

انالیز ریاضی I

سید یوسف مانووال

AFGHANIC



In Dari PDF
2012



Balkh Medical University
پوهنځی طب بلخ

Funded by:
DAAD Deutscher Akademischer Austausch Dienst
German Academic Exchange Service

Mathematical Analysis 1

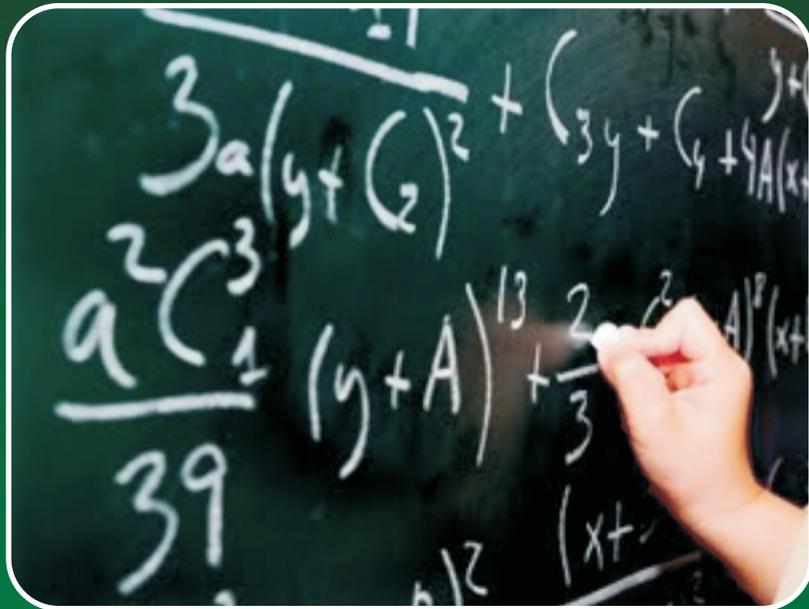
Said Yousuf Manowal

Download: www.ecampus-afghanistan.org



پوهنځی طب بلخ

انالیز ریاضی I



سید یوسف مانووال

۱۳۹۱

انالیز ریاضی I

Mathematical Analysis I

سید یوسف مانووال



Balkh Medical Faculty

Said Yousuf Manowal

AFGHANIC

Mathematical Analysis I

Funded by:

DAAD

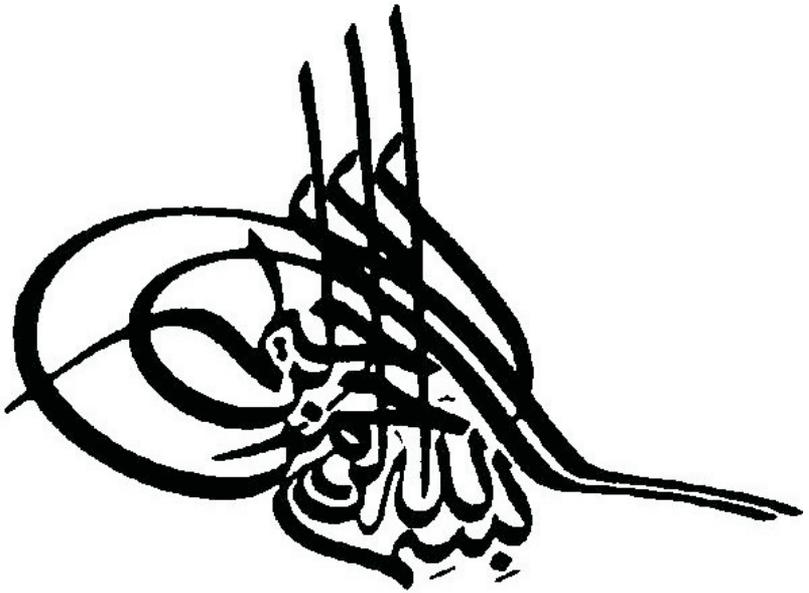
Deutscher Akademischer Austausch Dienst
German Academic Exchange Service

ISBN 978-9936-200-88-3



9 789936 200883 >

2012





پوهنځی طب بلخ

I انالیز ریاضی

سید یوسف مانووال

۱۳۹۱

نام کتاب	انالیز ریاضی I
مؤلف	سید یوسف مانووال
ناشر	پوهنځی طب بلخ
وب سایت	www.ba.edu.af
چاپ	مطبعه سهر، کابل، افغانستان
تیراژ	۱۰۰۰
سال	۱۳۹۱
داونلود	www.ecampus-afghanistan.org

کتاب هذا توسط انجمن همکاریهای آکادمیک آلمان (DAAD) از بودیجه وزارت خارجه فدرالی آلمان تمویل شده است. امور اداری و تخنیکي کتاب توسط موسسه افغانیک انجام یافته است. مسؤلیت محتوا و نوشتن کتاب مربوط نویسنده و پوهنځی مربوطه می باشد. ارگان های کمک کننده و تطبیق کننده مسؤل نمی باشند.

اگر میخواهید که کتابهای تدریسی طبیی شما چاپ گردد، با ما به تماس شوید:
 داکتر یحیی وردک، وزارت تحصیلات عالی، کابل
 دفتر: ۰۷۵۶۰۱۴۶۴۰
 ایمیل: wardak@afghanic.org

تمام حقوق نشر و چاپ همراهی نویسنده محفوظ است.

ای اس بی ان: 9789936200883



پیام وزارت تحصیلات عالی

در جریان تاریخ بشریت کتاب برای کسب علم و دانش نقش عمده را بازی کرده و جز اساسی پروسه درسی بوده که در ارتقای کیفیت تحصیلات دارای ارزش خاص میباشد. از اینرو باید با در نظر داشت ستندردها و معیارهای شناخته شده جهانی و ضروریات جوامع کتب و مواد درسی جدید برای محصلین آماده و چاپ گردد.

از اساتید محترم موسسات تحصیلات عالی کشور قلبا اظهار سپاس و قدر دانی مینمایم که با تقبل زحمات در جریان سالهای متمادی با تالیف و ترجمه کتب درسی دین ملی خود را ادا نموده اند. از سایر اساتید و دانشمندان گرانقدر نیز صمیمانه تقاضا مینمایم که در رشته های مربوطه خود کتب و سایر مواد درسی را تهیه نمایند، تا بعد از چاپ در دسترس محصلین گرامی قرار داده شوند.

وزارت تحصیلات عالی وظیفه خود میداند تا جهت ارتقای سطح دانش محصلین عزیز کتب و مواد درسی جدید و معیاری را آماده نماید.

در اخیر از وزارت خارجه کشور آلمان، موسسه DAAD، سایر ادارات و اشخاصی که زمینه چاپ کتب طبی اساتید محترم پوهنخی های طب کشور را مهیا ساخته اند صمیمانه تشکر مینمایم.

امیدوارم که این کار سودمند ادامه یافته و به سایر بخش ها نیز گسترش یابد.

با احترام

پوهاند دوکتور عبیدالله عبید

وزیر تحصیلات عالی

کابل، ۱۳۹۱

چاپ کتب درسی پوهنځی های طب

استادان گرامی و محصلین عزیز!

کمبود و نبود کتب درسی در پوهنتون های افغانستان از مشکلات عمده به شمار می رود. محصلین و استادان با مشکلات زیاد روبرو میباشند. آنها اکثرا به معلومات جدید دسترسی نداشته و از کتاب ها و چپتر های استفاده مینمایند که کهنه بوده و در بازار به کیفیت پایین فوتوکاپی میگردد.

برای رفع این مشکلات در دو سال گذشته ما چاپ کتب درسی پوهنځی های طب پوهنتون های کشور را آغاز نمودیم و تا اکنون ۲۰ عنوان کتب درسی را چاپ نموده و به تمام پوهنځی های طب افغانستان ارسال نموده ایم.

این در حالی است که پلان ستراتیژیک وزارت تحصیلات عالی (۲۰۱۰-۲۰۱۴) کشور بیان می دارد:

« برای ارتقای سطح تدریس، آموزش و آماده سازی معلومات جدید، دقیق و علمی برای محصلان، باید برای نوشتن و نشر کتب علمی به زبان های دری و پشتو زمینه مساعد گردد. برای رفوهرم در نصاب تعلیمی ترجمه از کتب و مجلات انگلیسی به دری و پشتو حتمی و لازمی میباشند. بدون امکانات فوق ناممکن است تا محصلان و استادان در تمامی بخش ها به پیشرفت های مدرن و معلومات جدید زود تر دسترسی بیابند.»

استادان و محصلین پوهنځی های طب با مشکلات زیاد مواجه اند. تدریس به میتود کهنه، عدم دسترسی به معلومات و مواد جدید درسی و استفاده از کتب و چپتر های که به کیفیت بسیار پایین در بازار دریافت میگردد از جمله مشکلات عمده در این راستا میباشند. باید آن عده از کتاب هاییکه توسط استادان تحریر گردیده اند جمع آوری و چاپ گردند. با در نظر داشت حالت بحرانی کشور جنگ زده، ما به دوکتوران ماهر و ورزیده نیاز داریم تا بتوانند در بهبود و ارتقای تحصیلات طبی و صحت عامه در کشور سهم فعال بگیرند. از اینرو باید توجه زیادتر برای پوهنځی های طب جلب گردد.

تا به حال ما به تعداد ۶۰ عنوان کتب مختلف طبی برای پوهنخی های طب ننگرهار، خوست، هرات، کندهار، بلخ هرات و کابل را چاپ نموده ایم و پروسه چاپ ۵۰ عنوان دیگر جریان دارد که یک نمونه آن همین کتابی است که فعلا در دسترس شما قرار دارد. قابل یاد آوری است که تمام کتب چاپ شده مذکور بصورت مجانی برای پوهنخی های طب کشور توزیع گردیده اند.

به اثر درخواست وزارت محترم تحصیلات عالی، پوهنتون ها، استادان محترم و محصلین عزیز در آینده می خواهیم این پروگرام را به بخش های غیر طبی (ساینس، انجینیری، زراعت و سایر بخش ها) و پوهنخی های دیگر هم توسعه دهیم و کتب مورد نیاز پوهنتون ها و پوهنخی های مختلف را چاپ نماییم.

از آنجاییکه چاپ نمودن کتب درسی یک پروژه پروگرام ما بوده، بخش های کاری دیگر ما بطور خلاصه قرار ذیل اند:

۱ چاپ کتب درسی طبی

کتابی که در اختیار شما است، نمونه از فعالیت های ما میباشد. ما می خواهیم که این روند را ادامه دهیم تا بتوانیم در زمینه تهیه کتب درسی با پوهنتون های کشور همکاری نماییم و دوران چپتر و لکچرنوت را خاتمه دهیم و نیاز است تا برای موسسات تحصیلات عالی کشور سالانه به تعداد ۱۰۰ عنوان کتاب درسی چاپ گردد.

۲. تدریس با میتود جدید و وسایل پیشرفته

در جریان سال ۲۰۱۰ توانستیم در تمام صنوف درسی پوهنخی های طب بلخ، هرات، ننگرهار، خوست و کندهار پروجکتورها را نصب نماییم. برای ایجاد محیط مناسب درسی باید تلاش گردد که تمام اطاق های درسی و کنفرانس و لابراتوارها مجهز به مولتی میدی ا، پروجکتور و سایر وسایل سمعی و بصری گردند.

۳. ارزیابی ضروریات

وضعیت فعلی (مشکلات موجوده و چلنج های آینده) پوهنخی های طب باید بررسی گردد و به اساس آن به شکل منظم پروژه های اداری، اکادمیک و انکشافی به راه انداخته شوند.

۴. کتابخانه های مسلکی

باید در تمام مضامین مهم و مسلکی کتب به معیارهای بین المللی به زبان انگلیسی خریداری و به دسترس کتابخانه های پوهنخی های طب قرار داده شود.

۵. لابراتوارها

در پوهنخی های طب کشور باید در بخش های مختلف لابراتوارهای فعال وجود داشته باشد.

۶. شفاخانه های کدري

هر پوهنخی طب کشور باید دارای شفاخانه کدري باشد و یا در یک شفاخانه شرایط برای تریننگ عملی محصلین طب آماده گردد.

۷. پلان ستراتیژیک

بسیار مفید خواهد بود که هر پوهنخی طب در چوکات پلان ستراتیژیک پوهنتون مربوطه خود دارای یک پلان ستراتیژیک پوهنخی باشد.

از تمام استادان محترم خواهشمندیم که در بخش های مسلکی خویش کتب جدید تحریر، ترجمه و یا هم لکچرنوت ها و چپتر های خود را ایدیت و آماده چاپ نمایند. بعداً در اختیار ما قرار دهند، تا به کیفیت عالی چاپ و به شکل مجانی به دسترس پوهنخی های مربوطه، استادان و محصلین قرار داده شود.

همچنان در مورد نکات ذکر شده پیشنهادات و نظریات خود را به آدرس ما شریک ساخته تا بتوانیم مشترکاً در این راستا قدم های مؤثرتر را برداریم.

از محصلین عزیز نیز خواهشمندیم که در امور ذکر شده با ما و استادان محترم همکاری نمایند.

از وزارت محترم خارجه آلمان و مؤسسه DAAD (همکاری های اکادمیک آلمان) اظهار سپاس و امتنان مینماییم که تاکنون چاپ ۹۰ عنوان کتب طبی درسی را به عهده گرفته که از آن جمله پروسه چاپ ۵۰ عنوان آن جریان دارد. از پوهنخی طب پوهنتون ماینز آلمان (Mainz/Germany) و استاد پوهنخی مذکور دوکتور زلمی توریال، Dieter Hampel و موسسه افغانیک نیز تشکر میکنیم که در امور اداری و تخییکی چاپ کتب با ما همکاری نمودند.

بطور خاص از دفاتر جی آی زیت (GIZ) و CIM (Center for International Migration and Development) یا مرکز برای پناهنده گی بین المللی و انکشاف که برای من امکانات کاری را طی دو سال گذشته در افغانستان مهیا ساخته، است اظهار سپاس و امتنان مینمایم.

از دانشمند محترم پوهاند دوکتور عبید الله عبید وزیر تحصیلات عالی، محترم پوهنوال محمد عثمان بابری معین علمی وزارت، محترم پوهندوی دوکتور گل حسن ولیزی معین اداری و مالی، روسای محترم پوهنتون ها، پوهنخی های طب و استادان گرامی تشکر مینمایم که پروسه چاپ کتب درسی را تشویق و حمایت نمودند.

همچنان از همکاران محترم دفتر هر کدام دوکتور محمد یوسف مبارک، عبد المنیر رحمانزی، احمد فهیم حبیبی، سبحان الله و همت الله نیز تشکر مینمایم که در قسمت چاپ نمودن کتب همکاری نمودند.

داکتر یحیی وردک، وزارت تحصیلات عالی

کابل، نومبر سال ۲۰۱۲ م

نمبر تیلیفون دفتر: ۰۷۵۲۰۱۴۲۴۰

ایمیل آدرس: wardak@afghanic.org

textbooks@afghanic.org

پیشگفتار

میتود های عنعنوی و مؤثر ریاضیات که در دهه اخیر به میان آمده اند، درین کورس انالیز ریاضی به شکل مطلوب و مناسب مطابق نیازمندی زمان به بررسی گرفته شده است، که عبارت از بیان شکل اکسیوماتیکی اعداد حقیقی میباشد. این فاصله زمانی امکان موفقیت های چشم گیر و کلی را نظر به ضرورت برای تغییرات اعداد در انالیز ریاضی مساعد ساخت، که میتوان به مثابه منطوق روشنی برای ترتیب (ساختن) میتودهای قضایای اعداد حقیقی (مانند کسر های اعشاری بی نهایت، ساحه نمایش اعداد حقیقی و کلاس های معادل ترادف های اعداد ناطق میباشد)

روی هم رفته ضروری پنداشته میشود که بررسی مجموع اعداد حقیقی را در موجودیت اکسیوم انالیز ریاضی داخل ساخته که بدون آن به میان آوردن هر نوع ترتیب های آن هیچ نوع مشخصه (دلیل) منطقی ندارد. هر گاه بدون در نظر داشت مفاهیم فوق الذکر ترتیب آنرا در نظر بگیریم، مسئله اکسیومی اعداد حقیقی از هدف اساسی خارج میگردد. بناء مطالعه اعداد حقیقی به شکل اکسیوماتیکی در انالیز ریاضی در واقع مبنای این مدعا است. اساسا درین کورس میتود های کلی در نظر گرفته شده و حتی الامکان تمام مفاهیم ضروری را ابتدا برای مطالعه و بررسی حالات ساده و مختلف بقدر کافی مثالها در نظر گرفته شده و برای مطالعه بعدی مراحل ضروری آنرا به پیش میبریم. بطور مثال: مفهوم لیمت که ابتدا برای سلسله های عددی، بعدا برای توابع یک متحوله مفهوم لیمت درست ها، فضای اقلیدسی، لیمت، مجموعه انتیگرالی و بالآخره به مطالعه مفهوم لیمت در توپولوژی ختم میگردد.

فورمول تیلور قبلا برای قیمت توابع حقیقی بالای قطعه خط و در اخیر کورس برای نمایش نورم خطی فضا به کار گرفته شده است. بررسی معیار های عالم کوشی افاده چند حده

منجر به موجودیت لیمت معیار کوشی شده و موجودیت لیمت منجر به تحلیل نمایش کامل سیستم اندازه گیری فضا گردید. مطالعه سلسله های فوریه به بررسی سلسله های مثلثاتی کلاسیک آغاز گردید و مطالعه سلسله فوریه منجر به فضای هیلبرت در سیستم قایم ختم شد. خواص تابع شماری در قطعه خط به نمایش سیستم متری فشرده عمومیت بخشید و غیره.

قضایای ثبوت شده برای همیشه فورمولبندی نمیگردد، بلکه اکثرا برای استنتاج بهتر ماهیت سوالات مورد مطالعه قرار میگیرد. زیرا که ثبوت قضایا بدون ضیاع وقت و کلان شدن حجم کتاب، دیگر اهمیت ندارد و چنین نقطه نظرها به همین قسم منتقل و قبول شده اند. بطور مثال برای فراگیری حل مسایل لیمت باید تعریف و تیوری آن دقیق مطالعه گردد. ضرورت نیست در صورتیکه $x \rightarrow x_0$ نوشته شود که $x \neq 0$ باشد. و یا اینکه تابع منفصل حالت خاص تابع متمادی است. پس ضرورت به ثبوت آن در حل مسایل لازم نیست.

بخش عمده این کتاب انالیز ریاضی در برگرفته موضوعات ذیل میباشد:

ترتیب تیوری برای هر موضوع به شکل ساده و عام فهم.

بعداً جهت بهتر روشن شدن موضوع مثالها برای شاگردان و علاقمندان در نظر گرفته شده است و نیز جهت مشق و تمرین دانش آموزان در اخیر هر موضوع تمرینات تحریر گردیده است. از این کتاب انالیز ریاضی محصلین انجینیری، اقتصاد و بالخصوص رشته های ریاضی و فزیک و اشخاص و افراد مسلکی و حرفوی نیز میتوانند جهت بلند بردن دانش مسلک خویش استفاده نمایند.

موضوعات این کتاب مطابق به مفردات ریاضیات عالی پوهنتون های مسکو بوده و در انستیتوت های مسکو ازین کتاب انالیز ریاضی بطور وسیع استفاده میگردد و جزء پروگرام تدریس آن ها میباشد.

بخش اساسی این کتاب به موضوعات عمده آنالیز ریاضی و خواص آن اختصاص داده شده است. آموختن این مواد میتواند بدون تکلیف بطور مستقلانه با استفاده از سوالات مخصوص ریاضی که در آینده برای حرفه های مخصوص خدماتی ضرورت میباشد مسایل با میتودهای اساسی و با بیان تیوری با دقت تمام درین کتاب حل گردیده است.

علاوه بر آن برای کارهای مستقلانه دانشجویان تمرینات و مسایل در نظر گرفته شده است. حل تمرینات بصورت کل برای فعالیت حفظ کردن آنالیز ریاضی تا آنها را با زبان خود بیان نماید و در کتابچه یاداشت خود بطور جداگانه یادداشت نمایند و یکتعداد مسایل مشکل درینجا گنجاینده شده که فوراً حل آنها ضروری نمی باشد زیرا برای آموختن آنها وقت کافی به اساس تقسیم اوقات در نظر گرفته شود طوریکه معلوم است فاکت های ریاضی بطور واضح و مفصل بیان گردیده و در محدوده حجم کتاب میباشد. بر علاوه آن تمرینات در هر پراگراف بطور جداگانه نمره گذاری شده و هر مسأله نمره گذاری شده ودر میان مسایل بطور روشن و ساده تحریر گردیده است.

این کتاب آنالیز ریاضی به سطح دانشجویان کنج کاو و عام فهم بیان گردیده سوالات این کتاب در چوکات پروگرام ریاضیات عالی برای دانشجویان فاکولته انجینیری و اقتصاد تهیه گردیده و برای رشته های اختصاصی ریاضی و فزیک که به شکل تخصص آنالیز ریاضی را میخوانند. درین کتاب موضوعات توسط ستاره ها نشانی شده است. به این اساس این کتاب آنالیز ریاضی را میتوانند در مؤسسات تحصیلات عالی به سطوح و سویه های مختلف تدریس نمایند.

بخش قابل ملاحظه مواد جمع آوری شده درین کتاب در جریان سالهای متمادی از طرف

مؤلف در انستیتوت فزیک- تخنیک در لیکچر های آنالیز ریاضی تدریس گردیده است.

کتاب موجود ارائه محصول زحمات سه ساله مولف کورس انالیز ریاضی 2 کتب عالی 1988-1989 میباشد. مؤلف عمیق ترین و صمیمانه ترین تشکرات خویش را از جانب خود به مجموعه خود و به اعضای علمی ریاضیات عالی دانشمندان بلند پایه هریک: س. م. نکالسوف، ب. س. ولادیمیروف، و. ب. ویسوف، س. ا. تیلیاسکوفسکی و. گ. ن. یاکولیف ابراز میدارد. و از دانشمندان بزرگوار هریک: ن. و. ایفیموف، و. ا. یسلینه که بدون شک مواد مفصل و با کیفیت جهت بهتر شدن کتاب همکاری نموده ابراز سپاس میکنم.

مؤلف نیز رضایتمندی و قدردانی خویش را از اعضای محترم کافدرای ریاضیات عالی پوهنتون مسکو و از استادان محترم انستیتیوت فزیک تخنیکی هری: ک. ل. کوتاسوف، و. ل. خارکوف، س. م. بژنوف، و. عی. چخلوکوف، ف. گ. پولایفسکی، ی. ا. وراچینسکه که مشوره های بسیار سودمند و مفید را که در غنامندی متن کتاب مؤثر واقع گردیده است ابراز شکران و امتنان می نمایم. در اخیر مؤلف تشکرات عمیق خود را نسبت به کلکتیف تقریظ دهندگان و از آمر کافدرای ریاضیات عالی پوهنتون لامنوسوف پروفیسور ب. س. ولادیمیروف به خاطر مطالعه و بررسی دقیق و همه جانبه این کتاب ابراز میدارد.

پیشگفتار مترجم

طوریکه واضح است. کمبود کتب درسی مورد نیاز، بخصوص در عرصه ریاضیات همواره بحیث یک مشکل قابل توجه در تمام واحد های تحصیلی مطرح بوده بنده بتأسی از همین اندیشه و خواست طی سالهای تدریس انالیز ریاضی در پوهنهی تعلیم و تربیه پوهنتون بلخ در فکر تهیه کتاب درسی که بتواند جوابگوی نیاز های مبرم محصلان رشته اختصاصی ریاضی باشد، بوده ام خوشبختانه دیپارتمنت ریاضیات با تشخیص این مشکل به بنده وظیفه سپرد تا کتاب درسی تحت عنوان انالیز ریاضی جلد اول قسمت اول اثر دانشمند بلند پایه ل. د. کود ریا حیف را که شامل 10 § و 313 صفحه بوده که طبع و نشر وزارت تحصیلات عالی فدراتیف روسیه سال 2006 مسکو میباشد که داری مفاهیم بکروتازه است ترجمه نمایم.

چون کتاب متذکره در مطابقت با مفردات و پروگرام درسی صنوف دوم سمستر سوم ریاضی قرار دارد؛ بناء بنده با وجود همه نا رسائی های علمی و تا جای که دانش مسلکی ام صلاحیت میداد، به قصد و نیت انجام این وظیفه علمی به یاری و استعانت خداوند(ج) توانا و دادگر، با حسن امانت داری و دقت تام این وظیفه مهم را انجام نموده ام. امیدوارم تا این کارکرد بنده بحیث یک گام علمی مورد قبول دانش دوستان و مسئولین امور واقع گردد. مسلما این کتاب ارزشمند منبع و مأخذ مطمئن برای تمام علاقمندان عرصه ریاضیات و سایرین خواهد بود.

اینجانب با کمال احترام از پوهاند عبدالحق «ایمل» و پوهاند دکتور سید قیوم شاه «باور» استادان پوهنهی ساینس پوهنتون کابل و عموم دانشمندان، اساتید محترم و بالخصوص از پوهنتون بلخ که بامن در این زمینه همکاری نموده اند، ابراز سپاس و قدردانی می نمایم و نیز از خوانندگان گرانمایه متمنی است تا با ایرادها و انتقادات سودمند بنده را منت گذاشته ممنون سازند.

با احترام

پوهنمل سید یوسف "مانووال"

تقریظ

برای همه هویدا است که آنالیز ریاضی یک بخش مهم علم ریاضی بوده و در زندگی روزمره در مسایل پیشرفت تکنیک، اقتصاد و علوم طبیعی رول با ارزش را بازی می کند. کتاب هذا تحت عنوان آنالیز ریاضی ۱ که توسط پوهنمل سید یوسف مانووال ترجمه شده از آثار معتبر در عرصه آنالیز معاصر بشمار می رود. مولف کتاب هذا پروفیسور L.D. کودریاخیف بوده که در سال 2006 از طرف وزارت تحصیلات عالی فداراتیف روسیه طبع و نشر گردیده است. در این کتاب مطالب جدیدی نسبت به کتب دیگری آنالیز ریاضی که قبلاً نشر گردیده گنجانیده شده که از هر نگاه برای علاقمندان آنالیز ریاضی مفید است.

مترجم با کمال دقت و امانت داری متن روسی کتاب مذکور را ترجمه نموده و متون بدون سکتگی و با تسلسل منطقی و ادبی تنظیم گردیده است. طرز نگارش معیاری بوده و بدون غلطی املائی و مسلکی می باشد. اینجانب با آنکه زحمات پوهنمل سید یوسف مانووال استاد دیپارتمنت ریاضیات پوهنخی تعلیم و تربیه پوهنتون بلخ را قابل قدر و با ارزش ارزیابی می نمایم و منحبث تقریظ دهنده ترجمه این اثر با ارزش را در غنماندی و تهیه کتب آنالیز ریاضی و مواد درسی گام خیلی ها مثبت تلقی نموده و مطالعه آنرا نه تنها برای محصلان صنف دوم سمستر سوم رشته اختصاصی ریاضی و فزیک ضروری میدانم بلکه برای آنانکه با آنالیز ریاضی سروکار دارند لازم و مفید میدانم. من در حالیکه ترجمه هذا را تائید می نمایم برای موصوف کامیابی های شایان در امر خدمت گذاری در راه تربیه اولاد وطن خواهانم و امیدواریم تا این فعالیت علمی موصوف در ترفیع علمی شان از رتبه علمی پوهنمل به رتبه علمی پوهندوی مورد قبول واقع گردد. و چاپ و نشر آن مفید و سهولت های مزیدی را فراهم خواهد نمود.

با احترام

پوهنوال دوکتور محمد انور "غوری"

استاد پوهنخی ساینس پوهنتون کابل

تقریظ

ترجمه کتاب انالیز ریاضی توسط پوهنمل سید یوسف مانووال در عرصه ریاضیات کار مهم و قابل تمجید میباشد. کتاب ترجمه شده اثر علمی پروفیسور ل.د. کودریاخیف که در سال 2006 از طرف وزارت تحصیلات فدراتیف روسیه طبع و نشر گردیده است یک اثر مفید، نخبه و خیلی معتبر در عرصه های انالیز ریاضی میباشد. کتاب ترجمه شده دارای () صفحه و 9 بخش میباشد که ترجمه آن با کمال دقت و امانت داری مطابق متن روسی آن صورت گرفته است. مترجم اهتمام و کوشش به خرج داده است تا مطالب را به زبان سلیس و فصیح ریاضی بیان و حین ترجمه قواعد و موازین لسانی و میتودیکی را رعایت نموده که چاپ و نشر آن مفید بوده و سهولت های مزیدی را فراهم خواهد ساخت. مطالعه این اثر نه تنها برای صنوف دوم سمستر سوم ریاضی و استادان مفید می دانم بلکه آنانکه به انالیز ریاضی سر و کار دارند توصیه می نمایم. اینجانب منحیث استاد رهنما صحت ترجمه را تصدیق نموده زحمت کشی و فعالیت علمی ترجمه را در ترجمه کتاب مذکور به دیده قدر نگریسته و برای محترم پوهنمل سید یوسف مانووال طول عمر با سعادت در راه خدمات بیشتر فرهنگی به وطن و جامعه از بارگاه ایزد متعال استدعا نموده و این کارکرد علمی را برای ترفیع علمی موصوف از رتبه علمی پوهنمل به ره تبه علمی پوهندوی کافی می شمارم.

با احترام

پوهاند عبدالحق "ایمل"

استاد پوهنخی ساینس پوهنتون کابل

تقریظ

تا جائیکه محسوس است تالیف و ترجمه کتب درسی مورد نیاز بویژه در بخش ریاضیات یکی از وظایف مبرم در استقامت فعالیت علمی استادان در واحد های تحصیلی کشور بشمار میآید، زیرا مسلماً با ترجمه یا تالیف یک عنوان کتاب یک در جدید از دانش و علوم به روی دانش آموزان و طالبان علم و دانش مفتوح می گردد. دیپارتمنت ریاضیات پوهنخی تعلیم و تربیه پوهنتون بلخ به اساس لزوم دید و ضرورت مبرم دیپارتمنت ریاضیات برای محترم پوهنمل سید یوسف مانووال عضو دیپارتمنت متذکره وظیفه سپرد تا از کتاب انالیز ریاضی ۱ قسمت اول را به ترجمه بگیرد که حاوی 303 صفحه و 9 بخش میباشد. کتاب ترجمه شده از آثار معتبر در عرصه انالیز ریاضی به شمار می رود. مترجم با کمال دقت و امانت داری ترجمه کتاب مذکور را انجام داده و متون بدون سکتگی بوده و با تسلسل منطقی و ادبی تنظیم گردیده است. با در نظر داشت خصوصیات فوق الذکر مطالعه ترجمه این کتاب را برای محصلان رشته ریاضی و فزیک مونسات تحصیلات عالی کشور، استادان و محصلان و استادان همین رشته ها مفید می دانم.

اینجانب با آنکه زحمات پوهنمل سید یوسف مانووال استاد دیپارتمنت ریاضیات را قابل قدر و با ارزش ارزیابی می نمایم، برای موصوف موفقیت مزید را در امر خدمت گذاری در راه تربیه اولاد وطن خواهانم. و این فعالیت علمی موصوف در ترفیع علمی شان از رتبه علمی علمی پوهنمل به رتبه علمی پوهندوی کافی میدانم.

با احترام

پوهاند دوکتور سید قیوم شاه "باور"

استاد پوهنخی ساینس پوهنتون کابل

عناوین	صفحه
مقدمه	1
محاسبه دیفرانسیل توابع یک متحوله	8
1.1. ست ها و توابع، سمبول های منطقی	8
1.1.1. ست ها: عملیات بالای ست ها	8
1.2. توابع	13
1.3. ست های منتهای و اعداد طبیعی، ترادف ها	21
1.4. گروپ بندی عناصر ست های منتهای	29
1.5. سمبولهای منطقی	35
2. اعداد حقیقی	38
2.1. خواص اعداد حقیقی	38
2.2. خواص قابلیت ترتیب	53
2.3. خواص غیر مساوات اعداد حقیقی	60
2.4. تقاطع در ست های اعداد حقیقی	61
2.5. طاقت های ناطق اعداد حقیقی	66
2.6. فارمول بینوم نیوتن	70
3. ست های اعداد	75
3.1. گسترش اعداد به طور مستقیم	75
3.2. فاصله بین اعداد حقیقی	76
3.3. ست های محدود و غیر محدود	81
3.4. سرحد فوقانی و تحتانی ست های عددی	85
3.5. خواص حسابی سرحد فوقانی و تحتانی	92
3.6. پرنسیپ ارشمیدس	97

4.4.	لیمت ترادف های عددی	100
4.1.	معرفی لیمت ترادف های عددی.....	100
4.2.	یکتا بودن لیمت ترادف اعداد	109
4.3.	عبور به لیمت در غیر مساوات	110
4.4.	محدودیت ترادف های متقارب	117
4.5.	ترادف مونوتونی (یکنواخت)	119
4.6.	قضیه بلزانو – ویراشتراس	124
4.7.	معیار کوشی برای تقارب ترادف ها	127
4.8.	ترادف های بی نهایت کوچک	130
4.9.	خواص لیمت ها راجع به عملیات حسابی بالای ترادف ها	133
4.10.	نمایش اعداد حقیقی کسرهای اعشاری بی نهایت	149
4.11.	ست های قابل شمارش و غیر شمارش	160
4.12.	لیمت های فوقانی و تحتانی ترادف ها	166
5.	لیمت و متمادیت تابع	171
5.1.	توابع حقیقی	171
5.2.	طریقه نمایش تابع (طریقه ارائه توابع)	175
5.3.	توابع ابتدائی و تصنیف آن	180
5.4.	تعریف اول لیمت توابع	182
5.5.	توابع متمادی	196
5.6.	شرط موجودیت لیمت تابع	202
5.7.	تعریف دوم لیمت تابع	204
5.8.	لیمت تابع بر حسب اتحاد ست ها	210
5.9.	لیمت های یکطرفه و متمادیت یکطرفه	211

5.10.	خواص لیمت تابع	217
5.11.	تابع بی نهایت کوچک و بی نهایت بزرگ	223
5.12.	اشکال مختلف متمادیت تابع در یک نقطه	227
5.13.	دسته بندی نقاط انفصال توابع	235
5.14.	لیمت های توابع مونوتونی	238
5.15.	معیار کوشی برای موجودیت لیمت تابع	247
§.6.	خواص متمادیت توابع روی فاصله هاویه دست آوردن نقاط اعظمی و اصغری	250
6.1.	محدودیت توابع متمادی	250
6.2.	قیمت وسطی توابع متمادی	253
6.3.	توابع معکوس	257
6.4.	متمادیت یکنواخت. مودول متمادیت	266
§.7.	متمادیت توابع ابتدایی	277
7.1.	توابع ناطق و پولینومیلی	277
7.2.	توابع طاقتدار، لوگاریتمی و نمایی	279
7.3.	توابع مثلثاتی و توابع معکوس مثلثاتی	292
7.4.	متمادیت توابع ابتدایی	294
§.8.	مقایسه توابع، محاسبه لیمت ها	295
8.1.	بعضی لیمت های مشهور	295
8.2.	مقایسه توابع	302
8.3.	توابع معادل	316
8.4.	میتود جدا نمودن حصه های اساسی توابع و استفاده از آن در محاسبه لیمت	327

332.....	9.§. مشتق و دیفرانسیال.....
332.....	9.1. تعریف مشتق.....
336.....	9.2. دیفرانسیال توابع.....
345.....	9.3. مفهوم هندسی مشتق و دیفرانسیل.....
351.....	9.4. مفهوم فیزیکی مشتق و دیفرانسیل توابع.....
356.....	9.5. قواعد مشتق گیری توابع در ارتباط با عملیه های حسابی بالای توابع.....
362.....	9.6. مشتق تابع معکوس.....
367.....	9.7. مشتق و دیفرانسیل توابع مرکب.....
378.....	9.8. توابع هایپربولیک و مشتقات آنها.....
381.....	10.§. مشتقات و دیفرانسیال های ترتیب عالی.....
381.....	10.1: مشتقات ترتیب عالی.....
383.....	10.2: مشتقات ترتیب عالی جمع و ضرب توابع.....
388.....	10.4: دیفرانسیل های ترتیب عالی.....

مقدمه

هیچ تحقیق انسانی نمیتواند حقیقت علمی نامیده شود، تا آنکه با شیوه و اصول ریاضی اثبات نشده باشد. هیچ نوع مؤثقت در علوم نیست، تا در آن حق اولیت به علم ریاضی داده نشده باشد. و با ریاضی رابطه نداشته باشد.¹

ریاضی² عبارت از یک علم دقیق و کاملاً مجرد بوده، عواملی که مبنای ریاضیات را تشکیل می دهند عبارت از: منطق، تحلیل، سازگاری و استدلال میباشد و ریاضی بر مبنای منطق و استدلال استوار است. هر ساختار ریاضی، الجبر، توپولوژی و احتمالات، دارای خصوصیات جداگانه میباشد. آموختن ریاضیات یک آموزش انفاقی نیست، بلکه بر اساس یک سلسله کار های دقیقاً علمی و تنظیم شده انجام می شود. چون ریاضیات بیشتر سرشت جمعی دارد، یعنی هر مفهوم از مفاهیم قبلی بهره می گیرد، در تحقیقات ریاضی تفکر منطقی کار اساسی میباشد. یعنی میتواند از مفاهیم قبلی بهره می گیرد، در تحقیقات ریاضی عبارت از تفکر منطقی میباشد.

ادراک از منشأ طبیعی و رشد تکاملی ایده های اساسی ریاضیات، نگارشی منطقی و رابطه ای سالم بین استدلال صحیح، تعریف های دقیق و فهم روشن فرضیات اساسی، درک نقش ریاضیات به عنوان یکی از شاخه های تلاش انسان و ارتباط آن با سایر شاخه های معرفت بشر لازم و ضروری میباشد. زیرا که رازهای در ریاضیات هست که بیشتر از هر چیز دیگر انسان را در فشار قرار می دهد. بدیهی است که ابداعات ریاضی صرفاً محصولات تخیلات دلخواه ریاضیدانان نیست، بلکه وابسته به رابطه طبیعی و حقیقی میباشد. شخصی که می خواهد ریاضیات

¹ لوی ناردو. داوینچی. اثر منتخب علوم طبیعی که در سال 1955 طبع شده.
² از کلمه لاتینی ماتیماتا (μαθημα) گرفته شده و به معنای علم شناسی است.

را بفهمد، باید این دید اصلی را داشته باشد که ریاضیات بر خلاف علوم دیگر، مستقیماً با اشیای مادی که ما آنها را میتوانیم احساس کنیم، بچشم ببینیم و بشنویم سروکار ندارد.

ریاضیات آن مفاهیمی هستند که در ذهن ما بوده و به صورت اشیای مادی وجود خارجی ندارند. موجودات ریاضی از قبیل نقطه، سطح و اعداد میباشند که: خود اشیای مادی نیستند، بلکه تصوراتی هستند از اشیای خارجی. پس تجرید ریاضی به این معنی که اهداف این علم مادی نبوده، بلکه مفاهیم منطقی و رابطه بین آنها میباشد. که یکی از مهم ترین مفاهیم آن رابطه و عمل متقابل بین آنها میباشد که توسط رابطه مفاهیم مادی میتواند مودل ریاضی را ترتیب و مطالعه نمود. و با به وجود آوردن چنین مودل ریاضی میتوان مودلهای جدید دیگری ریاضی را که دارای خواص مشابه اند بوجود آورد، تا بتوانند ریاضیات تأثرات حقیقی خویش را بیان نمایند. زیرا که برای ریاضی مطالعه مفاهیم طبیعت آنقدر مهم نیست، بلکه نسبت و رابطه بین آنها مهم به نظر میرسد. ترتیب مودل ریاضی از وضعیت فیزیکی مورد نظر به دست می آید.

این مودل ممکن است یک معادله خطی یا برخی دیگر از عبارات ریاضی باشد، که مودل بدست آمده به کمک روشهای ریاضی موجب میشود که جواب مسأله داده شده به صورت ریاضی تعیین شود. تحقیقات میتود های ریاضی همیشه در حالت جریان و تحرک بوده و این تحرک و جریان همیشه بطور وسیع ادامه دارد و رول بزرگ آن در دانش علوم طبیعی میباشد. میتود های ریاضی انجام و پایان ندارد، بلکه به طور وسیع ادامه دارد.

درین میتودها، میتودهای جدید بروز میکند و به بخش های جدید منقسم میشود و انکشاف متوازن راضی با استفاده از آن میباشد و تأثیر گذار بالای انکشاف دیگر علوم و تخنیک در ماحول خود میباشد. افزایش مسایل پراکتیکی در اساس علوم دیگر تجربی، به ریاضیات جهت های جدید

را میدهد و باعث جهت دادن این یا آن تحقیق ریاضی میشود. و امکانات وسیعی استفاده میتود های ریاضی را میدهد. به این علت استفاده ریاضی بطور تدریجی انکشاف میکند.

درین اواخر به کمک تأثرات ماشین های محاسبوی سریع با استفاده میتود های ریاضی تحرک کمی و کیفی به میان آمده است. از این میتود ها نه تنها درین عرصه، بلکه در میخانیک و فزیک نیز مورد استفاده قرار میگردد. درین عرصه دانش انسان بر علاوه در ریاضی، در دیگر علوم نیز مورد استفاده میباشد مانند طب، اقتصاد و سوسیالوژی، همین قسم موجودیت دستگاه های ریاضیکی میتودها و مفاهیم جدید ریاضی را برای طراحی و مطالعه تأثرات آن به بررسی گرفته میشود. پس تمام آن چیزهای که هست در ساختار علم ریاضی معمول میباشد.

امروز در تمام علوم طبیعی، ریاضی سرلوحه آن دانسته میشود. کارمندان و یا انجینیران به مثابه استفاده کنندگان گذشته از میتود های جدید ریاضی در تحقیقات روزمره بطور وسیع از آن در اجرای امور خویش استفاده می نمایند. برای اینکه امکانات استفاده موففانه ازین و یا آن میتود ریاضی در حل سوالات داشته باشیم، لازم است تا قبل از همه دانش درست با سیستم ریاضیکی را ملاک عمل خویش قرار دهیم.

قرار گرفتن استفاده از حدود مجازی بررسی میتودهای ریاضی که آن یکی از مهم ترین خصوصیت و قابلیت حل مسایل در میتود ریاضی بشمار میرود، که به صورت عموم به کمک و همکاری ریاضی انجام پذیر میباشد. پس این یک حقیقت درست برای ترتیبات حل مسایل متذکره محسوب میشود.

تحلیل، تجربه و انتخاب طریقه برای حل آنها ایجاب یک دستور العمل بسیار دقیق می نماید تا با درک عمیق و فکر عالی نتیجه را بدست آوریم. و قبل ازینکه مسأله را حل نماییم، منتظر به نتیجه مثبت آن میباشدیم. یکی ازین درک عمیق، زمان استفاده و انتقال تفکر سریع میباشد. درک

عمیق در ریاضی مقام اول را دارد. گرچه همه مهم است، ولی منسجم شدن فکر و هوش از یک طرف احساس آرامش و امیدواری را به بار می آورد و از طرف دیگر با راحتی میتوان نتیجه خوبی که از آن توقع داشته باشیم بدست می آوریم.

درینجا استفاده از فارمولها، ثبوت فرضیه های ریاضی، سمبولهای مختلف اعداد و غیره نیز نقش خاصی را درین عرصه بازی میکنند، ثبوت فرضیه ها و انتخاب میتود درست برای حل مسایل، کامیابی بیشتر را نصیب می گرداند. بر علاوه این کار سبب میشود تا معلومات مفید در مضمون مورد مطالعه کسب گردد. زیراکه سیستم ریاضی بسیار مطالب سرپوشیده دارد و یک سرمایه سرپوشیده میباشد، که با حفر کردن با گذشت قرن ها ازین سرمایه سرپوشیده توسط فارمولها که عقل آنرا نشان میدهد و به پیمانته وسیع که اضافه از تصور خواهد بود استفاده صورت خواهد گرفت.

نتایج نشان میدهد که در ریاضی فاکت ها و عوامل بطور عادلانه بررسی و ثبوت میگردد. و ثبوت مثالها به شکل تجربی و تطبیقات در ریاضی مشکل بوده و از قانونمندی و فارمولهای ریاضی در آن استفاده میشود. زیراکه حل مثالهای تجربی نقش مهم در تحقیقات ریاضی دارد. درین اواخر انکشاف سریع تخنیک، رشد قابل ملاحظه و چشم گیری در مفاهیمی ریاضی، علوم تجربی و تحقیقات علمی صورت گرفته است. درینجا واقعا امکانات جدید و به خصوص افق ریاضی را بدون قید و شرط باز نموده و تمام نقشه ها و خیالها را به حقیقت مبدل ساخت. تمام این وقایع و پیشرفت های بزرگ همزمان به وقوع نه پیوسته، بلکه با گذشت زمان و به تعمق فکر و ذهن انسان تدریجاً صورت گرفته و با گذشت زمان همیشه بین شان روابط و عمل متقابل در تمام پروسه ها موجود بوده است.

هیچ گاهی چنین واقع نشده که هر تجربه باید نتیجه مثبت بدهد، ولی برای آزمایش و تفکر راه گشای می باشد که برای ریاضی تنها ثبوت، تأیید تجارب و نتایج مشهود و پرمعنی تا به تغییرات منطقی قابل اهمیت میباشد. مثلاً، تیوریه‌ها و حالات مختلفی که میتوانند شکل فورمول بندی را انجام دهند مجرد است، ولی باز هم نشان دهندهٔ موجودیت تأثیرات ریاضی در همه آنها محسوس میباشد.

نتایج نهائی که در ریاضی نوشته شده، آن عبارت از منطق تجرید و مودلهای ریاضی میباشد که دارای اهداف مشخص و خواص مطلق بوده و تحقیقات آن نظر به انکشاف دانش تغییر ناپذیر است. بطور مثال دوهزار سال قبل تصورات ما در ماحول جهان در سمت دمی و قانونمندی آنها تغییرات زیادی بوجود آمده، ولی قضیه فیثاغورث به حال خود باقی مانده است. این به آن معنی نیست که با گذشت انکشافات تاریخی بسیار مفاهیم ریاضی و ثبوت‌ها فوراً اختراع گردیده و اختراعات دیگر قطع میگردد. نه هرگز نه، بلکه مراحل انکشافات ریاضی از نقطه نظرهای مختلف پیوسته به گذشته به اهداف مورد نظر خود نایل میگردد که سرپوشی از خاصیت‌های جدید ریاضی را باز میگردد و محتویات جدید آنرا مورد مطالعه قرار میدهد و همیشه تصورات ما راجع به ماهیت و اهمیت آن تغییر ناپذیر میباشد. استفاده از ریاضی برای نوشتن کدام اثر در مطابقت به مفاهیم ریاضی نظر به خصوصیت میتود تحقیق شده صورت میگردد. مثل قاعده برای رفع خطاها در تحقیقات ضروری میباشد، که برای چنین تصورات از مفاهیم ریاضی استفاده صورت میگردد. درین حالت میتوان دقیقاً به درست بودن استنتاج آن متیقن شد.

برای اینکه اگر خواسته باشیم ریاضی را به مثابه میتود تحقیقاتی مبدل بسازیم مشکل است. برای این کار لازم است تا ماهیت روابط و عمل متقابل و نظریات اساسی مفاهیم ریاضی را نزد خود دقیقاً واضح و روشن ساخته، بعداً عملیات تحقیقاتی مورد نظر خویش را به یاری ریاضی

بررسی نماییم. نه به شکل سطحی و تفکر ظاهری. تسلط آزاد بالای میتود های ریاضی بالاتر دانش عمیق و به شکل سیستماتیک در نتیجه کار های طولانی و تدریس زیاد ریاضی صورت میگیرد.

کسی میتواند تسلط آزاد داشته باشد که همیشه سروکار به حل مسایل، مطالعه کتب ریاضیات و باسیستم های ریاضی کاملا بلدیت داشته باشد و به اصطلاح همیشه افزار گوشکی آن در دست داشته باشد، تغییرات فوری از یک سیستم به به سیستم دیگر، و یا انتخاب یک عده میتودهای بغرنج و پیچیده که از آن به مشکل میتوان مفهوم گرفت درین صورت مشکلات زیاد و چشمگیری بار می آید و یا مقدمه چنین مختصر به عوض مقدمه چنین طولانی که نمیتواند مفاهیم ریاضی را به درستی بیان نماید، در حل مسایل مشکلات را وارد میسازد. طریقه و میتود بهتر در عملیه فراگیری ریاضی آن است که تا مشکلات ذکر شده را به میان نه آورند.

میتود خوب آن میتودی است که تا در اول قضایا و فورمولها را بطور واضح و ساده بیان نماید و روابط آن را با معلومات گذشته پیوند دهد و شکل طبیعی را داشته باشد. این کار بصورت عموم آنقدر ساده نیست و ضرورت به حد کافی با تطبیق مهارت های مسلکی و قبل از همه با تجارب غنی آموزگار بوده که چگونه میتواند پروسه درسی را تشکیل دهد. و ازین تنگنای پر خم و پیچ موفقانه برآید و کشتی مقصود خویش را به هدف برسانند. مشکل است تا رول بزرگ انالیز ریاضی را در چند سال جداگانه بشکل تیوری و یا ثبوت ها نمایش دهیم؛ زیرا انالیز ریاضی به قدر کافی با کلتور خوبی دارد و به آشنایی کامل فرضیه، ثبوت ها و فورمول بندیها و تطبیقات آنها آگاه میسازد و هیچ وقت در یک محدوده سردرگم حرکت نمیکند. خواندن ریاضی بطور مستقیم و یا غیر مستقیم در بلند بردن سطح دانش منطقی شخص رول مهم را بازی میکند. موقف و دانش او را نظر به تحولات زمانی بالا میبرد.

خواندن ریاضی کامیابی های غیر مترقبه را به بار می آورد، که تأثیر گذار بالای شخصیت و ماهیت کار آن میباشد. فراگیری ریاضی راه های جدیدی برای خوشبختی و همکاریهای جهانشمول را به بار می آورد. و این مشکل است تا تماماً کامیابیهای ریاضی و موفقیت های در همه عرصه ها، که این عمل از حوصله این رساله خارج میباشد، بدست آورد. درینجا برای آنانکیه مصروف خواندن و یا تحقیقات ریاضی اند در صفحات بعدی یاد آوری گردیده است .

محاسبه ديفرانسيال توابع يك متحوله

§ 1. ست ها و توابع ، سمبول های منطقی

1.1 ست ها . عملیه ها بالاي ست ها

ست ها اساس و مفاهيم اوليه رياضی میباشند . هریک از اشیائی متشکله ست را یک عنصر یا عضو ست مینامند .

معمولاً ست ها را با حروف بزرگ لاتین و یا دیگر حروف مانند C, B, A یا Z, Y, X و غیره نشان میدهد .

و عناصر ست را با حروف کوچک مانند a, b, c, x, y, \dots نشان میدهند .

هرگاه a عنصر از ست A باشد مینویسند : $a \in A$

و میخوانند (a عنصری از ست A است) . اگر a عنصری از ست A نباشد چنین مینویسند $a \notin A$ و میخوانند (a عنصری از ست A نیست) .

ست A و B را مساوی گویند اگر هر دوی آن ها دارای عین عناصر باشند و مینویسند که $A = B$. به بیان دیگر دو ست را زمانی مساوی گویند که عناصر یک ست در ست دیگر شامل باشد .

یک ست را میتوان به حروف مختلف مانند A و B نشان داد و چنین نوشت $A = \{a, b, c, \dots\}$ ، که ست A از عناصر c, b, a تشکیل شده است و امکان دارد که

ست به همین و یا کدام طریقه دیگر نیز ارائه گردد .

هرگاه ست A از عناصر a_u تشکیل شده باشد در حالیکه α اندکس تعداد ست های u گفته شود. پس میتوان چنین نوشت $A = \{a_u\}$ و یا به صورت واضح $A = \{a_u\}, a \in u$ نوشت. یا هرگاه نتوانیم آنرا به حافظه بسپاریم، پس بطور ساده مینویسیم $A = \{a\}$ نوشت و تکرار و یا تبدیل عناصر ست، ست جدید را تشکیل نمیدهد. هرگاه ست A متشکل از تمام عناصر مشخص کننده با خصوصیت یک ست باشد پس میتوان چنین نوشت:

$$A = \{a : \dots\}$$

در حالیکه $(:)$ نقطه بعد از حرف که در داخل قوس موجود است نشان دهنده خصوصیت عناصر ست A میباشد.

مثال: هرگاه a و b دو عدد حقیقی باشد. طوری که $a \leq b$ ، انتروال بسته $[a, b]$ نشان دهنده تمام اعداد حقیقی x است طوری که $a \leq x \leq b$ ، پس به اساس تعریف چنین ست را میتوان توسط سمبولها طور ذیل ارائه کرد:

$$[a, b] = \{x : a \leq x \leq b\}$$

یعنی x ست اعداد حقیقی است:

ست خالی:

برای مشخص کردن مفهوم ست خالی، ستی را که دارای هیچ عنصر نباشد ست خالی گفته میشود و توسط علامه \emptyset نشان میدهند.

به اساس تعریف، ست خالی دارای هیچ عنصر نبوده ولی ست محسوب میشود.

ست فرعی :

هرگاه تمام عناصر ست A شامل ست B باشد ست A ست فرعی از ست B گفته میشود و

مینویسیم : $A \subset B$ (ست فرعی از B است میخواند

تمرین 1 : ثبوت کنید که اگر $A \subset B$ و $B \subset A$ باشد، پس $A = B$ است .

اتحاد دو ست :

هرگاه دو ست A و B مطابق (شکل $1, a$) داده شده باشد اتحاد دو ست حقیقی A و B را با

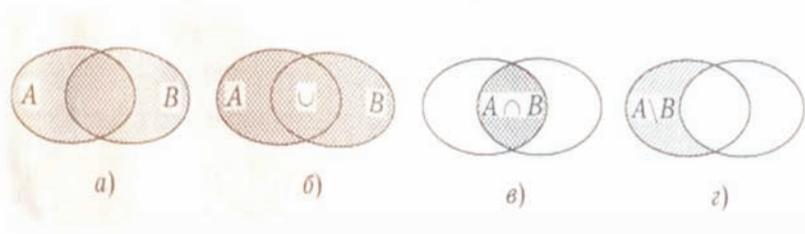
$A \cup B$ نشان میدهند . اتحاد دو ست A و B عبارت از ست است که تمام عناصرش شامل

ست A و (شکل $1, b$) ست B باشد .

در شکل ست A و B مطابق (شکل $1, b$) اتحاد ست های A , B ست است که هر عنصر

آن شامل ست A و یا شامل ست B باشد ، اتحاد ست کیفی A با ست خالی سلویست به خود

A یعنی $A \cup \emptyset = A$ و ست A ست فرعی خودش است .



تقاطع ست ها :

تقاطع دو ست A و B ست است که عناصرش در هر دو ست شامل باشند . و تقاطع دو ست

A و B را به $A \cap B$ نشان داده و میخوانیم که ست A با ست B تقاطع نموده است .

اگر ست A و B عنصر مشترک نداشته باشند (و یا قسماً از آنها و یا هر دو خالی باشند) پس $A \cap B = \emptyset$ درین ست ها A و B بنام ست های غیرمقاطع یاد میشود . خاطر نشان میسازیم که ست خالی باخود یکدیگر را قطع مینماید و مینویسیم .

$$\emptyset \cap \emptyset = \emptyset$$

تفاضل دو ست :

توسط $A \setminus B$ تفاضل دوست A و B نشان داده میشود عبارت از ست است که عناصرش در A شامل باشد ولی در B شامل نباشد مطابق شکل $(1,d)$ و میگویند $A - B$ از تفریق نمودن B از A بدست میآید .

هرگاه $B \subset A$ باشد پس تفاضل $A \setminus B$ عبارت از مکمله ست B تا ست A میباشد و یا مکمله B در A است بنابراین تعریف داریم : $A \setminus A = \emptyset$

تمرین 2 : ثابت کنید که : $A \cup B = (A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)$ است .

اگر سیستم ست های A_α داده شده باشد (اصطلاحات ست) سیستم ، مجموع ، کلاس میتوان منحیث هم نام استفاده نمود و در اینجا α مجموع تمام اندکس های u را ارائه میکنند

اتحادتمام A_α را به $\bigcup_{\alpha \in u} A_\alpha$ نشان داده و آن ست است که هر عنصر آن مربوط به A_α

میباشد یعنی شرط $x \in \bigcup_{\alpha \in u} A_\alpha$ معادل است به $\alpha \in u$ موجود است که $x \in A_\alpha$ تقاطع تمام ست

های A_α ، $a \in u$ به ستی نام داده میشود که به $\bigcap_{\alpha \in u} A_\alpha$ نشان داده شده و هر عنصر آن به تمام

ست های A_α مربوط می شود یعنی $x \in \bigcap_{\alpha \in u} A_\alpha$ نشان میدهد که برای تمام $\alpha \in u$ صدق

کند $x \in A_\alpha$ برای تمام ست های $\{A_\alpha\}$ ، $A_\alpha \subset X$ ، $\alpha \in U$ ، برای هر ست X روابط ذیل صدق میکند.

$$X \setminus \bigcup_{\alpha \in U} A_\alpha = \bigcap_{\alpha \in U} (X \setminus A_\alpha) \dots (1.1)$$

$$X \setminus \bigcap_{\alpha \in U} A_\alpha = \bigcup_{\alpha \in U} (X \setminus A_\alpha) \dots (1.2)$$

بطور مثال رابطه (1,1) راثبوت نمایم $x \in X \setminus \bigcup_{\alpha \in U} A_\alpha$ را داشته باشیم ، پس به اساس تعریف تفاضل ست ها داریم که $x \in X \setminus \bigcup_{\alpha \in U} A_\alpha$ ، $x \notin A_\alpha$ به نوبت خود مطابق به تعریف اتحاد ست ها معادل است به این که $x \in X$ و برای تمام $\alpha \in U$ رابطه $x \notin A_\alpha$ صدق مینماید.

همین قسم به اساس تعریف تفاضل ست ها و معادل است برای تمام $\alpha \in U$ است داریم که $x \in X \setminus A_\alpha$ و بالاخره بیان اخری که به اساس تعریف تقاطع ست ها به این معنی است که

$$x \in \bigcap_{\alpha \in U} (X \setminus A_\alpha) \text{ و } x \in X \setminus \bigcup_{\alpha \in U} A_\alpha \text{ و } x \in \bigcap_{\alpha \in U} (X \setminus A_\alpha) \text{ معادل}$$

است . قسمیکه دیده میشود مساوات (1.2) با مساوات (1.1) بصورت مشابه ثبوت میشود .

مشابتهت دارد بیانیه مشابه را میتوان برای ست های اختیاری A, B, C را به اثبات رسانید

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

$$(A \cup B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

در بخش 1.2 مفهوم تابع بررسی میگردد و در بخش 1.3 به ست های متناهی و مترادف ها معلومات ارائه خواهند شد که در آنجا بخش ها و پراگراف ها به ستاره نشانی شده است . نظر به تقاضای این کورس خواننده میتواند اول از پراگراف های بدون ستاره و بعداً نظر به ضرورت میتواند از پراگراف های ستاره دار استفاده نمایند تا به مطلب خویش نایل گردد .

1-2 توابع :

میتوان گفت که تعداد عناصر درست A مساوی به یک است هرگاه در آن عنصر $a \in A$ موجود بوده و دیگر عنصر نداشته باشد (به عبارت دیگر میگوئیم هرگاه از ست A این عنصر را حذف نمایم پس ست خالی بدست میآید) ست A بنام ست دو عنصره یاد میشود هرگاه بعد از طرح تنها یک عنصر ما تنها $a \in A$ داشته باشیم پس ست عددی عناصر مساوی به یک است . به آسانی میتوان متیقن شد که تعریف مربوط به انتخاب عنصر نشان دهنده ست نیست طوریکه $a \in A$ باشد . همین طور هرگاه $a \in A$ و $b \in A$ باشد طوریکه تفاضل $A \setminus \{a\}$ و از یک عنصر b متشکل باشد و تفاضل ست $A \setminus \{b\}$ همین قسم از یک عنصر a متشکل باشد یعنی از عنصر a است .

فرض میکنیم که ست $X = \{x\}$ و $Y = \{y\}$ ست که از دو عنصر تشکیل شده باشد طوریکه $x \in X$ و $y \in Y$ باشد (x, y) بنام عناصر جفت مرتب ست عناصر x, y یا عنصر x بنام عنصر اول جفت مرتب $\{x, \{x, y\}\}$ یاد شده و عنصر y بنام عنصر دوم یا $\{x, \{x, y\}\}$ مرتب $\{x, y\}$ توسط (x, y) نشان داده میشود در آینده تحت نام جفت معمولاً جفت مرتب یاد میشود ست تمام جفت مرتب (x, y) طوریکه $x \in X$ و $y \in Y$ باشد بنام حاصل ضرب ست X و Y یاد شده و توسط XY ارایه میشود. به این ترتیب فرض میشود که ست X از ست Y مختلف باشد یعنی امکان دارد که حالت $X = Y$ هم باشد .

تعریف 1: همه ست های تابع $f = \{(x, y)\}$ جوره های مرتب (x, y) بوده طوریکه $x \in X$ و $y \in Y$ باشد طوریکه برای هر جوره مرتب یعنی $(x', y') \in f$ و $(x'', y'') \in f$ از شرط $y' \neq y''$ نتیجه شود که $x' \neq x''$ است و یابنام تابع یا مپنگ یاد میشود. در سلسله اصطلاح «تابع» و مپینگ در تعریف فوق اصطلاح «transformation» یا مورفیزم «morohism» «و ارتباط هم استعمال دارد.

تابع را میتوان به حروف $f, g, F, G, \phi, \psi, \dots$ و غیره ارائه نمود.

ست عناصر اول جوره مرتب را ناحیه تعریف تابع یاد کرده و به حرف X_f نشان میدهد. و ست عناصر دوم جوره مرتب را بنام ست قیمت های تابع یاد کرده و به حروف Y_f نشان میدهد. واضح است که ناحیه تعریف ست فرعی $X_f \subset X$ و برد $Y_f \subset Y$ است و خود ست جفت های مرتب تابع $f = \{(x, y)\}$ مانند ست فرعی $X \times Y$ در نظر گرفته شده و بنام گراف تابع f یاد میشود.

و عنصر $x \in X_f$ عبارت از ارگومننت (متحول) تابع یا متحول مستقل تابع f و عنصر $y \in Y$ متحول وابسته به x میباشد.

هرگاه ست تابع $f = \{(x, y)\}$ (تابع (مپنگ)) باشد در آن صورت گویند که تابع f ست x_f رابه ست Y نقش میکند. در حالت $X = X_f$ تنها $f: X \rightarrow Y$ مینویسند.

هرگاه $F: X \rightarrow Y$ یک تابع باشد یعنی ست تمام جوره های مرتب $f = \{(x, y)\}$, $x \in X$, $y \in Y$ که شرایط تعریف 1 را صدق نماید و $(x, y) \in f$ باشد پس آنرا به شکل $y = f(x)$ مینویسند

بعضاً $y = f(x)$ یا $F: x \rightarrow y$ مینویسند و میگویند که تابع f عنصر x را به عنصر y ارتباط میدهد.

((مپینگ f عنصر X را به عنصر Y نقش میکند))

و یا به همین ترتیب عنصر y در ارتباط به عنصر x میباشد .

برای جفت مرتب (x, y) طوریکه $y = f(x)$ است نیز گویند که y قیمت تابع $f(x)$ در نقطه x است و این همان مفهومی است که گویند که y تصویر x مپینگ f است .

در ارتباط با سمبول $f(x_0)$ برای ارایه قیمت تابع f در نقطه x_0 این ارایه را نیز کار میبرند

$$f(x) \Big|_{x=x_0}$$

بعضاً تابع f را توسط سمبول $f(x)$ نشان میدهند ، افاده نمودن تابع به شکل

$F: x \rightarrow y$ و قیمت آن در نقطه $x \in X$ به عین سمبول $f(x)$ ارائه میشود ، که این

قسم ارائه نمودن ، دقیق و عام فهم میباشد .

افاده نمودن $f(x)$ نظریه افاده نمودن $F: X \rightarrow Y$ مناسب تر است بطور مثال :

$f(x) = x^2$ به طور قابل ملاحظه نسبت به $F: x \rightarrow x^2$ مناسب تر است زیرا که در ارایه

تحلیلی $F: x \rightarrow x^2$ بیشتر قابل استفاده است.

هرگاه $y \in Y$ ست تمام عناصر $x \in X$ طوریکه در آن $f(x) = y$ است به نام ست

عناصر اصلی یادشده. و آنرا به شکل $f^{-1}(y)$ نشان میدهند به این ترتیب .

$$f^{-1}(y) = \{x : x \in X, f(x) = y\} \quad \text{یعنی :}$$

واضح است که اگر $y \in Y \setminus Y_f$ باشد پس $f^{-1}(y) = \emptyset$ میباشد .

فرض مینمایم که تابع $f: X \rightarrow Y$ داده شده یعنی میننگ (تابع) ست X به ست Y به عباره دیگر گویند هر عنصر $x \in X$ تنها و تنها به یک عنصر $y \in Y$ ارتباط داده شده است و هر عنصر $y \in Y_f \subset Y$ اقلأ به یک عنصر $x \in X$ ارتباط گرفته است .

اگر $Y = X$ باشد درینصورت گوین تابع f ست X را به خودش نقش میکند .

اگر $Y = Y_f$ باشد یعنی ست Y با ست قیمت های تابع f مطابقت نماید . درینصورت گویند که تابع f ست X را به ست Y نقش میکند یا تابع f عبارت از تابع سورجکتیف است بصورت خلاصه سورجکتیف به این ترتیب گویند که تابع $f: X \rightarrow Y$ سورجکشن است هرگاه به هر $y \in Y$ برای آن کی افلایک $x \in X$ موجود شود طوریکه $f(x) = y$ شود.

واضح است که اگر $f: X \rightarrow Y$ و $f: X \rightarrow Y_f$ ست تمام قیمت های تابع f باشد پس $f: X \rightarrow Y_f$ یک تابع سورجکتیف است .

اگر تابع $f: X \rightarrow Y$ به $x \in X$ مختلف تصاویر مختلف $y \in Y$ ارتباط داشته باشد یعنی $x' \neq x''$ رابطه $f(x') \neq f(x'')$ باشد درینصورت تابع f بنام تابع یک به یک در X در Y یاد میشود این تابع را بنام تابع انجکتیف یاد میکنند. به این ترتیب تابع $f: X \rightarrow Y$ انجکتیف است. اگر و تنها اگر هر عنصر که به شکل تصویر در Y_f ظهور میکند. تایک عنصر اصلی در x' مرتبط باشد.

طوریکه برای هر $y \in Y$ چنین عنصر $x \in X$ موجود باشد که $f(x) = y$ شود پس تصویر یک به یک ست x درست y همین قسم همیشه یک به یک به عناصر این ست مطابقت مینماید .

هرگاه $f: X \rightarrow Y$ و $A \subset X$ باشد پس این ست را میتوان چنین نوشت :

$$S = \{y : y \in Y, y = f(x), x \in A\}$$

یعنی که ست تمام y ها که هر کدام از این ها در تابع f تصویر اقلأ یک عنصر از ست

$A \subset X$ که بنام ست قیمت هایا دشته و مینویسند $S = f(A)$ و قسماً همیشه داریم که

$$y_f = f(x) \text{ است.}$$

برای ست ها $A \subset X$ و $B \subset X$ شرایط ذیل صدق نموده و ثبوت روابط ذیل ساده است

$$1. \quad f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

$$2. \quad f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$$

$$3. \quad f(A \setminus f(B)) \subset f(A \setminus B)$$

هرگاه $A \subset B$ باشد پس $f(A) \subset f(B)$ میباشد.

اگر $f: X \rightarrow Y$ و $B \subset Y$ باشد پس ست: $A = \{x : x \in X, f(x) \in B\}$

بنام مودل معکوس ست B یاد میشود: $A = f^{-1}(B)$

به این ترتیب مودل معکوس ست B از B یا همین قسم خود آن متشکل از تمام مودل

$$f^{-1}(B) = \cup_{y \in B} f^{-1}(y)$$

معکوس نقاط $y \in B$ باشد یعنی:

برای مودل معکوس ست $A \subset y$ و $B \in Y$ نسبت ثبوت شده ساده ذیل صدق میکند:

$$1. \quad f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$

$$2. \quad f^{-1}(A \cap B) \subset f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$$

$$3. \quad f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$$

هرگاه $A \subset B$ پس $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$ میباشد .

اگر $A \subset X$ باشد در این صورت تابع $f: X \rightarrow y$ به شکل طبیعی تابع را در ست A بوجود میآورد که تابع حاصله به هر عنصر $X \in A$ از عناصر $f(x)$ مطابقت مینماید

که این تابع بنام تابع فشرده f در ست A یاد میشود و بعضی اوقات آنرا بشکل $f|_A$ و

یا ساده به شکل f_A نمایش میدهند .

به این ترتیب f_A انعکاس دهنده A در y است .

و برای هر $X \in A$ به جا است که $f_A: X \rightarrow f(x)$ نوشته گردد . هرگاه ست A به

ست x مطابقت نداشته باشد در این حالت ست فرعی مخصوص ست x تشکیل میگردد .

پس فشرده گی f_A تابع f در ست A دارای ساحه تعریف دیگر نظر به تابع f میباشد .

در حقیقت نظر به تابع f تابع دیگر تشکیل میگردد .

بعضی اوقات موجودیت تابع $f: X \rightarrow y$ در ست $A \subset X$ به همین سمبول f نشان

داده و بنام تابع f در ست A یاد میگردد .

هرگاه دو تابع f و g در عین ست x مطالعه گردد و دقیقاً هرگاه فشرده گی توابع f و g در

یک ست x مطالعه گردد پس نوشتن $f \equiv g$ در x نشان میدهد که $f(x) = g(x)$

برای هر $x \in X$ است . در این حالت میگویند تابع f به تابع g در ست x مطابقت دارد .

معمولاً یکی از این سمبولهای بکار رفته در این حالت دارای مفهوم خاص برای نوشتن هدف

نسبت به سمبولهای دیگر میباشد .

بطور مثال: $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ نشان میدهد که $x = (x_1, \dots, x_n)$ و در خود همین نوشته $f(x)$ و $f(x_1, \dots, x_n)$ عین تابع را ارائه میکند.

قابل ذکر است که تابع y در تمام عناصر بعضی ست ها به یک و یا به عین عنصر مطابقت دارد. پس تابع y زمانیکه نظر به تغییرات قیمت های ارگومننت قیمت تابع تغییر نه نماید بنام تابع ثابت (در ست داده شده) و یا constant یاد میشود.

همچنان اگر در اثر تغییر یک متحول (ارگومننت تابع) متحول دیگر که تابع اولیه را تشکیل میدهد تغییر نه نماید تغییر در این صورت به متحول اولی ارتباط ندارد. پس این قسمت را در یک مفهوم معین حالت ساده ارتباط تابعی مینامند.

اگر $f: x \rightarrow y$ و هر عنصر $y \in y_f$ نشان دهنده یک ست با خود باشد و عناصر $y = \{Z\}$ طوریکه در بین این ست ها $\{Z\}$ دارای یک ست غیر خالی باشد که از یک عنصر تشکیل نشده باشد پس چنین تابع f بنام تابع چند قیمته یاد میشود. در این صورت عناصر ست Z و $f(x) = Z$ همیشه بنام تابع چند قیمت تابع f در نقطه x نامیده میشود. اگر هر ست $f(x)$ از یک عنصر تشکیل یافته باشد پس تابع f بنام تابع یک قیمته یاد میگردد.

اگر $f: x \rightarrow y$ و $g: y \rightarrow z$ باشد پس تابع $f: x \rightarrow z$ برای هر f و g را بنام تابع مرکب یاد نموده و به شکل gof نشان داده میشود.

فرضاً تابع $y \rightarrow x: f$ داده شده و y_f ست قیمت های آنرا تشکیل دهد مجموع جوره مرتب که نوع $y \in y_f$ ، $(y, f^{-1}(y))$ تابع را بوجود میآورد که بنام تابع معکوس برای تابع f یاد گردیده و با شکل f^{-1} نمایش داده میشود .

تابع معکوس f^{-1} با هر عنصر $y \in y_f$ ست که به شکل $f^{-1}(y)$ آمده پس به بعضی از عناصر ست مطابقت دارد ، بصورت عموم بنام تابع چند قیمته یاد میگردد .

به همین ترتیب برای هر نقطه $x \in X$ دارای محل مناسب ورودی $x \in f^{-1}, f(x)$ و برای هر نقطه دیگر $y \in y_f$ مساوات $(f^{-1}(y))$ صدق میکند .

نمایش f و f^{-1} معکوس همدیگر گفته میشوند اگر نمایش تابع $y \rightarrow x: f$ یک طرفه باشد ، پس نمایش معکوس آن مثل y_f تعیین و بنام تابع یک قیمته یاد شده و به شکل y_f در X نشان داده میشود .

پس $x \rightarrow y_f: f^{-1}$ حقیقتاً درین حالت شکل تمام نقاط $y \in y_f$ دقیقاً از یک نقطه $x \in X$ بوجود آمده درین حالت مثل تمام نقاط $y \in y_f$ تنها از یک نقطه $x \in X$ مرکب میباشد .

طوریکه دیده میشود برای انعکاس این بیکیثوی انعکاس معکوس f^{-1} شرایط ذیل تامین میگردد یعنی به هر $x \in X$ دارای مساوات $(f^{-1}(y)) = y$ موجود است .

و به این اساس برای هر انعکاس این بیکیثوی تعداد داده شده (کیفی) f هر یک شرط یکسان مفهوم انعکاس متقابل f^{-1} را معین مینماید . (و به این اساس برای هر انعکاس نمایش این

بیکتوی فرض (کیفی) f هر یک از شرایط فوق الذکر انعکاس معکوس f^{-1} یک قیمته را معین مینماید).

* 1-3 ست های متناهی و اعداد طبیعی ترادف ها :

در حقیقت ست های ساده تشکیل دهنده ست های متناهی میباشد این مفهوم را در بخش (1.2^*) تعریف گردیده :

ست های که از یک یا دو عنصر تشکیل یافته باشند با چند تبصره در آینده یادآوری مینمایم . از مقدمه میدانیم که : اگر ست X از چندین عنصر x تشکیل شده باشد و دارای دیگر عنصر نباشد صرف از عناصر x تشکیل شده باشد بعد از طرح ست X از ست X ست خالی را بدست میآوریم .

$$X \setminus \{x\} = \emptyset \quad \text{یعنی :}$$

پس ست X ستی نامیده میشود که از یک عنصر تشکیل شده باشد به این ترتیب مفهوم ست که از یک عنصر تشکیل باشد به مفهوم عنصر معادل میباشد واضح است دو ست که از یک عنصر تشکیل شده باشند میتوان به عوض قیمت یکی از دیگر آن استفاده نمود . (انعکاس دهنده متقابل یکدیگر است) گفته میشوند که تعداد عناصر هر ست طوریکه از یک عنصر متشکل باشد مساوی به واحد است و اصطلاح حرف (واحد) را توسط سمبول (1) نمایش میدهند .

اگر ست X بعد از طرح کردن از ست آن ست که از یک عنصر کیفی متشکل باشد $x \in X$ به ست تبدیل میگردد که تنها از یک عنصر متشکل شده باشد .

یعنی: $y \in x$ پس $\{x\} = \{y\}$ در این صورت ست x بنام ست که از دو عنصر تشکیل یافته شد، یاد می‌گردد. پس واضح است که هر دو ست که از دو عنصر تشکیل یافته باشد میتوان به عوض قیمت یکی از دیگر آن استفاده نمود.

میگویند عدد عناصر هر ست که از دو عنصر تشکیل شده باشد مساوی به دو ست و کلمه دو توسط سمبول 2 نشان میدهد.

اگر ست x بعد از طرح نمودن از ست خود آن که از یک عنصر تشکیل یافته باشد یعنی $x \in X$ به ست تبدیل میشود که از دو عنصر تشکیل شده باشد. این ست x عبارت از ست است که از سه عنصر تشکیل شده باشد. و یا ست که تعداد عناصر آن برابر 3 باشد و کلمه سه توسط سمبول نشان داده میشود (3).

به طور مشابه ست هایکه از چهار، پنج، شش و ... عنصر تشکیل شده باشد تعیین می‌گردد. و یا همین قسم خود ست که تعداد عناصر آن مساوی به چهار، پنج، شش و غیره باشد به عوض چهار، پنج، شش به سمبول های 4، 5، 6 و غیره نشان میدهند. و عنصر ست $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ نمایش میدهد که بنام اعداد طبیعی یاد میشود. اعداد طبیعی از علاوه

نمودن عدد (1) به عدد قبلی به دست می‌آید و اعداد طبیعی به حرف N نشان داده میشود. و تماماً اعداد کیفی مثبت توسط حرف n نشان داده میشود. طوریکه $n \in N$ باشد اما عدد طبیعی مستقیماً بعد از عدد n در ست (1.3) توسط $n + 1$ نشان داده میشود. عدد n بنام عدد ماقبل $n + 1$ یاد می‌گردد. طوریکه دیده میشود تماماً اعداد طبیعی n بدون (1) دارای عدد ماقبل میباشد که میتوان آنرا به $n + 1$ نشان داد که به این ترتیب: $(n - 1) + 1 = n$ مطابق به تعریف عدد طبیعی هر عدد طبیعی را میتوان به شکل ذیل نوشت:

$$n = (1 \cdot 4) \dots ((1+1)+1 \dots \dots (1 \cdot 4))$$

مطابق به روش دقیق برای تعیین نمودن اعداد طبیعی، عدد $n+1 \in N$ توسط همین خاصیت که هر ست مرکب از $n+1$ عنصر باشد مشخص میشود.

بعد از حذف نمودن عدد کیفی از آن به ست مبدل میشود که از n عنصر مرکب شده باشد موافق به روش مذکور در ست کیفی که مرکب از $n \in N$ عنصر باشد.

مستقیماً متناسب یکدیگر میباشد. اگر در ردیف اعداد طبیعی (1.3) از دو عدد طبیعی m و n عدد m قبلاً نسبت به n ذکر شده باشد، پس عدد m طرف چپ عدد n قرار میگیرد. پس عدد m از n کوچکتر بوده و به شکل $m < n$ مینویسیم.

و یا به همین قسم عدد n بزرگتر از m میباشد و مینویسیم $n > m$ است. بطور مثال: $n \neq 1, n-1 < n < n+1$ باشد.

برای دو عدد طبیعی مختلف کیفی m و n دارای محل مشخص یکی از نسبت های $m < n$ و یا $m > n$ میباشد. در این صورت اگر $m < n$ و $n < p$ باشد.

پس $p \in N, n, m, m < p$ است.

اگر عدد $m \in N$ کوچک از عدد $n \in N$ باشد پس در آنصورت هر ستی مرکب از n عنصر دارای ست فرعی m عنصر میباشد. این نتیجه گیری خود دستوالعمل تعریف ترادف اعداد طبیعی است. ست اعداد طبیعی N دارای خواص قابل ملاحظه ذیل است.

اگر ست M طوری باشد که:

1- $M \subset N$ باشد.

2- $1 \in M$ باشد.

3- از $n \in M$ نتیجه میشود که $n+1 \in M$ است.

$$M = N \dots\dots\dots(1.5) \quad \text{پس}$$

حقیقتاً مطابق به شرط شماره (2) . که $1 \in M$ است .

به شرط شماره (3) ، $2 \in M$ نیز مطابقت دارد . پس مطابق به خواص شماره (3) داریم که $3 \in M$ است . مگر عدد کیفی طبیعی $n \in N$ از یک ترادف با افزودن عدد یک نیز بدست میآید . برای اینکه $n \in M$ است پس داریم که $N \subset M$ است . و همین قسم مطابق شرط (1) روشن است که $M \subset N$ است پس $M = N$ بوده که در زمینه مساوات (1.5) ثابت است .

از تمام گفتنی ها نتیجه میشود که ست اعداد طبیعی N دارای خواص ذیل میباشد .

1° - به هر عنصر $n \in N$ یک عنصر این ست مطابقت دارد و به $n + 1$ افاده میگردد . که عنصر متذکره بعد از عنصر n قرار میگیرد .

2° - هر عنصر از N واحد میتواند تنها نتیجه یک عنصر بعدی $n \in N$ شود .

3° - موجودیت عنصر خاص که توسط سمبول (1) افاده میگردد قبل از کدام عنصر نتیجه نمیدهد .

منصفانه و بر عکس تأیید کردن این مفهوم که تماماً ست ها توسط شرایط $(1^\circ - 4^\circ)$ تأمین میگردد ، میتواند مقابله به یک نوع انعکاس به ست N باشد با حفظ نسبت (خوردی ، و بزرگی) این حالت ممکن است که تعریف اکیسوماتیکی ست اعداد طبیعی را بدست آورد به این اساس کافی است تا شرایط $(1^\circ - 4^\circ)$ را کاملاً به حیث اکیسوم قبول کرد .

که آنها بنام اکیسوم های پینه¹ (Peano) یاد میشود . به این ترتیب تعریف اکیسوماتیکی ست
ها اعداد طبیعی قرار ذیل است .

تعریف 2 : ست که تحت تأمین شرایط $(1 - 4)$ بوده عبارت از ست اعداد طبیعی میباشد .

به این ترتیب تعریف خاصیت 4° عبارت از اکیسوم استقراری ریاضی میباشد .

از ثبوت مساوات (1.5) نتیجه میشود که پرنسیب یاد شده عبارت از ثبوت میتود های
استقراری ریاضی میباشد .

اگر ستی تأیید شده موجود باشد در اینصورت عدد طبیعی را به نمبر طور ذیل مینویسیم :

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

اگر ثابت باشد که :

1 - مطابق تائید مساوات نمبر 1 .

2 - از تأیید کردن مساوات با نمبر کیفی $n \in N$ نتیجه تائید کردن مساوات با نمبر

$n + 1$ میشود در آنصورت خودش ثبوت است .

که تمام مساوات تحت مطالعه مورد تائید است پس مساوات تائید شده با نمبر کیفی

$n \in N$ میباشد .

مثال : بیان کردن ثبوت توسط میتود استقراری ریاضی (مراجعه نماید به) مثال در بخش

(1.4) قضیه اول . فرضاً میگویند ست که تعداد عناصر آن مساوی به صفر باشد به کلمه

صفر توسط (0) نشان میدهد .

ست اعداد طبیعی که با صفر افزوده میشود توسط (N_0) نشان میدهد .

$$N_0 \stackrel{\text{def}}{=} N \cup \{0\} \dots \dots \dots (1.6)$$

صفر کوچکتر از هر عدد طبیعی کیفی میباشد یعنی $n \in N$ ، $0 < n$ است .

اعداد طبیعی میتوانند بین خود و با صفر جمع شود . عملیه جمع در ست ها (N_0) توسط

عملیه اتحاد ست صورت میگیرد حاصل جمع $m + n$ عدد طوریکه $m \in N$ و $n \in N$

باشد عبارت از تعداد عناصر ست است که در اتحاد دو ست غیر متقاطع بدست میآید . که

یکی از آن به m و دیگر به n عناصر ترکیب شده است .

تعریف فوق مربوط به انتخاب و خواص ست نیست به ساده گی دیده میشود که در حالت

$$n = 1 \text{ عدد } m + n = m + 1 \text{ است .}$$

مفهوم عملیه جمع با عدد مابعد از m عدد مطابقت دارد . که قبلاً هم به همین سمبول $m + 1$

نشان داده شده است .

همین قسم مستقیماً از تعریف خواص عملیه جمع در ست (N_0) ذیلاً استفاده مینمائیم .

$$1^{\circ}, \quad n + 0 = n, \quad n \in N_0$$

$$2^{\circ}, \quad m + n = n + m, \quad m, n \in N_0$$

$$3^{\circ}, \quad m + (n + p) = (m + n) + p, \quad n, m, p \in N_0$$

عملیه تفریق در ست (N_0) توسط عملیه تفریق ست ها تعین میشود .

هرگاه $m \leq n, m, n \in N_0$ پس حاصل تفریق $m - n$ عبارت از عددی عنصر ست

است که از ست n عنصر مرکب شده و توسط عملیه تفریق از آن ست که از m عنصر

مرکب شده حاصل میشود تعریف فوق مربوط به انتخاب ست مورد مطالعه که مرکب از n

و m عنصر است .

عملیه تفریق در ست (N_0) عبارت از معکوس عملیه جمع است هرگاه

$$m + n = p, \quad m, n \in N_0 \quad \text{باشد پس } n = p - m \text{ است.}$$

از تعریف عدد طبیعی n چنین نتیجه میشود که ست $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ از n عنصر مرکب شده است زیرا که هر ست که از n عنصر مرکب شده باشد متقابلاً یکسان در ست $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ انعکاس میکند.

تعریف 3: اگر برای هر ست عدد طبیعی که تعداد عناصر آن مساوی به n شود، پس چنین ست متناهی نامیده میشود.

(که از n عنصر مرکب است). تماماً ست هایکه متناهی نیست بنام ست های نامتناهی یاد میشوند. مثال ست های نامتناهی عبارت از تمام اعداد طبیعی N میباشد ست های خالی (عبارت از ست فرضی است که هیچ عنصر ندارد) به اساس تعریف اینگونه ست های نامتناهی مینامند.

تمرین 3: مساوات را اثبوت کنید:

$$m + n = (1 + \dots + (m + 1) + \dots + 1) + 1$$

افاده (n دفعه) در اینجا این معنی میدهد که از ست n دفعه عنصر گرفته میشود و هر کدام آنها را به (1) نشان میدهند و تماماً این واحد ها پی هم با اعداد طبیعی m افزوده میشود.

تعریف 4: فرضاً X یک نوع ست است و N ست اعداد طبیعی باشد تمام انعکاس

$$f : N \rightarrow X \quad (2.1 \text{ پ.س.م}) \text{ عبارت از ترادف های عناصر ست } X \text{ میباشد. } f(N) \text{ به}$$

حرف X_n نشانی میگردد.

وحد $n - m$ ام ترادف $f : n \rightarrow x$ و خود این ترادف $\{X_n\}$ با خود جوهره مرتب را نشان میدهد که از عدد $n \in N$ ترکیب شده است. و به آن در صورت انعکاس $f : N \rightarrow x$ عناصر (x) به ست x مطابقت دارد.

پس داریم: $X_n = (n, x)$ عنصر دوم این جوهره مرتب بنام قیمت عنصر X_n ترادف X_n نامیده میشود و عنصر اول این جوهره مرتب نمبر آن میباشد. ست عناصر ترادف همیشه نامتناهی است.

دو عنصر مترادف میتوانند دارای یک مفهوم (قیمت) باشد ولی از نظر نمبر مثل ست های نامتناهی متفاوت میباشد.

راجع به مفهوم عناصر مترادف معمولاً به طور مختصر میگویند: قیمت ست ترادف میتوان نامتناهی باشد بطور مثال: اگر $n \in N$ در مطابقت به یک و عین عنصر $a \in x$ برابر باشد پس در آنصورت تمام $n \in N$ دارای مساوات ذیل میباشد. $f(n) = a$ قیمت ست ترادف $x_n = a, n = 1, 2, \dots$ که از یک عنصر $a \in x$ ترکیب شده که این ترادف بنام ترادف ثابت یاد میشود.

هرگاه $n_1 < n_2, n_1 \in N, n_2 \in N$ باشد پس حد X_{n_1} ترادف $\{X_n\}$ عبارت از حد قبل X_{n_2} بوده و حد X_{n_2} حد بعدی X_{n_1} میباشد. در این قیمت حد ترادف همیشه منظم است و همیشه در چگونگی نمبرها مطمئناً بکار میبرد. نه بخاطر تمام اعداد طبیعی لیکن از دید بعضی از آنها بطور مثال آغاز عدد طبیعی با بعضی اعداد طبیعی صورت میگیرد.

$$n_0 : x_n, n = n_0, n_0 + 1, \dots$$

و یا یک عدد جفت $n = 2, 4, \dots, x_n$ وجود می آید که برای نمره گذاری نه تنها از عدد طبیعی بلکه عدد دیگر نیز بکار میرود .

بطور مثال $n = 0, 1, 2, 3, \dots, x_n$ در این جا چگونگی یک نمبر صفر نیز افزوده شده است . در تمام این حالت میتوان سر از نو نام گذاری کرد .

در تمام این حالت ممکن است X_n را نام گذاری کرد و تنها آنها در تمام اعداد طبیعی m

استفاده کرد. از مثال اول نتیجه میشود که:

$$m = n - n_0 + 1$$

در مثال دوم $m = \frac{n}{2}$ در مثال سوم $m = n + 1$ زیرا که در حالت مسابه چنین میگویند که

X_n ترادف بمیان میآورد و در آخرین جمله نشان میدهد که n کدام قیمت را می گیرد .

1-4. گروپ بندی عناصر ست های متناهی

هرگاه کدام ست متناهی داده شده باشد و لازم باشد که از عناصر آنها چندین گروپ به کمک این یا آن شرط تشکیل نمایم خواص آنرا مطالعه مینمایم .

بطور مثال ست واضح باشد که از چندین گروپ عناصر آن تشکیل است .

که تبدیلات ، تغییرات ترکیب و ترتیب کردن آنها گروپ بندی آن نامیده میشود .

فرضاً ست داده شده که از n عناصر تشکیل شده باشد .

یعنی : $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$

و دارای بعضی از اعداد طبیعی مثبت $R \leq n$ بوده که در مبدأ و انجام خط مندرج عناصر

فرعی که در رابطه (1.8) نشان داده شده است میتواند متناهی مشروط ها باشند .

تعریف 5: گروه عناصر که از R عنصر ترکیب یافته باشد و هر کدام و یا یکی از دیگر یا بین خود عناصر یا در ترتیب شان فرق داشته باشد عبارت از ترتیب کردن n عنصر در R عنصر میباشد.

مثال: گروه $\{1,2\}\{2,1\}\{1,3\}\{3,1\}\{2,3\}\{3,2\}$ که همه ترتیب های ممکن اعداد طبیعی 1, 2, 3 میباشد.

تعداد تمام تبدیلات از n عنصر به R عنصر توسط:

$$A_n^R, n=1,2,3,\dots, R=1,2,\dots,n$$

افاده میگردد.

لیما: اگر $R < n$ باشد پس $(1.9) \dots \dots \dots A_n^{R+1} = A_n^R (n \cdot R)$

ثبوت: از هر تبدیل به R عنصر از n عنصر پس از هر گروه مرتب از R عناصر

$\{x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{iR}\}$ يك را بالای آن که شامل عنصر نه باشد افزود میکنیم یعنی:

$$x_{iR} + 1 \text{ از تمام چنین } n - k \text{ میتوان } (n - R)$$

تبدیلات $R + 1$ عنصر را بدست آورد به شکل $\{x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{iR}, x_{iR+1}\}$ به این

ترتیب طرق بدست آوردن تمام تبدیلات به $R + 1$ عنصر که دقیقاً تنها یکدفعه صورت میگیرد. طوری که:

$$A_n^R (n - R) = A_n^{(R+1)}$$

قضیه 1: به شکل فارمول بجا خواهد بود:

$$A_n^R = n(n-1)\dots(n-R+1), R=1,2,3,\dots,n \dots \dots (1.10)$$

ثبوت: طوری که دیده میشود: $A_n^1 = n \dots (1 \cdot 11)$

$$A_n^2 = A_n^{1+1} = A_n^1 (n-1) = n(n-1) \dots (1 \cdot 12) \quad \text{همچنان:}$$

$$A_n^3 = A_n^{2+1} = A_n^2 (n-2) = n(n-1)(n-2) \dots (1 \cdot 12)$$

بصورت عموم اگر

$$A_n^{(b-1)} = n(n-1) \dots (n-R+2) \dots (1 \cdot 13)$$

$$A_n^R = A_n^{R-1} (n - (R-1)) = n(n-1) \dots (n-R+1) \dots (1 \cdot 13)$$

پس به عوض فورمول $(1 \cdot 10)$ ثبوت قضیه قرار معلوم به اساس میتود استقرار ریاضی

صدق میکند . حقیقتاً مساوات $(1 \cdot 11)$ نیز درست است و نشان میدهد که فورمول $(1 \cdot 13)$

نتیجه فورمول $(1 \cdot 10)$ است .

تعریف 6 : گروپ های که از یک و عین عدد و عناصر تشکیل یافته ، به یکی دیگر تنها

در ردیف عناصر فرق دارد ترکیب یافته باشد بنام تبدیلات یاد میشود . به این ترتیب تبدیلات

عبارت از تبدیلات از n عنصر به n عنصر که در هر کدام $n = 1, 2, \dots$ موجود باشد.

بطور مثال : $\{1, 2, 3\}, \{1, 3, 2\}, \{2, 1, 3\}, \{2, 3, 1\}, \{3, 1, 2\}, \{3, 2, 1\}$ و تمام

تبدیلات ممکنه اعداد $1, 2, 3$ است . تعداد تمام تبدیلات n عنصر توسط P_n افاده میگردد.

قضیه 2 : به عوض فورمول : $p_n = 1, 2, 3, \dots, n$

از فرمول (1.10) نتیجه میشود در صورتیکه $R = n$ حاصل ضرب $1, 2, \dots, n$ توسط $n!$ (فکتوریل خوانده میشود) افاده میگردد .

$$p_n = n! \dots \dots \dots (1.14)$$

برای اطمینان فرض میکنیم :

$$p_0 = 0! = 1$$

تعریف 7 : گروه های که از R عنصر تشکیل گردیده آخرین حد این گروه با یکدیگر به اندازه یک عنصر فرق داشته باشد بنام ترکیب یاد میشود .

بطور مثال : گروه های $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$ متشکل از اعداد طبیعی 1, 2, 3 بوده و هر گروه وجود میآید .

تعداد تمام ترکیب از n عناصر به R عناصر هر یکی آنها توسط C_n^R افاده میگردد .

$$C_n^R = \frac{A_n^R}{P_R} \dots \dots \dots (1.15) \quad \text{قضیه 3 : به عوض فرمول :}$$

$$C_n^R = \frac{n(n-1)\dots(n-R+1)}{n!} \dots \dots \dots (1.16) \quad \text{پس:}$$

$$C_n^R = \frac{n!}{R!(n-R)!} \dots \dots \dots (1.17) \quad \text{نیجه مساوات فوق :}$$

ثبوت : هرگاه در هر ترکیب از R عنصر به n (عنصر که بشکل) (C_n^R) است تمام شرایط

ممکنه تبدیلات عناصر آن (عدد مساوی به p_R) شود ، پس تبدیلات از R عنصر به n

عناصر صورت میگیرد به چنین طریقه تمام تبدیلات از R عنصر به n تنها یکدفعه صورت

میگیرد . زیرا $C_n^R p_R = A_n^R$ از آنجا که نتیجه فرمول (1.15) فرمول (1.16) از

فرمول های (1.10) ، (1.14) ، (1.15) میشود بدست میآید اگر صورت و مخرج کسر در بخش اول فرمول (1.16) در $(n - R)!$ ضرب شود پس فرمول (1.17) بدست میآید .

$$C_n^3 = C_n^{n-R}, R = 0, 1, 2, \dots, n \dots (1.18)$$

قضیه 4: به شکل فرمول: (1.18) $C_n^0 \stackrel{def}{=} 1$ ثبوت فرمول (1.18) مستقیماً از تعریف ترکیب بدست میآید اگر از n عنصر کدام گروه انتخاب شود ترکیب که از R عنصر ترتیب شده باشد پس گروه (ترکیب) از $(n - R)$ عناصر باقی مانده میشود . به این قسم طریقه تمام ترکیب از n عنصر به R عنصر به یک بار بدست میآید . زیرا که اعداد ترکیب شده از n عنصر در R عنصر پس C_n^R مساوی است به عدد که از n عناصر ترکیب شده است .

پس C_n^{n-R} فرمول (1.18) مستقیماً از مساوات (1.17) نتیجه میشود طریقه :

$$C_n^R = \frac{n!}{R!(n-R)!}, C_n^{n-R} = \frac{n!}{(n-R)!R!}$$

طریقه

پس عدد C_n^{n-R} و C_n^R مساوی است .

$$C_{n+1}^{R+1} = C_n^R + C_n^{R+1} \dots (1.19)$$

قضیه 5 : به عوض فرمول :

ثبوت : فرضاً $n + 1$ عنصر است که از ترکیب در $k + 1$ عناصر بدست آمده است . یکی از این عناصر با آن جمع میکنیم پس عدد ترکیب شده که با آن این عنصر افزود شده مساوی است به C_n^R .

(همین قسم هرگاه آنرا در هر یکی از این ترکیب ها طرح کنیم ، پس تمام امکانات ترکیب n عنصر آنها در R عناصر یکدفعه بدست میاید).

اما عدد ترکیب شده طوریکه در آن افزود شده مساوی است به :

C_n^{R+1} (آنها تمام ترکیب های ممکنه در $R + 1$ عنصر و از باقیمانده n عناصر بوجود میآورد) این ثبوت فورمول (1.19) است .

تبصره : عدد C_n^R را میتوان توسط جدول مثلثی که بنام مثلث پاسکال¹ یاد میشود در یافت کرد . طوری که عدد اول و اخیر فرق دارد مساوی به (1) است و از سطر سوم هر عدد آغاز میشود .

فرق عدد اول و اخیر و ترکیب بزرگی این اعداد بدست میآید توسط سطر های قبلی بدست میآید قرار شکل ذیل :

$$\begin{array}{cccc}
 & & & 1 \\
 & & & 1 & 1 \\
 & & 1 & 2 & 1 \\
 & 1 & 3 & 3 & 1 \\
 & 1 & \dots & C_n^R & C_n^{R+1} & \dots & 1 \\
 1 & \dots & \dots & C_n^{R+1} & \dots & \dots & 1
 \end{array}$$

شکل پاسکال

از مساوات $C_n^0 = C_n^n = 1$ و از فورمول (1.19) نتیجه میشود که در n سطر این جدول $1, C_n^1, \dots, C_n^R, \dots, C_n^{n-1}, 1$ باقیمانده است .

1-5 سمبول های منطقی

در اندیشه های ریاضیکی همیشه افاده ای دیده میشود «موجودیت عناصر» که توسط بعضی از خاصیت های «کیفی عناصر» در اطراف عناصر بدست می آید که دارای بعضی خواص میباشد .

در ریاضی به عوض کلمه « موجودیت » سمبول \exists مینویسند که معکوس حرف لاتین E است و به عوض کلمه « برای همه » سمبول \forall معکوس حرف A نوشته میشود.

مثال: تعریف اتحادست $A\alpha$ $\alpha \in u$ ست \cup $A\alpha$ ، توسط سمبول های منطقی طور ذیل نوشته میشود .

$$\bigcup_{\alpha \in I} A\alpha = \{ \alpha : \exists \alpha \in \exists I, \chi \in A\alpha \}$$

و تعریف قطع ست s $A\alpha$ $\alpha \in u$ توسط سمبول به شکل ذیل تحریر میگردد .

$$\bigcup_{\alpha \in I} A\alpha = \{ x : \forall a \in u, \chi \in A\alpha \}$$

مثال 2: فرضاً R ستی از اعداد حقیقی باشد و فرضاً تابع $f: R \rightarrow R$ داده شده باشد . هرگاه تابع درست اعداد حقیقی معین باشد و قیمت اعداد حقیقی را بخود بگیرد پس تابع f را بنام تابع جفت یاد میکنند اگر برای هر $x \in R$ مساوات $f(-x) = f(x)$ صدق نماید.

که با استفاده از سمبول های منطقی این شرایط را قرارذیل نوشت :

$$\forall x \in R : f(-x) = f(x)$$

3: تابع $f: R \rightarrow R$ بنام تابع متناوب ، متمادی یاد میگردد هرگاه چنین عدد $T > 0$ موجود باشد طوریکه $x \in R$ مساوات

$$(\exists T > 0), (\forall x \in R) : f(x + T) = f(x)$$

معمولاً برای آسانی مطالعه تأیید کردن نوشته ها را توسط بعضی از سمبول های منطقی نشان میدهند که هر کدام آنها سمبول های جداگانه دارد . و به قوس دایره ای آغاز میشود . همانطوری که در فرمول اخیر بکار نرفته است . دو نقطه (:) فرمول فوق دارای این مفهوم است که طوری که (:) و اکثراً افاده متذکره جهت کوتاه نمودن آن بدون قوس مینویسند و میتوان چنین پیشکش نمائیم :

$$\forall \chi \in R : f(\chi + T) = f(\chi) \quad \text{وجودیت } \exists T > 0$$

4: تابع $f: R \rightarrow R$ جفت نیست اگر شرایط $f(-x) = f(x)$ برای تمام $x \in R$ قابل اجرا نباشد . (صادق نمیباشد) (تطبیق نشود) بطور مشابه تعریف منفی آنقدر مناسب نیست و قتی که میخواهی از آنها استفاده نماید . همین قسم استنباط کردن آن چیزیکه نیست مشکل است پس در حالت داده شده تأیید کردن مساوات $f(-x) = f(x)$ که برای تمام $x \in R$ صادق نیست تأیید کردن معادل آن که تنها وجودیت $x \in R$ را نشان میدهد یعنی $f(-x) \neq f(x)$ و بطور سمبولیک مینویسیم :

$$\exists x \in R : f(-x) \neq f(x)$$

5: تابع $f: R \rightarrow R$ تابع متناوب ، متمادی نیست اگر هر عدد فرض $T > 0$ دارای تناوب نباشد پس برای هر $T > 0$ مساوات $f(x + T) = f(x)$ حتمی نیست که برای تمام $x \in R$ بکار برده شود .

یا در فرمول مثبت : برای هر $\chi \in R : T > 0$ دریافت میگردد :

چنانچه $f(\chi + T) = f(\chi)$ توسط سمبول ها قرار ذیل مینویسد :

$$\forall T > 0 \exists \chi \in R : f(\chi + T) \neq f(\chi)$$

مقایسه نوشته سمبول های منطقی توسط فرمول 2 و 3 با منفی بودن آن در فرمول شکل 4 و 5 تائید میگردد که به تشکیل سمبول های منفی موجودیت و اتحاد آن یکی با دیگر تبدیل میشود. برای اینکه در بعضی از ست ها عناصر موجود نمیشد، دارای چنین خواص میباشند. لازم است تمام عناصر که موجود نیستند را توسط این خاصیت استفاده گردد. پس در این حالت در سمبول های منفی موجودیت \exists بکار رفته میشود. در سمبول \forall اگر کدام خاصیت موجود باشد که تمام عناصر ست در آن مطالعه نمیگردد، پس این به آن معنی است که در آن عناصر موجود است که دارای خواص نمیشد سمبول اتحاد به سمبول موجودیت تبدیل میگردد.

سمبول $(=)$ به معنی در نتیجه میشود (یک نظر از نظر دیگر نتیجه میشود) و سمبول (\Leftrightarrow) به معنی مساوی بودن، معادل بودن در مساوات یکی از دیگر بدست می آید که به طرف مخالف آن قرار میگردد.

علامه def به این معنی است که (به اساس تعریف بیان شده)

$$A \subset B \stackrel{def}{\Leftrightarrow} (\forall \chi \in A \Rightarrow \chi \in B)$$

بطور مثال :

$$(g \circ f)(\chi) \stackrel{def}{=} g(f \subset \chi)$$

(Σ) برای مجموعه از آن استفاده میگردد. افاده نمودن مجموعه میتوان به طریق ذیل نوشت:

$$\sum_{k=1}^n a_k \stackrel{def}{=} a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

مثل قانون جابجا نمودن نوعیت مواد در نمایش کلاس بدون سمبول های منطقی به اندازه برابر به اساس متن استفاده میگردد. این از یکطرف به خوانندگان امکان عادت استفاده آنها را میدهد.

بطور مثال در صورت اجمال مفید است اما بسیار مشکل است که هدف را توضیح بدهیم زیرا که به فهمیدن آن تفکر عمیق ضرورت است.

علامه \square ثبوت شدن معنی میدهد.

2.1 . خواص اعداد حقیقی

در ریاضی مقدماتی اعداد حقیقی خوانده میشوند . ابتدا در عملیه شمارش بوجود آمدن و همین ردیف اعداد $1, 2, 3, \dots, n$ را بنام اعداد طبیعی مینامند . در حساب عملیه جمع و ضرب بالای اعداد طبیعی صورت میگیرد . چیزیکه مربوط به عملیه تفریق و تقسیم است این است که برای همیشه درست اعداد طبیعی این دو عملیه ناممکن است . برای اینکه تمام چهار عملیه حسابی برای هر جوره اعداد (بدون عملیه تقسیم بر صفر که لازم نیست اجرا میشود) ممکن شود ایجاب میکند تا به صنف مورد مطالعه اعداد انکشاف داد شود که برای انکشاف دادن ذخایر اعداد لازم است . همین قسم تقاضای اندازه کمیات هندسی و فزیکمی بزمیان می آید برای این کار عدد صفر و تمام اعداد منفی به شکل $n, \dots, (-2), (-1)$ به میان می آید و بعداً کسر

های ناطق (شکل $\frac{p}{q}$ ، p و q تام و $q \neq 0$) عرض اندام میکند .

همین قسم تقاضا نمودن اندازه کمیات و تطبیق چنین عملیه ها مثل کمیات جذری محاسبه لوگارتیم ها ، حل معادلات الجبری ، که به انکشاف بعدی ذخیره اعداد مورد مطالعه اعداد غیر ناطق ، لایتناهی ، مختلط به میان می آید تمام کسر های ناطق و غیر ناطق تشکیل دهنده تماماً ست های اعداد حقیقی میباشد .

ست های تمام اعداد حقیقی را میتوان توسط حرف R نشان داد .

(از $Realus$. aT حقیقی) این ست ها به صورت کل تشکیل دهنده مشخصات عملیه متقابل جمع و ضرب و مقایسه اعداد در کمیات هرکدام از قطار ممکن در اعداد بوجود می آید که مختصراً خواص اعداد حقیقی را یاد آور میشویم: از ریاضی مقدماتی واضح است که خواص اعداد حقیقی بی نهایت زیاد است بطور نمونه ذیلاً آنرا مطالعه مینمائیم.

I : **عملیه جمع** : برای هر جوره مرتب اعداد حقیقی اختیاری a و b یگانه قاعده وجود دارد که بنام حاصل جمع اعداد یاد شده و چنین نشان داده میشود .

$a + b$ که دارای خواص ذیل میباشد :

$$I_1 : \text{برای هر عدد } a \text{ و } b \text{ داریم که : } a + b = b + a$$

این خاصیت بنام قانون تبدیلی جمع یاد میشود .

$$I_2 : \text{برای هر عدد } a, b, c \text{ داریم که : } a + (b + c) = (a + b) + c$$

این خاصیت بنام قانون اتحادي جمع یاد میشود :

I_3 : هر عدد حقیقی اگر به صفر جمع شود حاصل جمع آن خود عدد حقیقی بدست می آید .

$$a + 0 = a$$

I_4 : برای هر عدد a مقابل وجود دارد که به $(-a)$ نشان داده شده و بنام عدد متقابل (تضاد)

یاد میشود فرضاً $a + (-a) = 0$ یاد میشود .

II : **عملیه ضرب** : برای هر عدد جوره مرتب اعداد اختیاری a و b یگانه قاعده وجود

دارد که بنام ضرب اعداد یاد شده و چنین نشان داده میشود ab و یا $a \cdot b$ و دارای خواص ذیل میباشد .

II₁ : برای هر جوره اعداد a و b داریم که $a \cdot b = b \cdot a$ این خاصیت بنام قانون تبدیل

ضرب یاد میشود .

II₂ : برای هر عدد a, b, c داریم که $a(bc) = (ab)c$ این خاصیت بنام قانون اتحادي

ضرب یاد میشود .

Π_3 : در عملیه ضرب عددی وجود دارد که عبارت از عدد یک است و بنام عینیت عملیه

ضرب یاد شده طوریکه برای هر عدد a داریم $a \cdot 1 = a$

Π_4 : برای هر عدد $a \neq 0$ عددی معکوس موجود است که توسط $1/a$ نشان داده شده و

معکوس a یاد میشود طوریکه $a \cdot \frac{1}{a} = 1$

III : ارتباط عملیه جمع و ضرب :

برای هر یک از اعداد a, b, c داریم که : $(a+b)c = ac + bc$ این خواص بنام قانون

توزیعی ضرب نسبت به جمع یاد میشود .

IV : قابلیت ترتیب (تنظیم) : برای هر عدد a یکی از نسبت های ذیل مشخص است

$a > 0$ (a بزرگ از صفر است) $a = 0$ (a مساوی صفر است) و یا $a < 0$ (a کوچک از

صفر است) .

طوریکه شرایط $a > 0$ معادل $-a < 0$ است (شود) در این صورت اگر $a > 0$ و $b > 0$

باشد پس غیر مساوات ذیل صدق میکنند :

$$a+b > 0 \dots IV_1$$

$$ab > 0 \dots IV_2$$

خاصیت چهارم امکان میدهد تا مفهوم مقایسه یا طوریکه همیشه گفته میشود مقایسه به کمیات برای

هر دو عدد اختیاری a و b عبارت از عددی است که از a بزرگ است چنین مینویسند . $b > a$ و

یا به همین طور عدد a کوچک از عدد b است و چنین مینویسند $a < b$. موجودیت مقایسه بزرگ و

یا کوچک برای هر جوره مرتب اعداد حقیقی بنام خواص قابلیت ترتیب جوره مرتب تمام ست های

اعداد حقیقی یاد میشود. اعداد حقیقی همینطور دارای خواص نا مساوات نیز میباشد.

V : خواص نامساوات :

فرضاً اگر یک ست $A \subset R$ و $B \subset R$ غیر خالی داشته باشیم طوری که برای هر دو عنصر اختیاری $a \in A$ و $b \in B$ نامساوات $a \leq b$ صادق باشد و چنان عدد a موجود باشد که برای $a \in A$ دارای نسبت $a \leq \alpha \leq b$ مطابق شکل (2) بجا خواهد بود. خواص نامساوات اعداد حقیقی مربوط است به استفاده ساده تراز ریاضی در پراکتیک، اندازه نمودن کمیات فزیک و یا کمیات طبیعی دیگر که در اندازه نمودن، چنین کمیات همیشه به دقت بزرگی و خوردی سروکار داریم، طوری که آنها بین خود بسیار نزدیک به هم دیگر باشد اگر در نتیجه اندازه نمودن تجربوی کمیات متذکره در ردیف اعداد که قیمت مطلوبه را کم میدهد « آنها رول ست A را بازی کرده که در تعریف فوق خواص نامساوات قرار میگیرد». و اگر افزون شود ست B خواص نامساوات اعداد حقیقی را قیمت مطلوبه و قابل قبول نشان دهد در آنصورت کمیات اندازه شده دارای قیمت مطلوبه مشخص میباشد و قرار دادن قیمت محاسبه شده در بین قیمت مطلوبه مربوط به کم و زیاد آن میباشد.

از خواص $V - 1$ اعداد حقیقی خواص پولینوم ها نیز نتیجه میشود .

در اینصورت میتوان گفت که مجموع عناصر اعداد حقیقی دارای خواص $V - 1$ بوده که تصور آن بسیار زیاد است .

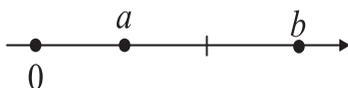
برای اینکه خواننده بداند واضح میسازیم که در آغاز این پراگراف راجع به اعداد حقیقی و خواص آنها از کورس ابتدایی ریاضی معلومات داریم که تذکر آن لازم شمرده نمیشود .

تعریف خواص فوق اعداد حقیقی را میتوان از تعریف اول نتیجه گرفت تنها حالت ساده آن واضح است.

بطور ساده امتحان کردن آن عده ست هاییکه تنها از یک صفر تشکیل یافته باشد تماماً خواص $(V - 1)$ بالای آنها قابل تطبیق است (درین ست ها $0 = 1$ است).

ستی که تنها دارای یک عنصر باشد با صفر متفاوت بوده میتوان در اینجا بخاطر مختصر نمودن از آن نام برد. از لابلای گفتار فوق تعاریف ذیل را مینویسیم.

تعریف 1: عناصر ست های مغلق که توسط خواص $V - 1$ بوجود آمده عبارت از ست های اعداد حقیقی بوده که هر عنصر این ست بنام اعداد حقیقی یاد میشود. ترتیب تیوری اعداد حقیقی که به اساس تعریف، آنها چنین است اکسیوماتیکی نامیده میشود و خواص $V - 1$ اکسیوم های اعداد حقیقی میباشد. ست های هندسی اعداد حقیقی به جهت مستقیم و تنها عدد توسط نقاط روی مستقیم ترسیم میگردد به این اساس مجموع اعداد حقیقی همیشه مستقیم محور عددی بوده همین طور محور اعداد حقیقی و تنها عدد توسط نقاط آن مطابق شکل 3 ارائه میگردد.



شکل (3)

به این تعبیر اعداد حقیقی همه وقت a کوچک از b است (a بزرگ از b است) میگویند که نقطه a طرف چپ نقطه b قرار دارد. (طرف راست b قرار دارد)

در پراگراف (2.2 و 2.6) بسیار مشرح و تحلیلی خواص $V - 1$ اعداد حقیقی و استخراج نمودن چندین نتیجه از آن در آینده معلومات ارائه خواهد شد به این لحاظ بعضی نقاط توسط ستاره نشانی شده است.

2.2* : **خواص جمع و ضرب** : بعضی از خواص جمع و ضرب که توسط خواص I, II, III نتیجه گیری شده مورد مطالعه قرار میدهیم . قبل از همه یاد آور میشوم که برای عملیه جمع معکوس تفریق موجود است و آنرا تعریف میکنیم :

برای هر جوړه مرتب اعداد $a \in R$ و $b \in R$ عدد $a + (-b)$ عبارت از فرق عدد a و b میباشد و توسط $(a - b)$ نشان داده میشود .

$$a - b \stackrel{def}{=} a + (-b) \dots (2.1)$$

اگر

$$a + b = c \dots (2.1)$$

پس به هر دو طرف مساوات $(-b)$ را علاوه میکنیم یعنی:

$$(a + b) + (c - b) = c + (-b)$$

از اینجا مطابق قانون اتحادی I_2 جمع و تفریق داریم که :

$$a + (-b) = c - b$$

اما $b + (-b) = 0$ نتیجه میشود که

$$. a = c - b \dots (2.3)$$

به این ترتیب بعد از علاوه نمودن عدد b به عدد a عدد a از مجموع $a + b$ در حالت تفریق از عدد b قرار میگیرد و به این سبب عملیه تفریق عبارت از عملیه معکوس عملیه جمع میباشد .

و حالا به خواص جمع و ضرب اعداد حقیقی می پردازیم :

1°: عددیکه توسط خواص صفری بوجود می آید یگانه عدد حقیقی است .

فرض میکنیم که دو صفر وجود دارد $0, 0$ قرار بند I_3 داریم که : $0 + 0 = 0, 0 + 0 = 0$

مطابق قانون اتحادی I_2 ، طرف چپ مساوات بین خود مساوی است . در نتیجه طرف راست مساوات نیز مساوی میباشد ، پس $0 = \bar{0}$ ثبوت است .

2°: عدد مقابل (متضاد) داده شده یگانه عدد فرضاً c, b مقابل به عدد a باشد پس :

$$a + b = 0$$

$$a + c = 0$$

پس از مساوات اول داریم که: $(a + b) + c = 0 + c$ پس $(a + b) + c = c$ است .

از اینجا $(a + b) + b = c$ و $a + c = 0$ در نتیجه $b = c$ ثبوت شد .

3°: برای هر عدد a مساوات $a = -(-a)$ صادق است .

از مساوات $a + (-a) = 0$ که توسط عناصر متضاد مشخص گردیده و به اساس قانون

تبدیلی جمع حاصل میشود که $(-a) + a = 0$ این به آن معنی است که: $a = -(-a)$ ثبوت

است .

4°: برای هر عدد a مساوات $a - a = 0$ صادق است .

در واقعیت $a - a = a + (-a) = 0$ ثبوت است .

5°: برای هر عدد a داریم که $-a - a = -(a + b)$ پس عدد متضاد حاصل جمع دو

عدد مساوی است به حاصل جمع متضاد عدد های آن .

حقیقتاً $0 = (a - a) + (b - b) = a + b + (-a - b)$ ثبوت است .

6°: معادله $a + x = b$ که دارای R حل میباشد و همینطور یگانه حل آن $x = b - a$ است .

در حقیقت اگر حل دارد پس در بند فرمول (2.2) و (2.3) این ثبوت یگانه راه حل معادله

$x + a = b$ است برای حقیقت یابی امتحان حتمی است که عدد $x = b - a$ حل نامیده میشود. این حقیقت قرار ذیل است:

$$a + (b - a) = a + [b + (-a)] = [a + (-a)] + b = 0 \quad \square$$

برای عملیه ضرب همین قسم عملیه معکوس وجود دارد که عبارت از تقسیم میباشد که به طریقه ذیل دریافت میگردد:

برای هر جوهر مرتب اعداد حقیقی a و b و $b \neq 0$ عدد $a \cdot \frac{1}{b}$ عبارت از تقسیم اعداد a بر b میباشد. و چنین نشان میدهد.

نوشته تقسیم a بر b در شکل $\frac{a}{b}$ عبارت از کسریکه دارای صورت a و مخرج b میباشد.

این خواص بطور مشابه خواص $1^\circ - 6^\circ$ که برای جمع صادق است و برای عملیه ضرب نیز صادق میباشد.

7° : عددی که توسط خواص یگانه بدست می آید عدد یک یگانه عدد است.

8° : عدد معکوس عدد داده شده که از صفر متفاوت است یگانه است.

9° : برای هر عدد $a \neq 0$ مساوات $\frac{1}{\frac{1}{a}} = a$ صادق است.

10° : برای هر عدد $a \neq 0$ مساوات $\frac{a}{a} = 1$ صادق است.

11° : برای هر عدد $a \neq 0$ و $b \neq 0$ مساوات $\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{ab}$ صادق است. پس عدد

معکوس حاصل تقسیم عدد از صفر متفاوت است مساوی به معکوس حاصل تقسیم آنها است.

12°: معادله $ax = b$ ، $a \neq 0$ درست های اعداد حقیقی دارای يك حل میباشد .

$$x = \frac{b}{a}$$

خواص $7^\circ - 12^\circ$ بطور مشابه به خواص $1^\circ - 6^\circ$ ثبوت میشود .

13°: مساوات $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ، $b \neq 0$ ، $d \neq 0$ صادق است .

نتیجه : (خواص اساسی کسر ها) :

اگر کسر $\frac{a}{b}$ ، $b \neq 0$ و عدد $c \neq 0$ دارای مساوات $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$ باشد .

حقیقتاً ضرب هر دو طرف مساوات $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ در bd و با استفاده از تعریف تقسیم دارای

مساوات معادل بوده یعنی :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{b}bd \Leftrightarrow a \cdot \frac{1}{b}db = c \frac{1}{d}db \Leftrightarrow ad = cb \square$$

تماماً ملاحظات خواص $1^\circ - 13^\circ$ تنها مربوط به عملیه جمع و ضرب میباشد .

توسط عملیه فوق دریافت کردن تمام اعداد طبیعی و اعداد ناطق ، عملیه ساختن تمام طاقتهای و عملیه جذری آنها را انجام میدهد .

عدد $1+1$ توسط (2) نشان داده و عدد $1+2$ توسط 3 نشان داده و غیره اعداد 1 ، 2 ، 3 اعداد طبیعی نامیده میشود . که مطابق با اعداد عناصر ست های متناهی (مراجعه نمائید به : (1.3) نشان داده شده است) .

این مسئله آنقدر تصادفی نیست زیرا که عدد طبیعی حاصله در تفکرات جدید لازم بوده که ست متناهی واحد آن میباشد . عناصر اعداد که در پراگراف (1.3) به عین سمبول n جمع

کردن آنها نشان داده شده (مراجعه نمائید به: (1.4)) در این ارتباط راجع به ست های اعداد طبیعی در مقدمه (مراجعه نمائید به: پراگراف (1.3)) در مطابقت به ترتیب ست ها، ترتیب ست های تمام اعداد حقیقی (مراجعه نمائید به: خواص IV و پراگراف 2.1) و اوضیح معلومات ارائه گردیده است.

به این اساس اعداد طبیعی به ترتیب بعد از n ، $n+1$ میباشد که همین طور نشان داده شده است. ست اعداد طبیعی به حرف N نشان داده میشود. بر علاوه گرچه بطور فوق ثبوت شده که واحد یکتا است. میتوان در این باره چندین مثال راجع به واحد را مطالعه نمائیم. (به صورت عمومی چندین مثال هر عنصر از بعضی ست ها) اگرچه ممکن است افاده $1+1$ را بنویسیم.

اعداد 0 ، ± 1 ، ± 2 عبارت از ست اعداد تام میباشد. ست اعداد تام توسط حرف Z نشان داده میشود. (مراجعه نمائید به: خواص 8° و پراگراف 2.3) نشان داده خواهد شد. تمام یادآوری که در پراگراف 2.1 راجع به خواص اعداد حقیقی صورت گرفته نتیجه میشود که $1 > 0$ است.

عدد شکل m/n در حالیکه n و m اعداد تام باشد و $n \neq 0$ شود بنام اعداد ناطق یاد میشود. ست تمام اعداد کسری معمولاً توسط حرف Q ارائه میشود. اعدادیکه ناطق نباشد غیر ناطق نامیده میشود و ست آنها به حرف I نشان داده میشود. حالا چندین مثال در ارتباط به خواص عملیه جمع و ضرب را ارائه مینماییم:

14° - برای هر عدد a ، b ، c مساوات ذیل موجود است:

$$a(b - c) = ab - ac$$

$$a(b - c) = a(b - c) + ac - ac = \quad \text{بصورت کل:}$$

$$= a(b - c + c) - ac = ab - ac \square$$

15° - برای هر عدد a مساوات ذیل موجود است که : $a \cdot 0 = 0$

حقیقتاً یک عدد b را فرض میکنیم : پس $b - b = 0$ (مراجعه نمائید به: خواص 4°) به این اساس از خواص 14° واضح است که :

$$a \cdot 0 = 0(b - b) = ab - ab = 0 \quad \square$$

از خاصیت 14° نتیجه میشود که بیانیه $1 \neq 0$ به تطبیق نمودن خواص I - II بطور معادل بوجود می آید که این عدد متفاوت از صفر است .

طوریکه دیده میشود میتوان به اندازه کافی نشان داد که اگر عدد $a \neq 0$ موجود شود پس $1 \neq 0$ نیز امکان پذیر است این را ثبوت میکنیم .

اگر $a \neq 0$ موجود باشد پس در اینصورت از مساوات $a \cdot 1 = a$ نتیجه میشود که $1 \neq 0$ همینطور در حالت بر عکس خواص 15° واضح دارای مساوات $a \cdot 0 = 0$ است .

16° - حاصل ضرب $a \cdot b = 0$ است اگر یکی از عوامل ضربی آن صفر باشد .

مثلاً اگر $a \neq 0$ باشد پس حاصل ضرب $a \cdot b = 0$ در $\frac{1}{a}$ حاصل میکنیم که :

$$\frac{1}{a}(ab) = \frac{1}{a} \cdot 0$$

$$(-a)(-b) = ab$$

$$(-a)(b) = -ab$$

17° - برای هر عدد a و b داریم :

$$(-1)a = -a$$

$$-ab = (-a)b + ab - ab =$$

$$(-a + ab)b - ab = -ab$$

بصورت کل :

در بخش خاص تبدیل ضرب (تبدیل جای a به b) داریم که :

$$a(-b) = -ab$$

با استفاده از این مساوات خواهیم داشت :

$$\begin{aligned}(-a)(-b) &= -a(-b) = (-1)[a(-b)] = (-1)(-ab) \\ &= -(-ab) = ab \square\end{aligned}$$

از خواص I ، II ، III اعداد حقیقی و محاسبه فوق آنها میتوان نتیجه قواعد حساب کسر ها را بدست آورد .

پس شکل عدد : $a \in R$, $b \in R$, $b \neq 0$, کسر است $\frac{a}{b}$.

18° - جمع کسر ها به اساس فرمول صورت میگیرد یعنی :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} , b \neq 0 , d \neq 0$$

این مساوات را ثبوت میکنیم بخاطر این کار از تعریف تقسیم استفاده مینمائیم . از قابلیت توزیعی جمع نسبت به ضرب و خواص اساسی کسر ها داریم که :

$$\begin{aligned}\frac{ad + bc}{bd} &= (ad + bc) \frac{1}{bd} = ad \frac{1}{bd} + bc \frac{1}{bd} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} \\ &= \frac{a}{b} + \frac{c}{d} \square\end{aligned}$$

19° - ضرب کسر ها توسط فرمول ذیل صورت میگیرد:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} , b \neq 0 , d \neq 0$$

با استفاده از تعریف تقسیم و خواص 11° داریم که :

$$\frac{ac}{bd} = ac \frac{1}{bd} = ac \frac{1}{b} \frac{1}{d} = \left(a \cdot \frac{1}{b} \right) \left(c \cdot \frac{1}{d} \right) = \frac{a}{b} \frac{c}{d}$$

20° - عنصر معکوس کسر $a \neq 0$ ، $b \neq 0$ ، باشد عبارت است از کسر $\frac{a}{b}$:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1 \text{ پس } \frac{b}{a}$$

این عملیه از قانون ضرب کسر ها نتیجه میشود .

21° - تقسیم کسر ها به اساس قانون صورت میگیرد . یعنی :

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc} , b \neq 0 , c \neq 0 , d \neq 0$$

با استفاده از تعریف تقسیم خواص و اصول گذشته ضرب کسر ها خواهیم داشت :

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{\frac{d}{c}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc} \quad \square$$

فرضاً عدد حقیقی a و عدد طبیعی N داده شده باشد ، عدد a ، n دفعه در نفس خود ضرب

شده عبارت از n توان عدد a و چنین مینویسند : a^n به این ترتیب :

$$a^n \stackrel{def}{=} \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$$

حالا از خواص فوق جمع و ضرب اعداد حقیقی اصول عملیه طاقت ها را بدست می آوریم :

22° - اگر m و n اعداد تام باشد در صورتیکه (ویک) $m \leq 0$ بوده و $a \neq 0$ باشد پس

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\left(a^m \right)^n = a^{m \cdot n}$$

داریم که :

اگر $n = 0$ $m \neq 0$ باشد پس طبق فرمول طوریکه ملاحظه میگردد درین حالت وقتیکه m و n اعداد طبیعی باشد به اساس تعریف توان داریم که :

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{a \dots a}_m \cdot \underbrace{a \dots a}_n = \underbrace{a \dots a}_{m+n} = a^{m+n}$$

اگر $a \neq 0$, $n > 0$, $m < 0$ باشد پس به فرض اینکه $R = -m$ و با استفاده از خواص اساسی کسر ها در صورت امکان در یک وقت تقسیم صورت و مخرج کسر بالای عین عدد مساوی که مساوی به صفر نباشد در قیمت کسر تغییر وارد نمیشود. در صورتیکه $R \leq m$ باشد خواهیم داشت :

$$a^m \cdot a^n = a^{-R} \cdot a^n = \frac{a^n}{a^R} = \frac{\underbrace{a \dots a}_n}{\underbrace{a \dots a}_R} = a^{n-R} = a^{m+n}$$

اما در صورتیکه $R > m$ باشد داریم که :

$$a^m \cdot a^n = \frac{a^n}{a^R} = \frac{1}{a^{R-n}} = a^{n-R} = a^{m+n}$$

اگر $a \neq 0$, $n < 0$, $m < 0$ باشد پس به فرض اینکه $R = -m$ و $i = -n$ است به اساس خواص 11° داریم که :

$$a^m \cdot a^n = a^{-R} \cdot a^i = \frac{1}{a^R a^i} = \frac{1}{a^{R+i}} = a^{- (R + i)} = a^{m+n}$$

بطور مشابه بر رسی میگردد که فرمول دوم خواص 22° بطور ساده نشان میدهد که خواص $(III, II_2, II_1, I_2, I_1)$ توسط استقرار عدد فرض شده حدود متناهی توسعه می یابد چگونگی آنها را توسط مثال قرار ذیل ارائه میداریم :

هرگاه هر عدد a_1, a_2, \dots, a_n ($n \geq 2$), b داریم که :

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)b = a_1b + a_2b + \dots + a_nb \dots (2.4)$$

به صورت کل در صورتیکه : $n=2$ باشد این فرمول در مطابقت به خواص III روشن است.
 حالا فرمول (2.4) در مطابقت به $n=R$ نشان میدهد که آن در مطابقت به $n=R+1$ میباشد.
 با استفاده از خواص I_2 حاصل جمع برای $R+1$ (متناسب در نظر میگیریم) حالا به اساس
 خواص III با استفاده از فرض استقرایی داریم که :

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_r + 1)b = [(a_1 + \dots + a_r) + a_r + 1]b$$

$$= (a_1 + \dots + a_r)b + a_r + 1^b = a_1b + \dots + a_rb + a_r + 1^b$$

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$$

$$nb = \underbrace{b + \dots + b}_n \quad \text{از فرمول (2.4) در حالت که :}$$

پس ضرب یک عدد در عدد طبیعی n به جمع کردن این عدد n دفعه برگردانیده میشود .

تبصره : خاطر نشان میسازیم که خواص I-III پراگراف 2.1 بصورت عموم اعداد حقیقی را تشریح نکرده است ، درین صورت ست های دیگری بوجو می آیند که بطور کل بدست آوردن آن از خواص های I-III متفاوت است . اگر در آنها در همه جا بیانیه (عدد) به بیانیه (عنصر) در ست های مورد مطالعه تبدیل نمائیم عین مفهوم را دارا میباشد . که توسط یکی از خواص I-III برآورده میشود .

بعضی مثالهای ست ها که شرایط I,II,III را مهیا میسازد عبارت از اعداد ناطق ، اعداد

مختلط و مجموع توزیع ناطق میباشد شکل تابع $f(x) = \frac{p(x)}{Q(x)}$ درینجا $p(x)$, $Q(x)$

چند حده منفی دارد .

عناصر تمام ست های یاد شده را میتوان جمع و ضرب نمود به دلیلی که این عمل میتواند تابع شرایط I, II, III باشد ست که مهیا کننده این تقاضا بوده ولو اگر از یک عنصر ترکیب شده و خلاف صفر باشد بنام ساحه یاد میشود .

به این ترتیب اعداد ناطق ، اعداد حقیقی ، اعداد مرکب و توزیع ناطق دارای فیلد میباشد . حالا خواص جداکننده ساحه اعداد حقیقی در اطراف ساحه دیگر انتقال میدهیم (حالا خواص که توسط ساحه اعداد حقیقی از دیگر ساحه ها جدا میشود تحلیل مینماییم) یکی از این خواص عبارت از خواص قابلیت ترتیب عناصر آنها میباشد .

2.3: خواص قابلیت ترتیب

در اینجا بعضی نتیجه گیری های از خواص قابلیت ترتیب IV و خواص جمع و ضرب I, II, III را استخراج می نماییم . قبل از همه مفاهیم مساوات را توسط مقایسه کمیات یاد آور میشویم .

اگر دو عدد a , b تحت شرایط طوری داده شده باشد که عدد a که از صفر کوچک است یا مساوی به صفر است و یا بزرگ از صفر است مشخص باشد ، زیرا اعداد در یک زمان نمیتوانند که هم بزرگ و هم کوچک از صفر باشد (در این جا IV دقیق است) . فرضاً عدد b عبارت از عدد است که بزرگتر از عدد a است $a > b$ اگر $b - a > 0$ نسبت $a < b$ و یا مقابلاً $a > b$ بنام غیر مساوات یاد میشود . (همیشه غیر مساوی است)

خاطر نشان میسازیم که نسبت $a < b$ در حالت $a = 0$ و یا $b = 0$ باشد به نسبت اولیه IV مطابقت میکند حقیقتاً اگر مثال $b = 0$ و $a < 0$ در مفهوم اول میباشد . پس مطابق به خواص IV دارای غیر مساوات $a > 0$ مگر $-a = 0 - a$ زیرا که $0 - a > 0$ به اساس تعریف در نتیجه داریم که $a < 0$ است و برعکس اگر $a < 0$ باشد پس به اساس تعریف ذیل

$0 - a > 0$ نتیجه میشود که $a > 0$ - بوده پس به اساس خواص IV این شرایط غیر تساوری $a < 0$ در مفهوم اول میباشد .

حالا خواص اساسی مقایسه اعداد به اساس کمیات مورد مطالعه قرار میدهم :

1° : اگر $a > b$ و $b > c$ است .

این خاصیت عبارت است از اتصالیّت قابلیت ترتیب (مقایسه به اساس کمیات) اعداد صورت میگیرد .

اگر $a > b$, $b > c$ باشد پس مطابق به تعریف به این معنی است که $a - b > 0$, $b - c > 0$ این مساوات مطابق خواص IV تشکیل میشود .

در اینصورت حاصل میداریم که : $(a - b) + (b - c) > 0$ است .

پس $a - c > 0$ این به آن معنی است که $a > c$ است .

2° : اگر $a > b$ باشد پس برای هر عدد داریم که :

$a + c > b + c$ است در حقیقت غیر مساوات $a > b$ به این معنی است که $a - b > 0$ طوریکه از خواص 5° از پراگراف 2.3 واضح است .

$$a - b = a + c - c - b = (a + c) - (b + c) - (b + c) > 0 \text{ است .}$$

نظر به $a < b$ خوانده میشود که (a کوچک از b) است .

نظر به $a = b$ خوانده می شود که (a مساوی به b) است .

نظر به $a > b$ خوانده می شود که a بزرگ از b است .

موجودیت نسبت انتقال ترتیب «بزرگ» «کوچک» بین هر دو عدد عبارت از خواص معمول قابلیت ترتیب ست های اعداد حقیقی و یا نسبت ترتیب میباشد . نوشته $a \leq b$ به عین مساوات

$a \geq b$ اطلاق میشود و به این معنی است که یا $a = b$ یا $a < b$ است .

مثال ممکن است نوشت که : $2 < 5$ ، $2 = 2$

یکی از غیر مساوات $2 \leq 2$ ، $2 \leq 5$ هم حقیقت دارد و همینطور معنی میدهد که دو بزرگ از دو نیست ، در حقیقت 2 از 5 خورد است .

3° برای هر دو عدد a و b که دارای دقیقیت یکی از این 3 ترتیب $a > b$ ، $a = b$ ، $a < b$ ، موجود است .

حقیقتاً فرضاً اگر دو عدد a و b داده شده باشد برای آنها تفاوت $a-b$ مطابق خواص IV دارای جای دقیق یکی از نسبت های $a-b > 0$ ، $a-b = 0$ ، $a-b < 0$ میباشد .

هرگاه $a-b > 0$ باشد پس به اساس تعریف $a > b$ است و هرگاه $a-b = 0$ باشد پس به اطراف مساوات عدد b را علاوه میکنیم ، درینصورت حاصل میکنیم که $a=b$ است و بالاخره هرگاه $a-b < 0$ باشد پس در آنصورت پی هم به اطراف غیر مساوات $(a-b) < 0$ علاوه میکنیم . عدد $-a$ و b (در صفحه خواص بعدی) حاصل میکنیم که :

$a-b > 0$ این به آن معنی است که $a > b$ است . یا همینطور $a < b$ ثبوت است .

4° - اگر $a < b$ پس $-a > -b$ میباشد .

حقیقتاً از $a < b$ به اساس تعریف داریم که $a-b > 0$ است زیرا که :

$$-a = -a + (-b) = (b-a) + (-b) > 0 + (-b) = -b \quad \square$$

5° - اگر $a < b$ و $c \leq d$ باشد پس ممکن است حاصل جمع حدود غیر مساوات از یک علامه حاصل نمائیم در واقعیت اگر $a < b$ و $c \leq b$ پس مطابق خواص 2° این بخش $a+c < b+c$ و $c+b \leq d+c$ زیرا که در ترتیب اتصالیته داریم که :

$$a+c < b+d \quad \square$$

6° - اگر $a < b$ و $c \geq d$ باشد پس $a - c < b - d$ بوده در این صورت میتوان غیر مساوات را به اشاره متضاد افاده نمود. حقیقتاً از $c \geq d$ مطابق خواص 4° داریم که:

$$-c \leq -d \quad \text{و} \quad a < b \quad \text{مساوات} \quad a - c < b - d \quad \square$$

7° - اگر $a < b$ و $c > 0$ باشد پس $ac > bc$ در حقیقت مطابق خواص 4° این بخش $-c < 0$ زیرا که به اساس خواص IV_2 داریم که:

$$a(-c) < b(-c)$$

مطابق خواص 17° پراگراف 2.2 حاصل میدارم که:

$$-ac < -bc$$

نتیجه (مراجعه نمائید به خواص 4° این بخش) پس $ac > bc$ ثبوت است. از خواص نتیجه

میشود که اگر $b > 0$ و $d > 0$ باشد پس شرایط $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ مساوی به شرایط $ad < bc$ در

حقیقت غیر مساوات دوم را از حاصل ضرب غیر مساوات اول حاصل مینمائیم طوری که هر دو طرف را در bd ضرب میکنیم:

طرف اول و دوم را به bd تقسیم مینمائیم از خواص 7° (در صورتیکه $a \neq 0$) و از خواص VI_2 قانون علایم در صورت ضرب اعداد حقیقی نتیجه میشود.

حاصل ضرب دو مضرب بر عین علامه یا در یک وقت مثبت، یا در یک وقت منفی باشد حاصل شان مثبت است. لیکن حاصل ضرب دو مضرب که مختلف العلامه باشد (یکی منفی و دیگر مثبت باشد) منفی است.

8° - در ساحه مرتب همیشه غیر مساوات $1 > 0$ صادق است.

در حقیقت قسمیکه روشن است (مراجعه شود به تبصره خواص 14° پراگراف 2.2 از شرایط موجودیت عنصر $a \neq 0$ این شرایط شامل تعریف ساحه، (مراجعه نمائید به: اخیر پراگراف 2.2) نتیجه $1 \neq 0$ نشان میدهم که غیر مساوات $1 < 0$ ممکن نیست. فرضاً بر عکس $1 < 0$ باشد میگیریم که $a > 0$ مطابق تعریف واحد عینیت داریم:

$$a.1 = a$$

به اساس قانون، حاصل ضرب دو عدد مثبت، مثبت است و حاصل ضرب دو عدد مختلف العلامه منفی، منفی است پس $a < 0$ که عکس شرایط ثبوت شده است.

در اینجا عدد حقیقی دوباره هدف واقعی نیست که توسط اکسیوم $I - IV$ بیان میگردد. ست که برای این اکسیوم ها صادق است بنام ترتیب ساحه یاد میشود. مثال ترتیب ساحه متفاوت است از ساحه اعداد حقیقی که بنام ساحه اعداد ناطق یاد میشود. همین قسم ساحه اعداد مختلط، ساحه تابع ناطق بنام ترتیب ساحه یاد نمیشود.

بصورت کل از ترتیب ساحه ممکن است مفهوم کمیات مطلقه از عناصر آن بدست آید. به اساس تعریف و مطالعه خواص آن میتوان همیشه راجع به اعداد صحبت کرد لیکن نه به عناصر ترتیب ساحه آن.

هر عدد a به عدد $|a|$ نمایش داده شده و توسط فرمول ذیل ارائه میگردد.

$$|a| = \begin{cases} a & \geq 0 \\ -a & < 0 \end{cases}$$

عبارت از کمیات مطلقه عدد a و یا همین قسم مودول آن میباشد.

ردیف خواص کمیات مطلقه را خاطر نشان میسازیم:

$$|a| \geq 0 \dots\dots\dots (2.5)$$

$$|a| = |-a| \dots\dots\dots (2.6) \quad 1^\circ \text{ برای هر عدد نسبت های ذیل انجام می پذیرد:}$$

$$a \leq |a|, -a \leq |a| \dots (2.6)$$

غیر مساوات (2.5) را ثابت میکنیم اگر $a \geq 0$ پس $|a| = a \geq 0$. اگر همین قسم $a < 0$ باشد پس $|a| = -a > 0$ است.

مساوات (2.6) را ثابت میکنیم اگر $a \geq 0$ باشد پس $|a| = a$ و $-a \leq 0$ است به این سبب مطابق تعریف کمیات مطلقه و خواص 3 از پراگراف 2.2 حاصل میداریم که:

$$|-a| = -(-a) = a = |a|$$

اگر همین قسم $a < 0$ باشد پس $|a| = -a$ و $-a > 0$ این به آن معنی است که:

$$|-a| = -a$$

غیر مساوات (2-7) را ثابت میکنیم: اگر $a \geq 0$ باشد پس $|a| = a$ و $-a \leq 0 \leq a = |a|$ پس به اساس (2-7) اجرات صورت میگیرد.

اگر همین قسم $a \geq 0$ باشد پس $|a| = -a < 0 < -a$ است. به اساس (2-7) همینطور صورت میگیرد.

2° - برای هر عدد اختیاری a و b داریم:

$$|a+b| \leq |a| + |b| \dots\dots\dots (2.8)$$

$$|a| - |b| \leq |a-b| \dots\dots\dots (2.9)$$

$$a \leq |a|$$

$$-a \leq |a|$$

$$b \leq |b|$$

$$-b \leq |b|$$

از غیر مساوات ذیل مطابق به (2.7) داریم که :

از اینجا در بند خواص 5° از پراگراف (2.3) و خواص 5° از پراگراف 2.2 داریم که :

$$a + b \leq |a| + |b|$$

$$-a(a + b) \leq |a| + |b|$$

یکی از اعداد $a+b$ یا $-(a+b)$ منفی نباشد و مطابق نتیجه $|a+b|$ غیر مساوات ثابت است

همین قسم غیر مساوات (2.9) عبارت از نتیجه (2.8) بوده که در نتیجه :

$$|a| - |b| = |(a-b) + b| - |b| \leq |a-b| + |b| - |b| = |a-b|$$

$$|a| - |b| \leq |b - a| = |a - b|$$

بطور مشابه :

$$|a| - |b| = (|a| - |b|)$$

مطابق خواص 5° پراگراف (2.2) داریم که :

یکی از اعداد $|a| - |b|$ و $-(|a| - |b|)$ مطابقت دارد به $c = ||a| - |b||$ که در زمینه غیر

مساوات (2.9) ثابت است .

$$|ab| = |a||b|$$

3° برای هر عدد a و b مساوات ذیل صادق است :

آنرا از تعریف کمیات مطلقه مطابق به خواص 17° از پراگراف (2.2) و اصول علایم

ضرب نتیجه میشود .

حالا خواص غیر مساوات که ساحه اعداد حقیقی را در اطراف تمام ترتیب ساحه دیگر را جدا

میسازد مورد مطالعه قرار میدهیم .

2.4 خواص غیر مساوات اعداد حقیقی

فیلدساحه مرتب که توسط خواص V بیان گردیده عبارت از فیلد مرتب غیر مساوات میباشد . فیلد مرتب اعداد ناطق غیر مساوات فیلد مرتب شمرده نمیشود. در آنها ست A و B شامل بوده برا هر عنصر $a \in A$ و $b \in B$ طوریکه در آنها غیر مساوات $a < b$ صدق نماید به عوض c در آن چنین عدد ناطق r موجود نمیباشد بخاطریکه برای تمام $a \in A$ و $b \in B$ نسبت $a \leq r \leq b$ صادق است این خواص دارای مثال ست B بوده که متشکل از تمام اعداد مثبت ناطق r میباشد که بیان کننده غیر مساوات $r^2 > 2$ و ست A که به هر کدام از باقیمانده اعداد ناطق رابطه کلی دارد. همین قسم نبودن اعداد ناطق که مربع آنها معادل به عدد 2 است در اصطلاح ساحه تعریف ترتیب ست اعداد حقیقی میتوان بطور ذیل تعریف نمود:

تعریف 2: ست اعداد حقیقی عبارت از ساحه ترتیب غیر مساوات میباشد . ساحه اعداد ناطق طوریکه یاد آوری شده توسط خواص غیر مساوات بوجود نمی آید لیکن ساحه اعداد حقیقی بوجود می آید زیرا که اعداد حقیقی منبع آنها میباشد که ناطق شمرده نمیشود . پس اعداد غیر ناطق نیز موجود است. به این ترتیب ست اعداد حقیقی عبارت از انکشاف ست های اعداد ناطق بوده به این معنی که ست اعداد ناطق عبارت از خصوصیت ست فرعی (سب ست) اعداد حقیقی میباشد .

درین گسترش خواص ترتیب عملیه جمع و ضرب محفوظ است . این نشان میدهد که اعداد حقیقی در تفاوت از اعداد ناطق واقع شده است . همین قسم لازم نیست تا بزرگترین ست را گسترش داد همین طور نگهداشت مفهوم خواص (ترتیب ، عملیه جمع و ضرب) این خواص اعداد تام حقیقی نظر به ترتیب عملیه جمع و ضرب آنها یاد میشود که ثبوت آنرا در پراگراف 3.8 مطالعه خواهیم نمود .

2.5: تقاطع در ست های اعداد حقیقی

خواص غیر مساوات اعداد حقیقی را میتوان به اصطلاحات گوناگون تعریف نمود. تعریف این خواص را در اصطلاح که بنام تقاطع اعداد حقیقی یاد میشوند مورد مطالعه قرار میدهیم. قبل از همه این مفهوم را تعریف مینمائیم:

تعریف 3: دو ست $B \subset \mathbb{R}$ عبارت از تقاطع ست های اعداد حقیقی R میباشد اگر:

1° - اتحاد ست BA تشکیل دهنده تمام ست های اعداد حقیقی R باشد پس در اینصورت $A \cup B = R$ است.

2° - هیچ یکی از ست های A , B خالی نباشد $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$.

3° - هر عدد ست A کوچک از هر عدد کیفی ست B میباشد.

اگر $a \in A$ و $b \in B$ باشد پس $a < b$ است.

خواص 1°: به این معنی است که هر عدد حقیقی به اندازه آخرین حد در یکی از ست های BA قرار دارد. (از خواص 3° واضحاً نتیجه میشود که ست های BA غیر متقاطع اند).

$A \cap B \neq \emptyset$ واقعاً اگر چنین عنصر دریافت گردد که $X \subset A \cap B$ باشد. طوریکه

$x \in B, x \in A$ باشد پس به اساس خواص 3° نتیجه میشود که $x < X$ است.

تقاطع ست های اعداد حقیقی متشکل از ست BA توسط $A \setminus B$ نشان داده میشود. ست A

بنام ست پائین و ست B صنف ست بالایی مقطع داده شده یاد میشود مثال های مختصر مقاطع

را میتوان بطریقه ذیل بدست آورد. یک عدد کیفی $a \in \mathbb{R}$ مشخص میسازیم و آنرا اولاً به

ست A طوریکه تمام اعداد $x \leq a$ و دیگر به ست B طوریکه تمام اعداد $y \geq a$ باشد

میبریم.

$$\underline{\underline{Adef}}\{\chi: \chi \leq \alpha\}, \underline{\underline{Bdef}}\{y: y > \alpha\} \dots (2.10)$$

همین قسم تعریف ست های BA مقطع بوجود می آورد که بر قرار شدن آن مستقیماً به شرایط 1° ، 2° ، 3° و تعریف 3 می انجامند.

و یا میتوان به عباره دیگر بیان کرد: بردن به ست A تمام اعداد $\chi < \alpha$ و به ست B تمام اعداد $y \geq \alpha$.

$$A = \{x: x < \alpha\}, B = \{y: y \geq \alpha\} \dots (2.11)$$

که دوباره ست های BA در هر دو حالت (2.10 و 2.11) تشکیل مقطع مینماید.

میگویند که مقطع در عدد α صورت میگیرد چنین مینویسند: $\alpha = A/B$ دو خاصیت متقاطع که توسط چند عدد تشکیل میشود را یاد آور میشویم:

1° - در حالت (2.10) در کلاس A بزرگترین عدد وجود دارد که عبارت از عدد α و در کلاس B کوچکترین عدد وجود ندارد.

در حالت (2.11) در کلاس A کوچکترین عدد نیست و در کلاس B عدد بزرگتر وجود دارد که بنام α یاد میشود.

مثال حالت اول (2.10) را مطالعه میکنم طوری که α کوچکترین عدد در کلاس A نامیده میشود.

از فرمول اول 2.10 واضح است که دوباره ست A را میدهد.

نشان میدهیم که در ست B عدد کوچکتر وجود ندارد بر عکس فرض میکنیم فرضاً در ست B عدد کوچکترین شامل است و آنرا به حرف β نشان میدهیم از شرط $\beta \in B$ به علت فرمول دوم 2.10 که به غیر مساوات $\alpha < \beta$ مطابقت دارنتیجه میشود که:

$$\alpha < \frac{\alpha + \beta}{2} \quad \text{س} \quad \neq \alpha + \alpha < \alpha + \beta$$

از اینجا در مورد بند دوم فرمول 2.10 حاصل می‌داریم که: $\frac{\alpha + \beta}{2} \in B$

بطور مشابه $\alpha < \beta$ داریم که: $\alpha + \beta < \beta + \beta$ پس $\frac{\alpha + \beta}{2} < \beta$ و همین قسم β

کوچکترین عدد در کلاس B میباشد.

پس $\frac{\alpha + \beta}{2} \in A$ که این نتیجه خلاف ادعا است.

2°- فقط عددی است که مقطع را حاصل میکند در حقیقت فرض میکنیم که مقطع توسط دو

عدد مختلف تعیین میگردد یعنی: $\alpha = A/B$ و $\beta = A/B$ یا فرض مثال $\alpha < \beta$ باشد

در آنصورت طوریکه اثبات قبلی در مطابقت به غیر مساوات $\alpha < \frac{\alpha + \beta}{2} < \beta$ نشان داده

شده است از غیر مساوات $\alpha < \frac{\alpha + \beta}{2}$ نتیجه میشود طوریکه در حالت (2.10) همینطور در

حالت (2.11) به عوض شرایط $\frac{\alpha + \beta}{2} \in B$ تذکر رفته است.

بطور مشابه از غیر مساوات $\frac{\alpha + \beta}{2} < \beta$ نتیجه میشود که $\frac{\alpha + \beta}{2} \in A$ این اختلافات

بخاطر که ست BA را قطع نمیکنند.

خواص غیر مساوات اعداد حقیقی که در بعضی مقاطع دیگر تشکیل شده و ذریعه یک تعداد

اعداد دیگر حاصل میشود آنقدر اساسی نمیباشد.

یا به عباره دیگر غیر مساوات اعداد حقیقی را میتوان بطریقه ذیل نوشت:

VI_1 برای هر مقطع A/B ست اعداد حقیقی عدد α موجود است که این مقطع را حاصل میکند طوری که $\alpha = A/B$ این عدد مطابق به ثبوت قبلی در بزرگترین کلاس پائین بوده پس در کلاس بالا عدد کوچکتر موجود نیست یا کوچکتر در کلاس بالایی است. در آنصورت در پائین عدد بزرگتر موجود نیست به این ترتیب اگر A/B از مقطع سا اعداد حقیقی باشد پس مطابق به خواص غیر مساوی که آنها در شکل V فرمول بندی شده است نمیتواند واقع شود مثل که در کلاس A عدد بزرگتر باشد و همزمان در کلاس B عدد کوچکتر باشد که همین قسم نمیتواند باشد زیرا که در کلاس A عدد بزرگ نبوده و همزمان در کلاس B عدد کوچکتر وجود ندارد. شکل ها را مطالعه نماید.



شکل (4، a)



شکل (4، b)

به این ترتیب میگویند که غیر مساوات اعداد حقیقی نشان میدهد که در ست های متذکره تغییرات فوری و کمی وجود ندارد. خلاصه اینکه هیچ خالیگاه ندارد مقطع A/B مفهوم هندسی آن تقسیمات مستقیم بروی محور عددی بالای دو شعاع که دارای مبدا و انجام مخالف جهت بوده طوری که یکی از آن ها مبدا شعاع بسته و دیگر آن انجام شعاع باز است. در فرمول بندی خواص غیر مساوات اعداد حقیقی V همین قسم برابر به خواص VI_1 بنام پرنسبب غیر مساوات اعداد حقیقی دیدیکند¹ یاد میشود.

¹ (دیدیکند 1831-1961) ریاضیدان آلمانی)

در آینده ما مفاهیم اولیه دیگر راجع به ست های غیر مساوات اعداد حقیقی (مراجعه نمائید به : پرگراف 3.7) خواهیم دید .

نشان می‌دهیم که خواص VI_1 مساوی به خواص V است .

فرضاً ، اول خواص V را تطبیق مینماییم . فرضاً مقطع داده شده A/B در خاصیت 3° تعریف گردیده است . برای هر مقطع $a \in A$ و $b \in B$ غیر مساوات $a < b$ صدق میکند .

برای اینکه جوهره ست BA شرایط فرمول بندی شده V را مهیا سازد باید چنین عدد α موجود باشد که برای تمام $a \in A$ و $b \in B$ نسبت $a \leq \alpha \leq b$ صدق نماید . عدد α مطابق به خواص اول مقطع که در یکی از کلاس های A یا B قرار دارد :

هرگاه $a \in A$ باشد پس برای تمام $a \in A$ و $b \in B$ غیر مساوات $a \leq \alpha \leq b$ صادق است .

پس عدد α مقطع A/B را حاصل مینماید که عبارت از بزرگترین عدد در کلاس پائین است بطور مشابه هرگاه $\alpha \in B$ باشد پس عدد α همینطور مقطع A/B حاصل مینماید که عبارت از کوچکترین عدد در کلاس بالای B است .

فرضاً حالا بر عکس شرایط VI_1 قابل تطبیق است و دو ست غیر خالی $b \in R, a \in A$ داده شده است که برای هر $a \in A$ و $b \in R$ غیر مساوات $a \leq b$ قابل تطبیق است و به حرف B نشان داده می‌دهیم .

چنین ست عداد که $b \in B$ باشد برای هر $a \in A$ غیر مساوات $a \leq b$ قابل تطبیق است (عدد b که توسط این خواص به وجود می آید عبارت از عددی است که ست A را از طرف بالا محدود ساخته است) طوریکه دیده میشود .

(2.12)..... $b \in B$ و توسط حرف A تماماً اعداد حقیقی باقیمانده نشان داده میشود .

طوری که $A = A/B$ حالا نشان می‌دهیم که ست و مقطع‌ها را در ست اعداد حقیقی تشکیل می‌دهد. و عدد α این مقطع را حاصل می‌کند که تأمین کننده شرایط متذکره که در فرمول بندی خواص V برای ست‌های A و B داده شده است. قبل از همه بررسی مینمائیم که ست‌های A و B تأمین کننده تماماً شرایط که باید حتماً ست‌ها آنرا تأمین کنند که مقطع را تشکیل دهند. حقیقتاً تماماً اعداد ست A^* با ست B مطابقت نمی‌کنند زیرا که اتحاد آنها $A^* \cup B^* = R^*$ عبارت از تمام اعداد حقیقی R است طوری که:

$$A^* \cup B^* = R \dots \dots \dots (2 \cdot 13)$$

2.6 : طاقت‌های ناطق اعداد حقیقی :

عدد b طوری که $b^n = a$ (اگر واقعاً آنها موجود باشند) جذر n ام عدد a طاقت نامیده می‌شود و چنین افاده می‌شود:

$$a^{1/n} \text{ or } \sqrt[n]{a}$$

پس به اساس تعریف داریم که:

$$\sqrt[n]{a} = a$$

خاطر نشان می‌سازیم که در ست‌های اعداد حقیقی برای هر عدد $a \geq 0$ و برای هر عدد

طبیعی n عدد $b \geq 0$ موجود باشد جذر n عدد a طاقت نامیده شده پس داریم که $\sqrt[n]{a}$

ما نمی‌خواهیم فعلاً راجع به ثبوت این مفهوم بسیار مهم بپردازیم گرچه میتوان آنرا در اینجا صرف یاد آوری کنیم که در پراگراف 7.2 یا آوری خواهد شد.

در بعضی حالت برای $a < 0$ میتوان جذور داشته باشد.

$$\sqrt[3]{-8} = -2 \text{ : بطور مثال}$$

مگر جذور $\sqrt{-4}$ موجود نیست زیرا که عدد حقیقی $b = \sqrt{-4}$ وجود ندارد.

همین طور در حالت بر عکس مطابق مساوات $b^2 = -4$ که مخالف نظریه اصول علایم در ضرب میباشد .

هرگاه : $a \geq 0$ و $b = \sqrt[n]{4}$ و $b \geq 0$ باشد عدد 5 به مفهوم حسابی جذر n ام عدد a طاقت نامیده میشود . در آینده اعداد حقیقی مثبت تحت جذر میتواند با مفهوم حسابی آنرا دانست اگر اشتباه نکرده باشیم خواص جذور را فرمول بندی مینمائیم : فرضاً n و m اعداد طبیعی باشد و $a \geq 0$ و $b \geq 0$ باشند در آنصورت فرمول های ذیل صادق است .

$$1^\circ \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

$$2^\circ \sqrt[n]{a} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

$$3^\circ \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$$

$$4^\circ \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, b \neq 0$$

$$5^\circ (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

همهء این مطالب بطور مشابه ثبوت میشود. بطور مثال فرمول اول را ثبوت میکنیم :

فرضاً $b = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$ مطابق تعریف جذر و خواص 22° از پراگراف 2.2 این به آن معنی است

که $b^n = \sqrt[m]{a}$ که $b^{m \cdot n} = a$ از این جا توسط همین تعریف جذر نتیجه میشود که

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = b = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

هرگاه : $a < 0$ باشد و تمام جذور شامل در یکی از فرمول $1^\circ - 5^\circ$ سرچشمه گیرد ، پس آنها مطابق به مفهوم انتخاب درست اند .

به موجودیت مفهوم طاقت اعداد تام و جذور آن مفهوم طاقت ناطق را مشخص میسازیم .

فرضاً $a > 0$ و $r \in Q$ باشد پس داریم که : $r = \frac{m}{n}, m \in Z, n \in Z, n \neq 0$

$$6^\circ a^{-r} = \frac{1}{n^r}$$

$$7^\circ a^{r_1} \cdot a^{r_2} = a^{r_1+r_2}$$

در آن صورت:

$$8^\circ (a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 r_2}$$

$$9^\circ (ab)^r = a^r b^r$$

خاصیت 6° را ثابت میکنیم: اگر $r = \frac{m}{n}$ باشد و n, m عدد تام باشند و $n \neq 0$ باشد پس:

$$a^{-r} = a^{-\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^{-m}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a^m}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} = \frac{1}{\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^r} \quad \square$$

ثبوت شد.

از فرمول های 8° و 7° و 9° صرف فرمول 7° را ثابت میکنیم (باقیمانده بطور مشابه ثابت میشود).

اگر: $r_2 = \frac{m}{n} r_1 = \frac{p}{q}$ باشد طوری که:

$$p, q, m, n \in Z \quad n \neq 0, \quad q \neq 0$$

پس با استفاده از تعریف طاققت ناطق خواص جنور $2^\circ, 3^\circ$ و خاصیت 22° از پراگراف 2.2 حاصل میداریم که:

$$a^{r_1} \cdot a^{r_2} = a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[q]{a^p} \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot q]{a^{n \cdot p}} \sqrt[n \cdot q]{a^{m \cdot p}}$$

$$= \sqrt[n \cdot q]{a^{n \cdot p + m \cdot q}} = a^{\frac{p}{q} + \frac{m}{n}} = a^{r_1 + r_2} \square$$

از خاصیت 9^o نتیجه میشود که:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$$

همینطور:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = (ab^{-1})^r = a^r b^{-r} = \frac{a^r}{b^r} \square$$

مسئله: توسط مقطع ثبوت نماید که برای هر عدد $a > 0$ و هر عدد طبیعی n جذر $\sqrt[n]{a}$ موجود است.

2.7 : فارمول بینوم نیوتن

پولینوم که حاصل جمع دو عامل جمع شونده را بین خود نشان میدهد بنام دو حده یا بینوم نیوتن یاد میشود .

فارمول برای طاقت n ام حد بینوم $x + a$ را استخراج مینمایم که بنام فارمول بینوم نیوتن⁽¹⁾ یاد میشود. یعنی:

$$(x + a)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1} a + C_n^2 x^{n-2} a^2 + \dots + C_n^{n-1} x^{n-1} a^{n-1} + a^n \dots (2.17)$$

توسط سمبول \sum فارمول (2.17) را به شکل ذیل مینویسیم .

$$(x + a)^n = \sum_{R=0}^n C_n^R x^{n-R} a^R \dots (2.18)$$

دو شکل ثبوت این فارمول را مطالعه مینمایم :

اول : یورستکی (خیالی) : در این حالت باید از فارمول (2.11) استفاده میشود .

دوم : بطور مختصر بررسی فارمول (2.18) میباشد .

ثبوت اول: محاسبه کردن حاصل ضرب n بینوم در حد دوم که به حرف a با اندکس های مختلف نشان داده شده است :

$$(x + a_1)(x + a_2)(x + a_3) \dots (x + a_n) \dots (2.19)$$

طوریکه واضیح است در ضرب پولینوم ها، درجه n ام نظر به x از حاصل ضرب پولینوم ها با محاسبه پی هم بدست میآید، ضرایب درجه های مختلف x از بزرگترین طاقت آغاز میشود در حاصل ضرب $(x + a_n) \dots (x + a_2) \dots (x + a_1)$ ، x^n حد میتوانیم تنهادر نتیجه ضرب x ام حد از هر قوس بدست آوریم زیرا ضریب x^n حد برابر به یک است :

(1) ی نیوتن (1643-1727) فزیکدان ،مخانیک ،ریاضیدان انگلیسی

$$(x + a_1)(x + a_2)(x + a_3) \dots (x + a_n) = x^n + \dots$$

حد در صورت محاسبه حاصل ضرب (2.19) میتوان تنها در آن حالت بدست آورد

، و تئیکه به تمام قوسها به غیر از یک انتخاب x از باقیمانده حدود اختیار نمود که میتواند a_n, a_2, a_1 باشد زیرا که ضریب در حاصل ضرب (2.19) در صورتیکه x^{n-1} برابر

یعنی $a_1 + a_2 + a_n$:

$$(x + a_1)(x + a_2)(x + a_3) \dots (x + a_n) = x^n + x^{n-1}(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$$

حد x^{n-2} را میتوان از تمام عوامل ضربی حاصل ضرب (2.19) به غیر از انتخاب دو حد x از باقیمانده دو حد اختیاری بدست آورد .

زیرا که x^{n-2} از حاصل ضرب (2.19) عبارت از حاصل جمع تمام عوامل ضربی مختلف ممکنه a_{i_2}, a_{i_1} که a_{i_2}, a_{i_1} همیشه میتوان به افزایش اندکس در ردیف ها تنظیم نمود .

درین صورت داریم که :

$$l_1 < i_1, i_2, i_3 = 1, 2, \dots, n$$

$$(x + a_1)(x + a_2)(x + a_3) \dots (x + a_n) = x^n + x^{n-1} \sum_{i=1}^n a_i + x^{n-2}$$

$$\sum_{\substack{i_1 < i_2 \\ i_1, i_2=1 \\ i_1 < i_2}}^n a_{i_1} a_{i_2}$$

عدد جمع شونده در حاصل جمع $\sum_{\substack{i_1 < i_2 \\ i_1, i_2=1 \\ i_1 < i_2}}^n a_{i_1} a_{i_2}$ برابر به عددی است که به تمام امکانات جوره

حدود مختلف از a_n, \dots, a_2, a_1 انتخاب شده است پس در آن صورت داریم که عدد حساب

شده C_n^2 میباشد .

بصورت کل حدی $k = 1, 2, \dots, n-1, x^{n-k}$ میتوان تنها اگر از تمام عوامل ضربی حاصل ضرب (2.19) به غیر از k حد انتخاب شود تا x حد را حاصل نمود و در باقیمانده حدود k اختیاری است زیرا که ضرایب در x^{n-k} در حاصل ضرب (2.19) عبارت از حاصل جمع a_{ij} بوده و حاصل ضرب تمام عوامل ضربی $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}$ و عوامل ضربی a_{ij} ممکن است. درین حاصل ضرب افزایش اندکس ها را میتوان در ردیف ها تنظیم نمود.

$$i_1 < i_2 < \dots < i_R, i_j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$$

پس داریم که :

$$j = 1, 2, \dots, R$$

$$(x + a_1)(x + a_2)(x + a_3) \dots (x + a_n) = x^n + x^{n-1} \sum_{R=1}^n a_i + x^{n-2}$$

$$\sum_{i_1, i_2=1}^n a_{i_1} a_{i_2} + \dots + x^{n-R} \sum_{\substack{i_1, i_2 \rightarrow i_R=1 \\ i_1 < i_2 < \dots < i_R}} a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_R}$$

عوامل جمعی در حاصل جمع عبارت از ضرایب در x^{n-k} که مساوی به عدد n عنصر در R میباشد که مساوی به C_n^R است بلاخره حد اختیاری حاصل ضرب مطابق (2.19) در این حالت به اندازه حاصل میشود و قتی که عوامل ضربی حدود اختیاری در هر یکی از قوسها ضرب شود پس حدود اختیاری عوامل ضربی مطابق به (2.19) برابر به a_1, a_2, \dots, a_n است

پس :

$$(x + a_1)(x + a_2)(x + a_3) \dots (x + a_n) = x^n + x^{n-1} \sum_{R=1}^n a_i + x^{n-2} \sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 < i_2}} a_{i_1} a_{i_2}$$

$$+ \dots + x^{n-R} \sum_{\substack{i_1, i_2 \rightarrow i_R=1 \\ i_1 < i_2 < \dots < i_R}} a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_R} + a_1 a_2 \dots a_n \dots (2.20)$$

مجموعه عامل جمع شونده در هر مجموع به علامه \sum نوشته شده که در مطابقت به

$$C_n^1, C_n^2, C_n^3, \dots, C_n^R, \dots, C_n^{n-1}$$

برای نوشتن ضریب ها لازم است که :

$$1- \text{ میتوان از مساوات } C_n^0 = C_n^n = 1 \text{ استفاده نمود.}$$

در این صورت $a_1 = a_2 = \dots = a_n = a$ از فورمول (2.20) حاصل میداریم که :

$$(x+a)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} a + C_n^2 x^{n-2} a^2 + \dots + C_n^R x^{n-R} + \dots + C_n^n a^n$$

به اساس فورمول (2.18)

میتود ثبوت دوم : به اساس استقراء ریاضی (به خاطر آنها باید نظریه فورمول (2.18)

را در نظر داشت، پس در آنصورت مثل که ثبوت اول را دریافت نموده ام) درینصورت $n=1$

فارمول (2.18) واضح است . همینطور درین حالت آن دارای شکل $x+a=a+x$ بوده

فرضاً فارمول (2.18) در یک تعداد $n \in N$ نیز صدق میکند .

$$(x+a)^{n+1} = (x+a)^n (x+a) =$$

$$(x^n + C_n^1 x^{n-1} a + C_n^2 x^{n-2} a^2 + \dots + C_n^R x^{n-R} a^R + C_n^{R+1} x^{n-R-1} a^{R+1} + \dots + a^n)(x+a)$$

$$= x^n + C_n^1 x^n a + C_n^2 x^{n-1} a^2 + \dots + C_n^{R+1} x^{R-1} a^{R+1} + \dots + a^n$$

$$= x^n + (C_n^1 + C_n^0) x^n a + (C_n^2 + C_n^1) x^{n-1} a^2 + \dots + (C_n^{R+1} + C_n^R)$$

$$= x^{n-R} a^{R+1} + \dots + a^{n+1}$$

$$C_n^R + C_n^R = C_n^{R+1} + 1 \quad (\text{مراجعه نمائید به : (1.19)})$$

حاصل میداریم که :

$$\square (x+a)^{n+1} = x^{n+1} + C_{n+1}^1 x^n a + C_{n+1}^2 x^{n+1} a^2 + \dots + C_{n+1}^{R+1} x^{n-R} a^{R+1} + \dots + a^{n+1}$$

پس به اساس فورمول (2.17) و قتیکه n به $n+1$ تغیر دهیم .

تبصره : دوخاصیت جالب ضرایب بینومیلی را در نظر میگیریم طوریکه :

$$C_n^k, k = 0, 1, 2, 3 \dots n$$

که حاصل جمع آنها برابر به 2^n در این صورت حاصل جمع ضرایب در جای مثبت قرار میگیرد که مساوی است به حاصل جمع ضرایب که در جای منفی قرار میگیرد .
همین قسم در فورمول بینوم نیوتن (2 . 18) $x = a = 1$ قرار گرفته است .

$$\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n \quad \text{پس حاصل میداریم که :}$$

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k = 0 \quad \text{لیکن اگر } a = -1, x = 1 \text{ قرار گیرد در این صورت داریم که :}$$

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^m = m_1 + \dots + mn + \sum = 0$$

تمرین 2: ثبوت نمائید که:

$$\frac{m!}{m_1! m_n!} x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}$$

§3. ست های اعداد

1. 3 گسترش اعداد روی مستقیم :

همیشه میتوان ست اعداد حقیقی \mathbb{R} را با افزایش عناصر مناسب $+\infty, -\infty$ تکمیل نمود. که زیلا نامگذاری میگردد. یعنی:

$$-\infty < +\infty$$

$$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$$

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$$

$$+\infty - (-\infty) = +\infty$$

$$-\infty - (+\infty) = -\infty$$

$$(+\infty) \cdot (+\infty) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$$

$$(+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$$

بطور مثال عملیه $(+\infty) + (-\infty)$ یا $\frac{(+\infty)}{(+\infty)}$ نا معین است .

علاوه بر آن برای هر $a \in \mathbb{R}$ به اساس تعریف که توسط غیر مساوات $-\infty < a < +\infty$ فرض شده است .

$$a + (+\infty) = +\infty + a = \infty$$

$$-\infty + a = a + (-\infty) = -\infty$$

$$a(+\infty) = (+\infty)a = +\infty$$

$$a(-\infty) = (-\infty)a = -\infty$$

لایتناهی $+\infty, -\infty$ همیشه (به عدد لایتناهی) ارایه میگردد.

ست اعداد حقیقی \mathbb{R} را که توسط افزایش $+\infty, -\infty$ تکمیل گردیده عبارت از گسترش ست میباشد (یا گسترش اعداد بطور مستقیم) و توسط $\bar{\mathbb{R}}$ نشان داده میشود.

عناصر $-\infty, +\infty$ همیشه بنام گسترش اعداد بطور مستقیم یاد میشود. از دید بی نهایت نقاط بنام گسترش اعداد بطور مستقیم نامیده میشود.

و جهت مخالف منتهای نقاط نیز بنام گسترش اعداد بطور مستقیم R نامیده میشود. اگر اشتباه نکرده باشیم و غیره.

در آینده درک ما راجع به اعداد بدون قید و شرط همیشه اعداد حقیقی منتهای خواهد بود.

2. 3 فاصله بین اعداد حقیقی. ومجاورت

در اینجا بعضی از تعریفهای اساسی ست های فرعی اعداد حقیقی که در آینده آنها را همیشه خواهیم دید بیاد می آوریم :

اگر $a \leq b, a \in R, b \in R$ باشد پس ست $\{x : a \leq x \leq b\}$ عبارت از قطعه گسترش اعداد بطور مستقیم R بوده و $[a, b]$ نشان داده میشود.

پس در آنصورت داریم که : $[a, b] \stackrel{def}{=} \{x : a \leq x \leq b\}, a \in \bar{R}, b \in \bar{R}$

در حالت که : $a = b$ باشد قطعه $[a, b]$ از یک نقطه تشکیل یافته است اگر $a < b$ باشد پس ست $\{x : a \leq x \leq b\}$ بنام انتروال یاد میشود.

وتوسط (a, b) نشان داده میشود. در آنصورت داریم که : $(a, b) \stackrel{def}{=} \{x : a < x < b\}$

انتروال (a, b) بنام انتروال بسته (در داخل است) $[a, b]$ یاد میشود.

$[a, b) \stackrel{def}{=} \{x : a \leq x < b\}, (a, b] \stackrel{def}{=} \{x : a < x \leq b\}$

انتروال نیمه بسته:

بنام انتروال نیمه بسته یاد میشود قطعه $[a, b]$ انتروال (a, b) و انتروال نیمه بسته $[a, b)$ ، عبارت از فاصله بین نقاط a و b میباشد طرف چپ a و طرف راست b طوریکه $a < x < b$ آنها نقاط داخلی است که بروی قطعه خط واقع است.

اگر a و b متناهی باشد در آنصورت $a \in R, b \in R$ پس فاصله از انجام های a و b همینطور بنام فاصله متناهی یاد میشود و عدد $a - b$ طول آنها میباشد .

اگر یکی از a یا b لایتناهی باشد پس فاصله با آنجا های a و b بنام لایتناهی یاد میشود .

تبصره : فاصله تمام انواع گسترش اعداد بطور مستقیم توسط خواص ذیل بوجود میآید .

اگر نقاط $\alpha \in R$ و $\beta \in R$ ، $\alpha < \beta$ به یک تعداد از فواصل با انجام های $\alpha \in R$ و

$\beta \in R$ قرار داشته باشد پس تمام قطعه $[\alpha, \beta]$ بالای این فاصله واقع است که هر نوع

فاصله مستقیماً از تعریف آن نتیجه میشود . مفاهیم مهم در آینده عبارت از مفاهیم ε حوالی

نقاط گسترش اعداد بطور مستقیم میباشد .

اگر $a \in R$ باشد در آنصورت a عدد حقیقی شمرده میشود .

ε حوالی ، $U(a, \varepsilon)$ ، $\varepsilon > 0$ باشد عدد a انتروال $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ نامیده میشود .

به اساس تعریف داریم که :

$$U(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

هرگاه : $a = +\infty$ باشد پس

$$V(+\infty, \varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}, +\infty \right)$$

و اگر $a = -\infty$ باشد پس

$$V(-\infty, \varepsilon) = \left(-\infty, \frac{1}{2} \right]$$

¹ ارائه نمودن حوالی نقاط توسط سمبول v از نقاط (vnebung) نام است گرفته شد .

به این ترتیب در تمام حالت وقتی که a عدد حقیقی باشد یا وقتی که a یکی از اعداد لایتنهای $+\infty, -\infty$ باشد به کوچک شدن عدد ε طبق هدایت ε حوالی $V(a, \varepsilon)$ کوچکتر میشود .

$$V(a, \varepsilon_1) \subset (a, \varepsilon_2) \quad \text{هرگاه } 0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 \text{ باشد .}$$

مناسب خواهد بود تا همیشه یکی از لایتنهای (بدون علامه) ∞ ست اعداد حقیقی را تکمیل نماید که هر دوی آنها و ε حوالی در صورتیکه $\varepsilon > 0$ باشد طوریکه $V(\infty, \varepsilon)$ توسط مساوات ذیل دریافت میگردد ، یعنی :

$$V(\infty, \varepsilon) = \left\{ x : x \in R, |x| > \frac{1}{\varepsilon} \right\}, V\{\infty\}$$

به عباره دیگر ε حوالی $V(\infty, \varepsilon)$ از انتروال لایتنهای $\left(\frac{1}{\varepsilon}, +\infty\right), \left(-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}\right)$ و خود عنصر ∞ تشکیل شده است .

این عنصر همیشه بنام لایتنهای دور اعداد بطور مستقیم نقاط یاد میشود .

فرق لایتنهای با $+\infty$ و $-\infty$ و لایتنهای ∞ بدون علامه در ارتباط با ردیف اعداد حقیقی متناسب نیست .

بصورت کل ε حوالی منتهای ، یا لایتنهای بوده دور شدن اعداد بطور مستقیم عبارت از نقطه حوالی آن میباشد . و همیشه بطور ساده توسط $V(a)$ ارائه میگردد .

و گاهی میتوان توسط دیگر حروف بطور مثال v و w ارائه نمود .

اکثر اوقات مناسب است نه تنها حوالی $V(a)$ نقطه منتهای را نام برد بلکه انتروال مرکزی نقطه a را و نیز تمام انتروال تشکیل دهنده آن یاد آوری نمود .

واضح است که حوالی چنان نقطه اختیاری که تشکیل کردن ε آن در حوالی که $\varepsilon > 0$ میباشد هم ردیف تعریف فوق راجع به حوالی لایتنهای ست اعداد حقیقی تکمیل میشود . بعضی اوقات حوالی لایتنهای $+\infty$ و $-\infty$ در خود ست های اعداد حقیقی مورد مطالعه قرار میگیرد .

$$V(\infty) \cap R$$

$$V(+\infty) \cap R$$

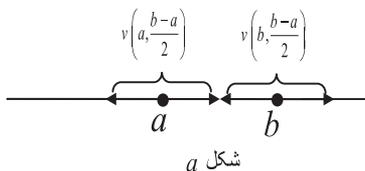
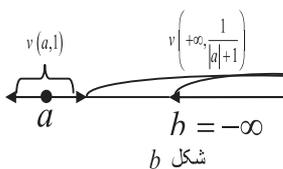
$$V(-\infty) \cap R$$

ولی خود لایتنهای ، متناهی درین حوالی بدست نمیآید .

در زمینه تعریف داده شده را تعمیم میدهیم (یاد آور میشویم که تعمیم در ثبوت لیما ذیل حقیقت است . وقتیکه راجع به حوالی لایتنهای ، حوالی ست های اعداد حقیقی معلومات را کسب مینمایم)

شکل لیما بعضی از خواص مهم حوالی را فورمول بندی مینمایم :

فرضاً در نقاط مختلف گسترش اعداد بطور مستقیم (گسترش توسط دو لایتنهای با علائم و یا تنها توسط یک لایتنهای بدون علامه) حوالی غیر متقاطع را بوجود میآورد .
ثبوت : اولاً حالت گسترش اعداد بطور مستقیم R را مورد مطالعه قرار میدهیم .



شکل اعداد حقیقی R به افزایش دو لایتناهی با علایم آن بدست میآید نشان میدهیم که برای هر $a \in R$ و $b \in R$ و $a < b$ باشد طوری که $\varepsilon_1 > 0$ و $\varepsilon_2 > 0$ موجود باشد پس در

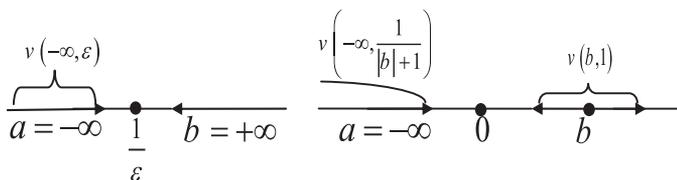
$$V(a, \varepsilon_1) \cap V(b, \varepsilon_2) = \emptyset \quad \text{انصورت داریم که:}$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{b-a}{2} \quad \text{در حقیقت هرگاه } a \text{ و } b \text{ عدد حقیقی باشد پس میتوان نوشت که:}$$

مطابق شکل (a, b) اگر a عدد حقیقی باشد و $b = +\infty$ باشد پس در خصوص دستور

$$\text{عمل } \varepsilon_1 > 0 \text{ و } \varepsilon_2 > 0 \text{ برابر است بطور مثال به } \varepsilon_1 = 1 \text{ و } \varepsilon_2 = \frac{1}{|b|+1} \text{ مطابق شکل}$$

:



شکل b

شکل a

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{|b|+1} \quad \text{هرگاه } a = -\infty \text{ و یک عدد حقیقی باشد پس میتوان نوشت که:}$$

و $\varepsilon_2 = 1$ مطابق شکل z بالاخره هرگاه $a = -\infty$ و $b = +\infty$ باشد. پس برای هر

$$\varepsilon > 0 \text{ افاده حوالی } V(-\infty, \varepsilon) \text{ و } V(+\infty, \varepsilon) \text{ قطع میکند مطابق شکل } (b, Z).$$

هرگاه همین قسم اعداد بطور مستقیم R از یک لایتناهی اضافه شود پس کافیسیت حالت

$$b = \infty, a \in R \text{ دیده شود.}$$

(همین قسم حالت $b = +\infty, a \in R$ زیاد دیده شود)

$b = +\infty, a \in R, b \in R$ میتوان در هر کدام دو باره $\varepsilon_1 = 1$ و $\varepsilon_3 = \frac{1}{|A|+1}$ گرفته

شود.

تبصره 2: در حالیکه $b \in r, a \in R, a < b$ بوده باشد. و آنها حوالی متقاطع نباشد یعنی:

$$V(a, \varepsilon_1) \cap V(b, \varepsilon_2) = \emptyset$$

برای هر $y \in V(b, \varepsilon_2), x \in V(a, \varepsilon_1)$ واضح است که مساوات فوق صادق است.

صادق بودن آن مستقیماً به بررسی تمام حالات ذیل مربوط است در صورتیکه:

$b = +\infty, a \in R, b \in R$ و در صورتیکه $b \in R, a = -\infty$ و در صورتیکه

$b = +\infty, a = -\infty$ باشد به آسان میتوان معتقد شد که تقاطع دو نقاط حوالی (متناهی، یا

لایتناهی مخصوص) همین قسم حوالی این نقاط شمرد.

3.3: ست های محدود و غیر محدود

در اول بدون ردیف بندی ضروری برای معلومات بیشتر بعضی از خواص ست های عددی را مطالعه مینمایم:

تعریف 1: اگر برای ست فرعی x چنین عدد حقیقی b موجود شود، که آن از هر عدد

$x \in X$ کوچک نباشد. در آنصورت برای هر $x \in X$ غیر مساوات $x \leq b$ صدق

مینمایند.

پس در آنصورت ست x بنام ست محدود از طرف بالا یاد میشود.

و عدد b محدود کننده بالای ست X میباشد. توسط سمبولهای منطقی تعریف ست های محدود

از طرف بالا به شکل ذیل نوشته میشود.

X محدود از طرف بالا است : $\Leftrightarrow \exists b \in R \forall x \in X : x \leq b$ از اینجا X غیر محدود از طرف بالا است $\Leftrightarrow \forall b \in R \exists x \in X : x > b$ در آنصورت ست X محدود از طرف بالا نیست .

هرگاه چنان عدد b موجود باشد و چنین عدد $x \in X$ یافت شود که $x > b$ شود در آنصورت ست محدود از طرف بالا یاد نمیشود .

ست که غیر محدود از طرف بالا باشد ست نامیده میشود .

یاد آور میشوم که اگر عدد b محدود از طرف بالای ست X باشد ، در آنصورت برای تمام

$x \in X$ غیر مساوات $x \leq b$ و $b < b'$ صادق است

پس برای همه $x \in X$ غیر مساوات $x \leq b'$ واضح است .

در نتیجه عدد b' همین قسم محدود از طرف بالا ست X است اگر ست X دارای عدد b باشد

طوریکه از تمام اعداد دیگر x کوچک نباشد در آنصورت $b \in x$ و برای همه $x \in X$

غیر مساوات $x \leq b$ صادق است پی عدد b عبارت از بزرگترین یا اعداد ست X طوریکه

$x : b = \max X$ باشد.

واضح است که اگر در ست X یگانه عدد بزرگ موجود شود پس خود ست X در بین حالت

محدود از رف بالای اعداد است .

دیگر یاد آور میشوم که اگر ست X محدود از طرف بالا نباشد پس مطابق به تعریف این

معنی دارد که برای هر عدد $b \in R$ در آخرین اندازه چنین یک عنصر $x \in X$ موجود

شود که $x > b$ باشد .

چیزیکه مورد توجه است آن این است که همین قسم عناصر بی نهایت زیاد است .

حقیقتاً فرض میکنیم که اعداد منتهای $x_1, \dots, x_n, n \in N \in X$ زیاد واقع شده است یا به عباره دیگر برای تمام $x \in X, x \neq x_R, R = 1, 2, \dots, n$ غیر مساوات $x \leq b$ صادق است. در آن صورت واضح است که برای $b_0 = \{b_1, x_1, \dots, x_n\}$ و تمام $x \in X$ غیر مساوات $x \leq b_0$ باشد در آن صورت خلاف فرضیه ست محدود واقع میشود بطور مشابه به ست های محدود از طرف بالا ست های محدود از طرف پائین میباشد.

تعریف 2: اگر برای ست فرعی X اعداد حقیقی چنان عدد a موجود شود که این عدد بزرگتر از هر عدد $x \in X$ نباشد در آن صورت برای هر $x \in X$ غیر مساوات $a \leq x$ صادق است پس ست X محدود از طرف پائین میباشد و عدد a محدود کننده از طرف پائین این ست نامیده میشود.

ست که محدود از طرف پائین نباشد، این ست بنام ست غیر محدود از طرف پائین ست یاد میشود.

توسط سمبول های منطقی تعریف ست های محدود از طرف پائین به شکل ذیل نوشته میشود.

$\exists a \in R \forall x \in X : x \geq a \Leftrightarrow$ X محدود از طرف پائین است:

اگر X غیر محدود از طرف پائین باشد: $\forall a \in R \exists x \in X : x < a \Leftrightarrow$

در آن صورت ست X غیر محدود از طرف پائین است اگر چنین عدد $a \in R$ موجود شود و چنان عنصر $x \in X$ پیدا شود که غیر مساوات $x < a$ صدق نماید.

واضح است که اگر عدد a در ست X محدود از طرف پائین باشد پس هر عدد اختیاری $\bar{a} < a$ همین قسم محدود کننده از طرف پائین این ست میباشد.

اگر در ست X عدد a موجود شود طوری که تمام اعداد دیگر از X بزرگتر نباشد در آن صورت $a \in X$ و برای هر $x \in X$ غیر مساوات $a \leq x$ صدق نماید پس عدد a عبارت از کوچکترین یا اعداد اصغری ست : $a = \min x$: x نامیده میشود .

اگر در ست X عدد کوچکتر موجود باشد ، پس آن یگانه است و خود ست X در ین حالت محدود از طرف پائینی این اعداد است .

تعریف 3 : ستی که محدود از طرف بالا و پایین باشد. ست محدود نامیده میشود.

به عباره دیگر ست $X \subset \mathbb{R}$ محدود نامیده میشود اگر چنین اعداد a و b موجود شود که برای هر $x \in X$ غیر مساوات $a \leq x \leq b$ صدق نماید ست که محدود نیست غیر محدود نامیده میشود. واضح است که ست غیر محدود میتوان غیر محدود از طرف بالا و یا از طرف پائین و یا تنها از طرف بالا یا پائین باشد .

تمرین 1. ثبوت نمائید که ست $X \subset \mathbb{R}$ محدود است و قتی که تنها و تنها چنان عدد $a \geq 0$ موجود شود که برای هر $x \in X$ غیر مساوات $|x| \leq a$ صدق نماید .

مثال ست محدود عبارت از انتروال $[1, 2]$ و انتروال $(0, 1)$ ست قیمت تابع $\sin x$ میباشد .

انتروال $(-\infty + 5j)$ لایتنهای ست های اعداد طبیعی $1, 2, 3$ عبارت از ست های محدود از طرف پائین میباشد ، ولی غیر محدود از طرف پائین نیست . بالاخره ست های تمام اعداد تام ، تمام اعداد ناطق ، ماهیت مسئله ست های غیر محدود از طرف بالا و از طرف پائین عمومیت دادن به فرمول های قیمت ست های محدود از طرف بالا به طرف پائین و بطور خلاصه ست های محدود در ست های فرعی ، گسترش ست های به \bar{R} اعداد حقیقی \mathbb{R} (مراجعه نمائید به: پراگراف 2.5) . نشان داده شده است.

آوردن مطالب پر مفهوم ، همین قسم تمام ست های فرعی ، گسترش ست های اعداد حقیقی سمبول های منطقی محدود $+\infty$ و سمبول های $-\infty$ بشمار میرود. زیرا که محدودیت ساده در \bar{R} یک نوع مفاهیم بزرگتر (کوچکتر) ، عناصر ست مطالب با مفهوم است . در این حالت تعریف فرمول با تعریف موجوده برای ست های فرعی ست های غیر گسترش یافته اعداد حقیقی مطابقت میکند . متناهی و لایتنهای عدد $c \in X \subset R'$ عبارت از بزرگتر (کوچکتر) در ست R' میباشد اگر برای هر $x \in X$ غیر مساوات $x \leq c$ صدق ننماید. (مطابقت با $x \geq c$) است. در آینده از مفاهیم استفاده خواهیم کرد .

3.4 سرحد فوقانی و تحتانی ست های عددی :

تعریف 4 : کوچکترین وسط سرحد فوقانی ست محدود از طرف بالا ست $x \subset R$ میباشد که بنام سرحد فوقانی این ست یاد شده و توسط سمبول منطقی ذیل نشان داده میشود: $\sup X$ و

$$\sup_{x \in X} \{x\} \text{ یا}$$

تعریف 5 : بزرگترین وسط سرحد تحتانی ست محدود از طرف پائین ست $x \subset R$ بوده که از طرف پائین محدود است بنام سرحد تحتانی این ست یاد گردیده و آنرا توسط سمبول :

$$\inf x \text{ یا } \inf_{x \in X} \{x\} \text{ نشان داده میشود .}$$

همیشه سرحد فوقانی (تحتانی) ست سرحد دقیق فوقانی (تحتانی) این ست نامیده میشود .

خاطر نشان میسازیم که در تعریف متذکره سوال اعداد بررسی نمیشود و هدف در باره موجودیت بزرگتر (کوچکتر) محدود از طرف بالا (پائینی) ست داده شده نیست .

تعریف 4-5 را تحلیل مینمائیم فرضاً : $\beta = \sup x$ باشد .

در اول این به آن معنی است که عدد β ست x را از طرف بالا محدود مینماید در آنصورت برای هر $x \in X$ غیر مساوات $x \leq \beta$ صادق است.

در دوم: β از بزرگترین سرحد محدود از طرف بالا ست x در اطراف تمام اعداد میباشد در آنصورت چنان عدد $\beta' < \beta$ موحود شود که ست x را محدود از طرف بالا نباشد به این معنی که در ست x چنان عدد x پیدا میشود که $\beta' < x$ باشد به این ترتیب «به شکل حسابی» تعریف 4: عدد β سرحد فوقانی ست x نامیده میشود اگر:

$$1^\circ. \forall x \in X : x \leq \beta$$

$$2^\circ. \forall \beta' < \beta \exists x \in X : x > \beta'$$

$$2'. \forall \varepsilon > 0 \exists x \in X : x > \beta - \varepsilon$$

تعریف: 2° میتوان به شکل ذیل نوشت:

برای اینکه به متعادل بون شرط 2° و $2'$ متیقن شویم کافیسست که هر دو β و β' را در رابطه $\beta' = \beta - \varepsilon$ وضع نمائیم از اینجا نتیجه میشود که شرط $\varepsilon > 0$ معادل به شرط $\beta' < \beta$ است.

بطور مشابه اگر $\alpha = \inf X$ باشد پس مطابق تعریف 5 در اول عدد α محدود از طرف پائین ست x است و در دوم عدد کیفی $\alpha' < \alpha$ محدود کننده از طرف پائین این ست نیست عدد α در اطراف تمام چنین اعداد بزرگتر نامیده میشود این به آن معنی که برای هر $\alpha' < \alpha$ چنان $x \in X$ پیدا میشود که $x < \alpha'$ شود نتیجه تعریف 5 را میتوان بطریق ذیل تعمیم داد.

تعریف 5: عدد α سرحد تحتانی ست X میباشد اگر:

$$1^\circ \forall x \in X : x \geq \alpha$$

$$2^\circ \forall \alpha' < \alpha \exists x \in X : x < \alpha'$$

شرط 2° معادل $2'$ است .

$$2' \forall \varepsilon > 0 \exists x \in X : x < \alpha + \varepsilon$$

برای اینکه به معادل بودن شرط 2° و $2'$ متیقن شد کفایت که $\alpha' = \alpha + \varepsilon$ را گرفته شود. چند تبصره مشخص و روشن را در زمینه یاد آور میشویم :

اگر ست غیر خالی $x \subset R$ سرحد فوقانی $\beta' \in \beta$ (سرحد تحتانی $\alpha \in R$) داشته باشیم طوری که آن محدود از طرف بالا (پائین) باشد (این نتیجه از شرط 1° تعریف $4'$ و تعریف 5°) است .

اگر $\beta = \sup x$ ($\alpha = \inf x$) و عدد b (عدد) محدود کننده بالای (پائین) ست x باشد پس $\beta' \leq b$ (مطابق $a \leq \alpha$) بوده از اینجا نتیجه میشود که سرحد فوقانی (تحتانی) ست عبارت از کوچکترین (بزرگترین) عدد در اطراف تمام اعداد محدود کننده فوقانی (تحتانی) ست داده شده میباشد. اگر در ست عدد کوچکتر (بزرگتر) موجود شود پس آن عبارت از سرحد فوقانی (تحتانی) این ست میباشد .

چنین معلومات در جزئیات ست های متناهی جای دارد .

ست های متناهی اعداد اختیاری کوچکتر و بزرگتر دارای اعداد سرحد فوقانی و (تحتانی) میباشد .

در پرانسیپ نه بلکه در پراکتیک اگر در ست داده شده متناهی به اساس کدام یکی از خواص های عناصر ، عناصر آنها معین باشد میتوان دریافت کرد .

ست تمام اعداد حقیقی مثبت (توسط حرف R_+ نشان میدهد) که از طرف پائین توسط عدد صفر محدود شده باشد برای هر $x \in R_+$ دارای موقعیت $x > 0$ است علاوه بر آن $\inf x R_+ = 0$ ست R_+ همینطور ست اعداد غیر محدود از طرف بالا بوده که از طرف بالا محدود کننده تمام اعداد مثبت است. اگر $x = [a, b]$ قطعه باشد پس $\sup x = b, \inf x = a$ میباشد .

اگر $x = [a, b]$ انتروال باشد پس همین قسم $\sup x = b, \inf x = a$ است اگر بالاخره ست x از دو نقطه ab طوریکه $a \leq b$ تشکیل شده باشد. در آنصورت $x = \{a\} \cup \{b\}$ پس دوباره $\sup x = b, \inf x = a$ است .

این مثال نشان دهنده سرحد بالا (پائین) ست میباشد .

همینطور میتوان که ست در خود ست واقع شود ویا در آن واقع نشود .

اگر $A/B = \xi$ مقطع در ناحیه اعداد حقیقی طبق (مراجعه نماید به پراگراف 2.5) باشد

$$\xi \sup A = b, \inf B \dots\dots\dots(3.1) \quad \text{پس :}$$

حالا سوالی را مطرح میکنیم : آیا همیشه در ست های اعداد سرحد فوقانی (تحتانی) موجود است ؟

اگر ست ها از طرف بالا (پائین) محدود نباشد ، پس عددی در آن موجود نیست که آنرا از طرف بالا و پائین محدود سازد . به دیلیلی که در مجاورت آنها عدد بزرگتر و کوچکتر

موجود نمیشود. به این ترتیب اگر ست از طرف بالا پائین محدود نباشد پس آنها سرحد بالای (پائینی) ندارد.

در این حالت جواب برای سوال مطرح شده کاملاً ساده است. اگر همین قسم ست ها از طرف بالا (پائین) محدود باشد جواب توسط قضیه ذیل داده میشود.

قضیه 1: تمام ست های عددی غیر خالی محدود از طرف بالا دارای سرحد فوقانی است. و تمام ست های عددی غیر خالی محدود از طرف پائین دارای سرحد تحتانی است.

ثبوت: فرضاً X ست عددی غیر خالی محدود از طرف بالا است باشد توسط Y افاده میکنیم.

ست تمام اعداد محدود کننده بالای ست X ، ست X محدود از طرف بالا است به این خاطر

Y غیر خالی است. هر عنصر $y \in Y$ ست X را از طرف بال محدود میسازد پس در

آنصورت برای هر عنصر $x \in X$ غیر مساوات $y \in Y$ صادق است.

عناصر x و y عبارت از عناصر دلخواه بوده مطابق ست x و y میباشد. به این سبب در بند

خواص متمادبست. اعداد حقیقی (مراجعه نمائید به: خواص V در پراگراف 2.1) چنان عدد

$$\beta \text{ موجود است که برای هر } x \in X \text{ و } Y \in Y \text{ غیر مساوات (2.3.)} \dots\dots\dots x \leq \beta \leq y$$

بجا خواهد بود.

تطبيق غير مساوات $x \leq \beta$ برای هر $x \in X$ به این معنی که عدد β ست x را از طرف

بالا محدود میسازد و تطبيق غير مساوات $\beta \leq y$ برای هر $y \in Y$ در آنصورت برای هر

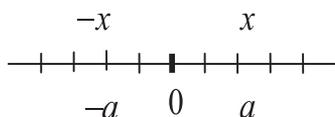
عدد که ست x را از طرف بالا محدود میسازد به این معنی که عدد β عبارت از کوچکترین

وسط در مجاورت تمام چنین اعداد میباشد.

در آن صورت سرحد فوقانی ست x :

$$\beta = \sup x \dots\dots(3.3)$$

همین قسم موجودیت سرحد فوقانی به ست غیر خالی محدود کننده فوقانی ثابت است ، حالا اگر Y ست عددی غیر خالی محدود از طرف پائین باشد پس به ست x انتقال میدهم تمام اعداد ست x و Y را از طرف پائین محدود میسازد .



شکل (7)

بحث دیگر بطور مشابه مطالعه حالت سرحد فوقانی به سادگی متیقن میسازد که در بند خواص متمادیست اعداد حقیقی عدد α موجود میشود که برای هر $x \in X$ و $y \in Y$ تطبیق غیر مساوات ذیل صادق است :

$$x \leq \alpha \leq y \dots (3.4)$$

این واضح معنی میدهد که $\alpha = \inf x$ ثبوت است .

دیگر تائید کردن موجودیت سرحد تحتانی ست غیر خالی محدود کننده پائین میتوان از همین تائید ثبوت شونده موجودیت سرحد فوقانی ست غیر خالی محدود شده فوقانی را حاصل نمود . حقیقتاً خاطر نشان میسازیم که اگر x ست محدود از طرف پائین باشد پس $(-x)$ تمام اعداد $(-x)$ طوریکه $x \in X$ باشد .

در آنصورت ست در اعداد بطور مستقیم متناظر با ست x نظر به صفر است که عبارت از ست محدود از طرف بالا میباشد و بر عکس اگر ست x محدود از طرف بالا ست باشد پس ست $(-x)$ محدود از طرف پائین میباشد . شکل (7) . حقیقتاً اگر عدد a ست x را از طرف پائین محدود میسازد پس $(-a)$ ست $(-x)$ را از طرف بالا محدود میسازد . اگر عدد b ست

$(+x)$ را از طرف بالا محدود میسازد. پس عدد $(-b)$ ست $(-x)$ را از طرف پائین محدود میسازد.

ازینجا نتیجه میشود که :

$$\sup(-X) = -\inf X, \inf(-X) = -\sup X \dots (3.5)$$

از موجودیت سرحد فوقانی ست غیر خالی محدود شونده از طرف بالا و هر یکی از مساوات (3.5) موجودیت سرحد تحتانی ست غیر خالی محدود شونده از طرف پائین نتیجه میشود.

قضیه موجودیت سرحد فوقانی و تحتانی بنام قضیه مخصوص موجودیت سرحد فوقانی و تحتانی ست که بر اساس شرایط تعریف ثابت شده است، یاد میشود.

بحث طریقه تطبیقی این قضیه راجع به وقوع سرحد ها نتیجه مناسب نمیدهد.

واضح است که ساختمان ست y توسط هدایت ثبوت قضیه طوریکه ست محدود شده فوقانی از تمام اعداد ست تشکیل یافته مورد مطالعه قرار میدهیم که سرحد فوقانی جستجو شده مساوی به اندازه β این ست میباشد در حقیقت تعیین شدن سرحد فوقانی (تحتانی) ست یکی از خواص های بسیار مشکل میباشد.

اگر ست از طرف بالا (پائین) محدود نباشد، پس همینطور هیچ یکی از اعداد نمیتوانند سرحد فوقانی و تحتانی آن شود که آنرا از طرف بالا و یا پائین محدود سازد همینطور به صورت عمومی هیچ یک عدد نیست که آنرا محدود سازد. جهت معتقد شدن تعریف ذیل را مطالعه مینمائیم :

سرحد فوقانی ست عددی که از طرف بالا محدود نباشد، بنام $-\infty$ یاد میشود، این تعریف طبعاً همینطور راجع به استفاده از سمبول های $+\infty$ و $-\infty$ در پراگراف (2.5) و یاد آوری شد.

همینطور تعریف سرحد لایتناهی ست توسط شرایط 1° و 2° و 4 و 5 بیان گردیده است.

به آسانی ست عددی غیر خالی دارای سرحد فوقانی ست گسترش یافته متعلق به اعداد حقیقی بوده به این سبب اگر ست معین از طرف بالا محدود باشد سرحد فوقانی آن متناهی است پس بی نهایت ، مساوی است به $+\infty$ همینطور بطور مشابه برای سرحد تحتانی همین تعریف برقرار است .

*3.5 : خواص حسابی سرحد فوقانی و تحتانی :

چهار خواص سرحد فوقانی و تحتانی ست ها راجع به تعریف حسابی ست عددی را مطالعه مینمائیم :

قبل از همه چنین عملیه ها را تعریف میکنیم :

حاصل جمع حسابی :

$X_1 + \dots + X_n$ که قسمت عددی X_1, \dots, X_n عبارت از ست تمام اعداد طبیعی x بوده به

شکل ذیل مینویسد :

$$x = x_1 + \dots + x_n, x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n$$

تفاضل حسابی : $X - y$: ست عددی X و عبارت از ست تمام اعداد z بوده و به شکل

ذیل $z = x - y, x \in X, y \in Y$ باشد نتیجه مفهوم حاصل جمع حسابی

$x_1 + \dots + x_n$ و تفاضل $x - y$ از مفهوم نظریه حاصل جمع (اتحاد) ستی $x/v \dots v_{x_n}$

و تفاضل x/y این ست متفاوت است .

حاصل ضرب λx عدد λ درست عددی عبارت از ست تمام اعداد بوده و به شکل

$\lambda x/x \in X$ مینویسند .

حاصلضرب XY دو ست عددی X و Y عبارت از ست Z بوده و به شکل ذیل مینویسند :

$$z = xy, x \in X, y \in Y \text{ باشد.}$$

خاصیت اول

$$\sup(X_1 + \dots + X_n) = \sup X_1 + \dots + \sup X_n \dots (3,6)$$

$$\inf(X_1 + \dots + X_n) = \inf X_1 + \dots + \inf X_n \dots (3,7)$$

خاصیت دوم

$$\sup(X - Y) = \sup X - \inf Y \dots (3,8)$$

خاصیت اول را ثبوت می نمائیم ، اگر

$$x_1 \in X_1 + \dots + X_n$$

در آنصورت :

$$x_1 \in x_1 + \dots + x_n, \quad x_1 \in X_1 + \dots + X_n$$

پس :

$$x_R \leq \sup x_R, R = 1, 2, \dots, n$$

در نتیجه :

$$x = x_1 + \dots + x_n, x_k \leq \sup X_1 + \dots + \sup X_n \dots (3,9)$$

اگر $y < \sup X_1 + \dots + \sup X_n \dots (3,10)$ باشد پس برای هر $k = 1, 2, \dots, n$ چنین عدد y_k پیدا میشود .

$$y_k < \sup x_k, k = 1, 2, \dots, n, y_1 + \dots + y_n = y (3,11)$$

در حقیقت اگر تمام سرحد فوقانی $\sup X_1 + \dots + X_n$ ست متناهی باشد .

پس $y_k = \sup x_k - \dots - \sup X_1 + \dots + \sup X_n - y$ است .

در آنصورت $y_1 + \dots + y_n = y$ است .

اگر همین اوسط سرحد فوقانی اطراف (مجاورت) $\sup X_1 + \dots + \sup X_n$ تنها دارای یک مساوات $+\infty$ میباشد .

بطور مثال $x_n + \infty$ پس در خصوصیت به $1 - y_1 + \dots + y_n$ میتوان هر عدد اختیاری $y_n < \sup X_i, i=1,2,\dots,i$ و بعد از y_1 عدد

در این حالت $y_n < +\infty = \sup X_n$

واضح است که $y_1 + \dots + y_n = y$ است در آنصورت دوباره شرط (3.11) تطبیق شود.

از غیر مساوات (3.11) نتیجه میشود که موجودیت چنین $x_k \in X_k$ که $k=1,2,\dots,n$ ، $y_k < x_k \leq \sup X_k$ از فرضیه $x = x_1 + \dots + x_n$ حاصل مینمائیم .

$$x \in X_1 + \dots + X_n$$

$$x = x_1 + \dots + x_n > y_1 + \dots + y_n \geq y \dots (3.12)$$

به این ترتیب هر دو شرایط تعریف سرحد فوقانی است (مراجعه نمائید به: فرمول های (3.9 و 3.12) صدق می نماید . در آنصورت : $\sup X_1 + \dots + \sup X_n$ حقیقتاً عبارت از

سرحد فوقانی ست $X_1 + \dots + X_n$ میباشد .

بطور مشابه فرمول (3.7) را ثبوت میشود .

خاصیت دوم را ثبوت میکنیم :

اگر $z = X - Y$ باشد .

در آنصورت $Z = \chi - y, \chi \subset X, y \in Y$ میباشد .

پس : $x \leq \sup X, y \geq \inf Y$ است .

در نتیجه :

$$Z = \chi - y \leq \sup X - \inf Y \dots (3.14)$$

اگر $Z_1 - Z_2 > Z$ باشد چنانچه Z_1 و Z_2 در بند (3.14) موجود است در آنصورت سرحد $\sup x, \inf y$ متناهی است و همینطور اگر یکی از آنها و یا هر دو لایتنهای باشد .

مطابق به غیر مساوات (3.15) نتیجه میشود که چنین عدد دریافت میشود ، که :

$$y \in Y, x \in X \text{ شود .}$$

در آنصورت

$$Z_1 < x \leq \sup X, Z_2 > y \geq \inf Y \dots (3.16)$$

$$x - y \in X - y \quad \text{در نتیجه}$$

$$x - y > Z_1 - Z_2 > Z \dots (3.17)$$

است .

به این ترتیب دوباره هر دو شرایط تعریف سرحد فوقانی و تحتانی (مراجعه نماینده 3.13 و 3.17) قابل تطبیق است در آنصورت : $\sup X, \inf Y$ حقیقتاً عبارت از سرحد فوقانی ست $x - y$ ثبوت است .

خاصیت سوم : اگر $\lambda \geq 0$ باشد . پس :

$$\sup \lambda X = \lambda \sup X, \inf \lambda X = \lambda \inf X \dots (3.18)$$

و اگر $\lambda > 0$ باشد پس :

$$\sup \lambda X = \lambda \inf X, \inf \lambda X = \lambda \sup X \dots (3.19)$$

اول مساوات (3.18) را ثبوت می نمائیم :

فرضاً $\lambda > 0$ و اگر $y \in \lambda X$ شود در آنصورت $y \in \lambda X$ بوده و همه $x \in X$ میباشد .

در نتیجه : $x \leq \sup X$ بوده پس $y = \lambda x \leq \lambda \sup X$ میباشد .

اگر $y < \lambda \sup X$ باشد در آن صورت $\frac{y}{\lambda} < \sup X$ است.

پس چنانچه $x \in X$ پیدا میشود که $x > \frac{y}{\lambda}$ میشود.

در نتیجه: $\lambda x > y$ بوده درینجا $\lambda x \in \lambda X$ میباشد.

به این ترتیب $\lambda \sup X$ عبارت از سرحد فوقانی ست λX بوده در آن صورت اول مساوی

(3.18) ثبوت شد.

همینطور بطور مشابه مساوات دوم (3.18) را ثبوت میشود.

حالا فرض میکنیم $\lambda < 0$ باشد.

اگر $y \in \lambda x$ شود در آن صورت $y = \lambda x$ بوده در حالیکه $x \in X$ است.

در نتیجه $x \geq \inf X$ بوده پس $\lambda x \geq \inf X$ اگر $y < \inf X$ باشد در آن صورت

$\frac{y}{\lambda} > \inf X$ بوده پس چنان $x \in X$ پیدا میشود که $x < \frac{y}{\lambda}$ شود به این سبب $\lambda x > y$

بوده در حالیکه $\lambda x \in \lambda X$ باشد این به آن معنی است که $\lambda \inf X$ عبارت از سرحد

فوقانی ست λX میباشد پس مساوات اول (3.19) ثبوت شد همین قسم بطور مشابه مساوات

دوم (3.19) ثبوت میشود.

خاصیت چهارم: اگر تمام اعداد شامل در ست های y, x غیر منفی باشد پس:

$$\sup XY = \sup X \sup Y, \inf XY = \inf X \inf Y \dots (3.20)$$

ثبوت این خاصیت در همین میتود تطبیق میشود و ثبوت 3 خاصیت بعدی سرحد فوقانی و

تحتانی ست به خوانندگان واگذار میشود.

حالا نشان می‌دهیم موجودیت سرحد فوقانی و تحتانی از تطبیق نتیجه میشود که دو خاصیت مهم اعداد حقیقی بنام پیرانسپ⁽¹⁾ ارشمس و پیرانسپ هموار کردن قطعه خط یاد میشود .

3.6 پیرانسپ ارشمس

پیرانسپ ارشمس راجع به اعداد حقیقی قرارذیل است.

قضیه 2: اگر برای عدد حقیقی a چنان عدد طبیعی n پیدا شود که $n > a$ باشد، پس در آن صورت داریم:

$$\forall a \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} : n > a \text{ -----(3.21)}$$

ثبوت: فرض میکنم پیرانسپ ارشمس قابل تطبق نباشد این به آن معنی است که عدد a وجود داشته باشد که برای هر عدد طبیعی n غیر مساوات $n \leq a$ صدق کند.

پس در این صورت $\exists a \in \mathbb{R}; \forall n \in \mathbb{N}; n \leq a$ به این معنی است که عدد a اعداد طبیعی را از طرف بالا محدود میسازد به خاطر که اعداد طبیعی هم مانند تمام ست های عددی غیر خالی که از طرف بالا محدود شده مطابق قضیه 1 پراگراف 3.4 دارای حد فوقانی متناهی بوده و توسط $\beta = \sup n$ نشان میدهند.

همینطور $\beta - 1 < \beta$ پس مطابق خاصیت 2^0 ، سرحد فوقانی در تعریف 4 پراگراف 3.4 چنان عدد طبیعی n پیدا میشود که $n > \beta - 1$ است. اما در این صورت $n + 1 > \beta$ می باشد زیرا که مطابق تعریف اعداد طبیعی $n + 1 \in \mathbb{N}$ غیر مساوات $n + 1 > \beta$ در مغایرت به انتخاب که $\beta = \sup n$ قرار دارد.

(1) ارشمیدس (212-287) ریاضیدان و میخانیک کلاسیک میباشد.

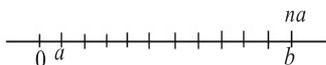
همینطور سرحد فوقانی ست را از طرف بالا محدود میسازد (مراجعه نمائید به: خاصیت 1^0 سرحد فوقانی که در تعریف '4 پرآگراف 3.4 تذکر رفت برخلاف نشان میدهد که عدد اشاره شده a موجود نیست بنا براین پرنسیپ ارشمس صدق میکند □.

نتیجه: هرگاه a و b اعداد باشند طوری که $0 < a < b$ باشد عدد طبیعی n وجود دارد که

$$(3.22) \text{-----} na > b \text{ صدیق میکند. حقیقتاً مطابق پرنسیپ ارشمس برای}$$

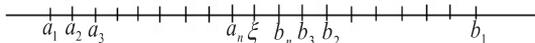
عدد b/da چنان عدد طبیعی n موجود است که $n > b/a$ صدیق می کند. همینطور غیر مساوات $n > b/a$ را در عدد مثبت a ضرب می نمایم. حاصل می نمایم که $na > b$ است. این برآورد دارای تعبیر ساده هندسی میباشد.

اگر دو قطعه خط با طول های a و b طوری که $0 < a < b$ را در نظر بگیریم، پس بطور مسلسل بالای قطعه بزرگ قطعه کوچک را در یکی از انجام ها به این خط به یکطرف میگذارم. ما از طریق اعداد متناهی در قدم بعدی این عملیه، حد بزرگ قطعه خط را دریافت میکنم.



شکل (8)

مثال: فرضاً ست x متشکیل از اعداد به شکل $1/n$ ، طوری که $n=1,2,\dots$ باشد $\sup x$ و $\inf x$ را دریافت میکنم.



شکل 9

ست x دارای عددبزرگتر از یک است زیرا که یک سرحد فوقانی آن می باشد یعنی،

$$\sup \left\{ \frac{1}{n} \right\} = 1$$

برای جستجوی سرحد تحتانی ست x یادآور میشوم که برای هر $n=1,2,\dots$

$$n \in \mathbb{N}$$

غیر مساوات $1/n > 0$ صدق می کند در این صورت عدد صفر ست x را از طرف پائین محدود می سازد. ذیلاً چنین نشان می دهد که:

فرضاً $\varepsilon > 0$ در این صورت مطابق پرنسیپ ارشمیدس عدد طبیعی n وجود دارد طوری که $n > \frac{1}{\varepsilon_0}$. ویابه همین قسم $\frac{1}{n} < \varepsilon_0$ این غیر مساوات نشان می دهد که هر عدد $\varepsilon > 0$ ست x

را از طرف پائین محدود نمی سازد یا $\frac{1}{n} \in X$ در صورت که $n=1,2,\dots$ باشد. و همین قسم

که تمام اعداد بزرگ تر ست x را از طرف پائین محدود می سازد در این صورت داریم:

$$\inf \left\{ \frac{1}{n} \right\} = 0$$

$$n \in \mathbb{N}$$

$$\inf \left\{ \frac{1}{n} \right\} = 0$$

صورت داریم:

§4. لیمت ترادف های عددی

4.1 معرفی لیمت ترادف های عددی

یکی از مفاهیم مهم آنالیز ریاضی عبارت از مفهوم لیمت است ما در این مبحث مطالعه آنرا از لیمت ترادف های اعداد حقیقی آغاز می نماییم. (تعریف ترادف ها، مراجعه نمایند به: پراگراف* 1.3)

نقطه a بی نهایت دور مستقیم عددی میتواند یکی از بی نهایت های $+\infty$ و $-\infty$ باشد (مراجعه نمایند به : پراگراف 3.1)

تعریف 1: نقطه a (متناهی و بیابی نهایت دور) مستقیم عدد عبارت از لیمت بعضی از ترادف های عددی اعداد حقیقی می باشد ، اگر هر کدام از ترادف های ماحولی نقطه a دارای تمام حدود مورد مطالعه به یک تعداد نمبر ها آغاز یابد، در این صورت نمبر متذکره به انتخاب حولی نقطه a مربوط میشود. با شرایط فورمول بندی شده مناسب که در بعضی حولی نقطه a درست های متناهی ترادف ها به اساس خصوصیت های آنها به اندازه کم واقع میشود. (در آن صورت ست خالی ، ست متناهی شمرده می شود). به یاد می آوریم که ماحولی نقطه متناهی و بی نهایت دور مستقیم عدد توسط بعضی اعداد داده شده $\varepsilon > 0$ است تعیین می نماید. (مراجعه نماید به پراگراف 3.2).

تعریف لیمت ترادف اعداد حقیقی را میتوان به طریقه ذیل تعمیم داد: نقطه a (متناهی و بیابی نهایت دور) مستقیم عددی به نام لیمت ترادف $\{x_n\}$ اعداد حقیقی یاد می گردد اگر برای هر $\varepsilon > 0$ چنان عدد n_ε موجود شود که برای تمام $N > n_\varepsilon$ حد $\{x_n\}$ در حولی $U(a, \varepsilon)$ وجود داشته باشد، یعنی $x_n \in U(a, \varepsilon)$ اگر این شرایط صادق باشد ، پس مینویسند:

$$\lim x_n = a$$

$$n \rightarrow \infty$$

و یا $x_n \rightarrow a$ در این صورت $n \rightarrow \infty$ و میگویند که حدودترادف $\{x_n\}$ به a تقرب نموده

است. موجودیت و اتحادتمام تعریف ها لیمت را توسط سمبول های منطقی به شکل زیر

می نویسند.

$$a = \lim x_n \stackrel{def}{\Leftrightarrow} \exists n_\varepsilon \forall n > n_\varepsilon : x_n \in U(a, \varepsilon)$$

$$n \rightarrow \infty$$

در آینده حرف n به شکل اندکس عدد طبیعی افاده می گردد اگر کدام شرایط خاص دیگر نباشد

اندکس ε در عدد n_ε نشان میدهد که این عدد به صورت عمومی مربوط به انتخاب $\varepsilon > 0$ می

باشد. این ارتباط نیز در خود فورمول بندی تعریف به صورت بی نهایت انعکاس یافته است

زیرا که ممکن است در نوشته انعکاس نکند (جهت پیشبرد بهتر کار). حقیقتاً، همیشه به عوض n_ε

می نویسند $n_0 \in N$ یا $N \in N$ اگر لیمت ترادف اعداد حقیقی بی نهایت مستقیم عددی باشد،

پس در این صورت گفته می شود که ترادف دارای لیمت نهایی می باشد.

تعریف 2: اگر ترادف عددی دارای لیمت بی نهایت باشد، پس آنرا به نام متقارب می

نامند. اگر از سمبولهای منطقی استفاده نمایم، پس این تعریف را می توان به طریق ذیل نوشت:

$$\exists a \in R \forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in N \forall n > n_\varepsilon : |x_n - a| < \varepsilon$$

نامیده می شود.

تعریف 1 رامیتوان برای حالت لیمت بی نهایت تعمیم بخشید. عدد a به نام لیمت ترادف $\{x_n\}$ اعداد حقیقی یادمیگردد. اگر برای هر $\varepsilon > 0$ چنین عدد n_ε موجود شود که برای هر عدد $n > n_\varepsilon$ غیر مساوات ذیل صدق نماید:

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad (4.1)$$

با استفاده از سمبول های منطقی این تعریف را به طریق ذیل می نویسند:

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \forall n > n_\varepsilon : |x_n - a| < \varepsilon$$

واضح است که غیر مساوات (4.1) معادل به غیر مساوات ذیل می باشد $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ اگر

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad \text{و} \quad x_n < a \quad (x_n > 0) \quad \text{برای هر } n = 1, 2, \dots$$

طرف عدد a تقرب می کند (مطابق به طرف راست) و همیشه به عوض $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ به این

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a + 0 \quad (\text{مطابق به}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a - 0 \quad \text{شکل می نویسند.}$$

شود به عوض $0 - 0$ و $0 + 0$ بطور ساده چنین می نویسند: $0 + 0$ و $0 - 0$. با فورمول بندی تعریف ε

لیمت ترادف عددی لیمت نامیده می شود، که نقطه بی نهایت دور باشد. (یا طوریکه میگویند

مساوی به بی نهایت شود) بطور مثال ∞ عبارت از لیمت ترادف $\{x_n\}$ می باشد. اگر برای هر

$\varepsilon > 0$ چنان عدد n_ε موجود شود که برای تمام $n > n_\varepsilon$ باشد این افاده $x_n \in U(\infty, \varepsilon)$ و یاهمین

قسم که خود غیر مساوات $\frac{1}{\varepsilon} > |x_n|$ صادق باشد. این رابطه با استفاده از سمبول های منطقی به شکل زیر مینویسند.

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \forall n > n_\varepsilon : |x_n| > \frac{1}{\varepsilon}$$

بطور مشابه، تعریف لیمت ترادف برای حالتی که این لیمت مساوی به علامه مشخص به بی نهایت شود تعمیم مییابد، برای مختصر نمودن تعریف آنرا محدود ساخته و توسط سمبول های منطقی قرار ذیل می نویسیم.

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \forall n > n_\varepsilon : |x_n| > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \forall n > n_\varepsilon : |x_n| < -\frac{1}{\varepsilon}$$

واضح است که اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ و یا $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ باشد پس $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ است.

تعریف 3: لیمت ترادف که بی نهایت باشد به نام بی نهایت بزرگ یاد می شود. مفهوم لیمت ترادف بی نهایت مربوط به اهداف مشخص بوده که در پراکتیک به آن مواجه می شوند. بعضی از این اهداف حاصله برای ما جالب میباشند. مانند $\varepsilon > 0$ که همیشه داده می شود. یا $\{x_n\}$ که ترادف متقارب معنا میدهد، به همین ترتیب کمیت مورد مطالعه را می توان در نتیجه تطبیق کدام تجربه و یا با محاسبه تکراری فورمول ها و یا بخاطر کدام هدف

دیگر حاصل نمود. این مسأله را میتوان بطور واضح حل نمود. اگر n_ε پیداشود که معنای کل آن $\{x_n\}$ باشد، پس می توان آنرا از مفهوم واضح در مورد مطالعه کمیات در لیمت داده شده دقیقاً انحراف دادو واقعاً اگر n_ε برای یکی از $\varepsilon > 0$ داده شده موجود شود، اگر کم باشد و یا هیچ موجود نشود. ترادف $\{x_n\}$ مشابه به تعریف لیمت ترادف مقتضی می باشد و عدد n_ε میتوان برای هر $\varepsilon > 0$ انتخاب نمود. در آینده میتوان ترادف فرعی لیمت را به مفهوم لیمت بی نهایت یاد نمود، اگر با چنین عدد واقعاً روبرو شویم.

مثالها 1: ترادف $1/n$ متقارب است و لیمت آن صفر است. در حقیقت هر $\varepsilon > 0$ مطابق به پرنسپ ارشمیدس (مراجعه نمائید به: پراگراف 3.6) اگر چنین عدد طبیعی n_ε موجود مشود که $n > 1/\varepsilon$

پس برای هر $n > n_\varepsilon$ غیر مساوات $\varepsilon < \frac{1}{n} < \frac{1}{n_\varepsilon} < 0$ صادق است این به آن معنی است که

ترادف $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$ متقارب به صفر طرف راست میباشد.

مثال 2: ترادف $\left\{ \sin \frac{\pi}{2} n \right\}$ متباعد شمرده میشود در حقیقت، اگر هر عدد n ماحول ε ، طوریکه

$0 < \varepsilon < 1$ باشد، ترادف متذکره متباعد است و اگر حدود ترادف داده شده بی نهایت باشد به این معنی که لیمت آنها شمار نمیشود.

مثال 3: ترادف $\left\{ \frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{2} n \right\}$ متقارب است یعنی $\left\{ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{2} n = 0 \right\}$ زیرا که

$\left\{ \frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{2} n \leq \frac{1}{n} \right\}$ ویا $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ ترادف متقارب $\left\{ \frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{2} n \right\}$ ترادف متقارب به لیمت

راست ویا چپ یانمیشود.

مثال 4: ترادف $\{n\}$ متباعداست. واقعاً اگر کدام عدد a برای هر $\varepsilon > 0$ بالخصوص برای $\varepsilon = 1$

مطابق به پرنسیپ ارشمس چنان عدد طبیعی n_0 که $n_0 > a + 1$ پیدا شود، پس نتیجه میشود که

برای تمام اعداد طبیعی $n > n_0$ داریم $n > a + 1$ زیرا که عدد a نمیتواند لیمت ترادف $\{n\}$

محسوب شود. در مثال 2 و 4 صورت ثبوت متباعذبودن ترادف از متن تعریف استفاده شده که

در آن چنین تذکره عمل آمده است، که بعضی از اعداد a ترادف داده شده لیمت محسوب

نمیشوند.

تعریف 4: نقطه a متناهی و یابی نهایت دور مستقیم عددی R میباشد. اگر چنان $\varepsilon > 0$ پیدا شود که

برای تمام اعداد طبیعی n عدد طبیعی $m > n$ موجود شود که $x_m \notin U(a, \varepsilon)$ پس $x_n \in R$

، $n = 1, 2, \dots$ لیمت ترادف محسوب نمیشود. این تعریف را با استفاده از سمبول های منطقی به

شکل زیر می نویسند: $\lim x_n \neq a \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \forall n \in \mathbb{N} \exists m > n : x_m \notin U(a, \varepsilon)$ به

یاد می آوریم که صورت فورمول بندی تائید نشده موجودیت (\exists) سمبولهای منطقی واتحاد

عمومی \forall جای خود را تغییر میدهند که عیناً در حالت فرض شده تذکر رفته بود. در اینجا

بطور مختصر میتوان گفت که نوشته فورمول 1 و 4 که با استفاده از سمبول های منطقی

تحریر گردیده است، نشان میدهد که تعریف 4 تعریف مستقل نیست بلکه نتیجه منطقی تعریف

1 میباشد.

تمرین 1: تعریف ترادف متباعد را واضح سازید.

تمرین 2: ثابت نمایید که اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ باشد پس $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|$ است.

مثال 2: ثابت نمایید که ترادف x_n متباعد است.

جهت ثبوت هدایت ذیل موجود است:

تنها وقتی که عدد $\varepsilon > 0$ موجود باشد و عدد حقیقی a را داشته باشیم و نیز عدد n وجود داشته

باشد و عددی دیگری پیدا شود که $m > n$ باشد و غیر مساوات $|x_m - a| \geq \varepsilon$ امکان پذیر است.

هدایت دیگر: به مطالعه مثالهای بالا موجودیت و یا موجود نبودن لیمت ترادف داده شده

را معلوم نمایید و تعریف مقدماتی لیمت ترادف را کاملاً واضح سازید. و نیز لیمت ترادف

را در مثال بسیار مشکل جستجو نموده و اوسط حسابی حدود ترادف متقارب را مطالعه نماید.

مثال 5: اگر ترادف $\{x_n\}$ متقارب باشد، پس ترادف اوسط حدود حسابی آن مساوی است به

$$y_n = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}, \quad n=1, 2, \dots$$

که مستقماً متقارب به همین لیمت است که خودش ترادف $\{x_n\}$ است. فرضاً $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ قبل از همه یاد آور میشوم که برای هر عدد طبیعی n_0 و

$n > n_0$ داری مساوات ذیل است.

$$y_n - a = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} - a$$

$$= \frac{x_1 + \dots + x_{n_0} - n_0 a}{n} + \frac{(x_{n_0} + 1 - a) + \dots + (x_n - a)}{n} \dots \dots \dots (4.2)$$

حال اگر $\varepsilon > 0$ داده شده باشد پس مطابق تعریف لیمت چنین عدد n پیدا میشود که برای هر

$$n > n_0 \text{ مساوات ذیل صدق می نماید. یعنی، (4.3) } |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ اگر عدد}$$

معین باشد در این صورت $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + \dots + x_n - n_0 a}{n} = a$ زیرا که

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x_1 + \dots + x_{n_0} - n_0 a}{n} = 0 \text{ در نتیجه چنان عدد } m_0 \text{ پیدا میشود که برای هر } n > m_0$$

مساوات ذیل صادق است:

$$\left| \frac{x_1 + \dots + x_n - n_0 a}{n} \right| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ (4.4)}$$

فرضاً $n_\varepsilon = \max(n_0; m_0)$ بنابراین، برای تمام اعداد $n > n_\varepsilon$ به اساس فورمول

(4.2) و (4.4) داریم:

$$|y_n - a| \leq \left| \frac{x_1 + \dots + x_{n_0} - n_0 a}{n} \right| + \frac{|x_{n_0} + 1 - a| + \dots + |x_n - a|}{n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{n - n_0}{n} \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

این به آن معنی است که $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$.

تمرین 4: ثبوت نماید که حذف نمودن و یا تغییر عدمتناهی، عناصر تَرادف متقارب به آن

محسوب نمیشود همینطور ثابت نماید که در حالت متقارب بودن کمیت لیمت تَرادف نمیباشد.

$$2: \text{ اگر } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a \text{ و } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \text{ باشد و } Z_n = \begin{cases} x_R & n = 2R - 1 \\ y_R & n = 2R, R = 1, 2, \dots \end{cases} \text{ پس در آن صورت}$$

ثابت نماید که $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ میشود.

هدایت: در دریف ترادف عددی این کورس، ترادف گسترش مستقیم عددی نقاط را مطالعه نماید، که در این حالت نامگذاری ترادف اعداد طبیعی به طور عموم $\{x_n\}$ می باشد و بخاطرست های گسترش اعداد حقیقی به R' نشان داده میشود. (مراجعه نمائید به: پراگراف 3.1) و به همین ترتیب عناصر این ترادف در دریف اعداد حقیقی میتوانند نقاط بی نهایت دور $+\infty$ و $-\infty$ قبول نمود. همینطور برای چنین ترادف ممکن است مفهوم لیمت را دریافت نمود. بطور مشابه لیمت ترادف عددی مثل خود دارای حالت مخصوص میباشد.

تعریف 5: نقطه a گسترش مستقیم عددی R' بنام لیمت ترادف نقاط این مستقیم یادمیشود اگر چنین حولی نقطه a یافت شود که آن دارای تمام حدود ترادف باشد و با بعضی نمبرها آغاز شود. تفاوت حالت بالا به حالت موجود در آنست که در اینجا حدود ترادف رامیتوان واقعاً ممکن است که مفهوم لیمت ترادف نقاط مستقیم عددی تنها توسط یک نقطه بی نهایت دور به بی نهایت بدون علامه گسترش داد.

تبصره: برای مجاورت $U(a, \varepsilon)$ طوری که $\varepsilon > 0$ یا عدد $R \in a$ باشد یا یکی از بی نهایت $-\infty$

$$+\infty, \text{ و } \infty, \text{ چنان عدد طبیعی } n \text{ موجود شود که افاده } U(a, \frac{1}{n}) \subset U(a, \varepsilon) \text{ صدق نماید.}$$

برای اینکه ترادف $x_n \in R$ طوری که $n = 1, 2, \dots$ شود.

افاده $x_n \in U(a, \frac{1}{n})$ صادق است (در اینجا a یا عدد حقیقی یا یکی از لایتنهای $-\infty, +\infty$ و ∞) می

باشد. پس $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ در حقیقت برای مجاورت $U(a)$ چنان عدد طبیعی n_0 پیدا شود که

$$U(a, \frac{1}{n_0}) \subset (a)$$

در آن صورت برای هر عدد $n > n_0$ داریم.

در آینده $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ که این به آن معنی است که $x_n \in U(a, \frac{1}{n}) \subset U(a, \frac{1}{n_0}) \subset U(a)$

ترادف فرعی همیشه به ترادف عددی یادخواهدشد پس در آن صورت عناصر ترادف بنام اعداد حقیقی یاد میشود.

تمرین 5: ثبوت نمایید، اگر $n = 1, 2, \dots, a_n \leq |b_n|$ پس $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ پس $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$

6: مثالهای از ترادف های غیر محدود که لایتنهای بزرگ شمرده نمیشود بنویسید.

7: ثبوت نمایید که حاصل ضرب حدودی نهایت بزرگ ترادف ها در ترادف های کمیات مطلقه تمام حدود طوریکه از طرف پائین محدود مثبت باشد، بنام ترادف بی نهایت بزرگ یاد میشود.

4.2 یکتا بودن لیمت ترادف اعداد:

قبل از همه، تعریف لیمت را دقیقتر میسازیم به این معنی که اگر چنین تعریف دقیق موجود شود، پس چنین لیمت یکتا است.

قضیه 1: ترادف نقاط در امتداد مستقیم عددی میتواند روی این مستقیم تنها دارای یک لیمت باشد.

نتیجه: ترادف عددی میتواند تنها دارای یک لیمت متناهی و یا دارای یک علامه مشخص باشد. ثبوت قضیه: فرض میکنم که تائید کردن قضیه منصفانه نیست. این به آن معنی است که موجودیت ترادف $x_n \in R$ طوریکه $n = 1, 2, \dots$ در آخرین حد اندازه دارای دو لیمت مختلف

$a \in R$ و $b \in R^1$ باشد. اگر $\epsilon_1 > 0$ و $\epsilon_2 > 0$ را طوری انتخاب کنیم که ϵ_1 در مجاورت نقطه a با ϵ_2

حوالی نقطه b این کار همیشه مطابق لیما پراگراف 3.2 (مراجعه نمائید به: .)

شکل 6 (6.2، a، b) ممکن است به اساس تعریف لیمت از شرط $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ نتیجه

میشود. که چنین عدد $n \in \mathbb{N}$ پیدا میشود که برای تمام عدد $n_1 > n$ و $n \in \mathbb{N}$ موجودیت

در نتیجه $n_2 \in \mathbb{N}$ پیدا میشود که $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$ درست است از شرط $x_n \in U(a, \varepsilon_1)$

برای تمام $n > n_2$ و $n \in \mathbb{N}$ افاده $x_n \in U(b, \varepsilon_1)$ صادق است.

اگر n_0 بزرگتر از اعداد n_1 و n_2 باشد، به اساس تعریف میتوان نوشت: $n_0 \Rightarrow \max\{n_1, n_2\}$.

پس برای هر $n > n_0$ همزمان میتوان داشت: $x_n \in U(b, \varepsilon_1)$ و $x_n \in U(a, \varepsilon_1)$ در آن صورت:

پس $x_n \in U(b, \varepsilon_1) \cap x_n \in U(a, \varepsilon_1)$ که این خلاف فرضیه است، پس

$$U(a, \varepsilon_1) \cap U(b, \varepsilon_2) = \phi$$

نتیجه: در حقیقت مجاورت از حالت قسماً بیان شده قضیه میباشد. برای عناصر لیمت مترادف

یکنواخت بی نهایت مورد نظر، موجودیت R مجاورت از متزایدی نهایت دارای علامه معین

خود باشد، پس همزمان لیمت آن مجاورت از بی نهایت بدون علامه میباشد.

بطور مثال اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ پس واقعاً $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ حال چند خاصیت مختصر لیمت متناهی

و بی نهایت را در پر اگراف های بعدی ثبوت می نماییم.

4.3 عبور به لیمت در غیر مساوات:

با استفاده از خواص لیمت مترادف نقاط گسترش یافته مستقیم عددی و ارتباط آن با مساوات

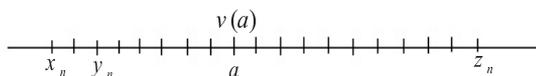
و غیر مساوات برای حدود مترادف آنرا به سه بخش فورمول بندی و ثابت می نماییم.

1: اگر برای تمامی $n=1,2,\dots$ مساوات $x_n = a \in R^1$ ردا داشته باشیم (در آن صورت ترادف $\{x_n\}$ ثابت است)، پس $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ طوریکه می گویند، لیمت ثابت مساوی به خود این ثابت است.

ثبوت: حقیقتاً در این حالت برای هر مجاورت $U(a)$ از نقطه a در خصوص عدد n_0 در تعریف 5 اشاره صورت گرفته است. میتوان عدد n_0 مساوی به یک گرفت. همینطور، برای تمام اعداد $n=1,2,\dots$ فرمول $x_n = a \in U(a)$ درست است.

$$\text{اگر: } \Pi (4,5) \dots x_n \leq y_n \leq z_n \dots \quad x_n \in R' \quad y_n \in R' \quad 2n \in R' \quad n=1,2,\dots$$

$$\text{که} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a \in R' \dots (4,6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a \dots (1,7)$$



شکل-10

ثبوت: مجاورت اختیاری $v(a)$ نقطه رامعین میسازیم.

به اساس شرط (4,6) عدد n_1 پیدا میشود که برای تمام اعداد $n > n_1$ رابطه ذیل صدق کنند.

$$x_n = U(a) \dots (4,8)$$

و عدد n_2 که برای تمام اعداد $n > n_2$ صدق میکند.

$$z_n \in U(a) \dots (4,9)$$

بخصوص عدد بزرگتر از n_1 و n_2 است $\{n_1, n_2\}$ را $n_0 = \max$ انتخاب می نماییم در آن صورت برای اعداد $n > n_0$ همزمان بندهای (8,4) و (9,4) صادق اند. بناً به شکل (10) در بند شرط (4,5) برای تمام $y_n \in U(a)$ صادق است. به این معنی که (4,7) تأیید است. □

نتیجه: اگر $x_n \in R'$ $y_n \in R'$ $z_n \subseteq y_n$ طوری که $n=1,2,\dots$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty \dots \dots \dots (4,10)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty \dots \dots \dots (4,11)$$

پس

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = -\infty \text{ پس } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty \text{ اما}$$

ثبوت: فرضاً مطابق شرط (4,10) ترادف فرعی $z_n = +\infty$ طوری که $n=1,2,\dots$ را در نظر میگیریم. در آن صورت، واضح است که ترادف های $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ مطابق شرایط (4,5) و (4,6). $a = +\infty$. همین قسم در بند (4,7) و مساوات (4,11) آنها تأیید گردیده است.

بطور مشابه به حالت $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = -\infty$ را نیز مطالعه می نماییم (تحت بررسی قرار می دهیم)

$$\text{III: اگر } x_n \in R' \quad y_n \in R' \quad n=1,2,\dots, u$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \dots \dots (4,12)$$

طوری که (4,13) $a \in R', b \in R', a < b$ پس موجودیت چنین عدد n_0 برای

تمام اعداد $n > n_0$ غیر مساوات (4,14) $x_n < y_n$ مطابقت دارد.



ثبوت: فرضاً $U(a)$ و $U(b)$ مجاورت نقاط a و b که متقاطع نیستند، موجود باشد. در آن صورت

مطابق شرط $a < b$ نتیجه میشود که برای هر $x \in U, y \in U$ غیر مساوات

$$(4,15) \dots\dots\dots x < y \dots\dots\dots \text{صدق مینماید. به شکل 11} \dots\dots\dots (15,4)$$

در بند شرط (4,12) چنین عدد n_0 موجود است که برای تمام اعداد $n > n_0$ ،

$$(4,12) \dots\dots\dots x_n \in U \text{ و } y_n \in U \text{ صادق است.}$$

زیرا که غیر مساوات (4,15) به عوض غیر مساوات (4,14) ثبوت شد.

نتیجه 1: فرضاً x_n ، a و b بالای R' واقع باشد، طوری که $n=1,2,\dots$ اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ و

$a < b$ (مطابق $a > b$) باشد، پس چنین عدد n_0 موجود می شود که برای تمام اعداد $n > n_0$

$$(4,17) \dots\dots\dots x_n < b \text{ صدق میکند (مطابق غیر مساوات } x_n > b \text{).}$$

ثبوت: فرضاً $a < b$ باشد. مترادف فرعی $y_n = b$ ، طوری که $n=1,2,\dots$ را بررسی میکنیم

در آن صورت مترادف های $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ تحت شرایط (4,12) و (4,13) تطبق میشوند.

در نتیجه شرط (4,14) در حالت داده شده به غیر مساوات (4,17) تبدیل میشود ، بطور مشابه

حالت $a > b$ بررسی میگردد.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b, y_n \in R', x_n \in R'$$

نتیجه 2: اگر $n=1,2,\dots$ بوده ، طوری که $n \rightarrow \infty$ $n \rightarrow \infty$

و $a \in R'$ ، $b \in R'$ باشد، پس برای تمام $n=1,2,\dots$ غیر مساوات ذیل تطبیق میشود.

$$(4,18) \dots\dots\dots x_n \leq y_n \dots\dots\dots$$

بنابراین، (4,19) $a \leq b$ صادق است.

ثبوت: فرضاً شرط (4,18) تطبق میشود. اگر موجود شود که $b > a$ ، پس مطابق خاصیت (III)

لیمت چنین اعداد n_0 یافت میشود، که برای تمام اعداد $n > n_0$ غیر مساوات $x_n > y_n$ تطبق

میشود. و این برخلاف شرط (4,18) است. در نتیجه غیر مساوات (4,19) صادق است. در نتیجه

مفصلاً چنین استنباط میشود که اگر $x_n \leq b$ ، $n=1,2,\dots$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ پس غیر مساوات $a \leq b$

صادق است. در حقیقت اگر ترادف فرعی ثابت $y_n = b$ و $n=1,2,\dots$ در نظر بگیریم پس برای

ترادف های $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ میتوان شرط نتیجه 2 را کاربرد در این صورت داریم.

پس برای تمام $n=1,2,\dots$ غیر مساوات $x_n \leq y_n = b$ ، $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ، $n=1,2,\dots$ ، $a \in R$ / $x_n \in R'$

مطابقت دارد. زیرا که مطابق نتیجه 2 غیر مساوات $a \leq b$ صدق میکند.

نتیجه 2 به این معنی که اگر ترادف $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ دارای لیمت

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a , \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b , a \in R' , b \in R'$$

پس غیر مساوات $x_n < y_n$ و $x_n \leq y_n$ ممکن است بر لیمت تقرب نماید، زیرا که در حالت اول هم

از آن یاد آوری شده بود. در نتیجه به صورت عمومی میگویند که غیر مساوات

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a , \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b , a \in R' , b \in R'$$

دقیق است، خاطر نشان میسازیم که اساساً به ترادف های عددی علاقمند آن میباشیم ترادف

نقاط گسترش مستقیم عددی در مقدمه قبلاً بطور فشرده بیان گردیده.

تبصره 1: برای اینکه ترادف عددی $\{x_n\}$ عدد a دارای لیمت خود باشد، لازم است تا برای هر دو عدد $\varepsilon > 0$ و $c > 0$ چنین عدد n_0 یافت شود که برای تمام اعداد $n > n_0$ غیر مساوات $|x_n - a| < c_\varepsilon$ صدق کند، کافی است تا چنین عدد $c > 0$ یافت گردد که برای هر $\varepsilon > 0$ چنین عدد n_0 پیدا شود که برای تمام $n > n_0$ به همین قسم غیر مساوات $|x_n - a| < c_\varepsilon$ تطبیق شود. از این ادعا چنین نتیجه بدست می آید که مثبت بودن اختیاری $c > 0$ و $\varepsilon > 0$ عدد حاصله c_ε نیز بنام عدد اختیاری مثبت یاد میشود.

بطور مثال اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ پس برای هر $\varepsilon > 0$ چنان عدد n_0 موجود میشود که برای تمام

اعداد $n > n_0$ غیر مساوات $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ صدق کند. گاهی بررسی ترادف که از ترادف های داده

شده حاصل میشود، برای نامگذاری تمام حدود آنها و یابعضی ست های فرعی بی نهایت از آنها مفید واقع میشود. در آینده برای چنین ترادف مکرراً از لیما ذیل استفاده خواهد شد.

لیما (لیم): اگر ترادف $x_n \in R$ $n = 1, 2, \dots$ باشد دارای لیمت متناهی و یابی نهایت $\{x_n\}$ باشد و چنین ترادف اعداد طبیعی که مساوی به

$$\lim_{k \rightarrow \infty} n_k = +\infty \quad (4, 20)$$

باشد، پس ترادف $\{x_{n_k}\}$ و ترادف $\{x_n\}$ دارای عین لیمت میباشند. ارائه حد $\{x_{n_k}\}$ به ترادف

$\{x_{n_k}\}$ عدد n_k بنام عدد (قیمت) این حد در ترادف $\{x_n\}$ عدد k در ترادف x_{n_k} قیمت آن می k_0

نامند.

ثبوت: فرضاً $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ این به آن معنی است که برای هر مجاورت $U(a)$ نقطه a چنین

عدد n_0 موجود میشود که برای تمام اعداد $n > n_0$ صدق نماید، طوری که $x_n \in U(a)$ به

علت تطبیق شرط $(4, 20)$ برای عدد n_0 چنان عدد پیدامیشود که برای تمام اعداد $k > k_0$

غیر مساوات $n_k > n_0$ صدق می کند. در نتیجه، افاده $x_{n_k} \in U(a)$ روشن است. این به آن

معنی است که:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$$

تبصیره 2: اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} = \infty$ ، $\lim_{k \rightarrow \infty} n_k = +\infty$ باشد، پس همیشه راجع به لیمت ترادف $\{x_{n_k}\}$ ممکن

است زیادگفته شود، ولی تنها که $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$

و ممکن است چنین واقع شود که: $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = +\infty$

یا: $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = -\infty$

بطور مثال:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (-2k)^{2k} = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (-n)^n = \infty$$

یا:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [-(2k-1)]^{2k-1} = -\infty$$

تعریف 6: ترادف $\{x_{n_k}\}$ که از حدود ترادف $\{x_n\}$ تشکیل گردیده است. در چنین حدود مشابه

عناصر آنها در مطابقت به همان ترادف تشکیل گردد، ترادف اولی $\{x_n\}$ بنام ترادف فرعی یاد

می شود.

به این ترتیب ترادف $\{x_n\}$ عبارت از ترادف فرعی، ترادف $\{x_n\}$ میباشد. اگر شرایط $k < k'$ معادل به شرایط $nk < nk'$ ، $k' = 1.2. \dots$ باشد، پس $1, 3, 5, \dots, 2n+1, \dots$ ترادف است اما $2, 1, 3, 4, \dots, n$ ترادف قطار اعداد طبیعی $1, 2, 3, 4, \dots, n$ شمرده نمیشود. در هر دو حالت عناصر ترادف (1) ست فرعی، ست اعداد حقیقی را بوجود می آورند. اما در حالت اول حدود ترادف در همان ردیف مرتب قرار دارند که ردیف اعداد طبیعی قرار دارند. اما در حالت دوم این ردیف تغییر دارد.

اگر $\{x_n\}$ ترادف فرعی، ترادف $\{x_n\}$ باشد پس واضح است که $nk \geq k$ بوده و $k = 1.2. \dots$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nk = +\infty \text{ : میباشد. در نتیجه}$$

از اینجا به اساس لیم (لیم) نتیجه میشود که اگر ترادف دارای لیمت متناهی یا بی نهایت باشد ، پس هر ترادف آن دارای چنین لیمت میباشد:

تمرین 8: فرضاً از حدود ترادف اعداد طبیعی $\{n\}$ ترادف جدید $\{nk\}$ تشکیل شود، طوری که حدود مختلف ترادف $\{n\}$ تقرب کند به حدود مختلف ترادف $\{nk\}$ که جمله داده شده $nk \rightarrow n$ به خود ست یک تعداد حدود جدید آن که این معادل است به آنچه که جمله داده شده $nk \rightarrow n$ به خود ست اعداد طبیعی N میباشد. ثبوت نمایند که در این حالت $\lim_{k \rightarrow \infty} nk = \infty$ است.

4.4: محدودیت ترادف های متقارب :

تفاوت ترادف $\{x_n\}$ ست عناصر x_n و ست قیمت عناصر آنها در این است که ست اولی همیشه بی نهایت بوده و از مجموع عناصر تشکیل یافته که اندازه آخرین حدود تعداد آن متفاوت میباشد. $n = 1, 2, 3, 4, \dots$

وست دوم از تمام اعداد قیمت عناصر ترادف داده شده تشکیل یافته و میتوان متناهی باشد.

بطور مثال: ترادف ثابت $x_n = 1, 2, 3, 4, \dots$ و $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ طوریکه تمام ترادف ها از بی نهایت عناصر اعداد تشکیل یافته است.

اما ست قیمت عناصر آن از عدد 1 تشکیل یافته است.

تعریف 7: ترادف از بالا (پائین) محدود است اگر ست قیمت عناصر آنها از بالا (پائین) محدود باشد،
تعریف عناصر ترادف را میتوان به ترتیب ذیل تعمیم داد:

تعریف 7: ترادف $\{x_n\}$ بنام ترادف محدود از بالا (پائین) یاد میشود. اگر چنین عدد موجود شود که برای تمام اعداد $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ غیر مساوات $x_n \leq b$ صدق نماید.

(در مطابقت به غیر مساوات $\{x_n \geq b\}$)

تعریف 8: ترادف محدود از بالا و پائین بنام ترادف محدود یاد میشود. واضح است که ترادف $\{x_n\}$ محدود است و قتیکه تنها و تنها چنین عدد b موجود شود که برای تمام اعداد $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ غیر مساوات $|x_n| \leq b$ صادق باشد.

تعریف 9: ترادف که از بالا، (پائین) محدود نباشد بنام ترادف غیر محدود از بالا، پائین یاد میشود.

بطور مثال: ترادف های $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ و $\left\{\sin \frac{\pi}{2} n\right\}$ محدود اند.

ترادف $\{n\}$ غیر محدود است. واضح است که این ترادف از طرف پائین محدود است ولی

از طرف بالا غیر محدود است و ترادف $\left\{\sin \frac{\pi}{2} n\right\}$ غیر محدود از طرف بالا و پائین است.

قضیه 2: اگر ترادف عددی دارای لیمت متناهی باشد در آن صورت محدود میباشد.

ثبوت: فرضاً ترادف متقارب $\{x_n\}$ داده شده است.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

فرضاً:

بطور مثال: $\varepsilon = 1$ میگیریم، مطابق تعریف لیمت ترادف باید چنین n_1 موجود شود که برای هر

$$n > n_1 \text{ غیر مساوات } |x_n - a| < 1 \text{ صدق نماید.}$$

فرضاً: d بزرگتر از عدد 1 و $|x_1 - a|, \dots, |x_n - a|$ باشد.

پس برای تمام $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ غیر مساوات $|x_n - a| \leq d$ صادق است، در این صورت

برای تمام n داریم که: $a - d \leq x_n \leq a + d$ به این معنی که ترادف داده شده محدود است.

4.5 ترادف مونوتونی (یکنواخت)

تعریف 10: سرحد فوقانی (تحتانی) ست قیمت عناصر ترادف $\{x_n\}$ بنام سرحد فوقانی

(تحتانی) ترادف داده شده یاد میشود.

و چنین نشان میدهند $\sup\{x_n\}$ و یا $\sup x_n$ (درمطابقت به $\inf\{x_n\}$ و یا $\inf x_n$)
 $(n = 1, 2, \dots)$

اگر سرحد فوقانی (تحتانی) یک عدد باشد، پس در آن صورت این تعریف را میتوان به ترتیب ذیل

فورمول بندی نمود.

تعریف 11: عدد a عبارت از سرحد فوقانی (تحتانی) ترادف $\{x_n\}$ ، $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ میباشد، اگر:

(1) برای هر $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ غیر مساوات $x_n \leq a$ (غیر مساوات $x_n \geq a$) صدق نماید.

(2) برای هر $\varepsilon > 0$ چنین عدد n_ε موجود شود که $x_{n_\varepsilon} > a - \varepsilon$ (درمطابقت به $x_{n_\varepsilon} < a + \varepsilon$) شود.

تعریف 12: ترادف $\{x_n\}$ بنام ترادف متزاید (متناقص) یاد میشود ، اگر برای هر $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ غیر مساوات $x_n \leq x_{n+1}$ (درمطابقت به غیر مساوات $x_n \geq x_{n+1}$)⁽¹⁾ صدق نماید. ترادف متزاید و متناقص بنام یکنواخت یاد میشود.

بطور مثال ترادف $\{\frac{1}{n}\}$ متناقص است ، ترادف $\{n\}$ متزاید است و ترادف $\{\sin \frac{\pi}{2} n\}$ مونوتونی محسوب نمیشود.

قضیه 3: (ویراشتراس)⁽²⁾: تمام ترادف های عددی متزاید $\{x_n\}$ دارای لیمت منتهای است ، اگر آنها محدود از طرف بالا و بی نهایت باشد. که برابر به $+\infty$ است.

اگر آنها غیر محدود از طرف بالا باشد چنانچه:

$$\lim x_n = \sup \{x_n\} \dots \dots \dots (4, 21)$$

$$n \rightarrow \infty$$

باشد ، بطور مشابه به تمام ترادف های عددی منتهای $\{x_n\}$ دارای لیمت منتهای میباشد. اگر این ترادف محدود پائین و بی نهایت باشد ، برابر به $(-\infty)$ است. و اگر آن غیر محدود پائین باشد در آن صورت برابر است به:

$$\lim x_n = \inf \{x_n\} \dots \dots \dots (4, 22)$$

$$n \rightarrow \infty$$

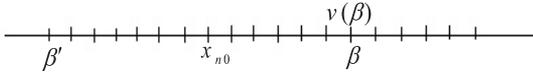
ثبوت: فرضاً ترادف $\{x_n\}$ متزاید است. مساوات (4.21) را ثبوت می نماییم.

از ادعائی باقیمانده قضیه برای ترادف متزاید به نتیجه ذیل میرسیم.

(1) ترادف متزاید (متناقص) همینطور بنام غیر متناقص (غیر متزاید) یاد میشود.

فرضاً: $\beta = \sup \{x_n\}$ (قیمت β میتوان متناهی، ویابی نهایت که برابر به $+\infty$) باشد و مجاورت اختیاری $V(\beta)$ را در نظر میگیریم.

نقطه β را به β' نشان میدهم انجام طرف چپ آن به β' مطابق شکل 12 است.



شکل 14

واضح است که $\beta' < \beta$ میباشد مطابق به تعریف سرحد فوقانی داریم که:

(1) برای هر عدد $n \in N$ غیر مساوات زیر را داریم.

$$x_n \leq \beta \dots \dots \dots (4,23)$$

$$x_{n_0} > \beta' \dots \dots \dots (4,24)$$

به علت تزايد ترادف $\{x_n\}$ از (4.23) و (4.24) نتیجه میشود که برای تمام اعداد n_0

$$\beta' < x_{n_0} \leq x_n \leq \beta \dots \dots \dots (4,25)$$

غیر مساوات: (4,23) (4,24) به این معنی که β عبارت

از لیمت ترادف $\{x_n\}$ میباشد. بطور مشابه حالت ترادف متناقص بررسی میگردد. □.

تبصره: 1: به این ترتیب تمام ترادف های مونوتونی (یکنواخت) اگر متناهی باشد، پس محدود است و اگر بی نهایت باشد پس غیر محدود است و دارای لیمت بوده که لیمت آن برابر به $+\infty$ است.

اگر ترادف یکنواخت باشد، پس غیر محدود فوقانی است و اگر ترادف غیر محدود تحتانی باشد برابر به $-\infty$ است. ترادف فرعی یکنواخت نیز ترادف یکنواخت میباشد. همینطور آن به نوبت خود همیشه دارای لیمت متناهی یا بی نهایت بوده که یقیناً بالیمت ترادف ها مطابقت

دارد(مراجعه نمایند به : لیما در پراگراف 4.3) در فوق اشاره شده بود که اگر مترادف متقارب باشد ، پس آن محدود است.

قضیه 2: از اینجا به عنوان نتیجه گیری که اگر مترادف متزایدشونده متقارب باشد، پس این مترادف از بالا محدود است. از طرف دیگر اگر مترادف متزایدشونده از بالا محدود باشد، پس این مترادف متقارب است.(قضیه 3).

به این ترتیب ادعائی ذیل صدق می نماید.

نتیجه: برای اینکه مترادف متزایدشونده متقارب شود لازم و کافی است ، تا این مترادف از بالا محدود باشد. بطور مشابه برای مترادف متباعد شونده این ادعا صادق است.

تبصره 2: اگر $\{[a_n, b_n]\}$ سیستم داخل قطعه ها به طوریکه به صفر متقرب میشوند داشته باشیم و نقطه باشد که متعلق به تمام قطعه های سیستم داده شده باشد، پس :

$$\xi = \lim a_n = \lim b_n \dots \dots \dots (4,26)$$

$$n \rightarrow \infty \quad b \rightarrow \infty$$

این حقیقت در پراگراف (3.7) اشاره شده که $\xi = \sup \{a_n\} = \inf \{b_n\}$ از طرف دیگر مترادف $\{a_n\}$ در مطابقت به $\{b_n\}$ متزاید(متناقص) می باشد از اینجا به اساس مساوات (4.21) و (4.22) و مساوات (4.26) به نتیجه میرسیم.

مثال: عدد: فرضاً $x_n = (1 + \frac{1}{n})$ داشته باشیم طوری که $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ باشد. نشان میدهد که این مترادف مشابه با تطبیق فورمول بینوم نیوتن بدست می آید.

$$\begin{aligned}
 x_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{n^3} + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-R+1)}{1 \cdot 2 \cdot R} \cdot \frac{1}{n^R} + \\
 &\dots + \frac{n(n-1)\dots 1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{R!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{R-1}{n}\right) + \\
 &\dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \dots \dots \dots (4,27)
 \end{aligned}$$

انتقال از n به $n+1$ در حاصل جمع بخش اول مساوات (4.27) جای می‌گردد. عدد جمع شونده
 طوری که با هم مثبت باشد اضافه می‌شود. به غیر از آن هر یک از جمع شونده‌ها با سومی علاوه

میشود، طوری که: $1 - \frac{s}{n} < 1 - \frac{s}{n+1}$ ، $s = 1, 2, \dots, n-1$ ، $n = 1, 2, 3, \dots$ طوری که

$$n = 1, 2, 3, \dots, x_n < x_{n+1} \text{ باشد.}$$

تبصره دیگر که در (4.27) تذکر گرفته که هر یکی از قوس‌های شکل $1 - \frac{s}{n}$ از یک کمتر است و

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}} \text{ در نتیجه } 2^{n-1} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2 \leq 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = n!$$

$$x_n \leq 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \dots \dots \dots (4.28)$$

حاصل جمع: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$ (طوری که میتوان به فرمول ابتدائی ریاضی برای

حاصل جمع پولینوم (حدود) تصاعد هندسی به آسانی بر حسب معلوم محاسبه کرد و این

$$\text{برابر به } 1 - \frac{1}{2^{n-1}} \text{ طوری که } n = 1, 2, 3, \dots \text{ بطور خلاصه حاصل میداریم که:}$$

$$(4.29) \dots\dots\dots 3 < x_n + 1 < x_n \leq 2 \text{ و همینطور ترادف } \{x_n\} \text{ بر اساس قضیه 3}$$

متزاید محدود بالایی و دارای لیمت میباشد. این لیمت به حرف e نشان داده میشود. به گرفتن لیمت به اساس (4.29) حاصل میداریم که $2 < e \leq 3$ است. ارقام بسیار دقیق میتوان حاصل نمود که نزدیک به مساوات $e \approx 2.718281828459045$ است. همینطور ثبوت میشود که عدد ناطق است (مراجعه شود به پراگراف (34.14) علاوه بر آن غیر الجبری بوده و به غیر از یک عده معادلات الجبری با ضرایب تام حساب نمیشود، عدد در آنالیز ریاضی رول خاصی را بازی میکند. و به تفصیل در اساسات لوگارتیم طبیعی محاسبه میشود.

4.6 قضیه بلزانو⁽¹⁾ – ویرشتراس

در پراگراف 4.4 ثبوت شد که تمام ترادف های متقارب محدودند. در حقیقت عکس این ادعا درست نیست بطور مثال ترادف $x_n - (-1)^n$ طوریکه $n=1,2,3,\dots$ محدود غیر متقارب است. همین قسم نشان داده میشود که تمام ترادف های محدود دارای ترادف های متقارب فرعی اند. این ادعا بنام قضیه بلزانو-ویرشتراس یاد می گردد. یا خواص فشرده ترادف های محدود می باشد. قضیه 4: از هر ترادف محدود میتوان ترادف متقارب جدا ساخت و از هر ترادف غیر محدود ترادف بی نهایت بزرگ، که دارای لیمت بی نهایت خود با علامه مشخص میباشد.

ثبوت: فرضاً ترادف $\{x_n\}$ محدود باشد، پس در آن صورت چنین قطعه خط $[a,b]$ موجود میشود، که $a \leq x_n \leq b$ طوریکه $n=1,2,3,\dots$ باشد قطعه $[a,b]$ را با دو قطعه برابر تقسیم میکنیم اگر بر حسب اندازه آخرین حدودیکی از قطعه بدست آمده دارای عناصر بی نهایت زیاد ترادف داده شده میباشد. و چنین نشان داده میشود $[a_1, b_1]$ فرضاً $\{x_n\}$ از چنین حدود ترادف داده شده که بالای $[a_1, b_1]$ واقع شده، قطعه $[a_1, b_1]$ بالای دو قطعه برابر تقسیم می نماییم.

(1) بلزانو- (1781-1848) ریاضیدان چکی.

اگر یکی از قطعه حاصل شده دارای بی نهایت حدود از ترادف اولی باشد، پس آنها را دوباره تقسیم می نمایم و به $[a_2, b_2]$ نشان می دهیم. به علت اینکه در قطعه $[a_2, b_2]$ باز هم بی نهایت حدود ترادف موجود است بنابراین می توان چنین نوشت: $\{x_{n_2}\}$ که $n_2 \in [2, \infty[$ و $n_2 > n_1$

این پروسه ادامه می یابد. قطعه های $[a_k, b_k]$ ترادف را حاصل می داریم که هر حد

آخری (بعدی) عبارت از نیمه قبلی بوده و ترادف چنین عناصر x_{n_k} ترادف

$$\{x_{n_k}\} \text{ ترادف } [a_k, b_k] \text{ است. در صورتیکه } k' > k \text{ باشد. ترادف } [a_{k'}, b_{k'}]$$

به علت ساختمان ترادف فرعی، ترادف $\{x_{n_k}\}$ نامیده می شود. نشان می دهیم که این ترادف فرعی

متقارب می باشد. ترادف قطعه $[a_k, b_k]$ طوری که $k = 1, 2, \dots$ بنام ترادف داخل انتروالهای

$$b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k} \text{ طوری که صفر می شود یاد می نماید. طوری که}$$

در صورت که $k \rightarrow \infty$ باشد. مطابق به پرنسپ داخل کرده شده قطعه ها (مراجعه نماید به

پرآگراف 3.7) یگانه نقطه ξ موجود می شود که تماماً بالای این قطعه واقع گرده که در (مراجعه

$$\text{نماید به فورمول (4.26) و تبصره 2 قضیه 3. } \lim_{n \rightarrow \infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} b_k = \xi$$

$$k = 1, 2, \dots \quad a_k \leq x_{n_k} \leq b_k \text{ به همین قسم مطابق خواص } \Pi \text{ (مراجعه نماید به: پرآگراف}$$

$$4.3 \text{ ترادف متقارب) ترادف } x_{n_k} \text{ همینطور برابر به } \xi = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \text{ است. نشان داده شده}$$

است. فرضاً ترادف $\{x_n\}$ غیر محدود است، در آن صورت یا غیر محدود بالای است

و یا غیر محدود پائین است. یابکی از آنها است. فرضاً برای ترادف معین $\{x_n\}$ غیر محدود بالای

و قتی که چنین $n_1 \in \mathbb{N}$ که $n_1 > 1$ موجود شود و اتفاقاً ترادف $\{x_n\}$ ، $n = n_1 + 1$ ، طوری که

$n = n_1 + 2 \dots$ همینطور غیر محدود دبالایی است طوری که ترادف داده شده غیر محدود دبالایی $\{x_n\}$

، $n = 1, 2, 3, \dots$ حدود عددمتناهی آنرا جدامیسازیم حاصل میداریم ، چنانچه $n_2 > n_1$ ، $n_2 \in N$ باشد که

$x_{n_2} > 2$ موجود شود. این پروسه را ادامه میدهیم ترادف چنین اعداد n_k که

$\dots < n_k < \dots < n_2 < 1$ و $x_{n_1} > 1$ ، $x_{n_k} > k$ ، $x_{n_2} > 2$ حاصل میداریم. از اینجا نتیجه میشود که

x_{n_k} ترادف فرعی $\{x_n\}$ مطابق نتیجه خواص Π پراگراف 4.3 که $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = +\infty$

تبصره: ادعایی دوم قضیه 4 را میتوان تصریح کرد : درثبوت قضیه 4 نشان داده شده بود که

اگر ترادف از بالا غیر محدود باشد، پس ترادف فرعی که تقرب به $+\infty$ میکند موجود نیست.

بطور مشابه اگر ترادف از پائین غیر محدود باشد، پس ترادف فرعی که تقرب به $-\infty$

میکند موجود نیست.

تعریف 13: لیمت متناهی یا بی نهایت با علامه مشخص ترادف فرعی ترادف داده شده بنام لیمت

قسمی آن یاد میشود. قضیه بلزانو-ویرشتراس (حصه اول قضیه 4) و شباهت آن برای ترادف

غیر محدود (حصه دوم قضیه 4) نشان میدهید که اجزای تمام ترادف های آن دارای لیمت متناهی یا

بی نهایت باشد ، اگر ترادف محدود باشد متناهی اصلی است. به این ترتیب هر ترادف عددی $\{x_n\}$

$x_n \in k$ باشد در گسترش سنت اعداد حقیقی دارای لیمت قسمی میباشد ، در آن صورت ست لیمت قسمی

به k' برای هر ترادف همیشه غیر خالی میباشد.

تمرین 9: ثابت نمایید که برای اینکه ترادف متقارب باشد لازم و کافی است تا آن محدود دارای لیمت

قسمی باشد.

10: ثابت نماید که عنصر a (عددیایی از بی نهایت با علامه $+\infty$ و $-\infty$) عبارت از لیمت قسمی ترادف

میباشد تنها وقتیکه هر مجاورت آنها دارای بی نهایت پولینوم های ترادف داده شده میباشد.

4.7 معیار کوشی (برای تقارب ترادف ها)

قبلاً از معیار کوشی معلومات عمومی که میتوان توسط آن ترادف داده شده متقارب تشخیص میگردید موجود نبود. و نیز خود تعریف ترادف متقارب برای آن کافی نبوده که بتوان بوسیله قیمت آن لیمت نامعلوم را تشخیص نمود. همینطور که معیار برای تعیین (تعریف) ترادف موجود نبود که به اساس خواص عناصر ترادف داده شده استوار باشد، که بعداً در زمینه در قضیه 5 راجع به معیار کوشی بحث خواهد شد.

تعریف 14: میتوان گفت که ترادف $\{x_n\}$ شرایط کوشی را صدق میکند. اگر برای هر $\varepsilon > 0$ عدد n_ε موجود شود که برای تمام اعداد n و m شرایط $n > n_\varepsilon$ و $m > n_\varepsilon$ را صدق نماید، غیر مساوات (4.30)..... $|x_n - x_m| < \varepsilon$ صادق است. ترادف که معیار کوشی را صدق می کند بنام ترادف اساسی یاد میشود. توسط سمبولهای منطقی شرایط کوشی را طور ذیل مینویسند.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \forall m \in \mathbb{N}; n > n_\varepsilon, m > n_\varepsilon : |x_n - x_m| < \varepsilon$$

شرایط (4.30) را میتوان چنین فورمول بندی نمود: برای هر $\varepsilon > 0$ چنین عدد n_ε موجود شود که برای تمام اعداد $n > n_\varepsilon$ و برای تمام اعداد تام غیر منفی p غیر مساوات، (4.31)..... $|x_n + p - x_n| < \varepsilon$ صدق کند.

برای اینکه به شرایط معادل (4.30) و (4.31) نایل شویم کافیست که $p = n - m$ شود. اگر $n \geq m$ باشد و $p = n - m$ باشد. و اگر $m > n$ شود به اساس قضیه 5 (معیار کوشی)، برای اینکه ترادف متقارب باشد لازم و کافیست تا شرایط کوشی را تأمین کند.

(1) و کوشی (1798-1857) ریاضیدان فرانسوی.

ثبوت شرط لازمی: فرضاً ترادف $\{x_n\}$ متقارب باشد، اگر $\varepsilon > 0$ باشد، در آنصورت

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

مطابق به تعریف لیمت ترادف چنین n_ε موجود شود که برای تمام اعداد $n > n_\varepsilon$ غیر مساوات

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

تطبيق شود فرضاً $n > n_\varepsilon$ و $m > n_\varepsilon$ باشد، در آنصورت:

$$|x - x_m| = |(x_n - a) + (a - x_n)| \leq |x_n - a| + |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

بنابراین، شرایط کوشی صدق میکند.

ثبوت شرط کافی: فرضاً در ترادف شرایط کوشی را صدق می کنند در آنصورت برای تمام

$\varepsilon > 0$ چنین n_ε موجود شود که $n > n_\varepsilon$ و $m > n_\varepsilon$ باشد.

$$\text{پس } |x - x_m| < \varepsilon$$

بطور مثال: $\varepsilon = 1$ را در نظر میگیریم در اینصورت چنین عدد n_1 موجود میشود، در صورتیکه

$n > n_1$ و $m > n_1$ باشد غیر مساوات $|x_n - x_m| < 1$ تطبيق میشود. اگر $n > n_1$ و $m = n_1 + 1$ باشد، پس

$$|x_{n_1} - x_n + 1| < 1 \text{ است. ویا } x_{n_1} + 1^{-1} < x_n + 1^{-1} \text{ در صورت که } n > n_1 \text{ باشد. به این معنی}$$

که ترادف $\{x_n\}$ ، $n = n_1 + 1, n_1 + 2, \dots$ محدود است. به اساس قضیه 4 ترادف متقارب $\{x_n\}$ موجود میشود.

فرضاً $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ نشان میدهم که تمام ترادف های داده شده $\{x_n\}$ همین قسم متقارب

و دارای لیمت عدد a است. فرض میکنیم که $\varepsilon > 0$ باشد، در آنصورت اول بر حسب تعریف

لیمت ترادف چنین k_ε موجود میشود که برای تمام نمبر $k > k_\varepsilon$ یا همین قسم مطابق

خودتعریف ترادف برای تمام $nk > nk_\varepsilon$ غیر مساوات $\frac{\varepsilon}{2} < |x_{nR} - a|$ تطبیق

میشود. همینطور، ترادف $\{x_n\}$ شرایط کوشی را تامین می کند. پس چنین عدد n_ε موجود میشود که

برای تمام $n > n_\varepsilon$ و برای تمام $m > n_\varepsilon$ غیر مساوات $\frac{\varepsilon}{2} < |x_n - x_m|$ تطبیق میشود. حاصل

میداریم که $N_\varepsilon = \max\{n_\varepsilon, nR_\varepsilon\}$ در صورتیکه $nk > N_\varepsilon$ باشد، در آن صورت برای تمام $n > N_\varepsilon$ باشد. حاصل میداریم که :

$$|x_n - a| = |(x_n - x_{nR}) + (x_{nR} - a)| \leq |x_n - x_{nR}| + |x_{nR} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

از اینجا ثبوت شد که :
 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

تمرین 11: متن شرایط لازمی و کافی منفی معیار کوشی را فورمول بندی نماید طوری که ترادف لیمت نداشته باشد.

12: ثابت نماید برای اینکه ترادف $\{x_n\}$ متقارب باشد، لازم و کافی است تا برای هر $\varepsilon > 0$ چنین

$$n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ موجود شود که برای تمام } n > n_\varepsilon \text{ غیر مساوات } \varepsilon < |x_n - x_{n_\varepsilon}| \text{ صدق نماید.}$$

مسئله 3: واضح نماید که ترادف معمولی و غیر متقارب $\{x_n\}$ از شرایط کوشی که برای

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + p - x_n) = 0$$

هر عدد طبیعی p لیمت موجود است.

4.8 ترادف های بی نهایت کوچک:

بالای ترادف ها میتوان عملیه های، حسابی، جمع، تفریق، ضرب و تقسیم را اجرا نمود. آنها را تعریف می نماییم.

تعریف 15: فرضاً ترادف عددی $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ داده شده باشد، حاصل جمع، حاصل تفریق، و حاصل ضرب این ترادف ها بنام مطابقت ترادف یاد میشود.

طوری که $\{x_n + y_n\}$ ، $\{x_n - y_n\}$ ، $\{x_n y_n\}$ اگر $y_n \neq 0$ و $n = 1, 2, 3, \dots$ باشد، می نامند. پس

تقسیم ترادف $\{x_n\}$ بالای ترادف $\{y_n\}$ بنام ترادف $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ یاد میشود. بالاخره ضرب ترادف

$\{x_n\}$ در عدد (c) بنام ترادف $\{cx_n\}$ یاد میشود. اگر ترادف $\{y_n\}$ چنان باشد که دارای

عناصر عددی متناهی متزاید برابر به صفر باشد، پس در آن صورت چنین عدد $n_0 \in \mathbb{N}$ که

$n \geq n_0$ و $n \in \mathbb{N}$ موجود شود که غیر مساوات $y_n \neq 0$ تطبیق میشود. پس در آن صورت ممکن

است ترادف $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$

هدایت مفاهیم راجع به ترادف با عدد $n \geq n_0$ را بررسی نمایید.

تعریف 16: ترادف $\{x_n\}$ را در صورتی بنام ترادف بی نهایت کوچک یاد میشود اگر

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$$

شود، در پیراگراف (3.1) نیز ترادف بی نهایت کوچک $\alpha_n = \frac{1}{n}$ ، $\alpha_n = \frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{2} n$

، $n = 1, 2, 3, \dots$ بررسی گردیده است. چند خواص ترادف بی نهایت کوچک را یادآور میشویم:

(1) هر ترکیب خطی معین، بی نهایت کوچک عبارت از بی نهایت کوچک میباشد.

ثبوت: فرضاً ترادف عددی $\{x_n\}$ و $\{\beta_n\}$ بی نهایت کوچک است، پس در آن صورت:

$$\lim \alpha_n = \lim \beta_n = 0 \dots \dots \dots (4.32)$$

$$n \rightarrow \infty \quad \beta \rightarrow \infty$$

و λ و μ هر کدام با عدد حقیقی نشان می‌دهیم که ترادف $\{\lambda\alpha_n + \mu\beta_n\}$ نیز بی نهایت کوچک است. فرضاً چنین $\varepsilon > 0$ اختیاری داده شده و چنین عددی را در نظر می‌گیریم طوری که:

$$c > |\lambda| + |\mu| \dots \dots \dots (4.33)$$

چنین عدد n_0 موجود می‌شود که برای تمام $n > n_0$ غیر مساوات

$$|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{c}, \quad |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{c} \dots \dots \dots (4.34)$$

صادق است .

به این ترتیب

$$|\lambda\alpha_n + \mu\beta_n| \leq |\lambda(\alpha_n) + \mu\beta_n| < \frac{|\lambda| + |\mu|}{c} \varepsilon < \varepsilon$$

(4.33), (4.34)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda\alpha_n + \mu\beta_n) = 0$$

پس در آن صورت ترادف $(\lambda\alpha_n + \mu\beta_n)$ بی نهایت کوچک است. در نتیجه

طبق گفتار فوق برای هر ترکیب خطی بی نهایت کوچک از میتود استقراری استفاده می‌شود. مسأله 4: جمع اعداد بی نهایت را تعریف نمایید و نیز جمع اعداد ترادف بی نهایت را با مثال واضح نماید و ترادف بی نهایت کوچک را تعریف نموده و جمع ترادف های که بی نهایت شمرده نمی‌شود با مثال واضح نماید.

(Π) حاصل ضرب ترادف های بی نهایت کوچک در ترادف های محدود بنام ترادف های بی نهایت کوچک یاد می‌شود.

ثبوت: فرضاً α_n ترادف بی نهایت کوچک است و $\{x_n\}$ ترادف محدود است ، پس در آنصورت چنین عدد $b > 0$ موجود میشود که برای تمام $n = 1, 2, 3, \dots$ غیر مساوات $|x_n| \leq b$ صدق مینماید.

$\varepsilon > 0$ داده شده به اساس تعریف بی نهایت کوچک بر حسب نتیجه چنین عدد n_ε موجود شود که

برای تمام $n > n_\varepsilon$ غیر مساوات $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{b}$ صدق نماید پس برای تمام $n > n_\varepsilon$ داریم که:

$$|\alpha_n x_n| = |\alpha_n| |x_n| < \frac{\varepsilon}{b} \cdot b = \varepsilon$$

به این معنی که ترادف $\{\alpha_n x_n\}$ بی نهایت کوچک است. □.

نتیجه: حاصل ضرب عدد مشخص ترادف بی نهایت کوچک ترادف بی نهایت میباشد.

در نتیجه بر حسب استقرای ریاضی خواص Π یادآور میشویم که ترادف بی نهایت کوچک مانند

تمام ترادف ها که دارای لیمت میباشد، محدوداند. (مراجعه نمائید به: قضیه 2. پر اگر ارف 4.4)

مسئله 5: مفاهیم ذیل را تعریف و بامثالها واضح نماید:

حاصل ضرب عددی نهایت به اساس تعداد مضرب ها (مفاهم عمومی حاصل ضرب متناهی

مضرب ها) حاصل ضرب ترادف عددی نهایت، ضرب عددی نهایت کوچک، و حاصل

ضرب ترادف های بی نهایت کوچک.

تمرین 13: ثابت نمایید که ترادف $x_n \neq 0$ طوری که $n = 1, 2, 3, \dots$ بی نهایت کوچک است شرط

لازمی و کافی برای اینکه ترادف $\frac{1}{n}$ ، $n = 1, 2, 3, \dots$ بی نهایت بزرگ باشد بنویسید.

4.9 خواص لیمت هاراجع به عملیه های حسابی بالای ترادف ها:

لیما(لیم): برای اینکه عدد a لیمت ترادف عدد $\{x_n\}$ شود لازم و کفایت تا حدود $\{x_n\}$ دارای شکل

$x_n = a + a_n$ ، $n = 1, 2, 3, \dots$ باشد. در حقیقت $\{x_n\}$ ترادف بی نهایت کوچک است فرضاً ترادف

$\{x_n\}$ و عدد a داده شده باشند، پس در آنصورت حاصل می‌داریم که $a_n \stackrel{def}{\Leftrightarrow} x_n - a$

در آنصورت شرط $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ طبق تعریف لیمت ترادف مساوی است به: برای هر $\varepsilon > 0$

چنین عدد $n_0 \in \mathbb{N}$ موجود شود که برای تمام $n > n_0$ غیر مساوات $|x_n - a| < \varepsilon$ صادق باشد

پس در آنصورت غیر مساوات $|\alpha_n| < \varepsilon$ صادق بوده و معادل به آنکه $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$. □

لیمای فوق در ارائه و خواندن لیمت ترادف های بی نهایت رول خاصی را بازی

میکند. همینطور توسط لیمای متذکره لیمت ترادف فوق به صفر مساوی گردیده است. که

در مطالعه خواص ردیف ترادف های متقارب بسیار وسیع استفاده میشوند. خواص لیمت

ترادف راجع به یک عدد عملیات بالای حدود ترادف های عددی را ثابت می نماید.

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ اگر ترادف $\{x_n\}$ متقارب باشد، پس متقارب به ترادف $\{x_n\}$ است. در صورتیکه اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

باشد، پس $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|$ میباشد.

ثبوت: اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|$ ، پس برای هر $\varepsilon > 0$ چنین عدد n_ε موجود شود که برای تمام اعداد

$n > n_\varepsilon$ غیر مساوات $|x_n - a| < \varepsilon$ صادق باشد. و $||x_n| - |a|| < |x_n - a|$ همین قسم برای تمام

اعداد $n > n_\varepsilon$ بجا خواهد بود که میتوان غیر مساوات $\|x_n - a\| < \varepsilon$ را نوشت این به آن معنی

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - a| = 0 \quad \square \quad \text{است که}$$

²) ترکیب خطی متناهی ترادف متقارب عبارت از ترادف متقارب است، که لیمت آن برابر به همین ترکیب خطی لیمت های ترادف داده شده میباشد.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \in R, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \in R \dots \dots \dots (4.35)$$

ثبوت: فرضاً در آن صورت به علت

شرایط لازمی لیمت برای موجودیت لیمت متناهی حدود ترادف $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ ممکن است به این شکل نوشت (4.36) $x_n = a + \alpha_n, y_n = b + \beta_n, n = 1, 2, \dots$ و $\{\alpha_n\}$ و $\{\beta_n\}$ بی نهایت کوچک.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0 \dots \dots \dots (4.37)$$

فرضاً حال λ و μ اعداد است، پس در آن صورت حدود ترادف $\{\lambda x_n + \mu y_n\}$ به شکل:

$$\lambda x_n + \mu y_n = (\lambda a + \mu b) + (\lambda \alpha_n + \mu \beta_n), n = 1, 2, \dots \dots \dots (4.38)$$

به علت که ترادف $\{\alpha_n\}$ و $\{\beta_n\}$ بی نهایت کوچک است. همین طوری نهایت کوچک است (مراجعه نمائید به: خواص ¹ ترادف بی نهایت کوچک در پراگراف 4.8).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda \alpha_n + \mu \beta_n) = 0 \dots \dots \dots (4.39)$$

$$(4.36)$$

به اساس شرایط لیما برای موجودیت لیمت متناهی از مساوات (4.38) نتیجه میشود که ترادف

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda x_n + \mu y_n) = \lambda a + \mu b$$

دارای لیمت برابر به $\lambda a + \mu b$ بوده پس به اساس

(مراجعه نمائید به 4.35) داریم.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda x_n + \mu y_n) = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \mu \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

طبق معلومات قبلی اگر برای هر ترادف متقارب از میتوداستقرائی ریاضی استفاده شود، پس در نتیجه ترکیب خطی متناهی بدست می آید.

(3^o): اگر ترادف $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ متقارب باشد، پس حاصل ضرب آنها $\{x_n y_n\}$ همین قسم متقارب است و مینویسند.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

پس داریم که لیمت حاصل ضرب ترادف متقارب موجود است و برابر به حاصل ضرب لیمت ترادف داده شده میباشد.

ثبوت: فرضاً $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ در آنصورت داریم که: $y_n = b + \beta_n, x_n = a + \alpha_n$

طوریکه: $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0$ و $n = 1, 2, 3, \dots$

زیرا که: $x_n y_n = (a + \alpha_n)(b + \beta_n) = ab + (\alpha_n b + \beta_n a + \alpha_n \beta_n)$ به علت خواص I

و II ترادف بی نهایت کوچک (مراجعه شود به پراگراف 4.8)

پس:

$$x_n y_n = (a + \alpha_n)(b + \beta_n) = ab + (\alpha_n b + \beta_n a + \alpha_n \beta_n)$$

$$\lim(\alpha_n b + \beta_n a + \alpha_n \beta_n) = 0$$

$$n \rightarrow \infty$$

$$\lim x_n y_n = ab = \lim x_n \lim y_n$$

$$n \rightarrow \infty \quad n \rightarrow \infty \quad n \rightarrow \infty$$

نتیجه 1: اگر ترادف $\{x_n\}$ متقارب باشد، پس برای هر عددی ترادف $\{cx_n\}$ نیز متقارب می‌باشد.

$\lim c\alpha_n = c \lim x_n$
پس در آن صورت عدد ثابت را می‌توان به عقب علامه لیمت نوشته، این $n \rightarrow \infty \quad n \rightarrow \infty$

ادعا مستقیماً از خواص 3⁰ نتیجه می‌شود. و قتی که ترادف $\{y_n\}$ ثابت باشد $y_n = c$ و $n = 1, 2, 3, \dots$ (و همین طرز خواص 2⁰ و قتی که $y_n = 0$ باشد $n = 1, 2, 3, \dots$) باشد به نتیجه می‌رسد.

نتیجه 2: اگر $\{x_n\}$ ترادف متقارب و k عدد طبیعی باشد، پس داریم.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)^k = (\lim_{n \rightarrow \infty} x_n)^k$$

این ادعا بر حسب استقرائی ریاضی خواص 3⁰ به نتیجه می‌رسد.

4⁰: اگر ترادف‌های $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ متقارب باشند و $y_n \neq 0$ طوری که $n = 1, 2, 3, \dots$ و $\lim y_n \neq 0$

شود پس ترادف $\{\frac{x_n}{y_n}\}$ متقارب است و داریم که:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}$$

پس در آن صورت لیمت قسمی ترادف متقارب فرض شده موجود است و برابری لیمت قسمی ترادف‌های داده شده می‌باشد.

ثبوت III: فرضاً $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ، $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \neq 0$ باشد برای تعریف $b > 0$ داریم که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0$$

و مطابق نتیجه (1) که $n = 1, 2, 3, \dots$ طوریکه $y_n = b + \beta_n$ ، $x_n = a + \alpha_n$

از خواص لیمت ترادف در پر اگراف 4.3 چنین عدد n_0 موجود شود که برای تمام اعداد $n > n_0$

$$\text{غیر مساوات } y_n = \frac{b}{2} \text{ صدق می نماید.}$$

(واقعاً $\frac{b}{2} < b$ است ، در اینجا از فرضیه $b > 0$ استفاده شده) زیرا در صورتیکه $n > n_0$ باشد داریم

$$\left(y_n \neq 0 \right) \frac{1}{y_n} < \frac{2}{b}$$

زیرا به آن میتوان تقسیم کرد)

$$\frac{x_n - a}{y_n - b} = \frac{a + \alpha_n - a}{b + \beta_n - b} = \frac{1}{b(b + \beta_n)} (\alpha_n b - \beta_n a) \dots \dots \dots (4.40)$$

از اینجا $0 < \frac{1}{b(b + \beta_n)} = \frac{1}{by_n} < \frac{2}{b^2}$ پس در آن صورت ترادف $\frac{1}{b(b + \beta_n)}$ که

$n = n_0 + 2, n = n_0 + 1$ محدود است (از اینجا بدون شک نتیجه میشود که این ترادف محدود

است و نزدیک به هر $n = 1, 2, 3, \dots$) است. مطابق خواص ترادف بی نهایت کوچک، ترادف

$(\alpha_n b - \beta_n a)$ عبارت از بی نهایت کوچک میباشد بر حسب آنها ترادف

$$\left\{ \frac{1}{b(b + \beta_n)} (\alpha_n b - \beta_n a) \right\}$$

به اساس مساوات (4.40) به نتیجه میرسم که:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b} = \frac{n \rightarrow \infty}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}$$

در این حالت به طور مشابه و تئیکه $b < 0$ میگرد.

تبصره: در حالتی که ترادف دارای لیمت بی نهایت باشد، ادعا بطور مشابه مطابق به خواص

$4^0, 2^0$ بوده بصورت عموم بجا خواهد بود. بطور مثال :

فرضاً $x_n = n + 1$ ، $y_n = n$ و $n = 1, 2, 3, \dots$ باشد، پس :

در آن صورت $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = 1$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ است.

اگر $x_n = 2n$ ، $y_n = n$ و $n = 1, 2, 3, \dots$ باشد، پس داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$$

$$n \rightarrow \infty \quad n \rightarrow \infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = +\infty$$

$$n \rightarrow \infty$$

هرگاه $x_n = n + \sin \frac{\pi n}{2}$ ، $y_n = n$ و $n = 1, 2, 3, \dots$ باشد، پس داریم.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$$

$$n \rightarrow \infty \quad n \rightarrow \infty$$

وترادف $x_n - y_n = \sin \frac{\pi n}{2}$ طوریکه $n = 1, 2, 3, \dots$ دارای هیچ نوع لیمت منتهای ویابی

نهایت نمیباشد. این مثال نشان میدهدکه یک نوع فرضیه راجع به ترادف های $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ که دارای لیمت بی نهایت میباشد وجود دارد. برای ترادف $\{x_n - y_n\}$ میتوان حالت های مختلف را ملاحظه کرد. که این حالت به صورت عمومی در خواص $4^0 - 2^0$ راجع به لیمت ترادف های بی نهایت برای تمام آنها بجا خواهد بود. بطورمثال: اگر

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty \quad \text{یا} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$$

(منتهای باشد، پس در آن صورت)

$\lim_{n \rightarrow \infty} \{x_n + y_n\} = +\infty$ یا اگر $\alpha > 0$ باشد $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ شود پس در آن صورت:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha x_n = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$$

تبصره 2: اگر تفاوت $\{x_n - y_n\}$ از ترادف $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ بی نهایت کوچک باشد که آنها همزمان لیمت منتهای داشته باشند و یا نداشته باشند به دلیلی که اگر این لیمت ها موجودیت داشته باشند، پس آنها بین خود در حقیقت برابر می باشند.

فرضاً: $\{x_n - y_n\} = \alpha_n$ ، $n = 1, 2, 3, \dots$ که در اینجا $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ اگر لیمت منتهای داشته باشد

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y = (\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - \alpha_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n - \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = a$$

پس لیمت منتهای است:

ترادف های $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ طرف به طرف بین خود برابر اند پس ادعا ثبوت شد.

تمرین 14: ثبوت نمایند که اگر تفاوت $\{x_n - y_n\}$ از ترادف $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ بی نهایت کوچک باشد، پس آنها همزمان لیمت بی نهایت دارند. ویاندارند بدلیلی که اگر این لیمت ها موجودباشند، پس آنها برابراند.

(15) ثبوت نمایند که اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ باشد و ترادف $\{y_n\}$ محدود باشد، پس

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = +\infty \text{ است.}$$

مثال: فرضاً $a > 0$ و $x_0 > 0$ و (4.41) $x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}})$ ، طوری که $n = 1, 2, 3, \dots$

باشند. ثبوت می نمایم که $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n > 0$ بر حسب استقرأ ریاضی مستقیماً فهمیده میشود که $x_n > 0$

برای تمام $n = 1, 2, 3, \dots$ صادق است. بر علاوه نشان میدهیم در حالیکه $t > 0$ باشد، غیر مساوات

$$t + \frac{1}{t} \geq 2 \text{ به نتیجه میرسد، از غیر مساوات } t = \frac{x_n}{\sqrt{2}} \text{ استفاده می کنیم. به اساس (4.41) حاصل}$$

میداریم که :

$$x_n + 1 = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}) = \frac{\sqrt{a}}{2}(\frac{x_n}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a}}{x_n}) \geq \frac{\sqrt{a}}{2} \cdot 2 = \sqrt{a}$$

و $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ، حال نشان میدهیم که ترادف $x_n, n = 1, 2, 3, \dots$ متناقص است، به اساس

$$\text{غیر مساوات (4.42) حاصل میداریم که } x_n = \frac{x_n}{2} \cdot 2 = \frac{x_n}{2}(1 + \frac{a}{x_n}) \leq \frac{x_n}{2} \text{،}$$

(4.43) $n = 1, 2, 3, \dots$ و همینطور :

$\sqrt{a} \leq \dots \leq x_n + 1 \leq x_n \leq \dots \leq x_1$ درجاییکه ترتیب و تنظیم زیاداست و به صفر تقرب میکند.

$x_0 > 0$ پس در آنصورت ترادف $\{x_n\}$ محدودپائین مونوتونی (یکنواخت متناقص) بوده و به اساس قضیه 3 دارای لیمت میباشد.

فرضاً $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ به لیمت در مساوات (4.41) تقرب می نماید ، در آنصورت $n \rightarrow \infty$ تقرب

میکند. مساوات $x = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x})$ حاصل میداریم از آنجا که $x^2 = a$ و همینطور $x_n \geq 0$ پس $x > 0$

زیرا که $x = \sqrt{a}$ است. به اساس فورمول (4.41) میتواند راجع به بررسی محاسبه قیمت به جذرمربع عددکمک نموده این حقیقت را دقیق و به اساس همین مقصد در پراکتیک مورد استفاده قرار میدهد. پس در آنصورت حد x_n قیمت جذر \sqrt{a} را میدهد که با استفاده مکرر از فورمول (4.41) داریم.

$$\begin{aligned} x_{n+1} - \sqrt{a} &= \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right) - \sqrt{a} \\ &= \frac{1}{2x_n} \cdot (x_n^2 - 2x_n \sqrt{a} + a) = \frac{1}{2x_n} (x_n - \sqrt{a})^2 \end{aligned}$$

طوری که $n = 1, 2, 3, \dots$ با استفاده از فورمول غیر مساوات (4.42) را از اینجا می یابیم که

$$0 \leq x_{n+1} - \sqrt{a} \leq \frac{1}{2\sqrt{a}} (x_n - \sqrt{a})^2$$

آنقدر در پراکتیک مطمئن نیست. زیرا که قیمت جذر \sqrt{a} معلوم نیست

مانند (c) جستجو می‌کنیم که $0 < c < \sqrt{a}$ میتوان $x_0 > c$ انتخاب کرد از ارقام بدست آمده خواهیم

$$\text{داشت. } n=1,2,3,\dots \text{ طوریکه } 0 \leq x_{n+1} - \sqrt{a} \leq \frac{1}{2c}(x_n - \sqrt{a})^2$$

یا: $n=0,1,2,3,\dots$ طوریکه $\frac{1}{2c}(x_n + 1^{-\sqrt{a}}) \leq [\frac{1}{2c}(x_n - \sqrt{a})]^2$ از اینجا به اساس

استقرائی ریاضی می یابیم که:

$$\frac{1}{2c}(x_n - \sqrt{a}) \leq [\frac{1}{2c}(x_n - 1^{-\sqrt{a}})]^2 \leq [(\frac{1}{2c}(x_n - 2^{-\sqrt{a}})]^2 \leq [\frac{1}{2c}(x_0 - \sqrt{a})]^{2^n} \dots (4.44)$$

اگر x_0 نزدیک به صفر انتخاب شود که: $q = \frac{1}{2c}\{x_0 - \sqrt{a}\} < 1$ به

اساس (4.44) حاصل میشود که: $0 \leq x_n - r \leq 2cq^{2^n}$ پس در آن صورت

ترادف (4.41) به قیمت جذریاد شده به تصاعد هندسی همراه با مخرج $0 < q < 1$ تقرب میکند .

برای نمایش محاسبه تقریبی جذر توسط فورمول (4.41) جذر $\sqrt{2}$ را توسط ماشین حساب نتیجه

$x_0 = 1$ را انتخاب می نماییم. یعنی:

$$x_1 = 1,50000000\dots$$

$$x_2 = 1,414221\dots$$

$$x_3 = 1,4142135\dots$$

$$x_4 = 1,4142135\dots$$

$$x_5 = 1,4142135\dots$$

$$x_6 = 1,414213\dots$$

$$x_7 = 1,4142135\dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}} = 1 \dots \dots (4.46)$$

$$n \rightarrow \infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{-\frac{1}{n}} = 1 \dots \dots (4.47)$$

$$n \rightarrow \infty$$

فرضاً: اول $a > 1$ باشد، در آن صورت $b = \sqrt[n]{a} > 1$ در حقیقت طبق تعریف جذور $b^n = a$.
 اگر $b \leq 1$ باشد پس این غیر مساوات را n دفعه ضرب می نماییم. حاصل میداریم که
 $a = b^n \leq 1$ مگر این خلاف شرط $a > 1$ است.

$$x_n = \sqrt[n]{a} - 1 \dots \dots (4.48)$$

مطابق گفتار که $x_n > 0$ از (4.48) نتیجه میشود که

$$a = (1 + x_n)^n$$

است با استفاده از غیر مساوات برنولی داریم.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$$

همین قسم $0 < x_n < \frac{a}{n}$ زیرا که $a = (1 + x_n)^n > 1 + n \cdot x_n > nx_n$

مطابق (4.48) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ اگر $0 < a < 1$ باشد، پس $b = \frac{1}{a} > 1$ و همینطور به علت ثبوت:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b} = 1$$

$$n \rightarrow \infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{b}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{b}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b}} = 1$$

$$n \rightarrow \infty \quad n \rightarrow \infty \quad n \rightarrow \infty \quad n \rightarrow \infty$$

اگر $a = 1$ باشد، پس $\sqrt[n]{a} = 1$ طوری که $n = 1, 2, 3, \dots$ و همین قسم نیز $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ است، به این ترتیب در (4.46) به هر $a > 0$ ثابت شد. از اینجا به اساس (4.47) مستقیماً به نتیجه میرسم که:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{-\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}}} = 1 \square$$

مثال 4:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0, a > 0 \dots \dots \dots (4.49)$$

حقیقتاً، فرضاً $n_0 \in \mathbb{N}$ باشد، طوری که $\frac{a}{n_0} < \frac{1}{2}$ است، در آن صورت به همه $n > n_0$

غیر مساوات $\frac{a}{n} < \frac{1}{2}$ صادق است.

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a^{n_0} a \cdot a \dots a}{n_0! \cdot n_0 + 1 n_0 + 2 \dots n} < \frac{a^{n_0}}{n_0!} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0}$$

طوری که:

خاطر نشان میسازیم که: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{n_0}}{n_0!} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0} = \frac{2^{n_0} a^{n_0}}{n_0!} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{n_0}}{n_0!} = 0$$

مساوات (4.49) را میتوان ثابت نمود.

اگر ترادف $x_n = \frac{a^n}{n!}$ را بررسی کنیم، درانصورت $x_{n+1} = x_n \frac{a}{n+1}$ و به $n+1 > 0$

غیر مساوات $X_{n+1} < X_n$ قابل تطبیق است.

پس درانصورت آغاز ترادف $\{X_n\}$ به بعضی نمبرها متناقص میشود، به غیر آن تمام

$n \in N$ غیر مساوات $X_n > 0$ صادق است.

زیراکه این ترادف محدود پائین است و به همین قسم دارای لیمت متناهی میباشد.

فرضاً $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ در صورتیکه لیمت تقرب کند به لایتناهی $n \rightarrow \infty$ مساوات

$$X_{n+1} = X_n \frac{a}{n+1} \text{ حاصل میداریم که :}$$

$$X = \lim_{n \rightarrow \infty} X_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n+1} = x \cdot 0 = 0$$

درانصورت دوباره (4.49) دریافت میکنیم.

مثال 5: (4.50) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$ به هر $a > 0$ مساوات (4.49) بجا خواهد

بود، زیراکه برای هر $a > 0$ چنین $n_0 \in N$ پیدا شود که برای تمام $n > n_0$ غیر مساوات

$\frac{a^n}{n!} < 1$ قابل تطبیق شود، در آن صورت به $n > n_0$ بجا خواهد بود $\sqrt[n]{n!} > 0$ و همین طور

$a > 0$ اختیاری است به این معنی که مساوات (4.50) صادق است.

مثال 6:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) = e \dots (4.51)$$

بیادمی آوریم (مراجعه شود به) پراگراف 4.5 که عدد e عبارت از لیمیت ترادف است.

$$n = 1, 2, \dots, X_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = e \dots (4.52) \quad \text{در آن صورت:}$$

به اساس تزايد دقیق ترادف $\{X_n\}$ غیر مساوات: (4.53) $X_n < e \dots$ بجا خواهد بود و

$$S_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

در (مراجعه نماید به 4.28) نشان داده شده است که:

$$X_n < S_n, n = 1, 2, \dots (4.54)$$

از طرف دیگر در فرمول (4.27) $k \geq 1$ معین بوده و $n > k$ را اختیاری انتخاب نموده از قسمت

اول تمام عامل جمعی آغاز $(k + 2)$ به اساس مساوات (4.27) جدا میسازیم در نتیجه

غیر مساوات ذیل بدست میآید:

$$x_n > 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$$

انتقال به این غیر مساوات به لیمت در $n \rightarrow \infty$ و به معین بودن R یادآور میشویم که قسمت راست دارای لیمت خود (Sk) بوده به اساس (4.52) غیر مساوات بدست می آید.

$$k = 1, 2, \dots, e \geq s_k \dots (4.55)$$

با اتحاد غیر مساوات (4.54) حاصل می‌داریم که:

$$n = 1, 2, \dots, X_n \geq S_n \leq e$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 2e \quad \text{ازینجا مستقیماً مطابق (4.52) به نتیجه میرسیم که:}$$

در آن صورت مساوات (4.51) صحت است.

تبصره: برای محاسبه تقریبی عدد e فورمول $e \approx \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ مطمئن نیست همینطور تقرب

از n به $n+1$ تبدیل میشود تمام محاسبه از نو نزدیک به فورمول $e \approx S$ حاصل میشود که

بسیار مطمئن به شمارش اعداد یا انتقال از n به $n+1$ نیز باید به مفهوم خاص S_n عدد $\frac{1}{n+1}$

علاوه نمود، حاصل می‌داریم:

$$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{n+1}$$

در آن صورت اجرا کردن محاسبه به گذاشتن S_n قیمت مورد نظر آن کم نمیشود. به غیر از آن

درین حالت به اساس عدد e به قیمت مجموع S_n ارقام خطا را دریافت کرده میتوانیم (این را

در پراگراف (34.14) عملی خواهد شد)

تمرین 16: $a_0 > 0$ و $b \geq 0$ ، $n = 1, 2, \dots$ $b_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$ ، $a_n = \sqrt{a_{n-1} b_{n-1}}$ داده شده که

:

$$a_n = \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}$$

$$b_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$$

$n=1, 2, \dots$ در نظر میگیریم ثابت نماید که ترادف $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ به یک و عین لیمت a تقرب

میکند که:

$$0 \leq S_n - a_n \leq \frac{|b_0 - a_0|}{2^n}, 0 \leq a - a_n \leq \frac{|b_0 - a_0|}{2^n}$$

4.10: نمایش اعداد حقیقی کسره‌های اعشاری بی نهایت

فرضاً چنان عدد a برای تعیین $a \geq 0$ داده شده است.

طبق پرناسیپ ارشمیدس عدد تمام $n_0 > a$ موجود است، در اطراف عدد $n=1, 2, \dots, n_0$ را

کوچکترین انتخاب میکنیم که توسط خواص $n > a$ بوجود می آید و آنرا به $\alpha_0 + 1$ نشان میدهیم

، در آن صورت $\alpha_0 \leq a < \alpha_0 + 1$ قطعه $I_0 = [\alpha_0; \alpha_0 + 1]$ را به ده حصه مساوی جدامی سازیم.

در آن صورت قطعه خط $\left[\alpha_0, \alpha_0 + \frac{1}{10} \right]$ را بررسی می نماییم.

α_1, α_0 : کسرهاست که α_1 نمبر ردیف که از عدد تشکیل گردیده که به ترتیب

نمبرها از طرف چپ به راست اعداد $0, 1, 2, \dots, 9$ ترتیب شده



شکل (13)

نظربه خصوصیت علامه مقسوم بین انجام های این قطعه خط میتوانیم درینجا اول نه به 5

مثل همیشه به a نقطه 5 تقسیم نمود با تفاوت علامه 5 دو حالت ممکن است: یا اینکه نقطه a

بیکی از نقاط تقسیم شده مطابقت ندارد. شکل (13) یا اینکه نقطه a بیکی از نقطه از نقطه تقسیم

شده مطابقت دارد، اشکال (14-15) که قطعه متذکره I_0 به ده حصه برابر بدست می آید.

نظریه خصوصیت علامه مقسوم بین انجام های آن میتوانیم در اینجا اول نه به 5 مثل همیشه به

a نقطه 5 تقسیم نمود با تفاوت علامه از 5 در کسر دو حالت ممکن است: یا اینکه نقطه a بیکی

از نقاط تقسیم شده مطابقت ندارد. (شکل 13) یا اینکه نقطه a بیکی از نقطه از نقطه تقسیم شده

مطابقت دارد، اشکال (14-15) که قطعه متذکره I_0 به ده حصه برابر بدست می آید.



شکل 14



شکل 15

در حالت اول نقطه a تنها در یکی از این قطعه ها واقع است.

و به I_n نشان میدهد، پس در آن صورت $I_1 = [\alpha_0, \alpha_1, \alpha_0, \alpha_1 + \frac{1}{10}]$ در حالت دوم نقطه a

میتوان با دو حصه همسایه قطعه خط مطابق شکل (15) واقع باشد همین قسم نشان میدهم

اینکه نقطه a در طرف انجام چپ میباشد.

در هر دو حالت $a \in I_1$ قطعه خط مورد نظر I_1 رابه نوبت خود باده حصه برابر قطعه خط

توسط $I_2 = [\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 \alpha_2 + \frac{1}{10^2}]$ نشان میدهد قطعه خط های حاصله که مرکب از a

است برای اینکه نقطه a در طرف راست انجام نمیشود این پروسه را ادامه میدهم تا که سیستم داخل کرده شده نقاط را حاصل نمایم طوری که:

$$I_2 = [\underline{a}_n, \overline{a}_n], n = 0, 1, 2, \dots$$

$$a_n = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2, \dots, \alpha_n = \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n + \frac{1}{10^n} \quad \text{در اینجا}$$

در اینجا α_n یکی از ارقام $0, 1, 2, 3, \dots, 9$ هر یکی از قطعه های I_n مرکب از a است، زیرا که

a انجام راست آن نمی باشد، $a \in I_n, a \neq \overline{a}_n, n = 0, 1, 2, \dots$ ، طول قطعه I_n برابر 10^{-n}

و همین قسم به صفر تقرب میکند، طوری که $n \rightarrow \infty$ کسرهای اعشاری متناهی $\underline{a}_n, \overline{a}_n$ در صورتیکه بعدد a تقرب نماید بنام کسرهای اعشار نامیده میشوند.

دقیقتر عدد \underline{a}_n بنام متقارب پائینی اعشاری در ردیف n و عدد \overline{a}_n متقارب بالائی اعشاری در عین ردیف عدد a نامیده میشوند، آنها دارای خواص ذیل بوده و مستقیماً از تعریف نتیجه میشود.

$$\underline{a}_n \leq a < \overline{a}_n \dots \dots \dots (4.56)$$

$$\underline{a}_n \leq \underline{a}_{n+1}, \overline{a}_n + 1 \leq \overline{a}_{n+1} \dots \dots \dots (4.57)$$

$$\overline{a}_n - \underline{a}_n = 10^{-n} \dots \dots \dots (4.58)$$

درین حالت اگر $a < 0$ و فرضاً $b = -a$ باشد، دریافت میکنیم که:

$$\underline{a}_n = -\overline{b}_n, \overline{a}_n = -\underline{b}_n$$

درین صورت خواص (4.56) و (4.58) واضح است و در غیر مساوات (4.56) علامه $<$ و \leq جای خود را تبدیل میکنند.

خاصیت (4.57) معنی میدهد که قطعه $[a_n, \overline{a_n}]$ سیستم قطعه های داخل کرده شده را تشکیل میدهد. از خاصیت (4.58) نتیجه میشود که طول قطعه ها $[a_n, \overline{a_n}]$ به صفر تقرب میکند بلاخره (4.56) معنی میدهد که نقطه a بالای تمام این قطعه ها واقع اند. زیرا که تبصره 2 پراگراف 4.5 در زمینه روشن است آنرا لیمت انجام های a_n و $\overline{a_n}$ میباشد و همچنان راجع به دقیق بودن آن لیمت ذیل ثابت شده است.

لیما 1: موجودیت چنان عدد a ترادف $\{a_n\}$ را متزاید، و ترادف $\{a_n\}$ متناقص میسازند که:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{a_n} = a$$

نتیجه: هر عدد حقیقی عبارت از لیمت های ترادف های اعداد ناطق میباشد، نتیجه لیما منتج بر آن میشود که: $[a_n, \overline{a_n}]$ اثر (نشان) عدد ناطق است.

فرضاً حال از نو $a \geq 0$ و $\underline{a_n} = \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ در مطابقت به عدد a کسر های اعشار بی نهایت $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ میگذاریم. خاطر نشان میسازیم که درینجا α_0 عدد تمام غیر منفی میباشد و α_n که $n=1, 2, \dots$ یکی از ارقام $0, 1, 2, \dots, 9$ بوده عدد a عبارت از یگانه عدد است که بالای قطعه I_n ، $n=1, 2, \dots$ قرار دارد.

زیرا که اعداد مختلف اشاره شده به کسر های اعشار مختلف مطابقت میکند پس در آن صورت فرق آن a_k ($k=0, 1, 2, 3, \dots$) میباشد. دیگر خاطر نشان میسازیم که چنین ساختمان نمیتوان کسر را باتناوب که از یک رقم 9 تشکیل شده باشد حاصل نمود.

واقعاً اگر عدد a به کسر ذیل $9 \dots 9, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ مطابقت کند، درین حالت $n \neq 0$ بوده که غیر مساوات $\alpha_n \neq a$ تطبیق میشود.

در آن صورت طبق ساختمان (ترتیب)

$$a \in [\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n_0}, 9, \dots, 9, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n_0}]$$

برای تمام $n > n_0$ در اینجا n عدد علامه اعشاری بعد از رقم پنج در کسر برای تمام $n > n_0$ ، I_n است از اینجا نتیجه میشود که a انجام اولی تمام قطعه $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n_0}, 9 \dots 9$ میباشد که خلاف $k > 1$ انتخاب این قطعه ها است به این ترتیب قرار دادن هر عدد حقیقی مطابق به $a \geq 0$ به بعضی از کسرهای اعشاری بی نهایت مطابقت میکند. نداشتن تناوب متشکیل از یک رقم 9 چنین کسر اعشار را بنام کسر تقریبی می نامند.

بالاخره هر کسر اعشار تقریبی بی نهایت $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ است در نتیجه نقطه به محیط واقع شده است در مطابقت به بعضی اعداد a بنام عدد یکتاب (وابسته) طوریکه بالای تمام قطعه منطبق باشد یاد میشود.

$$\left[\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n + \frac{1}{10^n} \right], n = 1, 2, \dots$$

به این انطباق میتوان به اعداد منفی گسترش داد. اگر عدد $a > 0$ به کسر $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots$ مطابقت کند، پس عدد a به کسر $-\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ نیز مطابقت میکند که چنین عدد را نیز میتوان تقریبی نامید.

نتیجه بدست آمده را میتوان بشکل قضیه ذیل فورمول بندی نمود.

قضیه 6: بین ست های تمام اعداد حقیقی وست های کسر اعشار تقریبی موجودیت یک قیمت متقابل مطابقت دارد. زیرا اگر به آن عدد a مطابقت کند به کسر $\pm \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$

نیز مطابقت میکند پس $\lim_{n \rightarrow \infty} \pm \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n = a$ کسر اعشاری نهایت

کردن آنرا چنین مینویسند: $\pm \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2, \dots, \alpha_n$ در مطابقت به عدد a آنرا بنام اعشار مینویسند و استفاده میکند برای افاده

کردن آنرا چنین مینویسند:

$$a = \pm \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2, \dots, \alpha_n \dots$$

اگر کسر اعشاری نهایت دارای تناوب باشد تنها از صفر متشکیل است

بعبارت دیگر $\alpha_0, \alpha_1 \alpha_2, \dots, \alpha_n, 0, 0 \dots 0 \dots 0$ اگر $\alpha_n \neq 0$ باشد پس میگویند که این کسر دارای n رقم قیمت

در آن رقم پنج میباشد به این ترتیب معمولاً صفر در تناوب نوشته نمیشود.

پس در آن صورت عدد متذکره کسر اعشاری منتهای نوشته میشود.

از نام چنین نوشته زیاد بکار میرند. $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$

تبصره: کسر اعشاری بی نهایت اختیاری $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ حتمی نیست تقریبی باشد. ممکن

است همین قسم بشکل طبیعی در مطابقت به یک عدد طبیعی که به تمام قطعه ها واقع شده

انتخاب نمود.

$$\left[\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_0 \alpha_1, \dots, \alpha_n + \frac{1}{10^n} \right]$$

که یکی هم درین مطابقت یک قیمت متقابل ندارند دارای کسرهای اعشاری بی نهایت میباشد

که بیک عدد حقیقی مطابقت میکند.

بنام کسرهای شکل: $99 \dots 9, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_n, 99 \dots 9$ و $(\alpha_n + 1)00 \dots 0$ ($\alpha_n \neq 9$)

که بیک و عین عدد مطابقت میکند در مطابقت به ساختمان و بزرگی اعداد حقیقی و کسرهای

اعشاری بی نهایت ما حاصل نمودیم که نه تنها کسرهای اعشاری تقریبی صرف

نظر از شرایط وضع شده که تکرار صورت گیرد چنین قطعه I_n را مد نظر میگیریم که عدد a انجام اولیه آن نباشد با استفاده از یادداشت اعداد حقیقی برای کسرهای اعشاری بی نهایت ممکن است قاعده را برای آنها که برابر (معادل) بر حسب کمیت و قاعده عملیه های حسابی بالای آنها باشد حاصل نمود.

این و دیگر قوانین در شباهت به عملیه کسرهای اعشاری تقریبی مطابقت میکند و میتوانیم تشکل لیمت آنها را فرمولبندی نمود و نتیجه آنها را بشکل لیما ذیل مطالعه نمود.

لیما 2: فرضاً a و b اعداد حقیقی باشد و $a < b$ باشند، درین حالت تنها چنین عدد طبیعی n_0 موجود شود که برای تمام $n > n_0$ غیر مساوات $\underline{a}_n < \underline{b}_n$ صدق نماید.

ثبوت: فرضاً $a < b$ باشد از $\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{a}_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{b}_n = b$ مطابق خواص III لیمت

ترادف (مراجعه نمایند)ه) پراگراف 4.3 که مستقیماً موجودیت نمبر خواسته شده n_0 از آن نتیجه میشود، پس در آن صورت چنین است که برای تمام نمبر $n > n_0$ غیر مساوات $\underline{a}_n < \underline{b}_n$ مطابقت دارد.

برخلاف: اگر نمبر متذکره n_0 موجود شود، پس حالت $a > b$ به علت که تنها ثبوت ممکن نیست و حالت $a = b$ به علت یک قیمته بودن عدد نوشته شده نیز ممکن نیست. و کسر اعشار تقریبی همینطور برای تمام $n = 1, 2, \dots$ غیر مساوات $\underline{a}_n = \underline{b}_n$ بجا خواهد بود، در نتیجه $a < b$ است.

لیما 3: فرضاً a و b دو عدد حقیقی باشد پس در آن صورت:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\underline{a_n} + \underline{b_n}) = a + b$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\underline{a_n} - \underline{b_n}) = a - b$$

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{a_n} \underline{b_n} = ab$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\underline{a_n}}{\underline{b_n}} = \frac{a}{b}$$

اگر $b \neq 0$ باشد ، پس تمام تا مبدای این لیما مستقیماً در لیما 1 و خواص لیما در ارتباط به عملیه های حسابی راجع به ترادف ها (مراجعه نمائید به : پراگراف 4.9) نتیجه میشود.

تبصره 2: از لیما 3 نتیجه میشود که برای اینکه طاقت های داده شده دقیق در هر عملیه حسابی بالای اعداد که بشکل کسر اعشاری تقریبی نوشته شده باشد اجرا شود ، لازم است با دقت کامل کسر های اعشار تقریبی منتهای را انتخاب و عملیه مناسب بالای آن تطبیق گردد. درینجا جمع ، تفریق و ضرب در نتیجه کسر اعشاری منتهای از نو حاصل شود. در حالت تقسیم به حصه دو کسر اعشاری منتهای حاصل میشود. میتوان بطور عمومی گفت که کسر های اعشاری بی نهایت چنانچه از ریاضی ابتدائی معلوم میشود که متناوب است ، در یکی ازین حالت ممکن است با هر طاقت با دقت کامل نتیجه افاده کسر اعشاری منتهای را حاصل نمود.

بطور مثال: اگر $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^n$ ردیف n کسر اعشار منتهای پائین باشد ، برای تقسیم $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ پس:

$$\lim \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^n = \frac{a}{b} \dots\dots\dots (4.59)$$

و همچنین تقسیم a/b ، $b \neq 0$ باشد ممکن است با هر طاققت دقیق کسرهای اعشا متناهی را

بشکل $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)n$ انتخاب نمود.

برای ثبوت مساوات (4.59) مینویسیم که:

$$\alpha_n = \frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}$$

به علت لیما 3 (مراجعه نمائید به: پراگراف 4.9) داریم که $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ حاصل با استفاده

از (4.56) و (4.58) حاصل مینماییم که:

$$\left(\frac{a_n}{b_n}\right)n - \frac{a}{b} = \left[\left(\frac{a_n}{b_n}\right)n - \frac{a_n}{b_n}\right] + \left(\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right) < \frac{1}{10^n} + \alpha_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{10^n} + \alpha_n\right) = 0$$

و یا به حساب مساوات (4.59) ثبوت شد.

تبصره 3: در نتیجه متذکره برای محاسبه فوق n ردیف کسراعداد تقریبی پائین حالات ذیل

موجود است:

در حالت عملیه جمع $\underline{a_n} + \underline{b_n}$

در حالت عملیه تفریق $\underline{a_n} - \underline{b_n}$

در حالت عملیه تقسیم $(\underline{a_n} / \underline{b_n})$

ما از نو کسرهای اعشاری متناهی را که از n زیاد نباشد ، حاصل میکنیم ، قیمت ارقام بعد از رقم پنجم در حالت ضرب چنین است $\underline{a_n b_n}$. بطور عمومی میگویند که قیمت ارقام کسر اعشاری بعد از رقم پنجم بدست می آید .

اگر $(\underline{a_n . b_n})$ عبارت از حاصل ضرب کسر اعشاری پائین $\underline{a_n b_n}$ باشد ، پس مشابه به (4.59) میشود که:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\underline{a_n . b_n})_n = a . b$$

به این ترتیب محاسبه تقریبی حاصل جمع $a + b$ ، حاصل تفریق $a - b$ حاصل ضرب و حاصل تقسیم a/b ، در مطابقت به فرمول های ذیل چنین است:

$$\underline{a_n} + \underline{b_n}$$

$$\underline{a_n} - \underline{b_n}$$

$$(\underline{a_n b_n})_n$$

$$(\underline{a_n} / \underline{b_n})_n$$

در نتیجه عملیه های متذکره بالای کسرهای اعشاری متناهی $\underline{a_n}, \underline{b_n}$ قیمت ارقام اضافه از n تعداد نیست و بعد از رقم پنجم که دوباره کسر اعشار حاصل میشود. اضافه از n نیست حاصل شدن قیمت ارقام بعد از رقم پنجم به این نتیجه میرسد که قیمت ارقام که بر حسب هر طاققت داده شده دقیقاً حاصل میشود . به این ترتیب معمولاً به عنوان عملیه های بالای اعداد در پراکتیک صورت میگیرد (تطبیق شود).

تبصره: خاطر نشان میسازم که در ساختمان طریقه نوشتن پی در پی ارقام اعداد حقیقی بعد از نود عدد (10) را انتخاب میکنیم. (قطعه خط پی هم به ده حصه برابر تقسیم میکنیم) به عوض

عدد 10 ممکن است هر عدد طبیعی n را انتخاب نمود. با استفاده از ماشین های سریع عملیات محاسبه که همیشه استعمال میشود عیناً بنام سیستم دوگانه نوشتن اعداد در مطابقت به حالت $n=2$ یاد میشود.

در نوشتن اعداد به سیستم دوگانه تنها دو عدد 0 و 1 سهیم است.

بطور مثال: عدد 14,625 در سیستم دوگانه دارای شکل 1110,101 میباشد.

عملاً نشان میدهیم که:

$$14=2^3+2^3$$

$$0, 5=2^{-1}$$

$$0,125=2^{-3}$$

$$14.625=1.2^3 + 1.2^2 + 1.2^1 + 0.2^0 + 1.2^{-1} + 0.2^{-2} + 1.2^{-3} \quad \text{دارم که :}$$

ارقام و اعداد نوشته شده در سیستم دوگانه در مطابقت به تجزیه به مضروبات آن بر حسب طاقت عدد 2 است. بطور مشابه قضیه 6 ثابت میشود که بین تمام اعداد حقیقی و تمام کسرهای دوگانه بی نهایت تناوب موجود نمیباشد، زیرا که تنها تشکیل از یک واحد بوده و دارای یک قیمت متقابل متناسب میباشد.

جهت ثبوت پی هم قطع $[n, n+1]$, $n = 0, \pm 1, \pm 2$ را تقسیم کرد. نه به ده حصه تقسیم کرد، بلکه ما آنرا در ثبوت قضیه 6 به دو حصه برابر تقسیم نمودیم.

تبصره 5: با تیوری غیر کاذبانه اعداد حقیقی ممکن است متیقین شد و برخلاف ردیف عدد حقیقی آنرا تعریف کرد مانند کسرهای اعشاری تقریبی بی نهایت ازین نوشته استفاده کرد و در آنها به ترتیب مناسب نظریه ردیف بندی و عملیات حسابی داخل کرد. طریقه دیگری از ساختمان اعداد حقیقی که به استناد از اهداف مستحکم استوار است و تمام آنها به مجموعه

عناصر بستگی دارد موجود است که توسط خواص $\bar{V}-I$ در پراگراف 1-2 تذکر به عمل آمده..J

به یاد می آوریم مراجعه نمایند به پراگراف (3.8*) که خواص $\bar{V}-I$ یکسان مجموع عناصر را مشخص میسازد. که توسط این خواص بوجود آمده به این مفهوم که هر دو مجموع برای عناصر چنانچه شرایط $\bar{V}-I$ ریزد مورفینی نظریه عملیه جمع، ضرب ترتیب و خواص یکسان میباشد. ما درینجا با خصوصیت متمایز میتود حسابی برمیخوریم به آنچه که واقعاً بدون شک اختلاف عناصر طبیعی بسیار مهم "ارتباطات مقداری" بین آنها موجود است و در حالت داده شده به خواص $\bar{V}-I$ نشان داده شده "برمیخوریم".

4.11. ست های قابل شمارش و غیر شمارش :

تبعاً سوال بوجود می آید که آیا تماماً ست های بی نهایت از عناصر یکسان از اعداد تشکیل شده و یا اینکه ست های بی نهایت مختلف بوده می توانند ؟

در قدم اول فهمیده نمی شود که بصورت عموم در عناصر یکسان اعدادی برای ست های بی نهایت در لغت چه معنی دارد. مقایسه ست های بی نهایت بر حسب مقدار عناصر تشکیل شده است و یا بر حسب توان آنها که توسط مفاهیم مطابقت یک به یک بین عناصر ست های موجود است صورت می گیرد. ("مراجعه نمایید به: پراگراف 1.2")

تعریف 17. دوست زمانی متساوالتوان نامیده می شود هرگاه اگر بین عناصر این ست ها مطابقت یک به یک وجود داشته باشد اعداد طبیعی 1، 2، n.... ست های متساوی التوان را تشکیل می دهد.

وست های قابل شمارش 2، 4، 2n... و غیره می باشد.

گرچه در جمله اول نظریه جمله دوم دوبار کوچک معلوم می شود ولی مطابقت یک به یک بدست می آید اگر عدد طبیعی n در $2n$ طوریکه $n=1,2,3, \dots$ قرار داده شود عدد قابل شمارش حصه ست اعداد طبیعی را می سازد که یکی از ست های متساوالتوان می باشد. همین طور در حالت نامتناهی بدون ست های فرعی بی نهایت بین خود به گمان کامل می تواند مساوی باشد.

تعریف 18: ست که متساوالتوان به ست تمام اعداد طبیعی باشد بنام ست قابل شمارش یاد می شود. به این ترتیب اگر X ست قابل شمارش باشد پس بین ست های X وست های اعداد طبیعی می توان مطابقت یک به یک برقرار شود یا چنین می گوید: می توانند عناصر X را نمره گزای نمود. و هر عنصر نمره گذاری شده شناخته شود طوری که $x \in X$. که بر حسب نشانه نمره اعداد طبیعی به آن مطابقت داشته باشد ست های قابل شمارش به اساس تعریف عبارت از ست های متناهی ساده می باشد طبق لیمادیل:

لیما 1: ست اختیارات نامتناهی متشکل از ست فرعی قابل شمارش می باشد .

ثبوت: فرضاً X نامتناهی باشد یکی از عناصر اختیاری آنرا انتخاب می کنیم و آنرا به X_1 فرق داشته با

شد و چنین عنصر را به حرف X_2 فرضاً درست X عناصر X_1, X_2, \dots, X_n انتخاب گردیده اند پس ست X متناهی است و در آن عناصر دیگر نیز موجود است از عناصر باقی مانده یک را انتخاب می کنیم و آنرا چنین نشان می دهیم X_{n+1} در نتیجه ما عناصر $X_n \in X, n=1, 2, \dots$ باشد را حاصل نمودیم که ست های قابل شمارش فرعی ست X را تشکیل می دهد.

لیما 2: ست فرعی اختیاری قابل شمارش ، ست قابل شمارش است .

ثبوت: فرضاً X ست قابل شمارش است که عناصر آن $X = a_1, a_2, \dots, a_n$ می تواند نمره گذاری شود فرضاً Y ست متناهی ست X باشد و آنرا به b_1 نشان می دهیم .

در قدم اول در ردیف a_1, a_2, \dots, a_n عناصر ست Y دیده می شود . پس درین صورت درین جا عنا

صر $a_n \in X$ می باشد و بعداً b_2 را از عناصر a_n نشان می دهیم که درست Y قرار دارد . و دارای

کوچکترین نمره متوسط $n > n_0$ و غیره می باشد هر عنصر Y ترادف a_1, a_2, \dots, a_n را دارد . از

این جا فاصله بین هر عدد متناهی را می توان به b_m نشان داد . و همین طور ست Y می تواند بی

نهایت اندکس m یعنی $1, 2, \dots, 3$ را به خود بگیرد به این ترتیب تمام عناصر ست Y اعداد

طبیعی که m نمره گذاری می شود نشان دهیم $m=1, 2, 3, \dots$ به این معنی که ست Y عبارت از

ست قابل شمارش است در قضیه ذیل مثال های جالبی راجع به ست های قابل شمارش ارائه می گردد .

قضیه 7: ست های تمام اعداد ناطق قابل شمارش است .

ثبوت: اعداد ناطق را به طریقه ذیل در جدول فرض می کنیم .

در مرحله اول تمام اعداد تام را به ترتیب تزايد قیمت مطلقه آنها جابجا می سازیم و همین طور به

هر عدد طبیعی عدد متقابل مخالف را قرار می دهیم یعنی :

$$n \in N, 0, 1, -1, 2, -2, \dots, n-n$$

در مرحله دوم تمام کسر های غیر اختصار شده ناطق به مخرج 2 به ترتیب کمیت مطلقه جابجا

می سازیم و دوباره به هر عدد مثبت عدد مخالف یعنی منفی را جابجا می سازیم یعنی :

$$\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{5}{2}, \dots$$

به صورت عموم در مرحله n تمام کسر های غیر قابل اختصار شده یا اختصار نا پذیر با

مخرج n به ترتیب کمیت مطلقه آنها را جابجا می سازیم و همین طور به هر عدد مثبت عدد

مخالف قرار می گیرد در نتیجه جدول اعداد بی نهایت را به طور ستونی حاصل می نمایم

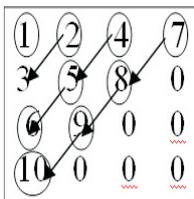
$$, 0, 1, -1, 2, -2, \dots$$

$$\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{5}{2}, \dots$$

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}$$

$$\frac{1}{n}, \frac{1}{n}$$

طوریکه دیده می شود هر عددناطق درجدول یک جا یا یک محل را به خودمی گیرد. حال از نمره عناصرجدول ذیل را به شکل نقشه دردوایر کوچک قرار می دهیم. نمره مطابق عنصر قرار دارد وتیر یک جهت نمره را نشان می دهد.



درنتجه تمام اعداد ناطق به نمره نشان داده میشود پس درین صورت ست Q اعداد ناطق قابل شمارش است.
 طبعا سوال مطرح می شود که آیا a ست نامتناهی را تشکیل می دهد. درصورتیکه قابل شمارش نباشد؟

وآنها بنام ست های غیرقابل شمارش یاد می شود. مثالهای مهم ست های غیر قابل شمارش درقضیه ذیل بیان می شود.

قضیه 8: (قضیه کانتور) : ست های تمام اعداد حقیقی غیرقابل شمارش است.

ثبوت : برخلاف فرض می کنیم : فرضا داده شده که تماما اعداد حقیقی x_1, x_2, \dots, x_n را نمره گذاری نماید آنها را توسط کسر اعشار فرض می کنیم.
 و می نویسیم.

$$x_1 = \overset{(1)}{a_0}, \overset{(1)}{a_1}, \overset{(1)}{a_2}, \dots, \overset{(1)}{a_m}$$

$$x_2 = \overset{(2)}{a_0}, \overset{(2)}{a_1}, \overset{(2)}{a_2}, \dots, \overset{(2)}{a_m}$$

$$x_n = \overset{(n)}{a_0}, \overset{(n)}{a_1}, \overset{(n)}{a_2}, \dots, \overset{(n)}{a_m}$$

(4.60)

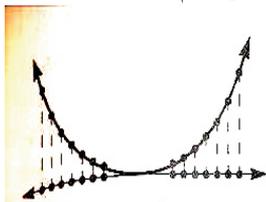
درین جا $m = 1, 2, \dots, n = 1, 2, \dots, a_m^{(n)}$

یکی از ارقام 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 و $a_0^{(n)}$ عددها با علامه رانشان میدهد.

همین طور $a_m \neq 9$ و $a_n \neq a_n^{(n)}$ را انتخاب می کنیم. پس درین صورت کسر a_n, a_2, a_1, a_0 عبارت از کسر فرض شده (مجاز) بوده مگر اعداد a_n, a_2, a_1, a_0 در اساس عدد متوسط نیست $X_n, n=1, 2, \dots$ همین طور کسر اعشار a_n, a_2, a_1, a_0 که به قیمت کسر اعشار از دیگر هر کسر تفاوت دارد (4,60) خلاف ادعای ثبوت آن می باشد. نتیجه: ست اعداد حقیقی که توسط انتروال اختیاری تشکیل گردیده غیر قابل شمارش است. ثبوت: نشان می دهیم که ست اعداد حقیقی دارای انتروال اختیاری متساوالتوان به ست های تمام اعداد حقیقی می باشد.

فرضا انتروال اختیاری متساوالتوان انتروال $(-1, +1)$ مطابقت یک به یک در مطابقت بین انتروال (a, b) می باشد و امکان برقرار شدن انتروال $(-1, +1)$ در آن باشد به طور مثال معادله خطی $x = \frac{2t-a-b}{b-a}$ اگر $a < t < b$ باشد پس $-1 < x < +1$ انتروال $(-1, +1)$ و مطابقت یک به یک توسط تابع $t(x) = f(x) = \frac{x}{1-|x|}$ به روی تمام محور اعداد حقیقی نقش می شود

به این ترتیب نشان می دهد که انتروال (a, b) متساوالتوان در تمام محور اعداد حقیقی بوده و همین طور ست غیر قابل شمارش می باشد. در قدم اول نیم دایره باز را بدون نقاط انجام های آن توسط ارتسام موازی در انتروال مطابق شکل 16 و خود آنرا در بین نقاط با مطابقت یک به یک قرار می دهیم



شکل 16



شکل 17

بعدا توسط ارتسام مرکزی از مرکز نیم دایره مرتسم آنرا بالای مستقیم رسم می نمایم طبق شکل 17 این مرتسم همین طور با مطابقت یک به یک قرار می گیرد ولی این بار بین نیم دایره و تمام مستقیم می باشد

نتیجه 2: در انتروال اختیاری اعداد غیر ناطق قرار می گیرد. ثبوت: حقیقتاً اگر در بعضی انتروال ها اعداد غیر ناطق قرار نگیرد پس در آن صورت ست فرعی ست قابل شمارش اعداد ناطق می باشد یعنی ست متناهی یا قابل شمارش را تشکیل می دهد (مراجعه نمایند به لیمه 2) که خلاف ادعای نتیجه 1 می باشد.

تبصره: در پاراگراف 4.10 ثابت گردید که اعداد حقیقی لیمت ترادف اعداد ناطق می باشد ازین جا نتیجه می شود که تمام انتروال های از اعداد متناهی پولینوم های ناطق تشکیل می شود

فرضا انتروال (a, b) داده شده و چنین $\xi \in (a, b)$ را انتخاب می کنیم $\xi = \frac{a+b}{2}$ فرض می کنیم $\xi > 0$ است. پس در آن صورت اگر $\xi_n = 1, 2, \dots$ کسر اعشار تقریبی سرحدی باشد (مراجعه نمائید به پاراگراف 4.10 نتیجه می شود که $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \xi$) انتروال (a, b) بنام حوالی نقطه انتخاب

شده § می باشد به این ترتیب طبق تعریف لیمت ترادف تمام اعداد ناطق ξ_n در برگیرنده این انتروال می باشد درین جا گفته می توانیم که چنین نمره n_0 موجود می شود که برای تمام نمره های $n > n_0$ غیر مساوات ذیل قابل تطبیق است $a < \xi_n < b$ پس درین صورت $n = n_0 + 1$ و $n = n_0 + 2$ مطلب از اعداد ناطق می باشد.

به این ترتیب در انتروال اختیاری محور عددی قسمیکه اعداد ناطق موجود اند همین طور اعداد غیر ناطق نیز موجود می باشند. درین جا مختصراً چنین می گویند ((اعداد ناطق و غیر ناطق ست فرعی ست اعداد حقیقی ارتباط دارد))

تمرین 17: ثابت نمائید که ست انتروال نقاط قطعه خط در انتروال نیمه؛ متساوالتوان می باشد میتود که برای شمارش اعداد ناطق بکار رفته امکان ثبوت گفتار ذیل را می دهد. قضیه 9: حاصل جمع ست های متناهی یا قابل شمارش غیر خالی متناهی یا ست های قابل شمارش عبارت از ست های متناهی یا قابل شمارش میباشد. ثبوت: نمر ست های فرعی اعداد ناطق را به N_n نشان می دهیم و تا n ام سطر ادامه می دهیم. نمره گذاری تعداد اعداد ناطق در شکل صفحه 143 برسیم گردیده است پس

$$N_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} n = 1$$

عبارت از ست مورد نظر اعداد طبیعی میباشد؛ شکل ست مختلف اعداد قابل شمارش دوبدو با ست قابل شمارش قطع نمی کند اگر $n = 1, 2, \dots, X_n$ ست متناهی یا قابل شمارش باشد، پس درین صورت ست $Y_1 = X_1$

$$Y_2 = X_2 \setminus X_1, \dots$$

که دوبدو قطع نمی کند.

$$Y_n = X_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} X_k, \dots$$

که هر کدام ازین ست ها متناهی یا قابل شمارش اند همین طور هر ست Y_n متناهی یا قابل شمارش است به این اساس برای هر $n = 1, 2, \dots$ مطابقت یک به یک قیمت بین عناصر ست Y_n و بعضی ست های فرعی $A_n \subset N_n$ موجود می شود. بنا بر علت اینکه Y_n دوبدو قطع نمی کند این مطابقت

یک به یک بین ست ها را تشکیل می دهد متقاطع نمی باشد $\overset{\infty}{n}=1, Y_n, X = n=1, N, An \subset N$ طبق لیمه
 2ست $\overset{\infty}{n}=1$

متناهی یا قابل شمارش مثل ست فرعی ست قابل شمارش میباشد همین طور ست X متناهی یا قابل شمارش می باشد .

قضیه 10: ست تمام ست های فرعی متناهی قابل شمارش ، ست قابل شمارش است .

نتیجه: تقسیمات ست های متناهی ممکنه با عناصر ست های قابل شمارش قابل شمارش می باشد.

ثبوت: فرضاً X ست قابل شمارش می باشد و x_1, x_2, \dots, x_n تماما عناصر این ست می باشد دیده

می شود که تماما ست های فرعی این ست از یک عنصر $\{x_1\}, \{x_2\}, \dots, \{x_n\}$ تشکیل شده عبارت

از ست قابل شمارش می باشد. حال ثبوت شد که ست تمام ست های فرعی ست X که از m عنصر

تشکیل شده $m \geq 1$ قابل شمارش است این ست فرعی را به $X_n^{(m)}$ نشان میدهم.

اگر برای هر $n=1, 2, \dots$ باشد و به ست $X_n^{(m)}$ به نوبت یک را افزود نمائیم طوری که در عناصر

ست X واقع نباشد، پس درین صورت ست قابل شمارش حاصل می شود و این ست را چنین نشان

می دهیم $X_{n,k}^{(m)}$ هر گاه مجموع تمام ست ها $k=1, 2, \dots, X_n^{(m)}$ $n=1, 2, \dots$ باشد

مجموع تمام ست ها فرعی ست X را تشکیل می دهد که از $m+1$ عنصر تشکیل یافته است. این

ست ها با معلوم بودن $n=1, 2, \dots$ ست های قابل شمارش می باشند (اندکس k دارای قیمت

$1, 2, 3, \dots$) می باشد. همین طور تمام ست های قابل شمارش مختلط ست های قابل شمارش

است طبق قضیه 9 ست های فرعی تمام ست های X که از m عنصر تشکیل شده قابل شمارش

است طبق قضیه 9 و تمام ست ها متناهی ست فرعی ست X قابل شمارش است .

ثبوت: به خاطر بدست آوردن تقسیمات ممکنه ست های داده شده به عناصر متناهی لازم است

تا تمام ست های فرعی متناهی آنرا به عناصر ممکنه ست فرعی متناهی به ست فرعی متناهی

تبدیل نمود. اگر ست X اول قابل شمارش باشد پس در آن صورت طبق قضیه 10 ست تمام ست

های فرعی متناهی آن قابل شمارش است. به این اساس تمام ست های متناهی تقسیم شده به

عناصر X عبارت از حاصل جمع ست های متناهی قابل شمارش می باشد که در نتیجه می

تواند قابل شمارش باشد. توسط قضیه 10 به آسانی می تواند شمارش تمام ست های اعداد الجبری

را انجام داد پس در آن صورت اعداد حقیقی عبارت از جذر پولینوم با ضریب تام می باشد .

قضیه 11: (قضیه کانتور): تمام ست های اعداد الجبری قابل شمارش است. ثبوت: هر پولینوم

با ضرایب تام توسط ضرایب ست خود بیان می شود پس در آن صورت در حالیکه ست متناهی

اعداد طبیعی داده شده باشد آنرا به ترتیب معلوم می گیریم درین جا تقسیمات اعداد طبیعی متناهی

به صورت ست های متناهی درین پولینوم ها کم است. ولی هر ست متناهی چنین پولینوم ها

دارای جذر حقیقی میباشد و اعداد آنها درجه پولینوم را بالا نمی برد. همین طور ست های

جذری بسیار زیاد است درست ها جذری پولینوم های مختلف است و می تواند دارای مقطع و غیر

خالی باشد. به این اساس لازم نیست تا بیان دیگر از جذر ست های قابل شمارش را داشته باشیم.

همین قدر کافی است .

* (4.12) لیمت های فوقانی و تحتانی مترادف ها

در پراگراف (4.6) نشان داده شد که هر مترادف عددی همیشه بر حسب آخرین اندازه خود دارای لیمت قسمی متناهی یا بی نهایت میباشد.

کوچکترین و بزرگترین از آنها (کم میتوان نشان داد که آنها همیشه موجود است).

در تیوری مترادف ها رول خاص را بازی میکند.

مراجع به مفهوم "بزرگتر" و "کوچکتر" در مفاهیم گسترش ست های اعداد حقیقی R مراجعه نماید به پراگراف (3.1) معلومات کافی دارد.

پس در آن صورت در قسمت (جزئیات) بزرگتر "کوچکتر" عناصر ست $x \subset \bar{R}$ میتوان $(+\infty)$ (در مطابقت به $(-\infty)$) قرار گیرد بجا خواهند بود، و تئیکه $(-\infty \in x) + \infty \in x$ باشد.

حالت متذکره چنین معنی میدهد که بی نهایت مطابق به علامه عبارت از لیمت قسمی مترادف مورد نظر میباشد.

بعضی ست ها در گسترش مستقیم عددی عناصر بزرگتر (کوچکتر) ندارند. اگر یکی از این ست ها عبارت از ست لیمت قسمی بعضی از مترادف ها باشد، پس همیشه مثال که داده شد در آنها عناصر کوچکتر و بزرگتر زیاد موجود است.

تعریف 19: بزرگترین لیمت قسمی مترادف $\{x_n\}$ بنام لیمت بالای آن یاد میشود و چنین نشان

داده میشود: $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ و کوچکترین لیمت قسمی مترادف $\{x_n\}$ بنام لیمت پائینی آن یاد میشود

و چنین نشان داده میشود. $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$

قضیه 13: در هر مترادف $\{x_n\}$ لیمت قسمی مانند بزرگتر و کوچکتر موجود است.

ثبوت: موجودیت لیمت قسمی بزرگتر را ثبوت مینمایم. برای ترادف داده شده $\{x_n\}$ دو حالت ممکن است:

یا آن محدود بالایی است یا محدود بالایی نیست اگر آن محدود بالایی نباشد، پس بی نهایت مثبت $(+\infty)$ عبارت از لیمت قسمی آن بوده که بدون شک بزرگتر است، پس داریم که:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$$

اگر عین ترادف $\{x_n\}$ محدود بالایی باشد، پس از نودو حالت ممکن است:

ست خالی و یا غیر خالی A دارای لیمت منتهای میباشد. در قدم اول حالت اول را بررسی می نماییم از محدودیت بالایی ترادف داده شده $\{x_n\}$ نتیجه میشود که محدودیت بالایی ست غیر خالی A لیمت قسمی منتهای دارد. به این علت ست A دارای سرحد فوقانی منتهای میباشد.

نشان میدهیم که $b = \sup A$ عبارت از لیمت قسمی بوده، پس داریم که $b \in A$ است. واقعاً اگر $b \notin A$ باشد پس موجودیت چنین $\delta > 0$ که در انتروال $[b - \delta, b + \delta]$ دارای حدود منتهای متزاید ترادف عددی $\{x_n\}$ بوده قسماً بایکی از آن وبخاطریکه (چرا) که درین انتروال یک عنصر ست A که خلاف ادعا شرط $b = \sup A$ باشد موجود نیست.

به این ترتیب $b \in A$ بوده و همین قسم بزرگترین عنصر A محسوب میشوند. زیرا که

$$b = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}$$

بوده به گذاشتن این حالت

وقسمت که ترادف $\{x_n\}$ محدود بالایی و لیمت قسمی منتهای آن ست خالی A باشد پس

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$$

آنرا ثبوت مینمایم

درین حالت داریم که لیمت قسمی این ست از یک عنصر ∞ تشکیل یافته که خودش بزرگتر درین ست محسوب میشوند.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$$

پس درینجا داریم که:

بطور مشابه برای هر ترادف موجودیت بزرگتر (متناهی یا بی نهایت) لیمت قسمی ثبوت میشوند.

$$x = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1 + (-1)^n}{2}$$

$$\inf\{x_n\}, \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \quad \text{تمرین 18: فرضاً:}$$

$n = 1, 2, \dots$ داده شده باشد و $\sup\{x_n\}$ را دریافت نمایید.

قضیه 14: برای اینکه عدد a لیمت بالای ترادف $\{x_n\}$ باشد لازم و کافی است تا برای هر عدد $\delta > 0$ به صورت کل دو حالت ذیل تطبیق شود:

1. موجودیت نمبر n_δ طوری که برای تمام نمبرها $n > n_\delta$ غیر مساوات $x_n < a + \delta$ صدق نماید.

2. برای هر نمبر n_0 موجودیت نمبر n^- (مربوط به n_0, δ باشد) طوری که $n^- > n_0$ و $x_{n^-} > a - \delta$ باشد.

شرط 1 معنی میدهد که در تعیین هر $\delta > 0$ به ترادف $\{x_n\}$ چنین حدود عدد متناهی که $x_n > a + \delta$ شود کم موجود است (نمبرهای آن اضافه از n_δ نیست).

شرط 2 عین معنی میدهد که در تعیین هر $\delta > 0$ به ترادف $\{x_n\}$ چنین حدود بی نهایت $x_n > a - \delta$ زیاد موجود است.

ثبوت لازمی: فرضاً $\delta > 0, \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty}$ معین باشد اگر در انتروال نیمه بسته $(a + \delta, \infty)$ ترادف

پولینومی بی نهایت $\{x_n\}$ نشان داده شده باشد پس برای چنین ترادف عناصر $\{x_n\}$ عناصر پیدامیشود که بالای انتروال نیمه بسته قرار دارد و دارای لیمت متناهی و یا بی نهایت باشد که توسط حرف b آنرا نشان میدهد. بدون شک $b \geq a + \delta > a$ که برخلاف آنچه که a بزرگتر لیمت قسمی ترادف است میباشد که در زمینه شرط (1) ثبوت شد.

بر علاوه لیمت بالای عبارت از لیمت قسمی میباشد، همین قسم دارای ترادف $\{x_n\}$ میباشد، طوریکه $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{nR} = a$ تقریباً تمام حدود ترادف $\{x_n\}$ اضافه از $a - \delta$ میباشد همین قسم ترادف X_n دارای بی نهایت پولینوم ها میباشد که اضافه از $a - \delta$ بوده در زمینه شرط 2 ثبوت شد.

ثبوت کافی: فرضاً عدد a شرایط 1 و 2 را تأمین میکند نشان میدهم که در آن صورت a عبارت

از لیمت قسمی میباشد $\delta = \frac{1}{k} \quad k = 1.2.3 \dots$ را میگیریم برای هر عدد طبیعی k چنین نمبر n_k

موجود میشود که $x_{n_k} > a - \frac{1}{k}$ (طبق شرط 2) و $x_{n_k} < a + \frac{1}{k}$ (طبق شرط 1) همینطور

برای هر R ست عناصر X_n ست داده شده بی نهایت برای اینکه غیر مساوات

$a - \frac{1}{k} < x_n < a + \frac{1}{k}$ تطبیق شود، پس نمبر n_R ممکن است پی هم $(k=1,2,\dots)$ آنرا

انتخاب کرد، طوریکه $n_{k_1} < n_{k_2}$ در صورتیکه $k_1 < k_2$ باشد، در نتیجه ما ترادف $\{x_{n_k}\}$

از ترادف داده شده $\{x_n\}$ را حاصل نمودیم.

از غیر مساوات $|a - x_{n_k}| < \frac{1}{k}$ نتیجه میشود که:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{nk} + a$$

پس داریم که a عبارت از لیمت قسمی ترادف $\{x_n\}$ میباشد.

حالا نشان میدهم که عدد a عبارت از بزرگترین لیمت قسمی میباشد.

اگر حقیقتاً b لیمت قسمی ترادف $\{x_n\}$ یافت شود، طوری که $b > a$ باشد، پس انتخاب $\delta > 0$

طوری که $a + \delta < b$ باشد حاصل میداریم که درفاصله $(a + \delta, +\infty)$ میتوانند بی نهایت

پولینوم های ترادف $\{x_n\}$ تشکیل گردد، ترادف $a > b$ تقریباً به تمام حدود ترادف فرعی تقرب

میکند.

این خلاف شرط 1 میباشد که ثبوت شد.

تمرین 19: شاید ثبوت برای اینکه ترادف لیمت داشته باشیم (متناهی، یا بی نهایت برابر به

یکی از سمبول های $(-\infty, +\infty)$ لازم و کافی است تا: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ شود.

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \quad : 20 \text{ ثبوت نمایید که}$$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf_{n \rightarrow m > n} \{ \sup x_n \} = \lim_{n \rightarrow \infty, m > n} (\sup x_n)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup_x \left\{ \inf_{m > n} x_m \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \inf_{m > n} x_n \right\} \quad : 21 \text{ ثابت نمایید که}$$

5.1 توابع حقیقی

مابه مطالعه پروسه های جهان حقیقی (فزیک، کیمیا، بیولوژی، اقتصاد و ممکنات دیگر) بطور متداوم در جریان بررسی با تغییرات مشخصه کمیات روبرو میشویم.

چنانچه تغییرات یک کمیت سبب تغییرات کمیت دیگر میشود، یا همین قسم علاوه بر آن تغییرات یک کمیت عبارت از دلیلی است که تغییرات کمیت دیگر با تغییرات مشخصه عددی کمیت مورد بررسی رابطه مستقیم دارد.

ازینجا به مفهوم تابع ومدول ریاضیکی آن میرسم که مفهوم تابع یکی از مفاهیم بسیار مهم در ریاضی وضمایم آنها میباشد. ما فعلاً در کورس متذکره آنالیز ریاضی تنها توابع حقیقی یک متحوله حقیقی را مطالعه خواهیم نمود، پس در آنصورت داریم که تابع

$$f: X \rightarrow \mathbb{R}, X \subset \mathbb{R}, X \neq \emptyset$$

باشد.

در این حالت متحول مستقل و متحول غیر مستقل را بنام متحولین حقیقی (مادی) می نامند. بعداً تابع چند متحوله را یادآوری می نماییم پس در آنصورت رادریک ست از اعداد، عناصر را که هر کدام از آنها نشان دهنده مجموع مرتبی از اعداد است معین میسازد.

میخواهیم همین قسم تابع در ارائه قیمت مختلط، تابع با متحول آزاد، که عدد مختلط شمرده میشود. و توابع دیگر که در طبیعت بسیار عمومیت دارد مطالعه خواهیم نمود. خاطر نشان میسازیم که ارائه قیمت عددی تابع (حقیقی یا مختلط) بنام تابع عددی یا سکالری می نامند، بالای قیمت عددی تابع ممکن است عملیه ها مختلف حسابی اجراء گردد.

اگر دو تابع عددی fg داده شده باشد که عین ست X و c برای بعضی اعداد یا عدد ثابت معین باشد، پس تابع cf مثل تابع قبول شده در هر نقطه $x \in X$ قیمت $cf(x)$ تعریف میشود.

مجموع دو تابع f و g بشکل $f+g$ نشان می‌دهیم و آنرا چنین تعریف می‌کنیم: $f(x)+g(x)$ مانند تابع قبول کننده در هر نقطه $x \in X$ قیمت $f(x)+g(x)$ را تعریف میکند تفاضل دو تابع

f و g را به شکل $f-g$ نشان می‌دهیم و آنرا چنین تعریف می‌کنیم $f(x)-g(x)$

حاصل ضرب دو تابع f و g را به شکل $f \cdot g$ نشان می‌دهیم و آنرا چنین تعریف می‌کنیم:

$$f(x)g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g \neq 0$$

بالاخره f/g مانند تابع در هر نقطه $x \in X$ برابر است به $f(x)/g(x)$ واضح است که $g(x) \neq 0$ باشد.

اگر تابع عدد f درست x تعریف شده باشد بنام محدود بالای (پائین) یاد میشود، هرگاه ست قیمت آن محدود بالای (پائین) باشد یا به عباره تابع f محدود بالای (پائین) است اگر چنان نقطه ثابت M پیدا شود که برای هر $x \in X$ غیر مساوات $f(x) \leq M$ در مطابقت به $f(x) \geq M$ صدق نماید.

پس تابع f محدود ست x هم بالای و هم پائین است بنام مختصر محدود درین ست یاد میشود. پس واضح است که تابع f محدود درست x تنها و تنها درحالتی که اگر چنین عدد $M \geq 0$ پیدا میشود که برای هر $x \in X$ غیر مساوات $|f(x)| \in M$ صدق مینماید.

سه حد فوقانی (تحتانی) ست قیمت y_f تابع عددی $y=f(x)$ که به ست x تعریف شده باشد، بنام سرحد فوقانی (تحتانی) تابع f یاد میشود و چنین نشان می‌دهیم.

$$\sup f, \sup_x f, \sup_{x \in X} f(x) | \inf f |$$

$$\inf f, \inf_{x \in X} f(x)$$

بسیار واضح معنی میدهد که مثلاً $\lambda = \sup f$ اگر در اول برای هر $x \in X$ غیر مساوات $f(x) \leq \lambda$ و در دوم برای هر $\lambda^- < \lambda^-$ چنان $x \in X$ موجود شود که $f(x) > \lambda^-$ باشد λ^- اندکس عناصر ست x نشان میدهد که مربوط به انتخاب عدد λ^- میباشد.

در تعریف ذکر شده سرحد فوقانی و (تحتانی) توابع میتواند هم منتهای و هم بی نهایت باشد مطابق نتیجه (3.4) تابع f محدود بالای (پائین) درست x است، و قتیکه تنها و تنها فقط اگر درین ست دارای سرحد منتهای بالای (پائین) میباشد.

تمرین: 1: ثبوت نمایید اگر تابع f محدود بالای (پائین) در قطعه $[a, b]$ باشد پس چنین ترادف نقاط $x_n \in [a, b]$ $n=1, 2, \dots$ پیدا میشود که:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = -\infty \quad \text{مطابق:}$$

- 2: ثبوت باید کرد اگر تابع محدود در قطعه نباشد، پس چنین نقطه این قطعه پیدا میشود که در حالت تابع محدود نیست آیا این مطابق به تائید از انتروال است؟
3: مثال تابع تعریف شده در قطعه و غیر محدود در آنها ترتیب دهید؟

میتوان گفت که تابع عددی f درست x در نقطه $x_0 \in X$ معین بوده قیمت بزرگتر (کوچکتر) اگر $f(x) \leq f(x_0)$ در مطابقت به $f(x) \geq f(x_0)$ برای هر نقطه $x \in X$ تعریف شده است. در این حالت میتوان نوشت که: $f(x_0) = \max_x f$ یا $f(x_0) = \max_x f$ مطابق به $f(x_0) = \min_x f$ یا $f(x_0) = \min f$ قیمت تابع بزرگتر (کوچکتر) همین قسم بنام قیمت اعظمی (اصغری) یاد میشود. قیمت اعظمی و اصغری بنام اکستریمیلی یاد میشود.

واضح است که اگر تابع f در نقطه x_0 با قیمت بزرگتر (کوچکتر) معین باشد، پس $f(x_0) = \sup f$ مطابق به $f(x_0) = \inf f$ است.

باز خاطر نشان میسازیم که اگرست داده شده X و Y نظریه f معین باشد در مطابقت به هر یکی از عناصر ست X یگانه عنصرست Y حاصل میشود. پس این تابع f درست X و با ست قیمت با موجودیت درست Y کاملاً و یا قسماً تعریف شده است مستقیماً بدون اختلاف توسط کدام حرف متحول (ارگومن) و بکدام قیمت تابع نشان میدهد به همین اشاره ساده مطابق به f نوشته: $u \in Y, u \in y, u = f(u), y \in Y, x \in X, y = f(x)$ یکسان نمایش داده میشود، همگی بطور یکسان بستگی میان x و y را معین میکنند.

$$x = \log_a^y, y > 0, y = \log_a^x, x > 0$$

بهتر روشن شدن موضوع بار دیگر راجع به حوالی نقطه در قطار افاده در تابع معین در حول نقطه استفاده نموده و اصطلاح تابع معین در حول نقطه به افاده مشابه کلمه (در) و (بالا) دارای یک مفهوم میباشد.

5.2 طریقه نمایش تابع (طریقه ارائه توابع):

درین فصل تنها توابع حقیقی یک متحول را مطالعه می‌نمائیم، پس در آنصورت تابع f را چنین ارائه می‌نمائیم:

$$f: X \rightarrow \mathbb{R}, X \subset \mathbb{R}, X \neq \emptyset$$

ما درینجا تنها به مطالعه طریقه ارائه تابع اکتفا می‌نمائیم. قبل از همه تابع را میتواند توسط فورمولی ارائه کرد که ارائه نمودن تابع توسط فورمول به نام طریقه تحلیلی می‌نامند برای این کار مطالعه مخصوص ارائه تابع را توسط عملیه الجبری وگرفتن لیمت صورت می‌گیرد. بطورمثال:

$$y = ax + y, y = ax^2, y = \sin x, y = \sqrt{1-x^2}, y = 1 + \sqrt{\log \cos 2\pi x}$$

درین حالت توابع فرعی توسط بعضی فارمول‌ها ارائه میشود که درینجا دانستن مفهوم تابع تعریف شده درست تمام اعداد حقیقی برای هر کدام اولاً توسط فورمول واضح نشان داده شده و دوم درپروسه نتیجه محاسبه برای هر عدد x تابع مورد بررسی تعریف شده است.

که عبارت از قیمت آن در نقطه x باشد طوری که ساحه موجودیت (معینیت) تابع

$$f(x) = \frac{x+|x|}{\sqrt{1-x^2}}$$

عبارت از انتروال $(-1, 1)$ است. گرچه این تابع قیمت حقیقی بالای تمام

مستقیم $x < -1$ را معین می‌سازد در تمام $x \leq 0$ آن برابر به صفر است. اما در $x < -1$ قیمت

جزر $\sqrt{1-x^2}$ عبارت از موجودیت عدد مختلط میباشد یا داور می‌شویم که درچنین تعریف

$$\text{تابع حقیقی } f(x) = x \text{ و } f(x) = (\sqrt{x})^2 \text{ دارای تعریف ساحات مختلف میباشد.}$$

تابع اول درست های تمام اعداد حقیقی و تابع دوم تنها در تمام ست نامنفی تعریف شده است.

همیشه تابع تابع توسط بعضی فارمول‌ها ارائه میشود، بطورمثال:

$$f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{برای } x > 0 \\ 0 & \text{برای } x = 0 \\ x-1 & \text{برای } x < 0 \end{cases} \dots(5.1)$$

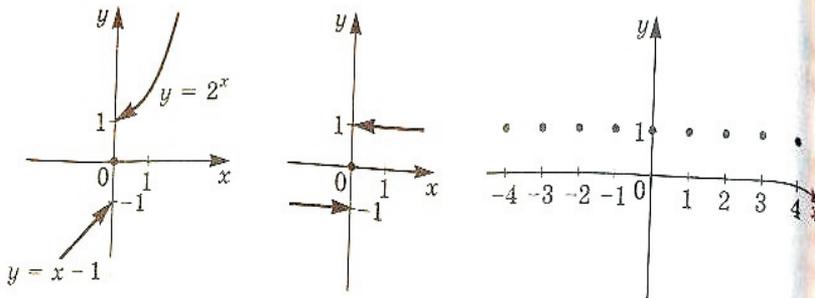
تابع را میتوان همین قسم توسط تشریح مناسب طوریکه مطابق به هر عدد $x > 0$ عدد 0 و 0 عدد 0 و به هر عدد $x < 0$ عدد (-1) را انتخاب میکنیم.

در نتیجه تابع را بالای تمام محور عددی تعریف شده حل میکنیم که سه قیمت را معین میسازد (-1, 1, 0) این تابع دارای اشاره مخصوص $\text{sign} x$ میباشد و میتوان توسط یک عدد فارمولها آنرا نوشت طوریکه:

$$\text{sign} x = \begin{cases} 1 & \text{برای } x > 0 \\ 0 & \text{برای } x = 0 \\ -1 & \text{برای } x < 0 \end{cases}$$

مثال دیگر: هر عدد ناطق مطابق به عدد را (1) و هر عدد غیر ناطق مطابق به صفر در نظر میگیریم تابع بدست آمده عبارت از تابع درجلی¹ میباشد. خاطر نشان میسازیم که تمام فرمولها عبارت از نوشته سمبولیک تعریف شده بوده بالاخره در پیرانسیب بین تابع که توسط فارمول دریافت میشود و با توسط تعریف (تشریح) دریافت میشود کدام فرق خاصی وجود ندارد. ارائه تابع توسط فارمول میتواند راه خوبی برای حل دیگر توابع باشد که چنین ارائه تابع را بنام تحلیلی یاد می نماید اگر شخصی راجع به توابع حقیقی یک متحوله حقیقی باشد پس برای نشان دادن تعلیم بصری ارتباط تابعی توسط گراف در مستوی سیستم کمیات وضعیه تشکیل میشود، کار دینات عبارت از مستوی است که بشکل سیستم قایم دیکارت میباشد.

¹ 1. درجلی (1805-1859) ریاضیدان آلمانی



از تعریف عمومی گرافیکی تابع (مراجعه شود به) پراگراف* 1.2 نتیجه میشود که گراف تابع $y=f(x)$ (x و y عدد است $x \in X$) خود ست نقاط $x \in X, f(x)$ بالای مستوی کاردینات متحولین x و y را نشان میدهد، همین گراف تابع (5.1) شکل 18 گراف تابع $\text{sign}x$ (مراجعه شود به) فورمول (5.2) در شکل 19 و گراف تابع $y=1+\sqrt{\log \cos 2\pi x}$ از نقاط جداگانه تشکیل گردیده است در مطابقت به قیمت کامل ارگومت (متحول) علامه تحت جذر قیمت منفی را معین میسازد. شکل 20.

ست نقاط $\{(x,y): x \in X, y \geq f(x)\}$ عبارت از گراف بالای تابع f است: $\{(x,y): x \in X, y \leq f(x)\}$ گراف تابع f است. ارائه گرافیکی تابع همین قسم میتواند برای ارائه ارتباط تابعی استفاده شود، زیرا که حقیقت نزدیک ارائه تابع را توسط گراف در پراکتیک با درجه دقیقتر مشخص سازد. مثال های گرافیکی ارائه تابع که در پراکتیک دیده میشود میتواند در ارائه اسیلو گراف کمک کند.

توابع ممکن است توسط جدول نیز ارائه گردد که در آن صورت برای هر قیمت متحول x نظریه قاعده معین یک قیمت y مطابقت می نماید. جدول های داده شده میتواند بطور مستقیم از تجارب و یا همین قسم توسط محاسبه ریاضی بدست می آید.

که چنین مثالها ارائه تابع عبارت از جدول لوگاریتم ، توابع مثلثاتی میباشد و چنین فکر که ارائه تابع توسط جدول در نقاط متناهی ست تعریف شده است بالاخره اجرا کردن محاسبه ی عددی بالای توابع در کمپیوتر توسط پراگراف داده میشود . برای محاسبه آنها قیمت های ضروری ارگومننت یا قیمت خواسته شده تابع بشکل داده شده در حافظه کمپیوتر سپرده میشود ، بعضی طریقه ها بسیار مهم تحلیلی و مخصوص ارائه تابع رادرمورد بررسی قرار میدهیم.

توابع غیر آشکار: فرضاً معادله به شکل (3- 5) $F(x,y) = 0$ داده شده باشد در این صورت تابع داده شده $F(x, y)$ دومتحوله x و y برای اینکه شرط (5.3) تطبیق شود و تنها چنین جوره مرتب x و y اگر موجود باشد بررسی میگردد.

اعداد توسط y_0 نشان میدهم و آنرا مطابق به عدد $x_0 \in X$ قرار میدهیم در نتیجه تابع f حاصل مینمایم که درست X تعریف شده طوریکه:

$$F(x_0, f(x_0)) = 0$$

برای تمام $x_0 \in X$ درین حالت میگویند که تابع توسط معادله غیر آشکار (5.3) داده شده است. بطور عموم میگویند نه یک تابع بلکه چندین ست تابع را میدهد، تابع غیر آشکار که توسط معادله (5.3) داده شده است بنام تابع غیر آشکار در تفاوت به تابع متحول y که توسط فارمول داده میشود است یاد میشود در آنصورت شکل فارمول تابع $y=f(x)$ میباشد. اصطلاح "توابع غیر آشکار" استقلالیت مشخصه تابعی را منعکس نمیکند و بطریقه زیاد ارائه میگردد، یکی ازین طریقه تابع میتواند مثل آشکار و یا غیر آشکار باشد.

بطور مثال : تابع $F_1(x) = \sqrt{1-x^2}$, $F_2(x) = -\sqrt{1-x^2}$ میتواند ، یا همین قسم میتواند
 بطریقه غیر آشکار توسط معادله $x^2 + y^2 - 1 = 0$ داده شده باشد ، به این مفهوم که آنها توسط
 این معادلات داده شده به مجموع تابع مبدل میشوند.

توابع مرکب :

اگر توابع $Z = F(y)$, $y = f(x)$ طوری داده شده باشند که ساحه معینیت تابع F دارای
 ساحه قیمت تابع F باشد و به طور عادی $Z = F(y)$, $y = f(x)$ باشد و تابع چنین
 تعریف شده باشد $Z = F[f(x)]$ ، پس این تابع بنام تابع مرکب یاد میشود . یا به عباره
 دیگر ، تابعی از تابع را بنام تابع مرکب یاد نمایند و ترکیب تابع f و F را چنین نشان میدهند .
 $(F \circ f)$ بنابراین داریم که :

$$(F \circ f)(x) \stackrel{\text{def}}{=} F(f(x))$$

تابع مرکب به یک قسم ارائه نمیگردد ، بلکه بطریقه های زیاد ارائه میشود .

هر نوع تابع را میتوان توسط شکل مرکب و یا به عین تابع ارائه نمود .

بطور مثال : تابع مرکب $z = 2^y$, $y = \log_2(1 + \sin^2 x)$ تابع فوق که به شکل تابع

لوگارتیمی و یا میتوان بدون $Z = 1 + \sin^2 x$ آنرا ارائه نمود .

بطریقه مشابه میتوان تابع مرکب اضافه از دو تابع مورد بررسی قرار داد .

مثلاً: $W = \sin \log \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$ را میتوان به شکل ذیل مورد بررسی قرار داد .

$$W = \sin v, v = \lg u, u = 1 + z, z = \frac{1}{y}, y = \sqrt{x}$$

5.3. توابع ابتدایی و تنصیف آن

بعضی از توابع ابتدایی و تنصیف آنها قرار ذیل است :

تابع ثابت ، $y = c$ ، c ثابت است .

تابع طاقت دار : $y = x^n$

تابع نمایی : $y = a^x$, $(a > 0)$

تابع لوگاریتمی : $y = \log a^x$, $(a > 0, a \neq 1)$

تابع مثلثاتی : $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot ax$

تابع معکوس مثلثاتی : $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$

$y = \arctan x$, $y = \operatorname{arccot} ax$

توابع فوق را توابع اساسی ابتدایی مینامند . یعنی هر تابع که بتواند بوسیله انجام دادن تعداد مشخص عملیات حسابی بالای اعداد متناهی بطریقه آشکار توسط فرمول ارائه میشود به (س. م. پراگراف 5.2) ملاحظه گردد و برای این کار معمول است تمام اعداد حقیقی را بیاد می آوریم .

در اول فرمول که برای بررسی تابع ابتدایی داده شده است دارای قیمت میباشد . و دوم در پروسه تطبیق عملیه های حسابی لازمی بر حسب این فرمول تنها اعداد حقیقی بدست می آید . بررسی توابعی که توسط فرمول ارائه میگردند ، قرار ذیل است :

$$y = ax + b, y = ax^2, y = \sqrt{1-x^2}, y = \frac{x+|x|}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$|x| = \sqrt{x^2}, y = \sin \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right), y = 1 + \sqrt{\log \cos 2\pi x}$$

تابع ابتدایی معمولاً به بخش های ذیل تقسیم بندی میشوند :

1- پولینوم ها که مربوط به تابع است و به شکل فرمول ارائه گردیده است .

یعنی:

$$y = P_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \equiv \sum_{R=0}^n a_Rx^R$$

اعداد a_0, a_1, \dots, a_n ضرایب پولینوم $P_n(x)$ یاد میشود .

اگر $a_n \neq 0$ باشد ، پس عدد n بنام درجه پولینوم داده شده یاد میشود .

پولینوم درجه اول بنام تابع خطی نیز یاد میشود و پولینومی که تمام ضرایب آنها برابر صفر باشد بنام پولینوم صفری یاد میشود . و درجه حاصل ضرب ، در ضرب پولینوم های صفری برابر به حاصل جمع درجه های عامل ضربی میباشد . با حفظ این خاصیت ضرب پولینوم های صفری برابر به درجه پولینوم $(-\infty)$ قبول نموده است و برای هر عدد حقیقی x بر حسب تعریف (م . پراگراف 3.1) که حاصل جمع با $(-\infty)$ برابر به $(-\infty)$ است . یعنی $-\infty + x = -\infty$ زیرا که $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$. در نتیجه توافق درجه حاصل ضرب پولینوم ها که بر حسب اندازه آخرین حد یک صفر قرار میگیرد .

که در آنصورت برابر به مجموع درجه عامل ضربی میباشد .

2: توابع ناطق (کسرهای ناطق) : تابع که به شکل $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ ارائه گردد مربوط به

توابع ناطق میشود که در اینجا $P(x), Q(x)$ توابع پولینومی اند بشرطیکه $(Q(x) \neq 0)$ پولینوم غیر صفری باشد .

3: خاطر نشان میسازیم که کلاس توابع پولینوم ها، منظور از کلاس تابع ناطق میباشد .

3- توابع غیر ناطق :

تابعی که ناطق نباشد بنام تابع غیر ناطق نامیده میشود . این تابع را میتوان توسط ترکیب اعداد متناهی مثل تابع ناطق ارائه نمود . و درجه تابع با توان ناطق که چهار عملیه حسابی بالای آن قابل اجرا باشد ، عبارت از تابع غیر ناطق میباشد مانند :

$$y = \sqrt{(x-1)/(x^2 + \sqrt{x})}$$

4: توابع غیر الجبری :

توابعی که نه ناطق و نه غیر ناطق باشند ، بنام توابع غیر الجبری ابتدایی یاد میشوند . مثلاً تمام توابع مستقیم و معکوس مثلثاتی ، توابع نمایی ، توابع لوگارتمی بنام توابع غیر الجبری یاد میشوند .

چون درین کورس آنالیز ، اساسات توابع حقیقی یک متحول و چندین متحول حقیقی مورد مطالعه قرار میگردد ، به این خاطر به عوض «تابع حقیقی» میتوان صرف بطور مختصر «تابع» نوشت .

5.4 تعریف اول لیمت توابع :

حالا بخاطر مطالعه یکی از مفاهیم بسیار اساسی آنالیز ریاضی به مفاهیم لیمت توابع برمیگردیم ، که در زمینه میتوان «نقاط» یا نقطه متناهی یا نقاط بی نهایت دور را در نظر گرفت ، که در آنصورت ، یا عدد حقیقی یا یکی از لایتنهای ∞ یا $+\infty$ یا $-\infty$ میباشد . حالا لیمت توابع را تعریف مینماییم : $R \rightarrow x : f, x \in R$ که این تعریف را همیشه بنام تعریف لیمت توابع به گینی² منسوب میشود.

² گ . گینی (1821-1881) ریاضیدان آلمانی

تعریف 1: نقطه a بنام *لیمت تابع* $f: x \rightarrow R$ در نقطه x_0 در صورتیکه $x \rightarrow x_0^2$ مینامند. هرگاه برای هر $x_n \in x$ ، $n = 1, 2, \dots$ دارای *لیمت* در نقطه x_0 باشد، پس در آنصورت داریم:

$$\lim x_n = x_0 \dots (5.4)$$

$$n \rightarrow \infty$$

ترادف $\{f(x_n)\}$ دارای *لیمت* a میباشد.

پس در آنصورت داریم که:

$$\lim f(x_n) = a \dots (5.5)$$

$$n \rightarrow \infty$$

درین حالت وقتیکه a *لیمت تابع* f در نقطه x_0 باشد مینویسند:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \quad \text{یا} \quad f(x) \rightarrow a \quad \text{، طوریکه} \quad x \rightarrow x_0 \quad \text{و اگر} \quad x_0 \quad \text{عدد باشد،}$$

طوریکه $x_0 \in R$ پس همیشه چنین مینویسند:

$$\lim f(x) = a$$

$$x \rightarrow x_0 \rightarrow 0$$

به شکل سمبولیک *تعریف* *لیمت تابع* بطور ذیل:

$$\lim f(x) = a \quad \underline{\underline{\text{def}}}$$

$$x \rightarrow \infty$$

$$\stackrel{def}{\Leftrightarrow} \left\{ \forall x_n \in X, n=1,2,\dots, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a \right\}$$

خاطر نشان میسازیم که در تعریف a, x_0, I و همینطور لایتنهای ∞ یا $+\infty$ یا $-\infty$ اعداد حقیقی میباشد.

اگر $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ و a عدد حقیقی باشد، در آنصورت میگویند که در نقطه x_0 تابع

دارای لیمت متناهی (برابر a) میباشد.

بنابر تعریف لیمت تابع داده شده $f: X \rightarrow R$ دارای لیمت متناهی میباشد.

تنها و تنها وقتی که برای نقطه x_0 حقیقتاً ترادف نقاط $x_n \in X$

$n=1,2,\dots$ موجود شود که در نقطه x_0 دارای لیمت باشد.

(متناهی بی نهایت) یعنی:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$$

$$n \rightarrow \infty$$

تعریف 2: فرضاً $X \subset R$ باشد که برای نقطه x_0 ترادف $x_n \in X, n=1,2,\dots$

موجود شود که در نقطه x_0 دارای لیمت باشد، بنام نقطه مماس ست X یاد میشود.

یعنی:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \dots (5.6)$$

$$n \rightarrow \infty$$

اگر نقطه مماس x_0 ست X یکی از لایتنهای ∞ یا $+\infty$ یا $-\infty$ باشد واضح است که اگر

$x_0 = \infty$ نقطه بی نهایت دور مماسی ست X باشد، پس محدود نیست. اگر

$x_0 = +\infty$ یا $x_0 = -\infty$ یا نقطه بی نهایت دور مماس باشد ، پس آن محدود بالای (پائین) نیست .

واضح است که هر نقطه x_0 واقع در خود ست X عبارت از نقطه مماسی آن میباشد .

همینطور ترادف ثابت $x_n = x_0 \in X$ ، $n = 1, 2, \dots$ توسط شرایط تعریف 2 .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \quad \text{و} \quad x_n \in X \quad n = 1, 2, \dots \quad \text{تأمین میگردد .}$$

اما بدون شرایط درست میتوانند نقاط بی نهایت مماسی موجود باشد ، که در این ست واقع نیست .

بطور مثال : نقطه $x = a$, $x = b$ عبارت از نقاط مماسی انتروال (a, b) میباشد که در آن موجود نیست .

تمرین 4 : ثبوت نمایید که اگر نقطه x_0 نقطه مماسی ست X و $X \subset Y \subset R$ باشد ، در آنصورت نقطه x_0 عبارت از نقطه مماسی Y میباشد .

تبصره : به آسانی میتوان معتقد شد که بعضی نقاط عبارت از نقاط مماسی ست داده شده میباشد ، و قتیکه تنها و تنها هر حوالی آن با این ست تقاطع کند .

واقعاً اگر x_0 نقطه مماسی ست X باشد ، پس در آنصورت ترادف $x_n \in X$ ،

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \quad \text{در نتیجه به هر نقطه حول } x_0 \text{ دارای نقاط ست } X$$

نباشد ، پس در آنصورت برای هر عدد طبیعی n چنان نقطه غیر خالی بر حسب شرایط

مقطع $x \cap U\left(x_0, \frac{1}{n}\right)$ انتخاب نموده و آنرا به x_n نشان میدهند ، پس داریم :

$n=1,2,\dots,x_n \in X \cap U\left(x_0, \frac{1}{n}\right)$ چنین ترادف $\{x_n\}$ که $x_n \rightarrow x_0$ (مراجعه نمائید

به : تبصره 1 در پراگراف 4.2) و $x_n \in x$ طوریکه $n=1,2,\dots$ به این معنی که x_0 عبارت از نقطه مماسی ست x میباشد .

برای هر ست غیر خالی $x \subset R$ سرحد فوقانی آن $\beta = \sup x$ و سرحد تحتانی آن $\alpha = \inf x$ عبارت از نقطه مماسی آن میباشد . (آنها میتوانند متناهی یا بی نهایت باشد) که مستقیماً به اساس لیما 1 نتیجه میشود . تعریف 4 سرحد فوقانی و تعریف 5 سرحد تحتانی ست میباشد .

همینطور درین تعریفات تقاضا به عمل آمده ، برای اینکه در هر حول مطابق سرحد ست نقطه در آن قرار داشته باشد ، از تعریف 1 لیمت توابع مستقیماً نتیجه میشود که در نقطه مماسی ست به اساس خود تعریف توابع نمیتوانند دارای دو لیمت متفاوت باشد . پس در آنصورت تعریف متذکره یک قیمت دارد .

علاوه بر آن ا تعریف لیمت توابع نتیجه میشود که قیمت تابع که ست نقاط میگرد و خارج از حول نقطه x_0 واقع است ، کدام تأثیر بالای موجودیت قیمت تابع در تعیین نقطه x_0 ندارد . چنانچه میگویند : موجودیت و نا موجودیت لیمت تابع در نقطه داده شده x_0 رول ندارند . و اگر فرضاً لیمت تابع در نقطه x_0 موجود باشد ، پس چنین قیمت لیمت تابع بصورت کل در مقطع خود ست $x \cap U(x_0)$ حول $U(x_0)$ بوده و دارای نقطه مماسی ست x میباشد و خود این ست رامعین میسازد .

حقیقتاً اگر حول $U(x_0)$ و ترادف $x_n \in X$ طوریکه $n=1,2,\dots$ موجود باشد که $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ و عدد n_0 دریافت شود که $n > n_0 \in N$ ، پس شامل نمودن

با $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_0)$ و حدود عدد متناهی $x_n \in U(x_0) \cap X$ بجا خواهد بود. و ترادف $\{f(x_n)\}$ به موجودیت لیمت تابع و قیمت آن در صورتیکه این علت موجود باشد، تأثیر گذار نخواهد بود.

زیرا به اساس خواص تابع که به قیمت تابع در هر حول نقاط وابستگی دارد، به انتقال تنگاتنگ (فشرده) تابع در مقطع ست آن تغییر نمیخورد و تعیین جای هر نقطه حوالی بنام خواص مقامی تابع در نقطه داده شده یاد میشود. از گفتار فوق نتیجه میشود که موجودیت قیمت لیمت در یک نقطه عبارت از خواص مقامی تابع در این نقطه میباشد.

مثال 1: فرضاً: (5.7)..... $f(x) = \frac{2x^2 + x - 1}{x - 1}$ داده شده باشد.

ست X که در تعیین تابع (5.7) از ست های تمام اعداد حقیقی IR یعنی $x = IR / \{1\}$ حاصل میشود. واضح میسازیم که اگر لیمت تابع (5.7) موجود شود (نمیشود) در نقطه $x_0 = 0$ است.

اگر ترادف $x_n \in X$ ، $n = 1, 2, \dots$ را طوری در نظر بگیریم که:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$$

پس در آنصورت به اساس قضیه پراگراف 4.9 حاصل مینماییم:

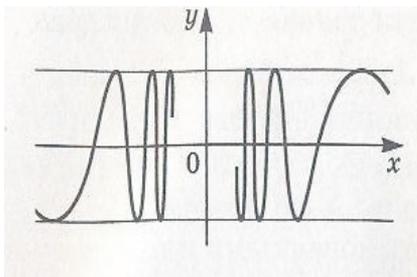
$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2x_n^2 + x_n - 1}{x_n - 1} = \frac{2 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right)^2 + \lim_{n \rightarrow \infty} x_n - 1}{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n - 1} = 1$$

به این ترتیب $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = 1$ موجود میشود و همینطور آن مربوط به انتخاب ترادف

، $x_n \in X$ ، $x_n \rightarrow 0$ ، $n = 1, 2, \dots$ باشد .

پس در آنصورت $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = 1$ موجود است .

مثال 2. شکل (21) تابع را بررسی مینماییم:

$$f(x) = \sin \frac{1}{x} \dots (5.8)$$


شکل 21

پس تابع درست $X = R \setminus \{0\}$ معین است . دوباره واضح میسازیم که لیمت تابع در نقطه $x_0 = 0$ موجود نیست و یا موجود است .

درین حالت دو ترادف را در نظر میگیریم $x_n = \frac{1}{\pi n}$ ، $x'_n = \frac{1}{\pi/2 + 2\pi n}$ طوریکه $n = 1, 2, \dots$ باشد .

واضح است که $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x'_n = 0$ ، $x'_n = 0$ ، $x_n = 0$.

(شرط $x \neq 0$ در حالت معنی میدهد که $x \in X$)

$$f(x_n) = \sin \pi n = 0$$

$$f(x_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1$$

$$n = 1, 2, \dots$$

پس $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0$ و این معنی میدهد که لیمت تابع (5.8) در صورتیکه $x \rightarrow 0$ موجود نیست.

مثال 3: فرضاً $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 2}$ ، لیمت این تابع را در صورتیکه $x \rightarrow \infty$ پیدا

میکنیم، ساحه تعریف این تابع عبارت از ست $\{x \in R \mid \sqrt{2} - \sqrt{2}\}$ میباشد.

برای این کار ترادف $x_n \in x$ ، $n = 1, 2, \dots$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ را در نظر میگیریم، در

اینصورت خواهیم داشت:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^2 + x_n + 1}{x_n^2 - 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_n^2}}{1 - \frac{2}{x_n^2}}$$

$$= \frac{1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n^2}}{1 - 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{x_n^2}} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 2} = 1$$

تمرین 5: ثبوت نمایید که لیمت $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ موجود نیست.

و لیمت $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ موجود است .

تعریف 3: فرضاً $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ داده شده، لیمت در نقطه x_0 فشرده f_E

$f_E: E \rightarrow \mathbb{R}$ باشد، تابع f در یک نقطه از ست E مفهوم جدید نیست .

این تعریف مختصر لیمت تابع است که عبارت از فشرده‌گی در بعضی ست های داده شده E میباشد .

اکثراً برای ارائه لیمت بر حسب E به عوض $x \in E$ برای کوتاه نمودن از دیگر علایم که دارای مفهوم واضح باشد، استفاده میشود .

بطور مثال در صورتیکه $E = X \setminus \{x_0\}$ نوشته میشود :

$$\lim_{x \rightarrow x_0, x \neq x_0} f(x)$$

مفهوم لیمت تابع بر حسب ست در نقطه x_0 تنها برای محتوی ست E عبارت از نقطه مماس آن میباشد . (در این حالت آن عبارت از نقطه دقیق مماسی میباشد) و در تعریف 3 از آن استفاده میگردد بصورت خلاصه میتوان گفت که مفهوم لیمت تابع در تعریف 1 عبارت از لیمت آن در نقطه x_0 بر حسب تمام ست X ها تابع f تعریف شده است .

یعنی :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X}} f(x)$$

در این حالت اگر تابع f در بعضی فرمول ها تحت لیمت $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ داده شده باشد، لیمت این تابع در نقطه x_0 در تمام قیمت ست X پیدا میشود، زیرا که توسط فرمول هذاکه

به مفهوم لیمت این تابع بوده اجرای عملیه ها حسابی بالای اعدادحقیقی صورت میگیرد.(مراجعه شودبه. پراگراف 5.2) .

مثال 4: فرضاً تابع f درپجلی(مراجعه شود به . پراگراف 5.2) در آنصورت قیمت تابع برابر به 1 است و در ست Q تمام اعداد ناطق و صفر است . در ست I تمام اعداد غیر ناطق است و در نقطه $x_0 = 0$ که لیمت آن بر حسب ست اعداد غیر ناطق برابر به (1) است ، یعنی :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in Q}} f(x) = 1$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in I}} f(x) = 0 \quad \text{و بر حسب ست اعداد غیر ناطق برابر به صفر است یعنی:}$$

بر حسب تعریف ست توابع درپجلی ، لیمت آن در نقطه $x_0 = 0$ موجود نیست .

و نیز همین قسم موجودیت و ناموجودیت لیمت ترادف $\{f(x_n)\}$ در صورتیکه $n \rightarrow \infty$ مربوط به انتخاب ترادف داده شده $\{x_n\}$ که به صفر تقرب میکند می باشد .

لیما 1: هرگاه $f: x \rightarrow R$ ، $E \subset x$ و x_0 نقطه مماس ست E و تابع f در نقطه x_0 دارای لیمت $\lim f(x)$ باشد (در اینصورت لیمت بر حسب ست x) و مفهوم هر دو لیمت برابر به :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in E}} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \dots (5.10)$$

ثبوت : اگر برای هر ترادف $x_n \in x$ ، $n = 1, 2, \dots$ ، باشد ، پس $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$. و تمام

ترادف ها $\{f(x_n)\}$ دارای یک لیمت a میباشد . این یک حقیقت واضح است و برای هر

ترادف $x_n \in X$ طوریکه $n = 1, 2, \dots$ باشد $\lim_{n \rightarrow x_0} x_n = x_0$ به همین قسم $E \subset X$ ثبوت شد .

تعریف 4 : حذف حول نقطه x_0 بنام ستیکه دور از حول نقطه x_0 حاصل شود بنام نقطه محذوف می نامند .

$$U^\circ(x_0) \underline{\text{def}} U(x_0) \setminus \{x_0\} \dots \dots (5.11)$$

حذف ε حول نقطه x_0 را چنین نشان میدهند :

$$U^\circ(x_0, \varepsilon)$$

مثال 5 : تابع $f(x) = |\text{sign}x|$ را مورد بررسی قرار میدهم (تعریف تابع $\text{sign}x$. س.م. پراگراف 5.2) دیده شود . گراف این تابع در شکل 22 نمایش داده شده است .

اگر حوالی $U^\circ(0)$ نظر به این تابع $(\text{sign}x)$ در نقطه $x_0 = 0$ باشد ، واضح است که لیمت این تابع بر حسب حذف حوال $U^\circ(0)$ میباشد . یعنی :

$$\lim_{x \rightarrow 0} |\text{sign}x| = 1$$

$$x \rightarrow 0$$

$$x \in V(0)$$

اگر به عوض لیمت تابع $|\text{sign}x|$ بر حسب تمام حوال $V(0)$ در نقطه $x_0 = 0$ تابع $|\text{sign}x|$ لیمت ندارد .

بطور مثال: برای ترادف $R = 1, 2, \dots, x_n = \frac{1}{n}R \Rightarrow 2R$ داریم که $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ نکته: $0 \in R$

در نتیجه تمام حدود این ترادف که در حوال $V(0)$ داده شده واقع شده است، آغاز یافته است. بنابراین ترادف $|signx|$ لیمت ندارد.

مثالهای 4 و 5 نشان میدهد که یک تابع میتواند در یک ست در بعضی نقاط دارای لیمت باشد و در دیگر ست ها در عین نقاط دارای لیمت نباشد. و یا شاید لیمت داشته باشد، ولی به قسم دیگر باشد.

تبصره 2: اگر توابع f و g در بعضی حوال $U(0)$ نقطه x_0 تعریف شده باشد، اما در نقطه x_0 تعریف نشده باشد، پس در اینصورت میتواند در هر x حوال محذوف $U^\circ(x_0)$ واقع باشد، آنها یک قیمت مساوی به خود میگیرند.

اگر $f(x) = g(x)$ پس در آنصورت وقتیکه لیمت آنها بر حسب حوال محذوف $U^\circ(x_0)$ همزمان موجود شود (یا نشود). اگر لیمت داشته باشند بین خود برابر اند. یعنی:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in V^\circ(x_0)}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in V^\circ(x_0)}} g(x)$$

یا در تعریف آنها تنها قیمت لیمت تابع در نقطه حوال $U^\circ(x_0)$ محذوف شامل میباشد.

در این تبصره مختصراً اصول مبهم $\frac{0}{0}$ توسط اختصار کسر در مثال ذیل واضح میسازیم:

مثال 6: لیمت $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x^2 + x - 1)x}{x^2 - x}$ را دریافت مینماییم.

بحیث تحلیل محاسبه لیمت مثال 1 را تکرار مینماییم. از اینجا به افاده به شکل $\frac{0}{0}$ غیر معین میرسیم که درین حالت ما جواب سوال را بدست آورده نمی توانیم.

راجع به موجودیت لیمت تابع (5.12) را بررسی می نمایم:

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x^2 - 1}$$

$$g(x) = \frac{(2x^2 + x - 1)(x)}{x^2 - x}$$

از تابع فوق حاصل میداریم که $g(x)$ تحت علامه لیمت قرار دارد. افاده (5.12) قسمت

اول این تابع را به x اختصار مینماییم پس توابع f و g به حوال $U^\circ(0,1) = (-1,1) \setminus \{x_0\}$

نقطه $x_0 = 0$ مطابقت میکند. به این خاطر طبق تبصره فوق همزمان درین نقطه محذوف

لیمت دارد و یا ندارد. در حالت موجودیت لیمت این لیمت ها برابر است. از مثال 1 معلوم

است که $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ و نیز در تمام ساحه مساوی میباشد.

معینیت تابع f و ست فرعی $V^\circ(0,1)$ این لیمت ها برابر است. یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \notin (0,1)}} g(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \notin (0,1)}} f(x)$$

(در مساوات اول به علت اینکه آنها به اساس خواص مقامی تابع بدست آمده صادق میباشد)

مبحث فوق اساس محاسبه بوده و در نوشته بکار برده میشود و بشکل ذیل مینویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x^2 + x - 1)(x)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 - 1} = 1$$

تبصره 3: حالت خصوصی لیمت توابع (متناهی، یا بی نهایت) عبارت از لیمت ترادف (متناهی، یا بی نهایت) میباشد. حقیقتاً ترادف $x_n \in X$ ، $n = 1, 2, \dots$ عبارت از تابع تعریف شده در ست اعداد طبیعی $f: N \rightarrow R$ ، طوریکه $f(n) = (x_n)$ ، $n = 1, 2, \dots$ به اساس تعریف قبلی لیمت ترادف $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ (مراجعه نمائید به: تعریف 1 در پراگراف 4.1).

و تعریف حالت خصوصی لیمت این تابع عیناً به تعریف لیمت تابع $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)$ یکسان است. (مراجعه نمائید به: تعریف 1 این بخش)، زیرا که اگر ترادف $\{x_n\}$ دارای لیمت (متناهی، یا بی نهایت) باشد، پس به اساس تعریف 1 پراگراف 4.1 انتخاب هر ترادف اعداد طبیعی $\{n_R\}$ طوریکه $\lim_{n \rightarrow \infty} n_R = +\infty$ ، ترادف $\{x_{n_R}\}$ دارای عینی لیمت بوده که ترادف $\{x_n\}$ آنرا در خود دارد. (مراجعه نمائید به: لیما در پراگراف 4.3)

5.5 توابع متمادی :

در صورت مطالعه لمیت تابع $f: X \rightarrow R$ طوری که $x_0 \rightarrow x_0$ میتوانند چنین واقع شود که $x_0 \in X$ (در اینصورت x_0 عبارت از عدد $x_0 \in R$) .

یا برعکس ، $x_0 \notin X$. حالت $x_0 \in X$ بسیار جالب است ، زیرا که در نظر گرفتن آن به مفهوم بسیار مهم توابع متمادی میرسیم .

مطالعه این توابع با ثبوت لیما ذیل آغاز مینماییم .

لیما 2 : فرضاً $f: X \rightarrow R$ و $x_0 \in X$ باشد ، برای اینکه تابع f در نقطه x_0 دارای

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \dots (5.13)$$
 است تا

ثبوت : شرایط کافی (5.13) برای موجودیت لمیت تابع f در نقطه x_0 واضح است این

شرایط نه تنها موجودیت لمیت را تأیید میکند ، بلکه قیمت آنرا که برابر به $f(x_0)$ است نیز دریافت میکند .

شرایط لازمی (5.13) برای موجودیت لمیت تابع f در نقطه x_0 ثبوت مینماییم فرضاً

تابع f در نقطه x_0 دارای لمیت a باشد .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \dots (5.14)$$

طبق تعریف لمیت برای هر ترادف $x_n \in X$ ، $n = 1, 2, \dots$ ، $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ و به اساس

مساوات 1 داریم :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a \dots (5.15)$$

در خصوص قیمت $x_0 \in X$ این مساوات برای ترادف ثابت که متشکل از یک نقطه x_0 باشد صادق است. پس در اینصورت برای ترادف ثابت $x_n = x_0$ ، $n = 1, 2, \dots$ حالت (5.15) دارای شکل ذیل میباشد :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_0) = a \dots (5.16)$$

از طرف دیگر چون لیمت یک تابع ثابت برابر است به خود ثابت ، پس در اینصورت :

$$\lim f(x_0) = f(x_0) \dots (5.17)$$

به اساس مساوات (5.16) و (5.17) داریم $f(x_0) = a$.

تعریف 5 : تابع $f: X \rightarrow R$ در نقطه $x_0 \in X$ متمادی نامیده میشود .

اگر $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \dots (5.18)$ باشد .

شرط (5.18) به این معنی که حالت متمادیت تابع در نقطه x_0 به آسانی دریافت میگردد و مطابق لیما 2 ، شرط (5.18) مساوی است .

زیرا که $f: X \rightarrow R$ در نقطه x_0 دارای لیمت بوده و $x_0 \in X$ میباشد .

طبیعی است که در این حالت وقتیکه برای تابع $f: X \rightarrow R$ لیمت $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ برابر به

یکی از بی نهایت $-\infty, +\infty, \infty$ شود ، در اینصورت $x_0 \notin X$ میباشد . و در حالت بر عکس

برای ترادف ثابت $x_n = x_0$ ، $n = 1, 2, \dots$ بجا خواهد بود که :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_0) = f(x_0)$$

همینطور بر حسب شرایط تابع f تنها قیمت عددی میگیرد که خلاف فرضیه لیمت متناهی

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ میباشد .

قابل تذکر است که اگر تابع در یک تعداد نقاط دارای لیمت بی نهایت باشد ، در اینصورت تابع غیر متمادی است .

در اخیر یاد آور میشویم که در تعریف 5 نقطه x_0 که در آن مفهوم متمادیت تابع تعریف شده ، حرف متعلق به مستقیم عددی R است ، بنابراین نقطه بی نهایت دور محاسبه نمیشود و برای تطبیق مفاهیم آنالیز متمادیت تابع در نقطه ، و نقاط لیمتی ست تعریف جداگانه داده شده است .

تعریف 6 : نقطه $x_0 \in X$ بنام نقطه $x \in R$ مینامند ، هرگاه در حوالی $U(x_0)$ این نقطه موجود شود و مقطع $U(x_0) \cap X$ با ست X تنها در یک نقطه x_0 تشکیل گردد ، یعنی:

$$U(x_0) \cap X = \{x_0\} \dots (5.19)$$

قابل تذکر است که تمام نقاط ست اعداد طبیعی N گسستی بوده ، اما ست Q تمام اعداد ناطق بصورت عموم دارای نقاط جداگانه نمیباشند .

تعریف 7: نقطه $x_0 \in R$ بنام نقطه لیمت ست $x \in R$ یاد میشود ، هرگاه در حوالی این ست با تفاوت این نقطه ، نقطه دیگر متعلق به ست X موجود شود ، یا به عبارت دیگر نقطه x_0 بنام نقطه لیمت ست X مینامند .

اگر تمام حوال محذوف این نقطه با این ست غیر خالی تشکیل مقطع نماید ، برای هر حوال محذوف $U^\circ(x_0)$ شرط $U^\circ(x_0) \cap X \neq \emptyset$ صادق است .

قابل تذکر است که نقطه لیمتی ست میتواند در خود ست واقع باشد و یا واقع نباشد . بطور مثال هر نقطه قطعه $[a, b]$ عبارت از لیمت نقطه در انتروال (a, b) میباشد که در اینجا نقطه a و b در انتروال متذکره واقع نیست ، اما نقاط باقیمانده درین انتروال واقع اند .

اگر نقطه متعلق به ست باشد ، پس در آنصورت به اساس تعریف 6 و 7 این نقطه عبارت از نقطه جداگانه ست میباشد .

هر نقطه مماس x_0 ست عبارت از نقطه جداگانه این ست میباشد ، یا نقطه لیمتی این ست میباشد . یا همینطور در هر حوال کیفی ست ، دارای نقطه میباشد ، که از نقطه x_0 فرق دارد. (در این صورت نقطه x_0 نقطه لیمتی است)

و یا ه حوال x_0 موجود میشود یا موجود نمیشود و یا به ست نقطه x_0 مطابقت ندارد . در نتیجه برای اینکه این حوال دارای تمام نقاط ست باشد .

پس (به همان اندازه نقطه x_0 بر حسب شرایط عبارت از نقطه مماس این ست) بوده میتواند . و این نقطه را به x_0 نشان میدهد . همینطور در اول نقطه x_0 متعلق به ست را بررسی مینماییم و ثانیاً بطور نقطه جداگانه مورد بررسی قرار میدهیم .

لیما 3 : هر تابع متمادی در هر نقطه ست تعریف جداگانه دارد .

ثبوت : فرضاً x_0 نقطه جداگانه ست تعریف شده x تابع f باشد ، پس طبق تعریف 6 موجودیت $U(x_0)$ نقطه x_0 مقطع ست x در نقطه x_0 تشکیل مینماید که با ست x نقاط جداگانه را تشکیل میدهد ، پس در اینصورت $U(x_0) \cap x = \{x_0\}$ است .

اگر ترادف $x_n \in x$ ، $n = 1, 2, \dots$ ، و لیمت $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ موجود شود و برای حوال اشاره شده به علت تعریف لیمت ترادف چنان عدد n_0 موجود شود ، طوریکه برای تمام اعداد $n > n_0$ باشد و $x_n \in U(x_0)$ صادق باشد ، پس در نتیجه $x_n \in U(x_0) \cap x$ اما $U(x_0) \cap x = \{x_0\}$ است زیراکه برای هر $n > n_0$ داریم $x_n = x_0$ به این معنی که آغاز

به عدد $n+1$ ترادف $\{f(x_n)\}$ ثابت باقی مانده میشود ، $f(x_n) = f(x_0)$ در صورتیکه $n > n_0$ پس در آنصورت لیمت موجود میشود یعنی:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$$

به اساس انتخاب اختیاری ترادف $x_n \in X$ ، $n = 1, 2, \dots$ لیمت $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ تطبیق

شرط (5.18) ، پس در آنصورت متمادیت تابع f در نقطه x_0 ثبوت شد، متمادیت تابع در نقطه جداگانه نشان میدهد که در ریاضی نقطه عبارت از حالت خصوصی متمادیت میباشد $f(x) = 1 + \sqrt{\lg \cos 2\pi x}$ متمادی میباشد (مراجعه نمائید به: پراگراف 5.2) تنها برای قیمت عدد تام ارگومن x تعریف شده است .

پس در آنصورت $x = 0 \pm 1 \pm 2 \dots$ که برابر به 1 است . (نقاط باقیمانده که افاده تحت علامه جذر منفی است به همین خاطر تابع تعریف نشده است) گراف این تابع از نقاط جداگانه تشکیل گردیده است که :

$$\dots, (-2, 1), (2, 1), (-1, 1), (1, 1), (0, 1) \text{ (مراجعه نمائید به: شکل 20)}$$

از لیما 3 نتیجه میشود که سوال راجع به لیمت تابع در نقطه جداگانه ست توسط تعریف 7 حل گردیده است و برابر به $f(x_0)$ میباشد .

زیراکه مفهوم لیمت تابع (در خصوص متمادیت تابع) برای نقاط لیمتی ست تعریف ده تابع کم میباشد .

تمرین 6: ثابت نمایید که تابع $f: X \rightarrow R$ در نقاط لیمتی $x_0 \in X$ ست x تنها و تنها وقتی متمادی است که :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X \cap U(x_0)}} f(x) = f(x_0)$$

یقیناً که لیمت تابع در هر ست مربوط به ساحه معین آن میباشد ، زیرا که متمادیت تابع به ست مربوط میباشد .

تعریف 8 : فرضاً $f: X \rightarrow R$ و $x_0 \in E \subset X$ باشد تابع f بنام تابع متمادی در نقطه x_0 بر حسب E یاد میشود .

$$\lim_{f_E} f(x) = f_E(x_0)$$

بطور مثال تابع درجلی f (مراجعه نمایند به: مثال 4 در پراگراف 5.4) در نقطه $x_0 = 0$ متمادی است و نیز بر حسب Q برای تمام اعداد ناطق متمادی است . طوریکه :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \in Q}} f(x) = 1 = f(0)$$

و در ست های تمام اعداد حقیقی متمادی نیست ، همینطور لیمت در $x_0 = 0$ نظر به ست تمام اعداد حقیقی تابع درجلی موجود نیست . زیرا که تابع درجلی در هیچ یک نقطه محور عددی متمادی نمی باشد .

تابع $f: X \rightarrow R$ در نقاطه $x_0 \in X$ متمادی است ، به اساس تعریف 5 میتوان گفت که تابع در این نقطه نظر به ست X متمادی است .

5.6 شرط موجودیت لیمت تابع

به اساس تعریف لیمت، تابع $f: X \rightarrow R$ در نقطه x_0 دارای لیمت میباشد. اگر چنین ترادف $\{x_n\}$ نمیباشد. بنابراین تمام ترادف های $\{f(x_n)\}$ عیناً یک لیمت a دارد. یعنی $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$ عبارت از لیمت تابع f در نقطه x_0 میباشد. برای هر ترادف $\{f(x_n)\}$ یکسان نتیجه میشود و تمام لیمت ها به خود تابع f مطابقت میکند. در این حالت تابع f دارای لیمت در نقطه x_0 میباشد.

لیما 4: برای اینکه تابع $f: X \rightarrow R$ دارای لیمت متناهی یا به علامه مشخص بی نهایت در نقطه x_0 که عبارت از نقطه مماسی ست x باشد لازم و کافیسیت که برای هر ترادف $x_n \rightarrow x_0$ طوریکه $x_n \in X$ ، $n = 1, 2, \dots$ باشد.

ترادف که به قیمت تابع $\{f(x_n)\}$ مطابقت میکند دارای لیمت متناهی، یا به علامه مشخص بی نهایت میباشد.

نتیجه: برای اینکه تابع $f: X \rightarrow R$ دارای لیمت متناهی در نقطه x_0 که بنام نقطه مماسی ست x یاد میشود، باشد لازم و کافیسیت که برای هر ترادف $x_n \rightarrow x_0$ طوریکه $x_n \in X$ ، $n = 1, 2, \dots$ باشد. ترادف که به قیمت تابع $\{f(x_n)\}$ مطابقت میکند متباعد است، نیز دارای لیمت (متناهی، یا بی نهایت) در نقطه x_0 و $x_m \in X$ ، $m = 1, 2, \dots$

میباشد ، زیرا که مطابق فرضیه دارای لیمت $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n')$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n'')$ و $\lim_{m \rightarrow \infty} f(x_m)$ میباشد .

چنانچه ترادف $\{f(x_n')\}, \{f(x_n'')\}$ از ترادف های فرعی ترادف $\{f(x_m)\}$

است. یا ترادف های $\{x_n'\}, \{x_n''\}$ عبارت از ترادف های فرعی ترادف $\{x_m\}$ میباشد

حال به یاد می آوریم ، اگر یکتعداد ترادف ها دارای لیمت (متناهی ، یا بی نهایت) باشد ، پس هر ترادف فرعی آن دارای عینی لیمت است . (مراجعه نمائید به : پراگراف 4.3) بنابرین :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n') = \lim_{m \rightarrow \infty} f(x_m)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n'') = \lim_{m \rightarrow \infty} f(x_m)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n') = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n'')$$

از اینجا به این ترتیب لیمت های ترادف $\{f(x_n)\}$ طوریکه $x_n \rightarrow x_0$ و $x_n \in x$ ، $n = 1, 2, \dots$ به انتخاب ترادف $\{x_n\}$ مربوط نیست . ارائه نمودن قیمت عمومی لیمت

ترادف $\{f(x_n)\}$ توسط a مطابق تعریف 1 پراگراف 5.4 خواهیم داشت $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$

که مستقیماً از لیما 4 به نتیجه رسیدیم . (به یاد می آوریم که اصطلاح « ترادف متقارب » تنها برای ترادف هاییکه دارای لیمت متناهی باشند استعمال میشود .

5.7 تعریف دوم لیمت تابع

برای لیمت تابع، تعریف دیگر موجود است که در مفاهیم لیمت ترادف از آن استفاده نمی شود، که در اصطلاح حوال، فرمول بندی گردیده و بنام تعریف لیمت تابع کوشی یاد میشود. این تعریف با تعریف 1 که در پراگراف 5.4 است میباید.

تعریف 9: نقطه a بنام یکسان و مشابه لیمت تابع $f: X \rightarrow R$ یاد میشود، در صورتیکه $x \rightarrow x_0$ (یا در نقطه x_0) باشد. اگر برای هر حوال $U(a)$ نقطه a موجود شود، چنین حوالی $U(x_0)$ نقطه x_0 میباید، یعنی:

$$f(x) \cap U(x_0) \subset U(a) \dots (5.20)$$

لیمت تابع بر حسب کوشی همینطور توسط $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ نشان میدهیم. طبیعی است که مفهوم لیمت تابع بر حسب کوشی مثل که قبلاً در پراگراف 5.4 صورت گرفته معادل به تعریف لیمت تابع میباید. شکل 23 نمایش تعریف 9 میباید طوری که x_0 و a اعداد حقیقی و ست x حذف حوال نقطه x_0 باشد.

با استفاده از سمبول های منطقی تعریف را میتوان قرار ذیل نوشت:

$$\lim f(x) = a \stackrel{def}{\Leftrightarrow} \forall U(a) \exists U(x_0) : f(x \cap U(x_0)) \subset U(a).$$

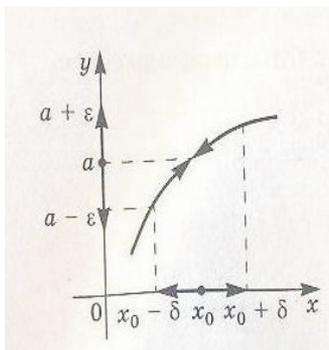
سمبول های منطقی فوق تعریف 9 مفصلاً از (5.20) نتیجه گیری شده است و تعریف 9 را میتوان به ترتیب ذیل فرمول بندی نمود.

نقطه a بنام لیمت تابع $f: X \rightarrow R$ یاد میشود در صورتیکه $x \rightarrow x_0$ طوریکه برای هر حوالی $U(a)$ نقطه a چنین $U(x_0)$ نقطه x_0 موجود شود که برای هر نقطه:

$$x \in X \cap U(x_0) \dots (5.21)$$

از اینجا نتیجه میشود $f(x) \in U(a) \dots (5.22)$. با استفاده از سمبول های منطقی این تعریف را میتوان چنین نوشت:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \stackrel{def}{\Leftrightarrow} \forall U(a) \exists U(x_0) \forall x \in X \cap U(x_0) : f(x) \in U(a) \dots (5.23)$$



شکل 23

تعریف حوالی نقاط دور متناهی و بی نهایت را به یاد می آوریم. تعریف 9 در هر حالت تیوری غیر مساوات را تعمیم نمی بخشد. در اول به شکل ذیل تعریف لیمت متناهی در نقطه متناهی را فرمول بندی مینمائیم.

عدد a بنام لیمت تابع f در نقطه $x_0 \in R$ یاد میشود و اگر برای هر $\varepsilon > 0$ چنین $\delta > 0$ موجود شود که برای $x \in X$ ، $|x - x_0| < \delta$ غیر مساوات $|f(x) - a| < \varepsilon$ صدق نماید. این تعریف را در سمبول های منطقی به ترتیب ذیل ملاحظه مینمائیم:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in X, |x - x_0| < \delta : |f(x) - a| < \varepsilon.$$

اگر تابع f در نقطه $x_0 \in X \subset \mathbb{R}$ و $a = f(x_0)$ متمادی باشد (درین حالت x_0 و a عبارت از اعداد میباشند) پس تعریف متمادیت تابع به شکل سمبولیک قرار ذیل است :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in X, |x - x_0| < \delta : |f(x) - a| < \varepsilon.$$

بطور مثال: تعریف لمیت بی نهایت غیر مساوات را به یاد می آوریم و برای تابع

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \quad : f: X \rightarrow \mathbb{R} \text{ مینویسیم}$$

به این معنی که برای هر $\varepsilon > 0$ چنین $\delta > 0$ موجود میشود که برای هر x شرایط $x \in X, x > \delta$ تأمین گردد غیز مساوات $f(x) < -\varepsilon$ صادق است. توسط سمبول های منطقی این تعریف را به ترتیب ذیل مینویسیم :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in X, x > \delta : f(x) < -\varepsilon.$$

از رویت فوق نتیجه میشود که میتوان توأم (همزمان) به دست یابی به قیمت مختلفه لمیت (متناهی، یا بی نهایت) به متحول مستقل و غیر مستقل روبرو میشویم.

برای فرمول بندی تعریف لمیت تابع برای هر حالت جداگانه از تعریف 9 استفاده میکنیم که در بر گیرنده تمام حالت دقیق و مشخص میباشد.

حال به مقایسه تعریف لمیت تابع برحسب (تعریف 1) و برحسب کوشی (تعریف 9) میپردازیم.

قضیه 1: تعریف 1 و 9 لمیت تابع در نقطه مماس ست تعریف تابع معادل اند.

ثبوت : اول ثابت مینمائیم که اگر تابع در بعضی نقاط به اساس تعریف 1 دارای لیمت باشد ، پس این تابع نیز دارای لیمت خود درین نقطه میباشد . و به اساس تعریف 9 فرضاً $f: X \rightarrow R$ ، x_0 نقطه مماس ست x باشد . و $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ به اساس تعریف 1 نشان میدهیم که شرایط بخش اول فرمول (5.23) است .

فرض میکنیم که چنین نباشد ، پس در اینصورت داریم :

$$\exists U(a) \forall U(x_0) \exists x \in X \cap U(x_0) : f(x) \notin U(a) \dots (5.24)$$

یا به عبارت دیگر چنین حوالی $U(a)$ نقطه a یافت میشود که در هر حوال $U(x_0)$ نقطه x_0 دارای نقطه $x \in X$ میباشد که قیمت تابع $f(x)$ مربوط به حوال $U(a)$ نیست .

راجع به نقطه اشاره شده x برای هر حوال $U\left(0, \frac{1}{n}\right)$ یافت میشود که آنها را توسط x_n ارائه می کنند .

$$x_n \in X \cap U\left(x_0, \frac{1}{n}\right) \dots (5.25)$$

پس در اینصورت داریم که :

$$n = 1, 2, \dots, f(x_n) \notin U(a), \dots (5.26)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \dots (5.27)$$

از شرط (5.25) نتیجه میشود که :

(س.م. تبصره 1 پراگراف 4.2) ، طوریکه $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ پس به اساس تعریف 1 برای

هر ترادف $x_n \rightarrow x_0$ ، $n = 1, 2, \dots$ مساوات $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$ بجا خواهد بود .

مطابق تعریف لمیت ترادف این معنی میدهد که برای هر حوال $U(a)$ چنین عدد n_0 موجود میباشد که برای هر $n > n_0$ صدق میکند یعنی :

$$f(x) \in U(a) \dots (5.28)$$

که خلاف ادعا شرایط (5.26) میباشد. اختلاف نظر موجوده عمل ثبوت شده را تأیید میکند. □

حال ثبوت میکنیم که اگر تابع در بعضی نقاط به اساس تعریف 9 دارای لمیت باشد، پس در اینصورت به اساس تعریف 1 تابع این نقطه نیز دارای لمیت میباشد.

فرضاً $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x_n) = a$ لمیت تابع $f: X \rightarrow R$ ، x_0 نقطه مماس ست X است.

و فرضاً (5.29) $x_n \in X$ ، $n = 1, 2, \dots$ باشد، نشان میدهیم که در اینصورت:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a \dots (5.30)$$

واضح دیده میشود که نقطه a عبارت از لمیت تابع f به اساس تعریف 1 میباشد حوال $U(a)$ را در نقطه a اختیاری فرض میکنیم. برای این حوال $U(x_0)$ در نقطه $U(x_0)$ را انتخاب میکنیم که تأمین کننده شرایط (5.21) و (5.22) میباشد.

برای حوال $U(x_0)$ به علت شرط (5.29) چنین عدد n_0 یافت میشود که برای هر عدد $n > n_0$ میتوان نتیجه شود که $x_n \in X \cap U(x_0)$ پس به علت (5.22) داریم. $f(x_n) \in U(a)$ به این معنی که شرط (5.30) صادق است.

لمیت تابع که در پراگراف 5.4 یادآوری شده عبارت از خاصیت مقامی تابع میباشد به این معنی که موجودیت قیمت برای تابع در نقطه داده شده میباشد (اگر موجود شود پس دارای

قیمت میباید) و فشردگی تابع به مقطع هر حوالی نقطه x_0 با تعریف ست تابع داده شده مربوط نیست که در تعریف 9 به خوبی ملاحظه گردید.

اگر حوال $U_0(x_0)$ نقطه اختیاری x_0 فرض شود و به تعریف 9 افزوده شود.

شرایطی که در آن بوجود می آید برای هر حوال $U(x_0)$ موجودیت حوالی را تأیید میکند.

یعنی: $U(x_0) \subset U_0(x_0)$ پس تعریف بدست آمده برابر به تعریف اول میباید.

واقعاً اگر شرط (5.23) برای هر حوالی که ازین تشکیل میشود، صادق است. در نتیجه

یادآور میشویم که تابع در نقطه داده شده تحت لیمت معمولاً به مفهوم لیمت منتهای است. اگر

این لیمت مشخص باشد، توسط $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ که درین صورت هیچ دوریت راجع به ست

نیست که برحسب آن لیمت گرفته شود.

لیمت منتهای و یابی نهایت در نقطه x_0 برحسب هر ست تعریف f ارائه میگردد.

تمرین 7: ثبوت نمایید اگر پولینوم $P(x)$ به توان $n \geq 1$ باشد، پس

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = +\infty$$

میباشد.

هدایت: برای تعیین لیمت تابع در نقطه، هم مانند قیمت ست آن ضرور است تا به آسانی تابع

را عمومیت دهید و نیز تعریف ست مربوط به ست مورد بررسی اعداد حقیقی میباید، پس

در اینصورت:

$$R' = RU \{+\infty\} U \{-\infty\}$$

$$X \subset R', f: X \rightarrow R'$$

خواننده در وقت ضرورت میتواند به اساس تعریف مستقلانه فرمولبندی نماید.

5.8 لیمت تابع برحسب اتحاد ست ها :

برای لیمت تابع برحسب اتحاد ست ها خواص مختصر ولی بسیار مفید در آینده ثبوت خواهیم کرد .

لیما 5 : فرضاً $f: X \rightarrow R$, $x_1 \subset X$, $x_2 \subset X$ و $x_1 \neq \emptyset$, $x_2 \neq \emptyset$ و نقطه x_0 عبارت از نقطه مماسی ست x_1 , x_2 باشد، پس تابع درین نقطه دارای عین لیمت میباشد که برحسب اتحاد ست میباشد .

ثبوت : اگر

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X_2}} f(x) = a \dots (5.31)$$

پس برای هر مجاورت $U(a)$ نقطه a چنین حوالی $U(x_0)$ نقطه x_0 موجود میشود که تصویر تقاطع آن $(U(x_0) \cap (x_1 \cup x_2))$ در حوال x_1, x_2 تشکیل میشود ، که در آنصورت تصویر اتحاد دو ست یعنی :

$(x_1 \cup x_2 \cap U(x_0))$ بوده ، همین قسمت در حوال $U(a)$ تشکیل میشود ، به این معنی که

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in x_1 \cup x_2}} f(x) = a . \square$$

مثال: اگر $\{x_n\}$ چنین ترادف که $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k} = a$ و $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k-1} = a$ عدد حقیقی کیفی یا یکی

از بی نهایت $-\infty, +\infty, \infty$ میباشد ، پس $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ که مستقیماً از لیما 5 نتیجه میشود . که

اگر تابع $f(n) = x_n$ طوریکه $n \in N$ باشد ، با گذاشتن قیمت :

$$n = 1, 2, \dots, x_1 = \{2k\}, x_2 = \{2k-1\}$$

5.9 لیمت های یکطرفه و متمادیت یکطرفه

در مطالعه توابع اکثراً بررسی فشردگی لیمت آنها در ست ها سفید واقع میشود . این ست ها را بنام ست های قسمی معین تابع داده شده یاد میشوند که به یکطرفه از نقطه که در آن لیمت بررسی میگردد ، واقع شده باشد . چنین لیمت ها را بنام لیمت های یکطرفه یاد میشوند .

واقعاً وقتی که ست متذکره با یک طرف و یا طرف دیگر از نقطه x_0 که در آن نقطه لیمت بررسی میگردد موجود باشد ، درین حالت اگر نقطه x_0 یکی از بی نهایت $-\infty, +\infty, \infty$ باشد که چنین ممکن نیست . به این خاطر در اخیر میخواهیم فرض کنیم که x_0 عدد حقیقی میباشد ، طوریکه $x_0 \in R$ باشد . با معذرت برای نوشتن بعضی علامه ها را استخراج مینمایم .

برای تمام ست $x \subset R$ و برای $x_0 \in R$ داریم :

$$x < (x_0) \stackrel{def}{\Leftrightarrow} \{x : X \in x, x \leq x_0\}.$$

$$x \geq (x_0) \stackrel{def}{\Leftrightarrow} \{x : X \in x, x \geq x_0\}.$$

به عبارت دیگر ست $x \geq (x_0)$ مطابق $x < (x_0)$ عبارت از تقاطع ست x با شعاع بسته رؤس محوری عددی نقطه x_0 طوریکه به جهت مثبت (منفی) باشد یاد میشود .

تعریف 10: فرضاً $f : X \rightarrow R$ و $x_0 \in R$ با نقطه a بنام لیمت چپ تابع f مطابق به طرف راست طوریکه $x_0 \rightarrow x$ تابع f بر حسب ست $x < (x_0)$ باشد . پس :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in \langle (x_0) \rangle}} f(x_n) = a$$

مطابق به ست $x > (x_0)$ پس داریم که :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X \setminus \{x_0\}}} f(x) = a$$

برای لیمت چپ و راست تابع f بر حسب ست $x \setminus \{x_0\}$ دارای علامه مخصوص میباشد .

لیمت چپ به $f(x_0 - x)$ و یا $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$ و لیمت راست به $f(x_0 + x)$ یا

$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$ نشان داده شده است . به این ترتیب :

$$f(x_0 - x) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) \stackrel{def}{\Leftrightarrow} \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X < (x_0) \setminus (x_0)}} f(x) \dots (5.32)$$

$$f(x_0 + x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X > (x_0) \setminus (x_0)}} f(x) \dots (5.33)$$

اگر $x_0 = 0$ باشد ، پس به عوض $0+0$ (0-0) در لیمت تابع در لیمت ترادف (س.م.

پراگراف) مختصراً مینویسند $0+(-)$ لیمت های چپ و راست بنام لیمت یکطرفه یاد میشود

. اگر عین نقطه x_0 سرحد فوقانی برای ست $x < (x_0) \setminus \{x_0\}$ و سرحد تحتانی برای ست

$x > (x_0) \setminus \{x_0\}$ باشد (ست معین تابع f) میباشد . و چنین مینویسند :

$$x_0 = \sup x \leq (x_0) \setminus \{x_0\} = \inf (x) > (x_0) \setminus \{x_0\}.$$

پس لیمت معمولی تابع f در صورتیکه $x_0 \rightarrow x$ نیز بنام لیمت دو طرفه یاد میشود . به

عوض تعریف لیمت های یکطرفه بطور معین میتواند در حوالی یکطرفه استفاده نمود

«مجاورت یکطرفه» نقاط تقاطع میتواند چنین نوشت :

$$U(x_0) \cap \{X : X \geq 0\} , U(x_0) \cap \{X : X \leq 0\}$$

و بعضی حوالی نقطه x_0 بنام حوال یکطرفه این نقطه یاد میشود . (طرف راست و طرف چپ) واضح است که تعریف لیمت یکطرفه تابع از تعریف لیمت تابع حاصل میگردد .

اگر در این حوالی نقطه x_0 که طبق حوال یکطرفه تغییر داده میشود ، خاطر نشان سازیم

تقاطع آنها چنین است :

$$U^\circ(x_0) \cap \{X : X \geq x_0\}$$

و $U^\circ(x_0) \cap \{X_0 : X \leq x_0\}$ و $U^\circ(x_0)$ حوال محذوف نقطه x_0 است و بنام حوالی

محذوف یکطرفه نیز یاد میشود . (طبق راست ، چپ) .

در خصوص مثال لیمت یکطرفه تابع $y = \text{sign } x$ (مراجعه نمائید به: مثال در پراگراف

5.2 و شکل 19) را مطالعه کنید . فرضاً $x_n > 0, x_n' < 0, n = 1, 2, \dots$ و

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n' = 0 \text{ باشد پس } \lim_{n \rightarrow \infty} \text{sign } x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1 \text{ و}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \text{sign } x = -1, \lim_{x \rightarrow 0} \text{sign } x = 1 \text{ به این معنی که } \lim_{n \rightarrow \infty} \text{sign } x_n' = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1) = -1$$

میباشد .

مفهوم لیمت چپ (راست) در صورتیکه $x \rightarrow x_0$ به اساس مفاهیم عمومی لیمت در نقطه در

حالت داده شده ست $x < x_0$ (ست) $(x > x_0)$ فقط تنها و تنها نقطه x_0 عبارت از مماس

ست میباشد که لیمت آنرا میگیریم که هر یکی از این ست ها به یکطرف نقطه x_0 واقع است

. به این خاطر این نقطه را بنام نقطه مماس ست ها یاد میکنند . و فقط $x_0 = \sup x \leq (x_0)$

که مطابق به شکل $x_0 = \inf x > (x_0)$ میباشد .

لیما 2 : تابع $f : X \rightarrow R$ دارای لیمت در نقطه :

$$x_0 = \sup x \leq (x_0) = \inf x \geq (x_0) \text{ طوریکه:}$$

دارای لیمت چپ و راست بوده و برابر باشد، در این حالت قیمت عمومی آنها عبارت از لیمت تابع در نقطه x_0 میباشد.

نتیجه:

برای اینکه y تابع $f: X \rightarrow R$ در نقطه x_0 لیمت دو طرفه بر حسب ست $x \setminus \{x_0\}$ داشته باشد لازم و کافی است تا لیمت های یکطرفه $f(x_0 + 0)$ ، $f(x_0 - 0)$ موجود و بین خود برابر باشند.

ثبوت قضیه: در حقیقت فرضاً $f: X \rightarrow R$ طوریکه:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \text{ و } x_0 = \sup x \leq (x_0) = \inf x \geq (x_0)$$

مع $f y$ دارای لیمت بر حسب ست x در نقطه x_0 میباشد، مگر وقتیکه درین نقطه عین لیمت موجود شود y در فشردگی و بر حسب هر ست باشد (مراجعه نمایند به: لیما 1 در پراگراف 5.4) بر حسب خصوصیت که ست $(x_0) X < (x_0) X >$ دارد. پس گفته میتوانیم که هر دو ست دارای لیمت یکطرفه بوده، در صورتیکه $x_0 \rightarrow x$ و برابر به a است. یعنی:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X < (x_0)}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X > (x_0)}} f(x) = a$$

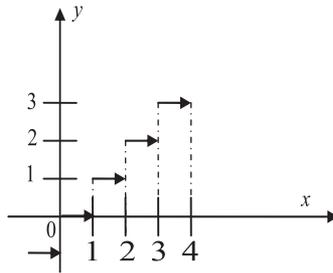
فرضاً برعکس در نقطه $x_0 = \sup x < (x_0) = \inf x > (x_0)$ شرط (5.34) صادق است ،

در اینصورت مثل $x = x < (x_0) \cup x > (x_0)$ پس لیما 5 دارای لیما $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X}} f(x) = a$

میباشد .

برای اینکه به تطبیق نتیجه معتقد شد ، کفایت تا قضیه 2 را با فشردگی تابع $f: X \rightarrow R$ در ست $x \setminus \{x_0\}$ بکار برده شود . □

اگر یکی از لیما های یکطرفه تابع در بعضی نقاط به قیمت تابع درین نقطه مطابقت کند ، پس چنین تابع بنام یکطرفه متمادی در نقطه مورد بررسی میباشد .
تعریف فوق بصورت بسیار مطمئن فرمول بندی میگردد .



شکل 24

تعریف 11: تابع $f: X \rightarrow R$ بنام متمادی چپ (به راست) در نقطه $x_0 \in X$ مینامند .

اگر $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X < (x_0)}} f(x) = f(x_0)$ مطابقت کند .

مثال : تابعی که در تمام محور عددی معین و برابر باشد ، برای هر عدد حقیقی x بزرگتر از عدد تام و کوچکتر یا برابر به x را بررسی مینمائیم .

این تابع دارای ارائه مخصوص $y = [x]$ میباشد و چنین خوانده میشود :

« y عدد تام قسمی x است » یا « y برابر داخل x است » .

به این ترتیب x در شکل 24 ترسیم گردیده است ، تابع $[x]$ در عدد تام نقطه x_0 محور

گراف تابع $[x]$ در شکل 24 ترسیم گردیده است ، تابع $[x]$ در عدد تام نقطه x_0 محور عدد متمادی راست و مساوی به چپ بوده و نیز در تمام نقاط آن متمادی است . مثل که لیمت راست است همین قسم چپ است . به این ترتیب در خصوصیت تابع $[x]$ در تمام نقاط محور عددی متمادی راست است .

تبصره : اگر برای تابع $f: X \rightarrow R$ لیمت منتهای $\lim f(x) = a$ موجود شود پس برای

تمام $x \in X$ متمادیت $f(x) < a$ (متمادیت $f(x) > a$ صادق است پس مینویسیم :

$\lim f(x) = a - 0$ (مطابق $\lim f(x) = a + 0$) درین حالت اگر $a = 0$ باشد ، پس

همین قسم تمام $0+0$ و $0-0$ مختصراً مینویسند $0+0$ و -0 .

5.10 خواص لیمت تابع :

تمام توابعی که درین بخش بررسی میگردد، در بعضی ست های $x \subset R$ معنی مییابد و لیمت تمام آن نظر به ست x (در بعضی نقاط x_0 گرفته شود) بنام نقاط مماس آن یاد میشود. (متناهی، بی نهایت دور) طوری که عدد حقیقی $x_0 \in R$ باشد، پس نقطه مماسی معمولی ست x مییابد.

اگر $x_0 = \infty$ باشد، پس ست x محدود نیست. و اگر $x_0 = -\infty$ باشد، پس ست x غیر محدود بالایی (پائین) مییابد. خواص لیمت توابع قرار ذیل است :

1°: اگر تابع $f: X \rightarrow R$ در نقطه x_0 دارای لیمت متناهی باشد، پس چنین حوالی $U(x_0)$ نقطه x_0 یافت میشود که تابع f محدود در تقاطع $U(x_0) \cap x$ این حوال با ست x تابع f مشخص مییابد.

نتیجه: تابع $f: X \rightarrow R$ در نقطه $x_0 \in R$ متمادی محدود در تقاطع بعضی حوال این نقطه با ست x مییابد.

ثبوت: فرضاً $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ لیمت متناهی باشد، در اینصورت مطابق تعریف 9 از

پراگراف 5.7 برای هر $\varepsilon > 0$ بالخصوص برای $\varepsilon = 1$ چنین حوال $U(x_0)$ نقطه x_0 موجود میشود که $f(x \cap U(x_0)) \subset U(a, 1)$ برای هر $x \in x \cap U(x_0)$ نتیجه $f(x) \in U(a, 1)$ تطبیق میشود.

یا به عبارت دیگر برای تمام $x \in x \cap U(x_0)$ غیر مساوات $a-1 < f(x) < a+1$ صادق است، که محدودیت تابع f در تقاطع $x \cap U(x_0)$ مییابد. □

با تانید ثبوت فوق مستقیماً به نتیجه رسیدیم و نیز متمادیت تابع در نقطه، عبارت از حالت خاص موجودیت لیمت متناهی آن در نقطه میباشد.

2°: اگر تابع $f: X \rightarrow R$ در نقطه x_0 دارای لیمت متناهی $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \neq 0$ که

برابر به صفر نباشد، پس برای هر عدد c طوریکه $0 < C < |a|$ باشد و چنین حوال (x_0) نقطه x_0 موجود شود که برای هر نقطه x_0 در ساحه تعریف x باشد.

پس در آنصورت برای تمام $x \in U(x_0) \cap X$ غیر مساوات $f(x) > C$ صادق است.

اگر $a > 0$ پس $f(x) < -C$ و اگر $a < 0$ باشد (5.36).

نتیجه: (لیما راجع به نگهداشت علامه)

اگر تابع $f: X \rightarrow R$ در نقطه $x_0 \in R$ و $f(x_0) > 0$ و $f(x_0) < 0$ متمادی باشد و

چنین حوال $U(x_0)$ نقطه x_0 موجود شود که برای هر $x \in X \cap U(x_0)$ غیر مساوات

$f(x_0) > 0$ و $f(x_0) < 0$ صادق باشد.

ثبوت: اول فرضاً $a > 0$ ، $0 < C < a$ و $\varepsilon > 0$ را طوری انتخاب میکنیم که

$C < a - \varepsilon$ شود، در اینصورت $U(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ میباشد، پس برای

حوالی $U(a, \varepsilon)$ چنین حوال $U(x_0)$ نقطه x_0 یافت میشود که برای نقطه

$x \in U(x_0) \cap X$ نتیجه:

$f(x) \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ و نیز $f(x) > a - \varepsilon$ بجا خواهد بود.

بطور مشابه اگر $a < 0$ و $0 < C < -a$ باشد، در اینصورت $a < -c$ پس $\varepsilon > 0$ را

طوری انتخاب میکنیم که $a + \varepsilon < -c$ باشد در اینصورت:

$$C \notin U(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

و اگر برای حوالی $U(a, \varepsilon)$ چنین حوالی $U(x_0)$ نقطه x_0 موجود شود که برای هر نقطه $x \in U(x_0) \cap X$ تطبیق $f(x) \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ ، بجا خواهد بود تا غیر مساوات $f(x) < a + \varepsilon < -c$ باشد که نتیجه مستقیماً از غیر مساوات (5.36) معلوم میشود .
□

تبصره : اگر در نقطه x_0 به تابع $f: X \rightarrow R$ لیمت بی نهایت موجود شود که برابر به $-\infty, +\infty, \infty$ باشد ، پس برای هر $c > 0$ بطور مشابه تائید خواص 2° بجا خواهد بود که این نتیجه مستقیماً از تعریف لیمت بی نهایت تابع گرفته شده است و در موضوع غیر مساوات چنین فرمول بندی شده است :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$$

به این معنی که برای هر $c > 0$ چنین حوالی $U(x_0)$ نقطه x_0 موجود ، شود پس برای تمام $x \in x \cap U(x_0)$ غیر مساوات $|f(x)| > c$ (طبق غیر مساوات $f(x) > c$ یا $f(x) < -c$) صادق است .

3° : اگر $f(x) = c$ ثابت باشد و $x \in x$ باشد ، پس $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c$.

4° : اگر $f(x) \geq a$ و $x \in x$ باشد و علامه معین لیمت متناهی یا بی نهایت

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq a \dots (5.37) \quad \text{موجود شود ، پس : } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

5° : اگر $x \in X, \varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$ باشد و علامه معین لیمت های متناهی و بی

نهایت $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \psi(x) = a$ پس :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \dots \dots \dots (5.38)$$

6° : اگر لیمت متناهی $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ موجود شود . پس لیمت متناهی :

$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)]$ موجود میشوند . و اگر $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$ باشد، پس خارج قسمت

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \dots \dots (5.39) \quad \text{به دلیلی که:}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} \dots \dots \dots (5.41) \quad \text{و}$$

نتیجه 1 : اگر لیمت متناهی $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ موجود شود . پس برای هر عدد $x \in R$ لیمت

$\lim_{x \rightarrow x_0} c f(x)$ موجود میشود به دلیلی که :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} c f(x) = c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \dots \dots \dots 5$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} c f(x) = c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \dots \dots \dots (5.42)$$

اگر $c \neq 0$ باشد مساوات (5.42) برای لیمت بی نهایت با علامه معینی صادق است .

نتیجه 2: اگر تابع f, g در نقطه $x_0 \in R$ متمادی باشد، پس تابع $c \cdot f$ (ثابت)

$fg, f + g$ متمادی بوده و نیز اگر $g(x_0) \neq 0$ باشد، پس تابع $\frac{f}{g}$ در نقطه x_0

متمادی میباشد. خاطر نشان میسازیم که اگر تابع $\frac{f(x)}{g(x)}$ در صورتیکه $g(x_0) = 0$ باشد

، تابع در این نقطه x غیر متمادی بوده و لیمت آن با علامه غیر معین میباشد و به اساس

خاصیت 2° از شرایط $\lim g(x) \neq 0$ نتیجه میشود که چنین حوال $U(x_0)$ نقطه x_0 در

تقاطع با ست x غیر مساوات $g(x) \neq 0$ صادق است و نیز درین تقاطع خارج قسمت

$\frac{f(x)}{g(x)}$ معین است. به اساس فرمول (5.41) فشردگی تابع $\frac{f(x)}{g(x)}$ تحت لیمت در ست

$U(x_0) \cap x$ لیمت دانسته میشود.

به علت اینکه لیمت تابع در نقطه خاص مقامی میباشد (مراجعه نمائید به: پراگراف 5.4 و

5.7) و لیمت آن مربوط به انتخاب حوال $U(x_0)$ متذکره نمیشد.

خواص $3^\circ - 6^\circ$ میتوانند ثبوت یکسان داشته باشند (مراجعه نمائید به: پراگراف 4.9)

فرمول (5.40) را جهت معلومات بهتر ثبوت میکنیم.

فرضاً: $a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), b = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ، پس مطابق تعریف 1 لیمت تابع

(مراجعه نمائید به: پراگراف 5.4) برای هر ترادف

مساوات $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, n = 1, 2, \dots, x_n \in R$ $b = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x_n), a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x_n)$

صادق است. به این خاطر بیاد می آوریم که حاصل ضرب لیمت ترادف متقارب موجود و

برابر به حاصل ضرب لیمت های آن (مراجعه نمائید به: پراگراف 4.9) حاصل میداریم که لیمت موجود است و به شکل ذیل مینویسیم :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)g(x_n) = ab \dots (5.43)$$

این لیمت مربوط به انتخاب ترادف متذکره $\{x_n\}$ نیست و همیشه مساوی به ab بوده و نیز طبق تعریف غیر مساوات (5.43) ثابت شده معنی میدهد . یعنی :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = ab = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \square$$

نتیجه 1 (به علت خاصیت 3°) حالت خصوصی فرمول (5.40) را از نتیجه 2° مستقیماً نتیجه 6° بدست آمده و متمادیت تابع در نقطه متذکره را مشخص میسازد . بطور مثال :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = f(x_0)g(x_0) \dots (5.44)$$

لیمت های $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ به علت متمادیت تابع f, g در نقطه x_0 طبق

مساوات $f(x_0), g(x_0)$ مساوات (5.44) صادق است . یعنی متمادیت حاصل ضرب توابع f, g در نقطه x_0 معنی میدهد . □ .

خاطر نشان میسازیم که ثبوت اجرا شده نتیجه 2 بوده و نیز متمادیت تابع درین نقطه صورت نمیگیرد . (مراجعه نمائید به: پراگراف 5.5) و این نقطه در ست داده شده تابع واقع است . تابع درین نقطه ست دارای لیمت میباشد به همان اندازه که تابع f, g در نقطه داده شده x_0 داشته باشد .

واضح است توابع $f(x) + g(x)$, $f(x)g(x)$ و تابع $\frac{f(x)}{g(x)}$ در صورتیکه

$g(x_0) \neq 0$ درین نقطه داده شده است. به علت خاصیت 6° تابع متذکره دارای لمیت در نقطه x_0 که واقع به ست داده شده است میباشد که معنی متمادیت تابع درین نقطه را میدهد. به عبارت دیگر تائید نتیجه 2° و تائید نتیجه 6° حالت مخصوص این تائید است، پس درینصورت نقطه که در آن لمیت تابع بررسی میگردد در واقع به ساحه داده شده تابع میباشد

5.11 تابع بی نهایت کوچک و بی نهایت بزرگ

دراین بخش میتوان تمام بررسی توابع در ست $x \subset R$ معین فرض شود و لمیت های متناهی و بی نهایت آنها را نظر به ارگومننت در نقطه x_0 متناهی و بی نهایت دور را بررسی کرد.

تعریف 12: تابع $\alpha: x \rightarrow R$ را بنام تابع بی نهایت کوچک یاد میکنند، در

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0 \dots \dots (5.45) \quad \text{صورتیکه } x \rightarrow x_0 \text{ کند و چنین ارائه میگردد:}$$

تابع بی نهایت کوچک در عرصه ϵ تمام توابع که دارای لمیت باشد رول خاصی را بازی میکند. خصوصیت این تابع بصورت عمومی اینست که لمیت تابع متناهی میتواند معلومات خوبی جهت دست یابی به مفاهیم تابع بی نهایت باشد و تائید آنرا به شکل لیما ذیلاً فرمول بندی مینماییم:

لیما 6 : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ وقتی موجود و مساوی است که تنها و تنها فقط

$f(x) = a + \alpha(x)$ باشد و تابع $a = \alpha$ بی نهایت کوچک در صورتیکه $x \rightarrow x_0$ موجود باشد .

ثبوت : اگر $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ باشد پس $\alpha(x) = f(x) - a$, $x \in X$ باشد درینصورت حاصل میداریم که :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - a = a - a = 0$$

برعکس اگر $f(x) = a + \alpha(x)$, $x \in X$ شود و $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$ پس :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a + \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = a. \square$$

قضیه 3 : حاصل جمع و حاصل ضرب عدد متناهی و بی نهایت کوچک در صورتیکه $x \rightarrow x_0$ و نیز حاصل ضرب بی نهایت کوچک در صورتیکه $x \rightarrow x_0$ یاد میشود .

ثبوت : هرگاه حاصل جمع و حاصل ضرب عدد متناهی ، بی نهایت کوچک ها عبارت از بی نهایت کوچک باشد ، پس در اینصورت مستقیماً به اساس یکی از خواص حاصل جمع و حاصل ضرب لیما تابع (مراجعه نمایند به : خاصیت 6 در پراگراف 5.10) نتیجه بدست آمده است .

در حالت مخصوص وقتیکه لیما های آن برابر به صفر میشود آخرین تأیید قضیه را ثبوت میکنیم :

فرضاً $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$ ، $f(x)$ تابع محدود باشد. و چنین ثابت $b > 0$ موجود شود که

برای هر $x \in X$ غیر مساوات $|f(x)| \leq b$ صادق است. که در این صورت ترادف $\{f(x_n)\}$ محدود است.

مگر حاصل ضرب ترادف بی نهایت کوچک در حالت داده شده ترادف $\{\alpha(x_n)\}$ و ترادف محدود در حالت داده شده $\{f(x_n)\}$ بنام ترادف بی نهایت کوچک یاد میشود. (س.م.)

خاصیت 2^o در پراگراف 4.8) به این اساس $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)\alpha(x_n) = 0$ و همین قسمت این

حقیقت برای هر ترادف اشاره شده $\{x_n\}$ صادق است. پس درینصورت طبق عین تعریف

لیمت تابع حاصل مینماییم: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)\alpha(x) = 0$ به این معنی که تابع $f(x)\alpha(x)$

عبارت از بی نهایت کوچک میباشد در صورتیکه $x \rightarrow x_0$. □

هم قطار با بی نهایت کوچک در آنالیز همیشه تابع بی نهایت بزرگ نیز دیده میشود آنها را تعریف میکنیم:

تعریف 13: تابع $f: X \rightarrow R$ بی نهایت بزرگ است در صورتیکه $x \rightarrow x_0$. یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \alpha \dots (5.46)$$

بین تابع بی نهایت بزرگ و بی نهایت کوچک ارتباط نزدیک موجود است، کمیت معکوس

تابع بی نهایت بزرگ عبارت از تابع بی نهایت کوچک میباشد و برعکس آن در زمینه لیما

ذیل را مطالعه مینماییم:

لیما 7: اگر تابع $f: X \rightarrow R$ بی نهایت بزرگ باشد و $x \rightarrow x_0$ پس تابع $\frac{1}{f}$ عبارت از تابع بی نهایت کوچک میباشد، در صورتیکه $x \rightarrow x_0$.

ثبوت: فرضاً $\varepsilon > 0$ اختیاری مشخص باشد، پس طبق شرط $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ چنین

حوالی $U(x_0)$ نقطه x_0 موجود شود که برای تمام نقاط $x \in U(x_0) \cap X$ غیر مساوات

$$|f(x)| > \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{به این معنی} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$$

پس، در اینصورت داریم که تابع عبارت از

بی نهایت کوچک میباشد. □ .

تبصره 1: وقتیکه سخن راجع به خارج قسمت تابع با مخرج لیمت که خلاف صفر باشد به

میان آید، پس از افاده $\frac{1}{f(x)}$ چنین فهمیده میشود که خارج قسمت در تنگاتنگ تابع f در

نقطه تقاطع $U(x_0) \cap X$ حوال $U(x_0)$ نقطه x_0 باست x تابع f قرار دارد که برای

تمام نقاط $x \in U(x_0) \cap X$ تابع f مساوی به صفر نمی باشد، که موجودیت حوال

$U(x_0)$ از خواص 2° لیمت های توابع (مراجعه نمائید به: پراگراف 5.10) نتیجه شده

است.

و بار دیگر برای حالت تابع بی نهایت بزرگ که در پروسه لیما 7 ثبوت شده است واضحاً

$$\text{از شرط} \quad |f(x)| > \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{استفاده نموده و به نتیجه میرسیم که} \quad f(x) \neq 0 \quad \text{است.}$$

تبصره 2: اگر برعکس $\alpha(x)$ تابع بی نهایت کوچک در صورتیکه $x \rightarrow x_0$ داشته

باشیم، پس میتواند چنین واقع شود که لیمت معکوس $\frac{1}{\alpha(x)}$ در ست تعریف نشده باشد.

برای اینکه نقطه x_0 نقطه مماس باشد، (بطور مثال این بجا خواهد بود که $\alpha(x) \equiv 0$ در

ست x) باشد، که به این لحاظ مفهوم لیمت $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\alpha(x)}$ در صورتیکه $x \in x$ بی مفهوم

است. خلاصه اگر x_0 چنین ست فرعی ست x باشد که در آن $\alpha(x) \neq 0$

و $x_0 = \{x : x \in x, \alpha(x) \neq 0\}$ ، و اگر x_0 نقطه مماس ست x_0 پس تابع $\frac{1}{\alpha(x)}$ در

x_0 تعریف شده است و در این ست $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in x}} \frac{1}{\alpha(x)} = \infty$ لذا در این مفهوم میگویند که تابع بی

نهایت کوچک عبارت از بی نهایت بزرگ میباشد. تابع بی نهایت کوچک نظر به وضعیت

مشخص عبارت از بی نهایت بزرگ میباشد و بر عکس برای ارائه نمودن آن ها از سمبول

های طبیعی که همیشه مورد استفاده قرار میگیرند و برای اختصار برای هر عدد $a)0$

مینویسند:

$$\frac{a}{+0} = \infty, \frac{a}{-0} = -\infty, \frac{+a}{0} = \infty$$

$$\frac{a}{+0} = +0, \frac{a}{-\infty} = -0, \frac{+a}{\alpha} = 0 \dots \dots \dots (5.47)$$

تبصره: در تابع بی نهایت بزرگ خواص لیمت متناهی راجع به عملیه حسابی بالای لیمت

(مرجعہ نمایند به: خاصیت 6° در پراگراف 5.10)

بطور مستقیم بکار برده نمیشود ، زیرا که یک یا چند شباهت آن بجا خواهد بود نه همه آنها.

بطور مثال : اگر $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ پس

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = +\infty$$

راجع به موجودیت هر لیمت $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)]$

در اینجا به صورت عموم تأیید کردن چیزی ضرور نیست .

میتوان نشان داد که تأیید « مثبت » راجع به لمیت بی نهایت این حالت بجا خواهد بود و در فرمول های (5.47) در پراگراف 3.1) بعضی تعریف ها راجع به «عملیه حسابی» با بی نهایت ها تذکر به عمل آمده است .

5.12 اشکال مختلف متمادیت تابع در یک نقطه (چگونگی متمادیت تابع در یک نقطه)

شرط متمادیت تابع در نقطه X_0 به اساس (مراجعه نمائید به: (5.18)) قرار ذیل اند:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

در اینجا تابع f درست x داده شده است و میتواند مفهوم تعریف لیمت تابع بر حسب گینی تصور نمود. (مراجعه نمائید به: تعریف 1 پراگراف 5.4) و همین قسم به مفهوم تعریف کوشی

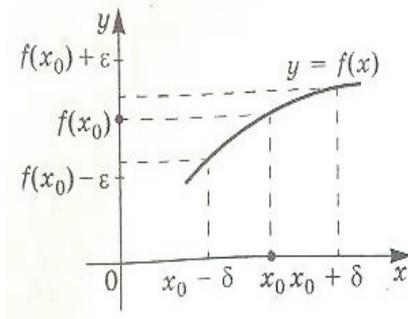
(مراجعه نمائید به: تعریف 9 در پراگراف 5.7) نیز میتواند آنرا تصور نمود.

در حالت اول چنین معنی میدهد که برای هر ترادف $n = 1, 2, 3, \dots, x_n \in X$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \dots \dots \dots (5.48)$$

شرط ذیل تطبیق میشود.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = f(x_0) \dots \dots \dots (5.49)$$



شکل 25

در حالت دوم این معنی را میدهد که برای هر $\epsilon > 0$ چنین $\delta > 0$ موجود میشود که برای تمام نقاط x شرط قبلی را تایید میکند.

یعنی: $(5.50) \dots \dots \dots |x - x_0| < \delta, 0 < x \in X$ صدق میکند.

در شکل (25) غیر مساوات ذیل تطبیق میشود:

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon \dots \dots \dots (5.51)$$

مفاهیم متمادیت تابع در تیوری ترادف ها فورمول بناگر دیده است.

(تعریف (5.48) و (5.49) شرایط خود را منعکس میسازند).

اکتراً در پراکتیک (عمل) به محاسبه غیر مستقیم کمیت y روبرو میشویم که عبارت از x است و چنین بنویسیم $y = f(x)$ و شناخت متمادیت تابع $y = f(x)$ در نقطه x_0 هدف مطمئن را میدهد و به اساس متمادیت میتوان در نتیجه تجارب اندازه گیری، یا محاسبات همیشه چیزی دقیقتر را حاصل نماییم.

بطور مثال: اگر قیمت $x_n, n=1,2,\dots$ به قیمت x_0 نزدیک شود بهمان اندازه نزدیکتر نظریه قیمت $y_n=f(x_n)$ به کمیت $y_0=f(x_0)$ نزدیک می‌شویم. تعریف (5.50) و (5.51) متمادیت تابع f در نقطه x_0 را نشان می‌دهد.

اگر کدام درجه دقت $\delta > 0$ داده شده باشد و برای قیمت تابع f چنین درجه دقیقتر $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ برای ارگونمت موجود شود که به زودی ما قیمت ارگونمت مساوی به x_0 با درجه دقیقتر تا به δ را انتخاب کرده بتوانیم، پس به اساس شرط (5.50) قیمت تابع $f(x)$ را دریافت می‌کنیم بنابراین قیمت تابع $f(x_0)$ با درجه دقیقتر را حاصل می‌کنیم که در آن صورت غیر مساوات (5.51) را تطبیق مینماییم. این عقیده واقعاً در تعمیم تعریف (5.50 و 5.51) توضیح کننده تصورات واقعی راجع به متمادیت تابع میباشد و نیز متمادیت تابع در نقطه عبارت از حالت خصوص موجودیت لیمت تابع میباشد. پس تعریف متمادیت تابع در نقطه ضروری میباشد.

به این ترتیب تابع f درست x تعریف شده در نقطه x_0 متمادی است. اگر برای هر حوالی $v(y_0)$ نقطه $y=f(x_0)$ چنین حوالی $v(x_0)$ نقطه x_0 موجود شود که نتیجه ذیل صادق باشد:

$$x_0 \in X, f(v(x_0) \cap X) \subset v(y_0) \dots \dots \dots (5.52)$$

بلاخره ثابت $f(x_0)$ در مساوات (5.18) را به طرف چپ می‌بریم و آنرا تحت علامه لیمت قرار می‌دهیم. یاد آور می‌شویم که ارائه $x_0 \rightarrow x$ در لیمت تابع مساوی به ارائه $x - x_0 \rightarrow 0$ است.

(مراجعه نمایند به: پراگراف 5.4) از اینجا حاصل می‌دارم که:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0 \dots \dots \dots (5.53)$$

تفاضل $x - x_0$ بنام تزايد ارگومننت ياد ميشود و توسط Δx نشان داده ميشود و تفاضل $f(x) - f(x_0)$ تزايد تابع $y=f(x)$ ميباشد. در مطابقت به تزايد داده شده ارگومننت Δx و تابع توسط Δy نشان داده ميشود كه به اين ترتيب :

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0), x_0 \in X, x \in X, \Delta x = x - x_0 \dots \dots (5.54)$$

از اينجا مساوات (5.53) شكل ذيل را بخود ميگيرد:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0 \dots \dots (5.55)$$

بنابر اين متماديت تابع در نقطه چنين معني ميدهد كه تزايد بي نهايت كوچك ارگومننت در مطابقت به تزايد بي نهايت كوچك تابع ميباشد . اكثرأ اوقات شرط متماديت تابع در نقطه مفيد واقع ميشود ، زيرا كه اساس اين نقطه دربررسي كه آن قيمت تابع بر حسب حوالی محذوف ميباشد.

ليما 3 : اگر ليما تابع $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \dots \dots (5.56)$ موجود شود و تابع f در نقطه x_0

تعريف شده باشد $x \in v^o(x_0) \cap X$ پس تابع f در نقطه x_0 متمادي است كه اگر فقط اگر $f(x_0) = a$ باشد.

ثبوت: اگر تابع f متمادي در نقطه x_0 باشد ، پس در اينصورت شرط (5.13) صادق است و به علت $v^o(x_0) \cap X \subset X$ نتيجه ميشود. و همين قسم از موجوديت ليما بر حسب ست موجوديت ليما هرست كيفي و فرعي يعنى:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \dots \dots (5.57)$$

$$x \in v^o(x_0) \cap X$$

از (5.56) و (5.57) نتیجه میشود که $f(x_0)=a$ فرضاً، حال برعکس شرط $f(x_0)=a$ تطبیق میشود و نیز:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

$$x \in v^o(x_0) \cap X$$

از اینجا داریم که: برای هر حوالی $v(f(x_0))$ نقطه $f(x_0)$ چنین حوالی $v(x_0)$ نقطه x_0 موجود میشود که:

$$f(v^o(x_0) \cap X) \subset v(f(x_0)) \dots \dots (5.58)$$

مگر طوریکه دیده میشود $f(x_0) \in v(f(x_0))$ است.

زیرا که در حصه چپ (5.58) روش است و میتواند حوالی محذوف $v^o(x_0)$ حوالی معمولی $v(x_0)$ را تغییر دهد. $f(v(x_0) \cap X) \subset (f(x_0))$ به این معنی که تابع f در نقطه x_0 متمادی است.

مثال 1: تابع $f(x)=c$ ، c ثابت است و تابع در تمام مستقیم عددی متمادی است، در حقیقت

برای هر $x_0 \in R$ مساوات ذیل: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} c = c = f(x_0)$ بجا خواهد بود.

2: تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ در هر نقطه $x_0 \neq 0$ متمادی است در حقیقت:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x_0} = -\frac{\Delta x_0}{(x_0 + \Delta x)x_0}$$

از اینجا در صورتیکه $x_0 \neq 0$ باشد داریم که:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = -\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{(x_0 + \Delta x)x_0} = -\frac{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (x_0 + \Delta x)x_0} = \frac{-0}{x_0^2} = 0$$

مساوات (5.52) در زمینه صادق است و چنین معنی میدهد که تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ در نقاط $x_0 \neq 0$ متمادی است.

3: تابع $f(x) = |\text{sign}x|$ (مراجعه نماید به (شکل 22) در نقطه $x_0 = 0$ متمادی نیست (مراجعه نماید به (مثال 5 در پراگراف 5.4)

تمرین 8: توضیح نمایید که با کدام درجه دقت کافی است تا قیمت ارگومنت تابع x^3 در نقطه داده شده x_0 شود تا قیمت تابع با درجه دقیقتر داده شده $\varepsilon > 0$ شود.

9: توضیح دهید که آیا تابع $f(x) = \begin{cases} x_0 \neq 0 & \text{در صورتیکه} \\ x = 0 & \text{در صورتیکه} \end{cases}$ در نقطه $x_0 = 0$ متمادی است.

یادآوری: ما دقیقاً در مثالهای مفصل تعریفات تابع در قطعه خط که دارای انفصال باشد، بررسی نمودیم و نیز دریافتیم انفصال ست منتهای (تابع $f(x) = \text{sign}x$ در انتروال $[-1, 1]$ یک نقطه منفصل $x=0$ میباشد و هر انفصال نقاط ست به قطعه خط خود مطابقت می نماید (تابع در چلی) و حال مثالی را تذکر میدهیم که انفصال نقاط ست بی نهایت باشند (به تمام قطعه خط که در آن تابع داده شده باشد مطابقت نمیکند).

مثال 4: فرضاً تابع f مساوی به $\frac{1}{n}$ طوریکه $n \in \mathbb{N}$ باشد و در هر یکی از نقاط ناطق،

$$\text{کسر } \frac{m}{n}, r = \frac{m}{n}, n \neq 0, \text{ قطعه خط } [0,1] \text{ مساوی به صفر نباشد.}$$

$\frac{m}{n}$ کسر غیر اختصار شونده ناطق و برابر به صفر در تمام نقاط قطعه خط باقی می ماند، پس

در آن صورت صفر در تمام نقاط غیر ناطق نیز صفر است.

این تابع بنام تابع ریمن³ یاد میشود.

تابع f در هر نقطه کسر ناطق $r \neq 0$ منفصل میباشد و همینطور برای هر نقطه همین تابع

ترادف اعداد غیر ناطق $\varepsilon_n, n = 1, 2, \dots$ موجود میشود که به r تقرب میکند. برای اینکه طبق

تعریف تابع ریمن، $f(\varepsilon_n) = 0$ باشد، باید $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\varepsilon_n) = 0 \neq f(r), \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = r$ پس

در این صورت تابع ریمن در تمام نقاط $r \neq 0$ منفصل است و نیز میتوان نشان داد که در هر نقطه غیر ناطق و در صفر تابع ریمن متمادی است.

فرضاً: عدد ε یا صفر یا غیر ناطق باشد $\varepsilon > 0$ را اختیار میگیریم و عدد طبیعی n را

طوری که $\frac{1}{n} = \varepsilon$ باشد توسط δ نشان میدهیم، فاصله از نقطه ε تا به نزدیکترین از عدد

$$\frac{m-1}{m}, \dots, \frac{2}{m}, \frac{1}{m} \text{ طوریکه } (m=1, 2, \dots, n) \text{ باشد انتخاب میکنم.}$$

واضح است که $\delta > 0$ است، زیرا که ε به یکی از اعداد اشاره شده است و ست های متناهی آنها برابر نیست.

³ ب. ریمن (1826-1866) ریاضیدان آلمانی

فرضاً: $\delta < |x - \varepsilon|$ و x عدد ناطق باشد، پس در آنصورت کسر ناطق غیر اختصار شونده

$x = \frac{p}{q}$ ظهور میکند، در این صورت طبق انتخاب δ غیر مساوات $q > n$ بجا خواهد بود، زیرا که:

$$f(\varepsilon) = 0, f(x) - f(\varepsilon) = \frac{1}{q} < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

اگر همین قسم $\delta < |x - \varepsilon|$ و x عدد غیر ناطق باشد، پس $f(x) = 0$ و $|f(x) - f(\varepsilon)| < \delta$ است. به این معنی که تابع ریمان در نقطه متمادی است.

5.13 دسته بندی نقاط انفصال توابع

تعریف 14: فرضاً تابع f در حوالی نقطه x_0 میتواند تعریف شود. و در خود این نقطه تعریف نشده باشد. نقطه x_0 بنام نقطه انفصال تابع f یاد میشود اگر تابع f در نقطه x_0 تعریف نشده باشد و یا در این نقطه تعریف شده باشد مگر در این نقطه متمادی نباشد.

تمرین 10: نقطه انفصال تابع را فورمول بندی نمایید.

تعریف 15: اگر x_0 نقطه انفصال تابع f باشد و دارای لیمت یک طرفه⁴ متناهی ذیل باشد:

⁴ لیمت یکطرفه $f(x_0 - 0)$ و $f(x_0 + 0)$ بر حسب ست گرفته میشود در خود نقطه موجود نیست.

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$$

$$f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) \quad \text{و یا :}$$

باشد ، پس نقطه x_0 بنام نقطه انفصال قسم اول می باشد.

کمیت $f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0)$ را بنام تغییر فوری تابع f در نقطه x_0 یاد میشود. اگر تغییر فوری تابع f در نقطه انفصال x_0 برابر به صفر باشد ، پس در این صورت داریم که $f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0)$ که x_0 بنام نقطه برطرفی انفصال درین حالت نامیده میشود که در این صورت داریم :

$$f(x_0) = f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \dots (5.59)$$

که حقیقتاً در نقطه x_0 تابع متمادی را حاصل نمودیم.

اگر برای تابع $f: X \rightarrow R$ شرط (5.59) تطبیق شود پس تابع در نقطه x_0 متمادی است و داریم که :

$$x_2 = \{x_0\}, x_1 = X \setminus \{x_0\}$$

به علت قضیه 2 پراگراف 5.9 از مساوات $f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0)$ نتیجه میشود که در نقطه x_0 لیمت تابع بر حسب ست x_1 موجود میشود به این خاطر طبق شرط (5.59) برابر است به $f(x_0)$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in x_1}} f(x) = f(x_0)$$

از طرف دیگر لیمت تابع f در صورتیکه $x \rightarrow x_0$ به یک ست نقطه‌ئی $\{x_0\}$ برابر x_2 برابر $f(x_0)$ میباشد (لیمت ثابت مساوی به خود این ثابت میباشد).

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in x_2}} f(x) = f(x_0)$$

به علت لیما 5 پراگراف (5.8) در صورتیکه $x \rightarrow x_0$ تابع f برابر به $f(x_0)$ برحسب ست :

$$x = x_1 \cup x_2$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

به این معنی که تابع f در نقطه x_0 متمادی است.

نقطه انفصال تابع نقطه انفصال قسم اول شمرده نمیشود و از لیمت $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$ و یا

$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$ معلوم میشود که انفصال قسم دوم برحسب آخرین اندازه یکی از لیمت های

فوق میباشد، که در این جا بطور معمول لیمت متناهی لیمت فرعی ندارند، پس انفصال قسم دوم دقیق است.

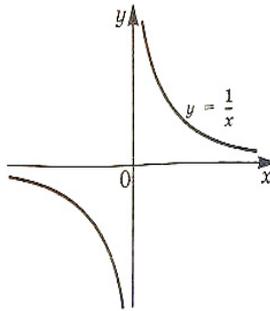
تمرین 11: مفهوم تعریف نقطه انفصال قسم دوم تابع $\text{sign}x$ را به اساس (مراجعه نماید به)

شکل 19 و $|\text{sign}x|$ (مراجعه نمائید به: شکل 22) را فورمول بندی نمایید.

جواب: تابع فوق در نقطه $x_0=0$ دارای انفصال قسم اول میباشد، زیرا که به $|\text{sign}x|$

برطرفی انفصال بوده، مگر تابع $\frac{1}{x}$ (شکل 21) و $\sin \frac{1}{x}$ (س.م) شکل 21 در نقطه $x_0=0$

دارای انفصال قسم دوم میباشد.



شکل 26

5.14 لیمت های توابع مونوتونی:

تعریف 16: تابع $f: X \rightarrow R$, $X \subset R$ باشد، بنام متزاید (متناقص) درست X یاد میشود،

اگر برای $x_1 \in X$ و $x_2 \in X$ که $x_1 < x_2$ غیر مساوات $f(x_1) \leq f(x_2)$ صدق کند.

"در مطابقت به 16 غیر مساوات $f(x_1) \geq f(x_2)$ تابع متزاید شونده (متناقص شونده)

همیشه بنام غیر متناقص شونده (غیر متزاید شونده) یاد میشود.

اگر تابع درست X متزاید شونده (متناقص شونده) باشد، پس چنین میگویند که تابع در این ست تزاید میکند (تناقص میکند) اگر تابع f درست X متزاید شونده (متناقص شونده) باشد، پس تابع f با تغییر علامه به تمام قیمت های آن حاصل میشود.

پس در آنصورت داریم که: $\underline{\underline{def}} - f(x) = (-f)(x)$ ، $x \in X$ عبارت از متناقص شونده (متزاید شونده) در تابع X میباشد. پس تابع متزاید شونده (متناقص شونده) درست X بنام مونوتونی در این ست یاد میشود.

قضیه 4: فرضاً تابع $f: X \rightarrow R$ درست X تزاید میکند

اگر $\beta = \sup X, \alpha = \inf X$ باشد پس تابع f در نقطه α دارای لیمت راست میباشد.

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \inf_{x \in X} f(x)$$

در نقطه β دارای لیمت چپ میباشد که $\lim_{x \rightarrow \beta} f(x) = \sup_{x \in X} f(x)$ به این ترتیب اگر

در شرایط قضیه های تابع f محدود بالای باشد، پس در نقطه β تابع دارای لیمت منتهای چپ میباشد و اگر f غیر محدود بالای باشد، پس:

$$\lim_{x \rightarrow \beta} f(x) = \sup_{x \in X} f(x)$$

بطور مشابه اگر تابع f از پائین محدود باشد، پس در نقطه α تابع دارای لیمت منتهای راست

است و اگر از پائین غیر محدود باشد، پس $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = -\infty$ برای تابع متزاید شونده ممکن

است لیمت های آنها را از تابع f به تابع $-f$ بدست آورد.

نتیجه: اگر تابع f درست X مونوتونی باشد ، طوری که $x_0 \in R$ باشد اگر ست

$$X > (x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \{x : x \in X, x > x_0\} \text{ و } X < x_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{x : x \in X, x < x_0\}$$

غیر خالی و x_0 عبارت از نقطه مماس هر کدام این ست باشد، پس در نقطه x_0 لیمت های یک طرفه متناهی موجود میشود.

$$f(x_0 - 0) = \sup_{X < (x_0)} f(x)$$

$$f(x_0 + 0) = \inf_{X > (x_0)} f(x) \dots \dots \dots (5.60)$$

در صورتیکه تابع متزاید شونده باشد ، داریم که:

$$f(x_0 - 0) \leq f(x_0 + 0) \dots \dots \dots (5.61)$$

و در حالت متناقص شونده داریم ، که :

$$f(x_0 - 0) \geq f(x_0 + 0) \dots \dots \dots (5.62)$$

ثبوت قضیه: فرضاً $\beta = \sup x, b = \sup f(x) \leq +\infty$ طوری که $\beta \notin x$ در حوالی

$U(b)$ نقطه b داده شده باشد و فرضاً η انجام چپ آن معلوم باشد که $\eta < b$ است به علت

تعریف سرحد فوقانی برای آنها چنین نقطه $\varepsilon \in X$ موجود میشود که غیر مساوات:

$$f(\varepsilon) > \eta \dots \dots \dots (5.63)$$

تطبیق میشود. به علت شرط $\varepsilon \in X$ چنانچه $\beta = \sup x, \beta \notin x$ داریم که $\beta < \varepsilon$ است.

حوال $U(\beta)$ توسط نقطه β نشان میدهم که برای هر یک ε عبارت از انجام چپ میباشد.

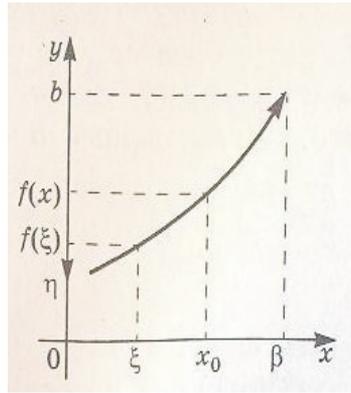
(پس در آن صورت اگر β عبارت از عدد حقیقی باشد ، پس انجام چپ انتروال

$U(\beta, \varepsilon) = (\beta - \varepsilon, \beta + \varepsilon)$ طوری که $\varepsilon = \beta - \varepsilon$ و اگر $\beta = +\infty$ باشد ، پس انجام چپ

انتروال بی نهایت $(\varepsilon, +\infty)$ میباشد ، پس در آن صورت برای هر نقطه:

$$x \in X \cap U(\beta) \dots \dots \dots (5.64)$$

پس شکل 27 غیر مساوات $\varepsilon < x$ بجا خواهد بود.



شکل 27

همین قسم به علت تزايد تابع f و غیر مساوات $f(\varepsilon) \leq f(x)$ شرط (5.64) تأمین میگردد که در آن صورت داریم:

$$\eta < f(x) \leq \sup_{X} f(x) = b \dots \dots \dots (5.65)$$

یاد آور میشویم که نقطه η عبارت از انجام چپ حوالی $U(b)$ نقطه b بوده از (5.65) نتیجه میگیریم که $f(x) \in U(b)$ است، به این ترتیب برای هر حوالی $U(b)$ نقطه b چنین حوالی $U(b)$ نقطه β موجود میشود، طوری که تنها $x \in X \cap U(\beta)$ باشد، پس نتیجه $f(x) \in U(b)$ تطبیق میشود، به این معنی که $\lim_{x \rightarrow \beta} f(x) = b = \sup_X f(x)$ بطور مشابه ثبوت میشود که:

$$\lim_{n \rightarrow \alpha} f(x) = b = \inf_X f(x)$$

نتیجه ثبوت: فرضاً برای مشخص شدن تزايد تابع درست x که x_0 عبارت از نقطه مماس است های غیر خالی $X > (x_0), X < (x_0)$ میباشد ، در آنصورت چنان نقطه $x'' \in X > (x_0), x' \in X < (x_0)$ موجود میشود که غیر مساوات $f(x') \leq f(x'')$ صادق است.

تابع f درست $x < (x_0)$ به عدد $f(x'')$ محدود بالای است و درست $x > (x_0)$ به $f(x')$ محدود پائین است.
همین طور:

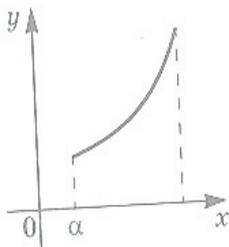
$$\sup_{x < x_0} f(x) \leq f(x''), \quad \inf_{x > x_0} f(x) \geq f(x') \dots \dots \dots (5.66)$$

در خصوص اشاره سرحد فوقانی و تحتانی متناهی غیر مساوات (5.66) صادق است چنانچه برای هر نقطه $x'' \in x > (x_0)$ صادق است ، به تغییرات این مساوات در حده اول سرحد تحتانی و قیمت تابع درست $x > (x_0)$ حاصل می نمائیم:

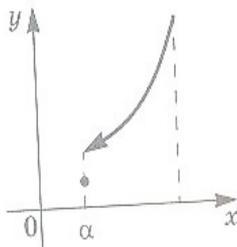
$$\sup_{x < (x_0)} f(x) \leq \inf_{x > (x_0)} f(x) \dots \dots \dots (5.67)$$

که غیر مساوات فوق منجر به ثبوت میشود . همین قسم طبق قضیه 4 لیمت های چپ $f(x_0-0)$ و راست $f(x_0+0)$ موجود میشود چنانچه :

$$f(x_0 - 0) = \sup_{x < (x_0)} f(x), \quad f(x_0 + 0) = \inf_{x > (x_0)} f(x)$$



شکل 28



شکل 29

که درینصورت غیر مساوات (5.61) با غیر مساوات (5.67) مطابقت میکند.

تبصره 1: در قضیه 4 برای تابع متزاید شونده $f: x \rightarrow R$ حالت بررسی شده چنین است:

$$\inf(x) = \alpha \notin X, \sup X = \beta \notin X$$

بطور مثال: اگر $\alpha \in X$ باشد، پس همین طور برای تابع اختیاری (غیر مونوتونی) در اینجا دو حالت ممکن است:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)$$

$$x \in X$$

چنین تابع f متمادی در نقطه α میباشد. (شکل 28)

و یا لیمت موجود نمیشود. شکل (29) شرایط مشابه برای نقطه β نیز بجا خواهد بود.

$$f(r) = a^r, a > 0, \dots \dots (5.68)$$

تبصره 2: از ریاضی مقدماتی معلوم است که تابع

r عدد ناطق، است طوری که $r \in Q$ درست تمام اعداد ناطق Q مونوتونی است (مراجعه

نمائید به: پراگراف *2.6)

برای هر عدد حقیقی x ست غیر خالی $r < x$, $r > (x)$ که عبارت از نقطه مماس میباید طبق

قضیه 4 برای هر عدد حقیقی x لیمت $\lim_{r \rightarrow x+0} a^r$, $\lim_{r \rightarrow x-0} a^r$ موجود میشود (بر حسب

ست عدد ناطق Q که برای تابع نمائی ناطق معین است) در خصوص موجودیت لیمت های

متذکره برای $x=0$ طبق تعریف قیمت ها آنها برابر به قیمت مناسب لیمت ترادف های a^n

میباشد و به هر ترادف ارگومننت $r_n < 0$ و $r_n > 0$ که به صفر تقرب میکند ، طوریکه $r_n \in Q$ و

$n=1,2,\dots$ در تقسیم به $r_n = \frac{1}{n}$ و $r_n = -\frac{1}{n}$ ممکن است گرفته شود ، که برای آنها

این لیمت ها همین قسم محاسبه شده است (مر اجعه نمائید به :مثال 3 در پراگراف 4.9) پس

در اینصورت حاصل مینماییم که:

$$\lim_{r \rightarrow -0} a^r = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{-\frac{1}{n}} = 1$$

$$\lim_{r \rightarrow +0} a^r = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$$

پس در اینصورت لیمت های یکطرفه تابع a^r طوریکه $r \in Q$ باشد در نقطه $r=0$ برابر است

و همین قسم طبق نتیجه از قضیه 2 پراگراف 5.9 دارای لیمت $\lim_{r \rightarrow 0, r \neq 0} a^r - 1$ دوطرفه

میباشد و تابع a^r در صورتیکه $r=0$ شود قیمت آن $a^0=1$ مطابقت میکند که بر حسب

(مر اجعه نمائید به : لیما 3 در پراگراف 5.12) تابع در نقطه صفر متمادی است.

$$\lim_{r \rightarrow 0} a^r = a^0 = 1, r \in Q, a \in R, a > 0 \dots \dots \dots (5.69)$$

موجودیت این رابطه را میتوان در پراگراف 7.2 در تعریف تابع نمائی a^x برای هر عدد حقیقی $a > 0, x$ باشد استفاده نمود. از مثال داده شده معلوم میشود که مفاهیم لیمت بر حسب ست به وضع شرایط بسیار ساده روبرو میشوند.

تبصره 3: از قضیه 4 نتیجه میشود که تمام توابع مونوتومی در انتروال منتهای (بی نهایت) میتواند تنها دارای نقطه انفصال قسم اول باشد که در آن صورت ست های آنها بی حساب نیست، در حقیقت فرضاً برای مشخص شدن تابع $f: (a, b) \rightarrow R$ در انتروال (a, b) ، $-\infty \leq a < b < +\infty$ متزاید باشد، پس قبل از همه نتیجه قضیه 4 که تابع f در هر نقطه $x_0 \in (a, b)$ دارای لیمت منتهای چپ $f(x_0-0)$ و راست $f(x_0+0)$ بوده و همین طور میتواند دارای انفصال قسم اول باشد (تشخیص نقطه انفصال قسم اول مراجعه نمائید به: پراگراف 5.13) که در اینصورت این لیمت ها نمیتوانند نقطه بر طرفی انفصال باشد، واقعاً اگر $x_0 \in (a, b)$ باشد، پس برای تمام $x' \in (a, x_0)$ و $x'' \in (x_0, b)$ به علت تزاید تابع f غیر مساوات ذیل صادق است.

$$f(x') \leq f(x_0) \leq f(x'')$$

$$\sup_{(a, x_0)} f(x) \leq f(x_0) \leq \inf_{(a, x_0)} f(x) \quad \text{از اینجا}$$

$$(a, x_0) = \{x \in (a, b) : x < x_0\} \quad \text{در اینجا}$$

$$(x_0, b) = \{x \in (a, b) : x > x_0\} \quad \text{و}$$

که طبق (5.60) غیر مساوات حاصل شده ممکن است به شکل ذیل نیز نوشت:

$$f(x_0 - 0) \leq f(x_0) \leq f(x_0 + 0) \dots \dots \dots (5.70)$$

اگر x_0 نقطه برطرفی انفصال باشد، پس در آنصورت غیر مساوات $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$ بجا خواهد بود.

پس به علت (5.70) شرط $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$ تطبیق می‌شود. (مراجعه نمائید به : پراگراف 5.9) این معنی میدهد که متمادیت تابع f در نقطه x_0 و همین قسم اگر x_0 نقطه انفصال تابع f باشد، پس در اینصورت داریم که: $f(x_0 - 0) < f(x_0 + 0)$ و با هر نقطه انفصال تابع f انتروال $(x_0 - 0), f(x_0 + 0)$ را تحریر می‌نماییم و نشان می‌دهیم که این انتروال تقاطع نمی‌کند، در حقیقت x_1 و x_2 دو نقطه انفصال تابع f باشد و بطور مثال $x_1 < x_2$ باشد، پس $f(x_0 + 0) < f(x_0 - 0)$ است.

به علت تزايد تابع f برای هر نقطه x' و x'' آنرا ثابت می‌کنیم طوری که: $x_1 < x' < x'' < x_2$ باشد غیر مساوات $f(x') \leq f(x'')$ صادق است. به اساس تغییرات قیمت درین غیر مساوات $x_1 \rightarrow x_1 + 0$ حاصل می‌کنیم که $f(x_1 + 0) \leq f(x'')$ در اینجا x'' به x_2 به طرف چپ

تقرب میکند $x_2 - 0 \rightarrow x''$ در آنصورت خواهیم داشت که: $f(x_1 + 0) \leq f(x_2 - 0)$

پس میتوان گفت که انجام راست انتروال $f(x_1 - 0)$ و $f(x_1 + 0)$ از انجام چپ انتروال بزرگ، نیست یعنی $(f(x_2 - 0), f(x_2 + 0))$ از اینجا واضحاً به نتیجه میرسیم که انتروال های متذکره تقاطع نمی‌کنند. همینطور نقطه انفصال مونوتومی تابع $f(a, b) \rightarrow R$ ممکن است قیمت مناسب بعضی قسم های انتروال ها که تقاطع نمکنند دودو به هم قرار دهیم که هر کدام ازین انتروال ها را بر حسب یک عدد ناطق انتخاب کنیم (چنین اعداد همیشه به اندازه ست اعداد ناطق در محور عددی موجود است) (مراجعه نمائید به : پراگراف *4.11) در نتیجه بین انتروالهای سیستم متذکره ست های که به اساس اعداد ناطق انتخاب گردیده است و بین نقاط

انفصال تابع اعداد ناطق انتخاب گردیده و بین نقاط انفصال تابع و بعضی ست های فرعی ست اعداد ناطق یک قیمت مناسب متقابل را حاصل می نماییم (هرست فرعی ست های داده شده از ست های اعداد ناطق میباشد) (مراجعه نمائید به: پراگراف *4.11) این ست ها میتواند از ست های متناهی یا لایتناهی نقاط انفصال تابع مونوتومی باشد.

5.15 معیار کوشی برای موجودیت لیمت تابع:

در این بخش به مطالعه ترادف های مشابه برمیخوریم که میتوان از روی آن شرایط لازم و کافی تابع که دارای لیمت متناهی در نقطه داده شده x_0 میباشد حاصل نمود زیرا که این شرایط میتوانند تنها خود قیمت تابع را فورمول بندی نماید ، که قیمت لیمت متذکره در آن سهم نمیگیرد.

مثل سابق نقطه فرعی x_0 یا عدد حقیقی یا یکی از بی نهایت $-\infty, +\infty, \infty$ میباشد که x_0 مماس نقطه ست مشخص تابع مورد بررسی میباشد.

قضیه 15: (معیار کوشی) برای اینکه تابع $f: x \rightarrow R$ در نقطه x_0 دارای لیمت متناهی باشد لازم و کافی است تا برای هر $\varepsilon > 0$ چنان حوالی $U(x_0)$ در نقطه x_0 موجود باشد که برای هر $x'' \in U(x_0) \cap x, x' \in U(x_0) \cap x$ غیر مساوات $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$ صادق باشد.

ثبوت لازمی: فرضاً $f: x \rightarrow R$ و $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \in R$ به این معنی که برای هر

$\varepsilon > 0$ چنین حوالی $U(x_0)$ نقطه x_0 موجود میشود که برای هر یکی $x \in U(x_0) \cap x$

$$\text{غیر مساوات (5.71) } |f(x) - a| < \frac{\varepsilon}{2} \dots\dots\dots \text{ صادق است.}$$

فرضاً $x'' \in U(x_0) \cap x, x' \in U(x_0) \cap x$ داشته باشیم در آن صورت به علت (5.71)

خواهیم داشت:

$$|f(x'') - f(x')| = |[f(x'') - a] + [a - f(x')]| \leq |f(x'') - a| + |a - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ثبوت کافی: فرضاً تابع $f: X \rightarrow R$ چنین است که برای هر $\varepsilon > 0$ چنین حوالی $U(x_0)$

نقطه x_0 موجود شود که برای هر $(5.72) \dots \dots \dots x' \in U(x_0) \cap X, x'' \in U(x_0) \cap X$

غیرمساوات $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$ صادق باشد، که در اینجا موجودیت لیمت تابع در نقطه x_0

را نشان میدهد، یکی از ترادف $x_n \in X$ که $n=1,2,\dots$ را در نظر میگیریم

در آن صورت $(5.73) \dots \dots \dots \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ ازینکه $\varepsilon > 0$ را اختیاری داده شده است.

طبق فرضیه حوالی $U(x_0)$ نقطه x_0 موجود میشود که شرایط (5.72) و (5.73) را تأمین کند.

به علت همین شرط (5.73) برای این حوالی $U(x_0)$ چنین نمبر $n_0 \in \mathbb{N}$ موجود میشود که

برای هر $n > n_0$ طوری که $n \in \mathbb{N}$ باشد، پس $x_n \in U(x_0), x_n \in X$ بجا خواهد بود. پس

در این:

(5.72) و (5.73) باشد ازین جا با توجه به $x_n \in U(x_0) \cap X, n = n_0 + 1, n_0 + 2, \dots$

داریم که برای همه $n > n_0$ و همه $m > n_0$ غیرمساوات $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$ صادق است که

در آن صورت ترادف عددی $\{f(x_n)\}$ که توسط شرایط کوشی برای ترادف های عددی (س.م

پراگراف 4.7) تأمین میگردد متقارب است. به این ترتیب برای هر ترادف $x_n \in X$

طوری که $n=1,2,\dots$ باشد.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \text{ ترادف } \{f(x_n)\} \text{ متقارب است.}$$

از اینجا معلوم میشود که (مراجعه نمائید به لیما 4 در پراگراف 5.6) موجودیت لیمت تابع

مساوی به $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ نتیجه میشود.

در این حالت و قتیکه x_0 عدد باشد شرایط کوشی ممکن است بترتیب ذیل فورمول بندی نمود:

برای هر $\varepsilon > 0$ چنین $\delta > 0$ موجود شود که برای هر $x'' \in X, x' \in X$ شرایط تامین کننده

$$|x'' - x_0| > \delta \text{ و } |x' - x_0| < \delta \text{ غیر مساوات } |f(x'') - f(x')| < \varepsilon \text{ تطبیق میشود،}$$

در صورتیکه $x_0 = \infty$ شود شرایط کوشی ممکن است شکل ذیل را اختیار نماید. برای هر

$\varepsilon > 0$ چنین $\delta > 0$ موجود میشود که برای هر $x'' \in X, x' \in X$ شرایط

$$|x''| > \delta, |x'| > \delta \text{ تامین گردد غیر مساوات } |f(x'') - f(x')| < \varepsilon \text{ صادق است برای لیمت}$$

های یک طرفه تصادفی شرایط کوشی ممکن است بدون حوالی ترتیب ذیل تعمیم نمود:

برای هر $\varepsilon > 0$ چنین $n < x_0$ و قتیکه لیمت چپ بررسی میگردد و $n > x_0$ و قتیکه لیمت

راست باشد که برای هر $x'' \in X, x' \in X$ شرایط $n < x'' \leq x_0, n < x' \leq x_0$ یا در مطابقت

به $x_0 \leq x'' < n, x_0 \leq x' < n$ غیر مساوات $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$ تطبیق شود.

یاد آور میشویم که تمام این معیارها موجودیت لیمت تابع که مربوط به حالت مختلف و دارای

فورمول بندی مختلف میباشد به کمک انتخاب یگانه تر مینالوژی برای ثبوت حاصل نمودیم.

§6. خواص متمادیت توابع روی فاصله ها

6.1: محدودیت توابع متمادی و بدست آوردن نقاط اعظمی و اصغری

در این پراگراف ردیف بندی مهم که در بر گیرنده خواص متمادیت تابع پولینومی است مورد مطالعه قرار میدهیم.

تعریف 1: تابع $f: X \rightarrow R, X \subset R$ بنام متمادی درست X نامیده میشود. اگر این تابع

بر حسب ست X در هر نقطه متمادی باشد (مراجعه نمائید به: تعریف 5 و 8 در پراگراف 5.5)

کلاس مهم تابع متمادی عبارت از کلاس تابع متمادی روی فاصله محور عددی میباشد،

مطالعه این تابع با تابع متمادی در انتروال قطعه خط آغاز میشود. اگر تابع f در انتروال $[a,$

$b]$ متمادی باشد، پس متمادیت این تابع در نقطه $x=a$ به معنی متمادی راست است و متمادیت

آن در نقطه $x=b$ به معنی متمادیت چپ درین نقاط میباشد. بزرگترین قیمت $f \max_X$

(کوچکترین قیمت $f \min_X$) قیمت تابع $f: X \rightarrow R$ بنام بزرگترین (کوچکترین) قیمت ست

در تمام قیمت های آن یاد میشود. (مراجعه نمائید به: پراگراف 3.3) معلوم است که اگر به تابع

f بزرگترین (کوچکترین) قیمت موجود شود، پس آن عبارت از سرحد فوقانی (سرحد

تحتانی) (مراجعه شود به پراگراف 5.1) $\sup_X f$ در مطابقت به $\inf_X f$ میباشد.

قضیه 1 (قضیه ویرالشتراس):

تابع درانتروال محدود متمادی است ، اگر تابع قیمت های بزرگ و کوچک درانتروال اخذنماید.

ثبوت: فرضاً تابع f درانتروال $[a, b]$ متمادی است و فرضاً $M = \sup_{a \leq x \leq b} f(x)$ باشد و همینطور

هر سرحدست عددی غیر خالی M میتوان یا متناهی یا بی نهایت برابر به $+\infty$ باشد.

نشان میدهیم که $M < +\infty$ و چنان نقطه $x_0 \in [a, b]$ موجود شود که $f(x_0) = M$ شود ، پس

چنین ترادف به چنین عدد $n=1, 2, \dots, a_n$ را اختیار میکنیم که

، $(6.1) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = M$ و $a_n < M$ و $n=1, 2, \dots$ مطابق به تعریف سرحد فوقانی تابع برای

هر یکی از $n=1, 2, \dots, a_n$ چنین نقطه $x_0 \in [a, b]$ موجود شود.

$$f(x_n) > a_n \quad n=1, 2, \dots \quad (6.2)$$

از طرف دیگر M سرحد فوقانی تابع f بوده پس برای تمام نقاط $x \in [a, b]$ غیر مساوات

$$f(x) \leq M \dots \quad (6.3)$$

ترادف $\{x_n\}$ محدود است: $n=1, 2, \dots, a \leq x_n \leq b$

بر حسب قضیه بلزانو ویرالشتراس (مراجعه نمائید به : پراگراف 4.6) میتوان از آنها ترادف

فرعی متقارب $\{x_n\}$ را جدا ساخت.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{nk} = x_0 \dots \quad (6.4)$$

همینطور $k=1, 2, \dots, a \leq x_{nk} \leq b$ پس چرا؟ و $a \leq x_0 \leq b$ پس در آن صورت x_0 نقطه

انتروال $[a, b]$ است از غیر مساوات (6.2) و (6.3) نتیجه میشود که برای هر $k=1, 2, \dots$

غیر مساوات (6.5) $a_{nk} < f(x_{nk}) \leq M \dots$ صادق است. لیست هر ترادف فرعی، ترادف است

که دارای لیمت متناهی یا بی نهایت بوده برابر به لیمت تمام ترادف ها است ، پس از مساوات

6.1 داریم که: $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = M$ با تبدیل 6.5 به لیمت در صورتیکه $k \rightarrow \infty$ حاصل می

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = M \dots (6.6) \quad \text{نماییم که :}$$

از طرف دیگر به علت متمادیت تابع f در انتروال $[a, b]$ در نقطه x_0 این انتروال متمادی است ، همین طور از (6.4) نتیجه میشود که:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(x_0) \dots (6.7)$$

و از فرمول های (6.6) و (6.7) داریم که $M=f(x_0)$ و به این ترتیب ثابت است که سرحد فوقانی M تابع f به قیمت تابع در نقطه x_0 مطابقت میکند و به خود تابع f محدود بالای است و سرحد فوقانی آن به نقطه $x_0 \in [a, b]$ میرسد.

بطور مشابه ثابت میشود که تابع متمادی در انتروال محدود پائین بوده که به سرحد پائین خود میرسد.

این قضیه هم مانند قضیه 1 برای فاصله ها که انتروال شمرده نمیشود مطابقت نمیکند که راجع به آن به سادگی میتوان مثال را ترتیب نمود.

بطور مثال تابع $y = \frac{1}{x}$ در هر نقطه انتروال $(0, 1)$ متمادی است و درجائیکه انتروال محدود

نیست متمادی نیست، تابع $y = x$ در تمام محور عددی خود متمادی بوده و در آن محدود نیست.

یا دآور می‌شویم که اگر تابع f در انتروال متمادی نباشد بلکه روی فاصله دیگری غیر از این انتروال محدود باشد درین صورت می‌گویند که تابع دارای بزرگترین (کوچکترین) قیمت نمی‌باشد.

بطور مثال: تابع $y=x$ در انتروال $(0,1)$ و $y=\arctg x$ در تمام مستقیم عددی شان متمادی اند (متمادیت تابع $y=\arctg x$ در پیراگراف 7.3 ثبوت خواهد شد) این توابع در فاصله متذکره محدود و به سرحد فوقانی و تحتانی موافق نمی‌باشد.

تمرین 1: فرضاً تابع f مشخص و متمادی در انتروال $[a, b]$ و $f(x) > 0$ برای تمام $x \in [a, b]$ باشد، پس در آن صورت چنین $c > 0$ یافت می‌شود که $f(x) > c$ برای تمام $x \in [a, b]$ صدق می‌کند. ثابت نماید.

2: ثابت نمائید که تابع f در انتروال نیمه بسته یا متناهی و بی نهایت $a < b \leq +\infty, [a, b]$ متمادی است و دارای لیمت متناهی $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$ در $[a, b)$ محدود است.

6.2 قیمت وسطی توابع متمادی

قضیه 2 (قضیه بلزان-کوشی): اگر تابع f در انتروال $[a, b]$ طوری که $f(a)=A$ و $f(b)=B$ متمادی باشد، پس در این صورت برای هر c اختیاری به اساس قرارداد بین A و B چنین نقطه $\xi \in [a, b]$ که $f(\xi) = c$ موجود می‌شود. بابه عباره دیگر تابع متمادی در انتروال دو قیمت را بخود می‌گیرد و یا هر قیمت را که در بین آنها واقع باشد بخود می‌گیرد.

ثبوت: فرضاً برای تشخیص $f(a)=A < B=f(b)$ و $A < c < B$ انتروال $[a, b]$ نقطه x_0 قطعه خط را به طول برابر تقسیم می‌نماید و در این صورت $f(x_0)=c$ ، یعنی نقطه مطلوبه $\xi = x_0$ یافت شده یا $f(x_0) \neq c$ است، که درین صورت در انجام یکی از قطعه خط بدست آمده

تابع f قیمت را بخود میگیرد که بطرف مخالف از عدد c واقع است به قیمت های کوچک از طرف چپ و به قیمت های بزرگ از طرف راست به نقطه c نزدیک میشود. این قطعه انتروال را به

$[a_1, b_1]$ نشان میدهم و دوباره آنرا برحسب طول قطعه خط برابر به دو تقسیم میکنیم.

در نتیجه از طریق تعداد متناهی اعداد قدم های بر میداریم و به نقطه مطلوب ξ که در آن $f(\xi) = c$ است و ترادف داخلی قطعه $[a_n, b_n]$ را حاصل می نماییم که برحسب طول به طرف صفر تقرب میکند.

$$F(a_n) < c < f(b_n) \dots \dots \dots (6.8)$$

فرضاً ε نقطه عمومی تمام قطعه $[a_n, b_n]$ طوریکه $n=1,2,\dots$ باشد (مراجعه نمایند به: پراگراف (3.7) و (4.2) معلوم است.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

از اینجا به علت متمادیت تابع f داریم که:

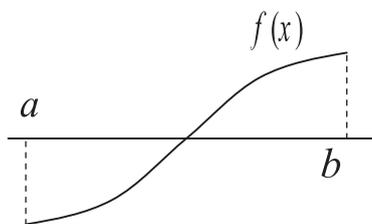
$$f(\varepsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n) \dots \dots \dots (6.9)$$

از (6.8) (مراجعه نمایند به: پراگراف (3.3) حاصل می داریم که:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \leq c \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) \dots \dots \dots (6.10)$$

از (6.9) و (6.10) نتیجه میشود که $f(\varepsilon) = c$

نتیجه 1: اگر تابع f متمادی بوده و در انجام قطعه خط قیمت های مختلف بگیرد در آن صورت در این قطعه اقلأ یک نقطه موجود میشود که در آن تابع به صفر برمی گردد. این نتیجه حالت خصوصی قضیه (شکل 31 باشد).



شکل 31

نتیجه 2: فرضاً تابع f در قطعه خط $[a, b]$ متمادی باشد، $M = \sup f$ و $m = \inf f$ باشد در آن صورت تابع f تمام قیمت ها از قطعه $[m, M]$ اخذ مینماید و تنها همین قیمت را برای ثبوت نتیجه یاد آور میشویم که اگر $M = \sup_{[a,b]} f$ ، $m = \inf_{[a,b]} f$ باشد، پس درین صورت $m \leq f(x) \leq M$ مطابق قضیه 1 چنین نقاط $\alpha \in [a, b]$ و $\beta \in [a, b]$ موجود میشود که $f(\alpha) = m$ و $f(\beta) = M$ بوده، در صورتی که برای بررسی نتیجه مستقیماً از قضیه 2 استفاده شده باشد، راجع به قطعه $[\alpha, \beta]$ چنین نتیجه میشود که:

اگر $\alpha \leq \beta$ باشد یا برابر به قطعه $[\beta, \alpha]$ باشد یا $\beta < \alpha$ باشد، در این صورت ست های تمام قیمت تابع داده شده در بعضی قطعه ها متمادی است و به همین قسم قطعه ها را بخود اختیار میکند. یاد آور میشویم که خواص توابع متمادی تمام قیمت وسطی برابر هر قیمت وسط (متناهی، یابی نهایت) را بخود میگیرد. به همین ترتیب اگر بعضی تابع متمادی قیمت وسطی را در دو نقطه a و b بگیرد در آن صورت $a < b$ میباشد، پس همین دو قیمت آن ها وسط را بخود میگیرد. در حقیقت طبق قضیه 2 تابع بررسی شده است مشخصاً قیمت متذکره در یک تعداد نقاط قطعه $[a, b]$ که عبارت از بخش اول قیمت وسط میباشد، بخود میگیرد.

تبصره: طوریکه در قضیه 1 و همین قسم در قضیه 2 موجودیت نقطه در انتروال داده شده ثابت گردد، در آن قیمت تابع متمادی است که دارای خواص مشخص میباید مورد مطالعه قرار گرفت.

(در قضیه اول به قیمت اکسیتربیمیم (اعظمی) و در قضیه دوم به قبول کردن قیمت داده شده وسطی نائل گردیده است که یکی ازین میتودها برای ثبوت این ادعا بکار میرود که دارای تفاوت های اصولی میباید. میتود ثبوت قضیه 2 نه تنها امکان ثبوت را میدهد، بلکه به صورت عموم حالت موجودیت نقطه اشاره شده را نیز نشان میدهد و در عمل دریافت آن با دقت هر درجه داده شده آن برای هر تابع بسیار دقیق میتوانند صورت گیرد. قطعه راکه در آن نقطه را جستجو میکند عدد را بطور خاص به 2 تقسیم میکند و هر دفعه نصف آنرا طبق اصول اشاره شده در ثبوت آنرا انتخاب میکنیم انجام بدست آمده قطعه خط نزدیک به نقطه اشاره شده میباید، به همین میتود که در قضیه 1 ثبوت شد اجازه نمیدهد تا طریقه را نشان دهد که توسط این طریقه برای هر یکی از توابع متمادی در قطعه ممکن باشد نقطه را دریافت کند و قیمت اکسیتربیمیم آنرا در این نقطه قبول کند.

از این سبب که ثبوت این قضیه به اساس قضیه بلزانو-ویرسترش که جدا ساختن از هر ترادف محدود متقارب، ترادف فرعی امکان پذیر نیست، زیرا که الگورتم قبول شده برای جدا نمودن از هر ترادف محدود متقارب ترادف فرعی موجود نیست. و همین قسم یاد آور میشویم که با استفاده از چنین الگورتم در پراکتیک مشکل است، ذریعه چنین الگورتم به آسانی به مقصد برسیم. بادر نظر داشت این نظر در نزدیکی به حل معادله $f(x)=0$ معمولاً نه به حیث میتود تقسیم قطعه خط به عدد 2 بلکه به دیگر الگورتم که زودتر به مقصد ما را می رساند، استفاده میشود.

مسئله 7: ثبوت نمایید که تابع متناوب متمادی در تمام محور عددی با تابع ثابت که دارای تناوب کوچکتر است، تفاوت دارد.

مثال تابع متناوب را بنویسید که در تمام محور عددی معین باشد و به تابع ثابت که دارای تناوب کوچک نباشد تفاوت داشته باشد

6.3 توابع معکوس:

تعریف 2: تابع f که درست عددی X تعریف شده باشد بنام متزاید دقیق (متناقص دقیق) یاد میشود. اگر برای هر دو عدد $x_1 \in X$ و $x_2 \in X$ طوریکه $x_1 < x_2$ باشد غیر مساوات $f(x_1) < f(x_2)$ در مطابقت به $f(x_1) > f(x_2)$ تطبیق شود تابع که دقیقاً متزاید میکند، یا دقیقاً تناقص میکند بنام مونوتونی دقیق یاد میشود اگر تابع اکیداً متزاید (اکیداً متناقص) درست X باشد، پس میتوان گفت که تابع متذکره درین ست بادقت متزاید میکند (بادقت متناقص میباشد).

معلوم است که تابع مونوتونی دقیقاً (متزاید شونده) (متناقص شونده) بنام مختصر مونوتومی (در مطابقت به متزاید شونده یا متناقص شونده) یاد میشود.

(مفهوم تعریف 16 تابع از پراگراف (5.14))

لیما 1: فرضاً تابع f بادقت تمام دقیقاً متزاید کند (تناقص کند) در بعضی ست $c \subset R$ و فرضاً Y ست قیمت آن باشد، در آن صورت تابع معکوس f^{-1} (مراجعه شود به پراگراف (1.2*)) عبارت از تابع متزاید کننده (اکیدی یک قیمته) (متناقص شونده) ست y میباشد.

ثبوت: فرضاً برای مشخص ساختن تابع f که درست X اکیداً متزاید کننده است، ثابت میکنیم که تابع معکوس یک قیمته است.

برعکس فرض میکنیم که هرگاه چنین نقطه $y \in Y$ موجود شود که ست $f^{-1}(y)$ برحسب آخرین اندازه دونقطه مختلف x_1 و x_2 تشکیل گردد، طوریکه $x_1 \in f^{-1}(y), x_2 \in f^{-1}(y)$ و $x_1 \neq x_2$ باشد.

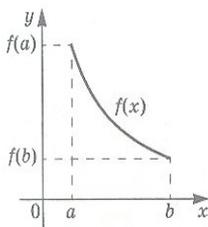
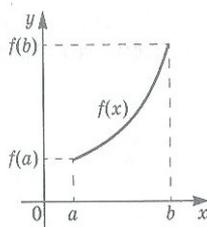
و همین قسم (6.11) $f(x_1)=f(x_2)$ باشد و برای دو عدد x_1 و x_2 طوریکه $x_1 \neq x_2$ باشد، وحد اقل یکی ازین دو عدد غیر مساوات $x_1 < x_2$ یا $x_1 > x_2$ صدق نماید.

درحالت اول به علت تزايد اکیدی تابع f داریم که $f(x_1) < f(x_2)$ و در دوم $f(x_1) > f(x_2)$ باشد، پس در اینصورت داریم که در هر دو حالت غیر مساوات (6.11) تطبیق نمیشود به این ترتیب برای هر $y \in Y$ ست $f^{-1}(y)$ تابع اکیدی در یک نقطه تشکیل میشود که در آنصورت تابع f^{-1} یک قیمته است.

حال ثبوت میکنیم که تابع f^{-1} اکیداً درست y متزاید است. فرضاً
 (6.12) $y_1 < y_2, y_1 \in Y, y_2 \in Y$ باشد و فرضاً $x_1 = f^{-1}(y_1)$ و $x_2 = f^{-1}(y_2)$ باشد همین قسم $y_1 = f(x_1)$ و $y_2 = f(x_2)$ باشد برای هر دو عدد x_1 و x_2 یکی ازین 3 نسبت صدق می نماید.

یا $x_1 > x_2$ یا $x_1 = x_2$ و یا $x_1 < x_2$ باشد. اگر $x_1 > x_2$ یا $x_1 = x_2$ باشد، پس در آنصورت مطابق به $y_1 > y_2$ بوده (به علت اینکه تابع اکیداً متزاید) است یا $y_1 = y_2$ (به علت اینکه تابع یک قیمته است) که غیر مساوات (6.12) خلاف نتیجه میشود که: $x_1 < x_2$ است و این معنی میدهد که تابع f^{-1} درست y اکیداً متزاید میباشد.

در این حالت امکان دارد به اثبات رسانیده شود که تابع f اکیداً متزاید است یا میتوان تابع به شکل مشابه به تابع دیگر تبدیل گردد یابه همین حالت تابع f - مورد مطالعه قرار گیرد. یا وقتیکه تابع f درست x اکیداً متناقص باشد، پس تابع f - در این ست اکیداً متزاید است.



شکل 32

قضیه 3: فرضاً تابع f در قطعه $[a, b]$ متممادی و اکیداً متزايد (متناقص) تعريف شده باشد ، در اينصورت تابع معكوس f^{-1} يك قيمته اكيداً متزايد (متناقص) و متممادی در انجام های قطعه خط در نقاط $f(b)$ و $f(a)$ مطابق شکل 32 تعريف شده است.

ثبوت: ثبوت قضيه را برای تابع اکيداً متزايد عملی میسازيم ، فرضاً $c=f(a)$ و $d=f(b)$ را نشان میدهيم که ساحه تعريف تابع معكوس f^{-1} عبارت از قطعه خط $[c, d]$ بوده و همين قسم معكوس $[c, d]$ ست قيمت تابع f میباشد.

در حقيقت از تزاييد تابع f نتيجه ميشود که $f(a) \leq f(c) \leq f(b)$ است ، پس در آنصورت داريم که $f(x) \in [a, b]$ برای هر $x \in [a, b]$ است از طرف ديگر $y \in [c, d]$ است.

پس در اينصورت داريم که $f(a) \leq y \leq f(b)$ است ، طبق قضيه 2 چنان نقطه $x \in [a, b]$ يافت ميشود که $f(x)=y$ ميشود ، به اين ترتيب تمام قيمت های داده شده تابع f بالای قطعه خط $[c, d]$ واقع است.

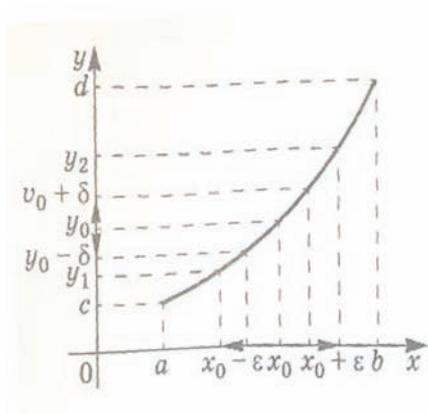
و هر نقطه اين قطعه خط عبارت از قيمت تابع f در بعضی از نقاط میباشد مطلب فوق اين معنی میدهد که قطعه خط $[c, d]$ عبارت از ست قيمت تابع f میباشد و بيان فوق از نتيجه 2 قضيه 2 بدست آمده است اگر در حالت داده شده

$$d = \max_{[a,b]} f(x), c = \min_{[a,b]} f(x)$$

پس به علت لیما تابع f^{-1} یک قیمته بوده و اکیداً در قطعه $[c, d]$ متزاید میباشد.

فرضاً $y_0 \in [c, d]$ و $x_0 = f^{-1}(y_0)$ است فرضاً $c < y_0 < d$ باشد پس در آنصورت داریم که y_0

نقطه داخل قطعه $[c, d]$ میباشد پس به علت اکیداً متزاید بودن تابع f^{-1} و $\varepsilon > 0, a < x_0 < b$ را در شکل ذیل معین میسازیم.



شکل 33

میتوان حساب کرد که ε چنین است:

$$a \leq x_0 - \varepsilon < x_0 < x_0 + \varepsilon \leq b \dots \dots \dots (6.13)$$

فرضاً $y_1 = f(x_0 - \varepsilon)$ و $y_2 = f(x_0 + \varepsilon)$ باشد، پس در اینصورت از شرط (6.13)

به علت اکیداً متزاید بودن تابع نتیجه میشود که:

$$c \leq y_1 < y_0 < y_2 \leq d$$

$\Delta > 0$ را میگیریم، طوری که: $y_1 \leq y_0 - \delta < y_0 + \delta \leq y_2$ (مطابق شکل 33)، حال اگر y را طوری انتخاب کنیم که $y_0 - \delta < y < y_0 + \delta$ پس در اینصورت $y_1 < y < y_2$ و همین قسم به علت تزاید تابع f^{-1} غیر مساوات ذیل صادق میباشد:

$$x_0 - \varepsilon = f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_2) = x_0 + \varepsilon$$

به این ترتیب برای $\varepsilon > 0$ چنین اشاره شده و $\delta > 0$ برای تمام $y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ غیر مساوات ذیل تطبیق میشود:

$$|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon,$$

پس، تابع f^{-1} در اینصورت در نقطه y_0 متمادی می باشد. حال اگر $y_0 = c$ و یا $y_0 = d$ شود درین صورت به طور مشابه ثبوت می شود که تابع f^{-1} در نقطه c متمادی چپ است. پس قضیه برای تابع اکیداً متزاید ثابت شد.

یاد آور میشویم که تابع f اکیداً متناقص است، اگر و فقط اگر تنها و تنها وقتی که تابع f اکیداً متزاید باشد، و همینطور قضیه ها برای تابع اکیداً متناقص نیز از حالت بررسی شده ثبوت میشوند.

نتیجه میشود ما تابع تعریف شده را در انتروال بررسی میکنیم.

قضیه 4: فرضاً تابع f اکیداً متزاید (اکیداً متناقص) تعریف شده باشد و در انتروال $[a, b]$ (متناهی یا بی نهایت) متمادی است.

$$d = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) \text{ و } C = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$$

در اینصورت تابع معکوس، f^{-1} یک قیمته بوده و متزاید (اکیداً متناقص) تعریف شده و در انتروال (متناهی، بی نهایت) با انجام های C و d متمادی است.

در حالت $a=-\infty$ تحت علامه لیمت $\lim_{x \rightarrow -a+0} f(x)$ لیمت گفته میشود. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و در حالت

$b=+\infty$ تحت لیمت $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ لیمت دانسته میشود، $\lim_{x \rightarrow +0} f(x)$

ثبوت: برای تشخیص تابع f که در انتروال $[a, b)$ اکیداً متزاید است، در این حالت ست قیمت آن انتروال (c, d) میباشد.

به اساس قضیه لیمت تابع مونوتونی (مراجعه نمائید به : پراگراف 5.14) داریم که:

$$C \leq f(x) \leq d \text{ غیر مساوات } X \in (a, b) \text{ هر } d = \sup_{(a, b)} f \text{ و } C = \inf_{(a, b)} f$$

صدق می نماید.

بر علاوه، برای تمام $X \in (a, b)$ غیر مساوات $f(x) \neq C$ و $f(x) \neq d$ صدق می نماید.

در حقیقت اگر چنین نقطه X_0 موجود باشد که غیر مساوات $a < x_0 < b$ و $f(x_0) = C$ باشد. (معلوم است که تنها و تنها فقط و فقط امکان پذیر است که سرحد تحتانی C متناهی باشد).

پس در اینصورت $a < x < x_0$ غیر مساوات $f(x) < f(x_0) = C$ تطبیق میشود که

خلاف ادعا بوده، طوریکه $C = \inf_{(a, b)} f$ باشد. و همینطور برای تمام $X \in (a, b)$

غیر مساوات $C < f(x) < d$ تطبیق میشود.

از طرف دیگر $C = \inf_{(a, b)} f$ ، $d = \sup_{(a, b)} f$ است، چنانچه برای هر y طوریکه $C < y < d$

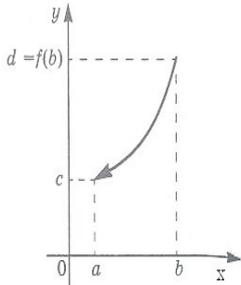
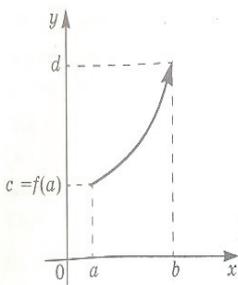
باشد.

موجود شود $y_2 = f(x_2)$ و $y_1 = f(x_1)$ که $x_2 \in (a, b)$ و $x_1 \in (a, b)$ غیر مساوات $C < y_1 < y < y_2 < d$ صدق میکند.

از اینجا نتیجه میشود که اگر $x_1 < x_2$ و $f(x_1) = y_1$ و $f(x_2) = y_2$ باشد، پس در اینصورت به علت قضیه بلزان-کوشی راجع به قیمت فاصله توابع متممادی چنین نقطه

(1) حالت $x_1 > x_2$ امکان ندارد. همینطور در اینصورت به علت تزايد تابع f غیر مساوات $y_1 > y_2$ تطبیق خواهد شد.

موجود میشود که $f(x) = y$ $x \in [x_1, x_2]$ است. به این ترتیب برای هر نقطه $y \in [c, d]$ چنان نقطه $x \in (a, b)$ که $f(x) = y$ باشد موجود است.



شکل 34

به همین قسم قضیه ثبوت میشود، که خودش ثبوت است. ست حقیقی قیمت تابع f یا همین قسم ست قیمت تابع معکوس f^{-1} عبارت از انتروال $[c, d]$ میباشد، پس در اینصورت تابع f^{-1} یک قیمته بوده و در انتروال $[c, d]$ اکیداً متزاید است.

بنابر قضیه 3 چنین نتیجه میشود که قطعه $|x_1, x_2| \subset (a, b)$ است و تابع f^{-1} در آن متممادی میباشد.

تبصره: بطور مشابه ثبوت میشود که اگر تابع اکیداً متزاید در انتروال نیمه بسته (a, b) ، $-\infty < a < b < +\infty$ یا در $(a, b] - \infty \leq a < b < +\infty$ متمادی باشد.

پس درانصورت تابع معکوس تعریف شده و اکیداً متزاید است و در انتروال نیمه بسته (c, b) طوریکه $C=f(a)$ و $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$ در مطابقت به $(c, d]$ طوریکه $C = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ و $d=f(b)$ شکل 34 باشد، متمادی است.

تابع تصادفی متناقض شونده اکیدی در نیمه انتروال $f(x)$ ممکن است به تابع تصادفی متزاید تبدیل شود تابع $f(x)$ را به بررسی سپرده شود.

مثال: به هر مقصد مثبت n رابه تابع $y = x^n$ اکیداً متزاید است و درنیم محور $X \geq 0$ مثبت و متمادی است.

واقعاً اگر $0 \leq x_1 < x_2$ باشد، پس در آنصورت n دفعه این غیر مساوات را ضرب میکنیم حاصل می نماییم که $x_1^n < x_2^n$ پس، در آنصورت داریم که تابع $y = x^n$ ، $n=1,2$ باشد اکیداً تابع مونوتون متزاید است.

برای ثبوت متمادیت تابع $y = x^n$ یاد آور میشویم که تابع $y=f(x)=x$ در هر نقطه $x_0 \in \mathbb{R}$ متمادی است. واقعاً، در این حالت $y_0 = f(x_0) = x_0$ است. چنانچه $\Delta y = y - y_0 = x - x_0 = \Delta x$ اگر $\varepsilon > 0$ داده شده باشد، پس در اینصورت $\delta = \varepsilon$ قرار میدهیم از شرط $|\Delta x| < \delta$ نتیجه میشود که $|\Delta y| = |\Delta x| < \delta = \varepsilon$ است.

به این معنی که متمادیت تابع $y=x$ در نقطه $x = x_0$ است. همین قسم تابع $y = x^n$ عبارت از حاصل ضرب n تابع $f(x)=x$ بوده و در تمام نقاط $x \in \mathbb{R}$ متمادی است (مراجعه نمایند به: پراگراف 5.10)

از اینجا $\lim_{h \rightarrow +\infty} x = +\infty$ در نتیجه $\lim_{h \rightarrow +\infty} x^h = +\infty$ طوری که $n=1,2,\dots$ به غیر از آن برای

صفر، تابع $y = x^n$ عبارت از جذر n ام توان $\sqrt[n]{y}$ طوری که $n=1,2,\dots$ باشد طبق قضیه 4

و خواص ثبوت شده توان تابع $y = x^n$ جذر n ام توان $\sqrt[n]{y}$ طوری که $n=1,2,\dots$ باشد برای

هر عدد y غیر منفی مشخص است.

به همین ترتیب از قضیه ثبوت شده در خصوص موجودیت یگانگی جذر n ام توان مثبت

هر عدد مثبت به نتیجه نهائی رسیده ایم.

تبصره: از مثال بررسی شده بار دیگر به نتیجه میرسیم که هر فاصله متشکل از اعداد

غیرناطقی (مراجعه نمائید به: نتیجه 2 از قضیه 8 در پراگراف 4.11) نشان میدهد که عدد

$\sqrt{2}$ عبارت از عدد غیرناطقی میباشد و عدد غیر ناطق برابر به مربع جذر دوم است. این عدد

را به شکل کسر غیر اختصار شده مینویسیم یعنی $\frac{p}{q}$ (پ و q اعداد ساده طبعی میباشد).

$\sqrt{2} \frac{p}{q}$ پس در آنصورت $p^2 = 2q^2$ و همین قسم عدد p بالای 2 تقسیم میشود. واقعاً اگر

جفت باشد، پس در آنصورت داریم که $P = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$ پس عدد ...

$$p^2 = (2R + 1)^2 = 4k^2 + 2k + 1$$

همین قسم اگر جفت نباشد و مساوات $p^2 = 2q^2$ شود بجا خواهد بود. و همین طور $P = 2k$

پس در آنصورت $4k^2 = 2q^2$ یا $q^2 = 2k^2$ است.

از اینجا طوری که دیده میشود q عدد جفت است. جفت بودن عدد p و q خلاف ادعا راجع به

کسر غیر اختصار شده میباشد. از اثبات فوق به نتیجه میرسیم که هر عدد $\frac{m\sqrt{2}}{n}$ (م و n عدد

طبعی است) غیر ناطق بوده، در حقیقت اگر این عدد ناطق باشد $\frac{p}{q} = \frac{m\sqrt{2}}{n}$ و $\sqrt{2}$ عدد ناطق

باشد، پس $\sqrt{2} = \frac{n.p}{m.q}$ ازینجا به نتیجه میرسیم که هر انتروال متشکل از اعداد غیرناتق

میباشد(پراگراف 4.11 را مقاسیه کنید) و شکل مخالف آنرا $\frac{m\sqrt{2}}{n}$ طوریکه m و n اعداد تام اند.

حقیقتاً اگر $0 \leq a < b$ عدد طبعی n را انتخاب کنیم، طوریکه $\frac{\sqrt{2}}{n} < b - a$ و بعداً عدد

طبعی m را انتخاب کنیم، طوریکه $\frac{m\sqrt{2}}{n} < a < \frac{(m-1)\sqrt{2}}{n}$ ، دراینصورت $a < \frac{m\sqrt{2}}{n} < b$

. همین قسم اگر $a < b \leq 0$ باشد، پس درآنصورت به علت ثبوت چنان اعداد تام m و n

موجود میشود که $-a < \frac{m\sqrt{2}}{n} < -b \leq 0$ ، طوریکه $a < -\frac{m\sqrt{2}}{n} < b$ میباید.

اگر $a < 0 < b$ باشد، طبق ثبوت چنان اعداد تام m و n موجود میشود که $a < 0 < b$

$$\frac{m\sqrt{2}}{n} < b$$

6.4 متمادیت یکنواخت - مودول متمادیت

اگر تابع f در قطعه متمادی باشد، این معنی میدهد که برای نقطه x این قطعه خط و برای

هر عدد $\varepsilon > 0$ چنین عدد $\delta > 0$ یافت میشود (مربوط به نقطه x و عدد ε) که برای تمام

نقاط \bar{x} قطعه خط طوریکه غیر مساوات ذیل صدق کند.

$$|\bar{x} - x| < \delta \dots (6.13)$$

باشد، غیر مساوات ذیل صدق میکند و همین قسم تابع متمادی عبارت است از.

$$|f(\bar{x}) - f(x)| < \varepsilon \dots (6.14)$$

اگر عدد δ مربوط به نقطه x نباشد و شرایط (6.13) انتخاب شود که شرط (6.14) تطبیق

شوند، پس درآنصورت تابع f را بنام تابع متمادی یکنواخت یاد میشود.

تعریف این مفهوم بطور دقیق ذیلاً فورمولبندی می نماییم.

تعریف 3: تابع f در قطعه $[a, b]$ بنام متمادی یکنواخت در این قطعه یاد میشود. اگر برای هر

$$\varepsilon > 0 \text{ چنین } \delta > 0 \text{ موجود شود که برای هر دو نقطه } \bar{x} \in [a, b] \text{ و } x \in [a, b]$$

طوریکه، اگر $|\bar{x} - x| < \delta$ باشد، غیر مساوات $|f(\bar{x}) - f(x)| < \varepsilon$ صادق است. بطور

سمبولیک تعریف متمادیت تابع در قطعه بترتیب ذیل میباشد:

$$\forall x \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x', |x' - x| < \delta : |f(x') - f(x)| < \varepsilon$$

و تعریف متمادیت یکنواخت چنین است.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, x', |x' - x| < \delta : |f(x') - f(x)| < \varepsilon \dots (6.15)$$

در اینجا نقاط x و x' بالای قطعه خط قرار دارد، که تابع f در آن بررسی میگردد.

واضح است که هر تابع متمادی یکنواخت متمادی درین قطعه است.

اگر در تعریف متمادیت یکنواخت نقطه x معین باشد، پس درینصورت تعریف متمادیت در این

نقطه بدست می آید.

مثالها: 1: تابع $f(x) = x$ در تمام محور عددی متمادی یکنواخت است، طوریکه اگر $\varepsilon > 0$

داده شده باشد کافی است تا $\delta = \varepsilon$ را در نظر بگیریم، در اینصورت اگر $|x - \bar{x}| < \delta$

باشد، پس به علت مساوات $f(x) = x$ و $f(\bar{x}) = \bar{x}$ حاصل می نمایم:

$$|f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon$$

2: تابع $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ ، $x \neq 0$ باشد در ناحیه تعریف خود متمادی است. و در محور عددی

خود نقطه دور $x=0$ نمیتواند در آن متمادی یکنواخت باشد. بطور مثال اگر $\varepsilon = 1$ را

انتخاب کنیم، پس در اینصورت میتوان به هر اندازه دلخواه $\delta > 0$ نقطه x و \bar{x} را کوچک و

کوچکتر دریافت کرد.

بطور مثال تقاطع شکل $X = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi.n}$ و $\bar{X} = \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2\pi.n}$ (n بطور کافی عدد طبیعی بزرگ

است) طوری که $|x - \bar{x}| < \delta$ به عوض $|f(x) - f(\bar{x})|$ به اساس تعریف صدق می کند.

3، تابع $f(x) = x^2$ در محور عددی R متمادی و یکنواخت نمیباشد. از اینجا نتیجه میشود که برای هر $h \neq 0$ مفهوم مساوات ذیل بجا خواهد بود.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x+h) - f(x)] = \lim_{x \rightarrow \infty} [(x+h)^2 - x^2] = \lim_{x \rightarrow \infty} (2xh + h^2) = \infty$$

اگر در اینجا $\varepsilon > 0$ داده شده باشد، پس در آنصورت هر $\delta > 0$ موجود میشود که مفهوم $h \neq 0$ طوری که $|h| < \delta$ باشد ارائه کرد.

همینطور ممکن است x را طوری انتخاب نمود که برای این هدف میتوان غیر مساوات $|f(x+h) - f(x)| > \varepsilon$ را تطبیق نمود.

قضیه 5 (کانتور): تابع که در قطعه خط متمادی باشد یکنواخت در آن قطعه خط است.

ثبوت: عکس قضیه را نشان میدهیم. فرض میکنیم که تابع f در بعضی قطعه $[a, b]$ متمادی است و در بعضی قطعه متمادی یکنواخت نمیباشد، این معنی میدهد (مراجعه شود به 6.15)

که چنین $\varepsilon_0 > 0$ موجود میشود که برای هر $\delta > 0$ چنین نقطه $\bar{x} \in [a, b]$ و $x \in [a, b]$

یافت میشود که $|x - \bar{x}| < \delta$ و $|f(\bar{x}) - f(x)| \geq \varepsilon_0$ است و تقسیم $\delta = \frac{1}{n}$ برای آنها

نقطه میباشد، که آنها را به x_n و \bar{x}_n نمایش میدهند.

$$\left| \bar{x}_n - x_n \right| < \frac{1}{n} \dots (6.16)$$

$$|f(\bar{x}_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon_0 \dots (6.17)$$

از ترادف نقاط $\{x_n\}$ به علت خواص فشرده گی (مراجعه نمائید به : 4 در پراگراف 4.6) ممکن است ترادف متقارب $\{x_n\}$ را از آن جدا ساخت و لمت آنرا به x_0 نشان دهیم.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x \dots (6.18)$$

اگر $k=1,2, a \leq x_{n_k} \leq b$ باشد، پس در اینصورت $a \leq x_0 \leq b$ (مراجعه نمائید به: پراگراف 4.3) تابع f در نقطه x_0 متمادی است.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = f(x) \dots (6.19)$$

ترادف فرعی x'_{n_k} ترادف x'_n نیز متقارب در نقطه x_0 میباشد. و یا در صورتیکه $k \rightarrow \infty$ داریم که:

$$\left| x'_{n_k} - x_0 \right| \leq \left| x'_{n_k} - x'_{n_k} \right| + \left| x'_{n_k} - x_0 \right| \underset{(6,16)}{<} \frac{1}{n_k} + \left| x'_{n_k} - x_0 \right| \underset{(6,18)}{\rightarrow} 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x'_{n_k}) = f(x_0) \dots (6,20) \quad \text{از اینجا}$$

از خواص (6.19) و (6.20) نتیجه میشود که:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [f(x'_{n_k}) - f(x'_{n_k})] = f(x_0) - f(x_0) = 0$$

که این ادعا خلاف شرط است اگر $k=1,2, \dots$ و غیر مساوات ذیل صادق باشد.

$$\left[f(x'_{n_k}) - f(x'_{n_k}) \right] \underset{(6,17)}{\geq} \varepsilon_{0>0}$$

از اینجا ادعا خلاف قضیه ثبوت شده است.

تعریف 4. فرضاً تابع f در قطعه $[a, b]$ داده شده باشد. پس دران صورت :

$$\omega(f; [a, b]) \sup_{x, x' \in [a, b]} f(x') - f(x) \dots (6.21)$$

بنام نوسان تابع f در انتروال $[a, b]$ یاد میشود. از دو قیمت $f(x') - f(x)$ و $f(x) - f(x')$ یاد شده هر دو نه منفی و نه هم یکی از دیگری کوچک است.

. همین قسم کمیت سرحد فوقانی در بخش راست مساوات (6.21) تغییر نمیخورد.

اگر به عوض کمیت مطلقه $|f(\bar{x}) - f(x)|$ ، تفاوت $f(\bar{x}) - f(x)$ در خود این تفاوت گذاشته شود: پس:

$$\omega(f; [a, b]) \sup_{x, x' \in [a, b]} f(x') - f(x)$$

که مطابق بیان ذیل می باشد.

برای اینکه تابع f در قطعه $[a, b]$ متمادی یکنواخت باشد، لازم و کافی است تا برای هر

$\varepsilon > 0$ عدد $\delta > 0$ موجود شود که قطعه $[x, \bar{x}] \subset [a, b]$ به طول کم از δ یعنی

$$\delta > 0 < x' - x < \delta$$

موجود شود، پس غیر مساوات ذیل صادق است:

$$\omega(f; [x, x']) < \varepsilon \dots (6.22)$$

حقیقتاً اگر $x, \bar{x} \in [a, b]$ باشد از غیر مساوات (6.26) نتیجه میشود که $|f(\bar{x}) - f(x)| < \varepsilon$

پس غیر مساوات (6.15) صادق است.

برعکس اگر نتیجه (6.15) صادق نباشد، پس در اینصورت برای هر $\varepsilon > 0$ چنین $\delta > 0$

یافت میشود که برای هر دو نقطه x و \bar{x} قطعه $[a, b]$ که شرط $|x' - x| < \delta$ را تامین

میکند، غیر مساوات $|f(\bar{x}) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ بجا خواهد بود.

فرضاً برای مشخص شدن $x < \bar{x}$ که برای هر دو نقطه ε, η قطعه $[x, \bar{x}]$ معلوم باشد، پس
غیر مساوات

$0 < |\eta - \varepsilon| < \bar{x} - x < \delta$ ازینجا برای هر قطعه $[x, \bar{x}]$ طوریکه

$$\omega(f; [x, x']) \supset \sup_{\xi, \eta \in [x, x']} |f(\eta)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad ; \quad 0 < \bar{x} - x < \delta \text{ داریم:}$$

تعریف 5: مودول یک نواخت متمادیت تابع $\omega(\delta; f)$ تابع f که در قطعه $[a, b]$ تعریف

شده بنام تابع یاد میشود، یعنی:

$$\omega(\delta; f) = \sup_{|x'' - x'| \leq \delta} |f(x'') - f(x')|, x', x'' \in [a, b], \dots (6.23)$$

اکثراً اوقات جهت مختصر ساختن به عوض $\omega(\delta; f)$ میتوان مختصراً $\omega(\delta)$ را نوشت همین قسم حالت تعریف تابع نوسان (6.21) تحت علامه سرحد فوقانی در بخش راست مساوات (6.23) نیز ممکن است که میتواند کمیت مطلقه تفاوت $|f(\bar{x}) - f(\bar{x})|$ را ننوشت، که برعکس خود تفاوت کمیت مطلقه میتوان نوشت که قیمت سرحد فوقانی در اینصورت

$$\omega(\delta; f) = \sup_{|x'' - x'| \leq \delta} |f(x'') - f(x')|, x', x'' \in [a, b] \quad \text{یعنی:}$$

معلوم است که $\omega(\delta) > 0$ دیگر اینکه $0 < \delta_1 < \delta_2$ باشد.

پس در اینصورت:

$$\left\{ y : y = f(x'') - f(x'), |x'' - x'| \leq \delta_1 \right\} \subset \left\{ y : y = f(x'') - f(x'), |x'' - x'| \leq \delta_2 \right\}$$

از این جا: $\sup_{|x'' - x'| \leq \delta_1} |f(x'') - f(x')| \leq \sup_{|x'' - x'| \leq \delta_2} |f(x'') - f(x')|, x', x'' \in [a, b]$

پس $\omega(\delta_1) \leq \omega(\delta_2)$ به این معنی که مودول متمادیت عبارت از تزايد تابع می باشد .

مثالها:

(1) برای تابع $y = x^2$ ، $\omega(\delta)$ را دریافت می کنیم. طوری که $-\infty < x < +\infty$ باشد برای هر $\delta > 0$ و نقطه کیفی x_0 دقیقاً داریم که :

$$\omega(\delta; x^2) = \sup_{|x'' - x'| \leq \delta} (x''^2 - x'^2) \leq x_0^2 - (x_0 - \delta)^2 = 2x_0\delta - \delta^2 \dots (6.24)$$

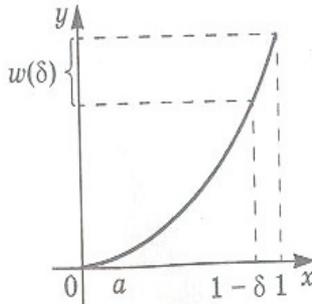
این غیر مساوات را برای هر x_0 دقیق می باشد. و همین طور برای هر δ کیفی داریم که

$$\lim_{x_0 \rightarrow \infty} (2x_0\delta - \delta^2) = +\infty$$

پس از رابطه (6.24) حاصل می نمایم که:

$$\omega(\delta; x^2) = +\infty, -\infty < x < +\infty$$

حال مدل (middle) متمادیت تابع $y = x^2$ را در قطعه $[0, 1]$ دریافت میکنم.



شکل 35

همینطور طبق تعریف مدل متمادیت $\omega(\delta)$ را به بزرگترین تزايد تابع در قطعه به طول δ ترسیم میکنیم. برای اینکه مدل متمادیت تابع در حالت داده شده بدست آوریم، پس

در اینصورت قطعه $[(-\delta, 1)]$ را که در آن تابع $f(x) = x^2$ ، $0 \leq x \leq 1$ سریع تر
 تزايد می کند انتخاب می نماییم. مدل متمادیت تابع در شکل (35) نشان داده شده است.
 مدل تابع درین قطعه برابر است به:

$$\omega(\delta) = f(1) - f(1 - \delta) = 1 - (1 - \delta)^2 = 2\delta - \delta^2$$

که بطور تحلیلی بترتیب ذیل صورت میگیرد.

فرضاً $0 \leq \bar{x} - \delta \leq \bar{x} \leq \bar{x} \leq 1$ و به همین ترتیب $0 \leq \bar{x} - \bar{x} \leq \delta$ پس
 در اینصورت به علت غیر مساوات ذیل:

$$\bar{x}^2 - \bar{x}^2 \leq \bar{x}^2 - (\bar{x} - \delta)^2 = 2\bar{x}\delta - \delta^2 \leq 2\delta - \delta^2$$

حاصل می نماییم:

$$\omega(\delta; x^2) = \sup(x^{//2} - x'^2) \leq 2\delta - \delta^2 \dots (6.25)$$

$$|\bar{x} - \bar{x}| \leq \delta$$

اما اگر $\bar{x} = 1 - \delta$ ، $\bar{x} = 1$ گرفته شود، پس

$$\omega(\delta; x^2) = \sup(x^{//2} - x'^2) \geq 1 - (1 - \delta)^2 = 2\delta - \delta^2 \dots (6.26)$$

از قسمت (6.25) و (6.26) به نتیجه میرسیم که از انتروال $[0, 1]$ داریم که:

$$\omega(\delta; x^2) = 2\delta - \delta^2$$

(2) تابع $y = \sin \frac{1}{x}$ ، $x \neq 0$ را از یکطرف بررسی میکنم

$$\omega(\delta; \sin \frac{1}{x}) = \sup \left| \sin \frac{1}{x''} - \sin \frac{1}{x'} \right| \leq \sup \left| \sin \frac{1}{x''} \right| + |x'' - x'| \leq \delta$$

$$\left| \sin \frac{1}{\bar{x}} \right| \leq \sup \quad 2 = 2$$

$$|\bar{\bar{x}} - \bar{x}| \leq \delta \quad |\bar{x} - \bar{x}| \leq \delta$$

$$(\bar{\bar{x}}_n = 1 / \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n \right)) \quad (\bar{x}_n = 1 / \left(\frac{3}{2}\pi + 2\pi n \right)) \quad \text{حال طرف دیگر را انتخاب میکنم:}$$

$$|\bar{\bar{x}}_n| \leq \frac{\delta}{2}, \quad |\bar{x}_n| \leq \frac{\delta}{2} \quad \text{n را طوری تعیین می کنیم که:}$$

$$|\bar{\bar{x}}_n - \bar{x}_n| \leq |\bar{\bar{x}}_n| + |\bar{x}_n| \leq \delta \quad \text{از اینجا:}$$

$$\omega(\delta; \sin \frac{1}{x}) \geq \sin \frac{1}{x''_n} - \frac{1}{x'_n} = 1 + 1 = 2 \quad \text{پس در اینصورت خواهیم داشت:}$$

$$\omega(\delta; \sin \frac{1}{x}) = 2$$

از قیمت حاصل شده نتیجه میشود که:

$$0 < \delta < 1, \quad \delta \quad \text{باتعین هر } \delta \quad \text{تابع } y = \frac{1}{x} \text{ را در انتروال } (1, 0) \text{ بررسی می نمایم،}$$

داریم:

$$\omega(\delta; \frac{1}{x}) = \sup \left(\frac{1}{x'} - \frac{1}{x''} \right) = \sup \left(\frac{1}{x'} - \frac{1}{x''} \right) \geq \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_0 + \delta} = \frac{\delta}{x_0(x_0 + \delta)} \rightarrow +\infty : x_0 \rightarrow 0$$

$$|\bar{\bar{x}}_n - \bar{x}_n| \leq \delta \quad \bar{x} \leq \bar{\bar{x}} \leq \bar{x} + \delta$$

$$\omega(\delta; \frac{1}{\delta}) = +\infty \quad \text{به این ترتیب}$$

لذا مدل متماذیت تابع، و تماذیت یکنواخت تابع را میتوان بترتیب ذیل نوشت:

قضیه 6: برای اینکه تابع متماذی در يك انتروال یکنواخت تعریف شود لازم و کافی است که:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0}(\delta; f) = 0 \dots (6.27)$$

ثبوت: فرضاً تابع f در قطعه خط $[a, b]$ متمادی یکنواخت باشد، پس در اینصورت شرط (6.15) تطبیق میشود و برای هر $\varepsilon > 0$ چنین $\delta_\varepsilon > 0$ موجود باشد که اگر:

$$x'' \in [a, b], x' \in [a, b]$$

$$|\bar{x} - \bar{x}| \leq \delta_\varepsilon \text{ پس در اینصورت } |f(\bar{x}) - f(\bar{x})| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$\delta, 0 \leq \delta \leq \delta_\varepsilon$ غیر مساوات ذیل صدق میکند:

$$\omega(\delta; f) = \sup |f(x'') - f(x')| \leq \frac{\varepsilon}{2}, x', x'' \in [a, b] \quad |x''_n - x'_n| \leq \delta$$

پس در اینصورت داریم که اگر $0 < \delta < \delta_\varepsilon$ پس $w(\delta; f) < \varepsilon$ به این معنی که $\lim_{\delta \rightarrow 0} w(\delta; f) = 0$ شرط لازمی (6.27) ثبوت شد. شرط کافی برای متمادیت یکنواخت

تطبیق شرط (6.27) که برای هر $\varepsilon > 0$ چنین $\delta_\varepsilon > 0$ موجود باشد که اگر $0 < \delta < \delta_\varepsilon$ پس در اینصورت $w(\delta; f) < \varepsilon$ با چنین انتخاب داریم که:

$$\bar{x} \in [a, b], \quad \bar{x} \in [a, b], \quad |\bar{x} - \bar{x}| < \delta$$

$$|f(x'') - f(x')| < \omega(\delta; f) < \varepsilon \quad : \text{ (مراجعه کنید به: (6.23)) داریم که}$$

پس در اینصورت داریم که تابع f در قطعه $[a, b]$ متمادی یکنواخت است.

تمرین: تابع $f(x)$ در قطعه $[a, b]$ بنام متمادی در قطعه خط یاد میشود، اگر چنین قطعه جدا شده $[a, b]$ در قطعه اعداد متناهی $[x_2 - 1, x_2]$ یافت شود که:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

که تابع $f(x)$ در هر قطعه $[x_i - 1, x_i]$ $i = 1, 2, \dots, n$ خطی باشد، ثبوت نمائید که هر تابع $f(x)$ در قطعه $[a, b]$ میتواند با هر طاقت توان و قیمت تقریبی تابع قطعه خط در

صورتیکه $\varepsilon > 0$ بوده متمادی باشد، چنین تابع $f(x)$ خطی موجود شود، پس برای تمام $x \in [a, b]$ غیر مساوات $[F(x) - f(x)] < \varepsilon$ صادق باشد.

§7. متمادیت توابع ابتدائی

7.1. توابع ناطق و پولینومیلی

قضیه 1: پولینوم کیفی در هر نقطه محور عددی متمادی است.

در حقیقت تابع $y=c$ ، c عدد ثابت در تمام محور عددی R متمادی است. که در مثال 1 پراگراف 5.12 نشان داده شده است.

همین قسم تابع شکل $y = x^n$ در هر $n \in N$ و در هر نقطه $x \in R$ متمادی است و در پراگراف 6.3 نشان داده شده است.

(مراجعه نمائید به: (تطبیق مثال))

همین قسم تمام اشکال از تابع $y=c$ و $y = x^n$ توسط عملیه جمع و ضرب پولینوم ها حاصل می شود، که این نوع توابع عبارت از توابع متمادی در نقطه ای از محور عددی R میباشد.

(مراجعه نمائید به: پراگراف (5.10))

قضیه 2: هر تابع ناطق $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ، $P(x)$ و $Q(x)$ پولینوم ها اند) که در تمام نقاط محور

عددی R متمادی است، در اینجا مخرج آن $Q(x)$ خلاف صفر میباشد ($Q(x) \neq 0$) از اینجا مستقیماً به نتیجه میرسیم که پولینوم های $P(x)$ و $Q(x)$ در هر نقطه $x \in R$ متمادی بوده و توابع قسمی متمادی نیز در تمام نقاط محور عددی متمادی میباشد که در آن مقسوم علیه خلاف صفر است، (مراجعه نمائید به: پراگراف (5.10)). از این قضیه عبور به لیمت های توابع ناطق استفاده میشود.

فرضاً اگر خواسته شود که $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)}$ را دریافت کنید.

برای این کار اگر لازم باشد و امکان داشته باشد، میتوان کسر $\frac{P(x)}{Q(x)}$ را به مضرب های $(x - x_0)^n$ تجزیه کرد.

در صورتیکه $n \geq 1$ باشد، در نتیجه کسرنطاق بدست آمده رامیتوان چنین نشان داد $\frac{P(x)}{Q(x)}$ پس

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} \quad \text{طوری‌که: (مراجعه نمائید به: پراگراف 5.4) } P_1(x) = P(x) - (x - x_0)^n \frac{P(x)}{Q(x)}$$

اگر $Q(x) \neq 0$ باشد، بنابراین قضیه 2، لیمت آن برابر به $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ است. و اگر $Q_1(x_0) = 0$

و $(P_1(x_0) \neq 0)$ یا در حالت عکس، کسر $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ رامیتوان بالای $(x - x_0)$ اختصار کرد.

در اینصورت لیمت آن برابر به ∞ است.

مثال 1:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 2}{x + 1} = -\frac{1}{2}$$

مثال 2:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - 3x + 2}{(x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 2}{x - 1} = \infty$$

7.2 توابع طاقت، لوگارتمی و طاقت نما

حال واضح میسازیم که از a^x در صورتیکه a و x اعداد حقیقی طوریکه $a > 0$ باشد، چه مفهوم گرفته میشود. بطور مثال افاده $\pi^{\sqrt{2}}$ چه معنی میدهد

قبل از همه خواص a^r را به یاد می آوریم، طوریکه $a > 0$ و r عدد ناطق، $r = \frac{p}{2}$ و q عدد تام $q \neq 0$ باشد. (مراجعه نمائید به: پراگراف *2.6)

خواص قرار ذیل است:

(1) فرضاً $r_1 < r_2$ باشد، اگر $a > 1$ باشد، پس $a^{r_1} < a^{r_2}$ و اگر $a < 1$ باشد

$$a^{r_1} > a^{r_2}$$

$$a^{r_1} \cdot a^{r_2} = a^{r_1+r_2} \quad (2)$$

$$(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 \cdot r_2} \quad (3)$$

در اینجا r ، r_1 و r_2 اعداد ناطق میباشد.

به یاد می آوریم که $a^0 = 1$ از خواص 2^0 نتیجه میشود که $a^r \cdot a^{-r} = a^0 = 1$ از اینجا

$$a^{-r} = \frac{1}{a^r} \dots (7.1)$$

همین قسم از خواص 1^0 و (7.1) به نتیجه میرسیم که:

$$a^r > 0 \dots (7.2)$$

برای هر عدد ناطق r درست است اگر $r > 0$ و $a \geq 0$ باشد.

پس در این صورت به بنابر خواص 1^0 ، $0 < 1 \leq a^r$ از اینجا طبق (7.1) داریم:

بطور مشابه غیر مساوات $a^r > 0$ در صورتیکه $a < 1$ باشد ثبوت میشود. و نیز یاد آور

میشویم که برای هر $a > 0$ ، $b > 0$ و $r \in \mathbb{Q}$ باشد، غیر مساوات ذیل بجا خواهد بود:

حالا توان a^x برای هر عدد حقیقی x و $a > 0$ را تعیین مینماییم.

تعریف 1: فرضاً $a > 0$ و x عدد حقیقی اختیاری و Q ست تمام اعداد ناطق باشد حاصل

$$a^x = \lim_{r \rightarrow x_0, r \in Q} a^r \quad \dots (7.5) \quad \text{می نمایم:}$$

این تعریف دارای مفهوم هم مانند هر نقطه محور عددی بوده که عبارت از نقطه مماس

ست تمام اعداد ناطق میباشد (مراجعه نمائید به: خواص از لیما 1 در پراگراف 4.10)

صحت آن به این معنی است که لیمت اشاره شده موجود است. طوریکه ذیلاً برای هر عدد

حقیقی $x \in \mathbb{R}$ ثبوت شده است. در ثبوت آن میتوان از تعریف لیمت تابع برحسب (مراجعه

شود به تعریف 1 در پراگراف 5.4) استفاده نمود.

فرضاً $a > 0$ طوریکه $x \in \mathbb{R}$ ، $r_n \in Q$ ، $n=1, 2, \dots$ که $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = x$ است.

نشان میدهیم که ترادف $\{a^{r_n}\}$ توسط شرط معیار کوشی (مراجعه نمائید به: پراگراف

4.7) بیان گردیده و متقارب میباشد، برای این ترادف لازم است تفاضل آنرا دریافت

نمائیم.

$$n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N} \quad |a^{r_n} - a^{r_m}| = a^{r_m} |a^{r_n - r_m} - 1| \quad \dots (7.6)$$

ترادف $\{r_n\}$ متقارب است و همین قسم محدود است (مراجعه نمائید به: پراگراف 3.4)

همینطور چنین نقطه A موجود است که بدون محدودیت عمومی ممکن است ناطق شمرده

$$\text{شود. (چرا؟) که:} \quad -A < r_n < A$$

از اینجا در حالت $a \geq 1$ داریم:

$$n=1, 2, \dots \quad a^{-A} \leq a^{r_n} < a^A \quad \text{و در حالت } a < 1 \text{ برابر به } a^{-A} > a^{r_n} > a^A \text{ طوریکه}$$

همینطور برای هر $a > 0$ چنین عدد B موجود میشود که:

در صورتیکه $B = a^{-A}$ و $a \geq 1$ در صورتیکه $B = a^A$, $n = 1, 2, \dots$ $a^{rn} \leq B$
 $a < 1$ باشد، پس در این صورت ترادف $\{a^{rn}\}$ از طرف بالا توسط عدد B محدود است و
همین قسم طبق تبصره 2 پراگراف 5.14 (مراجعه نمائید به: فارمول 69) داریم. $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{rn} = 1$
از اینجا برای تعیین هر $\varepsilon > 0$ چنین $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ موجود باشد،
که برای تمام اعداد ناطق r شرط $|r| < \delta$ غیر مساوات ذیل صدق میکند.

از (7.6) ، (7.7) و (7.4) به نتیجه میرسیم که برای هر $n > n\delta$ و $m > n\delta$ غیر مساوات

$$|a^{r-r_m} - 1| < \frac{\varepsilon}{B} \quad \dots (7.9)$$

از اینجا بنا بر معیار کوشی نتیجه میشود که ترادف $\{a^{rn}\}$ متقارب است. و همین قسم برای
هر ترادف اعداد ناطق $n = 1, 2, 3, \dots, m$, $n = 1, 2, 3, \dots, \infty$ ترادف $\{a^{rn}\}$ متقارب
است.

از اینجا مطابق لیمای 4 از پراگراف 5.6 مستقیماً موجودیت لیمت (7.5) تابع a^r , $r \in \mathbb{Q}$ به
در نقطه $x \in \mathbb{R}$ نتیجه می شود، درست بودن a^x ثبوت شد.

تعریف 1 در این حالت به این معنی است که x و قتیکه عدد ناطق r باشد، توان a^x با قیمت a^r
که مفهوم آن قبلاً واضح گردید . در حقیقت یکسان است مطابقت میکند اگر $r = x$ عدد ناطق
باشد، پس در آن صورت خصوصیت ترادف اعداد ناطق $n = 1, 2, \dots, r_n$ مشابه عدد $x = r$ است.

می توان $n = 1, 2, \dots, r_n = r$ را انتخاب کرد، پس در این صورت طبق تعریف 1 داریم:

$$a^x = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n}$$

تعریف 2: فرضاً بعضی اعداد $a > 0$ داده شده و تابع a^x برای تمام $x \in \mathbb{R}$ تعریف شده باشد. این تابع بنام تابع نمائی با قاعده a یا دمیشود.

در حالت $a=e$ تابع e^x بطور $\exp(x)$ نشان داده میشود و بنام تابع اکسپوننشیل یاد میشود.

طبق تعریف $1^x = 1$ برای تمام اعداد حقیقی x در حالت که $a=1$ باشد از آن نتیجه گرفته نمی شود و نمی خواهیم آنرا بررسی نماییم.

قضیه 3: تابع نمائی a^x ($a > 0$)، دارای خواص ذیل میباشد:

(1) در صورتیکه $a > 1$ باشد تابع در تمام محور عددی اکیداً متزاید است

و در صورتیکه $a < 1$ باشد اکیداً متناقص است.

برای هر عدد حقیقی x, y مساوات ذیل صدق میکند:

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y} \quad (2)$$

$$(a^x)^y = a^{x \cdot y} \quad (3)$$

(4) تابع a^x در تمام محور عددی متمادی است.

(5) ست قیمت تابع a^x ، $a > 0$ ، $a \neq 0$ باشد عبارت از ست تمام اعداد مثبت است.

ثبوت 1⁰: فرضاً برای مشخص ساختن $a > 1$ و $x < y$ ، اعداد ناطق \bar{r} و \bar{r} موجود میشوند،

زیرا که $x < \bar{r} < \bar{r} < y$ است چنین ترادف اعداد ناطق $\{\bar{r}_n\}$ و $\{\bar{r}_n\}$ را طوری انتخاب

میکم که $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\bar{r}_n} = x$ ، $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\bar{r}_n} = y$ طوری که $\bar{r}_n < \bar{r} < \bar{r}_n$ و تمام

$n=1, 2, \dots$ پس در آن صورت $a^{\bar{r}_n} < a^{\bar{r}} < a^{\bar{r}_n}$ از اینجا به لیمت میرسم که $n \rightarrow \infty$

را حاصل می نماییم (7.11) ... $a^x \leq a^{\bar{r}} < a^{\bar{r}} \leq a^y$ به این ترتیب اگر $x < y$ ، پس در این

صورت $a^y < a^x$ باشد، به این معنی که تابع a^x اکیداً متزاید است در صورتیکه $a > 1$ باشد، حالت $a < 1$ به ترتیب مشابه بررسی میگردد.

ثبوت⁰: فرضاً $\{\bar{r}_n\}$ و $\{\bar{r}_n\}$ چنین ترادف های اعداد ناطق باشد، که $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = x$ و

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\bar{r}_n + \bar{r}_n) = x + y \quad \text{یعنی: } \bar{r}_n = y$$

(مراجعه نمائید به: پراگراف 3.9) پس در این صورت به علت تعریف توابع نمائی داریم:

$$a^{x+y} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{\bar{r}_n + \bar{r}_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{\bar{r}_n} a^{\bar{r}_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{\bar{r}_n} \lim_{n \rightarrow \infty} a^{\bar{r}_n} = a^x a^y$$

قبل از اینکه به قضیه را ثبوت نمایم، خواص ذیل را که از خواص 2 نتیجه میشوند یاد آور

میشویم برای هر عدد حقیقی x مساوات $a^x a^{-x} = a^0 = 1$ صدق میکند همینطور

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x} \quad \text{دورست میباشد.}$$

ثبوت خاصیت⁴): (خاصیت 3 را بعد از خاصیت 4 ثبوت میکنیم)

قبل از همه یاد آور میشویم که :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \in R}} a^x = 1 \dots (7.12)$$

حقیقتاً به علت ثبوت تابع مونوتونی a^x , $a > 0$ (خاصیت 1) دارای لیمت یکطرفه $\lim_{x \rightarrow 0} a^x$

$$\text{و } \lim_{x \rightarrow 0} a^x \text{ میباشد.}$$

بطور مشابه با داشتن ثبوت فورمول (5.69) متیقین میشویم (که تنها x عدد ناطق بررسی

نمیگردد بلکه هر عدد حقیقی نیز در اینجا بررسی میشود) حاصل می نمایم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} a^x = \lim_{x \rightarrow 0} a^r = 1 = \lim_{x \rightarrow 0} a^r = \lim_{x \rightarrow 0} a^x$$

از اینجا مساوات (7.12) نتیجه میشود.

حال فرضاً $x, x \in R$ معین است، $y = a^x$:

$$\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x a^{\Delta x} - a^x = a^x (a^{\Delta x} - 1)$$

در این صورت به علت (7.12) داریم:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} a^{\Delta x} = 1$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = a^{\Delta x}, \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (a^{\Delta x} - 1) = 0 \quad \text{همینطور}$$

این مرساند که تابع a^x در نقطه x متمادی است.

ثبوت خواص 3^0 : اول فرضاً $y=p$ عدد تام مثبت است، پس در آن صورت p دفعه از خاصیت 2 استفاده میکنیم حاصل می نماییم.

$$(a^x)^p = \underbrace{a^x \cdot a^x \dots a^x}_p \text{ دفعه} = \underbrace{a^{x+x+\dots+x}}_p \text{ دفعه} = a^{xp} \dots (7.13)$$

و فرضاً $y = \frac{1}{q}$ طوریکه q عدد تام مثبت است. نشان میدهیم که $(a^x)^{\frac{1}{q}} = a^{\frac{x}{q}}$ پس در این

صورت داریم $a^{\frac{x}{q}}$ که عبارت از جذر q ام عدد a^x میباشد، از مساوات (7.13) به نتیجه رسیدیم.

حالا فرضاً $y = \frac{p}{q}$ و p و q اعداد طبیعی اند، در این صورت مطابق ثبوت: ذیل

$$(a^x)^{\frac{p}{q}} = [(a^x)^p]^{\frac{1}{q}} = (a^{xp})^{\frac{1}{q}} = a^{\frac{xp}{q}}$$

اگر $y = \frac{-p}{q}$ باشد پس در این صورت:

$$(a^x)^0 = 1 = a^0$$

به این ترتیب ثابت شد که برای هر عدد حقیقی x و هر عدد ناطق r داریم:

حال فرض کنید یک عدد حقیقی y دیگر داده شده است. ترادف اختیاری $\{r_n\}$ اعداد ناطق که به y تقرب میکند را در نظر میگیریم.

در اینصورت بنابر (7.14) برای همه $n=1,2,\dots$ خواهیم داشت :

قیمت لیمت $\lim_{n \rightarrow 0} x^{r_n} = xy$ پس، در اینصورت طبق ثبوت متمادیت تابع نمائی a^x داریم:

از طرف دیگر به علت تعریف توابع نمائی:

به لیمت میرسیم در مساوات (7.15) طوریکه $n \rightarrow \infty$ از (7.16) خواص مورد بررسی را برای هر $x, y \in \mathbb{R}$ حاصل می نماییم.

از خواص 2 و 3 نتیجه میشود که $\left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1}{a^x}$ طوریکه $a > 0$ ، $y \in \mathbb{R}$ حقیقتاً

ثبوت خاصیت 5: فرضاً برای مشخص ساختن $a > 1$ دوباره برای اینکه ثبوت نماییم که ست قیمت تابع a^x عبارت از ست تمام اعداد مثبت است، پس در اینصورت داریم که انتروال بی نهایت $(0, +\infty)$ به علت متمادیت تزايد اکیدی آن تابع، در تمام محور عددی تزايد میکند طبق قضیه 4 پراگراف 6.3 واقعاً نشان میدهد که :

به بنابر لیمت مونوتونی تابع a^x (متناهی ، بی نهایت)

و $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x$ شرط کافی موجود میشود. همین قسم کافی است که ثبوت نمایم که:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^{x_n} = +\infty \quad , \quad \lim_{x \rightarrow \infty} a^{x_n} = 0$$

برای هر ترادف اختیاری معین $x_n \rightarrow +\infty$ و $\bar{x}_n \rightarrow -\infty$

بطور مثال: برای ترادف $x_n = n$ ، $\bar{x}_n = -n$ ، $n=1,2, \dots$ بر حسب فرضیه

$a > 1$ بوده پس در این صورت داریم که $a = 1 + \alpha$ طوری که $\alpha > 0$ باشد. ازینجا طبق

غیرمساوات برنولی (مراجعه نمائید به: لیما در پراگراف 4.9). $a^n = (1 + \alpha)^n > n \alpha$.

و همینطور $\lim_{x \rightarrow \infty} n = +\infty$ پس در اینصورت

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^n = +\infty$$

ازینجا

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^{-n} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow \infty} a^n} = 0$$

در خود مساوات (7.18) در صورتیکه $a > 1$ باشد ثابت می شود.

حال اگر $0 < a < 1$ باشد پس در اینصورت:

$$b = \frac{1}{a} > 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{b}\right)^x = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow \infty} b^x} = 0 \quad \text{و}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow \infty} b^x} = +\infty$$

تبصره 1: ست تمام قیمت های تابع a^x طوری که $a > 0$ ، $a \neq 0$ ست تمام اعداد حقیقی مثبت را تشکیل میدهد، از اینجا با الخصوص برای هر $x \in \mathbb{R}$ غیر مساوات $a^x > 0$ بجا خواهد بود.

تبصره 2: اگر $b > 0$ ، $a > 0$ در اینصورت برای هر $x \in \mathbb{R}$ مساوات $(ab)^x = a^x b^x$ درست است. حقیقتاً، اگر $rn \rightarrow \emptyset$ ، $n = 1, 2, 3, \dots$ باشد $rn \rightarrow \emptyset$

پس در اینصورت $(ab)^x = \lim_{n \rightarrow \infty} (ab)^{rn}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{rn} b^{rn} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{rn} \lim_{n \rightarrow \infty} b^{rn} = a^x b^x \blacksquare$$

تمرین: فرضاً $b > 0$ ، $a > 0$ باشد.

ثبوت نمایید که برای هر $x \in \mathbb{R}$ مساوات $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$ درست است.

تبصره 3: اگر r عدد ناطق و $r > 0$ باشد، در اینصورت $0^r = 0$ همین قسم برای هر عدد حقیقی $x > 0$ دارای $\lim_{\substack{r \rightarrow x \\ r \in \mathbb{Q}}} 0^r = 0$ از اینجا، در صورتیکه $x > 0$ باشد، تعریف (7.5)

ممکن است که در حالت $a=0$ تقسیم نمود. چنانچه مساوات $0^x = 0$ و $x \leq 0$ میتواند درست باشد. تذکر میدهم که در ناحیه اعداد حقیقی بالای توان غیر مثبت 0^x و $x \leq 0$ می توان منفی آنرا نوشت.

فرضاً a عدد مثبت خلاف صفر باشد از ریاضی ابتدائی معلوم است که عملیه معکوس بالای توان در مطابقت به اعداد داده شده $x > 0$ آن عدد y وجود دارد که $a^y = x$ (اگر واقعاً y موجود باشد) و آنرا بنام گرفتن لوگارتیم عدد y به قاعده a یاد می نمایند، که عبارت از لوگارتیم عدد x به قاعده بوده a و توسط $\log_a x$ ارائه میگردد. به این ترتیب به اساس

تعریف 3: تابع که به هر عدد حقیقی مطابقت نماید و لوگارتیم $\log_a x$ آن برحسب قاعده a ($a \neq 1, a > 0$) باشد، اگر این لوگارتیم موجود شود آنرا بنام تابع لوگارتیمی $y = \log_a x$ یاد مینمایند.

تابع لوگارتیمی به قاعده 10 به سمبول \lg و به قاعده e به سمبول \ln ، $\ln x$ ارائه میگردد و بنام لوگارتیم طبیعی عدد x یاد میشود.

قضیه 4: هرگاه تابع $y = \log_a x$ ($a \neq 1, a > 0$) درست تمام $x > 0$ تعریف شده باشد این تابع درین ست اکیداً مونوتونی است (منزاید است، در صورتیکه $a > 1$ و متناقص است در صورتیکه $a < 1$ باشد) این تابع متمادی است، پس دارای خواص ذیل میباشد:

$$\log_a x_1 \cdot$$

$$\log_a x^a = a \log_a x, x > 0, x \in \mathbb{R} \quad (2)$$

ثبوت: ست قیمت تابع a^x ، $a > 0$ ، $a \neq 1$ عبارت از تمام اعداد مثبت $(0, 0^x + \infty)$ میباشد و ست ناحیه تعریف معکوس تابع درحالت داده شده عبارت از تابع $\log_a x$ میباشد (مراجعه نمایند به: (19.7) موجودیت تابع معکوس لوگارتیم هر عدد مثبت ثبوت گردیده است. ادعای باقی مانده قضیه 4 را مستقیماً می توان از قضیه 4 پراگراف 6.3 و قضیه 3 قبلی نتیجه گرفت.

در مثال نشان میدهیم که چطور خاصیت 1^0 از تابع نمائی که در قضیه 3 اشاره شده بدست

$$y_1 = \log_a x_1 \quad . \quad y_2 = \log_a x_2 \quad \text{آمده.}$$

طبق تعریف لوگارتیم این معنی میدهد که $x_1 = a^{y_1}$ ، $x_2 = a^{y_2}$ (مراجعه نمائید به: خواص 2 تابع نمائی در قضیه 3) از اینجا داریم که:

$$x_1, x_2 = a^{y_1} a^{y_2} = a^{y_1 + y_2}$$

و همین قسم از تعریف لوگارتیم داریم که:

$$\blacksquare \log_a x_1 x_2 = y_1 + y_2 = \log_a x_1 + \log_a x_2$$

تعریف 4: فرضاً α عدد حقیقی و تابع x^α برای تمام $x > 0$ داده شده باشد، این تابع، تابع تواندار یا نمای α یاد میشود.

قضیه 5: تابع توانی x^α با $x > 0$ متمادی است این تابع تزاید میکند در صورتیکه $\alpha > 0$ و اکیداً تناقص میکند در صورتیکه $\alpha < 0$ باشد.

از تعریف لوگارتیم داریم $x = e^{\ln x}$ و همینطور $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ پس در همین صورت x^α

دارای ترکیب تابع نمائی e^u و تابع لوگارتیمی ضرب آن در ثابت یعنی $u = \alpha \ln x$

توابع نمائی و لوگارتیمی متمادی اند (مراجعه نمائید به: قضیه 4، 3). به اساس قضیه راجع به

ترکیب متمادیت تابع متمادی (مراجعه نمائید به: پراگراف 2.5) همین قسم تابع x^α متمادی است.

تابع $\ln x$ اکیداً تزاید میکند. همینطور تابع $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ اکیداً تزاید میکند، در صورتیکه

$\alpha > 0$ باشد و اکیداً تناقص میکند و در صورتیکه $\alpha < 0$ باشد ■

اگر در بررسی تابع x^α فرض شود که $x > 0$ باشد و در نقطه $a \neq 0$ تابع در تمام قیمت

نمائی α تعریف نشده باشد درین موارد اگر $\alpha > 0$ باشد پس در اینصورت دارای لیمت های

زیراست:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty \quad \text{همینطور} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\alpha \ln x} = 0$$

برحسب تعریف (مراجعه نمائید به: تبصره 3) فرض میکنیم $0^\alpha = 0$ ، $\alpha > 0$ همینطور تعریف (7.20) تابع x^α متمادی است. طوریکه این تابع در نقطه $x=0$ در نظر گرفته شود ، هرگاه $\alpha > 0$ باشد، پس :

تابع x^α ممکن است در بعضی $\alpha \neq 0$ و برای $x < 0$ تعریف شده باشد .

$$\text{بطور مثال } \frac{x^{\pm 1}}{2n-1}, n \in N, x^{\pm n} \text{ باشد.}$$

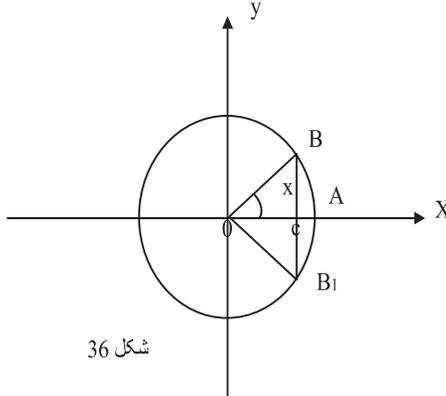
تابع تواندار x^α در تمام نقاط متمادی است . اگر تابع در $x < 0$ تعریف شده باشد، پس از اینجا نتیجه میشود که تابع در $x < 0$ تعریف شده است ، پس در اینصورت تابع یا جفت و یا طاق است . اگر همین قسم تابع جفت و یا طاق و متمادی راست بوده و برابر به صفر شود، پس در این صورت این تابع در این نقطه متمادی است . (چرا) این حالت در صورتیکه $\alpha > 0$ باشد (مراجعه نمائید به: 7.20) بجا خواهد بود.

7.3 توابع مثلثاتی و توابع معکوس مثلثاتی:

حالا به سوال تمامدیت توابع مثلثاتی رسیدیم . در اینجا نمیخواهیم تعریف تحلیلی توابع را اکیداً بیاوریم (طوریکه در حالت فوق توابع نمائی بکاربرده شد) بلکه از تعریف هندسی آنها و از مفاهیم ابتدائی ریاضی استفاده میکنیم. x در همه جا عدد حقیقی بوده و تحت $\sin x, \cos x, \tan x, \cot x$ مفهوم تابع مثلثاتی را افاده میکند که در اینجا x زاویه است به رادیان اندازه میشود.

لیما: به هر x حقیقی غیر مساوات $| \sin x | \leq |x|$ درست است.

ثبوت: دایره را به شعاع R و مرکز (0) مدنظر میگیریم.



شکل 36

فرضاً شعاع \overline{OB} زاویه x را با شعاع \overline{OA} طوریکه $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ تشکیل میدهد و شعاع $\overline{OB_1}$ متناظر شعاع \overline{OB} نظر به \overline{OA} (شکل 36) میباشد.

از نقطه B عمود BC بالای شعاع \overline{OA} ترسیم مینماییم ، از اینجا $BC = R \sin x$ و همینطور $\overline{BC} = \overline{CB_1}$ داریم که $\overline{BB_1} = 2R \sin x$ طوریکه معلوم است طول قوس BAB_1 برابر $2Rx$ میباشد.

طول قطعه که دونقطه را وصل میکند از طول قوس هین دایره تجاوز نمیکند.

یعنی: $2R\sin x \leq 2Rx$ پس در اینصورت داریم که $\sin x \leq x$. حال اگر $-\frac{\pi}{2} \leq x < 0$

باشد، پس در اینصورت $0 < -x \leq \frac{\pi}{2}$ و از اینجا به علت ثبوت $\sin(-x) \leq -x$

مگر در حالت داده شده $\sin(-x) = |\sin x|$ و $-x = |x|$ همین قسم $|\sin x| \leq |x|$ به

این ترتیب اگر $|x| \geq \frac{\pi}{2}$ پس در اینصورت $|\sin x| \leq |x|$ اگر همین قسم $|x| < \frac{\pi}{2}$ پس در

اینصورت $|\sin x| \leq 1 < \frac{\pi}{2} < |x|$.

قضیه 6: توابع $y = \sin x$ و $y = \cos x$ روی محور عددی متمادی است.

نتیجه: توابع $y = \operatorname{tg} x$ و $y = \operatorname{ctg} x$ در تمام x که در آن x (مطابقت به $\sin x$) متمادی

است و صفر نمیشود.

ثبوت: همینطور $|\sin \alpha| \leq 1$ ، $|\cos \alpha| \leq 1$ در هر α و به علت ایما $|\sin \frac{\Delta x}{2}|$

$|\Delta x|$ پس در اینصورت:

$$|\sin(x + \Delta x) - \sin x| \leq 2 \left| \sin \frac{\Delta x}{2} \right| \left| \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \right| \leq |\Delta x|$$

$$|\cos(x + \Delta x) - \cos x| \leq 2 \left| \sin \frac{\Delta x}{2} \right| \left| \sin \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \right| \leq |\Delta x|$$

در صورتیکه $\Delta x \rightarrow 0$ بخش چپ غیر مساوات همین قسم به صفر تقرب میکند، به این معنی

که توابع $\sin x$ و $\cos x$ متمادی اند.

متمادیت $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ و $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ در نقاط که در آنها مخرج صفر نمیشود از متمادیت

$\sin x$ و $\cos x$ وقضا یا راجع به توابع متمادی به نتیجه رسیده ایم (س.م پراگراف 5.19).

قضیه 7: هر یکی از توابع معکوس مثلثاتی $arcctg, arctg, arccos, arcsin$ در ساحت تعریف خود متمادی اند، این را مستقیماً از قضیه 3 و 4 در پراگراف 6 و متمادیت توابع اکیداً مونوتونی $\sin x$ در قطعه (انتروال) $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ ، $\cos x$ در انتروال $[0, \pi]$ ، tgx در انتروال $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ و $ctg x$ در انتروال $[0, \pi]$ نتیجه میشود.

7.4 متمادیت توابع ابتدائی:

متمادیت توابع اساسی ابتدائی در این پراگراف ثبوت شده اند که امکان ثبوت قضیه راجع به متمادیت توابع ابتدائی را میدهد.

قضیه 8: هر تابع ابتدائی در تمام نقاط ست تعریف شده خود متمادی است.

ثبوت: مطابق تعریف "هر تابع ابتدائی از توابع اساسی ابتدائی توسط عملیه های حسابی اعداد متناهی و ترکیبی حاصل میشود(مراجعه نمائید به: 5.3)". همین قسم متمادیت درست تعریف شده، مستقیماً از متمادیت توابع اساسی ابتدائی در ست های تعریف شده آنها (قضیه 7.1) مساوی است.

از خواص لیمت توابع مربوط به عملیات حسابی بالای توابع (س.م.پراگراف 5.10) و متمادیت ترکیبی توابع متمادی (مراجعه نمائید به: پراگراف 5.16) نشان دهنده متمادیت توابع ابتدای میباشد.

§8. مقایسه توابع ، محاسبه لیمت ها

8.1: بعضی لیمت های مشهور

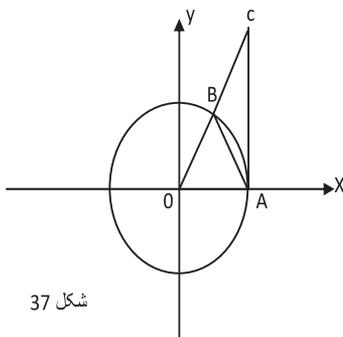
در این بخش لیمت هایی را محاسبه می نماییم که در آینده مکرراً از آنها استفاده خواهیم کرد.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \dots \dots (8.1) \quad \text{لیما 1:}$$

ثبوت: دایره را به شعاع R و مرکز (o) در نظر میگیریم.

فرضاً شعاع \overline{OB} با شعاع \overline{OA} زاویه x

طوریکه $0 < x < \frac{\pi}{2}$ را بوجود می آورد.



شکل 37

از نقاط A و B قطعه خط را وصل میکنیم و از نقطه A به شعاع OA تا تقاطع نقطه C به امتداد شعاع OB (شکل 37) را رسم مینماییم .

در اینصورت مساحت مثلث $\triangle AOB$ برابر به $\frac{1}{2}R^2 \sin x$ و مساحت مثلث $\triangle AOC$ برابر به :

$$\frac{1}{2}R^2 \operatorname{tg}x$$

است. مثلث ΔAOB عبارت از بخش موضعی مثلث ΔAOB بوده که به نوبت خود عبارت از بخش موضعی مثلث ΔAOC میباشد.

$$\frac{1}{2}R^2 \sin x < \frac{1}{2}R^2 x < \frac{1}{2}R^2 \operatorname{tg}x . \quad \text{از اینجا :}$$

$$\sin x < x < \operatorname{tg}x \quad \text{و :}$$

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \quad \text{همین قسم :}$$

و حال نامساوات ها را معکوس می نمایم یعنی :

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \dots \dots (8.2)$$

یاد آور می‌شویم که به علت جفت بودن تابع $\cos x$ و $\frac{\sin x}{x}$ غیر مساوات (8.2) صادق است

در صورتیکه $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ همینطور تابع $\cos x$ متمادی و $\cos 0^\circ = 1$ پس در

اینصورت از (8.2) در صورتیکه $x \rightarrow 0$ و از مساوات (8.1) نتیجه میشود

(مراجعه نمائید به: پراگراف 5.10)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}x}{x} = 1 \dots (8.3) \quad \text{نتیجه 1:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \quad \text{در حقیقت:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1 \dots \dots (8.4) \quad \text{نتیجه 2:}$$

تابع $y = \sin x$ اکیداً مونوتونی بوده و در انتروال $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ متمادی است. همینطور تابع

معکوس $x = \arcsin y$ اکیداً مونوتونی بوده و در انتروال $[-1, 1]$ متمادی میباشد.

$$\text{همین قسم } \sin 0^\circ = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} x = \lim_{x \rightarrow 0} \arcsin x = 0$$

برای اینکه لیمت (8.4) را محاسبه نماییم، از اصول تغییرات لیمت های تابع متمادی استفاده میکنیم (مراجعه نمائید به: قضیه 6 در پراگراف 5.16).

اگر $x = \sin y$ باشد، پس داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\arcsin(\sin y)}{\sin y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin y} = 1$$

نتیجه 3:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1 \dots \dots (8.5)$$

این مساوات مشابه به (8.3) حاصل میشود.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \dots \dots (8.6)$$

قبل در (مراجعه نمائید به: پراگراف 4.5) ثابت گردید که:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e \dots \dots (8.7)$$

در اینجا $n = 1, 2, \dots$ است. از اینجا به علت لیما

پراگراف (4.3) نتیجه میشود که برای هر ترادف $\{n_k\}$ عدد طبیعی طوریکه

$$\lim_{k \rightarrow \infty} n_k = +\infty \dots \dots (8.8)$$

پس داریم: $\lim_{k \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n_k})^{n_k} = e \dots \dots (8.9)$

فرضاً چنین ترادف $\{n_k\}$ طوریکه:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = +0$$

موجود باشد، پس در این صورت داریم که: $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0 \dots \dots (8.10)$ و $n_k > 0$

نشان میدهیم که $\lim_{k \rightarrow \infty} (1 + x_k)^{\frac{1}{x_k}} = e$ و بدون محدودیت عمومی ممکن است حساب

کرد که $x_k < 1$ $k = 1, 2, \dots$ (چرا) برای هر x_k چنین عدد طبیعی n_k دریافت میشود که

$$n_k + 1 > \frac{1}{x_k} \geq n_k \text{ و همین قسم } \frac{1}{n_k} \leq n_k < \frac{1}{n_k + 1} \text{ چنانچه به علت (8.10) داشتیم که}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} n_k = +\infty \text{ پس در اینصورت داریم:}$$

$$(1 + \frac{1}{n_k + 1})^{n_k} < (1 + x_k)^{\frac{1}{x_k}} < (1 + \frac{1}{n_k})^{n_k + 1} \dots \dots (8.11)$$

همینطور طبق (8.9) یاد آور میشویم که:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n_{k+1}}\right)^{n_k} &= \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_{k+1}}}{1 + \frac{1}{n_k}} = \frac{\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_{k+1}}}{\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)} = e \end{aligned}$$

و

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_{k+1}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k} \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n_k}\right) = e$$

از اینجا به سراغ لیمت (8.11) میرویم در صورتیکه $k \rightarrow \infty$ باشد حاصل می‌نماییم

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (1 + x_k)^{\frac{2}{x_k}} = e \dots \dots (8.12)$$

همینطور $\{n_k\}$ ترادف اختیاری توسط شرایط (8.10) تأمین می‌گردد. پس در این صورت خود ثبوت است:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e \dots \dots (8.13)$$

فرضاً $\{x_n\}$ طوریکه $\lim_{x \rightarrow \infty} x_k = -0$ ترادف باشد، پس در آن صورت داریم $x_k < 0$

و $y_k > 0$ ، $0 \dots \dots (8.14)$ حاصل می‌داریم که $y_k = -x_k$ طوریکه

$\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = 0$ چنانچه بدون محدودیت عمومی ممکن است حساب کرد که $k = 1, 2, \dots$

پس :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (1 + x_k)^{\frac{1}{x_k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} (1 - y_k)^{-\frac{1}{y_k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1-y_k}\right)^{\frac{1}{y_k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{y_k}{1-y_k}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} (1 + z_k)^{\frac{1}{z_k+1}}$$

$$z_k = \frac{y_k}{1-y_k} > 0 \text{ و } \lim_{k \rightarrow \infty} z_k = 0 \quad : \text{ یا}$$

و نیز به علت ثبوت مساوات (8.13) داریم که:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (1 + x_k)^{\frac{1}{x_k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} (1 + z_k)^{\frac{1}{z_k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} (1 + z_k) = e$$

مگر ترادف $\{xR\}$ توسط شرط (8.14) تأمین میگردد.

$$\text{چنانچه } (8.15) \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \dots \dots \text{ به این ترتیب تابع } (1+x)^{\frac{1}{x}} \text{ ، } x \neq 0$$

در نقطه 0 دارای لیمت راست و چپ است و برابر به عین عدد است ، همین قسم دارای لیمت دوطرفه بوده در صورتیکه $x \rightarrow 0$ برابر به e است (مراجعه نمایند به: پراگراف 5.9).

نتیجه 1:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log a^{(1+x)}}{x} = \frac{1}{\ln a}$$

$$a = e \text{ و در خصوص } a \neq 1 \text{ ، } a > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

در حقیقت با توجه به متمادیت توابع لوگاریتمی (س.م. قضیه 4 از پراگراف 7) و قضیه لیمت توابع مرکب (مراجعه نمائید به: پراگراف (5.16)) مساوات (8.6) داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log a^{(1+x)}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \log a^{(1+x)^{\frac{1}{x}}} = \log a \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \log a \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

$$= \log a^e = \frac{1}{\ln a}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \dots \dots (8.17) \quad \text{نتیجه 2:}$$

به خصوص در صورتیکه $a = e$ باشد غیر مساوات ذیل:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \dots \dots (8.18)$$

تابع $y = a^x - 1$ اکیداً مونوتونی و متمادی در تمام محور عددی است و تابع معکوس $x = \frac{\ln(1+y)}{\ln a}$ نیز اکیداً مونوتونی و متمادی است. در صورتیکه $y > -1$ و $x = 0$ و $y = 0$ ، همین قسم به $x \rightarrow 0$ و $y \rightarrow 0$ نشان داده میشود. معادل است (مراجعه نمائید به: قضیه 4 در پراگراف (5.16)).

جهت استفاده محاسبه لیمت (8.17) تغییرات اصول موقعیت متحول $x = \frac{\ln(1+y)}{\ln a}$ همین

قسم :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln a}{\ln(1+y)} = \ln a \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1+y)}{y}} = \ln a$$

8.2 مقایسه توابع:

طوریکه ما به عملیات جمع ، تفریق ، ضرب ، بی نهایت کوچک آشنائی داریم ، همین قسم راجع به تقسیم توابع بی نهایت کوچک که بصورت عموم میگویند که تقسیم يك تابع بی نهایت کوچک بالایی توابع بی نهایت کوچک دیگر لازم نیست، که میتوان آنها را به حالت های مختلف تبدیل نمود.

بطور مثال: توابع بی نهایت کوچک $\alpha(x)$ و $\beta(x)$ را در صورتیکه $x \rightarrow 0$ نیلأ آورده شده اند در نظری می گیریم.

فرضاً بطور مثال $\alpha(x) = x$ و $\beta(x) = x^2$ در اینصورت :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$$

اگر همین قسم $\alpha(x) = x$ ، $\beta(x) = 2x$ پس در اینصورت $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 2$ و اگر

$\alpha(x) = x$ ، $\beta(x) = x \sin \frac{1}{x}$ پس در آنصورت لیمت $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)}$ موجود نمیشود.

تمام توابع فرض شده که در این پراگراف بررسی میشوند، در بعضی ست های $x \in R$ تعریف شده اند.

در اینجا x_0 چنین فهمیده میشود که یا عدد $x_0 \in R$ است یا یکی از بی نهایت $-\infty, +\infty$ میباشد. در این حالت در صورتیکه x_0 عدد باشد و یا x_0 نقطه مماس ست X باشد، در اینصورت احتمال کم وجود دارد تا x_0 نقطه لیمت ست x باشد.

در اینصورت ممکن است $x_0 \in x$ و یا $x_0 \notin x$ باشد.

آخرین گفتار بجا خواهد بود اگر تابع مورد نظر در این نقطه x_0 دارای کدام لیمت بی نهایت باشد. اگر همین نقطه x_0 یکی از بی نهایت های $-\infty, +\infty$ باشد، پس در اینصورت x غیر محدود بوده یکسان گرفته میشود.

حال مقایسه توابع در حوالی نقطه، بالخصوص، مقایسه توابع بی نهایت کوچک و بی نهایت بزرگ که حالت های اساسی میباشد را مورد مطالعه قرار میدهم.

تعریف 1: اگر برای توابع $f: X \rightarrow R$ و $g: X \rightarrow R$ چنین عدد ثابت $c > 0$ موجود شود که در بعضی حوالی نقطه x_0 برای تمام $x \in X$ غیر مساوات

$$(8.19) \dots \dots |f(x)| \leq c|g(x)| \dots \dots$$

تطبیق شود، پس در این صورت تابع f

بنام تابع محدود در مقایسه تابع g در حوالی نقطه x_0 یاد میشود و در این حالت مینویسند $f(x) = 0(g(x))$ ، در اینجا " $f(x)$ بزرگ از $g(x)$ است، در صورتیکه x به x_0 تقرب کند" خاطر نشان میسازیم که نوشته $x \rightarrow x_0$ در اینجا مفهوم دیگر نسبت به نوشته معمول دارد. در اینجا این نوشته $x \rightarrow x_0$ تنها خواص مورد بررسی را اشاره میکند و به بعضی حوالی نقطه x_0 اشاره میگردد.

لیما 3: اگر $f(x) = \varphi(x)g(x)$ ، $x \in X$ باشد و دارای لیمت متناهی $\lim \varphi(x) = R$ باشد، پس $f(x) = 0(g(x))$ ، $x \rightarrow x_0$.

ثبوت: از موجودیت لیمت متناهی $\lim \varphi(x) = R$ (مراجعه نماید به خاصیت 1° لیمت توابع در پراگراف 5.10) موجودیت نقطه حوالی $(x_0) \cup$ نقطه x_0 نتیجه میشود که تابع φ محدود در $X \cap U(x_0)$ است.

پس در اینصورت ثابت $c > 0$ موجود است که برای تمام $x \in X \cap U(x_0)$ غیر مساوات $|\varphi(x)| \leq c$ صدق می نماید. همینطور غیر مساوات $|f(x)| = |\varphi(x)||g(x)| = c|g(x)|$ طبق تعریف 1 چنین معنی میدهد که $f(x) = 0(g(x))$ ، $x \rightarrow x_0$.

مثالها 1: $\frac{1}{x} = 0(\frac{1}{x^2})$ در صورتیکه $x \rightarrow x_0$ بر حسب اندازه $\frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{|x|}$ در صورتیکه $|x| \geq 1$ باشد.

یادداشت: $f(x) = 0(1)$ ، $x \rightarrow x_0$ معنی میدهد که تابع f در بعضی حوالی نقطه x_0 محدود است.

بطور مثال: $\frac{tg2x}{x} = 0(1)$ در صورتیکه $x \rightarrow 0$ یا $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{tg2x}{x} = 2$ یعنی تابع $\frac{tg2x}{x}$ در حول نقطه $x = 0$ محدود است.

تعریف 2: اگر تابع $f(x)$ و $g(x)$ طوریکه $f = 0(g)$ و $g = 0(f)$ باشد ، در صورتیکه $x \rightarrow x_0$ پس در اینصورت این توابع را بنام توابع هم درجه یاد میکنند، اگر $x \rightarrow x_0$ و به شکل $f(x) \asymp g(x)$ نوشته شود ، این مفهوم بسیار مرکب است، در این حالت تابع f و g یا بی نهایت کوچک یا بی نهایت بزرگ میباشد، در صورتیکه $x \rightarrow x_0$.

بطور مثال: توابع $\alpha = x$ و $\beta = x(2 + \sin \frac{1}{x})$ در صورتیکه $x \rightarrow 0$ عبارت از بی نهایت کوچک درجه یک میباشند. طوریکه :

$$\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = \frac{1}{\left| 2 + \sin \frac{1}{x} \right|} \leq \frac{1}{2 - \left| \sin \frac{1}{x} \right|} \leq 1$$

$$\left| \frac{\beta}{\alpha} \right| = \left| 2 + \sin \frac{1}{x} \right| \leq 2 + \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 3$$

لیما 4: اگر لیمت متناهی $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = R \neq 0$ موجود شود، پس در اینصورت:

$$x \rightarrow x_0, f(x) \approx g(x)$$

ثبوت: در صورتیکه $x \rightarrow x_0$ تعیین لیمت کسر $\frac{f(x)}{g(x)}$ و چنین حوالی $v(x_0)$ نقطه x_0 که

برای تمام نقاط $x \in x \cap U(x_0)$ غیر مساوات $g(x) \neq 0$ صدق نماید برای x آنها را

حل می نمایم $\varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ ، پس $f(x) = \varphi(x)g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = R$

همین قسم به اساس (لیما 3) داریم $f(x) = 0(g(x))$ ، $x \rightarrow x_0$ از شرط

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \neq 0$ نتیجه میشود که چنین حوالی $v(x_0)$ نقطه x_0 موجود میشود که برای

هر $x \in X \cap U(x_0)$ غیر مساوات $\frac{f(x)}{g(x)}$ صادق است (مراجعه نمائید به : خواص 2° لیمت

توابع پراگراف 5.10) و همین قسم غیر مساوات $f(x) \neq 0$ برای $x \in x \cap v(x_0)$

حاصل می نمایم.

پس $\psi(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$ ، $g(x) = \psi(x)f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 0} \psi(x) = \frac{1}{R}$ از اینجا دوباره مطابق

لیما 3 $g(x) = 0$ ($f(x) = 3x^2$) ، $x \rightarrow x_0$ در مورد توابع $f(x) = 3x^2$ و $g(x) =$

$\sin x^2$ داریم: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x^2} = \frac{1}{3}$ (مراجعه شود به (8.1)) از اینجا

مطابق لیما 4 توابع $3x^2$ و $\sin x^2$ هم درجه اند ، در صورتیکه $x \rightarrow 0$.

تبصره: یاد آور میشویم که شرط (8.19) برای تساوی ذیل میباشد و چنین تابع $\varphi: X \rightarrow R$

محدود موجود میشود که در بعضی حوالی مجاورت x_0 برای تمام $x \in X$ مساوات

$$f(x) = \varphi(x)g(x) \text{ صادق میباشد.}$$

حقیقتاً با بکار بردن این شرط ، محدودیت تابع φ مستقیماً از غیر مساوات (8.19) نتیجه

میشود. بر عکس اگر در بعضی حوالی نقطه x_0 شرط (8.19) تطبیق شود، پس در

اینصورت فرض میکنیم که:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{g(x)} & \text{اگر } g(x) \neq 0 \\ 0 & \text{اگر } g(x) = 0 \end{cases}$$

حاصل می نماییم که $f(x) = \varphi(x)g(x)$ و تابع φ قرار معلوم محدود است (برای نقاط

$x \in X$ حوالی نقطه x_0 مدنظر است).

تعریف 3: توابع $f: X \rightarrow R$ و $g: X \rightarrow R$ در صورتیکه $x \rightarrow x_0$ را بنام توابع معادل یاد

می نمایند. اگر چنین تابع $\varphi: X \rightarrow R$ موجود شود که در بعضی حوالی نقطه x_0 برای تمام

نقاط $x \in X$ مساوات (8.20) $f = \varphi(x) g(x) \dots$ صدق نماید، پس در اینصورت داریم که: (8.21) $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 1 \dots$ یاد آور می‌شویم که موجودیت لیمت تابع در نقطه داده شده عبارت از خواص ناحیوی توابع میباشد و قیمت تابع φ در تعریف یاد شده رول مجاورت را بازی نمیکند.

اگر شرط (8.21) صادق باشد، پس در اینصورت چنین حوالی $U = U(x_0)$ نقطه x_0 یافت میشود، در صورتیکه $x \in X \cap U$ غیر مساوات $\varphi(x) \neq 0$ صادق باشد. (مراجعه شود به خواص 2^0 لیمت های توابع در پراگراف 5.10).

فرضاً $\psi(x) = \frac{1}{\varphi(x)}$ ، $x \in X \cap U$ باشد، میبینیم که شرایط (8.20) و (8.21) معادل شرایط زیر اند:

$$g(x) = \psi(x) f(x), x \in X \cap U \dots (8.20')$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \psi(x) = 1 \dots (8.21')$$

به این ترتیب اگر توابع f و g معادل باشند، طوریکه $x \rightarrow x_0$ ، پس در اینصورت توابع f و g نیز معادل اند. در صورتیکه $x \rightarrow x_0$ پس در اینصورت داریم که تعادل دو تابع خواص متناظر را بوجود می‌آورد. یاد آور می‌شویم که خواص توابع فوق با خواص توابع درجه یک متناظر میباشد و خواص یک تابع بزرگ نسبت به یک تابع کوچک متناظر نمیباشد.

توابع $f(x)$ و $g(x)$ معادل اند، در صورتیکه $x \rightarrow x_0$ پس در اینصورت $g \sim f$ در صورتیکه $x \rightarrow x_0$ باشد .

مساوات تعادل توابع توسط سمبول ذیل نشان داده میشود :

(8.22) $f(x) \cong g(x) \dots$ در صورتیکه $x \rightarrow x_0$ از گفته های بالا نتیجه میشود که اگر $f \sim g$ باشد ، پس در اینصورت $g \sim f$ است ، در صورتیکه $x \rightarrow x_0$. یاد آور میشویم که اگر در شرط تعریف 3 توابع f و g همین قسم تابع φ در نقطه x_0 تعریف شده باشد ، پس در این صورت داریم که $x_0 \in x$ و لیمت (8.21) در صورتیکه $x \rightarrow x_0$ بر حسب ست که دارای نقطه x_0 میباشد گرفته میشود .

از اینجا تابع φ در نقطه x_0 متممادی است، پس از شرط (8.21) نتیجه میشود که:

$$\varphi(x_0) = 1$$

مثالها :

(1) $\frac{x^2}{1+x^4} \sim x^2$ در صورتیکه $x \rightarrow 0$ ، حقیقتاً فرضیه $\varphi(x) = \frac{1}{1+x^4}$ را حاصل می

نماییم: $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x^4} = 1$ و $\frac{x^2}{1+x^4} = \varphi(x)x^2$

(2) $\frac{x^6}{1+x^2} \sim x^2$ در صورتیکه $x \rightarrow \infty$. در حقیقت اگر $\varphi(x) = \frac{x^4}{1+x^2}$ باشد ،

پس: $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4}{1+x^2} = 1$ و $\frac{x^6}{1+x^2} = \varphi(x)x^2$

فرضاً چنین حوالی $v^\circ = v^\circ(x_0)$ نقطه x_0 موجود باشد که برای هر $x \in x \cap v^\circ$ غیر مساوات مجاورت $f(x) \neq 0$ و $g(x) \neq 0$ و $x_0 \in x$ راصدق کند . پس در این

صورت شرایط (8.20) و (8.21) معادل بوده و مطابقت $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ و همین $x \in x \cap U^\circ$

قسم در مطابقت به $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)}$ است. $x \in X \cap U^\circ$

حقیقتاً واضح است که با این نسبت حالت های تابع f و g در ست $x \cap U^\circ$ و $x_0 \notin X$ به صفر بر نمیگردد. این مستقیماً از شرایط (8.20) و (8.21) نتیجه میشود.

بر عکس اگر شرایط فوق قابل تطبیق با شند، پس در اینصورت کافی است حاصل نماییم:

$\varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ ، $\varphi(x_0) = 1$ و $x \in X \cap U^\circ(x_0)$ پس در اینصورت معلوم است که

برای تابع φ شرایط (8.20) و (8.21) تطبیق میشوند.

اگر (8.23) $f \sim g \dots$ و $f \sim h \dots$ (8.24) پس $x \rightarrow x_0$ در صورتیکه $g \sim f$ و $f \sim h$ در صورتیکه $x \rightarrow x_0$ باشد.

در حقیقت از شرایط (8.23) نتیجه میشود که چنین حوالی $U = U(x_0)$ نقطه x_0 و توابع

$\psi: x \cap U \rightarrow R$ و $\varphi: x \cap U \rightarrow R$ موجود شوند.

که برای هر $x \in X \cap U$ مساوات $f(x) = \varphi(x)g(x)$ و $g(x) = \psi(x)h(x)$

$\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \psi(x) = 1$ صدق نماید. از اینجا:

$$f(x) = \varphi(x) \psi(x) h(x)$$

طوریکه $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) \psi(x) = 1$ باشد.

پس در اینصورت مساوات (8.24) تطبیق میشود. از پراگراف (8.1) نتیجه میشود که

هرگاه $x \rightarrow 0$ ، تعادل بی نهایت کوچک ذیل صادق است:

$$x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arccot x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1$$

از تعادل فوق بصورت عموم نتیجه میشود که آنرا بشکل لیما ذیل فورمول بندی می نماییم.
 لیما 5: اگر $u(x)$ چنین یک تابع باشد که $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 0 \dots (8.25)$
 صورتیکه $x \rightarrow x_0$ پس:

$$u(x) \sim \sin u(x) \sim \operatorname{tg} u(x) \sim \operatorname{arcsin} u(x) \sim \operatorname{arctg} u(x) \sim \ln[1 + u(x)] \sim e^{u(x)} - 1 \dots (8.26)$$

ثبوت: بطور مثال نشان میدهیم که: $\sin u(x) \sim u(x), x \rightarrow x_0 \dots (8.27)$

اگر $u: X \rightarrow R$ و $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 0$ باشد، پس برای تمام $x \in X$ تابع $\varphi: X \rightarrow R$ به ترتیب ذیل تحلیل و تجزیه میکنیم:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{\sin u(x)}{u(x)} & \text{اگر } u(x) \neq 0 \dots (8.28) \\ 1 & \text{اگر } u(x) = 0 \end{cases}$$

و نیز نشان میدهیم که: $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 1 \dots (2.29)$ برای این کار، ست X را به دو ست فرعی جدا تجزیه می کنیم:

$$x_2 = \{x \in X : u(x) = 0\} \quad \text{و} \quad x_1 = \{x \in X : u(x) \neq 0\} \dots (8.30)$$

اول، فرضاً ست x_1 و x_2 غیر خالی باشند و x_0 نقطه دور متناهی مماس یا بی نهایت هر یکی از این ست ها باشد و تابع $\frac{\sin u(x)}{u(x)}$ در ست x_1 تعریف شده باشد، پس بر حسب قضیه راجع به لیمت توابع مرکب (س.م قضیه 6 در پراگراف 5.16) داریم که:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in x_1}} \varphi(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in x_1}} \frac{\sin u(x)}{u(x)} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$$

در اینجا از خواص دیگر لیمت های توابع استفاده شده است. اگر تابع (در حالت داده شده $\frac{\sin u}{u}$) در صورتیکه $u \rightarrow u_0$ و در بعضی ست ها دارای لیمت باشد، پس در این صورت طبق لیما 1 در پراگراف 5.4 عمل صورت میگیرد. در صورتیکه $u \rightarrow u_0$ در هر ست فرعی این ست دارای عین لیمت باشد (حالت بررسی شده بر حسب ست های فرعی محور عددی متشکل از ست قیمت تابع $u(x)$ خلاف صفر) در ست x_2 عین تابع φ برابر به 1 است. از اینجا $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \lim_{x \in X_2} 1 = 1$ به این ترتیب در هر یکی از ست های x_1 و x_2 تابع φ در صورتیکه $x \rightarrow x_0$ دارای یک لیمت میباشد و برابر به 1 است.

همینطور $x = x_1 \cup x_2$ بوده، در صورتیکه $u \rightarrow u_0$ دارای عین لیمت بر حسب تمام ست ها میباشد. (مراجعه نمایند به: لیما 5 در پراگراف 5.8) پس در اینصورت حالت بررسی شده در مساوات (8.29) ثابت شد. اگر همین قسم یکی از ست های x_1 یا x_2 خالی باشد یا نقطه x_0 نقطه مماس (متناهی، یا بی نهایت دور) در یکی از این ست ها نباشد، پس در اینصورت مساوات (8.29) نیز بجا خواهد بود. همینطور در این حالت ها لیمت تابع φ در صورتیکه $x \rightarrow x_0$ بر حسب ست x به یکی از ست های x_1 یا x_2 میرسد. برای این ست ها لیمت مورد نظر برابر به واحد است. و همین قسم مساوات (8.29) در زمینه ثبوت است. و نیز از مساوات (8.28) نتیجه میشود که برای تمام $x \in X \cap v^0(x_0)$ نسبت $\sin u(x) = \varphi(x)u(x)$ بجا خواهد بود.

پس در اینصورت ثبوت مساوات (8.26) صادق میباشد.

تعریف 4: تابع $\alpha: X \rightarrow R$ در مقایسه با تابع $f: X \rightarrow R$ در صورتیکه $x \rightarrow x_0$ بنام تابع بینهایت کوچک یاد میشود اگر تابع مانند $\mathcal{E}: X \rightarrow R$ موجود شود که در بعضی حوالی نقطه x_0 برای هر $x \in X$ مساوات: $\alpha(x) = \mathcal{E}(x)f(x)$(8-31) صدق نماید و (8.32) $\lim_{x \rightarrow x_0} \mathcal{E}(x) = 0$ طوریکه برای توابع معادل بنابر موجودیت خواص موضعی لیمت توابع در نقطه قیمت تابع $\mathcal{E}(x)$ در تعریف حوالی اشاره شده موجود نیست که در صورت لزوم میتواند اختیاری انتخاب شود.

اگر تابع α در مقایسه با تابع f در صورتیکه $x \rightarrow x_0$ بی نهایت کوچک باشد، پس در این صورت مینویسند: $\alpha(x) = 0(f(x))$ ، $x \rightarrow x_0$ و چنین میخوانند $\alpha(x)$ از تابع $f(x)$ کوچک است در صورتیکه $x \rightarrow x_0$ بنابراین تعریف که تابع α عبارت از بی نهایت کوچک میباشد در صورتیکه $x \rightarrow x_0$ ، یاد آور میشویم که اگر در شرایط تعریف 4 تابع بی نهایت کوچک در مقایسه با دیگر توابع f و α باشد و همین قسم تابع $\mathcal{E}(x)$ در نقطه x_0 تعریف شده باشد، پس در این صورت داریم که $x_0 \in x$ پس در این صورت لیمت (8.32) در صورتیکه $x \rightarrow x_0$ بر حسب ست که تشکیل دهنده نقطه x_0 میباشد گرفته میشود. همین طور در این حالت تابع $\mathcal{E}(x)$ در نقطه x_0 متممادی است و نیز طبق (8.33) مساوات $\mathcal{E}(x_0) = 0$ بجا خواهد بود ازین عمل مکرراً در آینده استفاده خواهیم کرد.

اگر چنین نقطه محذوف حوالی $U^0 = U^0(x_0)$ در نقطه x_0 موجود شود که برای تمام نقاط $x \in x \cap U^0$ در حالت $x \in x$ غیر مساوات $f(x_0) \neq 0$ صادق باشدو به غیر از آن $\alpha(x_0) = 0$ باشد، پس شرایط (8.31) و (8.32) معادل شرط:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X \cap V}} \frac{\alpha(x)}{f(x)} = 0 \dots \dots (8.33)$$

درحقیقت برای اجرای عملیات بالای غیر مساوات صفری از تابع f شرط (8.31) و (8.32)

کار گرفته میشود، برعکس اگر (8.33) تطبیق شود، پس کافی است حاصل نماییم:

$$\text{این شرایط (8.31) صدق میکند. درین حالت وقتیکه } f(x) \text{ خودش بی نهایت کوچک باشد و } \varepsilon(x) = \frac{\alpha(x)}{f(x)}, \quad x \in X \cap V^0, \text{ و اگر } x_0 \in X \text{ باشد پس، } \varepsilon(x_0) = 0$$

شرایط (8.31) صدق میکند. درین حالت وقتیکه $f(x)$ خودش بی نهایت کوچک باشد و $x \rightarrow x_0$ نماید میگویند که تابع $\alpha = o(f)$ در صورتیکه $x \rightarrow x_0$ بی نهایت کوچک درجه بلند نسبت به f میباشد.

اگر $\alpha = (f(x))^n, x \rightarrow x_0$ ، پس در اینصورت α بی نهایت کوچک را بنام بی نهایت

کوچک درجه n نظر به بی نهایت کوچک f یاد می نمایند، طوریکه $n=1,2, \dots$

بطور مثال: $x^3 = 0(\sin x^2)$ در صورتیکه $x \rightarrow x_0$ پس :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\sin x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} x, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin x^2} = 0.1 = 0$$

بی نهایت کوچک $\alpha(x) = x^3$ عبارت از بی نهایت کوچک از درجه بلند نسبت به

$f(x) = \sin x^2$ میباشد، در صورتیکه $x \rightarrow x_0$ بی نهایت کوچک $\alpha(x) = \frac{1}{x^4}$ بنام بی

نهایت کوچک درجه چهارم نظر به بی نهایت کوچک $f(x) = \frac{1}{x}$ یاد میشود. در صورتیکه

$x \rightarrow x_0$ حقیقتاً سمبول (0 کوچک) میتواند تنها به بی نهایت کوچک استفاده کرد.

بطور مثال: $x = 0(x^2)$ در صورتیکه $x \rightarrow x_0$ یادآور می‌شویم که $f=0(g)$ در صورتیکه $x \rightarrow x_0$ پس در آن صورت مانند گذشته $f=0(g)$ در صورتیکه $x \rightarrow x_0$ در حقیقت فرضاً $f=\varepsilon g$ طوریکه $\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon = 0$ در این صورت تابع $\varepsilon=\varepsilon(x)$ محدود در مقطع ست X یا بعضی حوالی $U(x_0)$ نقطه (x_0) (مراجعه شود به پراگراف 5.10) $|\varepsilon(x)| \leq c$ میباشد. همین قسم $|f(x)| \leq c|g(x)|$ برای تمام $x \in X \cap V(x_0)$ به این معنی که:

$$x \rightarrow x_0, f = 0(g)$$

فرضاً: توابع $f: X \rightarrow R$ و $g: X \rightarrow R$ داده شده اند و چنین تابع $\varphi: X \rightarrow R$ موجود شود که برای تمام تقاطع ست X در بعضی حوالی $U=U(x_0)$ واقع باشد مساوات ذیل صادق است $f(x) = \varphi(x)g(x)$ و قتیکه اگر تابع $\varphi(x)$ در U محدود باشد پس در این صورت $(f(x) = 0(g(x)))$ اگر $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 1$ پس $f(x) \approx g(x)$ ، اگر $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 0$ پس:

$$f(x) \approx 0(g(x))$$

$$x \rightarrow x_0$$

تمرین: فرضاً $\beta = 0(x^2)$ در صورتیکه $x \rightarrow x_0$ ، $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$ ، ثابت نماییم که در این حالت $\beta = 0(\alpha)$ در صورتیکه $x \rightarrow x_0$ یاد آور می‌شویم که در حالت خاص سیت X میتواند ست اعداد طبیعی (N) باشد. و در صورتیکه $x_0 = +\infty$ مفهوم ترادف $\{x_n\}$ محدود را بر حسب مقایسه با ترادف $\{y_n\}$ حاصل می‌نمایم یعنی:

$$n \rightarrow \infty, x_n = 0(y_n)$$

ترادف $\{x_n\}$ با ترادف $\{y_n\}$ درجه یکسان دارد. یعنی $x_n \approx y_n$ ، $n \rightarrow \infty$.

ترادف $\{x_n\}$ مجانب مساوی (معادل) با ترادف $\{y_n\}$ دارد.

یعنی: $n \rightarrow \infty$ ، $x_n = 0(y_n)$

استفاده از مساوات با سمبول شکل 0 و 0 به این معنی که در مفهوم عادی عبارت از مساوات نمیباشد.

طوریکه ، اگر $\alpha_1 = 0(\beta)$ در صورتیکه $x \rightarrow x_0$ و $\alpha_2 = 0(\beta)$ در صورتیکه $x \rightarrow x_0$ ، پس در آنصورت در کار اشتباه صورت گرفته است. از اینجا به نتیجه میرسیم که $\alpha_1 = \alpha_2$ است، که چنین حالت در مساوات عادی موجود است.

بطور مثال: $x^3 = 0(x)$ و $x^2 = 0(x)$ در صورتیکه $x \rightarrow 0$ و $x^2 \neq x^3$ است.

بطور مشابه، اگر $f + 0(f) = g + 0(f)$ در صورتیکه $x \rightarrow x_0$ ، پس در اینجا ممکن اشتباه کرده باشیم که به عین سمبول به نتیجه برسیم که $f = g$ هدف در این است که یکی از سمبول های $0(f)$ یا $o(f)$ میتواند توابع مختلف دقیق رانشان دهد، بنابر این وضعیت مربوط به تعریف سمبول های $0(f)$ و $o(f)$ ، ما بر موجودیت تمام کلاس های توابع که دارای خواص مشخص باشد، نایل گردیدیم. از جمله (کلاس تابع محدود در بعضی حوالی نقطه x_0 با مقایسه با تابع f ، و کلاس تابع بی نهایت کوچک با مقایسه با تابع $f(x)$ در صورتیکه $x \rightarrow x_0$) را میتوان دقیق نوشت ، نه به $0(f) = \alpha$ و نه به $o(f) = \alpha$ بلکه مطابقت به $0(f) \in \alpha$ و $o(f) \in \alpha$ دارد. یکی از این اصول موجوده محاسبه مشکل بر حسب فورمولبندی که در آن سمبولهای 0 و 0 دیده میشود، صورت میگیرد.

همینطور ما حالت اولی $\alpha = 0(f)$ و $\alpha = o(f)$ را مشاهده میکنیم و همیشه این مساوات را میخوانیم ، بر اساس تعریف فوق تنها به یک طرف از چپ به راست میتوان این مساوات را انتقال داد (در صورتیکه واقعاً غلط نباشد).

بطور مثال نوشته $\alpha = o(f)$ ، $x \rightarrow x_0$ یعنی تابع α عبارت از تابع بی نهایت کوچک در مقایسه با تابع f ، در صورتیکه $x \rightarrow x_0$ میباشد.

از اینجا هر تابع بی نهایت کوچک در مقایسه با تابع f مساوی به α است. با استفاده از مثال فوق سمبولهای 0 و 0 را در مساوات ذیل ثبوت می نماییم:

$$(8.34) \dots \dots 0(f) = 0(f) \text{ در اینجا } C \text{ عدد ثابت است.}$$

طبق گفتار فوق باید نشان داد که اگر $g = 0(cf)$ باشد پس $g = 0(f)$ است ، حقیقتاً اگر

$g = 0(cf)$ باشد، پس $g = \varepsilon cf$ طوریکه $\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$ و $\varepsilon_1 = c\varepsilon$ را حاصل

می نماییم دیده میشود که $\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon_1(x) = 0$ یعنی $g = 0(f)$.

باید یادآور شویم که روش راجع به استفاده از سمبولها 0،0 خاتمه نیافته است.

برای اینکه فورمولهای جداگانه همراه با این سمبولها بتواند هدایت را نه تنها در شمارش از

چپ به راست نشان دهد، بلکه از راست به چپ نیز نشان دهد . طوریکه در فرمول (8.34)

نشان داده شد عملی گردد ، در صورت $c \neq 0$ باشد شمارش از طرف راست به طرف

چپ درست است.

8.3 توابع معادل:

اگر تابع $f(x)$ به تابع $g(x)$ تعویض شود، تفاضل $f(x) - g(x)$ بنام خطای مطلق یاد

میشود و نسبت $\frac{f(x)-g(x)}{f(x)}$ به خطای نسبی تعویض میشود. اگر اصول تابع $f(x)$ در

صورتیکه $x_0 \rightarrow x$ مطالعه شود، پس در اینصورت تعویض این تابع همیشه به تابع $g(x)$ دارای اهداف ذیل میباشد:

(1) تابع $g(x)$ در مفهوم نظر به تابع $f(x)$ بسیط میباشد.

(2) خطایی مطلق آن به صفر تقرب میکند.

در صورتیکه $x_0 \rightarrow x$ ، یعنی $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = 0$ در این حالت میگویند که تابع $g(x)$ به تابع $f(x)$ در نزدیکی نقطه x_0 تقرب میکند. بطور مثال تمام توابع f و g بی نهایت کوچک در صورتیکه $x_0 \rightarrow x$ دارای چنین خواص میباشد. ذیلاً نشان خواهیم داد که در این تابع، کوچکتر از تابع فوق نیز موجود است که در بین خود معادل میباشد.

$f(x) \sim g(x)$ ، $x_0 \rightarrow x$ به اساس همین خواص، نه تنها خطای مطلق $f(x) \sim g(x)$

بلکه خطای نسبی $\frac{f(x)-g(x)}{f(x)}$ نیز در صورتیکه $x_0 \rightarrow x$ ، به صفر تقرب میکند، یعنی

به این معنی که تابع معادل به اسانی نظر به دیگر توابع به صفر $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-g(x)}{f(x)} = 0$

تقرب میکند. بطور مثال توابع x ، $\frac{1}{2}x$ ، $2x$ ، $10x$ در صورتیکه $x \rightarrow 0$ بنام توابع بی

نهایت کوچک یاد میشوند. و همین قسم $\sin x$ و خطای نسبی به عوض $\sin x$ ، هر یکی از

آنها در صورتیکه $x \rightarrow 0$ ، به صفر تقرب میکند.

یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x - x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\sin x - \frac{1}{2}x \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x - 2x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x - 10x) = 0$$

تمام توابع یاد شده، مثل $g(x) = x$ ، توسط همین خواص بوجود می آیند. که خطای نسبی به عوض $\sin x$ این تابع به صفر نزدیک میشود، در صورت $x \rightarrow 0$ یعنی

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin x - x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(1 - \frac{x}{\sin x} \right) = 0$$

نزدیک شود در صورتیکه $x \rightarrow x_0$ میتواند از سمبول (0 کوچک) استفاده نمود.

یعنی $f(x) - g(x) = 0(f(x))$ ، $x \rightarrow x_0$. مشخصات خواص توابع معادل را در قضیه ذیل فورمولبندی می نماییم:

قضیه 1: برای اینکه توابع $f: x \rightarrow R$ و $g: x \rightarrow R$ در صورتیکه $x \rightarrow x_0$ معادل باشند، لازم و کافی است تا شرط $x \neq x_0$ تطبیق شود.

$$(8.35) \dots \dots (g(x)) = 0(f(x)) = 0, \quad x \rightarrow x_0 \text{ ثبوت فورمول (8.35) عبارت}$$

از نوشته مختصر تعریف 3 میباشد.

در حقیقت شرط (8.21)، $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 1$ معادل به شرط $\varphi(x) = 1 + 2(x)$ طوریکه:

$$f(x) = \varphi(x)g(x)$$

معادل شرط:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 1$$

$$f(x) = (1 + \varepsilon(x)g(x)) = g(x) + \varepsilon(x)g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} 2(x) = 0$$

پس در اینصورت داریم که :

$$f(x) = g(x) + 0(g(x)) , x \rightarrow x_0$$

مثال 1: $ctgx = \frac{1}{x} + 0\left(\frac{1}{x}\right)$ ، $x \rightarrow 0$ ، حقیقتاً به علت قضیه 1 بطور کافی میتوان نشان داد

که $ctgx \sim \frac{1}{x}$ ، $x \rightarrow 0$ ، که مستقیماً از مساوات (8.3) نتیجه میشود که

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ctgx}{1/2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{ctgx} = 1$$

x_0 موجود شود، توابع $f: X \rightarrow R$ و $g: X \rightarrow R$ با مقطع $x \cap U^\circ(x_0)$ ، $x_0 \in X$ بر

صفر رجعت نمیکنند.

از قضیه 1 معلوم است که تابع f و g در صورتیکه $x \rightarrow x_0$ ، معادل اند، اگر فقط اگر

$$\text{و قتیکه خطای نسبی } \frac{f(x)-g(x)}{f(x)} \text{ به صفر تقرب میکند ، در صورتیکه } x \rightarrow x_0 .$$

نتیجه: فرضاً $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = c \neq 0$ باشد ، پس $g \sim cf$ و

$$g(x) = cf(x) + [f(x)] \text{ در صورتیکه } x \rightarrow x_0 .$$

ثبوت اگر $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = c \neq 0$ باشد، پس در اینصورت $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{cf(x)} = 1$.

همینطور $g \sim cf$ در صورتیکه $x \rightarrow x_0$.

از اینجا بر حسب قضیه 1 داریم:

$$g(x) = cf(x) + 0[cf(x)] \quad (\text{مراجعه نمائید به: اخیر پراگراف 8.2})$$

$$x \rightarrow x_0 , g(x) = cf(x) + 0(f(x))$$

قضیه 2: فرضاً توابع f, f_1, g و g_1 در ست x داده شده باشند.

و $g(x) \sim g_1(x) \sim f(x) \sim f_1(x)$،

در صورت $x \rightarrow x_0$ پس در آن صورت اگر داشته باشیم که :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \dots (8.36)$$

پس همین قسم داریم که:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \dots (8.36) \quad \text{از اینجا :}$$

ثبوت: شرط $x \in X, \sim x \rightarrow x_0, g \sim g_1, f \sim f_1$

به این معنی که چنین حوالی $U = x_0$ نقطه x_0 وجود دارد که توابع φ, γ در مقطع $x \cap U$ تعریف شده اند.

$$f(x) = \varphi(x)f_1(x), g(x) = \gamma(x)g_1(x), \quad x \in X \cap U$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \gamma(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi(x)f_1(x)}{\gamma(x)g_1(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} \gamma(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

پس در این صورت مساوات (37.8) بجا خواهد بود.

از موجودیت لمت $1 = \lim_{x \rightarrow x_0} \gamma(x)$ نتیجه میشود که حوالی $U = U(x_0)$ را ممکن چنین

استخراج نمود: تمام نقاط $x \in X \cap U$ بتوانند غیر مساوات $\gamma(x) \neq 0$ را صدق کنند و از

موجودیت لمت $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$ بر حسب ست x نتیجه میشود که حوالی U میتواند غیر

مساوات $g(x) \neq 0$ را صدق نماید. همینطور حاصل تقسیم $\frac{f(x)}{g(x)}$ باید در مقطع $x \in U$ ست

x با بعضی حوالی v در نقطه x_0 باید تعریف شده باشد. پس افاده های فوق تماماً بجا خواهند

بود. ■

در آخر هر دو طرف مساوات (8,37) باهم مساوی اند. و از ثبوت قضیه نتیجه میشود که

لیمت در طرف چپ وقتی موجود میشود که لیمت طرف راست موجود باشد. و در حالت

موجودیت لمت مطابقت میکند. در پراکتیک از قضیه 2 استفاده میشود. و برای بررسی

محاسبه افاده های که آیا لمت دارد یا خیر، دقیقاً معلوم نمیشود استفاده به عمل می آورد.

(8,4): میتود جدا نمودن قسمت اساسی تابع و استفاده از آن برای محاسبه لمت ها

فرضاً توابع $R \rightarrow X$ و $R \rightarrow X$ داده شده باشند. اگر تابع β برای تمام $x \in X$ به

شکل ذیل جابجا نماییم.

$$x = x_0, \beta(x) = \alpha(x) + o(\alpha(x))$$

پس در اینصورت تابع α بنام قسمت اساسی β یاد میشود، در صورت که $x \rightarrow x_0$.

مثال:- قسمت اساسی تابع $\sin x$ در صورتیکه $x \rightarrow 0$ برابر به x یا

$$\sin x = x + o(x) \text{ در صورتیکه } x \rightarrow 0$$

2:- اگر $a_n \neq 0, p_n(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ پس در آن صورت تابع $a_n x^n$ عبارت از قسمت اساس پولینوم $P_n(x)$ میباشد، در صورتیکه $x \rightarrow \infty$.

اگر تابع $\beta : X \rightarrow R$ داده شده باشد، پس در این صورت قسمت اساسی این یک تابع، در صورتیکه $x \rightarrow x_0$ یک قیمته تعریف نمیشود. طبق قضیه 1 هر تابع α معادل تابع β است، در صورتیکه $x \rightarrow x_0$ و عبارت از قسمت اساسی این تابع میباشد، در صورتیکه:

$$x \rightarrow x_0$$

بطور مثال:- فرضاً $\beta = x + x^2 + x^3$ طوریکه از یکطرف $0(x) = x^2 + x^3$ در صورتیکه $x \rightarrow 0$ و از طرف دیگر $0(x + x^2) = x^3$ پس:

$$\beta = x + x^2 + 0(x + x^2)$$

در صورتیکه $x \rightarrow 0$ در حالت اول قسمت اساسی ممکن است $\alpha = x$ و در حالت دوم $\alpha = x + x^2$ حساب کرد.

اگر یکی از قسمت های اساسی به شکل معلوم داده شود، پس در این صورت قسمت دیگر آنرا میتوان از روی معلوم بدست آورد. قسمت اساسی آن بشکل یک قسمت معلوم باشد، در زمینه لیما ذیل تطبیق میشود:

لیما 5:- فرضاً $X \subset r, X_0 \in R, X_0$ نقطه حدی ست x باشد. اگر تابع $\beta : X \rightarrow R$

$$A \neq 0 \quad A(x - x_0)K$$

در صورتیکه $x \rightarrow x_0$ ، قسمت اساسی شکل $A(x - x_0)K$ و A ثابت باشد، پس در این صورت شکل آن در اطراف تمام قسمت های اساسی آن بترتیب ذیل چنین تعریف میشود، در صورتیکه $x \rightarrow x_0$

$$A \neq 0 \quad \beta(x) = A(x - x_0)^K + 0(x - x_0)^K$$

$$A_1 \neq 0 \quad \beta(x) = A(x - x_0)^k + 0(x - x_0)^k \text{ و}$$

$$\beta(x) \sim A_1(x - x_0)^{R_1} \text{ و } \beta(x) \sim A(x - x_0)^R \quad \text{در صورتیکه:}$$

$$x \rightarrow x_0 \quad x \in X \quad \text{در صورتیکه:}$$

همینطور $A(x - x_0)^R \sim A_1(x - x_0)^{R_1}$ ، $x \in X$ ، $x \rightarrow x_0$ ، پس در این صورت داریم که:

$$1 = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{A(x - x_0)^R}{A_1(x - x_0)^{R_1}} = \frac{A}{A_1} \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^{R - R_1}$$

که در این صورت $A - A_1$ و $R - R_1$ صدق میکند.

مفاهیم قسمت اساسی توابع در مطالعه بی نهایت کوچک و بی نهایت بزرگ مفید است و جهت کامیابی در حل مسائل مختلف در آنالیز ریاضی از آن استفاده میشود، زیرا که همیشه بی نهایت کوچک شکل مرکب تحلیلی را میدهد و در حوالی نقطه داده شده دقت تابع بی نهایت کوچک را بادرجه خیلی بلند نشان داده، شکل مختصر تابع را تغییر میدهد.

بطور مثال: اگر $\beta(x)$ به شکل $\beta(x) = A(x - x_0)^k + 0(x - x_0)^k$ قرار دهیم، به این معنی که بادقت بی نهایت کوچک درجه خیلی بلند نسبت به $(x - x_0)^k$ در صورتیکه $x \rightarrow x_0$ و بی نهایت کوچک $\beta(x)$ خودش در حوالی نقطه X مثل درجه توابع $A(x - x_0)^k$ میباشد.

در مثالها نشان میدهیم که میتود جدا ساختن قسمت اساس بی نهایت کوچک در لیمت توابع استفاده میشود. چنانچه در حاصل شدن نسبت معادل (8.26) بطور وسیع از آن استفاده گردیده است، فرضاً خواسته میشود که لیمت زیرا دریافت کنید(یعنی موجودیت لیمت را ثابت کنید)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x+x^2) + \arcsin 3x - 5x^3}{\sin 2x + tg^2 x + (e^x - 1)^5}$$

برای ثبوت فوق از نسبت (مراجعه نمائید به: 8.26) معادل آن $\sim \ln(1+u)$ ، $u \rightarrow 0$ استفاده میکنیم داریم که $\ln(1+x+x^2) \sim x+x^2$ ، $x \rightarrow 0$ چنانچه داریم که (مراجعه نمائید به : قضیه 1) واضح است $\ln(1+x+x^2) = x+x^2 + 0(x+x^2)$ و $0(x+x^2) = 0(x)$ (چرا) و $x^2 = 0(x)$ ، همین قسم

$$x \rightarrow 0, \ln(1+x+x^2) = x + 0(x)$$

و دیگر $\arcsin 3x \sim 3x$ طوریکه $\arcsin 3x = 3x + 0(3x) = 3x + 0(x)$

همین قسم معلوم است که $5x^3 = 0(x)$ از مساوات $\sin 2x \sim 2x$ استفاده نموده حاصل میداریم:

$$\sin 2x = 2x + 0(2x) = 2x + 0(x)$$

از $tg^2 x \sim x^2$ خواهیم داشت:

$$tg^2 x = x^2 + 0(x^2) = 0(x)$$

و از $x^5 \sim (e^x - 1)^5$ بطور مشابه $(e^x - 1)^5 = x^5 + 0(x^5) = 0(x)$ تمام این نسبت ها در صورتیکه $x \rightarrow 0$ تطبیق میشوند.

پس داریم که:

$$\ln(1+x+x^2) + \arcsin 3x - 5x^3 = x + 0(x) + 3(x) + 0(x) - 0(x) = 4(x) + 0(x).$$

$$\sin 2x + tg^2 x + (e^x - 1)^5 = 2x + 0(x) + 0(x) = 2(x) + 0(x).$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x+x^2) + \arcsin 3x - 5x^3}{\sin 2x + tg^2 x + (e^x - 1)^5} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4(x) + 0(x)}{2x + 0(x)} \quad \text{چنانچه:}$$

مگر $4(x) + 0(x) \sim 4x$ و $2x + 0(x) \sim 2x$ در صورتیکه $x \rightarrow 0$ پس برحسب

$$\text{قضیه 2 داریم } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4(x) + 0(x)}{2x + 0(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4(x)}{2x} = 2$$
 بدین ترتیب لیمت مطلوبه

موجود و برابر به 2 است. در محاسبه لیمت توابع توسط میتود جدا ساختن قسمت اساسی نتیجه میشود که در حالت های بررسی نشده در پراگراف (8.3) بوده میگویند اجازه نیست بی نهایت کوچک را به معادل تعویض کرد.

بطور مثال: برای دریافت لیمت افاده $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$ تعویض تابع $\sin x$ به معادل آن در

صورتیکه $x \rightarrow 0$ به تابع x اشتباه خواهد بود. که میتوان دقیق آنرا در پراگراف (13.4)

این کتاب مطالعه خواهیم کرد. برای دریافت لیمت های افاده شکل $u(x)^{v(x)}$ که شکل مکمل لیمت آنها در لوگارت میباشند.

مثال ذیل را در زمینه مطالعه می نمایم. از مساوات ذیل دریافت میکنیم:

$$\cos^{1/x^2} 2x = e^{\ln \cos^{1/x^2} 2x} \dots \dots (8.38)$$

در اینجا محاسبه شرط کافی لیمت را بررسی می نماییم.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln \cos^{1/x^2} 2x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos 2x}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - \sin^2 2x)}{x^2}$$

$$\ln(1 - \sin^2 2x) \sim \sin^2 2x \sim -(2x)^2 = -4x^2 \quad \text{و همینطور}$$

پس از اینجا طبق قضیه 2 این پراگراف داریم:

$$\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - \sin^2 2x)}{x^2} = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2}{x^2} = -2.$$

به علت تمادیت تابع نمائی از (8.38) داریم $\lim_{x \rightarrow 0} \ln \cos^{1/x^2} 2x = -2$ به این ترتیب

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos^{1/x^2} 2x = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \ln \cos^{1/x^2} 2x} = \frac{1}{e^2}$$

طریقه محاسبه لیمت توسط جدا ساختن قسمت اساس توابع بسیار مطمئن و ساده نظر به دیگر طریقه ها میباشد.

یک عده مشکلات فعلاً در استفاده آن موجود است و این مشکلات عبارت از نبودن یک طریقه عمومی جدا ساختن قسمت اساسی توابع میباشد که ما آنرا در پراگراف (9.13) مطالعه خواهیم کرد.

8.4. میتود جدا نمودن حصه های اساسی توابع و استفاده از آن در محاسبه لیمت

فرضاً توابع $\beta: x \rightarrow R, \alpha: x \rightarrow R$ داده شده باشند.

اگر تابع β برای تمام $x \in X$ را به شکل ذیل بنویسیم:

$$\beta(x) = \alpha(x) + 0(\alpha(x)), x \rightarrow x_0$$

پس تابع α بنام حصه اساسی تابع β یاد میشود در صورتیکه $x \rightarrow x_0$.

مثال ها: 1: حصه اساسی تابع $\sin x$ در صورتیکه $x \rightarrow x_0$ برابر به x است یا

$$\sin x = x + 0(x) \quad x \rightarrow x_0$$

2: اگر $P_n(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$ باشد پس تابع $a_n x^n$ عبارت از حصه اساسی پولینوم

$$P_n(x) \text{ است طوری که } x \rightarrow \infty$$

همینطور $P_n(x) = a_n x^n + 0(x^n)$ در صورتیکه $x \rightarrow \infty$

اگر تابع $\beta: x \rightarrow R$ داده شده باشد حصه اساسی آن در صورتیکه $x \rightarrow x_0$ یک قیمت مشخص ندارد.

مطابق قضیه 1 هر تابع دلخواه α معادل به β باشد بنام حصه اساسی آن یاد میشود

$$\text{در صورتیکه } x \rightarrow x_0$$

بطور مثال: فرضاً $\beta = x + x^2 + x^3$ همینطور از یک طرف $x^2 + x^3 = 0(x)$

در صورتیکه $x \rightarrow 0$ پس $\beta = x + 0(x)$ در صورتیکه $x \rightarrow 0$ و از یک طرف دیگر $x^3 = 0(x + x^2)$

$$\text{در صورتیکه } x \rightarrow 0$$

ازینجا $\beta = x + x^2 + 0(x + x^2)$ در صورتیکه $x \rightarrow 0$

در حالت اول حصه اساسی میتوان $\alpha = x$ حساب کرد.

و در حالت دوم: $\alpha = x + x^2$ اگر یکی از آنها به شکل حصه اساسی معلوم داده شود.

پس در صورت انتخاب معقول میتوان حاصل نموده که حصه اساسی به شکل اشاره شده یک قیمت معلوم باشد در زمینه لیمائی ذیل مطابقت دارد.

لیمای: فرضاً $x_0 \in R, x \in R$ و نقطه لیمائی ست x باشد.

اگر تابع $\beta: x \rightarrow R$ در صورتیکه $x \rightarrow x_0$ شکل اساسی $A(x-x_0)^k$ ، $A \neq 0$ را بوجود بیاورد که درینجا A و K ثابت ها اند پس در اطراف چنین شکل تمام حصه اساسی بطریقه جداگانه دریافت میشود. حقیقتاً در صورتیکه $x \rightarrow x_0$ داریم:

$$A \neq 0, \beta(x) = A(x-x_0)^k + 0((x-x_0)^k)$$

$$A_1 \neq 0, \beta(x) = A_1(x-x_0)^{k_1} + 0((x-x_0)^{k_1})$$

در اینصورت: $\beta(x) \sim A(x-x_0)^k$ در صورتیکه $x \rightarrow x_0$ و $x \in X$ باشد.

داریم که:

$$1 = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{A(x-x_0)^k}{A_1(x-x_0)^{k_1}} = \frac{A}{A_1} \lim_{x \rightarrow x_0} (x-x_0)^{k-k_1}$$

که درین حالت $A = A_1$ و $K = K_1$ مطابقت دارد.

به اثر مفهوم حصه اساسی تابع مطالعه لایتنهای کوچک و لایتنهای بزرگ به کامیابی می انجامد و برای حل مسئله های مختلف انالیز ریاضی از آن استفاده به عمل می آید.

همیشه با کامیابی قناعت بخش بی نهایت کوچک مرکب به شکل تحلیلی در حول نقطه داده شده با دقت بی نهایت کوچک بدرجه بسیار بلند و بسیار ساده (طوریکه تصور میشود) تابع را تبدیل می نماید.

بطور مثال: اگر $\beta(x)$ با کامیابی به شکل $\beta(x) = A(x-x_0)^k + 0((x-x_0)^k)$ قرار داده شود به این معنی که با دقت تا بی نهایت کوچک بسیار بدرجه بلند نظر به $(x-x_0)^k$ در صورتیکه $x \rightarrow x_0$ بی نهایت کوچک $\beta(x)$ خود را در حول نقطه x مانند تابع توان دار $A(x-x_0)^k$ مبیند.

در مثال ها نشان میدهیم که میتود جداساختن حصه اساسی بی نهایت کوچک را در محاسبه لیمت توابع بطور استفاده میشود. جهت این کار میتوان بطور وسیع از بدست آوردن نسبت معادل (8.26) استفاده نمود.

فرضاً خواسته میشود که لیمت زیر را دریافت نماید (یعنی ثبوت نماید که آن موجود است)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x+x^2) + \arcsin 3x - 5x^3}{\sin 2x + tg^2 x + (e^x - 1)^5}$$

از ثبوت فوق (مراجعه نماید به: نسبت (8.26)) معادل $\ln(1+u) \sim u$ در صورتیکه $u \rightarrow 0$ داریم که:

$$\ln(1+x+x^2) \sim x+x^2$$

در صورتیکه $x \rightarrow 0$ ازینجا: (مراجعه نماید به: قضیه 1).

$$\ln(1+x+x^2) = x+x^2 + 0(x+x^2)$$

ازینجا $0(x+x^2) = 0(x)$ (چرا)

و $x^2 = 0(x)$ در صورتیکه $x \rightarrow 0$

همینطور: $\ln(1+x+x^2) = x+0(x)$ در صورتیکه $x \rightarrow 0$ همینطور $\arcsin 3x \sim 3x$

ازینجا: $\arcsin 3x = 3x + 0(3x) = 3x + 0(x)$ همین قسم دیده میشود که $5x^3 = 0(x)$ از مساوات
مجانب $\sin 2x \sim 2x$ حاصل میداریم.

$$\sin 2x = 2x + 0(2x) = 2x + 0(x)$$

از $tg^2 x \sim x^2$ خواهیم داشت:

$$tg^2 x = x^2 + 0(x^2) = 0(x)$$

$$(e^x - 1)^5 \sim x^5$$

$$(e^x - 1)^5 = x^5 + 0(x^5) = 0(x)$$

بطور مشابه تمام این نسبت ها وقتی قابل اجرا است که $x \rightarrow 0$

حال داریم:

$$\ln(1+x+x^2) + \arcsin 2x - 5x^3 = x + 0(x) + 3x + 0(x) - 0(x) = 4x + 0(x)$$

$$\sin 2x + tg^2 x + (e^x - 1)^5 = 2x + 0(x) + 0(x) = 2x + 0(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x+x^2) + \arcsin 3x - 5x^3}{\sin 2x + tg^2 x + (e^x - 1)^5} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x + 0(x)}{2x + 0(x)}$$

و $4x + 0(x) \sim 4x$ و $2x + 0(x) \sim 2x$ در صورتیکه $x \rightarrow 0$ و به اساس قضیه 2 داریم که:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x + 0(x)}{2x + 0(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{2x} = 2$$

به این ترتیب لیمت مطلوب موجود و مساوی به 2 است به محاسبه لیمت تابع توسط میتود جداساختن حصه های اساسی دارای شکل ذیل که این حالت در پراگراف (8.3) مورد بررسی قرار نگرفته است.

میگویند لازم نیست که نهایت کوچک را به معادل تبدیل نمود. بطور مثال لیمت افاده دریافت میکنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x}$$

اگر تابع $\sin x$ را معادل به تابع x در صورتیکه $x \rightarrow 0$ تبدیل نمایم درینصورت اشتباه بزرگ است میتود حل طبیعی چنین مسایل مشابه در پراگراف (13.4) ذکر گردیده است.

برای دریافت لیمت های افاده شکل $u(x)^{U(x)}$ بطور مشابه لیمت آنها لوگاریتم آن میباشد مثال ذیل را مطالعه می نمایم.

$$\text{لیمت } \lim_{x \rightarrow 0} \cos^{\frac{1}{x^2}} 2x \text{ را دریافت می نمایم.}$$

از مساوات $\lim_{x \rightarrow 0} \cos^{\frac{1}{x^2}} 2x = e^{\frac{\ln \cos 2x}{x^2}}$ (8.38) دیده میشود که بطور کافی میتوان لیمت آنرا قرار ذیل دریافت نمود.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln \cos^{\frac{1}{x^2}} 2x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos 2x}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - \sin^2 2x)}{x^2}$$

و همین طور

$$\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - \sin^2 2x)}{x^2} = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2}{x^2} = -2$$

بدین ترتیب:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln \cos^{\frac{1}{x^2}} 2x = -2$$

بنابراین تمادیت تابع نمائی از (8.38) داریم که

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos^{\frac{1}{x^2}} 2x = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \ln \cos^{\frac{1}{x^2}} 2x} = \frac{1}{e^2}$$

طریقه محاسبه لیمت توسط جداساختن حصه اساسی تابع ساده مناسب تر به عوض طریقه های دیگر میباشد بعضی مشکلات هنوز هم در استفاده از آن موجود است زیرا که تا به حال به صورت عموم طریقه جداساختن حصه اساسی تابع بطور کافی موجود نیست و این مشکلات را در پراگراف بعدی مطالعه خواهیم نمود. (مراجعه نماید به §13)

9.1. تعریف مشتق

تعریف 1: فرضاً تابع $y = f(x)$ در بعضی حوالی نقطه $x_0 \in \mathbb{R}$ تعریف شده باشد و فرضاً x

نقطه اختیاری این حوالی باشد، اگر نسبت $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ در صورتیکه $x \rightarrow x_0$ دارای

لمت باشد، پس در اینصورت این لیمت را بنام مشتق تابع f در نقطه x_0 یاد میشود، یا همین

قسم اگر $x = x_0$ باشد چنین ارائه میگردد: $f'(x_0)$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \dots (9.1)$$

اگر $x - x_0 = \Delta x$ نشان داده شود، پس تعریف (9.1) به شکل ذیل نوشته میشود:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

در فرضیه $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta y$ متحول و مشتق آن مختصراً به y' قرار ذیل نشان میدهد:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

اگر برای بعضی قیمت های x_0 لیمت موجود شود یعنی :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty \quad \text{یا} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty \quad \text{یا} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty$$

پس میتوان گفت در صورتیکه $x=x_0$ شود، مشتق منتهای و مشتق بی نهایت به علامه مشخص مساوی به $+\infty$ و یا $-\infty$ میباشد، نشان میدهند.

در آینده ارائه (تابع دارای مشتق) به این معنی که همیشه مشتق منتهای موجود است. برای متیقین شدن به مفهوم مشتق تعریف ذیل را استخراج می نمائیم و مقطع حوالی مجاورت نقطه $x_0 \in \mathbb{R}$ در حالت $x \geq x_0$ ، $x \leq x_0$ بنام طرف راست (طرف چپ) حوالی نقطه x_0 یاد میشود.

تعریف 2: اگر تابع f در بعضی حوالی مجاورت نقطه x_0 طرف راست (طرف چپ) تعریف شده و دارای لیمت منتهای، یا بی نهایت (به علامه مشخص) باشد یعنی:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad \text{یا} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

پس در این صورت مشتق تابع f در نقطه x_0 در مطابقت به نامتنهای یا بی نهایت مشتق راست (چپ) یاد میشود و چنین نشان داده میشود. $f'(x_{0+})$ و یا $f'(x_{0-})$ مشتق راست و چپ همین قسم بنام مشتق طرف راست در مطابقت به طرف چپ، مشتق یکطرفه یاد میشود.

از قضیه لیمت یکطرفه (مراجعه شود به پراگراف 5.9) نتیجه میشود که تابع $f(x)$ در بعضی حوالی x_0 تعریف شده باشد دارای مشتق $f'(x_0)$ میباشد، تنها و فقط تنها وقتی که $f'(x_{0+})$ و $f'(x_{0-})$ موجود باشد.

$$f'(x_{0-}) = f'(x_{0+})$$

که در این حالت: $f'(x_0) = f'(x_{0-}) = f'(x_{0+})$

اگر تابع $f(x)$ به وسیله فورمل تعریف شده باشد، و در فواصل نقاط آن مشتق پذیر باشد (زیرا که مشتق در انجام این فاصله طبعاً به مشتق یکطرفه مطابقت میکند).

طوریکه معلوم است، همین قسم تابع در فاصله داده شده تعریف شده و توسط $f'(x)$ نشان داده میشود. اگر $y=f(x)$ باشد، پس به عوض $f'(x_0)$ چنین مینویسند: $y' |_{X=X_0}$.

محاسبه مشتق تابع بنام دیفرانسیال گیری یاد میشود.

مثالها: 1: $y = C$ ، (C) ثابت است) اگر $\Delta y = C - C = 0$ ، پس $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$

که به این ترتیب: $C' = 0$

2: $y = \sin x$ داریم:

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2}$$

زیرا که:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x$$

به این ترتیب: $(\sin x)' = \cos x$

$$y = \cos x$$

3:

$$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x = -2 \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2} \quad \text{همینطور}$$

پس داریم:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = -\sin x$$

به این ترتیب $(\cos x)' = -\sin x$

4: $y = a^x$ داریم که:

$$\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x (a^{\Delta x} - 1)$$

زیرا که:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

ازینجا به علت فرمول (8.17) حاصل میداریم:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a$$

به این ترتیب $(a^x)' = a^x \ln a$ و بالخصوص $(e^x)' = e^x$ مساوات اخیر نشان میدهد که عدد e خواص قابل ملاحظه دارد.

تابع نمایی به قاعده e دارای مشتق میباشد که به خود تابع مطابقت میکند. در آنالیز ریاضی از این خواص e در تابع طاقت دار و لوگارتمی به خوبی استفاده می شود و در محاسبات

مطمین میباشد. 5: $y = x^n$

n عدد طبیعی است که در قانون بینوم نیوتن به عوض توان بکار برده شده است.

اگر $\Delta x \neq 0$ باشد، چون تمام حاصل جمع قسمت راست مخرج Δx بالای توان با طاقت طبیعی به صفر تقرب میکند، پس در این صورت داریم:

$$\lim_{\Delta n \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta n} = nx^{n-1}$$

$$(X^n)' = nx^{n-1} \quad \text{به این ترتیب}$$

در آینده نشان خواهیم داد که این فورمول وقتی صادق است که عدد حقیقی اختیاری باشد.

9.2 دیفرانسیال توابع

تعریف 3: تابع $y = f(x)$ در بعضی حولی (X_0) نقطه $x_0 \in \mathbb{R}$ تعریف شده باشد و $x = x_0$ اگر تابع درین نقطه تزايد نماید، بنام دیفرانسیال گیری یاد میشود. پس در این صورت داریم که:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

و به شکل ذیل مینویسیم $x_0 + \Delta x \in U(X_0)$

$$\Delta x \rightarrow 0, \Delta y = A \cdot \Delta x + 0(\Delta x) \dots (9.2)$$

(1) عدد ثابت است. A

1. در تعین نقطه x_0 عدد A در یک تعداد اعداد ثابت است و Δx مربوط نیست البته به تغییرات نقطه x_0 عدد A تغییر میخورد.

تابع خطی $A \Delta x$ (از تحول $A \Delta x$) بنام دیفرانسیال تابع f در نقطه x_0 یاد میشود و چنین نشان میدهند. $df(x_0)$ و یا مختصر dy مینویسند.

به این ترتیب: $dy = A \Delta x$ و $\Delta y = dy + o(\Delta x)$, $\Delta x \rightarrow 0$

تابع Δx برای هر قیمت Δx و بالخصوص $\Delta x = 0$ تعریف شده است و تابع

$o(\Delta x) = \Delta y - A \Delta x$ تعریف گردیده است، در اینجا عدد A در این نقطه برابر به صفر است.

$$o(0) = (\Delta y - A \Delta x) \Big|_{\Delta x=0} = 0 \quad \text{یعنی:} \quad (9.2)$$

همینطور طبق تعریف سمبول (o کوچک) چنین تابع $\varepsilon(\Delta x)$ موجود میباشد که در تمام حولی نقاط $\Delta x=0$ (و همین قسم در خود این نقطه) تعریف شده که برای تمام $\Delta x = 0$ ازین حولی مساوات ذیل صادق است:

$$o(\Delta x) = \varepsilon(\Delta x) \Delta x \dots (9.3)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon(\Delta x) = 0 \dots (9.4) \quad \text{و:}$$

چون در تمام حولی لیمت گرفته میشود پس ازینجا نتیجه میشود که:

$$\varepsilon(0) = 0 \dots (9.5)$$

اگر نقطه ای که در آن لیمت تابع گرفته میشود متعلق به ستی باشد که در آن لیمت گرفته شود و این لیمت موجود باشد، پس در اینصورت تابع درین نقطه متمادی است (مراجعه نمائید به : پراگراف 5.5).

یاد آور می‌شویم که دیفرانسیال $dy = A\Delta x$ هر طوریکه هر تابع خطی برای هر قیمت Δx ، $-\infty < \Delta x < +\infty$ تعریف شده باشد، در این صورت تزايد تابع $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ میباشد. بررسی طبعاً ممکن است، تنها برای چنین Δx که برای $X_0 + \Delta x$ در ساحه تعریف تابع f واقع باشد صورت میگیرد. اگر $A \neq 0$ باشد، پس در این صورت $dy \neq 0$ دیفرانسیل گیری توابع در نقطه X_0 چنین معنی میدهد که با دقت بی نهایت کوچک با درجه بسیار بلند فرضاً $f(x_0) = y_0$ به اساس رابطه (9.2) قیمت آنرا مینویسیم:

$$\Delta y = f(x) - y_0$$

$$\Delta x = x - x_0$$

$$\Delta y = A(x - x_0)$$

حاصل می نماییم که:

$$f(x) = y_0 + A(x - x_0) + 0(x - x_0)$$

$x \rightarrow x_0$ و همینطور اگر تابع $f(x)$ در نقطه X_0 دیفرانسیل پذیر باشد، پس در اینصورت دیفرانسیل آن با دقتی تا بی نهایت کوچک با درجه بسیار بلند (بلند تر) نظریه $x - x_0$ در نزدیکی x_0 برابر به تابع خطی میباشد، یا به عباره دیگر درین حالت تابع در حولی x_0

نقطه x_0 " مثل تابع خطی " $y = A(x - x_0) + y_0$ دیده میشود. و این خطا

در تغییر تابع نظریه تابع خطی تفاضل $x - x_0$ کمتر میباشد. نسبت این خطا به تفاضل

$x - x_0$ افزوده میشود، پس در این صورت دیفرانسیل تابع آن دو متحول یعنی نقطه x و متحول dx میباشد، که $dy = A(x)dx$ حال ارتباط بین دیفرانسیل در نقطه و موجودیت مشتق در عین نقطه را واضح میسازیم.

قضیه 1: برای اینکه تابع در بعضی نقاط x_0 دیفرانسیل پذیر باشد، لازم و کافی است تا تابع در این نقطه مشتق داشته باشد.

ثبوت شرط لازمی: فرضاً تابع f در نقطه x_0 دیفرانسیل پذیر باشد، پس در این صورت داریم که:

$$\Delta x \rightarrow 0, \Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = A \quad \text{و قتیکه:}$$

همینطور مشتق تابع $f'(x_0)$ موجود و برابر به A میباشد.

$$dy = f'(x_0)dx \quad \text{ازینجا:}$$

ثبوت شرط کافی: فرضاً مشتق $f'(x_0)$ موجود باشد، پس در این صورت لیمت آن موجود میباشد.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) \quad \text{یعنی:}$$

و قتی که اگر: $\Delta x \neq 0$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \varepsilon(\Delta x)$

باشد که در اینجا $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon(\Delta x) = 0$ مساوات ذیل صادق می باشد:

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\Delta x, \Delta x \neq 0$$

پس در این صورت به علت مساوات (9.2) در صورتی که $A = f'(x_0)$ باشد، تابع f در نقطه x_0 دیفرانسیل پذیر می باشد.

خاطر نشان می سازیم که در قضیه 1 راجع به مشتق متناهی بحث مفصل صورت گرفت به این ترتیب تابع $f(x)$ تحت دیفرانسیل در نقطه x_0 دارای مشتق متناهی $f'(x)$ مساوی می باشد.

از ثبوت فوق نتیجه می شود که ضریب A در تعریف دیفرانسیل (مراجعه نمائید به: 9.2) یک قیمت مشخص می باشد مثل $A = f'(x_0)$ و خود دیفرانسیل تابع در نقطه داده شده آن نیز دارای یک قیمت مشخص می باشد و از لیما پراگراف 8.4 راجع به یگانگی قسمت اساسی شکل تابع $A(x - x_0)R$ که بی نهایت کوچک است، در صورتی که $x - x_0$ ، نیز فوقاً نتیجه می شود و همینطور به علت قضیه 1، $y' = \frac{dy}{dx}$ است.

قسمت راست صورت کسر دیفرانسیل تابع و مخرج کسر دیفرانسیل متحول (ارگومن) را نمایش می دهد. فورمول (9.2) برای تزايد تابع طبق قضیه 1 و فورمول (9.3) ممکن است به شکل ذیل نوشت:

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\Delta x \dots (9.6)$$

در اینجا شرط (9.4) و همین قسم شرط (9.5) تطبق می شود، یعنی:

$$\varepsilon(0) = 0, \lim \varepsilon(\Delta x) = 0 \dots (9.7)$$

پس در این صورت $\varepsilon(\Delta x)$ تابع در نقطه صفر متمادی است. فرمول $dy = f'(x_0)dx$ امکان موجودیت دیفرانسیل تابع را میدهد، اگر مشتق را از پراگراف 9.1 حاصل نماییم:

$$dc = 0 \text{ (C ثابت است)}$$

$$d \cos x = -\sin x dx$$

$$d \sin x = \cos x dx$$

$$da^x = a^x \ln a dx$$

$$de^x = e^x dx$$

بخصوص

$$dx^n = nx^{n-1} dx \quad (n \text{ عدد طبیعی است})$$

در نتیجه ارتباط بین دیفرانسیال گیری و متمادیت در نقطه داده شده واضح گردید.

قضیه 2: اگر تابع f در بعضی نقاط در فرانشیل پذیر باشد، پس در این صورت تابع در این نقطه متمادی است.

نتیجه 2: اگر تابع در بعضی نقاط دارای مشتق باشد، پس در آن صورت تابع در این نقطه متمادی است.

ثبوت: فرضاً تابع f در نقطه x_0 دیفرانشیل پذیر باشد، پس در این صورت در این نقطه

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x) \text{ در صورتیکه } \Delta x \rightarrow 0 \text{ متمادی است.}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = A \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0(\Delta x) = 0 \quad \text{داریم که :}$$

که متمادیت تابع f را معنی میدهد، در صورتیکه $x = x_0$ باشد. نتیجه متمادیت تابع از قضیه 1 و 2 سرچشمه میگیرد.

توجه نمایید که اگر تابع در نقطه دارای مشتق بی نهایت باشد، پس در این صورت تابع میتواند در این نقطه منفصل باشد.

تمرین 1: مثال تابع را ترتیب دهید که در بعضی نقاط دارای مشتق بی نهایت بوده و منفصل در این نقاط باشد.

یاد آور میشویم که بیان عکس قضیه 2 درست نیست، زیرا که در اینصورت از متمادیت تابع f در نقطه داده شده دفرانشیل بوجود نمی آید. یا اینکه تساوی (مراجعه نمائید به: قضیه 1) دارای مشتق درین نقطه میباشد. مثال ذیل این ادعا را بیان میکند.

مثال تابع $f(x) = (x)$ طوریکه دیده میشود در نقطه $x_0 = 0$ متمادی است مگر دارای مشتق در این نقطه نمیباشد.

در حقیقت وقتی که $x \geq 0$ باشد داریم که $y = (x) = x$ ازینجا برای نقطه $x_0 = 0$ حاصل می نمایم:

$$\Delta y = \Delta x$$

$$\hat{f}_+(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 \quad \text{همین قسم :}$$

بطو مشابه در صورتیکه $x \leq 0$ باشد داریم که:

$$y(x) = -x$$

$$\Delta y = -\Delta x$$

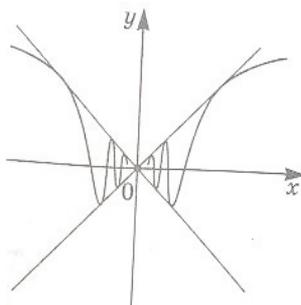
از اینجا برای نقطه $x_0 = 0$ حاصل مینمایم :

$$\hat{f}_-(0) = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1 \quad \text{همین قسم:}$$

این خود ثبوت است که تابع $f(x) = |x|$ در صورتیکه $x = 0$ مشتق ندارد، ولی یکی از این مشتقات در این نقطه موجود میشود، یا مشتق راست و یا چپ و نیز یاد آور میشویم در صورتیکه $x > 0$ مساوات $(|x|)' = x' = 1$ بجا خواهد بود و در صورتیکه $x < 0$ در مطابقت به $(|x|)' = (-x)' = -1$ برای هر $x \neq 0$ فرمول $|x|' = \text{sign}x$ صادق است.

مثال بعدی نشان میدهد که تابع f در این نقطه میتواند متمادی باشد، ولی هیچ نوع مشتق ندارد.

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{در صورتیکه } x \neq 0 \\ 0 & \text{در صورتیکه } x = 0 \end{cases} \quad \text{2: فرضاً شکل (3.8):}$$



شکل 38

پس در آنصورت در نقطه $X = 0$ داریم $\Delta y = \Delta x \sin \frac{1}{2}$

ازینجا $|\Delta y| \leq |\Delta x|$ و همینطور $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$

پس در آنصورت تابع مورد بررسی در صورتیکه $X = 0$ باشد به عوض $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \sin \frac{1}{\Delta x}$ و همینطور تابع $\sin \frac{1}{x}$ در نقطه $x_0 = 0$ دارای لیمت چپ و راست نمیباشد.

(مراجعه نمائید به: مثال 2 در پراگراف 5.4) پس در آنصورت تابع $f(x)$ در طوریکه $x = 0$ باشد دارای مشتق نمیباشد.

تمرین 2: مفاهیم دیفرانسیال پذیری تابع راست (چپ) را در نقطه داده شده بیان نمایید، و ثبوت کنید که دیفرانسیال گیری راست (چپ) در نقطه داده شده معادل می باشند.

3: ثابت نمائید که اگر تابع در بعضی نقاط دارای مشتق راست (چپ) باشد، پس در این صورت در این نقاط تابع متمادی راست (چپ) میباشد.

اگر تابع در هر نقطه بعضی فواصل (در هر نقطه این فواصل دیفرانسیال پذیر) باشد، پس در این صورت میگوییم که تابع f دارای مشتق میباشد، یا در فاصله متذکره دیفرانسیال پذیر میباشد.

9.3 مفهوم هندسی مشتق و دیفرانسیال

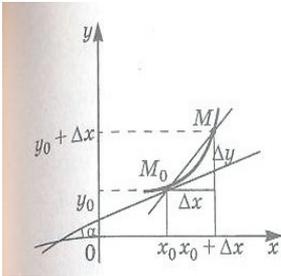
مفهوم مشتق و دیفرانسیال تابع در نقطه داده شده مربوط به مفهوم مماس گراف تابع در نقطه میباشد.

برای اینکه این ارتباط واضح گردد ، قبل از همه مماس را تعریف می نمایم.

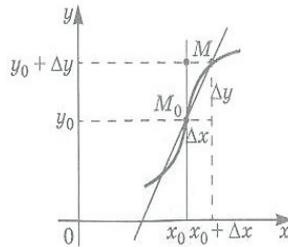
فرضاً تابع $y = f(x)$ در انتروال (a, b) تعریف شده باشد و در این نقطه $X_0 \in (a, b)$ متمادی باشد.

فرضاً $x_0 + \Delta x \in (a, b)$, $M_0 = (x_0, y_0)$, $y_0 = f(x_0)$

$M = (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$



شکل 39



شکل 40

حال وتر $M_0 M$ را رسم میکنم (شکل 40) که دارای معادله ذیل میباشد:

$$y = R(\Delta x)(x - x_0) + y_0 \dots (9.8)$$

$$R(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} \dots (9.9)$$

در اینجا:

نشان میدهد که در صورتیکه $\Delta x \rightarrow 0$ فاصله $|M_0 - M|$ از نقطه M_0 تا نقطه M به صفر تقرب میکند (درین حالت میگوییم که نقطه M تقرب میکند به نقطه M_0 و مینویسیم:

$$M \rightarrow M_0$$

پس بنا بر متمادیت تابع f در صورتیکه $X = X_0$ داریم $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$ همین قسم در صورتیکه $\Delta x \rightarrow 0$ پس:

$$|M_0 - M| = \dots$$

تعریف 4: اگر لیمت متناهی $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} R(\Delta x) = R_0$ موجود شود، پس در این صورت معادله مستقیم قرار ذیل است:

$$y = R_0(x - x_0) + y_0 \dots (9.10)$$

از معادله $y = R(\Delta x)(x - x_0) + y_0$ در صورتیکه $\Delta x \rightarrow 0$ شکل (39) حاصل میگردد و

بنام (میل) مماس در گراف تابع f در نقطه (x_0, y_0) یاد میشود. اگر $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} R(\Delta x) = \infty$

شود، پس در این صورت معادله مستقیم (شکل 40) معادله (9.11) $x = x_0, \dots, \Delta x \rightarrow 0$ و

معادله وتر که به شکل $\frac{y}{R(\Delta x)} = x - x_0 + \frac{y}{R(\Delta x)}$ نوشته میشود، بنام مماس (عمودی) در

گراف تابع f در نقطه (x_0, y_0) یاد میشود.

مستقیم های (9.10) در حالت لیمت متناهی $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} R(\Delta x)$ و (9.11) در حالت لیمت بی

نهایت بنام موقعیت لیمت مستقیم (9.8) یاد میشود، به علت تعریف داده شده فوق، تعریف

مماس در گراف تابع f را می توان بترتیب ذیل تعمیم داد : وتر $M_0 M$ در صورتیکه $\Delta x \rightarrow 0$ و یاهمین قسم که $M \rightarrow M_0$ بنام گراف مماس تابع f در نقطه M_0 یاد میشود.

حال یاد آور میشویم که به علت مساوات (9.9) موجودیت لیمت منتهای

معنی موجودیت مشتق منتهای $f'(x_0) = R$ $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} R(\Delta x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ همین قسم اگر برای تابع f در نقطه X_0 مشتق منتهای وجود داشته باشد پس معادله مماس در گراف تابع f در نقطه $(x_0, f(x_0))$ شکل ذیل را دارد.

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0 \dots (9.12)$$

در اینجا $y = f(x_0)$ اگر همین قسم $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$ باشد، پس در این صورت داریم که: $f(x_0) = \infty$ به علت (9.9) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} R(\Delta x) = \infty$ و همین قسم (مراجعه نمائید به : 9.11) معادله مماس شکل $x_0 = x$ را دارد.

طوریکه از هندسه تحلیلی معلوم است ، ضریب $f'(x_0)$ در معادله (9.12) مساوی به تانجانث زاویه است (مراجعه نمائید به: شکل 39) که مستقیم مورد نظر به جهت مثبت محور Ox آنرا تشکیل میدهد.

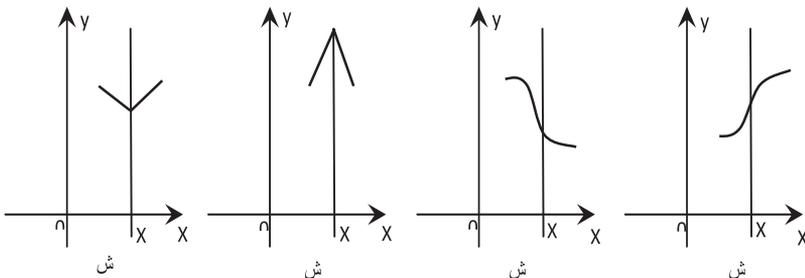
یعنی $f'(x_0) = tg \alpha$ پس در این صورت مشتق تابع در بعضی نقاط مساوی به تانجانث زاویه بین مماس و محور X و گراف تابع در نقطه باخود تابع مطابقت دارد. (مشتق تابع در یک نقطه برابر است به میل خط مماس منحنی تابع در آن نقطه میباشد).

به اساس قسمت اول حاصل جمع طرف راست معادله (9.12) داریم که افاده;

$$\Delta x = x - x_0, \quad f'(x_0)(x - x_0) = f'(x_0)\Delta x$$

عبارت از دیفرانسیل dy تابع در نقطه X_0 میباشد.

همین قسم به علت مساوات (9.12) داریم $y - y_0 = dy$ در اینجا y محور ترتیب مماس است، به این ترتیب دیفرانسیل تابع در نقطه داده شده مساوی به تزايد محور ترتیب مماس در مطابقت به نقطه گراف تابع میباشد.



تبصره: اگر نقطه X_0 لیمت بی نهایت $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$ موجود باشد، پس در این صورت

میتوان نشان داد که این لیمت مساوی به $+\infty$ یا $-\infty$ میباشد، در این حالت $X = X_0$ مشتق بی

نهایت $y' = \infty$ یا $y' = -\infty$ موجود میشود و گراف تابع $y = f(x)$ در حول نقطه X_0 دارای

شکل 41 و 42 میباشد، و همین قسم حالتی ممکن است که لیمت $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$ شود که

عبارت از بی نهایت بدون علامه میباشد. و همین قسم در این نقطه مشتق با علامه بی نهایت

و متناهی وجود ندارد و $f'(x_0) = \infty$ است و میتواند اندک باشد.

بطور مثال: اگر تصادفاً در نقطه X_0 مشتق بی نهایت یکطرفه با علامه مختلف موجود شود

پس در حول نقطه X_0 گراف تابع دارای شکل 43 و 44 میباشد.

مثال: مماس پا رابول $y = x^2$ در نقطه با مختصات $(1, 1)$ را دریافت میکنم مطابق

پراگراف 9.1 (مراجعه نمائید به: مثال 5) $y = 2x$ از اینجا $\left(\left. \frac{y}{x} = 2 \right|_{x=1} \right)$ به علت

فورمول (9.12) مماس دارای معادله $y = 2(x-1)+1$ میباشد. $\Delta x \rightarrow 0$

پس در اینصورت داریم که $y = 2x - 1$

اگر تابع f در نقطه X_0 دیفرانسیال پذیر باشد، پس در اینصورت فورمول (9.5) $A = f'(x_0)$

قرار میدهیم (مراجعه نمائید به: قضیه پراگراف بعدی) داریم:

$$f(x) = y_0 + f'(x_0)(x - x_0) + 0(x - x_0)$$

$X \rightarrow X_0$ یعنی: مطابق (9.12) $(y_{1<ac} = f'(x_0)(x - x_0) + y_0)$ حاصل میداریم

به این ترتیب میل مماس در گراف تابع $f(x) - y_{1<ac} = 0(x - x_0)$ ، $x \rightarrow x_0$

توسط این خواص بوجود می آید، گراف نفاصل محور ترتیب در این مماس عبارت از کمیتی

است بی نهایت کوچک با درجه بلند تر با مقایسه تزايد ارگومننت میباشد، $X \rightarrow X_0$ برعکس

اگر مستقیم غیر عمود موجود شود در اینصورت:

$$y_{np} = A(x - x_0) = y_0 \dots (9.13)$$

که از نقطه (x_0, y_0) میگذرد، طوریکه:

$$X \rightarrow x_0, f(x) - y_{np} = 0(x - x_0) \dots (9.14)$$

پس در این صورت داریم که:

$$x \rightarrow x_0, \Delta y = f(x) - y_0 = A(x - x_0) + 0(x - x_0)$$

همین قسم تابع f در نقطه X_0 دیفرانسیال پذیر میباشد. (مراجعه شود. 9.2) و $A = f'(x_0)$ (مراجعه شود به قضیه 1) پس در این صورت مستقیم متذکره به مماس اصابت میکند (9.12) این ترتیب شرط (9.14) لازم و کافی است تا مستقیم (9.13) میل مماس در گراف تابع $f(x)$ در نقطه (x_0, y_0) داشته باشد.

از اینجا نتیجه میشود که این مماس یکتا است (نتیجه اخیر اینست که دیفرانسیال تابع f یکتا است یا مماس در گراف تابع در نقطه داده شده یکتا است).

9.4 مفهوم فیزیکی مشتق و دیفرانسیال توابع

فرضاً تابع $f(x)$ در بعضی مجاورت نقطه x_0 تعریف شده باشد، همان طوریکه در بالا توسط فورمول نشان داده شده است، استفاده میکنیم:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0). \quad \text{و} \quad \Delta x = x - x_0$$

فرضاً برای تشخیص $\Delta x > 0$ به نسبت $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ برابر به تغییرات متحول y در قطعه خط $[x_0, x_0 + \Delta x]$ به نسبت واحد اندازه گیری متحول x میباشد، طبیعی است که بنام قیمت متوسط تغییرات سرعت y در قطعه خط $[x_0, x_0 + \Delta x]$ نسبت به x یاد میشود، طوریکه Δx به صفر تقرب کند.

در صورت قرار دادن قطعه خط $[x_0, x_0 + \Delta x]$ به نقطه x_0 نسبت $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ قیمت متوسط تغییرات سرعت متحول y نسبت به تحول x که در تمام قطعه خط کوچک و کوچکتر است در نقطه x_0 بوجود می آید، پس تمام روایات در صورتیکه $\Delta x < 0$ باشد برای قطعه خط $[x_0, x_0 + \Delta x]$ صادق است. اگر لیمیت $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ موجود باشد، پس در این صورت مشتق $f'(x_0)$ بنام تغییرات سرعت متحول y نسبت به تحول x در نقطه x_0 یاد میشود.

یاد آور میشویم، اگر در نقطه x_0 مشتق $f'(x_0)$ موجود شود، پس در این صورت لیمیت سرعت متوسط تغییرات y نسبت به x در قطعه خط های $[x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x]$ $\Delta x > 0$ باشد، که نقطه x_0 در داخل خود نظریه خصوصیت خود باقرار دادن آن به نقطه x_0 (در صورتیکه $\Delta x \rightarrow 0$)، مرکزیت را تشکیل می نماید.

ما در لیمیت نیز مفهوم تغییرات سرعت v نظریه X در نقطه X_0 را بررسی نموده ایم، و در آن صورت داریم که $f'(x_0)$ میباشد.

حقیقتاً مفهوم سرعت متوسط، تغییرات متحول v نسبت به x در قطعه خط $[x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x]$ برابر است به $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x}$ (تغییرات قسمت تقسیم شده تابع بالای تغییرات طول قطعه خط).

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x} \quad \text{از اینجا:}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{-\Delta x} \right] = f'(x_0)$$

جالب است، یاد آور شویم که نسبت تفاضل $\frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x}$ قرار معلوم این تغییرات به مفهوم مشتق f' در نقطه X نزدیک میشود.

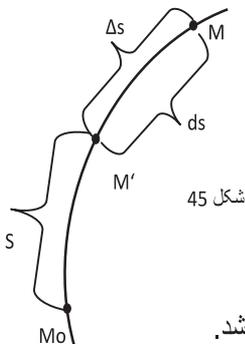
$$\text{یعنی } \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \text{ (مراجعه نمائید به: پراگراف 6.2.6).}$$

در تعبیر مشتق سرعت بمثابة تغییرات یک کمیت نسبت به کمیت دیگر، که در حقیقت استفاده از مشتق در مطالعه فزیک تاثیرات زیاد دارد، استفاده از دیفرانسیل نیز در تغییرات تزايد تابع رول اساسی را بازی میکند. دیفرانسیل امکانات تغییرات هر تابع را در نقطه مطلوبه میدهد. تابع خطی بطور کلی حولی کوچکتر در نقطه X_0 میباشد. پس در اینصورت شمارش که مربوط به تغییرات عملیه متحول میباشد، نسبت خطی ارگومننت را بوجود می

آورد، یا به عبارت دیگر ممکن است گفته شود که تغییرات تابع مستقیماً متناسب به تغییرات ارگو منت میباشد.

یا طوریکه میگویند : عملیه یاد شده (کوچک) به اندازه برابر بوجود می آید که توسط این عملیه تزايد بی نهایت کوچک به ترتیب عالی نظر به تزايد ارگومننت بدست می آید.

فرضاً : $S=s(t)$ قانون حرکت نقطه مادی (شکل 45) میباشد.



شکل 45

- S - طول فاصله به امتداد بعضی نقاط اولیه M_0

- T - وقت.

فرضاً : M موقعیت نقطه در لحظه زمانی t و M'

در لحظه زمانی $t + \Delta t$ و Δs طول فاصله از M تا M' میباشد.

پس در این صورت $\Delta S = s(t + \Delta t) - S(t)$ نسبت $\Delta S / \Delta t$ در میخانیک به مفهوم قیمت

عددی سرعت متوسط حرکت نقطه در فاصله M تا M' میباشد. و $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$ قیمت

عددی سرعت در نقطه M یا مفهوم عددی سرعت لحظوی در لحظه زمانی t به این ترتیبی

$$v = \frac{ds}{dt} \text{ بوده و به اساس تعریف دیفرانسیل فاصله } ds = v dt \text{ است.}$$

همین قسم دیفرانسیال فواصل مساوی است به فاصله که ذره آنرا در اوقات کم در لحظه t تا

$t + \Delta t$ طی میکند . اگر این ذره به سرعت منظم حرکت کند مساوی باشد به سرعت

لحظوی (به مفهوم قیمت عددی) ذره در لحظه t. همین قسم کمیت Δs حقیقتاً تغییر مکان ذره

مساوی است به:

$$\Delta S = ds + o(\Delta t)$$

به این ترتیب دیده میشود که از نظر میخانیکی نقطه از Δs به ds تغییر می یابد. به این معنی که ما حرکت مساوی الفاصله را مطالعه میکنیم.

(2) فرضاً $q = q(t)$ مقدار برق که از مقطع عرضی لین عبور میکنند - وقت Δt ، یعنی لحظات زمانی باشد.

$\Delta q = q(t+\Delta t) - q(t)$ مقدار برق که از مقطع متذکره در لحظات زمانی از لحظه t تا $t + \Delta t$ عبور می نماید، پس در این صورت $\Delta q / \Delta t$ بنام قوه جریان متوسط در لحظه

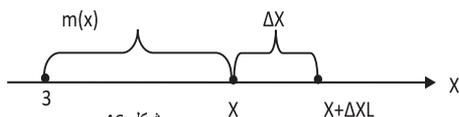
زمانی Δt یاد میشود و چنین نشان میدهند، I_{cp} که لیمت آن $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} I_{cp}$ قوه جریان برق در زمان داده شده t یا قوه جریان لحظوی به حرف I نشان داده میشود.

به این ترتیب $I = \frac{dq}{dt}$ و دیفرانسیال $dq = I \Delta t$ مساوی است به مقدار برقی که از مقطع عرضی در لحظه زمانی Δt از لین برقی عبور میکند.

اگر قوه جریان برق ثابت و برابر به قوه جریان در زمان t باشد

$$\Delta t \rightarrow 0, \Delta q \rightarrow dq = 0(\Delta t) \quad \text{پس}$$

(3) فرضاً میله ای غیر متجانس به طول L داده شده است و فرضاً $m = m(x)$ کتله میله به طول x باشد، طوری که $0 \leq X \leq L$ و از یک انجام معین اندازه شده باشد.



شکل 46

از روی شکل 46 داریم که : $\Delta m = m(x+\Delta x) - m(x)$

کنه انجام های میله که توسط نقاط محدود شده مطابق فاصله x واقع است که $x+\Delta x$ از انجام متذکره کمیت $\frac{\Delta m}{\Delta x}$ بنام کثافت متوسط خطی میله در فاصله متذکره و به P_{cp} نشان داده میشود.

لیمت $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} p_{cp} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta x}$ بنام کثافت خطی میله در نقطه داده شده یاد میشود، و به حرف P نشان داده میشود و به این ترتیب $P = \frac{dm}{dx}$.

اگر کثافت ثابت باشد، پس میله متجانس است و به طور عموم دیفرانسیال میله غیر متجانس $dm = P \Delta x$ برابر به کتله متجانس طول Δx میله متجانس، با کثافت ثابت P برابر به کثافت میله ای بررسی شده در نقطه داده شده می باشد. طوری که در مثال نشان داده شده است تعبیر مشتق را که بمثابة سرعت تلقی نموده یم نیز کثافت میله (سرعت) که عیناً سرعت تغییر کتله و تغییر طول میباشد رابه مفهوم بزرگ تلقی می نماییم.

9.5 قواعد مشتق گیری در ارتباط با عملیه های حسابی بالای توابع

حال فرمول هایی را برای جمع، ضرب و تقسیم مشتق حاصل می نماییم.

قضیه 3: فرضاً تابع $y_1 = f_1(x)$ و $y_2 = f_2(x)$ در حوالی نقطه $x_0 \in R$ تعریف شده است و در خود نقطه x_0 دارای مشتق میباشد، پس در این صورت حاصل جمع آنها $f_1(x) + f_2(x)$ حاصل ضرب آنها $f_1(x)f_2(x)$ و اگر $f_2(x) \neq 0$ باشد، پس تقسیم $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ در نقطه x_0 دارای مشتق میباشد، چنانچه:

$$(y_1 + y_2)' = y_1' + y_2' \dots (9.15)$$

$$(y_1 \cdot y_2)' = y_1' y_2 + y_1 y_2' \dots (9.16)$$

$$\left(\frac{y_1}{y_2}\right)' = \frac{y_1' y_2 - y_1 y_2'}{y_2^2} \dots (9.17)$$

(در فرمولهای (9.15) و (9.16) و (9.17) $x = x_0$)

نتیجه 1: اگر تابع $y = f(x)$ در نقطه x_0 دارای مشتق باشد، اگر $C \in R$ باشد، پس در آن صورت $C f(x)$ نیز در این نقطه دارای مشتق میباشد.

$$(x = x_0), (Cy)' = C y' \dots (9.18) \quad \text{که ازینجا:}$$

نتیجه 2: اگر تابع $y_R = f_R(x)$ ، $R = 1, 2, \dots, n$ در نقطه X_0 دارای مشتق باشد، پس در این صورت هر ترکیب خطی نیز در این نقطه دارای مشتق میباشد، طوریکه:

$$(c_1 y_1 + \dots + c_n y_n)' = c_1 y_1' + \dots + c_n y_n'$$

$$R = 1, 2, \dots, n, C_R \in R$$

ثبوت قضیه: فرضاً $y_1 = f_1(x)$ و $y_2 = f_2(x)$ درحالی $V(x_0)$ نقطه X_0 معین باشد

$$\Delta y_1 = f_1(x_0 + \Delta x) - f_1(x_0) \text{ و } x_0 + \Delta x \in V(x_0)$$

$$\Delta y_2 = f_2(x_0 + \Delta x) - f_2(x_0) \quad \text{و:}$$

ما در اینجا مختصراً ارائه ارگومننت تابع که تزايد آن تنها در نقطه X_0 میباشد ، مطالعه خواهیم نمود ، اگر: $y = y_1 + y_2$ باشد، پس در آن صورت:

$$\Delta y = (y_1 + \Delta y_1 + y_2 + \Delta y_2) - (y_1 + y_2) = \Delta y_1 + \Delta y_2$$

از اینجا در صورتیکه $\Delta x \neq 0$ باشد ، حاصل می نمایم:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y_1}{\Delta x} + \frac{\Delta y_2}{\Delta x}$$

در این جا گرفتن لیمت در صورتیکه $\Delta x \rightarrow 0$ و با توجه به علت موجودیت مشتق توابع y_1 و y_2 در نقطه X_0 در قسمت اول این مساوات به طرف چپ آن لیمت موجود است و مساوی به $y_1' + y_2'$ است پس در این صورت مشتق y موجود است. چنانچه $y' = y_1' + y_2'$ باشد ، پس در این صورت فرمول (9.15) ثبوت شد.

اگر $y = y_1 y_2$ باشد ، پس در این صورت بطور مشابه پی هم خواهیم داشت.

$$\Delta y = (y_1 + \Delta y_1)(y_2 + \Delta y_2) - y_1 y_2 = \Delta y_1 y_2 + y_1 \Delta y_2 + \Delta y_1 \Delta y_2$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y_1}{\Delta x} y_2 + y_1 \frac{\Delta y_2}{\Delta x} + \frac{\Delta y_1}{\Delta x} \Delta y_2 \quad \text{از اینجا:}$$

از موجودیت مشتق تابع $f_2'(x_0)$ در نقطه X_0 به نتیجه متمادیت تابع در نقطه X_0 میرسیم.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0 \quad \text{طوری‌که:}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y_2}{\Delta x} = \dot{y}_2 \quad \text{و} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y_1}{\Delta x} = \dot{y}_1 \quad \text{بغیر از آن:}$$

همین طور در صورتیکه $\Delta x \rightarrow 0$ لیمت را دریافت میکنیم.

$$\dot{y} = \dot{y}_1 y_2 + y_1 \dot{y}_2 \quad \text{از مساوات حاصل شده داریم:}$$

پس در این صورت فورمول (9.16) ثبوت شد.

بالخره اگر $y = \frac{y_1}{y_2}$ و $f_2'(x_0) \neq 0$ باشد.

$$\Delta y = \frac{y_1 + \Delta y_1}{y_2 + \Delta y_2} - \frac{y_1}{y_2} = \frac{\Delta y_1 y_2 - y_1 \Delta y_2}{(y_2 + \Delta y_2) y_2} \quad \text{پس در اینصورت:}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta y_1}{\Delta x} y_2 - y_1 \frac{\Delta y_2}{\Delta x}}{(y_2 + \Delta y_2) y_2} \quad \text{و:}$$

از اینجا در صورتیکه $\Delta x \rightarrow 0$ دوباره به یاد می‌آوریم که از موجودیت مشتق متمادیت تابع

نتیجه میشود. و همین قسم:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y_2 = 0$$

$$\dot{y} = \frac{\dot{y}_1 y_2 - y_1 \dot{y}_2}{y_2^2} \quad \text{پس حاصل میداریم که:}$$

پس در این صورت فورمول (9.17) نیز ثبوت گردید.

نتیجه مستقماً از (9.11) به نتیجه رسید.

اگر $c'=0$ (مراجعه نمائید به : مثال 1 درپرگراف 9.1) و نتیجه 2 را بیاد می آوریم که مستقیماً از فورمولهای (9.15) و (9.18) بر میتود استقرای ریاضی حاصل میشود.

تبصره: با استفاده از خواص لیمت های بی نهایت که با عملیه های حسابی بالای توابع ارتباط دارد (مراجعه نمائید به : پراگراف 5.10) ممکن است مطابق به خواص مشتق بی نهایت باشند.

بطور مثال : اگر مشتق متناهی $y'(X_0)$ و مشتق بی نهایت (به علامه معلوم) $y_2'(x_0)$ موجود شود ، پس در این صورت به تابع $y(x) \stackrel{\text{def}}{=} y_1(x) + y_2(x)$ در نقطه X_0 مشتق به نهایت به عین علامه موجود میشود.

بطومثال: اگر $y_2'(x_0) = +\infty$ پس دراین صورت $y'(x_0) = +\infty$ حقیقتاً

$\Delta y = \Delta y_1 + \Delta y_2$ همینطور اگر لیمت متناهی $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty$ و $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y^2}{\Delta x} = +\infty$ موجود میشود.

پس دراین صورت:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y_1}{\Delta x} + \frac{\Delta y_2}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y_1}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y_2}{\Delta x} = +\infty$$

پس داریم که:

$$y'(X_0) = +\infty$$

$$(1) \text{ فرضاً } y = e^x \sin x - 2x^2 \cos x$$

به علت فرمولهای (9.15)، (9.16) و (9.18) داریم که:

$$\dot{y} = (e^x \sin x) - 2(x^2 \cos x) = e^x \sin x + e^x \cos x - 2(2x \cos x - x^2 \sin x)$$

$$(2) \text{ فرضاً } y = \operatorname{tg} x : \text{ طوری که } \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \text{ پس در اینصورت برحسب}$$

فرمول (9.17) داریم که:

$$\dot{y} = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{\cos x \cos x - \sin x (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\text{به این ترتیب } (\operatorname{tg} x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(3) \text{ بطور مشابه برای } y = \operatorname{ctg} x$$

$$\dot{y} = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right) = \frac{(-\sin x) \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\text{پس در اینصورت داریم } (\operatorname{ctg} x) = \frac{1}{\sin^2 x}$$

خواص (9.15) تا (9.18) را میتوان به دیفرانسیال تابع تبدیل کرد.

در صورتیکه عین فرضیه نظر به دیفرانسیال گیری در نقطه x_0 باشد،

پس:

$$(d_1 y_1 + y_2) + dy_2$$

$$d(y_1 y_2) y_2 dy_2 + y_1 dy_2$$

$$d(cy) = cdy$$

$$d\left(\frac{y_1}{y_2}\right) = \frac{y_2 dy_1 - y_1 dy_2}{y_2^2}$$

بطور مثال : دیفرانسیال مشتق $y = y_1 y_2$ را محاسبه میکنیم :

$$dy = \dot{y} dx = (y_1 y_2)' dx = \dot{y}_1 y_2 dx + y_1 \dot{y}_2 dx = y_2 dy_1 + y_1 dy_2$$

$$\dot{y}_2 dx = dy_2 \quad , \quad \dot{y}_1 dx = dy_1$$
 همینطور :

بطور مشابه فورمولهای باقیمانده نیز ثابت میشود.

9.6 مشتق تابع معکوس.

قضیه 4: فرضاً تابع $y=f(x)$ در بعضی حوالی نقطه x_0 متمادی واکید مونوتونی باشد و فرضاً در صورتیکه $x=x_0$ باشد و مشتق $\frac{df(x_0)}{dx} \neq 0$ موجود باشد، در اینصورت تابع معکوس $x=f_y^{-1}$ و دارای مشتق در نقطه $y_0=f(x_0)$ میباشد.

اگر $\frac{df(y_0)}{dy} = \frac{1}{\frac{df(x_0)}{dx}}$ باشد، پس در اینصورت مشتق تابع معکوس مساوی است به کمیت معکوس مشتق تابع داده شده میباشد.

ثبوت: اگر حوالی نقطه x_0 که در آن تابع f تعریف شده متمادی واکید مونوتونی باشد، و میخواهیم تابع f را تنها در این نقطه بررسی نماییم. در اینصورت طوریکه قبلاً در (مراجعه نمائید به: پراگراف 6.3) ثبوت گردیده که تابع معکوس تعریف شده در بعضی انتروالها متمادی است و نقطه y_0 را تشکیل میدهد و به این ترتیب حوالی متذکره نقطه x_0 میباشد.

همینطور اگر $\Delta x = x - x_0$ و $\Delta y = y - y_0$ ، $y = f(x)$ باشد طوریکه $\Delta x \rightarrow 0$ مساوی به $\Delta y \rightarrow 0$ به این معنی که:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0 \quad \text{برای تابع } f^{-1}$$

هرگاه $\Delta x \neq 0$ و $\Delta y \neq 0$ باشد داریم که:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

در صورتیکه $\Delta x \rightarrow 0$ و یا همین طور به بنابر گفتار بالا، در صورتیکه $\Delta y \rightarrow 0$ لیمت بخش راست موجود میشود. یعنی همین قسم لیمت بخش چپ موجود میشود.

چنانچه:

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\frac{df(x_0)}{dx}}$$

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{df^{-1}(y_0)}{dy}$$

$$\frac{df^{-1}(y_0)}{dy} = \frac{1}{\frac{df(x_0)}{dx}}$$

همینطور:

این قضیه ممکن است تعبیر روش هندسی را دهد (شکل 47) طوریکه واضح است

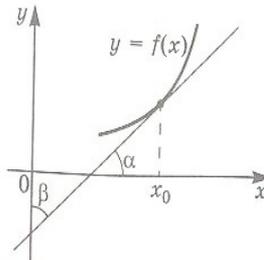
در اینجا α قیمت زاویه است که در گراف مماس تابع f در نقطه $\frac{df(x_0)}{dx} = tg \alpha$

(x_0, y_0) به جهت مثبت محور ox تشکیل گردیده است و $\frac{df^{-1}(y)}{dy} = tg \beta$ در اینجا β

قیمت زاویه است که مماس را نیز با محور oy تشکیل نموده است .

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

طوریکه معلوم است:



شکل 47

$$\frac{df^{-1}(y_0)}{dy} = tg\beta = \frac{1}{ctg\beta} = \frac{1}{ctg(\frac{\pi}{2}-\alpha)} = \frac{1}{tg\alpha} = \frac{1}{\frac{df(x_0)}{dx}}$$

تمرین 4: ثابت نمایید که اگر تابع $y = f(x)$ اکیداً مونوتونی و متمادی در بعضی حوالی نقطه x_0 باشد و اگر در این نقطه تابع دارای مشتق $\frac{df(x_0)}{dx} = 0$ باشد، در این صورت تابع معکوس $f^{-1}(y)$ در این نقطه $y_0 = f(x)$ دارای مشتق بی نهایت میباشد. و همین قسم اگر شرط $\frac{1}{0} = \infty$ را حساب نماییم پس آیفورمول (9.20) در این صفحه صادق است یاخیر؟

5: مشابهت قضیه 3 را برای مشتق یکطرفه (متناهی، بی نهایت) فورمول بندی و ثبوت نمایید.

مثالها:

$$-1 \leq x \leq 1, \frac{-\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}, x = \sin y, y = \arcsin x \quad (1)$$

داده شده باشد با استفاده از فورمول (9.20) حاصل می نماییم:

$$\frac{dy}{dx} = (\arcsin x)' = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos y}$$

طوریکه: $\frac{-\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ پس $\cos y > 0$ است.

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{همینطور: } \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$$

$$-1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \pi, x = \cos y, y = \arccos x \quad (2)$$

بطور مشابه به اساس فرمول گذشته داریم:

$$\frac{dy}{dx} = (\arccos x)' = \frac{1}{dx/dy} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{پس در اینصورت داریم:}$$

$$-\infty < x < +\infty, \frac{-\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}, x = \operatorname{tg} y, y = \operatorname{arctg} x \quad (3)$$

$$\frac{dy}{dx} = (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{dy/dx} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{پس داریم:}$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2} \quad \text{و همینطور:}$$

$$-\infty < x < +\infty, 0 < y < \pi, x = \operatorname{ctg} y, y = \operatorname{arctg} x \quad (4)$$

$$\frac{dy}{dx} = (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{dx/dy} = -\sin^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 y} = -\frac{1}{1+x^2} \quad \text{در این حالت}$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2} \quad \text{پس در آنصورت}$$

$$x > 0, a \neq 1, a > 0, x = a^y, y = \log_a x \quad (5)$$

$$\frac{dy}{dx} = (\log_a x)' = \frac{1}{dx/dy} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a} \quad \text{پس } -\infty < y < +\infty$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \quad \text{پس در آنصورت داریم:}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad \text{در حالت خاص در صورتیکه: } a=e \text{ داریم}$$

9.7 مشتق و دیفرانسیال توابع مرکب.

قضیه 5: فرضاً تابع $y = f(x)$ در نقطه x_0 دارای مشتق میباشد و تابع $z = f(y)$ در نقطه

$$y_0 = f(x_0) \text{ دارای مشتق میباشد.}$$

پس در آنصورت تابع مرکب $\phi(x) = F[f(x)]$ نیز دارای مشتق میباشد، در صورتیکه $x = x_0$ باشد.

چنانچه:

$$\dot{\phi}(x_0) = \dot{F}(y_0)\dot{f}(x_0) \dots (9.21)$$

اگر تابع مرکب ϕ توسط سمبول $\phi = F \circ f$ (مراجعه نمایند به: پراگراف 5.2) ارایه گردد پس فورمول (9.21) را ممکن است بشکل ذیل نوشت:

$$(F \circ f)'(x_0) = \dot{F}(f(x_0))\dot{f}(x_0)$$

در نتیجه توجه تان را به بیان موجودیت مشتق در نقطه x_0 تابع مرکب $F[f(x)]$ جلب میکنیم. به اساس فرضیه، ازینکه تابع مرکب مورد نظر دارای قیمت میباشد، پس در این صورت تابع مرکب در بعضی حوالی نقطه x_0 تعریف شده است با داخل کردن ارگومننت و استفاده از نوشته مشتق توسط دیفرانسیال مساوات (9.21) را میتوان به شکل ذیل نوشت:

$$\frac{dz}{dz} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx}$$

ثبوت: قبل از همه به علت خود تعریف مشتق تابع F که در بعضی حوالی $U(y_0)$ نقطه y_0 تعریف شده است. و همینطور موجودیت مشتق $f'(x_0)$ متمادیت تابع f نتیجه میشود.

پس برای حوالی متذکره $U(y_0)$ چنان حوالی $U(x_0)$ در نقطه x_0 موجود میشود که:

$f(U(x_0)) \subset U(y_0)$ است و همینطور $x \in U(x_0)$ دارای قیمت تابع مرکب

$F[f(x)]$ میباشد. طبق معمول داریم که $\Delta x = x - x_0$ و $\Delta y = y - y_0$ و $\Delta z =$

$F(y) - F(y_0)$. تابع F در نقطه y_0 دارای مشتق بوده و همینطور در این نقطه

دیفرانسیل پذیر میباشد. (مراجعه نمائید به: پراگراف 9.2)

به این معنی که تزیاید Δz در تمام Δy که متعلق به بعضی حوالی نقطه $\Delta y = 0$

(در صورتیکه عدداً $\Delta y = 0$) باشد فورمولهای (9.6) و (9.7) به شکل ذیل

قرار میدهیم:

در اینجا $\varepsilon(\Delta y)$ در تابع صفری متمادی است و $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \varepsilon(\Delta y) = 0$

و هر دو بخش مساوات (9.22) بالای $\Delta x \neq 0$ تقسیم می نماییم

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \hat{F}(y_0) \frac{\Delta y}{\Delta x} + \varepsilon(\Delta y) \frac{\Delta y}{\Delta x} \dots \quad (9.23) \quad \text{حاصل میداریم:}$$

تابع $y=f(x)$ در نقطه x_0 دارای مشتق میباشد، پس در آنصورت قیمت موجود میشود.

یعنی:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \dot{f}(x_0) \dots (9.24)$$

از موجودیت مشتق $\dot{f}(x_0)$ متمادیت تابع $y=f(x)$ در نقطه x_0 نتیجه میشود که:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$$

در صورتیکه $\Delta x=0$ باشد، داریم $\Delta y=0$. همینطور به تزايد Δy تابع مورد بررسی مانند Δx در نقطه $\Delta x=0$ متمادی است.

همینطور طبق اصول تغییرات متحولین در نسبت های لیمیتی که دارای تابع متمادی میباشد (مراجعه نمایند به: پراگراف 5.16) برابر است به

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon(\Delta y) = 0 \dots (9.25)$$

حال از (9.23) به سراغ لیمت میریم در صورتیکه $\Delta x \rightarrow 0$ به اساس فرمولهای (9.24) و (9.25) فرمول تابع (9.21) را حاصل میداریم.

تبصره: فرمول (9.21) برای مشتق تابع مرکب وقتی صادق میباشد که تابع تحت مشتق به مشتق یکطرفه مطابقت نماید. اگر مشتق یکطرفه یا (دوطرفه) تابع مرکب ضرورت باشد در آن صورت طرف چپ فرمول (9.21) برای دریافت چنین مشتق تابع مرکب بجا است.

نتیجه فرمول احتمالی دیفرانسیل نظر به متحول مستقل قرار ذیل میباشد:

$$dz = \dot{f}(y_0) \cdot$$

دراین فرمول $dy = \dot{f}(x)dx$ عبارت از دیفرانسیال تابع میباشد و dx دیفرانسیال متحول مستقل میباشد.

به این ترتیب دیفرانسیل تابع دارای عین شکل میباشد.

حاصل ضرب مشتق برحسب بعضی متحولین مستقل "دیفرانسیل متحولین" به نوبت خود این متحول عبارت از متحول تابع یا متحول مستقل میباشد.

طبق فرمول:

و از فرمول (9.21) برای مشتق تابع مرکب استفاده میکنیم، حاصل مینمایم

$$dz = f'(y_0)f'(x_0)dx \quad \text{و} \quad dz = f'(x_0)dx = dy \quad \text{پس} \quad dz = f'(y_0)dy$$

فرمول (9.26) ممکن است چندین عبارت را بیان نماید. اگر به یاد آوریم که دیفرانسیال تابع در نقطه عبارت از تابع خطی نظریه دیفرانسیال متحول مستقل میباشد.

طبق (9.21) دیفرانسیل تابع $d\phi = F'(y)f'(x_0)dx$ میباشد.

پس در این صورت به نتیجه تابع خطی رسیده ایم $dx = f'(x_0)dx$ که توسط دیفرانسیل داده شده (در اینجا $y = f(x)$) در تابع خطی $dz = f'(y_0)dy$ که دیفرانسیل df را میدهد.

در اینجا: $z = F(y)$ یا به عبارت دیگر دیفرانسیال مقدماتی $\phi = F \circ f$ عبارت از

$$d(F \circ f) = df \circ df \quad \text{میباشد.}$$

یاد آور میشویم که قضیه 5 برحسب استقرأ ریاضی بالای هر تعداد متناهی تابع تطبق میشود.

بطور مثال: برای تابع مرکب شکل $z(y(x(t)))$ در حالت دیفرانسیل گیری تابع $x(t)$,

$y(x)$, $z(y)$ نظر به نقطه فرمول ذیل بجا خواهد بود. $\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt}$ برای نشان دادن

مشتق z مشتق تابع مرکب $z = z(y)$ $y = y(x)$ همبیطور x به حیث اندکس (شاخص) پایینی استفاده میشود، پس درآنصورت مینویسند z'_x یا y حسب همان متحول که لیمت آن گرفته میشود نشان داده میشود. z'_y و این کار بخاطر مختصر ساختن توابع صورت میگیرد.

فورمول (9.21) به ارانه نمودن شکل فوق چنین مینویسند: $z_x = z_y y'_x$

مثالها:

(1) فرضاً $y = x^a$, $x > 0$ باشد $\frac{dy}{dx}$ را دریافت میکنیم.

داریم: $x^a = e^u$ در اینجا $u = a \ln x$ یاد آور میشویم که $\frac{du}{dx} = \frac{a}{x}$ حاصل می نمایم.

$$\frac{dx^a}{dx} = \frac{de^u}{dx} = \frac{de^u}{du} \frac{du}{dx} = e^u \frac{a}{x} = e^u \ln x \quad \frac{a}{x} = ax^{a-1}$$

همین قسم: $(x^a)^1 = ax^{a-1}$

بطور مثال: اگر $y = x^2$ پس $y' = 2x$

اگر: $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$ پس $y'(-1)x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

اگر: $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ پس $y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

اگر: تابع $y = x^a$ در صورتیکه $x < 0$ تعریف شده باشد، پس درآنصورت این قیمت نیز دارای مشتق میباشد، یعنی:

$$\dot{y} = ax^{a-1}$$

(2) فرضاً $y = \ln|x|$ ، $x \neq 0$ باشد. وقتیکه $x > 0$ داریم $\dot{y} = (\ln x) = \frac{1}{x}$ و

$$\dot{y} = [\ln(-x)] = \frac{1}{-x}(-x) = \frac{1}{x}$$

در صورتیکه $x < 0$ باشد، داریم

به این ترتیب برای هر $x \neq 0$ فورمول ذیل صادق است:

$$(\ln|-x|) = \frac{1}{x} \dots (9.27)$$

از اینجا برحسب اصول دیفرانسیل توابع مرکب برای هر تابع $u(x)$ در نقطه x که در آن مشتق $\dot{u}(x)$ موجود و $u(x) \neq 0$ باشد، نسبت ذیل بجا خواهد بود:

$$(\ln|u(x)|) = \frac{\dot{u}(x)}{u(x)} \dots (9.28)$$

تبصره 2: فورمول (9.27) را می تواند مستقیماً برای هر $x \neq 0$ از فورمول دیفرانسیال تابع مرکب را حاصل نمود، اگر بیاد آوریم در صورتیکه $x \neq 0$ باشد مساوات $\dot{x} = \text{sign}x$ بجا خواهد بود.

(مراجعه نماید به مثال 1 در اخیر پراگراف (9.2) واقعاً حاصل می نمایم $u = |x|$ برای هر $x \neq 0$ حاصل می نمایم.

$$\frac{d \ln|x|}{dx} = \frac{d \ln u}{du} \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \text{sign}x = \frac{\text{sign}x}{|x|} = \frac{1}{x}$$

(3) مشتق تابع ذیل را دریافت نمایید: $y = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right|$ ، $x \neq a$ ، $x \neq -a$ باشد، به

علت فورمول (9.28) داریم:

$$\dot{y} = \frac{1}{2a} \frac{x+a}{x-a} \left(\frac{x-a}{x+a}\right)^1 = \frac{1}{2a} \frac{x+ax+a-(x-a)}{x-a(x+a)^2} = \frac{1}{x^2-a^2}$$

(4) مشتق تابع $y = \ln |x + \sqrt{x^2 + A}|$ مشابه به فرمول گذشته دریافت نمایید.

$$\dot{y} = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+A}} (x + \sqrt{x^2 + A})^1 = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+A}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+A}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+A}}$$

(5) فرضاً $y = \ln^2 \arcsin \frac{1}{x}$ ، $x > 1$ باشد مشتق تابع این تابع را دریافت نمایید.

$$\dot{y} = \left(\ln^2 \arcsin \frac{1}{x}\right) = 2 \ln \arcsin \frac{1}{x} \left(\ln \arcsin \frac{1}{x}\right) =$$

$$2 \ln \arcsin \frac{1}{x} \frac{1}{\arcsin \frac{1}{x}} \left(\arcsin \frac{1}{x}\right)^1 = 2 \frac{\ln \arcsin \frac{1}{x}}{\arcsin \frac{1}{x}} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} \left(\frac{1}{x}\right)^1 =$$

$$-\frac{2 \ln \arcsin \frac{1}{x}}{|x| \sqrt{x^2-1} \arcsin \frac{1}{x}}$$

از اینجا دیفرانسیال مستقیماً در فرمول $dy = \dot{y} dx$ واقع است.

دیفرانسیال را ممکن است مستقیماً دریافت کرد، با استفاده از احتمال نظریه انتخاب متحولین:

$$d(\ln^2 \arcsin \frac{1}{x}) = 2 \ln \arcsin \frac{1}{x} d(\ln \arcsin \frac{1}{x}) =$$

$$2 \ln \arcsin \frac{1}{x} \frac{1}{\arcsin \frac{1}{x}} d(\arcsin \frac{1}{x}) = \frac{2 \ln \arcsin \frac{1}{x}}{\arcsin \frac{1}{x}} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} d\left(\frac{1}{x}\right) =$$

$$\frac{-2 \ln \arcsin \frac{1}{x}}{|x| \sqrt{x^2-1} \arcsin \frac{1}{x}} dx$$

(6) توسط قضیه 5 یک بخش دیگر استعمال فورمول را استخراج میکنیم.

فرضاً $y = u^v$ درینجا $u(u(x)) > 0$ ، $v = v(x)$ تابع داده شده بشکل $y = e^{v \ln u}$ میگذاریم و $\frac{dy}{dx}$ را محاسبه میکنیم.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{de^{v \ln u}}{dx} = e^{v \ln u} \frac{d}{dx} (v \ln u) = u^v \left(\frac{dv}{dx} \ln u + \frac{v du}{u dx} \right)$$

$$u^v \left(\frac{dv}{dx} \ln u - v u^{v-1} \frac{du}{dx} \right)$$

به این ترتیب مشتق تابع u^v مساوی است به حاصل جمع دو عامل جمع شونده که عامل اول از آنها به مشتق u^v نظر به فرضیه مطابقت میکند و u ثابت است. و دوم با مشتق u^v به فرضیه مطابقت میکند V ثابت است و توسط اصول دیفرانسیال گیری تابع مرکب ممکن است مشتق تابع داده شده غیر آشکار را دریافت نمود.

(7) فرضاً تابع دیفرانسیال پذیر $y=y(x)$ در معادلات غیر آشکار $F(x,y)=0$ داده شده است (مراجعه نمائید به: پراگراف 5.2).

سوال در این جاست که چطور قرار گیرد که معادله داده شده در حقیقت بعضی توابع را تعریف میکند و آیا دیفرانسیال پذیر است؟ در زمینه درآینده معلومات ارائه خواهیم داد.

همین قسم دیفرانسیال $F(x,y) \neq 0$ ، مانند توابع مرکب ممکن است مشتق آنرا حساب نمود $\frac{dy}{dx}$ به خصوص مثال مشتق تابع غیر آشکار $y(x)$ را محاسبه میکنیم.

اگر معادله $x^2 + y^2 = a^2$ داده شده، موجودیت چنین تابع بطور مثال $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ و همین قسم $y = -\sqrt{a^2 - x^2}$ اگر معادله $x^2 + y^2 = a^2$ دیفرانسیال پذیر باشد ، پس

تابع y را از جنس x محاسبه میکنم در نتیجه حاصل می نمایم $2x + 2y\dot{y} = 0$ از اینجا $y = -\frac{x}{y}$ میباشد. به مسایل مشابه درهندسه بر میخوریم، فرضاً بطور مثال : خواسته میشود که مماس به دایره $x^2 + y^2 = 25$ در نقطه $(4,3)$ را دریافت نمایید.

ضریب زاویوی R مماس مساوی به مشتق $R = \dot{y}$ یعنی در حالت داده شده $R = -\frac{x}{y}$ برای نقطه مورد مطالعه $R = -\frac{3}{4}$. همین طور معادله مطلوبه مماس را میتوان به شکل ذیل نوشت : $y - 4 = -\frac{3(x-3)}{4}$ پس درآنصورت از میتود دیفرانسیل گیری به تابع غیرآشکار از فورمول استخراج شده که قبلاً به دیگر فواصل صورت گرفته استفاده می نمایم.

(8) از سر تابع $y = u^v$ را مطالعه می نمایم و لوگارتم آنرا میگیریم مسئله تابع غیرآشکار

$$\ln y = v \ln u$$

داریم . $\frac{\dot{y}}{y} = \dot{v} \ln u + \frac{v}{u} \dot{u}$ (افاده $((\ln y) \dot{y}) = \frac{\dot{y}}{y}$ بنام مشتق تابع لوگارتمی یاد

میشود $y = u^v$ یا $\dot{y} = y(\dot{v} \ln u + \frac{v}{u} \dot{u})$ با قرار دادن $y = u^v$ از سربه سراغ فورمول

(9.29) میرویم. با دیگر تابع $y = \arcsin x$ که غیرآشکار است آن را مطالعه می نمایم. و

معادله $x = \sin y$ به دست میدهد.

و هر دو بخش آنرا نظر به x دیفرانسیال میگیریم، پس حاصل می نمایم که $1 = \dot{y} \cos y$.

$$\dot{y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{ازینجا:}$$

پس در آنصورت همینطور که در پراگراف 9.6 بوده است ثبوت شد.

(9) فرضاً یک تابع داده شده باشد که به فورمول مطابقت نمیکند، در آنصورت از تعریف اول مشتق استفاده می نماییم و آنرا دریافت میکنم.

$$\text{بطور مثال: مشتق تابع } f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \text{ در صورتیکه } x \neq 0$$

باشد موجودیت مشتق توسط فورمول دیفرانسیال محاسبه میشود.

$$\text{در نقطه } x_0 \text{ مشتق مستقیماً دریافت میگردد. } f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} \cdot \cos \frac{1}{x}$$

از تعریف اول $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$ به این ترتیب تابع $f(x)$ در تمام محور عددی دیفرانسیال پذیر میباشد.

تبصره: با استفاده از قضیه 5 میتوانیم تمام فورمولهای حاصل شده را برای مشتقات توابع اساسی تابع ابتدایی بشکل عمومی نوشت. اگر $u = u(x)$ تابع دیفرانسیل پذیر باشد

فورمولها را میتوان قرار ذیل نوشت:

- (1) $(\sin u)' = u' \cos u$
- (2) $(\cos u)' = -u' \sin u$
- (3) $(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
- (4) $(c \operatorname{tg} u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$
- (5) $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1}, (u > 0)$

$$(6) \quad (a^u)' = a^u u \ln a$$

$$(7) \quad (e^u)' = e^u u'$$

$$(8) \quad (\ln u)' = \frac{u'}{u}, \quad (u > 0)$$

$$(9) \quad (\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$(10) \quad (\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$(11) \quad (\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}$$

$$(12) \quad (\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{u'}{1+u^2}$$

از فرمولهای فوق معلوم گردید که " در صورتیکه $u=x$ مشتق تابع ابتدائی اساسی عبارت از تابع ابتدائی میباشد.

بصورت کل فرمولهای حاصل شده امکان آنرا میدهد که مشتق و دیفرانسیال هر تابع ابتدائی درحالتی که اگر این مشتق موجود باشد، پس از اینجا نتیجه میشود که هر تابع ابتدائی در تمام نقاط ساحه تعریف خود دارای مشتق میباشد. مثال: تابع ابتدائی که در تمام نقاط دومین خود دیفرانسیال ندارد، عبارت $|x| = \sqrt{x^2}$ و نیز دارای مشتق در نقطه $x=0$ نمیشد (مراجعه نمایند به: پراگراف 9.2)

تمرین 6: آیا ممکن است فورمول $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx}$ را ثابت کرد؟ در صورتیکه $dy \neq 0$ باشد

تنها بالا dy و $\frac{dz}{dx}$ ضرب و تقسیم نمایید. آیا میتوانید فورمول $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx}$ را ثابت کنید؟

در صورتیکه $dx \neq 0$ باشد صورت و مخرج کسر $\frac{dx}{dy}$ را بالای dx تقسیم کنید.

$$(7) \text{ واضح سازید که تابع } f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \text{ در نقطه } y=0 \text{ متمادی}$$

است و آیا مشتق در این نقطه وجود دارد یا خیر؟

و آیا میتواند مشتق یکطرفه داشته باشد؟

9.8 توابع هایپربولیک و مشتقات آنها

تعریف 5: توابع $\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ و $\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ را بنام کوساین هایپربولیک و سین هایپربولیک یاد میشود و توسط سمبول های chx و shx نشان داده میشود.

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = chx$$

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = shx$$

فرمول (9.29) $ch^2x - sh^2x = 1 \dots \dots$ همیشه صادق است.

حقیقتاً:

$$ch^2x - sh^2x = \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

شکل پارامتریک هایپربول در فرمول ذیل نشان داده شده است :

$$y = a \sinh t, \quad x = a \cosh t \dots (9.31)$$

که معادلات شکل پارامتریک دایره را میدهد .

بصورت عموم ، اگر اطراف فرمول های (9:30) مربع شده و یکی از دیگر تفریق شوند و از فرمول (9:29) استفاده شود ، پس در آنصورت حاصل میکنیم :

$$x^2 - y^2 = a^2$$

پس این معادله مساوی به معادله هایپر بول استوانوی میباشد . بطور تحلیلی از (9:31) به نتیجه میرسیم که x و y معادله $x^2 - y^2 = a^2$ را صدق میکند ، پس معادله فوق معادله دایره میباشد . مشتق سینوس و کوسینوس هایپر بولیک را دریافت می نمایم :

یادآور میشویم که:

$$(-e^{-x})' = -e^{-x}$$

پس داریم که :

$$(chx)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = shx$$

$$(shx)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = chx$$

به این ترتیب $(chx)' = shx$, $(shx)' = chx$ و نسبت $\frac{shx}{chx}$, $\frac{chx}{shx}$ در مقایسه با

سینوس و کوسینوس عادی بنام تانجانت و کوتانجانت هایپر بولیک یاد میشوند و چنین

مینویسند : $\frac{chx}{shx} = thx$, $\frac{shx}{chx} = cthx$ تابع معکوس هایپر بولیک سینوس shx و

هایپر بولیک کوسینوس chx به $archx$ و $arshx$ نشان داده میشود و چنین میخوانند (آرک سینوس ، آرک کوسینوس)

تابع معکوس هایپر بولیک آرک سینوس $(archx)$ و هایپر بولیک آرک سینوس $(arshx)$ از طریق توابع لوگارتیمی و غیر ناطق ارائه میگردد .

برای دریافت تابع معکوس shx چنین مینویسیم: $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ بشکل

$e^{2x} - sye^x - 1 = 0$ و حل میکنیم و رابطه بشکل مربع e^x را مینویسیم و جذر منفی را حذف مینماییم (e^x منفی نمی باشد) ازینجا حاصل میداریم:

$$e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}$$

$$x = avshy = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$$

تابع $archy$ يك قيمته بوده و در تمام محور عددي متمادي میباشد .

دقیقاً برای $y = chx$ مربع معادله e^x حاصل میگردد .

$$e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0$$

$$e^x = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$$

ازینجا:

در نتیجه: $x = archy = |n| \pm \sqrt{y^2 - 1}$ تابع $archy$ برای تمام $y \geq 1$ معین بوده و دو

قیمته میباشد (به جز از قیمت $y=1$)

تمرین 8: مشتق تابع $cthx, thx$ را محاسبه نموده و گرافهای t توابع

$y = chx, y = shx, y = thx, y = cthx$ را ترسیم نموده و نیز مشتق توابع معکوس

آنها را دریافت نمایید .

10.1: مشتقات ترتیب عالی

تعریف 1: فرضاً تابع $f(x)$ در انتروال (a, b) معین است.

در هر نقطه $x \in (a, b)$ دارای مشتق $f'(x)$ می باشد و فرضاً $x_0 \in (a, b)$ باشد اگر $x = x_0$ و $f'(x)$ مشتق تابع $f(x)$ باشد و تابع $f'(x)$ خودش در نقطه x انتروال (a, b) مشتق پذیر باشد یعنی درین نقطه دارای مشتق باشد بنابراین مشتق ذکر شده بنام مشتق دومی و یا (مشتق ترتیب دوم) تابع $y=f(x)$ در نقطه x_0 یاد میگردد یعنی مشتق از مشتق تابع بنام مشتق دوم تابع یاد میگردد و چنین نشان داده میشود $f''(x_0)$ یا $f^2(x_0)$ به این ترتیب مشتق دوم نشان داد. و بطور مشابه مشتق ترتیب دلخواه توسط سمبول y^n نشان داد طوری که $n=1, 2, \dots$ باشد.

اگر فرض گردد که مفهوم مشتق $(n-1)$ ام حاصل گردد و مشتق $(n-1)$ ام در نقطه x انتروال (a, b) مشتق پذیر باشد پس مشتق مذکور بنام مشتق n ام و یا مشتق ترتیب n تابع $y=f(x)$ یاد گردیده.

پس به اساس تعریف رابطه که مشتق n ام را ارائه می نماید دارای شکل ذیل می باشد

$$y^n = [y^{(n-1)}]$$

برای تعیین مشتق n ام در نقطه x_0 میتوان آنرا به شکل لیمت چنین تحریر نمود.

$$n=1, 2, \dots, f^n_{(x_0)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(x_0 + \Delta x) - f^{(n-1)}(x_0)}{\Delta x}$$

فرضیه را خاطر نشان میسازیم که در آن تابع f در نقطه x_0 دارای مشتق ترتیب n ام می باشد. بنابر آخرین تعریف نتیجه میشود که اگر در بعضی حوالی نقطه x_0 تابع f دارای مشتق ترتیب $(n-1)$ ام بوده در صورتیکه $n > 1$ باشد و تمام مشتقات ترتیب پائین تر از $n-1 < k$ بوده که درین صورت خود تابع در بعضی حوالی نقطه x_0 معین می باشد.

به این سبب تمام مشتقات ترتیب پائین تر که کوچک از $(n-1)$ باشد در بعضی حوالی متمادی است و در هر نقطه دارای مشتق می باشد.

(مراجعه نماید به : قضیه 1 و 2 در پرآگراف 9.2) تمام روش درین جا به شکل طبیعی بوده انتقال شده که بنام مشتق یک طرفه ترتیب عالی یاد میشود که هر خواننده آنرا میتوان مستقلانه معین نماید.

تعریف 2: تابع متمادی بنام P_n بار بروی مستقیم دیفرانسیل پذیر یاد میشود اگر در تمام نقاط روی مستقیم دارای دیفرانسیل متمادی تا ترتیب n باشد طوری که $(n=1,2,\dots)$ باشد.

حقیقتاً به اساس تعریف موجودیت مشتق ترتیب n ام مورد بررسی روی مستقیم و احتمال موجودیت مشتق ترتیب $(n-1)$ ام را در آن به اندازه هر تابع کیفی در بعضی نقاط نتیجه میشود طوری که فوقاً از آن تذکر بعمل آمده تابع درین نقطه متمادی بوده و مشتق ترتیب $(n-1)$ ام متمادی روی مستقیم می باشد.

حقیقتاً طبق تعریف موجودیت مشتق ترتیب n ام در فاصله مورد بررسی و موجودیت مشتق ترتیب $(n-1)$ ام را در آن فرض میکند به همین ترتیب از موجودیت مشتق هر تابع در بعضی نقاط نتیجه میشود:

تابع در نقطه دارای مشتق ترتیب $(n-1)$ ام بوده و در فواصل داده شده متمادی است. بطور هم مانند در حالت $n > 1$ باشد پس متمادیت تابع را در فواصل متذکره مشتق ترتیب $n-2$ و غیره را به اثبات میرسانند.

مثال 1: $y = x^3, y' = 3x^2, y'' = 6x, y^{(3)} = 6$

2: مشتق n ام تابع نمائی $y = a^x$ را محاسبه می نمایم طوری که پی در پی مشتق آنرا گرفته در آن صورت خواهیم داشت:

$$y = a^x, y' = a^x \ln a, y'' = a^x \ln^2 a, y^{(3)} = a^x \ln^3 a$$

بصورت عموم بنابر حسب استقرای ریاضی بشکل ساده چنین مینویسند:

$$y^{(n)} = a^x \ln^n a$$

$$(e^x)^{(n)} = e^x, n = 0, 1, \dots \text{ (در حالت خاص)}$$

3: مشتق $y = \sin x$ را محاسبه می نمایم طوری که پی درپی مشتق آنرا میگیریم حاصل مینمایم.

$$y' = \cos x, y'' = -\sin x, y^{(3)} = -\cos x, y^{(4)} = \sin x$$

به همین قسم مشتق آن تکرار میشود. تا به آخرین درجه عملیه را ادامه میدهیم. برای اینکه نتیجه به شکل یک فارمول نوشته شود یاد آور میشویم که:

برای مشتق گیری تابع $y = \sin x$ به ارگومنٹ این تابع $\frac{\pi}{2}$ را علاوه می کنیم یعنی:

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

زیرا که :

$$y'' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

برحسب استقراء: $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n \frac{\pi}{2}\right)$ $n=1, 2, \dots$ و غیره.

4: برای $y = \cos x$ یاد آور میشویم که: $-\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

بطور هم مانند فورمول ذیل را حاصل می نمایم: $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n \frac{\pi}{2}\right), n=1, 2, \dots$

10.2: مشتقات ترتیب عالی جمع و ضرب توابع

قضیه 1: فرضاً توابع $y_1 = f_1(x)$ و $y_2 = f_2(x)$ دارای مشتقات ترتیب n ام در نقطه x_0 باشد پس توابع

$y_1 y_2 = f_1(x) f_2(x)$ و $y_1 + y_2 = f_1(x) + f_2(x)$ نیز دارای مشتقات ترتیب n ام در نقطه x_0 میباشد. یعنی:

$$(y_1 + y_2)^{(n)} = y_1^{(n)} + y_2^{(n)} \dots (10.1)$$

$$(y_1 y_2)^{(n)} = y_1^{(n)} y_2 + C_n^1 y_1^{(n-1)} y_2^{(1)} + C_n^2 y_1^{(n-2)} y_2^{(2)} + y_1 y_2^{(n)} = \sum_{k=0}^n = C_n^k y_1^{(n-k)} y_2^{(k)} \dots (10.2)$$

درینجا C_n^k عدد است از n عناصر $k(k=0,1,2,\dots,n)$ ترکیب یافته است فارمول (10.2) فارمول لینز بوده و بطور سمبولیک میتوان چنین نوشت: $(y_1 y_2)^{(n)} = (y_1 + y_2)^{(n)}$ اندکس $\{n\}$ به این معنی که افاده $(y_1 + y_2)^{(n)}$ هم مانند بینوم نیوتن بشکل مجموع همراه با ضریب فارمول بینومیلی نوشته میشود. و تنها درجه مشتق توابع y_1 و y_2 مطابق به ترتیب تغییر نمی خورد.

(مراجعه نماید به: (10.2)). فارمول های (10.1) و (10.2) به اساس استقرار ریاضی ثبوت میشود در صورتیکه $n=1$ باشد که برای مشتق ترتیب اول آنها در پراگراف 9.5 ثبوت شده اند.

فرضاً این فارمول ها برای مشتق ترتیب n ام واضح باشد. حال آنها را مطابق مشتق ترتیب $n+1$ ثبوت میکنیم.

در حالت جمع توابع داریم:

$$(y_1 + y_2)^{(n+1)} = [(y_1 y_2)^{(n)}]' = (y_1^{(n)} + y_2^{(n)})' = (y_1^{(n)})' + (y_2^{(n)})' = y_1^{(n+1)} + y_2^{(n+1)}$$

فارمول (10.2) ثبوت شد. در حالت ضرب توابع استخراج فارمول آن کمی مشکل است.

$$\begin{aligned} (y_1 y_2)^{(n+1)} &= [(y_1 y_2)^{(n)}]' = \left[\sum_{k=0}^n C_n^k y_1^{(n-k)} y_2^{(k)} \right]' = \sum_{k=0}^n C_n^k [y_1^{(n+1-k)} y_2^{(k)} + y_1^{(n-k)} y_2^{(k+1)}] = \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k y_1^{(n+1-k)} y_2^{(k)} + \sum_{k=0}^n C_n^k y_1^{(n-k)} y_2^{(k+1)} = y_1^{(n+1)} y_2^{(0)} + \sum_{k=0}^n C_n^k y_1^{(n+1-k)} y_2^{(k)} + \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k y_1^{(n-k)} y_2^{(k+1)} + y_1^{(0)} y_2^{(n+1)} \end{aligned}$$

درینجا ما از $C_n^0 = C_n^n = 1$ استفاده نمودیم حال اندکس را در جمع کردن مجموع دوم تغییر میدهیم $k=p-1$ حال اندکس جدید p در عملیه جمع میتواند از 1 تا n تغییر نماید. بعد از آن از حاصل جمع بدست آمده عامل جمعی باید مفهوم هم جنس مشتق را دو بدو یکجا میسازیم و اندکس عمومی عملیه جمع را توسط p نشان میدهیم در آن صورت خواهیم داشت:

$$(y_1 y_2)^{(n+1)} = y_1^{(n+1)} y_2^{(0)} + \sum_{p=1}^n (C_n^p + C_n^{p-1}) \dots y_1^{(n+1-p)} y_2^{(p)} + y_1^{(0)} y_2^{(n+1)}$$

و همچنان $C_{n+1}^0 = C_{n+1}^{n+1} = 1$ و $C_n^p + C_n^{p-1} = C_n^p + 1$ ازینجا یاد آور میشویم که:

$$(y_1 y_2)^{(n+1)} = y_1^{(n+1)} y_2^{(0)} + \sum_{p=1}^n C_n^p y_1^{(n+1-p)} y_2^{(p)} + y_1^{(0)} y_2^{(n+1)} = \sum_{p=0}^{n+1} C_{n+1}^p y_1^{(n+1-p)} y_2^{(p)}$$

نتیجه: اگر C ثابت بوده $y=f(x)$ تابع مشتق پذیر ترتیب n ام در نقطه x_0 باشد ، پس تابع $cf(x)$ نیز دارای مشتق ترتیب n ام میباشد در صورتیکه $x = x_0$ شود بجا خواهد بود که:

$$C(y)^{(n)} = Cy^{(n)} \dots (10.3)$$

حقیقتاً اگر در فرمول (10.2) $y_1 = C$ و $y_2 = y$ حاصل گردد پس فرمول (10.3) بدست می آید. جهت این کار مثال ذیل را به بررسی میگردم: فرضاً $y = x^3 \sin x$ توسط فرمول لیبِنیز مشتق $y^{(0)}$ را دریافت میکنیم.

$$(x^3 \sin x)^{(00)} = x^3 \sin(x+10\frac{\pi}{2}) + 10.3x^2 \sin(x+9\frac{\pi}{2}) + 10.9.3x \sin(x+8\frac{\pi}{2}) + 10.9.8. \sin(x+7\frac{\pi}{2}) = \\ = -x^3 \sin x + 30x^2 \cos x + 270x \sin x - 270 \cos x.$$

10.3: مشتقات ترتیب های عالی توابع مرکب معکوس توابع ، توابع معکوس و توابع که به صورت پارامتری داده شده باشند. فرضاً تابع $Y=y(x)$ دارای مشتق دوم در نقطه x_0 باشد.

و $Z=z(y)$ دارای مشتق دوم در نقطه $y_0 = y(x_0)$ باشد پس تابع مرکب $Z[y(x)]$ در صورتیکه $x = x_0$ باشد دارای مشتق دوم میباشد.

چنانچه (10.4) $z''_{xx} = z''_{yy}y'_x{}^2 + z'_y y''_{xx} \dots$ حقیقتاً به هر اندازه که مشتقات $y''(x_0)$ و $z''(y_0)$ موجود شود به همان اندازه نیز $y'(x_0)$ و $z'(y_0)$ موجود میشود.

لیبنیز (1716-1664) فیلسوف و ریاضیدان آلمانی . y_0 متممادی میباشد.

زیرا که در بعضی حوال نقطه x_0 تابع مرکب $Z=z[y(x)]$ تعریف شده است و دیفرانسیل آنرا میگیریم. برای آسانی کار شکل تابع را به ارگومننت نشان میدهم در آن صورت داریم: $z'_x = z'_y y'_x$ یعنی بر حسب x چند بار دیفرانسیل آنرا میگیریم:

$$z''_{xx} = (z'_y)'_x y'_x + z'_y y''_{xx} = z''_{yy} y'_x{}^2 + z'_y y''_{xx}$$

بطور مشابه مشتقات ترتیب های عالی توابع مرکب مطابق فرضیه محاسبه میگردد.

این میتواند همین طور امکان ثبوت موجودیت و دریافت مشتقات ترتیب های عالی از توابع معکوس را میدهد.

فرضاً تابع $y=y(x)$ متممادی و اکیداً مونوتونی در بعضی حوال نقطه x_0 میباشد.

(مراجعه نماید به پراگراف (9.6)): فرضاً در صورتیکه $x=x_0$ و دارای مشتق y' و y'' طوریکه $y'(x_0) \neq 0$ باشد همینطور تابع معکوس $x=x(y)$ که دارای مشتق دوم در نقطه $y_0 = y(x_0)$ باشد میتواند پیش از علامه y' و y'' مشتقات تابع $y(x)$ در صورتیکه $x=x_0$ شود افاده گردد. و همینطور میتواند هم مانند ترتیب عالی به ارگومننت افاده گردد. مطابق پراگراف 9 4§ (مراجعه نماید به: پراگراف 9.6) بجا خواهد بود $x'_y = \frac{1}{y'_x}$ که نظریه y مشتق هر دو بخش محاسبه میگردد و به بخش اول برگردانیده میشود بدین ترتیب اصول دیفرانسیل مرکب حاصل میگردد.

$$x''_{yy} = (x'_y)' y' = \left(\frac{1}{y'_x}\right)' x'_y = \frac{y''_{xx}}{y'^2_x} \cdot \frac{1}{y'_x} = \frac{y''_{xx}}{y'^3_x}$$

که به همینطور مطابق به فرضیه مشتقات ترتیب عالی برای تابع معکوس نیز محاسبه میگردد. و در حالت خاص بطور هم مانند میتوان تابع داده شده را نیز بنام پارامتریک یاد نمود.

تعریف 3: فرضاً توابع $x=x(t)$ و $y=y(t)$ در بعضی حوالی نقطه t_0 تعریف شده باشند و یکی از آنها بطور مثال $x=x(t)$ متممادی و اکیداً مونوتومی در حوالی متذکره باشد پس در آن صورت تابع معکوس $x(t)$ تابع $t=t(x)$ در بعضی حوالی نقطه $x_0 = x(t_0)$ دارای مفهوم $y(t(x))$ میباشد این تابع y از x بوده و بنام فارمول داده شده $x=x(t)$ و $y=y(t)$ تابع پارامتریک یاد میشود.

فارمولی برای دیفرانسیل گیری اگر توابع $x(t)$ و $y(t)$ در نقطه (t_0) مشتق پذیر طوریکه $x'(t_0) \neq 0$ باشد پس تابع داده شده پارامتریک $y=t(x)$ نیز در نقطه $x_0 = x(t_0)$ دارای مشتق میباشد یعنی $y'_x = \frac{y'_t(t_0)}{x'_t(t_0)} \dots (10.5)$ به همین ترتیب بر حسب اصول دیفرانسیل گیری توابع

مرکب بجا خواهد بود که به ارگومننت افاده گردد یعنی $y'_x = y'_t t'_x \dots (10.6)$ همین طور بر حسب اصول دیفرانسیل گیری توابع معکوس داریم $t'_x = \frac{1}{x'_t} \dots (10.7)$ و (10.6) و (10.7)

فارمول (10.5) نتیجه میشود. اگر موجودیت $x'_t(t_0)$ و $y''_{tt}(x_0)$ باشد پس $y''_{xx}(x_0)$ موجود میشود یعنی:

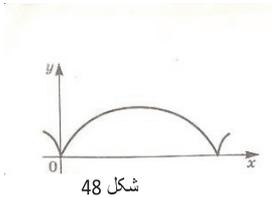
$$y''_{xx} = (y'_x)'x = \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'t$$

$$t'_x = \frac{y''_{tt}x'_t - y'_t x''_{tt}}{x'^3_t}$$

بطور هم مانند مشتقات عالی توابع داده شده پارامتریک محاسبه میگردد در زمینه مثال توابع داده شده پارامتریک رابه بررسی میگیریم.

$$x = a[t - \sin t], y = a[t - \cos t], [a \neq 0, -\infty < t < +\infty, \dots] (10.8)$$

که گراف این تابع در شکل (48) داده شده است.



فرضاً اگر $a > 0$ باشد پس تابع $x(t) = a(t - \sin t)$ اکیداً متزايد شونده میباشد و فرضاً اگر $\Delta t > 0$ باشد پس خاطر نشان میسازیم که:

$$a < \sin \frac{\Delta t}{2} < \frac{\Delta t}{2}$$

در آنصورت داریم که:

$$\begin{aligned} x(t + \Delta t) - x(t) &= a\{\Delta t - [\sin(t + \Delta t) - \sin t]\} \\ &= a\left[\Delta t - 2\cos\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right)\sin\frac{\Delta t}{2}\right] > a\left(\Delta t - 2.1 \cdot \frac{\Delta t}{2}\right) = 0 \end{aligned}$$

که نشان دهنده تابع $x(t)$ اکیداً متزايد شونده مونوتومی میباشد. به علت اینکه تابع معکوس آن یک قیمت موجود میشود یعنی $t(x)$

$$x'_t = a(1 - \cos t) = 2a \sin^2 \frac{t}{2} \geq 0$$

$$y'_t = a \sin t$$

که درین حالت x'_t به صفر رجعت میکند و آن تنها در شکل

داریم: $t = 2k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2$ به این خاطر اگر $t \neq 2k\pi$ شود پس به اساس قاعده دیفرانسیل گیری تابع داده شده پارامتریک داریم:

$$y'_z = \frac{y'_x}{x'_t} = \frac{\sin t}{2 \sin \frac{2t}{t}} = \operatorname{ctg} \frac{t}{2}$$

$$y''_{xx} = (\operatorname{ctg} \frac{t}{2})'_x = (\operatorname{ctg} \frac{t}{2})'_t \frac{1}{x'_t} = -\frac{1}{2 \sin \frac{2t}{2}} \cdot \frac{1}{2a \sin \frac{2t}{2}} = -\frac{1}{4a \sin \frac{4t}{2}}$$

10.4: دیفرانسیل های ترتیب عالی

در لکچرهای بعدی جهت بهتر مطمئن شدن به موضوع به عوض سمبول دیفرانسیل گیری d میتوان حرف δ را نوشت پس در آن صورت به عوض dx, dy میتوان $\delta x, \delta y$ را نوشت.

فرضاً $y=f(x)$ در انتروال (a, b) دیفرانسیل پذیر باشد طوری که معلوم است دیفرانسیل آن عبارت است از $dy = f'(x)dx$ که بنام دیفرانسیل اول یاد میشود و مربوط به دومتحول x و dx میباشد.

اگر تابع $f'(x)$ در ناحیه تعریف خود در بعضی نقاط $x_0 \in (a, b)$

دیفرانسیل پذیر باشد، پس در آن صورت دیفرانسیل آن درین نقطه dy میباشد. درین جا چنین تابع را نظریه x بررسی می نمایم (در بعضی فورمول های dx) اگر برای ارائه آن از سمبول δ استفاده شود شکل ذیل را بخود میگیرد.

$$\delta(dy) = \delta[f'(x)dx] \Big|_{x=x_0} = [f(x)dx] \Big|_{x=x_0} \delta x = f''(x_0)dx\delta x$$

تعریف 4: مفهوم دیفرانسیل $\delta(dy)$ عبارت از دیفرانسیل اول در بعضی نقاط x_0 در صورتیکه $dx = \delta x$ باشد پس دیفرانسیل از دیفرانسیل به نام دیفرانسیل دوم تابع f درین نقطه یاد میشود و به حروف d^2y ارائه میگردد یعنی:

$$d^2y = f''(x_0)dx^2 \dots (10.9)$$

(بطریق dx^2 و به صورت عموم بطریق $n \in N, dx^n$ و به $(dx)^2$ نشان داده میشود یعنی $(dx)^n$ نه به شکل $d(x^n)$ خاطر نشان میسازیم که به علت این تعریف $d^2x=0$ زیرا که دیفرانسیل آن تحولات $dx = \Delta x$ همیشه ثابت محاسبه میشود.

به ترتیب هم مانند درین حالت و قتیکه مشتقات $(n-1)$ ترتیب $y^{(n-1)}$ را در نقطه x_0 یا معادل آن دیفرانسیل میگیریم درین صورت $x = x_0$ بوده و مشتقات n م ترتیب $y^{(n)}$ بوجود می آید که دیفرانسیل n م ترتیب $d^n y$ تابع $y=f(x)$ در نقطه x_0 مثل دیفرانسیل $\delta(d^{n-1}y)$ از دیفرانسیل $(n-1)$ ترتیب $d^{n-1}y$ که $\delta x = dx$ بوجود می آید.

$$d^n y = \delta(d^{n-1}y)\delta x = dx \quad \text{یعنی:}$$

درینصورت نشان می دهیم که مطابق فارمول های (10.10) ، $n=1,2,\dots$ ، که $d^n y = y^n dx^n$ ، ثبوت آنرا به استقرا ریاضی واگذار میشویم که برای $n=1$ و $n=2$ ثابت است.

فرضاً اگر این فارمول برای دیفرانسیل های ترتیب $n-1$ درست باشد یعنی $d^{n-1}y = y^{n-1} dx^{n-1}$ پس درآنصورت طبق تعریف داده شده فوق برای محاسبه دیفرانسیل های ترتیب n م $d^n y$ لازم است تا دراول دیفرانسیل آنرا محاسبه نمود (ما انرا به سمبول δ نشان میدهیم) از $d^{n-1}y$ داریم که:

$$\delta(d^{n-1}y) = \delta(y^{(n-1)} dx^{n-1}) = (y^{n-1} dx^{n-1})\delta x = y^{(n)} \delta x dx^{n-1}$$

وبعداً حاصل میگردد که $\delta x = dx$ پس $d^n y = \delta(d^{n-1}y)\delta x = dx = y^{(n)} dx^n$ از فورمول (10.10)

نتیجه میشود که: $y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n} \dots (10.11)$ درینجا چندین خواص دیفرانسیل های ترتیب عالی

رایاد آور میشویم.

$$1^0. d^n (y_1 + y_2) = d^n y_1 + d^n y_2$$

$$2^0. d^n (y_1 y_2) = \sum_{k=0}^n C_n^k d_1^{n-k} y_2^k$$

و به شکل سمبولیک میتوان چنین نوشت:

$$d^n (y_1 y_2) = (dy_1 + dy_2)^{[n]}$$

درینجا افاده $(dy_1 + dy_2)$ هم مانند فارمول نیوتن نوشته میشود پس درآنصورت شکل ذیل رابخود میگیرد.

$$C_n^k d^{n-k} y_1 d^k y_2$$

بدین ترتیب برای هر تابع کیفی داریم که: $d^0 u = u^{(0)} dx^0 = u$ این خاصیت مستقیماً طبق فارمول ترتیب n م از مشتقات نتیجه میشود. مراجعه نماید به: فارمول های (10.1) ، (10.2) ، (10.3) و (10.10) تبصره: فورمولهای (10.10) و (10.11) باهم مطابقت دارند. که به صورت عموم میگویند: در صورتیکه $n > 1$ باشد (باتفاوت از خاصیت $n=1$) در آن صورت تنها و تنها x متحول غیر مستقل است. و در حالت دیفرانسیل های ترتیب عالی x متحول مستقل است که درین صورت کار اندکی مشکل میشود.

فرضاً $Z=z(y)$ و $Y=y(x)$ باشد درین صورت تابع $Z[y(x)]$ دارای مفهوم مرکب بوده و توابع $z(y)$ و $y(x)$ دوباره دیفرانسیل گیری می نمایم و آن صورت $dz = z'_y dy$ و دیفرانسیل گیری بار دوم آنقدر به سادگی به سمبول δ نزدیک نمیشود. پس در آن صورت خوانده میشود $d(dz)$ و با الترتیب نوشته میشود که $\delta(dz)\delta x = dx$ (که در پراکتیک همیشه چنین میباشد) زیرا که درینجا تابع $\delta(dz)$ تحت دیفرانسیل دانسته میشود.

$$dz = z'_y(y)dy = z'_y[y(x)]y'_x(x)dx \quad \text{یعنی:}$$

در حالت حاصل میداریم که:

$$d^2 z = d(dz) = d(z'_y dy) = d(z'_y)dy + z''_y d^2 y = z''_{yy} dy^2 + z''_y d^2 y \dots (10.12)$$

(ما به اساس فارمول 9.26 نوشتیم که $dz'_y = z''_{yy} dy$) (پس در آن صورت از دیفرانسیل ثابت استندرد میکنیم). با مقایسه فارمول های (10.9) و (10.12) دیده میشود که این فارمولها در حد دوم متفاوت میباشدند. و همین طوره صورت عموم میگویند که $d^2 y \neq 0$ که اصلاً مشتق دوم را برای توابع مرکب بدست می آوریم.

$$z''_{xx} = z''_{yy} y'^2 + z''_y y''_{xx} \quad \text{یعنی}$$

که قبلاً بدست آورده بودیم (مراجعه نماید به: (10.4))

به این ترتیب مطمئن میتوانیم که مشتقات و دیفرانسیل های ترتیب عالی توابع مرکب را محاسبه نمایم.

Book Name Mathematical Analysis I
Author Said Yousuf Manowal
Publisher Balkh Medical Faculty
Website www.ba.edu.af
Number 1000
Published 2012
Download www.ecampus-afghanistan.org

This Publication was financed by the German Academic Exchange Service (**DAAD**) with funds from the German Federal Foreign Office.

Administrative and Technical support by **Afghanic** organization.

The contents and textual structure of this book have been developed by concerning author and relevant faculty and being responsible for it.

Funding and supporting agencies are not holding any responsibilities.

If you want to publish your text books please contact us:

Dr. Yahya Wardak, Ministry of Higher Education, Kabul

Office: 0756014640

Email: wardak@afghanic.org

All rights are reserved with the author.

ISBN: 9789936200883

Message from the Ministry of Higher Education



In the history, book has played a very important role in gaining knowledge and science and it is the fundamental unit of educational curriculum which can also play an effective role in improving the quality of Higher Education. Therefore, keeping in mind the needs of the society and based on educational standards, new learning materials and textbooks should be published for the students.

I appreciate the efforts of the lecturers of Higher Education Institutions and I am very thankful to them who have worked for many years and have written or translated textbooks.

I also warmly welcome more lecturers to prepare textbooks in their respective fields. So, that they should be published and distributed among the students to take full advantage of them.

The Ministry of Higher Education has the responsibility to make available new and updated learning materials in order to better educate our students.

At the end, I am very grateful to the German Federal Foreign Office, the German Academic Exchange Service (DAAD) and all those institutions and people who have provided opportunities for publishing medical textbooks.

I am hopeful that this project should be continued and publish textbooks in other subjects too.

Sincerely,
Prof. Dr. Obaidullah Obaid
Minister of Higher Education
Kabul, 2012

Publishing of textbooks & support of medical colleges in Afghanistan

Honorable lecturers and dear students,

The lack of quality text books in the universities of Afghanistan is a serious issue, which is repeatedly challenging the students and teachers alike. To tackle this issue we have initiated the process of providing textbooks to the students of medicine. In the past two years we have successfully published and delivered copies of 60 different books to the medical colleges across the country.

The Afghan National Higher Education Strategy (2010-1014) states:

“Funds will be made ensured to encourage the writing and publication of text books in Dari and Pashto, especially in priority areas, to improve the quality of teaching and learning and give students access to state-of- the-art information. In the meantime, translation of English language textbooks and journals into Dari and Pashto is a major challenge for curriculum reform. Without this, it would not be possible for university students and faculty to acquire updated and accurate knowledge”

The medical colleges' students and lecturers in Afghanistan are facing multiple challenges. The out-dated method of lecture and no accessibility to update and new teaching materials are main problems. The students use low quality and cheap study materials (copied notes & papers), hence the Afghan students are deprived of modern knowledge and developments in their respective subjects. It is vital to compose and print the books that have been written by lecturers. Taking the critical situation of this war torn country into consideration, we need desperately capable and professional medical experts. Those, who can contribute in improving standard of medical education and public health throughout Afghanistan, thus enough attention, should be given to the medical colleges.

For this reason, we have published 60 different medical textbooks from Nangarhar, Khost, Kandahar, Herat, Balkh & Kabul medical colleges. Currently we are working on to publish 60 more different medical textbooks, a sample of which is in your hand. It is to mention that all these books have been distributed among the medical colleges of the country free of cost.

As requested by the Ministry of Higher Education, the Afghan universities, lecturers & students they want to extend this project to non-medical subjects like (Science, Engineering, Agriculture, Economics & Literature) and it is reminded that we publish textbooks for different colleges of the country who are in need.

As stated that publishing medical textbooks is part of our program, we would like to focus on some other activities as following:

1. Publishing Medical Textbooks

This book in your hand is a sample of printed textbook. We would like to continue this project and to end the method of manual notes and papers. Based on the request of Higher Education Institutions, there is need to publish about 100 different textbooks each year.

2. Interactive and Multimedia Teaching

In the beginning of 2010, we were able to allocate multimedia projectors in the medical colleges of Balkh, Herat, Nangarhar, Khost & Kandahar. To improve learning environment the classrooms, conference rooms & laboratories should also be equipped with multimedia projectors.

3. Situational Analysis and Needs Assessment

A comprehensive need assessment and situation analysis is needed of the colleges to find out and evaluate the problems and future challenges. This would facilitate making a better academic environment and it would be a useful guide for administration and other developing projects.

4.College Libraries

New updated and standard textbooks in English language, journals and related materials for all important subjects based on international standards should be made available in the libraries of the colleges.

5.Laboratories

Each medical college should have well-equipped, well managed and fully functional laboratories for different fields.

6.Teaching Hospitals (University Hospitals)

Each medical college should have its own teaching hospital (University Hospital) or opportunities should be provided for medical students in other hospitals for practical sessions.

7.Strategic Plan

It would be very nice if each medical college has its own strategic plan according to the strategic plan of their related universities.

I would like to ask all the lecturers to write new textbooks, translate or revise their lecture notes or written books and share them with us to be published. We assure them quality composition, printing and free of cost distribution to the medical colleges.

I would like the students to encourage and assist their lecturers in this regard. We welcome any recommendations and suggestions for improvement.

We are very thankful to the German Federal Foreign Office & German Academic Exchange Service (DAAD) for providing funds for 90 different medical textbooks and the printing process for 50 of them are ongoing. I am also thankful to Dr. Salmaj Tural from J. Gutenberg University Mainz/Germany, Dieter Hampel member of Afghanic/Germany and Afghanic organization for their support in administrative & technical affairs.

I am especially grateful to GIZ (German Society for International Cooperation) and CIM (Centre for International Migration & Development) for providing working opportunities for me during the past two years in Afghanistan.

In Afghanistan, I would like cordially to thank His Excellency the Minister of Higher Education, Prof. Dr. Obaidullah Obaid, Academic Deputy Minister Prof. Mohammad Osman Babury and Deputy Minister for Administrative & Financial Affairs Associate Prof. Dr. Gul Hassan Walizai, the universities' chancellors and deans of the medical colleges for their cooperation and support for this project. I am also thankful to all those lecturers that encouraged us and gave all these books to be published.

At the end I appreciate the efforts of my colleagues Dr. M. Yousuf Mubarak, Abdul Munir Rahmanzai, Ahmad Fahim Habibi, Subhanullah and Hematullah in publishing books.

Dr Yahya Wardak

CIM-Expert at the Ministry of Higher Education, November, 2012
Karte 4, Kabul, Afghanistan

Office: 0756014640

Email: textbooks@afghanic.org
wardak@afghanic.org

About the Book

The book by the name of "Mathematical Analysis I", translated by Pohandoi Said Yusuf Manowal in 2012, is a well known book in the subject matter which was published by the Russian Federation Public University in 2006. The book has 400 pages in total. Its unique features are as follows. First of all, its concepts are well organized in a way that can be easily understood by the reader. In addition, its concepts are congruent with the higher education mathematics curriculum. Moreover, it consists of good examples that support student's understanding of a concept. Also, it has good exercises at the end of the each chapter. Most importantly, the book can easily be read by other than math and science students. The interested readers can use the book to improve their knowledge in the subject. The book also takes into account the contemporary and effective way of presenting mathematical concepts that are introduced during the last decade. This book starts with the axiomatic analysis of real numbers that provides the logical basis for the subject. Without having this logical basis, one can go astray from the main objective of mathematical analysis. Therefore, studying real numbers through an axiomatic lens can provide better opportunities to understand concepts such as limit, derivative and integral of a function, which are presented in the remaining of the book. Finally, the concepts presented in this book are new and meet national and international academic standards.



بیوگرافی مختصر

پوهندوی سید یوسف مانووال فرزند جمعه گل در سال (1336) در ولایت نریبائی و همیشه بهار ننگرهار ولسوالی چپرهار قره مانو در يك خانواده متدنی متولد گردیده امر تعلیمات متوسطه مرا در متوسطه چپر تکمیل نموده و انر آن متوسطه بدرجه اعلی فارغ ودر سال 1350 انر طرف دولت به تخنیکه نفت گانر منهار شرف جهت تحصیل معرفی ودر سال 1354 بدرجه اعلی انر تخنیکه متذکره فارغ ودوباره به حیث استاد در کادر آن تخنیکه مقرر گردیده امر . چون تحصیلات بنده ناقص بوده بدینوسیله جهت اخذ لیسانس انر طرف دولت در سال 1372 به پوهنچی تعلیم وترپیه پوهنتون بلخ بهص دیپارتمنت ریاضیات معرفی ودر سال 1357 انر آن پوهنچی انر دیپارتمنت ریاضیات بدرجه اعلی به سویه لسانس فارغ التحصیل گردیده امر ودر سال 1379 به حیث استاد در پوهنچی تعلیم وترپیه پوهنتون بلخ دیپارتمنت ریاضیات جذب کریده امر ودر سال 1387 در کشور تاجکستان در شهر دشنه انر پوهنتون صدرالدین عینی انر پوهنچی ریاضیات به سویه ماستر بدرجه اعلی فارغ گردیده امر و فعلا نیز در پوهنچی تعلیم وترپیه پوهنتون بلخ در دیپارتمنت ریاضیات به حیث استاد وظیفه مینمایم .