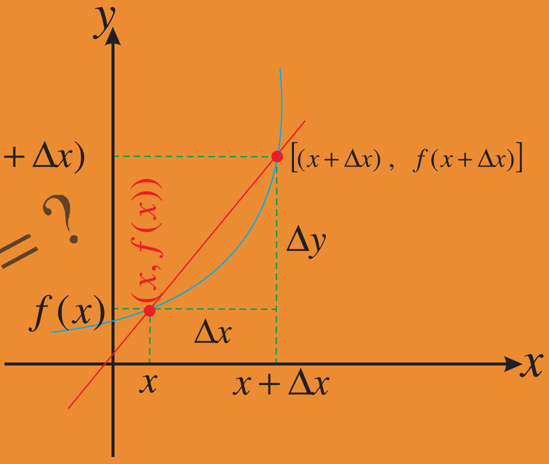
د پوهني وزارت

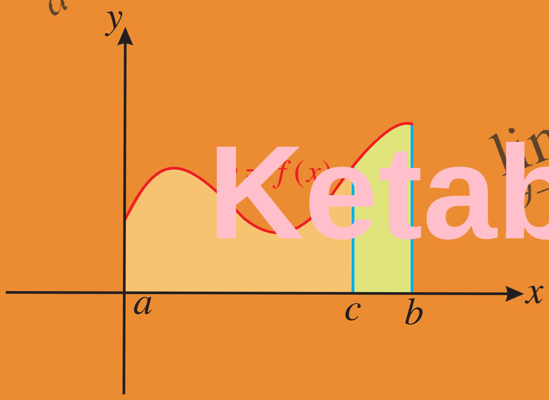
# ریاضي ۱۲

## ټولګی

$$\lim_{x\to a} f(x) = ?$$

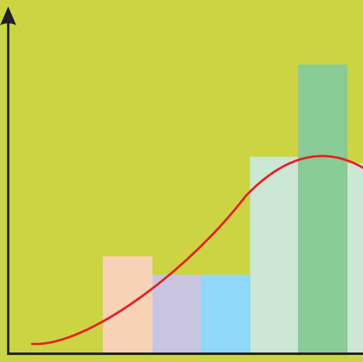



$$\int_a^b f(x)\,dx = ?$$




$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = ?$$

ریاضي ۱۲ ټولګی



د چاپ کال: ۱۳۹۸

Ketabton.com

(c) ketabton.com: The Digital Library

# ملي سرود

دا وطن افغانستان دی
کور د سولې کور د تورې
دا وطن د ټولو کور دی
د پښتون او هزاره وو
ورسره عرب، گوجر دي
براهوي دي، قزلباش دي
دا هیواد به تل ځلیږي
په سینه کې د آسیا به
نوم د حق مو دی رهبر

دا عزت د هر افغان دی
هر بچی یې قهرمان دی
د بلوڅو د ازبکو
د ترکمنو د تاجکو
پامیریان، نورستانیان
هم ایماق، هم پشه یان
لکه لمر پر شنه آسمان
لکه زړه وي جاویدان
وایو الله اکبر وایو الله اکبر

(c) ketabton.com: The Digital Library

بسم الله الرحمن الرحیم

د پوهنې وزارت

# رياضي ۱۲

ټولګی

د چاپ کال: ۱۳۹۸ هـ . ش.

(c) ketabton.com: The Digital Library

# د کتاب ځانګړتیاوې


**مضمون:** رياضي

**مؤلفين:** د تعليمي نصاب د رياضياتو د څانګې علمي او مسلکي غړي

**اډيټ کوونکي:** د پښتو ژبې د اډيټ علمي او مسلکي غړي

**ټولګی:** دولسم

**د متن ژبه:** پښتو

**انکشاف ورکوونکی:** د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تأليف لوی رياست

**خپروونکی:** د پوهنې وزارت د اړيکو او عامه پوهاوي رياست

**د چاپ کال:** ۱۳۹۸ هجري شمسي

**د چاپ ځای:** کابل

**چاپخونه:**

**برېښناليک پته:** curriculum@moe.gov.af



د درسي کتابونو د چاپ، وېش او پلورلو حق د افغانستان اسلامي جمهوريت د پوهنې وزارت سره محفوظ دی. په بازار کې يې پلورل او پېرودل منع دي. له سرغړوونکو سره قانوني چلندکيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

# د پوهنې د وزیر پیغام

اقرأ باسم ربک

د لوی او ښښونکي خدای ﷻ شکر په ځای کوو، چې موږ ته یې ژوند رابښلی، او د لوست او لیک له نعمت څخه یې برخمن کړي یو، او د الله تعالی پر وروستي پیغمبر محمد مصطفی ﷺ چې الهي لومړنی پیغام ورته (لوستل) و، درود وایو.

څرنګه چې ټولو ته ښکاره ده ۱۳۹۷ هجري لمریز کال د پوهنې د کال په نامه ونومول شو، له دې امله به د ګران هېواد ښوونیز نظام، د ژورو بدلونونو شاهد وي. ښوونکی، زده‌کوونکی، کتاب، ښوونځی، اداره او د والدینو شوراګانې د هېواد د پوهنیز نظام شپږګوني بنسټیز عناصر بلل کیږي، چې د هېواد د ښوونې او روزنې په پراختیا او پرمختیا کې مهم رول لري. په داسې مهم وخت کې د افغانستان د پوهنې وزارت د مشرتابه مقام، د هېواد په ښوونیز نظام کې د ودې او پراختیا په لور بنسټیزو بدلونونو ته ژمن دی.

له همدې امله د ښوونیز نصاب اصلاح او پراختیا، د پوهنې وزارت له مهمو لومړیتوبونو څخه دي. همدارنګه په ښوونځیو، مدرسو او ټولو دولتي او خصوصي ښوونیزو تأسیساتو کې، د درسي کتابونو محتوا، کیفیت او توزیع ته پاملرنه د پوهنې وزارت د چارو په سر کې ځای لري. موږ په دې باور یو، چې د باکیفیته درسي کتابونو له شتون پرته، د ښوونې او روزنې اساسي اهدافو ته رسېدلی نشو.

پورتنیو موخو ته د رسېدو او د اغېزناک ښوونیز نظام د رامنځته کولو لپاره، د راتلونکي نسل د روزونکو په توګه، د هېواد له ټولو زړه سواندو ښوونکو، استادانو او مسلکي مدیرانو څخه په درناوي هیله کوم، چې د هېواد بچیانو ته دې د درسي کتابونو په تدریس، او د محتوا په لېږدولو کې، هیڅ ډول هڅه او هاند ونه سپموي، او د یوه فعال او په دیني، ملي او انتقادي تفکر سمبال نسل په روزنه کې، زیار او کوښښ وکړي. هره ورځ د ژمنې په نوي کولو او د مسؤولیت په درک سره، په دې نیت لوست پیل کړي، چې د نن ورځې ګران زده‌کوونکي به سبا د یوه پرمختللي افغانستان معماران، او د ټولنې متمدن او ګټور اوسېدونکي وي.

همدا راز له خوږو زده کوونکو څخه، چې د هېواد ارزښتناکه پانګه ده، غوښتنه لرم، څو له هر فرصت څخه ګټه پورته کړي، او د زده کړې په پروسه کې د ځیرکو او فعالو ګډونوالو په توګه، او ښوونکو ته په درناوي سره، له تدریس څخه ښه او اغېزناکه استفاده وکړي.

په پای کې د ښوونې او روزنې له ټولو پوهانو او د ښوونیز نصاب له مسلکي همکارانو څخه، چې د دې کتاب په لیکلو او چمتو کولو کې یې نه ستړې کېدونکې هلې ځلې کړې دي، مننه کوم، او د لوی خدای ﷻ له دربار څخه دوی ته په دې سپیڅلې او انسان جوړوونکې هڅې کې بریا غواړم.

د معیاري او پرمختللي ښوونیز نظام او د داسې ودان افغانستان په هیله چې وګړي یې خپلواک، پوه او سوکاله وي.

د پوهنې وزیر

دکتور محمد میرویس بلخي

(c) ketabton.com: The Digital Library

# فهرست


| سرليکونه | مخونه |
| --- | --- |
| **لومړی څپرکی لیمیټ** ........................ | ۱-۴۰ |

- د لیمیټ مفهوم
- د ښي او کيڼي خوا لیمیټونه
- د لیمیټ خاصیتونه
- د نسبتي تابع ګانو لیمیټونه
- د $\frac{\infty}{\infty}$ مبهم شکل
- د $\infty - \infty$ او $0 \cdot \infty$ مبهم شکلونه
- د $0^0, \infty^0, 1^\infty$ مبهم شکلونه
- د مثلثاتي تابع ګانو لیمیټ
- د تابع ګانو متمادیت
- د متمادي تابع ګانو خاصیتونه
- د څپرکي لنډيز او پوښتنې

| | |
| --- | --- |
| **دويم څپرکی مشتقات** ........................ | ۴۱-۸۲ |

- د يوې تابع مشتق
- د مشتق هندسي تعبير
- د مشتق قوانين
- د مرکبو تابع ګانو مشتق
- د مثلثاتي تابع ګانو مشتق
- ضمني مشتقات
- لوړ مرتبه يي مشتقات
- د څپرکي لنډيز او پوښتنې

| | |
| --- | --- |
| **دريم څپرکی د مشتق د استعمال ځايونه** ........................ | ۸۳-۱۳۲ |

- د يوې تابع بحراني ټکی(اعظمي او اصغري)
- د انعطاف د ټکي ټاکل له دويم مشتق څخه په ګټې اخيستنې سره
- د منحنيګانو رسمول
- د توابعو دګرافونو مجانبونه
- د هوموګرافيک تابع ګانو ګراف
- د دريمې درجې يو مجهوله تابع ګراف
- د رول قضيه
- د متوسط قيمت قضيه
- د لوپيټال قاعده
- د بحراني ټکو تطبيق
- د څپرکي لنډيز او پوښتنې

(c) ketabton.com: The Digital Library

| سرلیکونه | مخونه |
|---|---|

**څلورم څپرکی انتیگرال** ........ ۱۳۳-۱۷۲

- د ریمان مجموعه
- د انتیگرال مفهوم
- د غیرمعین انتیگرال خواص
- معین انتیگرال
- د معین انتیگرال خواص
- د مشتق او انتیگرال اساسي قضیې
- په تعویضي طریقې سره انتیگرال نیول
- په قسمي طریقې سره انتي گرال نیول
- د څپرکي لنډیز او پوښتنې

**پنځم څپرکی د لوگاریتمي او اکسپوننشیل تابعگانو مشتق او انتیگرال** ........ ۱۷۳-۱۹۸

- د لوگاریتمي او اکسپوننشیل تابع گانو مشتق
- د معکوسو تابع گانو مشتق
- قسمي کسرونه
- د اکسپوننشیل تابع گانو انتیگرالونه
- د لوگاریتمي تابع گانو انتیگرال
- د قسمي کسرونو په مرسته د انتیگرال محاسبه
- د څپرکي لنډیز او پوښتنې

**شپږم څپرکی د انتیگرال تطبیقات** ........ ۱۹۹-۲۲۲

- د یوه منحنې په واسطه د محصور شوې سطحې د مساحت محاسبه
- د دوو منحنی گانو ترمنځ د محصور شوې سطحې د مساحت محاسبه
- د گراف له دوران څخه د په لاس راغلي جسم حجم
- د قوس د اوږدوالی محاسبه
- د څپرکي لنډیز او پوښتنې

**اووم څپرکی احصائیه** ........ ۲۲۳-۲۶۰

- د احتمال د تابع توزیع
- د دوه جملهیي توزیع او د برنولي آزمایښت
- د پواسن د احتمال توزیع
- نورمال توزیع
- د نورمال توزیع منحني لاندې مساحت او د هغې سټنډرډ کول
- نمونه اخیستل
- د نمونې د اوسط توزیع
- د مرکزي لیمیټ قضیه
- د نمونهیي توزیع نسبت
- د څپرکي لنډیز او پوښتنې

**اتم څپرکی احتمالات** ........ ۲۶۱-۲۸۲

- پرېکړې او نښتې فضاگانې
- هم چانسه پیښې
- د نښتو یا پیوسته فضاگانو احتمال
- مشروط احتمال
- د حاصل ضرب اصل
- د ناخاپي پېښو استقلالیت
- د څپرکي لنډیز او پوښتنې

(c) ketabton.com: The Digital Library

# لومړی څپرکی

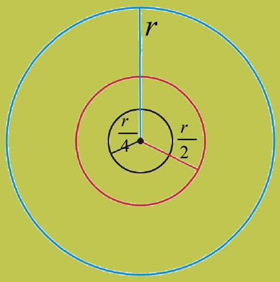
# لیمیټ

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

## د لیمیټ مفهوم

په یوه مستوي کې درې دایرې داسې رسم کړئ چې د O ټکي د دایرو متحد مرکز او شعاع گانې یې په ترتیب سره $r, \frac{r}{2}$ او $\frac{r}{4}$ وي، دې عملیې ته څو ځلې دوام ورکولای شئ؟



### فعالیت

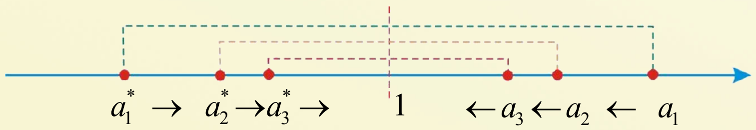
د $a_n = (1+\frac{1}{n})$ او $a_n^* = (1-\frac{1}{n})$ ترادفونه د $n \in IN$ لپاره په پام کې ونیسئ او لاندې فعالیت ترسره کړئ:

- د عددونو په محور باندې د $a_1$ او $a_1^*$ موقعیت(ځای) وښیئ.
- ویلای شئ چې د $a_2$ او $a_2^*$ قیمتونه د $[a_1^*, a_1]$ د فاصلې دننه یا د باندې پراته دي.
- د $a_1$، $a_1^*$ او $a_2$، $a_2^*$ منځنی ټکي یو له بل سره پرتله کړئ.
- پورته پړاوونو ته په پاملرنې سره ویلای شئ چې د $a_3$ او $a_3^*$ د ټکو موقعیت د عددونو پر محور په کوم ځای کې واقع دي.
- آیا ویلای شئ چې د $n$ د تر ټولو لویو قیمتونو په اخیستلو سره د $a_n$ او $a_n^*$ ردیفونه کومو قیمتونو ته نژدې کېږي؟

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله لیکلای شو:

**پایله**:لیدل کېږي چې د $a_n$ ترادف له ښي لوري څخه د 1 او د $a_n^*$ ترادف له کیڼ لوري څخه د 1 عدد ته د $n$ په زیاتېدو سره نژدې کېږي، یعنې:

ـ د $a_n$ ترادف کله چې $n$ بې نهایت ته تقرب وکړي، مساوي په(1) سره کېږي او همداشان د $a_n^*$ د ترادف $n-$ام حد که $n$ بې نهایت ته نژدې شي هم مساوي له (1) سره کېږي.




دې لپاره چې د لیمیټ مفهوم مو ښه څرگند کړی وي، په لومړي پړاو کې هغه په څو ترادفونو کې د گراف په پام کې نیولو سره تر څېړنې لاندې نیسو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

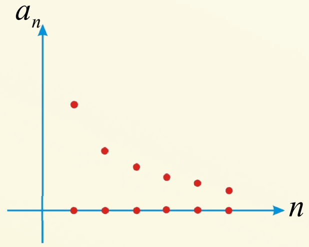
**مثال**: لاندي ورکړل شوي ردیفونه د $n$ د تر ټولو لویو قیمتونو لپاره کوم قیمت ته تقرب کوي یا نژدې کېږي، موضوع په ګرافیکي ډول تشریح کړئ، په داسې حال کې چې:

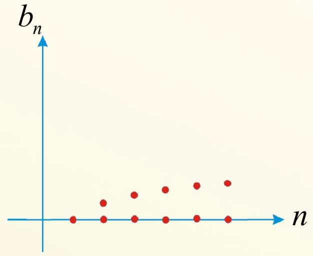
$$a_n = (\frac{2n+3}{n}) \ ... (i) \qquad b_n = (\frac{n-1}{n}) \ ... (ii) \qquad c_n = (-1)^n \frac{1}{n} \ ... (iii)$$

**حل**: پوهېږو چې د $n$ د بېلابېلو قیمتونو لپاره ګرافیکي شودنه په لاندې ډول ده.

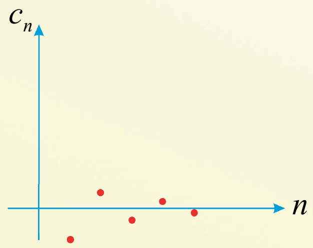
| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | $\to \infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | 5 | $\frac{7}{2}$ | 3 | $\frac{11}{4}$ | $\frac{13}{5}$ | $\frac{15}{6}$ | $\frac{17}{7}$ | $\to 2$ |

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $\to \infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $b_n$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{4}{5}$ | $\to 1$ |




| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $\to \infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_n$ | $-1$ | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{4}$ | $-\frac{1}{5}$ | $\to 0$ |



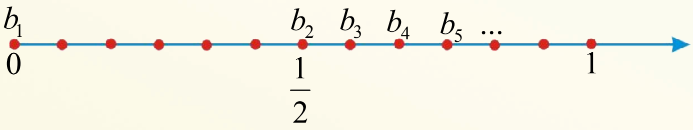

له پورتنیو ګرافونو څخه لیدل کېږي چې راکړل شوي ترادفونه د $n$ د قیمتونو په زیاتېدو سره د ترادفونو قیمت یوه ټاکلې عدد ته نژدې کېږي، لکه: د $a_n$ ترادف د 2 عدد ته د $b_n$ ترادف د 1 عدد ته او د $c_n$ ترادف صفر ته تقرب کوي چې n ته د ډېرو لویو قیمتونو په ورکولو سره موضوع په آسانۍ سره روښانه کېږي.

د ترادف د قیمتونو له جدول څخه د لیمیټ قیمت څرګندېږي، د لیمیټ په شته والي کې ردیف یوه ټاکلي عدد ته نژدې کېږي. دغه ټاکلي عدد ته لیمیټ (limit) وایي. چې په lim سره ښودل کېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ددې لپاره د $b_n = \dfrac{n-1}{n}$ ترادف په پام کې نیسو، لرو چې:

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $b_n$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{4}{5}$ | $\frac{5}{6}$ | $\frac{6}{7}$ | $\frac{7}{8}$ | $\frac{8}{9}$ | $\frac{9}{10}$ | $\frac{10}{11}$ | ... |




او یا که چېرې $I$ ....... $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ \ldots\ ,\frac{1}{n}$ ، $II$ ....... $2,\frac{3}{2},\frac{4}{3},\frac{5}{4},\ \ldots\ ,\frac{n+1}{n}$ او $(III)$ ....... $2,4,6,\ \ldots\ ,2n$ د عددونو ترادفونه په پام کې ونیسو، لیدل کېږي چې که $n$ د بې نهایت لوري ته نژدې شي، نو د $I$ ترادف صفر ته نژدې کېږي د $II$ ترادف د $(1)$ عدد ته نژدې کېږي د $III$ ترادف بې‌نهایت ($\infty$) ته نژدې کېږي.

**د متحول تقرب**: ویل کېږي چې د $x$ متحول د $a$ عدد ته تقرب کوي، په داسې حال کې چې $x$ په اختیاري ډول د $a$ عدد ته نژدې کېږي، یعنې د $x$ او $a$ ترمنځ تفاوت له هر کوچني عدد( $\delta > 0$ ) څخه کوچنی وي یا په لاندې ډول:

$$\forall\delta > 0 : |x-a| < \delta \quad \text{یا} \quad x \to a \quad \text{یا} \quad |x-a| \to 0$$

**له ښي لوري د متحول تقرب**: ( $x \to a^+$ ) که چېرې د $x$ د قیمتونو یو متناقص ترادف موجود وي په داسې حال کې چې په تدریجي ډول د $a$ اختیاري عدد ته نژدې شي.

$$x:\ a+0.1,\ a+0.01\ ,\ a+0.001\ ,\ a+0.0001\ ,\ \ldots\ \to\ a^+$$

**له کیڼ لوري د متحول تقرب**: ( $x \to a^-$ ) که چېرې د $x$ د قیمتونو یو متزاید ترادف موجود وي په داسې حال کې چې $x$ په تدریجي ډول د $a$ اختیاري عدد ته نژدې شي.

$$x:\ a-0.1,\ a-0.01\ ,\ a-0.001\ ,\ a-0.0001\ ,\ \ldots\ \to\ a^-$$

نو د $x$ د متحول تقرب د $a$ عدد ته معادل دی د $x$ د متحول تقرب له ښي لوري او د $x$ د متحول تقرب له چپ لوري، یعنې:

$$x \to a \quad \Leftrightarrow \quad (x \to a^+\ ,\ x \to a^-)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

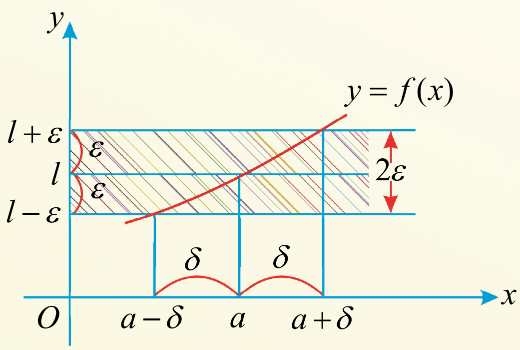
**لومړی بېلګه**: د $x$ متحول د 9 عدد ته نژدې کړئ یا په بل عبارت د $x \to 9$ مفهوم توضیح کړئ.

**حل**:

$$x: 9.1 \;,\; 9.01 \;,\; 9.001 \;,\; 9.0001 \;,\; \ldots \;\to 9^{+}$$
$$x: 8.9 \;,\; 8.99 \;,\; 8.999 \;,\; 8.9999 \;,\; \ldots \to 9^{-}$$

**تعریف**: که چېرې د $f(x)$ تابع په یوه غیر تړلي انټروال کې چې د $a$ عدد په هغه کې ګډون لري کېدای شي چې تابع په $a$ کې نه وي تعریف شوی. که چېرې د $x$ متحول د $a$ عدد ته نژدې، شي نو د $f(x)$ تابع د $l$ عدد ته نژدې کېږي، نو ویل کېږي چې د $f(x)$ تابع لېمیټ عبارت له $l$ څخه دی، کله چې د $x$ متحول د $a$ عدد ته تقرب وکړیږ، نو داسې یې لیکو:

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \quad \text{یا} \quad \begin{matrix} x \to a \\ f(x) \to l \end{matrix}$$




$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \; : |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \; |f(x) - l| < \varepsilon$$
$$\lim_{x\to a} f(x) = l \;\Leftrightarrow\; (|x-a| \to 0 \Rightarrow \; |f(x) - l| \to 0)$$

**پوښتنه**

د $f(x) = 2x$ تابع په ګرافیکي ډول وښیئ چې که $x$ د (3) عدد ته نژدې شي $f(x)$ د (6) عددته نژدې کېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

## د ښي او کيڼ خوا لېميټونه

مخامخ تصوير ته پاملرنه وکړئ وواياست چې مخامخ ونې ته له کومو خواوو څخه نژدې کېدای شو.

### فعاليت

په لاندې جدول کې د $x \neq 1$ , $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ ته ځينې قيمتونه ورکړل شوي.

| $x$ | 0.98 | 0.99 | 0.999 | ? | 1.001 | 1.01 | 1.02 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1.98 | 1.99 | 1.999 | ? | 2.001 | 2.01 | 2.02 |

$\longrightarrow \qquad \longleftarrow$

- د تابع ګراف رسم کړئ.
- که $x$ د (1) عدد ته نژدې شي، نو $f(x)$ کوم عدد ته نژدې کېږي.

له پورتني فعاليت څخه لاندې پايله ليکلای شو:

**د ښي خوا لېميټ:** د $f(x)$ تابع د $a$ په عدد کې د ښي لوري $l_1$ لېميټ لري که چېرې د هر $\varepsilon > 0$ لپاره يو کوچنی عدد د $\delta > 0$ موجود وي داسې چې که: $x \in (a, a+\delta) \Rightarrow f(x) \in (l_1 - \varepsilon, l_1 + \varepsilon)$ يا

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = l_1$$

**د کيڼ خوا لېميټ:** د $f(x)$ تابع د $a$ په عدد کې د کيڼ لوري $l_2$ لېميټ لري. که چېرې د هر $\varepsilon > 0$ لپاره د $\delta > 0$ يو عدد پيدا شي داسې چې $x \in (a - \delta, a) \Rightarrow f(x) \in (l_2 - \varepsilon, l_2 + \varepsilon)$ يا

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = l_2$$

د $f(x)$ تابع هغه وخت چې $x \to a$ ته نژدې شي د $l$ لېميټ لري، يعني: $\lim_{x \to a} f(x) = l$ په دې شرط چې:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = l = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

**دویمه بېلګه**: و ښيئ چې $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=6$ سره دی.

**حل**: د ښي او کیڼې خوا لیمیتونه تر څېړنې لاندې نیسو:

| $x$ | 3.5 | 3.1 | 3.01 | 3.001 | ... | $3^+$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 6.5 | 6.1 | 6.01 | 6.001 | ... | 6 |

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-9}{x-3}=6$$

| $x$ | 2.5 | 2.9 | 2.99 | 2.999 | ... | $3^-$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 5.5 | 5.9 | 5.99 | 5.999 | ... | 6 |

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-9}{x-3}=6$$

لیدل کېږي چې د ښي خوا او کیڼې خوا لیمیتونه سره مساوي دي، نو $6=\dfrac{x^2-9}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}$ دی.

**دویمه طریقه**: د لیمیټ د تعریف په پام کې نیولو سره فرضوو چې د هر اختیاري کوچنې عدد $\varepsilon$ لپاره یو $\delta$ شتون لري داسې چې:

$$\forall\varepsilon>0\quad \exists\delta>0:\ |x-a|<\delta\ \Rightarrow\ |f(x)-l|<\varepsilon$$

$$|x-3|<\delta\ \Rightarrow\left|\frac{x^2-9}{x-3}-6\right|=\left|\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}-6\right|=|x+3-6|=|x-3|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow \varepsilon=\delta$$

له پورتنی اړیکې څخه دا معلومېږي چې $\varepsilon$ له $\delta$ سره اړیکه لري، که $\delta$ ته قیمت ورکړو $\varepsilon$ قیمت اخلي او که $\varepsilon$ ته قیمت ورکړو $\delta$ قیمت اخلي، بنا پر دې هغه تعریف چې د لیمیټ لپاره موجود دی سم دی او تابع لیمیټ لري، یعنې: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=6$

**پوښتنه**

وښيئ چې د $f(x)=\dfrac{|x-2|}{x-2}$ تابع کله چې $x\to 2$ لیمیټ نه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

## د لیمیټ خاصیتونه (Properties of Limit)

د مخامخ مساوات دلیمیټونو دواړه خواوې کله چې $x \to -1$ وکړي، سره مساوي دي او که نه؟

$$\lim_{x\to -1}(x^2 \pm x) = \lim_{x\to -1} x^2 \pm \lim_{x\to -1} x$$

ددې فعالیت د سرته رسولو لپاره لاندې پوښتنو ته ځوابونه پیدا کړئ:

- که $x$ د $2$ عدد ته نژدې شي، نو د $f(x) = x + 2$ تابع لیمیټ به څو وي؟
- که $x \to 3$ ته تقرب وکړي، نو د $g(x) = 2x$ تابع لیمیټ پیدا کړئ.
- $\lim_{x\to 2} f(x) \pm \lim_{x\to 2} g(x)$ پیدا کړئ.
- $\lim_{x\to 2} f(x) \cdot \lim_{x\to 2} g(x)$ پیدا کړئ.
- $\lim_{x\to 2} f(x) \div \lim_{x\to 2} g(x)$ پیدا کړئ.

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایلې لیکلای شو:

که $\lim_{x\to a} f(x) = A$ او $\lim_{x\to a} g(x) = B$ وي، نو:

1) $\lim_{x\to a} Kf(x) = K \lim_{x\to a} f(x) = KA$

2) $\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = A \pm B$

3) $\lim_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) = A \cdot B$

4) $\lim_{x\to a}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \dfrac{A}{B}$ , $\lim_{x\to a} g(x) = B \neq 0$

5) $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{A}$, $\lim_{x\to a} f(x) = A \geq 0$

له پورتنیو خواصو څخه درې خاصیتونه ثبوتوو او پاتې یې د زده‌کوونکو کورنۍ دنده ده.

**بې نهایت کوچنۍ تابع ګاڼې:** د $\varepsilon(x)$ تابع کله چې $x \to a$ ته نژدې شي، بې نهایت کوچنۍ بللې کیږي، که چیرې $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$ وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

1- ددې لپاره چې $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ سره شي، لازم او کافي ده چې د $f(x)$ تابع د یوه ثابت عدد $b$ او یوې بې نهایت کوچني تابع $\varepsilon(x)$ کله چې $x\to a$ د مجموعې په شکل وښودل شي، یعنې:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=b+\varepsilon(x) \\ \lim\limits_{x\to a}\varepsilon(x)=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x)=b$$

2- که چېرې $\varepsilon(x)$ ، $x\to a$ ته نژدې شي، بې نهایت کوچنی تابع وي، خو صفر نه وي، نو $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{\varepsilon(x)}=\infty$

د بې نهایت کوچنی تابع ګانو مجموعه بیا هم یوه بې نهایت کوچنی تابع ده.

3- د بې نهایت کوچنیو تابع ګانو د ضرب حاصل بیا هم یوه بې نهایت کوچنی تابع ده.

4- که چېرې $\varepsilon(x)$ یوه بې نهایت کوچنی تابع او $u(x)$ داسې یوه تابع وي چې لېمیټ یې صفر نه وي، نو د $v(x)=\dfrac{\varepsilon(x)}{u(x)}$ تابع یوه بې نهایت کوچنی تابع ده.

**مثال:**

I) د $\varepsilon(x)=x^2-9$ تابع کله چې $x\to 3$ ، یوه بې نهایت کوچنی تابع ده ځکه چې:

$$\lim_{x\to 3}(x^2-9)=0$$

II) $\varepsilon(x)=\dfrac{1}{2x}$ تابع کله چې $x\to\infty$ ته نژدې شي بې نهایت کوچنی تابع ده:

$$\lim_{x\to\infty}\varepsilon(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x}=0$$

**پوښتنې**: د تېرو خاصیتونو په مرسته لاندې سوالونه حل کړئ.

$$1)\ \lim_{x\to 2}(2x^2-1)=\lim_{x\to 2}2x^2-\lim_{x\to 2}1=2\lim_{x\to 2}x^2-\lim_{x\to 2}1=2\cdot 2^2-1=7$$

$$2)\ \lim_{x\to -3}(x-1)^2=\lim_{x\to -3}(x-1)\cdot\lim_{x\to -3}(x-1)=(-4)(-4)=16$$

$$3)\ \lim_{x\to 0}\frac{4x-3}{x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}4x-\lim\limits_{x\to 0}3}{\lim\limits_{x\to 0}x+\lim\limits_{x\to 0}1}=\frac{0-3}{0+1}=-3$$

د پورتنیو پوښتنو له حل څخه د لېمیټ یو خاصیت داسې بیان او ثبووو:

1. د څو تابع ګانو د مجموعې لېمیټ د نومورو هرې تابع د لېمیټونو له مجموعې سره مساوي دي، یعنې: که چېرې د $f(x_1), f(x_2)$ تابع ګانې وي، نو لرو چې:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x_1)+f(x_2)\right]=\lim_{x\to a}f(x_1)+\lim_{x\to a}f(x_2)$$

**ثبوت**:که $\lim\limits_{x\to a}f(x_2)=b_2$ , $\lim\limits_{x\to a}f(x_1)=b_1$ او $\varepsilon_1$ او $\varepsilon_2$ بې نهایت کوچنی تابع ګانې وي، نو:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x_1)\pm f(x_2)\right]=b_1\pm b_2$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x_1)=b_1+\varepsilon_1 \quad .....\ I \\ f(x_2)=b_2+\varepsilon_2 \quad .....\ II \end{array}\right\} \Rightarrow f(x_1)\pm f(x_2)=(b_1+\varepsilon_1)\pm(b_2+\varepsilon_2)=b_1\pm b_2+(\varepsilon_1\pm\varepsilon_2)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

خرنګه چې $(\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2)$ د بې نهايت کوچنيو تابع ګانو مجموعه او تفاضل ده او د بې نهايت کوچنيو تابع ګانو مجموعه او تفاضل بیاهم یوه بې نهايت کوچنی تابع ده، نو:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x_1)\pm f(x_2)\right]=b_1\pm b_2=\lim_{x\to a}f(x_1)\pm\lim_{x\to a}f(x_2)$$

**2. د دوو يا څو تابع ګانو د ضرب د حاصل لیمیټ د نومړو تابع ګانو د لیمیټونو د ضرب له حاصل سره مساوي دی:**

**ثبوت:**

$$\lim_{x\to a}\left[f(x_1)\cdot f(x_2)\right]=\lim_{x\to a}f(x_1)\cdot\lim_{x\to a}f(x_2)=b_1\cdot b_2$$

$$\left.\begin{aligned}f(x_1)&=b_1+\varepsilon_1\\ f(x_2)&=b_2+\varepsilon_2\end{aligned}\right\}\Rightarrow f(x_1)\cdot f(x_2)=(b_1+\varepsilon_1)(b_2+\varepsilon_2)$$

$$f(x_1)\cdot f(x_2)=b_1\cdot b_2+b_1\cdot\varepsilon_2+b_2\cdot\varepsilon_1+\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2$$

خرنګه چې $\varepsilon_1$ او $\varepsilon_2$ ډېر کوچني عددونه دي، نو د ضرب حاصل يې د $b_1$ او $b_2$ سره او همداشان په خپلو کې بې‌نهايت کوچنی کېږي، نو:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x_1)\cdot f(x_2)\right]=b_1\cdot b_2=\lim_{x\to a}f(x_1)\cdot\lim_{x\to a}f(x_2)$$

3. د دوو تابع ګانو د نسبت لیمیټ د هغو تابع ګانو د لیمیټونو له نسبت څخه عبارت دی، لکه په لاندې ډول:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}=\frac{b_1}{b_2}\quad,\quad g(x)=b_2\neq 0$$

**ثبوت:**

$$\left.\begin{aligned}f(x)&=b_1+\varepsilon_1\\ g(x)&=b_2+\varepsilon_2\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{b_1+\varepsilon_1}{b_2+\varepsilon_2}$$

د مساوات له دوارو خواوو څخه $\frac{b_1}{b_2}$ تفریق کوو:

$$\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{b_1}{b_2}=\frac{b_1+\varepsilon_1}{b_2+\varepsilon_2}-\frac{b_1}{b_2}=\frac{b_2(b_1+\varepsilon_1)-b_1(b_2+\varepsilon_2)}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}$$

$$=\frac{b_2b_1+b_2\varepsilon_1-b_1b_2-b_1\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}=\frac{b_2\varepsilon_1-b_1\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_1)}$$

$$\Rightarrow\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{b_2\varepsilon_1-b\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}+\frac{b_1}{b_2}=\frac{b_2\varepsilon_1-b_1\varepsilon_2+b_1b_2+b_1\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}$$

$$=\frac{b_2(b_1+\varepsilon_1)}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}=\frac{b_1+\varepsilon_1}{b_2+\varepsilon_2}\quad\Rightarrow\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{b_1+\varepsilon_1}{b_2+\varepsilon_2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

خرنګه چې $\varepsilon_1$ او $\varepsilon_2$ ډېر کوچني مثبت عددونه( $0<\varepsilon<1$ )دي، نو کله چې $x\to a$ وکړي صفر کېږي او په پایله کې په لاس راځي چې:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}=\frac{b_1}{b_2}$$

**د ساندویچ قضیه**: که چېرې د $f(x)$ , $g(x)$ او $h(x)$ تابع ګانې د هر $x$ لپاره په یوه غیر تړلي انټروال کې چې د $a$ عدد په کې شامل دی(ولو که $x\neq a$ ) او $f(x)\le g(x)\le h(x)$ شرط صدق وکړي په هغه صورت کې چې $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b=\lim\limits_{x\to a}h(x)$ وي، نو $\lim\limits_{x\to a}g(x)=b$ دی.

**مثال**: که د $u(x)$ تابع دغه خاصیت( $1-\frac{x^2}{4}\le u(x)\le 1+\frac{x^2}{2}$ ) ولري، نو $\lim\limits_{x\to a}u(x)$ په لاس راوړئ.

**حل**: لیدل کېږي چې $\lim\limits_{x\to 0}(1+\frac{x^2}{2})=1=\lim\limits_{x\to 0}(1-\frac{x^2}{4})$ دی، نو د ساندویچ د قضیې په پام کې نیولو سره لرو چې:

$$\lim_{x\to 0}u(x)=1$$

**قضیه**: که چېرې $f(x)$ او $g(x)$ داسې تابع ګانې وي چې $f(x)\le g(x)$ نو د لیمیټ د شتون په صورت کې یې لمیټ $\lim\limits_{x\to a}f(x)\le\lim\limits_{x\to a}g(x)$ سره دی.

**مثال**: د $f(x)=\dfrac{15x-4}{5x+6}$ او $g(x)=\dfrac{15x+4}{5x-6}$ تابع ګانې په پام کې نیسو په واضح ډول معلومېږي چې د $x>1$ لپاره لرو $f(x)<g(x)$ دی.

**حل**:

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{15x-4}{5x+6}=\frac{15}{5}=3$$

$$\lim_{x\to\infty}g(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{15x+4}{5x-6}=\frac{15}{5}=3$$

## پوښتني

لاندې لیمیټونه د امکان په صورت کې پیدا کړئ.

1) $\lim\limits_{x\to 0}6x^3-2x^2+5x+3$

2) $\lim\limits_{x\to -1}x^7-2x-5$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(9x+2)^2-4}{x}$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^2+7x}{(2x-5)^2-9}$

5) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x-2}$

6) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x}{x^2-4x+1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

## د نسبتي تابع ګانو لیمیټونه

آیا پوهیږئ چې مخامخ اړیکې په څه نامه یادیږي؟

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$$

$$\infty - \infty$$

$$0 \cdot \infty$$

- د $y = x^2 - 1$ تابع لیمیټ هغه وخت پیدا کړئ چې $x \to -2$ ته تقرب وکړي.
- د $y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ تابع لیمیټ هغه وخت پیدا کړئ چې $x \to 1$ ته تقرب وکړي.
- د $y = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$ تابع لیمیټ هغه وخت پیدا کړئ چې $x \to \infty$ ته تقرب وکړي.

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله لیکلای شو:

### پایله

- د ځینو تابع ګانو لیمیټ مستقیماً د قیمت په وضع کولو سره لاسته راځي.
- ځنې تابع ګانې د $\frac{0}{0}$ , $\frac{\infty}{\infty}$ , $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$ ... مبهم شکلونه لري چې د ابهام د له منځه وړلو څخه وروسته د تابع لیمیټ لاسته راځي چې په لاندې ډول یې تر څېړنې لاندې نیسو:

### I- د $\frac{0}{0}$ مبهم شکل:

- د $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 - 1}$ تابع قیمت د $x = -1$ په نقطه کې وڅېړئ.
- د $f(x)$ تابع لیمیټ کله چې $x \to 1$ وي د ابهام کومه بڼه لري.
- آیا د $f(x)$ تابع په داسې ډول ساده کولای شو چې د $x = 1$ لپاره یو معین قیمت ولري؟

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

که چېرې یوه تابع د $\frac{0}{0}$ په شکل مبهمه بڼه ولري، د لیمیټ د پیدا کولو لپاره یې لومړی تابع د تجزیې په مرسته ساده کوو د ابهام عامل (خبیثه فکتور) له منځه وړو او بیا یې د لیمیټ قیمت په لاس راوړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

**مثال**: لاندې لېمیټونه پیدا کړئ.

$$1)\ \lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}\quad ,\quad 2)\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x-2}\quad ,\quad 3)\ \lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}$$

**حل**: لومړی د لېمیټ بڼه ټاکو:

$$1)\ \lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}=\frac{(-2)^2-4}{-2+2}=\frac{0}{0}$$

څرنګه چې پاسنې لېمیټونه د $\frac{0}{0}$ بڼه لري، نو د تجزیې په مرسته یې وروسته له ساده کولو څخه د لېمیټ قیمت په لاندې ډول په لاس راوړو:

$$\Rightarrow \lim_{x\to -2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)}=\lim_{x\to -2}(x-2)=-2-2=-4$$

$$2)\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x-2}=\frac{2^2-12+8}{2-2}=\frac{0}{0}$$

**حل**: بیا هم لېمیټ د $\frac{0}{0}$ مبهم شکل لري:

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-4)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x-4)=2-4=-2$$

$$3)\ \lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}=\frac{0}{0}$$

**حل**: لیدل کېږي چې نوموړی لېمیټ بیا هم د $\frac{0}{0}$ بڼه لري، نو د لېمیټ د لاسته راوړلو لپاره د کسر صورت او مخرج د صورت په مزدوج کې ضربوو:

$$\Rightarrow \lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}\cdot\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+4}=\lim_{x\to 16}\frac{(x-16)}{(x-16)(\sqrt{x}+4)}$$

$$=\lim_{x\to 16}\frac{1}{\sqrt{x}+4}=\frac{1}{8}$$

## پوښتنې

$$1)\ \lim_{x\to 3}\frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}=?\qquad 2)\ \lim_{x\to 1}\frac{\frac{5}{2x-3}+5}{x^2-1}=?\qquad 3)\ \lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}=?$$

$$4)\ \lim_{x\to 2}\frac{\frac{2x}{x^2+1}-\frac{4}{5}}{x-2}=?\qquad 5)\ \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+3}-\frac{1}{3}}{x}=?$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

## II- د $\frac{\infty}{\infty}$ مبهم شکل

آیا د مخامخ تابع لیمیټ ټاکلی شئ؟

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-3x+8}{2x^2-2}$$

- د $f(x)=2x^4+x^3-4x-1$ تابع لیمیټ چې $x\to\infty$ وخېږئ.
- د $g(x)=x^3-2x-4$ تابع لیمیټ چې $x\to\infty$ وخېږئ.
- د $y=\frac{5}{x-2}$ تابع لیمیټ چې $x\to\infty$ وخېږئ.
- د $\frac{f(x)}{g(x)}$ تابع لیمیټ هغه وخت په لاس راوړئ چې $x\to 0$ وکړي.
- د $\frac{f(x)}{g(x)}$ تابع لیمیټ هغه وخت په لاس راوړئ چې $x\to\infty$ وکړي.

له پاسني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

**پایله**: هغه توابع چې د $\frac{\infty}{\infty}$ بڼه ولري د لیمیټ د پیدا کولو لپاره یې داسې کړنه کوو:

د تابع صورت او مخرج په هغه متحول چې تر ټولو لوی توان ولري ویشو، وروسته له ساده کولو څخه یې لیمیټ په لاس راځي.

**لومړی مثال**: $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{3x^2-2}$ پیدا کړئ.

**حل**: لومړی د لیمیټ بڼه ټاکو:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{3x^2-2}=\frac{\infty-1}{\infty-2}=\frac{\infty}{\infty}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

څرنګه چې پوښتنه د $\frac{\infty}{\infty}$ شکل لري، نو صورت او مخرج په $x^2$ باندې وېشو:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{3x^2-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2}-\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x^2}}{3-\frac{2}{x^2}}=\frac{1-\frac{1}{\infty}}{3-\frac{2}{\infty}}=\frac{1-0}{3-0}=\frac{1}{3}$$

**دويم مثال**: د $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2}{x-2}$ پيدا کړئ.

**حل**:
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2}{x-2}=\frac{\infty}{\infty}$$

څرنګه چې پوښتنه د $\frac{\infty}{\infty}$ شکل لري، نو صورت او مخرج د $x$ له ټولو په لوړ توان وېشو:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2}{x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2}{x^2}}{\frac{x}{x^2}-\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x^2}}{\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=\frac{1-\frac{2}{\infty}}{\frac{1}{\infty}-\frac{2}{\infty}}=\frac{1-0}{0}=\frac{1}{0}=\infty$$

**دريم مثال**: $\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x^2-2}$ پيدا کړئ.

**حل**:
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x^2-2}=\frac{\infty}{\infty}$$

څرنګه چې پوښتنه $\frac{\infty}{\infty}$ شکل لري، نو صورت او مخرج د $x$ له ټولو په لوړ توان وېشو:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x^2-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x^2}}=\frac{\frac{1}{\infty}-\frac{1}{\infty}}{1-\frac{2}{\infty}}=\frac{0}{1-0}=\frac{0}{1}=0$$

**يادونه**: هغه تابع ګانې چې د $\frac{\infty}{\infty}$ بڼه ولري، پرته له دې چې عمليه پرې سرته ورسوو کولای شو، په لاندې

ډول د هغوی لېميټ په لاس راوړو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $f(x)=\dfrac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+...+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+...+b_n}$ تابع په پام کې ونیسئ که چېرې ( $x\to\infty$ ) کړی وي، نو دلته درې حالتونه ممکن دي:

1- د $m=n$ لپاره د نوموړی کسر لېمیټ عبارت دی له $\dfrac{a_0}{b_0}$.

2- د $m<n$ لپاره د نوموړی کسر لېمیټ عبارت له صفر څخه دی.

3- د $m>n$ لپاره د نوموړی کسر لېمیټ عبارت له $\pm\infty$ څخه دی.

**خلورم مثال**: لاندې لېمیټونه پیدا کړئ.

$$1)\ \lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+6x^4-x^3+x-1}{-x^4+2x^2-3}\qquad 2)\ \lim_{x\to3}\frac{-8+6x^3-x^2+x}{5x^3-x^4+6x-1}\qquad 3)\ \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2}{x+1}$$

**حل**:

1- څرنګه چې $m=n$ دی، نو:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+6x^4-x^3+x-1}{-x^4+2x^2-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x^4}{-x^4}=-6$$

2- څرنګه چې $m<n$ دی، نو د نوموړي تابع لیمیټ صفر دی.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-8+6x^3-x^2+x}{5x^3-x^4+6x-1}=0$$

3- څرنګه چې $m>n$ دی، نو د نوموړي تابع لیمیټ مساوي له $\infty$ سره دی:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2}{x+1}=\infty$$

**یادونه**: زده‌کوونکي دې ورکړل شوي ځوابونه په کور کې د عملیې د سرته رسولو څخه وروسته په لاس راوړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

## پوښتني

لاندې لیمیټونه پیدا کړئ؟

1) $\lim_{x\to\infty} \frac{6}{x^2 - x}$

2) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^4 + x^2 + x + 6}{x^3 - 3x + 4}$

3) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^5 + x^2 - x + 9}{x^4 + x^2 - x + 5}$

4) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 + x^2 - x + 7}{x^3 - x + 5}$

5) $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - 2}{x + 1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

### III- د $(\infty-\infty)$ او $(0\cdot\infty)$ مبهم شکلونه

د مخامخ لېمیټونو قیمتونه پیدا کړئ.

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x^2-4}-\frac{x-1}{x^2-4}$$

$$\lim_{x\to 3}(x^2-9)\cdot\frac{2x^3-4}{x-3}$$

- د $a+1$ مزدوج ولیکئ.
- د $\sqrt{x}-1$ مزدوج ولیکئ.
- د $f(x)=\sqrt{x}-\sqrt{x+1}$ لېمیټ پیدا کړئ، کله چې $x\to\infty$ تقرب وکړي.
- د $f(x)=(2x-1)(x+1)$ تابع لېمیټ وټاکئ، کله چې $x\to\infty$ تقرب وکړي.

له پورتني فعالیت څخه پایله داسې بیانوو:

د هغو تابع ګانو چې د $(\infty-\infty)$ او $(0\cdot\infty)$ مبهم شکلونه ولري، د لېمیټ د پیدا کولو لپاره یې د کسرونو له جمع کولو، ضرب او مزدوج څخه ګټه اخلو او هغه داسې ساده کوو، تر څو چې د $\frac{0}{0}$ او یا $\frac{\infty}{\infty}$ بڼه غوره کړي، وروسته یې لېمیټ په لاس راوړو.

**مثال**: لاندې لېمیټونه پیدا کړئ.

$$1)\ \lim_{x\to 1}\left(\frac{9}{x-1}-\frac{8x+10}{x^2-1}\right)=?\qquad 2)\ \lim_{x\to 1}(x-1)\left(\frac{1}{x^2+2x-3}\right)=?$$

**حل** 1:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{9}{x-1}-\frac{8x+10}{x^2-1}\right)=\frac{9}{1-1}-\frac{8\cdot 1+10}{1^2-1}=\frac{9}{0}-\frac{18}{0}=\infty-\infty$$

څرنګه چې نوموړی لېمیټ د $(\infty-\infty)$ بڼه لري، نو لیکلای شو چې:

$$=\lim_{x\to 1}\frac{9x+9-8x-10}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{0}{0}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2) $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)(\frac{1}{x^2+2x-3})=?$

حل2:
$$\lim\limits_{x\to 1}(x-1)(\frac{1}{x^2+2x-3})=(1-1)(\frac{1}{1^2+2-3})=0\cdot\frac{1}{3-3}=0\cdot\frac{1}{0}=0\cdot\infty$$

ليدل کېږي چې نوموړی لېميټ د $(0\cdot\infty)$ مبهم شکل لري، نو:

$$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2+2x-3}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x+3)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x+3}=\frac{1}{4}$$

## پوښتنې

لاندې لېميټونه پيدا کړئ.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$

2) $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^2})$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^5-8x^3)$

4) $\lim\limits_{x\to 5}\left[(x^2-25)\frac{1}{x-5}\right]$

5) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})$

(c) ketabton.com: The Digital Library

## د $1^{\infty}, \infty^{0}, 0^{0}$ مبهم شکلونه

**د مخامخ لیمیټ مبهم شکل وټاکئ؟**

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}} = ?$$

- د $y = x^{x}$ تابع لیمیټ په هغه صورت کې پیدا کړئ چې $x \to 0$ وکړي.
- د $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ لیمیټ بڼه په هغه صورت کې وټاکئ چې $x \to \infty$ وکړي.
- د کومې عملیې په مرسته کولای شو چې د $0^{0}, \infty^{0}, 1^{\infty}$ مبهم شکلونو ابهام له منځه ویسو؟

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

که چیرې یوه تابع پورتني مبهم شکلونه ځانته غوره کړي، هغه د طبیعي لوګاریتم په مرسته د $0\cdot\infty$ شکل ته د اړولو وړ دي، یعني:
$$\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)} \Rightarrow \ln(\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}) = \lim_{x\to a}(\ln f(x)^{g(x)}) = \lim_{x\to a}[g(x)\ln f(x)]$$

**یادونه:**

I- که چیرې $n \to \infty$ وکړي د $a_n = (1+\frac{1}{n})^{n}$ ترادف $e = 2.71828182$ عدد ته تقرب کوي.

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n} = e$$

چې په لاندې جدول کې ښکاریږي:

| $n$ | $\frac{1}{n}$ | $1+\frac{1}{n}$ | $(1+\frac{1}{n})^{n}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 2 |
| 2 | 0.5 | 1.5 | 2.25 |
| 5 | 0.2 | 1.2 | 2.48832 |
| 10 | 0.1 | 1.1 | 2.59374246 |
| 100 | 0.01 | 1.01 | 2.704813829 |
| 1000 | 0.001 | 1.001 | 2.716923932 |
| 10000 | 0.0001 | 1.0001 | 2.718145926 |
| 100000 | 0.00001 | 1.00001 | 2.718268237 |
| 1000000 | 0.000001 | 1.000001 | 2.718280469 |
| 1000000000 | $10^{-9}$ | $1+10^{-9}$ | 2.718281828 |

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e = 2.718281828$ دی چې ... $e = 2.71$ عدد ته د Euler عدد وايي.

II- لاندې ليميتونه پيداكړئ:

1) $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$ 2) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{\alpha}{x})^{\beta x} = e^{\alpha\beta}$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{Ln(1+x)}{x} = 1$ 4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1$

**ثبوت:** پوهېږو چې څلور واړه پوښتنې د $1^\infty$ مبهم شکلونه لري.

$$1)\ x = \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{x},\ \alpha\to 0 \Rightarrow x\to\infty \Rightarrow \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$$

$$2)\ \lim_{x\to\infty}(1+\frac{\alpha}{x})^{\beta x} = e^{\alpha\beta}$$

$$u = \frac{\alpha}{x} \Rightarrow x = \frac{\alpha}{u},\ x\to\infty \Rightarrow u\to 0$$

$$\lim_{u\to 0}(1+u)^{\beta\frac{\alpha}{u}} = \lim_{u\to 0}\left[(1+u)^{\frac{1}{u}}\right]^{\alpha\beta}$$

$$x = \frac{1}{u} \to u = \frac{1}{x},\ u\to 0 \Rightarrow x\to\infty$$

$$\lim_{u\to 0}\left[(1+u)^{\frac{1}{u}}\right]^{\alpha\beta} = \lim_{x\to\infty}\left[(1+\frac{1}{x})^x\right]^{\alpha\beta} = e^{\alpha\beta}$$

$$3)\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\ln(1+x)\right] = \lim_{x\to 0}\left[\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]$$

$$\ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right],\ x = \frac{1}{u} \Rightarrow u = \frac{1}{x},\ x\to 0 \Rightarrow u\to\infty$$

$$\ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right] = \ln\left[\lim_{u\to\infty}(1+\frac{1}{u})^u\right] = \ln e = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$4)\ \ y=e^{x}-1 \quad \Rightarrow\ e^{x}=1+y \quad \Rightarrow\ x=\ln(1+y)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(1+y)}{y}}=\frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}}$$

$$=\frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\frac{1}{y}\ln(1+y)}=\frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\ln(1+y)^{\frac{1}{y}}}\ ,\ y=\frac{1}{x}\ \Rightarrow\ x=\frac{1}{y}\ ,\ \ y\to 0\ \Rightarrow x\to\infty$$

$$=\frac{1}{\ln\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}}=\frac{1}{\ln e}=\frac{1}{1}=1$$

**د $1^{\infty}$ مبهم شکل عمومي حالت: که چېرې د اکسپوننشیل تابع لیمیټ یعني** $\lim\limits_{x\to a}[u(x)]^{v(x)}$ د $1^{\infty}$ مبهم شکل ځانته غوره کړي په دې حالت کې $\alpha=u-1$ سره تعویضوو، په نتیجه کې:

$$\lim_{x\to a}u^{v}=\lim_{x\to a}[(1+u-1)]^{\frac{v}{u-1}u-1}=\lim_{x\to a}\left[(1+\alpha)^{\frac{v}{\alpha}\alpha}\right]=\lim_{x\to a}\left[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\lim\limits_{x\to a}(v\alpha)}$$

څرنګه چې $\alpha=u-1$ دی که چېرې $u\to 1$ **نو** $\alpha\to 0$ **ته نژدې کېږي په پایله کې :**

$$\lim_{x\to a}[u(x)]^{v(x)}=\left[\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\lim\limits_{x\to a}[v(u-1)]}=e^{\lim\limits_{x\to a}[v(u-1)]}=e^{P}$$

$$\lim_{x\to a}[u(x)]^{v(x)}=e^{P}\quad ,\quad P=\lim_{x\to a}[v(u-1)]$$

**لومړی مثال**: د $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^{x}$ لیمیټ قیمت په لاس راوړئ.

**حل**: لومړی د لیمیټ بڼه ټاکو معلومېږي چې لیمیټ د $1^{\infty}$ مبهم شکل لري، نو له فورمول څخه کار اخلو:

$$u=1+\frac{2}{x}\quad ,\quad v=x$$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^{x}=e^{P}\quad ,\quad P=\lim_{x\to\infty}\left[x(1+\frac{2}{x}-1)\right]=2$$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^{x}=e^{P}=e^{2}$$

**دویم مثال**: د $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{\frac{x-5}{2}}$ **قیمت محاسبه کړئ.**

**حل**:**لومړی د لیمیټ بڼه ټاکو** $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{\frac{x-5}{2}}=1^{\infty}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

**ځرنګه چې معلومېږي نوموړی لیمیټ د** $1^{\infty}$ مبهم شکل لري، نو له فورمول څخه کار اخلو:

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{\frac{x-5}{2}}=e^{P}$$

$$u=1+\frac{1}{x}\quad,\quad v=\frac{x-5}{2}$$

$$P=\lim_{x\to a}[v(u-1)]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x-5}{2}(1+\frac{1}{x}-1)\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x-5}{2}(\frac{1}{x})\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x-5}{2x}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{\frac{x-5}{2}}=e^{P}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

**دریم مثال**: $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=?$

**حل**: **د تېر په شان بیاهم لومړی د لیمیټ بڼه ټاکو،** $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=1^{\infty}$

**ځرنګه چې معلومېږي لیمیټ د** $1^{\infty}$ مبهم شکل لري د فورمول په مرسته یې محاسبه کوو:

$$u=\cos x\quad,\quad v=\frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=e^{P}$$

$$P=\lim_{x\to a}[v(u-1)]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}(\cos x-1)\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)(\cos x+1)}{x(\cos x+1)}$$

$$\frac{\cos^2 x+\cos x-\cos x-1}{x(\cos x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-\sin^2 x-\cos^2 x}{x(\cos x+1)}$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x+1}=-1\cdot\frac{0}{2}=0$$

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=e^{P}=e^{0}=1$$

## پوښتنې

لاندې لیمیټونه محاسبه کړئ.

1) $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x+2}$

2) $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln x}$

3) $\lim_{x\to\infty}(\frac{x+3}{x-1})^{x+2}$

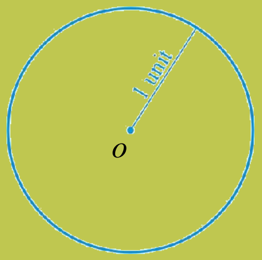
4) $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{n^2})^{n^2}$

5) $\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

## د مثلثاتي تابع ګانو لیمیټ

## *Trigonometric functions limits*




که د یوې دایرې شعاع یو واحد (1unit) وي، نوموړې دایرې ته څه ډول دایره وايي.

- دوضعیه کمیاتو په سیستم کې د $C(o,r)$ په مثلثاتي دایره کې د $\theta$ مرکزي زاویه رسم کړئ.
- د $C$ له بهرني ټکي څخه په دایره باندې د $ox$ پر محور د $\overline{CA}$ مماس او $\overline{MB}$ عمود رسم کړئ.
- د $C$ ټکی د دایرې له مرکز سره وصل کړئ.
- د مرکزي زاویې د مقابل قوس د اندازه کولو واحد په ګوته کړئ.

له پورتني فعالیت څخه قضیه داسې بیان او ثبوتوو:

**قضیه**: د یوې زاویې د ساین او د هغې زاویې د نسبت لیمیټ مساوي په (1) دي، کله چې زاویه صفر ته تقرب وکړي.

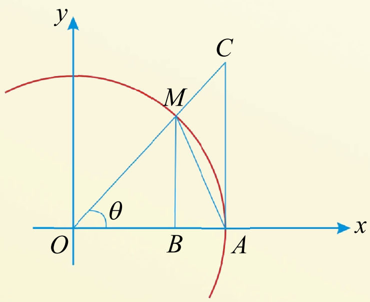
$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$$

**ثبوت**: په لاندې شکل کې د $MOA$ او $COA$ د مثلثونو او $OMA$ د قطاع مساحتونه په لاس راوړو:

$$\text{مثلث مساحت}\ \ MOA\ \ \text{د}=\frac{1}{2}\cdot\overline{OA}\cdot\overline{BM}=\frac{1}{2}\cdot r\cdot\overline{BM}=\frac{\overline{BM}}{2}\cdot r$$

$$\text{قطاع مساحت}\ \ O\overset{\frown}{A}M\ \ \text{د}=\frac{1}{2}\theta r^2$$

د $\theta$ د زاویې پراخوالی باید په رادیان لاسته راوړو.




$$\text{مساحت}\ \ C\overset{\Delta}{O}A\ \ \text{د}=\frac{1}{2}\cdot\overline{OA}\cdot\overline{AC}=\frac{1}{2}\cdot r\cdot\overline{AC}=\frac{\overline{AC}}{2}\cdot r$$

د $MOA$ او $COA$ مثلثونو مساحتونه د $OMA$ د قطاع له مساحت سره پرتله کوو:

$$\frac{1}{2}r\,\overline{BM}<\frac{1}{2}\theta r^2<\frac{\overline{AC}}{2}\cdot r$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د نامساواتو دواړه خواوې په $\frac{2}{r^2}$ کې ضربوو:

$$\frac{\overline{BM}}{r} < \theta < \frac{\overline{AC}}{r} \Rightarrow \sin\theta < \theta < \tan\theta \Rightarrow 1 < \frac{\theta}{\sin\theta} < \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\Rightarrow \cos\theta < \frac{\sin\theta}{\theta} < 1 \Rightarrow \lim_{\theta\to 0}\cos\theta \le \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} \le \lim_{\theta\to 0} 1$$

د ساندویچ د قضیې پر بنسټ معلومېږي چې $\lim_{\theta\to 0}\cos\theta = 1$ او همدارنګه $\lim_{\theta\to 0} 1 = 1$ دی، نو $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ دی.

پوهېږو چې د هرې زاویې ساین د $(1)$ او $(-1)$ د عددونو تر منځ تحول کوي:

$$-1 \le \sin\theta \le 1$$

$$-\frac{1}{\theta} \le \frac{\sin\theta}{\theta} \le \frac{1}{\theta}$$

$$-\lim_{\theta\to\infty}\frac{1}{\theta} \le \lim_{\theta\to\infty}\frac{\sin\theta}{\theta} \le \lim_{\theta\to\infty}\frac{1}{\theta}$$

د ساندویچ د قضیې پر اساس لیکلای شو چې:

$$\left.\begin{aligned} -\lim_{\theta\to\infty}\frac{1}{\theta} = 0 \\ \lim_{\theta\to\infty}\frac{1}{\theta} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{\theta\to\infty}\frac{\sin\theta}{\theta} = 0$$

په پایله کې ویلای شو چې د یوې زاویې ساین او د هغې زاویې د نسبت لیمیټ مساوي په صفر دی هغه وخت چې زاویه بې‌نهایت ته نژدې شي.

**لومړی مثال**: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$ پیدا کړئ.

**حل**: که $2x = \alpha$ نو $x = \frac{\alpha}{2}$ کېږي، څرنګه چې $x \to 0$ کړې دی، نو $\alpha \to 0$ کوي، نو لیکلای شو:

$$\frac{\sin\alpha}{\frac{\alpha}{2}} = 2\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

له پورته مساواتو څخه لاس ته راځي:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow 2\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 2\cdot 1 = 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

**دویم مثال**: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5\tan 2x}{7x}$ حل کړئ.

**حل**:

$$\frac{5\tan 2x}{7x}=\frac{5\frac{\sin 2x}{\cos 2x}}{7x}=\frac{5\sin 2x}{7x\cos 2x}=\frac{5\cdot 2x\frac{\sin 2x}{2x}}{7x\cos 2x}=\frac{10\frac{\sin 2x}{2x}}{7\cos 2x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{5\tan 2x}{7x}=\frac{10}{7}\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}}{\lim\limits_{x\to 0}\cos 2x}=\frac{10}{7}$$

**دریم مثال**: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x}$ حل کړئ.

**حل**: پوهېږو چې $1-\cos 2x=2\sin^2 x$ سره دی، نو:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\sin x=2\cdot 1\cdot 0=0$$

**څلورم مثال**: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\sin 5x}$ پیدا کړئ:

**حل**:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 3x}{\cos 3x}}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3x\frac{\sin 3x}{3x}}{\cos 3x}}{5x\frac{\sin 5x}{5x}}=\frac{3x}{5x}\frac{\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}}{\lim\limits_{x\to 0}\cos 3x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}}=\frac{3}{5}\frac{\frac{1}{1}}{1}=\frac{3}{5}$$

**پنځم مثال**: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 4x-\cos 6x}{x^2}$ په لاس راوړئ.

**حل**:پوهېږو چې $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ نو:

$$\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin\frac{4x+6x}{2}\sin\frac{4x-6x}{2}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 5x\sin(-x)}{x^2}=-2\lim_{x\to 0}\frac{5\sin 5x}{5x}\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که $y = 5x$ سره وي، او $x \to 0$ نو $y \to 0$ کوي، نو:

$$= 10\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 10\cdot 1\cdot 1 = 10$$

## پوښتني

لاندې لیمیتونه محاسبه کړئ.

1) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin(x+\frac{\pi}{6})}{x+\frac{\pi}{6}}$ 2) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x}$ 3) $\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{1+\tan^2 x}$

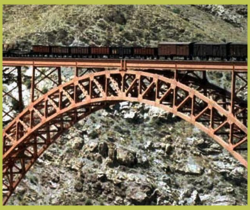
4) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x}{x}$ 5) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{\sin 3x}$ 6) $\lim_{x\to 0}\sin 5x\cos 3x$

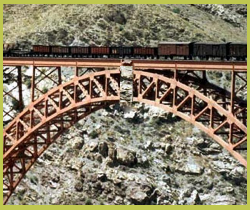
7) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan(2x-1)}{4x^2-1}$ 8) $\lim_{x\to 0}\sqrt{\cos 2x - \cos x + 1}$ 9) $\lim_{x\to 1}(\cos^2 x + \sin^2 x)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

## د تابع ګانو متمادیت

## *Continuity of functions*





شکلونو ته پام وکړئ.

لومړی او دویم پلونه یو له بل څخه څه توپیر لري، خپل نظر بیان کړئ.

د تابع ګانو ګرافونه مختلف شکلونه لري چې ځیني یې په یوه قلم پرته له دې چې د قلم څوکه له کاغذ څخه پورته شي رسمیږي، متصلې یا متمادي تابع ګانې بلل کیږي او ځیني یې په یوه قلم نه شي رسمیدلای یعنې د رسم په وخت کې باید د قلم څوکه یو ځل یا څو ځلې د کاغذ څخه پورته شي، ځکه په یوه برخه کې یې ګراف غوڅ وي، دغه ډول تابع ګانې په نوموړی ټکي کې غیر متصلې یا غیر متمادي تابع ګانې بلل کیږي.

### فعالیت

- د $f(x) = x^2 + 4x$ تابع ګراف رسم کړئ.
- د $f(x)$ د تابع لیمیټ د $x = 1$ په نقطه کې پیدا کړئ.
- د $f(x)$ د تابع قیمت د $x = 1$ په نقطه کې پیدا او وروسته دواړه اریکې سره پرتله کړئ.

له پاسني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

**پایله**: د $y = f(x)$ تابع د $x = a$ په ټکي کې متمادي بلله کیږي چې لاندې شرطونه په کې صدق وکړي.

1- د $f(x)$ تابع د $a$ په ټکي کې تعریف شوی وي.

2- راکړل شوي تابع د $a$ په ټکي کې لیمیټ ولري.

3- د $f(a)$ قیمت باید د $f(x)$ له لیمیټ سره مساوي وي: $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

**لومړی مثال**: وښيئ چې د $f(x)=x^2+2x-1$ تابع د $x_0=2$ په ټکي کې متمادي ده.

**حل**:ځرنګه چې د تابع د تعريف ساحه ټول حقيقي عددونه دي، نو د متماديت له شرطونو څخه ليکلای شو:

$$1)\ \ 2\in Dom\ f(x)=IR$$

$$\left.\begin{aligned}&2)\ \lim_{x\to 2}(x^2+2x-1)=4+4-1=7\\&3)\ f(2)=2^2+4-1=7\end{aligned}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 2}f(x)=f(2)=7$$

ځرنګه چې د متماديت درې واړه شرطونه په کې حقيقت لري، بناءً تابع متمادي ده.

**دويم مثال**: د $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$ د تابع متماديت د $x_0=-1$ په ټکي کې وڅېړئ.

**حل**: د $f(x)$ د تابع د تعريف ساحه عبارت ده، له: $IR\setminus\{-1\}$

او $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x-1}{x+1}=\dfrac{-3}{0}=\infty$ سره دی.

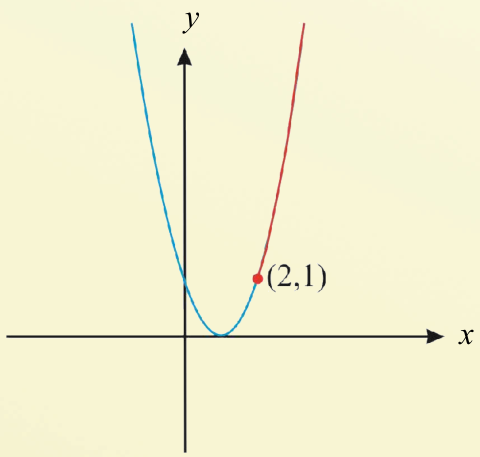
ځرنګه چې ليدل کېږي $-1$ د تابع د تعريف په ساحه کې شامل نه دی، بناءً نوموړی تابع د $-1$ په ټکي کې متمادي نه ده.

**دريم مثال**: د $f(x)=\begin{cases}x^2-2x+1\ ; & x<2\\ x^2-3 & ;\ x\geq 2\end{cases}$ د تابع متماديت د $x=2$ په ټکي کې وڅېړئ.

**حل**: لومړی د تابع د ښي او کيڼي خوا لېميټونه څېړو:

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to 2^+}f(x)=\lim_{x\to 2^+}(x^2-3)=1\\&\lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^-}(x^2-2x+1)=1\end{aligned}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 2^+}f(x)=\lim_{x\to 2^-}f(x)\ \ \Rightarrow \lim_{x\to 2}f(x)=f(2)$$

په پايله کې ويلای شو چې تابع په نوموړي ټکي کې متمادي ده، لکه چې په شکل کې ليدل کېږي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

**څلورم مثال**: که $f(x)=\begin{cases}2x+1 & ; x\geq 1\\ 1-x & ; x<1\end{cases}$ وي، نو د $x=1$ په ټکي کې د تابع متمادیت وڅېړئ.

**حل**:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1-x=0\\ f(1)=0\end{array}\right\}\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} 2x+1=3\\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} 1-x=0\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 1^+} f(x)\neq \lim_{x\to 1^-} f(x)$$

نو تابع په $x=1$ کې غیر متمادي ده.

**پایله**: که چېرې د $g(x)$ تابع د $x=a$ په ټکي کې $f(x)$ په $x=g(a)$ کې متمادي وي، نو $f(g(x))$ په $x=a$ کې هم متمادي ده، یعنې:

$$\lim_{x\to a} f(g(x))=f(\lim_{x\to a} g(x))=f(g(a))$$

1) $\lim\limits_{x\to a}(f(x))^{\alpha}=(\lim\limits_{x\to a} f(x))^{\alpha} \quad , \quad \alpha\in IR$

2) $\lim\limits_{x\to a} a^{f(x)}=a^{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$

3) $\lim\limits_{x\to a}\log_a f(x)=\log_a(\lim\limits_{x\to a} f(x))$

4) $\lim\limits_{x\to a}\sin f(x)=\sin(\lim\limits_{x\to a} f(x))$

**پنځم مثال**: که $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x+3}$ وي او $x\neq -3$ وي.

آیا د $f(x)$ تابع د $x=-3$ په ټکي کې متمادي ده؟

**حل**: څرنګه چې تابع د $x=-3$ په نقطه کې نه ده تعریف شوې یا په بل عبارت د $-3$ عدد د تابع د تعریف په ساحه کې نه دی شامل، نوله دې امله تابع د $x=-3$ په ټکي کې متمادي نه ده.

**غیر متمادیت**: که چېرې د $f(x)$ تابع په $x=a$ کې یو له لاندې درې شرطونو څخه و نه لري وایو چې $f$ په $a$ کې غیر متمادي ده او $a$ یې د انفصال ټکی دی. انفصال په درې ډوله دی.

**لومړی ډول**: د $f$ تابع د $a$ په ټکي کې د ښي او کیڼ لوري لیمیټونه ولري، خو مساوي نه وي.

**دویم ډول**: کم تر کمه یو له دوو لیمیټونو(د ښي او کیڼ لوري لیمیټونه) څخه موجود نه وي.

**دریم ډول**: که چېرې تابع د $a$ په ټکي کې لیمیټ ولري، خو $a$ د $f$ د تعریف په ساحه کې شامل نه وي.(یوازې یو خالي ټکی وي.)

(c) ketabton.com: The Digital Library

## پوښتنې

په ورکړ شویو ټکو کې د تابع متمادیت وڅیړئ.

a) $f(x) = x^2 + 5(x-2)^7 \quad ; \quad x = 3$

b) $f(x) = \dfrac{x+3}{(x^2+2x-5)} \quad ; \quad x = -1$

c) $h(x) = \dfrac{\sqrt{8-x^2}}{2x^2-5} \quad ; \quad x = -2$

d) $f(x) = \dfrac{1}{(x-3)^3} \quad ; \quad x = 3$

e) $f(x) = |x-3| \quad ; \quad x = 3$

f) $g(x) = \dfrac{|x|}{x} \quad ; \quad x = 0$

g) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3+x}{x} & ; \quad x \neq 0 \\ 3 & ; \quad x = 2 \end{cases}$

h) $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x+3} \quad ; \quad x = 2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

## د متمادي تابع ګانو خاصيتونه

د مخامخ مساواتو په اړه سوچ وکړئ چې حقيقت لري او که نه؟

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$$
$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$
$$(f \div g)(x) = f(x) \div g(x) \quad , \ g(x) \neq 0$$

- که $f(x) = x^2 - 1$ وي د تابع متماديت وڅېړئ.
- که $g(x) = x + 3$ وي د تابع متماديت وڅېړئ.
- د $f(x) + g(x)$ د تابع ګانو متماديت وڅېړئ.

د پورتني فعاليت پايله داسې بيانوو:

**پايله**: که د $f(x)$ او $g(x)$ تابع ګانې د $x = c$ په ټکي کې متمادي وي، نو له لاندې تابع ګانو څخه يې هره يوه په $x = c$ يا يوه انټروال کې متمادي ده.

1- د تابع ګانو جمع $f(x) + g(x)$

2- د تابع ګانو تفريق $f(x) - g(x)$

3- د تابع ګانو ضرب $f(x) \cdot g(x)$

4- د تابع ګانو تقسيم $\dfrac{f(x)}{g(x)} \ ; \ g(x) \neq 0$

**لومړۍ بېلګه**: **که** $f(x) = x^2 + 3$ **او** $g(x) = x^2 + 3x - 2$ **وي، نو:**

1- $f$ او $g$ د $x = 1$ په ټکي کې متمادي دي او که نه؟

2- وڅېړئ چې:

الف) $f(x) + g(x) = (f + g)(x)$ وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$ د $x=1$ په نقطه کې متمادي ده او که غیر متمادي.

**حل**:لومړی هره یوه تابع بېلابېله څېړو چې متمادي ده که نه؟

1) $Df(x)=IR$

2) $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x^2+3)=4$

3) $f(1)=(1^2+3)=4$

نو د $f$ **تابع** د $x=1$ په نقطه کې متمادي ده.

1) $D\,g(x)=IR$

2) $\lim\limits_{x\to 1}g(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x^2+3x-2)=1^2+3\cdot 1-2=2$

3) $g(1)=(1^2+3\cdot 1-2)=2$

په همدې شان د $g$ تابع د $x=1$ په ټکي کې هم متمادي ده.

2- اوس د تابع گانو د جمعې او ضرب د حاصل متمادیت څېړو:

**الف**)

$f(x)+g(x)=x^2+3+x^2+3x-2=2x^2+3x+1$

1) $D(f(x)+g(x))=IR$

2) $\lim\limits_{x\to 1}[f(x)+g(x)]=\lim\limits_{x\to 1}(2x^2+3x+1)=6$

3) $f(1)+g(1)=(1+3+1+3-2)=6$

$\lim\limits_{x\to 1}[f(x)+g(x)]=f(1)+g(1)=6$

$(f+g)(x)=x^2+3+x^2+3x-2=2x^2+3x+1$

1) $D[(f+g)(x)]=IR$

2) $\lim\limits_{x\to 1}[(f+g)(x)]=\lim\limits_{x\to 1}[2x^2+3x+1]=6$

3) $(f+g)(1)=(2x^2+3x+1)(1)=6$

$\lim\limits_{x\to 1}[(f+g)(x)]=(f+g)(1)=6$

په پایله کې د متمادي تابع گانو د جمعې حاصل د $x=1$ په نقطه کې متمادي دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب)

$$f(x)\cdot g(x)=(x^2+3)(x^2+3x-2)=x^4+3x^3+x^2+9x-6$$

1) $D(f\cdot g)(x)=IR$

2) $(f\cdot g)_{(1)}=1^4+3\cdot 1^3+1^2+9\cdot 1-6=8$

3) $\lim\limits_{x\to 1}(f\cdot g)(x)=8$

$\lim\limits_{x\to 1}(f\cdot g)(x)=(f\cdot g)(1)=8$

په پایله کې د متمادي تابع گانو د ضرب حاصل د $x=1$ په نقطه کې متمادي ده.

**دویمه بېلگه**: که $g(x)=3x-2$ او $f(x)=x+1$ وي، وڅېړئ چې آیا $f(x)\cdot g(x)$ د $x=2$ په نقطه کې متمادي ده؟

**حل**:

1) $Df(x)=IR$

2) $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(x+1)=3$

3) $f(2)=x+1=3$

$\lim\limits_{x\to 2}f(x)=f(2)=3$

1) $Dg(x)=IR$

2) $\lim\limits_{x\to 2}g(x)=3x-2=3\cdot 2-2=4$

3) $g(2)=3x-2=3\cdot 2-2=4$

$\lim\limits_{x\to 2}g(x)=g(2)=4$

$$f(x)\cdot g(x)=(x+1)(3x-2)=3x^2-2x+3x-2=3x^2+x-2$$

$D(f\cdot g)(x)=IR$

$\lim\limits_{x\to 2}[f(x)\cdot g(x)]=3(4)+2-2=12$

$(f\cdot g)(2)=3(4)+2-2=12$

$\lim\limits_{x\to 2}[f(x)\cdot g(x)]=(f\cdot g)(2)=12$

په پایله کې لاس ته راغلې چې $f(x)\cdot g(x)$ د $x=2$ په ټکي کې متمادي ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

## پوښتنې

1- وښيئ چې لاندې تابع ګانې په ورکړ شويو نقطو کې متمادي دي او که نه؟

1) $f(x) = x^3 - 2(x+1)^5 \quad ; \quad x = 2$

2) $g(x) = \dfrac{x^2+3}{(x^2-x+5)(x^2+2x)} \quad ; \quad x = -1$

3) $h(x) = \dfrac{x\sqrt{x}+1}{(x+2)^3} \quad ; \quad x = 4$

2- تشريح کړئ چې ولې د $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{2}}{x}$ تابع په $x = 0$ کې غيرمتمادي ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

## د ښېرکي مهم ټکي

**د متحول تقرب**: ویل کېږي چې د $x$ متحول د $a$ عدد ته تقرب کوي، په داسې حال کې چې $x$ په اختیاري ډول د $a$ عدد ته نژدې کېږي، یعنې د $x$ او $a$ ترمنځ تفاوت له هر کوچني عدد( $\delta > 0$ ) څخه کوچني دی یا په لاندې ډول:

$\forall \delta > 0: |x-a| < \delta$ یا $x \to a$ یا $|x-a| \to 0$

**له ښي لوري د متحول تقرب**: ( $x \to a^+$ ) که چېرې د $x$ د قیمتونو یو متناقص ترادف موجود وي، په داسې حال کې چې په تدریجي ډول د $a$ اختیاري عدد ته نژدې شي.

$x:\ a+0.1,\ a+0.01\ ,\ a+0.001\ ,\ a+0.0001\ ,\ \ldots \to a^+$

**له کیڼ لوري د متحول تقرب**: ( $x \to a^-$ ) که چېرې د $x$ د قیمتونو یو متزاید ترادف موجود وي، په داسې حال کې چې $x$ په تدریجي ډول د $a$ اختیاري عدد ته نژدې شي.

$x:\ a-0.1,\ a-0.01\ ,\ a-0.001\ ,\ a-0.0001\ ,\ \ldots \to a^-$

نو د $x$ د متحول تقرب د $a$ عدد ته معادل دی د $x$ د متحول تقرب له ښي لوري او د $x$ د متحول تقرب له چپ لوري؛ یعنې:

$$x \to a \iff (x \to a^+\ ,\ x \to a^-)$$

**تعریف**: که چېرې د $f(x)$ تابع په یوه غیر تړلي انټروال کې چې د $a$ عدد په هغې کې شامل وي کېدای شي چې تابع په $a$ کې نه وي تعریف شوی. که چېرې د $x$ متحول د $a$ عدد ته نژدې شي، نو د $f(x)$ تابع د $l$ عدد ته نژدې کېږي، نو ویل کېږي چې د $f(x)$ د تابع لیمیټ عبارت له $l$ څخه دی، کله چې د $x$ متحول د $a$ عدد ته تقرب وکړي، نو داسې یې لیکو: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ یا $\begin{matrix} x \to a \\ f(x) \to l \end{matrix}$

**د لیمیټ خانګړتیاوې**: که $f$ او $g$ دوې تابع ګانې وي، C,L او M حقیقي عددونه وي، داسې چې $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$ او $\lim\limits_{x\to c} g(x) = M$ ، نو لاندې رابطې لیکلای شو:

1) $\lim\limits_{x\to c}(f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to c} f(x) + \lim\limits_{x\to c} g(x) = L+M$

2) $\lim\limits_{x\to c}(f(x)-g(x)) = \lim\limits_{x\to c} f(x) - \lim\limits_{x\to c} g(x) = L-M$

3) $\lim\limits_{x\to c}(f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to c} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to c} g(x) = L\cdot M$

4) $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to c} f(x)}{\lim\limits_{x\to c} g(x)} = \dfrac{L}{M}\ ,\quad M \neq 0\ ,\quad g(x) \neq 0$

5) $\lim\limits_{x\to c} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim\limits_{x\to c} f(x)} = \sqrt{L}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

**بې نهايت کوچنی تابع ګانې**: د $\varepsilon(x)$ تابع کله چې $x \to a$ ته نژدې شي، بې نهايت کوچنی بللې کېږي، که چېرې $\lim\limits_{x\to a}\varepsilon(x)=0$ وي.

**د ساندویچ قضيه**: که چېرې د $f(x), g(x)$ او $h(x)$ تابع ګانې د هر $x$ لپاره په يوه غير تړلي انټروال کې چې د $a$ عدد په کې شامل دی(ولو که $x \neq a$) او $f(x) \le g(x) \le h(x)$ شرط صدق وکړي په هغه صورت کې چې $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b = \lim\limits_{x\to a} h(x)$ وي، نو $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$ دی.

- که چېرې يوه تابع د $\frac{0}{0}$ مبهمه بڼه ولري، د لېميټ د پيداکولو لپاره يې لومړی تابع د تجزيې په مرسته ساده کوو او بيا يې لېميټ په لاس راوړو.
- $f(x)=\dfrac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ \dots \ + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ \dots \ + b_n}$ د تابع د لېميټ د پيداکولو لپاره چې $x \to \infty$ وکړي، عبارت دی له:

1. د $m=n$ لپاره د نومورې کسر ليميټ عبارت دی له $\frac{a_0}{b_0}$
2. د $m<n$ لپاره د نومورې کسر ليميټ عبارت له صفر څخه دی.
3. د $m>n$ لپاره د نومورې کسر ليميټ عبارت دی له $\pm\infty$

- د هغو تابع ګانو چې $(\infty-\infty)$ او $(0\cdot\infty)$ بڼه ولري د لېميټ د پيداکولو لپاره يې د کسرونو د جمعې، ضرب او مزدوج څخه ګټه اخلو، تر څو د $\frac{0}{0}$ يا $\frac{\infty}{\infty}$ بڼه غوره کړي چې وروسته يې لېميټ په لاس راوړو.
- هغه تابع ګانې چې د $1^{\infty}$ مبهم شکلونه لري له دې فورمول څخه $\lim\limits_{x\to a}[u(x)]^{v(x)} \overset{1^{\infty}}{=} e^{P} \quad , \quad P=\lim\limits_{x\to a}[v(u-1)]$ يې د لېميټ د پيداکولو لپاره کار اخلو.
- لاندې رابطه کله چې $\theta \to 0$ وکړي همېشه سمه ده.

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$$

- د $y=f(x)$ تابع د $x=a$ په ټکی کې متمادي بلل کېږي، کله چې:

1. $a$ د $f(x)$ د تابع په دومين کې شامل وي.
2. راکړل شوی تابع د $a$ په نقطه کې لېميټ ولري.
3. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

## د لومړي څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتنو ته څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، سم ځواب يې په نښه کړې.

-1 $\lim_{x\to 0}\frac{3x-\sin x}{x}$

a) 2    b) -2    c) 1    d) 3

-2 $\lim_{x\to -2}\frac{x^2-x-6}{x^2+x-2}$

a) $-\frac{5}{3}$    b) $\frac{5}{3}$    c) 0    d) 1

-3 $\lim_{x\to 1.4}(2x+0.3)$

a) 1    b) 3    c) 0    d) هيڅ يو

-4 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\tan 2x}$

a) 1    b) 0    c) $\frac{3}{2}$    d) $\frac{2}{3}$

-5 $\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

a) $2+\sqrt{2}$    b) 2    c) $\sqrt{2}$    d) 4

-6 $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{1+\cos 2x}$

a) 1    b) $\frac{1}{2}$    c) $\frac{1}{4}$    d) 4

-7 لاندې لېميټونه پيدا کړئ.

1) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x+5}{2x^2+1}$

2) $\lim_{x\to -1}\sqrt{3+x}$

3) $\lim_{x\to +\infty}\frac{6}{x^2-7}$

4) $\lim_{x\to \infty}\frac{x^4+x^2+x+6}{x^3-3x+4}$

5) $\lim_{x\to \infty}\frac{3x^2-2}{x+1}$

6) $\lim_{x\to 2}\frac{x^3+5x-18}{x^2+3x-10}$

7) $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x-4}{x-\sqrt{3x-2}}$

8) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x-10}$

9) $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}$

10) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x\cos x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

11) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x-10}{x^2-x-2}$

12) $\lim_{x\to -2}\left(\frac{x+3}{x+2}+\frac{2}{x^2+2x}\right)$

13) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(a+x)+\sin(a-x)}{\tan(a+x)+\tan(a-x)}$

14) $\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2}{2x^2-1}-\frac{x^2}{2x+2}$

15) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\sin x-\tan x}{x^2\sin x}$

16) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x+\sin^2 x}{a x^2}$

17) $\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x\sin x+\sin^2 x}{x^2}$

18) $\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin 2x}{x+\sin 3x}$

19) $\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 3x\sin 2x}{x\tan 3x}$

20) $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x+2}}+\frac{1}{\sqrt{x+2}}$

21) $\lim_{u\to 0}\frac{\sin 3(\pi+u)}{\sin 8(\pi+u)}$

22) $\lim_{x\to 1}\frac{1-x^2}{\sin \pi x}$

23) $\lim_{x\to \infty}\frac{2x^2-x+3}{x^2-8x+5}$

24) $\lim_{x\to \infty}\frac{8x+4}{4x+\sqrt{x}}$

25) $\lim_{x\to 2}\frac{9x^2-x+5}{\sqrt{9x^4+1}}$

26) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^2}\right)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

# دويم څپرکی

# مشتق

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مشتق لومړنی سوچ د پیردي فرماټ(P. Fermat) فرانسوي رياضي پوه په واسطه او دقيق مفهوم يې د مشهور رياضي پوه اساق نيوټن(Isaac Newton) اوګوتفريدويليم لايبنز(Gottfried Wilhelm Leibniz) الماني په واسطه منځ ته راغی او تکميل شوی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

## مشتقات

Derivatives

د $f(x)=x^2-1$ تابع په پام کې ونيسئ د مخامخ کسر ليميټ پيدا کړئ.

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=?$$

### د يوې منحني ميل

- که د يوه مستقيم خط دوه ټکي $A(x_1,y_1)$ او $B(x_2,y_2)$ معلوم وي، نو د دې مستقيم خط ميل له کومې رابطې څخه په لاس راځي.
- آيا د يوه مستقيم خط ميل ثابت او مساوي دی؟ که په يوه ځانګړې ټکي پورې اړه لري؟
- آيا د مستقيم خط ميل د هغې زاويې سره اړه لري چې مستقيم خط يې د $x$ د محور له مثبت لورې سره جوړوي؟
- آيا د مستقيم خط او منحني ميلونه يو شان پيدا کېږي؟

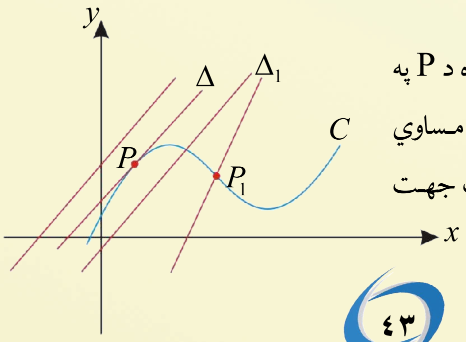
له پورتنيو پوښتنو څخه څرګندېږي چې د منحني ميل په اسانۍ سره نشو پيدا کولای، ځکه چې منحني خط په هر ټکي کې خپل مسير ته بدلون ورکوي او په مختلفو ټکو کې بېلابېل ميلونه لري، نو له دې کبله لومړی د يوه منحني خط ميل د هغه په يوه ټکي کې تعريفوو او بيا يې د محاسبې لپاره يو فورمول په لاس راوړو.

### فعاليت

- د وضعيه کمياتو په مستوي کې د c منحني خط رسم او د P او $P_1$ دوه ټکي پرې وټاکئ.
- د $P_1$ په ټکي کې د $\Delta_1$ قاطع او د p په ټکي کې د $\Delta$ مماس رسم کړئ.
- که د $P_1$ ټکی د C په منحني باندې داسې حرکت وکړي چې د p ټکي ته نږدې شي، په پايله کې د $\Delta_1$ مستقيم خط له $\Delta$ مستقيم خط سره څه اړيکه پيدا کوي؟

د پورتني فعاليت پايله داسې بيانوو:

د $\Delta$ د مستقيم خط ميل چې د $C$ له منحني سره د P په نقطه کې مماس دی د هغې زاويې له (tan) سره مساوي دی چې مستقيم خط يې د $x$ د محور له مثبت جهت سره جوړوي.

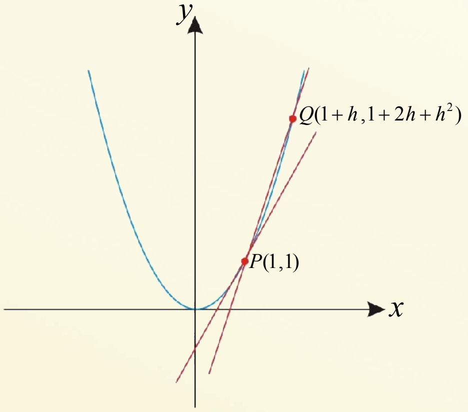


(c) ketabton.com: The Digital Library

**لومړی مثال**:د $y=f(x)=x^2$ له منحني سره د مماس میل د $P(1,1)$ په ټکي کې پیدا کړئ.

**حل**: څرنګه چې د منحني میل د مماس له میل سره د P په ټکې کې برابر دي، نو ددې مماس میل له هغه فورمول څخه چې دوې نقطې یې معلومې وي، نشو پیدا کولای، ځکه دلته یوازې د یوې نقطې مختصات ورکړل شوي دي. ولې کولای شو د دې مماس د میل تخمیني قیمت د هغه قاطع خط له میل څخه چې د P او Q له ټکو څخه تیریږي، پیدا کړو، په هغه صورت کې چې د Q ټکی د P ټکي ته نژدې شي د $PQ$ د مماس میل 2 ته تقرب کوي چې په لاندې جدول کې لیدل کیږي.

| $x$ | 2 | 1.5 | 1.1 | 1.01 | 1.001 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 4 | 2.25 | 1.21 | 1.0201 | 1.002001 |
| $m_{PQ}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ | 3 | 2.5 | 2.1 | 2.01 | 2.001 |




په عمومي ډول هغه لومړی مختصه چې د $P(1,1)$ ټکي ته نژدې ده په $1+h$ ښودلای شو چې h یو کوچنی مثبت یا منفي عدد دی، خو $h\neq 0$ دی نو لیکلای شو:

$$f(1+h)=(1+h)^2=1+2h+h^2$$

نو دا $(1+h\ ,\ \ 1+2h+h^2)$ ټکی د منحني پر مخ راکړل شوی پروت دی، نو په پایله کې هغه مستقیم خط چې له $P(1,1)$ او $Q(1+h,1+2h+h^2)$ له ټکو څخه تیریږي، میل یې عبارت دی له:

$$m_{PQ}\frac{(1+2h+h^2)-1}{(1+h)-1}=\frac{2h+h^2}{h}=2+h$$

که چیرې په شکل کې $h\to 0$ نو $Q\to P$ کوي، قاطع خط د $P(1,1)$ په نقطه کې مماس کیږي چې د همدې مماس میل ته د تابع مشتق وایي؛ یعنې $\overline{PQ}=\lim\limits_{h\to 0}(2+h)=2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لېميټ دا عمليه مور ته دا امکان په لاس راکوي چې د $y = x^2$ د تابع د منحني ميل په يوه اختياري ټکي $P(x, y)$ کې په لاس راوړو. که د $Q$ د ټکي اختياري مختصات $\left[x+h,(x+h)^2\right]$ وي او د $PQ$ ميل ته $m$ او د $P$ په ټکي کې د مماس ميل په $m_T$ سره وښيو لرو چې:

$$m = \frac{(x+h)^2 - x^2}{x+h-x} = \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h$$

$$m_{T=} \lim_{h \to 0}(2x + h) = 2x$$

نو په عمومي بڼه ليکلای شو، که چېرې $Q[x+h\ , f(x+h)],\ P[x, f(x)]$ د نوموړي منحني دوې اختياري نقطې وي، نو لاندې خارج قسمت چې د Newton د رابطې په نامه مشهور دی، ليکلای شو:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{x+h-x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

په حقيقت کې دا د هغه مستقيم خط ميل دی چې د $P$ او $Q$ له ټکو څخه تېرېږي.

او د منحني ميل د هغې په هر اختياري ټکي کې عبارت دی له:

$$m_T = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

**دويم مثال**: د $f(x) = x - x^2$ د منحني سره د مماس ميل د $P(2,0)$ په ټکي کې پيدا کړئ.

**حل**: د Newton خارج قسمت تشکيل او د $x = 2$ په ټکي کې د منحني ميل حسابوو:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = m_T = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(2+h) - (2+h)^2 - 2 + 2^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2 + h - 4 - 4h - h^2 - 2 + 4}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h - 4h - h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(1 - 4 - h)}{h} = \lim_{h \to 0}(-3 - h) = -3$$

## منځنی يا وسطي تغير

که يو جسم د يوه مستقيم خط پر مخ د حرکت په حال کې وي، طبيعي ده چې وهل شوی فاصله د زمان تابع ده يعني $S = f(t)$ د $t_1$ او $t_2$ دوو وختونو خارج قسمت $\dfrac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$ د جسم د وسطي سرعت په نامه يادېږي او سرعت د $t_0$ په وخت کې عبارت له هغه حد يا لېميټ څخه دی چې لحظوي سرعت بلل کېږي. $\lim_{t \to t_0} \dfrac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پورتنی رابطې لېمیټ د $t$ او $t_0$ په وخت کې داسې لیکو:

$$\lim_{t\to t_0}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}=\lim_{t\to t_0}\frac{S-S_0}{t-t_0}=\frac{\Delta S}{\Delta t}$$

په پایله کې ویلای شو چې د تابع او متحول د زیاتوالي خارج قسمت ته متوسط تغییر وایي، یعنې:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}$$

**مثال**: د $y=f(x)=x^2$ په تابع کې د $f$ متوسط تغیرات د $[2,5]$ په انټروال کې پیدا کړئ.

**حل**: څرنګه چې $x_1=2$ او $x_2=5$ دی، نو د تعریف په مرسته لیکلای شو:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{f(5)-f(2)}{5-2}=\frac{5^2-2^2}{5-2}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{25-4}{5-2}=\frac{21}{3}=7$$

## پوښتنې

1) د لاندې تابع ګانو د $x$ د متحول لپاره د $\Delta x$ او $\Delta y$ تزاید په پام کې نیولو سره $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ او میل یې په غوښتل شوو ټکو کې پیدا کړئ.

1) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=?$ , $f(x)=2x^2-4$ , $(0)$

2) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=?$ , $f(x)=2x-x^2$ , $(3)$

3) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=?$ , $f(x)=3x^2-5x+4$ , $(2,-1)$

2) د $f(t)=5t^3-3t+1$ د تابع متوسط تغییرات د $[2,4]$ په انټروال کې پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

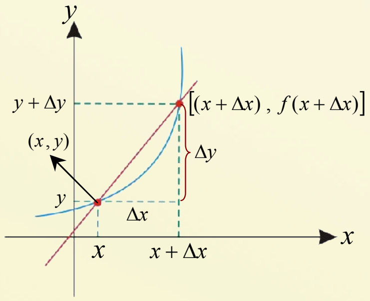
## د يوې تابع مشتق

مخامخ لېمیټ څه را ښـيي آيـا پـه بـل ډول يې لـيکلای شو؟

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

- که چېرې د $y=f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انټروال کې متمادي وي، که د $x$ متحول د $\Delta x$ په انـدازه زيـاتوالی پيدا کړئ آيا تابع تزايد کوي په دې حالت کې، د متحول او تابع د زياتوالي رابطه وليکئ.
- د تابع تزايد د متحول پر تزايد $(\frac{\Delta y}{\Delta x})$ داسې وليکئ چې په مساوات کې بدلون رانشي.
- که له دواړو خواوو څخه لېمیټ ونيول شي، په هغه صورت کې چې $\Delta x$ صفر ته تقرب وکړي، د دې حـد يـا لېمیټ د څه په نامه يادېږي؟

د پورتني فعاليت پايله داسې بيانوو:




$$y=f(x)$$
$$y+\Delta y=f(x+\Delta x)$$
$$\Delta y=f(x+\Delta x)-y$$
$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)\quad /\quad \div\Delta x$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

**تعريف**: د تابع او مستقل متحول د تزايد د نسبت لېمیټ کله چې د مستقل متحول تزايد صفر ته تقرب وکړي د تابع مشتق بلل کېږي، لکه: $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ او هغه په $f'(x)$ يا $y'$ ، $\frac{df}{dx}$ ، $\frac{dy}{dx}$ سره ښودل کېږي.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}=\frac{df(x)}{dx}=y'=f'(x)$$

**لومړی مثال**: که $f(x)=2x$ وي، د دې تابع مشتق پيدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

**حل**: د مشتق د تعریف څخه په ګټه اخیستنې سره لیکلای شو چې:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2(x+\Delta x)-2x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x+2\Delta x-2x}{\Delta x}$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x}{\Delta x}\Rightarrow f'(x)=2$$

**دویم مثال**: د $f(x)=x^3$ د تابع مشتق پیدا کړئ.

**حل**:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^3+3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(3x^2+3x(\Delta x)+(\Delta x)^2)}{\Delta x}=3x^2+3x(0)+0^2\quad\Rightarrow\quad f'(x)=3x^2$$

**دریم مثال**: د $x\geq 0$ , $f(x)=\sqrt{x}$ مشتق پیدا کړئ.

**حل**: مخکې له حل څخه $x\geq 0$ حالت په پام کې نیسو:

**الف**: که $x>0$ وي، نو د مشتق د تعریف په مرسته لیکو:

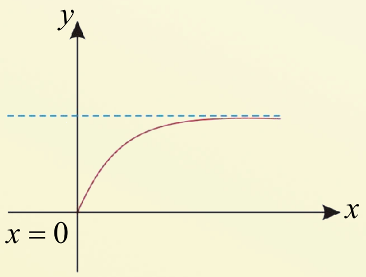
$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}$$

صورت او مخرج د صورت په مزدوج کې ضربوو:

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}\quad\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

**ب**: که $x=0$ شي نو $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$ موجود نه دی، نو د $y=\sqrt{x}$ تابع د $x=0$ په ټکي کې د اشتقاق وړ نه ده لکه چې په شکل کې لیدل کېږي، یعنې که $x$ ډېر لوی شي، نو د مماس میل صفر ته نژدې کېږي او د $x=0$ په ټکي کې د مماس میل ډېر لوییږي چې مماس په یوه عمود خط $(\frac{1}{2\sqrt{x}})$ بدلیږي.



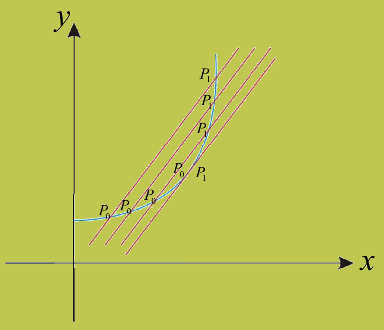

**پوښتنې**

دلاندې توابعو مشتق د تعریف په مرسته پیدا کړئ.

1) $f(x)=x-x^2$ 2) $f(x)=-2x^2$ 3) $f(x)=2x^2+x$

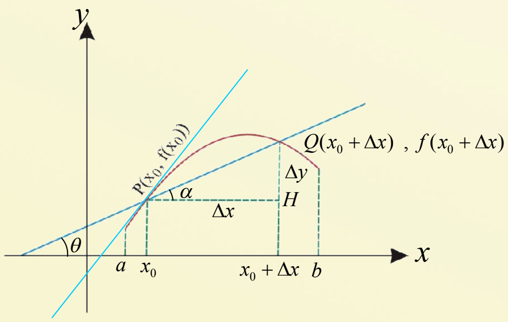
(c) ketabton.com: The Digital Library

## د مشتق هندسي تعبير




په مخامخ شکل کې څه وینئ د هغه پـه اړه مناقشه وکړئ.

- د وضعیه کمیاتو په مستوي کې د $C$ منحني یا د $f(x)$ تابع داسې چې د $[a,b]$ په انتـروال کـې متمـادي وي گراف یې رسم او د $P(x_0, f(x_0))$ او $Q(x_0+\Delta x\ ,\ f(x_0+\Delta x))$ ټکي د منحني پرمخ وټاکئ.
- د $\Delta$ مستقیم خط داسې رسم کړئ چې د منحني د $P$ او $Q$ له ټکو څخه تېر شي.
- آیا ویلای شئ چې د $\Delta$ مستقیم خط د $x$ د محور له مثبت جهت سره څه ډول زاویه جوړوي؟
- ووایئ چې د $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ یا $\dfrac{HQ}{HP}$ نسبت د څه په نامه یادیږي؟
- که د $Q$ ټکی د $P$ ټکي ته ډېر نژدې شي $(\Delta x \to 0)$، نو د $\Delta$ مستقیم خط په څه ډول کرښه بدلیږي په شکل کې یې وښیئ.
- د $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ لیمیټ کله چې $\Delta x \to 0$ وکړئ، په $P(x_0, f(x_0))$ ټکي کې وڅیړئ.




د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

د $f(x)$ منحني د تابع مـشتق، د $P(x_0, f(x_0))$ په ټکي کې د مماس له میل سره برابر دی، یعنې:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = \tan\alpha = \tan\theta = m_\Delta$$

**تعریف**: د مماس میل د منحني د تماس په ټکي کې د تابع له مشتق څخه په هغه ټکـي کـې عبـارت دی، یـا پـه بـل عبارت د هغې زاویې له ټانجنټ څخه عبارت دی چې د $\Delta$ مستقیم خط یـې د $x$ د محـور لـه مثبـت جهـت سـره جوړوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

**لومړی مثال**: د هغه مماس میل او معادله چې د $f(x)=2x^3-1$ په منحني د $A(1,1)$ په ټکي کې رسمېږي پیدا کړئ.

**حل**: پوهېږو چې $m=\tan\alpha=f'(x)$ دی، نو لیکلای شو چې:

$$f(x)=2x^3-1$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2(x+\Delta x)^3-1-(2x^3-1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2[x^3+3x^2\Delta x+3x\Delta x^2+(\Delta x)^3]}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x^3+6x^2\Delta x+6x(\Delta x)^2+2(\Delta x)^3-1-2x^3+1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x[6x^2+6x\Delta x+2(\Delta x)^2]}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}[6x^2+6x(\Delta x)+(\Delta x)^2]=6x^2$$

بناءً د مماس د میل قیمت د $A(1,1)$ په ټکي کې مساوي دی په: $m=f'(x)=f'(1)=6x^2=6\cdot 1^2=6$

نو د مماس معادله په لاندې ډول ده:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y-1=6(x-1)\Rightarrow\quad y=6x-5$$

**دویم مثال**: د $y=x^2+1$ تابع د مماس د میل قیمت په $x_0=2$ ټکي کې په لاس راوړئ.

**حل**:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x_0+\Delta x)^2+1-(x_0^2+1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x_0^2+2(\Delta x)x_0+(\Delta x)^2+1-x_0^2-1}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}(2x_0+(\Delta x))=2x_0$$

$$m=y'=2x_0=2\cdot 2$$

$$y'=m=4$$

**دریم مثال**: د $y=f(x)=x^2$ تابع ورکړل شوې ده، غواړو د $x=x_0$ په ټکي او په ځانګړي توګه د $x_0=2$ په ټکي کې د تابع مشتق پیدا کړئ:

$$x=x_0$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x_0+\Delta x)^2-x_0^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x_0^2+2x_0\Delta x+(\Delta x)^2-x_0^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2x_0\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta x(2x_0+\Delta x)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=2x_0+\Delta x$$

اوس د لیمیټ د لاس ته راوړلو له لارې لیکلای شو:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x_0+\Delta x)=2x_0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

خرنگه چې $x_0 = 2$ دی، نو $f'(2) = 2\cdot 2 = 4$ یعنې د $x_0 = 2$ په ټکي کې د $y = f(x) = x^2$ د تابع لومړی مشتق له 4 سره برابر دی. دا په دې معنا چې د مستقیم خط میل د $x_0 = 2$ په ټکي کې 4 دی.

**څلورم مثال**: د $f(x) = x^3$ تابع مشتق پیدا کړئ.

**حل**:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0+\Delta x)^3 - x_0{}^3}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_0{}^3 + 3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x_0{}^3}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x(3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x^2))}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x^2)$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2) = 3x_0^2$$

نو $f(x)$ د تابع مشتق د $x_0$ په ټکي کې برابر دی له: $f'(x_0) = 3x_0^2$

**پنځم مثال**: د $x_0$ په ټکي کې د $f(x) = \frac{1}{x}$ تابع مشتق پیداکړئ.

**حل**:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$f(x_0) = \frac{1}{x_0}$$

$$f(x_0) + \Delta y = \frac{1}{x_0 + \Delta x}$$

$$\Delta y = \frac{1}{x_0+\Delta x} - f(x_0)$$

$$\Delta y = \frac{1}{x_0+\Delta x} - \frac{1}{x_0}$$

$$\Delta y = \frac{x_0 - (x_0+\Delta x)}{x_0(x_0+\Delta x)}$$

د مساوات دواړه خواوې په $\Delta x$ وېشو:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\dfrac{x_0 - x_0 - \Delta x}{x_0(x_0+\Delta x)}}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\dfrac{-\Delta x}{x_0(x_0+\Delta x)}}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{\Delta x\cdot x_0(x_0+\Delta x)} \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{x_0(x_0+\Delta x)}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-1}{x_0(x_0+\Delta x)}$$

$$f'(x_0) = \frac{-1}{x_0(x_0+0)} = \frac{-1}{x_0^2}$$

نو $f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$ د $x_0$ په ټکي کې د $f(x)$ تابع مشتق دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

## پوښتنې

1. په لاندې پوښتنو کې د تابع ګانو مشتق پیدا کړئ.

1) $f(x) = 5x^2 - 2$ 2) $f(x) = \dfrac{2}{x}$

2. **په ورکړل شویو ټکو کې د لاندې تابع ګانو مشتق پیدا کړئ.**

1) $f(x) = 4x^2 \quad , \quad x_0 = \dfrac{1}{2}$ 2) $f(x) = 3x - 1 \quad , \quad x_0 = -1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

## د مشتق قوانين

آيا کولای شئ چې د مخامخ تابع مشتق پرته د تزايد له لارې په بله طريقه پيدا کړئ؟

$$f(x) = 2x^2$$

### 1- د يوه ثابت عدد مشتق:

د $y = C$ تابع( $C$ ثابت عدد) په پام کې ونيسئ.

- تابع ته د $\Delta x$ په اندازه تزايد ورکړئ، د تابع د تزايد په اړه څه فکر کوئ؟
- د تابع او متحول د تزايد نسبت تشکيل کړئ.
- د پورته مساواتو له دواړو خواوو لېميټ ونيسئ په هغه صورت کې چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

د پورتني فعاليت پايله داسې بيانوو:

د هرې ثابتې $f(x) = C$ تابع مشتق له صفر سره مساوي دی، ځکه چې د هرې ثابتې تابع ګراف يوه افقي کرښه ده چې ميل يې صفر دی.

**ثبوت**:

$$y = C$$
$$y + \Delta y = C$$
$$\Delta y = C - y$$
$$\Delta y = C - C$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{C - C}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x}$$
$$y' = 0$$

**مثال**: د $f(x) = \pi^4$ او $y = 100$ تابع ګانو مشتق پيدا کړئ.

**حل**: څرنګه چې $\pi^4$ او 100 ثابت عددونه دي، نو:

$$f(x) = C \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0$$
$$f(x) = \pi^4 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0$$
$$f(x) = 100 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

## 2- د يوې طاقت لرونکي تابع مشتق:

### فعالیت

د $y = x^n$ تابع چې $n \in IR$ او $n \geq 1$ وي، په پام کې ونيسئ.

- متحول ته د $\Delta x$ په اندازه تزايد ورکړئ، آيا تابع هم تزايد کوي که تزايد کوي په کومه اندازه، اړيکه يې وليکئ؟
- له پورته اړيکې څخه د $\Delta y$ قيمت پيدا کړئ، د متحول او تابع د تزايد نسبت تشکيل کړئ.
- د پورته مساوات له اطرافو څخه په هغه صورت کې ليميټ ونيسئ چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

د پورته فعاليت پايله داسې ثبوتوو:

که چېرې $f(x) = x^n$ راکړل شوی وي، نو $f'(x) = nx^{n-1}$ سره کېږي.

**ثبوت:**

$$y = x^n$$

$$y + \Delta y = (x+\Delta x)^n \quad \Rightarrow \quad \Delta y = (x+\Delta x)^n - y$$

$$\Delta y = (x+\Delta x)^n - x^n$$

$$\Delta y = (x+\Delta x - x)[(x+\Delta x)^{n-1} + (x+\Delta x)^{n-2}x + (x+\Delta x)^{n-3}x^2 + \ldots + x^{n-1}]$$

$$\Delta y = \Delta x[(x+\Delta x)^{n-1} + (x+\Delta x)^{n-2}x + (x+\Delta x)^{n-3}x^2 + \ldots + x^{n-1}]$$

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta x[(x+\Delta x)^{n-1} + (x+\Delta x)^{n-2}x + (x+\Delta x)^{n-3}x^2 + \ldots + x^{n-1}]}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left[(x+\Delta x)^{n-1} + (x+\Delta x)^{n-2}x + (x+\Delta x)^{n-3}x^2 + \ldots + x^{n-1}\right]$$

$$y' = \underbrace{x^{n-1} + x^{n-1} + x^{n-1} + \ldots + x^{n-1}}_{x^{n-1}\ \text{ځلې}\ n}$$

$$y' = nx^{n-1}$$

**لومړی مثال:** د $f(x) = x^5$ تابع مشتق د $x = \frac{1}{2}$ په ټکي کې وټاکئ.

**حل:**

$$f(x) = x^5 \;\Rightarrow f'(x) = 5x^{5-1} \;\Rightarrow\; f'(x) = 5x^4$$

$$f(\frac{1}{2}) = 5\cdot(\frac{1}{2})^4 = 5\cdot\frac{1}{16} = \frac{5}{16}$$

### پوښتني

د لاندې تابع گانو مشتق پيدا کړئ.

1) $f(x) = x^{-2}$ 2) $x(t) = gt^2$ 3) $t(x) = x^8$

4) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ 5) $f(x) = 10^{10}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

## 3- د حاصل جمع مشتق:

د $u$ او $v$ مشتق منوونکي تابع ګانې په پام کې ونیسئ.

- آیا د $y=u+v$ تابع د مشتق وړ ده؟
- د $y=u+v$ په تابع کې $u(x)$ ته د $\Delta u$ په اندازه او $v(x)$ ته د $\Delta v$ په اندازه تزاید ورکړئ، د $y$ د تزاید په اړه څه فکر کوئ؟ د هغې اندازه ولیکئ.
- لومړی د تابع تزاید پیدا او بیا د رابطې دواړه خواوې په $\Delta x$ وویشئ او وروسته یې لیمیټ په هغه صورت کې پیدا کړئ چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

د پورته فعالیت پایله داسې ثبوتوو:

**ثبوت**:

د یو حاصل جمع مشتق د حدونو د مشتقاتو د جمعې له حاصل سره مساوي ده:

$$y=u+v$$
$$y+\Delta y=u+\Delta u+v+\Delta v$$
$$\Delta y=u+\Delta u+v+\Delta v-y$$
$$\Delta y=u+\Delta u+v+\Delta v-u-v$$
$$\Delta y=\Delta u+\Delta v$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u+\Delta v}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

څرنګه چې $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=u'$ او $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=v'$ دی، نو : $y'=u'+v'$

## 4- د حاصل تفریق مشتق

که $y=u-v$ وي، نو $y'=u'-v'$ دی.

ثبوت یې د زده‌کوونکو کورنی دنده ده.

**لومړی مثال**: د $y=2x+1$ تابع مشتق پیدا کړئ.

**حل**: لیدل کېږي چې $u=2x$ او $v=1$ دی، نو:

$$u'=1\cdot 2x^{1-1}=2x^0$$
$$u'=2$$
$$v'=0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بناءً: $y'=u'+v' \Rightarrow y'=(2x)'+(1)' \Rightarrow y'=2+0 \Rightarrow y'=2$

**دویم مثال**: د $f(x)=4x^2-3x+5$ د تابع مشتق پیدا کړئ.

**حل**: په دې تابع کې $u=4x^2$ , $v=3x$ او $w=5$ دی چې $u'=8x$ , $v'=3$ او $w'=0$ کېږي، نو:

$$y'=u'+v'+w'$$
$$y'=(4x^2)'-(3x)'+(5)'$$
$$y'=8x-3$$

**دریم مثال**: د لاندې تابع گانو مشتقونه پیدا کړئ:

**حل**:

1) $y=12x-7$
$y'=(12x)'-(7)'$
$y'=12$

2) $f(x)=9x^2-12x+4$
$f'(x)=(9x^2)'-(12x)'+(4)'$
$f'(x)=18x-12$

3) $f(x)=6x^3-2x^2+6x-1$
$f'(x)=(6x^3)'-(2x^2)'+(6x)'-(1)'$
$f'(x)=18x^2-4x+6$

## 5- د حاصل ضرب مشتق:

که د $u$ او $v$ توابع مشتق منونکي وي، نو $u\cdot v$ هم مشتق منونکي ده، د $y=u\cdot v$ تابع په پام کې ونیسئ.

- **په پورتنی تابع کې $u$ ته د $\Delta u$ په اندازه، $v$ ته د $\Delta v$ په اندازه تزاید ورکړئ او د تابع تزاید پیدا کړئ.**
- د $\Delta y$ د تزاید له پیدا کولو وروسته د مساوات اطراف په $\Delta x$ وویشئ.
- د پورتنی رابطې له دواړو خواوو څخه په هغه صورت کې لیمیټ ونیسئ چې $\Delta x\to 0$ وکړي.

له پورتني فعالیت پایله داسې ثبوتوو:

**ثبوت**:

$$y=u\cdot v$$
$$y+\Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v) \Rightarrow \Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v)-y$$
$$\Delta y=u\cdot v+u\cdot\Delta v+v\cdot\Delta u+\Delta u\cdot\Delta v-u\cdot v$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{u\cdot\Delta v+v\cdot\Delta u+\Delta u\cdot\Delta v}{\Delta x}=v\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}+u\frac{\Delta v}{\Delta x}+\Delta u\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=v\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\Delta u\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}$$
$$y'=v\cdot u'+u\cdot v'+0\cdot v'$$
$$y'=u'v+v'u$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

**لومړی مثال**: د $y = x^3(x^2-3)$ د تابع مشتق پیدا کړئ؟

**حل**: پوهیږو چې $y = u \cdot v$ شکل لري چې په دې صورت کې $y' = uv' + vu'$ دی.

$$\left.\begin{array}{l} u = x^3 \Rightarrow u' = 3x^2 \\ v = x^2 - 3 \Rightarrow v' = 2x \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y' = u'v + v'u \\ y = x^3(x^2-3) \\ y' = 3x^2(x^2-3) + 2x(x^3) \\ y' = 3x^4 - 9x^2 + 2x^4 = 5x^4 - 9x^2 \end{array}$$

**دویم مثال**: د $y = (5x-1)^2$ د تابع مشتق پیدا کړئ.

**حل**: د $y$ تابع کولای شو د فکتورونو د ضرب په شکل داسې ولیکو:

$$y = (5x-1)^2 = (5x-1)(5x-1)$$

$$\left.\begin{array}{l} u = 5x-1 \Rightarrow u' = 5 \\ v = 5x-1 \Rightarrow v' = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y' = u'v + v'u \\ y' = 5(5x-1) + 5(5x-1) \\ y' = 25x - 5 + 25x - 5 = 50x - 10 \end{array}$$

## 6- د حاصل تقسیم مشتق:

که د $u$ او $v$ تابع ګانې مشتق منونکې وي، نو $\frac{u}{v}$ کله چې $v \neq 0$ وي، هم مشتق منوونکی ده، اوس د $y = \frac{u}{v}$ تابع په پام کې ونیسئ.

- $u$ او $v$ ته په ترتیب سره د $\Delta u$ او $\Delta v$ په اندازه تزاید ورکړئ او د $y$ تابع تزاید پیدا کړئ.
- د مساوات دواړه خواوې په $\Delta x$ وویشئ.
- د پورتني رابطې له اطراف څخه په هغه صورت کې چې $\Delta x \to 0$ وکړي، لیمیټ ونیسي.

د پورتني فعالیت پایله داسې ثبوتوو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

**ثبوت:**

$$y=\frac{u}{v} \Rightarrow y+\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v} \Rightarrow \Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-y$$

$$\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\frac{u}{v}=\frac{uv+v\cdot\Delta u-uv-u\cdot\Delta v}{v(v+\Delta v)}$$

$$\Delta y=\frac{v\cdot\Delta u-u\cdot\Delta v}{v(v+\Delta v)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{v\cdot\Delta u-u\cdot\Delta v}{v(v+\Delta v)}}{\Delta x}=\frac{v\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}\right)=\frac{v\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v\cdot\lim_{\Delta v\to 0}(v+\Delta v)}$$

$$y'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$$

**لومړی مثال:** د $y=\frac{2+3x}{1-2x}$ تابع مشتق پیدا کړئ.

**حل:** لیدل کیږي چې تابع د $\frac{u}{v}$ بڼه لري چې مشتق يې عبارت دی له:

$$\left.\begin{array}{l} u=2+3x \Rightarrow u'=3 \\ v=1-2x \Rightarrow v'=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y=\frac{u}{v} \Rightarrow y'=\frac{u'v-v'u}{v^2} \\ y'=\frac{3(1-2x)-[-2(2+3x)]}{(1-2x)^2} \\ =\frac{3-6x+4+6x}{(1-2x)^2}=\frac{7}{(1-2x)^2} \end{array}$$

**یادونه:** که چیرې وغواړو چې د یوې تابع مشتق په یوه ټاکلې نقطه لکه $x_0$ کې پیدا کړو د تابع په مشتق کې ټاکلی قیمت وضع کوو چې په پایله کې د تابع مشتق په هغه نقطه کې لاس راځی، لکه:

**دویم مثال:** د $f(y)=\frac{2y^2-3}{1-3y}$ د تابع مشتق د $y=0$ په ټکي کې پیدا کړئ:

**حل:** د تابع د حاصل تقسیم له مشتق څخه لرو:

$$\left.\begin{array}{l} u=2y^2-3 \Rightarrow u'=4y \\ v=1-3y \Rightarrow v'=-3 \end{array}\right\}$$

$$f'(y)=\frac{4y(1-3y)-[-3(2y^2-3)]}{(1-3y)^2}=\frac{4y-12y^2+6y^2-9}{(1-3y)^2}$$

$$f'(y)=\frac{-6y^2+4y-9}{(1-3y)^2}$$

$$f'(0)=\frac{-6(0)^2+4(0)-9}{(1-0)^2}$$

$$f'(0)=-9$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

**دريم مثال**: د $f(t)=\dfrac{-3}{2t-1}$ د تابع مشتق پيدا کړئ.

حل: پوهېږو چې تابع د $\dfrac{u}{v}$ بڼه لري، نو د $y=\dfrac{u}{v}$ له فورمول څخه په ګټه اخيستنې سره داسې عمل کوو:

$$\left.\begin{array}{ll} y=\dfrac{u}{v} & \Rightarrow\ y'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2} \\ u=-3 & \Rightarrow\ u'=0 \\ v=2t-1 & \Rightarrow\ v'=2 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(t)=\frac{0\cdot(2t-1)-2(-3)}{(2t-1)^2}=\frac{6}{(2t-1)^2}$$

## پوښتنې

د لاندې توابعو مشتق پيدا کړئ:

1) $f(x)=\dfrac{3}{5}x(x-2)$

2) $g(x)=(2x-3)(x-3)$

3) $f(x)=(2x-1)^2$

4) $f(t)=\dfrac{t^2}{1-2t}$

5) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2}$

6) $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$

7) $f(x)=3x^5-5x^2$

8) $f(x)=7x+3$

(c) ketabton.com: The Digital Library

## 7- د یوې جذرالمربع تابع مشتق:

د $y=\sqrt{x}$ تابع په پام کې ونیسي.

- د $y=\sqrt{x}$ تابع متحول ته د $\Delta x$ په اندازه تزاید ورکړئ د تابع تزاید پیدا کړئ.
- د لاس ته راغلي رابطې له دواړو خواوو څخه لیمیټ په هغه صورت کې ونیسي چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

د پورتني فعالیت پایله داسې ثبوتوو:

**ثبوت**:

$$y=\sqrt{x} \Rightarrow y+\Delta y=\sqrt{x+\Delta x}$$

$$\Delta y=\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}$$

د مساوات د ښي اړخ صورت او مخرج د صورت په مزدوج کې ضربوو:

$$\Delta y=\frac{(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{x+\Delta x-x}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{\Delta x}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}} \Rightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\boxed{y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

**لومړی مثال**: د $f(x)=\sqrt{x}(x^2-1)$ د تابع مشتق پیدا کړئ.

**حل**: لیدل کېږي چې تابع د $u\cdot v$ بڼه لري، نو:

$$\left.\begin{array}{l} u=\sqrt{x} \Rightarrow u'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \\ v=x^2-1 \Rightarrow v'=2x \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}(x^2-1)+2x\cdot\sqrt{x} \\ f'(x)=\dfrac{x^2-1}{2\sqrt{x}}+2x\sqrt{x}=\dfrac{x^2-1+4x(\sqrt{x})^2}{2\sqrt{x}} \\ \qquad =\dfrac{x^2-1+4x^2}{2\sqrt{x}}=\dfrac{5x^2-1}{2\sqrt{x}} \end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

## 8- د $\sqrt{u}$ تابع مشتق

- که چېرې $y$ د $u$ او $u$ د $x$ تابع او مشتق منوونکي وي د $y$ اړیکه $u$ ته او $u$، $x$ ته څه فکر کوئ.
- د $u$ متحول ته د $\Delta u$ په اندازه تزاید ورکړئ د $\Delta y$ د تزاید په اړه څه فکر کوئ.
- د مساواتو له دواړه خواوو څخه لیمیټ ونیسئ چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

$$y + \Delta y = \sqrt{u + \Delta u}$$

$$\Delta y = \sqrt{u + \Delta u} - \sqrt{u}$$

د مساوات د ښي اړخ صورت او مخرج د صورت په مزدوج کې ضربوو:

$$\Delta y = \frac{(\sqrt{u+\Delta u} - \sqrt{u})(\sqrt{u+\Delta u} + \sqrt{u})}{\sqrt{u+\Delta u} + \sqrt{u}}$$

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u - u}{\sqrt{u+\Delta u} + \sqrt{u}}$$

د مساوات دواړه خواوې په $\Delta x$ وېشو او بیا د مساوات له دواړو خواوو څخه لیمیټ نیسو چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\sqrt{u+\Delta u} + \sqrt{u}}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\sqrt{u+\Delta u} + \sqrt{u}} \cdot \frac{1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta u \to 0} \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x}}{\sqrt{u+\Delta u} + \sqrt{u}}$$

$$y' = \frac{u'}{\sqrt{u} + \sqrt{u}} = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

**دویم مثال:** د $h(x) = (x^2 + x)\sqrt{x}$ د تابع مشتق پیدا کړئ.

**حل:** د $y = u \cdot v$ او $y = \sqrt{x}$ د فورمولونو له مشتق څخه په ګټه اخیستنې سره لرو:

$$\left.\begin{array}{l} u = x^2 + x \quad \Rightarrow u' = 2x + 1 \\ v = \sqrt{x} \quad \Rightarrow v' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} h'(x) = (2x+1)\sqrt{x} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}(x^2 + x) \\ h'(x) = 2x\sqrt{x} + \sqrt{x} + \dfrac{x^2 + x}{2\sqrt{x}} \\ h'(x) = \dfrac{4x^2 + 2x + x^2 + x}{2\sqrt{x}} = \dfrac{5x^2 + 3x}{2\sqrt{x}} \end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

**دریم مثال**: د $f(x)=(\sqrt[3]{x}-1)(x+3)$ تابع د مشتق قیمت په $x=8$ ټکي کې په لاس راوړئ.

**حل**: د $y=u\cdot v$ او $y=\sqrt[n]{u}$ تابع له مشتق څخه په ګټه اخیستنې سره لیکلای شو:

$$\left.\begin{array}{l} u=\sqrt[3]{x}-1\Rightarrow u'=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \\ v=x+3\Rightarrow v'=1 \end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l} f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}(x+3)+1(\sqrt[3]{x}-1) \\ f'(x)=\dfrac{x+3}{3\sqrt[3]{x^2}}+(\sqrt[3]{x}-1) \end{array}$$

اوس د تابع مشتق د $x=8$ په نقطه کې پیدا کوو:

$$f'(8)=\frac{8+3}{3\sqrt[3]{8^2}}+\sqrt[3]{8}-1=\frac{11}{12}+1=\frac{23}{12}$$

## پوښتنې

1- د لاندې توابعو مشتقونه پیدا کړئ.

$$f(x)=\frac{1}{x+1}\quad,\quad y=3x^{-3}\quad,\quad f(x)=x^2+3$$

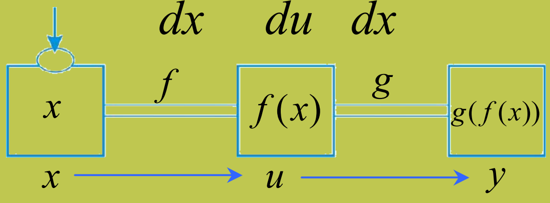
2- که $f(x)=x^2-3x$ او $g(x)=\sqrt{x}-1$ وي، د دې تابع ګانو د جمعې، ضرب او تقسیم مشتقونه پیدا کړئ. $[(f+g)',(f\cdot g)',(f\div g)'\quad g\neq 0]$

(c) ketabton.com: The Digital Library

## د مرکبو تابع ګانو مشتق(زنځیري قاعده) Chain Rule

د مخامخ اړیکې او شکل په اړه خپل نظر بیان کړئ.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$



که چېرې y د u او u د x تابع وي او د اشتقاق وړ وي.

- وواياست چې y د u او u له x سره څه اړیکه لري؟
- آیا د $\Delta y=\Delta y\cdot\frac{\Delta u}{\Delta u}$ مساوات حقیقت لري؟
- د پورتني مساوات دواړې خواوې په $\Delta x$ وويشئ.
- که د ښي اړخ د کسرونو د مخرجونو ځایونه بدل شي، په پورتني رابطه کې بدلون راځي؟
- د پورتني مساوات له اطراف څخه په هغه صورت کې لیمیټ ونیسي چې $\Delta x\to 0$ وکړي.

د پورتني فعالیت پایله داسې ثبوتوو:

د تابع، تابع مشتق ثبوت او پایله یې په لاندې ډول ده.

**ثبوت:**

$$\Delta y=\Delta y\cdot\frac{\Delta u}{\Delta u}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta u}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

خرنګه چې $\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=y'_{(u)}$ او $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=u'_{(x)}$ دی، نو: $y'_{(x)}=y'_{(u)}\cdot u'_{(x)}$

د دې زنځیري قاعدې پر بنسټ لاندې پایلې لیکلای شو:

1- که $y=u^n$ وي؛ نو $y'=nu^{n-1}\cdot u'$ کېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- که $y=\sqrt[n]{u}$ وي، نو $y'=\dfrac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$ کېږي.

**مثال**: د لاندې تابع گانو مشتق پیدا کړئ.

1) $y=(2x^2-1)^3$ 2) $y=\sqrt{1-x^2}$ 3) $y=(x^2-3)^2\cdot 2x^3$

4) $y=\sqrt[3]{x^2-2x^3}$ 5) $y=(x^2-2)^{-3}$

**حل**: د زنځیري قاعدې په مرسته لیکلای شو چې:

1) $y=\underbrace{(2x^2-1)^3}_{u}$

$u=2x^2-1\Rightarrow u'_x=4x$

$y=u^3\Rightarrow y'_u=3u^2$

$$\Rightarrow y'_{(x)}=y'_{(u)}\cdot u'_{(x)}$$

$$y'=3(2x^2-1)^2\cdot 4x=3(4x^4-4x^2+1)\cdot 4x$$

$$=(12x^4-12x^2+3)\cdot 4x=48x^5-48x^3+12x$$

$$=12x(4x^4-4x^2+1)\quad =12x(2x^2-1)^2$$

2) $y=\sqrt{1-x^2}$

$u=1-x^2\Rightarrow u'_{(x)}=-2x$

$y=\sqrt{u}\Rightarrow y'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

$$\Rightarrow y'=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

لیدل کېږي چې تابع د ضرب د حاصل بڼه لري، نو: $y=u\cdot v\Rightarrow y'=u'v+v'u$

3) $y=(x^2-3)^2\cdot 2x^3$

$u=(x^2-3)^2$

$u'_{(x)}=2(x^2-3)(2x)$

$v=2x^3\Rightarrow v'_{(x)}=6x^2$

$$y'=\left[(x^2-3)^2\right]'\cdot 2x^3+\left[2x^3\right]'(x^2-3)^2$$

$$y'=\left[2(x^2-3)\cdot 2x\right]2x^3+6x^2(x^2-3)^2$$

$$=8x^4(x^2-3)+6x^2(x^2-3)^2$$

$$=8x^6-24x^4+6x^2(x^4-6x^2+9)$$

$$=8x^6-24x^4+6x^6-36x^4+54x^2$$

$$=14x^6-60x^4+54x^2$$

4) $y=\sqrt[3]{x^2-2x^3}$

$u=x^2-2x^3$

$u'_{(x)}=2x-6x^2$

$$y=\sqrt[n]{u}\Rightarrow y'=\frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$$

$$y'=\frac{2x-6x^2}{3\sqrt[3]{(x^2-2x^3)^2}}$$

5) $y=(x^2-2)^{-3}$

$u=x^2-2$

$u'_{(x)}=2x$

$$y=u^n\Rightarrow y'=nu^{n-1}\cdot u'$$

$$y'=-3(x^2-2)^{-4}\cdot 2x=\frac{-6x}{(x^2-2)^4}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

**يادونه**:

I. که چېرې د $f$ تابع د $(x_0)$ په ټکي کې مشتق ولري، نو $f'(x_0)$ د هغه مماس ميل دی چې د $((x_0)\ ,\ f(x_0))$ په نقطه کې له منحني يا د تابع له ګراف سره رسمېږي.

**مثال**: د $f(x)=x^3$ د تابع ميل د $x_0=1$ په ټکي کې پيدا کړئ.

**حل**: څرنګه چې $x_0=1$ دی، نو: $f(x_0)=1$ سره کېږي او $P(1,1)$ چې د تماس ټکی دی، ميل يې عبارت دی، له:

$$f'(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x^2+x+1)=3 \quad\Rightarrow\quad f'(1)=3$$

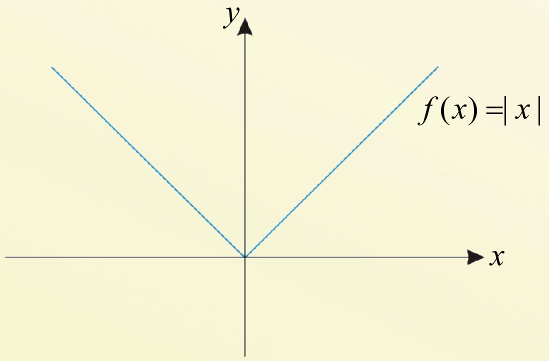
II. که د $f$ تابع د $x=x_0$ په ټکي کې د مشتق وړ وي، نو دا تابع د $x_0$ په ټکي کې متمادي ده، خو برعکس يې سم نه ده، يعني کېدای شي، يوه تابع په يوه ټکي کې متمادي وي، ولې په هغه ټکي کې د مشتق وړ نه وي.

**مثال**: د $f(x)=|x|$ د تابع مشتق د په $x=0$ ټکي کې پيدا کړئ.

**حل**: پوهېږو چې مشتق په حقيقت کې د نيوټن د نسبت د لېميټ محاسبه ده چې د ښي او کيڼ اړخ لېميټونه يې په صفر کې سره وڅېړل شي.

$$f'(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1$$

$$f'(0^-)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

ليدل کېږي چې $f'(0^-) \neq f'(0^+)$ دی، نو تابع په $x = 0$ کې د مشتق وړ نه ده، ولې تابع د صفر په ټکي کې متمادي ده.

## پوښتنې

د لاندې توابعو مشتق پیدا کړئ.

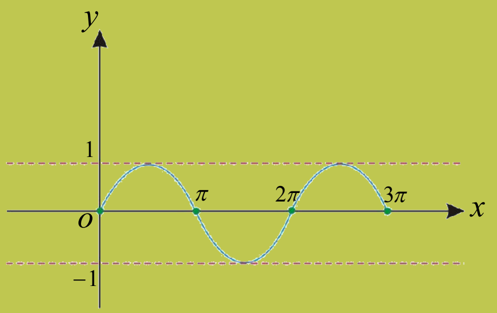
1) $y=(x^2+2)^2$ 2) $f(x)=(x^3-4x^2+1)^{-4}$ 3) $y=(1-2x^3)^4$

4) $h(z)=\sqrt{\frac{1-z}{1+z}}$ 5) $f(t)=\sqrt[3]{3t+1}$ 6) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2+x^2+x^3}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

## د مثلثاتي تابع ګانو مشتق

مخامخ ګراف څه ډول تابع را ښيي؟



- مثلثاتي دايره او راديان تعريف کړئ.
- آيا دا $-1 \le \sin x \le 1$ اړيکه حقيقت لري او که نه؟
- د $y = \sin x$ تابع په پام کې ونيسئ متحول ته د $\Delta x$ په اندازه بدلون ورکړئ او د تابع بدلون په پام کې ونيسئ.
- د $\sin(x + \Delta x) - \sin x$ مثلثاتي رابطې ته انکشاف ورکړئ؟
- د پورتنی رابطې له انکشاف څخه وروسته د $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ نسبت جوړ او د مساوات له دواړو خواوو څخه په هغه صورت کې ليميټ ونيسئ چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

له پورته فعاليت څخه پايله داسې ثبوتوو:

### 1- د $y = \sin x$ تابع مشتق:

**ثبوت:**

$$y = \sin x$$
$$y + \Delta y = \sin(x + \Delta x)$$
$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x$$
$$\Delta y = 2\cos\frac{x + \Delta x + x}{2}\cdot\sin\frac{x + \Delta x - x}{2} = 2\cos\frac{2x + \Delta x}{2}\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\cdot 2\cos(x + \frac{\Delta x}{2})\cdot\sin\frac{\Delta x}{2} = 2\cos(x + \frac{\Delta x}{2})\cdot\sin\frac{\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\cos(x + \frac{\Delta x}{2})\cdot\lim_{\Delta x \to 0}\sin\frac{\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \Rightarrow y'(x) = \cos x \cdot 1$$
$$y' = \cos x$$
$$\boxed{y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x}$$

که چېرې $f(x) = \sin u$ وي په داسې حال کې چې $u$ د $x$ تابع وي، نو ليکلای شو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(u)=\sin u \Rightarrow y'=u'\cos u$$

**لومړی مثال**: د $f(x)=\sin 4x$ تابع مشتق پیدا کړئ.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\sin 4x \\ u=4x \Rightarrow u'=4 \\ f(x)=\sin u \Rightarrow y'_u=\cos u \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f(x)=\sin u \quad \Rightarrow f'(x)=u'\cos u \\ f(x)=\sin 4x \Rightarrow f'(x)=4\cos 4x \end{array}$$

**دویم مثال**: د $f(x)=x^3\cdot\csc x$ تابع مشتق پیدا کړئ.

**حل**:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^3\cdot\csc x=x^3\cdot\dfrac{1}{\sin x} \\ u=x^3 \Rightarrow u'=3x^2 \\ v=\dfrac{1}{\sin x}\Rightarrow v'=\dfrac{-uv'}{v^2}=\dfrac{-\cos x}{\sin^2 x} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f(x)=x^3\cdot\csc x \\ f'(x)=3x^2\cdot\csc x+\dfrac{-\cos x}{\sin^2 x}\cdot x^3 \\ \quad =3x^2\csc x-x^3\cot x\cdot\csc x\cdot x \\ \quad =3x^2\csc x-x^3\cot x\cdot\csc x \end{array}$$

## پوښتنې

د لاندې توابعو مشتق په لاس راوړئ:

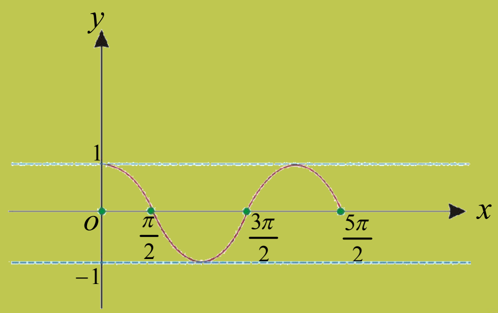
$a)\ y=\sin 5x$ $\qquad b)\ y=\dfrac{\sin x}{1+x}$

$c)\ y=\sqrt{1+\sin x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

## د $y=\cos x$ تابع مشتق

مخامخ گراف څه ډول تابع را ښيي؟



- د $y=f(x)=\cos x$ په تابع کې متحول ته د $\Delta x$ او تابع ته د $\Delta y$ په اندازه تزاید ورکړئ.
- د $\cos(x+\Delta x)-\cos x$ مثلثاتي رابطې ته انکشاف ورکړئ.
- د پورتنی انکشافي رابطې په مرسته د $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ نسبت تشکیل او له اطرافو څخه لیمیټ ونیسئ چې $\Delta x\to 0$ وکړي.

د پورتني فعالیت پایله داسې ثبوتوو:

### 2- د $y=\cos x$ تابع مشتق

**ثبوت:**

$$y=\cos x$$

$$y+\Delta y=\cos(x+\Delta x)$$

$$\Delta y=\cos(x+\Delta x)-\cos x$$

$$\Delta y=-2\sin\frac{x+\Delta x+x}{2}\cdot\sin\frac{x+\Delta x-x}{2}$$

$$\Delta y=-2\sin\frac{2x+\Delta x}{2}\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\lim_{\Delta x\to 0}\sin(x+\frac{\Delta x}{2})\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=-\sin x\cdot 1$$

$$\boxed{y=\cos x \quad\Rightarrow\quad y'=-\sin x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یا په لنډ ډول هغه داسې ثبوتوو:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$$

$$(\cos x)' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}\cdot(-2\sin x\cos x)$$

پوهېږو $\sqrt{1-\sin^2 x} = \cos x$ چې سره دی، نو:

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos x}(-2\sin x\cdot\cos x)$$

$$\boxed{(\cos x)' = -\sin x}$$

که چېرې $y = \cos u$ وي، په داسې حال کې چې u د x تابع وي، نو لیکلای شو:

$$\boxed{y = \cos u \Rightarrow y' = -u'\cdot\sin u}$$

**لومړی مثال**: د لاندې توابعو مشتق پیدا کړئ.

1) $f(x) = \sin 2x = 2\sin x\cos x$ 2) $f(x) = x - \sin x\cos x$

**حل**: پوهېږو چې $y = u\cdot v \Rightarrow y' = u'v + v'u$ دی، نو:

1) $f(x) = \sin 2x = 2\sin x\cos x$

$$f'(x) = (2\sin x)'\cos x + (\cos x)'\cdot 2\sin x = 2\cos^2 x - 2\sin^2 x$$

$$f'(x) = 2(\cos^2 x - \sin^2 x) \Rightarrow y' = 2\cos 2x$$

2) $f(x) = x - \sin x\cos x$

$$f'(x) = (x)' - (\sin x\cdot\cos x)' = (x)' - [(\sin x)'\cdot\cos x + (\cos x)'\cdot\sin x]$$

$$f'(x) = (x)' - [\cos x\cos x + (-\sin x\sin x)] = 1 - \cos 2x$$

## پوښتنې

د لاندې تابع گانو لومړی مشتق پیدا کړئ.

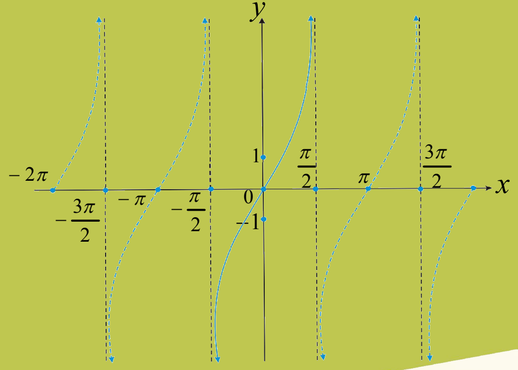
1) $f(x) = (\sec 2x + \tan 2x)^2$ 2) $f(x) = \sin^2 x$ 3) $f(x) = \sec x$

4) $f(x) = \csc x$ 5) $f(x) = \dfrac{5\sin^2 2x}{3\cos 5x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

### د $y = \tan x$ تابع مشتق

مخامخ گراف څه ډول تابع رانبيي.



**فعاليت**

- د $y = \tan x$ تابع د نسبت په شکل وليکئ.
- له پورتني نسبت څخه مشتق ونيسئ، هغه له څه سره مساوي کېږي.

له پورته فعاليت څخه پايله داسې ثبوتوو:

### 3- د $y = \tan x$ تابع مشتق:

**ثبوت:**

$$f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$f'(x) = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x - (-\sin x)(\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$y = \tan x$$

$$y'_{(x)} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

پاتې فورمولونه زده‌کوونکو ته پرېږدو.

**لومړی مثال:** د لاندې مثلثاتي تابع مشتق پيدا کړئ.

$$y = \tan^3 x$$

**حل:** پوهېږو چې که $y = u^n$ وي نو مشتق يې $y' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$ سره دی، نو:

$$\left.\begin{matrix} u = \tan x \\ u' = \sec^2 x \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} y = \tan^3 x \\ y' = 3\tan^2 x \sec^2 x \end{matrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

**دویم مثال**: د $y = \sec x \cdot \cot x$ تابع مشتق پیدا کړئ.

**حل**: ښرنګه چې تابع د $y = u \cdot v$ شکل لري، نو:

$$y = \sec x \cdot \cot x$$

$$u = \sec x \quad \Rightarrow \quad u' = \sec x \tan x$$

$$v = \cot x \quad \Rightarrow \quad v' = -\csc^2 x$$

د $u, v, u'$ او $v'$ قیمتونه د $y' = u'v + u \cdot v'$ په فورول کې وضع کوو:

$$y' = \sec x \tan x \cdot \cot x + \sec x(-\csc^2 x)$$

$$= \sec x \tan x \frac{1}{\tan x} - \csc^2 x \sec x$$

$$= \sec x - \csc^2 x \sec x$$

## پوښتنې

د لاندې تابع ګانو مشتق پیدا کړئ.

$a)\ \ y = \tan x \cot x$

$b)\ \ y = (x^2 + x - 1)\tan^2 x$

$c)\ \ y = \dfrac{1}{\tan x}$

$d)\ \ y = \tan x \sec x - \cot x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

## ضمني مشتقات

مخامخ مساوات په عبارت سره ولیکئ.

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}$$

- د $y = 2x^2 - 4$ تابع مشتق پیدا کړئ.
- د $y^2 + xy = 1$ تابع څو متحوله تابع ده؟ ګراف یې څه ډول شکل لري؟
- د پورتني تابع مشتق پیدا کولای شئ.

د یوې منحنۍ خط معادله د وضعیه کمیاتو په سیستم کې عبارت له $y = f(x)$ څخه ده، له دې ځایه $y - f(x) = 0$ کېږي او $y - f(x)$ یوه دوه متحوله تابع د $x$ او $y$ له جنسه ده، که تابع په پام کې ونیسو، نو د دې منحنۍ معادله د $F(x, y)$ شکل غوره کوي، د مثال په $F(x, y) = y - f(x)$ ډول: $F(x, y) = x^2 + y^2 - 25$ وي، نو د $F(x, y) = 0$ له معادلې څخه لیکلای شو چې $x^2 + y^2 - 25 = 0$ یا $x^2 + y^2 = 25$ چې د دې دوو بېلا بېلو توابعو معادلې $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$ دي. په عمومي ډول د $F(x, y) = 0$ معادله کېدای شي چې د څو تابع ګانو معادله د $y = f(x)$ په بڼه وي، پاملرنه وکړئ.

د $y = f(x)$ په تابع کې چې x او y یو له بل څخه جلا وي، نو مشتق یې په آسانۍ پیداکولای شو، ولې په ځینو رابطو کې y له x سره یو ځای بیان شوی دي لکه په $xy^2 - y + 1 = 0$ چې د مشتق په نیولو کې که د x له جنسه مشتق نیسو، نو y یو ثابت عدد فرضوو او که د y له جنسه مشتق نیسو x ثابت فرضوو، لکه:

$$xy^2 - y + 1 = 0$$

$$(xy^2)' - (y)' + (1)' = 0 \Rightarrow 1y^2 + x(2y'y) - y' = 0 \Rightarrow y^2 = -2xyy' + y' = y'(-2xy + 1)$$

$$y' = \frac{y^2}{-2xy + 1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په عمومي حالاتو کې که تابع غیر صریح وي په دې معنا چې مستقل متحول او د تابع متحول یکې ځرګند نه وي، نو ددې ډول تابع مشتق د ضمني مشتق په نامه یادیږي او د هغه مشتق په لاندې ډول محاسبه کوو.

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{\text{د تابع مشتق نظر } x \text{ ته} (y \text{ ثابت دی})}{\text{د تابع مشتق نظر } y \text{ ته} (x \text{ ثابت دی})}$$

**لومړی مثال**: د $y = \sin\frac{x}{y} + 1$ ضمني تابع مشتق د $(\pi, 1)$ په ټکي کې پیدا کړئ.

**حل**: د $y - \sin\frac{x}{y} - 1 = 0$ رابطې څخه $y'_{(x)} = \frac{-f'_{(x)}}{f'_{(y)}}$ پیدا کوو.

$$y - \sin\frac{x}{y} - 1 = 0$$

$$f'_{(x)} = y'_x - (\sin\frac{x}{y})'_x - (1)'_x$$

$$= 0 - \frac{1}{y}\cos\frac{x}{y} - 0 = \frac{-1}{y}\cos\frac{x}{y}$$

$$f'_{(y)} = y'_y - (\sin\frac{x}{y})'_y - (1)'_y$$

$$= 1 - \cos\frac{x}{y}(\frac{x}{y})'_y - 0 = 1 - \frac{-x}{y^2}\cdot\cos\frac{x}{y} = 1 + \frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}$$

$$\Rightarrow y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{\frac{-1}{y}\cos\frac{x}{y}}{1 + \frac{x}{y^2}\cdot\cos\frac{x}{y}}$$

اوس په $y'_{(x)}$ رابطه کې د x او y قیمتونه وضع کوو چې د $y'(\pi, 1)$ په لاس راځي.

$$y'_{(\pi,1)} = \frac{\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}}{1 + \frac{x}{y^2}\cdot\cos\frac{x}{y}} = \frac{\frac{1}{1}\cos\pi}{1 + \frac{\pi}{1}\cos\pi} = \frac{-1}{1 + \pi(-1)} = \frac{1}{\pi - 1}$$

**دویم مثال**: د $x^2y + 2y^3 = 3x + 2$ رابطې ضمني مشتق پیدا کړئ.

**حل**:

$$x^2y + 2y^3 = 3x + 2$$

$$x^2y + 2y^3 - 3x - 2 = 0$$

$$f'_{(x)} = 2xy + 0 - 3 - 0 = 2xy - 3$$

$$f'_{(y)} = x^2 + 6y^2 - 0 - 0 = x^2 + 6y^2$$

$$f'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{2xy - 3}{x^2 + 6y^2} = \frac{-2xy + 3}{x^2 + 6y^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

**دريم مثال**: د $y^6 - y - x^2 = 0$ تابع ضمني مشتق پيدا کړئ.

**حل**:

$$f'_{(x)} = -2x$$
$$f'_{(y)} = 6y^5 - 1$$
$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{-2x}{6y^5 - 1} = \frac{2x}{6y^5 - 1}$$

او يا په بله طريقه:

$$y^6 - y - x^2 = 0$$
$$6y^5 y' - y' - 2x = 0$$
$$(6y^5 - 1)y' = 2x$$
$$y' = \frac{2x}{6y^5 - 1}$$

## د تابع دويم ضمني مشتق

د ضمني رابطې د دويمې مرتبې د ضمني مشتق د پيدا کولو لپاره د فورمول په مرسته لومړی د ضمني اړيکې لومړی مشتق پيدا کوو او بيا له دې رابطې څخه مشتق نيسو.

**لومړی مثال**: د $x^2 - y^2 = 1$ رابطې دويمه ضمني مشتق $y''_{(x)}$ پيدا کړئ.

**حل**:

$$x^2 - y^2 = 1$$
$$x^2 - y^2 - 1 = 0$$
$$f'_{(x)} = (x^2)'_x - (y^2)'_x - (1)'_x = 2x - 0 - 0 = 2x$$
$$f'_{(y)} = (x^2)'_y - (y^2)'_y - (1)'_y = 0 - 2y - 0 = -2y$$
$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{2x}{-2y} = \frac{x}{y}$$

او يا په بله طريقه:

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{(x^2)'_x - (y^2)'_x - (1)'_x}{(x^2)'_y - (y^2)'_y - (1)'_y} = -\frac{2x - 0 - 0}{0 - 2y - 0} = \frac{x}{y} \Rightarrow y'_{(x)} = \frac{x}{y}$$

اوس د $y' = \frac{x}{y}$ له رابطې څخه دويم ضمني مشتق نيسو:

$$y''_{(x)} = \frac{(x)'y - y'x}{y^2} = \frac{y - y'x}{y^2} = \frac{y - \frac{x}{y} \cdot x}{y^2} = \frac{y^2 - x^2}{y^3} = \frac{-1}{y^3} \Rightarrow y''_{(x)} = \frac{-1}{y^3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

**دویم مثال**: د $x^2+xy+y^2-3=0$ په معادله کې د y مشتق نسبت x ته د $(1,1)$ په ټکي کې پیدا او پر منحني د مماس معادله ولیکي.

**حل**: څرنګه چې د $(1,1)$ ټکی په معادله کې صدق کوي، نو نوموړی ټکی د منحني پرمخ واقع دی، د $y'_{(x)}$ د پیداکولو لپاره په ورکړ شوي معادلې کې لیکلای شو:

$$f'_{(x)}=2x+y$$
$$f'_{(y)}=x+2y$$
$$y'_{(x)}=-\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}=-\frac{2x+y}{x+2y} \quad , \quad x+2y\neq 0$$
$$y'=-\frac{2x+y}{x+2y}=-\frac{2+1}{1+2}=-1$$
$$y-y_1=m(x-x_1) \Rightarrow y-1=-(x-1) \Rightarrow y=-x+2$$

او یا په بله طریقه هم کولای شو د تابع ضمني مشتق په لاس راوړو:

$$x^2+xy+y^2-3=0$$
$$2x+y+x\cdot y'+2yy'=0$$
$$2x+y+(x+2y)y'=0$$
$$(x+2y)y'+2x+y=0$$
$$(x+2y)y'=-2x-y$$
$$y'=\frac{-2x-y}{x+2y}$$

**دریم مثال**: د $x^2y^3=5y^3+x$ غیر صریح تابع ضمني مشتق پیدا کړئ.

**حل**:

$$x^2y^3-5y^3-x=0$$
$$f'_{(x)}=2xy^3-0-1=2xy^3-1$$
$$f'_{(y)}=3x^2y^2-15y^2-0$$
$$y'_{(x)}=-\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}=-\frac{2xy^3-1}{3x^2y^2-15y^2}=\frac{1-2xy^3}{3x^2y^2-15y^2}$$

## پوښتني

1- د $x\sin y+y\cos x=5$ غیر صریح تابع ضمني مشتق پیدا کړئ.

2- د $x^3+xy^2+y=3$ رابطې څخه ضمني مشتق ونیسئ.

3- د $x^2+y^2=4x+4y$ رابطې څخه ضمني مشتق ونیسئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

## لوړ مرتبه يي مشتقات

د مخامخ تابع درېم ځلې مشتق ونيسئ؟

د مخامخ تابع پنځه ځلې مشتق ونيسئ؟

$$f(x) = \sin x$$

$$f(x) = \cos x$$

### فعالیت

- د $y = 2x^4 - 3x^3 - 2x - 1$ تابع مشتق پیدا کړئ.
- د پورته تابع دويم مشتق پیدا کړئ.
- د پورتني مشتق د تابع درېم ځل مشتق ونيسئ.
- د پورتني تابع نور څو ځلې مشتق نيولى شو؟
- د پورتني تابع څووم مشتق له صفر سره مساوي دی؟

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

که د $y = f(x)$ مشتق منونکی وي، لومړی مرتبه مشتق یې په $y' = f'(x)$، دویمه مرتبه مشتق یې په $y'' = f''(x)$ دریمه مرتبه مشتق يې په $y''' = f'''(x)$ … په کلي ډول $n-$ ام مرتبه مشتق د $y = f(x)$ تابع په $y^{(n)} = f^{(n)}(x)$ علامی سره ښیو.

**لومړی مثال**: د $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ تابع درېم مشتق په لاس راوړئ.

**حل**:

$$y = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$$

$$y' = 3x^2 - 6x + 4$$

$$y'' = 6x - 6$$

$$y''' = 6$$

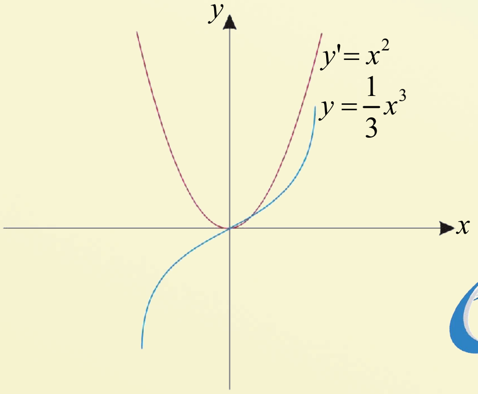
**دويم مثال**: د $y = \frac{1}{3}x^3$ تابع ګراف او د هغې د لومړی مرتبې مشتق تابع ګراف رسم کړئ.

**حل**:

$$y = \frac{1}{3}x^3$$

$$y' = \frac{3}{3}x^2 = x^2$$

$$y' = x^2$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

**دریم مثال**: که $y=\sin x+\cos x$ وي، د $(y^{(9)})^2+y^2$ قیمت پیداکړئ.

**حل**: لومړی د تابع نهمه مرتبه مشتق یا $(y^{(9)})$ په لاس راوړو:

$$y=\sin x+\cos x$$
$$y'_{(x)}=\cos x+(-\sin x)=\cos x-\sin x$$
$$y''_{(x)}=-\sin x-(\cos x)=-\sin x-\cos x$$
$$y'''_{(x)}=-\cos x-(-\sin x)=\sin x-\cos x$$
$$\vdots$$
$$f'^{(9)}_{(x)}=\cos x-\sin x$$
$$(y^{(9)})^2+y^2=(\cos x-\sin x)^2+(\sin x+\cos x)^2$$
$$=\cos^2 x-2\sin x\cos x+\sin^2 x+\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x$$
$$=2\sin^2 x+2\cos^2 x=2(\sin^2 x+\cos^2 x)=2$$

**څلورم مثال**: د $y=2x^6-3x^5-2x^3-3x^2-1$ د تابع پنځه خلي مشتق پیداکړئ.

$$y=2x^6-3x^5-2x^3-3x^2-1$$
$$y'=12x^5-15x^4-6x^2-6x$$
$$y''=60x^4-60x^3-12x-6$$
$$y'''=240x^3-180x^2-12$$
$$y^{(4)}=720x^2-360x$$
$$y^{(5)}=1440x-360$$

**یادونه**: که چېرې $n$ – ام درجه‌یي څو جمله‌یي تابع $c_n\neq 0$ $f_{(n)}(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\ ...+c_nx^n$ راکړې شوی وي $n$ – ام مشتق یې په لاندې ډول په لاس راځي:

$$f_{n(x)}=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\ ...\ +c_nx^n \qquad c_n\neq 0$$
$$f'_{(x)}=c_1+2c_2x+3c_3x^2+\ ...\ +nc_nx^{n-1}$$
$$f''_{(x)}=2c_2+6c_3x+\ ...\ +n(n-1)c_nx^{n-2}$$
$$f'''_{(x)}=6c_3+12c_4x+\ ...\ +n(n-1)(n-2)c_nx^{n-3}$$
$$f^{n}(x)=n(n-1)(n-2)\ ...\ c_n=n!c_n$$

په عمومي ډول که $k>n$ وی، نو: $f^k(x)=0$

## پوښتني

د لاندې تابعګانو تر هغې مشتق ونیسئ چې د مشتق تابع له صفر سره مساوي شي.

1) $y=4x^4-3x^3-2x$ 2) $y=(5x-2)^3$

3) $y=a+b+c^2-x-ax-bx-cx^3-c^3x$ 4) $y=\sin x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

## د خپرکي مهم ټکي

– که چېرې د $P(x, f(x))$ او $Q(x+h, f(x+h))$ ټکی د $f(x)$ تابع دوه اختیاري ټکي وي، نو لاندې اړیکه د Newton خارج قسمت په نامه یادېږي:

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{x+\Delta x-x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

د منحني د مماس میل په یوه اختیاري ټکي کې عبارت دی، له:

$$m_T=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

**د یوې تابع مشتق**: د تابع او متحول د تزاید، د نسبت لیمیټ کله چې $\Delta x \to 0$ وکړي، د مشتق په نامه یادېږي او په $f'(x)$ , $\frac{dy}{dx}$ سره ښودل کېږي.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)=y'$$

که چېرې د $f(x)$ تابع د $(x_0)$ په یوه ټکي کې د مشتق وړ وي، نو $f'(x)$ د مماس میل د منحني سره د $(x_0, f(x_0))$ په ټکي کې دی.

که د $f$ تابع د $x=x_0$ په ټکي کې د مشتق وړ وي، نو دا تابع په $x_0$ کې متمادي ده، خو ددې برعکس سمه نه ده، یعنې کېدای شي یوه تابع په یوه ټکي کې متمادي وي، ولې په هغه ټکي کې د مشتق وړ نه وي.

د $f(x)$ د تابع مشتق د $C$ پر منحني $P(x_0, f(x_0))$ په ټکي کې د مماس له میل سره برابر دی.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'=\tan\alpha=\tan\theta=m_\Delta$$

د تماس په ټکي کې له یوې منحني سره د مماس میل د هغې تابع د مشتق په نوم یادېږي.

که د یوې تابع مشتق ونیول شي، نو یوه تابع په لاس راځي چې دا د مشتق تابع بلل کېږي.

که د $f$ تابع د $(x_0-r, x_0+r)$ په فاصله کې( په شاوخوا $x_0=x$) کې تعریف شوې وي او د هغې لیمیټ موجود وي، په دې حالت کې کولای شو چې یو مماس خط د $f(x)$ د تابع په منحني د $x=x_0$ په ټکي کې رسم کړو، د دې مماس میل عبارت دی له: $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مشتق قوانین:

$$1)\ f(x)=C \quad \Rightarrow \quad f'(x)=0$$

$$2)\ f(x)=x^n \quad \Rightarrow \quad f'(x)=n\cdot x^{n-1}$$

$$3)\ f(x)=u\pm v \quad \Rightarrow f'(x)=u'\pm v'$$

$$4)\ f(x)=u\cdot v \quad \Rightarrow \quad f'(x)=u'v+v'u$$

$$5)\ f(x)=\frac{u}{v} \quad , \quad v\neq 0 \ \Rightarrow \ f'(x)=\frac{u'v-v'u}{v^2}$$

$$6)\ f(x)=\sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$7)\ f(x)=\sqrt{u} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$8)\ f(x)=\sqrt[n]{u} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\frac{u'}{n\cdot\sqrt[n]{u^{n-1}}}$$

د مرکبو توابعو مشتق: $y'_{(x)} = y'_{(u)}\cdot u'_{(x)}$

د مثلثاتي تابع‌گانو مشتق:

$$1)\ y=\sin x \quad \Rightarrow \quad y'=\cos x \qquad , \qquad y=\sin u \quad \Rightarrow \quad y'=u'\cos u$$

$$2)\ y=\cos x \quad \Rightarrow \quad y'=-\sin x \quad , \qquad y=\cos u \quad \Rightarrow \quad y'=-u'\sin u$$

که د $y=f(x)$ تابع مشتق منونکی وي، په بشپړ ډول $n$ -ام ځلي مشتق یې $y^{(n)}=f^{(n)}(x)$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

## د دويم څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتنو ته څلور ځوابونه درکړل شوي دي، سم ځواب په نښه کړئ:

1- $f(x)=x^2-x$ منحني ميل د $P(3,0)$ په ټکي کې عبارت دی له:

$a)\ 3$ $b)\ -3$ $c)\ 5$ $d)\ -5$

2- د $f(x)=2x^2$ په تابع کې د $f$ متوسط بدلون د $[3,4]$ په انټروال کې عبارت دی له:

$a)\ 18$ $b)\ 14$ $c)\ -14$ $d)\ 32$

3- د $y=2x^2-3x^{-1}$ تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ y'=4x^2+3$ $b)\ y'=4x+\frac{1}{2}x$ $c)\ y'=4x+\frac{3}{x^2}$ $d)\ y'=4x$

4- د $f(x)=\sqrt{x-1}$ تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ 0$ $b)\ \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$ $c)\ \frac{x-1}{2\sqrt{x}}$ $d)\ \frac{-1}{2\sqrt{x-1}}$

5- د $f(x)=2x^2+x$ تابع د $x=1$ په ټکي کې د مماس خط معادله عبارت ده له:

$a)\ y=5x-2$ $b)\ y=x-3$ $c)\ y=5$ $d)\ y=5x$

6- د $y=\frac{2x}{-x+4}$ تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ y'=-4x+8$ $b)\ y'=-2$ $c)\ y'=\frac{4x+8}{(-x+4)}$ $d)\ y'=\frac{8}{(-x+4)^2}$

7- د $y=(2-x^2)^3$ تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ y'=-6x^5+2x^3-24x$ $b)\ y'=3(2-x^2)^2$ $c)\ y'=3(-2x)^2$ $d)$ هيڅ يو

8- د $y=\sin x$ تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ y'=\sin x$ $b)\ y'=\cos x$ $c)\ y'=-\sin x$ $d)\ y'=-\cos x$

9- د $y=(1+x^4)^{\frac{-1}{5}}$ تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ y'=-\frac{4}{5}x^3(1+x^2)^{\frac{-6}{5}}$ $b)\ y'=-\frac{1}{5}(1+x^2)^{\frac{-6}{5}}$

$c)\ y'=-4x^3$ $d)$ هيڅ يو

10- د $y=\frac{\cos}{1-\cos x}$ تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ y'=\frac{\sin x}{(1-\cos x)^2}$ $b)\ y'=\frac{-\sin x}{(1-\cos x)}$ $c)\ y'=\frac{-\sin x}{(1-\cos x)^2}$ $d)$ هيڅ يو

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې پوښتنې حل کړئ.

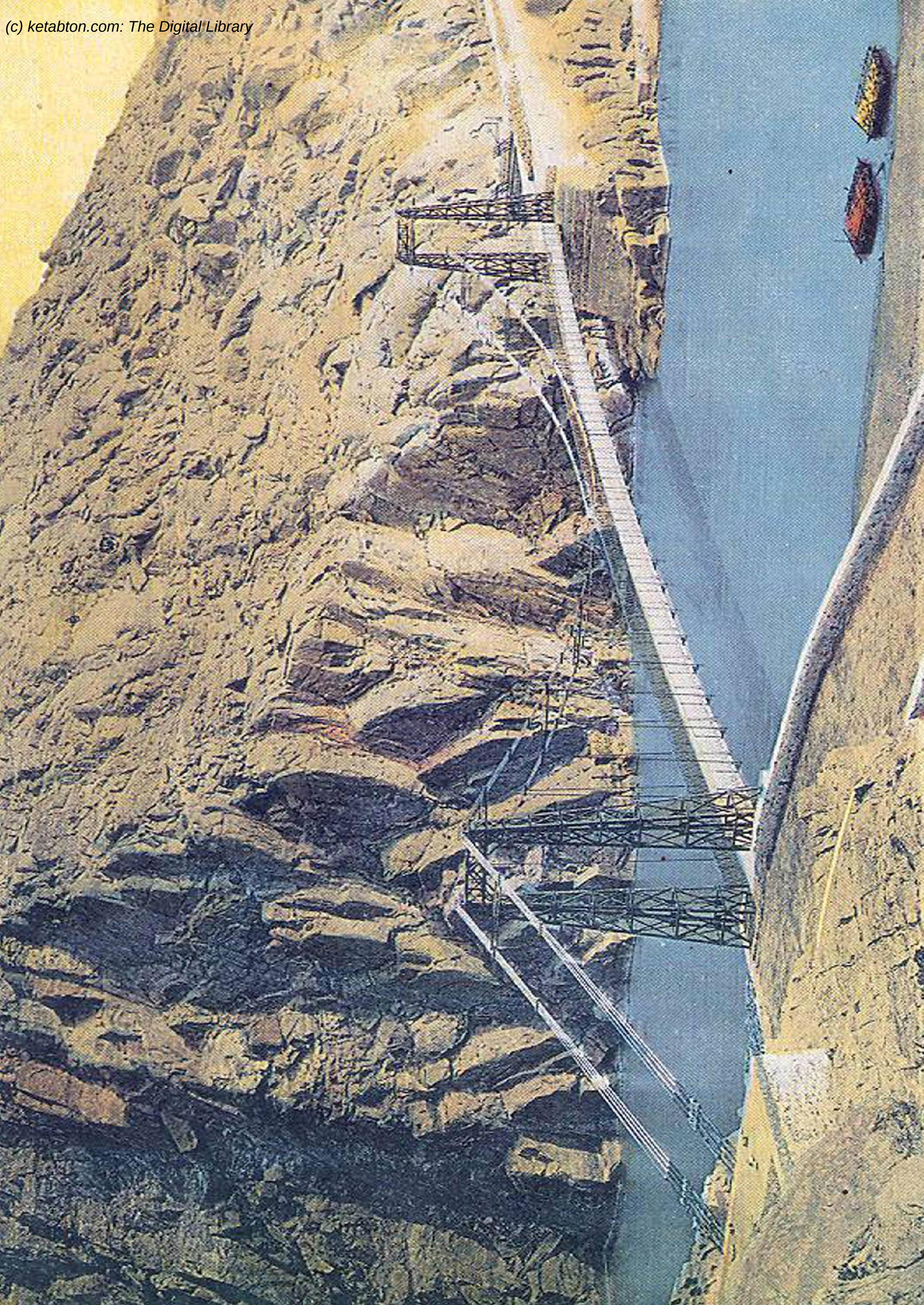
1. د $f(x)=\dfrac{2\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$ تابع مشتق پیدا کړئ؟
2. د $f(x)=\dfrac{x+\sqrt{x-x^2}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}$ تابع مشتق پیدا کړئ؟
3. د $f(x)=(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$ تابع مشتق پیدا کړئ.
4. د $f(x)=(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x}+4)$ تابع مشتق پیدا کړئ.
5. د $f(x)=\sin x\cdot\cos x$ د تابع مشتق د $\dfrac{\pi}{4}$ په ټکي کې پیدا کړئ.
6. د $f(x)=\dfrac{(\sin x+\cos x)^2}{1+\sin 2x}$ تابع مشتق پیدا کړئ.
7. د $y=\cos x$ تابع اتمه مرتبه مشتق پیدا کړئ.
8. د $y=\sin^2 x+\cos^2 x$ تابع نهمه مرتبه مشتق پیدا کړئ.
9. د $x^2+xy+y^2=3$ تابع ضمني مشتق پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

# دریم څپرکی

## د مشتق د استعمال ځایونه

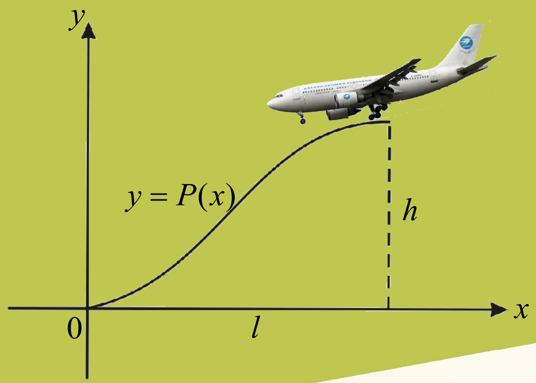
(c) ketabton.com: The Digital Library



(c) ketabton.com: The Digital Library

## د مشتق د استعمال ځایونه

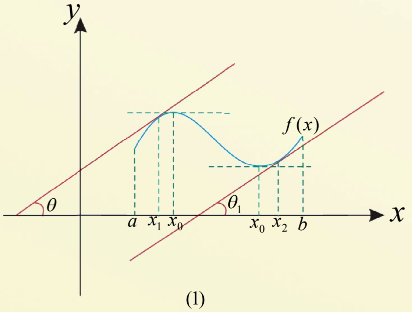
د مخامخ شکل د ارتفاع په اړه خپل نظر بیان کړئ.



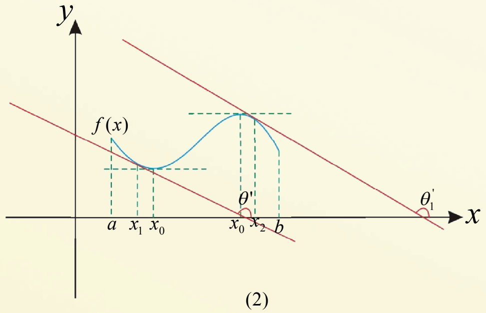

له مشتق څخه په ډېرو ځایونو کې، لکه: (په فزیك کې د حرکت، سرعت او تعجیل اړوند معادلې د مشتق څخه په ګټه اخیستنې سره حلېږي همدارنګه په کیمیا کې هم، د تابع د تحولات، د ځینو لیمیټونو په پیدا کولو کې) کار اخیستل کېږي چې ځینې ځایونه یې دلته تر څېړنې لاندې نیسو.

### I-د یوې تابع تحولات:

لاندې شکلونو ته پاملرنه وکړئ:



(1)



(2)

- متزایدې او متناقصې توابع څه ډول توابع دي؟
- د $(1)$ شکل په $(a,b)$ انټروال کې د $x_0$، $x_1$ او $x_2$ په ټکو کې د رسم شویو مماسونو میلونه د $(2)$ شکل له مماسونو سره پرتله کړئ.
- په $(1)$ او $(2)$ شکلونو کې تر ټولو لوړ ټکی او تر ټولو ټیټ ټکی په ګوته کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- په پورته شکلونو کې وښيي چې کومه تابع په کومه ساحه کې متزايده او په کومه ساحه کې تابع متناقصه ده؟
- په متزايده، متناقصه او ثابته تابع کې مشتق و څېړئ.

د پورته فعاليت پايله داسې بيانوو:

1- که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انتروال کې متمادي او په $(a,b)$ انتروال کې د مشتق وړ وي، نو که چېرې په ورکړل شوي انټروال کې $f'(x)>0$ وي، تابع په هغه انټروال کې متزايده بلل کېږي.

2- که چېرې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي او د $(a,b)$ په انټروال کې د مشتق وړ وي که به ورکړ شوي انټروال کې $f'(x)<0$ وي، نو تابع په هغه فاصله کې متناقصه بلل کېږي.

**يادونه**: د تابع له تزايد څخه مطلب دا دی چې د x د متحول قيمت په زياتېدو سره د تابع قيمت زيات او د تابع له تناقص څخه مطلب دا دی چې د x د متحول د قيمت په زياتېدو سره د y يا تابع قيمت کم پاتې شي.

**لومړی مثال**: وښيئ چې د $f(x)=x^3+3x+1$ تابع ګراف متزايد ده.

**حل**: څرنګه چې تابع کسري بڼه نه لري، نو ټول حقيقي عددونه د تعريف ساحه کېدای شي او هم پوهېږو چې د تابع د تزايد شرط $f'(x)>0$ دی، نو لازمه ده چې د تابع مشتق تر مطالعې لاندې ونيسو:

$$f(x)=x^3+3x+1$$

$$f'(x)=3x^2+3$$

ليدل کېږي چې د مشتق لومړی حد تام مربع دی، نو د $x$ د ټولو قيمتونو لپاره همېشه مثبت دی. کله چې (+3) ورسره جمع شي بيا هم قيمت يې مثبت دی، نو د $f'(x)>0$ دی، نو تابع متزايده ده.

**دويم مثال**: د $f(x)=x^3-3x+5$ تابع په کوم انټروال کې متناقصه ده؟

**حل**: څرنګه چې د $f(x)$ تابع په هر انټروال کې متمادي او د مشتق وړ ده، نو د متناقص تابع لپاره لرو $f'(x)<0$ دی، يعنې:

$$f'(x)=3x^2-3<0$$

$$f'(x)=0$$

$$3x^2-3=0$$

$$3x^2=3$$

$$x=\pm 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ليدل کېږي چې د تابع مشتق د $-1 < x < 1$ په انټروال کې منفي دی، نو تابع په همدې انټروال کې $(-1,1)$ متناقصه ده.

**دريم مثال**: د $f(x) = 5x - 4$ تابع تحولات وڅېړئ.

**حل**: لومړی د تابع د تعريف ساحه پيدا او وروسته د تابع د تزايد شرط په کې څېړو:

$$D_f \to IR$$
$$f(x) = 5x - 4$$
$$f'(x) = 5 > 0$$

څرنګه چې $f'(x) > 0$ نو د ټولو قيمتونو لپاره همېشه مثبت دی. نو تابع متزايده ده.

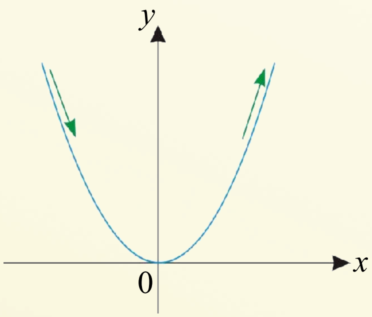
**څلورم مثال**: د $y = x^2$ د تابع ګراف ته ځير شئ او وښيئ چې ورکړل شوي تابع په کوم انټروال کې متزايده او په کوم انټروال کې متناقصه ده.

**حل**: پوهېږو چې که تابع متناقصه وي $y' < 0$ او که تابع متزايده وي $y' > 0$ څخه دی، نو ليکلای شو چې:

$y = x^2 \quad \Rightarrow \quad y' = 2x$

د تناقص شرط $y' < 0 \quad \Rightarrow \quad 2x < 0 \quad \Rightarrow \quad x < 0$

د تزايد شرط $y' > 0 \quad \Rightarrow \quad 2x > 0 \quad \Rightarrow \quad x > 0$




| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $y$ | $+\infty$ | ↘ | $4$ | ↘ | $1$ | ↘ | $0$ | ↗ | $1$ | ↗ | $4$ | ↗ | $+\infty$ |

د تابع له ګراف څخه ليدل کېږي چې تابع د $(-\infty, 0)$ په انټروال کې متناقصه او په $(0, +\infty)$ انټروال کې متزايده ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

## پوښتنې

1- د $f(x)=ax+b$ د تابع تحولات وښيئ؟

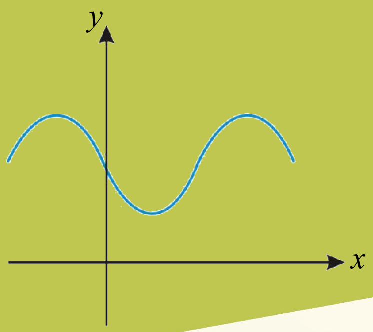
2- د $y=\frac{-3}{4}x-1$ د تابع تحولات وښيئ؟

3- وښیاست چې د $f(x)=2x^2+3x+1$ تابع په کوم انټروال کې متزايده ده؟

4- د $y=x^2+3x+2$ د تابع د تزايد انټروال و ټاکئ؟

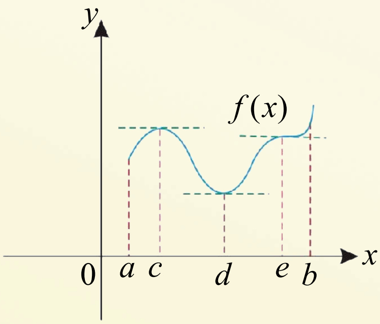
(c) ketabton.com: The Digital Library

## د يوې تابع بحراني (*Critical Point*) ټکي (اعظمي *Maximum* او اصغري *Minimum*)




په مخامخ شکل کې تر ټولو لوړ ټکی او تر ټولو ټيټ ټکی وښيئ او ووايئ چې دا ټکي د څه په نامه يادېږي؟

که په لاندېني شکل کې د $f(x)$ تابع د $(a,b)$ په انټروال کې د مشتق وړ وي.




- د متحول د قيمت په زياتوالي په کوم انټروال کې د تابع قيمت لوېږي.
- د متحول د قيمت په کموالي په کوم انټروال کې د تابع قيمت کمېږي.
- د تابع تحولات په $(c,d)$ او $(d,e)$ انټروال کې وڅېړئ.
- د $f(x)$ تابع مشتق په کومو ټکو کې له صفر سره مساوي دی.

د پورته فعاليت پايله داسې بيانوو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

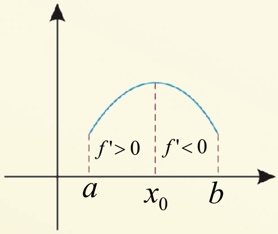
د يوې تابع په ګراف کې د $y$ پر محور تر ټولو لوړې نقطې ته اعظمي(maximum) او تر ټولو ټيټې نقطې ته د تابع اصغري(minimum) نقطه وايي، د $x$ د هغو قيمتونو لپاره چې تابع اعظمي او يا اصغري قيمتونه اخلي د بحراني(*Critical Point*) نقطو په نامه يادېږي.

**تعريف**:

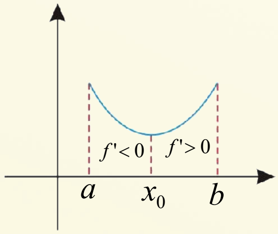
1- **ثابته تابع**: که چېرې د يوې تابع لومړی مشتق هميشه له صفر سره مساوي وي تابع ته ثابته تابع وايي.

2- **متزايده تابع**: که چېرې د يوې تابع لومړی مشتق د $(a,b)$ په فاصله کې مثبت وي تابع په هغه فاصله کې متزايده بلل کېږي، يعنې $y'>0$ چې په لاندې شکلونو کې ليدل کېږي.

3- **متناقصه تابع**: که چېرې د يوې تابع لومړی مشتق د $(a,b)$ په فاصله کې منفي وي يعنې $y'<0$ وي، تابع په هغه فاصله کې متناقصه بلل کېږي چې په لاندې شکلونو کې ليدل کېږي.



(1)



(2)

1- **اعظمي ټکی**: که چېرې د $y=f(x)$ تابع د $x_0$ په معين ټکي کې د تزايد له حالت څخه د تناقص حالت ته بدل شي يا په بل عبارت د $x_0$ په دې معين ټکي کې د مشتق اشاره له مثبت څخه منفي ته بدله شي د $x_0$ په نقطه کې د تابع قيمت د اعظمي(maximum) په نامه يادېږي.

2- **اصغري ټکی**: که چېرې د $y=f(x)$ تابع د $x_0$ په معين ټکي کې د تناقص له حالت څخه تزايد حالت ته بدل شي يا په بل عبارت د $x_0$ په دې معين ټکي کې د مشتق اشاره له منفي څخه مثبت ته بدله شي د $x_0$ په نقطه کې د تابع قيمت د اصغري (minimum) په نامه يادېږي.

3- **د انعطاف ټکی**: که چېرې مشتق خپله اشاره د $x_0$ په يوه معين ټکي کې له مثبت څخه صفر ته او بيا مثبت ته يا له منفي څخه صفر او بيا منفي ته بدله کړي $x_0$ د انعطاف د نقطې *Inflection Point* په نامه يادېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

**لومړی مثال**: د $f(x)=x^3-\frac{7}{2}x^2+2x$ تابع راکړل شوی ده دا تابع څو د (Extreme) ټکي لري.

**حل**: د تابع لومړی مشتق پیداکوو بیا هغه مساوي په صفر وضع کوو او د $x$ قیمتونه په لاس راوړو.

$$f'_{(x)}=3x^2-7x+2$$

$$f'(x)=0$$

$$3x-1=0\Rightarrow x_1=\frac{1}{3}$$

$$x-2=0\Rightarrow x_2=2$$

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{1}{3}$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $\frac{17}{54}$ | ↘ | $-2$ | ↘ | $-2$ | ↗ | $+\infty$ |
| | | | Max | | | | Min | | |

په پایله کې ویلای شو چې اصلي تابع دریمه درجه ده، نو د $f(x)$ د تابع مشتق د $(\frac{1}{3})$ او $(2)$ په دوو نقطو

کې خپله علامه بدلوي، نو دوه بحراني(Extreme) ټکي لري.

**دویم مثال**: د $f(x)=\frac{x+1}{x^2-2x}$ تابع موضعي Extreme ټکي یا نسبتي ټکي مشخص کړئ.

**حل**: لومړی د تابع مشتق په لاس راوړو، وروسته یې علامې ټاکو:

لیدل کیږي چې تابع د $y=\frac{u}{v}$ شکل لري، نو $y'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$$f(x)=\frac{x+1}{x^2-2x}$$

$$f'(x)=\frac{x^2-2x-(2x-2)(x+1)}{(x^2-2x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-x^2-2x+2}{(x^2-2x)^2}$$

دیوه کسر قیمت هغه وخت له صفر سره مساوي دی چې د تابع صورت مساوي له صفر سره وي.

$$f'(x)=0\quad\Rightarrow -x^2-2x+2=0$$

$$\Delta=b^2-4ac=12$$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2+\sqrt{12}}{-2}=-2.73$$

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2-\sqrt{12}}{-2}=0.73$$

| $x$ | | $-3$ | | $-2.73$ | | $-1$ | | $0.73$ | | $1$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ |
| $f(x)$ | ↘ | | ↘ | | ↗ | | ↗ | | ↘ | | ↘ |
| | | $-\frac{2}{15}$ | | Min | | $0$ | | Max | | $-2$ | |

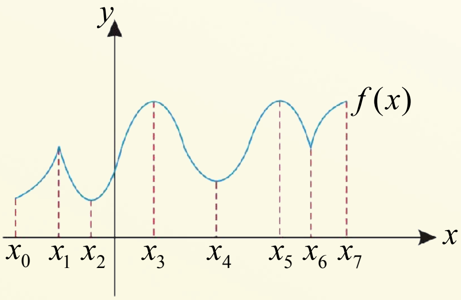
(c) ketabton.com: The Digital Library

په جدول کې ښکاري چې $f'$ د $x_1$ او $x_2$ دواړو خواوو ته خپله علامه بدلوي، نو تابع دوه بحراني Extreme ټکي لري، یعنې تابع اعظمي او اصغري ټکي لري.

## مطلق اعظمي او مطلق اصغري ټکي Absolute Maximum & Absolute Minimum

کېدای شي یوه تابع په یوه انټروال کې څو موضعي بحراني ټکي ولري، خو په یوه ټاکلي انټروال کې تابع یوازې یوه مطلقه اعظمي او یوه مطلقه اصغري نقطه لري. په شکل کې یې وښیئ؟

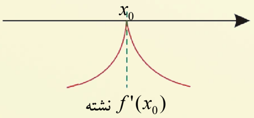
لاندینی شکل ته ځیر شي:

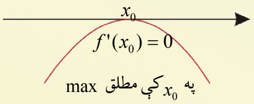


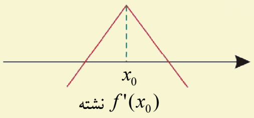

- د $f(x)$ په تابع کې اعظمي او اصغري ټکي وښیئ.
- د $f(x)$ تابع بحراني ټکي په ګوته کړئ.
- پورتنی تابع په ورکړل شوي انټروال کې څو موضعي بحراني ټکي لري.
- پورتنی تابع په ورکړل شوي انټروال کې څو اصغري او اعظمي لري.

د پورته فعالیت پایله داسې بیانوو:

**مطلق اعظمي** Absolute Maximum: په عمومي ډول د $(x_0, f(x_0))$ ټکی مطلق اعظمي بلل کېږي، که چېرې د $f(x)$ د تعریف په ساحه کې د هر $x$ لپاره $f(x) \le f(x_0)$ وي، نو $f(x_0)$ ته مطلق اعظمي وایي لاندې شکلونه وګورئ.

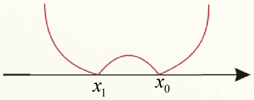


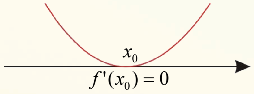



(c) ketabton.com: The Digital Library

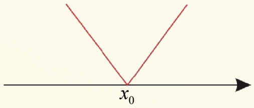
**مطلق اصغري** Absolute Minimum: پـه عمـومي ډول د $(x_0, f(x_0))$ نقطـه مطلقـه اصـغري بلـل کېږي، که چېرې د $f$ د تعريف په ساحه کې د هـر $x$ لپـاره $f(x) \ge f(x_0)$ وي، نـو پـه دې حالـت کې $f(x_0)$ ته مطلقه اصغري وايي، د $x$ هغه قيمتونه چې د هغوی لپاره تابع يا اعظمـي او يـا اصـغري قيمتونـه اخلي د $x$ دغه قيمتونه د Extreme په نامه يادېږي.




$f'(x_0)$ او $f'(x_1)$ نشته




په $x_0$ کې مطلق min




$f'(x_0)$ نشته

**لومړی مثال**: د $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{2}$ د تابع مطلق اصغري پيداکړئ.

**حل**: د $f(x)$ د تابع مشتق نيسو او د مشتق د تابع حلونه په لاس راوړو:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = x + 3$$

$$f'(x) = 0$$

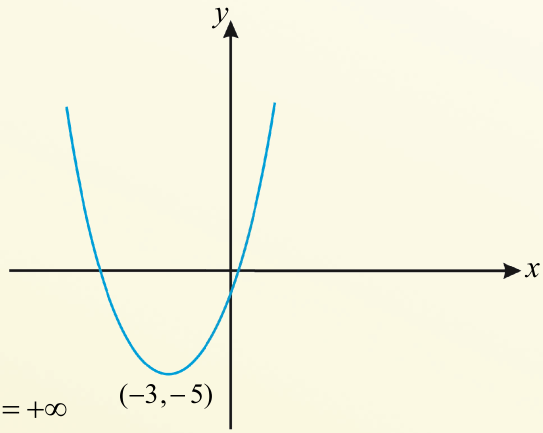
$$x + 3 = 0$$

$$x = -3$$

$$f(-3) = -5$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{2}\right) = +\infty$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty} x^2 + 3\lim_{x\to\infty} x - 1\lim_{x\to\infty} - \frac{1}{2} = +\infty$$




| $x$ | $-\infty$ | | $-4$ | | $-3$ | | $1$ | | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $-\frac{9}{2}$ | ↘ | $-5$ Min | ↗ | $3$ | ↗ | $\frac{15}{2}$ | ↗ $+\infty$ |

په پايله کې د $x = -3$ په ټکي کې چې د تـابع قيمـت $(-5)$ دی او تـابع پـه $(-3, -5)$ ټکـي کـې مطلق اصغري لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

**دويم مثال**: د $f(x)=x^3-3x+2$ د تابع اعظمي او اصغري ټکي پيدا او رسم يې کړئ.

**حل**: د اعظمي او اصغري ټکو د پيدا کولو لپاره لومړی د تابع لومړی مشتق پيدا او بيا د مشتق د تابع صفري ټکي په لاس راوړو.

$f(x)=x^3-3x+2$

$f'(x)=3x^2-3$

$f'(x)=0$

$3x^2-3=0$

$3x^2=3$

$x^2=1$

$x_1=1 \quad , \quad x_2=-1$

$f(-1)=(-1)^3-3(-1)+2$

$\quad =-1+3+2$

$\quad =4$

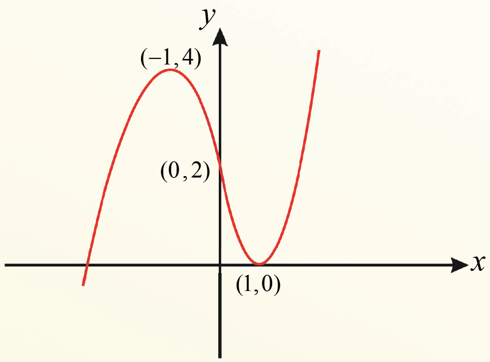
$f(1)=1^3-3\cdot1+2=1-3+2=0$

$f(0)=0-3\cdot0+2=2$

$f(2)=2^3-3\cdot2+2=4$

$f(1)=0 \quad , \quad f(0)=2 \quad , \quad f(-1)=4$

$Max\ f(-1)=4 \qquad Min\ f(1)=0$




| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $-\frac{5}{6}$ | ↗ | $4$ Max | ↘ | $2$ | ↘ | $0$ Min | ↗ | $4$ | ↗ | $+\infty$ |

له جدول څخه ليدل کېږي چې تابع د $(-\infty,-1)$ او $(1,+\infty)$ په انټروالونو کې متزايده او $(-1,1)$ په انټروال کې متناقصه ده، نو د $(1,0)$ نقطخ اصغري او د $(-1,4)$ نقطه اعظمي ده.

د يوې تابع د ګراف رسموولو لپاره لاندې ټکي بايد په پام کې ونيسو:

1. د تابع متماديت او نامتماديت مطالعه کړو.
2. د قايمو محوراتو سره د ګراف تقاطع.
3. د لومړي مشتق د اشارې مطالعه د تابع د تزايد او تناقص لپاره.
4. د تابع د اعظمي او اصغري ټکو لپاره د مشتق صفري ټکي پيدا کول.
5. د مجانبونو ټاکل.
6. د جدول ترتيبول او د هغوی په مرسته د ګراف رسمول.

(c) ketabton.com: The Digital Library

**دریم مثال**: د $y=2+x-x^2$ تابع گراف رسم کړئ؟

**حل**: لیدل کېږي چې تابع د متحول د ټولو قیمتونو لپاره تعریف شوي ده.

1- ددې تابع د تقاطع ټکی د $x$ او $y$ له محورونو سره پیداکوو:

د $y$ له محور سره د گراف تقاطع د ټکو د پیداکولو لپاره په ورکړشوي تابع کې $x=0$ وضع کوو:

$$x=0 \qquad y=2+0-0=2$$

نو پورتنی گراف د $y$ محور په $(0,2)$ نقطه کې قطع کوي.

د $x$ د محور سره دگراف د تقاطع د ټکو دپیدا کولو لپاره $y$ مساوي په صفر وضع کوو او د $x$ قیمت پیداکوو:

$$y=0 \ , \ 2+x-x^2=0$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+4\cdot 2}}{-2}=-\frac{-1\pm 3}{2}$$

$$x_1=-1 \ , \ x_2=2$$

نو پورتنی گراف د $x$ محور په $(-1,0)$ او $(2,0)$ نقطو کې قطع کوي.

2- د تابع اعظمي او اصغري ټکي پیداکوو، ددې کار لپاره دتابع اول او دویم مشتق څېړو.

$$y=2+x-x^2$$

څرنگه چې د تابع په اعظمي او اصغري نقطو کې د تابع لومړی مشتق صفر دی نو $y'=0$ سره وضع کوو:

$$y'=1-2x$$

$$y'=0 \text{،} \quad 1-2x=0$$

$$-2x=-1 \ \Rightarrow \ 2x=1$$

$$x=\frac{1}{2}$$

تابع په $x=\frac{1}{2}$ نقطه کې یو اعظمي یو یا اصغري قیمت لري، دهغې دپیژندنې له پاره دتابع دویم مشتق په $x=\frac{1}{2}$ ټکو کې څېړو:

$$y''=-2<0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

څرنګه چې $y''$ تل منفي دی، نو په $x=\frac{1}{2}$ کې هم منفي دی، څکه نو تابع په $x=\frac{1}{2}$ ټکی کې یو اعظمي قیمت لري څرنګه چې د $x=\frac{1}{2}$ لپاره $y=2+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=2\frac{1}{4}$ کېږي، نو د تابع اعظمي نقطه داده:

$(\frac{1}{2}، 2\frac{1}{4})$

دامنحني دانعطاف نقطه نه لري، څکه چې دهر $x$ لپاره $y''<0$ دی.

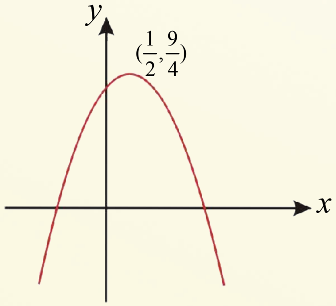
3- په $\pm\infty$ کې دګراف څېړل:

$$\lim_{x\to\infty} y=\lim_{x\to\infty}(2+x-x^2)=\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty}(2+x-x^2)=-\infty$$

د زیاتي روښانتیا لپاره لاندي جدول ترتیب شوی، او د تابع ټول بدلونو نه په هغو کې په ګوته کوو او وروسته نوموړی ګراف رسموو.

| $x$ | | $-1$ | | $\frac{1}{2}$ | | $2$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | + | | + | 0 | − | | − |
| $y$ | ↗ | 0 | ↗ | $2\frac{1}{4}$ | ↘ | 0 | ↘ |




## پوښتني

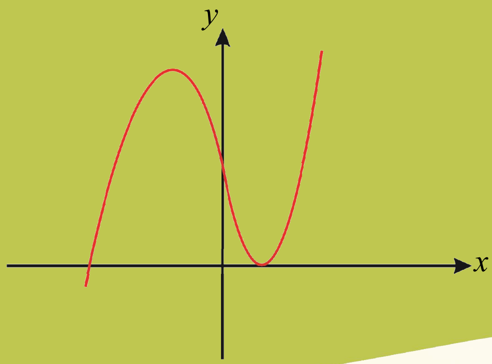
1- د لاندي توابعو موضعي Extreme ټکی و ټاکئ.

$a)\ f(x)=x^2-3x+2$ $\qquad b)\ f(x)=\frac{x+1}{x^2}$ $\qquad c)\ y=3x^2-4x+1$

2- د $f(x)=3x^3-4x^2$ د تابع مطلقه min پيداکړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

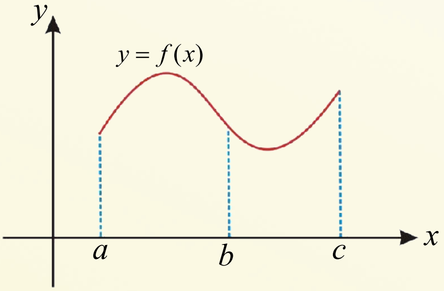
## د انعطاف د نقطې ټاکل




هغه ټکي چې د يوې تابع گراف په هغې کې خپل محدبيت، مقعريت ته او يا ددې پر عکس بدلوي د څه په نامه يادېږي؟ آيا په دې ټکي کې د دويم مشتق علامه او قيمت څېرلای شئ؟

**فعاليت**

لاندينی شکل په پام کې ونيسئ.

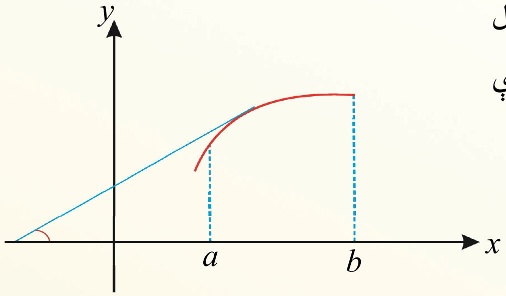



- د $y=f(x)$ د تابع منحني د $(a,b)$ په انټروال کې څه ډول منحني بلل کېږي؟
- د $y=f(x)$ د تابع منحني د $(b,c)$ په انټروال کې څه ډول منحني بلل کېږي؟
- د $(a,b)$ په انټروال کې په منحني يو مماس رسم کړئ او له هغه مماس سره يې پرتله کړئ چې د $(b,c)$ په انټروال کې په منحني رسمېږي.

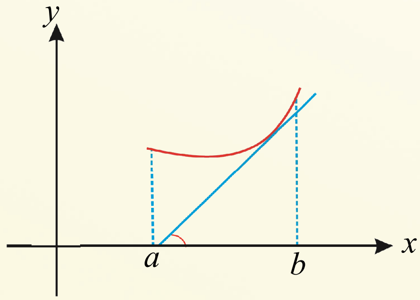
د پورتني فعاليت پايله داسې بيانوو:

1. د $y=f(x)$ تابع منحني په يوه انټروال کې پرسيدلی يا محدب بلل کېږي، که چېرې په دې انټروال کې په منحني مماس رسم شي، نو مماس د منحني له پاسه يا پورته خواته پروت وي، په دې صورت کې د تابع دويم مشتق منفي $y''<0$ په لاس راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library




په دې ډول که د $y = f(x)$ د تابع دويم مشتق د انټروال په ټولو ټکوکې منفي وي، نو د تابع ګراف يا منحني په دې انټروال کې محدب پاتې کېږي.




2. د $y = f(x)$ د تابع منحني په يوه انټروال کې ننوتې يا مقعره بلل کېږي، که چېرې په نوموړي انټروال کې په منحني مماس رسم شي، نو مماس له منحني څخه لاندې يا ښکته خوا پروت وي، که د $y = f(x)$ د تابع دويم مشتق د انټروال په ټولو ټکوکې مثبت وي $y''>0$ ، منحني په دې انټروال کې مقعره بلل کېږي.

**تعريف**: هغه نقطه چې تابع له مقعريت څخه محدبيت ته او يا ددې پر عکس جهت بدلوي، او لومړی مشتق يې موجود او دويم مشتق يې صفر شي د انعطاف (Inflection) نقطه بلل کېږي.

که د $y = f(x)$ تابع د $x = x_0$ په ټکي کې چې د تابع دويم مشتق صفر شي( $f''(x_0) = 0$ ) وي تابع د $x = x_0$ په ټکي کې د انعطاف نقطه لري او ددې برعکس تابع د انعطاف نقطه نه لري.

**لومړی مثال**: د $f(x) = x^2 - 5x + 4$ د تابع ګراف رسم محدبيت او مقعريت يې وڅيرئ.

**حل**: تابع د متحول د ټولو قيمتونو لپاره تعريف شوې ده.

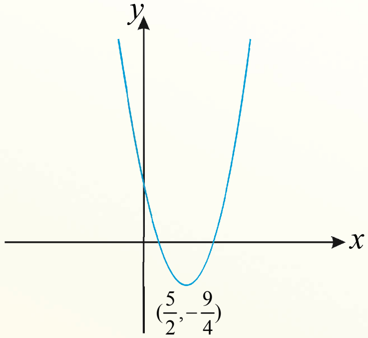
1- د $y$ له محورسره تقاطع

$$\left.\begin{matrix} x = 0 \\ y = 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (0,4)$$

2- د $x$ له محورسره تقاطع

$$\left.\begin{matrix} y = 0 \\ x^2 - 5x + 4 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = (x-4)(x-1) \Rightarrow x_1 = 4 \quad , \quad x_2 = 1$$

د $x$ له محور سره د تقاطع ټکي $(4,0)$ او $(1,0)$ دي.




| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $1$ | $\frac{5}{2}$ | $4$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $-$ | $-$ | $+$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty \searrow 4$ | $\searrow 0$ | $\searrow -\frac{9}{4}$ | $\nearrow 0$ | $\nearrow +\infty$ | |
| | | | | min | | |

د ګراف، مقعریت او محدبیت د څېړلو لپاره د تابع دویم مشتق په لاس راوړو:

$$f(x)=x^2-5x+4 \quad \Rightarrow \quad y'=2x-5$$

$$f''(x)=2>0$$

څرنګه چې $y''>0$ دی، نو په پایله کې ویلای شو چې منحني نوټي یا مقعره ده.

**دویم مثال**: هغه انټروالونه وټاکئ چې په هغې کې د $y=x^3+9x^2-6x+1$ تابع ګراف محدب یا مقعر وي.

**حل**:

$$y=x^3+9x^2-6x+1$$

$$y'=3x^2+18x-6 \quad \Rightarrow \quad y''=6x+18$$

$$y''<0 \quad \Rightarrow \quad 6x+18<0$$

$$6x<-18 \quad \Rightarrow \quad x<-3$$

$$y''>0 \quad \Rightarrow \quad 6x+18>0$$

$$6x>-18$$

$$x>-3$$

| $x$ | $-\infty$ | $-3$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $y''$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $y$ | $\cap$ | | $\cup$ |

مقعر    انعطاف    محدب

څرنګه چې ليدل کيږي د تابع دويم مشتق په $(-\infty,-3)$ انټروال کې منفي او د $(-3,+\infty)$ انټروال کې مثبت دي، نو دا ډول ګراف په لومړي انټروال کې محدب او په دويم کې مقعر دی.



(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

**دریم مثال**: د $f(x)=x^5-5x^3$ د تابع د انعطاف ټکی و ټاکئ؟

**حل**:

$$f(x)=x^5-5x^3 \quad \Rightarrow \quad f'(x)=5x^4-15x^2$$
$$f''(x)=20x^3-30x$$
$$f''(x)=0$$
$$20x^3-30x=0$$
$$x(20x^2-30)=0$$
$$x_1=0$$
$$20x^2-30=0$$
$$x^2=\frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad x_2=\sqrt{\frac{3}{2}} \quad , \quad x_3=-\sqrt{\frac{3}{2}}$$

| $x$ | $-\infty$ | | $-\sqrt{\frac{3}{2}}$ | | $0$ | | $\sqrt{\frac{3}{2}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\cap$ | $-13.65$ | $\cup$ | | $\cap$ | $-6\sqrt{\frac{3}{2}}$ | $\cup$ | |

لیدل کېږي چې په $x=\sqrt{\frac{3}{2}}$ او $x=0$، $x=-\sqrt{\frac{3}{2}}$ کې د تابع دویم مشتق صفر دی یا $f''(x)=0$ علامه بدلوي او په دې ټکو کې مماس رسمیدلی شي چې هغه ټکی د انعطاف ټکی دی.

**پوښتني**

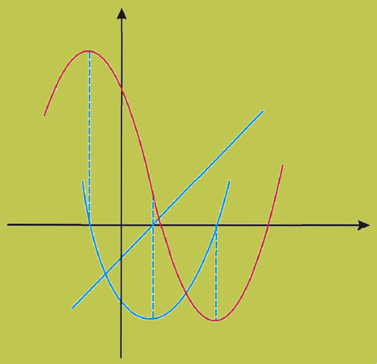
1. د $f(x)=x^2-4$ د تابع محدبیت او مقعریت وټاکئ.
2. د $f(x)=-2x^2-1$ د تابع د انعطاف نقطه وټاکئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

## د منحني ګانو رسمول

## د دويمې درجې تابع ګانو ګراف

د مخامخ شکل په اړه خپل نظر بيان کړئ.



- د $f(x) = x+1$ د تابع ګراف د $f(x) = -x+1$ د تابع له ګراف سره پرتله کړئ.
- د $y = ax^2 + bx + c$ د تابع د تعريف ساحه و ټاکئ آيا دا تابع متمادي ده؟
- د نوموړې تابع لومړی مشتق پيدا او د Maximum او Minimum ټکي او د تناظر محور يې وټاکئ.
- د تابع ليميټ په هغه صورت کې پيدا کړئ چې $x \to \pm\infty$ وکړي.
- له محورونو سره د تقاطع ټکي و ټاکئ.
- د تحولاتو جدول ترتيب او نوموړی منحني رسم کړئ.

د پورته فعاليت پايله داسې بيانوو:

1- د تابع د تعريف ساحه: ليدل کيږي چې تابع د متحول د ټولو قيمتونو لپاره تعريف شوی ده، يعنې:

$$D_f \to (-\infty, +\infty)$$

نو تابع د خپل تعريف په ساحه کې متمادي ده.

2- د تابع د بحراني ټکو او د تناظر محور ټاکل:

$$f'(x) = 2ax + b = 0$$
$$f'(x) = 0$$
$$2ax + b = 0$$
$$2ax = -b$$
$$x = \frac{-b}{2a}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $x=\frac{-b}{2a}$ قیمت په اصل تابع کې وضع کوو:

$$y=a(-\frac{b}{2a})^2+b(-\frac{b}{2a})+c \quad \Rightarrow \quad a\cdot\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{2a}+c=0$$

$$y=\frac{b^2-2b^2+4ac}{4a}=\frac{-b^2+4ac}{4a} \quad \Rightarrow \quad \frac{4ac-b^2}{4a}$$

د $(-\frac{b}{2a}\ ,\ \frac{4ac-b^2}{4a})$ ټکی بحراني ټکی یعنې اعظمي یا اصغري دی.

الف: که $a>0$ وي، نو: $\quad a>0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

تابع په $(\frac{-b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$ ټکي کې $Min$ لري.

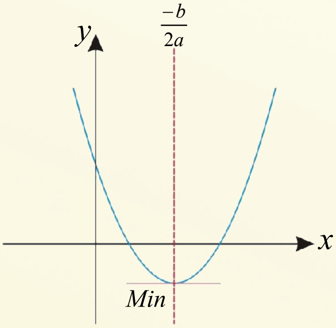
ب: که $a<0$ وي، نو: $\quad a<0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

تابع په $(\frac{-b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$ ټکي کې $Max$ لري.

3- د ګراف د رسمولو لپاره جدول ترتیب او ګراف یې رسموو:

$a>0$

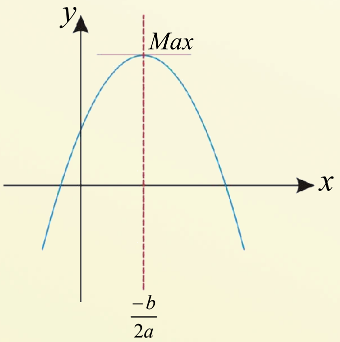
| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{-b}{2a}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | | $+$ | |
| $y$ | $+\infty$ | ↘ | $\frac{4ac-b^2}{4a}$ | ↗ | $+\infty$ |




څرنګه چې $a>0$ د منحني خوله(جهت) پورته خواته او د $(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4})$ اصغري نقطه ده.

$a<0$

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{-b}{2a}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | | $-$ | |
| $y$ | $-\infty$ | ↗ | $\frac{4ac-b^2}{4a}$ | ↘ | $-\infty$ |




څرنګه چې $a<0$ د منحني خوله(جهت) ښکته خواته او د $(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4})$ اعظمي نقطه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

**لومړی مثال**: د $f(x) = x^2 - 4x + 3$ د تابع تحولات مطالعه او گراف یې رسم کړئ.

**حل**:

1- د تابع د تعریف ساحه $(-\infty, +\infty)$ تابع د ټولو حقیقي قیمتونو لپاره تعریف شوي ده، نو تابع په دې انټروال کې متمادي ده.

2- د تابع د منحني تقاطع د $x$ له محور سره:

$$\left.\begin{aligned} &y = 0 \\ &x^2 - 4x + 3 = 0 \\ &(x-1)(x-3) = 0 \\ &x - 1 = 0 \ \Rightarrow\ x = 1 \\ &x - 3 = 0 \ \Rightarrow\ x = 3 \end{aligned}\right\} \quad (1,0) \quad , \quad (3,0)$$

3- د تابع د منحني تقاطع د $y$ له محور سره:

$$\left.\begin{aligned} &x = 0 \\ &y = 0 - 4\cdot 0 + 3 \\ &y = 3 \end{aligned}\right\} \quad (0,3)$$

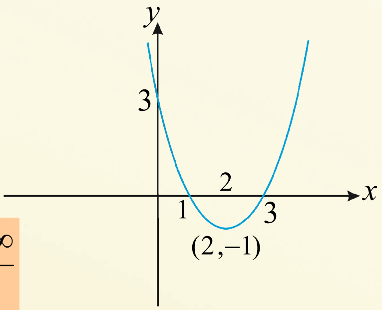
4- د تابع د extreme ټکو د پیدا کولولپاره د لومړي مشتق صفري ټکي پیدا او جدول یې ترتیبوو:

$$f'(x) = 2x - 4 = 0 \ \Rightarrow\ 2x = 4 \ \Rightarrow\ x = 2$$

$$f(2) = 2^2 - 4\cdot 2 + 3 = -1 \ \} \ \Rightarrow\ V(2,-1)\min$$

$$x \to \pm\infty \ \Rightarrow\ f(x) \to \pm\infty$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\left[x^2 - 4x + 3\right] = +\infty$$




| $x$ | $-\infty$ | 0 | 1 | 2 | 3 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $-$ | $-$ | $-$ | $+$ | $+$ | |
| $y$ | $-\infty \searrow$ | $3 \searrow$ | $0 \searrow$ | $-1 \nearrow$ (Min) | $0 \nearrow$ | $+\infty$ |

**دویم مثال**: د $f(x) = -x^2 + 2x$ د تابع تحولات مطالعه او گراف یې رسم کړئ.

**حل**: لیدل کیږي چې تابع د ټولو قیمتونو لپاره تعریف شوې ده، نو:

1- د تابع د تعریف ساحه عبارت ده له: $(-\infty, +\infty)$ چې په دې ساحه کې تابع متمادي ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- د تابع د منحني د تقاطع ټکی د $x$ له محور سره:

$$f(x)=0$$
$$-x^2+2x=0$$
$$x(-x+2)=0$$
$$x_1=0 \qquad (0,0)$$
$$-x+2=0$$
$$x_2=2 \qquad (2,0)$$

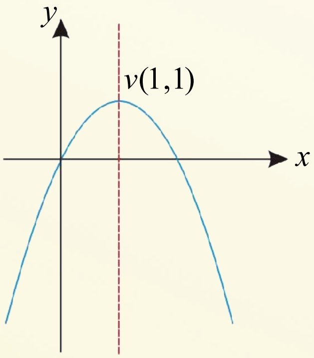
د تقاطع ټکی

3- د تابع د منحني تقاطع د $y$ له محور سره:

$$x=0$$
$$f(x)=-x^2+2x$$
$$f(x)=0+2\cdot 0$$
$$f(x)=0 \qquad (0,0)$$

4- د تابع د extreme نقطو د پیداکولو لپاره د تابع لومړی مشتق پیدا کوو او جدول یې ترتیب او ګراف یې رسموو:

$$D_f \to (-\infty,+\infty)$$
$$f(x)=-x^2+2x$$
$$f'(x)=-2x+2=0$$
$$-2x+2=0$$
$$-2x=-2$$
$$\left.\begin{array}{l} x=1 \\ f(1)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow V(1,1)Max$$




| $x$ | $-\infty$ | | 0 | | 1 | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | | + | | − | | − | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | 0 | ↗ | 1 | ↘ | 0 | ↘ | $-\infty$ |
| | | | | | Max | | | | |

په جدول کې لیدل کېږي چې د مشتق علامه د مثبت څخه منفي ته او یا د تزاید حالت څخه تناقص ته شکل بدلوي، نو تابع د $(1,1)$ په ټکي کې اعظمي ده.

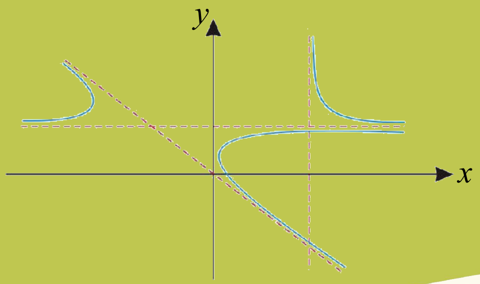
## پوښتنې

1. د $f(x)=2x^2-x-1$ د تابع ګراف رسم کړئ.
2. د $f(x)=x^2-x-2$ د تابع د ګراف بدلونونه وڅېړئ او ګراف یې رسم کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

## د توابعو د ګرافونو مجانبونه

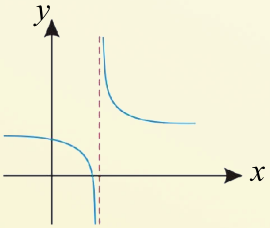
شکل ته پام وکړئ ټکی ټکی کرښې د څه په نامه یادېږي، نومونه يې واخلئ.



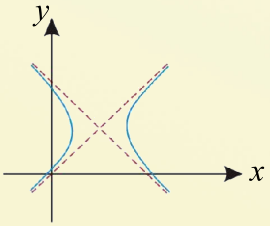
- مجانبونه څه ډول کرښې دي؟
- مجانبونه، منحنيګاني په کومو ټکو کې قطع کوي؟

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

**مجانبونه**: هغه مستقیمې کرښې دي چې د منحني د ګراف لپاره د لارښود حیثیت لري او د منحني کرښه قطع کړي، هغه تابع ګانې چې د متحول د ځینو قیمتونو لپاره غیر متمادي وي، مجانبونه لري او په درې ډوله دي.



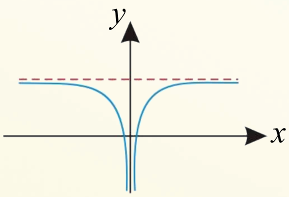

1- **عمودي مجانب**: د $y = f(x)$ تابع عمودي مجانب لري چې $x \to a$ او $y \to \infty$ وکړي، یعنې $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ شي یا په بل عبارت په کسري تابع ګانو کې که چېرې د کسر مخرج مساوي په صفر شي، نوموړی تابع بې‌نهایت خوا ته تقرب کوي، نو ددې ډول مجانب د پیداکولو لپاره د کسر مخرج له صفر سره مساوي وضع کوو.




2- **مایل مجانب**: د $y = f(x)$ کسري تابع کله چې د صورت او مخرج د تقسیم حاصل د یوه مستقیم خط په شکل ($y = ax + b$) لاسته راشي داسې چې $a \neq 0$ وي په لاس راځي او دا هغه وخت امکان لري چې تابع د مایل مجانب لرونکی وي، یعنې د متحول د صورت درجه د متحول د مخرج له درجې څخه د یو واحد په اندازه لوړه وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په یاد ولرئ چې که یوه تابع د افقي مجانب لرونکي وي، مایل مجانب نه لري او بر عکس که چېرې مایل مجانب ولري افقي مجانب نه لري.




-3 **افقي مجانب**: یوه تابع هغه وخت د افقي مجانب لرونکې ده چې که $x \to \pm\infty$ وکړي د تابع قیمت یو ثابت مقدار شي او یا په بل عبارت یوه تابع هغه وخت د افقي مجانب لرونکې ده چې که $x \to \pm\infty$ وکړي، نو $y \to c$ ته تقرب کوي، یعنې $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = c$ شي.

**لومړی مثال**: د $f(x) = \dfrac{x+1}{2x-4}$ تابع عمودي او افقي مجانب پیدا کړئ.

**حل**: د عمودي مجانب د پیدا کولو لپاره د کسر مخرج مساوي په صفر وضع کوو، لرو چې:

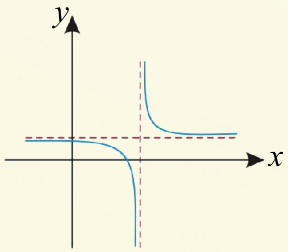
نو $x = 2$ د تابع عمودي مجانب دی.

$$2x - 4 = 0 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$$

افقي مجانب عبارت دی له: $y = \dfrac{1}{2}$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x+1}{2x-4}\right) = \frac{1}{2}$$

| $x$ | $-1$ | $0$ | $+1$ |
|---|---|---|---|
| $y$ | $0$ | $-\frac{1}{4}$ | $-1$ |




**دویم مثال**: د $y = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x}$ تابع د منحني مجانبونه وټاکئ.

**حل**:

-1 مایل مجانب: ددې مجانب د پیدا کولو لپاره د تابع صورت د تابع پر مخرج وېشو:

$$y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x} = x + 2 - \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad y = x + 2$$

-2 عمودي مجانب: د دې مجانب د پیدا کولو لپاره د تابع مخرج مساوي په صفر وضع کوو:

$$y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x} \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

-3 افقي مجانب: څرنګه چې تابع مایل مجانب لري، نو افقي مجانب نه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

**دریم مثال**: د $f(x)=\dfrac{(x-3)(x+2)}{(x+1)(x-2)}$ تابع مجانبونه وټاکئ.

**حل**:

1- عمودي مجانب: د تابع مخرج مساوي په صفر وضع کوو:

$$(x+1)(x-2)=0$$

$$\left.\begin{array}{l} x+1=0 \\ x_1=-1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x-2=0 \\ x_2=2 \end{array}$$

نو $x=2$ او $x=-1$ د تابع عمودي مجانبونه دي.

2- افقي مجانب: د افقي مجانب د پیداکولو لپاره د تابع لېمیټ په لاس راوړو:

$$y=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-3)(x+2)}{(x+1)(x-2)}=1$$

نو $y=1$ د تابع افقي مجانب دی.

3- څرنګه چې تابع افقي مجانب لري، نو مایل مجانب نه لري.

**د مجانبونو د ټاکلو عمومي طریقه**:

که چېرې د $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ په ناطقه تابع کې $m$ او $n$ په ترتیب سره د صورت او مخرج درجې وي، نو:

**الف**: که $m<n$ وي، نو د $x$ محور افقي مجانب دی.

**ب**: که $m=n$ وي، نو $y=b$ افقي مجانب دی، داسې چې $b$ د $m$ او $n$ د درجو د حدودو د ضریبونو نسبت دی.

**ج**: که چېرې $m>n$ وي، نو افقي مجانب نه لري، ولې د مایل مجانب احتمال یې شته.

**د**: که چېرې $m=n+1$ وي(که د صورت درجه د یوه واحد په اندازه له مخرج څخه لویه وي) تابع هرو مرو مایل مجانب لري، په دې حالت کې افقي مجانب نه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

## پوښتنې

د لاندې توابعو مجانبونه وټاکئ.

1) $f(x)=\dfrac{3x-6}{x^2-x-2}$

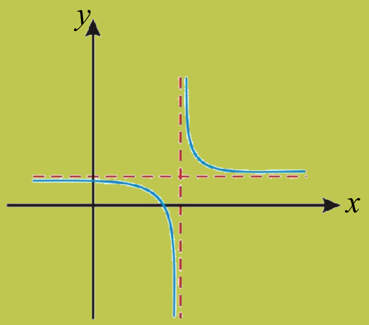
2) $f(x)=\dfrac{-2x^2}{x^2+1}$

3) $f(x)=\dfrac{8}{x^2-4}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

## د هوموګرافیک تابع ګانو ګراف

شکل ته پاملرنه وکړئ دا شکل د څه ډول تابع ګراف دی؟ افقي او عمودي مجانبونه یې وښیئ.



- هوموګرافیک تابع څه ډول تابع ده، په یوه مثال کې یې واضح کړئ.
- د $y=\frac{1}{x}$ د تابع ګراف رسم کړئ.
- د نوموړي تابع مجانبونه لومړی پیدا او بیا یې رسم کړئ.
- د تابع د ګراف تقاطع د $x$ او $y$ له محورونو سره پیدا کړئ.

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

هغه تابعګانې چې د $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ شکل ولري، هوموګرافیک تابع ګانې بلل کیږي، داسې چې $c\neq 0$ وي. دا ډول توابع دوه مجانبونه لري چې:

1- افقي مجانب یې:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{ax}{x}+\frac{b}{x}}{\frac{cx}{x}+\frac{d}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{a+\frac{b}{x}}{c+\frac{d}{x}} \Rightarrow y=\frac{a}{c}$$

2- عمودي(قایم) مجانب یې:

$$cx+d=0 \quad\Rightarrow cx=-d \quad\Rightarrow x=-\frac{d}{c}$$

**لومړی مثال**: د $f(x)=\dfrac{2x-1}{x-3}$ د تابع بدلونونه وڅیړئ او ګراف یې رسم کړئ.

**حل**:

$$x-3=0$$
$$x=3$$

1. څرنګه چې د تابع مخرج د $x=3$ په قیمت کې صفر کیږي، نو تابع پرته له $x=3$ څخه د متحول په ټولو قیمتونو کې معینه ده، یعنې د تابع د تعریف ساحه ټاکو: $Domain=IR\setminus\{3\}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2. د تابع د منحني تقاطع د $x$ له محور سره:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=0 \\ 2x-1=0 \\ 2x=1 \;\Rightarrow\; x=\frac{1}{2} \end{array}\right\} (\frac{1}{2},0)$$

3. د تابع د منحني تقاطع د $y$ له محور سره:

$$\left. x=0 \;\Rightarrow\; f(0)=\frac{2\cdot 0-1}{0-3}=\frac{1}{3} \right\} (0,\frac{1}{3})$$

4. د مجانبونو ټاکل:

**الف**- افقي مجانب: $y=2$ ، $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2x-1}{x-3}=2$ یا $f(x)=\frac{a}{c}=\frac{2}{1}=2$

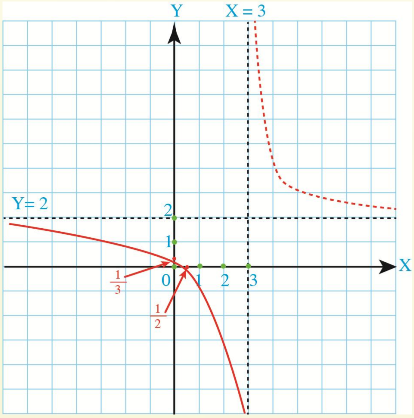
**ب**- عمودي مجانب: $x=3$ $\Rightarrow$ $x-3=0$ یا $x=-\frac{d}{c}=-\frac{-3}{1}=3$

5. د تابع د extreme ټکي پیدا کوو او جدول یې ترتیب اوگراف یې رسموو:

$$f'(x)=\frac{2(x-3)-(2x-1)}{(x-3)^2}=\frac{-5}{(x-3)^2}<0$$

$$f''(x)=\frac{0\cdot(x-3)^2-(-5)\cdot 2(x-3)}{(x-3)^4}=\frac{10(x-3)}{(x-3)^4}=\frac{10}{(x-3)^3}$$

| $x$ | $-\infty$ | 3 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | | $-$ |
| $f''(x)$ | $-$ | | $+$ |
| $f(x)$ | $2 \searrow -\infty$ | نه دی تعریف شوی | $+\infty \searrow 2$ |




**دویم مثال**: د $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$ د تابع د گراف بدلونونه و څېړئ اوگراف یې رسم کړئ.

**حل**: $x+1=0 \;\Rightarrow\; x=-1$

-1 د تابع د تعریف ساحه $D_f \to IR\setminus\{-1\}$ یعني تابع په $x=-1$ ټکي کې تعریف شوې نه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- د تابع د منحني تقاطع د $x$ له محور سره: $y=0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow (1,0)$

3- د تابع د منحني تقاطع د $y$ له محور سره: $x=0 \Rightarrow y=\dfrac{0-1}{0+1}=-1 \Rightarrow y=-1 \Rightarrow (0,-1)$

4- د مجانبونو ټاکل:

**الف**- عمودي مجانب: $x+1=0 \Rightarrow x=-1$

**ب**- افقي مجانب: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x-1}{x+1} \Rightarrow f(x)=y=1$

5- د تابع extreme نقطې پیدا کوو، جدول یې ترتیب او ګراف یې رسموو:

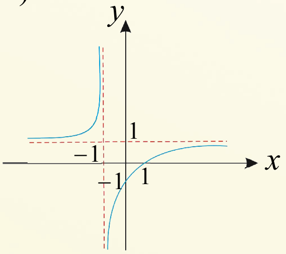
$$f(x)=\frac{x-1}{x+1}$$

$$f'(x)=\frac{1\cdot(x+1)-1\cdot(x-1)}{(x+1)^2}=\frac{x+1-x+1}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}>0$$

$$f''(x)=\frac{0\cdot(x+1)^2-2\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{-4(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{-4}{(x+1)^3}$$

| $x$ | $-\infty$ | |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $+$ |
| $f''(x)$ | $+$ | $-$ |
| $f(x)$ | $1 \nearrow +\infty$ | $-\infty \nearrow 1$ |

نه دی تعریف شوی




**دریم مثال**: غواړو د $f(x)=\dfrac{2x-5}{x}$ تابع ګراف رسم کړو.

**حل**:

1- د تابع د تعریف ساحه تر څېړنې لاندې نیسو لیدل کېږي چې تابع پرته له $x=0$ څخه نور د متحول د ټولو قیمتونو لپاره معینه ده، یعني: $D_f \to IR\setminus\{0\}$

2- د محورونو سره د تقاطع ټکي

**الف**- د $x$ له محور سره تقاطع:

$$f(x)=0 \Rightarrow \frac{2x-5}{x}=0$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x-5=0 \\ 2x=5 \Rightarrow x=\dfrac{5}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow (2.5,0)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

**ب-** د $y$ له محور سره تقاطع: د $x=0$ لپاره د $f(x)$ تابع تعریف شوې نه ده، نو له $y$ محور سره تقاطع نه لري.

3- **مجانبونه**:

**الف-** عمودي مجانب: څرنګه چې په مخرج کې یوازې $x$ موجود دی، نو $x=0$ یې عمودي مجانب دی چې د $y$ محور کېږي.

**ب-** افقي مجانب: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\frac{2x-5}{x}\right] = 2$ نو $y=2$ د تابع افقي مجانب دی.

4- د بحراني ټکو پیدا کول: د بحراني ټکو د پیدا کولو لپاره د تابع لومړی مشتق پیدا کوو

$$f(x) = \frac{2x-5}{x}$$

$$f'(x) = \frac{2\cdot x-(2x-5)}{x^2} = \frac{2x-2x+5}{x^2}$$

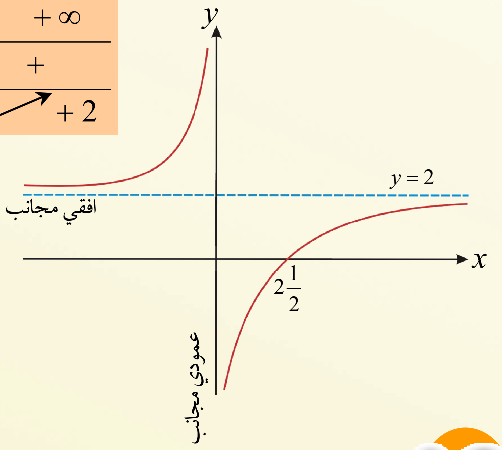
$$f'(x) = \frac{5}{x^2} > 0$$

څرنګه چې $f'(x) > 0$ دی، نو تابع متزایده ده.

د ګراف د رسمولو لپاره د تابع تحولات په جدول کې ترتیبوو:

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2.5$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | ‖ | $+$ | | $+$ |
| $f(x)$ | $2$ | $\nearrow$ $+\infty$ | ‖ | $-\infty$ $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ $+2$ |

نه دی تعریف شوی




## پوښتنې

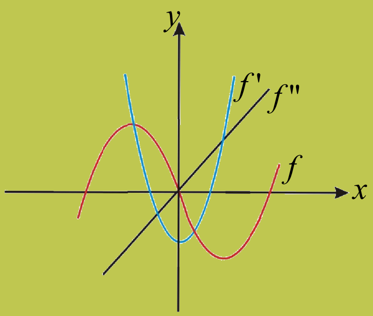
1. د $f(x) = \frac{x-1}{x+3}$ تابع بدلونونه وڅېړئ او رسم یې کړئ.
2. د $f(x) = \frac{x}{x-4}$ تابع بدلونونه وڅېړئ او رسم یې کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

## د دریمې درجې یو مجهوله تابع گراف $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ، $a \neq 0$

مخامخ شکل د ځینو توابعو گرافونه راښیي تاسې د هرې

تابع د گراف په هکله خپل نظر بیان کړئ.



- د $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ تابع په اړه فکر وکړئ او ووایئ چې تابع څومه درجه تابع ده؟
- د نوموړي تابع ضریبونه او ثابت حد ولیکئ.
- د نوموړي تابع دویم مشتق پیدا کړئ.

د پورته فعالیت پایله داسې بیانوو:

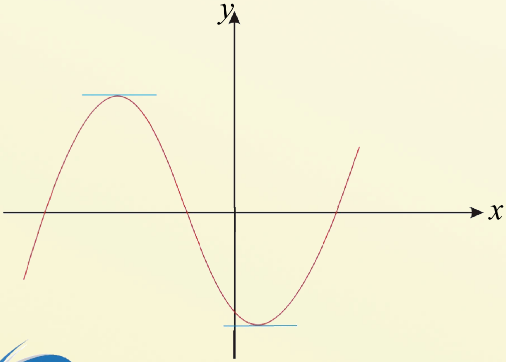
1. د $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ، په دریمه درجه تابع کې چې $a > 0$ وي داسې په پام کې نیسو. که چېرې د تابع لومړی مشتق پیدا کړو دویمه درجه تابع په لاس راځي، نو د $f'(x) = 0$ لپاره د دویمې درجې د معادلې حل په پام کې نیسو او $\Delta$ یې مطالعه کوو که چېرې د معادلې $\Delta$ له صفر څخه لوی $(\Delta f' > 0)$ وي، نو معادله(د تابع مشتق) دوه حله لري، که چېرې $a > 0$ وي منحني له کین لوري څخه ښي لوري ته یوه نسبي اعظمي نقطه (Local Maximum) او یوه نسبي اصغـــــري (Local Minimum) لري.

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$a > 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta f' > 0$

| $x$ | $-\infty$ | $x_1$ | | $x_2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $-\infty$ ↗ | | ↘ | | ↗ $+\infty$ |

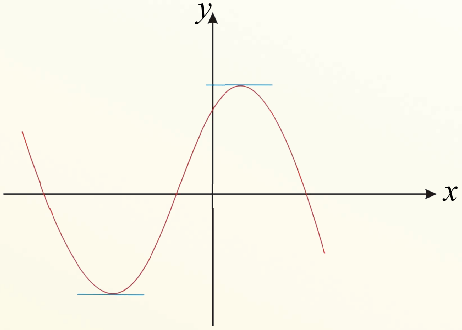


(c) ketabton.com: The Digital Library

2. د $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ، پـه تـابع کـې کـه $a<0$ ، $f'(x)=0$ او $\Delta f'(x)>0$ معادلـه دوه جذرونـه لـري، کـه چـېرې $\Delta f'>0$ نـو منحنـي لـه کـيڼ لـوري خخـه ښـی لـوري تـه يـوه نـسبي اصغری(Local Minimum) او يوه نسبي اعظمي(Local Minimum) نقطه لري.

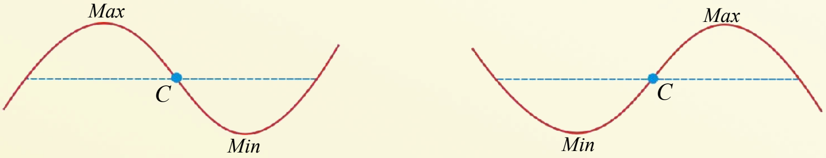
$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$
$$f'(x)=3ax^2+2bx+c$$
$$a<0 \quad \Rightarrow \quad \Delta f'>0$$

| $x$ | | $x_1$ | | $x_2$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ |
| $f(x)$ | $+\infty$ ↘ | | ↗ | | ↘ $-\infty$ |




3. که د دريمې درجې تابع منحني نسبي بحراني Extreme ولري، د Extreme دټکو د منځني ټکي يا د انعطاف د نقطي مختصات يې:

$$I(x_c, y_c)=\left(\frac{x_{\max}+x_{\min}}{2}, \frac{y_{\max}+y_{\min}}{2}\right)$$



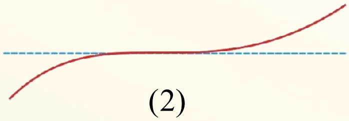

4. د دريمې درجې تابع د تناظر ټکی د تابع د انعطاف ټکی:

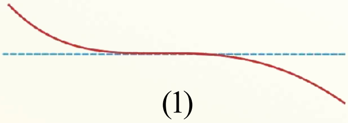
$$f'(x)=0$$
$$3ax^2+2bx+c=0$$

چې د تناظر ټکي يې وروسته د نوموړي معادلې له حل خخه د تناظر مرکز $x=-\dfrac{b}{3a}$ په لاس راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

5. د $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ په تابع کې که $a<0$ وي او له $f'(x)=0$ سره وضع شي او $f'(x)=0$ $\Delta$ نو معادله یو یا دوه مساوي جذرونه لري په هغه صورت کې چې $f'(x)\leq 0$ وي، نو په دې صورت تابع، متناقصه ده او که چېرې $f'(x)\geq 0$ وي، نو په دې صورت کې تابع متزایده ده.


(2)


(1)

**لومړی مثال**: د $f(x)=(x-1)(x+2)^2$ تابع تحولات وڅېړئ او ګراف یې رسم کړئ.

**حل**: لومړی د تابع Extreme ټکو مختصات په لاس راوړو، وروسته د لومړي مشتق په مرسته ګورو چې تابع په کومه برخه کې متزایده او په کومه برخه کې متناقصه ده. له محورونو سره د تقاطع ټکي پیدا کوو او د اعظمي او اصغري نقطو د تشخیص او د انعطاف نقطو د پیداکولو لپاره د تابع دویم مشتق په کار وړو د تحولاتو جدول یې ترتیبوو او بیا یې ګراف رسموو: $f(x)=x^3+3x^2-4$

$f'(x)=3x^2+6x$

$3x^2+6x=0$

$x(3x+6)=0$

$x_1=0 \quad , \quad 3x+6=0 \quad \Rightarrow \quad x_2=-2$

$f'(x)=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=0 \quad , \quad x_2=-2$

$f(0)=0^3+3\cdot 0^2-4=-4$

$f(-2)=(-2)^3+3(-2)^2-4$

$\qquad =-8+12-4=0$

$f''(x)=0 \quad \Rightarrow \quad 6x+6=0$

$6x=-6$

$x=-1$

د انعطاف د نقطې د لاسته راوړلو لپاره $x=-1$ په اصلي تابع کې وضع کوو چې د $f(x)$ قیمت لاسته راځي:

$f(-1)=(-1-1)(-1+2)^2=-2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د انعطاف ټکی: $I(-1,-2)$

له محورونو سره تقاطع:

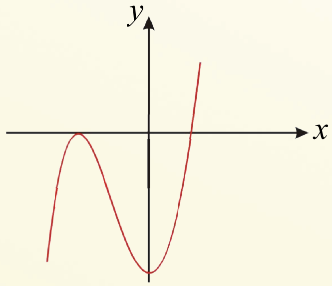
الف- د $x$ له محور سره تقاطع:

$$y = 0$$
$$(x-1)(x+2)^2 = 0$$
$$\left.\begin{matrix} x-1=0 \\ x=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} (x+2)^2=0 \\ x+2=0 \\ x_2=-2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (1,0) \;,\; (-2,0)$$

ب- د $y$ له محور سره تقاطع:

$$x = 0$$
$$y = 0^3 + 3\cdot 0^2 - 4 = -4 \quad \Rightarrow (0,-4)$$

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | | $-1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | | − | | − | | + |
| $f''(x)$ | | − | | − | | + | | + |
| $f(x)$ | $-\infty$ ↗ | $0$ | ↘ | $-2$ | ↘ | $-4$ | ↗ | $+\infty$ |
| | | max | | | | min | | |




**دويم مثال**: د $f(x) = -x^3 + 3x^2$ د تابع تحولات وڅيړئ او ګراف يې رسم کړئ.

**حل**: د تابع لومړی مشتق پيدا کوو او وروسته يې صفري نقطې ټاکو او د تابع اعظمي او اصغري نقطې په لاس راوړو.

-1

$$f(x) = -x^3 + 3x^2$$
$$f'(x) = -3x^2 + 6x$$
$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \; -3x^2 + 6x = 0 \quad \Rightarrow \; x(-3x+6) = 0$$
$$x_1 = 0 \quad , \quad -3x + 6 = 0 \quad \Rightarrow \; -3x = -6 \quad \Rightarrow \; x_2 = 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اعظمي او اصغري ټکي عبارت دي له:

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = -0^3 + 3\cdot 0^2 = 0 \\ f(2) = -2^3 + 3\cdot 2^2 = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow (0,0)\ ,\quad (2,4)$$

2- محورونو سره تقاطع:

الف- د $x$ له محور سره تقاطع:

$$\left.\begin{array}{l} y = 0 \\ -x^3 + 3x^2 = 0 \\ x^2(-x+3) = 0 \\ x_1 = 0 \quad , \quad -x+3 = 0 \\ \qquad\qquad x_2 = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow (0,0)\quad ,\quad (3,0)$$

ب- د $y$ له محور سره تقاطع:

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ f(x) = -0^3 + 3\cdot 0^2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (0,0)$$

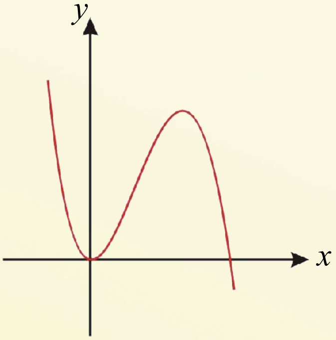
3- د انعطاف د نقطې د پیداکولو لپاره $f''(x)$ مطالعه کوو:

$$f''(x) = -6x + 6 = 0$$
$$x = 1$$
$$f(x) = -x^3 + 3x^2$$
$$f(1) = 2 \quad \Rightarrow \quad I(1,\ 2)$$

4- اوس یې جدول ترتیبوو او ګراف یې رسموو:

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $-$ | |
| $f''(x)$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | |
| $f(x)$ | | $+\infty$ ↘ | $0$ | ↗ | | ↗ | $4$ | ↘ $-\infty$ | |
| $f(x)$ | | ∪ | | ∪ | | ∩ | | ∩ | |

*Min* نسبي    *Max* نسبي



(c) ketabton.com: The Digital Library

**دریم مثال**: د $f(x)=x^3-3x^2+x+1$ د تابع د تناظر د مرکز مختصات پیدا کړئ.

**حل**: پوهیږو چې د تناظر مرکز د $x=\dfrac{-b}{3a}$ له رابطې څخه لاسته راځي، نو:

$$x=\frac{-b}{3a}=\frac{-(-3)}{3\cdot 1}=1 \quad \Rightarrow \quad f(1)=1^3-3(1)^2+1+1=0$$

$C(1,0)$ د تناظر د مرکز مختصات

## پوښتنې

1. د لاندې تابع ګانو د تحولاتو جدول ترتیب او ګرافونه یې رسم کړئ.

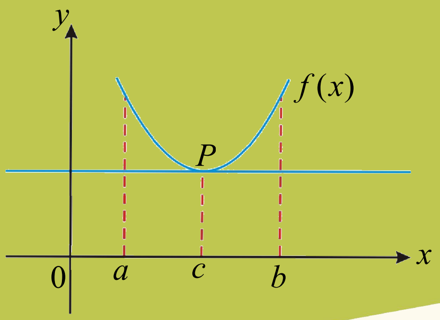
$a)\ f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x^2+x+1 \quad , \quad b)\ f(x)=-(x-1)^3$

2- د $f(x)=-2x^2+6x-3$ د تناظر د مرکز مختصات پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

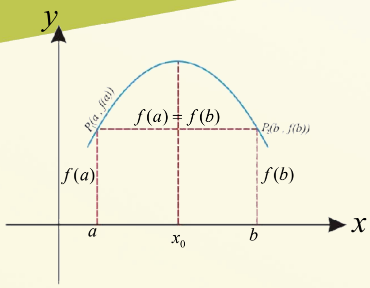
## د رول قضیه

### *Rolle Theorem*



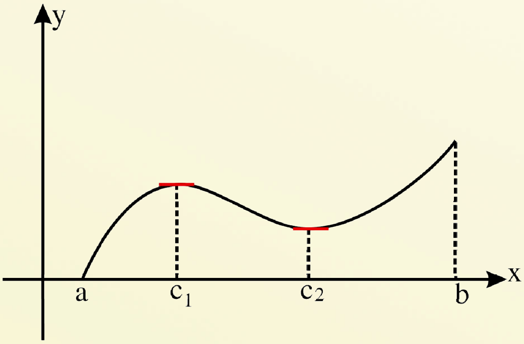

په مخامخ شکل کې د $f(x)$ تابع او د $\Delta$ مستقیم خط یو له بل سره څه اړیکې لري او $f'(c)$ له څه سره مساوي دی.

### فعالیت




- په مخامخ شکل کې د $(a,b)$ په انټروال کې د $f(x)$ په منحني باندې داسې ټکئ یا ټکي شته چې له هغو څخه په منحني داسې مماس رسم شي چې د $x$ له محور سره موازي وي.
- د $f(x)$ تابع په کوم انټروال کې متمادي او په کومه فاصله کې د مشتق وړده.
- که چېرې $f(a) = f(b)$ وي، نو د $x_0$ ټکي په $(a,b)$ انټروال کې وڅېړئ.

له پورتني فعالیت څخه لاندې قضیه بیانولای شو:




**قضیه**: که چېرې د $f(x)$ تابع د $a \le x \le b$ په انټروال کې متمادي او د $a < x < b$ په انټروال کې د مشتق وړ وي او $f(a) = f(b)$ وي، نو لږ تر لږه د $x_0$ یو ټکی په $a < x_0 < b$ انټروال کې شته چې د $f'(x_0) = 0$ شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

**ثبوت**: خرنگه چې د $f(x)$ تابع په ورکړل شوی انټروال کې متمادي او د مشتق وړ ده، نو بحراني Extreme ټکی لري.

1- که $f(x)=c$ ثابته تابع وي، نو واضح ده چې $f'(x)=0$ ده.

2- که د $f(x)$ تابع ثابته نه وي، او $x_2,x_1\in(a,b)$ او $f(x_1)>0$ وي، نو تابع په $x_0\in[a,b]$ کې یو Maximum قیمت لري چې $f(x_0)\geq f(x_1)>0$ شي او همدا راز که $f(x_2)<0$ وي، نو تابع یو اصغري Minimum قیمت لري.

خرنگه چې په Extreme نقطوکې د تابع مشتق صفر دی، نو $f'(x_0)=0$ کېږي.

**لومړی مثال**: د رول قضیه د $f(x)=\cos x$ د تابع لپاره په $[a,b]=[\pi,5\pi]$ فاصله کې تطبیق کړئ.

**حل**: خرنگه چې $f(\pi)=f(5\pi)=-1$ سره دی، نو د $f(x)$ تابع د هره $x$ لپاره د مشتق وړ ده، نو د $(\pi,5\pi)$ په انټروال کې متمادي او په $(\pi,5\pi)$ په انټروال کې مشتق منونکی ده چې د Rolle د قضیې مطابق په $(\pi,5\pi)$ کې لږ تر لږه یو $x_0$ موجود دی چې د هغه قیمت لپاره $(\cos x)'=0$ شي. خرنگه چې $(\cos x)'=-\sin x$ دی، نو باید $-\sin x=0$ معادلې لږ تر لږه یو حل په $(\pi,5\pi)$ کې موجود وي.

$-\sin x=0\Rightarrow\sin x=0$ دا معادله په $(\pi,5\pi)$ کې درې حله $4\pi,3\pi,2\pi$ قیمتونه اخیستلای شي.

**دویم مثال**: د رول قضیه د $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ تابع په $[a,b]=[-1,1]$ فاصله کې تطبیق کړئ.

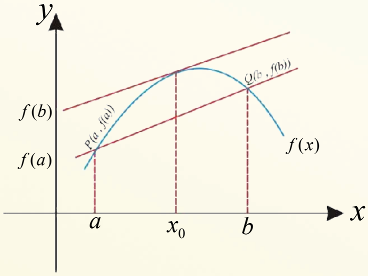
**حل**: لیدل کېږي چې تابع د پیل او پای په ټکو کې د مشتق وړ نه ده، ولې د رول د قضیې د تطبیق وړ ده ځکه $f(-1)=f(1)=0$ دی $f(0)$ تابع په $[-1,1]$ کې متمادي ده او په $[-1,1]$ کې د $x_0$ یو عدد شته چې $f'(x_0)=0$ شي او هغه $x_0=0$ دی.

د $y'(x)=\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u}}$ فورمول څخه په ګټه اخیستنې سره مشتق په لاس راوړو:

$$f'(x)=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\quad\Rightarrow\quad f'(0)=\frac{0}{\sqrt{1-0^2}}=0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

## د متوسط قیمت قضیه(لاگرانژقضیه):




مخامخ شکل په پام کې و نیسئ:

- د یوې مستقیمې کرښې میل له کومې رابطې څخه په لاس راځي؟
- د $\overline{PQ}$ د مستقیمې کرښې میل پیدا کړئ.
- د $\overline{PQ}$ د کرښې میل د $f(x)$ د تابع له مشتق سره څه اړیکه لري؟

له پورتني فعالیت څخه قضیه داسې بیانوو:

**قضیه**: که چېرې $f(x)$ د $[a,b]$ په فاصله کې متمادي او د $(a,b)$ په فاصله کې د مشتق وړ وي د $(a,b)$ له انټروال څخه د $c$ یو عدد شته دی داسې چې: $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$

یعنې: $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ دی.

**ثبوت**: یوه مرستندویه تابع په پام کې نیسو، لیدل کېږي چې:

$$g(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot x$$

$$g(a)=f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot a=\frac{f(a)b-f(b)a}{b-a}\quad\text{......... I}$$

$$g(b)=f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot b=\frac{f(a)b-f(b)a}{b-a}\quad\text{......... II}$$

نو $g(a)=g(b)$ سره دی د رول د قضیې پر بنسټ سره د $c$ عدد د $(a,b)$ انټروال کې شته دی چې $g'(c)=0$ دی، نو:

$$g'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\Rightarrow g'(x)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0\qquad\Rightarrow f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\Rightarrow f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

**مثال**: د $f(x)=2x^3-8x+1$ په تابع کې د متوسط قيمت قضيه په $[a,b]=[1,3]$ کې وڅيړئ.

**حل**: ليدل کېږي چې د $f(x)$ تابع په $[1,3]$ کې متمادي او په $(1,3)$ کې د مشتق وړ ده، نو د متوسط قيمت له قضيې سره سم په $(1,3)$ کې يو $x_0$ شته داسې چې:

$$f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{36}{2}=18$$

د c د پيداکولو لپاره لرو:

$$f'(x_0)=6x^2-8=18 \Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{26}{6}}$$

څرنګه چې $x=\sqrt{\frac{26}{6}}$ په $(1,3)$ کې ګډون لري، نو $x_0=\sqrt{\frac{13}{3}}$ دی.

او $x=-\sqrt{\frac{26}{6}}$ په $(1,3)$ فاصله کې واقع نه ده، نو د قبول وړ نه ده.

## پوښتنې

1- که چېرې د $f(x)=\sqrt{x(4-1)}$ تابع د $[0,4]$ په انټروال کې راکړل شوې وي د $x_0$ قيمت داسې پيدا کړئ چې د رول قضيه په پورتني تابع کې صدق وکړي.

2- که د $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x$ تابع راکړل شوې وي د $x_0$ قيمت د $[0,3]$ په فاصله کې داسې وټاکئ چې د رول قضيه په هغې کې صدق وکړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

## 3- د هوپيتال قاعده (L' Hopitall)

مخامخ مساوات څه بيانوي؟

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- د $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$ د تابع لیمیټ په هغه صورت کی پیدا کړئ چې $x\to 1$ ته تقرب وکړي.
- د پورتني تابع د صورت او مخرج مشتق پیدا او د تابع له لیمیټ سره یې پرتله کړئ.
- د $f(x)=\dfrac{3x^4-3x^2-4x-1}{2x^2-4x^3+2x^4}$ د تابع لیمیټ په هغه صورت کې پیدا کړئ چې $x\to\infty$ تقرب وکړي.
- د پورتني تابع د صورت او مخرج مشتق پیدا او د تابع له لیمیټ سره یې پرتله کړئ.

له پورتني فعالیت څخه دا قاعده بیانوو:

**د هوپیتال قاعده:**

که د $f(x)$ او $g(x)$ تابع گانې د $(a,b)$ په انټروال کې تعریف او د مشتق وړ وي.

که چیرې $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ د لیمیټ نسبت $x\to a$ قیمت کې د $\dfrac{0}{0}$ مبهم شکل او په $x\to\infty$ کې د $\dfrac{\infty}{\infty}$ شکل ونیسي. په دې حالت کې د تابع د لیمیټ د پیدا کولو لپاره د $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ مشتق پیدا کوو او په هغه کې قیمتونه وضع کوو که بیاهم د تابع شکل مبهم وي، مشتق نیولو ته ادامه ورکوو تر څو د ابهام شکل ختم شي د مثال په ډول:

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2+x-10}{x^2-4}=\frac{2\cdot 2^2+2-10}{2^2-4}=\frac{0}{0}$$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{4x+1}{2x}=\frac{4\cdot 2+1}{2\cdot 2}=\frac{9}{4}$$

یا

$$\lim_{x\to 2}\frac{(2x+5)(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{2x+5}{x+2}=\frac{2\cdot 2+5}{2+2}=\frac{9}{4}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

**مثال**: د لوپیتال له قاعدې څخه په ګټه اخیستنې سره د لاندې توابعو لېمیټونه پیدا کړئ.

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{x+\sin 2x}{x-\sin 2x} \qquad 2)\ \lim_{x\to 3}\frac{x^4-81}{x-3} \qquad 3)\ \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-4x+6}{7x^2-2x+1}$$

**لومړی ځواب:**

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin 2x}{x-\sin 2x}=\frac{0+\sin 2\cdot 0}{0-\sin 2\cdot 0}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+\sin 2x)'}{(x-\sin 2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1+2\cos 2x}{1-2\cos 2x}=\frac{1+2}{1-2}=-3$$

**دویم ځواب:**

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^4-81}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{3^4-81}{3-3}=\frac{81-81}{3-3}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x^4-81)'}{(x-3)'}=\lim_{x\to 3}\frac{4x^3}{1}=\frac{4\cdot 3^3}{1}=108$$

**دریم ځواب:**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-4x+6}{7x^2-2x+1}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(3x^2-4x+6)'}{(7x^2-2x+1)'}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x-4}{14x-2}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(6x-4)'}{(14x-2)'}=\frac{6}{14}=\frac{3}{7}$$

**پوښتنې**

د لوپیتال له قاعدې څخه په ګټه اخیستنې سره لاندې لېمیټونه پیدا کړئ.

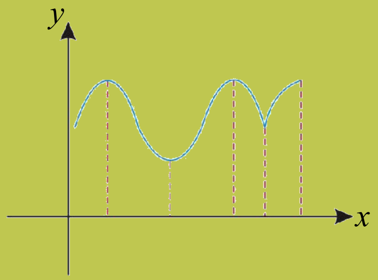
$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \quad , \quad b)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^5-1}{x^3-1}$$

$$c)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^3} \quad , \quad d)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^5}{3x^3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

## د بحراني ټکو تطبيق

په مخامخ شکل کې تر ټولو لوړ ټکی او تر ټولو ټيټ ټکی وښيئ او دا ټکی د څه په نامه يادېږي.




مثالونه:

1مثال- دوه عددونه پيدا کړئ چې مجموعه يې 20 او د ضرب حاصل يې لوی ممکن قيمت ولري.

**حل**: که لومړی عدد ته $x$ ووېل شي، نو دويم عدد $20-x$ دی او د ضرب حاصل يې د تابع په شکل داسې: $f(x)=x(20-x)$ ليکو، څرنگه چې د $x$ عدد په $[0,20]$ انټروال کې تحول کوي، نو د تابع مطلق اعظمي قيمت په $[0,20]$ کې لټوو:

$$f(x)=20x-x^2$$
$$f'(x)=0$$
$$20-2x=0$$
$$-2x=-20$$
$$x=10$$
$$f(10)=20\cdot 10-10^2=200-100=100$$
$$f(0)=20\cdot 0-0^2=0$$
$$f(20)=20\cdot 20-20^2=400-400=0$$

ليدل کېږي چې (10 ، 100) د تابع اعظمي نقطه ده، نو مطلوب عددونه $x_1=10$ او $x_2=10$ چې د ضرب حاصل يې 100 دی.

2 مثال- د يوه خوځنده جسم د حرکت معادله د $x=(t-2)(t-3)$ په بڼه راکړل شوې ده، د جسم متوسط سرعت د $t_1=3$ او $t_2=4$ د وخت په واټنو کې پيدا کړئ.

**حل**: د منحني سرعت د تعريف په مرسته ليکلای شو چې:

$$\text{منحنی سرعت}=\frac{x_{(t_2)}-x_{(t_1)}}{t_2-t_1}=\frac{x_{(4)}-x_{(3)}}{4-3}=\frac{2-0}{4-3}=2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

3مثال- د کرې د حجم او سطحې د مشتقونو تر منځ منځنۍ نسبت پیدا کړئ.

**حل**:

$$\text{د کرې حجم} = v_{(x)} = \frac{4}{3}\pi x^3 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{4}{3}\pi \cdot 3x^2 = 4\pi x^2$$

$$\text{د کرې مساحت} = S_{(x)} = 4\pi x^2 \Rightarrow \frac{ds}{dx} = 4\pi \cdot 2x = 8\pi x$$

$$\frac{dv}{ds} = \frac{4\pi x^2}{8\pi x} \Rightarrow \frac{dv}{ds} = \frac{1}{2}x$$

4مثال- د سانتي گراد(C) او فارنهایت (F) د حرارت تر منځ $C = \frac{5}{9}(F-32)$ اړیکه شته، تاسي د (C) او (F) تر منځ منځنۍ نسبت وټاکئ.

**حل**: د منځنۍ سرعت د تعریف $(V_m = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x})$ په مرسته لیکلای شو:

$$\frac{\Delta C}{\Delta F} = \frac{C(F+\Delta F)-C(F)}{\Delta F} = \frac{\frac{5}{9}(F+\Delta F-32)-\frac{5}{9}(F-32)}{\Delta F} = \frac{5}{9}$$

5مثال- یوه ځمکه چې مستطیلي شکل لري، محیط یې $200m$ دی، کېدای شي اعظمي Maximum مساحت یې پیدا کړئ.

**حل**: په ورکړل شوي محیط سره کولای شو، ډېر مستطیلونه رسم کړو، ولې شرط دا دی چې هغه مستطیل زموږ مطلوب دی چې مساحت یې تر ټولو زیات وي، نو که د مستطیل اوږدوالی په $x$ او سور یې په $y$ وښیو، نو لیکلای شو:

$$\text{میحط} = 2x + 2y = 200$$

$$\text{میحط} = x + y = 100 \quad \Rightarrow y = 100 - x$$

$$\text{مساحت} = x \cdot y$$

$$S = x(100-x) = 100x - x^2 \quad , \quad D_s = IR$$

$$x > 0 \quad , \quad y > 0 \Rightarrow 100 - x > 0 \quad \Rightarrow x < 100$$

اوس د $S = 100x - x^2$ په تابع کې $0 < x < 100$ انتروال کې د تابع اعظمي مساحت داسې پیدا کوو:

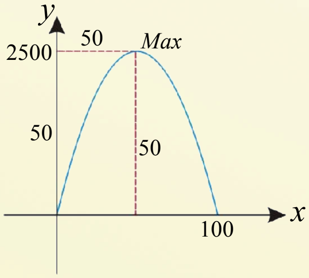
$$S' = 100 - 2x$$

$$S' = 0 \Rightarrow 100 - 2x = 0 \quad \Rightarrow x = 50 \quad \Rightarrow S_{(50)} = 2500$$

$$\lim_{x\to 0^+} S(x) = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} S(x) = 0$$

| $x$ | 0 | 50 | 100 |
|---|---|---|---|
| $S'$ | + | 0 | − |
| $S$ | 0 ↗ | 2500 | ↘ 0 |



(c) ketabton.com: The Digital Library

په پایله کې له شکل څخه هم لیدل کېږي چې تر ټولو لوی مساحت هغه وخت لاسته راځي چې د مستطیل طول 50 واحده وي، نو مساحت 2500 واحد مربع کېږي.

6مثال- که د دوو عددونو مجموعه 200 وي، هغه عددونه داسې وټاکئ چې د مربعاتو مجموعه یې اصغري شي.

**حل**: که چېرې دا عددونه x او y وي، نو $x + y = 200$ او که $x$ ، $x^2 + y^2 = T_{(x)}$ فرض کړو، نو:

$$T_{(x)} = x^2 + y^2$$
$$= x^2 + (200 - x)^2$$
$$= x^2 + x^2 - 400x + (200)^2$$
$$= 2x^2 - 400x + 40000$$
$$T'_{(x)} = 4x - 400$$
$$T'_{(x)} = 0$$
$$4x - 400 = 0$$
$$x = 100$$

په پایله کې ویلای شو چې د مربعاتو تر ټولو کوچنۍ مجموعه عبارت ده له: $T_{(100)} = 20000$

7مثال- د A ټکی د $y = \dfrac{2}{x}$ د منحني له پاسه حرکت کوي، تر ټولو کوچنۍ انټروال د A د نقطې او د مختصاتو د مبدې ترمنځ لاسته راوړو.

**حل**: د $y = \dfrac{2}{x}$ د تابع منحني پر مخ د A د نقطې مختصات $A(x, \dfrac{2}{x})$ دي، نو:

$$\overline{OA} = \sqrt{x^2{}_{(A)} + y^2{}_{(A)}} = \sqrt{x^2 + \frac{4}{x^2}}$$
$$\overline{OA}^2 = x^2 + \frac{4}{x^2} = d^2 \Rightarrow d'_{(x)} = (x^2)' + (\frac{4}{x^2})' = 2x - \frac{8x}{x^4} = 2x - \frac{8}{x^3}$$
$$d'_{(x)} = \frac{2x^4 - 8}{x^3}$$
$$d'_{(x)} = 0$$
$$2x^4 = 8$$
$$x_1 = \sqrt{2} \quad , \quad x_2 = -\sqrt{2}$$
$$d_{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 + \frac{4}{(\sqrt{2})^2} = 2 + \frac{4}{2} = \frac{8}{2} = 4$$
$$d_{-\sqrt{2}} = 4$$

په پایله کې تر ټولو کوچنۍ فاصله له مبدا څخه 2 واحده ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

8مثال- یو مکعب مستطیل چې قاعده یې مربع ده، په پام کې نیسو، که د دریو واړو بعدونو مجموعه 24 وي، د مکعب تر ټولو لوی حجم پیدا کړئ.

**حل**: که د مکعب مستطیل د قاعدې ضلعې ته x او جګوالي ته یې $y$ ووېل شي، نو:

$$x + x + y = 24 \Rightarrow y = 24 - 2x$$

ځرنګه چې $y \geq 0$ دی، نو $0 \leq x \leq 12$ کېږي او د مکعب مستطیل حجم عبارت دي له:

$$V = x^2 \cdot y \Rightarrow V = x^2(24 - 2x) = 24x^2 - 2x^3$$

$V = 24x^2 - 2x^3$

$V'(x) = 48x - 6x^2$

$V'(x) = 0$

$48x - 6x^2 = 0$

$x(48 - 6x) = 0$

$x_1 = 0$

$48 - 6x = 0$

$-6x = -48$

$x = 8$

$V(0) = 24 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0^3$

$= 0 - 0 = 0$

$V'(0) = 0$

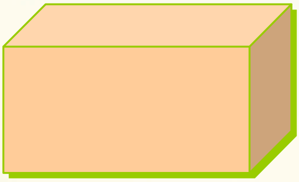
$V(8) = 24 \cdot (8)^2 - 2 \cdot (8)^3$

$= 1536 - 1024 = 512$

$V(8) = 512$

$V(12) = 24 \cdot (12)^2 - 2 \cdot (12)^3 = 3456 - 3456 = 0$

$V(12) = 0$



نو د مکعب مستطیل تر ټولو لوی حجم $512cm^3$ دی.

## پوښتنې

1- د $y = x^3 + x^2 + x + 1$ د تابع تحولات پیدا او منحنې یې رسم کړئ.

2- که د اوسپنې له یوې تختې څخه چې هره ضلع یې $1m$ طول لري یو سر خلاص بکس جوړېږي. د هغه له څلورو کنجونو څخه څلور مساوي مربع ګانې پرې کړئ او بیا هغه قات کړئ کوچنی مربع ګانې په کومه اندازه پرې شي چې نوموړی بکس ممکن اعظمي حجم ولري.

3- د $y = x^2$ ګراف ته ډېره نژدې نقطه له $A(3,0)$ نقطې سره پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

## د خبرکي مهم ټکي

- د $f(x)$ یوه تابع هغه وخت متزایده بلل کېږي چې د $[a,b]$ په انټروال کې متمادی او په $(a,b)$ خلاص انټروال کې د مشتق وړ او $f'(x)>0$ .
- د $f(x)$ یوه تابع هغه وخت متناقصه بلل کېږي چې د $[a,b]$ په انټروال کې متمادي او په $(a,b)$ خلاص انټروال کې د مشتق وړ او $f'(x)<0$ .
- د تابع له تزاید څخه مطلب دا دی چې د $x$ د متحول په زیاتېدو سره د تابع قیمت زیات او د تابع له تناقص څخه مطلب دا دی چې د $x$ متحول په زیاتېدو سره د تابع قیمت کم شي.
- په یوه تابع کې تر ټولو لوړې نقطې ته مطلق اعظمي(Absolute Maximum) او تر ټولو ټیټې نقطې ته مطلق اصغري(Absolute Minimum) وايي، د $x$ هغه قیمتونه چې د هغوی لپاره تابع یا اعظمي او یا اصغري قیمتونه اخلي د Extreme په نامه یادېږي.
- مطلق Maximum: د $(x_0, f(x_0))$ نقطه مطلقه اعظمي بلل کېږي، که چېرې د $f(x)$ د تعریف په ساحه کې د هر $x$ لپاره $f(x)\le f(x_0)$ وي، نو $f(x_0)$ ته مطلقه اعظمي وايي.
- مطلق Minimum: د $(x_0, f(x_0))$ نقطه مطلقه اصغري بلل کېږي، که چېرې د $f(x)$ د تعریف په ساحه کې د هر $x$ لپاره $f(x)\ge f(x_0)$ وي، نو $f(x_0)$ ته مطلقه اصغري وايي.
- د $y=f(x)$ د تابع منحني په یوه انټروال کې محدب بلل کېږي، که چېرې په دې انټروال کې په منحني مماس رسم شي، نو مماس د منحني پورته خواته پروت وي او د تابع دویم مشتق منفي په لاس راځي.
- د $y=f(x)$ د تابع منحني په یوه انټروال کې مقعر بلل کېږي، که چېرې په نوموړي انټروال کې په منحني مماس رسم شي، نو مماس د منحني ښکته خوا پروت وي، او د تابع دویم مشتق مثبت په لاس راځي.
- هغه ټکی چې د تابع له مقعریت څخه محدبیت ته او یا برعکس خپل لوری بدلوي، د انعطاف(Inflection) ټکی بلل کېږي.
- هغه تابع ګاني چې د $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ بڼه ولري، د هوموګرافیک تابع ګانو په نامه یادېږي، په دې شرط چې $c\neq 0$ وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- که چیرې د $f(x)$ تابع د $a \le x \le b$ په انټروال کې متمادي او د $a < x < b$ په انټروال کې د مشتق وړ او $f(a) = f(b)$ وي، نو لږ ترلږه د $x_0$ یو ټکی په $a < x0 < b$ په انټروال کې شته چې $f'(x_0) = 0$ دی، دا قضیه د رول د قضیې په نامه یادېږي.
- که چیرې $f(x)$ په $[a,b]$ فاصله کې متمادي او د $(a,b)$ په خلاصه فاصله کې د مشتق وړ وي د $x_0$ یو عدد د $a$ او $b$ ترمنځ شته چې $f'(x_0) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ دی دا د متوسط قیمت قضیه بلل کېږي.

**د هوپیتال قاعده:**

که د $f(x)$ او $g(x)$ تابع ګانې د $(a,b)$ په انټروال کې تعریف او د مشتق وړ وي.

که چیرې $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ د لیمیټ نسبت کله چې $x \to a$ د $\dfrac{0}{0}$ مبهم شکل او په هغه صورت کې چې $x \to \infty$ کې د $\dfrac{\infty}{\infty}$ شکل ونیسي په دې حالت کې د تابع د لیمیټ د پیداکولو لپاره د $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ لیمیت پیدا کوو او په هغه کې قیمتونه وضع کوو که بیاهم د تابع شکل مبهم وي، مشتق نیولو ته دوام ورکوو ... تر څو د ابهام شکل ختم شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

## د دريم څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتنو ته څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، سم ځواب په نښه کړئ:

1 – که یوه تابع په $[a,b]$ انتروال کې متمادی او د مشتق وړ وي، نو هغه وخت متزايد ده چې :

$a)\ f'(x)=0$ $b)\ f'(x)<0$ $c)\ f'(x)>0$ $d)\ f'(x)\geq 0$

2- په یوه تابع کې تر ټولو لوړې نقطې ته:

$a)$ Absolute Minimum وايي $b)$ Infliction وايي $c)$ Absolute Maximum وايي $d)$ هېڅ يو

3- د $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+2x}$ په تابع کې د Extreme ټکی عبارت دی له:

$a)$ دوه ټکي $b)$ يو ټکی $c)$ درې ټکي $d)$ نه لري

4 – هغه ټکی چې تابع له مقعریت څخه محدبیت ته بدلوي:

$a)$ د اعظمی ټکی دی $b)$ دانعطاف ټکی دی $c)$ اصغري ټکی دی $d)$ هېڅ يو

5- د $f(x)=ax^2+bx+c$ د تابع د تعریف ساحه عبارت له :

$a)\ (-\infty\ ,+\infty)$ $b)\ (-\infty\ ,0)$ $c)\ (0,-\infty)$ $d)$ هېڅ يو

6- د $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+2}$ تابع عمودي مجانب عبارت دی له:

$a)\ x=1$ $b)\ x=2$ $c)\ x=-1$ $d)\ x=-2$

7- د هوموګرافيک تابع عمودي مجانب عبارت دی له:

$a)\ y=\dfrac{a}{c}$ $b)\ x=-\dfrac{d}{c}$ $c)\ y=\dfrac{c}{a}$ $d)\ y=-\dfrac{c}{d}$

8- د $g(x)=\dfrac{4x^2-6x}{x^2-4}$ تابع افقي مجانب عبارت دی له:

$a)\ 4$ $b)\ 6$ $c)\ -6$ $d)\ -4$

9- لاندې کومه الجبري اریکه حقیقت لري:

$a)\ \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ $b)\ \lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f'(x)$ $c)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ $d)$ هېڅ يو

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې پوښتنې ځواب کړئ:

1. د $f(x)=x^2-x$ د تابع د منحني میل د $P(3,0)$ په ټکي کې پیدا کړئ.

2. د $f(x)=-x^2$ په تابع کې د $[3,4]$ په انټروال کې د منحني د بدلون ټکي پیدا کړئ.

3. د نیوټن د خارج قسمت په مرسته د لاندنیو تابع ګانو مشتق پیدا کړئ.

1) $f(x)=2x$  2) $f(x)=3x^2-1$  3) $f(x)=\sqrt{2}x$

4. د لاندنیو تابع ګانو په ورکړل شوو نقطو کې مشتق پیدا کړئ.

1) $f(x)=2x-1$ , $x_0=-1$  2) $f(x)=x^2$ , $x_0=2$

5. د لاندې تابع ګانو مشتق پیدا کړئ.

1) $f(x)=2x-4x^2$  2) $f(x)=3x^3-1$

6. په ورکړل شوو ټکو کې د تابع ګانو مشتق محاسبه کړئ.

1) $f(x)=7x^2-3x$ , $x_0=-1$

2) $f(x)=6x^2-2x-1$ , $x_0=\dfrac{1}{2}$

7. د $f(x)=3x^5-4x^2-3x$ د تابع څلور ځلې مشتق ونیسئ او د هغې ګراف رسم کړئ.

8. د لاندې تابع ګانو مشتق پیدا کړئ.

1) $f(x)=x^3\sec x$  2) $f(x)=\sin(3x-1)$  3) $f(x)=\cos^2 2x$

9. کوم مثبت عدد دی چې د خپل معکوس سره جمع شي د جمعې حاصل یې تر ټولو کوچنی شي؟

10. د $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$ تابع ګراف رسم کړئ.

11. د $f(x)=\dfrac{4x^2}{x^2+1}$ تابع ګراف رسم کړئ.

12. د $f(x)=\sin x$ مثلثاتي تابع ګراف رسم کړئ.

13. د $f(x)=\tan x$ مثلثاتي تابع ګراف رسم کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

# څلورم څپرکی

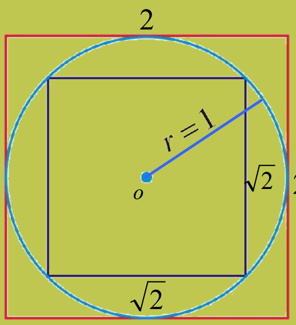
# انتیګرال

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

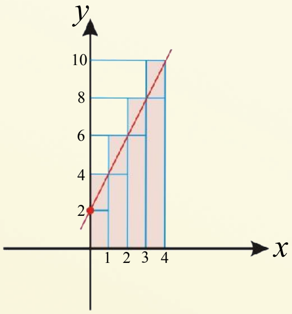
## د ريمان مجموعه

## *Riemann's Sum*




په مخامخ شکل کې چې که د دايرې شعاع يو واحد ده، د دايرې د محيطي او محاطي څلور ضلعي ګانو مساحت حساب کړئ او وواياست چې ددې دايرې مساحت له مخامخ څلور ضلعي ګانو له مساحت سره څه اړيکه لري؟

### فعاليت




- هغه مساحت چې د $x$ د محور او $f(x)=2x+2$ د تابع د ګراف په منځ کې د$[0,4]$ په انټروال کې محصور شوی دی، خط خط کړئ.
- د $y=2x+2$ تابع په ګراف کې د څلورو لاندينيو او پورتنيو مستطيلونو مساحتونه چې په شکل کې ښودل شوي دي، پيدا کړئ.
- د پورتنيو مستطيلونو د مساحت مجموعه او د لاندينيو مستطيلونو د مساحت مجموعه د تابع د ګراف د لاندينې مساحت سره په ورکړ شوي واټن کې څه اړيکه لري؟
- د پورته په څېر فعاليت د اتو مساوي لاندينيو مستطيلونو او د اتو مساوي پورتنيو مستطيلونو لپاره تکرار کړئ او پايله يې د ګراف د لاندې مساحت سره په نوموړي واټن کې پرتله کړئ.
- که چېرې د پورتنيو مستطيلونو د مساحتونو مجموعه او لاندينيو مستطيلونو[1] د جوړولو لپاره د تابع په ګراف کې د فاصلې وېش زيات کړو د پورتنيو او لاندينيو مستطيلونو د مساحتونو مجموعه کوم قيمت ته نژدې کېږي.

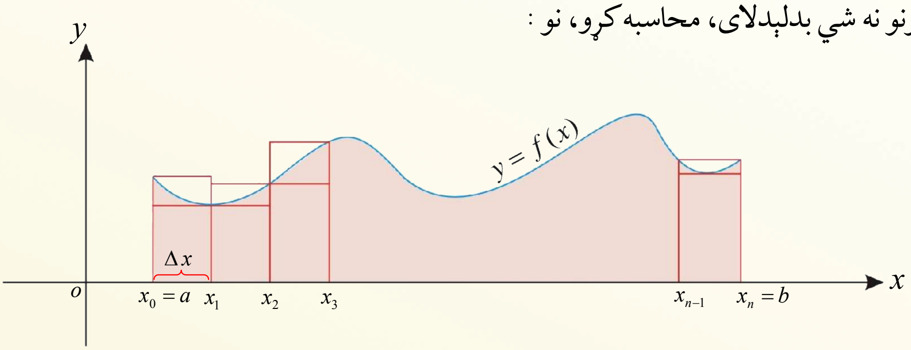
---

[1]- که چېرې د $x$ په محور د فاصلو تقسيمات زيات کړو او يا که چېرې په يوه فاصله کې د مستطيلونو شمېر زيات شي، په هم هغه اندازه د ګراف لاندې مساحت د قيق په لاس راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

له پورتني فعالیت څخه لاندې تعریف لاسته راځي:

**تعریف**: فرضوو چې د $y=f(x)$ تابع د $[a,b]$ په تړلی انټروال کې متمادي او تعریف شوي وي که چېرې د ناحیې مساحت چې د $x$ د محور او $y=f(x)$ د تابع د ګراف ترمنځ واقع دی چې په هندسي شکلونو نه شي بدلېدلای، محاسبه کړو، نو :




د $[a,b]$ تړلي انټروال په $n$ مستطیلو نو ویشو، ځرنګه چې د هر مستطیل عرض د $(\Delta x=\dfrac{b-a}{n})$ رابطې څخه په لاس راځي او د مستطیلونو طول عبارت دی تابع قیمت په هماغه نقطه کې دی.

او د مستطیلونو د هر انټروال اوږدوالی د $i=1,2,3,\ \dots\ ,n$ لپاره په لاندې ډول دی:

$$x_0=a, x_1=a+\Delta x, x_2=a+2\Delta x\dots, x_i=a+i\Delta x,\ \dots\ , x_n=b$$

$$[x_0,x_1]\ ,\ [x_1,x_2]\ ,\ [x_2,x_3],\ \dots\ ,[x_{i-1},x_i],\ \dots\ ,[x_{n-1},x_n]$$

که په شکل کې د لاندېنیو مستطیلونو مساحت په $f(x_{i-1})\Delta x$ او د پورتنیو مستطیلونو مساحت په $f(x_i)\Delta x$ وښودل شي، نو لرو چې:

$$\text{د لاندینیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه} = f(x_0)\Delta x+f(x_1)\Delta x+\ \dots\ +f(x_{n-1})\Delta x=\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x$$

$$\text{د پورتنیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه} = f(x_1)\Delta x+f(x_2)\Delta x+\ \dots\ +f(x_n)\Delta x=\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

که چېرې محصور شوی مساحت په $A$ وښیو، نو : $\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x < A < \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$

که چېرې د رابطې له اطراف څخه لیمیټ ونیسو، نو لرو چې:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x \le \lim_{n\to\infty} A \le \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ساندوېچ د قضيې پر بنسټ لیکلای شو چې: $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = A = \lim_{n\to\infty} 2\overset{n}{\underset{121}{f}}(xi-1)\Delta x$

نو $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ ته د ریمان مجموع او ددې مجموعې لیمیټ یعنې $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ ته د ریمان د مجموعې لیمیټ وایي.

**لومړی مثال**: د $[0,2]$ انټروال په څلور مساوي برخو ووېشئ، د $y = x^2 + 1$ منحني او $x$ محور تر منځ مساحت پیدا کړئ.

**حل**: که چېرې $[0,2]$ انټروال په څلورو مساوي برخو ووېشو، نو د مستطیلونو عرض داسې په لاس راځي: $\Delta x = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{2-0}{4} = \dfrac{1}{2}$

ددې مستطیلونو دهر انټروال اوږدوالی عبارت دي له:

$$x_0 = a = 0 \quad , \quad x_1 = a + \Delta x = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = a + 2\Delta x = 1 \quad , \quad x_3 = a + 3\Delta x = \frac{3}{2}$$

$$x_4 = 2$$

$$[x_0, x_1]\ ,\ [x_1, x_2]\ ,\ [x_2, x_3]\ ,\ [x_3, x_4]$$

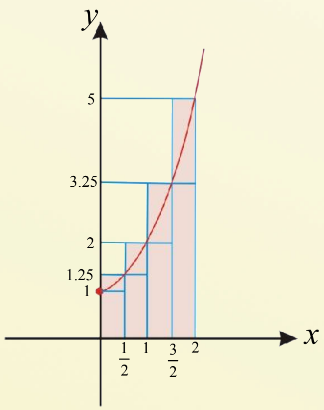
$$[0,\frac{1}{2}] \quad , [\frac{1}{2},1] \quad , [1,\frac{3}{2}] \quad , [\frac{3}{2},2]$$

په لاس راغلي قیمتونه د x په ځای په تابع کې وضع کوو.

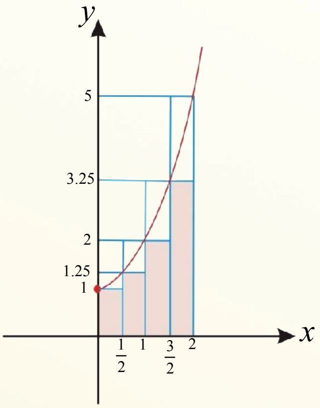
$$f(x) = x^2 + 1\ ,\ f(0) = 1$$

$$f(\frac{1}{2}) = 1.25\ ,\ f(1) = 2$$

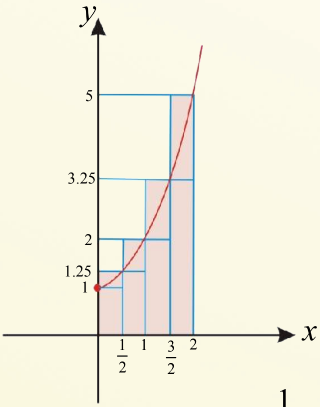
$$f(\frac{3}{2}) = 3.25\ ,\ f(2) = 5$$



(c) ketabton.com: The Digital Library




$$\text{د لاندېنيو مستطيلونو د مساحتونو مجموعه} = 1\times\frac{1}{2}+1.25\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{2}+3.25\times\frac{1}{2}=3.75$$




$$\text{د پورتنيو مستطيلونو د مساحتونو مجموعه} = 1.25\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{2}+3.25\times\frac{1}{2}+5\times\frac{1}{2}=5.75$$

$$3.75 < A < 5.75$$

**دويم مثال**: د $f(x)=1+x$ تابع د ريمان د مجموعې ليميټ په [1 ,10] انټروال کې پيدا کړئ.

**حل**:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{10-1}{n}=\frac{9}{n}$$

$$x_i=a+\Delta x i\ =1+[\frac{9}{n}]\,i \quad , \quad i=0,1,2,\ \dots$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x=\lim_{n\to\infty}[\sum_{i=1}^{n}(1+x_i)\Delta x]$$

$$=\lim_{n\to\infty}[\Delta x\sum_{i=1}^{n}(1+x_i)]$$

$$=\lim_{n\to\infty}[\Delta x\sum_{i=1}^{n}1+\Delta x\sum_{i=1}^{n}x_i]$$

$$=\lim_{n\to\infty}[\frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n}1+\Delta x\sum_{i=1}^{n}(a+\Delta xi)]$$

$$=\lim_{n\to\infty}[\frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n}1+\frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n}(1+\frac{9}{n}i)]$$

$$=\lim_{n\to\infty}[\frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n}1+\frac{9}{n}(\sum_{i=1}^{n}1+\frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n}i)]$$

$$=\lim_{n\to\infty}[\frac{9}{n}\cdot n+\frac{9}{n}(n+\frac{9}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2})]$$

$$=\lim_{n\to\infty}[9+\frac{9}{n}(n+\frac{9n^2+9n}{2n})]$$

$$=\lim_{n\to\infty}[9+\frac{9}{n}(\frac{2n^2+9n^2+9n}{2n})]$$

$$=\lim_{n\to\infty}[9+\frac{9}{n}(\frac{11n^2+9n}{2n})]$$

$$=\lim_{n\to\infty}[9+\frac{99n^2+81n}{2n^2}]$$

$$=\lim_{n\to\infty}[9+\frac{99n^2}{2n^2}+\frac{81n}{2n^2}]$$

$$=\lim_{n\to\infty}[9+\frac{99}{2}+\frac{81}{2n}]$$

$$=9+\frac{99}{2}=58.5$$

**باید په یاد ولرو:**

$$\sum_{i=1}^{n}c=cn$$

$$\sum_{i=1}^{n}i=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

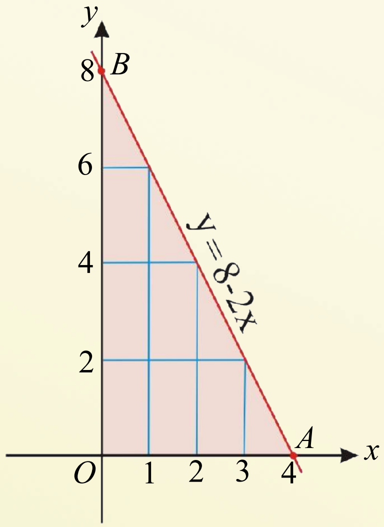
## پوښتنې

1. د $[0,3]$ انټروال په بشپړو مساوي برخو له ویشلو څخه وروسته د $y=3x$ مستقیم خط او د $x$ د محور تر منځ مساحت محاسبه کړئ.

2. د $\Delta x = 0.5$ قیمت لپاره او د لاندې جدول د قیمتونو په پام کې نیولو سره ګراف رسم، د لاندېنیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه اود پورتنیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه پیدا کړئ.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | 0 | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 |
| y | 14 | 20 | 26 | 32 | 38 | 44 | 50 |

3. د $y=8-2x$ تابع ګراف د لاندې $OAB$ مثلث مساحت د $[0,4]$ په انټروال کې د ریمان د مجموعې د لیمیټ څخه په ګټه اخیستنې سره پیدا کړئ.



(c) ketabton.com: The Digital Library

# د انتیګرال مفهوم

## *Concept of Integral*

څرنګه چې پوهېږئ د شکلونو لاندېنې او پورتنې مساحتونه د انتیګرال په واسطه محاسبه کېږي.

آیا کولای شو چې د مخامخ شکل پورتنی مساحت په لاس راوړو.

د هغې تابع انتیګرال چې مشتق یې معین وي او یا په بل عبارت د ریمان مجموعي لېمیټ ته انتیګرال وایي دا ( $\int$ ) د انتیګرال علامه ده، د $sum$ د کلیمې یا د ریمان د مجموعې د $S$ توري غزېدلی حالت دی، لکه: $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \int f(x)dx$ چې دلته $f(x)$ تابع او $dx$ د $f(x)$ تابع د انتیګرال متحول نظر $x$ ته دی.

انتیګرالونه عموماً په دوه ډوله دي. معین او غیر معین انتیګرالونه، هغه انتیګرالونه چې په ترتیب سره یې تر څېړنې لاندې نیسو:

## I- غیرمعین انتیګرال *Indefinite Integral*

- که د $F(x) = 2x^2 - 1$ تابع وي له دې تابع څخه مشتق ونیسئ.
- ددې تابع له مشتق څخه انتیګرال ونیسئ.
- په لاس راغلی انتیګرال له لومړنی تابع سره پرتله کړئ او ووایئ چې ( $-1$ ) په نوموړي تابع کې د څه په نامه یادېږي.
- که په پورتني تابع کې ( $-1$ ) په $C$ ونوموو د $f(x)$ تابع له څه سره مساوي ده؟
- پورتنی فعالیت د $F(x) = x^6 + 1$ تابع لپاره تکرار کړئ او ووایئ چې $f(x)$ له څه سره مساوي ده.

له پورتني فعالیت څخه لاندې تعریف په لاس راځي:

**تعریف**: که چېرې د $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په ترلي انټروال کې تعریف او $F(x)$ د $f(x)$ یوه لومړنی تابع وي. د $F(x)+C$ تابع ګانو سېټ په داسې حال کې چې $C$ یو ثابت عدد وي د $f(x)$ تابع غیرمعین انتیګرال په نامه یادېږي او داسې لیکل کېږي:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

**لومړی مثال**: $\int x\,dx$ پیدا کړئ.

**حل**: $\int x\ dx = \frac{x^{1+1}}{1+1} + C = \frac{x^2}{2} + C$

**دویم مثال**: $\int \frac{1}{\sqrt[7]{x^3}}\ dx$ حساب کړئ.

**حل**: $\int \frac{1}{\sqrt[7]{x^3}}\ dx = \int x^{-\frac{3}{7}}\ dx = \frac{x^{-\frac{3}{7}+1}}{-\frac{3}{7}+1} + C = \frac{x^{\frac{4}{7}}}{\frac{4}{7}} + C = \frac{7}{4}\sqrt[7]{x^4} + C$

**دریم مثال** : $\int x^{\frac{3}{2}}\ dx$ پیدا کړئ.

**حل**: $\int x^{\frac{3}{2}}\ dx = \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C = \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + C$

## پوښتني

لاندې انتیګرالونه محاسبه کړئ:

a) $\int \sqrt[5]{x^3}\ dx$

b) $\int \frac{1}{x^4}\ dx$

c) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\ dx$

d) $\int \frac{x^2\ dx}{\sqrt[4]{x^2}}$

e) $\int \sqrt[8]{x^4} \cdot x\ dx$

(c) ketabton.com: The Digital Library

## د غیرمعین انتیگرال خواص

***Properties of indefinite integral***

$$\left.\begin{array}{l}\int k\ dx\\ \int [f(x)\pm g(x)]\ dx\\ \int [f(x)\cdot g(x)]\ dx\\ \int \dfrac{f(x)}{g(x)}dx \quad ,\ g(x)\neq 0\end{array}\right\}=?$$

تاسې د لیمیټ او مشتق خواص مخکې مطالعه کړي؟ آیا کیدای شي چې ورته خواص په غیر معین انتیگرال کې هم وي؟

د مشتقاتو له خواصو څخه په کار اخیستنې د لاندې تابع ګانو مشتق پیدا کړئ.

$$f(x)=3x^4$$

$$f(x)=2x^3-\frac{1}{x^2}$$

$$f(x)=\sin x+\cos x$$

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایلې په لاس راوړو:

څرنګه چې د تابع ګانو د مشتق د پیداکولو لپاره له ځانګړو قوانینو څخه ګټه اخیستل کېږي، غیرمعین انتیګرالونه هم د داسې خواصو لرونکي دي چې هغه پرته له ثبوت څخه قبلوو:

1- که $k$ یو ثابت عدد وي، نو لرو چې: $\int kdx = k\int dx = kx + C$

**مثال:** د $\int 5dx$ انتګرال پیدا کړئ.

**حل**: $\int 5dx = 5\int dx = 5x + C$

2- که چېرې $n\neq -1$ وي، نو: $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C$

(c) ketabton.com: The Digital Library

**مثال**: د $\int x^4 dx$ **انتیګرال** پیدا کړئ.

**حل**: $\int x^4 dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} + C = \frac{1}{5}x^5 + C$

3- که چېرې $a$ یو ثابت عدد او $f(x)$ تابع وي، **نو**:

$$\int a\, f(x)\, dx = a \int f(x)\, dx$$

**مثال**: د $\int 2x^2\, dx$ **انتیګرال** محاسبه کړئ.

**حل**: $\int 2x^2 dx = 2\int x^2 dx = 2\frac{x^3}{3} + C = \frac{2}{3}x^3 + C$

4- که چېرې $f(x)$ او $g(x)$ دوې تابع ګانې وي په دې صورت کې د تابع ګانو د جمع او تفریق د حاصل انتیګرال مساوي دی په:

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

**مثالونه**:

$$a)\quad \int (2x^2 + 3)dx = \int 2x^2 dx + \int 3dx = \frac{2x^3}{3} + 3x + C$$

$$b)\quad \int (8 - 2x)dx = 8\int dx - 2\int xdx = 8x - x^2 + C$$

5- که چېرې د تابع ګانو ترادف تر انتیګرال لاندې وي، په دی صورت کې د دوی انتیګرال مساوي دی په:

$$\int [f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + \ldots + \int f_n(x)dx$$

**مثال**:

$$\int [x^3 - 6x^2 + 9x + 1]dx = \int x^3 dx - \int 6x^2 dx + \int 9xdx + \int dx$$

$$= \frac{x^4}{4} - \frac{6x^3}{3} + \frac{9x^2}{2} + x + C$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

6- که $f(x)$ او $g(x)$ دوې تابع ګانې وي، په دې حالت کې د تابع ګانو د ضرب د حاصل انتیګرال، مساوي نه دی د انتیګرالونو د ضرب له حاصل سره په جلا توګه، یعنې:

$$\int[f(x)\cdot g(x)]dx \neq \int f(x)dx\cdot\int g(x)dx$$

**مثال**: که چېرې $f(x)=x+1$ او $g(x)=x-2$ وي، نو:

**حل الف**: لومړی په تابع ګانو د ضرب عملیه تطبیق کوو او وروسته یې انتیګرال په لاس راوړو:

$$\int[f(x)\cdot g(x)]\,dx=\int[(x+1)(x-2)]dx=\int(x^2-2x+x-2)\,dx$$
$$=\int(x^2-x-2)\,dx$$
$$=\int x^2dx-\int x\,dx-\int 2\,dx$$
$$=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x+C$$

**حل ب**:اوس د هرې تابع انتیګرال بېلا بېل محاسبه کوو او وروسته یې سره ضربوو په لاس راغلي قیمتونه سره پرتله کوو.

$$\int f(x)\,dx\cdot\int g(x)\,dx=\int(x+1)\,dx\cdot\int(x-2)\,dx=(\int x\,dx+\int dx)(=\int x\,dx-\int 2\,dx)$$
$$=(\frac{x^2}{2}+x+C)(\frac{x^2}{2}-2x+C)=(\frac{x^2}{2}+x)(\frac{x^2}{2}-2x)+C$$
$$\Rightarrow\ \frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x+C\neq(\frac{x^2}{2}+x)(\frac{x^2}{2}-2x)+C$$

په پایله کې څرګنده شوه چې نوموړی مساوات حقیقت نه لري.

7- که چېرې $f(x)$ او $g(x)$ دوه تابع ګانې وي په دې صورت کې د توابعو د تقسیم د حاصل انتیګرال مساوي نه دی. د هرې تابع د انتیګرال له حاصل تقسیم سره، یعنې: $\int\frac{f(x)}{g(x)}dx\neq\frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx}$

**مثال**: که چېرې $f(x)=x^2+2x$ او $g(x)=x$ وي، نو لرو:

**د الف جزء حل**: لومړی د تابع ګانو د تقسیم د حاصل انتیګرال په لاس راوړو.

$$\int\frac{f(x)}{g(x)}dx=\int\frac{x^2+2x}{x}dx=\int(\frac{x^2}{x}+\frac{2x}{x})dx=\int(x+2)dx=\int xdx+\int 2dx=\frac{1}{2}x^2+2x+C$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

**د ب جزء حل**: اوس د صورت او مخرج د تابع گانو انتیگرالونه بېلا بېل په لاس راوړو او وروسته يې سره پرتله کوو.

$$\frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx}=\frac{\int (x^2+2x)dx}{\int xdx}=\frac{\int x^2dx+\int 2xdx}{\int xdx}$$

$$=\frac{\frac{1}{3}x^3+x^2}{\frac{1}{2}x^2}+C=\frac{\frac{1}{3}x^3}{\frac{1}{2}x^2}+\frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2}+C$$

په پايله کې څرگنده شوه چې

$$\int \frac{f(x)}{g(x)}dx\neq\frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx}$$

## پوښتنې

د انتيگرال له خاصيتونو څخه په گټه اخيستنې سره لاندې انتيگرالونه محاسبه کړئ:

$a)\quad \int -17dx=?$

$b)\quad \int \frac{(1+x)^2}{1+x}dx=?$

$c)\quad \int 2x^4dx=?$

$d)\quad \int \frac{1}{x^5}dx=?$

$e)\quad \int (2x^2+4x^3-5x+9)dx=?$

$f)\quad \int (2x+3)^6dx=?$

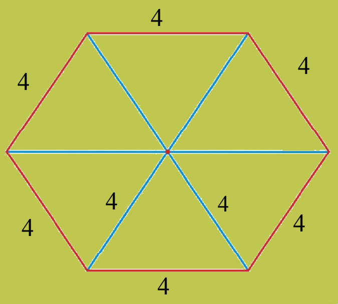
$g)\quad \int \frac{x^3+2x^2}{x^2}dx=?$

$h)\quad \int (2+x)dx=?$

(c) ketabton.com: The Digital Library

# معین انتیګرال

## *Definite Integral*




د شپږ ضلعي دننه مثلثونو د مساحتونو مجموعـه پیـدا او د شپږ ضلعي له مساحت سره یې پرتله کړئ.

- **د $f(x)=2x$ د تابع ګراف د $[2,5]$ په انټروال کې د $n=5$ لپاره رسم کړئ او د ګراف لاندېنی مساحت پیدا کړئ**
- په شکل کې د ګراف لاندېنی مساحت د کومو دوو عددونو ترمنځ پروت دی.

د پورتنی فعالیت پایله داسې بیانوو:

**تعریف**: که چېرې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وی، نو د $f(x)$ تـابع د ریمـان مجموعـې لېمیـټ ته کله چې $n$ بې‌نهایت ته نژدې شی او د فرعي انټروالونو $(\Delta x)$ لوی اوږدوالی صفر ته نژدې شي، د $f(x)$ تابع له $x=a$ څخه تر $x=b$ پورې د معین انتیګرال په نوم یادېږي، یعنې:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x=\int_a^b f(x)dx=\left[F(x)\right]_a^b=F(b)-F(a)$$

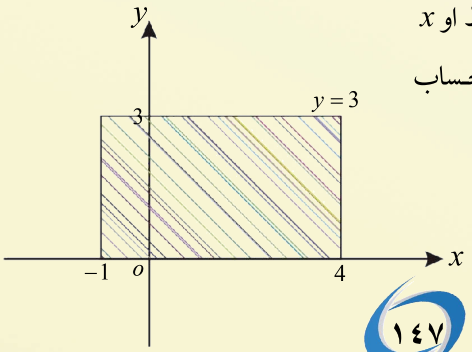
چې $a$ ته د انتیګرال لاندېنی سرحد او $b$ ته د انتیګرال پورتنی سرحد وایي.

**لومړی مثال**: د $\int_1^3 x^2\,dx$ انتیګرال قیمت پیدا کړئ.

**حل**: لومړي د $F(x)$ لومړنی تابع پیدا کوو او بیا د مطلوب انتیګرال قیمت ټاکو:

$$\int_1^3 x^2dx=[\frac{x^3}{3}]_1^3=\frac{3^3}{3}-\frac{1^3}{3}=\frac{27-1}{3}=\frac{26}{3}$$

**دویم مثـال**: هغه مسـاحت چې د $y=3$ خـط او $x$ محور ترمنځ په $[-1,4]$ انټروال کې محصور دی حساب کړئ.



(c) ketabton.com: The Digital Library

**حل**: د $\int_{-1}^{4} 3\ dx$ معین انتیگرال د یوه مستطیل مساحت راښیي چې په تېر شکل کې لیدل کېږي.

ددې مستطیل مساحت د مستطیل د عرض او طول د ضرب له حاصل سره مساوي دی.

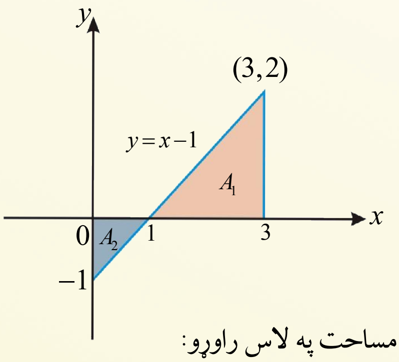
$$= 3[4-(-1)] = 3\cdot 5 = 15$$ د مستطیل مساحت

له انتیگرال څخه په ګټه اخیستنې سره د مستطیل مساحت په لاندې ډول محاسبه کوو.

$$\int_{-1}^{4} 3\ dx = [3x]_{-1}^{4} = 3[4-(-1)] = 15$$

**دریم مثال**: هغه مساحت چې د $y = x - 1$ مستقیم خط او $x$ محور ترمنځ په $[0,3]$ انټروال کې محصور دی په لاس راوړی.

**حل**:




له شکل څخه په ګټه اخیستنې سره لومړی د ښي خوا د لوی مثلث مساحت په لاس راوړو:

$$A_1 = \frac{1}{2}(2\cdot 2) = \frac{1}{2}\cdot 4 = 2$$

د کوچني مثلث مساحت عبارت دی له:

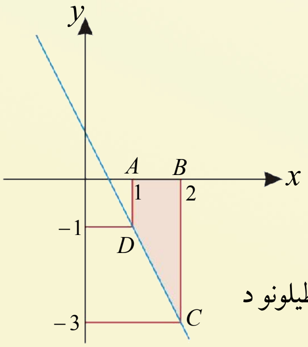
$$A_2 = \frac{1}{2}[1(-1)] = \frac{1}{2}(-1) = -\frac{1}{2}$$

د $A_1$ او $A_2$ د مساحتونو مجموعه عبارت ده له:

$$A_1 + A_2 = 2 - \frac{1}{2} = 1.5$$

په پایله کې د نوموړي انتیگرال قیمت عبارت دی له: $\int_{0}^{3} (x-1)\ dx = [\frac{x^2}{2} - x]_0^3 = [\frac{3^2}{2} - 3] - 0 = \frac{9}{2} - 3 = 1.5$

## پوښتنې




1. د مخامخ شکل څخه په کار اخیستنې سره هغه مساحت چې د $y = -2x + 1$ د مستقیم خط او د $x$ د محور ترمنځ په $[1,2]$ انټروال کې محصور دی په لاس راوړئ.

2. د $f(x) = x^2$ تابع د لاندینیو مستطیلونو د مساحت مجموعه او پورتنیو مستطیلونو د مساحت مجموعه په $[0,1]$ انټروال کې د $n = 4$ لپاره په لاس راوړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

## د معین انتیګرال خواص

### *Properties of definite integral*

آیا کولای شو چې د غیرمعین انتیګرال د ځانګړونو څخه

په ګټه اخیستنې سره مخامخ اړیکې پوره کړو.

$$\left.\begin{array}{l}\int_a^b c\,dx\\[2mm]\int_a^b [f(x)\pm g(x)]\,dx\\[2mm]\int_a^a f(x)\,dx\end{array}\right\}=?$$

- د $\sum_{k=1}^{4} 3k^2$ مجموعه حساب کړئ.
- د $\int_a^b x\,dx$ د انتیګرال قیمت د $[-1,1]$ په انټروال کې پیدا کړئ.
- د $\int_0^2 (1+3x)\,dx$ انتیګرال محاسبه کړئ.

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

د ځینو انتیګرالونو محاسبه د قیمت په وضع کولو سره امکان لري او ځینې یې امکان نه لري، دې ته اړتیا پیدا کېږي، ترڅو معین انتیګرال ثبوت کړو.

1. د ثابتې تابع انتیګرال د $[a,b]$ په انټروال کې یعنې $\int_a^b Cdx$ عبارت دی، له:

$$\int_a^b C\,dx = C\int_a^b dx = C[x]_a^b = C(b-a)$$

**ثبوت**: د $[a,b]$ انټروال په $n$ مساوي برخو، یعنې $\Delta x_i = \dfrac{b-a}{n}$ وېشو او د هر $x_i$ لپاره د $i$ - ام انټروال څخه لرو: $i=0,1,2,\dots,n$ $\qquad f(x_i)=C$

$$S_n=\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n} C\,\Delta x_i = C(\Delta x_1+\Delta x_2+\dots+\Delta x_n)=C(\frac{b-a}{n}+\frac{b-a}{n}+\dots+\frac{b-a}{n})$$

$$=C(b-a)(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\dots+\frac{1}{n})=C(b-a)\frac{n}{n}=C(b-a)\Rightarrow\int_a^b Cdx=C(b-a)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

**مثال**: $\int_3^4 dx$ معین انتیګرال حساب کړئ.

**حل**: $$\int_3^4 dx = [x]_3^4 = 4-3=1$$

2. که د $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انټروال کې انتیګرال منونکی وي او $k$ یو ثابت حقیقي عدد وي، نو لرو چې:

$$\int_a^b k\, f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

**ثبوت**: که چېرې د $[a,b]$ انټروال د $x_i$، $i=1,2,...,n$ په $n$ مساوي برخو ووېشو، نو د ریمان د مجموعې او انتیګرال د تعریف له مخې لیکلای شو:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} k\, f(x_i)\Delta x = \lim_{n\to\infty} k\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

$$= k\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = k\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int_a^b k\, f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

**مثال**: د $\int_{-2}^{2} 4\,dx$ ټاکلی انتیګرال محاسبه کړئ.

**حل**: $$\int_{-2}^{2} 4dx = 4\int_{-2}^{2} dx = 4[x]_{-2}^{2} = 4(2-(-2)) = 4\cdot 4 = 16$$

3. که د $F(x)$ تابع یوه لومړنی تابع د $f(x)$ او په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وي، نو:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

**ثبوت**:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a) = -(-F(b)+F(a))$$

$$= -(F(a)-F(b)) = -\int_b^a f(x)\,dx \quad \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

**مثال**: د $\int_2^3 2x\,dx = -\int_3^2 2x\,dx$ انتیګرال مساوات پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

**حل**: لومړی د کېڼ لوری انتیګرال او وروسته د ښیې خوا انتیګرال محاسبه کوو:

$$\int_2^3 2x\,dx = [\frac{2x^2}{2}]_2^3 = \frac{2(3)^2}{2} - \frac{2(2)^2}{2} = \frac{2(9)}{2} - \frac{2(4)}{2} = \frac{18}{2} - \frac{8}{2} = \frac{18-8}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$\int_3^2 2x\,dx = [\frac{2x^2}{2}]_3^2 = \frac{2(2)^2}{2} - \frac{2(3)^2}{2} = \frac{2(4)}{2} - \frac{2(9)}{2} = \frac{8}{2} - \frac{18}{2} = \frac{8-18}{2} = -\frac{10}{2} = -5$$

د لاسته راغلو قیمتونو په پام کې نیولو سره پایله په لاس راځي:

$$\int_2^3 2x\,dx = -\int_3^2 2x\,dx$$

**4-** که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وي په هغه صورت کې لرو چې: $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

**ثبوت**: څرنګه چې $\Delta x = 0$ دی، نو:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \int_a^a f(x)\,dx = F(a) - F(a) = 0$$

$$\Rightarrow \int_a^a f(x)\,dx = 0$$

**مثال**: د $\int_3^3 3x^2dx$ انتیګرال محاسبه کړئ.

**حل**: $\int_3^3 3x^2dx = [\frac{3x^3}{3}]_3^3 = [x^3]_3^3 = [3^3 - 3^3] = 27 - 27 = 0$

5- که $f(x)$ او $g(x)$ تابع ګانې په $[a\,,b]$ انټروال کې انتیګرال منونکې وي، نو:

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\;dx$$

**ثبوت**:

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}[f(x_i) \pm g(x_i)]\;\Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty}[\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x \pm \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\,\Delta x]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x \pm \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} g(x_i)\,\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

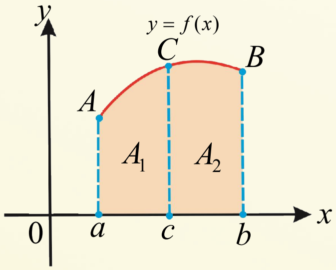
**مثالونه:**

**حل:**

$$a)\quad \int_0^1 (4+3x^2)\,dx = \int_0^1 4\,dx + \int_0^1 3x^2\,dx = 4\int_0^1 dx + 3\int_0^1 x^2\,dx = 4[x]_0^1 + 3\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 4+1=5$$

$$b)\quad \int_0^3 (x^2-1)\,dx = \int_0^3 x^2dx - \int_0^3 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 - [x]_0^3 = \frac{27}{3} - 3 = \frac{27-9}{3} = \frac{18}{3} = 6$$

6. که چېرې د $f(x)$ تابع د $(a,b)$ په یوه تړلې انټروال کې خرنګه چې $a<c<b$ دی د $a$, $b$ او $c$ ټکی یکی شامل دي انتیګرال منونکي وي، نو: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$




**ثبـــوت**: دلتـه د $[a,b]$ انټـروال پـه دوو انټروالونـو د $[a,c]$ او $[c,b]$ تقـسیموو، وروسـته د $f(x)$ تـابع انتیګـرال پـه نومـوړو انټروالونو کې په پام کې نیسو.

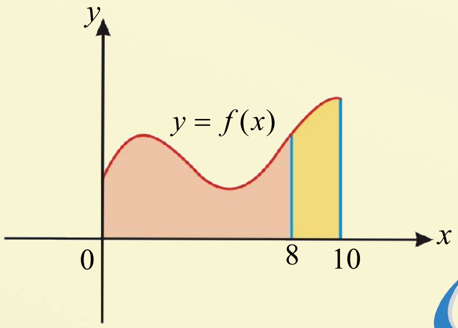
د انتیګرال اصلي مفهوم ته په پام $A=\int_a^b f(x)dx$ پـه حقیقـت کـې د هغـې سـطحې مـساحت دی چې د $f(x)$ د تابع د ګراف او $x$ د محور ترمنځ د $[a,b]$ په انټروال کې محصوره ده. په داسې حال کې چې د هغې سطحې مساحتونه چې د $f(x)$ ګراف او د $x$ د محور ترمنځ د $[a,c]$ او $[c,b]$ په انټروالونو کې محصوره ده

او په شکل کې واضح لیدل کېږي عبارت ده له: $A_2=\int_c^b f(x)\,dx$ ، $A_1=\int_a^c f(x)\,dx$

په پایله کې ویلای شو چې: $A = A_1 + A_2 \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

**مثال**: که چېرې $\int_0^{10} f(x)dx = 17$ او $\int_0^8 f(x)dx = 12$ وي، نو د $\int_8^{10} f(x)dx$ انتیګرال قیمت محاسبه کړئ.

**حل:**




$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

$$\int_0^{10} f(x)\,dx = \int_0^8 f(x)\,dx + \int_8^{10} f(x)\,dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس د $\int_{8}^{10} f(x)\,dx$ انتیګرال قیمت په لاس راوړو:

$$\int_{8}^{10} f(x)\,dx = \int_{0}^{10} f(x)\,dx - \int_{0}^{8} f(x)\,dx = 17 - 12 = 5$$

7. که چیرې د $f(x) \leq g(x)$ تابع ګانې په $[a,b]$ انټروال کې انتیګرال منومنکي وي، نو لرو:

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx \leq \int_{a}^{b} g(x)\,dx$$

**ثبوت:**

$$\int_{a}^{b} g(x)\,dx - \int_{a}^{b} f(x)\,dx = \int_{a}^{b} [g(x) - f(x)]\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [g(x) - f(x)]\,\Delta x$$

نو څرنګه $g(x) - f(x) \geq 0$ او $\Delta x \geq 0$ دی، نو د سلسلې هر حد مثبت دی، نو د هغې لیمیټ هم منفي نه دی یعني:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [g(x_i) - f(x_i)]\,\Delta x \geq 0 \Rightarrow \int_{a}^{b} [g(x) - f(x)]\,dx \geq 0$$

$$\int_{a}^{b} g(x)\,dx - \int_{a}^{b} f(x)\,dx \geq 0 \Rightarrow \int_{a}^{b} g(x)\,dx \geq \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

**مثال**: که چیرې $f(x) = 1 - \frac{x^2}{4}$ او $g(x) = 1 + \frac{x^2}{2}$ وي، نو د $x > 1$ لپاره وښیاست چې $\int_{a}^{b} f(x)dx \leq \int_{a}^{b} g(x)dx$ دی.

**حل:**

$$\int_{a}^{b} (1 - \frac{x^2}{4})\,dx \leq \int_{a}^{b} (1 + \frac{x^2}{2})dx$$

$$\int_{a}^{b} 1\,dx - \int_{a}^{b} \frac{x^2}{4}\,dx \leq \int_{a}^{b} 1\,dx + \int_{a}^{b} \frac{x^2}{2}\,dx$$

$$[x]_a^b - \frac{1}{12}[x^3]_a^b \leq [x]_a^b + \frac{1}{6}[x^3]_a^b$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوهیږو چې $(b-a)>0$ دی، نو:

$$(b-a)-\frac{1}{12}(b^3-a^3)\leq(b-a)+\frac{1}{6}(b^3-a^3)\qquad /\div(b-a)$$

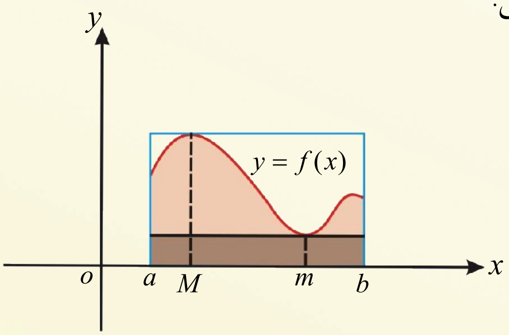
$$1-\frac{1}{12}(a^2+ab+b^2)\leq 1+\frac{1}{6}(a^2+ab+b^2)$$

$$-\frac{1}{12}\leq+\frac{1^{3}}{6}\qquad /\div(a^2+ab+b^2)$$

$$-\frac{1}{12}<\frac{1}{6}$$

8. که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي او $m,M$ قیمتونه په ترتیب سره د تابع مطلق اعظمي او مطلق اصغري قیمتونه په نوموړی انټروال کې وی، نو $m(b-a)\leq\int_a^b f(x)dx\leq M(b-a)$

**ثبوت:** څرنګه چې $m\leq f(x)\leq M$ دی، نو لرو چې:




$$\int_a^b m\,dx\leq\int_a^b f(x)\,dx\leq\int_a^b M\,dx$$

$$m(b-a)\leq\int_a^b f(x)\,dx\leq M(b-a)$$

چې دا وروستنی اړیکه د انټیګرال د تخمیني قضیې په نامه یادیږي.

**مثال:** $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ انټیګرال په تخمیني توګه حساب کړئ.

**حل:** څرنګه چې د $f(x)=e^{-x^2}$ تابع په $[0,1]$ انټروال کې متمادي ده او $M=f(0)=e^0=1$ مطلق اعظمي او $m=f(1)=e^{-1}$ مطلق اصغري دی، نو لرو چې:

$$m(b-a)\leq\int_a^b f(x)\,dx\leq M(b-a)$$

$$e^{-1}(1-0)\leq\int_0^1 e^{-x^2}\,dx\leq 1(1-0)$$

$$e^{-1}\leq\int_0^1 e^{-x^2}\,dx\leq 1$$

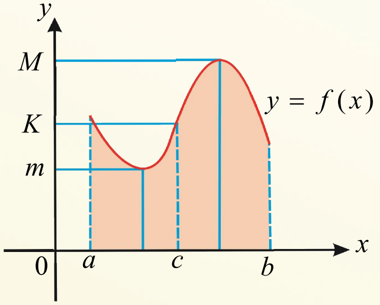
$$e^{-1}=\frac{1}{e}\approx 0{,}3679\Rightarrow 0.3679\leq\int_0^1 e^{-x^2}\,dx\leq 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پایله کې د انتیګرال تخمیني قیمت د 1 او 0.3679 قیمتونو ترمنځ قرار لري.

9. که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وي، نو د $c$ یو حقیقي عدد شته چې: $a \le c \le b$ دی، نو:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$




**ثبوت**: د $a<b$ لپاره $m$ او $M$ قیمتونه په ترتیب د تابع مطلق اصغري او اعظمي قیمتونه د $[a,b]$ په انټروال کې وي، لکه: مخامخ شکل د انتیګرال د تخمیني قضیې څخه په کار اخیستنې د $c\in[a,b]$ لپاره لرو چې:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a) \;\; \Rightarrow m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$$

فرضوو $K = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ وي، نو $m \le K \le M$ دی او د هر $c$ حقیقي عدد لپاره، $a\le c\le b$

لرو چې: $K = f(c)$ نو: $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a) \Leftarrow f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

چې دا وروستی اړیکه د متوسط قیمت د قضیې په نامه یادیږي ښرګنه چې $f(c)$ د تابع متوسط قیمت په $[a,b]$ انټروال کې دی.

**مثال**: د $f(x)=x^2$ تابع په $[1,4]$ انټروال کې په پام کې ونیسئ آیا کولای شئ

$$\int_1^4 x^2\,dx = [\frac{x^3}{3}]_1^4 = [\frac{64}{3}-\frac{1}{3}] = [\frac{64-1}{3}] = \frac{63}{3} = 21$$ دی.

**حل**: ښرګنه چې $f(x)=x^2$ تابع ده، اوس که د $x$ په ځای د $c$ قیمت په تابع کې وضع کړو نو: $f(c)=c^2$ سره کیږي چې دلته د متوسط قیمت د قضیې د فورمول څخه د $c$ قیمت داسې په لاس راځي:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس په پورتنی رابطه کې يې قيمت اېږدو، لرو چې:

$$\int_1^4 x^2\,dx = c^2(4-1)$$

$$21 = 3c^2 \Rightarrow c^2 = \frac{21}{3} \Rightarrow c^2 = 7 \Rightarrow c = \sqrt{7}$$

$$k = f(c)\quad ,\quad f(c) = c^2 = (\sqrt{7})^2 = 7 \Rightarrow f(c) = 7\quad ,\quad k = 7$$

ښکاره شوه چې د تابع يو قيمت مساوي په $k$ او $4$ او $1 < \sqrt{7} < 4$ دی.

له مخکې ځخه پوهېږو چې د مستطيل مساحت د سور او اوږدوالي له ضرب سره برابر دی، نـو د متوسط قيمت په فورمول کې $f(c)$ اوږدوالي او $b-a$ سور دی، نو د منحني لاندې مـساحت پـه $[1,4]$ انتـروال کې مساوي له هغه مستطيل سره دی چې اضلاع يې 7 او 3 دی.

## پوښتنې

1. لاندې معين انتيګرالونه محاسبه کړئ.

$a)\int_{-1}^{1}(x^3+2)\,dx = ?$

$b)\int_{2}^{5}7x\,dx = ?$

$c)\int_{-2}^{4}(-x)\,dx = ?$

$d)\int_{-1}^{3}(2|x|-3x)\,dx = ?$

$e)\int_{-2}^{3}3x\,dx$

$f)\int_{-1}^{2}(x^3-\frac{1}{2}x^4)\,dx = ?$

$g)\int_{-4}^{4}(2x^2-\frac{1}{8}x^4)\,dx = ?$

$h)\int_{1}^{3}\sqrt{x}\,dx$

2. د $\int_{-1}^{4} f(x)\,dx$ انتيګـرال قيمـت د $[-1,4]$ پـه انتـروال کـې داسـې پيـدا کـړئ چـې $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 5$ او $\int_{1}^{4} f(x)dx = -2$ وي.

3. د $f(x) = x$ تابع په $[0,2]$ انټروال کې په نظر کې ونيسئ او د $c$ قيمت په لاس راوړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

## 10- د انتیگرال او مشتق اساسي قضیې

یو موټر په $72\frac{m}{\sec}$ چټکتیا سره په حرکت کې دی، دریور برېک ته فشار ورکوي او موټر له 6 ثانیو وروسته ودرېږي په دې وخت کې وهل شوي فاصله پیدا کړئ.

$$S(t) = v_0 \cdot t$$

- له مشتق د تعریف څخه په ګټې اخیستنې سره د $f(x) = x^2$ د تابع مشتق د $h = 0$ په ټکي کې پیدا کړئ.
- د په لاس راغلی تابع انتیگرال په $[0,1]$ انټروال کې محاسبه کړئ.
- د په لاس راغلو دواړو حالتونو قیمتونه سره پرتله کړئ.

له پورتني فعالیت څخه په لاس راځي چې:

د انتیگرال او مشتق تر منځ یوه منطقي اړیکه شته چې له دې اړیکې څخه په کار اخیستنې سره کولای شو، د انتیگرال اصلي او اساسي قضیې په لاندې ډول ثبوت کړو:

### 1- د انتیگرال او مشتق لومړی اساسي قضیه:

که چېرې د $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انټروال کې متمادي وي او $x$ په دې انټروال کې شامل وي، لرو چې:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

څرنګه چې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې مشتق منونکې ده، نو د هر $x \in [a,b]$ لپاره $F'(x) = f(x)$ دی.

**ثبوت**: څرنګه چې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي ده، نو د هر $x \in [a,b]$ لپاره د $f(x)$ تابع په $[a,x]$ انټروال کې متمادي ده په پایله کې د $f(x)$ تابع په دې انټروال کې انتیگرال منوونکې هم ده.

اوس د $F(x)$ تابع مشتق د تعریف مطابق لیکو او بیا د $x$ متحول ته د $h$ په اندازه تزاید ورکوو، لکه په لاندې ډول:

$$F'(x) = f(x)$$

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(a)+F(a)-F(x)}{h}$$

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(a)-(F(x)-F(a))}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{F(x)\Big|_a^{x+h} - F(x)\Big|_a^x}{h}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس د $f(x)$ تابع په $f(t)$ عوض کوو:

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(t)\Big|_a^{x+h}-F(t)\Big|_a^{x}}{h}$$

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{x+h} f(t)\,dt-\int_a^{x} f(t)\,dt}{h}$$

نظر دریم خاصیت ته لرو چې: $\int_a^b f(t)\,dt=-\int_b^a f(t)\,dt$

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{x+h} f(t)\,dt-\int_a^{x} f(t)\,dt}{h}$$

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{a} f(t)\,dt+\int_a^{x+h} f(t)\,dt}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h}$$

د متوسط قیمت د قضیې څخه $\int_x^{x+h} f(t)\,dt$ $f(c)=\frac{1}{h}$ چې $c$ د $x$ او $x+h$ تر منځ واقع دی، نو کله چې

$h$ صفر ته تقرب وکړي $c$ ، $x$ ته تقرب کوي، همدارنګه د $f$ تابع له متمادیت څخه لرو:

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt=\lim_{c\to x} f(c)=f(x)$$

په پایله کې: $F'(x)=f(x)$

**مثال**:د $f(x)=\int_2^{x^2+1}\frac{1}{t^2+1}$ مشتق پیدا کړئ.

**حل**:

$$F(x)=\int_a^{x} f(t)\,dt \text{ يا } F(x)=\int_a^{g(x)} f(t)\,dt$$

$$u=g(x)=x^2+1$$

$$f(t)=\frac{1}{t^2+1}$$

د زنځیري قاعدې له مخې لرو:

$$F'(x)=f(g(x))\cdot g'(x)$$

$$F'(x)=\frac{1}{(x^2+1)^2+1}\cdot(x^2+1)'=\frac{1}{(x^2+1)^2+1}\cdot 2x$$

$$F'(x)=\frac{2x}{(x^2+1)^2+1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

### 2- د انتيګرال او مشتق دويمه اساسي قضيه:

که چېرې $F(x)$ د $f(x)$ تابع لومړنی تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وي، په دې صورت کې لرو چې:

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

**ثبـــوت**: لـه مخکـې قـضيې څخـه پـوهېږو چـې کـه $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ دی لـه دې ځايـه د هر $x \in [a,b]$ لپاره $F'(x) = f(x)$ نو د دې دوو مقدارونو خلاف يو ثابت مقدار شته چې:

$$f(x) - F(x) = k \Rightarrow f(x) = F(x) + k$$

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

$$F'(x) = f(x)$$

$$\int_a^x f(t)dt = f(x) = F(x) + k$$

$$\int_a^x f(t)\,dt - F(x) = k$$

که د $x$ په ځای په پورتنۍ رابطه کې $a$ وضع کړو، نو:

$$\int_a^a f(t)\,dt - F(a) = k \quad , \quad 0 - F(a) = k \quad \Rightarrow k = -F(a)$$

که د $k$ قيمت په لومړۍ رابطه کې وضع کړو، نو: $\int_a^x f(t)dt - F(x) = -F(a)$

که د $x$ په ځای په دې رابطه کې $b$ وضع شي، نو: $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

چې اخيـري رابطـه پـه $\int_a^b f(t)\,dt = [F(x)]_a^b$ پـه شـکل ښـودل کېـږي دغـه وروسـتی اړيکـه د لـومړنی تـابع او $\int_a^b f(t)\,dt$ انتيګـرال تـرمنځ اړيکـه ښـيي چـې د نيوټن"لايبنز" رابطې په نوم هم يادېږي.

**يادونه:**

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + c$$

$$\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\cot x + c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

**مثال**: د $\int_0^1 x^2 dx$ انتیگرال حاصل پیدا کړئ.

**حل**: $\int_0^1 x^2 dx = F(1) - F(0) = [\frac{x^3}{3}]_0^1 = \frac{1}{3}\cdot 1^3 - \frac{1}{3}\cdot 0^3 = \frac{1}{3}$

## پوښتنې

1. **لاندې مشتقات پیدا کړئ.**

$a)\ F(t) = \int_{\sin t}^{\cos t} \frac{1}{4-x^2} dx$

$b)\ F(t) = \int_{0}^{\cos t} \frac{1}{4-x^2} dx$

$c)\ F(t) = \int_{-\pi}^{t} \frac{\cos y}{1+y^2} dy$

$d)\ F(x) = \int_{1}^{x} \frac{\sin t}{t} dt$

2. که په $t$ $f(t) = t$ تابع کې $F(0) = 2$ وي، د $F(b)$ مقدار په $0, 0.2, 0.4, \ldots, 1$ ټکو کې پیدا کړئ.

3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx$ پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

## 11- په تعویضي طریقي سره انتیګرال نیونه

$$\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx$$

ـ آیا کولای شئ چې مخامخ انتیګرال د نامعین انتیګرال له خواصو څخه په کار اخیستنې سره حل کړئ.

ـ که نه شی کولای، نو د جذر لاندې افاده په یوه متحول سره عوض کړئ او بیا هغه حساب کړئ او ووایئ چې په انتیګرال کې د وضع کولو دا طریقه په څه نوم یادېږي.

- د $\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx$ انتیګرال کې د جذر لاندې افاده په $u$ سره عوض کړئ.
- د $u$ مشتق ونیسي او د $dx$ قیمت پیدا کړئ.
- څرنګه چې نوموړی انتیګرال یو معین انتیګرال دی، نو د $u = 2x+1$ په معادله کې د $x = 0$ او $x = 4$ قیمتونه وضع او د انتیګرال حدونه د $u$ له جنسه په لاس راوړئ، وروسته د انتیګرال قیمت محاسبه کړئ.

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایلې ته رسېږو:

که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې مشتق منونکی وي، $u = g(x)$ او $F'(x) = f(x)$ سره تعویض شي، څرنګه چې $du = g'(x)dx$ دی، له زنځیرې قاعدې څخه لیکلای شو:

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

**لومړی مثال:** د $\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2}$ انتیګرال قیمت پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

**حل**: د قوس دننه افاده په $u$ عوض کوو:

$$u = 3-5x \quad , \quad du = -5\,dx \qquad dx = -\frac{du}{5}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ u = 3-5x \quad \Rightarrow \quad u = 3-5\cdot 1 = -2 \quad \Rightarrow \quad u = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ u = 3-5x \quad \Rightarrow \quad u = 3-5\cdot 2 = 3-10 \quad \Rightarrow \quad u = -7 \end{cases}$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2} = \int_{-2}^{-7} \frac{1}{u^2}(-\frac{1}{5})\,du = -\frac{1}{5}\int_{-2}^{-7}\frac{du}{u^2} = -\frac{1}{5}\left[-\frac{1}{u}\right]_{-2}^{-7} = \left[\frac{1}{5u}\right]_{-2}^{-7} = \frac{1}{5}\left[-\frac{1}{7}+\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{14}$$

**دویم مثال**: د $\int_0^1 x^2(1+2x^3)^5\,dx$ انتیګرال حساب کړئ.

**حل**: د قوس دننه افاده په $u$ عوض کوو.

$$u = 1+2x^3 \quad , \quad du = 6x^2\,dx \Rightarrow x^2 dx = \frac{1}{6}du$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ u = 1+2x^3 \Rightarrow u = 1+2\cdot 0 = 1 \Rightarrow u = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ u = 1+2x^3 \Rightarrow u = 1+2\cdot 1 = 3 \Rightarrow u = 3 \end{cases}$$

$$\int_0^1 x^2(1+2x^3)^5\,dx = \int_1^3 u^5\,\frac{1}{6}\cdot du = \frac{1}{6}\int_1^3 u^5 du = \frac{1}{6}[\frac{u^6}{6}]_1^3 = \frac{1}{6}[\frac{3^6}{6}-\frac{1}{6}]$$

$$= \frac{1}{6}[\frac{729}{6}-\frac{1}{6}] = \frac{1}{6}[\frac{728}{6}]$$

$$= \frac{728}{36} = \frac{182}{9} = 20.\overline{2}$$

### فعالیت

- د $\int x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$ انتیګرال کې د جذر لاندې افاده د $u$ په متحول سره تعویض کړئ.
- له $u$ څخه مشتق ونیسئ او په لاس راغلی قیمت په لومړنی انتیګرال کې وضع او هغه حساب کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- له پورته څخه د $F(x)+C$ په لاس راغلي تابع څخه مشتق ونیسئ او له هغې څخه لومړنی تابع په لاس راوړئ.

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

که د $F(u)$ تابع د $f(u)$ لومړنی تابع وي، د $u=g(x)$ د متحول په تعویض سره یوه بله تابع چې مستقل متحول یې $x$ او متمادي مشتق ولري له زنځیري قاعدې څخه په کاراخیستنې سره لرو:

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx=\int f(u)\,du$$

**لومړی مثال:** $\int\frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$ انتیگرال حساب کړئ.

**حل:** د جذر لاندې افاده په $u$ سره عوض کوو.

$$u=1-4x^2\ ,\ du=-8x\,dx$$

$$xdx=-\frac{1}{8}du$$

$$\int\frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx=\int\frac{1}{\sqrt{u}}(-\frac{1}{8})\,du=-\frac{1}{8}\int\frac{1}{\sqrt{u}}\,du=-\frac{1}{8}\int u^{-\frac{1}{2}}\,du=-\frac{1}{8}\,(\frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1})+C$$

$$=-\frac{1}{8}(\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}})+C=-\frac{1}{8}(\frac{\sqrt{u}}{\frac{1}{2}})+C=-\frac{1}{8}(2\sqrt{u})+C=-\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}+C$$

**دویم مثال:** $\int x^3\cos(x^4+2)dx$ حساب کړئ.

**حل:** که چیرې $u=x^4+2$ وضع کړو په لاس راځي:

$$u=x^4+2\ ,\ du=4x^3dx\ ,\ x^3dx=\frac{1}{4}du$$

$$\int x^3\cos(x^4+2)\,dx=\int\cos u\cdot\frac{1}{4}du$$

$$=\frac{1}{4}\int\cos u\,du$$

$$=\frac{1}{4}\sin u+C$$

$$=\frac{1}{4}\sin(x^4+2)+C$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

## پوښتنې

لاندې انتیګرالونه د تعویض له لارې محاسبه کړئ.

$a)\ \int \cos 3x\, dx = ?$

$b)\ \int_1^2 x\sqrt{x-1}\ dx = ?$

$c)\ \int_0^7 \sqrt{4+3x}\ dx = ?$

$d)\ \int 2\sqrt[5]{(1-4x)^2}\, dx = ?$

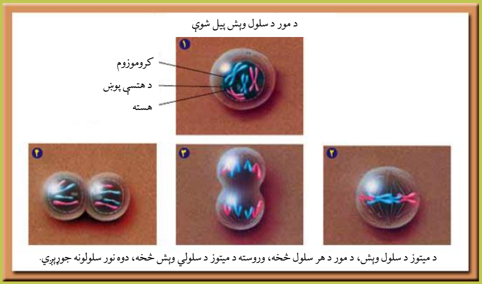
$e)\ \int 2x(x^2+3)^4\, dx = ?$

$f)\ \int_0^5 \frac{x\,dx}{x^2+10} = ?$

$g)\ \int \sqrt{\cos x}\ \sin x\ dx = ?$

(c) ketabton.com: The Digital Library

## 12- په قسمي طريقې سره انتيګرال نيونه Integration by Parts



د ميتوز د سلول وېش، د مور د هر سلول څخه، وروسته د ميتوز د سلولي وېش څخه، دوه نور سلولونه جوړېږي.

د حجروي وېش په وخت کې يوه حجره په دوو يا څو حجرو وېشل کېږي. آيا کولای شئ دا لاره(روش) په نورو شيانو کې، لکه: تېږه، شګه او نورو کې ووينو که ځواب هو وي، نو دا لاره د څه په نامه يادېږي.

### فعاليت

- د $\int \frac{xdx}{x^2+1}$ انتيګرال په تعويضي طريقه حل کړئ.
- د $\int_{-1}^{1} 3x^2\sqrt{x^3+1}dx$ انتيګرال قيمت په تعويضي طريقه پيدا کړئ.
- آيا کولای شئ چې د $\int x^2 \sin x dx$ انتيګرال په تعويضي طريقه حل کړئ.

له پورتني فعاليت څخه دې پايلې ته رسېږو:

د $\int f(x)g(x)dx$ په انتيګرال کې $f(x)$ او $g(x)$ دوې مشتق منونکی تابع ګانې دي چې يوه له بلې سره د ضرب ور وي يا نه وي، خو د انتيګرال محاسبه يې اسانه کار نه دی، که چېرې $f(x)=u$ او $g(x)=v$ وضع کړو، د ضرب حاصل مشتق يې مساوي په: $(u\cdot v)'=u'\cdot v+v'\cdot u$ دی.

له پورتنی رابطې څخه $v'\cdot u$ په لاس راوړو اوله اطراف څخه انتيګرال نيسو:

$$v'\cdot u=(u\cdot v)'-u'\cdot v$$

$$\int v'\cdot u\ dx=u\cdot v-\int u'\cdot v\ dx \quad \text{يا} \quad \int udv=u\cdot v-\int vdu$$

چې پورتنی رابطې ته د غيرمعين انتيګرال فورمول په قسمي طريقه وايي.

که د $u$ او $v$ تابع ګانې په $[a,b]$ انټروال کې تعريف شوې وي، لاندې فورمول د معين انتيګرال فورمول په قسمي لاره(طريقه) بلل کېږي.

$$\int_a^b v'u\,dx=u\cdot v\,\Big|_a^b-\int_a^b vu'\,dx \quad \text{يا} \quad \int_a^b udv=u\cdot v\,\Big|_a^b-\int_a^b vdu$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

**لومړی مثال:** د $\int x\sin x\,dx$ انتیګرال پیدا کړئ.

**حل:**

$$u = x \quad , \quad du = dx$$
$$dv = \sin x\,dx \quad , \quad v = -\cos x$$
$$\int u dv = u\cdot v - \int v du$$
$$\int x\sin x\,dx = x(-\cos x) - \int -\cos x\; dx$$
$$= -x\cos x + \sin x + C$$

**دویم مثال:** د $\int_0^1 -x e^x\,dx$ انتیګرال حساب کړئ.

**حل:**

$$u = -x \quad , \quad du = -dx \quad , \quad -du = dx$$
$$dv = e^x dx \quad , \quad v = e^x$$
$$\int_a^b v'\cdot u\,dx = u\cdot v\,\Big|_a^b - \int_a^b v\cdot u'\,dx$$
$$\int_0^1 -xe^x\,dx = [-xe^x]_0^1 + \int_0^1 e^x dx$$
$$= -e^1 + 0\cdot e^0 + [e^x]_0^1$$
$$= -e^1 + e^1 - e^0 \quad = -e^0$$
$$= -1$$

**یادونه:**

$$\int e^x\,dx = e^x + c$$

**پوښتنې**

لاندې انتیګرالونه حساب کړئ.

a) $\int \theta\cos\theta\; d\theta = ?$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x\,dx = ?$

c) $\int x^5\cos(x^3)\,dx = ?$

d) $\int_0^1 x e^x\,dx = ?$

(c) ketabton.com: The Digital Library

## د ښېرکي مهم ټکي

**د ريمان مجموعه**: فرضوو د $y=f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي او تعريف شوی وي او د هغې ناحيې مساحت چې د $x$ محور او د $y=f(x)$ منحني ترمنځ واقع دی چې په هندسي شکلونو نه شي بدلېدلای، محاسبه کړو.

د $[a,b]$ انټروال په n مستطيلو نو تقسيموو خرنګه چې د هر مستطيل عرض د $(\Delta x=\dfrac{b-a}{n})$ رابطې څخه په لاس راځي او د مستطيلونو طول عبارت دی د تابع قيمت په هم هغه ټکي کې، دا فاصلې په لاندې ډول دي:

او د مستطيلونو انټروالونه د $i=1,2,3,\ ........\ ,n$ لپاره په لاندې ډول دي:

$$x_0=a \quad , \quad x_1=a+\Delta x \quad , \quad x_2=a+2\Delta x,\ \dots\ ,x_i=a+i\Delta x,\ \dots\ ,x_n=b$$

$$[x_0,x_1]\ ,\ [x_1,x_2]\ ,\ [x_2,x_3],\ \dots\ ,[x_{i-1},x_i],\ \dots\ ,[x_{n-1},x_n]$$

که د لاندېنيو مستطيلونو مساحت په $f(x_{i-1})\Delta x$ او د پورتنيو مستطيلونو مساحت په $f(x_i)\Delta x$ وښودل شي او د محصور شوي سطحې مساحت په $A$ وښيو، نو لرو چې:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x < A < \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

**نامعين انټيګرالونه**:که چېرې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې تعريف او $F(x)$ د $f(x)$ يوه لومړنۍ تابع وي. د $F(x)+C$ توابعو سټ چې $c$ يو ثابت عدد وي د غيرمعين انتګرال په نامه يادېږي او داسې ليکل کېږي: $\int f(x)dx=F(x)+C$

**د نامعين انټيګرالونو خواص(ځانګړتياوې):**

$$\int kdx=k\int dx=kx+C$$

$$\int a\,f(x)\,dx=a\int f(x)\,dx$$

$$\int[f(x)\pm g(x)]dx=\int f(x)\,dx\pm\int g(x)\,dx$$

$$\int[f_1(x)+f_2(x)+\dots+f_n(x)]dx=\int f_1(x)dx+\int f_2(x)dx+\dots+\int f_n(x)dx$$

$$\int[f(x)\cdot g(x)]\,dx\neq\int f(x)\,dx\cdot\int g(x)\,dx$$

$$\int\frac{f(x)}{g(x)}dx\neq\frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx}\quad ,\ g(x)\neq 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

**معین انتیگرال**: د $f(x)$ تابع د ریمان مجموعي لیمیټ ته په $[a,b]$ انټروال کې کله چې $n$ بې‌نهایت تـه نژدې شي د $\Delta x$ فرعي انټروالونو اوږدوالی صفر ته نژدې کېږي چې د $f(x)$ تابع معین انتیـګرال د $x=a$ څخه تر $x=b$ پورې په نوم یادېږي.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$$

$a$ ته د انتیګرال لاندینی سرحد او $b$ ته د انتیګرال پورتنی سرحد وايي.

**د معین انتیګرال خواص**(ځانګړتیاوې):

$$\int_a^b C\,dx = C(b-a)$$

$$\int_a^b k\,f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

$$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

$$f(x)\le g(x) \;\Rightarrow\; \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

$$m(b-a)\le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a) \;\Rightarrow\; f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

### د انتیګرال او مشتق لومړی اساسي قضیه:

که چېرې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وي او $x$ په دې انټروال کې شامل وي، لرو چې:

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

څرنګه چې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې د مشتق وړ ده، نو د هر $x\in[a,b]$ لپاره $F'(x)=f(x)$ دی.

### د انتیګرال او مشتق دویمه اساسي قضیه:

- که چېرې $F(x)$ تابع د $f(x)$ لومړنی تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وي، په دې صورت کې لرو چې:

$$\int_a^b f(t)\,dt=F(b)-F(a)$$

- که $F(u)$ د $f(u)$ لومړنی تابع وي او له $u=g(x)$ متحول سره تعویض شي چې مستقل متحول یې $x$ او متمادي مشتق ولري. له زنځیري قاعدې څخه په کار اخیستنې سره لرو:

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx=\int f(u)\,du$$

- که $F(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې مشتق منونکي وي او $u=g(x)$ همدارنګه له $F'(x)=f(x)$ سره تعویض شي، څرنګه چې $du=g'(x)dx$ دی، له زنځیري قاعدې څخه لیکلای شو:

$$\int_a^b f(g(x))\;g'(x)\;dx=\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

- د $\int f(x)g(x)dx$ انتیګرال کې $f(x)$ او $g(x)$ دوې مشتق منونکي تابع ګانې وي چې په خپل منځ کې قابل د ضرب وي او یا نه وي، خو د انتیګرال محاسبه یې آسانه کار نه دی، که چېرې $f(x)=u$ او $g(x)=v$ سره عوض شي، د هغوی د حاصل ضرب مشتق عبارت دی له:

$$(u\cdot v)'=u'\cdot v+v'\cdot u$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له پورتني اړیکې څخه $v'\cdot u$ په لاس راوړو او له دواړو خواوو څخه انتیګرال نیسو:

$$\int v'\cdot u\ dx = u\cdot v - \int u'\cdot v\ dx \quad \text{یا} \quad \int udv = u\cdot v - \int vdu$$

چې اخیرۍ اړیکې ته د غیر معین انتیګرال فورمول په قسمي طریقه وایي.

- که د $u$ او $v$ تابع ګانې په $[a,b]$ انټروال کې تعریف شوی وي لاندې فورمول، د معین انتیګرال فورمول په قسمي لاره(طریقه) بلل کېږي:

$$\int_a^b v'u\,dx = u\cdot v\,\Big|_a^b - \int_a^b vu'\,dx \quad \text{یا} \quad \int_a^b udv = u\cdot v\,\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

## د څپرکي پوښتنې

1- د لاندې معینو انتیګرالونو قیمت پیدا کړئ.

$a)\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+x^2}dx$ $\quad b)\ \int_{-4}^{4}[2x^2 - \frac{1}{8}x^4]dx$ $\quad c)\ \int_2^4 \frac{1}{x^2}dx$

$d)\ \int_0^3 4dx$ $\quad e)\ \int_1^3 \sqrt{x}\ dx$ $\quad f)\ \int_1^2 (x^2 - x^5)dx$

$g)\ \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos^2 x}dx$ $\quad h)\ \int_{-2}^{0}[\frac{x^3}{4}+\frac{x^2}{3}]dx$ $\quad i)\ \int_2^3 (x^3 + x^2)dx$

$j)\ \int_{-2}^{2}[x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x - 4]dx$ $\quad k)\ \int_0^{\pi} \sin x dx$ $\quad l)\ \int_1^2 x^2\ dx$

2- لاندې غیر معین انتګرالونه په لاس راوړئ.

$a)\ \int[\sin x + 8x^3]dx$ $\quad b)\ \int[x^5 + \frac{4}{x^4} + x^3 + \frac{2}{x^2} + x]dx$

$c)\ \int x(1-2x^2)dx$ $\quad d)\ \int \sin x\, dx$

$e)\ \int \frac{\sin 2x}{2\sin x}dx$ $\quad f)\ \int \frac{(1-x)^2}{1-x}dx$

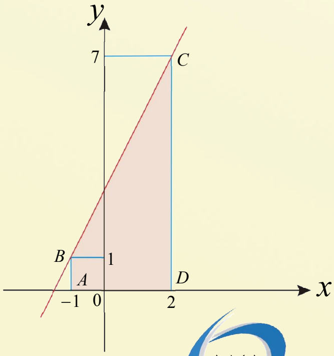
$g)\ \int \sqrt[5]{x^3}\ dx$ $\quad h)\ \int \frac{3x^2+8x}{x}dx$

$i)\ \int(2x^2+3)\ dx$ $\quad j)\ \int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+2}}dx$

$k)\ \int \frac{(1+x)(1-x)}{x-x^3}dx$ $\quad l)\ \int(3x^2+4x-1)\ dx$

3- د لاندې محصور رنګ شوې سطحې مساحت د شکل له مخې پیدا کړئ.

$$\int_{-1}^{2}(2x+3)\,dx$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

4- لاندې انتیګرالونه د تعویضي طریقې په مرسته پیدا کړئ.

$a)\ \int 3\cos(2x+1)\,dx$

$b)\ \int \sqrt{3x+5}\,dx$

$c)\ \int \frac{2\,dx}{x+2}$

$d)\int (3x+6)^3\,dx$

$e)\int x^3\sqrt{x^4+2}\,dx$

$f)\int (x^3+2)^2 3x^2dx$

$g)\int_0^2 \frac{dt}{(3-2t)^2}$

$h)\int_0^2 x^2\cdot\sqrt{9-x^3}\,dx$

$i)\int \frac{1}{(x-10)^7}dx$

$j)\int_0^1 (1-x^2)^3 x dx$

$k)\int (4-3x)^7 dx$

$l)\int \frac{x^2dx}{\sqrt[4]{x^3+2}}$

5- لاندې انتیګرالونه د قسمي طریقې په مرسته پیدا کړئ.

$a)\ \int x\cos x\,dx$

$b)\int_0^{\pi} \sin x\cos x\,dx$

$c)\ \int e^x\cdot\cos x\,dx$

$d)\int_0^{2\pi} x\cos 3x\,dx$

$e)\ \int xe^{-x}dx$

$f)\int x\sqrt{1+x}\,dx$

$g)\ \int x^2\cdot e^{2x}dx$

$h)\ \int e^{2x}\sin 3x\,dx$

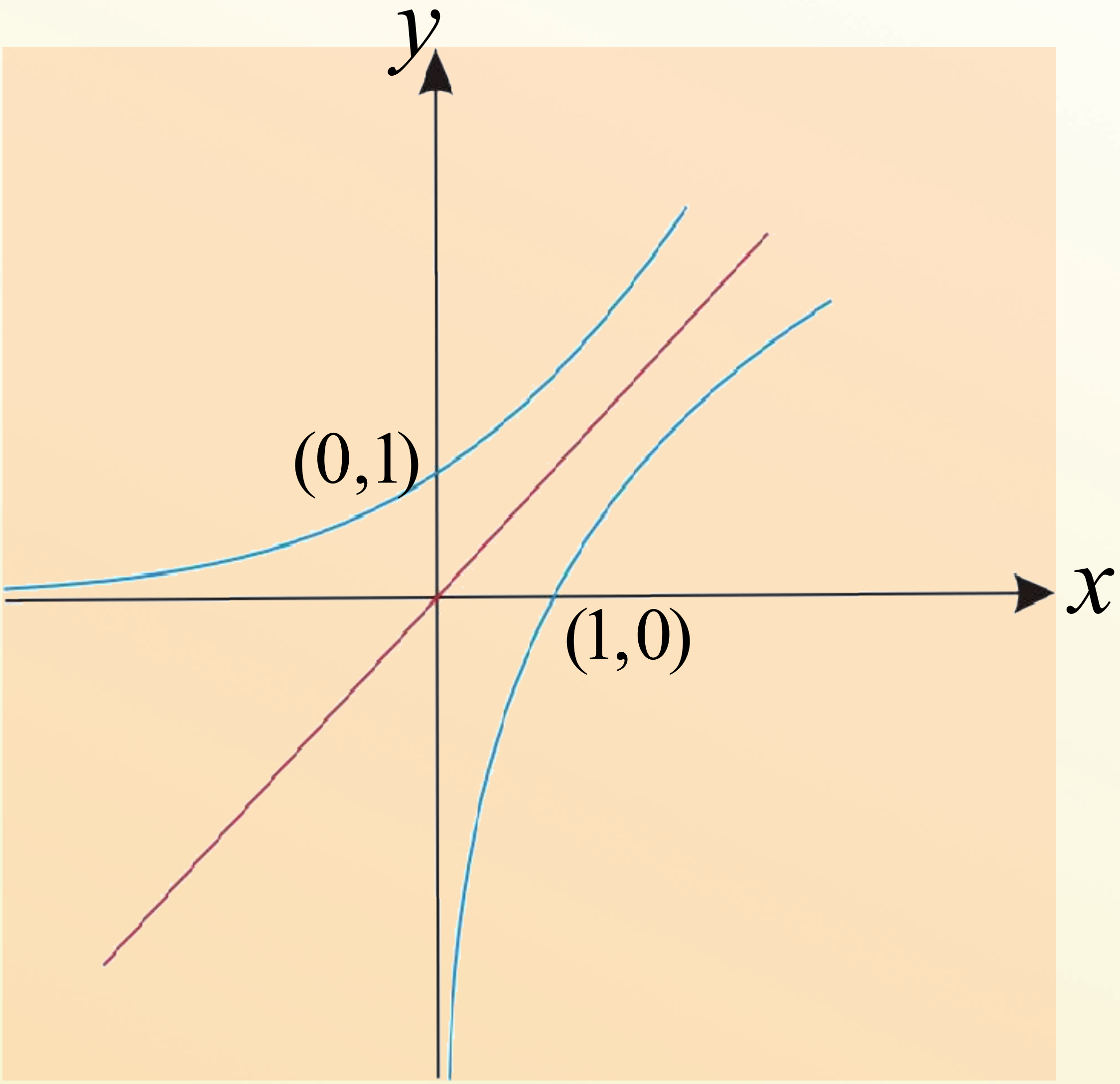
$i)\ \int x^2\cdot e^{-x}\,dx$

(c) ketabton.com: The Digital Library

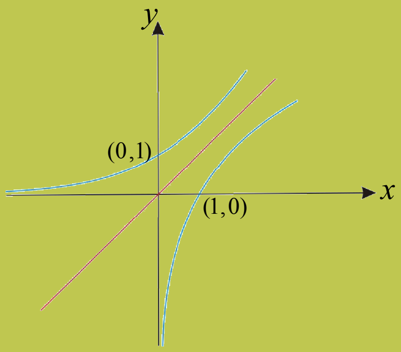
# پنځم څپرکی

## د لوګاریتمي او اکسپوننشیل تابع ګانو مشتق او انتیګرال

(c) ketabton.com: The Digital Library



(c) ketabton.com: The Digital Library




# د لوګاریتمي او اکسپوننشیل تابع ګانو مشتق

مخامخ شکل د څه ډول تابع ګانو ګراف راښيي، نومونه يې واخلئ.

## فعالیت

- لوګاریتم تعریف او خواص یې ولیکئ.
- لوګاریتمي او اکسپوننشیل تابع ګانې یوه له بلې سره څه اړیکې لري.
- که $\log_b x$ یوه متصله تابع وي، نو $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ له کوم عدد سره مساوي ده.
- د $y=f(x)$ د تابع له دواړو خواوو څخه طبیعي لوګاریتم ونیسئ، اړیکه یې ولیکئ.

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

په عمومي ډول که $f(x)=\ln x$ او $g(x)=a^x$ وي؛ نو $g'(x)=a^x\ln a$ او $f'(x)=\dfrac{1}{x}$ دی.

**ثبوت:**

-1

$$y=g(x)=a^x$$
$$\ln y=\ln a^x=x\ln a$$

د مساوات له دواړو خواوو څخه نظر $x$ ته مشتق نیسو:

$$\frac{y'}{y}=x'\ln a+x(\ln a)'$$
$$\frac{y'}{y}=\ln a+0$$
$$\frac{1}{y}y'=\ln a$$
$$y'=y\ln a\quad\Rightarrow\quad g'(x)=a^x\ln a$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

-2

$$f(x)=\ln x$$

$$(\ln x)'=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln\frac{x+h}{x}}{h}$$

$$(\ln x)'=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln(\frac{x+h}{x})=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln(1+\frac{h}{x}) \;=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\frac{x}{h}\ln(1+\frac{h}{x})$$

$$=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\ln(1+\frac{h}{x})^{\frac{x}{h}}$$

که $u=\frac{x}{h}$ وضع شي نو $\frac{1}{u}=\frac{h}{x}$ دی خرنګه چې $h\to 0$ تقرب وکړي، نو $u\to\infty$ ته نژدې کېږي، لیکلای شو چې:

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}\lim_{u\to\infty}\ln(1+\frac{1}{u})^{u}\;=\frac{1}{x}\ln\lim_{u\to\infty}(1+\frac{1}{u})^{u}$$

پوهیږو چې $\lim_{u\to\infty}(1+\frac{1}{u})^{u}=e$ دی، نو: $(\ln x)'=\frac{1}{x}\ln e=\frac{1}{x}$

**قضیه**

1. که د $f(x)=\log_a x$ تابع مشتق منوونکی وي، نو مشتق یې $f'(x)=\frac{1}{x}\log_a e$
2. که $f(x)=\log_a g(x)$ او $g(x)$ مشتق منوونکی وي، نو $(\log_a g(x))'=\frac{g'(x)}{g(x)}\log_a e$

**ثبوت**:

-1

$$f(x)=\log_a x \quad\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}\log_a e$$

$$f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_a\frac{x+h}{x}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_a(1+\frac{h}{x})=\lim_{h\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{h}\log_a(1+\frac{h}{x})=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\log_a(1+\frac{h}{x})^{\frac{x}{h}}$$

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a\lim_{h\to 0}(1+\frac{h}{x})^{\frac{x}{h}}$$

اوس که $\frac{x}{h}=u$ وضع شي، نو $\frac{1}{u}=\frac{h}{x}$ کېږي، که $h\to 0$ صفر ته تقرب وکړي، نو $u\to\infty$ کوي، یعنې:

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a\lim_{u\to\infty}(1+\frac{1}{u})^{u}\;=\frac{1}{x}\log_a e$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- غواړو ثبوت کړو چې: $(\log_a g(x))' = \frac{g'(x)}{g(x)}\log_a e$

د زنځيري قاعدې له مخې:

$$f'(x) = (\log_a g(x))' = (\log_a g(x))' \cdot g'(x) = \frac{1}{g(x)}\log_a e \cdot g'(x)$$

$$= \frac{g'(x)}{g(x)}\log_a e$$

که $a = e$ وضع شي، نو لرو: $(\log_a g(x))' = (\ln g(x))' = \frac{g'(x)}{g(x)}$

**پايله:**

1- د Exponential تابع ګانو مشتق د لوګاريتم په مرسته کولای شو په اسانۍ سره په لاس راوړو.

که $y = e^x$ وي ددې تابع مشتق $y' = e^x$ دی، ځکه که د $y = e^x$ رابطې څخه طبيعي لوګاريتم ونيسو، په لاس راځي:

$$y = e^x \quad \Rightarrow \ln y = x \ln e = x$$

$$(\ln y)' = (x)' \quad \Rightarrow \frac{y'}{y} = 1 \quad \Rightarrow y' = y \cdot 1 = e^x$$

2- که $y = e^u$ او $u$ تابع د $x$ وي، نو: $y' = u'e^u$

3- که $y = a^u$ کله چې $a > 0$ او $a \neq 1$ وي، نو: $y' = u'a^u \ln a$

4- د لوګاريتمي تابع ګانو د مشتق پيدا کولو لپاره په بېلابېلو قاعدو سره له دې اړيکې څخه ګټه اخلو:

$$y = \log_a u \Rightarrow y' = (\log_a u)' = \frac{u'}{u}\log_a e$$

$$y' = \frac{u'}{u}\log_a e = \frac{u'}{u} \cdot \frac{1}{\log_e a} \quad \Rightarrow y' = \frac{u'}{u \ln a}$$

**لومړی مثال:** د $f(x) = \ln(x^2+1)$ تابع مشتق پيدا کړئ.

**حل:** که $g(x) = x^2+1$ وضع کړو، نو لرو:

$$g(x) = x^2 + 1$$

$$g'(x) = 2x$$

$$(\ln g(x))' = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

$$(\ln(x^2+1))' = \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} = \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x \quad \Rightarrow f'(x) = (\ln(x^2+1))' = \frac{2x}{x^2+1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

**دویم مثال**: د $f(x)=\ln(x^2-5x+4)$ تابع مشتق پیدا کړئ.

**حل**:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\ln(x^2-5x+4) \\ g(x)=x^2-5x+4 \Rightarrow g'(x)=2x-5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (\ln g(x))'=\dfrac{g'(x)}{g(x)} \\ (\ln(x^2-5x+4))'=\dfrac{g'(x)}{g(x)}=\dfrac{2x-5}{x^2-5x+4} \end{array}$$

**دریم مثال**: د $f(x)=\log_a\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}$ او $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}$ تابع ګانو مشتق پیدا کړئ.

**حل**: پوهیږو چې $\log_a\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}=\log_a(\dfrac{x^2+1}{x^2-1})^{\frac{1}{2}}$ دی، نو لیکلای شو چې:

$$\log_a\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}=\log_a(\frac{x^2+1}{x^2-1})^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log_a\frac{x^2+1}{x^2-1}=\frac{1}{2}(\log_a(x^2+1)-\log_a(x^2-1))$$

$$(\log_a\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}})'=\frac{1}{2}(\log_a(x^2+1)-\log_a(x^2-1))'$$

$$=\frac{1}{2}[\frac{(x^2+1)'}{(x^2+1)}\log_a e-\frac{(x^2-1)'}{(x^2-1)}\log_a e]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{2x}{x^2+1}\log_a e-\frac{2x}{x^2-1}\log_a e\right]=\frac{1}{2}\cdot 2x\log_a e\left[\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2-1}\right]$$

$$=\frac{-2x}{x^4-1}\log_a e$$

**حل**: پوهیږو چې $\ln\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}=\ln(\dfrac{x^2+1}{x^2-1})^{\frac{1}{2}}$ دی، نو لیکلای شو چې:

$$\ln\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}=\ln(\frac{x^2+1}{x^2-1})^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(\ln(x^2+1)-\ln(x^2-1))$$

$$(\ln\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}})'=\frac{1}{2}[\ln(x^2+1)-\ln(x^2-1)]'=\frac{1}{2}[(\ln(x^2+1))'-(\ln(x^2-1))']$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{2x}{x^2+1}-\frac{2x}{x^2-1})=\frac{-2x}{x^4-1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

**څلورم مثال**: د $y = e^{(x^2+1)}$ تابع مشتق پیداکړئ.

**حل**: پوهېږو چې که $y = e^u$ وي نو $y' = u'e^u$

$$y = e^{(x^2+1)} \quad \Rightarrow \quad y' = (x^2+1)' \cdot e^{x^2+1} = 2x \cdot e^{x^2+1}$$

**پنځم مثال**: د $y = \sqrt[x]{2}$ تابع مشتق په لاس راوړئ.

**حل**: پوهېږو چې که چېرې $y = a^u$ وي، نو $y' = u'a^u \ln a$ سره دی، نو:

$$y = \sqrt[x]{2} = (2)^{\frac{1}{x}} \quad \Rightarrow \quad y' = (\frac{1}{x})' \cdot 2^{\frac{1}{x}} \ln 2 = \frac{-1}{x^2} \cdot 2^{\frac{1}{x}} \cdot \ln 2$$

**شپږم مثال**: د $y = x^{2x}$ تابع مشتق پیداکړئ.

**حل**: که د معادلې له دواړو خواوو څخه طبیعي لوګاریتم ونیسو، په لاس راځي چې:

$$y = x^{2x}$$
$$\ln y = \ln x^{2x}$$
$$\ln y = 2x \ln x$$
$$(\ln y)' = (2x \ln x)' \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{y} = 2\ln x + 2x \cdot \frac{1}{x}$$
$$y' = 2(\ln x + 1) \cdot y \quad \Rightarrow \quad y' = 2(\ln x + 1) \cdot x^{2x}$$

**اووم مثال**: د $y = 10^x$ تابع مشتق حساب کړئ.

**حل**: پوهېږو چې $y = a^x \quad \Rightarrow \quad y' = a^x \ln a$ دی، نو:

$$y = 10^x$$
$$y' = 10^x \cdot \ln 10$$

**اتم مثال**: د $y = e^{3x}$ تابع مشتق پیداکړئ.

**حل**: که $u = 3x$ وضع شي، نو: $u'(x) = 3$

$$y = e^u$$
$$y' = e^u \cdot u' = e^{3x} \cdot 3$$
$$y' = 3e^{3x}$$

**نهم مثال**: د لاندې تابع ګانو مشتق پیداکړئ.

1) $y = \log(x^4 + 1)$ 2) $y = \log_3(\log_2 x)$ 3) $y = \log_{x^2-1} x^2 + 1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

**حل**: پوهیږو چې د لوګارتمي توابعو مشتق په مختلفو قاعدو سره د لاندې قضیې څخه په ګټه اخیستنې سره په لاس راوړو:

$$y = \log_a u$$

$$y' = (\log_a u)' = \frac{u'}{u}\log_a e = \frac{u'}{u\log_e a} = \frac{u'}{u\ln a}$$

$$1)\quad y = \log(x^4+1) \quad\Rightarrow\quad y' = \frac{4x^3}{(x^4+1)\ln 10}$$

$$2)\quad y = \log_3(\log_2 x) \quad\Rightarrow\quad y' = \frac{(\log_2 x)'}{\ln 3\log_2 x} = \frac{\frac{1}{x\ln 2}}{\ln 3\log_2 x} = \frac{1}{(\ln 2)(\ln 3)x\log_2 x}$$

$$= \frac{1}{\ln 2\cdot\ln 3\cdot x\cdot\frac{\log_e x}{\log_e 2}} = \frac{1}{\ln 2\cdot\ln 3\cdot x\cdot\frac{\ln x}{\ln 2}} = \frac{1}{\ln 3\, x\ln x}$$

$$3)\quad y = \log_{x^2-1} x^2+1 = \frac{\log_e(x^2+1)}{\log_e(x^2-1)} = \frac{\ln(x^2+1)}{\ln(x^2-1)}$$

**پوهیږو چې** $y' = \dfrac{u'v-v'u}{v^2} \quad\Rightarrow\quad y = \dfrac{u}{v}$ **دی؛ نو لرو:**

$$y' = \frac{\frac{2x}{x^2+1}\cdot\ln(x^2-1) - \frac{2x}{x^2-1}\ln(x^2+1)}{\left[\ln(x^2-1)\right]^2}$$

## پوښتني

د لاندې توابعو مشتق پیدا کړئ:

$a)\quad f(x) = \ln\sin 3x$

$b)\quad f(x) = \ln\sqrt{3x^2+7}$

$c)\quad f(x) = \ln(5x^2-6x+5)$

$d)\quad f(x) = \log_{10} 3x^2$

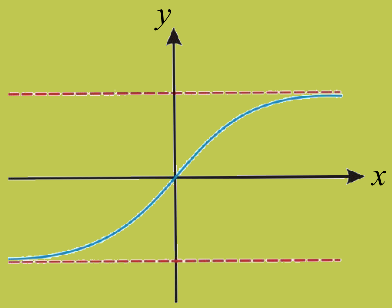
$e)\quad f(x) = y = x^x$

$f)\quad y = \dfrac{(x+1)^2(\sqrt{x}-1)}{(x+4)^3 e^x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

## د معکوسو تابع ګانو مشتق

مخامخ شکل د څه ډول تابع ګراف راښيي؟




کـه چېـرې $f$ او $g$ يـوه د بلـې دوې معکوسـې تـابع ګـانې وي، يعنـې $y=f(x)\Leftrightarrow x=g(y)$ وي، نـو: $\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{dy}{dx}$ يا $y'_x=\frac{1}{x'_y}$ دی، ځکه چې د تابع او ضمني تابع ګانو له مشتق څخه ليکلای شو:

$$\left.\begin{aligned} y&=f(x)\\ x&=g(y)\end{aligned}\right\} \Rightarrow y'_x\cdot x'_y=y'_y \quad \Rightarrow y'_x\cdot x'_y=1 \quad \Rightarrow y'_x=\frac{1}{x'_y}$$

**مثال**: د $y=a^x$ تابع مشتق د هغې د معکوسې تابع په مرسته پيدا کړئ.

**حل**:

$$y=a^x \quad \Rightarrow x=\log_a y$$

$$\Rightarrow y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{(\log_a y)'}=\frac{1}{\frac{1}{y}\log_a e}=\frac{1}{\frac{1}{y}}\log_e a=y\log_e a$$

$$y'=a^x\ln a$$

## د مثلثاتي معکوسو تابع ګانو مشتق

د مثلثاتي معکوسو تابع ګانو مشتق د لاندې اړيکو په مرسته لاسته راوړو:

1) $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

2) $(\arccos x)'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

3) $(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$

4) $(arc\cot x)'=\frac{-1}{1+x^2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ثبوت:

1) $y = arc\sin x \quad \Leftrightarrow \quad x = \sin y$

$(arc\sin x)' = ?$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}$$

$$\Rightarrow (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

2) $y = arc\cos x \quad \Leftrightarrow \quad x = \cos y$

$(arc\cos x)' = ?$

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\cos y)'} = \frac{1}{-\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}$$

$$\Rightarrow (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

3) $y = arc\tan x \Leftrightarrow x = \tan y$

$$\Rightarrow (arc\tan x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y$$

$$= \frac{\cos^2 y}{1} = \frac{\cos^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y}$$

دکسر صورت او مخرج په $\cos^2 y$ ویشو:

$$(arc\tan x)' = \frac{\cos^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y} = \frac{1}{\tan^2 y + 1} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

4) $y = arc\cot x \Leftrightarrow x = \cot y$

$$(arc\cot x)' = ?$$

$$(arc\cot x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\cot y)'} = \frac{1}{\frac{-1}{\sin^2 y}}$$

$$= -\sin^2 y = \frac{-\sin^2 y}{1} = \frac{-\sin^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y}$$

د کسر صورت او مخرج په $\sin^2 y$ ویشو:

$$= -\frac{\sin^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y} = \frac{-1}{1+\cot^2 y} = -\frac{1}{1+x^2}$$

**لومړی مثال**: د $y = (\arctan x)^5$ تابع مشتق پیدا کړئ.

$$y' = 5(\arctan x)^4 (\arctan x)' = 5(\arctan x)^4 \frac{1}{1+x^2}$$

**دويم مثال**: د $y = \log_5(\arctan x)$ تابع مشتق پیدا کړئ.

$$y' = [\log_5(\arctan x)]' = (\log_5 u)' = \frac{u'}{u \log_5 e}$$

$$= \frac{\frac{1}{1+x^2}}{\arctan x \log_5 e} = \frac{1}{(1+x^2)(\arctan x \ln 5)}$$

**دريم مثال**: د $y = arc\tan e^x$ تابع د مشتق مقدار د $x = 0$ ټکي کې پیدا کړئ.

$$y' = [arc\ \tan e^x]' = (arc\tan u)' = \frac{u'}{1+u^2} = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$$

$$y'(0) = \frac{e^0}{1+e^0} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

## پوښتنې

1. د لاندې تابع گانو مشتق پیدا کړئ.

1) $y = (arc\sin x)^3$

2) $y = \log_2(arc\cos x)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

## قسمي کسرونه

### د یو کسر تجزیه کول په قسمي کسرونو:

پوهیږو چې د $\frac{2}{x+1}$ او $\frac{1}{x^2-1}$ د جمعې حاصل $\frac{2x-1}{x^2-1}$ دی، آیا کولای شئ چې له دې کسر څخه د $\frac{2}{x+1}$ او $\frac{1}{x^2-1}$ کسرونه لاسته راوړئ.

$$\frac{2}{x+1}+\frac{1}{x^2-1}=\frac{2x-1}{x^2-1}$$

### فعالیت

- د $\frac{7}{x+1}$ , $\frac{5}{x-2}$ او $\frac{2}{x-5}$ کسرونه سره جمع کړئ.
- د پورته کسرونود جمعې حاصل، بېرته په لومړنیو کسرونو واړوئ.
- واقعي کسرونه څه ډول کسرونه دي، تعریف یې کړئ.

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

**تعریف**: د یوه واقعي کسر هغه کوچنی کسرونه چې د جمعې د عواملو په شکل لیکل شوي وي، که چېرې هغوی سره جمع کړو، راکړل شوی واقعي کسر به په لاس راشي، نو دا جمع شوي لومړني کسرونه د قسمي کسرونو په نامه یادېږي.

د یوه واقعي کسر د تجزیه کولو لپاره لاندې حالتونه په پام کې نیسو:

### لومړی حالت:

که چېرې د $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ ناطق کسر مخرج ( $P_n(x)$ ) له خطي بېلابېلو ضربي عواملو څخه جوړ شوي وي او تکرار نه وي په لاندې بڼه بدلېدلای شي:

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}+\frac{C}{x-x_3}+\ \cdots\ +\frac{N}{x-x_n}$$

( $A, B, C$ .... حقیقي عددونه دي)

**لومړی مثال**: د $\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}$ کسر په قسمي کسرونو تجزیه کړئ.

**حل**: د مخرج پولینوم په لومړنیو ضربي عواملو تجزیه کوو، نو په لاس راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x^3-4x^2-7x+10=(x-5)(x-1)(x+2)$$

ليدل کېږي چې نوموړی کسر له درو قسمي کسرونو څخه جوړ شوی دی، صورتونه یې $C, B, A$ ټاکو:

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{A}{x-5}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}$$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{A(x-1)(x+2)+B(x-5)(x+2)+C(x-1)(x-5)}{(x-5)(x-1)(x+2)}$$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{Ax^2+Ax-2A+Bx^2-3Bx-10B+Cx^2-6Cx+5C}{(x-5)(x-1)(x+2)}$$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{(A+B+C)x^2+(A-3B-6C)x+(-2A-10B+5C)}{(x-5)(x-1)(x+2)}$$

ليدل کېږي چې د دواړو خواوو د کسرونو مخرجونه سره برابر دي، نو بايد صورتونه هم سره برابر وي، نو د مطابقت د خواصو(د ورته حدونو ضريبونه سره مساوي وي) څخه په ګټه اخستنې سره ليکو:

$$\begin{cases} A+B+C=4 \\ A-3B-6C=-1 \\ -2A-10B+5C=-39 \end{cases}$$

د پورته سيستم له حل څخه وروسته $B=3, A=2$ او $C=-1$ په لاس راځي، نو:

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{2}{x-5}+\frac{3}{x-1}-\frac{1}{x+2}$$

**دويم مثال**: د $\frac{3x^3-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8}$ کسر په قسمي کسرونو تجزيه کړئ.

**حل**: لومړی نوموړی کسر په واقعي کسر بدلوو او بيا پورتنۍ طريقه پرې تطبيقوو:

$$\frac{3x^3-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8}=3x+\frac{4x-1}{x^2-2x-8} \Rightarrow \frac{4x-1}{x^2-2x-8}=\frac{A}{x-4}+\frac{B}{x+2}$$

$$=\frac{A(x+2)+B(x-4)}{(x-4)(x+2)}=\frac{(A+B)x+(2A-4B)}{x^2-2x-8}$$

$$\left.\begin{matrix} A+B=4 \\ 2A-4B=-1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow A=\frac{5}{2} \quad , \quad B=\frac{3}{2}$$

$$\frac{3x^2-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8}=3x+\frac{5}{2(x-4)}+\frac{3}{2(x+2)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

**دويم حالت**:

که د کسر د مخرج ضربي عوامل لومړی درجه پولینوم وي چې ځینې یې تکرار راغلی وي، یعنې که د $x-x_0$ عامل $n$ ځلې په مخرج کې تکرار شوی وي، نو لیکلای شو چې:

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)}=\frac{A}{x-x_0}+\frac{B}{(x-x_0)^2}+\cdots+\frac{N}{(x-x_0)^n}$$

**لومړی مثال**: د $\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}$ واقعي کسر په قسمي کسرونو تجزیه کړئ:

**حل**: د مخرج د پولینوم ضربي عوامل په لاس راوړو:

$$x^3-4x^2+5x-2=(x-1)(x-2)(x-1)$$

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{3x^2-6x+2}{(x-2)(x-1)^2}=\frac{A}{(x-2)}+\frac{B}{(x-1)}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{A(x-1)^2+B(x-2)(x-1)+C(x-2)}{(x-2)(x-1)^2}$$

$$=\frac{(A+B)x^2+(-2A-3B+C)x+(A+2B-2C)}{(x-2)(x-1)^2}$$

$$\left.\begin{aligned}A+B&=3\\-2A-3B+C&=-6\\A+2B-2C&=2\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{aligned}A&=2\\B&=1\\C&=1\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

**دریم حالت**:

که د مخرج ضربي عوامل دویمه درجه پولینوم چې د تجزیې وړ نه وي او تکرار هم نه وي راغلی، نو د $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ واقعي پولینوم د یو قسمي کسر $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ بڼه لري.

**لومړی مثال**: د $\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}$ کسر په قسمي کسرونو تجزیه کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

**حل**: د مخرج پولینوم ضربي عوامل عبارت دی له:

$$x^3+3x^2+6x+4=(x+1)(x^2+2x+4)$$

څرنګه چې د $x^2+2x+4$ درې جملهيي د حقيقي عددونو په سټ کې حل نه لري، نو په دې ساحه کې د تجزيې وړ نه ده. له دې امله ليکو:

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{Ax+B}{x^2+2x+4}+\frac{C}{x+1}=\frac{(Ax+B)(x+1)+C(x^2+2x+4)}{(x^2+2x+4)(x+1)}$$

$$=\frac{(A+C)x^2+(A+B+2C)x+(B+4C)}{(x^2+2x+4)(x+1)}$$

$$\left.\begin{aligned}A+C&=5\\A+B+2C&=8\\B+4C&=9\end{aligned}\right\}\Rightarrow\quad\begin{aligned}A&=3\\B&=1\\C&=2\end{aligned}\ \Rightarrow\ \frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{3x+1}{x^2+2x+4}+\frac{2}{x+1}$$

## پوښتنې

لاندې کسرونه په قسمي کسرونو تجزيه کړئ.

-1

$a)\ \dfrac{-x^2+2x-12}{x^3+2x^2+6x+5}$ $\quad b)\ \dfrac{4x^2-3x+8}{x^3-2x+4}$ $\quad c)\ \dfrac{2x^4-8x^3+7x^2-3x+4}{x^2-9x+3}$

-2

$a)\ \dfrac{1}{x^4(x+1)}$ $\quad b)\ \dfrac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}$ $\quad c)\ \dfrac{x^4+1}{x^2(x-1)}$

$d)\ \dfrac{3x^2+5x+10}{x^3+2x^2-4x-8}$ $\quad e)\ \dfrac{3x^2-18x+36}{x^3-6x^2+9x}$

-3

$a)\ \dfrac{3x+7}{(x^2+x+1)(x^2-4)}$ $\quad b)\ \dfrac{x^2+3x+4}{x^4-2x^2+1}$

$c)\ \dfrac{x^2+13x+10}{x^3-5x^2}$ $\quad d)\ \dfrac{x^5}{x^4-1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

## د اکسپوننشل تابع ګانو انتیګرالونه

مخامخ اړیکې سره پرتله کړئ.

$$\log_a b = x$$

$$a^x = b$$

- د $f(x) = a^x$ تابع څه ډول تابع ده، نوم یې واخلئ.
- د لوګاریتمي تابع یوه بېلګه ولیکئ.
- د $\log_a x = C$ اړیکه په اکسپوننشیل ډول ولیکئ.

له پورتني فعالیت څخه لیکلای شو چې:

د $f(x) = e^x$ طبیعي اکسپوننشیل تابع لپاره لرو $\int e^x dx = e^x + C$ نو په عمومي ډول

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} \quad , \; a \neq 1 \quad , \; a \in IR^+$$

**ثبوت**: له تعویضي طریقې څخه په کار اخیستنې سره لرو:

$$u = a^x$$

$$du = \ln a \cdot a^x dx$$

$$dx = \frac{du}{\ln a \cdot a^x} = \frac{du}{u \ln a}$$

$$\int a^x dx = \int u \frac{du}{u \ln a} = \frac{1}{\ln a} \int dx$$

$$\frac{1}{\ln a} u = \frac{1}{\ln a} a^x = \frac{a^x}{\ln a} \Rightarrow \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

**لومړی مثال**: د $f(x)=2^{x-3}$ اکسپوننشيل تابع انتيګرال غواړو پيدا کړو:

د توان له قانون څخه لرو:

$$2^{x-3}=\frac{2^x}{2^3}=\frac{1}{8}2^x$$

$$\int 2^{x-3}dx=\int\frac{1}{8}2^x dx=\frac{1}{8}\int 2^x dx$$

$$\frac{1}{8}\int 2^x dx=\frac{1}{8}\cdot\frac{2^x}{\ln 2}+C$$

**دويم مثال**: دلاندې اکسپوننشيل تابع ګانو انتيګرالونه پيدا کړئ.

$$1)\ \int 3^{x+1}\,dx=?\qquad 2)\ \int 6^{x-1}\,dx=?$$

**حل**:

$$1)\ \int 3^{x+1}\,dx=?$$

$$3^{x+1}=3^x\cdot 3$$

$$\int 3^x\cdot 3\,dx=3\int 3^x\,dx=3\cdot\frac{3^x}{\ln 3}+C$$

$$2)\ \int 6^{x-1}\,dx=?$$

$$6^{x-1}=\frac{6^x}{6}=\frac{1}{6}\cdot 6^x$$

$$\int\frac{1}{6}6^x\,dx=\frac{1}{6}\int 6^x\,dx=\frac{1}{6}\cdot\frac{6^x}{\ln 6}+C$$

## پوښتنې

د لاندې اکسپوننشيل تابع ګانو انتيګرالونه محاسبه کړئ.

$a)\ \int 3^{x-1}dx$ $\qquad b)\ \int 2^{-x}dx$ $\qquad c)\ \int a^{x+b}dx$

$d)\ \int\frac{1}{a^x}dx$ $\qquad e)\ \int 2^x\cdot 3^x dx$ $\qquad f)\ \int\frac{2^x}{3^x}dx$

$g)\ \int\frac{4^{x+3}}{2^x}dx$ $\qquad h)\ \int\frac{5^x+3^x}{2^x}dx$ $\qquad i)\ \int(1+2^x)dx$

(c) ketabton.com: The Digital Library

## د لوګاریتمي تابع ګانو انتیګرال

وښيئ چې د تابع په کوم حالت کې نزولي او په کوم حالت کې صعودي ده.

$$y = a^x$$

$$\int a^x dx = ?$$

- لوګاریتم په څو ډوله دی، د هر ډول عمومي رابطه ولیکئ.
- د $x = a^y$ او $y = \log_a x$ معادلې یو له بل سره څه اړیکه لري.
- د $x = b^y$ او $y = \log_b x$ تابع ګانو ګراف رسم کړئ.
- آیا کولای شو چې د لوګاریتمي تابع ګانو انتیګرال ونیسو؟

له پورتني فعالیت څخه پایله داسې بیانوو:

که $(x \in IR^+)$ $f(x) = \ln x$ وي د طبیعي لوګاریتم د تابع لپاره لیکلای شو: $\int \ln dx = x \cdot \ln x - x + C$

که $(x, a \in IR^+, a \neq 1)$ $f(x) = \log_a x$ وي د معمولي لوګاریتم تابع لپاره لیکلای شو:

$$\int \log_a x\, dx = x \log_a \frac{x}{e}$$

**ثبوت:**

1- که $a = e$ وضع شي، نو:

$$\int \log_a x\, dx = x \log_a \frac{x}{e} + C$$

$$\int \log_e x\, dx = \int \ln x dx = x \log_e \frac{x}{e} = x(\log_e x - \log_e e)$$

$$\int \ln x\, dx = x \ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

-2

$$\int \log_a x\,dx = x\log_a \frac{x}{e} + C$$

$$u = \log_a x \quad , \quad du = \frac{1}{x}\log_a e\,dx$$

$$dv = dx \quad , \quad v = x$$

$$\int \log_a x\,dx = x\log_a x - \int x\frac{1}{x}\log_a e\,dx$$

$$= x\log_a x - \log_a e\int dx$$

$$= x\log_a x - x\log_a e = x(\log_a x - \log_a e) = x\log_a \frac{x}{e} + C$$

$$\int \log_a x\,dx = x\,\log_a \frac{x}{e} + C$$

**مثال**: د $\int \ln 3x dx$ غیرمعین انتیگرال غوارو پیدا کړو:

**حل**:

$$\int \ln 3x dx = \int (\ln 3 + \ln x)dx = \int \ln 3\,dx + \int \ln x\,dx$$

$$= x\ln 3 + x\ln x - x$$

$$= x(\ln 3 + \ln x) - x = x(\ln 3x - 1)$$

**یادونه**:

$(I)$ د تعویض Substitution له لارې کولای شو د غیرمعین انتیګرال حل پیدا کړو.

**لومړی مثال**:لاندې انتیګرالونه پیدا کړئ.

**حل**:

$$a)\quad I = \int \frac{1}{2}e^{-2x-3}dx$$

$$-2x - 3 = u, \qquad -2 = \frac{du}{dx} \quad , \quad dx = -\frac{1}{2}du$$

$$I = \int \frac{1}{2}e^{u}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)du = -\frac{1}{4}\int e^{u}du = -\frac{1}{4}e^{u} + C = -\frac{1}{4}e^{-2x-3} + C$$

$$b)\quad I = \int \frac{2dx}{x+2}$$

$$x + 2 = u, \qquad 1 = \frac{du}{dx} \qquad dx = du$$

$$I = \int \frac{2du}{u} = 2\int \frac{du}{u} = 2\ln|u| + C = 2\ln|x+2| + C$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

**دویم مثال**: د $f(x)=e^{2x}$ تابع انتیگرال ونیسئ:

**حل**:

$$f(x)=e^{2x} \Rightarrow \int f(x)dx=\int e^{2x}dx=?$$

$$u=2x \Rightarrow du=2dx$$

$$dx=\frac{du}{2}$$

$$f(x)=e^{2x} \Rightarrow \int f(x)dx=\int e^{u}\cdot\frac{du}{2}=\frac{1}{2}\int e^{u}\,du$$

$$\int e^{2x}dx=\frac{e^{u}}{2}+C=\frac{e^{2x}}{2}+C=\frac{1}{2}e^{2x}+C$$

آزمایښت: $F(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+C \Rightarrow F'(x)=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot 2=e^{2x}=f(x)$

**دریم مثال**: د $f(x)=x\cdot\ln x^{2}$ انتیگرال حساب کړئ.

**حل**:

$$f(x)=x\cdot\ln x^{2} \Rightarrow \int f(x)dx=\int(x\cdot\ln x^{2})dx=?$$

$$u=x^{2}$$

$$du=2x\,dx \Rightarrow dx=\frac{1}{2}du$$

$$\int f(x)\,dx=\int x\cdot\ln u\cdot\frac{1}{2x}du=\frac{1}{2}\int\ln u\,du=\frac{1}{2}[u\cdot\ln u-u+C]=\frac{1}{2}u\cdot\ln u-\frac{1}{2}u+C$$

$$=\frac{1}{2}x^{2}\cdot\ln x^{2}-\frac{1}{2}x^{2}+C$$

$(II)$ معین انتیگرالونه هم د بدلون(تعویض) له لارې حل کېږي.

**لومړی مثال**: د $\int_{-1}^{1}e^{2x}\,dx$ انتیگرال پیدا کړئ.

$$f(x)=e^{2x} \Rightarrow \int_{-1}^{1}e^{2x}\,dx$$

$$u=2x \Rightarrow du=2\,dx \Rightarrow dx=\frac{1}{2}du$$

$$\left.\begin{array}{l} x=-1,\ u=2x \Rightarrow u=2(-1)=-2 \\ x=1,\ u=2x \Rightarrow u=2(1)=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \int_{-1}^{1}e^{2x}\,dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}e^{u}\,du=\frac{1}{2}\left[e^{u}\right]_{-2}^{2}=3.627$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

**دويم مثال**: د $f(x)=\int_1^2 2x\cdot\ln x^2 dx$ انتيګرال قيمت پيدا کړئ.

$$u=x^2$$

$$du=2x\,dx \Rightarrow dx=\frac{1}{2x}du$$

$$\left.\begin{array}{ll} x=1\ , & u=x^2=1 \\ x=2\ , & u=x^2=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \int_1^2 2x\cdot\ln x^2 dx=\int_1^4 2x\cdot\ln u\cdot\frac{1}{2x}du=\int_1^4 \ln u\,du$$

$$=\left[u\cdot\ln u-u\right]_1^4=\left[4\cdot\ln 4-4\right]-\left[1\cdot\ln 1-1\right]\approx 2.545$$

## پوښتنې

لاندې انتيګرالونه حل کړئ.

$a)\ \int \ln 2x^3 dx$ $\qquad b)\ \int \ln\sqrt{x}\,dx$ $\qquad c)\ \int \log\frac{x}{2}dx$

$d)\ \int 3\log\frac{1}{x}dx$ $\qquad e)\ \int_1^2 \frac{4}{e^{2x-4}}dx$

(c) ketabton.com: The Digital Library

## د قسمي کسرونو په مرسته د انتیګرال محاسبه

د مخامخ کسر قسمي کسرونه پیدا کړئ.

$$\frac{5}{x^2-3x+2}=\frac{?}{(x-2)}+\frac{?}{(x-1)}$$

مخکې مو د قسمي کسرونو تجزیه مطالعه کړه اوس غواړو چې د هغو تابع ګانو انتیګرالونه د قسمي کسرونو په واسطه تر څېړنې لاندې ونیسو.

**لومړی مثال**: $\int\frac{7x-12}{x^2-6x+8}dx$ محاسبه کړئ.

**حل**: د قسمي کسرونو د تجزیې په مرسته لیکلای شو:

$$\frac{7x-12}{x^2-6x+8}dx=\frac{A}{(x-2)}+\frac{B}{(x-4)}$$

$$\frac{A(x-4)+B(x-2)}{(x-2)(x-4)}=\frac{Ax-4A+Bx-2B}{(x-2)(x-4)}=\frac{(A+B)x-4A-2B}{(x-2)(x-4)}$$

$$A+B=7$$

$$-4A-2B=-12$$

$$A=7-B$$

$$-4(7-B)-2B=-12$$

$$-28+4B-2B=-12$$

$$-28+2B=-12$$

$$2B=16 \quad\Rightarrow\quad B=8$$

$$A=7-8=-1$$

$$\frac{7x-12}{x^2-6x+8}=-\frac{1}{x-2}+\frac{8}{x-4}$$

نو لیکلای شو چې:

$$\int\frac{7x-12}{x^2-6x+8}dx=\int\frac{-1}{x-2}dx+\int\frac{8}{x-4}dx$$

$$\int\frac{7x-12}{x^2-6x+8}dx=-\int\frac{1}{x-2}dx+8\int\frac{1}{x-4}dx$$

$$=-\ln|x-2|+8\ln|x-4|+C=\ln(x-2)^{-1}+\ln(x-4)^8+C$$

$$=\ln\left[(x-2)^{-1}\cdot(x-4)^8\right]=\ln\left[\frac{(x-4)^8}{x-2}\right]+C$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

**دویم مثال**: د $\int \frac{-5x+9}{x^2+x-6}dx$ انتیګرال محاسبه کړئ.

**حل**: مخرج په فکتورونو تجزیه کوو: $x^2+x-6=(x-2)(x+3)$

نو:

$$\frac{-5x+9}{x^2+x-6}=\frac{-5x+9}{(x-2)(x+3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+3}$$

$$\frac{A(x+3)+B(x-2)}{(x-2)(x+3)}=\frac{Ax+3A+Bx-2B}{(x-2)(x+3)}=\frac{(A+B)x+3A-2B}{(x-2)(x+3)}$$

$$(A+B)x+3A-2B=-5x+9$$

$$A+B=-5 \Rightarrow A=-5-B$$

$$3A-2B=-5x+9$$

د $A$ او $B$ عددي قیمتونه عبارت دي له:

$$3(-5-B)-2B=9$$

$$-15-5B=9$$

$$-5B=24$$

$$B=-\frac{24}{5}$$

$$A=-5+\frac{24}{5}=\frac{-25+24}{5}=-\frac{1}{5}$$

$$\frac{-5x+9}{x^2+x-6}=\frac{-\frac{1}{5}}{x-2}-\frac{\frac{24}{5}}{x+3}$$

$$\int\frac{-5x+9}{x^2+x-6}=\int\frac{-\frac{1}{5}}{x-2}dx-\int\frac{\frac{24}{5}}{x+3}dx=-\frac{1}{5}\int\frac{1}{x-2}dx-\frac{24}{5}\int\frac{1}{x+3}dx$$

$$=-\frac{1}{5}\ln(x-2)-\frac{24}{5}\ln(x+3)$$

$$=\ln(x-2)^{-\frac{1}{5}}+\ln(x+3)^{-\frac{24}{5}}=\ln\left[(x-2)^{-\frac{1}{5}}\cdot(x+3)^{-\frac{24}{5}}\right]+C$$

**پوښتنې**

لاندې انتیګرالونه د قسمي کسرونو په طریقه حل کړئ.

a) $\int\frac{x+2}{x^3-3x^2-x+3}dx$ b) $\int\frac{x-2}{x^2-6x+5}dx$ c) $\int\frac{x^6}{x^4+3x^2+2}dx$

(c) ketabton.com: The Digital Library

## د خپرکي مهم ټکي

- که $f(x)=e^x$ وي، نو ددې تابع مشتق عبارت له $f'(x)=e^x$ دی.
- که $f(x)=a^x$ وي، د دې تابع مشتق $f'(x)=a^x\cdot\ln a$ دی.
- که $f(x)=\log_a x$ وي، نو د تابع مشتق $f'(x)=\dfrac{1}{x}\log_a e=\dfrac{1}{x\ln a}$ دی.
- $f(x)=\log_a g(x)$ وي، نو د تابع مشتق $(\log_a g(x))'=\dfrac{g'(x)}{g(x)}\log_a e$ دی.
- **قسمي کسرونه**: د يوه واقعي کسر هغه کوچنی کسرونه چې د جمعې د عواملو په شکل ليکل شوي دي که هغوی جمع کړو، راکړل شوي واقعي کسر په لاس راځي، قسمي کسرونه بلل کېږي.
- که چېرې د $\dfrac{P_m(x)}{P_n(x)}$ د کسري پولينوم مخرج $(P_n(x))$ د خطي بېلابېلو ضربي عواملو څخه جوړوي چې تکرار نه وي راغلی په لاندې بڼه بدليدلای شي:

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}+\frac{C}{x-x_3}+\cdots+\frac{N}{x-x_n}$$

- که د لومړی درجه پولينوم مخرج ضربي عوامل چې ځيني يې تکرار راغلي وي، يعنې که د $x-x_0$ عامل $n$ ځلې تکرار شوی وي، نو ليکلای شو چې:

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)}=\frac{A}{x-x_0}+\frac{B}{(x-x_0)^2}+\cdots+\frac{N}{(x-x_0)^n}$$

- که د مخرج ضربي عوامل دويمه درجه پولينوم د تجزيې وړ نه وي او تکرار هم نه وي راغلی، نو د $\dfrac{P_m(x)}{P_n(x)}$ واقعي پولينوم يو ټوټه کسر $\dfrac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ بڼه لري.
- د اکسپوننشيل تابع ګانو انتيګرال لپاره ليکلای شو:

$$\int e^x dx=e^x+C \quad , \quad \int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C \quad , \quad (a\in IR^+\ ,\ a\neq 1)$$

- د لوګارتمي توابعو د انتيګرال لپاره ليکلای شو:

$$\int \ln x\,dx=x\ln x-x+C \quad , \quad \int \log_a x\,dx=x\log_a\frac{x}{e}+C$$

- ځيني تابع ګانې چې پرته د بدلون له لارې حل کېږي، ليکو:

$$f(x)=e^x \Rightarrow \int f(x)\,dx=\int e^x\,dx=e^x+C$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

## د پنځم څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتنې حل کړئ.

1. د $f(x)=\ln(\frac{x-2}{x+2})$ د تابع مشتق پیدا کړئ.

2. د $f(x)=\ln\sqrt{x-1}$ تابع مشتق پیدا کړئ.

3. د $y=2x^{2x}$ تابع مشتق پیدا کړئ.

4. د $f(x)=\log\sqrt{x^3}$ تابع مشتق پیدا کړئ.

5. لاندې کسرونه په قسمي کسرونو تجزیه کړئ.

1) $\frac{x+1}{x^2-x-6}$ 2) $\frac{x^2-x+1}{x^3+2x^2+x}$ 3) $\frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}$

6. لاندې انتیګرالونه پیدا کړئ.

1) $\int 5t^7dt$

2) $\int \frac{x^3-3}{x^2}dx$

3) $\int (2\cos x-5\sin x+e^x)dx$

4) $\int \sqrt{\cos x}\sin x dx$

5) $\int xe^{-x}dx$

6) $\int (\frac{5}{(2x+1)(x-2)})dx$

7) $\int_{-1}^{1}3x^2\sqrt{x^3+1}dx$

7 – د لاندې تابع ګانو مشتق پیدا کړئ.

a) $y=\ln(x^2+x+1)$

b) $y=\ln(\sin x)$

c) $y=e^{x^2+1}$

d) $y=\sqrt[x]{2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

# شپږم څپرکی

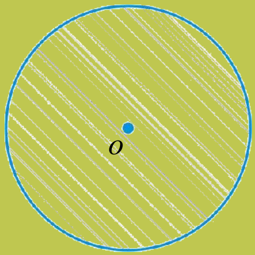
## د انتیگرال تطبیقات

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

## د منحني ګانو پواسطه د محصور شوي سطحې د مساحت محاسبه

*Accounting of area bounded by one curve*




**د مخامخ شکل مساحت چې يوه سطحه د يوې منحني په واسطه تړل شوې دايره ده. د مساحت فورمول يې ووياست.**

د $y=1-x^2$ تابع په پام کې ونيسئ.

- د تابع بحراني (*Critical Point*) ټکي او د $x$ محور سره د تقاطع ټکي پيدا او ګراف يې رسم کړئ.
- د $y=1-x^2$ تابع او $x$ محور تر منځ د سطحې د مساحت قيمت د انتيګرال په مرسته پيدا کړئ.
- پورتنی فعاليت د $y=-x^2+2x$ تابع لپاره تکرار کړئ او د منحني او د $x$ د محور تر منځ محصور شوی مساحت محاسبه کړئ.

له پورتني فعاليت څخه لاندې پايلې لاسته راځي:

ـ $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$ انتيګرال د يوې سطحې د مساحت قيمت رابنيي چې د $y=f(x)$ منحني او د $x$ محور او د $x=a$ , $x=b$ د کرښو له خوا رابند (محصور) دی.

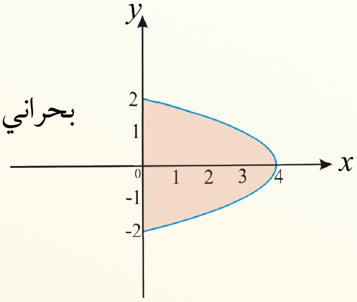
ـ که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ ترلې انټروال کې مثبت او متمادي وي، يعنې $y=f(x)\geq 0$ په دې صورت کې $f(x)$ تابع ګراف تل د $x$ محور پورته خواته او که $y=f(x)\leq 0$ وي، په دې حالت کې $f(x)$ تابع ګراف د $x$ محور لاندې خواته واقع ده او منفي دی.

**لومړی مثال:** د $x=4-y^2$ تابع د منحني او د $y$ د محور تر منځ محصور شوی مساحت پيدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

**حل**: لومړی د تابع بحراني ټکي او د $y$ محور سره د تقاطع ټکي پيدا کوو، وروسته يې شکل رسموو، د بحراني ټکي د پيدا کولو لپاره لومړی د تابع مشتق نيسو او له صفر سره يې مساوي کوو او له محورونو سره د تقاطع ټکو د په لاس راوړلو لپاره تابع له صفر سره برابروو.

$$x = 4 - y^2 \Rightarrow x' = -2y = 0$$
$$x' = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0$$
$$y = 0\,, \quad x = 4 - y^2 \Rightarrow x = 4 - 0 \Rightarrow x = 4 \quad \Rightarrow \quad (4,0)$$ بحراني ټکی
$$x = 0 \quad , \quad 4 - y^2 = 0 \Rightarrow y^2 = 4$$
$$y = \pm 2 \quad \Rightarrow \quad (0,2) \quad , \quad (0,-2)$$ د محورونو سره د تقاطع ټکي




څرنګه چې د $x = 4 - y^2$ معادله په $[-2,2]$ انټروال کې نظر $x$ محور ته دواړه ټکي متناظر دي، نو د نمايي مساحت په پام کې نيولو سره، د انتيګرال د مساحت سرحدات په لاندې ډول په لاس راوړو:

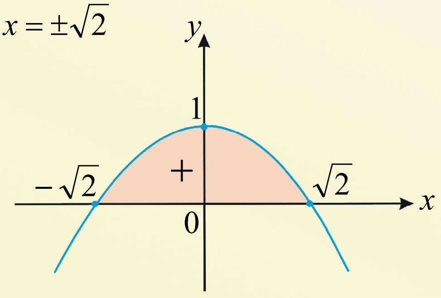
$$A = \int_{-2}^{2} (4 - y^2)\, dy = 2\int_{0}^{2} (4 - y^2) dy = 2[4y - \frac{y^3}{3}]_0^2$$

$$A = 2\,[(4\cdot 2 - \frac{2^3}{3}) - 0] = 2\,(8 - \frac{8}{3}) = 2\,(\frac{24-8}{3}) = 2\,(\frac{16}{3}) = \frac{32}{3}$$

**دويم مثال**: د $x$ محور او د $y = 1 - \frac{1}{2}x^2$ تابع منحني د محصور شوي سطحې مساحت محاسبه کړئ.

**حل**: د محصور شوي سطحې د مساحت ټاکلو لپاره لومړی بحراني ټکي او د $x$ له محور سره د تقاطع ټکي په لاس راوړو.

$$y = 1 - \frac{1}{2}x^2 \;,\; y' = -x$$
$$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$
$$x = 0,\; y = 1 - \frac{1}{2}x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad y = 1 - \frac{1}{2}0^2 \quad \Rightarrow \quad y = 1 \quad \Rightarrow \quad (0,1)$$ بحراني ټکي
$$y = 0, 1 - \frac{1}{2}x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2}x^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 2,\; x = \pm\sqrt{2}$$
$$x_1 = \sqrt{2} \quad , \quad x_2 = -\sqrt{2}$$
$$(\sqrt{2},0)\;,\;(-\sqrt{2},0)$$ له محورونو سره د تقاطع ټکي



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}(1-\frac{1}{2}x^2)\,dx=2\int_{0}^{\sqrt{2}}(1-\frac{1}{2}x^2)\,dx=2([x-\frac{1}{6}x^3]_0^{\sqrt{2}})$$

$$A=2(\sqrt{2}-\frac{(\sqrt{2})^3}{6}-0)=2(\frac{6\sqrt{2}-(\sqrt{2})^3}{6})=2(\frac{6\sqrt{2}-\sqrt{8}}{6})$$

$$=(\frac{6\sqrt{2}-2\sqrt{2}}{3})=\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$$A=1.8853$$

**دريم مثال**: د $y=x^2-3$ تابع گراف د $x$ له محور سره يوه سطحه رابند وي، د دې سطحې مساحت پيدا کړئ.

**حل**: لومړی د سطحې د ټاکلو لپاره د تابع گراف رسموو او د تابع بحراني ټکي او د تقاطع ټکي په لاس راوړو:

$$y=x^2-3\Rightarrow y'=2x$$

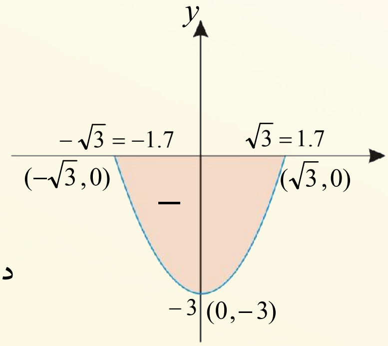
$$y'=0\Rightarrow x=0$$

$$x=0\ ,\ y=x^2-3\Rightarrow y=0^2-3$$

$\Rightarrow y=-3\Rightarrow(0,-3)$ بحراني ټکي

$$y=0\ ,\ \ x^2-3=0\Rightarrow x^2=3$$

$x=\pm\sqrt{3}\Rightarrow(\sqrt{3},0)\ \ ,\ \ (-\sqrt{3},0)$ د محورونو سره د تقاطع ټکي




څرنگه چې د $y=x^2-3$ تابع په $[\sqrt{3},-\sqrt{3}]$ انټروال کې د محور سره د تقاطع ټکي متناظر قيمتونه لري، نوگراف يې د $x$ له محور څخه لاندې دی او انتيگرال يې منفي دی، نو له ټول مساحت څخه د انتيگرال د سرحدونو نيمايي مساحت پيدا کوو او په 2 کې يې ضربوو:

$$A_1=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}(x^2-3)\,dx=-2\int_{0}^{\sqrt{3}}(x^2-3)\,dx=-2(\int_{0}^{\sqrt{3}}x^2\,dx-3\int_{0}^{\sqrt{3}}dx)=-2([\frac{1}{3}x^3]_0^{\sqrt{3}}-[3x]_0^{\sqrt{3}})$$

$$=-2(\frac{1}{3}[(\sqrt{3})^3-0]-3[\sqrt{3}-0])=-2(\frac{1}{3}(\sqrt{3})^3-3\sqrt{3})$$

$$=-\frac{2}{3}(\sqrt{3})^3+6\sqrt{3}=-\frac{2}{3}(1.7)^3+6(1.7)=-\frac{2}{3}(4.913)+10.2=-\frac{9.826}{3}+10.2$$

$$=-3.2753+10.2=6.9247$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

**خلورم مثال**: د $y = x^2 - 3x$ تابع ګراف رسم د منحني او $x$ محور تر منځ د سطحې مساحت په $[-1,4]$ انټروال کې وټاکئ.

**حل**: لومړی د منحني بحراني ټکی او له له محورونو سره د تقاطع ټکي پیدا کوو:

$$y = x^2 - 3x$$

$$y' = 2x - 3 = 0 \Rightarrow 2x = 3 \ , \ x = \frac{3}{2}$$

$$x = \frac{3}{2}, \quad y = x^2 - 3x \Rightarrow y = (\frac{3}{2})^2 - 3(\frac{3}{2})$$

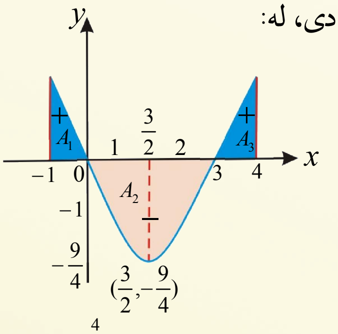
$$y = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} = -\frac{9}{4} \ , \quad (x, y) = (\frac{3}{2}, -\frac{9}{4})$$ بحراني ټکی

څرنګه چې $y'' = 2 > 0$ دی، نو د $(\frac{3}{2}, -\frac{9}{4})$ ټکي د تابع مطلق اصغري ټکي دي او د تقاطع ټکي یې د $x$ له محور سره عبارت دی، له:

$$y = 0 \Rightarrow x^2 - 3x = 0$$

$$\Rightarrow x(x-3) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = 3$$




$$A = A_1 - A_2 + A_3 = \int_{-1}^{0} (x^2 - 3x)\, dx - \int_{0}^{3} (x^2 - 3x)\, dx + \int_{3}^{4} (x^2 - 3x)\, dx$$

$$A = [\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2]_{-1}^{0} - [\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2]_{0}^{3} + [\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2]_{3}^{4}$$

$$A = [(\frac{1}{3}\cdot 0 - \frac{3}{2}\cdot 0) - (\frac{1}{3}\cdot(-1)^3 - \frac{3}{2}\cdot(-1)^2)] - [(\frac{1}{3}\cdot 3^3 - \frac{3}{2}\cdot 3^2) - (\frac{1}{3}\cdot 0 - \frac{3}{2}\cdot 0)] +$$

$$[(\frac{1}{3}\cdot(4)^3 - \frac{3}{2}\cdot(4)^2) - (\frac{1}{3}\cdot(3)^3 - \frac{3}{2}\cdot(3)^2)]$$

$$= -(-\frac{1}{3} - \frac{3}{2}) - (\frac{1}{3}\cdot 27 - \frac{3}{2}\cdot 9) + (\frac{1}{3}\cdot 64 - \frac{3}{2}\cdot 16) - (\frac{1}{3}\cdot 27 - \frac{3}{2}\cdot 9)$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{3}{2} - \frac{27}{3} + \frac{27}{2} + \frac{64}{3} - \frac{48}{2} - \frac{27}{3} + \frac{27}{2}$$

$$= \frac{1 - 27 + 64 - 27}{3} + \frac{3 + 27 - 48 + 27}{2} = \frac{65 - 54}{3} + \frac{57 - 48}{2} = \frac{11}{3} + \frac{9}{2} = \frac{22 + 27}{6} = \frac{49}{6}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

**پنځم مثال**: د $y = x^2 - 2x$ منحني او x محور ترمنځ مساحت د $[-1,2]$ په انټروال کې پیدا کړئ.

**حل**: لومړی بحراني ټکي وروسته د $x$ له محور سره د تقاطع ټکي په لاس راوړو:

$$y = x^2 - 2x \Rightarrow y' = 2x - 2 = 0$$

$$2x = 2 \Rightarrow x = 1$$

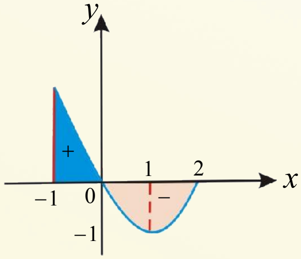
$x = 1 \;,\; y = x^2 - 2x = 1^2 - 2(1) = -1 \Rightarrow (1,-1)$ بحراني ټکي

څرنگه چې $y'' = 2 > 0$ دی، نو تابع د $(1,-1)$ په ټکي کې مطلق اصغري لري او د $x$ لـه محـور سـره يـې تقاطع په لاندې ډول ده.

$$y = 0 \quad , \quad x^2 - 2x = 0$$

$$x(x-2) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = 2$$




څرنگه چې منحني د $[-1,2]$ په انټروال کې لـه مبدأ څخه تیرېږي او د منحنـي يـوه برخـه د $[-1,0]$ پـه انټروال کې د $x$ محور پورته خواته او بله برخه يې د $[0,2]$ په فاصلې کې د $x$ محور ښکته خواته پرتـه ده انټیګرال يې منفي دی:

$$A = \int_{-1}^{0} (x^2 - 2x)dx - \int_{0}^{2} (x^2 - 2x)\,dx = [\frac{1}{3}x^3 - x^2]_{-1}^{0} - [\frac{1}{3}x^3 - x^2]_{0}^{2}$$

$$= (0 - (-\frac{1}{3} - 1)) - ((\frac{8}{3} - 4) - 0) = -(-\frac{1}{3} - 1) - (\frac{8}{3} - 4) = -(\frac{-1-3}{3}) - (\frac{8-12}{3})$$

$$= -(\frac{-4}{3}) - (\frac{-4}{3}) = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

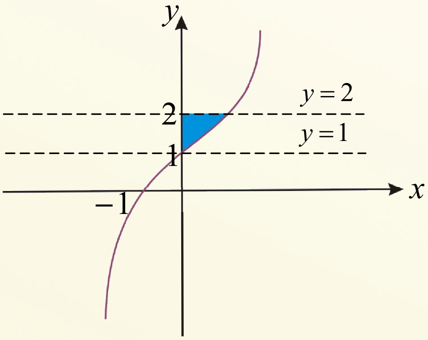
(c) ketabton.com: The Digital Library

## پوښتني

1- د $f(x)=\sin x$ منحني او د $x$ محور تر منځ مساحت په $[-2\pi, 2\pi]$ انټروال کې حساب کړئ.

2- د $y=x^3+1$ تـــابع منحنــــي او $y=1$ ، $y=2$

کرښو تر منځ مساحت وټاکئ.



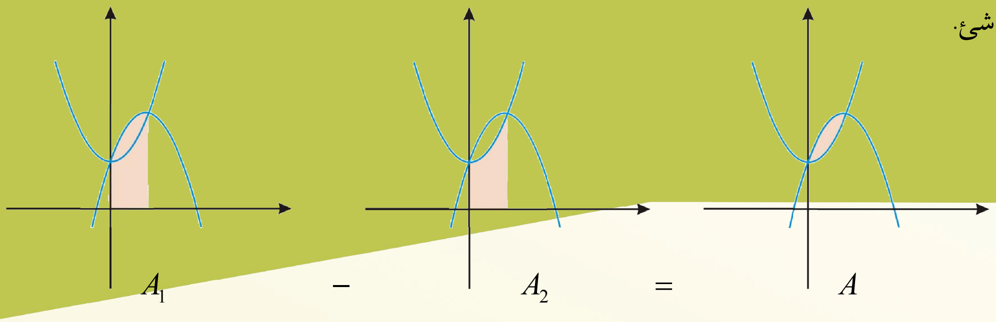

3- د $y=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}+x}$ منحني او د $x=0$ او $x=1$ کرښو تر منځ مساحت حساب کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

## د دوو محصور شویو منحني ګانو تر منځ د مساحت محاسبه

## *Accounting of area bounded by tow curves*

لاندې شکلونه په پام کې ونیسئ د $A = A_1 - A_2$ اړیکې د سموالي په اړه څه و یلای شئ.




### فعالیت

که د $y_1 = 1 - x^2$ او $y_2 = x^2 - 1$ تابع ګاني راکړل شوې وي.

- د $y_1 = y_2$ رابطې څخه د $x$ قیمت په لاس راوړئ.
- د لاس ته راغلو قیمتونو په پام کې نیولو سره د هغوی ګراف رسم کړئ.
- څرنګه چې د $y_1$ تابع ګراف د $y_2$ تابع د ګراف څخه لوړ دی، نو د تابع ګانو د انتیګرال د تفریق حاصل $(y_1 - y_2)$ د $x$ په ټاکل شوی انټروال کې حساب کړئ.
- نوموړی فعالیت د $y = x^2$ تابع د منحني او $y = x + 2$ د کرښې لپاره تکرار کړئ او د محصورې شوي سطحې مساحت حساب کړئ.

د پورتنی فعالیت څخه لاندې پایلې لاسته راځي:

ـ که چېرې د $y_1 = f(x)$ او $y_2 = g(x)$ دوو منحني ګانو د محصور شوي سطحې د محاسبې لپاره په هغه صورت کې چې $f(x) > g(x)$ وي، یعنې د $f(x)$ تابع ګراف د $g(x)$ تابع دپاسه واقع وي، نو لومړی د دواړو منحني ګانو د تقاطع ټکي پیدا کوو وروسته د پاسني او لاندېني منحني د $x$ د محور سره مساحت په $[a,b]$ انټروال کې محاسبه کوو:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b g(x)\, dx$$

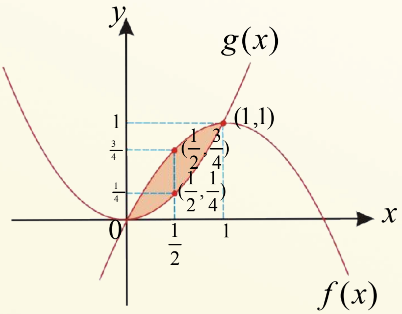
(c) ketabton.com: The Digital Library

ـ که چېرې د $g(x)$ تابع ګراف د $f(x)$ تابع د ګراف دپاسه واقع وي، نو لرو چې:

$$A=\int_a^b [g(x)-f(x)]\,dx=\int_a^b g(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,dx$$

**لومړی مثال**: د $f(x)=2x-x^2$ او $g(x)=x^2$ منحني ګانو د ګرافونو ترمنځ د پرتې سطحې مساحت حساب کړئ.

**حل**: لومړی د دواړو منحني ګانو د تقاطع ټکی پیدا کوو:




$$f(x)=2x-x^2\quad,\quad g(x)=x^2$$
$$f(x)=g(x)\Rightarrow 2x-x^2=x^2$$
$$2x-x^2-x^2=0$$
$$2x-2x^2=0$$
$$2x(1-x)=0$$
$$2x=0\quad\Rightarrow\quad x_1=0$$
$$1-x=0\quad\Rightarrow\quad x_2=1$$

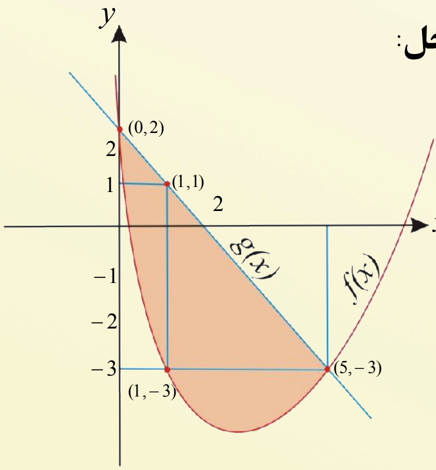
لیدل کېږي چې ددواړو منحني ګانو تقاطع (1،1) او (0،0) ده اوس د محصور شوي سطحې مساحت پیدا کوو.

$$A=\int_a^b [f(x)-g(x)]=\int_0^1 [2x-x^2-x^2]\,dx=\int_0^1 [2x-2x^2]=[\frac{2x^2}{2}-\frac{2x^3}{3}]_0^1$$

$$=[x^2-\frac{2}{3}x^3]_0^1=(1-\frac{2}{3})-0=\frac{3-2}{3}=\frac{1}{3}$$

**دویم مثال**: د $f(x)=x^2-6x+2$ تابع او $g(x)=2-x$ کرښې د ګرافونو تر منځ د پرتې سطحې مساحت حساب کړئ.

**حل**:




$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^2-6x+2 \\ g(x)=2-x \end{array}\right\}\Rightarrow f(x)=g(x)$$

$$x^2-6x+2=2-x\Rightarrow x^2-6x+2-2+x=0$$

$$x^2-5x=0\Rightarrow x(x-5)=0$$

$$x_1=0\quad,\quad x_2=5$$

$\Rightarrow (0,2)\ ,\ (5,-3)$ دکرښې او منحني د تقاطع ټکي

(c) ketabton.com: The Digital Library

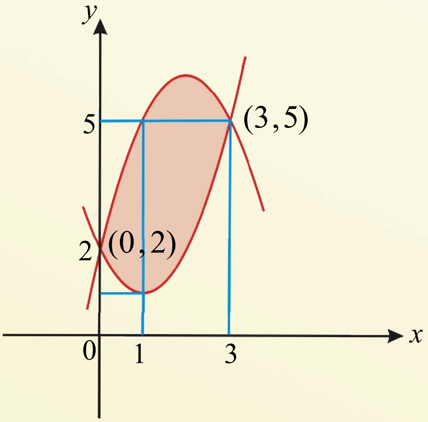
له شکل څخه ښکاري چې د $g(x)$ کرښې ګراف د $f(x)$ ګراف پورته خوا ته واقع دی، په دې معنا چې

$$g(x) > f(x)$$

$$A=\int_a^b [g(x)-f(x)]\,dx=\int_0^5 (2-x-x^2+6x-2)dx$$
$$=\int_0^5 (-x-x^2+6x)\,dx=\int_0^5 (-x^2+5x)\,dx$$
$$=[-\frac{x^3}{3}+5\frac{x^2}{2}]_0^5=(-\frac{125}{3}+5\cdot\frac{25}{2})-0=-\frac{125}{3}+\frac{125}{2}$$
$$=\frac{-250+375}{6}=\frac{125}{6}$$

**دریم مثال**: د $f(x)=-x^2+4x+2$ او $g(x)=x^2-2x+2$ تابع ګانو د ګرافونو تر منځ د پرتې سطحې مساحت پیدا کړئ.

**حل**: څرنګه چې د دواړو ګرافونو د تقاطع ټکي د انتیګرال حدونه جوړوي، نو د دې ټکو د پیدا کولو لپاره $f(x)=g(x)$ وضع کوو:




$$\left.\begin{array}{l} f(x)=-x^2+4x+2 \\ g(x)=x^2-2x+2 \end{array}\right\}\Rightarrow f(x)=g(x)$$
$$-x^2+4x+2=x^2-2x+2$$
$$\Rightarrow -x^2+4x+2-x^2+2x-2=0$$
$$-2x^2+6x=0\Rightarrow x(-2x+6)=0$$
$$\Rightarrow x_1=0 \quad , \quad -2x=-6\Rightarrow x_2=3$$

**د دواړو منحني ګانو د تقاطع ټکي** $(0,2)$ , $(3,5)$

د $x$ له محور سره د تقاطع ټکی عبارت له (5،3)، (2،0) دی اوله شکل څخه لیدل کېږي چې د $f(x)$ ګراف د $g(x)$ له ګراف څخه پورته واقع دی، نو لرو:

$$A=\int_a^b[f(x)-g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx=\int_0^3(-x^2+4x+2)dx-\int_0^3(x^2-2x+2)dx$$
$$=[-\frac{x^3}{3}+\frac{4x^2}{2}+2x]_0^3-[\frac{x^3}{3}-\frac{2x^2}{2}+2x]_0^3$$
$$=-\frac{1}{3}\cdot 27+2\cdot 9+6-0-\frac{1}{3}\cdot 27+9-6+0$$
$$=-9+18-9+9=9$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

## پوښتنې

1- د $y=x^2$ او $y=-x^2+4x$ منحني ګانو د ګرافونو تر منځ د پرتې سطحې مساحت پیدا کړئ.

2- د $y^2=2x-2$ پارابول او $y=x-5$ کرښې د ګرافونو تر منځ د سطحې مساحت حساب کړئ.

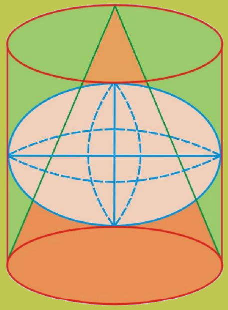
3- د $y^2=2x+6$ منحني او $y=x-1$ کرښې د ګرافونو تر منځ د سطحې مساحت محاسبه کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

## دگراف له دوران څخه د په لاس راغلي جسم حجم

***Accounting of rounding things Volume***

د مخامخ شکل د جسمونو د حجمونو تر منځ نسبت پیدا کړئ.



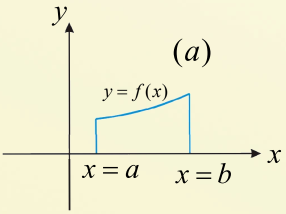
په مخکنیو ټولګیو کې مو د جسمونو حجم پیدا کړی وو. پرته له دې چې د هغوی فورمولونه ثبوت شي منلي مو وو، خو اوس د جسمونو د حجم فورمولونه د معین انتیګرال څخه په ګټه اخیستنې سره ثبوتوو.

### فعالیت

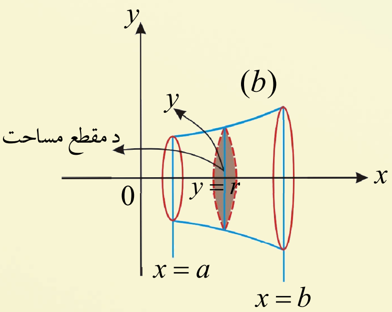
- یو ټکی او یوه کرښه په فضا کې داسې په پام کې ونیسئ چې ټکی د کرښې په منځ کې واقع وي.
- هغه جسم چې د یوې مستقیمې کرښې له دوران څخه د یوه ټکي په شاوخوا لـه څرخېدو وروسته جوړېږي، نوم یې واخلئ.
- د نوموړي جسم د حجم فورمول ولیکئ او ووایئ چې هغه څنګه ثبوتوو.

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

- که چېرې د $y = f(x)$ متمادي تابع د منحني مساحت نظر $(a)$ شکل ته



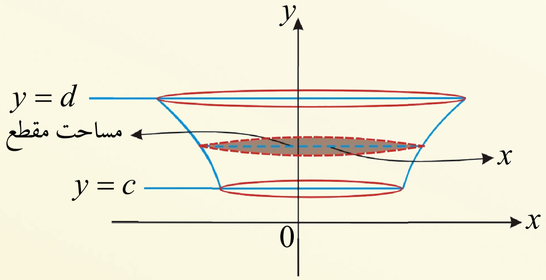

د $x = a$ او $x = b$ کرښو او منحني پـه واسـطه محـصور شوی وي، نو د هغه جسم حجم چې د پورتني تابع د منحني له دوران څخه د $x$ محور په شاوخوا لاسته راځي تقریباً استوانه یې شکل لري، لکه د $(b)$ شکل.



(c) ketabton.com: The Digital Library

چې ارتفاع یې $\Delta x = b - a$ ده او د دې استوانې سطح د دایروي شکل په واسطه محصوره شوې ده چې دې سطحو ته مقطع وایي او پوهېږو چې د دایرې مساحت نظر $x$ محور ته $A(x) = \pi r^2$ دی او ددې مقطع شعاع شکل ته په کتو سره د $y$ محور سره موازي ده، نو $y = r$ کېږي او د حجم فورمول یې نظر ریمان مجموع ته په لاندې ډول دی:

$$v = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(x)\Delta x = \int_a^b \pi r^2 \, dx = \int_a^b \pi y^2 \, dx = \int_a^b \pi [f(x)]^2 \, dx$$




- که د $x = f(y)$ تابع د منحني مساحت $y = c$ او $y = d$ کرښو ترمنځ محصور شوی وي ددې استوانې د مقطع مساحت نظر $y$ محور ته $A(y) = \pi r^2$ دی چې ارتفاع یې $\Delta y = d - c$ او شعاع یې $x = r$ سره ده هغه حجم چې له دې دوران څخه په لاس راځي په لاندې ډول دی:

$$v = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(y)\Delta y = \int_a^b \pi r^2 \, dy = \int_a^b \pi x^2 \, dy = \int_a^b \pi [f(y)]^2 \, dy$$

د دوراني جسمونو حجم د انتیګرال په مرسته په لاس راځي، لکه:

1- د انتیګرال په مرسته د کرې حجم پیدا کړئ.

**ثبوت**: پوهېږو چې که چېرې نیمه دایره د خپل قطر په شاوخوا وڅرخي کره لاس ته راځي او د دایرې معادله $x^2 + y^2 = r^2$ ده، اوس د نیمې دایرې حجم له څرخېدو وروسته په لاس راوړو او هغه دوه برابره کوو چې د دایرې بشپړ حجم په لاس راشي

$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$y^2 = r^2 - x^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

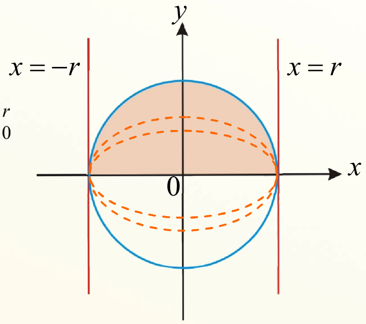
$$V = \int_{-r}^{r} \pi y^2 dx = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\, dx$$

$$= 2\pi \int_{0}^{r} (r^2 - x^2)\, dx = 2\pi [r^2 x - \frac{x^3}{3}]_0^r$$

$$= 2\pi [(r^3 - \frac{r^3}{3}) - 0]$$

$$= 2\pi (\frac{3r^3 - r^3}{3})$$

$$= 2\pi (\frac{2r^3}{3})$$




$V$ ( دكرې حجم ) $= \frac{4}{3} \pi r^3$

2- د انتيګرال په مرسته د مخروط حجم پيدا كړئ.

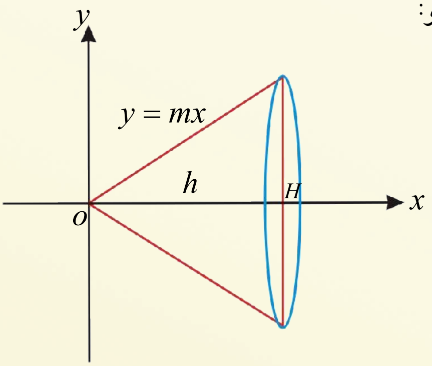
**ثبوت**: څرنګه چې مخروطي سطح د $y = mx$ كربنې له دوران څخه د $x$ د محور په چاپېريال پـه لاس راځي نو:

$$V = \int_0^h \pi\, y^2 dx$$

$$= \int_0^h \pi\, m^2 x^2 dx = \pi\, m^2 \int_0^h x^2 dx$$

$$= \pi\, m^2 [\frac{x^3}{3}]_0^h = \pi\, m^2 (\frac{h^3}{3})$$

$$= \frac{\pi\, h}{3} (mh)^2$$




له پورته شكل څخه ليدل كېږي چې د مخروط قاعده دايروي بڼه لري اوشعاع يې د $h$ محور سره موازي ده، يعنې $y // r$ او همدا رنګه د مخروط ارتفاع $(h)$ د $x$ په محور باندې منطبق ده، $(x = h)$ نـو د $y = mx$ پـه اړيكـه كې يې قيمت وضع كوو:

$$y = mx \quad \Rightarrow \quad r = mh$$

$$= \frac{\pi h}{3} \quad r^2$$

$$V = \pi\, r^2 \times \frac{h}{3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

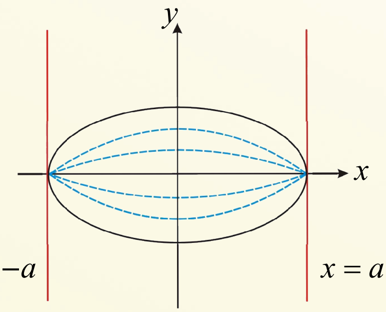
څرنګه چې د مخروط قاعده دايروي ده، د دايرې مساحت $\pi r^2$ دی، لرو چې:

$$V = \pi r^2 \cdot \frac{h}{3}$$

$$V(\text{د مخروط حجم}) = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

3- د الپس حجم چې د $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ د منحني او $x$ محور په چاپېر د لوی قطر په شاوخوا له دوران وروسته جوړېږي، په لاس راوړئ.

**ثبوت**: د الپس د نيمايي حجم د لوی قطر په شاوخوا په لاس راوړو او هغه دوه چنده کوو چې د بشپړ الپس حجم په لاس راشي.




$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2} \Rightarrow y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2$$

$$V = \int_{-a}^{a}\pi y^2\,dx = \pi\int_{-a}^{a}[b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2]dx$$

$$= 2\pi\int_{0}^{a}[b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2]dx = 2\pi[b^2 x - \frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x^3}{3}]_0^a$$

$$= 2\pi[(b^2 a - \frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{a^3}{3}) - 0] = 2\pi[b^2 a - \frac{b^2 a}{3}]$$

$$= 2\pi[\frac{3b^2 a - b^2 a}{3}] = 2\pi[\frac{2b^2 a}{3}]$$

$$\text{V} = \frac{4}{3}\pi b^2 a \Rightarrow \text{د الپس دوران د لوی قطر په شاوخوا حجم} = \frac{4}{3}\pi b^2 a$$

که چېرې د الپس محراقونه د $y$ په محور پراته وي او د هغه انتګرال حساب کړو د الپس د کوچني قطر په شاوخوا حجم په لاندې ډول په لاس راځي:

$$\text{د الپس دوران د کوچني قطر په شاوخوا حجم} = \frac{4}{3}\pi a^2 b$$

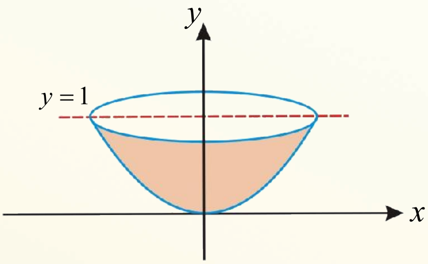
(c) ketabton.com: The Digital Library

**لومړی مثال**: د هغه جسم حجم چې د $y=x^2$ او $y=1$ کرښې تر منځ پرتې مستوي مساحت د دوران څخه د $y$ په محور په لاس راځي، پيدا کړئ.

**حل**: لومړی شکل رسموو وروسته يې مساحت حسابوو:

$$V=\int_a^b \pi x^2 dy=\pi\int_0^1 y\,dy=\frac{1}{2}\pi y^2 |_0^1=\frac{1}{2}\pi$$

$$\Rightarrow V=\frac{\pi}{2}$$



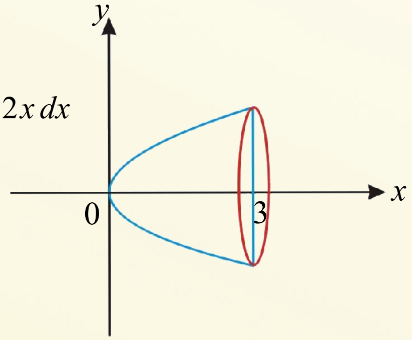

**دويم مثال**: د $y=\sqrt{2x}$ تابع او $y=3$ کرښې ترمنځ د څرخيدلی جسم مساحت پيدا کړئ.

**حل:**

$$V=\int_a^b \pi y^2 dx=\int_0^3 \pi[\sqrt{2x}]^2 dx=\pi\int_0^3[\sqrt{2x}]^2 dx=\pi\int_0^3 2x\,dx$$

$$V=2\pi\int_0^3 x\,dx=2\pi[\frac{x^2}{2}]_0^3$$

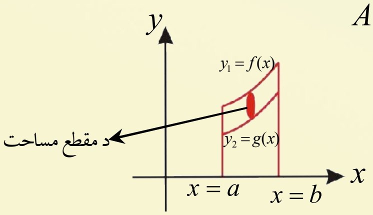
$$V=9\pi$$




**يادونه**: که د $y_1=f(x)$ او $y_2=g(x)$ تابع ګانې په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وی د هغه دوراني جسم حجم د $f(x)$ او $g(x)$ منحني ګانو او د $x=a$ ، $x=b$ کرښو تر منځ جوړيږي له لاندې رابطې څخه لاسته راځي:

د استواني ارتفاع $=\Delta x$

$A(x)=$ (د استواني د مقطع مساحت) $=\pi y_1-\pi y_2=\pi(y_1-y_2)$




د هغې استواني د حجم فورمول چې د $f(x)$ تابع ګراف د $g(x)$ تابع ګراف څخه پورته قرار لري.

$$V=\int_a^b \pi(y_1^2-y_2^2)\,dx=\pi\int_a^b(y_1^2-y_2^2)\,dx$$

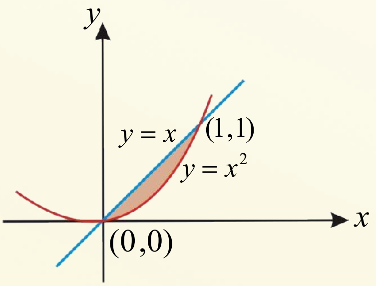
(c) ketabton.com: The Digital Library

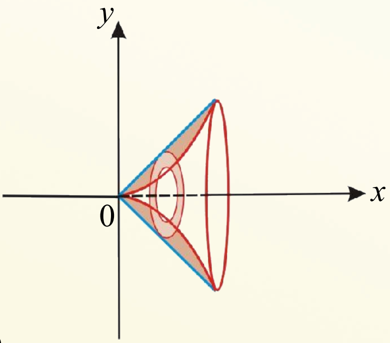
د هغې استواني د حجم فورمول چې د $g(x)$ تابع گراف ، د $f(x)$ گراف ښخه پورته واقع وي.

$$V=\int_a^b \pi(y_2^2-y_1^2)\,dx=\pi\int_a^b (y_2^2-y_1^2)\,dx$$

**مثال**: د هغه جسم حجم پیداکړئ چې د $y=x^2$ منحني او $y=x$ کرښې تر منځ د پرتې سطحې مساحت له دوران ښخه د $x$ محور په شاوخوا په لاس راځي، محاسبه کړئ.

**حل**:




$$\left.\begin{array}{l} y_1=x^2=f(x) \\ y_2=x=g(x) \end{array}\right\}\Rightarrow y_2>y_1\ ,\ g(x)>f(x)$$

$$=\int_a^b \pi(y_2^2-y_1^2)\,dx=\int_0^1 \pi(x^2-(x^2)^2)dx$$

$$=\pi\int_0^1 (x^2-x^4)\,dx=\pi[\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}]_0^1$$

$$=\pi[(\frac{1}{3}-0)-(\frac{1}{5}-0)]=\pi[\frac{1}{3}-\frac{1}{5}]$$

$$V=\pi[\frac{5-3}{15}]=\pi[\frac{2}{15}]=\frac{2\pi}{15}$$

## پوښتنې

1. د هغه جسم حجم چې د $y=\sin x$ تابع او د $x=0$ او $x=\pi$ دوو کرښو تر منځ محصور شوی مساحت له دوران ښخه د $x$ د محور په چاپېر جوړېږي پیدا کړئ.

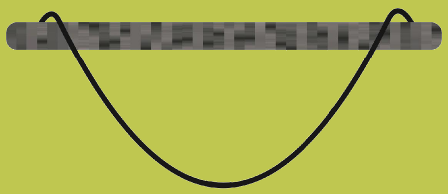
2. د هغه جسم حجم پیداکړئ چې د $y=x^3$ منحني او $y=8$ ، $x=0$ کرښو ترمنځ محصور شوي مساحت له دوران ښخه د $y$ د محور په چاپېر جوړېږي، حساب کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

# د قوس د اوږوالی محاسبه

## *Accounting the Length of Arc*

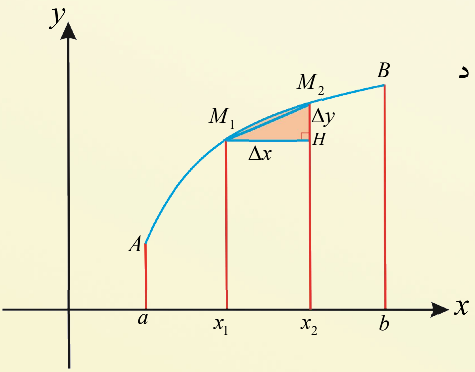
ځرنګه کولای شو چی د مخامخ پړي اوږدوالی پیدا کړو؟



### فعالیت

- د قایمو مختصاتو په سیستم کې د $y=f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې په پام کې ونیسئ او هغې تـه $\overset{\frown}{AB}$ ووایې، داسې چې تابع په نوموړی فاصله کې متمادي او د مشتق وړ وي.
- د $[a,b]$ انټروال په دريو مساوي برخو ويشو او د $x_1$ او $x_2$ د قوس اوږدوالی په $M_1$ او $M_2$ ښيو.
- د $M_1$ له ټکي څخه يوه ټوټه کرښه د $M_2$ په ټکي او يـوه بلـه کرښـه، د هغې پـه مخامخ کرښـه رسموو او د دواړو ټوټه کرښو، د تقاطع ټکی $H$ ونوموئ.
- د $M_1H$ د کرښې فاصلې ته $\Delta x$ او $M_2H$ ته $\Delta y$ وايې او د $M_1HM_2$ د قـايم الزاويـه مثلـث د مخـامخ قوس اوږوالی د فیثاغورث د قضیې په مرسته حساب کړئ.

له پورتني فعالیت څخه کولای شو چې د $M_1HM_2$ مثلث د مخامخ قوس اوږدوالی داسې ثبوت کړو.




**ثبوت**:

له قایم‌الزاویه $M_1HM_2$ مثلث څخه په ګټې اخیستنې سره لرو چې:

$$(M_1M_2)^2=(\Delta x)^2+(\Delta y)^2$$

$$M_1M_2=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مشتق له تعریف څخه پوهېږو:

$$f'(t)=\frac{\Delta x}{\Delta t} \quad , \quad g'(t)=\frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$$\Delta x=f'(t)\cdot\Delta t \quad , \quad \Delta y=g'(t)\cdot\Delta t$$

$$M_1M_2=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\sqrt{[f'(t)\cdot\Delta t]^2+[g'(t)\cdot\Delta t]^2}$$

$$M_1M_2=\sqrt{[f'(t)]^2+[g'(t)]^2}\cdot\Delta t$$

نو د ریمان له مجموعې څخه لرو:

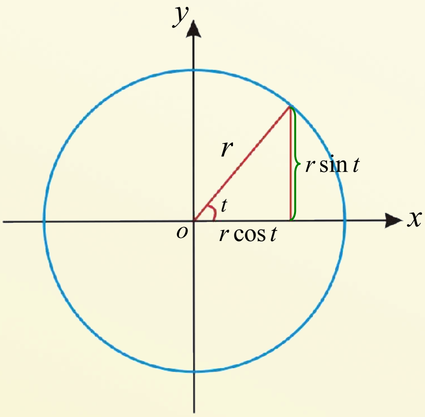
$$L=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{[f'(t)]^2+[g'(t)]^2}\cdot\Delta t$$

$$L=\int_a^b\sqrt{[f'(t)]^2+[g'(t)]^2}\,dt$$

**لومړی مثال**: د $x^2+y^2=r^2$ د دایرې محیط محاسبه کړئ:

**حل**: څرنګه چې د دایرې پارامتري معادله په دې ډول $\begin{cases} x=r\cos t \\ y=r\sin t \end{cases}$ ده.

که چېرې $0\le t\le\pi$ وي، نو د دایرې نمایي محیط پیدا کړئ.




$$P=\int_0^{\pi}\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt$$

$$x'=-r\sin t \quad , \quad y'=r\cos t$$

$$P=\int_0^{\pi}\sqrt{(-r\sin t)^2+(r\cos t)^2}\,dt$$

$$P=\int_0^{\pi}\sqrt{r^2\sin^2 t+r^2\cos^2 t}\,dt$$

$$P=\int_0^{\pi}\sqrt{r^2(\sin^2 t+\cos^2 t)}\,dt=\int_0^{\pi}\sqrt{r^2}\,dt$$

$P=[r\,t]_0^{\pi}=(r\cdot\pi-r\cdot 0)=\pi r$ د دایرې نیمایي محیط

د دایرې مکمل محیط $=2\pi r$

(c) ketabton.com: The Digital Library

**یادونه**:

1- د $y=f(x)$ منحني معادله په $a\le x\le b$ انټروال کې راکړل شوې ده، د $x$ د پارامتر په پام کې نیولو سره د منحنی د قوس اوږدوالی داسې محاسبه کوو:

$$L=\int_a^b \sqrt{1+f'^{\,2}(x)}\;dx$$

**مثال**: د $y=f(x)=x^{\frac{3}{2}}$ منحني د قوس اوږدوالي په $0\le x\le 4$ فاصله کې حساب کړئ.

**حل**: $f(x)=x^{\frac{3}{2}} \;\Rightarrow\; f'(x)=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$

$$L=\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\;dx=\int_0^4\sqrt{1+(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}})^2}\cdot dx$$

$$=\int_0^4\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\;\;dx=\int_0^4\sqrt{u}\cdot\frac{4}{9}du=\frac{4}{9}\int_0^4 u^{\frac{1}{2}}\,du$$

$$u=1+\frac{9}{4}x$$

$$du=\frac{9}{4}dx$$

$$dx=\frac{4}{9}du$$

$$=\frac{4}{9}[\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}]_0^4=\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}[u^{\frac{3}{2}}]_0^4=\frac{8}{27}[\sqrt{u^3}\,]_0^4$$

$$=\frac{8}{27}[\sqrt{(1+\frac{9}{4}x)^3}\,]_0^4=\frac{8}{27}[\sqrt{(1+\frac{9}{4}\cdot 4)^3}-1]=\frac{8}{27}(\sqrt{10^3}-1)$$

$$L=\frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1)$$

2- د $x=f(y)$ منحني په $a\le y\le b$ انټروال کې راکړل شوې ده، د $y$ د پارامتر د په پام کې نیولو سره لرو چې:

$$L=\int_a^b\sqrt{f'^2(y)+1}\;\;dy$$

**مثال**: د $x=f(y)=y^{\frac{3}{2}}$ منحني د قوس اوږدوالی په $1\le y\le 4$ انټروال کې حساب کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

**حل:**

$$f(y)=y^{\frac{3}{2}} \quad , \quad f'(y)=\frac{3}{2}\cdot y^{\frac{1}{2}}$$

$$L=\int_a^b \sqrt{f'^2(y)+1}\,dy=\int_1^4 \sqrt{\left(\frac{3}{2}\cdot y^{\frac{1}{2}}\right)^2+1}\,dy$$

$$=\int_1^4 \sqrt{\frac{9}{4}y+1}\,dy=\int_1^4 \sqrt{u}\cdot\frac{4}{9}du \qquad u=\frac{9}{4}y+1$$

$$=\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}[u^{\frac{3}{2}}]_1^4=\frac{8}{27}\left[\sqrt{\left(\frac{9}{4}y+1\right)^3}\,\right]_1^4 \qquad du=\frac{9}{4}dy$$

$$=\frac{8}{27}\left[\sqrt{(10)^3}-\sqrt{\left(\frac{9}{4}+1\right)^3}\,\right] \qquad dy=\frac{4}{9}du$$

$$=\frac{8}{27}\left[\sqrt{1000}-\sqrt{\left(\frac{13}{4}\right)^3}\,\right]=\frac{8}{27}\left[10\sqrt{10}-\sqrt{\frac{2197}{64}}\,\right]$$

## پوښتنې

1. د $x=t^2$ او $y=t^3$ د منحنيګانو د قوس اوږدوالی د $1\le x\le 2$ د فاصلې تر منځ پيدا کړئ.

2. د $f(x)=\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}$ د منحني د قوس اوږدوالی په $0\le x\le 1$ انټروال کې پيدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

## د خپرکي مهم ټکي

- د $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ انتيګرال د يوې سطحې د مساحت اندازه يا پراخوالی راښيي چې د $y = f(x)$ منحني او د $x$ د محور او د $x = a$ او $x = b$ کرښو له خوا رابند دی.
- که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې مثبت او متمادي وي، يعنې $y = f(x) \geq 0$ په دې صورت کې د $f(x)$ تابع ټل د $x$ د محور پورته خواته او که $y = f(x) \leq 0$ وي، په دې حالت کې د $f(x)$ د $x$ د محور لاندې خواته واقع او انتيګرال يې منفي دی.

**د دوو منحني‌ګانو په واسطه د محصور شوی سطې د مساحت محاسبه:**

- که چېرې د $f(x)$ تابع د $g(x)$ تابع د ګراف په پورتنی برخه کې واقع وي، نو لرو:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

- که چېرې د $g(x)$ تابع ګراف د $f(x)$ تابع په پاسنی برخه کې واقع وی؛ لرو چې:

$$A = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx = \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx$$

**دګراف له دوران څخه د په لاس راغلي جسم حجم**

- که چېرې د $y = f(x)$ متمادي تابع مساحت د $x = a$ او $x = b$ کرښو په واسطه محصور شوی وي، نو د هغه جسم حجم چې د پورتني تابع د منحني له دوارن څخه د $x$ محور په شاوخوا لاسته راځي تقريباً استوانه‌يي شکل لري .

چې ارتفاع يې $\Delta x = b - a$ ده او د دې استوانې سطح د دايروي سطحو په واسطه محصوره شوې ده چې دې سطحو ته مقطع وايي او پوهېږو چې د دايرې مساحت نظر د $x$ محور ته $A(x) = \pi r^2$ دی اوددې مقطع شعاع نظر شکل ته د $y$ له محور سره موازي دی؛ نو $y = r$ کېږي او د حجم فورمول يې نظر د ريمان مجموعې ته په لاندې ډول دی:

$$v = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(x)\Delta x = \int_a^b \pi\, r^2\, dx = \int_a^b \pi\, y^2\, dx = \pi \int_a^b [f(x)]^2\, dx$$

- که د $x = f(y)$ تابع مساحت د $y = c$ ، $y = d$ کرښو ترمنځ محصور شوی وي دداسې استوانې مقطع نظر y محور ته $A(y) = \pi\, r^2$ چې ارتفاع يې $\Delta x = d - c$ او شعاع يې $x = r$ سره ده هغه حجم چې ددې دوران له مساحت څخه په لاس راځي په لاندې ډول دی:

$$v = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(y)\Delta y = \int_a^b \pi\, r^2\, dy = \int_a^b \pi\, x^2\, dy = \pi \int_a^b [f(y)]^2\, dy$$

**د قوس د اوږدوالي محاسبه:**

(c) ketabton.com: The Digital Library

د قوس د اوږدوالي د محاسبې فورمول: $L=\int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2+[g'(t)]^2}\,dt$

(1 $$L=\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$$

(2 $$L=\int_a^b \sqrt{1+f'^2(y)}\,dy$$

## د شپږم څپرکي پوښتنې

1. د $y^2-x-5=0$ منحني او د $y$ د محور تر منځ د پرتې سطحې مساحت محاسبه کړئ.
2. د هغې سطحې مساحت چې د $y=\sin x$ منحني په $[0,2\pi]$ انټروال کې او د $x$ د محور تر منځ پرته ده، پیدا کړئ.
3. د $y=x^2-2x$ او $y=6x-x^2$ منحني گانو تر منځ د پرتې سطحې مساحت حساب کړئ.
4. د $y=-x^2+4x-3$ منحني او $x$ محور تر منځ د پرتې سطحې مساحت پیدا کړئ.
5. د $y=x^3-6x^2+8x$ او $y=x^2-4x$ منحني گانو تر منځ د پرتې سطحې مساحت پیدا کړئ.
6. د هغه جسم حجم وټاکئ چې د $y=\sin x-\cos x$ منحني او $x=0$ , $x=\frac{\pi}{2}$ کرښو د $x$ محور په شاوخوا له دوران څخه په لاس راځي، حساب کړئ.
7. د هغې سطحې حجم چې د $y=\frac{1}{4}x^2+2$ منحني له دوران څخه د $x$ د محور پرشاوخوا په $[0,4]$ انټروال کې جوړ شوي وي.
8. د هغې راېندې شوې سطحې د جسم حجم چې د $y=x^2$ منحني او د $x^2+y^2=2$ دایرې له دوران څخه د $x$ محور په شاوخوا جوړ شوې وي، پیدا کړئ.
9. د هغه جسم حجم چې د $y=\frac{1}{2}x+1$ کرښې دوران او د $x$ محور په$[2,6]$ انټروال کې جوړېږي، په لاس راوړئ.
10. د $y=-x+4$ منحني د قوس اوږدوالی په $-2\le x\le 2$ انټروال کې حساب کړئ.
11. د $y=\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}$ تابع د منحني د قوس اوږدوالی په $2\le x\le 5$ انټروال کې پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

# اووم څپرکی

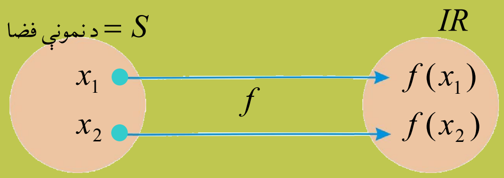
# احصائیه

(c) ketabton.com: The Digital Library

# موږ ټول افغانان یو.

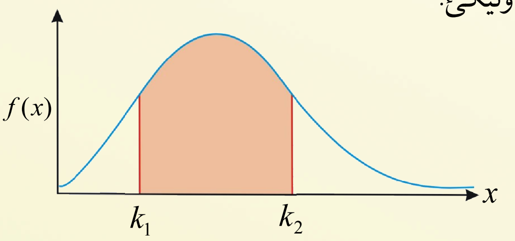
(c) ketabton.com: The Digital Library

## د احتمال د تابع توزيع




د تـصادفي ازمايـښت، نمونـه‌يي فـضا او د ناڅاپـه متحـول كلمې ستاسو په ذهن كې څه څه را ژوندي كوي.

- هغه تصادفي متحول چې په احصائيه او احتمالاتو كې تړې ګټه اخلي، لـه هغـه متحـول سـره چـې پـه الجبر كې مو لوستي دی، څه توپير لري؟
- كه $x_1 , x_2 ,...x_n$ د يوه سـټ عناصـر او $P(x = x_i) = f(x_i)$ تـابع ولـرو، هغـه مرتبـې جـوړې چـې د نومورې تابع څخه په لاس راځي، جوړې او بيا يې وليکئ.
- مخـامخ شـكل تـه پـه كتنـې سـره د $k_1$ او $k_2$ مقـدارونو تـرمنځ او $f(x)$ د منحنـي لانـدينې محـدود شـوې مـساحت د انتيګـرال پـه شـكل وښيئ.




- د لانـدې جـدول پـه پـام كـې نيولـو سـره د $\sum_{i=1}^{2} x_i f(x_i)$ $[E(x = x_i)] =$ ، $[x_i - E(x_i)]^2$ او $[x_i - E(x_i)]^2 \ f(x_i)$ مجموعه په لاس راوړئ.

| $x_i$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $f(x_i)$ | 0.5 | 0.5 |

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

ـ هغه تصادفي متحول چې په احصائیه او احتمالاتوکې تر څېړنې لاندې نیول کېږي عبارت له هغې تابع څخه دی چې د تعریف ناحیه یې نمونه‌یي فضا او د قیمتونو ناحیه یې حقیقي اعداد دي.

ـ که $P(x=x_i)=f(x_i)$ ولرو، نو د $[x_1,f(x_1)],[x_2,f(x_2)],\dots,[x_n,f(x_n)]$ مرتبو جوړو ته د مجزا(غیر متمادي) احتمال تابع وایي.

- د تجمعي او متمادی احتمال تابع کولای شو، په دې بڼه $F(x)=P(X\le x)$ وښیو.
- که چېرې $f(x)$ د احتمال تابع او $x$ تصادفي متحول وي، په دې صورت کې د دې احتمال چې $x$ د $k_1$ او $k_2$ په منځ کې وي برابر دی له:

$$P(k_1\le x\le k_2)=\int_{k_1}^{k_2} f(x)\,dx$$

- که چېرې $x$ پیوسته ناڅاپه (تصادفي) متحول او $k_1<k_2$ څخه وي، په دې صورت کې:

$$P(k_1\le x\le k_2)=F(k_2)-F(k_1)$$

- که چېرې $x$ ناڅاپه مجزا متحول وي، په دې حالت کې اوسط $(Expected\ Value)$ د $x$ تصادفي مجزا متحول چې د $E(x)$ په بڼه ښودل کېږي، برابر دی له:

$$E(x)=x_1f(x_1)+x_2f(x_2)+\dots\dots\dots+x_nf(x_n)=\sum_{i=1}^{n}x_if(x_i)$$

$E(x)$ د $x$ اوسط هم بلل کېږي چې هغه په $\overline{x}$ ښیي همدارنګه که چېرې $x$ غیر متمادي تصادفي متحول وي، په دې صورت کې د $x$ وریانس چې په $S^2$ ښودل کېږي برابر دی له:

$$S^2=\sum_{i=1}^{n}\left[x_i-E(x_i)\right]^2 f(x_i)$$

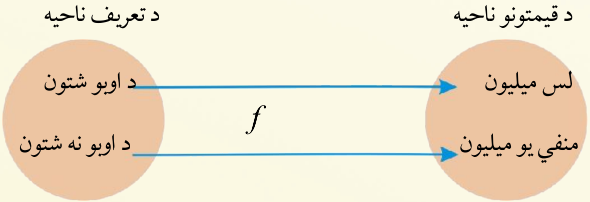
(c) ketabton.com: The Digital Library

**مثال**: یو شخصي شرکت غواړي د یوې غونډۍ پر سر د اوبو یوه څاه وکني، د اوبو څاه په یو میلیون افغانۍ تماميږي که نوموړی څاه اوبه ورکړي د شرکت مالك لس میلیونه افغانۍ اجوره اخلي، پرته له هغې به د څاه د کېندلو یو میلیون افغانۍ مصرف په زیان ورکړي.

الف ــ دا موضوع د یوې تابع په بڼه وښیئ.

ب ــ که د دې احتمال چې کیندل شوي څاه اوبه ورکړي 0.2 او د نه ورکولو احتمال یې 0.8 وي، په دې صورت کې د احتمال تابع، اوسط $(Expected\ Value)$، وریانس او د $x$ تصادفي متحول معیاري انحراف پیدا کړئ.

**د الف حل**:




**د ب حل**: د تصادفي متحول د احتمال تابع اوسط، وریانس او معیاري انحراف په لاندې جدول کې ښودل شوي دي:

| تصادفي متحول | د احتمال تابع | اوسط | د تصادفي متحول د مربعاتو انحراف د تصادفي متحول له اوسط څخه | واریانس | انحراف معیاری |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | $f(x_i)$ | $E(x)=\sum x_i f(x_i)$ | $[x_i-E(x)]^2$ | $S^2=[x_i-E(x)]^2 f(x_i)$ | $S$ |
| $-1$ | $0.8$ | $-1\cdot 0.8=-0.8$ | $(-1-1.2)^2=4.84$ | $4.84\cdot 0.8=3.872$ | $4.4$ |
| $10$ | $0.2$ | $10\cdot 0.2=2$ | $(10-1.2)^2=77.44$ | $77.44\cdot 0.2=15.488$ | |
| | $0.1$ | $1.2$ | | $\sum S^2=19.360$ | |

(c) ketabton.com: The Digital Library

## پوښتنې

فرض کوو چې د یوه موټر پلورنځي د 100 ورځو خرڅلاو په لاندې ډول دی:

| د ورځو شمېر | 60 | 30 | 8 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| د پېرودل شوو موټرو شمېر | 0 | 1 | 2 | 3 |

د $x$ تصادفي متحول د احتمال تابع او د تجمعي احتمال تابع پیدا کړئ.

د تجمعي احتمال له تابع څخه په ګټه اخېستنې سره ووایئ چې په یوه ورځ کې د (2) موټرونو د حداکثر احتمال او حداقل احتمال د دوو موټرونو په کومه کچه ده؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

## د دوه جمله‌يي توزيع او د برنولي ازمويښت

يو ګڼ‌شمېر ځوانان د پوهنتون د کانکور په آزموينه کې له 160 سؤالونو څخه 100 سوالونه حل کړل. تاسې څه سوچ کوئ چې دا ګڼ‌شمېر ځوانان په آزموينه کې بريالي کېږي او يا بې نتيجه پاتې کېږي؟

د احتمال دوه جمله‌يي توزيع يوه غيرمتمادي توزيع ده چې د مختلفو پېښو د توصيف لپاره په‌کار وړل کېږي اکثراً پېښې چې په نړۍ کې منځ ته راځي دوه حالتونه لري.

د لاندې آزمويښتي پېښو له شرطونو څخه څه ډول پايلې په لاس راوړلای شئ.

- څو ځلې دوه سکې واچول شي چې سمدلاسه دواړه شېر راشي.
- څو ځلې دوه تاسه واچول شي چې د شمېرو مجموعه يې له 7 څخه کوچنۍ شي.
- له يوې جعبې څخه څو ځلې د يوې مرۍ(مهره) اخېستل چې د تورو او سپينو مرۍ لرونکې ده.
- له يوې جعبې څخه چې د تورو او سپينو مريو لرونکې ده څو ځلې يوه مرۍ واخېستل شي چې اخېستل شوې مرۍ سپينه وي(چې اخېستل شوې مرۍ بيا په جعبه کې واچول شي)
- که چېرې $m$ بريالي‌توب له $n$ آزمايښت څخه( $m < n$ ) چې ترتيب په کې مهم نه دی دا ټاکنه د څه په نامه يادېږي او فورمول يې وليکئ.
- که د $m$ شکلونو د بريالي‌توب احتمال د $n$ ازمايښت څخه په $P$ او $n-m$ شکلونو د ناکامي احتمال د $n$ له آزمايښت څخه په $q$ وښودل شي، نو د $m$ له کاميابي احتمال د آزمايښت د $n$ له شکلونو څخه به څو وي؟
- زده‌کوونکي له پنځو څلور ځوابه آزموينې له پوښتنو سره مخامخ کېږي. هغوی په ناڅاپه ډول پوښتنو ته ځوابونه ورکوي، فرض کړئ که د (سم ځواب) بريالي‌توب په $T$ او (ناسم ځواب) نه بريالي‌توب د $F$ په توری وښودل شي په دې صورت کې د هر يوه سم او ناسم ځواب احتمال به څومره وي؟

له پورتني فعاليت څخه څرګندېږي چې د برنولي آزمايښت يو ناڅاپه ازمايښت دی چې کولای شو پايله يې په دوو حالتونو بريالي‌توب او نابريالي‌توب دسته بندي کړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د برنولي توزيع کولای شو چې په $P(x=m)=P^m(1-P)^{1-m}=P^m\cdot q^{1-m}$ په بڼه وښيو په داسې حال کې چې $P$ د بريالیتوب احتمال او $q=1-p$ د نابريالیتوب احتمال دی.

که چېرې يو ازمايښت $n$ ځلې تکرار کړو، يو ترادف په لاس راځي، داسې چې که د هر آزمايښت د بريالیتوب احتمال $P$ او نابريالیتوب احتمال $q$ وي، په دې صورت کې د $n$ ځلې آزمايښت څخه د $m$ ځلې بريالیتوب احتمال عبارت دی له: $0\le m\le n$

$$P(X\le m)=\binom{n}{m}P^m q^{n-m}$$

پورتنې اړيکه کولای شو چې په دې ډول $B(m,n,p)$ هم وښيو.

د پورتني فورمول په پام کې نيولو سره کولای شو، د دوه جمله‌يي د توزيع اوسط په $\bar{x}=np$ او د دوی د توزيع معياري انحراف د $S=\sqrt{n\,p\,q}$ په بڼه وښيو.

**مثال**: د يوه ناروغ د ښه کېدو احتمال د شکرې له ناروغی څخه 0.4 دی، که چېرې 15 تنه په دې ناروغی اخته وي، ددې څومره احتمال شته چې پنځه تنه ښه شي او همدا شان پيدا کړئ چې له 3 څخه تر 4 تنو پورې جوړ شي.

**حل**: څرنګه چې $n=15$ , $m=5$ , $q=0.6$ , $P=0.4$ دی نو:

$$P(m=5)=\binom{n}{m}P^m\cdot q^{n-m}=\binom{15}{5}(0.4)^5(0.6)^{10}$$

$$=\frac{15!}{5!(15-5)!}\cdot 0.01024\cdot 0.00604661760=\frac{360360}{120}\cdot 0.00006191$$

$$=\frac{22.3098876}{120}=0.1859$$

$$P(3\le m\le 4)=\sum_{i=3}^{4}\binom{15}{i}(0.4)^i(0.6)^{15-i}=(3^{15})(0.4)^3(0.6)^{15-3}+(4^{15})(0.4)^4(0.6)^{15-4}$$

$$=\frac{15!}{3!(15-3)!}(0.064)(0.6)^{12}+\frac{15!}{4!(15-4)!}(0.0256)(0.6)^{11}$$

$$=\frac{2730}{6}(0.000139264)+\frac{3270}{24}(0.0000928512)$$

$$=\frac{0.38019072}{6}+\frac{0.3036}{24}=0.063365+0.012650$$

$$P(3\le m\le 4)=0.076015$$

## پوښتنې

په يوه کلي کې 200 کورنی اوسېږي که هره کورنی 4 ماشومان ولري ددې احتمال پيدا کړئ چې هره کورنی

- حد اقل يو زوی ولري.
- يوازې دوه زامن ولري.
- يوه يا دوې لوڼې ولري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

## د پواسن د احتمال توزیع

که چېرې د برنولي دوه جملهيي توزيع فورمول په پام کې ونيسو، ايا ويلای شئ که چېرې د برنولي په دوه جملهيي توزيع کې د $P$ قيمت صفر ته تقرب وکړي او د $n$ قيمت لايتناهي ته تقرب وکړي، نو د برنولي دوه جملهيي توزيع څه سره مساوي کېږي.

$$1)\ b(x,n,p)=\binom{x}{n}p^x q^{n-x}$$

$$2)\ \lim_{n\to\infty} b(x,n,p)=\frac{\lambda^x\cdot e^{-\lambda}}{x!}$$

$$3)\ P(x,\lambda)=\frac{\lambda^x\cdot e^{-\lambda}}{x!}$$

### فعاليت

کــه $n=5$ ، $p=0.1$ او $m=2$ وي د $P(x=m)=\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^m}{m!}$ قيمتونــه پــه داســې حــال کــې چــې $P(X=m)=\binom{n}{m}P^m q^{n-m}$ او $\lambda=np$ وي محاسبه کړئ او د پاسنيو توابعو لـه قيمتونو سره يې پرتله کړئ، ويلای شئ چې د کوم فورمول په کار وړل، ساده دی؟

د پواسن فورمول کولای شي چې د $m$ شکلونو د کاميابۍ احتمال د $n$ آزمايښتونو څخه کله چې $n$ لـوی او د کاميابي احتمال $P$ کوچنی وي، د تقريبي محاسبې لپاره کارول کېږي.

دا فورمول عبارت دی له:
$$P(X=m)=\frac{e^{-x}\lambda^m}{m!}$$

چې $\lambda=np$ او $e=2.71828$ دی.

په ياد ولرئ چې د پواسن په توزيع کې اوسط او هم وريانس له $\lambda$ سره برابر دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

**مثال**: 200 تنو مسافرینو د یوې الوتکې ټکټ اخیستلی دی د مخکنیو تجاربو په اساس که د هغه مسافرینو چې ټکټ یې رانیولی دی د نه راتگ احتمال 0.01 وي. ددې احتمال چې 3 تنه مسافرین بېرته را نه شي څومره دی.

**حل**: په دې مسئله کې د(نه راتلل) کامیابي ده او همدارنگه لیدل کېږي چې $n = 200$ ډېر لوی او $P = 0.01$ یعني د کامیابی احتمال کوچنی دی، نو لرو:

$$P(X = m) = \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^m}{m!} \qquad \lambda = n\,p = 200\cdot 0.01 = 2$$

$$P(3) = \frac{(2.71828)^{-2}\cdot 2^3}{3!} = \frac{\frac{1}{(2.71828)^2}\cdot 8}{6} = \frac{\frac{1}{7.3890461584}\cdot 8}{6}$$

$$= \frac{0.13533\cdot 8}{6} = \frac{1.08268}{6} = 0.1804$$

اوس که چېرې دا احتمال د دو جمله‌یي په فورمول محاسبه کړو،لرو چې:

$$P(X = m) = \binom{n}{m} P^m\ q^{n-m}$$

$$\left.\begin{matrix} n = 200 \\ p = 0.01 \end{matrix}\right\} \Rightarrow q = 0.99$$

$$P(3) = P(X = 3) = \binom{200}{3}(0.01)^3(0.099)^{200-3}$$

$$= \frac{200!}{3!\cdot 197!}(0.01)^3(0.099)^{197} = 0.1814$$

څرنگه چې لیدل کېږي دواړه ځوابونه سره معادل دي، نو واضح ده چې د پواسن د فورمول له لارې احتمال محاسبه ساده ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

**يادونه**:

د پواسن د فورمول په واسطه کولای شو چې په يوه ټاکلي وخت کې د ورتللو د شمېر احتمال په لاندې ډول وښيو:

$$P(X=m)=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^m}{m!}$$

په پورتني فورمول کې $t$ د شودل شوی وخت نسبت پر ټول وخت چې اوسط هغې ته ورکړل شوی وي $m$ د ورتللو شمېر د $t$ په واحد وخت کې د $\lambda$ د ورتګ شمېر اوسط په واحد د وخت کې دی.

**مثال**: که په يوه ساعت کې د يوه بانک د مراجعينو شمېر په متوسط ډول 60 تنه وي، ددې احتمال چې څلور تنه په لومړيو دريو دقيقو کې راغلي وي، څومره دی.

**حل**:

$$\lambda=60 \quad , \quad t=\frac{3}{60}=\frac{1}{20}$$

$$m=4 \quad , \quad \lambda t=60\cdot\frac{1}{20}=3$$

$$P(m=4)=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^m}{m!}=\frac{e^{-3}(3)^4}{4!}=\frac{(2.71828)^{-3}(3)^4}{4!}=\frac{\frac{1}{(2.71828)^3}\cdot 81}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$$

$$=\frac{\frac{1}{20.0854}\cdot 81}{24}=\frac{4.03278}{24}=0.168032$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

## پوښتنې

د چاپ د يوه ماشين د جوړولو لپاره په يوه کال کې په متوسط ډول ورتګ دوه ځلې ده، فرض کوو چې د پواسن توزيع په دې اړه صدق کوي.

**الف**: د ماشين د جوړولو لپاره د ورتګ د احتمال توزيع په يوه کال کې حساب کړئ.

**ب**: د توزيع اوسط او معياري انحراف څومره دی؟

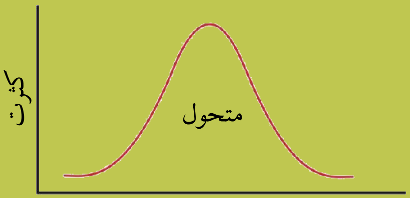
**ج**: فرض کړئ که د هر ورتګ مصرف 100 افغانۍ وي، د هر ماشين د جوړولو مصرف پيدا کړئ؟

**د**: ددې احتمال چې په هر کال کې ديوه ماشين د جوړولو مصرف له 300 افغانيو څخه زيات وي، څومره دی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

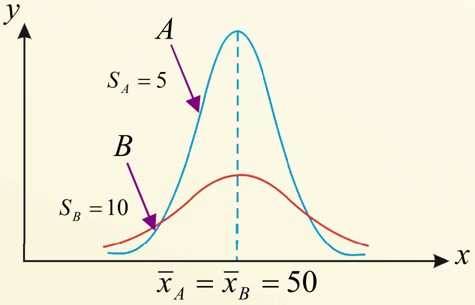
## د نورمال توزیع

پوهېږو چې د نورمالي منحني شکل مشابه او متناظر له زانګولی سره ده، په نورماله منحني کې د پراګندګی مرکزي شاخصونه(معیاري انحراف او اوسط) څه ډول ځایونه(موقعیتونه) نیولی شي.

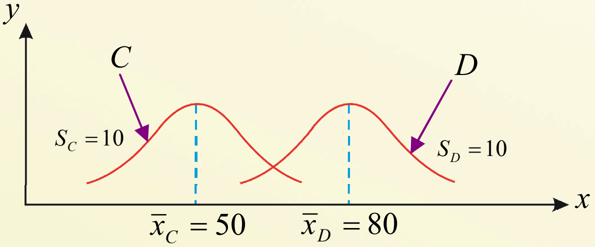



### فعالیت

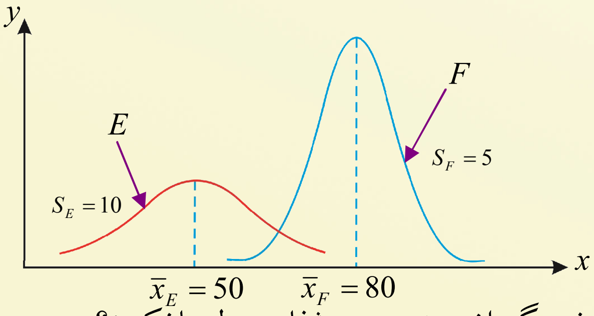
څو نورمالي توزیع ګانې له بېلابېلو سطحو او معیاري انحرافونو سره په لاندې شکلونو کې ورکړل شوي دي.




الف شکل




ب شکل




ج شکل

لاندینی فعالیت له پورتنیو شکلونو څخه په ګټه اخېستنې سره په شفاهي ډول بیان کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

- د الف په شکل کې د $A$ او $B$ د تصادفي متحول توزیع د څه ډول معیاري انحراف او اوسط لرونکې ده؟
- د ب په شکل کې $C$ او $D$ توزیع د څه ډول معیاري انحراف او اوسط لرونکی دی؟
- د ج په شکل کې د $E$ او $F$ توزیع د څه ډول معیاري انحراف اوسط لرونکی دی؟
- د نورمال منحني شکل دواړو خواوو ته ترکوم ځایه غزیدلی دی؟

د پورتني فعالیت له سرته رسولو څخه داسې پایله په لاس راځي چې:

د نورمال منحني توزیع کېدای شي چې په څلورو طریقو یو له بل سره توپیر ولري. د نورمال توزیع ریاضیکي معادله چې د $f(x)$ احتمال توزیع تابع ښودونکی ده، په لاندې ډول ښوول کېږي.

$$f(x)=\frac{1}{s\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\bar{x}}{s})^2}$$

او یا $$f(x)=N(x,\bar{x},s)$$

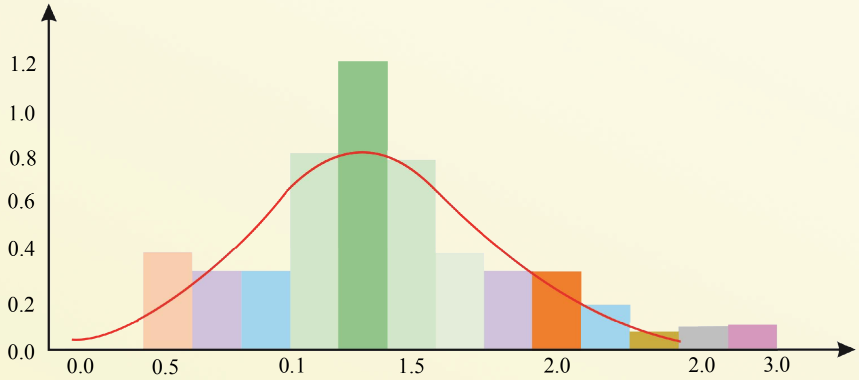
په داسې حال کې چې $e=2.71828$ او $\pi$ هم ثابت عدد 3.14189 دی $\bar{x}$ اوسط، $s$ معیاري انحراف، $x$ متمادی تصادفي مقدار او $f(x)$ د منحني جګوالی راښیي.

د نورمالې توزیع له متمادی توزیعګانو څخه ده. د نورمالي توزیع په واسطه کولای شو، د اندازه کولو توپیر په ښه توګه سره نژدې کړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

**مثال**: د موټرونو ماشين د تيلو سوزولو په وخت کې يوه اندازه مضر لوګی توليدوي، د هغه مضر لوګي مقدار چې له 46 موټرونو توليدېږي، د يوه تن په واسطه چې لورنزن نوميده په 1980 کال کې وڅېړل شو.يوه اندازه لوګی د نايتروجن اوکسايدونه لري. لاندې مستطيلي ګراف د نايتروجن اوکسايد ميزان د $(\frac{gr}{mil})$ د 46 موټرونو د نورمال احتمال توزيع اوسط او وريانس چې د نوموړی کس له خوا تر څېړنې لاندې نيول شوی. ددې مستطيلي ګراف د ستونونو مساحت متناسب دی له هغو 46 نمونه‌يي شمېر له اندازه‌ګيري سره چې ددې ستون د افقي ټکو تر منځ قرار لري.

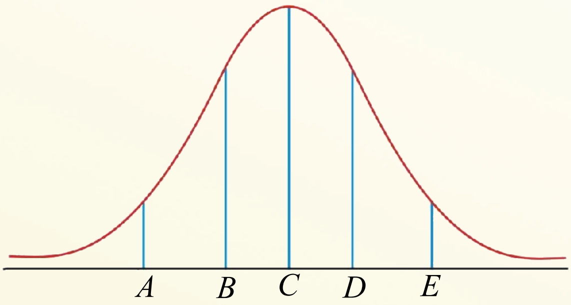
د مثال په ډول په خلورم ستون کې(چې له 1 څخه تر 1.2 پورې په افقي محور قرار لري) د $0.870 \cdot 0.2 = 0.174$ مساحت لرونکی دی چې د $\frac{4}{46}$ سره برابر دی، ځکه 8 ديټا له 1 څخه تر 1.2 پورې پراته دي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

## پوښتنه

لاندېنی شکل په پام کې ونیسئ د $A, B, C, D$ او $E$ ټکو موقعیت د معیاري انحراف د اوسط له جنسه پیدا کړئ.

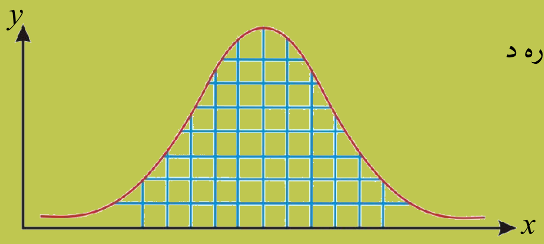


(c) ketabton.com: The Digital Library

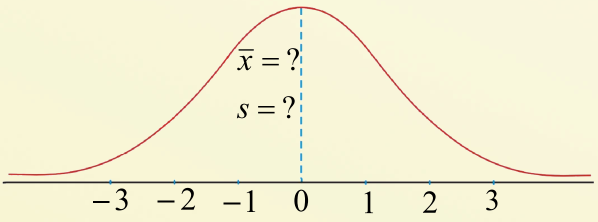
## د نورمال توزیع منحني لاندې مساحت او د هغې سټنډرډ کول

مخامخ شکل په پام کې ونیسئ:

د $y = f(x)$ د منحني لاندې مساحت د محاسبې لپاره د څه ډول لارو وړاندیز کوئ.

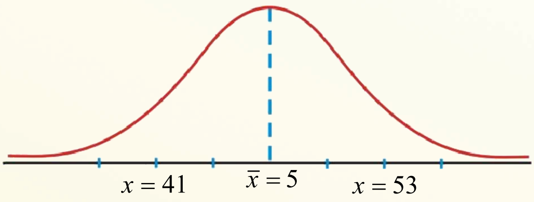


- که چېرې د $x$ تصادفي متمادي متحول د احتمال نورمال توزیع چې اوسط یې $\overline{x}$ او معیاري انحراف یې $s$ وي، ددې احتمال چې دا تصادفي متحول د $x_1$ او $x_2$ تر منځ کمیت غوره کړي د انتیګرال په بڼه یې ولیکئ.
- سوچ کولای شئ چې د احتمال نورمال توزیع د ریاضي شکل انتیګرال محاسبه په ساده کار وي.
- که چېرې د نورمال تصادفي متحول په $z = \dfrac{x - \overline{x}}{s}$ ډول ولیکو، د $f(x)$ د احتمال توزیع تابع لـه څـه سره برابره ده؟
- ویلای شئ چې اوسط او معیاري انحراف په لاندې شکل کې له کومو عددونو سره برابر دی؟



(c) ketabton.com: The Digital Library

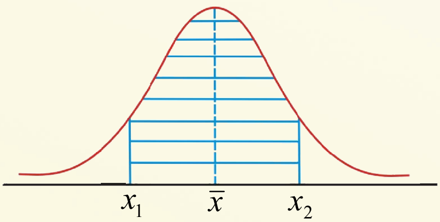
- که په لاندې شکل کې چې د $x=41$ او $x=53$ قیمتونه په نورمال ډول د $\overline{x}=50$ اوسط او $S=5$ معیار انحراف ښودل شوی دی، نو د $z=\frac{x-\overline{x}}{s}$ مقدار په لاس راوړئ.




له پورتني فعالیت څخه دا پایله په لاس راځي چې د احتمال د محاسبې لپاره داسې چې د $x$ پیوسته تصادفي متحول د $x_1$ او $x_2$ تر منځ یو کمیت ونیسئ، نو باید د $x$ د احتمال د توزیع له تابع څخه انتګرال ونیسو او د منحنۍ لاندې سطحه د $x_1$ او $x_2$ فاصلو ترمنځ په لاندې ډول محاسبه کړو:

$$f(x_1<x<x_2)=\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx=\int_{x_1}^{x_2}\frac{1}{s\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\overline{x}}{s})^2}$$

$$=\int_{x_1}^{x_2} N(x,\overline{x},s)dx$$




د نورمال توزیع احتمال محاسبه ساده کار نه دی، د نورمال توزیعګانو د منحنۍ لاندې مساحت محاسبه اوږدو جدولونو ته اړتیا لري چې عملاً دا کار ګران دی، کولای شو چې د جدول د جوړولو شکل د احصائیوي data د سټنډرډ کولو په واسطه حل کړو.

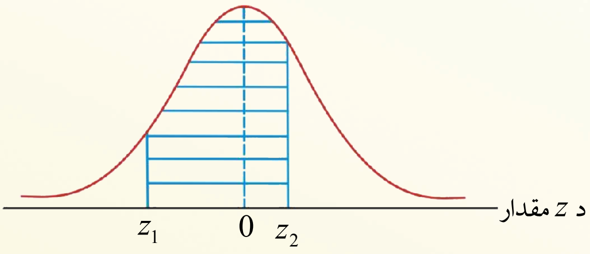
په دې معنا چې کولای شو په $x$ پورې اړوند تصادفي متحول چې د نورمال توزیع لرونکی دی، د لاندې اړیکې په واسطه سټنډرډ کړو. $z=\frac{x-\overline{x}}{s}$

دلته $z$ د سټنډرډ نورمال متحول په نامه او منحنۍ ته د سټنډرډ نورمال منحنۍ په نامه یا د نورمال احتمال منحنۍ نومول کېږي، په یاد ولرئ چې د $z$ سټنډرډ وي، متحول تل د صفر اوسط لرونکی او یو معیار انحراف یې دی، همدرانګه د نورمال منحنۍ او افقي محور ترمنځ مساحت له ټاکل شوي واحد سره برابر وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

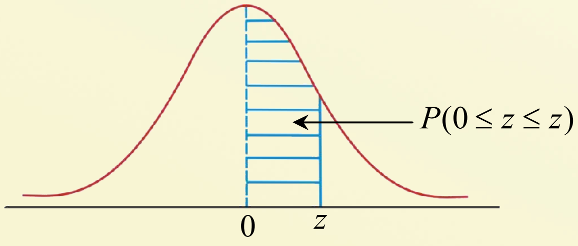
لاندې مساحت د یوه منحني یوه برخه د نورمال احتمال چې له احتمال سره مستقیم تناسب لري او کولای شو چې د $z = \frac{x-\bar{x}}{s}$ بدلولو سره يې په لاندې ډول وښیو.

$$f(z_1 < z < z_2) = \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z^2}{2}} dz = \int_{z_1}^{z_2} N(z,0,1)\, dz$$

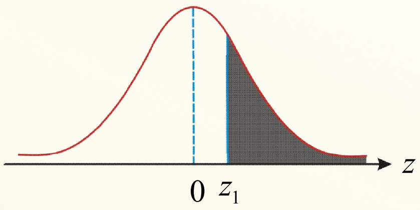



د $x$ متحول منحني لاندې مساحت چې د $x = x_1$ او $x = x_2$ ترمنځ واقع دی، د $z$ متحول له منحني مساحت سره چې د $z = z_1$ او $z = z_2$ ترمنځ پراته مساوي دي. په پایله کې کولای شو چې د نورمال د توزیع سټنډرډ د جدول په لرلو سره د نورمال توزیع احتمال د ناځاپه متحول د هر ممکنه قیمت لپاره په لاس راوړای شو.

د سټنډرډ نورمال د توزیع احتمال د جدول د استعمال له لارې کولای شو، په لنډ ډول توضیح کړو. هغه جدول چې ددې لوست په پای کې راغلی دی، د سټنډرډ نورمال توزیع اړوند په احتمالاتو کې ګډون لري. لاندې جدول ددې لوست یوه برخه د جدول پای راښیي، هغه ارقام چې د جدول دپاسه لیکل شوی دی، راښیي چې $z$ د مثبتو مقدارونو لپاره تنظیم شوی دی چې د منحني لاندې مساحت له صفر ټکي څخه تر $z$ پورې راښیي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

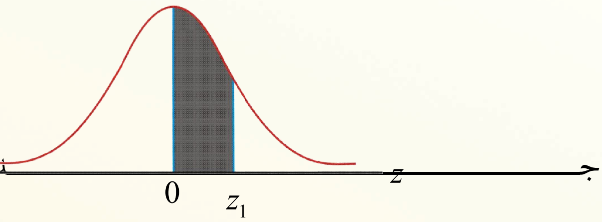



جدول (1)

| z | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.5000 | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5160 | 0.5199 | 0.5239 | 0.5279 | 0.5319 | 0.5359 |
| 0.1 | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 | 0.5675 | 0.5714 | 0.5753 |
| 0.2 | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 | 0.5987 | 0.6026 | 0.6064 | 0.6103 | 0.6141 |
| 0.3 | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6406 | 0.6443 | 0.6480 | 0.6517 |
| 0.4 | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 | 0.6736 | 0.6772 | 0.6808 | 0.6844 | 0.6879 |
| 0.5 | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.7190 | 0.7224 |
| 0.6 | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 | 0.7549 |
| 0.7 | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7704 | 0.7734 | 0.7764 | 0.7794 | 0.7823 | 0.7852 |
| 0.8 | 0.7881 | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 | 0.8051 | 0.8078 | 0.8106 | 0.8133 |
| 0.9 | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289 | 0.8315 | 0.8340 | 0.8365 | 0.8389 |
| 1.0 | 0.8413 | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 | 0.8621 |
| 1.1 | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 | 0.8790 | 0.8810 | 0.8830 |
| 1.2 | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 | 0.8980 | 0.8997 | 0.9015 |
| 1.3 | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 | 0.9147 | 0.9162 | 0.9177 |
| 1.4 | 0.9192 | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 | 0.9265 | 0.9278 | 0.9292 | 0.9306 | 0.9319 |
| 1.5 | 0.9332 | 0.9345 | 0.9357 | 0.9370 | 0.9382 | 0.9394 | 0.9406 | 0.9418 | 0.9429 | 0.9441 |
| 1.6 | 0.9452 | 0.9463 | 0.9474 | 0.9484 | 0.9495 | 0.9505 | 0.9515 | 0.9525 | 0.9535 | 0.9545 |
| 1.7 | 0.9554 | 0.9564 | 0.9573 | 0.9582 | 0.9591 | 0.9599 | 0.9608 | 0.9616 | 0.9625 | 0.9633 |
| 1.8 | 0.9641 | 0.9649 | 0.9656 | 0.9664 | 0.9671 | 0.9678 | 0.9686 | 0.9693 | 0.9699 | 0.9706 |
| 1.9 | 0.9713 | 0.9719 | 0.9726 | 0.9732 | 0.9738 | 0.9744 | 0.9750 | 0.9756 | 0.9761 | 0.9767 |
| 2.0 | 0.9772 | 0.9778 | 0.9783 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798 | 0.9803 | 0.9808 | 0.9812 | 0.9817 |
| 2.1 | 0.9821 | 0.9826 | 0.9830 | 0.9834 | 0.9838 | 0.9842 | 0.9846 | 0.9850 | 0.9854 | 0.9857 |
| 2.2 | 0.9861 | 0.9864 | 0.9268 | 0.9871 | 0.9875 | 0.9878 | 0.9881 | 0.9884 | 0.9887 | 0.9890 |
| 2.3 | 0.9893 | 0.9896 | 0.9898 | 0.9901 | 0.9904 | 0.9906 | 0.9909 | 0.9911 | 0.9913 | 0.9916 |
| 2.4 | 0.9918 | 0.9920 | 0.9922 | 0.9925 | 0.9927 | 0.9929 | 0.9931 | 0.9932 | 0.9934 | 0.9936 |
| 2.5 | 0.9938 | 0.9940 | 0.9941 | 0.9943 | 0.9945 | 0.9946 | 0.9948 | 0.9949 | 0.9951 | 0.9952 |
| 2.6 | 0.9953 | 0.9955 | 0.9956 | 0.9957 | 0.9959 | 0.9960 | 0.9961 | 0.9962 | 0.9963 | 0.9964 |
| 2.7 | 0.9965 | 0.9966 | 0.9967 | 0.9968 | 0.9969 | 0.9970 | 0.9971 | 0.9972 | 0.9973 | 0.9974 |
| 2.8 | 0.9974 | 0.9975 | 0.9976 | 0.9977 | 0.9977 | 0.9978 | 0.9979 | 0.9979 | 0.9980 | 0.9981 |
| 2.9 | 0.9981 | 0.9982 | 0.9982 | 0.9983 | 0.9984 | 0.9984 | 0.9985 | 0.9985 | 0.9986 | 0.9986 |
| 3.0 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9988 | 0.9988 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9990 | 0.9990 |
| 3.1 | 0.9990 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9993 | 0.9993 |
| 3.2 | 0.9993 | 0.9993 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 |
| 3.3 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9997 |

(c) ketabton.com: The Digital Library

## جدول (2)




| Z | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.0000 | 0.0040 | 0.0080 | 0.0120 | 0.0160 | 0.0199 | 00239 | 0.0279 | 00311 | 0.0359 |
| 0.1 | 0.0398 | 0.0438 | 0.0478 | 0.0517 | 0.0557 | 0.0596 | 0.0636 | 0.0675 | 0.0714 | 0.0754 |
| 0.2 | 0.0793 | 0.0832 | 0.0871 | 0.0910 | 0.0948 | 0.0978 | 0.1026 | 0.1064 | 0.1103 | 0.1141 |
| 0.3 | 0.1179 | 0.1217 | 0.1255 | 0.1293 | 0.1331 | 0.1368 | 0.1406 | 0.1443 | 0.1480 | 0.1517 |
| 0.4 | 0.1554 | 0.1591 | 0.1628 | 0.1664 | 0.1700 | 0.1736 | 0.1772 | 0.1808 | 0.1844 | 0.1879 |
| 0.5 | 0.1915 | 0.1950 | 0.1985 | 0.2019 | 0.2054 | 0.2088 | 0.2123 | 0.2157 | 0.2190 | 0.2226 |
| 0.6 | 0.2258 | 0.2291 | 0.2324 | 0.2357 | 0.2389 | 0.2422 | 0.2454 | 0.2454 | 0.2486 | 0.2549 |
| 0.7 | 0.2580 | 0.2612 | 0.2642 | 0.2673 | 0.2704 | 0.2734 | 0.2764 | 0.2794 | 0.2823 | 0.2852 |
| 0.8 | 0.2881 | 0.2910 | 0.2939 | 0.2967 | 0.2996 | 0.3023 | 0.3051 | 0.3078 | 0.3106 | 0.3133 |
| 0.9 | 0.3159 | 0.3186 | 0.3212 | 0.3238 | 0.3264 | 0.3289 | 0.3315 | 0.3340 | 0.3365 | 0.3389 |
| 1.0 | 0.3413 | 0.3438 | 0.3461 | 0.3485 | 0.3508 | 0.3531 | 0.3554 | 0.3577 | 0.3599 | 0.3621 |
| 1.1 | 0.3643 | 0.3665 | 0.3686 | 0.3708 | 0.3729 | 0.3749 | 0.3770 | 0.3790 | 0.3810 | 0.3830 |
| 1.2 | 0.3849 | 0.3869 | 0.3888 | 0.3907 | 0.3925 | 0.3944 | 0.3962 | 0.3980 | 0.3997 | 0.4015 |
| 1.3 | 0.4032 | 0.4049 | 0.4066 | 0.4082 | 0.4099 | 0.4115 | 0.4131 | 0.4147 | 0.4162 | 0.4177 |
| 1.4 | 0.4192 | 0.4207 | 0.4222 | 0.4236 | 0.4251 | 0.4265 | 0.4279 | 0.4292 | 0.4306 | 0.4319 |
| 1.5 | 0.4332 | 0.4345 | 0.4357 | 0.4370 | 0.4382 | 0.4394 | 0.4409 | 0.4418 | 0.4429 | 0.4441 |
| 1.6 | 0.4452 | 0.4463 | 0.4474 | 0.4484 | 0.4495 | 0.4505 | 0.4515 | 0.4525 | 0.4535 | 0.4545 |
| 1.7 | 0.4554 | 0.4564 | 0.4573 | 0.4582 | 0.4591 | 0.4599 | 0.4608 | 0.4616 | 0.4625 | 0.4633 |
| 1.8 | 0.4641 | 0.4649 | 0.4656 | 0.4664 | 0.4671 | 0.4678 | 0.4686 | 0.4693 | 0.4699 | 0.4706 |
| 1.9 | 0.4713 | 0.4719 | 0.4727 | 0.4732 | 0.4738 | 0.4744 | 0.4750 | 0.4756 | 0.4761 | 0.4767 |
| 2.0 | 0.4772 | 0.4778 | 0.4783 | 0.4788 | 0.4793 | 0.4798 | 0.4803 | 0.4808 | 0.4812 | 0.4817 |
| 2.1 | 0.4821 | 0.4826 | 0.4830 | 0.4834 | 0.4838 | 0.4842 | 0.4846 | 0.4850 | 0.4854 | 0.4857 |
| 2.2 | 0.4861 | 0.4864 | 0.4868 | 0.4871 | 0.4875 | 0.4878 | 0.4881 | 0.4884 | 0.4887 | 0.4890 |
| 2.3 | 0.4893 | 0.4896 | 0.4898 | 0.4901 | 0.4904 | 0.4906 | 0.4909 | 0.4911 | 0.4913 | 0.4916 |
| 2.4 | 0.4918 | 0.4920 | 0.4922 | 0.4925 | 0.4927 | 0.4929 | 0.4931 | 0.4932 | 0.4934 | 0.4936 |
| 2.5 | 0.4938 | 0.4940 | 0.4941 | 0.4943 | 0.4945 | 0.4946 | 0.4948 | 0.4949 | 0.4951 | 0.4952 |
| 2.6 | 0.4953 | 0.4955 | 0/4956 | 0.4957 | 0.4959 | 0.4960 | 0.4961 | 0.4962 | 0.4963 | 0.4964 |
| 2.7 | 0.4965 | 0.4966 | 0.4967 | 0.4968 | 0.4969 | 0.4970 | 0.4971 | 0.4972 | 0.4973 | 0.4974 |
| 2.8 | 0.4974 | 0.4975 | 0.4976 | 0.4977 | 0.4977 | 0.4978 | 0.4979 | 0.4979 | 0.4980 | 0.4981 |
| 2.9 | 0.4981 | 0.4982 | 0.4982 | 0.4983 | 0.4984 | 0.4984 | 0.4985 | 0.4985 | 0.4986 | 0.4966 |
| 3.0 | 0.4987 | 04987 | 0.4987 | 0.4988 | 0.4988 | 0.4989 | 0.4989 | 0.4989 | 0.4990 | 0.4990 |
| 3.1 | 0.4990 | 0.4991 | 0.4991 | 0.4991 | 0.4992 | 0.4992 | 0.4992 | 0.4992 | 0.4993 | 0.4993 |
| 3.2 | 0.4993 | 0.4993 | 0.4994 | 0.4994 | 0.4994 | 0.4994 | 0.4994 | 0.4995 | 0.4995 | 0.4995 |
| 3.3 | 0.4995 | 0.4995 | 0.4995 | 0.4996 | 0.4996 | 0.4996 | 0.4996 | 0.4996 | 0.4996 | 0.4997 |
| 3.4 | 0.4997 | 0.4997 | 0.4997 | 0.4997 | 0.4997 | 0.4997 | 0.4997 | 0.4997 | 0.4997 | 0.4998 |
| 3.5 | 0.4998 | 0.4998 | 0.4998 | 0.4998 | 0.4998 | 0.4998 | 0.4998 | 0.4998 | 0.4998 | 0.4998 |
| 3.6 | 0.4998 | 0.4998 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 |
| 3.7 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 |
| 3.8 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 |
| 3.9 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 |

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مثال په ډول که چېرې $z=1.56$ وي لومړی هغه سطر پیداکړئ چې په هغه کې $z$ د 1.5 معادل دی، که چېرې ددې کرښې په اوږدوالي پرمخ لاړ شو، تر څو هغه ستون ته ورسېږي چې له پاسه 0.06 لیکل شوی دی له 0.9406 عدد سره مخامخ کېږو چې د منحني د لاندې اړوندې سطحې له $z=0$ څخه تر $z=1.56$ پورې دی، نو لیکلای شو چې: $P(0 \le Z \le 1.56) = 0.9406$

**لومړی مثال**: د ښبلو(نوشابې) د بوتلونو د ډکولو دستګاه داسې تنظیم شوې ده، که 952 ملي‌لیټر نوشابه په بوتل کې واچوي ددې نوشابې میزان چې د نورمال توزیع اوسط یې 952 ملي‌لیټره او معیاري انحراف یې 4 ملي‌لیټره دی. ددې احتمال چې بوتل د 952 او 956 ملي‌لیټرو ترمنځ نوشابه ولري، څومره دی.

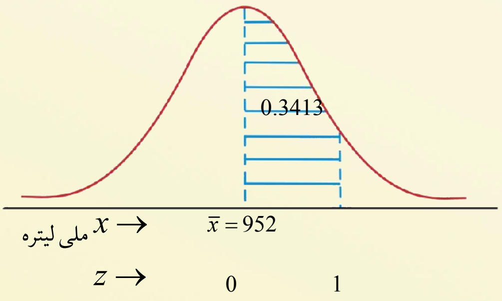
**حل**: لومړی $z$ د $x$ له جنسه پیداکوو:

$$z_1 = \frac{x-\bar{x}}{s} = \frac{952-952}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

$$z_2 = \frac{956-952}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

نو پر دې اساس د $x$ د تعریف ناحیه له 952 څخه تر 956 د $z$ تعریف د ناحیې له صفر څخه تر 1 بدلېږي.

د لوست د پیل له جدول(2) څخه په ګټه اخېستنې سره لرو $P(0 \le z \le 1) = 0.3413$ احتمال داسې دی چې هغه بوتل چې له 952 څخه تر 956 ملي‌لیټرو نوشابه ولري، یا په بل عبارت 34.13 فیصده ډک شوي بوتلونه له 952 څخه تر 956 ملي‌لیټره نوشابه لري؛ یعنې:




$$P(0 \le z \le 1) = P(z_2) - P(z_1)$$
$$= P(1) - P(0)$$
$$= 0.3413 - 0$$
$$= 0.3413$$

**دویم مثال**: په یوه خاص مضمون کې د زده‌کوونکو د نمبرو د نورمال توزیع اوسط 70 او معیاري انحراف یې 8 دی له نورمال سټنډرډ جدول څخه په ګټه اخېستنې سره له 54 څخه تر 84 نمبرو ترمنځ فیصدي پیداکړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

**حل**: د مسألې حل په لاندې ډول په ترسیمي بڼه ښودل شوی دی.

د $x = 54$ لپاره لرو:
$$z_1 = \frac{54-70}{8} = -2$$

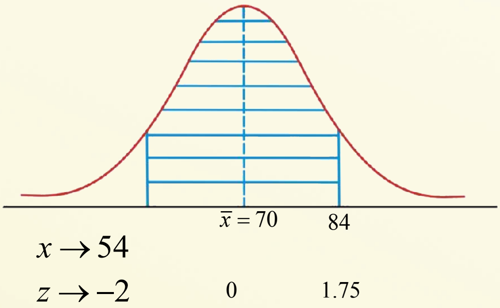
د $x = 84$ لپاره لرو:
$$z_2 = \frac{84-70}{8} = 1.75$$

څرنګه چې د سټنډرډ نورمال منحنې لاندې مساحت په یو محدود انټروال کې په پام کې نیول شوی دی، نو له نورمال سټنډرډ جدول(2) څخه لرو:

$$P(-2 \le z \le 0) = P(0 \le z \le 2) = 0.9772$$
$$P(0 \le z \le 1.75) = 0.9599$$

د ټاکل شوي مساحت د پام وړ احتمال دی.

$$P(-2 \le z \le 0) + P(0 \le z \le 1.75) = 0.4772 + 0.4599$$
$$= 0.9371$$



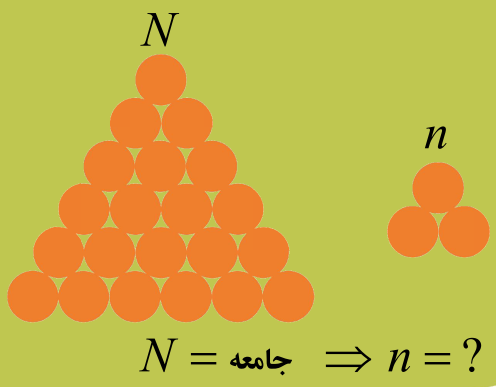

## پوښتنې

د لومړي مثال په پام کې نیولو سره محاسبه کړئ چې د بوتلونو څو فیصده له 948 څخه تر 956 ملي‌لیټرو پورې نوشابه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

## نمونه اخیستل

پـه دې متـل کـې((مـوټـی د خـروارو نمونـه ده)) څرنګـه تحلیلوئ.



- که چېرې وغواړئ چې د افغانستان د 12 ټولګي د زده‌کوونکو ونې(قد) اندازه کړئ ددې کار لپاره څه ډول لارې وړاندېز کوئ.
- نمونـه پـه دوو ډولونـو وېشل کېـږي، سـاده نمونـه او ناڅاپـه نمونـه، تاسـې ددې نمونـو کـومې يـوې تـه غوره‌والی ورکوئ؟ ولې؟
- د نمونه ګیری لپاره ښکاره خپل دلایل شته آیا کولای شئ یو یا دوه دلیلونه یې ووایئ.
- سوچ کولای شي چې د اوسط او معیاري انحراف عددي ځانګړني چې د ټولنې د توزیع او د نمونې د توزیع لپاره ورڅخه ګټه اخیستل کېږي، یو شان وي.
- آیا د نمونه‌ګیري او لیدل شویو ناڅاپه متحولینو د مقدارونو ترمنځ توپیر شته؟

له پورتني فعالیت څخه پوهېږو چې د نمونه اخیستنې بېلې بېلې لارې شته دی.

ـ ناڅاپه نمونه اخیستنه: د ټولنې ټول عناصر په ټاکل کېدو کې هم چانس دی.

ـ سیستماتیک نمونه اخیستنه: د ټولنې عناصر په منظم ډول کود وهل شوی دی.

ـ طبقه‌يي نمونه اخیستنه: ټولنه په بېلابېلو متجانسو ډلو وېشل شوی وي.

ـ خوشه‌يي نمونه اخیستنه: که ټولنه ډېره لویه وي، هغه په بېلابېلو ځانګو وېشو او له هرې ځانګې څخه یوه نمونه ټاکو.

ـ د هرې ټولنې عددي ځانګړنې(اوسط، معیاري انحراف) ته د ټولنې پارامتر وایي.

ـ د هرې ټولنې د عددي نمونه‌ګیري ځانګړنې(اوسط، معیار انحراف) ته آماره وایي.

ـ د نمونې پایلې د مشاهدې د مقدارونو په عنوان د ناڅاپه متحولینو په بڼه په پام کې نیسو.

ـ د $x_1 , x_2 ,\ldots, x_n$ ناڅاپه متحولونو یوه ناڅاپه نمونه د $x$ تصادفي متحول ویل کېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که چېرې تابع يې په دې ډول تعريف شوی وي.

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1) \cdot f(x_2) \ldots f(x_n)$$

**مثال**: فرض کوو چې په يوه قطی کې 5 سپينې او 7 تورې ګلولې وي، د قطی له منځ څخه 5 ګلولې يوه يوه ځای په ځای کول(د يوه عنصر دويم ځل ټاکل مجاز) ټاکو.

د ټاکل شوی ناځاپه نمونې تصادفي متحولين په ژبه بيان کړئ او اړونده توزيع يې پيدا کړئ.

**حل**: د $x_1, x_2$ او $x_3$ ناځاپه متحولونه په پام کې ونيسئ په لومړی پړاو کې د $x_1$ ناځاپه متحول لپاره د صفر عدد د تورې ګلولې لپاره او د (1) عدد د سپينې ګلولې د ټاکلو په لومړی پړاو کې ځانته غوره کړئ او د $x_2$ متحول هم د صفر عدد د تورې ګلولې لپاره او د (1) عدد د سپينې ګلولې د ټاکلو لپاره په دويم پړاو کې ځانته غوره کړې په همدې بنه د $x_3$ ناځاپه متحول په دويم پړاو کې هم د صفر عدد د تورې ګلولې لپاره ټاکو چې په دې پړاو کې (1) عدد سپينه ګلوله ځانته غوره کوي، په دې حالت کې د $x_1, x_2$ او $x_3$ ناځاپي متحولونه د برنولي ناځاپه متحولين دي. د $p = \frac{5}{12}$ له پارامتر او د $i = 1, 2, 3$ مقدارونو څخه لرو:

$$f(x_i) = \left(\frac{5}{12}\right)^{x_i} \left(1 - \frac{5}{12}\right)^{1-x_i}$$

ځرنګه چې نمونه اخيستن ناځاپه ده، نو د $x_1, x_2$ او $x_3$ ناځاپه متحولين يو له بل څخه بېل دي، نو تابع يې عبارت دی له:

$$f(x_1, x_2, x_3) = P(x_1 = x_1 \ , \ x_2 = x_2 \ , \ x_3 = x_3)$$

په ياد ولرئ چې د عناصرو هره ناځاپه نمونې له مجهول پارامترونو سره تړلې نه دي، هغې ته آماره وايي.

## پوښتنې

1. که $N = 25$ د يوې ټولنې حجم وي که وغواړو چې پنځه ګونه ناځاپه نمونه يې پيدا کړو، د هغو نمونو شمېر چې په لاس راځي خومره ده؟
2. ساده او ناځاپه نمونې سره له مثاله بيان کړئ؟
3. فرض کوو چې له يوې ټولنې څخه مو ناځاپه نمونه رانيولې ده څه فکر کوئ چې له ددې نمونې سره به څه وکړو؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

## د نمونې د اوسط توزیع

دولت غواړي وپوهېږي چې د یوه ښار د وګړو متوسطه ګټه(سیما) څومره ده؟

دې کار لپاره ناخاپه نمونه ټاکي او د نمونې اوسط محاسبه کوي.

اوس باید ددې محاسبه شوې مقدار څخه کوم کمیت تخمین کړئ؟

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = ?$$

### فعالیت

- د لاندې data د دریو زده‌کوونکو د ورزشي لوبو د نمبرو پایله راښیي:

| نوم | داود | سلیمان | پژواک |
|---|---|---|---|
| نمبرې | 2 | 3 | 4 |

- د نمبرو د احتمال توزیع یې ولیکئ.
- د زده‌کوونکو د نمبرو اوسط او معیاري انحراف حساب کړئ.
- راکړل شوی نمبرې د مرتبو جوړو په مرسته(ممکنې دوه ګونې نمونې د ځای په نیولو) ارایه او د هرې نمونې اوسط د جدول په بڼه وښیئ.
- د نمونو د اوسط د احتمال توزیع جدول(د $\bar{x}$ د کثرت د تو زیع جدول) ولیکئ.
- د $\bar{x}$ د کثرت توزیع جدول مستطیلي ګراف رسم کړئ.
- د اوسط د $\bar{x}$ متحول د زده‌کوونکو د نمبرو له اوسط سره پرتله کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

له پورتني فعالیت څخه دا پایله په لاس راځي:

که $x_1, x_2, \ldots, x_n$ د یوې ټولنې د $f(x)$ احتمال تابع ناخاپه نمونه وي، په دې صورت کې د ناخاپه نمونې احتمال توزیع عبارت دی له:

| $x$ | $x_1$ | $x_2$ | $\ldots$ | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $\frac{1}{n}$ | $\frac{1}{n}$ | $\ldots$ | |

د $\bar{x}_n$ متحول اوسط، $E(\bar{x}_n)=\mu$

د $\bar{x}_n$ متحول وریانس، $U(\bar{x}_n)=\frac{1}{n}\delta$

د نمونې وریانس $S_n^{\ 2}=S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$

د نمونه‌یي وریانس اوسط، $E(S^2)=\delta^2$

په داسې حال کې چې $\bar{x}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ نمونه‌یي اوسط، $\mu$ د ټولنې اوسط $\delta^2$ د ټولنې وریانس $S^2$ د نمونې وریانس دی.

**مثال**: د لاندې ټولنې، ټولې دوه ګونې ممکنه ناخاپه نمونې د ځای په ځای کولو سره ټاکو:

$$f(x)=\frac{1}{3} \quad , \quad x=1,2,3$$

**الف**: د $x$ د احتمال توزیع ولیکئ.

**ب**: د ټولنې اوسط او وریانس حساب کړئ.

**ج**: د $\bar{x}$ د توزیع جدول تشکیل او مستطیلي ګراف يې رسم کړې.

**د**: $E(\bar{x})$ او $V(\bar{x})$ حساب کړئ.

**حل**:

**الف**:

| $x$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ |

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب:

$$\mu = E(x) = \sum_{x=1}^{3} x\, f(x) = \frac{1}{3}(1+2+3) = 2$$

$$E(x^2) = \sum_{x=1}^{3} x^2 f(x) = \frac{1}{3}(1^2 + 2^2 + 3^3) = \frac{14}{3}$$

$$\delta_x^2 = E(x^2) - (E(x))^2 = \frac{14}{3} - 2^2 = \frac{2}{3}$$

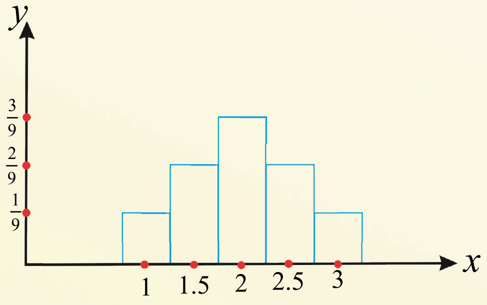
ج: د لاندې جدول ټولې دوه‌گونې ممکنو نمونو د ځای نيول، د هر يوه اوسط راښيي:

| نمونه | (1,1) | (1,2) | (1,3) | (2,1) | (2,2) | (2,3) | (3,1) | (3,2) | (3,3) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{x}$ | 1 | 1.5 | 2 | 1.5 | 2 | 2.5 | 2 | 2.5 | 3 |

د $\bar{x}$ د توزيع د کثرت جدول په لاندې ډول شودل کيږي:

| $\bar{x}$ | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(\bar{x})$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{2}{9}$ | $\frac{3}{9}$ | $\frac{2}{9}$ | $\frac{1}{9}$ |

د $\bar{x}$ مستطيلي گراف په لاندې ډول رسمېږي:




د:

$$\mu_{\bar{x}} = E(\bar{x}) = \sum \bar{x} f(\bar{x}) = 1\cdot\frac{1}{9} + 1.5\cdot\frac{2}{9} + 2\cdot\frac{3}{9} + 2.5\cdot\frac{2}{9} + 3\cdot\frac{1}{9} = \frac{18}{9} = 2$$

$$E(\bar{x}^2) = \sum \bar{x}^2 f(\bar{x}) = 1^2\cdot\frac{1}{9} + (1.5)^2\cdot\frac{2}{9} + 2^2\cdot\frac{3}{9} + (2.5)^2\cdot\frac{2}{9} + 3^2\cdot\frac{1}{9} = \frac{13}{3}$$

$$\delta_{\bar{x}}^2 = V(\bar{x}) = E(\bar{x}^2) - (E(\bar{x}))^2 = \frac{13}{3} - 4 = \frac{1}{3}$$

$$E(x) = E(\bar{x}) = 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو ليدل کېږي چې:

$$V(\bar{x}) = \frac{\delta_x^{\ 2}}{n} = \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3}$$

## پوښتنه

1. فرض کوو چې يوه ټولنه د $6,4,2$ او $8$ څلورو عددونو څخه جوړه شوې وي، په دې صورت کې توزيع، اوسط او وريانس ددې ټولنې محاسبه او وروسته له دې ټولنې څخه دوه ګوني ناځايه نمونه د ځای په نيولو سره وټاکئ او د نمونې توزيع اوسط يعنې $\bar{x}$ په لاس راوړئ. د کثرت څو ضلعي ګراف يې رسم کړئ، د $\bar{x}$ اوسط او وريانس حساب کړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

## د مرکزي لیمیټ قضیه

پوهېږو چې د ټولنې کمیت ته د ټولنې پارامتر او د نمونې کمیت ته نمونه یي اوسط ویل کېږي د $S_{\overline{x}}$ او $\overline{x}$ د نمونو احصائیه د کوم پارامتر په اړه اطلاعات زموږ په اختیار کې ږدي.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}=?$$

- که د لویې ټولنې حجم $\frac{S}{\sqrt{n}}$ وي، د کوچنۍ ټولنې حجم په $\frac{S}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$ ) چې $N$ د ټولنې د عناصرو شمېر، $n$ د نمونه عناصرو شمېر او $S$ معیاري انحراف دی) وښیئ څه وخت کېدای شي چې د لویې ټولنې حجم له کوچنۍ ټولنې سره برابر شي؟
- که د $x_1 , x_2 ,\dots, x_n$ نورمال توزیع یو له بل څخه بیل وي آیا د هغوی د جمع حاصل د نورمال توزیع لرونکی ده؟
- که $x_1 , x_2 ,\dots, x_n$ ناخاپه ځانګړي متحولونه په یو شان توزیع شوي وي او د $\mu$ اوسط لرونکی وي او $\varsigma^2$ وریانس وي ویلای شو چې د $S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ د توزیع وریانس او اوسط څو دی؟

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

که چېرې $N$ د یوې لویې ټولنې اوسط $\mu$ متناهي اوسط او $\delta^2$ متناهي وریانس لرونکی یوه ناخاپه $n$ ګونه نمونه وټاکو، په دې صورت کې د نمونې اوسط یعنې $\overline{x}$ د تقریبي نورمال توزیع د $\mu_{\overline{x}} = \mu$ اوسط $\delta_{\overline{x}}^{\ 2} = \frac{\delta^2}{n}$ وریانس دی او $Z = \frac{\overline{x} - M}{\frac{\delta}{\sqrt{n}}}$ ناخاپه متحول د نورمال ستېنډرډ توزیع دی. په داسې حال کې چې $\frac{N-n}{N-1}$ ضریب د $N$ د لویو قیمتونو لپاره $(1)$ ته نژدې کېږي. په حقیقت کې یې لیمیټ هغه وخت چې $n \to \infty$ وکړی، برابر له $(1)$ سره دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

**مثال**: له یوه لوی ټولګي څخه چې د زده‌کوونکو د ریاضي مضمون نمبرو نورماله توزیع د 71 اوسط او معیاري انحراف یې 9 دی. یوه 9 تایي نمونه ټاکو، ددې احتمال چې ددې نمونې د نمبرو اوسط له 80 څخه زیات وي حساب کړئ. همدارنګه که چېرې په تصادفي ډول یو زده‌کوونکی وټاکو، په دې صورت کې احتمال ددې چې نمبرې یې له 80 څخه زیاتې وي، محاسبه کړئ.

**حل**: څرنګه چې $\bar{x}$ د نورمال توزیع د $\mu$ په اوسط او معیاري انحراف لرونکی دی، نولرو:

$$P(z>80)=P(z=\frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\delta}{\sqrt{n}}}>\frac{80-71}{\frac{9}{\sqrt{n}}}=P(z>3)$$

$$=1-P(z)\leq 3=1-0.9987=0.0013$$

همدارنګه د $n=1$ لپاره لرو:

$$P(z>80)=P(z=\frac{\bar{x}-\mu}{\delta}>\frac{80-71}{9}=P(z>1)$$

$$=1-P(z)\leq 1=1-0.8413=0.1587$$

**پاملرنه**:

د $P(z)$ قیمت له (2) جدول څخه په لاس راوړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

## پوښتنه

1- د هغو جعبو وزن چې د يوه ماشين په واسطه ترل کېږي، د نورمال توزيع اوسط يې $\mu = 250gr$ او معياري انحراف يې $\delta = 20gr$ وي مطلوب دی، د هغه احتمال محاسبه چې د ناخاپه نمونې د اوسط وزن $n = 16$ تايي د جعبو کوچنی له $240gr$ وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

## د نمونه‌يي توزيع نسبت

د $A$ په يوه ښار کې $n$ کسان غواړي د $B$ يو کس د ښاروال په صفت وټاکي، که دا کسان تر پوښتنې لاندې راشي او $x$ د موافقو کسانو شمېر وښيئ ، ددې کسانو نسبي کثرت مساوي په څه دي.

### فعالیت

- که چېرې $x$ د دوو جملو توزيع لرونکی وي، کولای شو وليکو چې:

$$f(x)=\binom{n}{x}P^{x}(1-p)^{n-x} \qquad x=0,1,2,\ ........$$

که چېرې $x=n\hat{P} \Rightarrow \hat{P}=\frac{x}{n}$ وي د $x$ قيمت په تعويض سره په پورتنی فورمول کې $f(\hat{P})$ وليکئ.

- د $\hat{P}=\frac{x}{n}$ په فورمول کې که د $x$ تصادفي متحول د $n$ ناڅاپه متحولينو د $x_1, x_2, \ldots, x_n$ له مجموع څخه تشکيل شوی وي، $\hat{P}$ د نمونې اوسط سره څه اړيکه لري؟

که چېرې $x$ ناڅاپه متحول، $n$ د برنولي د آزمايښتونو مجموعه، $P$ د هر آزمايښت برياليتوب احتمال وي، په دې صورت کې $\hat{P}$ د نمونې د نسبت آماره $E(x)=n\,p$ اوسط $V(x)=n\,p\,q$ د $x$ ناڅاپه متحول وريانس وي. د دوه جمله‌يي د توزيع په پاملرنې سره د $\hat{P}$ توزيع په دې فورمول سره کولای شو.

$$f(n\hat{P})=\binom{n}{n\hat{P}}p^{n\hat{p}}(1-p)^{n(1-\hat{p})} \qquad \hat{P}=0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},.....,1$$

د $\hat{P}$ ناڅاپه متحولينو اوسط $(Expected\ Value)$ او وريانس په لاندې صورت ليکلای شو:

$$\mu_p=E(\hat{P})=P$$

$$\delta^2\,\hat{P}=V(\hat{P})=\frac{p\,q}{n}=\frac{p(1-p)}{n}$$

د نورمال سټنډرډ توزيع يې عبارت دی له:

$$z=\frac{x-n\,p}{\sqrt{n\,p\,q}}=\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{p\,q}{n}}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

**مثال**: د کاليو د ښه والي احتمال $P=0.3$ دی، يوه ساده ناڅاپه نمونه $n=6$ ګونه ټاکو. که چېرې $x$ د ناقصو کاليو ښودونکی وي، د $x$ او $\hat{P}$ احتمال توزيع وليکئ.

**حل**: د $x$ ناڅاپه متحول د دوه جمله‌يي توزيع د $P=0.3$ او $n=6$ پارامترونه وي.

$$f(x)=P(X=x)=B(x,6,0.3) \qquad x=0,1,...,6$$

د دوه جمله‌يي توزيع جدول څخه په ګټه اخېستنې سره لاندې احتمالونه محاسبه او د توزيع د جدول احتمال يې ليکو:

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0.1176 | 0.3025 | 0.3241 | 0.1852 | 0.0595 | 0.0102 | 0.0007 |

د $\hat{P}$ ناڅاپه متحول د $0,\frac{1}{6},\frac{2}{6},\frac{3}{6},\frac{4}{6},\frac{5}{6}$ او 1 قيمتونه نيسي:

$$P(\hat{P}=0)=P(X=0)=0.1176$$

$$P(\hat{P}=\frac{1}{6})=P(X=1)=0.3025$$

او پاتې نور په مشابه ډول محاسبه کېږي، پام وکړئ چې:

$$P(\hat{P}=\frac{x}{n})=P(X=x)$$

او د $\hat{P}$ د احتمال توزيع عبارت دی:

| $\hat{P}$ | 0 | 1.6 | 2.6 | 3.6 | 5.6 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(\hat{P})$ | 0.1176 | 0.3025 | 0.3241 | 0.0595 | 0.0102 | 0.0007 |

په پورتني مثال کې:

$$P(\hat{P}\le 0.6)=P(x\le 3.6)=P(x\le 3)=\sum_{x=0}^{3}B(x,6,0,3)=0.9294$$

اويا:

$$P(\hat{P}\le 0.27)=P(x\le 1.62)=P(x\le 3)=0.1176+0.3025=0.4201$$

## پوښتنې

1. ددې احتمال چې د يوه تن د غوښتنليک فرم په پوره ډول پرته له غلطۍ(تېروتنې) څخه ډک کړي $P=0.7$ وي، يوه نمونه د $n=200$ ګونه د استخدام ډک شوي فارمونه مو ټاکلي وي.

ـ ددې احتمال محاسبه کړئ چې د $\hat{P}$ د $\pm 00.05$ داخلي فاصله کې د تولنې له بنسټ څخه ولوېږي.

ـ ددې احتمال محاسبه کړې چې د $\hat{P}$ د 0.6 څخه زيات وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

## د خپرکي مهم ټکي

- ناڅاپه متحول هغه اصطلاح ده چې د يوې تابع په عنوان په احصائيه او احتمالاتو کې ترې ګټه اخيستل کيږي.
- د يوه غير متمادی ناڅاپه متحول د احتمال تابع هغه تابع ده چې د تعريف ناحيه يې هغه عددونه دي چې ناڅاپه متحول کولای شي هغه غوره کړي او د قيمتونو له ناحيې سره د تعريف د ناحيې د عناصرو اړونده احتمالونه ګډون لري.
- د تجمعي احتمال تابع هغه تابع ده چې د تعريـف ناحيـه کـې يې هغـه عددونـه ګـډون ولـري چې د $x$ ناڅاپه متحول يې ځانته غوره کوي او د قيمتونو ناحيه يې د $f(x)$ ټول تصويرونه موجود دي.
- د يوه متمادي متحول د احتمال تابع هغه تابع ده چې د تعريف ناحيه يې د $x$ ټول متمادي مقدارونه غوره کړي او دقيمتونو ناحيه يې $F(x)$ ټول تصويرونه وي.
- د $x$ غير متمادي ناڅاپه متحول اوسط Expected value او وريانس په وار سره عبارت دي له:

$$E(x)=\sum_{i=1}^{n}x_i f(x_i)=\bar{x}$$

$$V(x)=S^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-E(x_i))^2 f(x_i)$$

- د برنولي توزيع، $P(X=m)=P^m(1-P)^{1-m}$
- د دوه جملهيي توزيع، $P(X=m)=\binom{n}{m}P^m\ q^{n-m}$
- د دوه جملهيي توزيع اوسط او معياري انحراف عبارت له: $\bar{x}=n\,p\quad,\quad S=\sqrt{n\,p\,q}$
- د پواسن د احتمال توزيع يوه غيرمتمادي احتمال توزيع ده چې فورمول يې عبارت دی له:

$$P(x=m)=\frac{e^{-\lambda}\ \lambda^m}{m!}$$

- که $N$ له يوې نورمالې جامعې څخه د $n$ ځلې(تـايي) ناڅاپـه نمونـه وټـاکو د $\bar{x}$ د نمونـهيي اوسـط آمـاره د نورمال توزيع لرونکی له $\mu_{(\bar{x})}=\mu$ اوسط سره او $\delta_{\bar{x}}^{2}=\dfrac{\delta^2}{n}$ او $z=\dfrac{\bar{x}-\mu}{\dfrac{\delta}{\sqrt{n}}}$ د سټنډرډ نورمال توزيع سره ده.
- نورمالـه توزيـع: د نورمـال توزيـع شـکل لـه زنګـولې سـره مـشابه او متنـاظر دی، پـه نورمـال توزيـع کـې مرکـزي شاخصونه يو له بل سره برابر دي او د پيوسته ناڅاپه متحولونو د ناحيې تعريف محدود دی چې د احتمال توزيع يې عبارت ده له: $f(x)=\dfrac{1}{\delta\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\bar{x}}{\delta})^2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چې $\mu$ د ټولنې اوسط او $\delta$ د ټولنې معیاري انحراف دی.

- د $f(x)$ تابع د منحني لاندې مساحت د محاسبې لپاره د $a$ او $b$ په فاصلوکې کولای شو له دې انتیګرال څخه ګټه واخلو:
$$P(a \le x \le b) = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\delta})^2}$$
- که چېرې $x$ د دوه جملهیي توزیع د $n$ شمېرد برنولي پر له پسې ازمایښتونه، $P$ د کامیابۍ احتمال او $q = 1 - p$ د هر ازمایښت د نابریالیتوب احتمال وي، په دې صورت کې د احصائیې د اوسط نمونه او د $x$ ناخاپه متحول وریانس په ترتیب سره عبارت دی له: $\overset{\frown}{P} = \frac{x}{n}$ , $E(x) = n\,p$ او $V(x) = n\,p\,q$
همدارنګه د دوه جملهیي توزیع، اوسط، وریانس او د سټنډرډ توزیع او $\overset{\frown}{P}$ ناخاپه متحول په ترتیب سره عبارت دی له:
$$E(\overset{\frown}{P}) = P \quad , \quad f(\overset{\frown}{P}) = \binom{n}{n\overset{\frown}{P}} P^{n\overset{\frown}{P}}\, q^{(1-P)}$$
$$z = \frac{\overset{\frown}{P} - P}{\sqrt{\frac{p\,q}{n}}} \quad , \quad V(\overset{\frown}{P}) = \frac{p\,q}{n}$$
- ددې $z = \frac{x-\mu}{\delta}$ اړیکې په واسطه کولای شو چې هره احصائیوي مجموعه د نورمال توزیع لرونکې وي هغه په سټنډرډ نورمال بدل کړو.
- نمونه په دوو برخو وېشل کېږي، ساده نمونه او ناخاپه نمونه.
- د نمونه ګیری طریقې په عمومي ډول عبارت دي له: ناخاپه نمونهګیري، منظمه نمونهګیري، ګروپي نمونهګیري، خوشهیي نمونه ګیري.
- د $x$ نمونې ناخاپه متحولینو اړوند تابع په دې صورت تعریفېږي.
$$f(x_1, x_2, x_3, \,.........\, , x_n) = f(x_1), f(x_2), \,.........\, , f(x_n)$$
- که چېرې $x$ د ټولنې یوه ناخاپه نمونه د $f(x)$ د احتمال تابع په لرلو سره وي $E(\overline{x}_n) = \mu$ اوسط، $V(\overline{x}_n) = \frac{1}{n}\delta$ د اوسط وریانس، $\delta^2$ د ټولنې وریانس او $S^2$ ته د نمونو وریانس وایي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

## د څپرکي پوښتنې

1. دوه سکې څلور ځلې پورته واچوئ او د خط راتللو شمېر په پام کې ونيسئ:
   - ناڅاپه متحولونه د تابع په بڼه وښيئ.
   - د هر ځل د پورته اچونې احتمال نمونه‌يي فضا سره نسبت ورکړئ.
   - د تابع د تجمعي او مجزا احتمال وليکئ.
2. که چېرې د يوې جوړې بوټونو د نقيصي احتمال $P = 0.1$ وي، د ناقصو بوټونو اوسط او معياري انحراف په يوه نمونه کې $n = 400$ جوړو بوټونو پيدا کړئ.
3. د يوه شرکت په ګدام کې 500 پايې کمپيوټرونه شته چې د هغې له جملې څخه يې 50 پايې نقص لري، يو اخېستونکی له هغې څخه 10 پايې کمپيوټرونه اخلي، ددې احتمال څومره دی چې هغه 8 پايې جوړ اخېستی وي؟
4. لاندې اطلاعات چې اوسط او معياري انحراف د دوو پارامترونو په اړوند دی د نورمال توزيع د رسمولو لپاره ترې ګټه واخلئ. لومړی يو افقي محور رسم کړئ او د $\bar{x}$ ، $\bar{x}+s$ ، $\bar{x}-s$ ، $\bar{x}+2s$ او $\bar{x}-2s$ ټکي پرې وټاکئ وروسته يو ټکی د $h$ اختياري جګوالي په اندازه د $\bar{x}$ له پاسه په پام کې ونيسئ او $\bar{x}+s$ له پاسه يو ټکی د $0.6h$ په جګوالي وټاکئ، يعنې يو ټکی چې مختصات يې $(\bar{x}+s, 0.6h)$ وي، څرنګه چې د نورمال منحني متناظر دی، همدا عمل په ځانګړې توګه په $\bar{x}-s$ هم سرته ورسوئ. اوس د $\bar{x}+2s$ ، $\bar{x}-2s$ د پاسه دوه ټکې د $h$ او $0.15h$ په جګوالي په پام کې ونيسئ، پام وکړئ چې د نورمال منحني د دقيق رسمولو لپاره د $0.6067h$ او $0.1354h$ په ځای له $0.6h$ او $0.15h$ څخه ګټه واخلئ. په پايله کې دا ټکي د يوه منحني په واسطه وصل او ووايئ چې دا منحني په کومو فاصلو کې محدب او په کومو فاصلو کې مقعره ده.
5. په يوه روغتون يوه څېړنه راښيي چې د مراجعينو شمېر د شنبې په ورځ وروسته له وخت څخه د 6 او 8 ترمنځ 25 تنه دی. فرض کړئ چې د پواسن د احتمال توزيع په دې حالت کې صدق وکړي.
   - د روغتون د مراجعينو د احتمال توزيع د دوشنبې له ورځې، وروسته له وخت څخه د 6 او 8 ساعتونو تر منځ پيدا او ګراف يې رسم کړئ؟ آيا دا توزيع خمېده ده؟
   - ددې توزيع د اوسط او معياري انحراف مقدار په لاس راوړئ.
   - آيا دا ممکنه ده چې د دوشنبې په ورځ وروسته له وخت څخه د 6 او 8 ساعتونو ترمنځ به له 7 تنو څخه زيات روغتون ته مراجعه کړې وي؟ ولې؟
6. فرض کوو چې د يوه کتاب د يوه مخ د تېروتنو شمېر د پواسن د توزيع يا $\lambda = \frac{1}{2}$ پارامتر لرونکی دی د محاسبې احتمال يې مطلوب دی داسې چې:

(c) ketabton.com: The Digital Library

- حد اقل یوه ټایپي تېروتنه په هغه مخ کې وي.
- دقیقاً 5 ټایپي تېروتنې په هغه مخ کې دي.
- د 3 او 6 ترمنځ ټایپي تیروتنې په هغه کې وي.

7. فرض کوو چې د هغه پستون قطر چې د یوه اتوماتیکي ماشین په واسطه جوړېږي په نورمال یا اوسط ډول 25 ملي متر او معیاري انحراف یې 0.5 ملي متره توزیع شوی وي.
- کله چې د پستون قطر د 25.2 او 25.9 ترمنځ وي احتمال یې څومره دی.
- د پستونونو کوم نسبت د 25 ملي قطر لرونکی او له هغې څخه کم دی.
- که چېرې 1000 پستونه جوړ شي، له هغوی څخه څو دانې ددې وړ دی چې 24.07 ملي مترو څخه کم قطر ولري.
- د تولید شویو پستونونو څو فیصده د 24.56 ملي متره معادل قطر یا له هغه څخه زیات لري.

8. که چېرې $x_1, x_2, \ldots, x_n$ د $x$ ناڅاپه متحول یوه تصادفي نمونه وي ایا د $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$ ، $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ ، $\frac{x_1+x_2}{x_4}$ او $x_1+3x_2-x_3$ تابع آماره دی.

9. که چېرې $x$ یو ناڅاپه متحول او د $\mu$ او $\delta^2$ پارامترونه وي آیا د $\frac{3x_1-2x_3-\delta}{8\mu+x_2}$ ، $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)$ او $x_1+x_3-\mu$ توابع $\mu$ او $\delta^2$ مجهول وي آیا پورتنیو تابعګانو ته احصائیه ویلی شو؟

10. ټولنه د برق په څلورو ډلو کې ګډون لري، که د عمرونو اوږدوالی یې د ساعتونو په حساب سره عبارت له 108 104 112 103 دي یوه ډله ناڅاپه ټاکو، فرض کوو چې د $x$ ناڅاپه متحول ټاکل شوی د ډلو د عمر اوږدوالی راوښیئ:
- د $x$ د احتمال توزیع ولیکئ.
- $E(x)$ او $V(x)$ محاسبه کړئ.

11. د یوه ښار د وګړو د ګټې اندازه چې د غیرنورمال توزیع $\mu=90$ افغانی اوسط او د 25 افغانی معیاري انحراف سره دی که چېرې د 225 کسیز د وګړو د یوې نمونې د ګټې مجموعه له 2100 افغانیو څخه زیاته وي، احتمال یې څومره دی؟

12. پوهېږو چې 56% وګړي د $A$ نوماند طرف دار دی، څومره ددې احتمال شته چې $n=50$ دوه‌ګونې یوه نمونه کې حداقل 60% وګړي د $A$ نوماند طرفدار وي.

13. په 12 مثال کې که چېرې $P=0.4$ وي، یعنې ددې احتمال چې یو وګړی د $A$ کاندید طرفدار وي 0.4 دی، یوه $n=200$ګونه نمونه وټاکو، نو څومره ددې احتمال شته چې لااقل 100 وګړي د $A$ کاندید طرفدار وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

# اتم څپرکی

# احتمالات

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

## بېلې شوې(غیرمتمادي) او نښتې(متمادي) فضاګانې

په مخامخ شکلونو کې د لومړي او دویم نل څخه په وار سره اوبه په څمکه تویېږي ویلای شئ چې له دې نلونو څخه په ځمکه د اوبو د څاڅکو د تویېدو توپیر په څه کې دی؟

- د یو رمل په اچولو سره ویلای شي چې د نمونه یي فضا ټولې ممکنې پایلې کومې دي؟
- آیا له ونې څخه د یوې پخې منې د لوېدلو د وخت وړاندوینه کولای شئ چې وروسته له څو ثانیو، دقیقو او یا ساعتونو څخه پر ځمکه ولوېږي؟
- نظر وخت ته د منې د لوېدلو نمونه یي فضا ولیکې.
- د رمل دانې د اچولو تجربې نمونه یي فضا د عناصرو شمېر او له ونې څخه د منې د لوېدلو وخت څنګه پرتله کولای شي.

د پورتني فعالیت له سرته رسولو څخه لاندې پایله په لاس راځي:

د یوې ناڅاپه تجربې نمونه یې فضا عبارت له هغه ټاکلې او یا نا ټاکلې سټ یا مجموعې څخه ده چې ځینې عناصریې د شمېر وړ او ځینې یې د شمېر وړ نه وي.

هغه نمونه یې فضاګانې چې عناصر یې د شمېر(countable) او تشخیص وړ وي د غیرمتمادي نمونه یې فضا په نامه یادېږي او هغه نمونه یي فضاګانې چې عناصر یې د شمېر وړ نه وي د نښتې(متصلې) یا متمادي نمونه یې فضا په نامه یادېږي.

**لومړی مثال**: له لاندې نمونه یې فضاګانو څخه کومه یوه نښتې(متمادی) او کومه یوه غیرمتمادی ده.

**الف**: د دوو رمل دانو اچول

**ب**: د 8 او 12 ترمنځ د یوه حقیقي عدد ټاکل.

**ج**: له 30 زده کوونکو څخه د 3 تنو ټاکل

(c) ketabton.com: The Digital Library

د: د یوې کُرې د حرارت د یوې درجې لوړېدل د 100 درجو د سانتي ګرېډ څخه تـر 1000 درجـود سـانتي ګرېـډ پورې.

**هـ** : د $30^\circ$ او $45^\circ$ زاویو ترمنځ یوه زاویه ټاکل.

**حل**: څرنګه چې (الف او ج) نمونه‌یي فضاګانې د محدودو غړو له شمېر څخه جوړې شوې، نو غیرمتمـادي فـضا ولې (ب، د او هـ) له نامحدود حقیقي عددونو څخه تـشکیل(جـوړ) چـې د شـمېر وړ نـه دي، نـو نـښتی یـا متمـادی فضاګانې دي.

**دویم مثال**: خیبر د کور د ګلانو د اوبولو لپاره یو واټرپمپ اخیستی دی.

که چېرې د واټرپمپ عمرد ساعت له مخې په پام کې ونیسو، په دې حالت کې د واټرپمپ د عمر د اوږدوالی نمونه- یي فضا چې کېدای شي هر مثبت حقیقي عدد د واټرپمپ د ورانېدو په صورت کې د کار د مودې قیمـت شـي، پـه دې ډول د داسې ناڅاپه حادثې پېښېدل هر حقیقي عدد کېدای شي چې دا نمونه‌یي فضا یوه غیـر متمـادي، یـا نـښتي نمونه یي فضا د، یعنې { t د واټرپمپ د ورانېدو وخت، $S = \{t \in IR : t \geq 0$ چې په پورتنۍ نمونه یي فـضا کـې t د واټرپمپ د عمر اوږدوالي راښيي.

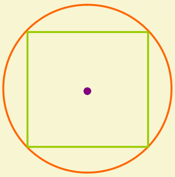
**یادونه**:

1- د لومړي مثال الف او ج جزونو کې محدودې نمونه‌یي فضاګانو څخه بحث شوی چې عناصـر یـې د شـمېر وړ دي، د ب او د جزونو کې نامحدودې نمونه‌یي فضاګانې ذکر شوي چې عناصر یې د شمېر وړ نه دي، نـو ځکـه ټول مثبت حقیقي عددونه اخېستلای شي.

2- په دویم مثال کې نمونه‌یي فضا متصله یا غیر محدوده ده چې د حقیقي عددونو د انټروال په توګه ښودل کېږي.

## پوښتنې

1- یو غشي وېشتونکی د یوه دایروي د سک په دننه چې وړانګه یې r ده، په پام کې ونیسي. د غشي د لګېدو ځای د دایرې په دننه کې چې مرکز ته نژدې ولګېږي، د هغې نمونه یي فضا ارایه کړې. وواياست چې دا څنګـه یـوه نمونه یي فضا ده.



2- په مخامخ شکل کې په ناڅـاپي یـا تـصادفي ډول د دایـرې پـه دننه کې یو ټکـی و ټـاکئ، احتمـال ددې شـته چـې مطلوب ټکی د مربع په دننه کې وي.

3- یو طبیعي دوه رقمی عدد و ټاکئ، هغه احتمال پیدا کړئ چې عدد د 4 مضرب وي.

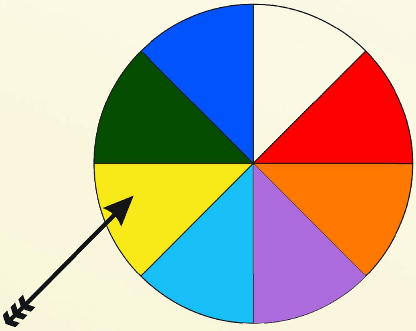
(c) ketabton.com: The Digital Library

## هم چانسه پېښې

د يـوې نورمـال رمـل دانـې پـه اچولـو کـې د (1) او يـا (5)
شمېرې مخ ته راتللو لپاره شرط څه دی؟
د 2 او 5 شمېرې د راتللو چانس يو له بل سره څـه اړيکـه
لري؟

### فعاليت

د مخامخ شکل په څېر يوه دايره په پام کې ونيسئ، که چېرې په راکړې شوې دايره کې يو ښکاري غشي وولي لاندې پوښتنو ته ځواب ورکړئ.



- په سور رنګه ناحيه او شين رنګه ناحيـه کـې د غـشي لګېدل يو له بل سره څه اړيکه لري؟
- د غشي د لګېدو چانس د کچې پـه اړه د نـارنجي او سپينو رنګونو سره په پرتله باندې څه ويلای شې؟
- په تور رنګ د غشي د لګېدو چانس څومره ده؟
- د تجربې، نمونه‌يي فضا وليکئ.
- لومړنې ناڅاپه پېښې لست کړې او د هر يوه احتمـال پيدا کړئ ؟
- د لومړنيو پېښو د احتمـالونو د مجموع په برخه کې څه ويلای شې؟

د پورتني فعاليت له اجراکولو څخه لاندې پايله په لاس راوړو:

هغه لومړنی ساده پېښې چې د هغوی د پېښېدلو چانس د يوې تجربې په اجراکولو کې سره برابـر وي، د هـم چانسه پېښو په نامه يادېږي، لکه:

که چېرې $S=\{e_1,e_2\ ,\dots e_n\}$ يوه نمونه يي فضا وي، نو $\{e_i\}$ د هر $i=1,2\dots n$ لپاره يوه ناڅاپـه لـومړني پېـښه ده که $0\le P(\{e_i\})\le 1 \quad , \quad i=1\ ,\ 2\ ,\dots n$ دي.

سربېره پر دې د لومړنيو پېښو د احتمالونو مجموع مساوي له يوه سره ده.

$$P(\{e_1\})+P(\{e_2\})+\dots+P(\{e_n\})=\sum_{i=1}^{n}P(e_i)=1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

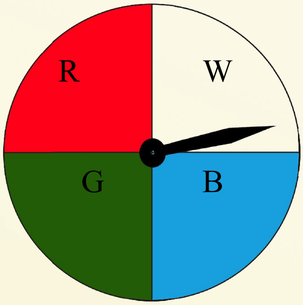
**مثال**: څلور تنه په یوه لوبه کې ګډون کوي. تاسې د هر یوه د ګټلو احتمال پیدا کړئ په داسې حال کې چې نمونه‌یي فضا هم چانسه وي.

**حل**: که چېرې $S = \{a, b, c, d\}$ نمونه یي فضا وي، نو د هرې ناڅاپه لومړنۍ پېښې احتمال $\frac{1}{4}$ دي.

لرو چې: $$P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = \frac{1}{4}$$

پاسنۍ لومړنۍ پېښې سره هم چانسه دي.

## پوښتنې



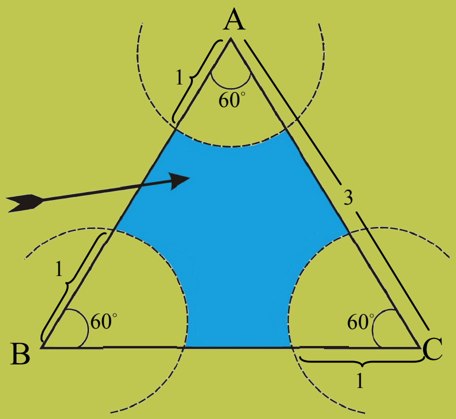

1- مخامخ شکل په پام کې ونیسي ، که چېرې د عقربې(ستنې) د درېدلو احتمال په آسماني او سپین رنګ 0.30 او د سره رنګ پرمخ 0.26 وي، د شنه رنګ پرمخ د درېدلو احتمال به څومره وي؟

2- لاندې د کثرت جدول د رمل یوې دانې د اچولو لپاره په پام کې ونیسي. هغه احتمال پیدا کړئ چې د رمل دانه (5) شمېره راشي.

| د رمل شمېره | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| کثرت | 7 | 9 | 8 | 7 | 3 | 10 |

3- د رمل یوه دانه داسې ډکه شوې چې د جفت شمېرو د راتللو احتمال د طاق شمېرو دوه برابره وي، که یو چا په شرط وهلو کې(5) شمېره ټاکلې وي، د هغې احتمال پیدا کړئ.

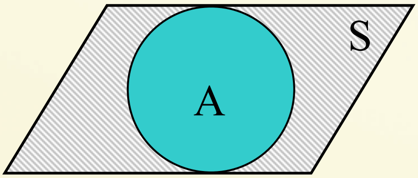
(c) ketabton.com: The Digital Library




## د نښتي یا پیوسته(متمادي) فضاګانو احتمـال

د یوه متساوي الاضلاع مثلث دننه چې هره ضلعه یې 3 واحده ده، یو غشي ولو، ددې احتمال چې د غشي د لګېدلو ټکې د مثلث د هر رأس نه د یو واحد په اندازه لرې وي، څو دی؟

- آیا ویلای شي چې د یوې ټوټه کرښې، د یوې مستوي د یوې برخې او یا د فضا د حجم څو ټکې یو پر بل پسې موجود دي؟
- د هغو ټکو د پېښدلو احتمال چې د A په برخه کې چې د S د لـویې برخې فرعي مساحت دی، لکه څرنګه چې په شکل کې لیدل کېږي د A او S د ساحو د مساحتونو له نسبت سره څه اړیکه لري؟




- آیا کولای شئ دا مسئله په فضا کې د یوه جسم حجم د یوې برخې د احتمال د محاسبې لپاره عمومیت ورکړئ؟

د پورتني فعالیت له سرته رسولو څخه لاندې پایله لاسته راځي.

پیوسته(متمادي) نمونیي فضا د نامعینو ټکو مجموعه ده چې شکل یې د عددونو په محور ، په مستوي کې لکه سطح او یا په فضا کې لکه حجمونه دی، څرنګه چې ددې ټکو شوونه ممکن نه ده، نو د احتمال د نسبت پیدا کولو لپاره د ټوټه کرښو د اوږدوالي، د اشکالو سطحو او یا د جسمونو له حجم څخه استفاده کوو.

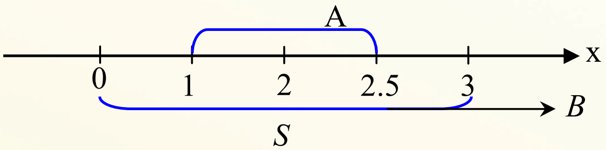
معمولاً د عددونو له محور څخه په ګټه اخیستنې سره د $x$ یو متحول، د یوه مساحت د یوې برخې لپاره د دوو متحولینو لکه x او y او په همدې ترتیب د حجمونو لپاره له دریو متحولونو ، لکه: $x, y$ او $z$ څخه ګټه اخلو.

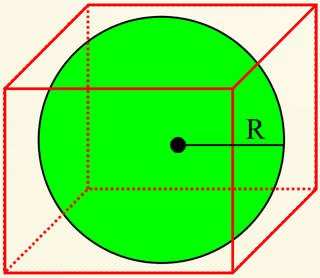
**لومړی مثال**: د عددونو په محور د $(0,3)$ په انټروال کې د $x$ یو ټکی په ناڅاپي یا اتفاقي ډول ټاکو ددې احتمال پیدا کړئ چې $1 < x < 2.5$ وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

**حل**: د حقیقي عددونو محور رسم کړئ د S او A فاصلې د هغه پر مخ ټاکو، د شکل په پام کې نیولو سره د A پېښې د پېښېدو احتمال څخه لرو:

$$P(A)=\frac{\text{د A توټه کرښې اوږدوالي}}{\text{د B توټه کرښې اوږدوالي}}=\frac{2.5-1}{3-0}=\frac{1.5}{3}=\frac{1}{2}$$




**دویم مثال**: په ناځاپه ډول یو ټکی د یوه مکعب په دننه کې چې ضلعه یې 2 واحده وي ټاکو ددې احتمال پیدا کړئ چې نوموړي ټکې د مکعب د محاطې کُرې په دننه کې وي.

**حل**: که چېرې کره د هغه مکعب په دننه کې چې ضلعه یې a واحده ده، محاطه وي، نو د کرې شعاع $r=\frac{a}{2}$ کېدای شي:

A ناځاپه پېښه د کرې د حجم او S نمونه یې فضا سره مساوي چې د مکعب حجم دی، نو لرو:

$$r=\frac{a}{2}=\frac{2}{2}=1$$

$$P(A)=\frac{\text{د کرې حجم}}{\text{د مکعب حجم}}=\frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{a^3}=\frac{\frac{4}{3}\pi(1)^3}{2^3}=\frac{\pi}{6}$$

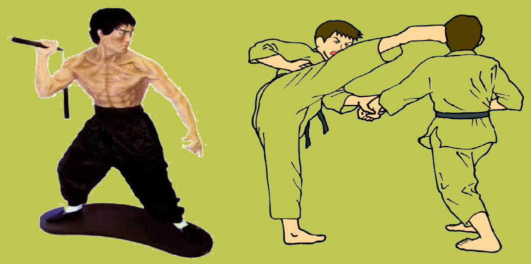
## پوښتنې

1- د حقیقي عددونو په محور د A او B دوه ټکي په ناځاپي یا تصادفي ډول داسې ټاکو چې $0\le A\le 3$ او $-2\le B\le 0$ وي، ددې احتمال پیدا کړئ چې د d واټن د A او B ترمنځ وي او له 3 واحدو څخه لوی وي.

2- که چېرې یو ټکی په ناځاپي یا تصادفي ډول د دایرې د سطحې پرمخ وټاکو، ددې احتمال پیدا کړې چې نوموړي ټکي نظر د دایرې محیط ته د دایرې مرکز ته نژدې وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

## مشروط احتمـال



له یوه ولایت څخه (20) تنـه نارینـه او ښـځینه زده کـوونکی د کانکور په آزموینـه کـې د طب پوهنځي تـه بریـالي شـوي دي، د هغوي له جملې څخه یې 5 تنه ښه کاراته بازان دي: که په 15 تنو بریالیو نارینه وو کې 4 تنه یې ښه کارته بـازان وی. د نومړو محصلینو له مینځ څخه په اتفـاقي ډول یـو تن ټاکو احتمـال د دې پیدا کړئ چې:

- ټاکل شوی محصل یوه کارټه بازه نجلی وي؟
- په پورتني سوال کې هغه نجلی په کوم شرط سره د طب پوهنځي ته بریالی شوي ده؟

### فعالیت

له 2500 زده‌کوونکو څخه 1600 تنه یې په مطالعه کولو عادت لري.

چې لـه 80% زده‌کوونکـو څخـه یـې 70% نارینـه زده‌کـوونکي وي او پـه مطالعـه کولـو عـادت ولـري، کـه د ټولـو زده‌کوونکو لپاره احتمـال یو شان وي، د لاندې پېښو په پام کې نیولو سره د یوه تن زده‌کـوونکی ټاکل د ښـوونځی له زده‌کوونکو څخه:

R: له مطالعې سره عادت لري.

$M$ : نارینه زده‌کوونکي دی.

F: یوه ښځینه زده‌کوونکې ده.

د لاندي پوښتنو په حل فکر وکړئ:

- ددې احتمال پیدا کړئ چې د مطالعه کوونکو له منځ څخه ټاکل شوي زده‌کوونکی نارینه وي؟
- ددې احتمال پیدا کړئ چې د مطالعه کوونکو له منځ څخه ټاکل شوی تن یوه ښځینه وي؟
- ددې احتمـال پیدا کړئ چې ټاکل شوي زده‌کوونکي یو نارینه وي په دې شرط چې په مطالعه عادت وي.

د پورته فعالیت د سرته رسولو څخه لاندې پایله په لاس راوړو:

په حقیقت کې د هغه نارینه زده‌کوونکي د ټاکلو احتمـال په دې شرط چې په مطالعه عادت ولري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

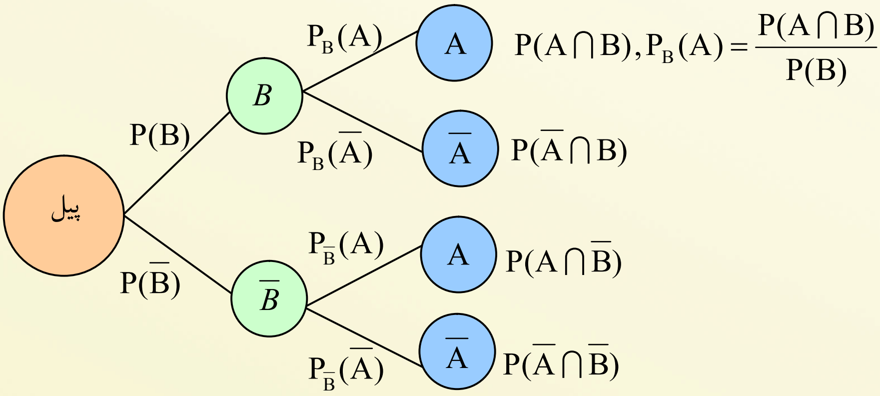
د لاندې احتمالات وېش له حاصل څخه عبارت دی که چېرې $\Omega$ ټوله نمونه‌يي فضا او $|\Omega|$ نمونه‌يي فضا د عناصرو شمير وي، نو لرو:

$$P_R(M)=\frac{P(M\cap R)}{P(R)}=\frac{\frac{|M\cap R|}{|\Omega|}}{\frac{|R|}{|\Omega|}}=\frac{|M\cap R|}{|R|}$$ د هغه نارينه زده‌کوونکو د ټاکلو احتمال چې په مطالعه عادت وي.

$P_R(M)$ د هغې پيښې له احتمال څخه عبارت دی چې ټاکلې زده‌کوونکې نارينه وي، په دې شرط چې هغه په مطالعه عادت وي.

**تعريف**: که چېرې S نمونه‌يي فضا A او B د نمونه‌يي فضا دوې ناخاپي پيښې وي، په داسې حال کې چې $P(B)\neq 0$ وي. په دې حالت کې نوموړی احتمال يعنې $P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ چې د A ناخاپي پيښې احتمال نظر د B ناخاپي پيښې ته مشروط احتمال بلل کېږي.

د پورته تعريف په پام کې نيولو سره نظر د مسير لومړي قاعدې ته د ونه‌ييز دياګرام په مرسته هم په لاس راوړای شو.




د مشروط احتمال له فورمول څخه لاندې مهمې پايلې په لاس راځي:

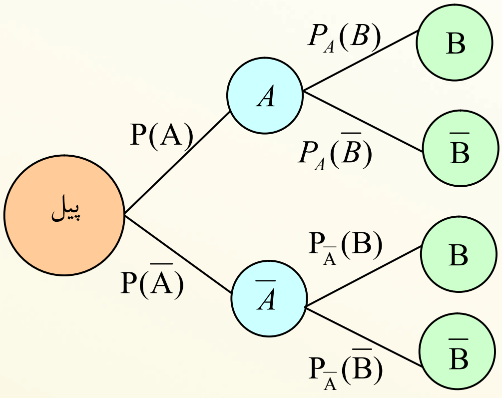
1- د مسير له لومړۍ قاعدې څخه لرو: $P(A\cap B)=P(B)\cdot P_B(A)$

د مسير له دويمې قاعدې څخه په ګټه اخيستنې سره لرو: $P(A\cap \overline{B})=P(\overline{B})\cdot P_{\overline{B}}(A)$

$$P(A)=P(B)\cdot P_B(A)+P(\overline{B})\cdot P_{\overline{B}}(A)$$

2- ونه‌ييزه(درختي) دياګرام له مخې $P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$

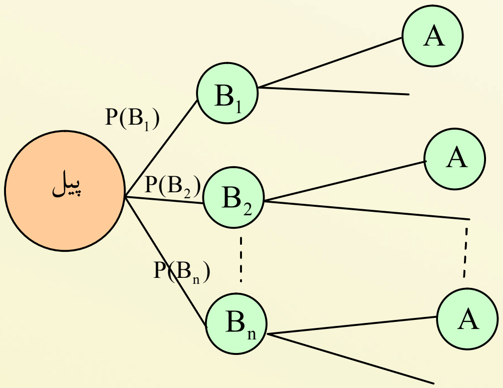
(c) ketabton.com: The Digital Library




له لومړي پايلې څخه په لاس راځي چې: $P_A(B)=\dfrac{P_B(A)\cdot P(B)}{P(B)\cdot P_B(A)+P(\overline{B})\cdot P_{\overline{B}}(A)}$

3- که چیرې نوموړی حالت د $\Omega$ نمونه يي فضا ناځاپي پيښو د $B_1, B_2, ...., B_n$ اختياري وېش لپاره عموميت ورکړو. د ونې په ډول د دیاگرام په پام کې نیولو سره کولای شو، لاندې فورمول په لاس راوړو.

$$P_A(B_i)=\frac{P_{B_i}(A)\cdot P(B_i)}{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+...+P(B_n)\cdot P_{B_n}(A)}=\frac{P(A\cap B_i)}{\sum_{k=1}^{n}P(B_k)\cdot P_{B_k}(A)}\qquad i=1,2,...,\ n$$




**لومړی مثال**: یو زده کوونکی ښوونځي ته د تللو لپاره 50% هره ورځ د موټر څخه ګټه اخلي چې 70% په ټاکلي وخت ښوونځي ته رسېږي. په منځنې ډول نوموړي 60% په ټاکلي وخت ښوونځي ته حاضرېږي که چیرې پيښې:

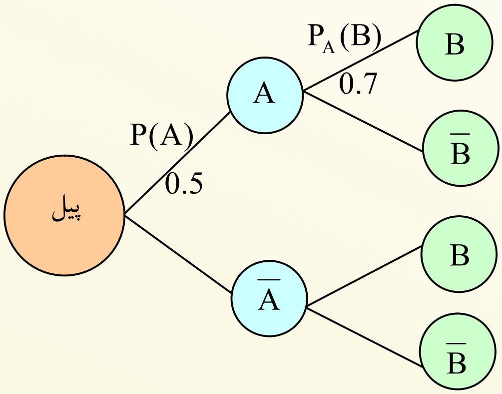
A: د موټر په واسطه راتلل B: په ټاکلي وخت رسېدل

وي په دې صورت کې د A مشروط احتمال نظر B ته يعني $P_B(A)$ مطلوب دی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

**حل**: د نوموړي احتمال د پیدا کولو لپاره د ونه‌ییز یا درختي دیاګرام په پام کې نیولو سره نظر فورمول تـه پـه لانـدې ډول په لاس راځي:

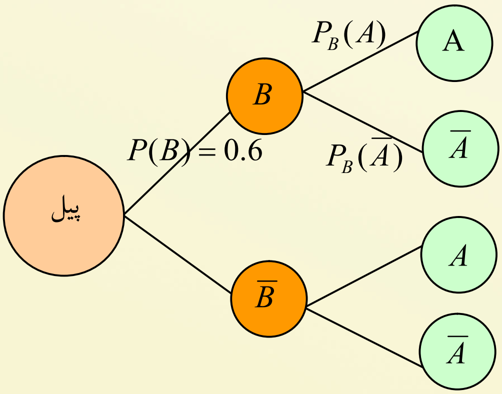
$$P_B(A) = \frac{P(A)\cdot P_A(B)}{P(B)} = \frac{0.5\cdot 0.7}{0.6} = 0.5833 = 58.33\%$$




نـو پـه دې اساس د مـوټر پـه واسـطه د رسـېدلو احتمـال پـه دې شـرط چـې پـه ټـاکلي وخـت پـه شـوونځي کـې وي 58.33% سـلنې سـره برابـر دی.

## پوښتنې

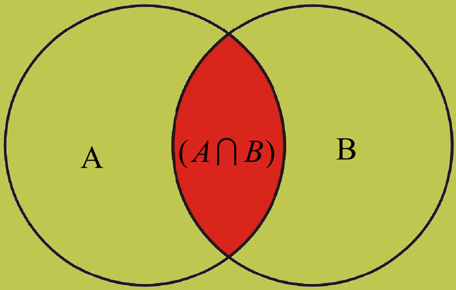
له لاندې دیاګرام څخه په ګټه اخیستنې سره د مشروط احتمـال په ټاکلي وخت رسېدل ښوونځي ته په دې شرط چې د موټر په واسطه سرته رسیدلي وي، یعنې $P_A(B)$ د ناڅاپه پیښې احتمـال ښوونځي ته په ټاکلي وخـت رسـیدل، پـه دې شرط چې د موټر په واسطه نه وي راغلي یعنې $P_A(B)$ مطلوب دی.



(c) ketabton.com: The Digital Library

## د حاصل ضرب اصل

د A ناخاپه پېښې مشروط احتمال په B ، د A او B ناخاپه پېښې احتمال یو له بل سره څه اړیکه لري؟

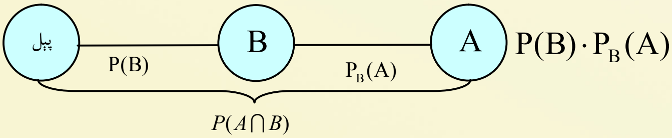


- که چېرې A او B دوې ناخاپه پېښې د S په نمونه یي فضا کې وي.
- د A ناخاپه پېښې مشروط احتمال B ته ولیکئ.
- د ونېیز دیاګرام څخه په ګټه اخېستنې سره د $P(B) \cdot P_B(A)$ قیمت په لاس راوړئ.
- د $(A \cap B)$ ناخاپه پېښو احتمال د A او B ناخاپه پېښو څخه او یا د A مشروط له B څخه په ګټه اخیستنې سره ولیکئ.
- د فعالیت د دوو پوړتنیو بندونو د محاسبې پایلې یو له بل سره پرتله کړئ.
- آیا کولای شو چې موضوع د ډېرو ناخاپه پېښو لپاره عمومیت ورکړو.

د پوړتني فعالیت له سرته رسولو څخه لاندې پایله په لاس راوړو.

د S په یوه نمونه یي فضاکې د A او B د دوو ناخاپه پېښو لپاره د مشروط احتمال د تعریف په پام کې نیولو سره لرو: $P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A)$

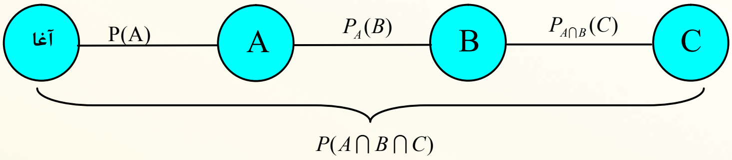
دا مسئله کولای شو چې د ونېیز دیاګرام په مرسته هم په لاس راوړو:




$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا مطلب د دریو A، B او C پیبنو لپاره په لاندې ډول پراخوو.




$$\Rightarrow P(A\cap B\cap C)=P(A)\cdot P_A(B)\cdot P_{A\cap B}(C)$$

پورتنۍ قاعده د حاصل ضرب په نامه یادېږي او کولای شو، هغه د یو شمېر اختیاري ناخاپي پیـبنو لپـاره هـم پـه لاس راوړو.

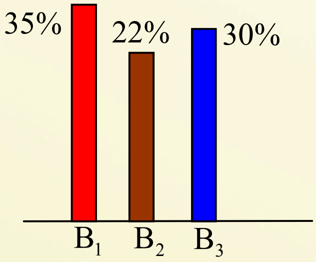
**مثال**: د $B_1$, $B_2$ او $B_3$ دریو ولایتونو په پارلماني ټاکنو کې چې د هر یوه لپاره د ټاکنو د ګډون کوونکـو فیـصدي او د جمهوري ګوند برخه فیصدي ورکړل شوې ده؟

په کوم احتمال د ټاکنو ګډون کوونکي او یا رایې اچوونکي جمهوري ګوند ټاکلي وي.

**حل**: په لاندې ډول ناخاپي پیښې تعریف او نوموو:

V : هغه رایې ورکوونکي چې جمهوري ګوند یې ټاکلی دی.

$B_i$ : د ولایت رایې ورکوونکي $B_i$ – (i-ام) ... i=1,2,3 لاندې ارقام ورکړل شوي وي.




| ولایت | د راي ورکوونکو فیصدي | جمهوري ګوند ته رایې ورکوونکي |
|---|---|---|
| $B_1$ | 33.2% | 35 |
| $B_2$ | 46.5% | 22 |
| $B_3$ | 20.3% | 30 |

د $B_i\ (i=1,2,3)$ ناخاپه پیښې په حقیقت کې یې د S نمونـه یـې فـضا یـو ویـش جـوړ کـړی چـې د هغوی لپـاره صورت نیسي.

1- $B_i$ یو له بل سره دوه په دوه مستقل او ګډ عناصر نه لري.

2- د S نمونه یې فضا لپاره $S=B_1\cup B_2\cup B_3=\bigcup_{i=1}^{3}B_i$ دی، نو $(i=1,2,3)$ $B_i\cap V$ پیښنه یو له بل سره یو په یو مستقل د هغوی لپاره صورت نیسي. $V=\bigcup_{i=1}^{3}(B_i\cap V)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دي اړيکې څخه کولای شو، د دواړو خواوو د احتمال لپاره وليکو:

$$P(V)=P\left(\bigcup_{i=1}^{3}(B_i\cap V)\right)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i\cap V)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)\cdot P_{B_i}(V)$$
$$=P(B_1)\cdot P_{B_1}(V)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(V)+P(B_3)\cdot P_{B_3}(V)$$
$$=0.332\cdot 0.35+0.465\cdot 0.22+0.203\cdot 0.3=0.1162+0.1023+0.0609$$
$$=0.2794=27.94\%$$

**تعريف**: که چېرې د $B_1, B_2, ....., B_n$ خرنګه چې $P(B_i)\neq 0$ وي $i=1,...n$ پيښو عمومي حالت د S په نمونه‌يي فضا کې يوه پېښه وي، نو $P(A)$ د کامل احتمال په نامه ياد او د A اختياري ناڅاپي پيښې لپاره لرو:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)\cdot P_{B_i}(A)$$

د مشروط احتمال د تعريف، د اصل حاصل ضرب له قضيې څخه د کامل احتمال د مسئلې په پام کې نيولو څخه لاندې فورمول چې د بائيز(Baye's) د فورمول په نامه يادېږي، په آسانۍ سره په لاس راځي، داسې چې $B_i$ چې $i=1,...n$ د S نمونه يي فضا يوي پېښې لپاره چې $P(B_i)\neq 0$، $i=1,...n$ د A د ناڅاپه پيښې احتمال چې $P(A)\neq 0$ سره وي، لرو:

د بائيز (Bayes)فورمول:

$$\boxed{P_A(B_i)=\frac{P(A\cap B_i)}{P(A)}=\frac{P(B_i)\cdot P_{B_i}(A)}{\sum_{k=1}^{n}P(B_k)\cdot P_{B_k}(A)}}$$

د بائيز فورمول ډېر استعمال لري لکه د $n=2$ لپاره $B_1=\overline{B}, B_2=\overline{B}$ په پام کې ونيسو، په حقيقت کې $B_1$ او $B_2$ د $S$ نمونه يي فضا پيښې وي لرو:

$$P_A(B)=\frac{P(B)\cdot P_B(A)}{P(B)\cdot P_B(A)+P(\overline{B})\cdot P_{\overline{B}}(A)}$$

پورتنی فورمول د $n=2$ د بائيز له فورمول څخه عبارت دي.

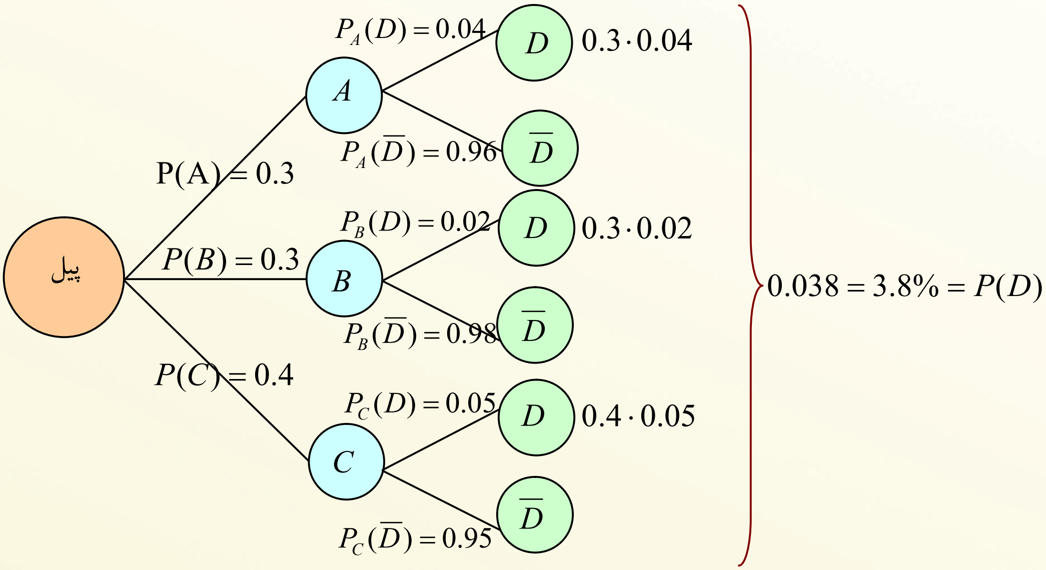
**مثال**: په يوه فابريکه کې د A، B او C درې ماشينونه په ترتيب سره 30% ، 30% او 40% برخه د برق ګروپونه توليدوي. که چېرې په ماشينونو کې د ګروپونو د خرابېدو کچه په ترتيب سره 4%، 2% او 5% وي او نومړي ګروپونه په ګډه سره خرڅ شي، مطلوب دي:

a) ددې احتمال چې يو اخېستل شوی ګروپ وران يا خراب وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

b) په کوم احتمال خراب خرڅ شوی ګروپ د $C$ ماشین پورې اړه لري.

c) یو نوی تولید شوی ګروپ لرو، په کوم احتمال سره به د B په ماشین پورې مربوط وي.




**د b جز:**

$$P_D(C) = \frac{P(D \cap C)}{P(D)} = \frac{P(C) \cdot P_C(D)}{P(D)} = \frac{0.4 \cdot 0.05}{0.038} = \frac{0.02}{0.038} = 0.526 = 52.6\%$$

**د c جز:**

$$P_{\overline{D}}(B) = \frac{P(\overline{D} \cap B)}{P(\overline{D})} = \frac{P(B) \cdot P_B(\overline{D})}{P(\overline{D})} = \frac{0.3 \cdot 0.98}{0.3 \cdot 0.96 + 0.3 \cdot 0.98 + 0.4 \cdot 0.95}$$

$$= \frac{0.294}{0.288 + 0.294 + 0.38} = \frac{0.294}{0.962} = 0.3056 = 30.56\%$$

## پوښتني

1- د 1000 دانو رملونو په منځ کې د یوې دانې په شیږ واړه مخونه یوازې د 6 شمېره وهل شوې ده. د هغوی له منځ څخه یوه ناڅاپه د رمل دانه ټاکل شوې او دری ځلې اچول شوې ده. دري ځلې 6 راغلي. پیدا کړئ، هغه احتمال چې په ټاکل شوې دانه په سم ډول شمېرې وهل شوې وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

## د ناخاپه پېښو استقلالیت

لـه مـشروط احتمـال څخـه پـوهیږو چـې د A او B دوو ناخاپو پېښو یـا حـادثو د B د پېښې پېښدل د A پـه پېښه تـاثیر اچـوي پـه دې سـبب لازمـه ده چـې د احتمــال د محاسبې په وخت کې د A او B پېښه په پام کې ونیسو.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

د هغه حالت لپاره چې د A ناخاپه پېښې پېښدل پر B ناخاپه پېښې اغیزه ونه لري او بر عکس.

د A او B د ضرب د حاصل احتمـال د $A \cap B$ پېښې له احتمـال سره څه اړیکه لري.

**تعریف**: د A او B دوې ناخاپه پېښې چې یوه پر بله اغیزه لرونکې نه وي د ناخاپه مستقلو پېښو په نامه یادیږي.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

- د S نمونه یي فضا او د A او B دوې یوه له بلې څخه مستقلې پېښې چې د S نمونه یي فضاکې شامل وي، په پام کې ونیسئ.
- د مشروط احتمـال فورمول څخه په هغه صورت کې چې A او B یوه له بلې څخه مستقلې دوې پېـښې وي د $P_B(A)$ او $P(A)$ احتمـالونه یو له بل څخه څه توپیر لري؟
- د $P(A \cap B)$ ناخاپه پېښې احتمـال له څه سره مساوي دي؟
- د $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ د پېښو د احتمـال له فورمول څخه پـه هغـه صـورت کې چې A او B ګډ ټکی ونه لري، څه پایله اخلې؟

د پورتني فعالیت له سرته رسولو څخه لاندې پایله په لاس راځي:

1: د A او B دوې پېښې مستقلې بلل کېږي، که چېرې:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad \text{(د ضرب د حاصل اصل)}$$

2: که چېرې A او B پېښې د ګډو ټکو لرونکې نه وي، نو

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = 0$$
$$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad \text{(د جمع د حاصل اصل)}$$

**لومړی مثال**: که چېرې د یوه ښوونځي د زده کوونکو د سترګو رنګ او ذکاوت یـو پـر بـل پرتـه لـه اغېـزې فـرض شوي وي. د لاندې پېښو په پام کې نیولو سره په ناخاپه ډول د یوه زده کوونکي ټاکلو لپاره:

H: ټاکل شوي تن یو هوښیار ذکي زده کوونکي وي.

B: ټاکل شوي زده کوونکی توري سترګې ولري.

هغه احتمـال پیداکړئ چې ټاکل شوي زده کوونکی په ناخاپه توګه هوښیار ذکي او توري سترګې ولري.

**حل**: ددې لپاره چې ټاکل شوي زده کوونکی هوښیار او توري سترګې ولري لیکلای شو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځرنګه چې $P_B(H)=P(H)$ سربېره پردې $P_B(H)=\frac{P(B\cap H)}{P(B)}$ نو:

$$P(B\cap H)=P(H)\cdot P(B)$$

**عمومي حالت**: د $A_1$ , $A_2$ , $A_n$..... , $(n\geq 2)$ ناڅاپه پېښې احتمالاً يو له بلې څخه مستقلې بلل کېږي که چېرې د هرو دوو يا څو پېښو په ترکيب کې د ضرب د حاصل قاعده صدق وکړي پرته له هغې پېښې احتمالاً يوه له بلې سره تړلې نومول کېږي.

**پايله**:

**1**: پاملرنه بايد وشي چې د ضرب د حاصل له قاعدې څخه په ګټه اخيستنې سره په لاندې متقاطع جدول کې هم کولای شو چې $A\cap B$ , $A\cap\overline{B}$ , $\overline{A}\cap\overline{B}$ او $\overline{B}\cap A$ ناڅاپه پېښو احتمالي پايلې د A او B پېښو لپاره چې احتمالونه يې a او b وي، په آسانۍ په لاس راوړو. د A او B د مستقل والي څخه پوهېږو چې د A او $\overline{B}$ ، $\overline{A}$ او B په پای کې $\overline{A}$ او $\overline{B}$ هم يوه له بلې څخه مستقلې دي، نو لرو:

| | $B$ | $\overline{B}$ | |
|---|---|---|---|
| $A$ | $P(A\cap B)=a\cdot b$ | $P(A\cap\overline{B})=a(1-b)$ | $a$ |
| $\overline{A}$ | $P(\overline{A}\cap B)=b(1-a)$ | $P(\overline{A}\cap\overline{B})=(1-a)(1-b)$ | $1-a$ |
| | $b$ | $1-b$ | $1$ |

**2**: د A ، B او C درې ناڅاپه پېښې چې يوه له بلې څخه مستقلې دي، لرو:

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$
$$P(A\cap C)=P(A)\cdot P(C)$$
$$P(B\cap C)=P(B)\cdot P(C)$$
$$P(A\cap B\cap C)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$$

**دويم مثال**: په يوه کڅوړه کې دوې سپينې او دوې تورې مرۍ پرتې دي. دوې مرۍ يوه په بلې پسې له کڅوړې څخه پورته کوو، په داسې حال کې چې:

a- د لومړۍ مرۍ د پورته کولو نه وروسته هغه بېرته په کڅوړه کې ږدو.

b- پرته له دې چې مرۍ واپس کېښودل شي.

د A پېښه: په لومړي ځل سپينه مرۍ راووزي. B: دويم ځل مرۍ سپينه وي.

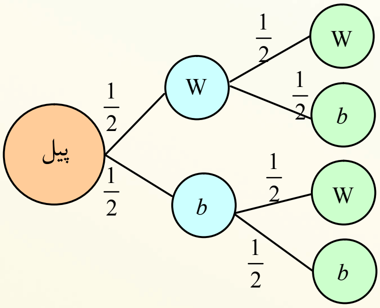
له يوې بلې څخه مستقلې يا تړلې (وابسته) دي.

**حل**:

a) ځرنګه چې $P(A)=\frac{1}{2}$ او $P(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ وي او

$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{4}$ دي، نو A او B يوه له بلې څخه مستقلې دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

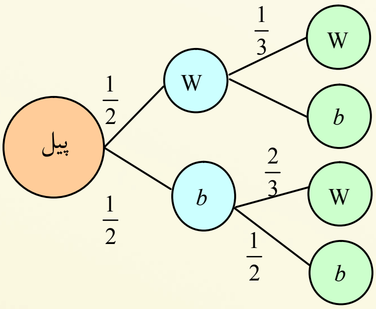



b) خرنگه چې:

$$P(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{2}\ ,\ \ P(A)=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow P(A\cap B)\neq P(A)\cdot P(B)$$

نو A او B يوه له بلې څخه تړلې يا وابسته دي.




**دريم مثال**: د لاندې متقاطع جدول خالي ځايونه چې په نښه شوي دي، ډک يې کړئ:

| | $B$ | $\overline{B}$ | |
|---|---|---|---|
| $A$ | 0.12 | $P(A\cap\overline{B})=?$ | (?) |
| $\overline{A}$ | $P(\overline{A}\cap B)=?$ | $P(\overline{A}\cap\overline{B})=?$ | (?) |
| | (?) | 0.6 | |

**حل**: خرنگه چې $P(\overline{B})=0.6$ دي، نو لرو:

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-0.6=0.4$$

$$P(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0.12}{0.4}=0.30$$

$$\Rightarrow P(\overline{A})=1-P(A)=1-0.3=0.70$$

او د پېښو د تقاطع څخه لرو چې:

$$P(A\cap\overline{B})=P(A)\cdot P(\overline{B})=0.3\cdot 0.6=0.18$$

$$P(\overline{A}\cap B)=P(\overline{A})\cdot P(B)=0.7\cdot 0.4=0.28$$

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})=0.7\cdot 0.6=0.42$$

په همدې ترتيب په جدول کې د قيمتونو په وضع کولو سره مسئله تکميلېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

## پوښتنې

یو سټ چې عناصر یې $5,3,2$ او $30$ دی د یوه رقم د انتخاب احتمال یې $0.25$ دی په ناڅاپي ډول لـه نوموړي سټ څخه یو رقم انتخابوو، که چېرې $A_k$ ناڅاپه پېښه د هغه رقم چې انتخاب شوی او د تقسیم قابلیت پـه $k$ ولري، آیا $A_2$ , $A_3$ او $A_5$ ناڅاپي پېښې دوه په دوه مستقل دي او که نه؟

## د څپرکي مهم ټکي

### بېلې شوې(غیرمتمادي) نمونه یي فضا:

هغه نمونه یي فضا چې عناصر یې د شمېر او تشخیص وړ وي، د غیرمتمادی نمونه‌یي فـضا پـه نامـه یـادېږي، لکـه د رمل یا د سکې اچولو تجربي نمونه‌یي فضا.

### نښتي(متمادي) نمونه یي فضا:

هغه نمونه یي فضا چې عناصر یې د شمېر وړ نه وي د پیوسته یا متمادي نمونه‌یي فضا په نامه یـادېږي چـې د حقیقـي عددونو پر محور د فاصلې په بڼه او یا په فضاکې د هندسي شکلونو یا حجمونو په ډول څرګندېږي.

### هم چانس پېښې:

د یوې نمونه یي فضا لومړني پېښې چې د هغوی پېښې د تجربې په پای کې پـه برابـر احتمـال پـېښېږي، هـم چانسه پېښې بلل کېږي. د هم چانس پېښو د احتمـال مجموع له یوه سره مساوي ده.

### د نښتې(پیوسته) فضا احتمـال:

د ټوټه کرښو، سطحو او حجمونو مساعد حالتونه د یوې پام وړ ناڅاپي پېښې لپاره په یـوه تجربـي نمونـه‌یـي فـضاکې شامل ټوټه کرښو، سطحو او حجمونه عبارت دي د متصلې فضا له احتمال څخه.

### مشروط احتمـال:

کـه چېـرې A او B د S، د نمونـه‌یـي فـضا دوې ناڅاپـه پېـښې چـې $P(B)\neq 0$ وي پـه دې حالـت کـې $P_B(A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$ ته د A ناڅاپه پېښې د مشروط احتمـال په نامه یـادېږي پـه دې شـرط چې د B پېښه له مخکې پېښه شوې وي.

### یوه له بلې څخه مستقلې پېښې:

د A او B دوه ناڅاپه پېښې یوه له بلې څخه مستقلې بلل کېږي که چېرې:

$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$ (د ضرب د حاصل اصل)

(c) ketabton.com: The Digital Library

## د څپرکي پوښتنې

1. د لاندې نمونه یې فضاګانو څخه کومه یوه سره نښتې یا پیوسته او کومه یوه غیرمتمادي ده؟

الف: د یوې رمل دانې اچولو تجربه

ب: د یوې سکې د اچولو تجربه

ج: د یو غشي لګېدل په یوه دایره

د: د یوې فلزي میلې د اوږدوالي زیاتېدلو تجربه نظر حرارت ته

2. د یو چارتراش چې اوږدوالی یې $L$ دی په ناڅاپه ډول په سور اره کوو، تر څو دوه برخې شي څومره احتمال شته چې د کین اړخ اره شوې برخه د ښي اړخ له درې برابره څخه کوچنی وي.

3. د یوه خصوصي شرکت یو کارګر هره ورځ د 8 او 8:50 ساعتونو په منځ کې کورته نژدې تم ځای کې چې د مامورینو په موټر کې کارته د تګ لپاره ګډون وکړي او په 8:15 ، 8:30 او 8:45 وختونو تم ځای ته رسېږي څومره احتمال ددې شته چې نوموړی تن له 5 دقیقو څخه لږ منتظر پاتې شي.

4. د $[0.3]$ تړلي فاصلې څخه په ناڅاپه ډول دوه عددونه ټاکو، ددې احتمال پیدا کړئ چې د عددونو مجموعه د 5 څخه کوچنی او له 2 څخه لویه وي.

5. په ناڅاپه ډول یو ټکی د مخروط دننه چې د قاعدې شعاع یې $R$ او جګوالی $R\sqrt{3}$ دی ټاکو، پیدا کړئ ددې احتمال چې ټکی د محاطي کرې دننه په دې مخروط کې قرار لري.

6. د یو خودکار قلم خرابېدل دوه دلیلونه لري:

1- د میخانیکیت خرابېدل

2- د خودکار د نیچې خرابېدل

که چېرې د یو خودکار قلم د خرابېدو احتمال 0.088 او ددې احتمال چې د خرابېدو دلیل (1)، شمېره وي مساوي په 0.05 او د دویم نقص احتمال مساوي په 0.002 وي وښېږئ: چې دوه پورتني دلایل مستقلې او یا غیر مستقلې پېښې دي؟

7. خیبر غواړي هغه څلور کلي ګانې چې په جیب کې یې لري او سره یو شان دي د کورد دروازې قلف خلاص کړي په کوم احتمال سره وروسته د دریمې کلي له آزمویلو سره چې له جیب څخه یې را باسي د قلف اړوند کلي وي، په هغه صورت کې چې:

a) هره آزمویل شوي کلي په هغه صورت کې چې اصلي کلي نه وي دوباره په همغه جیب کې اچوي.

b) هره آزمویل شوي کلي په هغه صورت کې چې اصلي کلي نه وي په بل جیب کې اچوي.

**Get more e-books from www.ketabton.com**
**Ketabton.com: The Digital Library**