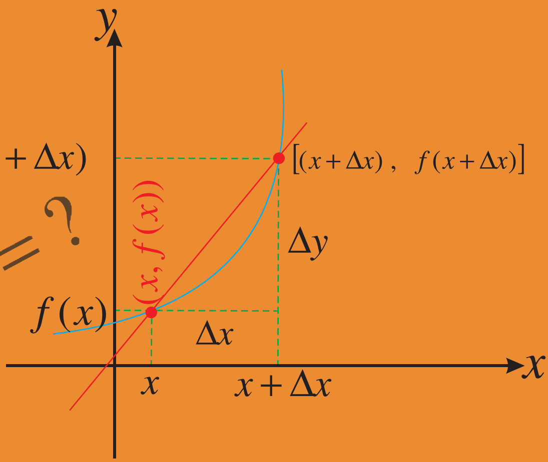
د پوهنې وزارت

ریاضي ۱۲

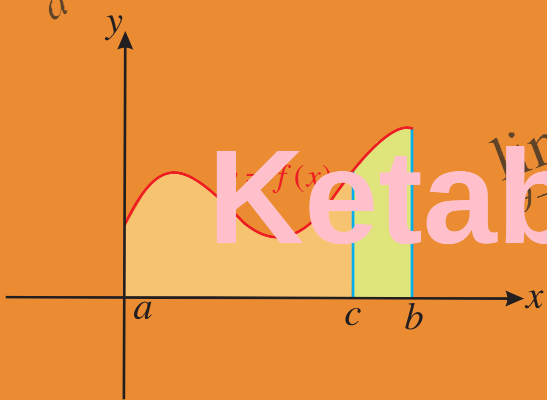
ټولګی

$$\lim_{x\to a} f(x) = ?$$



$$\int_a^b f(x)\,dx = ?$$

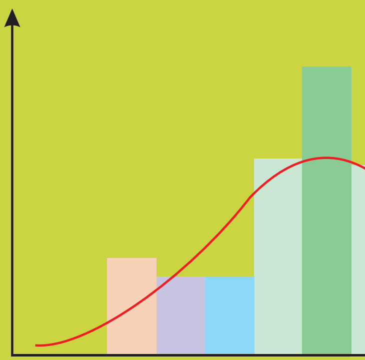
$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = ?$$



Ketabton.com

د چاپ کال: ۱۳۹۸

ریاضي ۱۲ ټولګی



(c) ketabton.com: The Digital Library

ملي سرود

دا وطن افغانستان دی — دا عزت د هر افغان دی
کور د سولې کور د تورې — هر بچی یې قهرمان دی
دا وطن د ټولو کور دی — د بلوڅو د ازبکو
د پښتون او هزاره وو — د ترکمنو د تاجکو
ورسره عرب، گوجر دي — پامیریان، نورستانیان
براهوي دي، قزلباش دي — هم ایماق، هم پشه یان
دا هیواد به تل ځلیږي — لکه لمر پر شنه آسمان
په سینه کې د آسیا به — لکه زړه وي جاویدان
نوم د حق مو دی رهبر — وایو الله اکبر وایو الله اکبر

(c) ketabton.com: The Digital Library

بسم الله الرحمن الرحیم

د پوهنې وزارت

رياضي ۱۲

ټولګی

د چاپ کال: ۱۳۹۸ هـ . ش.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کتاب ځانګړتیاوې

مضمون: رياضي

مؤلفين: د تعليمي نصاب د رياضياتو د څانګې علمي او مسلکي غړي

اډیټ کوونکي: د پښتو ژبې د اډیټ علمي او مسلکي غړي

ټولګی: دولسم

د متن ژبه: پښتو

انکشاف ورکوونکی: د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تأليف لوی رياست

خپروونکی: د پوهنې وزارت د اړيکو او عامه پوهاوي رياست

د چاپ کال: ۱۳۹۸ هجري شمسي

د چاپ ځای: کابل

چاپخونه:

برېښناليک پته: curriculum@moe.gov.af

د درسي کتابونو د چاپ، وېش او پلورلو حق د افغانستان اسلامي جمهوريت د پوهنې وزارت سره محفوظ دی. په بازار کې يې پلورل او پېرودل منع دي. له سرغړوونکو سره قانوني چلندکيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پوهنې د وزیر پیغام

اقرأ باسم ربک

د لوی او ښښونکي خدای ﷻ شکر په ځای کوو، چې موږ ته یې ژوند رابښلی، او د لوست او لیک له نعمت څخه یې برخمن کړي یو، او د الله تعالی پر وروستي پیغمبر محمد مصطفی ﷺ چې الهي لومړنی پیغام ورته (لوستل) و، درود وایو.

څرنګه چې ټولو ته ښکاره ده ۱۳۹۷ هجري لمریز کال د پوهنې د کال په نامه ونومول شو، له دې امله به د ګران هېواد ښوونیز نظام، د ژورو بدلونونو شاهد وي. ښوونکی، زده‌کوونکی، کتاب، ښوونځی، اداره او د والدینو شوراګانې د هېواد د پوهنیز نظام شپږګوني بنسټیز عناصر بلل کېږي، چې د هېواد د ښوونې او روزنې په پراختیا او پرمختیا کې مهم رول لري. په داسې مهم وخت کې د افغانستان د پوهنې وزارت د مشرتابه مقام، د هېواد په ښوونیز نظام کې د ودې او پراختیا په لور بنسټیزو بدلونونو ته ژمن دی.

له همدې امله د ښوونیز نصاب اصلاح او پراختیا، د پوهنې وزارت له مهمو لومړیتوبونو څخه دي. همدارنګه په ښوونځیو، مدرسو او ټولو دولتي او خصوصي ښوونیزو تأسیساتو کې، د درسي کتابونو محتوا، کیفیت او توزیع ته پاملرنه د پوهنې وزارت د چارو په سر کې ځای لري. موږ په دې باور یو، چې د باکیفیته درسي کتابونو له شتون پرته، د ښوونې او روزنې اساسي اهدافو ته رسېدلی نشو.

پورتنیو موخو ته د رسېدو او د اغېزناک ښوونیز نظام د رامنځته کولو لپاره، د راتلونکي نسل د روزونکو په توګه، د هېواد له ټولو زړه سواندو ښوونکو، استادانو او مسلکي مدیرانو څخه په درناوي هیله کوم، چې د هېواد بچیانو ته دې د درسي کتابونو په تدریس، او د محتوا په لېږدولو کې، هیڅ ډول هڅه او هاند ونه سپموي، او د یوه فعال او په دیني، ملي او انتقادي تفکر سمبال نسل په روزنه کې، زیار او کوښښ وکړي. هره ورځ د ژمنې په نوي کولو او د مسؤولیت په درک سره، په دې نیت لوست پیل کړي، چې د نن ورځې ګران زده‌کوونکي به سبا د یوه پرمختللي افغانستان معماران، او د ټولنې متمدن او ګټور اوسېدونکي وي.

همدا راز له خوږو زده کوونکو څخه، چې د هېواد ارزښتناکه پانګه ده، غوښتنه لرم، څو له هر فرصت څخه ګټه پورته کړي، او د زده کړې په پروسه کې د ځیرکو او فعالو ګډونوالو په توګه، او ښوونکو ته په درناوي سره، له تدریس څخه ښه او اغېزناکه استفاده وکړي.

په پای کې د ښوونې او روزنې له ټولو پوهانو او د ښوونیز نصاب له مسلکي همکارانو څخه، چې د دې کتاب په لیکلو او چمتو کولو کې یې نه ستړې کېدونکې هلې ځلې کړې دي، مننه کوم، او د لوی خدای ﷻ له دربار څخه دوی ته په دې سپېڅلې او انسان جوړوونکې هڅې کې بریا غواړم.

د معیاري او پرمختللي ښوونیز نظام او د داسې ودان افغانستان په هیله چې وګړي یې خپلواک، پوه او سوکاله وي.

د پوهنې وزیر

دکتور محمد میرویس بلخي

(c) ketabton.com: The Digital Library

فهرست

سرلیکونه — مخونه

لومړی څپرکی لیمیټ ۱-۴۰

- د لیمیټ مفهوم
- د ښي او کیڼي خوا لیمیټونه
- د لیمیټ خاصیتونه
- د نسبتي تابع گانو لیمیټونه
- د $\frac{\infty}{\infty}$ مبهم شکل
- د $\infty - \infty$ او $0\cdot\infty$ مبهم شکلونه
- د $0^0, \infty^0, 1^\infty$ مبهم شکلونه
- د مثلثاتي تابع گانو لیمیټ
- د تابع گانو متمادیت
- د متمادي تابع گانو خاصیتونه
- د څپرکي لنډیز او پوښتنې

دویم څپرکی مشتقات ۴۱-۸۲

- د یوې تابع مشتق
- د مشتق هندسي تعبیر
- د مشتق قوانین
- د مرکبو تابع گانو مشتق
- د مثلثاتي تابع گانو مشتق
- ضمني مشتقات
- لوړ مرتبه یي مشتقات
- د څپرکي لنډیز او پوښتنې

دریم څپرکی د مشتق د استعمال ځایونه ۸۳-۱۳۲

- د یوې تابع بحراني ټکی(اعظمي او اصغري)
- د انعطاف د ټکي ټاکل له دویم مشتق څخه په گټې اخیستنې سره
- د منحنيگانو رسمول
- د توابعو دگرافونو مجانبونه
- د هوموگرافیک تابع گانو گراف
- د دریمې درجې یو مجهوله تابع گراف
- د رول قضیه
- د متوسط قیمت قضیه
- د لوپیتال قاعده
- د بحراني ټکو تطبیق
- د څپرکي لنډیز او پوښتنې

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليکونه	مخونه
څلورم څپرکی انتیګرال	**۱۳۳-۱۷۲**
• د ريمان مجموعه	
• د انتيګرال مفهوم	
• د غيرمعين انتيګرال خواص	
• معين انتيګرال	
• د معين انتيګرال خواص	
• د مشتق او انتيګرال اساسي قضيې	
• په تعويضي طريقې سره انتيګرال نيول	
• په قسمي طريقې سره انتي ګرال نيول	
• د څپرکي لنډيز او پوښتنې	
پنځم څپرکی د لوګاريتمي او اکسپوننشيل تابعګانو مشتق او انتيګرال	**۱۷۳-۱۹۸**
• د لوګاريتمي او اکسپوننشيل تابع ګانو مشتق	
• د معکوسو تابع ګانو مشتق	
• قسمي کسرونه	
• د اکسپوننشيل تابع ګانو انتيګرالونه	
• د لوګاريتمي تابع ګانو انتيګرال	
• د قسمي کسرونو په مرسته د انتيګرال محاسبه	
• د څپرکي لنډيز او پوښتنې	
شپږم څپرکی د انتیګرال تطبیقات	**۱۹۹-۲۲۲**
• د يوه منحني په واسطه د محصور شوې سطحې د مساحت محاسبه	
• د دوو منحنی ګانو ترمنځ د محصور شوې سطحې د مساحت محاسبه	
• د ګراف له دوران څخه د په لاس راغلي جسم حجم	
• د قوس د اوږدوالی محاسبه	
• د څپرکي لنډيز او پوښتنې	
اووم څپرکی احصائیه	**۲۲۳-۲۶۰**
• د احتمال د تابع توزيع	
• د دوه جملهيي توزيع او د برنولي آزمايښت	
• د پواسن د احتمال توزيع	
• نورمال توزيع	
• د نورمال توزيع منحني لاندې مساحت او د هغې سټنډرډ کول	
• نمونه اخيستل	
• د نمونې د اوسط توزيع	
• د مرکزي ليميټ قضيه	
• د نمونهيي توزيع نسبت	
• د څپرکي لنډيز او پوښتنې	
اتم څپرکی احتمالات	**۲۶۱-۲۸۲**
• پربکړې او نښتې فضاګانې	
• هم چانسه پيښې	
• د نښتو يا پيوسته فضاګانو احتمال	
• مشروط احتمال	
• د حاصل ضرب اصل	
• د ناخاپي پېښو استقلاليت	
• د څپرکي لنډيز او پوښتنې	

(c) ketabton.com: The Digital Library

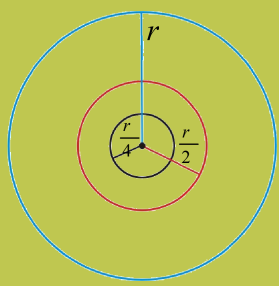
لومړی څپرکی

لیمیټ

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لیمیټ مفهوم



په یوه مستوي کې درې دایرې داسې رسم کړئ چې د O ټکي د دایرو متحد مرکز او شعاع ګانې یې په ترتیب سره $r, \frac{r}{2}$ او $\frac{r}{4}$ وي، دې عملیې ته څو ځلې دوام ورکولای شئ؟

فعالیت

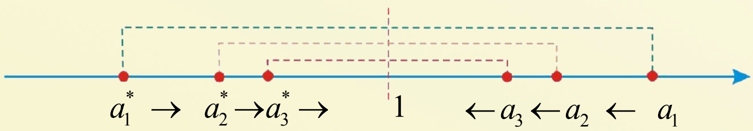
د $a_n = (1+\frac{1}{n})$ او $a_n^* = (1-\frac{1}{n})$ ترادفونه د $n \in IN$ لپاره په پام کې ونیسئ او لاندې فعالیت ترسره کړئ:

- د عددونو په محور باندې د a_1 او a_1^* موقعیت(ځای) وښیئ.
- ویلای شئ چې د a_2 او a_2^* قیمتونه د $[a_1^*, a_1]$ د فاصلې دننه یا د باندې پراته دي.
- د a_1، a_1^* او a_2، a_2^* منځنی ټکي یو له بل سره پرتله کړئ.
- پورته پړاوونو ته په پاملرنې سره ویلای شئ چې د a_3 او a_3^* د ټکو موقعیت د عددونو پر محور په کوم ځای کې واقع دي.
- آیا ویلای شئ چې د n د تر ټولو لویو قیمتونو په اخیستلو سره د a_n او a_n^* ردیفونه کومو قیمتونو ته نژدې کېږي؟

له پورتنې فعالیت څخه لاندې پایله لیکلای شو:

پایله: لیدل کېږي چې د a_n ترادف له ښي لوري څخه د 1 او د a_n^* ترادف له کېڼ لوري څخه د 1 عدد ته د n په زیاتېدو سره نژدې کېږي، یعنې:

_ د a_n ترادف کله چې n بې نهایت ته تقرب وکړي، مساوي په(1) سره کېږي او همداشان د a_n^* د ترادف $n-$ام حد که n بې نهایت ته نژدې شي هم مساوي له (1) سره کېږي.



ددې لپاره چې د لیمیټ مفهوم مو ښه څرګند کړی وي، په لومړي پړاو کې هغه په څو ترادفونو کې د ګراف په پام کې نیولو سره تر څېړنې لاندې نیسو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

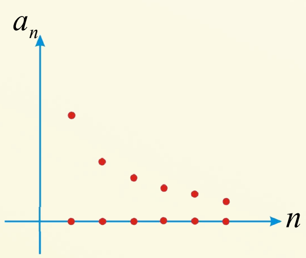
مثال: لاندې ورکړل شوي ردیفونه د n د تر ټولو لویو قیمتونو لپاره کوم قیمت ته تقرب کوي یا نژدې کېږي، موضوع په ګرافیکي ډول تشریح کړئ، په داسې حال کې چې:

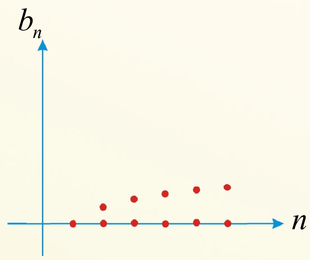
$$a_n = \left(\frac{2n+3}{n}\right) \ \dots (i) \qquad b_n = \left(\frac{n-1}{n}\right) \ \dots (ii) \qquad c_n = (-1)^n \frac{1}{n} \ \dots (iii)$$

حل: پوهېږو چې د n د بېلابېلو قیمتونو لپاره ګرافیکي شودنه په لاندې ډول ده.

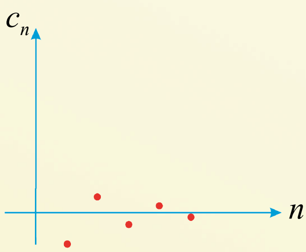
n	1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , $\to \infty$
a_n	$5 , \frac{7}{2} , 3 , \frac{11}{4} , \frac{13}{5} , \frac{15}{6} , \frac{17}{7} , \to 2$

n	1 , 2 , 3 , 4 , 5 , $\to \infty$
b_n	$0 , \frac{1}{2} , \frac{2}{3} , \frac{3}{4} , \frac{4}{5} , \to 1$





n	1 , 2 , 3 , 4 , 5 , $\to \infty$
c_n	$-1 , \frac{1}{2} , -\frac{1}{3} , \frac{1}{4} , -\frac{1}{5} , \to 0$



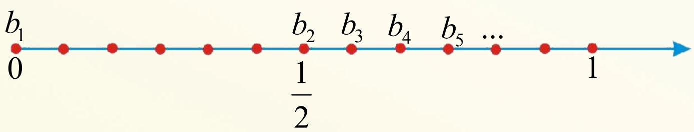
له پورتینو ګرافونو څخه لیدل کېږي چې راکړل شوي ترادفونه د n د قیمتونو په زیاتېدو سره د ترادفونو قیمت یوه ټاکلې عدد ته نژدې کېږي، لکه: د a_n ترادف د 2 عدد ته د b_n ترادف د 1 عدد ته او د c_n ترادف صفر ته تقرب کوي چې n ته د ډېرو لویو قیمتونو په ورکولو سره موضوع په آسانی سره روښانه کېږي.

د ترادف د قیمتونو له جدول څخه د لیمیټ قیمت څرګندېږي، د لیمیټ په شته والی کې ردیف یوه ټاکلې عدد ته نژدې کېږي. دغه ټاکلې عدد ته لیمیټ (limit) وایي. چې په lim سره ښودل کېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ددې لپاره د $b_n = \dfrac{n-1}{n}$ ترادف په پام کې نیسو، لرو چې:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
b_n	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{10}{11}$	...



او یا که چېرې $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \ldots, \dfrac{1}{n}$ .... I ، $2, \dfrac{3}{2}, \dfrac{4}{3}, \dfrac{5}{4}, \ldots, \dfrac{n+1}{n}$ .... II او $2, 4, 6, \ldots, 2n$ .... (III) د عددونو ترادفونه په پام کې ونیسو، لیدل کېږي چې که n د بې نهایت لورې ته نژدې شي، نو د I ترادف صفر ته نژدې کېږي د II ترادف د (1) عدد ته نژدې کېږي د III ترادف بې‌نهایت (∞) ته نژدې کېږي.

د متحول تقرب: ویل کېږي چې د x متحول د a عدد ته تقرب کوي، په داسې حال کې چې x پـه اختیـاري ډول د a عدد ته نژدې کېږي، یعني د x او a ترمنځ تفاوت له هر کوچني عدد($\delta > 0$) څخه کوچنی وي یا پـه لاندې ډول:

$$\forall \delta > 0 : |x-a| < \delta \quad \text{یا} \quad x \to a \quad \text{یا} \quad |x-a| \to 0$$

له ښي لوري د متحول تقرب: ($x \to a^+$) که چېرې د x د قیمتونو یو متناقص تـرادف موجـود وي پـه داسې حال کې چې په تدریجي ډول د a اختیاري عدد ته نژدې شي.

$$x:\ a+0.1,\ a+0.01\ ,\ a+0.001\ ,\ a+0.0001\ ,\ \ldots \to\ a^+$$

له کيڼ لوري د متحول تقرب: ($x \to a^-$) که چېرې د x د قیمتونو یـو متزایـد تـرادف موجـود وي پـه داسې حال کې چې x په تدریجي ډول د a اختیاري عدد ته نژدې شي.

$$x:\ a-0.1,\ a-0.01\ ,\ a-0.001\ ,\ a-0.0001\ ,\ \ldots \to\ a^-$$

نو د x د متحول تقرب د a عدد ته معادل دی د x د متحول تقرب له ښي لوري او د x د متحول تقرب له چپ لوري، یعني:

$$x \to a \quad \Leftrightarrow \quad (x \to a^+\ ,\ x \to a^-)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

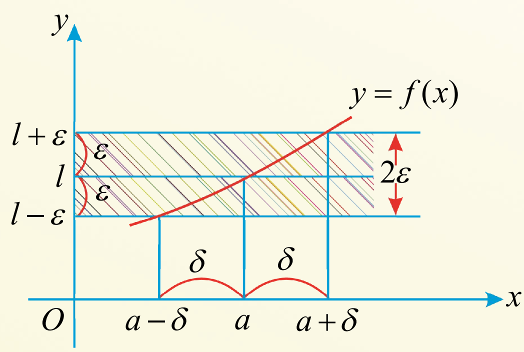
لومړی بېلګه: د x متحول د 9 عدد ته نژدې کړئ یا په بل عبارت د $x \to 9$ مفهوم توضیح کړئ.

حل:

$$x: 9.1\ ,\ 9.01\ ,\ 9.001\ ,\ 9.0001\ ,\ \dots\ \to 9^{+}$$
$$x: 8.9\ ,\ 8.99\ ,\ 8.999\ ,\ 8.9999\ ,\ \dots \to 9^{-}$$

تعریف: که چېرې د $f(x)$ تابع په یوه غیر تړلي انټروال کې چې د a عدد په هغه کې ګډون لري کېدای شي چې تابع په a کې نه وي تعریف شوی. که چېرې د x متحول د a عدد ته نژدې، شي نو د $f(x)$ تابع د l عدد ته نژدې کېږي، نو ویل کېږي چې د $f(x)$ تابع لېمیټ عبارت له l څخه دی، کله چې د x متحول د a عدد ته تقرب وکړیږ، نو داسې یې لیکو:

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \quad \text{یا} \quad \begin{matrix} x \to a \\ f(x) \to l \end{matrix}$$



$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0\ :\ |x-a| < \delta \quad \Rightarrow\ |f(x)-l| < \varepsilon$$
$$\lim_{x\to a} f(x) = l \ \Leftrightarrow\ \ (|x-a| \to 0 \Rightarrow\ |f(x)-l| \to 0)$$

پوښتنه

د $f(x) = 2x$ تابع په ګرافیکي ډول وښیئ چې که د x د (3) عدد ته نژدې شي د $f(x)$ د (6) عددته نژدې کېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ښي او کيڼ خوا لیمیټونه

مخـــامخ تـــصویر تـــه پاملرنـــه وکـــړئ ووایـــئ چـــې مخامخ ونې ته له کومو خواوو څخه نژدې کېدای شو.

فعالیت

په لاندې جدول کې د $x \neq 1$, $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ ته ځينې قيمتونه ورکړل شوي.

x	0.98	0.99	0.999	?	1.001	1.01	1.02
$f(x)$	1.98	1.99	1.999	?	2.001	2.01	2.02

$\longrightarrow \qquad \longleftarrow$

- د تابع گراف رسم کړئ.
- که x د (1) عدد ته نژدې شي، نو $f(x)$ کوم عدد ته نژدې کېږي.

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله لیکلای شو:

د ښي خوا لیمیټ: د $f(x)$ تابع د a په عدد کې د ښي لوري l_1 لیمیټ لري که چېرې د هر $\varepsilon > 0$ لپاره یو کـوچنی عـدد د $\delta > 0$ موجـود وي داسې چې کـه: $x \in (a, a+\delta) \Rightarrow f(x) \in (l_1 - \varepsilon, l_1 + \varepsilon)$ یـا

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = l_1$$

د کيڼ خوا لیمیټ: د $f(x)$ تابع د a په عدد کې د کيڼ لوري l_2 لیمیټ لري. که چېرې د هر $\varepsilon > 0$ لپاره د $\delta > 0$ یـو عـدد پیـدا شـي داسـې چـې $x \in (a - \delta, a) \Rightarrow f(x) \in (l_2 - \varepsilon, l_2 + \varepsilon)$ یـا

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = l_2$$

د $f(x)$ تابع هغه وخت چې $x \to a$ ته نژدې شي د l لیمیټ لري، یعنې: $\lim_{x \to a} f(x) = l$ په دې شرط چې:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = l = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویمه بېلګه: و ښيئ چې $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=6$ سره دی.

حل: **د ښي او کيڼې خوا لیمیټونه تر ځېړنې لاندې نیسو:**

x	3.5	3.1	3.01	3.001	...	3^+
$f(x)$	6.5	6.1	6.01	6.001	...	6

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-9}{x-3}=6$$

x	2.5	2.9	2.99	2.999	...	3^-
$f(x)$	5.5	5.9	5.99	5.999	...	6

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-9}{x-3}=6$$

لیدل کېږي چې د ښي خوا او کيڼې خوا لیمیټونه سره مساوي دي، نو $\lim\limits_{x\to 3}=\dfrac{x^2-9}{x-3}=6$ دی.

دویمه طریقه: د لیمیټ د تعریف په پام کې نیولو سره فرضوو چې د هر اختیاري کوچني عدد ε لپاره یو δ شتون لري داسې چې:

$$\forall\varepsilon>0\quad \exists\delta>0\ :\ |x-a|<\delta\ \Rightarrow\ |f(x)-l|<\varepsilon$$

$$|x-3|<\delta\quad\Rightarrow\left|\frac{x^2-9}{x-3}-6\right|=\left|\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}-6\right|=|x+3-6|=|x-3|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow\varepsilon=\delta$$

له پورتنۍ اړیکې څخه دا معلومېږي چې ε له δ سره اړیکه لري، که δ ته قیمت ورکړو ε قیمت اخلي او که ε ته قیمت ورکړو δ قیمت اخلي، بنا پر دې هغه تعریف چې د لیمیټ لپاره موجود دی سم دی او تابع لیمیټ لري، یعنې: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=6$

پوښتنه

وښيئ چې د $f(x)=\dfrac{|x-2|}{x-2}$ تابع کله چې $x\to 2$ لیمیټ نه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لیمیټ خاصیتونه (Properties of Limit)

د مخامخ مساوات دلیمیټونو دواړه خواوې کله چې $x \to -1$ وکړي، سره مساوي دي او که نه؟

$$\lim_{x\to -1}(x^2 \pm x) = \lim_{x\to -1} x^2 \pm \lim_{x\to -1} x$$

ددې فعالیت د سرته رسولو لپاره لاندې پوښتنو ته ځوابونه پیدا کړئ:

- که x د 2 عدد ته نژدې شي، نو د $f(x) = x + 2$ تابع لیمیټ به څو وي؟
- که $x \to 3$ ته تقرب وکړي، نو د $g(x) = 2x$ تابع لیمیټ پیدا کړئ.
- $\lim_{x\to 2} f(x) \pm \lim_{x\to 2} g(x)$ پیدا کړئ.
- $\lim_{x\to 2} f(x) \cdot \lim_{x\to 2} g(x)$ پیدا کړئ.
- $\lim_{x\to 2} f(x) \div \lim_{x\to 2} g(x)$ پیدا کړئ.

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایلې لیکلای شو:

که $\lim_{x\to a} f(x) = A$ او $\lim_{x\to a} g(x) = B$ وي، نو:

1) $\lim_{x\to a} Kf(x) = K \lim_{x\to a} f(x) = KA$

2) $\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = A \pm B$

3) $\lim_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) = A \cdot B$

4) $\lim_{x\to a}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \dfrac{A}{B}$, $\lim_{x\to a} g(x) = B \neq 0$

5) $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{A}$, $\lim_{x\to a} f(x) = A \geq 0$

له پورتنیو خواصو څخه درې خاصیتونه ثبوتوو او پاتې یې د زده‌کوونکو کورنی دنده ده.

بې نهایت کوچنی تابع ګاڼې: د $\varepsilon(x)$ تابع کله چې $x \to a$ ته نژدې شي، بې نهایت کوچنی بللې کیږي، که چیرې $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$ وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

1- ددې لپاره چې $\lim_{x\to a} f(x)=b$ سره شي، لازم او کافي ده چې د $f(x)$ تابع د يوه ثابت عدد b او يوې بې نهايت کوچني تابع $\varepsilon(x)$ کله چې $x\to a$ د مجموعې په شکل وښودل شي، يعنې:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=b+\varepsilon(x) \\ \lim_{x\to a}\varepsilon(x)=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x)=b$$

2- که چېرې $\varepsilon(x)$ ، $x\to a$ ته نژدې شي، بې نهايت کوچنۍ تابع وي، خو صفر نه وي، نو $\lim_{x\to a}\frac{1}{\varepsilon(x)}=\infty$

د بې نهايت کوچنۍ تابع ګانو مجموعه بيا هم يوه بې نهايت کوچنۍ تابع ده.

3- د بې نهايت کوچنيو تابع ګانو د ضرب حاصل بيا هم يوه بې نهايت کوچنۍ تابع ده.

4- که چېرې $\varepsilon(x)$ يوه بې نهايت کوچنۍ تابع او $u(x)$ داسې يوه تابع وي چې لېميټ يې صفر نه وي، نو د $v(x)=\frac{\varepsilon(x)}{u(x)}$ تابع يوه بې نهايت کوچنۍ تابع ده.

مثال:

I) د $\varepsilon(x)=x^2-9$ تابع کله چې $x\to 3$ ، يوه بې نهايت کوچنۍ تابع ده ځکه چې:

$$\lim_{x\to 3}(x^2-9)=0$$

II) $\varepsilon(x)=\frac{1}{2x}$ تابع کله چې $x\to\infty$ ته نژدې شي بې نهايت کوچنۍ تابع ده:

$$\lim_{x\to\infty}\varepsilon(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x}=0$$

پوښتنې: د تېرو خاصيتونو په مرسته لاندې سوالونه حل کړئ.

$$1)\ \lim_{x\to 2}(2x^2-1)=\lim_{x\to 2}2x^2-\lim_{x\to 2}1=2\lim_{x\to 2}x^2-\lim_{x\to 2}1=2\cdot 2^2-1=7$$

$$2)\ \lim_{x\to -3}(x-1)^2=\lim_{x\to -3}(x-1)\cdot\lim_{x\to -3}(x-1)=(-4)(-4)=16$$

$$3)\ \lim_{x\to 0}\frac{4x-3}{x+1}=\frac{\lim_{x\to 0}4x-\lim_{x\to 0}3}{\lim_{x\to 0}x+\lim_{x\to 0}1}=\frac{0-3}{0+1}=-3$$

د پورتنيو پوښتنو له حل څخه د لېميټ يو خاصيت داسې بيان او ثبوو:

1. د څو تابع ګانو د مجموعې لېميټ د نومړو هرې تابع د لېميټونو له مجموعې سره مساوي دي، يعنې: که چېرې د $f(x_1), f(x_2)$ تابع ګانې وي، نو لرو چې:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x_1)+f(x_2)\right]=\lim_{x\to a}f(x_1)+\lim_{x\to a}f(x_2)$$

ثبوت:که $\lim_{x\to a}f(x_1)=b_1\ ,\ \lim_{x\to a}f(x_2)=b_2$ او ε_1 او ε_2 بې نهايت کوچنۍ تابع ګانې وي، نو:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x_1)\pm f(x_2)\right]=b_1\pm b_2$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x_1)=b_1+\varepsilon_1\ \ .....\ I \\ f(x_2)=b_2+\varepsilon_2\ \ .....\ II \end{array}\right\}\Rightarrow f(x_1)\pm f(x_2)=(b_1+\varepsilon_1)\pm(b_2+\varepsilon_2)=b_1\pm b_2+(\varepsilon_1\pm\varepsilon_2)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

څرنګه چې $(\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2)$ د بې نهايت کوچنيو تابع ګانو مجموعه او تفاضل ده او د بې نهايت کوچنيو تابع ګانو مجموعه او تفاضل بیاهم يوه بې نهايت کوچنۍ تابع ده، نو:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x_1)\pm f(x_2)\right]=b_1\pm b_2=\lim_{x\to a}f(x_1)\pm\lim_{x\to a}f(x_2)$$

2. د دوو يا څو تابع ګانو د ضرب د حاصل لېميټ د نومورو تابع ګانو د لېميټونو د ضرب له حاصل سره مساوي دی:

ثبوت:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x_1)\cdot f(x_2)\right]=\lim_{x\to a}f(x_1)\cdot\lim_{x\to a}f(x_2)=b_1\cdot b_2$$

$$\left.\begin{matrix} f(x_1)=b_1+\varepsilon_1 \\ f(x_2)=b_2+\varepsilon_2 \end{matrix}\right\}\Rightarrow\ f(x_1)\cdot f(x_2)=(b_1+\varepsilon_1)(b_2+\varepsilon_2)$$

$$f(x_1)\cdot f(x_2)=b_1\cdot b_2+b_1\cdot\varepsilon_2+b_2\cdot\varepsilon_1+\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2$$

څرنګه چې ε_1 او ε_2 ډېر کوچني عددونه دي، نو د ضرب حاصل يې د b_1 او b_2 سره او همداشان په خپلو کې بې‌نهايت کوچنی کېږي، نو:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x_1)\cdot f(x_2)\right]=b_1\cdot b_2=\lim_{x\to a}f(x_1)\cdot\lim_{x\to a}f(x_2)$$

3. د دوو تابع ګانو د نسبت لېميټ د هغو تابع ګانو د لېميټونو له نسبت څخه عبارت دی، لکه په لاندې ډول:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}=\frac{b_1}{b_2}\qquad ,\quad g(x)=b_2\neq 0$$

ثبوت:

$$\left.\begin{matrix} f(x)=b_1+\varepsilon_1 \\ g(x)=b_2+\varepsilon_2 \end{matrix}\right\}\ \Rightarrow\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{b_1+\varepsilon_1}{b_2+\varepsilon_2}$$

د مساوات له دواړو خواوو څخه $\frac{b_1}{b_2}$ تفريق کوو:

$$\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{b_1}{b_2}=\frac{b_1+\varepsilon_1}{b_2+\varepsilon_2}-\frac{b_1}{b_2}=\frac{b_2(b_1+\varepsilon_1)-b_1(b_2+\varepsilon_2)}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}$$

$$=\frac{b_2b_1+b_2\varepsilon_1-b_1b_2-b_1\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}=\frac{b_2\varepsilon_1-b_1\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_1)}$$

$$\Rightarrow\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{b_2\varepsilon_1-b\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}+\frac{b_1}{b_2}=\frac{b_2\varepsilon_1-b_1\varepsilon_2+b_1b_2+b_1\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}$$

$$=\frac{b_2(b_1+\varepsilon_1)}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}=\frac{b_1+\varepsilon_1}{b_2+\varepsilon_2}\quad\Rightarrow\ \frac{f(x)}{g(x)}=\frac{b_1+\varepsilon_1}{b_2+\varepsilon_2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

خرنګه چې ε_1 او ε_2 ډېر کوچني مثبت عددونه($0<\varepsilon<1$)دي، نو کله چې $x \to a$ وکړي صفر کېږي او په پایله کې په لاس راځي چې:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\frac{b_1}{b_2}$$

د سانډویچ قضیه: که چېرې د $f(x)$, $g(x)$ او $h(x)$ تابع ګانې د هر x لپاره په یوه غیر تړلي انټروال کې چې د a عدد په کې شامل دی(ولو که $x \neq a$) او $f(x)\leq g(x)\leq h(x)$ شرط صدق وکړي په هغه صورت کې چې $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b=\lim\limits_{x\to a} h(x)$ وي، نو $\lim\limits_{x\to a} g(x)=b$ دی.

مثال: که د $u(x)$ تابع دغه خاصیت($1-\frac{x^2}{4}\leq u(x)\leq 1+\frac{x^2}{2}$) ولري، نو $\lim\limits_{x\to a} u(x)$ په لاس راوړئ.

حل: لیدل کېږي چې $\lim\limits_{x\to 0}(1+\frac{x^2}{2})=1=\lim\limits_{x\to 0}(1-\frac{x^2}{4})$ دی، نو د سانډویچ د قضیې په پام کې نیولو سره لرو چې:

$$\lim_{x\to 0} u(x)=1$$

قضیه: که چېرې $f(x)$ او $g(x)$ داسې تابع ګانې وي چې $f(x)\leq g(x)$ نو د لیمیټ د شتون په صورت کې یې لمیټ $\lim\limits_{x\to a} g(x)\geq\lim\limits_{x\to a} f(x)$ سره دی.

مثال: د $f(x)=\frac{15x-4}{5x+6}$ او $g(x)=\frac{15x+4}{5x-6}$ تابع ګانې په پام کې نیسو په واضح ډول معلومېږي چې د $x>1$ لپاره لرو $f(x)<g(x)$ دی.

حل:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{15x-4}{5x+6}=\frac{15}{5}=3$$

$$\lim_{x\to\infty} g(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{15x+4}{5x-6}=\frac{15}{5}=3$$

پوښتنې

لاندې لیمیټونه د امکان په صورت کې پیدا کړئ.

1) $\lim\limits_{x\to 0} 6x^3-2x^2+5x+3$ 2) $\lim\limits_{x\to -1} x^7-2x-5$ 3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(9x+2)^2-4}{x}$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x^2+7x}{(2x-5)^2-9}$ 5) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x-2}$ 6) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x}{x^2-4x+1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د نسبتي تابع گانو لیمیټونه

آیا پوهیږئ چې مخامخ اړیکې په څه نامه یادیږي؟

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$$

$$\infty - \infty$$

$$0 \cdot \infty$$

فعالیت

- د $y = x^2 - 1$ تابع لیمیټ هغه وخت پیدا کړئ چې $x \to -2$ ته تقرب وکړي.
- د $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ تابع لیمیټ هغه وخت پیدا کړئ چې $x \to 1$ ته تقرب وکړي.
- د $y = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$ تابع لیمیټ هغه وخت پیدا کړئ چې $x \to \infty$ ته تقرب وکړي.

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله لیکلای شو:

پایله

- د ځینو تابع گانو لیمیټ مستقیماً د قیمت په وضع کولو سره لاسته راځي.
- ځنې تابع گانې د $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$ ... مبهم شکلونه لري چې د ابهام د له منځه وړلو څخه وروسته د تابع لیمیټ لاسته راځي چې په لاندې ډول یې تر څېړنې لاندې نیسو:

I- د $\frac{0}{0}$ مبهم شکل:

فعالیت

- د $f(x) = \frac{x - 1}{x^2 - 1}$ تابع قیمت د $x = -1$ په نقطه کې وڅېړئ.
- د $f(x)$ تابع لیمیټ کله چې $x \to 1$ وي د ابهام کومه بڼه لري.
- آیا د $f(x)$ تابع په داسې ډول ساده کولای شو چې د $x = 1$ لپاره یو معین قیمت ولري؟

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

که چېرې یوه تابع د $\frac{0}{0}$ په شکل مبهمه بڼه ولري، د لیمیټ د پیدا کولو لپاره یې لومړی تابع د تجزیې په مرسته ساده کوو د ابهام عامل (خبیثه فکتور) له منځه وړو او بیا یې د لیمیټ قیمت په لاس راوړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: لاندې لېمېټونه پيدا کړئ.

$$1)\ \lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}\quad,\quad 2)\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x-2}\quad,\quad 3)\ \lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}$$

حل: لومړی د لېمېټ بڼه ټاکو:

$$1)\ \lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}=\frac{(-2)^2-4}{-2+2}=\frac{0}{0}$$

ځرنګه چې پاسنې لېمېټونه د $\frac{0}{0}$ بڼه لري، نو د تجزيې په مرسته يې وروسته له ساده کولو څخه د لېمېټ قيمت په لاندې ډول په لاس راوړو:

$$\Rightarrow \lim_{x\to -2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)}=\lim_{x\to -2}(x-2)=-2-2=-4$$

$$2)\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x-2}=\frac{2^2-12+8}{2-2}=\frac{0}{0}$$

حل: بيا هم لېمېټ د $\frac{0}{0}$ مبهم شکل لري:

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-4)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x-4)=2-4=-2$$

$$3)\ \lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}=\frac{0}{0}$$

حل: ليدل کېږي چې نوموړی لېمېټ بيا هم د $\frac{0}{0}$ بڼه لري، نو د لېمېټ د لاسته راوړلو لپاره د کسر صورت او مخرج د صورت په مزدوج کې ضربوو:

$$\Rightarrow \lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}\cdot\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+4}=\lim_{x\to 16}\frac{(x-16)}{(x-16)(\sqrt{x}+4)}$$

$$=\lim_{x\to 16}\frac{1}{\sqrt{x}+4}=\frac{1}{8}$$

پوښتنې

$$1)\ \lim_{x\to 3}\frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}=?\qquad 2)\ \lim_{x\to 1}\frac{\frac{5}{2x-3}+5}{x^2-1}=?\qquad 3)\ \lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}=?$$

$$4)\ \lim_{x\to 2}\frac{\frac{2x}{x^2+1}-\frac{4}{5}}{x-2}=?\qquad 5)\ \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+3}-\frac{1}{3}}{x}=?$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

II- د $\frac{\infty}{\infty}$ مبهم شکل

آیا د مخامخ تابع لیمیټ ټاکلی شئ؟

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-3x+8}{2x^2-2}$$

فعالیت

- د $f(x)=2x^4+x^3-4x-1$ تابع لیمیټ چې $x\to\infty$ وڅېړئ.
- د $g(x)=x^3-2x-4$ تابع لیمیټ چې $x\to\infty$ وڅېړئ.
- د $y=\frac{5}{x-2}$ تابع لیمیټ چې $x\to\infty$ وڅېړئ.
- د $\frac{f(x)}{g(x)}$ تابع لیمیټ هغه وخت په لاس راوړئ چې $x\to 0$ وکړي.
- د $\frac{f(x)}{g(x)}$ تابع لیمیټ هغه وخت په لاس راوړئ چې $x\to\infty$ وکړي.

له پاسني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

پایله: هغه توابع چې د $\frac{\infty}{\infty}$ بڼه ولري د لیمیټ د پیدا کولو لپاره یې داسې کړنه کوو:

د تابع صورت او مخرج په هغه متحول چې تر ټولو لوی توان ولري ویشو، وروسته له ساده کولو څخه یې لیمیټ په لاس راځي.

لومړی مثال: $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{3x^2-2}$ پیدا کړئ.

حل: لومړی د لیمیټ بڼه ټاکو:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{3x^2-2}=\frac{\infty-1}{\infty-2}=\frac{\infty}{\infty}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

څرنګه چې پوښتنه د $\frac{\infty}{\infty}$ شکل لري، نو صورت او مخرج په x^2 باندې وېشو:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{3x^2-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2}-\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x^2}}{3-\frac{2}{x^2}}=\frac{1-\frac{1}{\infty}}{3-\frac{2}{\infty}}=\frac{1-0}{3-0}=\frac{1}{3}$$

دويم مثال: د $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2}{x-2}$ پيدا کړئ.

حل: $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2}{x-2}=\frac{\infty}{\infty}$$

څرنګه چې پوښتنه د $\frac{\infty}{\infty}$ شکل لري، نو صورت او مخرج د x له ټولو په لوړ توان وېشو:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2}{x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2}{x^2}}{\frac{x}{x^2}-\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x^2}}{\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=\frac{1-\frac{2}{\infty}}{\frac{1}{\infty}-\frac{2}{\infty}}=\frac{1-0}{0}=\frac{1}{0}=\infty$$

دريم مثال: $\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x^2-2}$ پيدا کړئ.

حل: $$\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x^2-2}=\frac{\infty}{\infty}$$

څرنګه چې پوښتنه $\frac{\infty}{\infty}$ شکل لري، نو صورت او مخرج د x له ټولو په لوړ توان وېشو:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x^2-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x^2}}=\frac{\frac{1}{\infty}-\frac{1}{\infty}}{1-\frac{2}{\infty}}=\frac{0}{1-0}=\frac{0}{1}=0$$

يادونه: هغه تابع ګانې چې د $\frac{\infty}{\infty}$ بڼه ولري، پرته له دې چې عمليه پرې سرته ورسوو کولای شو، په لاندې ډول د هغوی لیمیټ په لاس راوړو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $f(x)=\dfrac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_n}$ تابع په پام کې ونیسئ که چېرې ($x\to\infty$) کړی وي، نو دلته درې حالتونه ممکن دي:

1- د $m=n$ لپاره د نوموړی کسر لېمیټ عبارت دی له $\dfrac{a_0}{b_0}$.

2- د $m<n$ لپاره د نوموړی کسر لېمیټ عبارت له صفر څخه دی.

3- د $m>n$ لپاره د نوموړی کسر لېمیټ عبارت له $\pm\infty$ څخه دی.

څلورم مثال: لاندې لېمیټونه پیدا کړئ.

$$1)\ \lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+6x^4-x^3+x-1}{-x^4+2x^2-3}\qquad 2)\ \lim_{x\to3}\frac{-8+6x^3-x^2+x}{5x^3-x^4+6x-1}\qquad 3)\ \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2}{x+1}$$

حل:

1- څرنګه چې $m=n$ دی، نو:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+6x^4-x^3+x-1}{-x^4+2x^2-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x^4}{-x^4}=-6$$

2- څرنګه چې $m<n$ دی، نو د نوموړي تابع لیمیټ صفر دی.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-8+6x^3-x^2+x}{5x^3-x^4+6x-1}=0$$

3- څرنګه چې $m>n$ دی، نو د نوموړي تابع لیمیټ مساوي له ∞ سره دی:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2}{x+1}=\infty$$

یادونه: زده‌کوونکي دې ورکړل شوي ځوابونه په کور کې د عملیې د سرته رسولو څخه وروسته په لاس راوړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

لاندې لیمیټونه پیدا کړئ؟

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6}{x^2-x}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4+x^2+x+6}{x^3-3x+4}$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^5+x^2-x+9}{x^4+x^2-x+5}$

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2-x+7}{x^3-x+5}$

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-2}{x+1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

III- د $(\infty - \infty)$ او $(0 \cdot \infty)$ مبهم شکلونه

د مخامخ لیمیټونو قیمتونه پیدا کړئ.

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x^2-4}-\frac{x-1}{x^2-4}$$

$$\lim_{x\to 3}(x^2-9)\cdot\frac{2x^3-4}{x-3}$$

فعالیت

- د $a+1$ مزدوج ولیکئ.
- د $\sqrt{x}-1$ مزدوج ولیکئ.
- د $f(x)=\sqrt{x}-\sqrt{x+1}$ لیمیټ پیدا کړئ، کله چې $x\to\infty$ تقرب وکړي.
- د $f(x)=(2x-1)(x+1)$ تابع لیمیټ وټاکئ، کله چې $x\to\infty$ تقرب وکړي.

له پورتني فعالیت څخه پایله داسې بیانوو:

د هغو تابع ګانو چې د $(\infty-\infty)$ او $(0\cdot\infty)$ مبهم شکلونه ولري، د لیمیټ د پیدا کولو لپاره یې د کسرونو له جمع کولو، ضرب او مزدوج څخه ګټه اخلو او هغه داسې ساده کوو، تر څو چې د $\frac{0}{0}$ او یا $\frac{\infty}{\infty}$ بڼه غوره کړي، وروسته یې لیمیټ په لاس راوړو.

مثال: لاندې لیمیټونه پیدا کړئ.

1) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{9}{x-1}-\frac{8x+10}{x^2-1}\right)=?$ 2) $\lim_{x\to 1}(x-1)\left(\frac{1}{x^2+2x-3}\right)=?$

حل 1:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{9}{x-1}-\frac{8x+10}{x^2-1}\right)=\frac{9}{1-1}-\frac{8\cdot 1+10}{1^2-1}=\frac{9}{0}-\frac{18}{0}=\infty-\infty$$

څرنګه چې نوموړی لیمیټ د $(\infty-\infty)$ بڼه لري، نو لیکلای شو چې:

$$=\lim_{x\to 1}\frac{9x+9-8x-10}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{0}{0}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2) $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)(\frac{1}{x^2+2x-3})=?$

حل2:
$$\lim\limits_{x\to 1}(x-1)(\frac{1}{x^2+2x-3})=(1-1)(\frac{1}{1^2+2-3})=0\cdot\frac{1}{3-3}=0\cdot\frac{1}{0}=0\cdot\infty$$

ليدل کېږي چې نوموړی لېمیټ د $(0\cdot\infty)$ مبهم شکل لري، نو:

$$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2+2x-3}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x+3)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x+3}=\frac{1}{4}$$

پوښتنې

لاندې لېمیټونه پیدا کړئ.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$

2) $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^2})$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^5-8x^3)$

4) $\lim\limits_{x\to 5}\left[(x^2-25)\frac{1}{x-5}\right]$

5) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $1^{\infty}, \infty^{0}, 0^{0}$ مبهم شکلونه

د مخامخ لیمیټ مبهم شکل وټاکئ؟

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}} = ?$$

- د $y = x^{x}$ تابع لیمیټ په هغه صورت کې پیدا کړئ چې $x \to 0$ وکړي.
- د $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ لیمیټ بڼه په هغه صورت کې وټاکئ چې $x \to \infty$ وکړي.
- د کومې عملیې په مرسته کولای شو چې د $1^{\infty}, \infty^{0}, 0^{0}$ مبهم شکلونو ابهام له منځه ویسو؟

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

که چېرې یوه تابع پورتني مبهم شکلونه ځانته غوره کړي، هغه د طبیعي لوګاریتم په مرسته د $0 \cdot \infty$ شکل ته د اړولو وړ دي، یعنې:
$$\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)} \Rightarrow \ln(\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}) = \lim_{x\to a}(\ln f(x)^{g(x)}) = \lim_{x\to a}[g(x)\ln f(x)]$$

یادونه:

I- که چېرې $n \to \infty$ وکړي د $a_n = (1+\frac{1}{n})^{n}$ ترادف $e = 2.71828182$ عدد ته تقرب کوي.

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n} = e$$

چې په لاندې جدول کې ښکاربږي:

n	$\frac{1}{n}$	$1+\frac{1}{n}$	$(1+\frac{1}{n})^{n}$
1	1	2	2
2	0.5	1.5	2.25
5	0.2	1.2	2.48832
10	0.1	1.1	2.59374246
100	0.01	1.01	2.704813829
1000	0.001	1.001	2.716923932
10000	0.0001	1.0001	2.718145926
100000	0.00001	1.00001	2.718268237
1000000	0.000001	1.000001	2.718280469
1000000000	10^{-9}	$1+10^{-9}$	2.718281828

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e = 2.718281828$ دی چې ... $e = 2.71$ عدد ته د Euler عدد وايي.

II- لاندې لیمیتونه پیدا کړئ:

$$1)\ \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e \qquad 2)\ \lim_{x\to\infty}(1+\frac{\alpha}{x})^{\beta x} = e^{\alpha\beta}$$

$$3)\ \lim_{x\to 0}\frac{Ln(1+x)}{x} = 1 \qquad 4)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1$$

ثبوت: پوهېږو چې څلور واړه پوښتنې د 1^∞ مبهم شکلونه لري.

$$1)\ x = \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{x}\ ,\ \alpha \to 0 \Rightarrow x \to \infty \Rightarrow \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$$

$$2)\ \lim_{x\to\infty}(1+\frac{\alpha}{x})^{\beta x} = e^{\alpha\beta}$$

$$u = \frac{\alpha}{x} \Rightarrow x = \frac{\alpha}{u}\ ,\ x \to \infty \Rightarrow u \to 0$$

$$\lim_{u\to 0}(1+u)^{\beta\frac{\alpha}{u}} = \lim_{u\to 0}\left[(1+u)^{\frac{1}{u}}\right]^{\alpha\beta}$$

$$x = \frac{1}{u} \to u = \frac{1}{x}\ ,\ u \to 0 \Rightarrow x \to \infty$$

$$\lim_{u\to 0}\left[(1+u)^{\frac{1}{u}}\right]^{\alpha\beta} = \lim_{x\to\infty}\left[(1+\frac{1}{x})^x\right]^{\alpha\beta} = e^{\alpha\beta}$$

$$3)\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\ln(1+x)\right] = \lim_{x\to 0}\left[\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]$$

$$\ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]\ ,\ x = \frac{1}{u} \Rightarrow u = \frac{1}{x}\ ,\ x \to 0 \Rightarrow u \to \infty$$

$$\ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right] = \ln\left[\lim_{u\to\infty}(1+\frac{1}{u})^u\right] = \ln e = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

4) $y = e^x - 1 \Rightarrow e^x = 1 + y \Rightarrow x = \ln(1+y)$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)} = \lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(1+y)}{y}} = \frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}}$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\frac{1}{y}\ln(1+y)} = \frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\ln(1+y)^{\frac{1}{y}}} \ ,\ y = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{y}\ ,\ y \to 0 \Rightarrow x \to \infty$$

$$= \frac{1}{\ln \lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x} = \frac{1}{\ln e} = \frac{1}{1} = 1$$

د 1^∞ مبهم شکل عمومي حالت: که چېرې د اکسپوننشیل تابع لیمیټ یعني $\lim\limits_{x\to a}[u(x)]^{v(x)}$ د 1^∞ مبهم شکل ځانته غوره کړي په دې حالت کې $\alpha = u - 1$ سره تعویضوو، په نتیجه کې:

$$\lim_{x\to a} u^v = \lim_{x\to a}[(1+u-1)]^{\frac{v}{u-1}u-1} = \lim_{x\to a}\left[(1+\alpha)^{\frac{v}{\alpha}\alpha}\right] = \lim_{x\to a}\left[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\lim\limits_{x\to a}(v\alpha)}$$

څرنګه چې $\alpha = u - 1$ دی که چېرې $u \to 1$ نو $\alpha \to 0$ **ته نژدې کېږي په پایله کې** :

$$\lim_{x\to a}[u(x)]^{v(x)} = \left[\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\lim\limits_{x\to a}[v(u-1)]} = e^{\lim\limits_{x\to a}[v(u-1)]} = e^P$$

$$\lim_{x\to a}[u(x)]^{v(x)} = e^P \quad , \quad P = \lim_{x\to a}[v(u-1)]$$

لومړی مثال: د $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^x$ لیمیټ قیمت په لاس راوړئ.

حل: لومړی د لیمیټ بڼه ټاکو معلومېږي چې لیمیټ د 1^∞ مبهم شکل لري، نو له فورمول څخه کار اخلو:

$$u = 1 + \frac{2}{x} \quad , \quad v = x$$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^x = e^P \quad , \quad P = \lim_{x\to\infty}\left[x(1+\frac{2}{x}-1)\right] = 2$$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^x = e^P = e^2$$

دویم مثال: د $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{\frac{x-5}{2}}$ قیمت محاسبه کړئ.

حل: **لومړی د لیمیټ بڼه ټاکو** $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{\frac{x-5}{2}} = 1^\infty$

(c) ketabton.com: The Digital Library

څرنګه چې معلومېږي نوموړی لیمیټ د 1^{∞} مبهم شکل لري، نو له فورمول څخه کار اخلو:

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{\frac{x-5}{2}}=e^{P}$$

$$u=1+\frac{1}{x} \quad , \quad v=\frac{x-5}{2}$$

$$P=\lim_{x\to a}\left[v(u-1)\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x-5}{2}(1+\frac{1}{x}-1)\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x-5}{2}(\frac{1}{x})\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x-5}{2x}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{\frac{x-5}{2}}=e^{P}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

دریم مثال: $\lim_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=?$

حل: **د تېر په شان بیاهم لومړی د لیمیټ بڼه ټاکو،** $\lim_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=1^{\infty}$

څرنګه چې معلومېږي لیمیټ د 1^{∞} مبهم شکل لري د فورمول په مرسته یې محاسبه کوو:

$$u=\cos x \quad , \quad v=\frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=e^{P}$$

$$P=\lim_{x\to a}\left[v(u-1)\right]=\lim_{x\to0}\left[\frac{1}{x}(\cos x-1)\right]=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(\cos x-1)(\cos x+1)}{x(\cos x+1)}$$

$$\frac{\cos^2 x+\cos x-\cos x-1}{x(\cos x+1)}=\lim_{x\to0}\frac{\cos^2 x-\sin^2 x-\cos^2 x}{x(\cos x+1)}$$

$$=-\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\cos x+1}=-1\cdot\frac{0}{2}=0$$

$$\lim_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=e^{P}=e^{0}=1$$

پوښتنې

لاندې لیمیټونه محاسبه کړئ.

1) $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x+2}$

2) $\lim_{x\to1}\frac{x-1}{\ln x}$

3) $\lim_{x\to\infty}(\frac{x+3}{x-1})^{x+2}$

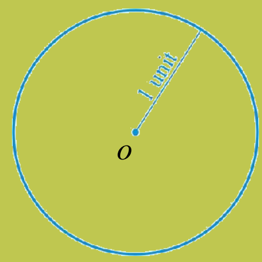
4) $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{n^2})^{n^2}$

5) $\lim_{x\to0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مثلثاتي تابع ګانو لیمیټ

Trigonometric functions limits



که د یوې دایرې شعاع یو واحد (1unit) وي، نوموړې دایرې ته څه ډول دایره وایي.

- دوضعیه کمیاتو په سیستم کې د $C(o,r)$ په مثلثاتي دایره کې د θ مرکزي زاویه رسم کړئ.
- د C له بهرني ټکي څخه په دایره باندې د ox پر محور د $\overline{CA}$ مماس او $\overline{MB}$ عمود رسم کړئ.
- د C ټکی د دایرې له مرکز سره وصل کړئ.
- د مرکزي زاویې د مقابل قوس د اندازه کولو واحد په ګوته کړئ.

له پورتني فعالیت څخه قضیه داسې بیان او ثبوتوو:

قضیه: د یوې زاویې د ساین او د هغې زاویې د نسبت لیمیټ مساوي په (1) دي، کله چې زاویه صفر ته تقرب وکړي.

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$$

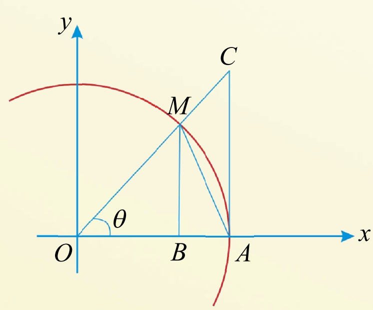
ثبوت: په لاندې شکل کې د MOA او COA د مثلثونو او OMA د قطاع مساحتونه په لاس راوړو:

$$\text{مثلث مساحت } MOA \text{ د}=\frac{1}{2}\cdot\overline{OA}\cdot\overline{BM}=\frac{1}{2}\cdot r\cdot\overline{BM}=\frac{\overline{BM}}{2}\cdot r$$

$$\text{قطاع مساحت } O\overset{\frown}{A}M \text{ د}=\frac{1}{2}\theta r^2$$

د θ د زاویې پراخوالی باید په رادیان لاسته راوړو.

$$\text{مساحت } C\overset{\Delta}{O}A \text{ د}=\frac{1}{2}\cdot\overline{OA}\cdot\overline{AC}=\frac{1}{2}\cdot r\cdot\overline{AC}=\frac{\overline{AC}}{2}\cdot r$$



د MOA او COA مثلثونو مساحتونه د OMA د قطاع له مساحت سره پرتله کوو:

$$\frac{1}{2}r\,\overline{BM}<\frac{1}{2}\theta r^2<\frac{\overline{AC}}{2}\cdot r$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د نامساواتو دواړه خواوې په $\frac{2}{r^2}$ کې ضربوو:

$$\frac{\overline{BM}}{r} < \theta < \frac{\overline{AC}}{r} \Rightarrow \sin\theta < \theta < \tan\theta \Rightarrow 1 < \frac{\theta}{\sin\theta} < \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\Rightarrow \cos\theta < \frac{\sin\theta}{\theta} < 1 \Rightarrow \lim_{\theta\to 0}\cos\theta \le \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} \le \lim_{\theta\to 0} 1$$

د ساندویچ د قضیې پر بنسټ معلومېږي چې $\lim_{\theta\to 0}\cos\theta = 1$ او همدارنګه $\lim_{\theta\to 0} 1 = 1$ دی، نو $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ دی.

پوهېږو چې د هرې زاویې ساین د (1) او (-1) د عددونو تر منځ تحول کوي:

$$-1 \le \sin\theta \le 1$$

$$-\frac{1}{\theta} \le \frac{\sin\theta}{\theta} \le \frac{1}{\theta}$$

$$-\lim_{\theta\to\infty}\frac{1}{\theta} \le \lim_{\theta\to\infty}\frac{\sin\theta}{\theta} \le \lim_{\theta\to\infty}\frac{1}{\theta}$$

د ساندویچ د قضیې پر اساس لیکلای شو چې:

$$\left.\begin{array}{l} -\lim\limits_{\theta\to\infty}\frac{1}{\theta} = 0 \\ \lim\limits_{\theta\to\infty}\frac{1}{\theta} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{\theta\to\infty}\frac{\sin\theta}{\theta} = 0$$

په پایله کې ویلای شو چې د یوې زاویې ساین او د هغې زاویې د نسبت لیمیټ مساوي په صفر دی هغه وخت چې زاویه بې‌نهایت ته نژدې شي.

لومړی مثال: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$ پیدا کړئ.

حل: که $2x = \alpha$ نو $x = \frac{\alpha}{2}$ کېږي، څرنګه چې $x \to 0$ کړی دی، نو $\alpha \to 0$ کوي، نو لیکلای شو:

$$\frac{\sin\alpha}{\frac{\alpha}{2}} = 2\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

له پورته مساواتو څخه لاس ته راځي:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow 2\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 2\cdot 1 = 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5\tan 2x}{7x}$ حل کړئ.

حل:

$$\frac{5\tan 2x}{7x}=\frac{5\dfrac{\sin 2x}{\cos 2x}}{7x}=\frac{5\sin 2x}{7x\cos 2x}=\frac{5\cdot 2x\dfrac{\sin 2x}{2x}}{7x\cos 2x}=\frac{10\dfrac{\sin 2x}{2x}}{7\cos 2x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{5\tan 2x}{7x}=\frac{10}{7}\frac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}}{\lim\limits_{x\to 0}\cos 2x}=\frac{10}{7}$$

دریم مثال: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x}$ حل کړئ.

حل: پوهیږو چې $1-\cos 2x=2\sin^2 x$ سره دی، نو:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\sin x=2\cdot 1\cdot 0=0$$

څلورم مثال: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{\sin 5x}$ پیدا کړئ:

حل:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin 3x}{\cos 3x}}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{3x\dfrac{\sin 3x}{3x}}{\cos 3x}}{5x\dfrac{\sin 5x}{5x}}=\frac{3x}{5x}\frac{\dfrac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}}{\lim\limits_{x\to 0}\cos 3x}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x}}=\frac{3}{5}\frac{\dfrac{1}{1}}{1}=\frac{3}{5}$$

پنځم مثال: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x-\cos 6x}{x^2}$ په لاس راوړئ.

حل: پوهیږو چې $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ نو:

$$\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin\dfrac{4x+6x}{2}\sin\dfrac{4x-6x}{2}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 5x\sin(-x)}{x^2}=-2\lim_{x\to 0}\frac{5\sin 5x}{5x}\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که $y = 5x$ سره وي، او $x \to 0$ نو $y \to 0$ کوي، نو:

$$= 10\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 10\cdot 1\cdot 1 = 10$$

پوښتنې

لاندې لیمیټونه محاسبه کړئ.

1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x+\frac{\pi}{6})}{x+\frac{\pi}{6}}$ 2) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}$ 3) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\tan^2 x}$

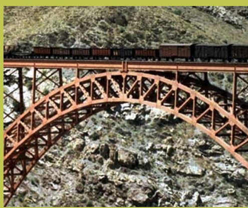
4) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x}$ 5) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\sin 3x}$ 6) $\lim_{x\to 0}\sin 5x\cos 3x$

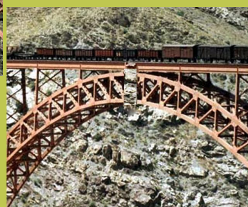
7) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan(2x-1)}{4x^2-1}$ 8) $\lim_{x\to 0}\sqrt{\cos 2x - \cos x + 1}$ 9) $\lim_{x\to 1}(\cos^2 x + \sin^2 x)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تابع گانو متمادیت

Continuity of functions





شکلونو ته پام وکړئ.

لومړی او دویم پلونه یو له بل څخه څه توپیر لري، خپل نظر بیان کړئ.

د تابع گانو گرافونه مختلف شکلونه لري چې ځینې یې په یوه قلم پرته له دې چې د قلم څوکه له کاغذ څخه پورته شي رسمیږي، متصلې یا متمادي تابع گانې بلل کیږي او ځینې یې په یوه قلم نه شي رسمېدلای یعنې د رسم په وخت کې باید د قلم څوکه یو ځل یا څو ځلې د کاغذ څخه پورته شي، ځکه په یوه برخه کې یې گراف غوڅ وي، دغه ډول تابع گانې په نوموړې ټکې کې غیر متصلې یا غیر متمادي تابع گانې بلل کیږي.

فعالیت

- د $f(x)=x^2+4x$ تابع گراف رسم کړئ.
- د $f(x)$ د تابع لیمیټ د $x=1$ په نقطه کې پیدا کړئ.
- د $f(x)$ د تابع قیمت د $x=1$ په نقطه کې پیدا او وروسته دواړه اړیکې سره پرتله کړئ.

له پاسني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

پایله: د $y=f(x)$ تابع د $x=a$ په ټکي کې متمادي بلله کیږي چې لاندې شرطونه په کې صدق وکړي.

1- د $f(x)$ تابع د a په ټکې کې تعریف شوې وي.

2- راکړل شوي تابع د a په ټکې کې لیمیټ ولري.

3- د $f(a)$ قیمت باید د $f(x)$ له لیمیټ سره مساوي وي: $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: وښيئ چې د $f(x)=x^2+2x-1$ تابع د $x_0=2$ په ټکي کې متمادي ده.

حل: څرنګه چې د تابع د تعريف ساحه ټول حقيقي عددونه دي، نو د متماديت له شرطونو څخه ليکلای شو:

$$1)\ \ 2\in Dom\ f(x)=IR$$

$$\left.\begin{array}{l} 2)\ \ \lim\limits_{x\to 2}(x^2+2x-1)=4+4-1=7 \\ 3)\ \ f(2)=2^2+4-1=7 \end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x)=f(2)=7$$

څرنګه چې د متماديت درې واړه شرطونه په کې حقيقت لري، بناءً تابع متمادي ده.

دويم مثال: د $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$ د تابع متماديت د $x_0=-1$ په ټکي کې وڅېړئ.

حل: د $f(x)$ د تابع د تعريف ساحه عبارت ده، له: $IR\setminus\{-1\}$

او $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x-1}{x+1}=\dfrac{-3}{0}=\infty$ سره دی.

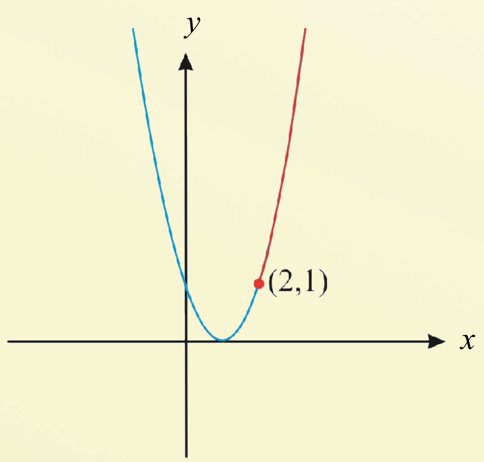
څرنګه چې ليدل کېږي -1 د تابع د تعريف په ساحه کې شامل نه دی، بناءً نوموړی تابع د -1 په ټکي کې متمادي نه ده.

دريم مثال: د $f(x)=\begin{cases} x^2-2x+1 & ;\ x<2 \\ x^2-3 & ;\ x\geq 2 \end{cases}$ د تابع متماديت د $x=2$ په ټکي کې وڅېړئ.

حل: لومړی د تابع د ښي او کيڼي خوا لميټونه څېړو:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(x^2-3)=1 \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x^2-2x+1)=1 \end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^-} f(x)\ \ \Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x)=f(2)$$

په پايله کې ويلای شو چې تابع په نوموړي ټکي کې متمادي ده، لکه چې په شکل کې ليدل کېږي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

څلورم مثال: که $f(x)=\begin{cases}2x+1 & ; x\geq 1\\ 1-x & ; x<1\end{cases}$ وي، نو د $x=1$ په ټکي کې د تابع متماديت وڅېړئ.

حل:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1-x=0\\ f(1)=0\end{array}\right\} \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} 2x+1=3\\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} 1-x=0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$$

نو تابع په $x=1$ کې غیر متمادي ده.

پایله: که چېرې د $g(x)$ تابع د $x=a$ په ټکي کې $f(x)$ په $x=g(a)$ کې متمادي وي، نو $f(g(x))$ په $x=a$ کې هم متمادي ده، یعنې:

$$\lim_{x\to a} f(g(x))=f(\lim_{x\to a} g(x))=f(g(a))$$

1) $\lim\limits_{x\to a}(f(x))^{\alpha}=(\lim\limits_{x\to a} f(x))^{\alpha} \quad , \quad \alpha\in IR$

2) $\lim\limits_{x\to a} a^{f(x)}=a^{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$

3) $\lim\limits_{x\to a}\log_a f(x)=\log_a(\lim\limits_{x\to a} f(x))$

4) $\lim\limits_{x\to a}\sin f(x)=\sin(\lim\limits_{x\to a} f(x))$

پنځم مثال:که $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x+3}$ وي او $x\neq -3$ وي.

آیا د $f(x)$ تابع د $x=-3$ په ټکي کې متمادي ده؟

حل: څرنګه چې تابع د $x=-3$ په نقطه کې نه ده تعریف شوې یا په بل عبارت د -3 عدد د تابع د تعریف په ساحه کې نه دی شامل، نوله دې امله تابع د $x=-3$ په ټکي کې متمادي نه ده.

غیر متمادیت: که چېرې د $f(x)$ تابع په $x=a$ کې یو له لاندې درې شرطونو څخه و نه لري وایو چې f په a کې غیر متمادي ده او a یې د انفصال ټکی دی. انفصال په درې ډوله دی.

لومړی ډول: د f تابع د a په ټکي کې د ښي او کیڼ لوري لیمیټونه ولري، خو مساوي نه وي.

دویم ډول:کم تر کمه یو له دوو لیمیټونو(د ښي او کیڼ لوري لیمیټونه) څخه موجود نه وي.

دریم ډول:که چېرې تابع د a په ټکي کې لیمیټ ولري، خو a د f د تعریف په ساحه کې شامل نه وي.(یوازې یو خالي ټکی وي.)

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

په ورکړ شویو ټکو کې د تابع متمادیت وڅیړئ.

$a)\ f(x)=x^2+5(x-2)^7 \quad ; \quad x=3$

$b)\ f(x)=\dfrac{x+3}{(x^2+2x-5)} \quad ; \quad x=-1$

$c)\ h(x)=\dfrac{\sqrt{8-x^2}}{2x^2-5} \quad ; \quad x=-2$

$d)\ f(x)=\dfrac{1}{(x-3)^3} \quad ; \quad x=3$

$e)\ f(x)=|x-3| \quad ; \quad x=3$

$f)\ g(x)=\dfrac{|x|}{x} \quad ; \quad x=0$

$$g)\ f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3+x}{x} & ; \quad x\neq 0 \\ 3 & ; \quad x=2 \end{cases}$$

$h)\ f(x)=\dfrac{x^2-9}{x+3} \quad ; \quad x=2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د متمادي تابع ګانو خاصيتونه

د مخامخ مساواتو په اړه سوچ وکړئ چې حقيقت لري او که نه؟

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$$
$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$
$$(f \div g)(x) = f(x) \div g(x) \quad , \; g(x) \neq 0$$

فعاليت

- که $f(x) = x^2 - 1$ وي د تابع متماديت وڅېړئ.
- که $g(x) = x + 3$ وي د تابع متماديت وڅېړئ.
- د $f(x) + g(x)$ د تابع ګانو متماديت وڅېړئ.

د پورتني فعاليت پايله داسې بيانوو:

پايله: که د $f(x)$ او $g(x)$ تابع ګانې د $x = c$ په ټکي کې متمادي وي، نو له لاندې تابع ګانو څخه يې هره يوه په $x = c$ يا يوه انټروال کې متمادي ده.

1- د تابع ګانو جمع $f(x) + g(x)$

2- د تابع ګانو تفريق $f(x) - g(x)$

3- د تابع ګانو ضرب $f(x) \cdot g(x)$

4- د تابع ګانو تقسيم $\dfrac{f(x)}{g(x)} \; ; \; g(x) \neq 0$

لومړی بېلګه: **که** $f(x) = x^2 + 3$ **او** $g(x) = x^2 + 3x - 2$ **وي، نو:**

1- f او g د $x = 1$ په ټکي کې متمادي دي او که نه؟

2- وڅېړئ چې:

الف) $f(x) + g(x) = (f + g)(x)$ وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) $f(x)\cdot g(x)=(f\cdot g)(x)$ د $x=1$ په نقطه کې متمادي ده او که غیر متمادي.

حل:لومړی هره یوه تابع بېلابېله څېړو چې متمادي ده که نه؟

1) $Df(x)=IR$

2) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x^2+3)=4$

3) $f(1)=(1^2+3)=4$

نو د f **تابع د** $x=1$ په نقطه کې متمادي ده.

1) $D\,g(x)=IR$

2) $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x^2+3x-2)=1^2+3\cdot 1-2=2$

3) $g(1)=(1^2+3\cdot 1-2)=2$

په همدې شان د g تابع د $x=1$ په ټکي کې هم متمادي ده.

2- اوس د تابع ګانو د جمعې او ضرب د حاصل متمادیت څېړو:

الف)

$f(x)+g(x)=x^2+3+x^2+3x-2=2x^2+3x+1$

1) $D(f(x)+g(x))=IR$

2) $\lim\limits_{x\to 1}[f(x)+g(x)]=\lim\limits_{x\to 1}(2x^2+3x+1)=6$

3) $f(1)+g(1)=(1+3+1+3-2)=6$

$\lim\limits_{x\to 1}[f(x)+g(x)]=f(1)+g(1)=6$

$(f+g)(x)=x^2+3+x^2+3x-2=2x^2+3x+1$

1) $D[(f+g)(x)]=IR$

2) $\lim\limits_{x\to 1}[(f+g)(x)]=\lim\limits_{x\to 1}[2x^2+3x+1]=6$

3) $(f+g)(1)=(2x^2+3x+1)(1)=6$

$\lim\limits_{x\to 1}[(f+g)(x)]=(f+g)(1)=6$

په پایله کې د متمادي تابع ګانو د جمعې حاصل د $x=1$ په نقطه کې متمادي دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب)

$$f(x)\cdot g(x)=(x^2+3)(x^2+3x-2)=x^4+3x^3+x^2+9x-6$$

1) $D(f\cdot g)(x)=IR$

2) $(f\cdot g)_{(1)}=1^4+3\cdot1^3+1^2+9\cdot1-6=8$

3) $\lim\limits_{x\to1}(f\cdot g)(x)=8$

$\lim\limits_{x\to1}(f\cdot g)(x)=(f\cdot g)(1)=8$

په پایله کې د متمادي تابع گانو د ضرب حاصل د $x=1$ په نقطه کې متمادي ده.

دویمه بېلگه: که $g(x)=3x-2$ او $f(x)=x+1$ وي، وښیئ چې آیا $f(x)\cdot g(x)$ د $x=2$ په نقطه کې متمادي ده؟

حل:

1) $Df(x)=IR$

2) $\lim\limits_{x\to2}f(x)=\lim\limits_{x\to2}(x+1)=3$

3) $f(2)=x+1=3$

$\lim\limits_{x\to2}f(x)=f(2)=3$

1) $Dg(x)=IR$

2) $\lim\limits_{x\to2}g(x)=3x-2=3\cdot2-2=4$

3) $g(2)=3x-2=3\cdot2-2=4$

$\lim\limits_{x\to2}g(x)=g(2)=4$

$$f(x)\cdot g(x)=(x+1)(3x-2)=3x^2-2x+3x-2=3x^2+x-2$$

$D(f\cdot g)(x)=IR$

$\lim\limits_{x\to2}[f(x)\cdot g(x)]=3(4)+2-2=12$

$(f\cdot g)(2)=3(4)+2-2=12$

$\lim\limits_{x\to2}[f(x)\cdot g(x)]=(f\cdot g)(2)=12$

په پایله کې لاس ته راځي چې $f(x)\cdot g(x)$ د $x=2$ په ټکي کې متمادي ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- وښيئ چې لاندې تابع ګانې په ورکړ شويو نقطو کې متمادي دي او که نه؟

1) $f(x)=x^3-2(x+1)^5 \quad ; \quad x=2$

2) $g(x)=\dfrac{x^2+3}{(x^2-x+5)(x^2+2x)} \quad ; \quad x=-1$

3) $h(x)=\dfrac{x\sqrt{x}+1}{(x+2)^3} \quad ; \quad x=4$

2- تشريح کړئ چې ولې د $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{2}}{x}$ تابع په $x=0$ کې غيرمتمادي ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ښېرکي مهم ټکي

د متحول تقرب: ویل کېږي چې د x متحول د a عدد ته تقرب کوي، په داسې حال کې چې x په اختیاري ډول د a عدد ته نژدې کېږي، یعنې د x او a ترمنځ تفاوت له هر کوچني عدد($\delta > 0$) څخه کوچني دی یا په لاندې ډول:

$$\forall \delta > 0 : |x-a| < \delta \quad \text{یا} \quad x \to a \quad \text{یا} \quad |x-a| \to 0$$

له ښي لوري د متحول تقرب: ($x \to a^+$) که چېرې د x د قیمتونو یو متناقص ترادف موجود وي، په داسې حال کې چې په تدریجي ډول د a اختیاري عدد ته نژدې شي.

$$x:\ a+0.1,\ a+0.01\ ,\ a+0.001\ ,\ a+0.0001\ ,\ \ldots \to a^+$$

له کیڼ لوري د متحول تقرب: ($x \to a^-$) که چېرې د x د قیمتونو یو متزاید ترادف موجود وي، په داسې حال کې چې x په تدریجي ډول د a اختیاري عدد ته نژدې شي.

$$x:\ a-0.1,\ a-0.01\ ,\ a-0.001\ ,\ a-0.0001\ ,\ \ldots \to a^-$$

نو د x د متحول تقرب د a عدد ته معادل دی د x د متحول تقرب له ښي لوري او د x د متحول تقرب له چپ لوري؛ یعنې:

$$x \to a \quad \Leftrightarrow \quad (x \to a^+\ ,\ x \to a^-)$$

تعریف: که چېرې د $f(x)$ تابع په یوه غیر تړلي انټروال کې چې د a عدد په هغې کې شامل وي کېدای شي چې تابع په a کې نه وي تعریف شوی. که چېرې د x متحول د a عدد ته نژدې شي، نو د $f(x)$ تابع د l عدد ته نژدې کېږي، نو ویل کېږي چې د $f(x)$ د تابع لیمیټ عبارت له l څخه دی، کله چې د x متحول د a عدد ته تقرب وکړي، نو داسې یې لیکو:

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \quad \text{یا} \quad \begin{matrix} x \to a \\ f(x) \to l \end{matrix}$$

د لیمیټ ځانګړتیاوې: که f او g دوې تابع ګانې وي، C,L او M حقیقي عددونه وي، داسې چې $\lim_{x\to c} f(x) = L$ او $\lim_{x\to c} g(x) = M$ ، نو لاندې رابطې لیکلای شو:

1) $\lim_{x\to c}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x) = L+M$

2) $\lim_{x\to c}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x) = L-M$

3) $\lim_{x\to c}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) \cdot \lim_{x\to c} g(x) = L\cdot M$

4) $\lim_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)} = \dfrac{L}{M}\ ,\quad M \neq 0\ ,\quad g(x) \neq 0$

5) $\lim_{x\to c} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x\to c} f(x)} = \sqrt{L}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بې نهايت کوچنی تابع ګانې: د $\varepsilon(x)$ تابع کله چې $x \to a$ ته نژدې شي، بې نهايت کوچنی بللې کېږي، که چېرې $\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$ وي.

د ساندویچ قضیه: که چېرې د $f(x)$, $g(x)$ او $h(x)$ تابع ګانې د هر x لپاره په یوه غیر تړلي انټروال کې چې د a عدد په کې شامل دی(ولو که $x \neq a$) او $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ شرط صدق وکړي په هغه صورت کې چې $\lim_{x \to a} f(x) = b = \lim_{x \to a} h(x)$ وي، نو $\lim_{x \to a} g(x) = b$ دی.

- که چېرې یوه تابع د $\frac{0}{0}$ مبهمه بڼه ولري، د لېمیټ د پیداکولو لپاره یې لومړی تابع د تجزیې په مرسته ساده کوو او بیا یې لېمیټ په لاس راوړو.
- $f(x) = \dfrac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ \dots \ + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ \dots \ + b_n}$ د تابع د لېمیټ د پیداکولو لپاره چې $x \to \infty$ وکړي، عبارت دی له:

  1. د $m = n$ لپاره د نوموړي کسر لیمیټ عبارت دی له $\frac{a_0}{b_0}$
  2. د $m < n$ لپاره د نوموړي کسر لیمیټ عبارت له صفر څخه دی.
  3. د $m > n$ لپاره د نوموړي کسر لیمیټ عبارت دی له $\pm\infty$

- د هغو تابع ګانو چې $(\infty - \infty)$ او $(0 \cdot \infty)$ بڼه ولري د لېمیټ د پیداکولو لپاره یې د کسرونو د جمعې، ضرب او مزدوج څخه ګټه اخلو، تر څو د $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ بڼه غوره کړي چې وروسته یې لېمیټ په لاس راوړو.
- هغه تابع ګانې چې د 1^{∞} مبهم شکلونه لري له دې فورمول څخه $\lim_{x \to a} [u(x)]^{v(x)} \overset{1^{\infty}}{=} e^P \quad , \quad P = \lim_{x \to a} [v(u-1)]$ یې د لېمیټ د پیداکولو لپاره کار اخلو.
- لاندې رابطه کله چې $\theta \to 0$ وکړي همېشه سمه ده.

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$

- د $y = f(x)$ تابع د $x = a$ په ټکي کې متمادي بلل کېږي، کله چې:

  1. a د $f(x)$ د تابع په دومین کې شامل وي.
  2. راکړل شوی تابع د a په نقطه کې لېمیټ ولري.
  3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لومړي څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتنو ته څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، سم ځواب يې په نښه کړئ.

-1 $\lim_{x\to 0}\frac{3x-\sin x}{x}$

a) 2 b) -2 c) 1 d) 3

-2 $\lim_{x\to -2}\frac{x^2-x-6}{x^2+x-2}$

a) $-\frac{5}{3}$ b) $\frac{5}{3}$ c) 0 d) 1

-3 $\lim_{x\to 1.4}(2x+0.3)$

a) 1 b) 3 c) 0 d) هيڅ يو

-4 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\tan 2x}$

a) 1 b) 0 c) $\frac{3}{2}$ d) $\frac{2}{3}$

-5 $\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

a) $2+\sqrt{2}$ b) 2 c) $\sqrt{2}$ d) 4

-6 $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{1+\cos 2x}$

a) 1 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{4}$ d) 4

-7 لاندې لیمیټونه پیدا کړئ.

1) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x+5}{2x^2+1}$

2) $\lim_{x\to -1}\sqrt{3+x}$

3) $\lim_{x\to +\infty}\frac{6}{x^2-7}$

4) $\lim_{x\to \infty}\frac{x^4+x^2+x+6}{x^3-3x+4}$

5) $\lim_{x\to \infty}\frac{3x^2-2}{x+1}$

6) $\lim_{x\to 2}\frac{x^3+5x-18}{x^2+3x-10}$

7) $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x-4}{x-\sqrt{3x-2}}$

8) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x-10}$

9) $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}$

10) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x\cos x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

11) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x-10}{x^2-x-2}$

12) $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{x+3}{x+2}+\dfrac{2}{x^2+2x}\right)$

13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+x)+\sin(a-x)}{\tan(a+x)+\tan(a-x)}$

14) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+2}$

15) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x\sin x-\tan x}{x^2\sin x}$

16) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x+\sin^2 x}{a x^2}$

17) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin 2x\sin x+\sin^2 x}{x^2}$

18) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin 2x}{x+\sin 3x}$

19) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2\sin 3x\sin 2x}{x\tan 3x}$

20) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$

21) $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin 3(\pi+u)}{\sin 8(\pi+u)}$

22) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{\sin \pi x}$

23) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^2-x+3}{x^2-8x+5}$

24) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{8x+4}{4x+\sqrt{x}}$

25) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{9x^2-x+5}{\sqrt{9x^4+1}}$

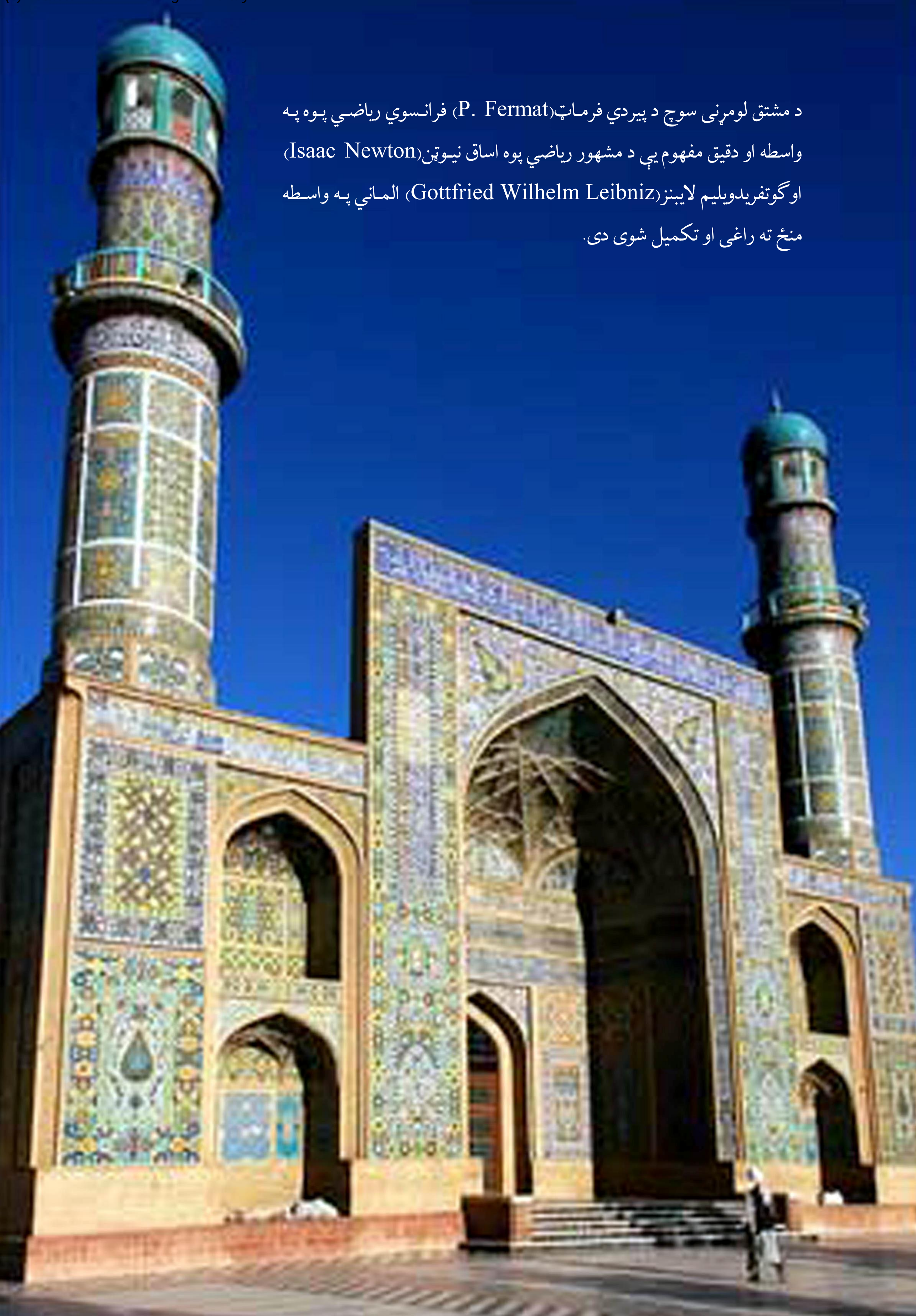
26) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{1-x^2}\right)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم څپرکی

مشتق

(c) ketabton.com: The Digital Library



د مشتق لومړنی سوچ د پیردي فرماټ(P. Fermat) فرانسوي رياضي پوه په واسطه او دقيق مفهوم يې د مشهور رياضي پوه اساق نيوټن(Isaac Newton) اوګوتفریدویلیم لایبنز(Gottfried Wilhelm Leibniz) الماني په واسطه منځ ته راغی او تکميل شوی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مشتقات

Derivatives

د $f(x) = x^2 - 1$ تابع په پام کې ونیسئ د مخامخ کسر لیمیټ پیدا کړئ.

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = ?$$

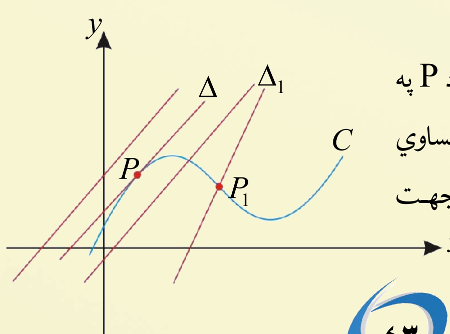
د يوې منحني ميل

- که د یوه مستقیم خط دوه ټکې $A(x_1, y_1)$ او $B(x_2, y_2)$ معلوم وي، نو د دې مستقیم خط ميل له کومې رابطې څخه په لاس راځي.
- آیا د یوه مستقیم خط ميل ثابت او مساوي دي؟ که په یوه ځانګړې ټکي پورې اړه لري؟
- آیا د مستقیم خط ميل د هغې زاويې سره اړه لري چې مستقیم خط يې د x د محور له مثبت لوري سره جوړوي؟
- آیا د مستقیم خط او منحني ميلونه يو شان پيدا کېږي؟

له پورتنيو پوښتنو څخه څرګندېږي چې د منحني ميل په اسانۍ سره نشو پيدا کولای، ځکه چې منحني خط په هر ټکي کې خپل مسير ته بدلون ورکوي او په مختلفو ټکو کې بېلابېل ميلونه لري، نو له دې کبله لومړی د يوه منحني خط ميل د هغه په یوه ټکي کې تعريفوو او بيا يې د محاسبې لپاره يو فورمول په لاس راوړو.

فعالیت

- د وضعيه کمياتو په مستوي کې د c منحني خط رسم او د P او P_1 دوه ټکي پرې وټاکئ.
- د P_1 په ټکي کې د Δ_1 قاطع او د p په ټکي کې د Δ مماس رسم کړئ.
- که د P_1 ټکی د C په منحني باندې داسې حرکت وکړي چې د p ټکي ته نژدې شي، په پايله کې د Δ_1 مستقيم خط له Δ مستقيم خط سره څه اړيکه پيدا کوي؟



د پورتني فعاليت پايله داسې بيانوو:

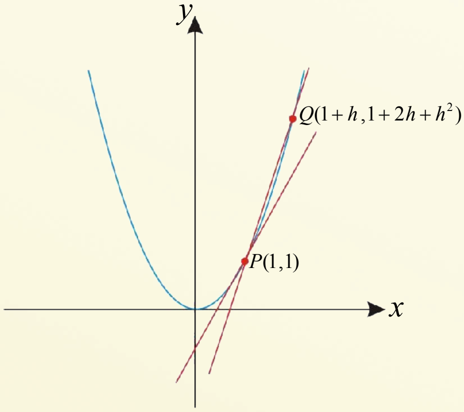
د Δ د مستقيم خط ميل چې د C له منحني سره د P په نقطه کې مماس دی د هغې زاويې له (tan) سره مساوي دی چې مستقيم خط يې د x د محور له مثبت جهت سره جوړوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال:د $y = f(x) = x^2$ له منحني سره د مماس ميل د $P(1,1)$ په ټکي کې پيداکړئ.

حل: څرنگه چې د منحني ميل د مماس له ميل سره د P په ټکي کې برابر دي، نو ددې مماس ميل له هغه فورمول څخه چې دوې نقطې يې معلومې وي، نشو پيداکولای، ځکه دلته يوازې د يوې نقطې مختصات ورکړل شوي دي. ولې کولای شو د دې مماس د ميل تخميني قيمت د هغه قاطع خط له ميل څخه چې د P او Q له ټکو څخه تېرېږي، پيدا کړو، په هغه صورت کې چې د Q ټکی د P ټکي ته نژدې شي د PQ د مماس ميل 2 ته تقرب کوي چې په لاندې جدول کې ليدل کېږي.

x	2	1.5	1.1	1.01	1.001
y	4	2.25	1.21	1.0201	1.002001
$m_{PQ} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	3	2.5	2.1	2.01	2.001



په عمومي ډول هغه لومړی مختصه چې د $P(1,1)$ ټکي ته نژدې ده په $1+h$ ښودلای شو چې h يو کوچنی مثبت يا منفي عدد دی، خو $h \neq 0$ دی نو ليکلای شو:

$$f(1+h) = (1+h)^2 = 1 + 2h + h^2$$

نو دا $(1+h \quad , \quad 1+2h+h^2)$ ټکی د منحني پر مخ راکړل شوی پروت دی، نو په پايله کې هغه مستقيم خط چې له $P(1,1)$ او $Q(1+h, 1+2h+h^2)$ له ټکو څخه تېرېږي، ميل يې عبارت دی له:

$$m_{PQ} \frac{(1+2h+h^2)-1}{(1+h)-1} = \frac{2h+h^2}{h} = 2+h$$

که چېرې په شکل کې $h \to 0$ نو $Q \to P$ کوي، قاطع خط د $P(1,1)$ په نقطه کې مماس کېږي چې د همدې مماس ميل ته د تابع مشتق وايي؛ يعنې: $\overline{PQ} = \lim\limits_{h \to 0}(2+h) = 2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لېميټ دا عمليه موږ ته دا امکان په لاس راکوي چې د $y = x^2$ د تابع د منحني ميل په يوه اختياري ټکي $P(x, y)$ کې په لاس راوړو. که د Q د ټکي اختياري مختصات $\left[x+h, (x+h)^2\right]$ وي او د PQ ميل ته m او د P په ټکي کې د مماس ميل په m_T سره وښيو لرو چې:

$$m = \frac{(x+h)^2 - x^2}{x+h-x} = \frac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h} = \frac{2xh+h^2}{h} = 2x+h$$

$$m_T = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x$$

نو په عمومي بڼه ليکلای شو، که چېرې $Q[x+h\ , f(x+h)],\ P[x, f(x)]$ د نوموړي منحني دوې اختياري نقطې وي، نو لاندې خارج قسمت چې د Newton د رابطې په نامه مشهور دی، ليکلای شو:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

په حقيقت کې دا د هغه مستقيم خط ميل دی چې د P او Q له ټکو څخه تېرېږي.

او د منحني ميل د هغې په هر اختياري ټکي کې عبارت دی له:

$$m_T = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

دويم مثال: د $f(x) = x - x^2$ د منحني سره د مماس ميل د $P(2,0)$ په ټکي کې پيدا کړئ.

حل: د Newton خارج قسمت تشکيل او د $x = 2$ په ټکي کې د منحني ميل حسابوو:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = m_T = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(2+h)-(2+h)^2-2+2^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2+h-4-4h-h^2-2+4}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h-4h-h^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h(1-4-h)}{h} = \lim_{h\to 0}(-3-h) = -3$$

منځنی يا وسطي تغير

که يو جسم د يوه مستقيم خط پر مخ د حرکت په حال کې وي، طبيعي ده چې وهل شوی فاصله د زمان تابع ده يعنې $S = f(t)$ د t_1 او t_2 دوو وختونو خارج قسمت $\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}$ د جسم د وسطي سرعت په نامه يادېږي او سرعت د t_0 په وخت کې عبارت له هغه حد يا لېميټ څخه دی چې لحظوي سرعت بلل کېږي. $\lim_{t\to t_0}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پورتنی رابطې لېمیټ د t او t_0 په وخت کې داسې لیکو:

$$\lim_{t\to t_0}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}=\lim_{t\to t_0}\frac{S-S_0}{t-t_0}=\frac{\Delta S}{\Delta t}$$

په پایله کې ویلای شو چې د تابع او متحول د زیاتوالي خارج قسمت ته متوسط تغییر وایي، یعنې:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}$$

مثال: د $y=f(x)=x^2$ په تابع کې د f متوسط تغیرات د $[2,5]$ په انټروال کې پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې $x_1=2$ او $x_2=5$ دی، نو د تعریف په مرسته لیکلای شو:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{f(5)-f(2)}{5-2}=\frac{5^2-2^2}{5-2}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{25-4}{5-2}=\frac{21}{3}=7$$

پوښتنې

1) د لاندې تابع ګانو د x د متحول لپاره د Δx او Δy تزاید په پام کې نیولو سره $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ او میل یې په ښودل شوو ټکو کې پیدا کړئ.

1) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=?$, $f(x)=2x^2-4$, (0)

2) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=?$, $f(x)=2x-x^2$, (3)

3) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=?$, $f(x)=3x^2-5x+4$, $(2,-1)$

2) د $f(t)=5t^3-3t+1$ د تابع متوسط تغییرات د $[2,4]$ په انټروال کې پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

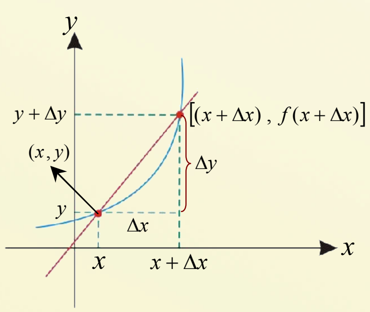
د یوې تابع مشتق

مخامخ لېمیټ څه را ښيي آیا په بل ډول یې لیکلای شو؟

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

- که چېرې د $y=f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انټروال کې متمادي وي، که د x متحول د Δx په اندازه زیاتوالی پیدا کړئ آیا تابع تزاید کوي په دې حالت کې، د متحول او تابع د زیاتوالي رابطه ولیکئ.
- د تابع تزاید د متحول پر تزاید $\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)$ داسې ولیکئ چې په مساوات کې بدلون رانشي.
- که له دوارو خواوو څخه لېمیټ ونیول شي، په هغه صورت کې چې Δx صفر ته تقرب وکړي، د دې حد یا لېمیټ د څه په نامه یادېږي؟

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:



$$y=f(x)$$
$$y+\Delta y=f(x+\Delta x)$$
$$\Delta y=f(x+\Delta x)-y$$
$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)\quad / \div\Delta x$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

تعریف: د تابع او مستقل متحول د تزاید د نسبت لېمیټ کله چې د مستقل متحول تزاید صفر ته تقرب وکړي د تابع مشتق بلل کېږي، لکه: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ او هغه په $f'(x)$ یا y' ، $\dfrac{df}{dx}$ ، $\dfrac{dy}{dx}$ سره ښودل کېږي.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}=\frac{df(x)}{dx}=y'=f'(x)$$

لومړی مثال: که $f(x)=2x$ وي، د دې تابع مشتق پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: د مشتق د تعریف څخه په ګټه اخیستنې سره لیکلای شو چې:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2(x+\Delta x)-2x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x+2\Delta x-2x}{\Delta x}$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x}{\Delta x}\Rightarrow f'(x)=2$$

دویم مثال: د $f(x)=x^3$ د تابع مشتق پیداکړئ.

حل:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^3+3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(3x^2+3x(\Delta x)+(\Delta x)^2)}{\Delta x}=3x^2+3x(0)+0^2\quad\Rightarrow f'(x)=3x^2$$

دریم مثال: د $x\geq 0\ ,\ f(x)=\sqrt{x}$ مشتق پیداکړئ.

حل: مخکې له حل څخه $x\geq 0$ حالت په پام کې نیسو:

الف: که $x>0$ وي، نو د مشتق د تعریف په مرسته لیکو:

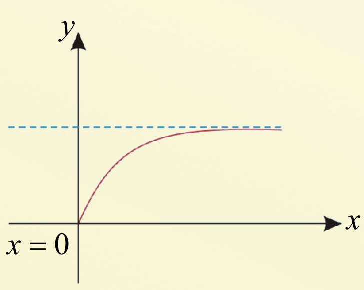
$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}$$

صورت او مخرج د صورت په مزدوج کې ضربوو:

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}\quad\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

ب: که $x=0$ شي نو $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$ موجود نه دی، نو د $y=\sqrt{x}$ تابع د $x=0$ په ټکي کې د اشتقاق وړ نه ده لکه چې په شکل کې لیدل کېږي، یعنې که x ډېر لوی شي، نو د مماس میل صفر ته نژدې کېږي او د $x=0$ په ټکي کې د مماس میل ډېر لوییږي چې مماس په یوه عمود خط $(\frac{1}{2\sqrt{x}})$ بدلیږي.



پوښتنې

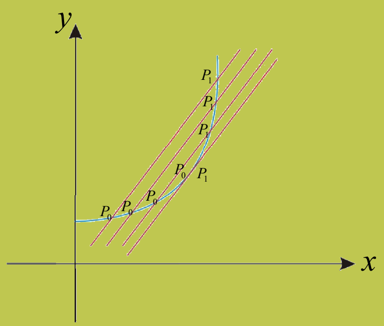
دلاندې توابعو مشتق د تعریف په مرسته پیداکړئ.

1) $f(x)=x-x^2$ 2) $f(x)=-2x^2$ 3) $f(x)=2x^2+x$

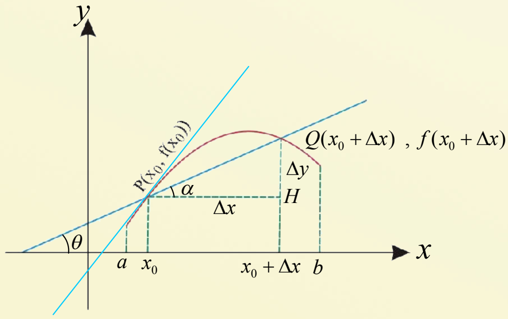
(c) ketabton.com: The Digital Library

د مشتق هندسي تعبير

په مخامخ شکل کې څه وینئ د هغه په اړه مناقشه وکړئ.



- د وضعیه کمیاتو په مستوي کې د C منحني یا د $f(x)$ تابع داسې چې د $[a,b]$ په انټروال کې متمادي وي ګراف یې رسم او د $P(x_0, f(x_0))$ او $Q(x_0+\Delta x\ ,\ f(x_0+\Delta x))$ ټکي د منحني پرمخ وټاکئ.
- د Δ مستقیم خط داسې رسم کړئ چې د منحني د P او Q له ټکو څخه تېر شي.
- آیا ویلای شئ چې د Δ مستقیم خط د x د محور له مثبت جهت سره څه ډول زاویه جوړوي؟
- ووایئ چې د $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ یا $\dfrac{HQ}{HP}$ نسبت د څه په نامه یادیږي؟
- که د Q ټکی د P ټکي ته ډېر نژدې شي $(\Delta x \to 0)$، نو د Δ مستقیم خط په څه ډول کرښه بدلیږي په شکل کې یې وښیئ.
- د $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ لیمیټ کله چې $\Delta x \to 0$ وکړي، په $P(x_0, f(x_0))$ ټکي کې وڅیړئ.



د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

د $f(x)$ منحني د تابع مشتق، د $P(x_0, f(x_0))$ په ټکي کې د مماس له میل سره برابر دی، یعنې:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = \tan\alpha = \tan\theta = m_{\Delta}$$

تعریف: د مماس میل د منحني د تماس په ټکي کې د تابع له مشتق څخه په هغه ټکي کې عبارت دی، یا په بل عبارت د هغې زاویې له ټانجنټ څخه عبارت دی چې د Δ مستقیم خط یې د x د محور له مثبت جهت سره جوړوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د هغه مماس میل او معادله چې د $f(x)=2x^3-1$ په منحني د $A(1,1)$ په ټکي کې رسمېږي پیدا کړئ.

حل: پوهېږو چې $m=\tan\alpha=f'(x)$ دی، نو لیکلای شو چې:

$$f(x)=2x^3-1$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2(x+\Delta x)^3-1-(2x^3-1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2[x^3+3x^2\Delta x+3x\Delta x^2+(\Delta x)^3]}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x^3+6x^2\Delta x+6x(\Delta x)^2+2(\Delta x)^3-1-2x^3+1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x[6x^2+6x\Delta x+2(\Delta x)^2]}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}[6x^2+6x(\Delta x)+(\Delta x)^2]=6x^2$$

بناءً د مماس د میل قیمت د $A(1,1)$ په ټکي کې مساوي دی په: $m=f'(x)=f'(1)=6x^2=6\cdot 1^2=6$

نو د مماس معادله په لاندې ډول ده:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y-1=6(x-1)\Rightarrow\quad y=6x-5$$

دویم مثال: د $y=x^2+1$ تابع د مماس د میل قیمت په $x_0=2$ ټکي کې په لاس راوړئ.

حل:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x_0+\Delta x)^2+1-(x_0^2+1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x_0^2+2(\Delta x)x_0+(\Delta x)^2+1-x_0^2-1}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}(2x_0+(\Delta x))=2x_0$$

$$m=y'=2x_0=2\cdot 2$$

$$y'=m=4$$

دریم مثال: د $y=f(x)=x^2$ تابع ورکړل شوې ده، غواړو د $x=x_0$ په ټکي او په ځانګړي توګه د $x_0=2$ په ټکي کې د تابع مشتق پیدا کړئ:

$$x=x_0$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x_0+\Delta x)^2-x_0^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x_0^2+2x_0\Delta x+(\Delta x)^2-x_0^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2x_0\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta x(2x_0+\Delta x)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=2x_0+\Delta x$$

اوس د لیمیټ د لاس ته راوړلو له لارې لیکلای شو:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x_0+\Delta x)=2x_0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

خرنګه چې $x_0 = 2$ دی، نو $f'(2) = 2 \cdot 2 = 4$ یعنې د $x_0 = 2$ په ټکي کې د $y = f(x) = x^2$ د تابع لومړی مشتق له 4 سره برابر دی. دا په دې معنا چې د مستقیم خط میل د $x_0 = 2$ په ټکي کې 4 دی.

خلورم مثال: د $f(x) = x^3$ تابع مشتق پیدا کړئ.

حل:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^3 - x_0{}^3}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_0{}^3 + 3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x_0{}^3}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x(3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x^2))}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x^2)$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2) = 3x_0^2$$

نو $f(x)$ د تابع مشتق د x_0 په ټکي کې برابر دی له: $f'(x_0) = 3x_0^2$

پنځم مثال: د x_0 په ټکي کې د $f(x) = \dfrac{1}{x}$ تابع مشتق پیداکړئ.

حل:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$f(x_0) = \frac{1}{x_0}$$

$$f(x_0) + \Delta y = \frac{1}{x_0 + \Delta x}$$

$$\Delta y = \frac{1}{x_0 + \Delta x} - f(x_0)$$

$$\Delta y = \frac{1}{x_0 + \Delta x} - \frac{1}{x_0}$$

$$\Delta y = \frac{x_0 - (x_0 + \Delta x)}{x_0(x_0 + \Delta x)}$$

د مساوات دواړه خواوې په Δx وېشو:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\dfrac{x_0 - x_0 - \Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)}}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\dfrac{-\Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)}}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{\Delta x \cdot x_0(x_0 + \Delta x)} \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{x_0(x_0 + \Delta x)}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{x_0(x_0 + \Delta x)}$$

$$f'(x_0) = \frac{-1}{x_0(x_0 + 0)} = \frac{-1}{x_0^2}$$

نو $f'(x_0) = -\dfrac{1}{x_0^2}$ د x_0 په ټکي کې د $f(x)$ تابع مشتق دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1. په لاندې پوښتنو کې د تابع گانو مشتق پیدا کړئ.

1) $f(x) = 5x^2 - 2$

2) $f(x) = \dfrac{2}{x}$

2. **په ورکړل شویو ټکو کې د لاندې تابع گانو مشتق پیدا کړئ.**

1) $f(x) = 4x^2 \quad , \quad x_0 = \dfrac{1}{2}$

2) $f(x) = 3x - 1 \quad , \quad x_0 = -1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مشتق قوانين

آیا کولای شئ چې د مخامخ تابع مشتق پرته د تزاید له لارې په بله طریقه پیدا کړئ؟

$$f(x) = 2x^2$$

1- د يوه ثابت عدد مشتق:

فعالیت

د $y = C$ تابع(C ثابت عدد) په پام کې ونیسئ.

- تابع ته د Δx په اندازه تزاید ورکړئ، د تابع د تزاید په اړه څه فکر کوئ؟
- د تابع او متحول د تزاید نسبت تشکیل کړئ.
- د پورته مساواتو له دواړو خواوو لیمیټ ونیسئ په هغه صورت کې چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

د هرې ثابتې $f(x) = C$ تابع مشتق له صفر سره مساوي دی، ځکه چې د هرې ثابتې تابع ګراف یوه افقي کرښه ده چې میل یې صفر دی.

ثبوت:

$$y = C$$
$$y + \Delta y = C$$
$$\Delta y = C - y$$
$$\Delta y = C - C$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{C - C}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x}$$
$$y' = 0$$

مثال: د $f(x) = \pi^4$ او $y = 100$ تابع ګانو مشتق پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې π^4 او 100 ثابت عددونه دي، نو:

$$f(x) = C \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0$$
$$f(x) = \pi^4 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0$$
$$f(x) = 100 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- د يوې طاقت لرونكي تابع مشتق:

د $y = x^n$ تابع چې $n \in IR$ او $n \geq 1$ وي، په پام كې ونيسئ.

- متحول ته د Δx په اندازه تزايد وركړئ، آيا تابع هم تزايد كوي كه تزايد كوي په كومه اندازه، اړيكه يې وليكئ؟
- له پورته اړيكې څخه د Δy قيمت پيدا كړئ، د متحول او تابع د تزايد نسبت تشكيل كړئ.
- د پورته مساوات له اطرافو څخه په هغه صورت كې ليميټ ونيسئ چې $\Delta x \to 0$ وكړي.

د پورته فعاليت پايله داسې ثبوتوو:

كه چېرې $f(x) = x^n$ راكړل شوې وي، نو $f'(x) = nx^{n-1}$ سره كېږي.

ثبوت:

$$y = x^n$$

$$y + \Delta y = (x+\Delta x)^n \quad \Rightarrow \quad \Delta y = (x+\Delta x)^n - y$$

$$\Delta y = (x+\Delta x)^n - x^n$$

$$\Delta y = (x+\Delta x - x)[(x+\Delta x)^{n-1} + (x+\Delta x)^{n-2}x + (x+\Delta x)^{n-3}x^2 + \ldots + x^{n-1}]$$

$$\Delta y = \Delta x[(x+\Delta x)^{n-1} + (x+\Delta x)^{n-2}x + (x+\Delta x)^{n-3}x^2 + \ldots + x^{n-1}]$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x[(x+\Delta x)^{n-1} + (x+\Delta x)^{n-2}x + (x+\Delta x)^{n-3}x^2 + \ldots + x^{n-1}]}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[(x+\Delta x)^{n-1} + (x+\Delta x)^{n-2}x + (x+\Delta x)^{n-3}x^2 + \ldots + x^{n-1}\right]$$

$$y' = \underbrace{x^{n-1} + x^{n-1} + x^{n-1} + \ldots + x^{n-1}}_{n \text{ ځلې } x^{n-1}}$$

$$y' = nx^{n-1}$$

لومړی مثال: د $f(x) = x^5$ تابع مشتق د $x = \frac{1}{2}$ په ټكي كې وټاكئ.

حل:

$$f(x) = x^5 \Rightarrow f'(x) = 5x^{5-1} \Rightarrow f'(x) = 5x^4$$

$$f(\frac{1}{2}) = 5 \cdot (\frac{1}{2})^4 = 5 \cdot \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$$

د لاندې تابع گانو مشتق پيدا كړئ.

1) $f(x) = x^{-2}$ 2) $x(t) = gt^2$ 3) $t(x) = x^8$

4) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ 5) $f(x) = 10^{10}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

3- د حاصل جمع مشتق:

د u او v مشتق منوونکي تابع ګاني په پام کې ونیسئ.

- آیا د $y = u + v$ تابع د مشتق وړ ده؟
- د $y = u + v$ په تابع کې $u(x)$ ته د Δu په اندازه او $v(x)$ ته د Δv په اندازه تزاید ورکړئ، د y د تزاید په اړه څه فکر کوئ؟ د هغې اندازه ولیکئ.
- لومړی د تابع تزاید پیدا او بیا د رابطې دواړه خواوې په Δx وویشئ او وروسته یې لیمیټ په هغه صورت کې پیدا کړئ چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

د پورته فعالیت پایله داسې ثبوتوو:

ثبوت:

د یو حاصل جمع مشتق د حدونو د مشتقاتو د جمعې له حاصل سره مساوي ده:

$$y = u + v$$
$$y + \Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v$$
$$\Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v - y$$
$$\Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v - u - v$$
$$\Delta y = \Delta u + \Delta v$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

څرنګه چې $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'$ او $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v'$ دی، نو : $y' = u' + v'$

4- د حاصل تفریق مشتق

که $y = u - v$ وي، نو $y' = u' - v'$ دی.

ثبوت یې د زده‌کوونکو کورنی دنده ده.

لومړی مثال: د $y = 2x + 1$ تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: لیدل کېږي چې $u = 2x$ او $v = 1$ دی، نو:

$$u' = 1 \cdot 2x^{1-1} = 2x^0$$
$$u' = 2$$
$$v' = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بناءً: $y'=u'+v' \Rightarrow y'=(2x)'+(1)' \Rightarrow y'=2+0 \Rightarrow y'=2$

دویم مثال: د $f(x)=4x^2-3x+5$ د تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: په دې تابع کې $u=4x^2$, $v=3x$ او $w=5$ دی چې $u'=8x$, $v'=3$ او $w'=0$ کېږي، نو:

$$y'=u'+v'+w'$$
$$y'=(4x^2)'-(3x)'+(5)'$$
$$y'=8x-3$$

دریم مثال: د لاندې تابع گانو مشتقونه پیدا کړئ:

حل:

1) $y=12x-7$
$y'=(12x)'-(7)'$
$y'=12$

2) $f(x)=9x^2-12x+4$
$f'(x)=(9x^2)'-(12x)'+(4)'$
$f'(x)=18x-12$

3) $f(x)=6x^3-2x^2+6x-1$
$f'(x)=(6x^3)'-(2x^2)'+(6x)'-(1)'$
$f'(x)=18x^2-4x+6$

5- د حاصل ضرب مشتق:

که د u او v توابع مشتق منونکي وي، نو $u\cdot v$ هم مشتق منونکي ده، د $y=u\cdot v$ تابع په پام کې ونیسئ.

- **په پورتنی تابع کې u ته د Δu په اندازه، v ته د Δv په اندازه تزاید ورکړئ او د تابع تزاید پیدا کړئ.**
- د Δy د تزاید له پیدا کولو وروسته د مساوات اطراف په Δx وویشئ.
- د پورتنی رابطې له دواړو خواوو څخه په هغه صورت کې لیمیټ ونیسئ چې $\Delta x\to 0$ وکړي.

له پورتني فعالیت پایله داسې ثبوتوو:

ثبوت:

$$y=u\cdot v$$
$$y+\Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v) \Rightarrow \Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v)-y$$
$$\Delta y=u\cdot v+u\cdot\Delta v+v\cdot\Delta u+\Delta u\cdot\Delta v-u\cdot v$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{u\cdot\Delta v+v\cdot\Delta u+\Delta u\cdot\Delta v}{\Delta x}=v\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}+u\frac{\Delta v}{\Delta x}+\Delta u\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=v\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\Delta u\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}$$
$$y'=v\cdot u'+u\cdot v'+0\cdot v'$$
$$y'=u'v+v'u$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د $y = x^3(x^2 - 3)$ د تابع مشتق پیدا کړئ؟

حل: پوهېږو چې $y = u \cdot v$ شکل لري چې په دې صورت کې $y' = uv' + vu'$ دی.

$$\left.\begin{array}{l} u = x^3 \;\Rightarrow\; u' = 3x^2 \\ v = x^2 - 3 \;\Rightarrow\; v' = 2x \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y' = u'v + v'u \\ y = x^3(x^2 - 3) \\ y' = 3x^2(x^2 - 3) + 2x(x^3) \\ y' = 3x^4 - 9x^2 + 2x^4 = 5x^4 - 9x^2 \end{array}$$

دویم مثال: د $y = (5x - 1)^2$ د تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: د y تابع کولای شو د فکتورونو د ضرب په شکل داسې ولیکو:

$$y = (5x - 1)^2 = (5x - 1)(5x - 1)$$

$$\left.\begin{array}{l} u = 5x - 1 \;\Rightarrow\; u' = 5 \\ v = 5x - 1 \;\Rightarrow\; v' = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y' = u'v + v'u \\ y' = 5(5x - 1) + 5(5x - 1) \\ y' = 25x - 5 + 25x - 5 = 50x - 10 \end{array}$$

6- د حاصل تقسیم مشتق:

که د u او v تابع ګانې مشتق منونکې وي، نو $\frac{u}{v}$ کله چې $v \neq 0$ وي، هم مشتق منوونکی ده، اوس د $y = \frac{u}{v}$ تابع په پام کې ونیسئ.

- u او v ته په ترتیب سره د Δu او Δv په اندازه تزاید ورکړئ او د y تابع تزاید پیدا کړئ.
- د مساوات دواړه خواوې په Δx وویشئ.
- د پورتني رابطې له اطراف څخه په هغه صورت کې چې $\Delta x \to 0$ وکړي، لیمیټ ونیسي.

د پورتني فعالیت پایله داسې ثبوتوو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

ثبوت:

$$y=\frac{u}{v} \Rightarrow y+\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v} \Rightarrow \Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-y$$

$$\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\frac{u}{v}=\frac{uv+v\cdot\Delta u-uv-u\cdot\Delta v}{v(v+\Delta v)}$$

$$\Delta y=\frac{v\cdot\Delta u-u\cdot\Delta v}{v(v+\Delta v)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{v\cdot\Delta u-u\cdot\Delta v}{v(v+\Delta v)}}{\Delta x}=\frac{v\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}\right)=\frac{v\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v\cdot\lim\limits_{\Delta v\to 0}(v+\Delta v)}$$

$$y'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$$

لومړی مثال: د $y=\frac{2+3x}{1-2x}$ تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: لیدل کیږي چې تابع د $\frac{u}{v}$ بڼه لري چې مشتق یې عبارت دی له:

$$\left.\begin{array}{l} u=2+3x \Rightarrow u'=3 \\ v=1-2x \Rightarrow v'=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y=\frac{u}{v} \Rightarrow y'=\frac{u'v-v'u}{v^2} \\ y'=\frac{3(1-2x)-[-2(2+3x)]}{(1-2x)^2} \\ =\frac{3-6x+4+6x}{(1-2x)^2}=\frac{7}{(1-2x)^2} \end{array}$$

یادونه: که چیرې وغواړو چې د یوې تابع مشتق په یوه ټاکلې نقطه لکه x_0 کې پیدا کړو د تابع په مشتق کې ټاکلې قیمت وضع کوو چې په پایله کې د تابع مشتق په هغه نقطه کې لاس راځي، لکه:

دویم مثال: د $f(y)=\frac{2y^2-3}{1-3y}$ د تابع مشتق د $y=0$ په ټکي کې پیدا کړئ:

حل: د تابع د حاصل تقسیم له مشتق څخه لرو:

$$\left.\begin{array}{l} u=2y^2-3 \Rightarrow u'=4y \\ v=1-3y \Rightarrow v'=-3 \end{array}\right\}$$

$$f'(y)=\frac{4y(1-3y)-[-3(2y^2-3)]}{(1-3y)^2}=\frac{4y-12y^2+6y^2-9}{(1-3y)^2}$$

$$f'(y)=\frac{-6y^2+4y-9}{(1-3y)^2}$$

$$f'(0)=\frac{-6(0)^2+4(0)-9}{(1-0)^2}$$

$$f'(0)=-9$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دريم مثال: د $f(t)=\dfrac{-3}{2t-1}$ د تابع مشتق پيدا کړئ.

حل: پوهېږو چې تابع د $\dfrac{u}{v}$ بڼه لري، نو د $y=\dfrac{u}{v}$ له فورمول څخه په ګټه اخيستنې سره داسې عمل کوو:

$$\left.\begin{array}{ll} y=\dfrac{u}{v} & \Rightarrow\ y'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2} \\ u=-3 & \Rightarrow\ u'=0 \\ v=2t-1 & \Rightarrow\ v'=2 \end{array}\right\} \Rightarrow\ f'(t)=\frac{0\cdot(2t-1)-2(-3)}{(2t-1)^2}=\frac{6}{(2t-1)^2}$$

پوښتنې

د لاندې توابعو مشتق پيدا کړئ:

1) $f(x)=\dfrac{3}{5}x(x-2)$

2) $g(x)=(2x-3)(x-3)$

3) $f(x)=(2x-1)^2$

4) $f(t)=\dfrac{t^2}{1-2t}$

5) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2}$

6) $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$

7) $f(x)=3x^5-5x^2$

8) $f(x)=7x+3$

(c) ketabton.com: The Digital Library

7- د يوې جذرالمربع تابع مشتق:

د $y=\sqrt{x}$ تابع په پام کې ونیسي.

- د $y=\sqrt{x}$ تابع متحول ته د Δx په اندازه تزايد ورکړئ د تابع تزايد پيدا کړئ.
- د لاس ته راغلي رابطې له دواړو خواوو څخه لېمیټ په هغه صورت کې ونيسي چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

د پورتني فعاليت پايله داسې ثبوتوو:

ثبوت:

$$y=\sqrt{x} \Rightarrow y+\Delta y=\sqrt{x+\Delta x}$$
$$\Delta y=\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}$$

د مساوات د ښي اړخ صورت او مخرج د صورت په مزدوج کې ضربوو:

$$\Delta y=\frac{(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{x+\Delta x-x}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{\Delta x}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}} \Rightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\boxed{y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

لومړی مثال: د $f(x)=\sqrt{x}(x^2-1)$ د تابع مشتق پيدا کړئ.

حل: ليدل کېږي چې تابع د $u\cdot v$ بڼه لري، نو:

$$\left.\begin{array}{l} u=\sqrt{x} \Rightarrow u'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \\ v=x^2-1 \Rightarrow v'=2x \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}(x^2-1)+2x\cdot\sqrt{x} \\ f'(x)=\dfrac{x^2-1}{2\sqrt{x}}+2x\sqrt{x}=\dfrac{x^2-1+4x(\sqrt{x})^2}{2\sqrt{x}} \\ \qquad =\dfrac{x^2-1+4x^2}{2\sqrt{x}}=\dfrac{5x^2-1}{2\sqrt{x}} \end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

8- د $\sqrt{u}$ تابع مشتق

- که چېرې y د u او u د x تابع او مشتق منوونکي وي د y اړيکه u ته او u، x ته څه فکر کوئ.
- د u متحول ته د Δu په اندازه تزاید ورکړئ د Δy د تزاید په اړه څه فکر کوئ.
- د مساواتو له دواړه خواوو څخه لیمیټ ونیسئ چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

$$y + \Delta y = \sqrt{u + \Delta u}$$

$$\Delta y = \sqrt{u + \Delta u} - \sqrt{u}$$

د مساوات د ښي اړخ صورت او مخرج د صورت په مزدوج کې ضربوو:

$$\Delta y = \frac{(\sqrt{u + \Delta u} - \sqrt{u})(\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u})}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}}$$

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u - u}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}}$$

د مساوات دواړه خواوې په Δx وېشو او بیا د مساوات له دواړو خواوو څخه لیمیټ نیسو چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}} \cdot \frac{1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta u \to 0} \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x}}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}}$$

$$y' = \frac{u'}{\sqrt{u} + \sqrt{u}} = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

دويم مثال: د $h(x) = (x^2 + x)\sqrt{x}$ د تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: د $y = u \cdot v$ او $y = \sqrt{x}$ د فورمولونو له مشتق څخه په ګټه اخیستنې سره لرو:

$$\left.\begin{aligned} u &= x^2 + x \quad \Rightarrow u' = 2x + 1 \\ v &= \sqrt{x} \quad \Rightarrow v' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} h'(x) &= (2x+1)\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2 + x) \\ h'(x) &= 2x\sqrt{x} + \sqrt{x} + \frac{x^2 + x}{2\sqrt{x}} \\ h'(x) &= \frac{4x^2 + 2x + x^2 + x}{2\sqrt{x}} = \frac{5x^2 + 3x}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم مثال: د $f(x)=(\sqrt[3]{x}-1)(x+3)$ تابع د مشتق قیمت په $x=8$ ټکي کې په لاس راوړئ.

حل: د $y=u\cdot v$ او $y=\sqrt[n]{u}$ تابع له مشتق څخه په ګټه اخیستنې سره لیکلای شو:

$$\left.\begin{aligned} u=\sqrt[3]{x}-1 \Rightarrow u'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \\ v=x+3 \Rightarrow v'=1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} f'(x)&=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}(x+3)+1(\sqrt[3]{x}-1) \\ f'(x)&=\frac{x+3}{3\sqrt[3]{x^2}}+(\sqrt[3]{x}-1) \end{aligned}$$

اوس د تابع مشتق د $x=8$ په نقطه کې پیدا کوو:

$$f'(8)=\frac{8+3}{3\sqrt[3]{8^2}}+\sqrt[3]{8}-1=\frac{11}{12}+1=\frac{23}{12}$$

پوښتنې

1- د لاندې توابعو مشتقونه پیدا کړئ.

$$f(x)=\frac{1}{x+1} \quad , \quad y=3x^{-3} \quad , \quad f(x)=x^2+3$$

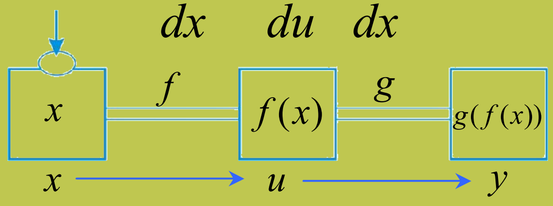
2- که $f(x)=x^2-3x$ او $g(x)=\sqrt{x}-1$ وي، د دې تابع ګانو د جمعې، ضرب او تقسیم مشتقونه پیدا کړئ. $[(f+g)',(f\cdot g)',(f\div g)' \quad g\neq 0]$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مرکبو تابع ګانو مشتق (زنځیري قاعده) Chain Rule

د مخامخ اړیکې او شکل په اړه خپل نظر بیان کړئ.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$



که چېرې y د u او u د x تابع وي او د اشتقاق وړ وي.

- وواياست چې y د u او u له x سره څه اړیکه لري؟
- آیا د $\Delta y=\Delta y\cdot\frac{\Delta u}{\Delta u}$ مساوات حقیقت لري؟
- د پورتني مساوات دواړې خواوې په Δx وویشئ.
- که د ښي اړخ د کسرونو د مخرجونو ځایونه بدل شي، په پورتني رابطه کې بدلون راځي؟
- د پورتني مساوات له اطراف څخه په هغه صورت کې لیمیټ ونیسئ چې $\Delta x\to 0$ وکړي.

د پورتني فعالیت پایله داسې ثبوتوو:

د تابع، تابع مشتق ثبوت او پایله یې په لاندې ډول ده.

ثبوت:

$$\Delta y=\Delta y\cdot\frac{\Delta u}{\Delta u}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta u}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

څرنګه چې $\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=y'_{(u)}$ او $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=u'_{(x)}$ دی، نو: $y'_{(x)}=y'_{(u)}\cdot u'_{(x)}$

د دې زنځیري قاعدې پر بنسټ لاندې پایلې لیکلای شو:

1- که $y=u^n$ وي؛ نو $y'=nu^{n-1}\cdot u'$ کېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- که $y=\sqrt[n]{u}$ وي، نو $y'=\dfrac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$ کېږي.

مثال: د لاندې تابع گانو مشتق پيدا کړئ.

1) $y=(2x^2-1)^3$ 2) $y=\sqrt{1-x^2}$ 3) $y=(x^2-3)^2\cdot 2x^3$

4) $y=\sqrt[3]{x^2-2x^3}$ 5) $y=(x^2-2)^{-3}$

حل: د زنځيري قاعدې په مرسته ليکلای شو چې:

$$1)\ \left.\begin{array}{l} y=\underbrace{(2x^2-1)^3}_{u} \\ u=2x^2-1\Rightarrow u'_x=4x \\ y=u^3\Rightarrow y'_u=3u^2 \end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l} y'_{(x)}=y'_{(u)}\cdot u'_{(x)} \\ y'=3(2x^2-1)^2\cdot 4x=3(4x^4-4x^2+1)\cdot 4x \\ \quad =(12x^4-12x^2+3)\cdot 4x=48x^5-48x^3+12x \\ \quad =12x(4x^4-4x^2+1)\quad =12x(2x^2-1)^2 \end{array}$$

$$2)\ \left.\begin{array}{l} y=\sqrt{1-x^2} \\ u=1-x^2\Rightarrow u'_{(x)}=-2x \\ y=\sqrt{u}\Rightarrow y'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}} \end{array}\right\}\Rightarrow\quad y'=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

ليدل کېږي چې تابع د ضرب د حاصل بڼه لري، نو: $y=u\cdot v\ \Rightarrow\ y'=u'v+v'u$

$$3)\ \left.\begin{array}{l} y=(x^2-3)^2\cdot 2x^3 \\ u=(x^2-3)^2 \\ u'_{(x)}=2(x^2-3)(2x) \\ v=2x^3\Rightarrow v'_{(x)}=6x^2 \end{array}\right\}\begin{array}{l} y'=\left[(x^2-3)^2\right]'\cdot 2x^3+\left[2x^3\right]'(x^2-3)^2 \\ y'=\left[2(x^2-3)\cdot 2x\right]2x^3+6x^2(x^2-3)^2 \\ \quad =8x^4(x^2-3)+6x^2(x^2-3)^2 \\ \quad =8x^6-24x^4+6x^2(x^4-6x^2+9) \\ \quad =8x^6-24x^4+6x^6-36x^4+54x^2 \\ \quad =14x^6-60x^4+54x^2 \end{array}$$

$$4)\ \left.\begin{array}{l} y=\sqrt[3]{x^2-2x^3} \\ u=x^2-2x^3 \\ u'_{(x)}=2x-6x^2 \end{array}\right\}\begin{array}{l} y=\sqrt[n]{u}\Rightarrow y'=\dfrac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}} \\ y'=\dfrac{2x-6x^2}{3\sqrt[3]{(x^2-2x^3)^2}} \end{array}$$

$$5)\ \left.\begin{array}{l} y=(x^2-2)^{-3} \\ u=x^2-2 \\ u'_{(x)}=2x \end{array}\right\}\begin{array}{l} y=u^n\Rightarrow y'=nu^{n-1}\cdot u' \\ y'=-3(x^2-2)^{-4}\cdot 2x=\dfrac{-6x}{(x^2-2)^4} \end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه:

I. که چیرې د f تابع د (x_0) په ټکي کې مشتق ولري، نو $f'(x_0)$ د هغه مماس میل دی چې د $((x_0)\ ,\ f(x_0))$ په نقطه کې له منحني یا د تابع له ګراف سره رسمیږي.

مثال: د $f(x)=x^3$ د تابع میل د $x_0=1$ په ټکي کې پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې $x_0=1$ دی، نو: $f(x_0)=1$ سره کیږي او $P(1,1)$ چې د تماس ټکی دی، میل یې عبارت دی، له:

$$f'(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x^2+x+1)=3 \quad\Rightarrow\quad f'(1)=3$$

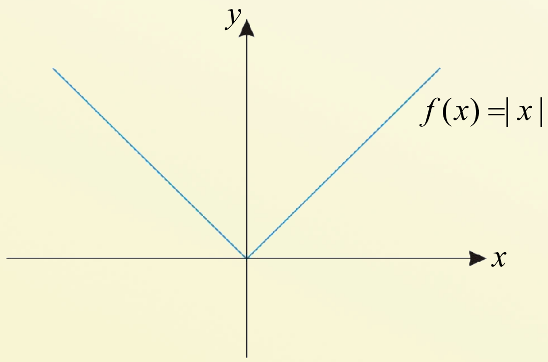
II. که د f تابع د $x=x_0$ په ټکي کې د مشتق وړ وي، نو دا تابع د x_0 په ټکي کې متمادي ده، خو برعکس یې سم نه ده، یعنې کېدای شي، یوه تابع په یوه ټکي کې متمادي وي، ولې په هغه ټکي کې د مشتق وړ نه وي.

مثال: د $f(x)=|x|$ د تابع مشتق د په $x=0$ ټکي کې پیدا کړئ.

حل: پوهیږو چې مشتق په حقیقت کې د نیوټن د نسبت د لیمیټ محاسبه ده چې د ښي او کیڼ اړخ لیمیټونه یې په صفر کې سره وڅېړل شي.

$$f'(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1$$

$$f'(0^-)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

لیدل کېږي چې $f'(0^+) \neq f'(0^-)$ دی، نو تابع په $x = 0$ کې د مشتق وړ نه ده، ولې تابع د صفر په ټکي کې متمادي ده.

پوښتنې

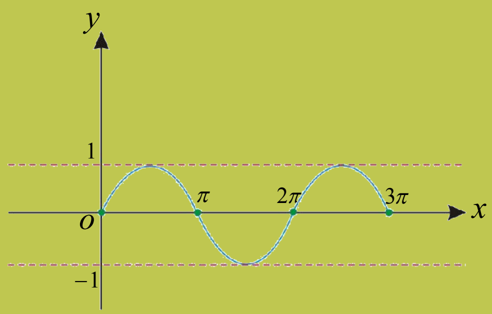
د لاندې توابعو مشتق پیدا کړئ.

1) $y = (x^2 + 2)^2$
2) $f(x) = (x^3 - 4x^2 + 1)^{-4}$
3) $y = (1 - 2x^3)^4$
4) $h(z) = \sqrt{\dfrac{1-z}{1+z}}$
5) $f(t) = \sqrt[3]{3t + 1}$
6) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2 + x^2 + x^3}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مثلثاتي تابع ګانو مشتق

مخامخ ګراف څه ډول تابع را ښيي؟



فعاليت

- مثلثاتي دايره او راديان تعريف کړئ.
- آيا دا $-1 \le \sin x \le 1$ اړيکه حقيقت لري او که نه؟
- د $y = \sin x$ تابع په پام کې ونيسئ متحول ته د Δx په اندازه بدلون ورکړئ او د تابع بدلون په پام کې ونيسئ.
- د $\sin(x+\Delta x) - \sin x$ مثلثاتي رابطې ته انکشاف ورکړئ؟
- د پورتنۍ رابطې له انکشاف څخه وروسته د $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ نسبت جوړ او د مساوات له دواړو خواوو څخه په هغه صورت کې لېميټ ونيسئ چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

له پورته فعاليت څخه پايله داسې ثبوتوو:

1- د $y = \sin x$ تابع مشتق:

ثبوت:

$$y = \sin x$$

$$y + \Delta y = \sin(x + \Delta x)$$

$$\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x$$

$$\Delta y = 2\cos\frac{x+\Delta x + x}{2}\cdot\sin\frac{x+\Delta x - x}{2} = 2\cos\frac{2x+\Delta x}{2}\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\cdot 2\cos(x+\frac{\Delta x}{2})\cdot\sin\frac{\Delta x}{2} = 2\cos(x+\frac{\Delta x}{2})\cdot\sin\frac{\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\cos(x+\frac{\Delta x}{2})\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\sin\frac{\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \Rightarrow y'(x) = \cos x\cdot 1$$

$$y' = \cos x$$

$$\boxed{y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x}$$

که چېرې $f(x) = \sin u$ وي په داسې حال کې چې u د x تابع وي، نو ليکلای شو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(u) = \sin u \Rightarrow y' = u' \cos u$$

لومړی مثال: د $f(x) = \sin 4x$ تابع مشتق پیدا کړئ.

$$\left.\begin{aligned} & f(x) = \sin 4x \\ & u = 4x \Rightarrow u' = 4 \\ & f(x) = \sin u \Rightarrow y'_u = \cos u \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} & f(x) = \sin u \quad \Rightarrow f'(x) = u' \cos u \\ & f(x) = \sin 4x \Rightarrow f'(x) = 4\cos 4x \end{aligned}$$

دویم مثال: د $f(x) = x^3 \cdot \csc x$ تابع مشتق پیدا کړئ.

حل:

$$\left.\begin{aligned} & f(x) = x^3 \cdot \csc x = x^3 \cdot \frac{1}{\sin x} \\ & u = x^3 \Rightarrow u' = 3x^2 \\ & v = \frac{1}{\sin x} \Rightarrow v' = \frac{-uv'}{v^2} = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} & f(x) = x^3 \cdot \csc x \\ & f'(x) = 3x^2 \cdot \csc x + \frac{-\cos x}{\sin^2 x} \cdot x^3 \\ & \quad = 3x^2 \csc x - x^3 \cot x \cdot \csc x \cdot x \\ & \quad = 3x^2 \csc x - x^3 \cot x \cdot \csc x \end{aligned}$$

پوښتنې

د لاندې توابعو مشتق په لاس راوړئ:

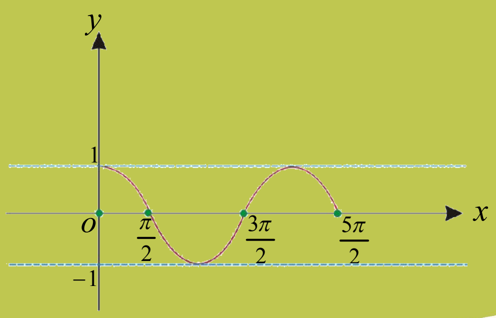
$a)\ y = \sin 5x \qquad b)\ y = \dfrac{\sin x}{1+x}$

$c)\ y = \sqrt{1+\sin x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $y=\cos x$ تابع مشتق

مخامخ ګراف څه ډول تابع را ښيي؟



- د $y=f(x)=\cos x$ په تابع کې متحول ته د Δx او تابع ته د Δy په اندازه تزاید ورکړئ.
- د $\cos(x+\Delta x)-\cos x$ مثلثاتي رابطې ته انکشاف ورکړئ.
- د پورتنی انکشافي رابطې په مرسته د $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ نسبت تشکیل او له اطرافو څخه لیمیټ ونیسئ چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

د پورتني فعالیت پایله داسې ثبوتوو:

2- د $y=\cos x$ تابع مشتق

ثبوت:

$$y=\cos x$$
$$y+\Delta y=\cos(x+\Delta x)$$
$$\Delta y=\cos(x+\Delta x)-\cos x$$
$$\Delta y=-2\sin\frac{x+\Delta x+x}{2}\cdot\sin\frac{x+\Delta x-x}{2}$$
$$\Delta y=-2\sin\frac{2x+\Delta x}{2}\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\lim_{\Delta x\to 0}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\sin\frac{\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=-\sin x\cdot 1$$

$$\boxed{y=\cos x \quad\Rightarrow\quad y'=-\sin x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یا په لنډ ډول هغه داسې ثبوتوو:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$$

$$(\cos x)' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}\cdot(-2\sin x\cos x)$$

پوهېږو $\sqrt{1-\sin^2 x} = \cos x$ چې سره دی، نو:

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos x}(-2\sin x\cdot\cos x)$$

$$\boxed{(\cos x)' = -\sin x}$$

که چېرې $y = \cos u$ وي، په داسې حال کې چې u د x تابع وي، نو ليکلای شو:

$$\boxed{y = \cos u \Rightarrow y' = -u'\cdot\sin u}$$

لومړی مثال: د لاندې توابعو مشتق پيدا کړئ.

1) $f(x) = \sin 2x = 2\sin x\cos x$ 2) $f(x) = x - \sin x\cos x$

حل: پوهېږو چې $y = u\cdot v \Rightarrow y' = u'v + v'u$ دی، نو:

1) $f(x) = \sin 2x = 2\sin x\cos x$

$$f'(x) = (2\sin x)'\cos x + (\cos x)'\cdot 2\sin x = 2\cos^2 x - 2\sin^2 x$$

$$f'(x) = 2(\cos^2 x - \sin^2 x) \Rightarrow y' = 2\cos 2x$$

2) $f(x) = x - \sin x\cos x$

$$f'(x) = (x)' - (\sin x\cdot\cos x)' = (x)' - [(\sin x)'\cdot\cos x + (\cos x)'\cdot\sin x]$$

$$f'(x) = (x)' - [\cos x\cos x + (-\sin x\sin x)] = 1 - \cos 2x$$

پوښتنې

د لاندې تابع ګانو لومړی مشتق پيدا کړئ.

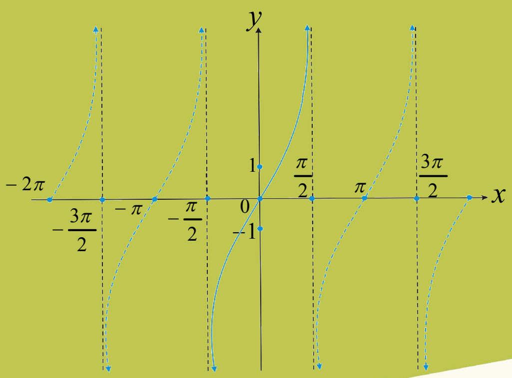
1) $f(x) = (\sec 2x + \tan 2x)^2$ 2) $f(x) = \sin^2 x$ 3) $f(x) = \sec x$

4) $f(x) = \csc x$ 5) $f(x) = \dfrac{5\sin^2 2x}{3\cos 5x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $y = \tan x$ تابع مشتق

مخامخ ګراف څه ډول تابع راښيي.



فعالیت

- د $y = \tan x$ تابع د نسبت په شکل ولیکئ.
- له پورتني نسبت څخه مشتق ونیسئ، هغه له څه سره مساوي کېږي.

له پورته فعالیت څخه پایله داسې ثبوتوو:

3- د $y = \tan x$ تابع مشتق:

ثبوت:

$$f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$f'(x) = \frac{(\sin x)'\cos x - (\cos x)'\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos x\cos x - (-\sin x)(\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$y = \tan x$$

$$y'_{(x)} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

پاتې فورمولونه زده کوونکو ته پرېږدو.

لومړی مثال: د لاندې مثلثاتي تابع مشتق پیدا کړئ.

$$y = \tan^3 x$$

حل: پوهېږو چې که $y = u^n$ وي نو مشتق یې $y' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$ سره دی، نو:

$$\left.\begin{array}{l} u = \tan x \\ u' = \sec^2 x \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y = \tan^3 x \\ y' = 3\tan^2 x \sec^2 x \end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم مثال: د $y=\sec x\cdot\cot x$ تابع مشتق پيدا کړئ.

حل: څرنګه چې تابع د $y=u\cdot v$ شکل لري، نو:

$$y=\sec x\cdot\cot x$$
$$u=\sec x \quad\Rightarrow\quad u'=\sec x\tan x$$
$$v=\cot x \quad\Rightarrow\quad v'=-\csc^2 x$$

د u,v,u' او v' قيمتونه د $y'=u'\cdot v+u\cdot v'$ په فورول کې وضع کوو:

$$y'=\sec x\tan x\cdot\cot x+\sec x(-\csc^2 x)$$
$$=\sec x\tan x\frac{1}{\tan x}-\csc^2 x\sec x$$
$$=\sec x-\csc^2 x\sec x$$

پوښتنې

د لاندې تابع ګانو مشتق پيدا کړئ.

$a)\ \ y=\tan x\cot x$

$b)\ \ y=(x^2+x-1)\tan^2 x$

$c)\ \ y=\dfrac{1}{\tan x}$

$d)\ \ y=\tan x\sec x-\cot x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ضمني مشتقات

مخامخ مساوات په عبارت سره ولیکئ.

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}$$

- د $y = 2x^2 - 4$ تابع مشتق پیدا کړئ.
- د $y^2 + xy = 1$ تابع څو متحوله تابع ده؟ ګراف یې څه ډول شکل لري؟
- د پورتني تابع مشتق پیدا کولای شئ.

د یوې منحني خط معادله د وضعیه کمیاتو په سیستم کې عبارت له $y = f(x)$ څخه ده، له دې ځایه $y - f(x) = 0$ کېږي او $y - f(x)$ یوه دوه متحوله تابع د x او y له جنسه ده، که تابع په پام کې ونیسو، نو د دې منحني معادله د $F(x,y)$ شکل غوره کوي، د مثال په $F(x,y) = y - f(x)$ ډول: $F(x,y) = x^2 + y^2 - 25$ وي، نو د $F(x,y) = 0$ له معادلې څخه لیکلای شو چې $x^2 + y^2 - 25 = 0$ یا $x^2 + y^2 = 25$ چې د دې دوو بېلا بېلو توابعو معادلې $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$ دي.

په عمومي ډول د $F(x,y) = 0$ معادله کېدای شي چې د څو تابع ګانو معادله د $y = f(x)$ په بڼه وي، پاملرنه وکړئ.

د $y = f(x)$ په تابع کې چې x او y یو له بل څخه جلا وي، نو مشتق یې په آسانۍ پیدا کولای شو، ولې په ځینو رابطو کې y له x سره یو ځای بیان شوي دي لکه په $xy^2 - y + 1 = 0$ چې د مشتق په نیولو کې که د x له جنسه مشتق نیسو، نو y یو ثابت عدد فرضوو او که د y له جنسه مشتق نیسو x ثابت فرضوو، لکه:

$$xy^2 - y + 1 = 0$$

$$(xy^2)' - (y)' + (1)' = 0 \Rightarrow 1y^2 + x(2y'y) - y' = 0 \Rightarrow y^2 = -2xyy' + y' = y'(-2xy + 1)$$

$$y' = \frac{y^2}{-2xy + 1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په عمومي حالاتو کې که تابع غیر صریح وي په دې معنا چې مستقل متحول او د تابع متحول پکې څرګند نه وي، نو ددې ډول تابع مشتق د ضمني مشتق په نامه یادیږي او د هغه مشتق په لاندې ډول محاسبه کوو.

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{\text{د تابع مشتق نظر } x \text{ ته(} y \text{ ثابت دی)}}{\text{د تابع مشتق نظر } y \text{ ته(} x \text{ ثابت دی)}}$$

لومړی مثال: د $y = \sin\frac{x}{y} + 1$ ضمني تابع مشتق د $(\pi, 1)$ په ټکي کې پیدا کړئ.

حل: د $y - \sin\frac{x}{y} - 1 = 0$ رابطې څخه $y'_{(x)} = \frac{-f'_{(x)}}{f'_{(y)}}$ پیدا کوو.

$$y - \sin\frac{x}{y} - 1 = 0$$

$$\left.\begin{aligned} f'_{(x)} &= y'_x - (\sin\frac{x}{y})'_x - (1)'_x \\ &= 0 - \frac{1}{y}\cos\frac{x}{y} - 0 = \frac{-1}{y}\cos\frac{x}{y} \\ f'_{(y)} &= y'_y - (\sin\frac{x}{y})'_y - (1)'_y \\ &= 1 - \cos\frac{x}{y}(\frac{x}{y})'_y - 0 = 1 - \frac{-x}{y^2}\cdot\cos\frac{x}{y} = 1 + \frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y} \end{aligned}\right\} \Rightarrow y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{\frac{-1}{y}\cos\frac{x}{y}}{1 + \frac{x}{y^2}\cdot\cos\frac{x}{y}}$$

اوس په $y'_{(x)}$ رابطه کې د x او y قیمتونه وضع کوو چې د $y'(\pi, 1)$ په لاس راځي.

$$y'_{(\pi,1)} = \frac{\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}}{1 + \frac{x}{y^2}\cdot\cos\frac{x}{y}} = \frac{\frac{1}{1}\cos\pi}{1 + \frac{\pi}{1}\cos\pi} = \frac{-1}{1 + \pi(-1)} = \frac{1}{\pi - 1}$$

دویم مثال: د $x^2y + 2y^3 = 3x + 2$ رابطې ضمني مشتق پیدا کړئ.

حل:

$$x^2y + 2y^3 = 3x + 2$$

$$x^2y + 2y^3 - 3x - 2 = 0$$

$$f'_{(x)} = 2xy + 0 - 3 - 0 = 2xy - 3$$

$$f'_{(y)} = x^2 + 6y^2 - 0 - 0 = x^2 + 6y^2$$

$$f'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{2xy - 3}{x^2 + 6y^2} = \frac{-2xy + 3}{x^2 + 6y^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دريم مثال: د $y^6 - y - x^2 = 0$ تابع ضمني مشتق پيداکړئ.

حل:

$$f'_{(x)} = -2x$$

$$f'_{(y)} = 6y^5 - 1$$

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{-2x}{6y^5 - 1} = \frac{2x}{6y^5 - 1}$$

او يا په بله طريقه:

$$y^6 - y - x^2 = 0$$

$$6y^5 y' - y' - 2x = 0$$

$$(6y^5 - 1)y' = 2x$$

$$y' = \frac{2x}{6y^5 - 1}$$

د تابع دويم ضمني مشتق

د ضمني رابطې د دويمې مرتبې د ضمني مشتق د پيداکولو لپاره د فورمول په مرسته لومړی د ضمني اړيکې لومړی مشتق پيداکوو او بيا له دې رابطې څخه مشتق نيسو.

لومړی مثال: د $x^2 - y^2 = 1$ رابطې دويمه ضمني مشتق $y''_{(x)}$ پيداکړئ.

حل:

$$x^2 - y^2 = 1$$

$$x^2 - y^2 - 1 = 0$$

$$f'_{(x)} = (x^2)'_x - (y^2)'_x - (1)'_x = 2x - 0 - 0 = 2x$$

$$f'_{(y)} = (x^2)'_y - (y^2)'_y - (1)'_y = 0 - 2y - 0 = -2y$$

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{2x}{-2y} = \frac{x}{y}$$

او يا په بله طريقه:

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{(x^2)'_x - (y^2)'_x - (1)'_x}{(x^2)'_y - (y^2)'_y - (1)'_y} = -\frac{2x - 0 - 0}{0 - 2y - 0} = \frac{x}{y} \Rightarrow y'_{(x)} = \frac{x}{y}$$

اوس د $y' = \frac{x}{y}$ له رابطې څخه دويم ضمني مشتق نيسو:

$$y''_{(x)} = \frac{(x)'y - y'x}{y^2} = \frac{y - y'x}{y^2} = \frac{y - \frac{x}{y} \cdot x}{y^2} = \frac{y^2 - x^2}{y^3} = \frac{-1}{y^3} \Rightarrow y''_{(x)} = \frac{-1}{y^3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال: د $x^2+xy+y^2-3=0$ په معادله کې د y مشتق نسبت x ته د $(1,1)$ په ټکي کې پیدا او پر منحني د مماس معادله ولیکي.

حل: څرنګه چې د $(1,1)$ ټکی په معادله کې صدق کوي، نو نوموړی ټکی د منحني پرمخ واقع دی، د $y'_{(x)}$ د پیداکولو لپاره په ورکړ شوي معادلې کې لیکلای شو:

$$f'_{(x)}=2x+y$$
$$f'_{(y)}=x+2y$$
$$y'_{(x)}=-\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}=-\frac{2x+y}{x+2y}\quad , \qquad x+2y\neq 0$$
$$y'=-\frac{2x+y}{x+2y}=-\frac{2+1}{1+2}=-1$$
$$y-y_1=m(x-x_1)\ \Rightarrow\ y-1=-(x-1)\ \Rightarrow\ y=-x+2$$

او یا په بله طریقه هم کولای شو د تابع ضمني مشتق په لاس راوړو:

$$x^2+xy+y^2-3=0$$
$$2x+y+x\cdot y'+2yy'=0$$
$$2x+y+(x+2y)y'=0$$
$$(x+2y)y'+2x+y=0$$
$$(x+2y)y'=-2x-y$$
$$y'=\frac{-2x-y}{x+2y}$$

دریم مثال: د $x^2y^3=5y^3+x$ غیر صریح تابع ضمني مشتق پیدا کړئ.

حل:

$$x^2y^3-5y^3-x=0$$
$$f'_{(x)}=2xy^3-0-1=2xy^3-1$$
$$f'_{(y)}=3x^2y^2-15y^2-0$$
$$y'_{(x)}=-\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}=-\frac{2xy^3-1}{3x^2y^2-15y^2}=\frac{1-2xy^3}{3x^2y^2-15y^2}$$

پوښتني

1- د $x\sin y+y\cos x=5$ د غیر صریح تابع ضمني مشتق پیدا کړئ.

2- د $x^3+xy^2+y=3$ رابطې څخه ضمني مشتق ونیسئ.

3- د $x^2+y^2=4x+4y$ رابطې څخه ضمني مشتق ونیسئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لوړ مرتبه يي مشتقات

د مخامخ تابع درېٍ ځلې مشتق ونیسئ؟

د مخامخ تابع پنځه ځلې مشتق ونیسئ؟

$$f(x) = \sin x$$

$$f(x) = \cos x$$

فعالیت

- د $y = 2x^4 - 3x^3 - 2x - 1$ تابع مشتق پیدا کړئ.
- د پورته تابع دويم مشتق پیدا کړئ.
- د پورتني مشتق د تابع دریم ځل مشتق ونیسئ.
- د پورتني تابع نور څو ځلې مشتق نیولی شو؟
- د پورتني تابع څووم مشتق له صفر سره مساوي دی؟

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

که د $y = f(x)$ مشتق منونکی وي، لومړی مرتبه مشتق يې په $y' = f'(x)$ ، دويمه مرتبه مشتق يې په $y'' = f''(x)$ دریمه مرتبه مشتق يې په $y''' = f'''(x)$ … په کلي ډول $n-$ام مرتبه مشتق د $y = f(x)$ تابع په $y^{(n)} = f^{(n)}(x)$ علامې سره ښيو.

لومړی مثال: د $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ تابع دریم مشتق په لاس راوړئ.

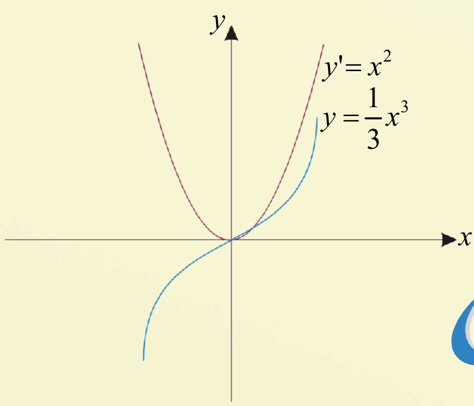
حل:

$$y = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$$
$$y' = 3x^2 - 6x + 4$$
$$y'' = 6x - 6$$
$$y''' = 6$$

دويم مثال: د $y = \frac{1}{3}x^3$ تابع ګراف او د هغې د لومړی مرتبې مشتق تابع ګراف رسم کړئ.

حل:

$$y = \frac{1}{3}x^3$$
$$y' = \frac{3}{3}x^2 = x^2$$
$$y' = x^2$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم مثال: که $y=\sin x+\cos x$ وي، د $(y^{(9)})^2+y^2$ قیمت پیداکړئ.

حل: لومړی د تابع نهمه مرتبه مشتق یا $(y^{(9)})$ په لاس راوړو:

$$y=\sin x+\cos x$$
$$y'_{(x)}=\cos x+(-\sin x)=\cos x-\sin x$$
$$y''_{(x)}=-\sin x-(\cos x)=-\sin x-\cos x$$
$$y'''_{(x)}=-\cos x-(-\sin x)=\sin x-\cos x$$
$$\vdots$$
$$f'^{(9)}_{(x)}=\cos x-\sin x$$
$$(y^{(9)})^2+y^2=(\cos x-\sin x)^2+(\sin x+\cos x)^2$$
$$=\cos^2 x-2\sin x\cos x+\sin^2 x+\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x$$
$$=2\sin^2 x+2\cos^2 x=2(\sin^2 x+\cos^2 x)=2$$

څلورم مثال: د $y=2x^6-3x^5-2x^3-3x^2-1$ د تابع پنځه ځلې مشتق پیداکړئ.

$$y=2x^6-3x^5-2x^3-3x^2-1$$
$$y'=12x^5-15x^4-6x^2-6x$$
$$y''=60x^4-60x^3-12x-6$$
$$y'''=240x^3-180x^2-12$$
$$y^{(4)}=720x^2-360x$$
$$y^{(5)}=1440x-360$$

یادونه: که چېرې $n-$ام درجه‌یي څو جمله‌یي تابع $f_{(n)}(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\ ...+c_nx^n \quad c_n\neq 0$ راکړې شوی وي $n-$ام مشتق یې په لاندې ډول په لاس راځي:

$$f_{n(x)}=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\ ...\ +c_nx^n \qquad c_n\neq 0$$
$$f'_{(x)}=c_1+2c_2x+3c_3x^2+\ ...\ +nc_nx^{n-1}$$
$$f''_{(x)}=2c_2+6c_3x+\ ...\ +n(n-1)c_nx^{n-2}$$
$$f'''_{(x)}=6c_3+12c_4x+\ ...\ +n(n-1)(n-2)c_nx^{n-3}$$
$$f^n(x)=n(n-1)(n-2)\ ...\ c_n=n!c_n$$

په عمومي ډول که $k>n$ وی، نو: $f^k(x)=0$

پوښتنې

د لاندې تابعګانو تر هغې مشتق ونیسئ چې د مشتق تابع له صفر سره مساوي شي.

1) $y=4x^4-3x^3-2x$ 2) $y=(5x-2)^3$

3) $y=a+b+c^2-x-ax-bx-cx^3-c^3x$ 4) $y=\sin x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د خپرکي مهم ټکي

– که چېرې د $P(x,f(x))$ او $Q(x+h,f(x+h))$ ټکی د $f(x)$ تابع دوه اختیاري ټکي وي، نو لاندې اړیکه د Newton خارج قسمت په نامه یادېږي:

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{x+\Delta x-x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

د منحنی د مماس میل په یوه اختیاري ټکي کې عبارت دی، له:

$$m_T=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

د یوې تابع مشتق: د تابع او متحول د تزاید، د نسبت لېمیټ کله چې $\Delta x\to 0$ وکړي، د مشتق په نامه یادېږي او په $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$ سره ښودل کېږي.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)=y'$$

که چېرې د $f(x)$ تابع د (x_0) په یوه ټکي کې د مشتق وړ وي، نو $f'(x)$ د مماس میل د منحنی سره د $(x_0,f(x_0))$ په ټکي کې دی.

که د f تابع د $x=x_0$ په ټکي کې د مشتق وړ وي، نو دا تابع په x_0 کې متمادي ده، خو ددې برعکس سمه نه ده، یعني کېدای شي یوه تابع په یوه ټکي کې متمادي وي، ولې په هغه ټکي کې د مشتق وړ نه وي.

د $f(x)$ د تابع مشتق د C پر منحنی $P(x_0,f(x_0))$ په ټکي کې د مماس له میل سره برابر دی.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'=\tan\alpha=\tan\theta=m_\Delta$$

د تماس په ټکي کې له یوې منحنی سره د مماس میل د هغې تابع د مشتق په نوم یادېږي.

که د یوې تابع مشتق ونیول شي، نو یوه تابع په لاس راځي چې دا د مشتق تابع بلل کېږي.

که د f تابع د $(x_0-r\ ,x_0+r)$ په فاصله کې(په شاوخوا $x_0=x$) کې تعریف شوې وي او د هغې لېمیټ موجود وي، په دې حالت کې کولای شو چې یو مماس خط د $f(x)$ د تابع په منحنی د $x=x_0$ په ټکي کې رسم کړو، د دې مماس میل عبارت دی له: $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مشتق قوانین:

$$1)\ f(x)=C \quad \Rightarrow \quad f'(x)=0$$

$$2)\ f(x)=x^n \quad \Rightarrow \quad f'(x)=n\cdot x^{n-1}$$

$$3)\ f(x)=u\pm v \quad \Rightarrow f'(x)=u'\pm v'$$

$$4)\ f(x)=u\cdot v \quad \Rightarrow \quad f'(x)=u'v+v'u$$

$$5)\ f(x)=\frac{u}{v} \quad , \quad v\neq 0 \ \Rightarrow \ f'(x)=\frac{u'v-v'u}{v^2}$$

$$6)\ f(x)=\sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$7)\ f(x)=\sqrt{u} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$8)\ f(x)=\sqrt[n]{u} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\frac{u'}{n\cdot\sqrt[n]{u^{n-1}}}$$

د مرکبو توابعو مشتق: $y'_{(x)} = y'_{(u)} \cdot u'_{(x)}$

د مثلثاتي تابع گانو مشتق:

$$1)\ y=\sin x \quad \Rightarrow \quad y'=\cos x \qquad , \qquad y=\sin u \quad \Rightarrow \quad y'=u'\cos u$$

$$2)\ y=\cos x \quad \Rightarrow \quad y'=-\sin x \qquad , \qquad y=\cos u \quad \Rightarrow \quad y'=-u'\sin u$$

که د $y=f(x)$ تابع مشتق منونکی وي، په بشپړ ډول n -ام څلي مشتق يې $y^{(n)}=f^{(n)}(x)$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دويم څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتنو ته څلور ځوابونه درکړل شوي دي، سم ځواب په نښه کړئ:

1- $f(x)=x^2-x$ منحني ميل د $P(3,0)$ په ټکي کې عبارت دی له:

$a)\ 3$ $b)\ -3$ $c)\ 5$ $d)\ -5$

2- د $f(x)=2x^2$ په تابع کې د f متوسط بدلون د $[3,4]$ په انتروال کې عبارت دی له:

$a)\ 18$ $b)\ 14$ $c)\ -14$ $d)\ 32$

3- د $y=2x^2-3x^{-1}$ تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ y'=4x^2+3$ $b)\ y'=4x+\frac{1}{2}x$ $c)\ y'=4x+\frac{3}{x^2}$ $d)\ y'=4x$

4 – د $f(x)=\sqrt{x-1}$ تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ 0$ $b)\ \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$ $c)\ \frac{x-1}{2\sqrt{x}}$ $d)\ \frac{-1}{2\sqrt{x-1}}$

5 – د $f(x)=2x^2+x$ تابع د $x=1$ په ټکي کې د مماس خط معادله عبارت ده له:

$a)\ y=5x-2$ $b)\ y=x-3$ $c)\ y=5$ $d)\ y=5x$

6- د $y=\frac{2x}{-x+4}$ تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ y'=-4x+8$ $b)\ y'=-2$ $c)\ y'=\frac{4x+8}{(-x+4)}$ $d)\ y'=\frac{8}{(-x+4)^2}$

7 – د $y=(2-x^2)^3$ تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ y'=-6x^5+2x^3-24x$ $b)\ y'=3(2-x^2)^2$ $c)\ y'=3(-2x)^2$ $d)$ هیڅ یو

8 – د $y=\sin x$ تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ y'=\sin x$ $b)\ y'=\cos x$ $c)\ y'=-\sin x$ $d)\ y'=-\cos x$

9 – د $y=(1+x^4)^{\frac{-1}{5}}$ تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ y'=-\frac{4}{5}x^3(1+x^2)^{\frac{-6}{5}}$ $b)\ y'=-\frac{1}{5}(1+x^2)^{\frac{-6}{5}}$

$c)\ y'=-4x^3$ $d)$ هیڅ یو

10– د $y=\frac{\cos}{1-\cos x}$ تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ y'=\frac{\sin x}{(1-\cos x)^2}$ $b)\ y'=\frac{-\sin x}{(1-\cos x)}$ $c)\ y'=\frac{-\sin x}{(1-\cos x)^2}$ $d)$ هیڅ یو

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې پوښتنې حل کړئ.

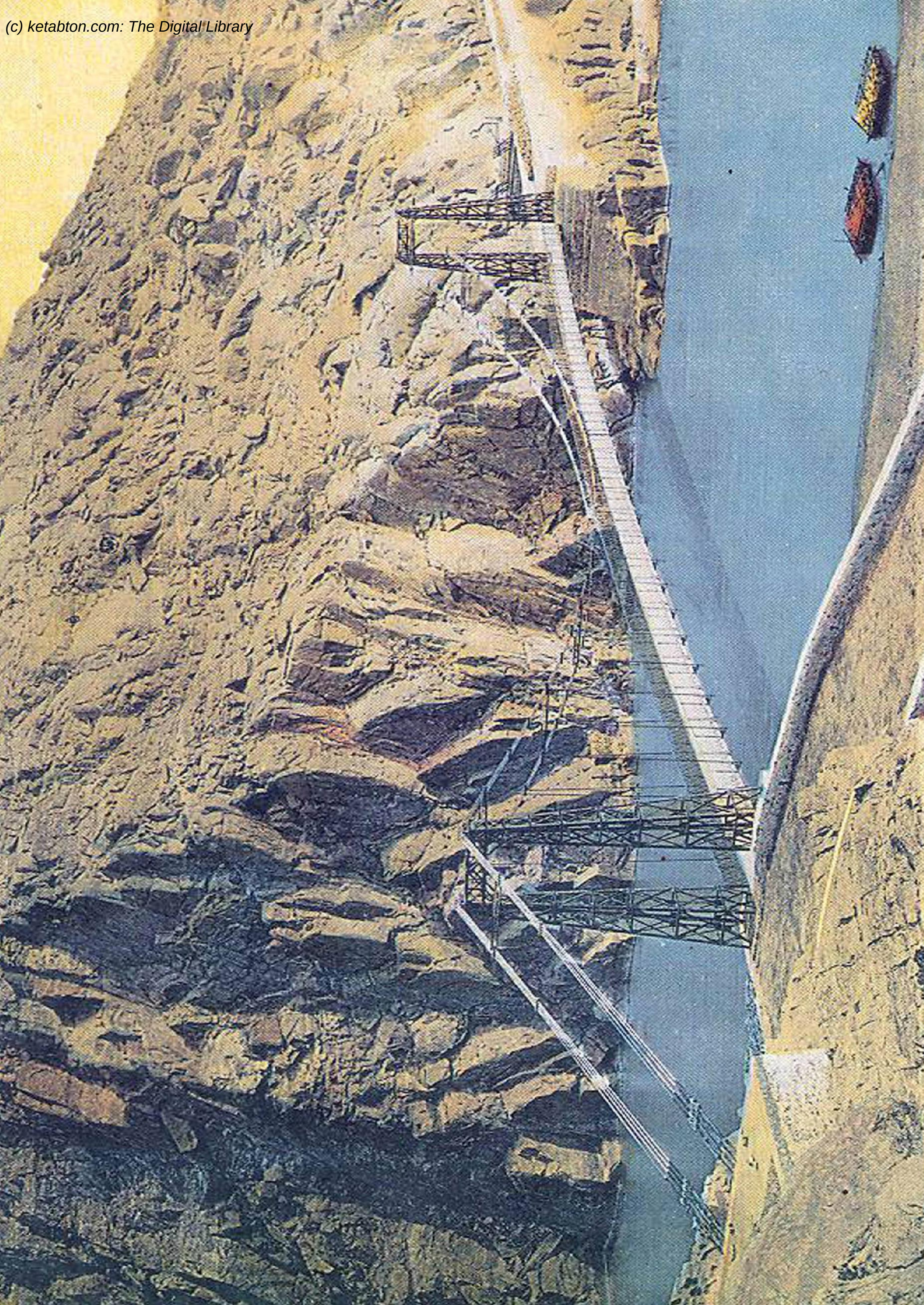
1. د $f(x)=\dfrac{2\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$ تابع مشتق پیدا کړئ؟
2. د $f(x)=\dfrac{x+\sqrt{x-x^2}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}$ تابع مشتق پیدا کړئ؟
3. د $f(x)=(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$ تابع مشتق پیدا کړئ.
4. د $f(x)=(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x}+4)$ تابع مشتق پیدا کړئ.
5. د $f(x)=\sin x\cdot\cos x$ د تابع مشتق د $\dfrac{\pi}{4}$ په ټکي کې پیدا کړئ.
6. د $f(x)=\dfrac{(\sin x+\cos x)^2}{1+\sin 2x}$ تابع مشتق پیدا کړئ.
7. د $y=\cos x$ تابع اتمه مرتبه مشتق پیدا کړئ.
8. د $y=\sin^2 x+\cos^2 x$ تابع نهمه مرتبه مشتق پیدا کړئ.
9. د $x^2+xy+y^2=3$ تابع ضمني مشتق پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

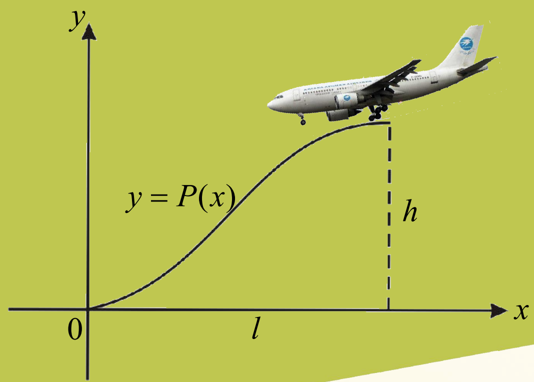
دریم څپرکی

د مشتق د استعمال ځایونه

(c) ketabton.com: The Digital Library



(c) ketabton.com: The Digital Library



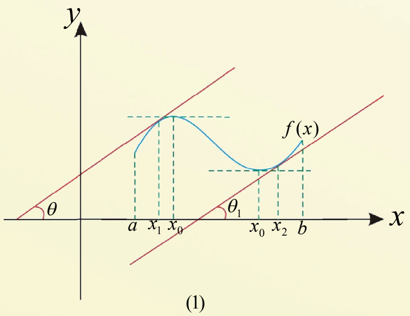
د مشتق د استعمال ځایونه

د مخامخ شکل د ارتفاع په اړه خپل نظر بیان کړئ.

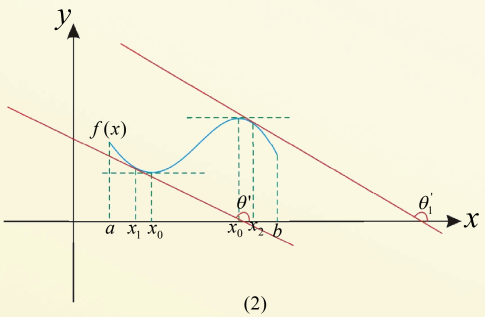
له مشتق څخه په ډېرو ځایونو کې، لکه: (په فزیك کې د حرکت، سرعت او تعجیل اړوند معادلې د مشتق څخه په ګټه اخیستنې سره حلېږي همدارنګه په کیمیا کې هم، د تابع د تحولات، د ځینو لیمیټونو په پیدا کولو کې) کار اخیستل کېږي چې ځینې ځایونه یې دلته تر څېړنې لاندې نیسو.

I-د یوې تابع تحولات:

لاندې شکلونو ته پاملرنه وکړئ:



(1)



(2)

- متزایدې او متناقصې توابع څه ډول توابع دي؟
- د (1) شکل په (a,b) انتروال کې د x_0، x_1 او x_2 په ټکو کې د رسم شویو مماسونو میلونه د (2) شکل له مماسونو سره پرتله کړئ.
- په (1) او (2) شکلونو کې تر ټولو لوړ ټکی او تر ټولو ټیټ ټکی په ګوته کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- په پورته شکلونو کې وښيي چې کومه تابع په کومه ساحه کې متزايده او په کومه ساحه کې تابع متناقصه ده؟
- په متزايده، متناقصه او ثابته تابع کې مشتق و څېړئ.

د پورته فعاليت پايله داسې بيانوو:

1- که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انتروال کې متمادي او په (a,b) انتروال کې د مشتق وړ وي، نو که چېرې په ورکړل شوي انتروال کې $f'(x)>0$ وي، تابع په هغه انتروال کې متزايده بلل کېږي.

2- که چېرې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انتروال کې متمادي او د (a,b) په انتروال کې د مشتق وړ وي که په ورکړ شوي انتروال کې $f'(x)<0$ وي، نو تابع په هغه فاصله کې متناقصه بلل کېږي.

يادونه: د تابع له تزايد څخه مطلب دا دی چې د x د متحول قيمت په زياتېدو سره د تابع قيمت زيات او د تابع له تناقص څخه مطلب دا دی چې د x د متحول د قيمت په زياتېدو سره د y يا تابع قيمت کم پاتې شي.

لومړی مثال: وښيئ چې د $f(x)=x^3+3x+1$ تابع گراف متزايد ده.

حل: څرنگه چې تابع کسري بڼه نه لري، نو ټول حقيقي عددونه د تعريف ساحه کېدای شي او هم پوهېږو چې د تابع د تزايد شرط $f'(x)>0$ دی، نو لازمه ده چې د تابع مشتق تر مطالعې لاندې ونيسو:

$$f(x)=x^3+3x+1$$

$$f'(x)=3x^2+3$$

ليدل کېږي چې د مشتق لومړی حد تام مربع دی، نو د x د ټولو قيمتونو لپاره همېشه مثبت دی. کله چې (+3) ورسره جمع شي بيا هم قيمت يې مثبت دی، نو د $f'(x)>0$ دی، نو تابع متزايده ده.

دويم مثال: د $f(x)=x^3-3x+5$ تابع په کوم انتروال کې متناقصه ده؟

حل: څرنگه چې د $f(x)$ تابع په هر انتروال کې متمادي او د مشتق وړ ده، نو د متناقص تابع لپاره لرو $f'(x)<0$ دی، يعنې:

$$f'(x)=3x^2-3<0$$

$$f'(x)=0$$

$$3x^2-3=0$$

$$3x^2=3$$

$$x=\pm1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیدل کېږي چې د تابع مشتق د $-1 < x < 1$ په انټروال کې منفي دی، نو تابع په همدې انټروال کې $(-1,1)$ متناقصه ده.

دریم مثال: د $f(x) = 5x - 4$ تابع تحولات وڅېړئ.

حل: لومړی د تابع د تعریف ساحه پیدا او وروسته د تابع د تزاید شرط په کې څېړو:

$$D_f \to IR$$
$$f(x) = 5x - 4$$
$$f'(x) = 5 > 0$$

څرنګه چې $f'(x) > 0$ نو د ټولو قیمتونو لپاره همېشه مثبت دی. نو تابع متزایده ده.

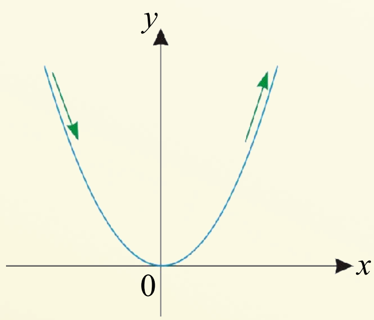
څلورم مثال: د $y = x^2$ د تابع ګراف ته ځیر شئ او وښیئ چې ورکړل شوي تابع په کوم انټروال کې متزایده او په کوم انټروال کې متناقصه ده.

حل: پوهېږو چې که تابع متناقصه وي $y' < 0$ او که تابع متزایده وي $y' > 0$ څخه دی، نو لیکلای شو چې:

$y = x^2 \Rightarrow y' = 2x$

د تناقص شرط $y' < 0 \Rightarrow 2x < 0 \Rightarrow x < 0$

د تزاید شرط $y' > 0 \Rightarrow 2x > 0 \Rightarrow x > 0$



x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
y'	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y	$+\infty \searrow$	$4 \searrow$	$1 \searrow$	$0 \nearrow$	$1 \nearrow$	$4 \nearrow$	$+\infty$

د تابع له ګراف څخه لیدل کېږي چې تابع د $(-\infty, 0)$ په انټروال کې متناقصه او په $(0, +\infty)$ انټروال کې متزایده ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- د $f(x)=ax+b$ د تابع تحولات وښیئ؟

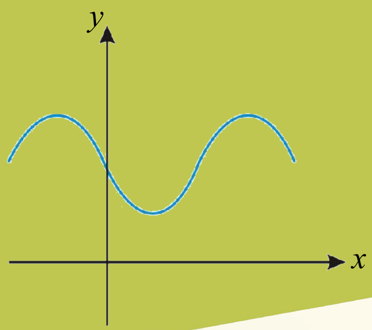
2- د $y=\frac{-3}{4}x-1$ د تابع تحولات وښیئ؟

3- وښیاست چې د $f(x)=2x^2+3x+1$ تابع په کوم انټروال کې متزایده ده؟

4- د $y=x^2+3x+2$ د تابع د تزاید انټروال و ټاکئ؟

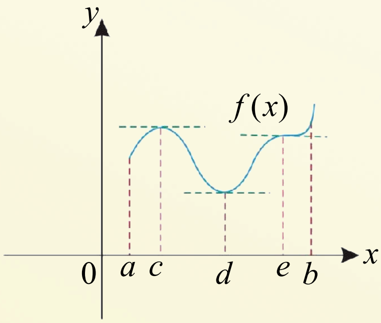
(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوې تابع بحراني (*Critical Point*) ټکي (اعظمي *Maximum* او اصغري *Minimum*)



په مخامخ شکل کې تر ټولو لوړ ټکی او تر ټولو ټیټ ټکی وښیئ او ووایئ چې دا ټکي د څه په نامه یادیږي؟

که په لاندینې شکل کې د $f(x)$ تابع د (a,b) په انټروال کې د مشتق وړ وي.



- د متحول د قیمت په زیاتوالي په کوم انټروال کې د تابع قیمت لوېږي.
- د متحول د قیمت په کموالي په کوم انټروال کې د تابع قیمت کمیږي.
- د تابع تحولات په (c,d) او (d,e) انټروال کې وڅېړئ.
- د $f(x)$ تابع مشتق په کومو ټکو کې له صفر سره مساوي دی.

د پورته فعالیت پایله داسې بیانوو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

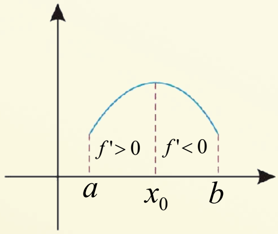
د يوې تابع په ګراف کې د y پر محور تر ټولو لوړې نقطې ته اعظمي(maximum) او تر ټولو ټيټې نقطې ته د تابع اصغري(minimum) نقطه وايي، د x د هغو قيمتونو لپاره چې تابع اعظمي او يا اصغري قيمتونه اخلي د بحراني(*Critical Point*) نقطو په نامه ياديږي.

تعريف:

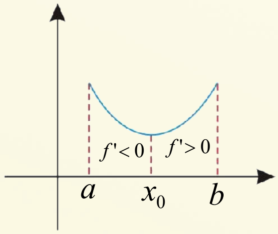
1- **ثابته تابع**: که چېرې د يوې تابع لومړی مشتق هميشه له صفر سره مساوي وي تابع ته ثابته تابع وايي.

2- **متزايده تابع**: که چېرې د يوې تابع لومړی مشتق د (a,b) په فاصله کې مثبت وي تابع په هغه فاصله کې متزايده بلل کېږي، يعنې $y'>0$ چې په لاندې شکلونو کې ليدل کېږي.

3- **متناقصه تابع**: که چېرې د يوې تابع لومړی مشتق د (a,b) په فاصله کې منفي وي يعنې $y'<0$ وي، تابع په هغه فاصله کې متناقصه بلل کېږي چې په لاندې شکلونو کې ليدل کېږي.



(1)



(2)

1- **اعظمي ټکی**: که چېرې د $y=f(x)$ تابع د x_0 په معين ټکي کې د تزايد له حالت څخه د تناقص حالت ته بدل شي يا په بل عبارت د x_0 په دې معين ټکي کې د مشتق اشاره له مثبت څخه منفي ته بدله شي د x_0 په نقطه کې د تابع قيمت د اعظمي(maximum) په نامه ياديږي.

2- **اصغري ټکی**: که چېرې د $y=f(x)$ تابع د x_0 په معين ټکي کې د تناقص له حالت څخه تزايد حالت ته بدل شي يا په بل عبارت د x_0 په دې معين ټکي کې د مشتق اشاره له منفي څخه مثبت ته بدله شي د x_0 په نقطه کې د تابع قيمت د اصغري (minimum) په نامه ياديږي.

3- **د انعطاف ټکی**: که چېرې مشتق خپله اشاره د x_0 په يوه معين ټکي کې له مثبت څخه صفر ته او بيا مثبت ته يا له منفي څخه صفر او بيا منفي ته بدله کړي x_0 د انعطاف د نقطې *Inflection Point* په نامه ياديږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د $f(x)=x^3-\frac{7}{2}x^2+2x$ تابع راکړل شوی ده دا تابع څو د (Extreme) ټکي لري.

حل: د تابع لومړی مشتق پیداکوو بیا هغه مساوي په صفر وضع کوو او د x قیمتونه په لاس راوړو.

$$f'_{(x)}=3x^2-7x+2$$

$$f'(x)=0$$

$$3x-1=0 \Rightarrow x_1=\frac{1}{3}$$

$$x-2=0 \Rightarrow x_2=2$$

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		2	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{17}{54}$	↘	-2 |	↘	-2	↗ $+\infty$
			Max				Min	

په پایله کې ویلای شو چې اصلي تابع دریمه درجه ده، نو د $f(x)$ د تابع مشتق د $(\frac{1}{3})$ او (2) په دوو نقطو کې خپله علامه بدلوي، نو دوه بحراني(Extreme) ټکي لري.

دویم مثال: د $f(x)=\frac{x+1}{x^2-2x}$ تابع موضعي Extreme ټکي یا نسبتي ټکي مشخص کړئ.

حل: لومړی د تابع مشتق په لاس راوړو، وروسته یې علامې ټاکو:

لیدل کیږي چې تابع د $y=\frac{u}{v}$ شکل لري، نو $y'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$$f(x)=\frac{x+1}{x^2-2x}$$

$$f'(x)=\frac{x^2-2x-(2x-2)(x+1)}{(x^2-2x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-x^2-2x+2}{(x^2-2x)^2}$$

دیوه کسر قیمت هغه وخت له صفر سره مساوي دی چې د تابع صورت مساوي له صفر سره وي.

$$f'(x)=0 \quad \Rightarrow -x^2-2x+2=0$$

$$\Delta=b^2-4ac=12$$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2+\sqrt{12}}{-2}=-2.73$$

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2-\sqrt{12}}{-2}=0.73$$

x		-3		-2.73		-1		0.73		1	
$f'(x)$	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$
$f(x)$	↘	$-\frac{2}{15}$	↘	Min	↗	0	↗	Max	↘	-2	↘

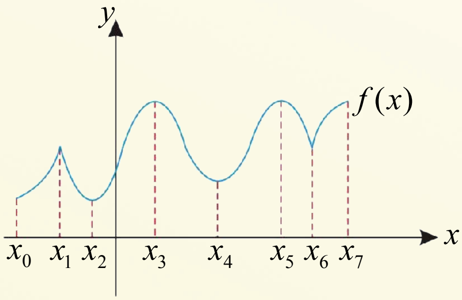
(c) ketabton.com: The Digital Library

په جدول کې ښکاري چې f' د x_1 او x_2 دواړو خواوو ته خپله علامه بدلوي، نو تابع دوه بحراني Extreme ټکي لري، يعنې تابع اعظمي او اصغري ټکي لري.

مطلق اعظمي او مطلق اصغري ټکي Absolute Maximum & Absolute Minimum

کېدای شي يوه تابع په يوه انټروال کې څو موضعي بحراني ټکي ولري، خو په يوه ټاکلي انټروال کې تابع يوازې يوه مطلقه اعظمي او يوه مطلقه اصغري نقطه لري. په شکل کې يې وښيئ؟

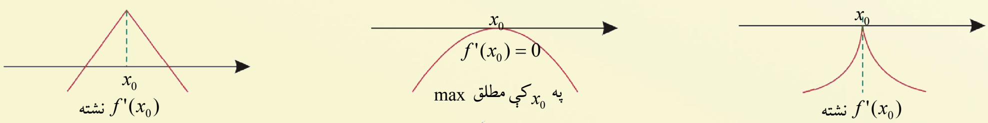
لاندينی شکل ته ځير شي:



- د $f(x)$ په تابع کې اعظمي او اصغري ټکي وښيئ.
- د $f(x)$ تابع بحراني ټکي په ګوته کړئ.
- پورتنی تابع په ورکړل شوي انټروال کې څو موضعي بحراني ټکي لري.
- پورتنی تابع په ورکړل شوي انټروال کې څو اصغري او اعظمي لري.

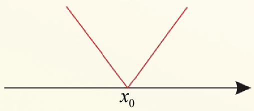
د پورته فعاليت پايله داسې بيانوو:

مطلق اعظمي Absolute Maximum: په عمومي ډول د $(x_0, f(x_0))$ ټکی مطلق اعظمي بلل کېږي، که چېرې د $f(x)$ د تعريف په ساحه کې د هر x لپاره $f(x) \le f(x_0)$ وي، نو $f(x_0)$ ته مطلق اعظمي وايي لاندې شکلونه وګورئ.

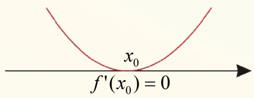


(c) ketabton.com: The Digital Library

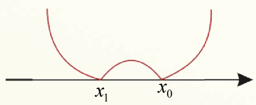
مطلق اصغري Absolute Minimum: په عمومي ډول د $(x_0, f(x_0))$ نقطه مطلقه اصغري بلل کېږي، که چېرې د f د تعریف په ساحه کې د هر x لپاره $f(x) \geq f(x_0)$ وي، نو په دې حالت کې $f(x_0)$ ته مطلقه اصغري وايي، د x هغه قيمتونه چې د هغوی لپاره تابع يا اعظمي او يا اصغري قيمتونه اخلي د x دغه قيمتونه د Extreme په نامه يادېږي.



$f'(x_0)$ نشته



په x_0 کې مطلق min

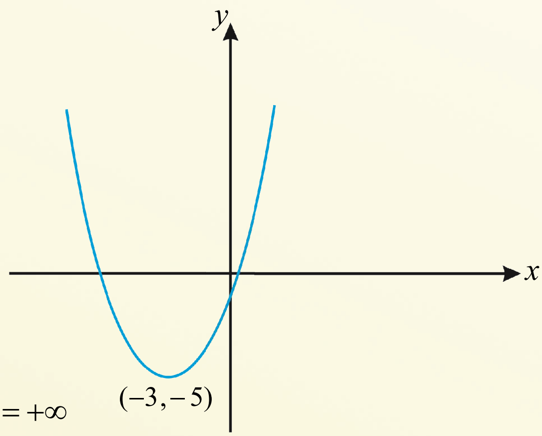


$f'(x_0)$ او $f'(x_1)$ نشته

لومړی مثال: د $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{2}$ د تابع مطلق اصغري پيداکړئ.

حل: د $f(x)$ د تابع مشتق نيسو او د مشتق د تابع حلونه په لاس راوړو:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{2}$$
$$f'(x) = x + 3$$
$$f'(x) = 0$$
$$x + 3 = 0$$
$$x = -3$$
$$f(-3) = -5$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{2}\right) = +\infty$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty} x^2 + 3\lim_{x\to\infty} x - 1\lim_{x\to\infty} \frac{1}{2} = +\infty$$



x	$-\infty$		-4		-3		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\frac{9}{2}$	↘	-5 Min	↗	3	↗	$\frac{15}{2}$	↗	$+\infty$

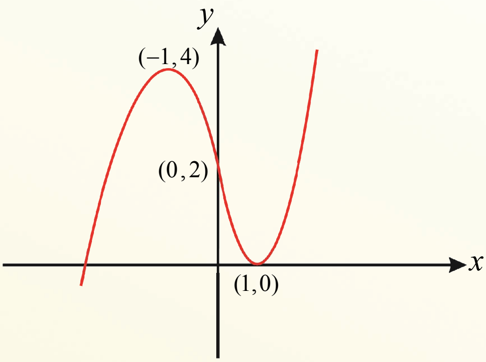
په پايله کې د $x = -3$ په ټکي کې چې د تابع قيمت (-5) دی او تابع په $(-3, -5)$ ټکي کې مطلق اصغري لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم مثال: د $f(x)=x^3-3x+2$ د تابع اعظمي او اصغري ټکي پيدا او رسم يې کړئ.

حل: د اعظمي او اصغري ټکو د پيدا کولو لپاره لومړی د تابع لومړی مشتق پيدا او بيا د مشتق د تابع صفري ټکي په لاس راوړو.

$$f(x)=x^3-3x+2$$
$$f'(x)=3x^2-3$$
$$f'(x)=0$$
$$3x^2-3=0$$
$$3x^2=3$$
$$x^2=1$$
$$x_1=1 \quad , \quad x_2=-1$$
$$f(-1)=(-1)^3-3(-1)+2$$
$$=-1+3+2$$
$$=4$$
$$f(1)=1^3-3\cdot1+2=1-3+2=0$$
$$f(0)=0-3\cdot0+2=2$$
$$f(2)=2^3-3\cdot2+2=4$$
$$f(1)=0 \quad , \quad f(0)=2 \quad , \quad f(-1)=4$$
$$Max\ f(-1)=4 \qquad Min\ f(1)=0$$



x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		+		+	0	−		−	0	+		+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-\frac{5}{6}$	↗	4	↘	2	↘	0	↗	4	↗	$+\infty$
					Max				Min				

له جدول څخه ليدل کېږي چې تابع د $(-\infty,-1)$ او $(1,+\infty)$ په انټروالونو کې متزايده او $(-1,1)$ په انټروال کې متناقصه ده، نو د $(1,0)$ نقطخ اصغري او د $(-1,4)$ نقطه اعظمي ده.

د يوې تابع د گراف رسموولو لپاره لاندې ټکي بايد په پام کې ونيسو:

1. د تابع متماديت او نامتماديت مطالعه کړو.
2. د قايمو محورراتو سره د گراف تقاطع.
3. د لومړي مشتق د اشارې مطالعه د تابع د تزايد او تناقص لپاره.
4. د تابع د اعظمي او اصغري ټکو لپاره د مشتق صفري ټکي پيدا کول.
5. د مجانبونو ټاکل.
6. د جدول ترتيبول او د هغوی په مرسته د گراف رسمول.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم مثال: د $y = 2 + x - x^2$ تابع گراف رسم کړئ؟

حل: لیدل کېږي چې تابع د متحول د ټولو قیمتونو لپاره تعریف شوي ده.

1- ددې تابع د تقاطع ټکی د x او y له محورونو سره پیداکوو:

د y له محور سره د گراف تقاطع د ټکو د پیداکولو لپاره په ورکړشوي تابع کې $x = 0$ وضع کوو:

$$x = 0 \qquad y = 2 + 0 - 0 = 2$$

نو پورتنی گراف د y محور په $(0,2)$ نقطه کې قطع کوي.

د x د محور سره دگراف د تقاطع د ټکو دپیدا کولو لپاره y مساوي په صفر وضع کوو او د x قیمت پیداکوو:

$$y = 0 \ , \ 2 + x - x^2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 2}}{-2} = -\frac{-1 \pm 3}{2}$$

$$x_1 = -1 \ , \ x_2 = 2$$

نو پورتنی گراف د x محور په $(-1,0)$ او $(2,0)$ نقطو کې قطع کوي.

2- د تابع اعظمي او اصغري ټکي پیداکوو، ددې کار لپاره دتابع اول او دویم مشتق څېړو.

$$y = 2 + x - x^2$$

څرنگه چې د تابع په اعظمي او اصغري نقطو کې د تابع لومړی مشتق صفر دی نو $y' = 0$ سره وضع کوو:

$$y' = 1 - 2x$$

$$y' = 0 \ ، \quad 1 - 2x = 0$$

$$-2x = -1 \ \Rightarrow \ 2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

تابع په $x = \frac{1}{2}$ نقطه کې یو اعظمي یو یا اصغري قیمت لري، دهغې دپیژندنې له پاره دتابع دویم مشتق په $x = \frac{1}{2}$ ټکو کې څېړو:

$$y'' = -2 < 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

خرنګه چې y'' تل منفي دی، نو په $x=\frac{1}{2}$ کې هم منفي دی، ځکه نو تابع په $x=\frac{1}{2}$ ټکی کې یو اعظمي قیمت لري خرنګه چې د $x=\frac{1}{2}$ لپاره $y=2+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=2\frac{1}{4}$ کېږي، نو د تابع اعظمي نقطه داده:

$(\frac{1}{2}، 2\frac{1}{4})$

دامنحني دانعطاف نقطه نه لري، ځکه چې دهر x لپاره $y''<0$ دی.

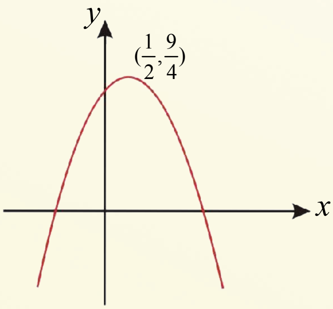
3- په $\pm\infty$ کې دګراف څېړل:

$$\lim_{x\to\infty} y=\lim_{x\to\infty}(2+x-x^2)=\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty}(2+x-x^2)=-\infty$$

د زیاتي روښانتیا لپاره لاندي جدول ترتیب شوی، او د تابع ټول بدلونو نه په هغوکې په ګوته کوو او وروسته نوموړی ګراف رسموو.

x		-1		$\frac{1}{2}$		2	
y'	$+$		$+$	0	$-$		$-$
y	↗	0	↗	$2\frac{1}{4}$	↘	0	↘



پوښتني

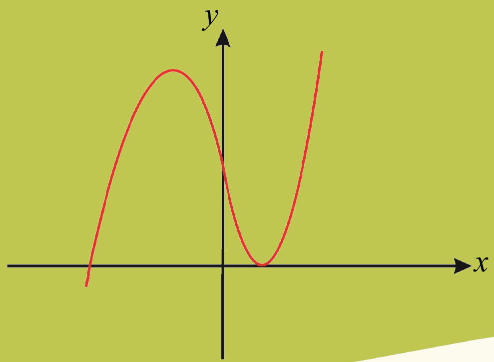
1- د لاندي توابعو موضعي Extreme ټکی و ټاکئ.

$a)\ f(x)=x^2-3x+2$ $\qquad b)\ f(x)=\frac{x+1}{x^2}$ $\qquad c)\ y=3x^2-4x+1$

2- د $f(x)=3x^3-4x^2$ د تابع مطلقه min پیدا کړئ.

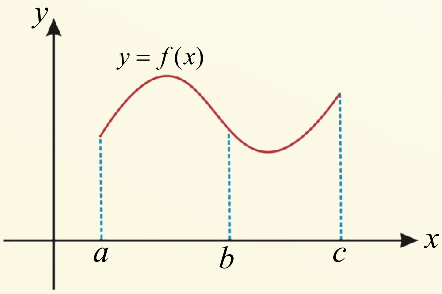
(c) ketabton.com: The Digital Library

د انعطاف د نقطې ټاکل



هغه ټکي چې د يوې تـابع ګـراف پـه هغې کـې خپل محدبيت، مقعريت ته او يا ددې پـر عکـس بـدلوي د څه په نامه يادېږي؟ آيا په دې ټکي کې د دويـم مـشتق علامه او قيمت څېړلای شئ؟

لاندینی شکل په پام کې ونيسئ.

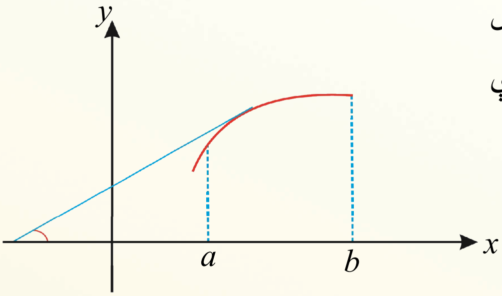


- د $y = f(x)$ د تابع منحني د (a, b) په انټروال کې څه ډول منحني بلل کېږي؟
- د $y = f(x)$ د تابع منحني د (b, c) په انټروال کې څه ډول منحني بلل کېږي؟
- د (a, b) په انټروال کې په منحني يو مماس رسم کړئ او لـه هغـه ممـاس سـره يـې پرتلـه کـړئ چـې د (b, c) په انټروال کې په منحني رسمېږي.

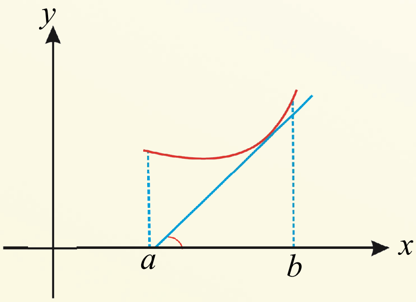
د پورتني فعالیت پايله داسې بيانوو:

1. د $y = f(x)$ تابع منحني په يوه انټروال کې پرسيدلی يا محدب بلل کېږي، کـه چېـرې پـه دې انتـروال کې په منحني مماس رسم شي، نو مماس د منحني له پاسه يا پورته خواتـه پـروت وي، پـه دې صـورت کې د تابع دويم مشتق منفي $y'' < 0$ په لاس راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



په دې ډول که د $y = f(x)$ د تابع دويم مشتق د انټروال په ټولو ټکوکې منفي وي، نو د تابع ګراف يا منحني په دې انټروال کې محدب پاتې کيږي.



2. د $y = f(x)$ د تابع منحني په يوه انټروال کې ننوتي يا مقعره بلل کيږي، که چيرې په نوموړي انټروال کې په منحني مماس رسم شي، نو مماس له منحني څخه لاندې يا ښکته خوا پروت وي، که د $y = f(x)$ د تابع دويم مشتق د انټروال په ټولو ټکوکې مثبت $y'' > 0$ وي، منحني په دې انټروال کې مقعره بلل کيږي.

تعريف: هغه نقطه چې تابع له مقعريت څخه محدبيت ته او يا ددې پر عکس جهت بدلوي، او لومړی مشتق يې موجود او دويم مشتق يې صفر شي د انعطاف (Inflection) نقطه بلل کيږي.

که د $y = f(x)$ تابع د $x = x_0$ په ټکي کې چې د تابع دويم مشتق صفر شي ($f''(x_0) = 0$) وي تابع د $x = x_0$ په ټکي کې د انعطاف نقطه لري او ددې برعکس تابع د انعطاف نقطه نه لري.

لومړی مثال: د $f(x) = x^2 - 5x + 4$ د تابع ګراف رسم محدبيت او مقعريت يې وڅيړئ.

حل: تابع د متحول د ټولو قيمتونو لپاره تعريف شوې ده.

1- د y له محورسره تقاطع

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow (0,4)$$

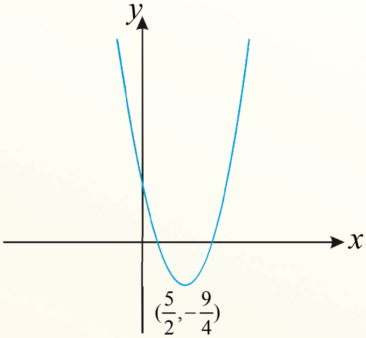
2- د x له محورسره تقاطع

$$\left.\begin{array}{l} y = 0 \\ x^2 - 5x + 4 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = (x-4)(x-1) \Rightarrow x_1 = 4 \quad , \quad x_2 = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د x له محور سره د تقاطع ټکي $(4,0)$ او $(1,0)$ دي.

x	$-\infty$	0	1	$\frac{5}{2}$	4	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	
$f(x)$	$+\infty \searrow$	$4 \searrow$	$0 \searrow$	$-\frac{9}{4}$ min $\nearrow$	$0 \nearrow$	$+\infty$



د ګراف، مقعریت او محدبیت د څېړلو لپاره د تابع دویم مشتق په لاس راوړو:

$$f(x)=x^2-5x+4 \quad \Rightarrow \quad y'=2x-5$$
$$f''(x)=2>0$$

څرنګه چې $y''>0$ دی، نو په پایله کې ویلای شو چې منحني ننوتې یا مقعره ده.

دویم مثال: هغه انټروالونه وټاکئ چې په هغې کې د $y=x^3+9x^2-6x+1$ تابع ګراف محدب یا مقعر وي.

حل:

$$y=x^3+9x^2-6x+1$$
$$y'=3x^2+18x-6 \quad \Rightarrow \quad y''=6x+18$$
$$y''<0 \quad \Rightarrow \quad 6x+18<0$$
$$6x<-18 \quad \Rightarrow \quad x<-3$$
$$y''>0 \quad \Rightarrow \quad 6x+18>0$$
$$6x>-18$$
$$x>-3$$

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
y''	$-$	0	$+$
y	$\cap$		$\cup$

مقعر انعطاف محدب

څرنګه چې لیدل کېږي د تابع دویم مشتق په $(-\infty,-3)$ انټروال کې منفي او د $(-3,+\infty)$ انټروال کې مثبت دي، نو دا ډول ګراف په لومړي انټروال کې محدب او په دویم کې مقعر دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم مثال: د $f(x)=x^5-5x^3$ د تابع د انعطاف ټکی و ټاکئ؟

حل:

$$f(x)=x^5-5x^3 \quad \Rightarrow \quad f'(x)=5x^4-15x^2$$
$$f''(x)=20x^3-30x$$
$$f''(x)=0$$
$$20x^3-30x=0$$
$$x(20x^2-30)=0$$
$$x_1=0$$
$$20x^2-30=0$$
$$x^2=\frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad x_2=\sqrt{\frac{3}{2}} \quad , \quad x_3=-\sqrt{\frac{3}{2}}$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{3}{2}}$		0		$\sqrt{\frac{3}{2}}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\cap$	-13.65	$\cup$		$\cap$	$-6\sqrt{\frac{3}{2}}$	$\cup$	

لیدل کېږي چې په $x=\sqrt{\frac{3}{2}}$ او $x=0$ ، $x=-\sqrt{\frac{3}{2}}$ کې د تابع دویم مشتق صفر دی یا $f''(x)=0$ علامه بدلوي او په دې ټکو کې مماس رسمیدلی شي چې هغه ټکی د انعطاف ټکی دی.

پوښتنې

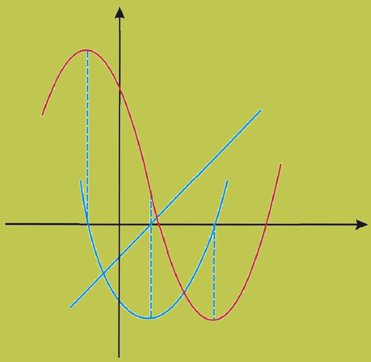
1. د $f(x)=x^2-4$ د تابع محدبیت او مقعریت وټاکئ.
2. د $f(x)=-2x^2-1$ د تابع د انعطاف نقطه وټاکئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د منحنيگانو رسمول

د دويمې درجې تابعگانو گراف

د مخامخ شکل په اړه خپل نظر بيان کړئ.



فعاليت

- د $f(x)=x+1$ د تابع گراف د $f(x)=-x+1$ د تابع له گراف سره پرتله کړئ.
- د $y=ax^2+bx+c$ د تابع د تعريف ساحه و ټاکئ آيا دا تابع متمادي ده؟
- د نومړې تابع لومړی مشتق پيدا او د Maximum او Minimum ټکي او د تناظر محور يې وټاکئ.
- د تابع ليميټ په هغه صورت کې پيدا کړئ چې $x\to\pm\infty$ وکړي.
- له محورونو سره د تقاطع ټکي و ټاکئ.
- د تحولاتو جدول ترتيب او نومړی منحني رسم کړئ.

د پورته فعاليت پايله داسې بيانوو:

1- د تابع د تعريف ساحه: ليدل کيږي چې تابع د متحول د ټولو قيمتونو لپاره تعريف شوی ده، يعنې:

$$D_f\to(-\infty,+\infty)$$

نو تابع د خپل تعريف په ساحه کې متمادي ده.

2- د تابع د بحراني ټکو او د تناظر محور ټاکل:

$$f'(x)=2ax+b=0$$
$$f'(x)=0$$
$$2ax+b=0$$
$$2ax=-b$$
$$x=\frac{-b}{2a}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $x=\frac{-b}{2a}$ قیمت په اصل تابع کې وضع کوو:

$$y=a(-\frac{b}{2a})^2+b(-\frac{b}{2a})+c \Rightarrow a\cdot\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{2a}+c=0$$

$$y=\frac{b^2-2b^2+4ac}{4a}=\frac{-b^2+4ac}{4a} \Rightarrow \frac{4ac-b^2}{4a}$$

د $(-\frac{b}{2a}\ ,\ \frac{4ac-b^2}{4a})$ ټکی بحراني يعنې اعظمي يا اصغري دی.

الف: که $a>0$ وي، نو: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \quad \Rightarrow \quad a>0$

تابع په $(\frac{-b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$ ټکي کې Min لري.

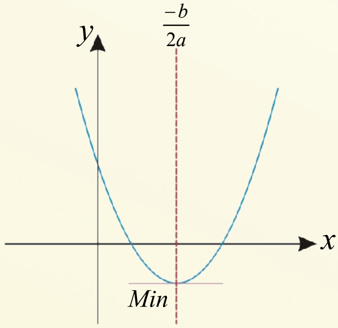
ب: که $a<0$ وي، نو: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \quad \Rightarrow \quad a<0$

تابع په $(\frac{-b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$ ټکي کې Max لري.

3- د ګراف د رسمولو لپاره جدول ترتیب او ګراف يې رسموو:

$a>0$

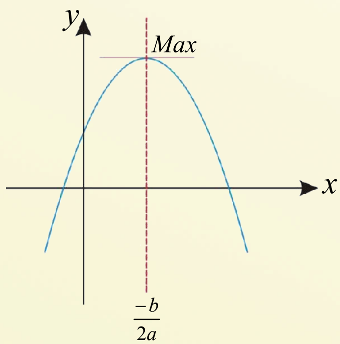
x	$-\infty$		$\frac{-b}{2a}$		$+\infty$
y'		$-$		$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{4ac-b^2}{4a}$	$\nearrow$	$+\infty$



څرنګه چې $a>0$ د منحني خوله(جهت) پورته خواته او د $(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4})$ اصغري نقطه ده.

$a<0$

x	$-\infty$		$\frac{-b}{2a}$		$+\infty$
y'		$+$		$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{4ac-b^2}{4a}$	$\searrow$	$-\infty$



څرنګه چې $a<0$ د منحني خوله(جهت) ښکته خواته او د $(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4})$ اعظمي نقطه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د $f(x)=x^2-4x+3$ د تابع تحولات مطالعه او ګراف يې رسم کړئ.

حل:

1- د تابع د تعريف ساحه $(-\infty,+\infty)$ تا بع د ټولو حقيقي قيمتونو لپاره تعريف شوي ده، نو تـابع پـه دې انتـروال کې متمادي ده.

2- د تابع د منحني تقاطع د x له محور سره:

$$\left.\begin{aligned} &y=0\\ &x^2-4x+3=0\\ &(x-1)(x-3)=0\\ &x-1=0 \;\Rightarrow\; x=1\\ &x-3=0 \;\Rightarrow\; x=3 \end{aligned}\right\} \quad (1,0)\quad , \quad (3,0)$$

3- د تابع د منحني تقاطع د y له محور سره:

$$\left.\begin{aligned} &x=0\\ &y=0-4\cdot 0+3\\ &y=3 \end{aligned}\right\} \quad (0,3)$$

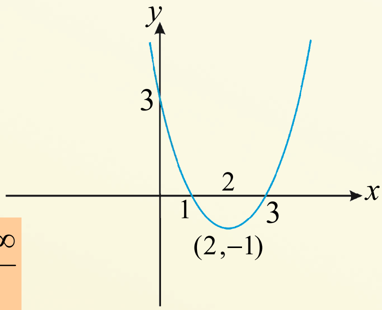
4- د تابع د extreme ټکو د پيداکولولپاره د لومړي مشتق صفري ټکي پيدا او جدول يې ترتيبوو:

$$f'(x)=2x-4=0 \;\Rightarrow\; 2x=4 \;\Rightarrow\; x=2$$

$$f(2)=2^2-4\cdot 2+3=-1 \;\Big\}\; \Rightarrow V(2,-1)\min$$

$$x\to\pm\infty \;\Rightarrow\; f(x)\to\pm\infty$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left[x^2-4x+3\right]=+\infty$$



x	$-\infty$		0		1		2		3		$+\infty$
y'		−		−		−		+		+	
y	$-\infty$	↘	3	↘	0	↘	−1	↗	0	↗	$+\infty$

Min

دويم مثال: د $f(x)=-x^2+2x$ د تابع تحولات مطالعه او ګراف يې رسم کړئ.

حل: ليدل کېږي چې تابع د ټولو قيمتونو لپاره تعريف شوي ده، نو:

1- د تابع د تعريف ساحه عبارت ده له: $(-\infty,+\infty)$ چې په دې ساحه کې تابع متمادي ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- د تابع د منحني د تقاطع ټکی د x له محور سره:

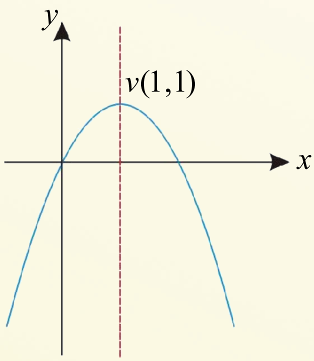
$$f(x)=0$$
$$-x^2+2x=0$$
$$x(-x+2)=0$$
د تقاطع ټکی
$$x_1=0 \qquad (0,0)$$
$$-x+2=0$$
$$x_2=2 \qquad (2,0)$$

3- د تابع د منحني تقاطع د y له محور سره:

$$x=0$$
$$f(x)=-x^2+2x$$
$$f(x)=0+2\cdot 0$$
$$f(x)=0 \qquad (0,0)$$

4- د تابع د extreme نقطو د پیداکولو لپاره د تابع لومړی مشتق پیداکوو او جدول یې ترتیب او ګراف یې رسموو:

$$D_f \to (-\infty,+\infty)$$
$$f(x)=-x^2+2x$$
$$f'(x)=-2x+2=0$$
$$-2x+2=0$$
$$-2x=-2$$
$$\left.\begin{array}{l} x=1 \\ f(1)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow V(1,1)Max$$



x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		+		+		−		−	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	1 (Max)	↘	0	↘	$-\infty$

په جدول کې لیدل کېږي چې د مشتق علامه د مثبت څخه منفي ته او یا د تزاید حالت څخه تناقص ته شکل بدلوي، نو تابع د $(1,1)$ په ټکي کې اعظمي ده.

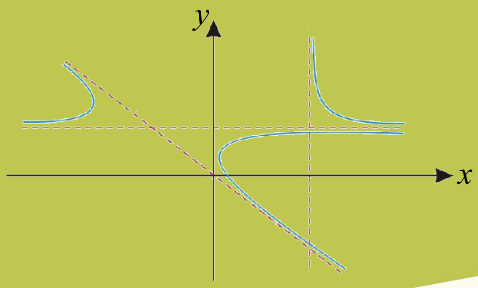
پوښتنې

1. د $f(x)=2x^2-x-1$ د تابع ګراف رسم کړئ.
2. د $f(x)=x^2-x-2$ د تابع د ګراف بدلونونه وڅېړئ او ګراف یې رسم کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د توابعو د ګرافونو مجانبونه

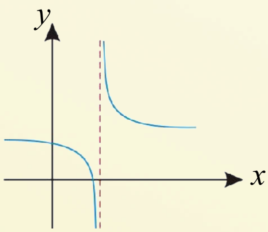
شکل ته پام وکړئ ټکی ټکی کرښې د څه په نامه یادېږي، نومونه یې واخلئ.



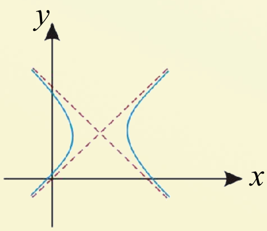
- مجانبونه څه ډول کرښې دي؟
- مجانبونه، منحنيګانې په کومو ټکو کې قطع کوي؟

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

مجانبونه: هغه مستقیمې کرښې دي چې د منحني د ګراف لپاره د لارښود حیثیت لري او د منحني کرښه قطع کړي، هغه تابع ګانې چې د متحول د ځینو قیمتونو لپاره غیر متمادي وي، مجانبونه لري او په دریو ډوله دي.



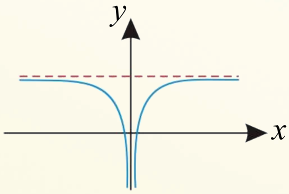
1- **عمودي مجانب**: د $y = f(x)$ تابع عمودي مجانب لري چې $x \to a$ او $y \to \infty$ وکړي، یعنې $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ شي یا په بل عبارت په کسري تابع ګانو کې که چېرې د کسر مخرج مساوي په صفر شي، نوموړې تابع بې‌نهایت خوا ته تقرب کوي، نو ددې ډول مجانب د پیداکولو لپاره د کسر مخرج له صفر سره مساوي وضع کوو.



2- **مایل مجانب**: د $y = f(x)$ کسري تابع کله چې د صورت او مخرج د تقسیم حاصل د یوه مستقیم خط په شکل ($y = ax + b$) لاسته راشي داسې چې $a \neq 0$ وي په لاس راځي او دا هغه وخت امکان لري چې تابع د مایل مجانب لرونکې وي، یعنې د متحول د صورت درجه د متحول د مخرج له درجې څخه د یو واحد په اندازه لوړه وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په یاد ولرئ چې که یوه تابع د افقي مجانب لرونکي وي، مایل مجانب نه لري او بر عکس که چېرې مایل مجانب ولري افقي مجانب نه لري.



3- **افقي مجانب**: یوه تابع هغه وخت د افقي مجانب لرونکې ده چې که $x \to \pm\infty$ وکړي د تابع قیمت یو ثابت مقدار شي او یا په بل عبارت یوه تابع هغه وخت د افقي مجانب لرونکې ده چې که $x \to \pm\infty$ وکړي، نو $y \to c$ ته تقرب کوي، یعني $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = c$ شي.

لومړی مثال: د $f(x) = \dfrac{x+1}{2x-4}$ تابع عمودي او افقي مجانب پیدا کړئ.

حل: د عمودي مجانب د پیداکولو لپاره د کسر مخرج مساوي په صفر وضع کوو، لرو چې:

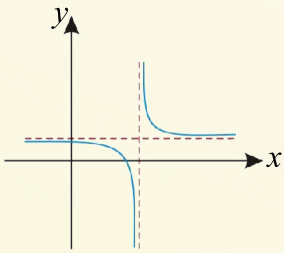
نو $x = 2$ د تابع عمودي مجانب دی.

$$2x-4=0 \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow x=2$$

افقي مجانب عبارت دی له: $y = \dfrac{1}{2}$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x+1}{2x-4}\right) = \frac{1}{2}$$

x	-1	0	$+1$
y	0	$-\dfrac{1}{4}$	-1



دویم مثال: د $y = \dfrac{x^2+2x-1}{x}$ تابع د منحني مجانبونه وټاکئ.

حل:

1- مایل مجانب: ددې مجانب د پیداکولو لپاره د تابع صورت د تابع پر مخرج وېشو:

$$y = \frac{x^2+2x-1}{x} = x+2-\frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad y = x+2$$

2- عمودي مجانب: د دې مجانب د پیداکولو لپاره د تابع مخرج مساوي په صفر وضع کوو:

$$y = \frac{x^2+2x-1}{x} \quad \Rightarrow \quad x=0$$

3- افقي مجانب: څرنګه چې تابع مایل مجانب لري، نو افقي مجانب نه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دريم مثال: د $f(x)=\dfrac{(x-3)(x+2)}{(x+1)(x-2)}$ تابع مجانبونه وټاکئ.

حل:

1- عمودي مجانب: د تابع مخرج مساوي په صفر وضع کوو:

$$(x+1)(x-2)=0$$

$$\left.\begin{array}{l} x+1=0 \\ x_1=-1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x-2=0 \\ x_2=2 \end{array}$$

نو $x=2$ او $x=-1$ د تابع عمودي مجانبونه دي.

2- افقي مجانب: د افقي مجانب د پيداکولو لپاره د تابع لېميټ په لاس راوړو:

$$y=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-3)(x+2)}{(x+1)(x-2)}=1$$

نو $y=1$ د تابع افقي مجانب دی.

3- څرنګه چې تابع افقي مجانب لري، نو مايل مجانب نه لري.

د مجانبونو د ټاکلو عمومي طريقه:

که چېرې د $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ په ناطقه تابع کې m او n په ترتيب سره د صورت او مخرج درجې وي، نو:

الف: که $m<n$ وي، نو د x محور افقي مجانب دی.

ب: که $m=n$ وي، نو $y=b$ افقي مجانب دی، داسې چې b د m او n د درجو د حدودو د ضريبونو نسبت دی.

ج: که چېرې $m>n$ وي، نو افقي مجانب نه لري، ولې د مايل مجانب احتمال يې شته.

د: که چېرې $m=n+1$ وي(که د صورت درجه د يوه واحد په اندازه له مخرج څخه لويه وي) تابع هرو مرو مايل مجانب لري، په دې حالت کې افقي مجانب نه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

د لاندې توابعو مجانبونه وټاکئ.

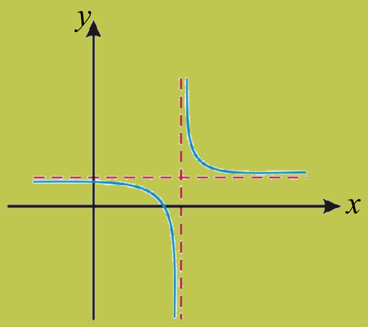
1) $f(x)=\dfrac{3x-6}{x^2-x-2}$ 2) $f(x)=\dfrac{-2x^2}{x^2+1}$

3) $f(x)=\dfrac{8}{x^2-4}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هوموګرافیک تابع ګانو ګراف

شکل ته پاملرنه وکړئ دا شکل د څه ډول تابع ګراف دی؟ افقي او عمودي مجانبونه يې وښيئ.



فعالیت

- هوموګرافیک تابع څه ډول تابع ده، په يوه مثال کې يې واضح کړئ.
- د $y=\frac{1}{x}$ د تابع ګراف رسم کړئ.
- د نوموړي تابع مجانبونه لومړی پیدا او بیا يې رسم کړئ.
- د تابع د ګراف تقاطع د x او y له محورونو سره پیدا کړئ.

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

هغه تابعګانې چې د $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ شکل ولري، هوموګرافیک تابع ګانې بلل کېږي، داسې چې $c\neq 0$ وي. دا ډول توابع دوه مجانبونه لري چې:

1- افقي مجانب يې:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{ax}{x}+\frac{b}{x}}{\frac{cx}{x}+\frac{d}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{a+\frac{b}{x}}{c+\frac{d}{x}} \Rightarrow y=\frac{a}{c}$$

2- عمودي(قایم) مجانب يې:

$$cx+d=0 \Rightarrow cx=-d \Rightarrow x=-\frac{d}{c}$$

لومړی مثال: د $f(x)=\dfrac{2x-1}{x-3}$ د تابع بدلونونه وڅېړئ او ګراف يې رسم کړئ.

حل:

$$x-3=0$$
$$x=3$$

1. څرنګه چې د تابع مخرج د $x=3$ په قیمت کې صفر کېږي، نو تابع پرته له $x=3$ څخه د متحول په ټولو قیمتونو کې معینه ده، یعنې د تابع د تعریف ساحه ټاکو: $Domain=IR\setminus\{3\}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2. د تابع د منحني تقاطع د x له محور سره:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=0 \\ 2x-1=0 \\ 2x=1 \;\Rightarrow\; x=\dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \left(\frac{1}{2},0\right)$$

3. د تابع د منحني تقاطع د y له محور سره:

$$x=0 \;\Rightarrow\; f(0)=\frac{2\cdot 0-1}{0-3}=\frac{1}{3} \quad \Big\} \left(0,\frac{1}{3}\right)$$

4. د مجانبونو ټاکل:

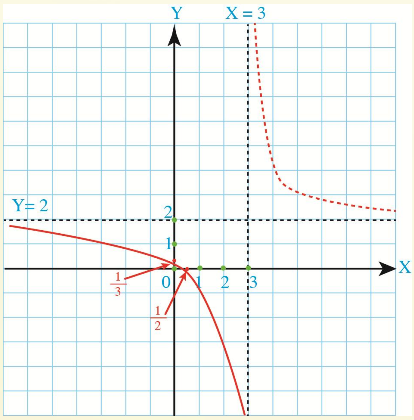
الف- افقي مجانب: $y=2$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x-1}{x-3}=2$ يا $f(x)=\dfrac{a}{c}=\dfrac{2}{1}=2$

ب- عمودي مجانب: $x-3=0 \;\Rightarrow\; x=3$ يا $x=-\dfrac{d}{c}=-\dfrac{-3}{1}=3$

5. د تابع د extreme ټکي پيدا کوو او جدول يې ترتيب اوګراف يې رسموو:

$$f'(x)=\frac{2(x-3)-(2x-1)}{(x-3)^2}=\frac{-5}{(x-3)^2}<0$$

$$f''(x)=\frac{0\cdot(x-3)^2-(-5)\cdot 2(x-3)}{(x-3)^4}=\frac{10(x-3)}{(x-3)^4}=\frac{10}{(x-3)^3}$$



x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$-$
$f''(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$2 \searrow -\infty$	نه دی تعريف شوی	$+\infty \searrow 2$

دويم مثال: د $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ د تابع د ګراف بدلونونه و څيړئ او ګراف يې رسم کړئ.

حل: $x+1=0 \;\Rightarrow\; x=-1$

1- د تابع د تعريف ساحه $D_f \to IR\setminus\{-1\}$ يعني تابع په $x=-1$ ټکي کې تعريف شوې نه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- د تابع د منحني تقاطع د x له محور سره: $y=0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow (1,0)$

3- د تابع د منحني تقاطع د y له محور سره: $x=0 \Rightarrow y=\frac{0-1}{0+1}=-1 \Rightarrow y=-1 \Rightarrow (0,-1)$

4- د مجانبونو ټاکل:

الف- عمودي مجانب: $x+1=0 \Rightarrow x=-1$

ب- افقي مجانب: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-1}{x+1} \Rightarrow f(x)=y=1$

5- د تابع extreme نقطې پیدا کوو، جدول یې ترتیب او ګراف یې رسموو:

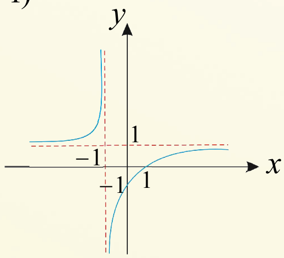
$$f(x)=\frac{x-1}{x+1}$$

$$f'(x)=\frac{1\cdot(x+1)-1\cdot(x-1)}{(x+1)^2}=\frac{x+1-x+1}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}>0$$

$$f''(x)=\frac{0\cdot(x+1)^2-2\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{-4(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{-4}{(x+1)^3}$$

x	$-\infty$	
$f'(x)$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	$1 \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow 1$

نه دی تعریف شوی



دریم مثال: غواړو د $f(x)=\frac{2x-5}{x}$ تابع ګراف رسم کړو.

حل:

1- د تابع د تعریف ساحه تر خېړنې لاندې نیسو لیدل کیږي چې تابع پرته له $x=0$ څخه نور د متحول د ټولو قیمتونو لپاره معینه ده، یعني: $D_f \to IR\setminus\{0\}$

2- د محورونو سره د تقاطع ټکي

الف- د x له محور سره تقاطع:

$$f(x)=0 \Rightarrow \frac{2x-5}{x}=0$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x-5=0 \\ 2x=5 \Rightarrow x=\frac{5}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow (2.5,0)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب- د y له محور سره تقاطع: د $x=0$ لپاره د $f(x)$ تابع تعریف شوي نه ده، نو له y محور سره تقاطع نه لري.

3- **مجانبونه**:

الف- عمودي مجانب: څرنګه چې په مخرج کې یوازې x موجود دی، نو $x=0$ یې عمودي مجانب دی چې د y محور کېږي.

ب- افقي مجانب: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\frac{2x-5}{x}\right]=2$ نو $y=2$ د تابع افقي مجانب دی.

4- د بحراني ټکو پیدا کول: د بحراني ټکو د پیداکولو لپاره د تابع لومړی مشتق پیدا کوو

$$f(x)=\frac{2x-5}{x}$$

$$f'(x)=\frac{2\cdot x-(2x-5)}{x^2}=\frac{2x-2x+5}{x^2}$$

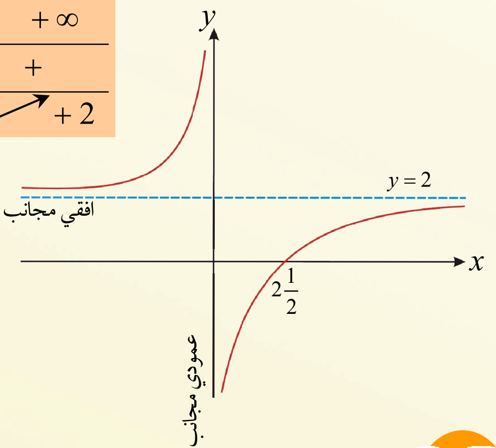
$$f'(x)=\frac{5}{x^2}>0$$

څرنګه چې $f'(x)>0$ دی، نو تابع متزایده ده.

د ګراف د رسمولو لپاره د تابع تحولات په جدول کې ترتیبوو:

x	$-\infty$		0		2.5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$		$+$	
$f(x)$	2	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	0	↗	$+2$

نه دی تعریف شوی



پوښتني

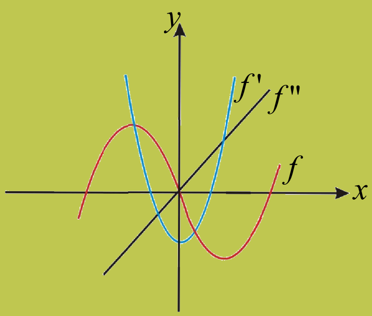
1. د $f(x)=\frac{x-1}{x+3}$ تابع بدلونونه وڅېړئ او رسم یې کړئ.

2. د $f(x)=\frac{x}{x-4}$ تابع بدلونونه وڅېړئ او رسم یې کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دريمې درجې يو مجهوله تابع ګراف $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ، $a \neq 0$

مخامخ شکل د ځینو توابعو ګرافونه راښیي تاسې د هرې تابع د ګراف په هکله خپل نظر بیان کړئ.



- د $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ تابع په اړه فکر وکړئ او ووایئ چې تابع څومه درجه تابع ده؟
- د نوموړې تابع ضریبونه او ثابت حد ولیکئ.
- د نوموړې تابع دویم مشتق پیدا کړئ.

د پورته فعالیت پایله داسې بیانوو:

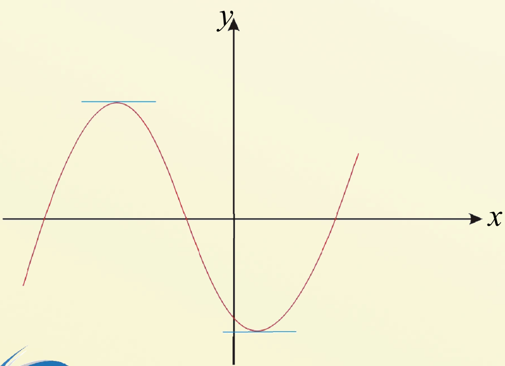
1. د $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ، په دریمه درجه تابع کې چې $a > 0$ وي داسې په پام کې نیسو. که چېرې د تابع لومړی مشتق پیدا کړو دویمه درجه تابع په لاس راځي، نو د $f'(x) = 0$ لپاره د دویمې درجې د معادلې حل په پام کې نیسو او Δ یې مطالعه کوو که چېرې د معادلې Δ له صفر څخه لوی $(\Delta f' > 0)$ وي، نو معادله(د تابع مشتق) دوه حله لري، که چېرې $a > 0$ وي منحنی له کین لوري څخه ښي لوري ته یوه نسبي اعظمي نقطه (Local Maximum) او یوه نسبي اصغـــــــري (Local Minimum) لري.

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$a > 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta f' > 0$

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow$		$\searrow$		$\nearrow +\infty$



(c) ketabton.com: The Digital Library

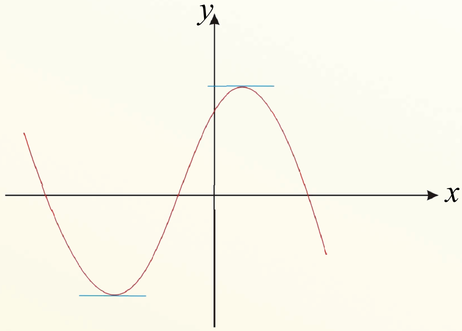
2. د $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ، پـه تـابع کـې چـې کـه $a<0$ ، $f'(x)=0$ او $\Delta f'(x)>0$ معادلـه دوه جذرونـه لـري، کـه چېـرې $\Delta f'>0$ نـو منحنـي لـه کـېن لـوري څخـه ښـی لـوري تـه يـوه نـسبي اصغری(Local Minimum) او يوه نسبي اعظمي(Local Minimum) نقطه لري.

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

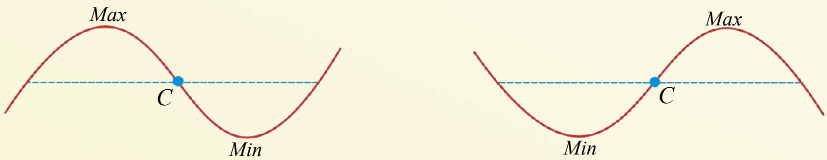
$a<0 \Rightarrow \Delta f'>0$

x		x_1		x_2	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$ ↘		↗		↘ $-\infty$



3. که د دريمې درجې تابع منحنې نسبي بحراني Extreme ولري، د Extreme ډټکو د منځني ټکي يا د انعطاف د نقطې مختصات يې:

$$I(x_c, y_c) = \left(\frac{x_{max}+x_{min}}{2}, \frac{y_{max}+y_{min}}{2}\right)$$



4. د دريمې درجې تابع د تناظر ټکی د تابع د انعطاف ټکی:

$f'(x)=0$

$3ax^2+2bx+c=0$

چې د تناظر ټکي يې وروسته د نوموړي معادلې له حل څخه د تناظر مرکز $x=-\dfrac{b}{3a}$ په لاس راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

5. د $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ په تابع کې که $a<0$ وي او له $f'(x)=0$ سره وضع شي او $\Delta f'(x)=0$ نو معادله یو یا دوه مساوي جذرونه لري په هغه صورت کې چې $f'(x)\le 0$ وي، نو په دې صورت تابع، متناقصه ده او که چیرې $f'(x)\ge 0$ وي، نو په دې صورت کې تابع متزایده ده.

لومړی مثال: د $f(x)=(x-1)(x+2)^2$ تابع تحولات وڅیړئ او ګراف یې رسم کړئ.

حل: لومړی د تابع Extreme ټکو مختصات په لاس راوړو، وروسته د لومړي مشتق په مرسته ګورو چې تابع په کومه برخه کې متزایده او په کومه برخه کې متناقصه ده. له محورونو سره د تقاطع ټکي پیدا کوو او د اعظمي او اصغري نقطو د تشخیص او د انعطاف نقطو د پیدا کولو لپاره د تابع دویم مشتق په کار وړو د تحولاتو جدول یې ترتیبوو او بیا یې ګراف رسموو: $f(x)=x^3+3x^2-4$

$f'(x)=3x^2+6x$

$3x^2+6x=0$

$x(3x+6)=0$

$x_1=0 \quad , \quad 3x+6=0 \quad \Rightarrow \quad x_2=-2$

$f'(x)=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=0 \quad , \quad x_2=-2$

$f(0)=0^3+3\cdot 0^2-4=-4$

$f(-2)=(-2)^3+3(-2)^2-4$

$\quad\quad =-8+12-4=0$

$f''(x)=0 \quad \Rightarrow \quad 6x+6=0$

$6x=-6$

$x=-1$

د انعطاف د نقطې د لاسته راوړلو لپاره $x=-1$ په اصلي تابع کې وضع کوو چې د $f(x)$ قیمت لاسته راځي:

$f(-1)=(-1-1)(-1+2)^2=-2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د انعطاف ټکی: $I(-1,-2)$

له محورونو سره تقاطع:

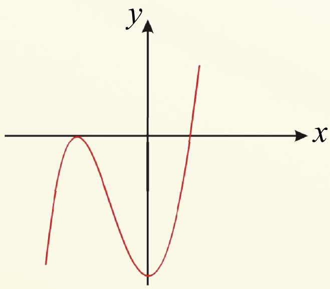
الف- د x له محور سره تقاطع:

$$y = 0$$
$$(x-1)(x+2)^2 = 0$$
$$\left.\begin{matrix} x-1=0 \\ x=1 \\ \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} (x+2)^2=0 \\ x+2=0 \\ x_2=-2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (1,0)\ ,\ \ (-2,0)$$

ب- د y له محور سره تقاطع:

$$x = 0$$
$$y = 0^3 + 3\cdot 0^2 - 4 = -4 \quad \Rightarrow (0,-4)$$

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$		$-$		$+$	
$f''(x)$		$-$		$-$		$+$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	-2	↘	-4	↗	$+\infty$
			max				min		



دويم مثال: د $f(x) = -x^3 + 3x^2$ د تابع تحولات وڅېړئ او ګراف يې رسم کړئ.

حل: د تابع لومړی مشتق پيدا کوو او وروسته يې صفري نقطې ټاکو او د تابع اعظمي او اصغري نقطې په لاس راوړو.

-1

$$f(x) = -x^3 + 3x^2$$
$$f'(x) = -3x^2 + 6x$$
$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \ -3x^2 + 6x = 0 \quad \Rightarrow \ x(-3x+6) = 0$$
$$x_1 = 0 \quad , \quad -3x + 6 = 0 \quad \Rightarrow \ -3x = -6 \quad \Rightarrow \ x_2 = 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اعظمي او اصغري ټکي عبارت دي له:

$$\left.\begin{aligned} f(0) &= -0^3 + 3\cdot 0^2 = 0 \\ f(2) &= -2^3 + 3\cdot 2^2 = 4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (0,0)\ ,\quad (2,4)$$

2- محورونو سره تقاطع:

الف- د x له محور سره تقاطع:

$$\left.\begin{aligned} & y = 0 \\ & -x^3 + 3x^2 = 0 \\ & x^2(-x+3) = 0 \\ & x_1 = 0\ ,\quad -x+3 = 0 \\ & \qquad\qquad x_2 = 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (0,0)\quad ,\qquad (3,0)$$

ب- د y له محور سره تقاطع:

$$\left.\begin{aligned} & x = 0 \\ & f(x) = -0^3 + 3\cdot 0^2 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (0,0)$$

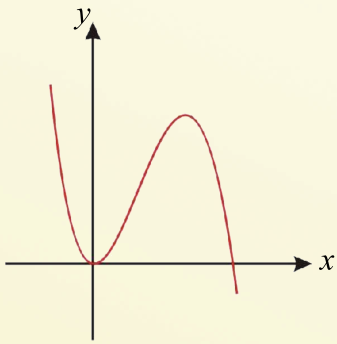
3- د انعطاف د نقطې د پیداکولو لپاره $f''(x)$ مطالعه کوو:

$$f''(x) = -6x + 6 = 0$$
$$x = 1$$
$$f(x) = -x^3 + 3x^2$$
$$f(1) = 2 \quad \Rightarrow \quad I(1,\ 2)$$

4- اوس یې جدول ترتیبوو او ګراف یې رسموو:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$		$-$	
$f''(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗		↗	4	↘	$-\infty$
$f(x)$		∪		∪		∩		∩	

نسبي Min نسبي Max



(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم مثال: د $f(x)=x^3-3x^2+x+1$ د تابع د تناظر د مرکز مختصات پیدا کړئ.

حل: پوهېږو چې د تناظر مرکز د $x=\frac{-b}{3a}$ له رابطې څخه لاسته راځي، نو:

$$x=\frac{-b}{3a}=\frac{-(-3)}{3\cdot 1}=1 \Rightarrow f(1)=1^3-3(1)^2+1+1=0$$

$C(1,0)$ د تناظر د مرکز مختصات

پوښتنې

1. د لاندې تابع ګانو د تحولاتو جدول ترتیب او ګرافونه یې رسم کړئ.

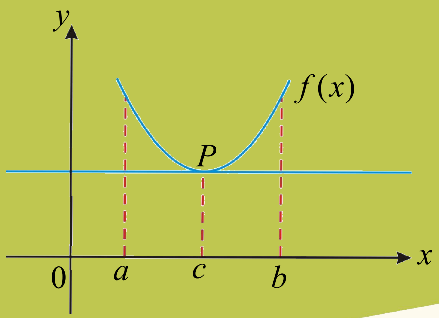
$a)\ f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+x+1 \quad , \quad b)\ f(x)=-(x-1)^3$

2- د $f(x)=-2x^2+6x-3$ د تناظر د مرکز مختصات پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

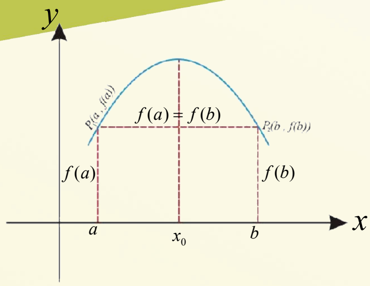
د رول قضیه

Rolle Theorem



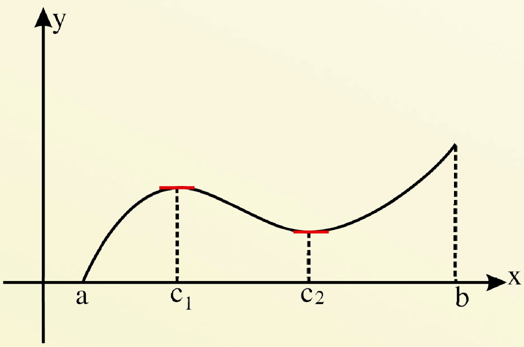
په مخامخ شکل کې د $f(x)$ تابع او د Δ مستقیم خط یو له بل سره څه اړیکې لري او $f'(c)$ له څه سره مساوي دی.

فعالیت



- په مخامخ شکل کې د (a,b) په انټروال کې د $f(x)$ په منحني باندې داسې ټکئ یا ټکي شته چې له هغو څخه په منحني داسې مماس رسم شي چې د x له محور سره موازي وي.
- د $f(x)$ تابع په کوم انټروال کې متمادي او په کومه فاصله کې د مشتق وړده.
- که چېرې $f(a)=f(b)$ وي، نو د x_0 ټکي په (a,b) انټروال کې وخېږئ.

له پورتني فعالیت څخه لاندې قضیه بیانولای شو:



قضیه: که چېرې د $f(x)$ تابع د $a \le x \le b$ په انټروال کې متمادي او د $a < x < b$ په انټروال کې د مشتق وړ وي او $f(a)=f(b)$ وي، نو لږ تر لږه د x_0 یو ټکی په $a < x_0 < b$ انټروال کې شته چې د $f'(x_0)=0$ شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ثبوت: خرنگه چې د $f(x)$ تابع په ورکړل شوی انټروال کې متمادي او د مشتق وړ ده، نو بحراني Extreme ټکی لري.

1- که $f(x)=c$ ثابته تابع وي، نو واضح ده چې $f'(x)=0$ ده.

2- که د $f(x)$ تابع ثابته نه وي، او $x_2, x_1 \in (a,b)$ او $f(x_1)>0$ وي، نو تابع په $[a,b]$ کې یو $x_0 \in [a,b]$ Maximum قیمت لري چې $f(x_0) \geq f(x_1) > 0$ شي او همدا راز که $f(x_2)<0$ وي، نو تابع یو اصغري Minimum قیمت لري.

خرنگه چې په Extreme نقطو کې د تابع مشتق صفر دی، نو $f'(x_0)=0$ کېږي.

لومړی مثال: د رول قضیه د $f(x)=\cos x$ د تابع لپاره په $[a,b]=[\pi, 5\pi]$ فاصله کې تطبیق کړئ.

حل: خرنگه چې $f(\pi)=f(5\pi)=-1$ سره دی، نو د $f(x)$ تابع د هره x لپاره د مشتق وړ ده، نو د $(\pi,5\pi)$ په انټروال کې متمادي او په $(\pi,5\pi)$ په انټروال کې مشتق منونکی ده چې د Rolle د قضیې مطابق په $(\pi,5\pi)$ کې لږ تر لږه یو x_0 موجود دی چې د هغه قیمت لپاره $(\cos x)'=0$ شي. خرنگه چې $(\cos x)'=-\sin x$ دی، نو باید $-\sin x=0$ معادلې لږ تر لږه یو حل په $(\pi,5\pi)$ کې موجود وي. $-\sin x=0 \Rightarrow \sin x=0$ دا معادله په $(\pi,5\pi)$ کې درې حله $4\pi, 3\pi, 2\pi$ قیمتونه اخیستلای شي.

دویم مثال: د رول قضیه د $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ تابع په $[a,b]=[-1,1]$ فاصله کې تطبیق کړئ.

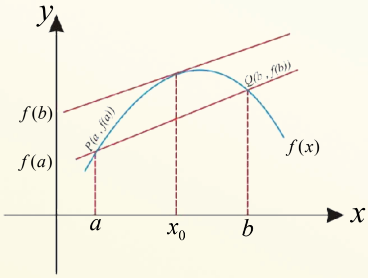
حل: لیدل کېږي چې تابع د پیل او پای په ټکو کې د مشتق وړ نه ده، ولې د رول د قضیې د تطبیق وړ ده ځکه $f(-1)=f(1)=0$ دی $f(0)$ تابع په $[-1,1]$ کې متمادي ده او په $[-1,1]$ کې د x_0 یو عدد شته چې $f'(x_0)=0$ شي او هغه $x_0=0$ دی.

د $y'(x)=\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u}}$ فورمول څخه په ګټه اخیستنې سره مشتق په لاس راوړو:

$$f'(x)=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \Rightarrow \quad f'(0)=\frac{0}{\sqrt{1-0^2}}=0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د متوسط قیمت قضیه(لاگرانژقضیه):



مخامخ شکل په پام کې و نیسئ:

- د یوې مستقیمې کربښې میل له کومې رابطې څخه په لاس راځي؟
- د $\overline{PQ}$ د مستقیمې کربښې میل پیداکړئ.
- د $\overline{PQ}$ د کربښې میل د $f(x)$ د تابع له مشتق سره څه اړیکه لري؟

له پورتني فعالیت څخه قضیه داسې بیانوو:

قضیه: که چېرې $f(x)$ د $[a,b]$ په فاصله کې متمادي او د (a,b) په فاصله کې د مشتق وړ وي د (a,b) له انټروال څخه د c یو عدد شته دی داسې چې: $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$

یعنې: $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ دی.

ثبوت: یوه مرستندویه تابع په پام کې نیسو، لیدل کېږي چې: $g(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot x$

$$g(a)=f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot a=\frac{f(a)b-f(b)a}{b-a} \quad \ldots\ldots\ldots \text{ I}$$

$$g(b)=f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot b=\frac{f(a)b-f(b)a}{b-a} \quad \ldots\ldots\ldots \text{ II}$$

نو $g(a)=g(b)$ سره دی د رول د قضیې پر بنسټ سره د c عدد د (a,b) انټروال کې شته دی چې $g'(c)=0$ دی، نو:

$$g'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow g'(x)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0 \qquad \Rightarrow f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\Rightarrow f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د $f(x)=2x^3-8x+1$ په تابع کې د متوسط قيمت قضيه په $[a,b]=[1,3]$ کې وڅيړئ.

حل: ليدل کېږي چې د $f(x)$ تابع په $[1,3]$ کې متمادي او په $(1,3)$ کې د مشتق وړ ده، نو د متوسط قيمت له قضيي سره سم په $(1,3)$ کې يو x_0 شته داسې چې:

$$f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{36}{2}=18$$

د c د پيداکولو لپاره لرو:

$$f'(x_0)=6x^2-8=18 \Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{26}{6}}$$

خرنگه چې $x=\sqrt{\frac{26}{6}}$ په $(1,3)$ کې ګډون لري، نو $x_0=\sqrt{\frac{13}{3}}$ دی.

او $x=-\sqrt{\frac{26}{6}}$ په $(1,3)$ فاصله کې واقع نه ده، نو د قبول وړ نه ده.

پوښتنې

1- که چېرې د $f(x)=\sqrt{x(4-1)}$ تابع د $[0,4]$ په انټروال کې راکړل شوې وي د x_0 قيمت داسې پيدا کړئ چې د رول قضيه په پورتني تابع کې صدق وکړي.

2- که د $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x$ تابع راکړل شوې وي د x_0 قيمت د $[0,3]$ په فاصله کې داسې وټاکئ چې د رول قضيه په هغې کې صدق وکړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

3- د هوپیتال قاعده (L' Hopitall)

مخامخ مساوات څه بیانوي؟

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- د $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$ د تابع لیمیټ په هغه صورت کی پیدا کړئ چې $x\to 1$ ته تقرب وکړي.
- د پورتني تابع د صورت او مخرج مشتق پیدا او د تابع له لیمیټ سره یې پرتله کړئ.
- د $f(x)=\dfrac{3x^4-3x^2-4x-1}{2x^2-4x^3+2x^4}$ د تابع لیمیټ په هغه صورت کې پیدا کړئ چې $x\to\infty$ تقرب وکړي.
- د پورتني تابع د صورت او مخرج مشتق پیدا او د تابع له لیمیټ سره یې پرتله کړئ.

له پورتني فعالیت څخه دا قاعده بیانوو:

د هوپیتال قاعده:

که د $f(x)$ او $g(x)$ تابع گانې د (a,b) په انتروال کې تعریف او د مشتق وړ وي.

که چیرې $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ د لیمیټ نسبت $x\to a$ قیمت کې د $\dfrac{0}{0}$ مبهم شکل او په $x\to\infty$ کې د $\dfrac{\infty}{\infty}$ شکل ونیسي. په دې حالت کې د تابع د لیمیټ د پیدا کولو لپاره د $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ مشتق پیدا کوو او په هغه کې قیمتونه وضع کوو که بیاهم د تابع شکل مبهم وي، مشتق نیولو ته ادامه ورکوو تر څو د ابهام شکل ختم شي د مثال په ډول:

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2+x-10}{x^2-4}=\frac{2\cdot 2^2+2-10}{2^2-4}=\frac{0}{0}$$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{4x+1}{2x}=\frac{4\cdot 2+1}{2\cdot 2}=\frac{9}{4}$$

یا

$$\lim_{x\to 2}\frac{(2x+5)(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{2x+5}{x+2}=\frac{2\cdot 2+5}{2+2}=\frac{9}{4}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د لوپيتال له قاعدې څخه په ګټه اخيستنې سره د لاندې توابعو لېميتونه پيدا کړئ.

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\sin 2x}{x-\sin 2x}$ 2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^4-81}{x-3}$ 3) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^2-4x+6}{7x^2-2x+1}$

لومړی ځواب:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin 2x}{x-\sin 2x}=\frac{0+\sin 2\cdot 0}{0-\sin 2\cdot 0}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+\sin 2x)'}{(x-\sin 2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1+2\cos 2x}{1-2\cos 2x}=\frac{1+2}{1-2}=-3$$

دويم ځواب:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^4-81}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{3^4-81}{3-3}=\frac{81-81}{3-3}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x^4-81)'}{(x-3)'}=\lim_{x\to 3}\frac{4x^3}{1}=\frac{4\cdot 3^3}{1}=108$$

دريم ځواب:

$$\lim_{x\to \infty}\frac{3x^2-4x+6}{7x^2-2x+1}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to \infty}\frac{(3x^2-4x+6)'}{(7x^2-2x+1)'}$$

$$\lim_{x\to \infty}\frac{6x-4}{14x-2}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to \infty}\frac{(6x-4)'}{(14x-2)'}=\frac{6}{14}=\frac{3}{7}$$

پوښتنې

د لوپيتال له قاعدې څخه په ګټه اخيستنې سره لاندې لېميتونه پيدا کړئ.

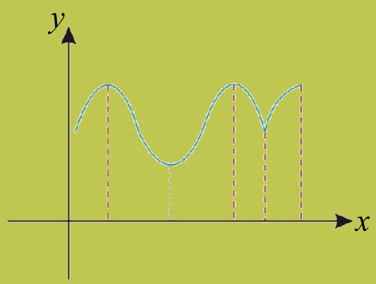
$a)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$, $b)\ \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^5-1}{x^3-1}$

$c)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x^3}$, $d)\ \lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^5}{3x^3}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بحراني ټکو تطبيق

په مخامخ شکل کې تر ټولو لوړ ټکی او تر ټولو ټيټ ټکی وښيئ او دا ټکی د څه په نامه يادېږي.



مثالونه:

1مثال- دوه عددونه پيدا کړئ چې مجموعه يې 20 او د ضرب حاصل يې لوی ممکن قيمت ولري.

حل: که لومړی عدد ته x وويل شي، نو دويم عدد $20-x$ دی او د ضرب حاصل يې د تابع په شکل داسې: $f(x)=x(20-x)$ ليکو، څرنګه چې د x عدد په $[0,20]$ انتروال کې تحول کوي، نو د تابع مطلق اعظمي قيمت په $[0,20]$ کې لټوو:

$$f(x)=20x-x^2$$
$$f'(x)=0$$
$$20-2x=0$$
$$-2x=-20$$
$$x=10$$
$$f(10)=20\cdot 10-10^2=200-100=100$$
$$f(0)=20\cdot 0-0^2=0$$
$$f(20)=20\cdot 20-20^2=400-400=0$$

ليدل کېږي چې (100 ، 10) د تابع اعظمي نقطه ده، نو مطلوب عددونه $x_1=10$ او $x_2=10$ چې د ضرب حاصل يې 100 دی.

2 مثال- د يوه خوځنده جسم د حرکت معادله د $x=(t-2)(t-3)$ په بڼه راکړل شوې ده، د جسم متوسط سرعت د $t_1=3$ او $t_2=4$ د وخت په واټنو کې پيدا کړئ.

حل: د منځنی سرعت د تعريف په مرسته ليکلای شو چې:

$$\text{منځنی سرعت}=\frac{x_{(t_2)}-x_{(t_1)}}{t_2-t_1}=\frac{x_{(4)}-x_{(3)}}{4-3}=\frac{2-0}{4-3}=2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

3مثال- د کرې د حجم او سطحې د مشتقونو تر منځ منځنی نسبت پیدا کړئ.

حل:

$$\text{دکرې حجم} = v_{(x)} = \frac{4}{3}\pi x^3 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{4}{3}\pi \cdot 3x^2 = 4\pi x^2$$

$$\text{دکرې مساحت} = S_{(x)} = 4\pi x^2 \Rightarrow \frac{ds}{dx} = 4\pi \cdot 2x = 8\pi x$$

$$\frac{dv}{ds} = \frac{4\pi x^2}{8\pi x} \Rightarrow \frac{dv}{ds} = \frac{1}{2}x$$

4مثال- د سانتي ګراد(C) او فارنهایت (F) د حرارت تر منځ $C = \frac{5}{9}(F-32)$ اړیکه شته، تاسې د (C) او (F) تر منځ منځنی نسبت وټاکئ.

حل: د منځنی سرعت د تعریف $(V_m = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x})$ په مرسته لیکلای شو:

$$\frac{\Delta C}{\Delta F} = \frac{C(F+\Delta F) - C(F)}{\Delta F} = \frac{\frac{5}{9}(F+\Delta F-32) - \frac{5}{9}(F-32)}{\Delta F} = \frac{5}{9}$$

5مثال- یوه ځمکه چې مستطیلي شکل لري، محیط یې $200m$ دی، کېدای شي اعظمي Maximum مساحت یې پیدا کړئ.

حل: په ورکړل شوي محیط سره کولای شو، ډېر مستطیلونه رسم کړو، ولې شرط دا دی چې هغه مستطیل زموږ مطلوب دی چې مساحت یې تر ټولو زیات وي، نو که د مستطیل اوږدوالی په x او سور یې په y وښیو، نو لیکلای شو:

$$\text{میحط} = 2x + 2y = 200$$

$$\text{میحط} = x + y = 100 \quad \Rightarrow y = 100 - x$$

$$\text{مساحت} = x \cdot y$$

$$S = x(100-x) = 100x - x^2 \quad , \quad D_s = IR$$

$$x > 0 \quad , \quad y > 0 \Rightarrow 100 - x > 0 \quad \Rightarrow x < 100$$

اوس د $S = 100x - x^2$ په تابع کې $0 < x < 100$ انټروال کې د تابع اعظمي مساحت داسې پیدا کوو:

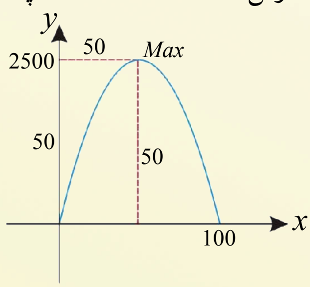
$$S' = 100 - 2x$$

$$S' = 0 \Rightarrow 100 - 2x = 0 \quad \Rightarrow x = 50 \quad \Rightarrow S_{(50)} = 2500$$

$$\lim_{x \to 0^+} S(x) = 0$$

$$\lim_{x \to 0^-} S(x) = 0$$

x	0		50		100
S'		+	0	−	
S	0	↗	2500	↘	0



(c) ketabton.com: The Digital Library

په پایله کې له شکل څخه هم لیدل کېږي چې تر ټولو لوی مساحت هغه وخت لاسته راځي چې د مستطیل طول 50 واحده وي، نو مساحت 2500 واحد مربع کېږي.

6مثال- که د دوو عددونو مجموعه 200 وي، هغه عددونه داسې وټاکئ چې د مربعاتو مجموعه یې اصغري شي.

حل: که چېرې دا عددونه x او y وي، نو $x+y=200$ او که x ، $x^2+y^2=T_{(x)}$ فرض کړو، نو:

$$T_{(x)}=x^2+y^2$$
$$=x^2+(200-x)^2$$
$$=x^2+x^2-400x+(200)^2$$
$$=2x^2-400x+40000$$
$$T'_{(x)}=4x-400$$
$$T'_{(x)}=0$$
$$4x-400=0$$
$$x=100$$

په پایله کې ویلای شو چې د مربعاتو تر ټولو کوچنۍ مجموعه عبارت ده له: $T_{(100)}=20000$

7مثال- د A ټکی د $y=\dfrac{2}{x}$ د منحني له پاسه حرکت کوي، تر ټولو کوچنی انتروال د A د نقطې او د مختصاتو د مبدې ترمنځ لاسته راوړو.

حل: د $y=\dfrac{2}{x}$ د تابع منحني پر مخ د A د نقطې مختصات $A(x,\dfrac{2}{x})$ دي، نو:

$$\overline{OA}=\sqrt{x^2{}_{(A)}+y^2{}_{(A)}}=\sqrt{x^2+\frac{4}{x^2}}$$
$$\overline{OA}^2=x^2+\frac{4}{x^2}=d^2\ \Rightarrow\ d'_{(x)}=(x^2)'+(\frac{4}{x^2})'=2x-\frac{8x}{x^4}=2x-\frac{8}{x^3}$$
$$d'_{(x)}=\frac{2x^4-8}{x^3}$$
$$d'_{(x)}=0$$
$$2x^4=8$$
$$x_1=\sqrt{2}\quad,\quad x_2=-\sqrt{2}$$
$$d_{\sqrt{2}}=(\sqrt{2})^2+\frac{4}{(\sqrt{2})^2}=2+\frac{4}{2}=\frac{8}{2}=4$$
$$d_{-\sqrt{2}}=4$$

په پایله کې تر ټولو کوچنی فاصله له مبدا څخه 2 واحده ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

8مثال- یو مکعب مستطیل چې قاعده یې مربع ده، په پام کې نیسو، که د دریو واړو بعدونو مجموعه 24 وي، د مکعب تر ټولو لوی حجم پیدا کړئ.

حل: که د مکعب مستطیل د قاعدې ضلعې ته x او جګوالي ته یې y وویل شي، نو:

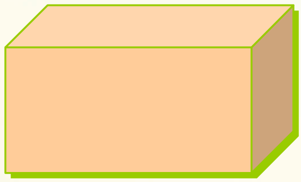
$$x+x+y=24 \Rightarrow y=24-2x$$

څرنګه چې $y \geq 0$ دی، نو $0 \leq x \leq 12$ کېږي او د مکعب مستطیل حجم عبارت دي له:

$$V=x^2 \cdot y \Rightarrow V=x^2(24-2x)=24x^2-2x^3$$

$$V=24x^2-2x^3$$
$$V'(x)=48x-6x^2$$
$$V'(x)=0$$
$$48x-6x^2=0$$
$$x(48-6x)=0$$
$$x_1=0$$
$$48-6x=0$$
$$-6x=-48$$
$$x=8$$

$$V(0)=24\cdot 0^2-2\cdot 0^3$$
$$=0-0=0$$
$$V'(0)=0$$
$$V(8)=24\cdot(8)^2-2\cdot(8)^3$$
$$=1536-1024=512$$
$$V(8)=512$$
$$V(12)=24\cdot(12)^2-2\cdot(12)^3=3456-3456=0$$
$$V(12)=0$$



نو د مکعب مستطیل تر ټولو لوی حجم $512cm^3$ دی.

پوښتنې

1- د $y=x^3+x^2+x+1$ د تابع تحولات پیدا او منحني یې رسم کړئ.

2- که د اوسپنې له یوې تختې څخه چې هره ضلع یې $1m$ طول لري یو سر خلاص بکس جوړېږي. د هغه له څلورو کنجونو څخه څلور مساوي مربع ګانې پرې کړئ او بیا هغه قات کړئ کوچنی مربع ګانې په کومه اندازه پرې شي چې نوموړی بکس ممکن اعظمي حجم ولري.

3- د $y=x^2$ ګراف ته ډېره نژدې نقطه له $A(3,0)$ نقطې سره پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د خېرکي مهم ټکي

- د $f(x)$ يوه تابع هغه وخت متزايده بلل کېږي چې د $[a,b]$ په انټروال کې متمادی او په (a,b) خلاص انټروال کې د مشتق وړ او $f'(x) > 0$.
- د $f(x)$ يوه تابع هغه وخت متناقصه بلل کېږي چې د $[a,b]$ په انټروال کې متمادي او په (a,b) خلاص انټروال کې د مشتق وړ او $f'(x) < 0$.
- د تابع له تزايد څخه مطلب دا دی چې د x د متحول په زياتېدو سره د تابع قيمت زيات او د تابع له تناقص څخه مطلب دا دی چې د x متحول په زياتېدو سره د تابع قيمت کم شي.
- په يوه تابع کې تر ټولو لوړې نقطې ته مطلق اعظمي (Absolute Maximum) او تر ټولو ټيټې نقطې ته مطلق اصغري (Absolute Minimum) وايي، د x هغه قيمتونه چې د هغوی لپاره تابع يا اعظمي او يا اصغري قيمتونه اخلي د Extreme په نامه يادېږي.
- مطلق Maximum: د $(x_0, f(x_0))$ نقطه مطلقه اعظمي بلل کېږي، کـه چېرې د $f(x)$ د تعريف په ساحه کې د هر x لپاره $f(x) \le f(x_0)$ وي، نو $f(x_0)$ ته مطلقه اعظمي وايي.
- مطلق Minimum: د $(x_0, f(x_0))$ نقطه مطلقه اصغري بلل کېږي، کـه چېرې $f(x)$ د تعريف په ساحه کې د هر x لپاره $f(x) \ge f(x_0)$ وي، نو $f(x_0)$ ته مطلقه اصغري وايي.
- د $y = f(x)$ د تابع منحني په يوه انټروال کې محدب بلل کېږي، که چېرې په دې انټروال کې په منحني مماس رسم شي، نو مماس د منحني پورته خواته پروت وي او د تابع دويم مشتق منفي په لاس راځي.
- د $y = f(x)$ د تابع منحني په يوه انټروال کې مقعر بلل کېږي، که چېرې په نوموړي انټروال کې په منحني مماس رسم شي، نو مماس د منحني ښکته خوا پروت وي، او د تابع دويم مشتق مثبت په لاس راځي.
- هغه ټکی چې د تابع له مقعريت څخه محدبيت ته او يا برعکس خپل لوری بدلوي، د انعطاف (Inflection) ټکی بلل کېږي.
- هغه تابع ګانې چې د $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ بڼه ولري، د هوموګرافيک تابع ګانو په نامه يادېږي، په دې شرط چې $c \neq 0$ وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- که چېرې د $f(x)$ تابع د $a \le x \le b$ په انټروال کې متمادي او د $a < x < b$ په انټروال کې د مشتق وړ او $f(a) = f(b)$ وي، نو لږ ترلږه د x_0 یو ټکی په $a < x0 < b$ په انټروال کې شته چې $f'(x_0) = 0$ دی، دا قضیه د رول د قضیې په نامه یادېږي.
- که چېرې $f(x)$ په $[a,b]$ فاصله کې متمادي او د (a,b) په خلاصه فاصله کې د مشتق وړ وي د x_0 یو عدد د a او b ترمنځ شته چې $f'(x_0) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ دی دا د متوسط قیمت قضیه بلل کېږي.

د هوپیتال قاعده:

که د $f(x)$ او $g(x)$ تابع ګانې د (a,b) په انټروال کې تعریف او د مشتق وړ وي.

که چېرې $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ د لیمیټ نسبت کله چې $x \to a$ د $\dfrac{0}{0}$ مبهم شکل او په هغه صورت کې چې $x \to \infty$ کې د $\dfrac{\infty}{\infty}$ شکل ونیسي په دې حالت کې د تابع د لیمیټ د پیداکولو لپاره د $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ لیمیت پیداکوو او په هغه کې قیمتونه وضع کوو که بیاهم د تابع شکل مبهم وي، مشتق نیولو ته دوام ورکوو ... تر څو د ابهام شکل ختم شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دریم څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتنو ته څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، سم ځواب په نښه کړئ:

1 – که یوه تابع په $[a,b]$ انتروال کې متمادی او د مشتق وړ وي، نو هغه وخت متزاید ده چې :

$a)\ f'(x)=0$ $b)\ f'(x)<0$ $c)\ f'(x)>0$ $d)\ f'(x)\geq 0$

2- په یوه تابع کې تر ټولو لوړې نقطې ته:

$a)$ Absolute Minimum وایي $b)$ Infliction وایي $c)$ Absolute Maximum وایي $d)$ هیڅ یو

3- د $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+2x}$ په تابع کې د Extreme ټکی عبارت دی له:

$a)$ دوه ټکي $b)$ یو ټکی $c)$ درې ټکي $d)$ نه لري

4 – هغه ټکی چې تابع له مقعریت څخه محدبیت ته بدلوي:

$a)$ د اعظمی ټکی دی $b)$ دانعطاف ټکی دی $c)$ اصغري ټکی دی $d)$ هیڅ یو

5- د $f(x)=ax^2+bx+c$ د تابع د تعریف ساحه عبارت له :

$a)\ (-\infty\ ,+\infty)$ $b)\ (-\infty\ ,0)$ $c)\ (0,-\infty)$ $d)$ هیڅ یو

6- د $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+2}$ تابع عمودي مجانب عبارت دی له:

$a)\ x=1$ $b)\ x=2$ $c)\ x=-1$ $d)\ x=-2$

7- د هوموگرافیك تابع عمودي مجانب عبارت دی له:

$a)\ y=\dfrac{a}{c}$ $b)\ x=-\dfrac{d}{c}$ $c)\ y=\dfrac{c}{a}$ $d)\ y=-\dfrac{c}{d}$

8- د $g(x)=\dfrac{4x^2-6x}{x^2-4}$ تابع افقي مجانب عبارت دی له:

$a)\ 4$ $b)\ 6$ $c)\ -6$ $d)\ -4$

9- لاندې کومه الجبري اړیکه حقیقت لري:

$a)\ \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ $b)\ \lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f'(x)$ $c)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ $d)$ هیڅ یو

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې پوښتنې ځواب کړئ:

1. د $f(x)=x^2-x$ د تابع د منحني میل د $P(3,0)$ په ټکي کې پیدا کړئ.

2. د $f(x)=-x^2$ په تابع کې د $[3,4]$ په انتروال کې د منحني د بدلون ټکي پیدا کړئ.

3. د نیوټن د خارج قسمت په مرسته د لاندنیو تابع ګانو مشتق پیدا کړئ.

1) $f(x)=2x$ 2) $f(x)=3x^2-1$ 3) $f(x)=\sqrt{2}x$

4. د لاندنیو تابع ګانو په ورکړل شوو نقطو کې مشتق پیدا کړئ.

1) $f(x)=2x-1 \quad , \quad x_0=-1$ 2) $f(x)=x^2 \quad , \quad x_0=2$

5. د لاندې تابع ګانو مشتق پیدا کړئ.

1) $f(x)=2x-4x^2$ 2) $f(x)=3x^3-1$

6. په ورکړل شوو ټکو کې د تابع ګانو مشتق محاسبه کړئ.

1) $f(x)=7x^2-3x \quad , \quad x_0=-1$

2) $f(x)=6x^2-2x-1 \quad , \quad x_0=\frac{1}{2}$

7. د $f(x)=3x^5-4x^2-3x$ د تابع څلور ځلي مشتق ونیسئ او د هغې ګراف رسم کړئ.

8. د لاندې تابع ګانو مشتق پیدا کړئ.

1) $f(x)=x^3\sec x$ 2) $f(x)=\sin(3x-1)$ 3) $f(x)=\cos^2 2x$

9. کوم مثبت عدد دی چې د خپل معکوس سره جمع شي د جمعې حاصل یې تر ټولو کوچنی شي؟

10. د $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$ تابع ګراف رسم کړئ.

11. د $f(x)=\frac{4x^2}{x^2+1}$ تابع ګراف رسم کړئ.

12. د $f(x)=\sin x$ مثلثاتي تابع ګراف رسم کړئ.

13. د $f(x)=\tan x$ مثلثاتي تابع ګراف رسم کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

څلورم څپرکی

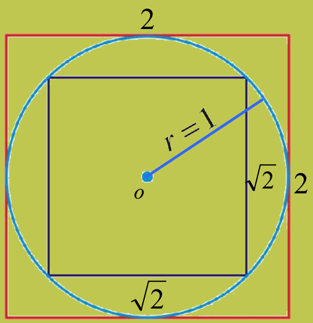
انتیگرال

(c) ketabton.com: The Digital Library

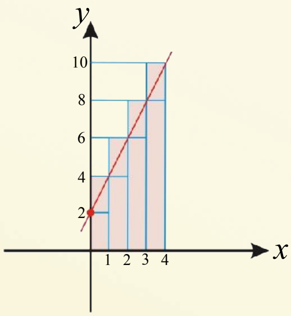
(c) ketabton.com: The Digital Library

د ريمان مجموعه

Riemann's Sum



په مخامخ شکل کې چې که د دايرې شعاع يو واحد ده، د دايرې د محيطي او محاطي څلور ضلعي ګانو مساحت حساب کړئ او وواياست چې ددې دايرې مساحت له مخامخ څلور ضلعي ګانو له مساحت سره څه اړيکه لري؟



- هغه مساحت چې د x د محور او $f(x) = 2x + 2$ د تابع د ګراف په منځ کې د $[0,4]$ په انټروال کې محصور شوی دی، خط خط کړئ.
- د $y = 2x + 2$ تابع په ګراف کې د څلورو لاندېنيو او پورتنيو مستطيلونو مساحتونه چې په شکل کې ښودل شوی دی، پيدا کړئ.

- د پورتنيو مستطيلونو د مساحت مجموعه او د لاندېنيو مستطيلونو د مساحت مجموعه د تابع د ګراف د لاندېنۍ مساحت سره په ورکړ شوي واټن کې څه اړيکه لري؟
- د پورته په څېر فعاليت د اتو مساوي لاندېنيو مستطيلونو او د اتو مساوي پورتنيو مستطيلونو لپاره تکرار کړئ او پايله يې د ګراف د لاندې مساحت سره په نوموړي واټن کې پرتله کړئ.
- که چېرې د پورتنيو مستطيلونو د مساحتونو مجموعه او لاندېنيو مستطيلونو[1] د جوړولو لپاره د تابع په ګراف کې د فاصلې وېش زيات کړو د پورتنيو او لاندېنيو مستطيلونو د مساحتونو مجموعه کوم قيمت ته نژدې کېږي.

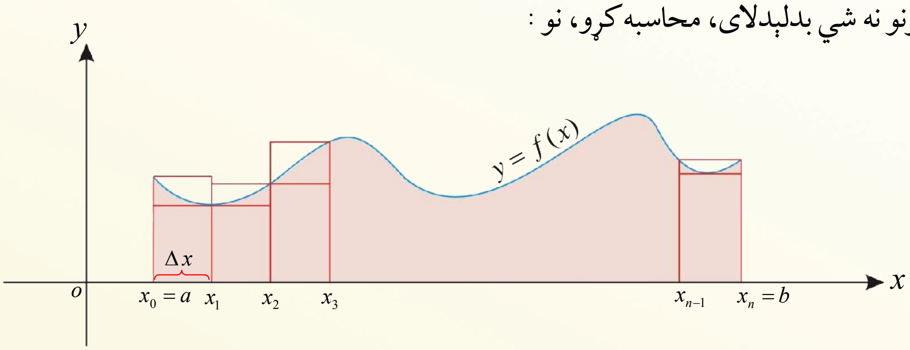
---

[1] - که چېرې د x په محور د فاصلو تقسيمات زيات کړو او يا که چېرې په يوه فاصله کې د مستطيلونو شمېر زيات شي، په هم هغه اندازه د ګراف لاندې مساحت د قيق په لاس راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

له پورتني فعاليت څخه لاندې تعريف لاسته راځي:

تعريف: فرضوو چې د $y=f(x)$ تابع د $[a,b]$ په تړلې انټروال کې متمادي او تعريف شوې وي که چېرې د ناحيې مساحت چې د x د محور او $y=f(x)$ د تابع د ګراف ترمنځ واقع دی چې په هندسي شکلونو نه شي بدلېدلای، محاسبه کړو، نو :



د $[a,b]$ تړلې انټروال په n مستطيلو نو وېشو، څرنګه چې د هر مستطيل عرض د $(\Delta x=\dfrac{b-a}{n})$ رابطې څخه په لاس راځي او د مستطيلونو طول عبارت دی تابع قيمت په هماغه نقطه کې دی.

او د مستطيلونو د هر انټروال اوږدوالی د $i=1,2,3,\ ...\ ,n$ لپاره په لاندې ډول دی:

$$x_0=a, x_1=a+\Delta x, x_2=a+2\Delta x..., x_i=a+i\Delta x,\ ...\ ,x_n=b$$

$$[x_0,x_1]\ ,\ [x_1,x_2]\ ,\ [x_2,x_3],\ ...\ ,[x_{i-1},x_i],\ ...\ ,[x_{n-1},x_n]$$

که په شکل کې د لاندينيو مستطيلونو مساحت په $f(x_{i-1})\Delta x$ او د پورتنيو مستطيلونو مساحت په $f(x_i)\Delta x$ وښودل شي، نو لرو چې:

$$\text{د لاندينيو مستطيلونو د مساحتونو مجموعه} = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \ ...\ + f(x_{n-1})\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x$$

$$\text{د پورتنيو مستطيلونو د مساحتونو مجموعه} = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \ ...\ + f(x_n)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

که چېرې محصور شوی مساحت په A وښيو، نو : $\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x < A < \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$

که چېرې د رابطې له اطراف څخه ليميټ ونيسو، نو لرو چې:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x \le \lim_{n\to\infty} A \le \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ساندوېچ د قضيې پر بنسټ ليکلای شو چې: $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = A = \lim_{n\to\infty} \overset{n}{\underset{121}{2}} f(xi-1)\Delta x$

نو $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ تـه د ريمـان مجمـوع او ددې مجمـوعې لېميـټ يعنـې $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ تـه د ريمـان د مجموعې لېميټ وايي.

لومړی مثال: د $[0,2]$ انټروال په څلور مساوي برخو ووېشئ، د $y = x^2 + 1$ منحني او x محور تر منځ مساحت پيدا کړئ.

حل: که چېرې $[0,2]$ انټروال پـه څلـورو مـساوي برخـو ووېـشو، نـو د مـستطيلونو عـرض داسـې پـه لاس راځي: $\Delta x = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{2-0}{4} = \dfrac{1}{2}$

ددې مستطيلونو دهر انټروال اوږدوالی عبارت دي له:

$$x_0 = a = 0 \quad , \quad x_1 = a + \Delta x = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = a + 2\Delta x = 1 \quad , \quad x_3 = a + 3\Delta x = \frac{3}{2}$$

$$x_4 = 2$$

$$[x_0, x_1]\ ,\ [x_1, x_2]\ ,\ [x_2, x_3]\ , [x_3, x_4]$$

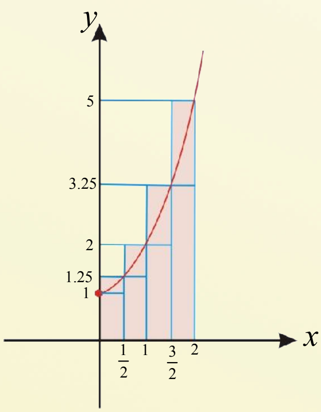
$$[0, \frac{1}{2}] \quad , [\frac{1}{2}, 1] \quad , [1, \frac{3}{2}] \quad , [\frac{3}{2}, 2]$$

په لاس راغلي قيمتونه د x په ځای په تابع کې وضع کوو.

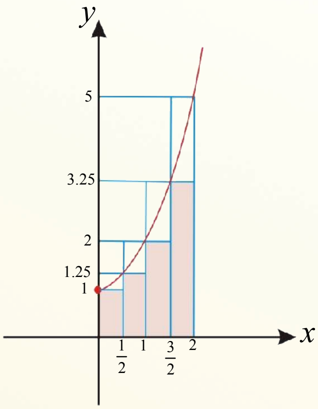
$$f(x) = x^2 + 1\ , f(0) = 1$$

$$f(\frac{1}{2}) = 1.25\ ,\ f(1) = 2$$

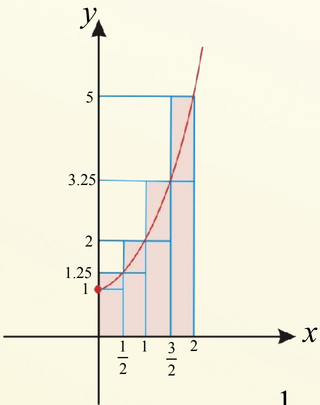
$$f(\frac{3}{2}) = 3.25\ ,\ f(2) = 5$$



(c) ketabton.com: The Digital Library



د لاندینیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه $=1\times\frac{1}{2}+1.25\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{2}+3.25\times\frac{1}{2}=3.75$



د پورتنیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه $=1.25\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{2}+3.25\times\frac{1}{2}+5\times\frac{1}{2}=5.75$

$$3.75 < A < 5.75$$

دویم مثال: د $f(x)=1+x$ تابع د ریمان د مجموعې لیمیټ په $[1,10]$ انټروال کې پیدا کړئ.

حل:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{10-1}{n} = \frac{9}{n}$$

$$x_i = a + \Delta x i \;= 1 + [\frac{9}{n}]\, i \quad , \quad i = 0,1,2, \;\ldots$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \lim_{n\to\infty} [\sum_{i=1}^{n} (1+x_i)\Delta x]$$

$$= \lim_{n\to\infty} [\Delta x \sum_{i=1}^{n} (1+x_i)]$$

$$= \lim_{n\to\infty} [\Delta x \sum_{i=1}^{n} 1 + \Delta x \sum_{i=1}^{n} x_i]$$

$$= \lim_{n\to\infty} [\frac{9}{n} \sum_{i=1}^{n} 1 + \Delta x \sum_{i=1}^{n} (a + \Delta x i)]$$

$$= \lim_{n\to\infty} [\frac{9}{n} \sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{9}{n} \sum_{i=1}^{n} (1 + \frac{9}{n} i)]$$

$$= \lim_{n\to\infty} [\frac{9}{n} \sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{9}{n} (\sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{9}{n} \sum_{i=1}^{n} i)]$$

$$= \lim_{n\to\infty} [\frac{9}{n} \cdot n + \frac{9}{n} (n + \frac{9}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2})]$$

$$= \lim_{n\to\infty} [9 + \frac{9}{n} (n + \frac{9n^2 + 9n}{2n})]$$

$$= \lim_{n\to\infty} [9 + \frac{9}{n} (\frac{2n^2 + 9n^2 + 9n}{2n})]$$

$$= \lim_{n\to\infty} [9 + \frac{9}{n} (\frac{11n^2 + 9n}{2n})]$$

$$= \lim_{n\to\infty} [9 + \frac{99n^2 + 81n}{2n^2}]$$

$$= \lim_{n\to\infty} [9 + \frac{99n^2}{2n^2} + \frac{81n}{2n^2}]$$

$$= \lim_{n\to\infty} [9 + \frac{99}{2} + \frac{81}{2n}]$$

$$= 9 + \frac{99}{2} = 58.5$$

باید په یاد ولرو:

$$\sum_{i=1}^{n} c = cn$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

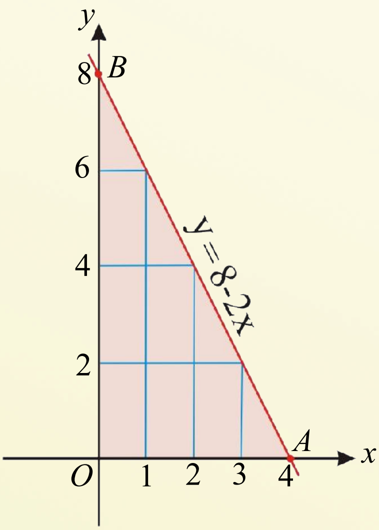
پوښتنې

1. د $[0,3]$ انټروال په بشپړو مساوي برخو له وېشلو څخه وروسته د $y=3x$ مستقیم خط او د x د محور تر منځ مساحت محاسبه کړئ.

2. د $\Delta x=0.5$ قیمت لپاره او د لاندې جدول د قیمتونو په پام کې نیولو سره ګراف رسم، د لاندېنیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه او د پورتنیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه پیدا کړئ.

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
y	14	20	26	32	38	44	50

3. د $y=8-2x$ تابع ګراف د لاندې OAB مثلث مساحت د $[0,4]$ په انټروال کې د ریمان د مجموعې د لیمیټ څخه په ګټه اخیستنې سره پیدا کړئ.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د انتیګرال مفهوم
Concept of Integral

ځرنګه چې پوهیږئ د شکلونو لاندېني او پورتني مساحتونه د انتیګرال په واسطه محاسبه کېږي.
آیا کولای شو چې د مخامخ شکل پورتنی مساحت په لاس راوړو.

د هغې تابع انتیګرال چې مشتق یې معین وي او یا په بل عبارت د ریمان مجموعي لېمیټ ته انتیګرال وایي دا($\int$) د انتیګرال علامه ده، د sum د کلیمې یا د ریمان د مجموعې د S توري غزیدلی حالت دی، لکه: $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \int f(x)dx$ چې دلته $f(x)$ تابع او dx د $f(x)$ تابع د انتیګرال متحول نظر x ته دی.

انتیګرالونه عموماً په دوه ډوله دي. معین او غیر معین انتیګرالونه، هغه انتیګرالونه چې په ترتیب سره یې تر څېړنې لاندې نیسو:

I- غیرمعین انتیګرال *Indefinite Integral*

- که د $F(x) = 2x^2 - 1$ تابع وي له دې تابع څخه مشتق ونیسئ.
- ددې تابع له مشتق څخه انتیګرال ونیسئ.
- په لاس راغلی انتیګرال له لومړنۍ تابع سره پرتله کړئ او ووایئ چې(-1) په نوموړې تابع کې د څه په نامه یادېږي.
- که په پورتنۍ تابع کې (-1) په C ونوموو د $f(x)$ تابع له څه سره مساوي ده؟
- پورتنی فعالیت د $F(x) = x^6 + 1$ تابع لپاره تکرار کړئ او ووایئ چې $f(x)$ له څه سره مساوي ده.

له پورتني فعالیت څخه لاندې تعریف په لاس راځي:

تعریف: که چیرې د $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په ټرلې انټروال کې تعریف او $F(x)$ د $f(x)$ یوه لومړنۍ تابع وي. د $F(x)+C$ تابع ګانو سټ په داسې حال کې چې C یو ثابت عدد وي د $f(x)$ تابع غیرمعین انتیګرال په نامه یادېږي او داسې لیکل کېږي: $\int f(x)dx = F(x) + C$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: $\int x\,dx$ پیدا کړئ.

حل: $\int x\;dx = \frac{x^{1+1}}{1+1} + C = \frac{x^2}{2} + C$

دویم مثال: $\int \frac{1}{\sqrt[7]{x^3}}\;dx$ حساب کړئ.

حل: $\int \frac{1}{\sqrt[7]{x^3}}\;dx = \int x^{-\frac{3}{7}}\;dx = \frac{x^{-\frac{3}{7}+1}}{-\frac{3}{7}+1} + C = \frac{x^{\frac{4}{7}}}{\frac{4}{7}} + C = \frac{7}{4}\sqrt[7]{x^4} + C$

دریم مثال : $\int x^{\frac{3}{2}}\;dx$ پیدا کړئ.

حل: $\int x^{\frac{3}{2}}\;dx = \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C = \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + C$

پوښتنې

لاندې انتیګرالونه محاسبه کړئ:

a) $\int \sqrt[5]{x^3}\;\;dx$

b) $\int \frac{1}{x^4}\;\;dx$

c) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\;\;dx$

d) $\int \frac{x^2\;\;dx}{\sqrt[4]{x^2}}$

e) $\int \sqrt[8]{x^4}\cdot x\;dx$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د غیرمعین انتیگرال خواص

Properties of indefinite integral

تاسې د لېمیټ او مشتق خواص مخکې مطالعه کړي؟ آیا کیدای شي چې ورته خواص په غیر معین انتیګرال کې هم وي؟

$$\left.\begin{array}{l}\int k\ dx \\ \int [f(x) \pm g(x)]\ dx \\ \int [f(x) \cdot g(x)]\ dx \\ \int \dfrac{f(x)}{g(x)} dx \quad , g(x) \neq 0\end{array}\right\} = ?$$

فعالیت

د مشتقاتو له خواصو څخه په کار اخیستنې د لاندې تابع ګانو مشتق پیدا کړئ.

$$f(x) = 3x^4$$

$$f(x) = 2x^3 - \frac{1}{x^2}$$

$$f(x) = \sin x + \cos x$$

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایلې په لاس راوړو:

څرنګه چې د تابع ګانو د مشتق د پیداکولو لپاره له ځانګړو قوانینو څخه ګټه اخیستل کېږي، غیرمعین انتیګرالونه هم د داسې خواصو لرونکي دي چې هغه پرته له ثبوت څخه قبلوو:

1- که k یو ثابت عدد وي، نو لرو چې: $\int kdx = k \int dx = kx + C$

مثال: د $\int 5dx$ انتګرال پیدا کړئ.

حل : $\int 5dx = 5 \int dx = 5x + C$

2- که چېرې $n \neq -1$ وي، نو : $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د $\int x^4 dx$ **انتیګرال** پیدا کړئ.

حل: $\int x^4 dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} + C = \frac{1}{5}x^5 + C$

3- که چېرې a یو ثابت عدد او $f(x)$ تابع وي، **نو**:

$$\int a\, f(x)\, dx = a \int f(x)\, dx$$

مثال: د $\int 2x^2\, dx$ **انتیګرال** محاسبه کړئ.

حل: $\int 2x^2 dx = 2\int x^2 dx = 2\frac{x^3}{3} + C = \frac{2}{3}x^3 + C$

4- که چېرې $f(x)$ او $g(x)$ دوې تابع ګاني وي په دې صورت کې د تابع ګانو د جمع او تفریق د حاصل انتیګرال مساوي دی په:

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

مثالونه:

$a)\quad \int (2x^2 + 3)dx = \int 2x^2 dx + \int 3dx = \frac{2x^3}{3} + 3x + C$

$b)\quad \int (8 - 2x)dx = 8\int dx - 2\int xdx = 8x - x^2 + C$

5- که چېرې د تابع ګانو ترادف تر انتیګرال لاندې وي، په دی صورت کې د دوی انتیګرال مساوي دی په:

$$\int [f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + \ldots + \int f_n(x)dx$$

مثال:

$$\int [x^3 - 6x^2 + 9x + 1]dx = \int x^3 dx - \int 6x^2 dx + \int 9xdx + \int dx$$

$$= \frac{x^4}{4} - \frac{6x^3}{3} + \frac{9x^2}{2} + x + C$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

6- که $f(x)$ او $g(x)$ دوې تابع ګانې وي، په دې حالت کې د تابع ګانو د ضرب د حاصل انتیګرال، مساوي نه دی د انتیګرالونو د ضرب له حاصل سره په جلا توګه، یعنې:

$$\int[f(x)\cdot g(x)]dx \neq \int f(x)dx \cdot \int g(x)dx$$

مثال: که چېرې $f(x)=x+1$ او $g(x)=x-2$ وي، نو:

حل الف: لومړی په تابع ګانو د ضرب عملیه تطبیق کوو او وروسته یې انتیګرال په لاس راوړو:

$$\begin{aligned}\int[f(x)\cdot g(x)]\,dx &= \int[(x+1)(x-2)]dx = \int(x^2-2x+x-2)\,dx\\ &= \int(x^2-x-2)\,dx\\ &= \int x^2dx - \int x\,dx - \int 2\,dx\\ &= \frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x+C\end{aligned}$$

حل ب:اوس د هرې تابع انتیګرال بېلا بېل محاسبه کوو او وروسته یې سره ضربوو په لاس راغلي قیمتونه سره پرتله کوو.

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx\cdot\int g(x)\,dx &= \int(x+1)\,dx\cdot\int(x-2)\,dx = (\int x\,dx+\int dx)(=\int x\,dx-\int 2\,dx)\\ &= (\frac{x^2}{2}+x+C)(\frac{x^2}{2}-2x+C) = (\frac{x^2}{2}+x)(\frac{x^2}{2}-2x)+C\\ &\Rightarrow \frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x+C \neq (\frac{x^2}{2}+x)(\frac{x^2}{2}-2x)+C\end{aligned}$$

په پایله کې څرګنده شوه چې نوموړی مساوات حقیقت نه لري.

7- که چېرې $f(x)$ او $g(x)$ دوه تابع ګانې وي په دې صورت کې د توابعو د تقسیم د حاصل انتیګرال مساوي نه دی. د هرې تابع د انتیګرال له حاصل تقسیم سره، یعنې: $\int\frac{f(x)}{g(x)}dx \neq \frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx}$

مثال: که چېرې $f(x)=x^2+2x$ او $g(x)=x$ وي، نو لرو:

د الف جزء حل: لومړی د تابع ګانو د تقسیم د حاصل انتیګرال په لاس راوړو.

$$\int\frac{f(x)}{g(x)}dx = \int\frac{x^2+2x}{x}dx = \int(\frac{x^2}{x}+\frac{2x}{x})dx = \int(x+2)dx = \int xdx+\int 2dx = \frac{1}{2}x^2+2x+C$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ب جزء حل: اوس د صورت او مخرج د تابع ګانو انتیګرالونه بېلا بېل په لاس راوړو او وروسته یې سره پرتله کوو.

$$\frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx}=\frac{\int (x^2+2x)dx}{\int xdx}=\frac{\int x^2dx+\int 2xdx}{\int xdx}$$

$$=\frac{\frac{1}{3}x^3+x^2}{\frac{1}{2}x^2}+C=\frac{\frac{1}{3}x^3}{\frac{1}{2}x^2}+\frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2}+C$$

په پایله کې څرګنده شوه چې

$$\int \frac{f(x)}{g(x)}dx \neq \frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx}$$

پوښتنې

د انتیګرال له خاصیتونو څخه په ګټه اخیستنې سره لاندې انتیګرالونه محاسبه کړئ:

a) $\int -17dx=?$

b) $\int \frac{(1+x)^2}{1+x}dx=?$

c) $\int 2x^4dx=?$

d) $\int \frac{1}{x^5}dx=?$

e) $\int (2x^2+4x^3-5x+9)dx=?$

f) $\int (2x+3)^6dx=?$

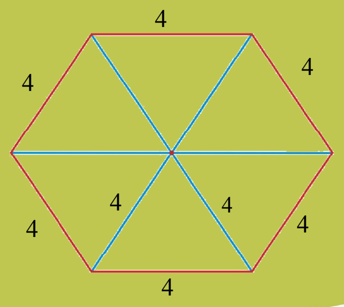
g) $\int \frac{x^3+2x^2}{x^2}dx=?$

h) $\int (2+x)dx=?$

(c) ketabton.com: The Digital Library

معین انتیګرال

Definite Integral



د شپږ ضلعي دننه مثلثونو د مساحتونو مجموعه پیدا او د شپږ ضلعي له مساحت سره یې پرتله کړئ.

- د $f(x)=2x$ د تابع ګراف د $[2,5]$ په انټروال کې د $n=5$ لپاره رسم کړئ او د ګراف لاندېنی مساحت پیدا کړئ
- په شکل کې د ګراف لاندېنی مساحت د کومو دوو عددونو ترمنځ پروت دی.

د پورتنی فعالیت پایله داسې بیانوو:

تعریف: که چېرې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وی، نو د $f(x)$ تابع د ریمان مجموعې لېمیټ ته کله چې n بې‌نهایت ته نژدې شی او د فرعي انټروالونو (Δx) لوی اوږدوالی صفر ته نژدې شي، د $f(x)$ تابع له $x=a$ څخه تر $x=b$ پورې د معین انتیګرال په نوم یادېږي، یعنې:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x=\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$$

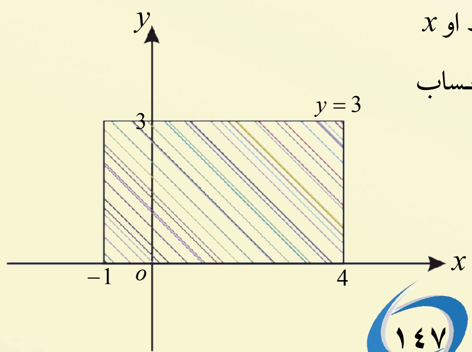
چې a ته د انتیګرال لاندېنی سرحد او b ته د انتیګرال پورتنی سرحد وایي.

لومړی مثال: د $\int_1^3 x^2\,dx$ انتیګرال قیمت پیدا کړئ.

حل: لومړي د $F(x)$ لومړنی تابع پیدا کوو او بیا د مطلوب انتیګرال قیمت ټاکو:

$$\int_1^3 x^2dx=[\frac{x^3}{3}]_1^3=\frac{3^3}{3}-\frac{1^3}{3}=\frac{27-1}{3}=\frac{26}{3}$$

دویم مثال: هغه مساحت چې د $y=3$ خط او x محور ترمنځ په $[-1,4]$ انټروال کې محصور دی حساب کړئ.



(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: د $\int_{-1}^{4} 3\ dx$ معین انتیگرال د یوه مستطیل مساحت راښیي چې په تېر شکل کې لیدل کېږي.

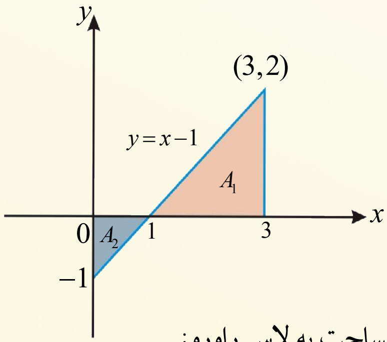
ددې مستطیل مساحت د مستطیل د عرض او طول د ضرب له حاصل سره مساوي دی.

$$\text{د مستطیل مساحت} = 3[4-(-1)] = 3\cdot 5 = 15$$

له انتیګرال څخه په ګټه اخیستنې سره د مستطیل مساحت په لاندې ډول محاسبه کوو.

$$\int_{-1}^{4} 3\ dx = [3x]_{-1}^{4} = 3[4-(-1)] = 15$$

دریم مثال:هغه مساحت چې د $y = x-1$ مستقیم خط او x محور ترمنځ په $[0,3]$ انترول کې محصور دی په لاس راوړئ.



حل:

له شکل څخه په ګټه اخیستنې سره لومړی د ښي خوا د لوی مثلث مساحت په لاس راوړو:

$$A_1 = \frac{1}{2}(2\cdot 2) = \frac{1}{2}\cdot 4 = 2$$

د کوچني مثلث مساحت عبارت دی له:

$$A_2 = \frac{1}{2}[1(-1)] = \frac{1}{2}(-1) = -\frac{1}{2}$$

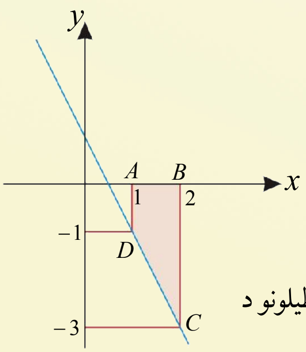
د A_1 او A_2 د مساحتونو مجموعه عبارت ده له:

$$A_1 + A_2 = 2 - \frac{1}{2} = 1.5$$

په پایله کې د نوموړي انتیګرال قیمت عبارت دی له:

$$\int_{0}^{3} (x-1)\ dx = [\frac{x^2}{2} - x]_0^3 = [\frac{3^2}{2} - 3] - 0 = \frac{9}{2} - 3 = 1.5$$

پوښتنې



1. د مخامخ شکل څخه په کار اخیستنې سره هغه مساحت چې د $y = -2x+1$ د مستقیم خط او د x د محور ترمنځ په $[1,2]$ انترول کې محصور دی په لاس راوړئ.

2. د $f(x) = x^2$ تابع د لاندېنیو مستطیلونو د مساحت مجموعه او پورتنیو مستطیلونو د مساحت مجموعه په $[0,1]$ انترول کې د $n = 4$ لپاره په لاس راوړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د معین انتیګرال خواص

Properties of definite integral

آیا کولای شو چې د غیرمعین انتیګرال د ځانګړونو څخه

په ګټه اخیستنې سره مخامخ اړیکې پوره کړو.

$$\left.\begin{array}{l}\int_a^b c\,dx \\ \int_a^b [f(x)\pm g(x)]\,dx \\ \int_a^a f(x)\,dx\end{array}\right\} = ?$$

- د $\sum_{k=1}^{4} 3k^2$ مجموعه حساب کړئ.
- د $\int_a^b x\,dx$ د انتیګرال قیمت د $[-1,1]$ په انټروال کې پیدا کړئ.
- د $\int_0^2 (1+3x)\,dx$ انتیګرال محاسبه کړئ.

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

د ځینو انتیګرالونو محاسبه د قیمت په وضع کولو سره امکان لري او ځینې یې امکان نه لري، دې ته اړتیا پیدا کیږي، ترڅو معین انتیګرال ثبوت کړو.

1. د ثابتې تابع انتیګرال د $[a,b]$ په انټروال کې یعنې $\int_a^b Cdx$ عبارت دی، له:

$$\int_a^b C\,dx = C\int_a^b dx = C[x]_a^b = C(b-a)$$

ثبوت: د $[a,b]$ انټروال په n مساوي برخو، یعنې $\Delta x_i = \dfrac{b-a}{n}$ ویشو او د هر x_i لپاره د i - ام انټروال

څخه لرو: $i = 0,1,2,\dots,n$ $\qquad f(x_i) = C$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} C\,\Delta x_i = C(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_n) = C\left(\frac{b-a}{n} + \frac{b-a}{n} + \dots + \frac{b-a}{n}\right)$$

$$= C(b-a)\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}\right) = C(b-a)\frac{n}{n} = C(b-a) \Rightarrow \int_a^b Cdx = C(b-a)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: $\int_3^4 dx$ معین انتیگرال حساب کړئ.

حل: $\int_3^4 dx = [x]_3^4 = 4-3=1$

2. که د $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انټروال کې انتیگرال منونکی وي او k یو ثابت حقیقي عدد وي، نو لرو چې:

$$\int_a^b k\, f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

ثبوت: که چېرې د $[a,b]$ انټروال د x_i ، $i=1,2,...,n$ په n مساوي برخو ووېشو، نو د ریمان د مجموعې او انتیگرال د تعریف له مخې لیکلای شو:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} k\, f(x_i)\Delta x = \lim_{n\to\infty} k\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

$$= k\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = k\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int_a^b k\, f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

مثال: د $\int_{-2}^{2} 4\,dx$ ټاکلی انتیگرال محاسبه کړئ.

حل: $\int_{-2}^{2} 4dx = 4\int_{-2}^{2} dx = 4[x]_{-2}^{2} = 4(2-(-2)) = 4\cdot 4 = 16$

3. که د $F(x)$ تابع یوه لومړنی تابع د $f(x)$ او په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وي، نو:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

ثبوت:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a) = -(-F(b)+F(a))$$

$$= -(F(a)-F(b)) = -\int_b^a f(x)\,dx \quad\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

مثال: د $\int_2^3 2x\,dx = -\int_3^2 2x\,dx$ انتیگرال مساوات پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: لومړی د کېڼ لوری انتیګرال او وروسته د ښيي خوا انتیګرال محاسبه کوو:

$$\int_2^3 2x\,dx = [\frac{2x^2}{2}]_2^3 = \frac{2(3)^2}{2} - \frac{2(2)^2}{2} = \frac{2(9)}{2} - \frac{2(4)}{2} = \frac{18}{2} - \frac{8}{2} = \frac{18-8}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$\int_3^2 2x\,dx = [\frac{2x^2}{2}]_3^2 = \frac{2(2)^2}{2} - \frac{2(3)^2}{2} = \frac{2(4)}{2} - \frac{2(9)}{2} = \frac{8}{2} - \frac{18}{2} = \frac{8-18}{2} = -\frac{10}{2} = -5$$

د لاسته راغلو قیمتونو په پام کې نیولو سره پایله په لاس راځي:

$$\int_2^3 2x\,dx = -\int_3^2 2x\,dx$$

4- که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وي په هغه صورت کې لرو چې: $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

ثبوت: څرنګه چې $\Delta x = 0$ دی، نو:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \int_a^a f(x)\,dx = F(a) - F(a) = 0$$

$$\Rightarrow \int_a^a f(x)\,dx = 0$$

مثال: د $\int_3^3 3x^2 dx$ انتیګرال محاسبه کړئ.

حل: $\int_3^3 3x^2 dx = [\frac{3x^3}{3}]_3^3 = [x^3]_3^3 = [3^3 - 3^3] = 27 - 27 = 0$

5- که $f(x)$ او $g(x)$ تابع ګانې په $[a\ ,b]$ انټروال کې انتیګرال منونکي وي، نو:

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\ dx$$

ثبوت:

$$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}[f(x_i)\pm g(x_i)]\ \Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty}[\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \pm \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\Delta x]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \pm \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} g(x_i)\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

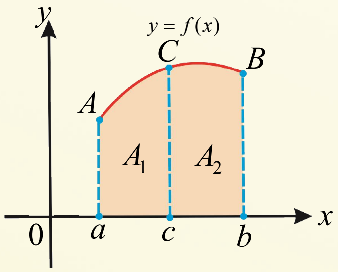
مثالونه:

حل:

$$a)\quad \int_0^1 (4+3x^2)\,dx = \int_0^1 4\,dx + \int_0^1 3x^2\,dx = 4\int_0^1 dx + 3\int_0^1 x^2\,dx = 4[x]_0^1 + 3\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 4+1=5$$

$$b)\quad \int_0^3 (x^2-1)\,dx = \int_0^3 x^2dx - \int_0^3 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 - [x]_0^3 = \frac{27}{3} - 3 = \frac{27-9}{3} = \frac{18}{3} = 6$$

6. که چېرې د $f(x)$ تابع د (a,b) په یوه ترلي انټروال کې خرنګه چې $a<c<b$ دی د a, b او c ټکې پکې شامل دي انټیګرال منونکې وي، نو: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$



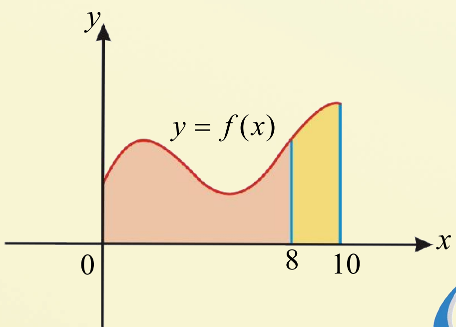
ثبوت: دلته د $[a,b]$ انټروال په دوو انټروالونو د $[a,c]$ او $[c,b]$ تقسیموو، وروسته د $f(x)$ تابع انټیګرال په نوموړو انټروالونو کې په پام کې نیسو.

د انټیګرال اصلي مفهوم ته په پام $A=\int_a^b f(x)dx$ په حقیقت کې د هغې سطحې مساحت دی چې د $f(x)$ د تابع د ګراف او x د محور ترمنځ د $[a,b]$ په انټروال کې محصوره ده. په داسې حال کې چې د هغې سطحې مساحتونه چې د $f(x)$ ګراف او د x د محور ترمنځ د $[a,c]$ او $[c,b]$ په انټروالونو کې محصوره ده او په شکل کې واضح لیدل کېږي عبارت ده له: $A_1=\int_a^c f(x)\,dx$ ، $A_2=\int_c^b f(x)\,dx$

په پایله کې ویلای شو چې: $A = A_1 + A_2 \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

مثال: که چېرې $\int_0^{10} f(x)dx = 17$ او $\int_0^8 f(x)dx = 12$ وي، نو د $\int_8^{10} f(x)dx$ انټیګرال قیمت محاسبه کړئ.

حل:



$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

$$\int_0^{10} f(x)\,dx = \int_0^8 f(x)\,dx + \int_8^{10} f(x)\,dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس د $\int_{8}^{10} f(x)\,dx$ انتیګرال قیمت په لاس راوړو:

$$\int_{8}^{10} f(x)\,dx = \int_{0}^{10} f(x)\,dx - \int_{0}^{8} f(x)\,dx = 17 - 12 = 5$$

7. که چیرې د $f(x) \le g(x)$ تابع ګانې په $[a,b]$ انټروال کې انتیګرال منومنکي وي، نو لرو:

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx \le \int_{a}^{b} g(x)\,dx$$

ثبوت:

$$\int_{a}^{b} g(x)\,dx - \int_{a}^{b} f(x)\,dx = \int_{a}^{b} [g(x) - f(x)]dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [g(x) - f(x)]\ \Delta x$$

نو څرنګه $g(x) - f(x) \ge 0$ او $\Delta x \ge 0$ دی، نو د سلسلې هر حد مثبت دی، نو د هغې لیمیټ هم منفي نه دی یعنې:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [g(x_i) - f(x_i)]\ \Delta x \ge 0 \Rightarrow \int_{a}^{b} [g(x) - f(x)]dx \ge 0$$

$$\int_{a}^{b} g(x)\,dx - \int_{a}^{b} f(x)\,dx \ge 0 \Rightarrow \int_{a}^{b} g(x)\,dx \ge \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

مثال: که چیرې $f(x) = 1 - \frac{x^2}{4}$ او $g(x) = 1 + \frac{x^2}{2}$ وي، نو د $x > 1$ لپاره وښیاست چې $\int_{a}^{b} f(x)dx \le \int_{a}^{b} g(x)dx$ دی.

حل:

$$\int_{a}^{b} (1 - \frac{x^2}{4})\,dx \le \int_{a}^{b} (1 + \frac{x^2}{2})dx$$

$$\int_{a}^{b} 1\,dx - \int_{a}^{b} \frac{x^2}{4}\,dx \le \int_{a}^{b} 1\,dx + \int_{a}^{b} \frac{x^2}{2}\,dx$$

$$[x]_a^b - \frac{1}{12}[x^3]_a^b \le [x]_a^b + \frac{1}{6}[x^3]_a^b$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوهیږو چې $(b-a)>0$ دی، نو:

$$(b-a)-\frac{1}{12}(b^3-a^3)\le(b-a)+\frac{1}{6}(b^3-a^3) \qquad /\div(b-a)$$

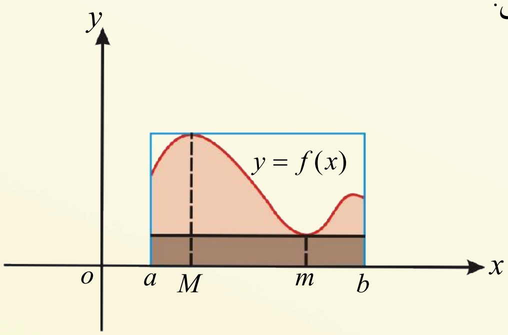
$$1-\frac{1}{12}(a^2+ab+b^2)\le 1+\frac{1}{6}(a^2+ab+b^2)$$

$$-\frac{1}{12}\le+\frac{1}{6}^{3} \qquad /\div(a^2+ab+b^2)$$

$$-\frac{1}{12}<\frac{1}{6}$$

8. که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي او m,M قیمتونه په ترتیب سره د تابع مطلق اعظمي او مطلق اصغري قیمتونه په نوموړی انټروال کې وی، نو $m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$

ثبوت: خرنگه چې $m\le f(x)\le M$ دی، نو لرو چې:



$$\int_a^b m\,dx\le\int_a^b f(x)\,dx\le\int_a^b M\,dx$$

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)\,dx\le M(b-a)$$

چې دا وروستنی اړیکه د انټیګرال د تخمیني قضیې په نامه یادیږي.

مثال: $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ انټیګرال په تخمیني توګه حساب کړئ.

حل: خرنګه چې د $f(x)=e^{-x^2}$ تابع په $[0,1]$ انټروال کې متمادي ده او $M=f(0)=e^0=1$ مطلق اعظمي او $m=f(1)=e^{-1}$ مطلق اصغري دی، نو لرو چې:

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)\,dx\le M(b-a)$$

$$e^{-1}(1-0)\le\int_0^1 e^{-x^2}\,dx\le 1(1-0)$$

$$e^{-1}\le\int_0^1 e^{-x^2}\,dx\le 1$$

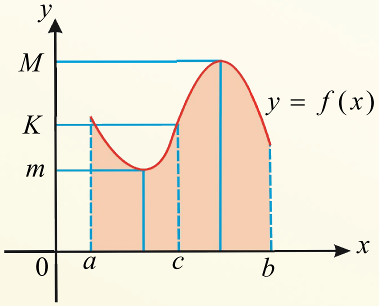
$$e^{-1}=\frac{1}{e}\approx 0{,}3679\Rightarrow 0.3679\le\int_0^1 e^{-x^2}\,dx\le 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پایله کې د انتیګرال تخمیني قیمت د 1 او 0.3679 قیمتونو ترمنځ قرار لري.

9. که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وي، نو د c یو حقیقي عدد شته چې: $a \le c \le b$ دی، نو:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$



ثبوت: د $a < b$ لپاره m او M قیمتونه په ترتیب د تابع مطلق اصغري او اعظمي قیمتونه د $[a,b]$ په انټروال کې وي، لکه: مخامخ شکل د انتیګرال د تخمیني قضیې څخه په کار اخیستني د $c \in [a,b]$ لپاره لرو چې:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a) \quad \Rightarrow m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$$

فرضوو $K = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ وي، نو $m \le K \le M$ دی او د هر c حقیقي عدد لپاره، $a \le c \le b$

لرو چې: $K = f(c)$ نو: $f(c) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$

چې دا وروستی اړیکه د متوسط قیمت د قضیې په نامه یادیږي څرنګه چې $f(c)$ د تابع متوسط قیمت په $[a,b]$ انټروال کې دی.

مثال: د $f(x) = x^2$ تابع په $[1,4]$ انټروال کې په پام کې ونیسئ آیا کولای شئ

$$\int_1^4 x^2\,dx = [\frac{x^3}{3}]_1^4 = [\frac{64}{3} - \frac{1}{3}] = [\frac{64-1}{3}] = \frac{63}{3} = 21$$ دی.

حل: څرنګه چې $f(x) = x^2$ تابع ده، اوس که د x په ځای د c قیمت په تابع کې وضع کړو نو: $f(c) = c^2$ سره کیږي چې دلته د متوسط قیمت د قضیې د فورمول څخه د c قیمت داسې په لاس راځي:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس په پورتنی رابطه کې یې قیمت اېږدو، لرو چې:

$$\int_{1}^{4} x^2\,dx = c^2(4-1)$$

$$21 = 3c^2 \Rightarrow c^2 = \frac{21}{3} \Rightarrow c^2 = 7 \Rightarrow c = \sqrt{7}$$

$$k = f(c)\quad,\quad f(c) = c^2 = (\sqrt{7})^2 = 7 \Rightarrow f(c) = 7\quad,\quad k = 7$$

ښکاره شوه چې د تابع یو قیمت مساوي په k او $1<\sqrt{7}<4$ دی.

له مخکې څخه پوهېږو چې د مستطیل مساحت د سور او اوږدوالي له ضرب سره برابر دی، نو د متوسط قیمت په فورمول کې $f(c)$ اوږدوالي او $b-a$ سور دی، نو د منحنی لاندې مساحت په $[1,4]$ انټروال کې مساوي له هغه مستطیل سره دی چې اضلاع یې 7 او 3 دي.

پوښتنې

1. لاندې معین انتیګرالونه محاسبه کړئ.

$a)\int_{-1}^{1}(x^3+2)\,dx = ?$

$b)\int_{2}^{5} 7x\,dx = ?$

$c)\int_{-2}^{4}(-x)\,dx = ?$

$d)\int_{-1}^{3}(2|x|-3x)\,dx = ?$

$e)\int_{-2}^{3} 3x\,dx$

$f)\int_{-1}^{2}(x^3-\frac{1}{2}x^4)\,dx = ?$

$g)\int_{-4}^{4}(2x^2-\frac{1}{8}x^4)\,dx = ?$

$h)\int_{1}^{3}\sqrt{x}\,dx$

2. د $\int_{-1}^{4} f(x)\,dx$ انتیګرال قیمت د $[-1,4]$ په انټروال کې داسې پیدا کړئ چې $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 5$ او $\int_{1}^{4} f(x)dx = -2$ وي.

3. د $f(x)=x$ تابع په $[0,2]$ انټروال کې په نظر کې ونیسئ او د c قیمت په لاس راوړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

10- د انتیگرال او مشتق اساسي قضیې

یو موټر په $72\frac{m}{\sec}$ چټکتیا سره په حرکت کې دی، دریور برك ته فشار ورکوي او موټر له 6 ثانیو وروسته ودریږي په دې وخت کې وهل شوې فاصله پیدا کړئ.

$$S(t) = v_0 \cdot t$$

فعالیت

- له مشتق د تعریف څخه په ګټې اخیستنې سره د $f(x) = x^2$ د تابع مشتق د $h = 0$ په ټکي کې پیدا کړئ.
- د په لاس راغلی تابع انتیگرال په $[0,1]$ انټروال کې محاسبه کړئ.
- د په لاس راغلو دواړو حالتونو قیمتونه سره پرتله کړئ.

له پورتني فعالیت څخه په لاس راځي چې:

د انتیگرال او مشتق تر منځ یوه منطقي اړیکه شته چې له دې اړیکې څخه په کار اخیستنې سره کولای شو، د انتیگرال اصلي او اساسي قضیې په لاندې ډول ثبوت کړو:

1- د انتیگرال او مشتق لومړی اساسي قضیه:

که چیرې د $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انټروال کې متمادي وي او x په دې انټروال کې شامل وي، لرو چې:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

څرنګه چې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې مشتق منونکې ده، نو د هر $x \in [a,b]$ لپاره $F'(x) = f(x)$ دی.

ثبوت: څرنګه چې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي ده، نو د هر $x \in [a,b]$ لپاره د $f(x)$ تابع په $[a,x]$ انټروال کې متمادي ده په پایله کې د $f(x)$ تابع په دې انټروال کې انتیگرال منوونکې هم ده.

اوس د $F(x)$ تابع مشتق د تعریف مطابق لیکو او بیا د x متحول ته د h په اندازه تزاید ورکوو، لکه په لاندې ډول:

$$F'(x) = f(x)$$

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(a)+F(a)-F(x)}{h}$$

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(a)-(F(x)-F(a))}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{F(x)\Big|_a^{x+h} - F(x)\Big|_a^x}{h}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس د $f(x)$ تابع په $f(t)$ عوض کوو:

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(t)\Big|_a^{x+h}-F(t)\Big|_a^{x}}{h}$$

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{x+h} f(t)\,dt-\int_a^{x} f(t)\,dt}{h}$$

نظر دریم خاصیت ته لرو چې: $\int_a^b f(t)\,dt=-\int_b^a f(t)\,dt$

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{x+h} f(t)\,dt-\int_a^{x} f(t)\,dt}{h}$$

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{a} f(t)\,dt+\int_a^{x+h} f(t)\,dt}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h}$$

د متوسط قیمت د قضیې څخه $f(c)=\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt$ چې c د x او $x+h$ تر منځ واقع دی، نو کله چې h صفر ته تقرب وکړي c، x ته تقرب کوي، همدارنګه د f تابع له متمادیت څخه لرو:

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt=\lim_{c\to x} f(c)=f(x)$$

په پایله کې: $F'(x)=f(x)$

مثال:د $f(x)=\int_2^{x^2+1}\frac{1}{t^2+1}$ مشتق پیدا کړئ.

حل:

$$F(x)=\int_a^{x} f(t)\,dt \text{ یا } F(x)=\int_a^{g(x)} f(t)\,dt$$

$$u=g(x)=x^2+1$$

$$f(t)=\frac{1}{t^2+1}$$

د زنځیري قاعدې له مخې لرو:

$$F'(x)=f(g(x))\cdot g'(x)$$

$$F'(x)=\frac{1}{(x^2+1)^2+1}\cdot(x^2+1)'=\frac{1}{(x^2+1)^2+1}\cdot 2x$$

$$F'(x)=\frac{2x}{(x^2+1)^2+1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- د انتیګرال او مشتق دويمه اساسي قضيه:

که چېرې $F(x)$ د $f(x)$ تابع لومړنی تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وي، په دې صورت کې لرو چې:

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

ثبـــوت: لـه مخکــې قــضيې څخـه پـوهېږو چــې کــه $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ دی لـه دې ځايـه د هر $x \in [a,b]$ لپاره $F'(x) = f(x)$ نو د دې دوو مقدارونو خلاف يو ثابت مقدار شته چې:

$$f(x) - F(x) = k \Rightarrow f(x) = F(x) + k$$

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

$$F'(x) = f(x)$$

$$\int_a^x f(t)dt = f(x) = F(x) + k$$

$$\int_a^x f(t)\,dt - F(x) = k$$

که د x په ځای په پورتنی رابطه کې a وضع کړو، نو:

$$\int_a^a f(t)\,dt - F(a) = k \quad , \quad 0 - F(a) = k \quad \Rightarrow \quad k = -F(a)$$

که د k قیمت په لومړی رابطه کې وضع کړو، نو: $\int_a^x f(t)dt - F(x) = -F(a)$

که د x په ځای په دې رابطه کې b وضع شي، نو: $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

چې اخيـري رابطه پـه $\int_a^b f(t)\,dt = [F(x)]_a^b$ پـه شکل شــودل کېــږي دغــه وروســتی اړیکــه د لــومړنی تــابع او انتیګــرال تــرمنځ اړیکــه ښــيي چـــې د $\int_a^b f(t)\,dt$ نيوټن"لايبنز" رابطې په نوم هم يادېږي.

يادونه:

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + c$$

$$\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\cot x + c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د $\int_0^1 x^2 dx$ انتیګرال حاصل پیدا کړئ.

حل: $\int_0^1 x^2 dx = F(1) - F(0) = [\frac{x^3}{3}]_0^1 = \frac{1}{3} \cdot 1^3 - \frac{1}{3} \cdot 0^3 = \frac{1}{3}$

پوښتني

1. لاندې مشتقات پیدا کړئ.

$a)\ F(t) = \int_{\sin t}^{\cos t} \frac{1}{4 - x^2} dx$

$b)\ F(t) = \int_{0}^{\cos t} \frac{1}{4 - x^2} dx$

$c)\ F(t) = \int_{-\pi}^{t} \frac{\cos y}{1 + y^2} dy$

$d)\ F(x) = \int_{1}^{x} \frac{\sin t}{t} dt$

2. که په $f(t) = t$ تابع کې $F(0) = 2$ وي، د $F(b)$ مقدار په $0, 0.2, 0.4, \ldots, 1$ ټکو کې پیدا کړئ.

3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx$ پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

11- په تعویضي طریقې سره انتیګرال نیونه

$$\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx$$

ـ آیا کولای شئ چې مخامخ انتیګرال د نامعین انتیګرال له خواصو څخه په کار اخېستنې سره حل کړئ.

ـ که نه شی کولای، نو د جذر لاندې افاده په یوه متحول سره عوض کړئ او بیا هغه حساب کړئ او ووایئ چې په انتیګرال کې د وضع کولو دا طریقه په څه نوم یادېږي.

- د $\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx$ انتیګرال کې د جذر لاندې افاده په u سره عوض کړئ.
- د u مشتق ونیسي او د dx قیمت پیدا کړئ.
- څرنګه چې نوموړی انتیګرال یو معین انتیګرال دی، نو د $u = 2x+1$ په معادله کې د $x = 0$ او $x = 4$ قیمتونه وضع او د انتیګرال حدودنه د u له جنسه په لاس راوړئ، وروسته د انتیګرال قیمت محاسبه کړئ.

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایلې ته رسیږو:

که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې مشتق منونکی وي، $u = g(x)$ او $F'(x) = f(x)$ سره تعویض شي، څرنګه چې $du = g'(x)dx$ دی، له زنځیري قاعدې څخه لیکلای شو:

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

لومړی مثال: د $\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2}$ انتیګرال قیمت پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: د قوس دننه افاده په u عوض کوو:

$$u = 3-5x \quad , \quad du = -5\,dx \qquad dx = -\frac{du}{5}$$

$$\begin{cases} x=1 \\ u=3-5x \end{cases} \Rightarrow u = 3-5\cdot 1 = -2 \Rightarrow u=-2$$

$$\begin{cases} x=2 \\ u=3-5x \end{cases} \Rightarrow u = 3-5\cdot 2 = 3-10 \Rightarrow u=-7$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2} = \int_{-2}^{-7} \frac{1}{u^2}(-\frac{1}{5})\,du = -\frac{1}{5}\int_{-2}^{-7}\frac{du}{u^2} = -\frac{1}{5}\left[-\frac{1}{u}\right]_{-2}^{-7} = \left[\frac{1}{5u}\right]_{-2}^{-7} = \frac{1}{5}\left[-\frac{1}{7}+\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{14}$$

دويم مثال: د $\int_0^1 x^2(1+2x^3)^5\,dx$ انتیگرال حساب کړئ.

حل: د قوس دننه افاده په u عوض کوو.

$$u = 1+2x^3 \quad , \quad du = 6x^2\,dx \Rightarrow x^2 dx = \frac{1}{6}du$$

$$\begin{cases} x=0 \\ u=1+2x^3 \Rightarrow u=1+2\cdot 0 = 1 \Rightarrow u=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=1 \\ u=1+2x^3 \Rightarrow u=1+2\cdot 1 = 3 \Rightarrow u=3 \end{cases}$$

$$\int_0^1 x^2(1+2x^3)^5\,dx = \int_1^3 u^5\,\frac{1}{6}\cdot du = \frac{1}{6}\int_1^3 u^5 du = \frac{1}{6}[\frac{u^6}{6}]_1^3 = \frac{1}{6}[\frac{3^6}{6}-\frac{1}{6}]$$

$$= \frac{1}{6}[\frac{729}{6}-\frac{1}{6}] = \frac{1}{6}[\frac{728}{6}]$$

$$= \frac{728}{36} = \frac{182}{9} = 20.\overline{2}$$

فعالیت

- د $\int x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$ انتیگرال کې د جذر لاندې افاده د u په متحول سره تعویض کړئ.
- له u څخه مشتق ونیسئ او په لاس راغلی قیمت په لومړنی انتیگرال کې وضع او هغه حساب کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- له پورته ځخه د $F(x)+C$ په لاس راغلي تابع ځخه مشتق ونیسئ او له هغې ځخه لومړنی تابع په لاس راوړئ.

له پورتني فعالیت ځخه لاندې پایله په لاس راځي:

که د $F(u)$ تابع د $f(u)$ لومړنی تابع وي، د $u=g(x)$ د متحول په تعویض سره یوه بله تابع چې مستقل متحول یې x او متمادي مشتق ولري له زنځیري قاعدې ځخه په کاراخیستنې سره لرو:

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx=\int f(u)\,du$$

لومړی مثال: $\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$ انتیګرال حساب کړئ.

حل: د جذر لاندې افاده په u سره عوض کوو.

$$u=1-4x^2\ ,\ du=-8x\,dx$$

$$xdx=-\frac{1}{8}du$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx=\int\frac{1}{\sqrt{u}}(-\frac{1}{8})\,du=-\frac{1}{8}\int\frac{1}{\sqrt{u}}\,du=-\frac{1}{8}\int u^{-\frac{1}{2}}\,du=-\frac{1}{8}\,(\frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1})+C$$

$$=-\frac{1}{8}(\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}})+C=-\frac{1}{8}(\frac{\sqrt{u}}{\frac{1}{2}})+C=-\frac{1}{8}(2\sqrt{u})+C=-\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}+C$$

دویم مثال: $\int x^3\cos(x^4+2)dx$ حساب کړئ.

حل: که چېرې $u=x^4+2$ وضع کړو په لاس راځي:

$$u=x^4+2\ ,\ du=4x^3dx\ ,\ x^3dx=\frac{1}{4}du$$

$$\int x^3\cos(x^4+2)\ dx=\int \cos u\cdot\frac{1}{4}du$$

$$=\frac{1}{4}\int\cos u\,du$$

$$=\frac{1}{4}\sin u+C$$

$$=\frac{1}{4}\sin(x^4+2)+C$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتني

لاندې انتیګرالونه د تعویض له لارې محاسبه کړئ.

$a)\ \int \cos 3x\, dx = ?$

$b)\ \int_{1}^{2} x\sqrt{x-1}\ dx = ?$

$c)\ \int_{0}^{7} \sqrt{4+3x}\ dx = ?$

$d)\ \int 2\sqrt[5]{(1-4x)^2}\, dx = ?$

$e)\ \int 2x(x^2+3)^4\, dx = ?$

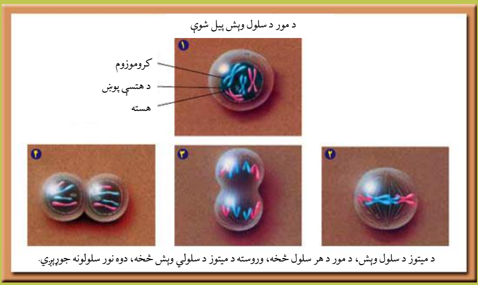
$f)\ \int_{0}^{5} \frac{x\, dx}{x^2+10} = ?$

$g)\ \int \sqrt{\cos x}\ \sin x\ dx = ?$

(c) ketabton.com: The Digital Library

12- په قسمي طريقې سره انتيګرال نيونه Integration by Parts

د حجروي وېش په وخت کې يوه حجره په دوو يا څو حجرو وېشل کېږي. آيا کولای شئ دا لاره(روش) په نورو شيانو کې، لکه: تېره، شګه او نورو کې ووينو که څواب هو وي، نو دا لاره د څه په نامه يادېږي.



د ميتوز د سلول وېش، د مور د هر سلول څخه، وروسته د ميتوز د سلولي وېش څخه، دوه نور سلولونه جوړېږي.

فعاليت

- د $\int \frac{xdx}{x^2+1}$ انتيګرال په تعويضي طريقه حل کړئ.
- د $\int_{-1}^{1} 3x^2\sqrt{x^3+1}dx$ انتيګرال قيمت په تعويضي طريقه پيدا کړئ.
- آيا کولای شئ چې د $\int x^2 \sin xdx$ انتيګرال په تعويضي طريقه حل کړئ.

له پورتني فعاليت څخه دې پايلې ته رسېږو:

د $\int f(x)g(x)\,dx$ په انتيګرال کې $f(x)$ او $g(x)$ دوې مشتق منونکی تابع ګانې دي چې يوه له بلې سره د ضرب ور وي يا نه وي، خو د انتيګرال محاسبه يې اسانه کار نه دی، که چېرې $f(x)=u$ او $g(x)=v$ وضع کړو، د ضرب حاصل مشتق يې مساوي په: $(u\cdot v)'=u'\cdot v+v'\cdot u$ دی.

له پورتنی رابطې څخه $v'\cdot u$ په لاس راوړو اوله اطراف څخه انتيګرال نيسو:

$$v'\cdot u=(u\cdot v)'-u'\cdot v$$

$$\int v'\cdot u\;dx=u\cdot v-\int u'\cdot v\;dx \quad \text{يا} \quad \int udv=u\cdot v-\int vdu$$

چې پورتنۍ رابطې ته د غيرمعين انتيګرال فورمول په قسمي طريقه وايي.

که د u او v تابع ګانې په $[a,b]$ انټروال کې تعريف شوي وي، لاندې فورمول د معين انتيګرال فورمول په قسمي لاره(طريقه) بلل کېږي.

$$\int_a^b v'u\,dx=u\cdot v\,\Big|_a^b-\int_a^b vu'\,dx \quad \text{يا} \quad \int_a^b udv=u\cdot v\,\Big|_a^b-\int_a^b vdu$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د $\int x\sin x\,dx$ انتیګرال پیدا کړئ.

حل:

$$u = x \qquad , \qquad du = dx$$
$$dv = \sin x\,dx \quad , \quad v = -\cos x$$
$$\int udv = u\cdot v - \int vdu$$
$$\int x\sin x\,dx = x(-\cos x) - \int -\cos x\;dx$$
$$= -x\cos x + \sin x + C$$

دویم مثال: د $\int_0^1 -x\,e^x\;dx$ انتیګرال حساب کړئ.

حل:

$$u = -x \qquad , \qquad du = -dx \qquad , \qquad -du = dx$$
$$dv = e^x dx \quad , \quad v = e^x$$
$$\int_a^b v'\cdot u\,dx = u\cdot v\,\Big|_a^b - \int_a^b v\cdot u'\,dx$$
$$\int_0^1 -xe^x\;dx = [-xe^x]_0^1 + \int_0^1 e^x dx$$
$$= -e^1 + 0\cdot e^0 + [e^x]_0^1$$
$$= -e^1 + e^1 - e^0 \;= -e^0$$
$$= -1$$

یادونه:

$$\int e^x\;dx = e^x + c$$

پوښتنې

لاندې انتیګرالونه حساب کړئ.

a) $\int \theta\cos\theta\;d\theta = ?$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x\,dx = ?$

c) $\int x^5\cos(x^3)\,dx = ?$

d) $\int_0^1 x\,e^x\;dx = ?$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د خپرکي مهم ټکي

د ريمان مجموعه: فرضوو د $y = f(x)$ تابع پـه $[a,b]$ انټـروال کـې متمـادي او تعريـف شـوى وي او د هغې ناحيې مساحت چې د x محور او د $y = f(x)$ منحني ترمنځ واقع دی چې په هندسي شکلونو نـه شي بدلېدلای، محاسبه کړو.

د $[a,b]$ انټروال په n مستطيلو نو تقسيموو څرنگه چې د هر مـستطيل عـرض د $(\Delta x = \frac{b-a}{n})$ رابطې څخه په لاس راځي او د مستطيلونو طول عبارت دی د تابع قيمت په هم هغه ټکي کې، دا فاصلې په لاندې ډول دي:

او د مستطيلونو انټروالونه د $i = 1, 2, 3, \ .... \ , n$ لپاره په لاندې ډول دي:

$$x_0 = a \quad , \quad x_1 = a + \Delta x \quad , \quad x_2 = a + 2\Delta x, \ \dots \ , x_i = a + i\Delta x, \ \dots \ , x_n = b$$

$$[x_0, x_1] \ , \ [x_1, x_2] \ , \ [x_2, x_3], \ \dots \ , [x_{i-1}, x_i], \ \dots \ , [x_{n-1}, x_n]$$

که د لاندېنيو مستطيلونو مساحت په $f(x_{i-1})\Delta x$ او د پورتنيـو مـستطيلونو مـساحت پـه $f(x_i)\Delta x$ وښـودل شي او د محصور شوي سطحې مساحت په A وښيو، نو لرو چې:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x < A < \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

نامعين انتيگرالونه:که چېرې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې تعريف او $F(x)$ د $f(x)$ يـوه لـومړنۍ تابع وي. د $F(x) + C$ توابعو سټ چې c يو ثابت عـدد وي د غيـرمعين انتگـرال پـه نامـه يـادېږي او داسـې ليکل کېږي: $\int f(x)dx = F(x) + C$

د نامعين انتيگرالونو خواص(ځانگړتياوې):

$$\int k dx = k \int dx = kx + C$$

$$\int a\, f(x)\, dx = a \int f(x)\, dx$$

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x)\ dx \pm \int g(x)\ dx$$

$$\int [f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)] dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx + \dots + \int f_n(x) dx$$

$$\int [f(x) \cdot g(x)]\ dx \neq \int f(x)\, dx \cdot \int g(x)\, dx$$

$$\int \frac{f(x)}{g(x)} dx \neq \frac{\int f(x) dx}{\int g(x) dx} \quad , \ g(x) \neq 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

معین انتیګرال: د $f(x)$ تابع د ریمان مجموعي لېمیټ ته په $[a,b]$ انټروال کې کله چې n بې‌نهایت تـه نژدې شي د Δx فرعي انټروالونو اوږدوالی صفر ته نژدې کېږي چې د $f(x)$ تابع معین انتیګـرال د $x=a$ څخه تر $x=b$ پورې په نوم یادېږي.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$$

a ته د انتیګرال لاندېنی سرحد او b ته د انتیګرال پورتنی سرحد وایي.

د معین انتیګرال خواص(**ځانګړتیاوې**):

$$\int_a^b C\,dx = C(b-a)$$

$$\int_a^b k\,f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

$$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

$$f(x)\le g(x) \;\Rightarrow\; \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

$$m(b-a)\le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a) \;\Rightarrow\; f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د انتیگرال او مشتق لومړی اساسي قضیه:

که چېرې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وي او x په دې انټروال کې شامل وي، لرو چې:

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

 څرنګه چې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې د مشتق وړ ده، نو د هر $x\in[a,b]$ لپاره $F'(x)=f(x)$ دی.

د انتیگرال او مشتق دویمه اساسي قضیه:

- که چېرې $F(x)$ تابع د $f(x)$ لومړنی تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وي، په دې صورت کې لرو چې:

$$\int_a^b f(t)\,dt=F(b)-F(a)$$

- که $F(u)$ د $f(u)$ لومړنی تابع وي او له $u=g(x)$ متحول سره تعویض شي چې مستقل متحول یې x او متمادي مشتق ولري. له زنځیري قاعدې څخه په کار اخیستنې سره لرو:

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx=\int f(u)\,du$$

- که $F(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې مشتق منونکي وي او $u=g(x)$ همدارنګه له $F'(x)=f(x)$ سره تعویض شي، څرنګه چې $du=g'(x)dx$ دی، له زنځیري قاعدې څخه لیکلای شو:

$$\int_a^b f(g(x))\;g'(x)\;dx=\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

- د $\int f(x)g(x)dx$ انتیگرال کې $f(x)$ او $g(x)$ دوې مشتق منونکي تابع ګانې وي چې په خپل منځ کې قابل د ضرب وي او یا نه وي، خو د انتیګرال محاسبه یې آسانه کار نه دی، که چېرې $f(x)=u$ او $g(x)=v$ سره عوض شي، د هغوی د حاصل ضرب مشتق عبارت دی له:

$$(u\cdot v)'=u'\cdot v+v'\cdot u$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له پورتني اړیکې څخه $v'\cdot u$ په لاس راوړو او له دواړو خواوو څخه انتیګرال نیسو:

$$\int v'\cdot u\ dx = u\cdot v - \int u'\cdot v\ dx \quad \text{یا} \quad \int udv = u\cdot v - \int vdu$$

چې اخیرۍ اړیکې ته د غیر معین انتیګرال فورمول په قسمي طریقه وایي.

- که د u او v تابع ګانې په $[a,b]$ انټروال کې تعریف شوی وي لاندې فورمول، د معین انتیګرال فورمول په قسمي لاره(طریقه) بلل کیږي:

$$\int_a^b v'u\,dx = u\cdot v\ \Big|_a^b - \int_a^b vu'\,dx \quad \text{یا} \quad \int_a^b udv = u\cdot v\ \Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي پوښتنې

1- د لاندې معینو انتیګرالونو قیمت پیدا کړئ.

$a)\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+x^2}dx$ $\quad b)\int_{-4}^{4}[2x^2-\frac{1}{8}x^4]dx$ $\quad c)\ \int_2^4 \frac{1}{x^2}dx$

$d)\int_0^3 4dx$ $\quad e)\ \int_1^3 \sqrt{x}\ dx$ $\quad f)\ \int_1^2 (x^2-x^5)dx$

$g)\ \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos^2 x}dx$ $\quad h)\ \int_{-2}^{0}[\frac{x^3}{4}+\frac{x^2}{3}]dx$ $\quad i)\ \int_2^3 (x^3+x^2)dx$

$j)\int_{-2}^{2}[x^3-\frac{1}{2}x^2+3x-4]dx$ $\quad k)\ \int_0^{\pi} \sin x dx$ $\quad l)\ \int_1^2 x^2\ dx$

2- لاندې غیر معین انتګرالونه په لاس راوړئ.

$a)\ \int[\sin x+8x^3]dx$ $\quad b)\ \int[x^5+\frac{4}{x^4}+x^3+\frac{2}{x^2}+x]dx$

$c)\ \int x(1-2x^2)dx$ $\quad d)\ \int \sin x\, dx$

$e)\ \int \frac{\sin 2x}{2\sin x}dx$ $\quad f)\ \int \frac{(1-x)^2}{1-x}dx$

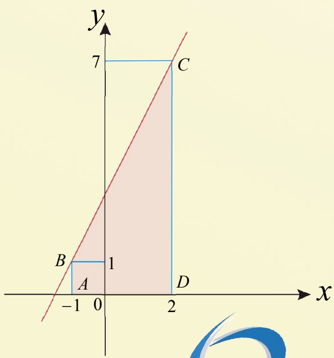
$g)\ \int \sqrt[5]{x^3}\ dx$ $\quad h)\ \int \frac{3x^2+8x}{x}dx$

$i)\ \int(2x^2+3)\ dx$ $\quad j)\ \int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+2}}dx$

$k)\ \int \frac{(1+x)(1-x)}{x-x^3}dx$ $\quad l)\int(3x^2+4x-1)\ dx$

3- د لاندې محصور رنګ شوي سطحې مساحت د شکل له مخې پیدا کړئ.

$\int_{-1}^{2}(2x+3)\,dx$



(c) ketabton.com: The Digital Library

4- لاندې انټیګرالونه د تعویضي طریقې په مرسته پیدا کړئ.

$a)\ \int 3\cos(2x+1)\,dx$

$b)\ \int \sqrt{3x+5}\,dx$

$c)\ \int \frac{2\,dx}{x+2}$

$d)\int (3x+6)^3\,dx$

$e)\int x^3\sqrt{x^4+2}\,dx$

$f)\int (x^3+2)^2 3x^2 dx$

$g)\int_0^2 \frac{dt}{(3-2t)^2}$

$h)\int_0^2 x^2\cdot\sqrt{9-x^3}\,dx$

$i)\int \frac{1}{(x-10)^7}dx$

$j)\int_0^1 (1-x^2)^3 x dx$

$k)\int (4-3x)^7 dx$

$l)\int \frac{x^2dx}{\sqrt[4]{x^3+2}}$

5- لاندې انټیګرالونه د قسمي طریقې په مرسته پیدا کړئ.

$a)\ \int x\cos x\,dx$

$b)\int_0^{\pi} \sin x\cos x\,dx$

$c)\ \int e^x\cdot\cos x\,dx$

$d)\int_0^{2\pi} x\cos 3x\,dx$

$e)\ \int xe^{-x}dx$

$f)\int x\sqrt{1+x}\,dx$

$g)\ \int x^2\cdot e^{2x}dx$

$h)\ \int e^{2x}\sin 3x\,dx$

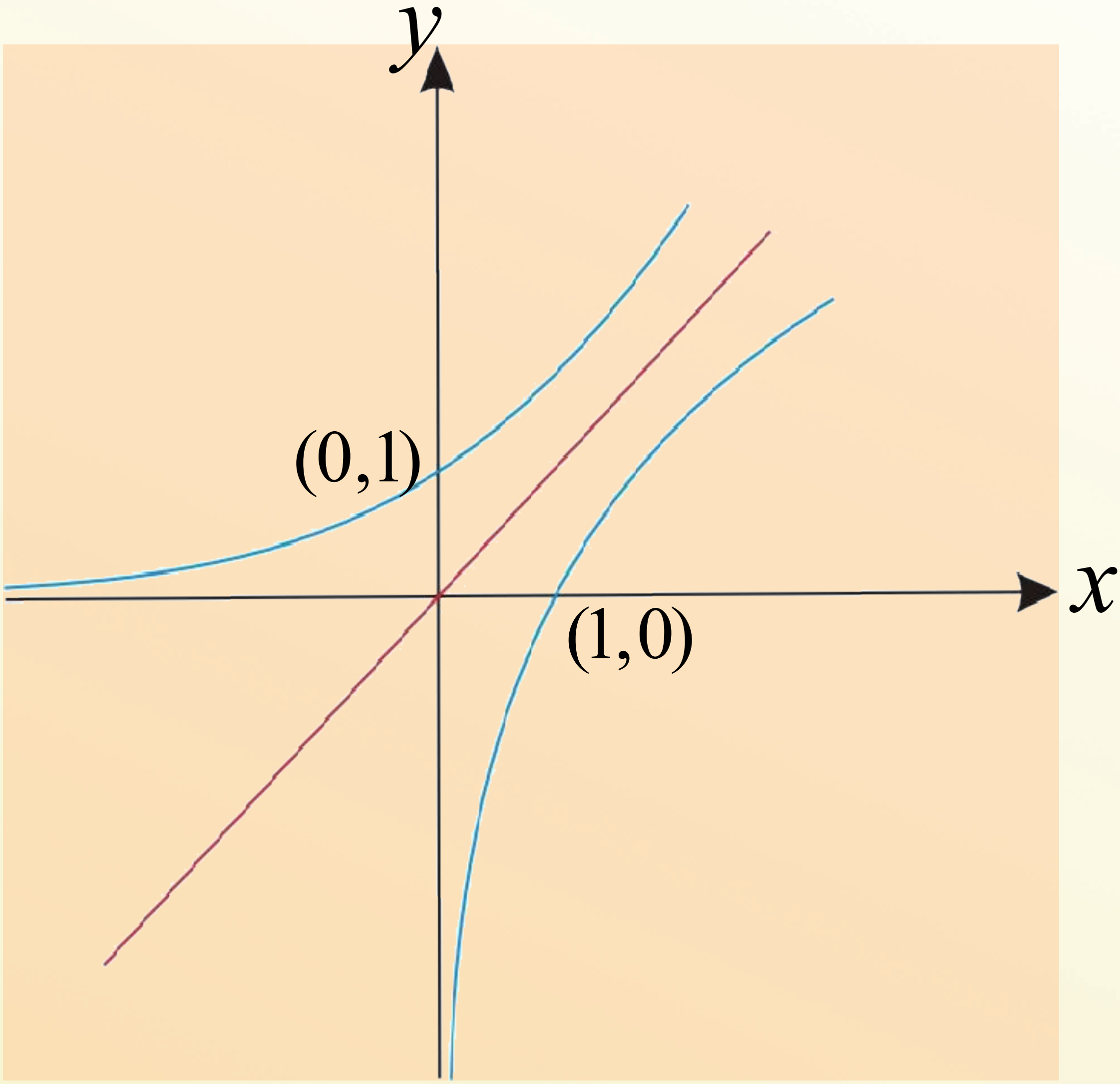
$i)\ \int x^2\cdot e^{-x}\,dx$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم څپرکی

د لوګاریتمي او اکسپوننشیل تابع ګانو مشتق او انتیګرال

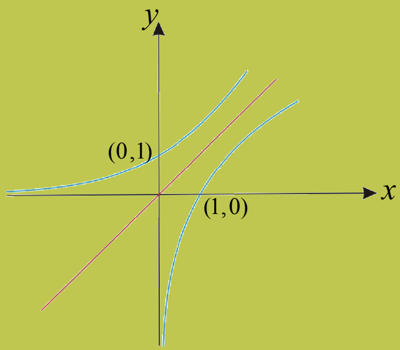
(c) ketabton.com: The Digital Library



(c) ketabton.com: The Digital Library

د لوګاریتمي او اکسپوننشیل تابع ګانو مشتق

مخامخ شکل د څه ډول تابع ګانو ګراف راښيي، نومونه يې واخلئ.



فعالیت

- لوګاریتم تعریف او خواص يې ولیکئ.
- لوګاریتمي او اکسپوننشیل تابع ګانې يوه له بلې سره څه اړیکې لري.
- که $\log_b x$ يوه متصله تابع وي، نو $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ له کوم عدد سره مساوي ده.
- د $y=f(x)$ د تابع له دواړو خواوو څخه طبیعي لوګاریتم ونیسئ، اړیکه يې ولیکئ.

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

په عمومي ډول که $f(x)=\ln x$ او $g(x)=a^x$ وي؛ نو $g'(x)=a^x\ln a$ او $f'(x)=\frac{1}{x}$ دی.

ثبوت:

-1

$$y=g(x)=a^x$$
$$\ln y=\ln a^x=x\ln a$$

د مساوات له دواړو خواوو څخه نظر x ته مشتق نیسو:

$$\frac{y'}{y}=x'\ln a+x(\ln a)'$$
$$\frac{y'}{y}=\ln a+0$$
$$\frac{1}{y}y'=\ln a$$
$$y'=y\ln a \quad\Rightarrow\quad g'(x)=a^x\ln a$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

-2

$$f(x)=\ln x$$

$$(\ln x)'=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln\frac{x+h}{x}}{h}$$

$$(\ln x)'=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln(\frac{x+h}{x})=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln(1+\frac{h}{x})\ =\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\frac{x}{h}\ln(1+\frac{h}{x})$$

$$=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\ln(1+\frac{h}{x})^{\frac{x}{h}}$$

که $u=\frac{x}{h}$ وضع شي نو $\frac{1}{u}=\frac{h}{x}$ دی خرنگه چې $h\to 0$ تقرب وکړي، نو $u\to\infty$ ته نژدې کېږي، لیکلای شو چې:

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}\lim_{u\to\infty}\ln(1+\frac{1}{u})^{u}\ =\frac{1}{x}\ln\lim_{u\to\infty}(1+\frac{1}{u})^{u}$$

پوهېږو چې $\lim_{u\to\infty}(1+\frac{1}{u})^{u}=e$ دی، نو: $(\ln x)'=\frac{1}{x}\ln e=\frac{1}{x}$

قضیه

1. که د $f(x)=\log_a x$ تابع مشتق منوونکی وي، نو مشتق یې $f'(x)=\frac{1}{x}\log_a e$
2. که $f(x)=\log_a g(x)$ او $g(x)$ مشتق منوونکی وي، نو $(\log_a g(x))'=\frac{g'(x)}{g(x)}\log_a e$

ثبوت:

-1

$$f(x)=\log_a x\quad\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}\log_a e$$

$$f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_a\frac{x+h}{x}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_a(1+\frac{h}{x})=\lim_{h\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{h}\log_a(1+\frac{h}{x})=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\log_a(1+\frac{h}{x})^{\frac{x}{h}}$$

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a\lim_{h\to 0}(1+\frac{h}{x})^{\frac{x}{h}}$$

اوس که $\frac{x}{h}=u$ وضع شي، نو $\frac{1}{u}=\frac{h}{x}$ کېږي، که $h\to 0$ صفر ته تقرب وکړي، نو $u\to\infty$ کوي، یعنې:

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a\lim_{u\to\infty}(1+\frac{1}{u})^{u}\ =\frac{1}{x}\log_a e$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- غواړو ثبوت کړو چې: $(\log_a g(x))'=\frac{g'(x)}{g(x)}\log_a e$

د زنځيري قاعدې له مخې:

$$f'(x)=(\log_a g(x))'=(\log_a g(x))'\cdot g'(x)=\frac{1}{g(x)}\log_a e\cdot g'(x)$$

$$=\frac{g'(x)}{g(x)}\log_a e$$

که $a=e$ وضع شي، نو لرو: $(\log_a g(x))'=(\ln g(x))'=\frac{g'(x)}{g(x)}$

پايله:

1- د Exponential تابع ګانو مشتق د لوګاريتم په مرسته کولای شو په اسانۍ سره په لاس راوړو.

که $y=e^x$ وي ددې تابع مشتق $y'=e^x$ دی، ځکه که د $y=e^x$ رابطې څخه طبيعي لوګاريتم ونيسو، په لاس راځي:

$$y=e^x \quad \Rightarrow \ln y=x\ln e=x$$

$$(\ln y)'=(x)' \quad \Rightarrow \frac{y'}{y}=1 \quad \Rightarrow y'=y\cdot 1=e^x$$

2- که $y=e^u$ او u تابع د x وي، نو: $y'=u'e^u$

3- که $y=a^u$ کله چې $a>0$ او $a\neq 1$ وي، نو: $y'=u'a^u\ln a$

4- د لوګاريتمي تابع ګانو د مشتق پيدا کولو لپاره په بېلابېلو قاعدو سره له دې اريکې څخه ګټه اخلو:

$$y=\log_a u \Rightarrow y'=(\log_a u)'=\frac{u'}{u}\log_a e$$

$$y'=\frac{u'}{u}\log_a e=\frac{u'}{u}\cdot\frac{1}{\log_e a} \quad \Rightarrow y'=\frac{u'}{u\ln a}$$

لومړی مثال: د $f(x)=\ln(x^2+1)$ تابع مشتق پيدا کړئ.

حل: که $g(x)=x^2+1$ وضع کړو، نو لرو:

$$g(x)=x^2+1$$
$$g'(x)=2x$$
$$(\ln g(x))'=\frac{g'(x)}{g(x)}$$
$$(\ln(x^2+1))'=\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}=\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x \quad \Rightarrow f'(x)=(\ln(x^2+1))'=\frac{2x}{x^2+1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال: د $f(x)=\ln(x^2-5x+4)$ تابع مشتق پیدا کړئ.

حل:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\ln(x^2-5x+4) \\ g(x)=x^2-5x+4 \Rightarrow g'(x)=2x-5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (\ln g(x))'=\dfrac{g'(x)}{g(x)} \\ (\ln(x^2-5x+4))'=\dfrac{g'(x)}{g(x)}=\dfrac{2x-5}{x^2-5x+4} \end{array}$$

دریم مثال: د $f(x)=\log_a\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}$ او $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}$ تابع ګانو مشتق پیدا کړئ.

حل: پوهیږو چې $\log_a\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}=\log_a(\dfrac{x^2+1}{x^2-1})^{\frac{1}{2}}$ دی، نو لیکلای شو چې:

$$\log_a\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}=\log_a(\frac{x^2+1}{x^2-1})^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log_a\frac{x^2+1}{x^2-1}=\frac{1}{2}(\log_a(x^2+1)-\log_a(x^2-1))$$

$$(\log_a\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}})'=\frac{1}{2}(\log_a(x^2+1)-\log_a(x^2-1))'$$

$$=\frac{1}{2}[\frac{(x^2+1)'}{(x^2+1)}\log_a e-\frac{(x^2-1)'}{(x^2-1)}\log_a e]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{2x}{x^2+1}\log_a e-\frac{2x}{x^2-1}\log_a e\right]=\frac{1}{2}\cdot 2x\log_a e\left[\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2-1}\right]$$

$$=\frac{-2x}{x^4-1}\log_a e$$

حل: پوهیږو چې $\ln\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}=\ln(\dfrac{x^2+1}{x^2-1})^{\frac{1}{2}}$ دی، نو لیکلای شو چې:

$$\ln\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}=\ln(\frac{x^2+1}{x^2-1})^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(\ln(x^2+1)-\ln(x^2-1))$$

$$(\ln\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}})'=\frac{1}{2}[\ln(x^2+1)-\ln(x^2-1)]'=\frac{1}{2}[(\ln(x^2+1))'-(\ln(x^2-1))']$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{2x}{x^2+1}-\frac{2x}{x^2-1})=\frac{-2x}{x^4-1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

څلورم مثال: د $y = e^{(x^2+1)}$ تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: پوهېږو چې که $y = e^u$ وي نو $y' = u'e^u$

$$y = e^{(x^2+1)} \quad \Rightarrow \quad y' = (x^2+1)' \cdot e^{x^2+1} = 2x \cdot e^{x^2+1}$$

پنځم مثال: د $y = \sqrt[x]{2}$ تابع مشتق په لاس راوړئ.

حل: پوهېږو چې که چېرې $y = a^u$ وي، نو $y' = u'a^u \ln a$ سره دی، نو:

$$y = \sqrt[x]{2} = (2)^{\frac{1}{x}} \quad \Rightarrow \quad y' = (\frac{1}{x})' \cdot 2^{\frac{1}{x}} \ln 2 = \frac{-1}{x^2} \cdot 2^{\frac{1}{x}} \cdot \ln 2$$

شپږم مثال: د $y = x^{2x}$ تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: که د معادلې له دواړو خواوو څخه طبیعي لوګاریتم ونیسو، په لاس راځي چې:

$$y = x^{2x}$$
$$\ln y = \ln x^{2x}$$
$$\ln y = 2x \ln x$$
$$(\ln y)' = (2x \ln x)' \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{y} = 2\ln x + 2x \cdot \frac{1}{x}$$
$$y' = 2(\ln x + 1) \cdot y \quad \Rightarrow \quad y' = 2(\ln x + 1) \cdot x^{2x}$$

اووم مثال: د $y = 10^x$ تابع مشتق حساب کړئ.

حل: پوهېږو چې $y = a^x \quad \Rightarrow \quad y' = a^x \ln a$ دی، نو:

$$y = 10^x$$
$$y' = 10^x \cdot \ln 10$$

اتم مثال: د $y = e^{3x}$ تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: که $u = 3x$ وضع شي، نو: $u'(x) = 3$

$$y = e^u$$
$$y' = e^u \cdot u' = e^{3x} \cdot 3$$
$$y' = 3e^{3x}$$

نهم مثال: د لاندې تابع ګانو مشتق پیدا کړئ.

1) $y = \log(x^4 + 1)$ 2) $y = \log_3(\log_2 x)$ 3) $y = \log_{x^2-1} x^2 + 1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: پوهېږو چې د لوګارتمي توابعو مشتق په مختلفو قاعدو سره د لاندې قضيې خخه په ګټه اخېستنې سره په لاس راوړو:

$$y=\log_a u$$

$$y'=(\log_a u)'=\frac{u'}{u}\log_a e=\frac{u'}{u\log_e a}=\frac{u'}{u\ln a}$$

$$1)\quad y=\log(x^4+1)\quad\Rightarrow\quad y'=\frac{4x^3}{(x^4+1)\ln 10}$$

$$2)\quad y=\log_3(\log_2 x)\quad\Rightarrow\quad y'=\frac{(\log_2 x)'}{\ln 3\log_2 x}=\frac{\frac{1}{x\ln 2}}{\ln 3\log_2 x}=\frac{1}{(\ln 2)(\ln 3)x\log_2 x}$$

$$=\frac{1}{\ln 2\cdot\ln 3\cdot x\cdot\frac{\log_e x}{\log_e 2}}=\frac{1}{\ln 2\cdot\ln 3\cdot x\cdot\frac{\ln x}{\ln 2}}=\frac{1}{\ln 3\, x\ln x}$$

$$3)\quad y=\log_{x^2-1}x^2+1=\frac{\log_e(x^2+1)}{\log_e(x^2-1)}=\frac{\ln(x^2+1)}{\ln(x^2-1)}$$

پوهېږو چې $y'=\frac{u'v-v'u}{v^2}\quad\Rightarrow\quad y=\frac{u}{v}$ **دی؛ نو لرو:**

$$y'=\frac{\frac{2x}{x^2+1}\cdot\ln(x^2-1)-\frac{2x}{x^2-1}\ln(x^2+1)}{\left[\ln(x^2-1)\right]^2}$$

پوښتنې

د لاندې توابعو مشتق پيدا کړئ:

$a)\quad f(x)=\ln\sin 3x$

$b)\quad f(x)=\ln\sqrt{3x^2+7}$

$c)\quad f(x)=\ln(5x^2-6x+5)$

$d)\quad f(x)=\log_{10}3x^2$

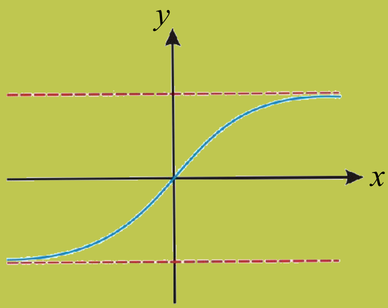
$e)\quad f(x)=y=x^x$

$f)\quad y=\frac{(x+1)^2(\sqrt{x}-1)}{(x+4)^3e^x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د معکوسو تابع گانو مشتق

مخامخ شکل د څه ډول تابع گراف راښیي؟



کـه چېـرې f او g یـوه د بلـې دوې معکوسـې تـابع گـانې وي، یعنـې $y=f(x)\Leftrightarrow x=g(y)$ وي، نـو: $\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{dy}{dx}$ یا $y'_x=\frac{1}{x'_y}$ دی، ځکه چې د تابع او ضمني تابع گانو له مشتق څخه لیکلای شو:

$$\left.\begin{array}{l} y=f(x) \\ x=g(y) \end{array}\right\} \Rightarrow y'_x\cdot x'_y=y'_y \quad \Rightarrow y'_x\cdot x'_y=1 \quad \Rightarrow y'_x=\frac{1}{x'_y}$$

مثال: د $y=a^x$ تابع مشتق د هغې د معکوسې تابع په مرسته پیدا کړئ.

حل:

$$y=a^x \quad \Rightarrow x=\log_a y$$

$$\Rightarrow y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{(\log_a y)'}=\frac{1}{\frac{1}{y}\log_a e}=\frac{1}{\frac{1}{y}}\log_e a=y\log_e a$$

$$y'=a^x\ln a$$

د مثلثاتي معکوسو تابع گانو مشتق

د مثلثاتي معکوسو تابع گانو مشتق د لاندې اړیکو په مرسته لاسته راوړو:

1) $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 2) $(\arccos x)'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

3) $(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$ 4) $(arc\cot x)'=\frac{-1}{1+x^2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ثبوت:

1) $y = arc\sin x \quad \Leftrightarrow \quad x = \sin y$

$(arc\sin x)' = ?$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}$$

$$\Rightarrow (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

2) $y = arc\cos x \quad \Leftrightarrow \quad x = \cos y$

$(arc\cos x)' = ?$

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\cos y)'} = \frac{1}{-\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}$$

$$\Rightarrow (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

3) $y = arc\tan x \Leftrightarrow x = \tan y$

$$\Rightarrow (arc\tan x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y$$

$$= \frac{\cos^2 y}{1} = \frac{\cos^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y}$$

دکسر صورت او مخرج په $\cos^2 y$ ویشو:

$$(arc\tan x)' = \frac{\cos^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y} = \frac{1}{\tan^2 y + 1} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

4) $y = arc\cot x \Leftrightarrow x = \cot y$

$$(arc\cot x)' = ?$$

$$(arc\cot x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\cot y)'} = \frac{1}{\frac{-1}{\sin^2 y}}$$

$$= -\sin^2 y = \frac{-\sin^2 y}{1} = \frac{-\sin^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y}$$

د کسر صورت او مخرج په $\sin^2 y$ ویشو:

$$= -\frac{\sin^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y} = \frac{-1}{1+\cot^2 y} = -\frac{1}{1+x^2}$$

لومړی مثال: د $y = (\arctan x)^5$ تابع مشتق پیدا کړئ.

$$y' = 5(\arctan x)^4 (\arctan x)' = 5(\arctan x)^4 \frac{1}{1+x^2}$$

دویم مثال: د $y = \log_5(\arctan x)$ تابع مشتق پیدا کړئ.

$$y' = [\log_5(\arctan x)]' = (\log_5 u)' = \frac{u'}{u \log_5 e}$$

$$= \frac{\frac{1}{1+x^2}}{\arctan x \log_5 e} = \frac{1}{(1+x^2)(\arctan x \ln 5)}$$

دریم مثال: د $y = arc\tan e^x$ تابع د مشتق مقدار د $x = 0$ ټکي کې پیدا کړئ.

$$y' = [arc\ \tan e^x]' = (arc\tan u)' = \frac{u'}{1+u^2} = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$$

$$y'(0) = \frac{e^0}{1+e^0} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1. د لاندې تابع گانو مشتق پیدا کړئ.

1) $y = (arc\sin x)^3$

2) $y = \log_2(arc\cos x)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

قسمي کسرونه

د يو کسر تجزيه کول په قسمي کسرونو:

پـوهېږو چـې د $\frac{2}{x+1}$ او $\frac{1}{x^2-1}$ د جمعـې حاصـل $\frac{2x-1}{x^2-1}$ دی، آيا کولای شئ چې لـه دې کسر څخه د $\frac{2}{x+1}$ او $\frac{1}{x^2-1}$ کسرونه لاسته راوړئ.

$$\frac{2}{x+1}+\frac{1}{x^2-1}=\frac{2x-1}{x^2-1}$$

- د $\frac{7}{x+1}$, $\frac{5}{x-2}$ او $\frac{2}{x-5}$ کسرونه سره جمع کړئ.
- د پورته کسرونود جمعې حاصل، بېرته په لومړنيو کسرونو واړوئ.
- واقعي کسرونه څه ډول کسرونه دي، تعريف يې کړئ.

د پورتني فعاليت پايله داسې بيانوو:

تعريف: د يوه واقعي کسر هغه کوچنی کسرونه چې د جمعې د عواملو په شکل ليکل شوي وي، که چېرې هغوی سره جمع کړو، راکړل شوی واقعي کسر به په لاس راشي، نو دا جمع شوي لومړني کسرونه د قسمي کسرونو په نامه يادېږي.

د يوه واقعي کسر د تجزيه کولو لپاره لاندې حالتونه په پام کې نيسو:

لومړی حالت:

که چېرې د $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ ناطق کسر مخرج ($P_n(x)$) له خطي بېلابېلو ضربي عواملو څخه جوړ شوی وي او تکرار نه وي په لاندې بڼه بدلېدلای شي:

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}+\frac{C}{x-x_3}+\ \cdots\ +\frac{N}{x-x_n}$$

(A , B , C .... حقيقي عددونه دي)

لومړی مثال: د $\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}$ کسر په قسمي کسرونو تجزيه کړئ.

حل: د مخرج پولينوم په لومړنيو ضربي عواملو تجزيه کوو، نو په لاس راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x^3-4x^2-7x+10=(x-5)(x-1)(x+2)$$

لیدل کېږي چې نومورې کسر له درو قسمي کسرونو څخه جوړ شوی دی، صورتونه یې C, B, A ټاکو:

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{A}{x-5}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}$$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{A(x-1)(x+2)+B(x-5)(x+2)+C(x-1)(x-5)}{(x-5)(x-1)(x+2)}$$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{Ax^2+Ax-2A+Bx^2-3Bx-10B+Cx^2-6Cx+5C}{(x-5)(x-1)(x+2)}$$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{(A+B+C)x^2+(A-3B-6C)x+(-2A-10B+5C)}{(x-5)(x-1)(x+2)}$$

لیدل کېږي چې د دواړو خواوو د کسرونو مخرجونه سره برابر دي، نو باید صورتونه هم سره برابر وي، نو د مطابقت د خواصو(د ورته حدونو ضریبونه سره مساوي وي) څخه په ګټه اخستنې سره لیکو:

$$\begin{cases} A+B+C=4 \\ A-3B-6C=-1 \\ -2A-10B+5C=-39 \end{cases}$$

د پورته سیستم له حل څخه وروسته $A=2$, $B=3$ او $C=-1$ په لاس راځي، نو:

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{2}{x-5}+\frac{3}{x-1}-\frac{1}{x+2}$$

دویم مثال: د $\frac{3x^3-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8}$ کسر په قسمي کسرونو تجزیه کړئ.

حل: لومړی نومورې کسر په واقعي کسر بدلوو او بیا پورتنی طریقه پرې تطبیقوو:

$$\frac{3x^3-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8}=3x+\frac{4x-1}{x^2-2x-8} \Rightarrow \frac{4x-1}{x^2-2x-8}=\frac{A}{x-4}+\frac{B}{x+2}$$

$$=\frac{A(x+2)+B(x-4)}{(x-4)(x+2)}=\frac{(A+B)x+(2A-4B)}{x^2-2x-8}$$

$$\left.\begin{matrix} A+B=4 \\ 2A-4B=-1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow A=\frac{5}{2} \quad , \quad B=\frac{3}{2}$$

$$\frac{3x^2-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8}=3x+\frac{5}{2(x-4)}+\frac{3}{2(x+2)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم حالت:

که د کسر د مخرج ضربي عوامل لومړی درجه پولينوم وي چې ځينې يې تکرار راغلی وي، يعنې که د $x-x_0$ عامل n ځلې په مخرج کې تکرار شوی وي، نو ليکلای شو چې:

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)}=\frac{A}{x-x_0}+\frac{B}{(x-x_0)^2}+\cdots+\frac{N}{(x-x_0)^n}$$

لومړی مثال: د $\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}$ واقعي کسر په قسمي کسرونو تجزيه کړئ:

حل: د مخرج د پولينوم ضربي عوامل په لاس راوړو:

$$x^3-4x^2+5x-2=(x-1)(x-2)(x-1)$$

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{3x^2-6x+2}{(x-2)(x-1)^2}=\frac{A}{(x-2)}+\frac{B}{(x-1)}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{A(x-1)^2+B(x-2)(x-1)+C(x-2)}{(x-2)(x-1)^2}$$

$$=\frac{(A+B)x^2+(-2A-3B+C)x+(A+2B-2C)}{(x-2)(x-1)^2}$$

$$\left.\begin{array}{l}A+B=3\\-2A-3B+C=-6\\A+2B-2C=2\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{array}{l}A=2\\B=1\\C=1\end{array}$$

$$\Rightarrow\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

دريم حالت:

که د مخرج ضربي عوامل دويمه درجه پولينوم چې د تجزيې وړ نه وي او تکرار هم نه وي راغلی، نو د $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ واقعي پولينوم د يو قسمي کسر $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ بڼه لري.

لومړی مثال: د $\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}$ کسر په قسمي کسرونو تجزيه کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: د مخرج پولینوم ضربي عوامل عبارت دی له:

$$x^3+3x^2+6x+4=(x+1)(x^2+2x+4)$$

څرنګه چې د x^2+2x+4 درې جمله‌یي د حقیقي عددونو په سټ کې حل نه لري، نو په دې ساحه کې د تجزیې وړ نه ده. له دې امله لیکو:

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{Ax+B}{x^2+2x+4}+\frac{C}{x+1}=\frac{(Ax+B)(x+1)+C(x^2+2x+4)}{(x^2+2x+4)(x+1)}$$

$$=\frac{(A+C)x^2+(A+B+2C)x+(B+4C)}{(x^2+2x+4)(x+1)}$$

$$\left.\begin{array}{l}A+C=5\\ A+B+2C=8\\ B+4C=9\end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l}A=3\\ B=1\\ C=2\end{array} \Rightarrow \frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{3x+1}{x^2+2x+4}+\frac{2}{x+1}$$

پوښتنې

لاندې کسرونه په قسمي کسرونو تجزیه کړئ.

-1

$a)\ \dfrac{-x^2+2x-12}{x^3+2x^2+6x+5}$ $b)\ \dfrac{4x^2-3x+8}{x^3-2x+4}$ $c)\ \dfrac{2x^4-8x^3+7x^2-3x+4}{x^2-9x+3}$

-2

$a)\ \dfrac{1}{x^4(x+1)}$ $b)\ \dfrac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}$ $c)\ \dfrac{x^4+1}{x^2(x-1)}$

$d)\ \dfrac{3x^2+5x+10}{x^3+2x^2-4x-8}$ $e)\ \dfrac{3x^2-18x+36}{x^3-6x^2+9x}$

-3

$a)\ \dfrac{3x+7}{(x^2+x+1)(x^2-4)}$ $b)\ \dfrac{x^2+3x+4}{x^4-2x^2+1}$

$c)\ \dfrac{x^2+13x+10}{x^3-5x^2}$ $d)\ \dfrac{x^5}{x^4-1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اکسپوننشل تابع ګانو انتيګرالونه

مخامخ اړيکې سره پرتله کړئ.

$$\log_a b = x$$

$$a^x = b$$

- د $f(x) = a^x$ تابع څه ډول تابع ده، نوم يې واخلئ.
- د لوګاريتمي تابع يوه بېلګه وليکئ.
- د $\log_a x = C$ اړيکه په اکسپوننشيل ډول وليکئ.

له پورتني فعاليت څخه ليکلای شو چې:

د $f(x) = e^x$ طبيعي اکسپوننشيل تابع لپاره لرو $\int e^x dx = e^x + C$ نو په عمومي ډول

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} \quad , \ a \neq 1 \quad , \ a \in IR^+$$

ثبوت: له تعويضي طريقې څخه په کار اخيستنې سره لرو:

$$u = a^x$$

$$du = \ln a \cdot a^x dx$$

$$dx = \frac{du}{\ln a \cdot a^x} = \frac{du}{u \ln a}$$

$$\int a^x dx = \int u \frac{du}{u \ln a} = \frac{1}{\ln a} \int dx$$

$$\frac{1}{\ln a} u = \frac{1}{\ln a} a^x = \frac{a^x}{\ln a} \Rightarrow \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د $f(x)=2^{x-3}$ اکسپوننشیل تابع انتیګرال غواړو پیدا کړو:

د توان له قانون څخه لرو:

$$2^{x-3}=\frac{2^x}{2^3}=\frac{1}{8}2^x$$

$$\int 2^{x-3}dx=\int\frac{1}{8}2^x dx=\frac{1}{8}\int 2^x dx$$

$$\frac{1}{8}\int 2^x dx=\frac{1}{8}\cdot\frac{2^x}{\ln 2}+C$$

دویم مثال: دلاندې اکسپوننشیل تابع ګانو انتیګرالونه پیدا کړئ.

1) $\int 3^{x+1}dx=?$ 2) $\int 6^{x-1}dx=?$

حل:

1) $\int 3^{x+1}dx=?$

$$3^{x+1}=3^x\cdot 3$$

$$\int 3^x\cdot 3\,dx=3\int 3^x dx=3\cdot\frac{3^x}{\ln 3}+C$$

2) $\int 6^{x-1}dx=?$

$$6^{x-1}=\frac{6^x}{6}=\frac{1}{6}\cdot 6^x$$

$$\int\frac{1}{6}6^x dx=\frac{1}{6}\int 6^x dx=\frac{1}{6}\cdot\frac{6^x}{\ln 6}+C$$

پوښتنې

د لاندې اکسپوننشیل تابع ګانو انتیګرالونه محاسبه کړئ.

$a)\ \int 3^{x-1}dx$ $b)\ \int 2^{-x}dx$ $c)\ \int a^{x+b}dx$

$d)\ \int\frac{1}{a^x}dx$ $e)\ \int 2^x\cdot 3^x dx$ $f)\ \int\frac{2^x}{3^x}dx$

$g)\ \int\frac{4^{x+3}}{2^x}dx$ $h)\ \int\frac{5^x+3^x}{2^x}dx$ $i)\ \int(1+2^x)dx$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لوګاریتمي تابع ګانو انتیګرال

وښیئ چې د تابع په کوم حالت کې نزولي او په کوم حالت کې صعودي ده.

$$y = a^x$$

$$\int a^x dx = ?$$

- لوګاریتم په څو ډوله دی، د هر ډول عمومي رابطه ولیکئ.
- د $x = a^y$ او $y = \log_a x$ معادلې یو له بل سره څه اړیکه لري.
- د $x = b^y$ او $y = \log_b x$ تابع ګانو ګراف رسم کړئ.
- آیا کولای شو چې د لوګاریتمي تابع ګانو انتیګرال ونیسو؟

له پورتني فعالیت څخه پایله داسې بیانوو:

که $(x \in IR^+)$ $f(x) = \ln x$ وي د طبیعي لوګاریتم د تابع لپاره لیکلای شو: $\int \ln dx = x \cdot \ln x - x + C$

که $(x, a \in IR^+, a \neq 1)$ $f(x) = \log_a x$ وي د معمولي لوګاریتم تابع لپاره لیکلای شو:

$$\int \log_a x\, dx = x \log_a \frac{x}{e}$$

ثبوت:

1- که $a = e$ وضع شی، نو:

$$\int \log_a x\, dx = x \log_a \frac{x}{e} + C$$

$$\int \log_e x\, dx = \int \ln x dx = x \log_e \frac{x}{e} = x(\log_e x - \log_e e)$$

$$\int \ln x\, dx = x \ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

-2

$$\int \log_a x\,dx = x\log_a \frac{x}{e} + C$$

$$u = \log_a x \;,\quad du = \frac{1}{x}\log_a e\,dx$$

$$dv = dx \;,\quad v = x$$

$$\int \log_a x\,dx = x\log_a x - \int x\frac{1}{x}\log_a e\,dx$$

$$= x\log_a x - \log_a e\int dx$$

$$= x\log_a x - x\log_a e = x(\log_a x - \log_a e) = x\log_a \frac{x}{e} + C$$

$$\int \log_a x\,dx = x\,\log_a \frac{x}{e} + C$$

مثال: د $\int \ln 3x dx$ غیرمعین انتیگرال غواړو پیدا کړو:

حل:

$$\int \ln 3x dx = \int (\ln 3 + \ln x)dx = \int \ln 3\,dx + \int \ln x\,dx$$

$$= x\ln 3 + x\ln x - x$$

$$= x(\ln 3 + \ln x) - x = x(\ln 3x - 1)$$

يادونه:

(I) د تعويض Substitution له لارې کولای شو د غیرمعین انتیګرال حل پیدا کړو.

لومړی مثال: لاندې انتیګرالونه پیدا کړئ.

حل:

$$a)\quad I = \int \frac{1}{2}e^{-2x-3}dx$$

$$-2x - 3 = u, \qquad -2 = \frac{du}{dx} \quad , \quad dx = -\frac{1}{2}du$$

$$I = \int \frac{1}{2}e^u \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)du = -\frac{1}{4}\int e^u du = -\frac{1}{4}e^u + C = -\frac{1}{4}e^{-2x-3} + C$$

$$b)\quad I = \int \frac{2dx}{x+2}$$

$$x + 2 = u, \qquad 1 = \frac{du}{dx} \qquad dx = du$$

$$I = \int \frac{2du}{u} = 2\int \frac{du}{u} = 2\ln|u| + C = 2\ln|x+2| + C$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال: د $f(x)=e^{2x}$ تابع انتیګرال ونیسئ:

حل:

$$f(x)=e^{2x} \Rightarrow \int f(x)dx=\int e^{2x}dx=?$$

$$u=2x \Rightarrow du=2dx$$

$$dx=\frac{du}{2}$$

$$f(x)=e^{2x} \Rightarrow \int f(x)dx=\int e^{u}\cdot\frac{du}{2}=\frac{1}{2}\int e^{u}\,du$$

$$\int e^{2x}dx=\frac{e^{u}}{2}+C=\frac{e^{2x}}{2}+C=\frac{1}{2}e^{2x}+C$$

آزمایښت: $F(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+C \Rightarrow F'(x)=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot 2=e^{2x}=f(x)$

دریم مثال: د $f(x)=x\cdot\ln x^{2}$ انتیګرال حساب کړئ.

حل:

$$f(x)=x\cdot\ln x^{2} \Rightarrow \int f(x)dx=\int (x\cdot\ln x^{2})dx=?$$

$$u=x^{2}$$

$$du=2x\,dx \Rightarrow dx=\frac{1}{2}du$$

$$\int f(x)\,dx=\int x\cdot\ln u\cdot\frac{1}{2x}du=\frac{1}{2}\int \ln u\,du=\frac{1}{2}[u\cdot\ln u-u+C]=\frac{1}{2}u\cdot\ln u-\frac{1}{2}u+C$$

$$=\frac{1}{2}x^{2}\cdot\ln x^{2}-\frac{1}{2}x^{2}+C$$

(II) معین انتیګرالونه هم د بدلون(تعویض) له لارې حل کېږي.

لومړی مثال: د $\int_{-1}^{1} e^{2x}\,dx$ انتیګرال پیدا کړئ.

$$f(x)=e^{2x} \Rightarrow \int_{-1}^{1} e^{2x}\,dx$$

$$u=2x \Rightarrow du=2\,dx \Rightarrow dx=\frac{1}{2}du$$

$$\left.\begin{array}{l} x=-1,\ u=2x \Rightarrow u=2(-1)=-2 \\ x=1,\ u=2x \Rightarrow u=2(1)=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \int_{-1}^{1} e^{2x}\,dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} e^{u}\,du=\frac{1}{2}\left[e^{u}\right]_{-2}^{2}=3.627$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال: د $f(x)=\int_1^2 2x\cdot\ln x^2 dx$ انتیگرال قیمت پیدا کړئ.

$$u=x^2$$

$$du=2x\,dx \Rightarrow dx=\frac{1}{2x}du$$

$$\left.\begin{matrix} x=1\ , & u=x^2=1 \\ x=2\ , & u=x^2=4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \int_1^2 2x\cdot\ln x^2 dx=\int_1^4 2x\cdot\ln u\cdot\frac{1}{2x}du=\int_1^4 \ln u\,du$$

$$=\left[u\cdot\ln u-u\right]_1^4=\left[4\cdot\ln 4-4\right]-\left[1\cdot\ln 1-1\right]\approx 2.545$$

پوښتنې

لاندې انتیگرالونه حل کړئ.

$a)\ \int \ln 2x^3 dx$ $\quad b)\ \int \ln\sqrt{x}dx$ $\quad c)\ \int \log\frac{x}{2}dx$

$d)\ \int 3\log\frac{1}{x}dx$ $\quad e)\ \int_1^2 \frac{4}{e^{2x-4}}dx$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د قسمي کسرونو په مرسته د انتیگرال محاسبه

د مخامخ کسر قسمي کسرونه پیدا کړئ.

$$\frac{5}{x^2-3x+2}=\frac{?}{(x-2)}+\frac{?}{(x-1)}$$

مخکې مو د قسمي کسرونو تجزیه مطالعه کړه اوس غواړو چې د هغو تابع گانو انتیگرالونه د قسمي کسرونو په واسطه تر څېړنې لاندې ونیسو.

لومړی مثال: $\int \frac{7x-12}{x^2-6x+8}dx$ محاسبه کړئ.

حل: د قسمي کسرونو د تجزیې په مرسته لیکلای شو:

$$\frac{7x-12}{x^2-6x+8}dx=\frac{A}{(x-2)}+\frac{B}{(x-4)}$$

$$\frac{A(x-4)+B(x-2)}{(x-2)(x-4)}=\frac{Ax-4A+Bx-2B}{(x-2)(x-4)}=\frac{(A+B)x-4A-2B}{(x-2)(x-4)}$$

$$A+B=7$$

$$-4A-2B=-12$$

$$A=7-B$$

$$-4(7-B)-2B=-12$$

$$-28+4B-2B=-12$$

$$-28+2B=-12$$

$$2B=16 \quad \Rightarrow \quad B=8$$

$$A=7-8=-1$$

$$\frac{7x-12}{x^2-6x+8}=-\frac{1}{x-2}+\frac{8}{x-4}$$

نو لیکلای شو چې:

$$\int\frac{7x-12}{x^2-6x+8}dx=\int\frac{-1}{x-2}dx+\int\frac{8}{x-4}dx$$

$$\int\frac{7x-12}{x^2-6x+8}dx=-\int\frac{1}{x-2}dx+8\int\frac{1}{x-4}dx$$

$$=-\ln|x-2|+8\ln|x-4|+C=\ln(x-2)^{-1}+\ln(x-4)^8+C$$

$$=\ln\left[(x-2)^{-1}\cdot(x-4)^8\right]=\ln\left[\frac{(x-4)^8}{x-2}\right]+C$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال: د $\int \frac{-5x+9}{x^2+x-6}dx$ انتیگرال محاسبه کړئ.

حل: مخرج په فکتورونو تجزیه کوو: $x^2+x-6=(x-2)(x+3)$

نو:

$$\frac{-5x+9}{x^2+x-6}=\frac{-5x+9}{(x-2)(x+3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+3}$$

$$\frac{A(x+3)+B(x-2)}{(x-2)(x+3)}=\frac{Ax+3A+Bx-2B}{(x-2)(x+3)}=\frac{(A+B)x+3A-2B}{(x-2)(x+3)}$$

$$(A+B)x+3A-2B=-5x+9$$

$$A+B=-5 \Rightarrow A=-5-B$$

$$3A-2B=-5x+9$$

د A او B عددي قیمتونه عبارت دي له:

$$3(-5-B)-2B=9$$

$$-15-5B=9$$

$$-5B=24$$

$$B=-\frac{24}{5}$$

$$A=-5+\frac{24}{5}=\frac{-25+24}{5}=-\frac{1}{5}$$

$$\frac{-5x+9}{x^2+x-6}=\frac{-\frac{1}{5}}{x-2}-\frac{\frac{24}{5}}{x+3}$$

$$\int\frac{-5x+9}{x^2+x-6}=\int\frac{-\frac{1}{5}}{x-2}dx-\int\frac{\frac{24}{5}}{x+3}dx=-\frac{1}{5}\int\frac{1}{x-2}dx-\frac{24}{5}\int\frac{1}{x+3}dx$$

$$=-\frac{1}{5}\ln(x-2)-\frac{24}{5}\ln(x+3)$$

$$=\ln(x-2)^{-\frac{1}{5}}+\ln(x+3)^{-\frac{24}{5}}=\ln\left[(x-2)^{-\frac{1}{5}}\cdot(x+3)^{-\frac{24}{5}}\right]+C$$

پوښتنې

لاندې انتیگرالونه د قسمی کسرونو په طریقه حل کړئ.

$a)\ \int\frac{x+2}{x^3-3x^2-x+3}dx$ $\quad b)\ \int\frac{x-2}{x^2-6x+5}dx$ $\quad c)\ \int\frac{x^6}{x^4+3x^2+2}dx$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ښېرکي مهم ټکي

- که $f(x)=e^x$ وي، نو ددې تابع مشتق عبارت له $f'(x)=e^x$ دی.
- که $f(x)=a^x$ وي، د دې تابع مشتق $f'(x)=a^x\cdot\ln a$ دی.
- که $f(x)=\log_a x$ وي، نو د تابع مشتق $f'(x)=\frac{1}{x}\log_a e=\frac{1}{x\ln a}$ دی.
- $f(x)=\log_a g(x)$ وي، نو د تابع مشتق $(\log_a g(x))'=\frac{g'(x)}{g(x)}\log_a e$ دی.
- **قسمي کسرونه**: د یوه واقعي کسر هغه کوچنی کسرونه چې د جمعي د عواملو په شکل لیکل شوي دي که هغوی جمع کړو، راکړل شوي واقعي کسر په لاس راځي، قسمي کسرونه بلل کېږي.
- که چېرې د $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ د کسري پولینوم مخرج ($P_n(x)$) د خطي بېلابېلو ضربي عواملو څخه جوړوي چې تکرار نه وي راغلی په لاندې بڼه بدلیدلای شي:

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}+\frac{C}{x-x_3}+\cdots+\frac{N}{x-x_n}$$

- که د لومړی درجه پولینوم مخرج ضربي عوامل چې ځینې یې تکرار راغلي وي، یعنې که د $x-x_0$ عامل n ځلې تکرار شوی وي، نو لیکلای شو چې:

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)}=\frac{A}{x-x_0}+\frac{B}{(x-x_0)^2}+\cdots+\frac{N}{(x-x_0)^n}$$

- که د مخرج ضربي عوامل دویمه درجه پولینوم د تجزیې وړ نه وي او تکرار هم نه وي راغلی، نو د $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ واقعي پولینوم یو ټوټه کسر $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ بڼه لري.
- د اکسپوننشیل تابع ګانو انتیګرال لپاره لیکلای شو:

$$\int e^x dx=e^x+C \quad , \quad \int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C \quad , \quad (a\in IR^+\ ,\ a\neq 1)$$

- د لوګارتمي توابعو د انتیګرال لپاره لیکلای شو:

$$\int \ln x\,dx=x\ln x-x+C \quad , \quad \int \log_a x\,dx=x\log_a\frac{x}{e}+C$$

- ځینې تابع ګانې چې پرته د بدلون له لارې حل کېږي، لیکو:

$$f(x)=e^x \Rightarrow \int f(x)\,dx=\int e^x\,dx=e^x+C$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پنځم څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتنې حل کړئ.

1. د $f(x)=\ln(\frac{x-2}{x+2})$ د تابع مشتق پیدا کړئ.

2. د $f(x)=\ln\sqrt{x-1}$ تابع مشتق پیدا کړئ.

3. د $y=2x^{2x}$ تابع مشتق پیدا کړئ.

4. د $f(x)=\log\sqrt{x^3}$ تابع مشتق پیدا کړئ.

5. لاندې کسرونه په قسمي کسرونو تجزیه کړئ.

1) $\dfrac{x+1}{x^2-x-6}$ 2) $\dfrac{x^2-x+1}{x^3+2x^2+x}$ 3) $\dfrac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}$

6. لاندې انتیګرالونه پیدا کړئ.

1) $\int 5t^7dt$

2) $\int \dfrac{x^3-3}{x^2}dx$

3) $\int (2\cos x-5\sin x+e^x)dx$

4) $\int \sqrt{\cos x}\sin xdx$

5) $\int xe^{-x}dx$

6) $\int (\dfrac{5}{(2x+1)(x-2)})dx$

7) $\int_{-1}^{1}3x^2\sqrt{x^3+1}dx$

7 – د لاندې تابع ګانو مشتق پیدا کړئ.

a) $y=\ln(x^2+x+1)$

b) $y=\ln(\sin x)$

c) $y=e^{x^2+1}$

d) $y=\sqrt[x]{2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

شپږم څپرکی

د انتیگرال تطبیقات

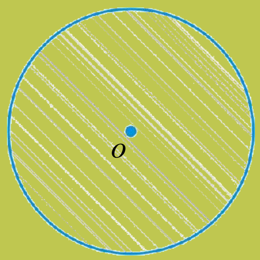
(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د منحني ګانو پواسطه د محصور شوي سطحې د مساحت محاسبه

Accounting of area bounded by one curve

د مخامخ شکل مساحت چې یوه سطحه د یوې منحني په واسطه ترل شوې دایره ده. د مساحت فورمول یې وویاست.



فعالیت

د $y=1-x^2$ تابع په پام کې ونیسئ.

- د تابع بحراني (*Critical Point*) ټکي او د x محور سره د تقاطع ټکي پیدا او ګراف یې رسم کړئ.
- د $y=1-x^2$ تابع او x محور تر منځ د سطحې د مساحت قیمت د انتیګرال په مرسته پیدا کړئ.
- پورتنی فعالیت د $y=-x^2+2x$ تابع لپاره تکرار کړئ او د منحني او د x د محور تر منځ محصور شوی مساحت محاسبه کړئ.

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایلې لاسته راځي:

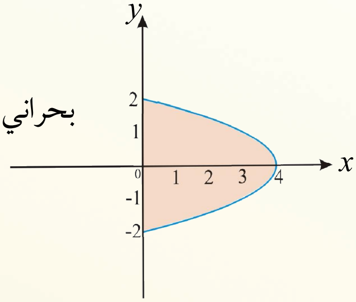
ـ $\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$ انتیګرال د یوې سطحې د مساحت قیمت راښیي چې د $y=f(x)$ منحني او د x محور او د $x=a$, $x=b$ د کرښو له خوا رابند (محصور) دی.

ـ که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ ترلې انټروال کې مثبت او متمادي وي، یعنې $y=f(x)\geq 0$ په دې صورت کې $f(x)$ تابع ګراف تل د x محور پورته خواته او که $y=f(x)\leq 0$ وي، په دې حالت کې $f(x)$ تابع ګراف د x محور لاندې خواته واقع ده او منفي دی.

لومړی مثال: د $x=4-y^2$ تابع د منحني او د y د محور تر منځ محصور شوی مساحت پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: لومړی د تابع بحراني ټکي او د y محور سره د تقاطع ټکي پیدا کوو، وروسته یې شکل رسموو، د بحراني ټکي د پیدا کولو لپاره لومړی د تابع مشتق نیسو او له صفر سره یې مساوي کوو او له محورونو سره د تقاطع ټکو د په لاس راوړلو لپاره تابع له صفر سره برابروو.



$x = 4 - y^2 \Rightarrow x' = -2y = 0$

$x' = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0$

$y = 0\,, \quad x = 4 - y^2 \Rightarrow x = 4 - 0 \Rightarrow x = 4 \quad \Rightarrow \quad (4,0)$ بحراني ټکی

$x = 0 \quad , \quad 4 - y^2 = 0 \Rightarrow y^2 = 4$

$y = \pm 2 \quad \Rightarrow \quad (0,2) \quad , \quad (0,-2)$ د محورونو سره د تقاطع ټکي

څرنګه چې د $x = 4 - y^2$ معادله په $[-2,2]$ انټروال کې نظر x محور ته دواړه ټکي متناظر دي، نو د نمايي مساحت په پام کې نیولو سره، د انټیګرال د مساحت سرحدات په لاندې ډول په لاس راوړو:

$$A = \int_{-2}^{2} (4 - y^2)\, dy = 2\int_{0}^{2} (4 - y^2) dy = 2[4y - \frac{y^3}{3}]_0^2$$

$$A = 2\,[(4 \cdot 2 - \frac{2^3}{3}) - 0] = 2\,(8 - \frac{8}{3}) = 2\,(\frac{24-8}{3}) = 2\,(\frac{16}{3}) = \frac{32}{3}$$

دويم مثال: د x محور او د $y = 1 - \frac{1}{2}x^2$ تابع منحني د محصور شوي سطحې مساحت محاسبه کړئ.

حل: د محصور شوي سطحې د مساحت ټاکلو لپاره لومړی بحراني ټکي او د x له محور سره د تقاطع ټکي په لاس راوړو.

$y = 1 - \frac{1}{2}x^2 \;,\; y' = -x$

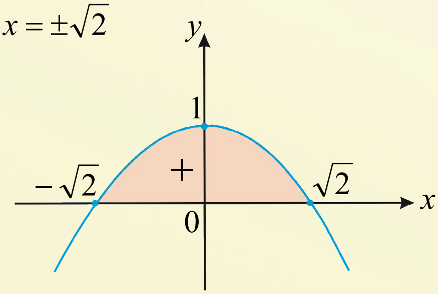
$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$

$x = 0,\; y = 1 - \frac{1}{2}x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad y = 1 - \frac{1}{2}0^2 \quad \Rightarrow \quad y = 1 \quad \Rightarrow \quad (0,1)$ بحراني ټکي

$y = 0, 1 - \frac{1}{2}x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2}x^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 2,\; x = \pm\sqrt{2}$

$x_1 = \sqrt{2} \quad , \quad x_2 = -\sqrt{2}$

$(\sqrt{2},0)\,,\; (-\sqrt{2},0)$ له محورونو سره د تقاطع ټکي



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}(1-\frac{1}{2}x^2)\,dx=2\int_{0}^{\sqrt{2}}(1-\frac{1}{2}x^2)\,dx=2([x-\frac{1}{6}x^3]_0^{\sqrt{2}})$$

$$A=2(\sqrt{2}-\frac{(\sqrt{2})^3}{6}-0)=2(\frac{6\sqrt{2}-(\sqrt{2})^3}{6})=2(\frac{6\sqrt{2}-\sqrt{8}}{6})$$

$$=(\frac{6\sqrt{2}-2\sqrt{2}}{3})=\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$$A=1.8853$$

دریم مثال: د $y=x^2-3$ تابع ګراف د x له محور سره یوه سطحه رابند وي، د دې سطحې مساحت پیدا کړئ.

حل: لومړی د سطحې د ټاکلو لپاره د تابع ګراف رسموو او د تابع بحراني ټکي او د تقاطع ټکي په لاس راوړو:

$$y=x^2-3\Rightarrow y'=2x$$

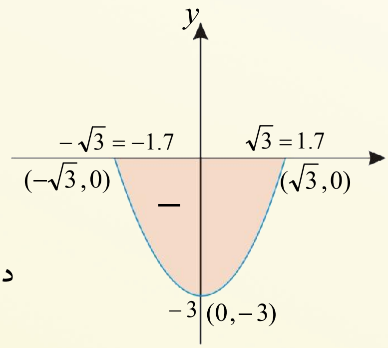
$$y'=0\Rightarrow x=0$$

$$x=0\ ,\ y=x^2-3\Rightarrow y=0^2-3$$

$\Rightarrow y=-3\Rightarrow(0,-3)$ بحراني ټکي

$$y=0\ ,\ \ x^2-3=0\Rightarrow x^2=3$$

$x=\pm\sqrt{3}\Rightarrow(\sqrt{3},0)\ ,\ (-\sqrt{3},0)$ د محورونو سره د تقاطع ټکي



څرنګه چې د $y=x^2-3$ تابع په $[\sqrt{3},-\sqrt{3}]$ انټروال کې د محور سره د تقاطع ټکي متناظر قیمتونه لري، نو ګراف یې د x له محور څخه لاندې دی او انټیګرال یې منفي دی، نو له ټول مساحت څخه د انټیګرال د سرحدونو نیمايي مساحت پیدا کوو اوبیا 2 کې یې ضربوو:

$$A_1=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}(x^2-3)\,dx=-2\int_{0}^{\sqrt{3}}(x^2-3)\,dx=-2(\int_{0}^{\sqrt{3}}x^2\,dx-3\int_{0}^{\sqrt{3}}dx)=-2([\frac{1}{3}x^3]_0^{\sqrt{3}}-[3x]_0^{\sqrt{3}})$$

$$=-2(\frac{1}{3}[(\sqrt{3})^3-0]-3[\sqrt{3}-0])=-2(\frac{1}{3}(\sqrt{3})^3-3\sqrt{3})$$

$$=-\frac{2}{3}(\sqrt{3})^3+6\sqrt{3}=-\frac{2}{3}(1.7)^3+6(1.7)=-\frac{2}{3}(4.913)+10.2=-\frac{9.826}{3}+10.2$$

$$=-3.2753+10.2=6.9247$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

خلورم مثال: د $y = x^2 - 3x$ تابع گراف رسم د منحني او x محور تر منځ د سطحي مساحت په $[-1,4]$ انټروال کې وټاکئ.

حل: لومړی د منحني بحراني ټکی او له له محورونو سره د تقاطع ټکي پیدا کوو:

$$y = x^2 - 3x$$

$$y' = 2x - 3 = 0 \Rightarrow 2x = 3 \ , \ x = \frac{3}{2}$$

$$x = \frac{3}{2}, \quad y = x^2 - 3x \Rightarrow y = (\frac{3}{2})^2 - 3(\frac{3}{2})$$

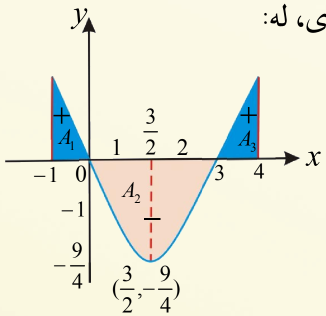
$$y = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} = -\frac{9}{4} \ , \quad (x, y) = (\frac{3}{2}, -\frac{9}{4})$$ بحراني ټکی

څرنګه چې $y'' = 2 > 0$ دی، نو د $(\frac{3}{2}, -\frac{9}{4})$ ټکي د تابع مطلق اصغري ټکي دي او د تقاطع ټکي يې د x له محور سره عبارت دی، له:

$$y = 0 \Rightarrow x^2 - 3x = 0$$

$$\Rightarrow x(x - 3) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = 3$$



$$A = A_1 - A_2 + A_3 = \int_{-1}^{0} (x^2 - 3x)\,dx - \int_{0}^{3} (x^2 - 3x)\,dx + \int_{3}^{4} (x^2 - 3x)\,dx$$

$$A = [\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2]_{-1}^{0} - [\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2]_{0}^{3} + [\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2]_{3}^{4}$$

$$A = [(\frac{1}{3}\cdot 0 - \frac{3}{2}\cdot 0) - (\frac{1}{3}\cdot(-1)^3 - \frac{3}{2}\cdot(-1)^2)] - [(\frac{1}{3}\cdot 3^3 - \frac{3}{2}\cdot 3^2) - (\frac{1}{3}\cdot 0 - \frac{3}{2}\cdot 0)] +$$

$$[(\frac{1}{3}\cdot(4)^3 - \frac{3}{2}\cdot(4)^2) - (\frac{1}{3}\cdot(3)^3 - \frac{3}{2}\cdot(3)^2)]$$

$$= -(-\frac{1}{3} - \frac{3}{2}) - (\frac{1}{3}\cdot 27 - \frac{3}{2}\cdot 9) + (\frac{1}{3}\cdot 64 - \frac{3}{2}\cdot 16) - (\frac{1}{3}\cdot 27 - \frac{3}{2}\cdot 9)$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{3}{2} - \frac{27}{3} + \frac{27}{2} + \frac{64}{3} - \frac{48}{2} - \frac{27}{3} + \frac{27}{2}$$

$$= \frac{1 - 27 + 64 - 27}{3} + \frac{3 + 27 - 48 + 27}{2} = \frac{65 - 54}{3} + \frac{57 - 48}{2} = \frac{11}{3} + \frac{9}{2} = \frac{22 + 27}{6} = \frac{49}{6}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم مثال: د $y = x^2 - 2x$ منحني او x محور ترمنځ مساحت د $[-1,2]$ په انټروال کې پيدا کړئ.

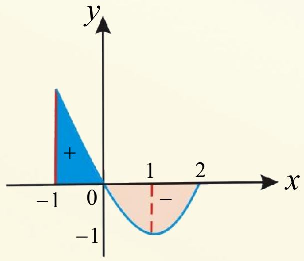
حل: لومړى بحراني ټکي وروسته د x له محور سره د تقاطع ټکي په لاس راوړو:

$$y = x^2 - 2x \Rightarrow y' = 2x - 2 = 0$$
$$2x = 2 \Rightarrow x = 1$$

$x = 1 \;,\quad y = x^2 - 2x = 1^2 - 2(1) = -1 \Rightarrow (1,-1)$ بحراني ټکي

څرنګه چې $y'' = 2 > 0$ دی، نو تابع د $(1,-1)$ په ټکي کې مطلق اصغري لري او د x له محور سره يې تقاطع په لاندې ډول ده.

$$y = 0 \quad , \quad x^2 - 2x = 0$$
$$x(x-2) = 0$$
$$x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = 2$$



څرنګه چې منحني د $[-1,2]$ په انټروال کې له مبدأ څخه تيرېږي او د منحني يوه برخه د $[-1,0]$ په انټروال کې د x محور پورته خواته او بله برخه يې د $[0,2]$ په فاصلې کې د x محور ښکته خواته پرته ده انټيګرال يې منفي دی:

$$A = \int_{-1}^{0} (x^2 - 2x)dx - \int_{0}^{2} (x^2 - 2x)\,dx = [\frac{1}{3}x^3 - x^2]_{-1}^{0} - [\frac{1}{3}x^3 - x^2]_{0}^{2}$$

$$= (0 - (-\frac{1}{3} - 1)) - ((\frac{8}{3} - 4) - 0) = -(-\frac{1}{3} - 1) - (\frac{8}{3} - 4) = -(\frac{-1-3}{3}) - (\frac{8-12}{3})$$

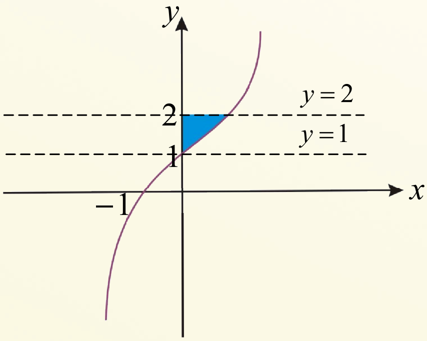
$$= -(\frac{-4}{3}) - (\frac{-4}{3}) = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتني

1- د $f(x)=\sin x$ منحني او د x محور تر منځ مساحت په $[-2\pi, 2\pi]$ انټروال کې حساب کړئ.

2- د $y=x^3+1$ تـــابع منحنـــي او $y=1$ ، $y=2$ کرښو تر منځ مساحت وټاکئ.



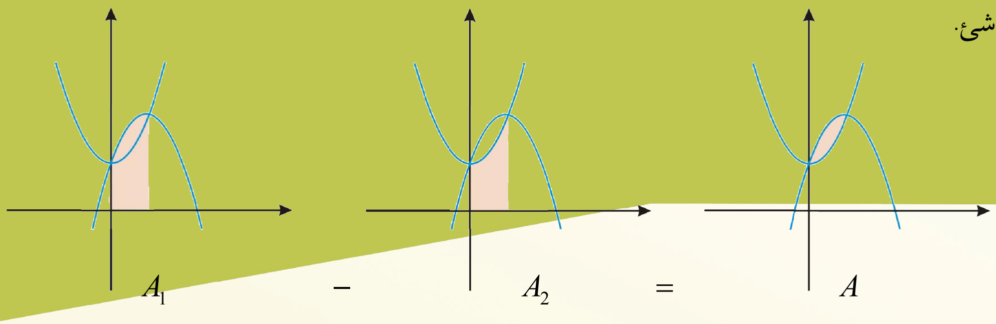
3- د $y=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}+x}$ منحني او د $x=0$ او $x=1$ کرښو تر منځ مساحت حساب کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوو محصور شویو منحني ګانو تر منځ د مساحت محاسبه

Accounting of area bounded by tow curves

لاندې شکلونه په پام کې ونیسئ د $A = A_1 - A_2$ اړیکې د سموالي په اړه څه و یلای شئ.



فعالیت

که د $y_1 = 1 - x^2$ او $y_2 = x^2 - 1$ تابع ګاني راکړل شوې وي.

- د $y_1 = y_2$ رابطې څخه د x قیمت په لاس راوړئ.
- د لاس ته راغلو قیمتونو په پام کې نیولو سره د هغوی ګراف رسم کړئ.
- څرنګه چې د y_1 تابع ګراف د y_2 تابع د ګراف څخه لوړ دی، نو د تابع ګانو د انتیګرال د تفریق حاصل $(y_1 - y_2)$ د x په ټاکل شوی انټروال کې حساب کړئ.
- نوموړی فعالیت د $y = x^2$ تابع د منحني او $y = x + 2$ د کرښې لپاره تکرار کړئ او د محصورې شوې سطحې مساحت حساب کړئ.

د پورتني فعالیت څخه لاندې پایلې لاسته راځي:

ـ که چیرې د $y_1 = f(x)$ او $y_2 = g(x)$ دوو منحني ګانو د محصور شوي سطحې د محاسبې لپاره په هغه صورت کې چې $f(x) > g(x)$ وي، یعنې د $f(x)$ تابع ګراف د $g(x)$ تابع دپاسه واقع وي، نو لومړی د دواړو منحني ګانو د تقاطع ټکي پیدا کوو وروسته د پاسني او لاندېني منحني د x د محور سره مساحت په $[a,b]$ انټروال کې محاسبه کوو:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

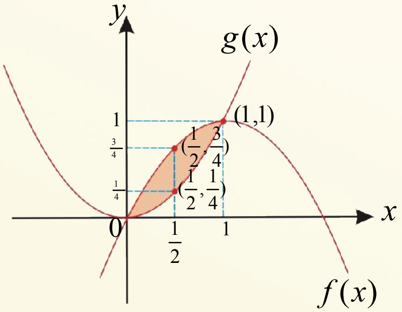
ـ که چېرې د $g(x)$ تابع ګراف د $f(x)$ تابع د ګراف دپاسه واقع وي، نو لرو چې:

$$A=\int_a^b [g(x)-f(x)]\,dx=\int_a^b g(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,dx$$

لومړی مثال: د $f(x)=2x-x^2$ او $g(x)=x^2$ منحني ګانو د ګرافونو ترمنځ د پرتې سطحې مساحت حساب کړئ.

حل: لومړی د دواړو منحني ګانو د تقاطع ټکي پیدا کوو:

$$f(x)=2x-x^2\quad,\quad g(x)=x^2$$
$$f(x)=g(x)\Rightarrow 2x-x^2=x^2$$
$$2x-x^2-x^2=0$$
$$2x-2x^2=0$$
$$2x(1-x)=0$$
$$2x=0\quad\Rightarrow\quad x_1=0$$
$$1-x=0\quad\Rightarrow\quad x_2=1$$



لیدل کېږي چې ددواړو منحني ګانو تقاطع (1،1) او (0،0) ده اوس د محصور شوي سطحې مساحت پیدا کوو.

$$A=\int_a^b [f(x)-g(x)]=\int_0^1 [2x-x^2-x^2]\,dx=\int_0^1 [2x-2x^2]=[\frac{2x^2}{2}-\frac{2x^3}{3}]_0^1$$

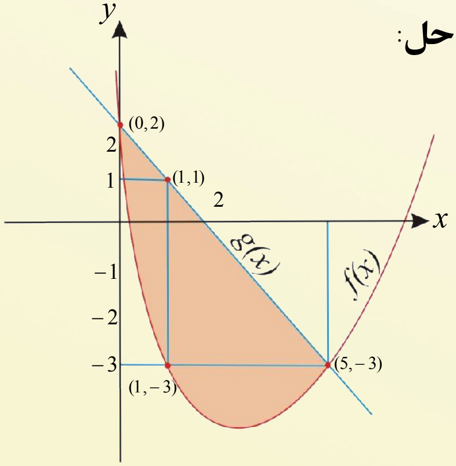
$$=[x^2-\frac{2}{3}x^3]_0^1=(1-\frac{2}{3})-0=\frac{3-2}{3}=\frac{1}{3}$$

دویم مثال: د $f(x)=x^2-6x+2$ تابع او $g(x)=2-x$ کرښې د ګرافونو تر منځ د پرتې سطحې مساحت حساب کړئ.

حل:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^2-6x+2 \\ g(x)=2-x \end{array}\right\}\Rightarrow f(x)=g(x)$$
$$x^2-6x+2=2-x\Rightarrow x^2-6x+2-2+x=0$$
$$x^2-5x=0\Rightarrow x(x-5)=0$$
$$x_1=0\quad,\quad x_2=5$$

$\Rightarrow (0,2)\ ,\ (5,-3)$ د کرښې او منحني د تقاطع ټکي



(c) ketabton.com: The Digital Library

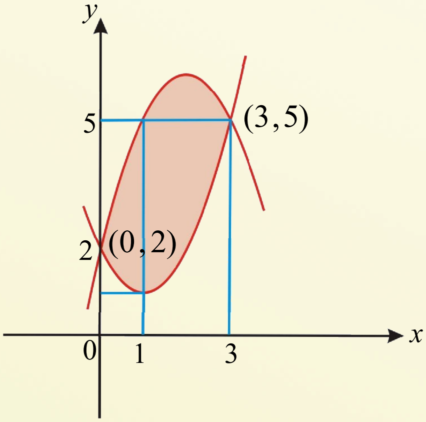
له شکل څخه ښکاري چې د $g(x)$ کربښې ګراف د $f(x)$ ګراف پورته خوا ته واقع دی، په دې معنا چې

$g(x) > f(x)$

$$A=\int_a^b [g(x)-f(x)]\,dx=\int_0^5 (2-x-x^2+6x-2)dx$$
$$=\int_0^5 (-x-x^2+6x)\,dx=\int_0^5 (-x^2+5x)\,dx$$
$$=[-\frac{x^3}{3}+5\frac{x^2}{2}]_0^5=(-\frac{125}{3}+5\cdot\frac{25}{2})-0=-\frac{125}{3}+\frac{125}{2}$$
$$=\frac{-250+375}{6}=\frac{125}{6}$$

دریم مثال: د $f(x)=-x^2+4x+2$ او $g(x)=x^2-2x+2$ تابع ګانو د ګرافونو تر منځ د پرتې سطحې مساحت پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې د دواړو ګرافونو د تقاطع ټکي د انتیګرال حدونه جوړوي، نو د دې ټکو د پیدا کولو لپاره $f(x)=g(x)$ وضع کوو:



$$\left.\begin{aligned} f(x)&=-x^2+4x+2\\ g(x)&=x^2-2x+2\end{aligned}\right\}\Rightarrow f(x)=g(x)$$
$$-x^2+4x+2=x^2-2x+2$$
$$\Rightarrow -x^2+4x+2-x^2+2x-2=0$$
$$-2x^2+6x=0\Rightarrow x(-2x+6)=0$$
$$\Rightarrow x_1=0\quad,\quad -2x=-6\Rightarrow x_2=3$$

د دواړو منحني ګانو د تقاطع ټکي $(3,5)$, $(0,2)$

د x له محور سره د تقاطع ټکي عبارت له (5،3)، (2،0) دی اوله شکل څخه لیدل کېږي چې د $f(x)$ ګراف د $g(x)$ له ګراف څخه پورته واقع دی، نو لرو:

$$A=\int_a^b [f(x)-g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx=\int_0^3 (-x^2+4x+2)dx-\int_0^3 (x^2-2x+2)dx$$
$$=[-\frac{x^3}{3}+\frac{4x^2}{2}+2x]_0^3-[\frac{x^3}{3}-\frac{2x^2}{2}+2x]_0^3$$
$$=-\frac{1}{3}\cdot 27+2\cdot 9+6-0-\frac{1}{3}\cdot 27+9-6+0$$
$$=-9+18-9+9=9$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- د $y = x^2$ او $y = -x^2 + 4x$ منحني ګانو د ګرافونو تر منځ د پرتې سطحې مساحت پیدا کړئ.

2- د $y^2 = 2x - 2$ پارابول او $y = x - 5$ کرښې د ګرافونو تر منځ د سطحې مساحت حساب کړئ.

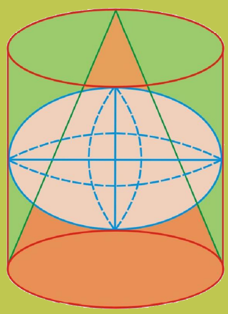
3- د $y^2 = 2x + 6$ منحني او $y = x - 1$ کرښې د ګرافونو تر منځ د سطحې مساحت محاسبه کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دگراف له دوران څخه د په لاس راغلي جسم حجم

Accounting of rounding things Volume

د مخامخ شکل د جسمونو د حجمونو تر منځ نسبت پیدا کړئ.

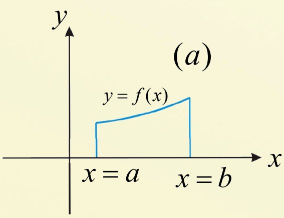


په مخکنیو ټولګیو کې مو د جسمونو حجم پیدا کړی وو. پرته له دې چې د هغوی فورمولونه ثبوت شي منلي مو وو، خو اوس د جسمونو د حجم فورمولونه د معین انتیګرال څخه په ګټه اخیستنې سره ثبوتوو.

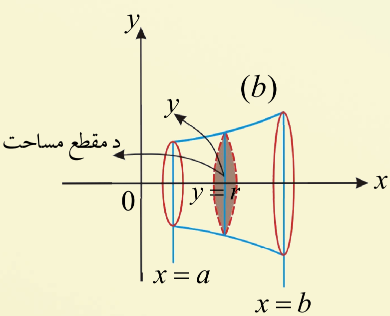
فعالیت

- یو ټکی او یوه کربنه په فضا کې داسې په پام کې ونیسئ چې ټکی د کربنې په منځ کې واقع وي.
- هغه جسم چې د یوې مستقیمې کربنې له دوران څخه د یوه ټکي په شاوخوا لـه خرخېدو وروسته جوړېږي، نوم یې واخلئ.
- د نوموړي جسم د حجم فورمول ولیکئ او ووایئ چې هغه څنګه ثبوتوو.

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:



- که چېرې د $y = f(x)$ متمادي تابع د منحني مساحت نظر (a) شکل ته

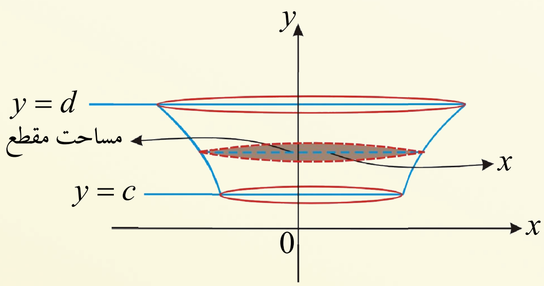


د $x = a$ او $x = b$ کربښو او منحنـي پـه واسـطه محـصور شوی وي، نو د هغه جسم حجم چې د پورتني تابع د منحني له دوارن څخه د x محور په شاوخوا لاسته راځي تقریباً استوانه یې شکل لري، لکه د (b) شکل.

(c) ketabton.com: The Digital Library

چې ارتفاع يې $\Delta x = b - a$ ده او د دې استوانې سطح د دايروي شکل په واسطه محصوره شوې ده چې دې سطحو ته مقطع وايي او پوهېږو چې د دايرې مساحت نظر x محور ته $A(x) = \pi r^2$ دی او ددې مقطع شعاع شکل ته په کتو سره د y محور سره موازي ده، نو $y = r$ کېږي او د حجم فورمول يې نظر ريمان مجموع ته په لاندې ډول دی:

$$v = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(x)\Delta x = \int_a^b \pi\, r^2\, dx = \int_a^b \pi\, y^2\, dx = \int_a^b \pi\, [f(x)]^2\, dx$$



- که د $x = f(y)$ تابع د منحني مساحت $y = c$ او $y = d$ کرښو ترمنځ محصور شوی وي دداسې استوانې د مقطع مساحت نظر y محور ته $A(y) = \pi r^2$ دی چې ارتفاع يې $\Delta y = d - c$ او شعاع يې $x = r$ سره ده هغه حجم چې له دې دوران څخه په لاس راځي په لاندې ډول دی:

$$v = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(y)\Delta y = \int_a^b \pi\, r^2\, dy = \int_a^b \pi\, x^2\, dy = \int_a^b \pi\, [f(y)]^2\, dy$$

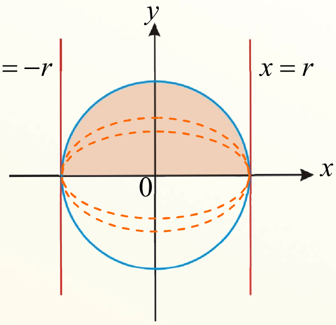
د دوراني جسمونو حجم د انتيګرال په مرسته په لاس راځي، لکه:

1- د انتيګرال په مرسته د کرې حجم پيدا کړئ.

ثبوت: پوهېږو چې که چېرې نيمه دايره د خپل قطر په شاوخوا وڅرخي کره لاس ته راځي او د دايرې معادله $x^2 + y^2 = r^2$ ده، اوس د نيمې دايرې حجم له څرخېدو وروسته په لاس راوړو او هغه دوه برابره کوو چې د دايرې بشپړ حجم په لاس راشي

$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$y^2 = r^2 - x^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$V = \int_{-r}^{r} \pi y^2 dx = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\, dx$$

$$= 2\pi \int_{0}^{r} (r^2 - x^2)\, dx = 2\pi [r^2 x - \frac{x^3}{3}]_0^r$$

$$= 2\pi [(r^3 - \frac{r^3}{3}) - 0]$$

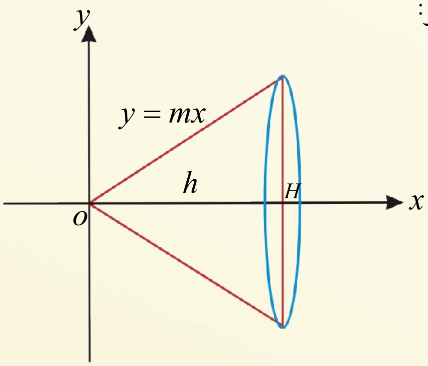
$$= 2\pi (\frac{3r^3 - r^3}{3})$$

$$= 2\pi (\frac{2r^3}{3})$$

$$V(\text{دکري حجم}) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

2- د انتيګرال په مرسته د مخروط حجم پيدا کړئ.

ثبوت: څرنګه چې مخروطي سطح د $y = mx$ کرښې له دوران څخه د x د محور په چاپېريال پـه لاس راځي نو:



$$V = \int_0^h \pi\, y^2 dx$$

$$= \int_0^h \pi\, m^2 x^2 dx = \pi\, m^2 \int_0^h x^2 dx$$

$$= \pi\, m^2 [\frac{x^3}{3}]_0^h = \pi\, m^2 (\frac{h^3}{3})$$

$$= \frac{\pi\, h}{3} (mh)^2$$

له پورته شکل څخه ليدل کېږي چې د مخروط قاعده دايروي بڼه لري اوشعاع يې د h محور سره مـوازي ده، يعنـې $y // r$ او همدا رنګه د مخروط ارتفاع (h) د x په محور باندې منطبق ده، $(x = h)$ نـو د $y = mx$ پـه اړيکـه کې يې قيمت وضع کوو:

$$y = mx \quad \Rightarrow \quad r = mh$$

$$= \frac{\pi h}{3} \quad r^2$$

$$V = \pi\, r^2 \times \frac{h}{3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

خرنگه چې د مخروط قاعده دایروي ده، د دایرې مساحت πr^2 دی، لرو چې:

$$V = \pi r^2 \cdot \frac{h}{3}$$

$$V(\text{د مخروط حجم}) = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

3- د الپس حجم چې د $\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1$ د منحني او x محور په چاپیر د لوی قطر په شاوخوا له دوران وروسته جوړېږي، په لاس راوړئ.

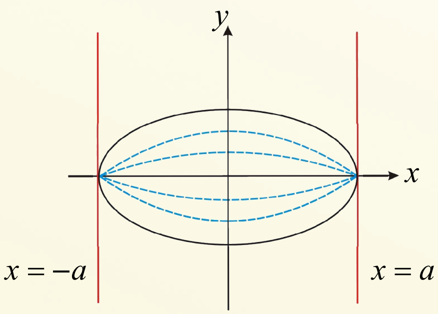
ثبوت: د الپس د نیمایي حجم د لوی قطر په شاوخوا په لاس راوړو او هغه دوه چنده کوو چې د بشپړ الپس حجم په لاس راشي.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \Rightarrow y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2$$

$$V = \int_{-a}^{a} \pi y^2\, dx = \pi \int_{-a}^{a} [b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2]dx$$

$$= 2\pi \int_0^a [b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2]dx = 2\pi[b^2 x - \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x^3}{3}]_0^a$$



$$= 2\pi[(b^2 a - \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{a^3}{3}) - 0] = 2\pi[b^2 a - \frac{b^2 a}{3}]$$

$$= 2\pi[\frac{3b^2 a - b^2 a}{3}] = 2\pi[\frac{2b^2 a}{3}]$$

$$\text{V} = \frac{4}{3}\pi b^2 a \Rightarrow \text{د الپس دوران د لوی قطر په شاوخوا حجم} = \frac{4}{3}\pi b^2 a$$

که چېرې د الپس محراقونه د y په محور پراته وي او د هغه انتګرال حساب کړو د الپس د کوچني قطر په شاوخوا حجم په لاندې ډول په لاس راځي:

$$\text{د الپس دوران د کوچني قطر په شاوخوا حجم} = \frac{4}{3}\pi a^2 b$$

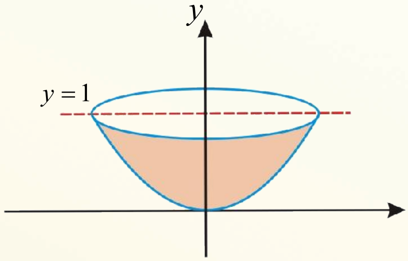
(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د هغه جسم حجم چې د $y = x^2$ او $y = 1$ کرښې تر منځ پرتې مستوي مساحت د دوران ثخه د y په محور په لاس راځي، پیدا کړئ.

حل: لومړی شکل رسموو وروسته یې مساحت حسابوو:

$$V = \int_a^b \pi\, x^2 dy = \pi \int_0^1 y\, dy = \frac{1}{2}\pi y^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2}\pi$$

$$\Rightarrow V = \frac{\pi}{2}$$



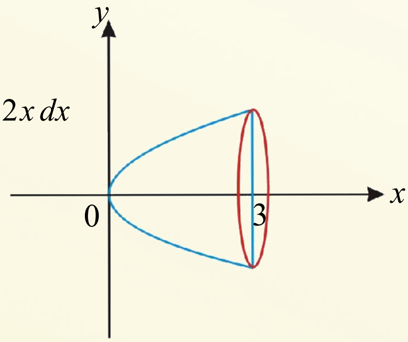
دویم مثال: د $y = \sqrt{2x}$ تابع او $y = 3$ کرښې ترمنځ د څرخیدلی جسم مساحت پیدا کړئ.

حل:

$$V = \int_a^b \pi\, y^2 dx = \int_0^3 \pi[\sqrt{2x}\,]^2 dx = \pi \int_0^3 [\sqrt{2x}\,]^2 dx = \pi \int_0^3 2x\, dx$$

$$V = 2\pi \int_0^3 x\, dx = 2\pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3$$

$$V = 9\pi$$

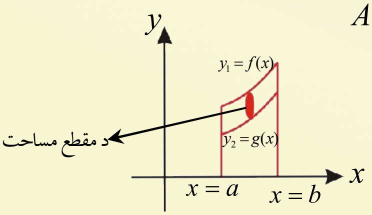


یادونه: که د $y_1 = f(x)$ او $y_2 = g(x)$ تابع ګاني په $[a, b]$ انټروال کې متمادي وی د هغه دوراني جسم حجم د $f(x)$ او $g(x)$ منحني ګانو او د $x = a$ ، $x = b$ کرښو تر منځ جوړېږي له لاندې رابطې ثخه لاسته راځي:

$\Delta x =$ د استواني ارتفاع

$A(x) =$ (د استواني د مقطع مساحت) $= \pi y_1 - \pi y_2 = \pi(y_1 - y_2)$

د هغې استواني د حجم فورمول چې د $f(x)$ تابع ګراف د $g(x)$ تابع ګراف ثخه پورته قرار لري.



$$V = \int_a^b \pi(y_1^2 - y_2^2)\, dx = \pi \int_a^b (y_1^2 - y_2^2)\, dx$$

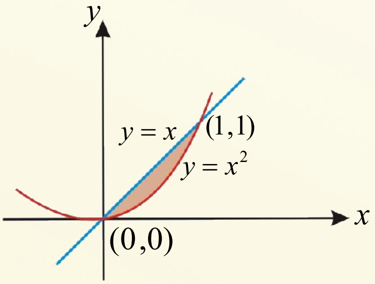
(c) ketabton.com: The Digital Library

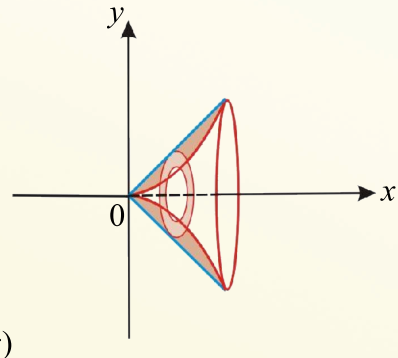
د هغې استواني د حجم فورمول چې د $g(x)$ تابع گراف ، د $f(x)$ گراف څخه پورته واقع وي.

$$V=\int_a^b \pi(y_2^2-y_1^2)\,dx=\pi\int_a^b (y_2^2-y_1^2)\,dx$$

مثال: د هغه جسم حجم پیدا کړئ چې د $y=x^2$ منحني او $y=x$ کرښې تر منځ د پرتې سطحې مساحت له دوران څخه د x محور په شاوخوا په لاس راځي، محاسبه کړئ.

حل:





$$\left.\begin{aligned} y_1&=x^2=f(x)\\ y_2&=x=g(x)\end{aligned}\right\}\Rightarrow y_2>y_1\ ,\ g(x)>f(x)$$

$$=\int_a^b \pi(y_2^2-y_1^2)\,dx=\int_0^1 \pi(x^2-(x^2)^2)dx$$

$$=\pi\int_0^1 (x^2-x^4)\,dx=\pi[\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}]_0^1$$

$$=\pi[(\frac{1}{3}-0)-(\frac{1}{5}-0)]=\pi[\frac{1}{3}-\frac{1}{5}]$$

$$V=\pi[\frac{5-3}{15}]=\pi[\frac{2}{15}]=\frac{2\pi}{15}$$

پوښتنې

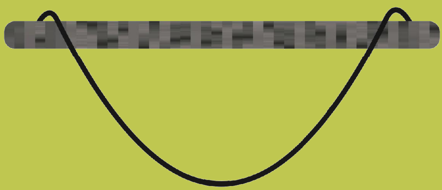
1. د هغه جسم حجم چې د $y=\sin x$ تابع او د $x=0$ او $x=\pi$ دوو کرښو تر منځ محصور شوی مساحت له دوران څخه د x د محور په چاپېر جوړېږي پیدا کړئ.
2. د هغه جسم حجم پیدا کړئ چې د $y=x^3$ منحني او $y=8$ ، $x=0$ کرښو ترمنځ محصور شوي مساحت له دوران څخه د y د محور په چاپېر جوړېږي، حساب کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

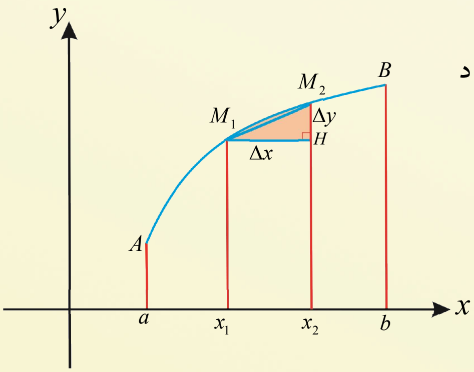
د قوس د اوږوالی محاسبه

Accounting the Length of Arc

څرنګه کولای شو چې د مخامخ پرې اوږدوالی پيدا کړو؟



- د قايمو مختصاتو په سيستم کې د $y = f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې په پام کې ونيسئ او هغې تـه $\overset{\frown}{AB}$ ووايئ، داسې چې تابع په نوموړی فاصله کې متمادي او د مشتق وړ وي.
- د $[a,b]$ انټروال په دريو مساوي برخو ويشو او د x_1 او x_2 د قوس اوږدوالی په M_1 او M_2 ښيو.
- د M_1 له ټکي څخه يوه ټوټه کرښه د M_2 په ټکي او يـوه بلـه کرښـه، د هغې پـه مخامخ کرښـه رسمـوو او د دواړو ټوټه کرښو، د تقاطع ټکی H ونوموئ.
- د M_1H د کرښې فاصلې ته Δx او M_2H ته Δy وايي او د M_1HM_2 د قـايم الزاويـه مثلـث د مخـامخ قوس اوږوالی د فيثاغورث د قضيې په مرسته حساب کړئ.



له پورتني فعاليت څخه کولای شو چې د M_1HM_2 مثلث د مخامخ قوس اوږدوالی داسې ثبوت کړو.

ثبوت:

له قايم‌الزاويه M_1HM_2 مثلث څخه په‌ګټې اخيستنې سره لرو چې:

$$(M_1M_2)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

$$M_1M_2 = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مشتق له تعریف څخه پوهېږو:

$$f'(t)=\frac{\Delta x}{\Delta t} \quad , \quad g'(t)=\frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$$\Delta x=f'(t)\cdot\Delta t \quad , \quad \Delta y=g'(t)\cdot\Delta t$$

$$M_1M_2=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\sqrt{[f'(t)\cdot\Delta t]^2+[g'(t)\cdot\Delta t]^2}$$

$$M_1M_2=\sqrt{[f'(t)]^2+[g'(t)]^2}\cdot\Delta t$$

نو د ریمان له مجموعې څخه لرو:

$$L=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{[f'(t)]^2+[g'(t)]^2}\cdot\Delta t$$

$$L=\int_a^b\sqrt{[f'(t)]^2+[g'(t)]^2}\,dt$$

لومړی مثال: د $x^2+y^2=r^2$ د دايرې محيط محاسبه کړئ:

حل: څرنګه چې د دايرې پارامتري معادله په دې ډول $\begin{cases}x=r\cos t\\ y=r\sin t\end{cases}$ ده.

که چېرې $0\le t\le\pi$ وي، نو د دايرې نمايي محيط پيدا کړئ.

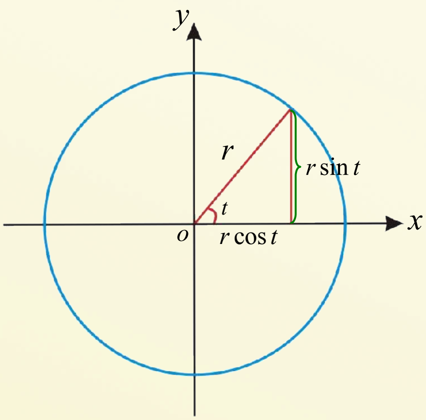
$$P=\int_0^\pi\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt$$

$$x'=-r\sin t \quad , \quad y'=r\cos t$$

$$P=\int_0^\pi\sqrt{(-r\sin t)^2+(r\cos t)^2}\,dt$$

$$P=\int_0^\pi\sqrt{r^2\sin^2 t+r^2\cos^2 t}\,dt$$

$$P=\int_0^\pi\sqrt{r^2(\sin^2 t+\cos^2 t)}\,dt=\int_0^\pi\sqrt{r^2}\,dt$$



د دايرې نيمايي محيط $P=[r\,t]_0^\pi=(r\cdot\pi-r\cdot 0)=\pi r$

د دايرې مکمل محيط $=2\pi r$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه:

1- د $y=f(x)$ منحني معادله په $a \le x \le b$ انټروال کې راکړل شوې ده، د x د پارامتر په پام کې نیولو سره د منحنی د قوس اوږدوالی داسې محاسبه کوو:

$$L=\int_a^b \sqrt{1+f'^{\,2}(x)}\ dx$$

مثال: د $y=f(x)=x^{\frac{3}{2}}$ منحني د قوس اوږدوالي په $0 \le x \le 4$ فاصله کې حساب کړئ.

حل: $f(x)=x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow f'(x)=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$

$$L=\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\ dx=\int_0^4 \sqrt{1+(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}})^2}\cdot dx$$

$$=\int_0^4 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\ \ dx=\int_0^4 \sqrt{u}\cdot\frac{4}{9}du=\frac{4}{9}\int_0^4 u^{\frac{1}{2}}\ du$$

$$u=1+\frac{9}{4}x \qquad du=\frac{9}{4}dx \qquad dx=\frac{4}{9}du$$

$$=\frac{4}{9}\Big[\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\Big]_0^4=\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}[u^{\frac{3}{2}}]_0^4=\frac{8}{27}[\sqrt{u^3}\,]_0^4$$

$$=\frac{8}{27}\Big[\sqrt{(1+\frac{9}{4}x)^3}\,\Big]_0^4=\frac{8}{27}\Big[\sqrt{(1+\frac{9}{4}\cdot 4)^3}-1\Big]=\frac{8}{27}(\sqrt{10^3}-1)$$

$$L=\frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1)$$

2- د $x=f(y)$ منحني په $a \le y \le b$ انټروال کې راکړل شوې ده، د y د پارامتر د په پام کې نیولو سره لرو چې:

$$L=\int_a^b \sqrt{f'^2(y)+1}\ \ dy$$

مثال: د $x=f(y)=y^{\frac{3}{2}}$ منحني د قوس اوږدوالی په $1 \le y \le 4$ انټروال کې حساب کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$$f(y)=y^{\frac{3}{2}} \quad , \quad f'(y)=\frac{3}{2}\cdot y^{\frac{1}{2}}$$

$$L=\int_a^b\sqrt{f'^2(y)+1}\,dy=\int_1^4\sqrt{(\frac{3}{2}\cdot y^{\frac{1}{2}})^2+1}\,dy$$

$$=\int_1^4\sqrt{\frac{9}{4}y+1}\,dy=\int_1^4\sqrt{u}\cdot\frac{4}{9}du \qquad u=\frac{9}{4}y+1$$

$$=\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}[u^{\frac{3}{2}}]_1^4=\frac{8}{27}[\sqrt{(\frac{9}{4}y+1)^3}]_1^4 \qquad du=\frac{9}{4}dy$$

$$=\frac{8}{27}[\sqrt{(10)^3}-\sqrt{(\frac{9}{4}+1)^3}] \qquad dy=\frac{4}{9}du$$

$$=\frac{8}{27}[\sqrt{1000}-\sqrt{(\frac{13}{4})^3}]=\frac{8}{27}[10\sqrt{10}-\sqrt{\frac{2197}{64}}]$$

پوښتنې

1. د $x=t^2$ او $y=t^3$ د منحنيګانو د قوس اوږدوالی د $1\le x\le 2$ د فاصلې تر منځ پيدا کړئ.
2. د $f(x)=\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}$ د منحني د قوس اوږدوالی په $0\le x\le 1$ انټروال کې پيدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څېړکي مهم ټکي

- د $\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$ انتیګرال د یوې سطحې د مساحت اندازه یا پراخوالی راښیي چې د $y=f(x)$ منحني او د x د محور او د $x=a$ او $x=b$ کرښو له خوا رابند دی.
- که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې مثبت او متمادي وي، یعنې $y=f(x)\geq 0$ په دې صورت کې د $f(x)$ تابع تل د x د محور پورته خواته او که $y=f(x)\leq 0$ وي، په دې حالت کې د $f(x)$ د x د محور لاندې خواته واقع او انتیګرال یې منفي دی.

د دوو منحنيګانو په واسطه د محصور شوی سطې د مساحت محاسبه:

- که چېرې د $f(x)$ تابع د $g(x)$ تابع د ګراف په پورتنی برخه کې واقع وي، نو لرو:

$$A=\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx=\int_a^b f(x)\,dx-\int_a^b g(x)\,dx$$

- که چېرې د $g(x)$ تابع ګراف د $f(x)$ تابع په پاسنی برخه کې واقع وی؛ لرو چې:

$$A=\int_a^b [g(x)-f(x)]dx=\int_a^b g(x)dx-\int_a^b f(x)dx$$

دګراف له دوران څخه د په لاس راغلي جسم حجم

- که چېرې د $y=f(x)$ متمادي تابع مساحت د $x=a$ او $x=b$ کرښو په واسطه محصور شوی وي، نو د هغه جسم حجم چې د پورتني تابع د منحني له دوارن څخه د x محور په شاوخوا لاسته راځي تقریباً استوانه‌یي شکل لري .

چې ارتفاع یې $\Delta x=b-a$ ده او د دې استوانې سطح د دایروي سطحو په واسطه محصوره شوې ده چې دې سطحو ته مقطع وایي او پوهېږو چې د دایرې مساحت نظر د x محور ته $A(x)=\pi r^2$ دی او ددې مقطع شعاع نظر شکل ته د y له محور سره موازي دی؛ نو $y=r$ کېږي او د حجم فورمول یې نظر د ریمان مجموعې ته په لاندې ډول دی:

$$v=\lim_{n\to\infty}V_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}A(x)\Delta x=\int_a^b \pi r^2\,dx=\int_a^b \pi y^2\,dx=\pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx$$

- که د $x=f(y)$ تابع مساحت د $y=c$ ، $y=d$ کرښو ترمنځ محصور شوی وي دداسې استواني مقطع نظر y محور ته $A(y)=\pi r^2$ چې ارتفاع یې $\Delta x=d-c$ او شعاع یې $x=r$ سره ده هغه حجم چې ددې دوران له مساحت څخه په لاس راځي په لاندې ډول دی:

$$v=\lim_{n\to\infty}V_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}A(y)\Delta y=\int_a^b \pi r^2\,dy=\int_a^b \pi x^2\,dy=\pi\int_a^b [f(y)]^2\,dy$$

د قوس د اوږدوالي محاسبه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د قوس د اوږدوالي د محاسبې فورمول: $L=\int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2+[g'(t)]^2}\,dt$

1) $$L=\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$$

2) $$L=\int_a^b \sqrt{1+f'^2(y)}\,dy$$

د شپږم څپرکي پوښتنې

1. د $y^2-x-5=0$ منحني او د y د محور تر منځ د پرتې سطحې مساحت محاسبه کړئ.
2. د هغې سطحې مساحت چې د $y=\sin x$ منحني په $[0,2\pi]$ انټروال کې او د x د محور تر منځ پرته ده، پیدا کړئ.
3. د $y=x^2-2x$ او $y=6x-x^2$ منحني گانو تر منځ د پرتې سطحې مساحت حساب کړئ.
4. د $y=-x^2+4x-3$ منحني او x محور تر منځ د پرتې سطحې مساحت پیدا کړئ.
5. د $y=x^3-6x^2+8x$ او $y=x^2-4x$ منحني گانو تر منځ د پرتې سطحې مساحت پیدا کړئ.
6. د هغه جسم حجم وټاکئ چې د $y=\sin x-\cos x$ منحني او $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$ کرښو د x محور په شاوخوا له دوران څخه په لاس راځي، حساب کړئ.
7. د هغې سطحې حجم چې د $y=\frac{1}{4}x^2+2$ منحني له دوران څخه د x د محور پرشاوخوا په $[0,4]$ انټروال کې جوړ شوي وي.
8. د هغې راښندې شوي سطحې د جسم حجم چې د $y=x^2$ منحني او د $x^2+y^2=2$ دایرې له دوران څخه د x محور په شاوخوا جوړ شوې وي، پیدا کړئ.
9. د هغه جسم حجم چې د $y=\frac{1}{2}x+1$ کرښې دوران او د x محور په $[2,6]$ انټروال کې جوړېږي، په لاس راوړئ.
10. د $y=-x+4$ منحني د قوس اوږدوالی په $-2\le x\le 2$ انټروال کې حساب کړئ.
11. د $y=\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}$ تابع د منحني د قوس اوږوالی په $2\le x\le 5$ انټروال کې پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

اووم څپرکی

احصائیه

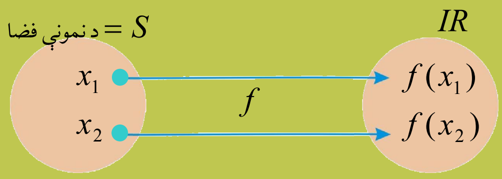
(c) ketabton.com: The Digital Library

موږ ټول افغانان یو.

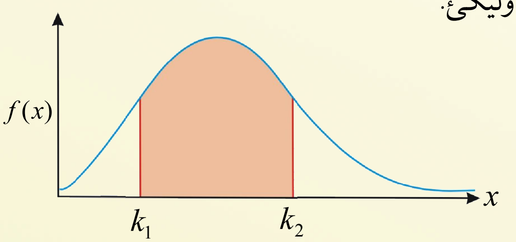
(c) ketabton.com: The Digital Library

د احتمال د تابع توزیع

د تـصادفي ازمايـښت، نمونـه‌يي فـضا او د ناځاېـه متحـول کلمې ستاسو په ذهن کې څه څه را ژوندي کوي.



- هغه تصادفي متحول چې په احصائيه او احتمالاتو کې ترې ګټه اخلي، لـه هغـه متحـول سـره چـې پـه الجبر کې مو لوستي دی، څه توپير لري؟
- که $x_1, x_2, \ldots x_n$ د یوه سـټ عناصـر او $P(x = x_i) = f(x_i)$ تـابع ولـرو، هغـه مرتبـې جـوړې چـې د نوموړې تابع څخه په لاس راځي، جوړې او بيا يې وليکئ.
- مخـامخ شـکل تـه پـه کتنـې سـره د k_1 او k_2 مقـدارونو تـرمنځ او $f(x)$ د منحنـي لانـدېنۍ محـدود شـوی مـساحت د انتيګـرال پـه شـکل وښيئ.



- د لانـدې جـدول پـه پـام کـې نيولـو سـره د $[E(x = x_i)] = \sum_{i=1}^{2} x_i f(x_i)$, $[x_i - E(x_i)]^2$ او $[x_i - E(x_i)]^2 f(x_i)$ مجموعه په لاس راوړئ.

x_i	0	1
$f(x_i)$	0.5	0.5

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پورتني فعاليت پايله داسي بيانوو:

ـ هغه تصادفي متحول چې په احصائيه او احتمالاتوکې تر څېړنې لاندې نيول کېږي عبارت له هغې تابع څخه دی چې د تعريف ناحيه يې نمونه‌يي فضا او د قيمتونو ناحيه يې حقيقي اعداد دي.

ـ که $P(x = x_i) = f(x_i)$ ولرو، نو د $[x_1 , f(x_1)] , [x_2 , f(x_2)], \dots ,[x_n , f(x_n)]$ مرتبو جوړو ته د مجزا(غير متمادي) احتمال تابع وايي.

- د تجمعي او متمادی احتمال تابع کولای شو، په دې بڼه $F(x) = P(X \leq x)$ وښيو.
- که چېرې $f(x)$ د احتمال تابع او x تصادفي متحول وي، په دې صورت کې د دې احتمال چې x د k_1 او k_2 په منځ کې وي برابر دی له:

$$P(k_1 \leq x \leq k_2) = \int_{k_1}^{k_2} f(x)\,dx$$

- که چېرې x پيوسته ناځاپه (تصادفي) متحول او $k_1 < k_2$ څخه وي، په دې صورت کې:

$$P(k_1 \leq x \leq k_2) = F(k_2) - F(k_1)$$

- که چېرې x ناڅاپه مجزا متحول وي، په دې حالت کې اوسط $(Expected\ Value)$ د x تصادفي مجزا متحول چې د $E(x)$ په بڼه ښودل کېږي، برابر دی له:

$$E(x) = x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + \dots\dots\dots + x_n f(x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)$$

د $E(x)$ د x اوسط هم بلل کېږي چې هغه په $\bar{x}$ ښيي همدارنګه که چېرې x غير متمادي تصادفي متحول وي، په دې صورت کې د x وريانس چې په S^2 ښودل کېږي برابر دی له:

$$S^2 = \sum_{i=1}^{n} [x_i - E(x_i)]^2 f(x_i)$$

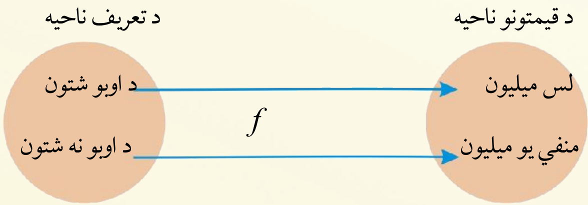
(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: يو شخصي شرکت غواړي د يوې غونډۍ پر سر د اوبو يوه څاه وکني، د اوبو څاه په يو ميليون افغانۍ تمامېږي که نوموړې څاه اوبه ورکړي د شرکت مالك لس ميليونه افغانۍ اجوره اخلي، پرته له هغې به د څاه د کېندلو يو ميليون افغانۍ مصرف په زيان ورکړي.

الف_ دا موضوع د يوې تابع په بڼه وښيئ.

ب_ که د دې احتمال چې کېندل شوې څاه اوبه ورکړي 0.2 او د نه ورکولو احتمال يې 0.8 وي، په دې صورت کې د احتمال تابع، اوسط $(Expected\ Value)$، وريانس او د x تصادفي متحول معياري انحراف پيدا کړي.

د الف حل:



د ب حل: د تصادفي متحول د احتمال تابع اوسط، وريانس او معياري انحراف په لاندې جدول کې ښودل شوي دي:

انحراف معیاری	واریانس	د تصادفي متحول د مربعاتو انحراف د تصادفي متحول له اوسط څخه	اوسط	د احتمال تابع	تصادفی متحول
S	$S^2=[x_i-E(x)]^2 f(x_i)$	$[x_i-E(x)]^2$	$E(x)=\sum x_i f(x_i)$	$f(x_i)$	x_i
4.4	$4.84\cdot 0.8=3.872$	$(-1-1.2)^2=4.84$	$-1\cdot 0.8=-0.8$	0.8	-1
	$77.44\cdot 0.2=15.488$	$(10-1.2)^2=77.44$	$10\cdot 0.2=2$	0.2	10
	$\sum S^2=19.360$		1.2	0.1	

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

فرض کوو چې د یوه موټر پلورنځي د 100 ورځو خرڅلاو په لاندې ډول دی:

د ورځو شمېر	60	30	8	2
د پېرودل شوو موټرو شمېر	0	1	2	3

د x تصادفي متحول د احتمال تابع او د تجمعي احتمال تابع پیدا کړئ.

د تجمعي احتمال له تابع څخه په ګټه اخېستنې سره ووایئ چې په یوه ورځ کې حداکثر احتمال د (2) موټرونو او حداقل احتمال د دوو موټرونو په کومه کچه ده؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه جملهيي توزيع او د برنولي ازموينت

يو ګڼون کوونکي د پوهنتون د کانکور په آزموينه کې له 160 سؤالونو څخه 100 سوالونه حل کړل. تاسې څه سوچ کوئ چې داګڼونکوونکی به آزموينه کې بريالی کېږي او يا بې نتيجه پاتې کېږي؟

د احتمال دوه جملهيي توزيع يوه غيرمتمادي توزيع ده چې د مختلفو پېښو د توصيف لپاره په کار وړل کېږي اکثراً پېښې چې په نرۍ کې منځ ته راځي دوه حالتونه لري.

د لاندې آزموينتي پېښو له شرطونو څخه څه ډول پايلې په لاس راوړلای شئ.

- څو ځلې دوه سکې واچول شي چې سمدلاسه دواړه شېر راشي.
- څو ځلې دوه تاسه واچول شي چې د شمېرو مجموعه يې له 7 څخه کوچنی شي.
- له يوې جعبې څخه څو ځلې د يوې مرۍ(مهره) اخېستل چې د تورو او سپينو مرۍ لرونکي ده.
- له يوې جعبې څخه چې د تورو او سپينو مريو لرونکې ده څو ځلې يوه مرۍ واخېستل شي چې اخېستل شوی مرۍ سپينه وي(چې اخېستل شوي مرۍ بيا په جعبه کې واچول شي)
- که چېرې m بريالیتوب له n آزمايښت څخه($m<n$) چې ترتيب په کې مهم نه دی دا ټاکنه د څه په نامه يادېږي او فورمول يې وليکئ.
- که د m شکلونو د برياليتوب احتمال د n ازمايښت څخه په P او $n-m$ شکلونو د ناکامي احتمال د n له آزمايښت څخه په q وښودل شي، نو د m له کاميابي احتمال د آزمايښت د n له شکلونو څخه به څو وي؟
- زده‌کوونکي له پنځو خلور ځوابه آزمويني له پوښتنو سره مخامخ کېږي. هغوی په ناڅاپه ډول پوښتنو ته ځوابونه ورکوي، فرض کړئ که د (سم ځواب) برياليتوب په T او (ناسم ځواب) نه برياليتوب د F په توری وښودل شي په دې صورت کې د هر يوه سم او ناسم ځواب احتمال به څومره وي؟

له پورتني فعاليت څخه څرګندېږي چې د برنولي آزمايښت يو ناڅاپه ازمايښت دی چې کولای شو پايله يې په دوو حالتونو برياليتوب او نابرياليتوب دسته بندي کړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د برنولي توزيع کولای شو چې په $P(x=m)=P^m(1-P)^{1-m}=P^m\cdot q^{1-m}$ په بڼه وښيو پـه داسې حال کې چې P د برياليتوب احتمال او $q=1-p$ د نابرياليتوب احتمال دی.

که چېرې يو ازمايښت n ځلې تکرار کړو، يو ترادف په لاس راځي، داسې چې که د هـر آزمايـښت د برياليتوب احتمال P او نابرياليتوب احتمال q وي، په دې صورت کې د n ځلې آزمايـښت څخه د m ځلې برياليتوب احتمال عبارت دی له: $0\le m\le n$ $\qquad P(X\le m)=\binom{n}{m}P^m q^{n-m}$

پورتني اړيکه کولای شو چې په دې ډول $B(m,n,p)$ هم وښيو.

د پورتني فورمول په پام کې نيولو سره کولای شـو، د دوه جملـه‌يي د توزيـع اوسط پـه $\bar{x}=np$ او د دوی د توزيع معياري انحراف د $S=\sqrt{npq}$ په بڼه وښيو.

مثال: د يوه ناروغ د ښه کېدو احتمال د شـکرې لـه نـاروغی څخـه 0.4 دی، کـه چېـرې 15 تنـه پـه دې نـاروغی اخته وي، ددې څومره احتمال شته چې پنځه تنه ښه شي او همدا شان پيدا کړئ چې له 3 څخه تر 4 تنو پورې جوړ شي.

حل: څرنګه چې $n=15\ ,\quad m=5\ ,\quad q=0.6\ ,\quad P=0.4$ دی نو:

$$P(m=5)=\binom{n}{m}P^m\cdot q^{n-m}=\binom{15}{5}(0.4)^5(0.6)^{10}$$

$$=\frac{15!}{5!(15-5)!}\cdot 0.01024\cdot 0.00604661760=\frac{360360}{120}\cdot 0.00006191$$

$$=\frac{22.3098876}{120}=0.1859$$

$$P(3\le m\le 4)=\sum_{i=3}^{4}\binom{15}{i}(0.4)^i(0.6)^{15-i}=(3^{15})(0.4)^3(0.6)^{15-3}+(4^{15})(0.4)^4(0.6)^{15-4}$$

$$=\frac{15!}{3!(15-3)!}(0.064)(0.6)^{12}+\frac{15!}{4!(15-4)!}(0.0256)(0.6)^{11}$$

$$=\frac{2730}{6}(0.000139264)+\frac{3270}{24}(0.0000928512)$$

$$=\frac{0.38019072}{6}+\frac{0.3036}{24}=0.063365+0.012650$$

$$P(3\le m\le 4)=0.076015$$

پوښتني

په يوه کلي کې 200 کورنی اوسېږي که هره کورنی 4 ماشومان ولري ددې احتمال پيدا کړئ چې هره کورنی

- حد اقل يو زوی لري.
- يوازې دوه زامن لري.
- يوه يا دوې لوڼې ولري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پواسن د احتمال توزیع

$$1)\ b(x,n,p)=\binom{x}{n}p^{x}q^{n-x}$$

$$2)\ \lim_{n\to\infty} b(x,n,p)=\frac{\lambda^{x}\cdot e^{-\lambda}}{x!}$$

$$3)\ P(x,\lambda)=\frac{\lambda^{x}\cdot e^{-\lambda}}{x!}$$

که چېرې د برنولي دوه جمله‌يي توزيع فورمول په پام کې ونيسو، ايا ويلای شئ که چېرې د برنولي په دوه جمله‌يي توزيع کې د P قيمت صفر ته تقرب وکړي او د n قيمت لايتناهي ته تقرب وکړي، نو د برنولي دوه جمله‌يي توزيع څه سره مساوي کېږي.

کــه $n=5$,$p=0.1$ او $m=2$ وي د $P(x=m)=\dfrac{e^{-\lambda}\,\lambda^{m}}{m!}$ قيمتونــه پــه داســې حــال کــې چــې $P(X=m)=\binom{n}{m}P^{m}q^{n-m}$ او $\lambda=np$ وي محاسبه کړئ او د پاسـنيو توابعـو لـه قيمتونـو سـره يې پرتلـه کړئ، ويلای شئ چې د کوم فورمول په کار وړل، ساده دی؟

د پواسن فورمول کولای شي چې د m شکلونو د کاميابئ احتمال د n آزمايښتونو څخه کله چې n لـوی او د کاميابي احتمال P کوچنی وي، د تقريبي محاسبې لپاره کارول کېږي.

دا فورمول عبارت دی له:

$$P(X=m)=\frac{e^{-x}\lambda^{m}}{m!}$$

چې $\lambda=np$ او $e=2.71828$ دی.

په ياد ولرئ چې د پواسن په توزيع کې اوسط او هم وريانس له λ سره برابر دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: 200 تنو مسافرینو د یوې الوتکې ټکټ اخیستلی دی د مخکنیو تجاربو په اساس که د هغه مسافرینو چې ټکټ یې رانیولی دی د نه راتګ احتمال 0.01 وي. ددې احتمال چې 3 تنه مسافرین بېرته را نه شي څومره دی.

حل: په دې مسئله کې د(نه راتلل) کامیابي ده او همدارنګه لیدل کیږي چې $n=200$ ډېر لوی او $P=0.01$ یعنې د کامیابی احتمال کوچنی دی، نو لرو:

$$P(X=m)=\frac{e^{-\lambda}\,\lambda^m}{m!} \qquad\qquad \lambda=n\,p=200\cdot 0.01=2$$

$$P(3)=\frac{(2.71828)^{-2}\cdot 2^3}{3!}=\frac{\frac{1}{(2.71828)^2}\cdot 8}{6}=\frac{\frac{1}{7.3890461584}\cdot 8}{6}$$

$$=\frac{0.13533\cdot 8}{6}=\frac{1.08268}{6}=0.1804$$

اوس که چیرې دا احتمال د دو جمله‌يي په فورمول محاسبه کړو،لرو چې:

$$P(X=m)=\binom{n}{m}P^m\ q^{n-m}$$

$$\left.\begin{matrix} n=200 \\ p=0.01 \end{matrix}\right\} \Rightarrow q=0.99$$

$$P(3)=P(X=3)=\binom{200}{3}(0.01)^3(0.099)^{200-3}$$

$$=\frac{200!}{3!\cdot 197!}(0.01)^3(0.099)^{197}=0.1814$$

څرنګه چې لیدل کیږي دواړه ځوابونه سره معادل دي، نو واضح ده چې د پواسن د فورمول له لارې احتمال محاسبه ساده ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

يادونه:

د پواسن د فورمول په واسطه کولای شو چې په يوه ټاکلي وخت کې د ورتللو د شمېر احتمال په لاندې ډول وښيو:

$$P(X=m)=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^m}{m!}$$

په پورتني فورمول کې t د ښودل شوی وخت نسبت پر ټول وخت چې اوسط هغې ته ورکړل شوی وي m د ورتللو شمېر د t په واحد وخت کې د λ د ورتګ شمېر اوسط په واحد د وخت کې دی.

مثال: که په يوه ساعت کې د يوه بانک د مراجعينو شمېر په متوسط ډول 60 تنه وي، ددې احتمال چې څلور تنه په لومړيو دريو دقيقو کې راغلی وي، څومره دی.

حل:

$$\lambda=60 \quad , \quad t=\frac{3}{60}=\frac{1}{20}$$

$$m=4 \quad , \quad \lambda t=60\cdot\frac{1}{20}=3$$

$$P(m=4)=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^m}{m!}=\frac{e^{-3}(3)^4}{4!}=\frac{(2.71828)^{-3}(3)^4}{4!}=\frac{\frac{1}{(2.71828)^3}\cdot 81}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$$

$$=\frac{\frac{1}{20.0854}\cdot 81}{24}=\frac{4.03278}{24}=0.168032$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتني

د چاپ د يوه ماشين د جوړولو لپاره په يوه کال کې په متوسط ډول ورتګ دوه ځلې ده، فرض کوو چې د پواسن توزيع په دې اړه صدق کوي.

الف: د ماشين د جوړولو لپاره د ورتګ د احتمال توزيع په يوه کال کې حساب کړئ.

ب: د توزيع اوسط او معياري انحراف څومره دی؟

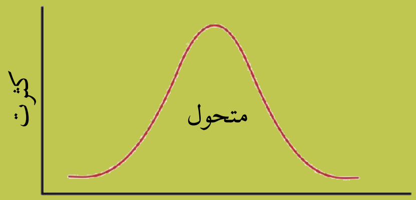
ج: فرض کړئ که د هر ورتګ مصرف 100 افغانۍ وي، د هر ماشين د جوړولو مصرف پيدا کړئ؟

د: ددې احتمال چې په هر کال کې ديوه ماشين د جوړولو مصرف له 300 افغانيو څخه زيات وي، څومره دی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

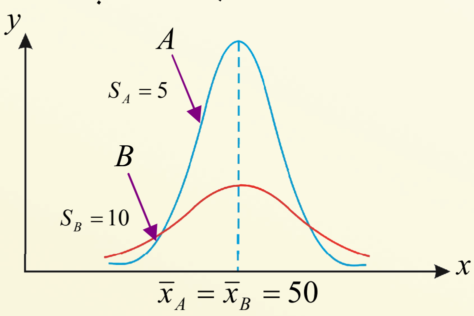
د نورمال توزیع

پوهېږو چې د نورمالي منحني شکل مشابه او متناظر له زانګولی سره ده، په نورماله منحني کې د پراګندګی مرکزي شاخصونه(معیاري انحراف او اوسط) خپله ځایونه(موقعیتونه) نیولی شي.

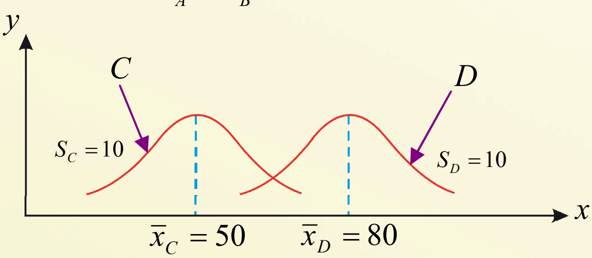


څو نورمالي توزیع ګانې له بېلابېلو سطحو او معیاري انحرافونو سره په لاندې شکلونو کې ورکړل شوي دي.

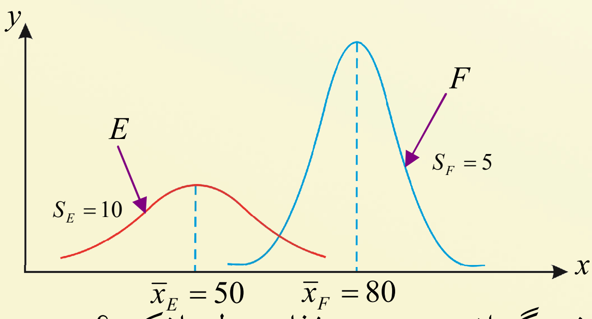
الف شکل



ب شکل



ج شکل



لاندینی فعالیت له پورتنیو شکلونو څخه په ګټه اخیستنې سره په شفاهي ډول بیان کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

- د الف په شکل کې د A او B د تصادفي متحول توزیع د څه ډول معیاري انحراف او اوسط لرونکې ده؟
- د ب په شکل کې C او D توزیع د څه ډول معیاري انحراف او اوسط لرونکې دی؟
- د ج په شکل کې د E او F توزیع د څه ډول معیاري انحراف اوسط لرونکی دی؟
- د نورمال منحني شکل دواړو خواوو ته تر کوم ځایه غزیدلی دی؟

د پورتني فعالیت له سرته رسولو څخه داسې پایله په لاس راځي چې:

د نورمال منحني توزیع کېدای شي چې په څلورو طریقو یو له بل سره توپیر ولري. د نورمال توزیع ریاضیکي معادله چې د $f(x)$ احتمال توزیع تابع ښودونکی ده، په لاندې ډول ښوول کېږي.

$$f(x)=\frac{1}{s\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\bar{x}}{s})^2}$$

او یا
$$f(x)=N(x,\bar{x},s)$$

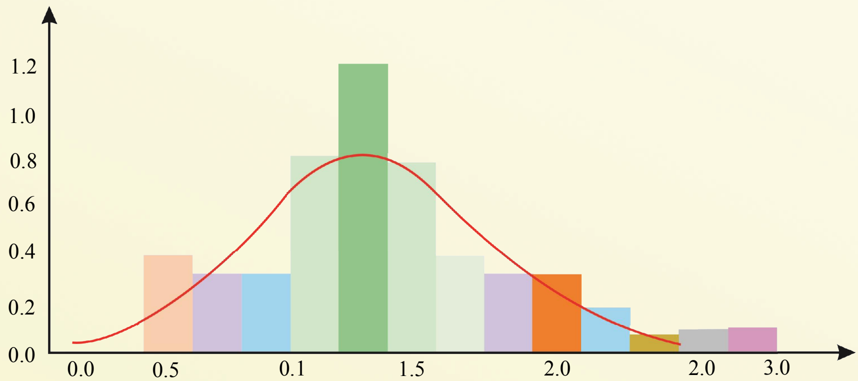
په داسې حال کې چې $e=2.71828$ او π هم ثابت عدد 3.14189 دی $\bar{x}$ اوسط، s معیاري انحراف ، x متمادی تصادفي مقدار او $f(x)$ د منحني جگوالی راښیي.

د نورمالې توزیع له متمادی توزیعگانو څخه ده. د نورمالي توزیع په واسطه کولای شو، د اندازه کولو توپیر په ښه توگه سره نژدې کړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د موټرونو ماشين د تيلو سوزولو په وخت کې يوه اندازه مضر لوګی توليدوي، د هغه مضر لوګي مقدار چې له 46 موټرونو توليدېږي، د يوه تن په واسطه چې لورنزن نوميده په 1980 کال کې وڅېړل شو. يوه اندازه لوګی د نايتروجن اوکسايدونه لري. لاندې مستطيلي ګراف د نايتروجن اوکسايد ميزان د $(\frac{gr}{mil})$ د 46 موټرونو د نورمال احتمال توزيع اوسط او وريانس چې د نومورې کس له خوا تر څېړنې لاندې نيول شوی. ددې مستطيلي ګراف د ستونونو مساحت متناسب دی له هغو 46 نمونه‌يي شمېر له اندازه‌ګيري سره چې ددې ستون د افقي ټکو تر منځ قرار لري.

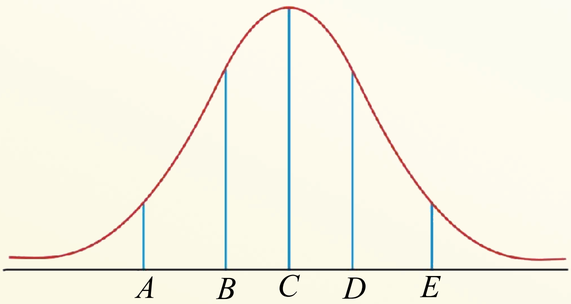
د مثال په ډول په څلورم ستون کې(چې له 1 څخه تر 1.2 پورې په افقي محور قرار لري) د $0.870\cdot 0.2 = 0.174$ مساحت لرونکی دی چې د $\frac{4}{46}$ سره برابر دی، ځکه 8 ديتا له 1 څخه تر 1.2 پورې پراته دي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنه

لاندېنی شکل په پام کې ونیسئ د A, B, C, D او E ټکو موقعیت د معیاري انحراف د اوسط له جنسه پیدا کړئ.



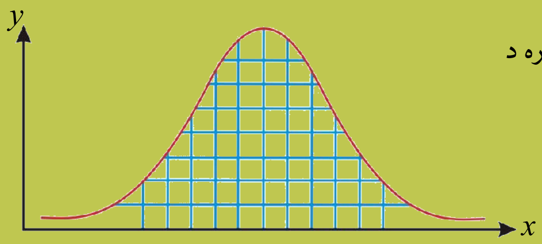
(c) ketabton.com: The Digital Library

د نورمال توزیع منحني لاندې مساحت او د هغې سټنډرډ کول

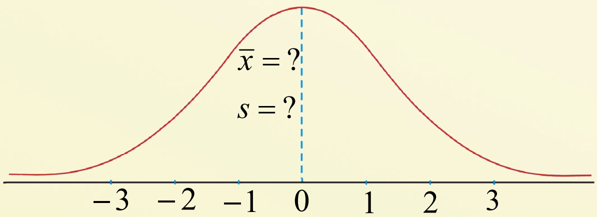
مخامخ شکل په پام کې ونیسئ:

د $y = f(x)$ د منحني لاندې مساحت د محاسبې لپاره د

څه ډول لارو وړاندیز کوئ.

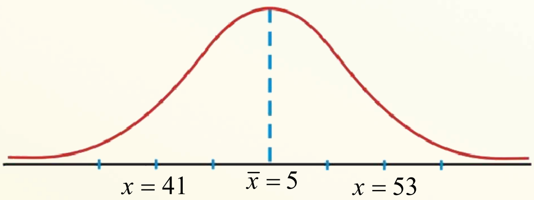


- که چېرې د x تصادفي متمادي متحول د احتمال نورمال توزیع چې اوسط یې $\overline{x}$ او معیـاري انحـراف یې s وي،ددې احتمال چې دا تصادفي متحول د x_1 او x_2 تر منځ کمیت غوره کړي د انتیګـرال پـه بڼه یې ولیکئ.
- سوچ کولای شئ چې د احتمال نورمال توزیع د ریاضي شکل انتیګرال محاسبه په ساده کار وي.
- که چېرې د نورمال تصادفي متحول په $z = \dfrac{x - \overline{x}}{s}$ ډول ولیکو، د $f(x)$ د احتمال توزیع تابع لـه څـه سره برابره ده؟
- ویلای شئ چې اوسط او معیاري انحراف په لاندې شکل کې له کومو عددونو سره برابر دی؟



(c) ketabton.com: The Digital Library

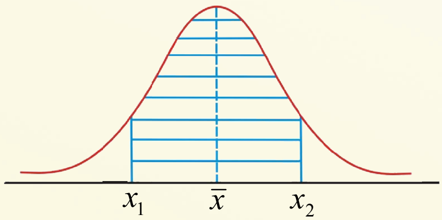
• کـه پـه لانـدې شـکل کـې چـې د $x=41$ او $x=53$ قیمتونـه پـه نورمـال ډول د $\bar{x}=50$ اوسـط او $S=5$ معیار انحراف ښودل شوی دی، نو د $z=\frac{x-\bar{x}}{s}$ مقدار په لاس راوړئ.



له پورتني فعالیت څخه دا پایله په لاس راځي چې د احتمال د محاسبې لپاره داسې چې د x پیوسته تصادفي متحول د x_1 او x_2 تر منځ یو کمیت ونیسئ، نو باید د x د احتمال د توزیع له تابع څخه انتګرال ونیسو او د منحنې لاندې سطحه د x_1 او x_2 فاصلو ترمنځ په لاندې ډول محاسبه کړو:

$$f(x_1<x<x_2)=\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx=\int_{x_1}^{x_2}\frac{1}{s\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\bar{x}}{s})^2}$$

$$=\int_{x_1}^{x_2} N(x,\bar{x},s)dx$$



د نورمال توزیع احتمال محاسبه ساده کار نـه دی، د نورمـال توزیـع‌ګـانو د منحنـي لانـدې مـساحت محاسـبه اوږدو جدولونو ته اړتیـا لـري چـې عمـلاً دا کـار ګـران دی، کـولای شـو چـې د جـدول د جوړولـو شـکل د احصائیوي data د سټنډرډ کولو په واسطه حل کړو.

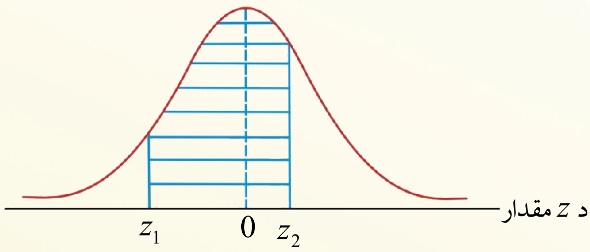
په دې معنا چې کولای شو په x پورې اړوند تصادفي متحول چـې د نورمـال توزیـع لرونکـی دی، د لانـدې اړیکې په واسطه سټنډرډ کړو.
$$z=\frac{x-\bar{x}}{s}$$

دلته z د سټنډرډ نورمال متحول په نامه او منحنې ته د سټنډرډ نورمال منحني پـه نامـه یـا د نورمـال احتمـال منحني نومول کېږي، په یاد ولرئ چې د z سـټنډرډ وي، متحـول تـل د صـفر اوسـط لرونکـی او یـو معیـار انحراف یې دی، همدرانګه د نورمال منحني او افقي محور ترمنځ مساحت له ټاکل شوي واحد سره برابر وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

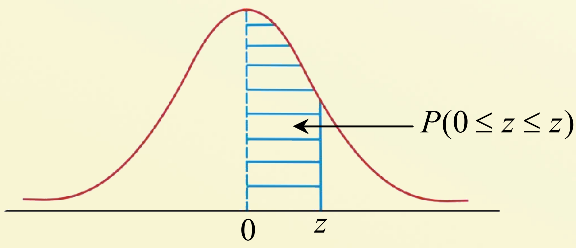
لاندې مساحت د يوه منحني يوه برخه د نورمال احتمال چې له احتمال سره مستقيم تناسب لـري او کـولای شو چې د $z=\frac{x-\bar{x}}{s}$ بدلولو سره يې په لاندې ډول وښيو.

$$f(z_1<z<z_2)=\int_{z_1}^{z_2}\frac{1}{s\sqrt{2\pi}}\,e^{\frac{-z^2}{2}}dz=\int_{z_1}^{z_2}N(z,0,1)\,dz$$

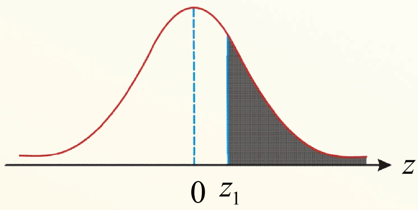


د x متحول منحني لاندې مساحت چې د $x=x_1$ او $x=x_2$ ترمنځ واقع دی، د z متحول لـه منحنـي مساحت سره چې د $z=z_1$ او $z=z_2$ ترمنځ پراته مساوي دي. پـه پايلـه کـې کـولای شـو چـې د نورمـال د توزيع سټنډرډ د جدول په لرلو سره د نورمال توزيع احتمال د ناڅاپه متحول د هر ممکنه قيمت لپاره په لاس راوړای شو.

د سټنډرډ نورمال د توزيع احتمال د جدول د استعمال له لارې کولای شـو، پـه لنـډ ډول توضـيح کـړو. هغـه جدول چې ددې لوست په پای کې راغلی دی، د سټنډرډ نورمال توزيع اړوند په احتمالاتو کـې ګـډون لـري. لاندې جدول ددې لوست يوه برخه د جدول پای راښيي، هغه ارقام چې د جدول دپاسـه ليکـل شـوی دی، راښيي چې z د مثبتو مقدارونو لپاره تنظيم شوی دی چې د منحني لاندې مساحت له صفر څخه تر z پورې راښيي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

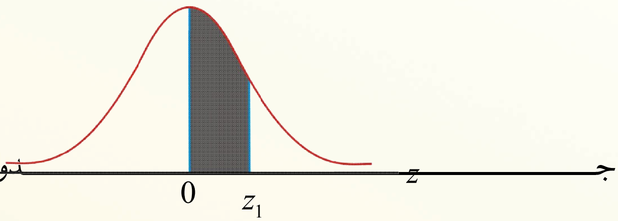


جدول (1)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9278	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9268	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997

(c) ketabton.com: The Digital Library

جدول (2)



Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	00239	0.0279	00311	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0754
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0978	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2226
0.6	0.2258	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2454	0.2486	0.2549
0.7	0.2580	0.2612	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2996	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4409	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4727	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0/4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4966
3.0	0.4987	04987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.1	0.4990	0.4991	0.4991	0.4991	0.4992	0.4992	0.4992	0.4992	0.4993	0.4993
3.2	0.4993	0.4993	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4995	0.4995	0.4995
3.3	0.4995	0.4995	0.4995	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4997
3.4	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4998
3.5	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998
3.6	0.4998	0.4998	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.7	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.8	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.9	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مثال په ډول که چېرې $z=1.56$ وي لومړی هغه سطر پیداکړئ چې په هغه کې z د 1.5 معادل دی، که چېرې ددې کرښې په اوږدوالي پرمخ لاړ شو، تر څو هغه ستون ته ورسېږي چې له پاسه 0.06 لیکل شوی دی له 0.9406 عدد سره مخامخ کېږو چې د منحنی د لاندې اړوندې سطحې له $z=0$ څخه تر $z=1.56$ پورې دی، نو لیکلای شو چې: $P(0\le Z\le 1.56)=0.9406$

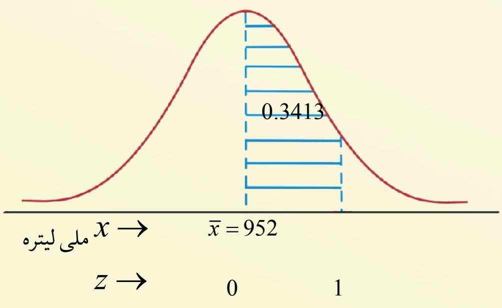
لومړی مثال: د څښلو(نوشابې) د بوتلونو د ډکولو دستګاه داسې تنظیم شوې ده، که 952 ملي‌لیتره نوشابه په بوتل کې واچوي ددې نوشابې میزان چې د نورمال توزیع اوسط یې 952 ملي‌لیتره او معیاري انحراف یې 4 ملي‌لیتره دی. ددې احتمال چې بوتل د 952 او 956 ملي‌لیترو ترمنځ نوشابه ولري، څومره دی.

حل: لومړی z د x له جنسه پیداکوو:

$$z_1=\frac{x-\bar{x}}{s}=\frac{952-952}{4}=\frac{0}{4}=0$$
$$z_2=\frac{956-952}{4}=\frac{4}{4}=1$$

نو پر دې اساس د x د تعریف ناحیه له 952 څخه تر 956 د z تعریف د ناحیې له صفر څخه تر 1 بدلېږي.

د لوست د پیل له جدول(2) څخه په ګټه اخیستنې سره لرو $P(0\le z\le 1)=0.3413$ احتمال داسې دی چې هغه بوتل چې له 952 څخه تر 956 ملي‌لیترو نوشابه ولري، یا په بل عبارت 34.13 فیصده ډک شوي بوتلونه له 952 څخه تر 956 ملي‌لیتره نوشابه لري؛ یعنې:



$$\begin{aligned}P(0\le z\le 1)&=P(z_2)-P(z_1)\\&=P(1)-P(0)\\&=0.3413-0\\&=0.3413\end{aligned}$$

دویم مثال: په یوه خاص مضمون کې د زده‌کوونکو د نمبرو د نورمال توزیع اوسط 70 او معیاري انحراف یې 8 دی له نورمال ستنډرډ جدول څخه په ګټه اخیستنې سره له 54 څخه تر 84 نمبرو ترمنځ فیصدي پیداکړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: د مسألې حل په لاندې ډول په ترسيمي بڼه ښودل شوی دی.

د $x = 54$ لپاره لرو: $z_1 = \dfrac{54-70}{8} = -2$

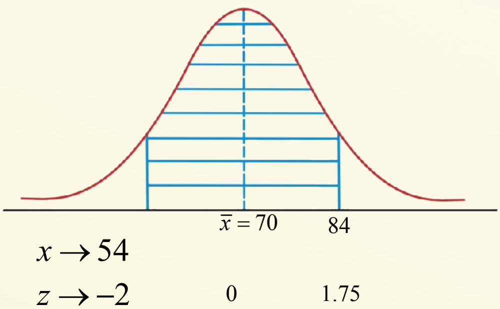
د $x = 84$ لپاره لرو: $z_2 = \dfrac{84-70}{8} = 1.75$

څرنګه چې د سټنډرډ نورمال منحني لاندې مساحت په يو محدود انټروال کې په پام کې نيول شوی دی، نو له نورمال سټنډرډ جدول(2) څخه لرو:

$$P(-2 \le z \le 0) = P(0 \le z \le 2) = 0.9772$$
$$P(0 \le z \le 1.75) = 0.9599$$

د ټاکل شوي مساحت د پام وړ احتمال دی.

$$P(-2 \le z \le 0) + P(0 \le z \le 1.75) = 0.4772 + 0.4599$$
$$= 0.9371$$



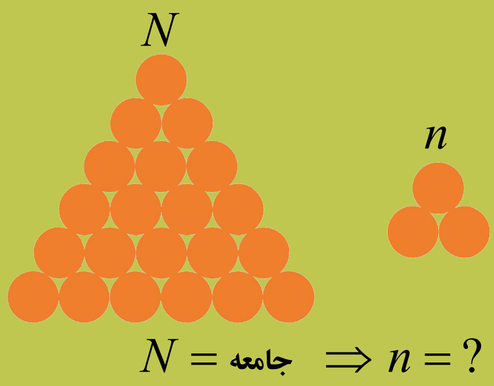
پوښتنې

د لومړی مثال په پام کې نيولو سره محاسبه کړئ چې د بوتلونو څو فيصده له 948 څخه تر 956 ملي‌ليټرو پورې نوشابه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

نمونه اخېستل

پــه دې متـل کــې((مــوټی د خــروارو نمونــه ده)) څرنګــه تحلیلوئ.



- که چېرې وغواړئ چې د افغانستان د 12 ټولګي د زده‌کوونکو ونې(قد) اندازه کړئ ددې کار لپاره څه ډول لارې وړاندیز کوئ.
- نمونــه پــه دوو ډولونــو وېــشل کېــږي، ســاده نمونــه او ناڅاپــه نمونــه، تاســې ددې نمونــو کــومې یــوې تــه غوره‌والی ورکوي؟ ولې؟
- د نمونه ګیری لپاره ښکاره خپل دلایل شته آیا کولای شئ یو یا دوه دلیلونه یې ووایئ.
- سوچ کولای شي چې د اوسط او معیاري انحراف عددي ځانګړني چې د ټولنې د توزیع او د نمونې د توزیع لپاره ورڅخه ګټه اخېستل کېږي، یو شان وي.
- آیا د نمونه‌ګیري او لیدل شویو ناڅاپه متحولینو د مقدارونو ترمنځ توپیر شته؟

له پورتنې فعالیت څخه پوهېږو چې د نمونه اخېستنې بېلې بېلې لارې شته دی.

ـ ناڅاپه نمونه اخېستنه: د ټولنې ټول عناصر په ټاکل کېدو کې هم چانس دی.

ـ سیستماټیک نمونه اخېستنه: د ټولنې عناصر په منظم ډول کود وهل شوی دی.

ـ طبقه‌یي نمونه اخېستنه: ټولنه په بېلابېلو متجانسو ډلو وېشل شوی وي.

ـ خوشه‌یي نمونه اخېستنه: که ټولنه ډېره لویه وي، هغه په بېلابېلو ځانګو وېشو او له هرې ځانګې څخه یوه نمونه ټاکو.

ـ د هرې ټولنې عددي ځانګړنې(اوسط، معیاري انحراف) ته د ټولنې پارامتر وایي.

ـ د هرې ټولنې د عددي نمونه‌ګیري ځانګړنې(اوسط، معیار انحراف) ته آماره وایي.

ـ د نمونې پایلې د مشاهدې د مقدارونو په عنوان د ناڅاپه متحولینو په بڼه په پام کې نیسو.

ـ د $x_1 , x_2 , \dots , x_n$ ناڅاپه متحولونو یوه ناڅاپه نمونه د x تصادفي متحول ویل کېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که چېرې تابع يې په دې ډول تعريف شوې وي.

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1) \cdot f(x_2) \ldots f(x_n)$$

مثال: فرض کوو چې په يوه قطۍ کې 5 سپينې او 7 تورې ګلولې وي، د قطۍ له منځ څخه 5 ګلولې يوه يوه ځای په ځای کول(د يوه عنصر دويم ځل ټاکل مجاز) ټاکو.

د ټاکل شوی ناخاپه نمونې تصادفي متحولين په ژبه بيان کړئ او اړونده توزيع يې پيدا کړئ.

حل: د x_1, x_2 او x_3 ناخاپه متحولونه په پام کې ونيسئ په لومړی پړاو کې د x_1 ناخاپه متحول لپاره د صفر عدد د تورې ګلولې لپاره او د (1) عدد د سپينې ګلولې د ټاکلو په لومړی پړاو کې ځانته غوره کړئ او د x_2 متحول هم د صفر عدد د تورې ګلولې لپاره او د (1) عدد د سپينې ګلولې د ټاکلو لپاره په دويم پړاو کې ځانته غوره کړي په همدې بڼه د x_3 ناخاپه متحول په دويم پړاو کې هم د صفر عدد د تورې ګلولې لپاره ټاکو چې په دې پړاو کې (1) عدد سپينه ګلوله ځانته غوره کوي، په دې حالت کې د x_1, x_2 او x_3 ناخاپې متحولونه د برنولي ناخاپه متحولين دي. د $p = \frac{5}{12}$ له پارامتر او د $i = 1,2,3$ مقدارونو څخه لرو:

$$f(x_i) = (\frac{5}{12})^{x_i} (1 - \frac{5}{12})^{1-x_i}$$

څرنګه چې نمونه اخيستن ناخاپه ده، نو د x_1, x_2 او x_3 ناخاپه متحولين يو له بل څخه بېل دي، نو تابع يې عبارت دی له:

$$f(x_1, x_2, x_3) = P(x_1 = x_1 \;,\; x_2 = x_2 \;,\; x_3 = x_3)$$

په ياد ولرئ چې د عناصرو هره ناخاپه نمونې له مجهول پارامترونو سره تړلې نه دي، هغې ته آماره وايي.

پوښتنې

1. که $N = 25$ د يوې ټولنې حجم وي که وغواړو چې پنځه ګونه ناخاپه نمونه يې پيدا کړو، د هغو نمونو شمېر چې په لاس راځي څومره ده؟
2. ساده او ناخاپه نمونې سره له مثاله بيان کړئ؟
3. فرض کوو چې له يوې ټولنې څخه مو ناخاپه نمونه رانيولې ده څه فکر کوئ چې له ددې نمونې سره به څه وکړو؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د نمونې د اوسط توزیع

دولت غواړي وپوهېږي چې د یوه ښار د وګړو متوسطه ګټه(سپما) څومره ده؟

ددې کار لپاره ناڅاپه نمونه ټاکي او د نمونې اوسط محاسبه کوي.

اوس باید ددې محاسبه شوي مقدار څخه کوم کمیت تخمین کړئ؟

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = ?$$

فعالیت

- د لاندې data د دریو زده‌کوونکو د ورزشي لوبو د نمبرو پایله راښیي:

نوم	پژواک	سلیمان	داود
نمبرې	4	3	2

- د نمبرو د احتمال توزیع یې ولیکئ.
- د زده‌کوونکو د نمبرو اوسط او معیاري انحراف حساب کړئ.
- راکړل شوی نمبرې د مرتبو جوړو په مرسته(ممکنې دوه ګونې نمونې د ځای په نیولو) ارایه او د هرې نمونې اوسط د جدول په بڼه وښیئ.
- د نمونو د اوسط د احتمال توزیع جدول(د $\bar{x}$ د کثرت د تو زیع جدول) ولیکئ.
- د $\bar{x}$ د کثرت توزیع جدول مستطیلي ګراف رسم کړئ.
- د اوسط د $\bar{x}$ متحول د زده‌کوونکو د نمبرو له اوسط سره پرتله کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

له پورتني فعاليت څخه دا پايله په لاس راځي:

که $x_1 , x_2 ,...., x_n$ د يوې تولنې د $f(x)$ احتمال تابع ناخاپه نمونه وي، په دې صورت کې د ناخاپه نمونې احتمال توزيع عبارت دی له:

x	x_1	x_2	...	x_n
$f(x)$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	...	

د $\bar{x}_n$ متحول اوسط، $E(\bar{x}_n) = \mu$

د $\bar{x}_n$ متحول وريانس، $U(\bar{x}_n) = \frac{1}{n}\delta$

د نمونې وريانس $S_n^{\ 2} = S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$

د نمونه‌يي وريانس اوسط، $E(S^2) = \delta^2$

په داسې حال کې چې $\bar{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ نمونه‌يي اوسط، μ د تولنې اوسط δ^2 د تولنې وريانس S^2 د نمونې وريانس دی.

مثال: د لاندې تولنې، ټولې دوه ګونې ممکنه ناخاپه نمونې د ځای په ځای کولو سره ټاکو:

$$f(x) = \frac{1}{3} \quad , \quad x = 1,2,3$$

الف: د x د احتمال توزيع وليکئ.

ب: د تولنې اوسط او وريانس حساب کړئ.

ج: د $\bar{x}$ د توزيع جدول تشکيل او مستطيلي ګراف يې رسم کړي.

د: $E(\bar{x})$ او $V(\bar{x})$ حساب کړئ.

حل:

الف:

x	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب:

$$\mu = E(x) = \sum_{x=1}^{3} x\, f(x) = \frac{1}{3}(1+2+3) = 2$$

$$E(x^2) = \sum_{x=1}^{3} x^2 f(x) = \frac{1}{3}(1^2+2^2+3^3) = \frac{14}{3}$$

$$\delta_x^2 = E(x^2) - (E(x))^2 = \frac{14}{3} - 2^2 = \frac{2}{3}$$

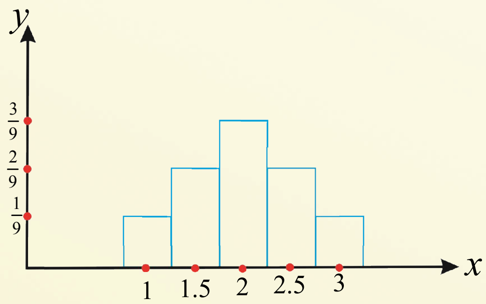
ج: د لاندې جدول ټولې دوه‌ګوني ممکنو نمونو د ځای نیول، د هر یوه اوسط راښیي:

نمونه	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(3,1)	(3,2)	(3,3)
$\overline{x}$	1	1.5	2	1.5	2	2.5	2	2.5	3

د $\overline{x}$ د توزیع د کثرت جدول په لاندې ډول ښودل کیږي:

$\overline{x}$	1	1.5	2	2.5	3
$f(\overline{x})$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

د $\overline{x}$ مستطیلي ګراف په لاندې ډول رسمیږي:



د:

$$\mu_{\overline{x}} = E(\overline{x}) = \sum \overline{x} f(\overline{x}) = 1\cdot\frac{1}{9} + 1.5\cdot\frac{2}{9} + 2\cdot\frac{3}{9} + 2.5\cdot\frac{2}{9} + 3\cdot\frac{1}{9} = \frac{18}{9} = 2$$

$$E(\overline{x}^2) = \sum \overline{x}^2 f(\overline{x}) = 1^2\cdot\frac{1}{9} + (1.5)^2\cdot\frac{2}{9} + 2^2\cdot\frac{3}{9} + (2.5)^2\cdot\frac{2}{9} + 3^2\cdot\frac{1}{9} = \frac{13}{3}$$

$$\delta_{\overline{x}}^2 = V(\overline{x}) = E(\overline{x}^2) - (E(\overline{x}))^2 = \frac{13}{3} - 4 = \frac{1}{3}$$

$$E(x) = E(\overline{x}) = 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو ليدل کېږي چې:

$$V(\overline{x})=\frac{\delta_x^{\ 2}}{n}=\frac{\frac{2}{3}}{2}=\frac{1}{3}$$

پوښتنه

1. فرض کوو چې يوه ټولنه د $6,4,2$ او 8 څلورو عددونو څخه جوړه شوې وي، په دې صورت کې توزيع، اوسط او وريانس ددې ټولنې محاسبه او وروسته له دې ټولنې څخه دوه ګوني ناخاپه نمونه د ځای په نيولو سره وټاکئ او د نمونې توزيع اوسط يعنې $\overline{x}$ په لاس راوړئ. د کثرت څو ضلعي ګراف يې رسم کړئ، د $\overline{x}$ اوسط او وريانس حساب کړې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مرکزي لیمیټ قضیه

پوهېږو چې د ټولنې کمیت ته د ټولنې پارامتر او د نمونې کمیت ته نمونه یي اوسط ویل کېږي د $S_{\bar{x}}$ او $\bar{x}$ د نمونو احصائیه د کوم پارامتر په اړه اطلاعات زموږ په اختیار کې ږدي.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}=?$$

فعالیت

- که د لویې ټولنې حجم $\frac{S}{\sqrt{n}}$ وي، د کوچنۍ ټولنې حجم په $\frac{S}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$) چې N د ټولنې د عناصرو شمېر، n د نمونه عناصرو شمېر او S معیاري انحراف دی) وښیو څه وخت کېدای شي چې د لویې ټولنې حجم له کوچنۍ ټولنې سره برابر شي؟
- که د $x_1 , x_2 ,\dots, x_n$ نورمال توزیع یو له بل څخه بیل وي آیا د هغوی د جمع حاصل د نورمال توزیع لرونکی ده؟
- که $x_1 , x_2 ,\dots, x_n$ ناڅاپه ځانګړي متحولونه په یو شان توزیع شوي وي او د μ اوسط لرونکی وي او ς^2 وریانس وي ویلای شو چې د $S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ د توزیع وریانس او اوسط څو دی؟

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

که چېرې N د یوې لویې ټولنې اوسط μ متناهي اوسط او δ^2 متناهي وریانس لرونکی یوه ناڅاپه n ګونه نمونه وټاکو، په دې صورت کې د نمونې اوسط یعني $\bar{x}$ د تقریبي نورمال توزیع د $\mu_{\bar{x}} = \mu$ اوسط $\delta_{\bar{x}}^{\,2} = \frac{\delta^2}{n}$ وریانس دی او $Z = \frac{\bar{x}-M}{\frac{\delta}{\sqrt{n}}}$ ناڅاپه متحول د نورمال سټنډرډ توزیع دی. په داسې حال کې چې $\frac{N-n}{N-1}$ ضریب د N د لویو قیمتونو لپاره (1) ته نژدې کېږي. په حقیقت کې یې لیمیټ هغه وخت چې $n \to \infty$ وکړی، برابر له (1) سره دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: له یوه لوی ټولګي څخه چې د زده‌کوونکو د ریاضي مضمون نمبرو نورماله توزیع د 71 اوسط او معیاري انحراف یې 9 دی. یوه 9 تایي نمونه ټاکو، ددې احتمال چې ددې نمونې د نمبرو اوسط له 80 څخه زیات وي حساب کړئ. همدارنګه که چېرې په تصادفي ډول یو زده‌کوونکی وټاکو، په دې صورت کې احتمال ددې چې نمبرې یې له 80 څخه زیاتې وي، محاسبه کړئ.

حل: څرنګه چې $\bar{x}$ د نورمال توزیع د μ په اوسط او معیاري انحراف لرونکی دی، نولرو:

$$P(z>80)=P(z=\frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\delta}{\sqrt{n}}}>\frac{80-71}{\frac{9}{\sqrt{n}}}=P(z>3)$$
$$=1-P(z)\leq 3=1-0.9987=0.0013$$

همدارنګه د $n=1$ لپاره لرو:

$$P(z>80)=P(z=\frac{\bar{x}-\mu}{\delta}>\frac{80-71}{9}=P(z>1)$$
$$=1-P(z)\leq 1=1-0.8413=0.1587$$

پاملرنه:

د $P(z)$ قیمت له (2) جدول څخه په لاس راوړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنه

1- د هغو جعبو وزن چې د یوه ماشین په واسطه ترل کېږي، د نورمال توزیع اوسط یې $\mu = 250gr$ او معیاري انحراف یې $\delta = 20gr$ وي مطلوب دی، د هغه احتمال محاسبه چې د ناخاپه نمونې د اوسط وزن $n = 16$ تایي د جعبو کوچنی له $240gr$ وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د نمونه‌يي توزيع نسبت

د A په يوه ښارکې n کسان غواړي د B يو کس د ښاروال په صفت وټاکي، که دا کسان تر پوښتنې لاندې راشي او x د موافقو کسانو شمير وښيئ ، ددې کسانو نسبي کثرت مساوي په څه دي.

فعاليت

- که چېرې x د دوو جملو توزيع لرونکی وي، کولای شو وليکو چې:

$$f(x)=\binom{n}{x}P^{x}(1-p)^{n-x} \qquad x=0,1,2,\ ....$$

که چېرې $\hat{P}=\frac{x}{n} \Rightarrow x=n\hat{P}$ وي د x قيمت په تعويض سره په پورتنی فورمول کې $f(\hat{P})$ وليکئ.

- د $\hat{P}=\frac{x}{n}$ په فورمول کې که د x تصادفي متحول د n ناخاپه متحولينو د $x_1, x_2, \ldots, x_n$ له مجموع څخه تشکيل شوی وي، $\hat{P}$ د نمونې اوسط سره څه اړيکه لري؟

که چېرې x ناخاپه متحول، n د برنولي د آزمايښتونو مجموعه، P د هر آزمايښت برياليتوب احتمال وي، په دې صورت کې $\hat{P}$ د نمونې د نسبت آماره $E(x)=n\,p$ اوسط $V(x)=n\,p\,q$ د x ناخاپه متحول وريانس وي. د دوه جمله‌يي د توزيع په پاملرنې سره د $\hat{P}$ توزيع په دې فورمول سره کولای شو.

$$f(n\hat{P})=\binom{n}{n\hat{P}}p^{n\hat{p}}(1-p)^{n(1-\hat{p})} \qquad \hat{P}=0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},.....,1$$

د $\hat{P}$ ناخاپه متحولينو اوسط $(Expected\ Value)$ او وريانس په لاندې صورت ليکلای شو:

$$\mu_p=E(\hat{P})=P$$

$$\delta^2\hat{P}=V(\hat{P})=\frac{p\,q}{n}=\frac{p(1-p)}{n}$$

د نورمال سټنډرډ توزيع يې عبارت دی له:

$$z=\frac{x-n\,p}{\sqrt{n\,p\,q}}=\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{p\,q}{n}}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د کاليو د ښه والي احتمال $P=0.3$ دی، يوه ساده ناڅاپه نمونه $n=6$ گونه ټاکو. که چيرې x د ناقصو کاليو ښودونکی وي، د x او $\hat{P}$ احتمال توزيع وليکئ.

حل: د x ناڅاپه متحول د دوه جملهيي توزيع د $P=0.3$ او $n=6$ پارامترونه وي.

$$f(x)=P(X=x)=B(x,6,0.3) \qquad x=0,1,...,6$$

د دوه جملهيي توزيع جدول څخه په گټه اخيستنې سره لاندې احتمالونه محاسبه او د توزيع د جدول احتمال يې ليکو:

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	0.1176	0.3025	0.3241	0.1852	0.0595	0.0102	0.0007

د $\hat{P}$ ناڅاپه متحول د $0,\frac{1}{6},\frac{2}{6},\frac{3}{6},\frac{4}{6},\frac{5}{6}$ او 1 قيمتونه نيسي:

$$P(\hat{P}=0)=P(X=0)=0.1176$$

$$P(\hat{P}=\frac{1}{6})=P(X=1)=0.3025$$

او پاتې نور په مشابه ډول محاسبه کېږي، پام وکړئ چې:

$$P(\hat{P}=\frac{x}{n})=P(X=x)$$

او د $\hat{P}$ د احتمال توزيع عبارت دی:

$\hat{P}$	0	1.6	2.6	3.6	5.6	1
$f(\hat{P})$	0.1176	0.3025	0.3241	0.0595	0.0102	0.0007

په پورتني مثال کې:

$$P(\hat{P}\le 0.6)=P(x\le 3.6)=P(x\le 3)=\sum_{x=0}^{3}B(x,6,0,3)=0.9294$$

اويا:

$$P(\hat{P}\le 0.27)=P(x\le 1.62)=P(x\le 3)=0.1176+0.3025=0.4201$$

پوښتنې

1. ددې احتمال چې د يوه تن د غوښتنليک فرم په پوره ډول پرته له غلطی(تېروتنې) څخه ډک کړي $P=0.7$ وي، يوه نمونه د $n=200$ گونه د استخدام ډک شوي فارمونه مو ټاکلي وي.

_ ددې احتمال محاسبه کړئ چې د $\hat{P}$ د ± 00.05 داخلي فاصله کې د ټولنې له ښسټ څخه ولوېږي.

_ ددې احتمال محاسبه کړي چې د $\hat{P}$ د 0.6 څخه زيات وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د خپرکي مهم ټکي

- ناخاپه متحول هغه اصطلاح ده چې د يوې تابع په عنوان په احصائيه او احتمالاتوکې ترې ګټه اخيستل کيږي.
- د يوه غير متمادی ناخاپه متحول د احتمال تابع هغه تابع ده چې د تعريف ناحيه يې هغه عددونه دي چې ناخاپه متحول کولای شي هغه غوره کړي او د قيمتونو له ناحيې سره د تعريف د ناحيې د عناصرو اړونده احتمالونه ګډون لري.
- د تجمعي احتمال تابع هغه تابع ده چې د تعريـف ناحيـه کـې يـې هغـه عددونـه ګـډون ولـري چـې د x ناخاپه متحول يې ځانته غوره کوي او د قيمتونو ناحيه يې د $f(x)$ ټول تصويرونه موجود دي.
- د يوه متمادي متحول د احتمال تابع هغه تابع ده چې د تعريف ناحيه يې د x ټول متمادي مقدارونه غوره کړي او دقيمتونو ناحيه يې $F(x)$ ټول تصويرونه وي.
- د x غير متمادي ناخاپه متحول اوسط Expected value او وريانس په وار سره عبارت دي له:

$$E(x)=\sum_{i=1}^{n}x_i f(x_i)=\bar{x}$$

$$V(x)=S^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-E(x_i))^2 f(x_i)$$

- د برنولي توزيع، $P(X=m)=P^m(1-P)^{1-m}$
- د دوه جملهيي توزيع، $P(X=m)=\binom{n}{m}P^m\ q^{n-m}$
- د دوه جملهيي توزيع اوسط او معياري انحراف عبارت له: $\bar{x}=n\,p \quad , \quad S=\sqrt{n\,p\,q}$
- د پواسن د احتمال توزيع يوه غيرمتمادي احتمال توزيع ده چې فورمول يې عبارت دی له:

$$P(x=m)=\frac{e^{-\lambda}\ \lambda^m}{m!}$$

- که N له يوې نورمالې جامعې څخه د n ځلې(تـايي) ناخاپـه نمونـه وټاکو د $\bar{x}$ د نمونـهيي اوسـط آمـاره د نورمال توزيع لرونکی له $\mu_{(\bar{x})}=\mu$ اوسط سره او $\delta_{\bar{x}}^{2}=\frac{\delta^2}{n}$ او $z=\dfrac{\bar{x}-\mu}{\frac{\delta}{\sqrt{n}}}$ د سټنډرډ نورمال توزيع سره ده.
- نورمالـه توزيـع: د نورمـال توزيـع شـکل لـه زنګـولې سـره مـشابه او متنـاظر دی، پـه نورمـال توزيـع کـې مرکـزي شاخصونه يو له بل سره برابر دي او د پيوسته ناخاپه متحولونو د ناحيې تعريف محدود دی چې د احتمال توزيع يې عبارت ده له:

$$f(x)=\frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{\delta}\right)^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چې μ د ټولنې اوسط او δ د ټولنې معیاري انحراف دی.

- د $f(x)$ تابع د منحني لاندې مساحت د محاسبې لپاره د a او b په فاصلو کې کولای شو له دې انتیګرال څخه ګټه واخلو: $$P(a \le x \le b) = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\delta})^2}$$
- که چېرې x د دوه جمله‌یي توزیع د n شمېرد برنولي پر له پسې ازمایښتونه، P د کامیابۍ احتمال او $q = 1 - p$ د هر ازمایښت د نابریالیتوب احتمال وي، په دې صورت کې د احصائیې د اوسط نمونه او د x ناخاپه متحول وریانس په ترتیب سره عبارت دی له: $\hat{P} = \frac{x}{n}$ ، $E(x) = n\,p$ او $V(x) = n\,p\,q$

همدارنګه د دوه جمله‌یي توزیع، اوسط، وریانس او د سټنډرډ توزیع او $\hat{P}$ ناخاپه متحول په ترتیب سره عبارت دی له:

$$E(\hat{P}) = P \quad , \quad f(\hat{P}) = \binom{n}{n\hat{P}} P^{n\hat{P}}\, q^{(1-P)}$$

$$z = \frac{\hat{P} - P}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \quad , \quad V(\hat{P}) = \frac{pq}{n}$$

- ددې $z = \frac{x-\mu}{\delta}$ اړیکې په واسطه کولای شو چې هره احصائیوي مجموعه د نورمال توزیع لرونکې وي هغه په سټنډرډ نورمال بدل کړو.
- نمونه په دوو برخو وېشل کېږي، ساده نمونه او ناخاپه نمونه.
- د نمونه ګیرۍ طریقې په عمومي ډول عبارت دي له: ناخاپه نمونه‌ګیري، منظمه نمونه‌ګیري، ګروپي نمونه‌ګیري، خوشه‌یي نمونه ګیري.
- د x نمونې ناخاپه متحولینو اړوند تابع په دې صورت تعریفېږي.

$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots, x_n) = f(x_1), f(x_2), \ldots\ldots\ldots, f(x_n)$$

- که چېرې x د ټولنې یوه ناخاپه نمونه د $f(x)$ د احتمال تابع په لرلو سره وي $E(\bar{x}_n) = \mu$ اوسط، $V(\bar{x}_n) = \frac{1}{n}\delta$ د اوسط وریانس، δ^2 د ټولنې وریانس او S^2 ته د نمونو وریانس وایي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څېړکي پوښتنې

1. دوه سکې څلور ځلې پورته واچوئ او د خط راتللو شمېر په پام کې ونیسئ:
   - ناڅاپه متحولونه د تابع په بڼه وښيئ.
   - د هر ځل د پورته اچونې احتمال نمونه‌يي فضا سره نسبت ورکړئ.
   - د تابع د تجمعي او مجزا احتمال ولیکئ.
2. که چېرې د یوې جوړې بوټونو د نقیصې احتمال $P = 0.1$ وي، د ناقصو بوټونو اوسط او معیاري انحراف په یوه نمونه کې $n = 400$ جوړو بوټونو پیدا کړئ.
3. د یوه شرکت په ګدام کې 500 پایې کمپیوټرونه شته چې د هغې له جملې څخه یې 50 پایې نقص لري، یو اخیستونکی له هغې څخه 10 پایې کمپیوټرونه اخلي، ددې احتمال څومره دی چې هغه 8 پایې جوړ اخیستی وي؟
4. لاندې اطلاعات چې اوسط او معیاري انحراف د دوو پارامترونو په اړوند دی د نورمال توزیع د رسمولو لپاره ترې ګټه واخلئ. لومړی یو افقي محور رسم کړئ او د $\bar{x}$ ، $\bar{x}+s$ ، $\bar{x}-s$, $\bar{x}+2s$ او $\bar{x}-2s$ ټکي پرې وټاکئ وروسته یو ټکی د h اختیاري جګوالي په اندازه د $\bar{x}$ له پاسه په پام کې ونیسئ او $\bar{x}+s$ له پاسه یو ټکی د $0.6h$ په جګوالي وټاکئ، یعنې یو ټکی چې مختصات یې $(\bar{x}+s, 0.6h)$ وي، څرنګه چې د نورمال منحنی متناظر دی، همدا عمل په ځانګړې توګه په $\bar{x}-s$ هم سرته ورسوئ. اوس د $\bar{x}-2s$, $\bar{x}+2s$ د پاسه دوه ټکې د h او $0.15h$ په جګوالي په پام کې ونیسئ، پام وکړئ چې د نورمال منحني د دقیق رسمولو لپاره د $0.6067h$ او $0.1354h$ په ځای له $0.6h$ او $0.15h$ څخه ګټه واخلئ. په پایله کې دا ټکي د یوه منحني په واسطه وصل او ووایئ چې دا منحني په کومو فاصلو کې محدب او په کومو فاصلو کې مقعره ده.
5. په یوه روغتون یوه څېړنه راښیي چې د مراجعینو شمېر د شنبې په ورځ وروسته له وخت څخه د 6 او 8 ترمنځ 25 تنه دی. فرض کړئ چې د پواسن د احتمال توزیع په دې حالت کې صدق وکړي.
   - د روغتون د مراجعینو د احتمال توزیع د دوشنبې له ورځې، وروسته له وخت څخه د 6 او 8 ساعتونو تر منځ پیدا او ګراف یې رسم کړئ؟ آیا دا توزیع خمېده ده؟
   - ددې توزیع د اوسط او معیاري انحراف مقدار په لاس راوړئ.
   - آیا دا ممکنه ده چې د دوشنبې په ورځ وروسته له وخت څخه د 6 او 8 ساعتونو ترمنځ به له 7 تنو څخه زیات روغتون ته مراجعه کړې وي؟ ولې؟
6. فرض کوو چې د یوه کتاب د یوه مخ د تېروتنو شمېر د پواسن د توزیع یا $\lambda = \frac{1}{2}$ پارامتر لرونکی دی د محاسبې احتمال یې مطلوب دی داسې چې:

(c) ketabton.com: The Digital Library

- حد اقل یوه ټایپي تېروتنه په هغه مخ کې وي.
- دقیقاً 5 ټایپي تېروتنې په هغه مخ کې دي.
- د 3 او 6 ترمنځ ټایپي تیروتنې په هغه کې وي.

7. فرض کوو چې د هغه پستون قطر چې د یوه اتوماتیکي ماشین په واسطه جوړېږي په نورمال یا اوسط ډول 25 ملي متر او معیاري انحراف یې 0.5 ملي متره توزیع شوی وي.
   - کله چې د پستون قطر د 25.2 او 25.9 ترمنځ وي احتمال یې څومره دی.
   - د پستونونو کوم نسبت د 25 ملي قطر لرونکی او له هغې څخه کم دی.
   - که چېرې 1000 پستونه جوړ شي، له هغوی څخه څو دانې ددې وړ دی چې 24.07 ملي مترو څخه کم قطر ولري.
   - د تولید شویو پستونونو څو فیصده د 24.56 ملي متره معادل قطر یا له هغه څخه زیات لري.

8. که چېرې $x_1, x_2, \ldots, x_n$ د x ناڅاپه متحول یوه تصادفي نمونه وي ایا د $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$، $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$، $\frac{x_1+x_2}{x_4}$ او $x_1+3x_2-x_3$ تابع آماره دی.

9. که چېرې x یو ناڅاپه متحول او د μ او δ^2 پارامترونه وي آیا د $\frac{3x_1-2x_3-\delta}{8\mu+x_2}$، $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)$ او $x_1+x_3-\mu$ توابع μ او δ^2 مجهول وي آیا پورتنیو تابعګانو ته احصائیه ویلی شو؟

10. ټولنه د برق په څلورو ډلو کې ګډون لري، که د عمرونو اوږدوالی یې د ساعتونو په حساب سره عبارت له 108 104 112 103 دي یوه ډله ناڅاپه ټاکو، فرض کوو چې د x ناڅاپه متحول ټاکل شوی د ډلو د عمر اوږدوالی راوښیئ:
    - د x د احتمال توزیع ولیکئ.
    - $E(x)$ او $V(x)$ محاسبه کړئ.

11. د یوه ښار د وګړو د ګټې اندازه چې د غیرنورمال توزیع $\mu=90$ افغانۍ اوسط او د 25 افغانۍ معیاري انحراف سره دی که چیرې د 225 کسیز د وګړو د یوې نمونې د ګټې مجموعه له 2100 افغانیو څخه زیاته وي، احتمال یې څومره دی؟

12. پوهېږو چې 56% وګړي د A نوماند طرف دار دی، څومره ددې احتمال شته چې $n=50$ دوه‌ګونې یوه نمونه کې حداقل 60% وګړي د A نوماند طرفدار وي.

13. په 12 مثال کې که چېرې $P=0.4$ وي، یعنې ددې احتمال چې یو وګړی د A کاندید طرفدار وي 0.4 دی، یوه $n=200$ګونه نمونه وټاکو، نو څومره ددې احتمال شته چې لااقل 100 وګړي د A کاندید طرفدار وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

اتم څپرکی

احتمالات

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

بېلې شوې(غیرمتمادي) او نښتې(متمادي) فضاګانې

په مخامخ شکلونو کې د لومړي او دويـم نـل څخه پـه وار سره اوبه په څمکه تويیږي ويـلای شـئ چې لـه دې نلونـو څخه په څمکه د اوبو د څاڅکو د تويیدو توپير په څه کې دی؟

- د يو رمل په اچولو سره ويلای شي چې د نمونه يي فضا ټولې ممکنې پايلې کومې دي؟
- آيا له ونې څخه د يوې پخې منې د لويدلو د وخت وړاندوينه کولای شئ چې وروسته له څو ثانيو، دقيقو او يـا ساعتونو څخه پر ځمکه ولوېږي؟
- نظر وخت ته د منې د لويدلو نمونه يي فضا وليکې.
- د رمل دانې د اچولو تجربي نمونه يي فضا د عناصرو شمېر او له ونې څخه د منې د لوېدلو وخت څنګـه پرتلـه کولای شي.

د پورتني فعاليت له سرته رسولو څخه لاندې پايله په لاس راځي:

د يوې ناڅاپه تجربي نمونه يي فـضا عبـارت لـه هغه ټاکلې او يـا نـا ټاکلې سـټ يـا مجمـوعې څخه ده چې ځينې عناصريې د شمېر وړ او ځينې يې د شمېر وړ نه وي.

هغه نمونه يي فضاګانې چې عناصر يې د شمېر(countable) او تشخيص وړ وي د غيرمتمادي نمونه يـي فـضا پـه نامه يادېږي او هغه نمونه يي فضاګانې چې عناصر يې د شمېر وړ نه وي د نښتې(متصلې) يا متمادي نمونه يي فضا په نامه يادېږي.

لومړی مثال: له لاندې نمونه يي فضاګانو څخه کومه يوه نښتې(متمادی) او کومه يوه غيرمتمادی ده.

الف: د دوو رمل دانو اچول

ب: د 8 او 12 ترمنځ د يوه حقيقي عدد ټاکل.

ج: له 30 زده کوونکو څخه د 3 تنو ټاکل

(c) ketabton.com: The Digital Library

د: د يوې کُرې د حرارت د يوې درجې لوړېدل د 100 درجو د سانتي ګرېډ څخه تـر 1000 درجـود سـانتي ګرېډ پورې.

هـ : د 30° او 45° زاويو ترمنځ يوه زاويه ټاکل.

حل: څرنګه چې (الف او ج) نمونه‌يي فضاګانې د محدودو غړو له شمېر څخه جوړې شوې، نو غيرمتمـادي فـضا ولې (ب، د او هـ) له نامحدود حقيقي عددونو څخه تـشکيل(جـوړ) چـې د شـمېر وړ نـه دي، نـو نـښتي يـا متمـادی فضاګانې دي.

دويم مثال: خيبر د کور د ګلانو د اوبولو لپاره يو واټرپمپ اخيستی دی.

که چېرې د واټرپمپ عمرد ساعت له مخې په پام کې ونيسو، په دې حالت کې د واټرپمپ د عمر د اوږدوالي نمونه-يي فضا چې کېدای شي هر مثبت حقيقي عدد د واټرپمپ د ورانېدو په صورت کې د کار د مودې قيمـت شـي، پـه دې ډول د داسې ناڅاپه حادثې پېښېدل هر حقيقي عدد کېدای شي چې دا نمونه‌يي فضا يوه غيـر متمـادي، يـا نـښتي نمونه يي فضا ده، يعنې $S=\{t\in IR: t\geq 0\}$ د t د واټرپمپ د ورانېدو وخت، چې په پورتنۍ نمونه يي فـضا کـې t د واټرپمپ د عمر اوږدوالي راښيي.

يادونه:

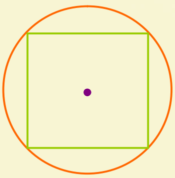
1- د لومړي مثال الف او ج جزونو کې محدودې نمونه‌يي فضاګانو څخه بحث شوی چې عناصـر يـې د شـمېر وړ دي، د ب او د جزونو کې نامحدودې نمونه‌يي فضاګانې ذکر شوې چې عناصر يې د شمېر وړ نه دي، نـو ځکـه ټول مثبت حقيقي عددونه اخېستلای شي.

2- په دويم مثال کې نمونه‌يي فضا متصله يا غير محدوده ده چې د حقيقي عددونو د انټروال په توګه ښودل کېږي.

پوښتنې

1- يو غشي وېشتونکی د يوه دايروي د سک په دننه چې وړانګه يې r ده، په پام کې ونيسي. د غشي د لګېدو ځای د دايرې په دننه کې چې مرکز ته نژدې ولګېږي، د هغې نمونه يې فضا ارايه کړې. وواياسـت چـې دا څنګـه يـوه نمونه يي فضا ده.

2- په مخامخ شکل کې په ناڅـاپي يـا تـصادفي ډول د دايـرې پـه دننه کې يو ټکـې و ټـاکئ، احتمـال ددې شـته چـې مطلـوب ټکې د مربع په دننه کې وي.



3- يو طبيعي دوه رقمي عدد و ټاکئ، هغه احتمـال پيدا کړئ چې عدد د 4 مضرب وي.

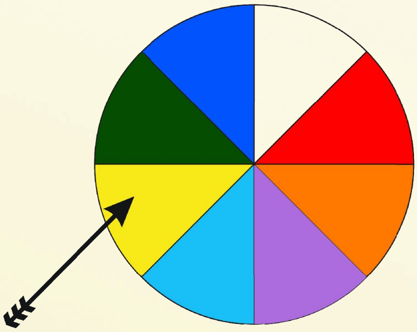
(c) ketabton.com: The Digital Library

هم چانسه پېښې

د يوې نورمال رمل دانې په اچولو کې د (1) او يا (5) شمېرې مخ ته راتللو لپاره شرط څه دی؟

د 2 او 5 شمېرې د راتللو چانس يو له بل سره څه اړيکه لري؟

د مخامخ شکل په څېر يوه دايره په پام کې ونيسئ، که چېرې په راکړې شوې دايره کې يو ښکاري غشي وولي لاندې پوښتنو ته ځواب ورکړئ.



- په سور رنګه ناحيه او شين رنګه ناحيه کې د غشي لګېدل يو له بل سره څه اړيکه لري؟
- د غشي د لګېدو چانس د کچې په اړه د نارنجي او سپين رنګونو سره په پرتله باندې څه ويلای شې؟
- په تور رنګ د غشي د لګېدو چانس څومره ده؟
- د تجربې، نمونه‌يي فضا وليکئ.
- لومړنۍ ناخاپه پېښې لست کړې او د هر يوه احتمال پيدا کړئ ؟
- د لومړنيو پېښو د احتمالونو د مجموع په برخه کې څه ويلای شې؟

د پورتني فعاليت له اجراکولو څخه لاندې پايله په لاس راوړو:

هغه لومړنۍ ساده پېښې چې د هغوی د پېښېدلو چانس د يوې تجربې په اجراکولو کې سره برابر وي، د هم چانسه پېښو په نامه يادېږي، لکه:

که چېرې $S=\{e_1,e_2\ ,...e_n\}$ يوه نمونه يي فضا وي، نو $\{e_i\}$ د هر $i=1,2...n$ لپاره يوه ناخاپه لومړنۍ پېښه ده که $0\le P(\{e_i\})\le 1 \quad , \quad i=1\,,2\,,...n$ دی.

سربېره پر دې د لومړنيو پېښو د احتمالونو مجموع مساوي له يوه سره ده.

$$P(\{e_1\})+P(\{e_2\})+...+P(\{e_n\})=\sum_{i=1}^{n}P(e_i)=1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

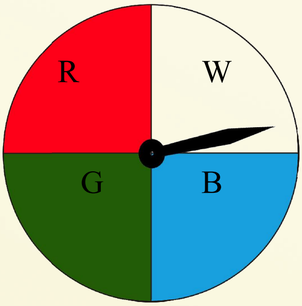
مثال: خلور تنه په یوه لوبه کې ګډون کوي. تاسې د هر یوه د ګټلو احتمال پیدا کړئ په داسې حال کې چې نمونه‌یي فضا هم چانسه وي.

حل: که چېرې $S=\{a,b,c,d\}$ نمونه یي فضا وي، نو د هري ناخاپه لومړنی پېښې احتمال $\frac{1}{4}$ دی.

لرو چې: $$P(a)=P(b)=P(c)=P(d)=\frac{1}{4}$$

پاسنی لومړنی پېښې سره هم چانسه دي.

پوښتنې



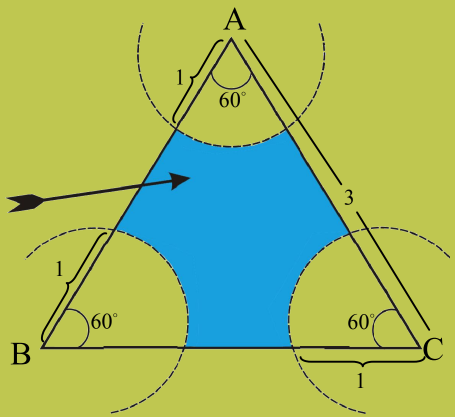
1- مخامخ شکل په پام کې ونیسي ، که چېرې د عقربې(ستنې) د دربدلو احتمال په آسماني او سپین رنګ 0.30 او د سره رنګ پرمخ 0.26 وي، د شنه رنګ پرمخ د دربدلو احتمال به څومره وي؟

2- لاندې د کثرت جدول د رمل یوې دانې د اچولو لپاره په پام کې ونیسي. هغه احتمال پیدا کړئ چې د رمل دانه (5) شمېره راشي.

د رمل شمېره	1	2	3	4	5	6
کثرت	7	9	8	7	3	10

3- د رمل یوه دانه داسې ډکه شوې چې د جفت شمېرو د راتللو احتمال د طاق شمېرو دوه برابره وي، که یو چا په شرط وهلو کې(5) شمېره ټاکلې وي، د هغې احتمال پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

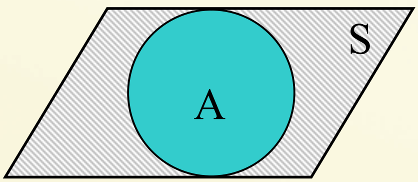


د نښتي يا پيوسته(متمادي) فضاګانو احتمال

د يوه متساوي الاضلاع مثلث دننه چې هره ضلعه يې 3 واحده ده، يو غشي ولو، ددې احتمال چې د غشي د لګېدلو ټکې د مثلث د هر رأس نه د يو واحد په اندازه لرې وي، څو دی؟

فعاليت

- آيا وېلای شي چې د يوې ټوټه کرښې، د يوې مستوي د يوې برخې او يا د فضا د حجم څو ټکي يو پر بل پسې موجود دی؟
- د هغو ټکو د پيښېدلو احتمال چې د A په برخه کې چې د S د لويې برخې فرعي مساحت دی، لکه څرنګه چې په شکل کې ليدل کېږي د A او S د ساحو د مساحتونو له نسبت سره څه اړيکه لري؟



- آيا کولای شئ دا مسئله په فضاکې د يوه جسم حجم د يوې برخې د احتمال د محاسبې لپاره عموميت ورکړئ؟

د پورتني فعاليت له سرته رسولو څخه لاندې پايله لاسته راځي.

پيوسته(متمادي) نمونه‌يي فضا د نامعينو ټکو مجموعه ده چې شکل يې د عددونو په محور ، په مستوي کې لکه سطح او يا په فضاکې لکه حجمونه دی، څرنګه چې ددې ټکو شوونه ممکن نه ده، نو د احتمال د نسبت پيدا کولو لپاره د ټوټه کرښو د اوږدوالي، د اشکالو سطحو او يا د جسمونو له حجم څخه استفاده کوو.

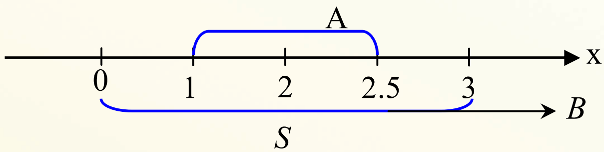
معمولاً د عددونو له محور څخه په ګټه اخيستني سره د x يو متحول، د يوه مساحت د يوې برخې لپاره د دوو متحولينو لکه x او y او په همدې ترتيب د حجمونو لپاره له درېو متحولونو ، لکه: x, y او z څخه ګټه اخلو.

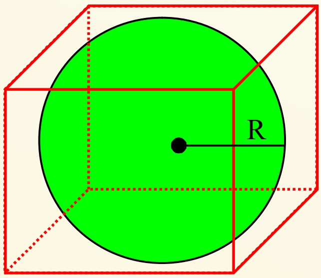
لومړی مثال: د عددونو په محور د $(0,3)$ په انټروال کې د x يو ټکی په ناخاپي يا اتفاقي ډول ټاکو ددې احتمال پيدا کړئ چې $1 < x < 2.5$ وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: د حقیقي عددونو محور رسم کړئ د S او A فاصلې د هغه پر مخ ټاکو، د شکل په پام کې نیولو سره د A پېښې د پېښېدو احتمال څخه لرو:

$$P(A)=\frac{\text{د } A \text{ ټوټه کرښې اوږدوالي}}{\text{د } B \text{ ټوټه کرښې اوږدوالي}}=\frac{2.5-1}{3-0}=\frac{1.5}{3}=\frac{1}{2}$$





دویم مثال: په ناخاپه ډول یو ټکی د یوه مکعب په دننه کې چې ضلعه یې 2 واحده وي ټاکو ددې احتمال پیدا کړئ چې نوموړي ټکې د مکعب د محاطي کُرې په دننه کې وي.

حل: که چېرې کره د هغه مکعب په دننه کې چې ضلعه یې a واحده ده، محاطه وي، نو د کرې شعاع $r=\frac{a}{2}$ کېدای شي:

A ناخاپه پېښه د کرې د حجم او S نمونه یې فضا سره مساوي چې د مکعب حجم دی، نو لرو:

$$r=\frac{a}{2}=\frac{2}{2}=1$$

$$P(A)=\frac{\text{د کرې حجم}}{\text{د مکعب حجم}}=\frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{a^3}=\frac{\frac{4}{3}\pi(1)^3}{2^3}=\frac{\pi}{6}$$

پوښتنې

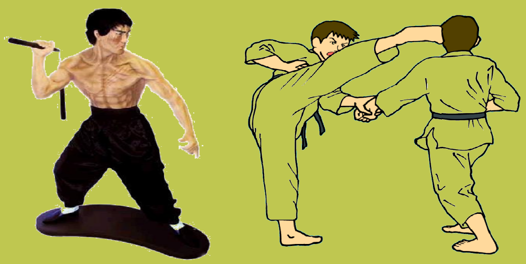
1- د حقیقي عددونو په محور د A او B دوه ټکي په ناخاپي یا تصادفي ډول داسې ټاکو چې $0\le A\le 3$ او $-2\le B\le 0$ وي، ددې احتمال پیدا کړئ چې د d واټن د A او B ترمنځ وي او له 3 واحدو څخه لوی وي.

2- که چېرې یو ټکی په ناخاپي یا تصادفي ډول د دایرې د سطحې پرمخ وټاکو، ددې احتمال پیدا کړې چې نوموړې ټکې نظر د دایرې محیط ته د دایرې مرکز ته نژدې وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مشروط احتمـال

له یوه ولایت څخه (20) تنـه نارینـه او ښـځینه زده کـوونکی د کانکور په آزموینـه کـې د طـب پوهنځي تـه بریـالي شـوي دي، د هغوي له جملې څخه یې 5 تنه ښه کاراته بازان دي: که په 15 تنو بریالیو نارینه وو کې 4 تنه یې ښه کارته بـازان وی. د نوموړو محصلینو له مینځ څخه پـه اتفـاقي ډول یـو تن ټاکو احتمـال د دې پیدا کړئ چې:



- ټاکل شوی محصل یوه کارټه بازه نجلی وي؟
- په پورتني سوال کې هغه نجلی په کوم شرط سره د طب پوهنځي ته بریالی شوي ده؟

له 2500 زده‌کوونکو څخه 1600 تنه یې په مطالعه کولو عادت لري.

چې لـه 80% زده‌کوونکـو څخـه یـې 70% نارینـه زده‌کـوونکي وي او پـه مطالعـه کولـو عـادت ولـري، کـه د ټولـو زده‌کوونکو لپاره احتمـال یو شان وي، د لاندې پېښو په پام کې نیولو سره د یوه تن زده‌کـوونکی ټاکـل د ښـوونځی لـه زده‌کوونکو څخه:

R: له مطالعې سره عادت لري.

M : نارینه زده‌کوونکي دی.

F: یوه ښځینه زده‌کوونکې ده.

د لاندې پوښتنو په حل فکر وکړئ:

- ددې احتمال پیدا کړئ چې د مطالعه کوونکو له منځ څخه ټاکل شوي زده‌کوونکی نارینه وي؟
- ددې احتمال پیدا کړئ چې د مطالعه کوونکو له منځ څخه ټاکل شوی تن یوه ښځینه وي؟
- ددې احتمـال پیدا کړئ چې ټاکل شوي زده‌کوونکي یو نارینه وي په دې شرط چې په مطالعه عادت وي.

د پورته فعالیت د سرته رسولو څخه لاندې پایله په لاس راوړو:

په حقیقت کې د هغه نارینه زده‌کوونکي د ټاکلو احتمـال په دې شرط چې په مطالعه عادت ولري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

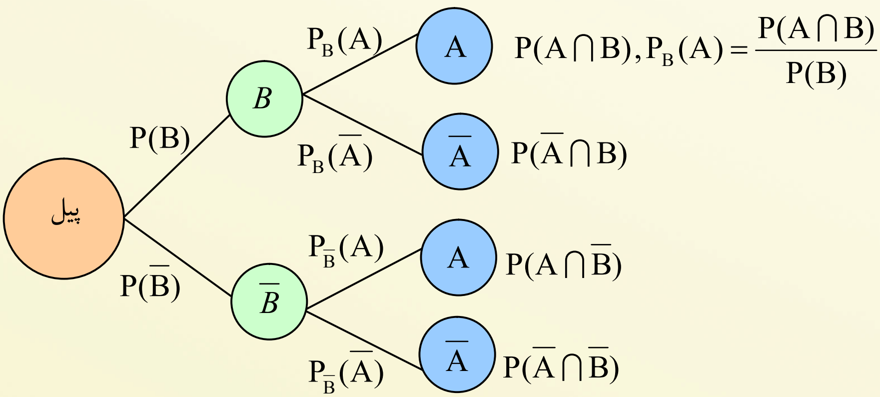
د لاندې احتمالات وپش له حاصل څخه عبارت دی که چېرې Ω ټوله نمونه‌يي فضا او $|\Omega|$ نمونه‌يي فضا د عناصرو شمير وي، نو لرو:

$$P_R(M) = \frac{P(M \cap R)}{P(R)} = \frac{\frac{|M \cap R|}{|\Omega|}}{\frac{|R|}{|\Omega|}} = \frac{|M \cap R|}{|R|} =$$ د هغه نارينه زده‌کوونکو د ټاکلو احتمال چې په مطالعه عادت وي.

$P_R(M)$ د هغې پيښې له احتمال څخه عبارت دی چې ټاکلي زده‌کوونکي نارينه وي، په دې شرط چې هغه په مطالعه عادت وي.

تعريف: که چېرې S نمونه‌يي فضا A او B د نمونه‌يي فضا دوې ناخاپې پيښې وي، په داسې حال کې چې $P(B) \neq 0$ وي. په دې حالت کې نوموړی احتمال يعنې $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ چې د A ناخاپې پيښې احتمال نظر د B ناخاپې پيښې ته مشروط احتمال بلل کېږي.

د پورته تعريف په پام کې نيولو سره نظر د مسير لومړي قاعدې ته د ونه‌يیز ډياگرام په مرسته هم په لاس راوړای شو.



د مشروط احتمال له فورمول څخه لاندې مهمې پايلې په لاس راځي:

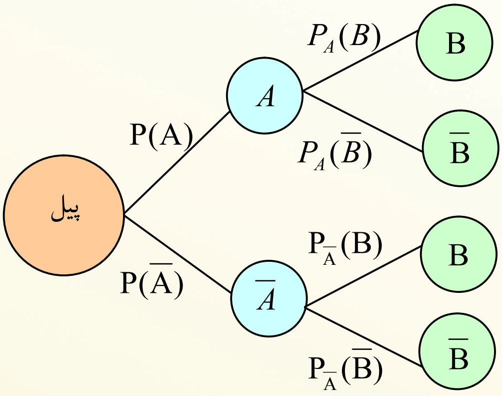
1- د مسير له لومړی قاعدې څخه لرو: $P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A)$

د مسير له دويمې قاعدې څخه په‌ګټه اخيستنې سره لرو: $P(A \cap \overline{B}) = P(\overline{B}) \cdot P_{\overline{B}}(A)$

$$P(A) = P(B) \cdot P_B(A) + P(\overline{B}) \cdot P_{\overline{B}}(A)$$

2- ونه‌يیزه(درختي) ډياګرام له مخې $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

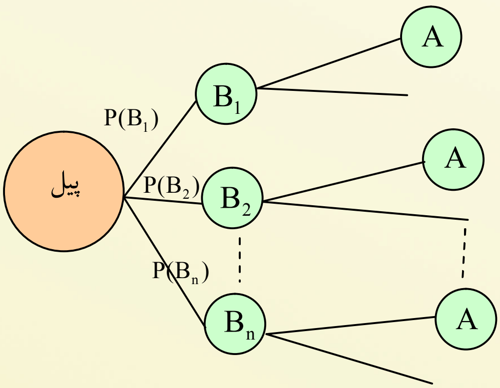
(c) ketabton.com: The Digital Library



له لومړي پايلې څخه په لاس راځي چې: $P_A(B) = \dfrac{P_B(A)\cdot P(B)}{P(B)\cdot P_B(A) + P(\overline{B})\cdot P_{\overline{B}}(A)}$

3- که چېرې نوموړې حالت د Ω نمونه يي فضا ناڅاپي پيښو د $B_1, B_2, ..., B_n$ اختياري وېش لپاره عموميت ورکړو. د ونې په ډول د دياګرام په پام کې نيولو سره کولای شو، لاندې فورمول په لاس راوړو.

$$P_A(B_i) = \frac{P_{B_i}(A)\cdot P(B_i)}{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A) + ... + P(B_n)\cdot P_{B_n}(A)} = \frac{P(A\cap B_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(B_k)\cdot P_{B_k}(A)} \qquad i = 1, 2, ..., \ n$$



لومړی مثال: يو زده کوونکی ښوونځي ته د تللو لپاره %50 هره ورځ د موټر څخه ګټه اخلي چې %70 په ټاکلي وخت ښوونځي ته رسېږي. په منځني ډول نوموړي %60 په ټاکلي وخت ښوونځي ته حاضرېږي که چېرې پيښې:

A: د موټر په واسطه راتلل　　　　B: په ټاکلي وخت رسېدل

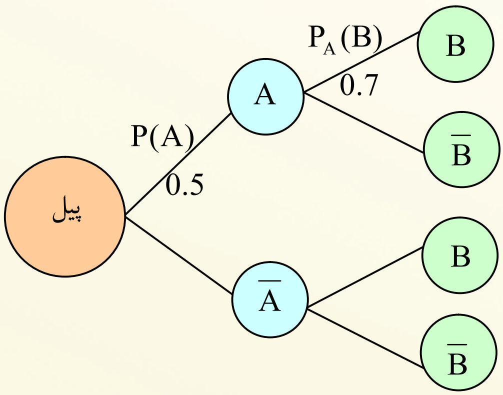
وي په دې صورت کې د A مشروط احتمال نظر B ته يعنې $P_B(A)$ مطلوب دی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: د نوموړي احتمال د پیدا کولو لپاره د ونه‌ییز یا درختي دیاګرام په پام کې نیولو سره نظر فورمول تـه پـه لانـدې ډول په لاس راځي:

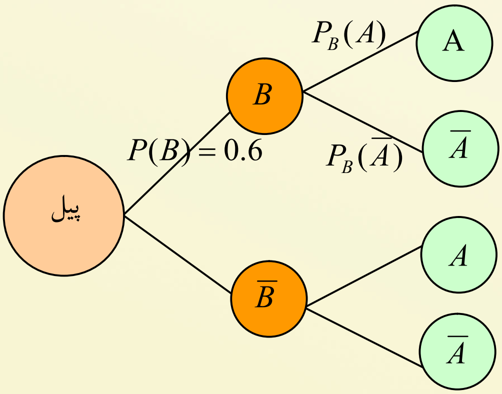
$$P_B(A) = \frac{P(A)\cdot P_A(B)}{P(B)} = \frac{0.5\cdot 0.7}{0.6} = 0.5833 = 58.33\%$$

نـو پـه دې اسـاس د مـوټر پـه واسـطه د رسـېدلو احتمـال پـه دې شـرط چې پـه ټـاکلي وخـت پـه شـوونځي کـې وي 58.33% سـلنې سـره برابـر دی.



پوښتني

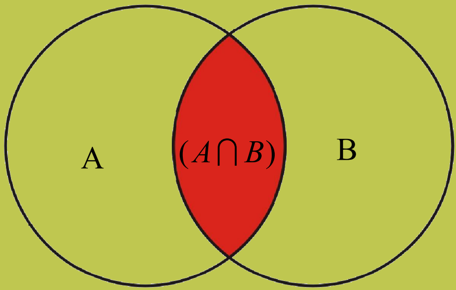
له لاندې دیاګرام څخه په ګټه اخیستنې سره د مشروط احتمـال په ټاکلي وخت رسېدل ښوونځي ته په دې شرط چې د موټر په واسطه سرته رسیدلي وي، یعنې $P_A(B)$ د ناڅاپه پیښې احتمـال ښوونځي ته په ټاکلي وخـت رسیدل، پـه دې شرط چې د موټر په واسطه نه وي راغلي یعنې $P_{\overline{A}}(B)$ مطلوب دی.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د حاصل ضرب اصل

د A ناخاپه پیـښې مـشروط احتمـال پـه B ، د A او B ناخاپه پیښې احتمـال یو له بل سره څه اړیکه لري؟



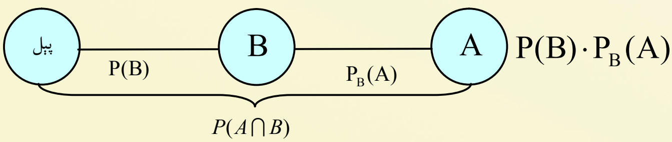
فعالیت

- که چېرې A او B دوې ناخاپه پیښې د S په نمونه یي فضا کې وي.
- د A ناخاپه پیښې مشروط احتمـال B ته ولیکئ.
- د ونه‌ییز دیاګرام څخه په ګټه اخېستنې سره د $P(B)\cdot P_B(A)$ قیمت په لاس راوړئ.
- د $(A\bigcap B)$ ناخاپه پیښو احتمـال د A او B ناخاپه پیښو څخه او یا د A مشروط له B څخه په ګټه اخیستنې سره ولیکئ.
- د فعالیت د دوو پورتنیو بندونو د محاسبې پایلې یو له بل سره پرتله کړئ.
- آیا کولای شو چې موضوع د ډېرو ناخاپه پیښو لپاره عمومیت ورکړو.

د پورتني فعالیت له سرته رسولو څخه لاندې پایله په لاس راوړو.

د S په یوه نمونه یي فضاکې د A او B د دوو ناخاپه پیښو لپاره د مشروط احتمـال د تعریـف پـه پـام کې نیولـو سـره لرو: $P(A\bigcap B)=P(B)\cdot P_B(A)$

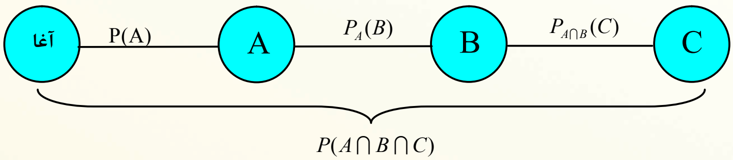
دا مسئله کولای شو چې د ونه‌ییز دیاګرام په مرسته هم په لاس راوړو:



$$\Rightarrow P(A\bigcap B)=P(B)\cdot P_B(A)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا مطلب د دریو A، B او C پیښنو لپاره په لاندې ډول پراخوو.



$$\Rightarrow P(A\cap B\cap C)=P(A)\cdot P_A(B)\cdot P_{A\cap B}(C)$$

پورتنی قاعده د حاصل ضرب په نامه یادېږي او کولای شو، هغه د یو شمېر اختیاري ناخاپي پیښنو لپاره هم په لاس راوړو.

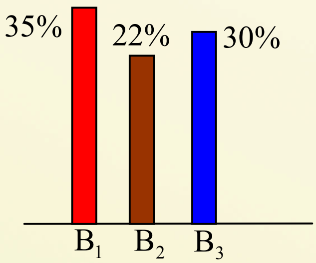
مثال: د B_1 , B_2 او B_3 دریو ولایتونو په پارلماني ټاکنو کې چې د هر یوه لپاره د ټاکنو د ګډون کوونکو فیصدي او د جمهوري ګوند برخه فیصدي ورکړل شوې ده؟

په کوم احتمال د ټاکنو ګډون کوونکي او یا رایې اچوونکي جمهوري ګوند ټاکلي وي.

حل: په لاندې ډول ناخاپي پیښې تعریف او نوموو:

V : هغه رایې ورکوونکي چې جمهوري ګوند یې ټاکلی دی.

B_i : د ولایت رایې ورکوونکي B_i- (i-ام) ... i=1,2,3 لاندې ارقام ورکړل شوي وي.



جمهوري ګوند ته رایې ورکوونکي	د راي ورکوونکو فیصدي	ولایت
35	33.2%	B_1
22	46.5%	B_2
30	20.3%	B_3

د $B_i\ (i=1,2,3)$ ناخاپه پیښې په حقیقت کې یې د S نمونه یې فضا یو ویش جوړ کړی چې د هغوی لپاره صورت نیسي.

1- B_i یو له بل سره دوه په دوه مستقل او ګډ عناصر نه لري.

2- د S نمونه یې فضا لپاره B_i $\bigcup_{i=1}^{3}B_i=S=B_1\cup B_2\cup B_3$ دی، نو $(i=1,2,3)$ $B_i\cap V$ پیښې یو له بل سره یو په یو مستقل د هغوی لپاره صورت نیسي. $V=\bigcup_{i=1}^{3}(B_i\cap V)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې اړيکې څخه کولای شو، د دواړو خواوو د احتمال لپاره وليکو:

$$P(V)=P\left(\bigcup_{i=1}^{3}(B_i\cap V)\right)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i\cap V)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)\cdot P_{B_i}(V)$$
$$=P(B_1)\cdot P_{B_1}(V)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(V)+P(B_3)\cdot P_{B_3}(V)$$
$$=0.332\cdot 0.35+0.465\cdot 0.22+0.203\cdot 0.3=0.1162+0.1023+0.0609$$
$$=0.2794=27.94\%$$

تعريف: که چېرې د $B_1, B_2, \ldots, B_n$ خرنگه چې $P(B_i)\neq 0$ وي $i=1,\ldots n$ پيښو عمومي حالت د S په نمونه‌يي فضا کې يوه پيښه وي، نو $P(A)$ د کامل احتمال په نامه ياد او د A اختياري ناخاپې پيښې لپاره لرو:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)\cdot P_{B_i}(A)$$

د مشروط احتمال د تعريف، د اصل حاصل ضرب له قضيې څخه د کامل احتمال د مسئلې په پام کې نيولو څخه لاندې فورمول چې د بائيز(Baye's) د فورمول په نامه ياديږي، په آسانۍ سره په لاس راځي، داسې چې B_i چې $i=1,\ldots n$ د S نمونه يي فضا يوې پيښې لپاره چې $P(B_i)\neq 0$، $i=1,\ldots n$ د A د ناخاپه پيښې احتمال چې $P(A)\neq 0$ سره وي، لرو:

د بائيز (Bayes)فورمول:

$$\boxed{P_A(B_i)=\frac{P(A\cap B_i)}{P(A)}=\frac{P(B_i)\cdot P_{B_i}(A)}{\sum_{k=1}^{n}P(B_k)\cdot P_{B_k}(A)}}$$

د بائيز فورمول ډېر استعمال لري لکه د $n=2$ لپاره $B_1=\overline{B}, B_2=\overline{B}$ په پام کې ونيسو، په حقيقت کې B_1 او B_2 د S نمونه يي فضا پيښې وي لرو:

$$P_A(B)=\frac{P(B)\cdot P_B(A)}{P(B)\cdot P_B(A)+P(\overline{B})\cdot P_{\overline{B}}(A)}$$

پورتنی فورمول د $n=2$ د بائيز له فورمول څخه عبارت دي.

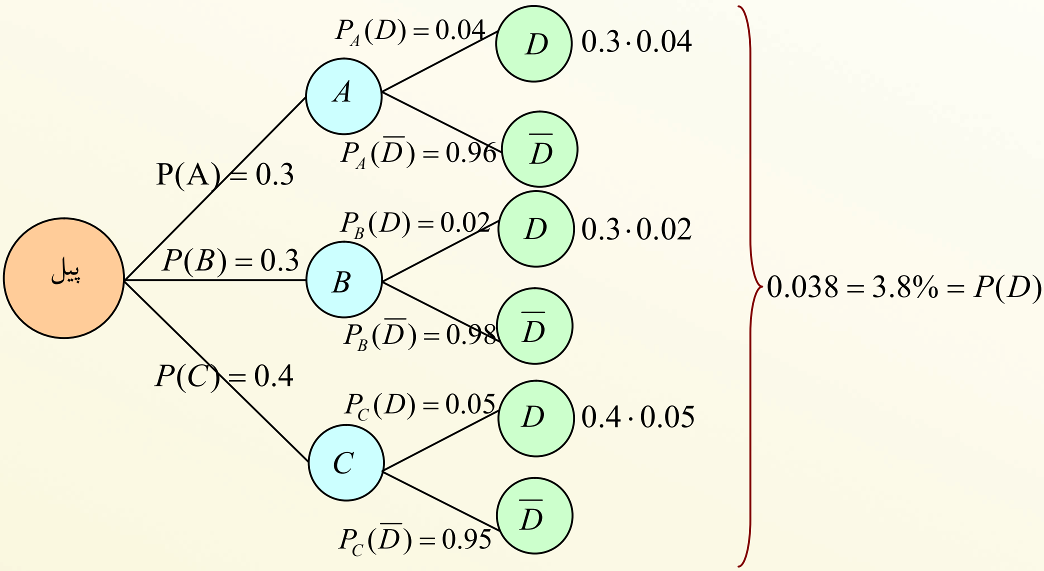
مثال: په يوه فابريکه کې د A، B او C درې ماشينونه په ترتيب سره 30% ، 30% او 40% برخه د برق گروپونه توليدوي. که چېرې په ماشينونو کې د گروپونو د خرابېدو کچه په ترتيب سره 4%، 2% او 5% وي او نوموړي گروپونه په گډه سره خرڅ شي، مطلوب دي:

a) ددې احتمال چې يو اخېستل شوی گروپ وران يا خراب وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

b) په کوم احتمال خراب خرڅ شوی گروپ د C ماشين پورې اړه لري.

c) يو نوی توليد شوی گروپ لرو، په کوم احتمال سره به د B په ماشين پورې مربوط وي.



د b جز:

$$P_D(C) = \frac{P(D \cap C)}{P(D)} = \frac{P(C) \cdot P_C(D)}{P(D)} = \frac{0.4 \cdot 0.05}{0.038} = \frac{0.02}{0.038} = 0.526 = 52.6\%$$

د c جز:

$$P_{\overline{D}}(B) = \frac{P(\overline{D} \cap B)}{P(\overline{D})} = \frac{P(B) \cdot P_B(\overline{D})}{P(\overline{D})} = \frac{0.3 \cdot 0.98}{0.3 \cdot 0.96 + 0.3 \cdot 0.98 + 0.4 \cdot 0.95}$$

$$= \frac{0.294}{0.288 + 0.294 + 0.38} = \frac{0.294}{0.962} = 0.3056 = 30.56\%$$

پوښتني

1- د 1000 دانو رملونو په منځ کې د يوې دانې په شپږ واړه مخونه يوازې د 6 شمېره وهل شوې ده. د هغوی له منځ څخه يوه ناځاپه د رمل دانه ټاکل شوې او درې ځلې اچول شوې ده. درې ځلې 6 راغلي. پيدا کړئ، هغه احتمال چې په ټاکل شوې دانه په سم ډول شمېرې وهل شوې وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ناخاپه پېښو استقلالیت

لـه مـشروط احتمــال څخـه پـوهیږو چـې د A او B دوو ناخاپو پېښو یـا حـادثو د B د پېښې پېښدل د A پـه پېښه تـاثیر اچـوي پـه دې سـبب لازمـه ده چـې د احتمـال د محاسبې په وخت کې د A او B پېښه په پام کې ونیسو.

$$P(A\bigcap B)=P(A)\cdot P(B)$$

د هغه حالت لپاره چې د A ناخاپه پېښې پېښدل پر B ناخاپه پېښې اغېزه ونه لري او بر عکس.

د A او B د ضرب د حاصل احتمـال د $A\bigcap B$ پېښې له احتمـال سره څه اړیکه لري.

تعریف: د A او B دوې ناخاپه پېښې چې یوه پر بله اغېزه لرونکې نه وي د ناخاپه مستقلو پېښو په نامه یادیږي.

$$P(A\bigcap B)=P(A)\cdot P(B)$$

- د S نمونه یي فضا او د A او B دوې یوه له بلې څخه مستقلې پېښې چې د S نمونه یي فضاکې شامل وي، په پام کې ونیسئ.
- د مشروط احتمـال فورمول څخه په هغه صورت کې چې A او B یوه له بلې څخه مستقلې دوې پېـښې وي د $P(A)$ او $P_B(A)$ احتمـالونه یو له بل څخه څه توپیر لري؟
- د $P(A\bigcap B)$ ناخاپه پېښې احتمـال له څه سره مساوي دي؟
- د $P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(A\bigcap B)$ د پېښو د احتمـال له فورمول څخـه پـه هغـه صـورت کې چې A او B ګډ ټکی ونه لري، څه پایله اخلئ؟

د پورتني فعالیت له سرته رسولو څخه لاندې پایله په لاس راځي:

1: د A او B دوې پېښې مستقلې بلل کیږي، که چېرې:

$$P(A\bigcap B)=P(A)\cdot P(B)\ \text{(د ضرب د حاصل اصل)}$$

2: که چېرې A او B پېښې د ګډو ټکو لرونکې نه وي، نو

$$A\bigcap B=\emptyset\Rightarrow P(A\bigcap B)=0$$
$$\Rightarrow P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)\ \text{(د جمع د حاصل اصل)}$$

لومړی مثال: که چېرې د یوه ښوونځي د زده کوونکو د سترګو رنګ او ذکاوت یـو پـر بـل پرتـه لـه اغېـزې فـرض شوي وي. د لاندې پېښو په پام کې نیولو سره په ناخاپه ډول د یوه زده کوونکي ټاکلو لپاره:

H: ټاکل شوی تن یو هوښیار ذکي زده کوونکی وي.

B: ټاکل شوی زده کوونکی توري سترګې ولري.

هغه احتمـال پیدا کړئ چې ټاکل شوی زده کوونکی په ناخاپه توګه هوښیار ذکي او توري سترګې ولري.

حل: ددې لپاره چې ټاکل شوی زده کوونکی هوښیار او توري سترګې ولري لیکلای شو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

خرنگه چې $P_B(H)=P(H)$ سربېره پردې $P_B(H)=\dfrac{P(B\cap H)}{P(B)}$ نو:

$$P(B\cap H)=P(H)\cdot P(B)$$

عمومي حالت: د A_1 , A_2 , A_n..... , $(n\geq 2)$ ناڅاپه پېښې احتمالاً یو له بلې څخه مستقلې بلل کېږي که چېرې د هرو دوو یا څو پېښو په ترکیب کې د ضرب د حاصل قاعده صدق وکړي پرته له هغې پېښې احتمالاً یوه لـه بلې سره تړلې نومول کېږي.

پایله:

1: پاملرنه باید وشي چې د ضرب د حاصل له قاعدې څخه په ګټه اخیستنې سره په لاندې متقاطع جدول کې هـم کولای شو چې $A\cap B$, $A\cap \overline{B}$, $\overline{B}\cap\overline{A}$ او $\overline{B}\cap A$ ناڅاپه پېښو احتمـالي پـایلې د A اوB پېـښو لپـاره چې احتمـالونه یې a او b وي، په آسانۍ په لاس راوړو. د A او B د مستقل والي څخه پوهېږو چې د A او $\overline{B}$ ، $\overline{A}$ اوB په پای کې $\overline{A}$ او $\overline{B}$ هم یوه له بلې څخه مستقلې دي، نو لرو:

	B	$\overline{B}$	
A	$P(A\cap B)=a\cdot b$	$P(A\cap\overline{B})=a(1-b)$	a
$\overline{A}$	$P(\overline{A}\cap B)=b(1-a)$	$P(\overline{A}\cap\overline{B})=(1-a)(1-b)$	$1-a$
	b	$1-b$	1

2: د A ، B او C درې ناڅاپه پېښې چې یوه له بلې څخه مستقلې دي، لرو:

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$
$$P(A\cap C)=P(A)\cdot P(C)$$
$$P(B\cap C)=P(B)\cdot P(C)$$
$$P(A\cap B\cap C)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$$

دویم مثال: په یوه کڅوړه کې دوې سپینې او دوې تورې مرۍ پرتې دي. دوې مرۍ یـوه پـه بلې پسې لـه کڅوړې څخه پورته کوو، په داسې حال کې چې:

a- د لومړۍ مرۍ د پورته کولو نه وروسته هغه بېرته په کڅوړه کې ږدو.

b- پرته له دې چې مرۍ واپس کېښودل شي.

د A پېښه: په لومړي ځل سپینه مرۍ راووزي. B: دویم ځل مرۍ سپینه وي.

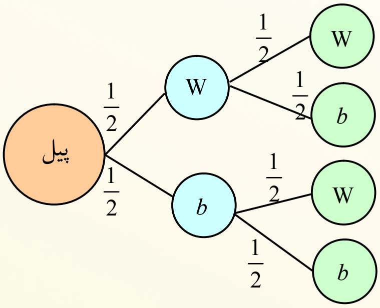
له یو بلې څخه مستقلې یا تړلې (وابسته) دي.

حل:

a) خرنګه چې $P(A)=\dfrac{1}{2}$ او $P(B)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$ وي او

$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=\dfrac{1}{4}$ دي، نو A او B یوه له بلې څخه مستقلې دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

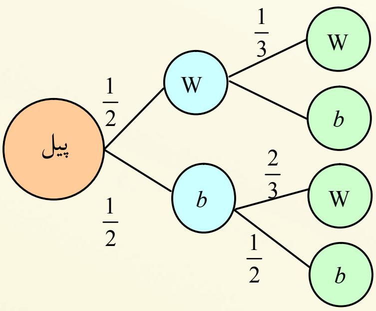


b) خرنگه چې:

$$P(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{2}\ ,\ P(A)=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow P(A\cap B)\neq P(A)\cdot P(B)$$

نو A او B يوه له بلې څخه ترلی يا وابسته دي.



دريم مثال: د لاندې متقاطع جدول خالي ځايونه چې په نښه شوي دي، ډک يې کړئ:

	B	$\overline{B}$	
A	0.12	$P(A\cap\overline{B})=?$	?
$\overline{A}$	$P(\overline{A}\cap B)=?$	$P(\overline{A}\cap\overline{B})=?$	?
	?	0.6	

حل: خرنگه چې $P(\overline{B})=0.6$ دي، نو لرو:

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-0.6=0.4$$

$$P(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0.12}{0.4}=0.30$$

$$\Rightarrow P(\overline{A})=1-P(A)=1-0.3=0.70$$

او د پېښو د تقاطع څخه لرو چې:

$$P(A\cap\overline{B})=P(A)\cdot P(\overline{B})=0.3\cdot 0.6=0.18$$

$$P(\overline{A}\cap B)=P(\overline{A})\cdot P(B)=0.7\cdot 0.4=0.28$$

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})=0.7\cdot 0.6=0.42$$

په همدې ترتيب په جدول کې د قيمتونو په وضع کولو سره مسئله تکميلېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

یو سټ چې عناصر یې $5,3,2$ او 30 دی د یوه رقم د انتخاب احتمال یې 0.25 دی په ناخاپي ډول لـه نوموړی سټ څخه یو رقم انتخابوو، که چېرې A_k ناخاپه پېښه د هغه رقم چې انتخاب شوی او د تقسیم قابلیت پـه k ولري، آیا A_2 , A_3 او A_5 ناخاپې پېښې دوه په دوه مستقل دي او که نه؟

د څپرکي مهم ټکي

بېلې شوې(غیرمتمادي) نمونه یي فضا:

هغه نمونه یي فضا چې عناصر یې د شمېر او تشخیص وړ وي، د غیرمتمادی نمونه‌یي فـضا پـه نامـه یادېږي، لکـه د رمل یا د سکې اچولو تجربې نمونه‌یي فضا.

نښتې(متمادي) نمونه یي فضا:

هغه نمونه یي فضا چې عناصر یې د شمېر وړ نه وي د پیوسته یا متمادي نمونه‌یې فضا په نامه یـادېږي چـې د حقیقـي عددونو پر محور د فاصلې په بڼه او یا په فضا کې د هندسي شکلونو یا حجمونو په ډول څرګندېږي.

هم چانس پېښې:

د یوې نمونه یي فضا لومړنې پېښې چې د هغوی پېښې د تجربې په پای کې پـه برابـر احتمــال پېـښېږي، هـم چانـسه پېښې بلل کېږي. د هم چانس پېښو د احتمـال مجموع له یوه سره مساوي ده.

د نښتې(پیوسته) فضا احتمـال:

د ټوټه کرښو، سطحو او حجمونو مساعد حالتونه د یوې پام وړ ناخاپي پېښې لپاره په یـوه تجربـي نمونـه‌یي فـضا کـې شامل ټوټه کرښو، سطحو او حجمونه عبارت دي د متصلې فضا له احتمال څخه.

مشروط احتمـال:

کــه چېــرې A او B د S، د نمونــه‌یــي فــضا دوې ناخاپــه پېــښې چــې $P(B)\neq 0$ وي پــه دې حالــت کــې $P_B(A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$ ته د A ناخاپه پېښې د مشروط احتمـال په نامـه یـادېږي پـه دې شـرط چې د B پېښه لـه مخکې پېښه شوې وي.

یوه له بلې څخه مستقلې پېښې:

د A او B دوه ناخاپه پېښې یوه له بلې څخه مستقلې بلل کېږي که چېرې:

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$ (د ضرب د حاصل اصل)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي پوښتنې

1. د لاندې نمونه یي فضاګانو څخه کومه یوه سره نښتي یا پیوسته او کومه یوه غیرمتمادي ده؟

الف: د یوې رمل دانې اچولو تجربه

ب: د یوې سکې د اچولو تجربه

ج: د یو غشي لګېدل په یوه دایره

د: د یوې فلزي میلې د اوږدوالي زیاتېدلو تجربه نظر حرارت ته

2. د یو چارتراش چې اوږدوالی یې L دی په ناڅاپه ډول په سور اره کوو، تر څو دوه برخې شي څومره احتمال شته چې د کیڼ اړخ اره شوې برخه د ښي اړخ له درې برابره څخه کوچنی وي.

3. د یوه خصوصي شرکت یو کارګر هره ورځ د 8 او 8:50 ساعتونو په منځ کې کورته نژدې تم ځای کې چې د مامورینو په موټر کې کارته د تګ لپاره ګډون وکړي او په 8:15 ، 8:30 او 8:45 وختونو تم ځای ته رسېږي څومره احتمال ددې شته چې نوموړی تن له 5 دقیقو څخه لږ منتظر پاتې شي.

4. د [0.3] تړلې فاصلې څخه په ناڅاپه ډول دوه عددونه ټاکو، ددې احتمال پیدا کړئ چې د عددونو مجموعه د 5 څخه کوچنی او له 2 څخه لویه وي.

5. په ناڅاپه ډول یو ټکی د مخروط دننه چې د قاعدې شعاع یې R او جګوالی $R\sqrt{3}$ دی ټاکو، پیدا کړئ ددې احتمال چې ټکی د محاطي کرې دننه په دې مخروط کې قرار لري.

6. د یو خودکار قلم خرابېدل دوه دلیلونه لري:

1- د میخانیکیت خرابېدل

2- د خودکار د نیچې خرابېدل

که چېرې د یو خودکار قلم د خرابېدو احتمال 0.088 او ددې احتمال چې د خرابېدو دلیل (1) ، شمېره وي مساوي په 0.05 او د دویم نقص احتمال مساوي په 0.002 وي وخېږئ: چې دوه پورتني دلایل مستقلې او یا غیر مستقلې پېښې دي؟

7. خبیر غواړي هغه څلور کلي‌ګانې چې په جیب کې یې لري او سره یو شان دي د کورد دروازې قلف خلاص کړي په کوم احتمال سره وروسته د دریمې کلي له آزمویلو سره چې له جیب څخه یې را باسي د قلف اړونـد کلي وي، په هغه صورت کې چې:

a) هره آزمویل شوې کلي په هغه صورت کې چې اصلي کلي نه وي دوباره په همغه جیب کې اچوي.

b) هره آزمویل شوې کلي په هغه صورت کې چې اصلي کلي نه وي په بل جیب کې اچوي.

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library