الجبرون

ALGEBREN

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

Ketabton.com

لیکوال:

ډاکټر ماخان (میرزی) شینواری

(c) ketabton.com: The Digital Library

نیولیک

سریزه .... الف

شمیرپوهنیزې نخښې............ ت

۱ . ګڼونډېرې ۱

۱ . ۱ طبیعي ګڼونډېرې ۱

۱ . ۲ د ټول ګڼونډېرې ۴

۱ . ۳ ریشنل ګڼونډېرې ۵

۱ . ۴ رییل ګڼونډېرې ۷

۱ . ۵ ایماګینار ګڼوډېرې ۷

۱ . ۶ کمپلکس ګڼوډېرې ۸

۲ . ډېرپوهنیزې ستکلیمې ۱۱

۲ . ۱ ډېرې ۱۱

۲ . ۲ خلډېرې یا ضرب ډېرې او اړیکې یې... ۲۶

۲ . ۳ نیمنظم یا نیمترتیب ۳۶

۲ . ۴ مینیمالشرطونه ۳۸

۳ . الجبري جوړښتونه ۴۱

۳ . ۱ ګروپ ۴۴

۳ . ۲ بدن یا تن او کړۍ ۵۹

نورمي شوې ټولینوم ۶۶ څه مانا لري

۳ . ۳ . لاندیګروپ او لاندې کړۍ ۷۰

۳ . ۴ ایزومورفیزم ۸۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۵ د نیمګروپ په ګروپ او کړی په یوه (ناضرور
کموتاتیو) تن یا بدن کی خوندیونه ۹۲
۳ . ۶ نورمالپرویشنه ۹۵
۳ . ۷ ایدیال او پاتیتولګیکړی ۱۰۵
۴ د بول الجبر، سرکټ الجبر......... ۱۱۶
۴ . ۱ د ول الجبر سټ کلیمی ۱۱۶
۴ . ۲ د بول فنکشنونه او پولینومونه ۱۲۹
سویچ الجبر یا برینبناجریان الجبر ۱۴۶
۵ الجبرونه ۱۵۶
یو څو بنسټکلیمی ۱۵۶
۵ . ۲ لاندې الجبر یا سب الجبر ۱۷۳
۵ . ۳ ایزمورفیزم ، هومومورفیزم ۱۸۰
۶ . ترونونه یا ترونی ۲۰۷
۶ . ۱ ترونی او مکمل - یا پوره ترونې.. ۲۰۷

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ ګڼونډیري

د دې لیاره، چې دا د الجبر کلیمی مو پوره څیړلی وي او ښه پوهور شي، نو په سر کي غواړم هغه د ښوونځي باید (چې متآسفانه دا مو په هیواد کي، په دې نامه نه وو نومولي) ورسره بلد، د ګڼونو ډیري یو په بل پسی تعریف کړم، یا بهتره لنډه ګوته ورته ونیسم او دا په هغو کی د باوري کارونو یا اپریشنونو یا عملیو او یا ګنډنو او یا د تړونونو په بنسټ.

۱ . ۱ طبیعي ګڼونډیری

Die Menge der natürliche Zahlen

(the set of non negative integer)

دا د ګڼونو ډیری چې صفر ورسه نه وي په لاندې ډول دی:

$$N = \{ 1,2,3,...,n , ... \}$$

دا لاندې د طبیعي ګڼونو ډیري دی، چې صفر ورسره دی، یا په بل عبارت : د طبیعي ګنونو ډیری د صفر سره

$$N^* = \{0,1,2,...,n,...\}$$

په دې ډیري کی لاندې شیمر قاعدې باور لري

.

.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ . ۱ . ۲ په طبيعي ګڼونو کی شميرقاعدې

الف : و زياتون ته يا بهتره، نسبت وزياتون ته:

اول : د هرو دوه طبيعی ګڼونو $a,b \in N$ لپاره، و زياتون ته، يا نسبت وزياتون ته، يو دريم طبيعي ګڼ $c \in N$ شته د کومو لپاره چی باور لري: $a + b = c$

دوېم : اسوشياتيو قانون Assotiative : د طبيعي ګڼونو لپاره د اسوشياتيو قانون باور لري:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

دريم : کموتاتيو قانون commutative : د طبيعي ګڼونو لپاره د کموتاتيو قانون باور لري، يعني:

$$a + b = b + a$$

څلورم: بي تاثيره يا ناپيلی توکی das neutrales Element: په طبيعي ګڼونو کی چی صفر ورسره وي باور لري

$$a + 0 = 0 + a = a$$

صفر د طبيعي ګڼونو ناپيلی يا بهتره بی تاثيره توکی بلل کيږي.

ب : و ځل ته يا بهتره نسبت ځل ته

(c) ketabton.com: The Digital Library

اول : د هرو دوه طبیعی گڼونو a , b ∈ N لپاره یو دریم طبیعی گڼ c ∈ N شته، د کومو لپاره چی باور لري

$$a.b = c$$

دوم : د طبیعي گڼونو a,b,c ∈ N لپار اسوشیاتیو قانون باور لري

$$(a . b) . c = a . (b . c)$$

دریم : د طبیعي گڼونوډیري کی کموتاتیو قانون باور لري

$$a . b = b . a$$

څلورم. نسبت و ځل ته ناپیلي یا بهتره بي تاثیره توکی : که طبیعي گنونه له 1 سره ځل شي، نو بیرته پخپله همغه طبیعي گڼ لاس ته راځي

$$1 . a = a . 1 = a$$

دا 1 د طبیعي گڼونو یو ناپیلی یا بي تاثیره توکی بلل کیږي، چی یوی(دا ځکه یوی بولو ، چی باید له یو سره یی توپیر شوی وي) یي بولو

یادونه : د بېلګو، چی یوی له یو څخه توپیر [illegible] شي.

یادونه : په پورته نښلونو کی دي ته پام وي، چی ورکړ شوي توکی یو د بل څخه باید توپیریدونکی نه وي، کیدی شي، چی یو له بل سره مساوي هم وي یا بهتره همغه توکي وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګورو چې په طبیعي ګڼونډیري کی، نسبت و زیاتون ته، د هر توکی لپاره د هغه په خټ یا برعکس ګڼ نه شته، نو له دې امله مجبوریږو، چې د طبیعی ګڼونو ډیری د ټولګڼونو ډیري ته پراخ کړو،

۱ . ۲ د ټولګڼونوډيرى die Menge der ganze Zahlen :

د ټولګڼونو ډیری، د طبیعي ګڼونو ډیری د صفر او د دې طبیعي ګڼونو د توکو په خټ ګڼونو ډیری دی، چې په Z سره يې ښايو او داسې يې ليکو

$$Z = \{ ...,-n, ..., -3,-2,-1,0,1,2,3,...,n,...\}$$

په ټولګڼونو ډيري کی هغه په طبیعی ګڼونډیري کی باوري نښلونی یا عملیي باور لري او په دې برسیره د هر یوه ګڼ لپاره د هغه په خټ ګڼ نسبت و زیاتون ته هم موجود دی، یعنی لاندې باور لري:

د هر ټولګڼ $a \in Z$ لپاره د هغه په خټ ګڼ یعنی $-a \in Z$ موجود دی، چې دا لاندې باوري کوي:

$$a + (-a) = a - a = -a + a = 0$$

دلته $-a$ د a په خټ ګڼ یا inverse دی نسبت و زیاتون ته. دې ته طبعاً پام شته، چې د مثبت ګڼ ځل د منفی ګڼ

.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

سره منځ ته راغلی، چې نتیجه یې یو منفی ګڼ دی، دا په دې مانا، چې دلته اصلي نبلونه یا عملیه زیاتون دی او نه . (ځل).

یادونه : زیاتون دوه ځایزه عملیه binäre Operation یا نبلونه ده او په ځټ عملیه یوه یوځایزه عملیه unäre Operation یا نبلونه ده.

ګورو، چې د ټولګڼونو په ډیري کی د ځل لپاره د ګڼونو په ځټ ګڼونه inverse Zahlen نه دي تعریف، یعنی د یوې افغانی یو په څلورمه (1 / 4) یو ټولګڼ نه دی، نو له دې امله باید د ټولګڼونو ډیری و ریشنل ګڼونو Q ته پراخه شي .

۱ . ۳ ریشنل ګڼونه rationale Zahlen :

د ریشنلګڼونو ډیری له دې امله د ټولګڼونو ډیری Z او د ټولو ماتګڼونو ډیري a / b څخه جوړ دی، چې په Q سره یې په نخښه کو او په لاندې ډول یې لیکو :

$$Q = \{ Z , a/b , a,b \in Z , b \neq 0 \}$$

دا داسی لوستل کیږي : ډیری Q مساوي دی د ټولګڼونو ډیری Z اود مات ګڼونو a / b ډیري سره، a , b ∈ Z .

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ریشنلګڼونو ډیري کی، هغه په Z کی ټول د شمیرقوانین باور لري او په دې برسیره د هر ګڼ لپاره نسبت و ځل ته د هغه په څټ ګڼ هم موجود دی ، یعنی په ریشنل ګڼونو کی د هر ګڼ a ∈ Z لپاره یو b ∈ Z موجود دی د کوم لپاره چي باور لري:

$$a \cdot b = 1 \Rightarrow b = 1/a,\ a \neq 0$$

دلته a باید د صفر سره برابره یا مساوي نه وي، ځکه، چی په صفر ویش نه دی تعریف.

ګورو چی ددوه په څټ ګڼونو ځل د ریشنلګڼ یو یوی راکوي. یوی هغه توکی دی، چی د ریشنلګڼون ډیري هرتوکی سره د ځل نښلونه کی بي تاثیره پاتي کیږي یا ناپیلی. دا یوی مور له دې امله ناپیلیdas neutrale Element او یا هم بی تاثیره توکی بولو.

په پورته ګڼونو کی توان تعریف دی، یعني هر ګڼ د خپل ځان سره ځل کیدنه شته، خو د دې په څټ کارونه یاعملیه یا بهتره نښلونه موجود نه ده، نو له دې امله باید دا ګڼونډیری نور هم پراخه شي. یعني د ګڼون ریښه هم باید په ګڼونډیري کی باور ولري. د بیلګي په توګه د ۲ ریښه یعنی $\sqrt{2}$ په ټولګڼونوکی نه دی تعریف. دا پراختیا مو ریيلګڼونډیری ته لاربښودوي، چي

(c) ketabton.com: The Digital Library

په R سره ښايو يا نخښنه کوو.

۱ . ۴ رييل گڼونډيری R die Menge der reelen Zahlen:

د هغو گڼونوډيری، چی له ريښو جوړ وي، هغه مو ړ د ايريشنل گڼونوډيری die Menge der irationale Zahlen بولو چی په Q_i سره يی په نخښنه کو . د رييل گڼونډيری ياد رييل گڼونو ډيری په دې توگه بيا د ريشنل گڼونو ډيري او د ايريشنلگڼونو ډيري د ټولنی څخه جوړ دی يعنی

$$R = Q \cup Q_i$$

يادونه : په پورته او راتلونکی کي که U راشي، نود ټولنی په ځاي به يی ځاي نيولی وي، که بل نوم ورسره مل نه وي.
په دې ډيري کي د هرنامنفی گڼ لپاره د هغه گڼ ريښه موجود ده. د رييلگڼونوډيری. بيا تکراروو، چی د ټولو ريشنلگڼونو ډيري څخه عبارت دی، چی د نامنفي ريشنلگڼونوگڼونو ريښی هم ورزياتي شي.
په رييلگڼونو کي د ريشنل گڼونډيري ټول قوانين باورلري او په همدې ډول په R کی د هر مثبت گڼ a ريښه هم موجود ده، يعني $\sqrt{a}$ موجود ده، چی a منفي گڼ نه وي. دا ريښه نيونه يو يوځايز اپريشن يا عمليه او يا نښلونه ده.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته هم سملاسی راته جوته کیږي، چی د ریښي یا بهتره د مربع ریښی د منفی ریښه نیونکي یا ریښه ایستونکی ګڼ ریښه نه ده تعریف، نو له دې امله باید د رییلګڼونوډیری د کمپلکس ګڼونډیری‌ته پراخه شي.

۱ . ۵ ایماګینار ګڼونډیری:

د ټولو منفی ګڼونو ریښوډیری ته ایماګینار ګڼونډیری وایوdie Menge der imaginäre Zahlen . او دا په I سره په نخښه کوو. دا هغه ګڼونه i دي، د کومو لپاره چي باور لري: $i^2 = -1$. یانی $i = \sqrt{-1}$, نو که b یو رییلګڼ وي، نو ib یو ایماګینار ګڼ دی .

اوس راځو د کمپلکس ګڼونو ډیري تعریف ته :

۱ . ۶ کمپلکس ګڼونډیری

die Menge der komplexen Zahlen

کمپلکس ګنونډیری د رییلګڼونډیری او ایماګینارګنونډیري ټولنی ته وایي. یاني که ایماګینارګڼ ډیروله د I سره په نخښه کړو نو کمپلکسګڼ چی د C سره یي په نخښه کوو، دی

$$C = R \cup I$$

دلته له دې پیژندنی یا تعریف څخه روښانیږي، چی کپلکس

ګڼونه دوه برخی لري، رییله برخه او ایماګینار برخه، نو له دې امله د کمپلکس ګڼونو په ډیري کی ټولی نښلونی یا عملیې، چی په رییل ګڼونډیري او,ایماګینار ګڼونډیري کی باور لري، باوري دي. او برسیره پردې، دا لاندې قوانین هم باور لري:
دلته که $z = a + ib$ یو کمپلکس ګڼ وي، چی a رییله برخه او $ib = bi$ یی ایماګینار یا ایماجینار برخه ده. او س راځو شمیرقوانینو ته:

الف : $i^5 = i \quad i^4 = 1 \quad i^3 = -i \quad i^2 = -1$

په ټولیزه توګه:

$$i^{4n+5} = i \quad i^{4n+4} = +1 \quad i^{4n+3} = -i \quad i^{4n+2} = -1$$

ب –

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 + b_2)$$
$$z_1 . z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

کیدی شي، چی وي $z^* = \bar{z} = a - ib$ ، نو دا ګڼ
و $z = a + ib$ ته یو کونجوګیري کمپلکس ګڼ بلل کیږي

پ–

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$z.z^* = z.\bar{z} = (a+ ib) (a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2$$

دا پورته د جملو يا قضيو په څير هم ښوول کيدی شي، خو مونږ يی دلته د ښوونی څخه تيرېږو او دايی د تعريف له مخی د اعتبار وړ قوانينو په څير راوړو.

يادونه : مونږ کړای شو، چی دا د ګڼونو ډيري په لاندې ډول د ډيريو په توګه يو په بل کې خوندې وليکو:

$$N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$$

دا په ترتيب د ورپسی ډيري اصلي برخډيري دي

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ – ډېرپوهنیزې ستونزې

۲ . ۱ . ډېرۍ

په شمیرپوهنه کی پل په پل موږ ددې، د ستونځو سره مل، تعریف شوې کلیمي سره مخامخ کیږو، کومه چی د یوه لغات « ټولګې » سره روښانه کیدی یا پوهیدل کیدی شي. د بیلګي په توګه د انسانانو د ټولګې څخه غږیږو، چی په یوه ټاکلی وخت کی په یوه کوټه کی موجود وي، یا هغه هیلی، چی په یوه ځانګړي وخت کې په یوه ځانګړي ځای کې په اوبو کی لامبی. هغه غرڅه، چی د هسکی مینې د سپینی مورګي په ځنګلونو کی لا پاتی دي او همدا ډول هغه میږې او ووزې، چی په **۱۹۹۹** میلادې کال کی د کوچیانو څخه د لوږې له امله مړې شوي دي. د داسی شیانو ټولګه «ډېرۍ» (Die Menge , set) بلل کیږي یا داسی ټولګي ډېرۍ نوموو.

۲ . ۱ . ۱ لنډ تعریف : ځموږ د خیال یا تصور د ټولو، په روښانه توګه، توپیرکیدونکو شیانو ټولګه «ډېرۍ» نوموو یا بولو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

شيان، چې له هغو ډيرى جوړ شوى دى، د ډيري «توكي» بلل كيږي. د دې لپاره، چې « x د ډيري M توكى دى» ليكو: « $x \in M$ ». د دې وينا په څټ يا نفي يا نيګيشن Negationد « $x \notin M$ » له لارې وركول كيږي.
د « $x_1 \in M$ او .... او $x_n \in M$ » په ځاي ليكو:

"$x_1,x_2,...,x_n \in M$ "

يو ځانګړى ډيرى تشډيرى دى، داسى كركتريزه كيږي، چې كوم توكى نه لري. دا تشډيرى د سومبول يا نخښى Ø سره نخښنون كيږي يا په نخښه كيږي.
نور هغه ډيرې چې زيات مو مخ ته راځي يا زيات منځ ته راځي، دا لاندې ډيري دي:

د ټولو طبيعى يا پيدايښتګڼونو ډيرى د N سره په نخښه كيږي، چې صفر ورسره مل دى.
د ټولو ټولګڼونو ډيرى Z
د ټولو راشنلګڼونو ډيرى Q
د ټولو رييلګڼونو ډيرى R
د ټولو كمپلكسګڼونو ډيرى C
د ۳۰ پرويشونو ډيرى، چې له ۸ توكو څخه جوړ ډيرى دى.
يعنى {1,2,3,5, 6,10,15,30 } ډيرى.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ . ۱ . ۲ تعریف : یو ډیری M د ډیري N برخه ډیری بلل کیږي، که له $x \in M$ څخه تل لاس ته راشی $x \in N$.
په نخښونه یی : $M \supset N$. یا $M \subset N$

۲ . ۱ . ۳ تعریف : هغه ډیری، چی هیڅ توکی ونه لري، تشډیری بلل کیږي او داسی $\emptyset$ یي په نخښه کوو.

تشډیری $\emptyset$ د هرډیري برخډیری دی ، برسیره پردې هر ډیری د خپل ځان برخډیری دی. دا ډول ډیري نااصلي برخډیري بلل کیږي، هغه برخډیری اصلي برخډیری دی یا اصلي برخډیری بلل کیږي، که دا برخډیری له دې دوه ډیریو یعنی له پخپله دې ورکړ شوي ډیرې او تشډیري څخه توپیر ولري. دې ته دې هم باید ګوته نیول شوي وي، چی کله کله برخډیریو ته «لاندې ډیري» هم ویل کیږي
دا نخښی $\subset$، $\subseteq$ د اینکلوزیون نخښو Inklusionszeichen په نامه بل کیږي.

۲ . ۱ . ۴ تعریف : که وي $M \subseteq N$ او $M \models N$ نو M د N اصلي برخډیری بلل کیږي. ($M \neq N$)
په نخښونه یی : $M \subset N$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ . ۱ . ۵ تعریف: د یوه ډیرې S توکي کیدی شي پخپله ډیري وي. دلته نوS د ډیریسیستم په توګه په نخښنه کیدی شي یا د ډیري سیستم په څیر ګڼل کیدی شي یا په بل عبارت: د یوه ډیري د توکو ډیري د هغه ډیري برخډیری دي، چی دا یو د ډیریسیستم جوړوي.

۲ . ۱ . ۶ تعریف: د یوه ناتش ډیري سیتسمS غوڅډیری (د سیستم هغه برخډیری، چی د سیستم د هر ډیري برخډیری وي) D د ټولو توکو هغه برخډیری دی، چی په همغه وخت یا یووخت کی د سیستم S د هر ډیري M توکی وي. یعنی لرو $x \in D$ همغه ارزښته یا برابرارزښته د دې سره دی $x \in M$ د ټولو ډیریو $M \in S$ لپاره .

په نخښونه: $D = \bigcap_{M \in S} M$ یا $D = \bigcap \{M \mid M \in S\}$

$D = M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_n$

که S یواځې د پای ډیرو برخډیریو $M_1, \dots, M_n$ څخه جوړ دی.

مساوات یا برابرون $M \cap N = \emptyset$ وایي، چی M او N ګډ توکی نه لري، یعني توکی پردي دي یا لنډ پردي یا دیسیونکت دي(Disjnukt) دي .

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ . ۱ . ۷ **تعریف:** د یوه ناتش ډیریسیستم S ټولنه V د ټولو هغو توکو ډیری دی، چې کم له کمه د S ډیریسیستم یوه ډیري M پورې اړه ولري یعنی توکی وي.

په نخښونه : $\bigcup_{M \in S} M$ = V یا $V = \bigcup \{ M \mid M \in S \}$

$V = M_1 \cup \dots \cup M_n$

که ډیریسیستم S د پای ډیرو برخډیریو $M_1, M_2, \dots, M_n$ څخه منځ ته راغلی یا جوړ وي.

د غوڅډیري او ټولنډیري د تعریف په مرسته پسی ترلي لاندې اړیکي لاس ته راځي ، چی ښوونه یی ګرانو لوستونکو ته پرېښوول کیږي.

۲ . ۱ . ۸ مرستندوي جمله:

(a) $M \cup (N \cap N) = (M \cup N) \cap (M \cup N)$
(b) $M \cap (N \cup N) = (M \cap N) \cup (M \cap N)$
(c) $M \cap N = M$

د $M \subset N$ سره په همغه مانا ده

(d) $M \cup N = M$

د $N \subset M$ سره په همغه مانا ده

(c) ketabton.com: The Digital Library

پایډیري کیدی شي، چی د هغو د غړو له لارې په نخښه شي.
لیکل کیږي

$$\{ x_1 , x_2, \dots , x_n \}$$

د همغه ډیري M لپاره، چی ټیك له دې ورکړشوو توکو څخه جوړ وي. یوتوکیز ډیری { x } د هغه د توکي x څخه باید توپیر شي:
د بیلګي په توګه { Ø } هغه ډیری دی، چی د هغه یواځنی توکی تشډیری دی .

دیوه ډیري M د توکو ګڼون یا تعداد د | M | سره په نخشه کیري. دا ګڼ |M| د ډیري M زور یا توان بلل کیږي، دا په دې مانا چي د ډیري د توکو ګڼون یا تقداد د ډیري زور دی. د بیلګي په توګه دی 1 = | { Ø } | او 0 = | Ø | .
د یوه ډیري بل ډول روښانونه یا شمیرنه په دې کی نغښتی، چی دیوه ورکړ شوي ډیري M ټول توکي ورکړ شوي ، کوم توکی چی ګډ خویونه E ولري، و یوه نوي ډیري ته سره راټولګه کړي یا را یوځاي کړي. E(x) په دې مانا چی x خویونه E لري، نو دا ډیری په { x ∈ X | E(x) } سره ښایو.
د بیلګي په توګه ډیری $\{x \in Z \mid x^2 = 1\}$ د -1 او 1 څخه جوړ شوی، د ټولو ټولګڼونو برخډیري دی. د یوه ډیري دا
.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ډول جوړونی سره د انډولډیري X ورکونه مهمه ده، له کومی چی توکی رانیول کیږي، په غیر له دې کیدی شي، له تضاد یا مخامخوالی ډك یا په ښتې ډیري رامنځ ته شي، دا چی انډولډیری په ټولیزه توګه په همغه اړیکو یواځنی ټاکلی دی، نو په دې حالت کی دې په اکسپلیځیت(Explizite لاتین : روښانه ، واضح) ورکونه تیریدنه وشي.

۲ . ۱ . ۹ تعریف: د دوه ډیریو M او N کمونډیری دی :

$$M \setminus N = \{ x \in M \mid x \in N \}$$

د غوځي ، ټولنی او کمون لپاره په پوره روښانه توګه لاندې یادوو:

کموتاتیو قانون Kommutativität

$$A \cap B = B \cap A \ , \quad A \cup B = B \cup A$$

اسوځیاتیو قانون Assotiativität

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$$

دیستریبوتیویتي قانون Distributivität :

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) \ ,$$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټوليز يا عمومي

$$\left(\bigcup_{\alpha} A_{\alpha}\right) \cap B = \bigcup_{\alpha}\left(A_{\alpha} \cap B\right)$$

او وروسى

$$(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B = (A \cap C) \setminus (B \cap C),$$
$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B), \qquad A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$$

ډيرې شميرپوهنيزې ښوونې د پوره اندكشن په پرينخيپ ولاړې دي، كوم چې د طبيعي ګڼونو اكسيوماتيكي جوړخت دلايلو راوړنه كې يو غوره رول لوبوي.

۲ . ۱ . ۱۰ د پوره اندكشن ثبوت پرينخيپ:

A دې په طبيعي ګڼونو $n \in N$ يوه ويناو ي. $A(n)$ په دې مانا دى، چې A په n باوري كيږي.

د يوه كره ټاكلى $n_0 \in N$ څخه پيل باور لري:

الف : $A(n_0)$ د اينډكشن پيل:

ب ؛ د اينډكشن پاي : د ټولو $n \geq n_0$ لپاره له $A(n-1)$ څخه هم $A(n)$ لاس ته راځي

نو بيا A د ټولو طبيعي ګڼونو $n \geq n_0$ لپاره رينښتيا ده يا صحيح يا ټيك ده(دا رينښتيا مناسبه نومونه ده).

(c) ketabton.com: The Digital Library

دې ته دې ګوته نیول شوي وي، چې خورا ساده دی، که چیري د ایندکشن پای په لاندې ډول لارښوده کړو:

ب : له $A(i)$ څخه د ټولو i لپاره د $n_0 \leq i < n$ سره $A(n)$ هم لاس ته راځي.
شرایط (b) او ('b) برابرارزښته دي ، لکه چی وړیسی یا تړلي لیدل کیږي.
د انیدکشن ښوونه یا ثبوت بیلګې د لاندې جملو اوبیو یا حلونو ته مرسته کوي یا د لاندې جملی اُبیو په چوپړ کې دي.

۲ . ۱ . ۱۱ تعریف: M دې یو ورکړشوی ډیری وي.
د M د ټولو برخډیریو ډیری. چې په $P(M)$ سره یی په نخښه کوو یا ښایو، د M دپوتنځډیري Potenzmenge یا توانډیري په نامه یادیږي.

۲ . ۱ . ۱۲ جمله: M دې یو n− توکیز ډیری وي.
$P = P(M)$ دې د M د ټولو برخډیریو ډیری وي. نو دا د M په توان ډیری P له 2^n توکو څخه جوړ دی.

اوبی (حل): د ایندکشن پیل: $n = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګورو چی M کوم توکی نه لري. له دې امله M تشډیری Ø دی. د $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$ له امله په P کی یو توکی $1 = 2^0$ موجود دی.

وي دې : $n \in N, n \geq 1$

د ایندکشن نیونه یا فرضیه: هر $(n - 1)$ – توکییز ډیری دې ټیك 2^{n-1} توپیریدونکی برخډیري ولري.

د ایندکشن اوبی یا ثبوت : که M یو ډیری د n توکو سره وي، نو $P(M)$ ټیك له 2^n توکو جوړ دی.

د دې سره دې $M = \{a_1, a_1, ..., a_n\}$ وي.

نو بیا $P(M')$ د $M' = \{a_1, a_2, ..., a_{n-1}\}$ لپاره د ایندکشن د نیونی یا فرضیي سره ټیك 2^{n-1} توکي لري،

که $A \in P(M)$ دی، نو بیا یا $a_n \in A$ دی او یا $a_n \notin A$. په دوم حالت کي A په $P(M')$ پورې اړه لري، او په لومړي حالت کي $A' = A\setminus\{a\} \in P(M')$ نو $P(M)$ ټیك

$$2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^{n-1}(1 + 1) = 2^n$$

توکي لري. د پوره ایندکشن د پرینځیپ له مخی دلته وښوول شو، چی د هر n – توکیز ډیري M لپاره پوتنځ – یا تواندډیری $P(M)$ ټیك 2^n توکی لري. *

(c) ketabton.com: The Digital Library

یو د ثبوت له مرستندوي موادو څخه د ناپاي ډیري زدکړې لپاره د څورن Zorn جملګي ده. S دې یو ناتش ډیریسیستم وي. یو ناتش د S برخډیری K یو ځنځیر بلل کیږي، که له $M_1, M_2 \in K$ څخه تل $M_1 \subseteq M_2$ لاس ته راشي او یا $M_2 \supseteq M_1$ لاس ته راشي.

۲ . ۱ . ۱۳ تعریف :یو ډیري $M \in S$ د S یو ماکزیمال یا لوي توکی بلل کیږي، که له $N \in S$ او $M \subseteq N$ څخه تل لاس ته راشي ، چی $M = N$. نو د څورن جملګی په لاندې ډول ده: (ماکزیمال یا ماکسیمال = Maximal)

۲ . ۱ . ۱۳ د څورن جملګیLemma vo n Zorn:
که د ناتش ډیریسیستم S د هر ځنځیر K لپاره ټولنډیري $\{K \mid K \in K\}$ هم یو د S ډیریسیستم توکی وي، نو بیا په کي یو ماکزیمال maximales Element توکی موجود دی.
ددې جملګی د ثبوت څخه دلته تیریږو .
وي دې N د یوه نیم منظم ډیرې M لاندې ډیری یا برخه ډیری. هر (ضرور نه دی، چی په N کی ځای وي یا خوندې وي) a له M څخه، کوم چی د ټولو $x \in N$ لپاره شرط $a \geq x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوره کړي د لاندې ډيري پورته بند بلل کيږي يانى ډيرى يى د لته رابند دى. دې ته دوګونى کليمه لاندې بند دى.

په ورکړ شوې نيممنظم ډيري M سره د ټولو ځنځيرونو ډيرى د ډيرې خونديونى په موخه يا هدف ، هم نيمه منظم دى. دا ټول د اخرني ډيري ماکسيمال توکى ، د خپل طبيعيت له مخى د M ماکسيمال ځنځير بلل کيږي.

لاندې جملى يو بل ته ورته دې يانى د يوې څخه بله لاس ته راځى او په څټ.

۲ . ۱ . ۱۴ د څرميلو جمله Zermelo: هر ډيرى کيدى شي منظم شي

۲ . ۱ . ۱۵ د هاوزدورف جمله Hausdorff:هره د يوه نيمه منظم ډيري ځنځير په يوه ماکسيمال ځنځير کي خوندې ده.

۲ . ۱ . ۱۶ د کوراتوفسکي –څورن
جمله Kuratowski-Zorn :

که د يوه نيمنظم ډيري M هر ځنځير يو پورته بند ولري، نو د M په هر توکى پسى يو په نامه ماکسيمال توګي راځى.

ددې درې جملو له ثبوت څخه دلته تيريږو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس دې X او Y دوه ناتش ډيري وي. د يوې د X په Y کی څیرونی (په نخښونه $f: X \to Y$) لاندې یو تنظیم پوهیږو ، په کوم کی چی د $x \in X$ هر توکی يواځني يوه د $y \in Y$ توکی باندې د څيرې په توګه تنظيم شي يا ترتيب شي، د x څيره y په څیرونه f د f(x) سره او يا هم ساده د fx سره په نخښه کوو. ډیری X د څیرونی f تعریفډیری بلل کیږي او ډیری Y د هغی موخیډیری یا څیرډیری بلل کیږي.

که f د x څیرونه یا څیره کونه وي په Y کی او M یو د X برخډیری وي، نو دا د ټولو $x \in M$ توکو څیرې ډيری او په ورته توګه د ډيرې M څيره بلل کيږي او داسې په نخښه کوو f(M) يا په ساده توګه fM . پس باور لري:

$$fX = \{ fx \mid x \in M \},$$

او fM د Y یو برخډیری دی. د تشډیري څیره بیرته تش ډیری دی. د تعریف ډیري څیره fX د f څیره هم بلل کیږي او د Im f سره په نخښه کیږي.

۱ . ۱ . ۱۰ تعریف: که $\text{Im } f = Y$ باور ولري ، د څیرونی $f: X \to Y$ لپاره، نو f یوه سوریکتیوه څیرونه surjektive Abbildung بلل يږي، یو سوریکشن Surjektion يا يوه د X څيرونه په Y باندې. په ځت دې N يو د S

برخډیری وي. نو بیا د ټولو X د توکو ډیری، چی د هغو ځیره د N یو توکی وي، د N له ځیرې پخوا ځیرونه، په ځیرونه f کی، بلل کیږي او د $f^{-1}(N)$ سره په نخښه کیږي. باور لري

$$f^{-1}(N) = \{ x \in X \mid fx \in N \}$$

او $f^{-1}(N)$ یو د X برخډیری دی.

که $N \neq \emptyset$ هم باور ولري، کیدی شي $f^{-1}(N)$ تشډیری وي، یعنی هلته که $N \cap \mathrm{Im}\, f = \emptyset$ باور ولري.

۲ . ۱ . ۱۷ تعریف : یوه ځیرونه $f : X \longrightarrow Y$ د خویونو سره،

چی له $x_1 \neq x_2$ تل $fx_1 \neq fx_2$ لاس ته ریشي، اینیکتیو ځیره کونه injektive Abbildung بلل کیږي یا اینیکشن Injektion. که په همدې وخت کی f حتی یو اینیکتیو او سوریکتیو وي، نو f بییکتیو ځیره کوونه bijektive Abbildung بلل کیږي یا بیکشن Bijektion بلل کیږي.

۲ . ۱ . ۱۸ تعریف : $f : X \to Y$ دې یوه بییکتیوه ځیره کونه وي. په هر $y \in Y$ د ځیرې په توګه یو یواځنی

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټاکلی توکی $x \in X$ د $y = f(x)$ سره د ځیرې په توګه تنظیم کړي، نو دلته د Y یو بییکشن په X تعریفوي.
دا د f په څېر ځیرونه بلل کیږي او یا دا f ته راګرځیدونکی ځیره کوونکي ده. او د $f^{-1} : Y \to X$ سره په نخښنه کیږي

۱ . ۱ . ۱۹ **تعریف:** که دوه ځیرونی $f : X \to Y$ او $g : Y \to Z$ یو په بل پسی رامنځ ته کړی شي او په ټولیزه توګه یوه د $g \circ f$ سره په نخښنه شوې ځیره کونه د X په Z کی ترې لاس ته راځي، کوم چی د f او g ځل یا ضرب ځیرونه بلل کیږي زیات وخت د ځنځیرې او یا تړلی بلواك یا ځیره کوني په نامه هم یادیږي. دا په لاندې ډول ورکړ شوی دی.

د ټولو $x \in X$ د پاره $(g \circ f) = g(fx) = g(f(x))$

کیدی شي چی تعریفډیری او ځیره ډیری یو بل باندې پریوځي.
دلته بیا له یوې ځیرونی f غبریږو، چی X په خپل ځان ځیره کوي.

۲ . ۱ . ۲۰ **تعریف:** که دډیري X هر توکی په خپل ځان بیرته ځیره شي، نو یو د X بیکشن په خپل ځان لاس ته ترې راځي،

(c) ketabton.com: The Digital Library

چی د X کتمټ څیرونه identische Abbildung یا Identität
یي بولو او په لاندي ډول یی ښایو id_x او یا په ساده توګه id .

۲ . ۱ . ۲۱ یادونه: د هر $x \in X$ د پاره باور لري $id_x = x$.
که f یو د X بیکشن په Y وي، نود دي په څټ څیره کونه f^{-1} هم موجود ده او لاس ته ترې راځي

$$f^{-1} \circ f = id_x , \quad f \circ f^{-1} = id_y$$

۲ . ۲ ځلېږیرې یا ضربېږیرې او اړیکی یی

په دې برخه کی کارتیزي ځل د ناتشو ډیریو او همداسی د اکویوالینځ اړیکو یا ورتوالی اړیکو Äquivalenzrelation کلیمه څیړو.

۲ . ۲ . ۱ **تعریف:** د دوه ډیریو A او B کارتیزې ځل $A \times B$ د تنظیمشوو جوړو (a , b) ټولګه ده، د $a \in A$ او $b \in B$ سره.
دلته $(a , b) = (a', b')$ ټیك هلته باور لري، چی $a = a'$ او $b = b'$ وي.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ . ۲ . ۲ يادونه: کارتيزې څل په ټوليزه توګه کموتاتيو نه دی ، دا په دې مانا چي $A\times B \neq B\times A$ که $A \neq B$ وي. په پام کي دې دا اڼتثنا وي، چی د هر ناتشډيري A او تشډيري $\emptyset$ لپاره باور لري

$$A\times\emptyset = \emptyset \times A$$

په ورته توګه د دوه ډيريو کارتيزې څل په څير د پاي ډيرو ډيريو دپاره هم کارتيزې څل تعريفيږي.

۲ . ۲ . ۳ تعريف: کارتيزې څل $A = A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$ د پای ډيرو ډيريو A_i د $i = 1,\ldots,n$ لپاره، د ټولو منظمو يا ترتيبشوو n – ګونو $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ د $a_i \in A, i = 1, 2, \ldots, n$ سره. دلته

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (a_1', a_2', \ldots, a_n')$$

ټيك هلته باور لري، که $a_i = a_i'$ د ټول $i = 1,2,\ldots,n$ لپاره وي.

که $A = A_i$ وي، د ټولو $i = 1, 2,\ldots,n$ لپاره، نو $A^n = \overset{n}{\underset{i=1}{X}} A_i$ د A n –ايزی توان يا پوتنځ بلل کيږي. (n-ام توان)

ډيری $\{(a,\ldots,a) \in A^n \mid a \in A\}$ د A^n نيمی يا قطر دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بینار اړیکی binäre Relationen

۲ . ۲ . ۴ تعریف : یود A×A برخېدیری R د ډیري A دوه ځایزه اړیکي بلل کیږي. وایو : د A دوه توکی a او b په اړیکه R کی یو له بل سره پراته دي، په نخښونه a ~ b , هلته او هلته یا په بل عبارت ټیك هلته، که وي

$$(a, b) \in R \quad \text{او} \quad a R b$$

د بینار اړیکو یا دوه ځایزو اړیکو R کومپلیمنت یا پوره کید- ونکی یو دوه ځایزه اړیکي $\overline{R}$ دی چي په لاندي توګه تعریف دي $\overline{R} = (M \times M) \setminus R$. په نورو ویناو سره $a \overline{R} b$ ټیك هلته باور لري، که $(a,b) \notin R$.

د بینار اړیکو د ځل RS لاندي پوهیږو، چی a(RS)b ټیك اوټیك هلته باور لري، که په M کی یو توکی c موجود وي ، د کوم لپاره چی a R c او cSb باور لري.

د بینار اړیکو ځل اسوځیاتیو دی یعنی

$$(RS)T = R(ST)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بینار اړیکو ځل په هیڅ توګه کوموتاتیو نه دی ، کله کله اړیکی R او S یو له بل سره بدلیدونکی وي ، دا په دې مانا چي

$$RS = SR$$

یوون اړیکی E په لاندې ډول تعریف دي: aEb ټیك هلته باور لري که وي، a = b . یا په بل ډول اړیکی E د ټولو هغو توکو جوړو (a,a) د $a \in M$ سره ډیری دی. دلته په روښانه توګه باوور لري: $E = E^{-1}$ او دیوه خوښی اړیکیR لپاره باور لري :

$$RE = ER = R$$

موږ تش اړیکو 0 ته هم ګوته نیسو، چی د $M \times M$ تشډیري په څیر تعریف دی. د هر بینارااړیکي R لپاره په ډیري M کی باور لري:

$$0 \subseteq R \quad \text{او} \quad 0R = R0 = 0$$

موږ کله کله د بینارو اړیکو سره مخامخ کیږو، چي د لاندې خویونو څخه ځنی په کی باور لري

رفلکسیویتي: aRa د ټولو $a \in M$ لپاره دا په دې مانا چي $E \subseteq R$

ترانزیتیویتي: له aRb او bRc څخه لاس ته راځي، aRc دا په دې مانا چي $RR \subseteq R$

سیومتري: له aRb څخه لاس ته راځي bRa دا په دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

مانا چي $R^{-1} = R$

انتيسيومتري: له $a R b$ او $b R a$ څخه لاس ته راځي
$a = b$ دا په دې مانا چی $R \cap R^{-1} \subseteq E$

۲ . ۲ . ۵ جمله : که کوم يو بينار اړيکي له دې پورته خويونو څخه کوم يو ولري يا ټول ولري، نو د دې اړيکو په څېر اړيکي R^{-1} هم دا خويونه لري.

اوبې (حل):
په عمل کی له $E \subseteq R$ څخه لاس ته راځی

$$E = E^{-1} \subseteq R^{-1}$$

که $RR \subseteq R$ وي، نو باور لري

$$R^{-1} R^{-1} = (RR)^{-1} \subseteq R^{-1}$$

که $R^{-1} = R$ وي ، نو باور لري

$$(R^{-1})^{-1} = R = R^{-1}$$

له $R \cap R^{-1} \subseteq E$ څخه لاس ت هراځي

$$R^{-1} \cap (R^{-1})^{-1} = R^{-1} \cap R \subseteq E$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ایکویوالنځ اړیکی :د بینار اړیکو څخه یی خورا مهمي اړیکی ایکویوالنځ اړیکي دي، چی په لاندې کی یي تعریفوو

۲ . ۲ . ۶ تعریف : یو ناتش دوه ځایزه اړیکی ~ په ډیري A کی ورته اړیکي یا اکویوالنځ اړیکی بلل کیږي، که د ټولو a , b , c ∈ A لپاره لاندې اړیکی باور ولري.

الف) a ~ a (رفلکسیو reflexiv)
ب) b~a <=> a ~ b (سیومتري symetrisch)
پ) a ~ b او b ~ c څخه (<=>) a ~ c لاس ته راځي . (ترانزیتیو transitiv)

۲ . ۲ . ۷ بیلګه:

الف) مساوات یا برابرون « = » د هر ډیري A لپاره یو ورته والی اړیکي Äquivalenzrelation دي.
ب) د a , b ∈ Z لپاره a ~ b ټیك هلته باور لري، که 2 د ګڼ a - b پرویشونی وي.

ایکویوالنځ اړیکی په کلکه د دې سره تړاو لري، چی یو ډیری

(c) ketabton.com: The Digital Library

یو بل سره په پردیو ټولګي ډیریو ویشي. دوه ډیري یو بل سره پردي بلل کیږي، که دوي ګډ کوم توکی ونه لري یانی غوځي یي تشډیری وي.

غواړم، چی دا ټولګیویشنه داسی لږغوندې روښانه وځیړم، که څه هم زیاتو لوستنکو ته به ستړیکیدونکي وي، مګر لږ پوهوړ به شي. که چیرې طبیعي ګڼونه په 5 وویشو نو دلته پنځه ټولګیویشنی لاس ته راځي، چی ویشپردي دي: هغه ټولګی، چی 1 ولري او ټول 1 + 5, 1 + 25 , ... , 1 + n5 ، دوم هغه ټولګی، چی ۲ ولري او ورسره تر 2 + n5 دریم: هغه ټولګی، چی 3 ولري او ټول ورسره 3 + n5 . څلورم هغه ټولګی، چی ۴ ولري او ټول ورسره 4 + n5 . پنځم هغه ټولګی، چی 5 او ټول ورسره 5 + n 5 . چی دا په 0 سره هم ښوولی شو، چی نور ورسره ټول 0 + n5 ولري. دا ډول شمرنی بیا د ګڼونتیوري دنده ده، چی په همغه ډول کتابونو کي لوستل کیږي. هلته د کونګرو- اینځ اړیکو لاندې لوستل کیږي، چی زه یي دلته په لیك دود هم نورې خبرې نه کوم. په دې کی دې ګران لوستونکی یو پوره پام وځغلوي او ټولګی ویشنه او ایکوالنځ اړیکي دې پخپله نوري هم روښانه کړي، چی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټولګیویشنه په همدې وخت کې ایکویوالنځ اړیکی هم جوړوي،

دا په دې مانا چی د ایکویوالنځ اړیکو او ټولګی ویشنی ترمنځ راګرځیدونکی یواځنی اړیکي موجود دي. دا په دې مانا چی د اکویوالنځ اړیکو سره یو یواځنی تنظیم راکړ شوی او دا بیا په څټ کیدونکی هم دی.

که R په A کی یو ایکویوالنځ اړیکه وي ، نو A / R د فاکتورډیري په نامه بلل کیږي نسبت و ایکویوالنځ اړیکوR ته. هغه څیرونه چی د A او A / R ترمنځ پرته ده د طبیعي څیرونی په نامه بلل کیږي.

لنډ: ویلی شو، چی ټولګي ویشنه او ایکویوالنځ اړیکی یو له بل څخه لاس ته راځی. موږ دا شمیر پوهنیز په لاندې توګه تعریفوو:

۲ . ۲ . ۸ تعریف: که ~ د ډیري A ورته والی اړیکي وي، نو د توکی a ∈ A ورته والی ټولګی یانی کلاسی یا صنف [a] په لاندې توګه ورکړ شوی دی.

$$[a]=\{\, b \in A \mid a \sim b \,\}$$

د ورته والی ټولګي [a] هر توکی b د ټولګي [a] نماینده

(c) ketabton.com: The Digital Library

بلل کیږي.

۲ . ۲ . ۱۱ مرستندوي جمله: که ~ د ډیري A ورته – والی اړیکي وي، نو د توکو $a, b \in A$ لپاره لاندې وینا وې جوړه برابرارزښته یا جوړه مساوي ارزښته دي

(a) $[a] \cap [b] \neq \emptyset$

(b) $a \sim b$

(c) $[a] = [b]$

اوبی (حل): که $[a] \cap [b] \neq \emptyset$ وي، نو یو $c \in A$ موجود دی د $a \sim c$ او $b \sim c$ سره. د ~ سیومتري او ترانز– یتیویتي له امله لاس ته راځي $a \sim b$. له دې امله (b) د (a) یوه لاس ته راوړنه ده یا تعقیب دی. اوس باور لري $a \sim b$. له دېامله نو $x \in [a]$ د $x \sim a$ سره برابرارز– ښته دی، او همداسی د $x \sim b$ سره. نو $[a] = [b]$ دی، او (c) له (b) څخه لاس ته راځي.

په پوره باور (a) له (c) څخه لاس ته راځي.

زیات موخور یا هدفمند دی، که یو ډیریسیستم S د یوه په نامه ایندکشنډیري یا پیژندډیري A په مرسته په نخښبه کړو یا روښانه کړو. د لته A یو (پاي یا ناپای) ناتش

(c) ketabton.com: The Digital Library

ډيرې دی، او هر ايندکس يا پيژندنخښی $\alpha \in A$ يواځنی يو ډيرې A له S څخه داسې ترتيب شوی دی، چې باور لري: $S = \{ A_\alpha \mid \alpha \in A\}$.

۲ . ۲ . ۱۲ تعريف : د يوه ډيري $A \neq \emptyset$ د برخډيريو A يو سيستم $\{ A_\alpha \mid \alpha \in A \}$ د د ډيري A يوه ټوټونه (تجزيه) بلل کيږي، که باور ولري:

(a) $A_\alpha \neq \emptyset$ د پاره $\alpha \in A$ د ټولو

(b) $A = \bigcup_{\alpha \in A} A_\alpha$

(c) $A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$

د ټولو $\alpha, \beta \in A$ لپاره د $\alpha \neq \beta$ سره

۲ . ۲ . ۱۳ جمله : R دې په ډيري A کی يو ورته اړيکي وي. نو د ورته والي ټولګي نسبت و R ته يو د A ټوټونی دی. په څټ يو په خوښه د A ټوټونه $\{ A_\alpha \mid \alpha \in A \}$ يواځنی يو ورته والی اړيکي په A ټاکي، د کوم لپاره چی د ټوټونی ډيری A ټيك ورته والي ټولګي دي.

اوبی (حل يا ثبوت): سملاسي د پورته مرستندوي جملی ۲ . ۲ . ۸ او تعريف ۲ . ۲ . ۹ څخه لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ . ۳ نیمنظم یا نیم ترتیب

د بینار اړیکو یو بل غوره یا مهم حالت نیمنظم اړیکی جوړوي. دا هغه اړیکی دي، چی رفلکسیو، ترانزیتیو او انتیسیومتري دي. هغه ډیری، چی نیمنظم په کی تعریف وي ، نیممنظم یا نیم په ترتیب بلل کیږي. د نیمنظم لپاره دا سومبول $\leq$ کارول کیږي او د ډیري M د توکو a , b لپاره باور لري $a \leq b$ او داسی لوستل کیږي، چی a له b کوچنی او یا له b سره مساوي ده. یا a په b کی خونديږ ده یا a له b څخه مخ ته ځی. که $a \leq b$ وي او $A \neq b$ وي، نو لیکو $a < b$ او وایو چي a له b څخه کوچنی ده، په دې حالت کی a په b کی اصلي خونديږ ده. په یوه ډیري Mکی دی نیمنظم تعریف وي. د دې ډیر دوه توکي $a , b \in M$ یو له بل سره انډولوړ دي، که چیرې وي $a \leq b$ او یا $b \geq a$. که له $a \leq b$ څخه $a = b$ لاس ته راشی نو د ساده نیمنظم څخه غږیږو. یو ډیری، په کوم چی دوه توکی تل یو له بل سره انډولوړ وي، نو دا ډیری لایني نظم شوی یا منظم یا ترتیب شوی او یا ځنځیر یعنی یو له بل سره تړلی بلل کیري.

۲ . ۳ . ۱ تعریف: د دوه نیمنظم شوي ډیریو M او 'M

(c) ketabton.com: The Digital Library

ترمنځ يواځنی او په ځانګړې ډېره کونه f موجود ده يعني

$af = a' \quad , a \in M , a' \in M'$

که له $a \le b \;\; , a\, b , \in M$ تل $af \le bf$ لاس ته را شي او په ځانګړې، نو f د M او 'M ترمنځ يو ايزومورفيزم ispmorphism بلل کيږي، چې دا به وروسته هم بيا پوره وڅيړل شي او ډيري M', M پخپله ايزومورف نيممنظم ډيري بلل کيږي.

که يوه نيممنظم ډيری M په يوه نيممنظم ډيري N کی ايزومورف خوندې وي، نو دې ته ايزومورف ځايونه يا خونديونه وايو، که د M يوه ايزومورفه ډېره کونه په 'N د ډيري N برخه ډيري باندې موجود وي او ډيری 'N پخلپه نيممنظم ډيری وي او که 'N په هغه نظم ترتيب وي ، چې له N ورته راپاتی وي.

۲ . ۳ . ۲ جمله:

هر نيممنظم ډيری M د ډيري N ، چی نسبت وخونديونی ته نيممنظم دی، ټولو لانديډيريو ډيري 'N سره ايزومورف دی. په ځانګړي توګه کيدی شي ، چی د ډيري N لپاره پخپله ډيری M ونيول شي يا راوړل شي.

د دې جملی د خوونی څخه تيرېږو. په کوروش کی کتل کيدی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

یوه نیمنظم ته په ځټ اړیکی هم نیمنظمی دي.
د ټولو $a' \in M'$, $a \in M$, $af = a'$ لپاره، د $a , b \in M$
سره $a \leq b$ ټیك او ټیك هلته یا هلته او هلته باور لري،
که وي: $af \leq bf$.

۲ . ۴ مینیمال شرطونه

یو د نیممنظم ډیري M توکی a د ډیري مینیمالتوکی بلل کیږي، که په M کی داسی یو توکي x موجود نه وي، د کوم لپاره، چی شرط $x < a$ باور ولري. دا روښانه ده، چی M ډیر مختلف مینیمال توکي لرودی شي او یا هیڅ مینیمال توکي .
د بیلګي په توګه ډیری 'N د ټولو د ډیري N لاندډیریو یا برخه ډیریو ډیری یواځنی یو مینیمال توکی لري، داسی په نامه تشډیری . په یوه ډیري کی هر لاندې ډیری یا برخډیری مینیمال توکی دی ، که دا ډیری د یوه توکی جوړ وي. دا کلیمه د یوه ځانګړي نیمتنظیم شوي ډیري ټولګیو لپاره کارول کیږي. د دې ټولګی نیمتنظیم شوي ډیري لاندې یو بل سره ورته یا ایکویوالنت شرطونه پوره کوي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ . ۴ . ۱ جمله(مینیمال شرطونه) : هر د یوه نیمتنظیم شوي ډيري M ناتش لاندې ډیری N یو مینیمال توکی (په N کی) لري.

۲ . ۴ . ۲ (د لویدونکی ځنځیر پریکیدنی شرطونه):
د نیمتنظیم شوي ډيري M په را غونډه موخه هر لویدونکی ځنځیر

$$a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_n > \ldots.$$

د پایډیرو غړو وروسته پرې کیږي یا ماتیږي یا غوڅیږي. په نورو کلیمو سره ، د توکو د هر لویدونکی ځنځیر

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq a_n \geq \ldots.$$

سره یو ایندکس یا پیژند نخښه n شته، له کومی چی د دې ډیري ټول توکی برابر دي دا په دې مانا چی د n وروسته $a_n = a_{n+1} = \ldots$ باور لري

۲ . ۴ . ۳ جمله (ایندکشن شرطونه): د یوې نیمتنظیم شوي ډيري M ټول توکی څه روښانه خویونه E لري. که دا خویونه په ټولو مینمال توکو (که داسی یو توکی موجود وي) موجود وي او که د دې موجودوالی، د ټولو توکو لپاره، چی له توکي a په کره توګه مخ ته ځي، پخپله په دې خویونو a

(c) ketabton.com: The Digital Library

رابندیدی شي ياني دا خویونه ولري.

د دې جملو، چي یو بل ته ورته دي، د ښوونی یا اوبیونی څخه تیرېږو.

ویناوې چی د ټاکن اکسیوم سره همغه ارزښته دي:

ډیری N دې د یوه ډیري M لاندې ډیری وي. هر (ضرور نه دی چی په N کی خوندې وي) د M د توکی a د کوم لپاره چی شرط a ≥ x پوره وي د ټولو x ∈ N لپاره، د لاندې ډیري پورته بند بلل کیږي یانی دا ډیری په دې توکی سره پورته لور ته بند دی. دا لاندې بند ته یوه دویزه کلیمه. په یوه ورکړ شوي نیمنظم ډیري M کی هره د ټولو ځنځیرونو ډیری د ډیري پوهنی په بنسټ نیمتنظیم ده. د دې ډیري ټول ماکسیمال توکی په طبیعي توګه دM ماکسیمال ځنځیر جوړوي.

یادونه : د دې پورته جملو ښوونه او زیات ورننوتنه په کروش کی کتل کیدی شي. موږ یی نوره رالنډوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . الجبري جوړښتونه

د الجبر په کتابونو کی ډیر وخت دا دلته څیړل شوي موضوعات له توپیریدونکو یا له بیلو بیلو لارو څخه څیړل کیږي، څنی له عمومي الجبر څخه پیل کوي n–ځایزي عملیي، نښلونی یا کارونی تعریفوي او له دي څخه بیا ګروپ die Gruppe ، کړی Ring ، تن یا بدن Körper (engl. Field او په همدي ډول تړونونو یا تړنو Verbände او بول الجبر boolische Algebra ته راځی. زه دا لار غوره ګنم، چی لمړی له موږ ورسره بلدو کاروونو یا عملیو څخه پیل وکړم او له دي لاري بیا الجبر ته راشم، او بیا په لنډ ډول د الجبر له لاري دا موږ ورسره بلدي کلیمي لنډي تعریف کړم.

د الجبر د مختلفو ځانګو لپاره بنستیزه کلیمه، چی ډیره تر څیړنی لاندي نیول شوي ده هغه د الجبري اپریشن یا الجبري عملیي او یا همدا ډول د الجبري کارونی، الجبري نښلوني یا الجبري ګنډني کلیمه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

موړ ځانونه په يوه دوئيزې کاروني په زياتون يا ځل رابندوو يا محدودوو. دا دوئيزې کاروني يا عمليې، په لرې موخه، هغه عملي دي، چې د يوه ډيري G ټاکلي منظم د توکو جوړه (a,b) د دې ډيري په يوه بل توکی c تنظيم يا څيره کړي(لکه د G د ټاکلو غړو مربع، يعني دا د لاندې خويونو سره يوه څيرونه ده:

$$G \times G \longrightarrow G$$

دا په دې مانا چې د ټولو $(a,b) \in G \times G$ لپاره يو c د G څخه، يعني $c \in G$ موجود ده، د کومو لپاره چې باور لري که دا نښلونه ځل وي

$$a \,.\, b \longrightarrow c$$

په دې ټوليزه توګه په يوه ډيري کی د بينار يا دوه-ځائيز عمليې کليمی تعريف، په يوه ډيري کی د يوه ترنار ريليشن ternäre Relation يا دربځايزو اړيکو سره په همغه يا مساوي مانا دی.

يادونه: اپريشن die Operation، عمليه ، کارونه او يا نښلونه، ګنډنه، او همدارنګه په بلواکو کی کمپوز-يشن die Komposition يا څنګ په څنګ ايښوونه يا بهتره څنګيرونه تل همغه مانا لري، چې ما کله کله

(c) ketabton.com: The Digital Library

تړنه هم کارولی ده. د ډېرو نومونو کارونه، کوم چې همغه مانا ولري، تاوان نه لري. د شمیرپوهني ژبه هم باید پوره پراخه وي او په دې باور لرو چې کومه اشتباه په کې نه رامنځ ته کیږي.

موږ دلته د نمونې په څیر یواځې یویزې کارونې یا عملیي په ګوته کوو. او ور پسې بیا نور سملاسي خپل اصلي موخه تر مخه نیسو. دا یویزې عملیې هغه عملي دې، چې د کارولو سره یې د ډېري توکي تغیر نه خوري، لکه د صفر سره طبیعي ګڼونو N_0 توکو سره، په زیاتون کې چې هر توکي ته د صفر توکی ورزیاتونه پخپله همغه توکی دی،

$a + 0 = a$ لپاره $a \in N_0$ د ټولو

او یا په ځل کې ، چې د طبیعي ګڼډیري N هر توکي سره 1 ځل شي، یعني

$a . 1 = a$ لپاره $a \in N$ د ټولو

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۱ ګروپ Gruppe:

که له يوې خوا د ټولګښونو، ريشنلګښونو يا رييلګښونو زياتون په پام کې ونيسو او له بلې خوا ريشنل يارييلګښونو د صفر توپيري يا د صفر سره نامساوي توکو ټل په پام کې ونيسو، نو دا ميندلی شو، چې دواړه نښلونعمليې يا نښلو- نکاروني د همغه يو بل سره په يوغړ شميرقوانينو لاندې دي. د بيلګې په توګه باور لري:

$(a + b) + c = a + (b + c)$ او $(a.b).c = a.(b.c)$

برسيره پر دې راويستلي يا استثنايي ګښونه موجود دي، دا په نامه 0 همداسې 1 ، کوم چې دې دوه تړنو ته ځانونه ناپيلی يا بې تاثيره نيسي. يعني:

$0 + a = a$ او $1 . a = a$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بالاخره باور لري

$(-a) + a = 0$ او $(1/a).a = 1$

دا په دې مانا، چې هر ګڼ a ته یو ګڼ á موجود دی (دا په نامه a- همداسی 1 / a)، چې د هغو زیاتون یا همداسی د هغو ځل یا ضرب د همغی یعنی زیاتون همداسی ځل نښلونی یا نښلونعمليي له لارې ناپیلی یا بی تاثیره توکی ورکوي.

دا چې دا قاعدې ګڼونشمیرنه په پراخه پیمانه په واك کی لري او په ډیرو نورو حالتونو کی هم رامنځ ته کیږي، دا راته نزدې ده، چې دا د ځانګړي طبیعیت، دشمیرنی او د همغو ترنعملیو څخه خپلواك وڅیرو. په دې ذهني راوړون دود سره مو شمیرقاعدې د هر څه له مخه مخ ته پرتي دي. نه هغه څه، د کومو سره چې شمیرنه کیږي غوره دي، بلکه دا غوره دي، چې څنګه شمیرنه کیږي. په یواځني ډول د مخه نیول کیږي، چې د یوه ورکړ شوي ډیري غړو لپاره داسی یوه نښلونه یا ترنه یا عملیه تعریف ده، دکومی له مخی، چې هره منظمه جوړه (a,b) د هغه ډیري د توکو بیرته د هغه ډیري توکی باندې تنظیم شي یا څیره شي او دې پورته

(c) ketabton.com: The Digital Library

ویلشوو قوانینو لاندې پرتی دي یا په بل عبارت دا پورته قوانین په کی باور لري.
دا نښلونه د یوه ناپیلی سومبول ° سره ښایو.

یادونه : دا سومبول له خپل ځاي جګ لیکل شوی دی، خو زما بله چاره نه وه. د دوه ګڼونو نښلونو ټیك منځ کی که ولیکل شی ښه به وي.

۳ . ۱ . ۱ تعریف : یو ګروپ دیوه ډیري G او یوې ترني یا عملیي ° څخه جوړ دی، دکومی نښلونی سره چی د دې ډیري G د توکو هره منظمه جوړه (a,b) یواځنی یو د $a^\circ b$ سره په نخښه شوی د G توکی باندې داسی تنظیم شي، چی دا لاندې اکسیومونه پوره کړي:

اکسیوم ۱ – اسو ځیاتیو قانوباور لري

د ټولو $a,b,c \in G$ لپاره $(a^\circ b)^\circ c= a^\circ (b^\circ c)$
اکسیوم ۲ – یو ناپیبیلی توکي $e \in G$ شته، د ° تړاو سره ، د کوم لپاره چی باور لري

$$a^\circ e= e^\circ a = a$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اکسیوم ۳ – د هر توکی a لپاره یو په څټ توکی á شته،
د کوم لپاره چي لرو:

$$a \circ á = á \circ a = e$$

د G داسی یو توکی ناپیلی توکی بلل کیږي

یو گروپ کموتاتیو یا ابلي گروپ abelsche Gruppe بلل کیږي، که پر دې پورته اکسیومونو برسیره، دا لاندې اکسیوم ۴ هم پوره کړي:

اکسیوم ۴ – کوموتاتیو قانون:

د ټولو $a, b \in G$ لپاره $a \circ b = b \circ a$

که گروپ G پای ډیر توکی ولري ، نو د G د توکو گڼون یا تعداد $|G|$ د G نظم بلل کیږي.

د گروپ ټاکنتوټو پورې د ډیري G ترځنگ د گروپټړنه ° داسی په نامه اپریشن، نښلونه یا کارونه یا عملیه هم اړه لري یا تعلق لري.
یو گروپ نو په دې توگه د یوې جوړې $(G, \circ)$ سره په نخښه کول کیږي. دا چی گروپټړنه ډیر واره په دې اړوند

(c) ketabton.com: The Digital Library

کره ټاکلی ده، نو په داسی حالتونوکی ددې جوړې په ځاي یواځی G لیکل کیږي. ګروپټرنه تر یوې اندازې پورې د ګروپځل یا ګروپضرب سره هم نومول کیږي، نو په دې توګه دا توکی $a° b$ د توکو a او b د ځل په نامه هم بلل کیږي. په یوه ناابل - یا ناکموتاتیوګروپ کی دې د توکو ترتیب یا لړیپرلپسی ته هم پام وي، ځکه چی په یوه ناابل ګروپ کی په ټولیزه توګه $a° b$ له $b° a$ سره توپیر لري .

اکسیوم۱ را په ګوته کوي، چی په ډیرواره ځلولو کی په نوکانو کی بندونه یا راګیرونه پورې اړ تیا نه ځرګندیږي. له دې امله کیدی شی ، چی له نوکانو ایښوولو څخه بیخی تیریدنه وشي او د بیلګي په توګه د $a° (b° c)$ لپاره په ساده توګه لیکو

$$a° b° c$$

۳ . ۱ . ۲ بیلګی :

اول - د ټولو ټولګڼونوډیری Z د ورسره بلد زیاتون سره، چی د ګروپټرنی په څیر یی نیسو، یو ابلګروپ $(Z ;+)$ جوړوي. دلته بیا له زیاتونګروپ څخه غبرګو، په همدې توګه د ریشنلګڼونو ډیری او داسی نور. په دې ټولو حالتونو کي د اکسیوم ۱ لپاره د e لپاره 0 او د a په څپ توکی á

(c) ketabton.com: The Digital Library

د a- سره په نخښه کوو.

دوم – په ځمکګچ یا هندسه کی : د ټولو کونګروانیڅ ځیرونو (څرخون، ځایبدلون، یا راکښنه ، او اینونه یا هندارونه) ګروپونه جوړوي(ما په دې اړه یوه د هندسی برخه هم په یوه کتاب کی راوړې، چی لږ ګړی کتاب څخه به تر مخه چاپ شوي وي، دا کلیمي که نا بلدې وې نو بیا دې هلته وکتل شي).

دریم : د ټولو ریشنلګڼونو ډیری Q^* او د ټولو رییلګڼونو ډیري R^* توکي، چی د صفر سره، نسبت و ځل یا ضرب ته، نابرابر یا نامساوي وي، یو ابلګروپ جوړوي، دا د ډیریو Q^* او R^* ځلوونکی ګروپ یا ضربګروپ بلل کیږي. په دې ګروپونو کی e د 1 او á د ماتګڼ $1/a$ په ځیر لیکل کیږي.

څلورم: M دې یو په خوښه ناتش ډیری وي ، او S_M دې د M د ټولو بییکټیو ځیرونو یا بیکشنونو ډیری وي. د هر دوه ځیرونو $f,g \in S_M$ لپاره $f \circ g$ د دې دواړو ځیرونو یو په بل پسی راوړنو له لارې ټاکل شوی ځل دی. د هر درې ځیرونو f,g,h او هر $x \in M$ لپاره دا لاندې باور لري

$$((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ g)(hx) = f(g(h(x)))$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او

$$(f \circ (g \circ h))(x) = f((g \circ h)(x)) = f(g(h(x)));$$

دا په دې مانا چی اکسیوم ۱ پوره دی. که د e لپاره د M کتمتې څیرونه id وټاکل شي، نو اکسیوم ۲ باور لري.
بالاخره اکسیوم ۳ باور لري، که د ورکړ شوي $f \in S_M$ لپاره د څیرونی f' ، هغه f ته په څټ څیرونه f^{-1} وټاکل شي. ډیری S_M د یو په بل پسی د څیرونو څلونی یا ضربوني له امله یو ګروپ جوړوي، چی د ډیري M سیو- متري ګروپ بلل کیږي.
که په ځانګړي توکه ډیری M ډیری {1,2,3,...,n} وي، نو دا اړونده سیومتري ګروپ څیفرونه یا ګڼونه S_n سره په نخښه کوو. هره څیرونه $f \in S_n$ د ګڼونو 1,2,3,...,n پرموتیشن یا بدلون دی. که $f(1) = a_1$, $f(2) = a_2$, ..., $f(n) = a_n$ باور ولري، نو f د څیره ګڼونو پرلپسی لړی $a_1, a_2, ..., a_n$ یواځنی ټاکلی ده. موږ لیکو $f = (a_1, a_2, ..., a_n)$، که د بیلګي په توګه باور ولري $n = 3$ او $f = (2,3,1)$, $g = (3,2,1)$ نو لاندې څلونه یا ضربونه لاس ته راځي

$$f \circ g = (1,3,2) \quad \text{او} \quad g \circ f = (2,1,3)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا بیلگه ښايي، چې S_n د $n = 3$ لپاره ابل گروپ یا کموتاتیو گروپ نه دی.

۳ . ۱ . ۳ یادونه: دا د صفر سره نامساوي ټولگټونه ، نسبت و څلونی یا ضرب ته گروپ نه جوړوي، ځکه چې د بیلگي په توگه و 2 ته کوم ټول گڼ á وجود نه لري، د کوم لپاره، چې $2.á = 1$ باور ولري.

د گروپ د اکسیومونو څخه کیدی شي ، چې په لاندې کې یو څو ساده «لاس ته راوړنی » رابیلي کړو. په لاندې کې دې G تل یو گروپ وي

۳ . ۱ . ۴ مرستندوي جمله: د هر توکی $e \in G$ لپاره، چې اکسیومونه۱ ، ۲ پوره کوي دا هم باور لري $a^\circ e = a$ د ټولو $a \in G$ لپاره. له $á\,^\circ a=e$ څخه $a^\circ á = e$ لاس ته راځي.

اوبی یا ثبوت: لمړی دوهمه غوښتنه ښوول کیږي: و a' ته د اکسیوم۳ له مخی یو $a \in G$ د $a'.a = e$ سره موجود دی.
د اکسیومونو۱ او ۲ په پام کی لرلو سره لاس ته راځي

$$a\,^\circ a' = e^\circ(a^\circ a') = (a''^\circ a')^\circ(a^\circ a') = a''^\circ((a'^\circ a)^\circ a')$$
$$= a''^\circ(e^\circ a') = a''^\circ a' = e$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې ځخه اوس لمړی غوښتنه لاس ته راځی

$$a^\circ e = a^\circ (a' \circ a) = (a^\circ a')^\circ a = e^\circ a = a \qquad *$$

۳ . ۱ . ۵ مرستندوي **جمله:** ټیك یو توکی $e \in G$ موجود دی، چی هغه په اکسیوم ۲ او اکسیوم ۳ کی غوښتل کیږي. همدا اوس له $x^\circ a = a$ ځخه د ټولو $a \in G$ لپاره لاس ته راځي: $x = e$.

اوبی یا ثبوت: توکی e^* دې هم برابرون $e^* \circ a = a$ پوره کړي، د ټولو $a \in G$ لپاره. نو بیا په ځانگړي توگه د ۳ . ۱ . ۴ مرستندوي جملې له امله باور لري

$$e^* = e^{*\circ}e = e$$

دا په دې مانا چي e یواځنی ټاکلی دی. که بیا هم ورپسی باور ولري $x^\circ a = a$ د یوه کره ټاکلی توکي $a \in G$ لپاره، نو د اکسیوم ۳ له امله یو $a' \in G$ موجود دی د $a' \circ a = e$ سره، او د ۳ . ۱ . ۴ له امله لاس ته راځي:

$$x = x^\circ e = x^\circ (a^\circ a') = (x^\circ a) \circ a' = a^\circ a' = e \qquad *$$

دا په دې توگه د اکسیومونو سره یواځنی ټاکلی ناپیلی یا بی

(c) ketabton.com: The Digital Library

تاثیره د ګروپ G توکی e د ګروپG «یوی توکی» بلل کیږي.
په زیاتونډوله لیکلي ابلګروپ G کي ناپیلی توکی e د G «صفرتوکی» 0 بلل کیږي.

۳ . ۱ . ۶ مرستندوي جمله : په اکسیوم ۳ کي 'a د a له لارې یاد a سره یواځنی ټاکلی ده .

اوبی یا ثبوت: د $a' \circ a = e$ تر څنګ دې $a^* \circ a = e$ هم باور ولري. پرتله ۳ . ۱ . ۴ له امله لاس ته راځي

$$a^* = a^* \circ e = a^* \circ (a \circ a') = (a^* \circ a)\circ a' = e\circ a' = a'$$

دا توکی 'a د a « په څټ توکی» بلل کیږي او د دې لپاره په ټولیزه توګه a^{-1} لیکل کیږي. که په ځانګړي توګه د ګروپ– عملیې یا د ګروپترنی زیاتون ډوله ولیکل شي
پرتله ۳ . ۱ ۲ الف، نو ناپیلی توکی په 0 سره لیکل کیږي او د a په څټتوکی د a- سره لیکل کیږي.

۳ . ۱ . ۷ مرستندوي جمله: $(a^{-1})^{-1} = a$
او $(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$

اوبی: دا په ۱ . ۳ . ۴ کی ښوول شوي برابرون $a \circ a' = e$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له مخی لرو، چی a و a^{-1} ته په ځېږ توکی دی، چی په دې توګه لمړی غوښتنه باور لري. دومه له لاندې ځخه لاس ته راځي

$$(b^{-1} \circ a^{-1}) \circ (a \circ b) = b^{-1} \circ ((a^{-1} \circ a) \circ b)$$
$$= b^{-1} \circ (e \circ b) = b^{-1} \circ b = e$$ *

۳ . ۱ . ۸ **مرستندوي جمله:** په یوه ګروپ G کی برابرون $x \circ a = b$ او $a \circ y = b$ په ورکړشوو توکو $a,b \in G$ سره یواځني ټاکلي حلونه یا اوبیونی $x,y \in G$ لري.

اوبی یا حل : که $x \in G$ د لمړي برابرون اوبی وي، یعني که باور ولري $x \circ a = b$ نو لاس ته راځي:

$$x = x \circ e = x \circ a \circ a = b \circ a$$

دا په دې مانا، چی x د a او b سره یواځنی ټاکلی . په ځپ د

$$(b \circ a) \circ a = b \circ (a \circ a)\ b \circ e = b$$

له امله توکی $x = b \circ a$ په رینښتونی یو اوبی یا حل دی.
په همدې توګه دوهم برابرون هم پاي کولی شو. *

په لاندې کی غواړم، چي داپورته د ګروپ تعریف لږ وغزوم

(c) ketabton.com: The Digital Library

او په دې توګه ګروپوئید او نیمګروپ تعریف کړم. دا کار په زیاتو ادبیاتو کې لمړی سر ته رسیږي، خو داسې تعریفونه یې هم په پوهیدلو کې ستونځي نه رامنځ ته کوي او ما هم غوښتل، چې موږ لمړی د ګروپ کلیمه باندې وپوهیږو، چې بنسټیزه ده.

۳ . ۱ . ۹ **تعریف** : یو ډیری G ، چې نسبت و یوه اپریشن یا ګنډنې یا عملي ° ، چې موږ یې دلته د ځل عملیي « . » په څیر ښایو، ته رابند وي، نو دې ډیري ته ګروپویید وایو، یاني که د هرې جوړې (a,b) د a ,b ∈ G لپاره یو توکی c ∈ G موجود وي ، د کوم لپاره چې باور ولري a.b = c لیکنه یې په لاندې توګه ده(. , G) .

دا د ګروپوئید کلیمه لږ را تنګوو او نیمګروپ تعریفوو.

۳ . ۱ . ۱۰ **تعریف** . هغه ګروپوئید G، په کوم کې، چې پورته د ګروپ اکسیوم ۱ باور ولري یا نې ځل یې اسو- ثیاتیو وي، نیمګروپ بلل کیږي، چې په همغه پورته توګه د اوس لپاره نخښوڼ کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چی نیمگروپ همغه گروپ دی، دا لاندې جمله یې روښانه را په گوته کوي

۳ . ۱ . ۱۱ جمله : یو نیمگروپ G هلته او هلته یو گروپ G دی، که په G کې کم له کمه یو ښی یویتوکی e موجودوي، چی لاندې شرطونه پوره کړي

د ټولو $a \in G$ لپاره $ae = a$

او دا توکی e داسی وټاکل شي، چی د هر $a \in G$ لپاره کم له کمه یو ښی په څټ توکي $a \in G$ موجود وي، چی غوښتنی

$$a \,.\, a^{-1} = e$$

پوره کړي.

اوبی یا حل : که دا پورته ورکړ شوې غوښتنی پوره وي، خو دا مو وښوول، چی گروپ جوړوي. اوس دې یو نیمگروپ G راکړ شوی وي، چی پورته نیونی پوره کوي. دا غواړو وښايو، چی e په G کی یو کینې یویتوکي هم دی. که د a^{-1} سره د a ښی په څټ توکی وښايو ، نولاس ته راځي

$$eaa^{-1} = ee = e = aa^{-1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د برابرون دواړه خواوې د یوه و a ته په ښۍ توکي سره ځل کړو او د نیمګروپ د ځل یواځنوالي قوانین وکاروو یا استعمال کړو، نو لاس ته راځي

$$eae = ae$$

له کوم ځخه چې د حلونکی یا اوبیوونکی اړیکی $ea = a$ لاس ته راځي.

بالاخره د G ګین یویتوکي e' او ښی یویتوکي e'' رانیسو، نو د مخ ته تیرو جملو ثبوت ځخه دا اوبي یا حل $e'' = e'$ لاس ته راځي، چې په دې توګه د G یوي(یویتوکي) e موجودیت او یواځنتوب وښوول شو.

بیا دې a^{-1} د یوه توکی $a \in G$ ښی په ښۍ توکی وي.
که برابرون $aa^{-1} = e$ له کینې لور د a^{-1} سره ځل کړو، نو لاس ته راځي

$$a^{-1}aa^{-1} = a^{-1}$$

د a د ښي په ښۍ توکي د اخرني برابرون ځلولو یا ضربولو ځخه لاندې نتیجی ته راځو

$$a^{-1}ae = e$$

له کوم، چی $a^{-1}a = e$ لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا توکی a^{-1} ته له دې امله یو کیڼ په ځتې توکی هم دی.
لکه د مخه تیرې جمله د د ثبوت په توګه، کیی شي ساده وښوول شي، چی د a هر ښی په ځتتوکي د کیڼ په ځتتو کی سره پریوځي یا هغي سره ورته دی.
په دې توګه په G کي د هر توکی a لپاره د هغه توکی په ځتتوکي موجودیت په یواځنی توکه تضمین دی.
د جملي د ثبوت د پوره کیدو لپاره دې په ګوته شوی وي، چي توکي

$x = a^{-1}b$ او $y = ba^{-1}$

د برابرون $ax = b$ او $ya = b$ حل ښایي. دا حلونه یواځنی دي، ځکه، چی $ax = xa$ دی، نو له کیڼ څخه یی د a' سره ځلوو او $x = x$ لاس ته راځي. پای یا *

د ابلګروپ د څیړنی لپاره، د ځل عملیي په ځاي د زیاتون ګنډنه یا عملیه په کار اچوو، چی ناپیلی توکی یی 0 دی او هر توکی a ته په ځتې توکی یی د $-a$ سره په نخښه کوو.
دلته هم همغه پورته جمله کاروول کیږي، خو د ښی یویتوکي لپاره 0 صفر یوي توکی دی او ښی په ځتې یی $-a$ دی. د په ځتې عملیي یواځنتوب

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوه نيمګروپ بيلګه چې ګروپ نه وي.
که د طبيعي ګڼونوډيرى N پام کې ولرو، نو دا ډيرى د زياتونعمليي ته نيمګروپ جوړوي، خو دا ګروپ نه دی، ځکه، چې په دې ډيري کې، په هر حالت کې کمون نه دی تعريف.

که نسبت و ځل ته د ګڼونو څخه ګروپ جوړوو، نو بايد دا مو پوره په پام کې وي، چې دا ګڼونډيری د صفر توکی ونه لري، ځکه چې په صفر پرويشنه نه ده تعريف.

۳ . ۲ بدن يا تن او کړی

Körper und Ring (Field and ring)

په داسې حال کې چې د ګروپ اپريشنونه يا ګروپ عمليي يواځې له يوه ترونعمليي څخه منځ ته راځي، اوس دوه عمليي څنګ په څنګ راوړل کيږي، چې په ورسره د ګڼو- نشميرني بلد ډول، چې زياتون «+ » او ځل يا ضرب « . » سره ښوولکيږي، تکيه کوو. که له ريشنل ګڼونو څخه مخ ته ولاړ شو، نو د هلته باوري شمير قاعدو څخه

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ورته ذهنیت، لکه په ګروپونو کی، نوي الجبري جوړ-
ښتونه لاس ته راځي.

۳ . ۲ . ۱ **تعریف** : یو بدن یا تن د یوه ډیري F او دوه عملیو + او . څخه جوړدی، چی د F د توکوهره جوړه (a,b) د F په یوه یواځنی توکی a+b همداسی a.b باندې داسی څیره کړي، چی لاندې باوري کړي یا لاندې په کی باور ولري:

ډیری F دې و + ته یو ابل ګروپ وي، دا په دې مانا، چی لاندې باوري کیږي

۱ – د زیاتون اسوشاتیو قانون

. د ټولو $a,b,c \in F$ دلپاره $(a+b)+c = a+(b+c)$

۲ – د زیاتون کموتاتیو قانون

د ټولو $a,b \in F$ لپاره $a+b = b + a$

۳ – په F کی یو صفر توکی 0 شته، دا په دې مانا چی $0+a = a+0 = a$ باور لري د ټولو $a \in F$ لپاره.

۴ – هر توکی $a \in F$ ته یو توکی $-a$ په F کی موجود

(c) ketabton.com: The Digital Library

دی د $(-a)+a = 0$ سره ، د کوم سره چي 0 په F
کی صفر توکی دی

د F توکو د ځل یا ضرب . لپاره باور لري
۵ - اسوځیاتیو قانون

د ټولو $a,b,c \in F$ لپاره $(a.b).c = a.(b.c)$
۶ - په F کی یو یویتوکی 1 شته ، دا په دې مانا ،
چی $1.a = a.1 = 1$ د ټولو $a \in F$ لپاره .
۷ - هر توکی $a \in F$ ته د $a \neq 0$ سره ، یو توکی a'
د $a.a' = 1$ سره موجود دی ، چیرته چی 1 د F یوی
توکی دی.
۸ - دیستریبوتیو قانون
$a.(b+c) = a.b + a.c$ او $(b+c).a = b.a + c.a$
د ټولو $a,b,c \in F$ لپاره

۹ - $1 \neq 0$
که یوائي د اکیسیومونو ۱ - ۵ او ۸ باوریتوب
وغوښتل شي، نو F ▪َ کړی بللل کیږي.
که برسیره پر دې اکسیوم ۱۰ باور ولري یعنی
۱۰ - د ځل کموتاتیو قانون

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټولو $a,b \in F$ لپاره $a \cdot b = b.a$
نو F یو کموتاتیو تن یا کموتاتیو بدن او همداسی کموتاتیوکړی بلل کیږي

لکه څنګه په ګروپ کی په همدې توګه یوه کړی یا تن هم د $(F.,+,.)$ په ځاي د F سره په نخښه کوو. د ځل لپاره سومبول «.» نه لیکل کیږي او د دې لپاره لنډ لیکو ab . ډیر واره د «بدن» یا «تن» لاندې کموتاتیو بدنونه پوهیږو، په داسی حال کې، چی ناکموتاتیو بدنونه ، «کاږه بدنونه» بلل کیږي. دلته به موږ تل کموتاتیتو بدنونه تر څیړنی لاندې نیولي وي.

د اکسیوم ۱ او اکیسوم ۵ له امله کیدی شي، چی نوکان نور هم پرینښوول شي یا تیریدنه ترې وشي یا ونه لیکل شي. د نوکانو د نه لیکلو لپاره یو بل د مخه پیژندل شوی قرارداد یا پریکړې یو قاعده هم شته، چی د ټکو لکه ځل عملیه د کرښو لکه زیاتون عملي څخه د مخه اجرا کیږي.
لکه د $(ab)+c$ په ساده توکه $ab+c$ لیکل کیږي. دا ساده-والی همدا اوس د اکسیوم ۸ په فرمولولو کی وکارول شو.
د بدن F یا همداسی د کړی R ناپیلی توکی وزیاتون ته صفر-

(c) ketabton.com: The Digital Library

توکی دی او یا لنډ صفر دی. دا په څنګ توکي a- و a ته منفي توکی بلل کیږي. د $b+(-a)$ په ځای لنډ لیکوه $b - a$ او دا کارونه د a او b کمون بولو.

باور لري $a+(b - a) = b$ او $b - a$ د ۳ . ۱ . ۸ له مخی د برابرون $a + x = b$ یواځني حل دی. د ۳ . ۱ . ۷ له امله بالاخره باور لري $-(- a) = a$ او $-(a+b)=-a+(-b) =-a-b$.

دا د $F^*=F\backslash\{0\}$ ځلګروپ ناپیلي توکی 1 د بدن یا تن F یویتوګي یا ساده یوی بلل کیږي. کړی دي ته ضرورت نه لري چې یویتوکي ولري» که یویتوکی موجود وي نو یواځنی به ټاکلي وي.

۳ . ۲ . ۲ د بدنونو لپاره بیلګي

الف – د ریشنلګڼونو ډیری Q او همداسی د رییل ګڼونو ډیري R په ورسره بلدو ترنو یا عملیو له لارې یعنی زیاتون او ځل له لارې هر یوکموتاتیو بدن یا تن جوړوي،

ب – د ټولو کمپلکسګڼونوډیری C هم یو کموتاتیو بدن یا تن جوړوي. په روښانه توګه یا ډول یو کملکس ګڼ a دا لاندې بڼه لري $a = a_1 + a_2i$ د رییل ګڼونو a_1 , a_2 سره او

(c) ketabton.com: The Digital Library

ایماګیناریوون i سره، د کوم لپاره چې $i^2 = -1$ باور لري.
دا a_1 د a رییل برخه او a_2 د a ایماګینار برخه بلل کیږي.
په نخښونه : $a_1 = Re(a)$ او $a_2 = Im(a)$
که $b = b_1 + b_2 i$ یو دوم کمپلکس ګڼ وي، نو زیاتون، کمون او ځل یې په څرګنده توګه په لاندې ډول روښانه دي یا تشریح شوي دي:

$$a \pm b = (a_1 \pm b_1) \pm (a_2 + b_2)i ,$$
$$a b = (a_1 b_1 - a_2 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$$

دا و کمپلکس ګڼ $a = a + ai$ ته کوجوګیري کمپلکس ګڼ $\bar{a}$ د $\bar{a} = a_1 - a_2 i$ سره تعریف دی. په دې پسې ترلي لاس ته راځي

$$\overline{a \pm b} = \bar{a} \pm \bar{b}, \quad \overline{ab} = \bar{a} . b , \quad \bar{a} = a ,$$
$$a + \bar{a} = 2Re(a) \quad , \quad a - \bar{a} = 2iIm(a)$$

د یوه په خوښه کمپلکسګڼ a لپاره باور لري

$$a\bar{a} = (Re(a))^2 + (Im(a))^2$$

له دې امله $a\bar{a}$ تل یو نامنفي رییلګڼ دی، او $a\bar{a} = 0$ د $a = 0$ سره برابر ارزښته دی.
که $a \mid= 0$ یو کمپلکسګڼ وي، نو باور لري $a\bar{a} \mid= 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او $C \ni aa / \bar{a} = a$. د کمپلکس ګڼ ارزښت $|a|$ ،
چې $a = a_1 + a_2 i$ د نامنفي ریلګڼونو ریښه ارزښت
دی $a\bar{a} = a_1^2 + a_2^2$ دا په دې مانا، چې

$$|a| = +\sqrt{a^2 + a^2} .$$

ریلګڼونه ځانګړي کمپلکس ګڼونه دي، په نامه هغه ګڼونه،
چې ایماګینار یې ورکیږي: کمپلکسګڼ ټیك هلته یا هلته او
هلته یو ریلګڼ دی، که $a = \bar{a}$ وي.

۳ . ۲ . ۳ د کړیو لېاره بیلګې:

الف –د ټولو ټولګڼون ډیری Z یوه کموتاتیو کړی ده، د یوي
سره.* مګر Z بدن نه دی، ځکه، چې د بیلګي په توګه ۲
په Z کې نسبت و ځل ته په څټ نه لري. یعنی $1/2$ په Z
و 2 ته په څټ توکی نه دی.

ب – جوړه ټولګڼونه $R = 2Z$ ددې لېاره بیلګه ده، چې
صفرتوکی نه لري.

پ – F دې یو کموتاتیو تن وي. یوه د لاندې بڼې افاده

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

د $a_i \in F , i = 0,1,2,...,n-1,n$ سره پولینوم بلل کيږي د يوې نامعلومی x سره او چی څلووني يا ضريبونه او يا کوايفڅينتونه يي له F وي. که $a \neq 0$ وي، نو n د پولينوم $f(x)$ درجه بلل کيږي.

نخښونه يی: گراد $Grad\ f = n$

که حتی $a = 1$ وي، نو $f(x)$ يو نورمي شوی پولينوم normiertes Polynom بلل کيږي. د صفر درجي پولينومونه ثابتی دی د $0 \neq a \in F$ سره. صفر پولينوم $0(n=0,a=0)$ سره درجه نه ترتيب يا تنظيم کيږي.

د ټولو پولينومونو $f(x)$ ډيری، چی څلووني يی له بدن F څخه وي د$F[x]$ سره په نخښونو يا په نخښنه کوو. په $F[x]$ باندې زياتون (په ورکړشوی حالتکي د صفرڅلوونو سره) او يو ځل يا ضرب په دې لاندې ډول تشريح شوي

$$(a_0 + a_1x+a_2x^2+,,,+a_nx^n)+(b_0+b_1x+ b_2x^2+...+b_nx^n)$$
$$= (a_0+b_0)+(a_1+b_1)x +...+(a_n+b_n)x^n \ ,$$

$$(a_0+a_1x+...+a_mx^m).(b_0+b_1x+...+b_nx^n)$$
$$= a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2+ ...+a_mb_nx^{n+m}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

و زیاتون « + » او ځل « . » ته F[x] یوه کړی‌ده،
د پولینو1 سره د یویتوکي په څیر. پولینومډیری F[x]
پولینوم کړي په F باندې بللکیږي، د ناپیژنونکی x سره.

دي تراوسه یادشوو بدنونو ترمنځ د کمپلکس ګنونوګروپ
یو ځانګړی ځای لري، له دې امله په ځانګړي څیړنی کی
ځانګړی رول لري، ځکه چی ددې لپاره د الجبر اصلي
جمله باور لري کومه چی په لاندې ډول ده:

۳ . ۲ . ۴ جمله: هر یو پولینوم $f(x) \in C[x]$
د $Grad\ f > 1$ سره د لاینی پولینومونو په ځلوونویا ضریبونو
ټوټه کیږي، دا په دې مانا، چی $f(x)$ ته ډیر پای مختلف
کمپلکس ګنونه c موجود دي، او طبیعي ګڼونه k په داسی
توګه یا ډول چی لاندې باوري کوي:

$$f(x) = \prod_{i=1}^{m} (x - c_i)^{k_i} \quad \text{او} \quad Grad\ f = \sum_{i=1}^{m} k_i.$$

دا جمله دلته نه ثبوت کیږي.

دا لاندې جملی دا را په ګوته کوي، چی په خوښه کړیو او
بدنونو یا تنونوکي ، په ورسره بلد ډول شمیرنه کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۲ . ۵ مرستندوي جمله:
په یوه کړی کی باو رلي: $0.a = a.0 = 0$ د هر توکي a لپاره .
اوبی یا حل :د $0 = 0+0$ اوی د اکسیوم۸ له امله باورلري:

$$0.a+0.a = (0+0) .a = 0.a$$

د دې او ۳ . ۱ . ۴ څخه لمړی اوبی $0.a = 0$ لاس ته راځي، دوهم اوبی یا حل په ورته توګه لاس ته راځی . *

۳ . ۲ . ۶ مرستندوي جمله: په یوه کړی کي باور ري

$$a(- b) = (- a).b = - ab$$

په ځانګړي توګه دا لاندې باور لري

$$(- a) (- b) = ab$$

اوبی: د ۸ او ۳ . ۱ . ۴ له امله لاس ته راځي

$$ab + a(- b) = a(b- (b)) = a . 0 = 0$$

په دې پسی $a (- b)$ و ab ته منفي توکی دی، دا په دې مانا چی باور لري

$$a(- b) = - (ab)$$

په ورته توګه دوم برابرون لاس ته راځي. *

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مخه مو د بدن کلیمه روښانه کړه، اوس غواړم، چي دا کلیمه له یوې ببلې لورې هم، یا بهتره، په یوه بل ډول تر څیړنې لاندې ونیسم او هغه په دې ډول، چې هغه مو ورسره بلد د تړونکارونو نخښې ونه کاروم او دوه ذهني تړونونه راوړم، چي وروسته کار مو بیا همداسي مخ ته بیولی دی:

۳ . ۲ . ۷ **تعریف** :د ډیري M هغه جوړښتونه بدن بلل کیږي، د کومو لپاره چي باور ولري:

۱ – په ډیري M کی دوه تړاونه ° او o تعریف دي
۲ – دلته (M ; °) کموتاتیو ګروپ دی
۳ – دلته ($M\backslash e_0$; o) یو ګروپ دی او e_0 یو ناپیلی توکی دی و° ته.

دا لاندېقوانین باور لري:

۴ – دیستریبوتیو قانون: $ao(b°c) = (a° b)o(a°c)$

$(a° b)oc = (aoc)°(boc)$

په یوه کموتاتیو بدن کي په دې برسیره باور لري

۵ – کموتاتیو قانون : $aob = boa$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۳ لاندېګروپ او لاندېکړی

۳ . ۳ . ۱ تعریف : د یوه ګروپوئید G برخډېری یا لاندګۍډېري U ګرپوئید بلل کیږي، که د U د هرو دوه توکو همغه تړنه ° (ځل) د دې ډیري U توکی وي.
که G نیمګروپ وي، نو بیا په نتیجه نیونه کی له یوه لاندې نیمګروپ څخه غږیږو.

۳ . ۳ . ۲ تعریف : یو د ګروپ G برخډېری U یو د ګروپ G لاندېګروپ یا سبګروپ Subgrupp بلل کیږي، که U نسبت د ګروپ G ګرڅې عملیو یا ګروپتړون ° ته پخپله ګروپ وي.
په نخښونه $U < G$.

۳ . ۳ . ۳ مرستندوي جمله: د ګروپ $(G,\circ)$ یو ناتش برخډېری U ټیک هلته یا هلته او هلته د ګروپ G لاندېګروپ یا سبګروپ دی، که د هرې جوړې $a,b \in U$ لپاره تل باور ولري

$$a \circ b \in U$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوبی یا حل: شرایط په پوره باور ضرور دي. دا باید وښوول شي، چی پوره کیدونکي هم دي.
دلته دې e د G یوی توکی وي. د $U \neq \emptyset$ له امله یو $a \in U$ موجود دی. نو لرو $e = a^\circ a' \in U$ او e د U یوی توکی دی. وریسی باور لري $a = e^\circ a \in U$ د هر $a \in U$ لپاره. د مرستندوي جملي له امله لرو $a^\circ b \in U$ د ټولو $a,b \in U$ لپاره.
ساده کتل کیږي، چی په U کی اسوشیاتیو قانون باور لري.
پس $(G, ^\circ)$ یو ګروپ دی.

۳ . ۳ . ۴ تعریف : د یوې کړۍ R لاندېډیری A، نسبت و هغه په R کی تعریف شوو عملیو ته، یوه لاندې-کړۍ بلل کیږي. دا په دې مانا، چی په A کی د R ټولې ترڼې یا عملیې باور ولري. یا په بل عبارت، چی A نسبت و زیاتونګروپ ته یو لاندې زیاتونګروپ جوړوي او د R ځلګروپوئید ته لاندېګروپوئید جوړوي، او په همدې ډول په R کي تعریف دیستریبوتیو قانون په لاندېډیري A کی هم باور لري.

په ورته توګه د بدن یا تن F لاندې تن هم تعریف دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۳ . ۵ جمله : د G لاندېګروپونه پخپله G او یونلاندیګروپ E ، چې له یویتوکی څخه جوړ دی، دي. په ورته توګه د کړۍ R لاندیکړی پخپله R او د صفر- توکي څخه جوړه شوې ، صفرکړی دي.

د نورو لاندیګروپونو غوره بیلګو جوړولو لپاره د یوه توکی د پوتنځ (Potenz) کلیمه پلی کوو یا رامنځ ته کوو. G دې یو په خوښه نیمګروپ وي او a دېد هغه په خوښه یو توکي وي.د ځل اسوشیاتیو قانون دا اجازه راکوي، چې په یواځنی توګه (یواځنی ته دې د ګرانو لوستونکو تل پاموي، چې د څه لپاره کارول کیږي) د یو په خوښه پوتنځ یا توان

$$a^n, \quad n = 1,2,\ldots,n$$

تعریف کړو، او دا باور لري

$$a^k \cdot a^l = a^{k+l} \qquad (1)$$
$$(a^k)^l = a^{kl} \qquad (2)$$

له (1) څخه لاس ته راځي، چې په یوه نیمګروپ G کی د یوه توکی ټول مثبت توانونه یو ابل نیمګروپ جوړوي، چې د a توګي څخه منځ ته راغلی یا جوړ ځیکلیکي یا بیرته راګرځیدونکی لاندېګروپ بلل کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که G برسیره پر دې یو ګروپ وي، نو لمړی داسی نیسو، چی $a^0 = 1$ او بالاخره د توکي a منفی توانونه هم پلي کوو. که n یو طبیعي ګڼ وي نو د لاندې برابرون

$$a^n (a^{-1})^n = 1$$

راجوړیدنه په ساده توګه کتل کیږي، له کومی چی بیالاس ته راځي

$$(a^{-1})^n = (a^n)^{-1} \qquad (3)$$

دا توکی، چی د (3) دواړه خواو کی یی ځاي نیولی د a^{-n} سره ښایو یا په نخښنه کوو. برابرونونه (1) او (2) د ګروپG د یوه ټولګنیز توکي a لپاره ریښتوني پاتي کیږي او د a ټول توانونه د صفر او منفی پوتنځ پورې له دې امله د G یو لاندیګروپ جوړوي. دا لاندې ګروپ د a څخه جوړ بیرته راګرځیدونکی zyklische Untergruppe لاندېګروپ بلل کیږي او په {a} سره په نخښنه کیږي.
په زیاتون لیکدود سره بیا د a دپوتنځ په ځاي د هغه ډیرخلی راوړل کیږي.

په ګروپ G کی د یوه توکي a توان یا پوتنځ په مختلف جګګڼ یا اکسپوننت Exponent سره ضرور د مختلف

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګروپ توکي نه ورکوي یا نه رامنځ ته کوي، کوم چی د ناپاي ګروپ له موجودیت څخه جوتیږي. که د a ټول توانونه توپیر ولري یا په بل عبارت مختلف وي، نو a د ناپایږیر نظم توکی بلل کیږي، په بل ډول بیا یو د پاینظم توکی بلل کیږي.

په دوم حالت کی یو ټولګڼ k او یو ټول ګڼ l د $l < k$ او

$$a^k = a^l$$

سره موجود دي.

له دې څخه لاس ته راځي $a^{k-l} = 1$ ، چیرته چی $k - l > 1$ دی، نو له دې امله د a توانونه شته، چی د یویتوکي سره برابر دي. ددې اکسپوننت یا جګګڼ کوچنی مورږ د a نظم بولو یا نوموو.

که a یو د پاینظم n توکی وي، نو بیا په روښانه توګه توکي

$$1 = a^\circ, a, a^2, \ldots, a^{n-1} \qquad (4)$$

ټول یو له بل توپیر لري او هر وریسي منفی یا مثبت د a پوتنځ a^k د یوه دې په (4) کی وکړشوو توکو سره برابر دی. دا په لاندې ډول لیدل کیږي: دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$k= nq+r, \qquad 0 < r < n$$

نو له (1) او(2) اړیکو a = 1 څخه لاس ته راځي:

$$a^k = (a^n)^q a^r = a^r$$

له دې سره د پاینظم توکو لپاره لاس ته راځي: دیوه توکي a نظم د هغه توکی n څخه تولید شوي یا جوړ شوي بیرته راګرځیدونکي یا څیوکلیکي لاندې کروپ {a} سره برابر دی یا د هغه سره سر خوري.

هغه ګروپونه، چې یواځي د پاینظم توکي لري تورزیونګرپونه Tursionsgruppen یا پریودي ګروپونهperiodische Gruppen یا بیرته راګځیدونکي ګرپونه بللکیږي، په بل ډول ناپریودي ګروپونه Torsionsfrei Gruppen بلل کیږي.

اوس دا پوښتنه د کړیو لپاره، لکه د بیرته راګرځیدونکی لاندیګروپ لپاره، رامنځ ته کیږي، چې ایا داسی یوه لاندیکړی یا مینیمال لاندیکړی شته، چې یو ورکړ شوی توکی ولري. R دې یوه ورکړشوې (ناضروري اسوځیاتیو) کړی وي او a دې یو د هغی کړی په خوښه توکو څخه یو توکی وي. هر د هغه لاندیکړی د توکي a سره ټول ځلونه، په کومو

(c) ketabton.com: The Digital Library

کی چی ټیك فاکتور a رامنځ ته کیږي، د کوم یوه ګڼون یا تعداد ...,n = 1 , 2 , 3 سره، دا فاکتور د a د مثبت پوتنځ یا توان رول لوبوي. دا چی ځل باید ضرور اسوشیاتیو نه وي، نو په ټولو توپیریزو ډولونو ، جوړه ډوله په نوکانو کی نیول کیږي، چی په دې توګه د کړی دوه فاکتورونه یو د بل سره ځلیږي یا ضربیږي. د n = 3 لپاره ځل a(aa) او (aa)a) او n = 4 لپاره ، او همداسی د n = 5 لپاره اوداسی وړیسی.
هر لاندېکړی د a سره ټول زیاتونونه ، ورکړشوي پاي زیاتو ځلونه، کوم چی د ټولګڼیز فاکتور سره سنبال وي خوندي لري. داسی د R توکی . چی په دې زیاتونیز ډول لیکل کیږي د خپلی لور څخه په R یو لاندې کړی جوړوي او دا، هغه غوښتونکې یا لټوونکې د a څخه جوړه، لاندېکړي بلل کیږي.
د یوه اسوشیاتیوې کړیR لپاره د یوه توکی a څخه جوړ لاندېکړی لاندې د R د ټولو توکو څخه جوړه لاندېکړی، چی په یوه ډول د a زیاتون او مثبت پوتنځ څخه جوړه وي لاس ته راځي(د ټولګڼیز ځلوونو سره). دا کړی له دې امله کموتاتیو ده.

د یوه ګروپ هر لاندېګروپ د دې ګروپ یویتوکی لري، د

(c) ketabton.com: The Digital Library

یوې کړی هره لاندېکړی په همدې توګه د دې صفر توکی لري. دګروپ G لاندې ګروپونو (په همدې توګه د کړی R لاندېکړیو) غوڅی له دې امله تشه‌یری نه دی .

۳ . ۳ . ۶ جمله : د ګروپ G د لاندېګروپونو یوه سیستم غوڅی بیرته د G لاندېګروپ دی. په همدې توګه دکړی R د لاندېکړیو د یو سیستم غوڅی، د دې کړی لاندېکړی جوړوي. د لاندې نیمګرپونو یوه سیستم غوڅی بیرته لاندینیمګروپ دی، که دا تش نه وي، او همداسی ورپسی..

موږ دلته د لمړنی غوښتنی ثبوت مخ ته بیایو. ددې لپاره دې په ګروپ G کی یو لاندېګروپ سیستم A_i ورکړ شوی وي، چیرته چی i یو پژندډیری یا ایندکسډیریIndexmenge کی ځغلی، او D دې د دې لاندېګروپونو غوڅی وي. که چیرې b او c د D په خوښه کوم توکی وي، نو د دوي خل bc په هر لاندې ډیري A_i کی پروت دی او په ورپسی توګه یا په لاس ته راوړنی سره سملاسی هم په D کی پروت دی. نو له دې امله b^{-1} د په خوښه $b \in D$ لپاره په هر A_i کی پروت دی او له دې امله په D کی هم پروت دی. پس D د G لاندې ډیری دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس نيسو چې G دې يو ګروپ، کړی او يا په همدې توګه يو تن يا بدن يا کوم يو بل، مورړ ته څرګند، الجبري سيستم وي، کوم چې تراوسه پيژنو. د M سره د G لاندېګروپ ښايو، نو يو مينيمال لاندېګروپ(په ورته ډول لاندېکړی، لاندې تن يا لاندېبدن) شته، کوم چې M خوندي لري. دا د M سره جوړه شوي يا توليد شوي لاندې کروپ {M } جوړوي او د ټولو M خوندي لرونکود G د لاندېګروپونو غوڅې دی، د کومو څخه، چې کم له کمه يو دا په نامه ګروپ G موجود دی.

د مخه ويل شوي يا ورکړ شوي څيوکليکي لاندې ګروپ تعريف د ټوليزولو له لارې ساده ښوول کيدی شي، چې لانديګروپ {M } ټيک د ټولو هغو G توکو څخه جوړ دی، چې د په خوښه ترتيب د پايډيرو M توکو د پوتنځځل په بڼه ليکل کيدی شي.

ټيک په همدې توګه د مخه لوستل شوي ټوليزولو له لارې لاندېکړی، چې په R کی له M توليد ټولو توکو جوړ دی، کوم چې په M کي د پاي ډيرو توکو د ځلولو د زياتون(د ټولګڼيز ضريب سره) څخه انځوريدلی شي. په نااسوڅيا- تيو حالت کی دې طبعاً ضريبونه د ټول ممکنو نوکانو سره بندې شي.

۳ . ۳ . ۷ یا دونه یا تعریف: که د تیرې برخی د M لپاره، د ګروپ G د ټولو لاندې ګروپونو A_i , $i \in I$ سیستم ونیول شي یا فرض شي، نو د یوه لاندې ګروپ کلیمي ته راځو، چې د ورکړشوو لاندې ګرپونو سیستم له خوا تولید شوی دی. ددې لپاره { A_i , $i \in I$ } لیکو، یا هم {A,B }، که دا دلاندې کروپونو ټولنه وي. په همدې توګه کیدی شي په یوه کړی کي هم د لاندېکړی سیستم له لارې تعریف لاندېکړي هم پوهیدل کیدی شي.

۳ . ۳ . ۸ یا دونه یا تعریف . دلته دې G یو ګروپ وي، یوه کړی او همداسی ورپسی. نو په G کی داسی لاندېډیري M شته، د بیلګي په توګه پخپله G، د کوم لپاره چی باور لري

$$\{M\} = G$$

هر داسی لاندېډیري د G لپاره یو جوړیدونکی یا تولیدیدو ینکی سیستم بلل کیږي . تر هغی، چی G یو پای د تولید- ونکو سیستم ولري، نو دلته د ګروپ) یو نیمګروپ، یو کړی) G څخه غږیږو، چی پایتولیدیدونکی ګڼون یا

(c) ketabton.com: The Digital Library

شمیر ولري. په ځانګړې توګه کیدی شي، چې دا جوړوونکی یا تولیدونکی له یوه توکی څخه جوړ وي. دا ګروپ چې یو جوړیدونکی توکی لري او د هغه د څیوکلیکي لاندې ګروپ سره سر وخوري، څیوکلیك ګروپ بلل کیږي.

۳ . ۴ . ایزومورفیزم Isomorphimus

دا دلته د هر الجبري سیستم راوړلو کلیمو لپاره د ایزمو- رفیزم کلیمه روښانه کیدی یا تشریح کیدی شي، کومه چې همغه رو ل لوبوي لکه په نیم نظم شوي ډیري کی یی چې لروده.
د بیلګي په توګه ایزمورف ګروپونه یو بل ته کتمټ دي، د یو او همغه ګروپ دوه اکسمپلاره یا نموني ، چې په نیولی دې وي، چې که د ګروپ عملیي یی تړونونه همغه وي، په داسی حال کی چی توکي له کومو چی ګروپونه جوړ دي، طبیعیت یا پیدایښت کوم رول نه لوبوي.
په کره کلك تعریف سره لاندې راوړو:

۳ . ۴ . ۱ تعریف : ګروپوئید G او G' ایزومورف

(c) ketabton.com: The Digital Library

دي، که د ګروپوئید یواځنی او په څټ ځیرونه f د ګروپو-ئید G په ګروپوئید G' داسی موجود وي، چی د په خوښه a,b Є G لپاره باور ولري

$$(ab)f = af.bf$$

په همدې توګه هره ځیرونه ، چی دا غوښتنی پوره کوي، د ایزومورفی ځیرونی په ځیر یي په نخښه کوو یا یی ایز-ومورف ځیرونه بولو. د دوه ګروپوئیدو خویونه، چی یو بل سره ایزومورف وي، سیومتري خویونه دي، (هغه و ایزومورفی ځیرونی ته په څټ ځیرونه بیرته ایزومورف ځیرونه ده)، او ترانزیتیو، دا برسیره پر دې ، که ځیرې څوك د ګروپوئید کتمتې په ځان ځیرونه ورسره وګڼي، رفلکسیو هم دی. د ایزومورف ګروپوئیدو لپاره په ټولیزه توګه لاندې لیکدود کارول کیږي یا استعمالیږي

$$G \sim G'$$

که چیرې د نورو الجبري جوړښتونو ایزومورفي مو هم مطلب وي ، نو موږ به بیا هم همدا نخښه وکاروو.
طبعاً به د ګروپوئید په ایزومورف ځیرونه کی ټول هغه خویونه، چی په ګروپوئید کی لیکل کیږي، لکه اسوځیاتیو

(c) ketabton.com: The Digital Library

قانون، کموتایتو، د یویتوکي موجودیت او د په ځېتوکي موجودیت، د ګروپوئید څیرې چه هم ور کارول کیږي یا وروړل کیږي. موږ په ساده بیلګه سره ښایو، چی دا وینا څنګه ښوول کیدی شي. G دې یو کومتایتو ګروپوئید وي او f دې د G یوه ایزمورف څیرونه په G' وي. که a' او b' دوه د G' په خوښه توکي وي او a, b د G هغه توکی وي، د کوم لپاره چی باوړ لري

$$af = f(a) = a' \quad , bf = f(b) = (b)f = b'$$

نو لرو

$$(ab)f = a'.b' \quad , (b.a)f = b'.a'$$

او د برابرون ab = ba او د څیرونی د یواځنتوب څخه a'b' = b'a' دي. له دې څخ لاس ته راځي،

۳ . ۴ . ۲ جمله: د نیمګروپ، ګروپ او همداسی د ابلګروپ یا کموتاتیو ګروپ ایزومورفی څیرې بیرته نیمګروپ، ګروپ او همداسی ابلګروپ دی.

۳ . ۴ . ۳ مرستندوي جمله: دوه کړي یو بل سره ایزومورف دي، که د هغو د توکو ترمنځ یو یواځنی اوپه

(c) ketabton.com: The Digital Library

څټکیدونکی نظم یا څیرونه موجوده وي، چی هغه څیرونه نسبت و زیاتونګروپ ته ایزومورفیزم وي او هم د کړی و ځلګروپوئید ته ایزمورفیزم وي. د ایزومورف څیرونی سره طبعاً کړی هغه خویونه، اسوڅیاتیو، او کموتاټیو یا لیکړی liesche Ring او داسی نور وي، ساتي.
د ایزومورف ګروپونو لپاره یوه په زړه پوري بیلګه، د مثبت رییلګڼونو ځلیزه ګروپ او د ټول رییلو ګڼونو زیاتونګروپ جوړوي. که هر مثبت ګڼ د هغه په لوګاریتم باندي تنظیم یا څیره شي، چی بنسټ یی کره کلك ټاکلی وي ، نو د لمړي ګروپ یو ایزومورف څیرونه، په دوم ګروپ، لاس ته راځي.
ایزومورفیز له دي ریښتینیو څخه لاس ته راځي، چی د یوه ځل لوګاریتم دي د لوګاریتم د یوګونو فاکتورونو د زیاتون سره برابر یا مساوي دی (د لوګاریتم او قوانینو لپاره دي ځما د شمیر پوهنی کتاب وکتل شي).

موږ اوس هغه ږمخه په ګوته شوي پاملرنه په څیوکلیکي زیاتونګروپ کی رامخ ته کوو او په یوه بیلګه پیل کوو.
د ټولګڼونو زیاتونګروپ د یوه ناپای څیوکلیکي ګروپ لپاره بیلګه ده، ځکه، چی هر ټول ګڼ د ۱ څو ځله دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۴ . ۴ جمله : ټول ناپای څیوکلیکي ګروپونه د ټولګڼونو زیاتونګروپ سره ایزومورف دي او همداډول په خپلو منځونو کې هم. همداسې پاي د n–نظم څیوکلکي ګروپونه یو بل سره ایزومورف دي.
ددې جملې له ثبوت څخه دلته تیریږو (ثبوت یې په Kuroŝ کې کتل کیدی شي).

۳ . ۴ . ۵ جمله: د ټولګڼونو د صفر لاندیګروپ، څخه توپیري ټول لاندیګروپونه د یوه څرګند طبیعي ګڼ n د ډیرواره ډیري څخه راپیدا دي.
او بې : روښانه ده، چې د یوه طبیعي ګڼ ټول څوواره یو لاندیګروپ، دا په نامه له n څخه جوړ لاندیګروپ جوړوي. د یو بل څخه توپیري ګڼونو n لپاره لاندیګرپونه هم یو له بل توپیر لري. کیدی شي یود ټولګڼونو زیاتون ګروپ، لاندیګروپ A، چې یواځې د منفی ګڼونو څخه نه وي جوړ، ځکه چې د هر ګڼ سره د هغې په ځت هم لري. n دې کوچنی طبیعي ګڼ وي، چې په A کې خوندي ده. د یوه په خوښه $a \in A$ لپاره باور لري

$$a = qn + r\,,\ \ 0 < r < n$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو دی

$$r = a - qn \in A$$

او په دې لاس ته راوړني $r = 0$ (د n له ټاکنی څخه) ، دا په دې مانا چي دی $a = qn$ ، څه مو چی ښوول.

۳ . ۴ . ۶ جمله : هر د یوه ناپای څیوکلیکي ګروپ لاندېګروپ څیوکلیکي دی، او دا د پای څیوکلیکي ګروپ لپاره هم باور لري.

۳ . ۴ . ۷ تعریف : وایو، چی ګرپوئید G په ګرپو- ئید 'G کی ایزومورف خوندې دی، او یا په 'G کی ایزومورف نغښتی دی، که چیرې له G یوه ایزمورفه څیرونه د ګروپو- ئید 'G په کوم یوه لاندېګروپوئید باندې موجود وي. دا کلیمه کړیو ته هم غزول کیدی شي،

هره کړی R، په کړی R باندې د پوره ماتریکسکړی R_n کی ایزومورف خوندې دی.
سکالار ماتریکسونه ، دا په دې مانا، چی د همغه توکي $a \in R$، چی په اصلي نیمي یا قطر کی پروت وي او نور د نیمي دواړو خواو ته صفرونه وي، په نامه R_n یو لاندېکړی، د R سره ایزمورف ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۴ . ۷ جمله : هره کړی R په ورکړ شوي ډېري M
باندې یوه پوره فنکشنکړی سره، چی ارزښت یي په R کی
پروت دی ، ایزومورف دی.
د ټولو x Є M لپاره هر فنکشن د همغه برابر ارزښت a Є R
سره، هغه و R سره ایزومورف فنکشنکړی راکوي.
د یوه په خوښه اسوشیاتیو، کموتاتیو کړی R کی پولینومکړی
R[x] پوتنځلړیکړی R{x} کی ایزومورف خوندې دی.
پوتنځکړی د زیاتو پاي صفر څخه توپیریدونکو ځلوونو یا
ضریبونو سره، یو وR[x] ته ایزومورف د R{x} لاندېکړی
جوړوي.

یو لوي کار د لاندې جملي اوبی یا حل غواړي:

۳ . ۴ . ۹ جمله : هره کړی R په یوه کړی کی، چی
یویتوکی لري، ایزومورف خوندي ده. که کړی R په دې
برسیره اسوشیاتیو یا کموتاتیو وي، نو کیدی شي ، چی دا
همداسی په یوه اسوشیاتیو، کموتاتیو دیویتوکي سره کړی
کی خوندي شي.
اوبی یا ثبوت: موږ د ټولو جوړو (a,k) ډیری په نظر کي

(c) ketabton.com: The Digital Library

نیسو، چې $a \in R$ او k یو ټولګڼ دی او د دې جوړو لپاره د لاندې مساواتو له لارې زیاتون او ځل تعریفوو:

$$(a,k) + (b,l) = (a+b,k+l) \qquad (1)$$
$$(a,k)(b,l) = (ab+la+kb,kl) \qquad (2)$$

نسبت و زیاتون ته یو ابلګروپ لاس ته راځي. دا چې برسیره پر دې

$$[(a,k)+(b,l)](c,m) = (a+b,k+l)(c,m)$$
$$= ((a+b)c+m(a+b)+(k+l)c,(k+l)m$$
$$= (ac+ma+kc+bc+mb+lc,km+lm)\ m$$
$$= (ac+ma+kc,km)+(bc+mb+lc,lm)$$
$$= (a,k)(c,m)+(b,l)(c,m)$$

باور لري او ټیک په همدې ډول د دیستریبوتیو دوم قانون هم ښوولی شو، نو ډیری یوه کړی انځوروي. له (2) څخه وریسی لاس ته راځي

$$(a,k)(0,1) = (0,1)(a,k) = (a,k)$$

دا جوړه (0.1) په دې کړیکی د یویتوکي ځاي نیسی یا نمایندګي کوي. بر سیره پر دې د (1) او(2) سره سم لرو

$$(a,0)+(b,0) = (a+b,0)\ ,$$
$$(a,0)(b,0) = (ab,0)$$

د کومو سره ، چې د ټولو د (a,0) فورمجوړو ډیری د ټولو

(c) ketabton.com: The Digital Library

جوړو(a,k) په کړی کی یو وR ته ایزومورف لاندېکړی جوړوي.
له دې سره د ثبوت لمړی برخه تکمیل ده، دومه برخه د (2) استعمال سره په ساده توګه لاس ته راځي.
موږ دا په ګوته کوو، چی دا له موږ جوړه شوې کړی یواځنی کړی نه ده (او همداسی هم نامینیماله کړی) د یویتوکي سره،

کوم چی یورکړه شوېکړی R (د ایزومورف خوندیونی په موخه) خوندې لري، کیدی شي چی R پخپله یو یویتوکی ولري.

۳ . ۴ . ۱۰ جمله : هر ګروپوئید کیدی شي ، چی د یوې کړی په ځلګروپوئید کی خوندي شي، یو اسوځیاتیو یا کموتاتیو ګروپوئید کیدی شي، چی په یوه کړیکی، چی همغه خویونه ولري خوندي شي.
د ثبوت لپاره ټول ممکن د زیاتون فورمولوټو زیاتون رانیسو

$$\sum_{a\in G} k_a a \qquad (3)$$

د کومو سره ، چی a د ورکړشوي ګروپوئید G ټولو توکو کی ځغلی، په داسی حال کی چی ځلووني یاضریبونه k_a ټولګڼونه دي او په رینښتونی، داسی چی زیات ترزیات پای ډیر د صفر څخه توپیري رامنځ ته کیږي د زیاتون (3) زیاتون او ځل د برابرونونو یا مساواتو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sum_{a \in G} k_a a + \sum_{a \in G} l_a a = \sum_{a \in G} (k_a + l_a)a \qquad (4)$$

$$\sum_{a \in G} k_a a \cdot \sum_{a \in G} l_b b = \sum_{c \in G} m_c c \qquad (5)$$

سره روښانه یا تشریح دی، په کومو کې، چې m_c د ټولو صفر څخه توپیر څلونو $k_a\, l_a$ زیاتون په مانا دی، چې په ټولو a او b کې ځغلیدلی وي، د $ab = c$ سره. روښانه ده، چې د برابرونونو ښی لور (4) او (5) د (3) فورم زیاتون انځوروي. مساوات (5) وايي، چې په کیڼ لور، د فاکتورونو په څیر رامنځ ته شوي، پاي زیاتونونه د غړو په څیر یو له بل سره ځلیږي، او په ریښتونی د قانون

$$k_a a . l_a b = (k_a l_a)(ab)$$

لاندې، چې د ab سره د ګروپوئید په موخه ورکړ شوې عملیه مو مطلب دی، د کومو سره چې د ځل ab رامنځ ته کیدو سره همغه توکی c ورکوي، سره یوځاي راټول شي.

د زیاتون لپاره په هره توګه یو ابلګروپ لاس ته راځي. د دیستریبوتیو قانو او د هغه ثبوت چې د G په ګروپ کی د ځل اسوشیاتیو همداسی کموتاتیو قانون او همغه مساوي یي

(c) ketabton.com: The Digital Library

د زیاتونونو ځل، چې فورم (3) لري لاس ته راځي، که څه هم خورا پراخ دی، مگر په پرینځیپ یا اصولوکی ستونځې نه رامنځ ته کوي، د هغو پرمخ بیول دې د لوستونکو دنده وي.

د ټول زیاتون، چې فورم (3) لري له دې امله نسبت و(4) او (5) مساواتو تعریف شوو اپریشن ته یوه کړی جوړوي، هغه زیاتون (3) په کومو کې، چې $k_a = 1$ دی، د په خوښه a لپاره، چې له G دی. د (5) پسی یو گروپ G سره ایزومورف لاندېگروپوئید، د دې کړی د ځلوونکي گروپوئید سره، جوړوي. له دې سره دا ښونه سر ته ورسیده.

دا له موږ جوړ شوې د گروپوئید G کړی د ټولګڼونو گروپو-ئیدکړی بلل کیږي.
که G یو نیمگروپ وي او یا گروپ، نو د دې په ځای د ټولګڼیزنیمگروپ او همداسی د ټولګڼیزگروپ څخه غږیږو.

۳ . ۴ . ۱۱ جمله: هر گروپ د یوه ډیري M په سیو-متري گروپ کی ایزومورف خوندي دی، کیدی شي، چې د M په ځای په ځانگړې توگه د گروپ ټولو توکو ډیری وکارول شي.
دلته د گروپ G هر توکی a هغه ترانسفورمیشن باندې تنظیمو، چې یو د G توکی x په توکي xa باندې تنظیم

(c) ketabton.com: The Digital Library

کړي. دا چي له $x \neq y$ څخه هم $ax \neq ay$ لاس ته راځي او برسیره پر دې د هر $x \in G$ لپاره برابرون

$$(xa^{-1})a = x$$

رامنځ ته کیږي، ترانسفورمیشن $x \to xa$ ګروپ G په ځان په څټ یواځنی څیره کوی یا تنظیموي، دا نو له دې امله یو پرموتیشن (پرموتیشن څما د شمیرپوهنه کتاب کی په پراخه توګه روښانه شوی دی) دی. د $a \neq b$ لپاره په دې برسیره په دې د غوښتونکو پرموتیشنونو توکي یو له بل توپیر لرود- ونکی دي، ځکه، چی $1.a \neq 1.b$ دی.
بالاخره برابرون

$$(xa)b = x(ab)$$

په ګوته کوي، چی د ab پورې اړونده پرموتیشن د و a اوb پورې اړونده یوبه بل پسی راوړنو څخه لاس ته راځي.

۳ . ۴ . ۱۲ جمله : هر نیمګروپ G ، د یوه ډیري M سیومتري نیمګروپ کی خوندي دی.
اوبی یا حل: د ثبوپ لپاره نیمګروپ G د ۳ . ۴ ، ۱۰ سره سم په یوه، د یوه اسوځیاتیو کړی R، په ځلیز ګروپ

(c) ketabton.com: The Digital Library

کی خوندې کوو، دا بیرته د ۳ . ۴ ، ۹ سره سم په یوه اسوشیاتویکړی R کی د یویتوکي سره خوندې کوو او د G سره یی په نخښه کوو، چی داد اخرنی کړی ځلیزه نیمګروپ دی. لکه څنګه، چی په G کی هم یو توکی 1 د $1.a \neq 1.b$ سره له $a \neq b$ څخه موجود دی، نو د لغاتو پورې د پورته جملی ثبوت سره دا سر خوري ، چی دا نیمګروپ G د نیمګروپ سره پخپله، په دې ډیرګ G باندې، ایزومورف خوندي دی. له دې څخه د سرچینیز ګروپ G خوندیونه لاس ته راځي.

مونږ غواړو، چی دې ته ګوته ونیسو، چی د یوه ګروپوئید (په ځانګړي توګه یو ه نیمګروپ) په بل ګروپوئید (یوه نیمګروپ) کي خوندیونه سیده وښایو، بی له دې، چی یوه کړی د یویتوکی سره وکاروو.

۳ . ۵ د نیمګرپونو په ګروپ کی او کړی په یوه (ناضرورکموتاتیو) تن یا بدن کی خوندیونه

هر نیمګروپ، ضروریه یوه ګروپ کی، ایزومورفف نه شی خوندي کیدی، د دې لپاره ضروري شرطونه هغه باید ورسره بلد د لنډونی قاعدې دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۵ . ۱ جمله: له $ac = bc$ او همداسې $ca = cb$ څخه لاس ته راځي $a = b$.

یادونه : دلته ګورو، چې د لنډونې قاعدې کارول شوي دي.

په لاندې برخه کې غواړو وښایو، دا راوړلشوي ضروري شر- طونه، چې د نیمګروپونو په ګروپونو همداسې د اسوشیاتیو کړۍ په یوه (ناسوکموتایتو) بدن کې د کموتایتو په حالت کې پوره کیدونکي هم دي.د دې لپاره د لاندې مرستندوي جملي په ښوونه پیل کوو.

۳ . ۵ . ۲ مرستندوي جمله: د ابل په یوه نیمګروپ G کې دې یو لاندې نیمګروپ S ورکړ شوی وي، او په G کې دې د S د توکو سره لنډونه وشي، دا په دې مانا، چې له

$$ax = bx \,,\ x \in S;\ a,b \in G$$

څخه دې تل $a = b$ لاس ته راشي. نو کیدی شي، چې G د ابل نیمګروپ ایزومورف په یوه داسې ابل ګروپ G کې د یویتوکي سره ، ایزومورف خوندې شي، چې د S هر توکی په G کې یو په څټ توکی ولري.

(۸) ناځوړ د کموتایتو

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه : د دې جملی له ثبوت څخه تیرېږو. دا د الجبر په درسی کتابونو کی کتل کیدی شي،

پهٔ دې پورته غوښتنو له مخی لاندې جمله لاس ته راځي

۳ . ۵ . ۳ جمله : هر ابل گروپ د لنډونو قاعدو سره په یوه ابل گروپ کي خوندې کیدی شي .
د دې ورکړ شوي جوړښت د طبیعي ګڼونو په یوه زیاتون نیمگروپ ، کوم چی د لنډونو قاعدو سره یو ابل نیمگر- وپ دی ، په ساده توګه د ټولګڼونو په زیاتونګروپ کی میندل کیدی شي ،

۳ . ۵ . ۴ جمله: په یوه اسوشیاتیو – کموتاتیو کړی R کی دې د توکو یو ډیری N راوستل شوی وي، په کوم کي چی صفر او پرصفرویشنه نه وي موجود. نو کیدی شي، چی کړی R ایزومورف په یوه اسوشیاتیو-کموتایتو کړی R کی، د یویتوکي سره، داسي خوندي شي، چی د N هر توکي په R کی یوه په څټ توکی ولري.

یادونه : دا ثبوت هم پریږدو او په دې توګه نورو غوښتنو ته هم پاي ورکوو، چی موضوع اوږده نه شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۶ نورمالپرویشونی

۳ . ۶ . ۱ تعریف : یو ګروپ G او په هغه کی دې توګه یو لاندېګروپ H دې ورکړ شـوي وي. که یوه a د G په خوښه توکی وي، نو ممکنه څلونی ah چی د aH ټولګه ده ، چیرته چی h په لاندې ګروپ H کی ځغلي، دا د a sah تعریف شوې، د ګروپ G کیڼ اړخیزڅنګ- ټولګی یا ګاونډی ټولګی (موږ به کوښښ وکړو چی دا تل ګاونډیټولګی وبولو) بلل کیږي و لاندې ګروپ H پسی. په څرګنده توګه $a \in aH$ دی، ځکه چی لاندېګروپ H یویتوکی لري.

د یوه توکی b لپاره دې، چی د ګاونډیټولګی aH څخه دی، تل باور ولري $bH = aH$ ، دا داسی بلللکیږي، چی د ګروپی G هر کیڼ اړخیز ګاونډیټولګی و H پسی د هغه د هر توکی سره تعریفیږي. که $b = aH , h \in H$ باور ولري، نو د په خوښه $h',h'' \in H$ لپاره باور لري:

$$bh' = a(hh') \quad \text{او} \quad a h'' = b(hh'')$$

پس $bH \subseteq aH$ او $aH \subseteq bH$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې سره هر دوه کینې اړخیز ګاونډیتوبولګي، یو د بل سره کټمټ دي او یا یې غوڅې تشډیرې دي.
موږ ددې سره د ګروپ G یوه ټوټونه یا تجزیه لاس ته راوړو، په لاندېګروپ H پسې، چې د یوه مخه یې کینې اړخیزو ګاونډیتوبولګیو یو له بل څخه پردې دي، دا ګروپ G کینې اړخیزه ټوټونه بلل کیږي په یوه لاندېګروپ H پسې. د دې ټوټوونو یاتجزیې یو ټولګی پخپله H دی: د $a \in H$ سره باور لري $aH = H$.

په ورته توګه د ګروپ G ښې اړخیزه ټوټونه یا تجزیه لاس ته راوړی شو، په یوه لاندېګروپ H پسې، کوم چې له ښې اړخیز ګانډېټولګی ha , $a \in G$ څخه جوړدی، که یو ګروپ کموتاتیو نه وي، نو کیدی شي، چې کینې ګاونډیتو-لګي او ښې ګاونډې ټولګی باندې د یوه ګروپ G ټوټونه د لاندېګروپ H پسې یو له بل توپیر ولري. په هر صورت دواړه ټوټونې د ټولګیو برابر ګڼون لري: څیرونه چې د G هرتوکی a د G په a^{-1} توکی څیره کوي، په څټکیدو-نکی یواځنی څیرونه ده، د ګروپ G په خپل ځان او کینې اړخیز aH ګاونډیتولګی په همغه ورته ښې اړخیز ګانډیتو-لګي Ha^{-1} څیره کوي او په څټ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۶ . ۳ تعریف: د ګروپ G ټوټونه په لاندېګروپ H پسي ، د ګاونډیو ټولګیو ګڼون په دې دواړو هر ټوټونو یا تجزیه کی ، که دا پاي وي، د لاندې ګروپ پیژند نخښه یا ایندکس Index، په ګروپ G کی بلل کیږي.

ګروپ G دې د n نظم پاي ګروپ وي او H دې د هغه لاندېګروپ وي، د k نظم او j پیژند نخښی یا ایندکس سره. هرګاونډټولګي aH د ټیك k توکو څخه جوړ دی او له دې امه باور ولري

$$n = k.j$$

له دې څخه لاندې جمله لاس ته راځی

۳ . ۶ . ۳ د لاګرانژ Lagramge جمله: د یوه په خوښه پای لاندېګروپ نظم او پیژندنخښه د ټول ګروپ د نظم پرویشوني دي.

دا جمله د ۳ . ۳ . ۴ سره سم لاس ته رکوي ، چی د پاي ګروپ د هر په خوښه توکی نظم همداسی د ګروپ نظم ویشي. د دې جملی بله پسی راتلنه ده:

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۶ . ۴ پسی راتلنه: هر د لمړي ګڼ نظم(لمړیګڼ هغه ګڼ دی ، چی پرویشوني یی ساده پرویشوني وي، یعنی پخپله دا ګروپ او یویتوکی) څیوکلیك یا په بل نوم، راګرځیدونکی دی.
دا باید د په خوښه د هغه توکي جوړه څیوکلیکي لاندی ګروپ سره سر وخوري، تر هغي چی دا توکی له ۱ څخه توپیر ولري.

۳ . ۶ . ۵ تعریف: یو لاندښنیمګروپ H د ګروپ G نورمالپرویشونی Nrmalteiler (یا اینواریانتي invariante Untergrupp لاندېګروپ) بلل کیږي، که د G کینڼ اړخیزه ټوټونه یا تجزیه د ښی خوا ټوټونی سره، نسبت و H ته، سر وخوري، دا په دې مانا، چی د هر a ∈ G لپاره (په G کی د دواړو برخېیریو یو بل سره د سر په سر خوړلو په موخه وي) مساوات

$$aH = Ha \qquad (1)$$

رامنځ ته کیږي. یا باوري کیږي. کیدی شي چی د لته د ګروپ G ټوټونی و H پسی د نورمالګروپ څخه وغږیږو.
په لاندې کی د نورمالپرویشونی یو بل تعریف ورکوو، چی

(c) ketabton.com: The Digital Library

دي همدا اوس ورکړشوي تعریف سره برابرارزښته دی.

۳ . ۶ . ۶ تعریف : په ګروپ G کی توکی x او y یو د بل سره کونجوګیري konjugiert **بلل کیږي**، که په G کی یو توکی a داسی پیداکیدي شي ، چی باور ولري

$$y = a^{-1}xa$$

داسی هم ویل کیږي، چی له y څخه د x سره ، د a ترانفورمیشن له لارې لاس ته راځي.

۳ . ۶ . ۷ جمله : د ګروپ G لاندې ګروپ H هلته او هلته په G کی نور مالپرویشونی دی، که H وهر توکی ته دده توکی په G کي ټول کونجوګیري توکی هم ولري.

اوبی : د دې لپاره دې H په G کی نورمالپرویشونی وي، او په ورزیات دې یا برسیره پر دې h د H په خوښه توکی وي. a دې د G یو په خوښه توکی وي، په H کی د (۱) پسی یا د (۱) له مخی یو توکی 'h د

$$ah' = ha \qquad (2)$$

سره موجود دی. پس دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a^{-1}ha = h' \in H \qquad (3)$$

او په څټ که د $h \in H$ په خوښه توکی لپاره او $a \in G$ په H کی یو توکي h' موجود وي، کوم چی برابرون (۳) پوره کړي او د دې پسی یا د دې په تعقیب(۲) پوره کړي، نو باور لري $aH \subseteq Ha$. که په دې رامنځ ته شوې اړیکی، چی د ټولو a لپاره رامنځ ته شوي یا باور لري، د a په ځای a^{-1} ولیکي ، نو و $a^{-1}H \subseteq Ha^{-1}$ ته راځي او همداسی $Ha \subseteq aH$.کوم چی د مخ ته تیر سره برابرون (۱) ورکوي.

۳ . ۶ . ۸ تعریف : دوه لاندېګروپونه U او V په G کی یو د بل سره کونجوګیرkonjugiert **بلل کیږي**، که یو داسی توکی $a \in G$ موجود وي، چی د هغه سره د ترانسفورمیشن له لارې لاندېګروپ U په لاندېګروپ V پریباسي، یعنی باور ولري

$$a^{-1}Ua = V$$

ډیري $a^{-1}Ua$ بی له دې هم د هر $a \in G$ لپاره د په خوښه یو (په ریښتونی U سره ایزومورف) لاندېګروپ سره تل بیرته یو لاندې ګروپ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د په خوښه توکو $u_1 , u_2 \in U$ لپاره لاندې اړیکی رامنځ ته کیږي

$$(a^{-1}u_1a)(a^{-1}u_2a) = a^{-1}(u_1u_2)a$$

او له

$$a^{-1}u_1a = a^{-1}u_2a$$

څخه برسیره پردي لاس ته راځي $u_1 = u_2$ ، د کوم سره چی څیرونه یا نظم $u \rightarrow a^{-1}ua$ د $u \in U$ سره، یو ایزومورف څیرونه د U په $a^{-1}Ua$ ده: aUa هم یو لاندېګروپ انځوروي.

۳ . ۶ . ۹ جمله :د یوه ګروپ G هر نورمالپرویشونی د ټولو خپلو په G کی کونجوګیر لاندېګرپونو سره یوځای پریوزی. په څټ: د ګروپ G یولاندې ګروپ H ټولي و H ته په G کی کونجوګیر لاندېګروپونه خوندي لري، نو له دې امله دا نورمالپرویشونی دی.

له (۱) څخه په لمړی وار لاس ته راځي

$$a^{-1}Ha = H \qquad (4)$$

کوم چی د جملی لمړی برخه ثبوتوي. اوس نو باور لري

$$a^{-1}Ha \subset H$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اصلي خونديلرنی په موخه. دا رات راکوي

$$H \subset aHa = (a^{-1})^{-1}Ha^{-1}$$

او د H لاندې ګروپ باید، که هغه ټولی و هغی ته کونجو-
ګير خونديي ولري، د دې توافق يا يو په بل سرخوړنی سره .
د په خوښه توکي $a \in G$ لپاره له دې امله (۴) رامنځ ته
کيږي، له کوم چې (۱) رابيليدلی شي.

۳ . ۶ . ۱۰ جمله: د يوه ګروپ G د په خوښه نومالپرو-
يشونو ډيريو غوڅی ، بيرته نومال پرويشونی دي.

اوبی : که D د A_i , $i \in I$ غوڅی وي ، نو په هرترتيب D
د G لاندې ګروپ انځوروي. (پرتله ۳ . ۳ . ۶) برسيره پر
دې د هر توکی ، چی يوه د D توکي سره کونجوګير وي،
په ټولو A_i کی پروت دی او په دې پسی لاس ته راځي، چی
په غوڅ کی هم پروت دی.

۳ . ۶ . ۱۱ جمله :د يوه ګروپ G په خوښه نورمالپرو-
يشونو سيستم څخه توليد يا راپيداشوي لاندېګروپ(پرتله
۲ . ۳ . ۸) په همدې حالت کی د G يو نومرمالپرويشونی
دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

ورکړ شوی دي نورمالپرویشونی $A_i\ ,\ i \in I$ وي او د هغه څخه جوړ شوي یا تولید شوی د لاندې ګروپ B وی لکه په ۳ . ۳ . ۷ کی ښوول شوي وو، هر د B توکی b په لاندې بڼه لیکل کیدی شي

$$b = a_1a_2...a_n$$

د ورکړ شوي $a_j \in A_j\ ,\ j = 1,2,...,n$ سره . له G څخه په خوښه توکي g لپاره باور لري

$$g^{-1}bg = (g^{-1}a_1g)(g^{-1}a_2g)...(g^{-1}a_ng)$$

او دا چی

$$g^{-1}a_jg \in A_j \quad ,\ j=1,2,...,n$$

دی ، نو لاس ته راځي

$$g^{-1}bg \in B$$

۶ . د ابلګروپ ټول لاندې ګروپونه د هغی خپل نورمالپر- ویشونی دي. په دې ورزیات یا برسیره پر دې په هر ګروپ G کی یوونګروپ E د نورمالپرویشونی په څیر موجود دی او په همدې توګه پخپله ګروپ G هم.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۱۲.۶ تعریف : یو ګروپ ، چې نورمال پرویشونی یې یواځې یوونګروپ او **پخپله خپل ځان وي، ساده بلل کیږي.**

۳ . ۱۳.۶ جمله : یواځني ساده ابل ګروپونه، هغه څیو- کلیکي ګروپونه دي، چې نظم یې پریمګڼ یا لمړی ګڼ وي.

اوبې : که یو ابل - یا کموتاتیو ګروپ ساده وي، نودا بیخي ناساده یا نااصلي لاندې ګروپ نه لري: دا چې په دې کې څیوکلیکي لاندې ګرپونه باید خوندې وي، نو دا پخپله څیوکلیکي دی. یو ناپاي څیوکلیکي لاندې ګروپ نااصلي یا ساده لاندېګروپونه لري، په کوم چې د ټولګڼونو زیاتون- ګروپ دی ، په هغه کې چې د جفت ګڼونو ګروپ په ځان کې دننه یا خوندي لري. که یو پای څیوکلیکي ګروپ $G = \{a\}$ راواخلو چې نظم یې n دی، نو د ټوټونی n له لارې څخه لرو $n = kl$ ، چې لاندې ګروپ $\{a^k\}$ نظم l او په دې لاس ته راوړنی سره د E او G څخه توپیر لري.
د دې په څټ: ګروپ $G=\{a\}$ کیدی شي چې هیڅ ناساده لاندېګروپ ولري، که نظم یې یو پریمګڼ یا لمړی ګڼ وي. چې د لاګرانژ له جملې څخه ساده په لاس راتلی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه: دا موضوع دلته رالنډوم او داسی نور ې په دې هکله موضوعګاني په خارجي ژبو درسی کتابونو کی شته، چی هلته کتل کیدی شي، دلته به زیات وخت او ځاي ونیسی. زما هڅه هم دا ده، چی د زیاتو شیانو سره په دا لمړي کی داسی لږ غوندې بلد شو.

۳ . ۷ ایدیال او پاتي ټولګیکړی

Ideal und Restklassenring

یادونه: ی ما دا پاتیټولګیکړی بللی، چی یو نوم وي، خو دا کیدی شي، چی د پاتیټولګی کړی هم وبلل شي. د نومونو په هکله ستونځي به منو، تر څو، چی ځموږ په هیواد کي شمیرپوهنی خپله لار نیولي وي.

په دې برخه کی ګورو، چی د نورمالپرویشونی په ځاي د ایدیال کلیمه رامنځ ته کیږي.
په دې برخه کي R تل یوه کموتاتیوه کړی د یوښتوکی ۱ سره په نخښنه کوي یا ښايي. اوس د یوې کړی د « ایدیال»کلیمه پیل کیږي. لاس ته راځی، چی د R هر ایدیال Y په R باندې

(c) ketabton.com: The Digital Library

یو ایکویوالنت یا ورته ټولګی ~ تعریفوي. د دې سره ښوول کیږي، چې د هر $r \in R$ کړیتوکی اړونده ایکویوالنتټولګي $[r]$ بیرته یوه کړی R / Y جوړوي.

۳ . ۷ . ۱ تعریف : د کړی R یو ناتش برخډیری Y یو ایدایال دی، که Y د زیاتونګروپ $(R, +)$ یو لاندې ګروپ وي او د ټولو $y \in Y$ او $r \in R$ لپاره باور ولري $yr \in Y$.
دا د R ایدیال Y اصلي ایدایل بلل کیږي که $R \neq Y$ وي .

۳ . ۷ . ۲ بیلګی:

الف) دا د R یواځي د صفرتوکی څخه جوړ برخډیری $\{0\}$ د R یو ایدیال دی، دا صفرایدیال دی او له همدا اوسه به په 0 سره په نخښنه شي.

ب) که $R = Z$ د ټولګښونو کړی وي، نو ډیری Y د ټولو جوړه ګڼونو $Y = 2z$ د $z \in Z$ سره جوړ ډیری د Z یو ایدیال دی. د دوه جوړه ګڼونو زیاتون او کمون تل یو جوړه ګڼ دی، او برسیره پر دې yz د ټولو $y \in Y$ لپاره او د ټولو $z \in Z$ لپاره یو جوړه ګڼ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پ) که $R = F$ یو بدن وي، نو 0 او F د R یواځنی ایدیالونه دي.

۳ . ۷ . ۳ تعریف: د R یو ایدیال Y اصلي ایدیال بلل کیږي، که $Y = yR$ وي، د یوه $y \in Y$ لپاره، دا په دې مانا چې یو $y \in Y$ داسې موجود دی، چې د هر $z \in R$ لپاره یو $r \in R$ د $z = ry$ سره موجود وي. داسې هم ویل کیدی شي : چې دا توکی y ایدیال Y جوړوي یا تولیدوي او یا y د Y جوړوونکي یا تولیدوونکی دی.

۳ . ۷ . ۴ تعریف: Y دې د R یو ایدیال وي. نو دوه توکی $r, s \in R$ و Y ته ایکویوالنت یا ورته بلل کیږي، که باور ولري : $r - s \in Y$

په نخښوونه یی : $s \sim r$ یا $r \sim s$.

دا په ساده توګه لیدل کیږي، چې $\sim$ په R باندې یو ایکوبوالنځ اړیکه یا ورته اړیکه ده.

۳ . ۷ . ۵ مرستندوي جمله: Y دې د R یو ایدیال وي د $R =| Y$ سره او R / Y دې د R له توکو r څخه جوړ، د ورته ټولګیو $[r] = \{ s \in R \mid s \sim r \}$ ډیری وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو R / Y به د زیاتون $[r_1] + [r_2]$ او ځل $[r_1] . [r_2]$ سره د ټولو $r_1 , r_2 \in R$ لپاره یوه کړی‌وي د یوې توکی [1] سره .

اوبی: لکه د مخه مو چی ګوته ورته ونیوله ورته ټولګی $[r] , r \in R$ ډیری R په پردیو برخه‌یریو باندې ټوټه یا تجزیه کوي. وي دې

$$[r_1] , [r_2] \in R / Y ,$$

نو دا باید وښوول شي، چی زیاتون

$$[r_1] + [r_2] = [r_1 + r_2]$$

او ځل

$$[r_1] . [r_2] = [r_1 . r_2]$$

د هغو د نماینده توکو څخه خپلواك ایکیوالنځټولګي یا ورته ټولګي دي. که $s_1 , s_2 \in R$ نور د ټولګي $[r_1]$ او همدا ډول د ټولګی $[r_2]$ نماینده ګان وي نو $r - s = y \in Y$ هم دي، د ټولو $i = 1 , 2$ لپاره، د کوم څخه چی لومړی

$$\begin{aligned} [r_1 + r_2] - [s_1 + s_2] &= [r_1 + r_2 - s_1 - s_2] = \\ &= [(r_1 - s_1) + (r_2 - s_2)] \\ &= [y_1 - y_2] = [0] \in R / Y \end{aligned}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاس ته راځي. له دې امله زياتون + کره تعريف دی او [0] د ابل د ګروپ R / Y يو صفرتوکی دی و تړنی يا نښلونی يا عمليي + ته.
په R / Y باندې ځل . هم کره تعريف دی ځکه چی

$$\begin{aligned} r_1r_2 - s_1s_2 &= (s_1 + y_1)(s_2 + y_2) - s_1s_2 \\ &= s_1s_2 + y_1s_2 + s_1y_2 + y_1y_2 - s_1s_2 \\ &= y_1s_2 + s_1y_2 + y_1y_2 \in Y \end{aligned}$$

له کوم چی $[r_1][r_2] = [r_1r_2] = [s_1s_2] = [s_1][s_2]$ لاس ته راځي. سړی په دې پسی تړلی په دې باور راوړی شي، چی R / Y (د کړی د تعريف سره سم) يوه کړی ده د يوي توکی [1] سره.

۳ . ۷ . ۶ تعريف : دا کړی R / Y د R يو د پاتی- ټولګيو کړی و ايډيال Y ته بلل کيږي.

۳ . ۷ . ۷ تعريف : د کړی R يو ايډيال M ماکزيمال ايډيال بلل کيږي، که M ≠ R باور ولري او Y، د R يو بل ايډيال، موجود نه وي د $M \subset Y \subset R$ سره.

۳ . ۷ . ۸ جمله: R دې يوه کموتاتيوه کړی وي،

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $1 \in R$ سره، نو باور لري:

الف) د R هر اصلي ایدال Y په یوه ماکزیمال ایدیال کي خوندي دی.

ب) که M د R یو ماکزیمال ایدیال وي، نو د پاتیټولګی کړی $F = R / Y$ یو بدن یا تن دی.

اوبې:

الف) دا چی Y د R یو اصلي ایدیال دی، نو $1 \notin Y$ دی.

$$Y \subseteq y_1 \subseteq y_2 \subseteq \dots \subseteq Y$$

دې د کړی R د ایدیالونو Y_i یو جګیدونکی ځنځیر وي د $1 \notin Y_i$ سره.، چیرته چي $i \in I$ او I یو اندکس ډیری یا پیژندډیری دی. وي دې $W = \bigcup_{i \in I} Y_i$ ، نو $u, v \in W$، د $i \in I$ سره موجود دی د $u, v \in Y_i$ سره، ځکه چی ایدیال Y_i یو ځنځیر جوړوي. نو لرو $u - v \in Y_i \subseteq W$، همدا ډول $ur \in W$ لاس ته راځي، د ټولو $u \in W$ لپاره او $r \in R$. له دې امله W د R یو ایدیال دی، او $1 \notin W$ دی. نود کړی R د ټولو Z ایدیالونو ډیری M د $Y \subseteq Z$ سره، او $1 \notin Z$ سره، د څورن لیما پسی یو ماکزیمالتوکی M لري. داچی هر اصلي لوي ایدیال $M' > M$ دا یویتوکي 1

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لري او له دې امله $M' = R$ باور لري، نو لاس ته ترې اځي ،
چې M د R يو ماكزيمال ايديال دی. دا Y خوندي لري.
ب) وي دې $[r] \neq [0]$. نو $M + rR$ د R يو ايديال دی،
كوم چې M اصلي خوندې لري. دا چې M د R يو
ماكزيمال ايديال دی، نو باور لري

$$R = M + rR$$

پس د R يوی په $M + rR$ كې پروت دی، دا په دې مانا
چې $1 = m + rs$ د توكو $m \in M$ او $s \in R$ لپاره باور لري.
له دې امله $[r][s] = [1] \in R/M$ دی.
او له دې سره $[s] = [r]^{-1}$ دی.
نو پاتی ټولګی كړی يو بدن يا تن دی. ځ چ د ښ و

۳ . ۷ . ۹ بېلګې

اول : د ټولګڼونو Z په كړی كېY د ټولو جفتو ګڼونو ډيری
ماكزيمال ايديال دی. پاتيټولګي بدن Z/Y يې د دواړو
پاتيټولګيو $[0]$ او $[1]$ څخه جوړ دی. دا نو له دې امله
دوه توكی لري او د $Z/2Z$ سره په نخښنه كيږي.
دوم : په پولينومكړی $R = F[X]$ كې په بدن يا تن F باندې
د نا ټاكلی يا مجهولی X سره $Y = \{ X f(X) \mid f(X) \in R \}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یو ماکزیمال ایدیال دی د پاتی ټولګیتن $R / Y \sim F$ سره د مخ ته تیر تعریف له مخی، ځکه چی دی

$$f(X) = f_0 + f_1X + ... + f_nX^n \in R$$

نو $[f] = [f(X)]$ په R / Y کي پروت دی. د مرستندوي جملی۳ . ۷ . ۵ له مخی دا څیرونه $[f_0] \to f_0 \in F$ د بدنونو یا تنونو R / Y او F ترمنځ یو ایزومورفیزم دی.

۳ . ۷ . ۱۰ تعریف: د کموتاتیو کړی R د یویتوکي 1 سره یو توکي u یوون بلل کیږي، که یو $v \in R$ څخه موجود وي د $uv = 1$ سره.

۳ . ۷ . ۱۱ جمله : د یوه توکي $u \in R$ لاندې خویونه ایکویوالنت یا ورته دي

الف) u د R یو یوون دی.

ب) R د u څخه جوړ شوی یا تولید شوی اصلي ایدیال دی ، دا په دې مانا چی $uR = R$.

پ) u د R په هیڅ ماکزیما ایدیال کي خوندي دی یا په بل ډول : په کوم ماکزیمال ایدیالکی خوندي نه دی).

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ثبوت یا اوبې: پ) په ساده توګه له ب) څخه لاس ته راځي.
که u د R په کوم ماکزیمال ایدیال کی خوندي نه وي، نو د جملي ۳ . ۷ . ۸ له مخې اصلي ایدیال نه دی.
پس لرو $R = uR$ او $1 = uv$ د یو $v \in R$ لپاره، که چیرې الف ښوول شوی وي. دا ایمپلیکیشن $(b) \Leftarrow (a)$ ساده دی. څ چ ښ و (څه چی د ښوولو وو)

۳ . ۷ . ۱۲ تعریف: د کړی R یو ناتش برخه‌یری U لاندېکړی بلل کیږي، که د ټولو $u_1, u_2 \in U$ لپاره هم $u_1 - u_2 \in U$ او هم $u_1 u_2 \in R$ باور ولري.

۳ . ۷ . ۱۳ بیلګې:

الف) د R هر ایدیال Y د R یو لاندې کړی ده.

ب) Z د Q یو لاندېګروپ دی، مګر د Q ایدیال نه دی.

پ) د Z د ټولو جفتو ګڼونو ډیری Y د Z لاندې کړی ده. په ځانګړې توګه دا Y داسی لاندې کړی ده، کومه چی یویتوکی نه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چې په ټولیزه توګه یوه لاندېکړی U یویتوکی نه لري، نو ضرور دا ده چې د لاندیکړی د « ایدیال» کلیمه رامنځ ته کړو.

۳ . ۷ . ۱۴ تعریف : U دې د R یوه لاندي کړی وي. د U دا ناتشهیری Y د لاندې کړی U یو ایدیال دی، که د ټولو $y_1 , y_2 \in Y$ لپاره $y_1 - y_2 \in Y$ وي او که $yu \in Y$ د ټولو $y \in Y$ او ټولو $u \in U$ لپاره باور ولري.

۳ . ۷ . ۱۵ لاسته راوړنې: U دې د R یوه لاندېکړی وي او Y دې د کړی R یو ایدیال وي. نو باور لري:

الف) $Y_1 = U \cap Y$ د U یو ایدیال دی

ب) $U + Y = \{ r \in R \mid r = u + r$
د ټولو $u \in U$ او یوه $y \in Y$ لپاره$\}$
یوه د لاندېکړی ده.

پ) $(U + Y) / Y$ د پاتیټولګیکړی R / Y ، لاندېکړی ده.

ت) د R / Y د هر لاندېکړی T لپاره

$$T^{-} = \{ r \in R \mid r[r] \in T \}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د R لاندې کړی ده.

ټ) د R/Y د هر ایدیال I لپاره

$$I^{-} = \{ r \in R \mid [r] \in I \}$$

د R یو ایدیال دی، د $Y \subseteq I^{-}$ او $I^{-}/Y = I$ سره.

اوبی: الف) د تعریف ۳ . ۷ . ۱۲ او تعریف ۳ . ۷ . ۱۴
څخه ترلی لاس ته راځي

ب) $r_1 = u_1 + y_1 ,\ r_2 = u_2 + y_2 \in U + Y$ دي،
د $u \in U$ او $y \in Y$ سره، نو لرو

$$r_1 - r_2 = (u_1 - u_2) - (y_1 - y_2) \in U + Y$$

دا چې Y د R یو ایدیال دی نو دا لاندې هم لرو:

$$\begin{aligned} r_1 . r_2 &= (u_1 + y_1)(u_2 + y_2) \\ &= u_1u_2 + (y_1u_2 + u_1y_2 + y_1y_2) \in U + Y \end{aligned}$$

دا نورې ساده د پ) ، ت) او ټ) اوبیونی د کورکار دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۴ د بول الجبر ، سرکیټ الجبر

۴ . ۱ د بول د الجبر سټکلیمی

په برخه ۱ کی مو د ډیري M برخډیریو ترمنځ تړونونه یا عملی ولوستلی. په دې عملیو کی، که چیرته د ډیري M برخډیریو ترمنځ دوه ځایز اپریشنونه یا کارونی (د ډیریو تړنی) غوڅی ، ټولنه او همداسی کمپلیمنت جوړونه په پوتنځ یا تواندیري باندې یوه «جوړښت» ته سره راټولګه کړي، نو هغه «جوړښت» چی لاس ته راځي، د ډیري M د برخډیریو بول الجبر بلل کیږي. په دې جوړښت کی تشډیری Ø او ټولډیری M یو راوتلی یا کره راوتلی رول لوبوي. د تړونو لپاره مو د مخه په برخه ۱ کی یوه لړی شمیرقوانین کره کړل او په لیست کی مو راوستل.دا ډول شمیرنی د پوره بل ډول شمیرپوهنیزو شیانو لپاره هم باور لري یا کارول کیږي. دا ګټور دی، چی دا ډول شمیرقاعدې لمړی په دې لاس ته راغلی پرپریکندنی یا پریکړي یا لاس ته راغلي نتیجی په عمومی توګه تر څېړنی لاندې ونیول شي. « ټولیز» دلته په دې مانا

(c) ketabton.com: The Digital Library

دی، چی د عملیي په ډول نه پیچوْبلکه په هغو توکو، د کومو لپاره چي دا عملیي باور لري. له دې څخه مخ ته ځو، چی د شیانو یو ډیری مو مخ ته پروت دی د کومو لپاره چي عملیی روښانه یا تشریح دی یا کره شوي دي(یعنی چی یو بل سره « تړلکیدی» شي، د کومو سره چی شمیرنه ممکن وي)، او د دې عملیو سره شمیرنی له لارې، هغه تر څیړنی لاندې نیولي شمیرقوانین باور ولري. له دې څخه په فورمال توګه لاندې تعریف لاس ته راځي. دلته یو دوه ځایزه عملیه یا کارونه یا اپریشن یو تړون یا تړنه ده یو «شمیرقاعده» ده د کوم له مخی، چی له دوه توکو څخه یو دریم توکی لاس ته راځي. (د بیلګي په توګه په ګڼونو کي زیاتون یا ځل). یو یوځایزه عملیه له هر توکی څخه یو ټاکلی بل توکی جوړوي (لکه مربع یا د کوم ګڼ ریښه یا بهتره ریښه ویستنه).

۴ . ۱ . ۱ تعریف : د بول الجبر د هغو توکو یو ډیری دی ، د کومو لپاره چی دوه دوه ځایزې نخښلونی یا اپریشنونه (عملیي)،غوڅی $\cap$ ، ټولنه $\cup$ او یوه یوځایزه عملیه ' کارول کیږي او په هغو کی دوه توکی 0 (په صفر یی په نخښه کوو) او 1 (په یوې باندې په نخښه کیږي) داسی راوتلي یا غوره شوي وي، چی د M د ټولو توکو a , b , c

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره لاندې اړيکې باور لري:

۱ - اسوشياتيو قانون د $\cap$ او $\cup$ لپاره

$$(a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c)$$
$$(a \cup b) \cup c = a \cup (b \cup c)$$

۲ - کموتاتيو قانون د $\cap$ او $\cup$ لپاره

$$a \cap b = b \cap a$$
$$a \cup b = b \cup a$$

۳ - رازغمني يا راکښنی يا جذب قانونونه

$$a \cap (b \cup c) = a$$
$$a \cup (b \cap c) = a$$

۴ - ديستريبوتيو قانون

$$a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c)$$
$$a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c)$$

۵ - د صفر او يوې خويونه

$$a \cup 0 = a \;,\; a \cap 0 = 0$$
$$a \cup 1 = 1 \;,\; a \cap 1 = 1$$

۶ - د کمپليمنت يا پوره کيدونکی خويونه

$$a \cup \acute{a} = 1 \;,\; a \cap \acute{a} = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا اړیکي د بول د الجبر اکسیومونه هم بلل کیږي (د اکسیوم تعریف څما د شمیرپوهني کتاب کی ورکړ شوی دی) . موږ تر یوې اندازې زیات اکسیومونه ورکړل، څکه چی برخسیستمونه شته ، له کومو چی بیا دا نور اکسیو- مونه لاس ته راتللی شي.
په دې برخه کی ددې مینیمالسیستمونو کارونی یا استعمال باندې ځانونه نه مشغولوو، همدومره دلته مهم دی، چی ټول شمیر قوانین باور ولري.

که د توان یا پوتنځ ډیری P(M) په پام کی ونیول شي، د هغه د غوځي ∩ (انګریزي meet)، ټولنه ∪ (join) او کملپلیمنت جوړونی سره او $\varnothing = 0$, $M = 1$ سره نو دا د ∩ پورته تعریف سره سم یو د بول الجبر جوړوي. دا کارول شوي سومبولونه یوونیز یا واحد نورم ته نه دي راوړل شوي. د ∩ لپاره ∧ هم کارول کیږي او د ∪ په ځاي ∨ او د á په ځاي $\bar{a}$ هم کارول کیږي.

۴ . ۱ . ۲ بیلګه : یو د بول الجبر باید تل یو صفر 0 او یو1 (یوی) خوندې ولري. داکیدی شي ، چی یواځي د 0 او 1 څخه جوړ وي، چی دا یی د بول ساده الجبر دی. وي

(c) ketabton.com: The Digital Library

دي 0 او 1 کوم په خوښه سومبولونه. نو په $B=\{0,1\}$ باندي عمليي $\cup,\cap,'$ په لاندې ډول تشريح کيږي:

$$0\cap 0=0,\quad 0\cap 1=0,\quad 1\cap 0=0,\ 1\cap 1=1$$
$$0\cup 0=0,\quad 0\cup 1=1,\quad 1\cup 0=1,\ 1\cup 1=1$$
$$0'=1\quad ,1'=0$$

دلته په ساده توګه د بول د الجبر قوانين ازمايل کيدی شي. له دې سره نو جوړښت يا سترکچر $(B,\cap,\cup,')$ يو د بول الجبر دی د دوه توکو سره .

د بول الجبر راوړل شوو اکسيومونو ته يو بل مهم خوي رامنځ ته کيږي: که په همغه وخت کي اکسيومونه $\cup$ د $\cap$ سره او $\cap$ د $\cup$ سره او 0 د 1 سره بدل شي، په دې ګروپ کی هغه بل اکسيوم لاس ته راځي . وايو: په ګروپ کی ورکړ شوي اکسيو- مونه يو بل ته دوال Dual يا دوه ګونی دي.
د بول الجبر هر خوي کيدی شي ، چی له اکسيومونوڅخه لاس ته راوړل شي، او د بول الجبر د هرې وينا څخه کيديشي چی نومولي بدلونونه رامنځ ته شي، دا په دې مانا ، چی دوه ګونی وينا وې جوړې شي. « وينا دوګونی کيدنه ».دلته يوه ريښتيا وينا بيرته ريښتيا («د بول د الجبر يوه جمله ») وينا باندي

(c) ketabton.com: The Digital Library

بدليږي، ځکه چې د سيستم دوه ګونوالی ساتلی پاتی کيږي.
دا د بول د الجبرد دوه ګونی پرينځيپ متن دی: د هرې جملی د ثبوت سره د هغی جملی دوه ګونی هم ثبوت ده.

د بول د الجبر خويونه دې ورکړ شي او په حقيقت کي . د اکسيومونو څخه د لاس ته راوړنو په څير .

۱ – باور لري $a = a \cap a$ او $a = a \cup a$ د بول د الجبر ټولو توکو a لپاره

اوبی: دی

$$a = a \cap 1 = a \cap (a \cup a') = (a \cap a) \cup (a \cap a') = (a \cap a) \cup 0 = a \cap a$$

د $a = a \cup a$ لپاره ښوونه د دوه ګونوالی څخه لاس ته راځي .

۲ – د a کمپليمنت 'a د ورکړ شوو خويونو سره يواځنی ټاکلی دی، دا په دې ماناچي باور لري $a \cap c = 0$ او $a \cup c = a$ نو دی $c = a'$.

اوبي: لمړی دی

$$a' = 0 \cup a' = (a \cap c) \cup a' = (a \cup a') \cap (c \cup a') = c \cup a'$$

او د دې سره دوه ګوني هم $a' = c \cap a'$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې امله

$$a' = c \cap a' = c \cap (c \cup a') = c$$

دی . څه چی د ښوولو وو (لنډ: خ ښ وو).

۳ – صفر 0 او یوی 1 په بول الجبر کی یواځني ټاکلي دي، دا په دې مانا چی دا یواځني تو کی دي، د هغو خویونو سره، چی په ټکی ۵ کی ورکړ شوي دي.

اوبی : د یوه توکی n لپاره دې د بول د الجبر د ټولو توکوa لپاره باور ولري $a \cup n = a$ او $a \cap n = n$. که د $a = 0$ لپاره کیږدو، نو لاس ته راځي $0 \cup n = 0$،له بلی خوا هم $0 \cup n = 0$ او له دې امله $n = 0$ دی. د 1 لپاره اوبیونه د دوه ګونوالی څخه لاس ته راځي.

۴ – باور لري $(a')' = a$ د ټولو توکو a لپاره. دا له $a' \cap a = 0$ او $a' \cup a = 1$ څخه لاس ته راځي او د کمپلیمنت د یواځنوالی څخه.

۵ – د دې مورګان De Morgan قانون

$$(a \cup b)' = a' \cap b' \quad \text{او} \quad (a \cap b)' = a' \cup b'$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ثبوت : د دوه کونپرینځپ له لارې بسیا کوي، که یواځي یوه له دې دوه ګونو ویناو څخه وښایو. دبیلګي په توګه کینه.

د دې لپاره لاندې شمیرقوانین کاروو:

$$(a \cup b) \cup (a' \cap b') = ((a \cup b) \cup a') \cap ((a \cup b) \cup b') =$$

$$= ((a \cup a') \cup b') \cap (a \cup (b \cup b') = 1 \cap 1 = 1$$

او

$$(a \cup b) \cap (a' \cap b') = (a \cap (a' \cap b')) \cup (b \cap (a' \cap b')) =$$

$$= ((a \cap a') \cap b') \cup ((b \cap b') \cap a') = 0 \cup 0 = 0$$

د دواړو مساواتځنځیرڅخه په ګډه لاس ته راځي،

چې $a' \cap b'$ د $a \cup b$ کمپلیمنټ دی.

۶ – د اسوځیاتیو و کموتاتیو قوانینو او له

$$a = a \cup a = a \cap a$$

څخه لاس ته راځي: د غوځي (ټولنی) جوړولو نتیجه

په یوه توکو پای ډیرې کی، د لړیپرلپسی څخه خپلواک دی او له دې هم خپلواک دی ، چی یو توکي یواځي یوځل او که یا زیات رامنځ ته کیږي. زیاتون نخښې ته ورته لیکل کیږي: $\bigcap_{i=1} a_i$ همداسی د $\bigcup_{i=1} a_i$

د ټولو $a_1 \cup a_2 \cup \ldots \cup a_n$ لپاره، همداسی

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $a_1 \cup a_2 \cup \ldots \cup a_n$ لپاره.

۷ - دیستریبوتیو قانون هم ټولیز کیدی شي او په رینښتونی داسی

$$\left(\bigcup_{i\in I} a_i\right)\cap\left(\bigcup_{j\in J} b_j\right) = \bigcup_{i\in I, j\in J}(a_i \cap b_j)$$

او

$$\left(\bigcap_{i\in I} a_i\right)\cup\left(\bigcap_{j\in J} b_j\right) = \bigcap_{i\in I, j\in J}(a_i \cup b_j)$$

چیرته چی I او J پاي ایندکسډیري (پیژندډیري) دي

۸ - له $a\cap x = a\cap y$ او $a\cup x = a\cup y$ لاس ته راځی $x = y$

ښوونه : باور لري

$$x = x\cap(x\cup a) = x\cap(y\cup a) = (x\cap y)\cup(x\cap a) =$$
$$(x\cap y)\cup(y\cap a) = y\cap(x\cup a) = y\cap(y\cup a) = y$$

پای.

موږ دلته د بول الجبر ، لکه چی په پیل کی وویل شو، د یوه ذهني نظر له لارې تر څیړنی لاندې نیسو، په دې کی چی موږ د توکو په ډول (چی څه شی دی) کی خپله علاقه نه ګورو، بلکه یوائې دا علاقه لرو، چی له دې توکو سره څنګه شمیرنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

کیدی شي. له دې امله د بول الجبرونو M_1 او M_2 ترمنځ یو بییکتیوه ځیرونه داسی موجوده ده، چی د M_1 دوه توکو ټولنه (غوڅی) د تنظیم شوو توکو ټولنه (غوڅي) تنظیم دي، او د هر توکي کمپلیمنت د ورسره تنظیم شوي توکی کمپلیمنت دی، نو په دې توګه کیدی شي ، چی دواړه الجبرونه «سوچه شمیریز» مساوي و لیدل شي. یو داسی بییکتیو ځیرونه $f : M_1 \longrightarrow M_2$ لکه د مخه مو چی هم ګوته ورته نیولی ایزمورفیزم Isomorphismus نومیږي او دا راوړل شوي شرایط لنډ په لاندې ډول دي. د ټولو $a , b \in M_1$ لپاره باور لري:

$$f(a \cap b) = f(a) \cap f(b)$$
$$f(a \cup b) = f(a) \cup f(b)$$
$$f(a') = f(a)'$$

د دې سره په کیڼ لور '، $\cup$، $\cap$ د M_1 عملیي او په ښي لور د M_2 عملیي. نخښلونی یا کارونی دي.

د نور الجبرونو په څېر یا خلاف کیدی شي، چی په ټولو (پای) د بول الجبرونو باندې په ساده توګه یو د یوه پام یا نظر امکانات برابر شي. د داسي یوه پاملرنی ته دوه د بول الجبرونه باید برابر وکتل شي، که د دوي ترمنځ یو ایزومور-

(c) ketabton.com: The Digital Library

فیزم موجود وي، یعنی که دا ایزمورف وي. دا لاندې مهمه جمله باور لري، چی ثبوت لپاره یی په لیو (LIU 1977) حواله ورکوو .

۴ . ۱ . ۳ جمله : هر یو د بول الجبر د یوه پاي ډیري M د برخډیریو څخه جوړ د بول د الجبر سره ایزومورف دی . په ځانګړي توګه د یوه پای بول د الجبر توکو ګڼون تل د 2^n فورم یا ډول دی ، او هر دوه پاي د بول الجبرونه د برابر ډیرو توکو سره یو د بل سره ایزومورف دي.

که څه هم موږ د پاي بول الجبرونو سره سر او کار لرو، دا باید په ګوته شی، چی په پورته جمله کی ورکړ شوي خویونه یا کرکتریي د ناپای ډیرو توکو ډیري لپاره باور نه لري . ناپای ډیر د بول الجبرونه شته، کوم چی د ډیري د ټولو برخډیریو د الجبر سره ایزومورف نه دي. د دې لپاره چی ټولی ناپای ډیر د بول الجبرونه کرکتریزه کړی شو، لاندې کلیمو ته اړ یو. M دې یو ډیری وي. یو سیستم K د M برخډیریو ډیریبدن یا ډیریتن بلل کیږي، که K د A, B سره $A\cap B$, $A\cup B$ او' $A\cap B$ هم خوندې ولري. د بیلګي په توګه ټول د تواندیری ډیریتن دی. K دې د

(c) ketabton.com: The Digital Library

ډیري M برخهٔیریو یو ډیریتن وي، د $M \in K$ سره.
په K باندې کیدی شي بیا یو بول الجبر توضیح شي، په کوم کي چی ∪ د ټولنی ،∩د غوځی ، تشډیری Ø د صفر ، یو ډیری M د یوې ډیری، 'A د $A \in K$ کمپلیمنت $M - A$ سره نیسی ، یعني دا ډیري تیوریتیکي کومپلیمنت. داسی یو الجبر ډیریبدن الجبر هم بلل کیږي او په ټولیزه توګه د M هر برخهٔیری خوندې نه لري. اوس دا لاندې جمله باور لري، چی د ثبوت لپاره دې
GRÄTZER(1977) وکتل شي.

۴ . ۱ . ۴ جمله : (د ستون Stone جمله) هر د بول الجبر د ډیریتن الجبر سره ایزومورف دی.

د بول د الجبر کرکتریزه کولو سره په اړوند ، کیدی شي چی د بول د الجبر سیده ځل ګتور وکارول شي یا استعمال شي.

۴ . ۱ . ۵ تعریف : V او W دې دوه د بول الجبرونه وي، چی د هغی بنستیز ډیري هم په V او W سره په نخښه کوو. نو دا د V او W سیده ځل $V \times W$ د بول الجبر دی د ټولو منظمو جوړو (v,w) په ډیري، چی $v \in V$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او $w \in W$ وي، د لاندي عمليو سره

$$(v,w)\cap(v_1,w_1) = (v\cap v_1, w\cap w_1)$$
$$(v,w)\cup(v_1,w_1) = (v\cup v_1, w\cup w_1)$$
$$(v,w)' = (v',w')$$

او د صفر توکی (0,0) او د يوي توکي (1,1) سره، چی د V او W همغه مساوي توکي دي.

د دې ښوونه دې د ګرانو لوستونکو دنده وي، چی وښايي، چی سيده ځل V×W په رېښتيا دبول الجبر دی.

اوس دې B د بول الجبر وي په دوه توکو باندې، يعني B = {0,1} د ترونونو

$$0\cap 0=0\,,\quad 0\cup 1 =1\,,\quad 1\cup 1=1$$
$$1\cap 1=1\,,\ 1'=0\,,\ 0'=1$$

سره. د B^n لاندې، دا n–ځله، د B دخپل ځان سره سيده ځل پوهيږو. د B^n توکی منظم n–ګونی دي له توکو 0, 1 او د بول ترونونو کمپوننت ډوله تشريح شوي. دا په دې مانا چی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(a_1, ..., a_n) \cap (b_1, ..., b_n) = (a_1 \cap b_1, ..., a_n \cap b_n)$$
$$(a_1, ..., a_n) \cup (b_1, ..., b_n) = (a_1 \cup b_1, ..., a_n \cup b_n)$$
$$(a_1, ..., a_n)' = (a_1', ..., a_n')$$
$$1 = (1, ..., 1)$$
$$0 = (0, ..., 0)$$

د بیلګي په توګه د $n = 5$ لپاره باور لري

$$(0,1,0,1,0) \cup (1,0,1,1,0) = (1,1,1,1,0)$$
$$(0,10,10) \cap (1,0,0,1,1) = (0,0,1,1,0)$$
$$(1,1,0,0,1)' = (0,0,1,1,0)$$

له دې بیلګي لیدل کیږي، چی په B^n کی ساده شمیرنه کیدی شي. له بلی خوا د B^n توکو ګڼون 2^n دی او د جملی ۴ . ۱ . ۳ هر د بول الجبر د 2^n توکو سره د B^n سره ایزومورف دی. د بول الجبر د څیړنی لپاره کیدی شي، چی دا د الجبر درس په B رالنډ کړي.

۴ . ۲ . د بول فنکشنونه او پولینومونه

مو ږد فنکشنونو لپاره، د ترونونو په تعریف پیل کوو، چی ارزښتڼیری یي د بول الجبر وي. دلته دې M یو په خوښه

(c) ketabton.com: The Digital Library

ډیری وي او V دې یو د بول الجبر. د دوه ځیرونو

$$f, g : M \longrightarrow V$$

لپاره لاندې عملیې ∩ ، ∪ تشریح کوو، د

$$(f \cap g)(x) = f(x) \cap g(x) \quad , x \in M$$
$$(f \cup g)(x) = f(x) \cup g(x) \quad , x \in M$$

سره ، او همداسې یوکمپلیمنتجوړښت د

$$f'(x) = (f(x))' \quad , x \in M$$

سره.

د دې تعریفونو ښې اړخ پوره یا ټیك تعریف دی، ځکه چې f(x) او g(x) د V توکی دي او له دې امله ∩، ∪ موخه ور یا هدفمند دي. اوس په ساده توګه شمیرل کیږي، چې د ټولو د M په V کی ځیرونو ټولګه له دې سره یو د بول الجبر کیږي، چې د هغه صفر توکي د ځیرونه f ده، د f(x) سره، ټول x ∈ M او د هغې یوي توکي د ځیروني f له لارې ځخه د f(x) سره، ټولو x ∈ M دي.
یو ځانګړی حالت هلته لرو که ډیری M د V^n–ځله د خپل ځان سره سیده ځل وي. موږ غواړو ټولی د V^n ځیرونی په V کی د $A_n(V)$ سره په نخښه کړو او دا $A_n(V)$ د n– ځایزې د بول فنکشنونه په V باندې نومو یا بلل کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

هره د f ځیرونه له $A_n(V)$ هر n–ګونی $(v_1,...,v_n)$ چی د V له n توکو څخه جوړ وي، د V په یوه توکی $f(v_1,...,v_n)$ تنظیموي. د دې ځیرونو لاندې یی ثابتی ځیرونی او پرویکشنونه د ځانګړو ماناو یا اهمیت دی. یوه ثابته ځیرونه د ټولو $(v_1,...,v_n)$ لپاره همغه فنکشن ارزښت لري. یو i–ام پرویکشن x په لاندې توګه تعریف دی.

د ټولو $V^n \in (v_1,...,v_n)$ لپاره $x_i(v_1,...,v_n) = v_i$,

یادونه : موږ دا ستونځې لرو، چی د شمیرپوهنې لیکنه کې کله کله د کینې وښی لور ته او بیا بیرته له ښي وکینې لور ته لوستل کیږي، نو کیدی شي ، چی داپورته داسی هم ولیکل شي: د ټولو $(v_1,...,v_n) \ni V^n$ لپاره

دا دا مانا لري چی : ځیرونه x_i (داهم تر یوې اندازې ورسره نا بلد کار دی، چی فنکشن په x_i ښایو، خو فکر کوم، چی کومی ستونځي به د دې سره مل نه وي) هر n–ګونی د هغه په i– ام کمپوننت تنظیموي. له ثابتو ځیرونو او پرویکشنونو یا پریوستونونو د ∩، ∪ ، ′ عملیو. نخښلونو یا کارونو په مرسته یوه ځانګړې n–ځایز د بول فنکشنونو، مهم ټولګی د بول پولینومونه جوړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۴ . ۲ . ۱ تعریف : هره څیرونه $f : V^n \rightarrow V$ ، کومه چی په $A_n(V)$ د پاي زیاتو د عملیو $\cap$، $\cup$، $'$ کارونو یا استعمال څخه، له ثابتو او پرویکشنونو، لاس ته راوړي، د بول n – ځایز پولینوم فنکشنونه بلل کیږي.

۴ . ۲ . ۲ بیلګه : که ثابت فنکشن په ساده توګه د هغه د ارزښت سره وښایو، داپه دې مانا چی د V د یوه توکی په څیر ، نو

$$(a \cap x_1) \cup (b \cap x_2 \cap x_3 \cap x_4) \cup (x_1 \cap x_2)'$$

یو د بول پولینومفنکشن $P : V^4 \rightarrow V$ انځوروي: دکوم لپاره چی باور لري

$$P(v_1,v_2,v_3,v_4) = (a \cap v_1) \cup (b \cap v_2 \cap v_3 \cap v_4) \cup (v_1 \cap v_2)'$$

دلته a,b د V په کلکه ځاي په ځاي توکی دي.

یو د بول پولینوم فنکشن د یوې افادي له لارې کره ټاکلی دی، چی له ثابتو (له V څخه) او پرویکشنونو x څخه د $'$ ، $\cap$ ، $\cup$ له لارې جوړ وي. داسی یوه افاده د بول پولینوم بلل کیږي او دا یو د شمیرنی قانون د فنکشن ارزښت ټاکنی یا تعین لپاره راکوي، که د x لپاره i –ام

(c) ketabton.com: The Digital Library

کمپوننت یو n–ګونی له V^n څخه کینښوول شي. دا شمیرنه په رابندیزه توګه په V کی باور لري او دا توکي $P(v_1,...,v_n) \in V$ راکوي. د پولینوم (= افاده) او په دې پورې اړوند پولینومفنکشن(=څیرونی) ترمنځ باید ټیك توپیر وشي. اړیکی « پولینوم» د دې بول د فنکشن لپاره دا لاس ته راکوي، چی له $x_1,...,x_n$ او ثابتو څخه د ' ، ∩ ، ∪ سره ټیك راجوړي دي یا بهتره په دې باندې جوړې دي، لکه څنګه نور رییل پولینومونه د نښلونو + , * او − سره، چی نمونه یی ده

$$p(x) = a_0 + a_1x + ...+a_nx^n$$

دلته x له یوه بنسټیزې څخه دي او a_i د ټولو $i \in I$ لپاره یو رییل ګڼ دي.

دوه د بول مختلف پولینومونه په کوم کي چی x او کومی ټاکلی ثابتی، او ' ، ∩ ، ∪ کېږی شي ، چی هغه پولینومونه وټاکی: دبیلګی په توګه د $(a \cap x)' \; x \cup$ او $x \cup (a' \cup x')$ لپاره همغه حالت دی. که دوه داسی پولینومونه له مخه ورکړ شوي وي، نو مهمه ده چی وڅیړل شي یا پریکړه په وشي، چي ایا د دوې سره برابر فنکشنونه مساوي دي. دا داسی پیښیږی، چی د هر پولینو–

(c) ketabton.com: The Digital Library

مفنکشن f لپاره یو نورمالفورم $N(f)$ د یوه ټاکلی افادې په څیر داسی ورکول کیږي، چی د $f_1 \mid= f_2$ لپاره $N(f_1) \mid= N(f_2)$ باور ولري. برسیره پردې یوه تګلار ورکول کیږي، دکومې سره چی هر پولینوم په نورمالفورم ترانسفورمي کیدی شي. نو بیا دوه پولینومونه ټیك هلته همغه پولینومفنکشن دی، کله چی د هغوی نورمالفورم یو له بل سره پریوزي. دا پروګرام اوس غواړو پلی کړو.

۴ . ۲ . ۳ تعریف: ویل کیږي، چی یو n– ځایزه پولینوم په دیسیونکتیو نورمالفورم (disjnktiver Normalform) یا نورمالبڼه دی، که دا د لاندې فورم یا بڼی وي:

$$P = \bigcup_{(i_1,i_2,\ldots,i_n)} a_{i_1 i_2 \ldots i_n} \cap x_1^{i_1} \cap x_2^{i_2} \cap \ldots \cap x_n^{i_n}$$

د دې سره $a_{i\ i\ \ldots\ i} \in V$ دی، د ټولو $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ لپاره، هر $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ یو n–ګونی دی له ۱ او ۱– سره، او ټولنه یی په دې ټولو 2^n n –ګونو غزول کیږي، چیرته چی x_i^1 د x_i او x_i^{-1} د x_i' لپاره ځاي په ځای یا ځایول کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ورته قانونيت يا قرارداد سره د هر پولينوم P کونيو-نکتيو نورمالفورم بلل کيږي، دلاندې ډول سره:

$$P = \bigcap_{(i_1, i_2, \dots, i_n)} a_{i_1 i_2 \dots i_n} \cup x_1^{i_1} \cup x_2^{i_2} \cup \dots \cup x_n^{i_n}$$

که يو ځانګړی ديسيونکتيو نورمالبڼه وليکل شي، نوټول غړي به د ديسيونکتيو نورمالفورم سره $a_{i_1 i_2 \dots i_n} = 0$ له ليکلو پرېښوول شي يا صرف نظر به پرې وشي، ځکه چې دا په نتيجه کوم تاثير نه پرېباسي. په ورته توګه دا د ديسيو-نکتيو نورمالفورم لپاره باور لري، که $a_{i_1 i_2 \dots i_n} = 1$ وي.

۴ . ۲ . ۴ بيلګه : يو پولينوم په ديسيونکتيو نورما-لفورم دی (د $a, b, c, \dots \in V$ سره):

$$(a \cap x_1 \cap x_2' \cap x_3) \cup (b \cap x_1' \cap x_2 \cap x_3') \cup$$
$$(c \cap x_1' \cap x_2' \cap x_3) \cup (d \cap x_1' \cap x_2' \cap x_3')$$

لاندې يو کونيونکتيو نورمالفورم دی:

$$(a \cup x_1 \cup x_2 \cup x_3) \cap (b \cup x_1 \cup x_2' \cup x_3) \cap$$
$$(c \cup x_1 \cup x_2 \cup x_3') \cap (d \cup x_1' \cup x_2 \cup x_3) \cap$$
$$(e \cup x_1' \cup x_2' \cup x_3')$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۴ . ۲ . ۵ جمله : هر د بول پولینومفنکشن

$P : V^n \rightarrow V$ لپاره ټیك یو دیسیونکتیو نورمالفورم موجود دی. نو په دې توګه ټیك یو د بول پولینوم لاس ته راځي، کله چی ټول دیسیونکتیو نورمالفورمونه جوړ شي. په همدې توګه (دوه ګوني) ویناد کونیونکتیو نورمالفورم لپاره هم باور لري.

د دې جملی د ښوونی څخه هم دلته تیریږو، دا په نورو ادبیاتو کی شته(دا دې ګران لوستونکی په پام کی ونیسی، چی دا به ځما پوره وخت ونیسی که دا هرڅه راوګورم. ځما هدف همدومره دی، لکه چی په نورو ځایونوکی می هم ګوته ورته نیولی، دا بنستیز څه راټول کړم)

د نورمالفورم د ځیړلولپاره کله کله لاندې خویونه (قاعدې) ګټوري دي، کومی چی په نورمالفورم کی د$V \ni 0,1$ « ځایونو یا اینښوونو » له لارې لاسته راوړل کیږي. څکه چی د بیلګي په توګه $x_1^{i_1} \cap x_2^{i_2} \cap \dots \cap x_n^{i_n}$ یواځي دn –ګونو لپاره له $V \ni 0 , 1$ نا مساوي 0 دي(په ریښتونی مساوي په 1)، په کوم کی ، چی $x_j = 1$ د $i_j = 1$ لپاره او $x_j = 0$ د $i_j = -1$ لپاره دی، یعنی د دې n–ګونی

• $(1^{i_1} , 1^{i_2} ,\dots, 1^{i_n})$ لپاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

قاعده ۱ : که دا لاندې

$$\bigcup_{(i_1, \ldots, i_n)} a_{i_1 \ldots i_n} \cap x_1^{i_1} \cap \ldots \cap x_n^{i_n}$$

د بول د پولينوم فنکشن $P \in A_n(V)$ ديسيونکتيو نورمالفورم وي، نو د $1' = 0$ ، $\bar{1}^1 = 1$ ، $1^1 = 1$ سره باور لري

$$a_{i_1 \ldots i_n} = P(1^{i_1}, \ldots, 1^{i_n})$$

د ټولو $(i_1, \ldots, i_n)$ لپاره.

نو د بيلګي په توګه د $n = 3$, لپاره دی:

$$a_{1,-1,1} = P(1,0.1), \quad a_{-1,-1,-1} = P(0,0,0),$$
$$a_{1,1,1} = P(1,1,1)$$

ددې اړيکو وروسته د P د ديسيونکتيو نورمالفورم د ټاکلو لپاره بسيا کوي، که 2^n د P فنکشن ارزښتونه په ټولو n–ګونو کی له 0 او 1 (د V څخه) راپيدا کړو.

ليدوړ دا لاس ته راوړنی د $n = 2$ لپاره د P ديسيونکتيو نورمالفورم په لاندې توګه راکوي:

$$P = (P(1,1) \cap x_1 \cap x_2) \cup (P(0,1) \cap x_1' \cap x_2) \cup$$
$$(P(1,0) \cap x_1 \cap x_2') \cup (P(0,0) \cap x_1' \cap x_2')$$

د دې سره د ديسيونکتيو نورمالفورم لپاره دوه ګوني نتيجه

په لاندې توګه ده:

قاعده ۲ : که

$$\bigcap_{i_1,\ldots,i_n} a_{i_1\ldots i_n} \cup x_1^{i_1} \cup \ldots \cup x_n^{i_n}$$

د بول د پولینومفنکشن P دیسیونکتیو نورمالفورم وي،
نو د $0^1 = 0$, $0^{-1} = 0' = 1$ سره باور لري

$$a_{i_1 i_2 \ldots i_n} = P(0^{i_1}, 0^{i_2}, \ldots, 0^{i_n})$$

د بیلګي په توګه د $n = 3$ لپاره دی :

$$a_{1,1,-1} = P(0,0,1) \quad \text{او} \quad a_{-1,-1,1} = P(1,1,0)$$

پخوا له دې چی موږ د نورمالفورم ترانفورمیشن لپاره تګلار روښانه کوو، یا لیکو، نو د مختلفو څیرو ګڼون(تعداد یا شمیر) دې ورکړ شي. دلته طبعاً ټول الجبرونه پای دي.
که V ټیك $2^k = m$ توکي ولري، نو $A_n(V)$ لکه چی پوهیږو $m^{(m)^n}$ توکی لري، ځکه چی V^n ټیك m^n توکی لري. د بول پولینومفنکشن ګڼون د دې په څټ m^{2^n} دی، کوم چی سملاسی د نورمال فورم په څیر انځورونی څخه لاس ته راځي، ځکه چی د دلته 2^n ځلووني یا ضریبونه $a_{i_1\ldots i_n}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په خوښه د m توکو سره (له V څخه) ځاینیونکی یا ځاي په ځاي کیدی شي. که m >2 وي، نو په ټولیزه توګه کم پولینومفنکشنونه موجود دي نسبت و څیرونو ته. که m = 2 وي، کوم چی د کارونی یا استعمال لپاره مهم حالت انځوروي، نو بیا دواړه ګڼونه مساوي دي، په نامه 2^2 سره . له دې لاس ته راځي

۴ . ۲ . ۶ جمله: که B = {0,1 } دوه توکیزه د بول الجبر وي، نو هر n – ځایز د بول فنکشن ، یو د بول پولینومفنکشن په څیر انځوروړدی.

اوس د دیسیونکیو نورمالفورم د راپیداکولو تګلار و یوه پولینومفنکشن P ته، په P باندې لاندې پلونه کارول کیږي:

۱ – د دې مورګان de Morgan قاعدې د استعمال له لارې ټول کمپلیمنت ' جوړښتونه ترلي x_i ته راوړل کیږي، همداسی ثابتو ته راوړل کیږي.

۲ – د دسیتریبوتیو قانونه کارونی یا استعمال سره سم P د غوځیو ټولنی ته راوړل کیږي. په دې فورم کی په ټولیزه توګه ځنی «زیاتووني» (د x_i او x_i' غوځي دي) یو ځو x_i ورکیږي، مګر د هر i لپاره په یوه زیاتووني کی

(c) ketabton.com: The Digital Library

زيات تر زياته يو له x_i او x_i' رامنځ ته يا راڅرګنديږي.

۳ – که د ډيسيونکشن په يوه زياتون کی يو x_i ورك شي، نو $x_i' \cup x_i$ په دې زياتون کی د يوه «فاکتور» په څير ورزياتيږي(دا اړوند پولينومفنکشن نه تغيروي، ځکه چی $x_i' \cup x_i$ تل 1 ورکوي)

۴ – په دې داسی تغير شوې زياتوونی باندې تر هغی پورې ډيستريبوتيو قانون کارول کيږي يا استعماليږي، تر څو چی بيرته د غوڅيو ټولنه رامنځ ته شي يا راپيدا شي. دا د برابرو زياتونونو د ټولګی (دا په دې مانا، چی چيرته چی همغه x_i کمپليمنت شوی وي او يا نه وي کمپليمنت شوی) او ډيسيونکتيو نورمالفورم ترتيبوو (بيرته د ډيستريبوتيو قامون د کاڼنی لاندې) ، که چيرې ممکن دا ورك زياتوونی(د x_i او x_i' غوڅی) د ځلوونو 0 سره تکميل شي.

دا روښانه ده، چی د ټول هغه بڼه اړونی يا فورمبدلون سره، چی همغه مطلوب پولينوم پورې اړه لرونکی پولينوم فنکشن، همغه پولينومفنکشن لکه پخپله P دی. په ريښتونی سره له دې امله د پولينومفنکشن نورمالفورم وP ته لاس ته راوړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۴ . ۲ . ۷ بیلګه : P دې په V باندې په لاندې توګه دوه ځایز پولینومونه وي

$$P = ((a \cap x_1) \cup (b \cap x_2)')' \cup (x_1 \cup b)'$$

د $a,b \in V$ سره

لمړی پل :

$$((a' \cup x_1') \cap (b \cap x_2)) \cup (x_1' \cap b')$$

دوم پل :

$$(a' \cap b \cap x_2) \cup (b \cap x_1' \cap x_2) \cup (b' \cap x_1')$$

دریم پل

$$(a' \cap b \cap (x_1 \cup x_2') \cap x_2) \cup (b \cap x_1' \cap x_2) \cup$$
$$\cup (b' \cap x_1' \cap (x_2 \cup x_2'))$$

څلورم پل

$$(a' \cap b \cap x_1 \cap x_2) \cup (a' \cap b \cap x_1' \cap x_2) \cup$$
$$\cup (b \cap x_1' \cap x_2) \cup (b' \cap x_1' \cap x_2) \cup (b' \cap x_1' \cap x_2')$$

د

$$(b \cap x_1' \cap x_2) \cup (b' \cap x_1' \cap x_2) = (1 \cap x_1' \cap x_2)$$

له امله، د نورمالفورم په بڼه لاس ته راځي:

$$((a' \cap b) \cap x_1 \cap x_2) \cup (1 \cap x_1' \cap x_2) \cup (0 \cap x_1 \cap x_2') \cup$$
$$\cup (b' \cap x_1' \cap x_2')$$

لوستونکي دې دا نتیجی د قاعدې ۱ سره و ازمايي.

په پای کي دې n – ځایز ځانګړی د بول فنکشنونه په $B = \{0,1\}$ باندې وڅېړل شي، کوم چی همدا اوس د n– ځایز پولینومونو له لارې ، د مخه تیرې جملی سره سم راونیول کیدی یا لاس ته راتلی شي.

که P یو داسی پولینوم وي، نو P هر n–ګونی د 1 , 0 یا په 0 او یاپه 1 تنظیموي. په دیسیونیکتیو (کونیونکتیو) نورمالفورم کی ځلووني هم یا 0 او یا 1 دي او لاندې پریکړه کوو: په دیسیونکتیو نورالفورم کی ټول زیاتووني یانی $a_{i_1 i_2 \ldots i_n} \cap x_1^{i_1} \cap x_2^{i_2} \cap \ldots \cap x_n^{i_n}$ د ځلونو $a_{i_1 i_2 \ldots i_n} = 0$ سره پرېبنوول کیږي او ځلوونی 1 نه لیکل کیږي. په کونیونکتیو نورمالفورم کی به ټول فاکتورونه (دا اوس ټولنه $x_1^{i_1} \cup x_2^{i_2} \cup \ldots \cup x_n^{i_n}$ ده) د ځلونو $a_{i_1 i_2 \ldots i_n} = 1$ سره پرېبنوول کیږي یعنی صرف نظر پري کیږي او ځلوونی 0 نه لیکل کیږي. دا چی 1 او 0 د $\cup$ او $\cap$ لپاره ناپيلی یا بیتاثیره توکی دي، نو د هغه نورمالفورم باندې لیکلي پولینوم کی تغیر نه راځي . په هر حالت بیا

ثابت فنکشن د 0 ارزښت سره (داسی لیکوږ دی)
دیسیونکتیو نورمالفورم نه لري. او ثابت فنکشن د
ارزښت سره کوم کونیونکتیو نورمالفورم نه لري.

۴ . ۲ . ۸ بیلگه: د لته دي ۳ –ځایز فنکشن
$P: B^3 \longrightarrow B$ د لاندې جدول سره ورکړ شوی وي:

x_1	x_2	x_3	P
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	1

د قاعدي ۱ سره سم د P دیسیونکتیو نورمالفورم د
لاندې سره برابر دی.

$$(x_1 \cap x_2 \cap x_3) \cup (x_1 \cap x_2 \cap x_3') \cup (x_1' \cap x_2 \cap x_3) \cup (x_1' \cap x_2 \cap x_3') \cup (x_1' \cap x_2' \cap x_3')$$

دیسیونکتیو نورمالفورم د هر فنکشن ارزښت ۱ لپاره یو
زیاتوونی خوندي لري، په کوم کی چی x_i ولاړ دی ،

(c) ketabton.com: The Digital Library

که $x_i = 1$ وي، او x_i' ولاړ وي، که $x_i = 0$ وي(په ورته توګه n– ګونی $(x_1,x_2,...,x_n)$ د فنکشن ارزښت 1 سره) . که x_i د یوه شرط په څیر ونیول شي $(x_i = 1)$ نو بیا « شرطونه پوره دی » بلل کیږي، $x_i = 0$ په همدې توګه « شرطونه نه دې پوره» بلل کیږي) ، نو په دې توګه دیسیونکتیو نورمالفورم د ټول کمبینیشنونو یو لیستونه یا یوجوړشوی لیست راکوي د ټولو n شرطونو x_i سره ، په کومو کی چي 1 د فنکشن ارزښت په څیر لاس ته راځي: $x_1 \cap x_2 \cap x_3'$ په همدې توګه x_1 او x_2 پوره دې او x_3 پوره نه دی.

د قانون ۲ د کونیونکتیو نورمالفورم P د لاندې سره برابر دی :

$$(x_1' \cup x_2 \cup x_3') \cap (x_1' \cup x_2 \cup x_3) \cap (x_1 \cup x_2 \cup x_3')$$

کونیونکتیو نورمالفورم د هر فنکشن ارزښت 0 لپاره یو فاکتور خوندې لري، په کوم کی چي x_i ولاړ دی یا ځای دی، که $x_i = 0$ وي او x_i' ځاي په ځاي وي ، که $x = 1$ وي (په همدې توګه n – ګونی $(x_1 , ...x_n)$ له B^n څخه د فنکشن ارزښت 0 سره) . کونیونکتیو نورمالفورم پس د کمبینیشن د شرطونو یو لیست جوړونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

ده، د کومو لاندې چې 0 د فنکشن ارزښت په څیر لاس ته راځي : $x_1' \cup x_2 \cup x_3'$ په دې مانا دې، چې x_1 یا x_2 پوره دي او یا x_3 پوره نه دی.

په الجبر $A_n(B)$ کی د $A_n(B)$ څخه دیوه د مخه ورکړ شوي پولینوم فنکشن P کمپلیمنت P' څنګه ټاکل کیږي؟
د ورکړ شوې قانونمندی له مخی د دې لپاره په ساده توګه P په یوه دیسیونکتیو نورمالفورم انځوروي، بیا نو P' ټیك د غوڅیو ټولنه ده، کومه چې د P په نورمالفورم کی نه رامنځ ته کیږي(یعنی 0 ځلوونی لري).
په ورته توګه د دیسیونکتیو نورمالفورم لپاره هم مخ ته تللی شو.

۴ . ۲ . ۹ بیلګه : د اخرنی بیلګی څخه د پولینوم فنکشن P لپاره د P' دیسیونکتیونورمالفورم په لاندې توګه ورکړ شویدی.

$$(x_1 \cap x_2' \cap x_3) \cup (x_1 \cap x_2' \cap x_3') \cup (x_1' \cap x_2' \cap x_3)$$

پام دې وي، چې $(p')' = P$ دی. او د دېمورګان قانون له مخی د یوه دیسیونکتیونورمالفورم کمپلیمنت کونیو-نکتیو نورمالفورم دی، نو ګورو، چې د د دیسیونکتیو

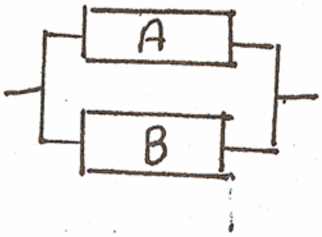
(c) ketabton.com: The Digital Library

نورمالفورم 'P ځخه کونیونکتیونورمالفورم P د کمپلیمنت دجوړولو له لارې لاس ته راوړي،

۴ . ۳ سویچ الجبر یا بریښنا جیریان الجبر

په بریښنایي یا برقي سرکیټونو (Schlatkreise (En. circuit (یا بریښناجیریانکړی یا په ساده توګه :بریښنادوران) کی سویچ د بریښنا اړیکو یا بریښنا تړونونو کی، د وازولو او بندولو لپاره دنده په غاړه لري. موږ دلته دوه ګوني دوه اړیکیز سویچونه تر ځیړنی لاندې نیسو، کوم چی په بند حالت کی برق جیریان په دواړو لورو ممکنوي. د سویچ حالت کیدی شي بند یا واز وي، یعنی تېیك دوه ازښتونه نیولی شي. واز سویچ سره ارزښت 0 تنظیموو او بند تړلي سویچ سره ارزښت 1 تنظیموو، داسی چی 0 په دې مانا دی ، چی«برق نه شته یا برق جریان نه لري» او 1 دا مانا لري، چی« برق جریان لري» . دلته 0,1 د سویچ ارزښتونه هم بلل کیږي.

کیدی شي، چی سویچونه په زیاتو ډولونو یوه سرکت ته سره یوځاي کړی شي. دلته خورا مهم یی هغه سرکیټړي circuitary دی، چی د پایډیرو غبرګسرکیټړیو یا همداسی سیریالسرکیټړیو په ځیر جوړ شوي وي. په ټولیزه توګه سویچونه هغه جوړښتونه وي ،کوم ، چی«واز» یا « بند یعنی تړلی» کیدی شي.



ځیره

(c) ketabton.com: The Digital Library

که A او B دوه سویچونه وي، نو غبرګسرکیټړي، لکه په پورته څیزه کی انځور شوی په کار واچول شي، او دا په د A v B سره په نخښنه کیږي.
په څرګند ډول A v B یو سویچ ارزښت 1 لري، که کم له کمه یو له دې سویچونو څخه واز وي او ارزښت 0 لري، که دواړه سو- یچونه ارزښت 0 ولري. کیدی شی د سویچ ارزښتونو لپاره پخپله غبرګ سرکیټړي (یا شاید په انګریزي سرکیټ وبېل شي) داسی ولیکل شي

$$0 \vee 0 = 0 , 0 \wedge 1 = 1 , 1 \vee 0 = 1 , 1 \wedge 1 = 1$$

کیدئ شي ، چی A v B د یوځاي اآینبوول شوي سویچ په څیر وکتل شي، چی دا د A او B په اړتیا یا په واك برقجریان بهیږي یا برق جایان لري او که یا نه بهیږي یا نه پرېږدي.
د A او B سویچونو زیریالسرکیټړي A ∧ B د A او B یو بل پسی یعنی په پرلپسی توګه ایښوونی یا ځاي په ځاي کونی څخه منځ ته راځي، لکه په څیره کی چی انځور شوي.
سرکیټ یا بریښنادوران A ∧ B ټیك او ټیك هلته ارزښت1 لري، که دواړهٔ سویچونه ارزښت 1 ولري او په غیر له دې ارزښت 0 . لنډ : $0 \wedge 0 = 0 , 0 \wedge 1 = 1 \wedge 0 = 0$

او $1 \wedge 1 = 1$

دلته هم A ∧ B یو رایوځاي شوی سویچ دی.
ددې سره تړنی A v B او A ∧ B د سویچ لپاره همغه فورمالی قاعدې ډکوي یا پوره کوي، لکه د ویناو لپاره د سمسوځ له پوهی ورسره بلده په ∨ او په ∧ راوړل شوو

ټرونونو کي. هلته د یوې وینا نه والی هم موجود دی.
که ∨ ، ∧ د سویچ ارزښتونو 1 , 0 په څیر راونیسو، نوهغه په باندې شمیرقوانین د ∨ او ∧ دیوه بول الجبر لپاره په { 0 , 1 } پوره دي. هلته کومپلیمنټ هم په واك کی لرو. دا کلیمي جوړونی د سویچ لپاره هم یوه موخه لري: د 'A سره یو سویچ په نخښه کوو، کوم چی تل یو و A ته په څټ ارزښت لري، د کوم سره، چی موږ په تخنیکي ریښتینوالی یا ریالیزه باندې ددې

خیره

غوښتنو (لکه د مناسبو چالانماشین له لارې) په غم کی نه یو. 'A د A نیګیشن یا نفي هم بلل کیږي. د سویچ ارزښت لپاره دا دامانا لري، چی 0 = '1 , 1 = '0 . په دې توګه سویچ ارزښتونه د عملیو یا کارونو ∨، ∧ ، ' سره یو دوه توکیزه بول الجبر جوړوي.

۴ . ۳ . ۱ **تعریف** : یو زیریالغبرګ سرکیټري دپای ډیرو سویچونو څخه جوړیږي د پای زیات فورمال عملیو ، ، ' د کارونی یا استعمال سره. په داسی سرکیټ کی دوه سویچونه، کوم چی همغه د سویچ ارزښتونه لري په همغه یا برابر سومبول سره په نخښه کیږي.

ټیك داسی تعریفولی شو: هر سویچ یو زیریالغبرګ سرکیټري جوړوي. که S_2 ، S_1 زیریالغبرګ سرکیټرونه وي (یعنی سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

رایوځای اینښوولي سرکیټېري یا سویچونه) ،
نو $S_1 \wedge S_2$, $S_1 \vee S_2$ او S' هم زیریالغبرګ سرکیټرونه دي.
هر زیریالغبرګ سرکیټېري په ټولیزه توګه زیات پیچلی جوړ شوی سویچ دی، چې د «برخسویچونو»ځاینیونی څخه په واکوالی کی یا په اړه، واز (ارزښت 0) یا تړلی (ارزښت 1) دی. له دې امله کیدی شي، چې بیرته دوه سرکیټونه د $\wedge$ او $\vee$ له لارې سره وتړل شي. کیدی شي، چې موږ لنډ له سرکیټونو یا سرکیټریو څخه وغږیږو.
د یوه زیریالغبرګ سکریټېري S د سویچ د هر ځاي نیونی لپاره د یوه ټاکلی سویچ ارزښت ټول سرکیټېري لاس ته راکوي ، په دې اړوند، چې ایا د دوي ترمنځ بریښنا بهیږي (جریان لری) او که نه. پس وي دې $A_1 , ..., A_n$ د پورته تعریف سره سم د سرکیټ $S(A_1,...,A_n)$ سویچونه ، د کومو سره چې A_i زیات واره جوړیدی شي. د سویچونو $A_1,...,A_n$ هر ځاینیونه د $0 , 1$ د یو n-ګونو سره برابر دی او د S له لارې یا د S سره به دا n-ګونی یا 0 او یا 1 د S په سویچ ارزښت باندې تنظیمیږي. په دې توګه سرکیټ S یو n -ځایز د بول-فنکشن f_S په دوه توکیز د بول په الجبر $B=\{ 0 , 1 \}$, $f_S : B^n \longrightarrow B$ تعریفوي(دې ته دې دلته هم پام وي او داسی نور ورته لیکنو ته ، چې دا د لاتین تورو لیکنی له کیڼ وښی لوز ته لوستل کیږي، په دې ګران لوستونکی پوهیږي، چې یادونی ته اړتیا نه شته،خو زما زړه نه ودریده) . دلته f_S په سرکیټ S اړه لرونکی

(c) ketabton.com: The Digital Library

سویچ فنکشن بلل کیږي. اوس څنګه کیدی شي، چې سرکیټ په $A_n(B)$ کی د سرکیټري لپاره د ∩، ∪، ′ کاروني یا عملیي وکارونه واضح کړای شي؟ اوس دي S,T دوه سرکیټونه وي، له سویچونو A_i څخه د سویچفنکشنونو f_S , f_T سره، نو کیدی شي، چې له S , T څخه هم زیریالسرکیټري $S \wedge T$ او هم یو غبرګسرکیټري $S \vee T$ جوړ شي، پوره و یوګونو سویچونو ته ورته یا لکه همغسی لکه یو ګوني سویچونه. دا نو اوس روښانه ده، چې $f_S \cap f_T$ د $S \wedge T$ سویچفنکشن دی او $f_S \cup f_T$ د $S \vee T$ سویچفنکشن دی. بالاخره f_S' سویچفنکشن دی و سرکیټ S' ته، کوم چې تل و S ته مخامخ- یا په بل عبارت په خټ سویچ ارزښت لري.

۴ . ۳ . ۲ تعریف : دوه زیریالغبرګ سرکیټري S او T و همغو سویچونو $A_1 , A_2 ,...,A_n$ ته، ایکویوالنت یا همغه ارزښتیز بلل کیږي، که دا همغه سویچفنکشن ورکړي، دا په دې مانا چې که د هغو سویچفنکشنونو f_S او f_T لپاره باور ولري $f_T = f_S$.

د استعمال یا کاروني د لیدټکي څخه دا تعریف موخور (همدفمند) دی، ځکه چې لمړی علاقه مو د سویچفنکشن سره ده، یعني د سرکیټ ځاننیوني ته ده او کم د هغه دنني جوړښت ته.

د سرکیټونو ترمنځ په دې پورته ورکړ شوي تعریف کی روښانه شوې اړیکی په رښتیني برابرارزښته اړیکی دی، په داسی

(c) ketabton.com: The Digital Library

حال کی چی دې برابرارزښتټولګی پورې ټول سرکیټونه اړه لري یا په هغه ټولګی کی دي، د همغه سویچفنکشن سره.
له دې سره د سرکیټ ځیړنه د بول الجبر په ځیړنه بیرته واړول شوه او په دې توګه شمیرپوهنیزو متودو یا لارو ته لار ور جوړه یا ور وازه شوه، لکه په مخته تیره برخه کی چی ودیزه شوې وې.
په سرکیټېري تیوري(Swiching Theory) او همداسی په ټولیزه توګه په سرکیټ تیوري کی دوه غوره پرابلمونه دا لاندې دي:
اول) د ورکړ شوي سرکیټېري شننه یا تحلیل او
دوم) د پلټونکی سرکیټېري سینتیز Synthese .
په شننیز حالت کی یو سرکیټېري S د مخه ورکړ شوې ده او د هغه سویچفنکشن باید راپیدای شي یا غوښتل کیږي.
د دې لپاره د S د هر سویچ $A_1,A_2,...,A_n$ د سرکیټېري S لپاره د سویچ ارزښت باید کره وټاکل شي. کیدی چي اوس S په $A_1,A_2,...,A_n$ کی (د $x_1,x_2,...,x_n$ په ځای) باندې د بول د پولینوم په ځیر انځور شي په همدې توګه یا په ورته ډول د S جوړونه په ۸.۷ سره له $A_1,A_2,...,A_n$ ځخه.
له دې پولینوم ځخه یا سیده د فنکشن ارزښت شمیرل کیږي او یا په هغو د دواړو نورمالفورمونو ځخه په یوه ترانفورمي کیږي، له کومو چی بیا فنکشن په ساده توګه لوستل کیږي.
۴ . ۳ . ۳ بیلګه : لاندې سرکیټ S دې د سویچونو A , B , C سره مخ ته ووت وي، ځه و دې وکتل شي ، په

(c) ketabton.com: The Digital Library

ورته توګه د بول پولینوم په دې توګه دی

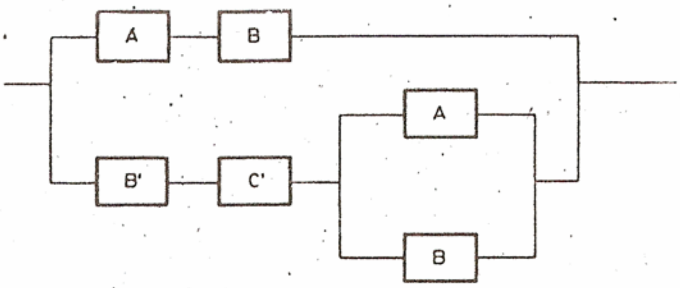
$$(A\wedge B)\vee(B'\wedge C'\wedge(A\vee B))$$

دا په ډیسیونکټیو نورمالفورم اړوو:

$$(A\wedge B)\vee(A\wedge B'\wedge C')\vee(B\wedge B'\wedge C)$$

$$(A\wedge B\wedge(C\vee C'))\vee(A\wedge B'\wedge C')$$

$$(A\wedge B\wedge C)\vee(A\wedge B\wedge C')\vee(A\wedge B'\wedge C')$$



د نورمالفورم (اخرنی لیکه) سملاسی د S ارزښت جدول لاس ته راځي :

A	B	C	f_S
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	0	1
1	0	1	0
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

ټیک د دې په څېر د سینتیز پرابلم رامنځ ته کیدنی سره د یوهسرکیټ د پرابلم رامنځ ته کیدنه ده.د لته دې د سویچفن- کشن f ورکړ شوی وي، او د دې سویچفنکشن رښتیاکیدونکی

(c) ketabton.com: The Digital Library

یا ریالیزه کیدونکی سرکیټري دپیدا شي. دا پرابلم یواځنی ټاکلی اوبی یا حل نه لري او امکانات شته، چی د همغه موخی لپاره جګ اوبی ولټول شي. یو په هر صورت یواځي تیوریکي مانا لرونکی اوبی سملاسی ورکول کیدی شي. که ارزښت جدول پیژندل کیږي، نو کیدی شي، چی د دیسیونکتیو نور- مالفورم ولیکل شي او د هغي سره سم یو سرکیټري جوړ کړی شي. په دې سرکیټري کی مګر د دې
رامنځته کیدونکی ګڼون هر د سویچ په ټولیزه توګه نازغموړ یا بهتره بي وعدي ور لوي وي، دا په دې مانا، چی تخنیکي ریښتینوالی به یی زیات قمته وي. دلته یو سرکیټري د کمو سویچونو سره لټول کیږي، چی هغهٔ د مخه ورکړ شوی سویچفنکشن ریښتینی کوي. د جوړولو قمت یا مصرف باندې یي یواځی د سویچونو ګڼون تاثیر نه لري،بلکه جوړونه هم او همداسی د سرکیټ سکترکتور یا جوړښتټول، د زیاتو مختلفو قمتفنکشنونو له مخي پاملرنه ورته شي. داد کمون پرابلم نسبی تاونی کیدی شي حل شي. د دې پرابلمونو حل یا اوبی د بیلګي په توګه د Kohavi 1970 په کتان کی ورکړ شوی دی. د سرکیټونوکارونه د مختلفو کارخانو په چا- لانولو کی د خورا لوي اهمیت دي: په مرکزګرمی، خطرزنګ، کنترولخونوکی او داسی نور. یوګوني سویچونه په دې کی ټاکلی پیښي ، حالتونه ، او شرایط په ګوته کوي له کومو، چی د هغو ځاي مربوط دی یا اړه لري. موضوع هم دلته را لنډوو او په همدې لوستلشوو بسیا کوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵ الجبرونه

یو څو بنسټیزې کلیمې

لومړی موخه مو دا ده، چې د دې کتاب د الجبر بنسټیزو کلیمو په څیړلو پیل وکړو، چې موږ دا په نامه ټولیز الجبر، یا لنډ الجبر بولو. برسیره پردې دلته درې مهمې جوړښتیز کلیمې پیژندل کیږي یا معرفي کیږي، چې د هغو په مرسته بیا له ورکړ شوو الجبرونو څخه نور (واړه یا کوچنی) الجبرونه ګټل کیدی شي، په نامه لاندې الجبرونه ، بیا هومومورفي څیره کونی او بالاخره فاکتور الجبرونه، کوم چې د کونګروواینځ اړیکو له فاکتوره کوونی څخه لاس ته راوړل کیږي.

په تکراري توګه د لته هم د الجبري جوړښتونو د بیلګې لپاره ، لومړی، لکه ددې کتاب هم ، لکه د ګروپونو په

(c) ketabton.com: The Digital Library

درس کی مو چی ګوته ورته ونیوله ، ګروپونه څیړل کیږي.

دا تعریف به د لمړني تعریف سره لکه په برخه ۳ کی موچی کړی وو، یواځی په نخښونه کی توپیر ولري.دلته به مو د ګروپ تعریف داسی وي، چی سملاسی راته د الجبر یوه بیلګه راکوي.

۵ . ۱ . ۱ تعریف: ګروپ په پیژندل شوي ډول یو ډیری G دی، د یوه، په G باندې د دوه ځایزې کارونی یا اپریشن، نښلونی ، ګنډنی یا عملیې د تعریف سره. (دا په دې مانا، چې یوه څیره کونه له G× G څخه په G کې د x.y <-- (x,y) سره) کوم چی لاندې قاعدې پوره کوي یا په کومو کې، چی لاندې قاعدې صدق کوي

(د ټولو) $x,y,z \in G$ (لپاره باورل ري):

(اسوڅیاتیو قانون) $(x.y).z = x.(y.z)$

دا اسوڅیاتیو قانون په نخښو داسی لیکلی شو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\forall\ x, y, z \in G : ((x.y).z = x.(y.z)$$

(یو) $e \in G$ (د ټولو) $x \in G$ (لپاره موجود دی، د کوم لپاره چی باور لري) :

$e.x = x.e = x$ (ناپیلی توکی)

دا پورته قاعده داسی په نخښنولیکلی شو:

$$\exists e \in G, \forall x \in G : e.x = x.e = x$$

(د ټولو) $x \in G$ (لپاره یو) $x' \in G$ موجود دی د کوم لپاره چی باور لري:

$x.x' = x'.x$ (په څټ توکی)

دا قاعده په شمیرپوهنیزه نخښنو داسی لیکلی شو:

$$\forall x \in G \quad \exists x' \in G : x.x' = x'x = e$$

په دې قاعدو کې د ټول کوانتور (Allquantor) $\forall$ (لوستل یی : د ټولو لپاره) او د موجودیت کوانتور (Existenzquantor) $\exists$ (لوستل یی : موجود دی) کارول شوي دي. دریمه قاعده د بیلګې په توګه داسی لو

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ستل کېږي: «د ټولو x لپاره، چې د G توکی دی یا په کې G پروت دی ، یو توکی 'x له G څخه موجود دی، د x.x' = e سره یا په بل ډول : د کوم لپاره چې x.x' = e باور لري ». دلته e د دومی قاعدې سره ورکړ شوی ناپیلی توکی دی(یوائنی ټاکلی) . ناپیلی په شمیرپوهنه کی د یوې عملیې یا کاروني یا نبنلونی په نسبت دا مانا ورکوي، چې دا ناپیلی توکی د یوه توکی سره په همغه عملیه کی همغه توکی بیرته لاس ته راکوي، یانی د همغی عملیې سره د یوه توکی سره په نبنلونه یا عملیه کی راوستلو سره ور سره نبنلووني توکي کی بدلون نه راولی.
په پوره ورته توګه، لکه ګروپ، کیدی شي ، چې د بیلګې په توګه کړی هم تعرفي شي، چې دې کار دمخه صورت نیولی، د کوم لپاره، چې په هر حالت کی دوه عملیې په کار دي(زیاتون او ځل) . د دې پام لرنو یا کتلوڅخه د دې کتاب بنسټیزو کلیمو فکر رامنځته کیږي: د یوه « ټولیز یا عمومي الجبر » لاندې یو ډیری پوهیږو د عملیو د یوې کورنی سره، کوم چې تل یا ضرور باید دوه ځایز نه وي.
دا اوس باید په پوره دقت یا پوره پام وړ تعریفونو کي راټول شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵ . ۱ . ۲ تعریف : د هر ګڼ $n \in N \setminus \{0\}$ او هر ډیري A لپاره یوه څیره ونه $f: A^n \to A$ شته، کومه چې n– ځایزه عملیه په A بلل کیږي . د ټولو n – ځا- یزو عملیو ډیری په A د $Op_n(A)$ سره په نخښه کوو.
په A باندې د پایځایزو عملیو لاندې دا عملیې پوهیږو:

$$Op(A) := \bigcup_{n=0}^{\infty} Op_n(A)$$

۵ . ۱ . ۳ یادونه : د همدې ورکړ شوي تعریف سره به د یو صفر ځایزې عملیې لاندې څه پوه شو؟ کره دې ونیول شي، چې A^n دې د ټولو g څیره کو نو یا څیره ونو

$$g : \{0,1,2,\dots, n-1\} \to A$$

ډیری وي. په ځانګړې توګه باور لري:

$$A^0 = \{g \mid g: \emptyset \to A\} .$$

مګر ګورو، چې یواځې یوه څیرونه g موجود ده، یانې په نامه $g = \emptyset$ (پام دې وي ، چې هره څیرونه $g : \emptyset \to A$ په کره نیونه د جوړو یو ډیری دی، دا په نامه

$$g = \{(x,g(x)) \mid x \in B\}$$

د $B = \emptyset$ لپاره، پس $g = \emptyset$) له دې امله یوه صفرځایزه

(c) ketabton.com: The Digital Library

عملیه یوه دا ورکړ شوي څیرونه ده : $f : \{\emptyset\} \longrightarrow A$.
دا څیرونی همداسی ټیك د A توکی په ګوته کوي، څکه چی f د $f(\emptyset) \in A$ توکی سره یواځنی ټاکلی دی، او د هر $a \in A$ (بیایی لوستل هر a له G څخه) لپاره ټیك یوه څیره ونه $f_a : \{\emptyset\} \longrightarrow A$ موجود ده، د $f_a(\emptyset) = a$ سره. له دې امله صفرځایزې اړیکی ثابتی هم بلل کیږي، او د f_a په ځاي په ساده توګه a لیکو.

۵ . ۱ . ۴ تعریف : د یوه الجبر د تیپ یا ډول لاندې یوه تنظیم شوې جوړه (f , ß) (دلته دا f باید لوي وی ، خو زه یی بل ډول امکان نه لرم، بیا د سهوو سره مخامخ کیږو، څکه چی په کمپیوتر کی د F څخه بدل بل لوی F نه لرم) پوهیږو، چیرته چی f یو ډیری دی ، چی توکي یی د عملیو سومبولونه دي او $ß : f \longrightarrow N \cup \{0\}$ یوه څیره ونه ده، کوم چی هر $f \in f$ په ځایزوالی (یاني هغه ځاي چی دا یی نیسی) ß(f) باندې تنظیم وي. دلته f یو د ß(f) – ځایزوالي عملیو سومبول بلل کیږي.

یو ټولیز الجبر (یا لنډ : الجبر) د (F, ß) تیوپ یو تنظیم شوې جوړه $A = (A, F)$ ده ، کومه چی له ډیري A او یوې
.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په A د عملیو کورنۍ F(f | f ∈ f) څخه منځ ته راغلې یا جوړه شوې ده، چېرته چې هر f ∈ f په ß(f) – ځایز عملیې f ∈ Op(A) باندې تنظیم شي. ډېرۍ A د A بنسټډیرۍ بلل کیږي او د F توکي د A بنسټیزې عملیې بلل کیږي.

۵ . ۱ . ۶ یادو نه : الف) : که چیرې د لوستونکو لپاره دا د الجبر تعریف، د د تیوپ سره ، اپریشن سومبول سره ، او داسې نور، لږ پیچلې ښکاریږي، نو کړی شي ، چې دا لاندې تعریف ته خپل پام راوګرځوي.

د الجبر لاندې کیدی شي ، چې یوه جوړه A=(A,F) پام یا خیال کې راولو، چې A یو ډیرۍ او F یو د په A د عملیو یا کاروونو یا اپریشن پاې ډیری وي. هغه نازکوالی، چې د مخ ته تیر تعریف و شا ته خوندې یا پټ دې ګکیدی شي، چې وروسته په کرار کرار د نورو تیوریو په ودیزه کې روښانه شي.

ب) په دې کتاب کې تل د الجبر د کلیمې لاندې ټولیز یا عمومې الجبر پوهیږو. چې په دې توګه د کلاسیکې یا ټولګیز الجبر د کلیمې سره په یوه کړی باندې، څخه یې
.

(c) ketabton.com: The Digital Library

توپیر کیدی شي. له دې امله ټولیزه یا عمومي کلیمه نه لیکو او لنډ یې «الجبر» لیکو.

پ) لیکنو ته یې یو څو یادونې : زیات وخت f د الجبر تیوپ بلل کېږي، دا په دې مانا، چې له سره مو فکر د کارونې سومبول ځایزوالی ته پام راګرځي. په څټ یا برعکس، زیات وخت د تیوپ ß څخه غبرېږو، که زیات مو موخه ځایزوالی وي او کم مو موخه د کارونې یا عملیې سومبول وي.

که یو الجبر (A,F) یواځې پای ډېرې بنسټیزې کارونې یا عملې ولرې، د بیلګې په توګه $F = (f_1 , f_2 ,...,f_k)$، نو زیات وخت دلته $(A, f_1,...,f_k)$ د (A, F) په ځای لیکل کیږي، او تیوپ په دې $(ß_1 ,..., ß_k)$ بڼه نوټ کوو، چیرته چې $ß_i$ د f_i ځایزوالی راکوي.

د یوه تیوپ f په الجبرونو کې بنسټیزې کارونې یا عملیې د f_A سره نه په نخښه کیږي، بلکه په ساده توګه د f سره، دا په دې مانا، چې د اړوند کارونې سومبول سره، لکه چې د ابل ګروپ کې زیاتون زیات د نخښې « + » سره په نخښه کیږي. دا امکانات، چې دا به مو سهوو ته لاربنود کړي، خورا کم دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵ . ۱ . ۷ بيلګه ګروپ: په دې برخه کې ، لکه په سر کې مو چې الجبر تعريف کړ، هغې ته ورته ګروپ د يو الجبر $(G, .)$ په څير د تيوپ (2) تعريفوو (ټيك: د يوه الجبر، چې تيوپ يې $(f, ß)$ د $f = \{.\}$ سره دې او $ß(.) = 2$)، چې هغه هلته نه ورکړ شوي اکسيومونه پوره کړي. په هر حالك ګټور دی ، که ګروپ بل ډول تعريف کړو (د مخه مو ګروپ پوره څيړلی دی او هلته يې تعريف بل ډول وو و دې اوسنی تعريف ته). ورسره بلد يا مروج ميتودونه دي: يو ګروپ يو الجبر $(G, ., ^{-1}, e)$ دی، د تيوپ $(2, 1, 0)$ ، چې لاندې اکسيومونه پوره کړي:

ګ ۱ : $(x.y).z = x.(y.z)$ (اسوشياتيو قانون)
ګ ۲ : $x . e = e . x = x$ (ناپيلی يا بې تاثيره توکی)
ګ ۳ : $x . x^{-1} = x^{-1} . x = e$ (په څټ توکی)

د دې متود ګټه په دې کې نغښتې ده، چې د موجوديت کوانتورونو ته اړتيا نه پيښيږي او په څټ توکی په ساده توره د يوه يوځايزې کارونې څخه لاس ته راځي، او ناپيلی توکی د صفرځايزې کارونې په څير په « تيوپ کې خوندې

(c) ketabton.com: The Digital Library

ده». که چیرې له ټولکوانتورونو څخه تیر شو، نو کیدی شي، چی د ګروپ اکسیومونه د مساوت یا برابرون په څیر ولیکل شي، څنګه چی دلته ورکړ شوي دي. دا نور هم روښانه کیږي، چی برابرون په ټولیز الجبر کی لوي رول لوبوي.

سړی کړی شي، چی ګروپ په بل ډول هم ولیکي، د بیلګي په توګه د یو الجبر (G,p) په څیر، چی تیوپ یی (3) وي، په داسی ډول ، چی p د سرچینیزې ګروپ کارونی یا عملي د p (x,y,z) = x.y.z په څیر تعریف شوې وي.

لوستونکی دې پخپله دې ته پام کړي، چی ایا د ګروپ اکسیومونه، یواځي د p له لارې فرمولولی شي.

دې ته دې هم پام راواړول شي، چي یو ګروپ (G , . , $^{-1}$, e) ابیلي abelsche Grupp یا کموتاتیو بلل کیږي، که لاندې برانرونونه باور ولري:

ګ ۴ : x . y = y . x (کموتاتیو قانون)

دا ورسره بلد یا مروج دی، چی په ابل یا کموتاتیو ګروپ کی +, - , 0 د . , e په ځاي کارول کیږي.

(د زیاتون لیکنډول یا لیکندود).

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) یو الجبر (G , .) د تیوپ {2} ګروپوئید بلل کېږي.
یو ګروپوئید بل څه نه دې په غیر له یوه ډیري، چی په هغه کی یو دوه ځایزه کارونه یا عمیله کارول شوي وي، په ځانګړي توګه ګروپونه په همدې وخت کی ګروپوئید هم دي، که دا د تیوپ (2) الجبر په څیر وګڼل شي.

پ) یو ګروپوئید (H , .) نیمګروپ بلل کیږي، که (H , .) برابرون ګ ۱ پوره کړي..

ت) یو الجبر (M , . , e) د تیوپ (2 , 0)، مونوئید بلل کیږي، که (M , .) یو نیم ګروپ وي او برسیره پر دې برابرون ګ ۲ پوره کړي.

ټ) یو ګروپوئید (Q , .) کوازیګروپ بلل کیږي، که د هر $a \in Q$ لپاره لاندې څیرونی د Q په Q باندې پرموتیشنونه وي، یعنی:

$x \longrightarrow a . x$ (د a سره کینې ځلوونه)

$x \longrightarrow x . a$ (د a سره ښی ځلوونه)

زیات وخت د کارونی یا مروج دی، چی کوازیګروپ

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تیوپ (2,2,2) الجبر (Q , . , \ , /) په څیر تعریف کړو، کوم چی لاندې برابرونونه یا مساوات پوره کوي:

(Q1) $x\backslash(x.y) = y$,
(Q2) $(x.y) / y = x$,
(Q3) $x.(x\backslash y) = y$,
(Q4) $(x/y).y= x$

یا دونه: ګورو چی / او \ د ښي او کیڼې ویشنې په څیر کارول شوي(دا سي، نخښې ، چی په هر بل ځاي کی په بل مفهوم ورکړ شوې وي، همغلته به په همغه مفهوم ونومول شي)

ث) یو لوپ یو د تیوپ (0,2) الجبر (L , . , e) دی، په کوم کی چی (L , .) یو کوازیګروپ وي، او e یو ناپیلی توکی وي، دا په دې مانا چی برابرون ګ۲ باور لري. لکه د کوازیګروپ په څیر کیدی شي چی لوپ هم تعریف شي، د یوه الجبر (L , . / , \ , e) په څیر.

ج) کړی: یو د تیوپ (2,1,0,2) الجبر (R , + , - , 0 , .) کړی بلل کیږي، که (R,+,-,0) یو ابل ګروپ وي، (R , .) یو نیمګروپ او لاندې دیستریبوتیو

(c) ketabton.com: The Digital Library

قوانين باور ولري:

د ۱) x . (y + z)) x.y+x.z

د ۲) (x + y) z = x . z + y . z

پام دې وي: د دې لپاره، چې نوکان مو سپما کړي وي، نو هغه له پخوا معلومه قاعده کارول کيږي، چې ټکيشميرنه له کربښميرنی له مخه ده، دا په دې مانا، چې لمړی د ټکو شميرنه بدنيز (تنيز) کيږي يا صورت نيسي لکه ځل او ويش او ورپسی بيا هغه چی کربښميرنه وي لکه زياتون او کمون.

يوه اونيتار کړی (R,+,-,0,.,1) unitärer Ring (دا په دې مانا چی دا يوه کړی ده د يوي سره)، يو الجبر دی ، چيرته چی (R,+,-,0 , .) يوه کړی ده او 1 يو ورزيات شوی صفر ځائيزه کارونه يا عمليه ده، کوم چی مساوت ګ ۲ پوره کوي (طبعاً دلته 1 د e په ځاي دی).

ح تن يا بدن) يو اونيتارکړی (K , + , - , . , 0 , 1) يو تن يا بدن بلل کيږي (انکريزي field) که (K , \ ,{0 } , .) يو ابل ګروپ وي ، د ناپيلي توکی 1 سره. دا راته نژدې پرته ده، چی اوس که پر دې په ورزياته توګه $x \longrightarrow x^{-1}$

(په (. ,{ 0} \ K) کی په ځتې څيرونه) يوه يوځائيزه کارونه يا

(c) ketabton.com: The Digital Library

عملیه یا اپریشن وګڼو. دا چي 0^{-1} تعریف نه دی، نو ($K,+,-,0,.,^{-1},1$) به د لمړنی تعریف په موخه کوم الجبر نه وي.
د ټوټه الجبر په تیوري کی ، چی په دې کتاب کی نه راوړل کیږي، نا پوره تعریف شوې عملیې یا کارونی اجازه لري.

خ) مودولونه Moduln . دا ($R,+,-,0,.$) دې یوه کړی وي. یو الجبر $(M,+,-,0,R)$ د $(2,1,0,(1)_{r\in R})$ تیوپ R–مودول بلل کیږي(یا مودول په کړی R باندې)، که $(M,+,-,0)$ یو ابل ګروپ وي، او د ټولو $r,s \in R$ لپاره لاندې مساوات باور ولري:

م ۱) $r(x+y) = r(x) + r(y)$

م ۲)) $(r+s)(x) = r(x) + s(x)$

م ۳) $(r.s)(x) = r(s(x))$

په یوه اومتیارکړی ($R,+,-,.,1$) باندې مودول څخه دا د لاندې مساوات باوریوالی هم غوښتل کیږي.

م ۴) $1(x) = x$

دا لمړنی بیلګه ده د ناپایېدیرو عملیو سره(طبعآ که R ناپای وي) . برسیره پردې هم یو ځانګړی پام ضرور دی، ځکه چی سومبولونه $+ , - , 0$ په دوه مختلفو ماناو رامنځ
،

(c) ketabton.com: The Digital Library

ته کیږي: یو ځل د ابل ګروپ (R,+,-,0) عملیې په څیر او بیا د ابلګروپ (M,+,-,0) په څیر. دا پرابلم په ساده توګه کیدی شي ، چې راوباسل شي، د بیلګي په توګه په کوم کي $(R, +_R, -_R, 0)$ او $(M, +_M, -_M, 0)$ په څیر لیکل کیږي. یواځې د اسانتیا له خاطره ضرور ښکاریږي، چې د ابل ګروپونو باندې په همغه یوون د + ,- , 0 سره پاتې شو،

خ) وکتور فضا (وکتورهوا) : وي دې (K,+,-,0,.,1) یو تن . نو هر K–مودول (V,+,-,0,K) موږ K –وکتورهوا (یا وکتورهوا یا وکتورفضا په تن K) بولو.

ځ) تړون(تړونونه) (Verband(english: lattice)) یو لاتیس یا تړون یو الجبر (L ،∨ ،∧) دی، د تیوپ (2,2)، کوم چې لاندې مساوات پوره کوي:

ل ۱) $x \vee y = y \vee x$, $x \wedge y = y \wedge x$ کموتاتیو قانون

ل ۲) $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$,

$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$

(اسوشیاتیو قانون)

ل۳) $x \vee x = x$, $x \wedge x = x$ (ایدمپوتینځ)

(c) ketabton.com: The Digital Library

ل ۴) $x \wedge (x \vee y) = x$, $x \vee (x \wedge y) = x$

(ابزربشن یا راکښنه یا جذبونه)

دلته افادې " $x \vee y = z$ " او په همدېتوګه " $x \wedge y = z$ " داسی لوستل کیږي x له y سره ټرلی مساوي په z دی. همداسی x غوځ په y مساوي په z دی.

یو رابند ټرون یا لاتیس (یا ټرون د 0 او 1 سره) یو الجبر ($L, \vee, \wedge, 0, 1$) ددی د تیوپ (2,2,0,0), داسی چي ($L, \vee, \wedge$) یو ټرون یا لاتیس دی او په دې برسیره لاندې مساوات هم باور لري:

ل ۵) $x \vee 1 = 1$, $x \wedge 0 = 0$

ټرونونه به په ځانګړي توګه په ورپسی برخو کی پوره وڅیړل شي او د هغو مختلف ډولونه او هم به په هازې دیاګرام کی و کښل شي)

د) نیم ټرون (semilattice) یو نیم ګروپ (S , .) نیمټرون یا سیمیلاتیس بلل کیږي، که دا کموتاتیو او ایدمپوتنت وي. دا په د ې مانا، چی که مساوات ګ ۴ او همداسی لاندې باور ولري:

س ۱) $x . x = x$ ایدمپوتنځ (Idempotenz)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هر لاتيس $(L, \wedge, \vee)$ جوړښتونه $(L, \wedge)$ او $(L, \vee)$ په روښانه توګه سيميلاتيسونه دي.(نیم تړو ځ)

ذ) ديستريبوتيو تړون يا – لاتيس) يو لاتيس $(L, \wedge, \vee)$ ديستريبوتيو بلل کيږي، په کوم کې چې دا لاندې ديستريبوتيو قانونونه باور ولري:

د ل ۱) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

د ل ۲) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

کيدی شي ، چې د ل ۱ تر ل ۴) مساواتو پورې وښول شي، چې د ل ۱ او دل ۲ يو بل ته ورته دی يا همغسی دي. چې له دې مساواتو يو بيا پوره دی، يا بسيا کوي.

ر) د بول الجبر : يو الجبر $(B, \wedge, \vee, ', 0, 1)$ د تيوپ $(2,2,1,,0,0)$ د بول الجبر بلل کيږي، که $(B, \wedge, \vee)$ يو دسيتريبوتيو لاتيس وي، مساوات ل ۵ پوره کړي او په دې برسيره لاندې هم پوره کړي

ب ۱) $x \wedge x' = 0 , x \vee x' = 1$

دا څه د الجبر پورته تيرې بيلګې مو، چې دلته راوړلی، د هغو ځخه به ځنی وروسته پوره ترڅيړنی لاندې ونيول شي. او س په دا همدومره بسيا کولی شو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵ . ۲ لاندې الجبر یا سب الجبر Subalgebra

د هر الجبري دیسخیپلین مهمه موخه داده، چې پوره بیلګې ترې لاس ته راوړل شي. زیات وخت داسې کیږي، چې د لرلو الجبري جوړښتونو څخه نوي الجبري جوړښتو نه لاس ته راوړو. په دې برخه کې به یو متود یا یوه لار وپیژندل شي یا معرفي شي، کومه چې د ټولګیزو کلیمو څخه لکه لاندېګروپ، لاندېوکتورفضا، لاندېټړون په لور لوریزه وي.

۵ . ۲ . ۱ تعریف : $A = (A,F)$ دې یو د تیوپ f الجبروي، او برخټیرى $B \subset A$ دې یو د A برخټیرى وي، د خویونو سره ، چې

$$f(b_1, \ldots, b_n) \in B^n$$

د ټولو $f \in f$ لپاره او د ټولو n –ګونو $(b_1, \ldots b_n) \in B^n$ لپاره (د کومو سره، چې $\beta(f) = n$ ځای په ځای کیږي). الجبر $B = (B, (f | f \in f))$ د الجبر A لاندې الجبر بلل کیږي، د کوم سره $f : B \longrightarrow B$ د ټولو $f \in f$ لپاره د f بندیزنو په څیر په ډیري B تعریف وي، د « B د A لاندې الجبر» لپاره لیکو $B \leq A$.

د $\mathrm{Sub}\, A$ سره د ټولو د A د لاندې الجبرونو بنسټېزیریو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ډیری په نخښه کیږي، دا په دې مانا، چی $A=\{B \mid B \leq A\}$
(انګر: Subalgebra = لاندې الجبر)

یو برخډیری $B \subset A$ ټیك هلته د یوه االجبر $A = (A, F)$ لاندې الجبر بنسټډیری دی، که B د ټولو د $f_A \in F$ بنسټ عملیو سره رابنده، راټړلی وي یا رامحدوده وي. څه ناڅه ټیکه توګه زیات داسی لیکل کیږي $B = (B,F)$،
داپه دې مانا، چی د B د بنسټعملیو ډیری بیرته په F سره په نخښه کیږي. لکه څنګه د f_A لپاره همداسی د f_B لپاره هم په ساده توګه د کارونی سومبول په f سره ښوول کیږي یا بهتره، نخښون کیږي.
د ګروپ په بیلګه روښانه کیږي، چی په لاندې الجبر کی په هغه تیوپ ګنډل کیږي ،کوم چی ټاکل شوی دی: که ګروپ د یوه الجبر په څیر، چی تیوپ یی (0 , 1 , 2) دی راوړل شي یا وګنډل شي، لکه په مخ ته تیره بیلګه کیځ نو لاندې الجبرونه په ټولګیزه موخه لاندېګروپونه دي. که چیرې ګروپ د (2) تیوپ الجبر په څیر راوړل شي یا په پام کی ونیول شي، د ګروپ سره چی یواځنی عملیه یا کارونه ده، ممکن دي، چی لاندې الجبر لاس ته راوړو، کوم چی لاندې ګروپونه نه دي. بیا نور لاندې الجبرونه
،

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاس ته راځي، که ګروپ د یوه الجبر ، په څیر د

$$p(x, y, z) = xy^{-1}z$$

سره راوړل شي، چی دا یی یواځنی عملیه وي.

د هر الجبر لپاره دا سیستم د غوڅیجوړښت په مخامخ رابند دی. ټیك یا کره په لاندې ډول :

۵ . ۲ . ۲ جمله : A دې یو الجبر وي. نو باور لري:

الف) $A \in \mathrm{Sub}\,A$

ب) $B \in \mathrm{Sub}A$ د هر ناتشډیري $\mathcal{B} \subseteq \mathrm{Sub}\,A$ لپاره،

یادونه : دا افاده " $\cap \mathcal{B}$ " د $\bigcap_{B \in \mathcal{B}} B$ لپاره ځاي په ځاي ده او همداسی د $\bigcap\{B \mid B \in \mathcal{B}\}$ لپاره .

اوبی : الف) روښانه دی. د ب) د ښوونی لپاره دې وي: $\mathcal{B} \subseteq \mathrm{Sub}A$, $\mathcal{B} \neq \emptyset$. دا د ښوولو دی، چی $\cap \mathcal{B}$ د A د هر ې عملیي f لپاره رابند دی یا راتړلی دی. وي دې $n = ß(f)$. له $\bigcap \mathcal{B}$ $b_1, \ldots, b_n \in$ څخه $b_1, \ldots, b_n \in \mathcal{B}$ لاس ته راځي د ټولو $B \in \mathcal{B}$ لپاره . دا چی ټولی $B \in \mathcal{B}$ څخه د لاندې الجبرونو بنسټډیري

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دي، نو باور لري $f(b_1, \ldots, b_n) \in B$ د ټولو $B \in \mathcal{B}$
لپاره . له دې څخه لاس ته راځي $f(b_1, \ldots, b_n) \in B$.

۵ . ۲ . ۳ لاس ته راوړنه(دا هم ديوې جملې په څير ده، خو له جملې څخه لاس ته راځي): د هر الجبر A او هر برخېږيري $X \subseteq A$ لپاره دی

$$<X> = \cap\{B) \in \text{Sub}\, A \mid B \supseteq X\}$$

د A د لاندې الجبر ېستېږيری، دا په دې مانا چی $<X> \in \text{Sub}A$. په څرګنده توګه $<X>$ د A د لاندېالجبرونو کوچنی بنستېږيری دی، کوم چی X خوندې لري (دا د X څخه راجوړه يا توليد شوې لاندې الجبر) د الجبر A باندې زور اچووني له امله ډير وخت $<X>_A$ د $<X>$ په ځاي ليکو اوله بلی خوا په ساده توګه د پاي ډيري $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ لپاره .
د بيلګي په توګه څيوکليکي لاندې ګروپ $(Z_6, +, -, 0)$ را نيسو (د ګڼونو $Z = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ سره مودول 6 شميرل کيږي): باور لري

$$<0> = \{0\}, <1> = Z_6, <2> = \{0, 1, 4\},$$
$$<3> = \{0, 3\}, <2, 3> = Z_6$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵ . ۲ . ۴ جمله : A دې یو الجبر وي . د برخه‌یریو $X, Y \subseteq A$ لپاره باور لري:

الف) $X \subseteq \langle X \rangle$ (اکستنزیویتیت Extensität)

ب) $X \subseteq Y \Rightarrow \langle X \rangle \subseteq \langle Y \rangle$ (مونوتوني Monotonie)

پ) $\langle X \rangle = \langle\langle X \rangle\rangle$ (ایدمپوتنت Idenmpotent)

د دې جملې اوبی سملاسی د مخ ته تیرې عملي $\langle \ \rangle$ له تعریف څخه لاس ته راځي. پای

بنسټه‌یری $\langle X \rangle$ په ریښتیا چی د X څخه تولید شوې د $A = (A, F)$ لاندې الجبرونو څخه لاس ته راځي د یوه تولیدپروسي سره: د هر برخه‌یري $X \subseteq A$ لپاره دې وي

$$E(X) = X \cup \{f(a_1, \ldots, a_n) \mid f \in F, a_1, \ldots, a_n \in X (n = ß(f))\}$$

وریسی دې وي

$$E^0(X) = X$$

اود ټولو $k \in N \cup \{0\}$ لپاره

$$E^{k+1}(X) = E(E^k(X))$$

۵ . ۲ . ۵ جمله : د هر الجبر $A = (A, F)$ او هر

(c) ketabton.com: The Digital Library

برخډېري $X \subseteq A$ لپاره باور لري

$$<X> = \bigcup_{k=0}^{\infty} E^{k}(X)$$

اوبی : « $\supseteq$ »: وي دې $<X> \supseteq x = E^{0}(X)$.
نیونه دې وي، چی $E^{k}(X) \supseteq <X>$، ښوول شوی دی،
او وي دې $a \in E^{k+1}(X)$. وي دې $a \notin E^{k+1}(X)$ د مخه
نیونه(ځکه، چی په بل ډول به په ساده توګه باور ولري

$(a \in <X>$

نو $f \in F, a_1, \ldots, a_n \in E^{k}(X)$
موجود دی ، د $a = f(a_1, \ldots, a_n)$ سره .
د $E^{k}(X) \supseteq <X>$ له امله او دا چی $<X>$ د یوه لاندې
الجبر بنسټ ډیري دي، لاس ته راځي $a \in <X>$. دا
ښايي $E^{k+1}(X) \supseteq <X>$، او په k باندي د ایندکشن
سره لاس ته راکوي $\bigcup_{k=0}^{\infty} E^{k}(X) \supseteq <X>$.

« $\subseteq$ »: یواځې دې وښوول شي ، چی $\bigcup_{k=0}^{\infty} E^{k}(X)$ د یوه
لاندې الجبر بنسټډیری دی، دا په دې ما ، چی د F
د ټولو اپریشنونو په هکله رابنده یا راتړلی ده. وي دې:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f \in F,\ n = \beta(n),\ a_1, \ldots, a_n \in \bigcup_{k=0}^{\infty} E_k(X\ .$$

نو بیا د هر $i \in \{1, \ldots, n\}$ لپاره په لاندې توګه
یو $k(i) \in N \cup \{0\}$ د $a_i \in E^{k(i)}(X)$ سره موجود دی.
وي دې $m = \max\{(k(i) \mid i = 1, \ldots, n\}$. نو باور
لري $a_i \in E^m(X)$ د ټولو $i = 1, \ldots, n$ لپاره. په
دې پسې لاس ته راځي

$$f(a_1, \ldots, a_n) \in E^{m+1}(X) \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} E^k(X)$$

دا په دې مانا، چې $\bigcup_{k=0}^{\infty} E^k(X)$ د f لاندې رابند یا
تړلی دی. پای
یادونه: دا رابند یا راتړلی دا مانا لري، چې f په همغه
الجبر کې باور لري. دې لغات ته دې په نورو ځایونو کې
هم پام وي، چې ډیر کارول کیږي.

دا تر اوس پام په یو څو برخو کې په کار راځي، چې په خپل
ځاي کې به وکتل شي.
د ډیریسیستم Sub A یوائې دې ته همدا دلته ګوته
نیسم، چې د یوه الجبر A د لاندې الجبرونوبنسټیزې په

(c) ketabton.com: The Digital Library

پيدايښتي يا طبيعي ډول يو تړون يا تړنه يا لاټيس جوړوي:
د $B, C \in A$ لپاره دې وي

$$B \wedge C = B \cap C$$
$$B \vee C = B \cup C$$

نو لرو

۵ . ۲ . ۶جمله :د هر الجبر A لپاره $(\wedge, \vee, Sub\,A)$ يو تړون دی(د A د لاندې الجبرونو تړون يا تړلې او يا ټوټې) اوبی دې تمرين وي: د لته د تړون اکسيومونه له ل۱ تر ل۴ پورې ازمائيل کيږي.

۵ . ۳ ايزومورفيزم ، هومومورفيزم

Isomorphismen, Homomorpismen

دا روښانه ده ، چې د يوه الجبر ذهني خويونه تغير نه خوري، که چيرې د الجبر د سټهډيري د توکو نومونه بدل شي ، يا بل ډول ونومول شي. دا پام يا فکر مو تړلی د ايزمورفي کليمي ته لاربښودوي .
دوه الجبره يو بل سره ايزمورف بلل کيږي، که چيرې يو الجبر له دې بل څخه د هغو توکو نومونو د بدلون له لارې لاس ته راوړی شو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵ . ۳ . ۱ تعریف : A او B دي دوه الجبرونه وي، د همغه تیوپ *f*، او u : A—>B دي یو بیجکتیوه bijektive ځیرونه وي. نوë د A ایزومورفیزم په B بلل کیږي، که د ټولو $f \in f$ لپاره او ټولو $(n = ß(f))$، $a_1, \ldots, a_n \in A$ لاندې شرطونه پوره وي:

(هوم) $uf_A(a, \ldots, a) = f_B(ua, \ldots, ua)$

دا الجبرونه A او B بیا (یو د بل سره) ایزومورف بلل کیږي، په نخښونه یی $B \cong A$ ده.

۵ . ۳ . ۲ بیلګه

الف) : دوه ګروپونه $(G, ., ^{-1}, e)$ او $(H, ., ^{-1}, e)$ تېیک هلته ایزمورف دي، که یوه بیجکتیو ځیرونه u : A —> B موجود وي کوم چی د ټولو $a, b \in G$ لپاره لاندی شرطونه پوره کوي.

(i) $u(a.b) = u(a).u(b)$

(ii) $u(e) = e$,

(iii) $u(a^{-1}) = u(a)^{-1}$

که پام وکړو، نو دلته شرطونه (ii) او (iii) د اړتیا اخوا دي، ځکه چی دا دواړه له (i) څخه لاس ته راوړلی شو:

$$u(e) = u(e.e) = u(e).u(e) \Rightarrow u(e) = e,$$
$$e = u(e) = u(a.a^{-1}) = u(a).u(a^{-1}) \Rightarrow u(a) = u(a)^{-1}$$

ب) $(Z_7 \setminus \{0\}, ., , 1)$ دې د تن $(Z_7, +, -, 0, 1)$
یو ځلیزګروپ وي. نو ایزومورفیزم

$$u: (Z_6, +, -, 0) \longrightarrow (Z_7 \setminus \{0\}, ., ^{-1}, 1)$$

په لاندې سره لاس ته راځي:

x	0	1	2	3	4	5
u(x)	1	3	2	6	4	5

د A ایزومورفیزم و B ته په ټوله توګه سیومتري نه دی.
مګر باور لري:

۵ . ۳ . ۳ جمله: که u یو ایزمورفیزم د A په B وي، نو په ځتې ځیرونه u^{-1} د B یو ایزمورفیزم دی و A ته.

اوبی : شرطونه (هوم) له همدا تیر درس څخه کیدی شي و ازمائل شي، د u^{-1} لپاره ، چی د u لپاره ځاي په ځاي شي.
وي دې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f \in f,\ b_1, \ldots, b_n \in B$$

د $a_1 = u^{-1}(b_1), \ldots, a_n = u^{-1}(b_n)$ سره، نو لاس ته راځي

$$u^{-1}(f_B(b,\ldots,b) = u^{-1} f_B(ua_1,\ldots,ua_n)$$

$= u^{-1}[uf_A(a_1,\ldots,a_n)]$ ځکه چي u ایزومرفیزم

$= f_A(u^{-1}(b_1),\ldots,u^{-1}(b_n))$ پای

که د مخه تیرو لوستونو کی له غوښتنو څخه تیر شو، چی $u: A \longrightarrow B$ بیېچکتیو دی، نو د هومومورفیزم ټولیزې کلیمی ته راځو. پس هومومورفیزم د الجبرونو مساوات کره نه ټاکي (تر د توکو د چاپیریال پورې لکه په ایزمورفیزم کی)، مګر بیا مو هم د جوړښت ورتوالی مخ ته پروت دی:

۵ . ۳ . ۴ تعریف : A او B دې د همغه تیوپ f الجبرونه وي. یوه څیرونه $u : A \longrightarrow B$ هومو مورفیزم د A و B ته بلل کیږي،

د ټولو $f \in f$ او ټولو $a_1, \ldots, a_n \in A\ (n = \beta(n))$ لپاره هومومورفي شرطونه (هوم) له تیر درس څخه پوره دي.

د « u یو د A هومومورفیزم دی و B ته» لپاره لنډ لیکدود « $u : A \longrightarrow B$ » هم معمول دی یا کارول کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

شرط (i) د له مخ ته تیرې جملی څخه همغه ورسره بلد د هومومورفیزم شرطونه دي، د ګروپونو لپاره. ټیک په همدې توګه، لکه د ګرووپ هومومورفیزم، په ټولیزه توګه د ټولو الجبرونو د هو-مومورفیزم لپاره لاندې نخښونی معمول دي: سورجکتیو هومومو-رفیزم ایپیمورفیزم Epimorphismus بلل کیږي. که u : A—> B یو ایپیمورفیزم وي، نو B د A یو هومومورفه څیره بلل کیږي. (په نخښونه یی uA = B) . اینجکتیو هومومور-فیزم د نزدې پرتو دلایلو له امله خوندیونه Einbettung یا نغږنه (په کی) بهتره یی رانغږنه(زه یی خوندیونه بولم) بلل کیږي. (د دې لپاره راتلونکیپادونه وګوری) د یوه الجبر A هومومورفیزم u: A—> A یانی هومورفیزم په خپل ځان ایندومورفیزم Endomorphimus بلل کیږي، او ایندو-مورفیزم چی په همغه وخت کی ایزومورفیزم (دا په دې مانا، چی بیجکتیو) دی د A اوتومورفیزم Automorphismus بلل کیږي د A د ټولو ایندومورفیزمونو ډیری End A په پیدایښتي یا طبیعي توګه یو نیمګروپ جوړوي، او د A د ټولو اوتومورفیزمونو Auotomorpihismen (Aut A) یو ګروپ جوړوي. د دې لپاره چی دا ولیدلی شو، لاندې دوه ویناوو ته اړتیا پیښیږي، چی اوبی یی ګرانو لوستونکو ته یوه ساده د تمرین دنده یا وظیفه ده:

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه : الف) د هر الجبر A لپاره کتمټ څیرونه
یانی $id\ A \longrightarrow A$ یو اوتومورفیزم دی
ب) که $u_1: A \longrightarrow B$ او $u_2: B \longrightarrow A$ هومومورفیزمونه
وي، نو یو په بل پسی راوړنه یا په بل پسی نښلونه $u_1 \circ u_2$
یی هم یو د A هومومورفیزم و C پسی دی.
د لمخ ته تیرې جملی له امله د End A همداسی
د Aut A ډیري د کارونی یا عملی ° لاندې رابند یا راګیر
دی . د مخ ته تیرې جملی له امله Aut A تل دا ناپیلی
توکی id A خوندي لري. همغه تیره جمله ښایي، چی
له $u \in Aut\ A$ څخه تل $u^{-1} \in Aut\ A$ لاس ته راځي،
یعني باور لري:

۵ . ۳ . ۵ جمله: د هر الجبر A لپاره (End A,°) یو نیم ګروپ دی (د A د ایندومورفیزم نیمګروپ) ،
او (Aut A , ° , $^{-1}$, id A) یو ګروپ دی (داسی په نامه د A د اوتومورفیزم ګروپ)

لاندې الجبرونه او هومومورفیزم یو له بل څخه کامل
خپلواك راوړل شو. اوس به وښوول شي ، چی دا
جوړښتکلیمي یو د بل سره په یو ډول زغموړ دي:

۵ . ۳ . ۶ جمله: څیرونه $u: A \longrightarrow B$ دې یو هومو-

(c) ketabton.com: The Digital Library

مورفیزم وي، نو باور لري:

الف) له $U \in \text{Sub}\, A$ څخه لاس ته راځي $uU \in \text{Sub}\, B$

ب) له $V \in \text{Sub}\, B$ څخه لاس ته راځي $u^{-1}V \in \text{Sub}A$ (۲)

پ) د ټولو برخېریو $X \subseteq A$ لپاره باور لري

$$\langle uX \rangle = u\langle X \rangle$$

اوبی : الف) وي دې $f \in \mathcal{f}, b_1..., b_n \in uU$ (چیرته چی، لکه چی ورسره بلدیو، $\beta(f) = n$ لیکل کیږي) .

نو $a_1, ..., a_n \in U$ موجود دي، د $b_1 = ua_1, ..., b_n = ua_n$ سره . باور لري

$$f_B(b, \ldots, b) = f_B(ua, \ldots, ua)$$

$$= uf_A(a, \ldots, a)$$ دا چي u هومورفیزم

$$\in uU$$ د $U \in \text{Sub}\, A$ له امله

دا راته په ګوته کوي، چی

$$uU \in \text{Sub}\, B$$

ب) وي دي $f \in \mathcal{f}, a^1, \ldots, a^n \in u^{-1}V$. نو باور لري $ua^1,...,ua^n \in V$.

له دې لاس ته راځي

دا چی u هومورفیزم $uf_A(a_1, \ldots, a_n) = f_B(ua_1, \ldots, ua_n)$

د $V \in \text{Sub}\, B$ له امله $\in V$

$u^{-1} \in \ldots$ (۹) .

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې املې باور لري $f_A(a_1, \ldots, a_n) \in u^{-1}V$ او له دې امله $u^{-1}V \in \mathrm{Sub}\, A$ ($\Rightarrow u^{-1}V$)

پ) E دې لکه هغه د مخه تعریف شوی اپریټر یا عملیه وي. لمړی ښوول کیږي، چی $E(uY) = uE(X)$ د ټولو $Y \subseteq A$ لپاره باور لري: $E(uY)$ ټیك له هغو توکو uy څخه د $y \in Y$ سره جوړ دی، او همداسی له هغو توکو څخه، چی لاندې بڼه لري $f_B(uy_1, \ldots uy_n)$ د $f \in f, y_1, \ldots, y_n \in Y$ سره.
همداسی یا په همدې ډول $uE(Y)$ له توکو uy څخه جوړ دی، د $y \in Y$ سره، او همداسی له توکو څخه، چی لاندې بڼه لري:

$$uf_A(y_1, \ldots, y_n)$$

دا چی u یو هومورفیزم دی ، نو بنایې چی $E(uY) = uE(Y)$.
په k باندې د ایندکشن له لارې کیدی شي،
چی $E^k(uY) = uE^k(Y)$ وښوول شي، د ټولو $k \in N \cup \{0\}$ لپاره. د له مخ ته تیرو څخه لاس ته راځي

$$< uX > = \bigcup_{k=0}^{\infty} E^k(uX) = \qquad uE^k(X) = u[\bigcup_{k=0}^{\infty} E^k(X)]$$

$$= u<X> \qquad \text{پای}$$

لکه د مخه مو، چی ګوته ورته ونیوله د الجبر بنسډیري uU د uU سره په نخښه کیږي او همداسی له مخه بلدوڅخه د

(c) ketabton.com: The Digital Library

الجبر بنسټيري $u^{-1}V$ د$u^{-1}V$ سره په نخښنه کيږي. کيدی شي ، همدا د مخه کیدی شي، چی زيات وکارول شي، که د یوه الجبر A هومومورفیزم (ایزومورفیزم) په یوه الجبر B غواړو، چی وټاکو.

بیلګه: د توکو $u \in Aut(Z_6, +, -, 0)$ د ټاکلو لپاره فکر کيدی شي، چی $<u1> = u<1> = uZ_6 = Z_6$. له دې امله یا $u1 = 1$ باور لري له کوم، چی $u = id$ ($=idZ$) لاس ته راځي، او یا $u1 = 5$ دا په دې مانا چی $u = -id$.

پس:

$$Aut(Z_6, +, -, 0) = \{ id, -id \}$$

په ورته توګه د $End(Z_6,+,-,0)$ توکی هم ټاکل کيږي

لکه د مخه مو چی ګوته ورته ونیوله اینجکتیو هومومور-فیزم $u : A \to B$ خوندیونه هم بلل کيږي، د u سره A په B کی خوندې کيږي. دا برخه چی لاندې الجبرونه او خوندیونه په کی روښانه شوه داسی پاي کيږي:

یادونه : الف) د هرې خوندیونی $u:A \to B$ لپاره باور لري $uA \leq B$ او $uA = A$ دا په دې مانا، چی uA یو و A ته ایزومورف د B لاندې الجبر دی.

ب) د الجبر B د هر لاندې الجبر A لپاره د یو

(c) ketabton.com: The Digital Library

اینکلوژنځیرونه Inklusionsabbildun

$$i : A \longrightarrow B , i(x) = x$$

یو ه خوندیونه ده.

کونګروایڼخ اړیکی او فاکتور الجبر
Kongruenzrelationen und Faktoralgebren

لکه د ګروپ تیوري کی د نورمالپرویشوني، یا همداسی د ایدیال کلیمه په کړۍ تیوري کی منځنی یا مرکزي کلیمه ده، همدا ډول په ټولیزه توګه په الجبر کی د ټولیزې یا پورته کلیمي کونګروایڼخ اړیکو کلیمه جوړوي. دا به راته څرګنده کړاي شي، چی د کونګروایڼخ اړیکو او هومومورفیزم ترمنځ نزدې اړیکی پرتی دي، لکه څنګه چی په ګروپتیوري او همدا ډول کړیتیوري کی، کیدی شي؛ چی الجبرونه د کونګر-وایڼخ اړیکو له لارې فاکتوریزه کړی شو، د کوم له مخی چی «فاکتور الجبر» ته رسیږو. یو ګروپ د نورمالپرویشنونی پسی فاکتورونی کوي، په کوم کي چی د نورمالپرویشونی څنګټولګی د نوي ګروپ توکو په څیر یا په توګه وکاروي، دا په نامه فاکتورګروپتوکی. دا په څنګټولګی یا اړختولګی د یوه ایکویوالنځ اړیکی «ایکویوالنځ ټولګی» جوړوي. دا

(c) ketabton.com: The Digital Library

کتنه یا څیړنه د «کونګروانیځ» فکر رامنځ ته کوي، کوم چی باید دلته تعقیب شي.

۵ . ۳ . ۷ تعریف : A دې یو ډیری وي. هر برخډیری $R \subseteq A^n$ یو په ډیري A باندې n–ځایزه اړیکه بلل کیږي.
یوه 2 –ځایزه اړیکه Θ په A باندې ایکویوالنت اړیکه بلل کیږي، که د ټولو $x , y \in A$ لپاره لاندې شرطونه باور ولري:

اي ۱) $(x,x) \in \Theta$ (رفلیکسیویتټي)

اي ۲) $(x,y) \in \Theta \Rightarrow (y,x) \in \Theta$ (سیومتري)

اي ۳) $(x, y) \in \Theta$ ، $(y,z) \in \Theta \Rightarrow (x,z) \in \Theta$ (ترانزیتیویتټي)

د $(a , b) \in \Theta$ په ځاي داسي هم لیکلی شو $a = b(\mod \Theta)$ (په کلیمو: "a په b مودولوΘ سره مساوي دی")، او یا هم داسی لکو $a \Theta b$ ، په دې توګه کیدی شي، چی اکسیوم ۳ په لاندې توګه فرمولبندې شي، له $x \Theta y \Theta z$ څخه لاس ته $x \Theta z$ راځي. د هر ایکویوالنځ اړیکو Θ لپاره د لاندې بنې ډیری $[a]\Theta = \{x \in A \mid x \Theta a\}$ ایکوالنځټولګی بل کیږي.
په روښانه یا څرګنده توګه هر یو توکی $x \in A$ ټیك د Θ یوه ګونګروایځټولګي پورې اړه لري. (ساده بیلګه د ټولګی : لکه چی یو هلك په همغه وخت کی په دوه یا

(c) ketabton.com: The Digital Library

زیاتو ټولګیو پورې اړه نه شي لرودی).
د A ټولو ایکوالنتټولګیو ډیری په Eq A سره په نخښنه کوو (د ایکویوالنځټولګی الماني او انګریزی:
(ÄquivalenZklassen = equivalence relation
د ډیري A لپاره دوه ایکوالنځ اړیکی ∇_A او Δ_A په لاندې ډول لاس ته راځی

$$\nabla_A = A^2 = \nabla_A$$ (ټول اړیکی Allrelation)
(کتمټی یا دیاګونالی Identität oder Diagonale)
$$\Delta_A = \{(a, a) \mid a \in A\} = \Delta A$$

خیره: ۱۰۱
په پورته خیره کی په ډیري {1,2,3} باندې ټول ایکوالنځ-اړیکی د لویوالی په ترتیب بیرته ورکړ شوي دي(دا یو د Hasse-DiaGram هازبدیاګرام دې) هر ایکویوالنت اړیکه د ایکویوالنځټولګي په بیرته ورکړه کی انځور ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵ . ۳ . ۸ جمله: A دې یو ډیری وي او R دې یو ناتش د Eq A برخډیری وي. نو باور لري

$$\bigcap R \in \mathrm{Eq}\, A$$

(لیکدود ته یی " $\bigcap R$ " . دا دې د مخ ته تیرو درسونو سره انډول شي یا دا مو د مخه لوستلی دي)
اوبی : د دې ښوونه یو ساده تمرین دی. پای

دیوه ډیري A ایکویوالنځ اړیکې په طبیعي یا پیدایښتي توګه یو لاټیس یا ټرون جوړوي. یا ټرونی جوړوی.
د ټولو $\Psi \in \mathrm{Eq}\, A$, Θ دې وي

نو کیدی شي، چی په ساده توګه وښوول شي:

۵ . ۳ . ۹ جمله: د هر ډیري A لپاره ($\mathrm{Eq}A, \vee, \wedge$) یو ټرون یا لاټیس دی (په A باندې د ایکوالنځ اړیکو ټرون) دا پورته ورکړ شوی تعریف د $\Theta \vee \Psi$ په ټولیزه توګه لږ مناسب دی ، که په ریښتیا $\Theta \vee \Psi$ شمیرو. د دې لپاره کیدي شي، په خوښه دوه ځایز اړیکو Θ_1, Θ_2 لپاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

تعریف شوی د اړیکو ځل

$$\Theta_1 \circ \Theta_2 = \{ (x, y) \mid \exists z \in A : x \Theta_1 z \Theta_2 y \}$$

وکارول شي یا استعمال شي. دا اړیکځل اسوشیاتیو دی (د ې ښوونه دې تمرین وي) :

$$(\Theta_1 \circ \Theta_2) \circ \Theta_3 = \Theta_1 \circ (\Theta_2 \circ \Theta_3)$$

له دې امله کیدی شي، چی ډیر واره راوړل شوي نوکان له لیکلو پاتی شي.

۵ . ۳ . ۱۰ جمله : د هر ډیري A او ټولو $\Theta, \Psi \in Eq\,A$ لپاره باور لري

$$\Theta \vee \Psi = \Theta \cup (\Theta \circ \Psi) \cup (\Theta \circ \Psi \circ \Theta) \cup (\Theta \circ \Psi \circ \Theta \circ \Psi) \cup \ldots,$$

دا په دې مانا چی $(a, b) \in \Theta \vee \Psi$ ټیک هلته باور لري، کله چی توکي $c_1, c_2, \ldots, c_n \in A$ موجود وي، د $a = c_1 \Theta c_2 \Psi c_3 \Theta c_4 \ldots c_n = b$ سره.

اوبی یا ځل: تمرین دې وي: لمړی فکر کیږي، چی اوبیونی یا حل کوونی برابرون مساوات و ښي لور ته یو ایکویوالنت اړیکه پرته ده، او هر دا . په ښی لور یا اړخ، په نوکانو کی نیول شوو اړیکوځل(اړیکځل) په$\Theta \vee \Psi$ کی خوندي دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په یوه ډیري A باندې د یوې ایکویوالنت اړیکی Θ لپاره ډیری $A / \Theta = \{ [a]\Theta \mid a \in A \}$ د ډیري A د Θ دټولو ایکویولنتټولګیو د A فاکتور الجبر په Θ پسی بلل کیږي. فاکتورډیري زیات وخت پارتیشن Partitionen یا ټوټوونی هم بلل کیږي(ځکه، چی A / Θ د A یو ټوټونی یا تجزیه ده، په پردیو برخډیریو باندې)، او ایکووالنځټو-لګي د ټوټوونو بلاکونه بلل کیږي.

خاماخا فاکتورډیري او (چی وروسته به تعریف شي) فاکتور الجبرونه یو له بل سره سر او کار لري. وهغي لار ته مرسته کوي، که د ګروپونو حالت راواخلو یا بهتره تر څیرني لاندې ونیسو: $(G , . , ^{-1} ,e)$ دې یو ګروپ وي او N دې د G یو نورمالپرویشونی وي، دا په دې مانا چي یو لاندې ګروپ شته د دې لاندې نورمالپرویشونی شرطونو سره:

$\forall x \in G : x^{-1} N x = N$ (د نومال پرویشوني شرتونه)
(دا پورته داسی لوستل کیږي: د ټولو x لپاره، چی له G دی یا د G توکی دی باور لري.......)

وي دې Θ_N په G باندې یوه ایکویوالنځ اړیکه د ځنګټولګي aN سره د یوه ایکویوالنځ په څیر،دا په دې مانا چی د $G / \Theta_N = \{aN \mid a \in G \}$ سره. نو کیدی

(c) ketabton.com: The Digital Library

شي، چی په G/Θ_N باندې يو ګروپجوړخت يا ګروپسکترکچر $(G/\Theta_N, ., ^{-1}, e_N)$ د دې لاندې سره تعریف کړي

$$(aN).(bN) = abN,$$
$$(aN)^{-1} = a^{-1}N,$$
$$eN = eN$$

اوس دا غوره ده، چی وښوول شي، چی دا ډول تعریف شوی اپریشن یا کارونه کره تعریف ده. د بیلګي په توګه د ځل . لپاره ښوول کیدی شي، چی له $aN = a'N$ او $bN = b'N$ څخه تل $abN = a'b'N$ لاس ته راځي. دا کیدی شی، چی د نورما پرویشوني شرایطو سره ساده وشمیرل شي. دلته ویل کیږي، چی Θ_N او . یوله بل سره زغموړ دي. همداسی په ټولیزه توګه تعریفیږي:

۵ . ۳ . ۱۱ تعریف: A دې یو ډیری وي او $\Theta \in Eq\,A$ او $f \in Op_n(A)$. نو Θ او f دې زغموړ بلل کیږي، که د ټول $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, ..., b_n \in A$ لپاره د $a_1\Theta b_1, ..., a_n \Theta b_n$ سره تل

$$f(a_1,...,a_n)\ \Theta\ f(b_1,...,b_n)$$

باور ولري. $\Theta \in Eq\,A$ په الجبر $A = (A,F)$ یو کونګرو- اینځ اړیکه بلل کیږي، که Θ د ټولو f سره زغموړ وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په A د ټولو کونګورنیځ اړیکو ډېرۍ په Con A سره په نخښنه کیږي یا نخښوون کیږي.

(انګریزي Kongroenzrelation= congruence relation)

۵ . ۳ . ۱۲ بیلګی

الف) په هر ډیري A باندې ثابتی عملیي یا کارونی $f_c : A^n \longrightarrow A , f(x_1,...,x_n) = c$ او id_A کټمټ ځیرونی د ټولو $\Theta \in Con A$ سره زغموړ دي. له دې امله د پریوستونځیرونی (المانی او انګریزي (Projektionsabbidung or projections mapping یا -عملیي باور لري:

$$p_i : A^n \longrightarrow A , p_i(x_1,...,x_n) = x_i$$

یا دونه : دې ته‌بیا ګوته نیسم، چی دا پورته ډول ځیرونه د پریوستونځیرونی Projektionsabbildung تعریف دی.

ب) د ټولو الجبرونو(A , F) لپاره $\Delta_A, \nabla_A \in Con A$ باور لري. یو الجبر (A , F)، کوم چی د Δ_A او ∇_A څخه بل کونګر- واینځ اړیکه ونه لري ساده بلل کیږي، د بیلګي په توګه د هر ډیري A لپاره الجبر ((A ,Op(A) ساده دی:

$$Con(A,Op(A)) = \{\Delta_A, \nabla_A\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پ) باور لري

$$Con(A , \emptyset) = Eq\ A$$

کیدی شي ، چی ګونګروانیخ اړیکي، د زغموالی له لاري، د ځانګړو یوځایزو عملیو سره کرکتریزه شي:

۵ . ۳ . ۱۳ تعریف : (A ,F) دې یو الجبر وي. یوه څیرونه د بڼی

$$x \longrightarrow f(a_1 , , a ..., a_{i-1} , x ,a_{i+1} ,...,a_n)$$

د $f \in F$ (n – ځایز) او $a_1 , ...,a_{i.1} ,a_{i+1},...,a_n \in A$ سره د (A , F) یو ترانسلاشن Translation بلل کیږي.

۵ . ۳ . ۱۴ جمله: د هر الجبر (A , F) لپاره باور لري: $\Theta \in Eq\ A$ ټیك او ټیك هلته په f (A , F) باندې یو کونګروانیخ اړیکه ده، که Θ د (A , F) د ټولو ترانسلا-یشنونو سره زغموړ وي.

اوبی : دا چی هر $\Theta \in Con(A , F)$ د ټولو ترانسلیشنونو سره زغموړ دی، دا سیده مخه لوستلود کونګروانیخ اړیکو څخه لاسته راځي. په څټ دې $\Theta \in Eq\ A$ د ټولو ترانسلیشنونو سره زغموړ وي. دا باید وښوول شي چي Θ د ټولو $f \in F$ سره زغموړ دی. f دې یو n–ځایزه کارونه یا عملیه وي او باور دې ولري $a_1 \Theta b_1 , ..., a_n \Theta b_n$. دا چی هر د f څخه ګټلی

(c) ketabton.com: The Digital Library

ترانسلیشن د Θ سره زغمور دی، نو لاس ته راځی

$$\begin{aligned} f(a_1,a_2,...,a_n) \;\; &\Theta \;\; f(b_1,a_2,a_3...,a_n) \\ &\Theta \;\; f(b_1,b_2,a_3,...,a_n) \\ &\;\; . \\ &\;\; . \\ &\Theta \;\; f(b,b,...,b) \end{aligned}$$

۵ . ۳ . ۱۵ تعریف : A دې یو الجبر وي، د تیپ f او $\Theta \in Con\ A$ سره. په لاندې توګه تعریف شوی الجبر A/Θ د الجبر A فاکتور الجبر Faktoralgebra نومیږي یا بلل کیږي و کونګرواینخ Θ پسی یا کونګرواینخ Θ ته: د A/Θ بنسټ-ډیری یې همدا فاکتورډیری A/Θ دی ، دا په دې مانا چې د Θ د ټولوګونګرواینتټولګیو ډیری. د A/Θ بنسټکارونی یا عملي د A له کارونو یا اپریشنونو څخه لاس ته راوړل کیږی له

$$f_{A/\Theta} : (A/\Theta)^n \longrightarrow A/\Theta,$$
$$f_{A/\Theta}([a_1]\Theta,...,[a_n]\Theta = [f_A(a_1,...,a_n)]\Theta$$

څخه . کارونی یاعملیي $f_{A/\Theta}$ په دې توګه کره تعریف دي:
له $[a_1]\Theta = [b_1]\Theta,...,[a_n]\Theta = [b_n]\Theta$ څخه

$$[f_A(a_1,...,a_1)] = [f_A(b_1,...,b_n)]\Theta$$

لاس ته راځي (ټیك همدا د مخه تیر تعریف کی د وینا

(c) ketabton.com: The Digital Library

د زغموالي خویونه دي).
الجبر $A / \Theta = (A / \Theta, | f_{A/\Theta} \in f))$ بیرته د تیپ یا ډول f دی. زیات وخت په ساده توګه داسی $A = (A, F)$ او $A / \Theta = (A / \Theta, F)$ لیکل کیږي.

هومومورفیزم د کونګروواینخ اړیکو او فاکتور الجبر سره کلك خپلوان دي یا کلك تړلي. دا به په لاندې کی وښوول شي.

۵ . ۳ . ۱۵ تعریف : $u : A \longrightarrow B$ دې یوه ځیرونه وي . نو د u زړی (المانی Kern) په لاندې توګه تعریف دی :

$$Ker\ u = \{ (a,b) \in A^2 \mid ua = ub \}$$

دا روښانه ده، چی د u زړی تل په A باندې یو ایکویوالنځ اړیکه ده . په دې برسیره د الجبرونو لپاره باور لري:

۵ . ۳ ۱۶ جمله: د هر هومومورفیزم $u : A \longrightarrow B$ لپاره، د u زړی Ker u په A یو کونګروواینځ اړیکه ده، دا په دې مانا چی $Kern\ u \in Con\ A$ باور لري:

اوبی: f دې د A یو n–ځایز بنستیزه کارونه یا عملیه وي او باور دې ولري

$$(a_1,b_1),\ldots,(a_n,b_n) \in Kern\ u$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې مانا چی $ua_1 = ub_1 , ...,ua_n = ub_n$ ، نو دا لاندې لاس ته راځی:

$$uf(a_1,...,a_n) = f(ua_1,...,ua_n)$$
$$= f(ub_1,...,ub_n)$$
$$=uf(b_1,...,b_n)$$

له دې لاس ته راځی

$$(f(a_1,...,a_n) , f(b_1,...,b_n)) \in Ker\ u$$

دا په دې مانا چی Kern u یا د u زړی د ټولو بنسټیزو کارونو یا عمیلیو سره زغموړ دی. ځ چ ښ و

د دې په څټ د کونګرویځ اړیکو څخه تل هومومورفیزمونه لاس ته راځي:

۵ . ۳ . ۱۷ تعریف: A دې یو ډیری وي او $\Theta \in Eq\ A$. نو

$$P_\Theta : A \longrightarrow A / \Theta,\ P_\Theta (x) = [x] \Theta$$

د Θ کانوني څیرونه kanonische Abbildung بلل کیږي.

۵ . ۳ . ۱۸ جمله : A دې یو الجبر وي او $\Theta \in Con\ A$. نو کانوني څیرونه P_Θ یو سورجیکتیو هومومورفیزم:

$$P_\Theta : A \longrightarrow A/ \Theta$$

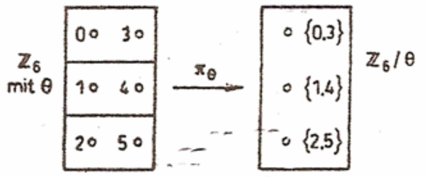
ذی. (د Θ کانوني هومومورفیزم). باور لري: د P_Θ زړی یعنی $\mathrm{Kern}\ P_\Theta = \Theta$.

د مخ ته تیرې جملي وېناوې ساده ښوول کيږي. په تو- لیزه توګه له مخ ته تیرو دوه جملو څخه لاس ته راځي:

لاس ته راوړنه: په الجبر A باندې کونګروانیڅ اړیکی تېیك د هومومورفیزم زړي دي د A پیل سره.

۵ . ۳ . ۲۰ بېلګه: Θ دې د ګروپ $Z_6 = (Z_6, +, -, 0)$ یوه کونګروانیڅ اړیکه وي، د کونګروانیڅټولګیو $\{0,3\}, \{1,4\}, \{2,5\}$ سره.

نو $Z_6 / \Theta = (Z_6/\Theta, +, -, 0)$ د $Z_6 / \Theta = \{\{0,3\}, \{1,4\}, \{2,5\}\}$ او $\Theta = \{0, 3\}$ سره. په څرګند ډول باور لري $Z_6 / \Theta = Z_3$، چیرته چی Z_3 څیوکلیکي یا بیرته راګرزیدونکی ګروپ دی د درې توکو سره. (وربسی څیره دې وکتل شي)



څیره ۲۸

طبعاً د یوه الجبر کونګروانیڅ اړیکي، لکه لاندې الجبرونو ته ورته، یو-تړون یا لاتېیس جوړوي. د دې د کتلو لپاره دا لاندې لاس ته راوړني ته اړیو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵ . ۳ . ۲۱ جمله: A دي یوالجبر وي او R دي د Con A یو ناتش برخه‌یری وي. نو باور لري

$$\bigcap R \in Con\,A$$

اوبې یا ثبوت: f دې د A یو n–خایزه بنستیزه کارونه یا عملیه وي، او وې دي: $(a_1,b_1),\ldots,(a_n,b_n) \in \bigcap R$، نو باور لري: $(a_1,b_1),\ldots,(a_n,b_n) \in \Theta$ او له دي امله

$$f(a_1,\ldots,a_n)\ \Theta\ f(b_1,\ldots,b_n)$$

د ټولو $\Theta \in R$ لپاره. له دې امله باور لري

$$f(a_1,\ldots,a_n) \quad \bigcap R\ f(b_1,\ldots,b_n) \quad \text{پای}$$

په دې پسې به وښوول شي چې د $\Theta, \Psi \in Con\,A$ لپاره تل $\Theta, \Psi \in Con A$ او $\Theta \vee \Psi \in Con A$ باور لري،

د $\wedge$ او $\vee$ سره لکه د مخه مو، چې و ښوول.

په نورو ټکو یا کلیمو سره په Θ او Ψ کې غټ خوندي اکویوالنخ اړیکی او کوچنی Θ او Ψ خوندي لرلي ایکو–یوالنخ اړیکي دواړه اوتوماتیك کونګروانیخ اړیکي دي.

په داسې حال کې چې $\Theta \wedge \Psi \in Con\,A$ په دې د مخه جمله پسې ترلې لاس ته راځي د $\Theta \vee \Psi \in Con\,A$ ښونه په لاندې ډول سرته رسیدلي شي:

داچې $\Theta \vee \Psi C\ Eq\ A$ روښانه ده نو لکه د مخه مو، چې ښوولې، بسیا کوي چې د $\Theta \vee \Psi$ زغموالی د $A = (A, F)$ ترانسلیشن سره وښوول شي. وي دې $(a, b) \in \Theta \vee \Psi$ او $g(x) = f(a_1,\ldots,a_{i-1},x_i,a_{i+1},\ldots,a_n)$ یو ترانسلیشن د $f \in F$ او $a_1,\ldots,a_{i-1},x_i,a_{i+1},\ldots,a_n \in A$ سره.

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو $(g(a),g(b)) \in \Theta$ د ثبوت دی. جمله د

توکو $c_1,\dots,c_n \in A$ موجودیت لاس ته راکوي

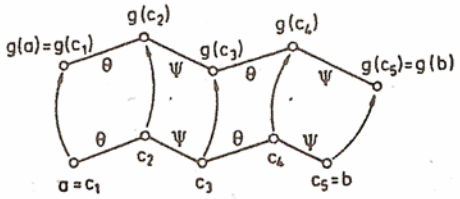
د $a = c_1 \Theta c_2 \quad c_3 \Theta c_4 \dots c_n = b_n$ سره. دا چي g

د Θ همدا ډول د Ψ سره زغمور ده، نو لاس ته راځی:

$g(a)=g(c_1)\Theta g(c_2) \Psi g(c_3) \Theta g(c_4) \dots g(c_n) = g(b_n)$

له کومې چی د ۵.۳.۱۰ پسی $(g(a),g(b)) \in \Theta \vee \Psi$ ورکوي،

لکه څنګه چی د غوښتلو وو (دا پسی څیره دې وکتل شي).



څیره

دا پورته راوړلی فکرونه کیدی شي چی په لاندې ډول راټول شي:

۵. ۳ . ۲۱ جمله: د هر الجبر A لپاره $(Con\ A, \wedge , \vee)$

د $(Eq\ A, \wedge , \vee)$ یو لاندې الجبر دی. په ځانګړي توګه

$(Con\ A, \wedge , \vee)$ یو تړون یا فرباند دی (د A کونګرو-

اینخفرباند یا کونګروانیخ تړون)

د دې جملی له مخه تیرې جملی څخه تړلی لاس ته راوړنه

لاندې هم ده:

۳.۵ . ۲۲ جمله: د هر الجبر A او هر برخیدیري

$X \subseteq A^2$ لپاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Theta(X) = \bigcap\{ \Theta \in \mathrm{Con}\, A \mid \Theta \supseteq X\}$$

یو کونګروانیخ اړیکه په A ده، دا په دې مانا چې $\Theta(X) \in \mathrm{Con}A$. په ښکاره ډول $\Theta(X)$ په A باندې کوچنی کونګروانیخ اړیکه ده، چې X خوندي لري. دلته $\Theta(X)$ هغه د X څخه جوړه شوې یا تولید کونګرو-اینخ اړیکه بلل کیږي. د پایډیري $X=\{(a_1,b_1),\ldots,(a_n,b_n)\}$ لپاره زیات وخت داسی لیکل کیږي $\Theta((a_1,b_1),\ldots,(a_n,b_n))$ د $\Theta(X)$ په ځاي. د $Y \subsetneq A$ لپاره په زیات وخت کی په ساده توګه د $\Theta(Y^2)$ اود$\Theta(a_1,\ldots,a_n)$ په ځاي $\Theta(Y)$ لیکل کیږي، که $Y = \{ a_1,\ldots,a_n \}$ وي. د $\Theta(a,b)$ بنې کوانګروانیخ اړیکی د $a \models b$ سره اصلي کوانګروانیخ بلل کیږي.
لکه په لاندې الجبرونو کی ، دمخه دې وکتل شي، کیدی شي، چې له X و $\Theta(X)$ ته تلونکی تولیدي پروسی په روښانه ډول تشریح کړای شي یا روښانه شي. د په ساده توګه داسی کیږي، چې کونګروانیخ اړیکي دلاندې الجبر-ونو د بنسټډیري په څیر تشریح کړای شي: A دې یو الجبر وي د تیپ f د بنسټډیري A سره. د نوي الجبر بنسټډیری A^2 دی. د هر n –ځایزې عملي سومبول $f \in \mathcal{f}$ همداسی یو n–ځایزه عملیه f_2 په A^2 تعریفوي د

$$f_2((x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)) = (f_A(x_1,\ldots,x_n),f_A(y_1,\ldots,y_n))$$

سره.
بیا د هر $a \in A$ لپاره توکی (a,a) د صفرځایزې عملیي په څیر ورزیاتیږي، په دې برسیره د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$s((x,y)) = (y,x)$$

سره یوه یوځایزه عملیه تعریفیږي او بالاخره په لاندې توګه تعریف شوې دوه ځایزه عملیه:

که $y_1 = x_2$ وي $t((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = (x_1,y_2)$

په بله توګه (x_1,y_1)

د فامیل F سره، چې له عملیو

$$f_2\,(f \in f),\,(a,a)\,(a \in A),\,s,\,t$$

څخه جوړ وي، هغه غوښتونکې الجبر لاس ته راځي.

(ښوونه دې د کورکار وي)

۵ . ۳ . ۲۳ جمله: د هر الجبر A لپاره باور لري

$$Con\ A = Sub\,(A^2, F_{Con})$$

دا په دې مانا، چې په A باندې کونګروانیڅ ټیک د (A^2, F_{Con}) لاندې الجبرونو بنسټ‌یري دي.

کیدې شي ، چې سیده په کونګروانیڅ اړیکو وکارول شي یااستعمال شي. څکه چې باور لري $\Theta(X) = \langle X \rangle$، د کوم سره، چې $\langle X \rangle$ کوچنی X خوندې لرونکی د (A^2, F) لاندې الجبر په نخښه کوي. د $\Theta(X)$ یو بل جوړځیزه روښانونه به په جمله کې ورکړ شوې وي، چیرته چې د پولینوم کلیمه په واك کې لرو. یوه بله د کونګروینځ اړیکو او لاندېالجبرونو ترمنځ اړندونه په لاندې جمله کې روښانه شوې ده، چې ښوونه یې بیا هم ګرانو لوستونکو ته پاتې ده.

د دې له مخه یو بل تعریف : د هر ډیري A دې $\Theta \in Eq\ A$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او $X \subseteq A$ لپاره دې وي

$$[X] = \bigsqcup_{x \in X} [x]\Theta$$

دا په دې مانا چې $[X]\Theta$ د هغو ایکویوالنت اړیکو Θ ټولنه ده، کوم چې یو $x \in X$ خوندي ولري.

۵ . ۳ . ۲۴ جمله : وي دې A یو الجبر، $\Theta \in ConA$،

او $B \in Sub\ A$. نو باور لري

$$[B]\Theta \in Sub\ A.$$

عمومي الجبر تیپ او داسې نور لاندې الجر

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۶ تړوني Verband (lattice)

۶ . ۱ تړوني او مکمل یا پوره تړوني

: ګروپ تیوري اوکړۍ تیوري ترمنځ غبرګوالی نوري تیوري،
یه ځانګړي توګه د تړونی تیوري رامنځ ته کړه یا راپورته کړه.
:ا له دې لاندې څخه لاس ته راغله: د یوه ګروپ لاندېګرو-
یونه او هم د ګروپ نورمالپرویشوني او په همدې توګه د
یوې په خوبنه کړۍ ټولو لاندېکړۍ اویا ټول (دوه اړخیزو،
کینې اړخیز ، ښي اړخیز) ایدیالونه نسبت د ډېرۍ تیوري
خوندیونی ته-چی نیممنظم یا نیمترتیب دي-هلته دا نیمنظم
یو څو بنسټیز خویونه لري.

۶ . ۱ . ۱ تعریف : یوه نیمترتیب ډېرۍ S تړونی بلل
کیږي، که هغه دا لاندې دوه خویونه ولري:
الف ۱ . د توکو $a, b \in S$ هرو جوړو لپاره په S کی یو داسی
توکی $c = a \cap b$ شته. چی د a او b غوڅي بلل کیږي، د
کومو لپاره چی

$$c \leq a \quad , c \leq b$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

باور لري، که یو بل توکی c' موجود وي، چی هغه همدا شرطونه $c' \le a$, $c' \le b$ پوره کړي ، نو $c' \le c$ دی.

الف ۲) د توکو $a, b \in S$ هرې جوړې ته په S کي یو توکی d ، چی د a او b ټولنه بلل کیږي، شته، دکوم لپاره چی

$d \ge a$, $d \ge b$

باور لري، او هر بل داسی توکی d' د $d' \ge b$, $d' \ge a$ سره دا اړیکی $d \ge d'$ پوره کوي.

په ښکاره توګه د دوه توکو a ، b دا ټولنه $a \cup b$ او غوڅی $a \cap b$ له دې سره یواځني ټاکلي دي.دا هم په ښکاره توګه ساده لیدل کیږي، چی هر نیممنظم ډیری ، یوه ترون ته په ځتې یا مخامخ ایزومورف ډیري (پرتله برخه ۲) په همدې ډول یو ترون دی. په کومو کې چی کلیمی غوڅی او ټولنه یو بل ته دوه ایزې یا دوال Dual کلیمي دي. پس کیدی شی، چی د کوم ګروپ G د یوه لاندېګروپ له ترونې او همداسی د دې ګروپ G د نورمالپرویشوني له ترونې ځخه وغیرو، او همداسی د یوې کړی R د لاندې کړیو ترون او همداسی د دې کړی R د ایدیال د ترونو ځخه وغیرو، که دا ایدیالونه کیڼ او ښي هم وي. په دې ټولو حالتو کي د لاندېګروپونو (لاندېکړیو) A , B د غوڅی ځخه د هغو ډیرېتیوریکی غوڅی $A \cap B$ پوهیږو، د ټولنی په ځیر د دې لاندې ګروپونو (لاندېکړیو) ځخه جوړ شوي لاندې-ګروپونه(په همدې ورته توګه لاندېکړی) { A , B } .

په ټولیزه توګه کیدی شی، د یوه الجبر د لاندی الجبرونو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ترون څخه وغږېږو. د ترون لپاره یوڅو نورې بېېلګی هم راوړو.
د یوه ډېرې M ټول لاندې ډېرې نسبت د ډېریتیورې خوند-
ېوني ته یو ترونی جوړوي، په کومو کی چی غوڅې او ټولنی
د ډېریتیورې د موخی یا هدف په ځیر پوهیدل کیږي، داد
لاندېډیریو M ترون به وریسی هم زیات وکارول شي.

۶ . ۱ . ۲ **جمله:** هر لاینې منظم ډېری L یو ترون دی،
او دا د

$$a \cap b = a \;,\; a \cup b = b$$

سره د $a, b \in L, a < b$ (دې ته دلته بیا هم ګوته نیسم،
چی دا په لاتین تورو لیکنه له کیڼ لورلوستل کیږي) له امله.
د پیداینبتي یا طبیعي ګڼونو ډېری یو ترون دی، که د نظم
اړیکي د ویشوړوالی اړیکی ونیول شي، د غوڅې رول دلته
غټ ګډ پرویشونی لوبوي او د ټولنی رول کوچنی ګډ زیات-
څله لوبوي. (دا د غ.ګ .و او ك.ګ.ز.موضوعګانی څما د
شمیرپوهنی په کتاب کی پوره څیړل شوې)
ترونونه د الجبر یو ځانګړی حالت دی. کیدی شي ، چی
ترون بې د نیمنظم له استعمال څخه،یواځې د خویونو له
مخی تعریف کړی شي، چی غوڅې او ترون د بینار اړیکو
په ځیر باید ولري:
۶ . ۱ . ۳ **جمله :** ډېریS د دوه بینار یادوه ګونو اړیکو
$a \cap b$ او $a \cup b$ سره هلته او هلته یا ټیک هلته یو ترون
دی، که دا عملیې لاندې کتمټ اړیکی پوره کړي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

یا دونه: لوستونکی دې بیا هم ماته بخښنه وکړي، که دا ساده کلیمه بیا دلته کوته لکه کړم، چی دا هلته او هلته په دې مانا دی، چی که چیرې دا شرطونه پوره وي، نو دا یو تړون دی. اوپه ځټ: که دا الجبر یو تړون وي ، نو دا شرطونه پوره دی. دا په دې مانا، چي د یوه ځخه بل لاس ته راځي او په ځټ

$II_1.\quad a\cap a=a,\quad a\cup a=a$

$II_2.\quad a\cap b=b\cap a,\quad a\cup b=b\cup a$

$II_3.\quad (a\cap b)\cap c=a\cap(b\cap c),$

$(a\cup b)\cup c=a\cup(b\cup c):$

$II_4.\quad a\cap(a\cup b)=a\cup(a\cap b)=a$

موږ لمړی نیسو ، چی یو تړون S ورکړ شوی دی، عملیې $a\cap b$ او $a\cup b$ د الف۱ او الف ۲ لاندې تعریف شوې دي یا پیژندلای شوي دي. د II_1 او II_2 باوري کید نه بیا روښانه ده. موږ اوس خوي II_3 ازمایو او دا د غوځي لپاره. له لمړي ۱ ځخه لاس ته راځي:

$(a\cap b)\cap c\leq a\cap b\leq a.$

$(a\cap b)\cap c\leq a\cap b\leq b,$

$(a\cap b)\cap c\leq c$

همداسی لکه د لمړي ۱ پسی

$(a\cap b)\cap c< b\cap c.$

$(a\cap b)\cap c<a\cap(b\cap c)$

لاس ته راځي. په برابره یا همدې توګه دی

$a\cap(b\cap c)<(a\cap b)\cap c$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې سره II_3 باوري کيږي
وريسې بيا د لمړي ۱ پسې روښانه دي
$$a \cap (a \cup b) < a;$$
په همدې توګه له بلې خوا $a < a$ باور لري او د لمړي۲
له امله $a < a \cup b$ ، پس د لمړي ۱ پسې دی
$$a < a \cap (a \cup b)$$
له دې څخه د II_2 باوري کيدنه لاس ته راځي.
اوس دې يو ډيری S د دوه بينار يا دوه ګونو اړيکو سره ورکړ شوي وي، کوم چې خويونه II_1 او II_4 لري. د $a, b \in S$ لپاره خويونه
$$a \cap b = a, \quad a \cup b = b \qquad (1)$$
تل سملاسي پوره دي يا پوره نه دي. که $a \cap b = a$ وي نو له II_4 او II_2 څخه
$$(a \cup b) = (a \cap b) \cup b = b$$
لاس ته راځي.
که د دې په څټ $a \cup b = b$ وي، نو II_4 پسې لرو
$$a \cap b = a \cap (a \cup b) = a$$
که د توکو a او b لپاره مساوات (۱) باور ولري، نوکيږدو $a \leq b$. له دې سره په ډيريS کې يو نيمنظم پلې کيږي. په ريښتونی $a \leq a$ د II_1 په بنسټ دی.
که په دې ورزيات $a \leq b$ او $b \leq c$ باور ولري، يعنی
$$a \cap b = a, \; b \cup c = b,$$
نو د II_3 سره سم لاس ته راځی:
$$a \cap c = (a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c) = a \cap b = a$$

دا په دې مانا، چې $a \leqq c$. بالاخره دی: $a \le b$, $b \le a$, $b \leqq a$,
په $a \cap b = a$, $b \cap a = b$ له II_2 بیا لاس ته $a = b$ راځي .
پسی ترلی د لمړي ۱ شرط باوړوالی یا باوریتوب ښایو. له

$$(a \cap b) \cap a = a \cap (a \cap b) = (a \cap a) \cap b = a \cap b$$

څخه لاس ته راځي $a \cap b \leq a$ ، په ورته توګ کیدی شي
$a \cap b \leq b$ وښوول شي.

د دې په ځتې په S کی دې یو په خوښه توکی c' ټاکلی وي،
کوم چې شرطونه $c' \leqq a$, $c' \leqq b$ دا په دې مانا چې

$$c' \cap a = c' , \quad c' \cap b = c'$$

پوره کوي، نو باور لري

$$c' \cap (a \cap b) = (c' \cap a) \cap b = c' \cap b = c'$$

له کوم چې $c' \leqq a \cap b$ لاس ته راځي. دا توکی $a \cap b$ په
تعقیب د توکو a او b غوځی د لمړي ۱ په موخه یا هدف
انځوروي. په ټیك دې سره سمه توګه توکی $a \cup b$ ښوول
کیدی شي، چې د توکو a او b ټولنه ده، د لمړي ۲ په
موخه یا هدف.

څموږ د ترون د کلیمي دوم تعریف په ګوته کوي، چې ترون
د ټولیز الجبر پریمیتیو ټولګي یا ساده ټولګی جوړوي، د
دې دوه دوه ځایزو عملیو سره(دا مو د مخه په ګوته کړي
وو، چې ساده ټولګی څه ته وایي)

دا د ترون د کلیمي هغه زړی دی، څنګه چې دا د لاندې
ترونو او ایزومورفو څیرونو او د ترونونو د خوندیونو لپاره
په پام کې نیول کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۶ . ۱ . ۴ تعریف : یو د ټرون S لاندېډیری T لاندېټرون بلل کیږي، که دا د مخ ته تعریف شوي، د الجبر په موخی راوړل شوي ټرون، یو لاندې الجبر انځور کړي. د نورو ټکو سره یا کلیمو سره یا په بل ډول T د هرو دوه توکو a او b غوځی $a \cap b$ او د هغو توکو ټولنه $a \cup b$ خونديې لري، نسبت وهغو عملیو ته چی په ټرون S کی تعریف شوي دي، چی T پخپله یو ټرون شي وهغو عملیو ته چي په S کی تعریف شوي وي.

دې ته دې پام وي، چی د یوه ټرون S یو لاندې ډیری T نسبت په S کی تعریف شوي نیمنظم ته چی هغه په کی هم باور و لري، ښوول کیدی شي، مګر دا ضرور نه ده یا په نورو کلیمو ، تل داسی نه ده، چی دا دې یو لاندېټرون جوړ کړي. د ګروپ G د ټولولاندېګروپونو ټرون د ډیریتیوري له مخي نظم راوستی شي، خو دا ټرون د ګروپ G د ټولو لاندېډیریو ټرون لاندېټرون نه انځوروي، ځکه چی ټولنه په دواړو ټرونونو کی مختلفی ماناوې لري. په همدي توګه د یوې کړی R د لاندېکړیو ټرون هم همداسی دی، چی په ټولیزه توګه دکړی د زیاتونیګروپ لاندېګروپونه ټرون نه جوړوي.

۶ . ۱ . ۵ جمله : د یوه ګروپ G د نورمالپرویشونو ټرون د زیاتونګروپ G د ټولولاندېګروپونو لاندې ټرون نه دی، چی دا مو د مخه د ګروپتیوري کی ښوولی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۶ . ۱ . ۶ تعریف : د یوه تړوني S ړا په ځتکیدونکی یواځنی ځیرونه یا په بل عبارت یو اینجکتیوه ځیرونه u په تړون S' باندې یوه ایزومورفه ځیرونه ده یا په بل عبارت یوه ایزومورفه خوندیونه ده د S په S' کی ، که د په خوښه توکو $a , b \in S$ لپاره

$$(a \cup b)\, u = au \cup bu \ , \quad (a \cap b)\, u = au \cap bu$$

باور ولري

یادونه : د u لپاره په کتابونوکی زبات وخت یوناني توری ځاي په ځاي کیږي، مګر زه دا ستونځي لرم، چی یوناني توري می په پروګرام کی نه شته. هیله ده چی ځیرونی او د یوه ډیری توکی توپیر ته بد د ګرانو لوستونکو پام وي) دا د S او S' یو ایزومورفیزم دی. چی د ټولیز الجبر په ځیر راوړل شوي تړوني یی یو له بل سره لري.

۶ . ۱ . ۷ جمله :: د یوه تړوني S ایزومررف خوندیونه u په تړونS کی.د نیممنظم ډیریو په موخه یا هدف د ډیري S په ډیرې S کی یو ایزومورفیزم انځوروي.

اوبی : د اوبیونی لپاره ټکو $a , b \in S$. که $a < b$ وي یعنی $a \cap b = a$. نو وبه لرو

$$(a \cap b)\, u = au \cap bu = au$$

او نه دي امله لاس ته راځي $au < bu$. که دا پام په ځتې یا په برعکس لور وکړو او وکاروو. چی u یو یواځنی په ځتکیدونکی دی. نو له $au < bu$ ځخه هم $a < b$ لاس

(c) ketabton.com: The Digital Library

ته راځي.

دا پورته بېلګې را ته ښايي، چې په څټ ثابتونه باورنه لري.

د دوه ډېريو S او 'S لپاره ، چې نيممنظمي دي، يو ايزو-مورف څېروني u ته د S په 'S کې، هلته اړتيا يا ضرورت شته، چې S او 'S دواړه ترونونه وي. دا د S ايزمورفي څېروني کي په 'S باندې بل ډول ځانونه نيسي.

۶ . ۱ . ۸ جمله : که ترونونه S او 'S ورکړ شوي وي، نو د نيم نظم په موخه هر ايزمورف څېرونه د S په 'S باندې ترون S ايزمورف په ترون 'S باندې انځوروي.

اوبې : په ريښتيني د $a, b \in S$ سره له $a \cap b \leq a$ څخه هم $(a \cap b)u \leq au$ او په همدې توګه

$$(a \cap b)u \leq bu$$

که $c' \in S$ داسې وي، چې $c' \leq au$ او $c' \leq bu$ باور ولري، او c د S هغه توکی وي، د کوم لپاره چې $cu = c'$ دی، نو لاس ته راځي $c \leq a$ او $c \leq b$ دا په دې مانا چې $c \leq a \cap b$ له کوم څخه چې $cu < (a \cap b)u$ لاس ته راځي. له دې سره سم لاس ته راځي

$$(a \cap b)u = au \cap bu$$

د تړولني لپاره يې ښوونه يا اوبيونه په همدې توګه ده. مونږ دا هم په پام کې نيسو، چې په ترونونو باندې د هومورفيزم اوړولې هغه کيلمي چې په خوښه، د تړوليزالجبرونو په ساده

(c) ketabton.com: The Digital Library

یا پریمیتو ټولګیو کارول کیږي، کارولی شو. (دلته نورې بیلګې هم شته خو هغه موضوعګانی موږ نه دې څیړلی ، له دې امله یې نورې زه هم دلته نه ګوته لکی کوم)
د تیرو بینار اړیکو په بنسټ(لمړی برخه دې وکتل شي)،
په یوه ډیرې M باندې بینار اړیکی یو تړوني جوړوي،
کوم چی د M×M ډیري د ټولو لاندې ډیریو سره پریوځي،
یا برابر دی. په همدې توګه په یوه ډیري M باندې تعریف شوي ایکویوالنت اړیکي یو تړون جوړوي، لکه په برخه ۱ کی چی ښوول شوي دي. دا د ایکویوالنت اړیکو تړون د بینار اړیکو د تړون لاندې تړون نه دی.

۶ . ۱ . ۹ جمله: هر تړون په یوه ځانګړي ډیري باندې
تعریف شوي ایکویوالنت اړیکو تړون کی ایزومورف خوندې دی.
(Whitman, Bull.Amer. Math. Soc 52(1946), 507 - 522)

۶ . ۱ . ۱۰ جمله :په یوه ورکړ شوي ډیري باندې
تعریف شوی تړون د یوه ټاکلی ګروپ ټولو لاندېګروپونو تړون کی ایزومورف خوندې دی.
(Brkhoff , Proc .Cambr.Phil.Soc 31(1935) , 433 - 454)
له دې سره سم هر تړون د یوه ټاکلی ګروپ ټولو لاندېګرو- پونوتړون کی ایزومورف خوندې دی.
ډیر دا مخ ته راوړل شوي تړونونه – لکه د یوه ډیري M لاند- ډیریو تړون ، د یوه ګروپ G لاندېګروپونو تړون، د یوې

کړی R د ایدیالونو ترون ، په یوه ډیرې کی د ایکویوالنځ-اړیکو ترون، - دا سی خویونه لري، د هغو غوځی او ټولنه نه یواځي د دوه توکو لپاره بلکه د اسوځیاتیو قانون سره سم د زیاتو توکو لپاره روښانه یا تشریح شوي ده، بلکه د ناپای ډیرو ډیریو لپاره هم.

په بل ډول افاده کوو، دا ترونونونه دلاندي تعریف سره سم پوره ترونونه انځوروي:

۶ . ۱ . ۱۱ تعریف : یو نیم منظمډیری S پوره ترون یا مکمل ترون بلل کیږي، که په خوښه ناتش لاندیډیري $A \subseteq S$ لپاره په S کي توکي c او d د لاندې ورکړشوو خویونو سره سم موجود وي:

الف ۱ . د ټولو $a \in A$ لپاره نامساوات $c \leq a$ باور لري، هر وریسی توکی c' د $c' \leq a$ سره د ټولو $a \in A$ لپاره شرطونه $c' \leq c$ پوره کوي.

دوم ۲ - د ټول $a \in A$ لپاره نامساوات $d \geq a$ باور لري، هر وریسی توکي d' د $d' \geq a$ سره د ټولو $a \in A$ لپاره شرطونه $d' \geq d$ پوره کوي.

دا یواځنی ټاکلی توکی c او d د لاندیډیري A د توکو غوځی او همداسی ټولنه بلل کیږي. د سومبولونو سره کیدی ، چی c او d په لاندې توګه انځور شي:

$$c = \bigcap_{a \in A} a, \quad d = \bigcup_{a \in A} a$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یا پیژند نخښه i یو ټاکلی پیژندډیري I کی وځغلي یعنی i ∈ I، په لاندي بڼه هم لیکل کیږي

$$c = \bigcap_{i \in I} a, \quad d = \bigcup_{i \in I} a$$

طبعاً یو پوره ترون یو ترون هم دی، په ورسره بلده موخه یا هدف.

۶ . ۱ . ۱۲ تعریف :د پوره ترون S د ټولو توکو غوښی د ترون صفرتوکی بلل کیږي او په سومبول 0 سره په نخښه کیږي. دا توکي د لاندې درې شرطونو، هر یوه سره یوا- ځنی ټاکل کیدیشي. د ټولو a ∈ S لپاره باور لري

1) $0 \leq a$; 2) $0 \cap a = 0$; 3) $0 \cup a = a$.

۶ . ۱ . ۱۳ تعریف : د یو پوره ترون د ټولو توکو ټولنه د ترون یویتوکی بلل کیږي اود سومبول 1 سره په نخښه کیږي. دا سي یویتوکی د لاندې درې په خوښه شرطونو، له یوه څخه یواځنی ټاکلی دی : د ټولو a C S لپاره باور لري

1') $1 \geq a$; 2) $1 \cup a = 1$; 3') $1 \cap a = a$

طبعاً هغه ترونونه چی پوره ترونونه نه دي کېدی شي، چی صفرتوکی او یویتوکی (او یا یو له دوي څخه) ولري. د یوه ګروپ G د لاندي ګروپونو په ترون کی د هغه صفر توکی یونلاندېګروپ سره او یویتوکی یی پخپله د G سره انځوریږي، د یوي کړی د لاندېکړیو په ترون کی د صفرتوکی د صفر لاندېکړی سره او پخپله د کړی R

(c) ketabton.com: The Digital Library

سره انځوريږي، د يوه ډيرې M ټولو لاندېډيريو ترون کی د تشډيري او پخپله د ډيري M سره انځوريږي.

د پرويشنی قانون له مخی منظم يا تنظيم شوي د طبيعي ګڼونو ترون او د څنځيروني ، چی پخپله طبيعي نظم يی جوړوي، هر وار يی صفر توکی ګڼ ۱ دی، په داسی حال چی يويتوکي موجود نه دی.

۶ . ۱ . ۱۳ جمله: يو نيم منظم ډيری S هلته او هلته يوترون دی، که هغه يو يويتوکی ولري او په هغی کی د هرو، په خوښه ناتش لاندې ډيريو لپاره غوڅی موجود وي.

اوبی : د ښوونی لپاره بسيا کوي، که داسی فکر وکړو، چی د يويتوکی د موجوديت او د د ټولو غوڅيو له موجو- ديت څخه د ټولنی موجوديت لاس ته راځي. A دې د S يو ناتش لاندېډيری وي. په S کې داسی توکيb موجود دی د کوم لپاره چی $b \geq a$ دی، د ټولو $a \in A$ لپاره، داسی يو توکی تل دا يويتوکی دی، B دې د ټولو داسی توکو يو ناتش لاندېډيري وي او d دې د هغو غوڅی وي :

$$d = \bigcap_{b \in B} b$$

موږ به سملاسی وښايو، چی d د لاندېډيري A ټولنه انځوروي. په رېښتيني سره $a \leq b$ دی د ټولو $a \in A$ لپاره او د ټولو $b \in B$ ، له دې امله $a \leq d$ باور لري. وريسی دې $s \in S$ داسی وي، چی $s \geq a$ د ټولو$a \in A$ لپاره دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې څخه $s \in B$ لاس ته راځي او له دې سره $d \leq s$.
په دې ډول دی

$$d = \bigcup_{a \in A} a$$

د يوه نيم منظم ډيري خوبونه، چې يو پوره ترون(او يا هم يو ترون) وي، ځان په يوه په ځپ ايزومورفيزم ته لاښودوي (د دې سره دې لمړی برخه پرتله شي)، مونږ کړی شو، چې د همدا اوس ښوول شوو جملو څخه او د هغو د نيونو يا فرضيو څخه هم د صفر توکي موجوديت او د ټولو لاندېډيريو موجوديت و غوښتل شو.

۶ . ۱ . ۱۴ تعريف: د يوه نيم منظم ډيري M ځيرونه u په نيم منظم ډيري N کی، په کوم کی چې له $a, b \in M, a \leq b$ څخه تل $au \leq bu$ لاسته راځي، مونوتون monoton بلل کيږي(مونوتون په دې مانا، چې توکی يو په بل پسی يا لويږي او يا کوچني کيږي). يو ترون S هلته او هلته پوره ترون دی که دS په هر مونوتون ځيرونی u په خپل ځان باندې فيکس توکی موجود وي، يعني توکي، د کومو لپاره چی $au = a$ دی
(Tarski , Pacif. J. Math.5 (1955) , 285 - 309 ;
David Ö Pacif. J . Math 5(1955) 311 - 319)
لکه د مخه تيرو درسونو چی وښول شو، هر نيم منظم ډيري M د ټولو لاندېډيريو په پوره ترون M کی خوندي ده.

موږ غواړو چې دا لاندې جمله وښايو

۶ . ۱ . ۱۵ جمله : هر تړون کیدی شي ، چې په یو پوره تړون کې ایزومورف(د تړونونود ایزومورفي په موخه، پرتله دمخه همدا برخه) خوندي شي.
دا جمله د راتولنکي جملی څخه لاس ته راځي، چې نسبت و مخ ته تیره لمړی برخی کی وینا ته لږ تیزه ویناد :

۶ . ۱ . ۱۶ جمله : هر نیم منظم ډیری M په یو ټاکلي تړون S کی ایزومورف خوندي دی، او دا په داسی توګه چې د هر لاندېډیري M A لپاره و کوم ته چې په M کی غوځی یا ټولنه موجود ده، چې دواړه د u په خوندیونه کی و بل ته وړل کیږي: دا داسی بلل کیږي، چې دی

$$(\bigcap_{a\in A} a)\, u = \bigcap_{a\in A} au \quad , \quad (\bigcup_{a\in A} a)\, u = \bigcup_{a\in A} au \qquad (2)$$

دا په برخه ۱ کي جوړ شوي د M خوندیونه په M کی، په روښانه توګه مخ ته لرونکی شرطونو لپاره بسیانه کوي.
موږ په لاندې توګه مخ په وړاندې خو: لمړی نیسو چې ډیری M یو صفر توکی لري، که نه نو M ته یو توکی 0 صفر ورزیاتوو.

۶ . ۱ . ۱۷ تعریف : یو ناتش لاندیډیری M X په M کی یو ایدیال بولو که:
اول) X و هر خپل توکي x ته تړلي توکي y هم

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $x \leq y$ سره.

دوم) د هر $X' \subseteq X$ لپاره، د کوم لپاره چې په M کې ټولنه موجود وي دا ټولنه په X کې هم موجود ده.

د ډيري M د ټولو ايديالونو ډيرى S نسبت د ډيريتيوري خونديونى ته نيم منظم دى. دا چې S يو يويتوکى لري- په څرګند ډول M د خپل ځان ايديال دى-، له دې وراخواد ايديالونو په خوښه ډيري غوځى، چې صفر لري، او ټول د ايديال په تيوري کى راغلي تعريفونه پوره کوي، نو ډيريS د په دې برخه کې د مخه لوستل شوو له مخې پوره ترون دى.

د يوه په خوښه توکى $a \in M$ لپاره د ټولو توکو $b \in M$ ډيرى (a) د $b \leq a$ سره يو ايديال انځوري، کوم چې د a څخه راجوړ يا توليد شوى اصلي ايديال بلل کيږي. که هر توکى $a \in M$ د هغه څخه راجوړ يا توليد ايديال(a)باندې تنظيم شي، نو په لمړۍ برخه کې لوستل شوو له مخې يو ايزومورف خونديونه u د نيم تنظيم شويډير M ، په پوره ترون S کې، لاس ته راځي.

موږ نو نيسو ، چې په M کې د لاندېډيريو $A \subseteq M$ د هغو غوځى

$$c = \bigcap_{a \in A} a$$

موجود دى. پس لرو $c \leq a$ او په دې پسى $(c) \leq (a)$ د ټولو $a \in A$ لپاره.

که بيا د ټولو اصلي ايډيالونو(a) $, a \in A$ د ډيريتيور-

(c) ketabton.com: The Digital Library

یکي غوڅي توکی x ولري، نو $x \leq a$ دی، د ټولو $a \subset A$ لپاره او له دې امله $x \leq c$. له دې سره باور لري

$$(c) = \bigcap_{a \in A} (a)$$

او له دې سره جوخت لمړی مساوات (۲) وښوول شو.

همداسې دې و دې لاند ډیر $M \subseteq A$ ته په M کی ټولنه

$$d = \bigcup_{a \in A} a$$

موجود وي. نو $(a) \supseteq (d)$ دی د ټولو $a \in A$ لپاره.

که یو ټاکلی ایدیال X ټول $a \in A$ ولري، نو په همدې توګه د دې ټولنه هم خوندي لري. په دې لاس ته راوړنی سره $X \subseteq (d)$ دی.

له دی امله باور لري

$$(d) = \bigcup_{a \in A} (a)$$

په دې توګه مو د (۲) دوهم مساوات وښوول، او په له دې امله د جملی اوبی پوره شو.

۶ . ۱ . ۱۸ جمله :یو نیمتنظیم شوی ډیری S هلته او هلته یو پوره ترون دی، کله چې په S کی یو صفر توکیموجود وي او هر ایدیال یو اصلي ایدیال وي.

یا دونه: د دې جملي له ښوونی څخه هم دلته تیریږو . کیدی شي په کوروش یا خوروش کی , وکتل شي ..

(c) ketabton.com: The Digital Library

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library