کوش KUSCH

د فرنخیالبرابرون یا _ مساوات

$$y - y' + y^2 y''^4 = 0$$

Differentialgleichungen

Ketabton.com

ژباړن:

ډاکټر ماخان (میرې) شینواری

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ليکوال ژوند ته لنډه کتنه

ماخان (په اولني نوم مېرې) د اروابنادي پښتو او اروابناد نورالرحمان زوی، په ۱۵/۹/۱۹۴۶م کال د شينوارو د هسکې مېنې ولسوالۍ کې زېږېدلی. (د زېږېدو نېټه يې د ۱۳۲۴ ه ل کال څخه يو يا دوه کاله دمخه ده).

د هسکې مېنې د درې کاله کليوالي ښوونځي وروسته، چې د لومړنيو زده کوونکو څخه وو. له ۱۹۵۴ څخه تر ۱۹۶۵ پورې رحمان بابا لېسه، د ۱۹۶۶م کال سپتمبر کې د يوه بورس له لارې اطريش ته لاړ او هلته په پوره ستونزو د شمېر پوهنې په ډاکترۍ بريالی شو.

د ۱۹۸۷ م کال د نومبر تر د ۱۹۸۸ فبروري تر اخره د افغانستان د باندنيو چارو کې مامور وو. دی د ۱۹۸۸م کال د فبرورۍ له ۲۹ تر ۱۹۹۲ م کال د اپريل تر نيمايي وراخوا په بن (المان) کې د افغانستان جمهوريت سفارت شارژدافير وو او د ۱۹۹۲ يوني څخه راپه دېخوا په المان کې نور هم د پردېسۍ شپې او ورځې تېروي.

ماخان شينواری د مېرمن ښاپېرۍ سره له ۱۹۷۲م کال راپه دې له لرې واده (د واده خبر ورته اطريش ته راغی) دی په نهم ټولګي کې يې کوزده ورته کړې وه. دوی ته لوی څښتن دوه بچيان وبخښل، خانګه او اباسين، چې د ۱۹۷۹کال د مۍ په شلم په اطريش کې زېږېدلي.

Verein zur Fördrung der Afghanischen Kultur e. V. Köln, Germany

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ . دیفرنځیالبرابرون یا
دیفرنځیالمساوات

تراوسه مو معلوم الجبري او ترانسځندنت مساواتو نامعلومی لوي تر یوې برخی د توپیري پوتنځونو سره لکه $x , y\ z^2 , a^3$ او داسی نور ، لرودي.
که د مساواتو دا نامعلومی یا ناپیژندلی لویي فنکشنونه او د هغی رابیلدنی یا دفرنځیالویشنه یامشتقونه وي، نو دلته د یوه دیفرنځیالمساوات څخه غږیدنه ده یا خبرې دي. د دې مساوات اوبی یاحل ستونځې لري، په ډیرو حالتونو کې حتی شمیرنیز ناممکن دی.
د دې وړې برخې په دننه کې کیدی شي ، چې یواځې یوه پیلونه ورکړل شي، د یوځو په تخنیك کې، دمهمو کاروونو یا استعمال سره.
یادونه: دلته څه نومونه چی راځي د هغو سره باید لوستونکی بلد وي. او که چیري داسی نه وه، نو دا تر زیاته حده ځما د مخه تیرو کتابونو کی راوړل شوي، که هغه هندسي کلیمي وي اوکه شمیرپوهنیزې.که پوه شوم، چی کومی کلیمي ځما په تیرو کتابونوکی روښانه نه دې تعریف شوي، وبه هځیږم، چی داکار دلته روښانه کړم.
ګران لوستونکی به په دې پوهیږي، چی کوم شیان د ژباړونکی دي،که په روښانه توګه می ګوته لك نه کړل.

۱ . ۱ بنسټکلیمی

۱ . ۱ . ۱ تعریفونه (پیژندنی)

تراوسه پورې : لاندې مساوات توپیر شوي دي.
ټاکنمساوات:

(c) ketabton.com: The Digital Library

– الجبري ريشنل مساوات. $y = 2x^2 + 2x + 5x - 7 = x^2 - 3$

– الجبري ايريشنل مساوات. $\sqrt{3x^2 - 1} = x^2$

– ترانسڅندنت مساوات. $y = \sin x \; ; \; y = e^{2x+1} = 2x$

فنکشنمساوات

هر $x \in D(f)$ په يواځنی يو $y \in R$ تنظيميږي.

$$y = 2x^2 + 5x - 7 \quad \Rightarrow y = f(x) \Rightarrow f = < f \rightarrow f(x) >$$

$$y + 2x = y' . x^2 - y'' \quad \Rightarrow f = < x \rightarrow f(x), f'(x), f''(x) >$$

$$\Rightarrow y = f < x, y', y'' >$$

دفرنځيالمساوات، په کومو کی، چی د بلواکو اوښتوني y يواځی خپلواکی اوښتونی x اود هغه رابيليدنی لکه

$$dy / dx = y' \; ; \; d^2 y / dx^2 = y'', \ldots, \qquad |$$

رامنځ ته کيږي، بلد يا عادي ديفرنځيالمساوات بلل کيږي.

د ديفرنځيالمساوات تولیزه بېه :

- $y = 3y' + 2x \cdot y'' + 4$
- $y'^2 + x \cdot y^2 = 4$
- $y''' + y'' + y' = e^x$
- $x \cdot y' = y'' \cdot y$
- $x \cdot y + x \cdot y' + x \cdot y'' + x \cdot y''' = 0$

که د ديفرنځيالمساوات ناپيژندونکی د ډيرو اوښتونکو فنکشنونه وي، نو د پارشل – يا ټوټه ديفرنځيال مساواتوڅخه غږيږو.

$$x^2 - \frac{\partial y}{\partial x} - 3 \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = y$$

د دي تولیزه بڼه يا فورم

$$0 = f\left(x; y; z; \frac{\partial y}{\partial x}; \frac{\partial y}{\partial z}; \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}; \ldots; \right)$$

د n,....,1.,2 (يعنی، لمړي، دوم، ... او n–ام) نظم ديفر–نځيالمساواتو ترمنځ توپير کوو

د ۱ –ام نظم ديفرنځيامساو $4y - dy / dx + y^2 = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲. – ام نظم د.م $3x^2 + y^2 = d^2y / dx^2 = y''$

. د ۳ –ام نظم د.م $y''' - 3y = y'' + y'$

دلته په ديفرنځيالمساوات کې هغه لوړ ديفرنځيالکوڅينت يا لوړه رابيليدنه يا ديفرنځيالويش د ديفرنځيالمساوات نظم ورکوي .

د دفيرنځيالمساوات يو بل د توپيرولويا فرقکولو امکانات په درجه يا ګراد Grad کې ورکړ شوي دي.د دفيرنځيالمساوات ګراد د ديفرنځيالمساوات د زياتوونو له لارې ټاکل شوی دی، په کوم کې چې د بلواکو اوښتونکو يا واريابلو د ځکيو يا لوړيو يا اکسپونتتونو او د ديفرنځيالويش هغه زياتون چې د ټولو لوي وي.

۱ . درجه $y''' - 3x^2 + y = 0$

۲. . درجه $x^4 y' . y''^2 y'' + y - x^2 = 0$

۳ . درجه $y . y''^3 + y'' . x^8 = y$

۴ . درجه $y - y^2 y''^4 - y' = 0$

بلد دفرنځيالمساوات

د ۱ . نظم او ۳ . درجې $4x^5y^2 + 2y . y'^3 . \cos x - 5y + 7 = 0$

بلد يا ساده (عادي) دفرنځيالمساوات

۲ . نظم او ۱ . درجه $y . y'' + 4x . y' - y = 0$

۱ . ۱ . ۲ د ديفرنځيالمساواتو اوبيوني يا حلونه

د دفرنځيالمساوات اوبيونه يو فنکشن دی او زيات وخت د دفرنځيالمساوات اينتيګرال هم بلل کيږي، ځکه، چې په بنسټيزه توګه رابيليدنی د اينتيګرال له لارې لاس ته راځي د ديفرنځيال مساوات د اوبيو يا حلونولاندې په مساواتو کې منځ ته راغلو، د دفيرنځيالونو او ديفرنځيالکوشنتونو د له منځه وړل دي، دا په دې مانا چې د ورکړشوو رابيليدنو څخه بايد په هغه اړه فنکشن مساوات راپيدا کړی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه: دیفرنځیالمساوات ; $x/2 - y' = x$

$dy / dx = y' = - x / 2$

$dy = -(x / 2).dx$

د رابیلیدنو د له منځوړنه په بنستیزه توګه د اینتګرال له لارې پیښیږي یا صورت نیسی. د دیفرنځیالمساواتو اوبی یا حل له امله د هغه اینتګرال او یا هم د هغه بنستمساوات بولو.

$\int dy = - (1 / 2) \int x.dx$

اوبی (حل) $y = -(1 / 4) x^2 + C , C \in R$

د فنکشنمساوات $y = (x)$ څخه د اوبیفنکشن لاس ته راځي

$f = < x \longrightarrow -(\frac{1}{4}) x^2 + c >$

یادونه :داسی پورته مات نوکان >,< دې بیا لږ لوي ولیکل شي، زه یې په بل ډول امکانات نه لرم.

ازمایښت:

که د اوبیوني فنکشن $y = -(\frac{1}{4}) x^2 + c$ څخه لمړی رابیلیدنه جوړه شي او د $y' = - x/2$ لپاره ترم د ازمایښت لپاره په سر- یا پیل دفرنځیالمساوات کی کیښوول شي، نو دا به د فنکشن د دفرنځیالمساوات د ټولو ټوکو لپاره یو کتمټ یا ایدنتیک مساوات شي

$$\frac{x}{2} - y' = x \;\blacktriangleright\; y = -\frac{1}{4}x^2 + c$$

$$\Rightarrow y' = -\frac{1}{4} \cdot 2x$$

$$= -\frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2} - \left(-\frac{x}{2}\right) = x$$

$$x = x$$

(دا یې په بل ډول لیکندود) دیفرنځیالمساوات اوبی

$y = - (1 / 4)x^2 + C$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ازمایښت لپاره نتیجه بیرته دیفرنځیالیږي یا رابیلیدنه نیول کیږي. دا نتیجه د دفیرنځیالمساوات سره سرخوري.

$$dy / dx = - x / 2$$

ګورو، چې بیرته په دې توګه دیفرنځیالمساوات لاس ته راغی.

بیلګه: د دیفرنځیالمساوات

$$2x + dy / dx = 0$$

اوبی یا حل سره. لکهٔ څنګه په ټولو اینتیګرالولو کی یوه ثابت C رامنځ ته کیږي.

$$y = - x^2 + C$$

د دفرنځیالمساوات اوبیونی یا حلونه کیدی شي، چې پهٔ درې ډلو وویشل شي.

۱ – ټولیز اوبی

د دفرنځیالمساوات اوبی یا حل کی ، لکه په هر اینتیګریشن کی یوه اینتیګریشن ثابته c رامنځ ته کیږي.

که د دیفرنځیالمساوات په اوبی کی ثابته نزدې نه ټاکل کیږي، نو لاس ته راوړی حل د دې دفیرنځیال مساوات ټولیز اوبی او یا د دې دیفرنځیالمساوات ټولیز اینتګرال بلل کیږي.

بیلګه :

دفرنځیالمساوات $y' = 1 / 2$

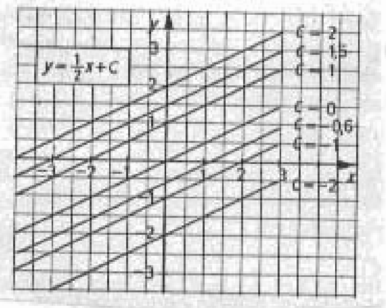
$$\Rightarrow \quad y = (1 / 2) \quad dx$$
$$= (1 / 2)\, x + c$$

ټولیز دفرنځیالمساوات $f = < x \to (½)x + c \mid c \in R>$

د یوه دیفنځیالمساوات ټولیز حل د کږو د کودې(د هغو کږو ډله، چې یو له بل سره غبرګی څغلي) په څیر په ګراف کیانځوریدلی شي .

دلته ناپایډیرې اوبیونی ممکن دي، ځکه چې ثابته هر په خوښه ارزښت نیولي شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



څېره

۲ - پارتیکیولر–یا ځانګړیز اوبیونه partikuläre Lösung

یا برخه ئیز– یا د یوې یوې برخې اوبیونه

که د ورکړشوي دیفرنځیال مساوات لپاره نور ورزیات ټاکلي شرایط ورکړ شوي وي، نو کیدی شي، چې د اینتګریشن ثابته C وشمیرل شي.

بیلګه:

دیفرنځالمساوات $y' = 1/2$

ټولیزمساواتفنکشن $\Rightarrow f = \langle x \longrightarrow (½)x + c,\ c \in R \rangle$

ټولیز اوبی $y = (1/2)x + c\ ,\ c \in R$

که دc د شمیرلو لپاره نور ورزیات شرطونه$y_1 = 2$، $x_1 = 1$ وي

بدلون یا اړونه $y_1 = (1/2)x_1 + C$

ارزښت ځاي په ځاي کړی $C = y - (1/2)x$

$C = 2 - (1/2).1$

$\Rightarrow C = 1,5$

اربښت کیږدی

پارتیکیولار اوبی $y_1 = (1/2)x_1 + 1,5$

$\Rightarrow 2 = (½).1 + c \Rightarrow c = 1,5$

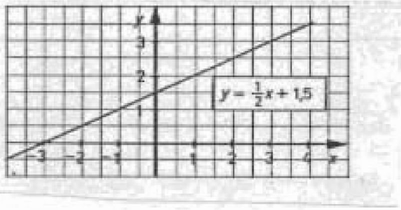
له دې د دیفرنځیالمساواتو پارتیکولاراوبی لاس ته راځي.

د $c = 1,5$ سره له ټولیز اوبیفنکشن f څخه ټوټه اوبي–فنکشن f_1 لاس ته راځي.

ټوټه اوبیفنکشن $f_1 = < x \longrightarrow (½)x + 1,5>$

د پارتیکولار اوبي په ګراف کی د کرښو د کودي څخه یوه ټاکلی کرښه بنايي

د $c = 1,5$ حالت لپاره.



په تخنیکي پرابلمونوکی زیات وخت پارتیکولار اوبیونو یا حلونو ته اړتیا پیښیږي.

۳ – زینګولار اوبیونیsinguläre Lösungen

دا لاندي دیفرنځیالمساوات دي ورکړ شوي وي

$$y^2 + y'^2 = 1$$

دا هلته پوره کیدونکی دی ،که ونیول شي

$$y = \sin(x+C)$$

دا اوبیونی د الجبري شمیرنی له لاري لاس ته نه شي راتللی

بیلګه : د ډیفرنځیالمساوات

$y^2 + y'^2 = 1$ ▶ *Differentialgleichung*

$f = \langle x \mapsto \sin(x+c) | c \in \mathbb{R} \rangle$ ▶ *angenommene allgemeine Lösungsfunktion*

$\Rightarrow y = \sin(x+c)$

پیلی تولیز اوبیفنکشن

ازمایښت

$$y = \sin(x+c) \Rightarrow y^2 = \sin^2(x+c)$$
$$\Rightarrow y' = \cos(x+c) \Rightarrow y'^2 = \cos^2(x+c)$$
$$y^2 \quad + \quad y'^2 \quad = 1$$
$$\Rightarrow \sin^2(x+c) + \cos^2(x+c) = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ازمایښت د نیول شوي اوبې رتیښتینوالی تصدیقوي

دا ځنې دفرنځیالمساوت د دې تر څنګ نورې اوبیونی هم لري، کومې چې په ریښتونی دیفرنځیالمساوات پوره کوي، مګر له دې پیدا ټولیز اوبی یا حل ځخه رابیلیدوړ نه دی.
د ټولیزې اوبیونی $y = \sin(x + c)$ تر څنګ دفرنځیالمساوات د فنکشنونو

$f_1 = <x \longrightarrow 1>$ او $f_2 = <x \longrightarrow -1>$

سره هم پوره کیږي.
دا اوبیونی یا حلونه زینګولار بلل کیږي. دا د یوه ټولیز حل د کږوکرښو د کودو هندسي پوښ انځوروي.
د دواړو زینګولار حلونو دا لاندې هندسي انځورونه د دوه کرښو په څیر ښایي، چې د x –محور سره غبرګې ځغلي، کومې چې ټولیز یا عمومي اوبی یا حل $\sin(x + C)$ پوښوي یا پټوي.

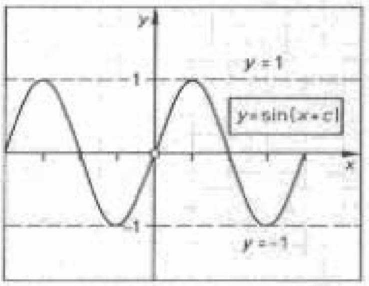
$$y^2 + y'^2 = 1$$

$$y_1 = 1;\ y_1' = 0 \quad \Rightarrow \quad 1^2 + (0)^2 = 1$$

$$y_2 = -1;\ y_2' = 0 \Rightarrow (-1)^2 + (0)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} f_1 &= \langle x \mapsto 1 \rangle \\ f_2 &= \langle x \mapsto -1 \rangle \end{aligned}\right\} \textit{singuläre Lösungen}$$

زینګولار اوبیونې یا حلونه



د دیفرنځیالمساواتو زینګولار حلونه د کم اهمیت دی یا د کم غوروالی دي. د دې کتاب په چوکاټ کې به د دې په پیلونو یا کارونو تیریدنه وشي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اوبیونی متودونه

د دیفرنځیالمساوات اوبیونی اصلاً د اینټیګرالشمیرنی له لارې صورت نیسي.
د لاندې بیلګو سره دې د ممکنه حلونو لمړی تصور یا خیال رامنځ ته شي.
بیلګی : د لاندې دیفرنځیالمساواتو ټولیز اوبیونی (حلونه) پیدا کړئ!

1 . $y' = 4x$

بڼه بدلون : $dy / dx = 4x$

یوائې د لمړي نظم دیفرنځیالکوځینت یا دیفرنځیالویش مخ ته پروت دی، نو
د dy پسی برابرېږي یا ترتیبیږي او اینټیګرالیږي.

اینټیګرالونه $dy = 4x\,dx$.

$$\int dy = 4\int x.dx$$

$$y = 2x^2 + c,\ c \in R$$

$$\Rightarrow\ f = \langle x \longrightarrow 2x^2 + c\ |\ c \in R \rangle$$

2 . که ډیر اینټیګرالونه لاس ته راځي، نو د اینټیګرالثابتی c_1 او c_2 و یوې
ثابتی c ته سره رایوځای کیږي.

$$y' = 8x^3 - 2x^2$$

$$y = 8\cdot\int x^3\,dx - 2\cdot\int x^2\,dx$$

$$= 2x^4 + c_1 - \frac{2}{3}x^3 + c_2$$

$$= 2x^4 - \frac{2}{3}x^3 + c;\ c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \mapsto 2x^4 - \frac{2}{3}x^3 + c \mid c \in \mathbb{R} \right\rangle$$

۳ . د یوه بلد ۲ . نظم دفرنځیالمساوت لپاره د دوه واره اینټیګرالولو له لارې
اوبیونه پیدا کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y'' = x^2 \Rightarrow (y')' = x^2$$
$$y' = \int x^2 \, dx$$
$$= \frac{x^3}{3} + c_1 \, ; \, c_1 \in \mathbb{R}$$
$$y = \frac{1}{3} \int x^3 \, dx + c_1 \cdot \int dx$$
$$= \frac{x^4}{12} + c_1 x + c_2 \, ; \, c_2 \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow f = \left\langle x \cdot - \frac{1}{12} x^4 + c_1 x + c_2 \right\rangle$$

په ټوټه اينتيګرالونه کی هم دوه اينتيګرالثابتي پيداکيږي، کومې چې د ټوټه اوبې سره د ورکړشوو شرايطو له مخې بايد وټاکل شي

۴ . په دفرنځيالمساوات کی $y' = dy / dx$ اينسوول کيږي او

له dx سره خليږي

بيا دا بدلونېته په دواړو خواوو اينتيګراليږي.

وريسی دواړه د اينتيګرالثابتی c_1 او c_2 و $2(c_2 - c_1) = c$ ته سره را يوځاي کيږي. (دي ته دې په شمير پوهنيزه برخه کی پاملرنه وشي، ما د تخنيکي ستونځو له امل بل ډول نه شوې ليکلی)

$$y \cdot y' = \cos x$$
$$y \cdot \frac{dy}{dx} = \cos x$$
$$y \cdot dy = \cos x \cdot dx$$
$$\int y \, dy = \int \cos x \, dx$$
$$\frac{y^2}{2} + c_1 = \sin x + c_2$$
$$y^2 = 2 \cdot \sin x + 2(c_2 - c_1) \blacktriangleright 2(c_2 - c_1) = c$$
$$y = \pm \sqrt{2 \cdot \sin x + c} \, ; \, c \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow f = \langle x \cdot - \sqrt{2 \cdot \sin x + c} \mid c \in \mathbb{R} \rangle$$

۵ . اينسول کيږي $y' = dy / dx$ او دفرنځيالمساوات د dx سره خليږي.

وريسی د دفرنځيالمساوات دواړه خواوې اينتيګراليږي او بيا ثابتی c_1 , c_2

(c) ketabton.com: The Digital Library

او c_3 و يوې ثابتې c ته سره راټوليږي يا رايوځاې کيږي.
که دواړو لورو ته وريسې مربع تکميلونه ۱ ور زياته شي نو y شميرل کيدی شي، او لاس ته راغلی f تولیز اوبی دی.

$$y' \cdot y = y' + x$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot y = \frac{dy}{dx} + x$$

$$y \cdot dy = dy + x \cdot dx$$

$$\int y\,dy = \int dy + \int x\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} + c_1 = y + c_2 + \frac{x^2}{2} + c_3$$

$$y^2 - 2y = x^2 + 2 \cdot (c_2 + c_3 - c_1)$$

$$\blacktriangleright 2 \cdot (c_2 + c_3 - c_1) = c$$

$$y^2 - 2y = x^2 + c$$

$$y^2 - 2y + 1 = x^2 + c + 1$$

$$(y-1)^2 = x^2 + c + 1$$

$$y - 1 = \sqrt{x^2 + c + 1}$$

$$y = \sqrt{x^2 + c + 1} + 1;\ c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f = \langle x \mapsto \sqrt{x^2 + c + 1} + 1 \mid c \in \mathbb{R} \rangle$$

په یاد ولری

۱ – دیفرنځیالمساوات په تولیزه توګه تولیز، پارتیکیولار او په ورکړ شوي حالت کي زينګولار اوبيونی يا حلونه لري.

۲ – دیفرنځیالمساوات په مناسب یا ورته شمیرنیز کارونی له لارې په زیاتون– حالتونو کی د اینتیګرال له لارې اوبي کیږي.

۳ – زیات وخت باید چي اوبي ونیول شي او دا اوبی بیا د هغه د ريښتينوالی لپاره و ازمایل شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ . ۱ ته تمرینونه

لاندې ساده دفرنخیالمساوت اوبې یا حل کړی

1 . $y'' = x \cdot e^x$ 2 . $y'' - x = 0$ 3 . $2y' - \cos x = 0$
4 . $x \cdot y'' = 3y'$ 5 . $y \cdot \ln x = x \cdot y'$ 6 . $y' \cdot y + y' + x = 0$
7 . $y' - x^2 = 3e^x$ 8 . $\sin x - e^x = y'$ 9 . $y' \cdot y = x + 1$
10 . $y' \cdot y^2 = y' - x^2$ 11 . $dy / dx - 3x = e^x$
12 . $y' - x^2 = x^2 - y'$ 13 . $dy / dx + \cos x = 1$
14 . $y^3 \cdot y' = \sqrt{x^2 - 1}$ 15 . $x^2 \cdot y' = x^4 - x^2$ 16 . $e^x \cdot y' = y$
17 . $y'' = 7x^3$ 18 . $d^2 y / dx^2 = \sin x$
19 . $3x - y'' = a$ 20 . $y'' = y'$ 21 . $y'' = x \cdot \cos x$

۱ . ۲ د لومړي نظم دیفرنخیالمساواتونه

د لمړي نظم دیفرنخیالمساواتونه داسی پیژندل کیږي، چی یواځی لمړی رابیلیدني y' او یا د y' په توانونه لکه y'^2 , y'^3 رامنځ ته کیږي.
د دې ترڅنګ کیدی شي x او y همداسی د دوي توان رامنځ ته شي بیلګي :

$$y' + x^2 = 3y^2 + 3y$$
$$y \cdot y' = y'^2 - x^2 + x - 1$$

تولیز : $y' = f(x,y)$

د y' , y اوx موجودیت او لویوالی تنظیمونی پسی د دفیرنخیالمساواتو مختلف ډولونه توپیریدلی شي. د لته به د دې مهمو باندې لنډې خبرې وشي.

۱ . ۲ . ۱ دیفرنخیالمساوات د بیلوشوو اووښتونو سره

دیفرنخیالمساواتو د بیلو یا جودا اووښتونو یا واریابلو سره، هغه مساوات په نخښنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

کیږي، په کومکي چې ممکن وي،چې لویي dy , $g(y)$ په همدې توګه $f(x)$, dx هر یو یې په یوه لور بیل یا ځانلۀ کړو.
د دې اړونی سره کیدی، چې مساوات په دواړو خواوو ایتګرال شي.
بیلګه؛

$$y' \cdot y^4 = x^2 \cdot y$$
$$\frac{dy}{dx} \cdot y^4 \cdot \frac{1}{y} = x^2$$
$$dy \cdot y^3 = x^2 \cdot dx \;\blacktriangleright\; y^3 = g(y);\; x^2 = f(x)$$
$$\int y^3\, dy = \int x^2\, dx$$

۱ . دفرنځیالمساوات د y^2 او dx سره ځلیږي. بیا کیدی شي ، چې د مساوات دواړه خواوې اینتیګرال شي د y^3 پسی اوبیونی له امله ثابتی $3.(c_2 - c_1)$ و ثابتی c ته راغونډیږي(دا پورته ټول په لاندې بیلګه کی روښانیږي).
دلته f غوښتونکی اوبیفنکشن یا حلفنکشن دی.
بیلګه:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y^2} \;\blacktriangleright\; x^2 = f(x);\; y^2 = g(y)$$
$$y^2 \cdot dy = x^2 \cdot dx$$
$$\int y^2\, dy = \int x^2\, dx$$
$$\frac{y^3}{3} + c_1 = \frac{x^3}{3} + c_2$$
$$y^3 = x^3 + 3(c_2 - c_1) \;\blacktriangleright\; 3(c_2 - c_1) = c$$
$$y^3 = x^3 + c$$
$$y = \sqrt[3]{x^3 + c}$$
$$\Rightarrow f = \underline{\langle x \mapsto \sqrt[3]{x^3 + c} \mid c \in \mathbb{R} \rangle}$$

۲ . د دې لپاره ، چې د dy د $g(x) = y - 4$ سره او د x د $f(x) = x^2$ سره رایوځایونه لاس ته راوړای شو. نو دفرنځیالمساوات د dx سره ځلیږي او x^2 سره ویشل کیږي.*

(c) ketabton.com: The Digital Library

وریسی له دې سره dy او $g(y)$ همدا ډول dx او $f(x)$ هر یو په یوه خوا ځانله کیږي. د کوم سره چې dx او dy باید په مات باندې کې پراته یا ځاي وي. **
د مساوات دواړه خواوې اینتیګرال کیږي. د اینتیګرالثابتي c_1 او c_2 و c_3 ته راغونډیږي.
دا راپیداشوی فنکشن د y په لور اوبی کیږي. د e^{C} لپاره c اینبوول کیږي.***
اوf د دفرنځیالمساوات ټولیز اوبی دی****

یا دونهٔ : لاندې د شمیرنی په برخه کی په * پسی* ... ،او** پسي ***...
په **** پسي **** راځي.

$$x^2 \cdot \frac{dy}{dx} - y + 4 = 0 \qquad *$$

$$x^2 \cdot dy - y \cdot dx + 4 \cdot dx = 0$$

$$dy - \frac{y \cdot dx}{x^2} + \frac{4 \cdot dx}{x^2} = 0$$

$$dy - \frac{dx}{x^2}(y-4) = 0$$

$$\frac{dy}{y-4} - \frac{dx}{x^2} = 0$$

$$\frac{dy}{y-4} = \frac{dx}{x^2} \qquad **$$

$$\int \frac{dy}{y-4} = \int \frac{dx}{x^2}$$

$$\Rightarrow \ln|y-4| + c_1 = -\frac{1}{x} + c_2 \quad \blacktriangleright c_2 - c_1 = c_3 \qquad ***$$

$$y - 4 = e^{c_3 - \frac{1}{x}}$$

$$y = e^{c_3} \cdot e^{-\frac{1}{x}} + 4 \quad \blacktriangleright e^{c_3} = c$$

$$y = c \cdot e^{-\frac{1}{x}} + 4$$

$$\Rightarrow f = \langle x \cdot - c \cdot e^{-\frac{1}{x}} + 4 | c \in \mathbb{R} \rangle \qquad ****$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دیفرنخیالمساوات د جلا یا بیلو شوواووښتونو سره، ځان په دې ګروپونو تویته کوي

۱ – د لاندي فورم مساوات

$$y' = f(x)$$

دا فورم همغه ورسره بلد د تمرینورکونی وظیفه ورکوي، لکه ځنګه، چی په اینتیګرالشمیرنه کی.

بیلګه :

$$y' = x^2$$

بدلونه $dy / dx = x^2$

اینتیګرالونه $dy = x^2\, dx$

$$y = \int x^2\, dx$$

تولیز اوبی $y = (x^3 / 3) + C$

دلته f تولیز حل دی $\Rightarrow f = < x \rightarrow (x^3 / 3) + c \mid c \in R >$

۲ – د لاندي فورم مساوات $y' = g(y)$

اووښتونی dy او $g(y) = 3y^2 + 1$ په همدي توګه dx هر د مساوات په یوه خوا ځانله کیږي.

د مساوات دواړه خواوي اینتیګرالیږي، د کوم سره چی د مخامخ بني $\int \frac{dz}{z^2 + 1}$ اینتیګرال پخوا اوبی شویدی..

بیلګه (یادونه : دا بیلګه لکه چی ناریښتیا اوبی وي، پام ورته وکړی،؟؟.)

$$y' = 3y^2 + 1$$

$$\frac{dy}{dx} = 3y^2 + 1$$

$$\frac{dy}{3y^2 + 1} = dx$$

$$\int \frac{dy}{3y^2 + 1} = \int dx$$

$\ln \left| \frac{3y + \sqrt{3}}{3y - \sqrt{3}} \right|$ کیږ لور ته ځانله کیږي په داسی توګه، چی د اینتیګریشنثابته

(c) ketabton.com: The Digital Library

بني خوا ته راوړل شي او مساوات د $\sqrt{3}$ 2 سره ضرب شي.

$$\frac{1}{2\cdot\sqrt{3}}\ln\left|\frac{3y+\sqrt{3}}{3y-\sqrt{3}}\right|+c_1=x+c_2$$

$$\ln\left|\frac{3y+\sqrt{3}}{3y-\sqrt{3}}\right|=2\cdot\sqrt{3}\cdot x+2\sqrt{3}(c_2-c_1)$$

د لوګاریتم د اوبیونی سره په بني لور اکسپوننشلفنکشن لاس ته راځي، کوم چې په یوه ځل تو‌پټه کیدی شي.

د سادوني لپاره ټاکل کیږي

$$c=e^{2\sqrt{3}(c_2-c_1)}$$

بیا د ($\sqrt{3}$ - 3y) سره ضرب کیږي او بالاخره مساوات د y سره کیڼ لور ته راوړل کیږي همداسی $\sqrt{3}$ و بني خوا ته.

$$\frac{3y+\sqrt{3}}{3y-\sqrt{3}}=e^{2\sqrt{3}\cdot x+2\sqrt{3}(c_2-c_1)}$$

$$\frac{3y+\sqrt{3}}{3y-\sqrt{3}}=e^{2\sqrt{3}\cdot x}\cdot e^{2\sqrt{3}(c_2-c_1)} \blacktriangleright e^{2\sqrt{3}(c_2-c_1)}=c$$

$$\frac{3y+\sqrt{3}}{3y-\sqrt{3}}=e^{2\sqrt{3}\cdot x}\cdot c$$

$$3y+\sqrt{3}=(3y-\sqrt{3})\cdot e^{2\sqrt{3}\cdot x}\cdot c$$

$$3y+\sqrt{3}=3y\cdot e^{2\sqrt{3}\cdot x}\cdot c-\sqrt{3}\cdot e^{2\sqrt{3}\cdot x}\cdot c$$

د y نوکوتلو وروسته د دفرنځیالمساوات د تولیز اوبیونی فنکشنمساوات لاس ته راځي

$$3y-3y\cdot e^{2\sqrt{3}\cdot x}\cdot c=-\sqrt{3}\cdot e^{2\sqrt{3}\cdot x}\cdot c-\sqrt{3}$$

$$3y(1-e^{2\sqrt{3}\cdot x}\cdot c)=-\sqrt{3}(e^{2\sqrt{3}\cdot x}\cdot c+1)$$

$$y=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{e^{2\sqrt{3}\cdot x}\cdot c+1}{e^{2\sqrt{3}\cdot x}\cdot c-1};\ c\in\mathbb{R}$$

۳ . د $y' = f(x)\,.\,g(y)$ بني مساوات

د فرنځیالمساوات د بیلیدنی وروسته اینتیګرالیږي.

د y پسی اوبیونی وروسته ږدو

$$e^{c_2 - c_1} = c$$

وریسی بیا f تولیز یا عمومي اوبی دی

بیلګه :

$$y' = 4x^2 \cdot y$$

$$\frac{dy}{y} = 4x^2 \cdot dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = 4 \int x^2 dx$$

$$\ln|y| + c_1 = \frac{4}{3} x^3 + c_2$$

$$y = e^{\frac{4}{3}x^3 + (c_2 - c_1)}$$

$$y = e^{\frac{4}{3}x^3} \cdot e^{c_2 - c_1} \blacktriangleright e^{c_2 - c_1} = c$$

$$y = c \cdot e^{\frac{4}{3}x^3}$$

$$\Rightarrow f = \langle x \mapsto c \cdot e^{\frac{4}{3}x^3} | c \in \mathbb{R} \rangle$$

.

۴ – د $y' = f(x) / g(y)$ بني یا فورم مساوات اووبښتونی y , dy او x , dx دوه لوریز خانله کیږي.

$$y' = x / y$$

$$dy / dx = x / y$$

$$\Rightarrow \quad y\, dy = x\, dx$$

بیا د مساواتو داوړه خواوې اینتیګرالیږي او د y پسی اوبی کیږي.

$$\int y\, dy = \int x dx$$

$$(1/2)\, y^2 + c_1 = (1/2)\, x^2 + c_2$$

ږدو

$$2(c_2 - c_1) = c$$

$$y^2 = x^2 + c \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{x^2 + c}$$

دافنکشن f د دفرنخیالمساوات تولیز اوبی یا حل دی

$$\Rightarrow \quad f = < x \longrightarrow \; x^2 + c \mid c \in R >$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵ – د لاندې فورم مساوات

$$y' = g(y) / f(x)$$

اووبښتونی y , dy او x , dx په دواړو خواوو ځانله کیږي . او په اخر کی دو خواوې اینتیګرالیږي او په y پسی اوبی کیږي.

هغه لاس ته راوړي اینتیګریشنثابتی ږدو: $c_2 - c_1 = \ln|c|$

$$y' = y / x \; ; \quad dy / dx = y / x$$

$$\int dy / y = \int dx / x \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| + c_1 = \ln|x| + c_2$$

$$\ln|y| = \ln|x| + c_2 - c_1 \quad , c_2 - c_1 = \ln|c|$$

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln|c|$$

$$\ln|y| = \ln|x . c|$$

$$y = x.c$$

$$\Rightarrow \quad f = < x \longrightarrow x.c \mid c \in R >$$

دا لاس ته راغلی f تولیز حل دی

بیلګی

1 . $y' - 3x = -4x^2$

$$dy / dx = 4x^2 + 3x$$

$$y = 4. \int x^2 \, dx + 3. \int x \, dx$$

$$y = (4/3)\, x^3 + c_1 + (3/2)\, x^2 + c_2$$

ږدو $c_2 + c_1 = c$

$$\Rightarrow \quad f = < x \longrightarrow (4/3)\, x^3 + (3/2)x^2 + c>$$

دا f د مساوات تولیزه ابیونه ده

۲ . $\sin x - y' = \cos x + y'$

$$\sin x - dy / dx = \cos x + dy / dx$$

$$2dy = \sin x . dx - \cos x . dx$$

$$y = (1/2)\int \sin x \, dx - (1/2)\int \cos x \, dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = -(1/2)\cos x + c_1 - (1/29 \sin x + c_2$$

پردو: $c_1 + c_2 = c$

$$=> \quad f = <x \longrightarrow -(1/2)\cos x - (1/2)\sin x + c>$$

3 . $2.y' = 2y^2 + 8y - 2$

مساوات د مربعتکمیلولو له لارې په فورم $(z + a)^2 - b^2$ راوړل کیږي

$$y^2 + 4y - 1 = (y^2 + 4y + 4) - 4 - 1$$
$$= (y-4)^2 - (\sqrt{5})^2 \quad \Rightarrow \int \frac{dz}{(z+a)^2 - b^2}$$

دا لاندې اینتیګرال د مخه اوبی شوی دی (پاداښو شو)

$$\int [(1/(z+a)^2 - b^2] dz$$

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + 4y - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = (y+2)^2 - (\sqrt{5})^2$$

$$\frac{dy}{(y+2)^2 - (\sqrt{5})^2} = dx$$

$$\int \frac{dy}{(y+2)^2 - (\sqrt{5})^2} = \int dx$$

$$\frac{1}{2\sqrt{5}} \ln \left| \frac{y+2-\sqrt{5}}{y+2+\sqrt{5}} \right| + c_1 = x + c_2$$

$$\ln \left| \frac{y+2-\sqrt{5}}{y+2+\sqrt{5}} \right| = 2\sqrt{5} \cdot x + 2\sqrt{5}(c_2 - c_1)$$

$$\ln z = a <=> z = e^a$$

$$\Rightarrow \frac{y+2-\sqrt{5}}{y+2+\sqrt{5}} = e^{2\sqrt{5} \cdot x} \cdot e^{2\sqrt{5} \cdot (c_2 - c_1)}$$

پردو $e^{2\sqrt{5} \cdot (c_2 - c_1)} = c$. بیا د $y + 2 + \sqrt{5}$ سره خلیږي، وروسی هغه غړی، چی y لري د مساوات یوې لور ته خائلهٔ کیږي او y له نوکانو راوځي، دا د y په لور اوبي – یا حل کیږي، چی په دې

(c) ketabton.com: The Digital Library

توګه ټولیز اوبی لاس ته راځي .

$$y = \frac{(2+\sqrt{5})\cdot c\cdot e^{2\sqrt{5}\cdot x} + \sqrt{5} - 2}{1 - c\cdot e^{2\sqrt{5}\cdot x}}$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x, -\frac{(2+\sqrt{5})\cdot c\cdot e^{2\sqrt{5}\cdot x} + \sqrt{5} - 2}{1 - c\cdot e^{2\sqrt{5}\cdot x}} \right\rangle$$

بیلګه ۴ : $y' = y$

د $x = 0$ لپاره $y = e$ دی

غړی $g(x)$ او dy د مساوات په یوه لور بیلیږي. په اخر کې دواړه خواوې اینتیګرال کیږي.

$$dy / dx = y$$

$$dy / y = dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int (1 / y)\, dy = \int dx$$

$$\ln| y | + c_1 = x + c_2$$

$$\ln|y| = x + (c_2 - c_1) \quad , \quad c_2 - c_1 = c$$

$$\ln|y | = x + c$$

$$y = e^{x + c}$$

د y په لور اوبیونه ټولیز اوبی f ورکوي

$$\Rightarrow f = < x \longrightarrow e^{x + c} >$$

ثابته c د شرایطو $x_1 = 0$ او $y_1 = e$ څخه لاس ته راځي.

$$c = \ln| y | - x$$

$$= \ln e - 0 = 1$$

دلت $c = 1$ او f_1 توټه ئیزه اوبیونه ده.

$$\Rightarrow f_1 = < x \longrightarrow e^{x + 1} >$$

بیلګه ۵ . $x. |y = x - 1$

ورزیات شرایط : د $x_1 = 0$ لپاره دي $y_1 = 10$ وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دفرنځیالمساوات د پسی اړول کیږي او مات یا کسر په برخه ماتونو توپه کیږي.
د دي برخمساواتو اینتیګرالونی وروسته د دفرنځیالمساوات ټولیز اوبیونه یا حل لاس ته راځي

$$c_1 + c_2 + c_3 = c$$ پردو

اوبی

$$x \cdot \sqrt{\frac{dy}{dx}} = x - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x-1)^2}{x^2}$$

$$dy = \left(\frac{x^2}{x^2} - \frac{2x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right) \cdot dx$$

$$\int dy = \int dx - 2 \cdot \int \frac{1}{x}\, dx + \int \frac{1}{x^2}\, dx$$

$$y = x + c_1 - 2 \cdot \ln|x| + c_2 - \frac{1}{x} + c_3$$

$$y = x - 2 \cdot \ln|x| - \frac{1}{x} + c$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \cdot \to x - 2 \cdot \ln|x| - \frac{1}{x} + c \right\rangle$$

وریسی د اینتیګرال ثابته C د شرایطو $x = 2 ; y = 10$ ځای په ځای کولو څخه شمیرل کیږي.

$$c = y_1 - x_1 + 2.\ln|x_1| + 1/x_1$$

$x_1 = 2,\ y_1 = 10$ پردو

$$= 10 - 2 + 2.\ \ln 2 + 1/2 = 9,8863$$

بیا د c ارزښت په ټولیز اوبی کی ځای په ځای کیږي او په دې توګه پارتیکوالار اوبی لاس ته راځی.

$$\Rightarrow f_1 = \left\langle x \cdot \to x - 2 \cdot \ln|x| - \frac{1}{x} + 9,8863 \right\rangle$$

بیلګه ۶ : $y'^2 = 1 - x^2$

شرایط: د $x = 1$ لپاره $y = 0$ دی

د دفرنځیالمساواتو ریښه(جذر) وځي یا نیول کیږي او د y په لور اوبی کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(dy / dx)^2 = 1 - x^2$$
$$dy / dx = \sqrt{1 - x^2}$$
$$dy = \sqrt{1 - x^2} . dx$$

په لاندې کی راغلی اینتیګرال $\int \sqrt{1 - x^2}\ dx$ د مخه اوبی شوی دی. دا اینتیګریشن مو بیا ټولیز اوبیونی ته بیایي.

$$\int dy = \int \sqrt{1 - x^2}\, dx$$

$$y = \frac{x}{2}\sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2}\text{Arcsin}\, x + c$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \cdot - \frac{x}{2}\sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2}\text{Arcsin}\, x + c \right\rangle$$

د c ثابته د شرایط $x_1 = 1$ او y_1 د اینبوولو له لارې شمیرل کیږي.
که $c = -\frac{\pi}{4}$ په f کی کیږدو، نو f_1 پارتیکولار اوبیونه لاس ته راځي

$$c = y_1 - \frac{x_1}{2}\sqrt{1 - x_1^2} - \frac{1}{2}\text{Arcsin}\, x_1 \blacktriangleright x_1 = 1,\ y_1 = 0$$

$$c = 0 - 0 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$c = -\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow f_1 = \left\langle x \cdot - \frac{x}{2}\sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2}\text{Arcsin}\, x - \frac{\pi}{4} \right\rangle$$

بیلګه ۷ : $y' = y.[x / (x^2+1)]$

اوس dy , y او $f(x) = x / (x^2 + 1)$, dx د دفرنخیالمساوات په دواړو خواو کی ځانله کیږي.
د مساوات دواړه خواوی اینتیګرال کیږي او بیا د y پسی اوبي یا حل کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$dy / dx = y.[x /(x^2+1)]$$

$$dy / y = [x / [x^2 + 1)] .dx$$

$$\int dy / y = \int [x / (x^2+1)] .dx = \int \frac{x}{x^2+1} dx$$

$$\ln|y| = (1/ 2) \ln(x^2+1) + C$$

د اینتیګرالثابتو c_1 او c_2 یوځایونه و $c_2 - c_1 = \ln|c|$ ته هدفمند دی

$$\ln|y| = \ln \sqrt{x^2+1} + (c_2 - c_1) , \quad c_2 - c_1 = \ln|c|$$

$$\ln|y| = \sqrt{x^2+1} + \ln|c|$$

$$\ln|y| = \ln|\sqrt{x^2+1} . c|$$

$$y = \sqrt{x^2+1} . c$$

او لاندي f تولیز اوبیفنکشن دی

$$=> \quad f = < x \longrightarrow c\sqrt{x^2+1} >$$

بیلګه ۸: $y' = [(x^2 - 4) / x^2]. \quad 1 - y^2$

ور زیات شرطونه: د $x_1 = 1$ لپاره $y_1 = 1$ دی

او $g(x)$, dy او $f(x)$, dx د مساوات په دواړو لورو خانله کیږي

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2-4)\sqrt{1-y^2}}{x^2}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{(x^2-4)\cdot dx}{x^2}$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int dx - 4 \cdot \int \frac{dx}{x^2}$$

د مساوات دواړه خواوې اینتیګرالیږي، د دواړو اینتیګریشنثابتو c_1 او c_2 , c_4 زیاتون د سره c مساوي لیکل کیږي: $c_2 - c_1 - c_4 = c$

$$\text{Arcsin}\, y + c_1 = x + c_2 - 4[- (1 / x) + c_3]$$

$$\text{Arcy} = [(x^2 + 4) / x] + c$$

$$y = \sin [((x^2 + 4) / x) + c]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې په اخر کې ټولیز اوبې f لاس ته راځي

$$\Rightarrow f = \left\langle x \cdot - \sin\left(\frac{x^2+4}{x} + c\right)\right\rangle$$

ثابته c د ورکړ شوو شرایطو څخه پیداکیږي، داسې ، چې x_1 او y_1 د فنکشن- مساوات په ټولیز اوبې کې ځای په ځای شي.

په دې توګه ورپسې ټوټه اوبیونه f_1 لاس ته راځي

$$c = \operatorname{Arcsin} y_1 - \frac{x_1^2+4}{x_1} \blacktriangleright x_1 = 1, \quad y_1 = 1$$

$$= \operatorname{Arcsin} 1 - \frac{1^2+4}{1}$$

$$= \frac{\pi}{2} - 5$$

$$\Rightarrow f_1 = \left\langle x \cdot - \sin\left(\frac{x^2+4}{x} + \frac{\pi}{2} - 5\right)\right\rangle$$

بیلګه ۹ : $x^2.y^2 + y^2 + x.y^3.y' = x.y.y'$

دفرنځیالمساوات د dx سره ځلیږي اوپه $x.y^2$ ویشلکیږي.

غړي د x , dx سره په یوه خوا او د y , dy سره په بله خواخانله کیږي. انټیګریشن د اوبې په خیر یو ایمپلیځیت د فنکشن مساوات ورکوي، کوم ، چې ایمپلیځیت نه شي انځوریدلی وروسته پړدو $c_4 + c_3 - c_2 - c_1 = c$

$$x^3 \cdot y^2 + y^2 + x \cdot y^3 \cdot \frac{dy}{dx} - x \cdot y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$x^3 \cdot y^2 \cdot dx + y^2 \cdot dx + x \cdot y^3 \cdot dy - x \cdot y \cdot dy = 0$$

$$x^2 \cdot dx + \frac{dx}{x} + y \cdot dy - \frac{dy}{y} = 0$$

$$x^2 \cdot dx + \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} - y \cdot dy$$

$$\int x^2\,dx + \int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{y} - \int y\,dy$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{x^3}{3} + c_1 + \ln|x| + c_2 = \ln|y| + c_3 - \frac{y^2}{2} + c_4$$

$$\frac{x^3}{3} + \frac{y^2}{2} + \ln\left|\frac{x}{y}\right| + c = 0$$

بیلگه ۱۰ : dx - dy = / dy / y) + [(4.dx)/ (4 + x)]

د x , dx او y . dy ځانلونی وروسته د دفرنځیالمساوات دواړه خواوي اینتیګرالیږي
د اینتیګریشنثابتي، کیدی شی سره رایوځاي شي، اوبی اکسپلیځیت نه شي انځوریدی

$$dx - \frac{4 \cdot dx}{4+x} = \frac{dy}{y} + dy$$

$$\int dx - 4\int \frac{dx}{4+x} = \int \frac{dy}{y} + \int dy$$

$$x + c_1 - 4 \cdot \ln|4+x| + c_2 = \ln|y| + c_3 + y + c_4$$

$$\blacktriangleright\ c_4 + c_3 - c_2 - c_1 = c$$

$$x - 4\ln|4+x| = \ln|y| + y + c$$

۱ . ۲ . ۲ دیفرنځیالمساواتد هوموجینو اووښتونکو یا واریابلو سره

د هوموجینو اووښتونکو سره دیفرنځیالمساوات په هر غړي کی یو دیفرنځیال dx یا dy لري.
د واریابلوx او y د اکسپونتتو یا په جګګیونو زیاتون د مساواتو په هر غړي کی برابر لوي دی.
دیفرنځیالمساوات د هوموجینواووښتونکو سره دSubstitution سبستیچیوشن یا (د) په ځاي اینبوونی یا بدلون له لاري ځان اوبیوني یا حل ته پریږدي، په کوم کي چی y = x.z ځاي په ځاي کیږي، او د کوم سره چی بیا z د x فنکشن دی.
(د) په ځاي اینبوونه مو یوه مساوات ته بیایي، چی اوښتونکی کي بیلی وي.

سبستیچیوشن : په ورکړ شوي مساوات $y = x.z$ او په ورته یا همدې توګه $y^2 = x^2.z^2$ سبستیچیوشن کو.کله چی ترم $y = x.z$ د خلقاعدې سره دفرنځیالیږي، نو د dy لپاره بیا $z.dx + x.dz$ ږدو ،

دا نوي منځ ته راغلي مساوات د خانله شوو اوښتونو یا واریابلو سره د فرنځیالمساوات په بڼه راوړل کیږي.په کوم کی چی د x^2 سره خانله شي او د x , dx همداسی z , dz سره غږي د بڼیبدلون له لارې خانله شي

$$x^2 + y^2 + x \cdot y \cdot y' = 0$$

$$\frac{x^2 \cdot dx}{dx} + \frac{y^2 \cdot dx}{dx} + \frac{x \cdot y \cdot dy}{dx} = 0$$

$$\underbrace{x^2 \cdot dx}_{n=2} + \underbrace{y^2 \cdot dx}_{n=2} + \underbrace{x \cdot y \cdot dy}_{n=2} = 0$$

Man setzt $y = x \cdot z \blacktriangleright z = f(x)$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1 \cdot z + x \cdot \frac{dz}{dx}$$

$$dy = z \cdot dx + x \cdot dz$$

بیلګه : $x^2.dx + y^2.dx + xydy = 0$

اوبی یا حل : اوبی په څلورو پلونو کی پلی کوو

۱ – په مساوات کی بدلون منځ راولو یا سبستیچیوشن کوو

$$y = x.z \Rightarrow y^2 = x^2.z^2$$

$$dy = z.dx + x.dz$$

$$x^2.dx + x^2.z^2.dx + xxz(z.dx + x.dz) = 0$$

$$x^2.dx + x^2z^2.dx + x^3z.dz = 0$$

$$dx(1 + 2z^2) = -x.z.dz$$

$$dx / x = -(z.dz)/(1+2z^2)$$

دا نوی رامنځ ته شوی مساوات د په دواړه لوري خانلهٔ شوو اووښتونکو د دیفرنځیالمساوات په بڼه راوړل کیږي.

۳ – د مساوات دواړه خواوې اینتیګرال کیږي.

د اینتیګرال $\int x.dx / (a^2 + x^2) = (\frac{1}{2}) \ln(a^2 + x^2)$ اوبی راته د مخه روښان دی

$$\int \frac{dx}{x} = -\int \frac{z}{1+2z^2}\,dz$$

$$\int \frac{dx}{x} = -\frac{1}{2}\int \frac{z}{\frac{1}{2}+z^2}\,dz$$

$$\ln|x| + c_1 = -\frac{1}{4}\ln\left(\frac{1}{2}+z^2\right) + c_2 \blacktriangleright z^2 = \frac{y^2}{x^2}$$

انیتیکرایشنشابتي په یوه لور راوړل کیږي او لویه z^2 بیرته د y^2/x^2 سره بدلیږي. د لوګاریتم د زیاتون څخه بیا د یو ځل(ضرب) لوګاریتم جوړیږي او د لوګاریتممساوات د اکسپوننشلمساوات په څیر لیکل کیږي.

بیا x ریښي ته راوړل کیږي او مساوار په ۴ توان کیږي.

د $c = e^{4(c_2-c_1)}$ لپاره لیکیل کیږي، اوس د y ساده شمیرل کیدی شي.

هغه f چې وروسته لاس ته راځي د دفرنځیالمساوات تولیز فنکشن اوبی دی

$$\ln|x| + \ln\sqrt[4]{\frac{1}{2}+\frac{y^2}{x^2}} = c_2 - c_1$$

$$\ln\left|x\cdot\sqrt[4]{\frac{0{,}5\cdot x^2+y^2}{x^2}}\right| = c_2 - c_1$$

$$x\cdot\sqrt[4]{\frac{0{,}5\cdot x^2+y^2}{x^2}} = e^{c_2-c_1}$$

$$\sqrt[4]{0{,}5\cdot x^4 + x^2\cdot y^2} = e^{c_2-c_1}$$

$$0{,}5\cdot x^4 + x^2\cdot y^2 = e^{4(c_2-c_1)} \blacktriangleright e^{4(c_2-c_1)} = c$$

$$0{,}5\cdot x^4 + x^2\cdot y^2 = c$$

$$x^2\cdot y^2 = c - 0{,}5x^4$$

$$y^2 = \frac{1}{x^2}(c-0{,}5x^4)$$

$$y = \frac{1}{x}\sqrt{c-0{,}5x^4}$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \cdot \to \frac{1}{x}\sqrt{c-0{,}5x^4}\right\rangle$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګی :

لومړی) $x + y = y'.x$

دلته $y = x.z$ سبستیچیوشن کیږي او د په توانقاعدي له مخی dy / dx جوړوو او ړدو $dy = z.dx + x.dz$. اوس د بنیبدلو له لارې x , dx او dz د مساواتو په دواړولورو خانله کیږي.

$$x + y = \frac{dy}{dx} \cdot x \quad \blacktriangleright y = x \cdot z$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1 \cdot z + x \cdot \frac{dz}{dx}$$

$$dy = z \cdot dx + x \cdot dz$$

$$x + x \cdot z = \frac{x}{dx} \cdot (z \cdot dx + x \cdot dz)$$

$$x \cdot dx + x \cdot z \cdot dx = x \cdot z \cdot dx + x^2 \cdot dz$$

د اووبنتونکو له بیلولو وروسته مساوات په دواړو لورو اینتیکرالیږي.د اینتیکر- یشنثابتي رایوخاي کیږي.

دا لاس ته راغلی f د دفرنځیالمساوات ټولیز اوبی دی.

$$x \cdot dx = x^2 \cdot dz$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int dz$$

$$\ln|x| + c_1 = z + c_2 \quad \blacktriangleright c_1 - c_2 = c$$

$$\ln|x| + c = z \quad \blacktriangleright z = \frac{y}{x}$$

$$y = x(\ln|x| + c)$$

$$\Rightarrow f = \langle x \mapsto x(\ln|x| + c) \rangle$$

بیلګه ۲ : $(x^2 + y^2).dx = xy.dx$

سبستیچیوشن یا د اووبنتونکو بدلون $y = x.z$ او $y^2 = x^2 . z^2$ د خلقاعدي

(c) ketabton.com: The Digital Library

سره dy / dx جوړوو او پردو dy = z.dx + x.dz .

د مساوات ښه بدلون سره x,dx همداسې z,dz په دواړو لورو خانله کوو.

د اوښتونکو، داوړو لورو ته له بېلولو وروسته مساوات اینتیګرالیږي.

$$(x^2 + y^2)\,dx = x \cdot y \cdot dy$$

$$x^2 \cdot dx + y^2 \cdot dx = x \cdot y \cdot dy$$

$$\blacktriangleright\ y = x \cdot z \Rightarrow y^2 = x^2 \cdot z^2$$

$$\Rightarrow dy = z \cdot dx + x \cdot dz$$

$$x^2 \cdot dx + x^2 \cdot z^2 \cdot dx = x \cdot x \cdot z(z \cdot dx + x \cdot dz)$$

$$dx + z^2 \cdot dx = z^2 \cdot dx + z \cdot x \cdot dz$$

$$\frac{dx}{x} = z \cdot dz$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int z\,dz$$

$$\ln|x| + c_1 = \frac{z^2}{2} + c_2$$

بیاد z^2 په ځای y^2 / x^2 ځای په ځای کیږي، د $2(c_2 - c_1)$ لپاره c پردو.

لاس ته راغلی f د دفرنځیالمساوات ټولیز اوځ دی.

$$2 \cdot \ln|x| + 2c_1 - 2c_2 = z^2 \quad \blacktriangleright\ z^2 = \frac{y^2}{x^2}$$

$$2c_1 - 2c_2 = c$$

$$2 \cdot \ln|x| + c = \frac{y^2}{x^2}$$

$$y^2 = x^2(2 \cdot \ln|x| + c)$$

$$y = x\sqrt{2 \cdot \ln|x| + c}$$

$$\Rightarrow f = \underline{\langle x \mapsto x\sqrt{2 \cdot \ln|x| + c} \rangle}$$

بیلګه ۳ $y' = (y/x) - (y^2 / x^2)$

سبستیچیوشن(د) په ځای ایښوول

$y = x \, . \, z$ او $y^2 = x^2 \, . \, z^2$ د خلقاعدې

سره dy / dx جوړوو او پېدو

$dy = z.dx + x.dz$

د مساوات د ښې بدلون له لارې x,dx

همداسې z, dz په دواړو لوروخانله کوو

د اووښتونکو له بیلولو وروسته

مساوات ایتیګرالوو.

د z لپاره بیرته y/x پېدو او

ایتیګریشنثابتی رایوځای کوو.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}-\frac{y^2}{x^2}$$

$$\blacktriangleright \quad y = x\cdot z \Rightarrow y^2 = x^2\cdot z^2$$

$$\Rightarrow dy = z\cdot dx + x\cdot dz$$

$$\frac{z\cdot dx + x\cdot dz}{dx}=\frac{x\cdot z}{x}-\frac{x^2\cdot z^2}{x^2}$$

$$z+\frac{x\cdot dz}{dx}=z-z^2$$

$$-\frac{dz}{z^2}=\frac{dx}{x}$$

$$-\int\frac{dz}{z^2}=\int\frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{z}+c_1=\ln|x|+c_2 \quad \blacktriangleright z=\frac{y}{x}$$

$$c_2-c_1=c$$

$$\frac{x}{y}=\ln|x|+c$$

$$y=\frac{x}{\ln|x|+c}$$

$$\Rightarrow f=\left\langle x\cdot-\frac{x}{\ln|x|+c}\right\rangle$$

د مساوات د y پسې اوبې مو

ټولیز اوبې f ته بیایې.

بیلګه ۴ : $y' \, . \, (y - x) = y$

(د) په ځای پېدو $y = x.z$,

د خلقانون سره dy / dx جوړووډ

مساوات بښیبدلونسره x,dx همداسې

z,dz په دواړو لورو خانله کوو.

د اووښتونو خانلونې وروسته

دواړه خواوپاینتیګرالوو.

نو باور لرې

$\int [\, f'(x) / f(x) \,].dx = \ln[f(x)] + C$

$$dy(y-x)=y\cdot dx$$

$$\blacktriangleright \quad y=x\cdot z$$

$$\Rightarrow dy = z\cdot dx + x\cdot dz$$

$$(z\cdot dx + x\cdot dz)(x\cdot z - x) = x\cdot z\cdot dx$$

$$x\cdot z^2\cdot dx - x\cdot z\cdot dx + x^2\cdot z\cdot dz - x^2\cdot dz - x\cdot z\cdot dx = 0$$

$$z^2\cdot dx - z\cdot dx + x\cdot z\cdot dz - x\cdot dz - z\cdot dx = 0$$

$$dx(z^2-2z)+x\cdot dz(z-1)=0$$

$$\int\frac{dx}{x}+\int\frac{z-1}{z^2-2z}\,dz=0$$

$$\int\frac{dx}{x}+\frac{1}{2}\int\frac{2z-2}{z^2-2z}\,dz=0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\ln|x| + c_1 + \frac{1}{2}\ln|z^2 - 2z| + c_2 = 0$$

$$2\cdot\ln|x| + \ln|z^2 - 2z| = 2(-c_1 - c_2)$$

$$\ln x^2 + \ln|z^2 - 2z| = -2(c_1 + c_2)$$

(د) په ځايونه y = x. z

د z = y / x اينسووني سره په

څټ راګرځول کيږي.

$$\blacktriangleright\ y = x\cdot z$$

$$\Rightarrow z = \frac{y}{x}$$

$$\ln\left|x^2\left(\frac{y^2}{x^2} - 2\frac{y}{x}\right)\right| = -2(c_1 + c_2)$$

$$\ln|y^2 - 2xy| = -2(c_1 + c_2)$$

$$y^2 - 2xy = e^{-2(c_1+c_2)}$$

$$\blacktriangleright\ e^{-2(c_1+c_2)} = c$$

$$\underline{y^2 - 2xy = c}$$

وروستی اوبيونه مو فنکش-

برابرون ته بيايي، کوم چی يواځي

ايمپليليځيت انځوريدلی شي.

۱ . ۲ . ۳ لايني ديفرنځيال مساوات

د لمړي نظم لايني ديفرنځيالمساوات

لاندې ، هغه مساوات پوهيږو، چی y

او y' په ۱ - ام ګراد کی ، دا په دې

مانا چی لايني وي، ولږي.دا شرطونه

داوبښتونکي x لپاره باور نه لري.

دلته F(x) او f(x) د x فنکشنونه

يا بلواک دي او يا ثابتی.

$$allgemein:\ \frac{dy}{dx} + y\cdot f(x) = F(x)$$

Beispiele:

- $y' - y\cdot\frac{2}{x} = \frac{x+1}{x}$
- $y'\cdot x = x\cdot\sin x - y$
- $y' + x^2 = x^4\cdot y$

د لايني دفرنځيالمساوات اوبيونی لپاره کيدی شي، چی بيلابيلی همغه ارزښتيز

متودونه وکارول شي.

د برنولي (Bernoulli) متود له مخی اوبيونه

۱ - سبستيچيوشنوو y = u(x).v(x) له

دي څخه دخلقاعدي له لاري لاس ته راځي

$$y' - y\cdot\frac{2}{x} = \frac{x+1}{x}$$

$$\blacktriangleright\ y = u(x)\cdot v(x)$$

د y او y ' لپاره ارزښتونه په دفرنځيا-

لمساوات کي کينښول کيږي

$$\Rightarrow y' = u(x)\frac{dv}{dx} + v(x)\frac{du}{dx}$$

$$\Rightarrow u(x)\frac{dv}{dx} + v(x)\frac{du}{dx} - u(x)\cdot v(x)\frac{2}{x} = \frac{x+1}{x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ – لومړی $u(x)$ همداسی $v(x)$ له نوکانو راوځي

۳ – د $u(x)$ همداسی $v(x)$ لپاره د خنکشمیرنی سره یو ترم غوښتل کیږي، کوم چې نوکترم $[dv / dx -(2/x)v(x)]$ او له دې سره د u خلوونې یا فاکتور صفر کیدی شي .

دا د $v(x) = x^2$ لپاره حالت دی، د نیونی $c_2 - c_1 = 0$ لاندې

د $v(x)$ لپاره راپیدا ارزښت، دا په دې مانا چې x^2 په مساوات کې کیښوول شي.له $v(x)$ سره چې حل $u(x)[dv/dx- 2v(x) / x]$ په صفر برابر شي یو پاتی غړی راکوي، له کوم سره چې du همداسی x.dx په دواړو خواو ځانله کیدی شي.

۴ – له پاتی غړي څخه $u(x)$ د اینتیګرال کولو له لارې تاکل کدی شي.

۵ – په وتلمساوات $y = u(x).v(x)$ کې راپیدا ارزښتونه کیښوول کیږي :
$u(x) = -(1/x)-(½x^2)+c; v(x) = x^2$

لاس ته راوړنه یې د ورکړ شوي اینتیګر المساوات ټولیز اوبیونه ده.

$$u(x)\left[\frac{dv}{dx}-\frac{2}{x}v(x)\right]+v(x)\frac{du}{dx}=\frac{x+1}{x}$$

$$\frac{dv}{dx}-\frac{2}{x}v(x)=0$$

$$\frac{dv}{v(x)}=\frac{2\,dx}{x}$$

$$\int\frac{dv}{v(x)}=2\cdot\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|v(x)|+c_1=2\cdot\ln|x|+c_2$$

$$\ln|v(x)|=\ln x^2+c_2-c_1$$

$$v(x)=x^2\cdot e^{c_2-c_1}\ \blacktriangleright\ c_2-c_1=0$$

$$v(x)=x^2$$

$$u(x)\left[\frac{dv}{dx}-\frac{2}{x}v(x)\right]+v(x)\frac{du}{dx}=\frac{x+1}{x}\ \blacktriangleright\ v(x)=x^2$$

$$u(x)\cdot\quad 0\quad +x^2\frac{du}{dx}=\frac{x+1}{x}$$

$$\frac{du}{dx}=\frac{x+1}{x^3}$$

$$\int du=\int\frac{x+1}{x^3}\,dx$$

$$\int du=\int\frac{1}{x^2}\,dx+\int\frac{1}{x^3}\,dx$$

$$u(x)=-\frac{1}{x}+c_1-\frac{1}{2x^2}+c_2\ \blacktriangleright\ c_1+c_2=c$$

$$=-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+c$$

$$y=\quad u(x)\quad\cdot v(x)$$

$$=\left(-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+c\right)\cdot x^2$$

$$=-x-\frac{1}{2}+cx^2;\ c\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f=\left\langle x\mapsto cx^2-x-\frac{1}{2}\,\middle|\,c\in\mathbb{R}\right\rangle$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

همدا بیلګه به اوس ددوم یعنی لاګرانژ له متود وشمیرل شي.

۱ - خاي په خاي کوو $F(x) = 0$ او راپاتې پاتې مساوات $y' - y.f(x) = 0$ د ورسره بلدمتود د اوبېتونکو بیلولو له لارې اوبې کوو. د اینتیګریشن ثابطې پهخاي، چې ګټور دي لوګاریتم ټاکو، چې دا لو-ګاریتم بیا له منځه ځي. $c_2 - c_1 = \ln|c|$ ثابته C په لنډ شوي هوموجین مساوات $y' - y.f(x)$ کې ثابته نه ده، بلکه د x یو فنکشن دی.

۲ - لاس ته راوړې مساوات د y لپاره د ځل یا ضرب قاعدې له لارې دیفرنځیالیږي.

۳ - د y او 'y دواړه توپه اوبیونې په سرچینز مساوات کې خاي په خاي کیږي او مساوات و $dC(x) / dx$ پسی اوبی کیږي.

۴ - د اینتیګرالولو لا لارې $C(x)$ لاس ته راوړ لکیږي.

۵ - په مساوات $y = x^2.C(x)$ کې د $C(x)$ لپاره ارزښت کیښول کیږي او مساوات ساده کیږي

$$y' - y\cdot\frac{2}{x} = \frac{x+1}{x}$$

$$y' - y\cdot f(x) = F(x) \blacktriangleright F(x) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} - y\cdot\frac{2}{x} = 0$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{2\,dx}{x}$$

$$\int\frac{dy}{y} = 2\cdot\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| + c_1 = 2\cdot\ln|x| + c_2$$

$$\ln|y| = \ln x^2 + c_2 - c_1 \blacktriangleright c_2 - c_1 = \ln|c|$$

$$\ln|y| = \ln x^2 + \ln|c|$$

$$\ln|y| = \ln|x^2\cdot c|$$

$$y = x^2 \cdot c \Rightarrow c = c(x)$$

$$= u(x)\cdot v(x)$$

$$u(x) = x^2 \Rightarrow u'(x) = 2x$$

$$v(x) = c(x) \Rightarrow v'(x) = \frac{dc(x)}{dx}$$

$$\Rightarrow y' = 2x\cdot c(x) + x^2\frac{dc(x)}{dx}$$

$$y' - y\cdot\frac{2}{x} = \frac{x+1}{x}$$

$$2x\cdot c(x) + x^2\frac{dc(x)}{dx} - x^2\cdot c(x)\cdot\frac{2}{x} = \frac{x+1}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{dc(x)}{dx} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{2}{x}\cdot c(x) - \frac{2}{x}\cdot c(x)$$

$$\int dc(x) = \int\frac{dx}{x^2} + \int\frac{dx}{x^3}$$

$$c(x) + k_1 = -\frac{1}{x} + k_2 - \frac{1}{2x^2} + k_3 \blacktriangleright k_2 + k_3 - k_1 = k$$

$$c(x) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + k;\ k\in\mathbb{R}$$

$$y = x^2\cdot c(x)$$

$$= x^2\cdot\left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + k\right)$$

دا نتیجه هم همغه برابره ټولیزه اوبیونه ده، لکه د مخه تیر د لاګرانژ اوبیوني متود.

$$y = -x - \frac{1}{2} + k \cdot x^2;\ k \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \mapsto -kx^2 - x - \frac{1}{2} \,\middle|\, k \in \mathbb{R} \right\rangle$$

بیلګه: د ۱ -ام نظم مساوت y' - ay = x د لانګرانژ او برنولي متودو له لارې اوبی کړی!

الف – (د) پهٔ ځاي اینښووني (سبستیچیوشن) y = u.v له لارې او مناسب رابیلیدنی ته dy / dx=u.(dv/dx)+ v(du/dx)

$$y' - ay = x \blacktriangleright y = u(x) \cdot v(x)$$

$$u(x)\frac{dv}{dx} + v(x)\frac{du}{dx} - a \cdot u(x) \cdot v(x) = x$$

$$u(x)\left[\frac{dv}{dx} - a \cdot v(x)\right] + v(x)\frac{du}{dx} = x$$

ب – u(x) له نوکانو راوځي

پ– په نوکانو کی ترم باید صفر شي، چی د u اود نوکانو ځل صفر شي.د اینتیګرالولو سره لویه v(x) ټاکل کیږي.

$$\frac{dv}{dx} - a \cdot v(x) = 0$$

$$\int \frac{dv}{v(x)} = a \cdot \int dx$$

$$\ln|v(x)| + c_1 = ax + c_2$$

$$\ln|v(x)| = ax + c_2 - c_1$$

$$v(x) = e^{ax + c_2 - c_1}$$

$$= e^{ax} \cdot e^{c_2 - c_1} \blacktriangleright c_2 - c_1 = 0$$

$$= e^{ax}$$

ت – د v(x) لپاره دا راپیدا ترم ځاي په ځاي کیږي او د اینتیګرال کیدو له لارې u لاس ته راځي.

د اینتیګرال اوبی د ټوټه اینتیګرال له لارې پیدا کیږي.

$$u(x) \cdot [0] + e^{ax} \cdot \frac{du}{dx} = x$$

$$\int du = \int \frac{x}{e^{ax}}\, dx$$

$$u(x) = -\frac{ax + 1}{a^2 \cdot e^{ax}} + c$$

ت – لاس ته راوړی ارزښت په مساوات y = u.v کی کینښول کیږي.

لاس ته راوړنه د برنولي پسي ټولیز اوبی دی

$$y = u(x) \cdot v(x) = \left(-\frac{ax + 1}{a^2 \cdot e^{ax}} + c\right) \cdot e^{ax}$$

$$y = -\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} + c \cdot e^{ax}$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \mapsto c \cdot e^{ax} - \frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} \right\rangle$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف – د لاگرانژ پسی بنی لور په صفر مساوي گیښول کیږي او dx همداسی dy, y په دواړو لورو ځانله کیږي.
راپاتی مساوات dy / y = a.dx اینتیگرالیږي، د y پسی بڼه–بدلیږي او $c_2 - c_1 = \ln|c|$ ږدو.

$$y' - a \cdot y = x \blacktriangleright x = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - a \cdot y = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = a \cdot \mathrm{d}x$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = a \cdot \int \mathrm{d}x$$

$$\ln|y| + c_1 = ax + c_2 \quad \blacktriangleright c_2 - c_1 = \ln|c(x)|$$

$$\ln|y| = ax + \ln|c(x)|$$

ب – د y لپاره برابرون د خل–قاعدې له لارې دیفرنځیالیږي.

$$y = \mathrm{e}^{ax} \cdot \mathrm{e}^{\ln|c(x)|}$$

$$= \mathrm{e}^{ax} \cdot c(x) = u(x) \cdot v(x)$$

$$y' = \mathrm{e}^{ax} \cdot \frac{\mathrm{d}c(x)}{\mathrm{d}x} + c(x) \cdot a \cdot \mathrm{e}^{ax}$$

پ – د y او' y لپاره ټوټه اوبیوني په پیلبرابرون کی کیښول کیږي.
داسی ودیز برابرون د dc(x) پسی اوبی کیږي له دې سره $a.e^{ax} . C(x)$ له منځه ځي

$$y' \qquad -a \cdot y \qquad = x$$

$$\mathrm{e}^{ax} \cdot \frac{\mathrm{d}c(x)}{\mathrm{d}x} + c(x) \cdot a \cdot \mathrm{e}^{ax} - a \cdot \mathrm{e}^{ax} \cdot c(x) = x$$

$$\mathrm{e}^{ax} \cdot \frac{\mathrm{d}c(x)}{\mathrm{d}x} = x$$

ت · ارزښت C(x) د اینتیگر–الولو له لارې لاس ته راځي

$$\int \mathrm{d}c(x) = \int \frac{x}{\mathrm{e}^{ax}} \,\mathrm{d}x$$

$$c(x) + k_1 = -\frac{ax+1}{a^2 \cdot \mathrm{e}^{ax}} + k_2 \blacktriangleright k_2 - k_1 = k$$

$$c(x) = -\frac{ax+1}{a^2 \cdot \mathrm{e}^{ax}} + k;\ k \in \mathbb{R}$$

ټ – لاس ته راوړلی ارزښتونه په مساوت
$y = u(x)\ v(x)\ e^{ax} .C(x)$
کی ږدو

$$y = \mathrm{e}^{ax} \cdot c(x)$$

$$= \mathrm{e}^{ax} \cdot \left(-\frac{ax+1}{a^2 \cdot \mathrm{e}^{ax}} + k \right)$$

$$= -\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} + k \cdot \mathrm{e}^{ax};\ k \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \cdot \mapsto k \cdot \mathrm{e}^{ax} - \frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} \middle| k \in \mathbb{R} \right\rangle$$

نتیجه د لاگرانژ پسی ټولیز اوبی دی.
دا د برنولي د نتیجی سره سرخوري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه: مساوات y' + y/x = sinx د برنولي متود سره اوبی کړی.

(د) په ځایکو y = u(x).v(x) اوy او y' په دفرنځیالبرابرون کی ږدو

$$y' + \frac{y}{x} = \sin x$$

$$\blacktriangleright y = u(x)\cdot v(x)$$

$$\Rightarrow y' = u(x)\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v(x)\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

$$u(x)\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v(x)\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \frac{u(x)\cdot v(x)}{x} = \sin x$$

$$u(x)\cdot\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + \frac{v(x)}{x}\right) + v(x)\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \sin x$$

نوکترم په 0 سره برابر ږدو اوv شمیری.

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + \frac{v(x)}{x} = 0 \Rightarrow v(x)\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \sin x$$

د پاتیمساوات څخه راپاتی دی v(x)(du/dx) = sin x

$$\int\frac{\mathrm{d}v}{v(x)} = -\int\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\ln|v(x)| + c_1 = -\ln|x| + c_2 \quad \blacktriangleright c_2 - c_1 = \ln|c|$$

$$\ln|v(x)| = \ln|x^{-1}| + \ln|c|$$

د c = 0 له امله لاس ته راځي: v(x) = 1 / x

$$v(x) = \frac{1}{x}\cdot c^{c} \blacktriangleright c = 0$$

$$\Rightarrow v(x) = \frac{1}{x}$$

له پاتبرابرون څخه u(x) د اینتیګرالولوله لارې تاکل کیږي

$$v(x)\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \sin x$$

$$\frac{1}{x}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \sin x$$

$$\int \mathrm{d}u = \int x\cdot\sin x\,\mathrm{d}x$$

$$u(x) + k_1 = \sin x - x\cdot\cos x + k_2 \blacktriangleright k_2 - k_1 = k$$

$$u(x) = \sin x - x\cdot\cos x + k;\ k\in\mathbb{R}$$

په y = u(x) .(x) کی لاس ته راوړل شوي ارزښتونه د u اوv لپاره ځاي په ځاي کړی. لاس ته راوړنه د برنولي پسی د ورکړ شوي مساوات تولیز اوبیدی.

$$y = u(x)\cdot v(x)$$

$$= (\sin x - x\cdot\cos x + k)\cdot\frac{1}{x}$$

$$= \frac{\sin x}{x} - \cos x + \frac{k}{x}$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \mapsto \frac{\sin x}{x} - \cos x + \frac{k}{x} \,\middle|\, k\in\mathbb{R}\right\rangle$$

بیلګه : مساوات $y' + y = e^{-x}$ د لاګرانژ د متود له لارې اوبې کړی.

ږدو $F(x) = e^{-x} = 0$ او پاتې مساوات د اووښتونو د بیلولو له لارې اوبی کوو.

$$y' + y = e^{-x} \blacktriangleright e^{-x} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int dx$$

د اینتیګریشنثابتو په څیر کینبوول کیږي $c - c = \ln|c(x)|$ اوy تاکو د خلقاعدې سره y' شمیرل کیږي

$$\ln|y| + c_1 = -x + c_2 \blacktriangleright c_2 - c_1 = \ln|c(x)|$$

$$\ln|y| = -x + \ln|c(x)|$$

$$y = e^{-x} \cdot c(x)$$

$$= u(x) \cdot v(x)$$

$$y' = \frac{dc(x)}{dx} \cdot e^{-x} - c(x) \cdot e^{-x}$$

د y او y' لپاره برخ اوبیونی په پیلمساوات کی کینبوول کیږي او $c(x) \cdot e^{-x}$ او e^{-x} لرې کیږي.

$$\underbrace{\frac{dc(x)}{dx} \cdot e^{-x} - c(x) \cdot e^{-x}}_{y'} + \underbrace{e^{-x} \cdot c(x)}_{y} = e^{-x}$$

د اینتیګریشن له لارې $c(x)$ تاکل کیږي.

$$\int dc(x) = \int dx$$

$$c(x) + k_1 = x + k_2 \blacktriangleright k_2 - k_1 = k$$

$$c(x) = x + k;\ k \in \mathbb{R}$$

په مساوات $y = e^{-x}.(x)$ کې $c(x)$ کینبوول کیږي. نتیجه د لاګرانژ پسی تولیز اوبیونه ده

$$y = e^{-x} \cdot c(x) \blacktriangleright c(x) = x + k$$

$$= e^{-x}(x + k);\ k \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f = \langle x \mapsto -e^{-x}(x + k) | k \in \mathbb{R} \rangle$$

تمرینونه

۱ . ۲ د لمرینظم دفرنځیالمساوات

۱ . ۲ . ۱ د فرنځیالمساوات د بیلوشوو اوبښتونو سره

د لاندې دفرنځیالمساوات لپاره تولیزبن اوبیونیورکړی

1. $y' = \frac{y}{2a}$ 2. $y' = axy$ 3. $y' - 1 = x^2 + x^4$

4. $y' - x^3 = y - x^3$ 5. $\frac{y'}{2x} = y^2$ 6. $y' = \frac{y^2}{x^2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

7. $2xy^2 = y'$

8. $y' = \dfrac{b^2 x}{a^2 y}$

9. $y' = \dfrac{2}{\sqrt{a^2 + x^2}}$

10. $x^2 + 2x = y'$

11. $xy' = y \cdot \ln y$

12. $(1 - x^2)\,dy + xy \cdot dx = 0$

13. $y' = \dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$

14. $y' = e^x y$

15. $\sqrt{y'} = y'x$

16. $y' = (yy')^2$

17. $dy = \dfrac{dx}{x(x^2 + 2x + 1)}$

18. $y' = \dfrac{x^2\sqrt{x^2+4}}{y^2\sqrt{y^2+9}}$

19. $yx \cdot \sin(2x) = y'$

20. $\dfrac{dx}{dy} = \ln y$

21. $dx(e^y + e^{-y}) = dy(e^x + e^{-}$

22. $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3 = x^2 y^3$

23. $(x + y)^2 = y'$

24. $y'^2 y = x^2 y' - y'$

25. $y'^2 - 2x - x^2 = 0$

26. $y' \cdot \text{Arcsin}\, y = x^2$

27. $x \cdot e^{x^2} = y' \cdot e^y$

28. $y \cdot \ln x = y'$

29. $x \cdot \sinh x = y' \cdot \cosh y$

30. $\dfrac{\text{Arsinh}\, x}{\text{Arcosh}\, y} = y'$

۱ . ۲ . ۲ دیفرنځیالمساوات د هوموجین اووښتونکو یا واریابلو سره لاندې دفرنځیالمساوات اوبی کړی

1. $y'x = -(x + y)$

2. $y'x = y$

3. $y' = \dfrac{x + y}{x}$

4. $y'x^2 - yx = x^2 + y^2$

5. $y'xy = y^2 - x^2$

6. $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = y'$

7. $dy \cdot x = (y - x)\,dx$

8. $y' - \dfrac{y}{x} = \tan \dfrac{y}{x}$

9. $(x + y)\,dx - (x - y)\,dy = 0$

10. $x^2 + xy + y^2 = x^2 y'$

11. $y' = \dfrac{2xy}{3x^2 - y^2}$

12. $y' = \dfrac{y}{x} \ln \dfrac{y}{x}$

13. $x \cdot dy - y \cdot dx = y \cdot dy$

14. $y^2 + (x^2 - xy)\,y' = 0$

15. $y^2 \cdot dx - 3x^2 \cdot dx + 2xy \cdot dy = 0$

16. $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$

17. $xy' = y(\ln y - \ln x)$

18. $y \cdot dx + \sqrt{4xy} \cdot dy = x \cdot dy$

19. $\dfrac{2y(y - x)}{x^2 - 2xy + y^2} = y'$

20. $y' = \dfrac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ . ۲ . ۳ لايني ديفرنخيالمساوات

لاندې ديفرنخيالمساوات د برنولي او لاگرانژ متودونو سره اوبی کړی.

1. $y' + 2xy = \frac{x}{e^{x^2}}$	2. $y' = e^x - y$	3. $y' - y = x^2 - 1$
4. $y' = e^{3x} - 2y$	5. $y'x = y + x^2 \cdot \sin x$	6. $y'x = x \cdot \sin x - y$
7. $y' + y + \cos x - e^{2x} = 0$	8. $y' + ay = b \cdot e^{cx}$	9. $y' + ay - b \cdot \sin(cx) = 0$
10. $y' = \frac{y}{x} + \frac{1}{\ln x}$	11. $y' = a + bx + cy$	12. $xy' + 1 = e^x + y$
13. $y'(1 - x^2) + xy = 1$	14. $\frac{y'}{\sin x} - y = 1 - \cos x$	15. $y' + y \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin(2x)$
16. $y' - y \cdot x = x^2 - 1$	17. $y'x^2 + y = x$	18. $y' + \frac{1}{1+x} y + x^2 = 0$
19. $y' + y \cdot \cos x = e^{-\sin x}$	20. $y' + y \cdot \tan x = \sin(2x)$	21. $y' - 2y = 3 - x$

۱ . ۳ د دويم نظم ديفرنخيالمساوات

د دويم نظم ديفرنخيالمساوات لاندې يو مساوات پوهيږو، چی $y'' = d^2y / dx^2$ د خورا جگ دفيرنخيالکوشنت يا دفيرنخيالويش په څير ولري، د دې ترڅنگ کيدی شي $y' = dy / dx$. x او y رامنځ ته شي.

د ديفرنخيالمساواتو په دې پيلونی په چاپيريال کی کيدی شي ، چی لنډ يو څو د دويم نظم ديفرنخيالمساوات او د هغو کارونه يا استعمال باندې خبرې وشي.

د $y'' = f(x)$ بنی ديفرنخيالمساوات

بېلګه:

Beispiel:

$$y'' = -\sin x$$

$$\int y'' \, dx = \int -\sin x \, dx$$

$$y' = \cos x + c_1 \; ; \; c_1 \in \mathbb{R}$$

$$\int y' \, dx = \int \cos x \, dx + c_1 \cdot \int dx$$

$$y = \underline{\underline{\sin x + c_1 x + c_2 \; ; \; c_2 \in \mathbb{R}}}$$

$$\Rightarrow f = \underline{\underline{\langle x \mapsto -\sin x + c_1 x + c_2 | c_1 \; ; \; c_2 \in \mathbb{R} \rangle}}$$

د اوبيونی تلنه: د رابيليدنی د له منځه ورلو د اوبيوني پرينځيپ دېرواره اينتيگرالول دي.

الف: د برابرون دواړه لوري اينتيگراليږي

۲ – راپورته شوي دفرنخيالمساوات بيا اينتيگراليږي.

۳ – په ورکړ شوي حالت کي له شرايطو c_1 او c_2 وټاکی

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګی:

لمړی – $y'' = 1/(1+x^2)$

د لمړي اینتګریشن سره لاس

ته y' راځي

بیا د y' اینتیګریشن سره y

لاس ته راځی اوله دې سره د f

تولیزه اوبیونه

$$\int y''\,dx = \int \frac{dx}{1+x^2}$$

$$y' = \text{Arctan}\,x + c_1$$

$$\int y'\,dx = \int \text{Arctan}\,x\,dx + c_1 \cdot \int dx$$

$$y = x \cdot \text{Arctan}\,x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c_3 + c_1 x + c_4$$

$$\blacktriangleright c_3 + c_4 = c_2$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \mapsto x \cdot \text{Arctan}\,x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c_1 x + c_2 \right\rangle$$

دویم – $y'' = x^2 + x + 1$

لمړی اینتیګرال راکوي

ثابتي c_3, c_4, c_5 د اینتیګر–

یشنثابتی c_1 ته یوځای کیږي

دویم ایتګریشن y راکوي

ثابتی c_6, c_7, c_8, c_9 ایتیګریشن

ثابتی c_2 ته رائیوځایکیږي

دلته f تولیز اوبیفنکشن دی

$$\int y''\,dx = \int x^2\,dx + \int x\,dx + \int dx$$

$$y' = \frac{x^3}{3} + c_3 + \frac{x^2}{2} + c_4 + x + c_5$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + c_1$$

$$\int y'\,dx = \frac{1}{3}\int x^3\,dx + \frac{1}{2}\int x^2\,dx + \int x\,dx + c_1 \cdot \int dx$$

$$y = \frac{x^4}{12} + c_6 + \frac{x^3}{6} + c_7 + \frac{x^2}{2} + c_8 + c_1 x + c_9$$

$$= \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \mapsto \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2 \right\rangle$$

3. $y'' = x \cdot e^x = u(x) \cdot v'(x)$

$$\int u(x) \cdot v'(x)\,dx = u(x) \cdot v(x) - + \int u'(x) \cdot v(x)\,dx$$

$$\int x \cdot e^x\,dx = x \cdot e^x - \int e^x\,dx$$

$$= x \cdot e^x - e^x + c_1$$

دلته f تولیز اوبیفنکشن دی

$$\int y''\,dx = \int x \cdot e^x\,dx = \int u(x) \cdot v'(x)\,dx$$

$$y' = x \cdot e^x - e^x + c_1$$

$$\int y'\,dx = \int x \cdot e^x\,dx - \int e^x\,dx + c_1 \cdot \int dx$$

$$y = x \cdot e^x - e^x + c_3 - e^x + c_4 + c_1 x + c_5$$

$$\blacktriangleright c_3 + c_4 + c_5 = c_2$$

$$= e^x(x-2) + c_1 x + c_2$$

$$\Rightarrow f = \langle x \mapsto e^x(x-2) + c_1 x + c_2 \rangle$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د جګ نظم دف. مساوات کیدی شي کله کله په ورته توګه اوبی شي

4. $y^{(4)} = x$

لمړی اتیګرالونه "' y رااکوي،
دومه – "y دریمه– 'y او
څلورم انتیکریشن y راکوي

$$\int y^{(4)}\,dx = \int x\,dx$$

$$y''' = \frac{x^2}{2} + c_1$$

$$\int y'''\,dx = \frac{1}{2}\int x^2\,dx + c_1 \cdot \int dx$$

$$y'' = \frac{x^3}{6} + c_2 + c_1 x + c_3$$

$$\int y''\,dx = \frac{1}{6}\int x^3\,dx + c_1 \cdot \int x\,dx + (c_2 + c_3)\int dx$$

$$y' = \frac{x^4}{24} + c_4 + \frac{1}{2}c_1 x^2 + c_5 + (c_2 + c_3)x + c_6$$

$$\int y'\,dx = \frac{1}{24}\int x^4\,dx + \frac{1}{2}c_1 \cdot \int x^2\,dx + $$

$$+ (c_2 + c_3)\int x\,dx + (c_4 + c_5 + c_6)\int dx$$

اړوند انتیکریشنثابتی سره
رایوځاي کیږي

$$y = \frac{x^5}{120} + c_7 + \frac{x^3}{6}c_1 + c_8 + (c_2 + c_3)\frac{x^2}{2} + c_9 +$$

$$+ (c_4 + c_5 + c_6)x + c_{10}$$

$$= \frac{x^5}{120} + k_1\frac{x^3}{6} + k_2\frac{x^2}{2} + k_3 x + k_4$$

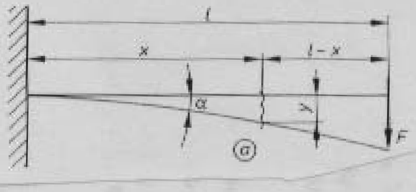
$k_1 = c_1$
$k_2 = c_2 + c_3$
$k_3 = c_4 + c_5 + c_6$
$k_4 = c_7 + c_8 + c_9 + c_{10}$
$k_1; k_2; k_3; k_4 \in \mathbb{R}$

د لته f د ټولیز ابیفنکشن دی

$$\Rightarrow f = \left\langle x \cdot - \frac{x^5}{120} + k_1\frac{x^3}{6} + k_2\frac{x^2}{2} + k_3 x + k_4 \right\rangle$$

بیلګه : یوه یونوریز غزول شوي باوړونی کیږون y وشمیری، چی اوږدوالی l او تکیهوله پریوتلی زور یې F وي له میخانیك څخه د کیږون شمیرني برابرون څرګند دی. د یو لنډ برابرون دی، چی په تخنیك د واړه ورسره بلد کیږون لپاره باور لري. په یوه په خوښه ځاي a کی کیږومومنت دی F (l - x) -

M = کیږونمونت
E = د ترموالی– یاالاستیشیتي مودول
l = د هواري وړونمومنت



(c) ketabton.com: The Digital Library

د اینتیګراولو له لارې y'' په y' او y اوړي.

$$y'' = -\frac{M}{E \cdot I} \qquad \blacktriangleright M = -F(l-x)$$

$$= \frac{F(l-x)}{E \cdot I}$$

د دویم اینتیګرالونی د مخه ثابته c_1 د باروړوني مخ ته پراته شرایطو څخه شمیرل کیږي. د $x = 0$ په ځاي کی جګوالی y' هم صفر دی. د دې سره ثابته $c_1 = 0$ ده.

$$y' = \frac{F}{E \cdot I} \int (l-x)\,dx$$

$$= \frac{F}{E \cdot I}\left(lx - \frac{x^2}{2}\right) + c_1$$

$$\text{für } x = 0 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

دویم اینتیګرولول مود یفرنشلبررابرون ته بیایي.

$$y = \frac{F \cdot l}{E \cdot I} \int x\,dx - \frac{F}{2 \cdot E \cdot I} \int x^2\,dx$$

$$= \frac{F}{E \cdot I}\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + c_2$$

دومه ثابته c_2 هم صفر دی، دا چی د y راګیږونه د $x = 0$ په ځاي کی د صفر سره برابره ده.

$$\text{für } x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$y = \frac{F}{E \cdot I}\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)$$

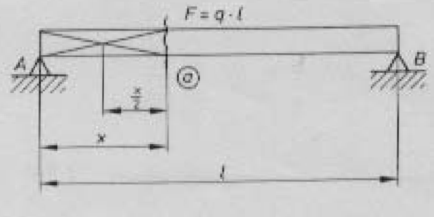
$$\Rightarrow f = \left\langle x \cdot - \frac{F}{E \cdot I}\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)\right\rangle$$

ماکسیمال ګږونه د $x = l$ سره پرته ده. y_{max} د $x = l$ ځاي په ځاي کولو سره لاس ته راځي.

$$\text{für } x = l \Rightarrow y_{max} = \frac{F}{E \cdot I} \cdot \frac{l^3}{3}$$

بیلګه په دوه ستنو ولاړ باروړونکي ماکسیمال ګږون وشمیرئ، د لیکي بار q سره. د تیر په یوه ځاي a باندې مومنتمساوات ځاي په ځاي کوو.

دا چی بار په برابرډول ویشل شوی دی، نو پرتی هر A او B هر یو یی د ټول بار نیمی دي.



$$A = B = \frac{q \cdot l}{2} = \frac{F}{2}$$

$$M = \frac{q \cdot l}{2}\,x - q \cdot x \cdot \frac{x}{2}$$

Die Momentengleichung د مومنټ برابرون

$$M = \frac{q \cdot l}{2} x - \frac{q}{2} x^2$$

په ديفرنځيالمساوات كي كيښول كيږي.

د y'' لپاره برابرون د اينتيګريشن سره و y' ته بيرته بيول كيږي

په $x = l/2$ ځاي كى هغه لوي كږون مخ ته پروت دى، دا په دې مانا چى په دې ځاي كى تنجنت د كږونكربنى سره پرته يعنى افقي پرته ده، جګى يا جګوالى $y' = 0$ مساوي په صفر دى.

د c_1 لپاره راپيداشوى ارزښت په برابرون y' كى ايښول كيږي. د y' د بيا يا نوي اينتيګرلوني سره فنكشن y ټاكل كيږي.
د $x = 0$ په ځاي كى راګږون $y = 0$ دى. د دې سره تابته $c_2 = 0$ ده.

د $x = l/2$ لپاره هغه خورا لوي كږون y_{max} مخ ته لرو دى، چى د ½ اينښوولو سره د خورا لوي كږون فرمول لاس ته راځي

$$y'' = -\frac{M}{E \cdot I} \quad \blacktriangleright M = \frac{q \cdot l}{2} x - \frac{q}{2} x^2$$

$$= -\frac{q \cdot l}{2 \cdot E \cdot I} x + \frac{q}{2 \cdot E \cdot I} x^2$$

$$y' = -\frac{q \cdot l}{2 \cdot E \cdot I} \int x \,\mathrm{d}x + \frac{q}{2 \cdot E \cdot I} \int x^2 \,\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{q \cdot l \cdot x^2}{4 \cdot E \cdot I} + \frac{q \cdot x^3}{6 \cdot E \cdot I} + c_1$$

$$x = \frac{l}{2} \quad y' = 0$$

$$\Rightarrow 0 = -\frac{q \cdot l^3}{16 \cdot E \cdot I} + \frac{q \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot I} + c_1$$

$$c_1 = 0 - \frac{q \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot I} + \frac{q \cdot l^3}{16 \cdot E \cdot I}$$

$$= \frac{q \cdot l^3}{24 \cdot E \cdot I}$$

$$y' = \frac{q \cdot x^3}{6 \cdot E \cdot I} - \frac{q \cdot l \cdot x^2}{4 \cdot E \cdot I} + \frac{\cdot l^3}{24 \cdot E \cdot I}$$

$$= \frac{q}{6 \cdot E \cdot I} \int x^3 \,\mathrm{d}x - \frac{q \cdot l}{4 \cdot E \cdot I} \int x^2 \,\mathrm{d}x + \frac{q \cdot l^3}{24 \cdot E \cdot I} \int \mathrm{d}x$$

$$y = \frac{q \cdot x^4}{24 \cdot E \cdot I} - \frac{q \cdot l \cdot x^3}{12 \cdot E \cdot I} + \frac{q \cdot l^3 \cdot x}{24 \cdot E \cdot I} + c_2$$

$$x = 0 \quad y = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$\Rightarrow y = \frac{q}{24 \cdot E \cdot I} (x^4 - 2 \cdot l \cdot x^3 + l^3 \cdot x)$$

$$x = \frac{l}{2} \Rightarrow y_{max} = \frac{q}{24 \cdot E \cdot I} \left(\frac{l^4}{16} - \frac{l^4}{4} + \frac{l^4}{2} \right)$$

$$= \frac{5 \cdot q \cdot l^4}{384 \cdot E \cdot I}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د y "= f(y) فورم يا بني ديفرنځيال مساوات

اوبيوونکنه *Lösungsgang:*

$$y' = \frac{dy}{dx} = z,$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dx}$$

$$\frac{dy}{dy},$$

$$\frac{dz}{dx} \cdot \frac{dy}{dy} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} z$$

۲ – مساوات اينتيګرايږي او z شميرل کيږي.

۳ – او بيا ورپسې د واريابلی د خانلونی متود له لارې شميرل کيږي.

د اوبيوني په څير ايمپليخيت فنکشنمساوات لاس ته راځي

بېلګه **Beispiel:**

$$y'' = ay \;\blacktriangleright y' = \frac{dy}{dx} = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = ay \;\blacktriangleright \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} z$$

$$\frac{dz}{dy} z = ay$$

$$z \cdot dz = a \cdot y \cdot dy$$

$$\int z\,dz = a \cdot \int y\,dy$$

$$\frac{z^2}{2} + c_1 = \frac{ay^2}{2} + c_2$$

$$z^2 = ay^2 + 2(c_2 - c_1) \;\blacktriangleright 2(c_2 - c_1) = c_3$$

$$z = \sqrt{ay^2 + c_3} \;\blacktriangleright z = \frac{dy}{dx}$$

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{ay^2 + c_3}}$$

$$\int dx = \int \frac{dy}{\sqrt{ay^2 + c_3}}$$

$$x + c_4 = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| y + \sqrt{y^2 + \frac{c_3}{a}} \right| + c_5$$

بېلګې: **Beispiele:**

1. $y'' = \frac{a}{2}$

$$\frac{dz}{dx} \quad \frac{dy}{dy}$$

$$\frac{dz}{dx} \cdot \frac{dy}{dy} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} z$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{a}{2} \;\blacktriangleright y' = z$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{a}{2} \;\blacktriangleright \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} z$$

$$\frac{dz}{dy} z = \frac{a}{2}$$

$$\int z\,dz = \frac{a}{2} \int dy$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مساوات اینتیګریشن پسی z شمیرل کیږي

$$\frac{z^2}{2} + c_1 = \frac{a}{2}y + c_2$$

$$z^2 = ay + 2(c_2 - c_1) \quad \blacktriangleright 2(c_2 - c_1) = c_3$$

$$z = \sqrt{ay + c_3} \quad \blacktriangleright z = \frac{dy}{dx}$$

ورپسی د اووښتونی د ځانلونی متود له لاري شمیرل کیږي

$$\int dx = \int \frac{dy}{\sqrt{ay + c_3}}$$

$$x + c_4 = \frac{2}{a}\sqrt{ay + c_3} + c_5 \blacktriangleright c_4 - c_5 = c_6$$

$$(x + c_6)^2 = \frac{4}{a^2}(ay + c_3)$$

$$\frac{a^2}{4}(x + c_6)^2 - c_3 = ay$$

$$\Rightarrow y = \frac{a}{4}(x + c_6)^2 - \frac{c_3}{a}$$

د لته f ټولیزه اوبیونه ده

$$\Rightarrow f = \left\langle x, -\frac{1}{a}\left[\frac{a^2}{4}(x + c_6)^2 - c_3\right]\right\rangle$$

2. $y'' = -\frac{1}{2}\sin y$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = -\frac{1}{2}\sin y \quad \blacktriangleright y' = z$$

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{2}\sin y \quad \blacktriangleright \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}z$$

$$\int z\,dz = -\frac{1}{2}\int \sin y\,dy$$

$$\frac{z^2}{2} + c_1 = \frac{1}{2}\cos y + c_2$$

$$z^2 = \cos y + 2(c_2 - c_1) \quad \blacktriangleright 2(c_2 - c_1) = c_3$$

$$z = \sqrt{\cos y + c_3} \quad \blacktriangleright z = \frac{dy}{dx}$$

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{\cos y + c_3}}$$

د دفرنځیالمساوات اوبیونه مو یوه ناواوبیووني (نامنحل) اینتیګرال ته بیایي.

$$x + c_4 = \int \frac{dy}{\sqrt{\cos y + c_3}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $y'' = f(y')$ بني دفرنخيلامساوات

Lösungsgang: اوبیونلار

$y' = \frac{dy}{dx} = z$

$y'' = \frac{dz}{dx}$ ein.

۲ – راپورته شوی مساوات اینتیګرال کیږي او په z پسی ترتیبیږي

۳ – دلته z اوبی کیږي، بیا اینتیګرالول یي د دیفرنخیال-مساوات بولیز اوبیونه لاس ته راځي.

Beispiel: بیلګه:

$y'' = ay' \quad \blacktriangleright y' = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dx}$

$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = a \cdot z$

$\frac{dz}{z} = a \cdot dx$

$\int \frac{dz}{z} = a \cdot \int dx$

$\ln z + c_1 = ax + c_2$

$\ln z = ax + c_2 - c_1 \quad \blacktriangleright c_2 - c_1 = c_3$

$z = e^{ax + c_3} \quad \blacktriangleright z = \frac{dy}{dx}$

$\int dy = \int e^{ax + c_3} dx$

$y = \frac{1}{a} e^{ax + c_3} + c_4 \quad \blacktriangleright e^{c_3} = c_5$

$\Rightarrow f = \left\langle x \mapsto \frac{1}{a} c_5 \cdot e^{ax} + c_4 \right\rangle$

Beispiele: بیلګې:

1. $y'' = y'^2$

$y'' = y'^2 \blacktriangleright y' = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dx}$

$\frac{dz}{dx} = z^2$

$\int \frac{dz}{z^2} = \int dx$

$-\frac{1}{z} + c_1 = x + c_2 \quad \blacktriangleright z = \frac{dy}{dx}$

$c_2 - c_1 = c_3$

$-\int \frac{dx}{x + c_3} = \int dy$

$-\ln|x + c_3| + c_4 = y + c_5 \quad \blacktriangleright c_4 - c_5 = c_6$

$\Rightarrow y = c_6 - \ln|x + c_3|$

$\Rightarrow f = \langle x \mapsto c_6 - \ln|x + c_3| \rangle$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2. $y'' = 1 - y'^2$

$$y'' = 1 - y'^2 \blacktriangleright y' = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx} = 1 - z^2$$

$$\int \frac{dz}{1 - z^2} = \int dx$$

$$\text{Artanh}\, z + c_1 = x + c_2 \quad \blacktriangleright c_2 - c_1 = c_3$$

$$z = \tanh(x + c_3) \quad \blacktriangleright z = \frac{dy}{dx}$$

$$\int dy = \int \tanh(x + c_3)\, dx$$

$$y + c_4 = \ln|\cosh(x + c_3)| + c_5 \quad \blacktriangleright c_5 - c_4 = c_6$$

$$y = c_6 + \ln|\cosh(x + c_3)|$$

د لته f د تولیز اٞیفنکشن دی

$$\Rightarrow f = \langle x, -c_6 + \ln|\cosh(x + c_3)|\rangle$$

تمرینونه

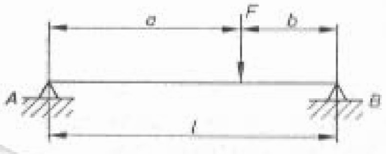
۳۱ . د دوم نظم دفرنځیالمساوات

لاندې دفرنځیالمساوت اوبې کړی

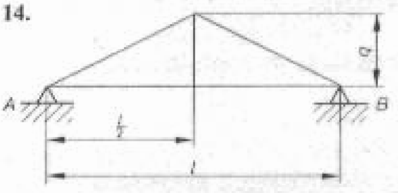
1. $y'' = \frac{1}{x}$	**2.** $\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$	**3.** $y'' - x^3 = 0$
4. $y'' = x + \sin x$	**5.** $y'' = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$	**6.** $y'' = \tan x$
7. $y'' = \sinh x$	**8.** $y'' = e^{x^2}$	**9.** $y^{(4)} = \cos x$
10. $y'' = e^x$	**11.** $y^{(4)} = \sinh(2x)$	**12.** $y^{(5)} = \cosh(ax)$

د کږون لاین او خورا جگ یا ماکسیمال کږوونی مساوات د لاندې بارونحالت یا بار حالت یا دروندونی حالت لپاره پیدا کړی

13.

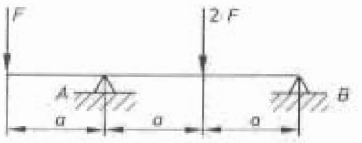


14.

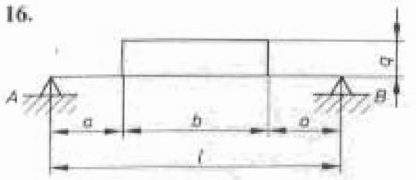


(c) ketabton.com: The Digital Library

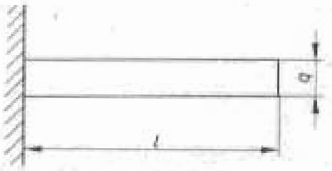
15.



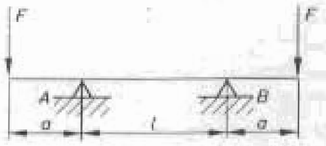
16.



17.



18.



لاندې دفرنشيالمساوات اوبې کړی

19. $y'' = \frac{1}{\sqrt{y}}$

20. $y'' = a \cdot e^y$

21. $y^4 - y^3 y'' = 1$

22. $y'' = \frac{1}{y}$

23. $y^2 = k^2 y''$

24. $y'' = y^2$

25. $y^2 \cdot y'' = a$

26. $y'' = 6y - 4$

27. $y'' = 1 + y'^2$

28. $y''^2 = 1 + y'^2$

29. $y'' = e^{y'}$

30. $y'' = y'^3$

31. $y'^2 - 3y''^2 = 0$

32. $y''' + y''^2 = 0$

33. $xy''^2 = y$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تمرینونو اوبیونه یا حل

۱ . ۱ بنسټکلیمی تمرینونه

1. $y''=x\cdot e^x$

$$y''=(y')'=x\cdot e^x$$

$$y'=\int x\cdot e^x\,dx$$

$$\int x\cdot e^x\,dx=e^x(x-1)+c_1$$

$$y'=x\cdot e^x-e^x+c_1$$

$$y=\int x\cdot e^x\,dx-\int e^x\,dx+c_1\int dx$$

$$y=e^x(x-1)+c_2-e^x-c_3+c_1x+c_4$$

$c_2-c_3+c_4=c$

2. $y''-x=0$

$$y''=(y')'=x$$

$$y'=\int x\,dx=\frac{x^2}{2}+c_1$$

$$y=\int(y')\,dx=\frac{1}{2}\int x^2\,dx+c_1\int dx$$

$$y=\frac{1}{2\cdot 3}x^3+c_2+c_1x+c_3$$

$c_2+c_3=c$

$$y=\frac{1}{6}x^3+c_1x+c$$

3. $2y'-\cos x=0$

$$y'=\frac{1}{2}\cos x$$

$$y=\frac{1}{2}\int\cos x\,dx$$

$$y=\frac{1}{2}\sin x+c$$

4. $x\cdot y''=3y'$

$$x\cdot y''=3y' \quad \blacktriangleright\ y'=z;\quad y''=z'$$

$$x\cdot z'=3z$$

$z'=\dfrac{dz}{dx}$

$$x\cdot\frac{dz}{dx}=3z$$

$$\frac{dz}{z}=\frac{3dx}{x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int \frac{dz}{z} = 3 \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln z = 3 \ln x$$

$$z = x^3 \quad \blacktriangleright z = y'$$

$$y' = x^3 \Rightarrow y = \int x^3 \, dx = \underline{\underline{\frac{x^4}{4} + c}}$$

5. $y \cdot \ln x = x \cdot y'$

$$y \cdot \ln x = x \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{\ln x}{x} \, dx = \frac{1}{y} \, dy$$

$$\int \frac{\ln x}{x} \, dx = \int \frac{1}{y} \, dy$$

$$\frac{1}{2} \ln^2 x = \ln y$$

$$y = \underline{\underline{e^{\frac{1}{2} \ln^2 x} + c}}$$

6. $y' \cdot y + y' + x = 0$

$$y'(y+1) = -x$$

$$\frac{dy}{dx}(y+1) = -x$$

$$\int (y+1) \, dy = -\int x \, dx$$

$$\frac{y^2}{2} + y = -\frac{x^2}{2} + c_1$$

$c_2 = 2c_1$

$$y^2 + 2y = -x^2 + c_2$$

$c = 1 + c_2$

$$y = -1 \pm \sqrt{1 - x^2 + c_2}$$

$$= \underline{\underline{-1 \pm \sqrt{c - x^2}}}$$

7. $y' - x^2 = 3e^x$

$$y' = 3e^x + x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = 3e^x + x^2$$

$$dy = (3e^x + x^2) \, dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int dy = \int (3e^x + x^2)\,dx$$

$$y = 3e^x + \frac{1}{3}x^3 + c$$

8. $\sin x - e^x = y'$

$$\frac{dy}{dx} = \sin x - e^x$$

$$dy = (\sin x - e^x)\,dx$$

$$\int dy = \int (\sin x - e^x)\,dx$$

$$y = -\cos x - e^x + c$$

9. $y \cdot y' = x + 1$

$$y \cdot \frac{dy}{dx} = x + 1$$

$$y \cdot dy = (x+1) \cdot dx$$

$$\int y\,dy = \int (x+1)\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + x + c_1$$

$c = 2c_1$

$$y = \pm\sqrt{x^2 + 2x + c}$$

10. $y' \cdot y^2 = y' - x^2$

اوبیونه د y پسې اوبیوږ نه دي،
له دې امله ایمپلیشیت اوبیونه

$$y'(y^2 - 1) = -x^2$$

$$dy(y^2 - 1) = (-x^2)\,dx$$

$$\int (y^2 - 1)\,dy = -\int x^2\,dx$$

$$\frac{y^3}{3} - y = -\frac{x^3}{3} + c$$

11. $\frac{dy}{dx} - 3x = e^x$

$$\frac{dy}{dx} = e^x + 3x$$

$$\int dy = \int (e^x + 3x)\,dx$$

$$y = e^x + \frac{3}{2}x^2 + c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

12. $y' - x^2 = x^2 - y'$

$$2y' = 2x^2 \quad \|:2$$

$$\frac{dy}{dx} = x^2$$

$$\int dy = \int x^2\, dx$$

$$y = \frac{x^3}{3} + c$$

13. $\frac{dy}{dx} + \cos x = 1$

$$dy = (1 - \cos x)\, dx$$

$$\int dy = \int (1 - \cos x)\, dx$$

$$y = x - \sin x + c$$

14. $y^3 \cdot y' = \sqrt{x^2 - 1}$

$$\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = $$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} -$$

$$- \frac{a^2}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}|$$

$c = 4c_1$

$$y^3 \cdot \frac{dy}{dx} = \sqrt{x^2 - 1}$$

$$\int y^3 \cdot dy = \int \sqrt{x^2 - 1}\, dx$$

$$\frac{y^4}{4} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - 1} - \frac{1}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 - 1}| + c_1$$

$$y^4 = 2x\sqrt{x^2 - 1} - 2 \ln |x + \sqrt{x^2 - 1}| + c$$

$$y = \pm \sqrt[4]{2x\sqrt{x^2 - 1} - \ln (x + \sqrt{x^2 - 1})^2 + c}$$

15. $x^2 \cdot y' = x^4 - x^2$

که دفرنځیالمساوات په x^2 ویشل کیږي، باید $x \neq 0$ وغوښتل شي.
که د $x \neq 0$ لپاره اوبیونه په پام کې ونیول شي، پیژندل کیږي چې دفرنځیالمساوات د $x = 0$ لپاره هم اوبیونه پوره کوي، په دې توګه د ټول x لپاره اوبیونه پوره ده.

$$x \neq 0 \Rightarrow y' = x^2 - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - 1$$

$$dy = (x^2 - 1)\, dx$$

$$\int dy = \int (x^2 - 1)\, dx$$

$$y = \frac{x^3}{3} - x + c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

16. $e^x \cdot y' = y$

Partikuläre Lösung: $y=0$ پارتیکولار اوبیونه

ساده د $y = 0$ پارتیکولار اوبیونه پیژندل کیږي.

د نورو کاروني لپاره دې $y \neq 0$ نیول شوی وي

$$y \neq 0 \Rightarrow y' \cdot \frac{1}{y} = e^{-x}$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} = e^{-x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int e^{-x}\,dx$$

$$\ln|y| = -e^{-x} + c_1$$

$$e^{\ln|y|} = e^{-e^{-x} + c_1}$$

$$= e^{-(e^{-x})} \cdot e^{c_1}$$

$$y = c \cdot e^{-(e^{-x})}$$

$c = e^{c_1}$

د $c = 0$ سره پارتیکولار- یا ټوټه اوبیونه خوندي ده.

17. $y'' = 7x^3$

$$\frac{dy'}{dx} = 7x^3$$

$$\int dy' = 7\int x^3\,dx$$

$$y' = \frac{7}{4}x^4 + c_1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{7}{4}x^4 + c_1$$

$$\int dy = \int\left(\frac{7}{4}x^4 + c_1\right)dx$$

$$y = \frac{7}{20}x^5 + c_1 x + c_2$$

18. $\frac{d^2y}{dx^2} = \sin x$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y'' = \sin x$$

$$\frac{dy'}{dx} = \sin x$$

$$\int dy' = \int \sin x\,dx$$

$$y' = -\cos x + c_1$$

$$\frac{dy}{dx} = -\cos x + c_1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int dy = \int (-\cos x + c_1)\,dx$$

$$y = \underline{\underline{-\sin x + c_1 x + c_2}}$$

19. $3x - y'' = a$

$$y'' = 3x - a$$

$$\frac{dy'}{dx} = 3x - a$$

$$\int dy' = \int (3x - a)\,dx$$

$$y' = \frac{3}{2}x^2 - ax + c_1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}x^2 - ax + c_1$$

$$\int dy = \int \left(\frac{3}{2}x^2 - ax + c_1\right) dx$$

$$y = \underline{\underline{\frac{1}{2}x^3 - \frac{a}{2}x^2 + c_1 x + c_2}}$$

20. $y'' = y'$

Partikuläre Lösung پارتیکولار اوبیونه

ثابته = $\underline{\underline{y = a = \text{const.}}}$

سملاسی y = a = const د پارتیکو-
لار اوبیونی په څیر پیژندل کیږي.
د پسې اوبیونی لپاره ټیك د0 =| y′
سره فنکشن رانیول کیږي، دا په
دي مانا چی ناثابت فنکشنونه

$$y' \neq 0 \Rightarrow y'' \cdot \frac{1}{y'} = 1$$

$$\frac{dy'}{dx} \cdot \frac{1}{y'} = 1$$

$$\frac{dy'}{y} = dx$$

$$\int \frac{dy'}{y'} = \int dx$$

$$\ln |y'| = x + c_1^*$$

$$e^{\ln|y'|} = e^{x + c_1^*}$$

$$= e^x \cdot e^{c_1^*}$$

$e^{c_1^*} = c_1$

$$y' = c_1 \cdot e^x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{dy}{dx}=c_1\cdot e^x$$

$$\int dy=\int c_1\cdot e^x\,dx$$

$$y=\underline{\underline{c_1\cdot e^x+c_2}}$$

په روښانه توګه د $C_1=C_2=0$ همداسې د $C_1=0$ سره پورتني پارتيکيولار اوبې په تولېز اوبې کې دننه يا خوندي دي.

21. $y''=x\cdot\cos x$

$$\frac{dy'}{dx}=x\cdot\cos x$$

$$\int dy'=\int \underset{u_1}{\underset{\downarrow}{x}}\cdot\underbrace{\cos x\,dx}_{dv_1}$$

$$y'=x\cdot\sin x-\int \sin x\,dx$$

$$=x\cdot\sin x+\cos x+c_1$$

$$\frac{dy}{dx}=x\cdot\sin x+\cos x+c_1$$

$$\int dy=\int(x\cdot\sin x+\cos x+c_1)\,dx$$

$$y=\int \underset{u_2}{\underset{\downarrow}{x}}\cdot\underbrace{\sin x\,dx}_{dv_2}+\sin x+c_1x$$

$$=-x\cdot\cos x+\int\cos x\,dx+\sin x+c_1x$$

$$=-x\cdot\cos x+\sin x+\sin x+c_1x+c_2$$

$$=\underline{\underline{2\sin x-x\cdot\cos x+c_1x+c_2}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ . ۲ د لمړي نظم ديفرنخيالمساوات ته تمرينونه

۱ . ۲ . ۱ ديفرنخيالمساوات د بيلوشوو اووبنتونکو سره

1. $y' = \frac{y}{2a}$

$\underline{\underline{y=0}}$: پارتيکولار اوبيونه

نيونه : Voraussetzung: $y \neq 0$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{1}{2a}$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{2a}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \frac{1}{2a} \int dx$$

$$\ln|y| = \frac{x}{2a} + c_1$$

$$e^{\ln|y|} = e^{\frac{x}{2a} + c_1}$$

$$= e^{\frac{x}{2a}} \cdot e^{c_1}$$

$c = e^{c_1}$

$$\underline{\underline{y = c \cdot e^{\frac{x}{2a}}}}$$

پارتيکيولار اوبيونه په ټوليز اوبی هم دننه دي($C = 0$)

2. $y' = axy$

$y=0$: پارتيکولار اوبيونه

نيونه: Voraussetzung: $y \neq 0$

$$\Rightarrow y' \cdot \frac{1}{y} = ax$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} = ax$$

$$\int \frac{dy}{y} = a \int x\,dx$$

$$\ln|y| = \frac{ax^2}{2} + c_1$$

$$e^{\ln|y|} = e^{\frac{a}{2}x^2 + c_1}$$

$$= e^{\frac{a}{2}x^2} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$\underline{\underline{y = c \cdot e^{\frac{a}{2}x^2}}}$$

د $c = 0$ سره پارتيکيولار اوبيونه په ټوليز اوبيونی کی دننه دی۔

(c) ketabton.com: The Digital Library

3. $y'-1=x^2+x^4$

$$\frac{dy}{dx}=1+x^2+x^4$$

$$\int dy=\int(1+x^2+x^4)\,dx$$

$$y=x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+c$$

4. $y'-x^3=y-x^3$

د دې ډیفرنخیالبرابرون اوبی د تیرتمرین۱ څخه د $a=1/2$ سره، لاس ته راوړل کیږي

$$y'=y+x^3-x^3$$

$$y'=y$$

$$y=c\cdot e^x$$

5. $\frac{y'}{2x}=y^2$

$y=0$: زیکولار اوبیونه

نیونه : Voraussetzung: $y\neq 0$

$$\Rightarrow\ y'\cdot\frac{1}{y^2}=2x$$

$$\frac{dy}{dx}\cdot\frac{1}{y^2}=2x$$

$$\int\frac{dy}{y^2}=2\int x\,dx$$

$$-\frac{1}{y}=x^2+c$$

د ډیفرنخیالمساوات اوبیونه یو زینکولار اوبی لري.

$$y=-\frac{1}{x^2+c}$$

$$y=0$$

6. $y'=\frac{y^2}{x^2}$

$y=0$: زینکولار اوبیونه

نیونه : Voraussetzung: $y\neq 0$

ساده پیژندلکیږي، چې اوبی $y=0$ ، زیکولار اوبی دی چې دا به وروسته وښوول شي.

$$\Rightarrow\ y'\cdot\frac{1}{y^2}=\frac{1}{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx}\cdot\frac{1}{y^2}=\frac{1}{x^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{dx}{x^2}$$

$$-\frac{1}{y} = -\frac{1}{x} + c$$

$$= -\frac{1-c\cdot x}{x}$$

$$y = \frac{x}{1-c\cdot x}$$

$$y = 0$$

7. $2xy^2 = y'$

د دي ديفرنخيالمساوات اوبي د تر مخه تير تمرين ۵ څخه رانيول کيدی شي

$y=0$ :: زيکولارزوبيونه

نيونه : Voraussetzung: $y \neq 0$

$$\Rightarrow y' \cdot \frac{1}{y^2} = 2x \Rightarrow y = -\frac{1}{x^2+c}$$

$$y = -\frac{1}{x^2+c}$$

$$y = 0$$

8. $y' = \dfrac{b^2\cdot x}{a^2\cdot y}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b^2\cdot x}{a^2\cdot y}$$

$$a^2 y\cdot dy = b^2 x\cdot dx$$

$$a^2 \int y\,dy = b^2 \int x\,dx$$

$$a^2\cdot\frac{y^2}{2} = b^2\cdot\frac{x^2}{2} + c_1 \quad \|\cdot 2$$

$$a^2y^2 = b^2x^2 + 2c_1$$

$c = -2c_1$

اوبی په ايمپليخيته بڼه (اهرامغوځی)

$$b^2x^2 - a^2y^2 = c$$

9. $y' = \dfrac{2}{\sqrt{a^2+x^2}}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln|x+\sqrt{a^2+x^2}|$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

$$\int dy = 2\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

$$y = 2\ln|x+\sqrt{a^2+x^2}| + c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

10. $x^2+2x=y'$

$$\frac{dy}{dx}=x^2+2x$$

$$\int dy=\int (x^2+2x)\,dx$$

$$y=\frac{x^3}{3}+x^2+c$$

11. $x\cdot y'=y\cdot \ln y$

د تمرینورکړي څخه ورکول کیږي

(د ln y له امله)، چی y > 0 باید

باور ولري. د دیفرنځیالمساوات پسی

کارونی لپاره یواځي x |= 0 نیول شوی.

$$\int \frac{\frac{1}{y}}{\ln y}\,dy$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx \quad f(x)\triangleq \ln y.$$

$$x\cdot\frac{dy}{dx}=y\cdot \ln y$$

Voraussetzung: $x\neq 0$ **نیونه :**

$$\Rightarrow \frac{dy}{y\cdot \ln y}=\frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y\cdot \ln y}=\int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{\frac{1}{y}}{\ln y}\,dy=\int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|\ln y|=\ln|x|+c_1$$

$$e^{\ln|\ln y|}=e^{\ln|x|+c_1}=e^{\ln|x|}\cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$\ln y=c\cdot x$$

$$e^{\ln y}=e^{c\cdot x}$$

$$y=e^{c\cdot x}$$

اوبی دیفرنځیالمساوات د x = 0

لپاره هم پوره کوي، چی له دې

امله دا تولیز اوبی دی

پارتیکولار اوبیونه : $y=0$

12. $(1-x^2)\,dy+xy\cdot dx=0$

د پارتیکیوالر اوبی په څیر y = 0

سملاسي پیژندل کیږي. ددیفرنځ-

یالمساوات د نورو اوبیو لپاره لمړی

بایدy |= 0 ونیول شي او1 - x |= 0

دا په دې مانا چی y.(1 - x)²≠0

Voraussetzung: $y\cdot(1-x^2)\neq 0$ **نیونه :**

$$(1-x^2)\,dy+xy\cdot dx=0 \quad \|:y(1-x^2)$$

$$\frac{dy}{y}+\frac{x}{1-x^2}\,dx=0$$

$$\int\frac{dy}{y}=-\int\frac{x}{1-x^2}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{-2x}{1-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\ln|y| = \frac{1}{2}\ln|1-x^2| + c_1$$

$$e^{\ln|y|} = e^{\frac{1}{2}\ln|1-x^2|} + c_1$$

$$= (e^{\ln|1-x^2|})^{\frac{1}{2}} \cdot e^{c_1}$$

$$y = c \cdot \sqrt{|1-x^2|}$$

$e^{c_1} = c$

د $c = 0$ سره په دې کې پارتيکيو- لار اوبې دننه يا خوندي دي.
د $1 - x^2 = 0$ لپاره،دا په دې مانا ، چې $|x| = 1$ اوبې هم ديفرنخيالمسا- وات پوره کوي، داسې چې دا ټوليز اوبې انځوروي.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$$

$$\int dy = \int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\,dx$$

$$y = -\int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}\,dx$$

$$= -\int \frac{dz}{z}$$

$$= -\ln|z| + c$$

$$= -\ln|\sin x + \cos x| + c$$

بدلون (سبستيچيوشن)

$z = \sin x + \cos x$

$\Rightarrow dz = (\cos x - \sin x)\,dx$

14. $y' = e^x \cdot y$

$y=0$: پارتيکولار اوبيونه

نيونه : Voraussetzung: $y \neq 0$

$$\Rightarrow y' \cdot \frac{1}{y} = e^x$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} = e^x$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int e^x\,dx$$

$$\ln|y| = e^x + c_1$$

$$e^{\ln|y|} = e^{e^x + c_1} = e^{(e^x)} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$y = c \cdot e^{(e^x)}$$

د $c = 0$ سره په دې کې ټوټه اوبيونه خوندي ده .

(c) ketabton.com: The Digital Library

15. $\sqrt{y'} = y' \cdot x$

زیګولار اوبیونه: $y' = 0$

$y' = 0 \Rightarrow \underline{\underline{y = a = \text{const.}}}$ ثابت

Voraussetzung: $y' \neq 0, \quad x \neq 0$: نیونه

$$\Rightarrow \quad 1 = \frac{y'}{\sqrt{y'}} \cdot x$$ ▶ quadrieren مربع کونه

$$1 = y' \cdot x^2$$

$$\frac{1}{x^2} = \frac{dy}{dx}$$

$$\int \frac{dx}{x^2} = \int dy$$

$$y = -\frac{1}{x} + c$$ ▶ für $x \neq 0$

$y = a = \text{const.}$ ثابت

16. $y' = (y \cdot y')^2$

Singuläre Lösung: $y' = 0$ زینګولاراوبی

$y' = 0 \Rightarrow \underline{\underline{y = a = \text{const.}}}$ ثابت

Voraussetzung: $y' \neq 0$: نیونه

$$\Rightarrow \quad 1 = y^2 \cdot y'$$

$$1 = y^2 \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\int y^2\, dy = \int dx$$

$$\frac{1}{3} y^3 = x + c_1$$

$c = 3c_1$

$$y = \sqrt[3]{3x + c}$$

$y = a = \text{const.}$ ثابت

17. $dy = \dfrac{dx}{x(x^2 + 2x + 1)}$

$$\int dy = \int \frac{dx}{x(x+1)^2}$$

$$= \int \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}\right) dx$$

$$= \int \frac{A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx}{x(x+1)^2}\, dx$$

Koeffizientenvergleich: د ګڼوونو انډول

$$\begin{aligned} \text{I:}\quad & A+B = 0 \\ \text{II:}\quad & 2A+B+C=0 \\ \text{III:}\quad & A = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{I:}\quad & 1+B=0 \Rightarrow B=-1 \\ \text{II:}\quad & 2-1+C=0 \Rightarrow C=-1 \end{aligned}$$

$$\int \mathrm{d}y = \int \frac{A(x^2+2x+1)+B(x^2+x)+Cx}{x(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{x^2(A+B)+x(2A+B+C)+A}{x(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \ln|x| - \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + c$$

$$\underline{\underline{\int \mathrm{d}y = \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + \frac{1}{x+1} + c}}$$

18. $y' = \dfrac{x^2\sqrt{x^2+4}}{y^2\sqrt{y^2+9}}$

دواړه اینتیګرالونه همغه فورم لري او د ۲ . ۵ تمرین ۷۴ سره په پرتله ریکورزیونفرمول تاکل کیږي.

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x =$$

$$\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}| + c$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x^2\sqrt{x^2+4}}{y^2\sqrt{y^2+9}}$$

$$\int y^2\sqrt{y^2+9}\,\mathrm{d}y = \int x^2\sqrt{x^2+4}\,\mathrm{d}x$$

$$\frac{y}{4}\sqrt{(y^2+9)^3} - \frac{9}{4}\int\sqrt{y^2+9}\,\mathrm{d}y =$$

$$= \frac{x}{4}\sqrt{(x^2+4)^3} - \frac{4}{4}\int\sqrt{x^2+4}\,\mathrm{d}x \quad \| \cdot 4$$

$$y\sqrt{(y^2+9)^3} - 9\left[\frac{y}{2}\sqrt{y^2+9} + \frac{9}{2}\ln|y+\sqrt{y^2+9}|\right] =$$

$$= x\sqrt{(x^2+4)^3} -$$

$$-4\left[\frac{x}{2}\sqrt{x^2+4} + 2\ln|x+\sqrt{x^2+4}|\right] + c$$

$$y(y^2+9)\sqrt{y^2+9} - \frac{9}{2}y\sqrt{y^2+9} - \frac{81}{2}\ln|y+\sqrt{y^2+9}| =$$

$$= x(x^2+4)\sqrt{x^2+4} - 2x\sqrt{x^2+4} -$$

$$-8\ln|x+\sqrt{x^2+4}| + c$$

$$\frac{y}{2}(2y^2+9)\sqrt{y^2+9} - \frac{81}{2}\ln|y+\sqrt{y^2+9}| =$$

$$= x(x^2+2)\sqrt{x^2+4} - 8\ln|x+\sqrt{x^2+4}| + c$$

$$\underline{\underline{y(2y^2+9)\sqrt{y^2+9} - 81\ln|y+\sqrt{y^2+9}| =}}$$

$$\underline{\underline{= x(2x^2+4)\sqrt{x^2+4} - 16\ln|x+\sqrt{x^2+4}| + c}}$$

اوبیونه یواځي په ایمپلیخیت فورم ممکن ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

19. $y \cdot x \cdot \sin(2x) = y'$

پارخیل اینتیګرال

د $c=0$ سره پارتیکیوالر اوبی
په دې کې خوندي دی.

Partikuläre Lösung: $y=0$

Voraussetzung: $y \neq 0$

$$\blacktriangleright\ x \cdot \sin 2x = y' \cdot \frac{1}{y}$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} = x \cdot \sin 2x$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \underset{\substack{\downarrow \\ u}}{x} \cdot \underbrace{\sin 2x\, dx}_{dv}$$

$$= -\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{2} \int \cos 2x\, dx$$

$$\ln|y| = -\frac{x}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + c_1$$

$$e^{\ln|y|} = e^{\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{x}{2}\cos 2x} + c_1$$

$$= e^{\frac{1}{4}(\sin 2x - 2x\cos 2x)} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$y = c \cdot e^{\frac{1}{4}(\sin 2x - 2x\cos 2x)}$$

20. $\frac{dx}{dy} = \ln y$

$$dx = \ln y\, dy$$

$$\int dx = \int \ln y\, dy$$

$$x = y(\ln y - 1) + c$$

21. $dx(e^y + e^{-y}) = dy(e^x + e^{-x})$

دا چې دواړه اینتیګرالونه برابر فورم
لري بسیا کوي ،چې یو وشمیرل شي
بدلون (سبستیچیوشن)

$$t = e^x \Rightarrow dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t}$$

$$\int \frac{dy}{e^y + e^{-y}} = \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$$

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} \cdot \frac{e^x}{e^x}$$

$$= \int \frac{e^x \cdot dx}{e^{2x} + 1}$$

$$= \int \frac{dt}{t^2 + 1}$$

$$= \operatorname{Arctan} t + c$$

$$= \operatorname{Arctan} e^x + c$$

اوبی په ایمپلیخیتفورم

$$\operatorname{Arctan} e^y = \operatorname{Arctan} e^x + c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

22. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = x^2 \cdot y^3$

دریمه ریښه یی راوستل کیږي.
یا یی ۳ . جذر نیول کیږي

د c = 0 سره پارتیکیوالر اوبی
په دې کی خوندي دی.

$$\frac{dy}{dx} = y' \Rightarrow y'^3 = x^2 \cdot y^3$$

$y=0$:پارتیکولار اوبیونه

نیونه : Voraussetzung: $y \neq 0$

$$y'^3 \cdot \frac{1}{y^3} = x^2$$

$$\frac{y'}{y} = x^{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{dy}{y} = x^{\frac{2}{3}} \cdot dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int x^{\frac{2}{3}} dx$$

$$\ln|y| = \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + c_1$$

$$e^{\ln|y|} = e^{\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}+c_1} = e^{\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$y = c \cdot e^{\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}}$$

23. $(x+y)^2 = y'$

لمړی په سبستیچیوشن پیل کوو.

$$z = x+y; \quad y = z-x$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d(z-x)}{dx}$$

$$= \frac{dz}{dx} - \frac{dx}{dx}$$

$$= \frac{dz}{dx} - 1$$

$$z^2 = \frac{dz}{dx} - 1$$

$$\frac{dz}{dx} = z^2 + 1$$

$$\frac{dz}{z^2+1} = dx$$

$$\int \frac{dz}{z^2+1} = \int dx$$

$$\text{Arctan } z = x + c$$

$$z = \tan(x+c)$$

$$x + y = \tan(x+c)$$

$$y = \tan(x+c) - x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

24. $y'^2 \cdot y = x^2 \cdot y' - y'$

Singuläre Lösung: $y' = 0$ ـ لينگولاراوبيونه

$y' = 0 \Rightarrow \underline{\underline{y = a = \text{const.}}}$

Voraussetzung: $y' \neq 0$ نيونه

$\Rightarrow$ په y' ويشنه اجازه لري

$y' \cdot y = x^2 - 1$

$\frac{dy}{dx} \cdot y = x^2 - 1$

$\int y\,dy = \int (x^2 - 1)\,dx$

$\frac{y^2}{2} = \frac{x^3}{3} - x + c_1 \quad \| \cdot 2$

$c = 2c_1$

$y^2 = \frac{2}{3}x^3 - 2x + c$

$y = \pm\sqrt{\frac{2}{3}x^3 - 2x + c}$

$y = a = \text{const.}$

25. $y'^2 - 2x - x^2 = 0$

$y'^2 = x^2 + 2x$

$y' = \pm\sqrt{x^2 + 2x}$

$= \pm\sqrt{x^2 + 2x + 1 - 1}$

$= \pm\sqrt{(x+1)^2 - 1}$

$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{(x+1)^2 - 1}$

سبستيچيوشن :

$z = x + 1 \Rightarrow dx = dz$

$\int \sqrt{x^2 - a^2}\,dx =$

$\frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}|$

$\int dy = \pm\int \sqrt{(x+1)^2 - 1}\,dx$

$y = \pm\int \sqrt{z^2 - 1}\,dz$

$= \pm\left[\frac{z}{2}\sqrt{z^2 - 1} - \frac{1}{2}\ln|z + \sqrt{z^2 - 1}|\right] + c$

$y = \pm\frac{1}{2}\,[(x+1)\sqrt{x^2 + 2x} -$

$\underline{\underline{- \ln|x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x}|] + c}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

26. $y' \cdot \text{Arcsin}\, y = x^2$

پارخیل(تو‌ټه‌−) اینتیګرال

په ایمپلیخیته بڼه اوبیونه

$$\frac{dy}{dx} \cdot \text{Arcsin}\, y = x^2$$

$$\int \underbrace{\text{Arcsin}\, y}_{u} \underset{dv}{dy} = \int x^2\, dx$$

$$y \cdot \text{Arcsin}\, y - \int \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\, dy = \frac{1}{3} x^3$$

$$y \cdot \text{Arcsin}\, y + \sqrt{1-y^2} = \frac{1}{3} x^3 + c$$

27. $x \cdot e^{x^2} = y' \cdot e^y$

بدلون (سبستیچیوشن)

$$x^2 = z \Rightarrow dx = \frac{dz}{2x}$$

$$x \cdot e^{x^2} = \frac{dy}{dx} \cdot e^y$$

$$\int e^y \cdot dy = \int x \cdot e^{x^2}\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int e^z\, dz$$

$$e^y = \frac{1}{2} e^z + c$$

$$= \frac{1}{2} e^{x^2} + c$$

$$\ln (e^y) = \ln \left(\frac{1}{2} e^{x^2} + c\right)$$

$$y = \ln \left(\frac{1}{2} e^{x^2} + c\right)$$

28. $y \cdot \ln x = y'$

$y=0$: پارتیکولار اوبیونه

Voraussetzung: $y \neq 0$: نیونه

$$\Rightarrow \ln x = \frac{1}{y} \cdot y'$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} = \ln x$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \ln x\, dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\ln|y| = x\cdot\ln x - x + c_1$$

$$e^{\ln|y|} = e^{x(\ln x-1)+c_1} = e^{x(\ln x-1)}\cdot\underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$\underline{\underline{y = c\cdot e^{x(\ln x-1)}}}$$

د $c=0$ سره پارتیکیوالر اوبی په دې کې خوندي دی.

29. $x\cdot\sinh x = y'\cdot\cosh y$

پارځیل اینتیګرال

$$x\cdot\sinh x = \frac{dy}{dx}\cdot\cosh y$$

$$\int\cosh y\cdot dy = \int \underset{u}{x}\cdot\underbrace{\sinh x\,dx}_{dv}$$

$$= x\cdot\cosh x - \int\cosh x\,dx$$

$$\sinh y = x\cdot\cosh x - \sinh x + c$$

$$\underline{\underline{y = \text{Arsinh}\,[x\cdot\cosh x - \sinh x + c]}}$$

30. $\dfrac{\text{Arsinh}\,x}{\text{Arcosh}\,y} = y'$

پارځیل یا پارشل اینتیګرال

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\text{Arsinh}\,x}{\text{Arcosh}\,y}$$

$$\int\underbrace{\text{Arcosh}\,y}_{u_1}\,\underbrace{dy}_{dv_1} = \int\underbrace{\text{Arsinh}\,x}_{u_2}\,\underbrace{dx}_{dv_2}$$

$$y\cdot\text{Arcosh}\,y - \int\frac{y}{\sqrt{y^2-1}}\,dy =$$

$$= x\cdot\text{Arsinh}\,x - \int\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$$

$$\underline{\underline{y\cdot\text{Arcosh}\,y - \sqrt{y^2-1} = x\cdot\text{Arsinh}\,x - \sqrt{x^2+1} + c}}$$

۱ . ۲ . ۳ دیفرنځیالمساوات د هوموجینو اووبنتونکو سره

پام وړ : یو څو د دې اوبیونو دیفرنځیالمساوات د هوموجین واریابلو سره دیفرنځیا- لمساوات نه دي، مګر دا اجازه ورکوي یا ځان دې ته پرېږدي، چې د سبستیچیوشن $y = x.z$ له لارې اوبی شي (تمرین ۸ ، ۱۲ ، ۱۶ ، ۱۷ ، ۱۸ ، ۲۰)

1. $y'\cdot x = -(x+y)$

$y = x\cdot z \Rightarrow dy = z\cdot dx + x\cdot dz$

$dy\cdot x = -(x+y)\,dx$

$(z\cdot dx + x\cdot dz)x = -x\cdot dx - x\cdot z\cdot dx$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$x \neq 0$: پس په x ویشنه اجازګری

$$z \cdot dx + x \cdot dz = -dx - z \cdot dx$$

$$x \cdot dz = dx(-1-2z)$$

$$-\frac{dz}{1+2z} = \frac{dx}{x}$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{2}{1+2z}\,dz = \int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{2}{1+2z}\,dz \triangleq \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$$

$$-\frac{1}{2}\ln|1+2z| = \ln|x| + c_1$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left|1+\frac{2y}{x}\right| = \ln|x| + c_1$$

$$z = \frac{y}{x}$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left|1+\frac{2y}{x}\right| - \ln|x| = c_1$$

$$\frac{1}{2}\ln\left|1+\frac{2y}{x}\right| + \frac{2}{2}\ln|x| = -c_1$$

$$\frac{1}{2}\left[\ln\left|1+\frac{2y}{x}\right| + \ln x^2\right] = -c_1 \quad \| \cdot 2$$

$$\ln x^2 \cdot \left|1+\frac{2y}{x}\right| = -2c_1$$

$$\ln|x^2+2yx| = -2c_1$$

$$e^{\ln|x^2+2yx|} = e^{-2c_1}$$

$$x^2+2yx = c$$

$$y = \frac{c-x^2}{2x}; \quad x \neq 0$$

$$e^{-2c_1} = c$$

پارتیکولار اوبیونه :: $y=0$

2. $y' \cdot x = y$

دا دیفرنځیلامساوات په ساده توګه د اووښتونو یا واریابلو بیلولو له لارې اوبی کیدی شي.

نمونه : Voraussetzung: $y \neq 0,\ x \neq 0$

$$\Rightarrow y' \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې اوبیونوکي پارتیکیولاراوبیونی خوندي دي(د c = 0 سره) اود x = 0 لپاره هم ، دا په دې مانا، چی دا ټولیز اوبی دی.

$$\ln|y| = \ln|x| + c_1$$

$$e^{\ln|y|} = e^{\ln|x| + c_1} = e^{\ln|x|} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$y = c \cdot x$$

3. $y' = \dfrac{x+y}{x}$

د وظیفي ورکوني سره سم لاسی x |= 0 ورکوي

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x}$$

$$dy = \left(1 + \frac{y}{x}\right) dx$$

$$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$$

$$x \cdot dz + z \cdot dx = (1+z)\, dx$$

$$x \cdot dz = dx$$

$$dz = \frac{dx}{x}$$

$$\int dz = \int \frac{dx}{x}$$

$$z = \ln|x| + c$$

$$y = x(\ln|x| + c)$$

$$z = \frac{y}{x}$$

4. $y' \cdot x^2 - y \cdot x = x^2 + y^2$

$$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$$

$$dy \cdot x^2 - y \cdot x \cdot dx = (x^2 + y^2)\, dx$$

$$(x \cdot dz + z \cdot dx)x^2 - x^2 \cdot z \cdot dx = (x^2 + x^2 \cdot z^2)\, dx$$

نیونه: x |= 0 له دې امله په x^2 ویش

$$x \cdot dz + z \cdot dx - z \cdot dx = (1 + z^2)\, dx$$

$$x \cdot dz = (1 + z^2)\, dx$$

$$\int \frac{dz}{1+z^2} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\text{Arctan } z = \ln|x| + c$$

$$\tan(\text{Arctan } z) = \tan(\ln|x| + c)$$

$$z = \tan(\ln|x| + c)$$

$$y = x \cdot \tan(\ln|x| + c)$$

$$z = \frac{y}{x}$$

د $x \neq 0$ لپاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

5. $y' \cdot x \cdot y = y^2 - x^2$

$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$

$$dy \cdot x \cdot y = (y^2 - x^2)\,dx$$

$$(x \cdot dz + z \cdot dx) \cdot x^2 \cdot z = (x^2 \cdot z^2 - x^2)\,dx$$

نیونه: x |= 0 له دې امله په x^2 ویش

$$(x \cdot dz + z \cdot dx)z = (z^2 - 1)\,dx$$

$$z \cdot x \cdot dz + z^2 \cdot dx = z^2 \cdot dx - dx$$

$$z \cdot x \cdot dz = -dx$$

$$\int z \cdot dz = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2} z^2 = -\ln|x| + c_1 \quad \| \cdot 2$$

$$z^2 = -2\ln|x| + 2c_1$$

$c = 2c_1$

$$= c - \ln x^2$$

$z = \frac{y}{x}$

$$y = \pm x\sqrt{c - \ln x^2}; \quad x \neq 0$$

6. $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = y'$

د وظیفي ورکړې څخه روښانه ده، چې همدا اوس y |= 0 او x |= 0 باور لري.

$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$

$$y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \quad \| \cdot xy$$

$$xyy' = x^2 + y^2$$

$$x^2 \cdot z(x \cdot dz + z \cdot dx) = (x^2 + x^2 \cdot z^2)\,dx \quad \| : x^2$$

$$z(x \cdot dz + z \cdot dx) = (1 + z^2)\,dx$$

$$z \cdot x \cdot dz + z^2 \cdot dx = dx + z^2 \cdot dx$$

$$z \cdot x \cdot dz = dx$$

$$z \cdot dz = \frac{dx}{x}$$

$$\int z \cdot dz = \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2} z^2 = \ln|x| + c_1 \quad \| \cdot 2$$

$$z^2 = 2\ln|x| + 2c_1$$

$2c_1 = c; \quad z = \frac{y}{x}$

$$y = \pm x\sqrt{\ln x^2 + c}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

7. $dy \cdot x = (y - x) \cdot dx$

$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$

$z = \frac{y}{x}$

$x^2 \cdot dz + x \cdot z \cdot dx = (x \cdot z - x) \cdot dx$

نیونه: x |= 0 له دې امله په x ویش

$x \cdot dz + z \cdot dx = z\, dx - dx$

$x \cdot dz = -dx$

$\int dz = -\int \frac{dx}{x}$

$z = -\ln |x| + c$

$y = x(c - \ln |x|); \quad x \neq 0$

8. $y' - \frac{y}{x} = \tan \frac{y}{x}$

$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$

$\frac{y}{x} = z$

د وظیفي ورکړې څخه روښانه ده، چې همدا اوس x |= 0 لاس ته راځي.

$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$

$\int \frac{\cos z}{\sin z}\, dz \mathrel{\hat=} \int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx$

$z = \frac{y}{x}$

$\frac{dy}{dx} - z = \tan z$

$dy = (z + \tan z)\, dx$

$x \cdot dz + z \cdot dx = z \cdot dx + \tan z \cdot dx$

$x \cdot dz = \tan z \cdot dx$

$\int \frac{dz}{\tan z} = \int \frac{dx}{x}$

$\int \frac{\cos z}{\sin z}\, dz = \int \frac{dx}{x}$

$\ln |\sin z| = \ln |x| + c_1$

$e^{\ln |\sin z|} = e^{\ln |x| + c_1} = e^{\ln |x|} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$

$\sin z = c \cdot x$

$z = \text{Arcsin}\,(c \cdot x)$

$y = x \cdot \text{Arcsin}\,(c \cdot x)$

9. $(x + y) \cdot dx - (x - y) \cdot dy = 0$

$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$

$(x + x \cdot z) \cdot dx - (x - x \cdot z) \cdot (x \cdot dz + z \cdot dx) = 0$

نیونه: x ≠ 0 له دې امله په x ویش

$(1 + z)\, dx - (1 - z)(x \cdot dz + z \cdot dx) = 0$

$(1 + z)\, dx - x(1 - z)\, dz - (z - z^2)\, dx = 0$

$(1 + z^2)\, dx - x(1 - z)\, dz = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{dx}{x}=\frac{1-z}{1+z^2}\,dz$$

$$\int\frac{dx}{x}=\int\left(\frac{1}{1+z^2}-\frac{z}{1+z^2}\right)dz$$

$$=\int\frac{dz}{1+z^2}-\frac{1}{2}\int\frac{2z}{1+z^2}\,dz$$

$$\int\frac{2z}{1+z^2}\,dz \triangleq \int\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$$

$$\ln|x|=\text{Arctan}\, z-\frac{1}{2}\ln|1+z^2|+c$$

$$z=\frac{y}{x}$$

$$\ln|x|=\text{Arctan}\,\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\ln\frac{x^2+y^2}{x^2}+c$$

د $x \neq 0$ لپاره

اوبيونی يواځي په ايمليخيته
بنه يا فورم ورکړ شوی دی.

10. $x^2+xy+y^2=x^2\cdot y'$

$$y=z\cdot x \Rightarrow dy=z\cdot dx+x\cdot dz$$

$$(x^2+xy+y^2)\,dx=x^2\cdot dy$$

$$(x^2+x^2z+x^2z^2)\,dx=x^2(z\cdot dx+x\cdot dz)$$

نیونه: x |= 0 له دي امله په x^2 ویش

$$(1+z+z^2)\,dx=z\cdot dx+x\cdot dz$$

$$(1+z^2)\,dx=x\cdot dz$$

$$\int\frac{dz}{1+z^2}=\int\frac{dx}{x}$$

$$\text{Arctan}\, z=\ln|x|+c$$

$$\tan(\text{Arctan}\, z)=\tan(\ln|x|+c)$$

$$z=\tan(\ln|x|+c)$$

$$z=\frac{y}{x}$$

$$y=x\cdot\tan(\ln|x|+c)$$

د $x \neq 0$ لپاره

11. $y'=\dfrac{2xy}{3x^2-y^2}$

$$y=x\cdot z \Rightarrow dy=x\cdot dz+z\cdot dx$$

$$y'\cdot(3x^2-y^2)=2xy$$

$$dy\cdot(3x^2-y^2)=2xy\cdot dx$$

$$(x\cdot dz+z\cdot dx)(3x^2-x^2z^2)=2x^2z\cdot dx$$

نیونه: x |= 0 له دي امله په x^2 ویش

$$(x\cdot dz+z\cdot dx)(3-z^2)=2z\cdot dx$$

$$3x\cdot dz+3z\cdot dx-xz^2\cdot dz-z^3\,dx=2z\cdot dx$$

$$(3x-xz^2)\,dz+(z-z^3)\,dx=0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x(3-z^2)\,dz=(z^3-z)\,dx$$

$$\int\frac{3-z^2}{z^3-z}\,dz=\int\frac{dx}{x}$$

$$\frac{3-z^2}{z^3-z}=\frac{3-z^2}{z(z^2-1)}$$

$$=\frac{3-z^2}{z(z+1)(z-1)}$$

$$=\frac{A}{z}+\frac{B}{z+1}+\frac{C}{z-1}$$

$$=\frac{A(z^2-1)+B(z-1)z+C(z+1)z}{z^3-z}$$

$$=\frac{z^2(A+B+C)+z(-B+C)-A}{z^3-z}$$

$$=\frac{-3}{z}+\frac{1}{z+1}+\frac{1}{z-1}$$

$$\int\frac{3-z^2}{z^3-z}\,dz=\int\frac{dx}{x}$$

$$\int\left(\frac{-3}{z}+\frac{1}{z+1}+\frac{1}{z-1}\right)dz=\int\frac{dx}{x}$$

$$-3\ln|z|+\ln|z+1|+\ln|z-1|=\ln|x|+c_1$$

$$-\ln|z|^3+\ln|(z+1)(z-1)|=\ln|x|+c_1$$

$$-\ln|z^3|+\ln|z^2-1|=\ln|x|+c_1$$

$$\ln\left|\frac{z^2-1}{z^3}\right|=\ln|x|+c_1$$

$$e^{\ln\left|\frac{z^2-1}{z^3}\right|}=e^{\ln|x|+c_1}$$

$$=e^{\ln|x|}\cdot e^{c_1}$$

$$\frac{z^2-1}{z^3}=c\cdot x$$

$$z^2-1=c\cdot x\cdot z^3$$

$$\frac{y^2}{x^2}-1=c\cdot\frac{y^3}{x^2}\quad\Big\|\cdot x^2$$

$$\underline{\underline{y^2-x^2=c\cdot y^3;\quad x\neq 0}}$$

د اینتګرال اینتګرالونکی

$$\int\frac{3-z^2}{z^3-z}\,dz$$

په ټوټه ماتونو ټوټه کیږي

د ضریبونو پرتله:

$$\text{I: } A+B+C=-1$$

$$\text{II: } -B+C=0$$

$$\text{III: } -A=3;\quad \underline{\underline{A=-3}}$$

$$\text{I: } -3+B+C=-1$$

$$\left.\begin{array}{r} B+C=2 \\ \text{II: } -B+C=0 \end{array}\right\}+$$

$$2C=2;\quad \underline{\underline{C=1}}$$

$$\text{II: } -B+C=0;\quad \underline{\underline{B=1}}$$

$$e^{c_1}=c$$

$$y=x\cdot z\Rightarrow z=\frac{y}{x}$$

په ایمپلیخیته بڼه اوبیونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

12. $y' = \frac{y}{x} \cdot \ln \frac{y}{x}$

$$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$$

$$\frac{y}{x} = z$$

د پوښتنوسملاسی $x>0, y>0$ لاس ته

راځي دا په دې مانا ، چې $z>0$ هم

$$\int \frac{\frac{1}{z}}{\ln z - 1}\, dz \mathrel{\hat{=}} \int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx$$

$$z = \frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = z \cdot \ln z$$

$$x \cdot dz + z \cdot dx = z \cdot \ln z \cdot dx$$

$$x \cdot dz = z(\ln z - 1)\, dx$$

$$\int \frac{dz}{z(\ln z - 1)} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{\frac{1}{z}}{\ln z - 1}\, dz = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln |\ln z - 1| = \ln |x| + c_1$$

$$e^{\ln|\ln z - 1|} = e^{\ln|x| + c_1} = e^{\ln|x|} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$\ln z - 1 = c \cdot x$$

$$\ln z = c \cdot x + 1$$

$$e^{\ln z} = e^{c \cdot x + 1}$$

$$z = e^{c \cdot x + 1}$$

$$\underline{\underline{y = x \cdot e^{c \cdot x + 1}; \quad x > 0}}$$

13. $x \cdot dy - y \cdot dx = y \cdot dy$

$$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$$

$$(x - y)\, dy = y \cdot dx$$

$$(x - x \cdot z)(x \cdot dz + z \cdot dx) = x \cdot z \cdot dx$$

نیونه: $x \neq 0$ له دې امله په x ویش

$$(1 - z)(x \cdot dz + z \cdot dx) = z \cdot dx$$

$$x \cdot dz + z \cdot dx - zx \cdot dz - z^2 \cdot dx = z \cdot dx$$

$$x(1 - z)\, dz - z^2 \cdot dx = 0$$

ورپسې نیونې :: $z \neq 0$ (d.h. $y \neq 0$)

$$\Rightarrow \frac{1 - z}{z^2}\, dz = \frac{dx}{x}$$

$$\int \left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z}\right) dz = \int \frac{dx}{x}$$

$$-\frac{1}{z} - \ln |z| = \ln |x| + c$$

$$-\frac{1}{z} = \ln |x| + \ln |z| + c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-\frac{1}{z}=\ln|x\cdot z|+c \quad \| \cdot z$$

$$-1=z\cdot\ln|x\cdot z|+c\cdot z$$

$$-1=\frac{y}{x}\cdot\ln|y|+c\cdot\frac{y}{x}$$

$z=\frac{y}{x}$

$$\frac{y}{x}(\ln|y|+c)+1=0;\quad x\neq0;\quad y\neq0$$

په ایمپلیخیته بڼه اوبیونه

14. $y^2+(x^2-xy)y'=0$

$y=x\cdot z \Rightarrow dy=x\cdot dz+z\cdot dx$

$$y'(x^2-xy)=-y^2$$

$$dy(x^2-xy)=-y^2\cdot dx$$

$$(x\cdot dz+z\cdot dx)(x^2-x^2z)=-x^2z^2\cdot dx$$

نیونه: $x \mid= 0$ له دي امله په x^2 ویش

$$(x\cdot dz+z\cdot dx)(1-z)=-z^2\cdot dx$$

$$x(1-z)\,dz+(z-z^2)dx=-z^2\,dx$$

$$x(1-z)\,dz=-z\cdot dx$$

ورپسی نیونی : $z\neq0$ (d.h. $y\neq0$)

په z ویش اجازه لري

$$\frac{1-z}{z}dz=-\frac{dx}{x}$$

$$\int\left(\frac{1}{z}-1\right)dz=-\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|z|-z=-\ln|x|+c$$

$$\ln|z|+\ln|x|=z+c$$

$$\ln|z\cdot x|=z+c$$

$z=\frac{y}{x}$

$$\ln|y|=\frac{y}{x}+c;\quad x\neq0;\quad y\neq0$$

په ایمپلیخیته بڼه اوبیونه

15. $y^2\cdot dx-3x^2\cdot dx+2xy\cdot dy=0$

$y=x\cdot z \Rightarrow dy=x\cdot dz+z\cdot dx$

$$0=(y^2-3x^2)\,dx+2xy\cdot dy$$

$$=(x^2\cdot z^2-3x^2)\,dx+2x^2\cdot z(x\cdot dz+z\cdot dx)$$

نیونه: $x \mid= 0$ له دي امله په x^2 ویش

$$0=(z^2-3)\,dx+2z(x\cdot dz+z\cdot dx)$$

$$0=(3z^2-3)\,dx+2xz\cdot dz$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-3(z^2-1)\,dx = 2xz \cdot dz$$

$$-3\frac{dx}{x} = \frac{2z}{z^2-1}\,dz$$

$$\int \frac{2z}{z^2-1}\,dz \triangleq \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$$

$$-3\int \frac{dx}{x} = \int \frac{2z}{z^2-1}\,dz$$

$$-3\ln|x| = \ln|z^2-1| + c_1$$

$$e^{-3\ln|x|} = e^{\ln|z^2-1|+c_1}$$

$$e^{\ln|x^{-3}|} = e^{\ln|z^2-1|} \cdot e^{c_1}$$

$$e^{c_1} = c_2$$

$$x^{-3} = (z^2-1) \cdot c_2$$

$$c = \frac{1}{c_2}; \quad z = \frac{y}{x}$$

$$z^2 - 1 = \frac{c}{x^3}$$

$$\frac{y^2}{x^2} - 1 = \frac{c}{x^3} \quad \| \cdot x^2$$

$$y^2 - x^2 = \frac{c}{x}$$

$$y = \pm\sqrt{x^2 + \frac{c}{x}}; \quad x \neq 0$$

16. $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$

$$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$$

$$x \cdot dy = (y + \sqrt{y^2 - x^2})\,dx$$

$$x(x \cdot dz + z \cdot dx) = (xz + \sqrt{x^2z^2 - x^2})\,dx$$

$$= (xz + x\sqrt{z^2-1}\,dx$$

نیونه: $|x| \neq 0$ له دې امله په x ویش

$$x \cdot dz + z \cdot dx = z \cdot dx + \sqrt{z^2-1}\,dx$$

$$x \cdot dz = \sqrt{z^2-1}\,dx$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2-a^2}|$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^2-1}} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|z + \sqrt{z^2-1}| = \ln|x| + c_1$$

$$e^{\ln|z+\sqrt{z^2-1}|} = e^{\ln|x|+c_1} = e^{\ln|x|} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$z = \frac{y}{x}$$

$$z + \sqrt{z^2-1} = c \cdot x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{y}{x}+\sqrt{\frac{y^2}{x^2}-1}=c\cdot x \quad \|\cdot x$$

$$\underline{\underline{y+\sqrt{y^2-x^2}=cx^2;\quad x\neq 0}}$$

پە ايمليخيت فورم اوبى

17. $xy'=y(\ln y-\ln x)$

$$x\cdot y'=y\cdot \ln\frac{y}{x}$$

$$y=x\cdot z\Rightarrow dy=x\cdot dz+z\cdot dx$$

$$\frac{y}{x}=z$$

$$x\cdot dy=y\cdot\ln\frac{y}{x}\cdot dx$$

$$x(x\cdot dz+z\cdot dx)=x\cdot z\cdot\ln z\cdot dx \quad \|:x$$

$$x\cdot dz+z\cdot dx=z\cdot\ln z\cdot dx$$

$$x\cdot dz=z(\ln z-1)\,dx$$

$$\frac{dz}{z(\ln z-1)}=\frac{dx}{x}$$

د پوښتنوسملاسى x>0,y>0 لاس ته راځي دا پە دې مانا ، چې z>0 هم

$$\int\frac{\frac{1}{z}}{\ln z-1}\,dz\,\widehat{=}\int\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$$

$$\int\frac{\frac{1}{z}}{\ln z-1}\,dz=\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|\ln z-1|=\ln|x|+c_1$$

$$e^{\ln|\ln z-1|}=e^{\ln|x|+c_1}=e^{\ln|x|}\cdot\underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$\ln z-1=c\cdot x$$

$$\ln z=c\cdot x+1$$

$$e^{\ln z}=e^{c\cdot x+1}$$

$$z=\frac{y}{x}$$

$$z=e^{c\cdot x+1}$$

$$\underline{\underline{y=x\cdot e^{c\cdot x+1};\quad x>0}}$$

18. $y\cdot dx+\sqrt{4xy}\cdot dy=x\cdot dy$

$$y\cdot dx=(x-\sqrt{4xy})\,dy$$

$$y=x\cdot z\Rightarrow dy=x\cdot dz+z\cdot dx$$

$$x\cdot z\cdot dx=(x-\sqrt{4x^2z})(x\cdot dz+z\cdot dx)$$

$$=(x-2x\sqrt{z})(x\cdot dz+z\cdot dx)$$

د پوښتنکونى خخه لاس ته راځي، چې تل $4xy\geq 0$ بايد باور ولري دا پە دې مانا چې $x.y\geq 0$ هم

نيونە: $x\neq 0$ لە دې امله پە x ويش

$$z\cdot dx=(1-2\sqrt{z})(x\cdot dz+z\cdot dx)$$

$$z\cdot dx=x(1-2\sqrt{z})\,dz+(z-2z\sqrt{z})\,dx$$

$$0=x(1-2\sqrt{z})\,dz-2z\sqrt{z}\,dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نوري نيوځي $\because z \neq 0$ (d.h. $y \neq 0$)

$$\frac{1-2\sqrt{z}}{2z\sqrt{z}}\,dz = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{1}{2z\sqrt{z}}\,dz - \int \frac{dz}{z} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2}\int z^{-\frac{3}{2}}\,dz - \int \frac{dz}{z} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{z^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} - \ln|z| = \ln|x| + c$$

$$-z^{-\frac{1}{2}} = \ln|x| + \ln|z| + c$$

$z = \frac{y}{x}$

$$-\frac{1}{\sqrt{z}} = \ln|x\cdot z| + c$$

$$-\sqrt{\frac{x}{y}} = \ln|y| + c$$

$$0 = \sqrt{\frac{x}{y}} + \ln|y| + c; \quad x\cdot y > 0$$

په ايمپليځيته بڼه اوبيونه

19. $\frac{2y(y-x)}{x^2-2xy+y^2} = y'$

$$y' = \frac{2y(y-x)}{(x-y)^2}$$

$$= \frac{-2y(x-y)}{(x-y)^2}$$

$$= \frac{-2y}{x-y}$$

$0 = (x-y)\,dy + 2y\cdot dx$

$y = x\cdot z \Rightarrow dy = x\cdot dz + z\cdot dx$

$0 = (x-xz)(x\cdot dz + z\cdot dx) + 2xz\cdot dx$

نيونه: $x \neq 0$ له دې امله په x ويش

$0 = (1-z)(x\cdot dz + z\cdot dx) + 2z\cdot dx$

$0 = x(1-z)\,dz + (z - z^2 + 2z)\,dx$

$0 = x(1-z)\,dz + (3z - z^2)\,dx$

$-x(1-z)\,dz = (3z - z^2)\,dx$

$$\int \frac{1-z}{3z-z^2}\,dz = -\int \frac{dx}{x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int \frac{z-1}{z(z-3)}\,dz = -\int \frac{dx}{x}$$

یو پارشلماتبیلونه یا تجزیه ساده ورکوي

$$\blacktriangleright \int \left(\frac{A}{z}+\frac{B}{z-3}\right)dz = \frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{z}+\frac{2}{z-3}\right)dz$$

$A=\frac{1}{3};\quad B=\frac{2}{3}.$

$$\frac{1}{3}\ln|z|+\frac{2}{3}\ln|z-3| = -\ln|x|+c_1 \quad \|\cdot 3$$

$$\ln|z|+\ln(z-3)^2 = -3\ln|x|+3c_1$$

$$\ln|z(z-3)^2| = \ln|x^{-3}|+3c_1$$

$$e^{\ln|z(z-3)^2|} = e^{\ln|x^{-3}|+3c_1}$$

$$= e^{\ln|x^{-3}|}\cdot e^{3c_1}$$

$e^{3c_1}=c$

$$z(z-3)^2 = c\cdot x^{-3}$$

$z=\frac{y}{x}$

$$\frac{y}{x}\left(\frac{y}{x}-3\right)^2 = c\cdot x^{-3}$$

$$\frac{y}{x^3}(y-3x)^2 = c\cdot x^{-3} \quad \|\cdot x^3$$

$$\underline{\underline{y(y-3x)^2=c;\quad x\neq 0}}$$

په ایمپلیخیت فورم اوبی

20. $y'=\frac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$

$$dy=\left(\frac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\right)dx$$

$y=x\cdot z \Rightarrow dy = x\cdot dz + z\cdot dx$

$\frac{y}{x}=z$

$$x\cdot dz+z\cdot dx=(z+\sqrt{1+z^2})\,dx$$

$$=z\cdot dx+\sqrt{1+z^2}\,dx$$

$$x\cdot dz=\sqrt{1+z^2}\,dx$$

د پوښتنورکوونی شخه سملاسي $x \neq 0$ ورکوي، چی دا نوربايد فرض نه شي

$$\int\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}=\int\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}=\ln|x+\sqrt{a^2+x^2}|$$

$$\ln|z+\sqrt{1+z^2}|=\ln|x|+c_1$$

$$e^{\ln|z+\sqrt{1+z^2}|}=e^{\ln|x|+c_1}=e^{\ln|x|}\cdot\underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$z+\sqrt{1+z^2}=c\cdot x$$

$z=\frac{y}{x}$

$$\frac{y}{x}+\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}=c\cdot x \quad \|\cdot x$$

$$\underline{\underline{y+\sqrt{x^2+y^2}=c\cdot x^2;\quad x\neq 0}}$$

په ایمپلیخیت فورم اوبی

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ – د برنولي متود له مخې اوبی

$$u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx} + 2xuv = x \cdot e^{-x^2}$$

$$u\underbrace{\left(\frac{dv}{dx} + 2xv\right)}_{=0} + v \cdot \frac{du}{dx} = x \cdot e^{-x^2}$$

$$\frac{dv}{dx} = -2xv$$

$$\int \frac{dv}{v} = -2 \int x\,dx$$

$$\ln|v| = -x^2 + c_1$$

$$e^{\ln|v|} = e^{-x^2+c_1} = e^{-x^2} \cdot e^{c_1}$$

Wählen: $c_1 = 0$

$$\Rightarrow v = e^{-x^2}$$

$$u \cdot 0 + e^{-x^2} \cdot \frac{du}{dx} = x \cdot e^{-x^2} \quad \| : e^{-x^2}$$

$$\frac{du}{dx} = x$$

$$\int du = \int x\,dx$$

$$u = \frac{x^2}{2} + c$$

$$y = u \cdot v$$

$$y = e^{-x^2}\left(\frac{x^2}{2} + c\right)$$

۲ – دلاګرانج د متود له مخې اوبی

$$y' + 2xy = 0$$

$$dy = -2xy \cdot dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = -2 \int x\,dx$$

1. $y' + 2xy = \frac{x}{e^{x^2}}$

$$y = u \cdot v \Rightarrow \frac{dy}{dx} = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}$$

$u = u(x); \quad v = v(x)$

د برنولي متود له مخې

رامنخ ته شوي اینتیګرالثابته c_1 تل په خوښه ټاکل کیدونکی ده. له دي امله c_1 داسی ټاکل کیږي، چی وروسته شمیرنه یی ترممکنی اندازي ساده شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\ln|y| = -x^2 + c_1$$

$$e^{\ln|y|} = e^{-x^2+c_1} = e^{-x^2} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$y = c \cdot e^{-x^2}$$

$$\Rightarrow y = \underline{\underline{c(x) \cdot e^{-x^2}}}$$

دا افاده د y ' لپاره په
دیفرنځیالمساوت اینښول کیږي.

$$y' = c'(x) \cdot e^{-x^2} - 2xe^{-x^2} \cdot c(x)$$

$$c'(x) \cdot e^{-x^2} - 2xe^{-x^2} \cdot c(x) + 2x \cdot c(x) \cdot e^{-x^2} = x \cdot e^{-x^2}$$

$$c'(x) \cdot e^{-x^2} = x \cdot e^{-x^2} \quad \| : e^{-x^2}$$

$$\frac{dc(x)}{dx} = x$$

$$\int dc(x) = \int x\,dx$$

$$\underline{c(x) = \frac{x^2}{2} + k}$$

$$y = \underline{\underline{e^{-x^2}\left(\frac{x^2}{2} + k\right)}}$$

۱ – د برنولي متود له مخې اوبې

2. $y' = e^x - y$

$$y = u \cdot v \Rightarrow \frac{dy}{dx} = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}$$

$$u = u(x); \quad v = v(x)$$

$$u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx} = e^x - u \cdot v$$

$$u\underbrace{\left(\frac{dv}{dx} + v\right)}_{=0} + v \cdot \frac{du}{dx} = e^x$$

$$\frac{dv}{dx} = -v$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int dx$$

Wählen: $c_1 = 0$

$$\ln|v| = -x + c_1$$

$$\underline{v = e^{-x}}$$

$$u \cdot 0 + e^{-x} \cdot \frac{du}{dx} = e^x \quad \| \cdot e^x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{du}{dx}=e^{2x}$$

$$\int du=\int e^{2x}dx$$

$$u=\frac{1}{2}e^{2x}+c$$

$y=f(x)=u(x)\cdot v(x)$

$$y=u\cdot v$$

$$=\left(\frac{1}{2}e^{2x}+c\right)\cdot e^{-x}$$

$$=\frac{1}{2}e^{x}+c\cdot e^{-x}$$

۲ - دلاګرانج د متود له مخې اوبې

$$y'+y=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-y$$

$$\int\frac{dy}{y}=-\int dx$$

$$\ln|y|=-x+c_1$$

$$e^{\ln|y|}=e^{-x+c_1}=e^{-x}\cdot\underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$y=c\cdot e^{-x}\Rightarrow y=c(x)\cdot e^{-x}$$

په دیفرنځیالمساواتکي کیږدی

$$y'=c'(x)\cdot e^{-x}-e^{-x}\cdot c(x)$$

$$c'(x)\cdot e^{-x}-e^{-x}\cdot c(x)=e^{x}-c(x)\cdot e^{-x}$$

$$c'(x)\cdot e^{-x}=e^{x}\quad \|\cdot e^{x}$$

$$\frac{dc(x)}{dx}=e^{2x}$$

$$\int dc(x)=\int e^{2x}dx$$

$$c(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+k$$

$$y=\left(\frac{1}{2}\,e^{2x}+k\right)\cdot e^{-x}$$

$$=\frac{1}{2}\,e^{x}+k\cdot e^{-x}$$

3. $y'-y=x^2-1$

$y=u\cdot v \Rightarrow y'=u\cdot v'+v\cdot u'$

$y=f(x)=u(x)\cdot v(x)$

١ - د برنولي متود له مخې اوبې

$$u\cdot v'+v\cdot u'-u\cdot v=x^2-1$$

$$u\underbrace{(v'-v)}_{=0}+v\cdot u'=x^2-1$$

$$\frac{dv}{dx}=v$$

$$\int\frac{dv}{v}=\int dx$$

$$\ln|v|=x+c_1$$

وټاکه $c_1=0$

$$v=e^{x}$$

$$u\cdot 0+e^{x}\cdot u'=x^2-1 \quad \|:e^{x}$$

$$\frac{du}{dx}=(x^2-1)\cdot e^{-x}$$

$$\int du=\int x^2\cdot e^{-x}\,dx-\int e^{-x}\,dx$$

$$u=\int x^2\cdot e^{-x}\,dx+e^{-x}$$

$$\int x^2\cdot e^{-x}\,dx$$

دا پورته اینتیګرال د پارشل ایتیګرال سره اوبې کیږي

$$\int x^2\cdot e^{-x}\,dx=x^2\cdot(-e^{-x})-\int(-e^{-x})\cdot 2x\,dx$$

$$=-x^2\cdot e^{-x}+2\int x\cdot e^{-x}\,dx$$

$$=-x^2\cdot e^{-x}+2\Big[x(-e^{-x})-$$

$$-\int(-e^{-x})\,dx\Big]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int x^2 \cdot e^{-x} dx = -x^2 \cdot e^{-x} - 2x \cdot e^{-x} + 2\int e^{-x} dx$$
$$= -x^2 \cdot e^{-x} - 2x \cdot e^{-x} - 2e^{-x} + c$$
$$= -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + c$$

$$\underline{u = -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + e^{-x} + c}$$

$$y = u \cdot v$$
$$= [-e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + e^{-x} + c] \cdot e^x$$
$$= -(x^2 + 2x + 2) + (e^{-x} + c)e^x$$
$$\underline{\underline{= ce^x - x^2 - 2x - 1}}$$

۲ - دلاګرانج د متود له مخې اوبې :

$$y' - y = 0$$
$$\frac{dy}{dx} = y$$
$$\int \frac{dy}{y} = \int dx$$
$$\ln |y| = x + c_1$$
$$y = c \cdot e^x \qquad c = e^{c_1}$$
$$\underline{\underline{y = c(x) \cdot e^x}}$$

په دیفرنځیالمساوات کي ځاي په ځاي کړی

$$y' = c'(x) \cdot e^x + c(x) \cdot e^x$$
$$c'(x) \cdot e^x + c(x) \cdot e^x - c(x) \cdot e^x = x^2 - 1$$
$$c'(x) \cdot e^x = x^2 - 1 \quad \| : e^x$$
$$c'(x) = (x^2 - 1) \cdot e^{-x}$$

دا ایتیکریشن همدا په برخه ۱ کی اوبی شو

$$c(x) = \int (x^2 - 1) \cdot e^{-x} dx$$
$$\underline{c(x) = -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + e^{-x} + k}$$

$$y = c(x) \cdot e^x = -x^2 - 2x - 2 + 1 + ke^x$$
$$= \underline{\underline{ke^x - x^2 - 2x - 1}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

4. $y'=e^{3x}-2y$

$y=u\cdot v \Rightarrow y'=u\cdot v'+v\cdot u'$

$y=f(x)=u(x)\cdot v(x)$

۱ - د برنولي متود له مخې اوبې

$$u\cdot v'+v\cdot u'=e^{3x}-2u\cdot v$$

$$u\underbrace{(v'+2v)}_{=0}+v\cdot u'=e^{3x}$$

$$\frac{dv}{dx}=-2v$$

$$\int\frac{dv}{v}=-2\int dx$$

$$\ln|v|=-2x+c_1$$

وتاکه $c_1=0$

$$\underline{v=e^{-2x}}$$

$$u\cdot 0+e^{-2x}\cdot u'=e^{3x} \quad \|:e^{2x}$$

$$\frac{du}{dx}=e^{5x}$$

$$\int du=\int e^{5x}dx$$

$$\underline{u=\frac{1}{5}e^{5x}+c}$$

$$y=u\cdot v$$

$$=\left(\frac{1}{5}e^{5x}+c\right)e^{-2x}$$

$$\underline{\underline{=\frac{1}{5}e^{3x}+c\cdot e^{-2x}}}$$

۲ - دلاګرانج د متود له مخې اوبې

$$y'+2y=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-2y$$

$$\int\frac{dy}{y}=-2\int dx$$

$$\ln|y|=-2x+c_1$$

$$e^{\ln|y|}=e^{-2x+c_1}=e^{-2x}\cdot\underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = c \cdot e^{-2x} \Rightarrow y = c(x) \cdot e^{-2x}$$

$$y' = c'(x) \cdot e^{-2x} - 2e^{-2x} \cdot c(x)$$

$$c'(x) \cdot e^{-2x} - 2e^{-2x} \cdot c(x) = e^{3x} - 2c(x) \cdot e^{-2x}$$

په دیفرنخیالمساوات کی دې کیښوول شي

$$c'(x) \cdot e^{-2x} = e^{3x} \quad \| \cdot e^{2x}$$

$$c'(x) = e^{5x}$$

$$c(x) = \frac{1}{5} e^{5x} + k$$

$$y = c(x) \cdot e^{-2x}$$

$$= \frac{1}{5} e^{3x} + k \cdot e^{-2x}$$

5. $y' \cdot x = y + x^2 \cdot \sin x$

$y = u \cdot v \Rightarrow y' = u \cdot v' + v \cdot u'$

$y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$

۱ – د برنولي متود له لارې اوبې

$$(u \cdot v' + v \cdot u') \cdot x = u \cdot v + x^2 \cdot \sin x$$

$$u\underbrace{(xv' - v)}_{=0} + xv \cdot u' = x^2 \cdot \sin x$$

$$x \cdot \frac{dv}{dx} = v$$

نیونه: x ‖= c , په x ویشنه

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln |v| = \ln |x| + c_1$$

وټاکی $c_1 = 0$

$$v = x$$

$$u \cdot 0 + x^2 \cdot u' = x^2 \cdot \sin x \quad \| : x^2$$

$$\frac{du}{dx} = \sin x$$

$$u = -\cos x + c$$

$$y = u \cdot v$$

$$= x(c - \cos x)$$

دا اوبی دیفرنخیالمساوات د x = 0 لپاره هم پوره کوي، دا په دې مانا چي دا ټولیز اوبی دی.

۲ د لاګرانج متود له لارې اوبې

$$y' \cdot x - y = 0 \quad \| : x$$

$$y' = \frac{y}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln |y| = \ln |x| + c_1$$

$$e^{\ln |y|} = e^{\ln |x| + c_1} = e^{\ln |x|} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$y = c \cdot x \Rightarrow \underline{\underline{y = c(x) \cdot x}}$$

دلته هم لمړی x |= 0 غوښتل کیږي، اوبې لکه پورته مګر د x = 0 لپاره به هم باور ولري.

$$y' = c'(x) \cdot x + c(x)$$

$$c'(x) \cdot x^2 + c(x) \cdot x = c(x) \cdot x + x^2 \cdot \sin x$$

$$c'(x) \cdot x^2 = x^2 \cdot \sin x \quad \| : x^2$$

$$c'(x) = \sin x$$

$$\underline{c(x) = -\cos x + k}$$

$$y = \underline{\underline{x(k - \cos x)}}$$

په دیفرنخیالمساوات کې ځای په ځای کړی.

۱ – د برنولی متود له لارې اوبې

6. $y'x = x \cdot \sin x - y$

$$y = u \cdot v \Rightarrow y' = u \cdot v' + v \cdot u'$$

$$y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

$$(u \cdot v' + v \cdot u') \cdot x = x \cdot \sin x - u \cdot v$$

$$u\underbrace{(v' \cdot x + v)}_{=0} + x \cdot v \cdot u' = x \cdot \sin x$$

$$\frac{dv}{dx} \cdot x = -v$$

نیونه: x |= 0 , څکه په x ویشنه ،

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x}$$

Wählen: $c_1 = 0$ وټاکه

$$\ln |v| = -\ln |x| + c_1$$

$$\ln |v| = \ln \left|\frac{1}{x}\right|$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$v=\frac{1}{x}$$

$$u\cdot 0+u'=x\cdot\sin x$$

$$\int du=\int x\cdot\sin x\,dx$$

پارشل یا ټوټه انیتیګریشن

$$u=x(-\cos x)-\int(-\cos x)\,dx$$

$$=-x\cdot\cos x+\sin x+c$$

$$y=u\cdot v$$

$$=-\cos x+\frac{1}{x}(\sin x+c);\quad x\neq 0$$

۲ . د لاګرانژ متود له لارې اوبې

$$y'\cdot x+y=0$$

نیونه: $x\,|=0$, څکه په x ویشنه

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$$

$$\int\frac{dy}{y}=-\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|y|=-\ln|x|+c_1$$

$$e^{\ln|y|}=e^{-\ln|x|+c_1}=e^{\ln|\frac{1}{x}|}\cdot\underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$y=\frac{c}{x}\Rightarrow y=\frac{c(x)}{x}$$

په دیفرنځیالمساوات کې کیږدی

$$y'=\frac{x\cdot c'(x)-c(x)}{x^2}=\frac{c'(x)}{x}-\frac{c(x)}{x^2}$$

$$c'(x)-\frac{c(x)}{x}=x\cdot\sin x-\frac{c(x)}{x}$$

$$c'(x)=x\cdot\sin x$$

دالاندې

$$\int x\cdot\sin x\,dx$$

اینتیګرال همدا اوس برخه ۱ کی اوبی شو

$$\int dc(x)=\int x\cdot\sin x\,dx$$

$$c(x)=-x\cdot\cos x+\sin x+k$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y=\frac{1}{x}\cdot c(x)$$

$$=-\cos x+\frac{1}{x}(\sin x+k);\quad x\neq 0$$

7. $y'+y+\cos x-e^{2x}=0$

$y=u\cdot v\Rightarrow y'=u\cdot v'+v\cdot u'$

$y=f(x)=u(x)\cdot v(x)$

۱ – د برنولي متود له لارې اوبې

$$u\cdot v'+v\cdot u'+u\cdot v=e^{2x}-\cos x$$

$$u\underbrace{(v'+v)}_{=0}+v\cdot u'=e^{2x}-\cos x$$

$$\frac{dv}{dx}=-v$$

$$\int\frac{dv}{v}=-\int dx$$

$$\ln|v|=-x+c_1$$

Wählen: $c_1=0$: وټاکې

$$v=e^{-x}$$

$$u\cdot 0+e^{-x}\cdot u'=e^{2x}-\cos x\quad\|\cdot e^x$$

$$u'=e^{3x}-e^x\cdot\cos x$$

$$u=\int(e^{3x}-e^x\cdot\cos x)\,dx$$

$$=\int e^{3x}\cdot dx-\int e^x\cdot\cos x\,dx$$

$$=\frac{1}{3}e^{3x}-\int e^x\cdot\cos x\,dx$$

دا اینتګرال $\int e^x\cdot\cos x\,dx$

د ټوټه انتیګرال سره اوبې کیږي

$$F=\int e^x\cdot\cos x\,dx$$

$$=e^x\cdot\sin x-\int\sin x\cdot e^x\,dx$$

$$=e^x\cdot\sin x-\int e^x\cdot\sin x\,dx$$

$$=e^x\cdot\sin x-\left[e^x(-\cos x)-\int(-\cos x)\cdot e\right.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$F=e^x\cdot\sin x+e^x\cdot\cos x-\underbrace{\int e^x\cdot\cos x\,dx}_{F}$$

$$2F=e^x\cdot\sin x+e^x\cdot\cos x+c_1$$

$$F=\frac{e^x}{2}(\sin x+\cos x)+c$$

$c=\frac{1}{2}c_1$

$$u=\frac{1}{3}e^{3x}-F$$

$$=\frac{1}{3}e^{3x}-\frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)+c$$

$$y=u\cdot v$$

$$=\frac{1}{3}e^{2x}-\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)+c\cdot e^{-x}$$

۲ – د لاگرانژ متود له لارې اوبې :

$$y'+y=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-y$$

$$\int\frac{dy}{y}=-\int dx$$

$$\ln|y|=-x+c_1$$

$$e^{\ln|y|}=e^{-x+c_1}=e^{-x}\cdot\underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$y=c\cdot e^{-x}\Rightarrow y=c(x)\cdot e^{-x}$$

په دیفرنځیالمساوات کې ځای په ځای کړی.

$$y'=c'(x)\cdot e^{-x}-e^{-x}\cdot c(x)$$

$$c'(x)\cdot e^{-x}-e^{-x}\cdot c(x)+c(x)\cdot e^{-x}+\cos x-e^{2x}=0$$

$$c'(x)\cdot e^{-x}=e^{2x}-\cos x \quad \|\cdot e^x$$

$$c'(x)=e^{3x}-e^x\cdot\cos x$$

دا اینتیگرال همدا اوس په برخه ۱ کې اوبې شو

$$c(x)=\int(e^{3x}-e^x\cdot\cos x)\,dx$$

$$=\frac{1}{3}e^{3x}-\frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)+k$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y=c(x)\cdot e^{-x}$$

$$=\frac{1}{3}e^{2x}-\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)+k\cdot e^{-x}$$

8. $y'+ay=b\cdot e^{cx}$

$y=u\cdot v\Rightarrow y'=u\cdot v'+v\cdot u'$

$y=f(x)=u(x)\cdot v(x)$

۱ –د برنولي متود له لارې اوبې

$$u\cdot v'+v\cdot u'+auv=b\cdot e^{cx}$$

$$u\underbrace{(v'+av)}_{=0}+v\cdot u'=b\cdot e^{cx}$$

$$\frac{dv}{dx}=-av$$

$$\int\frac{dv}{v}=-a\int dx$$

Wählen: $c_1=0$ وټاکئ:

$$\ln|v|=-ax+c_1$$

$$v=e^{-ax}$$

$$u\cdot 0+e^{-ax}\cdot u'=b\cdot e^{cx}\quad \|\cdot e^{ax}$$

$$u'=b\cdot e^{x(a+c)}$$

$$u=\frac{b}{a+c}e^{x(a+c)}+c_2$$

$$y=u\cdot v$$

$$=\frac{b}{a+c}e^{cx}+c_2\cdot e^{-ax}$$

۲ – د لاګرانژ متود له لارې اوبې

$$y'+ay=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-ay$$

$$\int\frac{dy}{y}=-a\int dx$$

$$\ln|y|=-ax+c_1$$

$c_2=e^{c_1}$

$$y=c_2\cdot e^{-ax}\Rightarrow y=c_2(x)\cdot e^{-ax}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دیفرنځیالمساوات کي ځای په ځای کړی

$$y' = c_2'(x)\cdot e^{-ax} - ac_2(x)\cdot e^{-ax}$$

$$c_2'(x)\cdot e^{-ax} - ac_2(x)\cdot e^{-ax} + ac_2(x)\cdot e^{-ax} = b\cdot e^{cx}$$

$$c_2'(x)\cdot e^{-ax} = b\cdot e^{cx} \quad \| \cdot e^{ax}$$

$$c_2'(x) = b\cdot e^{x(a+c)}$$

$$\underline{c_2(x) = \frac{b}{a+c}\, e^{x(a+c)} + k}$$

$$y = c_2(x)\cdot e^{-ax}$$

$$= \frac{b}{a+c}\, e^{cx} + k\cdot e^{-ax}$$

9. $y' + ay - b\cdot \sin(cx) = 0$

$$y = u\cdot v \Rightarrow y' = u\cdot v' + v\cdot u'$$

$$y = f(x) = u(x)\cdot v(x)$$

۱ – د برنولي متود له لاري اوبی

$$u\cdot v' + v\cdot u' + auv - b\sin cx = 0$$

$$\underbrace{u(v' + av)}_{=0} + v\cdot u' - b\sin cx = 0$$

$$\frac{dv}{dx} = -av$$

$$\int \frac{dv}{v} = -a\int dx$$

Wählen: $c_1 = 0$ وټاکی

$$\ln|v| = -ax + c_1$$

$$\underline{v = e^{-ax}}$$

$$u\cdot 0 + e^{-ax}\cdot u' - b\sin cx = 0 \quad \| \cdot e^{ax}$$

$$u' = b\cdot e^{ax}\cdot \sin cx$$

دا اینتیګرال د ټوټه یا پارشل اینتیګرال له لاري اوبی کیږي

$$u = b\int e^{ax}\cdot \sin cx\, dx$$

$$= -\frac{b}{c}\, e^{ax}\cdot \cos cx + \frac{ab}{c}\int e^{ax}\cdot \cos cx\, dx$$

$$= -\frac{b}{c}\, e^{ax}\cdot \cos cx +$$

$$+ \frac{ab}{c}\left[e^{ax}\cdot \frac{\sin cx}{c} - \frac{a}{c}\int e^{ax}\cdot \sin cx\, dx \right]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$u=-\frac{b}{c}\,e^{ax}\cdot\cos cx+\frac{ab}{c^2}\,e^{ax}\cdot\sin cx-$$

$$-\frac{a^2}{c^2}\cdot b\underbrace{\int e^{ax}\cdot\sin cx\,dx}_{u}$$

$$1+\frac{a^2}{c^2}=\frac{a^2+c^2}{c^2}$$

$$\left(1+\frac{a^2}{c^2}\right)u=\frac{b}{c}\,e^{ax}\left(\frac{a}{c}\sin cx-\cos cx\right)+c_2$$

$$c_3=c_2\cdot\frac{c^2}{a^2+c^2}$$

$$\underline{u=\frac{bc}{a^2+c^2}\,e^{ax}\left(\frac{a}{c}\sin cx-\cos cx\right)+c_3}$$

$$y=u\cdot v$$

$$=\frac{bc}{a^2+c^2}\left(\frac{a}{c}\sin cx-\cos cx\right)+c_3\cdot e^{-ax}$$

۲ - د لاګرانژ د متود له لارې اوبې

$$y'+ay=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-ay$$

$$\int\frac{dy}{y}=-a\int dx$$

$$\ln|y|=-ax+c_1$$

$$c_2=e^{c_1}$$

$$y=c_2\cdot e^{-ax}\Rightarrow \underline{y=c_2(x)\cdot e^{-ax}}$$

په دیفرنځیالمساوات کې دې کیښوول شي

$$y'=c_2'(x)\cdot e^{-ax}-ac_2(x)\cdot e^{-ax}$$

$$c_2'(x)\cdot e^{-ax}-ac_2(x)\cdot e^{-ax}+ac_2(x)\cdot e^{-ax}-b\cdot\sin cx=0$$

$$c_2'(x)\cdot e^{-ax}=b\sin cx\quad\|\cdot e^{ax}$$

$$c_2'(x)=b\cdot e^{ax}\cdot\sin cx$$

دا اینتیګرال همدا اوس برخه ۱ کې اوبې شو

$$c_2(x)=b\int e^{ax}\cdot\sin cx\,dx$$

$$=\underline{\frac{bc}{a^2+c^2}\,e^{ax}\left(\frac{a}{c}\sin cx-\cos cx\right)+k}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = c_2(x) \cdot e^{-ax}$$

$$= \frac{b}{a^2 + c^2}(a \cdot \sin cx - c \cdot \cos cx) + k \cdot e^{-ax}$$

۱ – د برنولي د متود له لاري اوبي

$$u \cdot v' + v \cdot u' = \frac{uv}{x} + \frac{1}{\ln x}$$

$$u\underbrace{\left(v' - \frac{v}{x}\right)}_{=0} + v \cdot u' = \frac{1}{\ln x}$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{v}{x}$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln |v| = \ln |x| + c_1$$

$$\underline{v = x}$$

$$u \cdot 0 + x \cdot u' = \frac{1}{\ln x} \quad \Big\| \cdot \frac{1}{x}$$

$$u' = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}$$

$$u = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\, dx$$

$$= \underline{\ln |\ln x| + c}$$

$$y = u \cdot v$$

$$= x\,(|\ln|\ln x| + c)$$

۲ – د لاگرانژ دمتودي له لاري وبی

$$y' - \frac{y}{x} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

10. $y' = \frac{y}{x} + \frac{1}{\ln x}$

$$y = u \cdot v \Rightarrow y' = u \cdot v' + v \cdot u'$$

$$y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

د سوالورکونی څخه سملاسی لاس
ته راځی $x > 0$

وټاکی: Wählen: $c_1 = 0$

$$\int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\, dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = \ln|x| + c_1$$

$$y = c \cdot x \Rightarrow \underline{\underline{y = c(x) \cdot x}}$$

$c = e^{c_1}$

په دیفرنځیالمساوات کې کیږدی

$$y' = c'(x) \cdot x + c(x)$$

$$c'(x) \cdot x + c(x) = c(x) + \frac{1}{\ln x}$$

$$c'(x) \cdot x = \frac{1}{\ln x} \quad \Big\| \cdot \frac{1}{x}$$

$$c'(x) = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}$$

$$c(x) = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\, dx$$

$$= \underline{\ln|\ln x| + k}$$

$$y = c(x) \cdot x$$

$$= \underline{\underline{x(\ln|\ln x| + k)}}$$

۱ – د برنولی متودله لارېاوبي

11. $y' = a + bx + cy$

$$y = u \cdot v \Rightarrow y' = u \cdot v' + v \cdot u'$$

$$y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

$$u \cdot v' + v \cdot u' = a + bx + cuv$$

$$u\underbrace{(v' - cv)}_{=0} + v \cdot u' = a + bx$$

$$\frac{dv}{dx} = cv$$

$$\int \frac{dv}{v} = c \int dx$$

$$\ln|v| = cx + c_1$$

Wählen: $c_1 = 0$ وټاکه

$$\underline{v = e^{cx}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پارشل ایتیکریشن یا اینتیګراول

$$u \cdot 0 + e^{cx} \cdot u' = a + bx \quad \| \cdot e^{-cx}$$

$$u' = (a+bx) \cdot e^{-cx}$$

$$u = \int (a+bx) e^{-cx} dx$$

$$= a \int e^{-cx} dx + b \int x \cdot e^{-cx} dx$$

$$= -\frac{a}{c} e^{-cx} + b \int x \cdot e^{-cx} dx$$

$$= -\frac{a}{c} e^{-cx} + b \left[-\frac{x}{c} e^{-cx} + \frac{1}{c} \int e^{-cx} dx \right]$$

$$= -\frac{a}{c} e^{-cx} - \frac{bx}{c} e^{-cx} - \frac{b}{c^2} e^{-cx} + c_1$$

$$= -\frac{1}{c} e^{-cx} \left(a + bx + \frac{b}{c} \right) + c_1$$

$$y = u \cdot v$$

$$= -\frac{1}{c} \left(a + bx + \frac{b}{c} \right) + c_1 \cdot e^{cx}$$

۲ - د لاګرانج متود له لارې اوبې

$$y' - cy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = cy$$

$$\int \frac{dy}{y} = c \int dx$$

$$\ln |y| = cx + c_1$$

$c_2 = e^{c_1}$

$$y = c_2 \cdot e^{cx} \Rightarrow y = c_2(x) \cdot e^{cx}$$

په دیفرنشیالمساوات کې ځای په ځای کړی یا کیږدی

$$y' = c_2'(x) \cdot e^{cx} + c \cdot c_2(x) \cdot e^{cx}$$

$$c_2'(x) \cdot e^{cx} + c \cdot c_2(x) \cdot e^{cx} = a + bx + c \cdot c_2^{(x)} \cdot e^{cx}$$

$$c_2'(x) \cdot e^{cx} = a + bx \quad \| \cdot e^{-cx}$$

$$c_2'(x) = (a+bx) e^{-cx}$$

دا اینتیګرال همدا اوس برخه ۱
کی اوبی شو

$$c_2(x)=\int (a+bx)e^{-cx}\,dx$$

$$=-\frac{1}{c}e^{-cx}\left(a+bx+\frac{b}{c}\right)+c_2$$

$$y=k(x)\cdot e^{cx}$$

$$=-\frac{1}{c}\left(a+bx+\frac{b}{c}\right)+k\cdot e^{cx}$$

12. $xy'+1=e^x+y$

$y=u\cdot v\Rightarrow y'=u\cdot v'+v\cdot u'$

$y=f(x)=u(x)\cdot v(x)$

۱ – د برنولي متود له لارې اوبی

$$x(u\cdot v'+v\cdot u')+1=e^x+uv$$

$$u\underbrace{(xv'-v)}_{=0}+xv\cdot u'+1=e^x$$

$$x\cdot\frac{dv}{dx}=v$$

نیونه: x |= 0 , ځکه په x ویشنه

$$\int\frac{dv}{v}=\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|v|=\ln|x|+c_1$$

$$\underline{v=x}$$

Wählen: $c_1=0$: وټاکه

$$u\cdot 0+x^2\cdot u'+1=e^x$$

$$u'=\frac{e^x-1}{x^2}$$

$$u=\int\frac{e^x}{x^2}dx-\int\frac{dx}{x^2}$$

$$=\int\frac{e^x}{x^2}\cdot dx+\frac{1}{x}$$

د دې لاندې اینتیګرال

$$\int\frac{e^x}{x^2}dx$$

اوبی کی د انتیګرایشن لپاره لړی
ودیزینه باندې تیریدنه نه شي کیدی

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\dots$$

$$\frac{e^x}{x^2}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+\frac{1}{2!}+\frac{x}{3!}+\frac{x^2}{4!}+\dots$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int \frac{e^x}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x} + \ln|x| + \frac{x}{1\cdot 2!} + \frac{x^2}{2\cdot 3!} + \frac{x^3}{3\cdot 4!} + \ldots + c$$

$$u = \ln|x| + \frac{x}{1\cdot 2!} + \frac{x^2}{2\cdot 3!} + \frac{x^3}{3\cdot 4!} + \ldots + c$$

$$y = u\cdot v = c\cdot x + x\cdot \ln|x| + \frac{x^2}{1\cdot 2!} + \frac{x^3}{2\cdot 3!} + \frac{x^4}{3\cdot 4!} + \ldots$$

für $x \neq 0$

۲ – دلاگرانژمتود له لارې اوبی

$xy' - y = 0$

نیونه: $x \neq 0$, خکه په x ویشنه

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = \ln|x| + c_1$$

$$y = c\cdot x \Rightarrow y = c(x)\cdot x$$

$c = e^{c_1}$

$$y' = c'(x)\cdot x + c(x)$$

په دیفرنخیالمساوات کی کیږدی

$$x^2\cdot c'(x) + c(x)\cdot x + 1 = e^x + c(x)\cdot x$$

$$x^2\cdot c'(x) + 1 = e^x \quad \|:x^2$$

$$c'(x) = \frac{e^x - 1}{x^2}$$

دا اینتیگرال همدا اوس تر ۱ لاندې اوبی شویدی.

$$c(x) = \int \frac{e^x}{x^2}\,dx - \int \frac{1}{x^2}\,dx = \ln|x| + \frac{x}{1\cdot 2!} + \frac{x^2}{2\cdot 3!} + \frac{x^3}{3\cdot 4!} + \ldots + k$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$y = c(x) \cdot x$

$$= k \cdot x + x \cdot \ln|x| + \frac{x^2}{1 \cdot 2!} + \frac{x^3}{2 \cdot 3!} + \frac{x^4}{3 \cdot 4!} + \dots$$

$x \neq 0$

13. $y'(1-x^2) + xy = 1$

$y = u \cdot v \Rightarrow y' = u \cdot v' + v \cdot u'$

$y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$

۱ . د برنولي د متود له لاري دا دلته

$$(uv' + vu')\,(1-x^2) + xuv = 1$$

$$u\underbrace{[v'(1-x^2) + xv]}_{=0} + vu'(1-x^2) = 1$$

$$\frac{dv}{dx}(1-x^2) = -xv$$

نيونه: $|x| = 1$; ويشنه په $1 - x^2$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{-x}{1-x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{-2x}{1-x^2}\,dx$$

$$\int \frac{-2x}{1-x^2}\,dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$$

Wählen: $c_1 = 0$ وټاکی

$$\ln|v| = \frac{1}{2} \ln|1-x^2| + c_1$$

$$= \ln|1-x^2|^{\frac{1}{2}}$$

$$v = \sqrt{|1-x^2|}$$

د وريسی اوبيوني لپاره بايد د $|x|$ لپاره دوه حالتونه توپير شي

$$v = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{für } |x| < 1 \\ \sqrt{x^2-1} & \text{für } |x| > 1 \end{cases}$$

1. Fall: $v = \sqrt{1-x^2}; \quad |x| < 1$

$$u \cdot 0 + \sqrt{1-x^2} \cdot u' \cdot (1-x^2) = 1$$

$$u' = \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

$$u = \int \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$$

Substitution: سبستيچيوشن :

$$1 - x^2 = z^2 \Rightarrow dx = -\frac{z \cdot dz}{x}$$

$$= \int \frac{1}{z^3} \cdot \frac{-z\,dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$u = -\int \frac{dz}{z^2 \cdot \sqrt{1-z^2}}$$

$$= -\int \frac{\cos t \, dt}{\sin^2 t \cdot \sqrt{1-\sin^2 t}}$$

$$= -\int \frac{dt}{\sin^2 t}$$ ▶ بنسټ اینتیګرال

$$= \cot t + c$$

$$= \frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin t} + c$$

$$= \frac{\sqrt{1-z^2}}{z} + c$$

$$= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + c$$

$$y = u \cdot v$$

$$= x + c \cdot \sqrt{1-x^2} \quad \text{für } |x| \leq 1$$

2. Fall: $v = \sqrt{x^2-1}$; $|x| > 1$

$$u \cdot 0 + \sqrt{x^2-1} \cdot u' \cdot (1-x^2) = 1$$

$$u' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}\,(1-x^2)}$$

$$u = -\int \frac{dx}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= -\int \frac{1}{z^3} \cdot \frac{z\,dz}{\sqrt{1+z^2}}$$

$$u = -\int \frac{dz}{z^2 \cdot \sqrt{1+z^2}}$$

$$= -\int \frac{\cosh t \, dt}{\sinh^2 t \cdot \sqrt{1+\sinh^2 t}}$$

$$= -\int \frac{dt}{\sinh^2 t}$$ ▶ بنسټ اینتیګرال،

$$x = \sqrt{1-z^2}; \quad dx = -\frac{z \cdot dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

سبستیچیوشن

$$z = \sin t \Rightarrow dz = \cos t \cdot dt$$

$$\sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t; \quad \cot t = \frac{\cos t}{\sin t}$$

دا اوبی دیفرنځیالمساوات

د $|x| = 1$ هم پوره کوي

Substitution: سبستیچیوشن :

$$x^2 - 1 = z^2 \Rightarrow dx = \frac{z \cdot dz}{x}$$

$$x = \sqrt{1+z^2}; \quad dx = \frac{z \cdot dz}{\sqrt{1+z^2}}$$

سبستیچیوشن

$$z = \sinh t \Rightarrow dz = \cosh t \cdot dt$$

$$\sqrt{1+\sinh^2 t} = \cosh t$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$u = \coth t + c$$

$$= \frac{\sqrt{1+\sinh^2 t}}{\sinh t} + c$$

$$= \frac{\sqrt{1+z^2}}{z} + c$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} + c$$

$$\coth t = \frac{\cosh t}{\sinh t}$$

$y = u \cdot v$

د $|x| \geq 1$ لپاره $= x + c \cdot \sqrt{x^2-1}$

د ټولو x لپاره $y = x + c \cdot \sqrt{|1-x^2|}$

دا اوبی دیفرنخیالمساوات د $|x| = 1$ هم پوره کوي په ۱ او ۲ حالت کی د ارزښت کارونی له لاري و یوه اوبی ته رایوځای شي.

۲ – د لاګرانژ متود له لاري اوبی

$$y'(1-x^2) + xy = 0$$

نیونه: $|x| \neq 1$; ویشنه په $1 - x^2$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{xy}{1-x^2}$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{x}{1-x^2}\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{-2x}{1-x^2}\, dx$$

$$\int \frac{-2x}{1-x^2}\, dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx$$

$$\ln |y| = \frac{1}{2} \ln |1-x^2| + c_1$$

$$= \ln \sqrt{|1-x^2|} + c_1$$

$$y = \sqrt{|1-x^2|} \cdot c$$

$$c = e^{c_1}$$

$$y = c(x) \cdot \sqrt{|1-x^2|}$$

د نورو اوبیونولپاره باید د $|x|$ لپاره دوه حالتونه توپیر شي

$$y = \begin{cases} c(x) \cdot \sqrt{1-x^2} & \text{د } |x| < 1 \text{ لپاره} \\ c(x) \cdot \sqrt{x^2-1} & \text{د } |x| > 1 \text{ لپاره} \end{cases}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\underline{\text{1. Fall:}}\quad y=c(x)\cdot\sqrt{1-x^2};\quad |x|<1$

په دیفرنځیالمساوات کي ځاي
په ځاي کړی.

$$y'=c(x)\cdot\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}+c'(x)\cdot\sqrt{1-x^2}$$

$$\underbrace{c(x)\cdot\frac{-x(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}}_{-c(x)\cdot x\sqrt{1-x^2}}+c'(x)(1-x^2)\sqrt{1-x^2}+\quad +xc(x)\cdot\sqrt{1-x^2}=1$$

$$c'(x)(1-x^2)\sqrt{1-x^2}=1$$

$$c'(x)=\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

دا اینتیګرال همدا اوس په برخه۱
حالت ۱ کی وشمیرل شو

$$c(x)=\int\frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\underline{\underline{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+k}}$$

دا اوبی دیفرنځیالمساوات
د 1 = | x | هم پوره کوي

$$y=c(x)\cdot\sqrt{1-x^2}$$

$$=\underline{\underline{x+k\cdot\sqrt{1-x^2}\quad \text{für } |x|\leq 1}}$$

$\underline{\text{2. Fall:}}\quad y=c(x)\cdot\sqrt{x^2-1};\quad |x|>1$

په دیفرنځیالمساوات کي ځاي
په ځاي کړی.

$$y'=c'(x)\cdot\sqrt{x^2-1}+c(x)\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$(1-x^2)\cdot c'(x)\cdot\sqrt{x^2-1}+c(x)\frac{x(1-x^2)}{\sqrt{x^2-1}}+\quad +x\cdot c(x)\cdot\sqrt{x^2-1}=1$$

$$(1-x^2)\cdot c'(x)\cdot\sqrt{x^2-1}=1$$

$$c'(x)=\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{x^2-1}}$$

$$=-\frac{1}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا ایتیگرال همدا اوس برخه ۱
۲ . حالت کی اوبی شو

دا اوبی دیفرنخیالمساوات
د 1 = | x | هم پوره کوي
په ۱ او ۲ حالت کی د ارزښت
کارونی له لارې و یوه اوبی ته
رایوځای شي.

14. $\dfrac{y'}{\sin x} - y = 1 - \cos x$

$y = u \cdot v \Rightarrow y' = uv' + vu'$

$y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$

دپوښتنی څخه 0 =| x ورکوي،
دا په دې مانا چی x |= n·π
د n = 0 , ±1 , ± 2.... سره

Wählen: $c_1 = 0$

سبستیچیوشن (بدلون)

$z = \cos x \Rightarrow dx = \dfrac{dz}{-\sin x}$

$c(x) = -\int \dfrac{dx}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}$

$= \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} + k$

$y = c(x) \cdot \sqrt{x^2-1}$

$= x + k \cdot \sqrt{x^2-1}$ für $|x| \geq 1$

$y = x + k \cdot \sqrt{|1-x^2|}$ für alle x

۱ - د برنولي متود له لارې اوبی

$y' - \sin x \cdot y = \sin x(1-\cos x)$

$uv' + vu' - uv \cdot \sin x = \sin x \cdot (1-\cos x)$

$u\underbrace{(v' - v \cdot \sin x)}_{=0} + vu' = \sin x(1-\cos x)$

$\dfrac{dv}{dx} = v \cdot \sin x$

$\int \dfrac{dv}{v} = \int \sin x \, dx$

$\ln |v| = -\cos x + c_1$

$v = e^{-\cos x}$

$u \cdot 0 + e^{-\cos x} \cdot u' = \sin x(1-\cos x) \quad \| \cdot e^{\cos x}$

$u' = \sin x(1-\cos x) e^{\cos x}$

$u = \int \sin x(1-\cos x) e^{\cos x} dx$

$= -\int (1-z) e^z dz$

$= -\int e^z dz + \int z \cdot e^z dz$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$u = -e^z + \int z \cdot e^z \, dz$$

پارشل یا توټه ایتیګریشن

$$= -e^z + z \cdot e^z - \int e^z \, dz$$

$$= -e^z + z \cdot e^z - e^z + c$$

$$= e^z(z-2) + c$$

$$= e^{\cos x} \cdot (\cos x - 2) + c$$

$$y = u \cdot v$$

$$= \cos x - 2 + c \cdot e^{-\cos x}$$

۲ - د لاګرانج متود له لارې اوبی

$$\frac{y'}{\sin x} - y = 0 \quad \| \cdot \sin x$$

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot \sin x$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \sin x \, dx$$

$$\ln |y| = -\cos x + c_1$$

$$e^{\ln |y|} = e^{-\cos x + c_1} = e^{-\cos x} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$y = c \cdot e^{-\cos x} \Rightarrow y = c(x) \cdot e^{-\cos x}$$

په دیفرنځیالمساوات کې ځای په ځای کړی.

$$y' = c'(x) \cdot e^{-\cos x} + c(x) \cdot \sin x \cdot e^{-\cos x}$$

$$\frac{c'(x)}{\sin x} e^{-\cos x} + c(x) \cdot e^{-\cos x} - c(x) \cdot e^{-\cos x} = 1 - \cos x$$

$$\frac{c'(x)}{\sin x} e^{-\cos x} = 1 - \cos x \quad \| \cdot \sin x \cdot e^{\cos x}$$

$$c'(x) = \sin x (1 - \cos x) e^{\cos x}$$

دا اینتیګرال همدا اوس برخه ۱ کی اوبی شو

$$c(x) = \int \sin x (1 - \cos x) e^{\cos x} \cdot dx$$

$$= e^{\cos x} \cdot (\cos x - 2) + k$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$y=c(x)\cdot e^{-\cos x}$

$=\underline{\underline{\cos x-2+k\cdot e^{-\cos x}}}$

15. $y'+y\cdot\cos x=\frac{1}{2}\sin(2x)$

$y=u\cdot v\Rightarrow y'=uv'+vu'$

$y=f(x)=u(x)\cdot v(x)$

۱ – د برنولي متود له لارې اوبیونه

$uv'+vu'+uv\cdot\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$

$u\underbrace{(v'+v\cdot\cos x)}_{=0}+vu'=\frac{1}{2}\sin 2x$

$\frac{dv}{dx}=-v\cdot\cos x$

$\int\frac{dv}{v}=-\int\cos x\,dx$

Wählen: $c_1=0$ وټاکی

$\ln|v|=-\sin x+c_1$

$v=\underline{e^{-\sin x}}$

$\sin 2x=2\cos x\cdot\sin x$

$u\cdot 0+e^{-\sin x}\cdot u'=\frac{1}{2}\sin 2x \quad \|\cdot e^{\sin x}$

$u'=\frac{1}{2}\sin 2x\, e^{\sin x}$

Substitution: بدلون

$\sin x=z\Rightarrow dx=\frac{dz}{\cos x}$

پارشل یا ټوټه ایتیګریشن

$u=\int\sin x\cdot\cos x\cdot e^{\sin x}dx$

$=\int z\cdot e^z\cdot dz$

$=z\cdot e^z-\int e^z\,dz$

$u=z\cdot e^z-e^z+c$

$=e^z(z-1)+c$

$=\underline{e^{\sin x}(\sin x-1)+c}$

$y=u\cdot v$

$=\underline{\underline{\sin x-1+c\cdot e^{-\sin x}}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ - د لاګرانخ د متود له لارې اوبی

$y'+y\cdot\cos x=0$

$$\frac{dy}{dx}=-y\cdot\cos x$$

$$\int\frac{dy}{y}=-\int\cos x\,dx$$

$$\ln|y|=-\sin x+c_1$$

$c=e^{c_1}$

$$y=c\cdot e^{-\sin x}\Rightarrow y=\underline{\underline{c(x)\cdot e^{-\sin x}}}$$

$y'=c'(x)\cdot e^{-\sin x}-\cos x\cdot c(x)\cdot e^{-\sin x}$

په دیفرنشیالمساوات کې ځای په ځای کړی.

$$c'(x)\cdot e^{-\sin x}-\cos x\cdot c(x)\cdot e^{-\sin x}+$$
$$+\cos x\cdot c(x)\cdot e^{-\sin x}=\frac{1}{2}\sin 2x$$

$$c'(x)\cdot e^{-\sin x}=\frac{1}{2}\sin 2x\quad\|\cdot e^{\sin x}$$

$$c'(x)=\frac{1}{2}\sin 2x\cdot e^{\sin x}$$

$$c(x)=\int\cos x\cdot\sin x\cdot e^{\sin x}\,dx$$

دا اینتیګرال همدا اوس برخه ۱ کې اوبی شو

$$=\underline{\underline{e^{\sin x}(\sin x-1)+k}}$$

$$y=c(x)\cdot e^{-\sin x}$$
$$=\underline{\underline{\sin x-1+k\cdot e^{-\sin x}}}$$

16. $y'-yx=x^2-1$

۱ - د برنولي متود له لارې اوبی

$$y=u(x)\cdot v(x)=u\cdot v$$

$$y'=u\cdot\frac{dv}{dx}+v\,\frac{du}{dx}$$

$$y'-yx=x^2-1$$

$$u\cdot\frac{dv}{dx}+v\,\frac{du}{dx}-u\cdot v\cdot x=x^2-1$$

$$u\cdot\left[\frac{dv}{dx}-v\cdot x\right]+v\,\frac{du}{dx}=x^2-1$$

$$\left[\frac{dv}{dx}-v\cdot x\right]=0$$

$$\frac{dv}{dx}-v\cdot x=0$$

$v=v(x)$

$$v(x)=e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$u\cdot\left[\frac{dv}{dx}-v\cdot x\right]=0.$$

د راپاتی مساواتو به u = u(x) د اینتیګریشن له لاري وټاکل شي.

$$\int e^{-\frac{x^2}{2}}(x^2-1)\,dx$$

$$=\int e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot x\cdot x\,dx-\int e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

$$=-x\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}+\int e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx-$$

$$-\int e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx+c_2$$

دا لاسته راغلی ارزښتونه u(x) او v(x) به په برابرون y = u(x).v(x) کی کیښنول شي.

دا لاسته راوړنه د ورکړشوي دفر- نځیالمساوات ټولیزه اوبیونه ده

$$F(x)=0$$

$$\Rightarrow y'-y\cdot x=0;\ x^2-1=0$$

$$\frac{dy}{dx}-y\cdot x=0$$

$$\frac{dy}{y}=x\,dx$$

$$\int\frac{dy}{y}=\int x\,dx\Rightarrow \ln y=\frac{x^2}{2}+\ln c_1(x)$$

$$y=c_1(x)\cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$y'=c_1(x)\cdot e^{\frac{x^2}{2}}\cdot x+e^{\frac{x^2}{2}}\cdot\frac{dc_1(x)}{dx}$$

$$\int\frac{dv}{v}=\int x\,dx$$

$$\ln v=\frac{x^2}{2}+c_1$$

$$e^{\ln v}=e^{\frac{x^2}{2}+c_1}=e^{\frac{x^2}{2}}\cdot e^{c_1};\ c_1=0$$

$$v=e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$v\cdot\frac{du}{dx}=x^2-1$$

$$\frac{du}{dx}=\frac{x^2-1}{v}$$

$$du=\frac{x^2-1}{e^{\frac{x^2}{2}}}\,dx$$

$$\int du=\int e^{-\frac{x^2}{2}}(x^2-1)\,dx$$

$$u=u(x)=-x\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}+c_2$$

$$y=\quad u(x)\quad\cdot v(x)$$

$$y=(-x\,e^{-\frac{x^2}{2}}+c_2)\cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$y=\ -x\quad +c_2\ \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$\Rightarrow f=\langle x\cdot -c_2\cdot e^{\frac{x^2}{2}}-x\rangle$$

۲ - د لاګرانژ د متود له لاري اوبی

$$y'-yx=x^2-1$$

$$c_1(x)\cdot e^{\frac{x^2}{2}}\cdot x+e^{\frac{x^2}{2}}\cdot\frac{dc_1(x)}{dx}-c_1(x)e^{\frac{x^2}{2}}\cdot x=x^2-1$$

$$e^{\frac{x^2}{2}}\cdot\frac{dc_1(x)}{dx}=x^2-1$$

$$\frac{dc_1(x)}{dx}=\frac{x^2-1}{e^{\frac{x^2}{2}}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$dc_1(x)=\frac{x^2-1}{e^{\frac{x^2}{2}}}\,dx=e^{-\frac{x^2}{2}}(x^2-1)\,dx$$

$$\int c_1(x)\,dx=\int e^{-\frac{x^2}{2}}(x^2-1)\,dx$$

$$\underline{c_1(x)=-x\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}+c_2}$$

$$y=c_1(x)\cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$=(-x\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}+c_2)\cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$y=-x+c_2\cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$\Rightarrow f=\underline{\underline{\langle x\cdot -c_2\cdot e^{\frac{x^2}{2}}-x\rangle}}$$

دا د مساوات $y'-yx=0$ د اوبیونی
سره لاس ته راغلی اینتیګریشنشابته
د x فنکشن دی
$c_1(x)$ د y لپاره برخاوبی کی اینبول کیږي.
لاس ته راوړنه همغه تولیزه اوبیونه ده،
لکه څنګه چی د برونولی متود له لاري
لاس ته راغلی

17. $y'\cdot x^2+y=x$

$y=u\cdot v\Rightarrow y'=uv'+vu'$

$y=f(x)=u(x)\cdot v(x)$

۱ – د برنولي متود له لاري اوبی

$$(uv'+vu')x^2+uv=x$$

$$u\underbrace{(x^2v'+v)}_{=0}+x^2vu'=x$$

$$x^2v'=-v$$

نیونه: $x \neq 0$ د x^2 سره ویشنه

$$\int\frac{dv}{v}=-\int\frac{dx}{x^2}$$

Wählen: $c_1=0$ وټاکی

$$\ln|v|=\frac{1}{x}+c_1$$

$$\underline{v=e^{\frac{1}{x}}}$$

$$u\cdot 0+x^2\cdot e^{\frac{1}{x}}\cdot u'=x\quad \|:x^2\cdot e^{\frac{1}{x}}$$

$$u'=\frac{1}{x}\cdot e^{-\frac{1}{x}}$$

دا اینتیګرال کیدی شي یواځي
د لړیودیزي له لاري اوبی شي

$$u=\int\frac{1}{x}\cdot e^{-\frac{1}{x}}dx$$

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\dots$$

$$z=-\frac{1}{x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$e^{-\frac{1}{x}}=1-\frac{1}{x}+\frac{1}{2!x^2}-\frac{1}{3!x^3}+\frac{1}{4!x^4}-+\dots$$

$$\frac{1}{x}\cdot e^{-\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2!x^3}-\frac{1}{3!x^4}+\frac{1}{4!x^5}-+\dots$$

$$u=\ln|x|+\frac{1}{x}-\frac{1}{2!2x^2}+\frac{1}{3!3x^3}-\frac{1}{4!4x^4}+-\dots+c$$

$$y=u\cdot v$$

$$=e^{\frac{1}{x}}\left(\ln|x|+\frac{1}{x}-\frac{1}{2!2x^2}+\frac{1}{3!3x^3}-\frac{1}{4!4x^4}+-\dots+c\right)$$

د $x\neq0$ لپاره

۲ - د لاگرانژ موتود له لارې اوبیونه

$$y'\cdot x^2+y=0$$

نیونه: $x\neq0$ د x^2 سره ویشنه

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x^2}$$

$$\int\frac{dy}{y}=-\int\frac{dx}{x^2}$$

$$\ln|y|=\frac{1}{x}+c_1$$

$c=e^{c_1}$

$$y=c\cdot e^{\frac{1}{x}}\Rightarrow y=c(x)\cdot e^{\frac{1}{x}}$$

په دیفرنشیالمساوات کې کېږدی

$$y'=c'(x)\cdot e^{\frac{1}{x}}-\frac{c(x)}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$$

$$x^2\cdot c'(x)\cdot e^{\frac{1}{x}}-c(x)\cdot e^{\frac{1}{x}}+c(x)\cdot e^{\frac{1}{x}}=x$$

$$x^2\cdot c'(x)\cdot e^{\frac{1}{x}}=x \quad \| :x^2\cdot e^{\frac{1}{x}}$$

$$c'(x)=\frac{1}{x}\cdot e^{-\frac{1}{x}}$$

دا اینتیگرال
همدا اوس برخه ۱کې اوبې شو

$$c(x)=\int\frac{1}{x}\cdot e^{-\frac{1}{x}}dx$$

$$=\ln|x|+\frac{1}{x}-\frac{1}{2!2x^2}+\frac{1}{3!3x^3}-\frac{1}{4!4x^4}+-\dots+k$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = c(x)\cdot e^{\frac{1}{x}}$$

$$= e^{\frac{1}{x}}\left(\ln|x| + \frac{1}{x} - \frac{1}{2!2x^2} + \frac{1}{3!3x^3} - \frac{1}{4!4x^4} + - \ldots + k\right)$$

für $x \neq 0$

۱ – د برنولي متود له لارې اوبيونه

18. $y' + \frac{1}{1+x}y + x^2 = 0$

$y = u\cdot v \Rightarrow y' = uv' + vu'$

$y = f(x) = u(x)\cdot v(x)$

$$uv' + vu' + \frac{uv}{1+x} + x^2 = 0$$

د پوښتني کولو څخه همدااوس

$$u\underbrace{\left(v' + \frac{v}{1+x}\right)}_{=0} + vu' + x^2 = 0$$

ورکوي $x \mid= -1$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{-v}{1+x}$$

$$\int\frac{dv}{v} = -\int\frac{dx}{1+x}$$

Wählen: $c_1 = 0$ وټاکه

$$\ln|v| = -\ln|1+x| + c_1$$

$-\ln|1+x| = \ln|1+x|^{-1}$

$$v = \frac{1}{1+x}$$

$$u\cdot 0 + \frac{u'}{1+x} + x^2 = 0 \quad \|\cdot(1+x)$$

$$u' = -x^2(1+x)$$

$$u = -\int(x^2 + x^3)\,dx$$

$$= -\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + c_2$$

$$y = u\cdot v$$

$c = 12c_2$

$$= \frac{c - 4x^3 - 3x^4}{12(1+x)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ – د لاګرانژ موتود له لارې اوبیونه

$$y'+\frac{1}{1+x}y=0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-y}{1+x}$$

$$\int\frac{dy}{y}=-\int\frac{dx}{1+x}$$

$$\ln|y|=-\ln|1+x|+c_1$$

$$e^{\ln|y|}=e^{-\ln|1+x|+c_1}=e^{\ln\left|\frac{1}{1+x}\right|}\cdot\underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$y=c\cdot\frac{1}{1+x}\Rightarrow y=\frac{c(x)}{1+x}$$

$$y'=c'(x)\cdot\frac{1}{1+x}-c(x)\cdot\frac{1}{(1+x)^2}$$

په دیفرنځیالمساوات کې کېږدی

$$\frac{c'(x)}{1+x}-\frac{c(x)}{(1+x)^2}+\frac{1}{1+x}\cdot\frac{c(x)}{1+x}+x^2=0$$

$$\frac{c'(x)}{1+x}+x^2=0$$

$$c'(x)=-x^2(1+x)$$

$$c(x)=-\int(x^2+x^3)\,dx$$

$$=-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+c_2$$

$$y=\frac{c(x)}{1+x}$$

$$=\frac{k-4x^3-3x^4}{12(1+x)}$$

$k=12c_2$

19. $y'+y\cdot\cos x=e^{-\sin x}$

۱ – د برنولي متود له لارې اوبیونه

$y=u\cdot v\Rightarrow y'=uv'+vu'$

$y=f(x)=u(x)\cdot v(x)$

$$uv'+vu'+uv\cdot\cos x=e^{-\sin x}$$

$$u\underbrace{(v'+v\cdot\cos x)}_{=0}+vu'=e^{-\sin x}$$

$$\frac{dv}{v} = -v \cdot \cos x$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \cos x \, dx$$

Wählen: $c_1 = 0$

$$\ln |v| = -\sin x + c_1$$

$$v = \underline{e^{-\sin x}}$$

$$u \cdot 0 + e^{-\sin x} \cdot u' = e^{-\sin x} \quad \| \cdot e^{\sin x}$$

$$u' = 1$$

$$\underline{u = x + c}$$

$$y = u \cdot v$$

$$= \underline{\underline{(x+c)\, e^{-\sin x}}}$$

۲ – د لاګرانژ موتود له لاري اوبيونه

$$y' + y \cdot \cos x = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -y \cdot \cos x$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \cos x \, dx$$

$$\ln |y| = -\sin x + c_1$$

$$e^{\ln |y|} = e^{-\sin x + c_1} = e^{-\sin x} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$y = c \cdot e^{-\sin x} \Rightarrow y = \underline{\underline{c(x) \cdot e^{-\sin x}}}$$

په ديفرنشيالمساوات کې کېږدی

$$y' = c'(x) \cdot e^{-\sin x} - \cos x \cdot c(x) \cdot e^{-\sin x}$$

$$c'(x) \cdot e^{-\sin x} - \cos x \cdot c(x) \cdot e^{-\sin x} +$$

$$+ c(x) \cdot e^{-\sin x} \cdot \cos x = e^{-\sin x}$$

$$c'(x) \cdot e^{-\sin x} = e^{-\sin x} \quad \| \cdot e^{\sin x}$$

$$c'(x) = 1$$

$$c(x) = \underline{\underline{x + k}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$y=c(x)\cdot e^{-\sin x}$

$=(x+k)e^{-\sin x}$

20. $y'+y\cdot\tan x=\sin(2x)$

$y=u\cdot v\Rightarrow y'=uv'+vu'$

$y=f(x)=u(x)\cdot v(x)$

د پوښتني کولو څخه همدااوس ورکوي cso x |= 0

$-\int\frac{\sin x}{\cos x}\cdot dx=\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx$

Wählen: $c_1=0$ وټاکو:

۱ – د برنولي متود له لارې اوبيونه

$uv'+vu'+uv\cdot\tan x=\sin(2x)$

$u\underbrace{(v'+v\cdot\tan x)}_{=0}+vu'=\sin(2x)$

$\frac{dv}{dx}=-v\cdot\tan x$

$\int\frac{dv}{v}=-\int\tan x\,dx$

$=-\int\frac{\sin x}{\cos x}dx$

$\ln|v|=\ln|\cos x|+c_1$

$v=\cos x$

$u\cdot 0+\cos x\cdot u'=\sin(2x)$

$=2\sin x\cdot\cos x \quad \|:\cos x$

$u'=2\sin x$

$u=2\int\sin x$

$=-2\cos x+c$

$y=u\cdot v$

$=\cos x\cdot(c-2\cos x)$

– د لاگرانژ موتود له لارې اوبيونه

$y'+y\cdot\tan x=0$

$\frac{dy}{dx}=-y\cdot\tan x$

$\int\frac{dy}{y}=-\int\tan x\cdot dx$

$=-\int\frac{\sin x}{\cos x}\cdot dx$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\ln|y| = \ln|\cos x| + c_1$$

$$y = \cos x \cdot c \Rightarrow y = \underline{\underline{c(x) \cdot \cos x}}$$

$$y' = c'(x) \cdot \cos x - c(x) \cdot \sin x$$

$$c'(x) \cdot \cos x - c(x) \cdot \sin x + c(x) \cdot \underbrace{\cos x \cdot \tan x}_{\sin x} = \sin(2x)$$

$$c'(x) \cdot \cos x = \sin(2x)$$

$$= 2 \sin x \cdot \cos x \quad \| : \cos x$$

$$c'(x) = 2 \sin x$$

$$c(x) = 2 \int \sin x \cdot dz$$

$$= \underline{\underline{-2 \cos x + k}}$$

$$y = c(x) \cdot \cos x$$

$$= \underline{\underline{(k - 2\cos x) \cdot \cos x}}$$

۱ – د برنولي متود له لاري اوبيونه

$$y' - 2 \cdot y = -x + 3$$

$$u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx} - 2 \cdot u \cdot v = -x + 3$$

$$v \cdot \left[\frac{du}{dx} - 2 \cdot u\right] + u \cdot \frac{dv}{dx} = -x + 3$$

$$\frac{du}{dx} - 2u = 0$$

$$\int \frac{du}{u} = \int 2\,dx$$

$$\ln u = 2x + c_1 \Rightarrow \underline{u = e^{2x} \cdot e^{c_1}}$$

$$c_1 = 0 \Rightarrow u = e^{2x}$$

$$u \cdot \frac{dv}{dx} = -x + 3$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{-x+3}{u} \blacktriangleright u = e^{2x}$$

$$c = e^{c_1}$$

په ديفرنخيالمساوات کی کينبوول

21. $y' - 2y = -x + 3$

$$y = u(x) \cdot v(x) = u \cdot v$$

$$y' = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

له $\left[\frac{du}{dx} - 2 \cdot u\right] = 0$

$u = u(x)$ لاس ته راځي

د $u = e^{2x}$

$v \cdot \left[\frac{du}{dx} - 2u\right] = 0$ سره ځل لرو

د لاندي پاتی برابرون څخه د ایتیګرال له لاري

$$u \cdot \frac{dv}{dx} = -x + 3$$

v= v(x) تاکل کيږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$dv = e^{-2x}(3-x)\,dx$$

$$v = \int e^{-2x}\cdot(3-x)\,dx$$

$$v = e^{-2x}\cdot\left(\frac{1}{2}x - \frac{5}{4}\right) + c_2$$

$$\int e^{-2x}\cdot(3-x)\,dx$$

$$= 3\int e^{-2x}\,dx - \int x\cdot e^{-2x}\,dx$$

$$= -\frac{3}{2}e^{-2x} - \left[x\cdot\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) - \frac{1}{4}e^{-2x}\right] + c_2$$

$$y = u(x)\cdot v(x)$$

$$y = e^{2x}\cdot\left[e^{-2x}\cdot\left(\frac{1}{2}x - \frac{5}{4}\right) + c_2\right]$$

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{4} + e^{2x}\cdot c_2$$

$$f = \left\langle x, \frac{1}{2}x + e^{2x}\cdot c_2 - \frac{5}{4}\right\rangle$$

د $u(x)$ او $v(x)$ لاس ته راوري ارزښتونه د $y=u(x).v(x)$ په مساوات کی کېښول کيږي.
لاس ته راوړنی د ورکړ شوي دفرنځيالبرابراون ټوليز اوبي دي

۲ - د لاګرانژ موتود له لاري اوبيونه

$$y' - 2y = -x + 3$$

$$y' - 2y = 0$$

$$y = c_3(x)\cdot e^{2x}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = c_3(x)\cdot e^{2x}\cdot 2 + c_3'(x)\cdot e^{2x}$$

پردو $-x+3=0$ نولرو

$$y' - 2y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y\cdot 2$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2\,dx$$

$$\ln y = 2x + c_1$$

$$y = e^{2x+c_1} = e^{2x}\cdot e^{c_1}$$

$$= c_3(x)\cdot e^{2x}$$

د اینتیګریشنثابتی $e^{c_1} = c_3(x)$ د x فنکشن دی.
د y او 'y لپاره دواړه برخاوبيونی په پيلمساوات $y' - 2y = -x + 3$ کی کېښول کيږي
د اینتګریشن له لاري لويه $c_3(x)$ پيداکيږي

$$c_3(x)\cdot e^{2x}\cdot 2 + c_3'(x)\cdot e^{2x} - 2\cdot c_3(x)\cdot e^{2x} = -x + 3$$

$$\Rightarrow c_3'(x)\cdot e^{2x} = -x + 3$$

$$c_3'(x) = (-x+3)\cdot e^{-2x}$$

$$\int c_3'(x) = \int e^{-2x}\cdot(3-x)\,dx$$

$$c_3(x) = e^{-2x}\left(\frac{1}{2}x - \frac{5}{4}\right) + c_2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(۲) c_3 په برابرون کی کینبول کیږي $y=c_3(x)\cdot e^{2x}$	$y=\left[e^{-2x}\left(\frac{1}{2}x-\frac{5}{4}\right)+c_2\right]\cdot e^{2x}$
لاسته راوړنه همغه ټولیزه اوبیونه	$y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{4}+e^{2x}\cdot c_2$
ده، لکه د مخه د برنول د متود له لارې راپیدا شوه	$f=\left\langle x\cdot -\frac{1}{2}x+e^{2x}\cdot c_2-\frac{5}{4}\right\rangle$

۱ . ۳ د دوم نظم درفنخیالمساوات

1. $y''=\frac{1}{x}$	$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{1}{x}$
د پوښتنیورکړې څخه لاسته $x\,|\!=0$ راځي	$\int dy'=\int\frac{dx}{x}$
	$y'=\ln\|x\|+c_1$
وریسی اوبیونی ته دې حالتونه $x>0$ او $x<0$ توپیر شي	$=\begin{cases}\ln x+c_1 & \text{für } x>0\\ \ln(-x)+c_1 & \text{für } x<0\end{cases}$
	1. Fall: $y'=\ln x+c_1;\quad x>0$
	$\int dy=\int(\ln x+c_1)\,dx$
پارشل یا ټوټه ایتیکریشن	$y=\int\underbrace{\ln x}_{u}\underbrace{dx}_{dv}+c_1\int dx$
	$=x\cdot\ln x-\int dx+c_1\cdot x$
	$=x(\ln x+c_1-1)+c_2$
$c_3=c_1-1$	$=x(\ln x+c_3)+c_2;\quad x>0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2. Fall: $y' = \ln(-x) + c_1; \quad x < 0$

$$\int dy = \int [\ln(-x) + c_1]\, dx$$

$$y = \int \underbrace{\ln(-x)}_{u} \cdot \underbrace{dx}_{dv} + c_1 \int dx$$

$$= x \cdot \ln(-x) - \int x \cdot \frac{-1}{-x}\, dx + c_1 \cdot x$$

$$= x \cdot \ln(-x) - \int dx + c_1 \cdot x$$

$$= x[\ln(-x) - 1 + c_1] + c_2$$

$$= x[\ln(-x) + c_3] + c_2; \quad x < 0$$

پارڅیل یا پارشل اینټیګرال

$c_3 = -1 + c_1$

$$y = x(\ln|x| + c_1) + c_2$$

د ارزښتکرښو کارونی له لاري کیدی شي دواړه اوبیونی رایوځای شي. نومبدلون یا ←اړونه: $c_3 \triangleq c_1$

2. $\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = f(x)$$

$$\int dy' = \int f(x)\, dx$$

$$y' = \int f(x)\, dx + c_1$$

$$y = \int \left[\int f(x) \cdot dx + c_1\right] dx + c_2$$

3. $y'' - x^3 = 0$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = x^3$$

$$\int dy' = \int x^3\, dx$$

$$y' = \frac{x^4}{4} + c_1$$

$$\int dy = \int \left(\frac{x^4}{4} + c_1\right) dx$$

$$y = \frac{x^5}{20} + c_1 \cdot x + c_2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

4. $y'' = x + \sin x$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = x + \sin x$$

$$\int dy' = \int (x + \sin x)\, dx$$

$$y' = \frac{x^2}{2} - \cos x + c_1$$

$$\int dy = \int \left(\frac{x^2}{2} + c_1 - \cos x\right) dx$$

$$y = \frac{x^3}{6} + c_1 \cdot x - \sin x + c_2$$

5. $y'' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln |x + \sqrt{a^2+x^2}| + c$$

دلته ارزښتکرښي ضرور نه دي
خکه چې $x+\sqrt{1+x^2}>0$ د ټولو
x لپاره باور لري

پاشل اینتیګریشن

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\int dy' = \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$y' = \ln (x + \sqrt{1+x^2}) + c_1$$

$$\int dy = \int \underbrace{\ln (x + \sqrt{1+x^2})}_{u} \underbrace{dx}_{dv} + c_1 \int dx$$

$$y = x \cdot \ln (x + \sqrt{1+x^2}) - \int \frac{x\left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)}{x + \sqrt{1+x^2}}\, dx + c_1 x$$

$$= x [\ln (x + \sqrt{1+x^2}) + c_1] - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\, dx$$

$$= x [\ln (x + \sqrt{1+x^2}) + c_1] - \sqrt{1+x^2} + c_2$$

6. $y'' = \tan x$

ددې انتیګرالبرابرون اوبیوني
کې په لړبودینه تریدنه ناشونې ده

$$\tan x = x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5 + \frac{17}{315} x^7 + \frac{62}{2835} x^9 + \dots$$

د $|x| < \frac{\pi}{2}$ لپاره

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \tan x$$

$$\int dy' = \int \tan x \, dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y' = c_1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4\cdot 3} + \frac{2x^6}{6\cdot 15} + \frac{17x^8}{8\cdot 315} + \dots$$

$$y = c_2 + c_1\cdot x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{60} + \frac{x^7}{315} + \frac{17x^9}{22680} + \dots$$

د $|x| < \frac{\pi}{2}$ لپاره

7. $y'' = \sinh x$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \sinh x$$

$$\int dy' = \int \sinh x \, dx$$

$$y' = \cosh x + c_1$$

$$\int dy = \int (\cosh x + c_1)\, dx$$

$$y = \sinh x + c_1\cdot x + c_2$$

8. $y'' = e^{x^2}$

د دي انتیګرالبرابرون اوبیوني
یواځی لړیودینی سره شونی ده.

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \dots$$

$$z = x^2$$

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \frac{x^{10}}{5!} + \dots$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = e^{x^2}$$

$$\int dy' = \int e^{x^2}\, dx$$

$$y' = c_1 + x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5\cdot 2!} + \frac{x^7}{7\cdot 3!} + \frac{x^9}{9\cdot 4!} + \dots$$

$$y = c_2 + c_1\cdot x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^6}{30\cdot 2!} + \frac{x^8}{56\cdot 3!} + \frac{x^{10}}{90\cdot 4!} + \dots$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

9. $y^{(4)}=\cos x$	$y^{(4)}=\dfrac{dy'''}{dx}=\cos x$
	$\int dy'''=\int \cos x\,dx$
$y'''=\dfrac{dy''}{dx}$	$y'''=\sin x+c_1^*$
	$\int dy''=\int(\sin x+c_1^*)\,dx$
$y''=\dfrac{dy'}{dx}$	$y''=-\cos x+c_1^*\cdot x+c_2^*$
	$\int dy'=\int(-\cos x+c_1^*\cdot x+c_2^*)\,dx$
$y'=\dfrac{dy}{dx}$	$y'=-\sin x+c_1^*\cdot\dfrac{x^2}{2}+c_2^*\cdot x+c_3$
	$\int dy=\int\left(-\sin x+\dfrac{c_1^*}{2}\cdot x^2+c_2^*\cdot x+c_3\right)dx$
	$y=\cos x+\dfrac{c_1^*}{6}x^3+\dfrac{c_2^*}{2}x^2+c_3x+c_4$
$c_1=\dfrac{1}{6}c_1^*;\quad c_2=\dfrac{1}{2}c_2^*$	$\underline{\underline{y=\cos x+c_1x^3+c_2x^2+c_3x+c_4}}$
10. $y'''=e^x$	$y'''=\dfrac{dy''}{dx}=e^x$
	$\int dy''=\int e^x\,dx$
	$y''=e^x+c_1^*$
	$\int dy'=\int(e^x+c_1^*)\,dx$
	$y'=e^x+c_1^*\cdot x+c_2$
	$\int dy=\int(e^x+c_1^*\cdot x+c_2)\,dx$
	$y=e^x+c_1^*\cdot\dfrac{x^2}{2}+c_2x+c_3$
$c_1=\dfrac{1}{2}c_1^*$	$\underline{\underline{=e^x+c_1x^2+c_2x+c_3}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

11. $y^{(4)}=\sinh(2x)\quad \blacktriangleright\, y^{(4)}=\dfrac{dy'''}{dx}\Rightarrow dy'''=y^{(4)}\cdot dx$

$$\int dy'''=\int \sinh(2x)\,dx$$

$$y'''=\frac{1}{2}\cosh(2x)+c_1\quad \blacktriangleright\, y'''=\frac{dy''}{dx}\Rightarrow dy''=y'''\cdot dx$$

$$\int dy''=\int\left(\frac{1}{2}\cosh(2x)+c_1\right)dx$$

$$y''=\frac{1}{2}\int \cosh(2x)\,dx+\int c_1\,dx$$

$$=\frac{1}{4}\sinh(2x)+c_2+c_1x+c_3\quad \blacktriangleright\, c_2+c_3=c_4$$

$$=\frac{1}{4}\sinh(2x)+c_1x+c_4$$

$$y''=\frac{dy'}{dx}\Rightarrow dy'=y''\cdot dx$$

$$\int dy'=\int\left(\frac{1}{4}\sinh(2x)+c_1x+c_4\right)dx$$

$$y'=\frac{1}{8}\cosh(2x)+c_5+\frac{1}{2}c_1x^2+c_6+c_4x+c_7\quad \blacktriangleright\, c_5+c_6+c_7=c_8$$

$$=\frac{1}{8}\cosh(2x)+\frac{1}{2}c_1x^2+c_4x+c_8$$

$$y'=\frac{dy}{dx}\Rightarrow dy=y'\cdot dx$$

$$\int dy=\int\left[\frac{1}{8}\cosh(2x)+\frac{1}{2}c_1x^2+c_4x+c_8\right]dx$$

$$y=\frac{1}{16}\cosh(2x)+c_9+\frac{1}{6}c_1x^3+c_{10}+\frac{1}{2}c_4x^2+c_{11}+c_8x+c_{12}$$

$$y=\frac{1}{16}\cosh(2x)+\frac{1}{6}c_1x^3+\frac{1}{2}c_4x^2+c_8x+k$$

12. $y^{(5)}=\cosh(ax)\quad \blacktriangleright\, y^{(5)}=\dfrac{dy^{(4)}}{dx}\Rightarrow dy^{(4)}=y^{(5)}\cdot dx$

$$\int dy^{(4)}=\int \cosh(ax)\,dx=\frac{1}{a}\sinh(ax)+c_1=y^{(4)}=\frac{dy'''}{dx}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int dy''' = \int \left[\frac{1}{a}\sinh(ax) + c_1\right] dx = \frac{1}{a^2}\cosh(ax) + c_2 + c_1 x + c_3$$

$$y''' = \frac{1}{a^2}\cosh(ax) + c_1 x + c_4 = \frac{dy''}{dx}$$

$$\int dy'' = \int \left[\frac{1}{a^2}\cosh(ax) + c_1 x + c_4\right] dx$$

$$y'' = \frac{1}{a^3}\sinh(ax) + c_5 + \frac{1}{2} c_1 x^2 + c_6 + c_4 x + c_7$$

$$y'' = \frac{1}{a^3}\sinh(ax) + \frac{1}{2} c_1 x^2 + c_4 x + c_8 = \frac{dy'}{dx}$$

$$\int dy' = \int \left[\frac{1}{a^3}\sinh(ax) + \frac{1}{2} c_1 x^2 + c_4 x + c_8\right] dx$$

$$y' = \frac{1}{a^4}\cosh(ax) + c_9 + \frac{1}{6} c_1 x^3 + c_{10} + \frac{1}{2} c_4 x^2 + c_{11} + c_8 x + c_{12}$$

$$y' = \frac{1}{a^4}\cosh(ax) + \frac{1}{6} c_1 x^3 + \frac{1}{4} c_4 x^2 + c_8 x + c_{13} = \frac{dy}{dx}$$

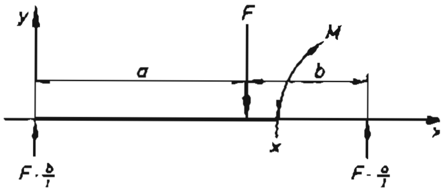
$$\int dy = \int \left[\frac{1}{a^4}\cosh(ax) + \frac{1}{6} c_1 x^3 + \frac{1}{4} c_4 x^2 + c_8 x + c_{13}\right] dx$$

$$y = \frac{1}{a^5}\cosh(ax) + c_{14} + \frac{1}{24} c_1 x^4 + c_{15} + \frac{1}{12} c_4 x^3 + c_{16} + \frac{1}{2} c_8 x^2 + c_{17} + c_{13} x + c_{18}$$

$$\underline{\underline{y = \frac{1}{a^5}\cosh(ax) + \frac{1}{24} c_1 x^4 + \frac{1}{12} c_4 x^3 + \frac{1}{2} c_8 x^2 + c_{13} x + k}}$$

د مومنتو تاکلو لپاره باید ورشوګا-
نی یاساحی$a \le x \le a+b=l$ او $0 \le x \le a$
توپیر شي

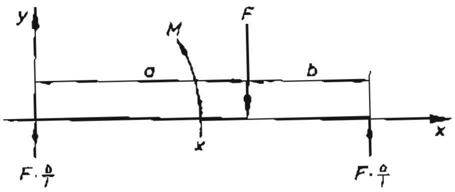
ورشو 1. Bereich: $0 \le x \le a$



$$M - F \cdot \frac{b}{l} \cdot x = 0$$

$$\underline{\underline{M = F \cdot \frac{b}{l} \cdot x}} \quad \text{für } 0 \le x \le a$$

2. Bereich: $a \leq x \leq a+b=l$



$$M - F \cdot \frac{a}{l} \cdot (l-x) = 0$$

$$\underline{\underline{M = F \cdot \frac{a}{l}(l-x)}} \quad \text{für } a \leq x \leq l$$

د ورشو يا تعريفېږي $0 < x < a$ لپاره د کږونلاين y_1 ټاکنه

د دې دواړو هريوه ورشو يا ساحولپاره دې کږونلاين وټاکل شي، چې د x=a لپاره بايد يوځاي ولوېږي.

$$y_1'' = -\frac{M}{E \cdot I}$$

$$\frac{dy_1'}{dx} = -\frac{F \cdot \frac{b}{l} \cdot x}{E \cdot I}$$

$$\int dy_1' = -\frac{F \cdot b}{l \cdot E \cdot I} \int x \, dx$$

$$y_1' = -\frac{F \cdot b}{2lEI} x^2 + c_1$$

$$y_1 = \int \left(-\frac{F \cdot b}{2lEI} x^2 + c_1 \right) dx$$

$$= -\frac{F \cdot b}{6lEI} x^3 + c_1 \cdot x + c_2$$

د $x = 0$ لپاره کږون 0 دی.

$$y_1(0) = 0 - c_2 = 0$$

$$\underline{\underline{y_1 = -\frac{F \cdot b}{6lEI} x^3 + c_1 \cdot x}}$$

د ورشو يا تعريفېږي $0 < x < l$ لپاره د کږونلاين y_2 ټاکنه:

$$y_2'' = -\frac{M}{E \cdot I}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{dy_2'}{dx} = -\frac{F \cdot \frac{a}{l}(l-x)}{E \cdot I}$$

Substitution: بدلون

$z = l - x \Rightarrow dx = -dz$

$$\int dy_2' = -\frac{F \cdot a}{lEI} \int (l-x)\,dx$$

$$= \frac{F \cdot a}{lEI} \int z\,dz$$

$$y_2' = \frac{F \cdot a}{2lEI} z^2 + c_3$$

$$\int dy_2 = -\int \left(\frac{F \cdot a}{2lEI} z^2 + c_3 \right) dz$$

$$y_2 = -\frac{F \cdot a}{6lEI} z^3 - c_3 \cdot z + c_4$$

$$= -\frac{F \cdot a}{6lEI} (l-x)^3 - c_3(l-x) + c_4$$

ثابتی c_4 د غاړیارزښت $y_2(l) = 0$ څخه ټاکل کیږي

$y_2(l) = c_4 \quad c_4 = 0$

$$y_2 = -\frac{F \cdot a}{6lEI} (l-x)^3 - c_3(l-x)$$

په فنکشنونو y_1 او y_2 رامنځ ته شوي ثابتي c_1 او c_2 داسی وټاکل شي، چی دواړه فنکشنونه په $x=a$ کی یوځاي پریوځي، دا په دي مانا، چی باور لري

$y_1(a) = y_2(a)$

$y_1'(a) = y_2'(a)$

$y_1(a) = y_2(a)$

$$-\frac{Fba^3}{6lEI} + c_1 \cdot a = -\frac{Fab^3}{6lEI} - c_3 \cdot b$$

$y_1'(a) = y_2'(a)$

$$-\frac{Fba^2}{2lEI} + c_1 = +\frac{Fab^2}{2lEI} + c_3$$

دا ثابتي c_1 او c_2 په y_1 او y_1 کی ګینبول کیږي

$$c_1 = \frac{Fab(a+2b)}{6lEI}$$

$$c_3 = \frac{-Fab(2a+b)}{6lEI}$$

$$y_1 = -\frac{F \cdot b}{6lEI} x^3 + \frac{Fab(a+2b)}{6lEI} x$$

$$y_2 = -\frac{F \cdot a}{6lEI} (l-x)^3 + \frac{Fab(b+2a)}{6lEI} (l-x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y=\begin{cases}\frac{Fbx}{6lEI}[a(a+2b)-x^2] & \text{für } 0\le x\le a\\ \frac{Fa(l-x)}{6lEI}[b(b+2a)-(l-x)^2] & \text{für } a\le x\le l\end{cases}$$

رایوخایون :

$$y_1'=\frac{Fb}{6lEI}[a(a+2b)-3x^2]$$

$$y_1'=0$$

$$x_m^2=\frac{a}{3}(a+2b)$$

$$x_{m(1)}=\pm\sqrt{\frac{a}{3}(a+2b)}$$

$$x_m=\sqrt{\frac{a}{3}(a+2b)}$$

$\left(x_m=-\sqrt{\frac{a}{3}(a+2b)}<0 \text{ ist hier sinnlos.}\right)$ دلته بې معنی

ماکسیمالکړونه کیدیشي د y_1 یا y_2 ورشو کی داسی پرته وي، چی دفرنخیالیدی شي.

د $b<a$ له امله لاسته راځی

$$\sqrt{\frac{a}{3}(a+2b)}<\sqrt{\frac{a}{3}(a+2a)}=a,$$

دا په دې ماناچی $x_m<a$ په x_mکی ماکسیمالکړون د y_1 ورشوکی پروت دی، چی نوروy_2 کی څیړنی ته باید اړ نه دی

ماکسیمال کړون y_{max}

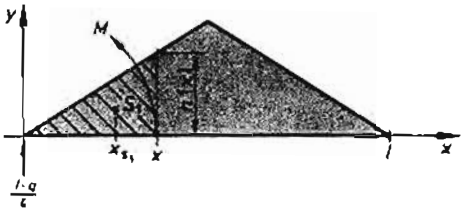
$$y_{max}=y_1(x_m)$$

$$=\frac{Fb\sqrt{a(a+2b)}}{6\sqrt{3}lEI}\left[a(a+2b)-\frac{a}{3}(a+2b)\right]$$

$$=\frac{Fab(a+2b)\sqrt{a(a+2b)}}{9\sqrt{3}lEI}$$

1. Bereich: $0\le x\le\frac{l}{2}$ ورشو

۱۴ – ټول بار $F=(\frac{1}{2})\,l.q$ دی داسی چی پروتزور په A او B هریو کی $(\frac{1}{4})l.q$ دی



دا کربنې شوې هواره دا بار $(\frac{1}{2})h(x).x$ دی.

$$h(x)=\frac{2q}{l}x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دروندتکی پروتمحور x_{S1} کیدی شي بنستهندسیز و $x_{S1} = (2/3)x$ ته وشمیرل شي.

$$0 = M + (x - x_{s1}) \cdot \frac{1}{2} h(x) \cdot x - x \cdot \frac{l \cdot q}{4}$$

$$M = \frac{l \cdot q}{4} x - \left(x - \frac{2}{3} x\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2q}{l} x \cdot x$$

$$= \frac{l \cdot q}{4} x - \frac{q}{3l} x^3 \quad \text{für } 0 \leq x \leq \frac{l}{2}$$

د کږونلاین y_1 پاکنه د لاندي ورشو لپاره

$0 \leq x \leq \frac{l}{2}$:

$$y_1'' = -\frac{M}{EI}$$

$$\frac{dy_1'}{dx} = -\frac{q}{EI} \left(\frac{l}{4} x - \frac{1}{3l} x^3\right)$$

$$\int dy_1' = -\frac{q}{EI} \int \left(\frac{l}{4} x - \frac{1}{3l} x^3\right) dx$$

د سیومتري دلائلو له امله c_1 له لاندي څخه لاس ته راځي

$x_m = \frac{l}{2}$ mit $y_1'\left(\frac{l}{2}\right) = y_2'\left(\frac{l}{2}\right) = 0$

$$y_1' = -\frac{q}{EI} \left(\frac{l}{8} x^2 - \frac{1}{12l} x^4 + c_1\right)$$

$$0 = -\frac{q}{EI} \left(\frac{l}{8} \cdot \frac{l^2}{4} - \frac{1}{12l} \cdot \frac{l^4}{16} + c_1\right)$$

$$c_1 = -\frac{l^3}{32} + \frac{l^3}{192}$$

$$= -\frac{5l^3}{192}$$

$$y_1' = -\frac{q}{EI} \left(\frac{l}{8} x^2 - \frac{x^4}{12l} - \frac{5l^3}{192}\right)$$

$$\int dy_1 = \frac{q}{EI} \int \left(\frac{x^4}{12l} - \frac{lx^2}{8} + \frac{5l^3}{192}\right) dx$$

$y_1(0) = 0 \Rightarrow c_2$

$$y_1 = \frac{q}{EI} \left(\frac{x^5}{60l} - \frac{lx^3}{24} + \frac{5l^3 \cdot x}{192}\right) + c_2$$

$$y_1(0) = \frac{q}{EI} \cdot 0 + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د سیومتریکی بارونی یا زور له امله کږونلاین و x = l/2 ته سیو– متري دی۔ د y_2 لپاره په ورشو l/2≤x≤l کی په y_1 کی فقط x د l - x سره بدل کړي.

$$y_1=\frac{qx}{12EI}\left(\frac{x^4}{5l}-\frac{lx^2}{2}+\frac{5l^3}{16}\right)$$

für $0\le x\le\frac{l}{2}$

$$y=\begin{cases}\frac{qx}{12EI}\left(\frac{x^4}{5l}-\frac{lx^2}{2}+\frac{5l^3}{16}\right) & \text{für } 0\le x\le\frac{l}{2}\\ \frac{q(l-x)}{12EI}\left[\frac{(l-x)^4}{5l}-\frac{l(l-x)^2}{2}+\frac{5l^3}{16}\right] & \text{für } \frac{l}{2}\le x\le l\end{cases}$$

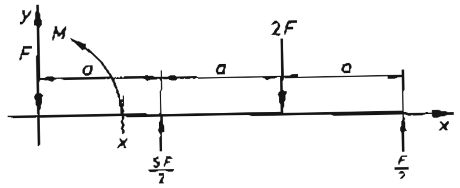
د $x_m = l/2$ لپاره ماکسیمالکږون له y_1 څخه شمیرل کیدی شي.

$$y_1\left(\frac{l}{2}\right)=\frac{ql}{24EI}\left(\frac{l^3}{80}-\frac{l^3}{8}+\frac{5l^3}{16}\right)$$

$$y_{max}=\frac{ql^4}{120EI}$$

۱۵ – دي ټوبنتني سره د x لپاره دري ورزوګانی باید توپیر شي

1. Bereich: $0\le x\le a$ ورشو :



$$0=M+F\cdot x\Rightarrow M=-F\cdot x$$

د 0≤x≤a لپاره کږونلاین: y_1

$$y_1''=-\frac{M}{EI}$$

$$=\frac{F}{EI}x$$

$$y_1'=\frac{F}{2EI}x^2+c_1$$

$$y_1=\frac{F}{6EI}x^3+c_1x+c_2$$

ژی ارزښت : $y_1(a)=0\Rightarrow c_2$

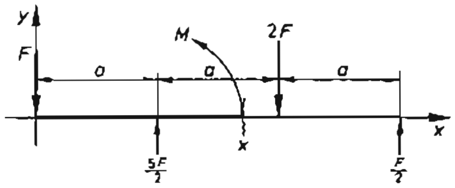
$$0=\frac{Fa^3}{6EI}+c_1a+c_2$$

$$c_2=-\frac{Fa^3}{6EI}-c_1a$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y_1=\frac{F}{6EI}(x^3-a^3)+c_1(x-a)$$

2. Bereich: $a\le x\le 2a$: ورديتو



$$0=M-\frac{5F}{2}\cdot(x-a)+F\cdot x$$

$$M=\frac{5F}{2}(x-a)-F\cdot x$$

$$=\frac{3F}{2}x-\frac{5aF}{2}$$

$$=\frac{F}{2}(3x-5a)$$

د $a\le x\le 2a$ لپاره کږونلاین: y_2

$$y_2''=-\frac{M}{EI}$$

$$=-\frac{F}{2EI}(3x-5a)$$

$$y_2'=-\frac{F}{2EI}\left(\frac{3}{2}x^2-5ax+c_3\right)$$

$$y_2=-\frac{F}{2EI}\left(\frac{x^3}{2}-\frac{5a}{2}x^2+c_3x+c_4\right)$$

ژی ارزبنت : $y_2(a)=0\Rightarrow c_4$

$$0=-\frac{F}{2EI}\left(\frac{a^3}{2}-\frac{5a^3}{2}+c_3a+c_4\right)$$

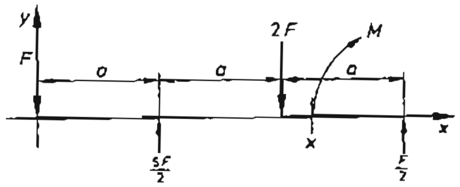
$$c_4=\frac{5a^3}{2}-\frac{a^3}{2}-c_3a$$

$$=\frac{4a^3}{2}-c_3a$$

$$y_2=-\frac{F}{2EI}\left[\frac{x^3}{2}-\frac{5a}{2}x^2+c_3(x-a)+2a^3\right]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

3. Bereich: $2a \le x \le 3a$ ورستو



$$0 = M - \frac{F}{2}(3a - x) \Rightarrow M = \frac{F}{2}(3a - x)$$

د $2a \le x \le 3a$ لپاره کږونلاین : y_3

$$y_3'' = -\frac{M}{EI}$$

$$= -\frac{F}{2EI}(3a - x)$$

$$y_3' = -\frac{F}{2EI}\left(3ax - \frac{x^2}{2} + c_5\right)$$

$$y_3 = -\frac{F}{2EI}\left(\frac{3a}{2}x^2 - \frac{x^3}{6} + c_5 x + c_6\right)$$

ژی ارزښت : $y_3(3a) = 0 \Rightarrow c_6$

$$0 = -\frac{F}{2EI}\left(\frac{27a^3}{2} - \frac{27a^3}{6} + 3ac_5 + c_6\right)$$

$$c_6 = -27a^3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) - 3ac_5$$

$$= -9a^3 - 3ac_3$$

دا په فنکشنونو y_1 , y_2 , y_3 کی لا دننه ثابتی c_1 , c_3 , c_5 بایدد دي دري فنکشنونو رایوځایونی له لاري وټاکل شي

$$y_3 = -\frac{F}{2EI}\left[\frac{3a}{2}x^2 - \frac{x^3}{6} + c_5(x - 3a) - 9a^3\right]$$

د c_3 او c_5 ټاکه:

شرتونه: $y_2(2a) = y_3(2a)$

$y_2'(2a) = y_3'(2a)$

$$y_2(2a) = -\frac{F}{2EI}[4a^3 - 10a^3 + ac_3 + 2a^3]$$

$$= -\frac{F}{2EI}[ac_3 - 4a^3]$$

$$y_3(2a) = -\frac{F}{2EI}\left[6a^3 - \frac{4}{3}a^3 - ac_5 - 9a^3\right]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= -\frac{F}{2EI}\left[-\frac{13a^3}{3} - ac_5\right]$$

$$y_2(2a) = y_3(2a)$$

$$-\frac{F}{2EI}[ac_3 - 4a^3] = -\frac{F}{2EI}\left[-\frac{13a^3}{3} - ac_5\right]$$

$$c_3 - 4a^2 = -\frac{13a^2}{3} - c_5$$

مساوات یا برابرون I

$$\text{I:} \qquad c_3 + c_5 = -\frac{1}{3}a^2$$

$$y_2'(2a) = -\frac{F}{2EI}(6a^2 - 10a^2 + c_3)$$

$$= -\frac{F}{2EI}(c_3 - 4a^2)$$

$$y_3'(2a) = -\frac{F}{2EI}(6a^2 - 2a^2 + c_5)$$

$$= -\frac{F}{2EI}(4a^2 + c_5)$$

$$y_2'(2a) = y_3'(2a)$$

$$-\frac{F}{2EI}(c_3 - 4a^2) = -\frac{F}{2EI}(4a^2 + c_5)$$

$$c_3 - 4a^2 = 4a^2 + c_5$$

مساوات یا برابرون II

$$\text{II:} \qquad c_3 - c_5 = 8a^2$$

د مساواتو I او II څخه c_3 او c_3 ساده راپیدا کیږي

$$\text{I+II:} \qquad 2c_3 = -\frac{1}{3}a^2 + 8a^2 \Rightarrow c_3 = \frac{23}{6}a^2$$

$$\text{I-II:} \qquad 2c_5 = -\frac{1}{3}a^2 - 8a^2 \Rightarrow c_5 = -\frac{25}{6}a$$

د c_1 ټاکنه

ثابته c_1 د $y_1'(a) = y_2'(a)$ اړیکو څخه شمیرل کیږي

$$y_1'(a) = \frac{Fa^2}{2EI} + c_1$$

$$y_2'(a) = -\frac{F}{2EI}\left(\frac{3a^2}{2} - 5a^2 + \frac{23a^2}{6}\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y_2'(a) = -\frac{Fa^2}{6EI}$$

$$y_1'(a) = y_2'(a)$$

$$\frac{Fa^2}{2EI} + c_1 = -\frac{Fa^2}{6EI} \Rightarrow c_1 = -\frac{2Fa^2}{3EI}$$

په بنده بڼه کې د ټولو درې ورشوګانو یا ساحو انځورونه:

$$y = \begin{cases} \frac{F}{6EI}(x^3 - 4a^2x + 3a^3) & \text{für } 0 \le x \le a \\ \frac{-F}{12EI}(3x^3 - 15ax^2 + 23a^2x - 11a^3) & \text{für } a \le x \le 2a \\ \frac{F}{12EI}(x^3 - 9ax^2 + 25a^2x - 21a^3) & \text{für } 2a \le x \le 3a \end{cases}$$

د ماکسیمال راکړونې ټاکلو لپاره باید y'_1 ، y'_2 او y'_3 جوړ شي.

$$y_1' = \frac{F}{6EI}(3x^2 - 4a^2)$$

$$y_1' = 0 \Rightarrow 3x^2 - 4a^2 = 0$$

$$x_{1;2} = \pm a\sqrt{\frac{4}{3}}$$

هم x_1 او هم x_2 د ورشو $0 \le x \le a$ څخه دباندې پراته دي، چې له دې امله د ماکسیمالراګرون لپاره په پوښتنه کې نه راځي په ورشو $0 \le x \le a$ کې کیدی شي ماکسیمالکړون یواځې په ژی ارزښت $x_{m1}=0$ کې رامنځ ته شي.

$$y_1(0) = y_1(x_{m_1}) = y_{max_1}$$

$$y_{max_1} = \frac{Fa^3}{2EI}$$

$$y_2' = -\frac{F}{12EI}(9x^2 - 30ax + 23a^2)$$

$$y_2' = 0 \Rightarrow 9x^2 - 30ax + 23a^2 = 0$$

$$x^2 - \frac{10}{3}ax + \frac{23}{9}a^2 = 0$$

$$x_{1;2} = \frac{5}{3}a \pm \sqrt{\frac{25}{9}a^2 - \frac{23}{9}a^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_{1;2}=\frac{5}{3}a\pm\frac{\sqrt{2}}{3}a$$

$$x_1=\frac{5}{3}a+\frac{\sqrt{2}}{3}a>2a$$ ◄ دلته پامور نه دی.

$$x_1=\frac{5}{3}a+\frac{\sqrt{2}}{3}a>2a$$

دا پورته ارزښت نور د y_1 باوورشو $a\leq x\leq 2a$ کی نه دی پروت، چی له دې امله یواځ د x_2 لپاره ماکسیمال راکړون مو مخ ته پریوتی شي.

$$x_{m_2}=\frac{a}{3}(5-\sqrt{2})$$

$$y_{\max_2}=y_2(x_{m_2})$$

$$=\frac{-F}{12EI}\left[\frac{a^3}{9}(5-\sqrt{2})^3-\frac{5a^3}{3}(5-\sqrt{2})^2+\right.$$
$$\left.+\frac{23a^3}{3}(5-\sqrt{2})-11a^3\right]$$

$$=\frac{-F}{12EI}\left[\frac{a^3}{9}(155-77\sqrt{2})-\frac{5a^3}{3}(27-10\sqrt{2})\right.$$
$$\left.+\frac{23a^3}{3}(5-\sqrt{2})-11a^3\right]$$

$$=-\frac{Fa^3}{108EI}[155-77\sqrt{2}-405+150\sqrt{2}+$$
$$+345-69\sqrt{2}-99]$$

$$y_{\max_2}=-\frac{Fa^3}{108EI}[-4+4\sqrt{2}]$$

$$=-\frac{Fa^3}{27EI}(\sqrt{2}-1)$$

پام دې وي، چی دا راکړون د y-محور په مثبت- یا زیاتونلور رامنځ ته کیږي (دا په دې مانا، چی تراوسه پاس یا پورته پروت دی)، ځکه چی په دې کواوردیناتسیستم کی زور F کمون (تفریق) نخښه لري.

$$y_3'=\frac{F}{12EI}(3x^2-18ax+25a^2)$$

$$y_3'=0\Rightarrow 3x^2-18ax+25a^2=0$$

$$x^2-6ax+\frac{25}{3}a^2=0$$

$$x_{1;2}=3a\pm\sqrt{9a^2-\frac{25}{3}a^2}$$

$$=3a\pm a\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$x_1=3a+a\sqrt{\frac{2}{3}}>3$$ ◄ دلته پامور نه دی

د x_1 – ارزښت نور د y_3 باوورشو کی نه دی پروت، نو ځکه یواځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

د x_2 لپاره ماکسیمال راکړون موجود کیدی شي

$$x_{m_3} = a\left(3-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

$$y_{max_3} = y_3(x_{m_3})$$

$$= \frac{F}{12EI}\left[a^3\left(3-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^3 - 9a^3\left(3-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 + \right.$$

$$\left. +25a^3\left(3-\sqrt{\frac{2}{3}}\right) - 21a^3\right]$$

$$= \frac{Fa^3}{12EI}\left[33-\frac{83}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} - 9\left(\frac{29}{3}-6\sqrt{\frac{2}{3}}\right) + \right.$$

$$\left. +25\left(3-\sqrt{\frac{2}{3}}\right) - 21\right]$$

$$= \frac{Fa^3}{12EI}\left[33-\frac{83}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} - 87 + 54\sqrt{\frac{2}{3}} + \right.$$

$$\left. +75 - 25\sqrt{\frac{2}{3}} - 21\right]$$

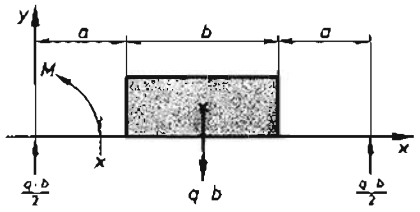
$$= \frac{Fa^3}{12EI}\cdot\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{Fa^3}{9EI}\sqrt{\frac{2}{3}}$$

۱۶ . د x لپاره دري ورشوګانی توپیر کیدی شي.

1. Bereich: $0 \le x \le a$: (ورشو) لمړی تعدیدوری

$l = 2a + b$



$$0 = M - \frac{q\cdot b}{2}x \Rightarrow M = \frac{q\cdot b}{2}x$$

د $0 \le x \le a$ لپاره کړونلاین y_1:

$$y_1'' = -\frac{M}{E\cdot I}$$

$$= -\frac{qb}{2EI}x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y_1' = -\frac{qb}{4EI}x^2 + c_1$$

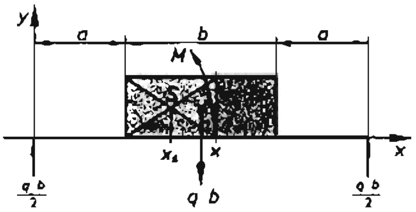
$$y_1 = -\frac{qb}{12EI}x^3 + c_1 x + c_2$$

اژی ارزښت: $y_1(0) = 0 \Rightarrow c_2$

$$0 = -0 + 0 + c_2 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$y_1 = -\frac{qb}{12EI}x^3 + c_1 x$$

2. Bereich: $a \leq x \leq a+b$ وردشو



$$0 = M + q(x-a)\cdot(x-x_s) - \frac{qb}{2}x$$

$x_s = \frac{x+a}{2}$

$$M = \frac{qb}{2}x - q(x-a)\cdot\frac{x-a}{2}$$

$$= \frac{qb}{2}x - \frac{q}{2}(x-a)^2$$

$$= \frac{q}{2}[bx - (x-a)^2]$$

$$= \frac{q}{2}[bx - x^2 + 2ax - a^2]$$

$$= \frac{q}{2}[-x^2 + x(2a+b) - a^2]$$

x_2: د $a \leq x \leq a+b$ لپاره کږونلاین

$$y_2'' = -\frac{M}{EI}$$

$$= -\frac{q}{2EI}[-x^2 + x(2a+b) - a^2]$$

$$= \frac{q}{2EI}[x^2 - x(2a+b) + a^2]$$

$$y_2' = \frac{q}{2EI}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}(2a+b) + a^2 x + c_3\right]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د سیومتري باروېشنې له امله

$y'_2\left(a+\frac{b}{2}\right)=0,$

باور لري، له کوم سره چې c_3 ټاکله کېږي.

$$0=\frac{q}{2EI}\left[\frac{(2a+b)^3}{24}-\frac{(2a+b)^3}{8}+\frac{a^2}{2}(2a+b)+c_3\right]$$

$$c_3=\frac{2a+b}{24}\left[-12a^2+3(2a+b)^2-(2a+b)^2\right]$$

$$=\frac{2a+b}{24}\left[-12a^2+2(2a+b)^2\right]$$

$$=\frac{2a+b}{24}\left[-12a^2+8a^2+8ab+2b^2\right]$$

$$=\frac{2a+b}{24}\left[-4a^2+8ab+2b^2\right]$$

$$=\frac{1}{12}(2a+b)(b^2+4ab-2a^2)$$

$$=\frac{1}{12}(2ab^2+8a^2b-4a^3+b^3+4ab^2-2a^2b)$$

$$=\frac{1}{12}(b^3+6ab^2+6a^2b-4a^3)$$

ثابتې c_1 او c_4 باید له فنکشنونو y_1 او y_2 څخه د پوشانیزشرتونو $y_1(a)=y_2(a)$ او $y_1'(a)=y'_2(a)$ له امله وټاکل شي.

$$y_2=\frac{q}{2EI}\left[\frac{x^4}{12}-\frac{x^3}{6}(2a+b)+\frac{a^2x^2}{2}+c_3x+c_4\right]$$

د c_1 ټاکنه

$$y'_1(a)=-\frac{qb}{4EI}a^2+c_1$$

$$y'_2(a)=\frac{q}{2EI}\left[\frac{a^3}{3}-\frac{a^2}{2}(2a+b)+a^3+c_3\right]$$

$$=\frac{q}{2EI}\left[\frac{a^3}{3}-a^3-\frac{a^2b}{2}+a^3+c_3\right]$$

$$y'_2(a)=\frac{q}{2EI}\left[\frac{a^3}{3}-\frac{a^2b}{2}+\frac{1}{12}(b^3+6ab^2+6a^2b-4a^3)\right]$$

$$=\frac{q}{24EI}\left[4a^3-6a^2b+b^3+6ab^2+6a^2b-4a^3\right]$$

$$=\frac{qb^2}{24EI}(b+6a)$$

$$y'_1=y'_2(a)$$

$$-\frac{qb}{4EI}a^2+c_1=\frac{qb^2}{24EI}(b+6a)$$

$$c_1=\frac{qb}{24EI}(6a^2+6ab+b^2)$$

د c_4 ټاکنه

$$y_1(a)=-\frac{qba^3}{12EI}+\frac{qba}{24EI}(6a^2+6ab+b^2)$$

$$=\frac{qab}{24EI}(4a^2+6ab+b^2)$$

$$y_2(a)=\frac{q}{2EI}\left[\frac{a^4}{12}-\frac{a^3}{6}(2a+b)+\frac{a^4}{2}+c_3a+c_4\right]$$

$$=\frac{q}{24EI}[a^4-4a^4-2a^3b+6a^4+12ac_3+12c_4]$$

$$=\frac{q}{24EI}[3a^4-2a^3b+ab^3+6a^2b^2+6a^3b-$$

$$-4a^4+12c_4]$$

$$=\frac{q}{24EI}[-a^4+4a^3b+6a^2b^2+ab^3+12c_4]$$

$$y_1(a)=y_2(a)$$

$$ab(4a^2+6ab+b^2)=-a^4+4a^3b+6a^2b^2+ab^3+$$

$$4a^3b+6a^2b^2+ab^3=-a^4+4a^3b+6a^2b^2+ab^3+$$

$$0=-a^4+12c_4$$

$$c_4=\frac{a^4}{12}$$

دریم

3. Bereich: $a+b\le x\le l$

$$y_1=\frac{qbx}{24EI}(6a^2+6ab+b^2-2x^2)$$

$$x:\blacktriangleright l-x$$

$$y_3=\frac{qb(l-x)}{24EI}[6a^2+6ab+b^2-2(l-x)^2]$$

د دې ورشو لپاره کیدی شي کږونلاین y_3 له y_1 څخه ساده وشمیرل شي،څکه چې دا د سیومتری دروندوالي یا بارونی له امله و$(2a+b)(½)= l/2 = x$ ته سیومتري دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټولو درې ورشوګان په رابندفورم کی د ګېړونلاین انځورونه

$$y=\begin{cases}\dfrac{qbx}{24EI}(6a^2+6ab+b^2-2x^2) & \text{für } 0\le x\le a\\[2ex] \dfrac{q}{24EI}[x^4-2x^3(2a+b)+6a^2x^2+x(b^3+6ab^2+6a^2b-4a^3)+a^4] & \text{für } a\le x\le a+b\\[2ex] \dfrac{qb(l-x)}{24EI}[6a^2+6ab+b^2-2(l-x)^2] & \text{für } a+b\le x\le l\end{cases}$$

د سیومتریکي بارویشنی له امله ماکسیمال راکېږونه په لاندې کی پرته ده

$$x_m=\frac{l}{2}=\frac{1}{2}(2a+b).$$

$$y_{max}=y_2(x_m)=y_2\left(\frac{l}{2}\right)$$

$$=\frac{q}{24EI}\left[\frac{1}{16}(2a+b)^4-\frac{1}{4}(2a+b)^4+\frac{3}{2}a^2(2a+b)^2+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}(2a+b)(b^3+6ab^2+6a^2b-4a^3)+a^4\right]$$

$$=\frac{q}{384EI}[(2a+b)^4-4(2a+b)^4+24(2a+b)^2a^2+$$

$$+8(2a+b)(b^3+6ab+6a^2b-4a^3)+16a^4]$$

$$=\frac{q}{384EI}[-3(16a^4+32a^3b+24a^2b^2+8ab^3+b^4)+24a^2(4a^2+4ab+b^2)+$$

$$+8(2a+b)(b^3+6ab^2+6a^2b-4a^3)+16a^4]$$

$$=\frac{q}{384EI}[-48a^4-96a^3b-72a^2b^2-24ab^3-3b^4+96a^4+96a^3b+24a^2b^2+$$

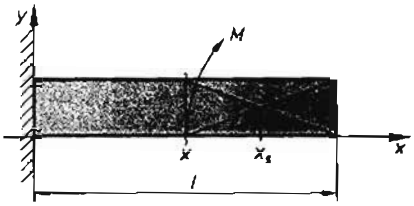
$$+16ab^3+96a^2b^2+96a^3b-64a^4+8b^4+48ab^3+48a^2b^2-32a^3b+16a^4]$$

$$=\frac{q}{384EI}[64a^3b+96a^2b^2+40ab^3+5b^4]$$

$$=\frac{qb}{384EI}(64a^3+96a^2b+40ab^2+5b^3)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

17.



$x_s = \frac{l+x}{2}$

$$0 = M + q(l-x)\cdot(x_s - x)$$

$$= M + q(l-x)\cdot\frac{l-x}{2}$$

$$= M + \frac{q}{2}(l-x)^2$$

$$M = -\frac{q}{2}(l-x)^2$$

$$y'' = = \frac{M}{EI}$$

$$= \frac{q}{2EI}(l-x)^2$$

Substitution: بدلون

$z = l - x \Rightarrow \mathrm{d}x = -\mathrm{d}z$

$$y' = \frac{q}{2EI}\int (l-x)^2\,\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{q}{2EI}\int z^2\,\mathrm{d}z$$

$$= -\frac{q}{6EI}z^3 + c_1$$

$$= -\frac{q}{6EI}(l-x)^3 + c_1$$

ژی ارزښت: $y'(0) = 0 \Rightarrow c_1$

$$0 = -\frac{q}{6EI}l^3 + c_1;\quad c_1 = \frac{ql^3}{6EI}$$

$$y' = \frac{q}{6EI}\left[l^3 - (l-x)^3\right]$$

بدلون (سبستیچیوشن)

$z = l - x \Rightarrow \mathrm{d}x = -\mathrm{d}z$

$$y = \frac{q}{6EI}\int \left[l^3 - (l-x)^3\right]\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{q}{6EI}\int (l^3 - z^3)\,\mathrm{d}z$$

$$= -\frac{q}{6EI}\left(l^3\cdot z - \frac{z^4}{4} + c_2\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = -\frac{q}{6EI}\left[(l-x)l^3 - \frac{1}{4}(l-x)^4 + c_2\right]$$

ژي ارزښت
Randwert: $y(0)=0 \Rightarrow c_2$

$$0 = -\frac{q}{6EI}\left[l^4 - \frac{1}{4}l^4 + c_2\right]$$

$$0 = l^4 - \frac{1}{4}l^4 + c_2; \quad c_2 = -\frac{3}{4}l^4$$

$$y = -\frac{q}{6EI}\left[(l-x)l^3 - \frac{1}{4}(l-x)^4 - \frac{3}{4}l^4\right]$$

$$= \frac{q}{24EI}\left[(l-x)^4 - 4l^3(l-x) + 3l^4\right]$$

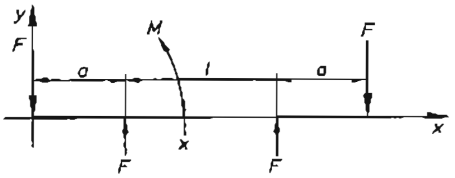
ماکسیمالاگږون په ژي ارزښت $z = l$ کی رامنځ ته کیږي.

$$y_{max} = y(l)$$

$$= \frac{ql^4}{8EI}$$

۱۸ . د x لپاره دې بیا دري ورشوګانی تو پیر شي.

1. Bereich: $0 \le x \le a$ ورشو



$$0 = M + x \cdot F \Rightarrow M = -x \cdot F$$

y_1: د $0 \le x \le a$ لپاره کرونلاین

$$y_1'' = -\frac{M}{EI}$$

$$= \frac{F}{EI}x$$

$$y_1' = \frac{F}{2EI}x^2 + c_1$$

$$y_1 = \frac{F}{6EI}x^2 + c_1 x + c_2$$

ژي ارزښت
Randwert: $y_1(a) = 0 \Rightarrow c_2$

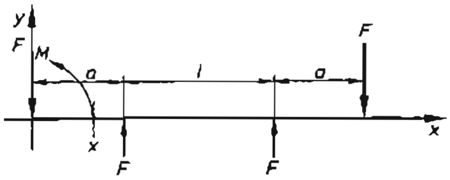
$$0 = \frac{F}{6EI}a^3 + c_1 a + c_2$$

$$c_2 = -\frac{F}{6EI}a^3 - c_1 a$$

$$y_1 = \frac{F}{6EI}(x^3 - a^3) + c_1(x - a)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2. Bereich: $a \leq x \leq a+l$ ورشو



$$0 = M + x \cdot F - (x-a)F$$

$$= M + x \cdot F - x \cdot F + a \cdot F$$

$$M = -aF$$

y_2: د $0 \leq x \leq a+l$ لپاره کړونلاین

$$y_2'' = -\frac{M}{EI}$$

$$y_2'' = \frac{aF}{EI}$$

$$y_2' = \frac{aF}{EI}x + c_3$$

د سیومتریکي باروېشنی له
امله باور لري:

$$y_2'\left(a+\frac{l}{2}\right) = 0 \Rightarrow c_3$$

$$0 = \frac{aF}{EI}\left(a+\frac{l}{2}\right) + c_3$$

$$c_3 = -\frac{aF}{EI}\left(a+\frac{l}{2}\right)$$

$$y_2' = \frac{aF}{EI}\left[x - \left(a+\frac{l}{2}\right)\right]$$

$$y_2 = \frac{aF}{EI}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}(2a+l) + c_4\right]$$

تړی ارزښت

Randwert: $y_2(a) = 0 \Rightarrow c_4$

$$0 = \frac{aF}{EI}\left[\frac{a^2}{2} - \frac{a}{2}(2a+l) + c_4\right]$$

$$0 = \frac{a^2}{2} - a^2 - \frac{al}{2} + c_4$$

$$c_4 = \frac{a^2}{2} + \frac{al}{2}$$

$$= \frac{a}{2}(a+l)$$

$$y_2 = \frac{aF}{2EI}\left[x^2 - x(2a+l) + a(a+l)\right]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د فنکشن y_1 ثابته c_1 د هومو-گينيتي شرتونو $y'_1(a) = y'_2(a)$ له لارې پيدا کړي.

$$y'_1(a) = \frac{Fa^2}{2EI} + c_1$$

$$y'_2(a) = \frac{aF}{EI}\left[a - \left(a + \frac{l}{2}\right)\right]$$

$$= -\frac{alF}{2EI}$$

$$y'_1(a) = y'_2(a)$$

$$\frac{Fa^2}{2EI} + c_1 = -\frac{alF}{2EI}$$

$$c_1 = -\frac{aF}{2EI}(a+l)$$

$$y_1 = \frac{F}{6EI}[x^3 - a^3 - 3a(a+l)(x-a)]$$

د سيومتريکې باروېشنې له امله کږونلاين y_3 و $x = a + (1/2)$ ته سيومتري دی د کږونلاين y_1 سره. له دې سره y_3 سملاسې له y_1 څخه شميرل کيږي.

3. Bereich: $a + l \le x \le 2a + l$ ورڅو

$$y_1 = y_1(x)$$

$$x: \blacktriangleright 2a + l - x$$

$$y_3 = \frac{F}{6EI}[(2a+l-x)^3 - a^3 - 3a(a+l)(a+l-x)]$$

د ټولو درې ورشوګانو لپاره په يو رابندفورم کې د اوبيونو (حلونو) انځورونه

$$y = \begin{cases} \frac{F}{6EI}[x^3 - a^3 - 3a(a+l)(x-a)] & \text{für } 0 \le x \le a \\ \frac{aF}{2EI}[x^2 - x(2a+l) + a(a+l)] & \text{für } a \le x \le a+l \\ \frac{F}{6EI}[(2a+l-x)^3 - a^3 - 3a(a+l)(a+l-x)] & \text{für } a+l \le x \le 2a+l \end{cases}$$

دوه ماکسيمال، مختلف راګرونونه رامنځ ته کيږي

$$y_{max_1} = y(0) = y_{max_2} = y(2a+l)$$

$$y_{max_1} = y_1(0)$$

$$= \frac{F}{6EI}[-a^3 - 3a(a+l)(-a)]$$

$$= \frac{F}{6EI}[-a^3 + 3a^3 - 3a^2 l]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y_{\max_1}=\frac{Fa^2}{6EI}(2a+3l)=y_{\max_2}$$

$$y_{\max_3}=y\left(a+\frac{l}{2}\right)$$

$$=y_2\left(a+\frac{l}{2}\right)=y_2\left(\frac{2a+l}{2}\right)$$

$$=\frac{aF}{2EI}\left[\frac{1}{4}(2a+l)^2-\frac{1}{2}(2a+l)^2+a(a+l)\right]$$

$$=\frac{aF}{2EI}\left[-\frac{1}{4}(4a^2+4al+l^2)+a^2+al\right]$$

$$=\frac{aF}{2EI}\left[-a^2-al-\frac{l^2}{4}+a^2+al\right]$$

$$=-\frac{al^2F}{8EI}$$

19. $y''=\frac{1}{\sqrt{y}}$

$$y'=z\Rightarrow y''=\frac{dz}{dy}\cdot z$$

د پوښتنکونی څخه لاسته راځي:

$y>0.$

$$\frac{dz}{dy}\cdot z=\frac{1}{\sqrt{y}}$$

$$\int z\,dz=\int y^{-\frac{1}{2}}dy$$

$$\frac{z^2}{2}=2y^{\frac{1}{2}}+c_1^* \quad \| \cdot 2$$

$$z^2=4\sqrt{y}+2c_1^*$$

$c_1=2c_1^*$

$$z=\sqrt{4\sqrt{y}+c_1}$$

Substitution: بدلون

$$t=4\sqrt{y}+c_1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow dy=\frac{1}{2}\sqrt{y}\,dt$$

$$=\frac{1}{8}(t-c_1)\,dt$$

$$\int dx=\int\frac{dy}{\sqrt{4\sqrt{y}+c_1}}$$

$$=\frac{1}{8}\int\frac{t-c_1}{\sqrt{t}}\,dt$$

$$=\frac{1}{8}\int\left(\sqrt{t}-\frac{c_1}{\sqrt{t}}\right)dt$$

$$=\frac{1}{8}\left(\frac{2}{3}t\sqrt{t}-2c_1\sqrt{t}\right)+c_2$$

$$x=\frac{\sqrt{t}}{12}\,(t-3c_1)+c_2$$

$$=\frac{1}{12}\sqrt{4\sqrt{y}+c_1}\,(4\cdot\sqrt{y}-2c_1)+c_2;\quad y>0$$

20. $y''=a\cdot e^y$

$$y'=\frac{dy}{dx}=z\Rightarrow y''=\frac{dz}{dy}\cdot z$$

$$\frac{dz}{dy}\cdot z=a\cdot e^y$$

$$\int z\cdot dz=a\int e^y\,dy$$

$$\frac{z^2}{2}=a\cdot e^y+c_1^*\quad \|\cdot 2$$

$c_1=2c_1^*$

$$z^2=2ae^y+c_1$$

$$z=\sqrt{2ae^y+c_1}$$

Substitution: بدلون

$$t^2=2ae^y+c_1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2t\,dt=2ae^y\,dy$$

$$dy=\frac{t\cdot dt}{ae^y}$$

$$=\frac{2t}{t^2-c_1}\cdot dt$$

$$\int dx=\int\frac{dy}{\sqrt{2ae^y+c_1}}$$

$$=\int\frac{1}{t}\cdot\frac{2t}{t^2-c_1}\,dt$$

$$=2\int\frac{dt}{t^2-c_1}=-2\int\frac{dt}{c_1-t^2}$$

$$\int\frac{dx}{a-x^2}=\frac{1}{\sqrt{a}}\ \text{Artanh}\ \frac{x}{\sqrt{a}}+c$$

für $a>0$

$$\int\frac{dt}{c_1-t^2}=\frac{1}{\sqrt{c_1}}\ \text{Artanh}\ \frac{t}{\sqrt{c_1}}+c_2$$

$$x=-2\,\frac{1}{\sqrt{c_1}}\ \text{Artanh}\ \frac{t}{\sqrt{c_1}}+c_2$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{c_1}}\ \text{Artanh}\sqrt{\frac{2a}{c_1}\,e^y+1}+c_2;\quad c_1>0$$

21. $y^4-y^3\cdot y''=1$

$$y'=\frac{dy}{dx}=z\Rightarrow y''=\frac{dz}{dy}\cdot z$$

$$y^4-y^3\cdot\frac{dz}{dy}\cdot z=1$$

نیونه: $y\neq 0$ په y^3 ویشنه

$$y-\frac{dz}{dy}\,z=y^{-3}$$

$$\int z\cdot dz=\int(y-y^{-3})\,dy$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{z^2}{2}=\frac{y^2}{2}+\frac{y^{-2}}{2}+c_1 \quad \| \cdot 2$$

$$z^2=y^2+y^{-2}+2c_1$$

$$z=\sqrt{y^2+y^{-2}+2c_1}$$

$$=\frac{1}{y}\sqrt{y^4+2c_1y^2+1}$$

$$\int dx=\int \frac{y}{\sqrt{y^4+2c_1y^2+1}}\,dy$$

Substitution: بدلون

$$y^2=t \Rightarrow dy=\frac{dt}{2y}$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+2c_1t+1}}$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{(t+c_1)^2+1-c_1^2}}$$

Substitution: بدلون

$$u=t+c_1 \Rightarrow du=dt$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u^2+1-c_1^2}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|$$

$$a^2 \blacktriangleright 1-c_1^2$$

$$x=\frac{1}{2}\ln\left|u+\sqrt{u^2+1-c_1^2}\right|+c_2$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|t+c_1+\sqrt{(t+c_1)^2+1-c_1^2}\right|+c_2$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|y^2+c_1+\sqrt{y^4+2c_1y^2+1}\right|+c_2$$

د $y\neq0$ لپاره

$\neq$

22. $y''=\frac{1}{y}$

$$y'=\frac{dy}{dx}=z \Rightarrow y''=\frac{dz}{dy}\cdot z$$

د پوښتنکونی څخه لاسته راځي:

$y\neq0$.

$$\frac{dz}{dy}\cdot z=\frac{1}{y}$$

$$\int z\,dz=\int \frac{dy}{y}$$

$$\frac{z^2}{2}=\ln|y|+c_1^* \quad \| \cdot 2$$

$$z^2=2\ln|y|+2c_1^*$$

$c_1=2c_1^*$

$$=\ln y^2+c_1$$

$$z=\sqrt{\ln y^2+c_1}$$

$$\int dx=\int \frac{dy}{\sqrt{\ln y^2+c_1}}$$

Substitution: بدلون

$$t^2=\ln y^2+c_1 \Rightarrow$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Rightarrow 2t\,dt = \frac{2y}{y^2}\,dy$$

$$dy = yt \cdot dt$$

د دې اینتیګریشن سره ل

لړیودینی خخه تیریدنه ناشونی ده

$$\int dx = \int \frac{yt \cdot dt}{t}$$

$$= \int y\,dt$$

$$= \int e^{\frac{t^2 - c_1}{2}}\,dt$$

$$= e^{-\frac{c_1}{2}} \int e^{\frac{t^2}{2}}\,dt$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$\blacktriangleright\; x = \frac{t^2}{2}$$

$$e^{\frac{t^2}{2}} = 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4 \cdot 2!} + \frac{t^6}{8 \cdot 3!} + \frac{t^8}{16 \cdot 4!} + \cdots$$

$$\int e^{\frac{t^2}{2}}\,dt = c_2 + t + \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{5 \cdot 4 \cdot 2!} + $$

$$+ \frac{t^7}{7 \cdot 8 \cdot 3!} + \frac{t^9}{9 \cdot 16 \cdot 4!} + \cdots$$

$$x = e^{-\frac{c_1}{2}} \left[c_2 + \sqrt{\ln y^2 + c_1} + \frac{(\sqrt{\ln y^2 + c_1})^3}{6} + \frac{(\sqrt{\ln y^2 + c_1})^5}{5 \cdot 4 \cdot 2!} + \frac{(\sqrt{\ln y^2 + c_1})^7}{7 \cdot 8 \cdot 3!} + \cdots \right]$$

د $y \neq 0$ ، لپاره

23. $y^2 = k^2 \cdot y''$

$$y' = \frac{dy}{dx} = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dy} \cdot z$$

$$y^2 = k^2 \cdot \frac{dz}{dy} \cdot z$$

$$\int y^2\,dy = k^2 \int z\,dz$$

$$\frac{y^3}{3} = k^2 \cdot \frac{z^2}{2} + c_1^* \quad \Big\| \cdot \frac{2}{k^2}$$

$$z^2 = \left(\frac{2}{3} y^3 - 2c_1^*\right) \cdot \frac{1}{k^2}$$

$$= \frac{1}{k^2} \cdot \frac{2}{3} (y^3 - 3c_1^*)$$

$c_1 = -3c_1^*$

$$z = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{y^3 + c_1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int dx = k\sqrt{\frac{3}{2}}\int \frac{dy}{\sqrt{y^3+c_1}}$$

$$= k\sqrt{\frac{3}{2}}\int \frac{dy}{\sqrt{c_1\left(1+\frac{y^3}{c_1}\right)}}$$

$$= k\sqrt{\frac{3}{2c_1}}\int\left(1+\frac{y^3}{c_1}\right)^{-\frac{1}{2}} dy$$

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1+\binom{-\frac{1}{2}}{1}x+\binom{-\frac{1}{2}}{2}x^2+\binom{-\frac{1}{2}}{3}x^3+-$$

$$= 1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\cdots$$

د دي اینتیګرال شمیرنه یواځي د لړۍ ودیزئینی له لارې شونی ده.

د $|x|<1$ لپاره

$$\blacktriangleright\ \frac{y^3}{c_1} = x$$

$$\left(1+\frac{y^3}{c_1}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1-\frac{1}{2}\frac{y^3}{c_1}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{y^6}{c_1^2}-$$

$$-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{y^9}{c_1^3}+-\cdots$$

د $|y^3|<|c_1|$ لپاره

$$x = k\sqrt{\frac{3}{2c_1}}\int\left(1+\frac{y^3}{c_1}\right)^{-\frac{1}{2}} dy$$

$$= k\sqrt{\frac{3}{2c_1}}\left[c_2+y-\frac{1}{2}\frac{y^4}{4c_1}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{y^7}{7c_1^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{y^{10}}{10c_1^3}+-\cdots\right]$$

$$\left|\frac{y^3}{c_1}\right| < 1 \Rightarrow |y^3| < |c_1|$$

د $|y^3|<|c_1|$ لپاره

24. $y'' = y^2$

دا دفرنځیالمساوت هغه د مخه تیره پوښتنه ۲۳ کی شمیرلی دفرنځیالمساوات خانګړی حالت دی د $k = 1$ سره

$$x = \sqrt{\frac{3}{2c_1}}\left[c_2+y-\frac{1}{2}\frac{y^4}{4c_1}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{y^7}{7c_1^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{y^{10}}{10c_1^3}+-\cdots\right]$$

د $|y^3|<|c_1|$ لپاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

25. $y^2 \cdot y'' = a$

$$y' = \frac{dy}{dx} = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dy} \cdot z$$

$$y^2 \cdot \frac{dz}{dy} \cdot z = a$$

نیونه: $y \neq 0$ په y^2 ویشنه

$$\int z \cdot dz = a \int \frac{dy}{y^2}$$

$$\frac{z^2}{2} = -\frac{a}{y} + c_1^* \quad \| \cdot 2$$

$c_1 = 2c_1^*$

$$z^2 = -\frac{2a}{y} + c_1$$

$$z = \sqrt{c_1 - \frac{2a}{y}}$$

$$\int dx = \int \frac{dy}{\sqrt{c_1 - \frac{2a}{y}}}$$

Substitution: بدلون

$$c_1 - \frac{2a}{y} = t^2 \Rightarrow dy = \frac{ty^2}{a}\, dt$$

$$x = \int \frac{1}{t} \cdot \frac{ty^2}{a}\, dt$$

$$= \frac{1}{a} \int \frac{4a^2}{(c_1 - t^2)^2}\, dt$$

$$= 4a \int \frac{dt}{[(\sqrt{c_1} + t)(\sqrt{c_1} - t)]^2}$$

$$= 4a \int \frac{dt}{(\sqrt{c_1} + t)^2 \cdot (\sqrt{c_1} - t)^2}$$

انتیګرال په ټوټه یا پارشلماتو
ماتو ټوټه یا تجزیه کیږي

$$= 4a \int \left[\frac{A}{\sqrt{c_1} + t} + \frac{B}{(\sqrt{c_1} + t)^2} + \frac{C}{\sqrt{c_1} - t} + \frac{D}{(\sqrt{c_1} - t)^2} \right] dt$$

د ځلوونو یا ضریبونو انډول:

$$1 = A(\sqrt{c_1} + t)(\sqrt{c_1} - t)^2 + B(\sqrt{c_1} - t)^2 + C(\sqrt{c_1} + t)^2(\sqrt{c_1} - t) + D(\sqrt{c_1} + t)^2$$

$$= A(c_1 - t^2)(\sqrt{c_1} - t) + B(\sqrt{c_1} - t)^2 + C(c_1 - t^2)(\sqrt{c_1} + t) + D(\sqrt{c_1} + t)^2$$

$$= A(c_1\sqrt{c_1} - c_1 t - \sqrt{c_1}\, t^2 + t^3) + B(c_1 - 2\sqrt{c_1}\, t + t^2) + C(c_1\sqrt{c_1} + c_1 t - \sqrt{c_1}\, t^2 - t^3) +$$

$$+ D(c_1 + 2\sqrt{c_1}\, t + t^2)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$1=t^3(A-C)+t^2(-A\sqrt{c_1}+B-C\sqrt{c_1}+D)+t(-Ac_1-2B\sqrt{c_1}+Cc_1+2D\sqrt{c_1})+$$
$$+Ac_1\sqrt{c_1}+Bc_1+Cc_1\sqrt{c_1}+Dc_1$$

$$\text{I}:\quad 0=A-C \qquad\qquad \Rightarrow A=C$$
$$\text{II}:\quad 0=-A\sqrt{c_1}+B-C\sqrt{c_1}+D$$
$$\text{III}:\quad 0=-Ac_1-2B\sqrt{c_1}+Cc_1+2D\sqrt{c_1}$$
$$\text{IV}:\quad 1=Ac_1\sqrt{c_1}+Bc_1+Cc_1\sqrt{c_1}+Dc_1$$

$$\text{II}:\quad 0=-2A\sqrt{c_1}+B+D$$
$$\text{III}:\quad 0=-2B\sqrt{c_1}+2D\sqrt{c_1}\quad \|:2\sqrt{c_1} \qquad\qquad \Rightarrow B=D$$
$$\text{IV}:\quad 1=2Ac_1\sqrt{c_1}+Bc_1+Dc_1$$

$$\left.\begin{aligned}\text{II}:&\quad 0=-2A\sqrt{c_1}+2B \quad \|\cdot c_1\\ \text{IV}:&\quad 1=2Ac_1\sqrt{c_1}+2Bc_1\end{aligned}\right\}+$$
$$1=\qquad 4Bc_1 \qquad \Rightarrow B=\frac{1}{4c_1}=D$$

$$\text{IV}:\quad 1=2Ac_1\sqrt{c_1}+\frac{1}{2} \qquad \Rightarrow A=\frac{1}{4c_1\sqrt{c_1}}=C$$

له دې سره x شمیرل یږي.

$$x=4a\int\left[\frac{\frac{1}{4c_1\sqrt{c_1}}}{\sqrt{c_1}+t}+\frac{\frac{1}{4c_1}}{(\sqrt{c_1}+t)^2}+\frac{\frac{1}{4c_1\sqrt{c_1}}}{\sqrt{c_1}-t}+\frac{\frac{1}{4c_1}}{(\sqrt{c_1}-t)^2}\right]dt$$
$$=\frac{a}{c_1}\int\left[\frac{1}{\sqrt{c_1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{c_1}+t}+\frac{1}{(\sqrt{c_1}+t)^2}+\frac{1}{\sqrt{c_1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{c_1}-t}+\frac{1}{(\sqrt{c_1}-t)^2}\right]dt$$
$$=\frac{a}{c_1}\left[\frac{1}{\sqrt{c_1}}\ln|\sqrt{c_1}+t|-\frac{1}{\sqrt{c_1}+t}-\frac{1}{\sqrt{c_1}}\ln|\sqrt{c_1}-t|+\frac{1}{\sqrt{c_1}-t}\right]+c_2$$
$$=\frac{a}{c_1}\left[\frac{1}{\sqrt{c_1}}\ln\left|\frac{\sqrt{c_1}+t}{\sqrt{c_1}-t}\right|+\frac{2t}{c_1-t^2}\right]+c_2$$
$$=\frac{a}{c_1}\left[\frac{1}{\sqrt{c_1}}\ln\left|\frac{\sqrt{c_1}+\sqrt{c_1-\frac{2a}{y}}}{\sqrt{c_1}-\sqrt{c_1-\frac{2a}{y}}}\right|+\frac{2\sqrt{c_1-\frac{2a}{y}}}{c_1-\left(c_1-\frac{2a}{y}\right)}\right]+c_2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x=\frac{a}{c_1}\left[\frac{1}{\sqrt{c_1}}\ln\left|\frac{\sqrt{yc_1}+\sqrt{yc_1-2a}}{\sqrt{yc_1}-\sqrt{yc_1-2a}}\right|+\frac{1}{a}\sqrt{y(yc_1-2a)}\right]+c_2 \quad \text{für } y\neq 0$$

26. $y''=6y-4$

$$y'=\frac{dy}{dx}=z \Rightarrow y''=\frac{dz}{dy}\cdot z$$

$$\frac{dz}{dy}\cdot z=6y-4$$

$$\int z\,dz=\int(6y-4)\,dy$$

$$\frac{z^2}{2}=3y^2-4y+c_1^* \quad \|\cdot 2$$

$$z^2=6y^2-8y+2c_1^*$$

$$z=\sqrt{6y^2-8y+2c_1^*}$$

$$=\sqrt{6}\sqrt{y^2-\frac{4}{3}y+\frac{1}{3}c_1^*}$$

$$=\sqrt{6}\sqrt{y^2-\frac{4}{3}y+\frac{4}{9}-\frac{4}{9}+\frac{1}{3}c_1^*}$$

$$c_1=-\frac{4}{9}+\frac{1}{3}c_1^*$$

$$z=\sqrt{6}\sqrt{\left(y-\frac{2}{3}\right)^2+c_1}$$

$$\int dx=\frac{1}{\sqrt{6}}\int\frac{dy}{\sqrt{\left(y-\frac{2}{3}\right)^2+c_1}}$$

Substitution: بدلون

$$t=y-\frac{2}{3}\Rightarrow dy=dt$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{6}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+c_1}}$$

$$x=\frac{\sqrt{6}}{6}\ln|t+\sqrt{t^2+c_1}|+c_2$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{6}\ln\left|y-\frac{2}{3}+\sqrt{\left(y-\frac{2}{3}\right)^2+c_1}\right|+c_2$$

27. $y''=1+y'^2$

$$y'=z\Rightarrow y''=\frac{dz}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx}=1+z^2$$

$$\int dx=\int\frac{dz}{1+z^2}$$ ◄ بنسټ اینتیګرال

$$x=\text{Arctan}\, z+c_1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\text{Arctan } z = x - c_1$$

$$z = \tan(x - c_1)$$

$$\frac{dy}{dx} = \tan(x - c_1)$$

$$\int dy = \int \tan(x - c_1)\,dx$$

$$\int \frac{-\sin(x - c_1)}{\cos(x - c_1)}\,dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$$

$$y = -\int \frac{-\sin(x - c_1)}{\cos(x - c_1)}\,dx$$

$$= -\ln|\cos(x - c_1)| + c_2$$

28. $y''^2 = 1 + y'^2$

$$y' = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dx}$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = \text{Arsinh } z$$

$$y'' = \sqrt{1 + y'^2}$$

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{1 + z^2}$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = \int dx$$

$$\text{Arsinh } z = x + c_1$$

$$z = \sinh(x + c_1)$$

$$y = \int \sinh(x + c_1)\,dx$$

$$= \cosh(x + c_1) + c_2$$

29. $y'' = e^{y'}$

$$y' = z; \quad y'' = \frac{dz}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx} = e^z$$

$$\int e^{-z}\,dz = \int dx$$

$$-\int e^{-z}\,dz = -\int dx$$

$$e^{-z} = -x + c_1$$

$$\ln(e^{-z}) = \ln(c_1 - x)$$

$$-z = \ln(c_1 - x)$$

$$y' = -\ln(c_1 - x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = -\int \ln(c_1 - x)\,dx$$

سبستیچیوشن

$c_1 - x = t \Rightarrow dx = -dt$

$$= \int \underbrace{\ln t}_{u}\,\underbrace{dt}_{dv}$$

پارشل - یا ټوټه اینتیګرال

$$= t\cdot\ln t - \int \frac{1}{t}\cdot t\,dt$$

$$= t\cdot\ln t - t + c_2$$

$$= t\,(\ln t - 1) + c_2$$

$$= (c_1 - x)\,[\ln(c_1 - x) - 1] + c_2$$

30. $y'' = y'^3$

ثابت : $y' = 0 \Rightarrow y = a = \text{const.}$ زینګولاراوبیونه

$y' = z;\quad y'' = \frac{dz}{dx}$

Voraussetzung: $y' \neq 0$ ؛ نیونه

$$\frac{dz}{dx} = z^3$$

$$\int \frac{dz}{z^3} = \int dx$$

$$-\frac{1}{2z^2} = x + c_1^*$$

$$z^2 = -\frac{1}{2(x + c_1^*)}$$

$c_1 = -c_1^*$

$$= \frac{1}{2(c_1 - x)}$$

$$z = \frac{1}{\pm\sqrt{2(c_1 - x)}}$$

$$y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{c_1 - x}}$$

$$= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot(-2\sqrt{c_1 - x}) + c_2$$

$$y = \pm\sqrt{2(c_1 - x)} + c_2$$

$y = a = \text{const.}$ = ثابته

(c) ketabton.com: The Digital Library

31. $y' \cdot y' - 3y''^2 = 0$

$y' = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dx}$

$y'^2 - 3y''^2 = 0$

$y'^2 = 3y''^2$

$y' = \pm\sqrt{3}y''$

پارتیکولار اوبیونه : $y' = 0 \Rightarrow y = a = \text{const.}$

Voraussetzung: $y' = z \neq 0$ ؛ نیونه

$z = \pm\sqrt{3}\,\frac{dz}{dx}$

$\pm\sqrt{3}\int\frac{dz}{z} = \int dx$

$\ln|z| = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}x + c_1^*$

$e^{\ln|z|} = e^{\pm\frac{1}{\sqrt{3}}x + c_1^*} = e^{\pm\frac{1}{\sqrt{3}}x}\cdot \underbrace{e^{c_1^*}}_{c_1}$

$z = c_1 \cdot e^{\pm\frac{1}{\sqrt{3}}x}$

$y = c_1\int e^{\pm\frac{1}{\sqrt{3}}x}\cdot dx$

$y = \pm\sqrt{3}c_1\cdot e^{\pm\frac{1}{\sqrt{3}}x} + c_2$

د $c_1 = 0$ سره په دي کی
پارتیکولاراوبیونه خوندي ده

32. $y''' + y''^2 = 0$

$y'' = z \Rightarrow y''' = \frac{dz}{dx}$

زیگولارزوبیونه : $y'' = 0 \Rightarrow y' = a$

$y = ax + b$

نیونه : $y'' = z \neq 0$

$\frac{dz}{dx} + z^2 = 0$

$\frac{dz}{dx} = -z^2$

$-\int\frac{dz}{z^2} = \int dx$

$\frac{1}{z} = x + c_1$

$z = \frac{1}{x + c_1} = y''$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ورپسی ایتیګریشن لپاره
دي ارزښتکرښی کیښول شي

$$y' = \int \frac{dx}{x+c_1}$$

$$= \ln|x+c_1| + c_2$$

1. Fall: $x + c_1 > 0$

$$y' = \ln(x+c_1) + c_2$$

$$y = (x+c_1)[\ln(x+c_1) - 1] + c_2 x + c_3$$

2. Fall: $x + c_1 < 0$

$$y' = \ln(-x-c_1) + c_2$$

$$y = (x+c_1)[\ln(-x-c_1) - 1] + c_2 x + c_3$$

د ارزښتکرښوکارونی سره د دواړو
حالتتوپیرونو لاس ته راوړنی یا
نتیجی رایوځای کیږي

$$y = (x+c_1)[\ln|x+c_1| - 1] + c_2 x + c_3$$

$$y = ax + b$$

33. $xy'^2 = y$

$$(y')^2 = \frac{y}{x}$$

د اوښتونو یا واریابلو بیلښت
x, dx und y, dy

$$y' = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{dy}{\sqrt{y}}$$

اینتیګریشن

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int \frac{dy}{\sqrt{y}}$$

$$2\sqrt{x} + c_1 = 2\sqrt{y} + c_2$$

$$\frac{c_1 - c_2}{2} = c$$

$$\sqrt{y} = \sqrt{x} + \frac{c_1 - c_2}{2}$$

$$\sqrt{y} = \sqrt{x} + c$$

$$y = x + 2c\sqrt{x} + c^2$$

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library