y = x^2 - 2x$ د منحني او $(X\acute{X})$ د محور تر منځ مساحت په داسې حال کې پیدا کړئ چه د $x = 2$ او $x = -1$ تر منځ واقع وي.

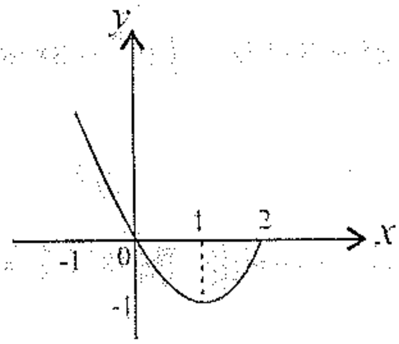
$\acute{y} = (x^2 - 2x)' = 2x - 2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = 1$

$y = x^2 - 2x = 1^2 - 2\cdot 1 = 1 - 2 = -1$

$A(-1,1)$ بحراني نقطه

د $(X\acute{X})$ د محور سره د ګراف د تقاطع تقطې پیدا کوو $y = 0$ فرضوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library



$x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0$
$x_1 = 0 \qquad , \quad O(0,0)$
$X - 2 = 0 \Rightarrow X = 2 \quad , B(2,0)$

منحني د [−1,2] په انټروال کې د مبداء څخه تيريږي يوه برخه يې د [−1,0] په انټروال کې د ($X\acute{X}$) د محور په پورتني برخه کې پرته ده او انټروال يې مثبت دي. بله برخه يې د [0,2] په انټروال کې د ($X\acute{X}$) دمحور په لاندينې برخه کې واقع دی او انټروال يې منفي دي.

$$A = \int_{-1}^{0}(x^2 - 2x)dx - \int_{0}^{2}(x^2 - 2x) = \left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_{-1}^{0} - \left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_{0}^{2}$$
$$= \left\{0 - \left(-\frac{1}{3} - 1\right)\right\} - \left\{\left(\frac{8}{3} - 4\right) - 0\right\} = -\left(-\frac{1}{3} - 1\right) - \left(\frac{8}{3} - 4\right)$$
$$= -\left(\frac{-1-3}{3}\right) - \left(\frac{8-12}{3}\right)$$
$$= -\left(\frac{-4}{3}\right) - \left(\frac{-4}{3}\right) = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

د هغه سطحو دمساحت محاسبه چه دمنحني خطو پواسطه محاصره وي:

Accounting of area bounded by tow curves

د $y_1 = f(x)$ او $g(x)$ $y_2 =$ دوه منحنيګانو پواسطه د محصور شوی سطحی دمحاسبی لپاره که $f(x) > g(x)$ وي يعنی که $f(x)$ تابع د $g(x)$ دتابع د پاسه واقع وي د پاسنی تابع د انتيګرال څخه د لاندينی تابع انتيګرال منفي کوو د محصور شوي سطحی مساحت لاس ته راځي.

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]d = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

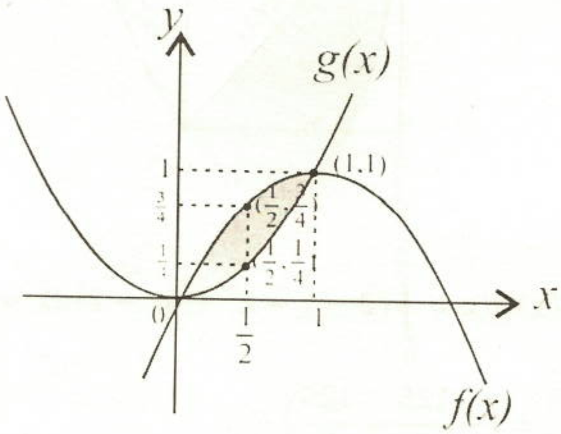
که د $G(x)$ تابع ګراف د $f(x)$ تابع د ګراف د پاسه واقع وي نود محصورشوی سطحې مساحت په لاندی ډول پیدا کیږي.

$$A = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx = \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx$$

لومړی مثال: د $f(x) = 2x - x^2$ او $g(x) = x^2$ منحنیګانو د ګرافونو تر منځ د سطحې مساحت پیدا کړئ؟

حل:- اول دمنحنیګانودتقاطع ټکی پیدا کوو.

$f(x) = 2x - x^2$
$g(x) = x^2$
$f(x) = g(x) \Rightarrow 2x - x^2 = x^2 \Rightarrow$
$2x - x^2 - x^2 = 0 \Rightarrow 2x - 2x^2 = 0$
$2x(1 - x) = 0$
$2x = 0 \Rightarrow x_1 = 0$
$1 - x = 0 \Rightarrow 1 = x \Rightarrow x = 1$



د منحنیګانو د تقاطع نقطې عبارت دي $A(1,1)$ او $O(0,0)$ دي.

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_0^1 (2x - x^2 - x^2)dx = \int_0^1 (2x - 2x^2)dx =$$

$$\left[x^2 - \frac{2x^3}{3}\right]_0^1 = \left(1 - \frac{2}{3}\right) - 0 = \frac{3-2}{3} = \frac{1}{3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال :د $f(x) = x^2 - 6x + 2$ او $g(x) = 2 - x$ تابعګانو د ګرافونو تر منځ د سطحې مساحت پیدا کړئ؟

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 6x + 2 \\ g(x) &= 2 - x \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(x) = g(x)$$

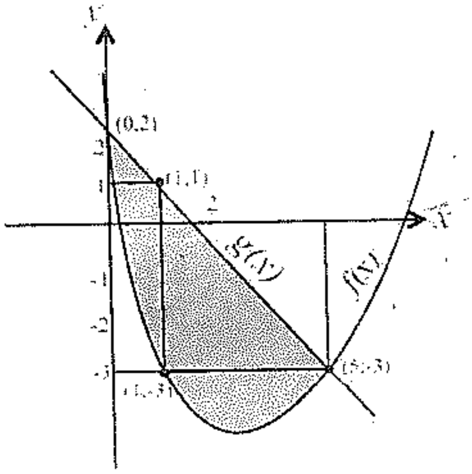
$$x^2 - 6x + 2 = 2 - x \Rightarrow x^2 - 6x + 2 - 2 + x = 0 \Rightarrow x^2 - 5x = 0$$

$$x(x-5) = 0 \quad , \quad x_1 = 0$$

$$x - 5 = 0 \Rightarrow x_2 = 5$$

$$y_1 = 2, \quad O(0,2)$$

$$y_2 = -3 \quad A(5,-3)$$



$$A = \int_a^b \{g(x) - f(x)\}dx = \int_0^5 (2 - x - x^2 + 6x - 2)dx = \int_0^5 (-x^2 + 5x)dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + 5 \cdot \frac{x^2}{2}\right]_0^5 = \left(-\frac{125}{3} + \frac{125}{2}\right) - 0$$

$$= -\frac{125}{3} + \frac{125}{2} = \frac{-250 + 375}{6} = \frac{125}{6}$$

دریم مثال:- د $f(x) = -x^2 + 4x + 2$ او $g(x) = x^2 - 2x + 2$ تابعګانو د ګرافونو تر منځ د سطحې مساحت محاسبه کړئ؟

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= -x^2 + 4x + 2 \\ g(x) &= x^2 - 2x + 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(x) = g(x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$-x^2 + 4x + 2 = x^2 - 2x + 2$
$-x^2 + 4x + 2 - x^2 + 2x - 2 = 0$
$-2x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x(-2x + 6) = 0$
$\Rightarrow x_1 = 0 \quad , \quad -2x + 6 = 0 \quad \Rightarrow -2x = -6 \Rightarrow x = 3$

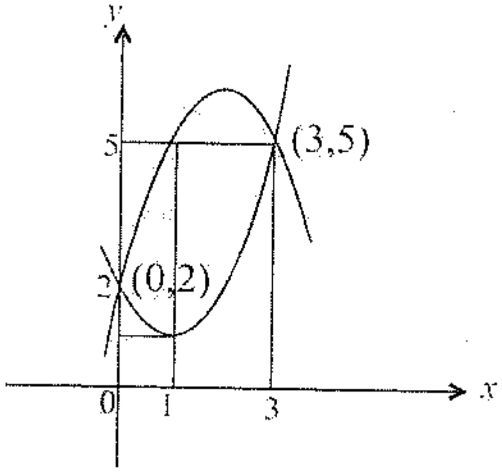
د منحنيګانود تقاطع نقطې عبارت دي $B(3,5) \quad , \quad A(0,2)$

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$

$$= \int_0^3 (-x^2 + 4x + 2)dx - \int_0^3 (x^2 - 2x + 2)dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + 4 \cdot \frac{x^2}{2} + 2x\right]_0^3 - \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + 2x\right]_0^3$$

$$= -\frac{27}{3} + 18 + 6 - 0 - \frac{27}{3} + 9 - 6 + 0 = 9$$

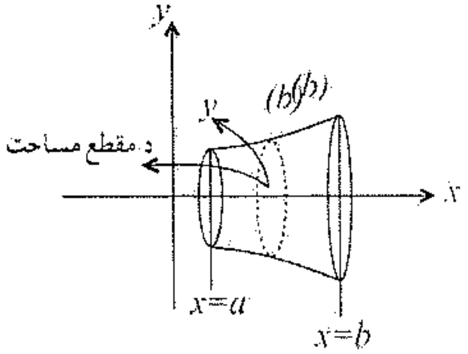


(c) ketabton.com: The Digital Library

د کروي اجسامو د حجمو محاسبه:

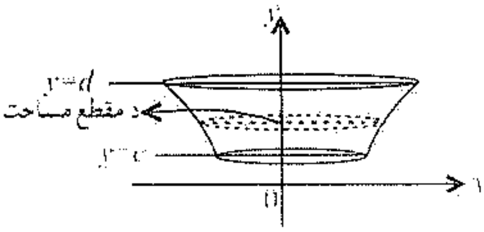
Accounting volume of Spherical things

که د $y = f(x)$ د تابع گراف منحني وي او د $x = a$ او $x = b$ د خطو منځ کې محصور وي د منحني خط د دوران په نتیجه کې استوانه لاس ته راځي چه ارتفاع يي $\Delta x = b - a$ ده د استوانی مقاطع دايروي سطحی دي چه مساحتونه يي $A_{(x)} = \pi r^2$ دي او د $(Y\acute{Y})$ د محور سره موازي دي شعاع يي $y = r$ ده د حجم فارمول يي د ريمان د مجموعی سره سم په لاندی ډول دی.



$$v = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} A_{(x)}\Delta x = \int_a^b \pi r^2 dx = \int_a^b \pi r^2 dy = \int_a^b \pi\{f(x)\}^2$$

که $x = f(y)$ تابع د منحني گراف د $y = c$ او $y = d$ کرښو ترمنځ محصور وي مساحت يي نظر د $(Y\acute{Y})$ محور ته د $A_{(Y)} = \pi r^2$ فارمول دی ارتفاع يي $\Delta y = d - c$ ده او شعاع يي $y = r$ ده حجم يي د لاندی فارمول پواسطه پيدا کيږي.



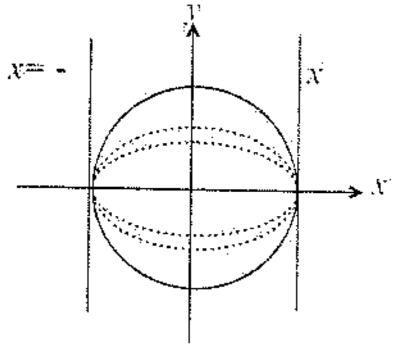
$$v = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} A_{(y)}\Delta y = \int_a^b \pi r^2 dy = \int_a^b \pi y^2 dy = \int_a^b \pi\{f(y)\}^2 dy$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د انتیګرال پواسطه د کری د حجم پیدا کول

که نیمه دایره د قطر په اطراف وڅرخیږي کره لاس ته راځي. د دایری معادله دا $x^2 + y^2 = r^2$ ده د نیمی کری حجم د دایری د معادلی څخه پیدا کوو او دوه چنده کوو یې د کری حجم لاس ته راځي.

$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$y^2 = r^2 - x^2$$



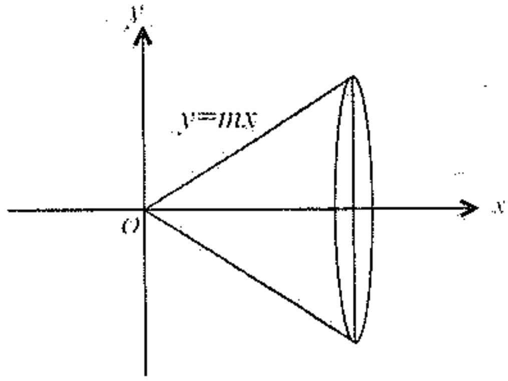
$$V = \int_{-r}^{r} \pi y^2 dx = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\, dx = 2\pi \int_{0}^{r} (r^2 - x^2)\, dx = 2\pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_0^r$$
$$= 2\pi \left[r^3 - \frac{r^3}{3}\right] - 0 = 2\pi \left(\frac{3r^3 - r^3}{3}\right) = 2\pi \left(\frac{2r^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi r^3$$
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

د انتیګرال پواسطه د مخروط دحجم پیدا کول

که د مستقیم د یوانجام نقطه ثابته وي او مستقیم خط دهمدغه ثابتی نقطی په شاوخوا دوران وکړي مخروط لاس ته راځي نو

$$V = \int_{a}^{b} \pi y^2 dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$V = \int_a^b \pi m^2 x^2 dx = \pi m^2 \int_a^b x^2 dx$$

$$y = mx$$

$$= \pi m^2 \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \pi m^2 \left(\frac{h^3}{3}\right) = \frac{\pi h}{3}(mh)^2$$

د مخروط حجم $= V = \frac{\pi h}{3}(mh)^2$

د پورته شکل څخه معلوميږي چه د مخروط قاعده دايروي ده او شعاع يي د $(Y\acute{Y})$ دمحور سره موازي ده يعنی $y//r$ اود مخروط ارتفاع (h) ده چه د (x) په محور باندی منطبق ده يعنی $(x = h)$نود $y = mx$په رابطه کی يي قيمت ليکو:

$$y = mx \Rightarrow r = mh$$

$$V = \frac{\pi h}{3} r^2 = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

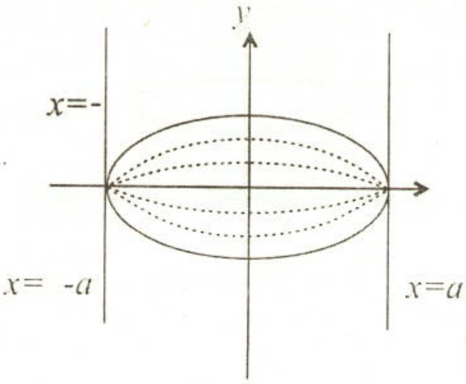
د انتيګرال پواسطه دبيضوي دحجم پيدا کول:

هغه بيضوي چه مرکز يي د وضعيه کميتونو په ميداء واقع وي معادله يي عبارت ده له:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

دنيمی بيضوي حجم پيدا کوو او دوه چنده کوو يي د ټولی بيضوي حجم لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\frac{y^2}{a^2}=1-\frac{x^2}{b^2}\Rightarrow y^2=b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2$$

$$V=\int_{-a}^{a}\pi y^2dx=\pi\int_{-a}^{a}\left[b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2\right]dx$$

$$=2\pi\int_{0}^{a}\left[b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2\right]dx=2\pi\left[b^2x-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x^3}{3}\right]_0^a$$

$$=2\pi\left[\left(b^2a-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{a^3}{3}\right)-0\right]=2\pi\left[b^2a-\frac{b^2a}{3}\right]$$

$$=2\pi\left[\frac{3ab^2-ab^2}{3}\right]=2\pi\left[\frac{2ab^2}{3}\right]$$

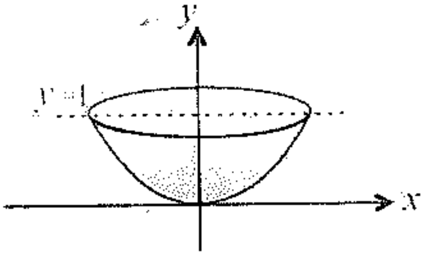
$$V=\frac{4}{3}\pi ab^2$$

که چېرته د الپس محراقونه د $(Y\acute{Y})$ د محور پر مخ پراته وي حجم يي د لاندی فارمول پواسطه پيدا کيږي.

$$V=\frac{4}{3}\pi a^2b$$

لمړی مثال: د جسم حجم چه د $y=x^2$ او $y=1$ کرښی تر منځ پروت وي او د $(Y\acute{Y})$ د محور په شاوخوا دوران کوي پيدا کړئ؟

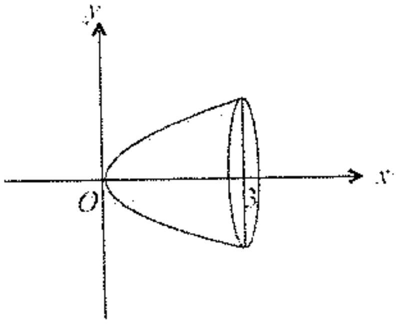
(c) ketabton.com: The Digital Library



$$V=\int_a^b \pi x^2 dy=\pi\int_0^1 y dy$$

$$=\frac{1}{2}\pi y^2\Big|_0^1=\frac{1}{2}\pi=\frac{\pi}{2}$$

دویم مثال: د $y=\sqrt{2x}$ او $y=3$ تر منځ د څرخول شوي جسم مساحت پیدا کړئ؟



$$V=\int_a^b \pi y^2 dx=\int_0^3 \pi\left(\sqrt{2x}\right)^2 dx=\pi\int_0^3\left[\sqrt{2x}\right]^2 dx=\pi\int_0^3 2x dx$$

$$V=2\pi\int_0^3 x dx=2\pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3=9\pi$$

تبصره:

که $y_1=f(x)$ او $y_2=g(x)$ تابعګانې $[a,b]$ په انټروال کې متمادي وي دهغه جسم حجم چه د $f(x)$ او $g(x)$ منحنیګانو او د $x=a$ او $x=b$ کرښو تر منځ دوران کوي د لاندې فارمول پواسطه لاس ته راځي.

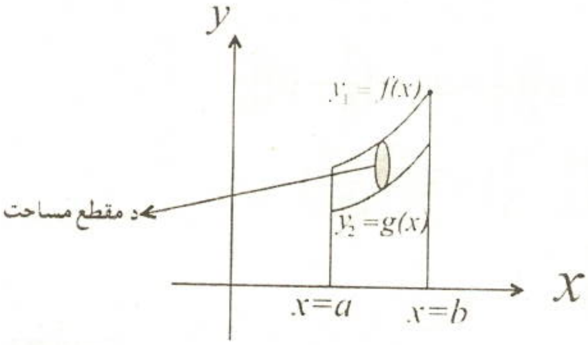
$\Delta x =$ د استوانې ارتفاع

$A(x)=\big($استوانې د مقطع مساحت$\big)=\pi y_1-\pi y_2=\pi(y_1-y_2)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هغه استوانی د جحم د فارمول پیدا کول چه د $f(x)$ دتابع گراف د $g(x)$ د تابع د گراف

ښخه پورته پروت وي

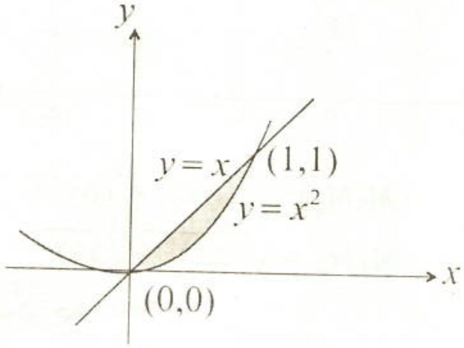


$$V = \int_a^b \pi({y_1}^2 - {y_2}^2)dx = \pi \int_a^b ({y_1}^2 - {y_2}^2)dx$$

د هغه استوانی دحجم دفارمول پیدا کول چه د $g(x)$ دتابع گراف د $f(x)$ دتابع د گراف ښخه پورته واقع وي.

$$V = \int_a^b \pi({y_2}^2 - {y_1}^2)dx = \pi \int_a^b ({y_2}^2 - {y_1}^2)dx$$

مثال: د هغه جسم حجم پیدا کړئ چه د $y = x^2$ د منحني او $y = x$ د کربنی تر منځ د (x) د محور په شاوخوا تر منځ د دوران ښخه لاس ته راځي.



$$\left.\begin{array}{l} y_1 = f(x) = x^2 \\ y_2 = g(x) = x \end{array}\right\} \Rightarrow y_2 > y_1 \quad , \quad g(x) > f(x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \int_a^b \pi({y_2}^2 - {y_1}^2)dx = \int_0^1 \pi(x^2 - (-x^2)^2)dx = \pi \int_0^1 (x^2 - x^4)\, dx$$

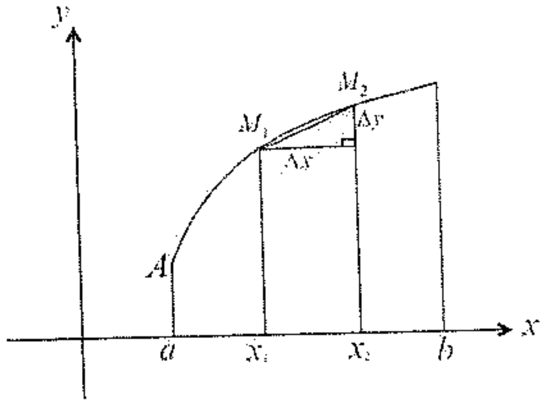
$$= \pi \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \pi \left[\left(\frac{1}{3} - 0\right) - \left(\frac{1}{5} - 0\right)\right]$$

$$= \pi \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right] = \pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \pi \left(\frac{5-3}{15}\right)$$

$$V = \pi \left(\frac{2}{15}\right) = \frac{2\pi}{15}$$

د قوس د اوږدوالي محاسبه:

د قوس د AM_1 او M_1M_2 او M_2B په دری ټوټو ویشو د A, M_1, M_2 اود B د نقطو څخه په $(X\acute{X})$ عمودونه رسموو بیا M_1 د M_2 سره په یوه روښانه خط نښلوود M_1 څخه په M_2X_2 عمود رسمووا و دتقاطع نقطه په H ښيو او $\Delta x = M_1H$ او $M_2H = \Delta y$ وضع کوودفیثاغورث دقضيي سره لیکو



$$(M_1M_2)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

$$M_1M_2 = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

د مشتق د فارمول سره سم لیکو چه:

$$\acute{f}(x) = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad \acute{g}(x) = \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$$\Delta x = \acute{f}(x)\Delta t \qquad \Delta y = \acute{g}(x)\Delta t$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$M_1M_2 = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{\left(\acute{f}(t)\Delta t\right)^2 + (\acute{g}(t)\Delta t)^2}$$

$$M_1M_2 = \sqrt{\left[\acute{f}(t)\right]^2 + [\acute{g}(t)]^2} \cdot \Delta t$$

د ریمان د مجموعې څخه لیکو چه:

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\acute{f}(t)\right)^2 + \left(\acute{f}(t)\right)^2} \cdot \Delta t$$

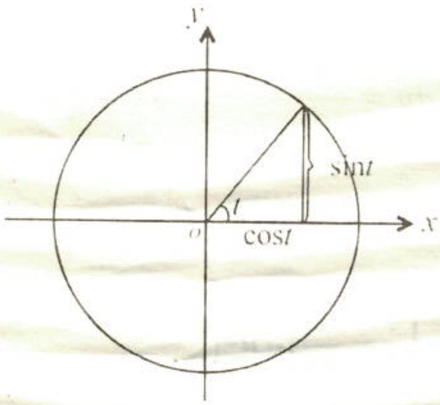
لومړی مثال: د $x^2 + y^2 = r^2$ دایرې محیط محاسبه کړئ؟

د دایرې پارامتریک معادله په لاندې ډول ده.

$$x = r\cos t$$
$$y = r\sin t$$

که $0 \le t \le \pi$ نو د دایرې نیمایې محیط پیدا کړئ؟

$$P = \int_0^\pi \sqrt{\acute{x}^2 + \acute{y}^2} \cdot dt$$



$$P = \int_0^\pi \sqrt{(-r\sin t)^2 + (r\cos t)^2} \cdot dt$$

$$P = \int_0^\pi \sqrt{r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t} \cdot dt = \int_0^\pi \sqrt{r^2(\sin^2 t + \cos^2 t)} \cdot dt = \int_0^\pi \sqrt{r^2} \cdot dt$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$P = [rt]_0^{\pi} = (r \cdot \pi - r \cdot 0) = \pi r$ د دايرې نيمايي محيط

$2\pi r =$ د دايرې مکمل محيط

تبصره :

1- د $y = f(x)$ منحني معادله په $a \le x \le b$ انټروال کی راکړشوی ده د (x) دپارامتر په پام کی نیولو سره د منحني د قوس اوږدوالی داسی محاسبه کوو.

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} \cdot dx$$

مثال: د $y = f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ دمنحني دقوس اوږدوالی په $0 \le x \le 4$ انټروال کی پیدا کړئ؟

$$f(x) = x^{\frac{3}{2}} \qquad , \quad f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} \cdot dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2} \cdot dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} \cdot dx$$

$$u = 1 + \frac{9}{4}x \qquad , du = \frac{9}{4dx} \qquad , \quad dx = \frac{4}{9}du$$

$$= \int_0^4 \sqrt{u}\frac{4}{9}du \Rightarrow$$

$$= \frac{4}{9}\int_0^4 u^{\frac{1}{2}}du = \frac{4}{9}\left[\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_0^4 = \frac{8}{27}\left[\sqrt{u^3}\right]_0^4$$

$$= \frac{8}{27}\left[\sqrt{\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^3}\right]_0^4 = \frac{8}{27}\left[\sqrt{\left(1 + \frac{9}{4} \cdot 4\right)^3} - 1\right]$$

$$L = \frac{8}{27}\left(\sqrt{10^3} - 1\right) = \frac{8}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- د $x = f(y)$ منحني په $a \le y \le b$ انټروال کې راکړ شوی دي د (y) دپارامتر په پام کې نیولو سره لیکو:

$$L = \int_a^b \sqrt{f'^2(y) + 1} \cdot dy$$

مثال: د $x = f(y) = y^{\frac{3}{2}}$ دمنحني د قوس اوږدوالي د $[1,4]$ په انټروال کې حساب کړئ؟

$$f(y) = y^{\frac{3}{2}} \quad , \quad f'(y) = \frac{3}{2} y^{\frac{1}{2}}$$

$$L = \int_a^b \sqrt{f'^2(y) + 1} \cdot dy = \int_1^4 \sqrt{\left(\frac{3}{2} \cdot y^{\frac{1}{2}}\right)^2 + 1} \cdot dy$$

$$L = \int_1^4 \sqrt{\frac{9}{4} y + 1} \cdot dy = \int_1^4 \sqrt{u} \cdot \frac{4}{9} du \quad , \quad u = \frac{9}{4} y + 1 \Rightarrow du = \frac{9}{4} dy$$

$$L = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} \left[u^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \frac{8}{27} \left[\sqrt{\left(\frac{9}{4} y + 1\right)^3}\right]_1^4 \quad , \quad dy = \frac{4}{9} du$$

$$L = \frac{8}{27} \left[\sqrt{1000} - \sqrt{\left(\frac{13}{4}\right)^3}\right] = \frac{8}{27} \left[10\sqrt{10} - \sqrt{\frac{2197}{64}}\right]$$

تفاضلي معادلې *(Differential Equations)*:

هر هغه مساوات چه د یوی تابع مشتق او یویاڅو مستقل اوغیرمستقل متحوله پکی موجود وي تفاضلي معادلی بلل کیږي. لکه

$$\frac{dy}{dx} = 3x$$

$$(4x + y)dx + xdy = 0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dv}{dx} = e^x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 9y = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دغه تفاضلي معادلی ته معمولي تفاضلي معادلې هم وايي.
که په يوه تفاضلي معادله کې ديوه غيرمستقل متحول معمولي مشتق نظرمستقل متحول ته
ونيول شي دغسې تفاضلي معادلې ته معمولي تفاضلي معادله وايي.

$$\frac{dy}{dx} = 3xy \quad , \ (4x + y)dx + xdy = 0 \quad , \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{du}{dx} = e^x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 9x = 0$$

که د مستقل متحول مشتق نظر زياتومستقلومتحولو ته ونيول شي دغسې ډيفرينشيال
معادلی ته جزئي يا يوطرفه ډيفرينشيال معادلې وايي. لکه:

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 8u$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 5\frac{\partial u}{\partial y}$$

د ديفرينشيال ترتيب:

ديوی افادی دمشتق نيولو شمېرې ته د ديفرينشيال معادلی ترتيب وايي.

$$\frac{d^4y}{dx^4} - 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^5 + 3y = 4x$$

څرنګه چه دافادی څلورم مشتق نيول شوی دی نو د ديفرينشيال ترتيب (4) ده مشتق نيول د
(d) دتوان څخه معلوميږي

د ديفرينشيال معادلی درجه :

د مشتق دلوړ ترتيب توان ته د ديفرينشيال معادلی درجه وايي.
که د ديفرينشيال معادلی توان کسري وي. توان يي بايد په صحيح عدد بدل شي.

$$(y''')^{\frac{2}{3}} = 4 + y'$$

$$\left\{(y''')^{\frac{2}{3}}\right\}^3 = (4 + y')^2 \Rightarrow (y''')^2 = (4 + y')^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پورتني معادلې درجه (2) ده:

د $\sqrt{4+y'}$ = y''' يا $\sqrt{5x+3y}$ = y'''' معادلو درجه يوه ده.

کله کله يوه ديفرينشيال معادله درجه نلري. لکه:

$$6x^2\frac{d^3y}{dx^3}+(\sin x)\frac{d^2y}{dx^3}-\cos xy=0$$

دپورته معادلې درجه معلومه نه ده.ځکه چه د (y) نامعلومه تابع د $\cos xy$ ترانسندنتل تابع په مناقشه کې ده نو نه شو کولای چه دپولينوم په شکل يې وليکواونه يې مشتق پيدا کيږي.

خطي ديفرينشيال معادلې *Linear Differential equation*

هغه ديفرينشيال معادله ده چه د (y)اول مشتق يې موجود وي او د (y) او (y') دضرب حاصل يې معدوم وي. لکه:

$$2\frac{d^2y}{dx}+5\frac{dy}{dx}+3y=0$$

$$\frac{dy}{dx}-x^2y=3x$$

هغه ديفرينشيال معادلې چه خطي نه وي د غيرخطي معادلو يا $(non-linear\ equation)$ په نوم يادېږي. لکه:

$$\frac{d^3y}{dx^3}+4y^2=0 \qquad (\text{د } y \text{ توان } \neq 1)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}+7x\cdot\frac{dy}{dx}+12y=0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\sin xy=0$$

$$5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+2\frac{d^2y}{dx^2}+3y=0$$

ځرنګه چه د دغه معادلو پروګرام د لېسې د سويې څخه لوړ دی د عالي رياضياتو په مستقل کتاب کې د ديفريشيال معادلو د تفصيل تصميم شته د پاک الله جل جلاله څخه توفيق غواړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

احصائیه

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

اتلسم فصل

احصائیه

احصائیه په لغت کی سرشماری ته وایي.

او په اصطلاح احصائیه هغه علم دی چه د اجتماعي ژوند واقعات بررسي کوي. قاعده یي داده چه نفوس ، حاصلات،او نور شیان محاسبه کوي او بیایي د عددو په شکل لیکي.

احصائیه ډېر قسمونه لري لکه اقتصادي احصائیه ،اخلاقي احصائیه ،سیاسي احصائیه ،د نفوسو احصائیه او داسی نور.

داتا $Data$:

راټول شوو معلوماتو ته داتا وایي.

د اطلاعاتو د راټولو طریقه:

اطلاعات معمولاًپه څلورو طریقو راټولیږي

1- د پوښتنو پواسطه

2-دلیکنو پواسطه

3- د لیدنی پواسطه

4- د تجربې پواسطه

1- د پوښتنو پواسطه د اطلاعاتو راغونډول:

که وغواړو چه د یوی کورنی د عایداتو اطلاعات لاس ته راوړو نو که عایدات لږ وي کولای شو چه د شفاهي پوښتنو پواسطه اطلاعات لاس ته راوړو.

2- د لیکنی پواسطه د اطلاعاتو لاس ته راوړل:

که د یوی کورنی عایدات زیات وي په ذهن کی یي حفظ مشکل وي نودلیک پواسطه یي دعایداتو اطلاعات راټولوو اوپه راجستر کی یي لیکو.چه د عایداتو اطلاعات وساتل شي او د منځه لاړ نه شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

3- د لیدنې پواسطه د اطلاعاتو لاس ته راوړل:

که وغواړو چه د یوه شاګرد نمرو په هکله اطلاعات لاس ته راوړو. نو ښه طریقه داده چه نتایج یا اطلاعنامه وکتل شي او دنوموړي د نمرو په باب ښه معلومات حاصل شي.

4- د تجربې پواسطه داطلاعاتو لاس ته راوړل:

مثلاً دیوه مرکب جسم داجزاؤ د ښه معلوماتو لپاره تجربه ضرور ده.

ټولنه او جامعه *Population and sample*:

هغه خلک چه د اړتیا وړ اطلاعات ترې لاس ته راځي.جامعه بلل کیږي .

پوښتنه: د جامعې د هر تن څخه د اطلاعاتو لاس ته راوړلو ته پوښتنه وايي.

نمونه: دجامعې هغه برخه ده چه د جامعې د اطلاعاتو د لاس ته راوړلو لپاره ترې پوښتنې کیږي او د جامعې خواص پکې موجود وي .لکه یو موټې وریجې د یو ګدام وریجو نمونه ده.

تصادفي نمونه:

دیه یوه صفت موصوف شیانو څخه د یوې برخې ټاکل تصادفي نمونه ده.

دغه برخه باید لاندې درې صفات ولري.

1- د نمونې دغړي په توګه د یوه شي یا یوه کس ټاکل باید امکان ولري.

2- تر ټاکنې د مخه باید د نمونې د غړو په هکله قضاوت ناممکن وي.

3- د نمونې ټول غړي باید په نمونه کې برابره برخه ولري که نمونه تصادفي وي اوکه نه. مثلاً که د دولت په مامورینوکې د ښوونکو معاش دوه چنده شي نودا پېښه یوه تصادفي پېښه ده.

تصادفي متحول او ډولونه يي:

که په یوه ټولنه کې د یوې موضوع په باب راټول شوي معلومات یا اطلاعات د یوه غړي څخه بل غړي ته د انتقال وړ نه وي دغه موضوع یوه تصادفي اطلاع ده.

تصادفي متحول په دوه ډوله دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

1- کیفي تصادفي متحول
2- مقداري تصادفي متحول

1- کیفي تصادفي متحول:

چه معلومات یې په توصیفي ډول بیانیږي عدد ته ضرورت نه لري لکه د کارګرانو د سواد اندازه، یا د یوه کلي دیندار خلک

2- مقداري تصادفي متحول:

هغه متحول دی چه د اطلاعاتو معلومات یې په شمېر سره کیږي. او په دوه ډوله دی:

الف: متصل مقداري تصادفي متحول ب: منفصل مقداري تصادفي متحول

الف- متصل مقداري تصادفي متحول: چه معلومات یې په عدد سره کیږي او د پرلپسې عددو تر منځ یې عدد پیدا نه شي.

ب- منفصل مقداري تصادفي متحول: چه د پرلپسې عددو تر منځ یې عدد موجود وي.

دفریکونسي جدول *Table of frequncy*:

هغه جدول دی چه د داتاګانو معلومات پکې ترتیب شوی وي. که جدول په عمودي ډول ترتیب شوی وي دجدول د چپ طرف ستون داتاګانې یا معلومات ښیي او د ښي طرف ستون یې د داتاګانو فریکونسي ښیي لکه د رنګونو جدول چه چپ طرف رنګونه یا داتا ښیي او ښې طرف فریکونسي ښیي او که جدول په افقي ډول ترتیب شوی وي اول سطر د داتاګانو نمایندګي کوي او دویم سطر د هری داتا فریکونسي ښیي.

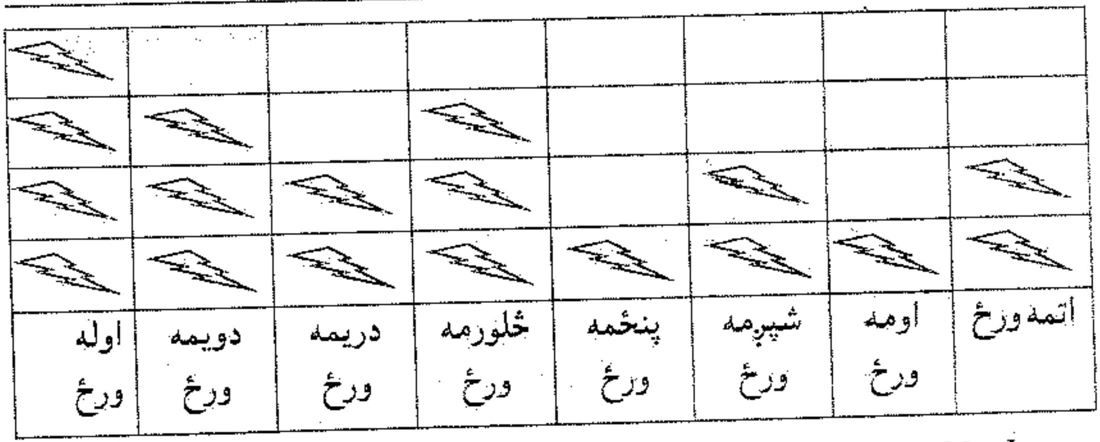
دکورنی غړي	1	2	3	4	5	6	7	8	مجموعه
دکورنی شمېر	4	7	9	8	6	2	3	1	40

انځوریز ګراف یا تصویري ګراف

که په راکړشوو معلوماتو باندی د ښې پېژندګلوی لپاره شکلونه یا سمبولونه په یوه جدول کی استعمال شي دغه ګراف د انځوریز ګراف په نوم یادیږي.

دشکل څخه معلوم کړئ چه دکاندار په کومه ورځ زیاتی اری خرڅی کړي دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



موډ *Mode*:

دراټول شوو معلوماتو زیاتې فریکونسۍ ته موډ وايي.

موډ د مالونو په خرڅولو کې ، د رایو په اچولو کې ، د امتحان په نمرو او داسې نورو شیانو کې استعمالیږي.

اوسط *Mean*:

د اعدادو د مجموعې او شمېر نسبت ته اوسط وايي.

$$x = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

مثال : یو دکاندار په اوله ورځ څلور کتابونه په دویمه ورځ پنځه کتابونه په دریمه ورځ شپږ کتابونه خرڅ کړي دي وواياست چه په اوسط ډول یې د ورځې څو کتابونه خرڅ کړیدي؟

$$x = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{4 + 5 + 6}{3} = \frac{15}{3} = 5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مجزا داتا ګانو د کثرت جدول:

هغه جدول دي چه په هره طبقه کی د داتاګانوشمېر راښیي.

مثلاً دیوه ټولګي د شاګردانو د ریاضي دمضمون نمری په یوه جدول کی لیکل شوي دي دا نمری په ګروپو ویشو او په هرګروپ کی دشاملو نمرو شمېرلیکو په دغه شمېرکی زیات عدد ته د داتا کثرت وایي . اودی جدول ته د داتاګانو دکثرت جدول وایي که په جدول کی د داتاګانو دکثرت عدد کوچنی یا صفر وي. دجدول جوړول فایده نه کوي.

42	25	30	35	48	67	59	51	58	78
62	77	48	56	75	78	72	71	56	43
54	53	57	63	72	70	42	55	47	20
59	40	62	12	75	26	76	72	63	56

جدول یي داسی جوړیږي:

نمري	شمېر
0 - 9	0
10 – 19	1
20 - 29	3
30 -39	2
40 -49	7
50 -59	11
60 -69	5
70 -79	11

د کثرت د جدول د اجزاؤ خاصیتونه:

په یوه طبقه کی کوچني عدد ته ټیټ سرحد اوغټ عدد ته لوړسرحد وایي.هغه داتاګانی چه په یوه طبقه کی راځي د طبقی د وسعت په نوم یادیږي.د یوی طبقی د وسعت دپیدا کولو دطبقی سرحدات یو دبل څخه منفي کوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لمړی طبقې وسعت	$50 - 0 = 50$
د دویمې طبقې وسعت	$60 - 50 = 10$

ډله ایز (تجمعي) کثرت:

د ټولو طبقود کثرتو مجموعی ته تجموعي کثرت وايي.

مثلاً که د کال د هری میاشتې د رخصتی ورځو ته کثرت ووایو نود ټول کال د رخصتیو مجموعه ډله ایز کثرت یا تجموعي کثرت دی.

نسبي کثرت:

د دوه ډلو د مطلق کثرت او تجموعي کثرت نسبت ته نسبي کثرت وايي.

$$\text{نسبي کثرت} = \frac{\text{مطلق کثرت}}{\text{د ټولو داتاگانو کثرت}}$$

مثال: په یوه ازموینه کې د دوه ټولګیو نمری په لاندی جدول کی راوړل شوي دي دا ټولګي دنمرو په لحاظ پرتله کړئ؟

د الف ټولګی	مطلق کثرت
10-30 ضعیف	6
30 -50 متوسط	10
50 -70 ښه	4

د ب ټولګی	مطلق کثرت
10 -30 ضعیف	19
30 -50 متوسط	25
50 -70 ښه	16

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: د دواړو ټولګیو نسبي کثرت پیدا کوو

د الف ټولګی	مطلق کثرت	نسبي کثرت	د نسبي کثرت فیصدي
10- 30	6	$\frac{6}{20}$	30%
30-50	10	$\frac{10}{20}$	50%
50- 70	4	$\frac{4}{20}$	20%

د ب ټولګی	مطلق کثرت	نسبي کثرت	د نسبي کثرت فیصدي
10-30	19	$\frac{19}{60}$	31.6%
30-50	25	$\frac{25}{60}$	41.6%
50=70	16	$\frac{16}{60}$	26.6%

میله اي ګراف

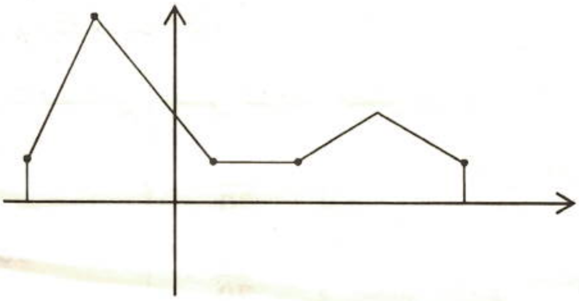
که د هری طبقی ګراف داسې رسم شي چه هر واحد یي یوه مربع وښودل شي اومربعګانی یو پر بل کېښودل شي دغه ګراف ته میله یي ګراف وایي.

مثلاً دخو کلونو دپنبی د حاصلاتو ګراف یا درنګونو ګراف چه هره مربع په یوه رنګ خوښوونکي دلالت وکړي.

دمنکسری کرښی ګراف:

داتا ګانی د ټکو پواسطه د وضعیه کمیتونو پر مخ وښیو که دغه نقطی په یوه استقامت نه وی او وصل یي کړو منکسر خط لاس ته راځي چه دغه ګراف ته د منکسری کرښی ګراف وایي

(c) ketabton.com: The Digital Library



د ګسسته یا غېر متصلو داتا ګانو اوسط:

داتاګانی جمع کوو اود داتاګانو په شمېر يي ویشود داتاګانو اوسط په لاس راځي.د داتاګانو دتکرار په صورت کی د مکرری داتاګانی په فریکونسي کی ضربوو او جمع کوو يي د داتاګانو په شمېر يي ویشود داتاګانو اوسط په لاس راځي.که د داتاګانولمړی ګروپ په x_1 او فریکونسي يي په f_1 وښیو او اوسط په $\acute{x}$ وښیو نود اوسط فارمول په لاندی ډول دی

$$\acute{x} = \frac{f_1x_1+f_2x_2+\cdots+f_nx_n}{f_1+f_2+\cdots+f_n} = \frac{f_1x_1+f_2x_2+\cdots+f_nx_n}{n}$$

مثال :د یوه شرکت دعایداتو اندازه په لاندی ډول ده.

دنده	د افغانیو په حساب میاشتنی عاید
رئیس	50000
دوه مرستیالان	40000
منشي	20000
دری متخصصان	30000
پنځه مامورین	25000
دوه خانه سامانه	10000

د شرکت مدیر وایي چه بایداوسط عایدباید 30000 وي ووایاست چه دادعا درسته ده

job	f	x	$f \times x$
رئیس	1	50000	$1 \times 50000 = 50000$
مرستیال	2	40000	$2 \times 40000 = 80000$

(c) ketabton.com: The Digital Library

منشي	1	20000	$1 \times 20000 = 20000$
متخصصین	3	30000	$3 \times 30000 = 90000$
مامورین	5	25000	$5 \times 25000 = 125000$
خانه سامان	2	10000	$2 \times 10000 = 20000$

د کارکوونکو شمېر $n = 1 + 2 + 1 + 3 + 5 + 2 = 14$

$$\acute{x} = \frac{50000 + 80000 + 20000 + 90000 + 125000 + 20000}{14}$$

$$= \frac{385000}{14} = 27500$$

د مدیر ادعا سمه نه ده .

د جدول په مرسته د نښتو داتاګانو اوسط:

د هم جنسه شیانو داتاګانو ته نښتی داتاګانی وایي.که د دغه داتاګانوفریکونسیانی مختلفی وي.هغه داتاګانی چه فریکونسیانی یي نژدی وي په یوه ګروپ کی لیکواو د ګسسته داتاګانو د فارمول په څېر یي اوسط پیداکوو.

مثال: یوه بزګر الوګانو په بوریو کی واچول اوویي ویل چه د بوریو وزن په اوسط ډول اوه منه دي.د ښاروالی له خوا بوری بیا وتلل شولی چه نتیجه یي په لاندی جدول کی درج ده.

د بوریو شمېر	د هری بوری وزن
11	6 - 6.5
14	6.5 - 7
12	7 - 7.5
8	7.5 - 8

د هر ګروپ اوسط د بوریو په شمېر کی ضربوو.اوسط یي پیدا کوو.

دبوریو شمېر	دبوریو وزن
11	6.25

(c) ketabton.com: The Digital Library

6.75	14
7.25	12
7.75	8

$x = 6.25 \times 11 + 6.75 \times 14 + 7.25 \times 12 + 7.75 \times 8$ د بوريووزن

$x = 68.75 + 94.5 + 87 + 62 = 312.25$

$n = 11 + 14 + 12 + 8 = 45$ د بوريو شمېر

$\acute{x} = \frac{312.25}{45} = 6.93\overline{8}$ په اوسط ډول د بوريو وزن

د داتاګانو د ګېډۍ کولو طريقه

که د داتاګانو د اعضاؤ شمېر سره نژدې ؤ کولای شو چه د داتاګانو څخه ګېډۍ جوړه کړو.

لکه:

115 140 118 120 128 143 117 127

115 − 120

120 − 128

128 − 143

وسعت:

د لوئي داتا او کوچنۍ داتا تر منځ فاصلې ته وسعت وايي.

د ګېډۍ اوږدوالی:

که د داتاګانو وسعت دګېډيو په شمېر ووېشل شي دګېډۍ طول يااوږدوالی لاس ته راځي.

ميله ئي ګراف:

که مربعګانې يا مستطيلونه سر په سر کېښودل شي .ميله ئي ګراف لاس ته راځي.

د متصلو داتاګانو دسته بندي:

هم جنسه داتاګانو ته متصلې داتاګانې وايي . د دسته بندۍ لپاره يي هغه داتاګانې چه د واحداتو اندازه يي نژدې وي په يوه ګېډۍ کې ليکو.

د (15) ذده کوونکواوږدوالی په لاندې ډول ليکل شوی دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

153	148	151	138	136
142	131	141	141	139
152	159	139	.132	146

پورته داتاګانو څخه ګېډۍ جوړې کړئ:

دذده کوونکو شمېر	د ذده کوونکو دونی اوږدوالی
6	130 – 140
5	140 – 150
4	150 – 160

وزني اوسط یا منځنۍ قیمت:

وزني اوسط یا منځنۍ قیمت د داتاګانو په مجموعه یې ویشو. هره داتا په مربوطه ضریب کې ضربوو او د داتاګانو په مجموعه یې ویشو.

$\acute{x} = \frac{w_1x_1+w_2x_2+\cdots+w_nx_n}{w_1+w_2+\cdots+w_n}$ وزني اوسط

مثال : د ځینو پوهنتونونو نمرې د تورو په اساس ورکول کېږي .لکه A, B. C, D, F چه $A = 4$ او $B = 3$ او $C = 2$ او $D = 1$ او $F = 0$ ارزښت لري یو محصل لاندې لمبرې اخیستې دي.

مضمون	نمرې	د کریدیتونو شمېر
ریاضیات	B	3
فزیک	A	3
کیمیا	C	2
بیولوژي	D	3
ژبه	F	1

د محصل د نمرو اوسط څو دې؟

حل:

مضمون	حرفي نمرې	د کریدیتوشمېر $= x$	عددي لمبرې $= w$	$w \cdot x$
ریاضیات	B	3	3	$3 \times 3 = 9$
فزیک	A	3	4	$4 \times 3 = 12$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کيميا	C	2	2	$2\times2=4$
بيولوژي	D	3	3	$3\times3=9$
ژبه	F	1	4	$4\times1=4$

د کريډيټونو شمېر $= n = 12$

$$\text{د نمرو اوسط} = \bar{x} = \frac{9+12+4+9+4}{12} = \frac{38}{12} = 3.16$$

مستطيلي ګراف

په مستطيلي ګراف کی د مستطيل قاعده د ډاټاګانو اتصال يا پيوستون راښيي. مساحت د ګېډۍ کثرت راښيي. که دګېډيو اوږدوالي مساوي وي نو د مساحتو په عوض کثرت ليکو په دی حالت کی اوږدوالی د کثرت عمودي محور دی.

مثال: په يوه ټولګي کی د ذده کوونکو وزن په لاندی ډول دی.

د ذده کوونکو وزن په کېلوګرام	40 − 45	45 − 50	50 − 60	60 − 70	70 − 90
دذده کوونکو شمېر	4	6	12	8	8

وزن د $(X\acute{X})$ په محور ښيو او څرنګه چه $5kg$ د ټولو منځ کی مشترک دي نو د $(X\acute{X})$ په محورټول وزنونه په يوه واحد اندازه کوو $(40-45)$ په يوواحدښيو.د مستطيلو د ارتفاعګانود پيداکولو لپاره کثرت په اوږدوالي وېشو.

$$40-50 \rightarrow \frac{4}{1} = 4 \rightarrow \frac{4}{5} = 0.8$$

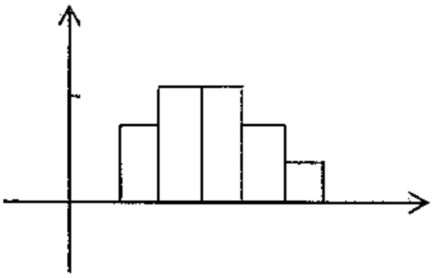
$$45-50 \rightarrow \frac{6}{1} = 6 \rightarrow \frac{6}{5} = 1.2$$

$$50-60 \rightarrow \frac{12}{2} = 6 \rightarrow \frac{12}{10} = 1.2$$

$$60 \rightarrow 70 \Rightarrow \frac{8}{2} = 4 \Rightarrow \frac{4}{10} = 0.4$$

$$70 \rightarrow 80 \Rightarrow \frac{8}{4} = 2 \Rightarrow \frac{2}{20} = 0.1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



دايروي ګراف:

د دايرې په مرسته د ناڅاپي متحول د داتاګانو ښودلو ته دايروي ګراف وايي.

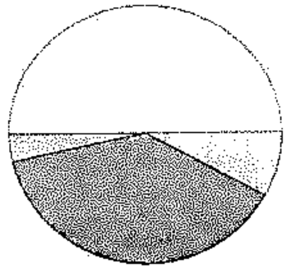
د کثرت ددرجې دلاس ته راوړلو لپاره د داتاګانو کثرت د ټولو داتاګانو په شمېر ليکواو په (360°) کې يې ضربوو دهرې ګېډ ی مرکزي زاويه لاس ته راځي.

$$\text{کثرت د درجې له جنسه} = \frac{\text{د داتاګانو کثرت}}{\text{د ټولو داتاګانو شمېر}} \times 360^\circ$$

مثال:-د يوې مؤسسې دکارکوونکو شمېر (200) کسه دي وظيفې يې د تحصيل د درجې له جنسه وېشلې دي.

د تحصيل درجه	کثرت	مرکزي زاويه د درجې له جنسه
ډاکټر	5	$\frac{5}{200} \times 360^\circ = 9$
ماشټر	10	$\frac{10}{200} \times 360^\circ = 18$
ليسانس	100	$\frac{100}{200} \times 360^\circ = 180$
څوارلسم پاس	45	$\frac{45}{200} \times 360^\circ = 81$
دولسم پاس	40	$\frac{40}{200} \times 360^\circ = 72$

(c) ketabton.com: The Digital Library



میانه $Median$:

د داتاګانو د تحول وسطي عدد ته میانه وایي.

لکه: (4 1 5 3 2) د اعدادو د سیټ په څېر یي ترتیبوو.

(5 4 3 2 1) وسطي عدد یي (3) دی.که د داتاګانو شمېر جفت وي.د منځنیو دوه داتاګانواوسط د داتاګانو میانه ده.لکه (10 4 3 9 6 2) چه میانه یي داسی پیدا کیږي.(10 9 6 4 3 2) چه $5 = \frac{4+6}{2}$ یعنی میانه یي (5) ده.

د تحول ساحه $Evolution\ of\ field$:

که د متحول د اوږدوالي تغیر په یوه ساحه کی ممکن وي دغه ساحی ته د تحول ساحه وایي.

په ټولنه کی د ساحی وسعت د ټولنې پراګنده ګي ښيي.په هره اندازه چه دا توپیر کم وي پراګنده ګي کمه ده او دټولنی د وګړو تر منځ نژدېکت زیات دی. که د تحول ساحه صفر وه نودټولنی د ځېړنی ځانګړتیاوی برابری دي اوټولنه متجانسه ده.

مثال : په څلور میاشتنی ازموینه کی د دوه ذده کوونکو لمبری په لاندی ډول دي.

39 38 37 36 35 33 32 25 21 20
39 35 34 34 35 35 35 34 33 20

د دواړو سیټونو د تحول ساحه پیدا کړئ او ووایاست چه په کومه ګېډۍ کی پراګنده ګي زیاته ده؟

حل:- د لوړو سرحدو څخه ټیټ سرحدونه منفي کوو.

$$39 - 20 = 19$$

د دواړو د تحول ساحه مساوي ده مګر په اول ګروپ کی پراګنده ګي زیاته ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د انحراف اوسط *Average deviation*

د داتاګانو او اوسط د تفاضل اوسط ته د انحراف اوسط وايي

د داتاګانو د اوسط انحرافونو مجموعه صفر وي نو له همدی امله د اوسط انحرافونو د جمع کولو په وخت کی د هغوی مطلقه قیمتونه جمع کوي.او په لاندی ډول جمع کیږي.

$$\text{د انحراف اوسط} = \frac{|x_1-\acute{x}|+|x_2-\acute{x}|+\cdots+|x_n-\acute{x}|}{n}$$

مثال : د (40) تنو شاګردانو لمبری په لاندی جدول کی راکړشوي دي.

نمری	کثرت
$0-10$	2
$10-20$	7
$20-30$	4
$30-40$	5
$40-50$	10
$50-60$	12

د انحراف اوسط يي پيدا کړئ؟

$$\acute{x} = \frac{10+105+100+175+450+660}{40} = \frac{1500}{40} = 37.5$$

f = کثرت	د داتاګانو اوسط	$f\cdot x$	$x-\acute{x}$	$f(x-\acute{x})$
2	5	10	$5-37.5=-32.5$	$2\times(-32.5)=-65$
7	15	105	$15-37.5=-22.5$	$7(-22.5)=-157.5$
4	25	100	$25-37.5=-12.5$	$4\times(-12.5)=-50$
5	35	175	$35-37.5=-2.5$	$5\times(-2.5)=-12.5$
10	45	450	$45-37.5=7.5$	$10\times7.5=75$
12	55	660	$55-37.5=17.5$	$12\times17.5=210$
$\frac{1}{n=40}$		1500		

$$f(x-\acute{x}) = -65-157.5-50-12.5+75+210=0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ليدل کيږي چه د جمع حاصل يي صفر دې نود انحرافونو د اوسطونو مطلقه قيمت په نظر کې نيسو.

$$\text{د انحرافونو اوسط} = \frac{|-65| + |-157.5| + |-50| + |-12.5| + |75| + |210|}{40}$$

$$\text{د انحرافونو اوسط} = \frac{65 + 157.5 + 50 + 12.5 + 75 + 210}{40} = \frac{570}{40} = 14.25$$

د څوضلعي فريکونسي ګراف

د څوضلعي فريکونسي ګراف د متصلو داتاګانو د پاره استعماليږي.

مثلاً که څو کلاسونه ولرو چه سرحدات يي معلوم وي او وغواړو چه ګراف يي رسم کړو د هرکلاس مرکز(منځنی نقطه) په افقي محور او فريکونسي يي په عمودي محور ښيو

د کلاس مرکزاوفريکونسي د وضعيه کميتونو په مستوي کی يوه نقطه تعينوي دغه نقطی وصلوو منکسر خط لاس ته راځي که د کلاسونو په اول کی $(x_1 - c, 0)$نقطه او کلاسونو په اخر کی $(x_n + c, 0)$ نقطه اضافه کړو نو دڅو ضلعي فريکونسي ګراف لاس ته راځي.

مثال: په لاندی جدول کی د داتا څو ضلعي او مستطيلي ګراف رسم کړئ.

د کلاسونو حدود $=cl$	$11-16$	$16-21$	$21-26$	$26-31$	$31-36$
مطلقه فريکونسي $= f_i$	3	5	8	7	2
د کلاسونو مرکز $=x_i$	13.5	18.5	23.5	28.5	33.5

$c = 5$ دی نو د دوه اختياري نقطو د پيدا کولو لپاره په لاندی ډول اجرائت کوو.

$(x_1 - 5,0) = (13.5 - 5,0) = (8.5,0)$

$(x_2 + 5,0) = (33.5 + 5,0) = (38.5,0)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

داتا په صعودي ډول ترتیبوو. او د یو څخه تر(n) پورې کود ورکوو د $(p = 1,2,3)$ موقعیت دلاندی رابطی پواسطه پیدا کیږي.

$$C_{QP} = \frac{P \cdot n}{4} + \frac{1}{2}$$

مثال: په (140 100 120 80 85 90) دیتا کی داولی ربعی او دریمی ربعومقادیر پیدا کړئ؟

حل:

د دیتا شمېره	6	5	4	3	2	1
	140	120	100	90	85	80

د لمړی اودریمی ربعو ځایونه عبارت دي.

$$c_{q_1} = \frac{1 \cdot 6}{4} + \frac{1}{2} = 2$$

$$c_{q_3} = \frac{3 \cdot 6}{4} + \frac{1}{2} = 5$$

$q_1 = 85$ & $q_2 = 120$

صندوقچه يي ګراف:

صندوقچه يي ګراف هغه ګراف دي چه د نورو ګرافونو په نسبت د ډېټا تیت والي زیات روښانه؛ کوي د ډېټا ګراف د لاندی اندازو په بنیاد روښانه کوي.

الف- تر ټولو کوچنۍ ډېټا

ب- لمړی څلورمه

ج- میانه

د- دریمه څلورمه

ج- لویه ډېټا

مثال : په یوه ښارکی په (15) ورځو کی د ترافیکي پېښو شمېر په لاندی ډول دي صندوقچه يي ګراف ئي رسم کړئ.

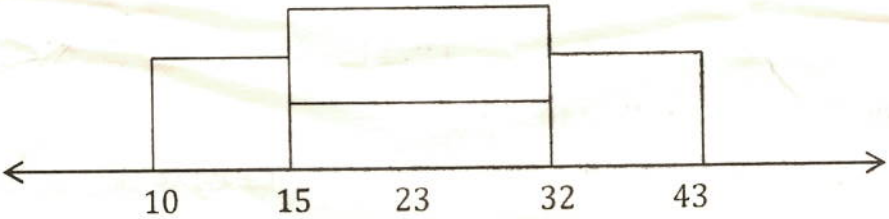
(c) ketabton.com: The Digital Library

12	10	15	23	14	27	16
34	41	43	32	18	25	31

پورتنی داتا په ترتیب لیکو .

10	12	14	15	16	18	23
25	27	31	32	34	41	43

تر ټولو کوچنی داتا $(q_1 = 10)$ ده اوتر ټولولویه داتا$(q_n = 43)$ ده میانه $(med = 23)$ده لمړی ربعه $q_1 = 15$

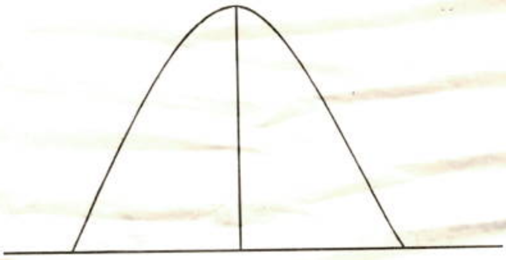


پورتنی ګراف صندوقچه يي ګراف دی چه 50% داتا د صندوق په داخل کی ده دلمړی او څلورمی ربعو په منځ کی ده 25% د 10 او15 تر منځ ده او 75% د 32 او 43 ترمنځ ده.

د نارمل منحني د مرکزي تاکونکو پرتله کول:

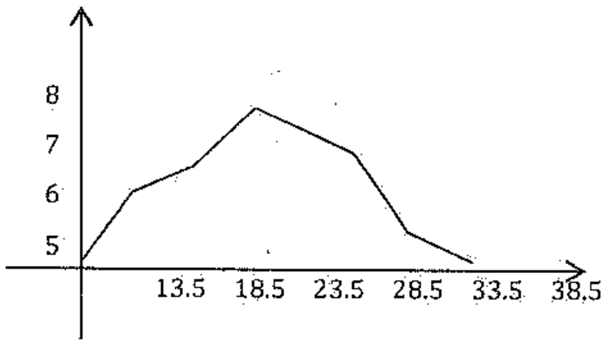
نارمل منحني يو متناظر منحني دې چه ديوه زنګ په ډول شکل لري او زياتی طبعي پېښې د همدغه منحني په واسطه ښودل کيږي.اوسط ، ميانه او موډ يي په مرکزي برخه کی قرار لري نوځکه ورته د نارمل منحني ټاکونکي وايي.

که منحني متناظر وي نواوسط په ميانه منطبق دی اوڅرنګه چه يوه اعظمي نقطه لري نو ځکه يي موډ هم د اوسط اوميانې سره مساوي دی.

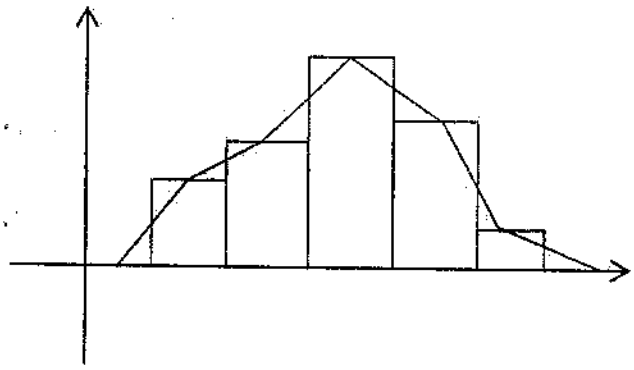


$\acute{X} = mod = med$

(c) ketabton.com: The Digital Library



مستطیلي ګراف اود فریکونسي څو ضلعي ګراف:



د فریکونسي څو ضلعي دګراف راسونه د فریکونسي داړونده جدول د مستطیلو د پورتنی ضلعي په نیمایي منطبق دي دفریکونسي څو ضلعي مساحت دمستطیلو د مساحت سره مساوي دي.

د ساقی او پاڼی ګراف $Grph\ of\ stem\ and\ wrench$:

په دوه رقمي عدد کی د لسیز رقم ساقه او د یویز رقم پاڼه ده.

مثال : د سانتي متر په حساب د شل نوو پیدا شوو ماشومانود تنی اوږدوال په لاندی ډول انتخاب شوی دي.

45	46	47	43	49	40	42	46	45	43
43	43	48	49	47	49	48	49	47	45

پورتنی داتاګانی په صعودي ډول ترتیب کړئ او څرنګه چه د(4) رقم یعنی دلسیز رقم پکی مشترک دی نو داتاګانی په لاندي ډول ترتیبوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$4 + (0,2,3,3,3,3,5,5,5,6,6,7,7,7,8,8,9,9,9,9) \cdots\cdots\cdots 1$$

د صفر څخه تر (9) پورې د رقمو تکرار دپاڼو شمېر ښيي.پورتني رقمونه په لاندې ډول هم ليکلای شو.

0			
2			
3	3	3	3
5	5	5	
6	6		
8	8		9
9	9	9	

که د (1) شمارې د جدول څخه ګراف جوړ کړو د ساقې او پاڼې ګراف لاس ته راځي چه (4) به يې قاعده او دقوس په منځ کې رقمونه به يې پاڼې وي.که پورتني جدول ته د $90°$ په اندازه دوران ورکړو. ميله يي ګراف لاس ته راځي.

3					9		
3	5		7		9		
3	5	6	7	8	9		
0	2	3	5	6	7	8	9

ربعې $Quarters$:

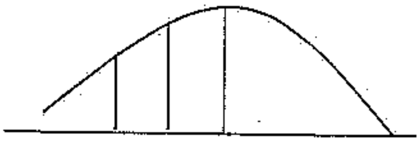
د يوه شي څلورمې برخې ته ربع وايي.

يعنې که يو شی په څلورو برابرو برخو وويشو برخې يي د اولې ربعې،دويمې ربعې، دريمې ربعې او څلورمې ربعې په نوم يادېږي.

اوله ربعه د شي 25% دويمه ربعه دشي 50% اودريمه ربعه دشي 75% وي.که داتا په صعودي ډول ترتيب شي د داتا ميانه د(Q_2)سره مساوي ده د داتا داولې نيمايي ميانه (Q_1)ده او د دويمې نيمايي ميانه (Q_3) ده.

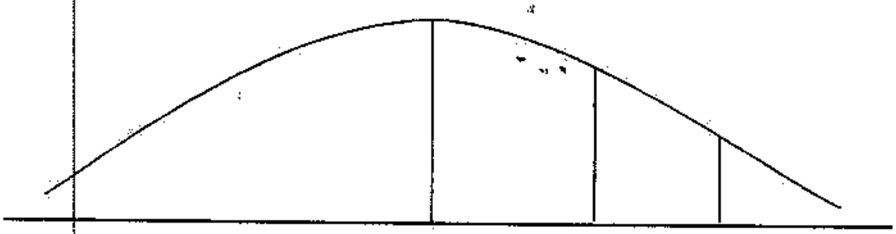
(c) ketabton.com: The Digital Library

که اوسط اومیانه مساوي وي نو تر اوسط او میانی د مخه داتاګانی اوداوسط او میانی د وروسته دیټاګانو سره مساوي دي.اوکه اوسط د میانی کینی خواته پروت وي نو دهغه داتاګانو شمېر چه داوسط ښی خواته پرتی دي زیات دی تر هغه دیټاګانو دشمېر څخه چه د اوسط چپی خواته پرتی دي.



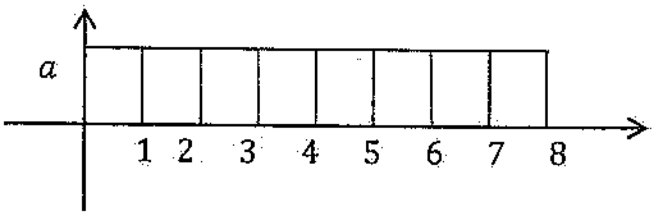
$\acute{X} = mod = med$

او که اوسط دمیانی ښی خواته پروت وي نود هغه داتاګانوشمېر چه د اوسط چپی خواته پرتی دي زیات دېد هغه داتاګانوتر شمېر چه د اوسط ښی خواته پرتی دي



$mod > med > \acute{x}$

مثال: په لاندی ګراف کی اوسط او میانه پیدا کړئ؟



$$med = \frac{4+5}{2} = \frac{9}{2} = 4.5$$

$$\acute{x} = \frac{a \cdot 1 + a \cdot 2 + a \cdot 3 + a \cdot 4 + a \cdot 5 + a \cdot 6 + a \cdot 7 + a \cdot 8}{a + a + a + a + a + a + a + a} = \frac{36a}{8a}$$

$$\acute{x} = \frac{9}{2} = 4.5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ربعي انحراف

ربعي انحراف يو له هغه ټاکونکو څخه دی چه د دیټا تيت والی ښکاره کوي.

مثلاً 50% ټولنه د $Q_3 - Q_1$ په منځ کی پرته ده په هره اندازه چه دا فاصله لږ وي په همغه اندازه دیټا نژدی وي یعنی تیتوالی یې کم وي.

کله کله دڅلورمو انحراف په $Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$ شکل ښيي چه دی ته د څلورمی د نیمایي لمن وایي.

مثال: د لاندی عددونو د څلورمو انحراف پیدا کړئ.

20 22 22 23 24 25 29 30 31 35 36

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

$$C_{Q_n} = \frac{P \cdot n}{4} + \frac{1}{2}$$

$$C_{Q_3} = \frac{3 \cdot 11}{4} + \frac{1}{2} = \frac{33 + 2}{4} = \frac{35}{4} = 8.75$$

$$Q_3 = 30.75$$

$$C_{Q_1} = \frac{1 \cdot 11}{4} + \frac{1}{2} = \frac{11 + 2}{4} = \frac{13}{4} = 3.25$$

$$Q_1 = 22.25$$

$$Q = Q_3 - Q_1 = 30.75 - 22.25 = 8.5$$

واریانس (*Variance*):

واریانس په لغت کی اختلاف ته وایي.

اوپه اصطلاح کی که څو داتاګانی ولرو دهری داتا اوسط پیدا کړود داتاګانواو دهغوی د اوسطونو دتفاضل د مربعګانود مجموعی اوسط ته واریانس وایي.

د انحرافونو د مربعګانو مجموعه عبارت ده.

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \acute{x})^2 = (x_1 - \acute{x})^2 + (x_2 - \acute{x})^2 + \cdots + (x_n - \acute{x})^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پورتني مجموعه په (n) ویشواو په (s^2) يي ښيو واريانس لاس ته راځي.

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \acute{x})^2}{n} = \frac{(x_1 - \acute{x})^2 + (x_2 - \acute{x})^2 + \cdots + (x_n - \acute{x})^2}{n}$$

د واريانس د پيدا کولو لپاره د لاندې فارمول څخه هم کټه اخلي.

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \bar{x}^2$$

ثبوت:

$$\acute{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i = n\bar{x}$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_1 - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2)}{n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \frac{\sum_{i=1}^{n} 2x_i\bar{x}}{n} + \frac{\sum_{i=1}^{n} \acute{x}^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - 2\bar{x}\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} + \frac{n\bar{x}^2}{n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - 2\bar{x}\cdot\bar{x} + \bar{x}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \bar{x}^2$$

مثال: دلاندې ډېټا وريانس د دواړو فارمولو په مرسته پيدا کړئ

1 5 6 7 9

الف: د $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i - \bar{x})^2}{n}$ دفارمول په واسطه:

$$x' = \frac{1 + 5 + 6 + 7 + 9}{5} = \frac{28}{5} = 5.6$$

$$s^2 = \frac{(1 - 5.6)^2 + (5 - 5.6)^2 + (6 - 5.6)^2 + (7 - 5.6)^2 + (9 - 5.6)^2}{5}$$

$$s^2 = \frac{(-4.6)^2 + (-0.6)^2 + (1.6)^2 + (2.6)^2 + (4.6)^2}{5}$$

$$s^2 = \frac{21.16 + 0.36 + 2.56 + 6.76 + 21.16}{5} = \frac{52}{5} = 10.4$$

ب: د $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i^2}{5} - \bar{x}^2$ فارمول څخه استفاده کول:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$s^2 = \frac{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 + {x_4}^2 + {x_5}^2}{5} - \acute{x}^2$$

$$s^2 = \frac{1 + 25 + 36 + 49 + 91}{5} - (5.6)^2 = \frac{192}{5} - 31.36 = 38.4 - 31.36$$

$$s^2 = 7.04$$

یادونه:

که دڅو کلاسو دېټاګانی $x_1, x_2, \ x_3, \cdots x_n$ وي او فریکونسي ګانی یي په لاندی ډول وي. $f_1, f_2, f_3, \cdots f_n$ واریانس یي د لاندی فارمول پواسطه پیدا کیږي.

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_1 (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^2}{N}$$

$N = \sum_{i=1}^{n} f_i$ دی

د متحول دمربع واحد د واریانس واحد دی.

معیاري انحراف (مطلق تیتوالی):

د واریانس مربع جذر ته معیاري انحراف وایي په (s) سره یي ښیي اود لاندی فارمول پواسطه پیدا کیږي

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}{n} - \acute{x}^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^2}$$

واحد یي د متحول واحد دی.

ثبوت:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \acute{x})^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}({x_i}^2 - 2\acute{x}x_i + \acute{x}^2) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2 - 2x\sum_{i=1}^{n}x_i + \sum_{i=1}^{n}\acute{x}^2\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2 - 2n\acute{x}^2 + n\acute{x}^2\right) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2 - n\acute{x}^2\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \frac{1}{n}\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^2\right\} = \frac{1}{n}\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}{n}\right\}$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^2 \Rightarrow s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^2}$$

مثال:- د (5) ناروغانو د بدن دحرارت درجه په لاندی ډول راکړشوی ده.

38 39 39 40 41

د حرارت د درجې معیاري انحراف یي پیدا کړئ.

حل:

$$\acute{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{38 + 39 + 39 + 40 + 41}{5} = \frac{197}{5} = 39.4$$

$$s^2 = \frac{(38 - 39.4)^2 + (39 - 39.4)^2 + (39 - 39.4)^2 + (40 - 39.4)^2 + (41 - 39.4)^2}{5}$$

$$s^2 = \frac{(-1.4)^2 + (-0.4)^2 + (-0.4)^2 + (0.6)^2 + (1.6)^2}{5}$$

$$s^2 = \frac{1.96 + 0.16 + 0.16 + 0.36 + 2.56}{5} = \frac{5.2}{5} = 1.04$$

$$s^2 = 1.04 \quad \Rightarrow s = \sqrt{1.04} = 1.0198$$

$$s = 1.0198$$

پاملرنه:

د فریکونسیو د جدول څخه معیاري انحراف په تقریبي ډول په لاندی ډول هم لاس ته راځي.

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \acute{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i} - \acute{x}^2}$$

چه $\acute{x}$ د ډیټا اوسط ، x_i د کلاس مرکز او f_i د کلاس فریکونسي ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دبدلون ضریب یانسبي پراګنده ګي:

د بدلون یاتغیر ضریب د معیاري انحراف او مطلق اوسط نسبت دی مطلق اوسط واحد نلري.

$$\text{د بدلونونو یا تغیراتو ضریب} = \frac{\text{معیاري انحراف}}{\text{اوسط}}$$

$$C \cdot V = \frac{S}{\acute{x}}$$

که د تغیراتو ضریب په 100 کی ضرب کړودتحول ضریب لاس ته راځي.

$$C \cdot V = 100 \cdot \frac{S}{\acute{x}}$$

د بدلون ضریب دمثبتو دېتاګانو لپاره دی.که دېتاګانی مساوي وي د بدلون ضریب صفر دی.که ټولی دېتاګانی په یوه مثبت عدد کی ضرب شي د بدلون ضریب تغیر نه کوي.

که دهری دېتاسره یو مثبت عدد ورزیات شي د بدلون ضریب کوچنی کیږي.

مثال: د $(1.3.5)$ دېتا د بدلون ضریب محاسبه کړئ؟

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{1+3+5}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

$$s^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{(1-3)^2 + (3-3)^2 + (5-3)^2}{3} = \frac{(-2)^2 + 0^2 + 2^2}{3}$$

$$s^2 = \frac{4+4}{3} = \frac{8}{3} = 2.67$$

$$\sqrt{s^2} = \sqrt{2.67} \Rightarrow s = 1.6$$

$$c \cdot v = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{1.634013464}{3} = 0.545$$

دویم مثال: د تلویزون د تصویري لامپونو تولیدوونکې د(A) او (B) دوه ډوله لامپونه تولیدوي د (A) متوسط عمر (1495) ساعته او د (B) متوسط عمر (1875) ساعته دي معیاري انحرافونه یي په ترتیب سره (280) او (310) دي دکوم لامپ دضریب بدلون زیات دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$$C \cdot V_A = \frac{S_A}{\bar{x}_A} = \frac{280}{1495} \cdot 100 = 18.7\%$$

$$C \cdot V_B = \frac{310}{1875} \cdot 100 = 16.5\%$$

څرنګه چه $C \cdot V_A > C \cdot V_B$ دی نو لامپ ډېره پراګنده ګي لري ولی تینګښت یي کم دی.

په نورمال منحني کی تیتوالی:

د نورمال منحني په دواړو خواو کی د $(\acute{x} - s, \acute{x} + s)$ اویاد $(\acute{x} - 2s, \acute{x} + 2s)$ پواسطه پراګنده ګي یا تیتوالی پیدا کیږي.

مثال: د یوی موسسی د معاش اوسط (12500) او معیاري انحراف یي (700) دی.

الف: په نورماله توزیع کي د فیصدی په نظر کی نیولو سره د معاش توزیع تشریح کړئ؟

ب: ایا ویلای شئ چه (14000) افغانی معاش غیر عادي معاش دی؟

حل: لمړي $\acute{x} \pm s$ او $\acute{x} \pm 2s$ او $\acute{x} \pm 3s$ قیمتونه په لاس راوړو.

فاصله د (s) له مخی	فاصله د افغانیو له مخی	فیصدي
$\acute{x} \pm s$	11800 − 13200	68%
$\acute{x} \pm 2s$	11100 − 13900	96%
$\acute{x} \pm 3s$	10400 − 14600	99.6%

$$\acute{x} = \frac{11800 + 11100 + 10400 + 13200 + 13900 + 14600}{6}$$

$$= \frac{75000}{6} = 12500$$

$$14000 - \acute{x} = 14000 - 12500 = 1500$$

$$\frac{1500}{700} = 2.14$$

نو (14000) افغانی معاش غیرعادي معاش دی څکه چه د $(2S)$ داندازی څخه زیات اوهم د $(\acute{x})$ داندازی څخه ډېر دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د نورماله توزیع مشخصات:

د نورمال په دوارو خواو کې د نورمال په نسبت د منحني د ټيټوالي، جګوالي او نژدېکت عامل ته شاخص وايي.شاخص په دوه ډوله دي.

1- د خلمېدلو شاخص $Skewness$:

هغه توزيع چه د اوسط په دوارو خواو کی متناظره نه وي خلمېدل نوميږي. د لاندی دوو ضريبونو پواسطه ښودل کيږي.

الف- د خلمېدلو ضريب: د خلمېدلوضريب هغه شاخص دی چه د خلمېدلو د ميزان د ټاکلو لپاره استعماليږي.فارمول يي په لاندی ډول دی.

$$\alpha_3 = \frac{\frac{1}{n}\sum(x_i - \bar{x})^2}{s^2}$$

که $\alpha_3 = 0$ وي نوتوزيع متناظره ده.

که $\alpha_3 > 0$ وي د منحني د توزيع خلمېدل مثبت دي $Possitive\ Skewness$ يعنی خمېدل يي ښي خواته دي.

او که $\alpha_3 < 0$ وي د منحني دتوزيع خلمېدل منفي $Negative\ Skewness$ دي.يعنی چپی خواته خلميږي. که چېرته دکثرت جدول موجود وي خلميدلو(عدم تناظر) يي د $\alpha_3 = \frac{\sum f_i(x_i-\bar{x})^3}{\sum s^a}$ فارمول پواسطه پيدا کيږي.

ب- د پيرسون دخلميدو ضريب: د پيرسون د خمېده ګی ضريب په لاندی ډول دی.

$$sk_{(p)} = \frac{3(\bar{x} - med)}{s}$$

2- د پړسوب $kurtosis$ شاخص:

دا شاخص ښيي چه څه وخت منحني جګوالی اوڅه وخت ټيټوالی لري فارمول يي په لاندی ډول دی‌يك

$$\alpha_4 = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^4}{s^4}$$

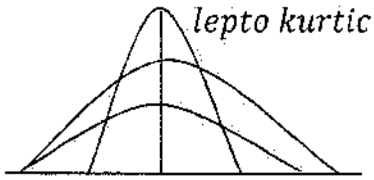
(c) ketabton.com: The Digital Library

که د کثرت جدول موجود وي نو د پړسوب فارمول په لاندې ډول دی.

$$\alpha_4 = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \bar{x})^4}{s^4}$$

په دی فارمول کی (s) معیاري انحراف دی.دغه شاخص دپرتله کېدلو لپاره استعمالیږي. د توزیع په ځای او پراګنده ګی پوری اړه نلري.

مثال: لاندې شکل په پام کې ونیسئ د ضریب دری ډوله خلمېدل او پړسوب ښيي.



حل : په نورمالي توزیع کی $\alpha_4 = 3$ دی ځکه که $\alpha_4 > 3$ شي نو پړسوب يي د نورمال منحني څخه ډېرېږي او که $\alpha_4 < 3$ وي نو پړسوب يي کم دی.

څومتحوله ټولنې:

که په یوه کلاس کی یوازې دشاګردانو دونې په باب خبرې کیږي نو په دغه ځای کی متحول یو دی.او که دشاګردانو د چاغښت په باب هم خبرې وشي نو په دي صورت کی متحولونه دوه کیږي.د دغسی متحولونو تر منځ ریاضیکي اړیکي د قایمو مختصاتو په سیستم کی جوړېږي.لمړی د متحولونو معادلی جوړوو بیا د متحولونو په باب معلومات په مستوي کی په نخښه کووا و وصلوو يي.

مثال: یو متخصص د غذائي موادو تاثیر په یو شمېر موږکانو باندی وڅېړل دغذاء تر تطبیق دمخه يي د هر موږک وزن اندازه کړ او بیا يي د عملیي تر تطبیق وروسته د هر موږک وزن اندازه کړاو لاندی دېټا ګانی يي په لاس راوړلی.

(1.8). (2.3). (1.7). (3.5). (2.4)

په هره جوړه کی لمړی مختصه د موږکانو د غذاء ترتطبیق دمخه وزن او دویمه مختصه د غذائي موادو تر تطبیق وروسته وزن دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د موږکانو شمېر	1	2	3	4	5
د موږکانو لمړنی وزن	1	2	1	3	2
د غذائي موادو تر تطبیق وروسته د موږکانو وزن	8	3	7	5	4

پورتنی جدول په ستوني ډول جوړ کړئ.

دغذائي رژيم ترتطبيق وروسته د موږکانووزن	د موږکانولمړنی وزن	دموږکانوشمېر
8	1	1
3	2	2
7	1	3
5	3	4
4	2	5

پورتنی دېټاګانی دوه متحوله ټولنه معرفي کوي.

دپراګنده ګی ګراف *Scatter Diagram*:

د دېټا داندازه کولولپاره په یوه مستوي کې پاشل شوی نقطی د پراګنده ګراف په نوم یادیږي.

لاندي مرتبې جوړې راکړشوي دي .

$$(1،2) ، (2،3) ، (3،4) ، (4،5)$$

پورته دېټا د شېر او خط دېټا ده.که سکه پورته خواته وغورزول شي او دشېر مخ کښته خواته وي نود (y) په محور یو ډېریږي.

د موږکانو د غذائي رژيم دېټا په لاندی ډول ده.

$$(2،4) ، (1،8) ، (2،3) ، (3،5) ، (1،7)$$

په دغه دېټا کی د هری نقطی تابع بېله ده. نو له همدغه جهته څو متحوله ټولنه ورته وائي.

پېوستون او دپېوستون ضریب:

د یوه مستقیم او نقطو تر منځ دفاصلی د پیدا کولو فارمول ته دپېوستون ضریب وائي او په (r) سره یي ښيي .او د لاندی فارمول پواسطه پیدا کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$r = \frac{\frac{\sum xy}{n} - \bar{x}\bar{y}}{s_x s_y}$$

لاندې دېټا د موږکانو د غذائي رژیم دېټا ده.

د موږکانو شمېر	لمړنی وزن(x)	وروستنی وزن (y)	xy
1	1	8	8
2	2	3	6
3	1	7	7
4	3	5	15
5	2	4	8
	$\sum 9$	$\sum 27$	$\sum 44$

د موږکانو د غذائي رژیم د وزنونو تر منځ د پیوستون ضریب محاسبه کړئ؟

لمړي وزنونه په (x) او وروستني وزنونه په (y) ښیو د موږکانو شمېر $n = 5$ دی.

$$\bar{x} = \frac{9}{5} = 1.8 \quad , \quad \bar{y} = \frac{27}{5} = 5.4$$

$$s_x{}^2 = \frac{(1-1.8)^2 + (2-1.8)^2 + (1-1.8)^2 + (3-1.8)^2 + (2-1.8)^2}{5}$$

$$= \frac{0.64 + 0.04 + 0.64 + 1.44 + 0.04}{5} = \frac{2.8}{5} = 0.56$$

$$s_y{}^2 = \frac{(8-5.4)^2 + (3-5.4)^2 + (7-5.4)^2 + (5-5.4)^2 + (4-5.4)^2}{5}$$

$$= \frac{6.76 + 5.76 + 2.56 + 0.16 + 1.96}{5} = \frac{17.2}{5} = 3.44$$

$$\frac{\text{د } x \text{ او } y \text{ د ضرب د حاصل مجموعه}}{\text{د دېټا شمېر}} = \frac{\sum x + \sum y}{n}$$

$$= \frac{(1 \cdot 8) + (2 \cdot 3) + (1 \cdot 7) + (3 \cdot 5) + (2 \cdot 4)}{5}$$

$$= \frac{8 + 6 + 7 + 15 + 8}{5} = \frac{44}{5} = 8.8$$

د پیوستون ضریب په لاندې ډول لاس ته راځي.

$$\text{د پیوستون ضریب} = r = \frac{8.8 - (1.8)(5.4)}{\sqrt{0.56}\sqrt{3.44}} = \frac{8.8 - 9.72}{1.36} = \frac{-0.92}{1.36} = -0.67$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

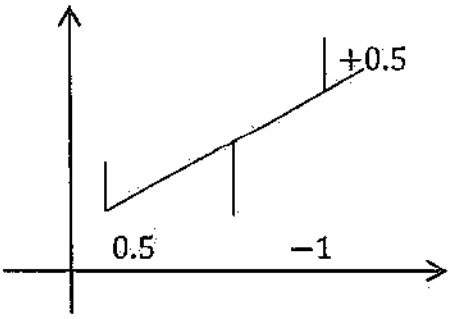
د خطي مېلان معادله:

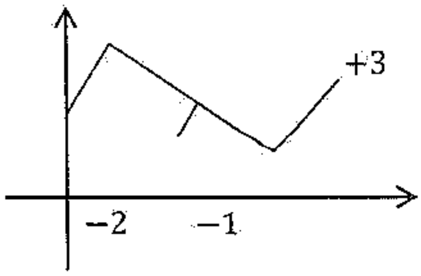
$y = ax + b$ د مستقيم خط معادله ده. چه دمستقيم خط مېلان دی که $a > 0$ وي کرښه متزايده ده. او که $a < 0$ وي نو کرښه متناقصه ده که (x, y) جوړه د $y = ax + b$ په معادله کی صدق وکړي

نونقطه په خط پرته ده . که دنقطی په مستوي داسی پاشلی وي چه کرښی ته نژدی وي نود پيوستون ضريب به (-1) او$(+1)$ ته نژدی وي که يوه داسی کرښه چه معادله يي $y = ax + b$ وي د ټکو له منځه داسی تېره کړو چه ټولو ټکو ته نژدی وي نو د دغه کرښی د ترسيم لپاره بايد يوه داسی معادله جوړه کړو دفارمول تر جوړولو دمخه لاندې مثال په نظر کی نيسو

x	1	5	9
y	6	5	7

د دغه دېټا لپاره لاندې شکلونه رسموو اود کرښو خطاوی يي دمشاهدی څخه معلوموو.





په پورته دواړو حالتونو کی د کرښو د خطاګانو الجبري مجموعه صفر ده .

د الف حالت: $(-2) + (-1) + 3 = 0$ = دکرښی د خطاګانو الجبري مجموعه

د ب حالت: $(0.5) + (-1) + 0.5 = 0$ = د کرښی دخطاګانو الجبري مجموعه

څرنګه چه په دواړو حالتو د جمعی حاصل صفر دی نومناسبه کرښه نه معلومېږي.نو دپاره ددی چه مثبت او منفي علامی يو اوبل دمنځه يونسي نووروسته تر مربع کولو يي جمع کوو.

د خطاګانو ددويم توان جمع = $(-2)^2 + (-1)^2 + (3)^2 = 14$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دخطاګانو د دویم توان جمع $= (0.5)^2 + (-1)^2 + (0.5)^2 = 1.5$

هغه کرښه چه د مربعګانو مجموعه يي (1.5) مناسبه کرښه ده دغسی کرښو ته ریګریشن کرښی وایي.د رګریشن اومشاهداتوتوپیرپه وښیو نو د دویم توانونو دلاکوچني والي په خاطر لیکو.

د خطاګانو ددویمو توانونو مجموعه $= \sum(y-\bar{y})^2 = \sum\{y-(ax+b)\}^2$

$$= \sum (y-b-ax)^2$$
$$= (ax_1+b-y_1)^2 + (ax_2+b-y_2)^2$$

په دې حالت کی (x) او (y) ثابت عددونه دي (a) او (b) متحولین دي

$$b = \text{د پیوستون ضریب} \times \frac{\text{د } y \text{ معیاري انحراف}}{\text{د } x \text{ معیاري انحراف}}$$

د (a) او (b) دمحاسبی دغه لارد لږکیو مربعګانو دتګلارې په نوم یادیږي.

نتیجه :-د ریګریشن کرښه هغه کرښه ده چه دیوه متحول د مقدار دمعلومولو دبل متحول د مقدار څخه استفاده کیږي.

مثال :- لاندې دیتاپه نظر کی ونیسئ.

x	1	2	3	4	5
y	4	3	2	1	0

د ریګریشن کرښه نظر ته پیدا کړئ؟

حل : څرنګه چه

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = \frac{15}{5} = 3$$
$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{4+3+2+1+0}{5} = \frac{10}{5} = \frac{10}{5} = 2$$
$$s_x{}^2 = \frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n} = \frac{(1-3)^2+(2-3)^2+(3-3)^2+(4-3)^2+(5-3)^2}{5}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \frac{(-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2}{5} = \frac{4 + 1 + 0 + 1 + 4}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

$$\sqrt{{s_x}^2} = \sqrt{2} \Rightarrow s_x = \sqrt{2}$$

$$s_y^2 = \frac{\sum(y_1 - \bar{y})^2}{\dots}$$

$$= \frac{(4-2)^2 + (3-2)^2 + (2-2)^2 + (1-2)^2 + (0-2)^2}{5}$$

$$= \frac{\mathbf{4 + 1 + 0 + 1 + 4}}{\mathbf{5}} = \frac{\mathbf{10}}{\mathbf{5}} = \mathbf{2}$$

$${s_y}^2 = 2 \Rightarrow \sqrt{{s_y}^2} = \sqrt{2} \Rightarrow s_y = \sqrt{2}$$

$$\frac{\sum xy}{n} = \frac{(1 \cdot 4) + (2 \cdot 3) + (3 \cdot 2) + (4 \cdot 1) + (5 \cdot 0)}{5}$$

$$\frac{\sum xy}{n} = \frac{4 + 6 + 6 + 4 + 0}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

$$r = \frac{\frac{1}{n}\sum xy - \bar{x}\bar{y}}{s_x \cdot s_y} = \frac{4 - 3 \cdot 2}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$b = \bar{y} - b\bar{x} = 2 - b \cdot 3 \Rightarrow 4b = 2 \Rightarrow b = 0.5$$

$$a = r\frac{s_y}{s_x} = -1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -1$$

$$y = ax + b = -x + 0.5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د احتمال د تابع توزیع

هغه تصادفي متحول چه په احصائیه او احتمالاتو کی څېړل کیږي عبارت د هغه تابع څخه دی چه د تعریف ناحیه یي نمونه یي فضاء او د قیمتونو سیټ یي د حقیقي اعدادو سیټ وي.

که $\{x_n, f(x_n)\}_{n=1,2,3,4,..}$ ولرو نو لیکو چه

$$(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)) \cdots (x_n, f(x_n))$$

دغه مرتبو جوړو ته مجزا (گسسته) احتمال تابع وایي.

د تجمعي اوپیوسته احتمال تابع د $F(x) = P(X \leq x)$ په شکل لیکل کیږي.

که چېرې $f(x)$ د احتمال تابع او (x) تصادفي متحول وي په دی صورت کی د دی احتمال چه (x) د (k_1) او (k_2) په منځ کی وي دلاندی رابطی سره برابر دی.

$$P(k_1 \leq x \leq k_2) = \int_{k_1}^{k_2} f(x)dx$$

که چېرې (x) پیوسته ناځاپي متحول وي او $(k_1 < k_2)$ وي په دی صورت کی لیکو چه:

$$P(k_1 \leq x \leq k_2) = F(k_2) - F(k_1)$$

که چېرې ناځاپه مجزا (گسسته) متحول وي په دی حالت اوسط $(Expected\ Value)$ د تصادفي مجزا متحول چه د $E(x)$ په شکل ښودل کیږي. د لاندی رابطی سره برابر دی

$$E(x) = x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + \cdots\cdots\cdots + x_n f(x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)$$

$E(x)$ د (x) اوسط دی په $(\bar{x})$ سره هم ښودل کیږي که (x) تصادفي گسسته متحول وي په دی صورت کی د (x) وریانس چه د (s^2) په شکل ښودل کیږید لاندی رابطی سره برابر دی.

$$s^2 = \sum_{i=1}^{n} [x_i - E(x_i)]^2 f(x_i)$$

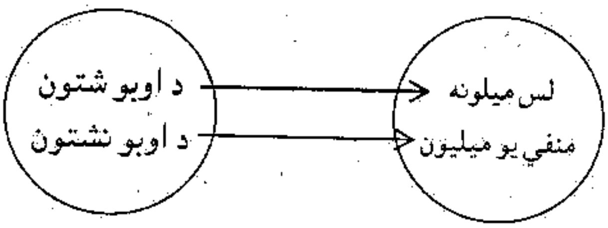
(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: يو شخصي شرکت غواړي د يوې غونډۍ په سر يوه څاه وکني د اوبو څاه په يوميلون افغانۍ تماميږي . که څاه اوبه وکړي د شرکت مالک لس ميلونه افغانۍ اخلي او که اوبه ونه کړي يو ميلون تاوان ورکوي.

الف :-دا موضوع د يوې تابع په شکل وښيئ.

ب:- که د اوبو احتمال (0.2) وي او د اوبو د نه ورکولو احتمال (0.8) وي په دې صورت کې د احتمال تابع ،اوسط ($Expected\ Value$) ، وريانس او د تصادفي متحول معياري انحراف پيدا کړئ؟

د الف حل:



د ب حل: تصادفي متحول، داحتمال تابع ،اوسط ،وريانس، او معياري انحراف په لاندې جدول کې ښودل شوي دي.

معياري انحراف	واريانس	دتصادفي متحول دمربعاتو انحراف د تصادفي متحول له اوسط څخه	اوسط	د تابع احتمال	تصادفي متحول
s	$s^2 = [x_i - E(x)]^2 f(x_i)$	$[x_i - E(x)]^2$	$E(x) = \sum x_i f(x_i)$	$f(x_i)$	x_i
4.4	$4.84 \cdot 0.8 = 3.872$ $77.44 \cdot 0.2 = 15.488$	$(-1-1.2)^2 = 4.84$ $(10-1.2)^2 = 77.44$	$-1 \cdot 0.8 = -0.8$ $10 \cdot 0.2 = 2$	0.8 0.2	-1 10
	$\sum s^2 = 19.360$		1.2	0.1	

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه جمله يي توزيع او د برنولي ازمايښت:

د احتمال دوه جمله يي توزيع يوه مجزا (گسسته) توزيع ده چه د مختلفو پېښود توصيف لپاره استعماليږي.

د برنولي ناڅاپي ازمايښت په برياليتوب او نابرياليتوب په دوه دستودسته بندي کيږي.

د برنولي توزيع کولای شوچه په $P(x = m) = P^m(1-P)^{1-m} = P^m \cdot q^{1-m}$ بڼه وښيو. (P) د برياليتوب او $q = I - P$ دنابرياليتوب احتمال دی.

که يو ازمايښت (n) ځله تکرار شي ترادف لاس ته راځي چه دهرازمايښت دبرياليتوب احتمال په (P) او دنابرياليتوب احتمال په (q)ښيو (n) ځله ازمايښت څخه د (m) ځلي برياليتوب احتمال عبارت دی له:

$$P(x \leq m) = \binom{n}{m} P^m q^{n-m} \qquad ,0 \leq m \leq n$$

د دوه جمله يي دتوزيع اوسط په $\bar{x} = np$ اومعياري انحراف يي په $s = \sqrt{npq}$ ښودل کيږي.

مثال: د شکرې د مرض څخه د يوه مريض د جوړېدلو احتمال(0.4) دی که چېرته د ناروغانو شمېر (15) وي څومره احتمال شته چه پنځه تنه ښه شي او يا د (3) څخه تر (4) تنو پورې جوړشي.

حل:

$$n = 15 \quad , \quad m = 5 \quad , \quad P = 0.4 \quad . \ q = 0.6$$

$$P(m = 5) = \binom{n}{m} P^m \cdot q^{n-m} = \binom{15}{5} (0.4)^5 \cdot (0.6)^{15-5}$$

$$= \frac{15!}{5!\,(15-5)!} \times 0.01024 \cdot 0.00604661760 = \frac{360360}{120} \cdot 0.00006191$$

$$= \frac{22.3098876}{120} = 0.1859$$

$$P(3 \leq m \leq 4) = \sum_{i=3}^{4} \binom{15}{i} (0.4)^i (0.6)^{15-i}$$

$$= (3^{15})(0.4)^3(0.6)^{15-3} + (4)^{15}(0.4)^4(0.6)^{15-4}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \frac{15!}{3!\,(15-3)!}\cdot(0.064)(0.6)^{12} + \frac{15!}{4!\,(15-4)!}\cdot(0.0256)(0.6)^{11}$$

$$= \frac{2730}{6}(0.000139264) + \frac{3270}{24}(0.0000928512) = \frac{0.38019072}{6} + \frac{0.3036}{24}$$

$$= 0.063365 + 0.012650 = 0.07601$$

د پواسن داحتمال توزيع:

د پواسن د احتمال دتوزيع فارمول دا $P(x=m)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^m}{m!}$ دی $\lambda = n$

او $e = 2.718281\cdots$ دی.

مثال: (200) کسانو دطياری ټيکټ اخيستی دی که د مسافرينود نه راتګ احتمال (0.01) وي ددی احتمال چه (3) کسه رانشي څو دي؟

حل:

$n = 200 \quad , \quad P = 0.01$

$$P(x-m) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^m}{m!} \qquad ,\lambda = np = 200\cdot 0.01 = 2$$

$$P(3) = \frac{(2.71828)^{-2}\cdot 2^3}{3!} = \frac{\frac{1}{(2.71828)^2}\cdot 8}{6} = \frac{\frac{8}{7.389046158}}{\frac{6}{1}}$$

$$P(3) = \frac{8}{44.33427695} = 0.180447287$$

دا احتمال د دوه جمله يي په فارمول محاسبه کوو.

$$P(x=m) = \binom{n}{m}P^m q^{n-m}$$

$$\left.\begin{matrix} n = 200 \\ P = 0.01 \end{matrix}\right\} \Rightarrow q = 0.09$$

$$P(x-m) = P(3) = \binom{200}{3}(0.01)^3(0.09)^{200-3}$$

$$= \frac{200!}{3!\,(200-3)!}(0.01)^3(0.09)^{197} = 0.1814$$

د دواړو فارمولو جوابونه معادل دي.

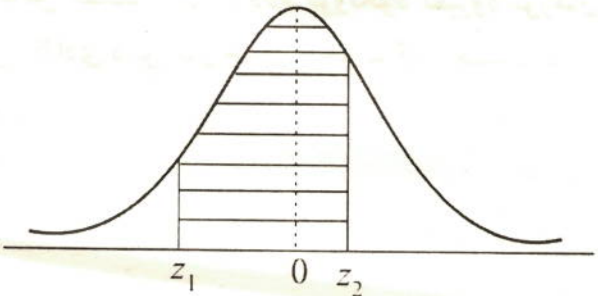
(c) ketabton.com: The Digital Library

د جدول دجوړولو شکل د احصائیوي دېټا د ستېنډرډ کولو پواسطه حل کړو.

$z = \frac{x-\bar{x}}{s}$ چه (z) د ستېنډرډ نورمال متحول او منحني ته دستېنډرډ نورمال منحني یا د نورمال احتمال منحني په نوم یادیږي. د نورمال منحني او افقي محور تر منځ فاصله د واحد سره برابره وي.

لاندې مساحت د منحني د یوې برخې مساحت دی او $z = \frac{x-\bar{x}}{s}$ سره یې تر بدلولو وروسته په لاندې ډول وښیو.

$$f(z_1 < z < z_2) = \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-z^2}{2}} dx = \int_{z_1}^{z_2} N(z,0,1)\, dz$$



د ستېنډرډ نورمال د توزیع احتمال دجدول د استعمال له لارې کولای شو. د جدول په عمودي ستون د (z) د مقدا ردوه لمړي رقمونه د اعشاریي دعلامی دواړو خواوته رقمونه د منحني ارتفاع راښئي اوپورتنی سطرد اعشاریي دعلامی سلیز رقم د منحني دواحد قاعده راښئي.

مثال: که $(z = 1.56)$ وي د منحني مساحت پیدا کړئ؟

حل: د (z)په ستون کی (1.5) او په سطر کی (0.06) پیدا کوو ګوروچه د(1.5) دعددپه کرښه او د (0.06) دعدد په ستون کی واقع دی (0.9406) دی چه همدغه دمنحني مساحت دي.

لمړی مثال: د جوسو د بوتلونو دستګاه داسی تنظیم شوی ده چه که(952)ملي لېتره مایع په بوتل کی واچوي معیاري انحرا ف یي (4) ملي لېتره کیږي که مایع د (952) او (956) ملي ليترو تر منځ وي معیاري انحراف یي څو دی؟

حل : لمړې د له جنسه پیداکوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

یاداشت:

که د پواسن په فارمول کې د(λ) سره (t) ضرب شي په یوه ټاکلي وخت کې د ورتللو د شمېر احتمال رابنیي.

$$P(x=m)=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^m}{m!}$$

مثال: که په یوه ساعت کې د یوه بانک د مراجعینو په متوسط ډول وي ددی احتمال چه څلور تنه به په لمړیو دریو دقیقو کې راغلي وي څومره وي؟

حل:

$\lambda=60$, $t=\frac{3}{60}=\frac{1}{20}$

$m=4$, $\lambda t=60\cdot\frac{1}{20}=3$

$$P(m=4)=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^m}{m!}=\frac{e^{-3}\cdot 3^4}{4!}=\frac{(2.71828)^{-3}\cdot 3^4}{4!}$$

$$=\frac{\frac{1}{(2.71828)^3}\cdot 81}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=\frac{\frac{81}{20.0854}}{\frac{24}{1}}=\frac{1\cdot 81}{24\cdot 20.0854}=\frac{27}{8\cdot 20.0854}$$

$$=\frac{27}{160.6832}=0.168032$$

د نورمال توزیع:

دنورمال د توزیع ریاضیکي معادله چه د $f(x)$ احتمال توزیع تابع ښودونکې ده په لاندی ډول ده.

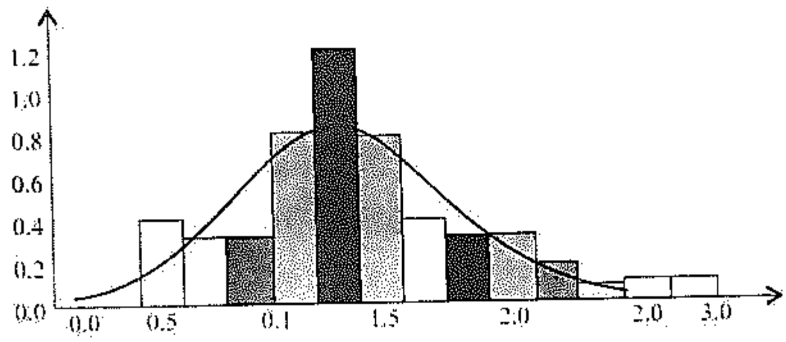
$$f(x)=\frac{1}{s\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{3}\left(\frac{x-\bar{x}}{s}\right)^2}$$

x پیوسته تصادفي مقدار(s)معیاري انحراف او $f(x)$ د منحني جګوالی دي.

د نورمال توزیع د پیوسته توزیعګانو څخه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د موټر ماشين دتېلو دسوځولو په وخت کې يوه اندازه مضرلوګي خارجوي د هغه مضر لوګي مقدارچه د (46) موټرانو څخه توليدېږي په (1980) ميلادي کې ديوه فزيکدان پواسطه چه لورنزن نومېده وڅېړل شو. لوګي يوه اندازه N_2 او (O_2) لري لاندې مستطيلي ګراف د N_2 او O_2 اندازه چه واحد يې $^{gr}/_{mil}$ دي او په(46) موټرانوکې دتېلو د سوځېدوڅخه توليدېږي ددغه موټرانو نورمال احتمال توزيع ، اوسط او وريانس رابښئي د هرمستطيل مساحت د مستطيل دقاعدې او ارتفاع دحاصل ضرب څخه لاس ته راځي.مثلاً په څلورم ستون کې چه د (1) څخه شروع او تر (1.2) پورې يې د قاعدې طول دی مساحت يې په لاندې ډول لاس ته راځي $\frac{4}{46} \times 0.2 = 0.01739 \approx 0.0174$

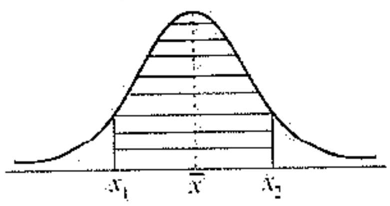


د نورمال توزيع منحني لاندې مساحت اود هغه ستېنډرډ کول:

کله چه (x)پيوسته تصادفي متحول د x_1 او x_2 تر منځ قيمت واخلي نوبايد د (x) داحتمال دتوزيع له تابع څخه انتيګرال ونيول شي.

$$f(x_1 < x < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{s}\right)^2}$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} N(x, \overline{x, s})dx$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$z_1 = \frac{x - \bar{x}}{s} = \frac{952 - 952}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

$$z_2 = \frac{956 - 952}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

نوپه دی اساس د دتعريف ناحيه د ثخه تر پوری ده اود دتعريف ناحيه د صفر ثخه تر (1) پوری ده. د جدول ثخه معلوميږي چه $P(0 \leq z \leq 1) = 0.8413$

معلومه شوه چه هغه بوتلونه چه (84.13%)ډک شوي وي د (952) ثخه تر (956) پوری مايع لري.

دويم مثال : په يوه خاص مضمون کی د ذده کوونکود نمبرود نورمال توزيع اوسط (70) اومعياري انحراف يي (8)دی د نورمال جدول ثخه په ګټه اخيستوسره د(54)ثخه تر (84) پوری فيصدي پيدا کړئ؟

حل:

$$z_1 = \frac{54 - 70}{8} = \frac{-16}{8} = -2$$

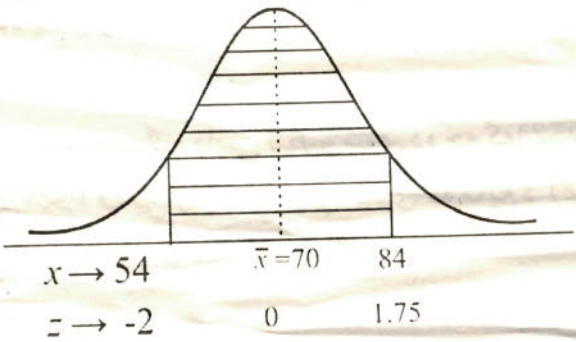
$$z_2 = \frac{84 - 70}{8} = \frac{14}{8} = 1.75$$

$$P(-2 \leq z \leq 0) = P(0 \leq z \leq 2) = 0.9772$$

$$P(0 \leq z \leq 1.75) = 0.9599$$

پورته مساحتونه جمع کوو.

$$P(-2 \leq z \leq 0) + P(0 \leq z \leq 1.75) = 0.9772 + 0.9599 = 1.9371$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

نمونه اخیستل

ناڅاپه نمونه اخیستنه:

که دټولنی ټول عناصر په ټاکل کېدلو کی هم چانسه وي.

سیستماتیک نمونه اخیستنه:

د ټولنی په ټولو عناصرباندی یو ډول کود وهل کیږي.

طبقه یي نمونه اخیستنه:

په دی نمونه اخیستنه کی ټولنه په بېلابېلو متجانسو ډلو وېشل شوی وي.

خوشه یي نمونه اخیستنه:-که ټولنه ډېره لویه وي هغه په بیلابیلو ځانګو ویشواو له هری ځانګی څخه یوه نمونه اخلو.

تبصره:

دهری ټولنی عددي خصوصیاتو (اوسط ، معیاري انحراف)ته د ټولنی پارامتر وائي.

د هری ټولنی د عددي نمونه ګیری خصوصیاتو(اوسط معیار انحراف) ته آماره وایي.

د $(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n)$ ناڅاپه متحولونو ته د (x) یوه ناڅاپي نمونه وایي.که چېرته یي تابع په دی ډول تعریف شوی وي.

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n) = f(x_1) \cdot f(x_2) \cdots f(x_n)$$

مثال: فرضوو چه په یوه قطۍ (5) سپینې او(7) توری ګلولی شته د قطۍ د منځ څخه (5) ګلولی یوه یوه ځای په ځای کوو دیوه عنصر دویم ځل ټاکل مجاز دي.د ټاکل شوو ناڅاپه نمونو د تصادفي متحولینو په ژبه بیان کړئ.

حل: د (0) عدد دتوری ګلولی لپاره اود (1) عدد د سپینی ګلولی لپاره انتخابوو.

د $i = 1,2,3$ او د $P = \frac{5}{12}$ د (x_1, x_2, x_3) ناڅاپه متحولونه د برنولي نا خاپه متحولین دي. د مقدارونو لپاره لروچه:

$$f(x_i) = \left(\frac{5}{12}\right)^{x_i} \left(1 - \frac{5}{12}\right)^{1-x_i}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(0)=\left(\frac{5}{12}\right)^{0}\left(1-\frac{5}{12}\right)^{1-0}=1\cdot\frac{7}{12}=\frac{7}{12}$$
$$f(1)=\left(\frac{5}{12}\right)^{1}\left(1-\frac{5}{12}\right)^{1-1}=\frac{5}{12}\cdot\frac{7}{12}=\frac{35}{144}$$
$$f(2)=\left(\frac{5}{12}\right)^{2}\left(1-\frac{5}{12}\right)^{1-2}=\frac{25}{144}\cdot\left(\frac{7}{12}\right)^{-1}=\frac{25}{144}\cdot\frac{12}{7}=\frac{25}{84}$$
$$f(3)=\left(\frac{5}{12}\right)^{3}\left(1-\frac{5}{12}\right)^{-2}=\frac{\frac{125}{1728}}{\left(\frac{7}{12}\right)^{2}}=\frac{144\cdot125}{1728\cdot49}=\frac{125}{12\cdot49}=\frac{125}{588}$$
$$f(4)=\left(\frac{5}{12}\right)^{4}\left(1-\frac{5}{12}\right)^{1-4}=\frac{\frac{5^4}{12^4}}{\frac{7^3}{12^3}}=\frac{12^3\cdot5^4}{12^4\cdot7^3}=\frac{5^4}{12\cdot343}$$
$$f(5)=?$$

د نمونې د اوسط توزیع:

$f(x)$ د احتمال تابع او $x_1,x_2,\cdots,x_n$ ناڅاپي نمونې وي په دې صورت کې د ناڅاپه نمونې د احتمال توزیع عبارت ده.

x	x_1	x_2	$\cdots x_n$
(x)	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\cdots\ \frac{1}{n}$

د $\bar{x}$ دمتحول اوسط $E(\bar{x}_n)=\mu$

د $\bar{x}_n$ دمتحول وریانس $U(\bar{x}_n)=\frac{1}{n}\delta$

د نمونه يي وریانس $s_n^2=s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$

د نمونه يي وریانس اوسط $E(S^2)=\delta^2$

په داسې حال کې چه $\bar{x}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ نمونه يي اوسط μ دټولنې اوسط δ^2 د ټولنې ریانس وي او s^2 دنمونې وریانس وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

احتمالات

(c) ketabton.com: The Digital Library

نولسم فصل

احتمالات$Probability$:

که د یوې پېښې وړاندیز د عددونو یا رقمونو پواسطه د اټکل وړ وي د ناڅاپي پېښې یا احتمال په نوم یادیږي .د ناممکنې پېښې احتمال صفر دی. او د ممکنې پېښې احتمال یو دی.

مثلاً دمعارف رئیس بې سواده دې نو احتمال یې صفر دی.

لمر د ختیځ له خوا راخیژي احتمال یې یو دی.

چانس:

که دیوې پېښې دوړاندیز لپاره اعداد یا ارقام نه استعمالېدل دغې پېښې ته چانس وایي.

په چانس کې دممکن ، ناممکن، خامخا او داسې نورې کلیمې استعمالیږي.

تصادفي پېښه :

هغه پېښه چه نتیجه یې معلومه وي. تصادفي پېښه، نا څاپي ازمایښت یا تصادفي تجربه ورته وایي. لکه احمد د بامه راولویدلو پښه یې ماته شوله.

تجربوي احتمال:

هغه احتمال چه د یوې تجربې په سرته رسولو کې په عملي ډول ولیدل شي تجربوي احتمال ورته وایي.

لکه د (Cl_2) او $(2Na)$ څخه مالګه لاس ته راځي.

نظري احتمال:

د تصادفي پېښو د شمېر او د تجربو د نتیجو دشمېر نسبت ته نظري احتمال وایي.

$$\text{تصادفي پېښې احتمال} = \frac{\text{د تصادفي پېښو دحالتونوشمېر}}{\text{د تجربې دټولوحالتونوشمېر}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نسبي کثرت او احتمال:

احتمال د پېښې تر پېښېدلو دمخه وړاندېز ته ویل کیږي. مګر نسبي کثرت د ازمایښت تر نتیجه وروسته د ارقامو په اساس حسابیږي په ناڅاپي پېښو کې دتجربې احتمال د پېښې دنسبي کثرت سره مساوي وي دنسبي کثرت مجموعه (1) ده.

مثال: تېرکال د لیندۍ (10) ورځې په پرلپسې ډول باران اوریدلو.

الف: اوربښت او د وریځو دورځو نسبي کثرت د لیندۍ په میاشت کې پیدا کړئ؟

ب: دراتلونکي لیندۍ په باب خپل وړاندیز ولیکئ.

ج: ایا دا قطعي ده چه هر کال به دلیندۍ په دغه لسو ورځو کې باران اوري؟

حل:

الف: $30\% = \frac{1}{3} = \frac{10}{03} =$ نسبي کثرت

ب: په راتلونکي کال کې به هم ممکن د تېر کال په څېر نسبي کثرت (30%) وي.

ج: د هر کال لپاره وړاندیز قطعي نه دی.

په نمونه یي فضا کې برابر او نابرابر چانس:

د ناڅاپي پېښې په درشل کې ددی امکان شته چه هر ممکن حالت منځ ته راشي دغه پېښې ته ناڅاپي یا اتفاقي پېښه وایي.

احتمال په (P) او $P(A)$ د (A) د ناڅاپي پېښې احتمال دی که یوه نمونه یي فضا (n) غړي ولري په دې صورت کې دهرې لمړنۍ پېښې احتمال مساوي $P(E) = \frac{1}{n}$ سره دی.

لمړی مثال: یوه داسې سکه په نظرکې نیسو چه دواړه مخونه یي شېر وي لاندې سوالونو ته جوابونه ووایي.

الف: چه پېسه شېر راشي.

ب: چه پېسه خط راشي.

ج: ایا دشېر او خط د اتفاقي پېښو احتمال برابر دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

الف: $P\left(\text{شمېر}\right) = \frac{1}{1} = 1$

ب: $P\left(\text{خط}\right) = \frac{0}{1} = 0$

ج: $0 \neq 1$

مثال: د یوه نورمال رمل اچول په نظر کې نیسو څرنګه چه د نمونې فضا $S = (1,2,3,4,5,6)$ ده نو له همدې کبله:

$$P(E) = P(6) = P(5) = P(4) = P(3) = P(=) = P\left(1 = \frac{1}{6} = 0.17 = 17\%\right)$$

د یوې نمونه یې فضا ناڅاپي پېښه:

د (S) د نمونه یې فضا هرفرعي سېټ یوه اتفاقي پېښه ده چه په (E) سره ښودل کېږي. که د غړو شمېر یې (n) وي داتفاقي پېښو ټول شمېر (2^n) دی.

د ښار په ګڼه ګوڼه کې د ورځې د (10) او (12) بجو په شاوخوا کې د احمد د جېب ښوه غلا شوې ده د پولیسو تر پلټنې وروسته معلومه شوله چه دري ګڼکپان په دغه سیمه کې لیدل شوي دي دپېښې نمونه یې فضاده د احتمالاتو له مخې د غلو په باب څېل معلومات ولیکئ؟

مثال: د اتفاقي پېښو نمونه یې فضا $S = (x, y, z)$ ده.کلي سېټ یې پیدا کړئ؟

$E_1 = (x)$ یوازې غل دی.

$E_2 = (y)$ یوازې غل دی.

$E_3 = (z)$ یوازې غل دی.

$E_4 = (x, y)$ (x, y) دواړه غله دي.

$E_5 = (x, z)$ (x, z) دواړه غله دي.

$E_6 = (y, z)$ (y, z) دواړه غله دي.

$E_7 = (x, y, z)$ (x, y, z) درې واړه غله دي.

$E_8 = \{\ \} = \phi$ یو هم غل نه دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د احتمال قاعدی:

1- د یوی اتفاقي پېښې احتمال تل د (0) او (1) تر منځ وي که اتفاقي پېښه (E) وي نو:

$$0 \leq P(E) \leq 1$$

2- که چېرې (S) د یوه ازمایښت نمونه يي فضا وي نو $P(S) = 1$ د (S) ناڅاپي پېښه د ډاډمنې پېښې په نوم یادیږي.

3- د ناشونې پېښې لپاره لرو:

$$P(\phi) = 0$$

مثال: د دوه سکو د اچولو نمونه يي فضا $S = (TT, TH, HT, HH)$ ده خط $= T$ او شېر $= S$ دی لاندینې احتمالات پیدا کړئ؟

الف: دواړه سکې شېر دي.
ب: لږ ترلږه یوه سکه شېر ده.
ج: دواړه سکې یو شان دي.
د: دواړه سکې یو شان نه دي.
ها: د سکو یوه هم خط نه دی.

حل:

$$E_1 = \{H, H\} \qquad \Rightarrow P(E_1) = \frac{1}{4} = 0.25 = 25\%$$

$$P(E_2) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0.5 = 50\%$$

$$P(E_3) = \frac{1}{4} = 0.25 = 25\%$$

$$P(E_4) = \frac{1}{4} = 0.25 = 25\%$$

$$P(E_5) = \frac{2}{4} = 0.5 = 50\%$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ونه ایز دیاګرام

کولای شو چه هر ناڅاپي ازمایښت د ونه ایز دیا ګرام پواسطه رسم کړو طریقه یي داسی ده چه د ازمایښت دپیل څخه دیاګرام پیل کووبیا د هری نتیجی څخه څانګی شروع کوویه هره څانګه کی نتیجی د پاڼو په شکل لیکو دغه ډول ګراف ته ونه ایز دیاګرام وايي.د احتمالونو د جمع حاصل د هري څانګی د نشرېدو په ټکي کی د (1) سره مساوي دې همدا ډول دټولو پېښو د احتمالاتو د جمع حاصل هم د (1) سره مساوي دې.

مثال: په یوه کڅوړه کی څلور توپونه پراته دي دوه توپونه په سره رنګ(r) دری توپونه په شنه رنګ (g) او یو توپ په تور رنګ (b) رنګ شوي دي توپونه د لیدو لپاره راایستل کیږي او بیا بېرته ایښودل کیږي مربوطه احتمالات یي پیدا کړئ؟

حل:-

w	rr	rg	rb	gr	gg	gb	br	bg	bb
$P(w)$	$\frac{4}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$

په پورته جدول کی ټول کسرونه متمائل دي د پېښو احتمالات د صورتو څخه څرګندیږي

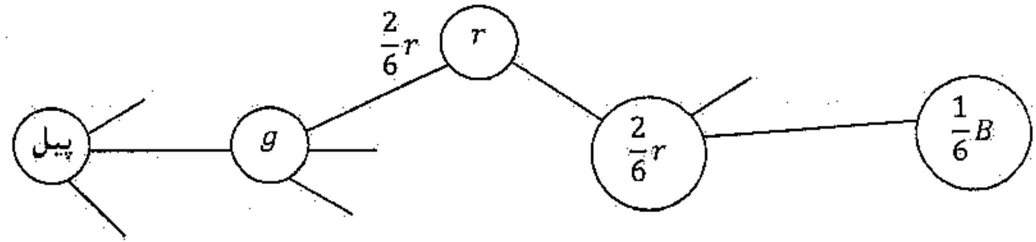
د ضرب د حاصل لومړی قاعده:

د یوې لومړنی پېښی احتمالات عبارت دي د پېښی د پېل څخه د پېښی تراخره پوری داحتمالاتو د ضرب د حاصل څخه .په دغه موضوع باندی د ښه پوهېدلو لپاره د یوی کورنی شجره لیکو هر شاخ بیل بیل ضربوو او جمع کوو یي د ټولی کورنی د غړو شمېر لاس ته راځي.

مثال:- په یوه کڅوره کی سری مری دری شنی مری او یوه توره مری ایښودل شوي دي مری د کڅوړی څخه داسی راوباسو چه ترکتلو وروسته بیاکڅوړی ته اچول کیږي اوپېل (شنې ،سرې، تورې) څخه وي.

حل:

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$P(w) = P(grrb) = \frac{3}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{12}{1296} = 0.0092 = 0.92\%$$

$$P(w) = 0.0092 = 0.92\%$$

يعنی د (شنی، سری ،توری)مريو د وتلو احتمال 0.92% دی

د ناځاپي پېښو اتحاد

1- که د (S)په يوه نمونه يي فضا کی د (A) او (B) دوه داسی ناځاپي پېښی وي چه $A \subseteq B$ وي نو: $A \cup B = B$

2- که د(S) په نمونه يي فضا کی (A) او (B) دوه ناځاپي پېښی يود بل سره فرق ونه لري نو:

$$A \cup B = B \cup A$$

3: که د(S) په نمونه يي فضا کی د(A) يا(B) يوه پېښه رامنځ ته شي نو د ($A \cup B$) پېښه هم را منځ ته شوی ده چه:

$$A \subseteq A \cup B \text{ او } B \subseteq A \cup B$$

4-که د (A) پېښه د (S) په نمونه يي فضا کی پېښه شوی وي او بله پېښه نه وي نو:

$$A \cup \phi = A$$

5- د $A \cup B$ پېښه په دی معنی ده چه اقلاً د (A) يا (B) پېښه، پېښه شوی ده.

مثال: که د (C) پېښه د (A) او (B) دوه بيلا بيلی پېښی په ځان کی ولري نو په دې صورت کی د $A \cup B$ ناځاپي پېښه هم په ځان کی لري.

حل:فرضاً $A = \{1,2\}$ او $B = \{2,3\}$ وي او $C = \{1,2,3,4\}$ وي ليدل کيږي چه $A \subseteq C$ او $B \subseteq C$دي ځکه چه:

$$A \cup B = B \cup A = \{1,2,3\} \subseteq \{1,2,3,4\} \Rightarrow A \cup B \subseteq C$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دناخاپي پېښو تقاطع

1- په يوه نمونه يي فضا کې د دوه يا څو ناخاپي پېښو تقاطع د تبديلي د قانون پيروي کوي.

فرضاً د (A)او (B) او (C) ناخاپي پېښې دي نو $A\cap B = B\cap A$ رابطه صحيح ده.

2- که په يوه نمونه يي فضا کې دوه ناخاپي پېښې واقع شي نود دوی تقاطع دهری نا خاپي پېښې فرعي سيټ دی.

فرضاً د (A) او (B) دوه ناخاپي پېښې دي نو $A\cap B \subseteq A$ او $A\cap B \subseteq B$

3- که د (S) په يوه نمونه يي فضا کې د (A) ناخاپي پېښه وي او بله پېښه نه وي نو:

$$A\cap S = A, A\cap \phi = \phi$$

4- که A او B دوه ناخاپي پېښې وي او $A \subseteq B$ وي نود دواړو پېښو تقاطع کوچنۍ پېښه ده.

$$A\cap B = A$$

مثال: ديوه ښوونځي دفوټبال دټيم څخه درې تنه د واليبال په ټيم کې هم شامل دي که دفوټبال دټيم غړي په (A) اود واليبال د ټيم غړي په (B) وښيو او ددواړو ټيمونو ګډ غړي په (C) وښيو نو دټيمونو تر منځ اړيکه د سيټ تيوري په شکل وليکئ؟

حل:

$$A\cap B = C \Rightarrow A\cap B \subseteq A \ \& \ A\cap B \subseteq B$$

کلي او مکمله سيټ

د څو فرعي سيټونو مجموعي سيټ ته کلي سيټ وايي. که په يوه کلي سيټ کې دوه سيټونه موجود وي نودا سيټونه يو د بل مکمله سيټونه دي.

که (S) يوه نمونه يي فضا وي او (A) يوه ناخاپي پېښه وي او $(\acute{A})$ يوه بله ناخاپي پېښه وي چه د (A) سره په يوه وخت کې پېښه شوی نه وي. (S) د دغه دواړه سيټونو کلي سيټ دي او $(\acute{A})$ د (A) مکمله سيټ دی.

الف: $A\cup \acute{A} = S$

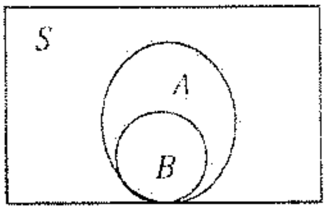
ب: $P(A\cup \acute{A}) = P(S) = 1$

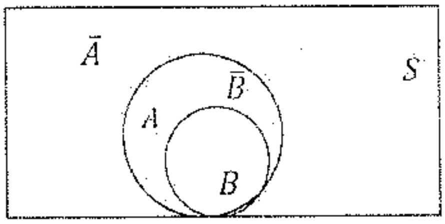
(c) ketabton.com: The Digital Library

ج: $P(\acute{A}) = 1 - P(A)$

که د (S) په يوه نمونه يي فضا کې د (A) ناڅاپي پېښه د (B) ناڅاپي پېښه په بر کې ولري په ګرافيکي ډول وښيي چه د $(\bar{A})$ ناڅاپي د $(\bar{B})$ يوه ناڅاپي پېښه په بر کې لري

حل: څرنګه چه $B \subseteq A$ ده نو د شکل څخه معلوميږي چه:





د سيټونو او مډل جوړونه:

د سيټ تيوري په واسطه د احتمالاتو مسايل حليږي يعنې د ناڅاپي پېښو د پېښېدو د مسايلو حل اوس د سيټ تيوري په واسطه حليږي چه په دې اساس د سيټ تيوري د فعاليت ساحه نوره هم پراخه شوه

مثال د په نمونه يي فضا کې د او ناڅاپي پېښې په لاندې دياګرام کې راکړشوي دي د پېښېدو احتمال مطلوب دی

a: د دې احتمال چه د (A) يا (B) حادثه ناڅاپي پېښه شي.

b: د دې احتمال چه د (A) پېښه ،پېښه شي.

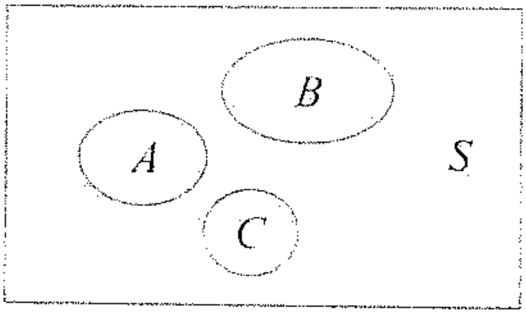
c: د دې احتمال چه د (C) پېښه پېښه نه شي

حل:

a: د (A) يا (B) احتمال په حقيقت کې د $A \cup B$ احتمال دی څرنګه چه دا پېښې يو د بل څخه بېلې دي نو يعنې $A \cap B = \phi$ دي نو

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



b. د دی احتمال چه د (A) پیښه ناڅاپه پیښه شي د $(\acute{A})$ د پیښی څخه عبارت دی چه د $(\acute{A})$ پیښه نه ده پیښه شوی د $(\acute{A})$ پیښه د (B) او (C) د پیښو اتحاد دې یعنی دغه دواړه پیښی نه دي پیښی شوي نو $P(\tilde{A}) = P(C \cup B)$ څرنګه $P(A) = 1 - P(\acute{A})$ نو

$$P(A) = 1 - P(C \cup B) = 1 - P(C) - P(B)$$

c. د پاره ددی چه د (C) پیښه ناڅاپه پیښه نه شي هغه پیښی دپیښېدلو د احتمال سره برابره ده چه د (A) او (B) پیښي. پیښې شي یعنی $(A \cup B)$ دپیښی د پیښېدلو څخه عبارت دی نو.

$$P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

د شمېرنی اصل:

د دوه سیټونو د شمېرنی اصل په ترکیب او ترتیب پوری اړه لري.

1- د دوه سیټونو دعناصرو دشمېرنی لپاره عناصر سره ضربوو مجموعه یي د سیټونو د عناصرو د حاصل ضرب مجموعه ده.

2- که د یوه سیټ عناصر (m) اودبل سیټ عناصر (n) وي نو $(m \times n)$ یي د حاصل ضرب مجموعه ده.

مثال د $(0.1.2.3.4)$ رقمونو څخه څو دوه رقمي عددونه جوړېږي. او څو عددونه په (2) پوره وېشل کیږي

حل $(20 = 5 \times 4)$ دوه رقمي عددونه وز څخه جوړېږي او $(12 = 4 \times 3)$ عددونه په (2) پوره وېشل کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

پرموتيشن(ترتيب) *Permotaion*:

كه څو شيان ولرو او ددې شيانو څخه جوړې جوړې کړوپه دغه جوړو کې د شيانو بدلولو ته ترتيب وايي.

(a, b, c, d) څلور حروف راکړشوي دي غواړو چه دوه ،دوه يي جوړه کړو نو په لاندې ډول يي جوړه کوو.

(ab, ac, ad, bc, bd, cd) نو که څلور شيان دوه،دوه جوړه کړو نو شپږ جوړې ورڅخه جوړيږي.

فکتوريل:

د مثبتو مسلسلو عددونوضربولوته فکتوريل وايي. او په (!) سره ښودل کيږي.

$0! = 1$ او همدا ډول $1! = 1$ دی. ثبوت يې په (277) صفحه کې وګورئ.

(n) مسلسل عددونه په(P_n) ښيي $(P_n = n!)$ دی.

ترکيب $(Combinatuin)$:

هغه روش چه د هغه پواسطه د بينوم ضريبونه پيدا کيږي د ترکيب په نوم ياديږي. اوپه لاندې ډول ليکل کيږي.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$0 \le k \le n$ او $\binom{n}{k}$ داسې ويل کيږي. (k)دپاسه (n)

$$\binom{n}{0} = 1 \quad , \binom{n}{n} = 1 \quad , \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

د کمبينيشن علامه او فارمول دادې.

$$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

مثال: $\binom{7}{4}$ قيمت پيدا کړئ؟

$$C_4^7 = \frac{7!}{4!\,(7-4)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4(1\cdot 2\cdot 3)} = \frac{5\cdot 6\cdot 7}{6} = 35$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

وریشن(تبدیل) $Variation$:

په تبدیل اوترتیب کی د جوړو شمېر ته تبدیل وایي.

وریشن یا تبدیل په (V_k^n) ښیي. د لاندی فارمول پواسطه لاس ته راځي.

$$V_k^n = k!C_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

مثال: په (30) کسانو کی (4) کسه یو ځان د ریاست لپاره دویم ځان داول معاونیت لپاره دریم ځان د دویم معاونیت لپاره او ځلورم د منشي په توګه ځان کاندیدوي. د امکاناتو شمېر یي پیدا کړئ؟

حل:

$$V_4^{30} = \frac{30!}{(30-4)!} = \frac{26! \cdot 27 \cdot 28 \cdot 29 \cdot 30}{26!}$$
$$= 27 \cdot 28 \cdot 29 \cdot 30 = 657520$$

پورتني معومات په لاندی جدول کی خلاصه کوو.

د تاکنو ډول k غړي د n غړو څخه	دامکاناتو شمېر	
	پرته له تکرار څخه $k \le n$	سره له تکراره $k \le n$
ترتیب یا پرموټېشن	$P(n,k) = n!\,, n = k$	$P(n,k) = \frac{n!}{k!}$
ترکیب یا کمبېنېشن	$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$	$C_k^n = \binom{n+k-1}{k}$
تبدیل یا وریشن	$V_k^n = k!\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!}$	$V_k^n = n^k$

مثال: د یوی سکي په اچولو کی چه د راتګ امکان یي په یا خط کی ممکن دی او د هری خوا دراتګ احتمال یي د $\frac{1}{2}$ سره مساوي دي که سکه (2) ځلي، (3) ځلي، (6) ځلي، (8) ځلي، (16) ځلیوغورځول شي د هم چانسو لمرنیوپیښو په نمونه یي فضا کی یو ونه ایزګراف لاس ته راځي.

$$S = \text{شېر} \quad \text{او} \quad T = \text{خط}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورتني مثال کی د شیر او خط دراتک احتمال په یو ،دوه،دری،ځلور ځلي غورځولو کی په لاندی جدول کی را ټول شوي دي

د سکې غورځول	هیڅ خل		یو خل		دوه خله		دری خله		ځلور خله	
	خط	احتمال	خط	احتمال	خط	احتمال	خط	احتمال	خط	احتمال
	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{16}$
			1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{2}{4}$	1	$\frac{3}{8}$	1	$\frac{4}{16}$
					2	$\frac{1}{4}$	2	$\frac{3}{8}$	2	$\frac{6}{16}$
							3	$\frac{1}{8}$	3	$\frac{4}{16}$
									4	$\frac{1}{16}$

که جدول ته ښه په غور سره وګورو نو د هر وارد احتمال د کسرونو په صورت کی یو نظم موجود دی چه د بینوم په انکشاف کی د حدونو ضریبونه دي . دغه عددونه اول وار د پاسکال فرانسوي په واسطه په یوه جدول کی ترتیب شوي وه کولای شو چه د بینوم په انکشاف کی تری استفاده وکړو

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(a+b)^0 = \textcircled{1}$$

$$(a+b)^1 = \textcircled{1}a + \textcircled{1}b$$

$$(a+b)^2 = \textcircled{1}a^2 + \textcircled{2}ab + \textcircled{1}b^2$$

$$(a+b)^3 = \textcircled{1}a^3 + \textcircled{3}a^2b + \textcircled{3}ab^2 + \textcircled{1}b^3$$

$$(a+b)^4 = \textcircled{1}a^4 + \textcircled{4}a^3b + \textcircled{6}a^2b^2 + \textcircled{4}ab^3 + \textcircled{1}b^4$$

$$(a+b)^5 = \textcircled{1}a^5 + \textcircled{5}a^4b + \textcircled{10}a^3b^2 + \textcircled{10}a^2b^3 + \textcircled{5}ab^4 + \textcircled{1}b^5$$

$$(a+b)^6 = \textcircled{1}a^6 + \textcircled{6}a^5b + \textcircled{15}a^4b^2 + \textcircled{20}a^3b^3 + \textcircled{15}a^2b^4 + \textcircled{6}ab^5 + \textcircled{1}b^6$$

عمومي شکل يي دا دی.

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

د خط راتلو احتمال په مرتبه کی عبارت دی

$$P\left(\text{د خط راتګ}\right) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

د بینوم قضیه:

د بینوم قضیه مخکی ویل شوی ده تکرار ته ضرورت نشته

تبصره.

که د یوی ناخاپي پیښی پېښېدلو ته (1) او نه پېښېدلو ته يي (0) ووایو لاندی جدول د $n=2$ لپاره بشپړ کړئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

k	ممکنی پایلی	احتمال	د بینوم د ضریبونو ارایه
0		$(1-P)^2$	$\binom{2}{0}P^0(1-P)^2$
1	10	$2P(1-P)$	
2	11		$\binom{2}{2}P^2(1-P)^2$
		$\{P+(1-P)\}^2$	$\sum\binom{n}{k}P^{k(1-P)^{n-k}}=?$

که یوه تجربه په مساوي احتمالاتو تکرار شي په (n) ځله تکرار کی د بینوم دانکشاف (k). ام حد لاندی احتمال لري.

$$\binom{n}{k}P^k(1-P)^{n-k}$$

پورتني بینوم په $B(n,p,k)$ ښودل کیږي او د برنولي د پرابلم د احتمال په نوم یادیږي.اوداسی لیکل کیږي.

$$B(n,p,k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-kb}$$

د دوه جمله يي احتمال:

که یوه نمونه یي فضا دوه غږي ولري نو که د یوه غږي احتمال یي (P) وي نو دبل حالت احتمال یي $(1-P)$ دی چه بایلل ورته وایي.که دا ډول تجربه ځلي تکرار شي نو ام ځلي وړل په ځلي تکرار کی او د بایللو احتمال په ښودل کیږي.

$$-k \text{ ام ځلي وړل په n ځلي تکرار کی } = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

مثال: که په یوه تجربه کی د وړلو احتمال$\left(\frac{1}{2}\right)$ او د بایللو احتمال هم $\left(\frac{1}{2}\right)$ وي محاسبه یي په لاندی ډول کیږي.

$$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$\binom{n}{k}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)^{n-k}=\binom{n}{k}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}=\binom{n}{k}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n=\binom{n}{k}\cdot\frac{1}{2^n}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$=\frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

دویم مثال: په یوه پنځه اولاده فامیل کی د دی احتمال چه دوه تنه هلکان او پاتی انجونی دي څو دي؟

حل:

$$P=\frac{1}{2}$$

نو

$$q=1-\frac{1}{2}=\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$=\frac{\binom{5}{2}}{2^5}=\frac{\frac{5!}{2!\,(5-2)!}}{2^5}=\frac{\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}{1\cdot2\cdot1\cdot2\cdot3}}{32}=\frac{10}{32}=0.3125=31.25\%$$

دریم مثال: درمل یوه دانه (6) واره غورځوودی احتمال پیدا کړئ چه په (4) واره غورځولو کی راغلي خالونه د (3) څخه لږ وي؟

حل: د (3) څخه لږ راتلل ورل وګنیو نو

$$P=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}=0.3333=33.33\%$$
$$Q=1-P=1-\frac{1}{3}=\frac{3-1}{3}=\frac{2}{3}=0.6666=66.66\%$$
$$=\binom{6}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{6!}{4!\,(6-4)!}\cdot\frac{1}{81}\cdot\frac{4}{9}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot1\cdot2}\cdot\frac{4}{729}=\frac{60}{729}$$
$$=0.0823=8.23\%$$

څلورم مثال: د یوی سکی د خط د راتلو احتمال $\frac{1}{3}$ دي که څلور واره وغورځول شي د دی احتمال چه شپږ (3) واره راشي مطلوب دی؟

حل:

$$1-P=\frac{1}{3}P$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$P = \frac{3}{4} \qquad , \quad Q = \frac{1}{4}$$

$$= \binom{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right) + \binom{4}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{3}{64} + \frac{1}{256} = \frac{13}{256} = 0.05078 = 5.08\%$$

پنځم مثال: يوه نورماله سکه څو واره وغورځول شي چه لږ ترلږه د خط دراتلو احتمال 0.99 څخه زيات شي

حل: سکه واره غورځوو.

$$T = 1 - S$$

$$= 1 - \binom{n}{n} \cdot \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

په دې ډول د دې شرط:

$$1 - \frac{1}{2^n} > 0.99 \quad \text{or} \quad \frac{1}{2^n} < 0.01 \qquad \text{so} \qquad 2^n > 100 \quad \Rightarrow n \geq 7$$

متمادي او غير متمادي فضاګانی:

د يوې ناڅاپه تجربې نمونه يي فضايو معين يا غير معين سيټ دی. يعنې که د فضا عناصر معين $(Countable)$وي نمونه يي فضا معينه ده. چه پرېکړی فضا هم ورته وايي او که د فضا عناصر معين نه‌وي نو فضا غير معينه ده چه نښتې يا متمادي فضا هم ورته وايي

مثال: د لاندې فضاګانو څخه کومه يوه متصله او کوم يوه پرېکړی ده؟

الف: د دوو رملي دانو اچول

ب: د (8) او (12) ترمنځ د يوه حقيقي عدد ټاکل

ج: د (30) ذده کوونکو څخه د (3) تنو ټاکل

د: د يوې د کرې د حرارت د درجې لوړېدل د (100) درجو د سانتي ګيرېډ څخه تر (1000) درجو د سانتي ګيرېډ پورې.

ها: د (30°) او (45°) درجو ترمنځ د يوې زاويې ټاکل

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل. څرنګه چه د (الف او ج) نمونه يي فضاګانې دمحدودو عناصرو د شمېر شحخه جوړې شوي دي نو پرېکړي فضاګانې دي او(ب ، د او ها) فضاګانې دنامحدودوعددو نوڅخه جوړې شوي دي نو نبتني بامتمادي فضاګاني

ورته وايي.

دويم مثال. عبداله د خپل کور دګلانو د اوبولو لپاره يو واترپمپ وا خيستلو د واتر پمپ عمر د ساعت له مخې پيدا کړئ؟

حل. { } خالي سيټ د واتر پمپ د ورانېدو وخت دی او $S = \{t \in \mathbb{R} \,:\, t \geq 0$ د واتر پمپ د عمر اوږد والي دی.

هم چانسه پېښې

هغه ساده پېښې چه د هغوی د پېښېدلو چانس په يوه تجربه کې برابر وي د هم چانسه پېښو په نوم ياديږي

که چېرې $S = (e_1, e_2, \cdots e_n)$ يوه نمونه يي فضا وي نو (e_i) د هر $i = 1,2,3, \cdots n$ لپاره يوه ناڅاپه لمړنی پېښه ده په دې شرط چه $0 \leq P(e_i) \leq 1$ وي

د لمړنيو پېښو داحتمالاتو مجموعه ديوه سره مساوي ده

$$P(e_1) + P(e_2) + \cdots + P(e_n) = \sum_{i=1}^{n} P(e_i) = 1$$

مثال. څلور کسه په يوه لوبه کې اشتراک کوي د هر يوه نمونه يي فضا هم چانسه ده د هر يوه د ګټلو احتمال پيدا کړئ؟

حل. که چېرې $S = (a, b, c, d)$ نمونه يي فضا وي نو دهرې ناڅاپه لومړنی پېښې احتمال $\left(\frac{1}{4}\right)$ دې نو ليکو چه

$$P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = \frac{1}{4}$$

لومړنی پېښې هم چانسه دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

د متمادي فضاګانو احتمال:

پیوسته نمونه يي فضا ګانې د لايتناهي ټکو مجموعه ده چه شکل يي د اعدادو په محور ، سطحه او د اجسامو په حجمونو کې ليدل کيږي. د دغه ډول ټکو شمېرل ممکنه نه ده مګر د احتمال د نسبت لپاره يي خطونه ،سطحې او حجمونه په توټو وېشو. د اعدادو د محور څخه د يوه حرف لکه (x) او په سطحو کې د دوه تورو لکه (x,y) څخه او په احجامو کې د درې تورو څخه لکه (x,y,z) څخه استفاده کوو

لومړی مثال: د اعدادو په محور د $(0,3)$ په انټروال کې د يو ټکي وټاکئ چه:

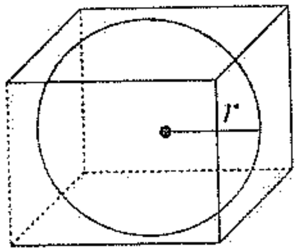
$$1 < x < 2.5$$

$$P(A) = \frac{\overline{A}}{\overline{B}} = \frac{2.5 - 1}{3 - 0} = \frac{1.5}{3} = \frac{1}{2}$$

دويم مثال: يوه کره په يوه مکعب کې محاط ده د مکعب ضلعه (2) واحده ده په مکعب کې يوه نقطه وټاکو ايا ددې احتمال شته چه دا نقطه د کرې پر مخ پرته وي؟

$r = \frac{a}{2} = \frac{2}{2} = 1$ د کرې شعاع

$$P(A) = \frac{A_{globe}}{A_{CUB}} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{a^3} = \frac{\frac{4}{3}\pi (1)^3}{2^3} = \frac{\frac{4}{3}\pi}{8} = \frac{\pi}{6}$$



مشروط احتمال:

که S نمونه يي فضا او (A) او (B) په دغه نمونه يي فضا کې دوه ناڅاپي پېښې وي په داسې حال کې چه $P(B) \neq 0$ وي نو مشروط احتمال د لاندې فارمول پواسطه پيدا کيږي.

$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ يعنې د (A) د پېښې احتمال نظر د (B) ناڅاپي پېښې ته مشروط احتمال بلل کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پورته فارمول څخه لیکو چه:

-1

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A)$$
$$P(A \cap \bar{B}) = P(\bar{B}) \cdot P_{\bar{B}}(A)$$
$$P(A) = P(B) \cdot P_B(A) + P(\bar{B}) \cdot P_{\bar{B}}(A)$$

-2

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

له لومړي پایلې څخه په لاس راځي چې:

$$P_A(B) = \frac{P_B(A) \cdot P(B)}{P(B) \cdot P_B(A) + P(\bar{B}) \cdot P_{\bar{B}}(A)}$$

3- که پورته فارمول ته عمومیت ورکړو نو لیکو چه:

$$P_A(B_i) = \frac{P_{B_i}(A) \cdot P(B_i)}{P(B_i) \cdot P_{B_i}(A) + \cdots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A)} = \frac{P(A \cap B)}{\sum_{k=1}^{n} P(B_k) \cdot P_{B_n}(A)}$$

لومړی مثال: یو شاګرد ښوونځي د تللو لپاره (50%) هره ورځ دګاډی څخه ګټه اخلي چه (70%) په ټاکلیوخت ښوونځي ته رسیږي په منځني ډول نوموړی (60%) په ټاکلي وخت ښوونځي ته حاضریږي که چیری پېښې:

1- د ګاډی پواسطه راتلل

2- په ټاکلي وخت رسیدل اوپه دې صورت کې د (A) مشروط احتمال نظر (B) ته $P_B(A)$ مطلوب دې ؟

حل:

$$P_B(A) = \frac{P(A) \cdot P_B(A)}{P(B)} = \frac{0.5 \cdot 0.7}{0.6} = \frac{3.5}{6} = 0.58\dot{3} = 58.33\%$$

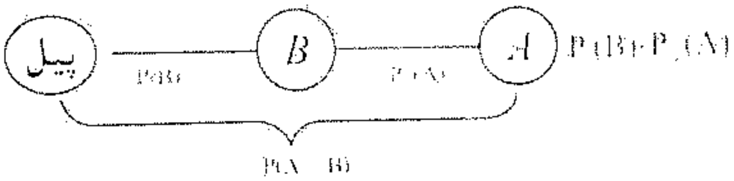
(c) ketabton.com: The Digital Library

د حاصل ضرب اصل

د په نمونه يي فضا کی د او د دوه ناخاپي پېښنو لپاره د مشروط احتمال د تعريف سره سم ليکو چه:

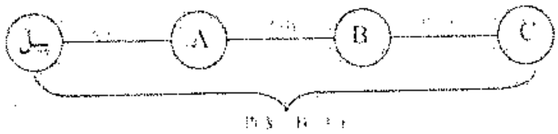
$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A)$$

دا مسئله د ونه ايز دياګرام پواسطه هم لاس ته راوړلای شو.



$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A)$$

دا مطلب د او او دري پېښنو لپاره هم د تطبيق وړ دی

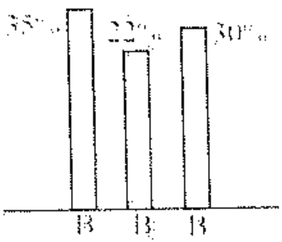


$$\Rightarrow P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{A \cap B}(C)$$

مثال - د B_1، B_2 او B_3 په دري ولايتونو کی په پارلماني ټاکنو کی د ګډون کوونکو فيصدي او د جمهوري ګوند فيصدي برخه ورکړشوې ده.

په کوم احتمال د ټاکنو ګډون کوونکو او يا رائي اچوونکو جمهوري ګوند ګټلی شي.

ناخاپي په لاندي ډول تعريفوو



V: هغه رايي ورکوونکي چه جمهوري ګوند يي ټاکلی وي.

B_i د ولايت رايي ورکوونکي

(c) ketabton.com: The Digital Library

ولایت	درایو ورکوونکو فیصدي	جمهوري ګوند ته رای ورکوونکي
B_1	33.2%	35
B_2	46.5%	22
B_3	20.3%	30

1- B_i دوه په دوه یو دبل څخه مستقل عناصر نه لري.

2- د (S) نمونه یي فضا لپاره $S = B_1 \cap B_2 \cup B_3 = \cup_{i=1}^{3} B_i$ دي نو:

$B_i \cap \mathbb{V}(i = 1,2,3,)$ یو له بل سره مستقل صورت نیسي.

$$V = \bigcup_{i=1}^{3}(B_1 \cap V)$$

د دوارو خواو د احتمال لپاره لیکو.

$$P(V) = P\left\{\bigcup_{i=1}^{3}(B_i \cap V)\right\} = \sum_{i=1}^{3} P(B_i \cap V) = \sum_{i=1}^{3} P(B_i) \cdot P_{B_i}(V)$$
$$= P(B_1) \cdot P_{B_1}(V) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(V) + P(B_3) \cdot P_{B_3}(V)$$
$$= 0.332 \cdot 0.35 + 0.465 \cdot 0.22 + 0.203 \cdot 0.3$$
$$= 0.1162 + 0.1023 + 0.0609 = 0.2794$$
$$P(V) = 27.94\%$$

تعریف:

که چېرې د $B_1, B_2 \cdots, B_n$ رای ورکوونکي وي او $P(B_i) \neq 0$ وي $i = 1 \cdots n$ پېښو عمومي حالت د (S) په نمونه یي فضا کی یوه پېښه وي نو $P(A)$ د کامل احتمال په نوم یادیږي او د (A) اختیاري ناڅاپي پېښی لپاره لرو.

$$P(A) = \sum_{i=0}^{n} P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)$$

د B_i چه $i = 1 \cdots n$ د (S) نمونه یي فضا د یوی پېښی لپاره چه $P(B_i) \neq 0$ د (A) ناڅاپي پېښی احتمال چه $P(A) \neq 0$ وی د $(Bayex)$ بائیزفارمول پواسطه لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$P_A(B_i) = \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)} = \frac{P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}{\sum_{i-1}^{n} P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}$$

د بائیز فارمول زیات استعمال لري لکه $n = 2$ لپاره $B_2 = \bar{B}$ ، $B_1 = \bar{B}$ په پام کې ونیسو په حقیقت کې B_1 او B_2 د (S) دنمونه یي فضا پیښې دي.

$$P_A(B) = \frac{P(B \cdot P_B(A))}{P(B) \cdot P_B(A) + P(\bar{B}) \cdot P_{\bar{B}}(A)}$$

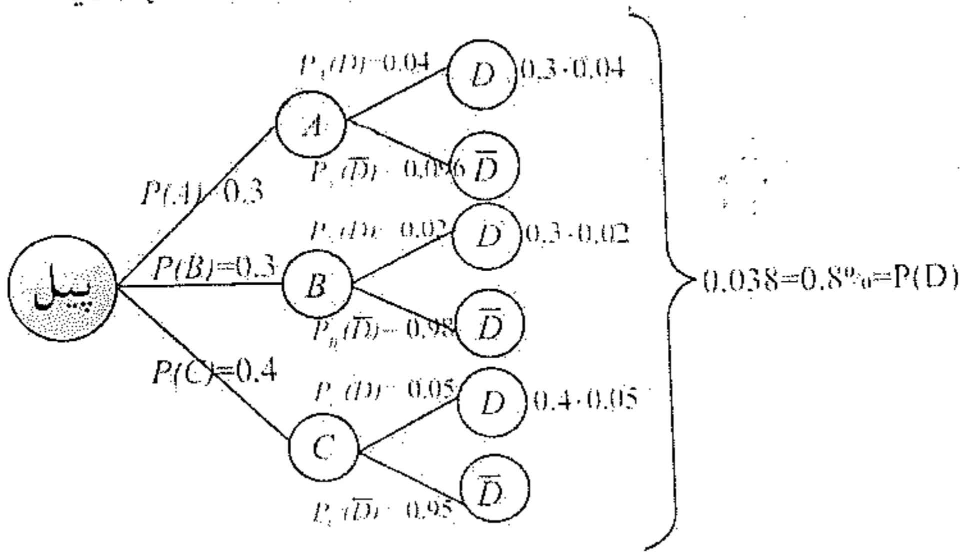
پورتنی فارمول د لپاره د بائیز له فارمول څخه عبارت دی.

مثال: په یوه فابریکه کې د A ، B او C ذري ماشینونه په ترتیب سره 30%، 30% او 40% د برق ګروپونه تولیدوي که چیرته په ماشینونو کې دګروپونو د خرابېدو کچه په ترتیب سره 4%، 2% او 5% وي او نوموړي ګروپونه په ګډه سره خرڅ شي مطلوب دی

a: د دې احتمال چه یو اخیستل شوی ګروپ وران دی.

b: په کوم احتمال خراب شوی ګروپ د C په ماشین پوری اړه لري.

c: یو نوی تولید شوی ګروپ لرو په کوم احتمال سره به د په ماشین پوری اړه ولري.



د b جز حل:

$$P_D(C) = \frac{P(D \cap C)}{P(D)} = \frac{P(C) \cdot P_C(D)}{P(D)} = \frac{0.4 \cdot 0.05}{0.038} = \frac{0.02}{0.038} = 0.526 = 52.6\%$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د C جزء:

$$P_D(B) = \frac{P(\bar{D} \cap B)}{P(\bar{D})} = \frac{P(B) \cdot P_B(\bar{D})}{P(\bar{D})}$$

$$= \frac{0.3 \cdot 0.98}{0.3 \cdot 0.96 + 0.3 \cdot 0.98 + 0.4 \cdot 0.95} = \frac{0.294}{0.962} = 0.3056 = 30.56\%$$

د ناڅاپه پېښو استقلالیت:

د ناڅاپي پېښو استقلالیت لاندې خواص لري

1- که د دوه ناڅاپي پېښو د ضرب حاصل د هغوی د تقاطع د سیټ سره مساوي وي نو دغه دوول ناڅاپي پېښو ته مستقلې پېښې وايي يعنې پېښې استقلالیت لري.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

2- که د A او B پېښې ګډ ټکي ونه لري نو:

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = 0$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

مثال: که چېرې د يوه ښوونځي ذده کوونکي د سترګو رنګ او ذکاوت د اغېزې پرته فرض شوي وي لاندې پېښو ته ځواب ور کړئ.

الف: ټاکل شوی ذده کوونکی يو هوښيار ذده کوونکی دی

ب: ټاکل شوی ذده کوونکی توری سترګی لري

حل: څرنګه چه $P_B(H) = P(H)$ اوسربېره پردی $P_B(H) = \frac{P(B \cap H)}{P(B)}$ نو:

$$P(B \cap H) = P(H) \cdot P(B)$$

عمومي حالت $A_1, A_2, \cdots, A_n$ ناڅاپي پېښې احتمالاً يو له بلې څخه مستقلې بلل کېږي که چېرې د هرو دوو پېښو په ترکيب کې د ضرب د حاصل قاعده صدق وکړي پرته له هغې پېښې يو له له بلې سره تړلې دي.

نتيجه:

1- $A \cap B$ ، $A \cap \bar{B}$ ، $\bar{B} \cap \bar{A}$ ، $\bar{B} \cap A$ د پېښو دغه تقاطع په جدول کې هم پيدا کولای شو

(c) ketabton.com: The Digital Library

	B	$\bar{B}$	
A	$P(A\cap B)=a\cdot b$	$P(A\cap \bar{B})=a(1-b)$	a
$\bar{A}$	$P(A\cap B)=b(1-a)$	$P(\bar{A}\cap \bar{B})=(1-a)(1-b)$	$1-a$
	b	$1-b$	1

2- د A ، B او C دري ناخاپه پېښې چه يو د بل څخه مستقلې دي نولرو چه:

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$
$$P(A\cap C)=P(A)\cdot P(C)$$
$$P(B\cap C)=P(B)\cdot P(C)$$
$$P(A\cap B\cap C)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$$

دويم مثال: د لاندې متقاطع جدول خالي ځايونه ډک کړئ؟

	B	$\bar{B}$	
A	0.12	$P(A\cap \bar{B})=$?	?
$\bar{A}$	$P(\bar{A}\cap B)=?$	$P(\bar{A}\cap \bar{B})=$?	?
	?	0.6	

حل: څرنګه چه $P(\bar{B})=0.6$ نو $P(B)$ داسې پيدا کوو

$$P(B)=1-P(\bar{B})=1-0.6=0.4$$
$$P(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0.12}{0.4}=0.30$$
$$P(\bar{A})=1-P(A=1-0.3=0.7)$$

نو د پېښو د تقاطع څخه لرو چه:

$$P(A\cap \bar{B})=P(A)P(\bar{B})=0.3\cdot 0.6=0.18$$
$$P(\bar{A}\cap B)=P(\bar{A})\cdot P(B)=0.7\cdot 0.4=0.28$$
$$P(\bar{A}\cap \bar{B})=P(\bar{A})\cdot P(\bar{B})=0.7\cdot 0.6=0.42$$

که پيدا شوي عددونه په جدول کې په خپلو ځايو کې وليکو جدول تکميليږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

شلم فصل

موهومي عددونه *Imaginary Numbers*

منفي عددونه جفت جذر نه لري نو له همدې کبله کله چه په دويمه درجه معادلو کې $\Delta < 0$ شي نو معادله جذر نه لري ترڅو چه په (1795) ميلادي کال يوجرمني ساينسدان چه *Friedrich Gouss* نوميدلو $(-1 = i^2)$ وضع کړ چه د نوموړي په دغه ابتکار سره دهغه معادلود حل لپاره لاره خلاصه شوه چه $(\Delta < 0)$ وه.

موهومي عدد *(Imaginary Numbers)* يو عدد دی چه په روزمره ژوند کې په راکړه ورکړه کې نه استعماليږي. مگر دعلمي مسايلو د حل لپاره د زيات اهميت وړ دی لمړی حرف يې د ايوتا $(iota)$ يوناني کلمی څخه اخيستل شوی دی

مثال:- $\sqrt{-36}$ جذر پيدا کړئ؟

حل:

$$\sqrt{-36} = \sqrt{36(-1)} = \sqrt{36i^2} = \pm 6i$$

دويم مثال: دا $x^2 + y^2 = 0$ معادله حل کړئ؟

$$x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow x^2 = -y^2 \Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{-y^2}$$
$$x = \sqrt{(-1)y^2} = \sqrt{i^2y^2} = \pm iy$$

د موهومي عددونو طاقت:

څرنگه چه $i = \sqrt{-1}$ او $i^2 = -1$ کيږي نو کولای شو چه د دغه ابتکار په واسطه د موهومي عددونه ساده کړو. مگر د موهومي عددونو مربع منفي ده.

$1:\ i = \sqrt{-1}$ $\quad 2:\ i^2 = -1$ $\quad 3:\ i^3 = -i$ $\quad 4:\ i^4 = 1$
$5:\ i^5 = i$ $\quad 6:\ i^6 = -1$

په عمومي صورت د موهومي عددونو طاقت په لاندی جدول کې خلاصه کوو.

$$i^{4n} = 1, i^{4n+1} = i\ , i^{4n+2} = -1\ , i^{4n+3} = -i$$

هغه موهومي عددونه چه توانونه يې منفي وي د پورته جدول پواسطه حليږي.

$$i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{1 \cdot i}{i \cdot i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$i^{-2} = \frac{1}{i^2} = \frac{1}{-1} = -1$
$i^{-3} = i^{-2} \cdot i^{-1} = (-1)(-i) = i$
$i^{-4} = i^{-3} \cdot i^{-1} = i(-i) = -i^2 = -(-1) = 1$
$i^{-5} = i^{-4} \cdot i^{-1} = 1(-i) = -i$

لاندې موهومي عددونه د طاقت څخه وباسئ:

$i^{54} = i^{52} \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$
$i^{89} = i^{88} \cdot i = 1 \cdot i = i$

د اعدادو سیټونه:

1- د طبعي اعدادو سیټ *Set of Natural Numbers*:

د(1) څخه تر لايتناهي (∞) پورې د اعدادو سیټ ته د طبعي اعدادو سیټ وايي په (IN) سره يې ښيي.

$$\mathrm{IN} = (1،2،3،4،5 \cdots \infty)$$

2- د مکمل اعدادو سیټ *Set of Whole Numbers*:

د (0) څخه تر (∞) پورې داعدادو سیټ ته د مکمل اعدادو سیټ وايي په (w) سره يې ښيي.

$$\mathrm{w} = (0،1،2،3،4، \cdots \infty)$$

3- د تام اعدادو سیټ *Set of Integer Numbers*:

د ($-\infty$) څخه تر ($+\infty$) پورې د اعدادو سیټ ته د تام اعدادو سیټ وايي او په (I) سره يې ښيي.

$$\mathrm{I} = (-\infty، \cdots، -3،2،1،0،1،2،3 \cdots \infty)$$

4- د ناطق اعدادو سیټ *Set Of Rational Numbers*:

صحيح عدد،مختوم کسر،غير مختوم متوالي کسر ته ناطق عدد وايي او په (Q) سره يې ښيي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$Q = \left(1،2،15،109،\frac{4}{5}،\frac{2}{3}\cdots\right)$$

5- د غېرناطق اعدادو سیټ *Set Of Irrational Numbers*:

غېرمختوم غېر متوالي کسر او هغه جذري عددونه چه پوره جذر نه لري غېرناطق عدد بلل کیږي او په $(\bar{Q})$ سره ښودل کیږي

$$\bar{Q} = \left(\frac{11}{47} \ , \ \frac{13}{49} \ , \ \sqrt[3]{2} \ , \sqrt{3}\right)$$

په [illegible] د حقیقي اعدادو د سیټ په نوم یادیږي او په (IR) سره یې ښیي

$$\mathrm{IR} = (\mathrm{Q} + \bar{\mathrm{Q}}) = \left(-\infty،-3،+6،\sqrt{2}،\frac{2}{5}،\frac{5}{6}،\frac{13}{49}\cdots\infty\right)$$

6- موهومي عددونه *Set Of Imaginary Numbers*:

هغه عددونه چه یوازی د (i) حرف پکې موجود وي او د حقیقي عددو سره د جمع یا تفریق په حال کې نه وي موهومي عددونه بلل کیږي لکه $\left(-i \ ,11i, \ \ \frac{2}{3}i \ , \ \sqrt{5i^3},\right)$

دموهومي عددونو څلورګوني عملیې:

1- د موهومي عددونو جمع اوتفریق:

هم علامه عددونه جمع کووعلامه یې شریکه علامه لیکو او مختلف العلامه عددونه یو دبل څخه منفي کوو علامه د لوی عدد لیکو

$1:\ 15i - 31i = 16i$ $\qquad$ $2:\ 14i - i = 13i$

2- د موهومي عددونو ضرب:

علامه په علامه کې ،عددپه عدد کې ضربوو. توانونه یې جمع کوو.

اول مثال:

$$(7i)(-5i) = -35i^2 = -35(-1) = 35$$

دویم مثال:

$$(11i)(-3i^2) = -33i^3 = -33 \cdot i^2 \cdot i = -33(-1)i = 33i$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

3- د موهومي عددونو تقسيم:

علامه په علامه عدد په عدد ویشو او توانونه یو د بل څخه منفي کوو.

مثال:

$$\frac{12i^3}{2i} = 6i^2 = 6(-1) = -6$$

7- مختلط عددونه *Complex Numbers*:

هغه عددونه دي چه د حقيقي عدد او موهومي عدد د مجموعې يا تفاضل څخه لاس ته راغلي وي لکه ($5+11i$, $8-20i$) او داسې نور. مختلط عدد په (z) سره ښيي $z = 3 \pm 21i$ او داسې نور.

صفري مختلط عدد:

هغه عدد دی چه حقيقي او موهومي دواړه برخې يې صفر وي.

مثال:- که په $z = a + bi$ کې $a = 0$ او $b = 0$ وي نو $z = a + bi = 0 + 0i = 0$ کيږي دغه عدد ته صفري مختلط عدد وايي.

مثال: لاندې ($i-3$,4 ,$2i$, $2i-3$) عددونه په معياري شکل وليکئ؟

مختلط عددونه	معياري شکل $(z = a + bi)$
$i - 3$	$-3 + i$
4	$4 + 0i$
$2i$	$0 + 2i$
$2i - 3$	$-3 + 2i$

د مختلطو عددونو څلورګونې عمليې:

د مختلطو عددونو جمع:

حقيقي عدد د حقيقي عدد سره او موهومي عدد د موهومي عدد سره جمع کوو. د موهومي عددونو د جمع حاصل بيا هم يو موهومي عدد دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{array}{r} 17 + 45i \\ \underline{28 - 106i} \\ 45 - 61i \end{array}$$

که $z_1 = a + bi$ او $z_2 = c + di$ وي نو $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$ کیږي

$z_1 = 2 - 3i$ او $z_2 = 3 + 4i$ وي نو $z_1 + z_2$ پیدا کړئ

$$Z_1 + Z_2 = (2 - 3i) + (3 + 4i) = (2 + 3) + (-3i + 4i) = 5 + i$$

د مختلط عددونو د جمعی دعملیي خنثی عنصر (0) دی. همدا ډول د $a + bi$ د عدد جمعي معکوس $-a - bi$ دی.

$$(a + bi) + (-a - bi) = (a - a) + (b - b)i = 0 + 0i$$

د مختلطو عددونو تفریق:

حقیقي عدد د حقیقي عدد څخه او موهومي عدد د موهومي عدد څخه منفي کوو.

$$\begin{array}{r} 29 - 18i \\ \underline{\pm 35 \pm 67i} \\ 64 + 49i \end{array}$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

د مختلط عددونوضرب:

علامه په علامه کی عددپه عددکی ضربوو اوتوانونه یي سره جمع کوو.

مثال:- $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ دوه مختلط عددونه راکړشوي دي دضرب حاصل یي پیدا کړئ؟

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2$$
$$= ac + (ad + bc)i + bd(-1)$$
$$= ac + (ad + bc)i - bd = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

اول مثال: $z_1 = 3 - 5i, z_2 = 8 + 5i$ دوه مختلط عددونه راکړ شوي دي $z_1.z_2$ پیدا کړئ؟

$$z_1 \cdot z_2 = (3 - 5i)(8 + 5i) = 24 + 15i - 40i - 25i^2$$
$$= 24 - 25i - 25(-1) = 24 - 25i + 25$$
$$z_1 \cdot z_2 = 49 - 25i$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مختلط عدد مزدوج (Cnjugate of Complex Number):

د یوه مختلط عدد مزدوج د بینوم د مزدوج په څېر دی .او په $\bar{z}$ سره یې ښيي .مثلاً که (z) یو مختلط عدد وي نو مزدوج یې $(\bar{z})$ دی. فرضاً $z = x + yi$ یو مختلط عدد دې او مزدوج یې $\bar{z} = x - yi$ دې.

$$z \cdot \bar{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 - (yi)^2 = x^2 - y^2 \cdot i^2$$
$$= x^2 - y^2(-1) = x^2 + y^2$$

$z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$ چه دغه قاعدی ته نورم $Norm$,(میزان، ماخذ ،هنجار، نمونه) وایي.

$$z + \bar{z} = (x + yi) + (x - yi) = 2x \qquad ,2xRel(z)$$
$$z - \bar{z} = (x + yi) - (x - yi) = x - x + yi + yi = 2yi \quad , \qquad 2yiIm(z)$$

د مختلط عدد ضري معکوس:

فرضاً $a + bi$ یو مختلط عدد راکړ شوی دې د ضربي معکوس دلاس ته راوړلو لپاره یې د $\frac{1}{a+bi}$ صورت او مخرج د مخرج په مزدوج کې ضربووك

$$\frac{1}{a + bi} = \frac{1 \cdot (a - bi)}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$$
$$\frac{1}{a + bi} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$$

$\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$ د $\frac{1}{a^2+b^2}$ ضربي معکوس دې.

مثال: د $2 - 3i$ ضربي معکوس پیدا کړئ؟

$$\frac{1}{2 - 3i} = \frac{2}{2^2 + 3^2} + \frac{3}{2^2 + 3^2}i = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i$$

مثال: $x^2 + 4$ افاده تجزیه کړئ؟

$$x^2 - (-1)4 = x^2 - 4i^2 = x^2 - (2i)^2 = (x - 2i)(x + 2i)$$

د دوو مختلطو عددونو وېش:

په یوه مختلط عدد باندی د بل مختلط عدد د وېشلو لپاره مقسوم او مقسوم علیه دواړه د مقسوم علیه په مزدوج کې ضربوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال:- د $\frac{4+3i}{2+5i}$ خارج قسمت لاس ته راوړئ؟

$$\frac{4+3i}{2+5i}=\frac{4+3i}{2+5i}\cdot\frac{2-5i}{2-5i}=\frac{8-20i+6i-15i^2}{4-25i^2}$$
$$=\frac{8-14i-15(-1)}{4-25(-1)}=\frac{8-14i+15}{4+25}$$
$$=\frac{23-14i}{29}=\frac{23}{29}-\frac{14}{29}i$$

ديوه مختلط عدد د مزدوج خاصيت:

1- د دوه مختلطو عددو د مجموعی مزدوج د مختلطو عددو د مزدوجو د مجموعی سره مساوي دي.

2- د دوه مزدوجو عددو د تفاضل مزدوج د مختلطو عددو د مزدوجو د تفاضل سره مساوي دي.

$$\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$$

3- د دوه مزدوجو عددو د حاصل ضرب مزدوج د مختلطو عددو د مزدوجو دتفاضل سره مساوي دي او هم د تبديلي د قانون پيروي کوي.

$$\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$$

4- د دوه مزدوجو عددو د خارج قسمت مزدوج د مختلطو عددو د مزدوجو د خارج قسمت سره مساوي دي.

5- د يوه مختلط عدد او دهغه د مزدوج مجموعه د حقيقي برخې دوه چند دی.

$$z+\bar{z}=2x$$

6- د يوه مختلط عدد اود هغه د مزدوج تفاضل د موهومي برخې دوه چند دی.

$$z-\bar{z}=2yi$$

7- د يوه مختلط عدد دمزدوج ،مزدوج د مختلط عدد سره مساوي دی.

$$\bar{\bar{z}}=z$$

مثال: که $z_1=4+5i$ او $z_2=-3+2i$ وي ثبوت کړئ چه $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$ او $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$ کيږي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$z_1 + z_2 = (4 + 5i) + (-3 + 2i) = 1 + 7i \quad \Rightarrow \overline{z_1 + z_2} = 1 - 7i$

$z_1 + z_2 = (4 - 5i) + (-3 - 2i) = 1 - 7i$

ثابته شوه چه:

$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
$z_1 \cdot z_2 = (4 + 5i)(-3 + 2i) = -12 + 8i - 15i + 10i^2$
$= -12 - 7i + 10(-1)$
$z_1 \cdot z_2 = -12 - 7i - 10 = -22 - 7i$
$\overline{z_1 \cdot z_2} = -22 + 7i$
$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (4 - 5i)(-3 - 2i) = -12 - 8i + 15i + 10i^2$
$= -12 + 7i + 10(-1)$
$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = -22 + 7i$

په نتيجه کې:

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = -22 + 7i$$

د مختلطو عددونو په ساحه کی د دویمې درجې یو مجهوله معادلې حل:

د دویمی درجی معادلی عمومي شکل $ax^2 + bx + c = 0$ دی او $\Delta = b^2 - 4ac$ ده که $\Delta > 0$ وي معادله دوه جذره لري. که $\Delta = 0$ وي معادله یو جذر لري او که $\Delta < 0$ وي دغه ډول معادلی د حقیقي اعدادو په سیټ کی حل نلري مګر په موهومي اعدادو کی حل لري.

مثال: $x^2 - 10x + 26 = 0$ معادله حل کړئ

حل:

$\Delta = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 26 = 100 - 104 = -4$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-10) \pm \sqrt{-4}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm \sqrt{4(-1)}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{4i^2}}{2} = \frac{10 \pm 2i}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{2(5 \pm i)}{2} = 5 \pm i$$

$x_1 = 5 + i, x_2 = 5 - i$

مثال: $4x^2 + 4ix + 15 = 0$ معادله حل کړئ؟

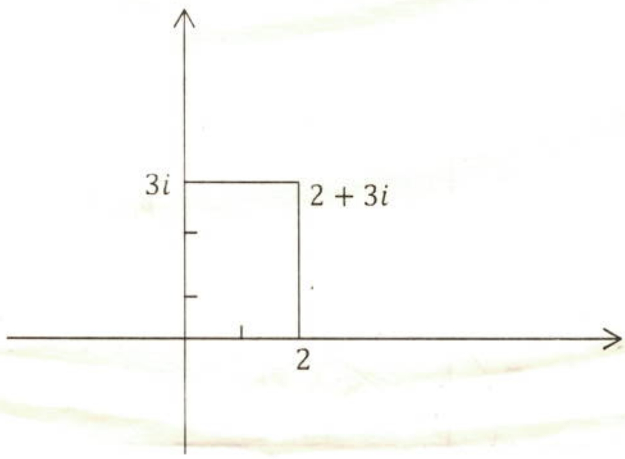
(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (4i)^2 - 4\cdot 4\cdot 15 = 16i^2 - 240$$
$$= 16(-1) - 240 = -16 - 240 =$$
$$\Delta = -256$$
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4i \pm \sqrt{-256}}{2\cdot 4} = \frac{-4i \pm \sqrt{256(-1)}}{8} = \frac{-4i \pm \sqrt{256i^2}}{8}$$
$$x_{1,2} = \frac{-4i \pm 16i}{8}$$
$$x_1 = \frac{-4i + 16i}{8} = \frac{12i}{8} = \frac{3}{2}i$$
$$x_2 = \frac{-4i - 16i}{8} = \frac{-20i}{8} = -\frac{5}{2}i$$

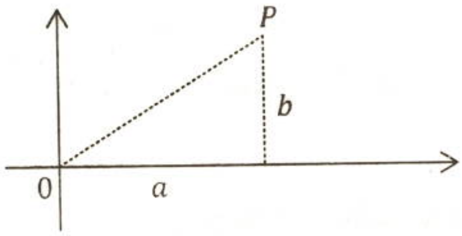
په مختلط عددونو کې حقیقي برخه په افقي محور او موهومي برخه په عمودي محور پیدا کیږي.په دی ترتیب کولای شو چه دګوس داعدادو په مستوي کی مطلوب نقاط پیدا کړو.د نقطو دوصلېدو څخه خط لاس ته راځي.او د خطودترسیم په نتیجه کی مختلف اشکال رسمولای شو.

مثال:- د $(2 + 3i)$ نقطه پیدا کړئ



که یوه نقطه چه وضعیه کمیتونه یي مختلط اعداد وي او وغواړو چه د محورونو د مبداء څخه یي فاصله کړو نونقطه د مبداء سره وصلوو.مطلقه قیمت یي د مبداء څخه فاصله ده .چه د فیثاغورث د قضیي سره سم یي هم فاصله پیدا کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



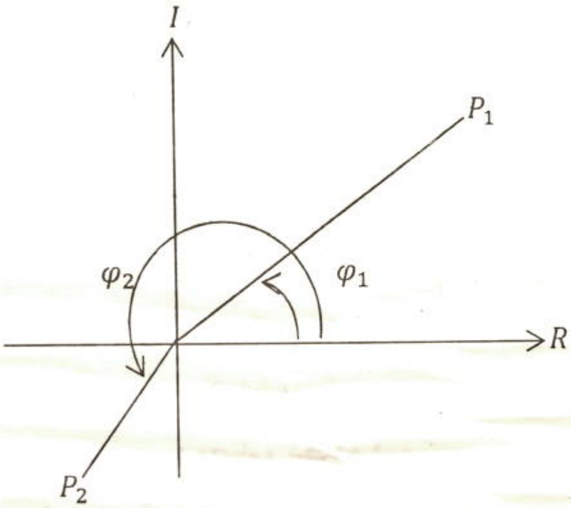
مثال: د (P) د نقطې وضعیه کمیت $(4 + 3I)$ دی مطلقه قیمت یې د مبداء څخه څو دی؟

$$4 + 3i = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

دمزدوجو مختلطو عددونو مطلقه قیمتونه مساوي وي او فاصله یې د محورونو د مبداء څخه مساوي ده .

$-5 + 12i$	$-5 - 12i$
$= \sqrt{(-5)^2 + 12^2}$	$= \sqrt{(-5)^2 + (-12)^2}$
$= \sqrt{169}$	$= \sqrt{169}$
$= 13$	$= 13$

د (φ) هغه زاویه چه د $(\overline{OP})$ خط یې د افقي سره جوړوي د مختلطو اعدادو د $(Argument)$ په نوم یادیږي حرکت یې د ساعت د عقربی خلاف وي یعنی دا زاویه همېشه مثبت وي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

يوويشتم فصل

د رياضي منطق

د رياضي استدلال:

د رياضيكي بيان د سمون لپاره چه كومې علامې اوطريقې استعماليږي د رياضي د استدلال په نوم يادېږي.

شهودي درک يا مشاهدات:-هغه مفاهيم چه د حواسو پواسطه درک شي اوقبلېدل يي استدلال ته ضرورت و نه لري. مشاهدات يا شهودي درک ورته وايي.

لکه موازي خطونه، نه قطع کوي. متقابل براس زاويي مساوي وي.او داسې نور.

تمثيلي استدلال:

هغه استدلال دي چه د يورياضيكي بيان د وضاحت لپاره مثالونه وويل شي او د هغوی د ورته والي له کبله نتايج لاس ته راوړل شي.

لکه په عاميانه ډول [مار خوړلی د پړي نه ډارېږي] دا يو قياسي استدلال دی.

استقرائي استدلال :

استقراء کلي په کلي ګرځېدلو ته وائي.

او په اصطلاح کی د ټولو طبعي عددونو ،ټولو جفتو عددونو يا ټولو طاقو عددونو لپاره د يوه فارمول ثبوتولو ته استقراء يا استقرائي استدلال وايي.

د ټولو طاقوعددونو مجموعه د $S_n = n^2$ فارمول پواسطه پيدا کيږي.

د ټولو جفتوعددونو مجموعه د $S_n = n(n+1)$ فارمول پواسطه پيدا کيږي.

د ټولو مسلسلوعددونو مجموعه د $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ فارمول پواسطه پيدا کيږي.

داستقرائي استدلال ثبوت

دغه ثبوتونه د رياضي په استقراء کی ثبوت شوي دي.

لاندی جدول کی خالي ځايونه ډک کړئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

د متوالي عددونو شمېر	دمتوالي طبعي عددونومکعبونه	دمکعبونومجموعه	دمجموعې فارمول
1	1^3		1^2
2	$1^3 + 2^3$		
3	$1^3 + 2^3 + 3^3$	36	
4	$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3$		10^2
n	$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots n^3$		$\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

مثال: ثبوت کړئ چه $P(n) = 4^{2n} - 1$ په (5) باندی د وېش وړ دې؟

حل: د (1) لپاره يې ثبوتوو.

$$P(1) = 4^{2\cdot 1} - 1 = 16 - 1 = 15$$

(15) په (5) باندی وېشل کيږي.

په (n)باندې يې د وېش وړ فرضوو.

ثبوتوو چه په $(n + 1)$ باندی هم د وېش وړ دی.

ثبوت:

$$P(n) = 4^{2n} - 1 = 5r$$
$$4^2 \cdot (4^{2n} - 1) = 5r \cdot 4^2 \Rightarrow 4^{2n+2} - 4^2 = 5r \cdot 16$$
$$4^{2(n+1)} - 1 = 15 + 16 \cdot 5r = 5(3 + 16r)$$

د مساوات ښی خوا په (5) وېشل کيږي. نو چپ طرف يې هم وېشل کيږي.نو اخرنی مساوات عبارت دی:

$$P(n+1) = 4^{2(n+1)} - 1$$

ثابته شوه چه که په راکړ شوي فارمول کی د (n) په عوض هر طبعي عدد وضع شي په (5) وېشل کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

استنتاجي استدلال

که د یوی عملیی نتیجه همېشه ثابته وي او ښه په ډاډ سره يي په صحت حکم وشي دغه استدلال ته استنتاجي استدلال وايي. لاندی جدول ته وګورئ

8	12	19	23
15	19	26	30
30	38	[illegible]	[illegible]
18	26	40	48
9	13	20	24
1	1	1	1

په پورته جدول کی د عدد سره (7) جمع شوي دي. دجمع حاصل يي دوه چند شوی دي. بیا ببرته (12) ورڅخه منفي شوي دي د تفریق حاصل يي نیمايي شوی دي په دغه عددو کی هرعدد د اولني عدد څخه د(1) په اندازه زیات شوی دي. چه دغسی عمل ته استنتاجي استدلال وايي.

دحکم د نفی کولو استدلال:

دغېرناطقو عددونو د جمع حاصل یو غېر ناطق عدد وي.

د دغه حکم د معلومات لپاره چه دا حکم همېشه صحیح دی. نو(x) او(y) دوه مجهول عددونه په نظر کی نیسو چه دجمع حاصل يي $(x+y)$ دی بیا دغه عددونو ته قیمتونه ورکوو. مثلاً $x=1+\sqrt{2}$ او $y=1-\sqrt{2}$ دي دواړه عددونه طرف په طرف جمع کوو.

$$x+y=1+\sqrt{2}+1-\sqrt{2}=2$$

ګورو چه $(x+y=2)$ یو ناطق عدد دي. غېر ناطق عدد نه دي. نو ثابته شوه چه د دوه غېرناطقو عددو د جمع حاصل همېشه غېرناطق عدد نه وي.

د خلف برهان یا غېر مستقیم ثبوت:

دقضیي د عکس ثبوت ته غېر مستقیم ثبوت وايي.

قضیه: که د یوه عدد مربع جفت وي نو عدد هم جفت دی.

مفروض: که n^2 جفت وي .

مطلوب: ثبوتوو چه (n) هم جفت دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ثبوت: $n = 2k + 1$ فرضوو نو ليکو چه:

$$n^2 = 4(k^2 + k) + 1$$
$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1$$

د پورته رابطې څخه څرګنده شوه چه (n^2) طاق دی او دا د فرضيي خلاف ده نو داچه (n) يو جفت عدد دی صحيح نه دی.

د رياضي منطق او د بيان استنتاج:

بيان يوه خبري جمله ده چه د (هو) او (نه) دواړو احتمال ولري.

که بيان په (P) او د بيان صحت په (T) او غلطي يي په (F) وښيو او(~P) د (P) دبيان نفي وي نو د صحت جدول يي په لاندی ډول جوړيږي.

P	$\sim P$
T	P
F	T

د بيانونو ترکيب:

1- $P \wedge Q$ کی $(\wedge)$ د (او) معنی ورکوي.

2- $P \vee Q$ کی $(\vee)$ د (يا) معنی ورکوي.

3- $P \Rightarrow Q$ کی $(\Rightarrow)$ د (په نتيجه کې) معنی ورکوي.

4- $P \Leftrightarrow Q$ کې $(\Leftrightarrow)$ د دوه ارتباط معنی ورکوي

مثال: د ثحت په جدول کی وښياست چه $p \vee (p \Rightarrow q)$ بيان په کوم وخت کی صحيح دی.

p	q	$p \Rightarrow q$	$p \vee (p \Longrightarrow q)$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	T	T
F	F	T	T

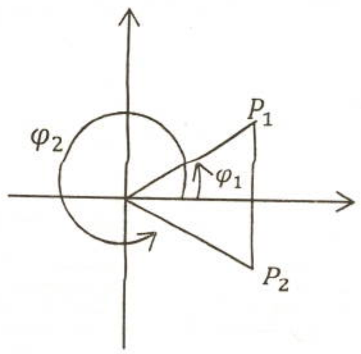
تمت بالخير

په 1394/4/23 نيټه چه د روژی د مبارکی مياشتی د اوه ويشتم سره سمون خوري د جلال اباد په ښار کی د تالاشی چوک د حاجي زرخان په پلازه کی پای ته ورسېدلو .

سردار محمد (خوږياڼی)

(c) ketabton.com: The Digital Library

ددوه مزدوجو مختلطو عددونو د ارګومینټونو د جمع حاصل مکمل دوران (360°) وي.



دمختلطو عددونود دویم جذر پیدا کول:

دمختلط عدد دویم جذر د لاندې فارمول په واسطه پیدا کیږي.

$$\sqrt{a \pm bi} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \pm i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$$

ثبوت:

$$\left(\sqrt{a+bi}+\sqrt{a-bi}\right)^2 = a+bi+2\sqrt{a+bi}\cdot\sqrt{a-bi}+a-bi \ldots\ldots 1$$

$$= 2\sqrt{a^2+b^2}+2a$$

$$\sqrt{\left(\sqrt{a+bi}+\sqrt{a-bi}\right)^2} = \sqrt{2\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)} \ldots..2$$

$$\sqrt{a+bi}+\sqrt{a-bi} = \sqrt{2\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)} \ldots\ldots 3$$

$$\sqrt{a+bi}-\sqrt{a-bi} = \sqrt{2\left(-\sqrt{a^2+b^2}+a\right)} = i\sqrt{2\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)} \ldots..4$$

دریمه او څلورمه معادله طرف په طرف جمع کوو.

$$\frac{2\sqrt{a+bi}}{2} = \frac{\sqrt{2\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)}+i\sqrt{2\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)}}{2} \ldots\ldots.5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sqrt{a+bi}=\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots 6$$

$$\sqrt{a-bi}=\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \quad \ldots\ldots 7$$

اول مثال: د $\sqrt{-5+12i}$ دویم جذر پیدا کړئ؟

$$\sqrt{-5+12i}=\sqrt{\frac{\sqrt{25+144}+5}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{25+144}-5}{2}}=3+2i$$

دویم مثال:

$$\sqrt{-2i}=\sqrt{\frac{\sqrt{0+4}+0}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{0+4}-0}{2}}=1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ځینو کاشفینو انځورونه

بینارډ ریمان

کارل فریډ ریچ

اریتوستنس

جورج کانتور

اسحاق نیوټن

ارشمیدس

محمد بن موسی

پیرک اندرویس

(c) ketabton.com: The Digital Library

فارما

وین ستهندریو

لایبینز

کووشی

وایرس ترس

هرمت

(c) ketabton.com: The Digital Library

چاپ شوي کتابونه

- ❊ عمومي رياضي (نوی نصاب)
- ❊ عمومي فزيک (نوی نصاب)
- ❊ ابتدائيه رياضي او هندسه (نوی نصاب)

تر چاپ لاندې کتابونه

- ❊ د فزيک د تمريناتو حل (نوی نصاب)
- ❊ د رياضي د تمريناتو حل (نوی نصاب)
- ❊ د عمومي رياضي (فارسي ترجمه)
- ❊ عمومي هندسه
- ❊ د عمومي هندسې (فارسي ترجمه)
- ❊ عمومي مثلثات
- ❊ عمومي رياضي (فارسي ژباړه)
- ❊ عمومي فزيک (فارسي ژباړه)

سپين غر تعليمي مرکز

میهن خپرندویه ټولنه
پېښور - جلال آباد
0321-9895621-03005981425
0788529194 - 0773535420

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library