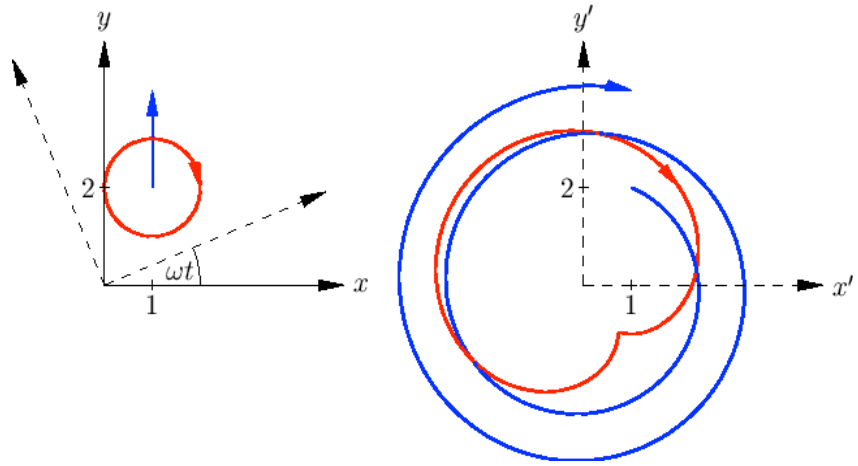
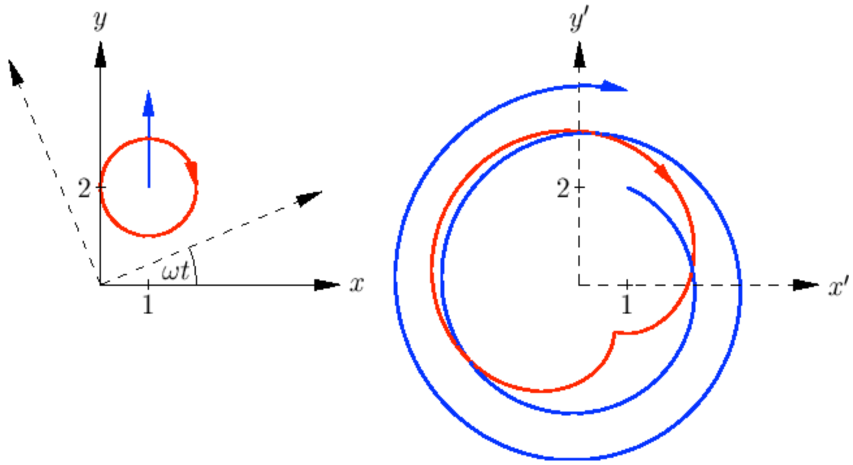
وکتورشمیرنه



ډاکتر ماخان شینواری

وکتورشمیرنه



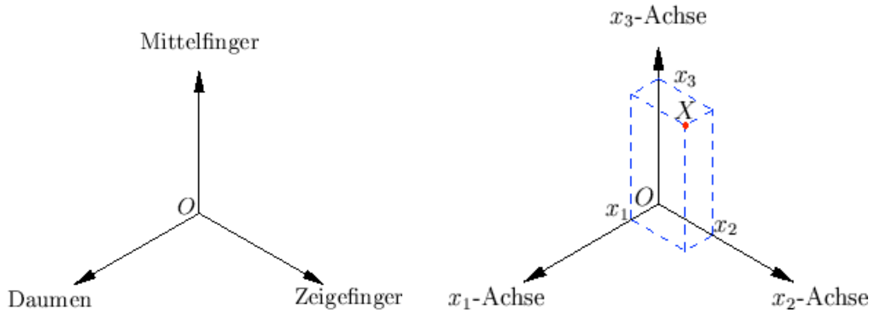
د شمیرپوهنې نړیوال جال څخه په مننه

ژباړی: ډاکتر ماخان شینواری

وکتورشمیرنه

په هواره(سطح) اوهوا(فضا) کې کارتیزي - یا پروت ولاړسیستم

یو فضایي کواوردیناتسیستم له درې په سرچینییز ټکي O کې یو په بل ولاړو ګڼونکرښو(محورونو) څخه جوړ دی، چې لوریزوالی یې د څېرې له مخې،، د ښي لاس قاعدې،، سره سم ټاکل شوی دی.



یو ټکی X د کواوردیناتو x_i سره په نخښه شوی په محورونو د پرپوستون ارزښت سره سم کره کیدی شي. $X = (x_1, x_2, x_3)$. که ایندکس یا پیژندنخښه ونه کارول شي،نو

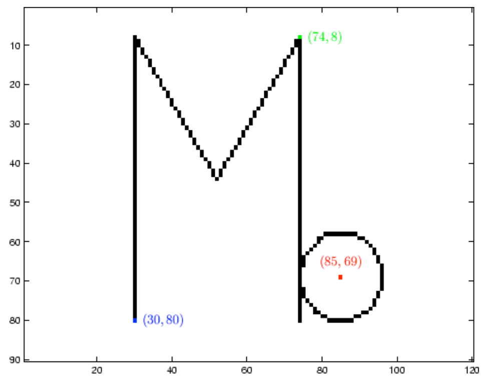
کواوردینات په ورسره بلد ډول د (x, y, z) او ګنونمخور د x ,-y- او z - محور په

نخښه کيږي.

په ورته توګه د هوارې کارتيزي کواوردیناتسیستم پیژنو یا تعریفوو.

پیکسل – یا د چوخوني کواودینات Pixelkoordinaten

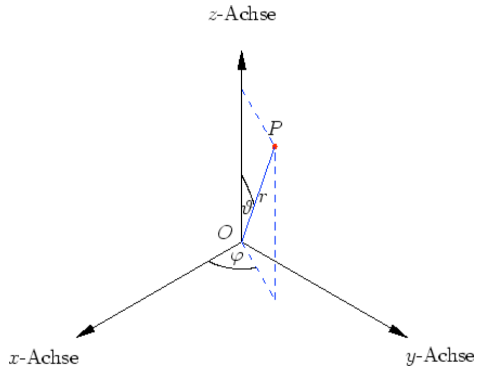
په یوه ګرافيکي کړکۍ کې شیان د پیکسل- چوخونوکواودینات (Pixel خورا کوچني ځیره شوي ټکي) له لارې ورکول کیږي.. دا انځور شوی ولاړګوډیز یوه کړکۍ ده د 90×120 چوخونو سره او د رنګه چوخونو کواوردینات پروت دی د ځیرې ګوډ په ګوته کوي .



د غونډاري (غونډوسکې) یا کرې کواوردینات

یو ټکی $P = (x, y, z)$ کیدی شي د سرچینې سره د واټن $r = |\overline{OP}|$ ، د کونج φ د x - محور او د هغه پربوستون $\overline{OP}$ په xy - هواره او کونج $\vartheta \in [0, \pi]$ د $\overline{OP}$ او z - محور ترمنځ له لارې انځوربدلی شي. کونج φ تیک تر د 2π

زياتځلي پورې ټاکلکيدی شي. د ستاندارد په څير په $\varphi \in (-\pi, \pi]$ پربکړه کيدی شي يا منل کېدی شي.   (په لاندې او نورو ځايونو کې: محور =Achse)



باور لري:

$$x = r\cos\varphi\sin\vartheta, \quad y = r\sin\varphi\sin\vartheta, \quad z = r\cos\vartheta$$

همداسې

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \varphi = \arctan(y/x), \quad \vartheta = \arccos(z/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}),$$

د کوم سره چې د x, y او z نيونې سره سم د اركوستانجنت يوه مناسبه څانګه د ټاکلو وي.

د اصلي څانګې- كونج $\varphi_H = \arctan(y/x) \in (-\pi/2, \pi/2)$ سره باور لري

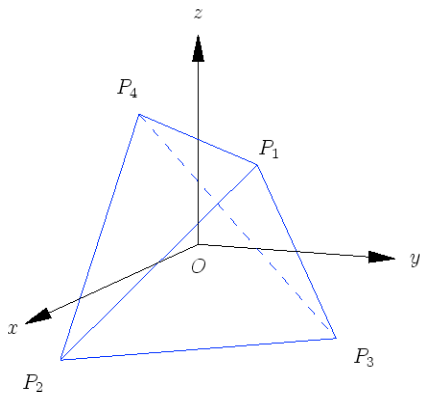
$$\varphi = \begin{cases} \varphi_H, & \text{für } x > 0, \\ \operatorname{sign}(y)\pi/2, & \text{für } x = 0, \\ \varphi_H + \pi, & \text{für } x < 0 \wedge y \geq 0, \\ \varphi_H - \pi, & \text{für } x < 0 \wedge y < 0. \end{cases}$$

ليكونكي:اپ، هوليک

په کارتيزي کواوردينات کې ټکي

$$P_1 = (1,1,1), \quad P_2 = (1,-1,-1), \quad P_3 = (-1,1,-1), \quad P_4 = (-1,-1,1)$$

د منظم تيترااېدر کونجونه جوړوي د اړخ اوږدوالي $2\sqrt{2}$ سره او په O کې د درونډ ټکي سره



په غونډاري کواوردينات (r,ϑ,φ) کې ګوډټکي يا کونج- لاندې کواوردينات لري

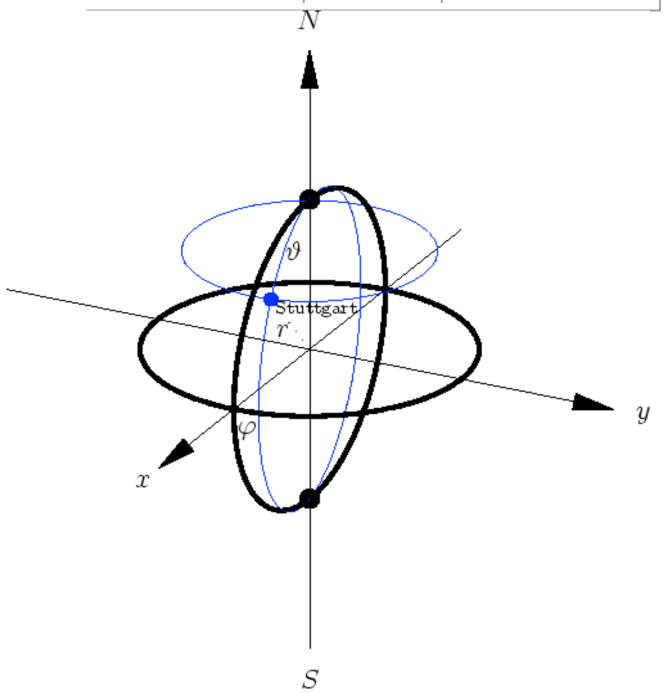
$$P_1' = (\sqrt{3}, \psi, \pi/4), \qquad P_2' = (\sqrt{3}, \pi - \psi, -\pi/4),$$
$$P_3' = (\sqrt{3}, \pi - \psi, 3\pi/4), \qquad P_4' = (\sqrt{3}, \psi, -3\pi/4),$$

چېرته چې $\psi = \arccos(1/\sqrt{3})$ همداسې $\psi = \arctan\sqrt{2}$ دي

د اوږدوالي – او سور درجې (طول البلد او عرض البلد؟)

په ځمکغونډاري (ځمکغونډوسکي) يا ځمکې کره باندې د اوږدوالي – او سور درجې د کرې يا غونډاري کواوردينات دي، خو يوائې بل ډول کونجورشو ګاڼي (کونجساحې) کارول کيږي:

ختیز اوږدوالی	180°- 0°	$\varphi = 0 \ldots \pi$
لویدیز اوږدوالی	180°- 0°	$\varphi = 0 \ldots -\pi$
شمالي سور	90°- 0°	$\vartheta = \pi/2 \ldots 0$
جنوبي سور	90°- 0°	$\vartheta = \pi/2 \ldots \pi$



په خیره کې ایکواتور(سور 0°) او صفري اوږدوالی غوړ کبنل شوي دي، شمالي قطب (۹۰ درجي شمالي سور) او جنوبي قطب(۹۰ درجي جنوبي سور) هم په نخښنه شوي دي. شنه اوږدې – او سورګردی د ستوتګارت(۹۰ درجي ختیزې اوږدوالی ، ۴۹ درجي جنوبي سور) تېرېږي

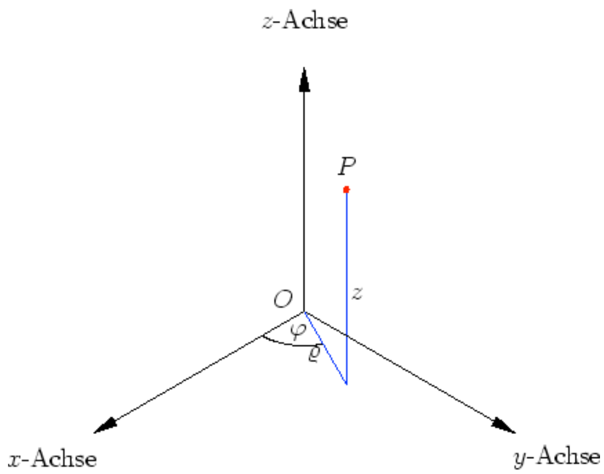
او $\varphi = \frac{1}{20}\pi$ (ختیز نیم غونډاری) او $\varphi = -\frac{19}{20}\pi$ (لویدیز نیمغونډاری په نخښنه کوي

او $\vartheta = \frac{41}{180}\pi$

تونه – يا استوانه كواوردیناتونه Zylinderkoordinaten

یو ټکی $P = (x, y, z)$ کیدی شي د یوه کونج φ له لارې ، چې د x -مخور او د xy -هواره باندې د پریوستون (پروجکشن) $\overline{OP}$ ترمنځ پروت دی ، پرېوستون د اوږدوالي او د z- كواوردينات له لارې وټاكل شي.

كونج φ تیک تر د 2π پورې ټاکلی. د ستاندارډورشو پرېکړه زيات وخت تر $\varphi \in (-\pi, \pi]$ پورې شوې.



باور لري

$$x = \varrho \cos \varphi, \quad y = \varrho \sin \varphi, \quad z = z$$

همداسې

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan(y/x), \quad z = z\,,$$

د کوم سره،چې د x او y د مخنخبني پوري اړونده د ارکوستانجنت یوه څانګه ټاکل کیږي.

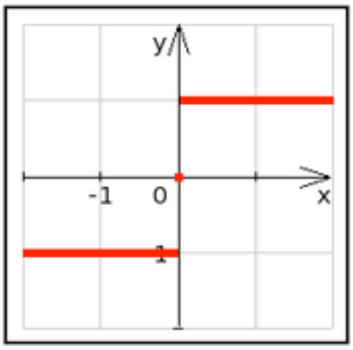
د اصلیڅانګي ـکونج $\varphi_H = \arctan(y/x) \in (-\pi/2, \pi/2)$ سره باور لري:

په لاندي کې Für د ... لپاره په مانا او sign سګنوم لوستل کیږي

$\varphi = \begin{cases} \varphi_H, \\ \mathrm{sign}(y)\pi/2, \\ \varphi_H + \pi, \\ \varphi_H - \pi, \end{cases}$	د $x > 0,$ لپاره د $x = 0,$ لپاره د $x < 0 \wedge y \geq 0,$ لپاره د $< 0 \wedge y < 0.$ لپاره

سیګنوم (لاتین : Signum نخبنه) فنکشن په رییل ګنونکربنه :

د فنکشن د مخنخبنو ګراف

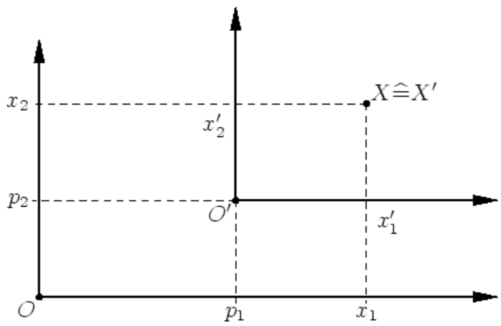


د رییل ګنونو خیره ونه ده په ډېرۍ {-1,0,1} کې

وړل (سیده یا سم کرښیز خوزښت یا انتقال) Translation

د سرچینې O کشولو سره و $O' = (p_1, p_2, p_3)$ ته د برابر پاتیکیدونکي لور سره د یوه ټکي $X = (x_1, x_2, x_3)$ کواوردینات په لاندې توګه تغیر خوري

$$X' = (x_1 - p_1, x_2 - p_2, x_3 - p_3) .$$



خوزنده یا متحرک نسبي سیستم

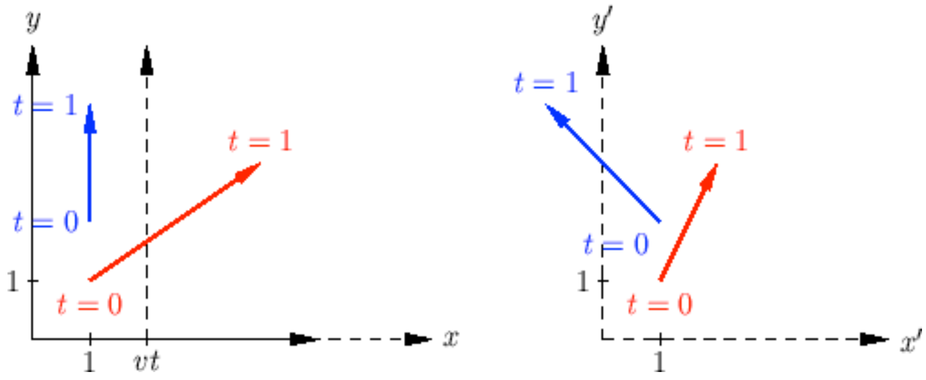
د یوه د x -محور په لور د v چټکتیا سره ځغلنده ګاډی په هواره (سطحه) برابرډوله خوزښت

$$(x(t),\, y(t)) = (p + \alpha t,\, q + \beta t), \quad t \geq 0 ,$$

په پام کې نیسو ، نو کواوردینات یې په لاندې ډول تغیر خوري

$$x' = x - vt, \quad y' = y .$$

کتونکی یوه بله چټکتیا ریښتوني نیسي یا بله چټکتیا ګوري



د بیلګې په توګه د یوه شي لپاره باور لري، چې د یوه وخت په یوون(واحد) کې د $v=2$ لپاره له ټکي $P=(1,1)$ و ټکي $Q=(4,3)$ ته خوزي(سور غشی)

$$P'=(1,1),\quad Q'=(4-2,3-0)=(2,3)\,.$$

د ریښتوني او کتونکي چټکتیا لپاره په ورته توګه باور لري

$$v_t=\sqrt{(4-1)^2+(3-1)^2}=\sqrt{13},\quad v_b=\sqrt{5};$$

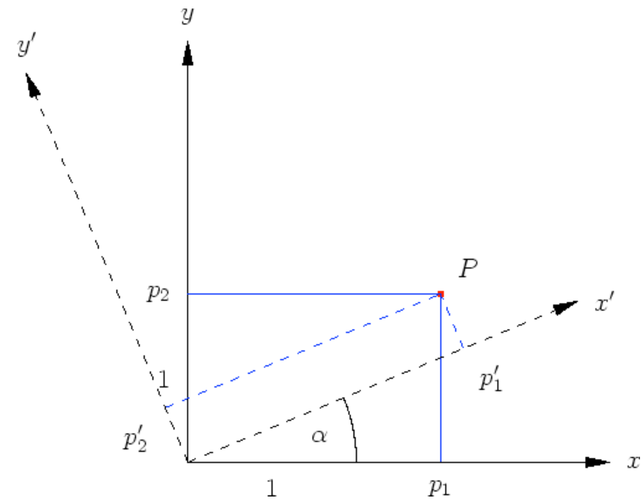
له دې خوزښت څخه خوزښت بتیاوالی برېښي.

لیکونکي: اېپ، هولیګ

څرخون Rotation

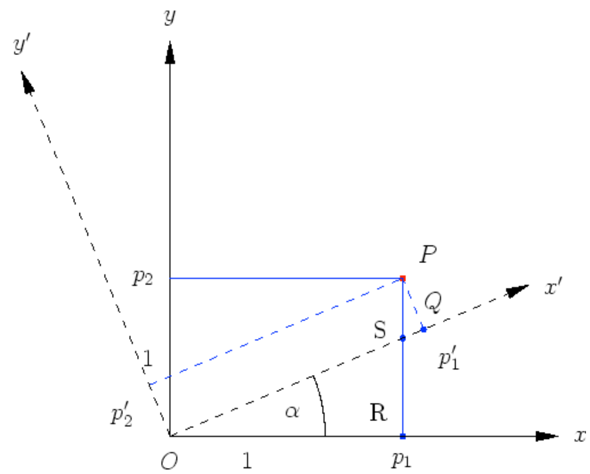
د xy -هوارې یا سطحې څرخون په z -محور د یوه ټکي $P=(p_1,p_2,p_3)$ کواوردینات د α کونج سره ترانفورمي کیږي د لاندې سره سم

$$p_1'=\cos\alpha\,p_1\;+\;\sin\alpha\,p_2,\quad p_2'=-\sin\alpha\,p_1\;+\;\cos\alpha\,p_2,\quad p_3'=p_3\,.$$



په ورته توګه د yz - او zx -هوارو څرخون لپاره فرمولونه لاس ته راځي

لیکونکي: اپپ، هولیګ



لومړی پېژنو، چې

$$\sphericalangle(S, P, Q) = \alpha \, ,$$

داپه دې معنا چې ولاړکونجیز درېګودی(مثلث) $\triangle(R, O, S)$ او $\triangle(Q, P, S)$ ورته دي.

په لومړي درېګوډي کې باور لري.

$$|\overline{OS}| = p_1/\cos\alpha$$

او

$$|\overline{RS}| = p_1 \tan\alpha \,.$$

له دويم درېګوډي لاس ته راځي

$$p_2' = \cos\alpha \, |\overline{PS}| = \cos\alpha \, (p_2 - |\overline{RS}|)$$

$$= \cos\alpha \, p_2 - \sin\alpha \, p_1$$

او

$$p_1' = |\overline{OS}| + |\overline{SQ}| = p_1/\cos\alpha + \sin\alpha \, (p_2 - |\overline{RS}|)$$

$$= \frac{1-\sin^2\alpha}{\cos\alpha} p_1 + \sin\alpha \, p_2$$

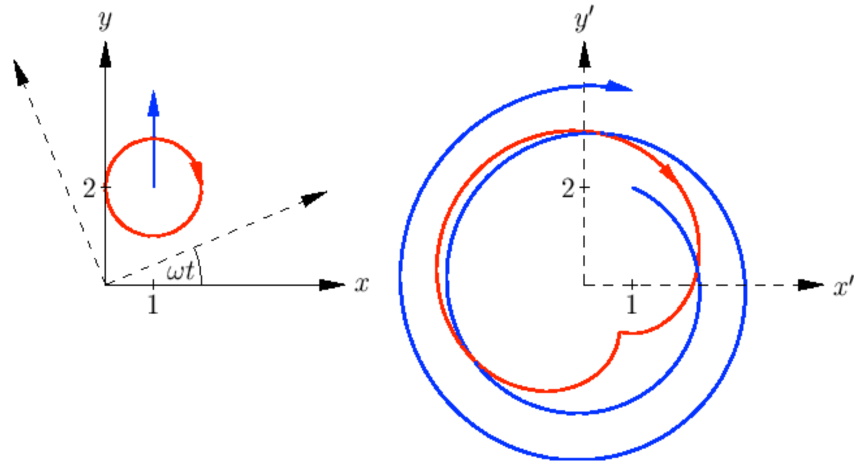
ليکونکی: اپپ، هولير

څرخنده   يا څرخيدونی نسبي سيستم :

تابع کيږ د د سيده کرښيز او ګردي ډوله خوزښتونو د د خوزښت منحني ښايي:

$$G: \quad (x,y) = (1,\, 2 + t/(2\pi)),$$
$$K: \quad (x,y) = (1 + \cos(t),\, 2 - \sin(t))\,.$$

ښي لور ته دواړه منحني يا کرږ ديوهکونج سره څرخيدوني نسبي سيستم انځوروي، دا په دې معنا چې داسې لکه په يوه کاروسل (هغه څرخيدوني شيان دي، چې کسان په کې ګرځي) کې يوه کتونکي ته برېښي.



د کواودیناتو ترانفومیشن یا بدلون د سیده کرښیز خوزښت لپاره راکوي:

$$x' = c + (2 + t/(2\pi))s, \quad y' = -s + (2 + t/(2\pi))c$$

د لاندې سره

$$c = \cos(\omega t), \quad s = \sin(\omega t)\,.$$

یوه شپیرال منځ ته راځي، ځکه چې په نوکانو کې ضریب د جګیدونکي t سره لویږي.

دا جوړشوي 2 اوړونونه   وخت انتروال $0 \le t \le 4\pi$ په ګوته کوي.
د بدلې شوې کواودینات څخه د $\omega = 1$ سره د دایره ډوله خوزښت لپاره

$$x' = c(1+c) + s(2-s), \quad y' = -s(1+c) + c(2-s)\,,$$

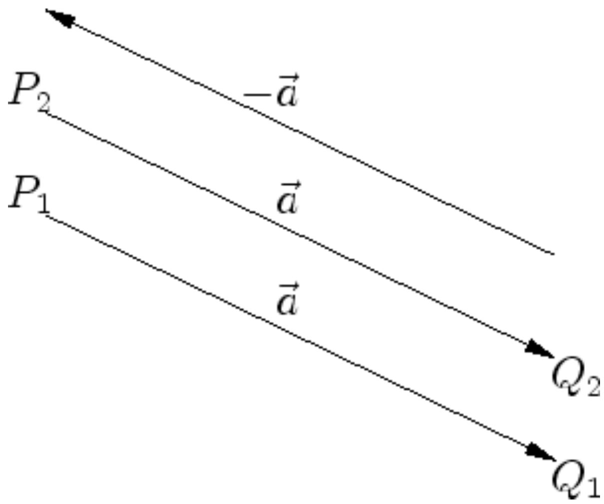
په څرخون سیستم کې د خوزښتمنحني بڼه نه پسې ترلې پېژندل کيږي. لکه دا بېلګه چې په ګوتهکوي، کېدی شي د کتلو لور سملاسي تغیر شي. کېدی شي چې د کتلو خوزښت منحني کې ګوډ یا ماتوالی راپیداشي. په څرخېدونکي سیستم کې په یوه داسې زینګولار ټکي کې کتونکې چټکتیا صفر ده.

وکتورونه په فضا کې

یو وکتور یوه لوریزه ټوټه کرښه ده:

$$\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$$

دا وکتور له ټکي P څخه و ټکي Q ته په نخښه کوي. یا ښايي. په بدیله توګه کیدی شي وکتور په فضا کې د P-راکښنې په توګه افاده شي او له یوه غشي سره په نخښه شي.



لکه د څیرې څخه چې کتل کیږي برابر اوږده غشي په همغه (برابره) لور همغه(برابر) وکتورونه $\overrightarrow{P_1Q_1} = \overrightarrow{P_2Q_2}$ انځوروي.

ځانګې انځورونه نسبت و سرچینې ته ځای وکتور بلل کیږي او د وکتور کواوردیناتونه داسې تعریفوي:

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}.$$

د $\vec{a}$ کواوردیناتونه هم کیدی شي د د ټکو Q او P کواوردیناتونو په ځېر و شمیرل شي. بالاخره د

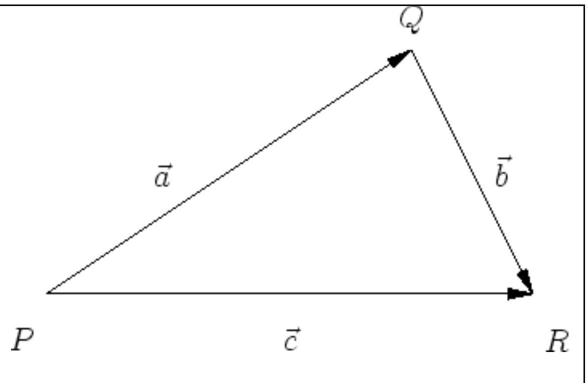
$$\overrightarrow{OO} = \overrightarrow{PP} = \vec{0}$$

سره صفروکتور په نخښه کوو.

د وکتورونو جمعه(زیاتون):

د دوه وکتورونو جمعه د وکتورونو یو و بل ته یا یو بل پسې راکښنه ده

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}.$$



د کواوردیناتونو یا محورونو لپاره دا دي:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}.$$

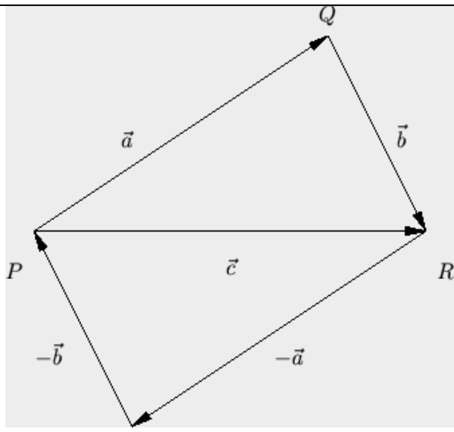
د

$$\overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ}$$

سره و $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$ ته مخامخ يا په ځټ(برعکس) راکښنه $-\vec{a}$ په نخښه کيږي. په ځانګړې توګه باور لري

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}, \quad \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}\,.$$

(ليکونکي: هوليګ، موخ)



د ټکو

$$P = (1,1,1), \quad Q = (4,2,7), \quad R = (1,4,3)$$

لپاره وکتورونه

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$$

او

$$\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{RQ} + \overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ} + \left(-\overrightarrow{QR}\right)$$

شميرلکيږي

لکه په ځيره کې چې کښل شوي د کواورد يناتو لپاره باور لري:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 2-1 \\ 7-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-4 \\ 4-2 \\ 3-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$-\vec{b} + (-\vec{a}) = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 2-4 \\ 7-3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-4 \\ 1-2 \\ 1-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= \qquad\qquad \frac{-\vec{c}}{}$$

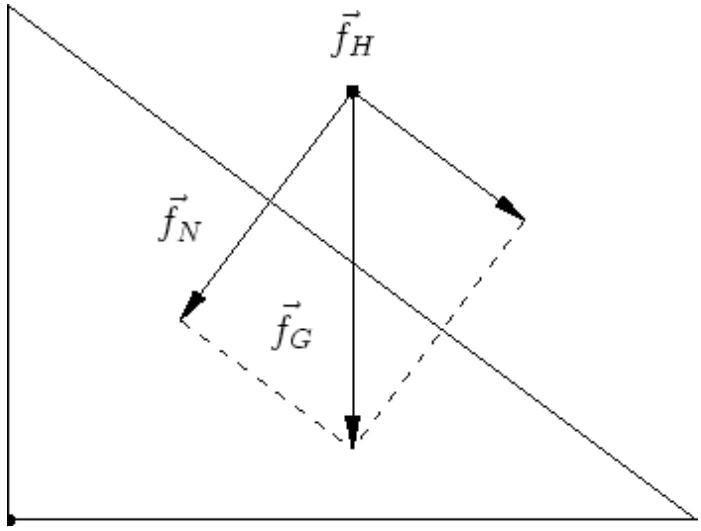
(ليکونکي: هوليک، موخ)

د يوې کږې سطحې (هوارې) لاندې داسې يوه سطحه پوهيږو، چې د پروتوالي لور ته ميلان ولري.

لکه څنګه چې په څيره کې ليدل کيږي، کيدی شي د وزن زور $\vec{f}_G$ په دوه يو بل سره ولاړو يا عمود بوخو يا کمپوننتونو ټوټه شي(د زور ټوټه کونه د د دوه زور غبرګ اړخيزې(مواز ی الاضلاع) سره) .

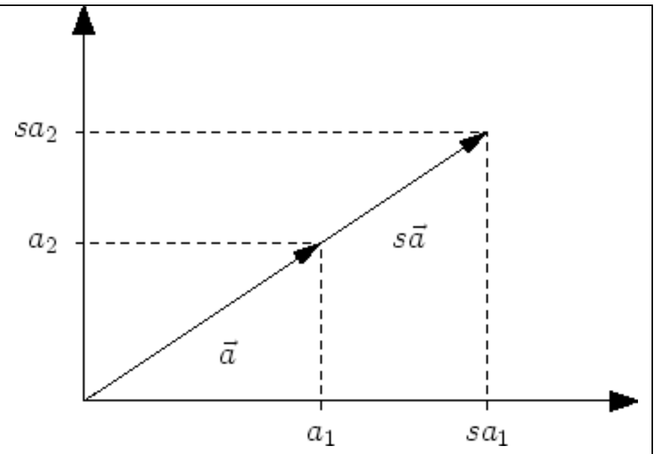
$$\vec{f}_G = \vec{f}_N + \vec{f}_H \, .$$

مايلې سطحې سره عمود عمودي زور(ولاړ زور) اغيزه لري. او ميلې هوارې سره غبرګ کښته لور ته لوريزه بيره ييزه زوړند زور $\vec{f}_H$ اغيزه لري.



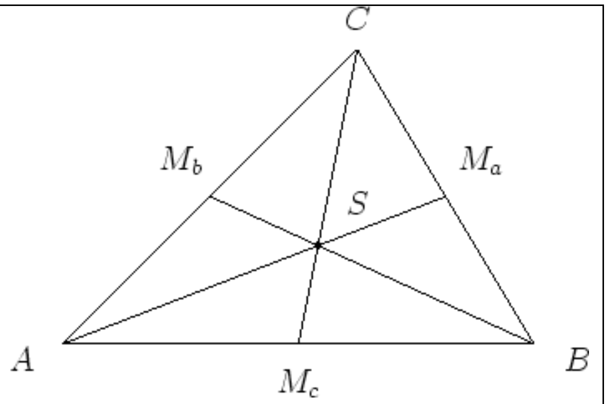
(ليکونکي: هوليک، موخ)

سکالار ضرب :

وکتور $s\vec{a}$ يو s- واره راکښنه په کوته کوي، دا په دې معنا چې $$s\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sa_1 \\ sa_2 \\ sa_3 \end{pmatrix}$$ په ځانګې توګه $0\vec{a}=\vec{0}$ دی.	

(ليکونکي هوليک، موخ)

د اړخنيمو غوڅټکي(نقاط تقاطع ناصف الاضلاع) :

د يوه درېګوډي(مثلث) اړخنيمی يو بل په دروندټکي(مرکزالثقل) S کې سره غوڅوي. $$\vec{s} = \frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right) .$$	

د دې د ښوولو لپاره ځای د وکتور د اړخنيمی په ټکو ليکو $\overline{AM_a}$ په لاندې بڼه:

$$\vec{p} = \vec{a} + t(\vec{m}_a - \vec{a}) = \vec{a} + t\left(\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} - \vec{a}\right), \quad t \in [0,1] .$$

د $\overline{AM_a}$ لپاره دی، نو دروند ټکی په $2:1$ نسبت وېشي

په ورته توګه اړخنیمیو $\overline{BM_b}$ او $\overline{CM_c}$ لپاره باور لري.

(لیکونکي هولیګ، موخ)

(مطلق) ارزښت

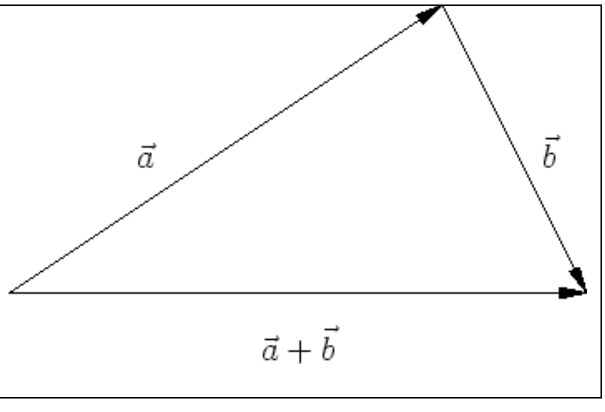
د $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$ ارزښت له P څخه د Q ته د غشي اوږدوالی دی همداسي له O و A ته، دا په دې معنا چې

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\,.$$

په ځانګي توګه $|s\vec{a}| = |s||\vec{a}|$ دي.

یو وکتور د 1 (مطلق) ارزښت سره یوونوکتور (واحدوکتور) بلل کیږي.

درېګوډیز (مثلثاتي) نامساوات :

د دوه وکتوونو د جمعې (زیاتون) لپاره باور لري $$|\vec{a}+\vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$$ د برابروالي سره تیک هلته ، چې $\vec{a}$ او $\vec{b}$ غبرګ(موازي) وي، داپه دې	

	معناچي $\vec{a} = s\vec{b}$ دي.

(ليکونکي هوليک، موخ)

د شميرنـې قوانين :

د وکتورونو لپاره لاندې شمېرقوانين باور لري:

- Kommutativgesetzکموتاتيو قانون

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

- Assoziativgesetz:اسوښياتيو قانون

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$$

- Distributivgesetz:دېستريبوتيوقانون

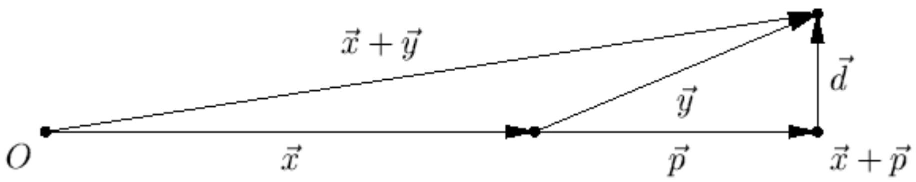
$$s(\vec{a} + \vec{b}) = s\vec{a} + s\vec{b}$$

(ليکونکي هوليک، موخ)

(له باد را پيداشوې د لويو اوبو يا بحر په سر) هواجريانات

Drift eines Flugzeugs

يوه الوتکه په 800 km/h چټکتيا ختيز لور ته الوزي د يوه باد 50 km/h چټکتيا سره له WSW .



که پروت محور د ختیز سره او ولاړ محور د شمال سره په نخښه کړښ یاوښايي، نو له

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 800 \\ 0 \end{pmatrix}$$

سره د الوتکې چټکتیا او

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} 50\cos(\pi/8) \\ 50\sin(\pi/8) \end{pmatrix}$$

د باد چټکتیا ښايي.

د یوه ساعت وروسته الوتکه تر

$$\vec{x}+\vec{y} = \begin{pmatrix} 800+50\cos(\pi/8) \\ 50\sin(\pi/8) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 846.19 \\ 19.13 \end{pmatrix}$$

پورې الوتي. که له $\vec{p}$ سره په کرښه د $\vec{y}$ عمود یا orthogonale پرېوستون د $\vec{x}$ په لور وښايو، نو تولیزه چټکتیا له کمپوننتو څخه

$$\vec{x}+\vec{p} = \begin{pmatrix} 800+50\cos(\pi/8) \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 846.19 \\ 0 \end{pmatrix}$$

د ختیز لور ته او دریفت څخه

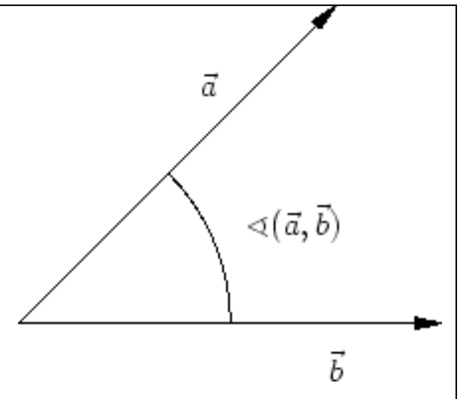
د شمال لورته

$$\vec{d} = \vec{x} + \vec{y} - (\vec{x} + \vec{p}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 50\sin(\pi/8) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 19.13 \end{pmatrix}$$

جوړيږي.

(ليکونکي هوليک، اپپ)

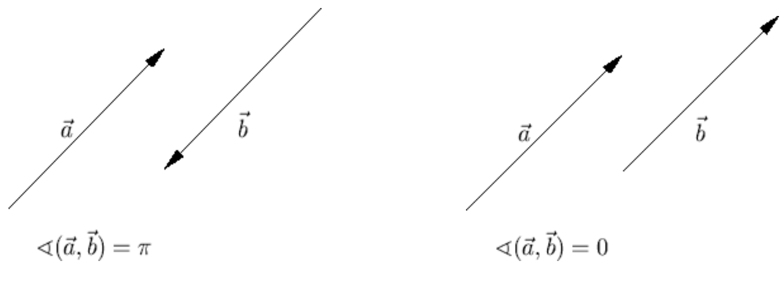
کونج يا زاويه :

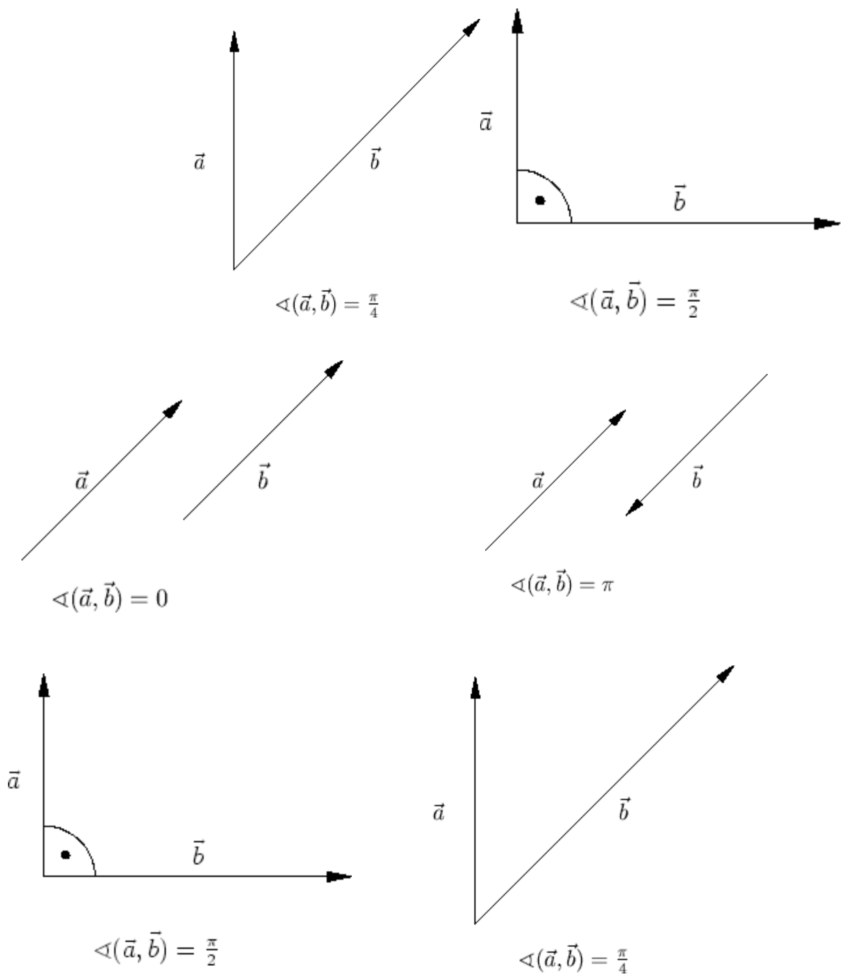
	د $\vec{a},\vec{b} \neq \vec{0}$ لپاره سړی د $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) \in [0,\pi]$ د دواړو کونجونو کوچنی کونج ښايي، چې د وکتور سره په نخښنه شوي غشي سره ګډ ککرئ ټکی د رأس نقطه جوړوي.

دواړه وکتورونه عمود دي، $\vec{a} \perp \vec{b}$ ، که کونج له $\pi/2$ سره برابر وي. له دې سره قراردادکيږي، چې صفروکتور په هر وکتور عمود يا ولاړ دربدلی.

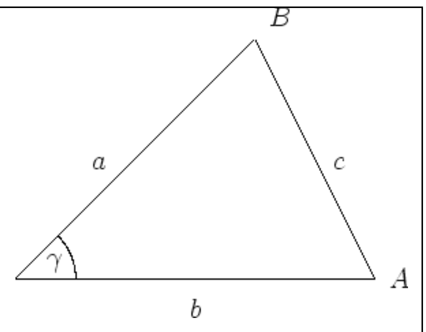
(ليکونکي هوليک، موخ)

لاندې ځيرې يو څو نمونه يي حالتونه د ليد کوي.





د کوساین جمله :

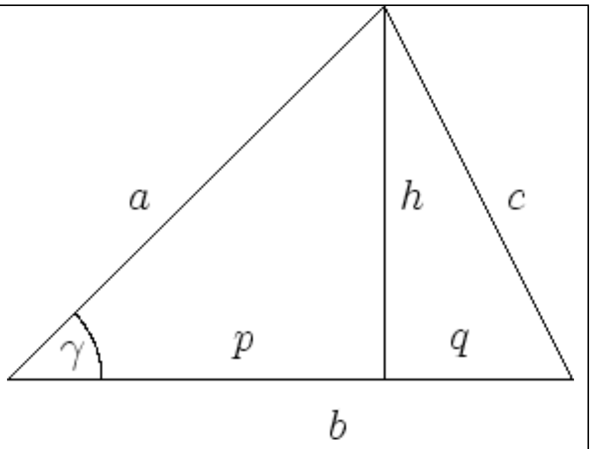
په یوه درېګوډي کې په کوم چې د اړخ $\overline{AB}$ مخامخ کونج γ پروت دی باور لري $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma\,.$	

نو په ځانګړې توکه لاس ته د $\gamma = \pi/2$ لپاره د پيتاګوراس جمله راځي:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

(ليکونکي هوليګ، موخ)

د ښوونې لپاره يي د پيتاګوراس له جملې کار اخلو.

باور لري $c^2 = h^2 + q^2, \quad h^2 = a^2 - p^2$ همداسي $q = b - p, \quad p = a\cos\gamma\,.$ له دې سره لاس ته راځي $c^2 = (a^2 - p^2) + (b - p)^2$ $= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma\,,$ څه چي د ښوولو وو. (ليکونکي هوليګ، موخ)	

سکالار ضرب :

د دوه وکتورونو ضرب د

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$$

$$= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

د له لارې تعريف دی

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$$

او

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \perp \vec{b}.$$

د سکالار صرب د کواوردينات د انځورولو له لارې لاس ته راځي

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

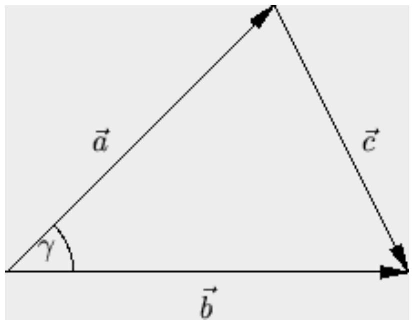
همداسې

$$\left(s\vec{a} + r\vec{b}\right) \cdot \vec{c} = s\vec{a} \cdot \vec{c} + r\vec{b} \cdot \vec{c},$$

دا په دې معناچې د ضرب ورسره بلد قوانين باور لري.

(ليکونکي هوليک، موخ)

د دواړو ورته واليو انځورونه د کوساين جملې له لارې لاس ته اځي:



$$|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\gamma\,.$$

که داړه مربع وې کيږ لور ته راوړل شي،نولاس ته راځي

$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 - (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) - (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)\,.$$

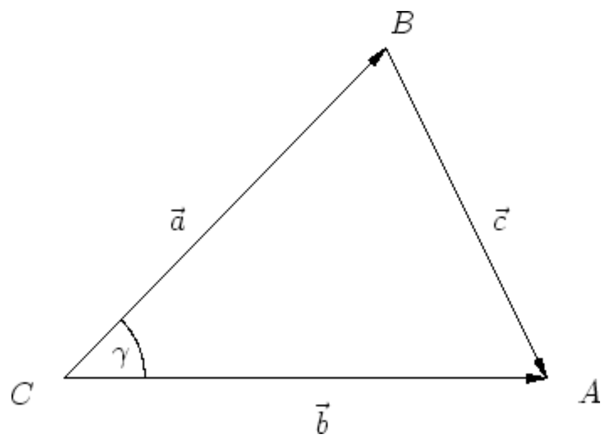
د بدلون $c_i^2 = (b_i - a_i)^2$ څخه وروسته دواړه مربع وې يو بل سره پورته کوي يا سره له منځه ځي، او پاتې ګډ ترمونه د(2-) -ځله سکالار ضرب سره يو بل سره سر خوري.

دا څېره شوی مثلث لاندې ګوړونه لري

$$A = (6,0), \quad B = (4,4), \quad C = (0,0)$$

او دی

$$\vec{a} = \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$



د γ کونج د سکالار ضرب په مرسته شمېرل کېدی شي.

$$\cos\gamma = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}\right| \left|\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}\right|} = \frac{24}{6\sqrt{32}} = \frac{1}{\sqrt{2}} .$$

لاس ته راځي $\gamma = \pi/4$ ، لکه ترړلي له کواورديناتونو څخه د ليدني دي. د دې راوړل شوې ببېلګې په بنسټ کېدی شي د کوساين جمله هم وشمېرل شي. باور لري

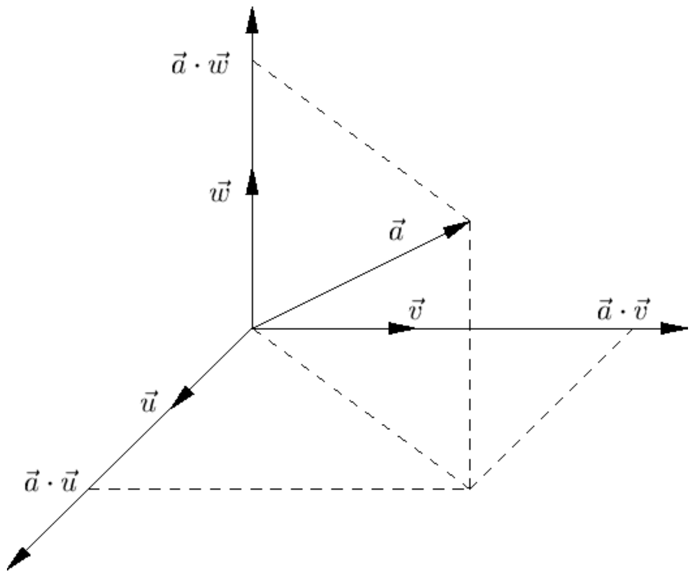
$$|\vec{c}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 20 - 32 - 36 = -48 ,$$

او هم د $-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\gamma = -2\,(4\sqrt{2})\,6/\sqrt{2}$ سره توفق مومي يا سر خوري.

(ليکونکي هوليک، موخ)

اورتوګونال يا يو په بل ولاړ(عمودي) بنسټونهOrthogonalbasis

اوروتګونال بنسټ له درې جوړه اورتوګونال وکتورونو $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$. څخه جوړ دي.



لکه په ځیره کې چې کښل شوی دی، کیدی شي هر وکتور $\vec{a}$ د کرښیز کمبینیشن

$$\vec{a} = \frac{(\vec{a}\cdot\vec{u})}{|\vec{u}|^2}\vec{u} + \frac{(\vec{a}\cdot\vec{v})}{|\vec{v}|^2}\vec{v} + \frac{(\vec{a}\cdot\vec{w})}{|\vec{w}|^2}\vec{w}$$

له لارې انځور شي. د زیاتوونو (د جمعې برخو) د بنسټیزو وکتورونو تولید شوی پرېوستونونه دي، او د ضریبونو لپاره باور لري

$$\frac{|\vec{a}\cdot\vec{u}|^2}{|\vec{u}|^2} + \frac{|\vec{a}\cdot\vec{v}|^2}{|\vec{v}|^2} + \frac{|\vec{a}\cdot\vec{w}|^2}{|\vec{w}|^2} = |\vec{a}|^2 .$$

که وکتورونه $\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}$ نورمي یعنې یو په بل ولاړ (عمود) وي، نو د اورتوګونال بنسټ څخه غږېږو. په ځانګړې توګه لرو:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1\vec{e}_x + a_2\vec{e}_y + a_3\vec{e}_z$$

د کارتیزي کواوردینات سیتم د کانونیکي اورتوګونال بنسټ

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

لپاره

(لیکونکي هولیګ، موخ)

دا چې هر وکتور $\vec{a}$ د کرښیز کمبینیشن

$$\alpha\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2} + \beta\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2} + \gamma\frac{\vec{w}}{|\vec{w}|^2}$$

له لارې انځورېدلای شي،   هندسي تړلی ليدل کيږي

د ضريبونو د ټاکلو لپاره   د بنسټ وکتورونو سره سکالار ضرب جوړيږي . دا چې

$$\frac{\vec{u}\cdot\vec{u}}{|\vec{u}|^2}=1, \quad \vec{v}\cdot\vec{u}=\vec{w}\cdot\vec{u}=0\,,$$

د سکالار ضرب د کرښيزوالي له لارې لاس ته راځي :

$$\vec{a}\cdot\vec{u}=\left(\alpha\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2}+\beta\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2}+\gamma\frac{\vec{w}}{|\vec{w}|^2}\right)\cdot\vec{u}=\alpha\,.$$

په ورته توګه د β او γ لپاره ورته فرمول تصديقيږي. د ضريبونو د مربع جمعې فرمول لپاره سرې د لاندې ضربولو له لارې

$$|\vec{a}|^2=\left(\alpha\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2}+\beta\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2}+\gamma\frac{\vec{w}}{|\vec{w}|^2}\right)\cdot\left(\alpha\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2}+\beta\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2}+\gamma\frac{\vec{w}}{|\vec{w}|^2}\right).$$

ښوول کيږي.

دا هم په ساده توګه ليدل کيږي، چې پرېوستونو ته کمښتوکتورونه

$$\vec{a}-\alpha\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2}, \quad \vec{a}-\beta\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2}, \quad \vec{a}-\gamma\frac{\vec{w}}{|\vec{w}|^2}\,,$$

هر يو په اړونده بنسټ وکتور باندې عمود يا ولاړ دی:

$$\left(\vec{a}-\alpha\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2}\right)\cdot\vec{u}=\left(\beta\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2}+\gamma\frac{\vec{w}}{|\vec{w}|^2}\right)\cdot\vec{u}=0\,.$$

(ليکونکي هوليک، موخ)

نسبت اورتوګونال بنسټ ته

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{w} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

وکتورونه

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \vec{e}_x + 2\vec{e}_y + 4\vec{e}_z$$

لاندې ضريبونه لري.:

$\vec{a}\cdot\vec{u}$	$=$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$
$\vec{a}\cdot\vec{v}$	$=$	$\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \sqrt{3}$
$\vec{a}\cdot\vec{w}$	$=$	$\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}\sqrt{6}.$

له دې سره انځورونه لاس ته راځي:

$$\vec{a} = \frac{3}{2}\sqrt{2}\vec{u} + \sqrt{3}\vec{v} + \frac{3}{2}\sqrt{6}\vec{w}$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{2}\sqrt{6}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

وکتوري ضرب ، صلیبي یا چلیپا ضرب:

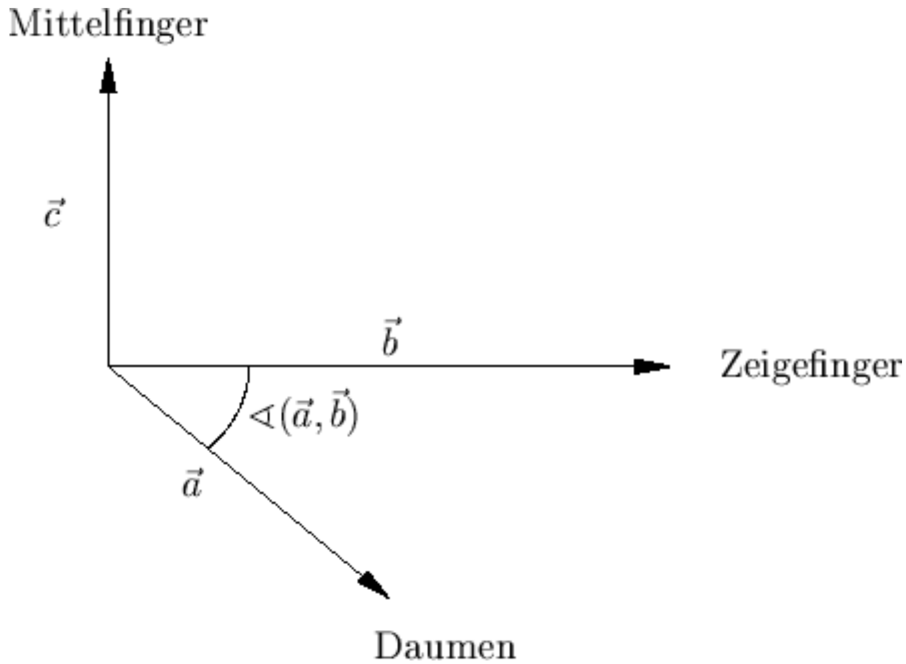
وکتور

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

$\vec{a}$ او $\vec{b}$ ته اورتوګونال دی، د ،، ښي –لاس- قانون،، لوریز دی او اوږدوالی

$$\left|\vec{c}\right| = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right| \sin(\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}))\,.$$

لري. (د ځیرې د الماني پښتو: منځګوته، ګوتلکه، غټه ګوته)



شکل کې الماني: پورته: منځګوته، ښی لور ته: نخښ ګوته، کښته لور ته غټه ګوته

په ځانګړې توګه باور لري $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ د $\vec{a} \| \vec{b}$ لپاره او $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|$ د $\vec{a} \perp \vec{b}$ لپاره .

بدیل یې وکتور د

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

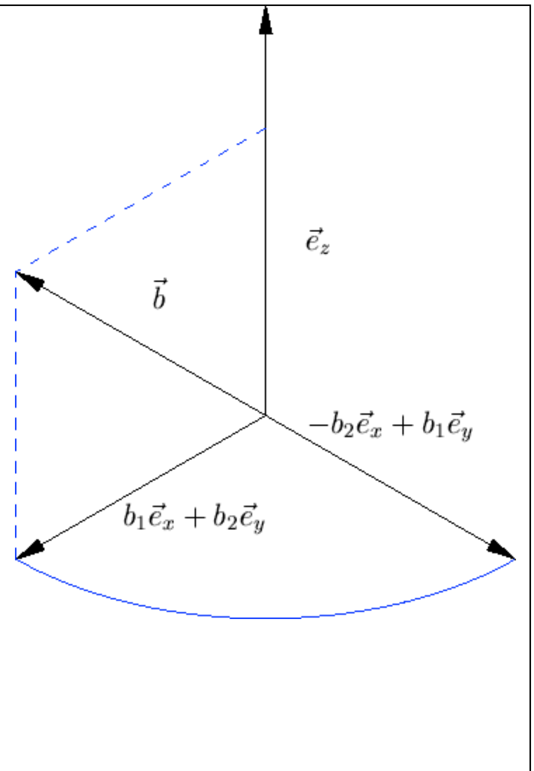
سره تعریفوي.

(لیکونکي : هولیک، ایپ)

د دې لپاره چې د دواړو تعریفونو ورته والی وښایو، لومړی په پام کې نیسو، چې دواړه انځورونې په $\vec{a}$ او $\vec{b}$ کې ګرښیزې دي، دا په دې معنا چې سکالار ضرب او وکتور جمعې سره زغمورړ دي. د کواوردینات انځورنې لپاره کیدی شي دا ترلې پسې وشمیرل شي. فقط زیاتونوالی)حمعه کیدنه) د هندسي تعریف لپاره څرګنده توګه روښانه دی.

لومړی ښایو، چې .

$$\vec{e}_z \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -b_2 \\ b_1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$



لکه له ځیرې چې لیدل کیږي، وکتور ضرب لاس ته راځي، داسې چې که وکتور $\vec{b}$ په xy -سطحه پربوستل شي او بیا په کونج $\pi/2$ و ځرخول شي. دا چې د پربوستون اودوالی

$$\left|\vec{b}\right| \sin(\sphericalangle(\vec{e}_z, \vec{b}))$$

دی، نو پورتنی فرمول لاس ته راځي.

د ځانګړې انځورونې څخه په دویمه کمپوننت کې د سیده پسې شمېرنې کرښیزوالی

لاس ته راځي، ځکه چې بې د ټولیز محدودیت څخه د لومړي وکتور لور د $\vec{e}_z$ په حیث ټاکو.

په ورته توګه لومړی کمپوننت هم همداسې کاروو.

بسیا کوي، چې د $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ کانونیکي بنسټ وکتورونو کمبینیشن لپاره وراته والی و ازمایل شي.

(لیکونکي : هولیګ، اپپ)

د تعریف یا پیژند د څرګندونې لپاره د وکتورونو

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{او} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

وکتوري ضرب $\vec{c}$ شمیرل کیږي.

یو و $\vec{a}$ او $\vec{b}$ ته اورتونال وکتور دی

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} \parallel \vec{c},$$

کوم چي همدا اوس ټیک لوریزوالی لري. له

$$\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} = \frac{9}{3\cdot 3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

لاس ته راځي : $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \pi/4$. له دې سره

$$|\vec{c}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \sin\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = 3\cdot 3\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = 9$$

دی او ورپسې

$$\vec{c} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

په بدیله توګه په ساده توګه تحلیلي تعریف

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 0 - 2\cdot 3 \\ 2\cdot 3 - 2\cdot 0 \\ 2\cdot 3 - 1\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

لاس ته اځي

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 0 - 2\cdot 3 \\ 2\cdot 3 - 2\cdot 0 \\ 2\cdot 3 - 1\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(لیکونکي: کلاوس، هولیک)

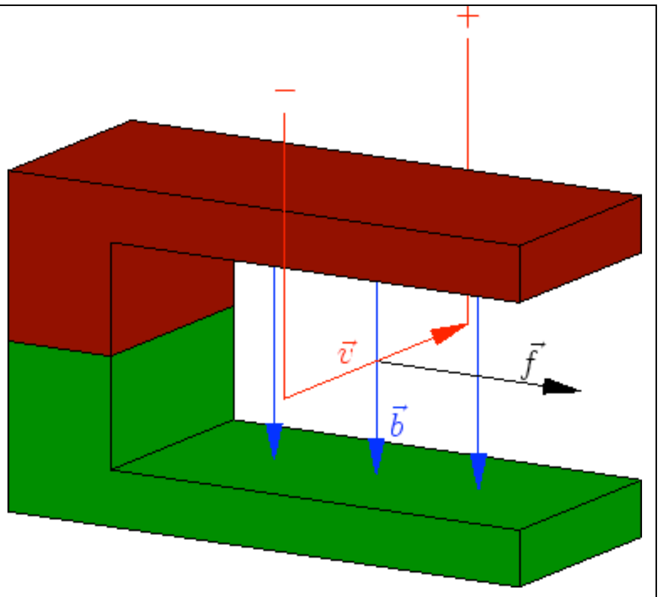
د ستاندارد بنسټ لپاره باور لري

$$\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z, \quad \vec{e}_y \times \vec{e}_z = \vec{e}_x, \quad \vec{e}_z \times \vec{e}_x = \vec{e}_y$$
$$\vec{e}_x \times \vec{e}_x = \vec{0}, \quad \vec{e}_y \times \vec{e}_y = \vec{0}, \quad \vec{e}_z \times \vec{e}_z = \vec{0}\,.$$

اړونده فرمولونه د په خوښه ، د ،،ښي-لاس-قانون،،سره سم لوريزي اورتوګونال بنسټونو لپاره باور لري.

(ليکونکي : هوليک، اپپ)

د لورنڅ زور Lorentzkraft



په يوه الکترون $-e$ ، چې د $\vec{v}$ چټکتيا سره په يوه مقناطيسي ورشوکې $\vec{b}$ خوزي يا حرکت کوي، د لورنڅ زور اغيز لري

$$\vec{f} = e\vec{b} \times \vec{v}\,.$$

دا په دا ځيره شوي ازمايښت نظم د بريښنا جريان تيروني د $\vec{f}$ په لور لوريزه اغيزه لري..

(ليکونکي : هوليک، اپپ)

د وکتور ضرب لپاره قانونونه:

د وکتور ضرب لپاره لاندې قوانين باور لري:

- اسوڅیاتیو قانون Antisymmetrie

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$$

- کرښیزوالی Linearität

$$(\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2) \times (\beta_1\vec{b}_1 + \beta_2\vec{b}_2) = \alpha_1\beta_1(\vec{a}_1 \times \vec{b}_1) + \alpha_1\beta_2(\vec{a}_1 \times \vec{b}_2) +$$

$$\alpha_2\beta_1(\vec{a}_2 \times \vec{b}_1) + \alpha_2\beta_2(\vec{a}_2 \times \vec{b}_2)$$

- غبرګاړخیز یا موازی الاظلاع ډ سطحي مساحت، هغه چې له وکتورونو a او b غزېدلي، د هغه د ضرب مطلق ارزښت دی، نو $|a \times b|$.
- د ګراسمن کټمټوالی Grassmann-Identität

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\,\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\,\vec{a}$$

- د لاګرانج کټمټوالی Lagrange-Identität

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$$

(لیکونکي: اېپ،هولیګ،کیمرلي)

انتیسیومتري او کرښیزوالی د وکتورضرب د کواوردینات انځوروني څخه تړلی لیدونکی دی.

د کټمټوالي د ښووني لپاره کيدی شي بې له ټوليزو بنديزونو $\vec{a} = \vec{e}_x$ ونيول شي او بايد په $\vec{b}$ کې د کرښيزوالي په بنسټ فقط حالتونه $\vec{b} = \vec{e}_y$ او $\vec{a} = \vec{e}_x$ وڅيړل شي، د $\vec{a} = \vec{b}$ لپاره د کټمټوالي دواړه اوخونه په ساده توګه صفر دي.

په لومړي حالت کې د کيڼ اړخ د ګاسمن کټمټوالی لاس ته راځي

$$(\vec{e}_x \times \vec{e}_y) \times \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_2 \\ c_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

دا د ښي اړخ

$$c_1\vec{e}_y - c_2\vec{e}_x$$

سره يوغږيز کيږي. په دې راوړل شوي ځانګړي حالت ($\vec{a} = \vec{e}_x$, $\vec{b} = \vec{e}_y$)

کې د لاګرانژ کټمټوالی

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ c_1 d_2 - c_2 d_1 \end{pmatrix} = c_1 d_2 - c_2 d_1 \,,$$

هم ټيک دی.

په ورته توګه د $\vec{b} = \vec{e}_z$ لپاره هم دليل راوړل کيږي.........

کرښيزوالی کيدی شي د غبرګيزوالی لپاره وکارول شي. دا لاندې يي بيلګه ده.

$$\left(3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \times \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \quad 6\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$= \quad 5\begin{pmatrix}0-2\\1-0\\0-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10\\5\\0\end{pmatrix}$$

د گراسمن - او لاگرانژ کتوتوالی وکتور ضرب په ساده توگه د شمیرلو سکالار ضرب ته بیرته بیايي. د بېلگې په توگه دی

$$\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right)\times\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}=0\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}-1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\end{pmatrix}$$

او

$$\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right)\cdot\left(\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix}\right)=0\cdot 6-12\cdot 1=-12.$$

(لیکونکي: اپپ، هولیگ)

د ایپسیلون - تنزور Epsilon-Tensor

د ε–تنزور

$$\varepsilon_{i,j,k}\in\{-1,0,1\},\quad i,j,k\in\{1,2,3\}\,,$$

د دوه برابرو پیژندنخښو (ایندکسونو) سره صفر دی او دوه جوړه ډوله مختلفو ایندکسونو سره لاندې ارزښت لري:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1,2,3} &= \varepsilon_{2,3,1} = \varepsilon_{3,1,2} = 1\,, \\ \varepsilon_{1,3,2} &= \varepsilon_{2,1,3} = \varepsilon_{3,2,1} = -1\,. \end{aligned}$$

نو دا د ځیکلیکي پرموتیشن (ځای بدلون) لاندې اینواریانت (تغیر نه خوړونکی) دی او د پېژندنخښنو یا ایندکسونو د بدلون سره مخنخښه بدلوي.

(لیکونکي: اپپ، هولیګ)

د ــتنروز په مرسته کیدی شي د وکتور ضرب $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ په لاندې بڼه ولیکیل شي.

$$c_i = \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{i,j,k} a_j b_k$$

(لیکونکي: اپپ، هولیګ)

شپاټ ضرب

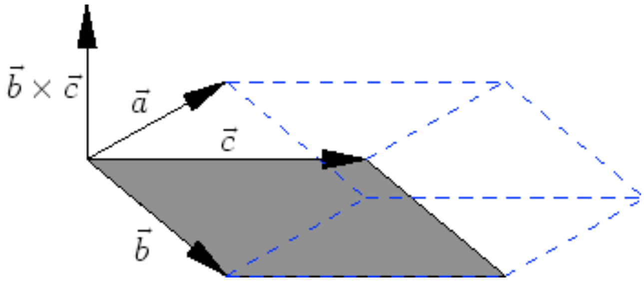
شپاټ ضرب

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) =$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

ترمخنخښي پورې د له درې وکتورونو $\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}$ څخه غزول شوی شپاټ ډکي یا حجم سره یو غبریز شي یا برابر شي.

(غبرګ سطحیز)



د ε – تنزور په مرسته کېدی شي د غبرګخوابيز يا شپاټ ضرب په لاندې بڼه هم ولیکل شي:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{i,j,k} a_i b_j c_k$$

(ليکونکي: اپپ، هوليګ)

د $\vec{d} = \frac{\vec{b} \times \vec{c}}{|\vec{b} \times \vec{c}|}$ سره

$$h = |\vec{a}| \left|\cos(\sphericalangle(\vec{a}, \vec{d}))\right| = |\vec{a} \cdot \vec{d}|$$

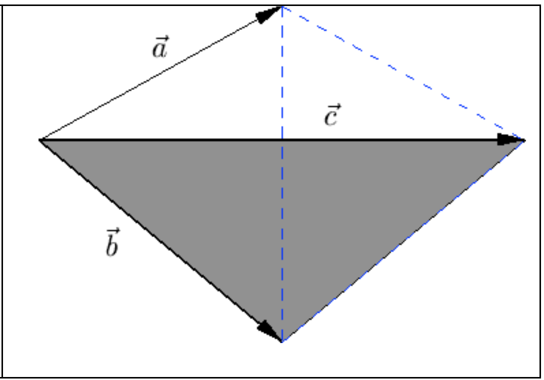
د شپاټ يا غبرګ سطحيز جګوالی دی. دا چې $f = |\vec{b} \times \vec{c}|$ د کربنيز شوي غبرګ اړخيز   د سطحې خونديونه ده، د ډکې يا حجم لپاره لاس ته راځي:

$$hf = \left|\vec{a} \cdot \left(\frac{\vec{b} \times \vec{c}}{|\vec{b} \times \vec{c}|}\right)\right| |\vec{b} \times \vec{c}| = |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]| \,.$$

د يوه ځلور سطحيز (حجم) شميرنه Volumen eines Tetraeders

د یوه درې وکتورونو $\vec{a}$, $\vec{b}$ او $\vec{c}$ څخه غزېدلی تیترااید ډکی یا حجم V دی

$$V = \frac{1}{6}|[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]|\,.$$



(لیکونکي: اېپ، هولیګ)

د یوه تیتراایدر(څلور سطحیز) ډکی V داسي شمیرل کیږي

$$V = \frac{1}{3}Gh\,,$$

چیرته چې G بنسټ سطحه ده او h جګوالی په ګوته کوي. که په پام کې ونیول شي، چې G نیم دومره لوی دی، لکه د غبرګسطحیز G_{Spat} سطحه، چې له درې وکتورونو غزېدلې ، نو لاس ته

$$V = \frac{1}{6}G_{\mathrm{Spat}}h = \frac{1}{6}V_{\mathrm{Spat}} = \frac{1}{6}|[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]|$$

راځي، د غبرګطحیز V_{Spat} په مرسته .

(لیکونکي: اېپ، هولیګ)

د څلور سطحیز V ډکی ، چي له وکتورونو

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

غزېدلی ، دی

$$V = \frac{1}{6}|[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$$

$$= \frac{1}{6}\left|\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}\right)\right|$$

$$= \frac{1}{6}\left|\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}\right|$$

$$= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}\,.$$

د غبرگسطحيز يا ذوذنقي خويونهEigenschaften des Spatprodukts

د غبرکسطحيز ضرب په هر Argument کي کرښيز دی او سربيره پردي دا لاندې نور خويونه لري

- ځيوکليکي – يا تل بيرته راګرځيدونی بدلون : zyklische Vertauschung:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}]$$

- کرښيز بلواکوالی يا تابعيت

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0 \Leftrightarrow \vec{0} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c},$$

د لږ ترلږه يوه سکالار α, β, γ سره د 0 سره نابرابر.

- Orientierung: لوريزونه

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] > 0$$

د هر ښي سيستم لپاره

(ليکونکي: اپپ، هوليګ)

د کواوردیناتونو یا پروت ولاړ ارزښتونو شمیرنه

وکتورونه $\vec{u}$, $\vec{v}$ او $\vec{w}$ یو ریښتونی غبرګهواریز(سطحیز) غزوي، نو یو په خوښه وکتور $\vec{x}$ کیدی شي د کرښیز کمبینیشن

$$\vec{x} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$$

په ځیر انځور شي د لاندې ضریبونو سره:

$$\alpha = \frac{[\vec{x},\vec{v},\vec{w}]}{[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]},\quad \beta = \frac{[\vec{x},\vec{w},\vec{u}]}{[\vec{v},\vec{w},\vec{u}]},\quad \gamma = \frac{[\vec{x},\vec{u},\vec{v}]}{[\vec{w},\vec{u},\vec{v}]}.$$

(ليکونکي اپپ،هوليګ)

د

$$\vec{x} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$$

لپاره سکالار ضرب د $\vec{v} \times \vec{w}$ سره جوړوو، نو لاس ته راځي

$$\vec{x} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) \quad = \alpha\,\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$$

همداسې

$$\alpha \quad = \frac{[\vec{x},\vec{v},\vec{w}]}{[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]}\,,$$

داچې $\vec{u}$,$\vec{v}$ او $\vec{w}$ یو رینتونی غبرګسطحیز غزوي، داپه دې معنا چې $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] \neq 0$ دي. د β او γ لپاره سرې په روته توګه مخ ته ځي.

(لیکونکي اپپ،هولیګ)

که وکتور

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

د وکتورونو

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

د کرښیز کمبینشن په څیر انځورول غواړو، نو لاس ته راځي

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = [\vec{v},\vec{w},\vec{u}] = [\vec{w},\vec{u},\vec{v}] = 2$$

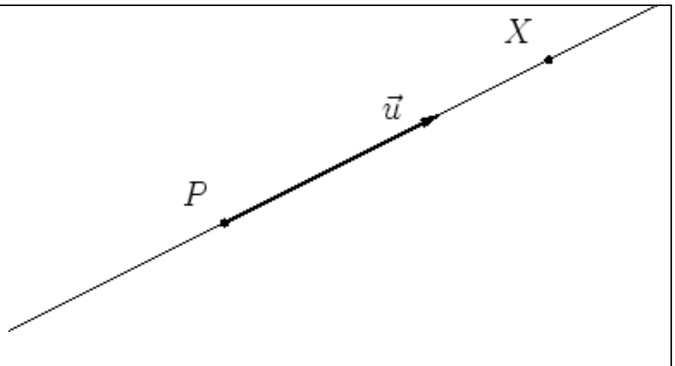
$$[\vec{x},\vec{v},\vec{w}] = 4, \quad [\vec{x},\vec{w},\vec{u}] = -4, \quad [\vec{x},\vec{u},\vec{v}] = 8$$

او له دې سره

$$\begin{aligned}\vec{x} &= \frac{4}{2}\vec{u} - \frac{4}{2}\vec{v} + \frac{8}{2}\vec{w} \\ &= 2\vec{u} - 2\vec{v} + 4\vec{w}\,.\end{aligned}$$

(لیکونکي اپپ،هولیګ)

ټکي – لور – بڼه:

	په یوه کربنه ټکی X له P د $\vec{u}$ په لور کېدی شي د $\overrightarrow{PX} = t\vec{u}, \quad t \in \mathbb{R}$ سره انځور شي.

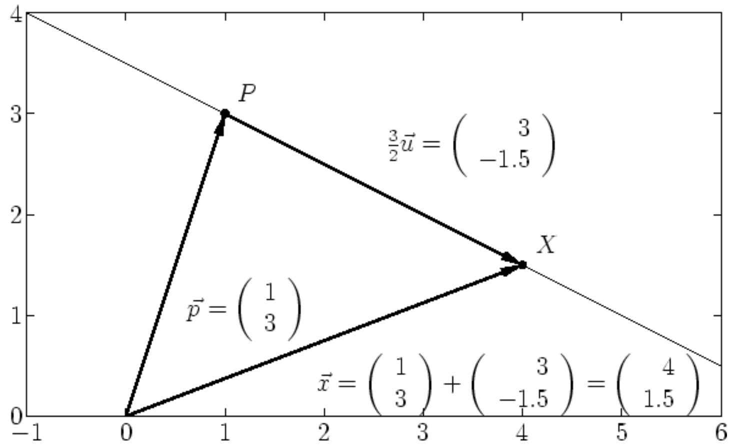
په ورته توګه باور لري

$$x_i = p_i + tu_i, \quad i = 1, 2, 3\,,$$

د ځای-وکتور $\vec{x}$ کواوردیناتو لپاره.

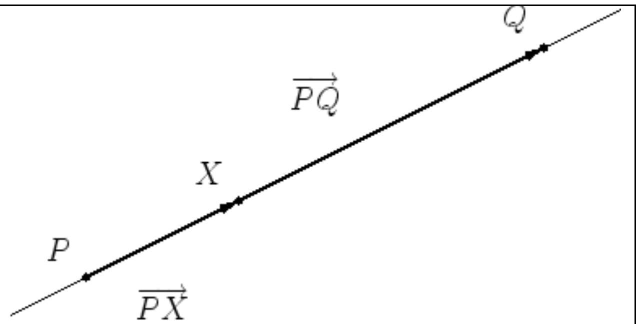
(لیکونکي ،هولیګ،هیورنر)

ځېره د یوې کربنې د ټکي-لور-بڼه د لیدلو کوي د په د پاسه ټکي $P = (1, 3)$ او $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ لور سره. د کربنې د X ټکی پارامتر $t = 3/2$ لري.



(لیکونکي ،هولیګ،هیورنر)

دوه – ټکي – بڼه :

	په یوه کرښه د X ټکی چې له دوه $P \neq Q$ ټکو تیریږي کیدی شي په بڼه $\overrightarrow{PX} = t\overrightarrow{PQ}, \quad t \in \mathbb{R},$ انځور شي. د پارامتر ارزښت $t \in [0,1]$ ټوټه کرښه $\overline{PQ}$ راکوي.

په ورته توګه

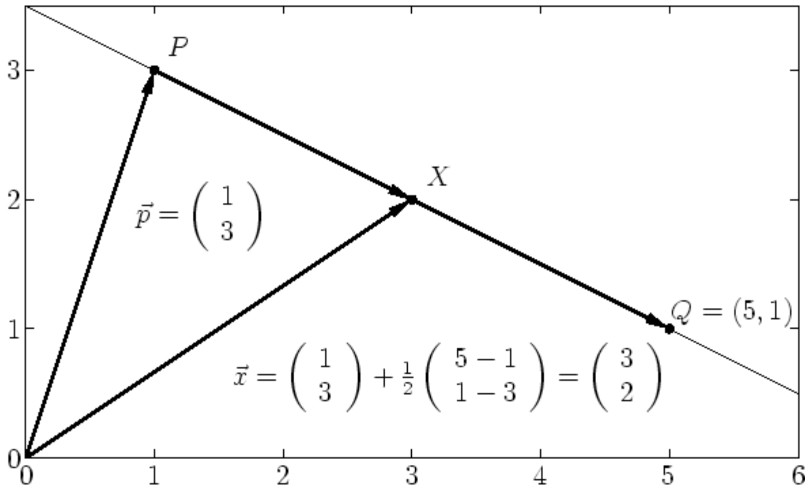
د ځای-وکتور $\vec{x}$ د کواوردینات لپاره باور لري

$$x_i = p_i + t(q_i - p_i), \quad i = 1, 2, 3\,,$$

(ليکونکي ،هوليګ،هيورنر)

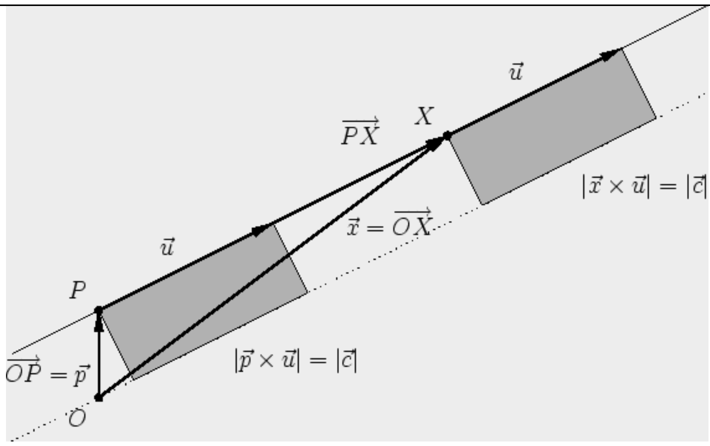
د $t \in [0,1]$ لپاره د دوه-ټکو-بڼې سره ټکی X ټوټه کرښه $\overline{PQ}$ په $t:(1-t)$ نسبت ویشي.

په ځانګړې توګه د P او Q ټکو ترمنځ منځ ټکو پارامتر $t = 1/2$ په ګوته کوي.



(ليکونکي ،هوليګ،هيورنر)

لحضوي – يا سترګورپ بڼهMomentenform

په یوه کرښه د X ټکی چې له دوه ټکو P د $\vec{u}$ په لور تیریږي کیدی شي د $\overrightarrow{PX} \times \vec{u} = \vec{0}$ په بڼه ولیکل شي.	

په ورته توګه د ځایوکتور لپاره باور لري.

$$\vec{x} \times \vec{u} = \vec{c}, \quad \vec{c} = \vec{p} \times \vec{u}\,.$$

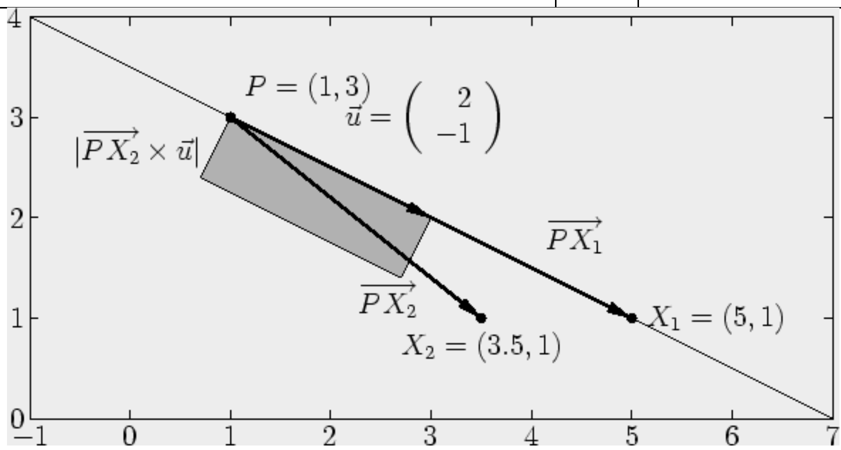
(لیکونکي ،هولیګ،هیورنر)

د یوې کرښې لحظوی –بڼه کېدی شي استعمال شي، چې ایا یو ورکړشوی ټکی X په یوه کرښه پروت دی. د دې ځیره شوې بیلګې لپاره د X_1 ټکي لپاره ورکوي:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PX_1} \times \vec{u} &= \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \cdot (-1) - 2 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \vec{0}\,.
\end{aligned}$$

د دې برعکس د X_2 ټکي لپاره لاس ته راځي:

$\begin{pmatrix} 2.5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$=$	$\overrightarrow{PX_2} \times \vec{u}$
$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2.5 \cdot (-1) - 2 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.5 \end{pmatrix} \neq \vec{0}.$	$=$	



د ټکي ــکرښې واټن:

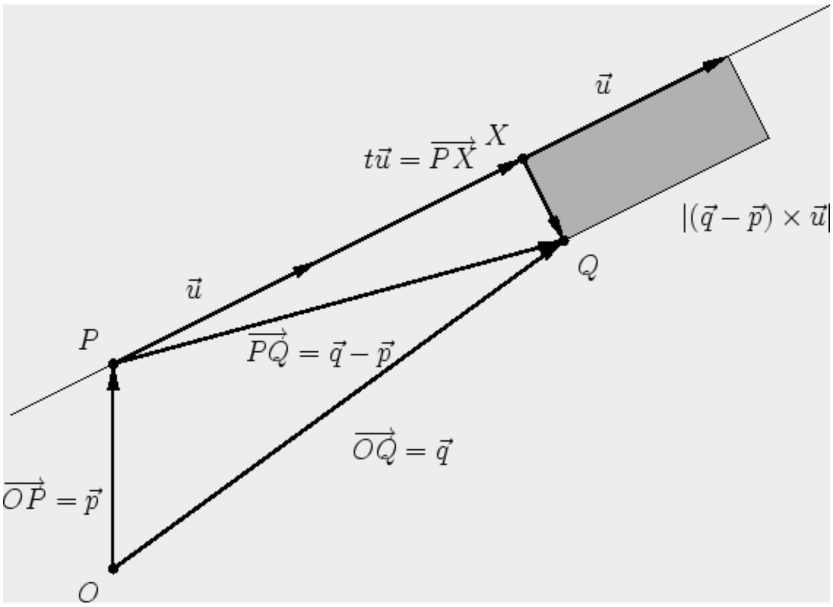
په یوه کرښه د یوه ټکي Q پروجکشن(پرپوستون) X چې له P تیریږي د لور سره لاندې پوره کوي

$$\overrightarrow{PX} = t\vec{u}, \quad t = \frac{(\vec{q} - \vec{p}) \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|^2}.$$

له دې څخه د په حیث

$$d = \frac{|(\vec{q} - \vec{p}) \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}.$$

واټن لاس ته راځي .



(ليکونکي ،هوليګ،هيورنر)

په کرښه د ټکي Q پرېوستون X لپاره وکتور $\overrightarrow{XQ}$ په $\vec{u}$ عمود- يا نيغ ولاړ دی.

دا د سکالا ضرب له لارې ازمايل کېدی شي:

$$\overrightarrow{XQ} \cdot \vec{u} =$$

$$\left(\vec{q} - \left(\vec{p} + \frac{(\vec{q}-\vec{p}) \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|^2}\,\vec{u}\right)\right) \cdot \vec{u} = (\vec{q}-\vec{p}) \cdot \vec{u} - \frac{(\vec{q}-\vec{p})\,\vec{u}}{|\vec{u}|^2}\,|\vec{u}|^2 = 0\,.$$

د چليپا يا ومتوري ضرب تعريف له مخې باور لري

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\sin\left(\sphericalangle\left(\vec{a}, \vec{b}\right)\right)$$

او له دې سره د واټن d لپاره:

$$d = \left|\overrightarrow{XQ}\right| = \left|\overrightarrow{PQ}\right| \sin\left(\sphericalangle\left(\overrightarrow{PQ}, \vec{u}\right)\right) =$$

$$= \frac{\left|\overrightarrow{PQ}\right| \, |\vec{u}| \, \sin\left(\sphericalangle\left(\overrightarrow{PQ}, \vec{u}\right)\right)}{|\vec{u}|}$$

$$= \frac{|(\vec{q} - \vec{p}) \times \vec{u}|}{|\vec{u}|} \, .$$

(ليکونکي ،هوليګ،هيورنر)

که ټکی $Q = (3,3,3)$ په کرښه پرېيستل شي

$$g : \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

نو د پروجکشن په حيث د ځای وکتور سره ټکی لاس ته راوړي

$$\vec{x} = \vec{p} + \frac{(\vec{q} - \vec{p}) \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|^2} \, \vec{u} \quad =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{1^2 + 1^2 + 1^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1\cdot 1 + 2\cdot 1 + 0\cdot 1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

واټمن

$$d = \frac{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{(2+0)^2 + (0-1)^2 + (1-2)^2}{3}} = \sqrt{2},$$

د

$$\left|\overrightarrow{XQ}\right| = \sqrt{(3-3)^2 + (3-2)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{2}.$$

سره یو غږیز دی.

(لیکونکي:هولیگ، هیورنر)

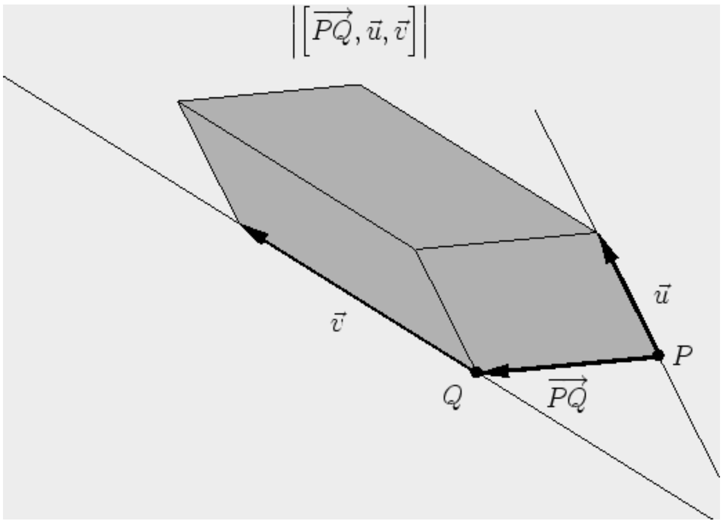
د دوه کرښو واټن :

د دوه کرښو ، چې له ټکو P ، Q او د لورو $\vec{u}$, $\vec{v}$ سره ورکړ شوې دي واټن دی

$$d = \frac{|[\overrightarrow{PQ}, \vec{u}, \vec{v}]|}{|\vec{u} \times \vec{v}|},$$

که $\vec{u} \nparallel \vec{v}$ وي. د غبرگو کرښو پاره باور لري

$$d = \frac{|\overrightarrow{PQ} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}\,.$$



دوه کرښې بادمایلې windschief بلل کیږي، که غبرګې نه وي او مثبتې(زیاتیز) واټن ولري..

(لیکونکي:هولیګ، هیورنر)

که

$$\vec{x} = \vec{p} + s\vec{u}, \quad \vec{y} = \vec{q} + t\vec{v}$$

د ټکو ځای وکتورونه وي د خورا لنډ واټن سره، نو

$$\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{PQ} + t\vec{v} - s\vec{u}$$

دواړو لوروکتورونو سره عمود یا ولاړ دی، یعن غبرګ وه

$$\vec{c} = \vec{u} \times \vec{v}\,.$$

ته.

دا چې د يوه وکتور اوږدوالی د هغه مطلق ارزښت ضرب يوون (واحد)وکتور سره برابر دی لاس ته راځي:

$$d = |\overrightarrow{XY}| = \left|(\overrightarrow{PQ} + t\vec{v} - s\vec{u}) \cdot \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}\right| = \left|\overrightarrow{PQ} \cdot \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}\right| ,$$

او له دې سره غوښتونکی فرمول.

د غبرګو کرښو لپاره هغه د يوه ټکي واټن له کرښې سره فرمول و کاروي.

(ليکونکي:هوليک، هيورنر)

کرښې

$$g: \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad h: \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

دا لاندې واټن لري:

$$d = \frac{\left|\left[\overrightarrow{PQ}, \vec{u}, \vec{v}\right]\right|}{|\vec{u} \times \vec{v}|} = \frac{\left|\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\right|}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}$$

$$= \frac{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{(1-(-2))^2 + (1-1)^2 + ((-2)-1)^2}} = \frac{6}{3\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

(ليکونکي:هوليک، هيورنر)

د الوتنې لارې Flugkorridore

په ساده توګه نيسو، چې الوتکه په سيده لار له الوتنځای څخه و موخې ته ا لوزي او د التنلار له سيده کرښتوټو څخه جوړه ده، نو د يوې الوتنې لپاره له شتوتګارت (S) Stuttgart څخه و کوپنهاګن ته د ځګيدنې لار

$$g : \overrightarrow{SX} = s \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s \in [0,8]$$

او د يوې الوتنې لپاره له فرانکفورت (F)څخه قاهرې ته

$$h : \overrightarrow{FX} = t \begin{pmatrix} 34 \\ -31 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad t \in [0,3].$$

که د ساده وينا څخه مخ ته لاړشو، چې الوتکه په سيده لار د د الوتځای څخه و موخه ځای ته الوزي او د الوتنې لار له سيده کرښتوټو ځخه جوړه ده، نو د شتوتګارت S څخه د کوپنهاګن ته د يوې الوتنې د ځګيدنې الوتنلار ده

$$g : \overrightarrow{SX} = s \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s \in [0, 8]$$

او د یوې الوتنې لپاره له فرنکفورت F څخه و قاهرې ته

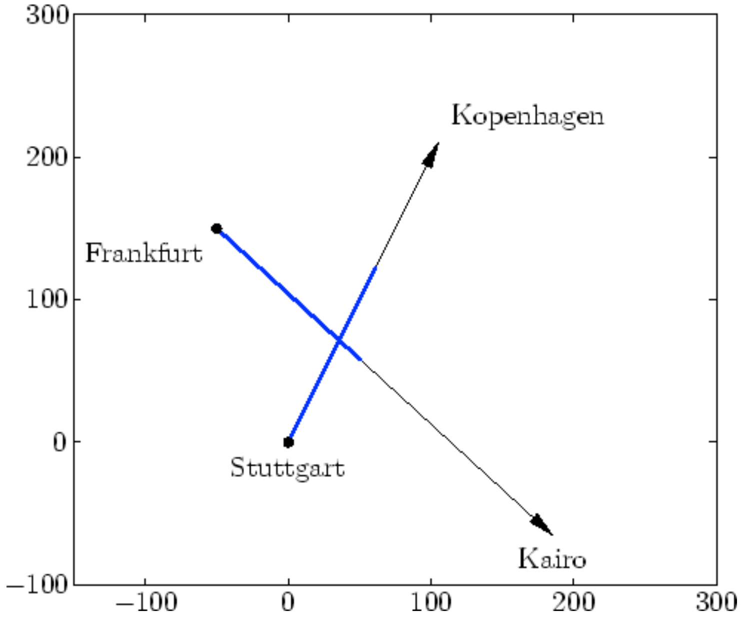
$$h : \overrightarrow{FX} = t \begin{pmatrix} 34 \\ -31 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 3] .$$

که د کواوردینات پیل شتوتګارت و ټاکل شي، نو کواوردیناتونه $F = (-50, 150, -1/4)$ لرو، په کیلو متر کچ شوي.

دواړه د الوتنلارې لاندې واټن لري:

$$d = \frac{\left| \left(\begin{pmatrix} -50 \\ 150 \\ -1/4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \left(\begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 34 \\ -31 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \right|}{\left| \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 34 \\ -31 \\ 4 \end{pmatrix} \right|}$$

$$= \frac{\left| \begin{pmatrix} -50 \\ 150 \\ -1/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 95 \\ 2 \\ -792 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{95^2 + 2^2 + 792^2}} = \frac{4252}{\sqrt{636293}} \approx 5.33 .$$

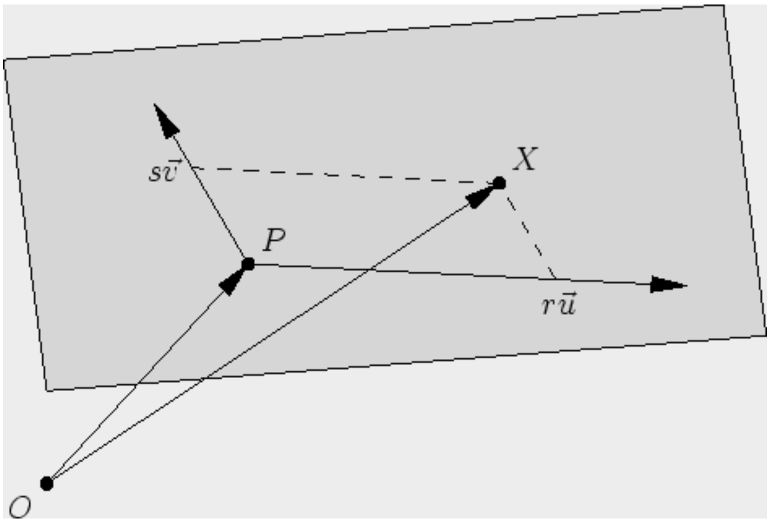


(ليکونکي:هوليک، هيورنر)

د يوې سطحې پارامتريکي انځورونهParameterdarstellung einer Ebene

له ټکي P تېره ، چې له دوه نه غبرگو لورو $\vec{u}$ او $\vec{v}$ غزېدلې سطحه باندې ټکی X پوره کوي

$$\overrightarrow{PX} = s\vec{u} + t\vec{v}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$



په ورته توګه د ځای وکتور $\vec{x}$ د کواودیناتو لپاره باور لري

$$x_i = p_i + su_i + tv_i, \quad i = 1,2,3\,.$$

(لیکونکي:هولیګ، وایس)

یوه سطحه دې د ټکي $P=(1,2,3)$ او وکتورونو $\vec{u} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$
سره روکړ شوې وي. نو $X=(1,1,2)$ په سطحه پروت دی، ځکه چې باور لري

$$\overrightarrow{PX} = \begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\vec{u} + (-1)\vec{v}$$

له بلې خوا $X=(0,0,0)$ په سطحه پروت نه دی، ځکه چې $\overrightarrow{PX} = \begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\end{pmatrix}$
دی او د مساوات سیستم

$$s\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\end{pmatrix}$$

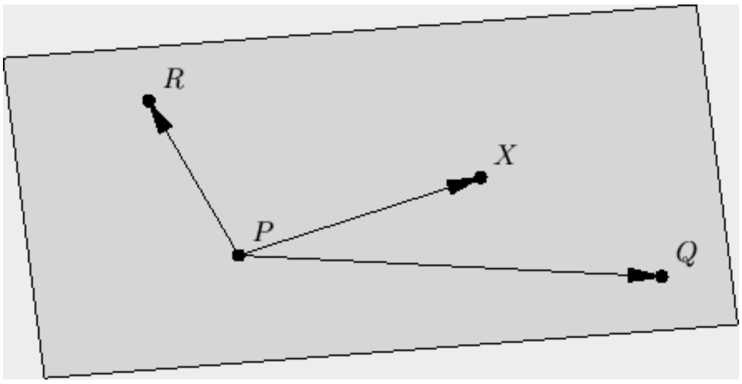
حل نه لري، كه لومړۍ او دويمې ليکي ته وګورو .

د يوې سطحې درې-ټکي-بڼه Drei-Punkte-Form einer Ebene

د ټکي X لپاره چې په يوه سطحه پروت دی،کومه چې له ټکو P, Q, R, تېرېږي او يو اصلي درېګوډی جوړوي د غبرګخوايزو ضرب ورکيږي .

$$[\overrightarrow{PX},\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR}]=0\,.$$

$$[\overrightarrow{PX},\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR}]=0\,.$$



(ليکونکي:هوليک، وايس)

يوه سطحه دې د ټکو $P=(1,2,3)$, $Q=(3,2,3)$ او $R=(2,3,4)$ له لارې ورکړ شوې وي.

نو $X=(1,1,2)$ په سطحه پروت دی، ځکه چې باور لري

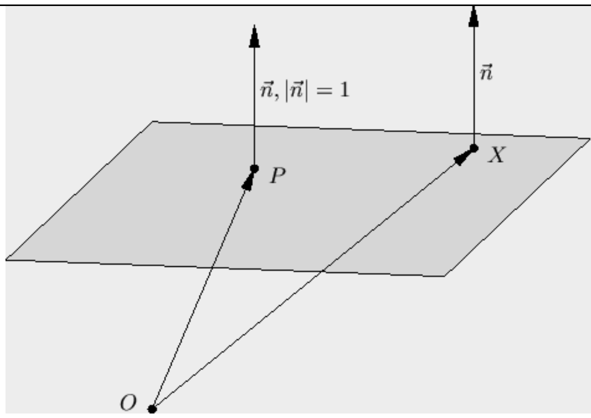
$$[\overrightarrow{PX},\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR}] = \left[\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\-2\\2\end{pmatrix} = 0$$

له بلې خوا $X=(0,0,0)$ په سطحه نه دی پروت، څکه چې باور لري

$$[\overrightarrow{PX},\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR}] = \left[\begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right] = 4-6 = -2 \neq 0$$

(ليکونکي:هوليګ، وايس)

د يوې سطحې د هيسې -نورمال بڼه Hesse-Normalform einer Ebene

په يوه سطحه د يوه ټکي X ځايوکتور $\vec{x}$ په يوه سيخه په P کې اورتوګونال و يوه نورمالوکتور ته پوره کوي $\vec{x}\cdot\vec{n}=d, \quad d=\vec{p}\cdot\vec{n}\,.$ په نورمال بڼه نيول کيږي چې $\lvert\vec{n}\rvert=1$ او $d\geq 0$. په دې حالت کې d د سطحې واټن دی و سرچينې ته	 (ليکونکي:هوليګ، وايس)

يوه سطحه E دې د ټکي $P=(1,2,3)$ له لارې ورکړشوې وي او نورمي نورمال وکتور

$$\vec{n} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$$

دی

$$d = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} = 3\,,$$

دا په دي معناچې سطحه لاندې نورمال بڼه لري

$$E: \quad \frac{2}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 3\,.$$

نو $X = (4,0,1)$ په سطحه پروت دی، ځکه چې باور لري

$$\vec{x} \cdot \vec{n} = \frac{1}{3}(8+0+1) = d\,.$$

له بلې خوا $X = (0,0,0)$ په سطحه نه دی پروت، ځکه چې پاور لري

$$\vec{x} \cdot \vec{n} = 0 \neq d\,.$$

(ليکونکي:هوليک، وايس)

د سطحو انځورونو ترمنځ د شميرنې بدلون يا اړول

لومړی: یوه سطحه دې د ټکي P له لارې ورکړ شوې وي همداسې دوه نه غبرګ وکتورونه $\vec{u}, \vec{v}$.

سړی نور دوه ټکي Q او R لاس ته راوړي، چې دا هم په سطحه پراته دي او له P سره، د $\vec{q} = \vec{p} + \vec{u}, \quad \vec{r} = \vec{p} + \vec{v}$.

له لارې کرښه نه جوړوي

د نورمالو وکتور $\vec{n}$ په $\vec{u}$ او $\vec{v}$ نیغ ولاړ دی یا نیغ عمووددی، یعنې $\vec{u} \times \vec{v}$ ته غبرګ دی.

له دې دا نورمې نورمالو کتور د هیسي-نورمال بڼې لپاره دی

$$\vec{n} = \sigma \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|} \,,$$

د له کوم سره چې مخنخښه $\sigma \in \{-1, 1\}$ داسې باید وټاکل شي، چې $d = \vec{p} \cdot \vec{n}$ مثبت (زاتیز) وي.

دویم : یوه سطحه دې د درې ټکو P ,Q او R له لارې ورکړ شوې وي، چې یو اصلي درېګودی(مثلث) جوړوي.

دوه وکترونه لاس ته راځي، چې سطحه غزوي یا جوړوي د لاندې وکتورونو له لارې

$$\vec{u} = \overrightarrow{PQ}, \quad \vec{v} = \overrightarrow{PR} \,.$$

له دې وکتورو څخه لکه په لومړي کې کېدی شي د هېسې۰نومالبڼه لاس ته راوړل شي.

دریم : یو ه سطحه دې د یوه ټکي او یوه نورمالوکتور $\vec{n}$ له لارې ورکړ شوې وي.

دوه وکتورونه لاس ته راځي. چې یوه سطحه داسې و غزول شي پخ کړمه کې چې دوه کرښیز خپلواک وکتورونه چې $\vec{n}$ باندې عمود یا و لاړ وي، و پلټل شي.

$$\vec{u} = \vec{n} \times \vec{x}, \quad \vec{v} = \vec{n} \times \vec{u}\,,$$

چېرته چې$\vec{x}$ یو په خوښه وکتور $\neq \lambda\vec{n}$ دی.

له دې وکتورونو څخه کېدی شي، لکه په لومړي کې دې-ټکي-بڼه لاس ته راوړای شي.

(لیکونکي:هولیګ، وایس)

لاندې ټکي دې ورکړ شوي وي

$$P = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

له دې څخه شمېرو

$$\vec{u} = \vec{PQ} = \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \vec{PR} = \begin{pmatrix} -8 \\ -10 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

د هېسې –نورمال بڼې لپاره د نورمال وکتور لپاره اوس دالاندې شمېرو

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -24 + 20 \\ -16 + 18 \\ 60 - 64 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

او له دې سره

$$\frac{\vec{u}\times\vec{v}}{|\vec{u}\times\vec{v}|}=\frac{\begin{pmatrix}-4\\2\\-4\end{pmatrix}}{6}\,.$$

ځکه چې $d=\vec{p}\cdot\vec{n}$ باید مثبت (زیاتیز)وی، له لاندې لاس ته راځي

$$d=\vec{p}\cdot\vec{n}=\begin{pmatrix}7\\2\\0\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-4\\2\\-4\end{pmatrix}=-4$$

$\sigma=-1$
او له دې سره

$$\vec{n}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}4\\-2\\4\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}\,.$$

نو سطحه نورمال بڼه لري

$$E:\frac{2}{3}x_1-\frac{1}{3}x_2+\frac{2}{3}x_3=4\,.$$

(لیکونکي:هولیک، کرایخ)

د ټکي – سطحې واټن :

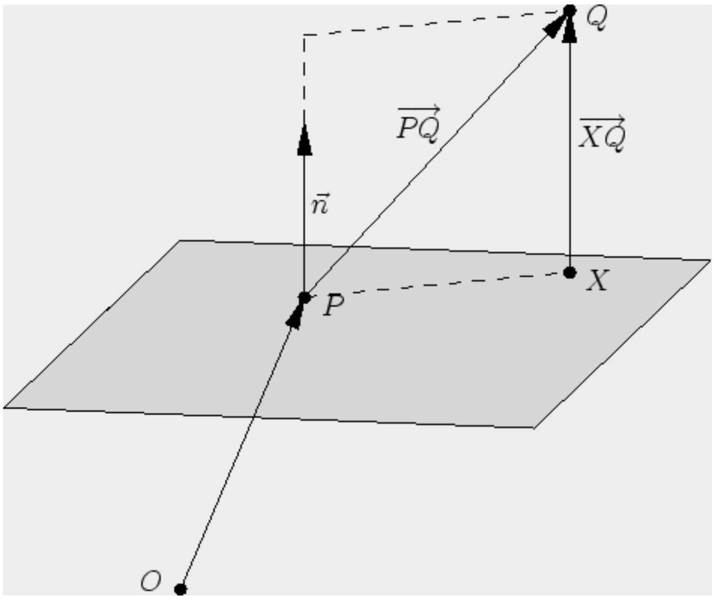
د یوه ټکي Q ولاړ برېوتلی وکتور په یوه سطحه په ټکي P د نورمالوکتور $\vec{n}$ سره دی

$$\overrightarrow{XQ} = \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2}\,\vec{n}\,.$$

د دې اوږدوالی

$$d = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

د سطحې واټندی و ټکي Q ته.



(ليکونکي:هوليک، وايس)

سکالار ضرب

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n} = \cos\alpha |\overrightarrow{PQ}||\vec{n}| = \pm d|\vec{n}|$$

ثخه دا $|\vec{n}|$ -واره د ټکي Q او سطحې ترمنځ واټن لاس ته راځی، د کوم سره چې
مخنخښه دا راپه ګوته کوي، چې ایا $\overrightarrow{PQ}$ په همغه خوا ښایي، لکه یې چې $\vec{n}$ ښایي.

له دې سره دی

$$d = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

او

$$\overrightarrow{XQ} = \pm d \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2} \vec{n} \,.$$

لیکونکي: هیولیګ، وایس

له ټکي $P = (1,2,3)$ تېیره سطحه د نورمالوکتور $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ سره دې د
ټکي $Q = (3,2,3)$ واټن d همداسې په سطحه پرې ولاړټکی X وټاکل شي.

لومړی دی

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n} = 4, \quad |\vec{n}| = 3 \,.$$

له دې سره لاس ته راځي

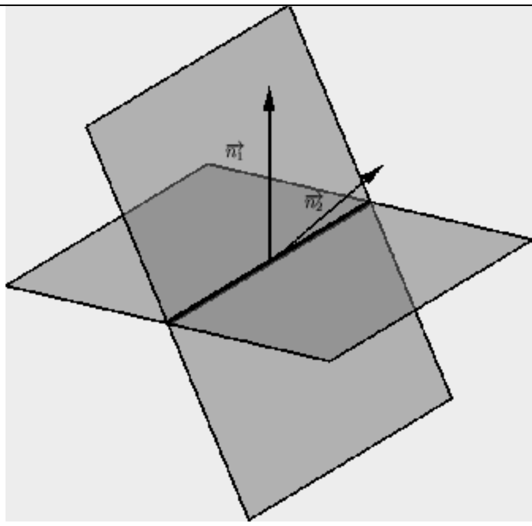
$$\overrightarrow{XQ} = \frac{4}{9}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}, \quad d = \frac{4}{3}$$

او بالاخره شمیرل کیږي

$$\vec{x} = \vec{q} - \overrightarrow{XQ} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}19\\14\\19\end{pmatrix} .$$

(لیکونکي:هولیک، وایس)

د دوه سطحو غوڅی یا تقاطع:

	د دوه سطحو د نورمال وکتور $\vec{n}_i$ سره د دواړو کونجونو(زاویو) $\varphi \in [0, \pi/2]$ هغه کوچني کونج یې د $\cos\varphi = \frac{\lvert\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2\rvert}{\lvert\vec{n}_1\rvert\lvert\vec{n}_2\rvert}$ له لارې یواځنی ټاکلې او $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ د غوڅکربنې لور ده.

(لیکونکي:هولیک، وایس)

د دوه هوارو لپاره، چې هره یوه یې له ټکو $P_1 = (1,2,0)$, $P_2 = (0,1,3)$ او نورمالوکتورونو

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

سره تعریف دي، د کونج او د دواړو سطحو د غوڅکربښې سره جوړ کونج(زاویه) φ دې وټاکل شي.

دی

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{1}{2}$$

او له دې سره

$$\varphi = \pi/3\,.$$

پسې هم

$$\vec{r} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

د غوڅکربښې لور ده.

د دې لپاره چې یو غوڅټکی (نقطه تقاطع) وشمیرو، و

$$d_1 = \vec{p}_1 \cdot \vec{n}_1 = -1, \quad d_2 = \vec{p}_2 \cdot \vec{n}_2 = 2$$

ته اړتیا شته او یو ټکی S ته، چې مساوات

$$\vec{s}\cdot\vec{n}_1 = d_1, \quad \vec{s}\cdot\vec{n}_2 = d_2$$

پوره کوي. د بېلګې په توګه $S=(2,3,5)$ پیدا کیږي او له دې سره غوښکرښه لاس ته راځي:

$$g:\vec{x}=\vec{s}+t\vec{r}=\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \quad t\in\mathbb{R}\,.$$

(لیکونکي:هولیک، وایس)

د منظم تتراید(څلور سطحیز) د کونج ټکو

$$P_1=(1,0,0), \quad P_2=(-1,0,0),$$

$$P_3=(0,1,\sqrt{2}), \quad P_4=(0,-1,\sqrt{2})$$

د دوه سطحو ترمنځ کونج یا زاویه دې پیدا شي.

موږ د بیلګې په توګه د سطحو څخه چه له P_1,P_2,P_3 همداسې له P_1,P_2,P_4 جوړې وي یا تېریږی کار اخلو.

د نورمال وکتورونو لپاره باور لري

$$\vec{n}_1=\overrightarrow{P_1P_2}\times\overrightarrow{P_1P_3}=\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\1\\\sqrt{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\sqrt{2}\\-2\end{pmatrix}$$

همداسې

$$\vec{n}_2 = \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_4} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix} .$$

له دې سره دی:

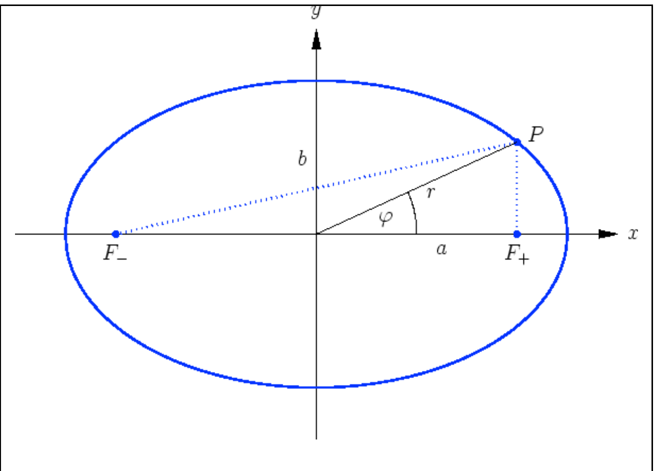
$$\cos(\varphi) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{4}{\sqrt{12}\sqrt{12}} = \frac{1}{3}$$

او لاس ته راوړو

$$\varphi \approx 70,59^\circ .$$

(ليکونکي:هوليک، وايس)

هګی (بيضوي) Ellipse



په يوې ايليپسي يا بيضوي د
تکو $P=(x,y)$ د د دوه
سوزونټکو $F_\pm$ څخه واټن ثابط
يا همغه دی:

$$|\overrightarrow{PF_-}|+|\overrightarrow{PF_+}|=2a$$

د $2a>|\overrightarrow{F_-F_+}|$ سره .

که وي $F_{\pm}=(\pm f,0)$ ، نو د کواوردیناتونو لپاره باور لري

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad b^2=a^2-f^2\,,$$

او

$$r^2=\frac{b^2}{1-(f/a)^2\cos^2\varphi}$$

د ټکو P د قطبي کواودیناتونو لپاره.

د هګی پارامتري کونه ده

$$x=a\cos t,\quad y=b\sin t$$

د $t\in[0,2\pi)$ سره.

(لیکونکي:اېپ،هولیګ)

د انځوره ونو ورته والی کیدی شي د سیده پسي شمیرني له لارې و ازمایل شي.

د دې لپاره چې وښایو، چې

$$|\overrightarrow{PF_{-}}|+|\overrightarrow{PF_{+}}|=2a\quad\Longleftrightarrow\quad\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad b^2=a^2-f^2$$

مربع (څلورى) کوو

$$\underbrace{2a - \sqrt{(x+f)^2 + y^2}}_{>0} = \sqrt{(x-f)^2 + y^2}$$

او دې کيڼ مساوات ته ورته مساوات لاس ته راوړو

$$\underbrace{4a^2 + 4xf}_{>0} = 4a\sqrt{(x+f)^2 + y^2}\,.$$

د $4a$ سره وېشنې وروسته نوې مربع کول یا بیا مربع کول راکوي

$$a^2 + 2xf + \frac{f^2}{a^2}x^2 = x^2 + 2xf + f^2 + y^2\,.$$

د بدلون $f^2 = a^2 - b^2$ له لارې د بڼې بدلون وروسته د کواوردینات بڼه راکوي.

د قطبي بڼې پیدا کونې

$$r^2 = \frac{b^2}{1 - (f/a)^2 \cos^2 \varphi}$$

لپاره د مخرج(ماتلاندې) سره ضربولو سره او په پام کې نیسو

$$x^2 = (x^2 + y^2)\cos^2(\varphi)\,.$$

له دې سره لاس ته راځي

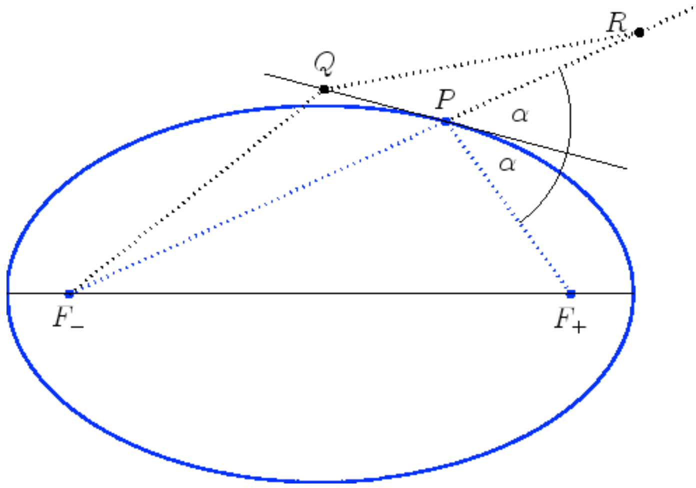
$$x^2 + y^2 - \frac{a^2 - b^2}{a^2}x^2 = b^2$$

او د b^2 سره وېش له لارې د کواوردینات بڼه.

(لیکونکي:اېپ،هولیګ)

د سوزونټکي وړانګه (شعاع نقطه محراق) :

د سوزونټکو وړانګې (په سوزونټکو کې راګرځي (رفلکت کونه یا بیرته راګرځیدنه)



د ښوونې لپاره د مرستندوی ټکي په حیث په تانجنت g د سوزونټکي F_+ هنداره شوې ځیره R ټاکو او په g یو په خوښه ټکی $Q \neq P$ ټاکو . دا چې Q د هګۍ یا بیضوي دباندې پروت دی، نو دی

$$2a = |\overrightarrow{PF_-}| + |\overrightarrow{PF_+}| < |\overrightarrow{QF_-}| + |\overrightarrow{QF_+}| \,.$$

که د ټوټه کرښو $\overline{PF_+}$ او $\overline{QF_+}$ په ځای یې هنداره شوې ځیرې کیږدو، نو لاس ته راځي

$$|\overrightarrow{PF_-}| + |\overrightarrow{PR}| < |\overrightarrow{QF_-}| + |\overrightarrow{QR}| \,,$$

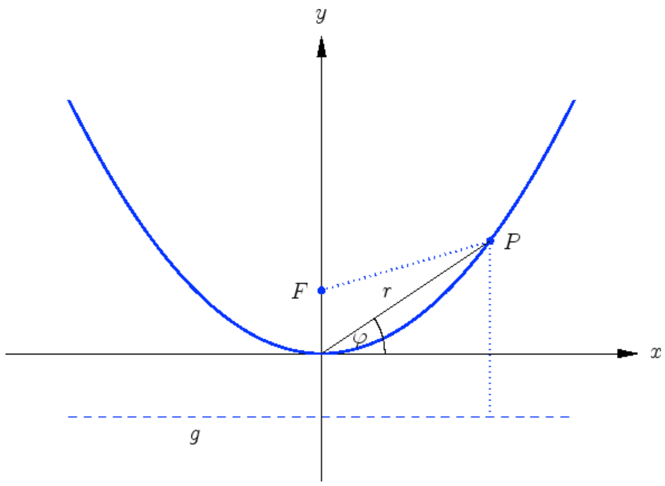
او پسې یا تعقیب باید $R,\ P,\ F_-$ په یوه کرښه پراته وي. له دې سره $\sphericalangle(F_-PQ) = \alpha$ دی.

دا هنداړون خويونه د پختورګو تيګو توټه کوني لپاره په کار راځي.   په سوزونټکي F_- کې د يوې راديال (د وړانګې په لور) سرچينې څخه وړانګې کېدی شي د يوه هګی ډوله يا بيضوي ډوله رفلکتور له لارې په   سوزونټکی F_+ کې کوده شي يعنې سره غوڅ کړي..

(ليکونکې:ايپ،هوليک)

پارابول Parabel

په يوه پارابول   د ټکی $P=(x,y)$ د سوزونټکي F او يوې وړونکي کرښې g څخه برابر واټن لري.



که $F=(0,f)$ او $g:\ y=-f$ وي، نو کواورديناتونو لپاره باور لري

$$4fy=x^2$$

او

$$r = \frac{4f\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$$

د ټکي P قطبي کواوردیناتونو لپاره

(لیکونکي:اېپ،هولیګ)

د انځوروني ورته والی یې تړلی ځرګند دی. د مربع شوي واټن د برابر اینوونې له لارې

$$|\overrightarrow{PF}|^2 = x^2 + (y-f)^2 = (y+f)^2 = (\mathrm{dist}(P,g))^2$$

د کواوردینات بڼه لاس ته راځي. د

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

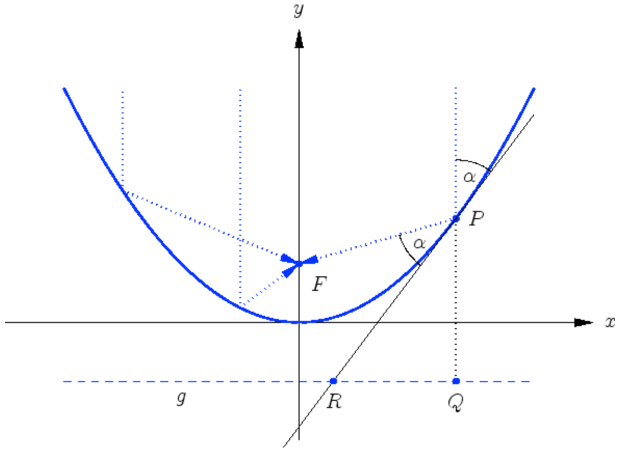
بدلون مو قطبي بڼې ته بيايي.

(لیکونکي:اېپ،هولیګ)

د ساتلایت تلوېزیون Satelliten-TV

غبرګې کربښې، وړونکربښو سره ولاړې یا عمود غورځېدونکې وړانګې په سوزونټکي کې سره کوده کیږي.

داد د ساتلایت په کاسه او تېلېسکوپ کې کارول کیږي، چې پریوتي سیګنالونه قوي کړي.



د ښووني لپاره په بام کې نیسو، چې

$$\overrightarrow{FP}+\overrightarrow{QP}=\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\f\end{pmatrix}\right)+\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x\\-f\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}x\\2y\end{pmatrix}$$

په ټکي Pt , $\begin{pmatrix}1\\x/(2f)\end{pmatrix}$, کې د تانجنت د لور سره غبرګ دی. دا چې

$|\overrightarrow{FP}|=|\overrightarrow{QP}|$,

له دې څخه د کونج $\sphericalangle(F,P,R)$ او $\sphericalangle(R,P,Q)$ مساوات لاس ته راځي، د کوم سره چې R د تانجنت غوښتکی دی د g سره.

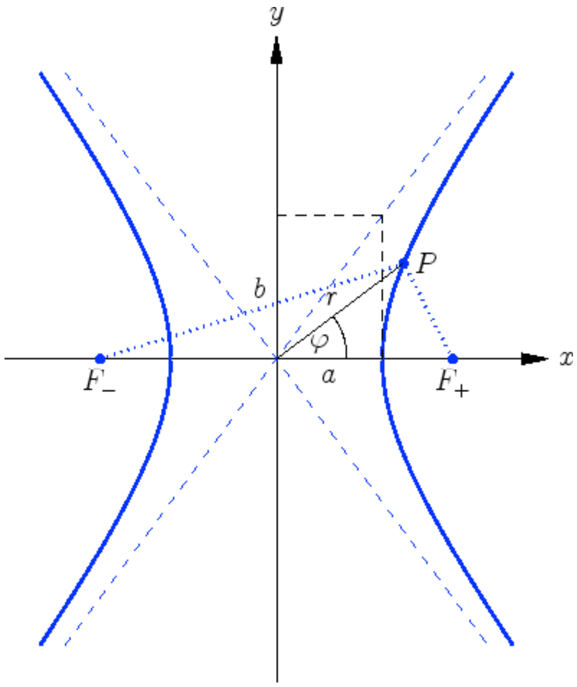
(لیکونکي:اپپ،هولیګ)

های پاربول Hyperbel

په یوه های پابول د یوه ټکي $P=(x,y)$ د سوزون ټکو $F_{\pm}$سره د واټنونو کمښت ثابت دی:

$$|\overrightarrow{PF_-}| - |\overrightarrow{PF_+}| = \pm 2a$$

د $2a < |\overrightarrow{F_-F_+}|$ سره .



که $F_\pm = (\pm f, 0)$ وي، نو کواوردیناتونو لپاره باور لري

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = f^2 - a^2\,,$$

او

$$r^2 = -\frac{b^2}{1 - (f/a)^2 \cos^2 \varphi}$$

د ټکو P د قطبي کواوردیناتونو لپاره . اسیپتوتي $\pm b/a$ جګوالی لري.

د هايپرابول د ښاخونو پارامتري کونه

$$x = \pm a \cosh t, \quad y = b \sinh t$$

ده د $t \in \mathbb{R}$ سره.

(ليکونکي:اپپ،هوليګ)

د انځوره ونو ورته کېدی شي سيده يو په بل پسې وازمايل شي.

د دې لپاره چې وښايو ، چې لرو

$$|\overrightarrow{PF_-}| - |\overrightarrow{PF_+}| = \pm 2a \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = f^2 - a^2,$$

نو

$$\underbrace{\sqrt{(x+f)^2 + y^2} \pm 2a}_{>0} = \sqrt{(x-f)^2 + y^2}$$

مربع کوو او دې و کيڼ مساوات ته ورته اړيکي لاس ته راځي

$$\underbrace{4a^2 + 4xf}_{>0} = \pm 4a \sqrt{(x+f)^2 + y^2}\,.$$

د $4a$ سره وېشني وروسته له نوې مربع کوني څخه لرو

$$a^2 + 2xf + \frac{f^2}{a^2}x^2 = x^2 + 2xf + f^2 + y^2\,.$$

د $f^2 = a^2 + b^2$ بدلون سره د بنې بدلون وروسته د کواودیناتونو بڼه لاس ته راځي.

د قطبي بڼ لاس ته راوړلو ته

$$r^2 = -\frac{b^2}{1 - (f/a)^2 \cos^2 \varphi}$$

د مخرج سره ضربوو او په بام کې نیسو

$$x^2 = (x^2 + y^2) \cos^2 \varphi \, .$$

له دې سره لاس ته راځي

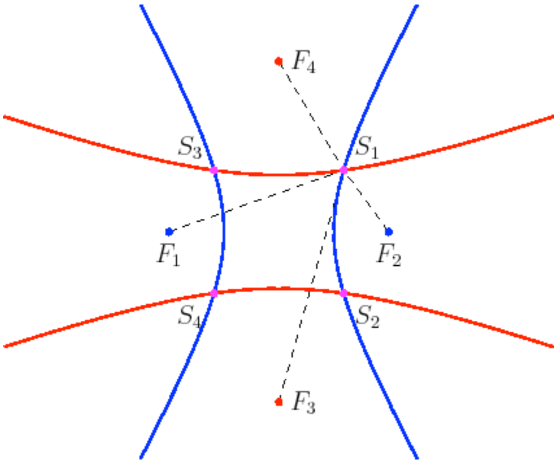
$$x^2 + y^2 - \frac{a^2 + b^2}{a^2} x^2 = -b^2$$

او د $-b^2$ سره ضربولو له لارې د کواودیناتونو بڼ راکوي

(لیکونکي:اپپ،هولیک)

ناویګیشنNavigation

د یوې کیښتی ځای Position معلوملو P لپاره د وخت کمښتونه $2a_{j,k}$ د سینکرون رادیو سیګنالونو د مختلفو خورونکو ستیشنونو F_i څخه سره پرتله کیږي. نو په دې توګه کیدی شي P د هایپرابول د سوزونټکو F_k, F_j سره د غوښتکي په څیر لاس ته راړل شي.



یوه څرګنده بیلګه کیدی شي

$$F_1 = (-2,0),\ F_2 = (2,0), \quad F_3 = (0,-3),\ F_4 = (0,3)$$

او $a_{1,2} = a_{3,4} = 1$ و ټاکل شي. اړونده هایپرابول مساوات دي

$$x^2 - \frac{y^2}{3} = 1, \qquad y^2 - \frac{x^2}{8} = 1\,,$$

او د څللر غوښتکو S_i د کواودیناتو لپاره لاس ته راځي

$$x^2 = \frac{32}{23}, \quad y^2 = \frac{27}{23}$$

لکه د څیرې څخه چې ه م لیدل کیږی، څلور اوبیونې(حلونه) لاس ت ه راځي. د ناوېګیشن لپاره دا بې پرابلمونو دی، ځکه چې یو کفتان باید وپوهیږي، چې کینتی نږدې یا ت قریبأ چیرته پرځای ده، دا په دې معنا چې کوم د منلو اوبی یا حل دی.

(لیکونکي:ایپ،هولیګ)

د ډاکټر ماخان شينواري چاپ شوې ليکنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړی:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

1987 Vienna (Austria):

دويم:

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, at the University of Vienna/Austria

لاندې د شميرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دريم: د شميرپوهنې ستر کتاب : د شميرپوهنې برسيره د انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې ليکنه به يې ځنو ځايونو غزېدلې او ځنې ځايونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو کې شميرنه، د ګټې – او کټې د کټې شميرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتياوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انګریزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني ـ پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځیال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپیني خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغي او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

.يادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکټر ماخان شينواري د ،،د افغانستان روغي او بيا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکټر ماخان ،،ميرې،، شينواري ليکنې او ژباړې چې په چاپيدو يې پيل کيږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برينکمن ليکنې چې له پرينکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شميرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شميرپوهنه د ښوونځي لپاره دويم ټوک

۳ – شميرپوهنه د ښوونځي لپاره دريم ټوک

۴ - د احتمالوالي شميرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصايه يا ستاتيستيک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – اناليزی ۱

۷ – اناليزې ۲

۸ – کرښيز الجبر

۹ - د شميرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ – فنکشنل انالیز

۱۲ – وکتور شمیرنه

نوري ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښيز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په

کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلې

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنستونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

۲۲- داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزي پښتو او عربي + دري ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې وبه غزیږي.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپریږي:

د ګروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولګې څخه تر اووم ټولګې پورې ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیونې سره په کې راغلي او ماته زیات ګټور برېښي)