

الجبر ون

ALGEBREN

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Ketabton.com

لیکوال:

ڈاکٹر ماخان (مہری) شینواری

نيولىك

الف	سريزه
ت	شميرپوهنيزې نخښې
۱	۱. گڼونډيرى
۱	۱. ۱. طبيعي گڼونډيرى
۴	۲. ۱. د ټول گڼونډيرى
۵	۳. ۱. ريشنل گڼونډيرى
۷	۴. ۱. رييل گڼونډيرى
۷	۵. ۱. ايمانگينار گڼونډيرى
۸	۶. ۱. کمپلکس گڼونډيرى
۱۱	۲. ډيريپوهنيزې ستکليمى
۱۱	۱. ۲. ډيرى
۲۶	۲. ۲. خلډيرى يا ضرب ډيرى او اړيکى يى ...
۳۶	۳. ۲. نيمنظم يا نيمنرتيب
۳۸	۴. ۲. مينيمالشرطونه
۴۱	۳. الجبري جوړښتونه
۴۴	۱. ۳. گروپ
۵۹	۲. ۳. بدن يا تن او کړى
	نورمى شوى ټولينوم ۶۶ څه مانا لري
۷۰	۳. ۳. لانديکروپ او لاندي کړى
۸۰	۴. ۳. ايزومورفيزم

۵ . ۳	د نیمگروپ په گروپ او کړۍ په یوه (ناضرور
۹۲	کموتاتیو (تن یا بدن کی خونديونه
۹۵	۶ . ۳ نورمالپرویشنه
۱۰۵	۷ . ۳ ایډیال او پاتیتولگیگیری
۱۱۶	۴ د بول الجبر، سرکت الجبر
۱۱۶	۱ . ۴ د ول الجبر ست کلیمی
۱۲۹	۲ . ۴ د بول فنکشنونه او پولینومونه
۱۴۶	سویج الجبر یا برینسناجریان الجبر
۱۵۶	۵ الجبرونه
۱۵۶	یو څو بنسټیکلیمی
۱۷۳	۲ . ۵ لاندې الجبر یا سب الجبر
۱۸۰	۳ . ۵ ایزمورفیزم ، هومومورفیزم
۲۰۷	۶ ترونونه یا تیرونی
۲۰۷	۱ . ۶ تیرونی او مکمل - یا پوره تیرونی ..

۱ گڼونډيري

د دې لپاره، چې دا د الجبر کليمې مو پوره څيړلې وي او ښه پوهور شي، نو په سر کي غواړم هغه د ښوونځي بايد (چې متأسفانه دا مو په هيواد کي، په دې نامه نه وو نومولې) ورسره بلد، د گڼونو ډيري يو په بل پسې تعريف کړم، يا بهتره لنډه گوته ورته ونيسم او دا په هغو کي د باوري کارونو يا ايريشنونو يا عمليو او يا گڼونو او يا د تړونونو په بنسټ.

۱. ۱ طبيعي گڼونډيري

Die Menge der natürlichen Zahlen

(the set of non negative integer)

دا د گڼونو ډيري چې صفر ورسره نه وي په لاندې ډول دی:

$$N = \{ 1, 2, 3, \dots, n, \dots \}$$

دا لاندې د طبيعي گڼونو ډيري دی، چې صفر ورسره

دی، يا په بل عبارت: د طبيعي گڼونو ډيري د صفر سره

$$N^* = \{ 0, 1, 2, \dots, n, \dots \}$$

په دې ډيري کي لاندې شمر قاعدې باور لري

.
. .
.

۱ . ۱ . ۲ په طبیعی گڼونو کی شمیرقاعدي

الف : و زیاتون ته یا بهتره، نسبت و زیاتون ته:

اول : د هرو دوه طبیعی گڼونو $a, b \in \mathbb{N}$ لپاره، و زیاتون ته،
یا نسبت و زیاتون ته، یو دریم طبیعی گڼ $c \in \mathbb{N}$ شته د
کومو لپاره چی باور لري: $a + b = c$
دویم : اسوخیاتیو قانون Associative : د طبیعی گڼونو لپاره د
اسوخیاتیو قانون باور لري:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

دریم : کموتاتیو قانون commutative : د طبیعی گڼونو لپاره
د کموتاتیو قانون باور لري، یعنی:

$$a + b = b + a$$

خلووم: بی تاثیر یا ناپیلی توکی das neutrales Element : په

طبیعی گڼونو کی چی صفر ورسره وي باور لري

$$a + 0 = 0 + a = a$$

صفر د طبیعی گڼونو ناپیلی یا بهتره بی تاثیر توکی بلل

کیري.

ب : و خل ته یا بهتره نسبت خل ته

اول : د هرو دوه طبیعي گڼونو $a, b \in \mathbb{N}$ لپاره یو دریم طبیعي گڼ $c \in \mathbb{N}$ شته، د کومو لپاره چی باور لري

$$a.b = c$$

دوم : د طبیعي گڼونو $a, b, c \in \mathbb{N}$ لپار اسوخیاتیو قانون باور لري

$$(a.b).c = a.(b.c)$$

دریم : د طبیعي گڼونوډیری کی کموتاتیو قانون باور لري

$$a.b = b.a$$

څلورم. نسبت و ځل ته ناپیلی یا بهتره بی تاثیر توکی : که طبیعي گڼونه له 1 سره ځل شي، نو بیرته پخپله همغه طبیعي گڼ لاس ته راځي

$$1.a = a.1 = a$$

دا 1 د طبیعي گڼونو یو ناپیلی یا بی تاثیر توکی بلل کیږي، چی یوی (دا ځکه یوی بولو، چی باید له یو

سره یی توپیر شوی وي) یی بولو
یادونه : د بهرني گڼو له یو څخه لږ یا ډیر دودیزه ده.

یادونه : په پورته نښلونو کی دې ته پام وي، چی ورکړ شوي توکی یو د بل څخه باید توپیریدونکی نه وي، کیدی شي، چی یو له بل سره مساوي هم وي یا بهتره همغه توکي وي.

ګورو چې په طبیعي ګڼونډیری کې، نسبت و زیاتون ته، د هر توکي لپاره د هغه په څټ یا برعکس ګڼ نه شته، نو له دې امله مجبور یرو، چې د طبیعي ګڼونو ډیری د ټولګڼونو ډیری ته پراخ کړو،

۱. ۲ د ټولګڼونو ډیری $\mathbb{Z}$ die Menge der ganze Zahlen :

د ټولګڼونو ډیری، د طبیعي ګڼونو ډیری د صفر او د دې طبیعي ګڼونو د توکو په څټ ګڼونو ډیری دی، چې په $\mathbb{Z}$ سره یی بنایو او داسی یی لیکو

$$\mathbb{Z} = \{ \dots, -n, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots \}$$

په ټولګڼونو ډیری کې هغه په طبیعي ګڼونډیری کې باوري نښلونې یا عملیې باور لري او په دې برسیره د هر یوه ګڼ لپاره د هغه په څټ ګڼ نسبت و زیاتون ته هم موجود دی، یعنی لاندې باور لري:

د هر ټولګڼ $a \in \mathbb{Z}$ لپاره د هغه په څټ ګڼ یعنی $-a \in \mathbb{Z}$ موجود دی، چې دا لاندې باوري کوي:

$$a + (-a) = a - a = -a + a = 0$$

دلته $-a$ د a په څټ ګڼ یا inverse دی نسبت و زیاتون ته. دې ته طبعاً پام شته، چې د مثبت ګڼ ځل د منفی ګڼ

سره منځ ته راغلی، چي نتیجه یی یو منفی گڼ دی، دا په دې مانا، چي دلته اصلي نښلونه یا عملیه زیاتون دی او نه . (ځل).

یادونه : زیاتون دوه ځایزه عملیه binäre Operation یا نښلونه ده او په څټ عملیه یوه یوځایزه عملیه unäre Operation یا نښلونه ده.

گورو، چي د ټولگڼونو په ډیری کی د ځل لپاره د گڼونو په څټ گڼونه inverse Zahlen نه دي تعریف، یعنی د یوې افغانۍ یو په څلورمه ($1/4$) یو ټولگڼ نه دی، نو له دې امله باید د ټولگڼونو ډیری و ریشنل گڼونو Q ته پراخه شی .

۱ . ۳ ریشنل گڼونه rationale Zahlen :

د ریشنلگڼونو ډیری له دې امله د ټولگڼونو ډیری Z او د ټولو ماتگڼونو ډیری a/b څخه جوړ دی، چي په Q سره یی په نڅښه کو او په لاندې ډول یی لیکو :

$$Q = \{ Z, a/b, a, b \in Z, b \neq 0 \}$$

دا داسی لوستل کیږي : ډیری Q مساوي دی د ټولگڼونو ډیری Z اود مات گڼونو a/b ډیری سره، $a, b \in Z$.

د ریشنل گڼونو ډیری کی، هغه په Z کی ټول د شمیرقوانین باور لري او په دې برسیره د هر گڼ لپاره نسبت و ځل ته د هغه په څټ گڼ هم موجود دی، یعنی په ریشنل گڼونو کی د هر گڼ $a \in Z$ لپاره یو $b \in Z$ موجود دی د کوم لپاره چي باور لري:

$$a \cdot b = 1 \Rightarrow b = 1/a, a \neq 0$$

دلته a باید د صفر سره برابره یا مساوي نه وي، ځکه، چي په صفر ویش نه دی تعریف.

گورو چي ددوه په څټ گڼونو ځل د ریشنل گڼ یو یو راکوي. یو هغه توکی دی، چي د ریشنل گڼون ډیری هرتوکی سره د ځل نښلونه کی بي تاثیر پاتي کیږي یا ناپیلی. دا یو مورد له دې امله ناپیلی *das neutrale Element* او یا هم بی تاثیر توکی بولو.

په پورته گڼونو کی توان تعریف دی، یعنی هر گڼ د خپل ځان سره ځل کیدنه شته، خو د دې په څټ کارونه یا عملیه یا بهتره نښلونه موجود نه ده، نو له دې امله باید دا گڼونډیری نور هم پراخه شي. یعنی د گڼون ریښه هم باید په گڼونډیری کی باور ولري. د بیلگي په توگه د ۲ ریښه یعنی $\sqrt{2}$ په ټولگڼونو کی نه دی تعریف. دا پراختیا مو رییلگڼونډیری ته لارښودوي، چي

په R سره بنایو یا نڅښه کوو.

۱. ۴ رییل ګڼونډپیری R die Menge der reellen Zahlen:

د هغو ګڼونډپیری، چی له ریښو جوړ وي، هغه موږ د ایریشنل ګڼونډپیری die Menge der irrationale Zahlen بولو چی په Q_i سره یی په نڅښه کو. د رییل ګڼونډپیری یاد رییل ګڼونو ډیری په دې توګه بیا د ریشنل ګڼونو ډیری او د ایریشنل ګڼونو ډیری د ټولنی څخه جوړ دی یعنی

$$R = Q \cup Q_i$$

یادونه : په پورته او راتلونکی کې که U راشي، نود ټولنی په ځای به یی ځای نیولی وي، که بل نوم ورسره مل نه وي. په دې ډیری کې د هر نامنفي ګڼ لپاره د هغه ګڼ ریښه موجود ده. د رییل ګڼونو ډیری بیا تکرارووو، چی د ټولو ریشنل ګڼونو ډیری څخه عبارت دی، چی د نامنفي ریشنل ګڼونو ګڼونو ریښی هم ورزیاتي شي.

په رییل ګڼونو کې د ریشنل ګڼونو ډیری ټول قوانین باورلري او په همدې ډول په R کې د هر مثبت ګڼ a ریښه هم موجود ده، یعنی $\sqrt{a}$ موجود ده، چی a منفي ګڼ نه وي. دا ریښه نیونه یو یوځایز اپریشن یا عملیه او یا نښلونه ده.

دلته هم سملاسی راته جوته کیري، چی د ریښي یا بهتره
د مربع ریښی د منفی ریښه نیونکي یا ریښه ایستونکی
گن ریښه نه ده تعریف، نو له دې امله باید د رییلگنوندیری
د کمپلکس گنوندیری ته پراخه شي.

۱. ۵ ایماگینار گنوندیری: د ټولو منفی گنوندیری ریښودیری

ته ایماگینار گنوندیری وایو *die Menge der imaginäre Zahlen*.
او دا په I سره په نخښه کوو. دا هغه گنونه i دي، د کومو لپاره
چی باور لري: $i^2 = -1$. یانی $i = \sqrt{-1}$ ، نو که b یو رییلگن وي،
نو ib یو ایماگینار گن دی.
اوس راځو د کمپلکس گنوندیری تعریف ته:

۱. ۶ کمپلکس گنوندیری

die Menge der komplexen Zahlen

کمپلکس گنوندیری د رییلگنوندیری او ایماگینار گنوندیری
ټولنی ته وایي. یانی که ایماگینار گنونه I سره په نخښه کړو نو
کمپلکسگن چی د C سره یي په نخښه کوو، دی

$$C = R \cup I$$

دلته له دې پیژندنې یا تعریف څخه روښانیري، چی کمپلکس

گڻونه دوه برخي لري، رييله برخه او ايمائيځنار برخه، نو له دې امله د کمپلکس گڻونو په ډيري کي ټولي نښلوني يا عمليي، چي په رييل گڻونډپري او ايمائيځنار گڻونډپري کي باور لري، باوري دي. او برسیره پردې، دا لاندې قوانين هم باور لري: دلته که $z = a + ib$ يو کمپلکس گڼ وي، چي a رييله برخه او $ib = bi$ يي ايمائيځنار يا ايمائيځنار برخه ده. او س راځو شميرقوانينو ته:

$$\text{الف: } i^2 = -1 \quad i^3 = -i \quad i^4 = 1 \quad i^5 = i$$

په ټوليزه توگه:

$$i^{4n+2} = -1 \quad i^{4n+3} = -i \quad i^{4n+4} = +1 \quad i^{4n+5} = i$$

ب -

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

کیدی شي، چي وي $z^* = \bar{z} = a - ib$ ، نو دا گڼ و $z = a + ib$ ته يو کونجوگيري کمپلکس گڼ بلل کيږي

پ -

$$z.z^* = z.\bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2 = |z|^2$$

دا پورته د جملو یا قضیو په څیر هم ښوول کیدی شي، خو موږ یی دلته د ښوونې څخه تیریزو او دایی د تعریف له مخی د اعتبار وړ قوانینو په څیر راوړو. یادونه : موږ کړای شو، چی دا د گڼونو ډیری په لاندې ډول د ډیریو په توگه یو په بل کي خوندي ولیکو:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

دا په ترتیب د ورپسې ډیری اصلي برخه ډیری دي

.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.

۲ - ډيريپوهينيزې ستکليمې

۲ . ۱ . ۲ . ډيری

په شميرپوهنه کې پل په پل مور ددې، د ستونځو سره مل،
تعريف شوي کليمې سره مخامخ کيږو، کومه چې د يوه
لغات « ټولگې » سره روښانه کيدې يا پوهيدل کيدې شي.
د بيلگې په توگه د انسانانو د ټولگې څخه غږيږو، چې په
يوه ټاکلې وخت کې په يوه کوټه کې موجود وي، يا هغه
هيلی، چې په يوه ځانگړي وخت کې په يوه ځانگړي ځای کې
په اوبو کې لامبې، هغه غرخه، چې د هسکې مينې د سپينې
مورگې په ځنگلونو کې لا پاتې دي او همدا ډول هغه ميږي
او ووزې، چې په ۱۹۹۹ ميلادي کال کې د کوچيانو څخه د
لورې له امله مړې شوي دي. د داسې شيانو ټولگه «ډيری»
(Die Menge , set) بلل کيږي يا داسې ټولگې ډيری نوموو.

۲ . ۱ . ۱ لنډ تعريف : ځمور د خيال يا تصور د ټولو، په
روښانه توگه، توپيرکيدونکو شيانو ټولگه «ډيری» نومو يا
بولو.

شیان، چی له هغو ډیری جوړ شوی دی، د ډیري «توکی» بلل کیږي. د دې لپاره، چی « x د ډیري M توکی دی» لیکو: « $x \in M$ ». د دې وینا په خټ یا نفي یا نیگیشن Negation د « $x \notin M$ » له لارې ورکول کیږي. د « $x_1 \in M$ او ... او $x_n \in M$ » په ځای لیکو:

$$"x_1, x_2, \dots, x_n \in M"$$

یو ځانگړی ډیری تشدیری دی، داسی کرکتیزه کیږي، چی کوم توکی نه لري. دا تشدیری د سومبول یا نخنښی $\emptyset$ سره نخنښون کیږي یا په نخنښه کیږي. نور هغه ډیرې چی زیات مو مخ ته راځي یا زیات منځ ته راځي، دا لاندې ډیري دي:

د ټولو طبیعی یا پیدایښتگرځونو ډیری د N سره په نخنښه کیږي، چی صفر ورسره مل دی.
 د ټولو ټولگڼونو ډیری Z
 د ټولو راشنلگڼونو ډیری Q
 د ټولو رییلگڼونو ډیری R
 د ټولو کمپلکسگڼونو ډیری C
 د ۳۰ پرویشونو ډیری، چی له ۸ توکو څخه جوړ ډیری دی. یعنې $\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ ډیری.

۲. ۱. ۲ تعریف : یو ډیری M د ډیری N برخه ډیری بلل کیږي، که له $x \in M$ څخه تل لاس ته راشي $x \in N$.
په نڅېښه یی : $N \supset M$ یا $M \subset N$

۲. ۱. ۳ تعریف : هغه ډیری، چی هیڅ توکی ونه لري، تشډیری بلل کیږي او داسی $\emptyset$ یی په نڅېښه کوو.

تشدیری $\emptyset$ د هر ډیری برخه ډیری دی، برسیره پردې هر ډیری د خپل ځان برخه ډیری دی. دا ډول ډیری نااصلي برخه ډیری بلل کیږي، هغه برخه ډیری اصلي برخه ډیری دی یا اصلي برخه ډیری بلل کیږي، که دا برخه ډیری له دې دوه ډیریو یعنی له پخپله دې ورکړ شوي ډیرې او تشډیری څخه توپیر ولري. دې ته دې هم باید گوته نیول شوي وي، چی کله کله برخه ډیریو ته «لاندې ډیری» هم ویل کیږي

دا نڅېښی $\subseteq$ د اینکلوزیون نڅېښو Inklusionszeichen په نامه بل کیږي.

۲. ۱. ۴ تعریف : که وي $M \subseteq N$ او $M \neq N$ نو M د N اصلي برخه ډیری بلل کیږي. ($M \subset N$)
په نڅېښه یی : $M \subset N$

۲ . ۱ . ۵ تعریف: د یوه ډیرې S توکي کیدی شي پخپله ډیري وي. دلته نو S د ډیرسیستم په توګه په نڅېنه کیدی شي یا د ډیري سیستم په څیر ګڼل کیدی شي یا په بل عبارت: د یوه ډیري د توکو ډیري د هغه ډیري برخېږي دي، چې دا یو د ډیرسیستم جوړوي.

۲ . ۱ . ۶ تعریف: د یوه ناتش ډیري سیستم S غونډلېږي (د سیستم هغه برخېږي، چې د سیستم د هر ډیري برخېږي - یري وي) D د ټولو توکو هغه برخېږي دي، چې په هغه وخت یا یو وخت کې د سیستم S د هر ډیري M توکی وي. یعنې لرو $x \in D$ هغه ارزښته یا برابر ارزښته د دې سره دی $x \in M$ د ټولو ډیریو $M \in S$ لپاره .

$$D = \bigcap_{M \in S} M \quad \text{یا} \quad D = \bigcap \{M \mid M \in S\} \quad \text{په نڅېښه:}$$

$$D = M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_n$$

که S یواځې د پای ډیرو برخېږي $M_1, \dots, M_n$ څخه جوړ دی.

مساوات یا برابرې $M \cap N = \emptyset$ وايي، چې M او N ګډ توکی نه لري، یعنې توکی پردي دي یا لنډ پردي یا دسیونکت دي (Disjunkt) دي .

۲. ۱. ۷ تعریف: د یوه ناتش ډیریسیستم S ټولنه V د ټولو هغو توکو ډیری دی، چی کم له کمه د S ډیریسیستم یوه ډیری M پورې اړه ولري یعنی توکی وي.

$$V = \bigcup_{M \in S} M \quad \text{یا} \quad V = \bigcup \{M \mid M \in S\}$$

$$V = M_1 \cup \dots \cup M_n$$

که ډیریسیستم S د پای ډیرو برخو ډیریو $M_1, M_2, \dots, M_n$ څخه منځ ته راغلی یا جوړ وي.

د غوڅډیری او ټولنډیری د تعریف په مرسته پسې تړلي لاندې اړیکي لاس ته راځي، چی ښوونه یی گرانو لوستونکو ته پریښوول کیږي.

۲. ۱. ۸ مرستندوي جمله:

$$(a) \quad M \cup (N \cap N) = (M \cup N) \cap (M \cup N)$$

$$(b) \quad M \cap (N \cup N) = (M \cap N) \cup (M \cap N)$$

$$(c) \quad M \cap N = M$$

د $M \subset N$ سره په همغه مانا ده

$$(d) \quad M \cup N = M$$

د $N \subset M$ سره په همغه مانا ده

پایډیري کیدی شي، چی د هغو د غړو له لارې په نڅېنه شي.
لیکل کیږي

$$\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

د همغه ډیري M لپاره، چی ټیک له دې ورکړشو توکو څخه جوړ وي. یوتوکیز ډیری $\{x\}$ د هغه د توکي x څخه باید توپیر شي:

د بیلگي په توگه $\{\emptyset\}$ هغه ډیری دی، چی د هغه یواځنی توکی تشډیری دی.

دیوه ډیري M د توکو گڼون یا تعداد د $|M|$ سره په نڅه کیږي. دا گڼ $|M|$ د ډیري M زور یا توان بلل کیږي، دا په دې مانا چې د ډیري د توکو گڼون یا تعداد د ډیري زور دی. د بیلگي په توگه دی $|\{\emptyset\}| = 1$ او $|\emptyset| = 0$.
د یوه ډیري بل ډول روښانونه یا شمیرنه په دې کی نڅېستی، چی دیوه ورکړ شوي ډیري M ټول توکي ورکړ شوي، کوم توکی چی گڼه خویونه E ولري، و یوه نوي ډیري ته سره راټولگه کړي یا را یوځاي کړي. $E(x)$ په دې مانا چی x خویونه E لري، نو دا ډیری په $\{x \in X \mid E(x)\}$ سره ښایو. د بیلگي په توگه ډیری $\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 1\}$ د -1 او 1 څخه جوړ شوی، د ټولو ټولگڼونو برخه ډیری دی. د یوه ډیري دا

ډول جوړونې سره د انډولډيري X ورکونه مهمه ده، له کومې چې توکي رانيول کيږي، په غير له دې کيدی شي، له تضاد يا مخامخوالي ډک يا په خټه ډيري رامنځ ته شي، دا چې انډولډيري په ټوليزه توگه په همغه اړيکو يواځنې ټاکلی دی، نو په دې حالت کې دې په اکسپليڅيت (Explizite لاتين : روښانه ، واضح) ورکونه تيريدنه وشي.

۲ . ۱ . ۹ تعريف: د دوه ډيريو M او N کمونډيري دی:

$$M \setminus N = \{ x \in M \mid x \in N \}$$

د غوڅي ، ټولنی او کمون لپاره په پوره روښانه توگه لاندې يادوو:

Kommutativität کموتاتيو قانون

$$A \cap B = B \cap A , \quad A \cup B = B \cup A$$

اسوڅياتيو قانون Assotiativität

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$$

ديستريبيوتيويتي قانون Distributivität:

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) ,$$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

ٽوليز يا عمومي

$$\left(\bigcup_i A_i \right) \cap B = \bigcup_i (A_i \cap B)$$

او ورپسي

$$(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B = (A \cap C) \setminus (B \cap C),$$

$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B), \quad A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$$

ڊيري شميرپوهنيزي بنووني د پوره اندڪشن په پرينخيپ ولاړي دي، كوم چي د طبيعي گڼونو اڪسيوماتيكي جوړخت دلایلو راوړنه کي يو غوره رول لوبوي.

۲ . ۱ . ۱۰ د پوره اندڪشن ثبوت پرينخيپ:

A دې په طبيعي گڼونو $n \in \mathbb{N}$ يوه ويناوي. $A(n)$ په

دې مانا دی، چي A په n باوري کيږي.

د يوه کره ټاکلی $n_0 \in \mathbb{N}$ څخه پيل باور لري:

الف : $A(n_0)$ د اينډکشن پيل:

ب ؛ د اينډکشن پاي : د ټولو $n \geq n_0$ لپاره له $A(n-1)$

څخه هم $A(n)$ لاس ته راځي

نو بيا A د ټولو طبيعي گڼونو $n \geq n_0$ لپاره ريښتيا ده يا

صحيح يا ټيک ده (دا ريښتيا مناسبه نومونه ده).

دې ته دې ګوته نیول شوي وي، چې خورا ساده دی، که چیرې د ایندکشن پای په لاندې ډول لارښوده کړو:

ب: له $A(i)$ څخه د ټولو i لپاره د $n \leq i$ سره $A(n)$ هم لاس ته راځي.

شرایط (b) او (b') برابر ارزښته دي، لکه چې ورپسې یا ترلې لیدل کیږي.

د ایندکشن ښوونه یا ثبوت بیلګې د لاندې جملو اوبیو یا حلونو ته مرسته کوي یا د لاندې جملې اوبیو په چوپړ کې دي.

۲. ۱. ۱۱ تعریف: M دې یو ورکړ شوی ډیری وي.

د M د ټولو برخه ډیری. چې په $P(M)$ سره یې په نخښه کوو یا ښایو، د M د پوتنځلېږي $Potenzmenge$ یا توانه ډیری په نامه یادېږي.

۲. ۱. ۱۲ جمله: M دې یو $-n$ توکیز ډیری وي.

$P = P(M)$ دې د M د ټولو برخه ډیری وي. نو دا د M په توان ډیری P له 2^n توکو څخه جوړ دی.

اوبی (حل): د ایندکشن پیل: $n = 0$

گورو چی M کوم توکی نه لري. له دې امله M تشډیری
 $\emptyset$ دی. د $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$ له امله په P کی یو توکی $1 = 2^0$
 موجود دی.

وي دې : $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$

د ایندکشن نیونه یا فرضیه: هر $(n - 1)$ - توکییز ډیری
 دې ټیک 2^{n-1} توپیریدونکی برخډیری ولري.
 د ایندکشن اوبی یا ثبوت: که M یو ډیری د n توکو
 سره وي، نو $P(M)$ ټیک له 2^n توکو جوړ دی.

د دې سره دې $M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ وي.

نویا $P(M') = \{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\}$ د M' لپاره د ایندکشن

د نیونی یا فرضیې سره ټیک 2^{n-1} توکی لري،

که $A \in P(M)$ نویا یا $a_n \in A$ دی او یا $a_n \notin A$. په

دوم حالت کې A په $P(M')$ پورې اړه لري، او په لومړي

حالت کې $A' = A \setminus \{a\} \in P(M')$ نو $P(M)$ ټیک

$$2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^{n-1} (1 + 1) = 2^n$$

توکی لري. د پوره ایندکشن د پرینخپ له مخی دلته

وښوول شو، چی د هر n - توکییز ډیری M لپاره پوتنڅ -

یا توانډیری $P(M)$ ټیک 2^n توکی لري. *

یو د ثبوت له مرستندوي موادو څخه د ناپاي ډیري زدکړې لپاره د څورن Zorn جملگي ده. S دې یو ناتش ډیرسیستم وي. یو ناتش د S برخه یری K یو څنځیر بلل کیږي، که له $M_1, M_2 \in K$ څخه تل $M_1 \subseteq M_2$ لاس ته راشي او یا $M_2 \supseteq M_1$ لاس ته راشي.

۲. ۱. ۱۳ تعریف: یو ډیري $M \in S$ د S یو ماکزیمال یا لوي توکی بلل کیږي، که له $N \in S$ او $M \subseteq N$ څخه تل لاس ته راشي، چی $M = N$. نو د څورن جملگی په لاندې ډول ده: (ماکزیمال یا ماکسیمال = Maximal)

۲. ۱. ۱۳ د څورن جملگی Lemma von Zorn: که د ناتش ډیرسیستم S د هر څنځیر K لپاره ټولنډیري $\{K \mid K \in S\}$ هم یو د S ډیرسیستم توکی وي، نو بیا په کي یو ماکزیمال maximals Element توکی موجود دی. ددې جملگی د ثبوت څخه دلته تیرېږو.

وي دې N د یوه نیم منظم ډیرې M لاندې ډیری یا برخه ډیری. هر (ضرور نه دی، چی په N کی ځای وي یا خوندي وي) a له M څخه، کوم چی د ټولو $x \in N$ لپاره شرط $a \geq x$

پوره کړي د لاندې ډيري پورته بند بلل کيږي يانی ډیری یی د لته رابند دی. دې ته دوگونی کلیمه لاندې بند دی. په ورکړ شوي نیممنظم ډيري M سره د ټولو ځنځیرونو ډیری د ډيري خونديونی په موخه یا هدف ، هم نیمه منظم دی. دا ټول د اخري ډيري ماکسیمال توکی ، د خپل طبیعت له مخی د M ماکسیمال ځنځیر بلل کيږي. لاندې جملی یو بل ته ورته دې یانی د یوې څخه بله لاس ته راځی او په څټ.

۲ . ۱ . ۱۴ د څرمیلو جمله Zermelo: هر ډیری کیدی شي منظم شي

۲ . ۱ . ۱۵ د هاوزدورف جمله Hausdorff: هره د یوه نیمه منظم ډيري ځنځیر په یوه ماکسیمال ځنځیر کي خوندي ده.

۲ . ۱ . ۱۶ د کوراتوفسکي - څورن جمله Kuratowski-Zorn:

که د یوه نیممنظم ډيري M هر ځنځیر یو پورته بند ولري، نو د M په هر توکی پسی یو په نامه ماکسیمال توکي راځی. ددې درې جملو له ثبوت څخه دلته تیريرو.

اوس دې X او Y دوه ناتش ډيري وي. د يوې د X په Y کې څيرونې (په نخښونه $f: X \rightarrow Y$) لاندې يو تنظيم پوهيږو، په کوم کې چې د $x \in X$ هر توکي يواځنې يوه د $y \in Y$ توکي باندې د څيرې په توگه تنظيم شي يا ترتيب شي، د x څيره y په څيرونه f د $f(x)$ سره او يا هم ساده د fx سره په نخښه کوو. ډيري X د څيرونې f تعريفډيري بلل کيږي او ډيري Y د هغې موخيدډيري يا څيرېډيري بلل کيږي. که f د x څيرونه يا څيره کونه وي په Y کې او M يو د X برخېډيري وي، نو دا د ټولو $x \in M$ توکو څيرې ډيري او په ورته توگه د ډيري M څيره بلل کيږي او داسې په نخښه کوو $f(M)$ يا په ساده توگه fM . پس باور لري:

$$fX = \{ fx \mid x \in M \},$$

او fM د Y يو برخېډيري دی. د تشډيري څيره بيرته تش ډيري دی. د تعريف ډيري څيره fX د f څيره هم بلل کيږي او د f سره په نخښه کيږي.

۱. ۱۰. تعريف: که $Im f = Y$ باور ولري، د

څيرونې $f: X \rightarrow Y$ لپاره، نو f يوه سوريکتيوه څيرونه *surjektive Abbildung* بلل يږي، يو سوريکشن *Surjektion* يا يوه د X څيرونه په Y باندې. په خټ دې N يو د S

برخډیری وي. نو بیا د ټولو X د توکو ډیری، چی د هغو
خیره د N یو توکی وي، د N له خیرې پخوا خیرونه، په
خیرونه f کی، بلل کیږي او د $f^{-1}(N)$ سره په نڅېنه
کیږي. باور لري

$$f^{-1}(N) = \{x \in X \mid fx \in N\}$$

او $f^{-1}(N)$ یو د X برخډیری دی.

که $N \neq \emptyset$ هم باور ولري، کیدی شي $f^{-1}(N)$ تشډیری
وي، یعنی هلته که $N \cap \text{Im } f = \emptyset$ باور ولري.

۲. ۱. ۱۷. تعریف: یوه خیره $f: X \rightarrow Y$ د
خوینو سره،

چی له $x_i = x_j$ تل $fx_i = fx_j$ لاس ته ریشي، اینیکتیو
خیره کونه *injektive Abbildung* بلل کیږي یا اینیکشن
Injektion. که په همدې وخت کی f حتی یو اینیکتیو او
سوریکتیو وي، نو f بییکتیو خیره کوونه *bijektive*
Abbildung بلل کیږي یا بییکشن *Bijektion* بلل کیږي.

۲. ۱. ۱۸. تعریف: $f: X \rightarrow Y$ دې یوه بییکتیوه
خیره کونه وي. په هر $y \in Y$ د خیرې په توګه یو یواځنی

ټاکلی توکی $x \in X$ د $y = f(x)$ سره د څیرې په توګه تنظیم کړي، نو دلته د Y یو بییکشن په X تعریفوي. دا د f په خټ څیرونه بلل کېږي او یا دا f ته راګرځیدونکی څیره کوونکي ده. او د $f^{-1} : Y \rightarrow X$ سره په نڅېنه کېږي

۱. ۱. ۱۹ تعریف: که دوه څیرونې $f : X \rightarrow Y$

او $g : Y \rightarrow Z$ یو په بل پسې رامنځ ته کړی شي او په ټولیزه توګه یوه د $g \circ f$ سره په نڅېنه شوې څیره کونه د X په Z کې ترې لاس ته راځي، کوم چی د f او g ځل یا ضرب څیرونه بلل کېږي زیات وخت د څنځیرې او یا ترلی بلواک یا څیره کوني په نامه هم یادېږي. دا په لاندې ډول ورکړ شوی دی

د ټولو $x \in X$ د پاره $(g \circ f) = g(fx) = g(f(x))$

کیدي شي چی تعریفېږي او څیره ډیری یو بل باندې پریوځي. دلته بیا له یوې څیرونې f غږېږو، چی X په خپل ځان څیره کوي.

۲. ۱. ۲۰ تعریف: که د ډیری X هر توکی په خپل ځان بیرته

څیره شي، نو یو د X بییکشن په خپل ځان لاس ته ترې راځي،

چی د X کټمټ څیرونه $\text{identische Abbildung}$ يا Identität یې بولو او په لاندې ډول یې ښایو id_x او يا په ساده توگه id .

۱. ۲. یادونه: د هر $x \in X$ د پاره باور لري $\text{id}_x = x$. که f یو د X بیکشن په Y وي، نو دې په خټ څیره کونه f^1 هم موجود ده او لاس ته ترې راځي

$$f^1 \circ f = \text{id}_x, \quad f \circ f^1 = \text{id}_y$$

۲. ۲. ځلډیري يا ضربډیري او اړیکي یی

په دې برخه کی کارتیزی ځل د ناتشو ډیریو او همداسی د اکویوالینڅ اړیکو يا ورتوالی اړیکو $\text{Äquivalenzrelation}$ کلیمه څیرو.

۱. ۲. ۲. تعریف: د دوه ډیریو A او B کارتیزی ځل $A \times B$ د تنظیمشو جوړو (a, b) ټولگه ده، د $a \in A$ او $b \in B$ سره. دلته $(a, b) = (a', b')$ ټیک هلته باور لري، چی $a = a'$ او $b = b'$ وي.

۲ . ۲ . ۲ یادونه: کارتیزې ځل په ټولیزه توګه کموتاتیو نه دی، دا په دې مانا چې $A \times B = B \times A$ که $A = B$ وي. په پام کې دې دا اثتنه وي، چې د هر ناشدیري A او تشدیري $\emptyset$ لپاره باور لري

$$A \times \emptyset = \emptyset \times A$$

په ورته توګه د دوه ډیریو کارتیزې ځل په څیر د پای ډیرو ډیرو دپاره هم کارتیزې ځل تعریفیږي.

۲ . ۲ . ۳ تعریف: کارتیزې ځل $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$

د پای ډیرو ډیریو A_i د $i = 1, \dots, n$ لپاره، د ټولو منظمو یا ترتیبشو n - ګونو $(a_1, a_2, \dots, a_n)$

د $a_i \in A, i = 1, 2, \dots, n$ سره. دلته

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = (a'_1, a'_2, \dots, a'_n)$$

ټیګ هله باور لري، که $a_i = a'_i$ د ټول $i = 1, 2, \dots, n$

لپاره وي.

که $A = A_i$ وي، د ټولو $i = 1, 2, \dots, n$ لپاره، نو $\tilde{A} = \prod_{i=1}^n A_i$

د A - ایزی توان یا پوتنڅ بلل کیږي. (۶-۱-۱۱)

ډیری $\{(a, \dots, a) \in A^n \mid a \in A\}$ د A^n نیمې یا قطر دی.

بینار اړیکي binäre Relationen

۲ . ۲ . ۴ تعریف : یو د $A \times A$ برخډيری R د ډيري A دوه ځایزه اړیکي بلل کيږي. وایو : د A دوه توکی a او b په اړیکه R کی یو له بل سره پراته دي، په نڅښونه $a \sim b$ ، هلته او هلته یا په بل عبارت ټیک هلته، که وي

$$(a, b) \in R \quad \text{او} \quad a R b$$

د بینار اړیکو یا دوه ځایزو اړیکو R کومپلیمنت یا پوره کید - ونکی یو دوه ځایزه اړیکي $\bar{R}$ دی چي په لاندې توگه تعریف دي $\bar{R} = (M \times M) \setminus R$. په نورو ویناو سره $a \bar{R} b$ ټیک هلته باور لري، که $(a, b) \notin R$.

د بینار اړیکو د ځل RS لاندې پوهیږو، چي $a(RS)b$ ټیک او ټیک هلته باور لري، که په M کی یو توکی c موجود وي، د کوم لپاره چي $a R c$ او $c S b$ باور لري.

د بینار اړیکو ځل اسوخیاتیو دی یعنی

$$(RS)^T = R(ST)$$

د بينار اړيکو ځل په هيڅ توگه کوموتاتيو نه دی ، کله کله اړيکی R او S یو له بل سره بدلیدونکی وي ، دا په دې مانا چي

$$RS = SR$$

یوون اړيکی E په لاندې ډول تعريف دي: aEb ټيک هلته باور لري که وي، $a = b$. يا په بل ډول اړيکی E د ټولو هغو توکو جوړو (a, a) د $a \in M$ سره ډیری دی. دلته په روښانه توگه باور لري: $E = E^{-1}$ او د یوه خوښی اړيکی R لپاره باور لري :

$$RE = ER = R$$

موږ تش اړيکو 0 ته هم گوته نيسو، چي د $M \times M$ تشډيري په څير تعريف دی. د هر بينار اړيکي R لپاره په ډيري M کی باور لري:

$$0 \subseteq R \quad \text{او} \quad 0R = R0 = 0$$

موږ کله کله د بينارو اړيکو سره مخامخ کيږو، چي د لاندې خوښو څخه ځنی په کی باور لري
رفلکسيويټي: aRa د ټولو $a \in M$ لپاره دا په دې مانا چي $E \subseteq R$

ترانزيتيويټي: له aRb او bRc څخه لاس ته راځي،

$$aRc \text{ دا په دې مانا چي } RR \subseteq R$$

سيومتري: له aRb څخه لاس ته راځي bRa دا په دې

مانا چې $R^{-1} = R$

انتیسیومتری: له $a R b$ او $b R a$ څخه لاس ته راځي
 $a = b$ دا په دې مانا چې $E \subseteq R \cap R^{-1}$

۲ . ۲ . ۵ جمله : که کوم یو بینار اړیکې له دې پورته
 خویونو څخه کوم یو ولري یا ټول ولري، نو د دې اړیکو په
 څټ اړیکې R^{-1} هم دا خویونه لري.

اوبی (حل):

په عمل کې له $E \subseteq R$ څخه لاس ته راځی

$$E = E^{-1} \subseteq R^{-1}$$

که $RR \subseteq R$ وي، نو باور لري

$$R^{-1} R^{-1} = (RR)^{-1} \subseteq R^{-1}$$

که $R^{-1} = R$ وي، نو باور لري

$$(R^{-1})^{-1} = R = R^{-1}$$

له $E \subseteq R \cap R^{-1}$ څخه لاس ته راځي

$$R^{-1} \cap (R^{-1})^{-1} = R^{-1} \cap R \subseteq E$$

ايکويوالنځ اړيکي : د بينار اړيکو څخه يی خورا مهمي اړيکي ايکويوالنځ اړيکي دي، چي په لاندې کي يي تعريفوو

۲ . ۲ . ۶ تعريف : يو ناتش دوه ځايزه اړيکي ~ په ډيري A کي ورته اړيکي يا اکويوالنځ اړيکي بلل کيږي، که د ټولو $a, b, c \in A$ لپاره لاندې اړيکي باور ولري.

الف) $a \sim a$ (رفلکسيو reflexiv)
 ب) $a \sim b \Leftrightarrow b \sim a$ (سيومتري symetrisch)
 پ) $a \sim b$ او $b \sim c$ څخه ($\Leftrightarrow$) $a \sim c$ لاس ته راځي .
 (ترانزيتيو transitiv)

۲ . ۲ . ۷ بيلگه:

الف) مساوات يا برابرېون « = » د هر ډيري A لپاره يو ورته والی اړيکي Äquivalenzrelation دي.
 ب) د $a, b \in \mathbb{Z}$ لپاره $a \sim b$ ټيک هلته باور لري، که 2 د گڼې $a - b$ پرويشونی وي.

ايکويوالنځ اړيکي په کلکه د دې سره تړاو لري، چي يو ډيري

یو بل سره په پردیو ټولګی ډیریو ویشي. دوه ډیری یو بل سره پردی بلل کیږي، که دوي ګډ کوم توکی ونه لري یانې غوڅي یې تشلېږی وي.

غواړم، چی دا ټولګیویشن داسی لږغوندي روښانه وڅیړم، که څه هم زیاتو لوستنکو ته به ستریکیدونکي وي، مګر لږ پوهوږ به شي. که چیرې طبیعي ګڼونه په $5, 15, 25, \dots, 1+n5$ ویشو نو دلته پنځه ټولګیویشن لاس ته راځي، چی ویشپړدي دي: هغه ټولګی، چی ۱ ولري او ټول $5, 15, 25, \dots, 1+n5$ ، دوم هغه ټولګی، چی ۲ ولري او ورسره تر $5+2n$ دریم: هغه ټولګی، چی ۳ ولري او ټول ورسره $5+3n$. څلورم هغه ټولګی، چی ۴ ولري او ټول ورسره $5+4n$. پنځم هغه ټولګی، چی ۵ ولري او ټول ورسره $5+5n$. چی دا په ۰ سره هم ښوولی شو، چی نور ورسره ټول $5+n0$ ولري. دا ټول شمرنی بیا د ګڼونتیاوري دنده ده، چی په همغه ټول کتابونو کي لوستل کیږي. هلته د کونګرو-اینځ اړیکو لاندې لوستل کیږي، چی زه یې دلته په لیک دود هم نورې خبرې نه کوم. په دې کی دې ګران لوستونکی یو پوره پام وځغلوې او ټولګی ویشن او ایکوالنځ اړیکي دې پخپله نوري هم روښانه کړي، چی.

د ټولگيوشنه په همدې وخت کي ايوکيوالنځ اړيکي هم جوړوي،

دا په دې مانا چي د ايوکيوالنځ اړيکو او ټولگي ویشني ترمنځ راگرځيدونکي يواځني اړيکي موجود دي. دا په دې مانا چي د ايوکيوالنځ اړيکو سره يو يواځني تنظيم راکړ شوی او دا بيا په خټ کيدونکي هم دی.

که R په A کي يو ايوکيوالنځ اړيکه وي، نو A/R د فاکتورډيري په نامه بلل کيږي نسبت و ايوکيوالنځ اړيکو R ته. هغه څيرونه چي د A او A/R ترمنځ پرته ده د طبيعي څيرونې په نامه بلل کيږي.

لنډ: ويلي شو، چي ټولگي ویشنه او ايوکيوالنځ اړيکي يو له بل څخه لاس ته راځي. موږ دا شمير پوهنيز په لاندې توگه تعريفوو:

۲. ۲. ۸ تعريف: که $\sim$ د ډيري A ورته والی اړيکي وي، نو د توکي $a \in A$ ورته والی ټولگي يانی کلاسی يا صنف $[a]$ په لاندې توگه ورکړ شوی دی

$$[a] = \{ b \in A \mid a \sim b \}$$

د ورته والی ټولگي $[a]$ هر توکي b د ټولگي $[a]$ نماينده

بلل کيږي.

۲. ۲. ۱۱ مرستندوي جمله: که $\sim$ د ډيري A ورته -
والی اړیکې وي، نو د توکو $a, b \in A$ لپاره لاندې وينا
وې جوړه برابرارزښته يا جوړه مساوي ارزښته دي

$$(a) \quad [a] \cap [b] \neq \emptyset$$

$$(b) \quad a \sim b$$

$$(c) \quad [a] = [b]$$

اوبی (حل): که $[a] \cap [b] \neq \emptyset$ وي، نو يو $c \in A$
موجود دی د $a \sim c$ او $b \sim c$ سره. د $\sim$ سیومتری او ترانز-
یتیوي له امله لاس ته راځي $a \sim b$. له دې امله (b)
د (a) یوه لاس ته راوړنه ده يا تعقیب دی. اوس باور
لري $a \sim b$. له دې امله نو $x \in [a]$ د $x \sim a$ سره برابرارز-
ښته دی، او همداسی د $x \sim b$ سره. نو $[a] = [b]$ دی،
او (c) له (b) څخه لاس ته راځي.
په پوره باور (a) له (c) څخه لاس ته راځي.

زیات موخوړ يا هدفمند دی، که یو ډیرسیستم S د یوه
په نامه ایندکشنډيري يا پیژندډيري A په مرسته په نڅښه
کړو يا روښانه کړو. د لته A یو (پاي يا ناپای) ناتش

ډیری دی، او هر ایندکس یا پیژندنځې $\alpha \in A$ یواځنې یو ډیری A له S څخه داسې ترتیب شوی دی، چې باور لري: $S = \{ A_\alpha \mid \alpha \in A \}$.

۲. ۲. ۱۲ تعریف: د یوه ډیري $A \neq \emptyset$ د برخه ډیریو A یو سیستم $\{ A_\alpha \mid \alpha \in A \}$ د ډیري A یوه ټوټه (تجزیه) بلل کیږي، که باور ولري:

(a) $A_\alpha \neq \emptyset$ د پاره $\alpha \in A$ د ټولو

(b) $A = \bigcup_{\alpha \in A} A_\alpha$

(c) $A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$

د ټولو $\alpha, \beta \in A$ لپاره د $\alpha \neq \beta$ سره

۲. ۲. ۱۳ جمله: R دې په ډیري A کې یو ورته اړیکي

وي. نو د ورته والي ټولګي نسبت و R ته یو د A ټوټه

دی. په څټ یو په خوښه د A ټوټه $\{ A_\alpha \mid \alpha \in A \}$

یواځنې یو ورته والی اړیکي په A ټاکي، د کوم لپاره چې د

ټوټه ډیری A ټیک ورته والي ټولګي دي.

اوبی (حل یا ثبوت): سملاسي د پورته مرستندوي

جملې ۲. ۲. ۸ او تعریف ۲. ۲. ۹ څخه لاس ته راځي.

۲. ۳ نیمنظم یا نیم ترتیب

د بینار اړیکو یو بل غوره یا مهم حالت نیمنظم اړیکې جوړوي. دا هغه اړیکې دي، چې رفلکسیو، ترانزیتیو او انتیسیومتري دي. هغه ډیری، چې نیمنظم په کې تعریف وي، نیمنظم یا نیم په ترتیب بلل کېږي. د نیمنظم لپاره دا سومبول $\leq$ کارول کېږي او د ډیري M د توکو a, b لپاره باور لري $a \leq b$ او داسې لوستل کېږي، چې a له b کوچنی او یا له b سره مساوي ده. یا a په b کې خوندې ده یا a له b څخه مخ ته ځي. که $a \leq b$ وي او $A \models b$ وي، نو لیکو $a < b$ او وایو چې a له b څخه کوچنی ده، په دې حالت کې a په b کې اصلي خوندې ده. په یوه ډیري M کې د نیمنظم تعریف وي. د دې ډیر دوه توکي $a, b \in M$ یو له بل سره اندولور دي، که چیرې وي $a \leq b$ او یا $a \geq b$. که له $a \leq b$ څخه $a = b$ لاس ته راشي نو د ساده نیمنظم څخه غږیږو. یو ډیری، په کوم چې دوه توکي تل یو له بل سره اندولور وي، نو دا ډیری لایني نظم شوی یا منظم یا ترتیب شوی او یا ځنځیر یعنی یو له بل سره تړلی بلل کېږي.

۲. ۳. ۱ تعریف: د دوه نیمنظم شوي ډیریو M او M'

ترمنځ یواځنی او په څټ څیره کونه f موجود ده یعنې

$$af = a', a \in M, a' \in M'$$

که له $a \leq b, a, b \in M$ تل $af \leq bf$ لاس ته را شي او په څټ، نو f د M او M' ترمنځ یو ایزومورفیزم ispmorphism بلل کیږي، چی دا به وروسته هم بیا پوره وڅیړل شي او ډیري M, M' پخپله ایزومورف نیممنظم ډیري بلل کیږي. که یوه نیممنظم ډیری M په یوه نیممنظم ډیري N کی ایزومورف خوندې وي، نو دې ته ایزومورف ځایونه یا خوندیونه وایو، که د M یوه ایزومورفه څیره کونه په N' د ډیري N برخه ډیري باندې موجود وي او ډیری N' پخپله نیممنظم ډیری وي او که N' په هغه نظم ترتیب وي، چی له N ورته راپاتی وي.

۲ . ۳ . ۲ جمله:

هر نیممنظم ډیری M د ډیري N ، چی نسبت و خوندیونی ته نیممنظم دی، ټولو لاندیدډیریو ډیري N' سره ایزومورف دی. په ځانگړي توگه کیدی شي، چی د ډیري N لپاره پخپله ډیری M ونیول شي یا راوړل شي. د دې جملی د خوونی څخه تیریږو. په کوروش کی کتل کیدی شي.

یوه نیممنظم ته په خټ اړیکې هم نیممنظمی دي.
 د ټولو $a, b \in M$ د لپاره، $af = a'$, $a \in M$, $a' \in M'$
 سره $a \leq b$ ټیک او ټیک هلته یا هلته او هلته باور لري،
 که وي: $af \leq bf$.

۲. ۴ مینیمال شرطونه

یو د نیممنظم ډیري M توکی a د ډیري مینیمالتوکی بلل
 کیږي، که په M کی داسی یو توکی x موجود نه وي، د کوم
 لپاره، چی شرط $x < a$ باور ولري. دا روښانه ده، چی M ډیر
 مختلف مینیمال توکی لرودی شي او یا هیڅ مینیمال توکی .
 د بیلگي په توگه ډیری N' د ټولو د ډیري N لاندېډیري یا
 برخه ډیریو ډیری یواځنی یو مینیمال توکی لري، داسی په نامه
 تشهیری . په یوه ډیري کی هر لاندې ډیری یا برخه ډیری مینیمال
 توکی دی، که دا ډیری د یوه توکی جوړ وي. دا کلیمه د یوه
 ځانگړي نیمتنظیم شوي ډیري ټولگیو لپاره کارول کیږي. د دې
 ټولگی نیمتنظیم شوي ډیري لاندې یو بل سره ورته یا ایکویوالنت
 شرطونه پوره کوي:

۲ . ۴ . ۱ جمله (مینیمال شرطونه) : هر د یوه نیمتنظیم شوي ډیري M ناتش لاندې ډیری N یو مینیمال توکی (په N کی) لري.

۲ . ۴ . ۲ (د لویدونکی ځنځیر پریکیدنی شرطونه): د نیمتنظیم شوي ډیري M په را غونډه موخه هر لویدونکی ځنځیر

$$a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n > \dots$$

د پایډیرو غړو وروسته پرې کیږي یا ماتیري یا غوڅیري. په نورو کلیمو سره، د توکو د هر لویدونکی ځنځیر

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_n \geq \dots$$

سره یو ایندکس یا پیژند نڅېنه n شته، له کومې چې د دې ډیري ټول توکی برابر دي دا په دې مانا چې د n وروسته $a_n = a_{n+1} = \dots$ باور لري

۲ . ۴ . ۳ جمله (اینډکشن شرطونه): د یوې نیمتنظیم شوي ډیري M ټول توکی څه روښانه خویونه E لري. که دا خویونه په ټولو مینمال توکو (که داسی یو توکی موجود وي) موجود وي او که د دې موجودوالی، د ټولو توکو لپاره، چې له توکي a په کره توګه مخ ته ځي، پخپله په دې خویونو a

رابطه‌ی شی یانی دا خوښه ولري.

د دې جملو، چي یو بل ته ورته دې، د ښوونې یا اوبیونې
څخه تیريرو.

ویناوې چی د ټاکن اکسیوم سره همغه ارزښته دي:

ډیری N دې د یوه ډیری M لاندې ډیری وي. هر (ضرور نه
دی چی په N کی خوندې وي) د M د توکی a د کوم
لپاره چی شرط $a \geq x$ پوره وي د ټولو $x \in N$ لپاره، د
لاندې ډیری پورته بند بلل کیږي یانی دا ډیری په دې توکی
سره پورته لور ته بند دی. دا لاندې بند ته یوه دویزه کلیمه.
په یوه ورکړ شوي نیمنظم ډیری M کی هره د ټولو څنځیرونو
ډیری د ډیری پوهنی په بنسټ نیمتنظیم ده. د دې ډیری ټول
ماکسیمال توکی په طبیعي توګه د M ماکسیمال څنځیر جوړوي.

یادونه : د دې پورته جملو ښوونه او زیات ورننوتنه په کروش
کی کتل کیدی شي. موږ یی نوره رالندوو.

۳ . الجبري جوړښتونه

د الجبر په کتابونو کې ډیر وخت دا دلته څیړل شوي موضوعات له توپیریدونکو یا له بیلو بیلو لارو څخه څیړل کیږي، ځنې له عمومي الجبر څخه پیل کوي n -ځایزې عمليې، نښلونې یا کارونې تعریفوي او له دې څخه بیا ګروپ $die\ Gruppe$ ، کړۍ $Ring$ ، تن یا بدن $Körper$ (engl. $Field$) او په همدې ډول تړونونو یا تړنو $Verbände$ او بول الجبر $boolische\ Algebra$ ته راځي. زه دا لار غوره ګڼم، چي لمری له مور ورسره بلدو کاروونو یا عملیو څخه پیل وکړم او له دې لارې بیا الجبر ته راشم، او بیا په لنډ ډول د الجبر له لارې دا مور ورسره بلدي کلیمې لنډې تعریف کړم.

د الجبر د مختلفو څانګو لپاره بنسټیزه کلیمه، چي ډیره تر څیړنې لاندې نیول شوې ده هغه د الجبري اېریشن یا الجبري عمليې او یا همدا ډول د الجبري کارونې، الجبري نښلونې یا الجبري ګنډنې کلیمه ده.

مور ځانونه په يوه دوئيزې کارونې په زياتون يا ځل رابندوو يا محدودوو. دا دوئيزې کارونې يا عمليې، په لرې موخه، هغه عملي دي، چې د يوه ډيري G ټاکلي منظم د توکو جوړه (a, b) د دې ډيري په يوه بل توکی c تنظيم يا خيره کړي (لکه د G د ټاکلو غړو مربع، يعني دا د لاندې خويونو سره يوه څيرونه ده:

$$G \times G \longrightarrow G$$

دا په دې مانا چې د ټولو $(a, b) \in G \times G$ لپاره يو $c \in G$ څخه، يعني c موجود ده، د کومو لپاره چې باور لري که دا نښلونه ځل وي

$$a \cdot b \longrightarrow c$$

په دې ټوليزه توگه په يوه ډيري کې د بينار يا دوه-ځائيز عمليې کليمې تعريف، په يوه ډيري کې د يوه ترنار ريليشن ternäre Relation يا درېځاييزو اړيکو سره په همغه يا مساوي مانا دی.

يادونه: اپريشن die Operation، عمليه، کارونه او يا نښلونه، گڼډنه، او همدارنگه په بلواکو کې کمپوزيشن die Komposition يا څنگ په څنگ ايښوونه يا بهتره ځنځيرونه تل همغه مانا لري، چې ما کله کله

ترڅه هم کارولی ده. د ډیرو نومونو کارونه، کوم چی همغه مانا ولري، تاوان نه لري. د شمیرپوهنې ژبه هم باید پوره پراخه وي او په دې باور لرو چی کومه اشتباه په کي نه رامنځ ته کیږي.

موږ دلته د نمونې په څیر یواځی یويزې کارونی یا عمليي په گوته کوو. او ور پسی بیا نور سملاسی خپل اصلی موخه تر مخه نیسو. دا یويزې عمليي هغه عمليي دې، چی د کارولو سره یی د ډیري توکي تغیر نه خوري، لکه د صفر سره طبیعی گڼونو N_0 توکو سره، په زیاتون کی چی هر توکي ته د صفر توکی ورزیاتونه پخپله همغه توکی دی،

د ټولو $a \in N_0$ لپاره $a + 0 = a$

او یا په ځل کی، چی د طبیعی گڼډیري N هر توکي سره 1 ځل شي، یعنی

د ټولو $a \in N$ لپاره $a \cdot 1 = a$

۳ . ۱ گروپ Gruppe:

که له یوې خوا د ټولګڼونو، ریشنلګڼونو یا رییلګڼونو زیاتون په پام کې ونیسو او له بلې خوا ریشنل یارییلګڼونو د صفر توپیرې یا د صفر سره نامساوي توکو ځل په پام کې ونیسو، نو دا میندلی شو، چې دواړه نښلونعمليي یا نښلون-نکاروني د همغه یو بل سره په یوځای شمیرقوانینو لاندې دي. د بیلګې په توګه باور لري:

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad \text{او} \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

برسیره پر دې راویستلي یا استثنایي ګڼونه موجود دي، دا په نامه 0 همداسې 1، کوم چې دې دوه تړنو ته ځانونه ناپیلی یا بي تاثیر نهیسي. یعنې:

$$0 + a = a \quad \text{او} \quad 1 \cdot a = a$$

بالاخره باور لري

$$(1/a).a = 1 \text{ او } (-a) + a = 0$$

دا په دې مانا، چې هر گڼې a ته يو گڼې a^{-1} موجود دی (دا په نامه a^{-1} همداسې $1/a$)، چې د هغو زیاتون یا همداسې د هغو ځل یا ضرب د همغی یعنی زیاتون همداسې ځل نښلونې یا نښلونو عملیې له لارې ناپیلې یا بی تاثیرې توکي ورکوي.

دا چې دا قاعدې گڼونشمیرنه په پراخه پیمانې په واک کې لري او په ډیرو نورو حالتونو کې هم رامنځ ته کېږي، دا راته نزدې ده، چې دا د ځانگړي طبیعت، د شمیرنې او د همغو تر عملیو څخه خپلواک وڅیږي. په دې ذهني راوړون دود سره مو شمیرقاعدې د هر څه له مخه مخ ته پرته دي. نه هغه څه، د کومو سره چې شمیرنه کېږي غوره دي، بلکه دا غوره دي، چې څنگه شمیرنه کېږي. په یواځني ډول د مخه نیول کېږي، چې د یوه ورکړ شوي ډیري غږو لپاره داسې یوه نښلونه یا ترنه یا عملیه تعریف ده، د کومې له مخې، چې هره منظمه جوړه (a, b) د هغه ډیري د توکو بیرته د هغه ډیري توکي باندې تنظیم شي یا څیره شي او دې پورته

ويلشوو قوانينو لاندې پرتی دي يا په بل عبارت دا پورته
قوانين په کی باور لري.
دا نښلونه د يوه ناپیلي سومبول $\circ$ سره ښايو.

يادونه : دا سومبول له خپل ځاي جگ ليکل شوی دی،
خو زما بله چاره نه وه. د دوه گڼونو نښلونو ټيک منع کی
که وليکل شی ښه به وي.

۳ . ۱ . ۱ تعريف : يو گروپ د يوه ډيري G او يوې تړني
يا عمليي $\circ$ څخه جوړ دی، دکومی نښلونی سره چی د دې
ډيري G د توکو هره منظمه جوړه (a, b) يواځنی يو د $a \circ b$
سره په نڅښه شوی د G توکی باندې داسی تنظيم شي،
چی دا لاندې اکسيومونه پوره کړي:

اکسيوم ۱ - اسو ځياتيو قانون باور لري

د ټولو $a, b, c \in G$ لپاره $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$

اکسيوم ۲ - یو ناپیلي توکي $e \in G$ شته، د $\circ$ تړاو
سره ، د کوم لپاره چی باور لري

$$a \circ e = e \circ a = a$$

اکسيوم ۳ - د هر توکی a لپاره یو په خپ توکی a شته،
د کوم لپاره چي لرو:

$$a \circ a = a \circ a = e$$

د G داسی یو توکی ناپیلی توکی بلل کيږي

یو گروپ کموتاتیو یا ابل گروپ $abelsche\ Gruppe$ بلل کيږي، که پر دې پورته اکسيومونو برسیره، دا لاندې اکسيوم ۴ هم پوره کړي:

اکسيوم ۴ - کموتاتیو قانون:

$$a \circ b = b \circ a \quad \text{لپاره } a, b \in G$$

که گروپ G پای ډیر توکی ولري، نو د G د توکو گڼون یا تعداد $|G|$ د G نظم بلل کيږي.

د گروپ ټاکنتهوتو پورې د ډيري G ترڅنګ د گروپترنه $\circ$ داسی په نامه اېریشن، نېلونه یا کارونه یا عملیه هم اړه لري یا تعلق لري.

یو گروپ نو په دې توګه د یوې جوړې $(G, \circ)$ سره په نڅېنه کول کيږي. دا چی گروپترنه ډیر واره په دې اړوند

کره ټاکلی ده، نو په داسی حالتونوکی ددې جوړې په ځای
یواځی G لیکل کیږي. گروپونه تر یوې اندازې پورې د
گروپځل یا گروپضرب سره هم نومول کیږي، نو په دې
توگه دا توکی $a^\circ b$ د توکو a او b د ځل په نامه هم بلل
کیږي. په یوه نابیل - یا ناکموتاتیوگروپ کی دې د توکو
ترتیب یا لږپېرلېسی ته هم پام وي، ځکه چی په یوه نابیل
گروپ کی په ټولیزه توگه $a^\circ b$ له $b^\circ a$ سره توپیر لري .

اکسیوم ۱ را په گوته کوي، چی په ډیرواره څلولو کی په نوکانو
کی بندونه یا راگیرونه پورې اړتیا نه څرگندیږي. له دې امله
کیدای شی، چی له نوکانو ایښوولو څخه بیخی تیریدنه وشي
او د بیلگي په توگه د $a^\circ (b^\circ c)$ لپاره په ساده توگه لیکو
$$a^\circ b^\circ c$$

۳ . ۱ . ۲ بیلگی :

اول - د ټولو ټولگنډونو ډیری Z د ورسره بلد زیاتون سره،
چی د کروپتمنی په څیر یی نیسو، یو ابلگروپ $(Z; +)$
جوړوي. دلته بیا له زیاتونگروپ څخه غږیږو، په همدې
توگه د ریشنگنډونو ډیری او داسی نور. په دې ټولو حالتونو
کي د اکسیوم ۱ لپاره د e لپاره ۰ او د a په څې توکی $\acute{a}$

د a- سره په نڅښه کوو.

دوم - په ځمککچ يا هندسه کی : د ټولو کونگرواینڅ څیرونو (څرخون، ځاییدلون، یا راکښنه ، او اینونه یا هندارونه) گروپونه جوړوي (ما په دې اړه یوه د هندسی برخه هم په یوه کتاب کی راوړې، چې کتاب څخه به تر مخه چاپ شوي وي، دا کلیمي که نا بلدي وې نو بیا دې هلته وکتل شي).

دریم : د ټولو ریشنلگنونو ډیری Q^* او د ټولو رییلگنونو ډیری R^* توکي، چی د صفر سره، نسبت و ځل یا ضرب ته، نابرابر یا نامساوي وي، یو ابلگروپ جوړوي، دا د ډیریو Q^* او R^* څلورونکی گروپ یا ضربگروپ بلل کیږي. په دې گروپونو کی e د 1 او a د ماتگن $1/a$ په څیر لیکل کیږي.

څلورم: M دې یو په خوښه ناتش ډیری وي ، او S_M دې د M د ټولو بییکتیو څیرونو یا بیکشنونو ډیری وي. د هر دوه څیرونو $f, g \in S_M$ لپاره $f \circ g$ د دې دواړو څیرونو یو په بل پسې راوړنوله لارې ټاکل شوی ځل دی. د هر درې څیرونو f, g, h او هر $x \in M$ لپاره دا لاندې باور لري

$$((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ g)(hx) = f(g(h(x)))$$

او

$$(f \circ (g \circ h))(x) = f((g \circ h)(x)) = f(g(h(x)));$$

دا په دې مانا چې اکسیوم ۱ پوره دی. که د e لپاره د M کټمټ څیرونه id وټاکل شي، نو اکسیوم ۲ باور لري. بالاخره اکسیوم ۳ باور لري، که د ورکړ شوي $f \in S_M$ لپاره د څیرونی f ، هغه f ته په خټ څیرونه f^1 وټاکل شي. ډیری S_M د یو په بل پسې د څیرونو ځلونی یا ضربوني له امله یو گروپ جوړوي، چې د ډیری M سیو-متری گروپ بلل کیږي.

که په ځانگړي توګه ډیری M ډیری $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ وي، نو دا اړونده سیومتري گروپ څیفرونه یا ګڼونه $1, 2, 3, \dots, n$ په ساده توګه د S_n سره په نڅېنه کوو. هره څیرونه $f \in S_n$ د ګڼونو $1, 2, 3, \dots, n$ پرموتیشن یا بدلون دی. که $f(1) = a_1, f(2) = a_2, \dots, f(n) = a_n$ باور ولري، نو f د څیره ګڼونو پرلپسې لړۍ $a_1, a_2, \dots, a_n$ یواځنی ټاکلی ده. موږ لیکو $f = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ، که د بیلګې په توګه باور ولري $n = 3$ او $f = (2, 3, 1), g = (3, 2, 1)$ نو لاندې ځلونه یا ضربونه لاس ته راځي

$$f \circ g = (1, 3, 2) \quad \text{او} \quad g \circ f = (2, 1, 3)$$

دا بیلگه بنایي، چي S_n د $n=3$ لپاره ابل گروپ يا کموتاتیو گروپ نه دی.

۳ . ۱ . ۳ یادونه: دا د صفر سره نامساوي ټولگنونه ، نسبت و ځلونی یا ضرب ته گروپ نه جوړوي، ځکه چي د بیلگي په توگه و 2 ته کوم ټول گڼې $\hat{a}$ وجود نه لري، د کوم لپاره، چي $2.\hat{a}=1$ باور ولري.

د گروپ د اکسیومونو څخه کیدی شي ، چي په لاندې کی یو څو ساده «لاس ته راوړنی» رابيلي کړو. په لاندې کی دې G تل یو گروپ وي

۳ . ۱ . ۴ مرستندوي جمله: د هر توکی $e \in G$ لپاره، چي اکسیومونه ۱ ، ۲ پوره کوي دا هم باور لري $a^\circ e = a$ د ټولو $a \in G$ لپاره. له $a^\circ a = e$ څخه $a^\circ \hat{a} = e$ لاس ته راځي.

اوبی یا ثبوت: لمړی دوهمه غوښتنه ښوول کیږي: و a' ته د اکسیوم ۳ له مخی یو $a \in G$ د $a'.a = e$ سره موجود دی. د اکسیومونو ۱ او ۲ په پام کی لرلو سره لاس ته راځي

$$\begin{aligned} a^\circ a' &= e^\circ (a^\circ a') = (a''^\circ a')^\circ (a^\circ a') = a''^\circ ((a'^\circ a)^\circ a') \\ &= a''^\circ (e^\circ a') = a''^\circ a' = e \end{aligned}$$

له دې څخه اوس لمری غوښتنه لاس ته راځي

$$a^\circ e = a^\circ (a' \circ a) = (a^\circ a')^\circ a = e^\circ a = a \quad *$$

۳ . ۱ . ۵ مرستندوي جمله: ټيک يو توکی $e \in G$ موجود دی، چی هغه په اکسيوم ۲ او اکسيوم ۳ کی غوښتل کيږي. همدا اوس له $x^\circ a = a$ څخه د ټولو $a \in G$ لپاره لاس ته راځي: $x = e$.

اوبی يا ثبوت: توکی e^* دې هم برابر و $e^* \circ a = a$ پوره کړي، د ټولو $a \in G$ لپاره. نو بيا په ځانگړي توگه د ۳ . ۱ . ۴ مرستندوي جملې له امله باور لري

$$e^* = e^* \circ e = e$$

دا په دې مانا چي e يواځنی ټاکلی دی. که بيا هم ورپسې باور ولري $x^\circ a = a$ د يوه کره ټاکلی توکي $a \in G$ لپاره، نو د اکسيوم ۳ له امله يو $a' \in G$ موجود دی د $a' \circ a = e$ سره، او د ۳ . ۱ . ۴ له امله لاس ته راځي:

$$x = x^\circ e = x^\circ (a^\circ a') = (x^\circ a)^\circ a' = a^\circ a' = e \quad *$$

دا په دې توگه د اکسيومونو سره يواځنی ټاکلی ناپیلی يا بی

تاثيره د گروپ G توکی e د گروپ G «یوی توکی» بلل کیږي. په زیاتونډوله لیکلي ابلگروپ G کې ناپیلی توکی e د G «صفرتوکی» 0 بلل کیږي.

۳. ۱. ۶ مرستندوي جمله: په اکسیوم ۳ کې a د a' له لارې یاد a سره یواځنی ټاکلی ده.

اوبی یا ثبوت: د $a' \circ a = e$ تر څنګ دې $a^* \circ a = e$ هم باور ولري. پرتله ۳. ۱. ۴ له امله لاس ته راځي

$$a^* = a^* \circ e = a^* \circ (a \circ a') = (a^* \circ a) \circ a' = e \circ a' = a'$$

دا توکی a د a' «په خټه توکی» بلل کیږي او د دې لپاره په ټولیزه توګه a^{-1} لیکل کیږي. که په ځانګړي توګه د گروپ-عمليي یا د گروپټرنی زیاتون ډوله ولیکل شي پرتله ۳. ۱. ۲ الف، نو ناپیلی توکی په 0 سره لیکل کیږي او د a په خټتوکی د $-a$ سره لیکل کیږي.

۳. ۱. ۷ مرستندوي جمله: $(a^{-1})^{-1} = a$

$$\text{او } (a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$$

اوبی: دا په ۱. ۳. ۴ کې ښوول شوي برابرېون $a \circ a' = e$

له مخی لرو، چي a و a^{-1} ته په خټ توکی دی، چي په دې توگه لمړی غوښتنه باور لري. دومه له لاندې څخه لاس ته راځي

$$\begin{aligned}(b^{-1} \circ a^{-1}) \circ (a \circ b) &= b^{-1} \circ ((a^{-1} \circ a) \circ b) \\ &= b^{-1} \circ (e \circ b) = b^{-1} \circ b = e\end{aligned}\quad *$$

۳ . ۱ . ۸ مرستندوي جمله: په يوه گروپ G کې برابرې $x \circ a = b$ او $a \circ y = b$ په ورکړشو توکو $a, b \in G$ سره يواځني ټاکلي حلونه يا اوبيونی $x, y \in G$ لري.

اوبی يا حل: که $x \in G$ د لمړي برابرې اوبی وي، يعني که باور ولري $x \circ a = b$ نو لاس ته راځي:

$$x = x \circ e = x \circ a \circ a = b \circ a$$

دا په دې مانا، چي x د a او b سره يواځنی ټاکلی. په څپ د

$$(b \circ a) \circ a = b \circ (a \circ a) \quad b \circ e = b$$

له امله توکی $x = b \circ a$ په رښتونی يو اوبی يا حل دی. په همدې توگه دوهم برابرې هم پای کولی شو. *

په لاندې کې غواړم، چي داپورته د گروپ تعريف لږ وغزوم

او په دې توګه ګروپوئيد او نیمګروپ تعريف کړم. دا کار په زیاتو ادبیاتو کې لمړی سر ته رسیږي، خو داسې تعريفونه یی هم په پوهیدلو کې ستونځي نه رامنځ ته کوي او ما هم غوښتل، چې موږ لمړی د ګروپ کلیمه باندې وپوهیږو، چې بنسټیزه ده.

۳. ۱. ۹ تعريف: یو ډیری G ، چې نسبت و یوه اپریشن یا ګڼډنې یا عملي °، چې موږ یی دلته د ځل عمليي « . » په څیر ښایو، ته رابند وي، نو دې ډیري ته ګروپوئيد وایو، یاني که د هرې جوړي (a, b) د $a, b \in G$ لپاره یو توکی $c \in G$ موجود وي، د کوم لپاره چې باور ولري $a.b = c$ لیکنه یی په لاندې توګه ده $(G, .)$.

دا د ګروپوئيد کلیمه لږ را تنګوو او نیمګروپ تعريفوو.

۳. ۱. ۱۰ تعريف. هغه ګروپوئيد G ، په کوم کې، چې پورته د ګروپ اکسیوم ۱ باور ولري یا نی ځل یی اسو-ځیاتيو وي، نیمګروپ بلل کیږي، چې په همغه پورته توګه د اوس لپاره نڅښون کیږي.

دا چی نیمگروپ همغه گروپ دی، دا لاندې جمله یی
روښانه را په گوته کوي

۳ . ۱ . ۱۱ جمله : یو نیمگروپ G هلته او هلته یو
گروپ G دی، که په G کې کم له کمه یو ښی یویتوکی e
موجود وي، چی لاندې شرطونه پوره کړي

د ټولو $a \in G$ لپاره $ae = a$

او دا توکی e داسی وټاکل شي، چی د هر $a \in G$ لپاره
کم له کمه یو ښی په خټ توکي $a \in G$ موجود وي، چی
غوښتنی

$$a \cdot a^{-1} = e$$

پوره کړي.

اوبی یا حل : که دا پورته ورکړ شوې غوښتنی پوره وي،
خو دا مو وښوول، چی گروپ جوړوي. اوس دې یو
نیمگروپ G راکړ شوی وي، چی پورته نیونی پوره کوي.
دا غواړو وښایو، چی e په G کې یو کین یویتوکی هم
دی. که د a^{-1} سره د a ښی په خټ توکی وښایو ، نولاس
ته راځي

$$eaa^{-1} = ee = e = aa^{-1}$$

که د برابرڼ دواړه خواوې د یوه a ته په څټ توکي سره
ځل کړو او د نیمگروپ د ځل یواځنوالي قوانین وکاروو
یا استعمال کړو، نو لاس ته راځي

$$eae = ae$$

له کوم څخه چې د حلونکي یا اویوونکي اړیکي $ea = a$
لاس ته راځي.

بالاخره د G گڼن یویتوکي e' او ښی یویتوکي e'' رانیسو،
نو د مخ ته تیرو جملو ثبوت څخه دا اوبی یا حل $e'' = e'$ لاس
ته راځي، چې په دې توگه د G یوې (یویتوکي) e موجودیت
او یواځنتوب وښوول شو.

بیا دې a^{-1} د یوه توکي $a \in G$ ښی په څټ توکي وي.
که برابرڼ $aa^{-1} = e$ له کین لور د a^{-1} سره ځل کړو، نو لاس
ته راځي

$$a^{-1}aa^{-1} = a^{-1}$$

د a د ښي په څټ توکي د اخرنی برابرڼ ځلولو یا ضربولو
څخه لاندې نتیجی ته راځو

$$a^{-1}ae = e$$

له کوم، چې $a^{-1}a = e$ لاس ته راځي.

دا توکی a^{-1} ته له دې امله یو کین په څې توکی هم دی. لکه د مخه تیرې جمله د د ثبوت په توګه، کی شي ساده وښوول شي، چې د a هر ښی په څټوکی د کین په څټو کی سره پریوځي یا هغي سره ورته دی. په دې توګه په G کې د هر توکی a لپاره د هغه توکی په څټوکی موجودیت په یواځنی توګه تضمین دی. د جملي د ثبوت د پوره کیدو لپاره دې په ګوته شوی وي، چې توکی

$$x = a^{-1}b \quad \text{او} \quad y = ba^{-1}$$

د برابرې $ax = b$ او $ya = b$ حل ښايي. دا حلونه یواځنی دي، ځکه، چې $ax = xa$ دی، نو له کین څخه یی د a' سره ځلوو او $x = x$ لاس ته راځي. پای یا *

د ابلګروپ د څیړنی لپاره، د ځل عمليي په ځاي د زیاتون ګنډنه یا عمليه په کار اچوو، چې ناپیلی توکی یی 0 دی او هر توکی a ته په څې توکی یی د $-a$ سره په نڅښه کوو. دلته هم همغه پورته جمله کاروول کیږي، خو د ښی یویتوکی لپاره 0 صفر یوي توکی دی او ښی په څې یی $-a$ دی. د په څې عمليي یواځنتوب

د يوه نيمگروپ بيلگه چې گروپ نه وي.
 که د طبيعي گڼونو ډيری N پام کی و لرو، نو دا ډيری د
 زياتون عمليي ته نيمگروپ جوړوي، خو دا گروپ نه دی،
 ځکه، چې په دې ډيري کی، په هر حالت کی کمون نه
 دی تعريف.

که نسبت و ځل ته د گڼونو څخه گروپ جوړوو، نو بايد
 دا مو پوره په پام کی وي، چې دا گڼونو ډيری د صفر توکی
 ونه لري، ځکه چې په صفر پرويشنه نه ده تعريف.

۳ . ۲ بدن يا تن او کړی

(Körper und Ring (Field and ring

په داسی حال کی چې د گروپ اپريشنونه يا گروپ عمليي
 يواځی له يوه تړون عمليي څخه منځ ته راځي، اوس دوه
 عمليي څنگ په څنگ راوړل کيږي، چې په ورسره د گڼو-
 شميرني بلد ډول، چې زياتون « + » او ځل يا ضرب
 « . » سره بنسټول کيږي، تکیه کوو. که له ريشنل گڼونو
 څخه مخ ته ولاړ شو، نو د هلته باوري شمير قاعدو څخه

په ورته ذهنيت، لکه په گروپونو کې، نوي الجبري جوړ-
ښتونه لاس ته راځي.

۳ . ۲ . ۱ تعريف : يو بدن يا تن د يوه ډيري F او دوه
عمليو $+$ او $\cdot$ څخه جوړ دی، چې د F د توکوهره جوړه
(a, b) د F په يوه يواځنی توکی $a+b$ همداسی $a \cdot b$ باندې
داسی څيره کړي، چې لاندې باوري کړي يا لاندې په کې
باور ولري:

ډيري F دې و $+$ ته يو ابل گروپ وي، دا په دې مانا،
چې لاندې باوري کيږي

۱ - د زياتون اسوختيو قانون

. د ټولو $a, b, c \in F$ د لپاره $(a+b)+c = a+(b+c)$

۲ - د زياتون کموتاتيو قانون

د ټولو $a, b \in F$ لپاره $a+b = b+a$

۳ - په F کې يو صفر توکی 0 شته، دا په دې مانا
چې $0+a = a+0 = a$ باور لري د ټولو $a \in F$ لپاره.

۴ - هر توکی $a \in F$ ته يو توکی $-a$ په F کې موجود

دی د $(-a)+a=0$ سره ، د کوم سره چي 0 په F کی صفر توکی دی

د F توکو د ځل یا ضرب . لپاره باور لري
۵ - اسوخیاتیو قانون

د ټولو $a, b, c \in F$ لپاره $(a.b).c = a.(b.c)$

۶ - په F کی یو یو توکی 1 شته ، دا په دې مانا ،
چی $1.a = a.1 = 1$ د ټولو $a \in F$ لپاره .

۷ - هر توکی $a \in F$ ته د $a \neq 0$ سره ، یو توکی a'
د $a.a' = 1$ سره موجود دی ، چیرته چی 1 د F یو
توکی دی.

۸ - دیستریبوتیو قانون

$$a.(b+c) = a.b + a.c \quad \text{او} \quad (b+c).a = b.a + c.a$$

د ټولو $a, b, c \in F$ لپاره

$$1 \neq 0 \quad - \quad ۹$$

که یواځي د اکسیومونو ۱ - ۵ او ۸ باوریتوب
وغوښتل شي، نو F څه کړی بلل کیږي.
که برسیره پر دې اکسیوم ۱۰ باور ولري یعنی
۱۰ - د ځل کموتاتیو قانون

د ټولو $a, b \in F$ لپاره $a \cdot b = b \cdot a$

نو F یو کموتاتیو تن یا کموتاتیو بدن او همداسی
کموتاتیو کړی بلل کیږي

لکه څنګه په ګروپ کی په همدې توګه یوه کړی یا تن هم
د $(F, +, \cdot)$ په ځای د F سره په نڅېنه کوو. د ځل لپاره
سومبول « $\cdot$ » نه لیکل کیږي او د دې لپاره لنډ لیکو ab .
ډیر واره د «بدن» یا «تن» لاندې کموتاتیو بدنونه پو-
هیږو، په داسی حال کی، چی ناکموتاتیو بدنونه، «کاره
بدنونه» بلل کیږي. دلته به موږ تل کموتاتیو بدنونه تر
څیړنی لاندې نیولي وي.

د اکسیوم ۱ او اکسیوم ۵ له امله کیدی شي، چی نوکان
نور هم پریښوول شي یا تیریدنه ترې وشي یا ونه لیکل شي.
د نوکانو د نه لیکلو لپاره یو بل د مخه پیژندل شوی قرارداد
یا پریکړې یو قاعده هم شته، چی د ټکو لکه ځل عملیه د
کړینو لکه زیاتون عملي څخه د مخه اجرا کیږي.
لکه د $(ab)+c$ په ساده توګه $ab+c$ لیکل کیږي. دا ساده-
والی همدا اوس د اکسیوم ۸ په فرمولولو کی وکارول شو.
د بدن F یا همداسی د کړی R ناپیلی توکی زیاتون ته صفر-

توکی دی او یا لنډه صفر دی. دا په خټه توکي a و $-a$ ته منفي توکی بلل کیږي. د $b+(-a)$ په ځای لنډه لیکو $b-a$ او دا کارونه د a او b کمون بولو. باور لري $a+(b-a)=b$ او $b-a$ د ۱ ، ۲ ، ۳ له مخی د برابرې $a+x=b$ یواځني حل دی. د ۱ ، ۲ ، ۳ له امله بالاخره باور لري $-(-a)=a$ او $-(a+b)=-a+(-b)=-a-b$. دا د $F^*=F\setminus\{0\}$ څلگروپ ناپېلي توکی 1 د بدن یا تن F یویتوګي یا ساده یوی بلل کیږي. کړی دې ته ضرورت نه لري چی یویتوګي ولري» که یویتوکی موجود وي نو یواځنی به ټاکلي وي.

۳ . ۲ . ۲ د بدنونو لپاره بیلګي

الف - د ریشنلګڼونو ډیری Q او همداسی د رییل ګڼونو ډیری R په ورسره بلدو تړنو یا عملیو له لارې یعنی زیاتون او ځل له لارې هر یو کموتاتیو بدن یا تن جوړوي،

ب - د ټولو کمپلکسګڼونو ډیری C هم یو کموتاتیو بدن یا تن جوړوي. په روښانه توګه یا ډول یو کمپلکس ګڼ a دا لاندې بڼه لري $a = a_1 + a_2 i$ د رییل ګڼونو a_1, a_2 سره او

ایماگیناریوون i سره، د کوم لپاره چی $i^2 = -1$ باور لري.
 دا a_1 د a رییل برخه او a_2 د a ایماگینار برخه بلل کیږي.
 په نڅېښه: $a_1 = \text{Re}(a)$ او $a_2 = \text{Im}(a)$
 که $b = b_1 + b_2i$ یو دوم کمپلکس گڼ وي، نو زیاتون،
 کمون او خل یی په څرگنده توگه په لاندې ډول روښانه دي
 یا تشریح شوي دي:

$$a \pm b = (a_1 \pm b_1) \pm (a_2 + b_2)i,$$

$$a b = (a_1 b_1 - a_2 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$$

دا و کمپلکس گڼ $a = a + ai$ ته کوچوگيږي کمپلکس
 گڼ $\bar{a}$ د $\bar{a} = a_1 - a_2i$ سره تعریف دی. په دې پسی تړلي
 لاس ته راځي

$$\overline{a \pm b} = \bar{a} \pm \bar{b}, \quad \overline{ab} = \bar{a} \cdot \bar{b}, \quad \bar{\bar{a}} = a,$$

$$a + \bar{a} = 2\text{Re}(a), \quad a - \bar{a} = 2i\text{Im}(a)$$

د یوه په خوښه کمپلکسگڼ a لپاره باور لري

$$a\bar{a} = (\text{Re}(a))^2 + (\text{Im}(a))^2$$

له دې امله $a\bar{a}$ تل یو نامنفی رییلگڼ دی، او $a\bar{a} = 0$
 د $a = 0$ سره برابر ارزښته دی.

که $|a| = 0$ یو کمپلکسگڼ وي، نو باور لري $|a\bar{a}| = 0$

او $a = \bar{a} / aa \in C$. د کمپلکس گڼ ارزښت $|a|$ ،

چی $a = a_1 + a_2 i$ د نامنفی رییلگڼونو ریښه ارزښت

دی. $aa = a_1^2 + a_2^2$ دا په دې مانا، چې

$$|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} .$$

رییلگڼونه ځانگړي کمپلکس گڼونه دي، په نامه هغه گڼونه،

چی ایماگینار یی ورکیري: کمپلکسگڼ ټیک هلته یا هلته او

هلته یو رییلگڼ دی، که $a = \bar{a}$ وي.

۳ . ۲ . ۳ د کریو لپاره بیلگی:

الف - د ټولو ټولگڼون ډیری Z یوه کموتاتیو کری ده، د یوي

سره. * مگر Z بدن نه دی، ځکه، چی د بیلگي په توگه ۲

په Z کی نسبت و ځل ته په څټ نه لري. یعنی $1/2$ په Z

و ۲ ته په څټ توکی نه دی.

ب - جوړه ټولگڼونه $R = 2Z$ ددي لپاره بیلگه ده، چی

صفرتوکی نه لري.

پ - F دې یو کموتاتیو تن وي. یوه د لاندې بني افاده

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

د $a_i \in F, i = 0, 1, 2, \dots, n-1, n$ سره پولینوم بلل کیږي د یوې نامعلومې x سره او چی څلوونې یا ضربونه او یا کوایفیښتونه یې له F وي. که $a \neq 0$ وي، نو n د پولینوم $f(x)$ درجه بلل کیږي.

نڅښونه یی: $\text{Grad } f = n$ گراد

که حتی $a = 1$ وي، نو $f(x)$ یو نورمې شوی پولینوم

$\text{normiertes Polynom}$ بلل کیږي. د صفر درجي

پولینومونه ثابتی دی د $a \in F, a \neq 0$ سره. صفر پولینوم

$0 (n=0, a=0)$ سره درجه نه ترتیب یا تنظیم کیږي.

د ټولو پولینومونو $f(x)$ ډیری، چی څلوونې یی له بدن F

څخه وي د $F[x]$ سره په نڅښونو یا په نڅښه کوو. په $F[x]$

باندې زیاتون (په ورکړ شوی حالتکي د صفر څلوونو سره)

او یو ځل یا ضرب په دې لاندې ډول تشریح شوي

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n) + (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n)$$

$$= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_n + b_n)x^n,$$

$$(a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m) \cdot (b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n)$$

$$= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 +$$

$$\dots + a_mb_nx^{n+m}$$

و زیاتون « + » او خل « . » ته $F[x]$ یوه کړۍ ده،
د پولینوم ۱ سره د یوټوکی په څیر. پولینوم‌پذیری $F[x]$
پولینوم کړي په F باندې بللکیر، د ناپیژنونکی x سره.

دې تراوسه یادشوو بدنونو ترمنځ د کمپلکس گڼونوگروپ
یو ځانگړی ځای لري، له دې امله په ځانگړي څیړنې کې
ځانگړی رول لري، ځکه چې ددې لپاره د الجبر اصلي
جمله باور لري کومه چې په لاندې ډول ده:

۳ . ۲ . ۴ جمله: هر یو پولینوم $f(x) \in C[x]$
د $\text{Grad } f > 1$ سره د لاینی پولینومونو په څلورنویا ضریبونو
ټوټه کیږي، دا په دې مانا، چې $f(x)$ ته ډیر پای مختلف
کمپلکس گڼونه c موجود دي، او طبیعي گڼونه k په داسې
توگه یا ډول چې لاندې باوري کوي:

$$f(x) = \prod_{i=1}^m (x - c_i)^{k_i} \quad \text{او} \quad \text{Grad } f = \sum_{i=1}^m k_i$$

دا جمله دلته نه ثبوت کیږي.

دا لاندې جملې دا را په گوته کوي، چې په خوښه کړیو او
بدنونو یا تنونو کې، په ورسره بلد ډول شمیرنه کیږي

۳ . ۲ . ۵ مرستندوي جمله:

په يوه کړۍ کې باو رلي: $0.a = a.0 = 0$ د هر توکي a لپاره .
اوبی يا حل: د $0+0=0$ اوی د اکسیوم ۸ له امله باورلري:

$$0.a+0.a = (0+0).a = 0.a$$

د دې او ۳ . ۱ . ۴ څخه لمری اوبی $0.a = 0$ لاس ته راځي، دوهم اوبی يا حل په ورته توګه لاس ته راځي . *

۳ . ۲ . ۶ مرستندوي جمله: په يوه کړۍ کې باور ري

$$a(-b) = (-a).b = -ab$$

په ځانګړي توګه دا لاندې باور لري

$$(-a)(-b) = ab$$

اوبی: د ۸ او ۳ . ۱ . ۴ له امله لاس ته راځي

$$ab + a(-b) = a(b - (b)) = a.0 = 0$$

په دې پسې $a(-b)$ و ab ته منفي توکی دی، دا په دې مانا چې باور لري

$$a(-b) = -(ab)$$

په ورته توګه دوم برابرې لاس ته راځي. *

د مخه مو د بدن کلیمه روښانه کړه، اوس غواړم، چي دا کلیمه له یوې پېلې لورې هم، یا بهتره، په یوه بل ډول تر څیړنې لاندې ونیسیم او هغه په دې ډول، چي هغه مو ورسره بلد د تړونکارونو نڅښې ونه کاروم او دوه ذهني تړونونه راوړم، چي وروسته کار مو بیا همداسي مخ ته بیولی دی:

۳ . ۲ . ۷ تعریف: د ډیري M هغه جوړښتونه بدن بلل کیږي، د کومو لپاره چي باور ولري:

- ۱ - په ډیري M کی دوه تړاونه $^{\circ}$ او o تعریف دي
- ۲ - دلته $(M; ^{\circ})$ کموتاتیو ګروپ دی
- ۳ - دلته $(M \setminus e_0; o)$ یو ګروپ دی او e_0 یو ناپېلی توکی دی و $^{\circ}$ ته.

دا لاندې قوانین باور لري:

$$4 - \text{د یستریبوتیو قانون: } ao(b^{\circ}c) = (a^{\circ}b)o(a^{\circ}c)$$

$$(a^{\circ}b)oc = (aoc)^{\circ}(boc)$$

په یوه کموتاتیو بدن کی په دې برسیره باور لري

$$5 - \text{کموتاتیو قانون: } aob = boa$$

۳. ۳ لاندېگروپ او لاندېگرمی

۳. ۳. ۱ تعریف : د یوه گروپوئید G برخدېری یا لاندېدېری U گروپوئید بلل کېږي، که د U د هرو دوه توکو همغه ترنه $^\circ$ (خل) د دې دېری U توکی وي. که G نیمگروپ وي، نو بیا په نتیجه نیونه کی له یوه لاندې نیمگروپ څخه غبرېږو.

۳. ۳. ۲ تعریف : یو د گروپ G برخدېری U یو د گروپ G لاندېگروپ یا سبگروپ Subgrupp بلل کېږي، که U نسبت د گروپ G گروپ عملیو یا گروپترون $^\circ$ ته پخپله گروپ وي. په نڅېسونه $U < G$.

۳. ۳. ۳ مرستندوي جمله: د گروپ $(G, ^\circ)$ یو ناتش برخدېری U ټیک هلته یا هلته او هلته د گروپ G لاندېگروپ یا سبگروپ دی، که د هرې جوړې $a, b \in U$ لپاره تل باور ولري

$$a \circ b \in U$$

اوبی یا حل: شرایط په پوره باور ضرور دي. دا باید وښوول شي، چی پوره کیدونکي هم دي.

دلته دې e د G یو توکی وي. د $U \neq \emptyset$ له امله یو $a \in U$ موجود دی. نو لرو $a' \in U$ او $e = a^\circ a'$ د U یو توکی دی. ورپسې باور لري $a \in U$ د هر $a = e^\circ a \in U$ لپاره. د مرستندوي جملې له امله لرو $a^\circ b \in U$ د ټولو $a, b \in U$ لپاره.

ساده کتل کيږي، چی په U کی اسوخیاتیو قانون باور لري. پس $(G, \circ)$ یو ګروپ دی.

۳ . ۳ . ۴ تعریف : د یوې کړۍ R لاندېډیری A ، نسبت و هغه په R کی تعریف شوو عملیو ته، یوه لاندې-کړۍ بلل کيږي. دا په دې مانا، چی په A کی د R ټولې تړنې یا عملیې باور ولري. یا په بل عبارت، چی A نسبت و زیاتونګروپ ته یو لاندې زیاتونګروپ جوړوي او د R خلګروپوئید ته لاندېګروپوئید جوړوي، او په همدې ډول په R کی تعریف دیستریبوتیو قانون په لاندېډیری A کی هم باور لري.

په ورته توګه د بدن یا تن F لاندې تن هم تعریف دي.

۳. ۳. ۵ جمله : د G لاندېگروپونه پخپله G او یونلاندېگروپ E ، چې له یویتوکی څخه جوړ دی ، دي. په ورته توګه د کړی R لاندېکړی پخپله R او د صفر-توکی څخه جوړه شوې ، صفرکړی دي.

د نورو لاندېگروپونو غوره بیلګو جوړولو لپاره د یوه توکی د پوتنڅ ($Potenz$) کلیمه پلي کوو یا رامنځ ته کوو. G دې یو په خوښه نیمګروپ وي او a دېد هغه په خوښه یو توکی وي. د ځل اسوځیاتيو قانون دا اجازه راکوي، چې په یواځنی توګه (یواځنی ته دې د ګرانو لوستونکو تل پاموي، چې د څه لپاره کارول کیږي) د یو په خوښه پوتنڅ یا توان

$$a^n, \quad n = 1, 2, \dots, n$$

تعریف کړو، او دا باور لري

$$a^k \cdot a^l = a^{k+l} \quad (1)$$

$$(a^k)^l = a^{kl} \quad (2)$$

له (1) څخه لاس ته راځي، چې په یوه نیمګروپ G کې د یوه توکی ټول مثبت توانونه یو اېل نیمګروپ جوړوي، چې د a توکي څخه منځ ته راغلی یا جوړ څیکلیکي یا بیرته راګرځیدونکی لاندېگروپ بلل کیږي.

که G برسیره پر دې یو ګروپ وي، نو لمری داسی نيسو،
چی $a^0 = 1$ او بالاخره د توکي a منفی توانونه هم پلي
کوو. که n یو طبیعي ګڼ وي نو د لاندې برابرې

$$a^n (a^{-1})^n = 1$$

راجوړیدنه په ساده توګه کتل کیږي، له کومې چی بیالاس
ته راځي

$$(a^{-1})^n = (a^n)^{-1} \quad (3)$$

دا توکی، چی د (3) دواړه خواو کی یی ځای نیولی د a^n
سره ښایو یا په نڅښه کوو. برابرې (1) او (2) د ګروپ G
د یوه ټولګڼیز توکي a لپاره ریښتوني پاتي کیږي او د a
ټول توانونه د صفر او منفی پوتنڅ پورې له دې امله د G
یو لاندیګروپ جوړوي. دا لاندې ګروپ د a څخه جوړ بیرته
راګرځیدونکی zyklische Untergruppe لاندېګروپ بلل
کیږي او په $\{a\}$ سره په نڅښه کیږي.

په زیاتون لیکدود سره بیا د a د پوتنڅ په ځای د هغه
دیرځلی راوړل کیږي.

په ګروپ G کی د یوه توکي a توان یا پوتنڅ په مختلف
جګګڼ یا اکسپوننت Exponent سره ضرور د مختلف

گروپ توکي نه ورکوي يا نه رامنځ ته کوي، کوم چی د ناپايي گروپ له موجوديت څخه جوتیږي. که د a ټول توانونه توپیر ولري يا په بل عبارت مختلف وي، نو a د ناپايیدیر نظم توکی بلل کیږي، په بل ډول بیا یو د پاینظم توکی بلل کیږي.

په دوم حالت کی یو ټولگن k او یو ټول گن l د $k > l$ او

$$a^k = a^l$$

سره موجود دي.

له دې څخه لاس ته راځي $a^{k-l} = 1$ ، چیرته چی $k - l > 1$ دی، نو له دې امله د a توانونه شته، چی د یویتوکی سره برابر دي. ددې اکسپوننت یا جگگن کوچنی موږ د a نظم بولو یا نوموو.

که a یو د پاینظم n توکی وي، نو بیا په روښانه توگه توکي

$$1 = a^0, a, a^2, \dots, a^{n-1} \quad (4)$$

ټول یو له بل توپیر لري او هر ورپسې منفی یا مثبت د a پوتنځ a^k د یوه دې په (4) کی وکړشوو توکو سره برابر دی. دا په لاندې ډول لیدل کیږي: دی

$$k = nq + r, \quad 0 < r < n$$

نوله (1) او (2) اړیکو $a = 1$ څخه لاس ته راځي:

$$a^k = (a^n)^q a^r = a^r$$

له دې سره د پايښم توکو لپاره لاس ته راځي: ديوه توکي a نظم د هغه توکی n څخه توليد شوي يا جوړ شوي بيرته راگرځيدونکي يا ځيوکليکي لاندې کړوپ $\{a\}$ سره برابر دی يا د هغه سره سر خوري.

هغه گروپونه، چي يواځي د پايښم توکي لري تورزيونگرپونه *periodische Gruppen* يا پريودي گروپونه *Torsionsgruppen* يا بيرته راگرځيدونکي گروپونه بللکيږي، په بل ډول ناپريودي گروپونه *Torsionsfrei Gruppen* بلل کيږي.

اوس دا پوښتنه د کړيو لپاره، لکه د بيرته راگرځيدونکي لاندیگروپ لپاره، رامنځ ته کيږي، چي ايا داسی يوه لاندېکړی يا مينيمال لاندیکړی شته، چي يو ورکړ شوی توکی ولري. R دې يوه ورکړ شوې (ناضروري اسوختياتو) کړی وي او a دې يو د هغی کړی په خوښه توکو څخه يو توکی وي. هر د هغه لاندیکړی د توکي a سره ټول ځلونه، په کومو

کی چی ټیک فاکتور a رامنځ ته کیږي، د کوم یوه گڼون یا تعداد $n = 1, 2, 3, \dots$ سره، دا فاکتور د a د مثبت پوتنځ یا توان رول لوبوي. دا چی ځل باید ضرور اسوځیاتيو نه وي، نو په ټولو توپیریزو ډولونو، جوړه ډوله په نوکانو کی نیول کیږي، چی په دې توگه د کړی دوه فاکتورونه یو د بل سره ځلیږي یا ضربیږي. د $n = 3$ لپاره ځل $a(aa)$ او $(aa)a$ او $n = 4$ لپاره، او همداسی د $n = 5$ لپاره اوداسی ورپسی. هر لاندېکړی د a سره ټول زیاتونونه، ورکړشوي پای زیاتو ځلونه، کوم چی د ټولگڼیز فاکتور سره سنبال وي خوندي لري. داسی د R توکی. چی په دې زیاتونیز ډول لیکل کیږي د خپلی لور څخه په R یو لاندې کړی جوړوي او دا، هغه غوښتونکی یا لټوونکی د a څخه جوړه، لاندېکړي بلل کیږي.

د یوه اسوځیاتيوې کړی R لپاره د یوه توکی a څخه جوړ لاندېکړی لاندې د R د ټولو توکو څخه جوړه لاندېکړی، چی په یوه ډول د a زیاتون او مثبت پوتنځ څخه جوړه وي لاس ته راځي (د ټولگڼیز ځلوونو سره). دا کړی له دې امله کموتاتیو ده.

د یوه گروپ هر لاندېگروپ د دې گروپ یویتوکی لري، د

يوې کړۍ هره لاندېکړۍ په همدې توگه د دې صفر توکي لري. دگروپ G لاندې گروپونو (په همدې توگه د کړۍ R لاندېکړيو) غوڅي له دې امله تشديري نه دي.

۳ . ۳ . ۶ جمله : د گروپ G د لاندېگروپونو يوه سيستم غوڅي بيرته د G لاندېگروپ دی. په همدې توگه د کړۍ R د لاندېکړيو د يو سيستم غوڅي، د دې کړۍ لاندېکړۍ جوړوي. د لاندې نيمگروپونو يوه سيستم غوڅي بيرته لاندینيمگروپ دی، که دا تش نه وي، او همداسي ورپسې...

مور دلته د لمړنۍ غوښتنې ثبوت مخ ته بيايو. ددې لپاره دې په گروپ G کې يو لاندېگروپ سيستم A_i ورکړ شوی وي، چيرته چې i يو پژندډيري يا ايندکسډيري Indexmenge کې ځغلی، او D دې د دې لاندېگروپونو غوڅي وي. که چيرې b او c د D په خوښه کوم توکي وي، نو د دوي ځل bc په هر لاندې ډيري A_i کې پروت دی او په ورپسې توگه يا په لاس ته راوړنې سره سملاسي هم په D کې پروت دی. نو له دې امله b^{-1} د په خوښه $b \in D$ لپاره په هر A_i کې پروت دی او له دې امله په D کې هم پروت دی. پس D د G لاندې ډيري دی.

اوس نيسو چي G دې يو گروپ، کړی او يا په همدې توگه یو تن يا بدن يا کوم يو بل، مورد ته څرگند، الجبري سيستم وي، کوم چي تراوسه پيژنو. د M سره د G لاندېگروپ ښايو، نو يو مينيمال لاندېگروپ (په ورته ډول لاندېگرمی، لاندې تن يا لاندې بدن) شته، کوم چي M خوندي لري. دا د M سره جوړه شوي يا توليد شوي لاندې گروپ $\{M\}$ جوړوي او د ټولو M خوندي لرونکو د G د لاندېگروپونو غوڅی دی، د کومو څخه، چي کم له کمه يو دا په نامه گروپ G موجود دی.

د مخه ويل شوي يا ورکړ شوي څيوکليکي لاندې گروپ تعريف د ټوليزولو له لارې ساده ښوول کيدی شي، چي لاندېگروپ $\{M\}$ ټيک د ټولو هغو G توکو څخه جوړ دی، چي د په خوښه ترتيب د پايدیرو M توکو د پوتنځل په بڼه ليکل کيدی شي.

ټيک په همدې توگه د مخه لوستل شوي ټوليزولو له لارې لاندېگرمی، چي په R کی له M توليد ټولو توکو جوړ دی، کوم چي په M کي د پاي ډيرو توکو د ځلولو د زیاتون (د ټولگڼيز ضريب سره) څخه انځوريدلی شي. په ناسوڅيا-تيو حالت کی دې طبعاً ضريبونه د ټول ممکنو نوکانو سره بندي شي.

۳ . ۳ . ۷ يا دونه يا تعريف: که د تيرې برخې د M لپاره، د گروپ G د ټولو لاندې گروپونو $A_i, i \in I$ سيستم ونيول شي يا فرض شي، نو د يوه لاندې گروپ کليمي ته راځو، چې د ورکړشو لاندې گروپونو سيستم له خوا توليد شوی دی. ددې لپاره $\{A_i, i \in I\}$ لیکو، يا هم $\{A, B\}$ ، که دا د لاندې گروپونو ټولنه وي. په همدې توگه کيدی شي په يوه کړی کې هم د لاندې کړی سيستم له لارې تعريف لاندې کړي هم پوهيدل کيدی شي.

۳ . ۳ . ۸ يا دونه يا تعريف . دلته دې G يو گروپ وي، يوه کړی او همداسی ورپسې. نو په G کې داسی لاندې کړي M شته، د بيلگي په توگه پخپله G ، د کوم لپاره چې باور لري

$$\{M\} = G$$

هر داسی لاندې کړي د G لپاره يو جوړيدونکی يا توليدونکی $\vee$ ينکی سيستم بلل کيږي . تر هغی، چې G يو پای د توليدونکو سيستم ولري، نو دلته د گروپ $\vee$ يو نیمگروپ، يو کړی G (څخه غږیږو، چې پایتوليديدونکی گڼون يا

شمیر ولري. په ځانگړې توگه کیدی شي، چي دا جوړوونکی یا تولیدونکی له یوه توکي څخه جوړ وي. دا گروپ چي یو جوړیدونکی توکي لري او د هغه د څیوکلکي لاندې گروپ سره سر وڅوري، څیوکلک گروپ بلل کیږي.

۳ . ۴ . ایزومورفیزم Isomorphism

دا دلته د هر الجبري سیستم راوړلو کلیمو لپاره د ایزومورفیزم کلیمه روښانه کیدی یا تشریح کیدی شي، کومه چي همغه رول لوبوي لکه په نیم نظم شوي ډيري کی یی چي لروده.

د بیلگي په توگه ایزومورف گروپونه یو بل ته کټمټ دي، د یو او همغه گروپ دوه اکسمپلاره یا نموني، چي په نیولی دي وي، چي که د گروپ عمليي یی تړونونه همغه وي، په داسی حال کی چي توکي له کومو چي گروپونه جوړ دي، طبیعت یا پیدایښت کوم رول نه لوبوي. په کره کلک تعریف سره لاندې راوړو:

۳ . ۴ . ۱ تعریف: گروپوئید G او G' ایزومورف

دي، که د گروپوئيد يواځنی او په خټ څيرونه f د گروپو-
ئيد G په گروپوئيد G' داسی موجود وي، چی د په
خوښه $a, b \in G$ لپاره باور ولري

$$(ab)f = af.bf$$

په همدې توگه هره څيرونه ، چی دا غوښتنی پوره کوي،
د ايزومورفی څيرونی په څير يي په نخښه کوو يا يی ايز-
ومورف څيرونه بولو. د دوه گروپوئيدو خوښه، چی يو
بل سره ايزومورف وي، سيومتري خوښه دي، (هغه و
ايزومورفی څيرونی ته په خټ څيرونه بيرته ايزومورف
څيرونه ده)، او ترانزيتيو، دا برسیره پر دې ، که څيرې
څوک د گروپوئيد کټمټ په ځان څيرونه ورسره وگڼي،
رفلکسيو هم دی. د ايزومورف گروپوئيدو لپاره په ټوليزه
توگه لاندې ليکدود کارول کيږي يا استعماليږي

$$G \sim G'$$

که چيرې د نورو الجبري جوړښتونو ايزومورفي مو هم
مطلب وي ، نو موږ به بيا هم همدا نخښه وکاروو.
طبعاً به د گروپوئيد په ايزومورف څيرونه کی ټول هغه
خوښه، چی په گروپوئيد کی ليکل کيږي، لکه اسوڅياتيو

قانون، کموتاتیتو، د یوټوکي موجودیت او د په خټتوکي موجودیت، د گروپوئید څیرې چه هم ور کارول کیږي یا وروړل کیږي. موږ په ساده بیلگه سره ښایو، چی دا وینا څنگه ښوول کیدی شي. G دې یو کموتاتیتو گروپوئید وي او f دې د G یوه ایزومورف څیرونه په G' وي. که a' او b' دوه د G' په خوښه توکي وي او a, b د G هغه توکی وي، د کوم لپاره چی باور لري

$$af = f(a) = a' \quad , \quad bf = f(b) = (b)f = b'$$

نولرو

$$(ab)f = a'.b' \quad , \quad (b.a)f = b'.a'$$

او د برابرېون $ab = ba$ او د څیرونی د یواځنتوب څخه $a'b' = b'a'$ دي. له دې څخ لاس ته راځي،

۳ . ۴ . ۲ جمله: د نیمگروپ، گروپ او همداسی د ابلگروپ یا کموتاتیتو گروپ ایزومورفی څیرې بیرته نیمگروپ، گروپ او همداسی ابلگروپ دی.

۳ . ۴ . ۳ مرستندوي جمله: دوه کړي یو بل سره ایزومورف دي، که د هغو د توکو ترمنځ یو یواځنی اوپه

څټکيدونکي نظم يا څيرونه موجوده وي، چي هغه څيرونه نسبت و زياتونگروپ ته ايزومورفيزم وي او هم د کړي و ځلگروپوئيد ته ايزومورفيزم وي. د ايزومورف څيرونه سره طبعاً کړي هغه څيرونه، اسوڅياتيو، او کمو-تايټو يا ليکړي liesche Ring او داسي نور وي، ساتي. د ايزومورف گروپونو لپاره يوه په زړه پورې بيلگه، د مثبت رييلگڼونو ځليزه گروپ او د ټول رييلو گڼونو زياتونگروپ جوړوي. که هر مثبت گڼ د هغه په لوگاريتم باندې تنظيم يا څيره شي، چي بنسټ يي کره کلک ټاکلی وي، نو د لمړي گروپ يو ايزومورف څيرونه، په دوم گروپ، لاس ته راځي. ايزومورفيزم له دې ريښتينيو څخه لاس ته راځي، چي د يوه ځل لوگاريتم دې د لوگاريتم د يوگونو فاکتورونو د زياتون سره برابر يا مساوي دی (د لوگاريتم او قوانينو لپاره دې ځما د شمير پوهنې کتاب وکتل شي).

مور. اوس هغه، مخه په گوته شوې پاملرنه په څيوکليکي زياتونگروپ کي رامنځ ته کوو او په يوه بيلگه پيل کوو. د ټولگڼونو زياتونگروپ د يوه ناپاي څيوکليکي گروپ لپاره بيلگه ده، ځکه، چي هر ټول گڼ د ۱ څو ځله دی.

۳ . ۴ . ۴ جمله : ټول ناپای څیوکلکي گروپونه د ټولگڼونو زیاتونگروپ سره ایزومورف دي او همداډول په خپلو منځونو کی هم. همداسی پای د n -نظم څیوکلکي گروپونه یو بل سره ایزومورف دي. ددې جملی له ثبوت څخه دلته تیریرو (ثبوت یی په Kuroš کی کتل کیدی شي).

۳ . ۴ . ۵ جمله: د ټولگڼونو د صفر لاندیگروپ، څخه توپیری ټول لاندیگروپونه د یوه څرگند طبیعي گڼ n د ډیرواره ډیری څخه راپیدا دي. او بی : روښانه ده، چی د یوه طبیعی گڼ ټول څوواره یو لاندېگروپ، دا په نامه له n څخه جوړ لاندېگروپ جوړوي. د یو بل څخه توپیری گڼونو n لپاره لاندېگروپونه هم یو له بل توپیر لري. کیدی شي یو د ټولگڼونو زیاتون گروپ، لاندېگروپ A ، چی یواځي د منفی گڼونو څخه نه وي جوړ، ځکه چی د هر گڼ سره د هغی په څت هم لري. n دې کوچنی طبیعی گڼ وي، چی په A کی خوندي ده. د یوه په خونښه $a \in A$ لپاره باور لري

$$a = qn + r, \quad 0 < r < n$$

نو دی

$$r = a - qn \in A$$

او په دې لاس ته راوړني $r = 0$ (د n له ټاکنې څخه) ، دا په دې مانا چې دی $a = qn$ ، څه مو چي ښوول.

۳ . ۴ . ۶ جمله : هر د یوه ناپای څیوکلکي گروپ لاندېگروپ څیوکلکي دی، او دا د پای څیوکلکي گروپ لپاره هم باور لري.

۳ . ۴ . ۷ تعریف : وایو، چي گروپوئید G په گروپو-ئید G' کی ایزومورف خوندې دی، او یا په G' کی ایزومورف نغښتی دی، که چیرې له G یوه ایزومورف څیرونه د گروپو-ئید G' په کوم یوه لاندېگروپوئید باندې موجود وي. دا کلیمه کړیو ته هم غزول کیدی شي،

هره کړی R ، په کړی R باندې د پوره ماتریکسکړی R_n کی ایزومورف خوندې دی.

سکالار ماتریکسونه ، دا په دې مانا، چي د همغه توکي $a \in R$ چي په اصلي نیمي یا قطر کی پروت وي او نور د نیمي دواړو خواو ته صفرونه وي، په نامه R_n یو لاندېکړی، د R سره ایزومورف ده.

۳ . ۴ . ۷ جمله : هره کړی R په ورکړ شوي ډیري M باندې یوه پوره فنکشنکړی سره، چی ارزښت یې په R کی پروت دی، ایزومورف دی. د ټولو $x \in M$ لپاره هر فنکشن د همغه برابر ارزښت $a \in R$ سره، هغه و R سره ایزومورف فنکشنکړی راکوي. د یوه په خوښه اسوخیاتيو، کموتاتيو کړی R کی پولینومکړی $R[x]$ پوتنخلړیکړی $R\{x\}$ کی ایزومورف خوندي دی. پوتنخلړیکړی د زیاتو پای صفر څخه توپیریدونکو څلوونو یا ضربونو سره، یو و $R[x]$ ته ایزومورف د $R\{x\}$ لاندېکړی جوړوي.

یو لوی کار د لاندې جملې اوبی یا حل غواړي:

۳ . ۴ . ۹ جمله : هره کړی R په یوه کړی کی، چی یویتوکی لري، ایزومورف خوندي ده. که کړی R په دې برسیره اسوخیاتيو یا کموتاتيو وي، نو کیدی شي، چی دا همداسی په یوه اسوخیاتيو، کموتاتيو دیویتوکی سره کړی کی خوندي شي. اوبی یا ثبوت: موږ د ټولو جوړو (a, k) ډیری په نظر کي

نيسو، چي $a \in R$ او k يو ټولگنې دي او د دې جوړو لپاره د لاندې مساواتو له لارې زياتون او ځل تعريفوو:

$$(a,k) + (b,l) = (a+b,k+l) \quad (1)$$

$$(a,k)(b,l) = (ab+la+kb,kl) \quad (2)$$

نسبت و زياتون ته يو ابلگروپ لاس ته راځي. دا چي برسیره پر دې

$$\begin{aligned} [(a,k)+(b,l)](c,m) &= (a+b,k+l)(c,m) \\ &= ((a+b)c+m(a+b)+(k+l)c,(k+l)m) \\ &= (ac+ma+kc+bc+mb+lc,km+lm) \\ &= (ac+ma+kc,km)+(bc+mb+lc,lm) \\ &= (a,k)(c,m)+(b,l)(c,m) \end{aligned}$$

باور لري او ټيک په همدې ډول د ديستريوتيو دوم قانون هم بنسولي شو، نو ډيري يوه کړي انځوروي. له (2) څخه ورپسې لاس ته راځي

$$(a,k)(0,1) = (0,1)(a,k) = (a,k)$$

دا جوړه (0,1) په دې کړيکي د يوټوکي ځاي نيسي يا نمايندگي کوي. برسیره پر دې د (1) او (2) سره سم لرو

$$(a,0)+(b,0) = (a+b,0),$$

$$(a,0)(b,0) = (ab,0)$$

د کومو سره، چي د ټولو د (a,0) فورم جوړو ډيري د ټولو

جوړو (a, k) په کړۍ کې یو R ته ایزومورف لاندېکړی جوړوي. له دې سره د ثبوت لمری برخه تکمیل ده، دومه برخه د (2) استعمال سره په ساده توګه لاس ته راځي.

موږ دا په ګوته کوو، چې دا له موږ جوړه شوې کړۍ یواځنۍ کړۍ نه ده (او همداسې هم نامینیماله کړۍ) د یویتوکی سره،

کوم چې یورکړه شوېکړی R (د ایزومورف خونديونۍ په موخه) خوندي لري، کیدی شي چې R پخپله یو یویتوکی ولري.

۳ . ۴ . ۱۰ جمله : هر ګروپوئید کیدی شي ، چې د یوې کړۍ په ځلګروپوئید کې خوندي شي، یو اسوخیاتیو یا کموتاتیو ګروپوئید کیدی شي، چې په یوه کړیکۍ، چې همغه خویونه ولري خوندي شي. د ثبوت لپاره ټول ممکن د زیاتون فورمولونو زیاتون رانیسو

$$\sum_{a \in G} k_a a \quad (3)$$

د کومو سره ، چې a د ورکړشوي ګروپوئید G ټولو توکو کې ځغلی، په داسې حال کې چې ځلووني یا ضریبونه k_a ټولګڼونه دي او په ریښتونی، داسې چې زیات ترزیات پای ډیر د صفر څخه توپیري رامنځ ته کیږي د زیاتون (3) زیاتون او ځل د برابر وننو یا مساواتو

$$\sum_{a \in G} k_a a + \sum_{a \in G} l_a a = \sum_{a \in G} (k_a + l_a) a \quad (4)$$

$$\sum_{a \in G} k_a a \cdot \sum_{a \in G} l_a a = \sum_{c \in G} m_c c \quad (5)$$

سره روښانه يا تشریح دی، په کومو کي، چې m_c د ټولو صفر څخه توپیر ځلونه $k_a l_a$ زیاتون په مانا دی، چې په ټولو a او b کی ځغلیدلی وي، د $ab = c$ سره. روښانه ده، چې د برابرۍ ښی لور (4) او (5) د (3) فورم زیاتون انځوروي. مساوات (5) وایي، چې په کيڼي لور، د فاکتورونو په څیر رامنځ ته شوي، پاي زیاتونونه د غړو په څیر پو له بل سره ځليري، او په ریښتونی د قانون

$$k_a a \cdot l_a b = (k_a l_a)(ab)$$

لاندې، چې د ab سره د ګروپوئید په موخه ورکړ شوې عملیه مو مطلب دی، د کومو سره چې د ځل ab رامنځ ته کیدو سره همغه توکی c ورکوي، سره یوځای راټول شي.

د زیاتون لپاره په هره توګه یو ابلګروپ لاس ته راځي. د دیسټریبوتیو قانون او د هغه ثبوت چې د G په ګروپ کی د ځل اسوخیاتو همداسی کموتاتیو قانون او همغه مساوي یي

د زیاتونونو ځل، چی فورم (3) لري لاس ته راځي، که څه هم خورا پراخ دی، مگر په پرینتسپ یا اصولوکی ستونځی نه رامنځ ته کوي، د هغو پرمخ بیول دې د لوستونکو دنده وي.

د ټول زیاتون، چی فورم (3) لري له دې امله نسبت و (4) او (5) مساواتو تعریف شوو اپریشن ته یوه کړۍ جوړوي، هغه زیاتون (3) په کومو کي، چی $k_a = 1$ دی، د په خوبه a لپاره، چی له G دی. د (5) پسی یو گروپ G سره ایزومورف لاندېگروپوئید، د دې کړۍ د څلورونکي گروپوئید سره، جوړوي. له دې سره دا بڼونه سر ته ورسیده.

دا له موږ جوړ شوې د گروپوئید G کړۍ د ټولگڼونو گروپو-ئیدکړۍ بلل کیږي.

که G یو نیمگروپ وي او یا گروپ، نو د دې په ځاي د ټولگڼیز نیمگروپ او همداسی د ټولگڼیز گروپ څخه غږیږو.

۳ . ۴ . ۱۱ جمله: هر گروپ د یوه ډیري M په سیو-

مترې گروپ کی ایزومورف خوندي دی، کیدی شي، چی د M په ځاي په ځانگړې توگه د گروپ ټولو توکو ډیری وکارول شي. دلته د گروپ G هر توکی a هغه ترانسفورمیشن باندې تنظیمو، چی یو د G توکی x په توکي xa باندې تنظیم

کړي. دا چې له $x = y$ څخه هم $ax = ay$ لاس ته راځي او برسیره پر دې د هر $x \in G$ لپاره برابرون

$$(xa^{-1})a = x$$

رامنځ ته کیږي، ترانسفورمیشن $x \rightarrow xa$ ګروپ G په ځان په خپل یواځنی څیره کوی یا تنظیموي، دا نو له دې امله یو پرموتیشن (پرموتیشن ځما د شمیرپوهنه کتاب کی په پراخه توګه روښانه شوی دی) دی. د $a = b$ لپاره په دې برسیره په دې د غوښتونکو پرموتیشنونو توکي یو له بل توپیر لرود-ونکی دي، ځکه، چې $1.a = 1.b$ دی. بالاخره برابرون

$$(xa)b = x(ab)$$

په ګوته کوي، چې د ab پورې اړونده پرموتیشن د a او b پورې اړونده یوه بل پسې راوړنو څخه لاس ته راځي.

۳ . ۴ . ۱۲ جمله : هر نیمګروپ G ، د یوه ډیري M سیومتري نیمګروپ کی خوندي دی.

اوبی یا حل: د ثبوت لپاره نیمګروپ G د ۳ ، ۴ ، ۱۰ سره سم په یوه، د یوه اسوخیاتیو کړی R ، په ځلیز ګروپ

کی خوندې کوو، دا بیرته د ۳ . ۴ ، ۹ سره سم په یوه
اسوخیاتویکړی R کی د یویتوکی سره خوندې کوو او
د G سره یی په نخښه کوو، چی داد اخرنی کړی خلیزه
نیمگروپ دی. لکه څنگه، چی په G کی هم یو توکی 1
د $1.a = 1.b$ سره له $a = b$ څخه موجود دی، نو د
لغاتو پورې د پورته جملی ثبوت سره دا سر خوري ، چی
دا نیمگروپ G د نیمگروپ سره پخپله، په دې ډیرګ G
باندې، ایزومورف خوندي دی. له دې څخه د سرچینیز
گروپ G خوندیونه لاس ته راځي.
موږ غواړو، چی دې ته ګوته ونیسو، چی د یوه گروپوئید
(په ځانګړي توګه یوه نیمگروپ) په بل گروپوئید (یوه
نیمگروپ) کی خوندیونه سیده وښایو، بی له دې، چی یوه
ګړی د یویتوکی سره وکاروو.

۳ . ۵ د نیمگروپونو په گروپ کی او کړی په یوه
(ناضرور کموتاتیو) تن یا بدن کی خوندیونه

هر نیمگروپ، ضرور په یوه گروپ کی، ایزومورف نه شی
خوندي کیدی، د دې لپاره ضروري شرطونه هغه باید ورسره
بلد د لنډونی قاعدې دي.

۳ . ۵ . ۱ جمله: له $ac = bc$ او همداسې $ca = cb$

څخه لاس ته راځي $a = b$.

يادونه : دلته گورو، چې د لنډونې قاعدې کارول شوي دي.

په لاندې برخه کې غواړو وښايو، دا راولشلوي ضروري شرطونه، چې د نیمگروپونو په گروپونو همداسې د اسوختیاتو کړۍ په یوه (ناسو^(۸) کموتایتو) بدن کې د کموتایتو په حالت کې پوره کیدونکي هم دي. د دې لپاره د لاندې مرستندوي جملې په ښوونه پیل کوو.

۳ . ۵ . ۲ مرستندوي جمله: د ابل په یوه نیمگروپ G

کې دې یو لاندې نیمگروپ S ورکړ شوی وي، او په G کې دې د S د توکو سره لنډونه وشي، دا په دې مانا، چې له

$$ax = bx, x \in S; a, b \in G$$

څخه دې تل $a = b$ لاس ته راشي. نو کیدی شي، چې G د ابل نیمگروپ ایزومورف په یوه داسې ابل گروپ G کې د یویتوکي سره، ایزومورف خوندې شي، چې د S هر توکی په G کې یو په خپل توکی ولري.

(۸) ناسو کموتایتو

یادونه : د دې جملې له ثبوت څخه تیریرو. دا د الجبر په درسی کتابونو کې کتل کیدی شي،

په دې پورته غوښتنو له مخې لاندې جمله لاس ته راځي

۳ . ۵ . ۳ جمله : هر ابل گروپ د لنډونو قاعدو سره په یوه ابل گروپ کې خوندي کیدی شي .
د دې ورکړ شوي جوړښت د طبیعي گڼونو په یوه زیاتون نیمگروپ ، کوم چې د لنډونو قاعدو سره یو ابل نیمگر-
وپ دی ، په ساده توګه د ټولگڼونو په زیاتونگروپ کې میندل کیدی شي ،

۳ . ۵ . ۴ جمله: په یوه اسوخیاتیو - هموتاتیو کړی R کې دې د توکو یو ډیری N راوستل شوی وي، په کوم کې چې صفر او پرفرویشن نه وي موجود. نو کیدی شي، چې کړی R ایزومورف په یوه اسوخیاتیو-کموتاتیو کړی R کې، د یوټوکی سره، داسې خوندي شي، چې د N هر توکي په R کې یوه په خپه توګه ولري.

یادونه : دا ثبوت هم پریردو او په دې توګه نورو غوښتنو ته هم پای ورکوو، چې موضوع اوږده نه شي.

۳ . ۶ نورمال پرويشوني

۳ . ۶ . ۱ تعريف : يو گروپ G او په هغه کي دې $a \in G$ توگه يو لاندې گروپ H دې ورکړ شوي وي. که يو $a \in G$ په خوښه توکي وي، نو ممکنه ځلوني ah چي د aH ټولگه ده، چيرته چي h په لاندې گروپ H کي ځغلي، دا د a تعريف شوې، د گروپ G کي اړخيز څنگ-ټولگي يا گاونډي ټولگي (مور به کونښن وکړو چي دا تل گاونډي ټولگي و بولو) بلل کيږي و لاندې گروپ H پسي. په څرگنده توگه $a \in aH$ دي، ځکه چي لاندې گروپ H يو ټوکی لري.

د يوه توکي b لپاره دې، چي د گاونډي ټولگي aH څخه دي، تل باور ولري $bH = aH$ ، دا داسي بللکيږي، چي د گروپي G هر کي اړخيز گاونډي ټولگي و H پسي د هغه د هر توکي سره تعريفيږي. که $h \in H$ ، $b = ah$ باور ولري، نو د په خوښه $h', h'' \in H$ لپاره باور لري:

$$bh' = a(hh') \quad \text{او} \quad ah'' = b(hh'')$$

$$aH \subseteq bH \quad \text{او} \quad bH \subseteq aH \quad \text{پس}$$

په دې سره هر دوه کينې اړخيز ګاونډيتولګي، يو د بل سره کټمټ دي او يا يې غوڅی تشدېری دی. موږ ددې سره د ګروپ G يوه ټوټونه يا تجزيه لاس ته راوړو، په لاندې ګروپ H پسې، چي د يوه مخه يې کينې اړخيزو ګاونډيتولګيو يو له بل څخه پردې دي، دا ګروپ G کينې اړخيزه ټوټونه بلل کيږي په يوه لاندې ګروپ H پسې. د دې ټوټوونو يا تجزيې يو ټولګی پخپله H دی: $aH = H$ سره باور لري $a \in H$.

په ورته توګه د ګروپ G بنی اړخيزه ټوټونه يا تجزيه لاس ته راوړی شو، په يوه لاندې ګروپ H پسې، کوم چي له بنی اړخيز ګاونډيتولګي $ha, a \in G$ څخه جوړدی، که يو ګروپ کموتاتيونه وي، نو کيدی شي، چي کينې ګاونډيتو-لګي او بنی ګاونډي ټولګی باندې د يوه ګروپ G ټوټونه د لاندې ګروپ H پسې يو له بل توپير ولري. په هر صورت دواړه ټوټونی د ټولګيو برابر ګڼون لري: څيرونه چي د G هرتوکی a د G په a^{-1} توکی څيره کوي، په خټکيدو-نکی يواځنی څيرونه ده، د ګروپ G په خپل ځان او کينې اړخيز aH ګاونډيتولګی په همغه ورته بنی اړخيز ګاونډيتو-لګي Ha^{-1} څيره کوي او په خټ.

۳ . ۶ . ۳ تعریف: د ګروپ G ټوټونه په لاندې ګروپ H پسي ، د ګاونډيو ټولګيو ګڼون په دې دواړو هر ټوټونو يا تجزيه کې ، که دا پاي وي ، د لاندې ګروپ پيژندنځېنه يا ايندکس Index ، په ګروپ G کې بلل کيږي.

ګروپ G دې د n نظم پاي ګروپ وي او H دې د هغه لاندې ګروپ وي ، د k نظم او j پيژندنځېني يا ايندکس سره. هر ګاونډي ټولګي aH د ټيک k توکو څخه جوړ دی او له دې امه باور ولري

$$n = k \cdot j$$

له دې څخه لاندې جمله لاس ته راځي

۳ . ۶ . ۳ د لاګرانژ Lagrange جمله: د يوه په خوښه پای لاندې ګروپ نظم او پيژندنځېنه د ټول ګروپ د نظم پريښوني دي.

دا جمله د ۳ . ۳ . ۴ سره سم لاس ته رکوي ، چي د پاي ګروپ د هر په خوښه توکي نظم همدا سي د ګروپ نظم ويسي. د دې جملې بله پسي راتلنه ده:

۳ . ۶ . ۴ پسی راتلنه: هر د لمړي گڼ نظم (لمړیگن هغه گڼ دی، چی پرویشوني یی ساده پرویشوني وي، یعنی پخپله دا گروپ او یویتوکی (خیوکللیک یا په بل نوم، راگرخیدونکی دی. دا باید د په خوښه د هغه توکي جوړه خیوکللیکي لاندی گروپ سره سر وڅوري، تر هغي چی دا توکی له ۱ څخه توپیر ولري.

۳ . ۶ . ۵ تعریف: یو لاندېنیمگروپ H د گروپ G نورمالپرویشونی $\mathcal{N}rma\mathcal{L}teiler$ (یا اینواریانتي $invariante$ Untergrupp لاندېگروپ) بلل کیږي، که د G کین اړخیزه ټوټونه یا تجزیه د بنی خوا ټوټونی سره، نسبت و H ته، سر وڅوري، دا په دې مانا، چی د هر $a \in G$ لپاره (په G کی د دواړو برخدیریو یو بل سره د سر په سر خوړلو په موخه وي) مساوات

$$aH = Ha \quad (1)$$

رامنځ ته کیږي. یا باوري کیږي. کیدی شي چی د لته د گروپ G ټوټونی و H پسی د نورمالگروپ څخه وڅیږي. په لاندې کی د نورمالپرویشونی یو بل تعریف ورکوو، چی

دې همدا اوس ورکړ شوي تعريف سره برابر ارزښته دی.

۳ . ۶ . ۶ تعريف : په گروپ G کې توکي x او y يو د بل سره کونجوگيري konjugiert بلل کيږي، که په G کې يو توکي a داسې پيدا کيږي شي ، چې باور ولري

$$y = a^{-1}xa$$

داسې هم ويل کيږي، چې له y څخه د x سره ، د a ترانفورميشن له لارې لاس ته راځي.

۳ . ۶ . ۷ جمله : د گروپ G لاندې گروپ H هلته او هلته په G کې نور مالپرويشوني دي، که H وهر توکي ته دده توکي په G کې ټول کونجوگيري توکي هم ولري.

اوبی : د دې لپاره دې H په G کې نورمالپرويشوني وي، او په ورزيات دې يا برسیره پر دې دې h د H په خوښه توکي وي. a دې د G يو په خوښه توکي وي، په H کې د (۱) پسې يا د (۱) له مخې يو توکي h' د

$$ah' = ha \quad (2)$$

سره موجود دی. پس دی

$$a^{-1}ha = h' \in H \quad (3)$$

او په څټه که $h \in H$ په خوښه توکي لپاره او $a \in G$ په H کې يو توکي h' موجود وي، کوم چې برابرې (۳) پوره کړي او د دې پسي يا د دې په تعقيب (۲) پوره کړي، نو باور لري $aH \subseteq Ha$. که په دې رامنځ ته شوې اړيکي، چې د ټولو a لپاره رامنځ ته شوي يا باور لري، د a په ځای a^{-1} وليکي، نو $a^{-1}H \subseteq Ha^{-1}$ ته راځي او همداسې $aH \subseteq Ha$. کوم چې د مخ ته تير سره برابرې (۱) ورکوي.

۳. ۶. ۸ تعريف: دوه لاندېگروپونه U او V په G کې يو د بل سره کونجوگير $konjugiert$ بلل کيږي، که يو داسې توکي $a \in G$ موجود وي، چې د هغه سره د ترانسفورميشن له لارې لاندېگروپ U په لاندېگروپ V پرياسي، يعنې باور ولري

$$a^{-1}Ua = V$$

ډيري $a^{-1}Ua$ بي له دې هم د هر $a \in G$ لپاره د په خوښه يو (په ريښتوني U سره ايزومورف) لاندېگروپ سره تل بيرته يو لاندېگروپ دی.

د په خوښه توکو $u_1, u_2 \in U$ لپاره لاندې اړیکې رامنځ ته کیږي

$$(a^{-1}u_1a)(a^{-1}u_2a) = a^{-1}(u_1u_2)a$$

او له

$$a^{-1}u_1a = a^{-1}u_2a$$

څخه برسيره پردي لاس ته راځي $u_1 = u_2$ ، د کوم سره چي څيرونه يا نظم $a^{-1}ua \rightarrow u \in U$ د سره، يو ايزومورف څيرونه د U په $a^{-1}Ua$ ده: هم يو لاندېگروپ انځوروي.

۳ . ۶ . ۹ جمله: د يوه گروپ G هر نورمالپرويشوني د

ټولو خپلو په G کي کونجوگير لاندېگروپونو سره يوځای

پريوزی. په څټ: د گروپ G يو لاندې گروپ H ټولي و H

ته په G کي کونجوگير لاندېگروپونه خوندي لري، نو له دې امله دا نوځالپرويشوني دی.

له (۱) څخه په لمړي وار لاس ته راځي

$$a^{-1}Ha = H \quad (4)$$

کوم چي د جملی لمړی برخه ثبوتوي. اوس نو باور لري

$$a^{-1}Ha \subset H$$

د اصلي خوندیلرني په موخه. دا رات راکوي

$$H \subset aHa = (a^{-1})^{-1}Ha^{-1}$$

او د H لاندې ګروپ باید، که هغه ټولی و هغی ته کونجو-
گیر خوندي ولري، د دې توافق یا یو په بل سرخوړنی سره .
د په خوښه توکي $a \in G$ لپاره له دې امله (۴) رامنځ ته
کيږي، له کوم چي (۱) راييليدلی شي.

۳ . ۶ . ۱۰ جمله: د یوه ګروپ G د په خوښه نورمالپرو-
یشونو ډیریو غوڅی، بیرته نورمال پرویشونی دي.

اوبی: که D د $A_i, i \in I$ غوڅی وي، نو په هرترتیب D
د G لاندې ګروپ انځوروي. (پرتله ۳ . ۳ . ۶) برسیره پر
دې د هر توکي، چي یوه د D توکي سره کونجوگیر وي،
په ټولو A_i کی پروت دی او په دې پسی لاس ته راځي، چي
په غوڅ کی هم پروت دی.

۳ . ۶ . ۱۱ جمله: د یوه ګروپ G په خوښه نورمالپرو-
یشونو سیستم څخه تولید یا راپیداشوي لاندې ګروپ (پرتله
۲ . ۳ . ۸) په همدې حالت کی د G یو نورمالپرویشونی
دی

۱۰۳ الجبري جوړښتونه

ورکړ شوی دې نورمالپرويشونى $A_i, i \in I$ وي او د هغه
 څخه جوړ شوي يا توليد شوي د لاندې گروپ B وى لکه په
 ۳ . ۳ . ۷ کى بنسول شوي وو، هر د B توکى b په لاندې
 بڼه ليکل کيدى شي

$$b = a_1 a_2 \dots a_n$$

د ورکړ شوي $a_j \in A_j, j = 1, 2, \dots, n$ سره . له G څخه په
 خوبنه توکي g لپاره باور لري

$$g^{-1}bg = (g^{-1}a_1g)(g^{-1}a_2g)\dots(g^{-1}a_ng)$$

او دا چى

$$g^{-1}a_jg \in A_j, j=1, 2, \dots, n$$

دى ، نو لاس ته راځي

$$g^{-1}bg \in B$$

۶ . د ابلگروپ ټول لاندې گروپونه د هغى خپل نورمالپير-
 ویشونى دي. په دې ورزيات يا برسیره پر دې په هر گروپ G
 کى يوونگروپ E د نورمالپرويشونى په څير موجود دى او
 په همدې توگه پخپله گروپ G هم.

۳. ۱۲۰۶ تعریف : یو ګروپ ، چی نورمال پرویشونی یی یواځی یوونګروپ او پخپله خپل ځان وي ، ساده بلل کیږي.

۳. ۱۳۰۶ جمله : یواځني ساده ابل ګروپونه ، هغه څیو-کلیکي ګروپونه دي ، چی نظم یی پریمګن یا لمړی ګن وي.

اوبی : که یو ابل - یا کموتاتیو ګروپ ساده وي ، نودا بیخي ناساده یا ناصلي لاندې ګروپ نه لري : دا چی په دې کي څیوکلکي لاندې ګروپونه باید خوندي وي ، نو دا پخپله څیوکلکي دی. یو ناپاي څیوکلکي لاندې ګروپ ناصلي یا ساده لاندې ګروپونه لري ، په کوم چی د ټولګڼونو زیاتون-ګروپ دی ، په هغه کی چی د جفت ګڼونو ګروپ په ځان کی دننه یا خوندي لري. که یو پای څیوکلکي ګروپ $G = \{a\}$ راواخلو چی نظم یی n دی ، نو د ټوټونی n له لارې څخه لرو $n = kl$ ، چی لاندې ګروپ $\{a^k\}$ نظم l او په دې لاس ته راوړنی سره د E او G څخه توپیر لري. د دې په څې: ګروپ $G = \{a\}$ کیدی شي چی هیڅ ناساده لاندې ګروپ ولري ، که نظم یی یو پریمګن یا لمړی ګن وي. چی د لاګرانژ له جملی څخه ساده په لاس راتلی شي.

يادونه: دا موضوع دلته رالنډوم او داسی نورې په دې هکله موضوعگانې په خارجي ژبو درسی کتابونو کی شته، چی هلته کتل کیدی شي، دلته به زیات وخت او ځای ونیسی. زما هئله هم دا ده، چی د زیاتو شیانو سره په دا لمړي کی داسی لږ غوندې بلد شو.

۳ . ۷ ایديال او پاتي ټولګیکړی

Ideal und Restklassenring

يادونه: ی ما دا پاتیتولګیکړی بللی، چی یو نوم وي، خو دا کیدی شي، چی د پاتیتولګی کړی هم وبلل شي. د نومونو په هکله ستونځي به منو، تر څو، چی ځمور په هیواد کي شمیرپوهنی خپله لار نیولي وي.

په دې برخه کی ګورو، چی د نورمالپرویشونی په ځای د ایديال کلیمه رامنځ ته کیږي. په دې برخه کي R تل یوه کموتاتیوه کړی د یوټوکی ۱ سره په نخښه کوي یا ښایي. اوس د یوې کړی د « ایديال » کلیمه پیل کیږي. لاس ته راځی، چی د R هر ایديال Y په R باندې

یو ایکویوالنت یا ورته ټولگی $\sim$ تعریفوي. د دې سره بنسټول کیږي، چي د هر $r \in R$ کرټوکی اړونده ایکویوالنتټولگی $[r]$ بیرته یوه کړی R/Y جوړوي.

۳. ۷. ۱. تعریف: د کړی R یو ناتش برخه پری Y یو ایډیال دی، که Y د زیاتونگروپ $(R, +)$ یو لاندې گروپ وي او د ټولو $y \in Y$ او $r \in R$ لپاره باور ولري $yr \in Y$. دا د R ایډیال Y اصلي ایډیال بلل کیږي که $Y = R$ وي.

۳. ۷. ۲. بیلگی:

الف) دا د R یواځي د صفرتوکی څخه جوړ برخه پری $\{0\}$ د R یو ایډیال دی، دا صفرايډیال دی او له همدا اوسه به په 0 سره په نخښه شي.

ب) که $R = \mathbb{Z}$ د ټولگڼونو کړی وي، نو پری Y د ټولو جوړه گڼونو $Y = 2\mathbb{Z}$ د $\mathbb{Z}$ سره جوړ پری د $\mathbb{Z}$ یو ایډیال دی. د دوه جوړه گڼونو زیاتون او کمون تل یو جوړه گڼی دی، او برسیره پر دې yz د ټولو $y \in Y$ لپاره او د ټولو $z \in \mathbb{Z}$ لپاره یو جوړه گڼی دی.

پ (که $R = F$ یو بدن وي، نو 0 او F د R یواځنی ایديالونه دي.

۳ . ۷ . ۳ تعریف: د R یو ایديال Y اصلي ایديال بلل کیږي، که $Y = yR$ وي، د یوه $y \in Y$ لپاره، دا په دې مانا چې یو $y \in Y$ داسې موجود دی، چې د هر $z \in R$ لپاره یو $r \in R$ د $z = ry$ سره موجودوي. داسې هم ویل کیدی شي: چې دا توکی y ایديال Y جوړوي یا تولیدوي او یا y د Y جوړوونکي یا تولیدوونکی دی.

۳ . ۷ . ۴ تعریف: Y دې د R یو ایديال وي. نو دوه توکی $r, s \in R$ و Y ته ایکویوالنت یا ورته بلل کیږي، که باور ولري: $r - s \in Y$ په نڅښوونه یی: $r \sim s$ یا $s \sim r$.

دا په ساده توګه لیدل کیږي، چې $\sim$ په R باندې یو ایکوبوالنځ اړیکه یا ورته اړیکه ده.

۳ . ۷ . ۵ مرستندوي جمله: Y دې د R یو ایديال وي د $R = Y$ سره او R/Y دې د R له توکو r څخه جوړ، د ورته ټولګیو $[r] = \{s \in R \mid s \sim r\}$ ډیری وي.

نو R/Y به د زیاتون $[r_1] + [r_2]$ او ځل $[r_1] \cdot [r_2]$ سره د ټولو $r_1, r_2 \in R$ لپاره یوه کړۍ وي د یوې توکۍ [1] سره .

اوبی: لکه د مخه مو چۍ گوته ورته ونيوله ورته ټولگی $r \in R, [r]$ ډیری R په پردیو برخه ډیریو باندې ټوټه یا تجزیه کوي. وي دې

$$[r_1], [r_2] \in R/Y,$$

نودا باید وښوول شي، چۍ زیاتون

$$[r_1] + [r_2] = [r_1 + r_2]$$

او ځل

$$[r_1] \cdot [r_2] = [r_1 \cdot r_2]$$

د هغود نماینده توکو څخه خپلواک ایکیوالنختولگی یا ورته ټولگی دي. که $s_1, s_2 \in R$ نور د ټولگی $[r_1]$ او همدا ډول د ټولگی $[r_2]$ نماینده گان وي نو $r - s = y \in Y$ هم دي، د ټولو $i = 1, 2$ لپاره، د کوم څخه چۍ لومړی

$$\begin{aligned} [r_1 + r_2] - [s_1 + s_2] &= [r_1 + r_2 - s_1 - s_2] = \\ &= [(r_1 - s_1) + (r_2 - s_2)] \\ &= [y_1 - y_2] = [0] \in R/Y \end{aligned}$$

لاس ته راځي. له دې امله زیاتون + کره تعریف دی او $[0]$ د ابل د ګروپ R/Y یو صفرتوکی دی و تړنی یا نښلونی یا عمليي + ته. په R/Y باندې ځل . هم کره تعریف دی، ځکه چې

$$\begin{aligned} r_1 r_2 - s_1 s_2 &= (s_1 + y_1)(s_2 + y_2) - s_1 s_2 \\ &= s_1 s_2 + y_1 s_2 + s_1 y_2 + y_1 y_2 - s_1 s_2 \\ &= y_1 s_2 + s_1 y_2 + y_1 y_2 \in Y \end{aligned}$$

له کوم چې $[r_1][r_2] = [r_1 r_2] = [s_1 s_2] = [s_1][s_2]$ لاس ته راځي. سړی په دې پسی تړلی په دې باور راوړی شي، چې R/Y (د کړی د تعریف سره سم) یوه کړۍ ده د یوې توکي $[1]$ سره.

۳. ۷. ۶ تعریف: دا کړی R/Y د R یو د پاتۍ-ټولګیو کړی و ایديال Y ته بلل کېږي.

۳. ۷. ۷ تعریف: د کړی R یو ایديال M ماکزیمال ایديال بلل کېږي، که $M \models R$ باور ولري او Y ، د R یو بل ایديال، موجود وي د $M \subsetneq Y \subsetneq R$ سره.

۳. ۷. ۸ جمله: R دې یوه کموتاتیوه کړی وي،

د $1 \in R$ سره، نو باور لري:

الف) د R هر اصلي ایدال Y په یوه ماکزیمال ایديال کې خوندي دی.

ب) که M د R یو ماکزیمال ایديال وي، نو د پاتیتولګی کړی $F = R / Y$ یو بدن یا تن دی.

اوبی:

الف) دا چې Y د R یو اصلي ایديال دی، نو $1 \notin Y$ دی.

$$Y \subseteq y_1 \subseteq y_2 \subseteq \dots \subseteq Y$$

دې د کړی R د ایديالونو Y_i یو جګیدونکی څنځیر وي

د $Y_i \not\subseteq 1$ سره، چیرته چې $i \in I$ او I یو اندکس ډیری

یا پیژندډیری دی. وي دې $W = \bigcup_{i \in I} Y_i$ ، نو $u, v \in W$ ،

د $i \in I$ سره موجود دی. د $u, v \in Y_i$ سره، ځکه چې

ایديال Y_i یو څنځیر جوړوي. نو لرو $u - v \in Y_i \subseteq W$ ،

همدا ډول $ur \in W$ لاس ته راځي، د ټولو $u \in W$ لپاره

او $r \in R$. له دې امله W د R یو ایديال دی، او $1 \notin W$

دی. نو د کړی R د ټولو Z ایديالونو ډیری M د $Y \subseteq Z$

سره، او $1 \notin Z$ سره، د څورن لیما پسی یو ماکزیمالتوکی M

لري. دا چې هر اصلي لوي ایديال $M' > M$ دا یویتوکی 1

لري او له دې امله $M' = R$ باور لري، نو لاس ته ترې اخي،
چې M د R يو ماکزيمال ايديال دی. دا Y خوندي لري.
ب) وي دې $[r] = [0]$. نو $M + rR$ د R يو ايديال دی،
کوم چې M اصلي خوندي لري. دا چې M د R يو
ماکزيمال ايديال دی، نو باور لري

$$R = M + rR$$

پس د R يوی په $M + rR$ کې پروت دی، دا په دې مانا
چې $1 = m + rs$ د توکو $m \in M$ او $s \in R$ لپاره باور لري.
له دې امله $[r][s] = [1] \in R/M$ دی
او له دې سره $[s] = [r]^{-1}$ دی.
نو پاتې ټولګی کړی يو بدن يا تن دی. خ چ د ښ و

۳ . ۷ . ۹ بيلګي

اول : د ټولګڼونو Z په کړۍ کې Y د ټولو جفتو ګڼونو ډيری
ماکزيمال ايديال دی. پاتيتولګي بدن Z/Y يی د دواړو
پاتيتولګيو $[0]$ او $[1]$ څخه جوړ دی. دا نو له دې امله
دوه توکی لري او د $Z/2Z$ سره په نڅښه کيږي.
دوم : په پولينومکړۍ $R = F[X]$ کې په بدن يا تن F باندې
د نا ټاکلی يا مېځهولی X سره $Y = \{ X f(X) \mid f(X) \in R \}$

یو ماکزیمال ایډیال دی د پاتی ټولگیځی $R/Y \sim F$ سره د
مخ ته تیر تعریف له مخی، ځکه چی دی.

$$f(X) = f_0 + f_1X + \dots + f_nX^n \in R$$

نو $[f] = [f(X)]$ په R/Y کي پروت دی. د مرستندوي
جملی ۳. ۷. ۵ له مخی دا څیرونه $f_0 \in F \rightarrow [f_0]$ د بدنونو
یا تنونو R/Y او F ترمنځ یو ایزومورفیزم دی.

۳. ۷. ۱۰ تعریف: د کموتاتیو کړی R د یویتوکي ۱
سره یو توکي u یوون بلل کیږي، که یو $v \in R$ څخه
موجود وي د $uv = 1$ سره.

۳. ۷. ۱۱ جمله: د یوه توکي $u \in R$ لاندې څویونه
ایکویوالنت یا ورته دي

الف) u د R یو یوون دی.

ب) u د R څخه جوړ شوی یا تولید شوی اصلي ایډیال
دی، دا په دې مانا چی $uR = R$.

پ) u د R په هیڅ ماکزیمال ایډیال کي خوندي دی یا په
بل ډول: په کوم ماکزیمال ایډیالکي خوندي نه دی.

ثبوت يا اوبی: پ (په ساده توگه له ب) څخه لاس ته راځي.
 که $u \in R$ په کوم ماکزیمال ایډیال کې خوندي نه وي، نو د
 جملې ۳ . ۷ . ۸ له مخې اصلي ایډیال نه دی.
 پس لرو $R = uR$ او $1 = uv$ د یو $v \in R$ لپاره، که چیرې
 الف ښوول شوی وي. دا ایمپلیکیشن $(a) \Rightarrow (b)$ ساده
 دی. څ چې ښ و (څه چې د ښوولو وو)

۳ . ۷ . ۱۲ تعریف: د کړی R یوناتش برخدیری U
 لاندېکړی بلل کیږي، که د ټولو $u_1, u_2 \in U$ لپاره هم
 $u_1 - u_2 \in U$ او هم $u_1 u_2 \in R$ باور ولري.

۳ . ۷ . ۱۳ بیلگي:

الف (د R هر ایډیال Y د R یولاندې کړی ده.

ب (د Z د Q یولاندېگروپ دی، مگر د Q ایډیال نه دی.

پ (د Z د ټولو جفتو گڼونو ډیری Y د Z لاندې کړی
 ده. په ځانگړې توگه دا Y داسی لاندې کړی ده، کومه چې
 یویتوکی نه لري.

دا چې په ټوليزه توگه يوه لاندېکړی U يویتوکی نه لري،
نوضرور دا ده چې د لاندیکړی د «ایديال» کلیمه رامنځ
ته کړو.

۳. ۷. ۱۴ تعريف: U دې د R يوه لاندېکړی وي.
د U دا ناتشېری Y د لاندېکړی U يوایديال دی، که د
ټولو $y \in Y$ او ټولو $u \in U$ لپاره $y_1, y_2 \in Y$ وي او که $yu \in Y$
ټولو $y \in Y$ او ټولو $u \in U$ لپاره باور ولري.

۳. ۷. ۱۵ لاسته راوړنی: U دې د R يوه لاندېکړی
وي او Y دې د کړی R يوایديال وي. نو باور لري:

(الف) $Y_1 = U \cap Y$ د U يوایديال دی

(ب) $U + Y = \{r \in R \mid r = u + r\}$

د ټولو $u \in U$ او يوه $y \in Y$ لپاره
يوه د لاندېکړی ده.

(پ) $(U + Y) / Y$ د پاتيټولگيکړی R / Y ، لاندېکړی ده.

(ت) د R / Y د هر لاندېکړی T لپاره

$$T^- = \{r \in R \mid r[r] \in T\}$$

د R لاندې کړی ده.

نې) د R/Y د هر ایدیال I لپاره

$$I^- = \{r \in R \mid [r] \in I\}$$

د R یو ایدیال دی، د $I^- \subseteq Y$ او $I^-/Y = I$ سره.

اوبی: الف) د تعریف ۱۲.۷.۳ او تعریف ۱۴.۷.۳

څخه ترلی لاس ته راځي

ب) $r_1 = u_1 + y_1$ ، $r_2 = u_2 + y_2 \in U + Y$ دي،

د $u \in U$ او $y \in Y$ سره، نو لرو

$$r_1 - r_2 = (u_1 - u_2) - (y_1 - y_2) \in U + Y$$

دا چې Y د R یو ایدیال دی نو دا لاندې هم لرو:

$$\begin{aligned} r_1 \cdot r_2 &= (u_1 + y_1)(u_2 + y_2) \\ &= u_1 u_2 + (y_1 u_2 + u_1 y_2 + y_1 y_2) \in U + Y \end{aligned}$$

دا نورې ساده د پ)، ت)، او نې) اوبیونې د کورکار دی.

۴ د بول الجبر ، سرکیت الجبر

۴ . ۱ د بول د الجبر سټیکلیمې

په برخه ۱ کې مو د ډيري M برخه ډيريو ترمنځ تړونونه يا عملی ولوستلی. په دې عملیو کې، که چیرته د ډيري M برخه ډيريو ترمنځ دوه ځایز اپریشنونه يا کارونې (د ډيريو تړنې) غوڅې ، ټولنه او همداسې کمپلیمینټ جوړونه په پوتنځ يا توانډيري باندې يوه «جوړښت» ته سره راټولگه کړي، نو هغه «جوړښت» چې لاس ته راځي، د ډيري M د برخه ډيريو بول الجبر بلل کېږي. په دې جوړښت کې تشډيري $\emptyset$ او ټولډيري M يو راوتلی يا کره راوتلی رول لوبوي. د تړونو لپاره مو د مخه په برخه ۱ کې يوه لړۍ شميرقوانين کره کړل او په لیست کې مو راوستل. دا ډول شميرنې د پوره بل ډول شميرپوهنيزو شيانو لپاره هم باور لري يا کارول کېږي. دا گټور دي، چې دا ډول شميرقاعدې لمرې په دې لاس ته راغلي پرېکندنې يا پرېکړې يا لاس ته راغلي نتيجه په عمومي توگه تر څيرنې لاندې ونيول شي. « ټوليز » دلته په دې مانا

دی، چی د عملي په ډول نه پیچو، بلکه په هغو توکو، د کومو لپاره چې دا عملي باور لري. له دې څخه مخ ته خو، چی د شیا ښو یو ډیری مو مخ ته پروت دی د کومو لپاره چې عملي روښانه یا تشریح دی یا کره شوي دي (یعنی چی یو بل سره « ترلکیدي » شي، د کومو سره چی شمیرنه ممکن وي)، او د دې عمليو سره شمیرنی له لارې، هغه تر څیرنی لاندې نیولي شمیرقوانین باور ولري. له دې څخه په فورمال توگه لاندې تعریف لاس ته راځي. دلته یو دوه ځایزه عمليه یا کارونه یا اپریشن یو تړون یا تړنه ده یو « شمیرقاعده » ده د کوم له مخی، چی له دوه توکو څخه یو دریم توکی لاس ته راځي. (د بیلگي په توگه په گڼونو کي زیاتون یا ځل). یو یوځایزه عمليه له هر توکی څخه یو ټاکلی بل توکی جوړوي (لکه مربع یا د کوم گڼ رېښه یا بهتره رېښه ویستنه).

۴ . ۱ . ۱ تعریف : د بول الجبر د هغو توکو یو ډیری دی، د کومو لپاره چی دوه دوه ځایزې نڅښلونې یا اپریشنونه (عملي)، غوڅی $\cap$ ، ټولنه $\cup$ او یوه یوځایزه عمليه ' کارول کیږي او په هغو کی دوه توکی 0 (په صفر یی په نڅښه کوو) او 1 (په یوې باندې په نڅښه کیږي) داسی راوتلي یا غوره شوي وي، چی د M د ټولو توکو a, b, c

لپاره لاندې اړیکې باور لري:

۱ - اسوختیاتو قانون د $\cap$ او $\cup$ لپاره

$$(a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c)$$

$$(a \cup b) \cup c = a \cup (b \cup c)$$

۲ - کموتاتیو قانون د $\cap$ او $\cup$ لپاره

$$a \cap b = b \cap a$$

$$a \cup b = b \cup a$$

۳ - رازغمني یا راکښنی یا جذب قانونونه

$$a \cap (b \cup c) = a$$

$$a \cup (b \cap c) = a$$

۴ - دیستریبوتیو قانون

$$a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c)$$

$$a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c)$$

۵ - د صفر او یوې خویونه

$$a \cup 0 = a, a \cap 0 = 0$$

$$a \cup 1 = 1, a \cap 1 = a$$

۶ - د کمپلیمنت یا پوره کیدونکی خویونه

$$a \cup a' = 1, a \cap a' = 0$$

دا اړیکې د بول د الجبر اکسیومونه هم بلل کېږي (د اکسیوم تعریف څما د شمیرپوهنې کتاب کې ورکړ شوی دی) . موږ تر یوې اندازې زیات اکسیومونه ورکړل، ځکه چې برخیسستمونه شته ، له کومو چې بیا دا نور اکسیومونه لاس ته راتللی شي .

په دې برخه کې ددې مینیمالسیستمونو کارونې یا استعمال باندې ځانونه نه مشغولوو، همدومره دلته مهم دی، چې ټول شمیر قوانین باور ولري .

که د توان یا پوتنڅ ډیری $P(M)$ په پام کې ونیول شي، د هغه د غوڅي $\cap$ (انگریزي meet)، ټولنه $\cup$ (join) او کمپلیمنټ جوړونې سره او $\emptyset = 0$, $M = 1$ سره نو دا د پورته تعریف سره سم یو د بول الجبر جوړوي. دا کارول شوي سوبولونه یوونیز یا واحد نورم ته نه دي راوړل شوي. د $\cap$ لپاره $\cap$ هم کارول کېږي او د $\cup$ په ځای $\vee$ او د $\bar{a}$ په ځای $\bar{a}$ هم کارول کېږي.

۴ . ۱ . ۲ بیلگه : یو د بول الجبر باید تل یو صفر ۰ او یو ۱ (یو) خوندي ولري. ډاکیدی شي ، چې یواځې د ۰ او ۱ څخه جوړ وي، چې دا یی د بول ساده الجبر دی. وي

دې 0 او 1 کوم په خوښه سومبولونه. نو په $B = \{0,1\}$ باندې عمليي $\cap, \cup, '$ په لاندې ډول تشریح کيږي:

$$0 \cap 0 = 0, \quad 0 \cap 1 = 0, \quad 1 \cap 0 = 0, \quad 1 \cap 1 = 1$$

$$0 \cup 0 = 0, \quad 0 \cup 1 = 1, \quad 1 \cup 0 = 1, \quad 1 \cup 1 = 1$$

$$0' = 1, \quad 1' = 0$$

دلته په ساده توګه د بول د الجبر قوانین ازمایل کیدی شي. له دې سره نو جوړښت یا سترګچر $(B, \cap, \cup, ')$ یو د بول الجبر دی د دوه توکو سره .

د بول الجبر راوړل شوو اکسیومونو ته یو بل مهم خوي رامنځ ته کيږي: که په همغه وخت کې اکسیومونه $\cap$ د $\cup$ سره او $\cup$ د $\cap$ سره بدل شي، په دې ګروپ کې هغه بل اکسیوم لاس ته راځي . وایو: په ګروپ کې ورګډ شوي اکسیومونه یو بل ته دوال Dual یا دوه ګونی دي.

د بول الجبر هر خوي کیدی شي ، چې له اکسیومونو څخه لاس ته راوړل شي، او د بول الجبر د هرې وینا څخه کیدشي چې نومولي بدلونونه رامنځ ته شي، دا په دې مانا ، چې دوه ګونی وینا وې جوړې شي. « وینا دوګونی کیدنه ». دلته یوه ریښتیا وینا بیرته ریښتیا (« د بول د الجبر یوه جمله ») وینا باندې

بدليږي، ځکه چې د سیستم دوه گونوالی ساتلی پاتی کيږي.
دا د بول د الجبر دوه گونی پرینځپ متن دی: د هرې جملې
د ثبوت سره د هغې جملې دوه گونی هم ثبوت ده.

د بول د الجبر خویونه دې ورکړ شي او په حقیقت کي . د
اکسیومونو څخه د لاس ته راوړنو په څیر .

۱ - باور لري $a = a \cap a$ او $a = a \cup a$ د بول د الجبر
ټولو توکو a لپاره
اوبی: دی

$$a = a \cap 1 = a \cap (a \cup a') = (a \cap a) \cup (a \cap a') \\ = (a \cap a) \cup 0 = a \cap a$$

د $a = a \cup a$ لپاره ښوونه د دوه گونوالی څخه لاس ته راځي .

۲ - د a کمپلیمنت a' د ورکړ شوو خویونو سره یواځنی ټاکلی
دی، دا په دې مانا چې باور لري $a \cap c = 0$ او $a \cup c = a$
نو دی. $c = a'$.

اوبی: لمړی دی

$$a' = 0 \cup a' = (a \cap c) \cup a' = (a \cup a') \cap (c \cup a') = c \cup a'$$

او د دې سره دوه گوني هم $a' = c \cap a'$ دی.

له دې امله

$$a' = c \wedge a' = c \wedge (c \cup a') = c$$

دی. څه چې د بنوولو وو (لنډ: څ بن وو).

۳- صفر 0 او یو 1 په بول الجبر کې یواځني ټاکلي دي،

دا په دې مانا چې دا یواځني توکي دي، د هغو خویونو

سره، چې په ټکي ۵ کې ورکړ شوي دي.

اوبی: د یوه توکي n لپاره دې د بول د الجبر د ټولو توکو

لپاره باور ولري $a \cup n = a$ او $a \cap n = n$. که د $a = 0$ لپاره

کیردو، نو لاس ته راځي $0 \cup n = 0$ ، له بلې خوا هم $0 \cup n = 0$

او له دې امله $0 = n$ دی. د 1 لپاره اوبیونه د دوه گونوالی

څخه لاس ته راځي.

۴- باور لري $(a')' = a$ د ټولو توکو a لپاره. دا له $a' \cap a = 0$

او $a' \cup a = 1$ څخه لاس ته راځي او د کمپلیمنت د

یواځنوالی څخه.

۵- د دې مورگان De Morgan قانون

$$(a \cup b)' = a' \cap b' \quad \text{او} \quad (a \cap b)' = a' \cup b'$$

ثبوت : د دوه گونډیزینڅپ له لارې بسيا کوي، که یواځي یوه له دې دوه گونو ویناو څخه وښایو. دییلګي په توګه کینه. د دې لپاره لاندې شمیرقوانین کاروو:

$$(a \cup b) \cup (a' \cap b') = ((a \cup b) \cup a') \cap ((a \cup b) \cup b') = \\ = ((a \cup a') \cup b') \cap (a \cup (b \cup b')) = 1 \cap 1 = 1$$

او

$$(a \cup b) \cap (a' \cap b') = (a \cap (a' \cap b')) \cup (b \cap (a' \cap b')) = \\ = ((a \cap a') \cap b') \cup ((b \cap b') \cap a') = 0 \cup 0 = 0$$

د دواړو مساواتخنځیرڅخه په ګډه لاس ته راځي،

چې $a \cup b$ د $a' \cap b'$ کمپلیمنټ دی.

۶- د اسوخیاتینو و کموتاتیو قوانینو اوله

$$a = a \cup a = a \cap a$$

څخه لاس ته راځي: د غوڅي (ټولنی) جوړولو نتیجه

په یوه توکو پای ډیرې کې د لږپېرلېسی څخه خپلواک دی او له دې هم خپلواک دی، چې یو توکي یواځي یوځل او که یا زیات رامنځ ته کیږي. زیاتون نخښي ته ورته

لیکل کیږي: $\bigcap_{i=1}^n a_i$ همداسی د $\bigcup_{i=1}^n a_i$

د ټولو $a_1 \cup a_2 \cup \dots \cup a_n$ لپاره، همداسی

د $a_1 \cup a_2 \cup \dots \cup a_n$ لپاره.

۷- دیستریبوتیو قانون هم ټولیز کیدی شي او په ریښتونی داسی

$$\left(\bigcup_{i \in I} a_i \right) \cap \left(\bigcup_{j \in J} b_j \right) = \bigcup_{i \in I, j \in J} (a_i \cap b_j)$$

او

$$\left(\bigcap_{i \in I} a_i \right) \cup \left(\bigcap_{j \in J} b_j \right) = \bigcap_{i \in I, j \in J} (a_i \cup b_j)$$

چیرته چی I او J پای ایندکسډیری (پیژندډیری) دي

۸- له $a \cap x = a \cap y$ او $a \cup x = a \cup y$ لاس ته راځی $x = y$

ښوونه : باور لري

$$\begin{aligned} x &= x \cap (x \cup a) = x \cap (y \cup a) = (x \cap y) \cup (x \cap a) = \\ &= (x \cap y) \cup (y \cap a) = y \cap (x \cup a) = y \cap (y \cup a) = y \end{aligned}$$

پای.

مور. دلته د بول الجبر ، لکه چی په پیل کی وویل شو، د یوه ذهني نظر له لارې تر څیړنی لاندې نیسو، په دې کی چی مور د توکو په ډول (چی څه شی دی) کی خپله علاقه نه گورو، بلکه یواځي دا علاقه لرو، چی له دې توکو سره څنگه شمیرنه

کیدۍ شي. له دې امله د بول الجبرونو M_1 او M_2 ترمنځ یو بییکتیوه څیرونه داسی موجوده ده، چی د M_1 دوه توکو ټولنه (غوڅی) د تنظیم شوو توکو ټولنه (غوڅي) تنظیم دي، او د هر توکي کمپلیمنت د ورسره تنظیم شوي توکی کمپلیمنت دی، نو په دې توگه کیدۍ شي ، چی دواړه الجبرونه «سوجه شمیریز» مساوي و لیدل شي. یو داسی بییکتیو څیرونه $f: M_1 \rightarrow M_2$ لکه د مخه مو چی هم گوته ورته نیولی ایزومورفیزم Isomorphism نومیري او دا راوړل شوي شرایط لنډ په لاندې ډول دي. د ټولو $a, b \in M_1$ لپاره باور لري:

$$f(a \cap b) = f(a) \cap f(b)$$

$$f(a \cup b) = f(a) \cup f(b)$$

$$f(a') = f(a)'$$

د دې سره په کین لور $\cap, \cup, '$ د M_1 عملیې او په ښي لور د M_2 عملیې. نڅښلونۍ یا کارونۍ دي.

د نور الجبرونو په څې یا خلاف کیدۍ شي، چی په ټولو (پای) د بول الجبرونو باندې په ساده توگه یو د یوه پام یا نظر امکانات برابر شي. د داسي یوه پاملرنۍ ته دوه د بول الجبرونه باید برابر وکتل شي، که د دوي ترمنځ یو ایزومور-

فیزم موجود وي، یعنی که دا ایزومورف وي. دا لاندې مهمه جمله باور لري، چی ثبوت لپاره یی په لیو (LIU 1977) حواله ورکوو .

۴ . ۱ . ۳ جمله : هر یو د بول الجبر د یوه پای ډیری M د برخه ډیریو څخه جوړ د بول د الجبر سره ایزومورف دی . په ځانګړي توګه د یوه پای بول د الجبر توکو ګڼهون تل د 2^n فورم یا ډول دی ، او هر دوه پای د بول الجبرونه د برابر ډیرو توکو سره یو د بل سره ایزومورف دي.

که څه هم موږ د پای بول الجبرونو سره سر او کار لرو، دا باید په ګوته شی، چی په پورته جمله کی ورکړ شوي ځویونه یا کرکټريي د ناپای ډیرو توکو ډیری لپاره باور نه لري . ناپای ډیر د بول الجبرونه شته، کوم چی د ډیری د ټولو برخه ډیریو د الجبر سره ایزومورف نه دي. د دې لپاره چی ټولی ناپای ډیر د بول الجبرونه کرکټریزه کړی شو، لاندې کلیموته اړ یو. M دې یو ډیری وي. یو سیستم K د M برخه ډیریو ډیریډن یا ډیریتن بلل کیږي، که K د A, B سره $A \cup B, A \cap B$ او $A \cap B$ هم خوندي ولري. د بیلګې په توګه ټول د توانه ډیری ډیریتن دی. K دې د

ډيري M برخه ډيريو يو ډيريتن وي، د $M \in K$ سره.
 په K باندې کيدی شي بيا يو بول الجبر توضيح شي، په
 کوم کي چي U د ټولنې، $\cap$ د غوڅی، تشه ډیری $\emptyset$ د
 صفر، يو ډیری M د يوې ډیری، $A' \in K$ د
 کمپليمنت $M - A$ سره نيسي، يعني دا ډيري تيوري تيکي
 کومپليمنت. داسی يو الجبر ډيري بدن الجبر هم بلل کيږي او
 په ټوليزه توگه د M هر برخه ډیری خوندي نه لري. اوس دا
 لاندې جمله باور لري، چي د ثبوت لپاره دې
 GRÄTZER(1977) وکتل شي.

۴ . ۱ . ۴ جمله : (د ستون Stone جمله) هر د بول
 الجبر د ډيريتن الجبر سره ايزومورف دی.

د بول د الجبر کرکتریزه کولو سره په اړوند، کيدی شي چي
 د بول د الجبر سيده ځل گټور وکارول شي يا استعمال شي.

۴ . ۱ . ۵ تعريف : V او W دوه د بول الجبرونه
 وي، چي د هغی بنسټيز ډيري هم په V او W سره په نخښه
 کوو. نو دا د V او W سيده ځل $V \times W$ د بول الجبر دی
 د ټولو منظمو جوړو (v, w) په ډيري، چي $v \in V$

او $w \in W$ وي، د لاندې عملیو سره

$$(v, w) \cap (v_1, w_1) = (v \cap v_1, w \cap w_1)$$

$$(v, w) \cup (v_1, w_1) = (v \cup v_1, w \cup w_1)$$

$$(v, w)' = (v', w')$$

او د صفر توکي $(0, 0)$ او د یوې توکي $(1, 1)$ سره، چي
د V او W همغه مساوي توکي دي.

د دې ښوونه دې د گرانو لوستونکو دنده وي، چي وښايي،
چي سیده ځل $V \times W$ په ریښتیا د بول الجبر دی.

اوس دې B د بول الجبر وي په دوه توکو باندې، یعني
 $B = \{0, 1\}$ د تړونونو

$$0 \cap 0 = 0, \quad 0 \cup 1 = 1, \quad 1 \cup 1 = 1$$

$$1 \cap 1 = 1, \quad 1' = 0, \quad 0' = 1$$

سره. د B^n لاندې، دا n -ځله، د B دخپل ځان سره
سیده ځل پوهیږو. د B^n توکي منظم n -گونې دې له
توکو $0, 1$ او د بول تړونونو کمپوننت ډوله تشریح شوي.
دا په دې مانا چي:

$$\begin{aligned}
 (a_1, \dots, a_n) \cap (b_1, \dots, b_n) &= (a_1 \cap b_1, \dots, a_n \cap b_n) \\
 (a_1, \dots, a_n) \cup (b_1, \dots, b_n) &= (a_1 \cup b_1, \dots, a_n \cup b_n) \\
 (a_1, \dots, a_n)' &= (a_1', \dots, a_n') \\
 1 &= (1, \dots, 1) \\
 0 &= (0, \dots, 0)
 \end{aligned}$$

د بیلګې په توګه د $n = 5$ لپاره باور لري

$$\begin{aligned}
 (0, 1, 0, 1, 0) \cup (1, 0, 1, 1, 0) &= (1, 1, 1, 1, 0) \\
 (0, 1, 0, 1, 0) \cap (1, 0, 0, 1, 1) &= (0, 0, 1, 1, 0) \\
 (1, 1, 0, 0, 1)' &= (0, 0, 1, 1, 0)
 \end{aligned}$$

له دې بیلګې لیدل کیږي، چې په B^n کې ساده شمیرنه کیدی شي. له بلې خوا د B^n توکو ګڼون 2^n دی او د جملې ۴ . ۱ . ۳ هر د بول الجبر د 2^n توکو سره د B^n سره ایزومورف دی. د بول الجبر د څیړنې لپاره کیدی شي، چې دا د الجبر درس په B رالنډ کړي.

۴ . ۲ . د بول فنکشنونه او پولینومونه

موږ د فنکشنونو لپاره، د تړونونو په تعریف پیل کوو، چې ارزښت پیری یې د بول الجبر وي. دلته دې M یو په خوښه

ډیری وي او V دې یو د بول الجبر. د دوه څیرونو

$$f, g : M \longrightarrow V$$

لپاره لاندې عمليي $\cap$ ، $\cup$ تشریح کوو، د

$$(f \cap g)(x) = f(x) \cap g(x) \quad , x \in M$$

$$(f \cup g)(x) = f(x) \cup g(x) \quad , x \in M$$

سره، او همداسې یو کمپلیمنت جوړښت د

$$f'(x) = (f(x))' \quad , x \in M$$

سره.

د دې تعریفونو ښی اړخ پوره یا ټیک تعریف دی، ځکه چې $f(x)$ او $g(x)$ د V توکی دي او له دې امله $\cap$ ، $\cup$ موخه ور یا هدفمند دي. اوس په ساده توګه شمیرل کیږي، چې د ټولو د M په V کې څیرونو ټولګه له دې سره یو د بول الجبر کیږي، چې د هغه صفر توکي د څیرونه f ده، د $f(x)$ سره، ټول $x \in M$ او د هغی یو توکي د څیروني f له لارې څخه د $f(x)$ سره، ټولو $x \in M$ دي.

یو ځانګړی حالت هلته لرو که ډیری M د V n -ځله د خپل ځان سره سیده ځل وي. موږ غواړو ټولی د V^n څیروني په V کې د $A_n(V)$ سره په نڅښه کړو او دا $A_n(V)$ د n -ځایزې د بول فنکشنونه په V باندې نومو یا بلل کیږي.

هره د f څیرونه له $A_n(V)$ هر n -گونۍ $(v_1, \dots, v_n)$ چی
 د V له n توکو څخه جوړ وي، د V په یوه توکی
 $f(v_1, \dots, v_n)$ تنظیموي. د دې څیرونو لاندې یی ثابتی
 څیرونۍ او پرویکشنونه د ځانګړو ماناو یا اهمیت دی. یوه
 ثابته څیرونه د ټولو $(v_1, \dots, v_n)$ لپاره همغه فنکشن ارزښت
 لري. یو i -ام پرویکشن x په لاندې توګه تعریف دی

$$x_i(v_1, \dots, v_n) = v_i, \quad (v_1, \dots, v_n) \in V^n$$
 لپاره

یادونه: موږ دا ستونځې لرو، چی د شمیرپوهنې لیکنه کې
 کله کله د کین وېنې لور ته او بیا بیرته له ښي وکینې لور ته
 لوستل کیږي، نو کیدی شي، چی داپورته داسی هم ولیکل
 شي: د ټولو $(v_1, \dots, v_n) \in V^n$ لپاره

دا دا مانا لري چی: څیرونه x_i (داهم تر یوې اندازې
 ورسره نا بلد کار دی، چی فنکشن په x_i ښایو، خو فکر
 کوم، چی کومی ستونځي به د دې سره مل نه وي) هر
 n -گونۍ د هغه په i -ام کمپوننت تنظیموي. له ثابتو
 څیرونو او پرویکشنونو یا پریوستونونو $\cap$ ، $\cup$ ، $!$
 عملیو. نڅښلونو یا کارونو په مرسته یوه ځانګړې n -ځایز
 د بول فنکشنونو، مهم ټولګی د بول پولینومونه جوړي.

۴ . ۲ . ۱ . تعریف : هره څیرونه $f: V^n \rightarrow V$ ، کومه چی په $A_n(V)$ د پای زیاتو^{۱۰}د عملیو^{۱۱}، $\cup, \cap, ' ,$ کارونو یا استعمال څخه، له ثابتو او پرویکشنونو، لاس ته راوړي، د بول $n -$ ځایز پولینوم فنکشنونه بلل کیږي.

۴ . ۲ . ۲ . بیلگه : که ثابت فنکشن په ساده توگه د هغه د ارزښت سره وښایو، داپه دې مانا چی د V د یوه توکی په څیر ، نو

$$(a \cap x_1) \cup (b \cap x_2 \cap x_3 \cap x_4) \cup (x_1 \cap x_2)'$$

یو د بول پولینوم فنکشن $P: V^4 \rightarrow V$ انځوروي: دکوم لپاره چی باور لري

$$P(v_1, v_2, v_3, v_4) = (a \cap v_1) \cup (b \cap v_2 \cap v_3 \cap v_4) \cup (v_1 \cap v_2)'$$

دلته a, b د V په کلکه ځای په ځای توکی دي * .

یو د بول پولینوم فنکشن د یوې افادي له لارې کره ټاکلی دی، چی له ثابتو (له V څخه) او پرویکشنونو x څخه د $\cup, \cap, ' ,$ له لارې جوړ وي. داسی یوه افاده د بول پولینوم بلل کیږي او دا یو د شمیرنی قانون د فنکشن ارزښت ټاکنی یا تعین لپاره راکوي، که د x لپاره $i -$ ام

کمپوننت یو n -ګونی له V^n څخه کینډول شي. دا شمیرنه په رابندیزه توګه په V کې باور لري او دا توکي $P(v_1, \dots, v_n) \in V$ راکوي. د پولینوم (= افاده) او په دې پورې اړوند پولینومفونکشن (= څیړونې) ترمنځ باید ټیک توپیر وشي. اړیکې «پولینوم» د دې بول د فنکشن لپاره دا لاس ته راکوي، چې له $x_1, \dots, x_n$ او ثابتو څخه د $\cup, \cap, ' ,$ سره ټیک راجوړي دي یا بهتره په دې باندې جوړې دي، لکه څنګه نور ریيل پولینومونه د نښلونو $+, *$ او $-$ سره، چې نمونه یی ده

$$p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

دلته x له یوه بنسټیزې څخه دی او a_i د ټولو $i \in I$ لپاره یو ریيل ګڼ دی.

دوه د بول مختلف پولینومونه په کوم کي چې x او کومی ټاکلی ثابتی، او $\cup, \cap, ' ,$ کړی شي، چې هغه پولینومونه وټاکي: دبیلګې په توګه د $x \cup (a \cap x)'$ او $x \cup (a' \cup x)'$ لپاره همغه حالت دی. که دوه داسې پولینومونه له مخه ورکړ شوي وي، نو مهمه ده چې وڅیړل شي یا پریکړه په وشي، چې ایا د دوی سره برابر فنکشنونه مساوي دي. دا داسې پیښیږي، چې د هر پولینو-

مفکشن f لپاره یو نورمالفورم $N(f)$ د یوه ټاکلی افادې په څیر داسې ورکول کیږي، چې د $f_1 = f_2$ لپاره $N(f_1) = N(f_2)$ باور ولري. برسیره پردې یوه تگلار ورکول کیږي، د کومې سره چې هر پولینوم په نورمالفورم ترانسفورمې کیدی شي. نو بیا دوه پولینومونه ټیټ هلت هماغه پولینومفکشن دی، کله چې د هغوی نورمالفورم یو له بل سره پریوزي. دا پروگرام اوس غواړو پلي کړو.

۴ . ۲ . ۳ تعریف: ویل کیږي، چې یو n -ځایزه

پولینوم په دیسیونکتیو نورمالفورم (disjunktiver)

(Normalform) یا نورمالبنه دی، که دا د لاندې فورم یا

بنی وي:

$$P = \bigcup_{(i_1, i_2, \dots, i_n)} a_{i_1 i_2 \dots i_n} \wedge x_1^{i_1} \wedge x_2^{i_2} \wedge \dots \wedge x_n^{i_n}$$

د دې سره $a_{i_1 i_2 \dots i_n} \in V$ دی، د ټولو $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ لپاره،

هر $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ یو n -ګونی دی له ۱ او $n-1$ سره، او

ټولنه یی په دې ټولو $2^n - n$ ګونو غزول کیږي، چیرته چې

x_i^1 د x_i او x_i^{-1} د x_i^1 لپاره ځای په ځای یا ځایول کیږي.

په ورته قانونیت یا قرارداد سره د هر پولینوم P کونیو-
نکتیو نورمالفورم بلل کیږي، دلاندې جني سره:

$$P = \bigcap_{(i_1, i_2, \dots, i_n)} a_{i_1 i_2 \dots i_n} x_1^{i_1} \cup x_2^{i_2} \cup \dots \cup x_n^{i_n}$$

که یو خانگري ديسيونکتیو نورمالبنه وليکل شي، نوټول
غري به د ديسيونکتیو نورمالفورم سره $a_{i_1 i_2 \dots i_n} = 0$ له
ليکلو پريښوول شي یا صرف نظر به پرې وشي، ځکه چی
دا په نتیجه کوم تاثیر نه پريباسی. په ورته توگه دا د ديسيو-
نکتیو نورمالفورم لپاره باور لري، که $a_{i_1 i_2 \dots i_n} = 1$ وي.

۴ . ۲ . ۴ بیلگه : یو پولینوم په ديسيونکتیو نورما-
لفورم دی (د $a, b, c, \dots \in V$ سره):

$$(a \wedge x_1 \wedge x_2' \wedge x_3) \cup (b \wedge x_1' \wedge x_2 \wedge x_3') \cup \\ (c \wedge x_1' \wedge x_2' \wedge x_3) \cup (d \wedge x_1' \wedge x_2' \wedge x_3')$$

لاندې یو کونیونکتیو نورمالفورم دی:

$$(a \cup x_1 \cup x_2 \cup x_3) \wedge (b \cup x_1 \cup x_2' \cup x_3) \wedge \\ (c \cup x_1 \cup x_2 \cup x_3') \wedge (d \cup x_1' \cup x_2 \cup x_3) \wedge \\ (e \cup x_1' \cup x_2' \cup x_3')$$

۴ . ۲ . ۵ . جمله : هر د بول پولینومفنکشن

$P: V^n \rightarrow V$ لپاره ټيک يو ديسيونکتيو نورمالفورم موجود دی. نو په دې توگه ټيک يو د بول پولينوم لاس ته راځي، کله چي ټول ديسيونکتيو نورمالفورمونه جوړ شي. په همدې توگه (دوه گوني) ويناد کونيونکتيو نورمالفورم لپاره هم باور لري.

د دې جملې د بنوونې څخه هم دلته تيرېږو، دا په نورو ادبياتو کې شته (دا دې گران لوستونکي په پام کې ونيسي، چي دا به ځما پوره وخت ونيسي که دا هرڅه راوگورم. ځما هدف همدومره دی، لکه چي په نورو ځايونو کې مي هم گوته ورته نيولی، دا بنسټيز څه راټول کړم)

د نورمالفورم د څيرلولپاره کله کله لاندې خويونه (قاعدې)

گټورې دي، کومې چي په نورمالفورم کې د $0, 1 \in V$

« ځايونو يا ايښوونو » له لارې لاسته راوړل کيږي. ځکه چي

د بيلگي په توگه $x_1^{i_1} \wedge x_2^{i_2} \wedge \dots \wedge x_n^{i_n}$ يواځي n -گونو لپاره

له $0, 1 \in V$ نا مساوي 0 دي (په ريښتوني مساوي په 1)،

په کوم کې ، چي $x_j = 1$ د $i_j = 1$ لپاره او $x_j = 0$

د $i_j = -1$ لپاره دی، يعنې د دې n -گوني

. $(1^{i_1}, 1^{i_2}, \dots, 1^{i_n})$ لپاره

قاعده ۱ : که دا لاندې

$$\bigcup_{(i_1, \dots, i_n)} a_{i_1 \dots i_n} x_1^{i_1} \cap \dots \cap x_n^{i_n}$$

د بول د پولینوم فنکشن $P \in A_n(V)$ د سیونکتیو نورمالفورم وي، نو د $1' = 1, \bar{1}' = 1' = 0$ سره باور لري

$$a_{i_1 \dots i_n} = P(1^{i_1}, \dots, 1^{i_n})$$

د ټولو $(i_1, \dots, i_n)$ لپاره.

نو د بیلګې په توګه د $n = 3$ لپاره دی:

$$a_{1,-1,1} = P(1,0,1), \quad a_{-1,-1,-1} = P(0,0,0), \\ a_{1,1,1} = P(1,1,1)$$

ددې اړیکو وروسته د P د سیونکتیو نورمالفورم د ټاکلو لپاره بسیا کوي، که 2^n د P فنکشن ارزښتونه په ټولو n -ګونو کې له 0 او 1 (د V څخه) راپیدا کړو. لیدوړ دا لاس ته راوړنی د $n = 2$ لپاره د P سیونکتیو نورمالفورم په لاندې توګه راګوي:

$$P = (P(1,1) \cap x_1 \cap x_2) \cup (P(0,1) \cap x_1' \cap x_2) \cup \\ (P(1,0) \cap x_1 \cap x_2') \cup (P(0,0) \cap x_1' \cap x_2')$$

د دې سره د سیونکتیو نورمالفورم لپاره دوه ګوني نتیجه

په لاندې توگه ده:

قاعده ۲: که

$$\bigcap_{i_1, \dots, i_n} a_{i_1 \dots i_n} U_{x_1}^{i_1} U \dots U_{x_n}^{i_n}$$

د بول د پولینومفنکشن P د سیونکتیو نورمالفورم وي،

نو د $0^1 = 0$, $0^{-1} = 0' = 1$ سره باور لري

$$a_{i_1 i_2 \dots i_n} = P(0^{i_1}, 0^{i_2}, \dots, 0^{i_n})$$

د بیلگې په توگه د $n = 3$ لپاره دی:

$$a_{1,1,-1} = P(0,0,1) \quad \text{او} \quad a_{-1,-1,1} = P(1,1,0)$$

پخوا له دې چې موږ د نورمالفورم ترانفورمیشن لپاره تگلار

روښانه کوو، یا لیکو، نو د مختلفو څیرو گڼون (تعداد یا

شمیر) دې ورکړ شي. دلته طبعاً ټول الجبرونه پای دي.

توکي V ته $2^k = m$ توکي ولري، نو $A_n(V)$

لکه چې پوهیږو $m^{(m)}$ توکي لري، ځکه چې V^n ټیک m^n

توکي لري. د بول پولینومفنکشن گڼون د دې په څېر m^{2^n}

دی، کوم چې سملاسی د نورمال فورم په څیر انځورونی څخه

لاس ته راځي، ځکه چې د دلته 2^n څلووني یا ضریبونه $a_{i_1 \dots i_n}$

په خوښه د m توکو سره (له V څخه) ځایونکی یا ځای په ځای کیدی شي. که $m > 2$ وي، نو په ټولیزه توګه کم پولینومفګنګشونه موجود دي نسبت و ځیرونو ته. که $m = 2$ وي، کوم چی د کارونی یا استعمال لپاره مهم حالت انځوروي، نو بیا دواړه ګڼونه مساوي دي، په نامه 2^2 سره. له دې لاس ته راځي

۴. ۲. ۶ جمله: که $B = \{0,1\}$ دوه توکیزه د بول الجبر وي، نو هر n - ځایز د بول فنګشن، یو د بول پولینومفګنګشن په څیر انځوروي.

اوس د دیسیونکیو نورمالفورم د راپیداګولو تګلار و یوه پولینومفګنګشن P ته، په P باندې لاندې پلونه کارول کیږي:

۱ - د دې مورګان de Morgan قاعدې د استعمال له لارې ټول کمپلیمنت ' جوړښتونه تړلي x_i ته راوړل کیږي، همداسی ثابتو ته راوړل کیږي.

۲ - د دسیټریوټیو قانونه کارونی یا استعمال سره سم P د غوڅیو ټولنی ته راوړل کیږي. په دې فورم کی په ټولیزه توګه ځنی «زیاتوونی» (x_i او x_i' غوڅي دي) یو څو x_i ورکیږي، مګر د هر i لپاره په یوه زیاتوونی کی

- زیات تر زیاته یو له x_i او x_i' رامنځ ته یا راڅرگندېږي.
- ۳ - که د دیسیونکشن په یوه زیاتون کی یو x_i وړک شي، نو $x_i' \cup x_i$ په دې زیاتون کی د یوه «فاکتور» په څیر ورزیاتېږي (دا اړوند پولینومفنکشن نه تغیروي، ځکه چې $x_i' \cup x_i$ تل 1 ورکوي)
- ۴ - په دې داسی تغیر شوې زیاتوونی باندې تر هغی پورې دیستریبوتیو قانون کارول کېږي یا استعمالېږي، تر څو چې بیرته د غوڅیو ټولنه رامنځ ته شي یا راپیدا شي. دا د برابر زیاتونونو د ټولگی (دا په دې مانا، چې چیرته چې همغه x_i کمپلیمنت شوی وي او یا نه وي کمپلیمنت شوی) او دیسیونکتیو نورمالفورم ترتیبوو (بیرته د دیستریبوتیو قامون د کارونی لاندې)، که چیرې ممکن دا وړک زیاتوونی (د x_i او x_i' غوڅی) د ځلوونو 0 سره تکمیل شي.

دا روښانه ده، چې د ټول هغه بڼه اړونی یا فورمبدلون سره، چې همغه مطلوب پولینوم پورې اړه لرونکی پولینوم فنکشن، همغه پولینومفنکشن لکه پخپله P دی. په ریښتونی سره له دې امله د پولینومفنکشن نورمالفورم و P ته لاس ته راوړو.

۴ . ۲ . ۷ بیلگه : P دې په V باندې په لاندې توگه

دوه ځایز پولینومونه وي

$$P = ((a \wedge x_1) \cup (b \wedge x_2))' \cup (x_1 \cup b)'$$

د $a, b \in V$ سره

لمړی پل :

$$((a' \cup x_1') \cap (b \wedge x_2)) \cup (x_1' \cap b')$$

دوم پل :

$$(a' \cap b \wedge x_2) \cup (b \wedge x_1' \wedge x_2) \cup (b' \wedge x_1')$$

دریم پل

$$(a' \cap b \wedge (x_1 \cup x_2') \wedge x_2) \cup (b \wedge x_1' \wedge x_2) \cup (b' \wedge x_1' \wedge (x_2 \cup x_2'))$$

څلورم پل

$$(a' \cap b \wedge x_1 \wedge x_2) \cup (a' \cap b \wedge x_1' \wedge x_2) \cup (b \wedge x_1' \wedge x_2) \cup (b' \wedge x_1' \wedge x_2) \cup (b' \wedge x_1' \wedge x_2)$$

د

$$(b \wedge x_1' \wedge x_2) \cup (b' \wedge x_1' \wedge x_2) = (1 \wedge x_1' \wedge x_2)$$

له امله، د نورمالفورم په بڼه لاس ته راځي:

$$((a' \wedge b) \wedge x_1 \wedge x_2) \vee (1 \wedge x_1' \wedge x_2) \vee (0 \wedge x_1 \wedge x_2') \vee (b' \wedge x_1' \wedge x_2')$$

لوستونکي دې دا نتیجې د قاعدې ۱ سره وازمایي.

په پای کې دې n - ځایز ځانګړی د بول فنکشنونه په $B = \{0, 1\}$ باندې وڅیړل شي، کوم چې همدا اوس د n - ځایز پولینومونو له لارې، د مخه تیرې جملې سره سم راوښول کېدی یا لاس ته راتلی شي.

که P یو داسې پولینوم وي، نو P هر n -ګونی د $0, 1$ یا په 0 او یا په 1 تنظیموي. په دیسیونیکتو (کونیونکتو) نورمالفورم کې څلورني هم یا 0 او یا 1 دي او لاندې پریکړه کوو: په دیسیونیکتو نورمالفورم کې ټول زیاتووني یانې $a_{i_1 i_2 \dots i_n} = 0$ د څلورو $a_{i_1 i_2 \dots i_n} \wedge x_1^{i_1} \wedge x_2^{i_2} \wedge \dots \wedge x_n^{i_n}$ سره پریښوول کېږي او څلورنی 1 نه لیکل کېږي. په کونیونکتو نورمالفورم کې به ټول فاکتورونه (دا اوس ټولنه $x_1^{i_1} \vee x_2^{i_2} \vee \dots \vee x_n^{i_n}$ ده) د څلورو $a_{i_1 i_2 \dots i_n} = 1$ سره پریښوول کېږي یعنې صرف نظر پرې کېږي او څلورنی 0 نه لیکل کېږي. دا چې 1 او 0 د $\vee$ او $\wedge$ لپاره ناپیلې یا بیتاثيره توکي دي، نو د هغه نورمالفورم باندې لیکلي پولینوم کې تغیر نه راځي. په هر حالت بیا

ثابت فنکشن د 0 ارزښت سره (داسی لیکور دی)
 دیسیونکتیو نورمالفورم نه لري. او ثابت فنکشن د
 ارزښت سره کوم کونیونکتیو نورمالفورم نه لري.

۴ . ۲ . ۸ بیلگه: د لته دې ۳-خایز فنکشن
 $P: B^3 \rightarrow B$ د لاندې جدول سره ورکړ شوی وي:

x_1	x_2	x_3	P
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	1

د قاعدې ۱ سره سم د P دیسیونکتیو نورمالفورم د
 لاندې سره برابر دی.

$$(x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3') \vee (x_1' \wedge x_2 \wedge x_3) \vee \\ \vee (x_1' \wedge x_2 \wedge x_3') \vee (x_1' \wedge x_2' \wedge x_3')$$

دیسونکتیو نورمالفورم د هر فنکشن ارزښت ۱ لپاره یو
 زیاتوونی خوندي لري، په کوم کی چی x_i ولاړ دی،

که $x_i = 1$ وي، او $x_i' = 0$ ولاړ وي، که $x_i = 0$ وي (په ورته توګه n -ګونی $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ د فنکشن ارزښت 1 سره). که x_i د یوه شرط په څیر ونیول شي ($x_i = 1$) نو بیا «شرطونه پوره دي» بلل کیږي، $x_i = 0$ په همدې توګه «شرطونه نه دي پوره» بلل کیږي، نو په دې توګه د سیونکتیو نورمال فورم د ټول کمبینیشنونو یو لیستونه یا یو جوړشوی لیست راکوي د ټولو n شرطونو x_i سره، په کومو کې چې 1 د فنکشن ارزښت په څیر لاس ته راځي: $x_1 \wedge x_2 \wedge x_3'$ په همدې توګه x_1 او x_2 پوره دي او x_3 پوره نه دی.

د قانون ۲ د کونیونکتیو نورمال فورم P د لاندې سره برابر دی:

$$(x_1' \cup x_2 \cup x_3') \wedge (x_1' \cup x_2 \cup x_3) \wedge (x_1 \cup x_2 \cup x_3')$$

کونیونکتیو نورمال فورم د هر فنکشن ارزښت 0 لپاره یو فاکتور خوندې لري، په کوم کې چې x_i ولاړ دی یا ځای دی، که $x_i = 0$ وي او x_i' ځای په ځای وي، که $x = 1$ وي (په همدې توګه n -ګونی $(x_1, \dots, x_n)$) له B^n څخه د فنکشن ارزښت 0 سره). کونیونکتیو نورمال فورم پس د کمبینیشن د شرطونو یو لیست جوړونه

ده، د کومو لاندې چې 0 د فنکشن ارزښت په څیر لاس ته راځي: $x_1' \cup x_2' \cup x_3'$ په دې مانا دي، چې x_1 یا x_2 پوره دي او یا x_3 پوره نه دی.

په الجبر $A_n(B)$ کې د $A_n(B)$ څخه دیوه د مخه ورکړ شوي پولینوم فنکشن P کمپلیمنټ P' څنګه ټاکل کېږي؟ د ورکړ شوي قانونمندی له مخې د دې لپاره په ساده توګه P په یوه دیسیونکتیو نورمالفورم انځوروي، بیا نو P' ټیک د غوڅیو ټولنه ده، کومه چې د P په نورمالفورم کې نه رامنځ ته کېږي (یعنې 0 ځلوونی لري). په ورته توګه د دیسیونکتیو نورمالفورم لپاره هم مخ ته تللی شو.

۴ . ۲ . ۹ بیلګه: د اخرنۍ بیلګې څخه د پولینوم فنکشن P لپاره د P' دیسیونکتیو نورمالفورم لاندې توګه ورکړ شوی.

$(x_1 \cap x_2' \cap x_3) \cup (x_1 \cap x_2' \cap x_3') \cup (x_1' \cap x_2' \cap x_3)$
پام دې وي، چې $(P')' = P$ دی او د دېمورګان قانون له مخې د یوه دیسیونکتیو نورمالفورم کمپلیمنټ کونیو-نکتیو نورمالفورم دی، نو ګورو، چې د د دیسیونکتیو

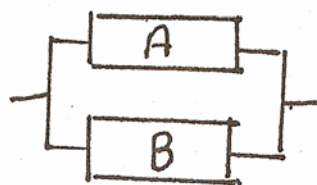
نورمالفورم P' څخه کونیونکتیونورمالفورم P د کمپلیمنت
دجوړولو له لارې لاس ته راوړي،

۴ . ۳ سویچ الجبر یا بریښنا جیریان الجبر

په بریښنايي یا برقي سرکیتونو (Schlatkreise (En. circuit) (یا بریښناجیریانکړی یا په ساده توګه: بریښنادوران) کې
سویچ د بریښنا اړیکو یا بریښنا تړونونو کې، د وازولو او
بندولو لپاره دنده په غاړه لري. موږ دلته دوه ګوني دوه اړیکیز
سویچونه تر څیړنې لاندې نیسو، کوم چې په بند حالت کې برق
جیریان په دواړو لورو ممکنوي. د سویچ حالت کیدي شي بند
یا واز وي، یعنې ټيک دوه ارزښتونه نیولی شي. واز سویچ سره
ارزښت 0 تنظیموو او بند تړلي سویچ سره ارزښت 1 تنظیموو،
داسې چې 0 په دې مانا دی، چې «برق نه شته یا برق جیریان
نه لري» او 1 دا مانا لري، چې «برق جیریان لري». دلته 0,1
د سویچ ارزښتونه هم بلل کېږي.

کیدي شي، چې سویچونه په زیاتو ډولونو یوه سرکت ته سره

یوځای کړي شي. دلته خورا مهم یی هغه سرکیتري circuitary
دی، چې د پایډیرو غبرګسرکیتريو یا همداسې سیريالسرکیتريو
په څیر جوړ شوي وي. په ټولیزه توګه سویچونه هغه جوړښتونه
وي، کوم، چې «واز» یا «بند یعنې تړلی» کیدي شي.



څیره

که A او B دوه سویچونه وي، نو غبرگسرکیتېري، لکه په پورته څیره کې انځور شوی په کار واچول شي، او دا به د $A \vee B$ سره په نڅېنه کېږي.

په څرگند ډول $A \vee B$ یو سویچ ارزښت 1 لري، که کم له کمه یو له دې سویچونو څخه واز وي او ارزښت 0 لري، که دواړه سو- یچونه ارزښت 0 ولري. کیدی شي د سویچ ارزښتونو لپاره پخپله غبرگ سرکیتېري (یا شاید په انگریزي سرکیت وېبل شي) داسی ولیکل شي

$$0 \vee 0 = 0, 0 \wedge 1 = 1, 1 \vee 0 = 1, 1 \wedge 1 = 1$$

کیدي شي، چې $A \vee B$ د یوځای آیینمول شوي سویچ په څیر وکتل شي، چې دا د A او B په اړتیا یا په واک برقجریان بهیږي یا برق جایان لري او که یا نه بهیږي یا نه پریږدي.

د A او B سویچونو زیریالسرکیتېري $A \wedge B$ د A او B یو بل پسې یعنی په پرلپسې توگه ایښوونی یا ځای په ځای کونی څخه منځ ته راځي، لکه په څیره کې چې انځور شوي.

سرکیت یا برېښنادوران $A \wedge B$ ټیک او ټیک هلته ارزښت 1

لري، که دواړه سویچونه ارزښت 1 ولري او په غیر له دې

$$\text{ارزښت } 0. \text{ لنډ: } 0 \wedge 0 = 0, 0 \wedge 1 = 1 \wedge 0 = 0$$

$$\text{او } 1 \wedge 1 = 1$$

دلته هم $A \wedge B$ یو رایوځای شوی سویچ دی.

ددې سره تړنی $A \vee B$ او $A \wedge B$ د سویچ لپاره همغه

فورمالی قاعدې ډکوي یا پوره کوي، لکه د ویناو لپاره د

سمسوچ له پوهی ورسره بلده په $\vee$ او په $\wedge$ راوړل شوو

د بول الجبر، سرکیت الجبر ۱۱۹

تړونونو کې. هلته د یوې وینا نه والی هم موجود دی. که $\vee$ ، $\wedge$ د سویچ ارزښتونو 0 ، 1 په څیر راوښو، نو هغه په باندې شمیر قوانین د $\vee$ او $\wedge$ دیوه بول الجبر لپاره په $\{0, 1\}$ پوره دي. هلته کومپلیمنت هم په واک کې لرو. دا کلیمې جوړونې د سویچ لپاره هم یوه موخه لري: د A' سره یو سویچ په نخښه کوو، کوم چې تل یو و A ته په څپ ارزښت لري، د کوم سره، چې موږ په تخنیکي ریښتینوالي یا ریالیزه باندې ددې



څیره

غوښتنو (لکه د مناسبو چالانماشین له لارې) په غم کې نه یو. A د A' نیکیشن یا نفی هم بلل کېږي. د سویچ ارزښت لپاره دا دامانا لري، چې $0' = 1$ ، $1' = 0$. په دې توګه سویچ ارزښتونه د عملیو یا کارونو $\vee$ ، $\wedge$ ، ' سره یو دوه توکیزه بول الجبر جوړوي.

۳. ۴. ۱ تعریف: یو زیریالغبرګ سرکیتري د پای ډیرو سویچونو څخه جوړېږي د پای زیات فورمال عملیو ، ، ، د کارونې یا استعمال سره. په داسې سرکیت کې دوه سویچونه، کوم چې همغه د سویچ ارزښتونه لري په همغه یا برابر سومبول سره په نخښه کېږي.

تیک داسې تعریفولی شو: هر سویچ یو زیریالغبرګ سرکیتري جوړوي. که S_1 ، S_2 زیریالغبرګ سرکیترونه وي (یعنې سره

رایوځاي ایښوولي سرکیتري یا سویچونه) ،
 نو $S_1 \vee S_2, S_1 \wedge S_2$ او S' هم زیریالغبرگ سرکیترونه دي.
 هر زیریالغبرگ سرکیتري په ټولیزه توګه زیات پیچلی جوړ
 شوی سویچ دی، چی د «برخسویچونو» ځایینونی څخه په
 واکوالی کی یا په اړه، واز (ارزښت 0) یا تړلی
 (ارزښت 1) دی. له دې امله کیدی شي، چی بیرته دوه
 سرکیتونه د $\wedge$ او $\vee$ له لارې سره وتړل شي. کیدی شي،
 چی موږ لنډ له سرکیتونو یا سرکیتريو څخه وغږیږو.
 د یوه زیریالغبرگ سرکیتري S د سویچ د هر ځاي نیونی
 لپاره د یوه ټاکلی سویچ ارزښت ټول سرکیتري لاس ته
 راکوي، په دې اړوند، چی ایا د دوي ترمنځ بریښنا بهیږي
 (جریان لری) او که نه. پس وي دې $A_1, \dots, A_n$ د پورته
 تعریف سره سم د سرکیت $S(A_1, \dots, A_n)$ سویچونه، د
 کومو سره چی A_i زیات واره جوړیدی شي. د سویچونو
 $A_1, \dots, A_n$ هر ځایینونه د 0, 1 د یو n -ګونو سره برابر
 دی او د S له لارې یا د S سره به دا n -ګونی یا 0 او
 یا 1 د S په سویچ ارزښت باندې تنظیمیږي. په دې توګه
 سرکیت S یو n -ځایز د بول-فنکشن f_S په دوه توکیز د
 بول په الجبر $B = \{0, 1\}$, $f_S : B^n \rightarrow B$ تعریفوي (دې ته
 دې دلته هم پام وي او داسی نور ورته لیکنو ته، چی دا د
 لاتین تورو لیکنی له کینې وښی لور ته لوستل کیږي، په دې
 ګران لوستونکی پوهیږي، چی یادونی ته اړتیا نه شته، خو
 زما زړه نه ودریده). دلته f_S په سرکیت S اړه لرونکی

سویچ فنکشن بلل کیږي. اوس څنگه کیدی شي، چی سرکیت په $A_n(B)$ کی د سرکیتري لپاره د $\cup, \cap, ' , \emptyset$ کارونی یا عملی وکارونه واضح کړای شي؟ اوس دې S, T دوه سرکیتونه وي، له سویچونو A_1 څخه د سویچفنکشنونو f_S, f_T سره، نو کیدی شي، چی له S, T څخه هم زیریالسرکیتري $S \wedge T$ او هم یو غیرگسرکیتري $S \vee T$ جوړ شي، پوره و یوگونو سویچونو ته ورته یا لکه همغسی لکه یو گوني سویچونه. دا نو اوس روښانه ده، چی $f_S \cap f_T$ د $S \wedge T$ سویچفنکشن دی او $f_S \cup f_T$ د $S \vee T$ سویچفنکشن دی. بالاخره f_S' سویچفنکشن دی و سرکیت S' ته، کوم چی تل و S ته مخامخ- یا په بل عبارت په څپ سویچ ارزښت لري.

۴ . ۳ . ۲ تعریف : دوه زیریالغبرگ سرکیتري S

او T و همغو سویچونو $A_1, A_2, \dots, A_n$ ته، ایکویوالنت یا همغه ارزښتیز بلل کیږي، که دا همغه سویچفنکشن ورکړي، دا په دې مانا چی که د هغو سویچفنکشنونو f_S او f_T لپاره باور ولري $f_T = f_S$.

د استعمال یا کارونی د لیدنکي څخه دا تعریف موخوږ (همدفمند) دی، ځکه چی لمړی علاقه مو د سویچفنکشن سره ده، یعنی د سرکیت ځانیونی ته ده او کم د هغه دنننی جوړښت ته.

د سرکیتونو ترمنځ په دې پورته ورکړ شوي تعریف کی روښانه شه، اړیکه به ښتینه، برابر ارزښته اړیکه دی، په داسی

حال کی چی دې برابر ارزښتبولگی پورې ټول سرکیتونه اړه لري یا په هغه ټولگی کی دي، د هغه سویچفنکشن سره. له دې سره د سرکیت څیرنه د بول الجبر په څیرنه بیرته واپړول شوه او په دې توگه شمیرپوهنیزو متودو یا لارو ته لار ور جوړه یا ور وازه شوه، لکه په مخته تیره برخه کی چی ودیزه شوې وې.

په سرکیتري تیوري (Switching Theory) او همداسی په ټولیزه توگه په سرکیت تیوري کی دوه غوره پرابلمونه دا لاندې دي:

اول (د ورکړ شوي سرکیتري شننه یا تحلیل او

دوم) د پلټونکی سرکیتري سینتیز Synthese.

په شننیز حالت کی یو سرکیتري S د مخه ورکړ شوې ده او د هغه سویچفنکشن باید راپیدای شي یا غوښتل کیږي. د دې لپاره د S د هر سویچ $A_1, A_2, \dots, A_n$ د سرکیتري S لپاره د سویچ ارزښت باید کره وټاکل شي. کیدی چي اوس S په $A_1, A_2, \dots, A_n$ کی (د $x_1, x_2, \dots, x_n$ په ځای) باندې د بول د پولینوم په څیر انځور شي په همدې توگه یا په ورته ډول د S جوړونه په $\wedge, \vee, \neg$ سره له $A_1, A_2, \dots, A_n$ څخه. له دې پولینوم څخه یا سیده د فنکشن ارزښت شمیرل کیږي او یا په هغو د دواړو نورمالفورمونو څخه په یوه ترانفورمي کیږي، له کومو چی بیا فنکشن په ساده توگه لوستل کیږي.

۳. ۳. ۴ بیلگه: لاندې سرکیت S دې د سویچونو A, B, C سره مخته دوت وکړ، څه د وکتا، شه به

د بول الجبر ، سرکیت الجبر ۱۲۳

ورته توگه د بول پولینوم په دې توگه دی

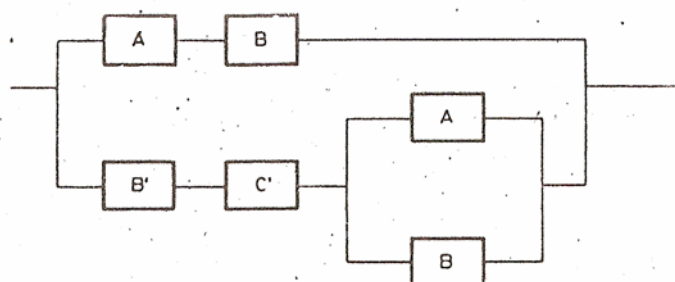
$$(A \wedge B) \vee (B' \wedge C' \wedge (A \vee B))$$

دا په دیسیونکتیو نورمالفورم اړوو:

$$(A \wedge B) \vee (A \wedge B' \wedge C') \vee (B \wedge B' \wedge C)$$

$$(A \wedge B \wedge (C \vee C')) \vee (A \wedge B' \wedge C')$$

$$(A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge C') \vee (A \wedge B' \wedge C')$$



د نورمالفورم (اخرنی لیکه) سملاسی د S ارزښت جدول لاس ته راځي :

A	B	C	f_S
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	0	1
1	0	1	0
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

ټیگ د دې په خټ د سینتیز پرابلم رامنځ ته کیدنی سره د یوه سرکیپ د پرابلم رامنځ ته کیدنه ده. د لته دې د سویچفېن-کشن فورکړ شوی وي، او د دې سویچفېنکشن رښتیا کیدونکی

یا ریالیزه کیدونکی سرکیټري دپیدا شي. دا پرابلم یواځنی ټاکلی اوبی یا حل نه لري او امکانات شته، چی د هغه موخی لپاره جگ اوبی ولټول شي. یو په هر صورت یواځي تیوريکي مانا لرونکی اوبی سملاسی ورکول کیدی شي. که ارزښت جدول پیژندل کیږي، نو کیدی شي، چی د دیسیونکتیو نور-مالفورم ولیکل شي او د هغې سره سم یو سرکیټري جوړ کړی شي. په دې سرکیټري کی مگر د دې

رامنځته کیدونکی گڼون هر د سویچ په ټولیزه توگه نازغموړ یا بهتره بي وعدي وړ لوي وي، دا په دې مانا، چی تخنیکي ریښتینوالی به یی زیات قمته وي. دلته یو سرکیټري د کمو سویچونو سره لټول کیږي، چی هغه د مخه ورکړ شوی سویچفکشن ریښتینی کوي. د جوړولو قیمت یا مصرف باندې یی یواځی د سویچونو گڼون تاثیر نه لري، بلکه جوړونه هم او همداسی د سرکیټ ښکترکتور یا جوړشودول د زیاتو مختلفو قمتهفکشنونو له مخی پاملرنه ورته شي. داد کمون پرابلم نسبی تاوونی کیدی شي حل شي. د دې پرابلمونو حل یا اوبی د بیلگي په توگه د Kohavi 1970 په کتان کی ورکړ شوی دی. د سرکیټونو کارونه د مختلفو کارخانو په چا-لانو کی د خورا لوي اهمیت دي: په مرکز گرمی، خطرزنگ، کنترولخونوکی او داسی نور. یوگوني سویچونه په دې کی ټاکلی پیښي، حالتونه، او شرایط په گوته کوي له کومو، چی د هغو ځاي مربوط دی یا اړه لري. موضوع هم دلته را لنډوو او په همدې لوستلشوو بسیا کوو.

۵ الجبرونه

يو څو بنسټيزې کليمي

لومړۍ موخه مو دا ده، چې د دې کتاب د الجبر بنسټيزو کليمو په څيړلو پيل وکړو، چې موږ دا په نامه ټوليز الجبر، يا لنډ الجبر بولو. برسيره پر دې دلته درې مهمې جوړښتيز کليمي پيژندل کيږي يا معرفي کيږي، چې د هغو په مرسته بيا له ورکړ شوو الجبرونو څخه نور (واړه يا کوچنۍ) الجبرونه گټل کيدی شي، په نامه لاندې الجبرونه، بيا هومومورفي څيره کونۍ او بالاخره فاکتور الجبرونه، کوم چې د کونگرواينځ اړيکو له فاکتوره کوونۍ څخه لاس ته راوړل کيږي.

په تکراري توگه د لته هم د الجبري جوړښتونو د بيلگي لپاره، لومړۍ، لکه ددې کتاب هم، لکه د گروپونو په

درس کی مو چی گوته ورته ونيوله ، گروپونه خپرل کيږي.

دا تعريف به د لمړني تعريف سره لکه په برخه ۳ کی موچی کړی وو، يواځی په نځېبونه کی توپير ولري. دلته به مو د گروپ تعريف داسی وي، چی سملاسی راته د الجبر يوه بيلگه راکوي.

۵ . ۱ . ۱ تعريف: گروپ په پيژندل شوي ډول يو ډیډی، د یوه، په G باندې د دوه ځایزې کارونی یا اپریشن، نښلونی، گنډنی یا عملیې د تعريف سره. (دا په دې مانا، چې يوه څيره کونه له $G \times G$ څخه په G کې د $x.y \rightarrow (x,y)$ سره) کوم چی لاندې قاعدې پوره کوي یا په کومو کې، چی لاندې قاعدې صدق کوي

(د ټولو) $x,y,z \in G$ (لپاره باورل ري):

(اسوخیاتیو قانون) $(x.y).z = x.(y.z)$

دا اسوخیاتیو قانون په نځېبونه داسی لیکلی شو:

$\forall x, y, z \in G : ((x.y).z = x.(y.z))$
 (یو) $\exists e \in G$ (د ټولو) $x \in G$ (لپاره موجود دی، د
 کوم لپاره چی باور لري) :

(ناپیلې توکی) $e.x = x.e = x$

دا پورته قاعده داسی په نځنولیکلی شو:

$\exists e \in G, \forall x \in G : e.x = x.e = x$
 (د ټولو) $x \in G$ (لپاره یو) $x' \in G$ موجود دی د کوم
 لپاره چی باور لري:

(په خټ توکی) $x.x' = x'.x$

دا قاعده په شمیرپوهنیزه نځنو داسی لیکلی شو:

$\forall x \in G \quad \exists x' \in G : x.x' = x'.x = e$

په دې قاعدو کې د ټول کوانتور (Allquantor) $\forall$
 (لوستل یی : د ټولو لپاره) او د موجودیت کوانتور
 (Existenzquantor) $\exists$ (لوستل یی : موجود دی)
 کارول شوي دي. دریمه قاعده د بیلگي په توگه داسی لو

ستل کړي: «د ټولو x لپاره، چې د G توکی دی یا په
 کې G پروت دی، یو توکی x' له G څخه موجود دی،
 د $x.x' = e$ سره یا په بل ډول: د کوم لپاره چې $x.x' = e$
 باور لري». دلته e د دومی قاعدې سره ورکړ شوی
 ناپیلی توکی دی (یواځنی ټاکلی). ناپیلی په شمیرپوهنه
 کې د یوې عملیې یا کاروني یا نښلونی په نسبت دا مانا
 ورکوي، چې دا ناپیلی توکی د یوه توکی سره په همغه
 عملیه کې همغه توکی بیرته لاس ته راکوي، یانې د همغی
 عملیې سره د یوه توکی سره په نښلونه یا عملیه کې راوستلو
 سره ور سره نښلوونې توکي کې بدلون نه راولی.
 په پوره ورته توګه، لکه ګروپ، کیدی شي، چې د بیلګې
 په توګه کړی هم تعرفي شي، چې دې کار دمخه صورت
 نیولی، د کوم لپاره، چې په هر حالت کې دوه عملیې په کار
 دي (زیاتون او ځل). د دې پام لرنو یا کتلو څخه د دې
 کتاب بنسټیزو کلیمو فکر رامنځته کېږي: د یوه «ټولیز یا
 عمومي الجبر» لاندې یو ډیری پوهیږو د عملیو د یوې
 کورنۍ سره، کوم چې تل یا ضرور باید دوه ځایز نه وي.
 دا اوس باید په پوره دقت یا پوره پام وړ تعریفونو کې راټول
 شي.

۵. ۱. ۲. تعريف : د هر گڼې $\{0\} \in N$ او هر

ډيري A لپاره يوه څيره ونه $f: A^n \rightarrow A$ شته، کومه چې $-n$ ځاييزه عمليه په A بلل کيږي. د ټولو n - ځايزو عمليو ډيري په A د $Op_n(A)$ سره په نڅښه کوو. په A باندې د پاڼځاييزو عمليو لاندې دا عمليې پوهيږو:

$$Op(A) := \bigcup_{n=0}^{\infty} Op_n(A)$$

۵. ۱. ۳. يادونه : د همدې ورکړ شوي تعريف سره به د

يو صفر ځاييزې عمليې لاندې څه پوه شو؟ کره دې ونيول شي، چې A^n دې د ټولو g څيره کونو يا څيره ونو

$$g: \{0,1,2,\dots,n-1\} \rightarrow A$$

ډيري وي. په ځانگړې توگه باور لري:

$$A^0 = \{g \mid g: \emptyset \rightarrow A\}.$$

مگر گورو، چې يواځې يوه څيرونه g موجود ده، يانې په

نامه $g = \emptyset$ (پام دې وي، چې هره څيرونه $g: \emptyset \rightarrow A$

په کره نيوکه د جوړو يو ډيري دی، دا په نامه

$$g = \{(x, g(x)) \mid x \in B\}$$

د $B = \emptyset$ لپاره، پس $g = \emptyset$) له دې امله يوه صفرځاييزه

عملیه یوه دا ورکړ شوې خپرونه ده : $f: \{\emptyset\} \rightarrow A$.
 دا خپرونه همداسې ټيک د A توکی په گوته کوي، ځکه
 چې f د $f(\emptyset) \in A$ توکی سره یواځنی ټاکلی دی، او د
 هر $a \in A$ (بیایي لوستل هر a له G څخه) لپاره ټيک
 یوه خپره ونه $f_a: \{\emptyset\} \rightarrow A$ موجود ده، د $f_a(\emptyset) = a$
 سره. له دې امله صفرخایزې اړیکې ثابتې هم بلل کیږي، او
 د f_a په ځای په ساده توګه a لیکو.

۵. ۱. ۴. تعریف : د یوه الجبر د تیپ یا ډول لاندې یوه
 تنظیم شوې جوړه (f, B) (دلته دا f باید لوی وی، خو
 زه یی بل ډول امکان نه لرم، بیا د سهوو سره مخامخ کیږو،
 ځکه چې په کمپیوټر کې د F څخه بدل بل لوی F نه لرم)
 پوهیږو، چیرته چې f یو ډیری دی، چې توکي یی د عملیو
 سومبولونه دي او $B: f \rightarrow N \cup \{0\}$ یوه خپره ونه ده، کوم
 چې هر $f \in f$ په ځایزوالی (یاني هغه ځای چې دا یی نیسی)
 $B(f)$ باندې تنظیم وي. دلته f یو د $B(f)$ - ځایزوالی
 عملیو سومبول بلل کیږي.

یو ټولیز الجبر (یا لنډ: الجبر) د (F, B) تیوپ یو تنظیم
 شوې جوړه $A = (A, F)$ ده، کومه چې له ډیري A او یوې

په A د عملیو کورنۍ $F(f | f \in f)$ څخه منځ ته راغلی یا جوړه شوې ده، چیرته چې هر $f \in f$ په $\beta(f)$ - ځایز عملیې $f \in \text{Op}(A)$ باندې تنظیم شي. ډیری A د A بنسټیزې بلل کېږي. بلل کېږي او د F توکی د A بنسټیزې عملیې بلل کېږي.

۵ . ۱ . ۶ یادونه : الف) : که چیرې د لوستونکو لپاره دا د الجبر تعریف، د د تیوپ سره ، اپریشن سومبول سره ، او داسې نور ، لږ پیچلی ښکارېږي، نو کړی شي ، چې دا لاندې تعریف ته خپل پام راوگرځوي.

د الجبر لاندې کیدی شي ، چې یوه جوړه $A=(A,F)$ پام یا خیال کي راولو، چې A یو ډیری او F یو د په A د عملیو یا کاروونو یا اپریشن پای ډیری وي. هغه نازکوالی، چې د مخ ته تیر تعریف و شا ته خوندې یا پټ دی، کیدی شي، چې وروسته په کرار کرار د نورو تیوریو په ودیزه کی روښانه شي.

ب) په دې کتاب کی تل د الجبر د کلیمې لاندې ټولیز یا عمومي الجبر پوهیږو. چې په دې توگه د کلاسیکي یا ټولگیز الجبر د کلیمې سره په یوه کړی باندې، څخه یی

توپیر کیدی شي. له دې امله ټولیزه یا عمومي کلیمه نه لیکو او لنډ یې «الجبر» لیکو.

پ (لیکنو ته یی یو څو یادونی : زیات وخت f د الجبر تیوپ بلل کېږي، دا په دې مانا، چی له سره مو فکر د کارونی سومبول ځایزوالی ته پام راگرځي. په څټ یا برعکس، زیات وخت د تیوپ β څخه غږیږو، که زیات مو موخه ځایزوالی وي او کم مو موخه د کارونی یا عمليي سومبول وي.

که یو الجبر (A, F) یواځي پای ډیرې بنسټیزې کارونی یا عملي ولري، د بیلگي په توگه $F = (f_1, f_2, \dots, f_k)$ ، نو زیات وخت دلته $(A, f_1, \dots, f_k)$ د (A, F) په ځاي لیکل کیږي، او تیوپ په دې $(\beta_1, \dots, \beta_k)$ بڼه نوټ کوو، چیرته چی f_i د β_i ځایزوالی راکوي.

د یوه تیوپ f په الجبرونو کی بنسټیزې کارونی یا عمليي د f_A سره نه په نڅېنه کیږي، بلکه په ساده توگه د f سره، دا په دې مانا، چی د اړوند کارونی سومبول سره، لکه چی د ابل گروپ کی زیاتون زیات د نڅېسې « + » سره په نڅېنه کیږي. دا امکانات، چی دا به مو سهو ته لارښود کړي، خورا کم دی.

۵ . ۱ . ۷ بیلګه ګروپ: په دې برخه کې ، لکه په سر کې مو چي الجبر تعريف کړ ، هغی ته ورته ګروپ د یو الجبر $(G, \cdot)$ په څیر د تیوپ (2) تعريفوو (ټيک: د یوه الجبر ، چي تیوپ یی (f, β) د $f = \{ \cdot \}$ سره دی او $\beta(\cdot) = 2$) ، چي هغه هلته نه ورکړ شوي اکسیومونه پوره کړي. په هر حالک ګټور دی ، که ګروپ بل ډول تعريف کړو (د مخه مو ګروپ پوره څیړلی دی او هلته یی تعريف بل ډول وو و دې اوسنی تعريف ته) . ورسره بلد یا مروج میتودونه دي: یو ګروپ یو الجبر $(\cdot, ^{-1}, e, G)$ دی ، د تیوپ $(2, 1, 0)$ ، چي لاندې اکسیومونه پوره کړي:

- ګ ۱ : $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ (اسوخیاتیو قانون)
 ګ ۲ : $x \cdot e = e \cdot x = x$ (ناپیلې یا بي تاثیر توکی)
 ګ ۳ : $x \cdot \bar{x} = \bar{x} \cdot x = e$ (په څټ توکی)

د دې متود ګټه په دې کی نغښتی ده ، چي د موجودیت کوانتورونو ته اړتیا نه پېښیږي او په څټ توکی په ساده توږه د یوه یوځایزې کارونی څخه لاس ته راځي ، او ناپیلې توکی د صفرځایزې کارونی په څیر په « تیوپ کی خوندي

ده». که چیرې له ټولکوانتورونو څخه تیر شو، نو کیدی شي، چې د گروپ اکسیومونه د مساوت یا برابرې په څیر ولیکل شي، څنگه چې دلته ورکړ شوي دي. دا نور هم روښانه کیږي، چې برابرې په ټولیز الجبر کې لوی رول لوبوي.

سړی کړی شي، چې گروپ په بل ډول هم ولیکي، د بیلګې په توګه د یو الجبر (G, p) په څیر، چې تیوپ یی (3) وي، په داسې ډول، چې p د سرچینیزې گروپ کارونې یا عملي د $p(x, y, z) = x \cdot y \cdot z$ په څیر تعریف شوې وي. لوستونکی دې پخپله دې ته پام کړي، چې ایا د گروپ اکسیومونه، یواځې د p له لارې فرمولولی شي. دې ته دې هم پام راواړول شي، چې یو گروپ $(G, \cdot, ^{-1}, e)$ ایلي abelsche Grupp یا کموتاتیو بلل کیږي، که لاندې برانرونه باور ولري:

ګ ۴: $x \cdot y = y \cdot x$ (کموتاتیو قانون)
دا ورسره بلد یا مروج دی، چې په ابل یا کموتاتیو گروپ کې $+$, $-$, 0 د e په ځای کارول کیږي.
(د زیاتون لیکنډول یا لیکنډود).

ب (یو الجبر $(G, \cdot)$ د تیوپ $\{2\}$ ګروپوئید بلل کېږي. یو ګروپوئید بل څه نه دې په غیر له یوه ډیري، چی په هغه کی یو دوه ځایزه کارونه یا عمیله کارول شوي وي، په ځانګړي توګه ګروپونه په همدې وخت کی ګروپوئید هم دي، که دا د تیوپ (2) الجبر په څیر وګڼل شي.

پ (یو ګروپوئید $(H, \cdot)$ نیمګروپ بلل کېږي، که $(H, \cdot)$ برابر ون ګ ۱ پوره کړي.

ت (یو الجبر $(M, \cdot, e)$ د تیوپ $(2, 0)$ ، مونوئید بلل کېږي، که $(M, \cdot)$ یو نیم ګروپ وي او برسیره پر دې برابر ون ګ ۲ پوره کړي.

ټ (یو ګروپوئید $(Q, \cdot)$ کوازیګروپ بلل کېږي، که د هر $a \in Q$ لپاره لاندې څیرونی د Q په Q باندې پرموتیشنونه وي، یعنی:

$$x \rightarrow a \cdot x \quad (a \text{ د سره کینې څلوونه})$$

$$x \rightarrow x \cdot a \quad (a \text{ د سره بڼی څلوونه})$$

زیات وخت د کارونی یا مروج دی، چی کوازیګروپ

د تیوپ $(2,2,2)$ الجبر $(Q, ., \backslash, /)$ په څیر تعریف
کړو، کوم چی لاندې برابر ونونه یا مساوات پوره کوي:

$$(Q1) \quad x \backslash (x.y) = y,$$

$$(Q2) \quad (x.y) / y = x,$$

$$(Q3) \quad x.(x \backslash y) = y,$$

$$(Q4) \quad (x/y).y = x$$

یا دونه: ګورو چی / او \ د بني او کینې ویشنی په
څیر کارول شوي (دا سي، نخښی، چی په هر بل ځاي
کی په بل مفهوم ورکړ شوې وي، همغلته به په همغه
مفهوم ونومول شي)

ث (یو لړ یو د تیوپ $(0,2)$ الجبر $(L, ., e)$ دی،
په کوم کی چی $(L, .)$ یو کوازیګروپ وي، او e یو
ناپیلی توکی وي، دا په دې مانا چی برابر ون ګ ۲ باور
لري. لکه د کوازیګروپ په څیر کیدی شی چی لړپ هم
تعریف شي، د یوه الجبر $(L, ., \backslash, /, e)$ په څیر.

ج (کړی: یو د تیوپ $(2,1,0,2)$ الجبر
 $(R, +, -, 0, .)$ کړی بلل کیږي، که $(R, +, -, 0)$ یو ابل
ګروپ وي، $(R, .)$ یو نیمګروپ او لاندې دیستریبوتیو

قوانين باور ولري:

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \quad (\text{د } ۱)$$

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z \quad (\text{د } ۲)$$

پام دې وي: د دې لپاره، چې نوکان مو سپما کړي وي،
نو هغه له پخوا معلومه قاعده کارول کيږي، چې ټکيشميرنه
له کرښميرنې له مخه ده، دا په دې مانا، چې لمړی د ټکو
شميرنه بدنيز (تنيز) کيږي يا صورت نيسي لکه ځل او ویش
او ورپسې بيا هغه چې کرښميرنه وي لکه زياتون او کمون.
يوه اونيتار کړۍ (unitärer Ring) $(R, +, -, 0, 1)$ (دا په دې
مانا چې دا يوه کړۍ ده د يوي سره)، يو الجبر دی، چېرته
چې $(R, +, -, 0, 1)$ يوه کړۍ ده او 1 يو ورزيات شوی صفر
ځانيزه کارونه يا عمليه ده، کوم چې مساوت گ ۲ پوره کوي
(طبعاً دلته 1 د e په ځاي دی).

ح تن يا بدن (يو اونيتار کړۍ $(K, +, -, \cdot, 0, 1)$) يو تن
يا بدن بلل کيږي (انکريزي field) که $(K, \setminus, \{0\}, \cdot, +)$ يو
ابل گروپ وي، د ناپيلي توکي 1 سره. دا راته نژدې پرته ده،
چې اوس که پر دې په ورزياته توگه $x \rightarrow x^{-1}$
(په $(K \setminus \{0\}, \cdot, +)$ کې په څې څيرونه) يوه يوځانيزه کارونه يا

عملیه یا آپریشن وگڼو. دا چي 0^{-1} تعریف نه دی، نو
 $(1, -1, 0, +, -, K)$ به د لمړنی تعریف په موخه کوم الجبر نه وي.
 د ټوټه الجبر په تیوري کی، چی په دې کتاب کی نه راوړل
 کیږي، نا پوره تعریف شوې عملیې یا کارونی اجازه لري.

خ (مودولونه Moduln . دا $(R, +, -, 0, .)$ دې یوه کړی
 وي. یو الجبر $(M, +, -, 0, R)$ د $(2, 1, 0, (1)_{r \in R})$ تیوپ
 R -مودول بلل کیږي (یا مودول په کړی R باندې)،
 که $(M, +, -, 0)$ یو ابل ګروپ وي، او د ټولو $r, s \in R$ لپاره
 لاندې مساوات باور ولري:

$$r(x+y) = r(x) + r(y) \quad (1 \text{ م})$$

$$(r+s)(x) = r(x) + s(x) \quad (2 \text{ م})$$

$$(r.s)(x) = r(s(x)) \quad (3 \text{ م})$$

په یوه اونیټارکړی $(R, +, -, 0, 1)$ باندې مودول څخه دا د
 لاندې مساوات باوریوالی هم غوښتل کیږي.

$$1(x) = x \quad (4 \text{ م})$$

دا لمړنی بیلګه ده د ناپایدیږو عملیو سره (طبعاً که R
 ناپای وي). برسیره پردې هم یو ځانګړی پام ضرور دی،
 ځکه چی سومبولونه $+$, $-$, 0 په دوه مختلفو ماناو رامنځ

ته کيږي: يو ځل د ابل گروپ $(R, +, -, 0)$ عمليې په څير او بيا د ابلگروپ $(M, +, -, 0)$ په څير. دا پرابلم په ساده توگه کيدی شي، چي راوباسل شي، د بيلگي په توگه په کوم کي $(R, +_R, -, 0)$ او $(M, +_M, -, 0)$ په څير ليکل کيږي. يواځي د اسانتيا له خاطره ضرور ښکاريږي، چي د ابل گروپونو باندې په همغه يوون د $+, -, 0$ سره پاتي شو،

خ (وکتور فضا (وکتورها) : وي دې $(K, +, -, 0, 1)$ يو تن . نو هر K -مودول $(V, +, -, 0, K)$ موږ K -وکتورها (يا وکتورها يا وکتور فضا په تن K) بولو.

خ (تړون (تړونونه) (Verband(english: lattice)) يو لاتيس يا تړون يو الجبر $(L, \vee, \wedge)$ دی، د تيوپ $(2,2)$ ، کوم چي لاندې مساوات پوره کوي:

$$x \vee y = y \vee x, x \wedge y = y \wedge x \quad (1)$$

$$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z \quad (2)$$

$$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$$

(اسوخياتيون قانون)

$$x \vee x = x, x \wedge x = x \quad (3)$$

(ايډمپوتينڅ)

$$x \vee (x \wedge y) = x, \quad x \wedge (x \vee y) = x \quad (۴ ل)$$

(ابزربشن يا راكبننه يا جذبونه)

دلته افادې " $x \vee y = z$ " او په همدې توګه " $x \wedge y = z$ " داسې لوستل کيږي x له y سره تړلی مساوي په z دی. همداسې x غوڅ په y مساوي په z دی.

يو رابند تړون يا لاتيس (يا تړون د 0 او 1 سره) يو الجبر

($L, \vee, \wedge, 0, 1$) ددې د تيوپ (2,2,0,0), داسې چي

($L, \vee, \wedge$) يو تړون يا لاتيس دی او په دې برسیره لاندې

مساوات هم باور لري:

$$x \wedge 0 = 0, \quad x \vee 1 = 1 \quad (۵ ل)$$

تړونونه به په ځانګړي توګه په ورپسې برخو کې پوره

وڅيړل شي او د هغو مختلف ډولونه او هم به په هازې

دیاګرام کې و کښل شي)

د (نیم تړون (semilattice) يو نیم ګروپ ($S, .$)

نیم تړون يا سیمیلاتیس بلل کيږي، که دا کموتاتیو او

ایدمپوتنت وي. دا په دې مانا، چي که مساوات ګ ۴

او همداسې لاندې باور ولري:

$$x . x = x \quad (\text{Idempotenz}) \quad \text{ایدمپوتنڅ}$$

د هر لاتیس $(L, \wedge, \vee)$ جوړښتونه $(L, \wedge)$ او $(L, \vee)$ په روښانه توګه سیمیلاتیسونه دي. **د نېټه ټولګه**

ذ) دیستریبوتیو تړون یا - لاتیس (یو لاتیس $(L, \wedge, \vee)$ دیستریبوتیو بلل کیږي، په کوم کې چې دا لاندې دیستریبوتیو قانونونه باور ولري:

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \quad (\text{د ل } ۱)$$

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \quad (\text{د ل } ۲)$$

کیدۍ شي، چې د ل ۱ تر ل ۴ مساواتو پورې وښول شي، چې د ل ۱ او د ل ۲ یو بل ته ورته دی یا همغسۍ دي. چې له دې مساواتو یو بیا پوره دی، یا بسیا کوي.

ر) د بول الجبر: یو الجبر $(B, \wedge, \vee, ', 0, 1)$ د تیوپ $(2, 2, 1, 0, 0)$ د بول الجبر بلل کیږي، که $(B, \wedge, \vee)$ یو دیستریبوتیو لاتیس وي، مساوات ل ۵ پوره کړي او په دې برسیره لاندې هم پوره کړي

$$x \wedge x' = 0, x \vee x' = 1 \quad (\text{ب } ۱)$$

دا څه د الجبر پورته تیرې بیلګې مو، چې دلته راوړلې، د هغو څخه به ځنۍ وروسته پوره ترخپرنۍ لاندې ونيول شي. او س په دا همدومره بسیا کولی شو.

،

۵ . ۲ . لاندې الجبر يا سب الجبر Subalgebra

د هر الجبري ډيسخيپلين مهمه موخه داده، چي پوره بيلگي ترې لاس ته راوړل شي. زيات وخت داسي كيږي، چي د لرلو الجبري جوړښتونو څخه نوي الجبري جوړښتونه لاس ته راوړو. په دې برخه كي به يو متود يا يوه لار وپيژندل شي يا معرفي شي، كومه چي د ټولگيزو كليمو څخه لكه لاندېگروپ، لاندېوكتورفضا، لاندېتړون په لور لوريزه وي.

۵ . ۲ . ۱ تعريف : $A = (A, F)$ دې يو د تيوپ f الجبروي، او برخېږي $B \subseteq A$ دې يو د A برخېږي وي، د خويونو سره، چي

$$f(b_1, \dots, b_n) \in B^n$$

د ټولو $f \in F$ لپاره او د ټولو n -گونو

$$(b_1, \dots, b_n) \in B^n \quad \beta(f) = n \text{ چي د كومو سره، چي}$$

ځاي په ځاي كيږي). الجبر $B = (B, (f|f \in F))$ د

الجبر A لاندې الجبر بلل كيږي، د كوم سره $f: B \rightarrow B$

د ټولو $f \in F$ لپاره د f بنديزنو په څير په ډيري B تعريف

وي، د « B د A لاندې الجبر» لپاره ليكو $B \leq A$.

د $Sub A$ سره د ټولو د A د لاندې الجبرونو بنسټډيريو

ډیری په نخښه کیږي، دا په دې مانا، چې $A = \{ B \mid B \leq A \}$ (انگر: Subalgebra = لاندې الجبر)

یو برخه ډیری $B \subseteq A$ ټیک هلته د یوه الجبر $A = (A, F)$ لاندې الجبر بنسټ ډیری دی، که B د ټولو د $f_A \in F$ بنسټ عملیو سره رابنده، راتړلی وي یا رامحدوده وي. څه ناڅه ټیکه توگه زیات داسی لیکل کیږي $B = (B, F)$ ،

دا په دې مانا، چې د B د بنسټ عملیو ډیری بیرته په F سره په نخښه کیږي. لکه څنگه د f_A لپاره همداسی د f_B لپاره هم په ساده توگه د کارونی سومبول په f سره ښوول کیږي یا بهتره، نخښون کیږي.

د گروپ په بیلگه روښانه کیږي، چې په لاندې الجبر کی په هغه تیوپ گڼل کیږي، کوم چې ټاکل شوی دی: که گروپ د یوه الجبر په څیر، چې تیوپ یی $(0, 1, 2)$ دی راورل شي یا وگڼل شي، لکه په مخ ته تیره بیلگه کی نو لاندې الجبرونه په ټولگیزه موخه لاندې گروپونه دي. که چیرې گروپ د (2) تیوپ الجبر په څیر راورل شي یا په پام کی ونیول شي، د گروپ سره چې یواځنی عملیه یا کارونه ده، ممکن دي، چې لاندې الجبر لاس ته راوړو، کوم چې لاندې گروپونه نه دي. بیا نور لاندې الجبرونه

لاس ته راځي، که گروپ د یوه الجبر، په څیر د

$$p(x, y, z) = xy^{-1}z$$

سره راوړل شي، چی دا یی یواځنی عملیه وي.

د هر الجبر لپاره دا سیستم د غوڅیجوړښت په مخامخ رابند دی. ټیک یا کره په لاندې ډول :

۵ . ۲ . ۲ جمله : A دې یو الجبر وي. نو باور لري:

(الف) $A \in \text{Sub } A$

(ب) $B \in \text{Sub } A$ د هر ناتشپيري $B \in \text{Sub } A$ لپاره،

یادونه : دا افاده " $\bigcap B$ " د $\bigcap_{B \in \mathcal{B}} B$ لپاره ځای په ځای ده او همداسی د $\bigcap \{B \mid B \in \mathcal{B}\}$ لپاره .

اوبی : الف) روښانه دی. د ب) د ښوونی لپاره دې وي:

$B \subseteq \text{Sub } A$, $B \neq \emptyset$. دا د ښوولو دی، چی $\bigcap B$

د A د هرې عملیې f لپاره رابند دی یا راټولی دی.

وي دې $n = \beta(f)$. له $b_1, \dots, b_n \in \bigcap B$ څخه

$b_1, \dots, b_n \in B$ لاس ته راځي د ټولو $B \in \mathcal{B}$ لپاره .

دا چی ټولی $B \in \mathcal{B}$ څخه د لاندې الجبرونو بنسټپيري

دي، نو باور لري $f(b_1, \dots, b_n) \in B$ د ټولو $B \in B$ لپاره . له دې څخه لاس ته راځي $f(b_1, \dots, b_n) \in B$.

۵ . ۲ . ۳ لاس ته راوړنه (دا هم د يوې جملې په څير ده ، خو له جملې څخه لاس ته راځي) : د هر الجبر A او هر برخېږي $X \subseteq A$ لپاره دی

$$\langle X \rangle = \bigcap \{ B \mid B \subseteq A \text{ او } X \subseteq B \}$$

د A د لاندې الجبر بنسټېږي، دا په دې مانا چي

$$\langle X \rangle \in \text{Sub } A . \text{ په څرگنده توگه } \langle X \rangle \subseteq A$$

لاندې الجبرونو کوچنی بنسټېږي دی، کوم چي X خوندي لري (دا د X څخه راجوړه يا توليد شوې لاندې الجبر) د الجبر A باندې زور اچووني له امله ډير وخت $\langle X \rangle_A$ د $\langle X \rangle$ په ځاي ليکو اوله بلي خوا په ساده توگه د پاي ډيري $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ لپاره .

د بيلگي په توگه څيوکليکي لاندې گروپ $(Z_6, +, -, 0)$ را نيسو (د گڼونو $Z = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ سره مودول 6 شميرل کيږي) : باور لري

$$\langle 0 \rangle = \{0\}, \langle 1 \rangle = Z_6, \langle 2 \rangle = \{0, 1, 4\}, \langle 3 \rangle = \{0, 3\}, \langle 2, 3 \rangle = Z_6$$

۵ . ۲ . ۴ جمله : A دې يو الجبر وي . د برخډيريو
 $X, Y \subseteq A$ لپاره باور لري:

(الف) $X \subseteq \langle X \rangle$ (اکستنزيويتيت Extensität)
 (ب) $X \subseteq Y \Rightarrow \langle X \rangle \subseteq \langle Y \rangle$ (مونوتوني Monotonie)
 (پ) $\langle X \rangle = \langle \langle X \rangle \rangle$ (ایدمپوتنت Idempotent)
 د دې جملې اوبې سملاسی د مخ ته تیرې عملي $\langle \rangle$
 له تعريف څخه لاس ته راځي. پای

بنسټډیری $\langle X \rangle$ په ریښتیا چی د X څخه تولید شوی
 د $A = (A, F)$ لاندې الجبرونو څخه لاس ته راځي د یوه
 تولیدپروسی سره: د هر برخډيري $X \subseteq A$ لپاره دې وي

$$E(X) = X \cup \{f(a_1, \dots, a_n) \mid f \in F, a_1, \dots, a_n \in X (n = \beta(f))\}$$

ورپسی دې وي

$$E^0(X) = X$$

اود ټولو $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ لپاره

$$E^{k+1}(X) = E(E^k(X))$$

۵ . ۲ . ۵ جمله : د هر الجبر $A = (A, F)$ او هر

برخه پري $X \subseteq A$ لپاره باور لري

$$\langle X \rangle = \bigcup_{k=0}^{\infty} E^k(X)$$

اوبی: « $\supseteq$ » : وي دې $\langle X \rangle \supseteq x = E^0(X)$.
 نیونه دې وي، چې $\langle X \rangle \supseteq E^k(X)$ ، بنسټ شوی دی،
 او وي دې $a \in E^{k+1}(X)$. وي دې $a \notin E^{k+1}(X)$ د مخه
 نیونه (ځکه، چې په بل ډول به په ساده توګه باور ولري

$$(a \in \langle X \rangle$$

$$\text{نو } f \in F, a_1, \dots, a_n \in E^k(X)$$

موجود دی، د $a = f(a_1, \dots, a_n)$ سره .

د $\langle X \rangle \supseteq E^k(X)$ له امله او دا چې $\langle X \rangle$ د یوه لاندې

الجبر بنسټ پري دي، لاس ته راځي $a \in \langle X \rangle$. دا

ښايي $\langle X \rangle \supseteq E^{k+1}(X)$ ، او په k باندې د ایندکشن

$$\text{سره لاس ته راځي } \langle X \rangle \supseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} E^k(X)$$

« $\subseteq$ » : یواځې دې وښوول شي ، چې $\bigcup_{k=0}^{\infty} E^k(X)$ د یوه

لاندې الجبر بنسټ پري دی، دا په دې ما ، چې F کې

د ټولو اپریشنونو په هکله رابنده یا راتړلی ده. وي دې:

$$f \in F, n = \beta(n), a_1, \dots, a_n \in \bigcup_{k=0}^{\infty} E_k(X).$$

نو بیا د هر $i \in \{1, \dots, n\}$ لپاره په لاندې توګه
یو $k(i) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ د $a_i \in E^{k(i)}(X)$ سره موجود دی.
وي دې $m = \max \{k(i) \mid i = 1, \dots, n\}$. نو باور
لري $a_i \in E^m(X)$ د ټولو $i = 1, \dots, n$ لپاره. په
دې پسی لاس ته راځي

$$f(a_1, \dots, a_n) \in E^{m+1}(X) \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} E^k(X)$$

دا په دې مانا، چې $f \in \bigcup_{k=0}^{\infty} E^k(X)$ د لاندې رابند یا
تړلی دی. پای

یادونه: دا رابند یا راتړلی دا مانا لري، چې f په همغه
الجبر کې باور لري. دې لغات ته دې په نورو ځایونو کې
هم پام وي، چې ډیر کارول کیږي.

دا تر اوس پام په یو څو برخو کې په کار راځي، چې په خپل
ځای کې به وکتل شي.

د ډیرسیستم $\text{Sub } A$ یواځې دې ته همدا دلته ګوته

نیسم، چې د یوه الجبر A د لاندې الجبرونو بنسټ ډیری په

پیداښتي یا طبیعي ډول یو تړون یا تړنه یا لاتیس جوړوي:
د $B, C \in A$ لپاره دې وي

$$B \wedge C = B \cap C$$

$$B \vee C = B \cup C$$

نولو

۵. ۲. ۶ جمله: د هر الجبر A لپاره $(\text{Sub } A, \vee, \wedge)$

یو تړون دی. (د A د لاندې الجبرونو تړون یا تړنه یا لاتیس)
اوبی دې تمرین وي: دلته د تړون اکسیومونه له ۱ ل تر ۴ پورې آزمائیل کيږي.

۵. ۳ ایزومورفیزم ، هومومورفیزم

Isomorphismen, Homomorphismen

دا روښانه ده ، چی د یوه الجبر ذهني خویونه تغیر نه خوري،
که چیرې د الجبر د سټډیري د توکو نومونه بدل شي ، یا بل
ډول ونومول شي. دا پام یا فکر مو تړلی د ایزومورفي کلیمي
ته لارښودوي .

دوه الجبره یو بل سره ایزومورف بلل کيږي، که چیرې یو الجبر
له دې بل څخه د هغو توکو نومونو د بدلون له لارې لاس ته
راوړی شو:

۵ . ۳ . ۱ تعریف : A او B دې دوه الجبرونه وي، د همغه تیوپ f ، او $u : A \rightarrow B$ دې یو بیجکتیوه bijektive خپرونه وي. نو u د A ایزومورفیزم په B بلل کیږي، که د $f \in f$ لپاره او ټولو $(n = \beta(f))$ ، $a_1, \dots, a_n \in A$ لاندې شرطونه پوره وي:

$$u f_A(a, \dots, a) = f_B(ua, \dots, ua) \quad (\text{هوم})$$

دا الجبرونه A او B بیا (یو د بل سره) ایزومورف بلل کیږي، په نڅېښه یی $A \cong B$ ده.

۵ . ۳ . ۲ بیلگه

الف () : دوه ګروپونه $(G, \cdot, {}^{-1}, e)$ او $(H, \cdot, {}^{-1}, e)$ ټیک هلته ایزومورف دي، که یوه بیجکتیو خپرونه $u : A \rightarrow B$ موجود وي کوم چی د ټولو $a, b \in G$ لپاره لاندې شرطونه پوره کوي.

$$(i) \quad u(a.b) = u(a).u(b)$$

$$(ii) \quad u(e) = e,$$

$$(iii) \quad u(a^{-1}) = u(a)^{-1}$$

که پام وکړو، نو دلته شرطونه (ii) او (iii) د اړتیا خوا دي، ځکه چی دا دواړه له (i) څخه لاس ته راوړلی شو:

$$u(e) = u(e.e) = u(e).u(e) \Rightarrow u(e) = e ,$$

$$e = u(e) = u(a.a^{-1}) = u(a).u(a^{-1}) \Rightarrow u(a) = u(a)^{-1}$$

ب) $(\mathbb{Z}_4 \setminus \{0\}, \cdot, ^{-1}, 1)$ دې د تن $(\mathbb{Z}_4, +, -, 0, 1)$ یو ځلیزگروپ وي. نو ایزومورفیزم

$$u: (\mathbb{Z}_4, +, -, 0) \longrightarrow (\mathbb{Z}_4 \setminus \{0\}, \cdot, ^{-1}, 1)$$

په لاندې سره لاس ته راځي:

x	0	1	2	3	4	5
u(x)	1	3	2	6	4	5

د A ایزومورفیزم و B ته په ټوله توګه سیومتري نه دی. مګر باور لري:

۵. ۳. ۳ جمله: که u یو ایزومورفیزم د A په B وي، نو په څټ څیرونه u^{-1} د B یو ایزومورفیزم دی و A ته.

اوبی: شرطونه (هوم) له همدا تیر درس څخه کیدی شي وازمائل شي، د u^{-1} لپاره، چی د u لپاره ځاي په ځاي شي. وي دې

$$f \in f, b_1, \dots, b_n \in B$$

د $a_1 = u^{-1}(b_1), \dots, a_n = u^{-1}(b_n)$ سره، نو لاس ته راځي

$$\begin{aligned} \bar{u}(f(b_1, \dots, b_n)) &= u^{-1}f_B(ua_1, \dots, ua_n) \\ &= u^{-1}[uf_A(a_1, \dots, a_n)] \quad \text{ځکه چې } u \text{ ايزومورفيزم} \\ &= f_A(u^{-1}(b_1), \dots, u^{-1}(b_n)) \quad \text{پاي} \end{aligned}$$

پاي

که د مخه تیرو لوستونو کی له غوښتنو څخه تیر شو،
چې $u: A \rightarrow B$ بیچکتیو دی، نو د هومومورفیزم ټولیزې
کلیمې ته راځو. پس هومومورفیزم د الجبرونو مساوات کره نه
ټاکي (تر د توکو د چاپیریال پورې لکه په ایزومورفیزم کی)،
مگر بیا موهم د جوړښت ورتوالی مخ ته پروت دی:

۵ . ۳ . ۴ تعریف : A او B دې د همغه تیوپ f

الجبرونه وي. یوه څیرونه $u: A \rightarrow B$ هومومورفیزم د
 A و B ته بلل کیږي،

د ټولو $f \in f$ او ټولو $(n = \beta(n))$ $a_1, \dots, a_n \in A$ لپاره

هومومورفي شرطونه (هوم) له تیر درس څخه پوره دې.

د « u یو د A هومومورفیزم دی و B ته » لپاره لنډ

لیکدود « $u: A \rightarrow B$ » هم معمول دی یا کارول کیږي.

شرط (i) د له مخ ته تیرې جملې څخه همغه ورسره بلد د هومومورفیزم شرطونه دي، د گروپونو لپاره. ټيک په همدې توگه، لکه د گروپ هومومورفیزم، په ټولیزه توگه د ټولو الجبرونو د هومومورفیزم لپاره لاندې نڅښونې معمول دي: سورجکتیو هومومورفیزم ایپیمورفیزم Epimorphism بلل کیږي. که $u: A \rightarrow B$ یو ایپیمورفیزم وي، نو A د B یو هومومورفیه څیره بلل کیږي. (په نڅښونه یی $uA = B$) . اینجکتیو هومومورفیزم فیزم د نزدې پرتو دلایلو له امله خوندیونه Einbettung یا نغږنه (په کی) بهتره یی رانغږنه (زه یی خوندیونه بولم) بلل کیږي. (د دې لپاره راتلونکی یادونه وگورئ) د یوه الجبر A هومومورفیزم $u: A \rightarrow A$ یانې هومومورفیزم په خپل ځان ایندومورفیزم Endomorphism بلل کیږي، او ایندومورفیزم چی په همغه وخت کی ایزومورفیزم (دا په دې مانا، چی بیجکتیو) دی د A اوتومورفیزم Automorphism بلل کیږي د A د ټولو ایندومورفیزمونو ډیری $\text{End } A$ په پیدایښتي یا طبیعي توگه یو نیمگروپ جوړوي، او د A د ټولو اوتومورفیزمونو $(\text{Aut } A)$ Automorphisms یو گروپ جوړوي. د دې لپاره چی دا ولیدلی شو، لاندې دوه ویناوو ته اړتیا پېښیږي، چی اوبی یی گرانو لوستونکو ته یوه ساده د تمرین دنده یا وظیفه ده:

یادونه : الف) د هر الجبر A لپاره کټمټ څیرونه
یانی $\text{id } A \rightarrow A$ یو اوتومورفیزم دی
ب) که $u_1: A \rightarrow B$ او $u_2: B \rightarrow A$ هومومورفیزمونه
وي، نو یو په بل پسې راوړنه یا په بل پسې نښلونه $u_1 \circ u_2$
بی هم یو د A هومومورفیزم و C پسې دی.
د له مخ ته تیرې جملې له امله د $\text{End } A$ همداسې
د $\text{Aut } A$ ډیري د کارونې یا عملې $\circ$ لاندې رابند یا راگیر
دی . د مخ ته تیرې جملې له امله $\text{Aut } A$ تل دا ناپیلې
توکی $\text{id } A$ خوندي لري. همغه تیره جمله ښایي، چی
له $u \in \text{Aut } A$ څخه تل $u^{-1} \in \text{Aut } A$ لاس ته راځي،
یعني باور لري:

۵ . ۳ . ۵ جمله: د هر الجبر A لپاره $(\text{End } A, \circ)$ یو
نیم گروپ دی (د A د ایندومورفیزم نیمگروپ) ،
او $(\text{Aut } A, \circ, ^{-1}, \text{id } A)$ یو گروپ دی (داسې په
نامه د A د اوتومورفیزم گروپ)
لاندې الجبرونه او هومومورفیزم یو له بل څخه کامل
خپلواک راوړل شو. اوس به وښوول شي ، چی دا
جوړښتکلیمي یو د بل سره په یو ډول زغمور دي:

۵ . ۳ . ۶ جمله: څیرونه $u: A \rightarrow B$ دې یو هومو-

مورفيزم وي، نو باور لري:

الف () له $U \in \text{Sub } A$ څخه لاس ته راځي $uU \in \text{Sub } B$

ب () له $V \in \text{Sub } B$ څخه لاس ته راځي $u^{-1}V \in \text{Sub } A$ (۱۹)

پ () د ټولو برخديريو $X \subseteq A$ لپاره باور لري

$$\langle uX \rangle = u \langle X \rangle$$

اوبی : الف () وي دې $f \in f, b_1, \dots, b_n \in uU$ (چيرته چی،

لکه چی ورسره بلديو، $\beta(f) = n$ ليکل کيږي) .

نو $a_1, \dots, a_n \in U$ موجود دي، د $b_1 = ua_1, \dots, b_n = ua_n$

سره . باور لري

$$f(b, \dots, b) = f_B(ua, \dots, ua)$$

دا چې u هومورفيزم $= uf(a, \dots, a)$

د $U \in \text{Sub } A$ له امله $\in uU$

دا راته په گوته کوي، چی

$$uU \in \text{Sub } B$$

ب () وي دې $f \in f, a^1, \dots, a^n \in u^{-1}V$. نو باور لري

$$. \quad ua^1, \dots, ua^n \in V$$

له دې لاس ته راځي

دا چې u هومورفيزم $uf_A(a_1, \dots, a_n) = f_B(ua_1, \dots, ua_n)$

د $V \in \text{Sub } B$ له امله $\in V$

$$(۱۹) \quad u^{-1} \in \dots$$

له دې ^{امله}سره باور لري $f_A(a_1, \dots, a_n) \in u^{-1}V$ او له دې
امله $(u^{-1}V \Rightarrow \bar{u}V \in \text{Sub } A)$

پ (E دې لکه هغه د مخه تعريف شوی اپريټر يا عملیه وي. لمړی ښوول کيږي، چې $E(uY) = uE(X)$ د ټولو $Y \subseteq A$ لپاره باور لري: $E(uY)$ ټيک له هغو توکو uy څخه د $y \in Y$ سره جوړ دی، او همداسی له هغو توکو څخه، چې لاندې ښه لري $f \in f, y_1, \dots, y_n \in Y$ ، د $f_B(uy_1, \dots, uy_n)$ سره. همداسی يا په همدې ډول $uE(Y)$ له توکو uy څخه جوړ دی، د $y \in Y$ سره، او همداسی له توکو څخه، چې لاندې ښه لري:

$uf_A(y_1, \dots, y_n)$
دا چې u یو هومومورفیزم دی، نو ښايي $E(uY) = uE(Y)$.
په k باندې د ايندکشن له لارې کيدی شي،
چې $E^k(uY) = uE^k(Y)$ وښوول شي، د ټولو $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$
لپاره. د له مخ ته تيرو څخه لاس ته راځي

$$\langle uX \rangle = \bigcup_{k=0}^{\infty} E^k(uX) = uE^k(X) = u\left[\bigcup_{k=0}^{\infty} E^k(X)\right] \\ = u\langle X \rangle \quad \text{پای}$$

لکه د مخه مو، چې گوته ورته ونيوله د الجبر بنسټيږي uU
د uU سره په نڅښه کيږي او همداسی له مخه بلدو څخه د

الجبر بنسټېډيري $u^{-1}V$ د $u^{-1}V$ سره په نڅېنه کېږي. کيدی شي ، همدا د مخه کيدی شي، چی زیات وکارول شي، که د یوه الجبر A هومومورفیزم (ایزومورفیزم) په یوه الجبر B غواړو، چی وټاکو.

بیلگه: د توکو $u \in \text{Aut}(Z_6, +, -, 0)$ د ټاکلو لپاره فکر کيدی شي، چی $uZ_6 = Z_6$ ، $\langle u1 \rangle = u\langle 1 \rangle = uZ_6 = Z_6$. له دې امله یا $u1 = 1$ باور لري له کوم، چی $u = \text{id}$ ($= \text{id}_Z$) لاس ته راځي، او یا $u1 = 5$ دا په دې مانا چی $u = -\text{id}$. پس:

$$\text{Aut}(Z_6, +, -, 0) = \{ \text{id}, -\text{id} \}$$

په ورته توگه د $\text{End}(Z_6, +, -, 0)$ توکی هم ټاکل کېږي

لکه د مخه مو چی گوته ورته ونيوله، اینجکتیو هومومور-فیزم $u: A \rightarrow B$ خوندېونه هم بلل کېږي، د u سره A په B کی خوندې کېږي. دا برخه چی لاندې الجبرونه او خوندېونه په کی روښانه شوه داسی پای کېږي:

یادونه: الف) د هرې خوندیونی $u: A \rightarrow B$ لپاره

باور لري $uA \leq B$ او $uA = A$ دا په دې مانا، چی uA

یو و A ته ایزومورف د B لاندې الجبر دی.

ب) د الجبر B د هر لاندې الجبر A لپاره د یو

اینکلوژنخیرونه Inklusionsabbildun

$$i : A \longrightarrow B, i(x) = x$$

یوه خونديونه ده.

کونگرواینځ اړیکې او فاکتور الجبر

Kongruenzrelationen und Faktoralgebren

لکه د گروپ تیوري کی د نورمالپرویشوني، یا همداسی د ایدیال کلیمه په کړۍ تیوري کی منځنۍ یا مرکزي کلیمه ده، همدا ډول په ټولیزه توګه په الجبر کی د ټولیزې یا پورته کلیمې کونگرواینځ اړیکو کلیمه جوړوي. دا به راته څرګنده کړای شي، چی د کونگرواینځ اړیکو او هومومورفیزم ترمنځ نزدې اړیکې پرتې دي، لکه څنګه چی په گروپ تیوري او همدا ډول کړن تیوري کی، کیدی شي چی الجبرونه د کونگر-واینځ اړیکو له لارې فاکتوریزه کړی شو، د کوم له مخی چی «فاکتور الجبر» ته رسیږو. یو گروپ د نورمالپرویشوني پسۍ فاکتورونی کوي، په کوم کي چی د نورمالپرویشوني څنګټولګی د نوي گروپ توکو په څیر یا په توګه وکاروي، دا په نامه فاکتورگروپتوکی. دا په څنګټولګی یا اړخټولګی د یوه ایکویوالنځ اړیکې «ایکویوالنځ ټولګی» جوړوي. دا

کتنه یا څېړنه د «کونگرواینځ» فکر رامنځ ته کوي، کوم چی باید دلته تعقیب شي.

۵ . ۳ . ۷ تعریف : A دې یو ډیری وي. هر برخه ډیری

$R \subseteq A^n$ یو په ډیری A باندې n -ځایزه اړیکه بلل کیږي.

یوه ۲-ځایزه اړیکه θ په A باندې ایکویوالنت اړیکه بلل کیږي، که د ټولو $x, y \in A$ لپاره لاندې شرطونه باور ولري:

ای ۱) $(x, x) \in \theta$ (رفلیکسیویټي)

ای ۲) $(x, y) \in \theta \Rightarrow (y, x) \in \theta$ (سیومتري)

ای ۳) $(x, y) \in \theta, (y, z) \in \theta \Rightarrow (x, z) \in \theta$

(ترانزیتیویټي)

د $(a, b) \in \theta$ په ځای داسي هم لیکلی شو

$a = b \pmod{\theta}$ (په کلیمو: "په a په b مودولو θ سره

مساوي دی")، او یا هم داسی لکو $a \theta b$ ، په دې توگه

کیدي شي، چی اکسیوم ۳ په لاندې توگه فرمولبندی

شي، له $x \theta y \theta z$ څخه لاس ته $x \theta z$ راځي. د

هر ایکویوالنت اړیکو θ لپاره د لاندې بنی ډیری

$[a]_{\theta} = \{x \in A \mid x \theta a\}$ ایکوالنختولگی بل کیږي.

په روښانه یا څرگنده توگه هر یو توکی $x \in A$ ټیک

د θ یوه گونگروایختولگی پورې اړه لري. (ساده بیلگه

د ټولگی: لکه چی یو هلك په همغه وخت کی په دوه یا

زیاتو ټولګیو پورې اړه نه شي لروډی).

د A ټولو ایکوالنټټولګیو ډیری په $Eq A$ سره په نڅښه

کوو (د ایکویوالنټټولګی الماني او انګریزی:

(Äquivalenzklassen = equivalence relation

د ډیری A لپاره دوه ایکوالنټ اړیکې ∇_A او Δ_A په لاندې

ډول لاس ته راځی

$$\nabla_A = A^2 = \nabla_A \quad (\text{ټول اړیکې Allrelation})$$

(کټمټی یا دیاګونالی Identität oder Diagonale)

$$\Delta_A = \{(a, a) \mid a \in A\} = \Delta_A$$

څیره: ۱۰۱

په پورته څیره کې په ډیری $\{1, 2, 3\}$ باندې ټول ایکوالنټ-

اړیکې د لویوالی په ترتیب بیرته ورګرځوي دي (دا یو

د Hasse-DiaGram هازېډیاګرام دې) هر ایکویوالنټ اړیکه

د ایکویوالنټټولګی په بیرته ورګرځه کې انځور ده.

۵ . ۳ . ۸ جمله: A دې یو ډیری وي او R دې یو ناتړن
د $Eq A$ برخه ډیری وي. نو باور لري

$$\bigcap R \in Eq A$$

(لیکدود ته یی " $\bigcap R$ " . دا دې د مخ ته تیرو درسونو
سره انډول شي یا دا مو د مخه لوستلی دي)
اوبی : د دې ښوونه یو ساده تمرین دی. پای

دیوه ډیری A ایکووالنځ اړیکې په طبیعي یا پیداينستي
توګه یو لاتیس یا تړون جوړوي. یا څو ځای جوړوي .
د ټولو $\sim, \theta \in Eq A$ دې وي

نو کیدی شي، چی په ساده توګه وښوول شي:

۵ . ۳ . ۹ جمله: د هر ډیری A لپاره $(Eq A, \vee, \wedge)$

یو تړون یا لاتیس دی (په A باندې د ایکوالنځ اړیکو تړون)
دا پورته ورکړ شوی تعریف د $\theta \vee \sim$ په ټولیزه توګه لږ
مناسب دی، که په ریښتیا $\theta \vee \sim$ شمیرو. د دې لپاره
کیدي شي، په خوښه دوه ځایز اړیکو θ_1, θ_2 لپاره

تعريف شوى د اړيكو ځل

$$\Theta_1 \circ \Theta_2 = \{ (x, y) \mid \exists z \in A : x \Theta_1 z \Theta_2 y \}$$

وکارول شي يا استعمال شي. دا اړیکه ځل اسوخیاتيو دی.
(دې ښوونه دې تمرین وي) :

$$(\Theta_1 \circ \Theta_2) \circ \Theta_3 = \Theta_1 \circ (\Theta_2 \circ \Theta_3)$$

له دې امله کیدی شي، چې ډیر واره راوړل شوي نوکان
له لیکلو پاتې شي.

۵. ۳. ۱۰ جمله : د هر ډیري A او ټولو $\Theta, \Psi \in \text{Eq } A$
لپاره باور لري

$$\Theta \vee \Psi = \Theta \cup (\Theta \circ \Psi) \cup (\Theta \circ \Psi \circ \Theta) \cup (\Theta \circ \Psi \circ \Theta \circ \Psi) \cup \dots$$

دا په دې مانا چې $(a, b) \in \Theta \vee \Psi$ تیک هلته باور لري،
کله چې توکي $c_1, c_2, \dots, c_n \in A$ موجود وي،
د $a = c_1 \Theta c_2 \Psi c_3 \Theta c_4 \dots c_n = b$ سره.

اوبی یا ځل: تمرین دې وي: لمړی فکر کیږي، چې اویونی
یا حل کوونی برابر و مساوات و ښی لور ته یو ایکویالنت
اړیکه پرته ده، او هر دا . په ښی لور یا اړخ، په نوکانو کی
نیول شوو اړیکو ځل (اړیکه ځل) په $\Theta \vee \Psi$ کی خوندي دی.

په یوه ډیرې A باندې د یوې ایکویوالنټ اړیکې Θ لپاره ډیری $A / \Theta = \{ [a]_{\Theta} \mid a \in A \}$ د ډیرې A د Θ د ټولو ایکویولنټ ټولګیو د A فاکتور الجبر په Θ پسې بلل کیږي. فاکتور ډیرې زیات وخت پارټیشن Partitionen یا ټوټوونې هم بلل کیږي (ځکه، چې A / Θ د A یو ټوټوونې یا تجزیه ده، په پرديو برخه ډیریو باندې)، او ایکووالنځتو-لګي د ټوټوونو بلاکونه بلل کیږي.

خاماځا فاکتور ډیرې او (چې وروسته به تعریف شي) فاکتور الجبرونه یو له بل سره سر او کار لري. وهغي لار ته مرسته کوي، که د ګروپونو حالت راواخلو یا بهتره تر څیرني لاندې ونیسو: $(G, \cdot, ^{-1}, e)$ دې یو ګروپ وي او N دې د G یو نورمال پرویشونی وي، دا په دې مانا چې یو لاندې ګروپ شته د دې لاندې نورمال پرویشونی شرطونو سره:

(د نومال پرویشونی شرتونه) $\forall x \in G : x^{-1} N x = N$
(دا پورته داسې لوستل کیږي: د ټولو x لپاره، چې له G دی یا د G توکی دی باور لري.....)

وي دې Θ_N په G باندې یوه ایکویوالنځ اړیکه د څنګټولګي aN سره د یوه ایکویوالنځ په څیر، دا په دې مانا چې د $G / \Theta_N = \{aN \mid a \in G\}$ سره. نو کیدی

شي، چي په G/Θ_N باندې يو گروپ جوړځت يا
گروپسکترکچر $(G/\Theta_N, \cdot, ^{-1}, e_N)$ د دې لاندې سره
تعريف کړي

$$\begin{aligned}(aN) \cdot (bN) &= abN, \\ (aN)^{-1} &= a^{-1}N, \\ eN &= eN\end{aligned}$$

اوس دا غوره ده، چي وښوول شي، چي دا ډول تعريف
شوی اپريشن يا کارونه کره تعريف ده. د بيلگي په توگه
د $aN = a'N$ چي له $aN = a'N$ لپاره ښوول کيدی شي، چي له
او $bN = b'N$ څخه تل $abN = a'b'N$ لاس ته راځي. دا
کيدی شي، چي د نورما پرويشوني شرايطو سره ساده
و شميرل شي. دلته ويل کيږي، چي Θ_N او . يوله بل
سره زغمور دي. همداسی په ټوليزه توگه تعريفیږي:

۵ . ۳ . ۱۱ تعريف: A دې يو ډيري وي او $\Theta \in \text{Eq } A$

او $f \in \text{Op}_n(A)$. نو Θ او f م زغمور بلل کيږي، که د

ټول $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in A$ لپاره

د $a_1 \Theta b_1, \dots, a_n \Theta b_n$ سره تل

$$f(a_1, \dots, a_n) \Theta f(b_1, \dots, b_n)$$

باور ولري. $\Theta \in \text{Eq } A$ په الجبر $A = (A, F)$ يو کونگرو-

اينځ اړيکه بلل کيږي، که Θ د ټولو f سره زغمور وي.

په A د ټولو کونگورنټ اړیکو ډیو په $\text{Con } A$ سره په
نڅښه کېږي یا نڅښوون کېږي.
(انگریزي $\text{Kongruenzrelation} = \text{congruence relation}$)

۵. ۳. ۱۲ بیلگی

الف) په هر ډیري A باندې ثابتی عملی یا کارونی
 $\text{id}_A : A \rightarrow A$ او $f_c : A^n \rightarrow A$, $f(x_1, \dots, x_n) = c$
د ټولو $\Theta \in \text{Con } A$ سره زغموړ دي. له دې امله د
پریستونځیرونی (المانی او انگریزي
 $\text{Projektionsabbildung}$ or $\text{projections mapping}$) یا
-عملی باور لري:

$$p_i : A^n \rightarrow A, p_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$$

یا دونه : دې ته بیا گوته نیسم، چی دا پورته ډول ځیرونه د
پریستونځیرونی $\text{Projektionsabbildung}$ تعریف دی.

ب) د ټولو الجبرونو (A, F) لپاره $\Delta_A, \nabla_A \in \text{Con } A$ باور
لري. یو الجبر (A, F) ، کوم چی د Δ_A او ∇_A څخه بل کونگر-
واينځ اړیکه ونه لري ساده بلل کېږي، د بیلگی په توګه د هر
ډیري A لپاره الجبر $(A, \text{Op}(A))$ ساده دی:

$$\text{Con}(A, \text{Op}(A)) = \{ \Delta_A, \nabla_A \}$$

پ (باور لري

$$\text{Con}(A, \emptyset) = \text{Eq } A$$

کیدی شي ، چی کونگرواینځ اړیکي، د زغمووالی له لاري،
د ځانگړو یوځایزو عملیو سره کرکتریزه شي:

۵ . ۳ . ۱۳ تعریف : (A, F) دې یو الجبر وي. یوه څیرونه
د بنی

$x \longrightarrow f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n)$
د $f \in F$ (ن- ځایز) او $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n \in A$ سره
د (A, F) یو ترانسلاشن Translation بلل کیږي.

۵ . ۳ . ۱۴ جمله: د هر الجبر (A, F) لپاره باور لري:
 $\theta \in \text{Eq } A$ ټیک او ټیک هلته په $f(A, F)$ باندې یو
کونگرواینځ اړیکه ده، که θ د (A, F) د ټولو ترانسلا-
یشنونو سره زغموړ وي.

اوبی : دا چی هر $\theta \in \text{Con}(A, F)$ د ټولو ترانسلیشنونو
سره زغموړ دی، دا سیده مخه لوستلود کونگرواینځ اړیکو
څخه ته راځي. په څټ دې $\theta \in \text{Eq } A$ د ټولو ترانسلیشنونو
سره زغموړ وي. دا باید وښوول شي چي θ د ټولو $f \in F$ سره
زغموړ دی. f دې یو n -ځایزه کارونه یا عملیه وي او باور
دې ولري $a_1 \theta b_1, \dots, a_n \theta b_n$. دا چی هر د f څخه گټلی

ترانسليشن د Θ سره زغموړ دی، نو لاس ته راځي

$$\begin{aligned} f(a_1, a_2, \dots, a_n) &\Theta f(b_1, a_2, a_3, \dots, a_n) \\ &\Theta f(b_1, b_2, a_3, \dots, a_n) \\ &\vdots \\ &\Theta f(b, b, \dots, b) \end{aligned}$$

۵ . ۳ . ۱۵ تعريف : A دې يو الجبر وي، د تپ f او $\Theta \in \text{Con } A$ سره. په لاندې توگه تعريف شوی الجبر A / Θ د الجبر A فاکتور الجبر Faktoralgebra نومېږي يا بلل کېږي و کونگرواينخ Θ پسې يا کونگرواينخ Θ ته: د A / Θ بنسټ- ډيری يی همدا فاکتور ډيری A / Θ دی، دا په دې مانا چې د Θ د ټولو کونگرواينتېو لگيو ډيری. د A / Θ بنسټکارونی يا عملي د A له کارونو يا اېریشنونو څخه لاس ته راوړل کېږی له

$$f_{A/\Theta} : (A / \Theta)^n \longrightarrow A / \Theta,$$

$$f_{A/\Theta}([a_1]_\Theta, \dots, [a_n]_\Theta) = [f_A(a_1, \dots, a_n)]_\Theta$$

څخه. کارونی يا عملي $f_{A/\Theta}$ په دې توگه کره تعريف دي:

$$\text{له } [a_1]_\Theta = [b_1]_\Theta, \dots, [a_n]_\Theta = [b_n]_\Theta \text{ څخه}$$

$$[f_A(a_1, \dots, a_n)]_\Theta = [f_A(b_1, \dots, b_n)]_\Theta$$

لاس ته راځي (ټيک همدا د مخه تير تعريف کی د وينا

د زغموالي خويونه دي).

الجبر $(A/\Theta, | f_{A/\Theta} \in f)$ بيرته د تيپ يا ډول f

دی. زيات وخت په ساده توگه داسی $A = (A, F)$

او $A/\Theta = (A/\Theta, F)$ ليکل کيږي.

هومومورفيزم د کونگرواينځ اړيکو او فاکتور الجبر سره کلک

خپلوان دي يا کلک تړلي. دا به په لاندې کې وښوول شي.

۵. ۳. ۱۵ تعريف: $u: A \rightarrow B$ دې يوه څيرونه وي.

نو د u زړی (المانی Kern) په لاندې توگه تعريف دی:

$$\text{Ker } u = \{ (a, b) \in A^2 \mid ua = ub \}$$

دا روښانه ده، چې د u زړی تل په A باندې يو ايکويوالنځ

اړيکه ده. په دې برسیره د الجبرونو لپاره باور لري:

۵. ۳. ۱۶ جمله: د هر هومومورفيزم $u: A \rightarrow B$ لپاره،

د u زړی $\text{Ker } u$ په A يو کونگرواينځ اړيکه ده، دا په دې

مانا چې $\text{Ker } u \in \text{Con } A$ باور لري:

اوبی: f دې د A يو n -ځایز بنسټيزه کارونه يا عمليه وي

او باور دې ولري

$$(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n) \in \text{Ker } u$$

دا په دې مانا چې $ua_1 = ub_1, \dots, ua_n = ub_n$ ، نو دا لاندې لاس ته راځي:

$$\begin{aligned} uf(a_1, \dots, a_n) &= f(ua_1, \dots, ua_n) \\ &= f(ub_1, \dots, ub_n) \\ &= uf(b_1, \dots, b_n) \end{aligned}$$

له دې لاس ته راځي

$$(f(a_1, \dots, a_n), f(b_1, \dots, b_n)) \in \text{Ker } u$$

دا په دې مانا چې $\text{Ker } u$ يا د u زړی د ټولو بنسټيزو کارونو يا عميليو سره زغمور دی. څ چ بن و د دې په څټ د گونگروينځ اړيکو څخه تل هومومورفيزمونه لاس ته راځي:

۵ . ۳ . ۱۷ تعريف: A دې يو ډيري وي او $\Theta \in \text{Eq } A$.
نو

$$P_\Theta : A \longrightarrow A / \Theta, P_\Theta(x) = [x]_\Theta$$

د Θ کانوني څيرونه kanonische Abbildung بلل کيږي.

۵ . ۳ . ۱۸ جمله: A دې يو الجبر وي او $\Theta \in \text{Con } A$.
نو کانوني څيرونه P_Θ يو سورجيکتيو هومومورفيزم:

$$P_\Theta : A \longrightarrow A / \Theta$$

ډی. (د Θ کانوني هومومورفیزم). باور لري: د P_Θ زری
یعنی $\text{Kern } P_\Theta = \Theta$.

د مخ ته تیرې جملي ویناوې ساده بشوول کیږي. په ټو-
لیزه توګه له مخ ته تیرو دوه جملو څخه لاس ته راځي:
لاس ته راوړنه: په الجبر A باندې کونګرواینځ اړیکې
ټیک د هومومورفیزم زری دي د A پیل سره.

۵. ۳. ۲۰ بیلګه: Θ دې د ګروپ $Z_6 = (Z_6, +, -, 0)$

یوه کونګرواینځ اړیکه وي، د کونګرواینځ ټولګیو

$\{0, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 5\}$ سره.

نو $Z_6 / \Theta = (Z_6 / \Theta, +, -, 0)$ د $Z_6 / \Theta = \{\{0, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 5\}\}$

او $\Theta = \{0, 3\}$ سره. په څرګند ډول باور لري $Z_6 / \Theta = Z_3$ ،

چیرته چې Z_3 څیوکلیکي یا بیرته راګرځیدونکی ګروپ دی

د درې توکو سره. (ورپسې څیره دې وکتل شي)

$$\begin{array}{c|c} Z_6 & \\ \hline \text{mit } \Theta & \begin{array}{c} 0 \circ \quad 3 \circ \\ 1 \circ \quad 4 \circ \\ 2 \circ \quad 5 \circ \end{array} \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\pi_\Theta} \begin{array}{c} \begin{array}{c} \circ \{0,3\} \\ \circ \{1,4\} \\ \circ \{2,5\} \end{array} \\ Z_6 / \Theta \end{array}$$

څیره ۲۸

طبعاً د یوه الجبر کونګرواینځ اړیکې، لکه لاندې الجبرونو

ته ورته، یو تړون یا لاتیسن جوړوي. د دې د کتلو لپاره دا

لاندې لاس ته راوړني ته اړیو:

۵ . ۳ . ۲۱ جمله: A دې یو الجبر وي او R دې د $\text{Con } A$

یو ناتش برخه پیری وي. نو باور لري

$$\bigwedge R \in \text{Con } A$$

اوبی یا ثبوت: f دې د A یو n -خایزه بنسټیزه کارونه یا

عملیه وي، او وې دې: $R: (a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n) \in R$ ، نو باور

لري: $\Theta: (a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n) \in \Theta$ او له دې امله

$$f(a_1, \dots, a_n) \Theta f(b_1, \dots, b_n)$$

د ټولو $\Theta \in R$ لپاره. له دې امله باور لري

$$f(a_1, \dots, a_n) R f(b_1, \dots, b_n) \quad \text{پای}$$

په دې پسی به وښوول شي چی د $\Theta, \Psi \in \text{Con } A$ لپاره

تل $\Theta, \Psi \in \text{Con } A$ او $\Theta \vee \Psi \in \text{Con } A$ باور لري،

د $\wedge$ او $\vee$ سره لکه د مخه مو، چی وښوول.

په نورو ټکو یا کلیمو سره په Θ او Ψ کی غټ خوندي

اکوینالینځ اړیکې او کوچنی Θ او Ψ خوندي لرلي ایکو-

یوالنځ اړیکې دواړه او توماتیک کونګرواینځ اړیکې دي.

په داسی حال کې چی $\Theta \wedge \Psi \in \text{Con } A$ په دې د مخه

جمله پسی تملي لاس ته راځي د $\Theta \vee \Psi \in \text{Con } A$ ښونه

په لاندې ډول سرته رسیدلي شي:

داچی $\Theta \vee \Psi \in \text{Eq } A$ روښانه ده نو لکه د مخه مو، چی

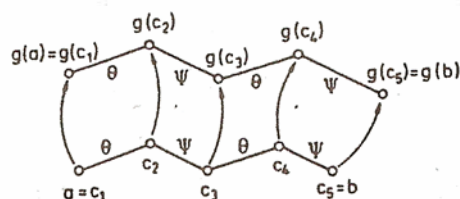
ښوولی، بسیا کوي چی د $\Theta \vee \Psi$ زغموالی د $A = (A, F)$

ترانسلیشن سره وښوول شي. وي دې $\Theta \vee \Psi$ $(a, b) \in \Theta \vee \Psi$

او $g(x) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n)$ یو ترانسلیشن د $f \in F$

او $a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n \in A$ سره.

نو $(g(a), g(b)) \in \Theta$ د ثبوت دی. جمله د
 توکي $c_1, \dots, c_n \in A$ موجودیت لاس ته راکوي
 د $a = c_1 \Theta c_2 \Theta c_3 \Theta c_4 \dots c_n = b_n$ سره. دا چي g
 د Θ همدا ډول د Ψ سره زغموړ ده، نو لاس ته راځي:
 $g(a) = g(c_1) \Theta g(c_2) \Psi g(c_3) \Theta g(c_4) \dots g(c_n) = g(b_n)$
 له کومې چي د Ψ پسي $(g(a), g(b)) \in \Theta \Psi$ ورکوي،
 لکه څنگه چي د غوښتلو وو (دا پسي څيره دي وکتل شي).



څيره

دا پورته راوړلي فکرونه کيدی شي چي په لاندې ډول
 راټول شي:

۳۵. ۲۱ جمله: د هر الجبر A لپاره $(\text{Con } A, \wedge, \vee)$

د $(\text{Eq } A, \wedge, \vee)$ يو لاندې الجبر دی. په ځانگړي توگه

$(\text{Con } A', \wedge, \vee)$ يو تړون يا فرباند دی (د A کونگرو-

اينخفرباند يا کونگرواينځ تړون)

د دې جملې له مخه تيرې جملې څخه تړلی لاس ته راوړنه
 لاندې هم ده:

۳۵. ۲۲ جمله: د هر الجبر A او هر برخه پري

$X \subseteq A^2$ لپاره

$$\Theta(X) = \bigcap \{ \Theta \in \text{Con } A \mid \Theta \supseteq X \}$$

یو کونګرواینځ اړیکه په A ده، دا په دې مانا چې $\Theta(X) \in \text{Con } A$. په ښکاره ډول $\Theta(X)$ په A باندې کوچنی کونګرواینځ اړیکه ده، چې X خوندي لري. دلته $\Theta(X)$ هغه د X څخه جوړه شوې یا تولید کونګرو-اینځ اړیکه بلل کیږي. د پایډيري $X = \{(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)\}$ لپاره زیات وخت داسې لیکل کیږي $\Theta((a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n))$ د $\Theta(X)$ په ځای. د $Y \subseteq A$ لپاره په زیات وخت کې په ساده توګه د $\Theta(Y^2)$ اود $\Theta(a_1, \dots, a_n)$ په ځای $\Theta(Y)$ لیکل کیږي، که $Y = \{a_1, \dots, a_n\}$ وي. د $\Theta(a, b)$ ښی کوانګرواینځ اړیکې د $a = b$ سره اصلي کوانګرواینځ بلل کیږي. لکه په لاندې الجبرونو کې، دمخه دې وکتل شي، کیدی شي، چې له X و $\Theta(X)$ ته تلونکی تولیدي پروسې په روښانه ډول تشریح کړای شي یا روښانه شي. د په ساده توګه داسې کیږي، چې کونګرواینځ اړیکې دلاندې الجبر-ونو د بنسټپيري په څیر تشریح کړای شي: A دې یو الجبر وي د تیپ f د بنسټپيري A سره. د نوي الجبر بنسټپیری A^2 دی. د هر n -ځایزې عملي سومبول $f \in f$ همدا سې یو n -ځایزه عملیه f_2 په A^2 تعریفوي د

$$f_2((x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)) = (f_A(x_1, \dots, x_n), f_A(y_1, \dots, y_n))$$

سره.

بیا د هر $a \in A$ لپاره توکي (a, a) د صفرځایزې عمليې په څیر ورزیاتیږي، په دې برسیره د

$$s((x,y)) = (y,x)$$

سره یوه یوځایزه عملیه تعریفیږي او بالاخره په لاندې توګه تعریف شوې دوه ځایزه عملیه:

$$t((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = (x_1, y_2) \quad \text{کې } y_1 = x_2 \quad \text{په بله توګه} \\ (x_1, y_1)$$

د فامیل F سره، چې له عملیو

$$f_2(f \in f), (a, a) (a \in A), s, t$$

څخه جوړ وي، هغه غوښتونکي الجبر لاس ته راځي.

(ښوونه دې د کورکار وي)

۵ . ۳ . ۲۳ جمله: د هر الجبر A لپاره باور لري

$$\text{Con } A = \text{Sub} (A^2, F_{\text{Con}})$$

دا په دې مانا، چې په A باندې کونګرواینڅ ټیک

د (A^2, F_{Con}) لاندې الجبرونو بنسټیږي دي.

کیدي شي، چې سیده په کونګرواینڅ اړیکو وکارول شي

یا استعمال شي. ځکه چې باور لري $\Theta(X) = \langle X \rangle$ ، د کوم

سره، چې $\langle X \rangle$ کوچنی X خوندې لرونکی د (A^2, F)

لاندې الجبر په نڅښه کوي. د $\Theta(X)$ یو بل جوړځایزه

روښانونه به په جمله کې ورکړ شوې وي، چیرته چې د

پولینوم کلیمه په واک کې لرو. یوه بله د ګونګرواینڅ اړیکو

او لاندې الجبرونو ترمنځ اړوندونه په لاندې جمله کې روښانه

شوې ده، چې ښوونه یې بیا هم ګرانو لوستونکو ته پاتې ده.

د دې له مخه یو بل تعریف: د هر ډیري A دې $\Theta \in \text{Eq } A$

او $X \subseteq A$ لپاره دې وي

$$[X] = \bigcup_{x \in X} [x]_{\Theta}$$

دا په دې مانا چې $[X]_{\Theta}$ د هغو ايکويوالنت اړيکو Θ ټولنه ده، کوم چې يو $x \in X$ خوندي ولري.

۵ . ۳ . ۲۴ جمله : وي دې A يو الجبر، $\Theta \in \text{Con} A$,

او $B \in \text{Sub } A$. نو باور لري

$$[B]_{\Theta} \in \text{Sub } A.$$

عمومي الجبر تيپ او داسې نور لاندې الجبر

٦ تروني Verband (lattice)

٦. ١ تروني او مکمل يا پوره تروني

: گروپ تيورې اوکړې تيورې ترمنځ غبرگوالی نورې تيورې،
 په ځانگړي توگه د تروني تيوري رامنځ ته کړه يا راپورته کړه.
 دا له دې لاندې څخه لاس ته راغله: د يوه گروپ لاندېکړو-
 بونه او هم د گروپ نورمالپرويشوني او په همدې توگه د
 يوې په خوښه کړې ټولو لاندېکړې اويا ټول (دوه اړخيزو،
 کيڼ اړخيز، ښي اړخيز) ايديالونه نسبت د ډيرۍ تيوري
 خوند يونی ته-چې نيممنظم يا نيمترتيب دي-هله دا نيممنظم
 يو څو بنسټيز خويونه لري.

٦. ١. ١ تعريف: يوه نيمترتيب ډيرۍ S تروني بلل

کيږي، که هغه دا لاندې دوه خويونه ولري:
 الف ١. د توکو $a, b \in S$ هرو جوړو لپاره په S کې يو داسې
 توکی $c = a \cap b$ شته. چې د a او b غوڅي بلل کيږي، د
 کومو لپاره چې

$$c \leq a, c \leq b$$

باور لري، که یو بل توکی c' موجود وي، چې هغه همدا شرطونه $b \leq c'$ ، $a \leq c'$ پوره کړي، نو $c' \leq c$ دی. (الف ۲) د توکو $a, b \in S$ هرې جوړې ته په S کې یو توکی d ، چې $a \leq d$ او $b \leq d$ ټولنه بلل کېږي، شته، دکوم لپاره چې $d \geq a$ ، $d \geq b$

باور لري، او هر بل داسې توکی d' د $d' \geq a$ ، $d' \geq b$ سره دا اړیکې $d \geq d'$ پوره کوي.

په ښکاره توګه د دوه توکو a, b دا ټولنه $a \cup b$ او غوڅی $a \cap b$ له دې سره یواځنې ټاکلي دي. دا هم په ښکاره توګه ساده لیدل کېږي، چې هر نیممنظم ډیری، یوه تړون ته په خټ یا مخامخ ایزومورف ډیري (پرته برخه ۲) په همدې ډول یو تړون دی. په کومو کې چې کلیمې غوڅی او ټولنه یو بل ته دوه ایزې یا دوال Dual کلیمې دي. پس کیدی شي، چې د کوم ګروپ G د یوه لاندېګروپ له تړوني او همداسې د دې ګروپ G د نورمال پرویشوني له تړوني څخه وغیږو، او همداسې د یوې کړی R د لاندې کړیو تړون او همداسې د دې کړی R د ایدیال د تړونو څخه وغیږو، که دا ایدیالونه کین او ښي هم وي. په دې ټولو حالتونو کې د لاندېګروپونو (لاندېکړیو) A, B د غوڅی څخه د هغو ډیرېټیوريکی غوڅی $A \cap B$ پوهیږو، د ټولنې په څیر د دې لاندې ګروپونو (لاندېکړیو) څخه جوړ شوي لاندې-ګروپونه (په همدې ورته توګه لاندېکړی) $\{A, B\}$.
په ټولیزه توګه کیدی شي، د یوه الجبر د لاندې الجبرونو.

تړون څخه وغږیو. د تړون لپاره یوڅو نورې بېیلګې هم راوړو. د یوه ډیرې M ټول لاندې ډیرې نسبت د ډیریتيوري خوند-هوني ته یو تړونی جوړوي، په کومو کې چې غوڅي او ټولنی د ډیریتيوري د موڅی یا هدف په څیر پوهیدل کیږي، داد لاندېډیريو M تړون به ورپسې هم زیات وکارول شي.

۶ . ۱ . ۲ جمله: هر لایني منظم ډیری L یو تړون دی، او دا د

$$a \cap b = a, a \cup b = b$$

سره د $a, b \in L, a < b$ (دې ته دلته بیا هم ګوته نیسم، چې دا په لاتین تورو لیکنه له کین لورلوستل کیږي) له امله. د پیدایښتي یا طبیعي ګڼونو ډیری یو تړون دی، که د نظم اړیکې د ویشوروالی اړیکې ونیول شي، د غوڅي رول دلته غټ ګډ پرویشونی لوبوي او د ټولنی رول کوچنی ګډ زیات-ځله لوبوي. (دا د غ. ګ. و او ک. ګ. ز. موضوعګانې ځما د شمیرپوهنې په کتاب کې پوره څیړل شوې)

تړونونه د الجبر یو ځانګړی حالت دی. کیدی شي، چې تړون بي د نیمنظم له استعمال څخه، یواځي د خویونو له مخې تعریف کړی شي، چې غوڅي او تړون د بینار اړیکو په څیر باید ولري:

۶ . ۱ . ۳ جمله: ډیری S د دوه بینار یادوه ګونو اړیکو

$a \cap b$ او $a \cup b$ سره هلته او هلته یا ټیک هلته یو تړون دی، که دا عمليي لاندې کټمټ اړیکې پوره کړي:

یا دونه: لوستونکی دې بیا هم ماته بخښنه وکړي، که دا ساده کلیمه بیا دلته کوته لکه کړم، چی دا هلته او هلته په دې مانا دی، چی که چیرې دا شرطونه پوره وي، نو دا یو تړون دی او په خټ: که دا الجبر یو تړون وي، نو دا شرطونه پوره دی. دا په دې مانا، چې د یوه څخه بل لاس ته راځي او په خټ

$$II_1. \quad a \cap a = a, \quad a \cup a = a$$

$$II_2. \quad a \cap b = b \cap a, \quad a \cup b = b \cup a$$

$$II_3. \quad (a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c), \\ (a \cup b) \cup c = a \cup (b \cup c):$$

$$II_4. \quad a \cap (a \cup b) = a \cup (a \cap b) = a$$

موږ لمړی نيسو، چی یو تړون S ورکړ شوی دی، عمليي $a \cap b$ او $a \cup b$ د الف ۱ او الف ۲ لاندې تعريف شوي دي يا پيژندلای شوي دي. د II_1 او II_2 باوري کيد نه بيا روښانه ده. موږ اوس خوي II_3 ازمايو او دا د غوڅي لپاره. له لمړي ۱ څخه لاس ته راځي:

$$(a \cap b) \cap c \leq a \cap b \leq a.$$

$$(a \cap b) \cap c \leq a \cap b \leq b,$$

$$(a \cap b) \cap c \leq c$$

همداسی لکه د لمړي ۱ پسې

$$(a \cap b) \cap c < b \cap c.$$

$$(a \cap b) \cap c < a \cap (b \cap c)$$

لاس ته راځي. په برابره يا همدې توگه دی

$$a \cap (b \cap c) < (a \cap b) \cap c$$

له دې سره Π_3 باوري کيږ.

ورپسې بيا د لمړي ۱ پسي روښانه دي

$$a \cap (a \cup b) < a;$$

په همدې توگه له بلې خوا $a < a \cup b$ باور لري او د لمړي ۲

له امله $a < a \cup b$ ، پس د لمړي ۱ پسي دی

$$a < a \cap (a \cup b)$$

له دې څخه د Π_2 باوري کيدنه لاس ته راځي.

اوس دې يو ډيري S د دوه بينار يا دوه گونو اړيکو سره ورکړ

شوي وي، کوم چي خويونه Π_1 او Π_4 لري. د $a, b \in S$

لپاره خويونه

$$a \cap b = a, a \cup b = b \quad (1)$$

تل سملاسي پوره دې يا پوره نه دي. که $a \cap b = a$ وي نو

له Π_4 او Π_2 څخه

$$(a \cup b) = (a \cap b) \cup b = b$$

لاس ته راځي.

که د دې په څې $a \cup b = b$ وي، نو Π_4 پسي لرو

$$a \cap b = a \cap (a \cup b) = a$$

که د اتوکو a او b لپاره مساوات (۱) باور ولري،

نو کيږدو $a \leq b$. له دې سره په ډيري S کي يو نيمنظم

پلي کيږي. په ريښتوني $a \leq a$ د Π_1 په بنسټ دی.

که په دې ورزيات $a \leq b$ او $b \leq c$ باور ولري، يعنی

$$a \cap b = a, b \cup c = b,$$

نو د Π_3 سره سم لاس ته راځي:

$$a \cap c = (a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c) = a \cap b = a$$

دا په دې مانا، چې $a \leq c$. بالاخره دی: $a \leq b$, $b \leq a$.
په $a \cap b = a$, $b \cap a = b$ له Π_2 بیا لاس ته راځي. $a = b$ راځي.
پسې تړلی د لمړي ۱ شرط باورېوالی يا باوریتوب ښايو. له
 $(a \cap b) \cap a = a \cap (a \cap b) = (a \cap a) \cap b = a \cap b$
څخه لاس ته راځي $a \cap b \leq a$ ، په ورته توگه کیدی شي
 $a \cap b \leq b$ وښوول شي.

د دې په څېر په S کې دې يو په خوښه توکي c' ټاکلی وي،
کوم چې شرطونه $c' \leq a$, $c' \leq b$ دا په دې مانا چې
 $c' \cap a = c'$, $c' \cap b = c'$

پوره کوي، نو باور لري

$$c' \cap (a \cap b) = (c' \cap a) \cap b = c' \cap b = c'$$

له کوم چې $a \cap b \leq c'$ لاس ته راځي. دا توکي $a \cap b$ په
تعقيب د توکو a او b غوڅی د لمړي ۱ په موخه يا هدف
انځوروي. په ټيک دې سره سمه توگه توکي $a \cup b$ ښوول
کیدی شي، چې د توکو a او b ټولنه ده، د لمړي ۲ په
موخه يا هدف.

څمور د تړون د کليمي دوم تعريف په گوته کوي، چې تړون
د ټوليز الجبر پريميتيو ټولگي يا ساده ټولگي جوړوي، د
دې دوه دوه ځایزو عمليو سره (دا مو د مخه په گوته کړي
وو، چې ساده ټولگي څه ته وايي)

دا د تړون د کليمي هغه زړی دی، څنگه چې دا د لاندې
تړونو او ايزومورفو څيرونو او د تړونونو د خونديونو لپاره
په پام کې نيول کېږي.

۴. ۱. ۶ تعریف: یو د تړون S لاندې پیری T لاندې تړون بلل کېږي، که دا د مخ ته تعریف شوې، د الجبر په موخې راوړل شوي تړون، یو لاندې الجبر انځور کړي. د نورو ټکو سره یا کلیمو سره یا په بل ډول T د هرو دوه توکو a او b غوڅی $a \wedge b$ او د هغو توکو ټولنه $a \cup b$ خوندي لري، نسبت و هغو عملیو ته چی په تړون S کی تعریف شوي دي، چی T پخپله یو تړون شي و هغو عملیو ته چی په S کی تعریف شوي وي.

دې ته دې پام وي، چی د یوه تړون S یو لاندې پیری T نسبت په S کی تعریف شوي نیمنظم ته چی هغه په کی هم باور و لري، ښوول کیدی شي، مگر دا ضرور نه ده یا په نورو کلیمو، تل داسی نه ده، چی دا دې یو لاندې تړون جوړ کړي. د گروپ G د ټولولاندې گروپونو تړون د ډیریتیوري له مخي نظم راوستی شي، خو دا تړون د گروپ G د ټولو لاندې پیریو تړون لاندې تړون نه انځوروي، ځکه چی ټولنه په دواړو تړونونو کی مختلفې ماناوې لري. په همدې توگه د یوې کړی R د لاندې کړیو تړون هم همداسی دی، چی په ټولیزه توگه د کړی د زیاتونی گروپ لاندې گروپونه تړون نه جوړوي.

۴. ۱. ۵ جمله: د یوه گروپ G د نورمال پرویشونو تړون د زیاتون گروپ G د ټولولاندې گروپونو لاندې تړون نه دی، چی دا مو د مخه د گروپ تیوري کی ښوولی دی.

۶. ۱. ۶ تعریف: د یوه تیروني S را په خټکیدونکی یواځنی څیرونه یا په بل عبارت یو اینجکټیوډ څیرونه u په تیرون S' باندې یوه ایزومورفه څیرونه ده یا په بل عبارت یوه ایزومورفه څوندیونه ده د S په S' کې، که د په خوښه توکو $a, b \in S$ لپاره

$$(a \cup b) u = au \cup bu, \quad (a \cap b) u = au \cap bu$$

باور ولري

یادونه: د u لپاره په کتابونو کې زیات وخت یوناني توري ځای په ځای کېږي، مگر زه دا ستونځې لرم، چې یوناني توري می په پروگرام کې نه شته. هیله ده چې څیروني او د یوه ډیری توکی توپیر ته به د گرانو لوستونکو پم وي (دا د S او S' یو ایزومورفیزم دی، چې د ټولیز انجبر په څیر راوړل شوي تیروني یی، یو له بل سره نري.

۶. ۱. ۷ جمله: د یوه تیروني S ایزومورف څوندیونه u په تیرون S کې، د نیممنظم ډیریو په موخه یا هدف د ډیری S په ډیری S کې یو ایزومورفیزم انځوروي. اوبی: د اوبیونې لپاره ټاکو $a, b \in S$ ، که $a < b$ وي یعنې $a \cap b = a$ ، نو وپه نرو

$$(a \cap b) u = au \cap bu = au$$

او له دې امله لاس ته راځي $au < bu$ ، که دا پام په خټ یا په برعکس لور وکړو او وکاروو، چې u یو یواځنی په خټکیدونکی دی، نو له $au < bu$ څخه هم $a < b$ لاس

ته راځي.

دا پورته بیلګې را ته ښايي، چي په څټ ثابتونه باورنه لري. د دوه ډيريو S او S' لپاره، چي نيممنظمي دي، يو ايزو-مورف څيرونې u ته د S په S' کي، هلته اړتيا يا ضرورت شته، چي S او S' دواړه تړونونه وي. دا د S ايزومورفي څيرونې کي په S' باندې بل ډول ځانونه نيسي.

۶.۱.۸ جمله: که تړونونه S او S' ورکړ شوي وي،

نو د نيم نظم په موخه هر ايزومورف څيرونه د S په S' باندې تړون S ايزومورف په تړون S' باندې انځوروي.

اوبی: په ريښتيني د $a, b \in S$ سره له

څخه هم $(a \wedge b)u \leq au$ او په همدې توګه

$$(a \wedge b)u \leq bu$$

که $c' \in S$ داسي وي، چي $c' \leq au$ او $c' \leq bu$ باور

ولري، او c د S هغه توکي وي، د کوم لپاره چي

$cu = c'$ دی، نو لاس ته راځي $c \leq a$ او $c \leq b$ دا

په دې مانا چي $c \leq a \wedge b$ له کوم څخه چي

$cu < (a \wedge b)u$ لاس ته راځي. له دې سره سم

لاس ته راځي

$$(a \wedge b)u = au \wedge bu$$

د ټولنې لپاره يې ښوونه يا اوييونه په همدې توګه ده. مور

دا هم په پام کي نيسو، چي په تړونونو باندې د هومورفيزم

اوټولي هغه کيلمي چي په خوښه، د ټوليزالجبرونو په ساده

یا پرمیتو ټولگیو کارول کیږي، کارولی شو. (دلته نورې بیلګې هم شته خو هغه موضوعګانې موږ نه دې څیړلی، له دې امله یې نورې زه هم دلته نه ګوته لکي کوم) د تیرو بینار اړیکو په بنسټ (لمړۍ برخه دې وکتل شي)، په یوه ډیرې M باندې بینار اړیکې یو تړونې جوړوي، کوم چې د $M \times M$ ډیري د ټولو لاندې ډیریو سره پریوځي، یا برابر دی. په همدې توګه په یوه ډیري M باندې تعریف شوي ایکویوالنت اړیکې یو تړون جوړوي، لکه په برخه ۱ کې چې ښوول شوي دي. دا د ایکویوالنت اړیکو تړون د بینار اړیکو د تړون لاندې تړون نه دی.

۶. ۱. ۹ جمله: هر تړون په یوه ځانګړي ډیري باندې

تعریف شوي ایکویوالنت اړیکو تړون کی ایزومورف خوندي دی.

(Whitman, Bull. Amer. Math. Soc 52(1946), 507 - 522)

۶. ۱. ۱۰ جمله: په یوه ورګر شوي ډیري باندې

تعریف شوی تړون د یوه ټاکلې ګروپ ټولو لاندې ګروپونو

تړون کی ایزومورف خوندي دی.

(Brkhoff, Proc. Cambr. Phil. Soc 31(1935), 433 - 454)

له دې سره سم هر تړون د یوه ټاکلې ګروپ ټولو لاندې ګروپونو

تړون کی ایزومورف خوندي دی.

ډیر دا مخ ته راوړل شوي تړونونه - لکه د یوه ډیري M لاند-

ډیریو تړون، د یوه ګروپ G لاندې ګروپونو تړون، د یوې

$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r^2} \right) = -\frac{2}{r^3} \frac{dr}{dt}$

یا پیژند نخښه i یو ټاکلی پیژندډیري I کی وځلي

یعنی $i \in I$ ، په لاندې بڼه هم لیکل کیږي

$$c = \bigcap_{i \in I} a, \quad d = \bigcup_{i \in I} a$$

طبعاً یو پوره تړون یو تړون هم دی، په ورسره بلده موخه یا هدف.

۱. ۶. ۱۲ تعریف: د پوره تړون S د ټولو توکو غوڅی د

تړون صفرتوکی بلل کیږي او په سومبول 0 سره په نخښه

کیږي. دا توکي د لاندې درې شرطونو، هر یوه سره یوا-

ځنی ټاکل کیدشي. د ټولو $a \in S$ لپاره باور لري

$$1) \quad 0 \leq a; \quad 2) \quad 0 \cap a = 0; \quad 3) \quad 0 \cup a = a.$$

۱. ۶. ۱۳ تعریف: د یو پوره تړون د ټولو توکو

ټولنه د تړون یویتوکی بلل کیږي او د سومبول 1 سره په

نخښه کیږي. دا سي یویتوکی د لاندې دري په خوښه

شرطونو، له یوه څخه یواځنی ټاکلی دی: د ټولو

$a \in S$ لپاره باور لري

$$1') \quad 1 \geq a; \quad 2) \quad 1 \cup a = 1; \quad 3') \quad 1 \cap a = a$$

طبعاً هغه تړونونه چی پوره تړونونه نه دي کړی شي، چی

صفرتوکی او یویتوکی (او یا یو له دوي څخه) ولري.

د یوه گروپ G د لاندې گروپونو په تړون کی د هغه صفر

توکی یونلاندېگروپ سره او یویتوکی یی پخپله د G

سره انځورېږي، د یوې کړی د لاندېکړیو په تړون کی د

صفرتوکی د صفر لاندېکړی سره او پخپله د کړی R

سره انځورېږي، د يوه ډيري M ټولو لاندېډيريو تړون
 کي د تشېږي او پخپله د ډيري M سره انځورېږي.
 د پروېشنې قانون له مخې منظم يا تنظيم شوي د طبيعي
 گڼونو تړون او د ځنځيرونې، چي پخپله طبيعي نظم يي
 جوړوي، هر وار يي صفر توکي گڼ ۱ دي، په داسي حال
 چي يویتوکی موجود نه دی.

۶ . ۱ . ۱۳ جمله: يو نيم منظم ډيري S هلته او هلته
 يو تړون دی، که هغه يو يویتوکی ولري او په هغی کي د
 هرو، په خوښه ناتش لاندې ډيريو لپاره غوڅی موجود وي.
 اوبی: د ښوونی لپاره بسيا کوي، که داسي فکر وکړو،
 چي د يویتوکی د موجوديت او د د ټولو غوڅيو له موجو-
 ديت څخه د ټولنی موجوديت لاس ته راځي. A دې د S
 يو ناتش لاندېډيري وي. په S کي داسي توکي b موجود
 دي د کوم لپاره چي $b \geq a$ دی، د ټولو $a \in A$ لپاره،
 داسي يو توکی تل دا يویتوکی دی، B دي د ټولو داسي
 توکو يو ناتش لاندېډيري وي او d دې د هغو غوڅی وي:

$$d = \bigcap_{b \in B} b$$

مور به سملاسی وښايو، چي d د لاندېډيري A ټولنه
 انځوروي. په ريښتيني سره $a \leq b$ دی د ټولو $a \in A$ لپاره
 او د ټولو $b \in B$ ، له دې امله $a \leq d$ باور لري. ورپسې
 دې $s \in S$ داسي وي، چي $s \geq a$ د ټولو $a \in A$ لپاره دی.

له دې څخه $s \in B$ لاس ته راځي او له دې سره $d \leq s$.
په دې ډول دی

$$d = \bigcup_{a \in A} a$$

د یوه نیم منظم ډیري خویونه، چی یو پوره تړون (او یا هم یو تړون) وي، ځان په یوه په څت ایزو مورفیزم ته لاندووي (د دې سره دې لمړۍ برخه پرتله شي)، مور کړی شو، چی د همدا اوس ښوول شوو جملو څخه او د هغو د نیونو یا فرضیو څخه هم د صفر توکي موجودیت او د ټولو لاندې ډیريو موجودیت و غوښتل شو.

۶ . ۱ . ۱۴ تعریف: د یوه نیم منظم ډیري M څیرونه u

په نیم منظم ډیري N کی، په کوم کی چی
له $a, b \in M, a \leq b$ څخه تل $au \leq bu$ لاسته اځي،
مونوتون monoton بلل کیږي (مونوتون په دې مانا، چی
توکی یو په بل پسې یا لویږي او یا کوچني کیږي). یو
تړون S هلته او هلته پوره تړون دی. که د S په هر مونوتون
څیرونی u په خپل ځان باندې فیکس توکی موجود وي،
یعني توکي، د کومو لپاره چی $au = a$ دی

(Tarski, Pacif. J. Math. 5 (1955), 285 - 309);

David O Pacif. J. Math 5(1955) 311 - 319)

لکه د مخه تیرو درسونو چی وښول شو، هر نیم منظم ډیري
 M د ټولو لاندې ډیريو په پوره تړون M کی خوندي ده.

مورد غواړو چې دا لاندې جمله وښايو

۶ . ۱ . ۱۵ جمله : هر تړون کيدی شي ، چې په يو پوره تړون کی ايزومورف (د تړونونو ايزومورفي په موخه ، پرتله دمخه همدا برخه) خوندې شي .
دا جمله د راتولنکي جملې څخه لاس ته راځي ، چې نسبت و مخ ته تيره لمړۍ برخې کی وينا ته لږ تيزه وينا د :

۶ . ۱ . ۱۶ جمله : هر نیم منظم ډیری M په يو ټاکلي تړون S کی ايزومورف خوندې دی ، او دا په داسی توگه چې د هر لاندېډيري M A لپاره و کوم ته چې په M کی غوڅی يا ټولنه موجود ده ، چې دواړه د u په خونديونه کی و بل ته وړل کيږي: دا داسی بلل کيږي ، چې دی

$$(\bigcap_{a \in A} a)u = \bigcap_{a \in A} au , (\bigcup_{a \in A} a)u = \bigcup_{a \in A} au \quad (2)$$

دا په برخه ۱ کې جوړ شوي د M خونديونه په M کی ، په روښانه توگه مخ ته لرونکی شرطونو لپاره بسيانه کوي .
مورد په لاندې توگه مخ په وړاندې خو : لمړی نيسو چې ډيري M يو صفر توکی لري ، که نه نو M ته يو توکی 0 صفر ورزياتوو .

۶ . ۱ . ۱۷ تعريف : يوناتش لاندېډيري X M په M کی يو ايديال بولو که :

اول (X و هر څه ته که x ته ته ته که v ه د

د $y \leq x$ سره.

دوم (د هر $X' \subseteq X$ لپاره، د کوم لپاره چی په M کی

ټولنه موجود وي دا ټولنه په X کی هم موجود ده.

د ډیری M د ټولو ایديالونو ډیری S نسبت د ډیریتیوري

خوندیونی ته نیم منظم دی. دا چی S یو یویتیوکی لري-

په څرگند ډول M د خپل ځان ایديال دی، له دې وراخوا

ایدیالونو په خوښه ډیری غوڅی، چی صفر لري، او ټول د

ایدیال په تیوري کی راغلي تعریفونه پوره کوي، نو ډیری S د

په دې برخه کی د مخه لوستل شوو له مخی پوره تړون دی.

د یوه په خوښه توکی $a \in M$ لپاره د ټولو توکو $b \in M$

ډیری (a) د $b \leq a$ سره یو ایديال انځوري، کوم چی د a

څخه راجوړ یا تولید شوی اصلي ایديال بلل کیږي. که هر

توکی $a \in M$ د هغه څخه راجوړ یا تولید ایديال (a) باندې

تنظیم شي، نو په لمړۍ برخه کی لوستل شوو له مخی یو

ایزومورف خوندیونه u د نیم تنظیم شویډیر M ، په پوره

تړون S کی، لاس ته راځي.

مور. نو نیسو، چی په M کی د لاندېډیریو $A \subseteq M$ د

هغو غوڅی

$$c = \bigcap_{a \in A} a$$

موجود دی. پس لرو $c \leq a$ او په دې پسی $(a) \geq (c)$

د ټولو $a \in A$ لپاره.

که بیا د ټولو اصلي ایديالونو (a) ، $a \in A$ ، د ډیریتیور-

يکي غوڅی توکی x ولري، نو $x \leq a$ دی، د ټولو $a \in A$ لپاره او له دې امله $x \leq c$. له دې سره باور لري

$$(c) = \bigcap_{a \in A} (a)$$

او له دې سره جوخت لمړی مساوات (۲) وښوول شو. همداسی دې و دې لاند ډیر $A \subseteq M$ ته په M کی ټولنه

$$d = \bigcup_{a \in A} a$$

موجود وي. نو $(d) \supseteq (a)$ دی د ټولو $a \in A$ لپاره. که یو ټاکلی ایډیال X ټول $a \in A$ ولري، نو په همدې توګه د دې ټولنه هم خوندي لري. په دې لاس ته راوړنی سره $X \supseteq (d)$ دی.

له دې امله باور لري

$$(d) = \bigcup_{a \in A} (a)$$

په دې توګه مو د (۲) دوهم مساوات وښوول، او په له دې امله د جملی اوبی پوره شو.

۶ . ۱ . ۱۸ جمله: یو نیمتنظیم شوی ډیری S هلته

او هلته یو پوره تړون دی، کله چی په S کی یو صفر

توکی موجود وي او هر ایډیال یو اصلي ایډیال وي.

یا دونه: د دې جملی له ښوونی څخه هم دلته تیريرو .

کیدي شی په کوروش یا خوروش کې وکتل شه.

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library