شمیر پوهنه

(ریاضي)

ستر کتاب

Ketabton.com

دویمه برخه

دویم غځېدلی چاپ

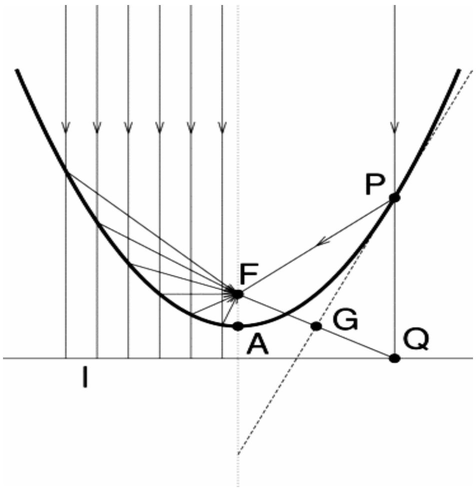
لیکونکی: ډاکتر ماخان (مېرې) شینواري

(c) ketabton.com: The Digital Library

شمیرپوهنه

(رياضي)

سترکتاب



دویم غزېدلی چاپ

لیکونکی: ډاکتر ماخان میرې شینواري

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلوي ښبتن په نامه

په دې هيله، چې په دې ليکنو او ژباړو به مې زموږ د بې وزلي او له پوهې پاتې ملت - په ما د پوهنې لپاره د لګښت - لپاره د پوهنې په لور داسې لږ ونده اخستې وي.

makhanshinwari@gmail.com

كتاب پيژندنه

د كتاب نوم: د شميرپوهنه ستر كتاب (دويمه برخه)

ليكونكى: ډاكتر ماخان،، ميرې،، شينواری

د خپريدو لړی

خپرندوی: د افغانستان كلتوري ودې ټولته

جرمني

چاپ كال ۲۰۱۲

چاپ چارې

دانش خپرندويې ټولنې تخنيكي څانګه

makhanshinwari@gmail.com

د چاپ حقوق خپرندوي ټولنې ليكونكي يا ژباړي سره خوندي دي.

پښتو مو ژبه او شميرپوهنه پرې ساده ده

(c) ketabton.com: The Digital Library

د خپرندوی ټولنې یادښت

له هغې مودې را په دې خوا، چې د افغانستان د کلتوري ودې ټولنې د علمي، ساينسي او طبي اثرو د خپرولو لړۍ پيل کړې، تراوسه يې په دې لړ کې مهم اثار خپلو هيواولو ته وړاندې کړې دي.

موږ باور لرو، چې پښتو ژبه هغه وخت په يوه مهمه غني ژبه بدليدلای شي، چې د پوهې په ګانه سمبال شي او په علمي او اکاډميکو اثارو غني شي.

اوس چې زموږ ملي سراسري ژبه د بيلابيلوګواښونو او چلنجونو سره مخامخ ده، پر موږ ټولو ده، چې د دغه ګواښونو په وړاندې به په نره ودريږو او د علم او قلم په ژبه به ځواب ورته ووايو.

د اتحاديي له حوا د ډاکتر ماخان شينواري تراوسه زياتو چاپ شويو اثارو په څنګ کې، د ده د پنځه وېښت شمير پوهنې نويو ژباړو او ليکنو او دوه ټولنيزو ليکنو تر منځ، دغه اثر په همدې لړ کې ځکه د ارزښت وړ دی، چې د علمي، ساينسي اثارو د خپراوي په لړ کې د يوه مهم ګام په توګه ګڼل کيدای شي او هيله ده، چې د دې برخې مينه وال لوستوال، زده کوونکي او د پوهنتو زده کړې کته ترې واخستلی شي.

په درناوي

د افغانستان کلتوري ودې ټولنه

۲۰۰۱۲ ز ک

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ليکونکي مننه

د هر څه له مخه د هغو ليکونکو پروفيسرانو څخه زياته مننه، چې د ليکنو څخه يې زما د ژباړې لپاره تفاهم لري. ماته د دوي د ليکنو د ژباړې په هيڅ ډول مادي ګټه نه شته او دا کار مې يوازې په يوه د پوهنې توانمندي ، مګر وروسته پاتې ژبې ويونکي ولس ته وړاندې دی، دا دې د دې پروفيسرانو له خوا په پوهنيزه اړخ کې زموږ په دې اړخ کې هم مرستې ته اړ ولس سره مرسته وي.

همدا ډول زموږ،، د افغانسان کلتورې ودې ټولنه،، جرمني، د غړو، مرستندويانو او په تيره بيا د مشر تابه څخه زياته مننه کوم، چې پرته له خپرندوې ټولنې په توګه يې د دې ليکنو زياته اقتصادي ونده هم په غاړه اخستې.

دې لاندې زما کليوالو ملګرو او ملګرو د دې کتابونو په چاپ کې د توان سره سمه اقتصادي ونډه اخستې، چې زه ترې زياته مننه کوم:

د ښاغلي دپلوم انجنير ريحان الدين حساس، ښاغلي دپلوم انجنير محمد اکبر نور، ښاغلی ډاکتر سردار ګانه وال، ښاغلی ډاکترماڼوګل ګانه وال، ښاغلي ټولنپوه محمدعارف بيان، ښاغلي دپلوم انجنيرمحمد ايوب بيان، همداسې زما د ملګري اروابناد ډاکتر حاجي محمد سلطانزي د ځوي ښاغلي ډاکتر صالح محمد سلطانزي ، ډپلوم انجنير او دپلوم اقتصاد پوه رحمت الله فتحي او نه اخر زما د لور ډاکتر څانګې شينواري او زما د ځوي اقتصاد پوه او ټولنساپوه اباسين شينواري.

نه د ټولو په اخر کې زما له ميرمن ښاپيرۍ څخه ډيره زياته مننه، چې زما د ليکنو- نه دا چې مخه يې نه ده نيولې- پوره ملاتړ کړي.

بيا هم له دوي څخه د زړه له کومې مننه کوم او لوي څښتن دې ورته اجرونه ورکړي، چې داسې مرستو ته دوام ورکړي.

په مننه : ستاسو ماخان شينواری

جرمني د بن ښار

۲۰۱۲ ز ک

(c) ketabton.com: The Digital Library

نیولیک

نوې سریزه

سریزه

افغاني، یوناني ، لاتین الف ب

شمیرپوهنیزې نخښې

لومړۍ برخه

۱ . ۰	د شمیرپوهنې سم اند یا منطق	۱
۱ . ۰ ۱	پوهنیزه ژبه او پیدایښت یا طبیعي ژبه	۱
۱ . ۰ ۲	د شمیرپوهنې سم اند بنسټیزه کلیمې	۳
۱ . ۰ ۳ . ۰ ۱	ثابتې ، اووښتونې یا واریابلې ، ترمونه	۳
۱ . ۰ ۲ . ۰ ۲	وینا	۵
۱ . ۰ ۲ . ۰ ۳	د دوه ارزښتوالي اصول یا پرینځیپ	۷
۱ . ۰ ٤	وینا فورم یا ۰بڼه او کوانتورونه	۱۳
۱ . ۰ ۵	اړیین او پوره کیدونکي شرطونه	۲۸
۱ . ۰ ٦	د شمیرکلیمه یا د لغاتو	۳۱
۱ . ۰ ۷	برابرون او نابرابرون	۳۳
۱ . ۸	تمرینونه	۳۸
۲ . ۰	ډیر ۍ پوهنه	۳۹
۲ . ۰ ۱	د ډیرۍ پوهنې کلیمه	۴۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ . ۲	د ډېريو ترمنځ اړيکې	۴۵
	ربخدېرۍ	۴۶
	د يوې ډېرۍ توان يا تواندېرۍ (توانسټ)	۴۸
۳ • ۲	په ډيرۍ کې کارونې يا عمليې(۱)	۵۰
	غوڅدېرۍ يا متقاطعدېرۍ	۵۲
	د يوې ډېرۍ يا سټ کمپليمنت	۵۷
٤ • ۲	څيرونه	۵۸
	تمرينونه	۶۷
۳ •	د رييل ګڼونو سره د شميرلو بنسټيزې...	۷۰
۳ • ۱	د ګڼونو- يا اعدادو سيستم جوړښت	۷۰
۳ • ۱ • ۱	پيداينښتي يا طبيعي ګڼونه	۷۰
۳ • ۱ • الف	د پيداينښت يا طبيعي ګڼونو جوړښت	۷۱
۳ • ۱ • ب	د پيداينښت ګڼونو انځورونه او شميرنه	۷۲
۳ • ۱ • پ	د شميرنې بنسټيز قوان ين	۷۸
۳ • ۱ • ۲	ټولګڼونه	۸۴
۳ • ۱ • ۲	الف د ويش تيوري	۸۶
۳ • ۱ • ۲ ب	غټ ګډ پرويشونى(بزګترين مقسوم عليه ...)	۸۸
۳ • ۱ • ۳	راشنلګڼونه	۱۰۶
۳ • ۱ • ٤	رييلګڼونه	۱۰۸

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ ۰ ۲ ۰ ۱	ماتشمیرنه	۱۱۹
۳ . ۳	تمرینونه	۱۳۰
٤ ۰	پوتنخ یا توان ، ریښه یا جذر	۱۴۱
٤ ۰ ۱	توان د ټولګنیز په جګ یا اکسپوننت	۱۴۱
٤ ۰ ۲	ریښه او توان د راشنل اکسپوننت یا جګګن سره	۱۴۴
٤ ۰ ۳	توان د ریيلګڼ اکسپوننت یا جګګڼ سره	۱۵۱
٤ ۰ ٤	ټولګه	۱۵۲
٥ ۰	لوګاریتم	۱۵۸
٥ ۰ ۱	د لوګاریتم کلیمه	۱۵۸
٥ ۰ ۳	ټولګه	۱۶۶
٦ ۰	ګونومتري	۱۶۹
٦ ۰ ۱	بنسټیزه څمکګچپوهنه یا هندسه	۱۶۹
٦ ۰ ۱ ۰ ۱	ټکی او کرښه	۱۶۹
٦ ۰ ۱ ۰ ۲	کونج	۱۷۱
٦ ۰ ۱ ۰ ۳	درېګوډی	۱۷۴
٤ ۰ ۱ ۰ ٤	کونکروانیځ او ورته والی	۱۷۸
٦۰ ۱ ۰ ٥	ولاړکونجیز دریګوډی	۱۸۴
٦ ۰ ۲	په ولاړکونجیز دریګوډی کې د ...	۱۸۸
٦ ۰ ۳	په یوونګردی کې د کونج بلواک ..	۱۹۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

٤ ۰ ٦	د ساین او کوساین جملې	۱۹۵
٥ ۰ ٦	تریګنومتریکي کتمتوالی	۲۰۵
۶ . ۵	تریګنومتریکي یا کونجکچیز فرمولونه	۲۱۵
۰۷	کمپلکس ګڼونه	۲۲۲
۰ ۸	د ښوونې یا ثبوت متودونه	۲۳۵
۸ ۰ ۱	سیده ښوونه	۲۳۵
۸ . ۲	ناسیده ښوونه	۲۳۷
۸ ۰ ۳	د پوره ایندکشن له لارې ښوونه	۲۳۹
۹	لاینیز برابرون له یوې اوړیدونې یا ...	۲۴۳
۱ ۰۹	لاینیز برابرون	۲۴۴
۱۰	کومبیناترویک، د بینوم جمله	۲۶۶
۱۰ ۰ ۱	فاکولتیت یا فاکتوریل	۲۶۶
۱۰ ۰ ۲	د بینوم ځله ونه	۲۶۷
۱۰ ۰ ۳	د بینوم جمله	۲۷۰
۱۰ ۰ ٤	کومبیناتوریک	۲۷۴
۱۰ ۰ ٤ ۰ ۱	پرموتیشن	۲۷۵
۱۰ ۰ ٤ ۰ ۲	واریېشن	۲۸۰
۱۰ ۰ ٤ ۰ ۳	کمبینیشن	۲۸۶
۱۰ ۰ ٤ ۰ ٤	د پرموتیشن، واریېشن او	۲۹۱

۱۱ ۰	لانيز الجبري برابرونونه	۲۹۵
۱۱ ۰ ۱	لانيز برابرون له دوه اوړيدونو يا ...	۲۹۶
۱۱ ۰ ۱ ۰ ۳	دويمه درجه ديترمينانت او د كرامر...	۳۰۷
۱۱ ۰ ۱ ۰ ٤	د ګاوس الګوريتم	۳۱۲
۱۱ ۰ ۱ ۰ ٥	له دوه وو زيات برابرونونه له دوه ...	۳۱۶
۱۱ ۰ ۲	لاينيز برابرونونه له درې	۳۱۷
۱۱ ۰ ۲ ۰ ۱	يو برابرون له درې ناپيژندونو سره	۳۱۷
۱۱ ۰ ۲ ۰ ۲	دوه برابرونونه له درې ...	۳۱۸
۱۱ ۰ ۲ ۰ ۳	دريمه درجه ديترمينانت او د ...	۳۱۹
۱۱ . ۲. ۴	د ګاوس لګوريتم	۳۲۲
۱۱ ۰ ۳	په خوښه ډېر مساوات د په خوښه ...	۳۲۵
۱۱ ۰ ۳ ۰ ۱	د n -م درجې ديترمينانت او د ...	۳۲۶
۱۱ ۰ ۳ ۰ ۲	د ګاوس الګوريتم	۳۲۸
	تمرنونه	۳۳۳
۱۲	الجبري برابرونونه	۳۴۰
۱۲ ۰ ۱	نالاينيز برابرونونه	۳۴۰
۱۲ ۰ ۲	څلوری ئيز يا مربع برابرونونه	۳۴۳
۱۲ ۲۰ . ۱	د دوه په جګ برابرونونه ، د وييتا جمله	
۱۲ ۰ ۲ ۰ ۲	څلوری برابرونونه ، چې په نورمال	۳۵۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۲ ۰ ۲ ۰ ۳	د n -م درجې ځانګړي برابرو...	۳۵۱
۱۲ ۰ ۳	دريمه درجه برابرونونه	۳۵۷
۱۲ ۰ ٤	د ريښې برابرونونه	
۱۳	ترانسڅيندنت برابرونونه	۳۷۵
۱۳ ۰ ۱	لوګاريتم برابرونونه	۳۷۵
۱۳ ۰ ۲	اکسپوننشل- يا په جګګړ برابرونونه	۳۸۰
۱۳ ۰ ۳	ګونومتريکي يا کنجکچيز برابرونونه	۳۸۵
۱٤	له نابرابرونونو او مطلقه ارزښت ..	۳۹۶
۱٤ ۰ ۱	نابرابرونونه	۳۹۶
۱٤ ۰ ۱ ۰ ۱	بنستيزې کليمې او شمير قوانين	
۱٤ ۰ ۱ الف	اينتروال	۳۹۷
۱٤ ۰ ۱ ۰ ۲	نابرابرونونه له يوې ناپيژندونکی...	۴۰۰
۱٤ ۰ ۱ ۰ ۳	د نابرابرونونو سيستم ...	۴۰۹
۱٤ ۰ ۱ ۰ ٤	نابرابرونونه له دوه ناپيژندونکو سره	۴۱۱
۱٤ ۰ ۲	برابرونونه او نابرابرونونه	۴۱۴
۱٤ ۰ ۲ ۰ ۱	له مطلقه ارزښت سره شميرنه	۴۱۴
۱٤ ۰ ۲ ۰ ۲	برابرونونه له مطلقه ارزښت سره	۴۱۵
۱٤ ۰ ۲ ۰ ۳	نابرابرونونه له مطلقه ارزښت سره	۴۲۰
۱۵	بلواک يا فنکشنونه يا طابع	۴۳۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ ۰ ۱۵	د بلواک کلیمه او د بلواک انځورونه	۴۳۰
۲ ۰ ۱۵	د بلواک خویونه	۴۳۳

د ستر کتاب دویمه برخه

۱٦	د هوارې یا سطحې شننیزه هندسه ...	۴۶۶
۱ ۰ ۱٦	کرښه	۴۶۶
۲ ۰ ۱٦	ګردۍ	۴۷۵
۳ ۰ ۱٦	ایلیپسې	۴۸۲
٤ ۰ ۱٦	هیوپربول	۴۸۷
٥ ۰ ۱٦	پارابول	۴۹۲
٦ ۰ ۱٦	تولګه	۴۹۴
۱۷	وکتور شمیرنه	۵۰۲
۱ ۰ ۱۷	د وکتور پیژند یا تعریف،	۵۰۲
	په کارتیزي کواوردینات سیستم کې د وکتور انځورونه	۵۰۲
۲ ۰ ۱۷	د دوه وکتورونو سکالار ځل	۵۰۹
۳ ۰ ۱۷	د دوه وکتورونو وکتوري ځل	۵۱۲
٤ ۰ ۱۷	غبرګهواریز یا موازي الاضلاع ضرب	۵۱۷
٥ ۰ ۱۷	په شننیزه ځمککچ کې د وکتورونو	
۱ ۰ ٥ ۰ ۱۷	د یوې کرښې وکتوري انځورونه	۵۲۱
۲ ۰ ٥ ۰ ۱۷	د هوارې یا سطحې وکتوري انځورونه	۵۲۴

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۷ ۰ ۵ د هواربرابرونونو سکالارفورم یا ۰بڼه ۵۲۵
۱۸ پرلپسې او پرلپسې لړۍ ۵۳۳
۱۸ ۰ ۱ پیل ۵۳۳
۱۸ ۰ ۲ د ګڼون - عددونوپرلپسې کلیمه ۵۳۴
۱۸ ۰ ۲ ۰ ۱ مونوتوني پرلپسې ۵۴۲
۱۸ ۰ ۲ ۰ ۲ اریتمیتیکي پرلپسې ۵۴۵
۱۸ ۰ ۲ ۰ ۳ هندسي پرلپسې ۵۴۷
۱۸ ۰ ۲الف لړۍ ۵۵۰
۱۸ ۰ ۲ الف ۰ ۱ هندسي لړۍ ۵۵۵
۱۸ ۰ ۲ الف ۲ اریتمیتیکي لړۍ ۵۵۷
۱۸ ۰ ٤ د پرلپسې او لړیو د پولې ... ۵۵۸
۱۹ د فنکشنونو پولې او ناپریکیدنه ۵۷۸
۱۹ ۰ ۱ بنسټیزې کلیمې
د پولو یا حدونو خویونه ۵۸۶
د راشنل، کسري یا نسبتي ۵۹۲
د مثلثاتي یا دریکوڼي کچ توابعو پولې ۵۹۶
ناپریکیدنې ۶۰۴
۱۹ ۰ ۲ په پوله ارزښت او ناپریکیدنې څو جملې
۱۹ ۰ ۳ د ناپریکیدونکو فنکشنونو خویونه ۶۱۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

٤٠١٩ د بنسټيزو فنکشنونو ناپرېکېدنه

د ځېرکي ټولګه ۶۱۶

۲۰ دفرنځيالشميرنه ۶۲۶

د تابع تغيرمنځ ارزښت(منځنی قيمت) ۶۲۶

په يوه ټکي کې د تابع ګراف ... ۶۲۸

د لحضوی(سترګورپ) تغير... ۶۳۰

کمښتوېش (تقسيم تفاضل؟) ۶۳۱

دفرنشلوېش يا رابيليدنه يا مشتق ۶۳۳

کمښتوېش او مشتق يا رابيليدنه ۶۳۶

د x_0 په ځای کې د فنکشن مشتق ۶۴۳

د تانجنت پيژند او خويونه ۶۴۷

د تانجنت او عمود يا ولاړ ټوليز مساوات ۶۵۰

په بيديا کې جګوالی ۶۵۲

۲۰.۱۰۱ الف : د تانجنت يا جګيدني غوره والی

۲۰۲۰ د فرنځيال يا رابيليدنې يا مشتق قاعدې ۶۵۶

د درېګوديزو يا مثلثاتي ۶۶۲

د اکسپوننشل يا په جګ توابعو.... ۶۷۰

د مشتق استعمال په طبيعي پوهن کې ۶۷۶

د ايمپليځيت توابعو مشتق ۶۸۳

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بنسټيزو رابيليدنو(مشتقونو) جدول ۶۸۶

ټولګه ۶۸۸

د يوې تابع د مشتق قابليت ۶۹۱

د معکوس- - يا په څټ توابعو مشتق ۶۹۸

۲۰ .۳ د بنسټيزو بلواکو رابيليدنه ۷۰۱

د رول قضيه ۷۱۰

د وايرشتراس قضيه ۷۱۱

۲۰. ٤۰ افراطي ارزښتونه او اوړونټکی

د دفرنشل منځ ارزښت قضيه ۷۱۲

يوعږيزې توابع ۷۱۵

ځای اړوند افراطي ټکي ۷۲۰

د انعطاف – يا اوړونټکی ۷۲۴

د کوږ يا منحني بحث يا خبرې ۷۳۳

ناټاکلي حدونه يا پولې ۷۴۶

د برنولي او د لو پيتال ۷۵۰

۲۰ . ۵ د غټو ګټو پرابلم ۷۵۷

تمرينونه ۷۶۷

په ټوټه کسرونو ټوټه کونه ۷۷۸

۲۱ انتيګرالشميرنه ۷۸۷

(c) ketabton.com: The Digital Library

	پیلراوړنه	۷۸۷
۲۱	انتیګرالشمیرنه	۷۸۹
	د ریمن(ناټاکلی) انتیګرال	۷۹۰
	بنسټیزه یا لومړنی تابع	۷۹۴
	سطحه او لومړنی تابع	۷۹۶
	ناټاکلی انتیګرال	۷۹۹
	د ټاکلي انتیګرال شمیرنه	۸۱۲
	تکمیلیدونکي بنسټونه	۸۱۴
	د ټاکلي انتیګرال څخه و ټاکلي ...	۸۱۵
	د انتیګرالونې قاعدې	۸۱۷
	د اکسپوننشل توابعو انتیګرال	۸۱۹
	د لوګاریتمي توابعو انتیګرال	۸۱۹
	بدلون قانون	۸۲۱
	توابع، چې بې د بدلون له لارې...	۸۲۷
	ټوټه انتیګرالونه	۸۳۲
	د ټوټه انتیګرالونې لار	۸۳۴
	د ټوټه راشنل کسرونو انتیګرال	۸۳۸
	ناپای(مبهم) انتیګرال	۸۴۱
	د ټاکلو انتیګرالونو حل د بدلون له لارې	۸۵۲

(c) ketabton.com: The Digital Library

د انتیګرالشمیرنې استعمال ۸۶۲

تمرینونه ۸۸۸

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوې لیکنې او ژباړې

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ ته چمتو لیکنې او ژباړې

د ژباړي یا لیکونکي ژوند ته لنډه کتنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

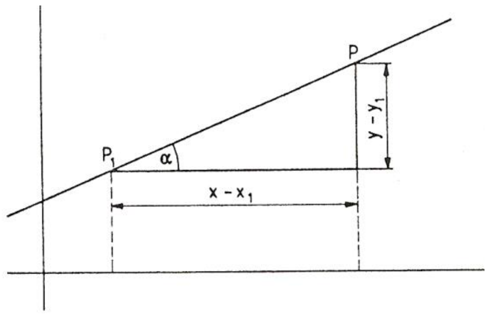
۱۶ - د سطحې شننیزه (تحلیلي) هندسه

په دې برخه کی یوڅود تحلیلي (شننیزې یا سپړنیزې) ځمککچپوهنې یا هندسي ټاکلي پرابلمونه څیړل کیږي.د تحلیلي هندسي بنسټیزه تګلار به څرګنده (وښول) شي، په نامه هندسي جوړښتونه، ددې هندسي شکلونو او ددې په شننیزې یا تحلیلي څرګندونویی د هندسي خویونو جوړښت ښایي.

۱۶ . ۱ کرښه

د هندسي ټاکندو ټوټو له لارې مختلف امکانات شته دی، چې یوه کرښه یواځنۍ کره تعین کړای شو. ددې په لاس ته راوړنو له امله د کرښبرابرونونو یا - مساواتو مختلفی بڼی شته دې. یوه کرښه د یوه ټکي او د هغه د لور(سمت) له لارې ټاکل کیدي شي . (ټکی او د ټکی میلان معلوم دې) .

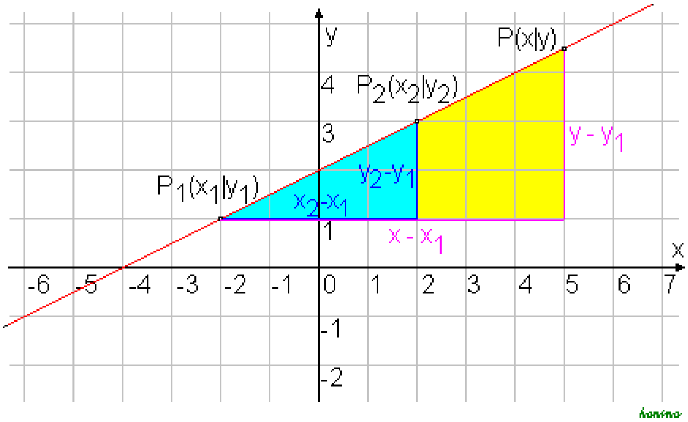
دلته دې(P1(x1 , y1دا ټکي وي. $\alpha \neq \pm\frac{\pi}{2}$ دې د جګیدو کونج،وي، چې د کرښی لور ټاکي (خ ۱۶ . ۱) او(P(x,y په کرښه یو اووښتونی (واریابل) ټکی دی٠



(c) ketabton.com: The Digital Library

نو د کرښی د ميلان $\tan\alpha = m$ لپاره باور لري: $m = \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$

(پورته ښېره دې وکتل شي(لاددې ښېره هم په همدې موخه کښل شوې ده))



له دې څخه لاندې لاس ته راځي:

$$y - y_1 = m(x - x_1);.....................(16,1)$$

پورته د کرښی ټکی لوربرابرون

که د y په محور P1وټاکل شي د کواورديناتو x1= 0, y1 = b سره، نو له (۱۶ . ۱

)سملاسي په لاس راځي: y - b = m (x - 0) په همدې ډول(⇔)

$$y = mx + b \qquad (16 . 2)$$

دا پورته برابرون د کرښمساواتونورمال فورم (بڼه) بلل کيږي

يوه کرښه د دوه ټکو له لارې ټاکل شوې.

دا دوه ټکي دي(P1(x1 , y1 او(P2 (x2 , y2 وي، د x1|=x2 سره ، (ښيره ش ۱۶

. ۲) د جګيدونکی يا تنجنت $\tan\alpha = m$ لپاره داسی دي:

$$m = (y - y1) /(x -x1)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او

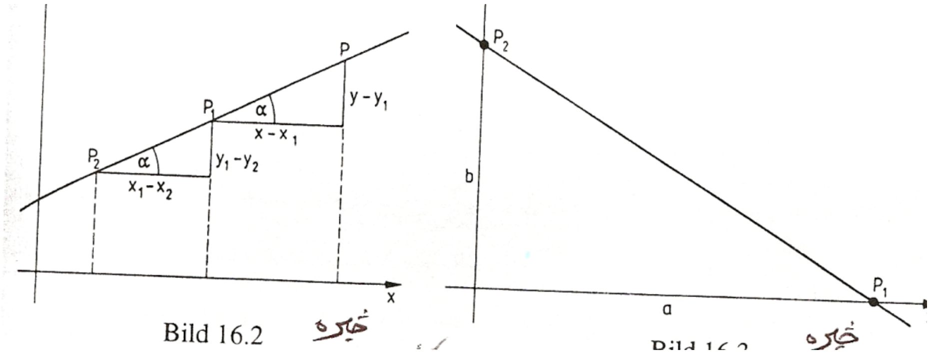
m = (y2-y1)/(x1-x2) = (y2-y1)/(x2-x1)

له کومو چې لاس ته راځي

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x \;\; - x_1};..................(16,3)$$

پورته د کرښې دوه ټکيزبرابرون

څيره ده



که د x - محور باندې د P1 ټکی ، د کواوردينات 0 = x1 = a |= 0 , y1 سره وټاکو او ټکیP2 دy- محور باندې د کواوردينات x1= 0, y2 = b|= 0 سره وټاکو، نو له (۱۶ . ۳) لاس ته راځي:

(y - 0) / (x - a) = (b - 0)/ (0 - a)

او له دې دا لاندې لاس ته راځي:

$$x/a+y/b = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (16,4)$$

پورته د کرښو د غوځي برابرون

خلور پورتنی کرښمساوات ټول په x او y کی لاينيز دي.د مساوات عمومي فورم)يا ټوليزه بڼه (داسی دی:

Ax + By + C = 0 (16 . 5)

د کرښبرابرونونو ټوليزه بڼه(عمومي فورم)

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا فورم په ځانګړې توګه دا برابرون هم خوندي لري يا په بر کی نيسي

y = y0 (A = 0 ,B|=0)

او(x=x0(A|=0,B=0 چی د x - محور اوپه همدې ډول د y - محور ته غبرګي کرښي دي، په داسی حال کی چی تراوسه دومه لا نه ده څېړل شوې

بيلګه ۱۶ . ۱:

د کرښی برابرون يا لاينيز برابرون، چی له(P(-2 , 3 ټکي تيريږي او د جګوالي کونج $\alpha = 30°$ يی د $m = \tan\alpha \frac{1}{3}\sqrt{3}$ له امله، د (۱۶ . ۱) سره سم داسی ليکل کيږي $y-3 = \frac{1}{3}\sqrt{3}(x+2)$

او نورمال فورم يي په لاندې ډول دی

$$y = \frac{1}{3}\sqrt{3}x + (3 + \frac{2}{3}\sqrt{3})$$

بيلګه ۱۶ . ۲ :

د لاينيزبرابرون يا دکرښوبرابرون په ټکو(P1 (3/2 ,-2 او(P2(1 , -4کی د (۱۶ . ۳)سره سم په لاندې ډول دي:

$$\frac{y+2}{x-\frac{3}{2}} = \frac{-y+2}{1-\frac{3}{2}}$$

له دې لاس ته راځي: $y+2 = \frac{-2}{-\frac{1}{2}}(x-\frac{3}{2})$

نو نورمال فورم y=4x-8 لرو(اته ناسم، په ځای يې شپږ دي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۶ . ۳ :

کرښه د y =-(3/2)x+1 برابرون سره د y - محور په(P1(0,1 ټکي کی غوڅوي او جګوالی یی 2/3 - دی ، دا په دې مانا چی د x - ارزښت تغیریدل په یو دy - ارزښت په 2/3 - تغیروي، په دې ډول دوم د کرښي ټکی لاس ته راځي. د بیلګی په توګه p2 (0+1 , 1-(3/ 2)=p2(1,-1/2)

(ځيره ۱۶ . ۴ لاندې کښل شوې)

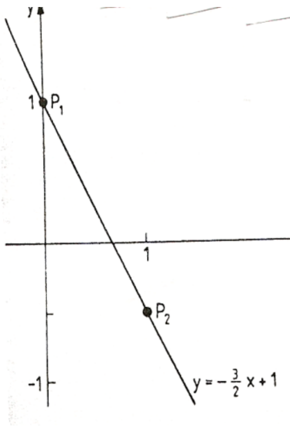
بیلګه ۱۶ . ۴ :

د کرښی د برابرونونو عمومي فورم x-2y-6 = 0 څخه دغوځیدو فورم لاس ته راځي
x / 6 + y / 3 = 1
کرښه دکواوردینات محورونه په دې ټکو(P1(6 , 0), P2(o,-3 کې غوڅوي۰
په یوه کرښه د دوه ټکو(P1(xx,y1),P2(x2,y2ترمنځ فاصله (که د کرښي واټن P1P2
d = وي د پیتاګوراس(فیساغورس) له جملی (ځیره . ۱۶ . ۵) داسی ده

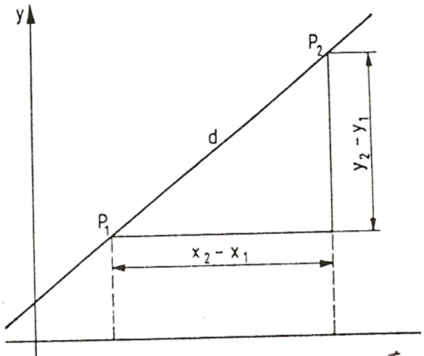
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2};..........................(16,6)$$

پورته د ټکو P1 او P2 ترمنځ واټن

ځیرې ۱۶ . ۴ او - ۵



ځیره ۴ :



ځیره ۵

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۶ . ۵ :

د درېګوډي ABC د اړخونواوږدوالی، چې کونجټکي یی دادي(-)A(3,1),B
۱,1),C(2,5، په لاندې ډول دی

$$a = \overline{BC} = \sqrt{(2+1)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$b = \overline{AC} = \sqrt{(2-3)^2 + (5+1)^2} = \sqrt{37} = 6,08$$

$$c = \overline{AB} = \sqrt{(-1-3)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{20} = 4,47$$

دوه کرښې (نه کټمټی) چې (یو د بلی سره) غبرګې نه وي ټیك یو غوڅټکی لري. دا چې دا ټکی په دواړو کواور دیناتو پروت دی ، نو د دواړو کواوردیناتو برابرون باید پوره کړي . په دې حالت کې د غوڅټکي کواوردیناتو، د دوه لاینیزو برابرونونو سره چې دوه اوښتونې یا

ناپیژندونکی (مجهولی) ولري، د یوه سیستم یوائځنی کره اوبیونه ترې لاس ته راځي.
په ټولیزه توګه دا باور لري: که یو برابرونسیستم چې د دوه کرښو د برابرونونو څخه جوړ وي، او یو یوائځنی ټاکلی حل لري، نو دواړه کرښې یو بل په دې ټکي کی سره پرې کوي.
که ناپای ډېرې اوبیونې شته وي، نو په دې حالت کی برابرون همغه یوه کرښه ښايي، که کوم اوبی ونه لري، نو کرښې یوبل سره غبرګې ځغلي (پرتله ۱۱ . ۱ . ۲)

بیلګه ۱۶ . ۶ :

د g1 : y = 3x-2 کرښی پروتځاي (موقعیت) د لاندې کرښو
الف) g2: -2x+y = 1,
ب) g3: 3x -y=5, ,
پ) g4 : -x+(1/3)y=-2/3
سره څیړو

اوبیونه : د g1 برابرونونو څیره داسی بدلیږي : 3x-y=2
الف) د برابرونونو سیستم 3x-y=2، -2x+y=1
ټیك یوه اوبونه لري: x1=3 , y1=7
ددې څخه څرګندیږي چې ټکی(S(3 , 7 د کرښو g1 او g2 غوڅټکی دی .

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) د برابرونونو سيستم

$$3x - y = 2$$
$$3x - y = 1$$

اوبی نه لري : برابرونونه يو بل ردوي يه نه زغمي . د g1 او g2 کرښی يو د بل سره غبرګي دي

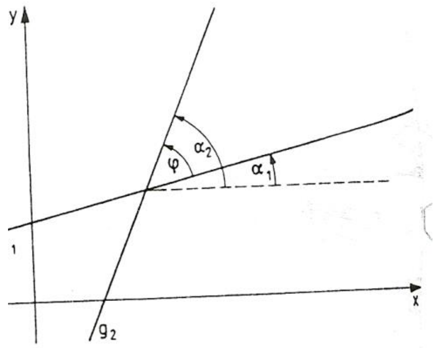
پ) د برابرونونو سيستم $3x-y=2$

$$-x+(1/3)y=-2/3$$

ناپای ډير ې اوبيونې يا حلونه لري. برابرونونه يو بل سره برابر يا يو بل ته ورته دي.
که په ۳ ضرب شي يو همغه پورته برابرون ترې لاس ته راځي .
g1 او g2 دوه کټ مټ برابرونونه دي ٠
که د دوه کرښو

$$g1 : \quad y = m1x + b1 \qquad g2 : \quad y = m2x + b2$$

غوڅکونج ϕ ټاکو، نو د دواړو کرښو جګيد کونجونو $\alpha_1 \wedge \alpha_2$ کمون (کمښت يا توپير)جوړوو (ځ ۱۶ . ۶)



ځېره ۱۶ . ۶

د کرښی له برابرونونو پوهيږو $\tan\alpha_1 = m_1 \wedge \tan\alpha_2 = m_2$

د زياتون تيورم (بنستيزه جمله) (برخه ۶ . ۵) څخه د $\tan(\alpha_2 - \alpha_1)$ لپاره (پر تله برخه ۴ . ۵) باوري ده

$$\tan\phi = \tan(\alpha_2 - \alpha_1) = (\tan\alpha_2 - \tan_1)/(1 + \tan\alpha_1 . \tan\alpha_2)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کوم څخه چی د $\tan\alpha_1 = m_1 \wedge \tan\alpha_2 = m_2$ سره دا لاندې لاس ته راځي:

$$\tan\phi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1.m_2};........................(16,7)$$

پورته د دوه کرښو غوڅکونج دې.

دا په دې پورې اړه لري چی ایا $\phi > 0 \vee \phi < 0$ د پورته څېړې ۱۶ . ۶ کونج پڅ او که تیره دی.

بیلګه ۱۶ . ۷ :

د دوه کرښو g1:y=x-1 او g2:y=(7/4)x+1 غوڅکونج لپاره له (۱۶ ، ۷) څخه لاس ته راځي:

$$\tan\phi = \frac{\frac{7}{4} - 1}{1 + 1.\frac{7}{4}} = \frac{3}{11}; \phi = 15,255°$$

د g1 او g2 ترمنځ پڅکونج په دې ډول دی : $180 - \phi = 164,745°$

د دوه کرښو یو بل ته ځانګړي حالتونه:

۱ – کرښې یوبل سره غبرګې ځغلي. نو لرو:

$$\phi = 180° \vee \phi = 0 \Leftrightarrow$$

$$\tan\phi = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1.m_2} = 0$$

ګورو چی د m2 - m1 = 0 لپاره باور لري، نو m2 = m1

(دلته باور لري : $m_1.m_2 = m_1^2 \neq -1$)

۲ - کرښې یو په بل (نیغی) ولاړې دي، نو لرو

$$\phi = 90° \Rightarrow \tan\phi = (m - m)/(1 + m.m) = \infty$$

دا حالت د 1+m1.m2 = 0 لپاره منځ ته راځي،

(c) ketabton.com: The Digital Library

یعنی د$m2= -1/m1$ لپاره $(m1|=0,m2|= 0)$

په کرښه($y=y0$ $(m1=0$ باندې کرښه$x=x0(m2=oe)$ نیغه ولاړه ده

د غبرګوالی لپاره شرطونه

$$m2 = m1 \qquad (16, 8)$$

د اورتوګونالیټی Orthogonalität(یو په بل ولاړوالي) لپاره شرطونه:

$$m2 = -1 / m1 \qquad (16 . 9)$$

بیلګه ۱۶ . ۸ : دکرښی g2 برابرون دې وټاکل شي چی له ټکي(P (2,-1 تیریږي، او له کرښی $g1 : y = -2x +1$ سره الف (غبرګه او ب(اورتوګونال (نیغه) څغلي اوبوونه:

الف) د g2 کرښی میلان (جګوالی $m2 = m1 = -2$)دی. پام (۱۶ . ۱) ته دکرښي g2برابرون لپاره باور لري : $y+1=-2(x-2$) همداسی $y = -2x +3$

ب) د g2 کرښي میلان یاجګیدنه ده $m2=-1/m1=1/2$ د(۱۶ . ۱) سره سم د g2 کرښي برابرون دی: $y+1=(1/2)(x-2) <=> y=(1/2)x-2$

بیلګه ۱۶ . ۹ :

د کرښی برابرون ټاکل کیږي چي د($P1(1/3,-1/6$ ټکی تیریږي او په کرښه چی له ټکو($P2(-1,1$ او($P3(-2,-1$ تیریږي، ولاړه وي.

ځواب : کرښه چي له P2 ,P3 ټکو تیریږي، و (۱۶ . ۳) ته په پام لاندې برابرون لري $y = 2x +3$ $(y-1)/(x+1)=(-1-1)/(-2+1) = 2 <=>$

په دې کرښی د (عمودي) ولاړې کرښی میلان یا جګوالی داسی دی:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{2}$$

د p_1 ښخه تیریدونکی کرښي برابرون د m_2 میلان سره د(۱۶ . ۱) له مخی دي:

$y+(1/6)=-(1/2)(x-173) \Leftrightarrow y=-(1/2)x$

بیلګه ۱۶ . ۱۰ :

د $g1: 2x-y-1=0$ او $g2: 3x+2y=5$ کرښو د غوڅټکي S واټن له ټکي($P(6,13$ څومره دی او د کرښې برابرون څنګه دی چې د کواوردینات له سرچینې تیریږي او د S او P څخه تیریدونکې کرښه باندې ولاړه کرښه وي؟

ځواب : د غوڅټکي کواوردینات د لاندې برابرونونو سیستم څخه لاس ته راځي

$2x-y=1$

$3x+2y=5$

یعنی: $x_S=1 , y_S=1$

د S او P ټکو ترمنځ واټن له (۱۶ . ۶) څخه لاس ته راځي

$$d=\sqrt{(1-6)+(1-13)^2}=13$$

د (۱۶ . ۳) له مخې د کرښې برابرونونه چې له S او P تیریږي دي

$(y-1)/(x-1)=(13-1)/(6-1) \Leftrightarrow y=(12/5)x-7/5$

(جګوالی: $m = 12 / 5$)

له S او P ټکو تیریدونکې کرښه باندې د ولاړې کرښې میلان

$m2 = -1/m = -5/12$

د $P0$ (0,0) څخه تیریدونکې کرښه د $m2$ میلان سره د (۱۶ . ۱) له مخې لاندې برابرون لري

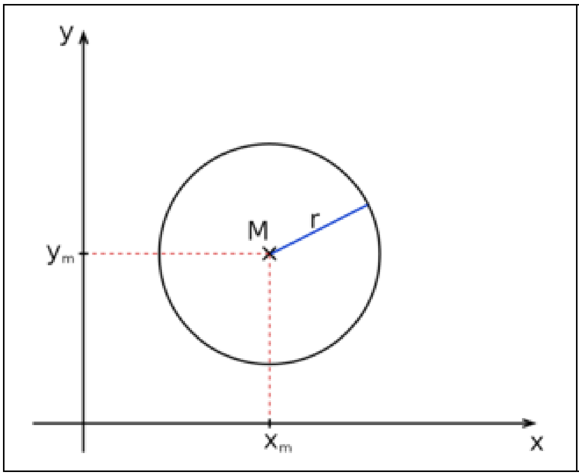
$y-0=-(5/12)(x-0) \Leftrightarrow y=-(5/12)x$

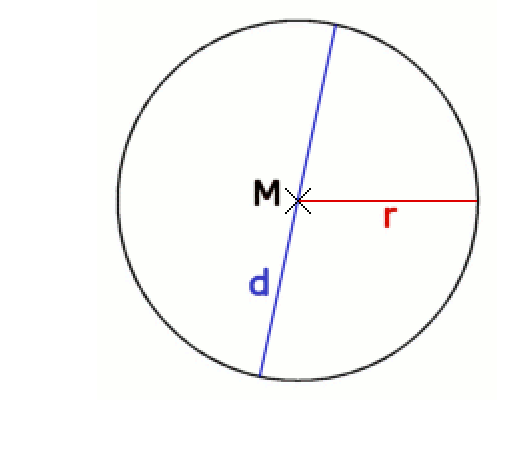
۱۶ . ۲ ګردی (دایره)

دایره(ګردی) د ټولو هغو ټکو ډیری(ست) ده، چې د یوه کره ځای په ځاي ټکي ، داسې په نامه منځټکی څخه ، همغه واټن ولری. واټن ته یی وړانګه وایو او په r یې په نخښه کوو.
فورمال داسې ویل کیږي یا دا پیژند ورکوو، چې دایره (ګردی) k د د سطحې (هوارې) E د ټولو ټکو ډیری(ست) ده،د کومو لپاره چې باور لري:

$$k=\left\{X\in E \mid |\overline{MX}|=r\right\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library





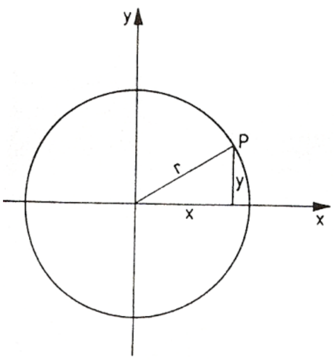


Bild 16.7 ، شکره

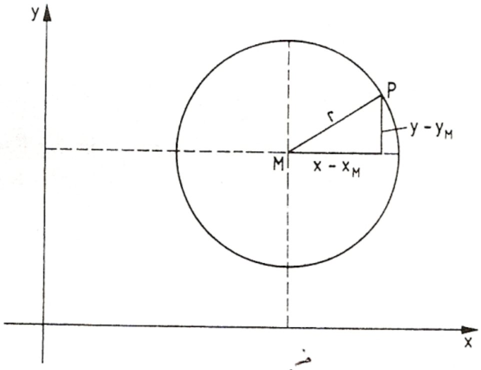


Bild 16.8 شکره

په شننیزه هندسه کې کیدی شي، چې ګردی د منځټکي $M(x_m, y_m)$ او وړانګې r سره (په هواره کې) د لاندې برابرون له مخې انځور شي.

$$(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2$$

پورته د ګردی تولیز برابرون

دا برابرون د پېژند او پیتاګوراس له جملې سملاسي ورکوي
د یوې ګردی ځانګړي حالت او د کواوردیناتسیستم سره، چې منځټکی یې د کواوردینات
په سرچینه پروت وي لاس ته راځي

$$x^2 + y^2 = r^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د ګردۍ منځ ټکی د کواوردیناتسیستم (ځیره ۱۶ . ۷) په سرچینه پروت وي، نو د پیوتاګوراس د جملی له مخی (د ګردي په خوښه ټکي P(x,y) لپاره باور لري

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (16 . 10)$$

د ګردۍ منځټکي برابرون چی د ګردي منځټکی(M(0,0او وړانګه r ده.

که د ګردي منځټکی M کواوردینات (xM,yM) ولري (ځیره ۱۶ . ۸) نو د ګردۍ د خوښی ټکي P(x) لپاره باور لري

$$(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2 \quad (16,11)$$

که د ګردي د منځټکي برابرون وي د منځټکي $M(x_M,y_M)$ او وړانګي r سره

که په (۱۶ . ۱۱) کې د بینوم مربع وې شمیرو او برابرون په A|=0 فاکتور ځلوو (بی له دې چی د ګردي برابرون تغیر ومومي) ، پس پیژندل کیږي چی د ګردیبرابرون د څلورۍ یا مربع غړي په x اوy کی په فاکتور A لاینیز برابرون په x او y او ثابت غړي (چی یوه غړي په ځیري سره یوځاي شوي) لاس ته راوړو.

نو دا لاندې تولیز(عمومي) جوړښت لري

$$Ax^2 + Ay^2+Cx+Dy+E = 0 . A |= 0 \quad (16 . 12)$$

د ګردي برابرونونو(مساواتو) تولیز فورم یا تولیزه بڼه ۰
که د ګردي برابرون په تولیزه بڼه یا عمومي فورم ورکړشوي او که منځټکی او وړانګه یی څرګنده کوو یا معلوموو نو د ګردي برابرون د منځټکي فورم باندې راوړو یا را اړوو. دا د څلورۍ پوره کولو یا مربع تکمیلولو په بنسټ صورت نیسي . دوه ځیرې پورته وګورۍ

بیلګه ۱۶ . ۱۱ :
د ګردۍ برابرون دې په تولیزه - یا عمومي توګه وي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$2x^2+2y^2+4x-12y = 0$$

له دې لاس ته راځي، که په دوه وویشل شي $x^2+y^2+4x-6y-3=0$

(د ځلورې پوره کونه یا مربع تکمیلونه) $x^2-4x+4+y^2-6y+9 = 3+4+9$

دبینوم د مربع له لارې انځورونه $(x+2)^2+(y-3)^2 = 16$

ګردۍ منځټکی$M(-2,3)$ او وړانګه $r=4$ لري.

بیلګه ۱۶ . ۱۲ :

د ګردۍ برابرون ولیکی چې منځټکی یې $M(2;0)$ وي او په کوم چې ټکی $P(6,4-3)$ روت دی؟

اوبیونه : د $M(2,0)$ سره (۱۶ . ۱۱) داسی دې

$$(x-2)^2 + y^2 = r^2$$

د P ټکی د ګردۍ برابرون پوره کوي $(6-2)^2+(4-3)^2 = r^2$

له دې ځخه د ګردۍ وړانګه په لاندې ډول لاس ته راځي: $r = 8$ او له دې سره د ګردۍ برابرون:

$$(x-2)^2 + y^2 = 64$$

ګردۍ او کرښه یو بل ته درې مختلف ځایونه لرودی شي

۱ - کرښه ګردی غوځوي، نو له دې امله غوځی ده(سیکانتې)

۲ – کرښه ګردۍ په یوه ټکي کی لمسوي یعنی مماس دی (تانجنت یا جګوالی)

۳ - کرښه ټوله له ګردی دباندې پرته ده (له ګردۍ تیریدونکی، لنډ : تیریدونې)

د غوځټکي(د تقاطع ټکي) کواوردینات باید د ګردۍ اوکرښی برابرون پوره کړي سړی د کرښي برابرون د ګردۍ په برابرونونو کی ږدي(y یا x پسی حل یا اوبې شوي) او په روښانه ډول یو مربع مساوات (ځلورۍ برابرون) په x او y کی لاس ته راوړي، کوم چی په ځرګند ډول (پرتله برخه ۱۲ . ۲) دوه ریل اوبیونې یا ځوابونه لري، یو رییل ډبل اوبی او یا هنځ رییل اوبی کیدی شي ولري، کوم چی له حالتونو ۱ ، ۲ ، ۳ ځخه عبارت دي.

بیلګه ۱۶ . ۱۳:

کوم پروت ځایونه ګردی k چی راکړشوی: $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 5$ او لاندې کرښی و یو بل ته لري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

$g1 : 2x+y=4 , g2=2x+y=12 , g3: -x+y/2=3$

اوبی: $g1: y=-2x+4$ که د ګردۍبرابرون کی ځاي کړو نو دا برابرون لاس ته راځي

$(x-2)^2+(-2x+4-3)^2=5 \Leftrightarrow 5x-8x=0$

ددې ځوابونو $x=0 , y=4$ او $x=8/5 , y=4/5$ سره به $g1$ د ګردي غوڅوونی یا (Sekantسکانت) وي .

که $g2: y=-2x+12$ د ګردي مساواتو کی ځاي کړو نو لاندې لاس ته راځي

$(x-2)^2+(-2x+12-3)^2=5 \Leftrightarrow x^2-8x+16=0$

د ډبل اوبونې $x1,2 = 4 , y1,2 = 4$ سره $g2$ یو تانجنت دئ .

که $g3 : y=2x+6$ د ګردۍ مساوات کی ځاي کړو، نو لاندې لاس ته راځي:

$(x-2)^2+(2x+6-3)^2 \Leftrightarrow 5x^2+x+8=0$

دا څلورۍ برابرون یا مربعمساوات ځواب نه لري، نو له دې امله کرښه $g3$ له ګردۍ k دباندې پرته ده، یعنی دباندنی یا دباندونی ده.

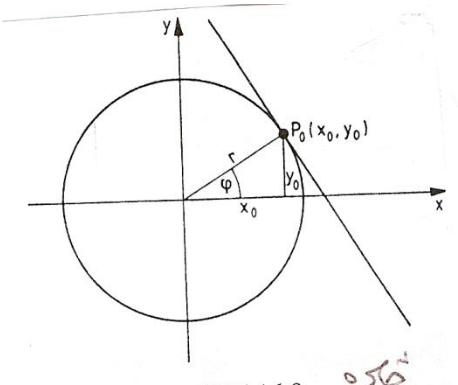


Bild 16.9

په ګردي ($x^2+y^2 = r^2$ (څېره ۱۶ . ۹) باندې د تنجنت برابرون په ټکی($P0(x0,y0$ د مساوات $x0^2+y0^2 = r^2 >0$ سره غوښتل کیږي. تنجنت د مماس په وړانګه نیغ ولاړ دئ

د مماسوړانګه دا میلان یا جګوالی لري $\tan\phi = \frac{y_0}{x_0}$ او

له دې امله د (۱۶ . ۹) له مخی د تنجنت

$$m = 1/\tan\phi = -x_0 / y_0; ....(16,13)$$

د تنجنت یا جګي برابرون د (۱۶ . ۱) سره سم لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

y-y=-(x0/y0)(x-x0) <=> xx0+yy0=x0²+y0²=r²

$$xx_0+yy_0 = r^2 \qquad (16.14)$$

د ګردۍ تنجنت باربرون په ټکي $P_0(x_0,y_0)$ په ګردي
$x^2+y^2 = r^2$

(حالتونه(P0(±r,0او(P0(0,±r په (۱۶ . ۱۴) کی ځاي (دننه) دي.
(ځېره . ۱۶ . ۱۰)

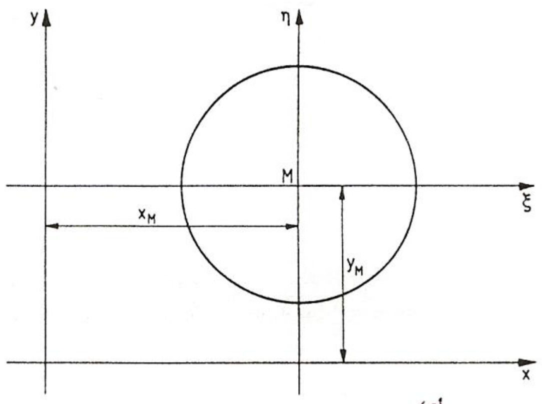


Bild 16.10 ځېره

يادونه : كه له دې مخ ته يا وروسته x0,y0 يا xM,yMاو x_0, y_0 يا x_M, y_M ګورو نو كېمټ دي

بيلګه ۱۶ . ۱۴:

د دوه تنجنتو برابرون له ټكي(P1(-12,4 په ګردي x²+y²=r² په څه ډول دي؟
اوبيونه : لمړی د دواړو تنجنتو د مماس ټكی پيداكوو. دا بايد دګردۍ برابرون پوره كړي . ټكی P1 بايد په تنجنت پروت وي يعنی د تنجنت برابرون (۱۶ . ۱۴) بايد پوره كړي.
نو باور لري
x0 + 4y0 = 16 12- او x0²+y0² = 16

(c) ketabton.com: The Digital Library

که دا لاینیزبرابرون د y0 په لور حل شي ، نو په x0 کي یو څلوری برابرون یا مربع مساوات لاس ته راځي

$x_0^2+(3x_0+4)^2 = 16$

همداسي $5x_0^2+12x_0=0$ د اوبیونو $x_{01}=0$, $x_{02}=-12/5$ سره. داهم په دې پورې اړه لري

$y_{01}=4$, $y_{02}=-16/5$

د تنجنت مساوات په ګردې، په ټکو($P_{01}(0,4)$ او($P_{02}(-12/5,16/5)$ د (۱۶ . ۱۴) له مخې په لاندې ډول دي

$0.x+4y=16 \Leftrightarrow y=4$

او

$(-12/5)x-(16/5)y=16 \Leftrightarrow y=(-3/4)x-5.$

د ګردئ مساوات (۱۶ . ۱۱) د منځټکي ($M(x_M,y_M)$ سره د η,ζ -کواوردینات سیستم کی ، چی سرچینه یي په M کی پرته ده)(؟ څیره ش . ۱۶ . ۱۰) لاندې فورم لري٠

$\zeta^2+\eta^2=r^2$

د تنجنت مساوات په ټکي $P_0(\zeta_0,\eta_0)$ کی داسی دي

$\zeta\zeta_0+\eta\eta_0=r^2;$....................................(16,15)

د η,ζ -کواوردیناتسیستم د y,x - کواوردیناتسیستم یو غبرګ کښوول (راکښل) دي، او د دواړو کواوردیناتسیستم کی لاندې اړیکی پرتی دي ٠

$\zeta=x-x_M, \eta=y-y_M;$...........................(16,16)

که برابرون (۱۶ . ۱۶) د تنجنت مساواتو(۱۶. ۱۵)کی ځاي په ځاي شي، نو سرې بیا دا د y,x -کواوردینات سیستم ته ترانفورمیرکوي(کشوي یا راکاږي) :

$(x-x_M)(x_0-x_M)+(y-y_M)(y_0-y_M)=r^2$ (16.17)

په ټکي($P_o(x_0,y_0)$ کی د ګردئ تنجنت برابرو په ګردئ

$(x-x_M)^2+(y-y_M)^2=r^2$

بیلګه ۱۶ . ۱۵:

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ګردۍ چی برابرن $x^2+y^2+16x+4y+43 = 0$ لري، د x - محور باندې، په ټکو $x_1 = x_2 = -5$
سره تنجنت وکاږو(کيږدو). برابرون يی څنګه دي؟

اوبيونه : د ګردۍ برابرون د منځټکي فورم (۱۶. ۱۱) باندې بدليږي:

$$x^2 +16x+64+y^2-4y+4 = -43+64+4$$

$$(x+8)^2 +(y-2)^2 = 25$$

او له دې لاس ته راځي

$$x_M = -8 , y_M = 2 , r = 5$$

د ګردۍ د دواړو ټکو ارزښتونه

$$x_1 = x_2 = -5$$

د دواړو ګردۍ ټکو په ګرديبرابرون کی ځايوو:

$$(-5+8)^2+(y-2)^2=25$$

له دې داسی لاس ته راغلي دy لپاره څلوریبرابرون يا مربع مساواتو د دواړو اوردیناتو مماس ټکي لاس ته راځي : $y_1 = 6 , y_2 = -2$

د (۱۶ . ۱۷) سره سم د تنجنت مساوات لاس ته راځي

$$(x+8)(-5+8)+(y-2)(6-2)=25 \iff 3x+4y=9$$

او

$$(x+8)(-5+8)+(y-2)(-2-2)=25 \iff 3x-4y=-7$$

۱۶ . ۳ بيضوي(هګۍ) يا ايليپسی Die Ellipse

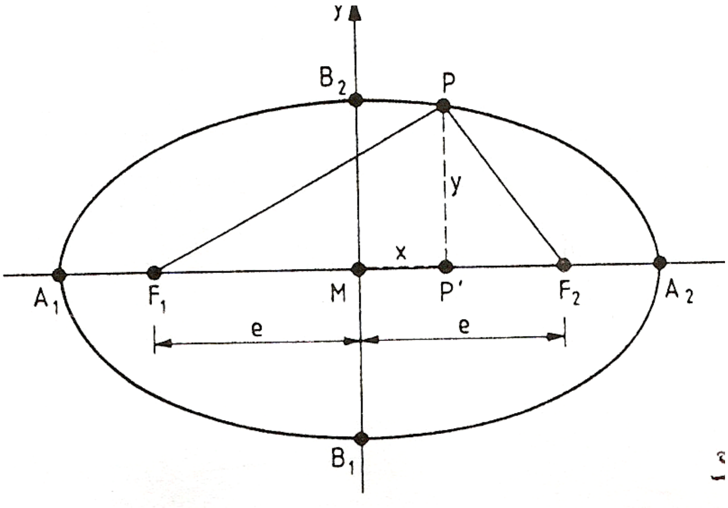
بيضوي يا ايليپسی د ټولو هغو ټکو P ډیرۍ ده، د کومو واټن چی له دوه ټينګ په ځايټکو، داسی په نامه د ايليپسی د سوزونټکويا محراق F1 او F2 څخه ثابت وي. دا سوزونټکی د څيرې ۱۶ . ۱۱ سره سم د -y محور سره سيومتريك دx - محور باندې ځايوو يا ږدو او د ثابت واټنزياتون ليکو:

$$\underline{PF}1 + \underline{PF}2 = 2a \qquad (16. 18)$$

د سوزونټکو واټن دې وي:

$$\underline{F}1F2 = 2e;$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



خېره ۱۶ . ۱۱

دا e لايني اکسځنتريځيتي(Exzentrizität دا يوناني کليمه ده چې په اليپسی هوپربول او پارابول کی د همدغه تعريف لپاره ټاکل شوې) بلل کيږي .
د پيتاگوراس له جملی لاس ته راځي:

$$\underline{PF}_1 = \sqrt{(e+x)^2 + y^2}$$

او

$$\underline{PF}_2 = \sqrt{(e-x)^2 + y^2}$$

او له دې سره له (۱۶ . ۱۸)

$$\sqrt{(e+x)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(e-x)^2 + y^2}$$

$$e^2 + 2ex + x^2 + y^2 = 4a^2 - 4a.\sqrt{(e-x)^2 + y^2} + e^2 - 2ex + x^2 + y^2$$

(ځلورې يا مربع ته جگيږي)

$$ex - a^2 = -a\sqrt{(e-x)^2 + y^2}$$ (رينه رابيليږي

(ځلورې يا مربع کوو)

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$e^2x^2 - 2exa^2 + a^4 = a^2(e^2 - 2ex + x^2 + y^2)$$

ترتیب اوړون $(a^2 - e^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - e^2)$

په ځاي کوو

$a^2 - e^2 = b^2$ (16.19)

او لاس ته راوړو

$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ <=>

$(x^2/a^2) + y^2/b^2) = 1$ (16,20)

د منځټکي(M(0,0 سره د ایلیپسی منځټکي مساوات

د y=0 لپاره دی x=±a، د x=0 لپاره دی y=±b. ایلیپسی (ځیره ۱۶ ، ۱۱)

د x - محور په ټکو A1(-a,0), A2(a,0) او د y - محور په ټکو

B1(0.-b), B2(0,b) کی پرې کوي، a او b د دواړو نیمحورونو اوږدوالی دی

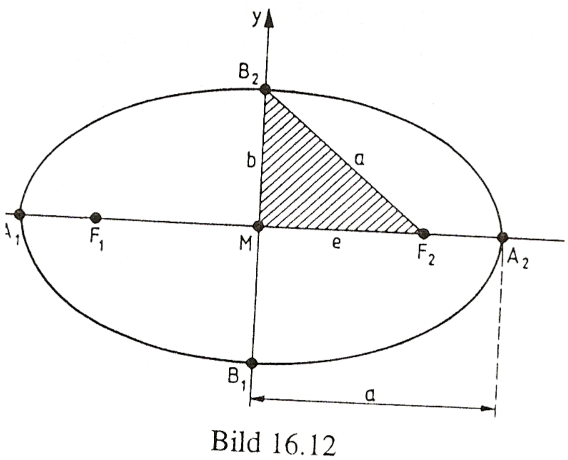


Bild 16.12

لکه د الیپسی د هرټکي لپاره، همداسی د B لپاره هم اړیکی (۱۶ ، ۱۸) باور لري:

<u>F1B2</u> + <u>F2B2</u> = 2a

د <u>F1B2</u> = <u>F2B2</u> له امله له

<u>F2B2</u> = a دې لاس ته راځي

(ځیره ۱۶، ۱۲)

له دې سره په دریګوډي MF2B2 کی د اړیکو (۱۶ ، ۱۹) هندسي ارزښت پېژندل کیږي.

که منځټکی M کواوردینات Mx ; My ولري او د ایلیپسی محورونه د کواوردیناتو سره غبرګ وځغلي، نو د ایلیپسی د یوه خوښې ټکي(P(x,y لپاره باور لري:

$(x-xM)^2/a^2+(y-yM)^2/b^2=1$ (16 , 2 1)

د ایلیپسی د منځټکي مساوات د منځټکي $M(x_M, y_M)$ سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پورته فرمول څلولو وروسته د ايليپسی ټوليز(عمومي) جوړښت پيژندل کيږي.

$$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0 \qquad (16, 22)$$

د ايلپسی مساواتو ټوليزه بڼه يا - فورم

د ګردې برابرون سره په توپير(پرتله يا مقايسه ۱۶ . ۱۲) د x^2 او y^2 څله وونی يا ضريبونه يو له بل توپير لري، مګر همغه مخنخښه لري($A.B > 0$)

بيلګه ۱۶ . ۱۶ :

د د ايليپسی منځټکی، نيممحور، او سوزونټکي لټول کيږي، که دا برابرن

$$9x^2 + 25y^2 -54x +100y -719 = 0$$

مو مخ ته پروت وي.

اوبونه : د ايلپسي برابرون د منځټکي بڼه يا فورم (۱۶ . ۱۲) باندې اړول کيږي:

$$9(x^2-6x)+25(y^2+4y) = 719$$

څلورئ پوره کونه يا مربعتکميلونه

$$9(x^2-6x+9)+25(y^2+4y+4) = 719+9.9+25.4$$

$$9(x-3)^2 +25(y+2)^2 = 900$$

(په ۹۰۰ ويش)

$$(x-3)^2 / 100 + (y+2)^2 / 36 = 1$$

د لاس ته راوړلو مساواتو څخه منځټککواوردينات

$$xM = 3 , yM= -2$$

لوستلکيږي او د نيممحور لپاره $a^2=100$, $a=10$ او $b=6$, $b^2=36$ لوستل کيږي.

د (۱۶ . ۱۹) سره سم لاس ته راځي:

$$e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{100-36} = \sqrt{64} = 8$$

او له دې سره منځټکي (پرتله څيره ۱۶ ، ۱۱)

$$F_1(x_M - e, y_M) = F_1(-5,-2), F_2(x_M + e, y_M) = F_2(11,-2)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۶ . ۱۷ :

د ایلپسي برابرون د منځټکي (M(-1,3سره لټول کیږي، په کوم چی ټکي(P1(-3,3او $P_2(0,3+\frac{3}{2}\sqrt{3})$ پراته وي.

اوبونه : د (۱۶ ، ۲۱) سره سم د منځټکي(M(-1,3 سره د ایلپسي برارون داسی دي

$$(x-1)^2 / a^2 + (y-3)^2 / b^2 = 1$$

ټیکي P1 او P2 باید د ایلیپسي برابرون پوره کړي:

$$\frac{(-3+1)^2}{a^2}+\frac{\sqrt{(3-3)^2}}{b^2}=1, \frac{(0+1)^2}{a^2}+\frac{(3-3-\frac{3}{2}\sqrt{3})^2}{b^2}=1$$

د دې برابرونونو له لومړۍ څخه لاس ته راځي $4/a^2 + 0 = 1$ همداسی(< = >)

$a = 2$ او له دې سره د دویم برابرون څخه‌همداسی < = >

$$\frac{(0+1)^2}{4}+\frac{(-\frac{3}{2}\sqrt{3})^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\frac{9}{4}.3}{b^2}=3/4 \Leftrightarrow b=3$$

د ایلیپسی لټونکی برابون داسی دی:

$$(x+1)^2/4 + (y-3)^2/9 = 1$$

بیلګه ۱۶ . ۱۸ :

د کرښو

الف) $y = x + 2$

او ب) $y = x - 2$

غوڅټکي د ایلپسی $9x^2+y^2+54x+72=0$ سره لټول کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوبيونه : که الف) $y=x+2$ د ايلپسی برابرنونو کی خوندي شي، نو لاس ته راځي

$$9x^2+(x+2)^2+54x+72=0 \iff 10x^2+58x+76=0$$

د څلورى - يامربع برابرونونو اوبی :

$$x1=-2\ ,\ x2=-3{,}8$$

د غوڅتکي ابسځيز يا پروتمحور دی. په دې پورې اوردينات يا ولاړ محور

$$y1=0\ ,\ y2=-1{,}8$$

اړه لري.

ب) دy رامدځ ته شوې څلورى(مربع) برابرون

$$9X^2+(x-2)^2+54x+72 \Leftrightarrow 10x^2+50x+76=0$$

رييل اوبيونه نه لري. کرښه $y = x-2$ د ايليپسې څخه دباندې پرته ده

۱۶ . ۴ :هوپربول Die Hyperbel

پېژند:

هوپربول يا هيوپربل د ټولو هغو ټکو ډيرى ده، د کومو لپاره چی د کمون يا کمښت مطلقه ارزښت واټن، د دوه کره په ځاي ټکوF1 اوF2 ،دا په نامه د هوپربول سوزونټکو

يامحراقونو، څخه ثابت وي. دا سوزونټکي ، لکه په ايليپسی کی دلته هم موږ کره ټاکو (څيره ۱۶ . ۱۳) .

د ثابت واټنکمون يا واټنکمښت| $|PF1-PF2|= 2a$ او (ځيره ۱۶ . ۱۳)

د سوزونټکوواټن) $\underline{F1F2} = 2e$ (څيره ۱۶ . ۱۳)

$$e^2-a^2= b^2 \qquad (16.23)$$

په پورته کې يا بل چيرې، چې کوم څه لاندې کرښيز شوي وي، دا په زياتو ادبياتو کي پورته کرښيز شوي، دې ته دې پام وي، چې لاندې کرښيز شوي وي او که پورته، توپير نه لري يا همغه څه دي٠

يو ايليپسی برابرون ته ورته تلنه (برخهٔ ۱۶ ، ۱۳) مو لاندې ته لاربښودوي:

$$(x^2/a^2)-(y^2/b^2)=1 \qquad (16.24)$$

د هوپربول منځټکي برابرون د منځټکي (M(0,0 سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

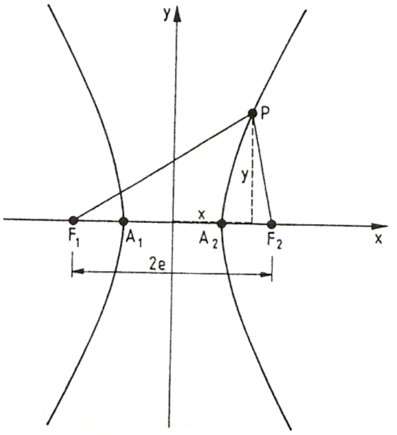


Bild 16.13 انځور

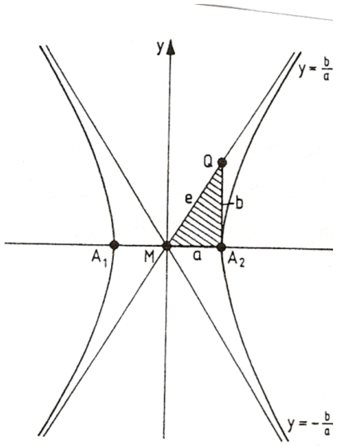


Bild 16.14 انځور

د $y=0$ لپاره $x=\pm a$ دی ، دا په دې مانا چی هوپربول د x - محور په ټکي

($A_1(-a,0)$ او($A_2(a,0)$کی غوڅوي. دا ټکی ککری ټکی بلل کيږي۰ ګورو چی دا دککری ټکی دی .(د ناپای سره ځاننيونی په هکله: که (۱۶ . ۲۴) د y په لور حل شي، نولاس ته راځي:

$$y = \pm b.\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1} = \pm\frac{b}{a}.x.\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}$$

د $x \to \pm\infty$ لپاره $-a^2/x^2$ له منځه ځي. پس هوپربول ځان کربنی $y = \pm(b/a).x$ ته نزدې کوي (ځيره ۱۶ . ۱۴)

له دې امله لاندې برابرون

$$y = \pm(b/a)x \qquad (16,25)$$

د هوپربول اسيمپتوتی بلل کږي.

د (۱۶ . ۲۳) له امله $MQ = e$ دی .

که منځټکی M کواوردينات x_M ,y_M ولري او سيومتريك غبرګ د کوردينانو محور ته ځغلي، نو د يوه په خوښه هوپربول ټکي($P(x,y)$ لپاره باور لري:

$$(x-x_M)^2/a^2-(y-y_M)^2/b^2=1 \qquad (16,26)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هوپربول منځټکي برابرون (M(xM ,yM سره.

د پورته مساوات د ځلولو وروسته، په لاندې ډول د هوپربولمساوات ټولیز جوړښت جوتیږي.

$$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0 \qquad (16,27)$$

دهیوپربول برابرون ټولیزه بڼه یا فورم
دلته د ایلیپسی سره په مخامخ (همدا برعکس دی) یا په ځښت ډول د x^2 او y^2
ځلهووني بدله مخنښه لري
($A \cdot B < 0$) ټولیز برابرون هم کولی شي چی موږ لاندې منځټکي برابرون ته لاربښود کړي،

$$(y-yM)^2/b^2-(x-xM)^2/a^2=1 \qquad (16,26')$$

د کومو څیره چی یو پورته لور او کښته لور ته واز هوپربول دی.

بیلګه ۱۶ . ۱۹:
د لاندې هوپربول منځټکی او سوزونټکی لټول کیږي

$$-25x^2 -150x+144y^2 -188y +144 = 0$$

اوبیونه: د ورکړشوي هوپربولمساوات بڼه په منځ ټکي (۱۶ . ۲۶) اوړي یعني فورم یی بدلیږي:

$$-25(x^2+6x)+144(y^2+2y) = -144$$

(د څلوری پوره کونه)

$$-25 (x^2+6x+9)+144(y^2-2y+1) =-144-225+144 \quad -25(x+3)^2 + 144(y-1)^2 = -225$$

(په 225 - ویشنه)

$$-25(x+3)^2+144(y-1)^1 = -225+(x+3)^2 / 9 -(y-1) /(25/16) = 1$$

د لاس ته راغلومساواتوڅخه لاندې لوستل کیږي:

$$xM = - 3 ,yM = 1 ,a^2 = 9 , a = 3 ,$$
$$b^2 = 25 /16 , b = 5/ 4$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او د دې سره سم د (۱۶ . ۲۳) له امله لرو:

$$e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{144/16 + 25/14} = 13/4$$

د هوپربول منځټکی (M(-3,1دی ، سوزونټکي يی
(F1(xM-e,yM)=F1(-25/4,1 او(F2(xM+e,yM)=F2(1/4,1 دي.

بيلګه ۱۶ . ۲۰ :

د هوپربول 9x²-4y²=36اسيمپټوتي يو له بل سره کوم کونجونه تړي يعنی جوړوي يا اسيمپټوتی په کومو کونجونو کی يو بل پريکوي؟
اوبيونه : هوپربول د منځټکي بڼه (فورم) له (۱۶ . ۲۴) سره سم په لاندې ډول ده x²/4-y²/9=1يا د a=2 ,b=3 سره
له دې سره سم دواړه اسيمپټوتی د(۱۶ . ۲۵) له مخی y=(3/2)x
او y=-(3/2).x دي.

د لومړی اسيمپټوتی اوx - محور ترمنځ کونج φ د $\tan\varphi = 3/2, \varphi = 56,31°$ څخه لاس ته راځي.

له دې امله د اسيمپټوتو ترمنځ کونج ψ باور لري $\psi = 2\varphi = 112,62°$
داکونج کيدی شي د هوپربول د وازونکونج په نامه ونومول شي.

بيلګه ۱۶ . ۲۱ :

د ايليپسی x²/64+y²/16=1 غوځټکي د هوپربول سره لټول کيږي چی منځ ټکي يی په سرچينه او ککرټګي يی د ايليپسی په سوزونټکو پراته وي او همغه ارزښت b لکه ايليپسی ولري.

اوبيونه : د ايليپسی نيممحور په a1 او b1 سره او لاينيزه اکسڅينتريڅيتي يی په e1سره ښايو.
نو باور لري: a1=8 , b1=4 او د (۱۶ . ۱۹) سره سم دی.

$$e_1 = \sqrt{a_1^2 - b_1^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

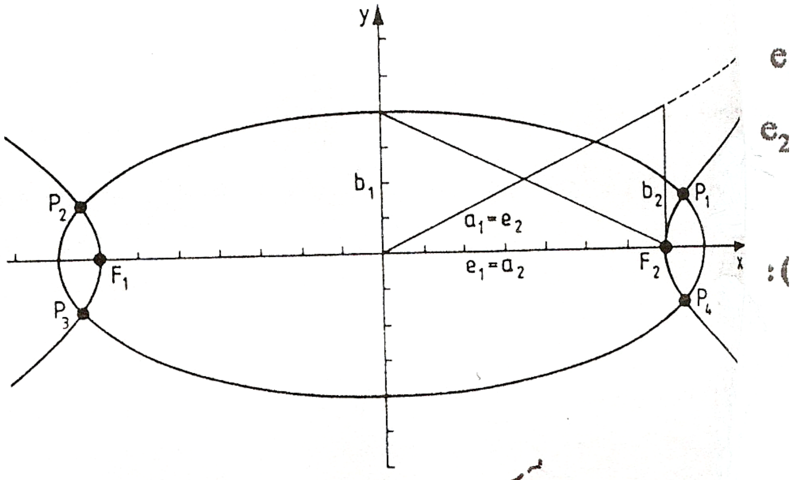


Bild 16.15 ځېره

د هوپربول لپاره نخښې e_2, a_2, b_2
استعمالوو:
باورلري (پرتله ځېره ۱۶ . ۱۵) :

$$b_2 = b_1 = 4, a_2 = e_1 = 4\sqrt{3}$$

او د (۱۶ . ۲۳) سره سم دي

$$e_2^2 = \sqrt{a_2^2 + b_2^2} = 8 = a_1$$

د هوپربولبرابرون داسې دی:

$$x^2 / 48 - y^2 / 16 = 1$$

د غوڅتکو کواوردينات د ايلپسی- او هوپربولمساوات پوره کوي. که داوړه مساوات سره زيات شي نو لاس ته راځي

$$(\frac{1}{16} + \frac{1}{48})x^2 = 2, x^2 = 348/7, x_{1,2} = \pm 8\sqrt{\frac{6}{7}}$$

د ايليپسي او هوپربولبرابرونونو څخه لاس ته راځي

$$y^2 = 16(1- x^2/64)=16/7 \iff y^2= 16(x^2/48 -1)=16/7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \pm 4\sqrt{1/7}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او د دې سره سم د دواړو کړو غوځتکي دې:

$$P_1(8\sqrt{6/7}), P_2(-8\sqrt{\frac{6}{7}}, 4\sqrt{\frac{1}{7}}), P_3(-8\sqrt{\frac{6}{7}}, -4\sqrt{\frac{1}{7}}), P_4(8\sqrt{\frac{6}{7}}, -4\sqrt{\frac{1}{7}})$$

۱۶ . ۵ پارابول Die Parabel

پارابول د ټولو هغو ټکو P ډېرۍ ده، چې واټن يې له يوه کلك په ځاي ټکی، د پارابول سوزون ټکیF، او يوې کلك په ځاي کرښی، د پارابول ترمخکرښی l (داپه ځيره کی جوته ده چې دا کومه کرښه ده) سره مساوي دي(ځيره ۱۶ . ۱۶) د سوزونټکی او مخکرښی ترمنځ واټن نيم پارامتر p بلل کيږي، Sککری ټکی دی،کرښه چې له S او F تيريږي د پارابول محور دی.

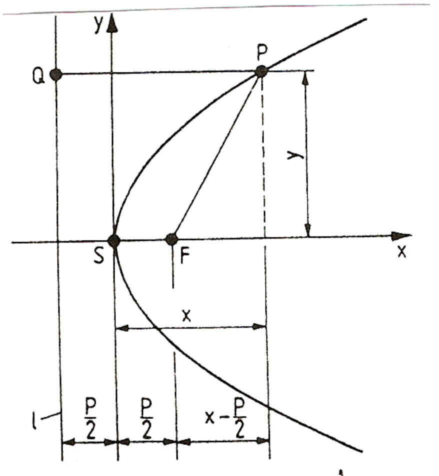


Bild 16.16 ځيره

له پيژند – يا تعريف برابرونونو $\overline{PF} = \overline{PQ}$ څخه لاس ته راځي

$$\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2 + y^2} = x + \frac{P}{2}$$

او له دې څخه د مربعکولو او د ټولګی څخه لاس ته راځي

$$(x-p/2)^2 + y^2 = (x+p/2)^2,$$

$$x^2 - px + p^2/4 + y^2 = x^2 + px + p^2/4$$

پس لرو

$$y^2 = 2px \qquad (16,28)$$

د پارابول ککربرابرون د ککرټکي S(0,0) سره، پورته لور ته واز (x > 0)

(c) ketabton.com: The Digital Library

په همدې ډول:

$$y^2 = -2Px \qquad (16 , 29)$$

هغه وکیڼ لور ته واز پارابول دئ‌د واریابلو د بدلون څخه لاس ته راځي:

$$(16 . 30) \qquad x^2 = 2py$$

د پارابول ککرمساوات د ککرټکي(S(0,0 سره، پورته واز پارابول (y > 0)

په همدې توګه:

$$x^2 = -2py \ (Y<0) \qquad (16.31)$$

پورته لور ته واز پارابول دی.

که ککرټکي S کواوردینات xS , yS ولري او د پارابول محور د x - محور ته غبرګ ځغلی په همدې ډول د y - محور ته هم غبرګ ځغلي، نو د یوې په خوښه پارابول ټکی لپاره باور لري:

$$(16. 32) \qquad (y - yS)^2 = 2p(x-xS)$$

د پارابول ککرییرابرون د ککری ټکی(S(xS,yS سره، چی ښی لور ته وازوي(x>xS)

$$(x - xS)^2 = 2p(y - yS) \qquad (16.33)$$

د پارابول ککرییرابرون د ککرټکي(S(xS,yS سره، چی پورته لور ته واز وي (y> yS)۰

په همدې ډول:

$$(y - yS)^2 = -2p(x - xS) \quad (x<xS) \quad (16.34)$$

$$(x -xS)^2 = -2p(y - yS) \ (y<yS) \quad (16.35)$$

هغه کڼې لور او همداسی کوزې یا لاندې لور ته واز پارابولونه دي

د فرمول (۱۶ . ۳۲) همداسی (۱۶ . ۳۳) ځله ونو څخه وروسته د پارابول ټولیز (عمومي) جوړښت پیژندل کیږي:

$$Ay^2+Bx+Cy+D= 0 \ , B \mid=0 \qquad ((16, 36)$$

همداسی(< = >)

$$Ax^2+Bx+Cy+D=0 , C\mid=0, \qquad (16 . 37)$$

د پارابولمساوات ټولیزه (عمومي) بڼه (فورم)

بیلګه ۱۶ . ۲۲ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پارابول برابرون دې له ککريټکی ، له نيمپارامتر او وازلورې څخه پيداشي:
الف $S(\ ,0,0\ ),\ P = 6$)کيڼ، ب $S(2,1)\ ;P= 0,5$) پورته
پ $S(-3,-5),\ P = 4$) لاندې ت $S(4,-2)\ ,P= 2\ /3$) ښی

اوبيونه يا حل:
الف) $y^2 = -12x$ ب) $(x-2)^2 = y-1$
پ) $(x+3)^2 = -8(y+5)$ ت) $(y + 2)^2 = (4\ /3)\ (x-4)$

بيلګه ۱۶ . ۲۳ :

د پارابول د لاندې مساوات سره دې د پارابول د ککرېټکي کواوردينات ، نيمپارامتر او د وازون لور وټاکل شي a) $(x^2 + 4y +20x + 10 = 0$, b) $y^2 -18x + 12\ y -36 = 0$.

اوبيونه : د پارامترتوليزه بڼه (فورم) دې په ککريبرابرون (۱۶ ، ۳۲) همداسی(۱۶ ، ۳۳) همداسی (۱۶ ، ۳۴) همداسی (۱۶ ، ۳۵) کی وازمايل شي (څلوری پوره کيدنه يا مربع تکميليدنه) . د ککريبرابرون څخه ککريټکي ، نيم پارامتر او وازلور

لوستوږ دي.

a) $x^2 + 20x +100 = -4y -100 + 100$

$(x+10)^2 = -4y$ $S(-10\ ,\ 0)\ ,\ P = 2$

پارابول لاندې لور ته و از دی

b) $y^2 + 12y +36 = 18x +36 + 36$

$(y+6)^2 = 18(x+4)$

$S(-4,-6)\ \ ,\ P = 9$

پارابول ښی لور ته واز دی

۱۶ . ۶ ټولګه:

دا له ۱۶ . ۱ نيولی تر ۱۶ . ۵ پورې خيرل شوې دهوارې کرږې (کرږی په هوارې يا سطحه کی)

(c) ketabton.com: The Digital Library

-کرښه
-ګردۍ
-ایلیپسی چې د کواوردینات محور سره غبرګ ځغلي، ټول د لاندې مساوات
-هوپربول
-پارابول
په څېر انځورېږي:

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0 \qquad (16 , 38)$$

فاکتورونه، ضریبونه یا ځله وونې A او B د کږې د توکو لپاره پرېکنده دي.
برابرون (۱۶،۳۸) لاندې روښانوي
د $A.B > 0 , A \mid= B$ لپاره ایلیپسی ،
د $A = B$ لپاره ګردۍ
د $A.B < 0$ لپاره هوپربول، که $A > 0 , B < 0$ وي، نو کیڼ لور ته واز،
که $A < 0 , B > 0$ وي، نو پورته او لاندې لورته واز
د $A.B = 0 , A = 0 , B \mid= 0$ لپاره یو پارابول، چې محور یې د x - محور سره غبرګ دی. د $A \neq 0$ ، $B = 0$ یو پارابول ، چې محور یې د y - محور سره غبرګ دی
د $A = B = 0$ لپاره یوه کرښهکه په (۱۶ . ۳۸) یو بل ګډوله(یو د بل سره ګډ شوی) ځلورې توکي رامنځ ته شي، نو دا د کږې یو ځلورې برابرون یا مربع مساوات ښکاروي (توضیخ کوي) ، د کومو محورونه چې نور د کواوردیناتو محورونو سره غبرګ نه دي.

بیلګه ۱۶ . ۲۴ :
له لاندې مساواتو سره کومې کږې انځوریدلی شي ؟
a) $x^2+y^2+4x-8y-5=0$ b) $3x^2+24x+15y+138=0$
c) $16x^2+y^2-96x=0$,d) $2x^2-2y^2+16x+10y-105/2=0$?

اوبیونه : (یادونه : لکه د نورو ځایونو په څیر دلته هم الف د a په ځاي لیکم ، ځکه چې د پښتو لپاره کرښه په لاتین حروفو له ښي لور نه شي پیل کیدی)
الف یاa) که $A = B = 1$ وي ، نو ګردۍ
ب یا b)که $B=0$ پارابول چې محور یې د-y محور سره غبرګ وي
پ c)که $A \neq B$, $A.B >0$، نو ایلیپسی
ت d)که $A.B < 0$ ، نو هوپربول

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱۶ . ۷ تمرينونه

۱ - د هغو کرښو مساوات و ټاکئ، کومې چې له P_1 ټکي تيرېږي او د x–محور سره کونج α جوړوي

a) $P_1(2,-3)$, $= 30^o$, b) $P_1(-3,2)$ $= 45^o$

c) $P_1(-1,-4)$, $= 120^o$, d) $P_1(4,4)$, $= 0^o$

e) $P_1(0,0)$, $=150^o$, f) $P_1(1,-1)$, $= 90^o$

۲ -د ټولو هغو کرښو مساوات وټاکئ، کومې چې له ټکو P_1 او P_2 تيرېږي

a) $P_1(0,0)$, $P_2(3,3)$, b) $P_1(-3,3)$, $P_2(0,0)$,

c) $P_1(1,4)$, $P_2(-3,-4)$, d) $P_1(1,2)$, $P_2(-1,1)$,

e) $P_1(0.1.-1)$, $P_2(-0,1,-3$, f) $P_1(1,-1)$, $P_2(4,-2)$!

۳ - د محورونو غوڅې (لنډ : محورغوڅې) a,b د کرښې مساوات په نورمالفورم وټاکئ او همداسې د غوڅېکو واټن d د محورغوڅېکو سره چې يو له بل يې لري وټاکئ.

a) a = 5 , b = 2 , b) a = -1 , b =3 , c) a = 2 , b = -3 , d) a = -3 , b = -3

۴ - يو درېګوړی دا لاندې ګوټکی لري A(-4,-1) , B(2,-2), C(1,3) . د هغو کرښو مساوات ځنګه دي، په کومو چې د درېګوټيو اړخونه پراته دي او معلوم کړئ چې د درېګوټي اړخونه څومره اوږده دي؟

۵ - د لاندې کرښمساواتو نورمالفورم او برخنوټينه يا –فورم څنګه دی؟

a) $3x -5y +15 = 0$, b) $4x -3y -18 = 0$

c) $-4x +2y -10 = 0$, d) $-3x -4y +15 = 0$?

۶ - د کرښې $y = -(12 / 5)x +2$ پروتخای د کرښو

a) $y+2,4x - 6 = 0$, b) $28x +10y = 0$, c) $8x + 5y =2$,

d) $5y +12x -10 = 0$. e) $y +(12/5)x = 3$, f) $6x +2,5y = 5$

سره وڅيړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۷ - د لاندې کرښو د غوڅتکو کواورديناتونه او غوڅکونج وټاکئ.

a) $2x + 3y = 7$, $3x - y = 5$, b) $y = (1/2)x + 1$, $y = -2x + 6$, c) $y - x = 7$, $y = 7$,

d) $x/3 - y/2 = 1$, $-x/2 + y/3 = 1$, e) $6x - 2y + 10 = 0$, $y = 3x + 6$, f) $y = 4x - 1$, $y = -3x + 5$!

۸ - کومه کرښه د کرښې $x - y = 4$ ، کرښې $3x + y = 8$ او برسيره پر دې له غوڅتکي P(0,5) څخه تيريږي ؟

۹ - د لاندې گوټ A(-4,-1), B(2,-2), C (1,3) سره د دريگوډي دننه کونجونه څومره لوې دي ؟ (پيلونه: دريکونجي وکاږئ)

۱۰ - د ولاړپيريوتې کرښې يا زوږندې مساوات له ټکی P(2,0) څخه په کرښه $y = 2x + 1$ څنگه دې؟

۱۱ - د ولاړکرښې مساوات په کرښه $y = 2x + 1$ باندې په ټکي P(-1,-2) څنگه د

۱۲ - د کرښې $y = 2x + 1$ سره د غبرگې کرښې مساوات چې له ټکي P(-1,-3) تيريږي، څنگه دي؟

۱۳ - د لاندې مساواتو سره گرديمنځتکی او وړانگه وټاکئ:

a) $x^2 + y^2 = 20$ b) $x^2+y^2 +2x -4y + 1 = 0$

c) $x^2+y^2 9y = 0$, d) $4x^2 +4y^2+32x-8y+67 = 0$

e) $36x^2 +36y^2 -36x +24y -23 = 0$, f) $x^2+2x+y^2+2y = 16$!

۱۴ - د لاندې گرديو مساوات وښيئ

الف) چې منځ ټکی M(-2,-1) لرې او له سرچينی تيريږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) هغه چې دري ټکي ($P_1(3,0)$, $P_2(5, 5 -3)$, $P_3(5 +3,-1)$ یې د غاړو ټ

پ) چې وړانګه $r = 6$ لري او له ټکو ($P_1(-1,11),P_2(5,5)$ څخه تیریږي.

ت) له ټکي $P_1(3,4)$ تیریږي او کرښه $y = -(4 / 3)x + 13$ په ټکي $P_2(4,3)$ لمسوي.

ټ) چې منځ ټکی $M(2,2)$ لري او کرښه $y = -(4 / 3)x +13$ لمسوي.

ث) چې د هغي منځټکی په کرښه $y = 3x -19$ پروت دی او له ټکی ($P_1(7,-2)$ او همداسې له ټکي $P_2(11,2)$ څخه تیریږي.

۱۵ – کوم پروتخایونه ګردی k چې فرمول لري $x^2+y^2-8x = 0$ او لاندې کرښې یو له بل سره لري:

a) $g : y = 2x + 1$, b) $g : y = x$, c) $g : y = x - 1$,

d) $g : y = 4$, e) $g : y = -x - 3$, f) $g: y = x - 3$?

۱۶ – کوم پروتځاي کرښه $3x + 4y = 25$ ګردی $x^2 + y^2 = 25$ ته لري؟

۱۷ – د تنجنت مساوات څنګه دی

الف) په ټکي ($P_0(5,y_0)$ چې په ګردی $x^2+y^2 = 169$ پروت دی،

ب) په ټکی $P_0(x_0, -2)$ چې په ګردی $(x - 1)^2 + (y-2)^2 = 25$ پروت دی؟

۱۸ – د هغو ګردیو منځټکي پیداکړی چې وړانګه یې $r = 5$ وي، کومې چې کرښه $3x +4y = 9$ په ټکی $P_0 (-1 , 3)$ کی لمسوي!

۱۹ – په ګردی $x^2 + y^2 = 25/4$ د هغه تنجنت مساوات وټاکی، کوم چې د کرښې $y = (4 /3)x +2$ سره غبرګ څغلي؟

۲۰ – د ایلیپسې مساوات وټاکی، له

a) $M(0,0)$, a 11, $c = 8$, B) $M(0,0)$, $b = 4$, $c = 6$,

c) $M(-3,7)$, $c = 4$, $b = 5$, d) $M(4, -5)$, $e = 7$, $a = 10$!

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۲۱ – د لاندې ایلیپسیمساواتوڅخه د نیممحورونو اوسوزونتیکو منځتکی او اوردوالی راپیداکړی:

a) $x^2 / 100 + y^2/ 64 = 1$ b) $(x+3)^2 / 81 + (y-1)^2 / 56 = 1$

c) $3x^2 + 4y^2 -24x >= 0$, d) $5x^2 +9y^2 -10x + -90y + 50 = 0$,

e) $4x^2 -13y^2 -208 = 0$, f) $4x^2 +9y^2 +54y -227 = 0$!

۲۲ – د هغو ایلیپسو مساوات راپیداکړی، کومې چې

الف) چې منځتکی M (0,0) او لایتي ایکسڅنتریځیتي e = 6 لري او تکی P(10.0) څخه تیرېږي،

ب) له منځتکی M (1,1) او لاینې ایکسڅنتریځیتی e = 4 لري او له تکو څخه تیرېږي،

پ) د نیممحور اوردوالی a = 9, b = 6 لري او له تکو $P_1(2,8)$, $P_2(2,-4)$ څخه تیرېږي!

ت) د نیممحوراوردوالی a = 2 , b = 6 لري او له تکو $P_1(-1,-4)$, $P_2(-5,-4)$ څخه تیرېږي!

۲۳ – د لاندې ایلپسو او کرښو ترمنځ غوځتکي پیدا کړی

a) $x^22 +4y^2 -20 = 0$, $x+2y-6 = 0$,

b) $3x^2 +4y^2 -24x =$, $y = 3 .x$,

c) $(x-3)^2/ 9 +(y-1)^2 / 4 = 1$, $y = x+1$,

d) $x^2 + 4y^2 +16y +12 = 0$, $y = x-2$!

۲۴ – د هوپربول مساوات له

الف) b M(0,0) , a = 4 , e = 5 , ب) M(-3,2), b = 4 , e = 6 ,

پ) M(1,1) او هوپربولتکو $P_1(-3,1)$, $P_2(6 , 7 /4)$!

ت) a = 3 , b = 2 , x = -1 او د هوپربولتکي P(-4,-2) وټاکی !

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۵ – د هوپربولونو

a) $x^2 / 144 - y^2 / 36 = 1$, b) $9x^2 - 64y^2 = 576$

نيممحورونواوږدوالی او اسيمپتوتي راپيدا کړی !

۲۶ – د لاندې هوپربولونو منځتکي او د نيممحور اوږدوالی پيداکړی

a) $9x^2 - 64y^2 - 36x - 540 = 0$, b) $x^2 - 9y^2 + 54y - 90 = 0$,

c) $x^2 - 4y^2 + 4x - 8y - 16 = 0$, d) $x^2 - y^2 - 2x + 10y - 28 = 0$!

۲۷ – د لاندې مساواتو سره دکږو غوڅتکي وټاکی:

a) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$, $y = \frac{1}{5}x$,

b) $4x^2 - 9y^2 = 144$, $x^2 - 24y = -28$,

c) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$, $y = -\frac{2}{3}x - 5$,

d) $4x^2 - 9y^2 - 8x + 36y + 68 = 0$, $9y^2 - 36y - 72x + 8 = 0$,

e) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$, $x^2 - y^2 = 16$!

۲۸ – د لاندې پارابولونو ککرتکو اوسوزونتکو کواوردينات وټاکی:

a) $5y^2 + 4x = 0$, b) $2y - (1/2) x^2 = 0$ c) $4y + (1/3) x = 0$,

d) $2y^2 - 12x = 0$, e) $y^2 - 2y - 10x - 9 = 0$, f) $x^2 - 7x - y + 12 = 0$

g) $y^2 - 6y + 6x - 3 = 0$. h) $x^2 + 4x + 12y\ 52 = 0$

۲۹ – د پارابولمساوات له لاندې ککرتکو او سوزونتکو وټاکی:

S (0,0), F(0,1) , b) S(0,0), F(-1,0), c) S(1,1) , F(2,1),

S(-1,-1), F(-2,-1), e) S(2,-3), F(2,-2), f) S(-2,3), F(-2,2)

۳۰ – يو پارابول د ککرې پروت ارزښت $x_s = 3$ لري، کرښه $y = 8$ د محور په څ
تکي P (7,4) تيريږي. ددې مساوات څنګه دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۳۱ – يو پارابول د ککرکواوردينات $y_S = -3$ لري، کرښه $x = 2$ د محور په څير او له ټکي $P(4,-4)$ تيريږي. د هغې مساوات څنګه دي؟

۳۲ – کوم پروتڅاي اړيکی د

الف) پارابول $y^2 = -4x$ او کرښی $y = x-1$

ب) پارابول $x^2 = 5y$ او کرښی $y = x-4$

پ) پارابول $x^2 = -3y$ او کرښې $y = x + 5/12$

ت) پارابول $y^2 - 6x - 2y + 7 = 0$ اوکرښې $y = x$

ټ) پارابول $y^2 = 7x$ او کرښې $9x + 12y + 28 = 0$

ترمنځ پرتی دي؟

که موجود وي ، نو غوڅټکی همداسې لمستکی يې ورکړی!

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۷ وکتور شمیرنه او په ځمككچ کی د هغه په کارونه

۱۷ . ۱ د وکتور پيژند ،

په کارتيزي کواودينات سيستم کی د وکتور انځورونه

په پيداينتي پوهنو يا طبيعي علومو او تخنيك کی موږ لويی پيژنو چی د رييل ارزښتونو په ورکولو سره يواځنی ټاکلي دي، لکه وخت، ګرمي، توان ، وزن . داډول لويو ته سکالار لويې وايو .نوريې لويی لکه زور ، چټكتيا(سرعت)، بيړه (تعجيل)، د برقي او مقناطيسي چاپيريالزور برسيره په ارزښت (مطلقه ارزښت) د لور ورکونه هم غواړي، په کومه چی تاسير اچوي. موږ دې لويو ته وکتورونه وايو.
د وکتور له لارې کيدی شي چی دهندسي شيانو ځان نيونه هم تشريح کړای شو. په فضا هوا کی يو ټکی کيدی شي چی د هوا کواوردينات سيستم کی د سرچينی څخه د دې ټكي په لور لوريزشوې کرښه (په دې مانا چي مطلقه ارزښت او لوری لري) تشريح کړی شي يعنی له سرچينی څخه يی په دې ټكي بريد وي يا دا ټکی په نخښه کړای شي يا يې د غشي څوکه د دې ټكي په لور لوريزه وي.

يادونه : ما وکتورونه a,b, ښوولي، ښه به يې $\vec{a},\vec{b};....$ وای، ډيرو کتابونو کې پنډ **a,b,..** ليکل شوي، خو ما د وکتور سره تل د وکتور کلمه ياده کړې، چې د ناتيکپوهنې څخه مو ژغوري٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند ۱۷ . ۱ : یوه لویه a چی د یوه مطلقه ارزښت (|a| چی داوږدوالي کچګڼ یی هم بولو) او یوې لورې له مخی ټاکل شوی وي، وکتور بلل کیږي٠

(لنډ: یوه لویه چی لور ولري، وکتور دی. موږ کړی شو چی دې لویي ته غشی هم وو ابو. زه یی همدا وکتور بولم)

یو وکتور په هوا کي د یوه لور لرونکی کرښی(غشي) په څیر انځورکیدی شي. د تعریف ۱۷ . ۱ له مخی ټول مساوي اوږده او په یوه لور لوری-، لوریزې- یا لورونی کرښي همغه وکتور انځوروي، په یوه بریدټکي باندې ترړل یی په نظر کي نه دي نیول شوي . سرړی ویلی شي: یو وکتور کیدی شي په هوا کی په خوښه غبرګ (موازی) وخوځول شي یا راکښل شي، موږ په راتلونکي کی د داسی ازادو وکتورو سره سر او کار لرو. نورې په وکتور انځور شوې لویي، بر سیره په مطلقه ارزښت او لور، په نورو ټاکونټوټو هم اړه لري. د بیلګي په توګه یوه قوه یا زور د همغه خپل تاثیرلیکی یا بهتره برید لیکی په اوږدوالي له یوه ځایه بل ته راکښل کیدی شي(په غبرګ یا موازی راکښنون یی تاثیر تغیر کوي) دلته په لیکه راکښونکو وکتورو باندې غږیږو. هغه یو ټکی انځورونکی وکتور په کواوردیناتسیستم په سرچینې (د برید - یا حملی ټکی) پورې ترړلی. داسی وکتورونه ځاي وکتورونه(په ځاي ترړلي -) بلل کیږي .ځنی په لاندې کی د فرمول بندي شوې شمیرقاعدې له مخې کیدی شي دې ډول وکتورونو ته هم پراخه شي.

پیژند ۱۷ . ۲ :

دوه وکتورونه **a** او **b** برابر بلل کیږي $\mathbf{a} = \mathbf{b}$

که دواړه وکتورونه په مطلق ارزښت او لور یو په بل سر وخوري یا پریوځي.

Bild 17.1 ځاکه

ټولي برابرې اوږدې او برابرې – یا همغه لوریزې کرښی، لکه چی وویل شو همغه وکتور ښایی.

پیژند ۱۷ . ۳ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

یو وکتور **a** د مطلقه ارزښت 0=|**a**| سره 0 یا صفر وکتور بلل کیږي. صفر وکتور لور نه ټاکي یا تعینوي. یو وکتور **ea** چې د a لور او مطلقه ارزښت 1=|**e**|لري، نو په وکتور a پورې اړوند یوونوکتور(۱) بلل کیږي.

(1)Einheitsvektor,unit vector یوونوکتور یانې ارزښت یې یو یوون دی یا واحدوکتور(؟)

پیژند ۱۷ . ۴ :

دوه وکتوره اورتوګونال (Orthogonal) بلل کیږي، که دوي یو په بل نیغ ولاړ (عمود) ولاړ وي، کولینیار(kollinear) بلل کیږي، که دواړه د همغی یوې کرښې سره غبرګ وي، کومپلانار (komplanar) بلل کیږي ، که د همغې یوې هوارې سره غبرګ وي.

د وکتورونو سره شمیرلو لپاره باید مطلقه ارزښت او همدارنګه لور شمیرنیز ډوله لاس ته راوړل شي. ددې لپاره یوه نسبې سیستم ته اړتیا حس کیږي، دلته هوایي یا فضایي کارتیزي کواوردینات سیستم استعمالیدی شي. د کواوردینات سیستم انځورونولپاره لاندني روښانه ونې یا توضیحات یعنی د وکتور ځله ونه یاضرب د یوه رییل ګڼ سره او د وکتورونو زیاتون مخ ته پراته دي.

پیژند ۱۷ . ۵ :

د یوه وکتور ځله ونه یا ځل د یوه سکالار سره:

$\vec{b}=\lambda\vec{a}, \lambda\in R$

یو وکتور دی چې د $|\lambda|$ - ځله د a مطلقه ارزښت لري او د $0<\lambda$ لپاره همغه لور لري لکه a، په ځټ یا برعکس که $0>\lambda$ وي نو د a مخامخ لور یا په ځټ لور لري

جمله ۱۷ . ۱:
د رییل ګڼ سره د وکتور د ځل د شمیرقاعدې
کوموتاتیف قاعده،اسوشیاتیو ضانون او د صفر وکتور سره ځل

$$\lambda.\vec{a}=\vec{a}.\lambda;....Kommutativ$$

$$\lambda(\mu.\vec{a})=\eta(\lambda.\vec{a})=\lambda\mu.\vec{a};....Ass.$$

$$|\lambda.\vec{a}|=|\lambda|.|\vec{a}|, 0.\vec{a}=\vec{0}, \vec{0}=0$$

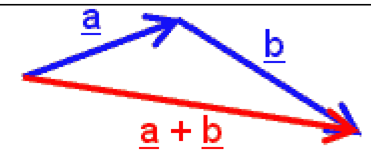
(c) ketabton.com: The Digital Library

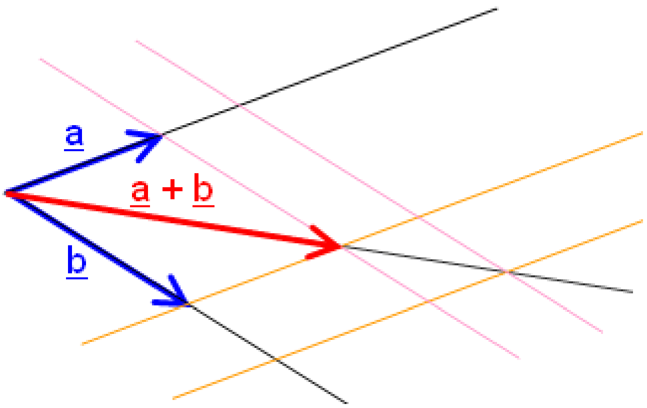
ددې ځل یاضرب د پیژند سره ممکن کیږي چی هر وکتور a د یوه رییل ګڼ (ددې وکتور مطلقه ارزښت) او په هغه پوری تنظیم یا ترتیب شوی یوونوکتور د ځل په ځیر انځور کړو: $a = |a|.e_a$

پیژند ۱۷ . .۶ :

(د وکتورونو زیاتون)

د دوه وکتورونو a , b زیاتون (جمع) a+b د دواړو وکتورونو a او b ځخه غزیدلی غبرګ اړخیزي(موازي الاضلاع) لوریز دوه کونجتړي (قطر) ده. ځیره ۱۷ . ۲)

د وکتورنو زیاتون (جمع) د قوو یا زورونو د زیاتون په ځیر دی او دا د شمیر قاعده ساده د لیدو کیدی شي	

ځیره شته دغبرګ اړخیزه پورته نیمه یا له تعریف ۱۷ . ۶ ځخه پورته ځیره یا مخامخ ځیره	

جمله ۱۷ . ۲ :

(د وکتورونو د جمع لپاره د شمیرقاعدې)

$a+b=b+a$ (کوموتاتیف قاانون)

$(a+b)+c=a+(b+c)$ (اسوسیاتیف قانون)

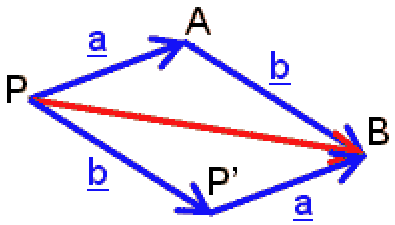
دیستریبوتیوو او وربسي یه لاندې نظم اړیکي

(c) ketabton.com: The Digital Library

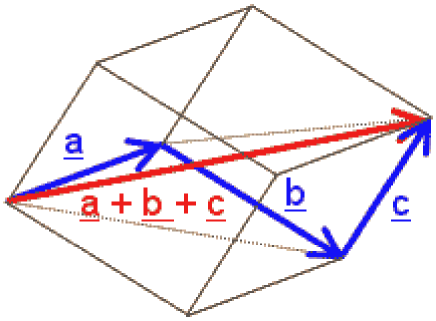
$$(\lambda+\mu).\vec{a}=\lambda.\vec{a}+\mu.\vec{a};............Distrib.$$

$$\mu(\vec{a}+\vec{b})=\mu.\vec{a}+\lambda\vec{b};............Distr.$$

$$|\vec{a}+\vec{b}|<|\vec{a}|+|\vec{b}|$$



د زیاتون دې قانونو سره موږ ته ممکن کیږي چی هر وکتور، د بیلګي په توګه د وکتورونو د کواوردینات محور په لور ښودونکو وکتورونو د زیاتون په څیر انځورکړای شو یا ولیکو. په دې ډول بریالي کیږو چی دواړه د وکتورونو لپاره موخه وره یا هدفمنده شمیرنه په کواوردینات سیستم کی انځور کړو



پورته څیره کې د درې وکتورونو زیاتون

پیژند ۱۷ . ۷ :

په کواودینات سیستم کی د وکتور a انځورونی لاندې

a=(a1,a2,a3)   (17 . 1)

موږ په یوه ولاړکونجیز

-x1 , x2 , x3

کواوردینات سیستم کی د وکتور انځوره ونه پوهیږو، د نخښی یا مخ نخښی په نظر کي

نیولوسره او د ai پرویکشن یا پریوستون له لارې په هر xi - محور(i = 1 , 2 , 3)

(c) ketabton.com: The Digital Library

پرویکشن (Projection) د دوه اړخونو لپاره انځورونه (په ښیره ۱۷ . ۳ کی)
داسی ai د a وکتور i - م کواوردینات بلل کیږي

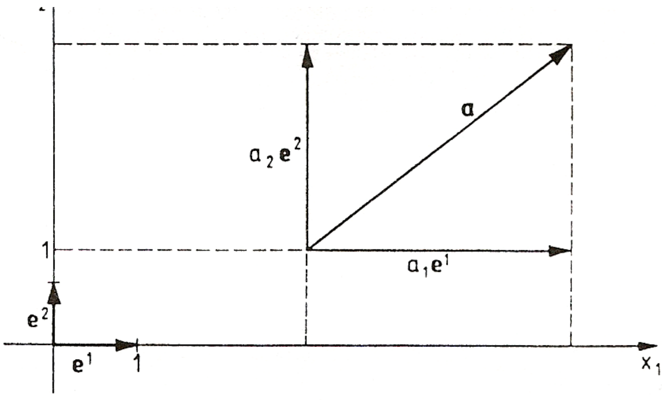


Bild 17.3 انځره

یادونه:
موږ دلته که د وکتورونو پورته ځه لیکو نو هغه د وکتور پوتنخ په مانا نه دی بلکه هغه وکتور ښايي چی په کومه کواوردینات اړه لری. دلته د لیکنی له لوري پوره جوت دی. د xi- محورونو په لور په کواوردیناتشکل د یوونوکتورونو څرګندونه په لاندې ډول ده

$e^1 = (1, 0, 0)$
$e^2 = (0, 1, 0)$ (17 . 2)
$e^3 = (0, 0, 1)$

د وکتور aانځورونه د کواودیناتو $a^i; i = 1, 2, 3,$ او د یوونوکتورونو(۱۷ . ۲) د استعمال له لارې، د تعریفونو ۱۷ . ۵ او ۱۷ . ۶ په بنسټ د کمپوننتو له لارې یا مرسته لاس ته راځي.

جمله ۱۷ . ۳: (د کمپوننتو (جوړختبرخو) له لارې د وکتور a انځورونه) لرو:

$$\vec{a} = a_1\vec{e^1} + a_2\vec{e^2} + a_3\vec{e^3};............................(17,3)$$

د دوه پراخیدونې یا دوه بعدیز یا دوه دیمنزیون انځورونه. (ښېره . ۱۷ . ۳)
دلته, a^ie^i چی i=1,2,3 وي، د a وکتور i - م کمپوننت یا جوړخت برخه بللکیږي د جملو ۱۷ . ۲ او ۱۷ . ۳ په مرسته کیدی شي لاندې جمله لاس ته راشی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۷ . ۴:

د رییل ګڼ سره د یوه کتور ځله ونه او یا د وکتورونو زیاتون کواوردینات ډوله یا په ځیر صورت نیسي، دا په دې مانا چی لاندې باوري کیږي::

$a=(a_1, a_2,a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$

$$\mu a = (\mu a_1, \mu a_2, \mu a_3) \qquad (17.4)$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) \text{.........................} (17,5)$$

بیلګه ۱۷ . ۱ :

د(a=(-2,3,-5 , b=(1,-6,4) لپاره لرو

$2a+3b=(2\text{-}2,3,-5)+3(1,-6,4)=(-1,-12,2)$.

د وکتورونو کمون د وکتورونو د زیاتون په ځیر (تعریف ۱۷ . ۶) صورت نیسي یا ځان نیسی

پیژند ۱۷ . ۸ :

د a - b کمون یا کمښت د وکتور a او وکتور b ته مخامخ - یا په ځښ وکتور یعني -b زیاتون دی: a-b=a+(-b) (څېره۱۷ . ۴)

له تعریف ۱۷. . ۸ لاس ته راځي : وکتور a ، کوم چی له x1 ټکي x^2 ټکی ښایي (د دوه اړخؤنویا بعدونو انځورونی لپاره .ش ۱۷ . ۵) داسی دی

(پاي ټکی ترې کم پیل ټکی یانې د پایټکي او پیلټکی کمښت): $a = x^2 - x^1$

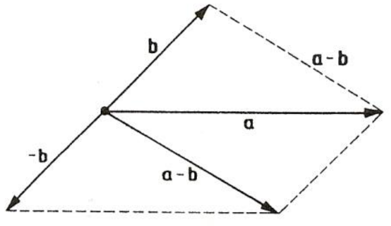


Bild 17.4 څېره

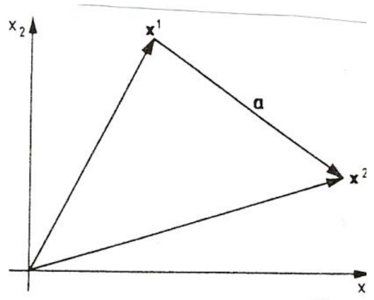


Bild 17.5 څېره

بیلګه ۱۷ . ۲:

(c) ketabton.com: The Digital Library

هغه وکتور چی له $x^1=(-1,-3,1)$ ټکي څخه($x^2=(2,-1,5$ ټکی ښایي(په ګوته کوی یه ګوتنیوونی کوي) داسی دئ :

$$a = x^2-x1 =(2,-1,5)-(-1,-3,1)=(3,2,4).$$

۱۷ . ۲ د دوه وکتورنو سکالار ځله ونه یا ضربونه

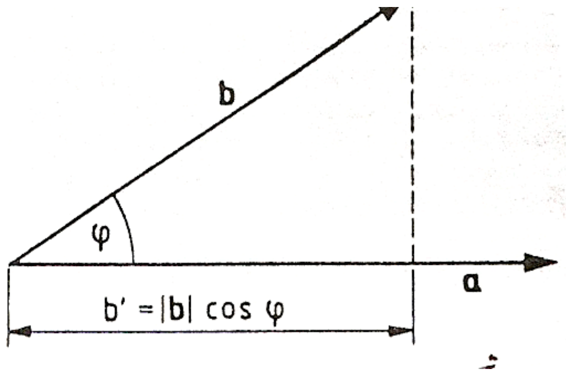
پیژند ۱۷ . ۹ :

د دوه وکتورونو a , b سکالار ځل a . b د دواړو وکتورنو د مطلقه ارزښت او له دي دواړو وکتورونو منځ ته راغلی کونج کوساین ځل یا ضرب دی، یانې

$$\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos\varphi;............................(17,7)$$

د سکالار ځل یا ضرب نتیجه سکالار ده

په (۱۷ . ۷) کی فاکتور $\vec{b}'=|\vec{b}|.\cos\varphi$ په هندسی مانا د (مخ) نخښي ساتلو سره (د کوساین د پیژند له مخی) په وکتورa دوکتور b پرویکشن یا پریوتل یا پرییستل دي (څیره ۱۷ . ۶)



په فزیك کی د سکالار ځل یا- ضرب بیلګه :

که a هغه لار وي چی د هغي په اوږدوالی د b زور تاثیر اچوي، پس A = a. b له دې زور له لارې کړ شوی کار ښایي) د لار اوږدوالی چي د لار په لور د زور د پرویکشن سره ځل دئ) .

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۷ . ۵ : (د سکالار ځل شمیرقاعدې)

$a.b=b.a$ (کوموتاتیو قاون)

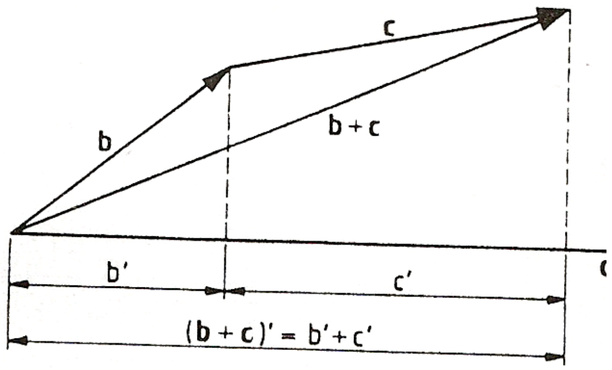
$a(b+c)=a.b+a.c$ (دیستریبوتیو قانون)

$a.b=0$ که a اوb یوپه بل اورتوګونال یا عمود وي (۱۷ ، ۸)

$a.a=|a|^2$ (17 . 9)

د پورته شمیرقاعدو جوتونه: کوموتایو قانون د (۱۷ . ۷) پسی تړلی لاس ته راځي.
دیستریبوریوقانون په (څیره ۱۷ . ۷) کی لیدل کیږي.

د اورتوګونالوکتورونو لپاره باور لري: که $a.b = 0$ نو $\cos\alpha = 0$ او(۱۷ . ۸)
له (۱۷ . ۷) څخه لاس ته راځي .
همداډول (۱۷ . ۹) له (۱۷ . ۷) او داچی $\alpha = 0°$ د a او a ترمنځ دی(، نو لاس ته راځي $\cos\alpha = 1$



پورته څیره ۱۷ . ۷

جمله ۱۷ . ۶ :
د دوه وکتورونو سکالار ځل کواوردیناتږوله صورت نیسي یعني د
$a = (a1 ,a2 ,a3),\quad b = (b1 ,b2 ,b3)$
د ځله ونی یا ضرب څخه لاس ته راځي :

$$a.b=a1b1+a2b2+a3b3 \qquad (17 . 10)$$

اوبیونه : د یوونوکتورونو (۱۷ . ۲) لپاره لاندې باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

د (۹ . ۱۷) سره سمر د i = j لپاره $e^i.e^j = 1$ د(۹,۱۷) سره سم د j =|i لپاره $e^i.e^j = 0$ له دې لاس ته راځي:

$$\vec{a}.\vec{b} = (a_1e^1 + a_2e^2 + a_3e^3)(b_1e^1 + b_2e^2 + b_3e^3) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

یادونه : د لته د وکتورونو په تواندېول چی څه لیکل کیږي د توان مانا نه لري په یوونوکتورونو کي ددې لار ې ښوول کیږي چي دا دکوم کواودینات یوون وکتور دئ او د نورو وکتورنو لپاره دا مانا لري چي کوم یو وکتور مو مطلب دئ او نه چی په کوم توان دې ته د مخه هم گوته نیول شوې ده.

بیلگه ۱۷ . ۳ :

وکتور(a=(2,-3,1 دې له لاندې وکتورونو سره حُل شي

a) b1=(3,1,4),b) b^2=(3,2,-2), c) b^3=(3,3,3)

اوبښونه یا حل: بیا یا انینترنیت

a) a . b1 = 2.3 - 3.1 + 1.4 = 7

b) a . b^2 = 2.3 - 3.2 +1.(-2) = -2

c) a . b^3 = 2.3 - 3.3 +1.3 = 0

دلته c (په دې مانا ده چی وکتورونه a او b^3 اورتوگونال یا عمود دي ددې لپاره لیکو:

$a \perp b^3$

جمله ۱۷ . ۷:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2};...........................(17,11)$$

اوبیونه : له (۱۷ . ۱۰) لرو : a . a = a_1^2+ a_2^2 + a_3^2

بیلگه ۱۷ . ۴ :

د وکتورونو(a=(2,-3,1) , b=(3,0,-4 مطلقه ارزښت (اوږدوالی) دئ

$$|\vec{b}| = \sqrt{9+0+16} = 5; |\vec{a}| = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{4}$$

جمله ۱۷ . ۸ :

د دوه وکتورونو aاو b ترمنځ کونج په لاندې ډول ټاکل کیږي

$$\cos\phi = \frac{a.b}{|a|.|b|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^3}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}};................(17,12)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوبیونه یا حل : (۱۷ ، ۱۲) له (۱۷ . ۷) ، (۱۷ . ۱۰) او (۱۷ . ۱۱) څخه لاس ته راځی

بیلګه ۱۷ . ۵ :
په بیلګه ۱۷ . 3کی د $\vec{a} \wedge b^1, b^2, b^3$ تر منځ کونجونه د شمیرلو دي.
اوبیونه:

$$\phi_1 = \angle(\vec{a}, \vec{b^1}) = \frac{2.3 - 3.1 + 1.4}{\sqrt{4+9+1}\sqrt{9+1+16}} = \frac{7}{\sqrt{14}\sqrt{26}} = 0,3669; \phi_1 = 68,48°$$

$$\phi_2 = \angle(\vec{a}.\vec{b^2}) = \cos\phi_2 = \frac{2.3 - 3.2 + 1(-2)}{\sqrt{4+9+1}\sqrt{9+4+4}} = \frac{-2}{\sqrt{4}\sqrt{17}} = -0,1296, \phi_2 = 97,45°$$

$$\phi_3 = \angle(\vec{a}.\vec{b^3}) = \frac{2.3 - 3.3 + 1.3}{\sqrt{4+9+1}\sqrt{9+9+9}} = \frac{0}{\sqrt{14}\sqrt{27}} == 0, \phi_3 = 90°$$

۱۷ . ۳ د دوه وکتورونو وکتوري ځلونه یا ځل

پیژند ۱۷ . ۱۰:

ددوه وکتورونوa,bکتورځل یا وکتوریز ځل یو وکتورc دی د کوم لپاره چی لیکو
a × b = c او لاندې خویونه لري:
۱ - د c مطلقه ارزښت دی

$$|c| = |a||b|.\sin\phi; ....(17,13)$$

دا دهندسي له مخی د a او b وکتورونو لخوا غزیدلي غبرګ اړخیز منځهوارې په مانا دی.(ځ. ۱۷ . ۸)
۲- د c وکتور a او b باندې نیغ ولاړ یا اورتوګونال دی.
۳– دلته a , b , c یو ښي سیستم جوړوي، دا په د مانا چی که دښي لاس غټه ګوته او د ښوولو ګوته د aاوbلور وښايي نو کونجوړونکي د منځ ګوته دوکتورc-لور ښايي (ځیره ۱۷ . ۹)

(c) ketabton.com: The Digital Library

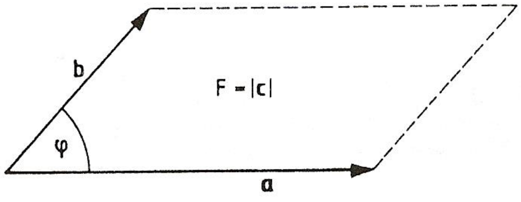


Bild 17.8

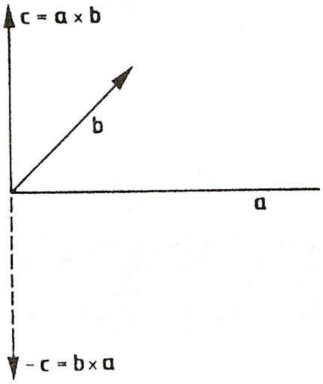


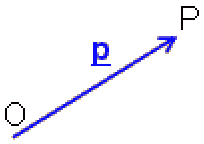
Bild 17.9

دا لاندې ښېرې د فرمولونو سره موږ ته ټکی، کرښه او هواره را په ګوته کوي او د یوه وکتور مطلقه ارزښت.

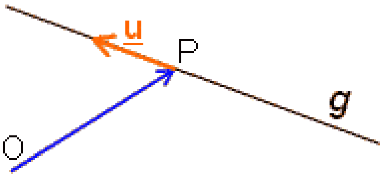
$$|\underline{p}| = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}$$

ټکی $P(p_1|p_2|p_3)$

$$\underline{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$



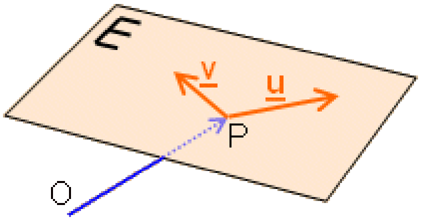
کرښه g



$g: \underline{x} = \underline{p} + t \cdot \underline{u}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

هواره E



E: **x** = **p** + r·**u** + s·**v**

وکتورځله ونه یا وکتور ځل یواځي د درى اړخیزي هوایا فضا لپاره تعریف دى.

د وکتورځل بیلګه په فزیك کى :

که F قوه یا زور وي چي په یوه کلك څرخیدونکي بدن (جسم) د Q په ټکي د r په مرووند چى د r سره کونج جوړوي، برید یا حمله کوي او هغه د P په ټکي څرخوي (ځیره ش. ۱۷ . ۱۰) نو څرخون مومنتDrehmoment منځ ته راځي M = r × F

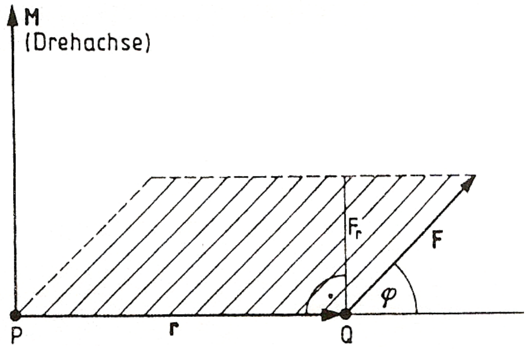


Bild 17.10

د مطلقه ارزښت له مخى د څرخونمومنت د اوږدوالى | r | د اړم مټ او مطلقه ارزښت

$F_1 = |F| \sin\phi$

چى د اړم په مټ (نیغ) ولاړ د قدرت یا قوت زور کپوننت (جوړونکى) دى:

$M = |r||F| \sin\phi$

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۷ . ۹: (د وکتورضرب لپاره د شمیرقاعدې)

a × b = - b × a (17 . 14)

دیستریبوتیو قانون)

a×(b+c)=(a×b)+(a×c) (17.15)

a × b = 0 د کولینیار وکتورونو لپاره) (17 . 16

د پورته شمیرقاعدو ښه څرګندونه یا توضیح : (۱۷ . ۱۴) د غوښتونکي ښي سیستم له مخی (پیژند .۱۷ ۱۰ ،ځ. ۱۷ . ۹)

د کولینیار وکتورونو لپاره $\phi = 0$ پس لرو: $\sin\phi = 0$ له دې سره د (۱۷ . ۱۳) له مخی (۱۷ . ۱۵) لاس ته راځي. په دیستریبوتیو قانون په لیدنوالي (پیچي دئ) دلته صرف نظر کیږي، لیدوړ والی یی نه ځرګندوو. د وکتورځل شمیرلو لپاره د وکتورکواوردیناتږولـه ښودنی سره د یوون وکتورونو e^1 , e^2 , e^3 وکتورځل ته اړیو.د (۱۷ . ۱۵) شمیر قانون له یوې خوا او له بلی خوا د وکتور ځل پېژند ۱۷ . ۱۰ څخه لاندې جمله لاس ته راځي.

جمله ۱۷ . ۱۰ (د یوونوکتورونو وکتورځل)

$$e^i \times e^i = 0, i = 1,2,3; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (17,16)$$

$$e^1 \times e^2 = e^3, e^2 \times e^3 = e^1, e^3 \times e^1 = e^2; \ldots\ldots\ldots\ldots (17,17)$$

$$e^2 \times e^1 = -e^3, e^3 \times e^2 = -e^1, e^1 \times e^3 = -e^2; \ldots\ldots\ldots (17,17)$$

د دریمی درجی دیترمینانت کلیمی لاندې (پېژند۱۱ . ۲) او که څوک یوون وکتورونه د دیترمینانت د توکو په څیر ومنلی شي، کیدی شي چی د وکتورځل a×bد a , b کواوردیناتو په څیر انځور شي

جمله ۱۷ . ۱۱ : د وکتورونو

b =(b1,b2,b3),a=(a1,a2,a3)

وکتوریز ځل یا وکتوري ځله ونه په لاندې کې د ماتریکس په توګه ده:

$$a \times b = \begin{bmatrix} e^1 e^2 e^2 \\ a_1 a_2 a_2 \\ b_1 b_2 b_3 \end{bmatrix}; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (17,18)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوبیونه یا حل : د وکتور $a = (a_1e^1 + a_2e^2 + a_3e^3)$ ځل د وکتور
$$b = (b_1e^1 + b_2e^2 + b_3e^3)$$

د توکوډوله(توګي په توکي) وکتوري ځل د جملی ۱۷ . ۱۰ کارونه، دا لاندې ورکوي
$$a \times b = e^1(a_2b_3 - a_3b_2) + e^2(a_1b_3 - a_3b_1) + e^3(a_1b_2 - a_2b_1)$$
دا ضرب ارزښه یه دا لاس ته راوړنه یا نتیجه د دیترمینانت (۱۸ . ۱۷) د شمیرلواود پېژند ۱۱ . څخه هم ترلاس راځي

بیلګه ۱۷ . ۶:
a × b دې وشمیرل شي، که وي
الف)   a=(-2,1/2,-1), b=(1/2,-2 ,1)
ب)
$$a = e^1 - 3e^2 + e^3, b = -e^1 - 2e^2 + 3e^3$$
اوبیونه یا حل   الف) ب)   د دې بیلګې اوبیونه دې ګان لستونکي او مینه وال په غاړه واخلی، دا له مخه تیرې جملې له مخی پوره روښانه دی۰
وکتوري ځل د خپل مطلقه ارزښت (۱۷ . ۱۳) هندسي اهمیت په بنسټ د وکتورونو a , bڅخه خورې شوې منځهوارې Fp غبرګ اړخیز ه همداډول د a او b څخه خورشوي یا غزیدلې دریګوډی منځهوارې FD شمیرلو لپاره خورا مساعد دی . باور لري
$$F_P = |a \times b|; F_D = \frac{1}{2}|a \times b|; ....(17,19)$$

بیلګه ۱۷ . ۷ :

د وکتورونو(a=(1,1,0) , b=(2,0,1 څخه خورې شوې هوارې منځ یا دننه په لاندې ډول ده
$$a \times b = \begin{vmatrix} e^1e^2e^3 \\ 110 \\ 201 \end{vmatrix} = (1,-1,-2), F_P = |a \times b| = \sqrt{1^2(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}$$

بیلګه ۱۷ . ۸ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دریګوډی ABC منځهواره (د هوارې دننه) دې وشمیرل شي چی کونجتکي يي وي :

A=(2,1,1) , B=(4,0,0) , C=(1,-1,2)

ابیونې :

دریګوډی له لاندې وکتورونو څخه غزیږي

a=B-C=(3,-1,-2),

او b=A-C=(1,2,-1)

د a او b وکتوري ځل په لاندې ډول دی

$$a\times b=\begin{vmatrix} e^1 e^2 e^3 \\ 31-2 \\ 12-1 \end{vmatrix}=3e^1+e^2+5e^3=(3,1,5)$$

د درېګوډی ABC د هوارې دننه یا منځهواره په لاندې ډول ده

$$F_D=\frac{}{2}|a\times b|=\frac{1}{2}\sqrt{3^2+1+5^2}=\frac{1}{2}\sqrt{35}$$

۱۷ . ۴ شپات ضرب (غبرګهواریزځل موزی سطحیز ضرب)

یادونه : دا یو شپږ خواییز تن دی چی مخامخ هوارې یی سره غبرګی او یو په بل ضرور نیغ ولاړ نه وي . لاندې شکل ۱۷ ۱۱. یی بیلګه او د مسئلی دحل انځورونه ده

پیژند ۱۷ . ۱۱ :

د درې وکتورونو غبرکهواریز ځل یا شپاتځل[a , b , c] لاندې ځل یا ضرب دی

[a,b,c]=(a×b) (17 . 20)

دلته وکتورونه a او b وکتوریز ځل کیږي او نتیجه يي بیا د cسره سکالار ځل کیږي، یعنی لاس ته راوړنه یا نتیجه يي سکالار ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

غبرکهواریزځل څمککچیز هندسي لیدونکی اهمیت لري. د سکالارځل (پیژند ۱۷ . ۹) سره سم باور لري

$$\left[a,b,c\right]=(a\times b).c=|a\times b|.c=|a\times b|.|c|.\cos\alpha$$

دلته الفا د وکتورونو a × b او c څخه رابند شوی کونج دئ.(ځیره ۱۷ . ۱۱)

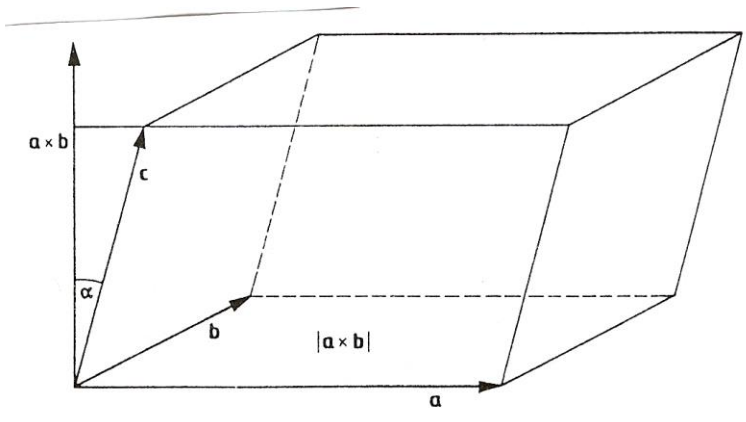


Bild 17.11

دلته د وکتورځل تعریف سره سم (پیژند ۱۷ . ۱۰) |a×b| د a او b غزیدلي غبرګ اړخیز دئ . برسیره پر دې $|c|.\cos\alpha$ پرتله برخه ۱۷ . ۲ (په وکتور a×b باندې د وکتور c پروجکشن یا پریوستون په مانا دئ. یعني د a,b او c څخه غزیدلی غبرګهوارې یا

شپات جګوالی ښايي. پس[a,b,c] هندسي د وکتورونو a,b,c څخه غزیدلي غبرکهواریزې ډکي (حجم) په مانا دی.

دغبرګهواریز په مطلقه ارزښت (د غبرګهواریز ډکي یا-حجم) کی تغیر نه راځي که چیرې د وکتورونو پرلپسی ترتیب بدل شي. د غبرګهواریزې ډکی زیاتیز یا مثبت دئ، که ورکړ شوي ترتیب یو ښی- سیستم جوړ کړی۰

جمله ۱۷ ۱۲۰:

$$[a,b,c\ ]=[b,c,a]=[c.a.b]=-[a,c,b]=$$
$$=-[c,b,a]=-[b,a,c] \quad (17\ .\ 21$$

که وکتورنه په یوه هواره کی پراته وي)کومپلانار وي(نو یو شپات د صفر جګوالي سره لاس ته راځي. نو بیا لاندې جمله باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۷ . ۱۳:

(22 . 17) د کومپلانار وکتورونو لپاره باور لري0=[a,b,c]

د غبرګهواریز یا شپاټ ځل شمیرلو لپاره د وکتورونو په کواوردیناتتوګه انځورونه بیرته دیترمینانت انځورونه په کار اچول کیږي

جمله ۱۷ . ۱۴:

د وکتورونو

a=(a1,a2,a3),b=(b1,b2,b3),c=(c1,c2,c3)

غبرګهواریز ځل په لاندې ډول دی

$$[a,b,c]=\begin{vmatrix} a_1 a_2 a_3 \\ b_1 b_2 b_3 \\ c_1 c_2 c_3 \end{vmatrix};.........(17,23)$$

اوبیونه : وکتور ځل a×b د جملی ۱۷ . ۱۱ سره سم لاندې اوبیونه لري

$a.b=(a_2b_3-a_3b_2)e^1-(a_1b_3-a_3b_1)e^2+(a_1b_2-a_2b_1)e^3$

د a × b سکالارځل د c سره کواوردیناتډوله په لاندې توګه صورت نیسي.

(a×b).c=[a2b3-a3b2,-(a1b2-a2b1),a1b2-a2 b1].(c1,c2,c3)

= c1(a2b3-a3b2)-c2(a1b3-a3b1)+c3(a1b2-a2b1)= a1(b2c3-b3c2)-a2(b3c1-b1c3)+a3(b1c2-b2c1)

دا نتیجه د دیترمینات (۱۷ . ۲۳) شمیرلو له لارې هم لاس ته راځي.

بیلګه ۱۷ . ۹:

د وکتورنو(a=(0,1,2) , b=(2,0,1), c=(1,1,0

غبرګهواریز - یا شپاټځل[a,b,c] په لاندېډول دی:

$$[a,b,c]=\begin{vmatrix} 012 \\ 201 \\ 110 \end{vmatrix}=0(0-1.1)-1(0-1.1)+2(2.1-0)=5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۷ . ۱۰:
وکتورونه(a=(1,2,3) ,b=(3,6,1), c=(0,0,1 کومپلانار دې او شپاتځل یې په لاندې ډول دی(دا اوبیونه دې ګران لوستونکي او مینه وال په غاړه واخلي)

بیلګه ۱۷ . ۱۱ :
د تیترایدر(دریګوډي اړخیزه ، لاندې شکل دی) ډکی(حجم) دې وشمیرل شي)
(ځیره. ۱۷ . ۱۲)

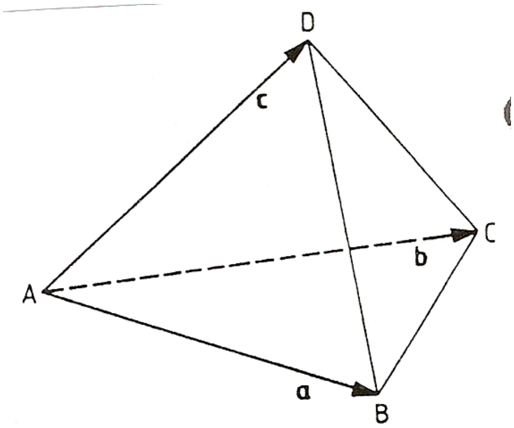


Bild 17.12

د لاندې کونجټکو یا ګوډټکو سره
A=(1,1,0) , B=(2,0,1)
C=(3,-1,2) , D=(1,0,3)

یادونه : دا پورته په ختّه کې ککرټکي دي، ځکه چې دا څېره څلور ککرې لري
اوبیونه : دا غوښتونکی ډکی د لاندې وکتورونو څخه خور تیترید ۶/۱ برخه ده
a=B-A=(1,2,0),b=C-A=(2,1,0) , c=D-A=(0,1,2)
دا تیترئیدر یو اهرام دی چی ډکی یا حجم یی ۳/۱ ځل بنسټیز هواره ځل جګوالی د تیترائند جګوالی د شپات جګوالي سره مساوي دی او د دریګوډیهواره یی د شپات نیم د وکتورونو a , b , c کمیز یا منفي دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$[a,b,c]=\begin{vmatrix}110\\201\\012\end{vmatrix}=-5$$

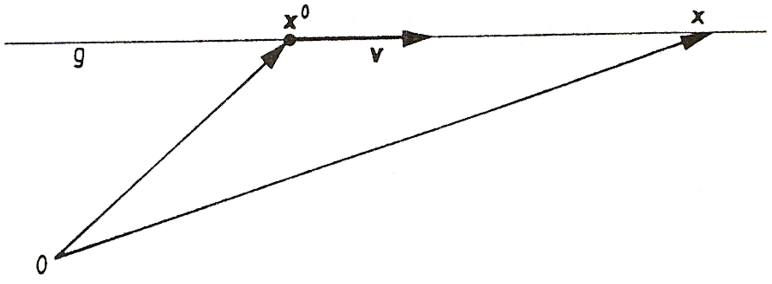
د کچګڼ لپاره مطلقه ارزښت نیول کیږي: V=(1/6).|[a,b,c]|=5/6

۱۷ . ۵ په شننیزه (تحلیلي) ځمککچ کی د وکتورونو کارونه

په دې برخه کی ځموږ هدف دیٔ چی وګورو چی د تحلیلي هندسی پرابلمونه او بیا په ځانګړي ډول تحلیلي هندسي په هوا کی وکتوري مطالعه) د ۱۶ -برخي سره په توپیر(څنګه کیږي۰

۱۷ . ۵ . ۱ د یوې کرښی وکتوریزه انځورونه

په فضا یا هوا کي د یوې کرښی ځای د یوه ټکي او لور له لاری یواځنی ټاکلی دیٔ. په کرښه gدې نښتی ټکی د ځاي وکتور x0 په مرسته (چی د کواوردینات سیستم د O څخه دا ټکی ښايي)، لور يي په وکتور V (څیرې۱۷ . ۱۳



څیره ۱۷ . ۱۳

که λ یو پارامتر وي چی د رییلګنونو ډیری کی ځغلي، نو د کرښی g یو په زړه پور ټکی x د وکتور زیاتون یا - جمع له لارې په لاندې فورم (بڼه) ښوول کیږي

$$x=x^0+\lambda.v,-\infty<\lambda<\infty;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(17,24)$$

د وکتور v په لور په ټکي x0 کی د کرښی g برابرون (پارامتر فورم)

که پارامتر λ په ریل ګڼونو کی وځغلي نو x د کرښی ټولو ټکو کي یا د ټکو ترمنځ

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځغلي. د هر ټکي $x \in g$ لپاره یواځني یوه $\lambda \in R$ شته یا موجود دهوکتور مساوات (۱۷ ، ۲۴) لاندې درې سکالار برابرونونه نه دي

$$x_1 = x_1^0 + \lambda.v, x_2 = x_2^0 + \lambda.v, x_3 = x_3^0 + \lambda.v; ....(17,25)$$

که کرښه g په دوه ټکو x^0, x^1 ورکړ شوي وي، نو د لور وکتوریی دی $v = x^1 - x^0$ او په دې ډول یی د کرښي برابرونونه دي:

$$x = x^0 + \lambda(x^1 - x^0); ....(17,26)$$

بیلګه ۱۷ . ۱۲ :

په لاندې ټکو($x^1 = (1,3,2), x^0 = (1,2,3)$ ورکړ شوې کرښه د $v = x^1 - x^0 = (0,1,-1)$ له امله په لاندې توګه لیکل کیږي

$$x = x^0 + \lambda.v = (1,2,3) + \lambda(0,1,-1)$$

دا لاس ته راوړنه یا نتیجه موږ ته لاندې درې سکالار برابرونونه په ګوته کوي

$$x_1 = 1, x_2 = 2 + \lambda, x_3 = 3 - \lambda$$

دکرښی برابرونونو (۱۷ . ۲۴) پارامترفورم په هواره کی د کرښي ځانګړی حالت خوندي لري: x, x^0 او v وکتورونه دي، هر یو د دوه کومپوننتو سره.

بیلګه ۱۷ . ۱۳ :

په یوې هوارې کي د یوې کرښي د مساواتو فورم:

$x = (1,2) + \lambda(1,-1)$ سکلار برابرونونه په ګوته کوي. $x_1 = 1 + \lambda, x_2 = 2 - \lambda$

له دې ځخه سړی کولی شي چې پارامتر λ له منځه یوسي:

$$\lambda = x_1 - 1, x_2 = 2 - (x_1 - 1) = 3 - x_1$$

که د x_1 په ځاي x او د x_2 په ځاي y ولیکو نو لاس ته راځي $y = -x + 3$ د

کرښي د برابرونونو نورمال فورم (16 . 2 .) که غواړو چې معلومه کړو چې ایا ټکی x^1 په کرښه g پروت دی، نو باید وګیرو چي کواوردینات یی برابرون (۱۷ . ۲۵) پوره کوي، که نه. دا په دی مانا چی ایا دده لپاره یو د λ - ارزښت موجود دی .

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه ۱۷ . ۱۴ :

لاندې ټکي $1)...x^1=(-1,4,3), 2)...x^2(2,-2,1)$ په
کرښه $g: x=(1,0,1)+\lambda(-1,2,1)$ پراته دي که نه ؟

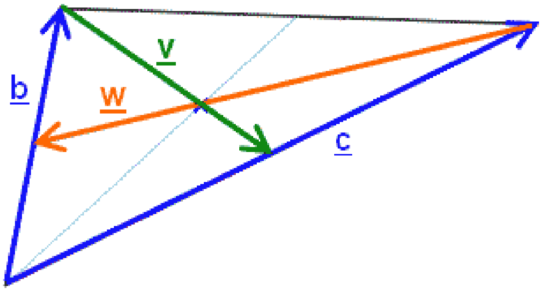
اوبيونه : ۱) د دې درې برابرونونو $-1=1-\lambda, 4=0+2\lambda, 3=1+\lambda$ له جملې د دوهم څخه لاس ته راځي $\lambda=2$ او دا ارزښت لومړی او هم دريم مساوات ډکوي) پوره کوي $-1=1-2, 3=1+2$ له دې امله ټکی x^1 په کرښه g پروت دی.

۲) ددې درې برابرونونو $2=1-\lambda, -2=0+2\lambda, 1=1+\lambda$ له دويم لرو $\lambda=-1$ دا ارزښت لمړي مساوات پوره کوي، مګر دريم مساوات نه: پس x^2 په کرښه g نه دی پروت.

که د دوه کرښو $g_1: x=x^1+\lambda v; g_2: x=x^2+\mu w$ غوځټکی xS ، موجود وي بايد د دواړه کرښو مساوات پوره کړي. په دې مانا چې بايد باوري شي:

$$x_S=x^1+\lambda v=x^2+\mu w$$

دا وکتوربرابرون درې سکالار برابرونونه دي چې د هغو له دوه وو څخه سرې پارامتره $\mu \wedge \lambda$ شميرلی شي. که لاس ته راغلي ارزښتونه دريم مساوات پوره کړي، نو يو پريټکی مخ ته شته، که ناپای زيات حلونه مخ ته پراته وي ، نو دواړه کرښې يو په بل پرتې دي.



بيلګه ۱۷ . ۱۵ : د لاندې کرښو غوځټکی دې پيدا شي :

$$g_1: x=(1,1,0)+\lambda(1,3,-2), g_2: x=(1,2,2)+\mu(-1,-2,4)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل یا اوبیونه : غوښتکي باید دواړه برابرونونه پوره کړي::

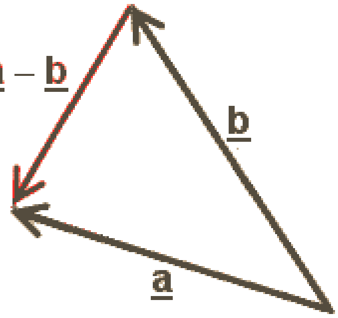
$$1+\lambda=1-\mu, 1+3\lambda=2-2\mu, -2\lambda=2+4\mu$$

د درې سکالار برابرونونو له لومړي مساوت څخه لرو $\lambda=-\mu$ ددې له مخې او له دوهم برابرون څخه لاس ته راځي : $\mu=-1$ نو لرو $\lambda=1$. په دې ډول دریم برابرون هم پوره کیږي د غوښتکي کواوردینات سیستم د کرښې g1 د $\lambda=1$ سره لاس ته راځي:

$$xs=(1,1,0)+1.(1,3,-2)=(2,4,-2).$$

۱۷ . ۵ . ۲ د هوارې یا سطحې وکتوریزه انځورونه

د یوې هوارې E ځای په هوا کی په یوه ټکي x0 او دوه نا غبرګو وکتورونو v او w یوائځنی ټاکلی دی. د وکتورونو v او w پیلټکي کیدی شي په x0 پراته ونیول شي‌یا پراته فرض شي) ش؟؟ څیره شته . ۱۷ . ۱۴) .



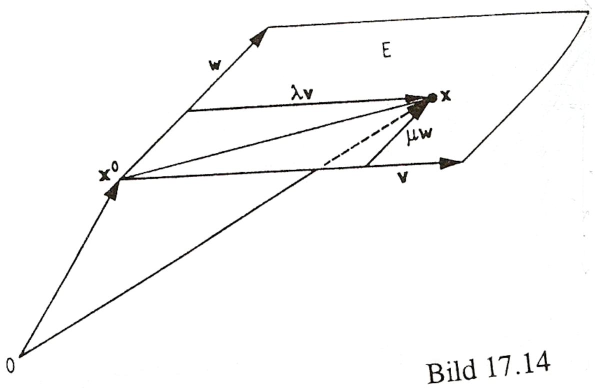


Bild 17.14

(c) ketabton.com: The Digital Library

که $\lambda \wedge \eta$ پارامترونه وي چی یو له بل خپلواك د رییل ګڼونو ډیري کی ځغلي، نو کیدی شي د هوارې Eپه خوښه ټکی xپه لاندې ډول انځور شي $x = x^0 + \lambda v + \mu w, -\infty < \lambda, \mu < \infty$;..................(17,27) .

د هوارې E مساوات چی د x0 ټکي کی، له وکتورونو v,w غزیدلي (پارامترفورم)

هر جوړه اربښت $\lambda, \mu \in R$ یواځنی یو $x \in E$ ښايي. وکتوربرابرون (۱۷ . ۲۷) لاندې سکالاربرابرون ځرګندوي

$$x_1 = x_1^0 + \lambda v_1 + \mu w_1, x_2 = x_2^0 + \lambda v_2 + \mu w_2, x_3 = x_3^0 + \lambda v_3 + \mu w_3;............(17,28)$$

که چیرې هواره په درې ټکو $x0 , x^1 , x^2$
چي په یوه کرښه نه دې پراته ورکړ شوي وي، نو کیدی شي چی د هوارې غزوونکي وکتورونه په لاندې ډول انځورشي: $v=x^1-x0$, $w=x^2-x0$ له دې سره د هوارې مساوات داسی دي:

$$x = x^0 + \lambda(x^1 - x^0) + \mu(x^2 - x_0);................(17,29)$$

بیلګه ۱۷ . ۱۶:
په درې ټکو $x0 =(-1,2,5),x^1=(2 ,3,-6),x^2=(1,-4,3)$کې د هوارې E ورکړ شوي برارون د $v=x^1-x0=(3 ,1,-11)$,$w =x^2-x0=(2,-6,-2)$له امله په لاندې ډول دي:

$$x = x^0 + \lambda v + \mu w = (-1,2,5) + \lambda(3,1,-11) + \mu(2,-6,-2)$$

ددې نتیجی څخه لاندې سکالاربرابرون لاس ته راځي:

$$x_1 = -1 + 3\lambda + 2\mu, x_2 = 2 + \lambda - 6\mu, x_3 = 5 - 11\lambda - 2\mu$$

۱۷ . ۵ . ۳ :د هواروبرابرون یا- مساوات سکالارفورم(-بڼه)

یوه هواره د یوه ټکي x0 او یوه په هواره نیغ ولاړ وکتور n له پلوه یاله لارې هم یواځنۍ ټاکلی ده یا، چی عمودي یا نورمال وکتور (Normalvektor(یي بولي) ؟؟؟
څیره شته ش . ۱۷ . ۱۵
په هواره E کی دې x یو په خوښه ټکی وي .نو دا له x0 و x ته بریدي وکتور x-x0 هم په دې هواره کی پروت دی او وکتورونه n او x-x0 یو په بل نیغ ولاړدي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

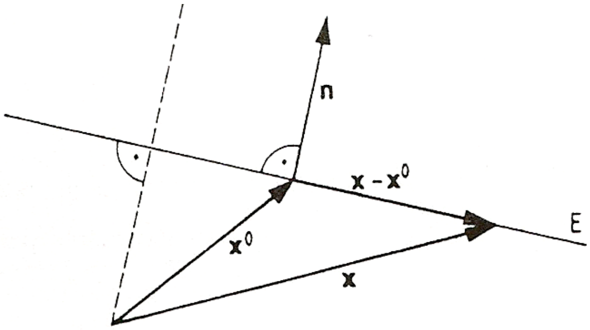


Bild 17.15

په یو بل نیغولاړو) اورتوگونال (وکتورونوڅخه جوړ شوي سکالارځل صفر دی څیره (ځ. ۱۷ . ۸ دې برتله شي) دا په دې مانا چی باوري کیږي :

n(x-x0)=0,nx=nx0= c (17 . 30)

دهوارې برابرونونو سکالار فورم ، n- عمودوکتور، د هوارې x0 په ټکی.

بیلگه ۱۷ . ۱۷ :

د هوارې برابرون چی ټکی(2,-1,5)= x0په پروت دی او په هغه وکتور(n=(2,-2,1 (نیغ)ولاړ دی

د c=nx0=(2-2,1).(2,-1,5)=4+2+5=11 له مخې په لاندې ډول دی:

(2,-2,1).x=11 <=> 2x1-2x2+x3=11.

د هوارې مساواتو پارامترفورم (۱۷ . ۲۷) په یوه سکالارفورم اړول بدلول (۱۷ . ۳۰) د پارامتر د له منځه وړلو له لارې لاس ته راځي.

بیلگه ۱۷ . ۱۸ :

د هوارې مساوات دې په پارامتر فورم وي:

$$x = (1,-2,4) + \lambda(0,1,-1) + \mu(1,-1,2)$$

دا وکتور برابرون لاندې درې سکالار برابرونونه خوندي لري یا په بر کي لري یا ځایوي:

$$x_1 = 1 + \mu, x_2 = -2 + \lambda - \mu, x_3 = 4 - \lambda + 2\mu$$

له لومړي لاس ته راځي: $\mu = x_1 - 1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې سره دا نور دوه برابرونونه داسې دي

$$x_2 = -2 + \lambda - x_1 + 1 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = -1 + \lambda \wedge$$
$$x_3 = 4 - \lambda + 2x_1 - 2 \Leftrightarrow -x_1 + x_3 = 2 - \lambda \Leftrightarrow$$
$$-x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

د هوارې برابرونونو سکالار فورم: (-1,1,1)x=1

که غواړو چې ځرګنده کړو چې ایا یو ټکی x1 په هواره E پروت دی چې برابرون یی په پارامتر فورم ورکړ شوي ، نو باید مطالعه شي چې ددې کواوردینات (۱۷ . ۲۸) برابرون پوره کوي که نه (بیلګه ۱۷ ، ۱۵ : د کرښې مساواتوته ورته) . او یا سړی پارامترفورم په سکالارفورم بدلوي او ځیري چې د ټکي کواوردینات دا مساوات پوره کوي، که نه .

بیلګه ۱۷ . ۱۹ :

ایا ټکی(x^1=(2,-2,5 په هواره $E: x = (1,-2,4) + \lambda(0,1,-1) + \mu(1,-1,2)$ پروت دی ؟

اوبیونه : : دلومړي دوه برابرونونو $2 = 1 + 0\lambda + \mu, -2 = -2 + \lambda - \mu, 5 = 4 - \lambda + 2\mu$

څخه لاس ته راځي $\lambda = 1 \wedge \mu = 1$

دا دواړه ارزښتونه دریم برابرون پوره کوي: 5=4-1+2.1 ، دا په دې مانا چې x1 په هواره E پروت دی. که د هوارې برابرون په سکالرفورم واړول شي: - (x1+x2+x3=1بیلګه ۱۷ . ۱۸ دې وکتل شي (، نو د ټکي x^1 کواوردینات دې یواځې د x1,x2,x3لپاره ځاي په ځاي شي ، چې معلوم کړو چې x^1 په هواره E پروت دی : - 2+(-2)+5=1

د یوې هوارې: n.x=c:E او د یوې کرښې $g: x = x^0 + \lambda v$ ترمنځ غوښټکی xs(که شته وي)(نو هم پهE پروت دی او هم په g .له دې امله د هوارې په برابرونونو کې د x لپاره $x^0 + \lambda v$ ځاي په ځاي کوو(ږدو) او په دې ډول یو برابرون د λلپاره لاس ته راځي.که دا برابرون یواځنی یو اوبی ولري نو غوښټکی موجود دی ، که اوبی شته نه وي یا موجود نه وي نو کرښه g د هوارې E سره غبرګه ځغلي، که ناپاي ډیر ې اوبیونې شته وي نو کرښه g په هواره E پرته ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۷ . ۲۰ :

د کرښو $g : x=(1,0,1)+\lambda(-1,1,1)$ پروت ځاي یا موقعیت دې لاندې هوارو ته وټاکل شي:

$a).....x_1+2x_2+3x_3=4, b)...2x_1+x_2+x_3=3, c)...2x_1+x_2+x_3=4$

اوبیونه : دا چې لټونکی غوڅټکی xsد کرښي برابرون پوره کوي نو باوري دي:

$x_1=1-\lambda, x_2=\lambda, x_3=1+\lambda$

a) $x_1+2x_2+3x_3=(1-\lambda)+2\lambda+3(1+\lambda)=4\lambda+4=-4, \lambda=-2$

$x_S=(1+2,-2,1-2)=(3,-2,-1)$

b) $2x_1+x_2+x_3=2(1-\lambda)+\lambda+(1+\lambda)=0.\lambda+3=3$

لمدا λ په خوښه، gپه E پرته ده

c) $2x_1+x_2+x_3=2(1-\lambda)+\lambda+(1+\lambda)=0.\lambda+3=4$

حل نه شته ، نوکرښه gد سطحې E سره غبرګه ځغلي.

ددوه سطح

$n^1.x=c1$: E1

او E2 هوارې: $n^2.x=c2$ غوڅکرښه دواړه برابرونونه پوره کوي(دا دوه برابرونونه دي، هر یو د درې نامعلومو x1 ,x2 ,x3 سره). دوه امکانات شته دي چې کرښه g (که شته وي) را پیدا کړی شو.

۱ – سړی یوه واریابله یا اوښتونې په خوښه وټاکي $x_i=\lambda$ (ازاد پارامتر)، نور دواړه $x_j, j\neq i$ له دواړو هوارمساواتو څخه په λ کې د کرښیزو افادو یا وینو په څیر راپیدا کوي. او په دې ډول کرښیز مساوات لاس ته راځي.

۲ – سړي د کرښې دوه مختلف ځانګړې ټکي x^0 او x^1 راپیدا کوي او په دې ډول د کرښې g مساوات لاس ته راولي: $x=x_0+\lambda(x^1-x_0)$.

بیلګه ۱ ۷ . ۲۱ :

د دوه هوارو E_1 او E_2 پریکرښه g غواړو پیدا کړو. هوارې دې وي :

$E_1 : x_1-x_2+x_3=3, \qquad E_2 : 2x_1-x_2-3x_3=0$

حل ۱): $x_1=\lambda$ په خوښه

$E_1 : -x_2+x_3=3-\lambda, E_2 : -x_2-3x_3=-2\lambda.$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کمون یا تفریق : $4x_3 = 3 + \lambda$,

په E_1 کی دې ځاي په ځاي شي :- $-x_2+3/4 + \lambda/4 = 3 - \lambda$, $x_2 = (5/4)\lambda - 9/4$

نو لاس ته راځي $x_1 = \quad , x_2 = (5/4)\lambda - 9/4, x_3 = (1/4)\lambda + 3/4$

په وکتور لیکدود : $x = (0,-9/4, 3/4) + \lambda(1, 5/4, 1/4)$

همداسی (<=>) له $(1/4)\lambda$ $= \tilde{\lambda}$ سره لرو

$x = (0,-9/4, \;, + \tilde{\lambda}(4,5,1)$

حل(اوبی) ۲ : په E_1 او E_2 ځاي په ځاي کوو: $x_3 = 0$, پس لاس ته

راځي $x_1 - x_2 = 3$, $2x_1 - x_2 = 0$ د لاندې حل سره $x_1 = -3$, $x_2 = -6$,

پس $x^0 = (-3, -6, 0)$ په هوار کې ځانګړې ټکی دی،که ولیکو $x_2 = 0$ پس

له $x_1 + x_2 = 3$, $2x_2 - 3x_3 = 0$ لاندې حل لرو: $x_1 = 9/5$, $x_3 = 6/5$ او په دې ډول د ه

کربښې g دوم ټکی : $x^1 = (9/5, 0, 6/5)$

په ټکو x^1 ، x^0 د کربښې g مساوات (مقایسه ۱۷ . ۲۶) داسې دي

$x = x^0 + \lambda(x^1 - x^0) = (-3, -6, 0) + \lambda(24/5, 6, 6/5)$

<=> د $\tilde{\lambda} = (6/5)\lambda$ سره :

$x = (-3,6,0) + \tilde{\lambda}(4,5,1)$

دا په حل (اوبی) ۱ کی پیداشوې کربښي g یوبل ډول انځوردي، ځکه چی د لورو

وکتورونه یو بل ته ورته دي. : $v = (4, 5, 1)$ او د $\tilde{\lambda} = -3/4$ لپاره په حل ۱ کې د

کربښې ټکی د حل ۲ x^0 دا ټکی لاس ته راځي

$x = (0, -9/4, 3/4) - (3/4)(4, 5, 1) = (-3, -6, 0)$

تمرینونه؛

۱ – وکتورونه $c = (4,-1,7)$, $b = (-3,-5,0)$, $a = (1,0,-2)$, ورکړ شوي دي.

جوړکړی :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$-a$, $a+b$, $a-c$, $2a - b + 3c$!

۲ – وکتور a چې له ټکي $x^1 = (3,-5,7)$ څخه د ټکي $x^2 = (-2,4,-1)$ لور ته لاربښودوي، څنګه دی؟

۳ – وکتور $a = (3,21)$ دې پیلټکی $x^1 = (1,2,3)$ ولري. وڅیرۍ چې پایټکی x^2 یې کوم کواوردینات لري؟

۴ – لاندې وکتورونه کوم مطلقه ارزښت لري؟

$a = (4,-3,12)$, $b = (\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3})$, $c = (3,3,3,)$?

۵ – وکتورونو $a = (2,-1,3)$, $b = 7,0,0)$ پورې اړوند یا مربوط یوونوکتورنه کومې کواوردیناتی لري؟

۶ – د لاندې وکتورونو یو په بل ولاړوالی یا اورتوګونالیتي دې وښول شي ؟

$a= (1,2,3)$, $b = (3,0,-1)$!

۷ – دلته دې a_1 , b_1 او c_1 څومره لوي وي، چې وکتورونه

$a = (a_1,3,2)$, $b = (-4,b_1,2)$, $c = (3,-2,c_1)$

په وکتور $d = (2,1,-3)$ (نیغ) ولاړ وي؟

۸ – د

a) $a = (-2/3, 1/2, 5/4)$, $b = (3\ 74,-1/3, 2/3)$,

b) $a = e^1 - e^2 + e^3$ ، $b= 2e^1 + (1/2)e^2 - (1/4)e^3$

لپاره دې $a \cdot b$ وشمیرل شي!

۹ – وکتورونه $a = (3,-4,12)$ او $b = (-6,8,0)$ یو له بل سره کوم کونج جوړوي!

۱۰ – د ګوډ – یاکونجټکو

$A = (-2,0,3)$, $B =(-6,4,-1)$, $C(4, -1,2)$

سره، د دریګوډي کونجونه څومره لوي دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۱ – وښايي چې وکتورونه $a = (2,4,-6)$ او $b = (-1,-2,3)$ يو بل ته كولايني دي!

۱۲ – د

a) $a = (-4,-1,3)$, $b = (5,-2,7)$

b) $a = e - e^2 + 2e^3$, $b = 2e + (1/2)e^2 - (1/4)e^3$

لپاره $a \times b$ وشميرئ!

۱۳ – د دريګوڼي هواره څومره لويه ده، چې كونجونه يې په لاندې توګه راکړ شوي وي

$A = (-2,0,3)$, $B = (-6,4,-1)$, $C = (4,-1,2)$?

۱۴ – د هغه غبرګ اړخيز هواره څومره لويه ده چې له وكتورونو

$a = (-3,2,1)$, $b = (5,-3,2)$

څخه غزيدلي وي ؟

۱۵ – د وكتورونو

$a = (-2,1,-3)$, $b = (1,-3,6)$, $c = (1,2,-3)$

څخه غزولشوې غبرګهوارې كوم ډكې يا حجم لري؟

دا نتيجه هندسي روښانه کړئ!

۱۶ – څلورګوډې د لاندې ګوډونو (بېلګه: څلور اړخي [دا د اهرام تشکلوي])

$P_1(2,1,4)$, $P_2(0,-1,2)$, $P_3(-3,6,4)$, $P_4(2,2,2)$

سره كوم ډكې ياحجم لري؟

۲۳ – د لاندې هوارو

الف) E_1 چې له ټكي $x^o = (0,1,2)$ تيرېږي او د لاندې وكتورونو

لور لري: $v = (0,2,1)$, $w = (2.3,-5)$

ب) E_2 چې له ټكو $x^1 = (2,-3,4)$, $x^o = (o,1,2)$ او

ټكي $x^2 = (7,-9,-3)$ څخه تيرېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پ) E_3 چې د نورمال وکتور $n = (0,2,1)$ سره
له تکي $x^o = (0,.1.2)$ تیریږي، مساوات څنګه دي؟

۲۴ – له تمرینو۲۳ الف او ب څخه د هوارې مساواتو سکالرینه څنګه ده؟

۲۵ – ودی څیړل شي چې ایا تکي $x^1 = (1.3.-6)$ همداسی $x^2 = (5,-5,4)$ په هواره

a) E_1: $\mathbf{x} = (0, 2, -1) + \lambda(1, -3, 5) + \mu(2, -2, 0)$,

b) E_2 : $2x_1 + x_2 - x_3 = 1$

پراته دي!

۲۶ – د کرښو

a) g_1: $\mathbf{x} = (1, 1, 1) + \lambda(-2, 3, 1)$,

b) g_2: $\mathbf{x} = (-1, 1, 1) + \lambda(-1, -1, 1)$,

c) g_3: $\mathbf{x} = (3, -2, 0) + \lambda(-1, -1, 1)$

پروتځاي د هوارې $E: \; 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 18$ سره وټاکئ!

۲۷ – د هوارو

الف) $E_1 : 2x_1 + x_2 - x_3 = -1$ او $E_2 : -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4$

ب) $E_1 \; -5x_1 - 2x_2 + 9x_3 = 4$ او $E_2 \; : x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -8$

غوڅکرښه دې راپیدا شي !

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۸ پرلپسی او لړۍ پرلپسی (لنډ: لړۍ) (sequences and series)

یا ترادف او د ترادف سلسله

۱۸ . ۱ پیل

د میلاد څخه دري سوه کاله د مخه یوه یوناني جنګسالار(نوم یې راڅخه هیر شوی، ددې بخښنه غواړم) د خپلو عسکرو څخه وپوښتل چې ، »دا د ده له مخه کیشپ چې سل متره یې ترمنځ واټن دی، کله نیولی شي، که دی له دې کیشپ سل ځله تیز ولاړشي؟« دې ته طبعاً د لوستونکو فکر شته چې وخت باید په نظر کې نه وي نیولشوی . ځوابولو ته دې ګران لوستونکی پخپله فکر وکړي.

موږ د دې برخې څیرنی سره لوړې شمیرپوهنی ته راځو. داسی هم نه ده، ځکه چې موږ د رییل اعدادو یا ـ ګڼونو تعریف سره سم چې هلته مو د اینتروالبندولو باندې خبرې کړې او په دې توګه مو عدد تعریف کړی دی، د شمیرپوهني لوړه څیرنه وه. همدا ډول د لاینیزو برابرونونو یا ـ مساواتو شمیرل او داسی نورې پوره دلوړې شمیرپوهني بیلګې لرو، خو دلته دا په ګوته کوو چې له دې ځایه د شمیرپوهنی هغه ځاي پیل کیږي چې شمیرپوهنیز فکر مو په پراخه توګه په کار اچولو ته راهڅوي او له دې امله مو د وړاند نیونه(لنډ: نیونه) یا فرضیه اړیینه وه چې دا برخه د لوړو شمیرپوهنو پیل په څیر وښایو یا وبولو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې ځايه هغه اعداد چې موږ ورسره مخ کيږو، ځموږ لپاره د څيړنی کيږي چی هغوي يوې پولی(حدLimit) ته هڅه کوي. دا قوانين هم پوره څيړل کيږي چی وروسته بيا په ديفرنځيال شميرنه کی کار اخستلو لپاره ترې تيريدنه ناشونی ده.

په راتلونکی برخه کی لاندې کنځيپتونه (خيال، چې يو څه څنګه وشي) ځموږ لپاره د هڅی وړ ګرځي

۱ - د کليمی ليدوړه يا په خيال کی لرودونکی پيلونه

۲ - د ليدوړوالي يا فکر کی راوړيدونکی د ټولو په غوره شننه (تحليل)

۳ - د شميرپوهنيزو پېژندو يا تعريفونو ټيکوالی،

۴ - هغو وړاندنيونو يافرضيو ته پاملرنه چی د شميرپوهنی قوانينو د باوريتوب (اعتبار)لپاره وي،

۵ - د پرلپسی شننه، چی پوله ارزښت يی په پام کي ونه نيول شي،

۶ - د ګڼو دندو حل ، په ځانګړي توګه د ديفرنځيالولو او اينتګرالولو

۷ - بالاخره د پرلپسی لړۍ چی په لنډه توګه ىی لړۍ بولو څيړنه .

دلته هم د دې موضوع د پوره څيړلو ستونځي په کتاب کی د ځاي کموالي له امله شته. داچی دا برخه يوه بنسټيزه برخه ده، نو پيل يی د يوې ساده او پوهوړې بيلګې له لارې کوو چي ماته خورا په زړه پورې هم ښکاريږي.

۱۸ . ۲ دګڼونو پرلپسی (لنډ: پرلپسی) يا د اعدادو ترادف کلمه

پيلبيلګه :

پاي جمعه يا - زياتون $s = 3+7+11+...+395+399$ څنګه ټاکل کيدی شي؟
کيدی شي چي دا د پوره ستونځو سره د يوګونو ګڼونو يو د بل سره جمعې يا يو په بل زياتون له لارې وشميرل شي ترڅو چي د دې اعدادو د ترادف (ګڼونپرلپسی) قانونيت پيداشوی وي:
هر دوه ګاونډې توکي يوله بله په۴ + توپير کيږي يعنی کمون يا کمښت يي ۴ + دی.
کيدی شي چی دا کارونه (استعمال) په يوه شکلی او سپماوړ لاره هم مخ ته لاړه شی او دا په لاندې ډول :
که لومړی (۳) او اخر(۳۹۹) ، دويم (۷) او له اخر دويم (۳۹۵) دريم (۱۱) او له اخر دريم (۳۹۱) د جمعې اجزا يا زياتوني او داسی نور سره زيات شي. دا په

(c) ketabton.com: The Digital Library

دې ټولو حالتونو کی همغه زیاتون ارزښت یا د جمع لاس ته راوړنه ورکوي یعنی ۴۰۲ .
اوس دې د یوګونو د جمعې اعزاوو د جمعې ارزښت(زیاتوونو زیاتون ارزښت) راپیداشي:
دویم غړی له لومړی غړي داسی لاس ته راځي چی لومړي غړي ته ۴ ور زیاتیږي او همداسی ورپسی تر n غړي پورې چی دلته و (n-1) ته 4 ور زیاتیږي ، یعنې:
.n = (n-1)+4:
که له دې لاس ته راوړنی لومړی غړی له اخر غړي کم کړو یعنی3- 399 = 396 ، نو ددې کمون سره د (n-1) دا 4 ځله ترې لاس ته راځي. داچی 99 = 396:4 دي، نو باید n او له دې امله د پرلپسي د غړو شمیر 100 وي. په دې لاس ته راوړنو سره باید 100 ګڼونه سره زیات شي. که چیرې په پورته توګه 2 زیاتووني یا د جمعې اجزاوې سره زیات شي، نو باید له دې سره 100:2 = 50 یعني 50 -ځله زیات 402 ترې لاس ته راشي« له دې امله د ټولو رامخ ته شوو د پرلپسی غړو زیاتون دا دی:
.20100 = 402 . 50

دا لوستونکو ته په روڼنی ژوند کی هم څرګنده ده لکه د یو ټولګي د زدکوونکو په ګڼه (نمره) ترتیب، یا په یوه سیالی یا مسابقه کی د بریالیو ترتیب او داسی نورموجود دي، موږ کوښښ کوو چی دا مسئلی د شمیرپوهنی له لارې وڅیړو او وګورو چی په شمیرپوهنه کی ترادف یا پرلپسی څه شی دي.
یادونه: موږ له دې وروسته د رادف په ځا یواځې ترادف لیکو.

موږ طبیعي اعداد یا ـ ګڼونه ۱، ۲، ۳، ۴، ..... لرو (دلته ټکي ټکي دا مانا لري چی دا پرلپسی ناپای اوږدیږي)
که چیرې دا هر پیدایښتي یا طبعي ګڼ په یواځنی یو ریبل ګڼ ترتیب شي یا یواځنی ترتیب ریبل ګڼ وښایي یعنی $a_1, a_2, a_3, ...$ ، نو د لته د طبعي اعدادو او حقیقي اعدادوتر منځ یو ترتیب منځ ته راځي. داچی دلته هر طبیعي عدد n په یواځنی حقیقي عدد a_n ترتیب شوی نو دا ترتیب یو فنکشن دی چی د فنکشن پیژندډېری (تعریفډیری یا تعریفسټ) دطبعي اعدادو ډیری N ده او ارزښتډیری یی د حقیقي اعدادو ډیری R ده.

دلته د پرلپسی هر توکی an د ځای ګڼې (نمرې) n په بنسټ یواځنی ټاکلی، چی n ته په مسلکي نړیواله پیژندل شوې ژبه ایندکس Index (زیات یې Indices)، چې مانا یې : پیژند نخښه ده ، وایي. (Index پیژند دخښه)

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند تعریف) :۱۸ . ۱ الف :

د پرلپسی غړو $a_1, a_2, a_3, ...a_k$ د یو ترتیب قانونیت یا قانونمندي $a_n = a(n)$ لاس ته راځي ، که دnلپاره پرلپسی طبعي اعداد1, 2,3 ...k,ځای په ځای شي.

پرلپسی کې a_1 د پرلپسی پیل غړی بلل کیږي. که د پرلپسی اخر غړي پای وي نو پرلپسی پای او که نه نو پرلپسی ناپای ده.

بیلګی

(دا ورپسې مخ کې بیلګې نورې هم روښانه دي)

$$I-;...a_n = n^2, a_1 = 1; a_2 = 4;....; a_{10} = 100,..; a_k = k^2;..$$

{چیرته چې a_n یو ځلوری (مربع) ګڼ دی} a_n D=N;W= |

$$2-\{a_n\} = \{\frac{1}{n}\} \Rightarrow a_n = \frac{1}{n}; a_1 = 1; a_2 = \frac{1}{2};...a_{10} = \frac{1}{10};...\{a_k\} = \{\frac{1}{k}\}$$

$$3 - \{a_n\}=\{(-1)\} \Rightarrow a_n = (-1)^n; a_1 = -1; a_2 = 1;$$
$$a_3 = -1,...a_{17} = -1;...a_{22} = 1$$

د دې پرلپسی غړي بدلی نخښی لري، له دې امله پرلپسی بدلیدونکی Altrnating بلل کیږي

$$4-\{a_n\} = \{3+\frac{1}{n}\}; 4, 3+\frac{1}{2}, 3+\frac{1}{3}, 3+\frac{1}{4},...a_k = 3+\frac{1}{k},..., a_n = 3+\frac{1}{n}$$

د ترتیب – یا نظمقاعدې څخه مختلفی ګڼونپرلپسی یا د اعدادو پرلپسې منځ ته راځي ۰ دا مو په لنډه توګه پرلپسی ونومولی. چی پیژند یی یو ځل بیا دلته په بل ډول رالنډوو.

پیژند (تعریف) ۱۸ . ۱ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

که هر یو طبیعي ګڼ..... n=1,2,3,4,5 په یوه یو یوائځني ریپل ګن باندې ترتیب یا تنظیم شي، نو په ترتیب ګڼونه ...... a_1, a_2, a_3,..... یوه د ګڼونو پرلپسی جوړوي، چی لنډ پرلپسی یی نوموو او ددې لپاره سړی داسی لیکي: $\{a_n\}$.

دې a_n ته د پرلپسې$\{a_n\}$ n-م غړی ویل کیږي.

سړی کړی شي چی د ریپلګڼونو یا اعدادو د نمره کولو یا ګڼې لپاره له 0 یا 2 او حتی له 1 - یا 2 - څخه پیل وکړي، یعني:

a-1,a0,a1,a2..... یا a2,a3,a4.... یا ....a0,a1,a2 او

ګورو چی د پرلپسی لیکلو لپاره ځانګړي متودونه په کار اچول کیږي، کله دا بسیا کوي چی د پرلپسی تعریف لپاره د پرلپسی لومړي څو غړي ولیکل شي

بیلګه ۱۸ .۱ : د بیلګي په توګه لیکو:

$$\{a_n\} = 1, 2, 3, ...$$

او د طبعي اعدادو پرلپسی موخه یا مطلب دی، د جوړولوقانون an = n سره ، نو

$$\{a_n\} = \{n\}$$

{an}:1,4,9,16,25...=> $= \{a_n\} = \{n^2\}$

دا په دې معنا چی(=>)

{an}:2,3/2,4/3,5/4,6/5 ....=>

یا په دې مانا چی{an}={(n+1)/n}

{an}:1,1/2,1/3,1/4,1/5,1/6 ...=>

په دې مانا چی $\{a_n\} = \{\frac{(-1)^{n-1}}{n}\}$

{an}:1,1/2,1/3,1/4,1/5,.. =>

یانې په دې مانا {an}={(n+1)/n}

پیلبیلګه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

دشمیرپوهنی یوه ښوونکی لپاره په ښونځي کی یو ځاي تش یا خالي دئ. ددې ځاي لپاره دوه کسانو الف او ب ځانونه کاندید کړی. دوي ته لاندې پوښتنه ورکړ شوي چی اوبی یا حل یی کړي:

پنځه ګڼونه ۱،۳،۷،۱۵،۳۱ ورکړ شوي. درې نور ګڼونه باید داسی ور واچوی چی دا ګڼونپرلپسی موخه وره یا هدفمنده مخ ته ولاړه شي، یا مخودیزه شي.

دواړه کاندیدان دا دنده یا پوښتنه په بیلو ډولونو اوبی کوي ۰

کاندید الف داسی فکر کوي ۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ کاندید ب داسی فکر کوي

لومړی ګڼ ۱ د۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ ۰ لومړی ګڼ له ۲ څخه په ۱ کوچنی دئ: 1 - 2

دویم ګڼ لاس ته راځي، که د لومړي ۰۰۰۰۰۰۰ دوم ګڼ له ۴ څخه ۱ کوچنی دئ :

عدد دوه ځله ته ۱ ورزیات کړو : ۰۰۰۰۰۰۰۰ $2^2 - 1 = 4 - 1$

$2.1 + 1 = 3$

دریم ګڼ لاس ته راځي که د دوم ۰۰۰۰۰۰۰۰ دریم ګڼ له ۸ په ۱ کوچنی دی:

ګڼ دوه ځله ته ۱ ور زیات شي۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ $2^3-1=8-1$

$2.3 + 1 = 7$

۶- ام ګڼ لاس ته راځي که د پنځم۰۰۰۰۰ ۶ -ام ګڼ له ۶۴ څخه په ۱ کوچنی دئ :

ګڼ دوه برابره ته ۱ ور زیات کړو: ۰۰۰۰ $64 - 1 = 2^6 - 1 = 63$

$2.31 + 1 = 63$

اوم ګڼ دئ ۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ اوم ګڼ دی: $2^7 - 1 = 128 - 1 = 127$

$2.63 + 1 = 127$

ګڼ ۸ دئ ۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ ګڼ ۸ دئ

$2^8 - 1 = 256 - 1 = 255$ ....(2.127 -1 = 255 = 1-)

د شمرپوهنی له مخی دا پنځه له مخه ورکړشوي ګڼونه د یوې پرلپسی لومړني پنځه توکي دي. دا پنځه توکي له

a1 , a2 , a3 , a4 , a5,

سره ښایو.

اوس زموږ په دې بیلګه کی داسی لرو: a1=1,a2=3,a3=7,a4=15,a5=31

که وغوښتل شي چی د دې پرلپسی نور توکي دې هم ورکړ شي، نو دا به تصادفي توکي نه وي، بلکه یوه جوړه شوې قاعده یا لاس ته راوړې قاعده به ورکړي، لکه څنګه چی یو په بل پسی راتلونکی توکی د پخوانی او یا له وروستني توکي څخه د مخه توکی په لاس راځي.ددې تثبیت یا ازمویني وظیفی شمیرپوهنیزه فرمولبندې په لاندې ډول ده:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګڼونپرلپسی یا د اعدادو ترادف دې د a1=1,a2=3,a3=7,a4=15,a5=31 سره ورکړ شوي وي. يوجوړښتقانون يا قانونمندي او توکي a6,a7,a8 وټاکی.
د دواړو کاندیدانو د اوبیوني -یا حللارې کیدی شي چې په لاندې توګه انځور شي:

الف	ب
$a_1 = 1$	$a_1 = 2 - 1$
$= 2.1+1=3 a_2$	$a_2 = 4-1=2^{2-1}=3$
$a_3 = 2.3 + 1 = 7$	$a_3 = 8 - 1 = 2^3 - 1 = 7$
.	..
.	$a_6 = \quad 2^6 - 1 = 63$
$a_6 = 2.31 + 1 = 63$	

په تولیزه (عمومی) توګه لاس ته راځي

$(k \in N)$ k-م غړی $(k \in N \wedge k \geq 2)$ k -م غړی
په کوم کی چی .... په کوم کی چی
د(k-1)- م غړي دوه برابره ته 1 زیات شي ..... 1 له $a_k = 2^k$ کم شي

$a_k = 2.a_{k-1} + 1$ $a_k = 2^k - 1$

دواړو کاندیدانو پرابلم سم حل یا اوبی کړ. کله چی د پرلپسی ۲۰ - م غړي پوښتنه وشوه ، نو کاندید ب په کته کی دی . ولی؟
دواړه کاندیدان کولی شي چی د پرلپسی هر په خوښه توکی پیداکړي، له دې امله دوي دا پرلپسی یواځنی وټاکله. کاندید الف دا پرلپسی داسی حل کوي چی تل باید له مخه غړي څخه ورپسی توکی لاس ته راوړي، یعني $a_k = 2.a_{k-1} + 1$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا باید هر د پرلپسی د مخه توکی وپیژني. دې ډول شمیرلو ته د پرلپسی رکورزیو(recursive لاتین، له recure په ښت څغاسته) انځورونه وایی . مګر ب کاندید دا خورا ساده او زر شمیرلی شي، دی چې کوم توکي غواړي پیدا کړي، هغه سملاسي لاس ته راوړی شي یعني $a_k = 2^k - 1$
دې ډول ښوونلار ته ایکسپلیښیت explizite (لاتین خورول، روښانوول) یعنی روښانه انځورونه وایي.
د لوستونکو لپاره دې دا لاندې د کور کار وي:
د پرلپسی ۲۰ - ۱م غړی وشمیری ، رکورسیو او ایکسپلیښیت. یانی د الف او ب په ښیر.

بیلګه:
یوه پرلپسی د a1 = 5 او $a_{k+1} = a_k{}^2 + 1$ سره ورکړ شوې. ددې پرلپسی لومړنی پنځه توکي وشمیری.
حل:

$$a_1 = 5$$
$$a_2 = a_1^2 + 1 = 25 + 1 = 26$$
$$a_3 = a_2^2 + 1 = 676 + 1 = 677$$
$$a_4 = a_3^1 + 1 = 458329 + 1 = 458330$$

بیلګه :
یوه پرلپسی د a1 = 1 او $a_{k+2} = a_{k+1}.a_k$ سره ورکړ شوې ده.
ددې پرلپسی لمړني پنځه غړي وشمیری .
اوبنونه:

$$a_1 = 1$$
$$a_2 = 2$$
$$a_3 = a_2.a_1 = 2.1 = 2$$
$$a_4 = a_3 \, . \, a_2 = 2.2=4$$
$$a_5=a_4.a_3 = 4.2=8$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې:

د هرې لاندنۍ پرلپسی لمړني ۱۰ غړي وشمیرئ پرلپسې رکورزیو ورکړ شوې

a) $a_1=2,\ a_{k+1}=\frac{1}{a_k}$

b) $a_1=0,\ a_{k+1}=a_k^2+1$

c) $a_1=2,\ a_{k+1}=\frac{1}{a_k}+1$

d) $a_1=1,\ a_{k+1}=\frac{1}{2}a_k+1$

e) $a_1=2,\ a_{k+1}=\frac{1}{2}\left(a_k+\frac{2}{a_k}\right)$

f) $a_1=1,\ a_2=1,\ a_{k+2}=a_{k+1}+a_k$

g) $a_1=1,\ a_2=2,\ a_{k+2}=a_{k+1}^2:a_k$

h) $a_1=1,\ a_2=-2,\ a_{k+2}=a_k:a_{k+1}$

بیلګه :

یوه پرلپسی د ak=k²/(k+1) سره ورکړ شوې ده .د دې پرلپسی لومړني پنځه توکي وشمیرئ

اوبی:

$$a_1=\frac{1^2}{1+1}=\frac{1}{2}\qquad a_2=\frac{2^2}{2+1}=\frac{4}{3}\qquad a_3=\frac{3^2}{3+1}=\frac{9}{4}$$

$$a_4=\frac{4^2}{4+1}=\frac{16}{5}\qquad a_5=\frac{5^2}{5+1}=\frac{25}{6}$$

بیلګه :

پرلپسی د $a_k=\dfrac{(-1)^k+1}{k}$ سره ورکړ شوې ده .د دې پرلپسی ۳ -م، ۸ -م ۱۵ -م او ۲۰ -م توکي وشمیرئ

اوبی یا حل:

$$a_3=\frac{(-1)^3+1}{3}=0$$

$$a_8=\frac{(-1)^8+1}{8}=\frac{1}{4}$$

$$a_{15}=\frac{(-1)^{15}+1}{15}=0$$

$$a_{20}=\frac{(-1)^{20}+1}{20}=\frac{1}{10}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنی :
د لاندې پرلپسیو لومړني پنځه توکي ، ۲۰ -م او ۴۵ –م توکي وشمیری

$$a)a_k = 2k+1; b)a_k = k^2 + k; c)a_k = \frac{k^2+1}{k+1};$$

$$d)a_k = \frac{k^2-1}{k+1}; e)a_k = (-\frac{1}{10})^{k-1}; f)a_k = 1-(1/2)^k;$$

$$g)a_k = 1+(-1/2)^k; h)a_k = 1.2.3....k$$

په کارتیزي کواوردیناتسیستم کی د یوې پرلپسی د ګراف انځورونه لاس ته راوړو، که هر توکی د x -کواوردینات باندې د پرلپسی هر توکی د توکي نمرې kسره کیښول شي او د y- کواوردینات باندې هر غړی د غړې د نمرې ak سره و کښل شي

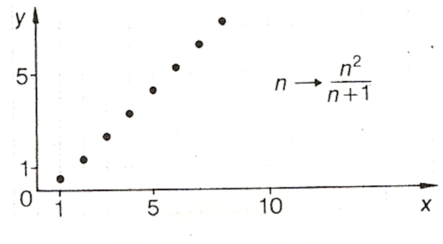


Bild 4

پوښتنی :
د لاندې پرلپسیو ګراف په کارتیزې کواوردیناتسیستم کی وکاږئ.
له دې ځایه وروسته بیا پیل دئ

a) $a_k = \frac{5k}{k+2}$ b) $a_k = 3k+2$ c) $a_k = (-1)^{k-1} \cdot \frac{12}{k}$

d) $a_k = \sin\frac{k\pi}{2}$ e) $a_1 = \frac{1}{2}, a_{k+1} = 1 - 2a_k$ f) $a_1 = 1, a_2 = 1, a_{k+2} = a_{k+1} \cdot a_k$

۱۸ . ۲ . ۱ یوغږیزې یا مونوتونی پرلپسی

بیلګه : د غړو ak = 2k - 1
(ما کله کله توکی او کله کله غړی نومونه کارولی، په په پرلپسی کې یو غړی د پرلپسی غړی ،دئ او د یوې ډیری یو د هغې ډیری توکی دی، دې ته به د ګرابو لوستونکو پام وي)
سره پرلپسی هر توکی د مخته تیرشوي توکي لوي دئ . دا باور لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a_{k+1} > a_k$ د ټولو $k \in N$ لپاه

حل یا ثبوت :

$$
\begin{aligned}
a_{k+1} &= 2^{k+1} - 1 \\
&= 2.2^k - 1 \\
&= 2^k + 2^k - 1 \\
&= 2^k + (2^2 - 1) \\
&= 2^k + a_k \\
&> a_k
\end{aligned}
$$

تعریف ۱۸ . ۲ الف:

یوه پرلپسی(strictly monotonic increasing)
په کلکه – یا کره مونوتون جګیدونکی ده یا کره مونوتون جګیږي، که دا لاندې باور
ولري :
د ټولو $k \in N$ لپاره ak+1> ak
که د یوې پرلپسی لپاره باوري وي
د ټولو $k \in N^*$ لپاره ak+1 ≥ ak
نو دلته د مونوتون جګیدونکی monotonic increasingپرلپسی څخه غږیږو

بیلګه :
د پرلپسی د توکو
ak = 10 - 4k
سره هر غړی د مخ ته تیر غړي څخه کوچنی دئ.
لرو:
ak+1 < ak د ټولو $k \in N^*$ لپاره
اوبنونه::

$$
\begin{aligned}
ak+1 &= 10 - 4(k+1) \\
&= 10 - 4k - 4
\end{aligned}
$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

=(10-4k)-4
= ak – 4
< ak

پیژند(تعریف) ۱۸ . ۳ :
یوه پرلپسی په کلکه مونوتونتیټېدونکی یا - لویدونکی strictlymonotonic decreasingده، که لاندې باور ولري:

د ټولو $k \in N$ لپاره ak < ak+1

که په یوه پرلپسی کي باور ولري(په پورته کې او همداسي که وریسي داسي څه راشي کا د ان توکی دئ)

د ټولو $k \in N$ لپاره a1 ≤ ak+1

نو دلته د یوغږیز-یا موتون لویدونکی- یا مونوتون ټیټېدونکی monotonicdecreasing پرلپسی څخه خبرې دي.

پوښتنه:
د یوي پرلپسي دوه ګاونډیو غړو توپیر یا کمون یاکمښت ak+1 - ak، کوم شرطونه باید پوره کړي، چی دا لاندې صدق ولري

الف) کلکه مونوتون جګیدونکی وي

ب) کلکه مونوتون ټیټېدونکي یا –لویدونکې وي

پ) مونوتون جګیږي

ت) مونوتون لویږي؟

ددې دندې د اوبیوني په مرسته کیدی شي، چی د توکي aK=(k+1)/(k+2)سره د پرلپسی مونوتونی په لاندې ډول وښوول شي:

$$a_{k+1} - a_k = \frac{(k+1)+1}{(k+1)+2} - \frac{k+1}{k+2} = \frac{k+2}{k+3} - \frac{k+1}{k+2}$$

$$= \frac{(k+2)^2 - (k+1)(k+3)}{(k+3)(k+2)} = \frac{(k^2+4k+4)-(k^2+4k+3)}{(k+3)(k+2)}$$

$$= \frac{1}{(k+3)(k+2)} > 0 \quad k \in N^*$$

له ak+1-ak>0 همداسی(<=) (ak+1)>ak

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټولو $k \in N*$ لپاره لاس ته راځي، چې ورکړ شوې پرلپسی په کلکه مونوتون جګیږي.

۱۸ . ۲ . ۲ اریتمیتیکي پرلپسی

د پرلپسی ..... 14;11;8;5;2 هرغړی د خپل مخکښ غړي څخه په 3 لوي دی.
ددې پرلپسی لپاره ورکړئ
الف(یوه رکوررزیف انځورونه
ب) (یوه اکسپلیڅیت انځورونه.

ځنی پرلپسي د ډیرې پاملرني ارزښت لري، په دې ډول چی د دوه په خوښه ګاونډیو غړو ak او ak+1 ترمنځ یو ثابت (تل همغه) بلواك یا تابع موجود دئ
غواړو چی دداسی دوه مهمو پرلپسی تیپونه (ډولونه ، رقمونه) په ځانګړې توګه څرګند راوباسو یا بهتره تر څیرنی لاندې ونیسو:

پیژند (تعریف) ۱۸ . ۴ :
په یوه اریتمیتیکي- یا ګنونشمیرنیزې پرلپسي یالنډ: شمیرنیزې پرلپسی کي د درې توکو منځنی توکی د دواړو دباندنیو توکو اریتمیتیکي منځ دی:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

په یوې ځمککچیزې لپسی(ټاکونی یا پیژند وروسته راځي) کی د درې یو په بل پسی توکو منځ غړی د دوو نورو دباندنیو غړو ځمککچیز یا هندسي منځ دی:

$$a_n = \sqrt{a_{n-1}.a_{n+1}}$$

لومړی اریتمیتیکی یا شمیرنیزه پرلپسی څیړو:
غوښتنه(ثبوت): یوه پرلپسی ورکړی، چی لومړی توکی یي ۵ او هر ورپسی راتلونکی توکی یی له مخ غړي څخه په ۱۲ کوچنی وي
الف) ددې پرلپسی لومړي پنځه توکي وشمیرئ
ب) د پرلپسی رکوررزیف انځورونه ورکړئ
پ) د پرلپسی اکسپلیڅیت انځورونه وکړئ
ت) د پرلپسی ۲۰ -م (۲۵ ، ۵۰، ۳۵، ۱۰۰) توکي وشمیرئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند یا تعریف ۱۸ . ۵ :

یوه پرلپسی an اریتمیتیکي پرلپسی بلل کیږي، که د دوه پرلپسی توکو کمون یاکمښت تل ثابت یا همغه وي: $a_{n+1} - a_n = d \Leftrightarrow a_{n+1} = a_n + d$

بیلګې:

۱ - لاندنی پرلپسي ...;2;5,8;11;14;...;29;32;35
یوه اریتمیتیکي Arithmeticپرلپسی ده چې لومړی توکی یی a1 = 2
او ثابت یا همغه کمون یا کمښت یا فرق یی d = 3 دی.
۲ - دا پرلپسی ...;10 ; -1 , -12 , -23, -34 اریتمیتیکي پرله پسی ده چې لومړی توکی یي a1=10 دی او d=-11 ده

که په هر پل(قدم) کی فنکشن $n \in N$; n—>an په همغی زیاته وونې d زیاتیږي یا همداسی کمیږي d=0 (لپاره ثابت دی) نو باید اریتمیتیکي پرلپسی یو لاینیز فنکشن(لاینیز بلواك) وي (D = N) د d په جګوالي . دا د لاندی اند لاس ته راوړنه یا فکر لاس ته اوړنه ده:

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d$$

.

.

$$a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-1).d = a_1 + d.n - d$$

$$f(n) = d.n + (a_1 - d)$$

د لاینیز فنکشن جګوالی d دی او ثابت یا همغه توکی a1 -d نومیږي(یادیږي یا بلل کیږي)
دلته an=2n+1 دلاینیز فنکشن په څیر دی، د d=2 په جګیدو او دy - محورغوڅی a1-d=1

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې سره د پرلپسی د هر توکي د شميرلو امکانات ورکړ شوي دي:

تعريف ۱۸ . ۶ :

په اريتميتيکي- يا شميريزه پرلپسی کی n- م توکی د قاعدې له مخي داسي ورکړ شوی:

an=an-1+d=a1+(n-1).d

بيلګی:

۱ - اريتميتکي پرلپسی ... 53 , 2,19,36 ,ورکړ شوې.
غوښتونکي a20 ده.
داسی لرو: a1=2,d=17,n=20
نو an=a1+(n-1).d ⇔ a20=2+19.17=325
۲ - ورکړ شوې دې وي
a1 = -o,5 او a10 = -44,5
غوښتونکي d ده:
an=a1+(n-1).d<=>(an-a1)/(n-1)=d =>
d=(-44,5+0,5)/(10-1)=-44 /9

۱۸ . ۲ . ۳ځمککچيزې – يا هندسي پرلپسی

اوس غواړو هغه د مخه ويل شوی ،د يوه ثابت ((تل) همغه ارزښتيز) فنکشن سره، د پرلپسی ۲ -م تيپ د دوه غړو ترمنځ تر څيړنی ونيسو

پيلبيلګه :

يو هوښيار زدکړی غواړي په رسختی کی يوه مياشت کار وکړي(۲۰ د کار ورځی(. دې کارورکوونکی ته وايي، چی دی ارزانه کار ورته کوي او لاندې وړانديز ورته مخ ته کوی » د لمړی ورځي معاش دې 0,05 ډالره وي د دويمی دې دوه ځله د دريمی ورځی د دويمی ورځي دوه ځله څلورمه ورځ د دريمی ورځی دوه ځله او داسي نور، يعنی لمړی ورځ که 0,05 وي نو دومه ورځ 0,10، دريمه ورځ 0,20 او څلورمه ورځ 0,40 ډالره معاش کيږی او داسی نور

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنه : د

الف) د ۱ –می یا لومړۍ ورځی
ب) د ۱۵ - می ورځی
پ) د ۲۰ - می ورځی
معاش څومره کیږي. اندازه ګڼ(عدد) که په ډالرو وشمیرل شي، لاندې پرلپسی جوړوي:

0,05;0,1; 0,2; 0,4;0,8; 1,6; 3,2,......

پوښتنه :

ددې پرلپسی لپاره
الف) رکورزیف انځورونه
ب) اکسپلیڅیت انځورونه ورکړی

پیژند ۱۸ . ۷:

(ځمککچیزې یا هندسی پرلپسی) یوه پرلپسی an هندسي بلل کیږي، که د دوه یوبل پسی غړو ویش ثابت((تل) همغه) q وي:
یا په بل ډول یا په بل عبارت : یوه پرلپسی چی لومړی غړی $a_1 \neq 0$ وي اود همغه ګڼ یعنی ثابت ګڼ q سره د تل ځلونی څخه لاس ته راشي، ځمککچیزه یا هندسي پرلپسی بلل کیږي.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q; a_{n+1} = a_n.q$$ د ټولو $n \in N; q \in \{R\} \setminus \{0\}$ لپاره

یو ځل بیا یوځای   +d   +d   +d   +d

اریتمیتیکي پرلپسی ...a1 a2 a3 a4 a5
هندسي پرله پسی..... a1 a2 a3 a4 a5
.q .q .q . q

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هندسي پرلپسی دوهم غړی دلومړي غړي سره د q ځل یا ضرب څخه لاس ته راځي، او دا د ټولو وروسته راتلونکو غړو لپاره باوري دي. له دې امله هندسی پرلپسي ‹—— n anاکسپونینشل فنکشن یا د جګګڼ بلواک ښايي چی q د بنسټ په توګه لري:

$$a_1 = a_1$$

$$a_2 = a_1.q$$

$$a_3 = a_2.q = a_1q^2$$

$$a_4 = a_3.q = a_1.q^3$$

.

.

.

$$a_n = a_{n-1}.q = a_1.q^{n-1}$$

$$f(n) = a_1.q^{n-1}$$

جمله ۱۸ :

په هندسي پرلپسی کی n- م توکی د لاندې قاعدې له مخي شمیرل کیږي

$$a_n = a_{n-1}.q = a_1.q^{n-1}$$

بیلګی:

1 - a1=3 , q=2 ,n=15 => $a_{15} = 3.2^{14} = 29152$

2 - a1=19,q=1,01,n=100 ;

= 50,8826363919.1,o1^{99} a100=

جمله :

یوه ځمککچیزه پرلپسی د زیاتیز یا مثبت پیلتوکي سره د 1 > q لپاره کلك مونوتون جګیدونکی ده د 0<q<1 لپاره کلك مونوتون لویدونکی ده

(c) ketabton.com: The Digital Library

غوښتنه :

د لاندې پرلپسیو ۱۰ لومړني غړي وشمیرئ

a) $a_k = \frac{k-2}{k+2}$ b) $a_k = \sin\frac{k\cdot\pi}{6}$ c) $a_k = \frac{1}{2}[1+(-1)^k]$

d) $a_k = 1-\left(\frac{1}{10}\right)^k$ e) $a_k = \left(1+\frac{1}{k}\right)^k$ f) $a_k = \cos\frac{k\cdot\pi}{2}$

g) $a_k = k^k$ h) $a_k = (-1)^{k-1}\cdot k^2$

i) $a_1 = 3;\quad a_{k+1} = \frac{1}{2}\left(a_k + \frac{4}{a_k}\right)$ k) $a_1 = 1;\quad a_2 = 2;\quad a_{k+2} = \sqrt{a_{k+1}\cdot a_k}$

l) $a_1 = 3;\quad a_{2n} = a_{2n-1} - 3;\quad a_{2n+1} = a_{2n} + 4\ (n \in \mathbb{N}^*)$

m) $a_k = 2k - 1 + \frac{1+(-1)^k}{2} + (-1)^{\frac{(k+3)(k+4)}{2}}$ n) $a_k = 3 - \frac{1}{2^{k-2}}$

غوښتنه :

پرلپسی د مونوتون خویونو له پلوه وڅیرئ

a) $a_k = \frac{k-2}{k}$ b) $a_k = \frac{k+4}{k}$ c) $a_k = \frac{3k}{2k-1}$

d) $a_k = \frac{1-k^2}{k}$ e) $a_k = 2^k$ f) $a_k = 1 - \sin\frac{\pi}{k+1}$

۱۸ . ۲ الف لړۍ

د هغه کارپلټونکی زدکړي وړاندیز ته بیرته پام راګرځوو، چې د لمړی ورځي 0,05 اجوره د دویمې ورځي 0,1 د دریمی ورځي 0,2 ، د څلورمی ورځي اجوره یی 0,4 ډالره وه او داسی نور.

په هغه وخت کی داسی پوښتنه رامنځ ته شوې:

دk - می ورځي لپاره زدکړی څومره اجوره اخلی ؟

دا مو یوې څمککچیزې لړۍ ته لاربښودوي د $a_k = 0,05.2^{k-1}$ سره.

د هغي k - م توکی دk- می ورځي اندازه ګڼ یا د اجورې معیار دی.

دا په دې مانا چې زدکړی دk - می ورځي لپاره $0,05.2^{k-1}$ ډالره اجوره یا معاش اخلي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که غواړو چی وښایو چی زدکړۍ په لومړيو پنځو ورځو کی څومره اجوره اخلی ، نو باید د لومړیو ورځو اجورې ځککچیزه پرلپسی، د $a_k = 0,05.2^{k-1}$ سره، یو بل سره زیاته کړو

$$0,05+0,1+0,2+0,4+0,8 = 1,55$$

دا زدکړی د لومړیو پنځو ورځولپاره 1,55 ډالره معاش اخلي‌که د لومړیو n ورځو اجوره په Sn سره وښایو ، نو یوه لړۍ د لاندې غړو سره لاس ته راځي :

$$s_1 = 0,05\ .2^0 = 0,05$$
$$s_2 = s_1 + 0,05.2 = 0,05+0,1 = 0,15$$
$$s_3 = s_2 + 0,05.2^2 = 0,15+0,20 = 0,35$$
$$s_4 = s_3 + 0,05.2^3 = 0,35+0,40 = 0,75$$
$$s_5 = s_4 + 0,05.2^4 = 0,75 + 0,80 = 1,55$$
$$s_6 = s_5 + 0,05.2^5 = 1,55+0,160 = 3,15$$

غوښتنه:

پرلپسی ته د ۱۵ - م توکي پورې پر مخ وده ورکړی(مخ وديزه کړی)۰ که د ورکړ شوې پرلپسی ، چی توکي یی a1,a2,a3 ....
دي، دتوکو یو په بل پسی جمعه یا زیاتون جوړ شي

$$s_1 = a_1 \qquad = a_1$$
$$s_2 = a_1 + a_2 \qquad = s_1 + a_2$$
$$s_3 = a_1+a_2+a_3 \qquad = s_2+a_3$$
$$.$$
$$s_{20}=(a_1+a_2+\dots+a_{19})+a_{20} \qquad =s_{19}+a_{20}$$
$$.$$
$$s_{n-1} =(a_1+a_2+\dots+a_{n-2})+a_{n-1} \qquad =s_{n-2} + a_{n-1}$$
$$s_n= (a_1+a_2+\dots+a_{n-1})+a_n \qquad =s_{n-1} +a_n$$
$$s_{n+1}=(a_1+a_2+\dots+a_n)+a_{n+1} \qquad =s_n +a_{n+1}$$
$$.$$
$$.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو یوه پرلپسی...,S1,S2,s3 لاس ته راځي۰

پیژند یا تعریف ۱۸ . ۸:

د یوې پرلپسی ...;a1; a2; a3 څخه جوړه شوې پرلپسی ...S1;S2;S3
د رکورزیف انځورونی $s_1 = a_1; s_n = s_n + a_{n+1}$
سره پرلپسې لړۍ (د پرلپسیو لړۍ) یا لنډ : لړۍ بلل کیږي.

بیلګه :
د ak = 2k سره جوړې شوې پرلپسی څخه جوړه شوې لړۍ په لاندې ډول ده:

$$s_1 = 2^1 = 2$$

$$s_2 = s_1 + 2^2 = 2^1 + 2^2 = 6$$
$$s_3 = s_2 + 2^3 = 2^1 + 2^2 + 2^3 = 14$$
$$s_4 = s_3 + 2^4 = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 30$$
$$\vdots$$
$$s_n = s_{n-1} + a_n = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1} + 2^n$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

بیلګه :

د ak = (2+3k)/(k+1) سره جوړه پرلپسی څخه جوړه شوې لړۍ، په لاندې ډول ده:

$$s_1 = \frac{5}{2}$$

$$s_2 = s_1 + \frac{8}{3} = \frac{5}{2} + \frac{8}{3} = \frac{31}{6}$$
$$s_3 = s_2 + \frac{11}{4} = \frac{5}{2} + \frac{8}{3} + \frac{11}{4} = \frac{95}{12}$$
$$s_4 = s_3 + \frac{14}{5} = \frac{5}{2} + \frac{8}{3} + \frac{11}{4} + \frac{14}{5} = \frac{643}{60}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$s_n = s_{n-1} + \frac{2+3n}{n+1} = \frac{5}{2} + \frac{8}{3} + \frac{11}{4} + \frac{14}{5} + \ldots + \frac{2+3n}{n+1}$$

پوښتنې:

د لاندې پرلپسیو څخه جوړه شوې لړۍ توکي Snورکړئ

a) $a_k = 2 \cdot 5^{k-1}$ b) $a_k = -3 \cdot 2^{k-1}$

c) $a_k = 5 \cdot 0{,}2^{k-1}$ d) $a_k = 4 \cdot (-3)^{k-1}$

پیژند ۱۸ . ۹ :

د اریتمیتیکي پرلپسی توکو یو له بل سره زیاتون یا جمعه په پام کی نیسو، دا څه چی لاس ته راځي، هغه اریتمیتیکي لړۍ پرلپسې (لنډ: لړۍ) بولو:

sn = a1 + a2 + ... + an

موږ دلته بیا پیل بیلګه را اخلو، چی د اریتمیتیکي لړۍ (داد پرلپسی زیاتون پرلپسی ده چی د لړۍ پرلپسي یی غواړو ونومو او په لنډه توګه یی له دې وروسته »لړۍ « و بولو) زیاتون او په ټولیزه توګه لړی زیاتون وشمیرو. ټاکونکی زیاتون له مختلفو لورو موږ دوه واره لیکو، چی دواړه هغي پسی زیات کړی شو یا یي زیاتون ونیولی شو:

$s_{100} = 3+7+11+\ldots +395 + 399$	$s_{100} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{n-1} + a_n$
$s_{100} = 399+ 395+\ldots + 11 + 7 + 3$	$s_{100} = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} \ldots + a_2 + a_1$

$$2s_n = (a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+\ldots+(a_n+a_1)$$

$$2s_n = (a_1+a_n) + (a_1+ d + a_{n-1}) +\ldots + (a_1 + (n-1).d + a_1)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$2s_{100} = 402 + 402 + 402 + ..$ $\qquad 2s_n = (a_1+a_n)+(a_1+a_n)...+(a_1+a_n)$

$+402 + 402$

$2s_{100} = 100.402$ $\qquad 2s_n = n.(a_1+a_n)$

$s_{100} = 50.402$

$s_{100} = 20100$ $\qquad s_n = n(a_1 + a_n)/2$

د پورته شميرني سره سم د اريتميتيکي لړۍ زياتون دئ: $s_n = \dfrac{n(a_1 + a_2}{2}$

که دلته د an=a1+(n-1)d ځاي په ځاي شي او د اسانتيا لپاره کموتاتيو قانون وکارل شي، دا په دې مانا چې n /2 ښي خوا ته راوړو، نو لاس ته راوړو:

$$s_n = \frac{(2a_1 + (n-1)d)n}{2} = n.a_1 + \frac{(n-1)dn}{2}$$

بيلګې:

لومړی: $a_a = 3; d = 7; n = 50 => s_{50}(2.3 + 49.7)50/2 = 8725$

کنترول: $a_{50} = +49.7 = 346$ او له دې

$$s_{50} = \frac{(3+346)50}{2} = 8725$$

دويم- يو ميراث د شپږو ورونو ترمنځ داسی ويشل کيږي چې هر يو مشر د ورپسی مشر ورور څخه 470 0افغاني زياتي اخلي، د ځوان ورور 17000 افغانی رسيږي. معلوم کړئ چې ميراث څومره دئ او هر يو ورور څومره ميراث اخلي؟

a1=17000;d=4700 ,s6=6/2(2.17000+5.4700)=172500 افغانئ

ورونه په لاندې ډول پيسی اخلي

17000 افغانی ،21400 افغانی، 26400 افغانی ،

31100افغانی ، 35800 افغانی او 40500 افغانی.

لکه څنګه چې د اريتميتيکي لړۍ زياتون پيداکيږي، همداسی د هندسي لړۍ زياتون هم پيداکيدی شي. عمومي فرمول به په پورتني ۱ - بيلګه کی ځانګړی يا ځانيزشي

(c) ketabton.com: The Digital Library

(مشخص). د زیاتون فرمول لاس ته راوړلو لپاره د لړۍ sn څخه په q پراخه شوې لړۍ کموو. په دې ډول لړی لږو توکو ته لږیږي:

۱۸ . ۲ الف .۱ ځمککچیزې یا هندسي لړېپرلپسې (لنډ: لړی):

د ځمککچیزې پرلپسی څخه جوړه شوې لړی ځمککچیزه لړی بلل کیږي.
د هندسي پرلپسی د $a = 3.2^{k-1}$ څخه جوړه هندسي لړی په لاندې ډول ده:

$s_1 = 3.2^0 = 3$

$s_2 = s_1 + a_2 = 3.2^0 + 3.2^1 = 3+6 = 9$

$s_3 = s_2 + a_3 = 3.2^0 + 3.2^1 + 3.2^2 = 3+6+12=21$

.

.

$s_n = s_{n-1} + a_n = 3.2^0 + 3.2 + 3.2^2 + 3.2^3 + .. + 3.2^{n-1}$

.

.

جمله : (اکسپلیځیت انځورونه):

د ځککچیزې پرلپسی د ak = a1 +(k- 1).d توکي سره جوړې پرلپسی څخه جوړې شوې هندسی لړۍ لپاره صدق کوي:

Sn = a1+a2q+a3q²+...+a1qn-1=a1(qn-1)/(q-1);

q|=0;Sn=n.a1 q = 1

اوبی: د $q \neq 1$ لپاره باور لري:

$$s_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1}$$

$$s_n \cdot q = \quad a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n$$

$$s_n - s_n \cdot q = a_1 \quad - a_1 q^n$$

$$s_n (1-q) = a_1 (1 - q^n)$$

$$s_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

غوښتنه: اوبی د $q = 1$ لپاره د ګرانو لوستونکو د کور کار دی.

دلته یو بل ډول ښوونه پلی کوو: پرلپسی د-n ام غړي $a_n = 3.2^{n-1}$ سره ورکړ شوې.
دلته په دې توګه د لړۍ غړي لړو غړو ته رالبړيږي.

$$s_{15} = 3 + 6 + 12 + \ldots + 24576 + 49152 \qquad s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots a_{n-1} + a_n \qquad +$$

$$s_{15} \cdot 2 = 6 + 12 + \ldots + 49152 + 98304 \qquad s_n \cdot q = a_1 \cdot q + a_2 \cdot q + \ldots a_{n-1} \cdot q + a_n \cdot q \qquad -$$

$$s_{15} - s_{15} \cdot 2 = 3 - 98304 \qquad s_n - s_n \cdot q = a_1 - a_n \cdot q$$

$$s_{15}(1-2) = 3-98304 \qquad s_n(1-q) = a_1 - a_n \cdot q$$

$$s_{15} = (3-98304)/(-1) \qquad s_n = (a_1 - a_n \cdot q)/(1-q) = (a_1 - a_1 \cdot q^n)/(1-q)$$

$$s_{15} = 98401 \qquad s_n = a^1 \cdot (1-q^n)/(1-q)$$

له کمون یا کمښت وروسته د لړۍ په کښه لور ټيك(يواځی) پورته ليکی لومړی توکی او د لاندې کرښی اخرنی توکی پاتيږي، نور ټول توکی يوبل سره لرې کوي، د بيلګي په توګه $a_2 - a_1 \cdot q = 0$ او يا $a_n - a_{n-1} \cdot q = 0$
دا روښانه ده چی q نه ارزښت صفر او نه ارزښت ۱ اخستلی شي ، په لومړي حالت که به مو پرلپسی
$a_1, 0, 0, 0, 0 \ldots\ldots$
لرودی او په دوهم حالت که مو د پرلپسي a_1, a_1, a_1, a_1سره سر او کار وي

بيلګي:

$$1 - 7; -21; 63; -189: \ldots\ldots q = -3; a_1 = 7$$

s_7 غوښتونکی

$$s_7 = 7 \cdot ((-3)^7 - 1) / -3 - 1 = -15316 / -4 = 3829$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کنترول:

$$a_7 = a_1 . q^6 = 7 . (-3)^6 = 5103 \quad , s_7 = 5103.(-3)^7 - 1/(-3)^7 - (-3)^6 :$$

$$= 5103.2188/2916 = 3829$$

۱۸ . ۲ الف ۲ اریتمیتیکي لړی

دلته غواړو چی یو ځل بیا لنډ مګر د یوه لوي سرليك په څير اریتمیتیکي لړۍ ته یو نظر واچوو .یوه د اریتمیتیکی پرلپسی منځ ته راغلی یا جوړه شوې لړی اریتمیتیکی لړی نوموو. د

$$ak = 15 + (k - 1).4$$

سره جوړه اریتمیتیکي پرلپسی څخه جوړه شوې لړی په لاندې ډول ده:

$$s_1 = a_1 = 15$$

$$s_2 = s_1 + a_2 = 15+(15+4)=15+19=34$$

$$s_3 = s_2 + a_3 = 15+(15+4)+(15+2.4) = 15+19+23=57$$

.

.

$$s_n = s_{n-1} + a_n = 15+(15+4)+(15+2.4)+..+(15+(n-2).2+(15+(n-1).4$$

.

.

.

جمله : (د اریتمیتیکی لړی اکسپلیڅیت انځورونه):

د $ak = a1+(k-1).d$

سره اریتمیتیکی پرلپسی څخه جوړه شوې لړی sn اریتمیتیکي لړی لپاره صدق کوي:

$$s_n = a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+..+(a_1+(n-1)d = (n /2) (2a_1 + (n-1)d)$$

اوبی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$s_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + (a_1 + (n-3)d) + (a_1 + (n-2)d) + (a_1 + (n-1)d)$$
$$s_n = (a_1 + (n-1)d) + (a_1 + (n-2)d) + (a_1 + (n-3)d) + \ldots + (a_1 + 2d) + (a_1 + d) + a_1$$

$$s_n + s_n = [2a_1 + (n-1)d] + [2a_1 + (n-1)d] + [2a_1 + (n-1)d] + \ldots + [2a_1 + (n-1)d] + [2a_1 + (n-1)d] + [2a_1 + (n-1)d]$$
$$2 \cdot s_n = n \cdot [2a_1 + (n-1) \cdot d]$$
$$s_n = \tfrac{n}{2} \cdot [2a_1 + (n-1) \cdot d]$$

غوښتنه:

وښايي چې sn=(n/2)(2a1+(n-1)d د sn=(n /2)(a1+an)
سره په يوه مانا دي

۱۸ . ۶ د پرلپسی او لړیو پولی

موږ تراوسه داسی لړیو سره سراو کار لروده چی اخرنی توکي یی لاس ته راوړونکي وو. داسی لړۍ پایلړۍ بلل کیږي. داسي فکر هم کیدی شي چي د لړۍ اخرني غړي موجود نه وي، يعني لړۍ دې په خوښه دوام پيدا کولی شي. په عمل کی داسی پرابلمونو سره مخامخ کیږو چی دا مو ناپای لړیو ته هڅوي. دا څرګنده ده، چي داسی لړۍ اريتميتيکی لړۍ نه دي، کم له کمه به ی اخرنی غړی په پوښتنه کی راتلی او يا د پاډيرو غړو زياتون، په اريتميتيي لړۍ کی بي مفهومه دی، څکه چی دواړه لويي د nد ارزښت سره په ټولو پولو لويږي په هندسی لړيو کی هم په يوه ناپای لړۍ کی د اخرني غړي او يا زياتون پوښتنه بي مفهومه ده. دا روښانه ده چی د پيل غړی د|q| سره څل له امله تل جګيږي. دا د مثبت او همداډول د منفی q لپاره باور لري.

بيلګي:

۱ - اريتميتيکي لړۍ 2+3+4+5+..... يو لاس ته راوړونکی د زياتون يا جمعی ارزښت نه لري، څکه چی هر راتلونکی زياته وونی د ټولو پولو لوييږي ياجګيږي۰

۲ – څمککچيزه يا هندسي لړۍ 2+3+4,5+6,75+10,125+15,1875+...... د لومړي توکي 2 = a1 او د ويش q = 1,5 سره په ټولو پولو لوييږي. يا جګيږي نه اخر توکی او نه د جمع ارزښت معلوميدی شي. د پای توکوګڼ زياتون sn او اخرنی توکی an شميريدونکی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۳ - ناپای ځمککچیزه یا هندسي لړۍ
1,5-3+66-122+24-48+966-....... د a1 =1,5 او q= -2
سره پای ارزښت زیاتون نه لري، ځکه چی د توکو مطلقه ارزښت د هر مخکي پولی څخه جګیږي یا لوییږي .له دې سره به ځرګنده شوې وي چی کله د ناپای هندسي لړۍ د زیاتون ارزښت پای دی.

پیلبیلګه :
یو سخی سړی غواړي د معیوبو هستوګنځی ته بسپنه ورکړی . په لمړۍ میاشت کی دی ۱۰۰۰ افغانی بسپنه ورکوي او په نورو راتلونکو میاشتو کی د هغی د مخه میاشتی نیمايي یعنی په دومه میاشت کی ۵۰۰ افغانی او په دریمه کی ۲۵۰ افغانۍ او داسی نور. دلته a1=1000او q=1/2دي. دوخت د کموالي له امله دا لړی باید پای لړۍ وي ، مګر موږ دې پوښتنی ته تیوریتیکي ځواب ورکوو.
د پای ځمککچیزو لړیو لپاره کیدی شي دلته د زیاتون له
فرمول $s_n = 1000(1-0,5^5)/ (1-0,5)$ څخه کار واخستل شي، که چیرې n یو ناپاي لوي ارزښت نیولی شوی. که په دې فرمول کی موږ ته معلوم ارزښتونه کیښول شي، نو لاس ته راځي:

$$s_n = 1000(1-0,5^5)/ (1-0,5)$$

اوس کیدی شي ولیکو $s = 1000(1-0,5^n)/(1- 0,5) = 2000.(1-(1/ 2)^n)$

که n له ټولو پولو تیر شي، باید د $(1/2)^n$ له امله دا مات (1/2) تل کوچنی شي.
دې مات (1 /2) باندې کیدی شي، چی د لویو n توکو لپاره، بالاخره صرف نظر وشي.
دلته روښانوي چی په دې توګه د زیاتون ارزښت یوه ناپای هندسي لړۍ
1000+500+250+125+65,50+32,75+......
جوړوي، کومه چی ځان و 2000 ته نزدي کوي او هغه ته هیڅ نه رسیږي. دا سړی زیات له زیاته کیدی شي 2000 افغانی خیرات ورکړي.

یادونه : هغه د دې برخې په سر کې پوښتنه هم په همدې توګه ځواب کیدی شي۰

پرلپسی او د پرلپسی لړۍ په لوړو شمیرپوهنوکی غوره رول لوبوي« ډیرې ښوونی (اوبوونې) په دې ولاړې دي، چی ایا یوه ټیك ټاکلی پرلپسی یوې معلومی یا ټاکلی پولی ته هڅه کوي او که نه؟ چی په اول حالت کی پرلپسی(konvergent لیمټ لرونکی

(c) ketabton.com: The Digital Library

یاپوله لرونکي(بلل لکیږي او په دوهم حالت کی پرلپسی (divergent لیمټ یا پوله نه لرونکی) بلل کیږي.

بیلګه :

د ... مخ په اول او په دریمې بیلګو کی راوړل شوې پرلپسی دیورګنت یا پوله نه لرونکی ، په ۲ –مه بیلګه کی پرلپسی کونورګنت یا پوله لرونکی ده او د صفر لور ته هڅه کوي یا صفر ته کونورګنت ده یعني ددې پرلپسي پوله صفردی. او ۴ -مه بیلګه کی پرلپسی پوله لري او د ۳ لور ته هڅه کوی، یعني پوله یی ۳ دی.

پرلپسی شته چی د جګیدو سره یوه ټاکلی ګڼ ته په خوښه ورنزدې کیدی شي.د دې پرلپسی د په خوښه لویو غړو او د دې ګڼ کمون ترمنځ بالاخره دومره کوچنی کیږي، چی په جبشمیرني باندې هم نه شي شمیرل کیدی .

موږ د پرلپسیو دا ډول ځاننیونی، بی له جب شمیرنی یا جبشمیري، په لاندې بیلګو کی څیړو.

د پرلپسیو غړي

1 ; 1 /2; 1 /3 ; 1 /4 ;....| 0 ; 1 / 3 ; 2 / 4 ; 3 /5 ; 4 /6;.. | 3 /29 /4 ; 15 /8 : 33 /16

1;1/2;1/3;1/4;..|0;1/3;2/4;3/5;4/6;..
|3/29/4;15/8;33/16

د لاندې سره

$a_k = 1/k$ | $a_k = (k-1)/(k+1)$ | $a_k = 2+(-1/2)^k$

د k د جګیدو سره تل دا پرلپسځانونه ځانونه لاندې ګڼونو ته نزدې کوي

g = 0 | , g = 1 | g = 2

د ګراف ټکي یی تل د جګیدونکی غړی نمرې k سره د

دx - محور سره غبرګ | دx - محور سره غبرګ | x -محور ته

د y = 2 سره د y=1 سره او په ریښتونی

له لاندې او پورته بدل له لاندې راتلونکي

له پورته راتلونکي

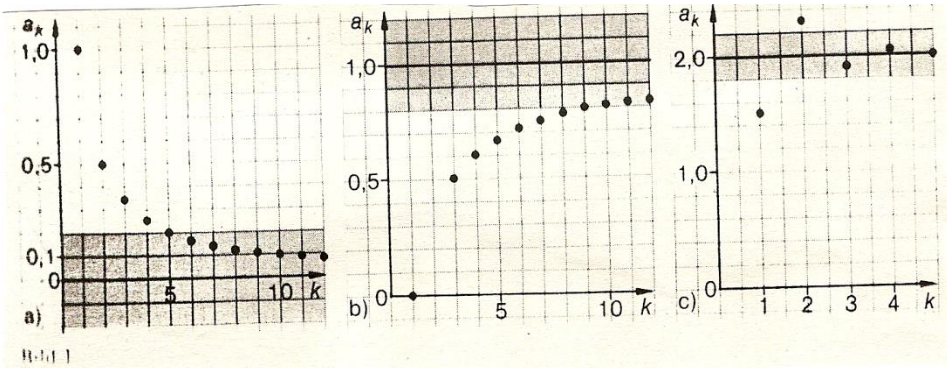
راتلونکی

که په کرښه یو دواړو لورو ته پټی وکښل شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $y = 2$ سره   د $y = 1$ سره   د $y = 0$ سره

نو د پوره لويي k نمره توکي سره د پرلپسی ټول غړی په دې پټی کی دننه پراته دي.



دا لاندې ديفرنځ يا کمون

$\lvert a_k - 2 \rvert$	$\lvert 1 - a_k \rvert$	$\lvert a_k - 0 \rvert$

دا مانا لري، چی د جګيدونکی k نمرې توکيه خورا کوچنی کيدی شي. دا پوښتنه مو چی د کوم غړی a_k لپاره دا کمون د بيلګي په توګه له $0,0001$ کوچنی کيدی شي، لاندې ناسمساوات ته را هڅوي

$$|a_k - 0| < 0{,}0001$$
$$\left|\frac{1}{k} - 0\right| < 0{,}0001$$
$$\frac{1}{k} < 0.0001$$
$$k > 10000$$

$$|1 - a_k| < 0{,}0001$$
$$\left|1 - \frac{k-1}{k+1}\right| < 0{,}0001$$
$$\left|\frac{(k+1)-(k-1)}{k+1}\right| < 0{,}0001$$
$$\frac{2}{k+1} < 0.0001$$
$$\frac{2}{0{,}0001} < k+1$$
$$19999 < k$$

$$|a_k - 2| < 0{,}0001$$
$$\left|2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^k - 2\right| < 0{,}0001$$
$$\left|\left(-\frac{1}{2}\right)^k\right| < 0{,}0001$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)^k < 0{,}0001$$
$$k \cdot \lg\tfrac{1}{2} < \lg 0{,}0001 \| : \lg\tfrac{1}{2} < 0\ (!!)$$
$$k > \frac{\lg 0{,}0001}{\lg\frac{1}{2}}$$
$$k > \frac{-4}{-0{,}3010}$$
$$k > 13{,}29$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې مانا، : د ټولو پرلپسی غړو د

$k > 10000$ | $k > 19999$ | $k > 13$

سره کمون $|a_k - g|$ له 0,0001 کوچنی دی .

د ګراف لپاره باور لري، چی دا ټول ټکي د یوې پټۍ یا تسمې په دننه کی پراته دي

سور یي 2.0,0001 په کرښه د مساوات

$y = 0$ | $y - 1$ | $y = 2$

$y = 0 \quad y = 1 \quad y = 2$

سره پروت وي .

که دا د 0,0001 په ځاي کی یو په خوښه کوچنی رییل ګڼ ورکړ شي، او وله دې وغوښتل شي چی کمون یی له دې ګڼ کوچنی دی نو په ورته توګه مو لاندېنامساواتو ته لاربښودوي.

$\lvert a_k - 0\rvert < \varepsilon$	$\lvert a_k - 1\rvert < \varepsilon$	$\lvert a_k - 2\rvert < \varepsilon$
$\left\lvert\frac{1}{k} - 0\right\rvert < \varepsilon$	$\left\lvert\frac{k-1}{k+1} - 1\right\rvert < \varepsilon$	$\left\lvert 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^k - 2\right\rvert < \varepsilon$
$\frac{1}{k} < \varepsilon$	$\left\lvert\frac{(k-1)-(k+1)}{k+1}\right\rvert < \varepsilon$	$\left\lvert\left(-\frac{1}{2}\right)^k\right\rvert < \varepsilon$
$k > \frac{1}{\varepsilon}$	$\left\lvert\frac{-2}{k+1}\right\rvert < \varepsilon$	$\left(\frac{1}{2}\right)^k < \varepsilon$
	$\frac{2}{k+1} < \varepsilon$	$k \cdot \lg\frac{1}{2} < \lg\varepsilon \,\|\, : \lg\frac{1}{2} < 0\ (!!)$
	$\frac{2}{\varepsilon} < k+1$	$k > \frac{\lg \varepsilon}{\lg \frac{1}{2}}$
	$\frac{2}{\varepsilon} - 1 < k$	

دا په دې مانا چی : د ټولو پرلپسیو لپاره د

$k > 1/\varepsilon$ | $k > 2/\varepsilon - 1$ | $k > \log \varepsilon / (\log(1/2))$

سره کمون $\frac{q^n}{1-q}$ دی .

پرلپسی له دې خویونو سره کونورګنت بلل کیږي او ګڼ g یی پوله.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند ۱۸ .۱ :

یوه پرله پسی کونورګنځ Konvergent (لاتین convergere یو د بل په لور ور ځغلیدل یعني یو بل ته ورنزدېکیدل(بلل کیږي یعني د یوې ټاکلی پولی په لور هڅیږی، کله چی د هغی غړي د جګیدونکی ایندکس n سره یوې پولی ته په خوښه نزدې شي. یوه لړۍ کونورګنت یا پوله لرونکی بلل کیږي، کله چی د برخه زیاتون پرلپسی د جګیدونکی n سره یوې پولی ته په خوښه نزدې شي.

هغه پرلپسی چی د صفر په لور هڅیږي صفرپرلپسی یی بولو هغه پرلپسی چی یوې ټاکلی پولی ته نه هڅیږي .دیورګنت بلل کیږی ») دا وروسته ه تر څیړنی لاندې نیول شوي دي.

جمله :

د ځمککچیزې یا هندسي لړی پولې تج ت لنې یا کونور ګنت لپاره شرطونه:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |q| < 1$$

که $|q|<1$ وي ، پس د پای ځمککچیزې لړی لپاره د زیاتون فرمول داسی دی

$$s_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$$

د q^n ارزښت څخه تیږبدی شو یعنې ترې صرفنظر کیدی شي، که n پوره لوي وټاکل شي.

جمله :

دناپای ځککچیزې لړۍ ...+a1+a1.q+a1.q²+a1.q3 د زیاتون sn سره پوله s = a1 / (1-q) تیك هلته لري، کله چی|q|<1

$$n = n_0(\varepsilon); .... (18.7)$$

وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله :

هره پرلپسی د $a_k = \frac{b}{k^n} (b \in R; n, k \in N)$ سره یوه صفر پرلپسی ده

جمله:

هره پرلپسی د $a_k = cq^n (c \in R$ سره د1>|q| لپاره یوه صفرپرلپسی ده۰

دلته غواړو چی دا د پرلپسی د پولی کلیمه لږ نوره هم زوره کړو.
د یوې پرلپسی د غړو an ځاننیونی څیړنه د تل جګیدونکي n لپاره،وایو چی:
که n د oe (ناپای) په لوروهڅیږي او یا لنډ n—›oe ، نو دا مو د پولی ارزښت کلیمي
ته بیایي او یا کونورګنځ (convergence). موږ پرلپسی{ an}={1/n} په پام
کی نیسو، د جګیدونکي n سره، ګورو چی د پرلپسی غړي تل 0 ته په خوښه یا په زړه
پورې ور نزدې کیږي .
که سړی هرڅومره کوچنی ګڼي 0< ε وټاکي د یوه معلوم($n = n_0(\varepsilon)$ د لته) $n_0(\varepsilon)$ د
ε په واک کې دی) څخه وروسته ټول ګنونه د0 په ε -چاپیریال کی پراته دي

$$|a_n| = \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \forall\, n > n_0(\varepsilon). \tag{18.1}$$

سړي کړی شي چی دا n دلته په ساده ډول ورکړي. د) ۱۸ . ۱ (له امله دی

$$n_0(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}. \tag{18.2}$$

د

100 / 1 =

لپاره . 100 = n0 نو | 100 / 1 > | an د ټولو 100 < n لپاره، یعني د n = 101, n
102 = لپاره. د = 1 / 1000000 لپاره لرو = ( )n0 , n = 103........
1000000پس, | 1000000 /1 > | an د ټول 1000000 < n لپاره

په لاندې حالت کی سړی وایي: چی پرلپسی
{ 1 {n/
کنورګنت ده. هغه د پولې 0 = a لور ته کونورګنت کیږي. د دې لپاره لیکو)

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

او یا په ساده ډول

$$\frac{1}{n}\to 0 \qquad (18.3)$$

(د 1/n لیمس د n—>oe لپاره په 0 مساوي دی او یا ساده 1/n د0 په لور ځي)

د $\{a_n\}=\{(-1)^n(1+\frac{1}{n})\}$ لاندې پرلپسی په څیرنه کره لاس ته راځي: د جوړه یا جفت n لپاره پرلپسی an د+1 لورته نزدې کیږي او د ناجوړه یا طاق n لپاره پرلپسی د-1 لورته نزدې کیږي. د لته سړی د دوه پولو +1 او -1 څخه نه غږیږي بلکې دپرلپسی ددوه ډیرۍ شوو ټکو یا ځاي راټولشوو ټکو څخه . پرلپسی کونورګنت نه ده بلکه دیورګنت (divergence(ټیګ : ناټاکلی دیورګنس)ده ۰

پرلپسی {an}={n2} هم دیورګنت ده. دا چي an د جګیدونکی n سره د oe یا ناپای لورته ځي پس د هرڅومره لوي ارزښت K څخه اوړي یا جګیږي، نو سړی د oeپه لور د ټاکلی دیورګنت څخه غربږي.

$$\lim_{n\to 0} n^2 = +\infty \vee n^2 \to +\infty; .... (18.4)$$

په پورته کې V د یا لپاره ځای په ځای ده

له دې پیل یادونوڅخه اوس باید د پولو(حدونو) کلیمی کره وپیژندل شي:

پیژند ۱۸ . ۲ :

یو پرلپسی $\{a_n\}$ { an } پوله یا حد a لري

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow a_n \to a; .... (18.5)$$

که د هر یوه (هرڅومره کوچنی هم) $\varepsilon > 0$

< 0

لپاره یو $n_0 = n_0(\varepsilon)$

داسی موجود وي چی باوري وي

$$|a_n - a| < \varepsilon; .... (18.6)$$

د ټولو $n = n_0(\varepsilon); .... (18.7)$

وایو چی پرلپسی } an { کونورګنت یا په بل عبارت پرلپسی } an { د پولی a په لور کونورګنت کیږي .که پرلپسی داسی پوله ونه لري، نو دیورګنت بللکیږي(یا دیورګنت کیږي) .

(c) ketabton.com: The Digital Library

که یوې دیورګنتی پرلپسی } an { و هر (په خوښه لوی) ګن K لپاره یو)n0 = n0(K
داسی موجود وي چی باوري وي

$$a_n > K \quad \text{یا} \quad a_n < -K \qquad (18.8)$$

د ټول

$$n > n_0(K) \qquad (18.9)$$

نو د پرلپسی څرګند یا معلوم دیورګنت بلل کیږي د + oe په لور اویا - oe په لوراو ددې لپاره لیکي

$$\lim_{n\to\infty} a = +\infty \iff (\text{په همدې ډول}) \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \qquad (18.10)$$

یا لنډ:

$$a_n \longrightarrow +\infty \Rightarrow (\text{یا په همدې ډول}) \; a_n \longrightarrow -\infty \qquad (18.11)$$

که یوه پرلپسی دیورګنت او ټاکلی دیورګنت نه وي، نو ناټاکلی دیورګنت بلل کیږي.
ددې پرلپس $\{a_n\} = \{n / n+1\}$، څخه او د لاندې فورم بدلولو

$$a_n = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$$

اټکل کیدی شي چی دا پرلپسی پوله $a = 1$ لري، یعني $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (n/n+1) = 1$

اوس باید د (۱۸ . ۵) تر (۱۸ . ۷) وښوول شي . دا $1 > n/(n+1)$ له امله لاس ته راځي :

$$|a_n - 1| = |[n/(n+1)] - 1| = 1 - n/(n+1) = (n+1-n/(n+1) = 1/(1/n) < 1/\varepsilon$$

د $n_0(\varepsilon) = (1/\varepsilon) - 1 < n \iff n+1 > n$ لپاره .

د $= 1/100$ لپاره لرو $n_0(\varepsilon) = 99$. نود ټولو $n > 99$ لپاره داسې دی

$$|[n/(n+1)] - 1| = 1/(n+1) < 1/100.$$

ددې پورته سره کیدی شي چی تصدیق کړو چی: هر $\varepsilon>0$ ته یو $n_0(\varepsilon)=(1/\varepsilon)-1$
داسی موجود دی چی $|a_n-1|<\varepsilon$ د ټولو $n>n_0(\varepsilon)=(1/\varepsilon)-1$ لپاره دی.

دا ساده بیلګه د تعریف ۱۸ . ۲. پرابلم په ګوته کوي. دا تعریف جوړونکی نه دی، دا نه وایي چی پوله څرنګه پیداکیدی شي .مخکي له دې چی پولې ته تګ (کونورګنڅ Konvergenz) وښوولی شو، نو پولې a ته ضرورت دی . مخکي له دې چی کونورګنڅ
اټکل کیدی شي چی دا پرلپسی پوله $a = 1$ لري، یعني

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (n/n+1) = 1$$

اوس باید د (۱۸ . ۵) تر (۱۸ . ۷) وښوول شي . دا $n/(n+1) < 1$ له امله لاس ته راځي:

$$|a_n - 1| = |[n/(n+1)] - 1| = 1 - n/(n+1) = (n+1-n/(n+1) = 1/(1/n) < 1/\varepsilon$$

د $n+1 > n \iff n > (1/\varepsilon) - 1 = n_0(\varepsilon)$ لپاره .

د $= 1/100$ لپاره لرو $n_0(\varepsilon) = 99$. نود ټولو $n > 99$ لپاره داسې دی

$$|[n/(n+1)] - 1| = 1/(n+1) < 1/100.$$

ددې پورته سره کیدی شي چی تصدیق کړو چی: هر $\varepsilon>0$ ته یو $n_0(\varepsilon)=(1/\varepsilon)-1$
داسی موجود دی چی $|a_n-1|<\varepsilon$ د ټولو $n>n_0(\varepsilon)=(1/\varepsilon)-1$ لپاره دی.

ددې پورته سره کیدی شي چی تصدیق کړو چی: هر 0<

$\varepsilon>0$ ته یو $n_0(\varepsilon)=(1/\varepsilon)-1$
$|a_n-1|<\varepsilon$ د
داسی شته دی چی
د ټولو $n>n_0(\varepsilon)=(1/\varepsilon)-1$ لپاره دی .

دا ساده بیلګه د پیژند ۱۸ . ۲. پرابلم په ګوته کوي. دا تعریف جوړونکی نه دی، دا نه وایي چی پوله څرنګه پیداکیدی شي .مخکي له دې چی پولې ته تګ (کونورګنڅ Konvergenz)وښوولی شو، نو پولې a ته اړتیا شته دی . مخکي له دې چی

(c) ketabton.com: The Digital Library

کونورګنځ (ټولې تج تلنه) وښايو نو بايد پوله مو پيژندلي وي يا کم له کمه مو ګومان په راغلی وي.
په ټوليزه(عمومي) توګه د $n_0(\varepsilon)$ شميرل هم د ستونځو ډك دي. د پولی عملي شميرلو لپاره داسی عمليو يا کاره ونو ته اړتيا ده، چی بی د پيژند ۱۸ . ۲ د هر وار استعمال څخه ټولی راپيدا کړی شو. له دې پرابلم سره ۱۸ . ٤ -امه برخه ځان مشغولوي.
کله کله دا بسوالی يا بسيا کوي چی سړی دومره پوه شي چی ايا پوله وجود لري يا شته دئ (ايا کونورګنت کيږی) بی له دې چی هغه وپيژني او يا يی وشميري. داسی د موجوديت ويناوي يواځي د کونورګنځ کريتيرين (- خويونه) کولی شي، له کومو څخه چی لاندې يو ورکول کيږي. دې ته بايد ګوته ونيسو چی دا کريتيرين د مخه د پولی پو هيدل ضرور نه نيسي) دا د مخه نيونه نه ده يعني فرضيه نه ده) .

جمله ۱۸ . ۱:

هره بنده (محدوده) مونوتون پرلپسی an کونورګنت ده ۰

دا کريتيريوم څرګند د ليدلو دی. که يوه پرلپسی تل جګيږي (کميږی ،ټيټيږي) او ټاکلی يا معلوم پای ارزښت K څخه نه اوړي(K څخه نه ټيټيږي) نو بايد an يوځاي کی راپنډ شي. دا د مونوتوني له امله يواځي په يوځاي کی کيدی شي.

يادونه : څه ګنونه چی په يوځاي کې سره ډير راټول شي ما ورته ډيری ليکلې، دا ښه نه ده، ځکه، چی ډيری مې د ډيری ياني د سيټ لپاره کارولی ، نو دلته ليکم، چې »راپنډ« شي۰

جمله ۱۸ . ۱ د بيلګي په توګه په دريمه برخه کی راوړلشوي، د طبعي لوګاريتم بنسټ په څيرګنې e سره اړيکو يا رابطو کی استعمال لري . سړی د يو څه ستونځو سره ښوولی شي چی لاندې باوري دی

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < 3.$$

له دې امله دا پرلپسی

$$\{a_n\} = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$$

مونوتون او بنده (محدوده) ده او د جملی ۱۸ . ۱ له امله کونورګنت ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ددې پوله $e = 2, 71828$ ده (پرتله یا مقایس برخه ۳ . ۱)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e. \tag{18.12}$$

۱۸ . ۴ د پولی شمیرنه

په دې برخه کی غواړو چی قاعدې ورکړو د کومو په مرسته چی د پیژندلشوو پرلپسی د کونورګنت څخه د نورو کونورګنت لاس ته راوستی شو، او همداسی، چی د هغی په مرسته د پیژندلشوو پرلپسیو د پیژندل شوي پولی ارزښت په مرسته د نورو پرلپسیو پولی ارزښت شمیرل کیدی شي.
لاندې بنسټیزه جمله ښاي چی د ځانګړو شرایطو لاندې د ګنونو پرلپسیو سره همداسی شمیرل کیدی شي لکه پخپله د ګنونو سره.

جلمه ۱۸ . ۲ :

که پرلپسی $\{a_n\}$ او $\{b_n\}$ (پای)پوله ارزښت a اوb ولري ، یانې

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b, \tag{18.13}$$

وي، نو باوري دي

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b, \tag{18.14}$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b, \tag{18.15}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b},\ b_n \neq 0, b \neq 0, \tag{18.16}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = a^{b},\ \ a_n > 0, a > 0, \tag{18.17}$$

$$\lim_{n\to\infty} \log a_n = \log a,\ a_n > 0, a > 0. \tag{18.18}$$

دا جمله دوه ګوني وینا کوي: که د پرلپسیو غړو an او bn د کونورګنت عددونو پرلپسي د جمعې، تفریق، ضرب (زیاتون کمون ، ځل) او ویش، پوتنځ یا لوګاریتم نیولو ، د یوې نوې پرلپسي یا ترادف غړي لاس ته راولي نو دا نوې پرلپسي (ترادف) کونورګنت ده او

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پولی ارزښت یی په ترتیب د کونورګنتو پرلپسیو یا ترادفون جمعه،تفریق،ضرب(زیاتون، کمون، ځل)، ویش ، پوتنځ او لوګاریتم دی.
په لاندې کی غواړو یواځی اړیکی (۱۸ . ۱۴) وښایو. د ښوولو لپاره یی د پولی ارزښت پیژند ۱۸ . ۲ ځخه غواړوکار واخلو (استعمال کړو) . نیونی (۱۸ . ۱۳) دا مانا لري، چی هر
< 0
ته یو
($n1$) او یو ($n2$)
داسی شته دی، چي باوري کوي $|a_n - a| < \varepsilon$ دټولو $n > n_1(\varepsilon)$, لپاره ،
$|b_n - b| < \varepsilon$ د ټولو $n > n_2(\varepsilon)$, لپاره‌پس معتبر دي
$|a_n - a| < \varepsilon$ او $|b_n - b| < \varepsilon$ د ټول $n > n_0(\varepsilon) = \max\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\}$
اوس باید یواځي وښایو چی د یوه ټاکلي n چه $|(a_n \pm b_n) - (a \pm b)|$
د هر ε لاندې راټیټیدلی شي. لاندې باور لري

$$|(a_n \pm b_n) - (a \pm b)| = |(a_n - a) \pm (b_n - b)| \le |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

د ټولو $n > n_0\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$. لپاره
په دې توګه (۱۸ . ۱۴) وښوول شوه.
د جملی ۱۸ . ۲ استعمال کی باید برسیره په نیونو یا فرضیو، چی په (۱۸ . ۱۵) تر (۱۸ . ۱۸) پورې شوي ټیك په پام کی ونیول شي چی پرلپسی $\{an\}$ او $\{bn\}$ ځرګند پای پولی ارزښتونه a او b باید ولري. که د بیلګي په توګه $a_n \to \infty$, او $b_n \to \infty$, وي، نو فرمول (اجازه نه لرونکی استعمال !) (۱۸ ، ۱۴) په یوه په نامه ناټاکلي افادې په لورځی یعنی $\infty - \infty$,

$$(a_n - b_n) \to \infty - \infty. \tag{18.19}$$

که باور ولري $a_n \to 0, b_n \to \infty$, نو سړی د اجازې نه لرلو استعمال (۱۸ . ۱۵) یوه بله ناټاکلی افاده لاس ته راولي:

$$(a_n \cdot b_n) \to 0 \cdot \infty. \tag{18.20}$$

په لاندې کې bzw. د همداسې‌په معنا دی.

$a_n \to 0,\ b_n \to 0$ bzw. $a_n \to \infty,\ b_n \to \infty,$

$$\frac{a_n}{b_n} \to \frac{0}{0} \text{ bzw. } \frac{a_n}{b_n} \to \frac{\infty}{\infty}. \tag{18.21}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د (۱۸ . ۱۷) استعمال مو د $a_n \to 0,\ b_n \to 0$ همداسې د $a_n \to \infty,\ b_n \to 0$ همداسې $a_n \to 1,\ b_n \to \infty$ حالتونو کې مو درې نورو ناټاکلو افادو ته لاربنود وي.

$$a_n^{b_n} \to 0^0 \quad \text{bzw.} \quad a_n^{b_n} \to \infty^0 \quad \text{bzw.} \quad a_n^{b_n} \to 1^{\infty}. \qquad (18.22)$$

په پورته انځورشوو اړيکو کی لاندې افادې

$$\infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0^0, \quad \infty^0, \quad 1^{\infty} \qquad (18.23)$$

ناټاکلی افادې بلل کيږي.

داسې پرلپسی چی د جملې ۱۸ . ۲ فورمال استعمال څخه ناټاکلو افادو ته لاښودوي ، ديورګنت او يا به مختلفو ارزښتو ته کونورګنت وي. دا يوې ځانګړی څيړنی ته اړ دي.

مخکی له دې چی داپوښتنی ځوابوو، نو بايد يوڅو تيپيکي پرلپسی وڅيړل شي، کومی مو چی په نامه ټاکلو افادو ته لاربنود وي، که څه هم د جملی ۱۸ . ۲ نيوني يا فرضيې پوره نه وي.

که an —>+oe او bn —>+oe باور ولري نو طبعآ لاس ته راځي

$a_n + b_n \to \infty + \infty = \infty$	.........(18.24)
$a_n . b_n \to \infty . \infty = \infty$	.........(18.25)
$a_n - b_n \to \infty - \infty = \infty$	.........(18.26)

دا اړيکي (۱۸ . ۲۴) تر (۱۸ . ۲۵) طبعآ د ناڅرګندې پولی ارزښت - oe لپاره هم باوري دي.

که an —> a او bn —> oe وي، نو باور لري :

$$a_n + b_n \to a + \infty = \infty, \qquad (18.27)$$

$$a_n \cdot b_n \to a \cdot \infty = \infty, \quad a > 0, \qquad (18.28)$$

$$a_n \cdot b_n \to a \cdot \infty = -\infty, \quad a < 0, \qquad (18.29)$$

$$\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{\infty} = 0, \qquad (18.30)$$

$$a_n^{b_n} \to a^{\infty} = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 < a < 1, \\ \infty & \text{für } a > 1, \end{cases} \qquad (18.31)$$

$$a_n^{-b_n} \to a^{-\infty} = \begin{cases} \infty & \text{für } 0 < a < 1, \\ 0 & \text{für } a > 1, \end{cases} \qquad (18.32)$$

$$b_n^{a_n} \to \infty^a = \infty, \quad a > 0. \qquad (18.33)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لاندې لپاره باور لري :

$$a_n \to 0,\ b_n \to b, \qquad (18.34)$$

$$\frac{b_n}{a_n} \to \frac{b}{0} = \infty,\ b > 0, a_n > 0, \qquad (18.35)$$

$$a_n^{b_n} \to 0^b = \begin{cases} 0 & \text{für } b > 0, \\ \infty & \text{für } b < 0,\ a_n > 0, \end{cases} \qquad (18.36)$$

$$\log a_n \to \log 0 = -\infty,\ a_n > 0. \qquad (18.37)$$

د $a_n \to 0$ او $b_n \to \infty$ لپاره باور لري یا صدق کوي.

$$\frac{a_n}{b_n} \to \frac{0}{\infty} = 0,\ a_n > 0, \qquad (18.38)$$

$$\frac{b_n}{a_n} \to \frac{\infty}{0} = \infty,\ a_n > 0, \qquad (18.39)$$

$$a_n^{b_n} \to 0^\infty = 0,\ a_n > 0. \qquad (18.40)$$

په دې همدا اوس ښوول شوي اړیکو کی لاندې افادې تاکلی افادی دي (نیونه د (۱۸ . ۲۴) تر (۱۸ . ۴۰) پورې دی په پام کي ونیول شي) :

$$\infty + \infty = \infty,\ a + \infty = \infty,\ \infty \cdot \infty = \infty,\ a \cdot \infty = \infty,$$
$$\frac{a}{\infty} = 0,\ \frac{a}{0} = \infty,\ \frac{0}{\infty} = 0,\ \frac{\infty}{0} = \infty,$$
$$\infty^\infty = \infty,\ a^\infty = \infty\ (a > 1),\ a^\infty = 0\ (0 < a < 1), \qquad (18.41)$$
$$0^\infty = 0, 0^a = 0\ (a > 0),\ 0^a = \infty\ (a < 0),$$
$$\infty^a = \infty\ (a > 0),\ \infty^a = 0\ (a < 0),\ \log 0 = -\infty.$$

په لاندې بیلګه کی به یو څو ګنونپرلپسی ورکړ شي، کومی چی د تاکلو افادې په لور لارښودوي) بیايي :)

بیلګه ۱۸ . ۳:

$$n^2 = n \cdot n \to \infty \cdot \infty = \infty, \qquad \sqrt{n} = n^{\frac{1}{2}} \to \infty^{\frac{1}{2}} = \infty, \qquad \frac{1}{n^2} \to \frac{1}{\infty} = 0,$$

$$2^n \to 2^\infty = \infty, \qquad \frac{1}{n^n} = \left(\frac{1}{n}\right)^n \to 0^\infty = 0, \qquad \log\frac{1}{n} \to \log 0 = -\infty,$$

$$\frac{n}{\sin\frac{1}{n}} \to \frac{\infty}{\sin 0} = \frac{\infty}{0} = \infty, \qquad n \cdot \log\frac{1}{n} \to \infty \cdot (-\infty) = -\infty.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

-- ----------------------

هغه پرلپسی چې د ناټاکلو افادو(۱۸ . ۲۳) . په لور مو لاربنودوي، څه ستونځې پېښوي. دا د هوښيارو فورمبدلولو يا ښه بدلون په بنسټ په داسې پرلپسو بدليږي چې څرګنده – يا ټاکلې افادی (۱۸ . ۴۱) په لور مو بيايي يا چې د هغې کونورګنتځانني‌ونې معلوم دي . لومړی دې يو څو ځانګړې پرلپسې وکتل شي:

پرلپسی مو د $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ غړو سره د نا ټاکلی افادې 1^∞ په لور بيايي او د (۱۸ . ۱۲) له مخې پوله ارزښت e لري. سړی ښوولی شي (دلته دې دا نه ښوول کيږی) ، چې دا پولی ځانني‌ونه ساتلي پاتی کيږي، که څوك د $an = 1/n$ په ځای يوه په خوښه د صفر پرلپسی $a_n \to 0, a_n \neq 0$ وټاکي.

جمله ۱۸ . ۳ :

د هرې په خوښه صفر پرلپسی $\{a_n\}$,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \quad a_n \neq 0, \tag{18.42}$$

gilt

$$\lim_{n\to\infty} (1+a_n)^{\frac{1}{a_n}} = e. \tag{18.43}$$

بيلګه ۱۸ . ۴ : د جملی ۱۸ . ۳ په مرسته د بيلګي په توګه لاس ته راځي:

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \left(1+\left(-\frac{1}{n}\right)\right)^{-n\cdot(-1)} = \left(\left(1+\left(-\frac{1}{n}\right)\right)^{-n}\right)^{-1} \to e^{-1} = \frac{1}{e},$$

$$\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = \left(1+\frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{a}\cdot a} = \left(\left(1+\frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{a}}\right)^a \to e^a, \quad \left(\frac{n+2}{n-3}\right)^n = \left(\frac{1+\frac{2}{n}}{1-\frac{3}{n}}\right)^n = \frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{3}{n}\right)^n} \to \frac{e^2}{e^{-3}} = e^5,$$

$$\left(\frac{n+2}{n-3}\right)^{2n-3} = \frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{2n-3}}{\left(1-\frac{3}{n}\right)^{2n-3}} = \frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{-3}\cdot\left(1+\frac{2}{n}\right)^{2n}}{\left(1-\frac{3}{n}\right)^{-3}\cdot\left(1-\frac{3}{n}\right)^{2n}}$$

$$= \frac{\left(1-\frac{3}{n}\right)^3}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^3}\cdot\frac{\left(\left(1+\frac{2}{n}\right)^n\right)^2}{\left(\left(1-\frac{3}{n}\right)^n\right)^2} \to \frac{1^3}{1^3}\cdot\frac{(e^2)^2}{(e^{-3})^2} = e^{10},$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2\cdot\frac{1}{n}} = \left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} \to e^0 = 1,$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n\cdot n} = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{n} \to e^\infty = \infty.$$

د $a_n \to 0$ لپاره پرلپسی sinxn)/n) د ناټاکلی افادې 0/0 په لور ځي.

لاندې باور لري :

جمله ۱۸ . ۴: د هرې په خوښه صفر پرلپسی

(18.44)	$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, a_n \neq 0,$

لپاره باور لري (د لندې الماني ژباړه= an په لینده کچ)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin a_n}{a_n}=1 \quad (a_n \text{ im Bogenmaß}). \qquad (18.45)$$

اوبونه :د $\sin(-a_n) = -\sin a_n$ له امله او له‌دې امله

چې $\frac{\sin(-a_n)}{-a_n} = \frac{\sin a_n}{a_n}$ دی، دلته دې(۱۸ . ۴۵

) یواځې د 0 <an لپاره وښوول شي.

مور دلته د یوونکردی یا واحد داېرې د کونج

بلواک ځخه کټه اخلو؟؟؟ ځیره ش ۱۸ . ۱) د

درې کوډي OAB منځهواره: $\frac{1\cdot\sin a_n}{2}$,

د کردۍ سکتور یا کردیرخه OABمنځهوارې

ځخه‌کوچنی ده، او دا بیرته د درېکوډي $\frac{1^2\cdot a_n}{2}$,

OACد منځهوارې. $\frac{1\cdot\tan a_n}{2}$

ځخه کوچنی دۍ. له دې امله باور لري

$\sin a_n < a_n$ او $a_n < \tan a_n = \frac{\sin a_n}{\cos a_n}$.

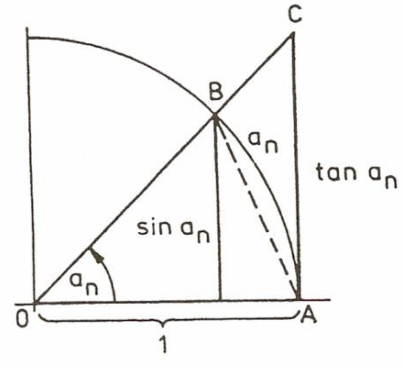


Bild 18.1

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوبنونه :د $\sin(-a_n) = -\sin a_n$

له امله او له دې امله چې $\frac{\sin(-a_n)}{-a_n} = \frac{\sin a_n}{a_n}$

دی، دلته دې(۱۸ . ۴۵) یوائې د $a_n > 0$ لپاره وښوول شي.

موږ دلته د یوونګردی یا واحد دایرې د کونج بلواک څخه ګته اخلو؟؟؟ ځیره ش ۱۸ .

۱) د درې ګوډي OAB منځهواره: $\frac{1 \cdot \sin a_n}{2}$,

د ګردۍ سکتور یا ګردیبرخه OAB

منځهوارې $\frac{1^2 \cdot a_n}{2}$,

څخهکوچنی ده، او دا بیرته د درېګوډي OAC د منځهوارې. $\frac{1 \cdot \tan a_n}{2}$

څخه کوچنی دی.

له دې امله باور لري $\sin a_n < a_n$ او $a_n < \tan a_n = \frac{\sin a_n}{\cos a_n}$.

او ورپسی

$$\frac{\sin a_n}{a_n} < 1, \ \cos a_n < \frac{\sin a_n}{a_n}, \ \text{also} \ \cos a_n < \frac{\sin a_n}{a_n} < 1.$$

د $\cos a_n \to 1$ له امله $a_n \to 0$ لپاره فرمول (۱۸ . ۴۵) باور لري۰

بیلګه ۱۸ . ۵ : د جملی ۱۸ . ۴ په مرسته د بیلګي په توګه لاس ته راځي:

$$n \cdot \sin\frac{1}{n} = \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \to 1, \qquad n^2 \cdot \sin\frac{1}{n} = n\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \to \infty \cdot 1 = \infty,$$

$$\sqrt{n} \cdot \tan\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{\frac{\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}}{\cos\frac{1}{\sqrt{n}}} \to \frac{1}{1} = 1.$$

بیلګه ۱۸ . ۶ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پرلپسی $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\},$ ،

چې د ناټاکلی افادې $\frac{\infty}{\infty}$ په لور مو هڅوي کوښښ کیږي چې د مات باندې او ماتلاندې په یوه ګڼ وویشل شي، چې یو ټاکلی وبینه یا افاده ترې رامنځ ته شي.

$$\frac{3n^2-n+1}{2n^2-1}=\frac{3-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{2-\frac{1}{n^2}}\to\frac{3}{2},\qquad \frac{6n^3+n-1}{7n^4+n^2+1}=\frac{\frac{6}{n}+\frac{1}{n^3}-\frac{1}{n^4}}{7+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}}\to\frac{0}{7}=0,$$

$$\frac{6n^3+n-1}{2n^2-1}=\frac{6n+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{2-\frac{1}{n^2}}\to\frac{\infty}{2}=\infty,\quad \frac{\sqrt{n^2-1}+n-1}{n+1}=\frac{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}+1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}\to\frac{2}{1}=2.$$

بیلګه ۱۸ . ۷ : پرلپسې $\{a_n-b_n\}$ ، چې ناټاکلې افادې $\infty-\infty$ ته مو لاربښودوي، کید ی شي د نورو ترمنځ لاندې بڼه غوره کړې:

$$a_n-b_n=\frac{(a_n-b_n)(a_n+b_n)}{a_n+b_n}=\frac{a_n^2-b_n^2}{a_n+b_n}\to\frac{?}{\infty}.$$

که صورت پولې ته و هڅیږي، نو یوه ټاکلې افاده بیا مخ ته لرو.

$$\sqrt{4n^2+5n+2}-2n=\frac{4n^2+5n+2-4n^2}{\sqrt{4n^2+5n+2}+2n}=\frac{5+\frac{2}{n}}{\sqrt{4+\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}}+2}\to\frac{5}{4},$$

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{2n-1}=\frac{n+1-2n+1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{2n-1}}=\frac{\frac{2}{n}-1}{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}}\to\frac{-1}{+0}\to-\infty,$$

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}=\frac{n+1-n+1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}\to\frac{2}{\infty}=0.$$

تمرینونه:

د ورکړ شوې پرلپسې $\{a_n\}$ یا ترادف پوله ارزښت a وشمیرۍ (که شتون ولري)! $n_0(\varepsilon)$ وټاکی، داسې، چې د ټولو $n>n_0(\varepsilon)$ (18.6) لپاره باور ولري.

1. a) $a_n=\frac{n+1}{2n}$ b) $a_n=\frac{1}{n^2\sqrt{n}}+\frac{1}{n^3}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

c) $a_n = n\cdot\sqrt{1+\frac{1}{n}} - n$

d) $a_n = \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$

د لاندې پرلپسیو $\{a_n\}$ پوله ارزښت وشمیرئ، که شتونولري.

.1. a) $a_n = \frac{2n+3}{3-4n}$

b) $a_n = \frac{4n-3}{2-5n+7n^2}$

c) $a_n = \frac{5n^2-6}{3n+4}$

d) $a_n = \frac{3n^3-2n^2+5n-6}{2n^3-4n^2-7n+9}$

e) $a_n = \left(\frac{3n-2}{3-6n}\right)^2$

f) $a_n = \frac{(2n-3)^2}{4n+1}$

g) $a_n = \frac{2-\sqrt[3]{n^2}}{n^2+5}$

h) $a_n = \frac{3+(-1)^n+2n}{1-3n}$

i) $a_n = \frac{4\sqrt{n}-10n}{n\sqrt{n}}$

j) $a_n = \frac{(-1)^n}{1+n^2}$

k) $a_n = n\left(1-\sqrt[5]{1-\frac{1}{n}}\right)$

l) $a_n = n\left(\sqrt[3]{n^2+2}-\sqrt[3]{n^2+1}\right)$

.2. a) $a_n = \left(1+\frac{4}{n}\right)^n$

b) $a_n = \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$

c) $a_n = \left(\frac{cn+1}{cn}\right)^n$

d) $a_n = \left(\frac{2+n}{n-4}\right)^n$

e) $a_n = \left(\frac{\left(1-\frac{2}{n}\right)(n+3)}{n+2}\right)^n$

f) $a_n = \left(1-\frac{5}{n}\right)^{\frac{n}{4}+3}$

g) $a_n = \sqrt[n]{3}$

h) $a_n = \frac{27^{\log_3 n}}{16^{\log_2 n}}$

2.3. a) $a_n = [2n^{-1}\cdot\sin(2n^{-1})]$

b) $a_n = n\cdot\sin\frac{1}{n}$

c) $a_n = n\cdot\tan\frac{1}{n}$

d) $a_n = \sqrt{n}\tan\frac{1}{\sqrt{n}}$

e) $a_n = 2n^2\cdot\cos\frac{1}{n^2}\cdot\tan\frac{1}{n^2}$

f) $a_n = \sin\frac{1}{n} - n\cdot\cos\frac{1}{n}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

19 پوله (حد)"The Limit"

لاندې د اعدادو ترادف (پرلپسې) لرو:

(1) 1 / 2 , 1 / 3 , 1 / 4 , ... ,1 / n

(2) 3 / 2 , 4 / 3 , 5 / 4, ..., (n+1) / n

(3) 2,4,6,...2n

که n د ناپای په لور یانې $n \to \infty$ ته لاړ شي، نو د پورته ترادفونو څخه (۱) د صفر په لور، (۲) د یو په لور او (۳) د ناپاې په لور ځي.

د Limit مانا پوله (حد) ده، چې له هغې تیرېدنه اجازه نه لري. په پخواني روم کې د یوه ښار د قلعې نوم هم Limitوو. په ریاضیاتو کې ، لکه په ترادفونو (پرلپسې) کې مو چې ولیدل لیمیټ د پولې یا حد مفهوم لري.

د پولې (حد) د استعمال مفهوم په دې کې پروت دی، چې د یوه فنکشن یا تابع سلوک یا کاروایي داسې وڅیرو لکه ځنګه ، چې د فنکشن یا تابع (بلواک) د افقي محور (پروت - محور (abscissa)) باندې پرلبپسې یا ترادفونه یوې پولې یا حد(ټکي) ته –x) ورنږدېکیدنه. دا لکه په پورته ننوتنه کې، چې پرلپسې یا ترادفونه په پروت محور یوې پولې ارزښت ته ځي. وبه ګورو، چې پوله یا حد په ریاضیاتو کې ددې لپاره کارول کیږي، چې مشتق وپیژنو

فعالیت :

-ایا تاسو په ورځني ژوند کې د پولې(حد) د کلمې سره بلد یاست؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

ایا تاسو په ورځني ژوند کې یوه بیلګه راوړی شی، چې یوې پولې ته له دواړو لورو، له ښی و کینې لورته او همداډول له کینې و ښې لورته نزدی شی یا لاړ شی؟

په یوه ټاکلي ځای کې د توابعو پوله :

یادونه: موږ له دې وروسته د پولې په ځای پوله ارزښت لیکو، چې دا ټیک زموږ غوښتنه په ګوته کوي.

فعالیت ۱ : یوه تابع $f(x) = x + 2$ په پام کې ونیسی، چې پروتولاړسیستم یا سیستم قیمت وضعیه کې ټکی $P(2,4)$ لري

۱ - د تابع جدول وکاږی.

۲ – د تابع ګراف وکاږی

۳ - $f(2)$ پیداکړی او د x خوزښت(حرکت) باندې بحث وکړی که x د 2 ارزښت ته دواړو لورونزدې شي

۴ - د x پولې ته تلنه په ګراف(ځیره) کې روښانه کړی.

بیلګه ۱ :

یوه تابع $f(x)=2x$ او یوټکی P_0 دې ورکړ شوی وي، چې کواوردینات($3/6$) لري.

۱) د تابع جدول وکاږی

۲) د تابع کراف یا ځیره , وکاږی

۳) $f(3)$ پیداکړی او د $f(x)$ تلنه باندې بحث وکړی که x د "3" ارزښت ته نزدې شي

۴) د $f(x)$ پولې ته تلنه په ځیره کې روښانه کړی.

اوس غواړو دا پورته فعالیت روښانه کړو:

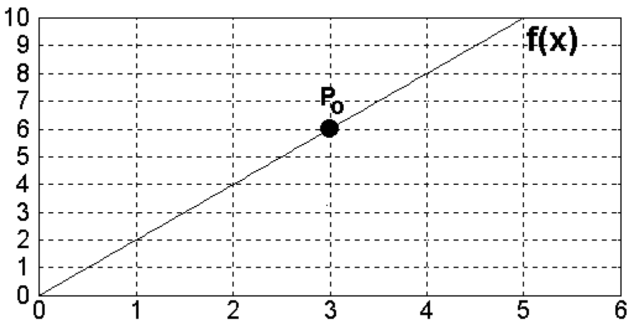
۱) د تابع جدول (دولی یې ګران لوستونکي پوره کوي)

x	-1	0	1	2
f(x)	-2	0	2	4

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۲) د تابع څیره



۳) $f(3) = 6$ او غواړو د درې ارزښتونو څخه چې له ښۍ او کیڼې لور و ۳ ته ورنږدې کیکیږي و ګورو، چې په دې درې ارزښتونو کې چیرته ځي. ددې لپاره لاندې ارزښتونه په دوه جدولونو کې څیړو

x_k	$f(x_k)$	x_k	$f(x_k)$
2,98	5,96	3,001	6,002
2,99	5,98	3,01	6,02
2,999	5,998	3,02	6,04

په پورته جدول کې ګورو،چې له کیڼ لور وکښته ۲ ته نږدې کیږو او له ښي لور له کښته و پورته لورته هم ۲ ته نږدې کیږو. بل جدول پروت کاږو

له ښي و کیڼ لور ته له کیڼ و ښي لورته

⟶ 1 ⟵

x	2.98	2.99	2.999		3.001	3.01	3.02
f(x)	5.96	5.98	5.998		6.002	6.02	6.04

------------→ 6 ←------------

(c) ketabton.com: The Digital Library

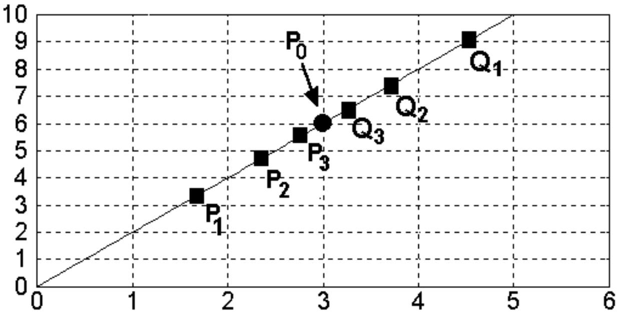
په درې پړاوونو کې د ،، f(3) " قیمت د "f(x) " قیمتونو سره پرتله کیږي. که "x" و "3" ته ورنږدې شي.

دا حالت موږ ته په ګوته کوي چې: که "x " و "3" ته ورنږدې شي، نو د f(x) ،،پوله (حد)،، برابر په 6 دی او دا داسې لیکو: $\lim_{x \to 3} f(x) = 6$

۴) اوس پورته ګراف په لاندې توګه رسموو او ښي او کیڼ لور ته موخه ور ټکي - لکه په پورته جدول کې - په نخښه کوو.

د لاندې څېړې له مخې ټکي ... $P_1, P_2, P_3,$ په پام کې نیسو، چې ټکي P_0 ته تل له کیڼ لور نږدې کیږي. او همداسې ټکي ... $Q_1, Q_2, Q_3,$ چې له ښی لور ټکي P_0 ته نږودې کیږي.

کتل کیږي: هرڅومره، چې پورته ټکي و ټکي P_0 ته نږدې کیږي په همغه کچه د تابع ارزښتونه و ۶ نږدې کیږي (د ټکي $P_0(3,6)$ -قیمت له امله)



که په ګراف کې ځای x=3 ته نږدې شو، نو تابع ارزښت یا فنکشن ارزښت و قیمت(ارزښت) ۶ ته نږدې کیږي.

وایو: ۶ د فنکشن f(x) پوله ارزښت دی د x-->3 لپاره (لوستل: x د 3 (درې) په لور تلنه).

د پوله ارزښت لپاره مو لیکدود لیکښه(په پرله پسې یا ترادف کې) پیژندلی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 6$$

یادونه: د تابع پوله یا حد په هغه ځای کې چې تابع تعریف نه وي هم کیدی شي شته وي:

په پورته کې مو د یوه تابع f(x) حد په x=3 ځای کې تر څېړنې لاندې ونیو . دلته تابع په x =3 کې پیژند یا تعریف درلود.

اړیین نه ده ، چې تابع د x=3 په ځای کې تعر یف وي، ځکه چې پوله ارزښت د x لپاره یواځې د x=3 په نزدې کې تشریح شوې.

پام : په ځنو فنکشونو یا توابعو کې ،،پوله یا حد ،، په داسې ساده ډول لاس ته نه شو راوړی - لکه د مخه - مګر د تابع د ساده بدلون له لارې دا کار سرته رسولی شو .

بیلګه ۱ :

تابع $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}; x \neq 1$ راکړ شوې

۱) د تابع جدول او ګراف وکاږی!

که صور د x-1 سره لنډ کړو، نو لرو :

$$f(x) = x + 1$$

د تابع "f(x) " خوزښت تر بحث لاندې ونیسی‌که "x" و "1" ته نزدې شي یا همداسې که $x \to 1$.
له دواړو یاني له ګراف او جدول څخه موږ لیکو چې f(x) د ریل عدد"1" په لور هځیږي. نو

ښیره دې ګران
لوستونکي وباسي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

له دې امله روښانه ده چې تابع په هغه ټکي کې تعریف(پېژند) نه لري، په هغه کې چې پوله (حد) شمېرل شوی.

یادونه : په پورته ډول تابع به سملاسي پسي وڅېړل شي، خو د هر څه لومړی پېژند راوړو:

پیژند (تعریف) :

تابع $f(x)$ یوه پوله L لري ، که x د یوه ریل عدد د c په لورتړلی لاړ شي،او داسي يې لیکو: $\lim_{x \to c} f(x) = L$

فعالیت : ایا دا پیژند ربنتیا دی، که $f(c) \neq L$ وي؟

فعالیت: که ولرو: $|x|$ ، چې تل مثبت دی.

- دا بې له دې مطلق ارزښت ځنګه لیکو؟

- ایا دا هغو اعداو کارولی شو، چې یو لله بل سره د شمېرنیزو نخښنو له لارې تړلي وي، یعني چې اعداد یو له بل سره د جمعې، تفریق ... له لارې سره تړلي وي؟

فعالیت: هغه توابع چې په یوه عدد د بېلګې په توګه صفر کې تعریف نه وي ، څه بلل کیږي

بیلګه 2 : تابع $x \neq 0$, $f(x) = \frac{|x|}{x}$ راکړ شوی

1) تابع ولیکی، بې له دې، چې سومبول "| |" وکاروی:

2) د تابع ګراف وکاری

3) د $f(x)$ ارزښت پیدا کړی، که x له ښي لور و 1 ته نزدې شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

4) د f(x) ارزښت پیدا کړی که "x" له کینې لور و 1- ته نږدې شي

5) وښایاست چې تابع f(x) څو پوله ارزښتونه لري .

یادونه: که یوه تابع چې په صورت او مخرج کې داړونده ارزښت لپاره صفر ولري او دا صفرځایونه له منځه تلی شي، نو دا ډول تابع په صفر ځای کې بې تعریف ده (یا تشیا؟**functional gap**) لري.

بنوونه :

۱) تابع بې له سومبول "| |" داسې لیکو:

$$f(x)=\begin{cases}1; x>0\\ -1; x<0\end{cases}$$

2) د تابع ګراف انځوروو :

که څیره ونه کښل شوه ساده ده

3) د f(x) ارزښت که x له ښي لور و 1 ته نږدې شي ، لاندې پوله راکوي

$$\lim_{x\to 1} f(x)=1$$

4) د f(x) پوله ارزښت که "x" له کینې لور 1- ته نږدې شي، په لاندې ډول دی.

$$\lim_{x\to -1} f(x)=-1$$

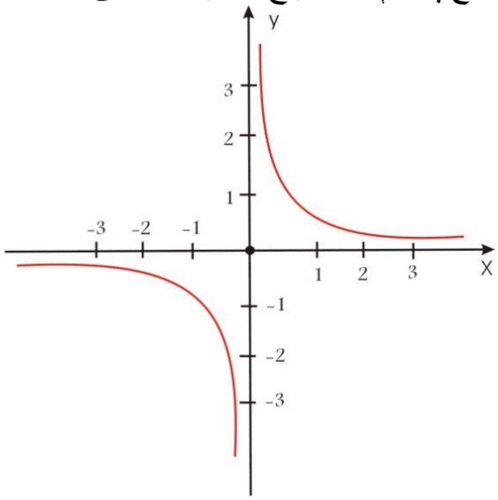
5) ګورو چې x ،،دوه،، ارزښتونو (1) او (-1) ته نږدې شي ، نو دوه پوله ارزښتونه لري یعني $\lim_{x\to\pm 1} f(x)=\pm 1$، نو له دې امله f(x) پوله نه لري

بیلګه ۳ : تابع $f(x)=\dfrac{1}{x}$ لرو، چې $X\neq 0$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ په $x=0$ ځای کې تابع ارزښت نه لري یانې په x=0 کې تعریف نه ده. دا په صفرځای کې قطب(Pol) لري(۱).لاندې ځېره دې وکل شي.

(۱) یادونه : هغه تابع، چې مخرج یې صفر وي او صورت یې صفر نه وي، وایو چې تابع په دې د مخرج صفر ځای کی قطبPol لري.



و x=0 ته د نزدې کېدو لپاره ترادف (پرلپسې) $(x_n)=\frac{1}{n}$ ټاکو.

د اړونده تابع ارزښتونو ترادف (پرلپسې) $(x_n)=\left(\frac{1}{\frac{1}{n}}\right)=n$ دی.

دا د n>0 لپاره یو نامحدود سعودي ترادف دی،
او د n<0 لپاره نزولي- یا متناقص ترادف دی.
دا په دې معنی، چې تابع f(x) په 0 ځای کې حد نه لري. دا هلته یو قطب لري.

قضیه : که تابع " f(x) " همغه پوله (حد) "L" ولري که "x" له ښی یا کیڼ لورې وه "c" ته نزدې شي، نو پوله(حد) شته دی او د "L" سره برابره ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د حدونو خویونه یا خواص : " **Properties of Limits** "

فعالیت :

په دې برخه کې د ثابتو – او کټمټ توابعو Identity function حدونه وشمیرئ

د لیمیټ خویونو څخه کار واخلئ

د پولینوم تابعو حد (پوله) پیدا کړئ

پوهیږو : په ریاضیاتو (شمیرپوهنه) کې ټول توابع چې راځي د ساده توابعو ګډوله والی combination دی، لکه د توابعو جمع(زیاتون، ضرب(ځل) وېش او زنحیرونه compositon . دلته دوه غوره او ساده توابع $f(x) = c$ او $g(x) = (x)$ شته، که دواړه توابع سره یوځای کړو، نو لاس ته ترې راځي:

$h(x) = x + C$, یا $L(x) = cx$, یا $m(x) = x^2$ او داسې نور

هڅه:د توابعو $f(x) = x, g(x) = x - 2,$ څخه کار واخلئ، چې درې نورې توابع ترې لاس ته راوړئ

فعالیت :

ایا د یوې تابع پوله کېدی شي د تابع له حل څخه پیدا شي؟

د بېلګې په توګه، که ولرو

$$f(x) = \lim_{x\to 2} 3 = 3\lim_{x\to 2}$$

نو دا تابع ولیکئ.

یادونه: د پورته کارونې په څیر همدا څه د هرې ثابتې تابع لپاره رښتیا دئ

د یوې ثابتې پوله ارزښت: که a او b ثابتې وي، نو $\lim_{x\to a} c = c$ باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

په همدې ډول کتمټ یا ایډنټیک تابعو $f(x) = I(x) = x$ لپاره هم لرو ، که " c " کوم حقیقي عدد وي، نو x و c ته نږدې کیږي. دا ،، ټیک داسې ده لکه،، چې $f(x) = I(x)$ وc ته نږدې شي

فعالیتونه:

1)که $f(x) = x$، $g(x) = 2$ وي ، نو لرو :

$\lim_{x\to1} f(x) = 1$, 1) $\lim_{x\to1} g(x) = 2$

2) که وي $h(x) = f(x) + g(x)$ لرو

$h(x) = x + 2$

3) د$h(x)$ ګراف

رسم دې ګران لوستونکي د ځانونو لپاره وکاږي

4)

$\longrightarrow 1 \longleftarrow$

0	.5	.8		1.2	1.5	2
2	2.5	2.8		3.2	3.5	4

$\longrightarrow 3 \longleftarrow$

تاسو په یاد ولرئ یا ولیکئ

$\lim_{x\to1} h(x) =$	$\lim_{x\to1} x + 2 = 3$

او $\lim_{x\to1} h(x) = \lim_{x\to1} f(x) + \lim_{x\to1} g(x)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

هڅې

۱) که $f(x) = -2$، $h(x) = x$ وي، پيداکړئ

a) $f(x) \pm h(x)$

b) $f(x) . h(x)$

۲) وهڅيږئ، چې د پورته توابعو د a) او b)لپاره پولې وټاکئ، که x عدد3 ته نږدې شي.

۳) که $g(x) = x$ وي،نو پيداکړئ $\lim_{x \to 4} 4x$.

۴) که $h(x) = x$ ، $f(x) = -2$ وي پيدا کړئ

(a $f(x) + h(x)$

(b $\lim_{x\to 2} (f(x) + h(x))$

(c $\lim_{x\to 2} h(x) + \lim_{x\to 2} f(x)$

بيلګه ۳ : د $g(x) = \sqrt{3-x}$ ګراف وکاږئ او پيدا کړئ

a) $\lim_{x\to 2} f(x)$, b) $\lim_{x\to -1} g(x)$; c) $\lim_{x\to 3^-} g(x)$

حل:

دلته دې ګراف وکښل شي....

له ګراف څخه

$$\lim_{x\to 2} g(x) = 1,$$

الف- په لاندې توګه مخ ته ځو:

$$\lim_{x\to 2} \sqrt{3-x} = \sqrt{\lim_{x\to 2}(3-x)} = \sqrt{1} = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) له ګراف څخه $\lim_{x\to-1} g(x) = 2$

یادونه : $\lim_{x\to-1}\sqrt{3-x} = \sqrt{\lim_{x\to-1}(3-x)} = \sqrt{4} = 2$

c) $\lim_{x\to3^-} g(x) = \lim_{x\to3^-}\sqrt{3-x} = \sqrt{\lim_{x\to3^-}(3-x)} = \sqrt{0} = 0$

ګڼ دلا یل شته چې پولې شمیرنه ساده کوي، موږ. به دا لاندې بې له ثبوته ومنو که f او g توابع وي C او L او M رییل عددونه وي، داسې چې باور ولري :

نو $\lim_{x\to c} f(x) = L,$ او $\lim_{x\to c} g(x) = M,$

1) $\lim_{x\to c}(f+g)(x) = \lim_{x\to c}((f(x) + g(x))$

$= \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x) = L + M$

2) $\lim_{x\to c}(f-g)(x) =$

$\lim_{x\to c}((f(x) - g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x) = L - M$

3) $\lim_{x\to c}(f.g)(x) = \lim_{x\to c}(f(x) . g(x))$

$= \lim_{x\to c} f(x) . \lim_{x\to c} g(x) = L . M$

4) $\lim_{x\to c}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \lim_{x\to c}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{L}{M}$; $(M\neq0)$

5) $\lim_{x\to c}\sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$

(د $f(x) \geq 0$ لپاره او د ټولو x ارزښتونو لپاره چې c ته نزدې کیږي.)

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنه : موږ لاندې تابع لرو:

	$x^2 -1$	$x \leq 0$
$f(x) =$	$x -1$	$o < x < 2$
	$2x +1$	$x \geq 2$

پیدا کړی

c) $\lim_{x\to 4} f(x)$ b) $\lim_{x\to 0} f(x)$ a) $\lim_{x\to -2} f(x)$

e) $\lim_{x\to 1} f(x)$ d) $\lim_{x\to 2} f(x)$

حل :

a) $\lim_{x\to -2} (f(x) = \lim_{x\to -2} (x^2-1) = (-2)^2 -1 = 3$

b) $\lim_{x\to 0} f(x); \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x-1) = -1$

$= \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x^2-1) = -1$

حد شته او $\lim_{x\to 0} f(x) = -1$ دی:

c) $\lim_{x\to 4} f(x) = \lim_{x\to 4} (2x+1) = 2\times 4 + 1 = 9$

d) $\lim_{x\to 2} f(x)$;

له ښي لور $\lim_{x\to 2^+} (2x + 1) = 2\times 2 + 1 = 5$

له کيڼ لور $\lim_{x\to 2^-} (x-1) = 2 - 1 = 1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې امله پوله (حد) نه شته

e) $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} (x-1) = 0$

بیلګه: $\lim_{x\to 2} f(x)$ ، پیدا کړی، که $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ وي

حل:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} (2x^2 - 3x + 5)$$

$$= \lim_{x\to 2} 2x^2 - \lim_{x\to 2} 3x + \lim_{x\to 2} 5$$

$$= 2\lim_{x\to 2} x^2 - 3\lim_{x\to 2} x + \lim_{x\to 2} 5$$

$$2 + 5 = 7 \times 4 - 3 \times = 2$$

فعالیت : که $\lim_{x\to -2} f(x) = 3$ نو پیدا کړی $\lim_{x\to -2} (f(x))^n$

یادونه:

د یوه پولینوم لیمیټ ټیک داسې شمیرل کیږي، لکه د یوه فنکشن لیمیټ

بیلګه ۶ :

$f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 5}{2x^2 + 1}$ وي دې

$\lim_{x\to 3} f(x)$ ، پیدا کړی

حل : $f(x)$ د دوه توابعو $g(x) = x^2 - 2x + 5$ او $L(x) = 2x^2 + 1$ وېش دی

که x و3 نزدې شي پوله یا حد کیدی شي د تابع د حل له لارې په $x = 3$ کې پیدا شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 2x + 5}{2x^2 + 1}$$

$$= \frac{\lim_{x\to 3}(x^2 - 2x + 5)}{\lim_{x\to 3}(2x^2 + 1)}$$

$$= \frac{3^2 - 2\times 3 + 5}{2\times 3^2 + 1} = \frac{8}{19}$$

د راشنل- نسبتي- یا کسري فنکشنونو پولې

مورږ دا لاندې د پولینومونو ویش لرو

$$R(x) = \frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0}{b_m x^m + b_{n-1}x^{m-1} + ... + b_0}\ ; b_0 \neq 0$$

په پورته پولینوم ویش کې که x=o وي، نو $\frac{a_0}{b_0}$ ترې لاس ته راځي د $b_0 \neq 0$ سره.

که n<m وي او x ناپای ته لاړ شي، پولینومویش صفر ته ځي

که n>m وي او x ناپای ته لاړ شي، د پولینوم ویش د ناپای په لور ځي.

که n = m وي، نو $R(x) = \frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{a_n}{b_m}$ لرو

پام : د نسبتي یا کسري فنکشنونو (ناطقو توابعو) پوله ارزښت (حد) غواړو پیداکړو.

ددې لپاره چې د ،،ویاندو،، توابعو پولې پیداکړو، که شته وي، نو د مختلو لارو یا متودونو څخه کار اخلو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوهیږو، چې د پولینومي توابعو پوله (حد) - د یوه ورکړ شوي x ارزښت لپاره، لکه د نورو ساده توابعو په څېر ، چې د جمعې . تفریق،ضرب او وېش په څېر ورکړ شوي دي وشمیرو.

که ولرو : $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ نو د تابع خواص د $\lim_{x\to a} g(x)\neq 0$ لپاره ساده

کو چې د پورته پولینوم ویش، چې ګویاتابع ده پوله یا حد وشمېرو.

. بیلګه ۱ : پیداکړئ $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x}{x+2}$

که $x = 1,$ وي، نو تابع تعریف ده او لرو

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x}{x+2}=\frac{(1)^2+1}{1+2}=\frac{2}{3}$$

که $x = 1$(ځاي په ځای کړو Substitue)

نو لاس ته راځي $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$

بیلګه ۲ : پیدا کړئ $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-1}{x+3}$

حل : تابع په $x = 0$ کې تعریف دی، نو لرو:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-1}{x+3}=\frac{0-1}{0+3}=-\frac{1}{3}$$

بیلګه ۳ ؛ پیداکړئ : $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x+1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل : تابع په $x = 1$ کې تعریف ده، نو لرو

$$\lim_{x\to1} \frac{x^2+x-2}{x+1} = \frac{1^2+1-2}{1+1} = \frac{0}{2} = 0$$

که په یوه ځای یا عدد کې تابع تعریف نه وي، نو د مختلفو متودونو څخه کار اخلو، چې پوله(حد) پیداکړو، که شته وي.

بیلګه ۴ : پیداکړئ $\lim_{x\to1} \frac{x^2-6x+8}{x-2}$

حل : دا چې تابع $f(x)$ په $x=2$ کې تعریف نه ده، نو پوله(حد) د تابع د حل له لارې نه شي پیداکېدی. دا کېدی شي داسې پیدا کړو، چې تابع په ضریبونو تجزیه کړو .

$$\lim_{x\to2} \frac{x^2-6x+8}{x-2} = \lim_{x\to2} \frac{(x-4)(x-2)}{(x-2)} =$$

د تابع پوله (حد) که x و 2 ته نزدې شي، دا مانا لري، چې $x \neq 2$ دی.

دا راشنل فنکشن (ګونګه؟ تابع) رالندېږي: $\lim_{x\to2} (x-4)$ او لاندې پوله لري:

$$\lim_{x\to2} (x-4) = 2-4 = -2$$

بیلګه ۵: پیداکړئ $\lim_{x\to16} \frac{\sqrt{x}-4}{x-16}$

ګور، چې تابع په $x = 16$ کې تعریف نه ده یانې $x \neq 16$.

> په یاد ولرئ چې : $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ د $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ جوړه(مزدوج) دی‌او برعکس.

حل: د جوړې(مزدوج) سره یې ضرب کړئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \lim_{x\to 16} \frac{\sqrt{x}-4}{x-16} \times \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+4} \lim_{x\to 16} \frac{\sqrt{x}-4}{x-16}$$

$$= \lim_{x\to 16} \frac{(x-16)}{(x-16)(\sqrt{x}+4)}$$

$$= \lim_{x\to 16} \frac{1}{\sqrt{x}+4} = \frac{1}{\sqrt{16}+4} = \frac{1}{8}$$

بیلگه ۶ : پیدا کړی $\lim_{x\to 3} \frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}$

حل : تابع په x=3 کې تعریف نه ده ، نو مخرج او صورت د محرج په مزدوج ضربوو او لرو:

$$= \lim_{x\to 3} \frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2} \times \frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+2} \lim_{x\to 3} \frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{(3-x)(\sqrt{x+1}+2)}{(x+1-4)}$$

$$= \lim_{x\to 3} -1(\sqrt{x+1}+2) \lim_{x\to 3} \frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}$$

$$= -(\sqrt{3+1} + 2) = -4$$

بیلگه ۷ : پیداکړی $\lim_{x\to 1} \frac{\frac{5}{2x-3}+5}{x^2-1}$

حل : تابع په x = 1 کې تعریف نه ده، نو په لاندې توگه مخ ته ځو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \lim_{x\to1} \frac{\frac{5+10x-15}{2x-3}}{x^2-1} \quad \lim_{x\to1} \frac{\frac{5}{2x-3}+5}{x^2-1}$$

$$= \lim_{x\to1} \frac{10x-10}{(2x-3)(x^2-1)}$$

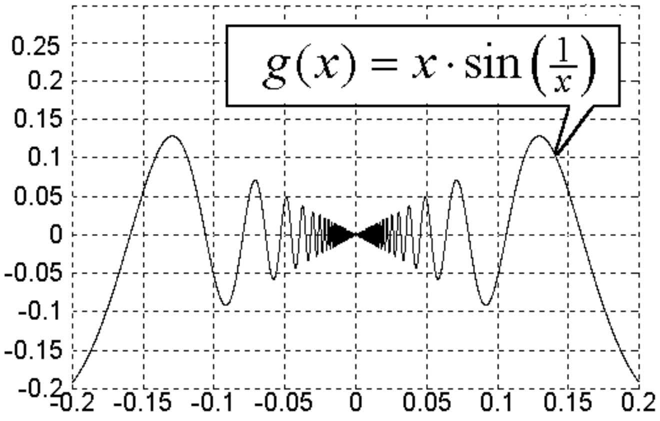
$$= \lim_{x\to1} \frac{10(x-1)}{(2x-3)(x^2-1)}$$

$$= \lim_{x\to1} \frac{10(x-1)}{(2x-3)(x-1)(x+1)}$$

$$= \lim_{x\to1} \frac{10}{(2x-3)(x+1)} = \frac{10}{(2(1)-3)(1+1)}$$

$$= \frac{10}{-2} = -5$$

د مثلثاتي توابعو پولې



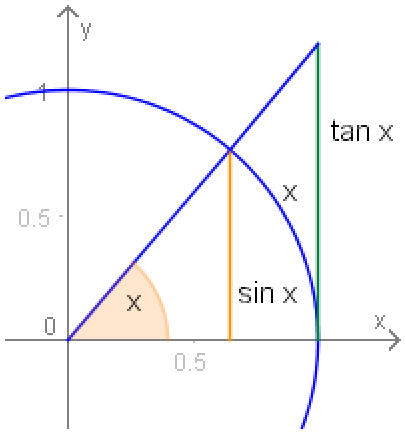
بیلګه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

<table>
<tr>
<td>
قضيه ؛ كه x په راديان وركړ شوى وي ،
نو $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ غواړو وتاكو.

يادونه : تابع $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ ناجوړه(طاق) دى

د د ي لپاره چې $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ پيدا كړو،
غواړو مخ له مخه لړ فكر په كار واچوو.

د ښووني لپاره تري كار اخستلو په موخه
دا مخامخ ځيره باسو او په لاندي توګه مخ
ته ځو:
</td>
<td>


</td>
</tr>
</table>

په يوه انتروال $x\in[0,\frac{\pi}{2}[$ كي د رسم له حالته سملاسي لاندي نا برابرون يا نامسوات
باور لري

$$\sin x \le x \le \tan x$$

موږ له دي سره لرو $\sin x \le x \le \frac{\sin x}{\cos x}$ او $x>0$ سره لاس ته راځي:

$$\frac{\cos x}{\sin x} \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{\sin x}$$

او د $\sin x$ سره ضرب (ځل) له امله لاندي نامساوات لاس ته راځي

$$\cos x \le \frac{\sin x}{x} \le 1$$

د پولي ته تګ له امله لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\leq \lim_{x\to +0} \frac{\sin x}{x} \leq 1 \quad , \quad 1 = \lim_{x\to +0} \cos x$$

دا په دې معنا دی، چې **غوښتونکې پوله ارزښت** 1 دی.

د دې ښوونې سره موږ ښی پوله ارزښت پېداکړ، د کیڼ پوله ارزښت لپاره په ورته توګه مخ ته ځو او پوله ارزښت د $x < 0$ لپاره پیدا کوو، یعني له دې ځخه هم لاس ته راځي:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

که $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ او $x = -\alpha$ و لیکو ، نو دا لاندې لاس ته راوړنه هم لرو

$$= \frac{\sin(-\alpha)}{-\alpha} = \frac{-\sin\alpha}{-\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\alpha} \quad \frac{\sin x}{x}$$

..............(4

$$\boxed{\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin \alpha}{\alpha}}$$

د مساواتو $(4) + (3)$ ځخه غوښتنه لاس ته راځي

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

بیلګه ۱ : حل کړی $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x}$

حل : وي دې $2x = \alpha$ که $x \to 0$ نو $\alpha \to 0$ او

$$= \frac{2\sin 2x}{2x} = 2\,\frac{\sin\alpha}{\alpha} \quad \frac{\sin 2x}{x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له پورته مساواتو څخه لاس ته راځي :

$$= 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x} = 2\times 1 = 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$$

بیلګه ۲ : وښایاست $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{2x}$

که $y = 5x$ وي ; او $x\text{->}0$ ، نو $y\text{->}0$ هم

$$\frac{5}{2}\frac{\sin 5x}{2x} = \frac{5}{2}\frac{\sin 5x}{\frac{5}{2}(2x)} = \frac{\sin 5x}{5x}$$ او

$$= \frac{5}{2}\frac{\sin y}{y}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{5}{2}\frac{\sin y}{y} = \frac{5}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin y}{y}$$ له دې امله لرو

$$1 = \frac{5}{2}\times = \frac{5}{2}$$

قضیه : په درېګوډي ګچ یا مثلثاتو کې بل غوره پوله ارزښت دا لاندې دی.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$$

بیلګه : وښایاست : $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{x}$

حل : وي دې $3x= \theta$، نو $x= \theta /3$ ، که $\theta \to 0$ نو $x\text{->}0$

$$\frac{\tan 3x}{x} = 3\frac{\tan\theta}{\theta} = \frac{3\tan 3x}{(3x)}$$ له دې امله

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو $3 = 1 \quad 3\times =$

بیلګه : حل کړی $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5\tan 2x}{7x}$

حل : وي دېy = 2x ، نو $x = \frac{y}{2}$ دی

که $x \to 0$ وي،نو $y \to 0$ دی

له دې امله

$$\frac{5\tan 2x}{7x} \; \frac{2\tan 2x}{2x} \cdot \frac{5}{7} =$$

$$\frac{\tan 2x}{2x} \; \frac{10}{7} =$$

$$\frac{10}{7}\frac{\tan y}{y} =$$

نو

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan y}{y}\;\frac{10}{7}\;\lim_{y\to 0} = \frac{5\tan 2x}{7x}$$

$$= \frac{10}{7}\lim_{y\to 0}\frac{\tan y}{y}$$

$$1 = \frac{10}{7}\times \quad = \frac{10}{7}$$

پای

وهڅیرۍ ، چې وښایاست:

(c) ketabton.com: The Digital Library

که x په رادیان ورکړ شوی وي، نو لرو $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$

الف) تانجنت tan x د sin x او cos x په ترمونو ولیکئ

ب) $\frac{\tan x}{x}$ د sin x او cos x په ترمونو و لیکئ

پ) پوله پیدا کړئ

ت) ایا قضیه رښتیا یا ټیک ده؟

په یاد ولرئ:

$$\cos^2 x + \text{sim}^2 x = 1$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos 2x = \quad 1 - 2\sin^2 x$$

$$2\cos^2 x - 1$$

بیلګه ۵ : حل کړئ $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x}$

حل : $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x}$

$$= 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\sin x$$

$$0 = 0 \times 1 \times = 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلگه ۶ : وشمیری $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\sin 5x}$

حل : شمیرو

$$\frac{\tan 3x}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\ \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\tan 3x}{x}}{\frac{\sin 5x}{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3\tan 3x}{3x}}{\frac{5\sin 5x}{5x}}$$

$$=\frac{3\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{3x}}{5\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}}=\frac{3\lim_{\theta\to 0}\frac{\tan}{\theta}}{3\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}}$$

$$=\frac{3}{5}\times\frac{1}{1}=\frac{3}{4}$$

بیلگه ۷ : وشمیری ؛ $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 4x-\cos 6x}{x^2}$

حل : شمیرنه

$$\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin\frac{4x+6x}{2}\ \sin\frac{4x-6x}{2}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 5x\sin -x}{x^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin 5x \sin x}{x^2}$$

$$= 2 \lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \times \quad = 2 \lim_{x\to 0} \frac{5\sin 5x}{5x}$$

$$= 10 \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \quad (y = 5x)$$

$$1 = 10 \times 1 \times \quad = 10$$

بیلګه ۸ : پیدا کړي $\frac{\sin 6x - \sin 6\alpha}{x-\alpha} \lim_{x\to\alpha}$

حل :

$$\frac{\sin 6x - \sin 6\alpha}{x-\alpha} = \lim_{x\to\alpha} \frac{2\cos 3(x+\alpha)\sin 3(x-\alpha)}{x-\alpha} \quad \lim_{x\to\alpha}$$

$$= 2 \lim_{x\to\alpha} \cos 3(x+a) \lim_{x\to\alpha} \frac{\sin 3(x-\alpha)}{x-\alpha}$$

$$= 2\cos 6\alpha \lim_{x\to\alpha} \frac{3\sin 3(x-\alpha)}{3(x-\alpha)}$$

وي دي $x - \alpha = y , x \to \alpha \Rightarrow y \to 0$ نو لاس ته راځي

$$= 2\cos 6\alpha \ (3) \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y}$$

$$= 6\cos 6\alpha \ . \ 1 = 6\cos 6\alpha$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په یاد ولرئ : مثلثاتي کتمتوالی

$$\sin a - \sin b = 2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$$

$$2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$$

بیلګه ۹ : حل کړی $\lim_{x\to0}\frac{|\tan x|}{x}$

حل : $x > o$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\tan x}{x} + \lim_{x\to0^+} = \frac{|\tan x|}{x}$$

$= 1$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{|\tan x|}{x}\frac{\tan x}{x} - \lim_{x\to0^-} =$$

$$= \lim_{x\to0^-}\frac{\tan x}{x}$$

$= -1$

لرو $\lim_{x\to0^+}\frac{|\tan x|}{x} \frac{|\tan x|}{x}\lim_{x\to0^-} \neq$

ګورو، چې د پورته تابع پوله یا لیمیټ نه شته

ناپرېکیدنه(متمادیت)"Continuity"

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې برخه کې لولو ، چې يو فنکشن يا يو تابع په يوه ټکې يا يوه اينتروال کې څنګه ځان نيسي يا کوم حالت غوره کوي. ايا دا تابع په کوم ځای کې ټوب وهي، يا پرې کيږي او که يا په نه پرېکيدنې توګه د اينتروال په دننه کې ځغلي.

د تابعو ناپرېکيدنه Continuous functions

په دې موضوع کې مورږ د د يوې تابع د ناپرېکيدنې(متماديت) په هکله څېرنه کوو او د ناپرېکيدنې يا متماديت پيژند(تعريف) ورکوو.

// رسمه // (3)   // رسمه // (2)   // رسمه // (1)

$f(x) = x^2 - 1$ $f(x) = \frac{1}{x}$ $f(x) = \frac{|x|}{x}$

دا رسمونه دې هم ګران زده کوونکي وکاږي، زه د رسم کولو ستونځې لرم(تمرين)

b دې د تابع f په پيژندورشو يا تعريفساحه کې يو حقيقي(رييل) عدد وي. تابع f په bکې ناپرېکيدونکې (متمادي) ،بلل کيږي، که د ټکي ((b.f(b)) نږدې د f ګراف وکښل شي، بې له دې، چې پنسل له کاغذ پورته کړی شي.

له دې امله تابع $f(x) = x^2 - 1$ او تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ په ټکي x=b کې ناپرېکيدونکي دي.

تابع $f(x) = \frac{|x|}{x}$ په x=o کې ناپرېکيدونکې نه ده ياني پرېکيدونکې ده يا ټوپ وهې.

تابع په x=a کې پرېکيدونکې ده، که پرې شي(تشيا ولري)، ټوپ ووهې او يا ماته شي.

لرو $\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$ او $\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$ نو له دې امله $\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x}$ په x = o کې نه شته

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱ : وي دې $f(x) = 2x + 1 \; ; \; x \geq 1$

$1 - x \; ; \; x < 1$

الف) ګراف وکاږئ ګراف

ب) پیدا کړئ $\lim_{x\to 3} f(x)$

پ) پیداکړئ $\lim_{x\to 1} f(x)$

که تابع په $x=3$ او $x=1$ کې نابرېکیدونکې وي

حل :

الف) ګراف کېڼ لور ته کښل شوی دئ

ب) $\lim_{x\to 3} f(x) = (2x + 1) = 7$

$f(3) = 7$

پ)

$$f(x) = \lim_{x\to 1^+} (2x + 1) = 3 \lim_{x\to 1^+}$$

$$f(x) = \lim_{x\to 1^-} 1 - x = 0 \lim_{x\to 1^-}$$

له ب) او پ) څخه لرو

$$f(x) \neq \lim_{x\to ^-1} f(x) \lim_{x\to ^+1}$$

له دې امله تابع په $x = 3$ ناپرېکیدونکې او $x =1$کې پرېکیدونکې ده یا نامتمادي

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۲ : وي دې $f(x) = \frac{x^3 + x}{x};\quad x \neq 0$

$=3 \quad ;$

// رسمه // الف) فنکشن رسم کړی

ب) بحث وکړی، چې تابع په $x = 2$ او $x = 0$ کې ناپرېکيدونکي ده او که نه

حل : الف) د تابع ګراف لپاره

x	-2	-1	0	1	2
f(x)	5	2	1	2	5

ب) $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^3 + x}{x} = \lim_{x\to 2} (x^2+1) = 2^2+1 = 5$

$$f(2) = \frac{2^3 + 2}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

له دې امله د f پوله (حد) شته او $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$ ، نو تابع په $x = 2$ کې متمادي يا نه پرېکيدونکی دی

وي دې $x = 0$

$$f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3 + x}{x} = 1 \lim_{x\to 0^+}$$

$$f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x3 + x}{x} = 1 \lim_{x\to 0^-}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا دا مانا لري چې $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ په دې مانا دی چې $f(0) = 3$.

دا دا مانا لري، چې $\lim_{x\to 0} f(x) \neq f(o)$

تابع په $x = 0$ کې پرېکیدونکې(نامتمادي) ده

که له دې شرطونو کوم یو شرط پوره نه وي نو تابع پرېکدونکې(نامتمادي) ده

بیلګه ۳: **وي** دې

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3}, \quad x \neq -3$$

ایا تابع په $x = -3$ کې ناپرېکېدونکې ده؟

حل) تابع $f(-3)$ تعریف نه دی، له دې امله تابع په $x = -3$ کې متمادي نه دی

پیژند(تعریف) :

f دې یوه تابع وي، چې د ټولو x لپاره په همغه واز اینتروال کې چې $x=c$ لري تعریف وي.

تابع f په $x = c$ کې ناپرېکیدونکی بلل کیږي، که دا لاندې شرایطو پوره وي.

۱) $f(x)$ تعریف دی ۲) که $\lim_{x\to c} f(x)$ شته وي (موجود وي)

۳) $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

که تابع د ټولو $x \in (a,b)$ لپاره متمادي وي ، نو تابع په وازاینتروال (a, b) کې هم متمادي دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بېلګه ۴ : وي دې $f(x) = 2x^2 + 1 \quad ; \quad x \le 1$

$= 4+x \quad ; \quad x > 1$,

وګورئ، چې تابع چېرته ناپرېکېدونکې ده او چېرته پرېکېدونکې.

حل : په $x = 1$ کې f تعریف دئ

$$f(1) = 3.$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (2x^2 + 1) = 3$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (4+x) = 5$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x)$$

له دې امله تابع په $x = 1$ کې پرېکېدونکې (نامتمادي) ده

بیلګه ۵ : وي دې

$= 2x^2 + 1 \; ; \; x < 2$

$f(x) = 3 \quad x = 2$

$= x + 3 \; ; \; x > 2$

د تابع $f(x)$ متمادیت په $x = 2$ کې تر بحث لاندې ونیسئ

حل : تابع $f(x)$ په $x = 2$ کې تعریف ده او لرو $f(2) = 3$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (x + 3) = 5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او

$$\lim_{x\to 2^{+}} f(x) = \lim_{x\to 2^{-}} f(x)$$

$$\lim_{x\to 2^{-}} f(x) = \lim_{x\to 2^{-}} (x^2 + 1) = 5 \Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x) = 5$$

دا چې $f(x) = 3$ دی، نو له دې امله ($\lim_{x\to 2} f(x) \neq f(2)$)

دا په دې مانا دی، چې تابع په $x = 2$ کې پرېکیدونکې(نامتمادي) ده

د ناپرېکیدونکو یا متمادي توابعو خویونه

فعالیت:

۱) د توابعو f او g جمع (زیاتون) پیداکړی

$$(f+g)(x) = \ldots\ldots$$

۲) د f او g توابع په x=2 کې متمادي(ناپرېکیدونکي= دي، نو :

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ldots\ldots.. \ \& \ \lim_{x\to a} g(x) = \ldots\ldots$$

۳) د پوله ارزښتونو (حدونو) ارزښتونه وکاروی

$$\lim_{x\to a} (f + g)(x) = \lim_{x\to a} (f(x) + g(x))$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad : \ldots$$

$$(f + g)(a) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots =$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې امله $(f+g)$ په $x=a$ کې متمادي دي.

که تابع f اوg په $x=c$ کې متمادي وي، نو د لاندې توابعو څخه يې هره يوه په $x=c$کې متمادي ده

۱) د توابعو جمع $f+g$

۲) د توابعو تفريق(کمون) $f-g$

۳) د توابعو ضرب(ځل) $f.g$

د توابعو وېش $\frac{f}{g}; g \neq 0$

بيلګه ۱ : وي دې

$$f(x) = \sin x + 1,$$

$$g(x) = x^2 + 3x - 2$$

نو ۱) f او g په $x=1$ کې متمادي دي.

۲) وښيرئ، چې الف) $\sin x + x^2 + 3x - 1$

ب) $(\sin x + 1)(x^2 + 3x - 2)$

په $x=1$کې متمادي که نامتمادي دي

حل :

$$1) \lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = \sin 1 + 1$$

$$\lim_{x\to 1} g(x) = g(1) = 2;$$ نو f په $x=1$کې متمادي دئ

نو g په $x=1$ کې متمادي دئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم خوي وځيرئ

$$2)\ a)\ \sin x + x^2 + 3x - 1 = (\sin x + 1) + (x^2 + 3x - 2)$$

۲) الف)

$$= f(x) + g(x) = (f + g)(x)$$

د متمادي توابعو جمع په $x = 1$ کېمتمادي ده

(ب b) $(\sin x + 1)(x^2 + 3x - 2) = f(x).\ g(x)$

$$= (f.g)(x)$$

نو د ناپرېکيدونکو- يا متمادي توابعو ضرب (حٔل) په $x = 1$ کې متمادي دئ

بيلګه ۲ : وي دې

$$f(x) = x + 1, \qquad g(x) = 3x - 2;$$

وځيرئ، چې ايا $f(x).\ g(x)$ په $x = 2$ کې متمادي ده

حل :

$$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2) = 3$$

$$\lim_{x\to 2} g(x) = 4 = g(2)$$

$$f(x)\ .\ g(x) = 3x^2 + x - 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to 2} f(x).\ g(x) = 3(4) + 2 -2 = 12$$

$$= \lim_{x\to 2} f(x).\ \lim_{x\to 2} g(x)$$

$$= f(2)\ .\ g(2)$$

له پورته څخه لاس ته راځي، چې $f(x).g(x)$ متمادي دی

په کينې لور بند ايتروال $[a,b]$ کې ګراف متمادي تابع په ګوته کوي یا ښايي، چيرته چې $f(a) \neq f(b)$. دی.

که ولرو $f(a) < k < f(b)$ نو ګراف له ټکي $(b, f(b))$ څخه نه شي انځورېدلی تر څو پرته (افقي)کرښه $y = k$ د ثابتې k سره غوڅه نه کړي .

(انځور راځي)

له پورته څخه ليکلی شو:

که تابع f په بند اينتروال $[a,b]$ کې متمادي(ناپرېکېدونکي) اوk د b او ترمنځ پروت وي، نو هلته کم له کمه يو عددc د f(a) اوf(b) ترمنځ شته داسې چې $f(c) = k$ دی

بيلګه ۳ : وي دې $f(x) = x^3 + 4x\ ,\ x \in [1,2]$

وښايی، چې يو $c \in (1,2)$ شته داسې،چې $f(c) = 11$ **وي.**

حل : $f(x)$ يو پولينوم دی نو f په بند اينتروال $[1,2]$ کې متمادي دی. لرو

$$f(1) =1^3 + 4\ (1) = 5;\ f(2) = 8 + 4\ (2) = 16$$

$$f(1) \neq f(2) \text{ او } 5 < 11 < 16$$

له دې امله يو عدد $c \in (1,2)$ شته، داسې چې $f(c) = 11$ دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۴ : وي دې

$$f(x) = 2x + 4; \quad -1 \leq x < 2$$

$$; \quad 2 \leq x \leq 20 |x-10| =$$

نو

الف) و ازمايى، چې تابع متمادي ده   ب) و ازمايى، چې يو (20 ,1-) ∋c شته داسې چې $f(c) = 6$ دئ او د c ارزښت پيدا کړی.

حل :

$$f(x) = 2x^2 + 4 = 8 \lim_{x \to 2^-}$$

$$f(x) = 10 - 2 = 8 \lim_{x \to 2^+}$$

له دې امله لرو

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2} f(x) = 8$$

$$f(x) = 10 - 2 = 8$$

ګورو چې تابع په [20 ,1-] کې متمادي دئ

$$b) \; f(-1) = 2x - 1 + 4 = 2$$

$$f(20) = |20 - 10| = 10 \quad \Rightarrow f(-1) \neq f(20)$$

په دې اساس لرو $2 < 6 < 10$

له دې امله لرو $c \in (-1, 20): \; f(c) = 6$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$2x + 4 = 6 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1 \in (-1, 2).$

$|x-10| = 6 \Rightarrow$

$x - 10 = 6 \Rightarrow x = 16 \in (-2, 20)$

یا $10 - x = 6 \Rightarrow x = 4 \in (-2, 20)$

د c ارزښت دی 1, 4, 16

بیلګه ۵ : وي دې

$f(x) = 2\sin x + 3;\ x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],$

وښایی چې $c \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ شته د کومې لپاره چې باور لري $f(c)=4$ او c پیداکړی.

حل : د تابع f د ساین تابع ده، نو له دې امله f متمادي(ناپرېکېدونکی) دی

$f(-\frac{\pi}{2}) = 2\sin -\frac{\pi}{2} + 3 = 2(-1) + 3 = 1$

$f(\frac{\pi}{2}) = 2\sin \frac{\pi}{2} + 3 = 2(1) + 3 = 5$

نو موږ لرو : $f(-\frac{\pi}{2}) \neq f(\frac{\pi}{2})$

تابع f متمادي ده او لرو $1 < 4 < 5$

دا په دې مانا چې $c \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ شته، د کوم لپاره چې $f(c) = 4$ صدق کوي

د دې لپاره چې c پیدا کړو نو لرو

$f(c) = 2\sin c + 3 = 4$

(c) ketabton.com: The Digital Library

-- ------------------------------

$$2 \sin c = 1 \Rightarrow \sin c = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow c = \frac{\pi}{6}$$

د ګراف څخه څرګندیږي، چې f په ایتروال [a,b] متمادي دی ، f(a) او f(b) متضادې مخنخښې(علامې) لري، نو c د f(a) او f(b) ترمنځ د منځ ارزښت جملې له مخې د K=0 سره کم له کمه یو C د a او b ترمنځ شته، چې لاس ته ترې راځي f(c) = 0 .

دا په دې مانا چې x=c د f(x) = 0 مساواتو یو حل دی . انځور شته

بیلګه ۶ : وي دې $f(x) = x^3 + 5x – 23$

وښایی، چې تابع f د x -محور په اینتروال (2.3) کې غوڅوي.

حل : f پولینومتابع ده ، نو f په اینتروال کې [2,3] متمادي دی.

$$f(2) = 2^3 + 5 (2) – 23 = -5$$

$$f(3) = 3^3 + 5 (3) – 23 = 19$$

او د متضادو مخنخښو(عالمو) سره $f(2) \neq f(3)$

له دې امله د $c \in (2,3)$ لرو چې $f(c) = 0$ دی

د څپرکي ټولګه " Chapter Summary "

پیژند: تابع f(x) یو حد L لري، که x ترلیي یو حقیقي عدد c ته لاړ شي. دا په دې معني چې د f(x) لپاره، چې ترلی و L ته ځي دا دی، چې x ترلیclose to و c ته لاړشي او داسې یې لیکو : $\lim_{x \to c} f(x) = L$

(c) ketabton.com: The Digital Library

قصیه : که f(x) همغه پوله ارزښت L ولري ،که x د ښی یا کیڼې لور و c ته نزدې شي، نو پوله ارزښت شته او د L سره برابر دی.

د پوله ارزښت یا حد خویونه :

که f اوg توابع وي، c;L او M حقیقي اعداد وي داسې چې $\lim_{x\to c} f(x)=L$

او $\lim_{x\to c} g(x)=M$ ، نو لاندې لرو:

$$1)\ \lim_{x\to c} (f+g)(x) = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x) = L + M$$

$$2)\ \lim_{x\to c} (f-g)(x) = \lim_{x\to c} (f(x) - g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x) = L - M$$

$$3)\ \lim_{x\to c} (f \cdot g)(x) = \lim_{x\to c} f(x) \cdot \lim_{x\to c} g(x) = L \cdot M$$

$$4)\ \lim_{x\to c} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M};\ (M \neq 0)$$

$$5)\ \lim_{x\to c} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$$

(د $f(x) \geq 0$ او د x د ټولو ارزښتونو لپاره ، چې c ته ور نزدې کیږي.

قضیه : که x په رادیان ورکړ شوی وي، نو لرو : $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

قضیه : که x په رادیان ورکړ شوی وي، نو لر: $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

پیژند : f دې یو تابع وي، چې د ټولو x لپاره په یو واز انتروال کې چې x = c ولري ،تعریف وی، نو وایو چې f په x = c کې متمادي، د لاندې شرایطو لاندې:

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

1) f (x) تعریف دئ $\;$ 2) $\lim_{x\to c} f(x)$ شته دئ

3) $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

که تابع د ټول $x \in (a, b)$ لپارره متمادي وي، نو تابع په ټول انتروال (a, b) (کې متمادي ده.

پېژند : وایو چې یو تابع په یوه بند انتروال [a, b]کې متمادي ده، که تابع له ښي لور په x = a ې متمادي وي او له کيڼ لور په x = b کې او د واز انتروال (a, b) په هر ارزښت کې متمادي وي.

د متمادي توابعو خویونه : که f او g په x = c کې متمادي وي، نو دا لاندې توابع هر یو په x = c کې متمادي دئ.

اول) د جمعې f+g تابع

دویم) د تفریق f-g تابع

دریم) د ضرب f.g تابع

څلورم) د ویش تابع

د منځني ارزښت قضیه: که تابع f په بند انتروال [a,b]کې متمادي وي او k د f(a) او f(b)ترمنځ یو عدد وي، نو کم له کمه د a او b ترمنځ یو عدد c شته، د کوم لپاره چې f(c)=k باور لري.

تړنه

د $x \to \pm\infty$ لپاره پوله ارزښت (حد)

اول : $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{5}{x-2} = \frac{5}{\pm\infty} = 0^{\pm}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ۵ وېشنه په يوه ډېر لوی (ناپای) مثبت(منفي) عدد باندې يو ډېر کوچنی مثبت(منفي) عدد ورکوي ياني □□ .

گراف G_f يو پروت اسيمپتوت $y=0$ لري ، چې له پورته او کښته گراف ته ور نزدې کيږي.

دويم :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-3}{x+1}= \frac{-3}{\pm\infty}=0^{\mp}$$

د3- وېشنه په يوه ډېر لوی مثبت(منفي) عدد باندې يو ډېر کوچنی مثبت(منفي) عدد ورکوي ياني □□ .

گراف G_f يو پروت اسيمپتوت $y=0$ لري ، چې له پورته او کښته گراف ته ور نزدې کيږي.

دريم :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{5}{x^2-2x}= \frac{5}{+\infty}=0^{+}$$

په مخرج کې فقط x^2 ستر رول لوبوي. د مربع کونې له لارې هر عدد مثبت کيږي.که ۵ په يوه ډېر لوی مثبت عدد ووېشل شي، نو يو خورا کوچنی مثبت عدد ترې لاس ته راځي، ياني
گراف G_f يو پروت اسيمپتوت $y=0$ لري ، چې فقط له پورته لور ور نزدې کېدني سره .

ځلورم :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-3}{x^2-2}= \frac{-3}{+\infty}=0^{-}$$

د مخرج مربع کونې سره منفي عددونه هم مثبت ميږي.. د3- وېشنه په يوه ډېر لوی مثبت عدد باندې يو ډېر کوچنی منفي عدد ورکوي ياني □ -.

گراف G_f يو پروت اسيمپتوت $y=0$ لري ، چې فقط کښته گراف ته ور نزدې کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پرېښودني - يا ترې صرفنظر کوني اصول

اول :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-1}{x^2-2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0^{\pm}$$

په صورت کې د x توانونه، په مخرج کې د x^2 توانه په پام کې نيسو او همداسې له ټولو ثابتو تېرېږو (ټولې ثابتې پرېښول کيږي،صرف نظر ترې کيږي) او بيا x لنډيږي. که ۱ په ډېر لوی مثبت(منفي) عدد ووېشل شي. نو □□ ترې لاس ته راځي.

ځېره G_f پروت اسيمپتوت(مجانب) $y=0$ لري، چې له پورته او کښته ورنږدې کيږي.

دويم

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-2}{x+2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}x=\pm\infty$$

- په صورت کې د x^2 او په مخرج کې د x له ټولو توانونو په پام کې نيونو او له ټولو ثابتو تريږو (صرفدظر ترې کوو) او بيا يې د x سره لنډوو. په روښانه توګه ټول پوله ارزښتونه □□ لاس ته راځي.

ځېره G_f مايله اسيمپتوتي راکوي، ځکه چې د صورت درجه له مخرج څخه د ۱ په اندازه ستره ده.

دريم :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2-2}{3x^2+2x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2}{3x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2}{3}=-\frac{2}{3}$$

په صورته او مخرج کې د x^2 ټول توانونه په پام کې نيسو او له ټولو ثابتو تېرېږو او بيايې د x^2 سره لنډوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټولې پولې په روښانه توګه 2/3- راکوي.

ځيره G_f پرته اسيمپتوت راکوي ، چې $y=-2/3$ ده.

خلورم :
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2+2x-1}{3x^3+2x^2-3x+2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2}{3x^3}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2}{3x}=\frac{-2}{\pm\infty}=0^{\mp}$$

په صورت کې د x^2 څخه کوچنيو ټولو توانونو او په مخرج کې د x^3 له ټولو کوچنيو توانونو او همداسې له ثابتو تېرېږو (صرف دظر پرې کوو) . که په ووېشل شي ، نو يو کوچنې مثبت يا منفي عدد يانې$\mathbf{0}^{\mp}$ ترې لاس ته راځي.

ځېره $\mathbf{G_f}$ يو پروت اسيمتوت$y = 0$ لري،چې له پورته او کښته لور ورنزدې کيږي.

شميرنيز حلونه

دويم :
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-1}{x^2-2}=$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{2}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x^2}}=\frac{0^{\pm}}{1}=0^{\pm}$$

په صورت او مخرج x^2 له نوکانو(قوسونو) راوستنې او بيا د x^2 سرره لنډونې وروسته مخرج د ۱ په لور ځي او صورت د $+\infty$ په لور ، نو

ترمونه $2/x$ او$1 / x$ و صفر ته نزدې کيږي.

ځيره G_f يوه مايله اسيومپتوت لري، ځکه چې د صورت درجه د مخرج له درجې څخه په ۱ لويه ده.

دريم :
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2-2}{3x^2+2x}=$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\left(-2-\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(3+\frac{2}{x}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2-\frac{2}{x^2}}{3+\frac{2}{x}}=-\frac{2}{3}$$

- که x^2 له نوکانو راووېستل شي او بيا لنډ شي،نو صورت د صفر په لور ځي يا صفر ته نزدې کيږي;مخرج ,۱ ته نزدې کيږي، ځکه ټول ترمونه د او و صفر ته ځي په صورت فقط ترم د صفر مخنخښه ټاکي.

خېره پرته اسيمپټوت لري له پورته او ښکته نزدې کيدنې سره.

ځلورم: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2+1}{x^4-2x^2+2}=$

په صورت او مخرج کې هغه د لوی توان x يعنې x^4 له نوکانو دباندې نيسو او بيا په ترتيب شمېرنيزه عمليه مخ ته بياوو ، نو لاس ته ترې راځي:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^4\left(\frac{-2}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)}{x^4\left(1-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^4}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{-2}{x^2}+\frac{1}{x^4}}{1-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^4}}=\frac{0^-}{1}=0^-$$

ټوليز خويونه :

اول : $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2-2}{x+1}=\qquad\pm\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(3x-\frac{2}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{+\infty}{1}=+\infty$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورته بیلګه کې داسې مخ ته تللي ي،چې په صورت کې له ټولو عددونو تېرېږو، چې د خپلواکې متحولې توان له ۱ کوچنی یعنې صفر وي او په صورت کې له ټولو۲ ۲ څخه کوچنې توان څخه تېرېږو. ګورو، چې په صورت کې پاتېکيږی، له دې امله پورته تابع د مثبت-منفي ناباى په لور ځي.

دویم :
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-1}{x^2-2}= \qquad 0^{\pm}$$

په پورته بېلګه کې په صورت کې له ۱ او مخرج کې له ۲ څخه تېرېږو او بیا صورت او مخرج په x ويشو، چې لاس ته رانه يې يو يې د يوه ثابت عدد وېشل وي په x . چې د x □□ سره تابع و $0^{\pm}$ ته ځي.

بیلګه ۳ : لرو :
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2-2}{3x^2+2x}=$$

په صورت کې له ۲ او مخرج کې له 2x څخه تېرېږو او د x^2 سره لنډوني وروسته د x^2 سره لنډيږي او په دې ډول لاندې پایله لرو :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2-2}{3x^2+2x}= -\frac{2}{3}$$

بیلګه ۴ :
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2+1}{x^4-2x^2+2}= \qquad 0^{-}$$

په صورت کې له ۱ او مخرج کې له اوو څخه تېرېږو او بیا له لنډوني وروسته یو ثابت عدد په ناپای وېشل کیږي، چې پایله يې 0^{-} دی، یعنې لرو :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2+1}{x^4-2x^2+2}= 0^{-}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۹ . ۵ تمرینونه

۱ . د بلواکو پولی

۱ . ۱ لاندې پولې وټاکئ

1.1.1. a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$ b) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$

c) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}\frac{4x^2-1}{2x+1}$ d) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x}{1-\sqrt{x}}$

1.1.2. a) $\lim\limits_{x\to 8}\frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$ b) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{27-x^3}{x-3}$

c) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^4-1}{1+x}$ d) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{2+x}{32+x^5}$

1.1.3. a) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-4x+3}{2x-6}$ b) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$

c) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$ d) $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$

1.1.4. a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x+1}}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+25}-5}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ d) $\lim\limits_{x\to 7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$

1.1.5. a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$ d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sin x\frac{\cos x}{x}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x}$ f) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}$

g) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 2x}$ h) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

i) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{1-\tan x}{1-\cot x}$ j) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

k) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos x - \cos\frac{\pi}{4}}{\sin x - \sin\frac{\pi}{4}}$ l) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x - \cos x}{1 - \tan x}$

۱.۲ په ورکړشوو ځایونو کی د لاندې بلواکو کیڼ او ښی پولې وټاکې

a) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ für $x = 0$

b) $f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$ für $x = 0$

c) $f(x) = e^{\frac{1}{1-x^2}}$ für $x = 1$

d) $f(x) = \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ für $x = 0$

e) $f(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{e^{\frac{1}{x}} + 1}$ für $x = 0$

f) $f(x) = \dfrac{x}{2x + e^{\frac{1}{x-1}}}$ für $x = 1$

g) $f(x) = 2^{\frac{1}{x-1}}$ für $x = 1$

h) $f(x) = \dfrac{2^{\frac{1}{x}} + 3}{3^{\frac{1}{x}} + 2}$ für $x = 0$

i) $f(x) = \dfrac{1}{1 + 3^{\frac{1}{x-1}}}$ für $x = 1$

j) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ für $x = 1$

k) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ für $x = -1$

l) $f(x) = \dfrac{x+1}{|x+1|}\, x$ für $x = -1$

۲ . ناپریکیدونکی بلواك : لاندې بلواك د کوم لپاره پریکیدونکی ځایونه لري، دا د کوم ډول دی او که ممکن وي، په کومه توګه دا له منځه وړ ل کیدی شي.

a) $y = \dfrac{|x-1|}{x-1}$

b) $y = \dfrac{x+2}{|x+2|} \cdot x$

c) $y = \dfrac{1-x}{1-|x|}$

d) $y = \dfrac{x+2}{x+2} + \dfrac{1}{x+1}$

e) $y = \dfrac{x-3}{\sqrt{1+x} - 2}$

f) $y = \dfrac{x-4}{\sqrt{x} - 2}$

g) $y = \sin\dfrac{1}{x}$

h) $y = x \cdot \sin\dfrac{1}{x}$

i) $y = x^2 \sin\dfrac{1}{x}$

j) $y = \dfrac{\sin x}{x}$

k) $y = x \cdot 2^{\frac{|x|}{x}}$

l) $y = \ln 2^{\frac{1}{x-1}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

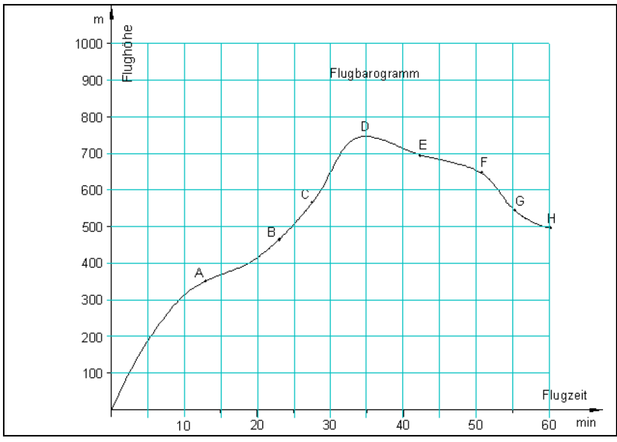
۲۰ . مشتقشمیرنه(رابیلیدنه)

II.1.د تابع تغیر منځ ارزښت (منځنی قیمت) Average rate of change

دکتاب په دې برخه کې موږ د ریاضیاتو یوه غوره برخه، چې د ریاضیاتو زړی ورته ویلی شو ، تر څېړنې لاندې نیسو، نو له دې امله لازم ګڼم، چې په دې هکله داسې مهم څه د یوه یادښت په څېر راوړم:

که له یوه ځای څخه وبل ځای ته د تابع د تغیر منځ ارزښت Averagerate of change څخه غږېږو ، نو موخه ترې په یوه ټکي یا دوه ټکو کې د تابع جګوالی ، میل اویا تانجنت دی او دا دریواړه کلمې د ریاضیاتو له مخې په همغه یوه معنا دي او وبه ګورو، چې همداسې د تفاضل وېش(Difference quotient) هم.

په یوه ټکي کې د تابع د ګراف میل(جګېدنه)



په الوتکوکې د الوتنېدلیک(الوتنلیک) الې (Flight barogramm) جوړې دي، چې تل د الوتنې جګوالی د الوتنې د وخت په واک کې یا د وخت تابعیت کې رسموي او په هر جګوالي کې د هوا فشار هم لیکي. که دا په پښتو واړوو، نو د لیک بکس به ورته ووایو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورته ګراف کې د يوې الوتکې د الوتنې د بيلا بيلو وختونوجګوالى ښوول شوى.

-ايا فکر کوئ، چې په ټکي B کې نسبت و ټکي A ته جګوالى زيات دى؟

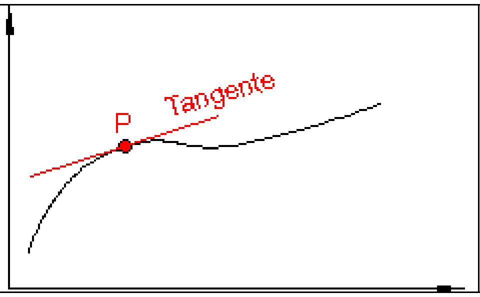
-ايا فکر کوئ، چې د E او G په ټکو کې جګوالى منفي دى؟ دلته د E په ټکي کې د ارزښت له مخې جګوالى زيات دى نسبت د G ټکي ته؟

-ايا د يوې کرښې او منحني جګوالى هرچېرته توپير لري او که نه ؟

لاس ته راوړنه :
۱ - ګورو، چې په يوه منحني کې د ګراف جګوالى هرچېرته برابر نه دى، نو له دې امله بايد ټکى په ګوته کړو، چې هلته ميل څېړل کيږي.

۲ - په لاندې بيلګه کې به روښانه کړو، چې تنها د يوې (سيده)کرښې ميل هرچېرته برابر دى، نو له دې امله دلته د يوې کرښې د ميل يا جګوالي څخه غږيږو.

بريښي چې لاندې پېژند يا تعريف عاقلانه دى:

پيژند (تعريف): د يوې تابع ګراف ميل (جګوالى) د P په يوه ټکي کې په همغه ټکي د تانجنت د ميل د ګراف سره برابر دى	

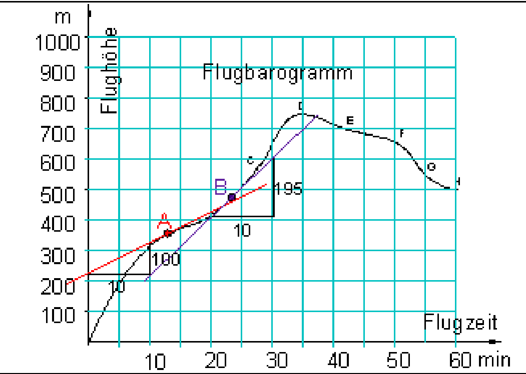
ليدل کيږي چې دلته يو تانجنت د کرښې تعريف لري، چې د لمستکي(مماس) په چاپېريال کې د امکاناتو سره سم لمستکي(مماس) ته ښه ور نږدې کيږي.

ددې پېژند يا تعريف له مخې په يوه ټکي کې د يوه ګراف ميل د يوې کرښې ميل دى.

د ګراف د جګيدنې ټاکلو لپاره د A او B په ټکو هر يوه کې يوه کرښه (تانجنت) انځوروو، چې ګراف ته خورا زياته نږدې کيږي.

د ميل يا جګيدنې مثلث په مرسته جګېدنه په شډل يا ساده ډول شميرل کېدى شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library



د A په ټکي کي جګیدنه :

$$\frac{100\ m}{10\ min} = 10\ \frac{m}{min}$$

د B په ټکي کي جګیدنه :

$$\frac{195\ m}{10\ min} = 19{,}5\ \frac{m}{min}$$

زموږ د بیلګي لپاره میل یا جګېدنه په یوه ټاکلي ټکي کي د لحظوي (سملاسي) میل د چټکتیا (سرعت) په معنا دی.

دA په ټکی کې : د الوتنې وخت نږدې 12,5 min ، د میل یاجګېدنې چټکتیا(سرعت) نږدې $10\frac{m}{min}$ ده

د B په ټکی کې : د الوتنې وخت نږدې 23,0 min ، د جګیدنې چټکتیا(سرعت) نږدې $19,5\frac{m}{min}$ ده.

تانجنت تر اوسه فقط د لیدنې له مخې تعریف شوی ، چې د لمستکې چاپیریال ته خورا ډېر نږدې کیږي. له دې امله ممکن وه، چې د ګراف میل د A او B په ټکو کې هم یواځې په نږدې ډول وټاکل شي، دا په عمل کې د قناعت وړ نه دی.

II.2 په یوه ټکي کې د تابع دګراف میل (جګیدنه):

معلومه ده ، چې یو ریلګاډی د تمځای څخه له خوزېدو(حرکت)وروسته خپله چټکتیا(سرعت) په ورو ورو (کراره کراره) زیاتوي.وهلې لار(د تمځای څخه لرېوالی) تل زیاتیږي. د تمځای څخه لریوالی د چټکتیا یا سرعت په واک کې ده .

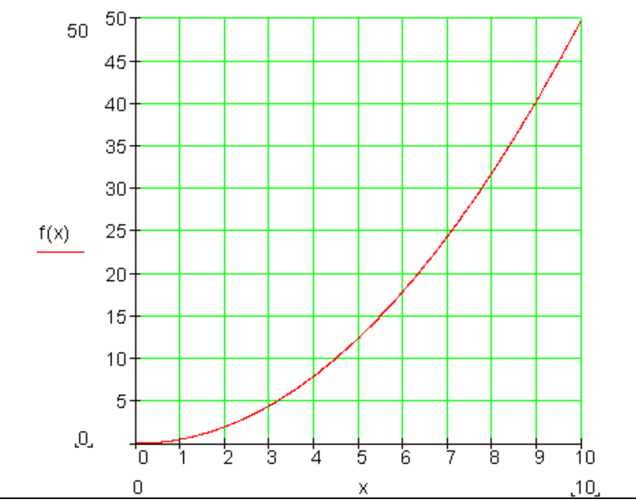
(c) ketabton.com: The Digital Library

دا عمل د لاندې تابعمساوات له لارې ليکلی شو.

دلته د x وخت د ثانيې او د s لار د متر لپاره ليکو

$$s = f(x) = 0{,}5x^2$$

مخامخ : د تابع ګراف



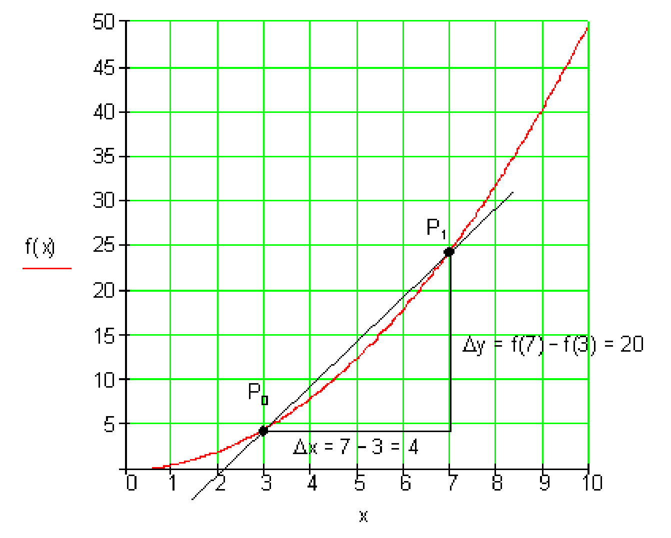
اوس باید منځنی ارزښت(منځنی چټکوالی) Averagerat of change د ۳ ــمې او ۷ ــمې ثانيې ترمنځ وشمېرل شي.

ددې لپاره اړونده سیکانت انځوروو او د هغې چټکوالی شمیرو.

اوس دې د تغیر ارزښت (منځنی چټکوالی) د ۳ ــمې او ۴ ــمې ثانیو ترمنځ وشمیرل شي.

په دریمه ثانیه کې د ارزښت تغیر یا چټکوالی څومره دی؟

د منځنی چټکوالي داسې مخ ته بوزی، چې د تکو P_1 او P_0 ترمنځ واټن تل کوچنی شي،داسې چې تکی P_1 د تکي P_0 په لور وخوزيږي.



د ۳ ــمې او ۷-مې دقیقې ترمنځ

(c) ketabton.com: The Digital Library

منځنی تغیرارزښت (جګوالی)دی:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(7)-f(3)}{7-3} = \frac{24{,}5-4{,}5}{7-3} = \frac{20}{4} = 5$$

د ۳ ـمې او ۴ ـمې دقیقې ترمنځ

منځنی تغیرارزښت(منځنی جګوالی) دی:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4)-f(3)}{4-3} = \frac{8-4{,}5}{4-3} = \frac{3{,}5}{1} = 3{,}5$$

دریمې دقیقې ته د ورنږدې کیدنې شمیرنه

Intervall $[3;x]$	$[3;4]$	$[3;3{,}1]$	$[3;3{,}01]$	$[3;3{,}001]$
$\Delta x = x-3$	1	0,1	0,01	0,001
$\Delta y = f(x)-f(3)$	3,5	0,305	0,03005	0,0030005
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	3,5	3,05	3,005	3,0005

پورته شمیرنه په ګووته کوي، چې که ټکی P_1 د ټکي P_0 په لور وخوزیږي یا ورنږدې شي، نو د تغیر ارزښت(جګېدنه) تل زیاته و ارزښت ۳ ته ورنږدې کیږي.

موږ په دې توګه یو ارزښت لاس ته راوړو، چې لحظوي تغېرارزښت (لحظوي جګیدنې) ته تل ورنږدې کیږي.
که موږ فیزیکي لویي (واحدونه) په خپله بېلګه کې وکاروو، نو د تغیرارزښت (جګوالي) لپاره m/s باور لري . دا د چټکتیا لپاره یوون(واحد) دی

دا په دې مانا دی،چې د لار-وخت دیاګرام چټکتیا (سرعت) په ګوته کوي.

II.3 د لحضوي(د سترګو رپ) تغیرارزښت شمیرلو ته شمیرنیزه تګلار

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $f(x) = 0,5x^2$ لپاره په اینتروال $[3;\Delta x]$ کې منځنی تغیر ارزښت جګوالی:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3+\Delta x)-f(3)}{\Delta x} = \frac{0,5(3+\Delta x)^2 - 0,5\cdot 3^2}{\Delta x} = \frac{0,5\left[9+6\Delta x+(\Delta x)^2\right]-0,5\cdot 9}{\Delta x}$$

$$= \frac{0,5\cdot 9+3\Delta x+0,5(\Delta x)^2-0,5\cdot 9}{\Delta x} = \frac{\Delta x(3+0,5\Delta x)}{\Delta x} = 3+0,5\Delta x$$

دا $3+0,5\Delta x$ د منځنی تغیرارزښت دی

که اوس Δx تل کوچنی شي، موږ وایو که Δx د صفر په لور وهڅیږي ($\Delta x \to 0$)، نو د منځنی تغیر ارزښت $3+0,5\Delta x$ د3 به لور هڅیږي.

دا نو اوس لحظوي (د سترګو رپ) تغیرارزښت دی د x_0 په ځای کې.

د دې لپاره لیکو : د $\Delta x \to 0$ لپاره باور ري: $3+0,5\Delta x \to 3$

یا

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(3+0,5\Delta x) = 3$$

II.4کمښت ویش(د تفاضل(؟) ویش) Difference quotient

په ورته توګه د کمښت ویش یا د تفاضل ویش Difference quotient تر څېړنې لاندې نیسو.

د یوې کرښې میل یا جګیدنه بې له مشتق نیونې ټاکلکیدی شي:

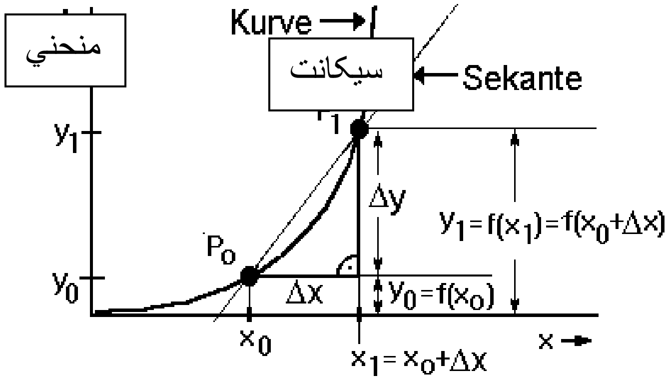
کرښه $y=f(x) = mx+a$ لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې کرښې د جګیدنې فرمول په لاندې ډول دی:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

د قاطع (seconce) پیزند : قاطع هغه کرښه ده، چې منحني د P_0 او P_1 په دوه ټکو کې غوڅوي(لاندې څېره وګورئ)



پایله : د قاطع(غوڅوونې secant) میل یا جګیدنه(جګوالی): دا چې قاطع هم یوه کرښه ده نو ،،میل (جګوالی) ،، یې هم د یوې کرښې میل په ډول شمېرل کیږي.

$$m_s = m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$m_S = m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

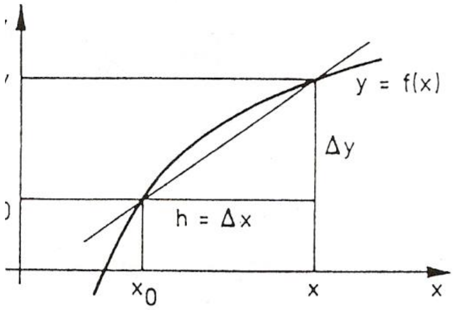
پیژند(تعریف)

د $y = f(x)$ تابع دې د x_0 په یوه چاپیریال او په x_0 کې پخپله تعریف شوې تابع وي، x د x_0 څخه بیل خو د چاپیریال په یوه خوښه یا په زړه پورې ځای دی(مخامخ څیره دې وکتل شي).

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو د تفاضل – یا کمښتویش Difference qutient د قاطع میل شته دی، چې په لاندې ډول يې ليکو:

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=$$
$$=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$



د پیژند لپاره ځیره

د f تابع لپاره فرمول: $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. دا فرمول د f په ګراف باندې د دوه ټکو ترمنځ د قاطع د میل شمېرنه ده. د ا ټکي د x – محور باندې د x او $x+h$ ټکي دي.
د کمښت وېش یا د تفاضلونو ویش د مشتق د تعریف لپاره په کار راځي.

بیلګه:
د $y=f(x)=3x^2-5x+4$ تابع دې ورکړ شوې وي. د دې تابع کمښت ویش(دتفاضل وېش) پیدا کړئ.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{3(x+h)^2-5(x+h)+4-(3x^2-5x+4)}{h}$$
$$=\frac{3x^2+6xh+3h^2-5x-5h+4-3x^2+5x-4}{h}$$
$$=\frac{6xh+3h^2-5h}{h}$$
$$=6x+3h-5$$

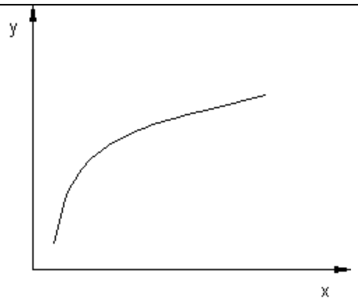
II .2 مشتق Diffrentialquotient

(c) ketabton.com: The Digital Library

II.2.1 د غوڅووني(تقاطع) ځګوالي څخه و د تانجنت ځګوالي يا ځګيدني ته

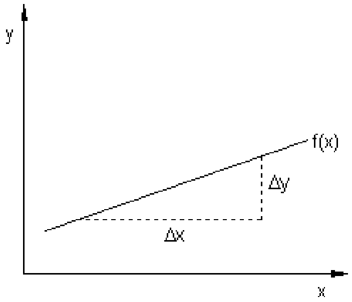
يو تابع $y = f(x)$ او اړونده ګراف دې ورکړ شوی وي.

که د تابع ځګيدني حالت په پام کې ونيسو ،نو ګورو چې د تابع ځګيدنه په نزدې ټولو ټکو کې توپير لري.



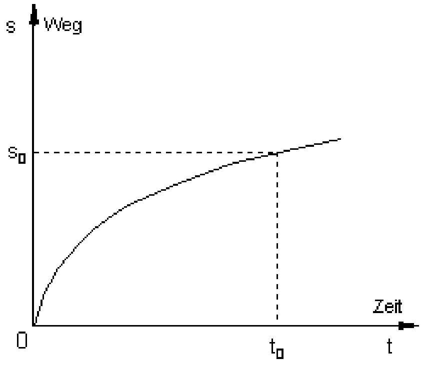
يوه ثابته ځګيدنه، لکه په لانيز تابع $f(x) = a_1 x + a_0$ ا کې د

$$a_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{konstant}$$



په زياتو وختونو اړيينه ده ، چې د تغيرحالت(د ځګيدني حالت) کې د تابع د تلني حالت و څيرو.

نو له دې امله لحظوی چټکتيا(همغه وختيزه – يا سملاسي) $v(t_0)$ په لار- وخت دياګرام کې وڅېړو.



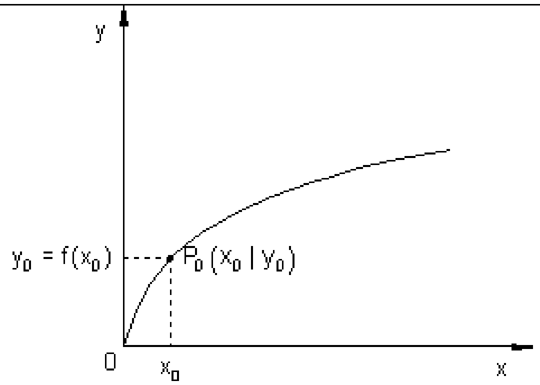
$t_0 \triangleq$	په پام کې نيولی سترګو رپ
$s_0 \triangleq$	تر دې سترګو رپ پورې وهلې لار

د مشتقشميرني په مرسته دا پرابلم حل کيدی شي.

د يوه تابع د ځګېدني ټاکنه په يوه د مخه ورکړ شوي ځای کې differenzieren د مشتق نيونه بلل کيږي.

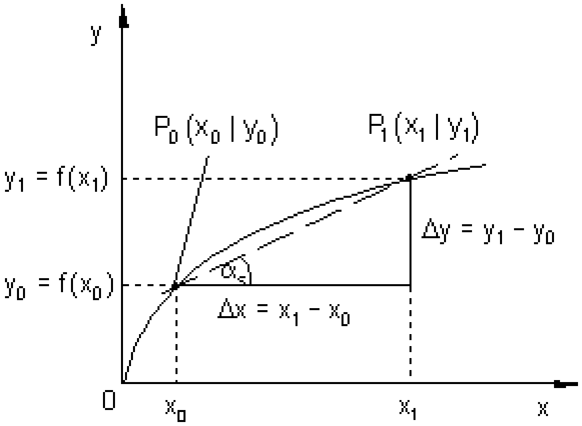
(c) ketabton.com: The Digital Library

يو تابع $y = f(x)$ او د هغه ګراف دې ورکړ شوی. په ټکي $P_0(x_0 | y_0)$ کې ورکړ شوی وي. ددې جګوالی پيداکړی شي.



ددې پرابلم د حل لپاره داسې مخ ته ځو، چې لومړی جګوالی په نزدې توګه (تقريبي) پيدا کوو.

ددې لپاره يو بل ټکی $P_1(x_1 | y_1)$ د P_0. ټکي په نزدې کې ټاکو.



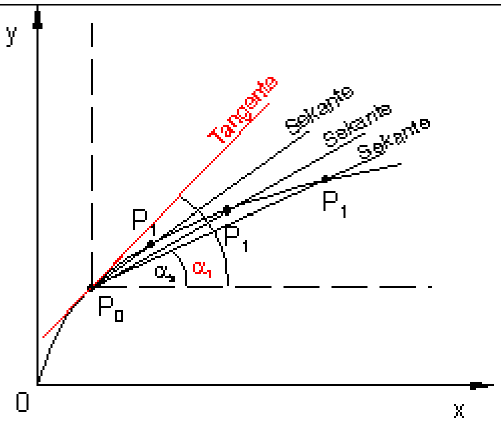
کرښه، چې دواړه ټکي سره تړي ،يعني سيکانت، يو جګوالی ښايي، چې د ټکو P_1 او P_0 ترمنځ د تابع ،،منځنی جګوالی،، په ګوته کوي.

$$\tan\alpha_s = a_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

$\alpha_s \triangleq$	د سيکانت د جګېدو کونج
$a_s \triangleq$	د سيکانت د جګېدوضريب

دا د جګواليمثلث له لارې ټاکل کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که ټکی P_1 د ټکي P_0 په نږدې کې وټاکو یا ځای په ځا ی کړو، نو دا په ټکي P_0 کې د تابع دنوي سیکانت جګوالی دې چې باید پیدا شي. که دا کار (ټلنه) تل مخ ته بوزو، او ټکی P_1 تل و ټکي P_0 ته ورنږدې کړو، نو د پولې حالت په ځېړ یوه کربنه منځ ته راځي، چې د تابع ګراف په ټکي P_0 کې لمسوي. د تانجنت جګېدنه په ټکي P_0 کې ټیک د تابع د ګراف جګېدنه په ټکي P_0 کې ښايي.	 α_t = د تانجنت د جګوالي (میلان -) کونج a_t = د تنجنت د جګوالي ضریب
داحالت یا تلنلار کیدی شي د ریاضي له لارې د پوله ارزښت په ځیر افاده شي.	$\lim\limits_{P_1 \to P_0} \alpha_s = \alpha_t \qquad \lim\limits_{P_1 \to P_0} a_s = a_t$

II.2.2.کمښتویش او مشتق Diference quotient and diferentialquotien

د سیکانت جګیدنه (منځنی تغیر

$$a_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x}$$

ارزښت)

$$\Delta x = x_1 - x_0 \Rightarrow x_1 = x_0 + \Delta x$$

د x لپاره د مساوات بنی خوا ځای په ځای کوو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

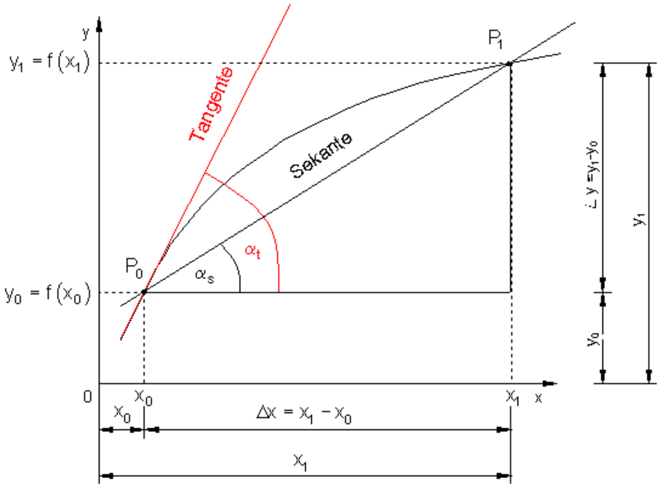
د تنجنت جګېدني سره د حد (پوله ارزښت) له لاري لرو

$$a_t = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

دا مشتق یا لحظوي – یا د سترګو رپ تغیر ارزښت دی

یا لنډ:

$$a_t = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$



په ورته توګه د کمښت ویش یا د تفاضل ویش Difference quotient تر څیړنې لاندې نیسو:

د یوې کرښې میل یا جګیدنه بې له مشتق نیونې ټاکلکیدی شي.

کرښه $y = f(x) = mx + a$ لرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې کربښې د جګیدنې فرمول په لاندې ډول دی:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

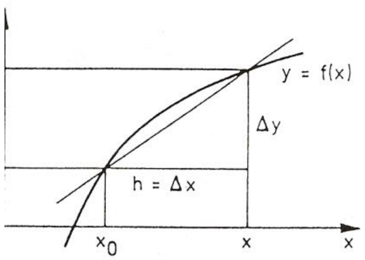
II.6 د غوڅوونې(قاطع seconce) پیژند:

قاطع هغه کربنه ده، چې منحني د P_0 او P_1 په دوه ټکو کې غوڅوي.

پایله: د قاطع میل یا جګیدنه(جګوالیsecant): دا چې قاطع هم یوه کربنه ده نو میل(جګوالی) یې هم د یوې کربښې میل په ډول شمېرل کیږي.

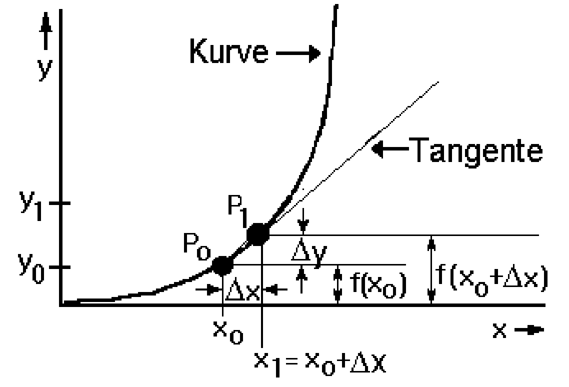
په لاندې کې m_S د جګوالي لپاره لیکل کیږي.

$$m_s = m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

د پیژند لپاره ځیره	پېژند(تعریف): د $y = f(x)$ تابع دې د x_0 په یوه چاپیریال او په x_0 کې پخپله تعریف شوې تابع وي، x د x_0 څخه بیل خو د چاپیریال په یوه خوښه یا په زړه پورې ځای دی(مخامخ ځیره دې وکتل شي). نو د تفاضل یا کمښتویش Difference qutient د قاطع میل شته دی، چې په لاندې ډول یې لیکو: $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$
	

(c) ketabton.com: The Digital Library

د f تابع غوځي میل لپاره فرمول: $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. دا فرمول د f په ګراف باندې د دوه ټکو ترمنځ د قاطع د میل شمیرنه ده. ټکي د $x-$ محور باندې د x او $x+h$ ټکي دي.
د کمښت وېش یا د تفاضلونو ویش د مشتق د تعریف لپاره په کار راځي.
د یوه تابع د میل یا ځګیدنې ټاکنه په یوه د مخه ورکړ شوي ځای کې د تابع د مشتق نیونه بلل کیږي.

	مشتق شمیرنه = د یوې منحني میل Differential caculation) تانجنت: که د P_1 او P_0, ټکي یو بل ته نایای نږدې شي، نو له قاطع څخه تانجنت جوړیږي.

پایله : د تانجنت ځګیدنه : د تانجنت ځګېدنه د قاطع د ځګېدنې ،،حد ،،دی.

$$m_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1)-f(x_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

پام: لکه د مخه مو چې ګوته ورته ونیوله، د derivativeکلمه نوې ده، نو له دې امله دا څو ټکي په پام کې نیسو : derivative د رابیلیدنې په مانا دی، چې موږ یې تراوسه مشتق بولو،چې همدا معنا لرییعنط له اشتقاق سره تړاو لري.

تعریف: که د تابع دا کمښتویش (د تفاضل ویش) او(همداسې) x- > x0 ⬄ (x->0)او یا په (همدې ډول) ⬄
h- > 0 لپاره یو حد ولري , نو د y = f(x) تابع د $x = x_0$ په ځای کې د مشتق قابلیت لري اود دې لپاره لیکو:
.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(\frac{dy}{dx})_{x=x_0} = f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} =$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h};...$$

دا حد یا پوله داسې ښایو

$$(\frac{dx}{dy})_{x=x_0} = f'(x);$$

د x_0 ځاي کی د $y = f(x)$ تابع له مشتق(Derivativ,) یا رابیلدنې) څخه یوه بله سیده یا بل ډول کړه لار رابیله وو.

د مشتق ساده شمیرنې لپاره یوه بېلګه:

د $f(x) = x^2 - 3x + 2$ مشتق غواړو پیدا کړو.

ددې کمښتوېش په لاندې ډول دی:

$$\frac{y-y_0}{x-x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$= \frac{((x_0+\Delta x)^2 - 3(x_0+\Delta x)+2)-(x_0^2-3x_0+2)}{\Delta x}$$

$$= \frac{x_0^2+2x_0\Delta x+\Delta x^2-3x_0-3\Delta x+2-x_0^2+3x_0-2}{\Delta x}$$

$$= \frac{2x_0\Delta x+\Delta x^2-3\Delta x}{\Delta x}$$

$$= 2x_0+\Delta x-3$$

او د لیمیټ $\Delta x \to 0$ سره یې مشتق لاس ته راځي:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}(2x_0+\Delta x-3) = 2x_0-3.$$

د دې لپاره دا لاندې پېژند ورکوو:

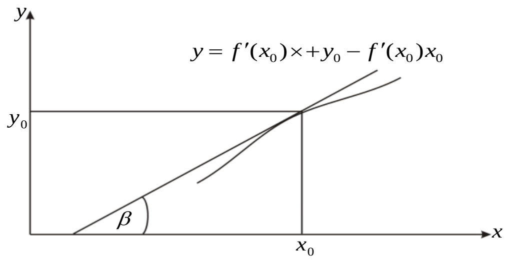
(c) ketabton.com: The Digital Library

پيژند 2:

که يو د $y = f(x)$ تابع د x_0 په ځاي کی مشتقوړوي، نو هغه لاندنۍ کرښه چی د (x_0,y_0) ټکي څخه تيريږي او ميل يا جګوالی يې $f'(x) = \tan\beta$ دی په لاندې ډول ليکو:

$$\frac{y-y_0}{x-x_0} = f'(x) \Leftrightarrow y = f'(x_0)x + y_0 - f'(x_0)x_0$$

او دا د (x_0,y_0) په ټکي کی د ورکړ شوې منحني $y = f(x)$ تانجنت بلل کيږي(پرتله مخامخ شکل)



موږ اوس د څو بنسټيزو توابعو مشتق شميرنه تر څيړنې لاندې نيسو.

بيلګه ۱:

د يوې ثابتي مشتق :

موږ دالاندې تابع لرو،چې ارزښت يې يوثابت دئ

ثابت $y = f(x) = c = Const$

نو د هر x_0ځای لپاره لرو:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{c-c}{h} = 0$$

$$\Rightarrow (\frac{dy}{dx})_{x=x_0} = f'(x_0) = 0$$

بيلګه ۲:

يوه $f(x)=x$ خطي(کرښيزه)تابع لرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د x_0 په ځای کې غواړو د دې تابع مشتق پیدا کړو او د مشتق تابع هم:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x_0+\Delta x)-x_0}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x_0+\Delta x-x_0}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta x}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=1$$
$$\Rightarrow f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}1=1$$

نو $f'(x_0)=1$ د x_0 په ځای کې د تابع مشتق دی او $f'(x_0)=1$ د مشتق تابع ده یعنې یوه ثابته ده.

بیلګه ۳ : د y=f(x)= c.u(x) دوله تابع مشتق د c=ثابتې سره.

د یوې تابع مشتق، چې له یوې ساده تابع او یوې ثابتې سره د ضرب له لارې منځ ته راغلی وي، برابر دی د ساده تابع د مشتق سره، چې د(ثابتې=c) سره ضر ب شوی وي. یعنې

له y=f(x)= c.u(x) څخه لرو:

$$\Rightarrow f'(x)=c\cdot u'(x)$$

ثبوت:

$f(x_0)=c\,u(x_0)$ $f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{c\cdot u(x_0+\Delta x)-c\cdot u(x_0)}{\Delta x}$ $\Leftrightarrow f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}c\cdot\frac{u(x_0+\Delta x)-u(x_0)}{\Delta x}$	$\Leftrightarrow f'(x_0)=\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}c}_{c}\cdot\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x_0+\Delta x)-u(x_0)}{\Delta x}}_{u'(x_0)}$ $\Leftrightarrow f'(x_0)=c\cdot u'(x_0)$

پیژند (تعریف): دفرنځیالوېش

(c) ketabton.com: The Digital Library

Der Differentialquotient $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) := \frac{dy}{dx}$ heißt Ableitung der Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0

د x_0 په ځای کې د تابع $f(x)$ مشتق یا رابیلیدنه بل کیږي

تعریف (پیژند): د تابع لومړی مشتق یا رابېلېدنه دx_0 په ځای کې دتانجنت جګېدنه ورکوي، چې د تابع ګراف يې په ټکي $P_0(x_0, y_0)$ کې لمسوي او له دې سره غبرګ د تابع د ګراف جګېدنه ده په ټکي $P_0(x_0, y_0)$ کې. دا سړی د تابع جګېدنه هم بولي.

تانجنتجګېدنه په ټکي $P_0(x_0, y_0)$ کې

Tangentensteigung in $P_0(x_0 \mid y_0)$

$$a_t = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

د x_0 په ځای کې د تابع مشتق او د مشتق تابع

د x_0 په ځای کې د تابع مشتق یعنې څه؟

ددې د روښانه ونې لپاره د لاندې بېلګې څخه کار اخلو

بیلګه:
تابع $y = f(x) = x^2$ دې ورکړ شوې وي.
غواړو د $x = x_0$ په ځای کې او په ځانګړې توګه د $x_0 = 2$ په ځای کې د هر څه لومړی کمښتویش(د تفاضل وېش) پیداکوو.

$x = x_0:$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس د لیمیټ د لاس ته راوړلو له لارې د مشتق ضریب ته راځو:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x_0+\Delta x)=2x_0$$

نو $f'(x_0)=2x_0$ لرو او د $x_0=2$ لپاره $f'(2)=2\cdot 2=4$ باور لري.

د په ځای کې د تابع لومړی مشتق په 4 برابر دی، دا په دې معنی چې تابع د په ځای کې میل یاجګوالی 4 لري.

اوس د لیمیټ د لاس ته راوړلو له لارې د مشتق ضریب ته راځو:

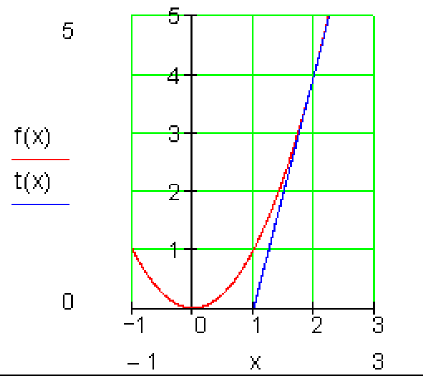
$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x_0+\Delta x)=2x_0$$

نو $f'(x_0)=2x_0$ لرو او د $x_0=2$ لپاره $f'(2)=2\cdot 2=4$ باور لري.

د $x_0=2$ په ځای کې د تابع $y=f(x)=x^2$ لومړی مشتق په 4 برابر دی، دا په دې معنی چې تابع د $x_0=2$ په ځای کې میل یاجګوالی 4 لري.

لاس ته راوړنه یې:

پایله یې کېدی شي، د تابع د ګراف له لارې و ازمایل شي، په داسې ډول چې د $P_0(x_0|y_0)=P_0(2|4)$ په ټکي کې تانجنت انځور کړو او د میل د مثلث له لارې جګېدنه لاس ته راوړو.



لکه پورته بېلګه کې: $y=f(x)=x^2$ په هر خوښه ځای x_0 کې تابع پیداکوو:

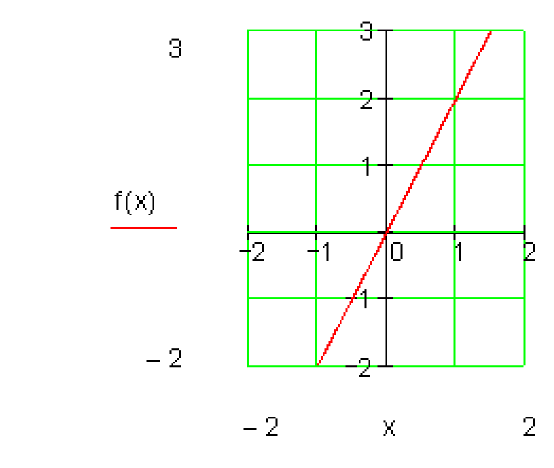
$$y=f(x)=x^2\Rightarrow f'(x_0)=2x_0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

x_0	-2	-1	0	1	2
$f'(x_0)$	-4	-2	0	2	2

ګراف يوه کرښه $f'(x)=2x$ انځوروي، چې د تابع مشتق بلل کيږي:
پام: که د يوې تابع مشتق ونيول شي، نو بيرته يوه تابع ترې لاس ته راځي، چې دا د مشتق تابع بللکيږي.

د مشتق تابع: د تابع ارزښتونه په هر ټکي کې بنست تابع انځوروي، له دې امله دا د ميل تابع هم بلل کيږي.



بيلګه: د $f(x)=x^3$ تابع دې ورکړ شوی دی.

فعاليت: ګران لوستونکي دې د $f(x)=x^3$ تابع او د تابع د مشتق ګراف وروسته له حله رسم کړي.

موږ غواړو په x_0 ټکي کې مشتق پيدا کړو او همداسې د مشتق تابع.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x_0+\Delta x)^3-x_0{}^3}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x_0{}^3+3x_0^2\Delta x+3x_0(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-x_0{}^3}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{3x_0^2\Delta x+3x_0(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta x(3x_0^2+3x_0\Delta x+(\Delta x^2))}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=3x_0^2+3x_0\Delta x+(\Delta x^2)$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(3x_0^2+3x_0\Delta x+(\Delta x)^2=3x_0^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

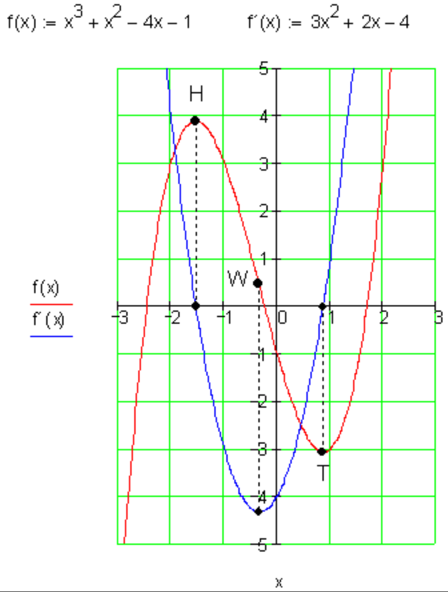
نو $f'(x_0)=3x_0^2$ د تابع $f(x)=x^3$ مشتق دی په ځای یا ټکي x_0 کې.

د مشتق تابع داسي ده: $f'(x_0)=3x_0^2$

د وضعیه کمیاتو – یا پروتولاړ سیستم کې تابع او د تابع مشتق: مخامخ څیره وګوری:

تابع(سور): $f(x)=x^3+x^2-4x-1$

د تابع مشتق(شین رنګه):
$f'(x)=3x^2+2x-4$ ، چي بیرته د مشتق یا د میل تابع ده.



بیلګه ۴ : یوه تابع $f(x)=\sqrt{x}$ دي ورکړ شوې وي.

د x_0 په ځای کې د تابع مشتق پیداکړی او د مشتق تابع.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0}}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\left(\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0}\right)\cdot\left(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}\right)}{\Delta x\cdot\left(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x_0+\Delta x-x_0}{\Delta x\cdot\left(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\not{\Delta x}}{\not{\Delta x}\cdot\left(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}}$$

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x_0}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو $f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$ د x_0 په ځای کې د پورته تابع مشتق دئ

او د مشتق تابع $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ده

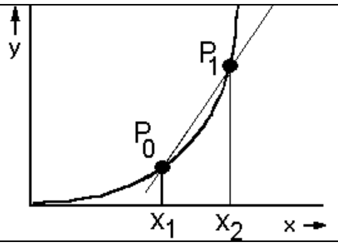
د شمیرنې په بنسټ مو تر اوسه دا لاندې تر لاسه کړي:

	د مشتق تابع	تابع
$f'(x) = 1 \cdot x^0$	$f'(x) = 1$	$f(x) = x$
$f'(x) = 2 \cdot x^1$	$f'(x) = 2 \cdot x$	$f(x) = x^2$
$f'(x) = 3 \cdot x^2$	$f'(x) = 3 \cdot x^2$	$f(x) = x^3$
$f'(x) = -x^{-2}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$
$f' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

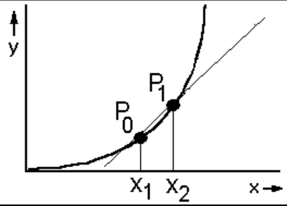
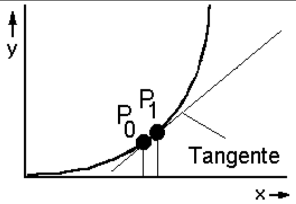
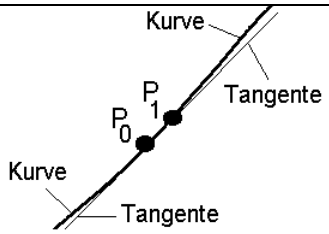
که دا پورته پنځه قوانین یو د بل سره پرتله شي، نو ګومان ترې لاس ته راځي، چې دا لاندې قوانین به باور ولري.

بیلګه: $f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2} \Rightarrow f'(x) = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$

د تانجنت تعریف او خویونه:

مخامخ شېره یو منحني او یوه قاتع په ټکو P_0 او P_1 کې ښایي.	

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس غواړو، چې ټکی P_0 د ټکي P_1پہ لور و خوځيږي. پام : ددې سره قاطع خپل میل تغیروي	
بالاخره غواړو، چېP_1 ټکی وP_0 ټکي ته ناپای ډېر نږدې شي. په دې حالت کې قاطع داسې په نامه تانجنت ته ورنږدې کيږي	
چې دا پوره وپېژندلی شو د ټکو P_1 اوP_0 په شاو خوا ْزوو یا لویه وو: که د P_1 ټکی و P_0 ټکي ته ناپای نږدې شي، نو کتل کيږي، چې تانجنت په ټکي P_0کې همداسې حالت غوره کوي، لکه منحني په P_0 ټکي کې.	

د دې خویونو غوره غوره والی یا لاس ته راوړنه(پایله):
ومو لیدل، چې د تانجنت میل پهP_0 ټکي کې په همدې ټکي کې د منحني میل هم دی. له دې دا پایله لرو، چې که څوک غواړي د منحني میل په P_0 ټکي پیدا کړي، بسیا کوی، چې د تانجنت جګوالی یا میل په P_0 ټکي کې پیدا کړي.

د تانجنت او عمود عمومي فرمولونه:

پیل: تانجنت دې د $f(x)$ ګراف د $P(x_0, f(x_0))$ په ټکي کې لمس کړي. عمود (نورمال) دې د $f(x)$ ګراف د په$P(x_0, f(x_0))$ ټکي کې عمود یا ولاړ غوڅ کړي.

د تانجنت مساوات: :

د سره لیکو:

دا چې $P(x_0), f(x_0))$ تانجنت یو ټکی دی، نو لاس ته راځي:

$$t(x_0) = f(x_0) \Leftrightarrow f'(x_0) \cdot x + b_t = f(x_0)$$

$$\Leftrightarrow b_t = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$$

په (1) کې ږدو، نو لر:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$t(x)=f'(x_0)\cdot x+f(x_0)-f'(x_0)\cdot x_0=f'(x_0)\cdot x_0+f(x_0)$$
$$=f'(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0)$$

عمود (نورمال):

د منحني سره په همغه ټکي کې چې تانجنت په پروت دی، عمود څغلي.

د عمود میل:

$$m_n=-\frac{1}{m_t}=-\frac{1}{f'(x_0)}$$

$$\Rightarrow n(x)=-\frac{1}{f'(x_0)}\cdot(x-x_0)+f(x_0)$$

بیلګه:

د $f(x)=2x-\frac{1}{4}x^2$ تابع لرو.

د تابع تانجنت او عمود(نورمال) پیدا کړئ:

حل:په لاندې توګه د تابع مشتق نیسو او ګراف یې(څېړه لاندې کښل شوې) کاږو:

x	-4	-1	0	1.5	3
$f'(x)$	4	2.5	2	1.25	0.5

لرو: $f(x)=2x-\frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x)=2-\frac{1}{2}x$

د تانجنت میل **په ټکي** x_0 **کې د میل ارزښت** 3 **لري.**

$$f'(x_0)=3\Leftrightarrow 2-\frac{1}{2}x_0=3\Leftrightarrow x_0=-2$$

$$f(x)=f(-2)=2\cdot(-2)-\frac{1}{4}(-2)^2=-5$$

د $P(-2,-5)$ په ټکي کې تانجنت په $f(x)$ باندې ارزښت 3 لري.

$$f(x)=2x-\frac{1}{4}x^2\Rightarrow f'(x)=2-\frac{1}{2}x \qquad ,P(2,f(2))$$
$$t(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

د $x_0=2$ په ځای کې دا لاندې لرو:

.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$t(x) = f'(2)(x-2) + f(2)$$

$$f(2) = 2\cdot 2 - \frac{1}{4}\cdot(2)^2 = 4-1 = 3 \qquad f'(2) - \frac{1}{2}\cdot 2 = 2-1 = 1$$

$$\Rightarrow t(x) = 1(x-2)+3 = x-2+3 = \underline{\underline{x+1}}$$

د نورمال یا عمود پیدا کونه:

$$f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x \;,\; P(2|\,f(2))$$

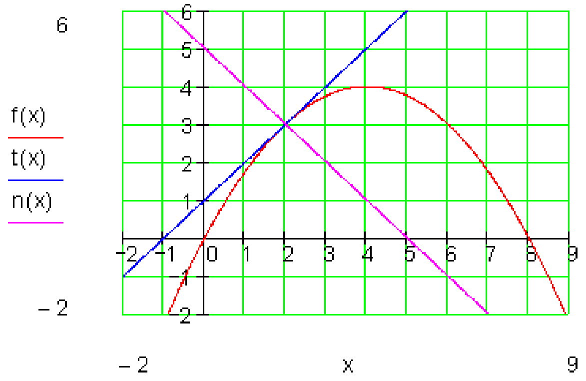
$$n(x) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0) + f(x_0)$$

د $x_0 = 2$ سره لاندې راکوي:

$$n(x) = \frac{1}{f'(2)}(x-2) + f(2)$$

$$f(2) = 2\cdot 2 - \frac{1}{4}\cdot(2)^2 = 4-1 = 3 \qquad f'(2) - \frac{1}{2}\cdot 2 = 2-1 = 1$$

$$\Rightarrow n(x) = -\frac{1}{1}(x-2)+3 = -x+2+3 = \underline{\underline{-x+5}}$$



د تانجنت او عمود عمومي مساوات

بیلګه: تابع $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$ لرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تانجنت میل: د یوه تابع د ګراف میل په ټکي $P(x_0 | f(x_0))$ کې همغه معنی لري، لکه په دې ټکي د تانجنت میل.

موږ $f(x)$ تابع او د تابع مشتق ټیک په پام کې نیسو.

موږ $f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+1$ مربع تابع لرو

د تابع مشتق $f'(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

ارزښتجدول:

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
f(x)	4,75	3	1,75	1	0,75	1	1,75	3	4,75	7	9,75
f'(x)	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3

د $f(x)$ ارزښتجدول ځخه لوستلی شو چې د پورته مربع تابع ککرئ ټکی دی:

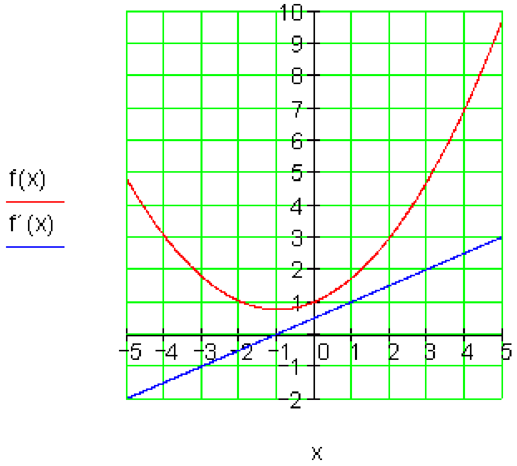
$S(-1, 0.75)$ د $x=-1$ ارزښت لپاره $f'(-1)=0$ د میل تابع ارزښت دی:

دا دا معنی لري، چې په ککرئ ټکي کې د $f'(x)$ میل صفر دی.

تانجنت په s کې هم دا معنی لري، چې صفر دی، دا هلته پروت(افقي) ځغلي؛ یعنې د x – محور سره غبرګ ځغلي.

ګرافونه:

$f(x) := \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$ $f'(x) := \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$



(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه: تابع لرو: $f(x)=2x^3+7x^2+x-7$

تانجنت دې پيداکړی شي، چې د $f(x)$ ګراف د $P(-2,\ f(-2))$ په ټکي کې لمسوي،

$$f(x)=2x^3+7x^2+x-7 \Rightarrow f'(x)=6x^2+14x+1 \quad P(-2\,|\,f(2)) \Rightarrow x_0=-2$$

$$t(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

$$f'(x_0)f'(-2)=24-28+1=-3$$

$$f(x_0)=f(-2)=-16+28-2-7=3$$

$$\Rightarrow t(x)=-3(x+2)+3=-3x-6+3=\underline{\underline{-3x-3}}$$

لاس ته راوړنه(پايله):

د $f(x)$ تابع ګراف کې تانجنت او عمود په $P(x_0, f(x_0))$ ټکي کې لاندې بڼه لري.

د عمود مساوات

$$n(x)=-\underbrace{\frac{1}{f'(x_0)}}_{\text{جګیدنه}}(x-x_0)+f(x_0)\ ;\quad f'(x_0)\neq 0$$

د تانجنت مساوات

$$t(x)=\underbrace{f'(x_0)}_{\text{جګیدنه}}(x-x_0)+f(x_0)$$

په بيديا کې جګوالی **Steigungen in der Landschaft**

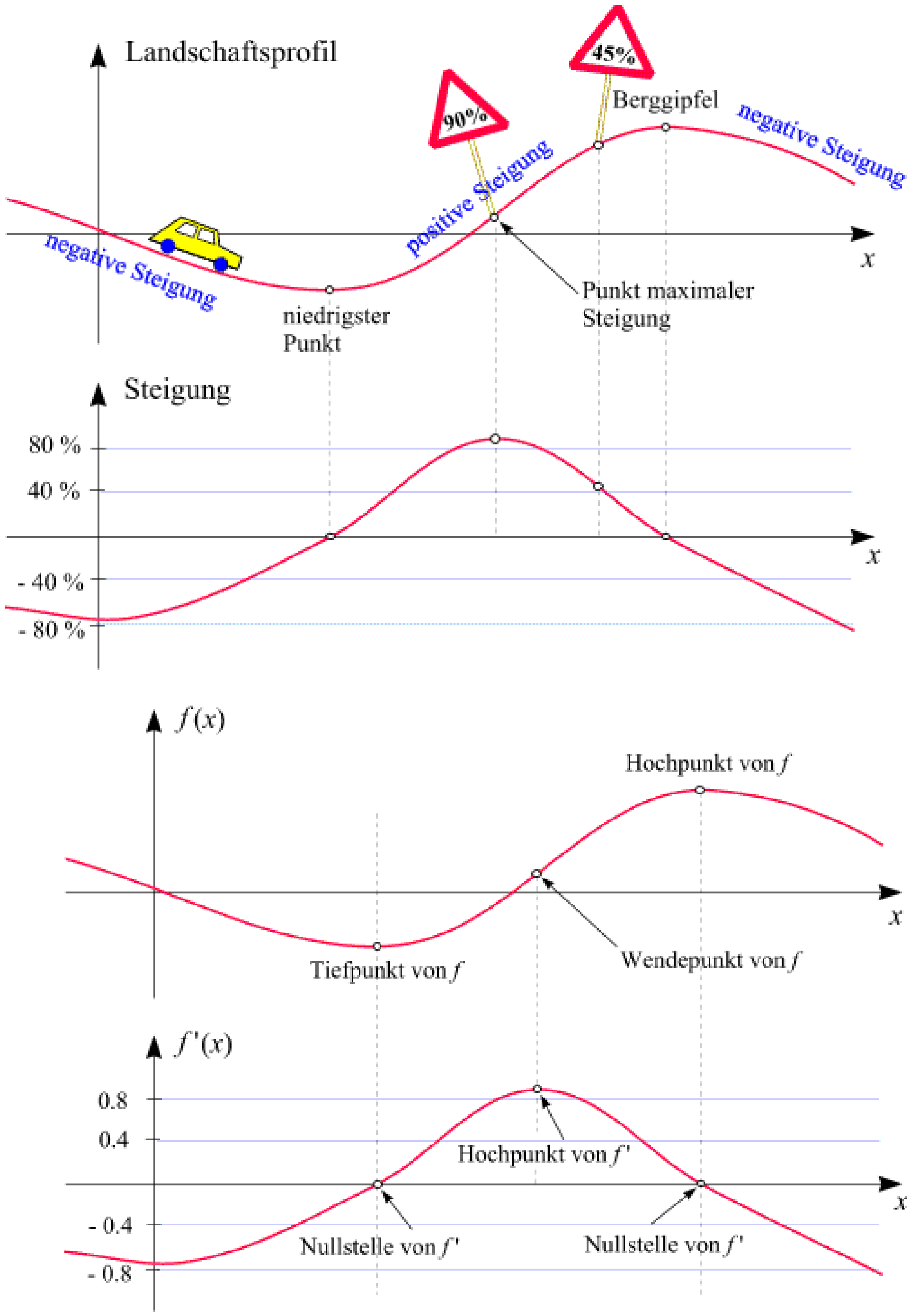
لاندې د د تابع ګراف د سرک په څير په فکر کې راولو، چې په بيديا کې جګ او ټيټيږي يا

کښتيپورته ځغلي، نو په ښه توګه يې رسمولی شو، چې د ګراف خويونه د مشتق سره په اړيکو کې راځي:

دپورته څيرو پيښتو: له کيڼ لور کښته ښي لور ته: بيديا يا کرونده، منفي جګوالی، جګوالی،(بله کربڼه) خورا ټيټ ټکی،(شي لورته بله کربڼه(مثبته جګيدنه، (پسې کربڼه) د غره څوکه، د خورا جګې جګيدنې ټکی، (اخره(کميز يا منفي جګيدنه.

د سرک کښته يا لاندې لور ته د ځانګړي دياګرام سره د سرک جګيدنه په هر ټکي کې انځور ده، د کومې سره چې يوه دويمه منحني ورکوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



(c) ketabton.com: The Digital Library

دپورته پښتو: له پورته کښته له کيڼ وښي لور ته: د f جګ ټکی، د f ټيټ ټکی، د f اوړونټکی يا د انعطاف ټکی، د f' جګ ټکی، د f' صفرځای، د f' صفرځای.

دیاګرامونه په کره توږه وګوری او وهڅيږئ، چې د دويمې منحني خويونه د لومړی منحني له خويونو را برسيره کړی.
چيرته چې سرک خورا ټيټ ټکی لري، هلته د جګيدنې ارزښت 0% دی. دا په دې معنا چې که موټر له دې ځايه تيرېږي په افقي ئا پراته ډول ځغلي او په همدې توږه که موټر د غره په څوکه هم و ځغلي.دا ټيک هغه ټکي دي، د کومو په چاپيريال کې چې منفي او مثبته جګيدنه يوبل سره رابندوي يا پولې لري.

د دې په منځ کې يو چيرته يو ټکی شتون لري، چې هلته جګيدنه ماکزيمال يا خورا لويه ده (په دې بيلګه کې 90%) .

همدې ته ورته په دويمه منحني (کږې) کې يو ه څوکه لري، مګر دا په دې بيديا کې هغه ستره ،،څوکه،، نه ده، مګر که څوک غواړي، نو يوه د ،،جګيدنې څوکه،، ده.

اوس دا دواړه کږې يا منحني په ورسره بلده يا معمول رياضيکي ډول لاندې شکلونه لري:

لومړی منحني د f(x) ګراف دی، دويمه منحني يا کږه د مشتق تابع f'(x) ګراف دی.

دا دواړه ګرافونه بيا هم ټيک وګوری او وهڅړی، چې وپوهdږی، چې دا په هره برخه کې يو د بل سره څنګه اړيکې لري.

د f(x) ګراف دوه ځانګړي ټکي مو سترګو ته راځي: په يوه کې f(x) مينيمال (خورا ټيټ ټکی) په بل کې f(x) ماکسيمال (خورا جګ ټکی) دی.

په دې ځايونو کې f(x) صفرځايونه لري.

هغه ټکی چې هلته د f(x) ګراف خورا ستوغ دی، هغه، هغه د انعطاف ټکی يا اوړونټکی بلل کيږي.

دا چې په دې ټکي کې د f(x) مشتق خورا جګ دی (په دې بيلګه کې 0,9)، دا د(f'(x عظمي نقطه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ازادې سترګې سره د هغه ځاي له لاندې منحني څخه ښه څرګندیږي، نسبت و پورته منحني ته.

مونږ د دې بیلګې څخه همدا اوس اټکل کولای شو یا ګومان راوړی شو:
که یوه تابع f(x) ولرو، نو د دې f(x) تابع په هکله د f(x) له مشتق څخه ارزښناک معلومات په لا س روړی شو.
دا مورته د ماکسیما او مینیما په هکله (چې دا دواړه د افراتي ارزښت تر نامه یادیږي) او په دې هکله چې ګراف چیرته خور یا ستوغ دی، پوره کتور معلومات راکوي.

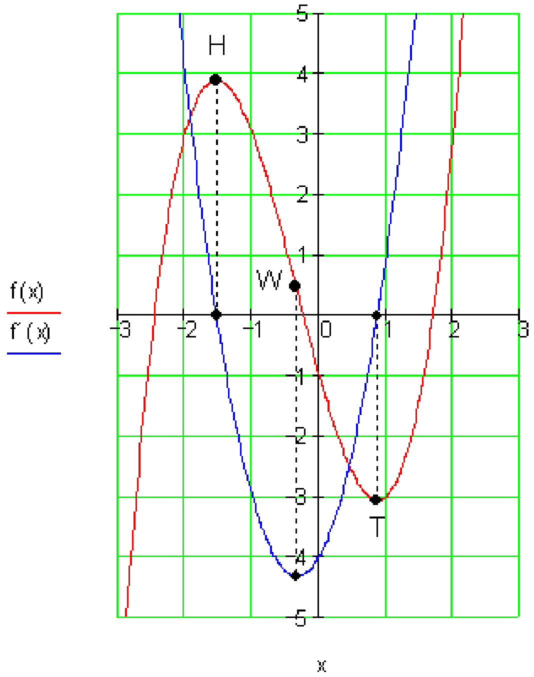
په کواوردینات (یوه پروت -ولاړ)- سیستم کې تابع اود تابع مشتق:

تابع : $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 1$

مشتق: $f'(x) = 3x^2 + 2x - 4$

د یوه تابع مشتق بیرته تابع دی. موږدا د مشتق تابع او یا د جګیدنې (میلان) تابع بولو

$f(x) := x^3 + x^2 - 4x - 1 \qquad f'(x) := 3x^2 + 2x - 4$



(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوارِو توابعو ګراف په یوه قیمتي وضعیه (پروت ولاړ سیستم) کې و کښل شو.

هلته چې تابع f(x) یو جګ ټکی (H) همداسي ټیټ ټکی (T) لري ګراف د مشتق تابع x -محور کې غوځوي،په دې مانا جې د تابع ارزښت دلته صفر دی.

دا روښانه دی، ځکه چې په H او T کې تابع f(x) پروت یا افقي تانجنت لري، دا دا معنا لري، چې په دې ټکي کې د f(x) جګېدنه صفر ده.

د مشتق تابع f'(x) هلته مینیموم لري، چېرته چې د f(x) جګېدنه د H اوT ترمنځ په پام ونیول شي د مطلق قیمت له مخې خورا لویه ده.

II.3.د مشتق شمیرني قوانین

قضیه (د جمعې یا زیاتون قاعده یا لار):
که یو تابع $f(x)$ د دوه توابعو $u(x)$ او $v(x)$د جمعې څخه جوړ وي، نو مشتق یې هم د هر تابع د مشتق د جمعې څخه جوړ دی، یعني:

$$f(x) = u(x) + v(x)$$
$$\Rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

ښوونه:

$$f(x_0) = u(x_0) + v(x_0)$$
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x_0+\Delta x) - u(x_0)] + [v(x_0+\Delta x)] - v(x_0)}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x_0+\Delta x) - u(x_0)]}{\Delta x} + \frac{[v(x_0+\Delta x)] - v(x_0)}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow f'(x_0) = \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{u(x_0+\Delta x) - u(x_0)}{\Delta x}\right]}_{u'(x_0)} + \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{v(x_0+\Delta x) - v(x_0)}{\Delta x}\right]}_{v'(x_0)}$$
$$\Leftrightarrow f'(x) = \underline{\underline{u'(x_0) + v'(x_0)}}$$

بیلګه:
د دې ورکړ $f(x) = 5x^2 + 3x$, $u(x) = 5x^2$, $v(x) = 3x$ توابعو شتق وشمیرئ.
ښوونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=5x^2+3x \quad u(x)=5x^2 \quad v(x)=3x$$
$$\Rightarrow u'(x)=10x \qquad v'(x)=3$$
$$f'(x)=u'(x)+v'(x)=\underline{\underline{10x+3}}$$

د جمعې قاعدې تعمیم کونه:

که چیرې f_1، f_2، ...... f_n، توابع او k_1، k_2، .... k_n، ثابت عددونه وي نو لرو(بې له ښوونې):

$$[k_1 f_1(x)+k_2 f_2(x)+.....+k_n f_n(x)]'$$
$$=k_1 f_1'(x)+k_2 f_2'(x)+.....+k_n f_n'(x)$$

قضیه (د ضرب قاعده یا لار):

که $f(x)$ او $g(x)$ دوه توابع وي، نو ښایو:

$$(f(x)\cdot g(x))'=f(x)'\cdot g(x)\cdot g(x)'$$

ښوونه: $\dfrac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$

د مناسب فورم- یا بڼه بدلون یعنې په صورت کې د $-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)$ ورزیاتولو څخه دا لاندې لرو:

$$\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$
$$=\frac{(f(x)-f(x_0))g(x)+f(x_0)(g(x)-g(x_0))}{x-x_0}$$
$$=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot g(x)+f(x_0)\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

له پورته څخه لاس راځي، یعنې که د دواړو لورو لیمیت نیسو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}g(x)+f(x_0)\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$
$$=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$$

بيلګه:

که $g(x)=x^2-1$ او $h(x)=\sqrt{x}$ ولرو، نو د $f(x)=g(x)h(x)$ مشتق غواړو پيدا کړو.

ښوونه: په لاندې توګه مخ ته ځو:

$$f(x)=(x^2-1)\sqrt{x},\; f'(x)=2x\sqrt{x}+(x^2-1)\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{5}{2}x\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

قضيه (د ويش قانون):

f او g دې دوه توابع وي. غواړو وښايو:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)\,g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

ثبوت: کولای شو، چې دا قضيه له دوه لارو يا طريقو وښايو(ثبوت کړو).

لومړی لار:

لومړی لار يا طريقه يې په لاندې ډول ښايو او دويمه لار دې ګران زده کوونکي وښايي:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)}-\dfrac{f(x)}{g(x)}}{h}\quad ,\quad g(x)\neq 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{g(x+h)g(x)}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{h}\right]$$

غواړو $f(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x)$ صورت ته ور زيات کړو، نو لرو:.

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)g(x)}\cdot\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x)+f(x)g(x)-f(x)g(x+h)}{h}$$

$$=\frac{1}{g(x)g(x)}[\lim_{h\to 0}g(x)\ \frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\lim_{h\to 0}f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}]$$

$$=\frac{1}{[g(x)]^2}\left[g(x)\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f(x)\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]$$

$$=\frac{1}{[g(x)]^2}[g(x).f'(x)-f(x).g'(x)]=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

يعني لرو: $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]^{/}=\frac{f'(x)\,g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

دويمه لار: د $\frac{1}{g(x)}$: مشتق غواړو پيدا کړو او ښايوچي دی:

$$(\frac{1}{g(x)})'=-\ \frac{g'(x)}{g^2(x)}\qquad (*)\ (f(x))'=\lim_{h\to 0}\ \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

که $f(x)=\frac{1}{g(x)}$ کيږدو نو لرو:

$$(f(x))'=\lim_{h\to 0}\ \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{g(x+h)}-\frac{1}{g(x)}}{h}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \lim_{h\to 0}\frac{g(x)-g(x+h)}{g(x+h)g(x).h}$$

$$=\frac{\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}}{-\lim\limits_{h\to 0}g(x+h)g(x)}=-\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}$$

که دا $f(x)\dfrac{1}{g(x)}=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ وښ ولرو او وغواړو چې مشتق يې پيدا کړو،نو له پورته ښوونې ، د **(*)** اړيکې او د ضرب قاعدې له مخې لرو:

$$[\frac{f(x)}{g(x)}]'=[f(x)\frac{1}{g(x)}]'$$

$$= f(x)(\frac{1}{g(x)})'+\frac{1}{g(x)}f'(x)$$

$$= f(x)(\frac{g'(x)}{(g(x))^2})+\frac{1}{g(x)}f'(x)$$

$$=\frac{-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}+\frac{f'(x)}{g(x)}$$

$$=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

بيلګه:

د $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-4}$ تابع (د $x^2-4\neq 0$ سره) مشتق غواړو پيدا کړو.

حل: که چيرې $g(x)=x^2$ او $h(x)=x^2-4$

وضع شي نو لرو:

$$g'(x)=2x$$

$$h'(x)=2x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او د ویش قانون له مخې لرو:

$$f'(x) = \left[\frac{g(x)}{h(x)}\right]' = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{[h(x)]^2}$$
$$= \frac{2x(x^2-4) - x^2.2x}{[x^2-4]^2}$$
$$= \frac{-8x}{[x^2-4]^2}$$

بیلګه:

د $y = \sin x^2$ تابع یوه په لاندې توګه ورکړ شوی ځنځیري تابع ده:

$$y = \sin z \quad , \quad z = x^2$$

دا دواړه توابع په هرځای کې مشتق وړدي. له دې امله هر چیرته باور لري:

$$\frac{d \sin x^2}{dx} = \frac{d \sin z}{dz} . \frac{dx^2}{dx} = \cos z . 2x = 2x . \cos x^2$$

بیلګه:

د $y = \sin^2 x$ تابع په لاندې ډول ترلی ورکړ شوی.

$$y = z^2 \ , \ z = \sin x$$

دلته هم دواړه توابع هرچیرته مشتقوړ دي. نو له دې امله هرچیرته باور لري:

$$\frac{d \sin^2 x}{dx} = \frac{dz^2}{dz} . \frac{d \sin x}{dx} = 2z . \cos x = 2 \sin x . \cos x = \sin 2x$$

بیلګه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $f(x)=(x^5+4)^8$ تابع مشتق وشمیرئ!

حل: هرکله چې $g(x)=x^8$ او $h(x)=x^5+4$ وضع کوو نو لرو:

$$f(x)=g(h(x))$$

$$f'(x)=(g(h(x))'=g'(h(x)).h'(x)$$

$g'(x)=8x^7 \quad h'(x)=5x^4$ دی، نو لرو:

$$f(x)=8(h(x))^7 5x^4=40(x^5+4)^7.x^4$$

د مثلثاتي فنکشنتابعګانو مشتق

$$\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \quad .... \ I$$

$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \quad .... \ II$$

قضیه :د ساین تابع y=f(x)=sinx مشتق غواړو وښایوو چې f'(x)=(sinx)' = cosxدی:

ددې قضیې د ښوولو له پاره پورتني په ننوتنه کې دوه لومړني فرمولونه په کار راځي.

د y=f(x)=sinx ساین تابع د هر x لپاره تعریف ده، نو د x_0 په خوښه ټاکلوڅخه لاس ته راځي:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{\sin(x_0+h)-\sin x_0}{h}$$

$$=\frac{2}{h}\cos\frac{2x_0+h}{2}\cdot\sin\frac{h}{2}=\cos\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} .$$

د لیمیټ د برخې په پام کې لرلو سره لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{h\to 0}\left(\cos\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right)=\cos x_0.$$

د ساین تابع په هر ځاي کی، د لاندې مشتق سره، د مشتق قابلیت لري یا مشتقوړ ده:

$$\left(\frac{d\sin x}{dx}\right)_{x=x_0}=f'(x_0)=\cos x_0\,,$$ (Xپه لینده کچ یا رادیان)

قضیه :

همداسي ښوول کیږي چی کوساین تابع هم په هرځاي کی مشتقوړ ده، دلاندې مشتق سره:

$$\left(\frac{d\cos x}{dx}\right)_{x=x_0}=f'(x_0)=-\sin x_0,$$ Xپه لینده کچ یا رادیان

ثبوت: لرو:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+h)-f(x_0)}{h}=\frac{\cos(x+h)-\cos x_0}{h}$$

په پورته ننوتنه کې د دویم فرمول له مخې لرو:

$$=\frac{-2\sin\frac{x+h+x}{2}.\sin\frac{x+h-x}{2}}{h}$$

$$=\frac{-2\sin(x+\frac{h}{2}).\sin\frac{h}{2}}{h}$$

$$=-[\sin(x+\frac{h}{2}).\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د د پولې او د پولې یا حد د ضرب قاعدې له مخې لاس ته راځي :

$$-\lim_{h\to 0}\sin(x+\frac{h}{2})\ .\ \lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=-\sin x\cdot 1=-\sin x$$

له پورته مساواتو څخه په لنده توګه لیکو:

$$\frac{d\cos x}{dx}=-\sin x$$

قضیه : غواړو وښایو چې د تانجنت تابع $f(x) = \tan x$ مشتقوړ ده او د مشتق تابع یې $f\,'(x)=\frac{d\tan x}{dx}=\frac{1}{\cos^2 x}$ ده.

$$\frac{d}{dx}(\tan x)=\frac{d}{dx}(\frac{\sin x}{\cos x})$$

$$=\frac{\cos x\frac{d}{dx}(\sin x)-\sin x\frac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\cos x.\cos x-\sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$=1+\tan^2 x\ ,x\neq(2k+1).\frac{\pi}{2}$$

بیلګه: غواړو د $y=\cos\frac{\pi x}{180}$ تابع مشتق پیدا کړو.

حل: ږدو : $f(x)=\cos x$ او $g(x)=\frac{\pi x}{180}$ ، نو y په لاندې توګه لیکلی شو:

$y=f(g(x))$ ، نو د زنځیري قاعدې په بنسټ لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y' = f'(g(x))\cdot g'(x)$$
$$= \cos'(g(x))\cdot(\frac{\pi}{180}\cdot x)'$$
$$= -\sin(g(x))\cdot\frac{\pi}{180} = -\frac{\pi}{180}\cdot\sin\frac{\pi x}{180}$$

بیلګې :

۱ - د f(x) = sinx تابع لومړي څلور مشتقونه دې پیدا شي.

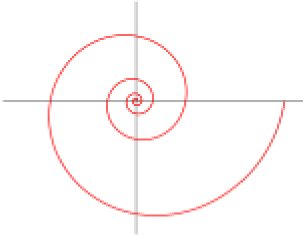
$f'(x) = \cos x$; $f''(x) = -\sin x$; $f'''(x) = -\cos x$; $f^{(4)}(x) = -(-\sin x) = \sin x$

۲ - د f(x) = x.sinx تابع مشتق پیداکړئ
د ضرب قانون څخه کار واخلئ.
$f'(x) = 1.\sin x + x\cos x = \sin x + x.\cos x$

۳ – د $f(x) = \sin\frac{1}{x}; x \neq 0$ تابع مشتق پیداکولو له پاره د ځنځیر قونو ن څخه نار اخلو.

ردو $z = \frac{1}{x^2}$ او $u(z) = \sin z$ لا س ته راځي: $f'(x) = -\frac{2}{x^3}\cos\frac{1}{x^2}$

د لوګاریتم مشتق



(c) ketabton.com: The Digital Library

قضيه :

د لوګاريتم تابع مشتق:

قضيه: هر د لوګاريتم تابع $y=f(x)=\log_b x$ د $b>0, b\neq 0, x>0$ سره، مشتقوړ دی

او صدق کوي: $f'(x)=\dfrac{1}{x}\log e=\dfrac{1}{x.\ln b}$

ثبوت: دا چې تابع $y=f(x)=\log_b x$ يواځي د$x>0$ لپاره پيژند لري يا تعريف دی. په هر ځاي کی چی$x>0$ وي، نودا لاندې باوري دی :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{\log_b(x_0+h)-\log_b x_0}{h}=\frac{1}{h}\log_b\frac{x_0+h}{x_0}=\log_b(1+\frac{h}{x_0})^{\frac{1}{h}}$$

د (لومړۍ برخې) له مخی دا لاس ته راځي:

$$\log_b(1+\frac{h}{x_0})^{\frac{1}{h}}=\left[\left(1+\frac{h}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{h}}\right]^{\frac{1}{x_0}}\rightarrow e^{\frac{1}{x_0}}$$

او له دې امله

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}=f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\log_b(1+\frac{h}{x_0})^{\frac{1}{h}}=\log_b e^{\frac{1}{x_0}}=\frac{1}{x_0}\log_b e$$

د لوګاريتم تابع په ورکړشوي مشتق سره د خپل ټول پيژند ستړ کی د مشتق قابليت لري.

$f'(x)=\dfrac{1}{x}\log_b e$ همداسې $f'(x)=\dfrac{1}{x}.\dfrac{\ln e}{\ln b}$ داچې $\ln e = 1$ نو صدق کوي:

$f'(x)=\dfrac{1}{x.\ln b}$. خه چې د ښوولو وو.

په ځانګړي ډول دا لاندې باور لري:

$\left(\dfrac{d(\ln x)}{dx}\right)_{x=x_0}=\dfrac{1}{x_0}$ پای.

بيلګه:

د $f(x)=\log\sqrt{x^3}$ مشتق وشمېرئ.

ښوونه: په لاندې توګه مخ تخ ځو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=\log\sqrt{x^3}=\log_{10}x^{3/2}=\frac{3}{2}\log_{10}x$$

$$\Rightarrow\ f'(x)=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x\cdot\ln 10}$$

$$=0.6514\cdot\frac{1}{x};\ D(f')=IR^{>0}$$

بیلگه:

د $y=\ln\frac{x-2}{x+2}$ تابع مشتق پیداکړئ

حل:

موږ لیکلاي شو :

$$y=\ln\frac{x-2}{x+2}$$
$$=\ln(x-2)-\ln(x+2)$$

دا چې $(\ln(x-2))'=\frac{1}{x-2}$ او $(\ln(x+2))'=\frac{1}{x+2}$ دی، نو لرو:

$$y'=(\ln(x-2))'-(\ln(x+2))'$$
$$=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}=\frac{x+2-x+2}{(x-2)(x+2)}$$
$$=\frac{4}{x^2-4}$$

بیلگه:

لرو: $f(x)=\log_2(x)$

غواړو پیدا کړو: ۱. مشتق $f'(x)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مشتق د $x_0=16$ په ځاي کې

حل: د حل لپاره د پورته فرمول څخه کار اخلو: $f'(x) = 1/(x\cdot\ln 2$

اوس د $x_0=16$ په ځاي کې مشتق ټاکو:

$f'(x_0)= 1/(16\cdot\ln 2)= 1/(16\cdot 0.69)= \underline{0.09}$

پای

اوس دې یوه بله د دیفرنسیشن قاعده ورکړل شي کومه چې په جدول 20-1 کې غیر مستقیم خوندې یا په بل عبارت دننه ده.

موږ غواړو د لاندې شکل تابع یا بلواك مشتق ونیسو

$$y = f(x)^{g(x)}$$

دا له دې امله

$$y = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x)\ln f(x)}$$

د ځنځیرقاعدې له مخی ترخیرني نیول کیدی شي، $z = g(x)\ln(f(x))$, $y = e^z$ د لاندې بلواك $v = f(x)$, $u = \ln f(x) = \ln v$ مشتق هم د ځنځیری قاعدې له مخی را پیداکیدی شي. دا لاندې صدق کوي:

$$u' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dv}\cdot = \frac{1}{v}\cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

او

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = e^z\cdot(g'(x)\ln f(x) + g(x)u')$$

$$= f(x)^{g(x)}\left(g'(x)\ln f(x) + \frac{g(x)f'(x)}{f(x)}\right)$$

د ځنځیری قاعدې د نیونو په نظر کی نیولو سره او د جملی 20-10 له مخی لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله 20-10 که $f(x)$ او $g(x)$ د $f(x) > 0$ سره د مشتق قابلیت لري ، نو
$y = f(x)^{g(x)}$

هم د لاندې مشتق سره مشتقوړ دي

بیلګه : تابع یا بلواك $y = x^x$ د $x > 0$ لپاره مشتقوړ دی. دا دې په (20-57) کې داسی $f = x,\ g = x$ ځاي په ځاي شي او له دې سره $f' = 1, g' = 1$. له دې امله اوس د $x > 0$ لپاره لرو: $dx^x / dx = x^x(\ln x + 1)$

(دا وروسته د ایمپلیځیت توابعو مشتق کې هم په همغه توګه رواړول شوې ده)

بیلګه: د $y = (x^2 - 1)\ln x$ د مشتق سره باید د $g = \ln x$ له امله وغوښتل شي چې $x > 0$ او د $f = (x^2 - 1) > 0$ له امله باید باور ولري $x^2 > 1$ او له همدې امله $|x| > 1$
پس کیدی شي چې فرمول(20-57) د $x > 1$ لپاره د $f = x_2 - 1$ او $g = \ln x$ سره استعمال شي:

بیلګه: د $f(x) = x^3.\ln 4x (x > 0)$ مشتق دې پیدا شي

$u(x) = x^3$ د $u'(x) = 3x^2$ سره، $v(x) = \ln 4x$ د ځنزیري قانون له امله لرو:

$$v(x) = 4.\frac{1}{4x}\ \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = 3x^2.\ln 4x + x^3.\frac{1}{x} = 3x^2.\ln 4x + x^2 = x^2(3\ln 4x + 1)$$

بیلګه: د $f(x) = (x^2+2).\lg x\ (x>0)$ مشتق غواړو پیداکړو

د ضرب قانون: $u(x) = x^2+2\ ;\ v(x) = \lg x$ د $u'(x) = 2x$ او

$v'(x) = 1 / x.l\ 10$ سره

$$f'(x) = 2x \cdot \lg x + (x^2 + 2)\frac{1}{x \cdot \ln 10} = \frac{1}{\ln 10} \cdot (2x \cdot \ln x + x + \frac{2}{x})$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اکسپوننشل توابعو مشتق

قضیه : هر اکسپوننشل تابع د $y = b^x, (b > 0)$ د ټولو ریلو اعدادو لپاره مشتقوړ دی او صدق کوي: $f' = b^x \ln b$

حل:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{y - y_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad , \; f(x) = b^x$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{b^x - b^{x_0}}{x - x_0}$$

$$= b^{x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{b^{x - x_0} - 1}{x - x_0} \qquad , \; x - x_0 = h$$

$$= b^{x_0} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{b^h - 1}{h}$$

له پورته لرو $\begin{cases} b^h - 1 = k \\ h = \log_b(1 + k) \end{cases}$ او لا س ته تري راځي

$$= b^{x_0} \cdot \lim_{k \to 0} \frac{k}{\log_b(1 + k)}$$

$$= b^{x_0} \cdot \lim_{k \to 0} \frac{1}{\frac{1}{k} \cdot \log_b(1 + k)}$$

د لوگاریتم قانون څخه لرو: $n \cdot \log x = \log x^n$ او لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$=b^{x_0}\cdot\lim_{k\to 0}\frac{k}{\log_b(1+k)}$$

$$=b^{x_0}\cdot\frac{1}{\log_b[\lim_{k\to 0}(1+k)^{\frac{1}{k}}]} \quad ,\lim_{k\to 0}(1+k)^{\frac{1}{k}}=e$$

له پورته لاس ته راځي

$$=b^{x_0}\cdot\frac{1}{\log_b e} \quad , \ \log_b e=\frac{1}{\ln b}$$

$$=b^{x_0}\cdot\ln b \ ; \quad x_0\in IR \, ; b\in IR^{>0}$$

$$\Rightarrow f\ ':f\ '(x)=b^x\cdot\ln b \, ; D\ '(f\ )=IR \, ;b\in IR^{>0}$$

$$f\ '(x)=b^x\cdot\ln b$$

قضیه : د $y=f\ (x)=e^x$ مشتق پیدا کړئ.

حل:

$$y=f(x)=e^x$$

$$f\ '(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{x_0+\Delta x}-e^{x_0}}{\Delta x}$$

موږ دا لرلي په پام کې نیسو: $e^{x_0+\Delta x}=e^{x_0}\,e^{\Delta x}$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{x_0}\cdot e^{\Delta x}-e^{x_0}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{x_0}\left(e^{\Delta x}-1\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}e^{x_0}\cdot\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}=e^{x_0}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}$$

موږ د تل کوچنیکیدونکي Δx ارزښت لپاره خیرو $\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

Δx

Δx	1	0,1	0,01	0,001	0,0001
$\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}$	1,718...	1,051...	1,00501...	1,0005...	1,00005...

د دې په بنسټ موږ لاس ته راوړو:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x} = 1$$

زموږ د شميرنې په پنسټ دا دا مهنا لري:

$$f'(x_0) = e^{x_0} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}}_{1} = e^{x_0} \cdot 1 = \underline{\underline{e^{x_0}}}$$

که x_0 د xپه ځای ځای په ځای کړو، نو لرو:

$$f(x) = e^x \text{ und } f'(x) = e^x$$

اکسپوننشل فنکشن e^x تیک $y' = f'(x) = e^x$ مشتق لري

لرو:

اکسپوننشلفنکشن یو فنکشن دی، په کوم کې چې فنکشن او د تابع مشتق سره برابر دي

e - تابع بیرته د مشتق له لارې تولیدیږي یا لاس ته راځي.

بل بديل یا الترناتیو: که ولرو $y = f(x) = e^x$ ، نو $y' = f'(x) = e^x$ لاس ته راځي.

په پورته جمله کې مو وښووول: که ولرو $y = b^x$ دو $y' = y \cdot \ln b = b^x \cdot \ln b$ دی.

که b=e کړدو، نو لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f'(x) = b^x . \ln e \quad = e^x \cdot \ln e \qquad \Rightarrow \ln e = 1$$
$$= \underline{\underline{e^x \; ; x \in IR}}$$
$$f : f(x) = e^x \; ; D(f) = IR$$
$$\Rightarrow \underline{\underline{f' : f'(x) = e^x \; ; D(f) - IR}}$$

گورو چې $f(x) = e^x \; ; D(f) = IR$ یواځنی تابع دی، چې مشتق یې پخپله
دی $\underline{\underline{f'(x) = e^x \; ; D(f) - IR}}$

$$f(x) = \log_a x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$
د $a \in R^+ \setminus \{1\}$ $x \in R^+$ سره.
فرمول

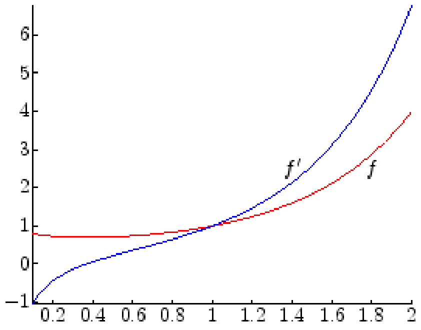
$$f'(x) = f(x) \frac{d}{dx} \ln |f(x)|$$

کیدی شي د $y = g(x)^{h(x)}$ بنې تابع چې $g(x) > 0$ دی، د مشتق لپاره وکارول شي
لاس ته ترې راځي:

$$\frac{dy}{dx} = g(x)^{h(x)} \frac{d}{dx} \left(h(x) \ln g(x) \right) .$$

لیکونکی:(App/Höllig) اپپ ، هیولیگ

(c) ketabton.com: The Digital Library



د $x \to 0$ لپاره $\ln f(x) = x \ln x$ د 0 په لور هخیرږي، پس f د 0 په لور. نو تابع په صفر کې ښي لوریزه متمادي ده. د مشتق لپاره یې دا حالت ده دی.

د $x^x \to 1$ او د $\ln x + 1 \to -\infty$ له امله د $x \to 0$ لپاره د f تایع په صغر کې یو عمود تآنجنت لري.

د $g(x) = x^{\ln x}$ لپاره لاس ته راځي:

$$g'(x) = x^{\ln x}\frac{d}{dx}(\ln x)^2 = 2x^{\ln x}\frac{\ln x}{x}.$$

)لیکونکي اپپ او هیولیگ

په طبیعت کې یې خیرنه:

د اکپوننشل توابعو مشتق

د تابع مساواتو جوړښت

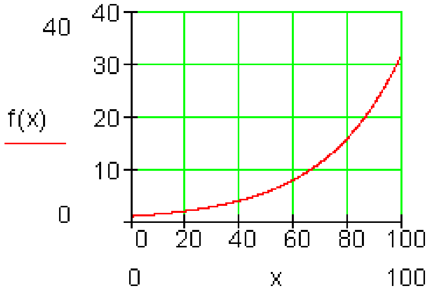
کولي باکتریا Coli - Bakterien د انسان په کلمو کې کاره سرته رسوي. دوي د کوتې ویش (حجره وېش) له لارې زیاتیږي. و مساعدو شرایطو لاندي دوي په هرو ۲۰ دقیقو

(c) ketabton.com: The Digital Library

کې ځان تجزيه کوي. د غه عمليي لپاره يو ارزښت جدول :اړ، او ګراف يي کارو. دلته
د x اووښتوني (متغيره) په دقيقو د وخت لپاره ده.
د y متحوله د باکتريا ګانو د تعداد لپاره ده.

دقيقي	x = Minuten	0	20	40	60	80	100
د بکترياګانو تعداد	y = Bakterienzahl	1	2	4	8	16	32

پورته جدول کي : $x =$ دقيقي $y =$ د بکترياو تعداد



بيلګه: لرو : $f : f(x) = b^{3x^2-10};\ D(f) = IR;\ b \in IR^{>0}$

د پورته تابع مشتق ونيسئ.

$$D'(f) = D(f) = IR \quad \Rightarrow D(f') = IR$$

$$f(x) = b^{3x^2-10} = g[h(x)]$$

$$g(z) = b^z \ \Rightarrow f'(z) = \underline{b^z \cdot \ln b}\,; z \in IR$$

$$h(z) = 3x^2 - 10 \ \Rightarrow h'(x) = \underline{6x}; x \in IR$$

$$f'(x) = g'(x) \cdot h'(x)$$

$$= b^z \cdot \ln b \cdot 6x \ \Rightarrow z = 3x^2 - 10$$

$$= b^{3x^2-10} \cdot \ln b \cdot 6x;\ x \in IR$$

$$= \underline{\underline{\ln b \cdot 6x \cdot b^{3x^2}; D(f) = IR;\ b \in IR^{>0}}}$$

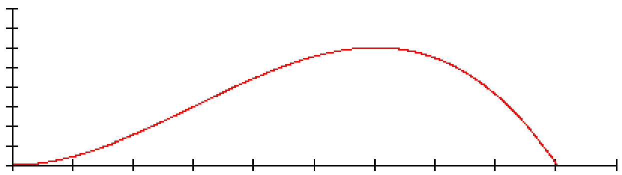
(c) ketabton.com: The Digital Library

- د مشتق استعمال په طبيعي علومو

په رياضياتو کې زيات وخت توابع راوړل کيږي، چې د يوې متحولې(اووبشتونې) x په واک کې وي.

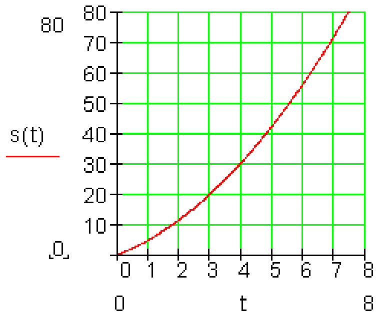
په طبيعي پوهنو کې زيات وخت توابع څيرو، چې د وخت په واک کې وي.

لکه په شکل کې د يوه توپ د غورځولو وهلې لار (دا وروسته روښانه کيږي)



بيلګه: د يوه په برابرډوله بيره (تعجيل) غورځول شوي شي لپاره د پيل چټکتيا (لومړنی سرعت) $v_0 = 4\frac{m}{s}$ او $a = 1{,}8\frac{m}{s^2}$ بيرې(تعجيل) سره د لار-وخت- قانون په لاندې ډول دی:

$$s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$$



حل: د پورته ورکړشوي د v_0 ارزښت لپاره باور لري: $S(t) = 0{,}9t^2+4t$

(tپه s (ثانيه) ، s(t) په m (متر))

منځنی چټکتيا (سرعت) $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ ده)

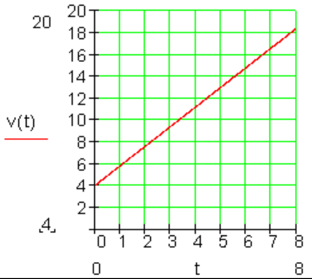
لحظوی(سملاسي) چټکتيا په لاندې ډول ده:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = v$$

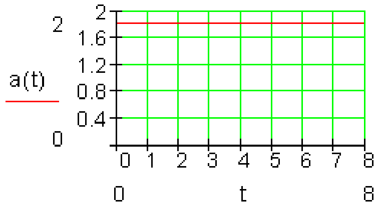
$$v = s'(t) = 1{,}8t + 4$$

په v-t - ډیاګرام کې یوه کرښه لاس ته راځي، دا په دې معنی چې چټکتیا په برابر ډول زیاتیږي. دا دلته ثابته جګیدنه $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ ده او $a = 1{,}8\,\frac{m}{s^2}$ بیړه(تعجیل) ده.



د بیړې یا تعجیل لپاره دا لاندې مساوات صدق کوي:

$$v'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = a$$



پام : د یوه برابرډوله په بیړه (تعجیلي) خوزښت لپاره لاندې باور لري:

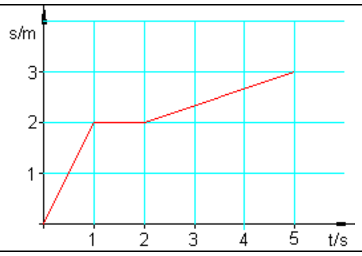
$$a(t) = v'(t) = a \qquad v(t) = s'(t) = at + v_0 \qquad s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t$$

د یوې چټکتیا (سرعت) v لپاره د وخت پسې د لار مشتق لپاره v(t)=s'(t) لرو. د s'(t) لپاره داسې $v(t) = s'(t)$. هم لیکو.

فعالیت:

۱) د یوه خوزنده تن یا جسم د لار-وخت-دیاګرام ورکړ شوی. الف: دا خوزښت تشریح کړی.

ب : دې پورې اړونده د چټکتیا – وخت – دیا ګرام وکاږی.



(c) ketabton.com: The Digital Library

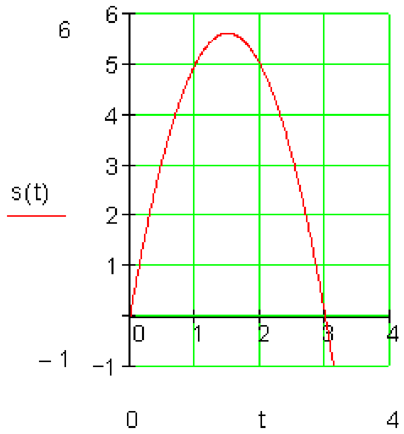
---

۲) یوه تیږه د پیل چټکتیا $v_0 = 7\frac{m}{s}$ سره عمودي (ولاړه)پورته غورځول کیږي.

د لار-وخت-قانون دی: $s(t) = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$ د $g = 10\frac{m}{s^2}$ (را ټولې (؟؟کړدي شوې)سره.

الف) د کوم وخت وروسته د تیږې چټکتیا (سرعت) صفر دی؟

ب) خورا جگ د میل جگوالی وشمیرئ.

۳) تابع د یوه خوزښت د لار-وخت-دیاگرام ښایي. الف) د ورځني ژوند څخه یوه بېلگه ورکړئ، د هغې لپاره چې دا تلنه ټیک وي. د منحني تلنه د $t > 3$ لپاره فزیکي څه مفهوم لري؟ ب) د خوزښت لپاره د لار-وخت-دیاگرام $s(t) = \frac{1}{2} a \cdot t^2 + v_0 \cdot t$ په لاندې ډول دی. او a و v_0 وټاکئ	

پ) د اړونده بیرې – وخت-دیاگرم وکاږئ او دا تشریح کړئ. یوه منفي چټکتیا (سرعت) څه معنا لري؟

۴) یوتن(جسم) په پورته ازاده غورځونه کې داسې حرکت کوي ،چې د t وخت کې لار $S(t) = 5.t^2$ وهي.

په وختونو $t=1;2;3$ کې لحظوي چټکتیا(سرعت) وښایی.

۴ – حل:

لحظوي جټکتیا د سملاسي تغیرارزښت سره په دې لاندې معنا دی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$t = 1: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{s(1+\Delta x)-s(1)}{\Delta x} = 10 + 5\Delta x \Rightarrow$$

د $\Delta x \to 0$ لپاره باور لري: $10 + 5\Delta x \to 10$

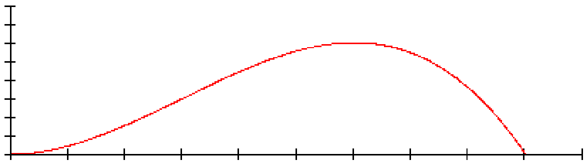
$$t = 2: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{s(2+\Delta x)-s(2)}{\Delta x} = 20 + 5\Delta x \Rightarrow$$

د $\Delta x \to 0$ لپاره باور لري:: $20 + 5\Delta x \to 20$

$$t = 3: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{s(3+\Delta x)-s(3)}{\Delta x} = 30 + 5\Delta x \Rightarrow$$

د $\Delta x \to 0$ ***لپاره باور لري*** $30 + 5\Delta x \to 30$

تمرين : لاندې د $f(x) = -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2 \,;\, x > 0$ تابع گراف او په ورنزدي توگه د فوټبال ميدان کې د توپ الوتنې منحني ښايي، چې لاندې څيره لري.



لاندې پوښتنې ځواب کړئ:

الف:توپ کوم خورا جګ(ماکسيمال) جګوالی لري او د وهلېکي(شوټ شوي ټکي) څخه کوم واټن لري؟

ب : د توپ وهلېکي (شوټ شوي ټکي)څخه توپ څومره لري بېرته ځمکې ته راځي؟

پ : د لوبې د دفاع دېوال د توپ وهنې ځای څخه ۹ متره لرې او ۲ متره جګ دی. ايا توپ له دې څخه جګ الوزي؟

ت : توپ د تور لاين(د x محور) څخه په ۲ متره جګوالي الوزي. له ګول څخه په کوم لرېوالي دا ازاده شوټ وهل شوی دی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د جګو درجو مشتق

د لومړي مشتق پرته د لوړو درجو مشتق کونه هم شته، چې د ورپسې مشتق له لارې لاسته راځي
د $f'(x)$ بیا مشتق نیوني سره د $f''(x)$ مشتق تابع لاس ته راځي، چې د دویم مشتقتابع په نامه یادیږي.

بیلګه: $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 \Rightarrow f''(x) = 6x + 2$

د $f''(x)$ بیا مشتق نیونه و دریم مشتق ته اوداسې نور

$$f(x) = x^3 + x^2 + x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 \Rightarrow f''(x) = 6x + 2 \Rightarrow f'''(x) = 6$$

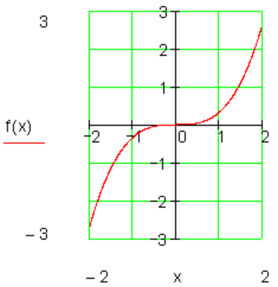
د $f(x) = \frac{x^3}{3}$ تابع دې ۴ واره مشتق ونیول شي

$$f(x) = \frac{x^3}{3} \Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2}{3} = x^2 \Rightarrow f''(x) = 2x \Rightarrow f'''(x) = 2 \Rightarrow f''''(x) = 0$$

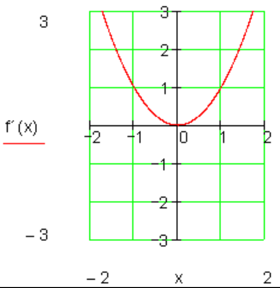
د تابع ګراف :

د یوه تابع انځورونه د اړونده مشتق تابع سره

$f(x) = \frac{x^3}{3}$

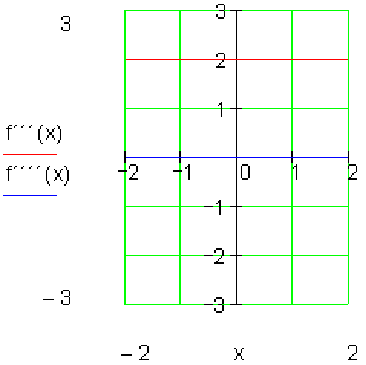


$f(x) = \frac{x^3}{3} \Rightarrow f'(x) = x^2$

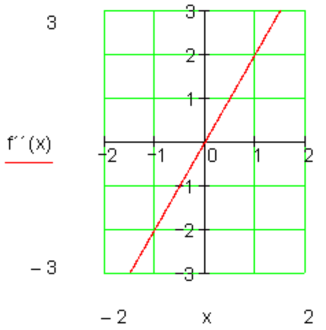


(c) ketabton.com: The Digital Library

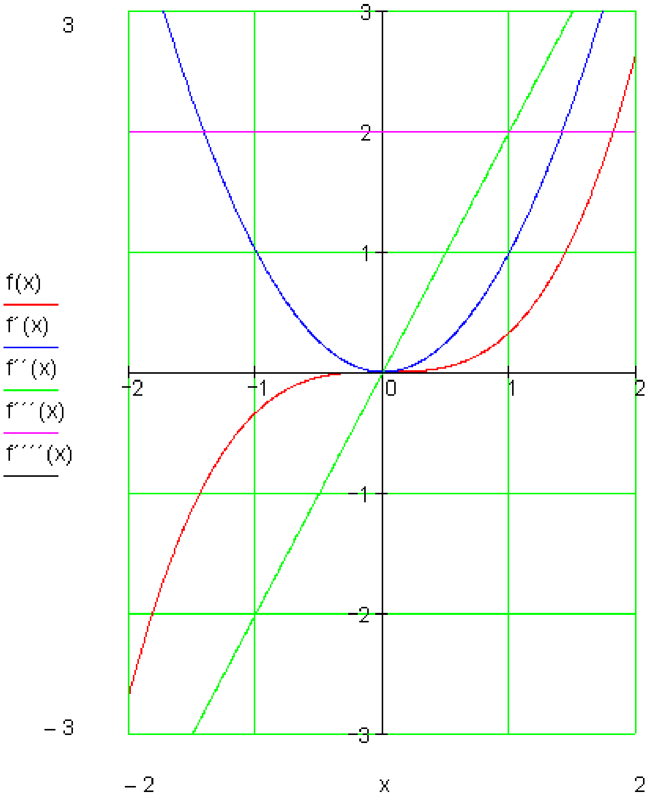
$f''(x) = 2x \Rightarrow f'''(x) = 2 \Rightarrow f''''(x) = 0$



$f'(x) = x^2 \Rightarrow f''(x) = 2x$



د تولو توابعو گراف په یوه پروت ولاړ سیستم



کي

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګې:

اول :

$$f(x) = 4x^3 - 2x^2 + x - 2$$
$$f'(x) = 12x^2 - 4x + 1$$
$$f''(x) = 24x - 4$$
$$f'''(x) = 24$$

دویم:

$$f(x) = \frac{3}{4}x^3 - 12x^2 + \frac{1}{4}x$$
$$f'(x) = \frac{9}{4}x^2 - 24x + \frac{1}{4}$$
$$f''(x) = \frac{9}{2}x - 24$$
$$f'''(x) = \frac{9}{2}$$

ټولګه: د $f(x)$ لومړی مشتق د$f(x)$ مشتق تابع $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$ ده :

د$f(x)$ دویم مشتق د $f'(x)$ مشتق تابع $f''(x) = \frac{d^2f(x)}{dx^2}$ دی:

د $f(x)$دریم مشتق د $f''(x)$ مشتق تابع $f'''(x) = \frac{d^3f(x)}{dx^3}$ دی:

په ځانګړي ډول: ییو په خوښه ویاند تابع$f(x)$ په خوښه د مشتق قابلیت لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- - د ایمپلیخیت Implicit تابعو مشتق

د یوې تابع هغه زیات د استعمال وړ انځورونه د تابع د مساوات له مخې او د f(x) تابع د ورشو ورکولو سره په اکسپلیخیتExplicit ډول، که تابع متحوله د برابرون په یوه اړخ ځانله شوې وي:

یا داسې: که یوه تابع $y = y(x)$ په ایمپلیخیته توګه ورکړ شوې وي، دا په دې معنا چې په د x او y کې یوه مساوات له لارې ورکړ شوې، نو کیدی شي دا مساوات یل برابرون ترلی یې په x پسې مشتق ونیول شي. دلته په ځانله توګه کیدی شي په $y = y(x)$ ځنزیرې قاونو وکارول شي.

د دې لپاره لاندې بیلګې راوړو:

بیلګه: $Y = 3x^2+7x$

د یوې تابع هغه زیات د استعمال وړه انځورنه د تابع د مساوات له مخې دی، د تابع د ورشو ورکولو سره په ایمپلیخیت Implicit دول د بیلګې په توګه $Ex^2+7x+y=0$

فعالیت: که $Ex^2+7x+y=0$ولرو، ځنګه کولی شو، چې ددې تابع مشتق پیدا کړو؟

قضیه: یوه تابع په ایمپلیخیته بڼه $x^2+xy-y^2 = 1$ لرو، غواړوdy / dx پیدا کړو.:

ښوونه:

$$\frac{d}{dx}(x^2+xy-y^2) = \frac{d}{dx}(1)$$

$$2x+(1\cdot y+x\frac{dy}{dx})-2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$2x+y=\frac{dy}{dx}-x\frac{dy}{dx}$$

$$2x+y=\frac{dy}{dx}(2y-x)$$

$$\frac{2x+y}{2y-x}=\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x+y}{-x+2y} \lor \frac{2x+y}{2y-x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ايمپليځيټ مشتق د يوې تابع مشتقنيولو لپاره يو امکان دی، چې نه ايمپليځيت يعنې د يوه ترم سره ورکړ شوی وي، بلکې د ايمپليځيت يعنې د يوه مساوات له مخې ورکړ شوی وي. دا قاعده د دې لپاره هم کارول کيږي، چې تابع په اکسپليځيت يا ځرګند ډول ورکړ شوې وې، خو د دې مشتقنيول ستونځمن وي.

بيلګه : د $f(x) = x^x$ تابع مشتق په ورسره بلدو مشتققوانينو نه شي نيول کيدی، ځکه چې په بنسټ او جګ ااکسپوننت کې يې متحولې پرتې دي. د لوګاريتم له لارې د اکسپوننت متحوله له منحه وړل کېدی شي: $\ln f(x) = x \ln x$

اوس ايمپلځيت دا حل کوو، داسې چې دواړو لورو ته يې د x پسې مشتق نيسو:

$$\frac{\mathrm{d}(\ln f(x))}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}(x \ln x)}{\mathrm{d}x}$$

د دې مساوات مشتق د ځنځيرقانون له لارې صورت نيسي:

$$\frac{\mathrm{d}(\ln y)}{\mathrm{d}y} f'(x) = \frac{\mathrm{d}(x \ln x)}{\mathrm{d}x}$$

دلته $y = f(x)$. دی. د لوګاريتم او ضرب د مشتق قانون لاس ته راځي:

$$\frac{1}{y} f'(x) = \ln x + x \frac{1}{x}$$

که په $f'(x)$ پسې حل شي او د y له پاره بېرته $f(x) = x^x$ ځا په ځای کړو، نو دا حل لاس ته راځي:

$$f'(x) = y (\ln x + 1) = x^x (\ln x + 1)$$

بيلګه: دايره د r وړانګې سره مساوات $x^2 + y^2 = r^2$. لري. له دې ځنې برخې د $y =$ $f(x)$ تابع د ګراف په څېر ليکل کېدی شي. د دې مشتق د ايمپليځيت مشتق له لارې په لاندې توګه حل کېدی شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

په تعریف شوي مساوات کې $y = f(x)$ ځاي په ځای کوو:

$$x^2 + f(x)^2 = r^2$$

د دې مساوات د مشتق له لار لرو : $2\,x + 2\,f(x)\,f'(x) = 0$

د $f'(x)$ پسې د حل له لارې لاس ته راځي:

$$f'(x) = -\frac{x}{f(x)} = -\frac{x}{y}$$

د دې مساوات سره د بېلګې په توګه لاس ته راځي، چې په دایرېتانجنت په ټکي (x,y) کې جګوالی $-\frac{x}{y}$ لري.

بیلګه: د بیلګیپه توګه د $E:\ x^2 + 3y^2 = 7$
له لارې ورکړ شوې ایلیپسې (هګۍ یا بیضوي) له لارې لرو:

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 + 3y^2\right) = 2x + 6yy' = \frac{d}{dx}7 = 0$$

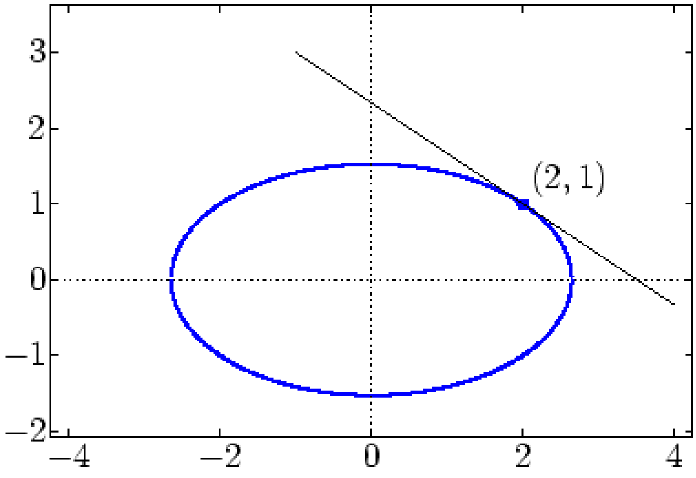
له همداسې $y' = -\frac{1}{3}\,\frac{x}{y}$.

دې سره کیدی شي په E باندې په یوه ټکي د $y \neq 0$ سره د تانجنت جګوالی وټاکل شي. د بیلګې په توګه د $(2,1)$ لپاره لاس ته راځي

$$y' = -\frac{1}{3}\frac{2}{1} = -\frac{2}{3}$$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library



په ورته توګه کیدی شي لوړ یا جګ مشتقونه هم وشمیرل شي. د yy' لپاره د ضرب قانون کارول یا استعمال له لارې دی

$$\frac{d}{dx}(2x + 6yy') = 2 + 6(y')^2 + 6yy'' = 0\,.$$

له دې لاس ته راځي

$$y'' = -\frac{1 + 3(y')^2}{3y}$$

.

بیرته په E د یوه ټکي د کواوردینات اینوولو او همدا اوس د $y'(x)$ ټاکلي ارزښت له لارې څرګند ارزښتونه وټاکل شي.

لیکونکي: هیولیک، کوپف

د بسټیزو مشتقونو جدول

(c) ketabton.com: The Digital Library

Nr	$f(x)$	$f'(x)$	نیونه یا فرضیه
1	$c = konst$	0	
2	X^n	$n.x^{n-1}$	$n = 1,2,3.......$
3	X^n	$n.x^{n-1}$	x تول عدد او $x \neq 0$
4	X^r	$r\,x^{r-1}$	$r \quad rational, \quad x > 0$
5	$\sqrt[n]{x = x^{\frac{1}{n}}}$	$\frac{1}{n}.x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{nx}\sqrt[n]{x}$	$n = 1,2,3......x > 0$
6	x^a	$a.x^{a-1}$	$x > 0, \; a \; reell$
7	a^x	$a^x \ln a = \frac{a^x}{\log_a e}$	$x > 0, \; a \neq 1$
8	e^x	e^x	
9	$\log_a x$	$\frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x \ln a}$	$a > 0, \; a \neq 1, \; x > 0$
10	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
11	$\sin x$	$\cos x$	
12	$\cos x$	$-\sin x$	
13	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in z$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پورته جدول په مرسته کیدی شي چی کم له کمه په فورمـال ډول ، په خوښه د هرې شننيزې يا سپړنيزې(تحليلي) ويينې يا افادې مشتق په شننيزه توګه لاس ته راوړی شي، سره له دې هم بايد سړی همغه نيونی په نظر کې ونيسي.

تولګه

کمبنتويش Differenzenquotient (د سيکانت ځګېدنه) يا منځنی تغيېر ارزښت

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

مشتق Differetialquotient (د تانجنت چګوالی يا لحضوي تغير ارزښت)

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

د ثابتي قانون

$$f(x) = c \cdot u(x) \, mit \, c = constant$$

$$\Rightarrow f'(x) = c \cdot u'(x)$$

$$\boxed{f' = c \cdot u'}$$

د جمعي قانون

$$f(x) = u(x) + v(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = u'(x) + v(x)$$

$$\boxed{f' = u' + v'}$$

د ضرب قانو

$$f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

$$\boxed{f' = u' \cdot v + u \cdot v'}$$

د ويش قانون

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v(x)}{[v(x)]^2}$$

$$\boxed{f = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

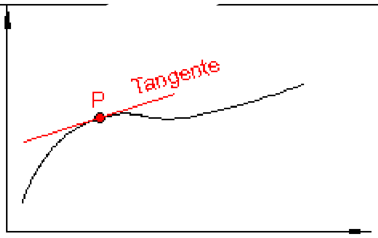
د ځنځير قانون

$$f(x) = f[z(x)]$$

$$\Rightarrow f'(x) = f'(z) \cdot z'(x)$$

دا پورته الماني په پښتو شي(دا کمپيوټرست سرته رسوم)

پيژند (تعريف): د يوه تابع ګراف ميل (جګوالی) په يوه ټکي P کې په همغه ټکي کې د تانجنت د ميل يا جګوالي ګراف سره برابر دی



د کمښت ويش يا د تفاضل ويش **Difference quotient**

د يوې کرښې جګېدنه بې له مشتق نيونې ټاکلکېدی شي:

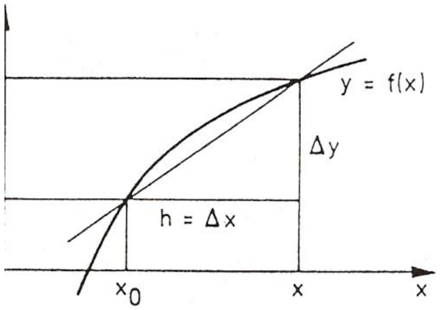
کرښه $y=f(x) = mx+a$ لرو

د دې کرښې د جګيدنې فرمول په لاندې ډول دی:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

پيژند(تعريف2-1

$y = f(x)$ دې د x_0 په يوه چاپيريال او په x_0 کې پخپله تعريف شوی تابع وي، x د x_0 څخه بيل خو د چاپيريال يو په خوښه يا په زړه پورې ځای دی(مخامخ ځيره دې وکتل شي). پس د تفاضل _ يا کمښتويش Differenc equtient د سيکانټی ميلان يا جګوالی شته دی، چې په لاندې ډول يې ليکو:



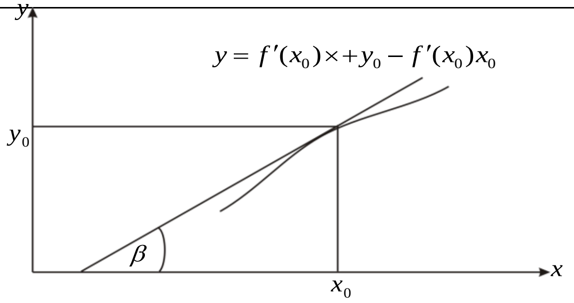
د پيژند لپاره ځيره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$
$$=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

پيژند:که يو تابع يابلواك $y=f(x)$ د x_0 په ځاي کی د مشتق وړ (قابل اشتقاق،رابيليدوړ) وي، نو هغه لاندنی کرښه چی د (x_0,y_0) څخه تيريږي او ميلان يا جګوالی $f'(x)=\tan\beta$ يی دی په لاندې ډول ليکو:

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=f'(x) \Leftrightarrow f'(x_0)x+y_0-f'(x_0)x_0$$

	او دا د (x_0,y_0) په ټکي کی د ورکړ شوې منحني يا کرړی $y=f(x)$ تانجنت بلل کيږي(پرتله يامقايسه لاندې څيره)

لومړی د تيرو جملو له مخې دديفرنسيشن قاعدې د فورمال قاعدو په څير بيا راټولوو يا رايوځاي کوو، بی له دې چی نيونی ورکړو. په استعمال کي يی بايددا نيوني کلکی تر پام لاندې ونيول شي. د لته د f(x) او $g(x)$ بلواك په f او g لنډيږي.

د مشتق نيونو يا رابيلدنومشتق قاعدو جدول

ګڼه د قاعدې نوم	فرمول
۱ د ثابتې سره ځل(ضرب) قاعده	$(cf)'=cf'$
۲ د زياتون – کمون قاعده	$(f\pm g)'=f'\pm g'$
۳ د ځل (ضرب) قاعده	$(f\cdot g)'=f'\cdot g'$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګڼه د قاعدې نوم	
۴ – وېشقاعده	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2}$
۵ – د زنځیروني قاعده	$y = f(z)\ ;\quad z = g(x);\ \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}$
د په څټ یا برعکس قاعده	$y = f(x)\ ;\quad x = f^{-1}(y);\ \frac{dx}{dx} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$

قضیه : هر اکسپوننشل تابع د $y = b^x, (b > 0)$ د ټولو ریلو اعدادو لپاره مشتقوړ دی او صدق کوي: $f' = b^x \ln b$

قضیه: هر د لوګاریتم تابع $y=f(x)=\log_b x$ د $b>0, b\neq 0, x>0$ سره، مشتقوړ دی او صدق کوي: $f'(x) = \frac{1}{x}\log e = \frac{1}{x.\ln b}$

--- د یوې تابع د مشتق قابلیت

موږ ولیدل، چې یوه تابع په هر ځاي کې تعریف نه ده، په هر ځاي کې حد نه لري اوهمداسې په هرځاي کې متمادي یا ناپرېکیدونکې نه ده. په همدې توګه یوه تابع هر چیرته د مشتق قابلیت هم نه لري.
تابع $f(x) = |x|$ په 0ځای کې تعریف نه ده:

د ټولو $x > 0$ له پاره باور لري $f(x) = x$
او له دې سره $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x-0}{x-0} = 1$

د ټولو $x < 0$ لپاره د پورته په برعکس $f(x) = -x$ باور لري او له دې سره:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{-x-0}{x-0} = -1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چې کيڼ- او ښی اړخيز حد يو له بل سره سر نه خوري، حد(پوله) نه شته. تابع په دې راوړل شوي ځای کې مشتقوړ نه ده.

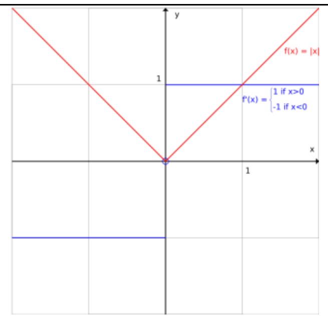
د تابع مشتق کېدنه په نورو ټولو ځايونو کې تر اوسه تل ورکړ شوې.

په صفر ځای کې سره له دې يو ښي اړخيز مستق ورکړ شوی، يعني لرو:

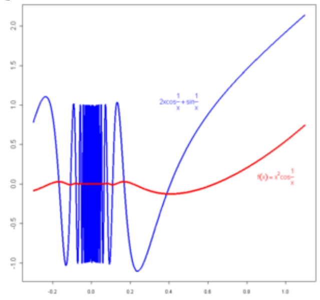
$$f'+(0)\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{-x-0}{x-0}=1$$

او يو کيڼ اړخيز مشتق هم:

$$f'-(0)\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{-x-0}{x-0}=-1$$

	که مخامخ گراف ته وګورو، نو وبه پوهيږو، چې يوه مشتقوړ تابع بايد ګوډه نه وي يا په کوم ځای کې ماته نه وي يا په بل عبارت کونج جوړ نه کړي.

د يوه نه متمادي مشتقوړ تابع لپاره بېلګه:



يو تابع متمادي مشتقوړ بلل کيږي، که د هغې مشتق متمادي وي. که يوه تابع هرچېرته مشتقوړ وي، بايد نه دی چې مشتق دې يې هم متمادي وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بیلګې په توګه:

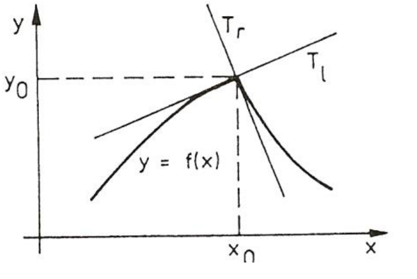
$$f(x)=\begin{cases} x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0 \\ 0 & x=0\end{cases}$$

تابع په هر ټکي کې حتي د $x=0$ سره مستقوړ دی. مشتق

$$f'(x)=\begin{cases} 2x\cos\left(\frac{1}{x}\right)+\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0 \\ 0 & x=0\end{cases}$$

يې ددې په خلاف په 0 ځای کې متمادي نه دی
مشتق د ټاکلو نیونویا فرضیو لاندې ممکن او له دې امله هلته هدفمند دی، چېرته چې لیمیټ (پولی) نه تګ ممکن وي یعنې چیرته چې د تفاضل ویش یو لیمیټ د $x\to 0$ لپاره ولري.

که کومه منحني چیرته راماته وي (څېره 4)، ګورو چې هلته تانجنت نه شته او همدارنګه جګیدل او هم د تفاضل ویش نه شته. پس د مشتق قابلیت د متمادیت په څیر د یوې تابع ځانګړي خوي دی.

	که په مخامخ څیره کی انځور شوې منحني د x_0 په ځاي کی یواځنی تانجنت هم ونه لري او له دې امله مشتق هم ونه لري، خو دلته یو کیڼ تانجنت T_1 یا کیڼ جګوالی لري اوپه دې ډول کیڼ مشتق لري او په همدې ډول یو ښی تنجت T_r او ښی جګوالی او په دي ډول ښی د تابع مشتق موجو د دی.

یوه نامتمادي(پرېکیدونکې) تابع کی د تانجنت یا مشتق پوښتنه بی معناده.

اړیین یا ضروري شرطونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا دلته انځور شوی پرابلم یا مسأله اوس د شمیرنې د ټیك فرمول لاندې راوړو.

ولیدل شو چی په یوه ځای x_0 کی چی تابع متمادي نه وي د مشتق پوښتنه بی مانا ده. نیسو چی دا دې ښوول شوی وی. دا څرګنده ده چی هره متمادي تابع باید ضرور مشتقوړنه وي. د بیلګي په توګه که تابع زاویه یا کونج ولري.

دې ته اړتیا ده چی وښایو، چی یوائې متمادي (نه پرېکیدونکې)توابع د مشتق قابلیت لري، دا بیا دا معنا لري چی هره تابع چې مشتقوړ وي باید لړ تر لګه متمادي(نه پرېکیدونکې) وي او په دې ډول مشتق متمادیت په بر کی لري یا خوندي لري، په دې معنا چی متمادیت د مشتقوړوالی لپاره اړیین یا ضروري شرطونه دي

جمله:

که د $y = f(x)$ تابع د x_0 په ځاي کی مشتقوړ وي، نو هلته ضرور متمادي ده.

ښوونه : د دمشتق د تعریف څخه لاس ته راځي، چی حد شته دی.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

لیمیټ یاپوله یوائی هلته کیدی شي چی موجود وي، چی د $x \to x_0$ لپاره د مخرج سره صورت هم صفر ته ولاړ شي یانې $f(x) - f(x_0) -> 0$ لاړ شي.

نو باور لري: $f(x) -> f(x_0)$ د $x \to x_0$ لپاره.

دا د متمادیت یا ناپرېکیدنې پیژند دی.

دا تفاضل یا کمښت وېش په یوه بله بڼه هم انځوریدلی شي که $x = x_0 + \Delta x$ وکاروو:

دلته مشتق $f'(x)$ په لاندې توګه ورکړ شوي دی:

د یوه تابع د مشتق قابلیت د لومړي ځل لپاره یوائی په ځای (lokal) پورې اړ خوي دی یعنی په یو ځاي x=x0 کی تعریف دی. لکه څنګه چی په متمادیت کی(لومړي څپرکی دې وکتل شي) کیدی شي چی د مشتق قابلیت او مشتق یوه واز یابند اینتروال ته وغزول شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تعریف: د $y = (x)$ یوه تابع په واز اینتروال (a,b) کې، د اشتقاق قابل(مشتقوړ) بلل کېږي، د لاندې مشق سره.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = f'(x) \;;\; a < x < b$$

که داد $x = x_0 \in (a,b)$ په هر ځای کې د مشتق قابلیت ولري د مشتق $f'(x_0)$ سره. دا په بند اینتروال $[a,b]$ کې مشتق وړ بلل کېږي، که دا سربېره پر دې د a په ځاي کی ښی اړخیز اود b په ځاي کي کيڼ اړخیز مشتق وړ هم وي.

بیلګه: د توان تابع $y = x^n,\; n = 1, 2, 3, ...$ په هرځاي کی د مشتق قابلیت لري د لاندې مشتق سره

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$$

د ساین تابع $y = \sin x$ او کوساین تابع $y = \cos x$ په هرځاي کی مشتقوړده، د لاندې مشتق سره

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\sin x}{dx} = \cos x, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d\cos x}{dx} = -\sin x$$

په یوه واز انتروال کی $y = f(x)$ مشتقوړ تابع مشتق بیرته $y' = f'(x)$ تابع ده ، نو په دې ډول یي د مشتق قابلیت اود متمادیت قابلیت پوښتنه کیدی شي.

پیژند: په یو د $x = x_0$ چاپیریال کې د مشتق قابل تابع (رابیلیدوړ بلواك) $y = f(x)$ په $x = x_0$ کې دوه واره د مشتق قابلیت لري(رابیلیدوړ دی)، که د هغي اشتقاق(رابیلیدنه) $y' = f'(x)$ هلته د مشتق قابلیت لري(رابیلیدوړ وي). سړی د $f'(x)$ مشتق د تابع(رابیلیدنه د بلواك) $y = f(x)$ دویمه رابیلیدنه بولي او لیکي:

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=x_0} = f''(x_0) = \left(\frac{df'(x)}{dx}\right)_{x=x_0}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یو په یوه واز اینتروال کي مشتق کېدونکي تابع $y = f(x)$ هلته دوه واره مشتقوړ بلل کیږي، که د هغه مشتق $y' = f'(x)$ په دې اینتروال کې مشتق وړ وي.

ددې لپاره لیکل کېږي:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = \frac{df'(x)}{dx}$$

بیلګه ۲ . ۷ :

لاندې توابع $y = c; y = x^n; y = \sin x; y = \cos x$

هر چېرته دوه واره مشتقوړ دي، د لاندې مشتقونو سره:

$$\frac{d^2c}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^2x^n}{dx^2} = n(n-1)x^{n-2}, \; n \geq 2,$$
$$\frac{d^2 \sin x}{dx^2} = -\sin x, \quad \frac{d^2 \cos x}{dx^2} = -\cos x .$$

دا په ۲ . ۴ کی تعریف شوي کیلمی کیدی شي چی په ساده ډول په خوښه پراخه شي یعني داکسپوننت مشتقونو ته واړول شي(n – م مستق (رابیلیدنه) یی وشمیرل شي) .

د y=f(x) تابع دلته n –واره مشتقوړ ده، که n – م مشتق ولري یعنی

$$\frac{d^ny}{d^nx} = \frac{d^nf(x)}{d^nx} = f^{(n)}(x) = \frac{df^{(n-1)}(x)}{dx};..$$

جمله:

که د(y=f(x تابع د x0 په ځاي کی مشتقوړ وي، نو هلته ضرور متمادي یا ناپرېکیدونکي ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ښوونه : د دمشتق د تعریف څخه لاس ته راځي، چی پوله یا حد شته دئ

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

پوله یا حد یوائی هلته کیدی شي چی موجود وي، چی د$x \to x_0$ لپاره د مخرج سره صورت هم صفر ته ولاړ شي یانې$f(x)-f(x_0) \to 0$ لاړ شي.

نو باور لري: $f(x) \to f(x_0)$ د $x \to x_0$ لپاره.

دا د ناپرېکیدنې یا متمادیت تعیف یا پیژند دی.

دا کمښت-یا تفاضل وېش په یوه بله بڼه هم انځوریدلی شي که $x = x_0 + \Delta x$ وکاروو:

دلته مشتق ($f'(x)$ په لاندې توګه ورکړ شوي دی:

د یوه تابع د مشتق قابلیت د لومړي ځل لپاره یوائی په ځای (lokal) پوري اړوند یا تړلی خوي دی یعنی په یو ځاي $x=x_0$ کی تعریف دئ. لکه څنګه چی په ناپرېکیدنه یا متمادیت کی(۱۹ - څپرکی دې وکتل شي) کیدی شي چی د مشتق قابلیت او مشتق یوه واز یابند اینتروال ته وغزول شي.

تعریف :

د $y=f(x)$ یوه تابع په واز اینتروال(a,b) کی، د اشتقاق قابل(مشتقوړ) بلل کیږي، د لاندې مشق سره.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = f'(x); a < x < b$$

که داد$x = x_0 \in (a,b)$ په هر ځاي کی د مشتق قابلیت ولري د مشتق ($f'(x_0)$ سره.

دا په بند اینتروال[a,b] کی مشتقوړ بلل کیږي، که دا سربیره پر دې د a په ځاي کی ښی اړخیز اود b په ځاي کي کیڼ اړخیز مشتقوړ هم وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

--- د معکوس تابع مشتق invers funktion

د یوه ګراف به مرسته تابع او د هغه په څټ تابع د بیلګی به توکه یوه مربع تابع.

اوس دې معکوسه تابع تر څیرني لاندې ونیول شي . دلته دې ونیول شي،چې $y=f(x)$ په $x=x_0$ کې د $f(x)=0$ سره او په یوه د x_0 چاپیریال کې جګیدونکی دی $f'(x_0)>0$ او یا په کلکه لوېدونکی $f'(x_0<0$ او له دې امله معکوس کیدونکی هم دی، یعني $x=f^{-1}(y)$ ، نود کمښتویش لپاره معکوسه تابع لاس ته راځي:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}=\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}=\frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}=\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

او دا چې $x->x_0$ او $f(x)$ د متمادیت له امله هم $y->y_0$ او باورلري.

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)_{y=y_0=f(x_0)}=\left(\frac{df^{-1}(y)}{dy}\right)_{y=y_0=f(x_0)}=\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}}=\frac{1}{\left(\frac{df(x)}{dx}\right)_{x=x_0}}$$

که په د لاندې ټکي ځای $x=x_0$ لپاره ساده بیرته x ولیکو نو دا لاندې لنډ فورم لیکلی شي:

د $y=f(x)$ لپاره باور لري.

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

د پورته ورکړ شوو نیونوسره سړی بیرته یو د تفاضل یا کمښت ویش لاس ته راوړي چې د هغه سره د

مروج ویش په څیر شمیرنه کیدی شي، لکه

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(f^{-1})`(y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{f`(x)}$$

جمله:

د معکوس تابع مشتق : که y = f(x) د x په یوه چاپیریال کی د $x=f^{-1}(y)$ سره معکوس او هملته د f’ (x) |= 0 سره مشتقوړ وي، نو معکوس تابع د y = f (x) سره مشتقوړ دی او باوري دی

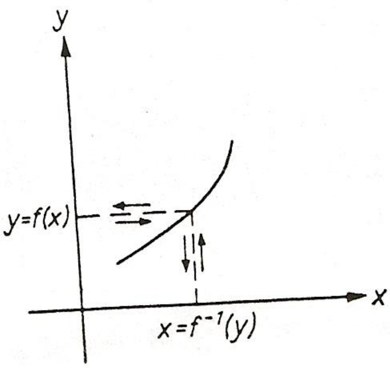
$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

حل: کیدی چی د f تابع د مشتق څخه د f^{-1} معکوس تابع مشتق لاس ته راوړو. له دې امله له x ->0 اوهم y->0 او معکوس څخه، د y = f(x+ x)-f(x) سره، لاس ته راځي:

$$(f^{-1})`(y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{f`(x)}$$

بالاخره لرو:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه: د $y = f(x) = x^n; n = 1, 2, 3, 4......$ تابع لپاره که $x \geq 0$ وټاکل شي او په دې $x = \sqrt[n]{y} = y^{\frac{1}{n}}; y \geq 0$ توګه معکوس تابع، نو لرو:

$\frac{dy}{dx} = f\ '(x)nx^{n-1}$ د x>0 لپاره. له دې امله د $y > 0$ لپاره د معکوس تابع مشتق شته دی او لاندې ارزښت لري

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d\sqrt[n]{y}}{dy} = \frac{dy^{\frac{1}{n}}}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{n \cdot x^{n-1}} = \frac{1}{n} \cdot x^{1-n} = \frac{1}{n} \cdot y^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n} \cdot y^{\frac{1}{y}-1}$$

که x او y سره بدل شي نو دا لاس ته راځي

$$dx^{1/n} / dx = (1/n).x^{n-1}$$

بیلګه: دا $y = x^{\frac{m}{n}}$ تابع د تام عدد m او د مثبت تام عدد n سره یعني د خوښې کسري اکسپوننت یا په«جګ عدد» کیدی شي چې د مخه څېړلي او د ځنځیری قاعدې له مخې یې مشتق نیول شي، چې د $x > 0$ لپاره باور لري.

$$y = x^{m/n} = z^m \quad , \quad z = x^{1/n}$$

او دا هم باوري دي

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dz}{dx} = m.z^{m-1}.\frac{1}{n}.x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n}.x^{\frac{m-1}{n}} \cdot x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m-n}{n}}$$

$$\frac{dx^{\frac{m}{n}}}{dx} = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m}{n}-1}, x > 0$$

په دې ډول د مخه طبیعي اکسپوننت کسري اکسپوننت ته پراخ شو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې جدول کې لاندې د بنسټبتابع مشتق ځاي په ځاي شوی. له کیڼ و ښي لور ته اول درځ نمره ده دویم درځ یی تابع $f(x)$ ښای او په دریم درځ کی یی مشتق $f'(x)$ ځاي په ځای دي او په څلورم درځ کی د راپیداشوې پارامتر او د متحولې x نیونی ځای په ځاي شوي. که چیرې د واریابلی یا پارامتر لپاره نیونی نه وي شوي نو په خوښه نیول کیدی شي.

جدول د بنسټتابعو مشتق

Nr.	$f(x)$	$f'(x)$	وړاند نیونه یا فرضیه
1	$c = konst$	0	
2	X^n	$n.x^{n-1}$	$n = 1,2,3......$
3	X^n	$n.x^{n-1}$	$n \;\; ganz, \;\; x \neq 0$
4	X^r	$r\,x^{r-1}$	$r \quad rational, \;\; x > 0$
5	$\sqrt[n]{x = x^{\frac{1}{n}}}$	$\frac{1}{n}.x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{nx}\sqrt[n]{x}$	$n = 1,2,3......x > 0$
6	x^a	$a.x^{a-1}$	$x > 0, \;\; a \;\; reell$
7	a^x	$a^x \ln a = \frac{a^x}{\log_a e}$	$x > 0, \;\; a \neq 1$
8	e^x	e^x	
9	$\log_a x$	$\frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x\ln a}$	$a > 0, \;\; a \neq 1, \;\; x > 0$
10	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
11	$\sin \; x$	$\cos \; x$	

(c) ketabton.com: The Digital Library

12	$\cos x$	$-\sin x$	
13	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$	$x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2},k\in z$
14	$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}=-(1+\cot^2 x)$	$x\neq k\pi,\ k\ \ k\in z$ (Z)
15	$Arc\sin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\|x\|<1$
16	$Arc\cos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\|x\|<1$
17	$Arc\tan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	
18	$Arc\cot$	$-\frac{1}{1+x^2}$	

د جدول 20-2 او همدارنگه د جدول20-1په مرسته کيدی شي چی کم له کمه په فورمـال ډول ، په خوښه د هرې شننيزي يا سپړنيزې(تحليلي) وييني يا افادې مشتق په شننيزه توګه لاس ته راوړی شي، سره له دې هم بايد سړی همغه نيونـی په نظر کي ونيسي.

بيلګه20-18: د زياتون قاعده کيدی شي د ځل قاعدې په مرسته د يوې ثابتی سره يوځاي يا ګډه شي او ډېرو زياتونکو يا د جمعې اعضاو باندې استعمال شي. لکه لاندې

$$y=f(x)=3\sin x+4e^x-7tanx-6\sqrt{x^3}$$
$$=3\sin x+4e^x-7tanx-6x^{\frac{3}{2}}$$

دلته tan x يواځې د $x\neq(2k+1)$ او د x^3 له امله يواځې د $x>o$ لپاره رابيليدوړ دی او ددې بنديزونو (محدوديتونو) له امله لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$dy/dx = f'(x) = 3\cos x + 4e^{x} - 7 - 7\tan^{2} x - 6.(3/2).x^{)3/2)-1}$$
$$= 3\cos x + 4e^{x} - 7 - 7\tan^{2} x - 9\sqrt{x}$$

لکه چې بنسټیز بلواك او له دوي ټولی راجوړ ِ شوي سپړنیزي افادې هرچیرته متمادي یا ناپریکیدونکی وي، چیرته چي تعریف شوي وي. نو د جدول 20-2 له مخی بنسټیز بلواك یواځي تعریف ډېري کی رابیلیدوړدی، په دې کي کوم تغیر نه راځي که په دې بلواکو ځلور بنسټیزې عملي استعمال شي. یعني لاندې جمله باوري ده .

جمله20-8: د بنسټیز بلواکو د ځلورو بنسټیزو عملیو له لارې جوړ ِ شوي شننیزې (تحلیلي) افادې د دوي تعریفډیري په دننه کی رابیلیدوړ ده.

که څوك ځنځیري بلواك جوړوي نو دا وینا باید نوره هم رابنده یا محدوده شي

بیلګه20-19: دا بلواك $y = \sqrt{(x-1)^{2}(x+1)} = (x^{3} - x^{2} - x + 1)^{1/2}$

د $(x-1)^{2}(x+1) > 0$ ، پس د $x+1 > 0$ یعني $x > -1$ تعریف دی او هلته هم نه پریکیدونکی یا متمادي (د $x = -1$ په غاړه طبعآ ښی اړخیز) ده.

دا په ځانګړې توګه د $x = 1$ لپاره هم ناپریکیدونکی یا متمادي دی(20-7دې وکتل شي)د پیژندډیری یا تعریف ډیری دننه $x > -1$ دی، او هلته تابع یا بلواك په واقعیت کی نه پریکیدونکی یا متمادي دی .اوس نو مخ ته پروت تابع یا بلواك تړلی(ځنځیري) ورکړ شوی:

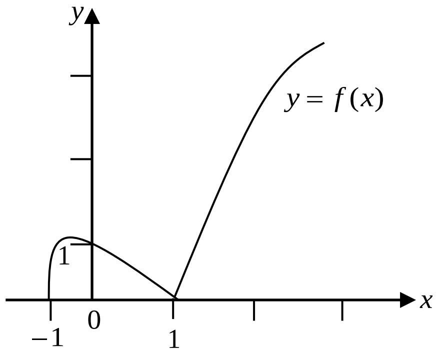
$$y = f(z) = \sqrt{2} = z^{1/2}$$
$$z = g(x) = (x-1)^{2}(x+1) = x^{3} - x^{2} - x + 1$$

z = g (x) = (x -1)2 (x +1) = x3 - x2 - x +1

بلواك $z = g(x)$ د ټولو x لپاره مشتقوړ یا رابیلیدوړ دی، تابع $y = f(z) = z^{\frac{1}{2}}$ له دې امله ځنځیري قاعده یواځی د $z > 0$ لپاره صدق کوي، پس د $x > -1, \ x \neq 1$ لپاره. هلته باور لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=\frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}\cdot(3x^2-2x-1)=\frac{3x^2-2x-1}{2\cdot\sqrt{(x-1)^2(x+1}}$$



د یو ځنځیري تابع مشتقوړوالی د هغه- x ارزښتونو لپاره باور لري یاهلته ډاډوړ دی، کوم چي د د ننني تابع یا بلواك په دننه کی پراته دي او په هغو کی د دننني تابع ارزښت د دباندني تابع د د تعریف ډیری په دننه کي پروت وي. که د - x ارزښتونو ډیری د بند تعریفډیري دننه وښایي ، نو لاندې جمله باور لري.

جمله 20-9: هره یوه ښننیزه یا تحلیلي افاده د خپل بند(محدود) تعریفډیري په دننه کی رابیلدوړ ده.

بیلګه 20-20: ځنځیري قاعده هم استعمالیدونکی ده، که په یوه تړلي بلواك کی د ننني بلواك پخپله یو تړلی بلواك وي، پس (د لازمه وړاند نیونو لاندې) باور لري

$$y=f(z),\ \ z=g(u),\ \ u=h(x)$$

پس د $y=f(g(h(x)))$

ځنځیري قاعده

$$dy/dx=(dy/dz)(dz/du)(du/dx)$$

فنکشن یا بلواك یا تابع

$$y=Arc\sin\sqrt{1-x^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یو داسې تابع دی. دلته لرو:

$$y = f(z) = Arc\sin z, \qquad z = g(u) = u^{1/2},\ u = h(x) = 1 - x^2$$

دلته h(x)رابیلیدوړ دی، g(u) یواځی د $u > 0$ لپاره رابیلید وړ دی، پس د -1 ، $x_2 > 0$ او
یا $x_2 < 0$ یاد $|x| < 1$ ، او $f(z`)$ د$|z| < 1$ لپاره، پس د$1 - x_2 < 1$لپاره پس د$11 < x_2 -$
1 لپاره په دې مانا چی $x_2 > 0$ د$|x| > 0$ لپاره.

رابیلیدوړوالی یواځې د لاندې چاپریال لپاره تضمین دی

$0 < |x| < 1 \iff -1 < x < 0$ او یا

$$0 < x < 1 \iff |x| < 1 \quad x \mid = 0 \qquad (20.53)$$

دپیژنددېری پا تعر یفدیری دننه $|x| < 1$دی. د تعریفدېري محدودیت(20-53 = دی.

فنکشن یا بلواك (20-52) یواځی هملته تعریف او د (20-51) له مخی باور لري:

$$\frac{dArc\sin\sqrt{1-x^2}}{dx} = \frac{dArc\sin z}{dz}\cdot\frac{du^{\frac{1}{2}}}{du}\cdot\frac{d(1-x^2)}{dx}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\cdot\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2x)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x)$$

$$= -\frac{x}{\sqrt{x^2}\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{|x|\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & fur\ \ 0 < x < 1, \\ +\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & fur\ -1 < x < 0 \end{cases}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس دې یوه بله د دیفرنسیشن قاعده ورکړل شي کومه چی په جدول 20-1 کي غیر مستقیم خوندي یا په بل عبارت دننه ده. دا د لاندې شکل بلواك دیفرنځیشن دی

$$y = f(x)^{g(x)}$$

دا له دې امله

$$y = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x)\ln f(x)}$$

د ځنځیرقاعدې له مخی ترڅیرني نیول کیدی شي، $z = g(x)\ln(f(x))$, $y = e^z$ د لاندې بلواك $u = \ln f(x) = \ln v$, $v = f(x)$ مشتق هم د ځنځیری قاعدې له مخی را پیداکیدی شي.

دا لاندې صدق کوي:

$$u' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dv}\cdot = \frac{1}{v}\cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$ او

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = e^z\cdot(g'(x)\ln f(x) + g(x)u')$$

$$= f(x)^{g(x)}\left(g'(x)\ln f(x) + \frac{g(x)f'(x)}{f(x)}\right)$$

د ځنځیری قاعدې د نیونو په نظر کی نیولو سره او د جملی 20-10 له مخی لاس ته راځي

جمله : که $f(x)$ او $g(x)$ د $f(x) > 0$ سره د مشتق قابلیت لري ، نو $y = f(x)^{g(x)}$

هم د لاندې مشتق سره مشتقوړ دی.

بیلګه : تابع $y = x^x$ د $x > 0$ لپاره رابیلیدوړ دی. دا دې داسی $f = x$, $g = x$ ځاي په ځاي شي او له دې سره $f' = 1, g' = 1$ له دې امله اوس د $x > 0$ لپاره لرو:

$$dx^x / dx = x^x(\ln x + 1)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه: د $y=(x^2-1)^{\ln x},\ x>1$ دیفرنسیشن سره باید د $g=\ln x$ له امله وغوښتل شي چې $x>0$ او د $f=(x^2-1)>0$ له امله باید باور ولري $x^2>1$ او له همدې امله $|x|>1$ پس کیدی شي چې د $x>1$ لپاره د $f=x^2-1$ او $g=\ln x$ سره استعمال شي:

$$\frac{dy}{dx}=(x^2-1)^{\ln x}\cdot\left(\frac{1}{x}\ln(x^2-1)+\frac{(\ln x)\cdot(2x)}{x^2-1}\right)$$

$$=(x^2-1)^{\ln x}\cdot\left(\frac{\ln(x^2-1)}{x}+\frac{2x\ln x}{x^2-1}\right),\quad x>1$$

بیلګه یا تمرین: د $y=f(x)=x^n;n=1,2,3,4......$ تابع لپاره که $x\geq 0$ وټاکل شي او په دې توګه $x=\sqrt[n]{y}=y^{\frac{1}{n}};y\geq 0$ یې معکوس تابع وي، نو د معکوس تابع مشتق یې ونیسئ.

، نو لرو : $\frac{dy}{dx}=f'(x)nx^{n-1}$ د $x>0$ لپاره له دې امله د $y>0$ لپاره د معکوس تابع مشتق شته دی او لاندې ارزښت لري.

$$\frac{dx}{dy}=\frac{d\sqrt[n]{y}}{dy}=\frac{dy^{\frac{1}{n}}}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=\frac{1}{n\cdot x^{n-1}}=\frac{1}{n}\cdot x^{1-n}=\frac{1}{n}\cdot y^{\frac{1-n}{n}}=\frac{1}{n}\cdot y^{\frac{1}{n}-1}$$

که x او y سره بدل شي نو دا لاس ته راځي.

$$\frac{dx^{\frac{1}{n}}}{dx}=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$$

بیلګه -- د $y=x^{\frac{m}{n}}\ ,m,n\in N$ تابع د معکوس تابع مشتق ونیسئ.

د تام عدد m او د مثبت تام عدد n سره یعني د خوښې کسري اکسپوننت

یا په«جګ عدد» کیدی شي چې د مخه څېړلي او د ځنځیری قاعدې له مخې یې مشتق ونیول شي، چې د $x>0$ لپاره باور لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = x^{\frac{m}{n}} = z^m \quad , \quad z = x^{\frac{1}{n}}$$

او دا هم باوري دي

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = m.z^{\,m-1}.\frac{1}{n}.x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n}.x^{\frac{m-1}{n}}\cdot x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{m}{n}\cdot x^{\frac{m-n}{n}}$$

$$\frac{dx^{\frac{m}{n}}}{dx} = \frac{m}{n}\cdot x^{\frac{m}{n}-1}, x > 0$$

په دې ډول د مخه طبيعي اکسپوننت کسري اکسپوننت ته پراخ شو.

بيلګه : يوه بډای چی په يوه ټاکلي وخت کی ټولسټ (ټولډيرئ) M توليد کړي او دا ټل اخستونکو ته ورسوي، نو له دې سره فيکس يا کره ټاکلی لګښتونه F تړلي دي.
کيدې شي چي سملاسی د دې توليد په ټولسټ (ټولډيرئ) M کی توليد کړي ، په يوه زخيره ځاي(زېرمتون؟) کی ځاي په ځاي کړي او اخستونکو ته يی سملاسي ورسوي. دلته د زېمتون (زخيره کونې) لګښتونه راپيد کيږي(ددې د زخيرې لپاره ځاي او هلته بيا اچول او وړل). يا هم کيدی شي چی توليد په لږه کچه يا اندازه توليد شي او سملاسی اخستونکو ته وروړل شي. دلته نو د زخيره کولو لګښتونه منځ ته نه راځي. مګر ټل توليد په دې ډول توليد باندې درول، لګښتونه منځ ته راولي، چی د چمتووالی لګښتونه يی بولو.
کومه ډيرئ x (ازاده لويه) بايد توليد شي، چی د امکان تر پولي کم لګښتونه پرې وشي؟
د زخيرې لګښت د چمتووالی لګښت سره متناسب دئ ، د خرابيدو ارزښت د چمتووالي يا توليد ارزښت سره يعنی چي خرڅلاو ته چمتو کيږي، په څټ متناسب دی. که x لوي وي نو چمووالی ته کم اړتيا شته او که x کم وي نو چمتووالی بدلون ټل بايد تغير وخوري يعني. ټول لګښتونه

$y = f(x) = F + Lx + R/x$ دي ، چيرته چی F ثابت(همغه) يا په کلکه ايښول شوي لګښتونه دي، Lد زخيرې لګښتونه او R د چمتووالی لګښتونه دي. دا ازاده لويه x د

(c) ketabton.com: The Digital Library

تولیدډیری M څخه نه شي سترېدلی ، لوئیدلی یا غټیدلی. له دې امله صدق کوي 0 $\leq x \leq M$. مخ ته پروت د ستریدلو مسئله له دې امله په لاندې ډول ده

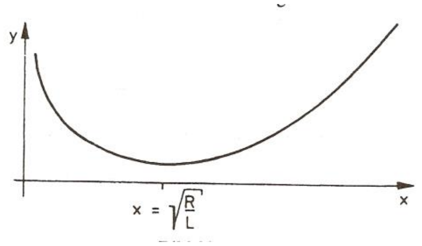
$$y = f(x) = F + Lx + R/x = Min! \quad (0 \leq x \leq M$$

(لمړی f(x) دوه واره دیفرنځیال کیږي یا یي دوه واره رابیلیدنه نیول کیږي:

$$f'(x) = L - R/x^2, \qquad f''(x) = 2R/x^3$$

د مینیوم لپاره ضرور دي: $f'(x) = 0$, پس لرو $x = R/L$ ؟؟؟

د $0 \geq x$ له امله $f''(x) \geq 0$ هم صدق کوي، پس دلته تل یو نسبي مینیموم مخ ته لرو



د کږې تګلار په ځیره ۲۰ . ۱۵ کی انځور شوې.

څرګندده: که $x = R/L < M$ صدق ولري، نو مینیموم مو مخته پروت دی. که $x = (R/L) > M$ وي، نو یو منیموم په څنډه $x = M$ لرو.

نامساوت $R/L < M$ دا مانا لري $x = R/L < M^2$ په همدې ډول $R^2 < M^2L$.

پس مخ ته لرو: $x = R/L$ د $R < M^2L$ لپاره او $x = M$ د $R > M^2L$ لپاره

نو : که د چمتوالي لګښتونه R , زخیرې لګښتونو L څخه زیات لوي شي، نو سملاسی دې ټول تولید $x = M$ صورت ونیس. که د ذخیرې لګښتونه د چمتووالی لګښت څخه کم وي، کیدی شي کوچنی ازاد x تولید شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تاکلی بیلګه : د $M = 10000, R = 1000, L = 10$ لپاره صدق کوي:

$R = 1000 < M^2L = 108 . 10 = 109$ ستر یا غټ ازاد لګښت دی

$x = \sqrt{R / L} = \sqrt{1000 / 10} = \sqrt{100} = 10$ ازاد a دلته 10 یوونه باید

ورزیات شي ، چی 10000 یوونه تولید کړيږ $M = 10 , R = 1000 , L = 1$ لپاره صدق کوي $R = 1000 > M^2L = 100$ غټ ازاده لویه له دې امله $x = M = 10$ ده .

یواځې یوه ازاده لویه دې تر تولید لاندې ونیوله شي. پای

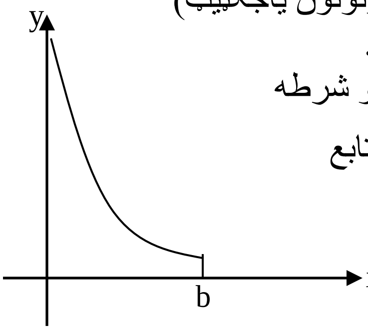
د رول قضیه (Rolle)

ننوتنه :
که د f یوه تابع په بند اینتروال [a,b] کې متمادي اوc د a او b ترمنځ پروت وي، نو هلته لږ تر لږه یو عددk د f(a) اوf(b) ترمنځ شته، داسې چې k = f(c) دی

د وایرشتراس قضیهWeierstrass

که د fیوه تابع په بند اینتراوال[a,b]کې متمادي یا ناپرېکیدونکي وي، نوfپه دېاینتراوال کی لږ تر لږه یو جګ ارزښت(اعظمي قیمت) او یو ټیټ ارزښت(اصغري قیمت) نیسی

دلته شننیز یا تحلیلي ځواب نه ورکول کیږي، دا وینا د لیدلو له مخې معقوله برېښي.
کیدی شي چی یو یو غږیز (monoton مونوتون یاجګټیټ)
ارزښت د اینتروال په غاړه هم پروت وي.
د اینتروال محدودوالی (بندوالی) بی قید او شرطه
حتمي دی. د بیلګي په توګه د $y=f(x)=\frac{1}{x}$ تابع
په نیم بنداینتروال [0,b)کی متمادي ده،
مګر پورته لور ته بنده نه ده، چی په دې



(c) ketabton.com: The Digital Library

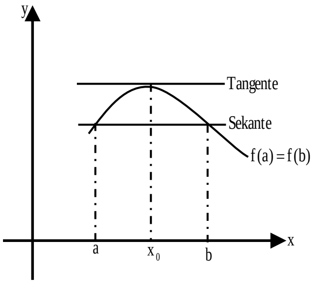
توګه اعظمي ټکی نه لري.

۳. د مشتق منځ ارزښت قضيي

د تانجنت او قاطع ترمنځ او په همدې ډول د مشتق – اوتفاضل ويش ترمنځ داسی نږدې اړيکي وجود لري، کومې چې د اناليوزې په منځ ارزښت قضيو کی تشريح کيږي.
د تابع او انحرافي ارزښتونوخويونو څخه لومړی پسی ترلې لاندې د رول قضيه لاس ته راځي

د رول (Rolle) قضيه:

يوه د f تابع دې په بند اينتروال[a,b] کې متمادي وي د(b)f(a)=fسره او په واز ايتروال(a,b) کی مشتقوړ، نو لږ تر لږه يوځاي$c\in(a,b)$ شته دی د$f'(x_0)=0$ سره.



حل :

۱) کهf ثابت وي نو سملاسي لاس ته راځي: $f'(x_0)=0$
۲) که f ثابت نه وي، نو د وايرشتراس د قضی له مخی لږ تر لږه د تابع يوخورا لوي او يوخورا کوچنی ارزښت موجود دئ. دا ارزښتونه توپير لري، ځکه چیfثابت نه دی. نو له دئ کبله لږ تر لږه له دې ارزښتونو څخه د (f(a)=f(b سره نامساوي دی . په دې اساس د اينتروال په دننه کی يو مونوتون (جګټيټ) ځای x_0 موجود دی. د مشتقوړ توابعو مونوتوني (جګټيټ ارزښت) شتون د اړيين يا ضروري شرطونوقضي له مخی لاس ته راځي: $f'(x_0)=0$

تر اوسه مو وښوول، چی د لازمو شرايطو لاندې يوې افقي قاطع ته يو افقي تانجنت هم شته دئ.
دا هندسي پرابلم کيدی شي چی عمومي شي.

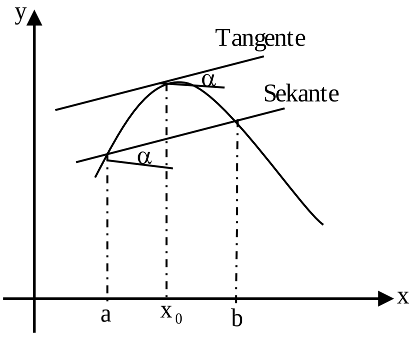
(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنه رامنځ ته کيږي، چی ایا یوې مائلی قاطع ته په همغه ډول تانجنت د همغه میل (جګوالي) سره جوړیدلی شي؟

ځواب یی لاندې قضیه راکوي

د مشتق د منځني ارزښت (وسطي قیمت) قضیه:
که $y=f(x)$ تابع په بند اینتروال $[a,b]$کی متمادي او په واز اینتروال (a,b)کی د مشتق وړ وي ، نو هلته یوځاي $x \in (a,b)$ شته دی، د کوم لپاره چی لرو:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(x_0)$$



(ځیره ښه نه ده انځور شوې تیک دې
د الفا د کونج لاندې ضلعې باید د x محور سره غبرګې وي)
حل:
دا پرابلم په یوه مرستندوې تابع داسی تعریفیږي، چی د رول قضیه وکارول شي. د دې لپاره د قاطع مساوات رامخ ته کوو:

$$y=g(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$$

د مرستندوې تابع په څیر د مشتق تابع جوړیږي:

$$h:\ h(x)=f(x)-g(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)-f(a),$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو باور لري:h(a)=h(b)=0 . برسيره پر دې h په (a,b) کې د مشتق وړوالی لري او په [a,b]کې متمادي ده. له دې سره د رول د قضيې وړاند نيونه(فرضيه) ورکړ شوې، دا په دې معنا چی یو ځاي $x \in (a,b)$شته دی د h'(x)=0 سره، چی له هغې لرو:

$$f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \text{ يعني } h'(x_0)=f'(x_0)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0,$$

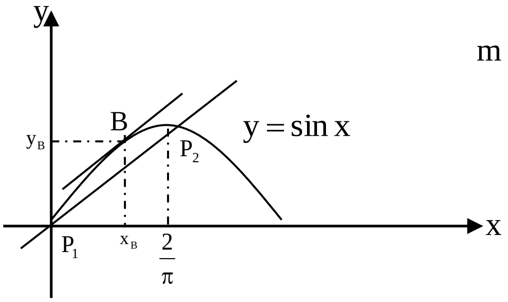
پورته لاسته راوړنه به دا لاندې بېلګې نوره هم روښانه کړي.

بیلګه :

د f(x)=sinx يوه تابع دې داسې ورکړشوې وي،چې په يوه ټکي $B(X_B,Y_B)$ کی تانجنت د منحني مماس وي، اوکوم چه په $P_1(0,0)$ او $P_2(\frac{\pi}{2},1)$ ټکو کی همغه میل یا جګوالی لري لکه قاطع.

ځواب: د قاطع (غوځي) ميل ياجګوالی:

$$m=\frac{\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0}{\frac{\pi}{2}-0}=\frac{2}{\pi}$$



د منحني میل د $B(x_B:y_B)$ په ټکی کې $f'(x_B)=\cos x_B=\frac{2}{\pi}$

له دې ځخه لاس ته راځي: $x_B=\arccos\frac{2}{\pi}=0{,}88$ او $f(x_B)=f(0{,}88)=0{,}77$

لمس ټکی: $B(0{,}88:0{,}77)$

د تانجنت مساوات: $y=\frac{2}{\pi}(x-0{,}88)+0{,}77$

د منځ قضی د عمومیت ځخه لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

پراخه شوې یا غزېدلې منځقضیه :

که $u=f(x)$ او$v=g(f)$ په بند اینتروال$[a,b]$کې متمادي توابع وي او په واز اینتروال (a,b)د مشتقوړاو $g'(x)\neq 0$ باور ولري ، نو د ټولو $x\in(a,b)$ لپاره، کم له کمه یوځاي $x_0\in(a,b)$وجودلري چی لاس ته ترې راځي:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

حل: د $g'(x)\neq 0$ له املهg معکوس کېدونکی ده او$v=g(x)$ مساوات دx په لور معکوس کیدنه ورکوي، یعنې $x=g^{-1}(v)$

که دf په تابع کی هم نوې متحوله ځاي پر ځاي شي، نو یوه زنځیري تابع لاس ته ترې راځي:

$$u=f(x)=f(g^{-1}(v))=h(v)$$

د زنځیرې قاعدې له مخې یی دا مشتق لاس ته راځي:

که په $u=h(x)$ تابع د $v_1=g(a)$او $v_2=g(b)$

سره د وسطي قیمت قضیه استعمال شي، نو د ځای $v_0\in(v_1;v_2)$ په لاندې ډول موجود دی:

$$\frac{h(v_2)-h(v_1)}{v_2-v_1}=h'(v_0)$$

له دې څخه د $h(v)=f(x),v=g(x)$ او $x_0=g^{-1}(v_0)$سره لاس ته راځي:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

.

.

.

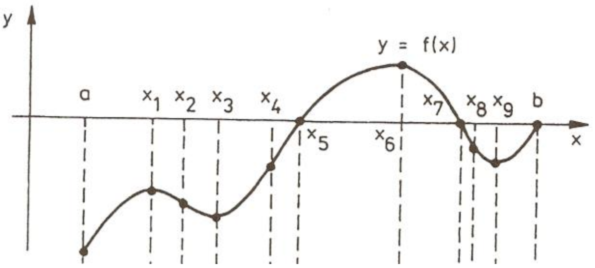
.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

یوغېږیزې توابع(Monotony (یوناني: یوغږیز، برابرېوله)

جگیدونکې(متزاید)، ټیټېدونکې(متناقص) توابع(جگ-ټیټېدونکې توابع)



که د ټولو $x_1 < x_2$ لپاره دf یوه تابع په یوه اینتروال کې $(f(x_1) \le f(x_2))$ $(f(x_1) \ge f(x_2))$ وي، نو تابع په دې اینتروال کې مونوتون جگیدونکې(- ټیټیدونکې) بلل کیږي، که $(f(x_1) = f(x_2))$ په کې اجازه ونه لري، نو دا $(f(x_1) < f(x_2))$ $(f(x_1) > f(x_2))$کره یا ټینګه مونوتون جکیدونکې (همغږیز ټیټیدونکې) بلل کیږي.

لاندې قواعد، چې له همغږیزوالي په لاس راځي، د همغږیزوالي حالت لپاره گټور دي.

دf یوه تابع ټیک هلته د تعریف په ورشو(ساحه) D کې مونوتون جگیدونکې ده، که د خوښې x_1 او x_2 لپاره، چې په D کې پراته دي، باور ولري:

$$x_1, x_2 \in D \wedge x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$$

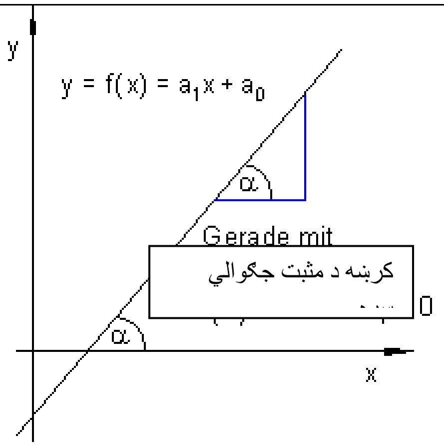
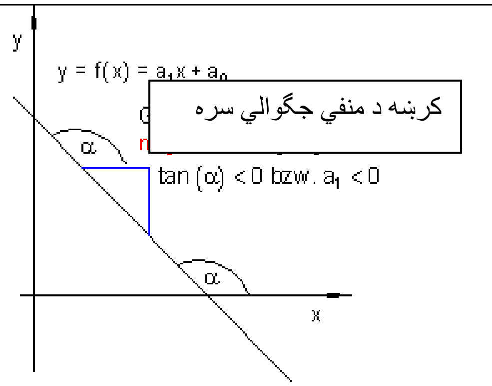
د f یو تابع ټیک هلته په D کې مونوتون ټیټېدونکې ده، که د خوښې x_1 او x_2 لپاره، چې په D کې پراته دي، باور ولري:

$$x_1, x_2 \in D \wedge x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

يوغږيزوالى (يکنواخت) Monotony جګتيتوالى، د جګتيتوالى جملې

دا $f(x) = a_1x + a_0$ کرښيز(خطي) تابع خورا ساده تابع ده، چې انحنانه لري. ددې لپاره مسئول يې ثابته جګېدنه يا ثابت ميل $a_1 = \tan(\alpha)$، دی، چېرته چې α د کرښې او مثبت لوريز د x -محور ترمنځ زاويه(کونج) ده. په مخامخ شکل کې :کرښه د مثبت ميل سره $\tan\alpha > 0 \Leftrightarrow a_1 > 0$	
که $0 < \alpha < 90^0$ يا $0 < a_1 < \infty$ وي ، دا په دې مانا چې $\alpha > 0 \vee a_1 > 0$ همداسې($\Leftrightarrow$)، نو کرښه جګيږي. دا دا معنی لري، چې د جګېدونکي x سره د تابع f(x) ارزښت هم جګيږي. په مخامخ شکل کې: کرښه د منفي جګېدنې سره: $\tan\alpha < 0$ همداسې($\Leftrightarrow$ $a_1 < 0$)	 داپورته داسې دی: $\tan\alpha < 0$ همداسې $a_1 < 0$

که $90^0 < \alpha < 180^0$ يا $-\infty < a_1 < 0$ وي، دا په دې معنی، چې $\alpha < 0$ همداسې $a_1 < 0$ ، نو کرښه ټيټيږي يا لويږي. دا په دې معنی، چې د جګېدونکي x سره د تابع ارزښت f(x) کوچنی کيږي.

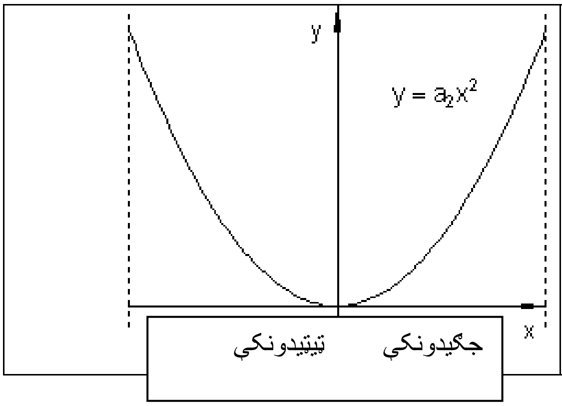
په پورته دواړو حالتونو کې د همغږيزې تابع (يا د جګ-ټيټېدونکي تابع) غږيږو او له يوه مونوتون جګېدونکي تابع څخه، که $a_1 > 0$ وي. له يوې مونوتون ټيټيدونکي تابع څخه ، که $a_1 < 0$ وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا د مونوتوني کلمه په هغو توابعو هم کارول کیږي، چې د منحنیو تلنه راکوي، که فکر وشي، چې په ټولیزه توګه د منحنی د ګراف په هر ټکي تانجنت ابنول کېدی شي.

له دې امله د تابع $f(x) = a_2x^2$ لپاره باور لري:

په اینتروال $I_1 = \{x \mid -\infty < x < 0\}_{\mathbb{R}}$ کې تابع f(x) مونوتون تیتیږي. او په اینتروال $I_2 = \{x \mid 0 < x < \infty\}_{\mathbb{R}}$ کې f(x) مونوتون جګیږي.



لکه د کرښې په ګراف کې، چې جګېدنه ثابته وه. اوس دا حالت مخ ته نه لرو، یعنې جګېدنه ثابته نه ده، بلکې دا د منحني له یوه ټکې څخه بل ټکي ته تغیر خوري.

د تانجنت جګېدنه >0 ← منحني مونوتون جګیږي

د تانجنت جګېدنه < 0 ← منخني مونوتون تیتیږي

د تانجنت جګېدنه، که صفر وي، ثابت پاتې کیږي.

روښانه ده چې دf(x) تابع لومړی مشتق f'(x) د تابع میل (جګوالی) ورکوي. ددې سره د مونوتونی قضیه په لاندې ډول فرمولوو .

قضیه: دf(x) تابع دې په اینتروال Iکې مشتقوړ وي.

۱ که د f(x) تابع په اینتروال Iکې مونوتون جګېدونکې وي، نو باور لري: $f'(x) \geq 0$ د ټولو $x \in I$لپاره

که f(x) په اینتروال I کې مونوتون تیتیدونکې وي، نو باور لري: $f'(x) \leq 0$ د ټولو $x \in I$ له پاره.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۲ . که $f'(x) \geq 0$ وي، دټولو $x \in I$ لپاره ، نو $f(x)$ په اینتروال I کې مونوتون جګیدونکي ده.

که $f'(x) \leq 0$ وي د ټولو $x \in I$ لپاره ، نو $f(x)$ په ایترولI کې مونوتون ټیټېدونکي ده.

۳ که $f'(x) > 0$ وي ، د ټولو $x \in I$ لپاره، نو$f(x)$ په اینتروال Iکې په کلکه مونوتون جګیدونکي ده

که $f'(x) < 0$ وي د ټولو $x \in I$ لپاره،نو $f(x)$ په اینتروال Iکې په کلکه مونوتون ټیټیدونې ده.

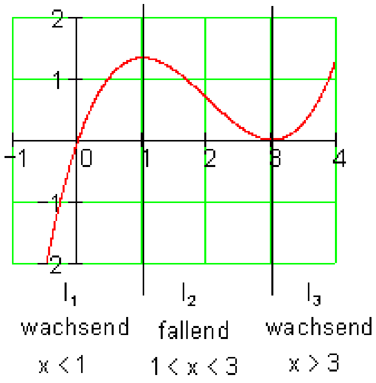
د مونوتوني پيژند ورشو (تعریفساحو) ټاکنه:

بلګه: د تابع ګراف څخه زيات وخت کېدی شي د مونوتوني ساحې لږ یا زیات ټیک و لوستل شي.

لاندې ګراف لرو:

مخامخ له بنې – وکیڼ لور ته:جګیدونکي، ټیټیدونکي چګیدونکي

$$f(x) := \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$$



د $I_1 = \{-\infty < x < 1\}_{\mathbb{R}}$ لپاره f(x) په کلکه مونوتون جګېدونکی دی.

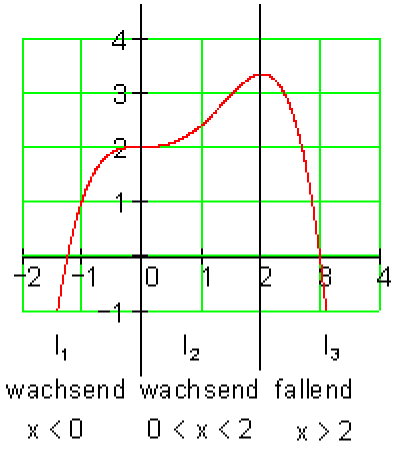
د $I_2 = \{1 < x < 3\}_{\mathbb{R}}$ له پاره f(x) مونوتون ټیټېدونکې ده.

د $I_3 = \{3 < x < \infty\}_{\mathbb{R}}$ لپاره f(x) په کلکه مونوتون جګېدونکي ده.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) := \frac{-1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + 2$$



بیلګه:

پورته له بنې – وکيڼ لور ته: جګیدونکي، جګیدونکي، ټیټیدونکي

له ګراف څخه لاندې مونوتوني ساحې لوستل کیږي.

د $I_1 = \{-\infty < x < 0\}_{\mathbb{R}}$ لپاره f(x) په کلکه مونوتونج ګیږدونکي ده.

د $I_2 = \{0 < x < 2\}_{\mathbb{R}}$ له پاره f(x)په کلکه مونوتونجګیږدونکي ده.

د $I_3 = \{2 < x < \infty\}_{\mathbb{R}}$ لپاره f(x) په کلکه مونوتون ټيټيږدونکي ده.

ځای اړونده افراطي ټکي

يادونه: که په ليکنه انحرافي ټکي ګورئ،نو هغه افراپي ټکي دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د f(x) لپاره د x_0 په ځاي کی f' (x) = 0 ولرو نو یو نسبي ټیټ ټکی مخ ته لرو.

که د f(x) لپاره د x_0 په ځاي کی f' (x)=0 او f''(x)>0 ولرو نویو نسبي ټیټ ټکمو مخ ته پروت دی.

که ددې برعکس ولرو: f ' (x) = 0 او f '' (x) < 0 ، نو یو نسبي ماکسیموم مو مخ ته پروت دی.

د بحراني ټکي(ټیټ ټکي یا جگ ټکي) لپاره خوي ټاکونکی دی، چی f ' (x) = 0 وي، او د f '' (x) مخ نښه (+ ، -)، په دې پریکړه کوي چی ایا یو ټیټ ټکی(اصغریټکی)او که جگ ټکی(اعظمي ټکی) مو مخ ته پروت دی.

د پورته اړیکو لپاره لاندې یادوني ضرور دي:

۱ – دا اړیکي یواځي د x_0 لپاره ارزښت لري چی د تعریف سټ په دننه کی پروت وي او هلته د y = f (x) تابع پوره ځو ځلې مشتقوړ وي، د غاړو(څنډو) او د هغوځایونو له پاره چی هلته f (x) تابع کم یا هیڅ مشتقوړ نه وي، ځانگړو څیړنو ته اړتیا ده.

۲ - شرایط چی f ' (x) = 0 وي (مشتقوړ تابع) یواځی د یوه انحرافي ارزښت لپاره ضرور دی (ضروري یا اړین شرایط) .

۳– شرایط f ' (x) = 0 او f '' (x) ≠0 د بحراني ټکي لپاره یواځی پوره کیدونکی دی او نه ضروري)

بیلگه :

د $f(x) = x^2 + 2$ تابع گراف وکاږئ او که بحراني ارزښتونه لري، هغه د گراف او د مشتق له لارې وټاکئ.

حل: د بیلگې له گراف څخه روښانه ده، چې تابع د x=0 په ځاي کې خورا ټیټ ټکی(اصغري-) لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

گراف: که گراف دې ګران لوستونکي وباسي

د انحراف ټکي له پاره اړيين شرطونه:

۱ – د تابع لومړي مشتق دی: $f'(x) = 2x$ په دې مساوات کې د تابع مشتق د x_0 له پاره صفرځاي لري، يعنې دلته يو بحراني ټکي پروت دی.

۲ – د تابع دويم مشتق: $f(x)'' = 2$. دا چې $f''(x) > 0$ دی، نو يو نسبي ټيټ ټکي مخ ته لرو.

بیلګه : د $y = x^4$ تابع د $x = x_0 = 0$ لپاره نسبي ټيټ ټکی لري او باوري دي

$$f'(x) = 4x^3 \Rightarrow f'(0) = 0$$

$$f''(x) = 12x^2 \Rightarrow f''(0) = 0$$

ګورو چې دوهم مشتق د صفر څخه نه کوچنی او نه لوي دی.

د پورته شننې څخه لاندې پيژند ته راځو:

پيژند : د $x = x_0$ په چاپيريال کې د $y = f(x)$ تعریف شوې تابع یونسبي جګټکی په همدې ډل نسبي ټيټ ټکی لري، که ټولو x_0 ته پوره نږدې x لپاره باور ولري:

$$f(x) > f(x_0) \quad \text{په همدې ډول} \quad f(x) \le f(x_0)$$

جمله : (د یوه نسبي افراطي ټکي لپاره ضروري شرايط):

که په x_0 کی مشتقوړ تابع $y = f(x)$ انحرافي لري نو لرو: $f'(x) = 0$

دا جمله موږ ته وايي (يادونه ۲دې مقايسه شي): چيرته چې $f'(x) \neq$ وي نو هلته اکستریموم نه شته، د اکستریموم لپاره يواځې د x_0 ځاي په پوښتنه کی راځي، چې د هغي لپاره لرو $f'(x) = 0$ ، خو حمتي نه ده چې $y = f(x)$ دې يواکستريموم و لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله : (د یوه افراطي ټکي لپاره پوره کیدونکی شرایط):

که په $x = x_0$ کی دوه واره مشتقوړ تابع $y = f(x)$ لپاره ولرو:

$$f'(x) = 0 \quad , \quad f''(x) \neq 0$$

نو تابع $y = f(x)$ هلته یو افراطي ټکی لري. خورا ټیټ ټکی مخ ته لرو، که وي:

$$f''(x) < 0$$

خورا جگ ټکی مخ ته پروت دی ، که وي:

$$f''(x) > 0$$

له ښی لور انحنا یا کوړوالی اوله کيڼ لور انحنا یا کوړوالی (مقعر او محدب)

که په یوه اينټروال کې د مشتقوړ تابع f دويم مشتق $f''>0$ وي، نو په دې اينټروال کې گراف کيڼ کوړ شوی یا کینه انحنا لري او که دویم مشتق $f'' < 0$ وي، نو د تابع گراف ښی کوړ یا ښی انحنا لري.

دوه څيرې (د لاندې بېلګې څيره و باسی ؟-)

بیلګه:

ټول ګونګتابع (راشنل تابع) f د $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 1$ سره په کومه ورشو(ساحه)کې کيڼکوړدی(کینه انحنا لري(ننوتی یا مقعر دی)) او په کومه ورشوکې ښی کوړ دی(ښی انحنا لري(محدب یا وتلی دی)؟

دويم مشتق: (لومړی مشتق(

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 4$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f''(x)= 6x-4$

د $6x-4>0 \Rightarrow x > 2/3$ لپاره کینې ګوړوال (کینه انحنا (ننوتی یامقعر)

د $6x-4<0 \Rightarrow x < 2/3$ لپاره ښی کوړوالی(ښی انحنا(وتلی یامحدب))

بیلګه: د مات راشنل تابع $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$ ګراف یو های پاررابول دی. د های پارابول کومه څانګه کینه کږه ده یا کینه انحنا لري(مقعر)، او کومه یوه یې ښی کوړوالی - یا ښی انحنا لري(محدب)؟

دویم مشتق : $f'(x)=\dfrac{1}{(x+2)^2}\ ;\ f''(x)=\dfrac{2}{(x+2)^3}$

صورت تل مثبت دی.

د $x < -2$ لپاره د مخرج او همداسې د کسر ارزښت منفي دی. د های بارابول څانګه ښی کوړوالی یا انحنا لري (وتلی یا مخدب).

د لپاره $x > -2$ مخرج او همداسې ټول کسر(مات) مثبت دی.

های بارابول کینکوړ دی یا کینه انحنا لري(ننوتی یامقعر).

بیلګه : د دواړو توابعو $f(x)=\sqrt{x}$ او $g(x)=\sqrt{x^3}$ کوړوالی(انحنا) دې یو د بل سره پرتله شي.

دواړه توابع د لپاره تعریف دي.

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad g'(x)=\frac{\sqrt{x^3}}{2}$$

$$f''(x)=-\frac{1}{4\sqrt{x^3}} \qquad g''=\frac{3}{4\sqrt{x}}$$

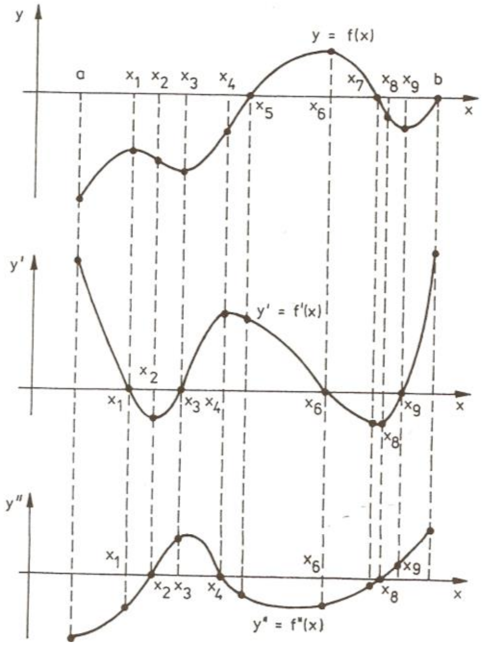
(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم مشتقونه د $x \in R^+$ پاره تعريف دي.

په دې ساحه کې $f''(x) > 0$ دی. اړونده ګراف بنی کوږوالی يا انحنا لري، دا يو شي لور ته واز پارابول بنايي.

په همدې ساحه کې $f''(x) < 0$ دی. اړونده ګراف کيڼ کوږ دی يا کينه انحنا لري. اړونده ګراف يو کيڼ کوږوالی يا کينه انحنا لري، دا پورته لور ته واز پارابول دی.

د انعطاف ټکي(اوړونټکي)



يادونه: ولې اوړنټکی؟

وبه ګورو، چې په دې ټکي کې ګراف خپله لور اړوي، نو ......   موږ له
پورته څيري اټکل کولی شو چی : که د x_0ځاي کی دا لاندې ولرو$f''(x) = 0$ او $f'''(\ )$
$(x) > 0$، نو يو بنی-کیڼ- انعطاف ټکی (اوړونټکی)

(c) ketabton.com: The Digital Library

مو مخ ته پروت دی.

برعکس(په ځنې):

که وي: $f''(x) = 0$ او $f'''(x) < 0$ نو یو کینې - ښی- د انعطاف ټکی مو مخ ته پروت دی.

د ا نعطافټکي لپاره خوی ټاکونکی دی، چی $f''(x) = 0$ وي ، داچی دا ښی -کینې - او که کینې- ښی – انعطاف ټکی(اوړونټکي) دی، د $f''(x)$ مخ نښه یی ټاکي.

۴ - شرایط $f''(x) = 0$ د انعطاف ټکي لپاره یواځی اړیین یاضروري دي.

د $y = x^4$ لپاره $f''(0) = 0$ دی، مګر اوړونټکی مو مخ ته نه دی پروت.

۵ – شرایط $f''(x_0) = 0$ او $f'''(x_0) \neq 0$ د انعطافټکي لپاره پوره کیدونکي دي.

ګورو چی $y = f(x) = x^5$ تابع د $x = x_0 = 0$ ځاي کی یو انعطافټکی لري او باوري دي:

$$f'(x) = 5x^4 \quad , \quad f'(0) = 0$$

$$f''(x) = 20x^3 \quad , f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = 60x^2 \quad , f'''(x) = 0$$

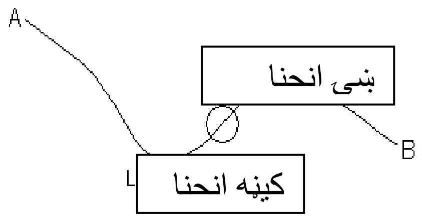
ګورو چي دریم مشتق $f'''(x)$ نه له صفرڅخه کوچنی او نه لوي دی.

ترمخ راوړني او د کلمې روښانه ونې:

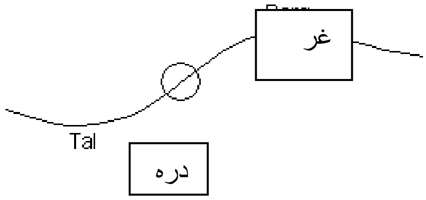
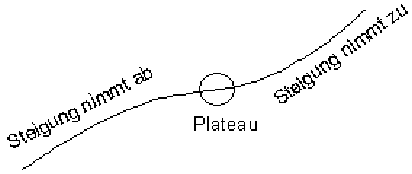
د دې کلمې د لا نورې روښانه کولو لپاره په لاندې توګه مخ ته ځو:

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بایسکل ځغاستي چي له A څخه ځغلي د منحنی څخه تېرېږي او B ته رسېږي. د همغه وخت د بایسکل ځغاستي د انډل حالت د ځغاستي په وخت کي په پام کي ولرئ. د کیني منحني(د کین لوري د انډل حالت) څخه وروسته د ښی لوري منحني کي ځغلي.	

د کیني- او ښی منحني(کرږي) ترمنځ باید د بایسکل انډل سیده ولاړ وي(عمود وي)، چي دا د انډل بدلون دی له کیني لوري و ښی لوري ته. دا د کیني او ښی منحني ترمنځ اوړیدنه یاد انعطاف ټکی بلل کیږي.

تاسو له بایسکل سره په یوه غونډی ځغلی. وروسته له هغي، چي له تالي څخه تېرېږي، نو لار په جګېدو پیل کوي. په لومړي سر کي نرم او بیا په نیغه جګیږي، بیا په دې پسي جګوالی بېرته کمیږي، چي پاس د غونډی په څوکه صفر ارزښت غوره کړي. یو چېرته په غونډیپورته صفرارزښت ته رسیږي. یو چېرته په لار جګېدنه خورا لویه وه. هلته د انعطاف ټکی پروت دی.	
د بایکل ځغلوونکي بل حالت، چي له څنګ دیاګرام څخه یي رانیسو: په غره د بایسکل ځغاستمیل یاجګېدنه لومړی کمیږي، چي له سره بېرته جګه شي. ددي ترمنځ یوه ساحه شته، د کم جګوالي سره (یوه نسبتاًهواره). دي نسبتاً هوار ځای کي د ټوټه کربني جګېدنه نسبت بل ځای ته کمه ده. هلته اوړونټکی(د انعطاف ټکی) پروت دی.	 له کین و ښي لور ته: جګیدنه کمیږي، هواره ، جګیدنه زیاتیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوهیږو، چې د یوې تابع لومړی مشتق د تابع د جګوالی تابع دی، چې له ګراف څخه یې جګوالی لوستل کیږي.دا چې د انعطاف ټکی خورا لوي یا خورا کوچنی ټکی کېدی شي، داسې پیدا کیږي، چې د مشتق تابع انخرافي ارزښتونه پیدا کړو.

دا تلنلار همهغسي ده، لکه د پیل تابع **f(x)** لپاره مو ټاکلې. اوس د مشتق تابع **f'(x)** باندې دا کار یا عمل اجرا کیږي.

مخکی له دې چی یو لړ جملی د بحراني(جګ – ټیټ -) ارزښتونو او د انعطاف ټکو په هکله څیرو، غواړو چی دا کلیمی تعریف کړو .

دواړه کلمې به د نسبې بحراني ټکي په بڼه کی سره را غونډې شي.

پیژند ۲۰ . ۶ : په یوه چاپیریال x = x0 کی مشتقوړ تابع y = f (x) یو کیڼ- بنی- انعطافټکی په همدې ډول بنی- کیڼ- انعطافټکی لري، که د هغه مشتق هلته یو نسبي جګټکی(عظمي نقطه) په همدې توګه یو نسبي ټیټ ټکی ولري.

جمله ۲۰ . ۱۱ : (د یوه نسبي افراطي ټکي لپاره ضروري شرایط):
که په x0 کی مشتقوړ تابع y = f (x) اکستریموم لري نو لرو: f ' (x) = 0

دا جمله موږ ته وایي (یادونه ۲دې پرتله شي): چیرته چی ≠ (f ' (x وي نو هلته بحراني ټکی نه شته، د بحراني ټکولپاره یواځې د x0 ځاي په پوښتنه کی راځي، چې د هغي لپاره0 = f ' (x) وي ، خو حمتي نه ده چی y = f (x)دې یوبحراني ټکی ولري.

د پورته جملی استعمال په y' = f' (x) څخه لاندې جمله لاس ته راځي:

جمله ۲ . ۱۲ : (د اوړونټکي(انعطاف ټکي) لپاره اړیین شرایط):
که په x = x0 کی دوه واره مشتق وړ تابع y = f (x) هلته یو انعطاف ټکی ولري، نو لاس ته ترې راځي: f '' (x) = 0

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته هم باور لري (یادونه ۴ دې پرتله شي): چیرته چې $f''(x)\neq 0$ وي ، نو هلته نه شي کیدی چي اوړونتکي موجود وي. مګرچیرته چی $f''(x) = 0$ وي ، اوړونتکی شته کېدلی شي، خو اړیین یا ضرور نه ده چی هلته انعطاف ټکی شته وي.

له پورته ښخه لاندې جمله لاس ته راځي.

جمله ۲۰ ، ۱۳:(د اوړونتکي یا انعطافټکي لپاره پوره کیدونکی شرطونه)که په x0 =کی دریوار مشتقوړ تابع $y = f(x)$ لپاره وي:

$$f''(x) = 0, \quad \text{او} \quad f'''(x)\neq 0$$

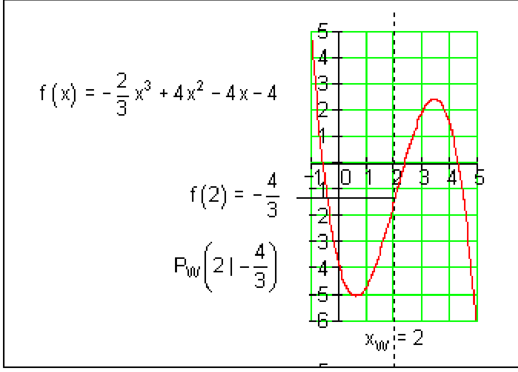
نو هلته یو انعطاف ټکی مخ ته لرو. که $f'''(x) < 0$ وي، نو یو کیڼ- ښي – انعطاف ټکي مخ ته پروت دی او د $f'''(x) > 0$ لپاره یو ښی-کیڼ-انعطاف ټکی مخ ته لرو.

شننیزه یا تحلیلي بیلګه:

یادونه: موږ د x_E سره افراطي ټکی په نښنه کوو او د x_W سره د انعطاف – یا اوړون ټکی په نښنه کوو.

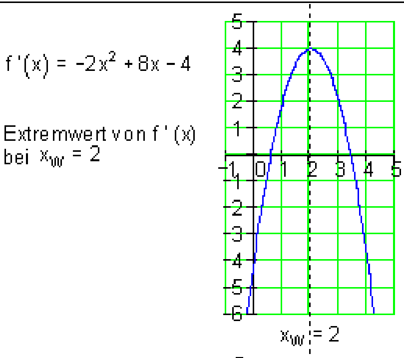
1- تابع مساوات د مشتق سره

$$f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 4x^2 - 4x - 4$$
$$f'(x) = -2x^2 + 8x - 4$$
$$f''(x) = -4x + 8$$
$$f'''(x) = -4$$



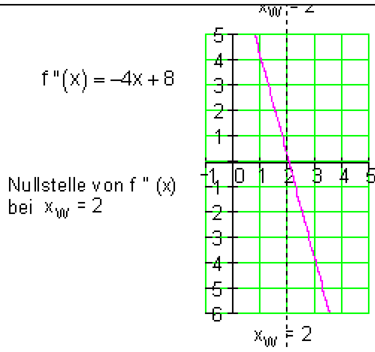
(c) ketabton.com: The Digital Library

۲- دويم مشتق صفر کړئ.

$f''(x)=0 \Leftrightarrow -4x+8=0$ $\Rightarrow x_W = 2$	 د الماني پښو: د(x)‘f ضفرځای په xw=2 کې

3- د انعطاف ټکي له مخې بښوونه، چې ايا د انعطاف ټکی شته دی؟

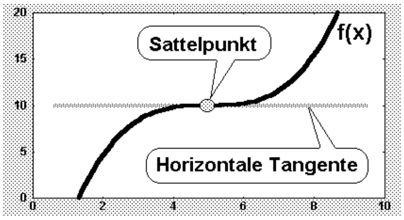
$f'''(x_W) = f'''(2) = -4$ 4- په $f(x)$ د انعطاف ځایونه ځای په ځای کولو له لارې د انعطاف ټکي ټاکنه	

$f(x_W) = f(2) =$ $-\frac{2}{3}(2)^3 + 4(2)^2 - 4(2) - 4 = -\frac{4}{3}$ $\Rightarrow P_{W\left(2\mid-\frac{4}{3}\right)}$ $P_W(21-1.33)$	 د الماني پښو: د(x)‘‘f ضفرځای په x_W=2 کې

(c) ketabton.com: The Digital Library

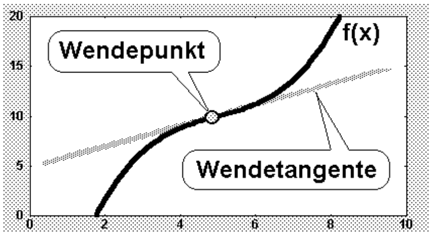
پام: په انعطاف ځای x_Wکې د $f(x)$ گراف کږېږي.

په یوه په خوښه ټکي x_0کې د کږوني(انحنا) لپاره باور لري:
$f''(x)>0$ په دې معني دی،چې $f(x)$ کيڼ لور ته کږېږي(انحنا لري) دی.
$f''(x)<0$ په دې معنی، چې تابع $f(x)$ گراف ښی لور ته کږېږي(انحنا کوي)
یو زینټکی Der Sattelpunkt څه شی دی؟

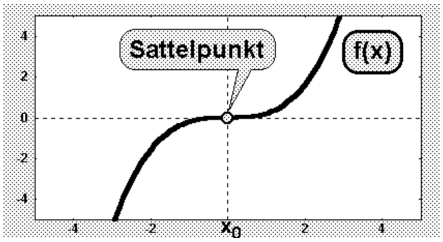


پیژند: د زینټکي(کله کله برنډې ټکی هم بلل کیږي)لاندې د انعطافټکي ځانگړی حالت پوهیږو، داسې انعطافټکی چې تانجنت یې افقي (پروت)

وي:



د پرتلې لپاره دې بیا یو ،،عادي،، انعطافټکی ورکړ شوی وي.دا یو مائل(نه افقي) تانجنت لري

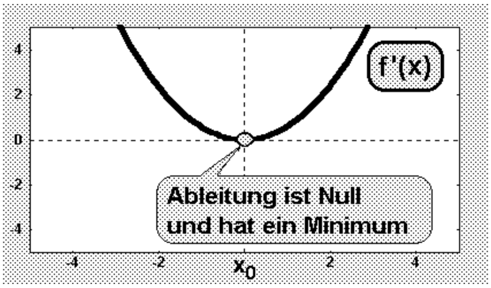


توضیح: اوس فکر کوو، چې یو زینټکی څنگه د شمېرلو له مخې پیژندل کېدی شي. په دې برخه کې په ځانگړي توگه دا مخ ته لرو، چې یو زینټکی له ښي ـــو کینه انحنا و شمېرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره د $f(x)$ تابع جگوالی په پام کې نیسو، یعنې لومړی مشتق: د زینتکي د مخه د $f(x)$ جگوالي کميږي، په زينتکي کې صفر ارزښت لري، او له زينتکي څخه وروسته بېرته جگيږي.

يو زينتکی (د ښي – کيڼ – بدلون سره) په دې پېژندل کيږي، چې لومړی مشتق $f'(x)$ يې هلته صفر شي او سربېره پر دې هلته يو نسبي ټيټکی (مينيموم) ولري.



د لومړي مشتق $f'(x)$ شکل داسې برېښي:

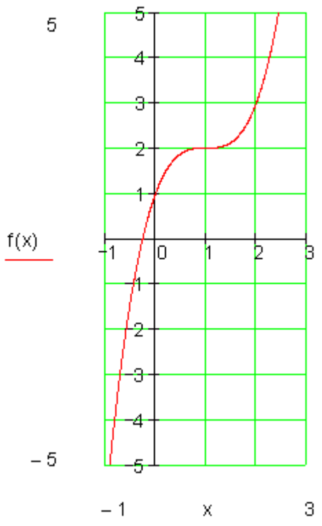
لومړی شرط دی، چې مشتق يعنې $f'(x)$ په زينتکي کې د صفر سره مساوي دی.

زينتکی(ښی-کيڼ-بدلون) $f'(x_0)=0$ دوم شرط دی، چې مشتق $f'(x)$ هلته يو نسبي مينيموم لري.

دا په دې معنادی، چې بل جگ مشتق $f''(x)$ بايد په صفر مساوي وي او مخنښه له منفي و مثبت ته بدلېږي.
له دې سره سم د زينتکي لپاره پوره کېدونکي قضيه ومیندل شوه:
د زينتکي لپاره جمله(خوي ټاکنه)(د ښي –کيڼ- انعطاف سره)
الف:د x_0 ځا کې لومړی مشتق $f'(x)$ صفر دی: $f'(x_0)=0$
ب : د x_0 په ځا ي کې لومړی مشتق $f'(x_0)$ يو مينيموم لري، دا په دې معنا، چې دوم مشتق صفر دی، يعنې $f''(x)=0$ دوم مشتق مخنخښه له منفي څخه و مثبت ته بدلوي.
بل بديل(د گرانو دوستانو وړانديز)
؟
\.
،

(c) ketabton.com: The Digital Library

زينتکی **Der Sattelpunkt**



د انعطاف ټکي يو ځانګړی حالت زينتکی دی. دا د انعطاف ټکی دی د صفر جګيدني سره.که د کيڼ لور ورنږدې شو فکر کيږي، چې، نسبي جګټکی مو مخ ته پروت دی
که ښوک د ښي لور ور نږدې شي فکر کوي، چې يو نسبي ټيټټکی مخ ته لرو.
اوس دا حالت د رياضياتو له لورې ځېږو:
مشتق:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$$

$$f''(x) = 6x - 6$$

$$f'''(x) = 6$$

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 - 6x + 3 = 0 \;\Rightarrow\; x_{1/2} = 1$$

$f''(1) = 6 \cdot 1 - 6 = 0$ $f'''(1) = 6$	1=> د $x = 1$ سره د انعطاف ټکی	1=> د $x = 1$ سره زينتکی

د انعطاف ټکي لپاره شرايط پوره دي.
دا چې د $f''(1) = 0$ له امله د انعطاف ټکی مخ ته لرو، نو دا د انعطاف ټکی همغه زينتکی دی.
د انعطاف ټکي پيداکونه:
د تابع ګراف باندې انعطاف ټکي کې تانجنت د انعطاف تانجنت بلل کيږي. د انعطاف تانجنت هم
همداسې پيدا کيږي لکه د تابع دګراف په يوه ټکي کې تانجنت، چې تانجنت مساوات ټاکل کيږي.
.
.
،
.
.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f(x)=\frac{1}{4}x^3-3x^2+9x-2$

$f'(x)=\frac{3}{4}x^2-6x+9$

$f''(x)\frac{3}{2}x-6 \qquad f'''(x)=\frac{3}{2}$

$f''(x_W)=0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x-6=0$

د $x_W=4$ او $f'''(x_W)=\frac{3}{2}\neq 0$ د

تانجنت $f(x_W)=f(4)=2 \Rightarrow \underline{P_W(4|2)}$

مساوات لپاره باور لري.

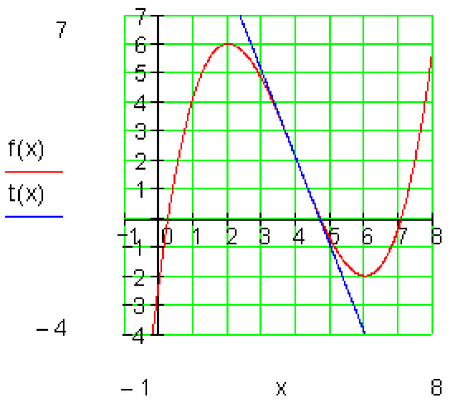
د x_W لپاره د تانجنت مساوات

$t(x)=f'(x_W)(x-x_W)+f(x_W)$

د $f'(x_W)=f'(4)=-3$

سره په لاندې ډول

دي $t(x)=-x(x+4)+2=\underline{\underline{-3x+4}}$



د انعطاف تانجنت د $f(x)$ گراف د انعطاف په ټكي $P_W(4,2)$ كې غوڅوي او دا لاندې مساوات لري:

$t(x)=-3x+14$

د انعطاف- یا وږون ټكي تانجنت پیداكونه:

په انعطاف ټكي كې د تابع دگراف تانجنت د انعطاف تانجنت بلل كيږي.
د انعطاف تانجنت مساوات همداسې ټاكل كيږي، لكه د تانجنت مساوات د گراف په خوښه ټكي باندې.

داسي حالتونه، لكه $f'(x)=f''(x)=f'''(x)=0$ دلته تر څيرنی لاندې نه نیول كيږي.

د كړي یا منحني بحث (Kurven Diskusion) :

يوه تابع $y=x^3+x^2-3$ لرو. د دې تابع شكل رسم كړئ او بیا په دې رسم كې د تابع انحرافي ټكي او د انعطاف ټكي په نخښه كړئ، ربښانه كړئ، چې انحنا چيرته له كينې لور و ښی لورې ته او له ښی لورې و كينې لورې ته ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت:

- تناظر تعریف کړئ.
- لاندې توابع رسم کړئ، جگ ټکي، ټیټ ټکي او د انعطاف ټکي یې پیدا اکړئ.
- $x^3 + x$
- $3x^3 + x + 2$

ددې لپاره چې یوه تابع رسم کړای شو، ساده ده که د تابع غوره ټکی و پېژنو. موږ دې بحث ته د منحني بحث وایو. موږ په دا ډول خبرو اترو کې باید سیستماتیک مخ ته لاړ شو.

په لاندې ډول تلنه ګټوره بلل شوې.

دتعریف ساحه: د تابع ځېړنه یواځې په همدې ورشو کې موخه وره ده.

تناظر **Symetry** : باید وټاکل شي، چې تابع محوري متناظر او که مرکزي متناظر ده.

د محوري تناظر لپاره باور لري: $f(-x) = f(x)$

د مرکزي تناظر لپاره باور لري. $f(-x) = -f(x)$

په پورته دواړو حالتونو کې دې فقط $x \geq 0$ وځېړل شي.

یه ټولیزه توګه که ټول ریل تابع په پام کې ونیسو، نو ګورو چې که توان(د پولینوم درجه)یې جفت(جوړه) وي، نو پولینوم محوري متناظر دی او که توان(د پولینوم درجه) طاق(ناجوړه) وي، نو پولینوم مرکزي متناظر دی.

بحراني ټکي**Extrema** : د نسبي بحراني ټکو ټاکل(جګټکی، ټیټټکی)

د جګټکی یا نسبي جګ ټکي پوره کېدونکي شرطونه:

$$f'(x_1) = 0 \ \wedge \ f''(x_1) < 0$$

انعطافټکی یا اوړونټکی Inflection Point :

د انعطافټکواو همداسې زینټکي ټاکلو له پاره پوره کېدونکي شرطونه:

$$f''(x_W) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x_W) \neq 0$$

زینټکی انعطافټکی دی د افقي تانجنت سره.

د تابع تقاطع د x او y محورونوسره(د محورونوِغوځټکی):

د $x-$ محور سره ِغوځټکی: $P_{xi}(x_i \,|\, 0) \;\Rightarrow\; (x) = 0$

د y محور سره غوځټکی(صفرځای) ټاکي $f(0) \;\Rightarrow\; P_y(0 \,|\, y_s)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دگراف انځورونه: د ټولو تراوسه راټولو شوو معلوماتو سره کړی شو، چې گراف انځور کړو. ددې لپاره لومړی یو ارزښتجدول انځورېږي. دا راته په گوته کوي، چې نور کوم ارزښتونه شمېرل کېږي.

د انحنا حالت او یوغړیزوالی:
د انعطاف په ټکي X_w کې د $f(x)$ گراف تغیر خوري.
په خوښه یوه ټکي x_0 کې د انحنا لپاره باور لري:
$f''(x_0)>0$ په دې معنا، چې د $f(x)$ تابع گراف کینه انحنا لري (کونوکس)
$f''(x_0)<0$ په دې معنا، چې د $f(x)$ تابع گراف ښی انحنا لري (کونکاو)
یوغړیزوالی

1- که د ټولو $x\in I$ لپاره وي $f'(x)\geq 0$ ، نو $f(x)$ په انتروال I کې مونوتون جگیږي. که د ټولو $x\in I$ لپاره $f'(x)\leq 0$ وي, نو $f(x)$ په انتروال I کې مونوتون ټیټېدونکی دی.
2- که د ټولو $x\in I$لپاره$f'(x)>0$ وي، نو $f(x)$ تابع په انتروالI کې کره غښتلې مونوتون جگېدونکی ده.
که د ټولو $x\in I$ لپاره$f'(x)<0$ وي، نو $f(x)$ تابع په انتروال I کې غښتلې مونوتون جگېدونکی ده.
د پېژند ورشو ژی ټکي:
د تابع ژی ټکي کتنه په پېژند ورشوکې. که پېژند ورشو نامحدوده وي، نو لیمیټ $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ او $\lim_{x\to\infty} f(x)$ ټاکو.

بیلگه :
د $f(x)=x^3-6x^2+9x-2$ تابع رسم کړئ.
.
.
.
.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مشتق کونه:

$$y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$$
$$y' = f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$
$$y'' = f''(x) = 6x - 12$$
$$y''' = f'''(x) = 6 \qquad D = IR$$

نسبي بحراني ټكي

$$P_{min}(3|-2) \qquad P_{max}(1|2)$$

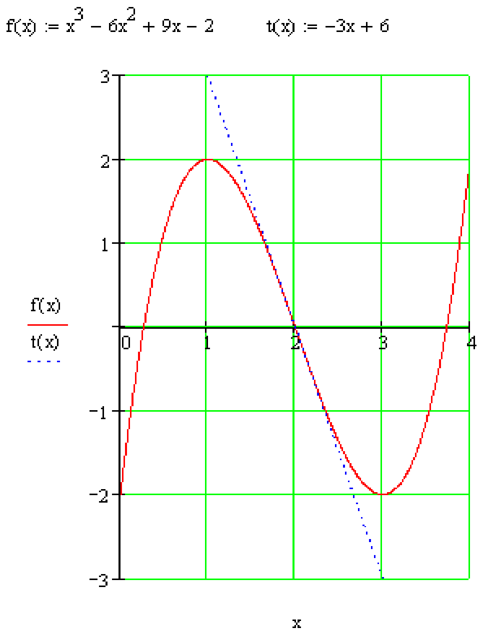
انعطاف ټکی او تانجنت

$$P_W(2|0) \quad y = f_t(x) = -3x + 6$$

صفرځایونه:

$$P_{x1}(2|0) \quad P_{x2}(3.7|0) \quad P_{x3}(0.3|0)$$

د y– محور سره غوڅټکی(دقاطع): $P_y(0|-2)$



یوغږیزوالی(مونوتوني یاجګ - ټیتوالی)

په $I_1 = \{x \mid -\infty < x \le 1\}_{\mathbb{R}}$

کې یوغږیز جګیږي.

په $I_3 = \{x \mid 3 \le x < \infty\}_{\mathbb{R}}$

کې یوغږیز جګیږي.

د تابع حالت په $x \to -\infty$ او $x \to \infty$ کې

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right) = \infty$$

سیومتري: نه لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کږوالي یا انحنا حالت:

ښی کږوالی یا انحنا(محدب) : $/_4 = \{x \mid -\infty < x < 2\}_{IR}$

کيڼ کږوالی یا انحنا (مقعر) : $/_5 = \{x \mid 2 < x < \infty\}_{IR}$

د افراطي د جګ-ټیټ ټکو جملې یعني دا وروستي نومولی جملی اوس باید په یو لړ بیلګو استعمال شي.

دلته دي د ورکړ شوو توابعو، د پیژند سټ (- ډیری)، انعطافټکي ، جګ-ټیټټکي (اکستریموم، قطبونه، اسیومپتوتی وښوول شي او په دې جوړ(ودان) دې د تابع تلنه وکښل شي. دې ښوونو یا څیړنو ته د کږو خبرې اترې یا – مباحثه ویل کیږي، یعنی دلته د کږو (انحنا) د مختلفو ډولونوپه خویونو غږیږو.

موږ خپل تمرکز د افراطي ټکو(اکستریموم) او انعطافټکو(اړونټکو) رامعلومو یا روښانو څیړنوته متوجه کوو او د »انحنا- خبرې اترې) د انحنا(کږې)-چڼون (« د لاندې شیما له لارې مخ ته بیایو:

0 - د چمتووالي لپاره د تابع y = f (x) د دریمي درجی پورې مشتق پیدا کیږي، بیا له ټولو هغو ارزښتونو xiڅخه سټ M جوړیږي (۴ ټکی) چی وروسته باید ځانګړې تر څیړنی لاندې ونیول شي.

په سټ M کی لومړی د غاړو ټکو ابسڅیز یا پراته ارزښتونه نیول کیږي. په دې پورې په ځانګړي ډول بیا تشځایونه (لوکی Lücke نیمګړتیا) او هم قطبونه اړه لري. د M سټ به وروسته په نورو ارزښتونو تکمیل شي.

۱ – د f (x) = 0 صفر ځایونو xi سټ M0 لټول کیږي.

۲ – ټول ځایونه x لټول کیږي، چی هلته y = f (x) د مشتق قابلیت نه لري او په ډیری Mکی یی نیسي. بیا د ټولو ارزښتونو xj ډیری M1 لټول کیږي، چیرته چی f’ (x) = 0 وي، (دا د بحراني ارزښتونو لپاره په پوښتنه کی راځي) ، او د yj = f (xj) تابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

ارزښتونه یی. ورپسې سړی د ټولو $x_j \in M_1$ ارزښتونه د f (xj) د دویم مشتق لپاره لټوي.

۳ - ټول هغه ارزښتونه x چیرته چی y = f (x) دوه ځله مشتقوړ نه دی د M پهسټ کي نیول کیږي.

ورپسې بیا سړی د ټولو xk سټ M2 لټوي، چیرته چی f''(x) = 0 وي (دلته نو د انعطاف ټکي پوښتنه کی راځي) او د هغه د تابع ارزښتونه yk = f (xk) .

بیا د ټول $x_k \in M_2$ لپاره دریم مشتق f '''(x) ازمائیل کیږي. د ټولو $x_k \in M_2$ ارزښتونو ډیری M_{21} د کومو لپاره چی f'''(xk) < 0 وي نو افقي(پراته) محور کیڼ - ښی-اانعطافتکی جوړوي. د ټولو $x_k \in M_2$ ارزښتونو ډیری ، د کومو لپاره چی وي f'''(xk) > 0نو د پراته- یا افقي محور د ښي - کیڼ - انعطافتکي جوړوي. د ټولو $x_k \in M_2$ ډیری د کومو لپاره چی f'''(xk) = 0وي او یا دریم رابیلیدونکی نه وي موجود نو په ډیری M کی نیول کیږي.

۴ – د تیرو درسونو تعریفونو او جملو سره سم په افراطي ټکو او انعطافتکي یا ا وړونټکي باندې د ډیري M ځیرنه د اصلي حالتونو لپاره اوس یو څو بیلګی راوړو

بیلګه : بلواك y = f (x) = x³- 6x² + 9x هرچیرته پوره زیات مشتقوړ دی.

0 - f (x) = 3x² - 12 x + 9 , f (x) = 6x - 12, f (x) = 6

په سټ M کي یواځي $-\infty, \infty$ نیول کیږي د حد –یا پولي تیریدنو په موخه یا هدف $M = \{-\infty, \infty\}$:

1 - f (x) = x³ - 6x² +9x = x (x² - 6x + 9) = 0

M0 = {x1 , x2 } = { 0 , 3 }.

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

2 - $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0$

$M1 = \{x3, x4\} = \{1, 3\}$, $y3 = 4$, $y4 = 0$

$f''(x3) = f(1) = -6 < 0$, Minimum (مینیموم

$f''(x4) = f(3) = 6 > 0$, maximum (ماکسیموم)

$M11 = \{1\}$, $M12 = \{3\}$.

3 - $f''(x) = 6x - 12 = 0$,

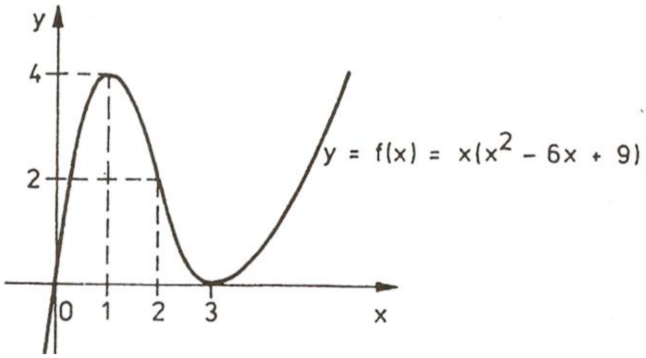
$M2 = \{x5\} = \{2\}$, $y5 = 2$

$f'''(x5) = f'''(2) = 6 > 0$ (

$M22 = \{2\}$. بنی - کیڼ اوړیدونتکی

4 $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$

په دي ډول د منحني تګلار په لاندې ښېره کې لاس ته راځي



بیلګه : تابع $f(x) = x^4 - 4x^3$ پوره په خوښه مشتقوړده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

0 - $f'(x) = 4x^3 - 12x^2$, $f''(x) = 12x^2 - 24x$, $f'''(x) = 24x - 24$

په ست M يواځي $-\infty,\infty$ نيول کيږي: $M = \{-\infty,\infty\}$

1 - $f(x) = x^4 - 4x^3 = x^3(x - 4) = 0$

$M_0 = \{x_1, x_2\} = \{0, 4\}$.

2 - $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3) = 0$

$M_1 = \{x_3\} = \{3\}$, $y_3 = -27$

دا چی د x = 0 لپاره دويم مشتق f '' (0) = 0 دی، دا ارزښت د ۳ - لاندې ځيړل کيږي

$f''(x_3) = f''(3) = 36 > 0$, Minimum, $M_{12} = \{3\}$.

3 - $f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2) = 0$

$M_2 = \{x_4 - x_5\} = \{0, 2\}$, $y_4 = 0$, $y_5 = -16$,

$f'''(x_4) = f'''(0) = -24 < 0$

$M_{21} = \{x_4\} = \{0\}$, انعطاتکی(کیږ- بنی -انعطاتکی

$f'''(x_5) = f'''(2) = 24 > 0$,

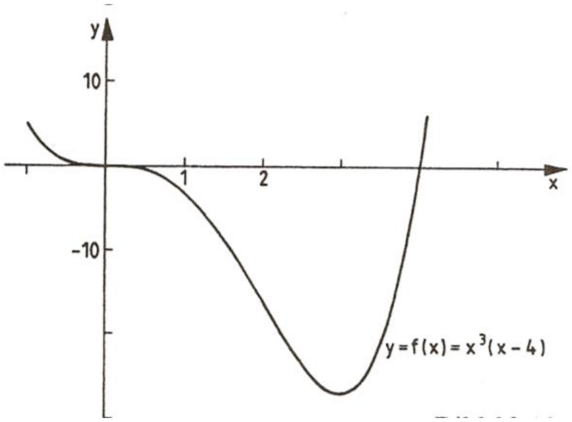
انعطافتکی(بنی - کیږ – انعطافتکی)

$M_{22} = \{x_5\} = 2$.

4 – $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \infty$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لاندې څیرې څخه د کړې تلنشکل لاس ته راځي .



بیلګه : تابع $y = f(x) = e^{x^3}$ پوره مشتقوړ دی:

صفر:

$$f'(x) = 3x^2e^{x^3}$$
$$f''(x) = 3x(3x^3 + 2)e^{x^3}$$
$$f'''(x) = 9x^3e^{x^3}(3x^3 + 2) + 6e^{x^3}(6x^3 + 1),$$

$M = \{\infty, -\infty\}$

۱ – تابع کوم صفرځای نه لري

$$f'(x) = 3x^2e^{x^3} = 0$$ - ۲

یواځي د $x_1 = 0$ لپاره ارزښت لري. مګر داچي f''(0) = 0 دئ ، نو x1 = 0 د ۳ - لاندې څیرل کیږي

۳ –

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f''(x) = 3x(3x^3+2)e^{x^3} = 0,$$
$$M_2 = \{x_2, x_3\} = \left\{0, -\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right\},\ y_2 = 1,\ y_3 = \frac{1}{e^{\frac{2}{3}}}.$$

بنې – کېږ انعطافټکي:

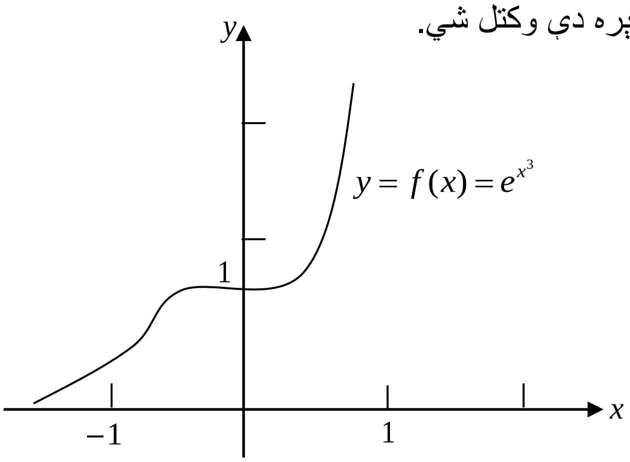
$$f'''(x) = f'''(0) = 6 > 0$$
$$M_{21} = \{x_2\} = \{0\}$$

کېږ- بنی انعطافټکي:

$$f'''(x_3) = f'''\left(-\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right) = 0 + 6\,e^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(-6\frac{2}{3}+1\right) < 0,$$
$$M_{22} = (x_3) = \left\{-\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right\}.$$

۴ - $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{x^3} = 0,\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{x^3} = +\infty.$

لاندې څېره دې وکتل شي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه: تابع $f(x)=x+\sqrt[3]{x^2}$ د ټولو x لپاره تعریف دی، مګر یواځي د = | x
$x \neq 0$لپاره مشتقوړ دی

صفر - د $x \neq 0$ لپاره باور لري یا صدق کوي.

$$f'(x)=1+\frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}},$$

$$f''(x)=-\frac{2}{9\sqrt[3]{x^4}}$$

دلته (f'''(x ته اړتیا نه پېښیږي

د M سټ له oe ± = x او x = 0 څخه جوړ دی

$$M=\{-\infty,0,\infty\}$$

اول: $f(x)=x+\sqrt[3]{x^2}=0$

د $x=-\sqrt[3]{x^2},\ x^3=-x^2,\ x^3+x^2=0$

له امله د حل لپاره په پوښتنه کی x1= 0 , x2 = -1 راځي. دواړه ارزښتونه ، لکه ازماینه روښانه کوي، صفرځایونه دي:

$$M_0=\{x_1,x_2\}=(0,-1)$$

M0 = { x1 , x2 } = {0 , -1}

دویم : $f'(x)=1+\frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}}=0.$

م - د دې مساواتو حلونه له لاندې لاس ته راوړني څخه لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$1+\frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}}=0,\quad \frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}}=-1,\quad \frac{8}{27x}=-1,\quad x=x_3=-\frac{8}{27},$$

$$y_3=f(x_3)=-\frac{8}{27}+\frac{4}{9}=\frac{4}{27}.$$

$$M_1=(-\frac{8}{27}).$$

$$f''\left(-\frac{8}{27}\right)=-\frac{8}{9^3x^4}<0, Maximum$$

$$M_{11}=\left\{-\frac{8}{27}\right\}.$$

۳ -

$$f''(x)=-\frac{2}{9\sqrt[3]{x^4}}=0$$

د کوم له پاره شوونې نه ده.

۴ - $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^3}}\right)=-\infty,\quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.$

هغه ځاي0 = x1 ، دکوم لپاره چی f(x) مشتقوړ نه دی او د کومی لپاره چی f (0) = 0لرو، باید تر اوس تر څیرني لاندې ونیول شي

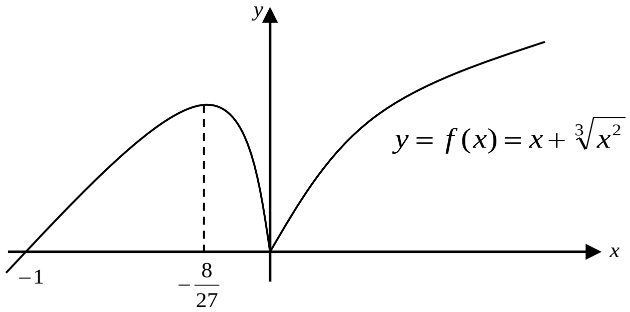
د x > 0 لپاره f(x) > 0 دی.

د -1<x<0 لپاره صدق کوي(د x² > 0 سره ضرب 0 > x³ > -x²) په همدې ډول(⇔ لاس ته راځي او برعس) یعني 0<-x³<x² او له دې امله $0<\sqrt[3]{-x^3}<\sqrt[3]{x^2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

، نو $0<-x<\sqrt[3]{x^2}$ او له دې سره: $f(x)=x+\sqrt[3]{x^2}>0,$

له دې امله د $x1 = 0$ سره یو نسبي ټیټټکی (نقطه اضغري) مخ ته پروت دی. په دې توګه د کږې یاا منحني تلنلار د لاندې ځیرې سره سم روښانه ده.



په لاندې بیلګه کې دې د x ارزښتونه د $f''(x) = f''(x) = 0$ لپاره هم د M په ستب کې ونیول شي.

بیلګه : تابع $y=f(x)=x^4+x$ پوره زیات مشتق وړ دی.

صفر:

$$f'(x)=4x^3+1,$$
$$f''(x)=12x^2,$$
$$f'''(x)=24x,$$
$$f^{(4)}(x)=24,$$
$$f^{(5)}(x)=f^{(6)}(x)=...=0$$

په M کې یواځې د ابسځیزی یعنی دپراته محور د غاړوټکی یعنی $\pm\infty$ نیول کیدي شي:

$$M=\{-\infty,+\infty\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$1 \quad f(x) = x^4 + x = x(x3+1)0, \quad M = (0-1)$$

$$2 \quad f'(x) = 4x + 1 = 0$$

$$M_1 = \{-1/3\sqrt{4}\}, \; y_3 = -3/\; 4\sqrt[3]{4}. = \frac{3}{4\sqrt[3]{4}}$$

$$f''(-1/\sqrt[3]{4}) = 12(-1/\sqrt[3]{4})^2 > 0.Min, \; M_{12} = \{-1/\sqrt[3]{4}\}$$

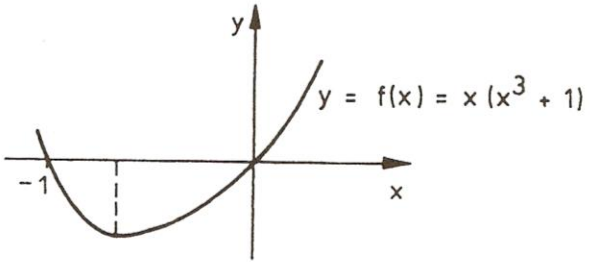
$$3 \quad f''(x) = 12x^2 = 0, \qquad M_2 = \{0\}$$

$$f'''(x) = 0$$

$$4 \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

د x=0 سره هیڅ اوړونټکی مخ ته نه لرو، ځکه چی f'(x) هلته اکستریموم ارزښتونه نه لري، بلکې یو اوړونټکی $y = x^3$ (په ۴ غزول شوی او د ۱ سره و پورته لور ته خوځول شوی یا پورته شوی) .

دا د ځیري ۲۰ ، ۱۳ سره سم د کږې تلنه ورکوي.



ناټاکلي حدونه یا پولې

یا د ناټاکلو افادو(ویینو) حدونه یا پولې

(c) ketabton.com: The Digital Library

که و لرو $x \neq 5$; $\frac{x^2+3x+2}{x+5}$ ، ومو لیدل، چې د داسې توابعو حد پیداکولی شو. دا ډول تابع ته ټاکلې افادې وايي، ځکه چې مشتق يې نيول کېدی شي، یعنې د کمښتونو ویش(د تفاضلونو ویش) حد يې ټاکل کیدی شي.

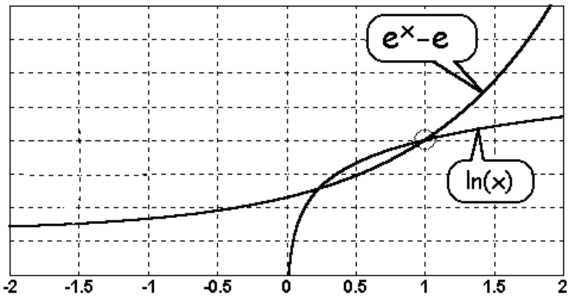
که $\frac{\sin 2x}{5x}$توابع ولرو،نود x=0 لپاره د دې تابع مشتق په ورسره بلده توگه نه شو نیولی، چې له دې امله ناټاکلې افادې ورته وایو.

پیل خیړنه:

د $\frac{0}{0}$ حالت

که پوله ارزښت جوړېدو کې يو کسر پيدا شي، چې صورت او مخرج يې دواړه د صفر په لور لاړ شي، نو دا پوله ارزښت،، ناټاکلې افاده،، بولو.

بیلگه: لاندې د الماني پښتو: صورت يا ماتباندې، مخرج يا ماتلاندې

$\lim_{x\to 1} \frac{e^x - e}{\ln x} = \frac{Zähler \to 0}{Nenner \to 0}$ په خیره کې برخه توابع رسم شوي دي، یعنې د صورت او همداسې د مخرج گرافونه. گورو: د صورت او مخرج د توابعو ارزښتونه دواړه و صفر ته ځي. (که د ۱ په لور لاړشي)	

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیکندود(لیکنډول): د افادې $\dfrac{\text{صورت} \to 0}{\text{مخرج} \to 0}$

لپاره په پوله شمیرنه کې لنډ لیکو:

$$\frac{0}{0}$$

دا په حقیقت کې دقیق نه دی، مګر په ټولېزه توګه داسې معمول دی

روښانه ونه :

ناټاکلې افاده څه شی دی؟

دا پوښتنه رامنځ ته کیږي، چې دا ناټاکلې افاده خپل نوم له کومه ځایه اخلي. دا ،، ناټاکلی،، بلل کیږي، ځکه چې حدیې د عادي طریقو له لارې نه شي شمیرل کیدی. د لوړې ریاضي سره دا کار شمیرنه شونی شوه(دبیلګې په توګه د لو پیتال قانون له مخې، چې پسې به وڅیړل شي).

روښانه ونو ته تشریح:

اوس ښایو، چې د داسې توابعو شمیرل ولې ناشوني دي.

موږ بیا دا د تېر مخ بیلګه رانیسو:

$$\lim_{x\to1}\frac{e^x-e}{\ln x}= \qquad \frac{\to 0}{\to 0}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{e^x-e}{\ln x}=\frac{Zähler\to 0}{\text{مخرج}\;r\to 0}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ – که هڅه وشي، چې حد پیدا کړو، داسې چې د x=1 په کسر کې ځای په ځای کړو، نو افاده 0:0 به ترې لاس ته راشي. دا تعریف نه لري، $u=f(\frac{1}{z})$ ځکه په صفرویش اجازه نه شته.

۲ – ترمخه مو د ناټاکلو افادو د شمیرلو لپاره یعني د ناطق کسري توابعو پوله شمیرنه کې د چل یا د طریقې څخه کار واخسته. اوس دا چل نه شو کارولی، لکه په پورته بیلګه کې.

۳ – د حد اټکل هم ناشونی دی: په لومړي لید کېدی شي په فکر راشو، چې که صورت او مخرج د صفر په لور لاړ شي، نو کسر به د ۱ په لور وخوزیږي:

$$\frac{0.000000001}{0.000000001}=1$$

$$\frac{0.000000001}{0.000000001}=1$$

که صورت او مخرج و صفر ته نږدې شي، دا به فقط دا معني ولري، چې دواړه به د ارزښت له مخې نزدې برابر شي.دا دا معني نه لري، چې د صورت او مخرج نسبت سره مساوي شي:

$$\frac{0.000000100}{0.000000001}=100$$

$$\frac{0.00000000100}{0.00000000100}=100$$

لکه چې ګورو صورت او مخرج د ارزښت له مخې خورا نزدې برابردي(دا په دې معنی، چې دواړه صفر په لور ځي)، مګر د دوی ترمنځ نسبت خورا لوی دی یعني (100) دی،

(c) ketabton.com: The Digital Library

د برنولي او د دې لو، پیتالقاعده Brnoulli and de L,Hospital

د برنولي او د دو لو پیتال قاعدې د $\frac{f(x)}{g(x)}$ ډوله توابعو حد شمېرلو کې ځانګړی رول لوبوي. داحالت په ځانګړي ډول هلته رامنځ ته کيږي، چې مخرج او صورت (ماتباندې او ماتلاندې) همغه صفرځاي x_0ولري. دا ناټاکلی افاده $\frac{0}{0}=\frac{f(x_0)}{g(x_0)}$ موخه وره (هدفمنده) نه ده. کیدی شي چی د ویش حد $\lim\frac{f(x)}{g(x)}$ وڅیړل شي، په کومو کی چی صورت او مخرج د صفر لور ته ځي. ددې لپاره عمومي مناسب د توابعو ترمونه د غوښتلو دي. د بیلګي په توګه تابع

$$f:\quad y=f(x)=\frac{x^2+4x+4}{x+2}$$

صورت او مخرج همغه صفرځاي x0=-2لري، سره له دې هم پوله شته دی.

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^2+4x+4}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)^2}{x+2}=\lim_{x\to-2}(x+2)=0$$

دا ډول حدونه د مشتق په مرسته شمیرل کیدی شي، چی د صورت او مخرج توابعو له نتیجي څخه لاس ته راځي. دا ډول قاعده د پراخ شوې منځ ارزښتقضيي استعمال هم بلل کيږي.

د برنولي او د دې لو، پیتال قاعده :

که توابع u=f(x) اوv=g(x) د یوه $U(x_0)$چاپیریال د x_0 په ځاي کی مشتقوړ وي د $g'(x)\neq0$سره او د ټولو $x\in U(x)$ لپاره او x_0 دfاوgیوصفرځاي وي، د $f(x_0)=g(x_0)=0$ سره، نو باور لري:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

ترڅو په بني لور حد شته وي.

په ورته توګه لاس ته راځي.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: تابع د پراخه شوې منځ ارزښت قضي نیونی پوره کوي. د هر $x \in U(x_0)$ لپاره یو xmد $x_m \in (x_0, x)$ سره موجود دی، په داسی ډول چی لرو

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f'(x_m)}{g'(x_m)}$$

د $f(x_0)=0 \wedge g(x_0)=0$ له امله لرو:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

داچی د x->x0 سرهxm->x0 هم هڅه کوي.
دx->oe په حالت کی x=1/z ځاي په ځاي کوو. د زنځیري قضي په مرسته لاس ته راځي:

u=f(1/z)

د مشتق $du/dz = f(1/z)\cdot(-1-z^2)$ او مشتق $\frac{dv}{dz} = g'(\frac{1}{z}).(\frac{-1}{z^2})$ سره

، داسې چې لرو :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{g\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\left(-\frac{1}{z^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\left(-\frac{1}{z^2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{g'\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

یادونه : که په پورته حالت کی $f'(x_0)=g'(x_0)=0$ هم وي ، نو په ویش بیاله سره دا قاعده استعمالیږي. که سړي دn-پلونو(قدمونو) وروسته بریالی وي نو دا قاعده لرو:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$$

چیرته چی $f^{(n)}$ او $g^{(n)}$ د تابع n - م مستق په معني دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ډول یا تیپ: $0/0$

بیلګه:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{2x-4}{1}=\frac{0}{1}=0$$

بیلګه:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\frac{1}{1}=1$$

بیلګه:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1}=\frac{0}{1}=1$$

تیپ یا ډول: $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^{\infty}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\alpha x^{\alpha}}=0 \qquad \alpha>0.$$

د یوه مثبت حقیقي توان(جګعدد) α لپاره یو په خوښه توان x^{α} د x->oe لپاره په غښتلې توګه جګیږي، نسبت لوګاریتم تابع lnته

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^{\alpha}}=0 \qquad \alpha>0$$

له دې $f(x)=\frac{x^n}{e^x}$ تابع د لوپیتال د قاعدې د ډیرځله استعمال څخه لاس ته راځي:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x}=\ldots=\lim_{x\to\infty}\frac{n!}{e^x}=0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اکسپوننشل تابع e^x د x په هرتوان تابع څخه په غښتلې جګیږي:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=0 \qquad n\in N$$

نور حالتونه کیدی شی په بڼه یا تیپ $\frac{0}{0}$ او یا $\frac{\infty}{\infty}$ بیرته واړول شي

له تیپ یا بڼې $\infty-\infty$ څخه و بڼې یا تیپ $\frac{0}{0}$ ته

ددې لپاره لاندې تابع بیلګه کیدی شي:

$$f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}$$

د $x\to 0$ لپاره

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x\cos x+\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2\cos x-x\sin x}=\frac{0}{2}=0$$

داچی دلته مشتق بیرته د بڼې تیپ $\frac{0}{0}$ ده، نو د لوپیتال قاعده استعمالیدی شي.

له تیپ یا بڼې $0.(\pm\infty)$ څخه بڼې $\frac{\pm\infty}{\infty}$ ته:

د تیپ $0.(-\infty)$ حالت د بیلګي په توګه تابع $f(x)=x.\ln x$ د $x\text{->}0$ لپاره بنایي. په کوم کی چې ضرب د ویش په څیر انځور کړي، نو د لوپیتال د قاعدې په استعمال دا لاندې لاس ته راځي:

$$\lim_{x\to +0}(x\cdot\ln x)=\lim_{x\to +0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to +0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to +0}(-x)=0$$

له بڼې 0^0 څخه وبڼې e^0 ته:

دلته د بیلګې په توګه تابع $f(x)=x^x$ د $x\text{->}0$ لپاره تر څیړنی لاندې نیول کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بڼې بدلون یا فورم بدلون و بنسټe ته د یوې انځورونی په مرسته په بریالی توګه لاس ته راځي:

$$\lim_{x\to+0} x^x = \lim_{x\to+0} e^{\ln(x^x)} = \lim_{x\to+0} e^{x\cdot\ln x} = e^0 = 1$$

له 1^∞ بڼې څخه و $e^{0.\infty}$ بڼې ته

د ښوونی ، د بیلګي په توګه د تابع $f(x)=(1+\frac{\mu}{x})^x$ پوله ده د $\mu\in R^+$ لپاره او x

د $x\to\infty$ سره:$x\in R^+$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\mu}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} e^{x\cdot\ln(1+\frac{\mu}{x})} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}(x\cdot\ln(1+\frac{\mu}{2}))}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{\eta}{2}\right)}{\frac{1}{x}}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{\mu}{2}}\cdot\frac{-\mu}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\mu}{1+\frac{\mu}{x}}} = e^{\mu}$$

د μ=1 له پاره لاس ته راځي

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

له بڼې ∞^0 و بڼې $e^{0.(\pm\infty)}$ ته

دا کارونه په یوې بیلګي روښانه کوو:

$$\lim_{x\to+0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} = \lim_{x\to+0} e^{\sin x\cdot\ln\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to+0}(\sin x\cdot\ln\frac{1}{x})}$$

$$\lim_{x\to+0}\frac{\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x\to+0}\frac{x\cdot(\frac{-1}{x^2}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to+0}\frac{\sin^2 x}{x\cdot\cos x} = \lim_{x\to+0}\frac{2\sin x\cos x}{\cos x - x\cdot\sin x} = 0$$

د $\lim\limits_{x\to+0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} = 1$ سره

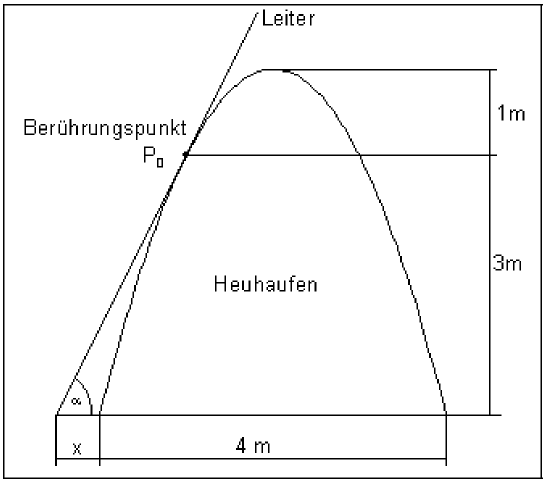
(c) ketabton.com: The Digital Library

باید لاندې جدول کې پام وشي. لرې یا ټې: شي

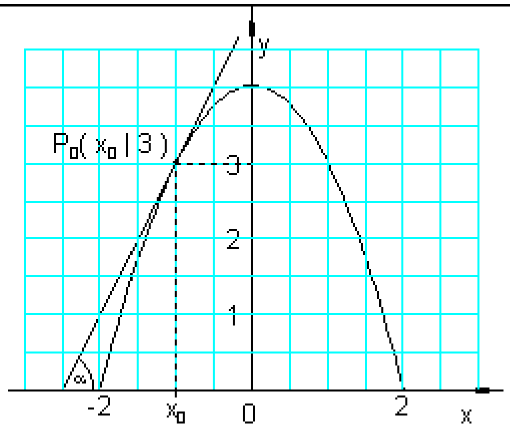
لاندې جدول د پورته ښوول شوو ښویا ډولونو د بڼی بدلون ټولیزه کتنه ممکنوي

بڼه بدلون یا لنډ: بدلون	$g(x)\to$	$f(x)\to$	تیپ(ډول)
$\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{g(x)}=\frac{g(x)-f(x)}{f(x)\cdot g(x)}\to\frac{0}{0}$	0	0	$-\infty$
$f(x)\cdot g(x)=\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}\to\frac{0}{0}$ $\wedge(Or)$ $f(x)\cdot g(x)=\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}\to\frac{\infty}{\infty}$		0	∞
$(f(x))^{g(x)}=e^{\ln(f(x)^{g(x)})}=e^{g(x)\cdot\ln f(x)}\to e^{0\cdot\infty}$ د f(x)>0 سره.	0 0	0 1 0	∞

د یوې تابع د استعمال بیلګه د تانجنت له پاره :

له څمکې څخه د وښو په ټوپی یوه زینه اینښول کیږي. دا زینه په درې متره جګوالي ټوپی لم د وښو ټوپی دې د یوه کیښکودي پارابول څېره ولري، چې بنسټ یې ۴ متره سرور دی او ۴ متره جګوالی لري. غواړو په دې یوه زینه کیږدو، چې د وښو ټوپی سره تانجنت جوړ کړي. په کومه زاویه(کونج)باید دا زینه کېښول شي؟ د وښو ټوپی له بیخ څخه دې په کوم لرېوالي په څمکه دا زینه کیښول شي؟	

(c) ketabton.com: The Digital Library



موږ د y محور داسې کاږو،چې د پارابول له ککرۍ(څوکې) څخه تېرېږي.

پارابول دا لاندې د تابع مساوات لري:

$$f(x) = a_2x^2 + 4$$

$$f(2) = 0 \Leftrightarrow 4a_2 + 4 = 0 \Leftrightarrow a_2 = -1$$

$$\Rightarrow f(x) = -x^2 + 4$$

موږ د x_0 لپاره ارزښت ټاکو:

$$f(x_0) = 3 \Leftrightarrow -x_0^2 + 4 = 3$$

$$\Leftrightarrow x_0^2 = 1 \Leftrightarrow x_{01/2} = \pm 1$$

شمیرنه :

د نورو شمېرنو لپاره ارزښت x_0 = -1 کاروو. زينه توپى په $P_0(-1,3)$ ټکي کې لمسوي.موږ په $P_0(-1,3)$ ټکي کې د تانجنت مساوات ټاکو:

$$f(x) = -x^2 + 4 \qquad P_0(-1|3) \Rightarrow \bar{x}_0 = -1;\ f(\bar{x}_0) = 3$$

$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

د $f'(x) = -2x$ سره لاس ته راځي

$$f'(x_0) = f'(-1) = -2 \cdot (-1) = 2$$

$$\Rightarrow t(x) = 2\left[x - (-1)\right] + 3 = \underline{\underline{2x + 5}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

جوړه زاویه: $\tan \alpha = 2 \Leftrightarrow \alpha \approx 63,4^0$

د زینې او د وښو ټوپۍ تر منځ واټن د **f(x)** د صفرځای او د تانجنت**t(x)** د صفرځای ترمنځ واټن دی.

صفرځایونه:

لرو:

$$f(x) = -x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_{1/2} = \pm 2$$
$$t(x) = 2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -2,5$$

د x ارزښتونو 2,5- او 2- ترمنځ واټن 0,5دی.

زینه د وښو د ټوپۍ له پښو څخه باید نیم متر لرې کېښول شي.

ددې پوښتنې څخه مو زده کړل، چې د تانجنت مساوات څنګه ټاکل کیږي، چې یو ګراف په تعریف شوي ځای کې لمسوي.

د سترې ګټې(غټو ګټو) مسئله یا قضیه

دا د سترې ګټې مسئله خورا ستره عملي مانا لري، چې په لاندې ډول به د یو څو بیلګو له لارې وڅیړل شي.

نزدې ټولو پروسو کی ، چی په عمل کی کارول کیږي یا صورت نیسي، له تاثیروونکو یا په همدې ډول د هغو ټاکلو لویو استعمال ته اړ دی، کومی چی موږ په ځانګړو یا مخصوصو پولو کی په اختیار کي لرودی شو.

موږ یواځې هغه پروسی تر څیړني لاندې نیسو چی د یوې واریابلی یا اووښتونی x په واک کی وي. دا د بل په واک کی د یوې تابع $y = f(x)$, $x \in D$له لارې څرګندولی شو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که y ټول لګښتونه یا مصارف په کوته کړي، نو x باید داسی وټاکل شي چی (f(x مینیمال یا خورا کم شي.

که په ځت یا برعکس y ګټه وي یا ګټور تاثیر وي، نو x باید داسی لاس ته راوړل شي، چې (f(x ماکسیمال یا خورا لوي شي. په قاعده کی اغزمنه یا مؤثره لویه یا په بل عبارت، خپلواك واریابل یا اووښتونی x د $-\infty$ او ∞ پولو ترمنځ ازاده ټاکونکی نه ده، بلکه د تخنیك یا تخنیکپوهنی له امله ، یواځی په ټاکلو پولو کی

$$a \le x \le b \qquad (*)$$

له دې امله عملي په زړه پورې د ګټې مسئلی ، په دې پورې اړه لري، چی ایا دا ګټه ده او که لګښت.

$$y = f(x) = \max! \qquad (a \le x \le b \qquad)$$

$$y = f(x) = \min! \quad (a \le x \le b) \qquad)$$

دا د افراطي ارزښتونو برخی پرابلمونو سره خورا نزدې یا ټینګ تړلی دی. دلته ځموږ علاقه په ځانګړې توکه د لاندې پرابلم د کارکولو سره ده:

۱ - د بلواکیزو (y = f(x ګډو اړیکو راپیداکول، د دندې یا وظیفي ورکولو سره سم(د مودالیټې پرابلم)

۲ - د تخنیکپوهنی پولو په پام کی لرل (*)

دادې د دوه بیلګو له لارې وښول شي

بیلګه : یو د منډو(پټي ته په کلوکې د اغزو منډو کېښول کیږي، چې مالونه ور وا نه وړي) سیم لرو چې ټول اوږدوالی یی L دی. له دي سیم سره باید یوه مربع سطحه (څلورګوډیزه هواره)، چی د امکان ترحده باید لویه وي، منډو شي. دا وظیفه شوه یا په بل عبارت غوښتنه.

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس د موداليټيArt und Weise پرابلم : غوښتنه مو د يوې ځلور ضلَي(څلورګوډی) پيداکول دي. لکه چی معمول دي، ددې څلورضلعي (-ګوډی) يو اړخ په a ښايو او بل اړخ يې په b ښايو، د څېرې ۲۰ . ۱۴ له مخی) .

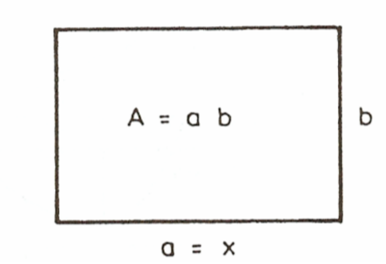
دا په سر کی دوه اغيزې لرونکې يا تاثيراچونکی لويي a او b دي. د

$$L = 2a + 2b, \quad b = (L/2) - a$$

له امله يواځي يوې اغيزمنې(تاثيراچوونکي) لويي ته اړيو د بيلګي په توګه $a = x$ ، دا ګټه (ستحه A)داسي ده $A = ab = x((L/2)-x)$

دا روښانه ده چی صدق کوي . $0 \le x \le L/2$

له دې امله د سترې ګټی پرابلم داسی دی



$$y = f(x) = x((L/2)-x) = Max! \quad (0 < x < L/2)$$

د $f(0) = f(L/2) = 0$ له امله بايد ماکس د 0 او $L/2$ ترمنځ پروت وي.

د ماکس لپاره ضرور دي

$$y' = f'(x) = L/2 - 2x = 0$$

د ماکس لپاره يواځي $x = L/4$ په پوښتنه کی راځي.

د دې لپاره $y'' = f''(x) = -2 < 0$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ریښتیا چی یو ماکس مو مخ ته پروت دی. دلته تخنیکپوهنیزې پولی 0 او L / 2 رول نه لوبوي. نو صدق کوي. a = b = L /4

بیلګه : یوه بډای چی په یوه ټاکلي وخت کی تولسټ (تولډیری) M تولید کړي او دا تل اخستونکو ته ورسوي، نو له دې سره فیکس یا کره ټاکلی لګښتونه F ترلي دي.
کیدې شي چي سملاسی د دې تولید په تولسټ (تولډیری) M کی تولید کړي ، په یوه زخیره ځاي(زېرمتون؟) کی ځاي په ځاي کړي او اخستونکو ته یی سملاسي ورسوي.
دلته د زېمتون (زخیره کونې) لګښتونه راپید کیږي(ددې د زخیرې لپاره ځاي او هلته بیا اچول او وړل). یا هم کیدی شي چی تولید په لړه کچه یا اندازه تولید شي او سملاسی اخستونکو ته وروړل شي. دلته نو د زخیره کولو لګښتونه منځ ته نه راځي.
مګر تل تولید په دې ډول تولید باندې درول، لګښتونه منځ ته راولي، چی د چمتووالی لګښتونه یی بولو. کومه ډیری x (ازاده لویه) باید تولید شي، چی د امکان تر پولي کم لګښتونه پرې وشي؟ د زخیرې لګښت د چمتووالی لګښت سره متناسب دی ، د خرابیدو ارزښت د چمتووالي یا تولید ارزښت سره یعنی چي خرڅلاو ته چمتو کیږي، په څټ متناسب دی. که x لوي وي نو چموالی ته کم اړتیا شته او که x کم وي نو چمتووالی بدلون تل باید تغیر وخوري یعني. ټول لګښتونه

$y = f(x) = F + Lx + R/x$ دي ، چیرته چی F ثابت(همغه) یا په کلکه اینول شوي لګښتونه دي، Lد زخیرې لګښتونه او R د چمتووالی لګښتونه دي. دا ازاده لویه x د تولیدډیری M څخه نه شي ستریدلی ، لوئیدلی یا غتیدلی. له دې امله صدق کوي $0 \le x \le M$. مخ ته پروت د ستریدلو مسئله له دې امله په لاندې ډول ده

$$y = f(x) = F + Lx + R/x = Min! \quad (0 \le x \le M$$

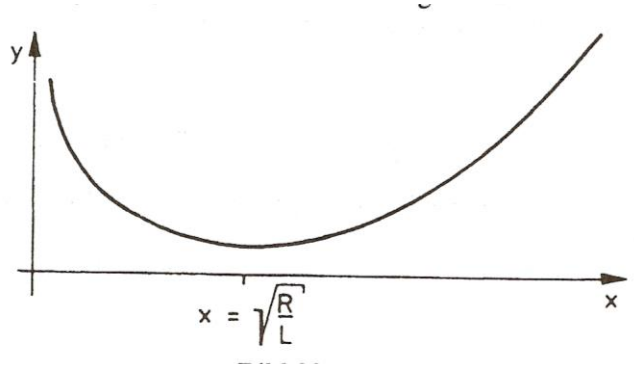
(لمړی f(x) دوه واره دیفرنځیال کیږي یا یي دوه واره رابیلیدنه نیول کیږي:

$$f'(x) = L - R/x^2 , \qquad f''(x) = 2R / x^3$$

د مینیوم لپاره ضرور دي: $f'(x) = 0$, پس لرو $x = R / L$ = ؟؟؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $x \geq 0$ له امله $f''(x) \geq 0$ هم صدق کوي، پس دلته تل یو نسبي مینیموم مخ ته لرو



د کړې تګلار په څیره ۲۰ . ۱۵ کی انځور شوې. څرګندده ده: که $x = R/L < M$ صدق ولري، نو مینیموم مو مخته پروت دی. که $x = R / L>M$ وي، نو یو منیموم په څنډه $x = M$ لرو. نامساوت $x = R / L < M$ دا مانا لري $R / L < M^2$ په همدې ډول . $R^2< M^2L$ پس مخ ته لرو: $x = R/ L$ د $R < M^2L$ لپاره او $x = M$ د $R > M^2L$ لپاره

نو : که د چمتوالي لګښتونه R , زخیرې لګښتونو L څخه زیات لوي شي، نو سملاسی دې ټول تولید $x = M$ صورت ونیس. که د ذخیرې لګښتونه د چمتووالی لګښت څخه کم وي، کیدی شي کوچنی ازاد x تولید شي.

ټاکلی بیلګه : د $M = 10000, R = 1000, L = 10$ لپاره صدق کوي $R = 1000 <$ $M^2L = 108 . 10 = 109$ستر یا غټ ازاد لګښت دی $x = R / L = 1000 / 10$ $10 = 100 =$ ازاد a دلته 10 یوونه باید ورزیات شي ، چی 10000 یوونه تولید کړېد $M = 10 , R = 1000 , L = 1$ لپاره صدق کوي $R = 1000 > M^2L = 100$ غټ ازاده لویه له دې امله $x = M = 10$ ده .یواځې یوه ازاده لویه دې تر تولید لاندې ونیوله شي. پای

(c) ketabton.com: The Digital Library

په تولید کې د مشتق استعمال

فعالیت : یوه فابریکه x تولید کوي. په دي تولید د لګښت کیږي، چې دا د تولید په واک کې دی، چې موږ ورته د لګښت تابع وایو او په K(x) سره ښایو.

څنګه کولی شو، چې د زیات تولید لپاره لګښت را ټیټ کړو؟

د لګښت تابع K(x) د تولید سټ(ډېری) او ټول لګښت تر منځ تړاو انځوروي.

که تولید د Δx شاو خوا کې زیات شي، نو لګښت هم د ΔK په شاو خوا کې زیاتیږي.

کمښتویش (تقسیم تفاضل) $\frac{\Delta K}{\Delta x}$ د منځني لګښت زیاتوالی ښايي، د یوه Δx تولید تغیر سره(منځنی تغیر ارزښت)

د x_0 ځای کې لحضوي تغیر ارزښت د مشتق لګښت بلل کیږي. دا د پوله ارزښت $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta K}{\Delta x}$ سره ټاکل کیږي، داپه دې معني، چې د لګښت د تابعK مشتق.

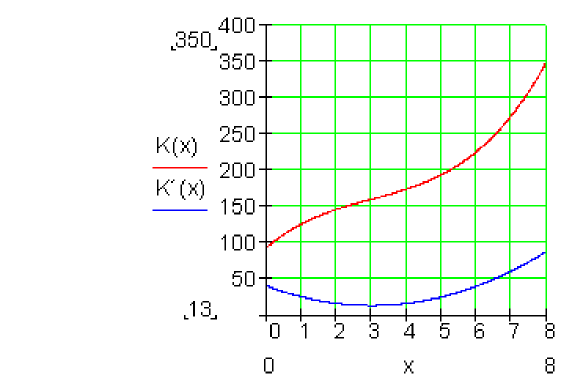
پیژند : د لګښتتابع **K(x)** مشتق د مشتفارزښت **K'(x)** په نامه یادوو یا یې پوله لګښت **K'(x)** هم بولو.

بېلګه: د لګښت تابع $K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94$ دي ورکړ شوي وي.

الف: مشتق ارزښت وټاکی، یو ارزښت جدول د **K(x)** او **K'(x)** لپاره وکاږی‌او په پروتولاړ سیستم یا کواوردیناتسیستم کې یې ګراف وکاږی.

پوله ارزښت د **I = [0 ; 6]** لپاره په ۱ پل(قدو) پراخوالي سره.

ب : د ډېر کم لګښتزاتوالی و ټاکی:



لاندې تابع لرو:

$$K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94$$

مشتف ارزښت

$$K'(x) = 3x^2 - 18x + 40$$

ارزښت جدول

x	0	1	2	3	4	5	6
K(x)	94	126	146	160	174	194	226
K'(x)	40	25	16	13	16	25	40

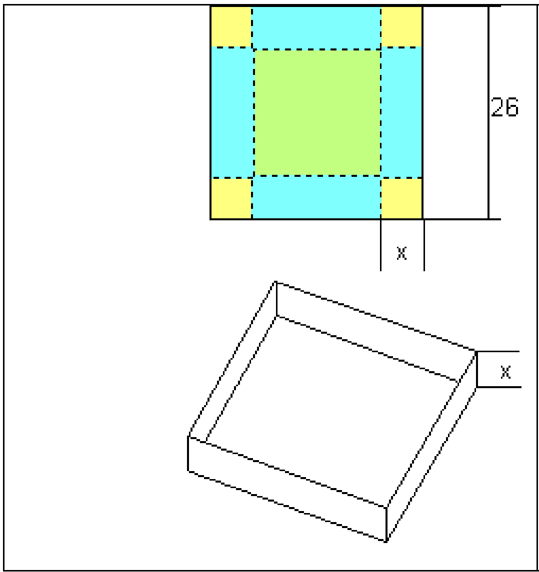
(c) ketabton.com: The Digital Library

خورا کم د لګښتزیاتوالی(لګښتجګیدنه) د پارابول **K'(x)** په ککره(څوکه) کې پروت دی ، یعني هلته چې تانجنت **K'(x)** پروت یا افقي دی

$$K'(x) = 3x^2 - 18x + 40 \Rightarrow K''(x) = 6x - 18$$

دد تانجنت د پروتوالي یا افقیت لپاره :

$$K''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 18 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x = 3}}$$



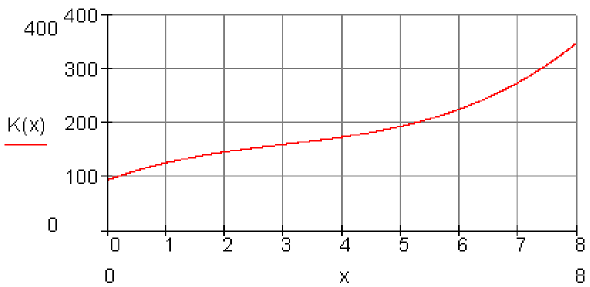
د ي، مربع کارتون(د کلک کاغذ څخه جوړ)څخه ، چې ۲۶ سانتیمتره د اړخ اوږدوالی لري یو بکس جوړوو بې له سرپوښ، جې د x جګوالی لري.

الف: د یوه تابع ترم وټاکئ، چې د بکس حجم(ډکی) V د x په واکوالي یا تابعیت کې ښایي.

ب – ګراف وکاږئ او په نږدې توګه یې ماکسیما(خورا جګ) حجم و ټاکئ.

- د یوه روغتون د نرختابع(مصرف تابع)K(x) د ناروغانو ګڼه (تعداد) x او د ټول مصرف ترمنځ اړیکي انځوروي، داسې چې x = 1 د 100 ناروغانو معنی او y = 1 دی معنی چې 1000 € / Tag. یوزر یورو په ورځ (1000 € / Tag.) .

$$K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

ټولګه:

د رول(Rolle) قضيه:
يوه د f تابع دې په بند اينټروال $[a,b]$ کې متمادي وي د $f(a)=f(b)$ سره او په واز اينټروال (a,b) کې مشتقوړ، نو لږ تر لږه يوځاي $c\in(a,b)$ شته دی د $f'(x_0)=0$ سره.

د مشتق د منځني ارزښت (وسطي قيمت) قضيه:
که $y=(x)$ تابع په بند اينټروال $[a,b]$ کې متمادي او په واز اينټروال (a,b) کې د مشتق وړ وي، نو هلته يوځاي $x\in(a,b)$ شته دی، د کوم لپاره چې لرو: $$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(x_0)$$

ښيږره په نوټ کې ده، دا بنه نه ده کبنل شوې

پراخه شوې منځقضيه:
که $u=f(x)$ او $v=g(f)$ په بند اينټروال $[a,b]$ کې متمادي توابع وي او په واز اينټروال (a,b) کې مشتقوړاو $g'(x)\neq 0$ باور ولري، نو د ټولو $x\in(a,b)$ لپاره، کم له کمه يوځای $x_0\in(a,b)$ وجودلري چې لاس ته ترې راځي: $$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

قضيه:
د $f(x)$ تابع دې په انټروال Iکې مشتقوړ وي.
1. که د $f(x)$ تابع په اينټروال Iکې مونوټون جګيږدونکي وي، نو باور لري: $f'(x)\geq 0$ د ټولو $x\in 1$ لپاره
- که $f(x)$ په اينټروال کې همغږيزټيټيږدونکي وي، نو باور لري: $f'(x)\leq 0$ د ټولو $x\in 1$ لپاره.
- که $f'(x)\geq 0$ وي، دټولو $x\in 1$ لپاره، نو $f(x)$ په اينټروال I کې همغږيز جګيږدونکی ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- که $f'(x)\leq 0$ وي د ټولو $x\in 1$ لپاره، نو $f(x)$ په ایتروال I کې همغږیز ټیټېدونکې ده.
- که $f'(x)>0$ وي ، د ټولو $x\in 1$ لپاره، نو $f(x)$ په اینتروال I کې په کلکه همغږیزجګېدونکې ده.
- که $f'(x)<0$ وي د ټولو $x\in 1$ لپاره،نو $f(x)$ په اینتروال I کې په کلکه مونوتون ټیټېدونې ده.

که د $f(x)$ لپاره د x_0 په ځای کې $f'(x)=0$ ولرو نو یو نسبي ټیټ ټکی مو مخ ته پروت دی.

که د $f(x)$ لپاره د x_0 په ځای کې $f'(x)=0$ او $f''(x)>0$ ولرو نو یو نسبي ټکی مو مخ ته پروت دی.

که ددې برعکس ولرو: $f'(x)=0$ او $f''(x)<0$ ، نو یو نسبي ماکسیموم مو مخ ته پروت دی.

د بحراني ټکي(ټیټ ټکي یا جګ ټکي) لپاره خوي ټاکونکی دی، چې $f'(x)=0$ وي، او د $f''(x)$ مخ نښه (+ ، -)، په دې پریکړه کوي چې ایا یو اصغري ټکی او که اعظمي ټکی مو مخ ته پروت دی.

پېژند: د $x=x_0$ په چاپېریال کې د $y=f(x)$ تعریف شوې تابع یونسبي جګ ټکی په همدې ډول نسبي ټیټ ټکی لري، که ټولو x_0 ته پوره نږدې x لپاره باور ولري: $f(x)>f(x_0)$ په همدې ډول $f(x)\leq f(x_0)$

جمله: (د یوه نسبي بحراني ټکي لپاره ضروري شرایط): که په x_0 کې مشتق وړ تابع $y=f(x)$ انحرافي ټکی لري نو لرو: $f'(x)=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا جمله موږ ته وايي: چيرته چې $f'(x)\neq 0$ وي نو هلته اکستريموم نه شته، د اکستريموم لپاره يواځې د x_0 ځای په پوښتنه کې راځي، چې د هغي لپاره لرو $f'(x)=0$ ، خو حمتي نه ده چې $y=f(x)$ دې يواکستريموم و لري.

جمله : (د يوه بحراني ټکي لپاره پوره کيدونکی شرايط):

که په $x=x_0$ کی دوه واره مشتقوړ $y=f(x)$ تابع لپاره ولرو: $f'(x)=0$, $f''(x)\neq 0$ نو تابع $y=f(x)$ هلته يو بحراني ټکی لري.

خورا ټيټ ټکی مخ ته لرو، که وي: $f''(x)>0$

خورا جګ ټکی مخ ته پروت دی ، که وي: $f''(x)<0$

پيژند: په يوه چاپيريال $x=x_0$ کې مشتق وړ تابع $y=f(x)$ يو کيڼ- ښی- انعطافټکی په همدې ډول ښی- کيڼ- انعطافټکی لري، که د هغه مشتق هلته يو نسبي جګټکی(عظمي نقطه) په همدې توګه يو نسبي ټيټ ټکی ولري.

جمله: (د يوه نسبي بحراني ټکي لپاره ضروري شرايط):

که په x_0 کې مشتق وړ تابع $y=f(x)$ اکستريموم لري نو لرو: $f'(x)=0$

دا جمله موږ ته وايي: چيرته چې $f'(x)\neq 0$ وي نو هلته بحراني ټکی نه شته، د بحراني ټکو لپاره يواځې د x_0 ځای په پوښتنه کې راځي، چې د هغي لپاره $f'(x)=0$ وي ، خو حمتي نه ده چې $y=f(x)$ دې يوبحراني ټکی ولري.

د پورته جملی استعمال په $y'=f'(x)$ څخه لاندې جمله لاس ته راځي:

جمله : (د اوړونټکي(انعطاف ټکي) لپاره اړيين شرايط):

که په $x=x_0$ کی دوه واره مشتق وړ تابع $y=f(x)$ هلته يو انعطاف ټکی ولري، نو لاس ته ترې راځي: $f''(x)=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند: د زینتکي(کله کله برندې ټکی هم بلل کیږي)لاندې د انعطافټکي ځانګړی حالت پوهیږو، داسې انعطافټکی چې تانجنت یې افقي (پروت) وي:

د پرتلي لپاره دې بیا یو ،،عادي،، انعطافټکی ورکړ شوی وي.دا یو مائل(نه افقي) تانجنت لري

د برنولي او د دې لو، پیتال قاعده:

که توابع $u=f(x)$ او $v=g(x)$ د یوه $U(x_0)$ چاپیریال د x_0 په ځاي کی مشتقوړ وي د $g'(x)\neq 0$ ســـــره او د ټولـــو $x\in U(x)$ لپـــاره او x_0 د f ا و g یوصــــفرځاي وي، د $f(x_0)=g(x_0)=0$ سره، نو باور لري: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$,

ترڅو په ښي لور حد شته وي.

په ورته توګه لاس ته راځي: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

تمرینونه:

۱ – د لاندې لیکل شوو تحلیلي افادو مشتق د x0 په ځای کې وشمېرئ او د فرمول د اعتبار ورشو(ساحه) ورکړئ.

a) $y=x^3-2x^2+1$ b) $y=\sqrt{x}$ c) $y=x\sqrt{x}$

d) $y=\frac{x^2+1}{x}$ e) $y=\frac{x}{x-1}$ f) $y=\sin\frac{x}{2}$

۲– د یوه تن یا جسم عمود پورته غورځونې د تن دروندټکي (د جسم د ثقل مرکز) د لار- وخت- مساوات په لاندې ډول دي:

$$s=f(t)=v_0\,t-\frac{1}{2}gt^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیلچټکتیا یا پیل سرعت $v_0 = 30\ \frac{m}{s}$ او د ځمکې بیړې(د ځمکېتعجیل) $g = 10\ \frac{m}{s^2}$. سره. دا تن یا جسم کله خپل عظمي جګوالي ته رسیږي؟

دا جګوالی څومره لوی دی

۳ – یو تن په برابر ډوله چټکتیا خوزي(حرکت کوي)، داسې چې بیړه(تعجیل) یې $a = 2\ \frac{m}{s^2}$ دی

په لاندې جدول کې د $\{(\Delta t)_n\}$ لپاره یو صفرترادف(- پرلپسې) کېږدی(د بیلګې په توګه لکه په اوله مټه(ستن) کې) او جدول پوره کړی.

له $t_0 = 3\ s$? وروسته د تن یا بدن لحظوي جټکتیا څومره ده.

۴ – د لاندې تحلیلي افادو مشتق ونیسی! پام وکړی، چې د مشتقنیولو کومه قاعده په کار وړی شی

a) $y = -\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + \frac{1}{x} - 5$

b) $y = a^2x^3 - \sqrt{b}x^2 + \frac{1}{2}cx - 1$

c) $y = -2x^{-5} + 3x^{-3} - \frac{1}{2}x^{-2} + 4$

d) $y = \frac{2}{\sqrt{x}} - 3\sqrt[3]{x^2} + \frac{6\cdot\sqrt[3]{x}}{x}$

e) $y = (\sqrt{x} - 1)(1 + \sqrt{x})$

f) $y = (1 - x^{-4})(x^{-1} + x^2)$

g) $y = (x^2 + 2x\sqrt{x} + x)(x - \sqrt{x})$

h) $y = (ax^2 - b)^2$

i) $y = \frac{x^2 + x}{3x^3}$

j) $y = \frac{2x^3 - 3}{x^2}$

k) $y = \sqrt[3]{\sqrt{x}}$

l) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\cdot\left(1 + \sqrt[4]{x}\right)$

۵ – د لاندې ورکړل شوو تحلیلي افادو مشتق ونیسی، او هغه ارزښتونه ترې وباسی، د کومو له پاره چې مشتق شته (موجود) نه وي

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۵ . ۱ ـ

a) $y = (x-1)(1-x^3)$

b) $y = (x^3+1)(1-x-x^2)$

c) $y = \left(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt[3]{x^4} + \sqrt{x^3}\right)$

d) $y = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}\right)\left(\sqrt[4]{x} - 2x\right)$

۵ . ۲ -

a) $y = \frac{x^3+1}{x^2+x+1}$

b) $y = 4x + \frac{1}{x^2+1}$

c) $y = \frac{x-4}{4-x}$

d) $y = \frac{x^3-2x+1}{2x^3-5}$

e) $y = \frac{\sqrt{3}x - \sqrt{2}}{3x^2-2}$

f) $y = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1-x}$

g) $y = \frac{1}{1-\sqrt{x}}$

h) $y = \frac{2x - \sqrt[3]{x}}{x^2-2x-1}$

i) $y = \frac{x^3 + 3\sqrt[3]{x}}{2x^2+x}$

j) $y = \frac{\sqrt{x}-1}{x-2\sqrt{x}+1}$

۵ . ۳ ـ

a) $y = \sqrt{x}\,\sin x$

b) $y = 2\sin x\,\cos x$

c) $y = 1 - \cos^2 x$

d) $y = x^3\cos x$

e) $y = 2\sin x\,(x - \cot x)$

f) $y = \frac{\tan x}{\cot x}$

g) $y = \frac{x}{\sin x + \cos x}$

h) $y = \frac{x\sin x}{1+\tan x}$

i) $y = \tan x - \cot x - 2x$

j) $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$

۵ . ۴ ـ

a) $y = \frac{x}{e^x}$

b) $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2x^2}$

c) $y = e^x \tan x$

d) $y = \frac{5e^x}{\cos x}$

۵ . ۵ ـ

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

a) $y = \frac{\ln x}{x}$ b) $y = \sin x \ \ln x$

c) $y = x^2 \ln x$ d) $y = 10 \ln e \ln x$

۵ . ۶ -

a) $y = 5^x + 2^x$ b) $y = 3^x x^3$

c) $y = 2^x - 2x$ d) $y = \frac{4^x}{2^x}$

۵ . ۷ –

c) $y = 2^x - 2x$ d) $y = \frac{4^x}{2^x}$

a) $y = (2x+1)^4$ b) $y = (1-x^4)^5$

c) $y = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^8$ d) $y = \left(2x^2 - \frac{4}{x} + 3\right)^6$

۵ . ۸ -

a) $y = \sqrt{x^2 - 1}$ b) $y = \sqrt{1-2x}$ c) $y = \frac{1}{\sqrt[4]{(x-1)^3}}$

d) $y = \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3 - 1}}$ e) $y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ f) $y = \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2}}$

g) $y = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$ h) $y = \sqrt{\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}}$

۵ . ۹ –

a) $y = 5x^2 \ \sin 2x$ b) $y = \sin^2 x$ c) $y = \sin \sqrt{\frac{x}{2}}$

d) $y = \tan x + \frac{1}{3} \tan^3 x$ e) $y = \cos \frac{1}{1+x}$ f) $y = \frac{1}{\cos^2 x}$

g) $y = \cot (1 - 3x)$ h) $y = \cot \sqrt{1-2x}$ i) $y = \sqrt{\tan x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

j) $y = \dfrac{\cos x^2}{\pi x}$ k) $y = \dfrac{1-\cos^2 x}{1+\cos^2 x}$

l) $y = \left(3+\dfrac{2}{\cos^2 x}\right)\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$ m) $y = \left(\dfrac{3}{\sin x}-5\right)\dfrac{1}{\sin x}$

n) $y = \tan\sqrt[3]{\dfrac{1-2x}{x}}$ o) $y = 2\sin\sqrt[3]{\dfrac{3}{x}}$ p) $y = \dfrac{3\tan x - \tan^3 x}{1-3\tan^2 x}$

۵ . ۱۰ -

a) $y = \text{Arcsin}\dfrac{x}{a}$ b) $y = \text{Arccos}\,\dfrac{a-x}{a}$ c) $y = \text{Arctan}\dfrac{1}{x}$

d) $y = \text{Arccos}\,\sqrt{1-x^2}$ e) $y = \dfrac{1}{2}\text{Arctan}\dfrac{2x}{1-x^2}$ f) $y = \text{Arctan}\,\sqrt{\dfrac{x}{x+a}}$

g) $y = \text{Arcsin}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ h) $y = \text{Arctan}\,\dfrac{x}{1+\sqrt{x^2+1}}$ i) $y = \text{Arccot}\,\dfrac{1+x}{1-x}$

j) $y = \text{Arcsin}\,2x\sqrt{1-x^2}$ k) $y = \text{Arctan}\dfrac{x-2}{2\sqrt{x^2+x-1}}$

l) $y = a\cdot\text{Arc}\cos\dfrac{a-x}{a}-\sqrt{2ax-x^2}$

۵ . ۱۱ –

g) $y = \dfrac{e^{-\cos x}}{\sin x}$ h) $y = \sqrt{1-e^{-x}}$ i) $y = \dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{e^{2x}}$

j) $y = e^x\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

۵ . ۱۲ -

a) $y = \ln 2x$ b) $y = \ln x^2$ c) $y = (\ln x)^2$

d) $y = \ln\sqrt{x}$ e) $y = \sqrt{\ln x}$ f) $y = \ln\sqrt{1-x}$

g) $y = \ln\tan x$ h) $y = \ln\ln x$ i) $y = \ln\cot\dfrac{x}{2}$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

j) $y = \ln \tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$ k) $y = \ln \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}$

l) $y = \ln\left(x+\sqrt{x^2-a}\right)$ m) $y = \ln \frac{x}{x+\sqrt{x^2+1}}$ n) $y = \ln \sqrt{\frac{2x-3}{2x+3}}$

o) $y = \ln\left(a+x+\sqrt{2ax+x^2}\right)$ p) $y = \ln \sqrt[4]{\sin^3 x \cos^3 x}$

q) $y = \ln \frac{\sqrt[3]{(x+2)^2} \cdot \sqrt[5]{(x-2)^3}}{\sqrt[4]{(x^2-4)^5}}$

۵ . ۱۳ –

a) $y = |x|$ b) $y = \sqrt{|x|}$ c) $y = \ln|x|$

d) $y = \sqrt{|\ln \cos x|}$ e) $y = \ln|\ln|x||$

۵ . ۱۴ -

a) $y = \sqrt[x]{x}$ b) $y = (x^x)^x$ c) $y = x^{(x^x)}$

d) $y = x^{\sin x}$ e) $y = (\cos x)^{\sin x}$ f) $y = a^x \cdot x^a$

g) $y = x^{e^x}$ h) $y = a^{e^x}$ i) $y = (\operatorname{Arc}\tan x)^x$

j) $y = (\tan x)^{\frac{1}{\cos x}}$

۶ – تانجنت په $P_0(x_0, y_0)$ ټکي کې په منحني $f(x)$ د x–محور سره کومه زاویه (کونج) جوړوي

a) $y = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$ b) $y = \sqrt[3]{x+1}$, $x_0 = 0$

c) $y = \left(x^2 - \sqrt[3]{x^2}\right)^2$, $x_0 = 1$ d) $y = \sqrt{\frac{x^2-4}{9x^2-25}}$, $x_0 = 0$

e) $y = x\sqrt{x+1}$, $x_0 = 3$ f) $y = \frac{x}{x+\sqrt{x}}$, $x_0 = 1$

g) $y = \sqrt{x-\sqrt{x}}$, $x_0 = 1$ h) $y = \sqrt{1+\sqrt{x}}$, $x_0 = 1$

i) $y = \sin(2\pi - x)$, $x_0 = \pi$ j) $y = \sqrt{\sin 2x}$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

k) $y = \sin\sqrt{2x}$, $x_0 = \frac{1}{2}$ l) $y = (x-1)e^x$, $x_0 = 0$

۷ - په پروت تانجنت د -محور باندې پرته منحني کوم ټکي کې غوځوي، که زاویه او همداسې وي.

a) $y = x^2$ b) $y = x^3$ c) $y = x\cdot|3-x|$
d) $y = \frac{x^2-3}{2x}$ e) $y = \frac{x^2+x+14}{x+2}$ f) $y = \frac{x^2(x-9)}{2(x-6)^3}$

۸ – د ورکړشوو تخليلي افادو لومړي درې مشتقونه جوړ کړی! و ازمايې، چې ايا د مشتق قابليت کې د يو ګونو ورشو ګانوو يا ساحو کې تغير راځي!

د -م مشتق لپاره يو عمومي فرمول ورکړی، ترهغې چې شته وي.

a) $y = x^n$ b) $y = \sqrt{x}$ c) $y = \sqrt[4]{x^3}$
d) $y = \sqrt{1-x^2}$ e) $y = \frac{x}{1-x}$ f) $y = \frac{1+x}{1-x}$
g) $y = \cos x$ h) $y = \frac{1}{2}\sin 2x$ i) $y = \sin(1-2x)$
j) $y = x^2 \sin 2x$ k) $y = \tan x$ l) $y = \tan^2 x$
m) $y = e^x \sin x$ n) $y = e^{mx}$ o) $y = e^{-x} + e^{-2x}$
p) $y = \ln x$ q) $y = \ln\sqrt[3]{1+x^2}$ r) $y = \text{Arcsin } x$

۹ - د تانجنت مساوات $y = mx + n$ په $y = f(x)$ کیږدی.

۹ . ۱ -

a) $f(x) = x^2 + 1$, $P_1(1, y_1)$ bzw. $P_2(-1, y_2)$
b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$, $P_1(0, y_1)$ bzw. $P_2(2, y_2)$
c) $y^2 = 1 - x$, $P_0(-3, y_0)$ d) $y^2 = x - 1$, $P_0(5, y_0)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۹ . ۲-

a) $f(x) = e^{-x}$, $m = -1$ b) $f(x) = -x^4 + 3x^2 - 4$, $m = 0$
c) $f(x) = \frac{x}{x+1}$, $m = 1$ d) $f(x) = \frac{1}{x-1}$, $m = -1$

۱۰ – د لاندې توابعو $y=f(x)$ په څټ تابع (برعکس تابع) $f^{-1}(x)$ مشتق dx/dy په $P_0(x_0, y_0)$ ټکي کې وشمېرئ(جوړ کړئ)

a) $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x + 1$, $x_0 = -1$ b) $y = x^2 - 2x - 1 + \frac{2}{x}$, $x_0 = 1$
c) $y = \frac{1}{2x^2 - 5x + 9}$, $x_0 = \frac{5}{4}$ d) $y = \frac{x+1}{x+2}$, $x_0 = -3$
e) $y = \sqrt{1-x}$, $x_0 = 1$ f) $y = \sqrt{\frac{x}{a-x}}$, $x_0 = \frac{a}{2}$
g) $y = (x+1)\sqrt{1-x}$, $x_0 = -1$ h) $y = \sin x$, $x_0 = 0$
i) $y = \sin(2x + 3\pi)$, $x_0 = -2\pi$ j) $y = \sin^2 x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$
k) $y = x\cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$ l) $y = \frac{1+\cos x}{1-\cos x}$, $x_0 = \frac{3\pi}{2}$
m) $y = e^x \cos x$, $x_0 = 0$ n) $y = x\,e^{\cos x}$, $x_0 = 2\pi$
o) $y = e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)$, $x_0 = 1$
p) $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$, $x_0 = x \in (-\infty, \infty), a \neq 0$
q) $y = \ln(x+1)$, $x_0 > -1$ r) $y = \ln\sqrt{\frac{3x-4}{3x+4}}$, $|x_0| > \frac{4}{3}$
s) $y = x^{\frac{1}{x}}$, $x_0 > 0$, $x_0 \neq e$

۱۱ – لاندې تحلیلي افادي په متمادیت او مشتق والي باندې و څېړئ،

a) $y = \begin{cases} -a & \text{für } x \leq 0 \\ +a & \text{für } x > 0 \end{cases}$ b) $y = \begin{cases} -\frac{1}{2}x + 1 & \text{für } x \leq 2 \\ -2 & \text{für } x > 2 \end{cases}$ c) $y = |x - 1|$

d) $y = |\sin x|$ e) $y = -\frac{x^2}{2}$ f) $y = -|x|$

g) $y = \sqrt[3]{x^2}$ h) $y = (x+1)^3 \cdot \sqrt[3]{x^2}$ i) $y = e^{\frac{1}{x}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

j) $y = e^{\frac{x}{x-1}}$ k) $y = e^{\frac{x^2}{x^2-1}}$ l) $y = \text{Arccot}\,\frac{1}{x}$

m) $y = \text{Arcsin}\,(\sin x)$ n) $y = \text{Arctan}\,(\tan x)$ o) $y^2 = \frac{x^3}{4-x}$

p) $y^3 = 3x^2 - x^3$ q) $y^2 = \frac{1-x}{x}$

۱۲ - لاندې منحني چې د پسې برابرونونو سره ورکړ شوي، د افراطي ټکو او اوړونټکو(نقاط افراطي و انعطاف) له مخې وڅېړئ.

a) $y = x^2 - 2x + 3$ b) $y = x^3 - 3x^2 + 6x + 7$ c) $y = x^3(8 - x)$

d) $y = (x - a)^4 + b$ e) $y = \frac{x}{x^2 + 1}$ f) $y = \frac{x^2 - 7x + 6}{x - 10}$

g) $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$ h) $y = \frac{ax^2}{ax + b}$

i) $y = \frac{a^2(a - x) + b^2x}{x(a - x)}$ j) $y = \cos^2 x$ k) $y = \sin x\ \cos x$

l) $y = \sin 2x - 2\sin x$ m) $y = e^x \sin x$ n) $y = x\,e^x$

o) $y = x^n e^{-x}$ p) $y = e^{-x} + e^{2x}$ q) $y = e^{-x} - e^{-2x}$

r) $y = x \ln x$ s) $y = x \ln^2 x$ t) $y = \frac{1}{2}\ln x - \text{Arctan}\,x$

۱۳ - د دې لاندې برابرونونو سره ورکړ شوې منحني تر بحث لاندې ونیسئ:

13.1. a) $y = x^2 - x - 2$ b) $y = -(x + 4)^2 + 4$

c) $y = x^3 - x^2$ d) $y = x^3 - 10x$

e) $y = -x\,(x + 3)^2$ f) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$

g) $y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 2$ h) $y = -x^3 + 6x^2 - 13x + 8$

i) $y = (x + 2)\,(x^2 - 4x + 3)$ j) $y = (1 - x)\,(x^2 + 6x + 8)$

k) $y = |x^3 + 9x^2 - 108|$ l) $y = |-x\,(x^2 - 16)|$

13.2. a) $y = x^4 - 8x^2 - 9$ b) $y = -x^4 + 5x^2 - 4$

c) $y = x^4 - 10x^2 + 9$ d) $y = (x - 2)^2\,(x - 4)\,(x + 3)$

e) $y = \frac{1}{24}x\,(x - 1)\,(x - 2)\,(x - 3)$ f) $y = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$

.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

13.1. a) $y = x^2 - x - 2$ b) $y = -(x+4)^2 + 4$
c) $y = x^3 - x^2$ d) $y = x^3 - 10x$
e) $y = -x(x+3)^2$ f) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$
g) $y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 2$ h) $y = -x^3 + 6x^2 - 13x + 8$
i) $y = (x+2)(x^2 - 4x + 3)$ j) $y = (1-x)(x^2 + 6x + 8)$
k) $y = |x^3 + 9x^2 - 108|$ l) $y = |-x(x^2 - 16)|$

13.2. a) $y = x^4 - 8x^2 - 9$ b) $y = -x^4 + 5x^2 - 4$
c) $y = x^4 - 10x^2 + 9$ d) $y = (x-2)^2(x-4)(x+3)$
e) $y = \frac{1}{24}x(x-1)(x-2)(x-3)$ f) $y = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$
g) $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$ h) $y = (x+2)^2(x-1)^3$
i) $y = x^2(x^2-1)^2$ j) $y = (x-4)^4(x+3)^3$

13.3. a) $y = \frac{1}{1+x^2}$ b) $y = \frac{3x-1}{2x+1}$ c) $y = \frac{5}{(2x+1)^2}$
d) $y = \frac{2x+x^2+25}{1+x^2+2x}$ e) $y = \frac{x^2+x+1}{x^2-1}$ f) $y = \frac{x^2+2x+1}{2x}$
g) $y = \frac{x^2-5x+4}{x-5}$ h) $y = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2-2x+1}$ i) $y = x - \frac{4}{x-1}$
j) $y = \frac{x^3+2}{2x}$ k) $y = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$
l) $y = \frac{2x^2-6x}{x^3-3x^2+x-3}$ m) $y = \frac{x^3}{x^2-2x+1}$ n) $y = \frac{5(3x^2-4)-13x}{\frac{1}{8}(2x-1)(4x+7)}$

13.4. a) $y = x\sqrt{9x-x^2}$ b) $y = x^2\sqrt{25-x^2}$
c) $y = x\sqrt{14+8x-x^2}$ d) $y = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$ e) $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
f) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-4}} - 2$ g) $y = \sqrt{\frac{x}{2-x}}$ h) $y = x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$
i) $y = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$ j) $y = \sqrt{\frac{1-x^3}{3x}}$
k) $y = \sqrt{(x+1)^2 - x} - \sqrt{(x-1)^2 + x}$
l) $y = \frac{1}{2}\left(\sqrt{(x+1)^2 - x} + \sqrt{(x-1)^2 + x}\right)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

13.5. a) $y^2 = x^3 + x + 2$ b) $y^2 = x^3 - 3x + 2$ c) $y^2 = x^3 - 2x + 1$

d) $y^2 = x^4(x-1)$ e) $y^2 = x^2[x(1-x)]$ f) $y^2 = \frac{1-x}{x}$

g) $y^2 = \frac{x^2}{1+x}$ h) $y^2 = \frac{x^2}{1-x^2}$ i) $y^2 = \frac{x(1-x)}{(x+1)^2}$

13.6. a) $y = 2\sin^2 x$ b) $y = \sin 2x \cos x$ c) $y = \sin x \cos^2 x$

d) $y = \sin^2 x + 2\cos^2 x$ e) $y = x \sin x$ f) $y = \frac{\sin x}{x}$

g) $y = \frac{\sin 2x}{\sin x}$ h) $y = x^3 \cos x$

i) $y = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x$ j) $y = \sin^3 x + \cos^3 x$

k) $y = \sin x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ l) $y = \cos 2x + 2\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$

13.7. a) $y = e^{-2x}$ b) $y = xe^{-x}$ c) $y = x e^{\sqrt{x}}$

d) $y = (x^2 - 1)e^x$ e) $y = e^{\tan x}$ f) $y = 2e^{-x}\sin 2x$

g) $y = e^{2x}\sin 3x$

13.8. a) $y = \ln 3x$ b) $y = \ln(x^2 - 1)$ c) $y = x^2 \ln x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ټوټه کسرونو ټوټه کونه

الف) اصلي کسرونه، چې مخرج يې مختلف کرښيز يا لاينيز ضريبونه لري.

بنسټ: که د يوه اصلي پولينوم $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ مخرجپولينوم $P_n(x)$ په مختلفو کرښيزو(لايني)

ضريبونو $P_n(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ ...\ (x-x_n)$ ټوټه کېدونکی وي، نو پولينوم

$\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ په لاندې بڼه بدلېدی شي.

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}+\frac{C}{x-x_3}\ ...\ \frac{N}{x-x_n}$$

داسې يوه بڼه په ټوټه کسرونو ټوټه کونه،، بلل کېږي، چې A,B,C,...,N حقيقي عددونه دي.

بيلګه:

اصلي پولينوم کسر $\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}$ په ټوټه کسر ټوټه کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: د مساوات $x^3-4x^2-7x+10=0$ لومړی حل $x_1=1$ د ازمايښت له لارې پيداکيږي.

د پولينوم ويش(لنډ: پولينومويش) $(x^3-4x^2-7x+10):(x-1)=x^2-3x-10$ مو ټوټه ونې ته بيايي $x^3-4x^2-7x+10=(x^2-3x-10)(x-1)$ مساوات $x^2-3x-10$ اوس $x_2=-2$ او $x_3=5$ حلونه لري.

له دې امله $x^3-4x^2-7x+10=(x-5)(x-1)(x+2)$ دی.

د اصلي کسر $\dfrac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}$ په ټوټه کسرونو ټوټه کونه:

د کسرونو شمېرنو قاعدې له مخې کېدی شي ورکړ شوی پولينوم په درې جمعی برخو ټوټه شي، چې مخرجونه يې لاينيز (کرښيز-)ضريبونه دي:

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{A}{x-5}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}$$

د غزېدنې سره د ټوټه کسر جمعه:

اصلي مخرج د ټوټه کسر د پولينوم مخرج دی.

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{A(x-1)(x+2)+B(x-5)(x+2)+C(x-5)(x-1)}{(x-1)(x-5)(x+2)}$$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{Ax^2+Ax-2A+Bx^2-3Bx-10B+Cx^2-6Cx+5C}{x^3-4x^2-7x+10}$$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{(A+B+C)x^2+(A-3B-6C)x+(-2A-10B+5C)}{x^3-4x^2-7x+10}$$

دصورتونو ارزښت A ,B او C ټاکنه د ضريبونو(څلوونو) د پرتلې له لارې:

د مساوي مخرجونو کسرکې بسيا کوي، چې صورتونه سره پرتله کړو. دلته بايد د مساوي توانونو ضريبونه، دا په دې مانا چې د x^2, x او x_0 بايد مساوي وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A + B + C = 4 \qquad \text{I}$$
$$A - 3B - 6C = -1 \qquad \text{II}$$
$$-2A - 10B + 5C = 39 \qquad \text{III}$$

د فاکټور 2 سره د I او II مساوات ضربونه او د هر یوه جمع د III سره پورته درې مساوات سیستم و دوه مساواتسیستم ته د دوه متحولو سره را لنډوي.

$$-8B = -72 \qquad \text{V}$$
$$-16B - 7C = -41 \qquad \text{IV}$$

د مساوات IV.V څخه لرو: $-24B = -72 \Rightarrow B = 3$

د $B = 3$ په V کې ایښوونه: $-16.3 - 7C = -41 \Rightarrow C = -1$

د $B = 3$ او $C = -1$ په I کې ایښوونه: $A + 3 - 1 = 4 \Rightarrow A = 2$

په ټوټه کونې فرمول کې ایښوونې سره غوښتونکی ټوټه کسر لاسته راځي:

$$\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} = \frac{2}{x-5} + \frac{3}{x-1} - \frac{1}{x+2}$$

ازمايښت:

$$\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} =$$

$$= \frac{(x-1)(x+2) + 3(x-5)(x+2) - 1(x-5)(x-1)}{(x-5)(x+2)(x+2)} = \frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10}$$

ب) اصلي پولینوم کسرونه، چې مخرج یې مساوي لاینیز(کرښیز) ضریبونه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د یوه اصلي پولینوم $P_n(x)$ مخرج $\frac{P(x)}{P_n(x)}$ د کرښیز فاکتور $x-x_0$ توان $\frac{A}{(x-x_0)}+\frac{B}{(x-x_0)^n}+...+\frac{N}{(x-x_0)^n}$ وي نو ددې کرښیزو فاکتورونو له پاره پولینوم لاندې بڼه لري: $\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}$

د نورو ټولو ساده منځ ته راغلو کرښیزو فاکتورونو ټوټه کسرونه (ماتونه) په بلده بڼه ورکول کیږي.

بیلګه:

د اصلي پولینوم کسر $\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}$ لپاره په ټوټه کسر ټوټه کونه ورکړئ.

د مخرج ټوټه ونه په کرښیزو فاکتورونو:

د پولینوم $x^3-4x^2+5x-2=0$ لومړی حل $x_1=1$ د ازمایښت له لارې پیدا کیږي.

پولینوم ویش $(x^3-4x^2+4x-2):(x-1)=x^2+3x+2$ مو لاندې ټوټه کونې ته لارښودوي:

$$x^3-4x^2+4x-2=(x^2+5x-2)(x-1)$$

مساوات $x^2-3x+2=0$ دا $x_2=1$ او $x_3=2$ حلونه لري. نو له دې سره د مخرج لپاره دبل حل دی:

$$x^3-4x^2+5x-2)=(x-2)(x-1)^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټوټه کسر پیل:

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-1)}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

د ټوټه کسر جمع د غزونې له لارې:

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{A(x-1)^2+B(x-2)(x-1)+C(x-2)}{(x-2)(x-1)^2}$$

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{(A+B)x^2+(-2A-3B+C)x+(A+2B-2C)}{x^3-4x+5x-2}$$

د A,B او C صورتونو ارزښت د ضریبونو پرتله کونې له لارې.

$$A+B=3 \qquad \text{I}$$
$$-2A-3B+C=-6 \qquad \text{II}$$
$$A+2B-2C=2 \qquad \text{III}$$

د مساوات II د 2 سره ضرب او د III سره جمعه د I سره ګډ د دوه مساوات د دوه متحولو سره.

$$A+B=3 \qquad \text{I}$$
$$-3A-4B=-10 \qquad \text{II}$$

دا ضرب د 4 سره او جمعه یې د IV سره : A = 2

د A = 2 ایښوونه په I کې: $2+B=3 \Rightarrow B=1$

د A = 2 او B = 1 ایښونه په III کې: $2+2.2-2C=2 \Rightarrow C=1$

د ټوټه کونې فرمول له لارې ټوټه مسر ټوټه ونه لاس ته راځي:

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پ) اصلي پولينوم کسرونه، چې مخرج يې پوره په کرښيزو ضريبونو يا فاکتورونو نه ټوټه کيږي.

بنسټ:

که د يوه اصلي پولينوم کسر $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ مخرجپولينوم $P_n(x)$ نور په يوه حقيقی ضريب نه ټوټه کېدونکي ضريب ax²+bx+c مخ ته پروت وي، نو په ټوټه کېدو کې دې د يو ټوټه کسر $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ په بڼه کېښول شي يا راوړل شئ

بيلګه:

د پولينوم کسر $\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}$ له پاره دې په ټوټه کسر ټوټه ونه ورکړ شي.

د مخرج ټوټه کونه په کرښيزو ضريبونو:

لومړی حل دې $x_1=-1$ وي مساوات $x^3+3x^2+6x+4=0$ د ازماېښت له لارې پيدا کيږي.

بولينوم وېش $(x^3+3x^2+6x+4):(x+1)=x^2+2x+4$ مو لاندې ټوټه کونې ته بيايي:

$$x^3+3x^2+6x+4=(x+1)(x^2+2x+4)$$

دا چې مساوات x^2+2x+4 حقيقي حل نه لري، نو د حقيقي اعدادو په ورشو کې نوره ټوټه کونه ناشونې ده.

نو له دې امله پولينوم کسر لاندې بڼه لري: $\frac{Ax}{x^2+2x+4}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\frac{c}{x+1}$ بڼي کسر سره يوځاي مو لاندې ټوټە کسر ټوټە کوني تە بيايي:

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{Ax+B}{x^2+2x+4}+\frac{C}{x+1}$$

د غزوني لە لارې د ټوټە کسرونو جمع

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{(Ax+B)(x+1)+C(x^2+2x+4)}{x^3+3x^2+6x+4}$$

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{(A+C)x^2+(A+B+2C)x+(B+4C)}{x^3+3x^2+6x+4}$$

د ضريبونو A,B,C ټاکنە د پرتلە کولو لە لارې:

I A+C = 5

II A + B + 2C = 8

III B + 4C = 9

د III کمښت (تفريق) لە مساوات II څخە د I سره يې گدولو څخە مساوات لاس تە راځي، چې دوه اووښتوني يا متحولې لري:

IV A − 2C = 5

I A + C = 5

مساواتIII منفي مساواتII : $-3C=-6\Rightarrow C=2$

د C = 2 پە I ائښوولو سره : $A+4.2=9\Rightarrow B=1$

د C = 2 پە III ايښوولو سره: $B+4.2=9\Rightarrow B=1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که دا د ټوټه کوني فرمول کې کېږدو نو د ټوټهکسر ټوټه کونه لاس ته راځي

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{3x+1}{x^2+2x+4}+\frac{2}{x+1}$$

ج) نا اصلي پولينوم کسرونه:

که د يوه پولينوم $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ د صورت درجه د پولينوم د مخرج له درجې څخه لويه وي، نو دا په پولينوميش له لارې په ټولناطق کسر او يوه اصلي کسر ټوټه کېدی شي.

بيلګه:

کسري پولينوم $\frac{3x^3-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8}$ په ټوټه کسري پولينومونو ټوټه کړئ .

د پولينوم د صورت درجه درې ده او د مخرج دوه . نو له دې امله مو يو نا اصلي پولينومکسر مخ ته پروت دئ.

پولينوم وېش:

$$(3x^3-6x^2-20x-1):\ (x^2-2x-8)=3x+\frac{4x-1}{x^2-2x-8}$$

$$\frac{-(3x^3-6x^2-24x)}{4x-1}$$

د پاتې – يا باقي کسر $\frac{4x-1}{x^2-2x-8}$ له پاره د ټوټه کسر ټوټه کوني کارونه (عمليه) مخ ته بيايو.مخرج په کرښيزو ضربيونو ټوټه کړی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مساوات x² - 2x -8 = 0 له پاره حل $x_1 = -2$ او $x_2 = 4$ لرو.

نو $x^2 - 2x - 8 = (x-4)(x+2)$ دی.

د ټوټه کسر ټوټه کونې لپاره ځای په ځاي کوو:

$$\frac{4x-1}{x^2-2x-8} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+2}$$

د غزونې له لارې د ټوټه کسرونو جمعه کول:

$$\frac{4x-1}{x^2-2x-8} = \frac{A(x+2)+B(x-4)}{(x-4)(x+2)}$$

$$\frac{4x-1}{x^2-2x-8} = \frac{(A+B)x+(2A-4B)}{x^2-2x-8}$$

د ضريبونو د پرتله کوونې په مرسته د A او B ټاکل:

$$A+B=4 \qquad \text{I}$$

$$2A-4B=4 \qquad \text{II}$$

د I ضرب له 2 سره او له II څخه يې تفريق يا کول $6B = 9 \Rightarrow B = \frac{3}{2}$

په II کې اېښوول: $2A - 4\frac{3}{2} = -1 \Rightarrow A = \frac{5}{2}$

منځنی لاس ته راوړنه $\frac{4x-1}{x^2-2x-8} = \frac{5}{2(x-4)} + \frac{3}{(2(x+2)}$

متحول (ښتونکی) په ټوټه کسر ټوټه کونه لاندې بڼه غوره کوي:

$$\frac{3x^3-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8} = 3x + \frac{5}{2(x-4)} + \frac{3}{2(x+2)}$$

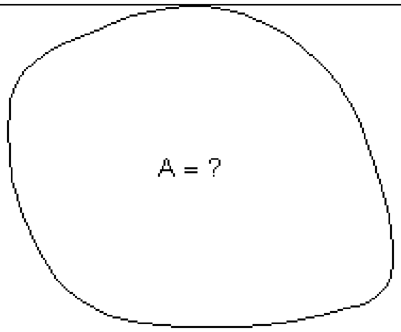
(c) ketabton.com: The Digital Library

د انتیګرالشمیرنه

د انتیګرالشمیرنې لپاره پیل راوړنې

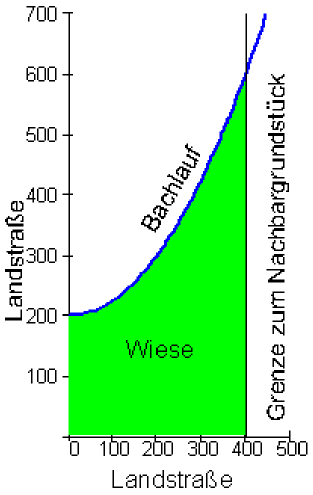
موږ د ځمککچپوهنې یا هندسې له لارې بلد یو چې د کرښو رابند تنونو یا جسمونوسطحه او ډکی یا حجم څنګه وشمیرو.
که یوه سطحه له ګرڅ(-کرښې) رابنده وي، نو څه باید وشي؟
دا مو انتیګرال شمېرنې ته رابولې.

پخوانیو یونانیانو ته دا د منحنې څخه رابندې سطحې شمیرلو اصول معلوم وو.
دا دمشتق شمیرنه، چې موږ ورسره اوس سر او کار لرو، ډېر وروسته (د اوه لسمې پیړۍپای کې) د طبیعي علومو پوهانو لایبنیڅ او نیوټون له خوا رامنځ ته (اختراع) شو.



پیلبیلګه

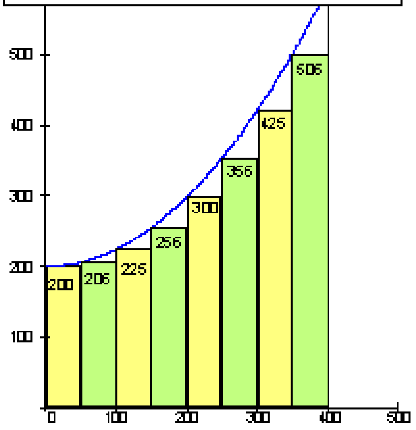
(c) ketabton.com: The Digital Library

دا ښيراه شوى چمن خرڅيږي. له پورته لور د ويالې را بند دى او له ښي لور د ګاونډي ځمکه ده او کيڼ لور ته کوڅه او له کښته لور هم د يوې کوڅې را بند دى. ددى لپاره چي چمن وپلورل شي، بايد سطحه وپېژندل شي. د پلورونکى لپاره سطحه بايد نږدي پوره مګر هيڅکله کمه ونه شمېرل شي. اخستونکى هم د ځان لپاره فکر کوي، چي پيسي بايد ورکړي، خو هيڅکله ځمکه د اصل ښخه زيات ونه شمېرل شو.	

وروسته له دې چي رانيوونکي او پلورونکي د چمن سطحه معلومه کړه، دواړه د پيسو په تاديه سره يوځاى کيږي او په دې هکله موافقه کوي.

ويالہ $f(x)=\frac{1}{400}x^2+200$ د تابع مساوات لري.

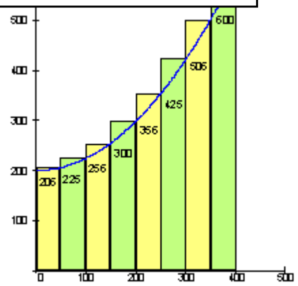
د اخستونکي له پاره ممکنه حل.

هره ټوټه(مستطيل پټى) 50m سره وره ده او په رسم کي ورکړشوى جګوالى لري. د ټولو پټيو، سطحه يو ځاى شميرو. $200\cdot50=10000$ $206\cdot50=10300$ $225\cdot50=11250$ $256\cdot50=12800$ $300\cdot50=15000$ $256\cdot50=12800$ $425\cdot50=21250$ $506\cdot50=25300$ $\underline{123700}$	ځمکه په لاندې ډول په اوږدو ټوټو(پټيو) ټوټه کيږي د اوږدوالي واحد(يوون)په m 

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اخستونکي لپاره ټوله سطحه نژدې $123700\ m^2$ ده.

د پلورونکي له پاره ممکنه حل:

هره ټوټه(پټی) 50m سورلري او په رسم کې ورکړشوی جګوالی لري. د ټولو پټیو سطحه یوځای شمیرو. $206 \cdot 50 = 10300$ $225 \cdot 50 = 11250$ $256 \cdot 50 = 12800$ $300 \cdot 50 = 15000$ $356 \cdot 50 = 12800$ $425 \cdot 50 = 21250$ $506 \cdot 50 = 25300$ $600 \cdot 50 = 30000$ $\underline{143700}$	د اوږدوالي واحد(یوون)په m 

د د پلورونکي له پاره د ټولي سطحي مساحت نږدې $143700\ m^2$ دی.
اخستونکی او پلورونکی باید د دواړو قېمتونو ،،منځ،، ته راشي، دا په دې معنا چې دواړه د قېمتونو منځ ارزښت یو بل سره ومني. یعنې د سطحي منځ ارزښت، چې دی:

$$\frac{123700+143700}{2}=133700unt^2$$

دا به وروسته د ټاکلي انتیګرال برخه (په مخ) کې وشمېرو، چې رېښتونی ارزښت یې $133333.\bar{3}m^2$ دی.
د اخستونکي په بېلګه کې دا ډول شمېرنه **لاندنی** ،،**جمعي جوړول**،، بلل کیږي.
د پلورونکي په بېلګه دا ډول شمېرنه،، **پورتنی جمعي**،، **جوړول** بلل کیږي.
دا د سطحې رېښتونی ارزښت یو چېرته په دا منځ کې پروت دی.
باید ددې له پاره یوه لار پیدا کړو، چې رښتونی ارزښت ترې لاس ته راشي. ددې کار لپاره لږ نوره د چمتووالي لار شته.

انتیګرالشمیرنه Integralcalculation

(c) ketabton.com: The Digital Library

د سطحې تابع له پاره تر مخ راوړنه: دا دانتيګرال هندسي مفهوم هم دئ. په کارتيزي وضعيه قيمت سيستم کې د ګراف په سرچينه کې يوه کرښه رسموو. غواړو سطحه پيداکړو، چې د تابع دګراف او x - محور ترمنځ د x په واکوالي کې پرته وي(د x تابع وي).

د ريمن (ټاکلی) انتګرال

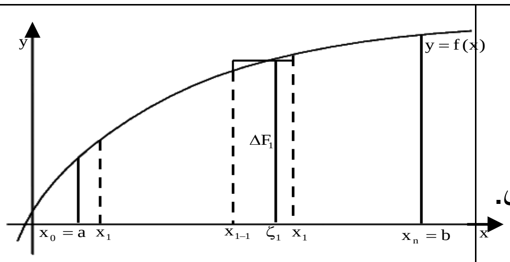
يادونه: انتيګرال څه شی دی؟

آنتېګرال کونه Integration د ورګډېدلو په معنی دی ، لکه چې يو څوک يوې پردئ ټولنې ته ورګډيږي يعنې ددې پردئ ټولنې خويونه خپلوي، يعنې دی په دې ټولنه ورزياتيږي. دا هم په همدې موخه دلته دا موضوع څېړلو ته وړاندې کيږي، چې څنګه د يوې کوچنی درجې تابع و يوه جګ درجې فنکشن يا تابع ته ځي.

د انتيګرال هندسي تعريف: لوريزه سطحه-د انتيګرال تعريف:که يوه f تابع ولرو، نو دx محور او تابع ترمنځ سطحې شمېرل د انتيګرال له لارې کيږي. په دې سطحه کې د x محور پورته لورې ته سطحه مثبته مخنخښه لري او د x محور کښته لورې ته سطحه منفي مخنخښخ لري.
تحليلي تعريف: تعريف: د f يوه تابع ورکړ شوې، چې په يوه انتروال [a,b] باندې تعريف دی، نو دa څخه تر b پورې د تابع د انتيګرال څخه د x په محور د f د ګراف او د کرښې x=aاو x=b تر منځ يوه يوه لوريزه سطحه پوهيږو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې برخه کې غوارړو، چې د انتګرال کلیمې ته وده ورکړو. د سطحې کچونې یا اندازه کوونې څخه کړی شو د انتګرال شمېرنې ته راشو، له دې امله انتګرالنیول د مشتق په څېر یا برعکس کارونه یا عملیه ده.



یو تابع $y = f(x)$ لرو. غواړو ددې تابع د ګراف او د x – محور باندې پرتو ټکو $x_0 = a$ او $x_n = b$ ترمنځ هواره (سطحه) وشمېرو داسې چې $f(x)>0$ وي. (څېره ۱ . ۱)

ددې دندې د حل لپاره د [a,b] اینتروال په n (نه اړیین) برابرو برخو انتروالونو $[x_{i-1}, x_i]$ټوټه کوو.

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_{i-1} x_i < ... < x_n = b$$
$$x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$$

په اینتروال $[x_{i-1}, x_i]$ کې په خوښه $\xi_l \in [x_{i-1}, x_i]$ ټاکو.

د $x = x_{i-1}, x = x_i, y = f(x)$ تر منځ سطحه (هواره) دا لاندې د مستطیل سطحه (و لاړکونجیزه هواره) ده:

$$\Delta F_i(x) = f(\xi_l).\Delta x_i \ , \qquad (4.2)$$

د ټولو پورته مستطیل ډوله کوچنیو سطحو د جمعې (زیاتون) له لارې غوښتونکې، نزدې ټوله سطحه لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$F_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta F_i = \sum f\ (\xi) \Delta x_i\ ;..............................(4,2)$$

دا نږدیوالی تر هغي ښه کیږي ځومره چی د اینټروال [a , b] ویش نری شي یعني $\max \Delta x \to 0$، هرځومره چی د زیاتیدونکو شمیر ($n \to \infty$) شي.

که (٤ . ٢) تل همغه پوله ارزښت F ولري، په دې اړه نه چی اینټروال [a , b]ځنګه ویشل شوی

او $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ځنګه ټاکل شوي، نو f (x) په اینټروال [a,b] کی اینتیګرالوړ دی. دا د بیلګي په

توګه د ټولو ټوټه، متمادی او محدودو توابعو y = f (x) حالت دی .

پیژند (تعریف) ٤ . ١ : لیمیټ   (پوله)
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\ (\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f\ (x) dx = F; (\Delta x \to 0),........(4,3)$$
که په اینټروال [a , b] کی موجود وي، نو دا د f (x) ټاکلی اینټیګرال بولو، یا د ریمن سطحه
F- Riemann . دلته a د اینټیګرال کېدونکي لاندې(کښته)پوله یا حد او b د ایتیګرال کېدونکي پورته پوله یا حد بلل کیږي او [a,b] د ایتیګرال کېدونکي اینټروال او((f (x (Integrandاینټیګرالېدونکی) او dx اینټیګرال کېدونکي متحول (Integrationsvariable) بلل کیږي

یادونه ۱ : د ایتیګریشن واریابله یا اووښتونی کیدی شي په خپله خوښه په نخښه شي(مخنخښه یا علامه یی په خوښه وټاکل شي).

(c) ketabton.com: The Digital Library

موږ لرو: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du$

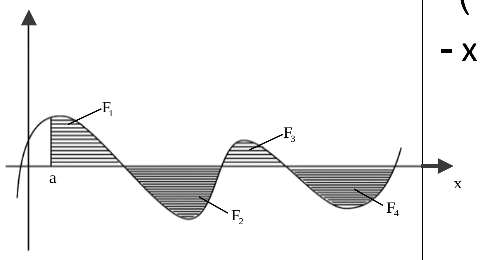
یادونه ۲ : دا پورته تعریف ٤ . ۱ کیدی شي هغه حالت ته پراخه شي، چیرته چی f (x) > 0 باوري نه وي .

که f (x) < 0 وي نو دا ټاکلی اینتیګرال بیا د x -محور تر لاندې منفي هواره لري

.

که د y = f (x) کږه - لکه په)ش ٤ . ۲) کی - داینتیګرآلونې په اینتروال کی د x -محور پرې کړي نو دا مخامخ فرمول د لاندې سطې سره باور لري :

$F = F_1 - F_2 + F_3 - F_4 \ldots$



د تعریف ٤ . ۱ پسې تړلې دا لاندې جمله لرو:

جمله٤ .۱ : که f (x) په [a , b] کې اینتیګرالوړ وي او $c \in [a,b]$ وي، نو باور لري:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

ددې لپاره چی دا پورته مساوات د c ارزښتونو ته پراخه کړی شو، بایدc له اینتروال [a,b]د باندې نه وي پروت، یعنې ټکي a,b او c په یوه اینتروال کی باید پراته وي، په هغه کی چی تابع f (x) اینتیګرالوړ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

موږ دا لاندې تعریف(پېژند) لرو :

پېژند یا تعریف ٤ . ٢ : f (x) په یوه بند انتروال[a, b] کې اینتیګرالوړ دی، نو باور لري:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

د پېژند تعریف ٤ . ١ له مخې تل باور لري: $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

بنسټیز- یا لومړنی تابع

ددې لپاره چې د مشتقنیولو او اینتیګرال نیولو ترمنځ اړیکی لاس ته راوړو، د لومړنی تابع کلمه په لاندې توګه تعریفوو:

پېژند (تعریف): تابع y = f (x) دې په یوه واز اینتروال I کی تعریف وي. هر یوه هلته موجوده مشتقوړ F (x) تابع چې F' (x) = f (x) شرایط پوره کړي، د f (x) بنسټیز- ، ساده – یا لومړنی تابع بلل کیږي

په ساده توګه لیدل کیږي چې د یوې f (x) تابع لپاره نه یواځي یو بنسټیز تابع F (x) موجود دی، د بیلګې په توګه $F_0(x) = x^2,\ F_1(x) = x^2 + 1,\ F_2(x) = x^2 + 2$ تابع، بلکي په عمومي ډول

$F(x) = x^2 + C$، چې دا ټول مساوي مشتقونه $f(x) = 2x$ لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پورته ښوونو پایله، چې څنګه سرې د یوه متمادي تابع f (x) لومړنۍتابع پیدا کوي، په لاندې ډول ده:

جمله:

y = f (x) دې په اینټروال I کې متمادي تابع وي، نو د a ∈ I لپاره

$F_a(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ د f (x)، یوه لومړنۍتابع ده، دټولو $c \in I$ لپاره .

د f (x) هره بله لومړنۍ(بنسټیزه) تابع لاندې بڼه لري:

$F(x)=F_a(x)+C,\ C\in R$

ځواب :

ښایو چې (Fa (x د f (x) بنسټیز تابع ده. ددې د ښوولو لپاره ښایو چې د Fa (x) لپاره د پورته پېژند شرایط باور لري. د Fa (x) مشتق د x ∈ I او x ≠ a لپاره په لاندې ډول ده.

$$F_a^{'}(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F_a(x+h)-F_a(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\left[\int_a^{x+h} f(t)dt-\int_a^{x} f(t)dt\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\int_a^{x+h} f(t)dt$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot h\cdot f(\xi),\ \ \xi\in[x,x+h]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(د ليميټ منځ ارزښت جملې له مخې داسې يوه ξ شته دی

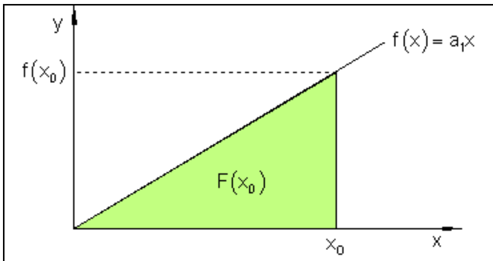
(د متماديت له امله $\left(f(\xi) \to f(x)\right)$

$= f(x)$

سطحه او لومړنی تابع:

سطحي تابع ته ترمخ راوړنه:

د تابع $f(x) = a_1 x$ ګراف په کارتيزي وضعيه سيستم (پروت ولاړسيستم) په سرچينه کې يوه کرښه انځوروي.
يو تابع غواړو پيدا کړو، چې د ګراف او x -محور ترمنځ، د x_0 په واکوالي يا تابعيت کې سطحه په ګوته کوي.
دا چې دا جوړه شوې سطحه يو مثلث دی، نو حل يې د مثلث د سطحې فرمول په مرسته $A = \dfrac{g \cdot h}{2}$ ساده پيدا کيږي:
زموږ د مسألې لپاره متحوله داسې تغيروو:
$A \to F(x_0);\ g \to x_0;\ h \to f(x_0) = a_1 x_0$



$$F(x_0) = \frac{x_0 \cdot f(x_0)}{2}$$

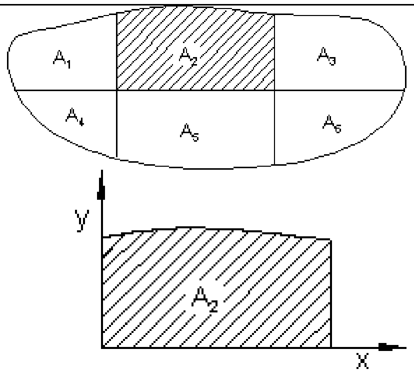
د $f(x_0) = a_1 x_0$ سره په لاندې ډول دی:

$$F(x_0) = \frac{x_0 \cdot a_1 x_0}{2} = \frac{a_1}{2} x_0^2$$

تابع $F(x_0)$ د ګراف او د x - محور ترمنځ سطحه د x_0 په واکوالي(تابعيت) کې تشريح کوي يا ښايي. موږ دا تابع د **سطحي تابع** بولو.

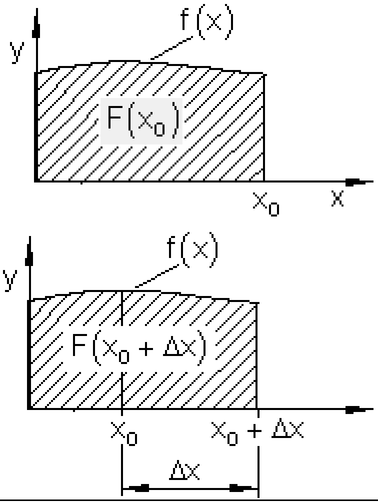
د سطحي پرابلم:

هره له کږوکرښو رابنده سطحه په پای ډېرو پلونو(قدمونو)، چې په هغې کې فقط يوه يوه کږه کرښه رامنځ ته کيږي.
نورې ټولې رابندونې سيده کرښيزې دي.
هره يوه د سطحې برخه(د بېلګې په توګه دلته **A2**) کېدی شي د وضعيه قيمتونو سيستم کې د يوې سطحې په څېر انځور شي، چې د کږې کرښې او پروت محور ترمنځ پرته وي.

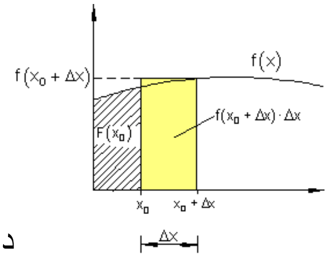


(c) ketabton.com: The Digital Library

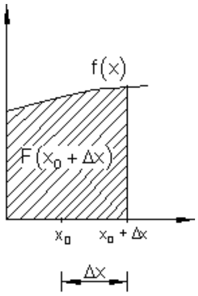
که له کږوکربنو رابند ګراف د f(x) متمادي تابع وي، نو پوښتنه رامنځ ته کيږي، چې ايا يو تابع شته چې د افقي(پروت) محورارزښت x_0 په سطحه $F(x_0)$ تنظيم کړي، لکه په پيلبيږلګه کې؟
که داسي يو تابعF شتون ولري، او سطحه $F(x_0)$ چې د x_0 افقي محورارزښت تنظيم وي، نو بايد د افقي(پروت) محور ارزښت $(x_0+\Delta x)$ په سطحه $F(x_0+\Delta x)$ باندې تنظيم کړای شي.



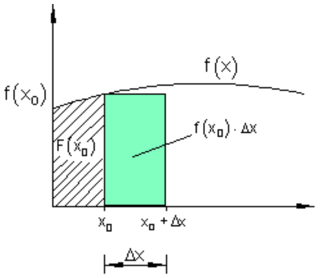
په يوه څلورضلعي(مستطيل) کې د سطحي رابندول:



د منحني لاندې په نخښه شوې سطحه د رښتوني سطحې څخه لويه ده



$F(x_0+\Delta x)$ ريښتوني سطحه ده.



د منحني لاندې په نخښه شوې سطحه له ريښتوني سطحې څخه کوچنۍ ده.

که د سطحې پټې (يا کوچني مستطيلونه يا ولاړکوديز)هرڅومره کوچني شي، په همغه اندازه د اصلي سطحې د مساحت څخه يې توپير کميږي.
دا اړودوالی د رياضياتو له مخې په لاندې توګه فرمول بندي کېدی شي:

$F(x_0)+f(x_0+\Delta x)\cdot\Delta x$	$F(x_0+\Delta x)$	$F(x_0)+f(x_0)\cdot\Delta x$

دا مو دې لاندې نابرابرونونويا نامساواتو ته راهڅوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$F(x_0)+f(x_0)\cdot\Delta x \le F(x_0+\Delta x) \le F(x_0)+f(x_0+\Delta x)\cdot\Delta x \quad | F(x_0)$$
$$\Leftrightarrow f(x_0)\cdot\Delta x \le F(x_0+\Delta x)-F(x_0) \le f(x_0+\Delta x)\cdot\Delta x \quad |: \Delta x$$
$$\Leftrightarrow f(x_0) \le \frac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0)}{\Delta x} \le f(x_0+\Delta x)$$

لیمیټ یې نیسو(پوله یې پیدا کوو):

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x_0) \le \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \le \lim_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x)$$
$$f(x_0) \le F'(x_0) \le f(x_0)$$
$$f(x_0) \le F'(x_0) = f(x_0)$$

نو لرو: $\underline{\underline{F'(x_0)=f(x_0)}}$

دا په دې معنا، چې د سطحې $F(x)$ مشتق د کړې کرښې د تابع ارزښت $f(x_0)$ سره په x_0 ځای کې برابر دی.
موږ لیکو:

$$\boxed{F'(x)=\frac{dF(x)}{dx}=f(x)} \quad \text{یا} \quad F'(x_0)=\frac{dF(x_0)}{dx}=f(x_0)$$

که موږ بریالي شو، داسې یو تابع $F(x)$ پیداکړو چې مشتق یې د رابندې کړې $f(x)$تابع وي، نو $F(x)$ د سطحې تابع دی.
که موږ یو تابع د لومړني تابع څخه رابیل کړو، نو دا مشتق کول بولو. د یوې سطحې تابع پیدا کول په روښانه توګه ددې کړنلارې برعکس دی.

سړی کړی شي فورمال ووایي:
د یوې سطحې مساحت تابع، چې پیداکړو، دا معنا لري چې ورګډول یا انتېګرالول یې شمېرو.
د یوه ساده توان تابع په بېلګه د احساس له مخې یوه لار پیداکیدی شي، چې دا څنګه ایتېګرالوي.

توانتابع :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=x^3 \quad \Rightarrow f'(x)=3\cdot x^{3-1}=3x^2$$

مشتق په دې معنا چې: اکسپوننت په يو کميږي او پوتنښتابع د زاړه پوتنځ سره ضربيږي.
انتيګرالونه (زياتونه ياورګډونه) په دې معنا چې: اکسپوننت په يو جګيږي اوپوتنښتابع په نوي اګسپوننت وېشل کيږي.
دا همدا اوس ازمايو:

پوتنښتابع:

$$f(x)=3x^2 \quad \Rightarrow F(x)=\frac{3}{2+1}x^{2+1}=\underline{\underline{x^3}}$$

تابع F(x) د f(x) بنسټتابع (لومړنۍ تابع يا ساده تابع) بلل کيږي، ځکه چې f(x) له F(x) څخه لاس ته ارځي يا را پيداکيږي يا راځيږي.

ناټاکلی انتیګرال

و به ګورو، چې نا ټاکلی انتيګرال د لومړنۍ تابع لپاره بل نوم دی.

که ديوې ورکړ شوې f(x) تابع F(x) لومړنۍ تابع، يعنې F(x) وپېژنو، نو د يوې ثابتې c د ور جمع کولوسره د f(x) د ټولو لومړنيو توابعو سټ G لاسته راوړو(c په خوښه يو حقيقي عدد دی).
موږ د f(x) تابع د F(x) لومړنۍ تابع ټاکنه يا اينتګرلونه هم بولو او ددې له پاره ليکو:

$$\frac{dF}{dx}=f(x) \quad \Leftrightarrow \quad dF(x)=f(x)dx \quad \Leftrightarrow \quad F(x)=\int dF(x)=\int f(x)dx$$

نو لرو : $F(x)=\int f(x)\,dx$

دا تراوسه فورمال ليکندود وو. اوس دا ژوند ته رابولو.
موږ لومړنۍ توابع پلټو

بيلګه:
لومړنۍ تابع F(x) دې پيدا شي، چې مشتق يې f(x) = 2x دی.
قاعده داسې ده $F(x)=\int f(x)dx=\int 2x\,dx$

(c) ketabton.com: The Digital Library

موږ ازمايو:

$F(x) = x^2$ ځکه چې $F'(x) = 2x = f(x)$

$F(x) = x^2 + 2$ ځکه چې $F'(x) = 2x = f(x)$. په ټوليزه توګه باور لري:

$F(x) = x^2 + C$ ځکه چې په هرحالت کې لرو: $F'(x) = 2x = f(x)$

دواړه توابع په ثابت غړي کې يو له بل توپير لري. دوی همغه مشتق لري، ځکه چې د مشتق سره
هغه ثابت عدد له منځه ځي. له دې امله بايد دې خپلې لار ته تغير ورکړو.

قاعده(لار): باور لري: $\int f(x)dx = F(x) + C$

د لومړنيو توابعو سټ(ډېری)

بيلګه ښايي، چې د تابع f(x) لپاره نه يواځې يو لومړنی تابع بلکې ناپای ډېر توابع شته، چې يواځې ثابت عدد کې يو له بل سره توپېر لري، چې دا د f(x) د لومړنييو توابعو سټ بولو.

بيلګه

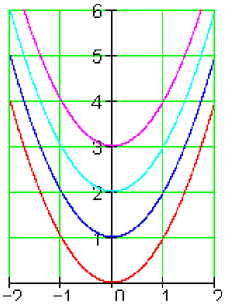
يو لومړنیتابع F(x) دې پيدا شي، چې د هغه مشتق $f(x) = 3x^2 + 2$ وي.

$F(x) = x^3 + 2x + C$ ، ځکه چې $F'(x) = 3x^2 + 2 = f(x)$

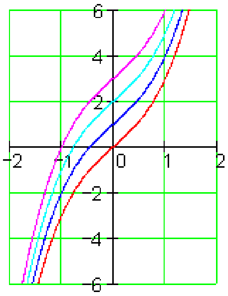
د ټولو لومړنيو توابعو ډېری دې د منحنيو ډلې په ځېر انځور شي، چې فقط ثابتو عددونو کې يو له بل توپېر لري.

ددې لپاره دې د ګرافونو لاندې دوه بېلګې وکتل شي.

$F(x) = x^2 + C$



$F(x) = x^3 + 2x + C$



(c) ketabton.com: The Digital Library

انتيګرالشمېرنه د مشتقشمېرنې برعکس دی.

لاندې توابع په اړونده توګه په ،، برعکس مشتقولو،، له لارې. موږ د مخه ځنې انتيګرال قاعدې لوستلې.

لکه چې ومو ليدل دواړه تمرينونه د همغه تيپ او اصولو له لارې اجرا کيږي، خو يواځې ليکنه يې توپير لري

دويم(لاتين) د سطحې د شمېرلو لپاره د مشتق او انتيګرال اصلي جملې ته ګوته نيسو.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = \left|F(b) - F(a)\right|$$

د يوې ساده بيلګې له لارې د اصلي جملې په مرسته دا سې مخ ته ځو

تمرين (چا چې ډېر کار کوی وي) شوی ليدونکی ګوري يا پيژني، چې د سطحې مساحت په دې بيلګه کې بې له مطلق ارزښت شميرل کېدای شي.، ځکه چې په دې بيلګه کې سطحه د x- محور پورته لور ته پرته ده .

د دې درس تکميل – يا *پوره کيدنې لپاره بيلګې.

1 . ټول تام کسري تابع د x -محور او د کرښو x = -2 او x = 1 سره يوه سطحه پوره رابندوي يا راتړي. د سطحې مساحت وشميرئ.

$$f(x) = 2x^3 + 2x^2 - x + 6$$
$$a = -2\ ,\ \ b = 1$$

2 . د دوه توابعو *f(x)* او *F(x)* مساوات ورکړ شوي دي (الف) صفرځايونه وشمېرئ او د *f(x)* ګراف وکاږئ. (ب) وښايئ، چې *F(x)* د *f(x)* لومړنی تابع دی. (پ) د *f(x)* اوx - محور ځخه پوره رابندې سطحې مساحت وشميرئ.

:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = 3e^{-x} \cdot (2x - x^2 + 1)$$
$$F(x) = 3 \cdot (x^2 - 1) \cdot e^{-x}$$

3 . د ٤ – مې درجې تامراشنل تابع د x- محور په درې ټکو کې غوڅوي او د هغې سره یوه سطحه مکمله رابندوي. د سطحې مطلقه مساحت وښایئ.

$$f(x) = x^2 \cdot (x+1) \cdot (x+3)$$

٤ . د *f(x)* مثلثاتي تابع د -محور د a اوb ټکو او همداسر نورو ټکو کې غوڅوي. د *f(x)* او x -محور تر منځ د x=a تر x=b په انتروال کې د سطحې مساحت وشمېرئ.

$$f(x) = \sin 2x + \cos x$$
$$a = -\frac{\pi}{6} \;,\;\; b = \frac{3}{2}\pi$$

5 . دوه تامراشنل توابع *f(x)* او *g(x)* په ټکو A, B او C کې غوڅوي. (الف) د شي حالت رسم کړئ. (ب) د سطحو مساحت د *f(x)* او *g(x)* ترمنځ له x=a څخه تر x=b انتروال کې وشمېرئ.

$$f(x) = x^3 + \tfrac{5}{4}x^2 - \tfrac{7}{4}x - \tfrac{1}{2}$$
$$g(x) = 2x^2 + 2x - 4$$
$$A(a;0) \;,\;\; B(b;0)$$

6 . د وضعیه قبمتسیستم په لومړئ او دویمه څلورمه(ربع) کې تابع *f(x)* او *g(x)* تابع ټیک په دوه ټکو کې غوڅوي. (الف) غوڅټکي یې وښایاست او انځور یې وکاږئ. (ب) د دواړو ګرافونو څخه کوم د سطحې مساحت رابندیږي.

$$f(x) = x + \frac{1}{x+1} \quad (x \neq -1)$$
$$g(x) = 3\tfrac{1}{4}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

7 . د دوه توابعو $f(x)$ او $F(x)$ مساوات ورکړل شوي دي. (الف) صفرځایونه یي وشمېرئ او د $f(x)$ ګراف وکاږئ. (ب) وښایئ، چې $F(x)$ د $f(x)$ لومړی تابع دی.

(پ) د سطحي مساحت وشمېرئ، چې د $f(x)$ له ګراف د وضعیه سیستم له محورونو او د کرښې x=4 خخه رابنده وي.

$$f(x)=\frac{x^2+2x-1}{x^2+2x+1}$$
$$F(x)=\frac{x^2+1}{x+1}$$

8 . کسري راشنل تابع د -محور ، کرښې او کرښې سره په دریمه څلورمه(ربع) یوه سطحه رابندوي.

د دې کچ عدد وښایئ.

$$f(x)=\frac{x^3+x^2+2x}{4x-2}=\tfrac{1}{4}x^2+\tfrac{3}{8}x+\tfrac{11}{16}+\frac{11}{32x-16}$$

حلونه.

$$F(x)=\tfrac{1}{4}x^4-\tfrac{4}{3}x^3+2x+c$$
$$G(x)=\tfrac{1}{20}x^5-\tfrac{1}{2}x^4+\tfrac{4}{3}x^3+c$$
$$H(x)=\frac{1}{3}a\cdot x^3-\frac{x^2}{6}+x+c$$
$$K(x)=\tfrac{1}{2}x^4-4x^2+c$$
$$L(x)=\frac{x^5}{10}+\frac{2}{9}x^3-4x+c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۲ -

$$\int f(x)\,dx = x^2 + \tfrac{1}{4}e^{4x} + c$$

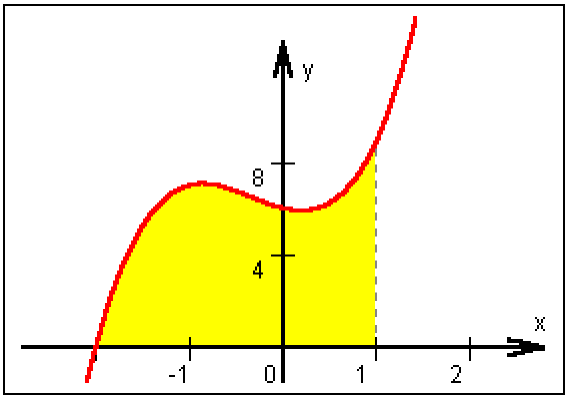
$$\int g(x)\,dx = \tfrac{1}{2}e^{x} - \tfrac{1}{2}e^{0,5x} + c$$

$$\int h(x)\,dx = \tfrac{1}{2}x^2 + 2x - 2\ln|x| + c$$

$$\int k(x)\,dx = -\cos x + \tfrac{1}{2}\sin 2x + c$$

$$\int l(x)\,dx = 2\sqrt{x^3} + c$$

۲ . ۱ –



$$A = \int_{-2}^{1}\left(2x^3 + 2x^2 - x + 6\right)\cdot dx$$

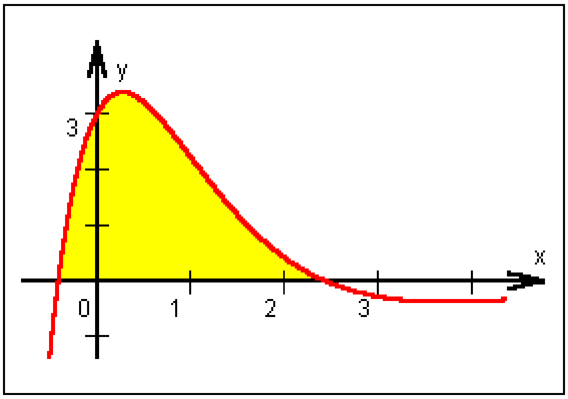
$$= \left[\tfrac{1}{2}x^4 + \tfrac{2}{3}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 + 6x\right]_{-2}^{+1}$$

$$= \left|6\tfrac{2}{3} - \left(-11\tfrac{1}{3}\right)\right| = \underline{\underline{18FE}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

٢ : ٢ –



$$F'(x) = f(x)$$

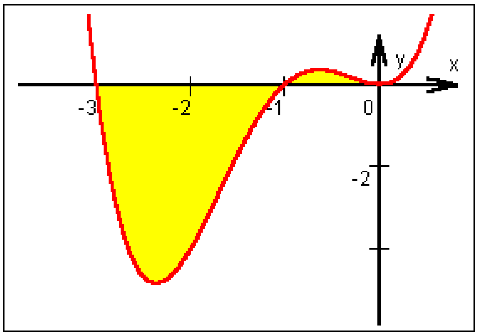
$$F'(x) = 3\cdot 2x\cdot e^{-x} + 3\left(x^2-1\right)\cdot e^{-x}\cdot(-1)$$

$$= 3e^{-x}\cdot\left(2x-\left(x^2-1\right)\right) = f(x)$$

$$A = \int_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}} f(x)\cdot dx = \left[F(x)\right]_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}}$$

$$A = \left[3\cdot\left(x^2-1\right)\cdot e^{-x}\right]_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}}$$

$$A \approx \left|1{,}30-(-3{,}76)\right| = \underline{\underline{5{,}06\,FE}}$$



٢ : ٣

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x^2 \cdot (x+1)\cdot(x+3) = x^4 + 4x^3 + 3x^2$$

$$A = \int_{-3}^{-1} \left(x^4 + 4x^3 + 3x^2\right)\cdot dx + \int_{-1}^{0} \left(x^4 + 4x^3 + 3x^2\right)\cdot dx$$

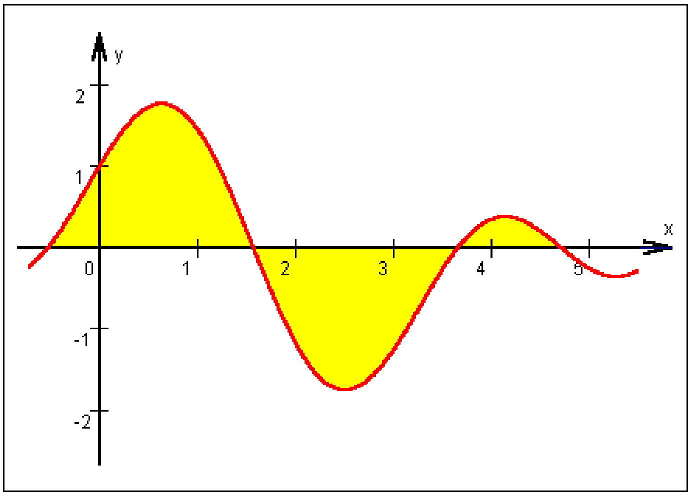
$$A = \left[\tfrac{1}{5}x^5 + x^4 + x^3\right]_{-3}^{-1} + \left[\tfrac{1}{5}x^5 + x^4 + x^3\right]_{-1}^{0}$$

$$A = \left|-0{,}2 - 5{,}4\right| + \left|0 - (-0{,}2)\right| = \underline{\underline{5{,}8\,FE}}$$

۲ . ٤ ـ

$$f(x) = \sin 2x + \cos x$$
$$= 2\sin x \cdot \cos x + \cos x$$
$$= \cos x \cdot (2\sin x + 1)$$

$$0 = \cos x \;\rightarrow\; x_1 = \tfrac{1}{2}\pi\,,\; x_2 = \tfrac{3}{2}\pi$$
$$0 = 2\sin x + 1 \;\rightarrow\; x_3 = -\tfrac{1}{6}\pi\,,\; x_4 = \tfrac{7}{6}\pi$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A = \int_{x_3}^{x_1} f(x)\cdot dx + \int_{x_1}^{x_4} f(x)\cdot dx + \int_{x_4}^{x_2} f(x)\cdot dx$$

$$A = \left[-\tfrac{1}{2}\cos 2x + \sin x\right]_{x_3}^{x_1} + [\ ]_{x_1}^{x_4} + [\ ]_{x_4}^{x_2}$$

$$A = 2{,}25FE + 2{,}25FE + 0{,}25FE = \underline{\underline{4{,}75FE}}$$

۲ . ۵ ـ

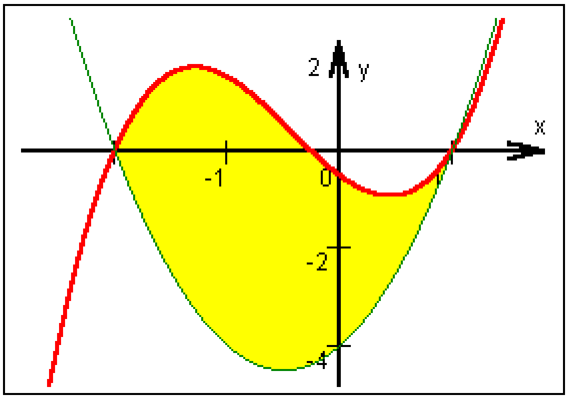
$$g(x) = 2x^2 + 2x - 4$$

$$0 = x^2 + x - 2$$

$$x_{1,2} = -\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{2{,}25}$$

$$\underline{\underline{x_1 = a = -2}}$$

$$\underline{\underline{x_2 = b = +1}}$$



$$A = \int_{-2}^{+1} \left(f(x) - g(x)\right)\cdot dx$$

$$= \int_{-2}^{+1} \left(x^3 - \tfrac{3}{4}x^2 - 3\tfrac{3}{4}x + 3\tfrac{1}{2}\right)\cdot dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \left[\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{4}x^3 - 1\tfrac{7}{8}x^2 + 3\tfrac{1}{2}x\right]_{-2}^{+1}$$

$$= \left|1\tfrac{5}{8} - \left(-8\tfrac{1}{2}\right)\right| = \underline{\underline{10\tfrac{1}{8}\ FE}}$$

۲ . ٦ –

$$x + \frac{1}{x+1} = 3\tfrac{1}{4}$$

$$\frac{x^2 + x + 1}{x+1} = 3\tfrac{1}{4}$$

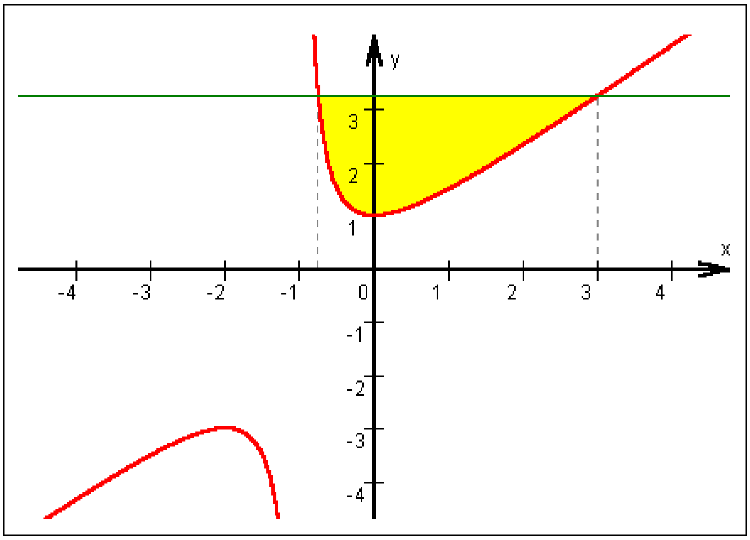
$$x^2 + x + 1 = 3\tfrac{1}{4}x + 3\tfrac{1}{4}$$

$$x^2 - 2\tfrac{1}{4}x - 2\tfrac{1}{4} = 0$$

$$x_{1,2} = \tfrac{9}{8} \pm \sqrt{\tfrac{81}{64} + \tfrac{144}{64}} = \tfrac{9}{8} \pm \tfrac{15}{8}$$

$$x_1 = a = -\tfrac{3}{4}$$

$$\underline{\underline{x_2 = b = 3}}$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A = \int_a^b \left(g(x) - f(x)\right) \cdot dx$$

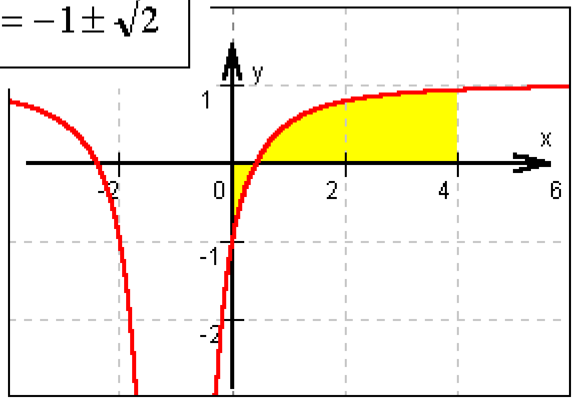
$$= \int_{-\frac{3}{4}}^{3} \left(3\tfrac{1}{4} - x - \frac{1}{x+1}\right) \cdot dx$$

$$= \left[3\tfrac{1}{4}x - \tfrac{1}{2}x^2 - \ln(x+1)\right]_{-0,75}^{+3}$$

$$\approx \left|3{,}86 - (-1{,}33)\right| = \underline{\underline{5{,}19\,FE}}$$

۲ . ۷ –

$$0 = x^2 + 2x - 1$$
$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$$



$$F'(x) = \frac{2x \cdot (x+1) - (x^2+1)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 + 2x + 1} = f(x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

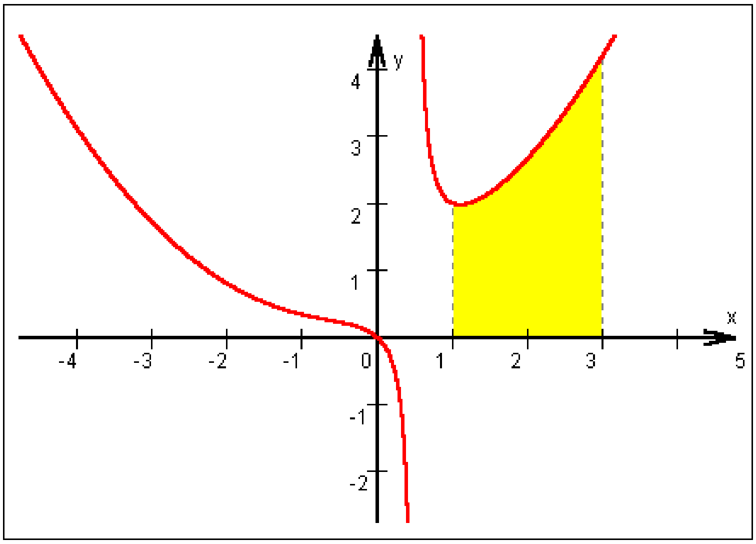
$$A=\int_{0}^{-1+\sqrt{2}} f(x)\cdot dx+\int_{-1+\sqrt{2}}^{4} f(x)\cdot dx$$

$$=\left[\frac{x^2+1}{x+1}\right]_0^{-1+\sqrt{2}}+\left[\frac{x^2+1}{x+1}\right]_{-1+\sqrt{2}}^{4}$$

$$=0{,}17\,FE+2{,}57\,FE=\underline{\underline{2{,}74\,FE}}$$

په پورته کې FE د سطحي واحد(یوون) په معنادی

۲ . ۸ _



$$A=\int_{1}^{3}\left(\tfrac{1}{4}x^2+\tfrac{3}{8}x+\tfrac{11}{16}+\frac{11}{32x-16}\right)\cdot dx$$

$$=\int_{1}^{3}\left(\tfrac{1}{4}x^2+\tfrac{3}{8}x+\tfrac{11}{16}\right)\cdot dx+\int_{1}^{3}\frac{11}{32x-16}\cdot dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A_1 = \left[\tfrac{1}{12}x^3 + \tfrac{3}{16}x^2 + \tfrac{11}{16}x\right]_1^3 = 5\,\tfrac{1}{24}\,FE$$

$$z = 32x - 16$$

$$\frac{dz}{dx} = 32 \;\Rightarrow\; dx = \tfrac{1}{32}\,dz$$

$$A_2 = \int_{16}^{80} \frac{11}{z}\cdot\tfrac{1}{32}\,dz = \tfrac{11}{32}\cdot\left[\ln z\right]_{16}^{80} \approx 0{,}55\,FE$$

$$\underline{\underline{A \approx 5{,}59\,FE}}$$

په پورته کې FE د سطحې واحد(یوون) په معنادی

بیلګه:

مشتقوړ مګر نامتمادي (پرېکیدونکی) مشتقوړ تابع:

لرو:

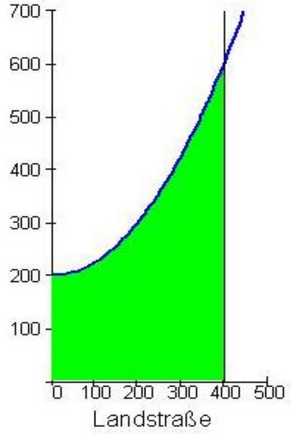
$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \\ 0 \end{cases}$	د $x \neq 0$ لپاره د $x = 0$ لپاره

نو $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{f(x)}{x} = x\,\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \to 0$ د $x \to 0$ لپاره ، له امله مشتق $f'(0) = 0$ دی. او د $\forall x \neq 0$ لرو:

$f'(x) = 2x\,\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ ، جېرې چې $\lim_{x\to 0} f'(x)$ ناشته دی. تابع f له دې امله مشتقوړ دی مګر نه ناپرېکېدونکی(متمادي) مشتقوړ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټاکلي انتیګرال شمیرنه

ټاکلی انتیګرال همغه د ریمن انتیګرال دی، چې یوه د تابع د ګراف او x محور ترمنځ سطحه شمیري(پسې غزېدلی دی، خو تکرار د زده کړې مور ده).	

ټاکلی انتیګرال:

که f یو حقیقي تابع وي، نو د ټاکل انتیګرال $\int_a^b f(x)dx$ (لوستل: د $f(x)$ انتیګرال د پولې(حد) a تر پولې(حد) b پا د a او b حدونو ترمنځ یا انتیګرال په $f(x)$ باندې له a تر b) لاندې یوه لوریزه سطحه پوهیږو د f ګراف لاندې د a او b تر منځ.

G دې په بند انتروال a ≤ x ≤ b کې د g(x) لومړنی انتیګرال وي، د $g(x) = \int_a^x f(t)dt$ سره، نو باور لري: $\int_a^t f(t)dt = G(b)$

دا چې د دوه لومړنیو توابعو F او G تر منځ یو ثابت C توپیر شته، نو G(x) = F(x) + C باور لري. د x=b لپاره لاسته راوړو: G(b) = F(b) + C

دا چې $G(x) = \int_a^a f(t)dt = 0$ دی او G(a)=F(a)+ C دی، نو C = -F(a) ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې معنا، چې G(b) = F(b) – F(a) همداسې $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$.

د متحولې د نوم بدلون څخه وروسته لاس ته راوړو $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

له دې سره مو د مشتق او انتیګرال جمله لاس ته راوړه

یا دا وینا د مشتق - او انتیګرالشمېرنې بنسټیزه جمله بلل کیږي:

تعریف: f په انتروال a ≤ x ≤ b کې متمادي تابع ده او F د f لومړنی تابع ده، نو ټاکلی انتیګرال دی :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)_a^b = F(b) - F(a).$$

د F(b) – F(a) لپاره زیات وخت $[F(x)]_a^b$ لیکو. په دې توګه دی

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$$

له دې سره مو د ټاکي انتیګرال شمېرنه په لومړني انتیګرال بېرته واړوله او د مشتق او انتیګرال تر منځ مو اړیکې رامح ته کې.

بیلګې:

$$a)\ \int_1^2 x^2dx = \left[\frac{x^3}{x}\right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

$$b)\ \int_2^4 \frac{1}{x^2}dx = \int_2^4 x^{-2}dx = \left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_2^4 = \left[-\frac{1}{x}\right]_2^4 = \frac{1}{4}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$c)\ \int_1^3 \sqrt{x}\,dx = \int_1^3 x^{\frac{1}{2}}\,dx = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right] = \frac{2}{3}[\sqrt{x^3}]_1^3(\sqrt{3^3}-\sqrt{1^3}$$

$$= \frac{2}{3}(3\sqrt{3}-1) = 2(\sqrt{3}-\frac{1}{3})$$

د ټاکلو انتیګرالونو لپاره لاندې جملې رښتیا دي:

$$\int_a^b k\cdot f(x)dx = k\cdot\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b [f(x)+g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx +$$

تکمیلیدونکي بنسټونه:

د F(b) – F(a) له امله د انتګرالونې ثابته c له منځه ځي. له دې امله کولي شو د انتیګرال ثابتي ټاکلو لپاره c=0 ولیکو.

بیلګه:

: د ټاکلي انتیګرال $\int_{-\pi}^{+0,5\pi} \cos x dx$ ارزښت و ټاکئ.

ښوونه: موږ په دا لاندې ډول ښایو:

$$\int_{-\pi}^{+0.5\pi} \cos x\,dx = [\sin x]_{-\pi}^{0.5\pi} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin(-\pi) = 1 - 0 = 1$$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه : دا چې په دې برخه کې یوازې د ټاکلي انتیګرال ارزښت غوښتل شوي دی او نه د یوې منحني لاندې سطحه، نو باید نه دی چې صفرځایونه په پام کې ونیول شي.

عوره یادونه: دادې په یاد وي، چې ناټاکلی انتیګرال تابع ده او ټاکلی انتیګرال یو عدد.

د ناټکلي انتیګرال څخه و ټاکلي انتیګرال ته

ترمخ راوړنه یا وړاندراوړنه

موږ ولیدل، چې څنګه یو تابع f(x) ته لومړنی تابع F(x) منځ ته راوړی شو، نو ناپای ډېر لومړني توابع شته دی، چې فقط د یوې ورجمع کوونکې ثابتې له امله یو له بل توپیر لري.

لرو: تابع $f(x)=3x^2+2$ او د دې د لومړنیو توابعو سټ $f(x)=x^3+2x+C$

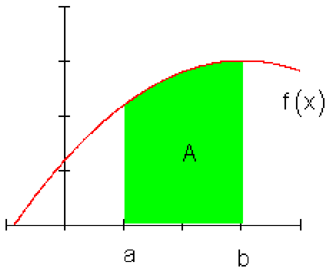
پیژند : د ټولو لومړنیو توابعو سټ و یوې تابع f(x) ته ،،ناټاکلی انتیګرال ،، بلل کیږي او ددې له پاره لیکو: $\int f(x)dx=F(x)+C$

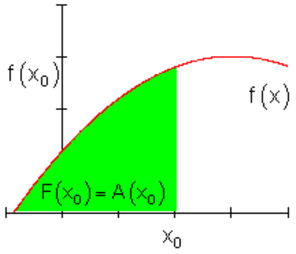
د مشتق- او انتیګرالشمېرنې ترمنځ اړیکې کېدی شي د لاندې جملې له لارې لاس ته راشي.

جمله(قضیه) : د ناټاکلی انتیګرالشمېرنه د مشتقشمېرنې برعکس انځوروي $\frac{d[f(x)]+C}{dx}=[F(x)+C]'=f(x)$

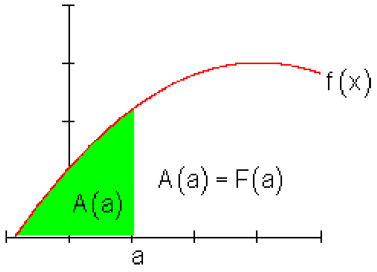
د تابع د ګراف لاندې او د انتروال [a ; b] تر منځ سطحه دې و ټاکل شي. زموږ په دې پرابلم موږ تر اوسه لاس ته راوړې زده کړې کاروو.

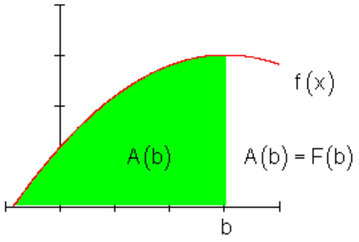
(c) ketabton.com: The Digital Library



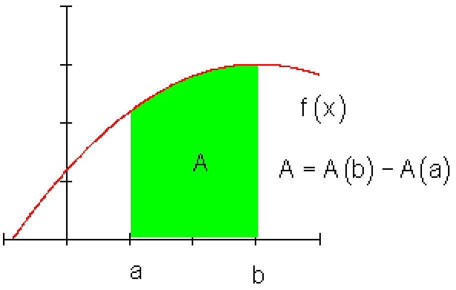


د يوې سطحې تابع شتون مو فکر دې لاندې پوهنې (زده کړې) ته لارښوده وي:
د يوې سطحې، چې د يوې په پام کې نيولې f(x) تابع گراف لاندې ده تر x_0 ځاى پورې او يوې F'(x) تابع، چې دF(x) تابع مشتق د x_0 ځاى د f تابع د تابع ارزښت سره د x_0 په ځاى کې برابر وي، ترمنځ اړيکې شته دى، يعني $F'(x)=f(x)$





د انتروال [a,b] حدونو ترمنځ سطحې پيداکول د تابع د گراف سطحو د کمښت څخه په ځاى (A(b)) b او سطحې په (A(a)) a ځاى کې ،. يعني
A= A(b) – A(a) په همدې توگه F= F(b) – F(a) لاس ته راځي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

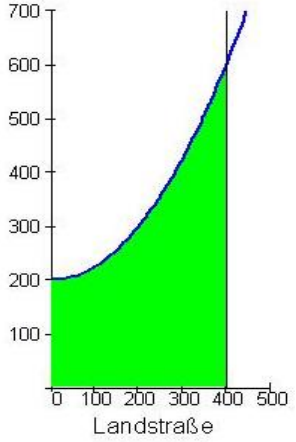
پـه انتروال [a,b] کې د تابعګراف لاندې سطحه د لومړنيو توابعو تفريق دی:

$$A = F(b) - F(a) := \int_a^b F(x)dx$$

دا انتيګرال ټاکلی انتيګرال هم بلل کيږي.

جمله :
دا تر اوسه لاس ته راوړو معلوماتو په بنسټ کړی شو، چې په پيل بېلګه کې راوړې د چمن سطحه وشمېرو.

ثابته له تفريق سره لرې کيږي. په عمل کې د دې مسآلې د حل لپاره يوه بله لار ګتوره راوستلې يا ګتوره بنوولې:



$$A = \int_0^{400} \left(\frac{1}{400} x^2 + 200 \right) dx = \frac{1}{1200} x^3 + 200 \cdot x \,|_0^{400}$$

$$= \frac{1}{1200} \cdot 400^3 + 200 \cdot 400 \left[\frac{1}{1200} 0^3 + 200 \cdot 0 \right]$$

$$= \frac{1}{1200} \cdot 400^3 + 200 \cdot 400 = \underline{\underline{133333.\bar{3}}}$$

د انتيګرالونې قاعدی

د ناټاکلي اينيګرال انتيګرالونې قاعدې: په لاندې اينتيګريشن قاعدوکي د اينتيګريشن ثابته باندې صرف نظر کيږيدلته مساوات تر يوې ورجمع شوې ثابتې C پورې مساوات دی ، په دې معنا چې دمساواتو تر منځ يواځې يوه ثابته کيدی شي زياته يا کمه وي. دا قاعده

(c) ketabton.com: The Digital Library

کیدی شي چی په ټاکلي انتیګرال کي ښوولي جملی سره سم ټاکلي ایتیګرال ته نقل شي یعني په ټاکلي ایتیګرال استعمال شي . دا قاعدې کیدی شي چی د تېرو درسونو سره سم د دواړو خواو د مشتق نیولو سره وښنول شي.

جمله :

د یوې ثابتي سره ضرب : که تابع f (x) په یوه اینتروال کی متمادي وي ، نو لاندې باور لري:

$$\int a\cdot f\ (x)\,dx = a\int f\ (x)\,dx\,, \qquad a\in R$$

جمله: د جمعې (تفریق) قاعده که $f_1(x)$ او $f_2(x)$ په یوه ایتروال کی نه پرېکېدونکي وي ، نو باور لري

$$\int (f_1(x)\pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$$

بیلګې:

لاندې ایتیګرالونه کیدی شي چی د مخ ته تېرو جملو په استعمالیدو او ساده څیره بدلون بیرته په بنسټیزو اینتیګرالونو بدلګړای شي

$$a)\quad \int \frac{dx}{3x^4} = \frac{1}{3}\int x^{-4}dx = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-3} + C = -\frac{1}{9x^3} + C,$$

$$b)\quad \int 3x^2 + 4x - 1)\,dx = 3\int x^2dx + 4\int xdx - \int dx = 3\cdot\frac{1}{3}x^3 + 4\cdot\frac{1}{2}x^2 - x + C$$

$$= x^3 + 2x^2 - x + C,$$

$$c)\quad \int \frac{2x^3 - 3x}{\sqrt{x}}dx = 2\int \frac{x^3}{\sqrt{x}}dx - 3\int \frac{x}{\sqrt{x}}dx = 2\int x^{\frac{5}{2}}dx - 3\int x^{\frac{1}{2}}dx$$

$$= 2\cdot\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} - 3\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{4}{7}x^3\cdot\sqrt{x} - 2x\cdot\sqrt{x} + C$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اکسپوننشل توابعو انتیګرالونه

بنسټ :

د طبیعي اکسپوننشل تابع $f(x)=e^x$ لپاره لرو: $\int e^x dx = e^x + C$ $(a \in IR^+, a \neq 1)$

د ټولیز اکسپوننشل تابع a^x لپاره لرو: $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

بیلګه :

دا ناټاکلی اکسپوننشل تابع $\int 2^{x-3} dx$ غواړو پیداکړو

بنه بدون:د توان قانون سره سم لرو $2^{x-3} = \frac{2^x}{2^3} = \frac{1}{8} 2^x$

د فاکتوروني قانون سره سم لرو: $\int \frac{1}{8} 2^x dx = \frac{1}{8} \int 2^x dx$

انتیګرال یې ونیسئ: $\frac{1}{8} \int 2^x dx = \frac{1}{8} \cdot \frac{2^x}{\ln 2} + c = \frac{2^x}{8 \cdot \ln 2} + c = \frac{2^{x-3}}{\ln 2} + c$

د لوګاریتمي توابعو انتیګرالونه

بنسټ:

د طبیعي لوګاریتم تابع $f(x) = \ln x (x \in IR^+)$ لپاره $\int \ln x dx = x \cdot \ln x - x + c$ دی .

د ټولیز لوګاریتم تابع $f(x) = \log_a x, a \in IR^+, a \neq 1)$
لپاره $\int \log_a x dx = \frac{x \cdot \ln x - x}{\ln a} + c$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه :

ناټکلی انتیګرال $\int \ln 3x dx$ غواړو پیدا کړو:

بنه بدلون او د فاکتور قاعدې استعمال:

$$\int \ln 3xdx = \int (\ln 3 + \ln x)dx = \int \ln 3dx \div \int \ln xdx = x \cdot \ln 3 + x \cdot \ln x - x + c$$

$$\int \ln 3xdx = x \cdot (\ln 3 + \ln x - 1) + c$$

بنسټیز اینتیګرالونه په یوه جدول کې

د اینتیګرالولو او مشتق نیول د اړیکو په بنسټ کیدی شي چی د بنسټیزو اینتیګرالونو یو جدول ترتیب شي. دا په مشتق جدول کی راوړل شوو بنسټیزو توابعوبرعکس ځرګندیږي.

Nr.	$f(x)$	$f(x) = \int f(x)dx$	نیونه یا فرضیه
1	x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$	$n \in Z \setminus \{-1\}$
2	$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$	$x \neq 0$
3	x^a	$\frac{1}{a+1}x^{a+1} + C$	$a \in R \setminus \{-1\},\ x > 0$
4	a^x	$\frac{1}{\ln a}a^x + C$	$a > 0,\ a \neq 1$
5	e^x	$e^x + C$	

(c) ketabton.com: The Digital Library

6	$\sin x$	$-\cos x + C$	
7	$\cos x$	$\sin x + C$	
8	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x + C$	$x \neq n \cdot \pi, \quad n \in Z$
9	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C$	$x \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi, \; n \in Z$

بيلګه :

د جدول او تېرو جملو څخه په ګټه لاندې ایتیګرالونه په لاندې ساده ډول په بنستیز توابعو بدلیدلی شي .

$$a) \quad \int \frac{1}{x^5} dx = \int x^{-5} dx = -\frac{1}{4} x^{-4} + C, \ldots\ldots\ldots\ldots 1,$$

$$b) \quad \int \frac{\sqrt{x}}{x} dx = \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x} dx = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = 2x^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C \quad (x > 0), \ldots\ldots\ldots\ldots 3,$$

$$c) \quad \int \sqrt[3]{x \cdot \sqrt{x}}\, dx = \int \left(x \cdot x^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{3}} dx = \int x^{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3}} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C \quad (x > 0), \ldots\ldots\ldots 3,$$

$$d) \quad \int \frac{\sin 2x}{2\sin x} dx = \int \frac{2\sin x \cos x}{2\sin x} dx = \int \cos x \, dx = \sin x + C, \ldots\ldots\ldots\ldots (4{,}21) \quad 6,$$

$$e) \quad \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C \quad (x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi), \qquad (4{,}11) \quad 9,$$

$$f) \quad \int (1 + \cot^2 x)\, dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\int \cot x + C \quad (x \neq n\pi) \quad (4{,}12) \qquad 8,$$

$$g) \quad \int \frac{(1+x)(1-x)}{x - x^3} dx = \int \frac{1 - x^2}{x(1 - x^2)} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad (x \neq \pm 1,\; x \neq 0), \quad Nr.2,$$

$$h) \quad \int_{-1}^{0} e^x dx = e^x \Big|_{-1}^{0} = e^0 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{2}, \ldots\ldots\ldots\ldots 5$$

بدلون قانون <u>Substitutionlaw</u>

(c) ketabton.com: The Digital Library

تراوسه پورې مو فقط انتیګرالونه او جملې حل کړې، چې د لومړنیو توابعو په انتیګرال اړول کېدل. له دې لاس ته راغلو لومړنیو انتېګرالونو د نورو انتېګرالولو حل جملې لاس ته راځي. د لومړنۍ انتېګرالونې سیده استعمال تل ساده نه دی، لکه چې په لاندې کې به ولیدل شي.

جمله :

د ،،بدلون (قاعده)،، (Substitution) لاتین :د $f\,(g(x))$ یوه ارزښت په ځاي د همغه ارزښت بله لویه ایښوول ، لنډ: بدلون) د نیونو یا فرضیو له مخې، چې u = g (x)نه برېکېدونکی یا متمادي او مشتقوړدئ او y = f (u) متمادي، نو باور لري:

$$\int f\left[g(x)\right]g'(x)dx = \int f\left[f(u)\right]du$$

حل : د ښي اړخ مشتق د تېرو درسونو په بنسټ په لاندې ډول دی:

$$\frac{d}{dx}\int f(u)\,du = \frac{d}{du}\int f(u)\,du\cdot\frac{du}{dx} = f(u)\cdot u' = f\left[g(x)\right]\cdot g'(x),$$

دا د کیڼ اړخ د مشتق سره سر خوري. قاعده د ضرب انتیګرالېدو لپاره مساعده ده، په کوم کی چی یو فاکتور زنځیري تابع [f [g (x) وي او دا بل فاکتور (ضریب) یی د دننه تابع مشتق g ' (x) وي. سړی د دننه تابع لپاره په دې توګه متحولې بدلوي یا ځاي په ځاي کوي u = g (x) :

مشتق $\frac{du}{dx} = G'(x)$ جوړوي په همدې ډول du = g ' (x) dx

د بریالي انتیګرالېدو وروسته بدلون بیرته راګرځول کیږي.

بیلګه a :

لرو : $I = \int 2\cos(2x-1)dx$. د دې انتیګرال وشمېرئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بدلون یا په ځای کونه: $2x-1=u$

مشتق $2=du/dx$ همداسی $2dx=du$

$$I=\int\cos u\,du=\sin u+C=\sin(2x-1)+C$$

بیلګه b : لرو $I=\int 3\cos(2x+1)dx$

بدلوو : , $2x=u-1$ مشتق $2=du/dx$ همداسی $dx=(1/2)\,du$

$$I=\int 3\cos u\cdot\frac{1}{2}du=\frac{3}{2}\int\cos u\,du=\frac{3}{2}\sin(2x-1)+C$$

وموليدل چی ځنځيري تابع د لايني دننه تابع سره د بدلونو قاعدې سره تل اینتیګرال کیدی شي، ځکه چی د لايني تابع مشتق ثابت ده او ثابت فاکتور د تېرې جملی سره سم د اینتیګرال تر مخ(موخه کېږ لور ده) لیکل کیږي.

بیلګه: لرو $I=\int\sqrt{-3x+5}\;dx$

بدلون: $-3x+5=u$

را بیلیدنه: $-3=du/dx\Leftrightarrow dx=-1/3\cdot du$

$$I=\int\sqrt{u}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)du=-\frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{2}}du=-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot u^{\frac{3}{2}}+C=-\frac{2}{9}\cdot\sqrt{(-3x+5)^3}+C.$$

$$b)\quad I=\int\frac{1}{2}e^{-2x-3}dx.$$

$$-2x-3=u,\quad\Rightarrow\quad -2=\frac{du}{dx}\quad\Rightarrow\quad dx=-\frac{1}{2}du,$$

$$I=\int\frac{1}{2}e^{u}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)du=-\frac{1}{4}\int e^{u}du=-\frac{1}{4}e^{u}+C=-\frac{1}{4}e^{-2x-3}+C.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$c)\quad I=\int\frac{2dx}{x+2}.$$

$$x+2=u,\qquad 1=\frac{du}{dx}\qquad dx=du$$

$$I=\int\frac{2du}{u}=2\int\frac{du}{u}=2\ln|u|+C=2\ln|x+2|+C.$$

د بنسټيزو اينتيګرالو سره ۱۰ او ۱۱) جدول ۲۱ . ۱ (متحولې x يواځي په جګ يا مټ د دوه منخ ته راځي. له دې امله داسی اينتيګرال، کومو کی چی د x2 په ځاي لايني ترم (Term)پروت دی، کیدی شي چی د لايني بدلولو له لارې په بنسټيز اينتيګرالو ۱۰ او ۱۱ بيرته واړول شي. ډيروخت يو د فورم بدلون ته هم اړتياموجود وي، چی د اينتيګراند فورم ته راشو.

بیلګه 5.2:

$$a)\quad I=\int\frac{dx}{1+2x^2}.$$

$$2x^2=\left(\sqrt{2}x\right)^2,\quad d\cdot h\cdot\ I=\int\frac{dx}{1+(\sqrt{2}x)^2},$$

$$\sqrt{2}x=u,\qquad \sqrt{2}=\frac{du}{dx}\qquad dx=\frac{1}{\sqrt{2}}du,$$

$$I=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{du}{1+u^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{Arctan}\,u+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{Arctan}(\sqrt{2}x)+C.$$

$$b)\quad I=\int\frac{dx}{\sqrt{9-36x^2}}.$$

$$9-36x^2=9(1-4x^2)=9(1-(2x)^2),\ d\cdot h\cdot$$

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{9(1-(2x)^2)}}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{\sqrt{1-(2x)^2}},$$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$2x = u, \qquad 2 = \frac{du}{dx} \qquad dx = \frac{1}{2}du$$

$$I = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{6}\text{Arcsin}\,u + C = \frac{1}{6}\text{Arcsin}(2x) + C.$$

اینتیګریشن قاعدې، که دننه تابع خطي یا لایني نه وي، نو د اینتیګراند دوم فاکتور(تر ثابت فاکتور پورې) د دننی تابع د لومړي فاکتور مشتق وي، چی د (۲ . ۱۳) له لارې سړی بنسټیز اینتیګرال ته راشي. دلته هم سړی بیا دننني تابع په نوې متحولې یا واریابلی بدلوي.

بیلګه 6.21: الف:

$$I = \int 4x\sqrt{x^2 - 1}\, dx$$

بدلون:د $x^2 - 1 = u$ مشتق $2x = du/dx$ دی ،همداسې لرو: $xdx = \frac{1}{2}du$

$$I = \int 4\sqrt{u}\cdot\frac{1}{2}du = 2\int u^{1/2}du = 2\cdot 2/3\,u^{3/2} + C = 4/3\sqrt{(x^2-1)^3} + C$$

ب) $I = \int \sin^3 x \cdot \cos x\, dx$

بدلون: $\sin x = u$ را بیل شوي $\cos x = du/dx$ همداسې $\cos x\ dx$

$$I = \int u^3 du = \frac{1}{4}u^4 + C = \frac{1}{4}\sin^4$$

$$c)\ I = \int\frac{1}{x}\cdot\ln^2 x\, dx$$

$$\ln x = u, \qquad :\frac{1}{x} = \frac{du}{dx} \qquad \frac{1}{x}dx = du,$$

$$I = \int u^2 du = \frac{1}{3}u^3 + C = \frac{1}{3}\ln^3 x + C$$

$$d)\ I = \int \tan x\, dx.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, d \cdot h. \quad I = \int \frac{1}{\cos x} \cdot \sin x \, dx,$$

$$\cos x = u, \qquad -\sin x = \frac{du}{dx} \qquad \sin x \, dx = -du,$$

$$I = -\int \frac{1}{u} du = -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C.$$

$$e) \; I = \int_0^1 \frac{2x^2}{2-x^3} dx.$$

$$2 - x^3 = u, \qquad -3x^2 = \frac{du}{dx} \qquad x^2 dx = -\frac{1}{3} du,$$

$$I = -\frac{1}{3}\int_0^1 \frac{2du}{u} = -\frac{2}{3}\ln|u|\Big|_0^1 = -\frac{2}{3}\ln|2-x^3|\Big|_0^1 = -\frac{2}{3}(\ln 1 - \ln 2) = \frac{2}{3}\ln 2.$$

۲۱د بدلونقاعده) ۲۱ . ۱۳ (دې په چپه) یعني د ښی وکیڼ(لور هم استعمال شي .
اینتیگرال f (x) dx کیدی شي چی په بل واړول شي چی x په یو مناسب بلواك (
g (t بدل شي (21 . 14) f (x) dx = f [g(t)]. g(t)dt. دا:
افاده » مناسب« بلواك دې دلته داسي وپوهیدی شي چی سړی د بدلون وروسته یو ساده
او ممکن یو بنسټیز اینتیگرال لاس ته راوړي. د) ۲۱ . ۱۴ (استعمال په قاعده کی داسی
دی چی په یوه بلواك f (x) کی موجود » پیچلی « ترم h (x)د t = h (x) په بدلون
له منځ څخه وړي او بیا) که ممکن وي (د x په لوریی حلوي

$$x = g(t) = h^{-1}(t)$$

بیلگه 7.21: الف:

$$: a) \; I = \int \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$$

$$\sqrt{x} - 1 = t, \qquad x; x = (t+1)^2, \qquad dx = 2(t+1)dt:$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$I=\int\frac{2(t+1)}{t}dt=2\cdot\left[\int 1dt+\int\frac{1}{t}dt\right]=2(t+\ln|t|)+C=2(\sqrt{x}-1)+2\ln\left|\sqrt{x}-1\right|+C$$

مناسب تابع ، چې ورکړ شوی اینتګرال د دوه ایتکرالو جمعې ته بيايي، دلته

$x=g(t)=(t+1)^2$ وو.

$$b)\quad I=\int\frac{dx}{\sqrt{\sin x\cos^3 x}}.$$

$$\sin x\cdot\cos^3 x=\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\cos^4 x=\tan x\cdot\cos^4 x.$$

نو لرو:

$$I=\int\frac{dx}{\tan x\cos^4 x}=\int\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{1}{\sqrt{\tan x}}dx,$$

$$\tan x=t,\qquad \frac{1}{\cos^2 x}dx=dt,$$

$$I=\int\frac{1}{\sqrt{t}}dt=\int t^{-\frac{1}{2}}dt=2t^{\frac{1}{2}}+C=2\cdot\sqrt{\tan x}+C.$$

توابع، چې بې د بدلون له لارې حل کيږي لکه لاندې بلګه:

بیلګه:

عواړو د $f(x)=e^x$ مشتق بيدا کړو. دا مشتق په ساده ډول پيدا کولي شو، يعنې لرو:

$$f(x)=e^x\ \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=\int e^x dx=e^x+C$$

ګورو، چې $F'(x)=e^x=f(x)$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که ولرو: $f(x)=e^{2x}$ او د پورته په څېر لاړ شو، نو لاس ته به ترې راشي:

$$f(x)=e^{2x} \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=\int e^{2x}dx \neq e^{2x}+C$$

وي $F(x)=e^{2x}+C$ دی، که $F'(x)=2e^{2x}\neq f(x)$

له دې امله د بدلون قانون ته اړيو:

بيلګه:

د $f(x)=e^{2x}$ تابع انتيګرال ونيسی

$$f(x)=e^{2x} \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=\int e^{2x}dx=?$$

بدلون : $u(x)=2x=u$

جوړ کړئ: $u'(x)=\frac{du}{dx}=2 \Rightarrow dx=\frac{du}{2}$

$$\int f(x)dx=\int e^{u}\frac{du}{2}=\frac{1}{2}\int e^{u}du=\frac{1}{2}e^{u}+C$$

د بدلون برعکس: $\frac{1}{2}e^{u}+C=\frac{1}{2}e^{2x}+C$

نو لرو: $F(x)=\int (x)dx=\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^{2x}+C$

ازمايښت: $F(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+C \Rightarrow F'(x)=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot 2=e^{2x}=f(x)$

بيلګه :

وښايئ چې باور

لري. $f(x)=(x+1)^{2} \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=\int (x+1)^{2}dx$.

بدلون $u(x)=x+1=u$

جوړ کړئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$u'(x)=\frac{du}{dx}=1 \quad \Rightarrow dx=\frac{du}{1}$$

$$\int f(x)dx=\int u^2\frac{du}{1}=\int u^2du=\frac{u^3}{3}+C$$

بیرته- یا په څټ بدلون: $\frac{u^3}{3}+C=\frac{(x+1)^3}{3}+C$

نو: $\int(x)dx=\int(x+1)^2dx=\underline{\underline{\frac{(x+1)^2}{3}}}+C$

بیلګه :

و ښایي چې باور لري:

$$f(x)=(3x+6)^3 \quad \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=\int(3x+6)^3dx$$

بدلون: $u(x)=3x+6=u$

جوړوو: $u'(x)=\frac{du}{dx}=3 \quad \Rightarrow dx=\frac{du}{3}$

$$\int f(x)dx=\int u^3\frac{du}{3}=\frac{1}{3}\int u^3du=\frac{u^4}{12}+C$$

بیرته بدلون: $\frac{u^4}{12}(3x+6)^4+C$

نو لرو: $\int(x)dx=\int(3x+6)^3dx=\underline{\underline{\frac{1}{12}(3x+6)^4}}+C$

بیلګه :

$$f(x)=x\cdot\ln\left(x^2\right)\Rightarrow F(x)=\int f(x)\,dx=\int\left(x\cdot\ln\left(x^2\right)\right)dx=?$$

بدلون : $u(x)=x^2=u$

جوړوو: $u'(x)=\frac{du}{dx}=2x\Rightarrow dx=\frac{1}{2x}du$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int f(x)\,dx = \int x \cdot \ln(u) \cdot \frac{1}{2x}\,du = \frac{1}{2}\int \ln(u)\,du = \frac{1}{2}\left[u \cdot \ln(u) - u + C\right] = \frac{1}{2}u \cdot \ln(u) - \frac{1}{2}u + C$$

بیرته بدلون: $\frac{1}{2}u \cdot \ln(u) - \frac{1}{2}u + C = \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln\left(x^2\right) - \frac{1}{2}x^2 + C$

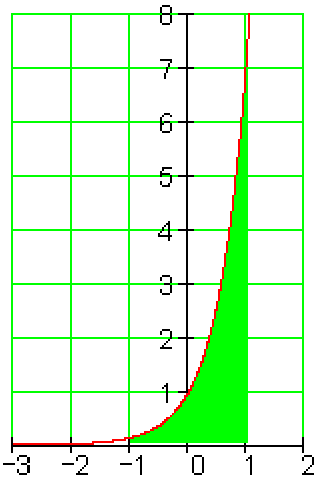
نو لرو: $\int(x)\,dx = \int\left(x \cdot \ln\left(x^2\right)\right)dx = \underline{\underline{\frac{1}{2}x^2 \cdot \ln\left(x^2\right) - \frac{1}{2}x^2 + C}}$

د ټاکلو انتیګرالونو حل د بدلون له لارې:

ټاکلي انتیګرالونه هم د بدلون له لارې حل کیږي.

<table>
<tr>
<td>

$f(x) := e^{2 \cdot x}$



</td>
<td>

بیلګه :

وبنایاست:

$f(x) = e^{2x} \quad \Rightarrow F(x) = \int_{-1}^{1} e^{2x}dx$

د انتیګرال حل د بدلون له لارې:

۱ – بدلون $u(x) = 2x$

۲ – د dx په ځای کېږدی

$u'(x) = \frac{du}{dx} = 2 \quad \Rightarrow dx = \frac{1}{2}du$

۳ – د پولو بدلون

- لاندې پوله $u(-1) = -2$

- پورته پوله $u(1) = 2$

۴ - په انتیکرال کې ځا په ځای کړی

$\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} e^u du = \frac{1}{2}\left[e^u\right]_{-2}^{2} = \frac{1}{2}\left[e^2 - e^{-2}\right] = \underline{\underline{3.627}}$

</td>
</tr>
</table>

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه :

$$f(x)=2x\cdot\ln(x^2)\quad\Rightarrow F(x)=\int_1^2 2x\cdot\ln(x^2)dx$$

د انتیګرال حل د بدلون له لارې

۱ – بدلون $u(x)=x^2$

۲ – د ځای په په ځای کونه

$$u'(x)=\frac{du}{dx}=2x\quad\Rightarrow dx=\frac{1}{2x}du$$

۳ – د پولې بدلون

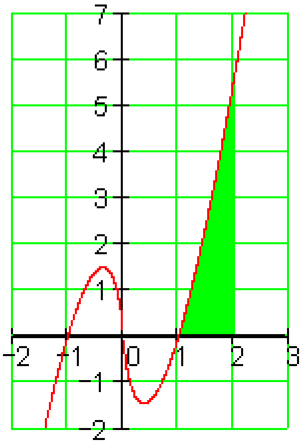
- لاندې پوله $u(1)=1$
- پورته پوله $u(2)=4$

۴ – په انتیګرال کې ځای په ځای کړی

$$\int_1^4 2x\cdot\ln(u)\cdot\frac{1}{2x}du=\int_1^4\ln(u)du=\left[u\cdot\ln(u)-u\right]_1^4$$

$$=\left[4\cdot\ln(4)-4\right]-\left[1\cdot\ln(1)-1\right]\approx\underline{\underline{2.545}}$$

$$f(x):=2x\cdot\ln(x^2)$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه :

$f(x)=\begin{cases} e^x-2 \\ \left(e^2-2\right)e^{-(x-2)} \end{cases}$	د $x<2$ له پاره د $x\geq 2$ له پاره

$$A=\underbrace{\int_1^2\left(e^x-2\right)dx}_{I_1}+\underbrace{\int_2^4\left(e^2-2\right)e^{-(x-2)}\,dx}_{I_2}$$

$$I_1=\int_1^2\left(e^x-2\right)dx=\left[e^x-2x\right]_1^2=e^2-e-2$$

$$I_2=\left(e^2-2\right)\int_2^4 e^{-(x-2)}\,dx$$

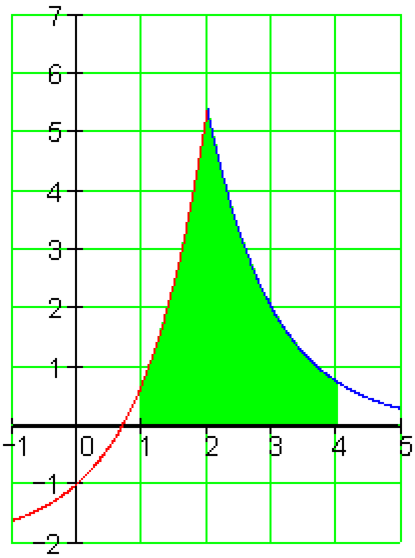
$$u(x)=-(x-2)=-x+2$$

$$\frac{du}{dx}=-1\Rightarrow dx=-du\,;\,u(2)=0\,;\,u(4)=-2$$

$$I_2=-\left(e^2-2\right)\int_0^{-2}e^u\,du=\left(e^2-2\right)\int_{-2}^0 e^u\,du$$

$$=\left(e^2-2\right)\cdot\left[e^u\right]_{-2}^0=e^2+2e^{-2}-3$$

$$I=I_1+I_2=e^2-e-2+e^2+2e^{-2}-3=\underline{\underline{7{,}331}}$$



ټوټه انتیګرالونه Partialy Integration

ټوټه انتیګرالونه، چې ضرب انتیګرالونه هم بلل کیږي، په انتیګرالشمیرنه کې د لومړنیو توابعو ټاکلو یا شمیرلو لپاره امکان دی. دا کیدی شي د مشتقشمیرنې د برعکسکونې په خیر وکړل شي.

•

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټوټه انتيګرالوني له پاره لاندې قانون کارول کيږي، چې د متمادي (نه پرېکې‌دونکي) توابعو f او g له پاره باور لري.:

$$\int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)\cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x.$$

دا قانون ټيک هلته ګټور دى، که د f مشتقنيولو سره يو ساده تابع منځ ته راځي.
پيل

د ضرب قانون (د ضرب مشتقنيونې) څخه لرو:

$$(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v'$$

$$u'\cdot v = (u\cdot v)' - u\cdot v'$$

له دې څخه لاس ته راځي:

$$\int u'\cdot v = \int (u\cdot v)' - \int u\cdot v'$$

$$\int u'\cdot v = u\cdot v - \int u\cdot v'$$

په دې پسې د ټاکلي انتيګرال لپاره باور لري:

$$\int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = f(b)\cdot g(b) - f(a)\cdot g(a) - \int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x$$

يا همدغسې، لکه په زياتو رياضي کتابونو کې چې پيداکيږي.

$$\int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)\cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x.$$

د دې مخ ته حدونو لپاره ګټور دى، چې لومړى ځان په ناټاکلي انتيګرال محدود کړو، چې دا نا اړينو حدونو څخه چې ليد مو رابندوي، ازاد يو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه:
د بیلګې په توګه لاندی انتیګرال شمیرو.

$$\int x \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x$$

یو ساده انتیګرالیدونکي تابع $g'(x)$ او همداسی یو ساده مستقکيدونکي تابع $f(x)$ لټوو. نیسو چې $f(x) = \ln(x)$ او $g'(x) = x$ ، ځکه چې د ln(x) انتیګرالونه نوې ln(x) راکوي. اوس د $f(x)$ مشتق نیسو)مشتق کوو) او انتیګرالوو، نو لرو:

$$f'(x) = \frac{1}{x} \text{ او } g(x) = \frac{x^2}{2}.$$

له دې څخه اوس دالاندې فرمول لاس ته راځي:

$$\int x \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x) - \frac{x^2}{4}$$

بدیل لیکښه:
اوس دی u اوv په خوښه توابع وي.U او V دې د u اوV لومړني توابع وي ، او همداسي دې 'u او 'v دu او v مشتقونه وي.
u تابع ده، چې د مشتق نیولو له پاره لومړیتوب لري، v تابع ده چې د انتیګرالونې له پاره لومړیتوب لري. نو باورلري:

$$\int_a^b u(x) \cdot v(x)\,\mathrm{d}x = u(b) \cdot V(b) - u(a) \cdot V(a) - \int_a^b u'(x) \cdot V(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= [u(x) \cdot V(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot V(x)\,\mathrm{d}x$$

د ټوټه انتیګرالونې لار(طریقه)

د ټوټه انتیګرالونې ګټور استعمال له پاره مختلف معیاري چلول شته.

بیلګه : کله کله کېدی شي ګټور وي، چی د مساوات ښۍ لور ته ټوټه انتیګرال د څو واره انتیګرالونې وروسته بېرته راوګرځي، چې د په ورته ښه د اصلي یا پخواني کیڼ لور انتیګرال سره یوځای کولی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int \sin(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x$$

که کېږدو f(x) = cos(x) او g'(x) = sin(x) ، نو ترې لرو:

$$f'(x) = -\sin(x) \text{ او } g(x) = -\cos(x)$$

او لاس ته ترې راځي

$$\int \sin(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x = [-\cos^2(x)] - \int \sin(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x.$$

که دواړو لورو ته وتون انتیګرال ورزیات کړو، نو راکوي:

$$2\int \sin(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x = -\cos^2(x)$$

که واړه لورې په 2 ووېشل شي، نو بالاخره لاس ته ترې راځي:

$$\int \sin(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cdot\cos^2(x) + C$$

بیلګه ۲ :

د ځنو انتیګرالونو سره داسې لاس ته راوړنه لرو، چې: که د g'(x) له پاره یو ترم وټاکو چې په انتیګرالونې کې هیڅ یا کو تغیر خوري، لکه د بېلګې په توګه اکسپوننشل تابع او یا مثلثاتي توابع. نو کېدی شي دا بل ترم ،،له منځه یووړل شي،،.

$$\int e^x\cdot(2-x^2)\,\mathrm{d}x$$

که هر ځل g'(x) = ex کېږدو او د f(x) له پاره، د انتیګرال لاندی ترم ، نو ترې لاس ته راځي:

.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int e^x\cdot(2-x^2)\,\mathrm{d}x = [e^x\cdot(2-x^2)] - \int e^x\cdot(-2x)\,\mathrm{d}x$$
$$= [e^x\cdot(2-x^2)] + [e^x\cdot 2x] - \int 2\cdot e^x\,\mathrm{d}x$$
$$= [e^x\cdot(2-x^2)] + [e^x\cdot 2x] - [2\cdot e^x]$$
$$= [e^x\cdot(2-x^2+2x-2)]$$
$$= [e^x\cdot(2x-x^2)] + C$$

بیلگه ۳ :

که تر انتیګرال لاندي فقط یو ترم ولرو، چي د هغه لومړنی تابع بي له جدول ارزښت څخه پاي ته نه رسیږي(نه پایول کیږي)(نه ختمیږي) کېدی شي کله کله د ورزیاتوني له لارې(ناخرګند شته) ضریب "1" توته انتیګرال شي.

$$\int \ln(x)\,\mathrm{d}x = \int 1\cdot\ln(x)\,\mathrm{d}x = \int g'(x)\cdot\ln(x)\,\mathrm{d}x$$

که $f(x)=\ln(x)$ او $g'(x)=1$ کیږدو، نو لاس ته تري راوړی شو

$$\int 1\cdot\ln(x)\,\mathrm{d}x = x\cdot\ln(x) - \int x\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$
$$= x\cdot\ln(x) - \int 1\,\mathrm{d}x$$
$$= x\cdot\ln(x) - x + C$$

.

جمله : موږ د دي لاندي انتیګرال نیسو: $\int x\cos(x)\,dx$

ږدو $u = x$ ، نو لرو : $du = dx$

ږدو $dv = \cos(x)\,dx$ ، نو $v = \sin(x)$ لرو

په لاندي توګه مخ ته ځو:

$$\int x\cos(x)\,dx = \int u\,dv$$
$$= uv - \int v\,du$$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= x\sin(x) - \int \sin(x)\,dx$$

$$= x\sin(x) + \cos(x) + C.$$

C د انتيګرالونې يوه په خوښه ثابته ده

د ټوټه انتيګرالونې د استعمال سره د انتيګرالونو لکه

$$\int x^2 e^x\,dx \quad \text{او} \quad \int x^3 \sin(x)\,dx$$

کيده شي په همدې لار حل شي:

يوه په زړه پورې بيلګه دا لاندې ده :

$$\int e^x \cos(x)\,dx$$

که په پوره سختوالي ونيسو، نو په ورسره بلده لار اړين نه دی، چې دا دې حل ولري.

دا بېلګه د دوه واره ټوټه انتيګرالونې استعمال له لارې حل کولی شو.

لومړی : $u = \cos(x)$ داسې چې $du = -\sin(x)\,dx$

$dv = e^x\,dx$ داسې چې $v = e^x$

نو لرو :

$$\int e^x \cos(x)\,dx = e^x \cos(x) + \int e^x \sin(x)\,dx.$$

اوس ، ددې له پاره چې پاتې انتيګرال حل شي، نو د ټوټه انتيګرالونې قاعده بيا استعمالوو ، د دې لاندې سره :

$u = \sin(x);\ du = \cos(x)\,dx$

$v = e^x;\ dv = e^x\,dx$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو لرو :

$$\int e^x \sin(x)\,dx = e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)\,dx$$

که دا سره یوځای کړو، نو لاس ته راځي:

$$\int e^x \cos(x)\,dx = e^x \cos(x) + e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)\,dx.$$

که فکر وکړو، نو پورته مساوات دواړو لورو ته همغه انتیگرال لرو(بې له مخ نخښې)،
نو د ښي لور انتیگرال که کیڼ لور ته یوسو ، لاس ته ترې راځي:

$$2\int e^x \cos(x)\,dx = e^x(\sin(x) + \cos(x)) + C$$

$$\int e^x \cos(x)\,dx = \frac{e^x(\sin(x) + \cos(x))}{2} + C'$$

C د انتیگرالوني یوه په خوښه ثابته ده

د ټوټه راشنل کسرونو انتیګرال

د $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{x^3 + 4x^2 + 4x}$ انتیگرال نیول

نیول تر واسه ورسره بلده لار شونی دی، که څنګه؟

بیلګه :

$$\int [\frac{(7x-12)}{(x^2-6x+8)}]dx$$

په مخرج کې مربع تابع د خپل صفرځایونو **x1 = 2-** او **x2 = -4** سره د کرښیزو
توابعو په ضربیونو تجزیه کیږي:

$$x^2 - 6x + 8 = (x-2)\,(x-4)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټوټه کسرونو ټوټه ونې له پاره لاندې پيل کوو:

$$\int [\frac{(7x-12)}{(x^2-6x+8)}]dx = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x-4)}$$

د جمعې له پاره په اصلي مخرج ورغزيږي او لاس ته ترې راځي:

$$\frac{[A(x-4) + B(x-2)]}{[(x-2)(x-4)]} = \frac{[Ax-4A + Bx-2B]}{[(x-2)(x-4)]} = \frac{[(A+B)x -4A-2B]}{[(x-2)(x-4)]}$$

د ضريبونو د پرتلې ځخه لاس ته راځي، چې د x له مخه يعني کيڼ لور ته (A+B) افاده بايد پرته وي

او (-4A-2B) ، چې ۱۲ - ورکوي (وتون مساوات وګورئ) : 7x-12 = (A+B)x (-4A-2B)

له دې ځ**خه لاندې مساواتسيستم لاس ته راځي:**

7= A+ B

-12=-4A-2B

بدلون يې دA او B پسې : **A= (7-B)**

-12=-4(7-B)-2B

-12=-28 +4B -2B |+28

+16= 2B

B=8

A= **(7-8)= -1**

ليکلی شو :

$$\int [\frac{(7x-12)}{(x^2-6x+8)}]dx = \int [\frac{-1}{(x-2)}]dx = \int [\frac{8}{(x-4)}]dx$$

لومړني تابع جوړه کړی: $f(x)=\frac{1}{x} \rightarrow F(x)=\ln x$. دا چې طبيعي لوګايتم فقط له مثبت اعدادو شميږل کيږي، نو يواځې ازښتونه نيسو.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int [\frac{(7x-12)}{(x^2-6x+8)}]dx = -1 \ln|x-2| + 8 \ln|x-4| + c$$

نا اصلي ماتراشنل توابع بايد لومړی په پول راشنل تابع او اصلي مات راشنلمبع تېرته شي.
دا د ټوټه کسرونو ټوټه کووني له لارې کيري يا صورت نيسي.
بيلګه :

$$\int [\frac{(-5x+9)}{(x^2+x-6)}]dx$$

په مخرجکي مربع تابع په صفرځايونو **x1 = -2** او **x2 = +3** کې په کښيزو فاکتورونو تحزيه کيري :

$$x^2+x-6 = (x-2)\ (x+3)$$

د ټوټه کسرونو ټوټه کوني له پاره اصلي مخرج غزوو او بيا يې ضربوو :

$$\int [\frac{(-5x+9)}{(x^2+x-6)}]dx = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+3)}$$

د جمعي له پاره په اصلي مخرج غزيږي او بيا سره ضربيږي:

$$\frac{[A(x+3)\ +\ B(x-2)]}{[(x-2)(x+3)]} = \frac{[Ax+3A\ +\ Bx-2B]}{[(x-2)(x+3)]} = \frac{[(A+B)x\ +3A-2B]}{[(x-2)(x+3)]}$$

د ضريبونو پرتلي کوني له امله، چې د x ترمخه يعني کيڼ لور ته له (A+B) افادې څخه بايد اوه لاس ته راشي او (+3A-2B) او يا ورته ۱۲ (وتونمساوات وګوری) :

-5x+9 = (A+B)x (+3A-2B)

لاندې مساواتسيستم لاس ته راځي:

-5= A+ B

9= 3A-2B

د A او B پسې يې حل کړی:

9= 3(-5-B)-2B

9=-15 -3B -2B |+15

24=-5B |:(-5)

<u>B=-4.8</u>

<u>A= (-5+4.8)= -0.2</u>

نو ليکلی شو :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int[\frac{(-5x+9)}{(x^2+x-6)}]dx=\int[\frac{-0.2}{(x-2)}]dx+\int[\frac{-4.8}{(x+6)}]dx$$

لومړی تابع جوړ کړی :

$$F(x)=\ln x\rightarrow f(x)=\frac{1}{2}$$

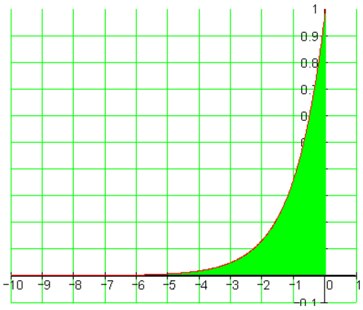
دا چې طبيعي لوګاريتم فقط له طبيعي اعدادو شمېرل کېدی شي، نو فقط مطلقه ارزښتونه نيسو.

$$\int[\frac{(-5x+9)}{(x^2+x-6)}]dx=-0.2\ln|x-2|-4.8\ln|x+3|+C$$

ناپاي(مبهوم) انتيګرال

تعريف : که په يوه ټاکلي انتيګرال کې لږ تر لږه يو حد د مثبت يا منفي ناپاي لور ته لاړشي يا د انتيګرال ساحه ناپاي ځاي ته و غزول شو، نو دلته د ناپاي انتيګرال څخه غږېږو. په يوه مناسب ډول ناپا انتيګرال د عادي انتګيګرال د حد په څېر تعرفيږي. په دې توګه په زړه پورې پوهېدنې لاس ته راځي د بېلګې په توګه، چې څنګه د منفي تواند پوتنځ د ګراف لاندې ناپاي ته رسېدونکې په زړه پورې سطحې. نو باور لري

$\int_1^{\infty} x^{-2}dx=1$ او $\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}dx=2$

هم او د دې معکوس انتيګارلونه $\int_1^{\infty} x^{-1}dx$ او $\int_0^1 x^{-1}dx$ ناپاي ته ځي يا له ټولو حدونو اوړي يعنې د ناپاى په لور ځي..	

د $f(x)=e^x$ ګراف او x-محور ترمنځ دې په انټروال $[-\infty;0]$ کې ټوله سطحه و شميرل شي، يعنې

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^{x}\,dx$$

تراوسه د یوه ټاکلي انتیګرال د پورته همداسې کښته(لاندې) پولې عددونه وو.
د انتیګرالونې ورشو یاا ساحه محدود وه.
په دې حالت کې یا اوس د انتیګرالولو ورشو محدوده نه ده،
داسې انتیګرال یو نامحدود انتیګرال بولو، د انتیګرالونی نامحدودې ورشو سره.
انتیګرالونه د دې لاندې بنو څخه په یوې بڼې منځ ته راځي:

$\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$	$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$	$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$

د دې انتیګرال شمیرنې له پاره په لاندې توګه مخ ته ځو:

لومړی د یوه پای انتروال $[a;b]$ له پاره انتیګرال $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ شمېرو، بیا پسې د ورته افادو $a \to -\infty$ یا $a \to \infty$ همداسې، $b \to -\infty$ یا $b \to \infty$ له پاره پولې جوړوو.

فورمال دا په لاندې ډول برېښي:

$$\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{x} f(x)\,dx + \lim_{b\to\infty}\int_{c}^{b} f(x)\,dx$$

زموږ د سطحې شمېرلو له پاره دا په لاندې ډول برېښي:

$$f(x) = e^{x}$$

$$A = \int_{-\infty}^{0} e^{x}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} e^{x}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\left[e^{x}\right]_{a}^{0}$$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \lim_{a\to-\infty}\left[e^{0}-e^{a}\right] = \underbrace{\lim_{a\to-\infty} e^{0}}_{1} - \underbrace{\lim_{a\to-\infty} e^{a}}_{0} = \underline{\underline{1}}$$

بېلګه:
دا د y په محور هنداره شوې د e تابع دې د $f(x)=e^{-x}$ سره په انټروال $[0,\infty)$ کې
د پورته سره برابره سطحه ولري.

$$A = \int_0^{\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^{b} e^{-x}\,dx$$

بدلون:

$$u(x) = -x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -1 \Rightarrow dx = \frac{du}{-1}$$

$$u(0) = 0\,;\, u(b) = -b$$

$$\lim_{b\to\infty}\int_0^{-b} e^{u}\,\frac{du}{-1} = -\lim_{b\to\infty}\int_0^{-b} e^{u}\,du = \lim_{b\to\infty}\int_{-b}^{0} e^{u}\,du$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[e^{u}\right]_{-b}^{0} = \lim_{b\to\infty}\left[e^{0}-e^{-b}\right]$$

$$= \lim_{b\to\infty} e^{0} - \lim_{b\to\infty} e^{-b} = 1-0 = \underline{\underline{1}}$$

بېلګه:
د يوه يوځاي ايښول شوې يا يو ځاي شوې تابع بېلګه لرو:

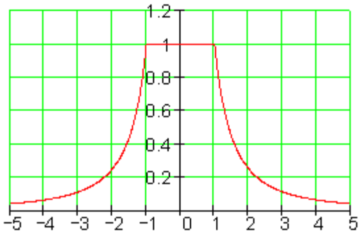
د $x<-1$ لپاراه د $-1\le x\ 1$ لپاره د $x>1$ لپاره	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} \\ 1 \quad f \\ \frac{1}{x^2} \end{cases}$ $A = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$

.
.
.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د انتیګرال په برخو وېشنه يا ټوټه کونه:
لاندې د انتیګرالونو تمعه دې و شمیرل شي.

$$A = \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx + \int_{-1}^{1} dx + \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$$



لومړنی اند يا تر مخه فکرکونه:
د تناظر دلایلو له مخې لرو :

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx = \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$$

داسې، چې دا انتیګرال باید فقط یوځل وشمېرل شي.

$$\int_{-1}^{1} dx = [x]_{-1}^{1} = [1] - [-1] = 1 + 1 = \underline{\underline{2}}$$

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_{1}^{b} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = \underbrace{\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{b}\right]}_{0} - \underbrace{\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{1}\right]}_{-1} = 0 - (-1) = \underline{\underline{1}}$$

$$A = \underbrace{\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx}_{1} + \underbrace{\int_{-1}^{1} dx}_{2} + \underbrace{\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx}_{1} = 1 + 2 + 1 = \underline{\underline{4}}$$

تولګه
د انتیګرال هندسي تعریف

لوریزه سطحه-د انتیګرال تعریف:که یوه f تابع ولرو، نو دx مخور او تابع ترمنځ سطحې شمېرل د انتیګرال له لارې کیږي. په دې سطحه کې د x محور پورته لورې ته سطحه مثبته مخنخبنه لري او د x محور کښته لورې ته سطحه منفي مخنخبنخ لري.

تحلیلي تعریف: د f یوه تابع ورکړ شوې، چې په یوه انتروال [a,b] باندې تعریف دی، نو دa څخه تر b پورې د تابع د انتیګرال څخه د x په محور د f د ګراف او د کربښې x=aاو x=b تر منځ یوه یوه لوریزه سطحه پوهیږو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند (تعریف) ٤ . ١ : لیمیت

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx = F;(\max\Delta x\to 0),........(4,3)$$

که په اینتروال [a , b] کی موجود وي، نو دا د f (x) تاکلی اینتیګرال بولو، یا F- Riemann (د ریمن سطحه). دلته a د اینتیګراله ونې لاندې(کښته)پوله او b د اینتیګرالونې پورته پوله بلل کیږي او [a,b] د اینتیګرالونې اینتروال او(f (Integrand) x)اینتیګرالېدونکی) او x د اینتیګرالونې (Integrationsvariable) متحول بلل کیږي

جمله٤ . ١ : که f (x) په [a , b] کې اینتیګرالوړ وي او $c\in[a,b]$ وي، نو باور لري:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

پیژند یا تعریف ٤ . ٢ : f (x) په یوه بند انتروال[a, b] کې اینتیګرالوړ دی، نو باور لري:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

پیژند تعریف 3.2: تابع y = f (x) دې په یوه واز اینتروال I کی تعریف وي. هر یوه هلته موجوده مشتقوړ F (x) تابع چې F' (x) = f (x) شرایط پوره کړي، د f (x (بنستیز- ، ساده – یا لومړنی تابع بلل کیږي

تاکلی انتیګرال:

که f یو حقیقي تابع وي، نو د تاکل انتیګرال $\int_a^b f(x)dx$ (لوستل: د $f(x)$ انتیګرال د a تر b او په پولو یا حدونو یا انتیګرال په $f(x)$ باندې له a تر b) لاندې یوه لوریزه سطحه پوهیږو د a او b تر منځ او د f ګراف لاندې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تعریف:

f په انتروال $a \le x \le b$ کې متمادي تابع ده او F د f لومړنی تابع ده، نو ټاکلی انتیګرال دی :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)_a^b = F(b) - F(a).$$

د $F(b) - F(a)$ لپاره زیات وخت $\left[F(x)\right]_a^b$ لیکو. په دې توګه دی

$$\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b$$

جمله:

د یوې ثابتي سره ضرب : که تابع $f(x)$ په یوه اینتروال کی متمادي وي ، نو لاندې باور لري:

$$\int a \cdot f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx\,, \qquad a \in R$$

جمله :

د جمعي (تفریق) قاعده که $f1(x)$ او $f2(x)$ په یوه ایتروال کی نه پریکیدونکي وي ، نو باور لري

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$$

جمله :

د ،،بدلون (قاعده) ،، (Substitution لاتین :د یوه ارزښت په ځاي د همغه ارزښت بله لویه اینسوول ، لند: بدلون) د نیونو لاندې چی $u = g(x)$ متمادي اوو مشتقوړدی او $y = f(u)$ متمادي، نو باور لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int f[g(x)]g'(x)dx = \int f[f(u)]du$$

د ضربونو انتیګرالونه

که د دوه توابعو د ضرب انتیګرال د ورسره بلدو متودونو یا لارو شمېړو، نو زیات وخت دا ناشوني وي.

$$f(x) = x \cdot \ln(x^2) \Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx = \int (x \cdot \ln(x^2))\,dx = ?$$

بدلون <u>Substitution</u>

د ناټاکلي انتیګرال حل د بدلون له لارې(ننوتنه راځي)

تراوسه پورې مو فقط د انتیګرالونه او جملې حل کړې، چې د لومړنیو توابعو په انتیګرال اړول کېدل. له دې لاس ته راغلو لومړنیو انتېګرالونو د نورو انتېګرالولو حل جملې راکوي. د لومړنی انتېګرالونې سیده استعمال تل ساده نه دی، لکه چې په لاندې کې ګوته ورته نیول کیږي.

جمله ۲ . ۶ : د ،،بدلون (قاعده)،، (Substitution لاتین :د یوه ارزښت په ځاي د همغه ارزښت بله لویه ایښوول ، لنډ: بدلون) د نیونو لاندې چی u = g (x) متمادي اوو مشتقوړدئ او y = f (u) متمادي، نو باور لري:)(کتاب کتل که لاندی بې د انتیګرال له نخښې)

$$\int f\,[g(x)]\,g'(x)dx = \int f\,(u)du$$

حل : د (۲۱ . ۱۳) د ښي اړخ مشتق د ځنځیرقاعدې (جمله۲ . ۶) له مخی داسی دی

$$\frac{d}{dx}\int f(u)\,du = \frac{d}{du}\int f(u)\,du \cdot \frac{du}{dx} = f(u)\cdot u' = f[g(x)]\cdot g'(x),$$

دا د کیڼ اړخ د رابیلیدنی سره سر خوري (۲۱. ۱۳) قاعده د ضرب اینتګرالېدو(اینتیګریشن) لپاره مساعده ده، په کوم کی چی یو فاکتور ځنځیري بلواك f [g (x)] وي

(c) ketabton.com: The Digital Library

او دا بل فاکتور (ضریب) یی د دننه تابع مشتق (g ' (x وي. سړی د دننه تابع لپاره متحولې یا واریابل بدلوي یا ځاي په ځاي کوي u = g (x) : جوړوي du / dx = g ' (x) په همدې ډول du = g ' (x) dx

د بریالي ایتګرالېدو(اینتیګریشن) کیدو ورسته بدلون بیرته راګرځول کیږي.

بیلګه ۲۱ . ۳) a :

لرو $I = \int 2\cos(2x - 1)\, dx$

بدلون یا په ځای کونه: $2x - 1 = u$

مشتق $2 = du / dx$ همداسی $2dx = du$

$$I = \int \cos u\, du = \sin u + C = \sin(2x - 1) + C$$

بیلګه ۲۱ . ۳) b : لرو $I = \int 3\cos(2x + 1) dx$

بدلوو : $2x = u-1$, کشتق $2= du / dx$ همداسی $dx = (1/2)\, du$

$$I = \int 3\cos u \cdot \frac{1}{2} du = \frac{3}{2}\int \cos u\, du = \frac{3}{2}\sin(2x - 1) + C$$

ومولیدل چی څنځیري تابع د لایني دننه تابع سره د بدلونو قاعدې سره تل اینتیګرال کیدی شي، ځکه چی د لایني تابع مشتق ثابت ده او ثابت فاکتور د جملی ۲۱ . ۴ سره سم د اینتیګرال تر مخ(موخه کیې لور ده) لیکل کیږي.

بیلګه 4.2: لرو $I = \sqrt{-3x + 5}\ dx$

بدلون: $-3x + 5 = u$

را بیلیدنه: $-3 = du / dx \Leftrightarrow dx = -1/3 \cdot du$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$I=\int\sqrt{u}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)du=-\frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{2}}du=-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot u^{\frac{3}{2}}+C=-\frac{2}{9}\cdot\sqrt{(-3x+5)^3}+C.$$

b) $I=\int\frac{1}{2}e^{-2x-3}dx.$

$-2x-3=u,\qquad -2=\frac{du}{dx}\qquad dx=-\frac{1}{2}du,$

$$I=\int\frac{1}{2}e^{u}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)du=-\frac{1}{4}\int e^{u}du=-\frac{1}{4}e^{u}+C=-\frac{1}{4}e^{-2x-3}+C.$$

c) $I=\int\frac{2dx}{x+2}.$

$x+2=u,\qquad 1=\frac{du}{dx}\qquad dx=du$

$$I=\int\frac{2du}{u}=2\int\frac{du}{u}=2\ln|u|+C=2\ln|x+2|+C.$$

بیلګه:

$f(x)=e^{x}\Rightarrow F(x)=\int f(x)\,dx=\int e^{x}\,dx=e^{x}+C$

ځکه چې $F'(x)=e^{x}=f(x)$

مګر: $f(x)=e^{2x}\Rightarrow F(x)=\int f(x)\,dx=\int e^{2x}\,dx\neq e^{2x}+C$

ځکه چې $F'(x)=2e^{2x}\neq \bar{f}(x)$ که $\bar{F}(x)=e^{2x}+C$; وی.

په داسې حالتونو کې د بدلون قاعده مرسته کوي:

بیلګه: د $f(x)=e^{2x}$ تابع انتیګرال ونیسئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = e^{2x} \Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx = \int e^{2x}\,dx = ?$$

بدلون : $u(x) = 2x = u$

جوړ کړی: $u'(x) = \frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{du}{2}$

$$\int f(x)\,dx = \int e^{u}\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int e^{u}\,du = \frac{1}{2}e^{u} + C$$

د بدلون برعکس: $\frac{1}{2}e^{u} + C = \frac{1}{2}e^{2x} + C$

نو: $F(x) = \int (x)\,dx = \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C$

ازمايښت : $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + C \Rightarrow F'(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \cdot 2 = e^{2x} = f(x)$

بيلګه :

وښايئ چې $f(x) = (x+1)^2 \Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx = \int (x+1)^2\,dx = ?$ باور لري .

$$f(x) = (x+1)^2 \Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx = \int (x+1)^2\,dx = ?$$

بدلون: $u(x) = x + 1 = u$

جوړ کړی: $u'(x) = \frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow dx = \frac{du}{1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int f(x)\,dx = \int u^2 \frac{du}{1} = \int u^2\,du = \frac{u^3}{3} + C$$

بیرته - یا په خټ بدلون:

$$\frac{u^3}{3} + C = \frac{(x+1)^3}{3} + C$$

نو:

$$\int (x)\,dx = \int (x+1)^2\,dx = \frac{(x+1)^3}{3} + C$$

بیلګه :

$$f(x) = (3x+6)^3 \Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx = \int (3x+6)^3\,dx = ?$$

بدلون:

$$u(x) = 3x + 6 = u$$

جوړوو:

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 3 \Rightarrow dx = \frac{du}{3}$$

$$\int f(x)\,dx = \int u^3 \frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int u^3\,du = \frac{u^4}{12} + C$$

بیرته بدلون:

$$\frac{u^4}{12} + C = \frac{1}{12}(3x+6)^4 + C$$

نو لرو:

$$\int (x)\,dx = \int (3x+6)^3\,dx = \frac{1}{12}(3x+6)^4 + C$$

بیلګه :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = x \cdot \ln(x^2) \Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx = \int (x \cdot \ln(x^2))\,dx = ?$$

بدلون : $u(x) = x^2 = u$

جوړوو: $u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2x}du$

$$\int f(x)\,dx = \int x \cdot \ln(u) \cdot \frac{1}{2x}\,du = \frac{1}{2}\int \ln(u)\,du = \frac{1}{2}[u \cdot \ln(u) - u + C] = \frac{1}{2}u \cdot \ln(u) - \frac{1}{2}u + C$$

بېرته بدلون: $\frac{1}{2}u \cdot \ln(u) - \frac{1}{2}u + C = \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln(x^2) - \frac{1}{2}x^2 + C$:

نو لرو: $\int (x)\,dx = \int (x \cdot \ln(x^2))\,dx = \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln(x^2) - \frac{1}{2}x^2 + C$

د ټاکلو انتيګرالونو حل د بدلون له لارې

ټاکلي انتيګرالونه هم د بدلون له لارې حل کيږي.

بيلګه :

$$f(x) = e^{2x} \Rightarrow F(x) = \int_{-1}^{1} e^{2x}\,dx$$

د انتيګرال حل د بدلون له لارې:

۱ – بدلون $u(x) = 2x$

۲ – د dx په ځای کېږدی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{1}{2}du$$

۳ ــ د پولو بدلون

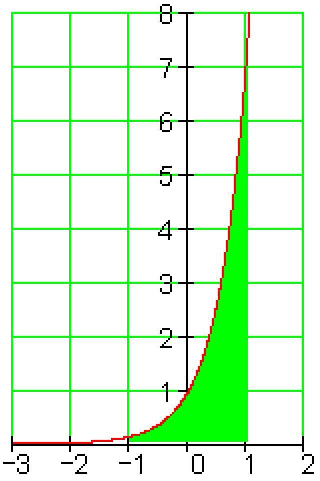
- لاندې پوله $u(-1) = -2$

- پورته پوله $u(1) = 2$

۴ - په انتیګرال کې ځا په ځای کړی

$$\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} e^{u}\, du = \frac{1}{2}\left[e^{u}\right]_{-2}^{2} = \frac{1}{2}\left[e^{2} - e^{-2}\right] = \underline{\underline{3,627}}$$

$f(x) := e^{2\cdot x}$



بیلګه :

$$f(x) = 2x\cdot \ln\left(x^{2}\right) \Rightarrow F(x) = \int_{1}^{2} 2x\cdot \ln\left(x^{2}\right) dx$$

د انتیګرال حل د بدلون له لارې

۱ ــ بدلون $u(x) = x^{2}$

۲ ــ د ځای په په ځای کونه

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2x}du$$

۳ ــ د پولې بدلون

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = 2x \cdot \ln\left(x^2\right) \Rightarrow F(x) = \int_1^2 2x \cdot \ln\left(x^2\right) dx$$

د انتيګرال حل د بدلون له لارې

۱ – بدلون $u(x) = x^2$

۲ – د ځای په ځای کونه

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2x} du$$

۳ – د پولې بدلون

- لاندې پوله $u(1) = 1$

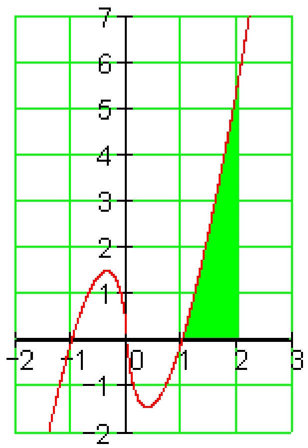
- پورته پوله $u(2) = 4$

۴ – په انتيګرال کې ځای په ځايکړی

$$\int_1^4 2x \cdot \ln(u) \cdot \frac{1}{2x} du = \int_1^4 \ln(u)\, du = \left[u \cdot \ln(u) - u\right]_1^4$$

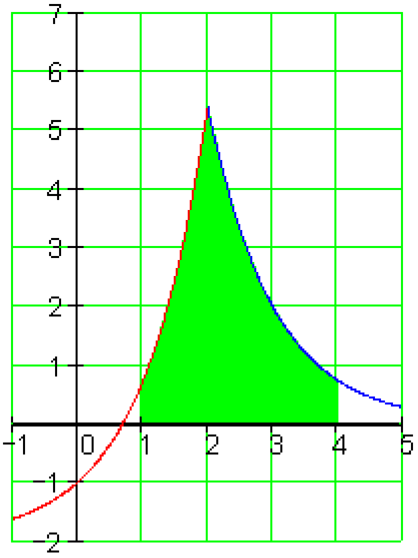
$$= \left[4 \cdot \ln(4) - 4\right] - \left[1 \cdot \ln(1) - 1\right] \approx \underline{\underline{2{,}545}}$$

$f(x) := 2x \cdot \ln\left(x^2\right)$



بيلګه :

(c) ketabton.com: The Digital Library



$f(x)=\begin{cases} e^x-2 \\ (e^2-2)e^{-(x-2)} \end{cases}$	د $x<2$ له پاره د $x \geq 2$ له پاره

$$A=\underbrace{\int_1^2 (e^x-2)\,dx}_{I_1}+\underbrace{\int_2^4 (e^2-2)e^{-(x-2)}\,dx}_{I_2}$$

$$I_1=\int_1^2 (e^x-2)\,dx=\left[e^x-2x\right]_1^2=e^2-e-2$$

$$I_2=(e^2-2)\int_2^4 e^{-(x-2)}\,dx$$

$$u(x)=-(x-2)=-x+2$$

$$\frac{du}{dx}=-1 \Rightarrow dx=-du\,;\ u(2)=0\,;\ u(4)=-2$$

$$I_2=-(e^2-2)\int_0^{-2} e^u\,du=(e^2-2)\int_{-2}^{0} e^u\,du$$

$$=(e^2-2)\cdot\left[e^u\right]_{-2}^{0}=e^2+2e^{-2}-3$$

$$I=I_1+I_2=e^2-e-2+e^2+2e^{-2}-3=\underline{\underline{7{,}331}}$$

جمله ۲ . ۶:

د ،،بدلون،، (Substitution) لاتين :د يوه ارزښت په ځاي د همغه ارزښت بله لويه اينبول ، لنډ: بدلون)قاعده: د نيونو لاندې چې $u = g(x)$ متمادي (نه پريکيدونکی) او د مشتق قابليت لري او $y = f(u)$ متمادي دی، نو باور لري:

$$\int f\,[g(x)]\,g'(x)dx=\int f(u)du$$

حل : د (۲ . ۱۳) د بني اړخ مشتق د ځنځيرقاعدې (جمله۲ . ۶) له مخی داسی دی

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{d}{dx}\int f(u)\,du = \frac{d}{du}\int f(u)\,du \cdot \frac{du}{dx} = f(u)\cdot u' = f[g(x)]\cdot g'(x),$$

دا د کيڼ اړخ د رابیلیدنی سره سر خوري (۱۳ . ۲۱.) قاعده د ضرب اینتګرالېدو(اينتيګريشن) لپاره مساعده ده، په کوم کی چی يو فاکتور ځنځيري بلواك f [g (x)] وي او دا بل فاکتور (ضريب) يی د دننه تابع مشتق g ' (x) وي. سرې د دننه تابع لپاره متحولي يا واريابل بدلوي يا ځاي په ځاي کوي u = g (x) : جوړوي du / dx = g ' (x) په همدې ډول du = g ' (x) dx

د بريالي ايتګرالېدو(اينتيکرېشن) کيدو ورسته بدلون بيرته راګرځول کيږي.

بيلګه ۲۱ . ۳) a : لرو $I = \int 2\cos(2x-1)\,dx$

بدلون يا په ځای کونه: $2x-1=u$

مشتق $2 = du/dx$ همداسی $2dx = du$

$$I = \int \cos u\,du = \sin u + C = \sin(2x-1)+C$$

بيلګه ۲۱ . ۳) b : لرو $I = \int 3\cos(2x+1)dx$

بدلوو : , 2x = u-1 کشتق 2= du / dx همداسی dx = (1/2) du

$$I = \int 3\cos u \cdot \frac{1}{2}du = \frac{3}{2}\int \cos u\,du = \frac{3}{2}\sin(2x-1)+C$$

وموليدل چی ځنځيري تابع د لايني دننه تابع سره د بدلونو قاعدې سره تل اينتيګرال کيدی شي، ځکه چی د لايني تابع مشتق ثابت دی او ثابت فاکتور د جملی ۲ . ۴ سره سم د اينتيګرال تر مخ(موخه کيڼ لور ده) ليکل کيږي.

د بنستيزو اينتيګرالو سره ۱۰ او ۱۱) جدول ۲۱ . ۱ (متحولي x يواځي په جګ يا مټ د دوه منخ ته راځي. له دې امله داسی اينتيګرال، کومو کی چی د x2 په ځاي لايني ترم

(c) ketabton.com: The Digital Library

(Term) پروت دی، کیدی شي چی د لاینی بدلولو له لارې په بنسټیز اینتیګرالو ۱۰ او ۱۱ بیرته واړول شي. ډیروخت یو د فورم بدلون ته هم اړتیاموجود وي، چی د اینتیګراند فورم ته راشو.

بیلګه 5.2:

$$a)\quad I=\int\frac{dx}{1+2x^2}.$$

$$2x^2=\left(\sqrt{2}x\right)^2,\quad d\cdot h\cdot\ I=\int\frac{dx}{1+(\sqrt{2}x)^2},$$

$$\sqrt{2}x=u,\qquad \sqrt{2}=\frac{du}{dx}\qquad dx=\frac{1}{\sqrt{2}}du,$$

$$I=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{du}{1+u^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Arctan}u+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Arctan}(\sqrt{2}x)+C.$$

$$b)\quad I=\int\frac{dx}{\sqrt{9-36x^2}}.$$

$$9-36x^2=9(1-4x^2)=9(1-(2x)^2),\ d\cdot h\cdot$$

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{9(1-(2x)^2)}}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{\sqrt{1-(2x)^2}},$$

$$2x=u,\qquad 2=\frac{du}{dx}\qquad dx=\frac{1}{2}du$$

$$I=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\frac{1}{6}\operatorname{Arcsin}u+C=\frac{1}{6}\operatorname{Arcsin}(2x)+C.$$

اینتیګریشن قاعدې، که دننه تابع خطي یا لاینی نه وي، نو د اینتیګراند دوم فاکتور(تر ثابت فاکتور پورې) د دننی تابع د لومړي فاکتور مشتق وي، چی د (۲ . ۱۳) له لارې سرې بنسټیز اینتیګرال ته راشي. دلته هم سړی بیا دننی تابع په نوې متحولې یا واریابلی بدلوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه 6.21: الف: $I = 4x\sqrt{x^2 - 1}\, dx$

بدلون:د $x^2 - 1 = u$ مشتق $2x = du/dx$ دی ،همداسې لرو: $xdx = \frac{1}{2} du$

$$I = \int 4\sqrt{u} \cdot \tfrac{1}{2} du = 2\int u^{\frac{1}{2}} du = 2 \cdot 2/3\, u^{3/2} + C = 4/3\sqrt{(x^2 - 1)^3} + C$$

ب) $I = \int \sin^3 x \cdot \cos x\, dx$

بدلون: $\sin x = u$ را بیل شوي $\cos x = du/dx$ همداسې $\cos x\, dx$

$$I = \int u^3 du = \frac{1}{4}u^4 + C = \frac{1}{4}\sin^4$$

$$c)\ I = \int \frac{1}{x} \cdot \ln^2 x\, dx$$

$$\ln x = u, \qquad : \frac{1}{x} = \frac{du}{dx} \qquad \frac{1}{x} dx = du,$$

$$I = \int u^2 du = \frac{1}{3}u^3 + C = \frac{1}{3}\ln^3 x + C$$

$$d)\ I = \int \tan x\, dx.$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, d \cdot h. \quad I = \int \frac{1}{\cos x} \cdot \sin x\, dx,$$

$$\cos x = u, \qquad -\sin x = \frac{du}{dx} \qquad \sin x\, dx = -du,$$

$$I = -\int \frac{1}{u} du = -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C.$$

$$e)\ I = \int_0^1 \frac{2x^2}{2 - x^3} dx.$$

$$2 - x^3 = u, \qquad -3x^2 = \frac{du}{dx} \qquad x^2 dx = -\frac{1}{3} du,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$I = -\frac{1}{3}\int_0^1 \frac{2du}{u} = -\frac{2}{3}\ln|u|\Big|_0^1 = -\frac{2}{3}\ln\left|2-x^3\right|\Big|_0^1 = -\frac{2}{3}(\ln 1 - \ln 2) = \frac{2}{3}\ln 2.$$

۲۱د بدلونقاعده) ۲۱ . ۱۳ (دې په چپه) يعني د ښی وكيڼ(لور هم استعمال شي . اينتيګرال f (x) dx كيدی شي چی په بل واړول شي چی x په يو مناسب بلواك (g (t بدل شي (21 . 14) f (x) dx = f [g(t)]. g(t)dt. دا:
افاده » مناسب« بلواك دې دلته داسي وپوهيدی شي چی سړی د بدلون وروسته يو ساده او ممکن يو بنستيز اينتيګرال لاس ته راوړي. د) ۲۱ . ۱۴ (استعمال په قاعده کی داسی دی چی په يوه بلواك f (x) کی موجود » پيچلی « ترم h (x)(د t = h (x (په بدلون له منځ څخه وړي او بيا) که ممکن وي (د x په لوريی حلوي

$$x = g(t) = h^{-1}(t)$$

بیلګه 7.21: الف: $:a)\ \ I = \int \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$

$$\sqrt{x}-1 = t, \qquad x;\ x = (t+1)^2, \qquad dx = 2(t+1)dt:$$

$$I = \int \frac{2(t+1)}{t}dt = 2\cdot\left[\int 1dt + \int \frac{1}{t}dt\right] = 2(t+\ln|t|) + C = 2(\sqrt{x}-1) + 2\ln\left|\sqrt{x}-1\right| + C$$

مناسب تابع ، چې ورکړ شوی اينتګرال د دوه ايتګرالو جمعي ته بيايي، دلته
$x = g(t) = (t+1)^2$ وو.

$$b)\ \ I = \int \frac{dx}{\sqrt{\sin x \cos^3 x}}.$$

$$\sin x \cdot \cos^3 x = \frac{\sin x}{\cos x}\cdot\cos^4 x = \tan x \cdot \cos^4 x.$$

نو لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$I=\int\frac{dx}{\tan x\cos^4 x}=\int\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{1}{\sqrt{\tan x}}dx,$$

$$\tan x=t,\qquad \frac{1}{\cos^2 x}dx=dt,$$

$$I=\int\frac{1}{\sqrt{t}}dt=\int t^{-\frac{1}{2}}dt=2t^{\frac{1}{2}}+C=2\cdot\sqrt{\tan x}+C.$$

موږ د دې لاندې انتیګرال نیسو: $\int x\cos(x)\,dx$

ږدو $u = x$ ، نو لرو : $du = dx$

ږدو $dv = \cos(x)\,dx$ ، نو $v = \sin(x)$ لرو

په لاندې ترګه مخ ته ځو:

$$\begin{aligned}\int x\cos(x)\,dx &= \int u\,dv\\ &= uv-\int v\,du\\ &= x\sin(x)-\int \sin(x)\,dx\\ &= x\sin(x)+\cos(x)+C.\end{aligned}$$

:

C د انتیګرالوني یوه په خوښه ثابته ده

انتیګرالوونی Integrand دx توان یا e^x سره

د ټوټه انتیګرالوني د استعمال سره د انتیګرالونو لکه

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\int x^2 e^x\, dx$ او $\int x^3 \sin(x)\, dx$

کېده شي په مدې لا حل شي:

يوه په زړه پورې بېلګه دا لاندې ده :

$$\int e^x \cos(x)\, dx$$

که په پوره سختوالي ونيسو ونيسو، نو په ورسره بلده لار اړين نه دی، چې دا دې حل ولي.

دا بېلګه د دوه واره ټوټه انتيګرالوني استعمال له لارې حل کولی شو.

لومړی : $u = \cos(x)$ داسې چې $du = -\sin(x)\, dx$

$dv = e^x\, dx$ داسې جې $v = e^x$

نو لرو :

$$\int e^x \cos(x)\, dx = e^x \cos(x) + \int e^x \sin(x)\, dx.$$

اوس ، ددې له پاره چې پاتې انتيګرال حل شي، نو د ټوټه انتيګرالوني قاعده بيا استعمالوو ، د دې لاندې سره :

$u = \sin(x);\ du = \cos(x)\, dx$

$v = e^x;\ dv = e^x\, dx$

نو لرو :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int e^x \sin(x)\,dx = e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)\,dx$$

که دا سره یوځای کړو، نو لاس ته زاځي:

$$\int e^x \cos(x)\,dx = e^x \cos(x) + e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)\,dx.$$

که فکر وکړو، نو د پورته مساوات دواړو لورو ته همغه انتیګرال لرو(بې له مخ نخښې)، نو د ښي لور انتیګرال که کېڼ لور ته یوسو ، لاس ته ترې راځي:

$$2\int e^x \cos(x)\,dx = e^x(\sin(x) + \cos(x)) + C$$

$$\int e^x \cos(x)\,dx = \frac{e^x(\sin(x) + \cos(x))}{2} + C'$$

C د انتیګرالونې یوه په خوښه ثابته ده

د اینتیګرال شمیرنی استعمال

د سطحومساحت، چې د f(x) دګراف او x محور ترمنځ پرتې وي.

په ځلورم ځپرکي کی وویل شو چی ټاکلی اینتیګرال $\int_a^b f(x)dx = f(b) - f(a)$ د

سطحي مساحتA ښايي ، چې له منحني(x)y=f، د x- محور y=(0) او د کرښیx=a اوx=b له خوا رابند وي. موږ له دې څخه مخ ته تللي یو چې y=f(x) د اینتیګرال اینتروال په دننه کی دx-محور پورته لور ته ځي، خو دا کېدی شي د محور کښته لور ته هم لاړ شي..

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت:

--د یوې په خوښه تابع د منحني یا کرښې او د x محور ترمنځ او یا د دوه توابعو د سطحې شمیرلو لپاره وړاندیزونه وکړئ.

- دا هم د شمیرلو لپاره په پام کې ونیسئ، که منحني یا د تابع کرښه د x د محور لاندې لور ته پراته وي.

- یوه په خوښه تابع ورکړئ، د تابع رسم وکاږئ او د تابع انتیګرال د x محور په ټاکلو پولو کې وشمېرئ.

- یوه په خوښه تابع ولیکئ، چې د انتروال په دننه کې د x محور کښته لور ته ځي. د تابع رسم و کاږئ او دا تابع به کومه محنخښه ولري؟ دا چې سطحه تل مثبت ده، نو د تابع د محنښې په ورکولو کې دا بیا وڅېړئ، چې ولې؟

یادونه: که موږ د سطحې مساحت شمېرلو کې هغه عدد ولیکو، نو د هغې سره دې دا په پام کې ونیول شي، چې د سطحې واحد(یوون) ور سره شته دی. که دا ورسره لیکل شوی نه وي، خو باید تل په پام کې وي.

دا پورته فعالیتونه مو دې لاندې بېلګو ته رابولي:

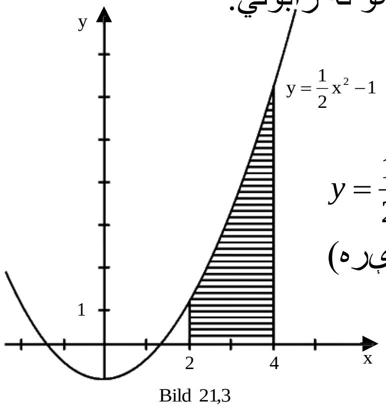


Bild 21,3

بیلګه ۵ . ۱ :

د سطحې مساحت د

$$y=\frac{1}{2}x^2-1\ ,\ y=0\ ,\ x_1=2\ ,\ x_2=4$$

ترمنځ په لاندې ډول دی(مخامخ څېره)

$$A=\int_2^4(\frac{1}{2}x^2-1)dx=(\frac{1}{6}x^3-x)\Big|_2^4$$

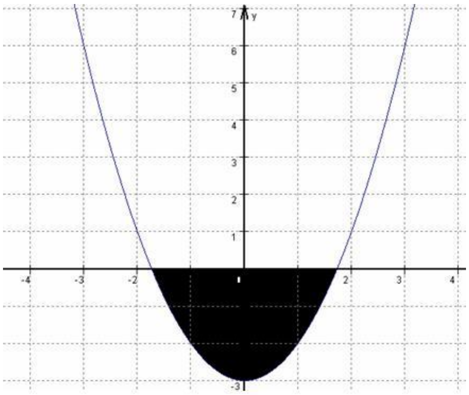
$$=\frac{1}{6}.64-4-\frac{1}{6}.8+2$$

$$=\frac{22}{3}$$

که د تابع y=f(x) سطحې د منحني تلنه دx- محور لاندې لور ته وي، نودا ټاکلی اینتیګرال به منفي وي. ددې لپاره چې د سطحې تل مثبت مساحت لاس ته راوړو، نو د اینتیګرال مطلقه ارزښت نیسو یعني منفي اینتیګرال.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library



بیلگه ۵ . ۲ :

د $f(x)=x^2-3$ گراف د x محور سره یوه

سطحه رابندوي.د گراف او x محور ترمنځ

د ټولې سطحې مساحت وشمېرئ.

تګلار:

۱ - د دې لپاره چې دا مسئله راته ښه روښانه شوي وي، نو دا پورته رسم کاږو.

۲ - د دې لپاره چې د انتیگرال حدونه لاس ته اروړی شو، باید صفرځایونه وشمېرو.

$$0 = x^2 - 3$$
$$x = \pm\sqrt{3}$$

۳ – اوس د سطحې د مساحت شمېرلو لپاره اړونده انتیگرال لیکو.

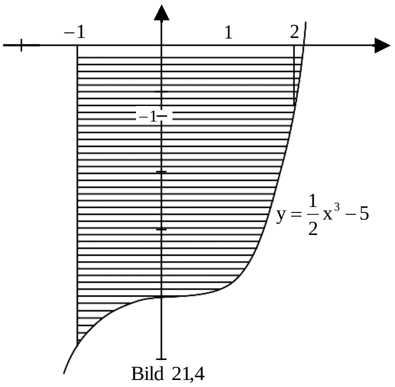
د تناظر پر بنسټ لومړی له 0 څخه تر $\sqrt{3}$ پوري انتیگرال شمېرو او نتیجه یې له 2 سره ضربوو، نو لرو:

$$\int_0^{\sqrt{3}} (x^2-3)dx = \int_0^{\sqrt{3}} (x^2)dx - 3\cdot\int_0^{\sqrt{3}} 1dx = \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^{\sqrt{3}} - 3.x \Big|_0^{\sqrt{3}} = \sqrt{3} - 3\cdot\sqrt{3} = |-2\cdot\sqrt{3}|$$
$$A = 2\cdot\sqrt{3} + 2\cdot\sqrt{3} = 4\cdot\sqrt{3}$$

بیلکه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د سطحې مساحت د $x_2=2$, $x_1=-1$, $y=0$, $y=\frac{1}{2}x^3-5$ ترمنځ دی: (لاندې ځیره)



$$A=\left|\int_{-1}^{2}\frac{1}{2}x^3-5)dx\right|$$

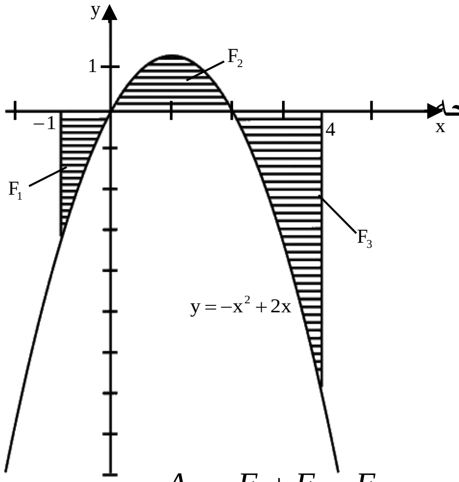
$$=-\int_{-1}^{2}\frac{1}{2}x^3-5)dx$$

$$=(-\frac{1}{8}x^4+5x)|_{-1}^{2}$$

$$=(-2+10+1/8+5)=\frac{105}{8}$$

بیلګه:

د لاندې پولو $x_1=-1$ تر $x_2=4$ اودمنحني $y=-x^2+2x$ او $y=0$ ترمنځ د x- محور پورته او ښکته پرته سطحه (په مخامخ ځېره کې نښانه شوې ده) دې وشمیرل شي



حل : د تابع $y=-x^2+2x$, د $x1=0$ د صفرځایونو $x_1=0$ او $x_2=2$ تر منځ پرته غوښتونکې سطحه دx-محور پورته، نوره ښکته پرته ده. له دې امله لرو

$$A=-F_1+F_2-F_3$$

$$=\int_{-1}^{0}(-x^2+2x)dx+\int_{0}^{2}(-x^2+2x)dx-\int_{2}^{4}(-x^2+2x)dx$$

$$=-\left(-\frac{1}{3}x^3+x^2\right)\Bigg|_{-1}^{0}\left(-\frac{1}{3}x^3+x^2\right)\Bigg|_{0}^{2}-\left(-\frac{1}{3}x^3+x^2\right)\Bigg|_{2}^{4}=\frac{28}{3}$$

د لاندې پولو $x=-1$ تر $x=4$ او د کږې $y=-x^2+2x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او $y = 0$ ترمنځ (د x – محور پورته او کښته)

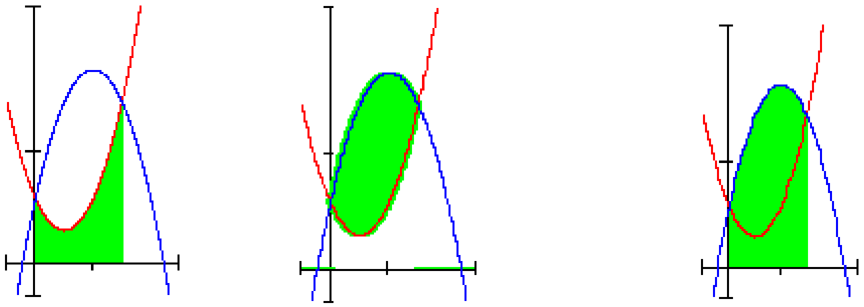
له دوه ګرافونو څخه رابندي سطحې د مساحت شمرنه:

ننوتنه د یوه ډنډ یا یوه بند څېره دې دلته راوړل شي یا دیوه پټي ٍچې له ګرږو پولو را بند وي.

فعاليت:

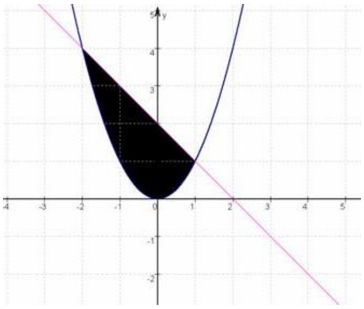
- که داسې یو ډنډ ولرو، نو فکر وکړئ، چې د دې ډنډ مساحت څنګه وشمېرو؟

په څنو پوښتنو کې د سطحې مساحت شميرل کيږي، چې د دوه توابعو ګرافونو ترمنځ پرته ده. دا ډول د سطحې مساحت کيږدی شي د ټاکلو اینتګرالونو د کمښت له لارې و شميرل شي. که دواړه ګرافونه د x-محور پورته لور ته پراته وي،نو د لاندې شيما څخه مخ ته ځو :



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A = A_1 - A_2$$



بېلګه ۵ . ۵ :

د $f(x) = x^2$ او $g(x) = -x+2$ دوه توابعو ترمنځ رابند د سطحې مساحت غواړو وشمېرو:

د تګلارې لار: دلته هم يو شکل يا ګراف رسموو، چې دا حالت راته روښانه شي.

۲ - د دې لپاره چې انتيګرال وشمېرو، د ګرافونو دقاطع ټکي ټاکو.

$x^2 = -x+2$

$x^2+x-2= 0$

P;q - فرمول

$$x_{(1,2)} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = -2$$

۳ – په ساده توګه ليدل کيږي.

$$\int_{x_1}^{x_2} g(x)\,dx - \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پس باور لري

$$A = \int_{1}^{-2} (-x+2)dx - \int_{1}^{-2} x^2 dx =$$

$$-1\cdot\left(\frac{2^2}{2}-\frac{1}{2}\right)-6-\left(\frac{(-2)^3}{3}\right)-\frac{1}{3}$$

$$= -1,5-6++=-4.5$$

$$A = 4,5$$

جمله :

که د ټولو x لپاره ، د a<x<b سره f(x)>g(x) وي، دا په دې معنا چې د f ګراف د a او b تر منځ دg پورته لور ته ځغلي, نو د دواړو ګرافونو په انتروال کې رابندې سطحې مساحت لپاره بارور لري.

$$A = \int_{a}^{b} (f(x)-g(x))\,dx$$

بيلګه ۵ . ٦ :

د توابعو$f(x) = x^2 - 2x + 2$ او $g(x) = -x^2 + 4x + 2$ ګرافونو ترمنځ سطحې مساحت غواړو پيداکړو.
د دواړو ګرافونو د x–ارزښتونو غوڅټکي(د تقاطع ټکي) د اينتيګرال حدونه جوړوي.

د غوڅټکو د x - کواوردیناتو ټاکل:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 = -x^2 + 4x + 2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 6x = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$x_1 = 0$ او $x_2 = 3$ د اينتيګرال ليميټونه يا پولې دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اینتګرال جوړونه:

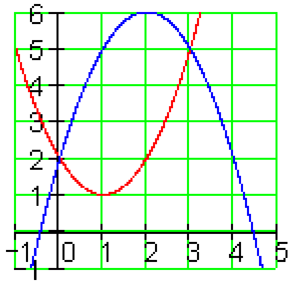
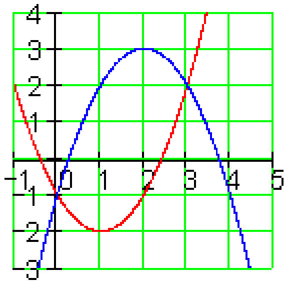
$$\int_0^3 f(x)dx = \int_0^3 (x^2 - 2x + 2)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x\right]_0^3 = \frac{1}{3}\cdot 27 - 9 + 2\cdot 3 = 9 - 9 + 6 = \underline{\underline{6}}$$

$$\int_0^3 g(x)dx = \int_0^3 (-x^2 + 4x + 2)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 2x\right]_0^3 = -\frac{1}{3}\cdot 27 + 2\cdot 9 + 2\cdot 3 =$$

$$= -9 + 18 + 6 = \underline{\underline{15}}$$

دا چې د دوه ګرافونو ترمنځ سطحه باید تل مثبت وي،نو له لوي ارزښت څخه کووچنی ارزښت باید کم شي.

$$A = \int_0^3 g(x)dx - \int_0^3 f(x)dx = 15 - 6 = \underline{\underline{9}}$$

 	لکه چې پو هیږو، د یوې سطحې مخنخښه ددې په واک کې ده، چې ایا سطحه د **x** - محور پورته لور ته پرته ده او که کښته لور ته. موږ ځېږو، چی ایا دا تاثیرات په پورتنی بیلګه کې پراته دي او که نه. موږ سطحه د **y** -محور په دري واحدونو(یوونونو) کښته لورته بیایو او سطحې نوې شمیرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د لید له مخې قضاوت وکړو،نو د ټولو لاس ته راوړنه به برابره وي.

د x–ارزښت غوښتکي هم او له دې سره د انتيګرال حدونه بې تغيره پاتيږي.

$f(x) = x^2 - 2x - 1$ و $g(x) = -x^2 + 4x - 1$

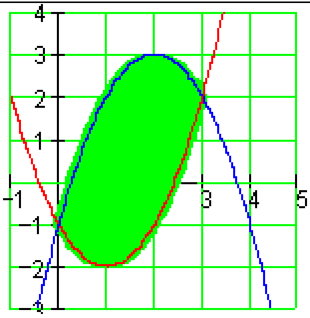
ځای په ځای کونه: $A = \int_0^3 f(x)dx - \int_0^3 g(x)dx = \int_0^3 (f(x) - g(x))\,dx$

د $f(x) - g(x) = 2x^2 - 6x$ سره کيږي:

$$A = \int_0^3 (2x^2 - 3x^2)\,dx = \left[\frac{2}{3}x^3 - 3x^2\right]_0^3 = \frac{2}{3}\cdot 27 - 3\cdot 9 = 18 - 27 = \underline{\underline{-9}}$$

دا چې د دوه منحنيو ترمنځ سطحه فزيکي سطحه ښايي، بايد لاس ته راوړنه يو مثبت عدد وي. دا د مطلق ارزښت له لارې ترلاسه کوو.

$$A = \left|\int_0^3 (2x^2 - 6x)\,dx\right| = \left|\left[\frac{2}{3}x^3 - 3x^2\right]_0^3\right| = \left|\frac{2}{3}\cdot 27 - 3\cdot 9\right| = |18 - 27| = |-9| = \underline{\underline{9}}$$



د دې متود تولیزه ونه(عمومیت) :

د دوه ګرافونو ترمنځ سطحه:

که يوه سطحه د يوې پورته او يوې کښته منحني څخه رابنده وي، چې تابع$f(x)$ او تابع $g(x)$ پورې اړه و لري، نو دا له دې رابنده سطحه په لاندې ډول شميرل کيږي.

$$A = \left|\int_a^b [f(x) - g(x)]dx\right|$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د انتيکرالونې حدونه a او b د x – محور د دواړو ګرافونو د وضعيه قېمتونو غوښتکي دي

-- د منحنيو $y=f_1(x)$ او $y=f_2(x)$

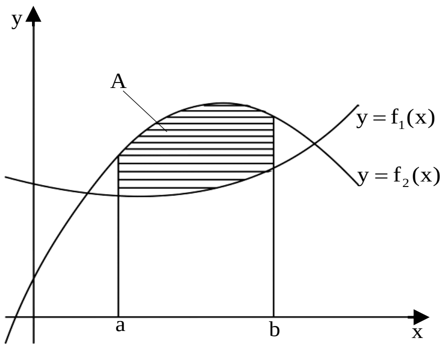


Bild 21,6

تر منځ پرتي سطحې مساحت په لاندې پولو کې له $x=a$ تر $x=b$ پورې او $y=f_1(x)$ او $y=f_2(x)$

اينتيګرالوړ او $f_1(x)<f_2(x)$
په $[a,b]$ اينتروال کی (ش ۱ . ۶) داسی لاس ته راوړل کيږي چی دتابع $y=f_2(x)$ لاندې سطحې مساحت څخه د $y=f_1(x)$ تابع لاندې سطحې مساحت کم کړئ.

$$A=\int_a^b [f_2(x)-f_1(x)]dx$$

سړی په ساده ډول خپل باور په دې راوستی شي چې ش ۲ . ۶ له دې خپلواك چی $f_1(x)$ او $f_2(x)$ په اينتروال $[a,b]$ کومه يوه مخنخښه ځان ته غوره کوي باوري دی.

بيلګه ۵ . ۷: د لاندې پارابولونو ترمنځ سطحه غواړو وشميرو $y=x^2-1$ او $(y=-x^2+1$

حل : د ايتيګرال پولې(حدونه) د افقي(پراته) محور غوښتکي(د تقاطع ټکي) دي

$$x^2-1=-x^2+1$$
$$2x^2=2$$
$$x^2=1 \qquad x_1-a=1\,,\ x_2=b=-1$$

د اينتيګرلولو په اينتروال [1 , 1 -] کی لرو $-x^2+1>x^2-1$
(که چيرې په اينتروال [a,b] او په (۲ . ۱) کی $f2(x)>f1(x)$ په نظر کي ونه نيول شي، نو د څرګند اينتيګرال به منفی شي او سړی(لکه د مخه چې ويل شوي) بيا داينتيګرال مطلقه ارزښت نيسي. له دې امله لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A=\int_{-1}^{1}\left[-x^{2}+1-(x^{2}-1)\right]dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(-2x^{2}+2)\,dx$$

$$=(-\frac{2}{3}x^{3}+2x)\Big|_{-1}^{1}=\frac{8}{3}$$

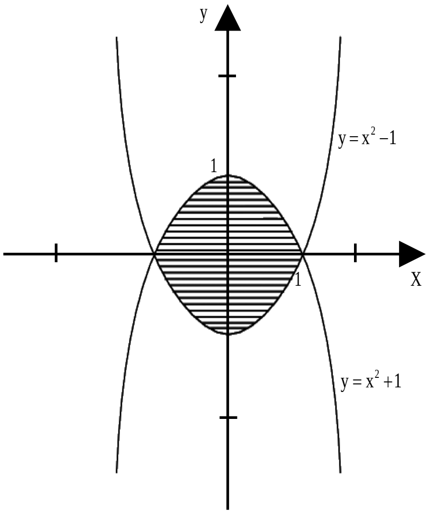


Bild 21.7

بیلګه ۵ . ۸ :
د (ش. ۲ . ۸) سره سم د لاندې توابعو ترمنځ سطحه شمیرل کیږي.

$y=(x-1)^2, y=-4x+4, y=4$

حل : دا د شمیرلو سطحه، د منحنیو ترمنځ د دوه سطحو A1 او A2 له یوځاي کیدو څخه لاس ته راځي.

A1 د منحنیو y=4 او y=-4x+4 ترمنځ پروت دی. د اینتیګرال پولی(- حدونه) د لومړي

کواور ینات(x –محور) غوښتکی دی، د y=4 او y=-4x+4 ترمنځ.

لرو $4=-4x+4,\ x_1=0$ په همدې ډول د

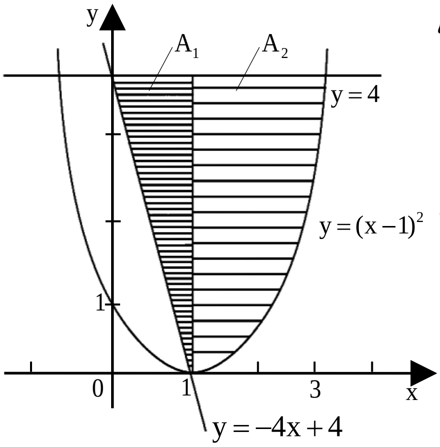


Bild 21.8

بنی غوښتکي لومړی وضعیه ارزښت (کواور دینات)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $y=-4x+4$ او $y=(x-1)^2$ ترمنځ

$$-4x+4=(x-1)^2,\ x^2+2x-3=0$$

$$x_{2,3}=-1\pm 2,\ x_3=1.$$

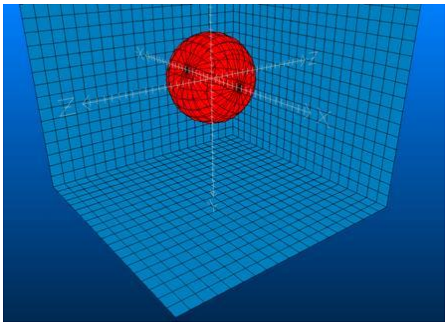
ګورو چیA2د y=-4 او$y=(x-1)^2$ تر
منځ پرته ده ، د اینتيګرال حدونه(پولی)x1=1 او د لومړي
وضعيه قيمت د بنې غوښتکي د y=4 او $y=(x-1)^2$.

غوښتوني سطحه داسې ده:

$$A=A_1+A_2=\int_0^1[4-(-4x+4)]dx+\int_0^1\left[4-(x-1)^2\right]dx$$

$$=\int_0^1 4x\,dx+\int_0^1(-x^2+2x+3)\,dx=2x^2\Big|_0^1+(1/3x^3+x+3x)\Big|_4^3=7\frac{1}{3}$$

د څرخيدونکو بدنونو(جسمونو) ډکي(حجم)



فعاليت:

- په ورسره بلده توګه د مستطيل حجم وليکئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- د کرې، استوانې او د مخروط حجومونه، چې تراوسه مو لوستلي و ليکئ.

يادونه: دا دې تل په پام کې ونيول شي: که د انتيګرال شمېرنې له لارې کوم عدد لاس ته راځي، نو هغه عدد د يوه جسم حجم ښايي. موږ ددې لپاره ليکو، چې د حجم مطلوبه واحد.

څرخdدونکي تنونه:

څرخېدونکي تنونه په هندسه کې هغه تنونه دي، چې په يوه څرخېدونکي محور باندې د يوې کرښې يا منحني څرخېدنې له لارې منځ ته راځي. کرښه يا منحني په يوه سطحه پرته ده او محور هم په همدې سطحه پروت دی. منحني محور نه غوڅوي، اويا زيات له زياته يې ممکن لمس کړي. چې غوره بېلګې به يې په لاندې کې و څېړل شي.

د xپه محور څرخېدنه(څرخون)

لکه د مخه مو چې وويل، حجم هم يو انتيګرال دی. دا داسې منځ ته راځي، چې که يوه تابع د X په محور و څرخول شي.

د يوه څرخېدونکي جسم (بدن يا تن) حجم(ډکی)

د يوه څرخېدونکي جسم لپاره، چې د سطحې په څرخېدنه د x په محور په انتروال [a,b] کې د f تابع له ګراف ، د x له محور او له دواړو کرښو $x = a$ او$x = b$ ترمنځ جوړېږي، رابنده وي.

د حجم شمېرل په لاندې ډول دی:

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 \, dx$$

د y په محور څرخيدنه

د يوې سطحې په څرخېدنې (د y په محور)، چې په [a,b] انتروال دf تابع ګراف دy محور او د دواړو کرښو $y = f(a)$ او $y = f(b)$ له خوا رابند وي بايد د $y = f(x)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بڼه بدله شي و $x = f^{-1}(y)$ معکوس تابع ته . دا شتون لري، که f متمادي او غښتلي یوغږیز وي. که نه(لکه په پورته شي شکل کې) نو شاید ممکن وي،چي f په توټو توټه شي، په هغو کې چې متمادي او غښتلی یوغږیز وي. دا دلته منځ ته راغلي حجمونه بیا ځانله شمېرل کیږي او سره جمعه کیږي.

$$V = \pi \cdot \int_{\min(f(a),\ f(b))}^{\max(f(a),\ f(b))} (f^{-1}(y))^2\ dy$$

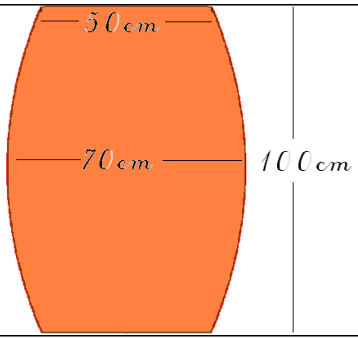
که دلته $x = f^{-1}(y)$ بدل کړو، نو د x په محور په لاندې توګه حجم لاس ته راوړو:

$$V = \pi \cdot \int_{\min(f(a),\ f(b))}^{\max(f(a),\ f(b))} x^2 dy = \pi \cdot \int_a^b x^2 \cdot |f'(x)|\, dx$$

د f' مطلق ارزښت او د انتیګرال په حدونو کې خورا جګ – ټیټ(min/max) توابع ( ) یو مثبت انتیګرال تظمینوي.

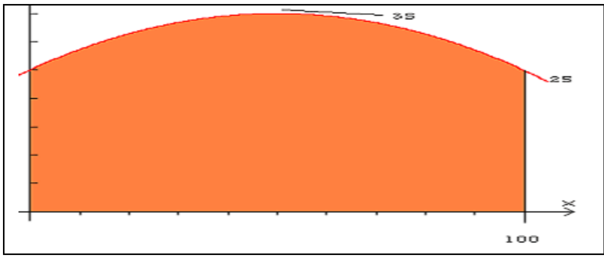
د سطحي په څرخولو(د y په محور)، چي د f تابع له ګراف او دواړو کرښو $x = a$ او $x = b$ څخه رابنده وي، لاندې فرمول باور لري.

$$V = \pi \cdot \int_a^b (x \cdot f))^2\, dx$$

	د یوه مرتبان حجم: د یوه مرتبان حجم غواړو پیدا کړو چي جګوالی یې 1 متر، وړانګه یې 25 سنتي متره په پاي او 35 سانتیمتره په منځ کې ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که مرتبان په 90° درجو و څرخول شي، نو د مربع پارابول بڼه غوره کوي. د ژۍ تابع باید کښته لور ته واز پارابول وي، لکه دلته په شکل کې.



حل: د پارابول د تابع لیکښه کېدی شي ساده په ککرتکي یا راس باندې ولیکل شي.

ټولیز باور لري:

$f(x) - a\cdot(x-5)^2 + 3.5$ (dm ارزښت په دیسیمتر)

په څرگند دول 5- د رآس راکښنه د x+ په لور ورکوي او 3,5 د y+ په لور. د غزونې ضریب a په لور اړین دی، چې کښته لور واز پارابول لاس ته راوړو. اوس فقط ضریب a نه شته. که په فرمول کې یو معلوم ټکی کیږدو، کېدی شي a وشمېرل شي.
دا ټکی (0/2,5) دی.

$$f(x) = -a\cdot(x-5)^2 + 3.5$$

د x ارزښت ځا په ځاي کوونو لرو $-a\cdot(0-5)^2 + 3.5$

له دې a دی: $\dfrac{2.5-3.5}{25} = -0.04$

او مساوات پوره بلل کیږي. $f(x) = -0.04\cdot(x-5)^2 + 3.5$

د ساده والي لپاره د رآس ټکي فرمول په نورمال یا عمودې فورم بدلوو:
$f(x) = -0.04x^2 + 0.4x + 2.5$

تابع مربع کړئ $f(x) = (-0.04x^2 + 0.4x + 2.5)^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو دی $f(x) = 0.0016x^2 - 0.032x^3 - 0.04x^2 + 2x + 6.25$

لومړنی تابع

$$f(x) = \frac{0.0016x^2}{5} \cdot x^5 - \frac{0.032x^3}{4} \cdot \frac{-0.04x^2}{3} \cdot x^3 + x^2 + 6.25x$$

د حجم شمېرلو لپاره ټاکلی انتیګرال دی؛

$$\pi \cdot \int_0^{10} (-0.04x^2 + 0.4x + 2.5)^2 \, dx = \pi \cdot \int_0^{10} (-0.0016x^2 - 0.032x^3 - 2x + 6.25) \; dx$$

$$= \pi \left[\frac{0.0016}{5} \cdot 10^5 - \frac{0.032}{4} \cdot x^4 - \frac{0.04}{3} \cdot x^3 + x^2 + 6.25x \right]_0^{10}$$

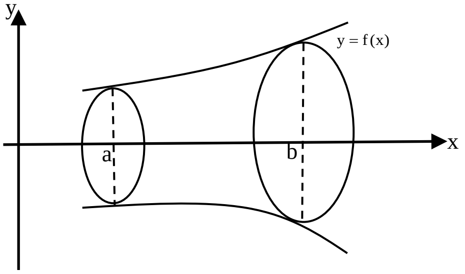
$$= \pi \left[32 - 80 - 13\frac{1}{3} + 100 + 62.5 \right]_0^{10}$$

$$= \pi \cdot 101.167$$

د حجم واحدونه (یوونونه)

دا چې موږ له پیله په دیڅیمتر شمېرنه کړې، نو طبعآ دا په لیتر شمېرل کیږي.

$$= 317.824 \; liter$$



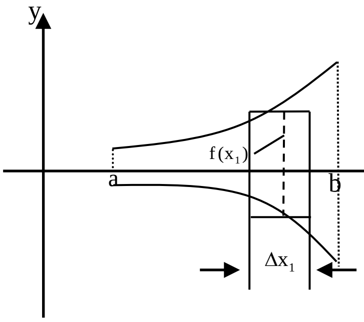
د تابع y=f(x),y=0,x=a,x=b ترمنځ سطحه چی دx-محورباندې څرخي(ش ۵ . ۹). دلته غوښتنه، په دې ډول رامنځ ته شوې یا- راغلي دڅرخیدونکي بدن ډکی(حجم) دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندېجمله باوري ده

جمله ۵ . ۸) د څرخيدونکي بدن ډکى(حجم):
په اينتروال[a,b]کي دی $y=f(x)$ متمادي وي، د څرخيدونکي بدن حجم چې د سطحو
$y=f(x),y=0,x=a,x=b$ترمنځ ، راپيداکيږي داسی دی:

$$V = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$$



ښونه: V د توتو(استوانو)د جمعې له
لارې چی وړانګه يې$f(x_i)$، جګوالی يېx_i
د $i=1,2,3,...n$ لپاره لری.
(ش: 5. 10) دi-مې توتې
(سليندر ډکی(حجم) دی.

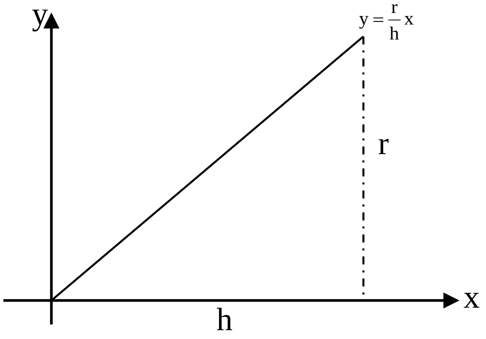
$$\Delta_i V = \pi \cdot [f(x_i)]^2 \cdot \Delta x_i$$

د ټولو n سليندرونو يا توتو زياتون

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = \sum_{i=1}^{n} \pi [f(x_i)]^2 \cdot \Delta x_i$$

د پولی ارزښت جوړونه) n->oe, xi->0 (د بنسټ اينتيګرال د تعريف سره سم

$V = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$ حجم (ډکی) راکوي.



بيلګه ۵ . ۹ :) دمخروط يا کيګل ډکی

(حجم) د $y = \frac{r}{h}x$ کرښې (د سرچيني
تيره کرښه د $\frac{r}{h}$ جګوالي سره) او دx- محور
(y =0) د حدونو$x=0$ تر $x=h$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پورې(ش . ۱۱)

$$V = \pi \cdot \int_0^h \left[\frac{r}{h}x\right]^2 dx = \pi \cdot \frac{r^2}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3}\bigg|_0^h = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

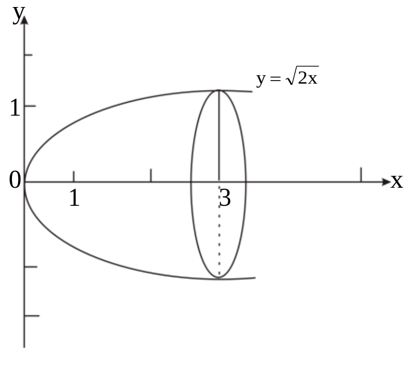
دا له بنسټيزې شمېرنې(د اساساتو) څخه معلومه نتيجه ده.

بيلګه ۵ . ۱۰:

د $y = \sqrt{2x},\ y = 0,\ x = 0,\ x = 3$

ترمنځ د x-محور باندې څرخېدلو جوړ(توليد) شوی جسم څرخېدلی پارابولوييد دی (څ ۵ ړ ۱۲)

$$V = \pi \cdot \int_0^3 \left[\sqrt{2x}\right]^2 dx$$
$$= 2\pi \cdot \int_0^3 x dx$$
$$= 2\pi \cdot \frac{x^2}{2}\bigg|_0^3 = 9\pi.$$



د ارښيميدس جمله Archimedischer Satz

د توتې، غونډارې(کرې) او مخروط د حجمونو ترمنځ تناسب:

$V_{\text{توته(استوانه)}} : V_{\text{غونداری(کره)}} : V_{\text{مخروط}} = 3 : 2 : 1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د 1886 زکب یوه درسي کتاب څخه

Die Volumen der drei Körper verhalten sich wie die Ausdrücke unter 1), 2) und 3); man hat somit die Proportion:

$$Cyl.:Kugel:Kegel = 2r^3\pi : \frac{4}{3}\pi r^3 : \frac{2r^3\pi}{3}$$

oder: „ : „ : „ $= 2 : \frac{4}{3} : \frac{2}{3}$

„ : „ : „ $= 6 : 4 : 2$

„ : „ : „ $= 3 : 2 : 1$

Archimedes war der erste, welcher dieses Verhältnis fand, daher heisst der hierdurch ausgedrückte Satz der Archimedische Satz.

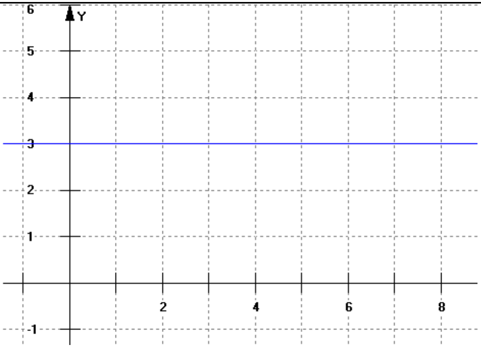
د پورته الماني پښتو:ارښیمېدس لومړی کس وو، چې دا پورته تناسب یې ومونده، له دې امله دا دلته راغلې جمله د ارښیمېدس جلې په نامه نومول شوې.

د څرخېدونکي بدن(حسم) حجم.

بېلګه ۵ . ۱۱:

استوانه(توته):

استوانه د x په محور د $f(x) = c$ یوې ثابتې تابع(په دې حالت کې $f(x) = 3$ دی) د څرخېدو څخه لاس ته راځي.



د یوې استوانې حجم (ډکی) شمېرنه:

اوس دې په [0;5] انتروال کې د توتې حجم وشمېرل شي. د استوانې د حجم د شمېرلو لپاره $V = \pi r^2 \cdot h$ عمومي فرمول دی. په دې حالت کې $r=3$ او $h=5$ دی. دx هر ارزښت لپاره د تابع ارزښته هم دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی له هرڅه غواړو $V = \pi r^2 \cdot h$ څخه فقط $r^2 \cdot h$ تر څېړنې لاندې و نیسو او غواړو یوه لار پیدا کړو ، چې د هغې لارې د انتیګرال په مرسته حجم وشمېرلای شو.
د سطحې مساحت د لاندې انتیګرال په مرسته وشمېرل شو :

$$\int_0^5 r dx = \int_0^5 f(x)\, dx$$

که د دې ناپاي ډېرو مستطیلونو(د f(x) د مربع مساحت ا د صفر په لور ځغلېدونکې پنډوالي dx سره) انتیګرال جوړ کړو، نو لاس ته ترې راځي:

$$\int_0^5 r dx = \int_0^5 [f(x)]^2\, dx$$

دا په دې معنا چې دا انتیګرال بل څه نه دی پرته له څخه، چې زموږ د پورتني فرمول څخه دد یوې توټې د حجم شمېرل دي. ز که دا له سره ضرب کړو، نو راکوي:

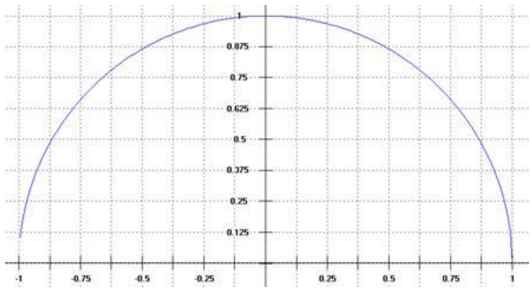
$$\pi r^2 h = \pi \int_0^5 [f(x)]^2\, dx$$

د دې ورکړ شوې استوانې د حجم شمېرنه:

$$\pi \int_0^5 [f(x)]^2\, dx = \pi \int_0^5 [9(x)]_0^5 = \pi \int_0^5 [45 - 0]_0^5 = 45\pi$$

د پرتلې لپاره: $\pi r^2 h = 45\pi$

کره (غونداری یا غنډوسکه(توپ)):



(c) ketabton.com: The Digital Library

د x په محور د $f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$ تابع څرخېدني څخه غونډاري يا کره منځ ته راځي(پورته د ننوتنې شکل.

دا تابع هم کېدی شي په ګردو ټوټو ټوټه شي، پرته غوڅوونکي تابع يې $q(x) = \pi[f(x)]^2$ ده. د دې ټوټو د انتيګرلولو له لارې بيا حجم وشمېرل شي.

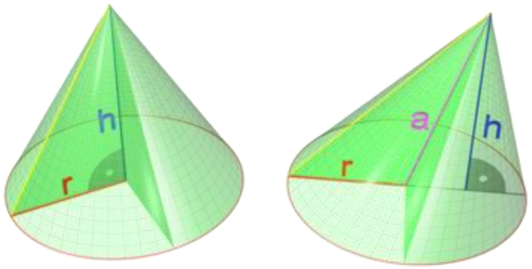
په دې بېلګه کې دې حجم وشمېرل شي، چې له صفر ځاي څخه و صفر ځاي ته د x په محور باندې

د $f(x)=\sqrt{1^2-x^2}$ تابع څرخېدنو له لارې منځ ته راځې ، يعنې په انتروال [-1;1] کې .

$$\pi\int_{-1}^{1}[f(x)]^2dx=\pi\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]=\pi\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}\pi$$

مخروطKegel (Geometrie)

دا هم ممکن ده، چې يو مخروط د يوه منظمn زاويو (اړخيزې(کونجيز) څخه رابندې بنسټيزې سطحې(د n لپاره چې ناپا ي ته ځي) اهرام ته ور نزدې کړو.



د مخروط حجم:

د انتيګرال په مرسته د يوه مستقيم مخروط د حجم د شمېرلو يوه بله مرستندويه لار. يو د کارتيزي وضعيه ارزښت (قيمت) سيستم په کار اچول کيږي، د هغه سره چې د مخروط څوکه په

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرچینه $(0|0)$ او منځ ټکی په ټکي $(0|h)$کې پروت دی. اوس کېږدی شي، چې مخروط ناپاي کوچنیو توتو(استوانو) رایوځاي شوی په پام کې ونیسو، چې جګوالی(پنډوالی) یې dx دی. داچې د داسې یوې توتې یا استوانې ګردې توتې(کترې) واټن د مخروط له څوکې د وضعیه قیمت سیستم په x سره ور کړ شوی دی، د وړانګې جملې له مخې(دلته په افغانستان کې دا د ... جملې په نامه بلل شوې) باور لري.

د یوه ناپاي کوچنی توتې(استوانې) وړانګه:

$$r\,z\,(h) = \frac{r}{h} \cdot x$$

د یوې ناپاي کوچنی توتې(استوتنې) حجم:

$$(\frac{r}{h} \cdot x)^2 \cdot \pi \cdot dx = \frac{r^2}{h^2} \cdot \pi \cdot x^2\, dx$$

دټول څرخېدونې مخروط د ټولو داسې کوچنیو توتو حجم دی. د شمېرلو لپاره یې ټاکلی انتیګرال جوړوو، د انتیګرال حدونو 0 او h سره:

$$V = \int_0^h \frac{r^2}{h^2} \cdot \pi \cdot x^2 dx = \frac{r^2 \cdot \pi}{h^2} \int_0^h x^2 dx$$

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi}{h^2} \cdot \pi \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]^h$$

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi}{h^2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{h^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right)$$

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3}$$

له دې سره هغه مشهور فرمول ته (چې لروده مو) راځو:

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot h}{3} = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یو مخروط د x په محور د f(x) = mx یوې کرښیزې (خطي) تابع(د بېلګې په توګه f(x) = 0,5x) څرخېدنه(څرخون) ده.

د یوه مخروط شمېرنه

دلته نه شو کولاي چې لومړی د کوادر حجم وشمېرو. دلته د دې ګراف لاندې په ډېرو کترو کتره کول دي د dx پنډوالې سره . د دې کترو د سطحو مساحت وشمېرئ، چې وړانګه f(x) لري داسې په نامه د پروت تقاطع تابع او بیا یې انتیګرال په ورکړ شوي [0;5] انتروال کې ونیسئ.

$$\pi\int_0^5 \left[f(x)\right]^2 dx = \pi\left[\frac{1}{12}x^3\right]_0^5 = 32.72$$

د پرتلې لپاره دی د یوه مخروط د حجم معیاري (ستاندارد) بڼه وکتل شي.

$$\frac{1}{3}\pi r^2 h = 32.72$$

لنډ :

که یوه منحني د x یا y په محور وڅرخول شي، یو جسم چې لاس ته راځي، چې موږ دا جسم په نریو کترو یا زونونو ټوټه کوو، د پنډوالي x همداسې y سره او دا په ورته نزدې توګه په استوانو بدلوو، نو په نزدې توګه لکه د مخه د حجمونو لپاره لاندې بڼه لاس ته راځي:

د x په محور څرڅونه: $V_x = \pi\cdot\int_{x_1}^{x_2} y^2 dx$

د y په محور څرخونه: $V_y = \pi\cdot\int_{y_1}^{y_2} x^2 dx$

بېلګه ۵ . ۱۲:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $y = x^2/4$ تابع ګراف په $[0, 2]$ انتروال کې د وضعیه قیمتونو په محورونو څرخي. دا د منځ ته راغلي څرخېدلي جسم حجم څومره دی؟

د x په محور څرخېدنه: $y^2 = x^4/16, x_1 = 0, x_2 = 2$

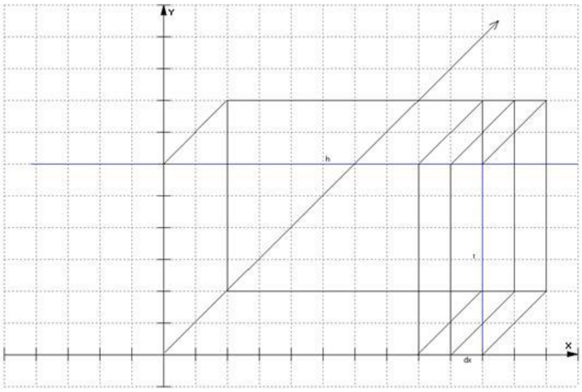
$$V_x = \pi \cdot \int_0^2 \frac{x^4}{16} dx = 0.4\pi$$

د y په محور څرخېدنه: $x^2 = 4y, y_1 = 0, y_2 = 1$

$$V_y = \pi \cdot \int_0^1 4y \, dy = 2\pi$$

د ناڅرخیدونکي جسم حجم.

شپږ اړخیز جسم یا مکعبډوله - 2.1 Quader



دا لید شکل د استوانې څخه راته معلوم دی، فقط دا ځل نه څرخي. حجم یې کېدی شي د عادي کوادر په څېر وشمېرل شي $(V = r^2h)$ او یا د صفر په لور تلونکې dx سرورې مربع وې ټوټه شي. د دې لپاره دې د پروت غوڅې (قاطع) سطحه وشمیرل شي، یعنې $q(x)$ د پروت قاطع تابع دې جوړه شي د دې بیا باید انتیګرال ونیول شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ټولیزه توګه دا معنا لري: $V=\int_a^b q(x)dx$

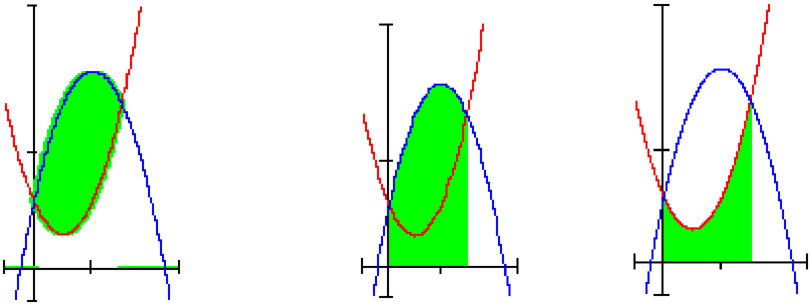
په دې بېلګه کې تصادفي د پروتقاطع تابع د ژۍ تابع مربع ده: $q(x) = [f(x)]^2$

که موږ $f(x) = 3$ تابع له 0 تر 5 انټروال کې د پروتقاطع تابع سره انتیګرال کړو، نو باید $V = r^2h = 45$ لاس ته راشي. $\int_0^5 q(x)dx = [9x]_0^5 = 45$

ټولګه

که د تابع y=f(x) سطحې د منحني تلنه دx- محور لاندې لور ته وي، نودا ټاکلی اینتیګرال به منفي وي. ددې لپاره چې د سطحې تل مثبت مساحت لاس ته راوړو، نو د اینتیګرال مطلقه ارزښت نیسو یعني منفي اینتیګرال.

په ځنو پوښتنو کې د سطحې مساحت شمېرل کیږي، چې د دوه توابعو ګرافونو ترمنځ پرته ده. دا ډول د سطحې مساحت کېدی شي د ټاکلو اینتګرالونو د کمښت له لارې و شمېرل شي. که دواړه ګرافونه د x-محور پورته لور ته پراته وي،نو د لاندې شیما څخه مخ ته ځو :



A، A_1 ، A_2

$$A = A_1 - A_2$$

د منحنیو $y=f_1(x)$ او $y=f_2(x)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تر منځ پرتي سطحې مساحت په لاندې پولو کې

له$x=a$ تر $x=b$ پورې‌او $y=f_1(x)$ او $y=f_2(x)$.

د يوه څرخې‌دونکي جسم لپاره، چې د سطحې په څرخې‌دنه د x په محور په انتروال $[a,b]$ کې د f تابع له ګراف ، د x له محور او له دواړو کرښو $x = a$ او$x = b$ ترمنځ جوړيږي، رابنده وي.

د حجم شمېرل په لاندې ډول دی:

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 \, dx$$

د y په محور څرخيدنه

د يوې سطحې په څرخې‌دنې (د y په محور)، چې په $[a,b]$ انتروال دf تابع ګراف دy محور او د دواړو کرښو $y = f(a)$ او $y = f(b)$ له خوا رابند وي بايد د $y = f(x)$ بڼه بدله شي و $x = f^{-1}(y)$ معکوس تابع ته . دا شتون لري، که f متمادي او غښتلي يوغږيز وي. که نه(لکه په پورته شي شکل کې) نو شايد ممکن وي،چې f په ټوټو ټوټه شي، په هغو کې چې متمادي او غښتلی يوغږيز وي. دا دلته منځ ته راغلي حجمونه بيا ځانله شمېرل کيږي او سره جمعه کيږي.

$$V = \pi \cdot \int_{\min(f(a),\ f(b))}^{\max(f(a),\ f(b))} (f^{-1}(y))^2 \, dy$$

جمله ۵ . ۸) د څرخيدونکي بدن ډکی(حجم):
په اينتروال$[a,b]$کي دی $y=f(x)$ متمادي وي، د څرخيدونکي بدن حجم چی د سطحو $y=f(x),y=0,x=a,x=b$ترمنځ ، راپيداکيږي داسی دی:

$$V = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د توتي، غونډاري(کرې) او مخروط د حجمونو ترمنځ تناسب:

$V_{توته(استوانه)} : V_{غونداری(کره)} : V_{مخروط} = 3 : 2 : 1$

يو مخروط د x په محور د $f(x) = mx$ يوې کربنيزې (خطي) تابع(د بېلګې په توګه $f(x) = 0,5x$) څرخېدنه(څرخون) ده.

که يوه منحني د x يا y په محور وڅرخول شي، يو جسم چې لاس ته راځي، چې موږ دا جسم په نريو کترو يا زونونو ټوټه کوو، د پنډوالي x همداسې y سره او دا په ورته نزدې توګه په استوانو بدلوو، نو په نزدې توګه لکه د مخه د حجمونو لپاره لاندې بڼه لاس ته راځي:

د x په محور څرڅونه: $V_x = \pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} y^2 dx$

د y په محور څرخونه: $V_y = \pi \cdot \int_{y_1}^{y_2} x^2 dx$

د x په محور د $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ تابع څرخېدنې څخه کره منځ ته راځي(پورته د ننوتنې شکل.

دا تابع هم کېدی شي په ګردو ټوټو ټوټه شي، پرته غوڅوونکي تابع يې $q(x) = \pi[f(x)]^2$ ده. د دې ټوټو د انتيګرلولو له لارې دې بيا حجم وشمېرل شي.

تمرينونه

د بن

ستيز انتيګرال د جدول په کارونه يا استعمال لاندې انتيګرالونه وشميرئ

a) $\int (x^3 - 5x^2 + 7x - 2)dx$, b) $\int (2/x^3)\, dx$, c) $\int (1/3)\sqrt[3]{x}\, dx$

d) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\, dx$, e) $\int \sqrt{x \cdot \sqrt[3]{x}}\, dx$, f) $\int (\sqrt[3]{x^4} + 1)\, dx$,

(c) ketabton.com: The Digital Library

g) $\int \sqrt[3]{x^{-3}}\, dx$, h) $\int \frac{ax^2+bx+cx^{-1}}{x^4}\, dx$, i) $\int 3\cdot 2^x\, dx$,

j) $\int \frac{1}{2\sin^2 x}\, dx$, k) $\int \frac{1}{3+3x^2}\, dx$, l) $\int \cos\varphi \cdot s\, ds$,

m) $\int \frac{dt}{(2t-3)^{-2}}$, n) $\int \sqrt{t\cdot\sqrt{t\cdot\sqrt{t}}}\, dt$, o) $\int (1-u^2)^{-\frac{1}{2}}\, du$.

۱ . ۲ – د بیرته په اکلي انتیګرال وروسته یې انتیګرال ونیسئ

a) $\int \frac{x^3+2x^2+x}{x^2(1+x)^2}\, dx$, b) $\int \frac{2\sin 2x}{3\cos x}\, dx$, c) $\int \frac{7\cos 2x}{\cos^2 x-\sin^2 x}\, dx$,

d) $\int \sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos^2 x}\, dx$, e) $\int (-2-2\tan^2 x)\, dx$, f) $\int \frac{2t^3-8t}{(t-2)(t+2)}\, dt$.

۳ – لاندې ټاکلي انتیګرالونه وشمیرئ

a) $\int_0^1 \frac{1}{2}e^x\, dx$, b) $\int_\pi^{2\pi} \cos x\, dx$, c) $2\int_2^3 dt$,

d) $\int_0^\pi \cos\pi \sin x\, dx$, e) $\int_0^1 \frac{4du}{1+u^2}$, f) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x+1}{\sin^2 x}\, dx$,

g) $\int_{x_1}^{x_2} (2x-1)\, dx$, h) $\int_0^8 \left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}\right) dx$, i) $\int_{\ln 2}^{\ln 3} e\cdot e^t\, dt$,

j) $\int_0^1 \frac{(u+1)^2}{\sqrt{u}}\, du$, k) $\int_0^1 \frac{x^n}{x^{1-n}}\, dx$, l) $\int_a^b a^x\, dx$.

۴ – د بدلون یا سبستچیشن له لارې یې انتیګرال وشمیرئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $\int \sqrt[3]{2x-7}\,dx$, b) $\int \frac{dx}{-x+1}$, c) $\int 2^{3x+6}\,dx$,

d) $\int \sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}\right)dx$, e) $\int \frac{dx}{1+(x+1)^2}$, f) $\int \frac{4}{\cos^2(4t-5)}\,dt$,

g) $\int x\cdot\sqrt[3]{x^2-7}\,dx$, h) $\int \frac{3x\,dx}{-x^2+1}$, i) $\int x\cdot e^{2x^2+3}\,dx$,

j) $\int 7\cos^7 x \sin x\,dx$, k) $\int (1-2\sin x)^3 \cos x\,dx$, l) $\int \frac{\sin x}{\cos^n x}\,dx$,

m) $\int \cot t\,dt$, n) $\int \frac{4x-5}{2x^2-5x+3}\,dx$, o) $\int \frac{\operatorname{Arc\sin} u}{2\cdot\sqrt{1-u^2}}\,du$,

p) $\int \frac{\sqrt{2\ln x+3}}{3x}\,dx$, q) $\int e^x\cdot\cos e^x\,dx$, r) $\int e^{\cos x}\cdot\sin x\,dx$.

۵ . د تر زیرنیونی فورمیدلون وروسته او په بنسټیز اینټیګرال ۱۰ او ۱۱ د بدلون له لاري یی اینټیګرال وشمیری ،

a) $\int \frac{dx}{1+4x^2}$, b) $\int \frac{dx}{2+4x^2}$, c) $\int \frac{dx}{3+5x^2}$,

d) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}}$, e) $\int \frac{dx}{\sqrt{36-9x^2}}$, f) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}$,

g) $\int \frac{dx}{x^2-10x+34}$, h) $\int \frac{dx}{3x^2-6x+30}$, i) $\int \frac{dx}{\sqrt{-3+4x-x^2}}$.

۶ لاندې ټاکلي اینټیګرالونه وشمیری

a) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(4x-1)^3}$, b) $\int_{-1}^{0} e^{3x}\,dx$, c) $\int_{0}^{2} 2^{2x+1}\,dx$,

d) $\int_{-1}^{1} \frac{4x^2}{(3+2x^3)^5}\,dx$, e) $\int_{e}^{e^3} \frac{1}{x}\ln x\,dx$, f) $\int_{2}^{4} \frac{e^t}{1+e^t}\,dt$,

g) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{\sin x}\cos x\,dx$, h) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{2+8x^2}$, i) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin x\cdot\cos x\,dx$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۷ . د جملې ۲۱ . ۸ استعمال په بنسټ یې (ټوټه اینتیګرالونه) اینتیګرال کړئ

a) $\int 0{,}2x \cdot \sin x \, dx$, b) $\int 4x^3 \cdot \ln x \, dx$, c) $\int \cos^2 x \, dx$,

d) $\int \cos x \cdot \sin x \, dx$, e) $\int x^2 \cdot \sin x \, dx$, f) $\int x \cdot (\cos x + 1) \, dx$,

g) $\int x^3 \cdot e^x \, dx$, h) $\int \mathrm{Arc}\sin x \, dx$, i) $\int x^{\frac{1}{3}} \cdot \ln x \, dx$,

j) $\int \mathrm{Arc}\tan x \, dx$.

لاندې ټاکلي انتیګرالونه وشمیرئ

a) $\int_{-1}^{1} x \cdot e^x \, dx$, b) $\int_{1}^{2} \ln x \, dx$, c) $\int_{1}^{2} \frac{\ln x}{x^2} \, dx$,

d) $\int_{0}^{\pi} e^x \cdot \sin x \, dx$, e) $\int_{0}^{\pi} x^3 \cdot \sin x \, dx$, f) $\int_{0}^{\pi} x^4 \cdot \sin x \, dx$.

د هغې هوارې دننه وشمیرئ، چې د وکړ شوو مساواتو ګرو څخه راینده شوې وي

a) $y = e^{0{,}5x}$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 2$;

b) $y = \frac{1}{2}x^3$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 2$;

c) $y = \frac{1}{x^2}$, $y = 0$, $y = 9$, $x = -3$, $x = 3$;

d) $y = \cos x$, $y = 0$

e) $y = \cos x$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{5\pi}{6}$;

f) $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 4$;

g) $y = \left(\frac{x^2}{4} - 1\right)^2$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 2$;

h) $y = x^3 + 7$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$;

i) $y = x^3 + 7$, $y = x^3 - x^2 + 3x + 5$;

j) $y = 3 - \frac{1}{2}x^4$, $y = 3 - 4x$;

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

k) $y = \frac{1}{x}, \quad 3y + 3x = 10;$

l) $y = \cos x, \quad y = \sin x$;

m) $y = \sqrt{3x+1}, \quad y = 1, \quad x = 8;$

n) $y = \frac{x^2}{4}, \quad y = \frac{8}{4+x^2};$

o) $y = x^2, \quad x = y^2;$

p) $y = \frac{1}{6} \cdot \sqrt{x^3}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 3;$

q) $y = 2\sin x, \quad y = \sqrt{3}\tan x \quad , x = [0, \pi/2)$

f) $y = \tan x$

کرښه چې په کېږي $y = \tan x$ پرتو ټکو $(0,0)$ او $(\pi/4, 1)$ تیرېږي د x –محور باندې د ورکړ شوو مساواتو سره د ګړو ترمنځ هواره څرخي د راپورته شوي څرخیدونکی بدن یا جسم ډکی یا حجم وشمیری. پام دې وي، چې په ورکړشوي حالت کې ورکړشوي هواره د دوه کړو څخه رابنده ده. نو له دې امله د لوي کړې ډکی څخه د کوچنی کړې ډکی کمیږي.

---

a) $y = x^2, \quad y = 0, \quad x = h;$

b) $y = \sqrt[3]{x^2} + 1, \quad y = 0, \quad x = -2, \quad x = 2$

c) $y = e^x, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 2;$

d) $y = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 2;$

e) $y = 2\sqrt{x}, \quad y = 2x;$

f) $y = 4x - x^2, \quad y = 0;$

g) $y = \sin x, \quad y = 0, \quad x \in [0, \pi].$

ټراپیځ (څلورګوډی، چې ټیك دوه اړخونه یې موازي وي) د کونجونو $(1,0),(5,0),(1,3),(5,5)$ د x–محور باندې څرخي، وشمیری

الف) د جوړې شوې هوارې دننه

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) د څرخيدونكى بدن ډكى

د كږو $y=\sqrt{x}$, $y=0$, $y=-x+6$ ترمنځ هواره د x– محور

باندې څرخى، وشميرى

الف) د كږې غوښتكو د پروت محور سره

ب) د كږو ترمنځ هواره

پ) د څرخويدونكى بدن ډكى

د هغۀ څرخيدونكى بدن ډكى وشميرى، كوم چى په اينتروال $[\frac{\pi}{4}, \pi]$

كى د x–محور پورته خواته د كږو $y=\sin x$ او $y=\cos x$ ترمنځ

پرته هواره، چى د x–محور باندې څرخيږي!

۱۴ نيمګردى $y=\sqrt{9-x}$ د x–محور باندې څرخيږي. د ګوډيبرخى ډكى

وشميري د پولو $x_1=1$, $x_2=3$ او ترمنځ !

۱۵ د څرخيدونكى ايليپسوئيد ډكى څومره لوي دى، كوم چى د x–محور

پورته خوا ته پرته د ايليپسى نيمى هوارې د رابندوونكى $x^2/a^2+y^2/b^2=1$

كږې سره د x–محور باندې توليدوي؟

د څپرکي نور تمرينونه:

$a)\ \dfrac{x^3+7x^2+9x-5}{x+5}$ $b)\ \dfrac{x^4-3x^2+1}{x^2-2}$

$c)\ \dfrac{x^3-2x^2+x-5}{x^3+1}$ $d)\ \dfrac{x^4-1}{x^3+x^2+x+1}$

$e)\ \dfrac{x^4+2x^3-6x^2-5x+3}{x-2}$ $f)\ \dfrac{x^5-x^4+1}{x^2+2}$

۱ - لاندې نااصلي پولينومونه دې د يوه ټول كسري پولينومونو او يوه اصلي پولينوم د جمعې په څېر وليكل شي.

۲ - لاندې پولينومونه د جمعې په څېر وليكئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a)\ \frac{2x^2+20x+12}{x^3+2x^2-5x-6} \qquad b)\ \frac{x^2+1}{x^3-x}$$

$$c)\ \frac{4x+10}{x^2+6x+8} \qquad d)\ \frac{-3x^2+19x-10}{x^3-2x^2-5x+6}$$

$$e)\ \frac{4x^2+6x-20}{x^3-4x} \qquad f)\ \frac{14}{x^2+20x+51}$$

۳ – د لاندې اصلي پولينومونو په ټوټه کسرونو ټوټه ونه وکاروئ.

$$a)\ \frac{3x^2+5x+10}{x^3+2x^2-4x-8} \qquad b)\ \frac{3x^2-18x+36}{x^3-6x^2+9x}$$

$$c)\ \frac{x^2+3x+4}{x^4-2x^2+1} \qquad d)\ -\frac{x^2+13x+10}{x^3-5x^2}$$

٤ - د لاندې اصلي پولينومونو په ټوټه کسرونو ټوټه ګونه ورکړئ.

$$a)\ \frac{x^2+2x-12}{x^3+2x^2+6x+5} \qquad b)\ \frac{4x^2-3x+8}{x^3-2x+4}$$

$$c)\ \frac{8x^2-16x+10}{x^3-4x^2+5x} \qquad d)\ \frac{x}{x^3+2x^2+2x+1}$$

۵ - د لاندې پولينوم کسرونو په ټوټه کسرونو ټوټه کونه ورکړئ.

$$a)\ \frac{x^3+7x^2+17x+17}{x^2+6x+8} \qquad b)\ \frac{2x^4-8x^3+7x^2-3x+4}{x^2-4x+3}$$

$$c)\ \frac{2x^3+x^2}{x^3-1} \qquad d)\ \frac{4x^3+16x^2-7x-49}{x^3+4x^2+x-6}$$

٦ – و ښايئ، چې د F تابع د f تابع لومړنی تابع ده.

$$a)\ f(x)=2x^2+4x-7\ , \qquad f(x)=4x+4$$

$$b)\ F(x)=(x^2-x)^3\ , \qquad f(x)=3\cdot(2x-1)\cdot(x^2-x)^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$c)\ F(x)=\sqrt{2x+1} \quad , \quad f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$

$$d)\ F(x)=1+\sin x \quad , \quad f(x)=3x\cdot\cos 3x$$

$$e)\ F(x)=\frac{1}{3}x^3\cdot\ln x-\frac{4}{9}x^3 \quad , \quad f(x)=x^2\cdot(\ln x-1)$$

۷ - وښايئ، چې د F او G توابع د همغه f تابع لومړني توابع دي.

$$a)\ F(x)=x^3+x+4 \quad , \quad G(x)=x^3+x+1$$

$$b)\ F(x)=(x-3)^2 \quad , \quad G(x)=x^2-6x+4$$

$$c)\ F(x)=\frac{x+1}{x+2} \quad , \quad G(x)=\frac{3x+5}{x+2}$$

$$d)\ F(x)=1+\sin x \quad , \quad G(x)=\sin x$$

۱۳ – لاندې ناټاکلي انتيګرالونه پيداکړئ او ټيکوالى يې و ازمايئ.

$a)\ \int x^3dx$ $\quad b)\ \int 7dx$ $\quad c)\ \int xdx$ $\quad d)\ \int(1-x^2)dx$

$e)\ \int(x+\frac{1}{x})dx$ $\quad f)\ \int(e^x+\cos x)dx$ $\quad g)\ \int\frac{1}{\sin^2 x}dx$ $\quad h)\ \int\frac{5}{\cos^2 x}dx$

$i)\ \int udx$ $\quad k)\ \int(2+e^x)dx$ $\quad l)\ \int(1+\ln x)dx$ $\quad m)\ \int(\sqrt{x}+\sin)dx$

۱٤ – د لاندې ټاکلو انتيګرالونو ارزښت وشمېرئ

$a)\ \int_0^3 4dx$ $\quad b)\ \int_{-3}^{-1} xdx$ $\quad c)\ \int_1^e \frac{1}{x}dx$

$d)\ \int_1^e(2+\frac{1}{x})dx$ $\quad e)\ \int_{-1}^0 e^xdx$ $\quad f)\ \int_0^\pi \sin xdx$

$g)\ \int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} 4dx$ $\quad h)\ \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{3}\pi}\frac{1}{\sin^2 x}dx$ $\quad i)\ \int_{-2}^2 x^3dx$

$j)\ \int_2^6(1+x)dx$ $\quad k)\ \int_1^2(x^2-x^5)dx$ $\quad l)\ 0\int_{-2}^2(\frac{x^3}{4}+\frac{x^2}{3})dx$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱۷ د لاندې ټاکلو انتيګرالونو ارزښت وشمېرئ او ارزښتونه يې سره پرتله کوئ.

$$a)\ \int_{-3}^{1} 3dx und - \int_{-3}^{1} 3dx \qquad b)\ \int_{0}^{1}(1+e^{x})dx \ \wedge\ -\int_{0}^{1}(1+e^{x})dx$$

$$c)\ \int_{-\pi}^{0} \sin x dx \ \wedge\ -\int_{-\pi}^{0} \sin x dx$$

۱۷ــ هر دوه انتيګرالونه د يوه انتيګرال سره انځور کړئ.

$$a)\ \int_{0}^{0.5\pi} \cos x dx + \int_{0.5\pi}^{\pi} \cos x dx \qquad b)\ \int_{-1}^{0}(x+e^{x})dx + \int_{0}^{1}(x+e^{x})dx$$

$$c)\ \int_{2}^{3} 3x^{2}dx + \int_{5}^{3} 3x^{2}dx \qquad d)\ \int_{-2}^{1}(2+x)dx - \int_{4}^{1}(2+x)dx$$

۱۸- د لاندې ټاکلو انتيګرالونو لپاره ارزښت تخمين کړئ.

$$a)\ \int_{-4}^{-2} e^{x+3} \qquad b)\ \int_{0}^{8}\sqrt{1+x}\,dx$$

$$c)\ \int_{3}^{5} 2^{4-x}dx \qquad d)\ \int_{0}^{0.5\pi}\sin^{2} x dx$$

۱۹ ــ د کومو x ارزښتونو لپاره لاندې انتيګرالونه ورکړشوي ارزښتونه لري؟

$$a)\ \int_{1}^{x} 5t^{4}dt\ ,\quad la(x)=31 \qquad b)\ \int_{0}^{x} e^{t}dt\ ,\quad la(x)=e-1$$

۲۰ - لاندې انتيګراند توابع ته د انتيګرال توابع وټاکئ.

$$a)\ f(x)=x^{2}\ ,\ a=3 \qquad b)\ f(x)=2+e^{x}\ ,\ a=0$$

$$c)\ f(x)\frac{1}{\cos^{2} x}\ ,\ a=0 \qquad d)\ f(x)=2\ ,\ a\in IR$$

۲۱ - د لومړني انتيګرال په استعمال سره لاندې انتيګرالونه وشمېرئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$d)\ \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx,\quad e)\ \int \sqrt{x\cdot\sqrt[3]{x}}\,dx,\quad f)\ \int (\sqrt[3]{x^4}+1)\ dx,$

$g)\ \int \sqrt[3]{x^{-3}}dx,\quad h)\ \int \frac{ax^2+bx+cx^{-1}}{x^4}dx,\quad i)\ \int 3\cdot 2^x\,dx,$

$j)\ \int \frac{1}{2\sin^2 x}dx,\quad k)\ \int \frac{1}{3+3x^2}dx,\quad l)\ \int \cos\varphi\cdot s\quad ds,$

$m)\ \int \frac{dt}{(2t-3)^{-2}},\quad n)\ \int \sqrt{t\cdot\sqrt{t\cdot\sqrt{t}}}\,dt,\quad o)\ \int (1-u^2)^{-\frac{1}{2}}du.$ --------

۲۲ - د بیرته په بنستیز اینتیګرال بدلون وروسته یي اینتیګرال ونیسئ:

$a)\ \int \frac{x^3+2x^2+x}{x^2(1+x)^2}dx,\quad b)\ \int \frac{2\sin 2x}{3\cos x}dx,\quad c)\ \int \frac{7\cos 2x}{\cos^2 x-\sin^2 x}dx,$

$d)\ \int \sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos^2 x}\ dx,\quad e)\ \int (-2-2\tan^2 x)dx,\quad f)\ \int \frac{2t^3-8t}{(t-2)(t+2)}dt.$

۲۳-- لاندې ټاکلی اینتیګرالونه وشمیرئ:

$a)\ \int_0^1 \frac{1}{2}e^x dx,\quad b)\ \int_{\pi}^{2\pi} \cos x\ dx,\quad c)\ 2\int_2^3 dt,$

$d)\ \int_0^{\pi} \cos\pi\sin x\ dx,\quad e)\ \int_0^1 \frac{4du}{1+u^2},\quad f)\ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x+1}{\sin^2 x}dx,$

$g)\ \int_{x_1}^{x_2} (2x-1)\,dx,\quad h)\ \int_0^8 \left(\sqrt[3]{x^2+2\sqrt{x}}\right)dx,\quad i)\ \int_{\ln 2}^{\ln 3} e\cdot e^t\ dt,$

$j)\ \int \frac{(u+1)^2}{\sqrt{u}}du,\quad k)\ \int_0^1 \frac{x^n}{x^{1-n}}dx,\quad l)\ \int_a^b a^x\ dx.$

۲٤- د بدلون یا سیتیچیوشن قاعدې استعمال له لارې یي اینتیګرال وشمیري:

$a)\ \int \sqrt[3]{2x-7}\,dx,\quad b)\ \int \frac{dx}{-x+1},\quad c)\ \int 2^{3x+6}\,dx,$

$d)\ \int \sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}\right)dx,\ e)\ \int \frac{dx}{1+(x+1)^2},\ f)\ \int \frac{4}{\cos^2(4t-5)}dt,$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$g)\ \int x\cdot\sqrt[3]{x^2-7}\,dx,\quad h)\ \int\frac{3x\,dx}{-x^2+1},\qquad i)\ \int x\cdot e^{2x^2+3}\,dx,$$

۲۵- د تر زیرنیوني فورمبدلون وروسته او په بنستیز اینتیګرال 10 او 11 د بدلون له لارې يي اینتیګرال وشیمرئ

$$a)\ \int\frac{dx}{1+4x^2},\qquad b)\ \int\frac{dx}{2+4x^2},\qquad c)\ \int\frac{dx}{3+5x^2}.$$

$$d)\ \int\frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}},\qquad e)\ \int\frac{dx}{\sqrt{36-9x^2}},\qquad f)\ \int\frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}},$$

$$g)\ \int\frac{dx}{x^2-10x+34},\qquad h)\ \int\frac{dx}{3x^2-6x+30},\qquad i)\ \int\frac{dx}{\sqrt{-3+4x-x^2}}.$$

۲٦- لاندې ټاکلی اینتیګرالونه وشمیري:

$$a)\ \int_{-1}^{1}\frac{dx}{(4x-1)^3},\qquad b)\ \int_{-1}^{0}e^{3x}dx,\qquad c)\ \int_{0}^{2}2^{2x+1}dx,$$

$$d)\ \int_{-1}^{1}\frac{4x^2}{(3+2x^3)^5},\qquad e)\ \int_{e}^{e^x}\frac{1}{x}\ln\times dx,\qquad f)\ \int_{2}^{4}\frac{e^t}{1+e^t}dt,$$

$$g)\ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}e^{\sin x}\cos x\ dx,\qquad h)\ \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{2+8x^2},\qquad i)\ \int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin x\cdot\cos x\ dx.$$

۲۷-- لاندې ټوټه اینتیګرالونه اینتیګرال کړي:

$$a)\ \int 0,2x\cdot\sin x\ dx,\qquad b)\ \int 4x^3\cdot\ln x\ dx,\qquad c)\ \int\cos^2 x\ dx$$

$$d)\ \int\cos x\cdot\sin x\ dx\qquad e)\ \int x^2\cdot\sin x\ dx\qquad f)\ \int x\cdot(\cos x+1)\,dx$$

$$g)\ \int x^3\cdot e^x\ dx,\qquad h)\ \int x^{\frac{1}{2}}\cdot\ln x\ dx,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډاکتر ماخان شينواري ليکنې او ژباړې

د ډاکتر ماخان شينواري چاپ شوې ليکنې:

<u>1988 Vienna (Austria):</u>

<u>لومړی:</u>

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

<u>1987 Vienna (Austria):</u>

<u>دويم:</u>

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, at the University of Vienna/Austria

لاندې د شميرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

<u>2000 Bonn (Germany):</u>

دريم: د شميرپوهنې ستر کتاب : د شميرپوهنې برسيره د انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې ليکنه به يې ځنو ځايونو غزېدلې او ځنې ځايونه ترې لرې شوي دي)

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

(c) ketabton.com: The Digital Library

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو زرو کې شميرنه، د ګټې – او کټې د کټې شميرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتياوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شميرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شميرپوهنې الماني ـ پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځيال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې يو پيل دی، ساده ليکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمير پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شميرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

(c) ketabton.com: The Digital Library

یوولسم: د افغانستان په هکله سپیني خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برینککن لیکنې چې له پرینمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دویم ټوک

۳ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصایه یا ستاتیستیک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – انالیزی ۱

۷ – انالیزې ۲

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۸ – کرښیز الجبر

۹ - د شمیرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ – فنکشنل انالیز

۱۲ – وکتور شمیرنه

نورې ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښیز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په

کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلي

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

-۲۲ داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزې پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې وبه غزیږي.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپریږي:

د ګروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اومم ټولګي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیونې سره په کې راغلي او ماته زیات ګټور برېښي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لیکوال ژوند ته لنډه کتنه

ماخان په اولني نوم میرېي شینواری د اروابنادې پستو او اروابناد نوررحمان زوي په ۱۳۲۰ ؟ ه لمریز کې د شینوارو هسکه مینه کې دې نړۍ ته سترګې راغړولي.

د هسکې مینې د لومړنې ښوونځي (د لومړنیو زده کوونکو څخه) څخه وروسته د رحمان بابا لیسه له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پورې(ښوونځي له لومړي ټولګي پیل او د دویم ټولګي څخه ګام او پای).

د ۱۹۶۶ تر سپټبر د کابل طب پوهنځی. له ۱۹۶۶ سپتمبر څخه د اتریش برس، چې هلته یې د شمیرپوهنې ډاکتري په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

د۱۹۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فبروري تر پای د دباندنیو چارو وزارت کې مامور. د ۱۹۸۸ مارچ څخه تر ۱۹۹۲ جون پورې په بن کې د افغانستان جمهوریت سفارت شارژد افیر(صفر نه وو). له هغې وروسته په جرمنې کې سیاسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ څخه د ۲۰۰۹ دسمبر پورې د د ریاضي څانګه کې د پوهنې وزارت درسي نساب کې دنده.

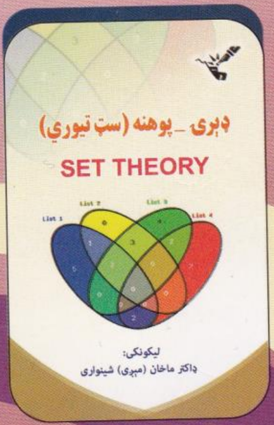
ماخان میرېي په ۱۹۷۲ کې له لرې د میرمن ښاپیرۍ سره واده شوی، چې د واده خبر ورته اتریش ته راغی. ده له میرمن ښاپیری سره په ۱۹۶۳ ز ک کې کوزده کړې وه.

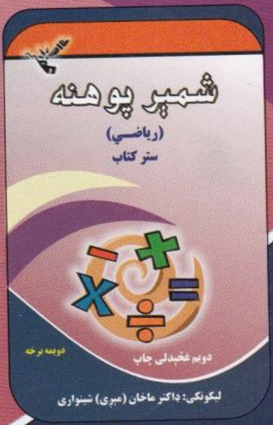
دوي ته لوي څښتن په اتریش ویانا کې د مای په شلم ۱۹۷۹ ز ک دوه بچیان وبخښل، چې څانګه او اباسین نومیږي. څانګه په المان کې د پوهنتون علمې همکاره وه او د حقوقو ډاکتره ده او اباسین ملي اقتصاد او ټولنیزه سایکولوژي لوستلې.

ماخان شینواري بې کاره نه دی او لږ تر لږه له ۹۷ ۱۹ څخه همدا د کتابونو لیکلو اوو د ژباړې دنده یې په غاړه اخستې، چې خپل فکر د شونې پولې تازه وساتي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ډاکتر ماخان (مېرى) شينوارى





د افغانستان د کلتوري ودې ټولنه ـ جرمني
VEREIN ZUR FORDERUNG DER
AFGHANISCHEN KULTUR E.V
د خپرونو لړ (۱۳۰)

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library