شمیر پوهنه

(ریاضي)

ستر کتاب

Ketabton.com

دویمه برخه

دویم غځېدلی چاپ

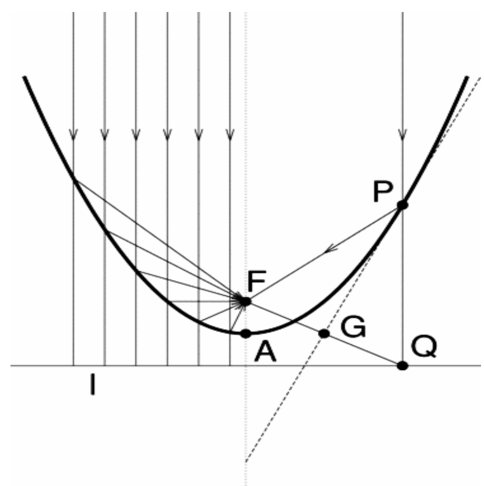
لیکونکی: ډاکتر ماخان (مېږی) شینواری

(c) ketabton.com: The Digital Library

شمیرپوهنه

(رياضي)

سترکتاب



دویم غزېدلی چاپ

لیکونکی: ډاکتر ماخان میرې شینواري

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلوي ښتن په نامه

په دې هيله، چې په دې ليکنو او ژباړو به مې زموږ د بې وزلي او له پوهې پاتې ملت - په ما د پوهنې لپاره د لګښت - لپاره د پوهنې په لور داسې لږ ونده اخستې وي.

makhanshinwari@gmail.com

کتاب پيژندنه

د کتاب نوم: د شميرپوهنه ستر کتاب (دويمه برخه)

ليکونکی: ډاکتر ماخان،، ميرى،، شينوارى

د خپريدو لړۍ

خپرندوی: د افغانستان کلتوري ودې ټولته

جرمني

چاپ کال ۲۰۱۲

چاپ چارې

دانش خپرندويي ټولنې تخنيکي څانګه

makhanshinwari@gmail.com

د چاپ حقوق خپرندوي ټولنې ليکونکي يا ژباړي سره خوندي دي.

پښتو مو ژبه او شميرپوهنه پرې ساده ده

(c) ketabton.com: The Digital Library

د خپرندوی ټولنې یادښت

له هغې مودې را په دې خوا، چې د افغانستان د کلتوري ودې ټولنې د علمي، ساینسي او طبي اثرو د خپرولو لړۍ پیل کړې، تراوسه یې په دې لړ کې مهم اثار خپلو هیواولو ته وړاندې کړې دي.

موږ باور لرو، چې پښتو ژبه هغه وخت په یوه مهمه غني ژبه بدلیدلای شي، چې د پوهې په ګانه سمبال شي او په علمي او اکاډمیکو اثارو غني شي.

اوس چې زموږ ملي سراسري ژبه د بیلابیلوګواښونو او چلنجونو سره مخامخ ده، پر موږ ټولو ده، چې د دغه ګواښونو په وړاندې به په نره ودرېږو او د علم او قلم په ژبه به ځواب ورته ووایو.

د اتحادیي له حوا د ډاکتر ماخان شینواري تراوسه زیاتو چاپ شویو اثارو په څنګ کې، د ده د پنځه وېښت شمیر پوهنې نویو ژباړو او لیکنو او دوه ټولنیزو لیکنو تر منځ، دغه اثر په همدې لړ کې ځکه د ارزښت وړ دی، چې د علمي، ساینسي اثارو د خپراوي په لړ کې د یوه مهم ګام په توګه ګڼل کیدای شي او هیله ده، چې د دې برخې مینه وال لوستوال، زده کوونکي او د پوهنتو زده کړې کټه ترې واخستلی شي.

په درناوي

د افغانستان کلتوري ودې ټولنه

۲۰۰۱۲ ز ک

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ليكونكي مننه

د هر څه له مخه د هغو ليکونکو پروفيسرانو څخه زياته مننه، چې د ليکنو څخه يې زما د ژباړې لپاره تفاهم لري. ماته د دوي د ليکنو د ژباړې په هيڅ ډول مادي ګټه نه شته او دا کار مې يوازې په يوه د پوهنې توانمندې ، مګر وروسته پاتې ژبې ويونکي ولس ته وړاندې دی، دا دې د دې پروفيسرانو له خوا په پوهنيزه اړخ کې زموږ په دې اړخ کې هم مرستې ته اړ ولس سره مرسته وي.

همدا ډول زموږ،، د افغانسان کلتوري ودې ټولنه،، جرمنې، د غړو، مرستندويانو او په تيره بيا د مشر تابه څخه زياته مننه کوم، چې پرته له خپرندوې ټولنې په توګه يې د دې ليکنو زياته اقتصادي ونډه هم په غاړه اخستې.

دې لاندې زما کليوالو ملګرو او ملګرو د دې کتابونو په چاپ کې د توان سره سمه اقتصادي ونډه اخستې، چې زه ترې زياته مننه کوم:

د ښاغلي دپلوم انجنير ريحان الدين حساس، ښاغلي دپلوم انجنير محمد اکبر نور، ښاغلی ډاکتر سردار ګانه وال، ښاغلی ډاکترماهوګل ګانه وال، ښاغلي ټولنپوه محمدعارف بيان، ښاغلي دپلوم انجنيرمحمد ايوب بيان، همداسې زما د ملګري اروانباد ډاکتر حاجي محمد سلطانزي د ځوي ښاغلي ډاکتر صالح محمد سلطانزي ، ډپلوم انجنير او دپلوم اقتصاد پوه رحمت الله فتحي او نه اخر زما د لور ډاکتر څانګې شينواري او زما د ځوي اقتصاد پوه او ټولنساپوه اباسين شينواري.

نه د ټولو په اخر کې زما له ميرمن ښاپرۍ څخه ډېره زياته مننه، چې زما د ليکنو- نه دا چې مخه يې نه ده نيولې- پوره ملاتړ کړي.

بيا هم له دوي څخه د زړه له کومې مننه کوم او لوي څښتن دې ورته اجرونه ورکړي، چې داسې مرستو ته دوام ورکړي.

په مننه : ستاسو ماخان شينواری

جرمني د بن ښار

۲۰۱۲ ز ک

(c) ketabton.com: The Digital Library

نيوليک

نوې سريزه

سريزه

افغاني، يوناني ، لاتين الف ب

شميرپوهنيزې نخښې

لومړۍ برخه

۰۱	د شميرپوهنې سم اند يا منطق	۱
۱۰۱	پوهنيزه ژبه او پيدايښت يا طبيعي ژبه	۱
۲۰۱	د شميرپوهنې سم اند بنسټيزه کليمې	۳
۱۰۳۰۱	ثابتې ، اووښتونې يا واريابلې ، ترمونه	۳
۲۰۲۰۱	وينا	۵
۳۰۲۰۱	د دوه ارزښتوالي اصول يا پرينځيپ	۷
۴۰۱	وينا فورم يا ۰ښه او کوانتورونه	۱۳
۵۰۱	اړيين او پوره کيدونکي شرطونه	۲۸
۶۰۱	د شميرکليمه يا د لغاتو	۳۱
۷۰۱	برابرون او نابرابرون	۳۳
۸.۱	تمرينونه	۳۸
۰۲	ډېر ۍ پوهنه	۳۹
۱۰۲	د ډېرۍ پوهنې کليمه	۴۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ . ۲	د ډېريو ترمنځ اړيکې	۴۵
	ربخدېرۍ	۴۶
	د يوې ډېرۍ توان يا توانډېرۍ (توانسټ)	۴۸
۳ ٠ ۲	په ډېرۍ کې کارونې يا عمليې(۱)	۵٠
	غوځډېرۍ يا متقاطعډېرۍ	۵۲
	د يوې ډېرۍ يا سټ کمپليمنت	۵۷
٤ ٠ ۲	ځيرونه	۵۸
	تمرينونه	۶۷
٠ ۳	د رييل ګڼونو سره د شميرلو بنسټيزې...	۷٠
۳ ٠ ۱	د ګڼونو- يا اعدادو سيستم جوړښت	۷٠
۳ ٠ ۱ ٠ ۱	پيداينښتي يا طبيعي ګڼونه	۷٠
۳ ٠ ۱ ٠ الف	د پيداينت يا طبيعي ګڼونو جوړښت	۷۱
۳ ٠ ۱ ٠ ب	د پيداينت ګڼونو انځورونه او شميرنه	۷۲
۳ ٠ ۱ ٠ پ	د شميرنې بنسټيز قوانين	۷۸
۳ ٠ ۱ ٠ ۲	ټولګڼونه	۸۴
۳ ٠ ۱ ٠ ۲ الف	د ويش تيوري	۸۶
۳ ٠ ۱ ٠ ۲ ب	غټ ګډ پرويشونی(بزګترين مقسوم عليه ...)	۸۸
۳ ٠ ۱ ٠ ۳	راشنلګڼونه	۱٠۶
۳ ٠ ۱ ٠ ٤	رييلګڼونه	۱٠۸

(c) ketabton.com: The Digital Library

١ ٠ ٢ ٠ ٣ ماتشمیرنه ١١٩

٣ . ٣ تمرینونه ١٣٠

٠ ٤ پوتنځ یا توان ، ریښه یا جذر ١۴١

١ ٠ ٤ توان د ټولګنیز په جګ یا اکسپوننت ١۴١

٢ ٠ ٤ ریښه او توان د راشنل اکسپوننت یا جګګن سره ١۴۴

٣ ٠ ٤ توان د ریيلګڼ اکسپوننت یا جګګڼ سره ١٥١

٤ ٠ ٤ ټولګه ١٥٢

٠ ٥ لوګاریتم ١٥٨

١ ٠ ٥ د لوګاریتم کلیمه ١٥٨

٣ ٠ ٥ ټولګه ١۶۶

٠ ٦ ګونومتري ١۶٩

١ ٠ ٦ بنسټیزه ځمککچپوهنه یا هندسه ١۶٩

١ ٠ ١ ٠ ٦ ټکی او کرښه ١۶٩

٢ ٠ ١ ٠ ٦ کونج ١٧١

٣ ٠ ١ ٠ ٦ درېګوړی ١٧۴

٤ ٠ ١ ٠ ٤ کونکروانیځ او ورته والی ١٧٨

٥ ٠ ١ ٦٠ ولاړکونجیز دریګوړی ١٨۴

٢ ٠ ٦ په ولاړکونجیز دریګوړی کې د ... ١٨٨

٣ ٠ ٦ په یوونګردی کې د کونج بلواک .. ١٩٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

٦ ٠ ٤	د ساین او کوساین جملې	١٩٥
٦ ٠ ٥	تریگنومتریکي کتمتوالی	٢٠٥
۶ . ۵	تریگنومتریکي یا کونجکچیز فرمولونه	٢١۵
٠٧	کمپلکس گنونه	٢٢٢
٠ ٨	د ښووني یا ثبوت متودونه	٢٣۵
٨ ٠ ١	سیده ښوونه	٢٣۵
٨ . ٢	ناسیده ښوونه	٢٣٧
٨ ٠ ٣	د پوره ایندکشن له لارې ښوونه	٢٣٩
٩	لاینیز برابرون له یوې اوړیدونې یا ...	٢۴٣
٩ ٠ ١	لاینیز برابرون	٢۴۴
١٠	کومبیناترویک، د بینوم جمله	٢۶۶
١٠ ٠ ١	فاکولتیت یا فاکتوریل	٢۶۶
١٠ ٠ ٢	د بینوم ځله ونه	٢۶٧
١٠ ٠ ٣	د بینوم جمله	٢٧٠
١٠ ٠ ٤	کومبیناتوریک	٢٧۴
١٠ ٠ ٤ ٠ ١	پرموتیشن	٢٧۵
١٠ ٠ ٤ ٠ ٢	واریيشن	٢٨٠
١٠ ٠ ٤ ٠ ٣	کمبینیشن	٢٨۶
١٠ ٠ ٤ ٠ ٤	د پرموتیشن، واریيشن او	٢٩١

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۱ ۰	لانيز الجبري برابرونونه	۲۹۵
۱۱ ۰ ۱	لانيز برابرون له دوه اوړيدونو يا ...	۲۹۶
۱۱ ۰ ۱ ۰ ۳	دويمه درجه ديترمينانت او د كرامر...	۳۰۷
۱۱ ۰ ۱ ۰ ٤	د ګاوس الګوريتم	۳۱۲
۱۱ ۰ ۱ ۰ ۵	له دوه وو زيات برابرونونه له دوه ...	۳۱۶
۱۱ ۰ ۲	لاينيز برابرونونه له درې	۳۱۷
۱۱ ۰ ۲ ۰ ۱	يو برابرون له درې ناپيژندونو سره	۳۱۷
۱۱ ۰ ۲ ۰ ۲	دوه برابرونونه له درې ...	۳۱۸
۱۱ ۰ ۲ ۰ ۳	دريمه درجه ديترمينانت او د ...	۳۱۹
۱۱ . ۲. ۴	د ګاوس لګوريتم	۳۲۲
۱۱ ۰ ۳	په خوښه ډېر مساوات د په خوښه ...	۳۲۵
۱۱ ۰ ۳ ۰ ۱	د n -م درجې ديترمينانت او د ...	۳۲۶
۱۱ ۰ ۳ ۰ ۲	د ګاوس الګوريتم	۳۲۸
	تمرنونه	۳۳۳
۱۲	الجبري برابرونونه	۳۴۰
۱۲ ۰ ۱	نالاينيز برابرونونه	۳۴۰
۱۲ ۰ ۲	څلورئ ئيز يا مربع برابرونونه	۳۴۳
۱۲ ۰۲ . ۱	د دوه په جګ برابرونونه ، د وييتا جمله	
۱۲ ۰ ۲ ۰ ۲	څلورئ برابرونونه ، چې په نورمال	۳۵۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

١٢ ٠ ٢ ٠ ٣	د n -م درجې ځانګړي برابرو...	٣٥١
١٢ ٠ ٣	دریمه درجه برابرونه	٣٥٧
١٢ ٠ ٤	د ریښي برابرونه	
١٣	ترانسڅيندنت برابرونه	٣٧٥
١٣ ٠ ١	لوګاریتم برابرونه	٣٧٥
١٣ ٠ ٢	اکسپوننشل- یا په جګګڼ برابرونه	٣٨٠
١٣ ٠ ٣	ګونومتریکي یا کنجکچیز برابرونه	٣٨٥
١٤	له نابرابرونونو او مطلقه ارزښت ..	٣٩۶
١٤ ٠ ١	نابرابرونونه	٣٩۶
١٤ ٠ ١ ٠ ١	بنستیزې کلیمې او شمیر قوانین	
١٤ ٠ ١ الف	اینتروال	٣٩٧
١٤ ٠ ١ ٠ ٢	نابرابرونونه له یوې ناپیژندونکی...	۴٠٠
١٤ ٠ ١ ٠ ٣	د نابرابرونونو سیستم ...	۴٠٩
١٤ ٠ ١ ٠ ٤	نابرابرونونه له دوه ناپیژندونکو سره	۴١١
١٤ ٠ ٢	برابرونونه او نابرابرونونه	۴١۴
١٤ ٠ ٢ ٠ ١	له مطلقه ارزښت سره شمیرنه	۴١۴
١٤ ٠ ٢ ٠ ٢	برابرونونه له مطلقه ارزښت سره	۴١٥
١٤ ٠ ٢ ٠ ٣	نابرابرونونه له مطلقه ارزښت سره	۴٢٠
١٥	بلواک یا فنکشنونه یا طابع	۴٣٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۰۱۵	د بلواک کلیمه او د بلواک انځورونه	۴۳۰
۲۰۱۵	د بلواک خویونه	۴۳۳

د ستر کتاب دویمه برخه

١٦	د هوارې یا سطحې شننیزه هندسه ...	۴۶۶
۱۰۱٦	کرښه	۴۶۶
۲۰۱٦	ګردۍ	۴۷۵
۳۰۱٦	ایلیپسې	۴۸۲
٤۰۱٦	هیوپربول	۴۸۷
٥۰۱٦	پارابول	۴۹۲
٦۰۱٦	ټولګه	۴۹۴
۱۷	وکتور شمیرنه	۵۰۲
۱۰۱۷	د وکتور پیژند یا تعریف،	۵۰۲
	په کارتیزي کواوردینات سیستم کې د وکتور انځورونه	۵۰۲
۲۰۱۷	د دوه وکتورونو سکالار ځل	۵۰۹
۳۰۱۷	د دوه وکتورونو وکتوري ځل	۵۱۲
٤۰۱۷	غبرګهواریز یا موازي الاضلاع ضرب	۵۱۷
٥۰۱۷	په شننیزه ځمککچ کې د وکتورونو	
۱۰٥۰۱۷	د یوې کرښې وکتوري انځورونه	۵۲۱
۲۰٥۰۱۷	د هوارې یا سطحې وکتوري انځورونه	۵۲۴

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۷ ۰ ۵	د هواربرابرونونو سکالارفورم یا ۰بڼه	۵۲۵
۱۸	پرلپسې او پرلپسې لړۍ	۵۳۳
۱۸ ۰ ۱	پيل	۵۳۳
۱۸ ۰ ۲	د ګڼون - عددونوپرلپسې کليمه	۵۳۴
۱۸ ۰ ۲ ۰ ۱	مونوتوني پرلپسې	۵۴۲
۱۸ ۰ ۲ ۰ ۲	اريتميتيکي پرلپسې	۵۴۵
۱۸ ۰ ۲ ۰ ۳	هندسي پرلپسې	۵۴۷
۱۸ ۰ ۲الف	لړۍ	۵۵۰
۱۸ ۰ ۲ الف ۰ ۱	هندسي لړۍ	۵۵۵
۱۸ ۰ ۲ الف ۲	اريتميتيکي لړۍ	۵۵۷
۱۸ ۰ ٤	د پرلپسې او لړيو د پولې ...	۵۵۸
۱۹	د فنکشنونو پولې او ناپريکيدنه	۵۷۸
۱۹ ۰ ۱	بنسټيزې کليمې	
	د پولو يا حدونو خويونه	۵۸۶
	د راشنل، کسري يا نسبتي	۵۹۲
	د مثلثاتي يا درېکوڼي کچ توابعو پولې	۵۹۶
	ناپرېکيدنې	۶۰۴
۱۹ ۰ ۲	په پوله ارزښت او ناپريکيدنې څو جملې	
۱۹ ۰ ۳	د ناپريکيدونکو فنکشنونو خويونه	۶۱۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

١٩ ٠ ٤ د بنسټيزو فنکشنونو ناپرېکېدنه
د ځېرکي ټولګه ٦١٦
٢٠ دفرنځيالشميرنه ٦٢٦
د تابع تغيرمنځ ارزښت(منځنی قيمت) ٦٢٦
په يوه ټکي کې د تابع ګراف ... ٦٢٨
د لحضوی(سترګورپ) تغير... ٦٣٠
کمښتوېش (تقسيم تفاضل؟) ٦٣١
دفرنشلوېش يا رابيليدنه يا مشتق ٦٣٣
کمښتوېش او مشتق يا رابيليدنه ٦٣٦
د x_o په ځای کې د فنکشن مشتق ٦٤٣
د تانجنت پيژند او خويونه ٦٤٧
د تانجنت او عمود يا ولاړ ټوليز مساوات ٦٥٠
په بيديا کې جګوالی ٦٥٢
٢٠. ١ ٠ ١ الف : د تانجنت يا جګيدني غوره والی
٢٠ ٠ ٢ د فرنځيال يا رابيليدنې يا مشتق قاعدې ٦٥٦
د درېګوډيزو يا مثلثاتي ٦٦٢
د اکسپوننشل يا په جګ توابعو.... ٦٧٠
د مشتق استعمال په طبيعي پوهن کې ٦٧٦
د ايمپليځيت توابعو مشتف ٦٨٣

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بنسټيزو رابيليدنو(مشتقونو) جدول ۶۸۶

ټولګه ۶۸۸

د يوې تابع د مشتق قابليت ۶۹۱

د معکوس- - يا په ځټ توابعو مشتق ۶۹۸

۲۰ .۳ د بنسټيزو بلواکو رابيليدنه ۷۰۱

د رول قضيه ۷۱۰

د وايرشتراس قضيه ۷۱۱

۲۰ .۰٤ افراطي ارزښتونه او اوړونټکی

د دفرنشل منځ ارزښت قضيه ۷۱۲

يوعږيزې توابع ۷۱۵

ځای اړوند افراطي ټکي ۷۲۰

د انعطاف – يا اوړونټکی ۷۲۴

د کوې يا منحني بحث يا خبرې ۷۳۳

ناټاکلي حدونه يا پولې ۷۴۶

د برنولي او د لو پيتال ۷۵۰

۲۰ ، ۵ د غټو ګټو پرابلم ۷۵۷

تمرينونه ۷۶۷

په ټوټه کسرونو ټوټه کونه ۷۷۸

۲۱ انتيګرالشميرنه ۷۸۷

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیلراوړنه ۷۸۷

۲۱ انتیګرالشمیرنه ۷۸۹

د ریمن(ناټاکلی) انتیګرال ۷۹۰

بنسټیزه یا لومړنۍ تابع ۷۹۴

سطحه او لومړنۍ تابع ۷۹۶

ناټاکلی انتیګرال ۷۹۹

د ټاکلي انتیګرال شمیرنه ۸۱۲

تکمیلیدونکي بنسټونه ۸۱۴

د ټاکلي انتیګرال څخه و ټاکلي ... ۸۱۵

د انتیګرالونې قاعدې ۸۱۷

د اکسپوننشل توابعو انتیګرال ۸۱۹

د لوګاریتمي توابعو انتیګرال ۸۱۹

بدلون قانون ۸۲۱

توابع، چې بې د بدلون له لارې... ۸۲۷

ټوټه انتیګرالونه ۸۳۲

د ټوټه انتیګرالونې لار ۸۳۴

د ټوټه راشنل کسرونو انتیګرال ۸۳۸

ناپای(مبهم) انتیګرال ۸۴۱

د ټاکلو انتیګرالونو حل د بدلون له لارې ۸۵۲

(c) ketabton.com: The Digital Library

د انتيګرالشميرنې استعمال ۸۶۲

تمرينونه ۸۸۸

د ډاکتر ماخان شينواري چاپ شوې ليکنې او ژباړې

د ډاکتر ماخان شينواري چاپ ته چمتو ليکنې او ژباړې

د ژباړي يا ليکونکي ژوند ته لنډه کتنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

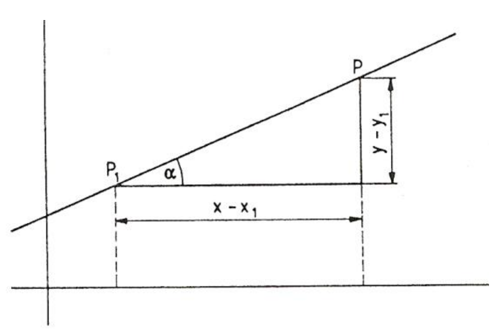
۱۶ - د سطحې شننيزه (تحليلي) هندسه

په دې برخه کې يوڅود تحليلي (شننيزې يا سپړنيزې) څمککچپوهنې يا هندسي ټاکلي پرابلمونه څېړل کيږي.د تحليلي هندسي بنستيزه تګلار به څرګنده (وښول) شي، په نامه هندسي جوړښتونه، ددې هندسي شکلونو او ددې په شننيزې يا تحليلي څرګندونويی د هندسي خويونو جوړښت ښايي.

۱۶ . ۱ کرښه

د هندسي ټاکندو توټو له لارې مختلف امکانات شته دی، چې يوه کرښه يواځنی کره تعين کړاي شو. ددې په لاس ته راوړنو له امله د کرښبرابرونونو يا - مساواتو مختلفی بڼی شته دی. يوه کرښه د يوه ټکي او د هغه د لور(سمت)   له لارې ټاکل کيدي شي . (ټکی او د ټکی ميلان معلوم دی) .

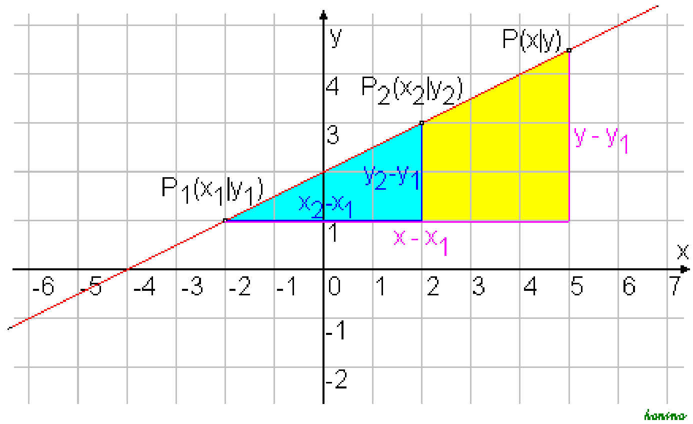
دلته دې(P1(x1 , y1دا ټکي وي. $\alpha \neq \pm\frac{\pi}{2}$ دې د جګيدو کونج،وي، چې د کرښی لور ټاکي (خ ۱۶ . ۱)   او(P(x,y په کرښه يو اووښتونی (واريابل) ټکی دی۰



(c) ketabton.com: The Digital Library

نو د کرښی د ميلان $\tan\alpha = m$ لپاره باور لري: $m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$

(پورته څېره دې وکتل شي(لاددې څېره هم په همدې موخه کښل شوې ده))



له دې څخه لاندې لاس ته راځي:

$$y - y_1 = m(x - x_1); \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(16,1)$$

پورته د کرښی ټکی لوربرابرون

که د y په محور P1وټاکل شي د کواوردیناتو x1= 0, y1 = b سره، نو له (۱۶ . ۱)سملاسي په لاس راځي: y - b = m (x - 0) په همدې ډول(⇔)

$$y = mx + b \qquad (16 . 2)$$

دا پورته برابرون د کرښمساواتونورمال فورم (بڼه) بلل کيږي

يوه کرښه د دوه ټکو له لارې ټاکل شوې.

دا دوه ټکي دې(P1(x1 , y1 او(P2 (x2 , y2 وي، د x1|=x2 سره ، (څېره ش ۱۶ . ۲) د ځګيدونکی يا تنجنت $\tan\alpha = m$ لپاره داسی دي:

m = (y - y1) /(x -x1)

(c) ketabton.com: The Digital Library

او

$$m = (y2-y1)/(x1-x2) = (y2-y1)/(x2-x1)$$

له کومو چې لاس ته راځي

$$m = \frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x-x_1};..................(16,3)$$

پورته د کرښې دوه ټکیزبرابرون

ځیره ده

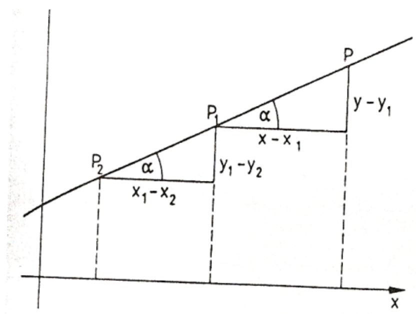


Bild 16.2 ځیره

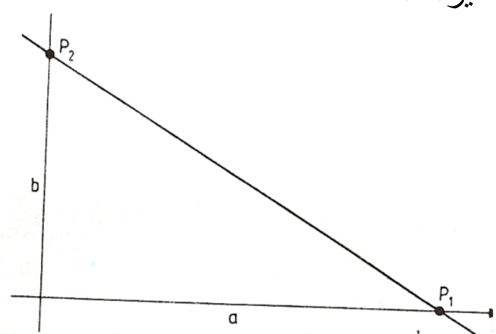


Bild 16.3 ځیره

که د x - محور باندې د P1 ټکی ، د کواوردینات $x1 = a |= 0 , y1 = 0$ سره وټاکو او ټکیP2 دy- محور باندې د کواوردینات $x1= 0, y2 = b|= 0$
سره وټاکو، نو له (۱۶ . ۳) لاس ته راځي:

$$(y - 0) / (x - a) = (b - 0)/ (0 - a)$$

او له دې دا لاندې لاس ته راځي:

$$x/a+y/b = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (16,4)$$

پورته د کرښو د غوځي برابرون

ځلور پورتنی کرښمساوات تړول په x او y کی لاینیز دي.د مساوات عمومي فورم)یا تولیزه بڼه (داسی دی:

$$Ax + By + C = 0 \qquad (16 . 5)$$

د کرښبرابرونونو تولیزه بڼه(عمومي فورم)

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا فورم په ځانګړې توګه دا برابرون هم خوندي لري يا په بر کی نيسي
y = y0 (A = 0 ,B|=0)
او(x=x0(A|=0,B=0 چی د x - محور اوپه همدې ډول د y - محور ته غبرګي کرښي دي، په داسی حال کی چی تراوسه دومه لا نه ده څېړل شوې

بيلګه ۱۶ . ۱:

د کرښی برابرون يا لاينيز برابرون، چی له(P(-2 , 3 ټکي تيريږي او د جګوالي کونج $\alpha = 30°$ يی د $m = \tan\alpha \frac{1}{3}\sqrt{3}$ له امله، د (۱۶ . ۱) سره سم داسی ليکل کيږي $y - 3 = \frac{1}{3}\sqrt{3}(x+2)$

او نورمال فورم يي په لاندې ډول دی
$$y = \frac{1}{3}\sqrt{3}x + (3 + \frac{2}{3}\sqrt{3})$$

بيلګه ۱۶ . ۲ :

د لاينيزبرابرون يا دکرښوبرابرون په ټکو(P1 (3/2 ,-2 او(P2(1 , -4کی د (۱۶ . ۳)سره سم په لاندې ډول دي:
$$\frac{y+2}{x-\frac{3}{2}} = \frac{-y+2}{1-\frac{3}{2}}$$

له دې لاس ته راځي: $y + 2 = \frac{-2}{-\frac{1}{2}}(x - \frac{3}{2})$

نو نورمال فورم y=4x-8 لرو(اته ناسم، په ځای يې شپږ دي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۶ . ۳ :

کرښه د y =-(3/2)x+1 برابرون سره د y - محور په(P1(0,1 ټکي کی غوڅوي او ځګوالی یی 2/3 - دی ، دا په دې مانا چی د x - ارزښت تغیریدل په یو دy - ارزښت په 2/3 - تغیروي، په دې ډول دوم د کرښې ټکی لاس ته راځي. د بیلګی په توګه
p2 (0+1 , 1-(3/ 2)=p2(1,-1/2)

(ځیره ۱۶ . ۴ لاندې کښل شوې)

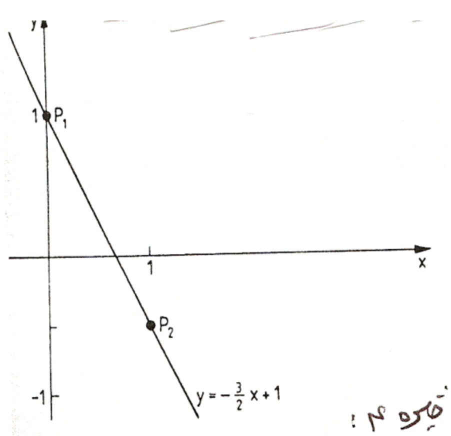
بیلګه ۱۶ . ۴ :

د کرښی د برابرونونو عمومي فورم x-2y-6 = 0 څخه دغوځیدو فورم لاس ته راځي
x / 6 + y / 3 = 1
کرښه دکواوردینات محورونه په دې ټکو(P1(6 , 0), P2(o,-3 کې غوڅوي۰
په یوه کرښه د دوه ټکو(P1(xx,y1),P2(x2,y2ترمنځ فاصله (که د کرښې واټن P1P2
d = وي د پیتاګوراس(فیساغورس) له جملی (څیره . ۱۶ . ۵) داسی ده

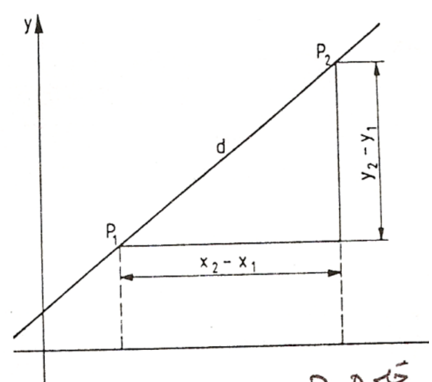
$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2};........................(16,6)$$

پورته د ټکو P1 او P2 ترمنځ واټن

څیرې ۱۶ . ۴ او - ۵



څیره ۴ :



څیره ۵

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه ۱۶ . ۵ :

د درېګوډي ABC د اړخونواوږدوالی، چې کونجټکي يې دادي(-)A(3,1),B

۱,۱),C(2,5، په لاندې ډول دی

$$a = \overline{BC} = \sqrt{(2+1)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$b = \overline{AC} = \sqrt{(2-3)^2 + (5+1)^2} = \sqrt{37} = 6,08$$

$$c = \overline{AB} = \sqrt{(-1-3)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{20} = 4,47$$

دوه کرښې (نه کټمټې) چې (يو د بلې سره) غبرګې نه وي ټيك يو غوځټکی لري. دا چې دا ټکی په دواړو کواور ديناتو پروت دی ، نو د دواړو کواورديناتو برابرون بايد پوره کړي . په دې حالت کې د غوځټکي کواورديناتو، د دوه لاينيزو برابرونونو سره چې دوه اوښتونې يا

ناپيژندونکی (مجهولی) ولري، د يوه سيستم يواځنی کره اوبيونه ترې لاس ته راځي.
په ټوليزه توګه دا باور لري: که يو برابرونسيستم چې د دوه کرښو د برابرونونو څخه جوړ وي، او يو يواځنی ټاکلی حل لري، نو دواړه کرښې يو بل په دې ټکي کی سره پرې کوي.
که ناپای ډيرې اوبيونې شته وي، نو په دې حالت کی برابرون همغه يوه کرښه ښايي، که کوم اوبی ونه لري، نو کرښي يوبل سره غبرګي ځغلي (پرتله ۱۱ . ۱ . ۲)

بيلګه ۱۶ . ۶ :

د g1 : y = 3x-2 کرښی پروتځای (موقعيت) د لاندې کرښو
الف) g2: -2x+y = 1,
ب) g3: 3x -y=5, ,
پ) g4 : -x+(1/3)y=-2/3
سره څيرو
اوبيونه : د g1 برابرونونو څيره داسی بدليږي : 3x-y=2
الف) د برابرونونو سيستم 3x-y=2، -2x+y=1
ټيك يوه اوبونه لري: x1=3 , y1=7
ددې څخه ځرګنديږي چې ټکی(S(3 , 7 د کرښو g1 او g2 غوځټکی دی .

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) د برابرونونو سيستم

3x - y = 2

3 x - y = 1

اوبى نه لري : برابرونونه يو بل ردوي يه نه زغمي . د g1 او g2 كربښى يو د بل سره غبرګي دي

پ) د برابرونونو سيستم 3x-y=2

-x+(1/3)y=-2/3

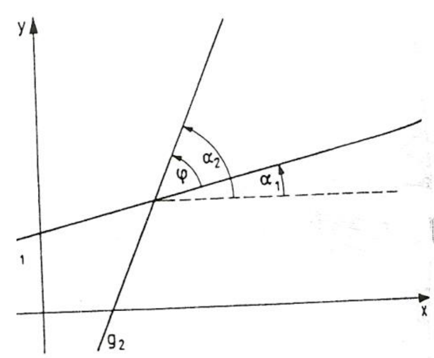
ناپاى ډير ې اوبيوني يا حلونه لري. برابرونونه يو بل سره برابر يا يو بل ته ورته دي. كه په ۳ ضرب شي يو همغه پورته برابرون ترې لاس ته راځي .

g1 او g2 دوه كټ مټ برابرونونه دي ۰

كه د دوه كربښو

g 1 : y = m1x + b1 g2 : y = m2x + b2

غوڅكونج ϕ ټاكو، نو د دواړو كربښو جګيد كونجونو $\alpha_1 \wedge \alpha_2$ كمون (كمښت يا توپير)جوړوو (ځ ۱۶ . ۶)



ځېره ۱۶ . ۶

د كربښى له برابرونونو پوهيږو $\tan\alpha_1 = m_1 \wedge \tan\alpha_2 = m_2$

د زياتون تيورم (بنستيزه جمله) (برخه ۶ . ۵) څخه د $\tan(\alpha_2 - \alpha_1)$ لپاره (پر تله برخه ۴ . ۵) باوري ده

$$\tan\phi = \tan(\alpha_2 - \alpha_1) = (\tan\alpha_2 - \tan_1)/(1 + \tan\alpha_1 . \tan\alpha_2)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کوم څخه چې د $\tan\alpha_1 = m_1 \wedge \tan\alpha_2 = m_2$ سره دا لاندې لاس ته راځي:

$$\tan\phi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1.m_2};.........................(16,7)$$

پورته د دوه کرښو غوڅکونج دي.

دا په دې پورې اړه لري چې ايا $\phi > 0 \vee \phi < 0$ د پورته څېړې ۱۶ . ۶ کونج پڅ او که تيره دی.

بيلګه ۱۶ . ۷ :

د دوه کرښو g1:y=x-1 او g2:y=(7/4)x+1 غوڅکونج لپاره له (۱۶ ، ۷) څخه لاس ته راځي:

$$\tan\phi = \frac{\frac{7}{4} - 1}{1 + 1.\frac{7}{4}} = \frac{3}{11}; \phi = 15,255°$$

د g1 او g2 ترمنځ پڅکونج په دې ډول دی : $180 - \phi = 164,745°$

د دوه کرښو يو بل ته ځانګړي حالتونه:

۱ – کرښې يوبل سره غبرګې ځغلي. نو لرو:

$$\phi = 180° \vee \phi = 0 \Leftrightarrow$$

$$\tan\phi = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1.m_2} = 0$$

ګورو چې د m2 - m1 = 0 لپاره باور لري، نو m2 = m1

(دلته باور لري : $m_1.m_2 = m_1^2 \neq -1$)

۲ - کرښې يو په بل (نيغې) ولاړې دي، نو لرو

$$\phi = 90° \Rightarrow \tan\phi = (m - m)/(1 + m.m) = \infty$$

دا حالت د 1+m1.m2 = 0 لپاره منځ ته راځي،

(c) ketabton.com: The Digital Library

یعنی د$m2= -1/m1$ لپاره $(m1|=0,m2|= 0)$

په کرښه($y=y0$ $(m1=0$ باندې کرښه($x=x0(m2=oe)$ نیغه ولاړه ده

د غبرګوالی لپاره شرطونه

$$m2 = m1 \qquad (16, 8)$$

د اورتوګونالیتی Orthogonalität(یو په بل ولاړوالي) لپاره شرطونه:

$$m2 = -1 / m1 \qquad (16 . 9)$$

بیلګه ۱۶ . ۸ : دکرښی g2 برابرون دې وټاکل شي چی له ټکي($P (2,-1)$ تیریږي، او له کرښی $g1 : y = -2x +1$ سره الف (غبرګه او ب(اورتوګونال (نیغه) ځغلي اوبونه:

الف) د g2 کرښی میلان (جګوالی $m2 = m1 = -2$)دی. پام (۱۶ . ۱) ته دکرښي g2برابرون لپاره باور لري : $y+1=-2(x-2)$ همداسی $y = -2x +3$

ب) د g2 کرښي میلان یاجګیدنه ده $m2=-1/m1=1/2$ د(۱۶ . ۱) سره سم د g2 کرښي برابرون دی: $y+1=(1/2)(x-2) <=> y=(1/2)x-2$

بیلګه ۱۶ . ۹ :

د کرښی برابرون ټاکل کیږي چې د($P1(1/3,-1/6)$ ټکی تیریږي او په کرښه چی له ټکو($P2(-1,1)$ او($P3(-2,-1)$ تیریږي، ولاړه وي.

ځواب : کرښه چي له $P2 ,P3$ ټکو تیریږي، و (۱۶ . ۳) ته په پام لاندې برابرون لري $y = 2x +3$ $(y-1)/(x+1)=(-1-1)/(-2+1) = 2 <=> y = 2x +3$

په دې کرښی د (عمودي) ولاړې کرښی میلان یا جګوالی داسی دی:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{2}$$

د p_1 څخه تیریدونکی کرښي برابرون د m_2 میلان سره د(۱۶ . ۱) له مخی دي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

y+(1/6)=-(1/2)(x-173) <=> y=-(1/2)x

بیلګه ۱۶ . ۱۰ :

د g1:2x-y-1=0 او g2: 3x+2y=5 کرښو د غوڅېټکي S واټن له ټکي(P(6,13 څومره دئ او د کرښي برابرون څنګه دئ چي د کواوردینات له سرچینی تیرېږي او د S او P څخه تیریدونکی کرښه باندې ولاړه کرښه وي؟

ځواب : د غوڅېټکي کواوردینات د لاندې برابرونونو سیستم څخه لاس ته راځي

2x-y=1

3x+2y=5

یعنی: xS=1 , yS=1

د S او P ټکو ترمنځ واټن له (۱۶ . ۶) څخه لاس ته راځي

$$d = \sqrt{(1-6)+(1-13)^2} = 13$$

د (۱۶ . ۳) له مخی د کرښي برابرونونه چی له S او P تیرېږي دي

(y-1)/(x-1)=(13-1)/(6-1)<=>y=(12/5)x-7/5

(جګوالی: (m = 12 / 5)

له S او P ټکو تیریدونکی کرښه باندې د ولاړې کرښي میلان

m2 = -1/m = -5/12

د (P0 (0,0 څخه تیریدونکی کرښه د m2 میلان سره د (۱۶ . ۱) له مخی لاندې برابرون لري

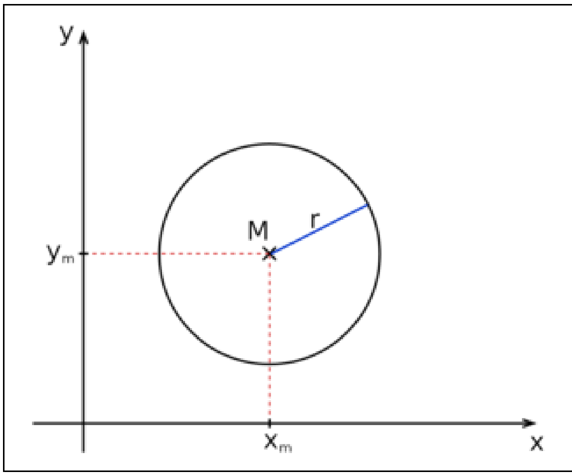
y-0=-(5/12)(x-0)<=> y=-(5/12)x

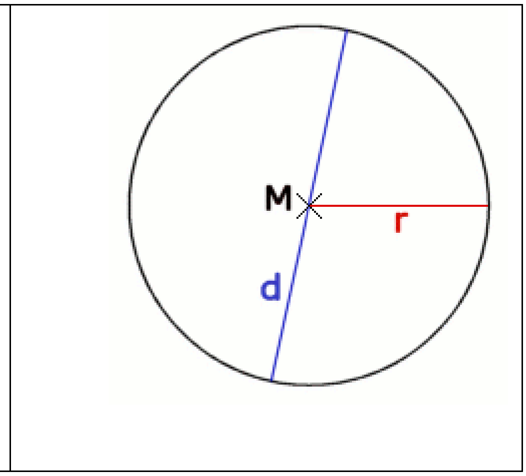
۱۶ . ۲ ګردۍ (داېره)

داېره(ګردۍ) د ټولو هغو ټکو ډېرۍ(سټ) ده، چی د یوه کره ځای په ځاي ټکي ، داسې په نامه منځټکی څخه ، همغه واټن ولری. واټن ته یی وړانګه وایو او په r یی په نخښه کوو. فورمال داسې ویل کیږي یا دا پیژند ورکوو، چې داېره (ګردۍ) k د د سطحې (هوارې) E د ټولو ټکو ډېرۍ(سټ) ده،د کومو لپاره چې باور لري:

$$k = \left\{ X \in E \mid |\overline{MX}| = r \right\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library





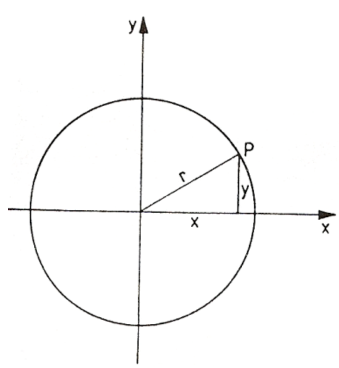


Bild 16.7 ، څېره

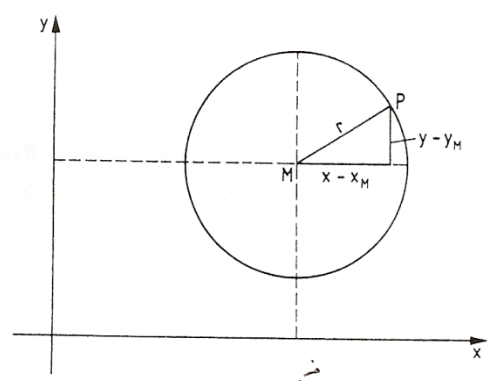


Bild 16.8 څېره

په شننیزه هندسه کې کیدی شي، چې کردۍ د منځټکي $M(x_m, y_m)$ او وړانګې r سره (په هواره کې) د لاندې برابرون له مخې انځور شي.

$$(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2$$

پورته د کردۍ ټولیز برابرون

دا برابرون د پېژند او پیتاګوراس له جملې سملاسي ورکوي
د یوې کردۍ ځانګړي حالت او د کواوردیناتسیستم سره، چې منځټکی یې د کواوردینات
په سرچینه پروت وي لاس ته راځي

$$x^2 + y^2 = r^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د ګردۍ منځ ټکی د کواوردیناتسیستم (څیره ۱۶ . ۷) په سرچینه پروت وي، نو د) پیوتاګوراس د جملی له مخی (د ګردي په خوښه ټکي (P(x,y لپاره باور لري

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (16 . 10)$$

د ګردۍ منځټکي برابرون چی د ګردي منځټکی(M(0,0او وړانګه r ده.

که د ګردي منځټکی M کواوردینات (xM,yM) ولري (څیره ۱۶ . ۸) نو د ګردۍ د خوښی ټکي P(x) لپاره باور لري

$$(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2 \quad (16,11)$$

که د ګردي د منځټکي برابرون وي د منځټکي ($M(x_M,y_M$) او وړانګي r سره

که په (۱۶ . ۱۱) کې د بینوم مربع وې شمیرو او برابرون په A|=0 فاکتور ځلوو (بی له دې چی د ګردي برابرون تغیر وومومي) ، پس پیژندل کیږي چی د ګردیبرابرون د څلورۍ یا مربع غړي په x اوy کی په فاکتور A لاینیز برابرون په x او y او ثابت غړي (چی یوه غړي په څیري سره یوځاي شوي) لاس ته راوړو.

نو دا لاندې تولیز(عمومي) جوړښت لري

$$Ax^2 + Ay^2+Cx+Dy+E = 0 . A |= 0 \quad (16 . 12)$$

د ګردي برابرونونو(مساواتو) تولیز فورم یا تولیزه بڼه ۰
که د ګردي برابرون په تولیزه بڼه یا عمومي فورم ورکړشوي او که منځټکی او وړانګه یی څرګنده کوو یا معلوموو نو د ګردي برابرون د منځټکي فورم باندې راوړو یا را اړوو. دا د څلورۍ پوره کولو یا مربع تکمیلولو په بنسټ صورت نیسي . دوه څیرې پورته وګورۍ

بیلګه ۱۶ . ۱۱ :
د ګردۍ برابرون دې په تولیزه - یا عمومي توګه وي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$2x^2+2y^2+4x-12y=0$$

له دې لاس ته راځي، که په دوه وويشل شي $x^2+y^2+4x-6y-3=0$

(د ځلوری پوره کونه يا مربع تکميلونه) $x^2-4x+4+y^2-6y+9=3+4+9$

دبينوم د مربع له لارې انځورونه $(x+2)^2+(y-3)^2=16$

ګردئ منځټکی$M(-2,3)$ او وړانګه $r=4$ لري.

بيلګه ۱۶ . ۱۲ :

د ګردئ برابرون وليکی چی منځټکی يی $M(2;0)$ وي او په کوم چی ټکی$P(6,4-3)$ روت دی؟

اوبيونه : د $M(2,0)$ سره (۱۶ . ۱۱) داسی دئ

$$(x-2)^2+y^2=r^2$$

د P ټکی د ګردئ برابرون پوره کوي $(6-2)^2+(4-3)^2=r^2$

له دې ځخه د ګردئ وړانګه په لاندې ډول لاس ته راځي: $r=8$ او له دې سره د ګردئ برابرون:

$$(x-2)^2+y^2=64$$

ګردئ او کرښه يو بل ته درې مختلف ځايونه لرودی شي

۱ - کرښه ګردی غوځوي، نو له دې امله غوځی ده(سيکانټې)

۲ – کرښه ګردئ په يوه ټکي کی لمسوي يعنی مماس دی (تانجنت يا جګوالی)

۳ - کرښه ټوله له ګردئ دباندې پرته ده (له ګردئ تيريدونکی، لنډ : تيرېدونې)

د غوځټکي(د تقاطع ټکي) کواوردينات بايد د ګردئ اوکرښی برابرون پوره کړي سرئ د کرښي برابرون د ګردئ په برابرونونو کی ږدي(y يا x پسی حل يا اوبئ شوي) او په روښانه ډول يو مربع مساوات (ځلورئ برابرون) په x او y کی لاس ته راوړي، کوم چی په ځرګند ډول (پرتله برخه ۱۲ . ۲) دوه ريل اوبيونې يا ځوابونه لري، يو رييل ډبل اوبی او يا هڅ رييل اوبی کيدی شي ولري، کوم چی له حالتونو ۱ ، ۲ ، ۳ ځخه عبارت دي.

بيلګه ۱۶ . ۱۳:

کوم پروت ځايونه ګردی kچی راکړشوی: $(x-2)^2+(y-3)^2=5$ او لاندې کرښی و يو بل ته لري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

$g1 : 2x+y=4 ,g2=2x+y=12 , g3: -x+y/2=3$

اوبی: $g1: y=-2x+4$ که د ګردیبرابرون کی ځاي کړو نو دا برابرون لاس ته راځي

$(x-2)^2+(-2x+4 -3)^2=5 <=> 5x-8x=0$

ددې ځوابونو $x=0 , y=4$ او $x=8/5 , y=4/5$ سره به $g1$ د ګردي غوڅوونی یا (Sekantسکانت) وي .

که $g2: y=-2x+12$ د ګردي مساواتو کی ځاي کړو نو لاندې لاس ته راځي

$(x-2)^2+(-2x+12-3)^2=5 <=> x^2-8x+16=0$

د ډبل اوبونې $x1,2 = 4 , y1,2 = 4$ سره $g2$ یو تانجنت دی .

که $g3 : y=2x+6$ د ګردی مساوات کی ځاي کړو، نو لاندې لاس ته راځي:

$(x-2)^2+(2x+6-3)^2 <=> 5x^2+x+8=0$

دا څلوری برابرون یا مربعمساوات ځواب نه لري، نو له دې امله کرښه $g3$ له ګردی k دباندې پرته ده، یعنی دباندنی یا دباندونی ده.

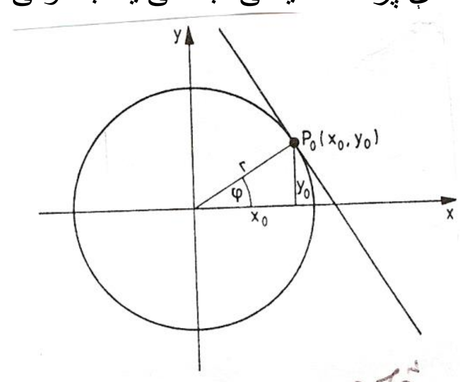


Bild 16.9 ځېره

په ګردي $(x^2+y^2 = r^2)$ (څیره ۱۶ . ۹) باندې د تنجنت برابرون په ټکی($P0(x0,y0$د مساوات $x0^2+y0^2 = r^2 >0$ سره غوښتل کیږي. تنجنت د مماس په وړانګه نیغ ولاړ دی

د مماسوړانګه دا میلان یا جګوالی لري $\tan\phi = \frac{y_0}{x_0}$ او

له دې امله د (۱۶ . ۹) له مخی د تنجنت

$m = 1/\tan\phi = -x_0 / y_0$;..........(16,13)

د تنجنت یا جګي برابرون د (۱۶ . ۱) سره سم لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

y-y=-(x0/y0)(x-x0) <=> xx0+yy0=x0²+y0²=r²

$$xx_0+yy_0 = r^2 \qquad (16.14)$$

د ګردۍ تنجنت باربرون په ټکي $P_0(x_0,y_0)$ په ګردي
$x^2+y^2 = r^2$

(حالتونه(P0(±r,0)او(P0(0,±r په (۱۶ . ۱۴) کی ځاي (دننه) دي.
(څېره . ۱۶ . ۱۰)

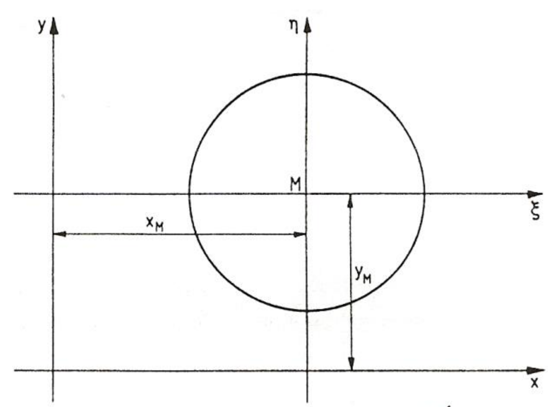


Bild 16.10 څېره

یادونه : که له دې مخ ته یا وروسته x0,y0 یا xM,yMاو x_0, y_0 یا x_M, y_M ګورو نو کېمټ دي

بیلګه ۱۶ . ۱۴:

د دوه تنجنتو برابرون له ټکي(P1(-12,4 په ګردي x²+y²=r² په څه ډول دي؟
اوبیونه : لمړی د دواړو تنجنتو د مماس ټکی پیداکوو. دا باید دګردۍ برابرون پوره کړي . ټکی P1 باید په تنجنت پروت وي یعنی د تنجنت برابرون (۱۶ . ۱۴) باید پوره کړي.
نو باور لري
x0 + 4y0 = 16 -12 او x0²+y0² = 16

(c) ketabton.com: The Digital Library

که دا لاینیزبرابرون د y0 په لور حل شي ، نو په x0 کي یو ځلورۍ برابرون یا مربع مساوات لاس ته راځي

$x_0^2+(3x_0+4)^2 = 16$

همداسي $5x_0^2+12x_0=0$ د اوبیونو $x_{01}=0$, $x_{02}=-12/5$ سره. داهم په دې پورې اړه لري

$y_{01}=4$, $y_{02}=-16/5$

د تنجنت مساوات په ګردې، په ټکو $P_{01}(0,4)$ او $P_{02}(-12/5,16/5)$ د (۱۶ . ۱۴) له مخې په لاندې ډول دي

$0.x+4y=16 \Leftrightarrow y=4$

او

$(-12/5)x-(16/5)y=16 \Leftrightarrow y=(-3/4)x-5.$

د ګردۍ مساوات (۱۶ . ۱۱) د منځټکي $M(x_M,y_M)$ سره د η,ζ -کواوردینات سیستم کی ، چی سرچینه یي په M کی پرته ده)(؟ ځیره ش . ۱۶ . ۱۰) لاندې فورم لري٠

$$\zeta^2+\eta^2=r^2$$

د تنجنت مساوات په ټکي $P_0(\zeta_0,\eta_0)$ کی داسی دي

$$\zeta\zeta_0+\eta\eta_0=r^2; \qquad (16,15)$$

د η,ζ -کواوردیناتسیستم د y,x - کواوردیناتسیستم یو غبرګ کښوول (راکښل) دي، او د دواړو کواوردیناتسیستم کی لاندې اړیکی پرتې دي ٠

$$\zeta=x-x_M,\eta=y-y_M; \qquad (16,16)$$

که برابرون (۱۶ . ۱۶) د تنجنت مساواتو(۱۶. ۱۵)کی ځاي په ځاي شي، نو سړی بیا دا د y,x -کواوردینات سیستم ته ترانفورمیرکوي(کشوي یا راکاږي) :

$$(x-x_M)(x_0-x_M)+(y-y_M)(y_0-y_M)=r^2 \qquad (16.17)$$

په ټکي $P_o(x_0,y_0)$ کی د ګردۍ تنجنت برابرو په ګردۍ

$$(x-x_M)^2+(y-y_M)^2=r^2$$

بیلګه ۱۶ . ۱۵:

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ګردۍ چې برابرن $x^2+y^2+16x+4y+43 = 0$ لري، د x - محور باندې، په ټکو
$x1 = x2 = -5$
سره تنجنت وکا ږو(کيږدو). برابرون يې څنګه دي؟
اوبيونه : د ګردۍ برابرون د منځټکي فورم (۱۶. ۱۱) باندې بدليږي:
$$x^2 +16x+64+y^2-4y+4 = -43+64+4$$
$$(x+8)^2 +(y-2)^2 = 25$$
او له دې لاس ته راځي
$$xM = -8 , yM = 2 , r = 5$$
د ګردۍ د دواړو ټکو ارزښتونه
$$x1 = x2 = -5$$
د دواړو ګردۍ ټکو په ګرديبرابرون کې ځايوو:
$$(-5+8)^2+(y-2)^2=25$$

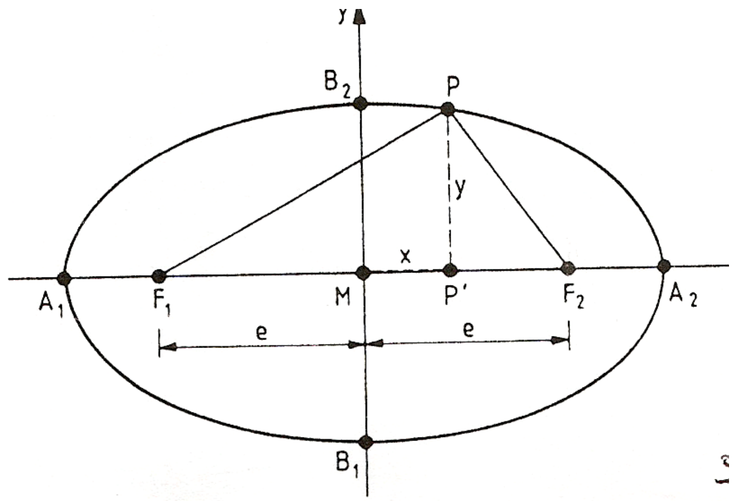
له دې داسې لاس ته راغلي دy لپاره څلوریبرابرون يا مربع مساواتو د دواړو اوردیناتو مماس ټکي لاس ته راځي : $y1 = 6 , y2 = -2$
د (۱۶ . ۱۷) سره سم د تنجنت مساوات لاس ته راځي
$$(x+8)(-5+8)+(y-2)(6-2)=25 \iff 3x+4y=9$$
او
$$(x+8)(-5+8)+(y-2)(-2-2)=25 \iff 3x-4y=-7$$

۱۶ . ۳ بيضوي(هګۍ) يا ايليپسی Die Ellipse

بيضوي يا ايليپسی د ټولو هغو ټکو P ډيرۍ ده، د کومو واټن چې له دوه ټينګ په ځايټکو، داسی په نامه د ايليپسی د سوزونټکويا محراق F1 او F2 څخه ثابت وي. دا سوزونټکی د څيرې ۱۶ . ۱۱ سره سم د -y محور سره سيومتريك دx - محور باندې ځايوو يا ږدو او د ثابت واټنزياتون ليکو:
$$\underline{PF}1 + \underline{PF}2 = 2a \qquad (16. 18)$$

د سوزونټکو واټن دې وي:
$$\underline{F}1F2 = 2e;$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



څېره ۱۶ . ۱۱

دا e لاېني اكسڅنتريځيتي(Exzentrizität دا يوناني كليمه ده چې په اليپسی هوپربول او پارابول كی د همدغه تعريف لپاره ټاكل شوې) بلل كيږي .
د پيتاګوراس له جملی لاس ته راځي:

$$\underline{PF}_1 = \sqrt{(e+x)^2 + y^2}$$

او

$$\underline{PF}_2 = \sqrt{(e-x)^2 + y^2}$$

او له دې سره له (۱۶ . ۱۸)

$$\sqrt{(e+x)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(e-x)^2 + y^2}$$

$$e^2 + 2ex + x^2 + y^2 = 4a^2 - 4a.\sqrt{(e-x)^2 + y^2} + e^2 - 2ex + x^2 + y^2$$

(ځلورې يا مربع ته جګيږي)

$$ex - a^2 = -a\sqrt{(e-x)^2 + y^2}$$ (رينه رابيليږي

(ځلورې يا مربع كوو)

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$e^2x^2 - 2exa^2 + a^4 = a^2(e^2 - 2ex + x^2 + y^2)$$

ترتيب اوړون $(a^2 - e^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - e^2)$

په ځاي کوو

$a^2-e^2 = b^2$ (16.19)

او لاس ته راوړو

$b^2x^2+a^2y^2 = a^2b^2$ <=>

$(x^2/a^2) + y^2 / b^2) = 1$ (16,20)

د منځټکي(M(0,0سره د ايليپسی منځټکي مساوات

د y=0 لپاره دی x=±a، د x=0 لپاره دی y=±b. ايليپسی (ځيره ۱۶ ، ۱۱)

د x - محور په ټکو A1(-a,0), A2(a,0) او د y - محور په ټکو

B1(0.-b), B2(0,b) کی پرې کوي، aاو b د دواړو نيمحورونو اوږدوالی دی

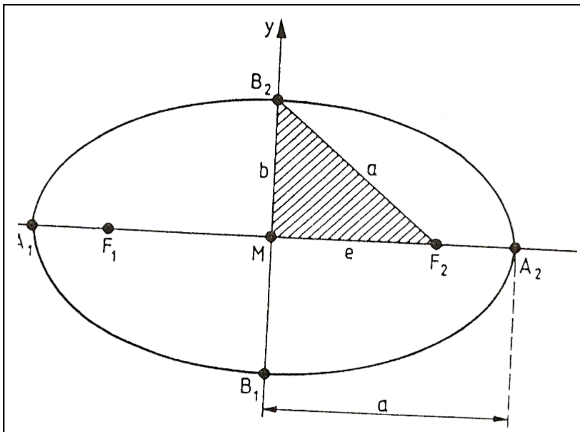


Bild 16.12

لکه د اليپسی د هرټکي لپاره، همداسی د Bلپاره هم اړيکی (۱۶ ، ۱۸) باور لري:

F1B2 + F2B2 = 2a

د F1B2 = F2B2 له امله له

دې لاس ته راځي F2B2 = a

ځيره ۱۶، ۱۲)

له دې سره په دريګوډي MF2B2 کی د اړيکو (۱۶ ، ۱۹) هندسي ارزښت پيژندل کيږي.

که منځټکی M کواوردينات Mx ; My ولري او د ايليپسی محورونه د کواورديناتو سره غبرګ وځغلي، نو د ايليپسی د يوه خوښې ټکي(P(x,yلپاره باور لري:

$(x-xM)^2/a^2+(y-yM)^2/b^2=1$ (16 , 2 1)

د ايليپسی د منځټکي مساوات د منځټکي $M(x_M, y_M)$ سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پورته فرمول ځلولو وروسته د ایلیپسی ټولیز(عمومي) جوړښت پیژندل کیږي.

$$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0 \qquad (16, 22)$$

د ایلپسی مساواتو ټولیزه بڼه یا - فورم

د ګردې برابرون سره په توپیر(پرتله یا مقایسه ۱۶ . ۱۲) د x^2 او y^2 ځله وونی یا ضریبونه یو له بل توپیر لري، مګر همغه مخنخښه لري($A.B > 0$)

بیلګه ۱۶ . ۱۶ :

د د ایلیپسی منځټکی، نیممحور، او سوزونټکي لټول کیږي، که دا برابرن

$$9x^2 + 25y^2 - 54x + 100y - 719 = 0$$

مو مخ ته پروت وي.

اوبړونه : د ایلپسي برابرون د منځټکي بڼه یا فورم (۱۶ . ۱۲) باندې اړول کیږي:

$$9(x^2-6x)+25(y^2+4y) = 719$$

ځلورۍ پوره کونه یا مربعتکمیلونه

$$9(x^2-6x+9)+25(y^2+4y+4) = 719+9.9+25.4$$

$$9(x-3)^2 +25(y+2)^2 = 900$$

(په ۹۰۰ ویش)

$$(x-3)^2 / 100 + (y+2)^2 / 36 = 1$$

د لاس ته راوړلو مساواتو څخه منځټککواوردینات

$$x_M = 3 , y_M = -2$$

لوستلکیږي او د نیممحور لپاره $a^2=100$, $a=10$ او $b=6$, $b^2=36$ لوستل کیږي.

د (۱۶ . ۱۹) سره سم لاس ته راځي:

$$e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{100-36} = \sqrt{64} = 8$$

او له دې سره منځټکي (پرتله څیره ۱۶ ، ۱۱)

$$F_1(x_M - e, y_M) = F_1(-5,-2), F_2(x_M + e, y_M) = F_2(11,-2)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۶ . ۱۷ :

د ایلپسي برابرون د منځټکي (M(-1,3 سره لټول کیږي، په کوم چې ټکي(P1(-3,3 او $P_2(0,3+\frac{3}{2}\sqrt{3})$ پراته وي.

اوبونه : د (۱۶ ، ۲۱) سره سم د منځټکي(M(-1,3 سره د ایلپسي براورن داسی دي

(x-1)² / a² + (y-3)² /b² = 1

ټیکي P1 او P2 باید د ایلیپسي برابرون پوره کړي:

$$\frac{(-3+1)^2}{a^2}+\frac{\sqrt{(3-3)^2}}{b^2}=1,\frac{(0+1)^2}{a^2}+\frac{(3-3-\frac{3}{2}\sqrt{3})^2}{b^2}=1$$

د دې برابرونونو له لومړۍ څخه لاس ته راځي 4/a² + 0 = 1 همداسی(< = >)
a = 2 او له دې سره د دویم برابرون څخههمداسی < = >

$$\frac{(0+1)^2}{4}+\frac{(-\frac{3}{2}\sqrt{3})^2}{b^2}=1\Leftrightarrow$$

$$\frac{\frac{9}{4}.3}{b^2}=3/4\Leftrightarrow b=3$$

د ایلیپسی لټونکی برابون داسی دی:

(x+1)²/4 +(y-3)²/9=1

بیلګه ۱۶ . ۱۸ :

د کرښو

الف) y = x + 2

او ب) y = x - 2

غوڅټکي د ایلپسی 9x²+y²+54x+72=0 سره لټول کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوبيونه : که الف) $y=x+2$ د ايلپسی برابرنونو کی خوندي شي، نو لاس ته راځي

$$9x^2+(x+2)^2 +54x+72=0 \iff 10x^2+58x+76 = 0$$

د څلورى - يامربع برابرونونو اوبى :

$$x1 = -2 , x2 = -3,8$$

د غوڅټکي ابسځيز يا پروتمحور دی. په دې پورې اوردينات يا ولاړ محور

$$y1 = 0 , y2 = -1,8$$

اړه لري.

ب) دy رامدځ ته شوې څلورى(مربع) برابرون

$$9X^2+(x-2)^2+54x+72 \Leftrightarrow 10x^2+50x+76=0$$

رييل اوبيونه نه لري. کرښه $y = x-2$ د ايليپسې څخه دباندې پرته ده

۱۶ . ۴ :هوپربول Die Hyperbel

پېژند:

هوپربول يا هيوپربل د ټولو هغو ټکو ډيرى ده، د کومو لپاره چی د کمون يا کمښت مطلقه ارزښت واټن، د دوه کره په ځاي ټکوF1 اوF2 ،دا په نامه د هوپربول سوزونټکو

يامحراقونو، څخه ثابت وي. دا سوزونټکي ، لکه په ايليپسی کی دلته هم موړ کره ټاکو (څيره ۱۶ . ۱۳) .

د ثابت واټنکمون يا واټنکمښت| $|\underline{PF1}-\underline{PF2}|= 2a$ او (ځيره ۱۶ . ۱۳)

د سوزونټکوواټن) $\underline{F1F2} = 2e$ (څيره ۱۶ . ۱۳)

$$e^2-a^2= b^2 \qquad (16.23)$$

په پورته کې يا بل چيرې، چې کوم څه لاندې کرښيز شوي وي، دا په زياتو ادبياتو کې پورته کرښيز شوي، دې ته دې پام وي، چې لاندې کرښيز شوي وي او که پورته، توپير نه لري يا همغه څه دي٠

يو ايليپسی برابرون ته ورته تلنه (برخۀ ۱۶ ، ۱۳) مو لاندې ته لاربښودوي:

$$(x^2/a^2)-(y^2/b^2)=1 \qquad (16 . 24)$$

د هوپربول منځټکي برابرون د منځټکي (M(0,0 سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

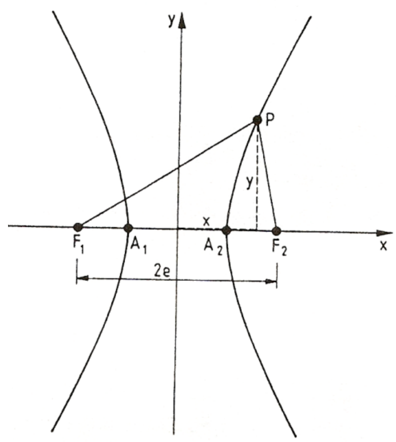


Bild 16.13 څېره

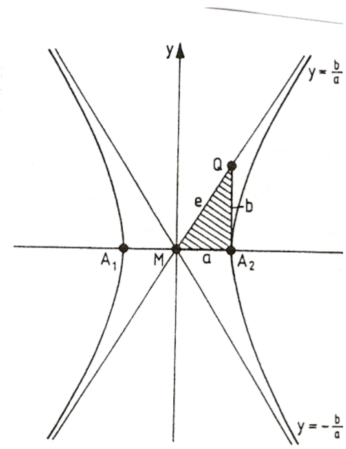


Bild 16.14 څېره

د $y=0$ لپاره $x=\pm a$ دی ، دا په دې مانا چی هوپربول د x - محور په ټکي

$A_1(-a,0)$ او $A_2(a,0)$ کی غوڅوي. دا ټکی ککری ټکی بلل کيږي۰ ګورو چی دا دککری ټکی دی .(د ناپای سره ځاننيونی په هکله: که (۱۶ . ۲۴) د y په لور حل شي، نولاس ته راځي:

$$y = \pm b.\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1} = \pm\frac{b}{a}.x.\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}$$

د $x \to \pm$ oe لپاره $-a^2/x^2$ له منځه ځي. پس هوپربول ځان کربنی $y = \pm(b/a).x$ ته نزدې کوي (څيره ۱۶ . ۱۴)
له دې امله لاندې برابرون

$$y = \pm(b/a)x \qquad (16,25)$$

د هوپربول اسيمپتوتی بلل کېږي.
د (۱۶ . ۲۳) له امله $MQ = e$ دی .
که منځټکی M کواوردينات x_M, y_M ولري او سيومتريك غبرګ د کورديناتو محور ته ځغلي، نو د يوه په خوښه هوپربول ټکي $P(x,y)$ لپاره باور لري:

$$(x-x_M)^2/a^2-(y-y_M)^2/b^2=1 \qquad (16,26)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هوپربول منځټکي برابرون ($M(xM, yM)$ سره.

د پورته مساوات د ځلولو وروسته، په لاندې ډول د هوپربولمساوات ټوليز جوړښت جوتيږي.

$$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0 \qquad (16,27)$$

دهيوپربول برابرون ټوليزه بنه يا فورم
دلته د ايليپسی سره په مخامخ (همدا برعکس دئ) يا په څټ ډول د x^2 او y^2 ځله ووني بدله مخنښه لري
($A . B < 0$) ټوليز برابرون هم کولی شي چی موږ لاندې منځټکي برابرون ته لاربنود کړي،

$$(y-yM)^2/b^2-(x-xM)^2/a^2=1 \qquad (16,26')$$

د کومو څيره چی يو پورته لور او کښته لور ته واز هوپربول دئ.

بيلګه ۱۶ . ۱۹:
د لاندې هوپربول منځټکی او سوزونټکی لټول کيږي

$$-25x^2 -150x+144y^2 -188y +144 = 0$$

اوبيونه: د ورکړشوي هوپربولمساوات بنه په منځ ټکي (۱۶ . ۲۶) اوړي يعني فورم يی بدليږي:

$$-25(x^2+6x)+144(y^2+2y) = -144$$

(د ځلورئ پوره کونه)

$$-25 (x^2+6x+9)+144(y^2-2y+1) =-144-225+144$$

$$-25(x+3)^2 + 144(y-1)^2 = -225$$

(په 225 - ويشنه)

$$-25(x+3)^2+144(y-1)^1 = -225$$

$$(x+3)^2 / 9 -(y-1) /(25/16) = 1$$

د لاس ته راغلومساواتوڅخه لاندې لوستل کيږي:

$$xM = - 3 ,yM = 1 ,a^2 = 9 , a = 3 ,$$

$$b^2 = 25 /16 , b = 5/ 4$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او د دې سره سم د (۱۶ . ۲۳) له امله لرو:

$$e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{144/16 + 25/14} = 13/4$$

د هوپربول منځټکی M(-3,1)دی ، سوزونټکي يې
F1(xM-e,yM)=F1(-25/4,1) او F2(xM+e,yM)=F2(1/4,1) دي.

بيلګه ۱۶ . ۲۰ :

د هوپربول $9x^2-4y^2=36$ اسيمپټوتي يو له بل سره کوم کونجونه تړي يعنی جوړوي يا اسيمپټوتی په کومو کونجونو کی يو بل پريکوي؟

اوبيونه : هوپربول د منځټکي بڼه (فورم) له (۱۶ . ۲۴) سره سم په لاندې ډول ده $x^2/4-y^2/9=1$ يا د $a=2$,$b=3$ سره

له دې سره سم دواړه اسيمپټوتی د(۱۶ . ۲۵) له مخی $y=(3/2)x$
او $y=-(3/2).x$ دي.

د لومړی اسيمپټوتی او x - محور ترمنځ کونج φ د $\tan\varphi = 3/2, \varphi = 56{,}31°$ څخه لاس ته راځي.

له دې امله د اسيمپټوتو ترمنځ کونج ψ باور لري $\psi = 2\varphi = 112{,}62°$
داکونج کيدی شي د هوپربول د وازونکونج په نامه ونومول شي.

بيلګه ۱۶ . ۲۱ :

د ايليپسی $x^2/64+y^2/16=1$ غوځټکي د هوپربول سره لټول کيږي چی منځ ټکي يی په سرچينه او ککرټګي يی د ايليپسی په سوزونټکو پراته وي او همغه ارزښت b لکه ايليپسی ولري.

اوبيونه : د ايليپسی نيممحور په a1 او b1 سره او لاينيزه اکسڅينتريڅيتي يی په e1 سره ښايو.

نو باور لري: $a1=8$, $b1=4$ او د (۱۶ . ۱۹) سره سم دی.

$$e_1 = \sqrt{a_1^2 - b_1^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

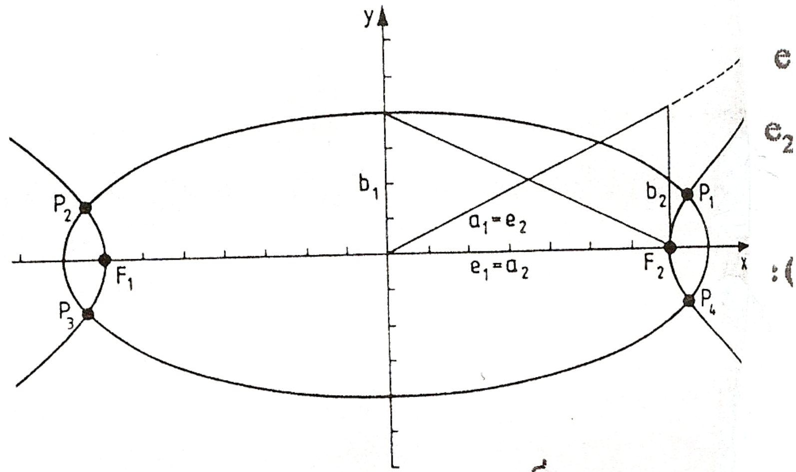


Bild 16.15

د هوپربول لپاره نخښې e_2, a_2, b_2

استعمالوو:

باورلري (پرتله ځیره ۱۶ . ۱۵) :

$$b_2 = b_1 = 4, a_2 = e_1 = 4\sqrt{3}$$

او د (۱۶ . ۲۳) سره سم دئ

$$e_2^2 = \sqrt{a_2^2 + b_2^2} = 8 = a_1$$

د هوپربولبرابرون داسې دی:

$$x^2 / 48 - y^2 / 16 = 1$$

د غوڅټکو کواوردینات د ایلپسی- او هوپربولمساوات پوره کوي. که داوړه مساوات سره زیات شي نو لاس ته راځي

$$(\frac{1}{16} + \frac{1}{48})x^2 = 2, x^2 = 348/7, x_{1,2} = \pm 8\sqrt{\frac{6}{7}}$$

د ایلیپسي او هوپربولبرابرونونو غځه لاس ته راځي

$$y^2 = 16(1 - x^2/64) = 16/7 \Leftrightarrow y^2 = 16(x^2/48 - 1) = 16/7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \pm 4\sqrt{1/7}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او د دې سره سم د دواړو کړو غوڅټکي دي:

$$P_1(8\sqrt{6/7}), P_2(-8\sqrt{\frac{6}{7}}, 4\sqrt{\frac{1}{7}}), P_3(-8\sqrt{\frac{6}{7}}, -4\sqrt{\frac{1}{7}}), P_4(8\sqrt{\frac{6}{7}}, -4\sqrt{\frac{1}{7}})$$

۱۶ . ۵ پارابول Die Parabel

پارابول د ټولو هغو ټکو P ډېرۍ ده، چې واټن یې له یوه کلك په ځاي ټکی، د پارابول سوزون ټکیF، او یوې کلك په ځاي کرښې، د پارابول ترمخکرښی l (داپه ځیره کی جوته ده چې دا کومه کرښه ده) سره مساوي دي(ځیره ۱۶ . ۱۶) د سوزونټکی او مخکرښی ترمنځ واټن نیم پارامتر p بلل کیږي، Sککری ټکی دی،کرښه چې له S او F تیریږي د پارابول محور دی.

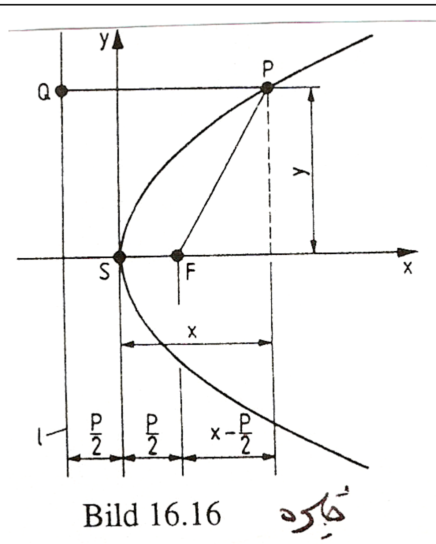


Bild 16.16 ځیره

له پیژند – یا تعریف برابرونونو = $\overline{PF}$ $\overline{PQ}$ څخه لاس ته راځي

$$\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+y^2} = x+\frac{P}{2}$$

او له دې څخه د مربعکولو او د ټولګی څخه لاس ته راځي

$(x-p/2)^2 + y^2 = (x+p/2)^2$,

$x^2-px+p^2/4+y^2 = x^2+px+p^2/4$

پس لرو

$$y^2 = 2px \qquad (16,28)$$

د پارابول ککربرابرون د ککرټکي S(0,0) سره، پورته لور ته واز (x > 0)

(c) ketabton.com: The Digital Library

په همدې ډول:

$$y^2 = -2Px \qquad (16 , 29)$$

هغه وکيڼ لور ته واز پارابول دئ‌د واريابلو د بدلون څخه لاس ته راځي:

$$x^2 = 2py \qquad (16 . 30)$$

د پارابول ککرمساوات د ککرټکي(S(0,0سره، پورته واز پارابول ($y > 0$)
په همدې توګه:

$$x^2 = -2py \;\; (Y<0) \qquad (16.31)$$

پورته لور ته واز پارابول دی.

که ککرنټکي S کواوردينات xS , yS ولري او د پارابول محور د x - محور ته غبرګ ځغلی په همدې ډول د y - محور ته هم غبرګ ځغلي، نو د يوې په خوښه پارابول ټکی لپاره باور لري:

$$(y - yS)^2 = 2p(x-xS) \qquad (16. 32)$$

د پارابول ککرييرابرون د ککری ټکی(S(xS,yS سره، چی ښی لور ته وازوي($x>xS$)

$$(x - xS)^2 = 2p(y - yS) \qquad (16.33)$$

د پارابول ککرييرابرون د ککرټکي(S(xS,yS سره، چی پورته لور ته واز وي ($y> yS$)۰

په همدې ډول:

$$(y - yS)^2 = -2p(x - xS) \quad (x<xS) \qquad (16.34)$$

$$(x -xS)^2 = -2p(y - yS) \; (y<yS) \qquad (16.35)$$

هغه کنڼ لور او همداسی کوزې يا لاندې لور ته واز پارابولونه دي
د فرمول (۱۶ . ۳۲) همداسی (۱۶ . ۳۳) ځله ونو څخه وروسته د پارابول ټوليز (عمومي) جوړښت پيژندل کيږي:

$$Ay^2+Bx+Cy+D= 0 \;\;, B |=0 \qquad ((16, 36)$$

همداسی(< = >)

$$Ax^2+Bx+Cy+D=0 , C|=0, \qquad (16 . 37)$$

د پارابولمساوات ټوليزه (عمومي) بڼه (فورم)

بيلګه ۱۶ . ۲۲ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پارابول برابرون دي له ککريټکی ، له نيمپارامتر او وازلورې څخه پيداشي:
الف $S(,0,0), P = 6$)کيڼ، ب $S(2,1) ;P= 0,5$) پورته
پ $(S(-3,-5), P = 4$ لاندې ت $(S(4,-2) ,P= 2 /3$ ښۍ

اوبيونه يا حل:
الف) $y^2 = -12x$ ب) $(x-2)^2 = y-1$
پ) $(x+3)^2 = -8(y+5)$ ت) $(y + 2)^2 = (4 /3) (x-4)$

بيلګه ۱۶ . ۲۳ :

د پارابول د لاندې مساوات سره دې د پارابول د ککرېټکي کواوردينات ، نيمپارامتر او د وازون لور وټاکل شي $a) (x^2 + 4y +20x + 10 = 0, b)\ y^2 -18x + 12 y -36 = 0$.

اوبيونه : د پارامترتوليزه بڼه (فورم) دې په ککريبرابرون (۱۶ ، ۳۲) همداسی(۱۶ ، ۳۳) همداسی (۱۶ ، ۳۴) همداسی (۱۶ ، ۳۵) کی وازمايل شي (څلوری پوره کيدنه يا مربع تکميليدنه) . د ککريبرابرون څخه ککريټکي ، نيم پارامتر او وازلور

لوستوږ دي.

a) $x^2 + 20x +100 = -4y -100 + 100$

$(x+10)^2 = -4y$ $S(-10 , 0) , P = 2$

پارابول لاندې لور ته و از دی

b) $y^2 + 12y +36 = 18x +36 + 36$

$(y+6)^2 = 18(x+4)$

$S(-4,-6) , P = 9$

پارابول ښی لور ته واز دی

۱۶ . ۶ ټولګه:

دا له ۱۶ . ۱ نيولی تر ۱۶ . ۵ پورې څيړل شوې دهوارې کږې (کږی په هوارې يا سطحه کی)

(c) ketabton.com: The Digital Library

-کرښه
-ګردۍ
-ايليپسی چې د کواوردينات محور سره غبرګ ځغلي، ټول د لاندې مساوات
-هوپربول
-پارابول
په څير انځوريږي:

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0 \qquad (16 , 38)$$

فاکتورونه، ضريبونه يا ځلهووني A او B د کړی د توکو لپاره پرېکنده دي.
برابرون (۱۶،۳۸) لاندې روښانوي
د $A.B > 0 , A \neq B$ لپاره ايليپسی ،
د $A = B$ لپاره ګردۍ
د $A.B < 0$ لپاره هوپربول، که $A > 0 , B < 0$ وي، نو کيڼ لور ته واز،
که $A < 0 , B > 0$ وي، نو پورته او لاندې لورته واز
د $A.B = 0 , A = 0 , B \neq 0$ لپاره يو پارابول، چې محور يې د x - محور سره غبرګ دۍ د $A \neq 0$ ، $B = 0$ يو پارابول ، چې محور يې د y - محور سره غبرګ دۍ
د $A = B = 0$ لپاره يوه کرښهکه په (۱۶ . ۳۸) يو بل ګډوله(يو د بل سره ګډ شوی) ځلورۍ توکي رامنځ ته شي، نو دا د کړې يو ځلورۍ برابرون يا مربع مساوات ښکاروي (توضيخ کوي) ، د کومو محورونه چې نور د کواورديناتو محورونو سره غبرګ نه دي.

بيلګه ۱۶ . ۲۴ :
له لاندې مساواتو سره کومی کړې انځوريدلی شي ؟
a) $x^2+y^2+4x-8y-5=0$ b) $3x^2+24x+15y+138=0$
c) $16x^2+y^2-96x=0$,d) $2x^2-2y^2+16x+10y-105/2=0$?

اوبيونه : (يادونه : لکه د نورو ځايونو په څير دلته هم الف د a په ځاي ليکم ، ځکه چې د پښتو لپاره کرښه په لاتين حروفو له ښي لور نه شي پيل کيدی)
الف ياa) که $A = B = 1$ وي ، نو ګردۍ
ب ياb)که $B=0$ پارابول چې محور يی د-y محور سره غبرګ وي
پ c)که $A.B > 0$، $A \neq B$ نو ايليپسی
تd)که$A.B < 0$ ، نو هوپربول

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱۶ . ۷ تمرینونه

۱ – د هغو کرښو مساوات و ټاکئ، کومې چې له P_1 ټکي تیریږي او د x–محور سره کونج α جوړوي

a) $P_1(2,-3)$, $= 30^\circ$, b) $P_1(-3,2)$ $= 45^\circ$

c) $P_1(-1,-4)$, $= 120^\circ$, d) $P_1(4,4)$, $= 0^\circ$

e) $P_1(0,0)$, $=150^\circ$, f) $P_1(1,-1)$, $= 90^\circ$

۲ – ټولو هغو کرښو مساوات وټاکئ، کومې چې له ټکو P_1 او P_2 تیریږي

a) $P_1(0,0)$, $P_2(3,3)$, b) $P_1(-3,3)$, $P_2(0,0)$,

c) $P_1(1,4)$, $P_2(-3,-4)$, d) $P_1(1,2)$, $P_2(-1,1)$,

e) $P_1(0.1.-1)$, $P_2(-0,1,-3$, f) $P_1(1,-1)$, $P_2(4,-2)$!

۳ – د محورونو غوڅې (لنډ: محورغوڅې) a,b د کرښې مساوات په نورمالفورم وټاکئ او همداسې د غوڅټکو واټن d د محورغوڅټکو سره چې یو له بل یې لرې وټاکئ.

a) $a = 5$, $b = 2$, b) $a = -1$, $b = 3$, c) $a = 2$, $b = -3$, d) $a = -3$, $b = -3$

۴ – یو دریګوټی دا لاندې ګوټټکی لري $A(-4,-1)$, $B(2,-2)$, $C(1,3)$. د هغو کرښو مساوات څنګه دي، په کومو چې د دریګوټیو اړخونه پراته دي او معلوم کړئ چې د دریګوټي اړخونه څومره اوږده دي؟

۵ – د لاندې کرښمساواتو نورمالفورم او برخټوټینه یا –فورم څنګه دئ؟

a) $3x - 5y + 15 = 0$, b) $4x - 3y - 18 = 0$

c) $-4x + 2y - 10 = 0$, d) $-3x - 4y + 15 = 0$?

۶ – د کرښې $y = -(12/5)x + 2$ پروتخای د کرښو

a) $y + 2,4x - 6 = 0$, b) $28x + 10y = 0$, c) $8x + 5y = 2$,

d) $5y + 12x - 10 = 0$. e) $y + (12/5)x = 3$, f) $6x + 2,5y = 5$

سره وڅیړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۷ - د لاندې کرښو د غوڅتکو کواوردیناتونه او غوڅکونج وټاکئ.

a) $2x + 3y = 7$ b) $y = (1/2)x + 1$ c) $y - x = 7$

$3x - y = 5$, $y = -2x + 6$, $y = 7$,

d) $x/3 - y/2 = 1$ e) $6x - 2y + 10 = 0$ f) $y = 4x - 1$

$-x/2 + y/3 = 1$, $y = 3x + 6$, $y = -3x + 5$!

۸ - کومه کرښه د کرښې $x - y = 4$ ، کرښې $3x + y = 8$ او برسیره پر دې له غوڅتکې P(0,5) څخه تیریږي ؟

۹ - د لاندې ګوټ A(-4,-1), B(2,-2), C (1,3) سره د دریګوټي دننه کونجونه څومره لوي دي ؟ (پیلونه: دریکونجي وکارئ)

۱۰ - د ولاړپریوتې کرښې یا زوږندې مساوات له ټکی P(2,0) څخه په کرښه $y = 2x + 1$ څنګه دي؟

۱۱ - د ولاړکرښې مساوات په کرښه $y = 2x + 1$ باندې په ټکي P(-1,-2) څنګه د

۱۲ - د کرښې $y = 2x + 1$ سره د غبرګې کرښې مساوات چې له ټکي P(-1,-3) تیریږي، څنګه دي؟

۱۳ - د لاندې مساواتو سره ګردیمنځتکی او وړانګه وټاکئ:

a) $x^2 + y^2 = 20$ b) $x^2+y^2 +2x -4y + 1 = 0$

c) $x^2+y^2 9y = 0$, d) $4x^2 +4y^2+32x-8y+67 = 0$

e) $36x^2 +36y^2 -36x +24y -23 = 0$, f) $x^2+2x+y^2+2y = 16$!

۱۴ - د لاندې ګردیو مساوات وخیږئ

الف) چې منځ ټکی M(-2,-1) لري او له سرچینې تیریږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) هغه چې دري ټکی $P_1(3,0)$, $P_2(5, 5 -3)$, $P_3(5 +3,-1)$ یې د غاړو ټ

پ) چې وړانګه $r = 6$ لري او له ټکو $P_1(-1,11)$,$P_2(5,5)$ څخه تیریږي.

ت) له ټکی $P_1(3,4)$ تیریږي او کرښه $y = -(4/3)x + 13$ په ټکي $P_2(4,3)$ لمسوي.

ټ) چې منځ ټکی $M(2,2)$ لري او کرښه $y = -(4/3)x + 13$ لمسوي.

ث) چې د هغې منځټکی په کرښه $y = 3x - 19$ پروت دی او له ټکی $P_1(7,-2)$ او همداسی له ټکي $P_2(11,2)$ څخه تیریږي.

۱۵ - کوم پروتځایونه ګردی k چې فرمول لري $x^2+y^2-8x = 0$ او لاندې کرښې یو له بل سره لري:

a) $g: y = 2x + 1$, b) $g: y = x$, c) $g: y = x - 1$,

d) $g: y = 4$, e) $g: y = -x - 3$, f) $g: y = x - 3$?

۱۶ - کوم پروتځاي کرښه $3x + 4y = 25$ ګردی $x^2 + y^2 = 25$ ته لري؟

۱۷ - د تنجنت مساوات څنګه دی

الف) په ټکي $P_0(5,y_0)$ چې په ګردی $x^2+y^2 = 169$ پروت دی،

ب) په ټکی $P_0(x_0, -2)$ چې په ګردی $(x - 1)^2 + (y-2)^2 = 25$ پروت دی؟

۱۸ - د هغو ګردیو منځټکي پیداکړی چې وړانګه یې $r = 5$ وي، کومې چې کرښه $3x + 4y = 9$ په ټکی $P_0(-1, 3)$ کی لمسوي!

۱۹ - په ګردی $x^2 + y^2 = 25/4$ د هغه تنجنت مساوات وټاکی، کوم چې د کرښې $y = (4/3)x + 2$ سره غبرګ څغلي؟

۲۰ - د ایلیپسې مساوات وټاکې، له

a) $M(0,0)$, a 11, $c = 8$, B) $M(0,0)$, $b = 4$, $c = 6$,

c) $M(-3,7)$, $c = 4$, $b = 5$, d) $M(4, -5)$, $e = 7$, $a = 10$!

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۲۱ - د لاندې ایلیپسیمساواتوڅخه د نیممحورونو اوسوزونټکو منځټکی او اوږدوالی راپیداکړی:

a) $x^2 / 100 + y^2/ 64 = 1$ b) $(x+3)^2 / 81 + (y-1)^2 / 56 = 1$

c) $3x^2 + 4y^2 -24x >= 0$, d) $5x^2 +9y^2 -10x + -90y + 50 = 0$,

e) $4x^2 -13y^2 -208 = 0$, f) $4x^2 +9y^2 +54y -227 = 0$!

۲۲ - د هغو ایلیپسو مساوات راپیداکړی، کومې چې

الف) چې منځټکی M (0,0) او لایتي ایکسځنتریځیتي e = 6 لري او له ټکي P(10.0) څخه تیرېږي،

ب) له منځټکی M (1,1) او لایني ایکسځنتریځیتی e = 4 لري او له ټکو ۷ څخه تیرېږي،

پ) د نیممحور اوږدوالی a = 9, b = 6 لري او له ټکو $P_1(2,8)$, $P_2(2,-4)$ څخه تیرېږي!

ت) د نیممحوراوږدوالی a = 2 , b = 6 لري او له ټکو $P_1(-1,-4)$, $P_2(-5,-4)$ څخه تیرېږي!

۲۳ - د لاندې ایلپسو او کرښو ترمنځ غوځټکي پیدا کړی

a) $x^22 +4y^2 -20 = 0$, $x+2y-6 = 0$,

b) $3x^2 +4y^2 -24x =$, $y = 3 .x$,

c) $(x-3)^2/ 9 +(y-1)^2 / 4 = 1$, $y = x+1$,

d) $x^2 + 4y^2 +16y +12 = 0$, $y = x-2$!

۲۴ - د هوپربول مساوات له

الف) b M(0,0) , a = 4 , e = 5 , ب) M(-3,2), b = 4 , e = 6 ,

پ) M(1,1) او هوپربولټکو $P_1(-3,1)$, $P_2(6 , 7 /4)$!

ت) a = 3 , b = 2 , x = -1 او د هوپربولټکي P(-4,-2) وښاکی !

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۲۵ – د هوپربولونو

a) $x^2 / 144 - y^2 / 36 = 1$, b) $9x^2 - 64y^2 = 576$

نیممحورونواوږدوالی او اسیمپتوتې راپیدا کړی !

۲۶ – د لاندې هوپربولونو منځتکي او د نیممحور اوږدوالی پیداکړی

a) $9x^2 - 64y^2 - 36x - 540 = 0$, b) $x^2 - 9y^2 + 54y - 90 = 0$,

c) $x^2 - 4y^2 + 4x - 8y - 16 = 0$, d) $x^2 - y^2 - 2x + 10y - 28 = 0$!

۲۷ – د لاندې مساواتو سره دکرېو غوڅتکي وټاکی:

a) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$, $y = \frac{1}{5}x$,

b) $4x^2 - 9y^2 = 144$, $x^2 - 24y = -28$,

c) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$, $y = -\frac{2}{3}x - 5$,

d) $4x^2 - 9y^2 - 8x + 36y + 68 = 0$, $9y^2 - 36y - 72x + 8 = 0$,

e) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$, $x^2 - y^2 = 16$!

۲۸ – د لاندې پارابولونو ککرتکو اوسوزونتکو کواوردینات وټاکی:

a) $5y^2 + 4x = 0$, b) $2y - (1/2)x^2 = 0$ c) $4y + (1/3)x = 0$,

d) $2y^2 - 12x = 0$, e) $y^2 - 2y - 10x - 9 = 0$, f) $x^2 - 7x - y + 12 = 0$

g) $y^2 - 6y + 6x - 3 = 0$. h) $x^2 + 4x + 12y\ 52 = 0$

۲۹ – د پارابولمساوات له لاندې ککرتکو او سوزونتکو وټاکی:

S (0,0), F(0,1) , b) S(0,0), F(-1,0), c) S(1,1) , F(2,1),

S(-1,-1), F(-2,-1), e) S(2,-3), F(2,-2), f) S(-2,3), F(-2,2)

۳۰ – یو پارابول د ککرې پروت ارزښت $x_S = 3$ لري، کرښه $y = 8$ د محور په څ
تکي P (7,4) تیریږي. ددې مساوات څنګه دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۳۱ - يو پارابول د ککرکواوردينات $y_s = -3$ لري، کرښه $x = 2$ د محور په څير او له ټکي $P(4,-4)$ تيريږي. د هغې مساوات څنګه دي؟

۳۲ - کوم پروتځاي اړيکی د

الف) پارابول $y^2 = -4x$ او کرښی $y = x-1$

ب) پارابول $x^2 = 5y$ او کرښی $y = x-4$

پ) پارابول $x^2 = -3y$ او کرښې $y = x + 5/12$

ت) پارابول $y^2 - 6x - 2y + 7 = 0$ اوکرښي $y = x$

ټ) پارابول $y^2 = 7x$ او کرښې $9x + 12y + 28 = 0$

ترمنځ پرتی دي؟

که موجود وي ، نو غوڅټکی همداسې لمستکی يې ورکړی!

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۷ وکتور شمیرنه او په ځمککچ کی د هغه په کارونه

۱۷ . ۱ د وکتور پیژند ،

په کارتیزي کواودینات سیستم کی د وکتور انځورونه

په پیداینښتي پوهنو یا طبیعي علومو او تخنیك کی موږ لویی پیژنو چی د ریبل ارزښتونو په ورکولو سره یواځنۍ ټاکلي دي، لکه وخت، ګرمي، توان ، وزن . داډول لویو ته سکالار لویې وایو .نورې لویی لکه زور ، چټکتیا(سرعت)، بیړه (تعجیل)، د برقي او مقناطیسي چاپیریالزور برسیره په ارزښت (مطلقه ارزښت) د لور ورکونه هم غواړي، په کومه چی تاسیر اچوي. موږ دې لویو ته وکتورونه وایو.
د وکتور له لارې کیدی شي چی دهندسي شیانو ځان نیونه هم تشریح کړای شو. په فضا هوا کی یو ټکی کیدی شي چی د هوا کواوردینات سیستم کی د سرچینی څخه د دې ټکي په لور لوریزشوې کرښه (په دې مانا چي مطلقه ارزښت او لوری لري) تشریح کړی شي یعنی له سرچینی څخه یی په دې ټکي برید وي یا دا ټکی په نخښه کړای شي یا یې د غشي څوکه د دې ټکي په لور لوریزه وي.

یادونه : ما وکتورونه a,b, ښوولي، ښه به یې $\vec{a},\vec{b};....$ وای، ډیرو کتابونو کې پنډ **a,b,..** لیکل شوي، خو ما د وکتور سره تل د وکتور کلمه یاده کړې، چې د ناتیکپوهنې څخه مو ژغوري٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند ۱۷ . ۱ : یوه لویه a چې د یوه مطلقه ارزښت (|a| چې داوږدوالي کچګڼ یې هم بولو) او یوې لورې له مخې ټاکل شوی وي، وکتور بلل کیږي.

(لنډ: یوه لویه چې لور ولري، وکتور دی. موږ کړی شو چې دې لویې ته غشی هم ووابو. زه یې همدا وکتور بولم)

یو وکتور په هوا کې د یوه لور لرونکی کرښی(غشي) په څیر انځورکیدی شي. د تعریف ۱۷ . ۱ له مخې ټول مساوي اوږده او په یوه لور لورې-، لوریزې- یا لورونی کرښې همغه وکتور انځوروي، په یوه بریدټکي باندې ترل یې په نظر کې نه دي نیول شوي . سرې ویلی شي: یو وکتور کیدی شي په هوا کې په خوښه غبرګ (موازی) وخوځول شي یا راکښل شي، موږ په راتلونکي کې د داسې ازادو وکتورو سره سر او کار لرو. نورې په وکتور انځور شوې لويې، بر سیره په مطلقه ارزښت او لور، په نورو ټاکونټوټو هم اړه لري. د بیلګي په توګه یوه قوه یا زور د همغه خپل تاثیرلیکی یا بهتره برید لیکی په اوږدوالي له یوه ځایه بل ته راکښل کیدی شي(په غبرګ یا موازی راکښون یې تاثیر تغیر کوي) دلته په لیکه راکښونکو وکتورو باندې غږیږو. هغه یو ټکی انځورونکی وکتور په کواوردیناتسیستم په سرچینې (د برید - یا حملی ټکی) پورې ترلی. داسې وکتورونه ځاي وکتورونه(په ځاي ترلي -) بلل کیږي .څنی په لاندې کی د فرمول بندي شوې شمیرقاعدې له مخې کیدی شي دې ډول وکتورونو ته هم پراخه شي.

پیژند ۱۷ . ۲ :

دوه وکتورونه **a** او **b** برابر بلل کیږي **a** = **b**

که دواړه وکتورونه په مطلق ارزښت او لور یو په بل سر وخوري یا پریوځي.

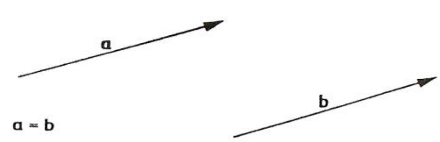


Bild 17.1 خاکه

ټولې برابرې اوږدې او برابرې – یا همغه لوریزې کرښی، لکه چې وویل شو همغه وکتور ښایی.

پیژند ۱۷ . ۳ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

یو وکتور **a** د مطلقه ارزښت |**a**|=0 سره 0 یا صفر وکتور بلل کیږي. صفر وکتور لور نه ټاکي یا تعینوي. یو وکتور **ea** چې د a لور او مطلقه ارزښت |**e**|=1 الري، نو په وکتور a پورې اړوند یوونوکتور(۱) بلل کیږي.

(1)Einheitsvektor,unit vector یوونوکتور یانې ارزښت یې یو یوون دئ یا واحدوکتور(؟)

پیژند ۱۷ . ۴ :

دوه وکتوره اورتوګونال (Orthogonal) بلل کیږي، که دوي یو په بل نیغ ولاړ (عمود) ولاړ وي، کولینیار(kollinear) بلل کیږي، که دواړه د همغی یوې کرښې سره غبرګ وي، کومپلانار (komplanar) بلل کیږي ، که د همغي یوې هوارې سره غبرګ وي.

د وکتورونو سره شمیرلو لپاره باید مطلقه ارزښت او همدارنګه لور شمیرنیز ډوله لاس ته راوړل شي. ددې لپاره یوه نسبي سیستم ته اړتیا حس کیږي، دلته هوایي یا فضایي کارتیزي کواوردینات سیستم استعمالیدی شي. د کواوردینات سیستم انځورونولپاره لاندني روښانه ونې یا توضیحات یعنی د وکتور ځله ونه یاضرب د یوه ریيل ګڼ سره او د وکتورونو زیاتون مخ ته پراته دي.

پیژند ۱۷ . ۵ :

د یوه وکتور ځله ونه یا ځل د یوه سکالار سره:

$$\vec{b} = \lambda\vec{a}, \lambda \in R$$

یو وکتور دئ چې د $|\lambda|$ - ځله دa مطلقه ارزښت لري او د $0<\lambda$ لپاره همغه لور لري لکه a، په ښڅ یا برعکس که $0>\lambda$ وي نو د a مخامخ لور یا په ښڅ لور لري

جمله ۱۷ . ۱:

د ریيل ګڼ سره د وکتور د ځل د شمیرقاعدې

کوموتاتیف قاعده،اسوشیاتیو ضانون او د صفر وکتور سره ځل

$$\lambda.\vec{a} = \vec{a}.\lambda;....Kommutativ$$

$$\lambda(\mu.\vec{a}) = \eta(\lambda.\vec{a}) = \lambda\mu.\vec{a};....Ass.$$

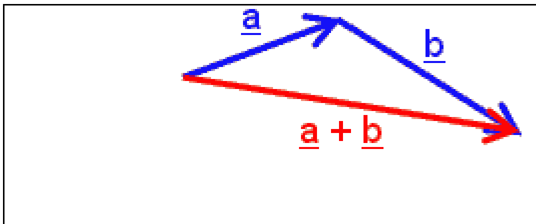
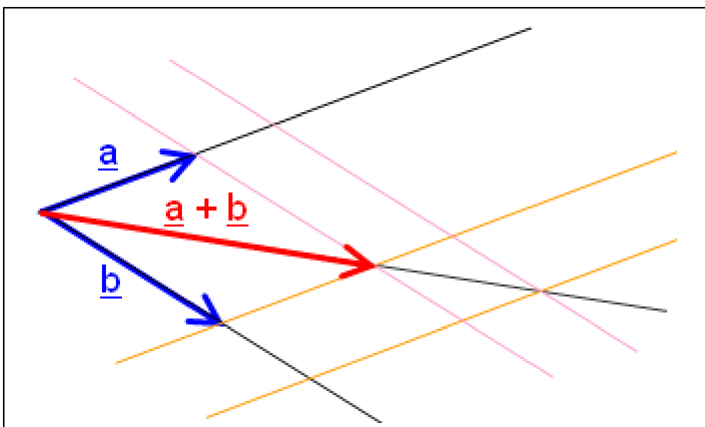
$$|\lambda.\vec{a}| = |\lambda|.|\vec{a}|, 0.\vec{a} = \vec{0}, \vec{0} = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ددې ځل یاضرب د پیژند سره ممکن کیږي چې هر وکتور a د یوه ریيل ګڼ (ددې وکتور مطلقه ارزښت) او په هغه پورى تنظیم یا ترتیب شوی یوونوکتور د ځل په ځیر انځور کړو: $a = |a|.e_a$

پیژند ۱۷ . ۶ :

(د وکتورونو زیاتون)
د دوه وکتورونو a , b زیاتون (جمع)   a+b د دواړو وکتورونو a او b څخه غزیدلی غبرګ اړخیزې(موازي الاضلاع)   لوریز دوه کونجتړې (قطر) ده. ځیره . ۱۷ ۲)

د وکتورنو زیاتون (جمع) د قوو یا زورونو د زیاتون په ځیر دی او دا د شمیر قاعده ساده د لیدو کیدی شي	
ځیره شته دغبرګ اړخیزه پورته نیمه یا له تعریف ۱۷ . ۶ څخه پورته ځیره یا مخامخ ځیره	

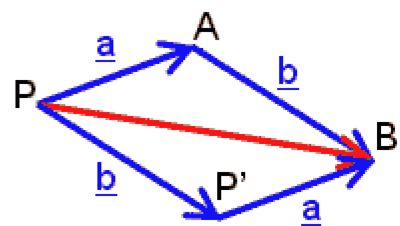
جمله ۱۷ . ۲ :

(د وکتورونو د جمع لپاره د شمیرقاعدې)
$a+b=b+a$ (کوموتاتیف قاانون)
$(a+b)+c=a+(b+c)$ (اسوسیاتیف قانون)

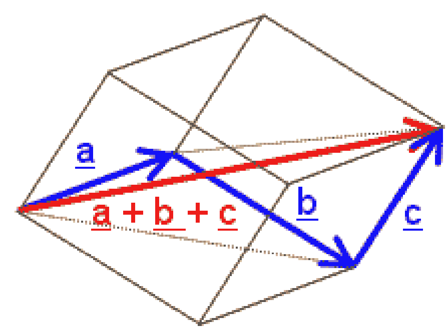
دیستریبوتیوو او وربسي یه لاندې نظم اړیکي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(\lambda+\mu).\vec{a}=\lambda.\vec{a}+\mu.\vec{a};...........Distrib.$$
$$\mu(\vec{a}+\vec{b})=\mu.\vec{a}+\lambda\vec{b};...........Distr.$$
$$|\vec{a}+\vec{b}|<|\vec{a}|+|\vec{b}|$$



د زیاتون دې قانونو سره موږ ته ممکن کیږي چی هر وکتور، د بیلګي په توګه د وکتورونو د کواوردینات محور په لور ښودونکو وکتورونو د زیاتون په څیر انځورکړای شو یا ولیکو. په دې ډول بریالي کیږو چی دواړه د وکتورونو لپاره موخه وره یا هدفمنده شمیرنه په کواوردینات سیستم کی انځور کړو



پورته څیره کي د درې وکتورونو زیاتون

پیژند ۱۷ . ۷ :
په کواودینات سیستم کی د وکتور a انځورونی لاندې

a=(a1,a2,a3)   (17 . 1)

موږ په یوه ولاړکونجیز
-x1 , x2 , x3
کواوردینات سیستم کی د وکتور انځوره ونه پوهیږو، د نخښی یا مخ نخښی په نظر کي

نیولوسره او د ai پرویکشن یا پریوستون له لاري په هر xi - محور(i = 1 , 2 , 3)

(c) ketabton.com: The Digital Library

پرویکشن (Projection) د دوه اړخونو لپاره انځورونه (په ښیره ۱۷ . ۳ کی) داسی ai د a وکتور i - م کواوردینات بلل کیږي

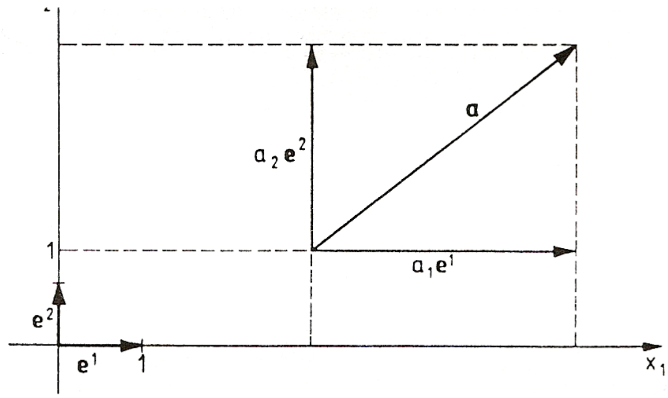


Bild 17.3 ځیره

یادونه:
موږ دلته که د وکتورونو پورته څه لیکو نو هغه د وکتور پوتنځ په مانا نه دی بلکه هغه وکتور ښایي چی په کومه کواوردینات اړه لری. دلته د لیکنی له لورې پوره جوت دی. د xi- محورونو په لور په کواوردیناتشکل د یوونوکتورونو ځرګندونه په لاندې ډول ده

$$e^1 = (1 , 0 , 0)$$
$$e^2 = (0 , 1 ,0) \qquad (17 . 2)$$
$$e^3 = (0 ,0 , 1)$$

د وکتور aانځورونه د کواودیناتو $a^i; i = 1 , 2 , 3,$ او د یوونوکتورونو(۱۷ . ۲) د استعمال له لارې، د تعریفونو ۱۷ . ۵ او ۱۷ . ۶ په بنسټ د کمپوننتو له لارې یا مرسته لاس ته راځي.

جمله ۱۷ . ۳: (د کمپوننتو (جوړختبرخو) له لارې د وکتور a انځورونه) لرو:

$$\vec{a} = a_1\vec{e^1} + a_2\vec{e^2} + a_3\vec{e^3}; \qquad (17,3)$$

د دوه پراخیدونې یا دوه بعدیز یا دوه دیمنزیون انځورونه. (ښېره . ۱۷ . ۳)
دلته, a^ie^i چی i=1,2,3 وي، د a وکتور i - م کمپوننت یا جوړخت برخه بللکیږي د جملو ۱۷ . ۲ او ۱۷ . ۳ په مرسته کیدی شي لاندې جمله لاس ته راشی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۷ . ۴:

د رییل ګڼ سره د یوه کتور څله ونه او یا د وکتورونو زیاتون کواوردینات ډوله یا په ځیر صورت نیسي، دا په دې مانا چی لاندې باوري کیږي::

$a=(a_1, a_2,a_3), \quad b = (b_1, b_2, b_3)$

$\mu a = (\mu a_1, \mu a_2, \mu a_3)$ (17 . 4)

$\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)$.........................(17,5)

بیلګه ۱۷ . ۱ :

د(a=(-2,3,-5 , b=(1,-6,4) لپاره لرو

2a+3b=(2-2,3,-5)+3(1,-6,4)=(-1,-12,2).

د وکتورونو کمون د وکتورونو د زیاتون په ځیر (تعریف ۱۷ . ۶) صورت نیسي یا ځان نیسی

پیژند ۱۷ . ۸ :

د a - b کمون یا کمښت د وکتور a او وکتور b ته مخامخ - یا په ځټ وکتور یعني -b زیاتون دی: a-b=a+(-b) (څېره۱۷ . ۴)

له تعریف ۱۷. . ۸ لاس ته راځي : وکتور a ، کوم چی له x1 ټکي x^2 ټکی ښایي (د دوه اړخؤنویا بعدونو انځورونی لپاره .ش ۱۷ . ۵) داسی دی

(پاي ټکی ترې کم پیل ټکی یاني د پایټکي او پیلټکی کمښت): $a = x^2 - x^1$

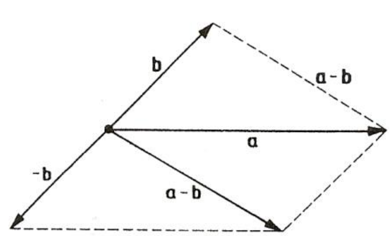


Bild 17.4 څېره

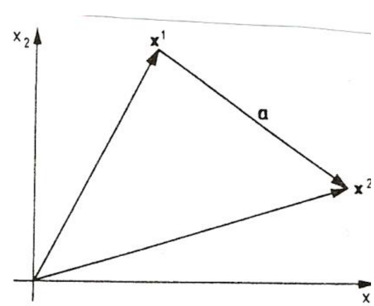


Bild 17.5 څېره

بیلګه ۱۷ . ۲:

(c) ketabton.com: The Digital Library

هغه وکتور چې له $x^1 = (-1,-3,1)$ ټکي څخه($x^2=(2,-1,5$ ټکی ښايي(په ګوته کوی یه ګوتنیوونی کوي) داسی دی :

$$a = x^2-x1 =(2,-1,5)-(-1,-3,1)=(3,2,4).$$

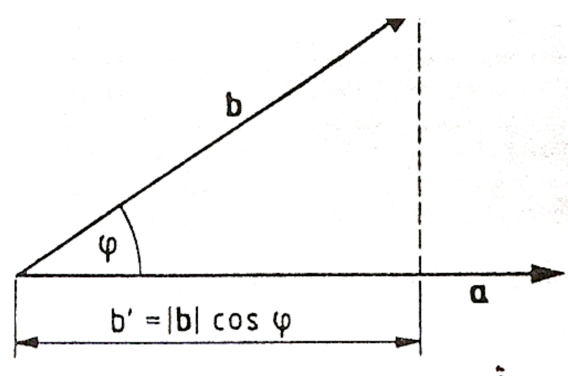
۱۷ . ۲ د دوه وکتورنو سکالار ځله ونه یا ضربونه

پيژند ۱۷ . ۹ :

د دوه وکتورونو a , b سکالار ځل a . b د دواړو وکتورنو د مطلقه ارزښت
او له دي دواړو وکتورونو منځ ته راغلی کونج کوساین ځل یا ضرب دی، یاني

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos\varphi;.............................(17,7)$$

د سکالار ځل یا ضرب نتیجه سکالار ده
په (۱۷ . ۷) کی فاکتور $\vec{b}' = |\vec{b}|.\cos\varphi$ په هندسی مانا د (مخ) نخښي ساتلو سره (د کوساین د پیژند له مخی) په وکتورa دوکتور b پرویکشن یا پریوتل یا پرییستل دي (څیره ۱۷ . ۶)



په فزيك کی د سکالار ځل یا- ضرب بیلګه :
که a هغه لار وي چی د هغي په اوږدوالی د b زور تاثیر اچوي، پس A = a. b له دې زور له لارې کړ شوی کار ښايي) د لار اوږدوالی چي د لار په لور د زور د پرویکشن سره ځل دی) .

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۷ . ۵ : (د سکالار ځل شمیرقاعدې)

a.b=b.a (کوموتاتیو قاون)

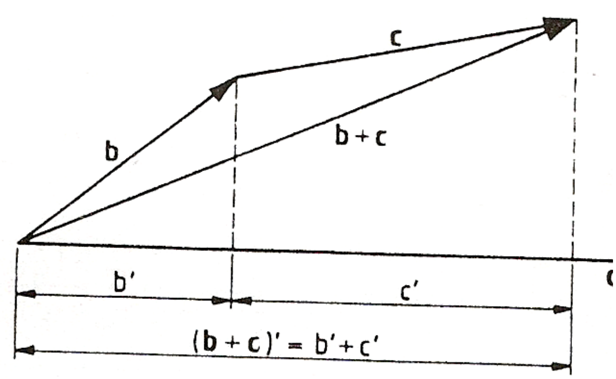
a(b+c)=a.b+a.c (دیستریبوتیو قانون)

a.b=0 که a اوb یوپه بل اورتوګونال یا عمود وي (۱۷ ، ۸)

$a.a=|a|^2$ (17 . 9)

د پورته شمیرقاعدو جوتونه: کوموتایو قانون د (۱۷ . ۷) پسی ترلی لاس ته راځي.
دیستریبوریوقانون په (ځیره ۱۷ . ۷) کی لیدل کیږي.

د اورتوګونالوکتورونو لپاره باور لري: که a.b = 0 نو $\cos\alpha$ 0 =او(۱۷ . ۸)
له (۱۷ . ۷) ځخه لاس ته راځي .
همداډول (۱۷ . ۹) له (۱۷ . ۷) او داچی $\alpha = 0°$ د a او a ترمنځ دی(، نو لاس ته راځي $\cos\alpha = 1$



پورته ځېره ۱۷ . ۷

جمله ۱۷ . ۶ :
د دوه وکتورونو سکالار ځل کواوردیناتډوله صورت نیسي یعني د
a = (a1 ,a2 ,a3), b = (b1 ,b2 ,b3)
د ځله ونی یا ضرب ځخه لاس ته راځي :

a.b=a1b1+a2b2+a3b3 (17 . 10)

اوبیونه : د یوونوکتورونو (۱۷ . ۲) لپاره لاندې باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

د (۹ . ۱۷) سره سمر د i = j لپاره $e^i.e^j = 1$ د(۹,۱۷) سره سم د j =|iلپاره $e^i.e^j = 0$ له دې لاس ته راځي:

$$\vec{a}.\vec{b} = (a_1e^1 + a_2e^2 + a_3e^3)(b_1e^1 + b_2e^2 + b_3e^3) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

یادونه : د لته د وکتورونو په تواندول چې څه لیکل کیږي د توان مانا نه لري په یوونوکتورونو کي ددې لار ې ښوول کیږي چي دا دکوم کواودینات یوون وکتور دی او د نورو وکتورنو لپاره دا مانا لري چي کوم یو وکتور مو مطلب دی او نه چې په کوم توان . دې ته د مخه هم ګوته نیول شوې ده.

بیلګه ۱۷ . ۳ :

وکتور(a=(2,-3,1 دي له لاندې وکتورونو سره حٔل شي

a) b1=(3,1,4),b) b²=(3,2,-2), c) b³=(3,3,3)

اوبںونه یا حل: بیا یا انینترنیت

a) a . b1 = 2.3 - 3.1 + 1.4 = 7

b) a . b² = 2.3 - 3.2 +1.(-2) = -2

c) a . b³ = 2.3 - 3.3 +1.3 = 0

دلته c (په دې مانا ده چې وکتورونه a او b³ اورتوګونال یا عمود دي ددې لپاره لیکو:

$a \perp b^3$

جمله ۱۷ . ۷:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2};..........................(17,11)$$

اوبیونه : له (۱۷ . ۱۰) لرو : $a . a = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$

بیلګه ۱۷ . ۴ :

د وکتورونو(a=(2,-3,1) , b=(3,0,-4 مطلقه ارزښت (اوږدوالی) دی

$$|\vec{b}| = \sqrt{9+0+16} = 5; |\vec{a}| = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{4}$$

جمله ۱۷ . ۸ :

د دوه وکتورونو aاو b ترمنځ کونج په لاندې ډول ټاکل کیږي

$$\cos\phi = \frac{a.b}{|a|.|b|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^3}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}};................(17,12)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوبیونه یا حل : (۱۷ ، ۱۲) له (۱۷ . ۷) ، (۱۷ . ۱۰) او (۱۷ . ۱۱) څخه لاس ته راځي

بیلګه ۱۷ . ۵ :
په بیلګه ۱۷. . 3کی د $\vec{a}\wedge b^1, b^2, b^3$ تر منځ کونجونه د شمیرلو دي.
اوبیونه:

$$\phi_1 = \angle(\vec{a},\vec{b^1}) = \frac{2.3-3.1+1.4}{\sqrt{4+9+1}\sqrt{9+1+16}} = \frac{7}{\sqrt{14}\sqrt{26}} = 0,3669; \phi_1 = 68,48°$$

$$\phi_2 = \angle(\vec{a}.\vec{b^2}) = \cos\phi_2 = \frac{2.3-3.2+1(-2)}{\sqrt{4+9+1}\sqrt{9+4+4}} = \frac{-2}{\sqrt{4}\sqrt{17}} = -0,1296, \phi_2 = 97,45°$$

$$\phi_3 = \angle(\vec{a}.\vec{b^3}) = \frac{2.3-3.3+1.3}{\sqrt{4+9+1}\sqrt{9+9+9}} = \frac{0}{\sqrt{14}\sqrt{27}} == 0, \phi_3 = 90°$$

۱۷ . ۳ د دوه وکتورونو وکتوري ځلونه یا ځل

پیژند ۱۷ . ۱۰:

ددوه وکتورونوa,bکتورځل یا وکتوریز ځل یو وکتورc دی د کوم لپاره چې لیکو
a × b = c او لاندې خویونه لري:
۱ - د c مطلقه ارزښت دی

$$|c| = |a||b|.\sin\phi; ....(17,13)$$

دا دهندسي له مخی د a او b وکتورونو لخوا غزیدلي غبرګ اړخیز منځهوارۍ په مانا دی.(ځ. ۱۷ . ۸)
۲- د c وکتور a او b باندې نیغ ولاړ یا اورتوګونال دی.
۳– دلته a , b , c یو ښي سیستم جوړوي، دا په د مانا چی که دښي لاس غټه ګوته او د ښوولو ګوته د aاوbلور وښایي نو کونججوړونکي د منځ ګوته دوکتورc-
لور ښایي (ځیره ۱۷ . ۹)

(c) ketabton.com: The Digital Library

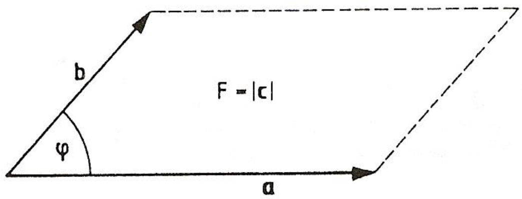


Bild 17.8

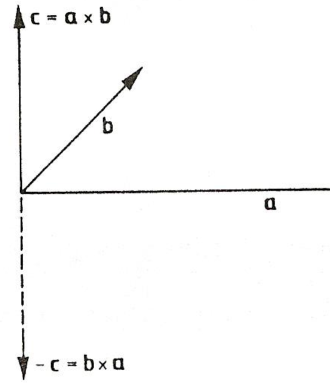


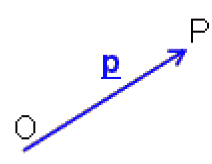
Bild 17.9

دا لاندي ځيري د فرمولونو سره موږ ته ټکی، کرښه او هواره را په ګوته کوي او د يوه وکتور مطلقه ارزښت.

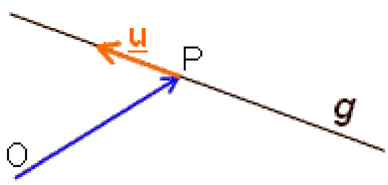
$$|\underline{p}| = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}$$

ټکی $P(p_1|p_2|p_3)$

$$\underline{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$



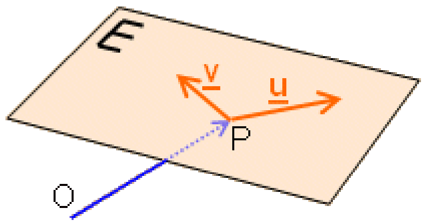
کرښه g



$$g: \underline{x} = \underline{p} + t \cdot \underline{u}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

هواره E



E: **x** = **p** + r·**u** + s·**v**

وکتورځله ونه یا وکتور ځل یواځې د درى اړخيزې هوايا فضا لپاره تعريف دى.

د وکتورځل بيلګه په فزيك کې :

که F قوه یا زور وي چې په يوه کلك ځرخيدونکي بدن (جسم) د Q په ټکي د r په مرووند چې د r سره کونج جوړوي، برید یا حمله کوي او هغه د P په ټکي څرخوي (څيره ش.

۱۷ . ۱۰) نو ځرخون مومنتDrehmoment منځ ته راځي M = r × F

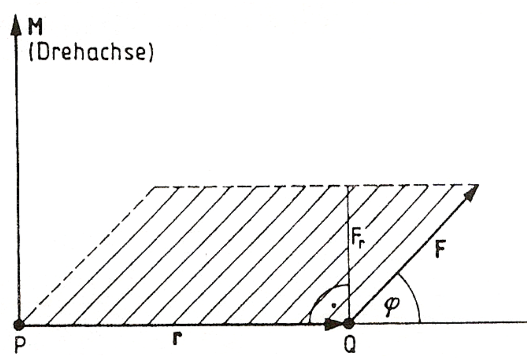


Bild 17.10

د مطلقه ارزښت له مخې د ځرخونمومنت د اوږدوالى | r | د اړم مټ او مطلقه ارزښت

$F_1 = |F| \sin\phi$

چې د اړم په مټ (نيغ) ولاړ د قدرت یا قوت زور کپوننت (جوړونکى) دى:

$M = |r||F|\sin\phi$

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۷ . ۹: (د وکتورضرب لپاره د شمیرقاعدې)

$$a \times b = - b \times a \qquad (17.14)$$

دیستریبوتیو قانون)

$$a\times(b+c)=(a\times b)+(a\times c) \qquad (17.15)$$

$a \times b = 0$ د کولینیار وکتورونو لپاره) (17 . 16

د پورته شمیرقاعدو ښه ځرګندونه یا توضیح : (۱۷ . ۱۴) د غوښتونکي ښي سیستم له مخی (پیژند .۱۷ . ۱۰، خ. ۱۷ . ۹)

د کولینیار وکتورونو لپاره $\phi = 0$ پس لرو: $\sin\phi = 0$ له دې سره د (۱۷ . ۱۳) له مخی (۱۷ . ۱۵) لاس ته راځي. په دیستریبوتیو قانون په لیدنوالي (پیچي دیَ) دلته صرف نظر کیږي، لیدوړ والی یی نه ځرګندوو. د وکتورځل شمیرلو لپاره د وکتورکواوردیناتډوله ښودنی سره د یوون وکتورونو e^1 , e^2 , e^3 وکتورځل ته اړیو.د (۱۷ . ۱۵) شمیر قانون له یوې خوا او له بلی خوا د وکتور ځل پېژند ۱۷ . ۱۰ څخه لاندې جمله لاس ته راځي.

جمله ۱۷ . ۱۰ (د یوونوکتورونو وکتورځل)

$$e^i \times e^i = 0, i = 1,2,3; ....(17,16)$$

$$e^1 \times e^2 = e^3, e^2 \times e^3 = e^1, e^3 \times e^1 = e^2; ....(17,17)$$

$$e^2 \times e^1 = -e^3, e^3 \times e^2 = -e^1, e^1 \times e^3 = -e^2; ....(17,17)$$

د دریمی درجی دیترمینانت کلیمی لاندې (پېژند۱۱ . ۲) او که څوك یوون وکتورونه د دیترمینانت د توکو په څیر ومنلی شي، کیدی شي چی د وکتورځل $a\times b$ د a , b کواوردیناتو په څیر انځور شي

جمله ۱۷ . ۱۱ : د وکتورونو

$$b =(b1,b2,b3),a=(a1,a2,a3)$$

وکتوریز ځل یا وکتوري ځله ونه په لاندې کې د ماتریکس په توګه ده:

$$a \times b = \begin{bmatrix} e^1 e^2 e^2 \\ a_1 a_2 a_2 \\ b_1 b_2 b_3 \end{bmatrix}; ....(17,18)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوبيونه يا حل : د وکتور $a=(a_1e^1+a_2e^2+a_3e^3)$ ځل د وکتور

$$b=(b_1e^1+b_2e^2+b_3e^3)$$

د توکوډوله(توګي په توکي) وکتوري ځل د جملی ۱۷ . ۱۰ کارونه، دا لاندې ورکوي

$$a\times b=e^1(a_2b_3-a_3b_2)+e^2(a_1b_3-a_3b_1)+e^3(a_1b_2-a_2b_1)$$

دا ضرب ارزښه يه دا لاس ته راوړنه يا نتيجه د ديترمينانت (۱۸ . ۱۷) د شميرلواود پېژند ۱۱ . څخه هم ترلاس راځي

بيلګه ۱۷ . ۶:

a × b دې وشميرل شي، كه وي

الف) a=(-2,1/2,-1), b=(1/2,-2 ,1)

ب)

$$a=e^1-3e^2+e^3, b=-e^1-2e^2+3e^3$$

اوبيونه يا حل الف) ب) د دې بيلګې اوبيونه دې ګان لستونكي او مينه وال په غاړه واخلی، دا له مخه تيرې جملې له مخی پوره روښانه دی٠

وکتوري ځل د خپل مطلقه ارزښت (۱۷ . ۱۳) هندسي اهميت په بنسټ د وکتورونو a , bڅخه خورې شوې منځهوارې Fp غبرګ اړخيز ه همداډول د a او b څخه خورشوي يا غزيدلې دريګوډی منځهوارې FD شميرلو لپاره خورا مساعد دئ . باور لري

$$F_P=|a\times b|; F_D=\frac{1}{2}|a\times b|; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(17,19)$$

بيلګه ۱۷ . ۷ :

د وکتورونو(a=(1,1,0) , b=(2,0,1 څخه خورې شوې هوارې منځ يا دننه په لاندې ډول ده

$$a\times b=\begin{vmatrix} e^1e^2e^3 \\ 110 \\ 201 \end{vmatrix}=(1,-1,-2), F_P=|a\times b|=\sqrt{1^2(-1)^2+(-2)^2}=\sqrt{6}$$

بيلګه ۱۷ . ۸ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دریګوډی ABC منځهواره (د هوارې دننه) دې وشمیرل شي چی کونجټکي یي وي :

A=(2,1,1) , B=(4,0,0) , C=(1,-1,2)

ابیونې :
دریګوډی له لاندې وکتورونو څخه غزیږي
a=B-C=(3,-1,-2),
b=A-C=(1,2,-1) او
د a او b وکتوري ځل په لاندې ډول دی

$$a\times b=\begin{vmatrix} e^1 e^2 e^3 \\ 3 1 -2 \\ 1 2 -1 \end{vmatrix}=3e^1+e^2+5e^3=(3,1,5)$$

د درېګوډی ABC د هوارې دننه یا منځهواره په لاندې ډول ده

$$F_D=\frac{}{2}|a\times b|=\frac{1}{2}\sqrt{3^2+1+5^2}=\frac{1}{2}\sqrt{35}$$

۱۷ . ۴ شپات ضرب (غبرګهواریزځل موزی سطحیز ضرب)

یادونه : دا یو شپږ خواییز تن دی چی مخامخ هوارې یی سره غبرګی او یو په بل ضرور نیغ ولاړ نه وي . لاندې شکل ۱۷ ۱۱. یی بیلګه او د مسئلی دحل انځورونه ده

پیژند ۱۷ . ۱۱ :

د درې وکتورونو غبرکهواریز ځل یا شپاتځل[a , b , c] لاندې ځل یا ضرب دی
[a,b,c]=(a×b) (17 . 20)

دلته وکتورونه a او b وکتوریز ځل کیږي او نتیجه یي بیا د cسره سکالار ځل کیږي، یعنی لاس ته راوړنه یا نتیجه یي سکالار ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

غبرکهواریزځل ځمککچیز هندسي لیدونکی اهمیت لري. د سکالارځل (پیژند ۱۷ . ۹)
سره سم باور لري

$$[a,b,c] = (a \times b).c = |a \times b|.c = |a \times b|.|c|.\cos\alpha$$

دلته الفا د وکتورونو a × b او c څخه رابند شوی کونج دی .(څیره ۱۷ . ۱۱)

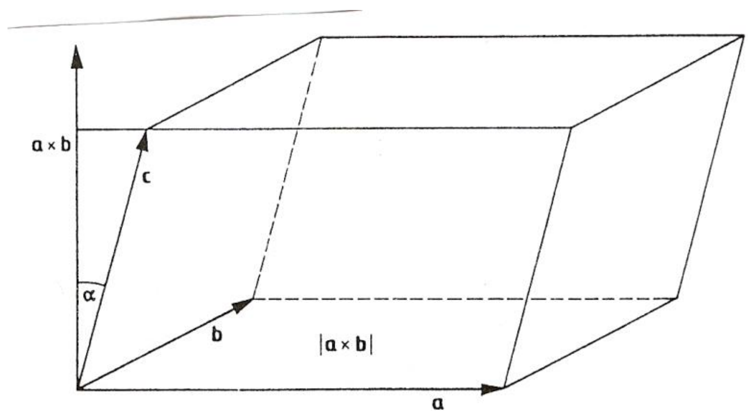


Bild 17.11

دلته د وکتورځل تعریف سره سم (پیژند ۱۷ . ۱۰) |a×b| د a او b غزیدلي غبرګ اړخیز دی . برسیره پر دې $|c|.\cos\alpha$ پرتله برخه ۱۷ . ۲ (په وکتور a×b باندې د وکتور c پروجکشن یا پریوستون په مانا دی. یعني د a,b او c څخه غزیدلی غبرګهوارې یا

شپات جګوالی ښایي. پس[a,b,c] هندسي د وکتورونو a,b,c څخه غزیدلي غبرکهواریزې ډکي (حجم) په مانا دی.
دغبرګهواریز په مطلقه ارزښت (د غبرګهواریز ډکي یا-حجم) کی تغیر نه راځي که چیرې د وکتورونو پرلپسی ترتیب بدل شي. د غبرګهواریزې ډکی زیاتیز یا مثبت دی، که ورکړ شوي ترتیب یو ښی- سیستم جوړ کړی٠

جمله ۱۷ ۱۲۰:

$$[a,b,c\,] = [b,c,a] = [c.a.b] = -[a,c,b] =$$
$$= -[c,b,a] = -[b,a,c] \quad (17\ .\ 21$$

که وکتورنه په یوه هواره کی پراته وي)کومپلانار وي(نو یو شپات د صفر جګوالي سره لاس ته راځي. نو بیا لاندې جمله باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۷ . ۱۳:

(17 . 22) د کومپلانار وکتورونو لپاره باور لري$[a,b,c]=0$

د غبرګهواریز یا شپاټ ځل شمیرلو لپاره د وکتورونو په کواوردیناتتوګه انځورونه بیرته دیترمینانت انځورونه په کار اچول کیږي

جمله ۱۷ . ۱۴:
د وکتورونو
$a=(a1,a2,a3),b=(b1,b2,b3),c=(c1,c2,c3)$
غبرګهواریز ځل په لاندې ډول دی

$$[a,b,c]=\begin{vmatrix} a_1 a_2 a_3 \\ b_1 b_2 b_3 \\ c_1 c_2 c_3 \end{vmatrix};.........(17,23)$$

اوبیونه : وکتور ځل $a\times b$ د جملی ۱۷ . ۱۱ سره سم لاندې اوبیونه لري
$a.b=(a_2b_3-a_3b_2)e^1-(a_1b_3-a_3b_1)e^2+(a_1b_2-a_2b_1)e^3$
د $a \times b$ سکالارځل د c سره کواوردیناتډوله په لاندې توګه صورت نیسي.
$(a\times b).c=[a2b3-a3b2,-(a1b2-a2b1),a1b2-a2 b1].(c1,c2,c3)$
$= c1(a2b3-a3b2)-c2(a1b3-a3b1)+c3(a1b2-a2b1)= a1(b2c3-b3c2)-a2(b3c1-b1c3)+a3(b1c2-b2c1)$
دا نتیجه د دیترمینانت (۱۷ . ۲۳) شمیرلو له لارې هم لاس ته راځي.

بیلګه ۱۷ . ۹:
د وکتورنو($a=(0,1,2)$, $b=(2,0,1)$, $c=(1,1,0)$
غبرګهواریز - یا شپاټځل[a,b,c] په لاندېډول دی:

$$[a,b,c]=\begin{vmatrix} 012 \\ 201 \\ 110 \end{vmatrix}=0(0-1.1)-1(0-1.1)+2(2.1-0)=5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۷ . ۱۰:
وکتورونه($a=(1,2,3)$,$b=(3,6,1)$, $c=(0,0,1$ کومپلانار دې او شپاتځل یي په لاندې ډول دی(دا اوبیونه دې ګران لوستونکي او مینه وال په غاړه واخلي)

بیلګه ۱۷ . ۱۱ :
د تیترایدر(دریګوډي اړخیزه ، لاندې شکل دی) ډکی(حجم) دې وشمیرل شي (څیره. ۱۷ . ۱۲)

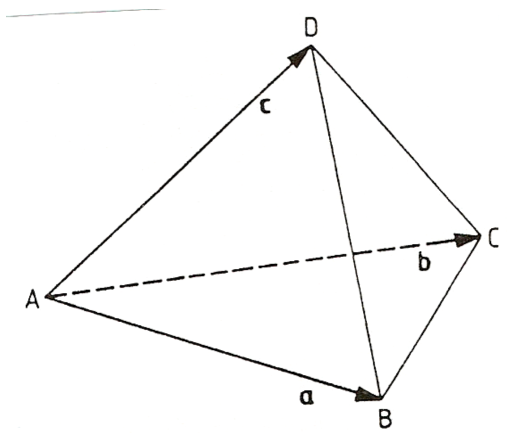


Bild 17.12

د لاندې کونجټکو یا ګوډټکو سره
$A=(1,1,0)$, $B=(2,0,1)$
$C=(3,-1,2)$, $D=(1,0,3)$

یادونه : دا پورته په خټه کې ککرټکي دي، ځکه چې دا څېره څلور ککرې لري
اوبیونه : دا غوښتونکی ډکی د لاندې وکتورونو څخه خور تیترید ۶/۱ برخه ده
$a=B-A=(1,2,0)$,$b=C-A=(2,1,0)$, $c=D-A=(0,1,2)$
دا تیترئیدر یو اهرام دی چی ډکی یا حجم یی ۳/۱ ځل بنسټیزهواره ځل جګوالیډ تیترائند جګوالی د شپات جګوالي سره مساوي دی او د دریګوډیهواره یی د شپات نیم د وکتورونو a , b , cکمیز یا منفي دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$[a,b,c]=\begin{vmatrix}110\\201\\012\end{vmatrix}=-5$$

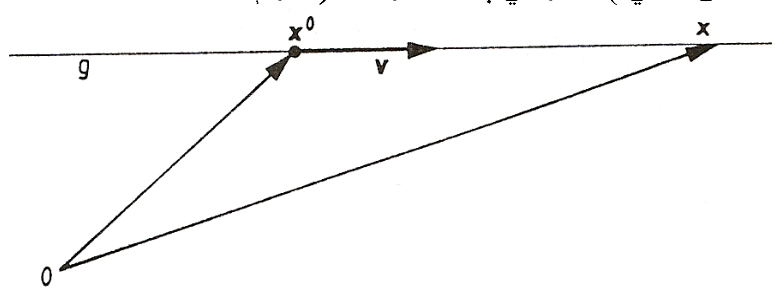
د کچڅړ لپاره مطلقه ارزښت نیول کیږي: V=(1/6).|[a,b,c]|=5/6

۱۷ . ۵ په شننیزه (تحلیلي) ځمککچ کی د وکتورونو کارونه

په دې برخه کی ځموږ هدف دئ چی وګورو چی د تحلیلي هندسی پرابلمونه او بیا په ځانګړي ډول تحلیلي هندسي په هوا کی وکتوري مطالعه) د ۱۶ -برخي سره په توپیر(څنګه کیږي٠

۱۷ . ۵ . ۱ د یوې کرښی وکتوریزه انځورونه

په فضا یا هوا کي د یوې کرښی ځای د یوه ټکي او لور له لاری یواځنی ټاکلی دئ. په کرښه gدې نښتی ټکی د ځاي وکتور x0 په مرسته (چی د کواوردینات سیستم د O څخه دا ټکی ښایي)، لور یي په وکتور V (ځیرې۱۷ . ۱۳



ځیره ۱۷ . ۱۳

که λ یو پارامتر وي چی د رییلګڼونو ډیری کی ځغلي، نو د کرښی g یو په زړه پور ټکی x د وکتور زیاتون یا - جمع له لارې په لاندې فورم (بڼه) ښوول کیږي

$$x=x^0+\lambda.v,-\infty<\lambda<\infty;.....................(17,24)$$

د وکتور v په لور په ټکي x0 کی د کرښی g برابرون (پارامتر فورم)

که پارامتر λ په ریل ګڼونو کی وځغلي نو x د کرښی ټولو ټکو کي یا د ټکو ترمنځ

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځغلي. د هر ټکي $x \in g$ لپاره يواځني يوه $\lambda \in R$ شته يا موجود ده‌وکتور مساوات (۱۷ ، ۲۴) لاندې درې سکالار برابرونونه نه دي

$$x_1 = x_1^0 + \lambda.v, x_2 = x_2^0 + \lambda.v, x_3 = x_3^0 + \lambda.v; ....(17,25)$$

که کرښه g په دوه ټکو $x0,x^1$ ورکړ شوي وي، نو د لور وکتوريی دی $v=x^1-x^0$ او په دې ډول يی د کرښي برابرونونه دي:

$$x = x^0 + \lambda(x^1 - x^0); ....(17,26)$$

بيلګه ۱۷ . ۱۲ :

په لاندې ټکو($x^1=(1,3,2), x0=(1,2,3$ ورکړ شوې کرښه د $v=x^1-x^0 = (0,1,-1)$
له امله په لاندې توګه ليکل کيږي

$$x = x^0 + \lambda.v = (1,2,3) + \lambda(0,1,-1)$$

دا لاس ته راوړنه يا نتيجه موږ ته لاندې درې سکالار برابرونونه په ګوته کوي

$$x_1 = 1, x_2 = 2 + \lambda, x_3 = 3 - \lambda$$

دکرښی برابرونونو (۱۷ . ۲۴) پارامترفورم په هواره کی د کرښي ځانګړی حالت خوندي لري: $x,x0$ او v وکتورونه دي، هر يو د دوه کومپوننتو سره.

بيلګه ۱۷ . ۱۳ :

په يوې هوارې کي د يوې کرښي د مساواتو فورم:
$x = (1,2) + \lambda(1,-1)$ سکلار برابرونونونه په ګوته کوي. $x_1 = 1 + \lambda, x_2 = 2 - \lambda$

له دې څخه سرې کولی شي چې پارامتر λ له منځه يوسي:

$$\lambda = x_1 - 1, x_2 = 2 - (x_1 - 1) = 3 - x_1$$

که د $x1$ په ځاي x او د $x2$ په ځاي y وليکو نو لاس ته راځي$y=-x+3$ د

کرښي د برابرونونو نورمال فورم (16 . 2 .) که غواړو چې معلومه کړو چې ايا ټکی x^1 په کرښه g پروت دی، نو بايد وڅيړو چي کواوردينات يی برابرون (۱۷ . ۲۵) پوره کوي، که نه. دا په دی مانا چی ايا دده لپاره يو د λ - ارزښت موجود دی .

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۷ . ۱۴ :

لاندې ټکي $1)...x^1=(-1,4,3), 2)...x^2(2,-2,1)$ په کرښه $g:x=(1,0,1)+\lambda(-1,2,1)$ پراته دي که نه ؟

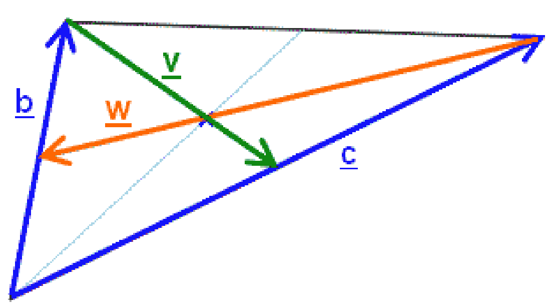
اوبیونه : ۱) د دې درې برابرونونو $-1=1-\lambda, 4=0+2\lambda, 3=1+\lambda$ له جملې د دوهم څخه لاس ته راځي $\lambda=2$ او دا ارزښت لومړی او هم دریم مساوات ډکوي) پوره کوي $-1=1-2, 3=1+2$ له دې امله ټکی x^1 په کرښه g پروت دی.

۲) ددې درې برابرونونو $2=1-\lambda, -2=0+2\lambda, 1=1+\lambda$ له دویم لرو $\lambda=-1$ دا ارزښت لمړي مساوات پوره کوي، مګر دریم مساوات نه: پس x^2 په کرښه g نه دی پروت.

که د دوه کرښنو $g_1:x=x^1+\lambda v; g_2:x=x^2+\mu w$ غوځټکی xS ، موجود وي باید د دواړه کرښنو مساوات پوره کړي. په دې مانا چې باید باوري شي:

$$x_S=x^1+\lambda v=x^2+\mu w$$

دا وکتوربرابرون درې سکالار برابرونونه دي چې د هغو له دوه وو څخه سړی پارامتره $\mu\wedge\lambda$ شمیرلی شي. که لاس ته راغلي ارزښتونه دریم مساوات پوره کړي، نو یو پریټکی مخ ته شته، که ناپای زیات حلونه مخ ته پراته وي ، نو دواړه کرښې یو په بل پرتې دي.



بیلګه ۱۷ . ۱۵ : د لاندې کرښنو غوځټکی دې پیدا شي :

$$g_1:x=(1,1,0)+\lambda(1,3,-2), g_2:x=(1,2,2)+\mu(-1,-2,4)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل یا اوبیونه : غوښتکي باید دواړه برابرونونه پوره کړي::

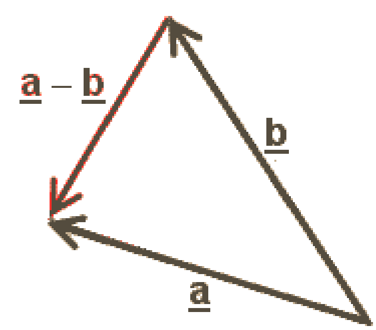
$$1+\lambda=1-\mu, 1+3\lambda=2-2\mu, -2\lambda=2+4\mu$$

د درې سکالار برابرونونو له لومړي مساوت څخه لرو $\lambda=\mu-$ ددې له مخې او له دوهم برابرون څخه لاس ته راځي : $\mu=-1$ نو لرو $\lambda=1$. په دې ډول دریم برابرون هم پوره کیږي د غوښتکي کواوردینات سیستم د کرښې g1 د $\lambda=1$ سره لاس ته راځي:

xs =(1,1,0)+1.(1,3,-2)=(2,4,-2).

۱۷ . ۵ . ۲ د هوارې یا سطحې وکتوریزه انځورونه

د یوې هوارې E ځای په هوا کی په یوه ټکي x0 او دوه نا غبرګو وکتورونو v او w یوائځنی ټاکلی دی. د وکتورونو v او w پیلټکي کیدی شي په x0 پراته ونیول شيیا پراته فرض شي) ش؟؟ څیره شته . ۱۷ . ۱۴) .



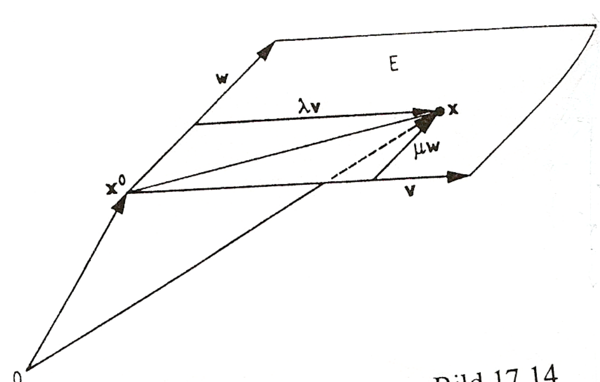


Bild 17.14

(c) ketabton.com: The Digital Library

که $\lambda \wedge \eta$ پارامترونه وي چی یو له بل خپلواك د رییل ګنونو ډیري کی ځغلي، نو کیدی شي د هوارې Eپه خوښه ټکی xپه لاندې ډول انځور شي $(17,27)$ ....$x = x^0 + \lambda v + \mu w, -\infty < \lambda, \mu < \infty;$.

د هوارې E مساوات چی د x0 ټکي کی، له وکتورونو v,w غزیدلي (پارامترفورم)

هر جوړه ارښت $\lambda, \mu \in R$ یواځنی یو $x \in E$ ښايي. وکتوربرابرون (۱۷ . ۲۷) لاندې سکالاربرابرون ځرګندوي

$$x_1 = x_1^0 + \lambda v_1 + \mu w_1, x_2 = x_2^0 + \lambda v_2 + \mu w_2, x_3 = x_3^0 + \lambda v_3 + \mu w_3; ....(17,28)$$

که چیرې هواره په دریې ټکو $x0$, x^1 , x^2
چي په یوه کرښه نه دې پراته ورکړ شوي وي، نو کیدی شي چی د هوارې غزوونکي وکتورونه په لاندې ډول انځورشي: $v=x^1-x0$, $w=x^2-x0$ له دې سره د هوارې مساوات داسی دي:

$$x = x^0 + \lambda(x^1 - x^0) + \mu(x^2 - x_0); ....(17,29)$$

بیلګه ۱۷ . ۱۶:
په دریې ټکو($x0 =(-1,2,5),x^1=(2 ,3,-6),x^2=(1,-4,3$ کې د هوارې E ورکړ شوي برارون د $v=x^1-x0=(3 ,1,-11)$,$w =x^2-x0=(2,-6,-2)$له امله په لاندې ډول دي:

$$x = x^0 + \lambda v + \mu w = (-1,2,5) + \lambda(3,1,-11) + \mu(2,-6,-2)$$

ددې نتیجی څخه لاندې سکالاربرابرون لاس ته راځي:

$$x_1 = -1 + 3\lambda + 2\mu, x_2 = 2 + \lambda - 6\mu, x_3 = 5 - 11\lambda - 2\mu$$

۱۷ . ۵ . ۳ :د هواروبرابرون یا- مساوات سکالارفورم(-بڼه)

یوه هواره د یوه ټکي x0 او یوه په هواره نیغ ولاړ وکتور n له پلوه یاله لارې هم یواځنی ټاکلی ده یا، چی عمودي یا نورمال وکتور (Normalvektor(یي بولي) ؟؟؟
څیره شته ش . ۱۷ . ۱۵
په هواره E کی دې x یو په خوښه ټکی وي .نو دا له x0 و x ته بریدي وکتور x-x0 هم په دې هواره کی پروت دی او وکتورونه n او x-x0 یو په بل نیغ ولاړدي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

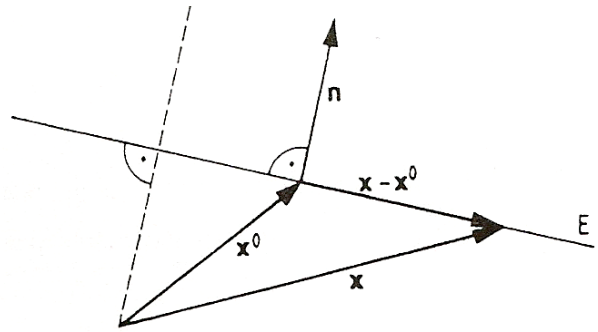


Bild 17.15

په یو بل نیغولاړو) اورتوګونال (وکتورونوڅخه جوړ شوي سکالارځل صفر دی ځیره (ځ. ۱۷ . ۸ دې برتله شي) دا په دې مانا چی باوري کیږي :

n(x-x0)=0,nx=nx0= c (17 . 30)

دهوارې برابرونونو سکالار فورم ، n- عمودوکتور، د هوارې x0 په ټکی.

بیلګه ۱۷ . ۱۷ :

د هوارې برابرون چی ټکی(2,-1,5)= x0په پروت دئ او په هغه وکتور(n=(2,-2,1 (نیغ)ولاړ دی

د c=nx0=(2-2,1).(2,-1,5)=4+2+5=11 له مخې په لاندې ډول دئ:

(2,-2,1).x=11 <=> 2x1-2x2+x3=11.

د هوارې مساواتو پارامترفورم (۱۷ . ۲۷) په یوه سکالارفورم اړول بدلول (۱۷ . ۳۰) د پارامتر د له منځه وړلو له لارې لاس ته راځي.

بیلګه ۱۷ . ۱۸ :

د هوارې مساوات دې په پارامتر فورم وي:

$$x=(1,-2,4)+\lambda(0,1,-1)+\mu(1,-1,2)$$

دا وکتور برابرون لاندې درې سکالار برابرونونه خوندي لري یا په بر کي لري یا ځایوي:

$$x_1=1+\mu, x_2=-2+\lambda-\mu, x_3=4-\lambda+2\mu$$

له لومړي لاس ته راځي: $\mu=x_1-1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې سره دا نور دوه برابرونونه داسې دي

$$x_2 = -2 + \lambda - x_1 + 1 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = -1 + \lambda \wedge$$
$$x_3 = 4 - \lambda + 2x_1 - 2 \Leftrightarrow -x_1 + x_3 = 2 - \lambda \Leftrightarrow$$
$$-x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

د هوارې برابرونونو سکالار فورم: (-1,1,1)x=1

که غواړو چې څرګنده کړو چې ایا یو ټکی x1 په هواره E پروت دی چې برابرون یی په پارامتر فورم ورکړ شوي ، نو باید مطالعه شي چې ددې کواوردینات (۱۷ . ۲۸) برابرون پوره کوي که نه (بیلګه ۱۷ ، ۱۵ : د کرښی مساواتوته ورته) . او یا سړی پارامترفورم په سکالارفورم بدلوي او څیړي چې د ټکي کواوردینات دا مساوات پوره کوي، که نه .

بیلګه ۱۷ . ۱۹ :

ایا ټکی(x^1=(2,-2,5 په هواره $E: x = (1,-2,4) + \lambda(0,1,-1) + \mu(1,-1,2)$ پروت دی ؟

اوبیونه : : دلومړي دوه برابرونونو $2 = 1 + 0\lambda + \mu, -2 = -2 + \lambda - \mu, 5 = 4 - \lambda + 2\mu$

څخه لاس ته راځي $\lambda = 1 \wedge \mu = 1$

دا دواړه ارزښتونه دریم برابرون پوره کوي: 5=4-1+2.1 ، دا په دې مانا چې x1 په هواره E پروت دی. که د هوارې برابرون په سکالرفورم واړول شي: - (x1+x2+x3=1بیلګه ۱۷ . ۱۸ دې وکتل شي (، نو د ټکي x^1 کواوردینات دې یواځې د x1,x2,x3لپاره ځاي په ځاي شي ، چې معلوم کړو چې x^1 په هواره E پروت دی : -
2+(-2)+5=1

د یوې هوارې: n.x=c:E او د یوې کرښې $g: x = x^0 + \lambda v$ ترمنځ غوڅټکی xs(که شته وي)(نو هم پهE پروت دی او هم په g .له دې امله د هوارې په برابرونونو کی د x لپاره $x^0 + \lambda v$ ځاي په ځاي کوو(بږدو) او په دې ډول یو برابرون د λ لپاره لاس ته راځي.که دا برابرون یواځنی یو اوبی ولري نو غوڅټکی موجود دی ، که اوبی شته نه وي یا موجود نه وي نو کرښه g د هوارې E سره غبرګه ځغلي، که ناپاي ډیر ې اوبیونې شته وي نو کرښه g په هواره E پرته ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه ۱۷ . ۲۰ :

د کرښو $g: x=(1,0,1)+\lambda(-1,1,1)$ پروت ځاي يا موقعيت دې لاندې هوارو ته وټاکل شي:

$a).....x_1+2x_2+3x_3=4, b)...2x_1+x_2+x_3=3, c)...2x_1+x_2+x_3=4$

اوبيونه : دا چی لټونکی غوڅټکی xsد کرښي برابرون پوره کوي نو باوري دي:

$x_1=1-\lambda, x_2=\lambda, x_3=1+\lambda$

a) $x_1+2x_2+3x_3=(1-\lambda)+2\lambda+3(1+\lambda)=4\lambda+4=-4, \lambda=-2$

$x_S=(1+2,-2,1-2)=(3,-2,-1)$

b) $2x_1+x_2+x_3=2(1-\lambda)+\lambda+(1+\lambda)=0.\lambda+3=3$

لمدا λ په خوښه، gپه E پرته ده

c) $2x_1+x_2+x_3=2(1-\lambda)+\lambda+(1+\lambda)=0.\lambda+3=4$

حل نه شته ، نوکرښه gد سطحې E سره غبرګه ځغلي.

ددوه سطح

$n^1.x=c1$: E1

او E2 هوارې: $n^2.x=c2$ غوڅکرښه دواړه برابرونونه پوره کوي(دا دوه برابرونونه دي، هر يو د درې نامعلومو x1 ,x2 ,x3 سره). دوه امکانات شته دي چی کرښه g (که شته وي) را پيدا کړی شو.

۱ – سړی يوه واريابله يا اوښتونې په خوښه وټاکي $x_i=\lambda$ (ازاد پارامتر)، نور دواړه $x_j, j\neq i$ له دواړو هوارمساواتو څخه په λ کې د کرښيزو افادو يا وينو په څير راپيدا کوي. او په دې ډول کرښيز مساوات لاس ته راځي.

۲ – سړي د کرښي دوه مختلف ځانګړي ټکي x^0 او x^1 راپيدا کوي او په دې ډول د کرښې g مساوات لاس ته راولي: ($x=x_0+\lambda(x^1-x_0)$.

بيلګه ۱ ۷ . ۲۱ :

د دوه هوارو E_1 او E_2 پريکرښه g غواړو پيدا کړو. هوارې دې وي :

$E_1: x_1-x_2+x_3=3, \quad E_2: 2x_1-x_2-3x_3=0$

حل ۱): $x_1=\lambda$ په خوښه

$E_1: -x_2+x_3=3-\lambda, E_2: -x_2-3x_3=-2\lambda.$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کمون یا تفریق : $4x_3 = 3 + \lambda$,

په E_1 کی دې ځاي په ځاي شي :- $-x_2+3/4+\lambda/4 = 3-\lambda$, $x_2 = (5/4)\lambda - 9/4$ -

نو لاس ته راځي $x_1 =$, $x_2 = (5/4)\lambda - 9/4$, $x_3 = (1/4)\lambda + 3/4$

په وکتور لیکدود : $x = (0,-9/4, 3/4) + \lambda(1, 5/4, 1/4)$

همداسی (<=>) له $\tilde{\lambda} = (1/4)\lambda$ سره لرو

$x = (0,-9/4, + \tilde{\lambda}(4,5,1)$

حل(اوبی) ۲ : په E_1 او E_2 ځاي په ځاي کوو: $x_3 = 0$, پس لاس ته

راځي $x_1 = -3$, $x_2 = -6$, سره د لاندې حل $x_1 - x_2 = 3$, $2x_1 - x_2 = 0$

پس $x^0 = (-3, -6, 0)$ په هوار کې ځانګړې ټکی دی,که ولیکو $x_2 = 0$ پس

له $x_1 = 9/5$, $x_3 = 6/5$: لاندې حل لرو $x_1 + x_2 = 3$, $2x_2 - 3x_3 = 0$ او په دې ډول د ه

کربښې g دوم ټکی : $x^1 = (9/5, 0, 6/5)$

په ټکو x^1 ، x^0 د کربښې g مساوات (مقایسه ۱۷ . ۲۶) داسې دي

$x = x^0 + \lambda(x^1 - x^0) = (-3, -6, 0) + \lambda(24/5, 6, 6/5)$

<=> د $\tilde{\lambda} = (6/5)\lambda$ سره :

$x = (-3,6,0) + \tilde{\lambda}(4,5,1)$

دا په حل (اوبی) ۱ کی پیداشوې کربښې g یوبل ډول انځوردي، ځکه چی د لورو

وکتورونه یو بل ته ورته دي. : $v = (4, 5, 1)$ او د $\tilde{\lambda} = -3/4$ لپاره په حل ۱ کې د

کربښې ټکی د حل ۲ x^0 دا ټکی لاس ته راځي

$x = (0, -9/4, 3/4) - (3/4)(4, 5, 1) = (-3, -6, 0)$

تمرینونه؛

۱ – وکتورونه $c = (4,-1,7)$ $b = (-3,-5,0)$, $a = (1,0,-2)$, ورکړ شوي دي.

جوړ کړې :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$-a$, $a+b$, $a-c$, $2a - b + 3c$!

۲ – وکتور a چې له ټکي $x^1 = (3,-5,7)$ څخه د ټکي $x^2 = (-2,4,-1)$ لور ته لاربښودوي، څنګه دی؟

۳ – وکتور $a = (3,21)$ دې پیلټکي $x^1 = (1,2,3)$ ولري. وځیږۍ چې پایټکی x^2 یې کوم کواوردینات لري؟

۴ – لاندې وکتورونه کوم مطلقه ارزښت لري؟

$a = (4,-3,12)$, $b = (\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3})$, $c = (3,3,3,)$?

۵ – وکتورونو $a = (2,-1,3)$, $b = 7,0,0)$ پورې اړوند یا مربوط یوونوکتورنه کومې کواوردیناتې لري؟

۶ – د لاندې وکتورونو یو په بل ولاړوالی یا اورتوګونالیتي دې وښول شي ؟

$a = (1,2,3)$, $b = (3,0,-1)$!

۷ – دلته دې a_1 , b_1 او c_1 څومره لوي وي، چې وکتورونه

$a = (a_1,3,2)$, $b = (-4,b_1,2)$, $c = (3,-2,c_1)$

په وکتور $d = (2,1,-3)$ (نیغ) ولاړ وي؟

۸ – د

a) $a = (-2/3, 1/2, 5/4)$, $b = (3\ 74, -1/3, 2/3)$,

b) $a = e^1 - e^2 + e^3$, $b = 2e^1 + (1/2)e^2 - (1/4)e^3$

لپاره دې $a \cdot b$ وشمیرل شي!

۹ – وکتورونه $a = (3,-4,12)$ او $b = (-6,8,0)$ یو له بل سره کوم کونج جوړوي!

۱۰ – د ګوډ – یاکونجټکو

$A = (-2,0,3)$, $B = (-6,4,-1)$, $C(4, -1,2)$

سره، د دریګوډي کونجونه څومره لوي دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱۱ – وښایئ چې وکتورونه $a = (2,4,-6)$ او $b = (-1,-2,3)$ یو بل ته کولاینې دي!

۱۲ – د

a) $a = (-4,-1,3)$, $b = (5,-2,7)$

b) $a = e - e^2 + 2e^3$, $b = 2e + (1/2)e^2 - (1/4)e^3$

لپاره $a \times b$ وشمیرئ!

۱۳ – د دریګوډي هواره څومره لویه ده، چې کونجونه یې په لاندې توګه راکړ شوي وي

$A = (-2,0,3)$, $B = (-6,4,-1)$, $C = (4,-1,2)$?

۱۴ – د هغه غبرګ اړخیز هواره څومره لویه ده چې له وکتورونو

$a = (-3,2,1)$, $b = (5,-3,2)$

څخه غزیدلي وي ؟

۱۵ – د وکتورونو

$a = (-2,1,-3)$, $b = (1,-3,6)$, $c = (1,2,-3)$

څخه غزولشوې غبرګهوارې کوم ډکی یا حجم لري؟

دا نتیجه هندسي روښانه کړئ!

۱۶ – څلورګوډي د لاندې ګوډونو (بېلګه: څلوراړخی [دا د اهرام تشکیلوي])

$P_1(2,1,4)$, $P_2(0,-1,2)$, $P_3(-3,6,4)$, $P_4(2,2,2)$

سره کوم ډکی یاحجم لري؟

۲۳ – د لاندې هوارو

الف) E_1 چې له ټکي $x^o = (0,1,2)$ تیریږي او د لاندې وکتورونو

لور لري: $v = (0,2,1)$, $w = (2.3,-5)$

ب) E_2 چې له ټکو $x^o = (o,1,2)$, $x^1 = (2,-3,4)$ او

ټکي $x^2 = (7,-9,-3)$ څخه تیریږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پ) E_3 چې د نورمال وکتور $n = (0,2,1)$ سره

له ټکي $x^o = (0,.1.2)$ تیریږي، مساوات څنګه دي؟

۲۴ – له تمرینو۲۳ الف او ب څخه د هوارې مساواتو سکالارینه څنګه ده؟

۲۵ – ودی ښیل شي چی ایا ټکي $x^1 = (1.3.-6)$ همداسی $x^2 = (5,-5,4)$ په هواره

a) E_1: $\mathbf{x} = (0, 2, -1) + \lambda(1, -3, 5) + \mu(2, -2, 0)$,

b) E_2 : $2x_1 + x_2 - x_3 = 1$

پراته دي!

۲۶ – د کرښو

a) g_1: $\mathbf{x} = (1, 1, 1) + \lambda(-2, 3, 1)$,

b) g_2: $\mathbf{x} = (-1, 1, 1) + \lambda(-1, -1, 1)$,

c) g_3: $\mathbf{x} = (3, -2, 0) + \lambda(-1, -1, 1)$

پروتخاي د هوارې $E: \ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 18$ سره وټاکئ!

۲۷ – د هوارو

الف) $E_1 : 2x_1 + x_2 - x_3 = -1$ او $E_2 : -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4$

ب) $E_1 \ -5x_1 - 2x_2 + 9x_3 = 4$ او $E_2 \ : x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -8$

غوڅکرښه دې راپیدا شي !

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۸ پرلپسی او لړۍ پرلپسی (لنډ: لړۍ) (sequences and series)

یا ترادف او د ترادف سلسله

۱۸ . ۱ پیل

د میلاد څخه دري سوه کاله د مخه یوه یوناني جنګسالار(نوم یې راڅخه هیر شوی، ددې بخښنه غواړم) د خپلو عسکرو څخه وپوښتل چې ، »دا د ده له مخه کیشپ چې سل متره یې ترمنځ واټن دی، کله نیولی شي، که دی له دې کیشپ سل ځله تیز ولاړشي؟« دې ته طبعاً د لوستونکو فکر شته چې وخت باید په نظر کې نه وي نیولشوی . ځوابولو ته دې ګران لوستونکی پخپله فکر وکړي.

موږ د دې برخې څېرنی سره لوړې شمیرپوهنی ته راځو. داسی هم نه ده، ځکه چې موږ د رییل اعدادو یا ـ ګڼونو تعریف سره سم چې هلته مو د اینتروالبندولو باندې خبرې کړې او په دې توګه مو عدد تعریف کړی دی، د شمیرپوهني لوړه څېرنه وه. همدا ډول د لاینیزو برابرونونو یا ـ مساواتو شمیرل او داسی نورې پوره دلوړې شمیرپوهني بیلګې لرو، خو دلته دا په ګوته کوو چې له دې ځایه د شمیرپوهنی هغه ځاي پیل کیږي چې شمیرپوهنیز فکر مو په پراخه توګه په کار اچولو ته راهڅوي او له دې امله مو د وړاند نیونه(لنډ: نیونه) یا فرضیه اړیینه وه چې دا برخه د لوړو شمیرپوهنو پیل په څیر وښایو یا وبولو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې ځایه هغه اعداد چې موږ ورسره مخ کیږو، ځموږ لپاره د څیړنی کیږي چی هغوي يوې پولی(حدLimit) ته هڅه کوي. دا قوانین هم پوره څیړل کیږي چی وروسته بيا په ديفرنځيال شميرنه کی کار اخستلو لپاره ترې تیریدنه ناشونی ده.

په راتلونکی برخه کی لاندې کنځیپتونه (خیال، چې یو څه څنګه وشي) ځموږ لپاره د هڅی وړ ګرځي

۱ - د کلیمی لیدوړه یا په خیال کی لرودونکی پیلونه

۲ - د لیدوړوالي یا فکر کی راوړیدونکی د ټولو په غوره شننه (تحلیل)

۳ - د شميرپوهنيزو پېژندو یا تعریفونو ټیکوالی،

۴ - هغو وړاندنیونو یافرضیو ته پاملرنه چی د شمیرپوهنی قوانینو د باوریتوب (اعتبار)لپاره وي،

۵ - د پرلپسی شننه، چی پوله ارزښت یی په پام کي ونه نیول شي،

۶ - د ګڼو دندو حل ، په ځانګړي توګه د ديفرنځيالولو او اينتګرالولو

۷ - بالاخره د پرلپسی لړیَ چی په لنډه توګه ـی لړیَ بولو څیړنه .

دلته هم د دې موضوع د پوره څیړلو ستونځي په کتاب کی د ځاي کموالي له امله شته. داچی دا برخه یوه بنسټیزه برخه ده، نو پیل یی د یوې ساده او پوهوړې بیلګې له لارې کوو چی ماته خورا په زړه پورې هم ښکاریږي.

۱۸ . ۲ دګڼونو پرلپسی (لنډ: پرلپسی) یا د اعدادو ترادف کلمه

پیلبیلګه :

پاي جمعه یا - زیاتون $s = 3+7+11+...+395+399$ څنګه ټاکل کیدی شي؟
کیدی شي چي دا د پوره ستونځو سره د یوګونو ګڼونو یو د بل سره جمعې یا یو په بل زیاتون له لارې وشمیرل شي ترڅو چي د دې اعدادو د ترادف (ګڼونپرلپسی) قانونیت پیداشوی وي:
هر دوه ګاونډې توکي يوله بله په۴ + توپیر کیږي یعنی کمون یا کمښت يي ۴ + دیَ.
کیدی شي چی دا کارونه (استعمال) په یوه شکلی او سپماوړ لاره هم مخ ته لاړه شی او دا په لاندې ډول :
که لومړی (۳) او اخر(۳۹۹) ، دویم (۷) او له اخر دویم (۳۹۵) دریم (۱۱) او له اخر دریم (۳۹۱) د جمعې اجزا یا زیاتوني او داسی نور سره زیات شي. دا په

(c) ketabton.com: The Digital Library

دې ټولو حالتونو کی همغه زیاتون ارزښت یا د جمع لاس ته راوړنه ورکوي یعنی ۴۰۲ .
اوس دې د یوګونو د جمعې اعزاوو د جمعې ارزښت(زیاتوونو زیاتون ارزښت) راپیداشي:
دویم غړی له لومړی غړي داسی لاس ته راځي چی لومړي غړي ته ۴ ور زیاتیږي او همداسی ورپسی تر n غړي پورې چی دلته و (n-1) ته 4 ور زیاتیږي ، یعنې:
.n = (n-1)+4:
که له دې لاس ته راوړنی لومړی غړی له اخر غړي کم کړو یعنی3- 399 = 396 ، نو ددې کمون سره د (n-1) دا 4 ځله ترې لاس ته راځي. داچی 99 = 396:4 دي، نو باید n او له دې امله د پرلپسي د غړو شمیر 100 وي. په دې لاس ته راوړنو سره باید 100 ګڼونه سره زیات شي. که چیرې په پورته توګه 2 زیاتووني یا د جمعې اجزاوې سره زیات شي، نو باید له دې سره 100:2 = 50 یعني 50 -ځله زیات 402 ترې لاس ته راشي« له دې امله د ټولو رامخ ته شوو د پرلپسی غړو زیاتون دا دی:
.20100 = 402 . 50

دا لوستونکو ته په روڼنی ژوند کی هم څرګنده ده لکه د یو ټولګي د زدکوونکو په ګڼه (نمره) ترتیب، یا په یوه سیالۍ یا مسابقه کی د بریالیو ترتیب او داسی نورموجود دي، موږ کوښښ کوو چی دا مسئلی د شمیرپوهنی له لارې وڅیړو او وګورو چی په شمیرپوهنه کی ترادف یا پرلپسی څه شی دي.
یادونه: موږ له دې وروسته د رادف په ځا یواځي ترادف لیکو.

موږ طبیعي اعداد یا ـ ګڼونه ۱، ۲، ۳، ۴، ..... لرو (دلته ټکي ټکي دا مانا لري چی دا پرلپسی ناپای اوږدیږي)
که چیرې دا هر پیداېښتي یا طبعي ګڼ په یواځنی یو ریبل ګڼ ترتیب شي یا یواځنی ترتیب ریبل ګڼ وښايي یعنی $a_1, a_2, a_3, ...$ ، نو د لته د طبعي اعدادو او حقیقي اعدادوتر منځ یو ترتیب منځ ته راځي. داچی دلته هر طبیعي عدد n په یواځنی حقیقي عدد a_n ترتیب شوی نو دا ترتیب یو فنکشن دی چی د فنکشن پیژندډېرې (تعریفډیرې یا تعریفستې) دطبعي اعدادو ډیرۍ N ده او ارزښتډیرۍ یی د حقیقي اعدادو ډیرۍ R ده.

دلته د پرلپسی هر توکی an د ځای ګڼې (نمرې) n په بنسټ یواځنی ټاکلی، چی n ته په مسلکي نړیواله پیژندل شوې ژبه ایندکس Index (زیات یې Indices)، چې مانا یې : پیژند نخښه ده ، وایي. (Index پیژند دخښه)

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند تعریف) :۱۸ . ۱ الف :

د پرلپسی غړو $a_1, a_2, a_3, ... a_k$ د یو ترتیب قانونیت یا قانونمندي $a_n = a(n)$ لاس ته راځي ، که دnلپاره پرلپسی طبعي اعداد1, 2,3 k... ,ځای په ځای شي.

پرلپسی کې a_1 د پرلپسی پیل غړی بلل کیږي. که د پرلپسی اخر غړي پای وي نو پرلپسی پای او که نه نو پرلپسی ناپای ده.

بیلګی

(دا ورپسې مخ کې بیلګې نورې هم روښانه دي)

$$I-;...a_n = n^2, a_1 = 1; a_2 = 4;....; a_{10} = 100,..; a_k = k^2;..$$

{چیرته چې a_n یو څلوری (مربع) ګڼ دی}=D=N;W a_n |

$$2-\{a_n\} = \{\frac{1}{n}\} \Rightarrow a_n = \frac{1}{n}; a_1 = 1; a_2 = \frac{1}{2};...a_{10} = \frac{1}{10};...\{a_k\} = \{\frac{1}{k}\}$$

$$3 - \{a_n\}=\{(-1)\} => a_n = (-1)^n; a_1 = -1; a_2 = 1;$$
$$a_3 = -1,...a_{17} = -1;...a_{22} = 1$$

د دې پرلپسی غړي بدلی نخښی لري، له دې امله پرلپسی بدلیدونکی Altrnating بلل کیږي

$$4-\{a_n\} = \{3+\frac{1}{n}\}; 4, 3+\frac{1}{2}, 3+\frac{1}{3}, 3+\frac{1}{4},...a_k = 3+\frac{1}{k},..., a_n = 3+\frac{1}{n}$$

د ترتیب – یا نظمقاعدې څخه مختلفی ګڼونپرلپسی یا د اعدادو پرلپسې منځ ته راځي ۰ دا مو په لنډه توګه پرلپسی ونومولی. چی پیژند یی یو ځل بیا دلته په بل ډول رالنډوو.

پیژند (تعریف) ۱۸ . ۱ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

که هر یو طبیعي ګڼ..... n=1,2,3,4,5 په یوه یو یواځني رییل ګن باندې ترتیب یا تنظیم شي، نو په ترتیب ګڼونه .... $a_1, a_2, a_3, ...$ یوه د ګڼونو پرلپسی جوړوي، چی لنډ پرلپسی یی نوموو او ددې لپاره سړی داسی لیکي: $\{a_n\}$.

دې a_n ته د پرلپسې $\{a_n\}$ n-م غړی ویل کیږي.

سړی کړی شي چی د رییلګڼونو یا اعدادو د نمره کولو یا ګڼې لپاره له 0 یا 2 او حتی له 1 - یا 2 - څخه پیل وکړي، یعني:
a-1,a0,a1,a2.....یا او a2,a3,a4.... یا a0,a1,a2

ګورو چی د پرلپسی لیکلو لپاره ځانګړي متودونه په کار اچول کیږي، کله دا بسیا کوي چی د پرلپسی تعریف لپاره د پرلپسی لومړي څو غړي ولیکل شي

بیلګه ۱۸. ۱ : د بیلګي په توګه لیکو:

$$\{a_n\} = 1, 2, 3, ...$$

او د طبعي اعدادو پرلپسی موخه یا مطلب دی، د جوړولوقانون an = n سره ، نو

$$\{a_n\} = \{n\}$$

$$\{an\}:1,4,9,16,25...=> = \{a_n\} = \{n^2\}$$

دا په دې معنا چی(<=)

{an}:2,3/2,4/3,5/4,6/5 ....=>

یا په دې مانا چی{an}={(n+1)/n}

{an}:1,1/2,1/3,1/4,1/5,1/6 ...=>

په دې مانا چی $\{a_n\} = \{\frac{(-1)^{n-1}}{n}\}$

{an}:1,1/2,1/3,1/4,1/5,.. =>

یانې په دې مانا {an}={(n+1)/n}

پیلبیلګه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

دشمیرپوهنی یوه ښوونکی لپاره په ښونځي کی یو ځاي تش یا خالي دئ. ددې ځاي لپاره دوه کسانو الف او ب ځانونه کاندید کړی. دوي ته لاندې پوښتنه ورکړ شوي چی اوبی یا حل یی کړي:

پنځه ګڼونه ۱،۳،۷،۱۵،۳۱ ورکړ شوي. درې نور ګڼونه باید داسی ور واچوی چی دا ګڼونپرلپسی موخه وره یا هدفمنده مخ ته ولاړه شي، یا مخودیزه شي.

دواړه کاندیدان دا دنده یا پوښتنه په بیلو ډولونو اوبی کوي ۰

کاندید الف داسی فکر کوي ۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ کاندید ب داسی فکر کوي

لومړی ګڼ ۱ د۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ ۰ لومړی ګڼ له ۲ څخه په ۱ کوچنی دئ: 1 - 2

دویم ګڼ لاس ته راځي، که د لومړي ۰۰۰۰۰۰۰ دوم ګڼ له ۴ څخه ۱ کوچنی دئ :

عدد دوه ځله ته ۱ ورزیات کړو : ۰۰۰۰۰۰۰۰ $2^2 -1 = 4 -1$

$2.1 + 1 = 3$

دریم ګڼ لاس ته راځي که د دوم ۰۰۰۰۰۰۰۰ دریم ګڼ له ۸ په ۱ کوچنی دی:

ګڼ دوه ځله ته ۱ ور زیات شي۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰$2^3-1=8-1$

$2.3 + 1 = 7$

۶- ام ګڼ لاس ته راځي که د پنځم۰۰۰۰۰ ۶ -ام ګڼ له ۶۴ څخه په ۱ کوچنی دئ :

ګڼ دوه برابره ته ۱ ور زیات کړو: ۰۰۰۰ $64-1=2^6-1=63$

$2.31 + 1 = 63$

اوم ګڼ دئ ۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ اوم ګڼ دی: $2^7-1=128-1=127$

$2.63 + 1 = 127$

ګڼ ۸ دئ ۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ ګڼ ۸ دئ

$2^8-1=256-1=255$ $2.127 -1 = 255$ ....(

د شمرپوهنی له مخی دا پنځه له مخه ورکړشوي ګڼونه د یوې پرلپسی لومړني پنځه توکي دي. دا پنځه توکي له

a1 , a2 , a3 , a4 , a5,

سره ښایو.

اوس زموږ په دې بیلګه کی داسی لرو: a1=1,a2=3,a3=7,a4=15,a5=31

که وغوښتل شي چی د دې پرلپسی نور توکي دې هم ورکړ شي، نو دا به تصادفي توکي نه وي، بلکه یوه جوړه شوې قاعده یا لاس ته راوړې قاعده به ورکړي، لکه څنګه چی یو په بل پسی راتلونکی توکی د پخوانی او یا له وروستني توکي څخه د مخه توکی په لاس راځي.ددې تثبیت یا ازمویني وظیفی شمیرپوهنیزه فرمولبندې په لاندې ډول ده:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګڼونپرلپسی یا د اعدادو ترادف دې د a1=1,a2=3,a3=7,a4=15,a5=31 سره ورکړ شوي وي. یوجوړښتقانون یا قانونمندي او توکي a6,a7,a8 وټاکی.
د دواړو کاندیدانو د اوبیوني -یا حللارې کیدی شي چی په لاندې توګه انځور شي:

ب	الف
$a_1 = 2-1$	$a_1 = 1$
$a_2 = 4-1 = 2^{2-1} = 3$	$= 2.1+1 = 3a_2$
$a_3 = 8-1 = 2^3 - 1 = 7$	$a_3 = 2.3 + 1 = 7$
..	.
$a_6 = \quad 2^6 - 1 = 63$	.
	$a_6 = 2.31 + 1 = 63$

په تولیزه (عمومی) توګه لاس ته راځي

$(k \in N)$ k-م غړی $\quad\quad$ $(k \in N \wedge k \geq 2)$ k -م غړی
په کوم کی چی .... په کوم کی چی
د(k-1)- م غړي دوه برابره ته 1 زیات شي ..... 1 له $a_k = 2^k$ کم شي

$$a_k = 2.a_{k-1} + 1 \quad\quad\quad a_k = 2^k - 1$$

دواړو کاندیدانو پرابلم سم حل یا اوبی کړ. کله چی د پرلپسی ۲۰ - م غړي پوښتنه وشوه ، نو کاندید ب په ګټه کی دی . ولی؟
دواړه کاندیدان کولی شي چی د پرلپسی هر په خوښه توکی پیداکړي، له دې امله دوي دا پرلپسی یواځنی وټاکله. کاندید الف دا پرلپسی داسی حل کوي چی تل باید له مخه غړي څخه ورپسی توکی لاس ته راوړي، یعني $a_k = 2.a_{k-1} + 1$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا باید هر د پرلپسی د مخه توکی وپیژني. دې ډول شمیرلو ته د پرلپسی رکورزیو(recursive لاتین، له recure په ښت ځغاسته) انځورونه وایی . مګر ب کاندید دا خورا ساده او زر شمیرلی شي، دی چې کوم توکي غواړي پیدا کړي، هغه سملاسي لاس ته راوړی شي یعني $a_k = 2^k - 1$

دې ډول ښوونلار ته ایکسپلیځیت explizite (لاتین خورول، روښانوول) یعنی روښانه انځورونه وایي.

د لوستونکو لپاره دې دا لاندې د کور کار وي:

د پرلپسی ۲۰ - ۱م غړی وشمیری ، رکورسیو او ایکسپلیځیت. یانی د الف او ب په ځیر.

بیلګه:

یوه پرلپسی د a1 = 5 او $a_{k+1} = a_k{}^2 + 1$ سره ورکړ شوې. ددې پرلپسی لومړنی پنځه توکي وشمیری.

حل:

$$a_1 = 5$$
$$a_2 = a_1^2 + 1 = 25 + 1 = 26$$
$$a_3 = a_2^2 + 1 = 676 + 1 = 677$$
$$a_4 = a_3^1 + 1 = 458329 + 1 = 458330$$

بیلګه :

یوه پرلپسی د a1 = 1 او $a_{k+2} = a_{k+1}.a_k$ سره ورکړ شوې ده.

ددې پرلپسی لمړني پنځه غړي وشمیری .

اوبښونه:

$$a_1 = 1$$
$$a_2 = 2$$
$$a_3 = a_2.a_1 = 2.1 = 2$$
$$a_4 = a_3 . a_2 = 2.2=4$$
$$a_5=a_4.a_3 = 4.2=8$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې:

د هرې لاندنۍ پرلپسی لمړني ۱۰ غړي وشميرۍ پرلپسې رکورزيو ورکړ شوې

a) $a_1 = 2,\ a_{k+1} = \frac{1}{a_k}$

b) $a_1 = 0,\ a_{k+1} = a_k^2 + 1$

c) $a_1 = 2,\ a_{k+1} = \frac{1}{a_k} + 1$

d) $a_1 = 1,\ a_{k+1} = \frac{1}{2} a_k + 1$

e) $a_1 = 2,\ a_{k+1} = \frac{1}{2}\left(a_k + \frac{2}{a_k}\right)$

f) $a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_{k+2} = a_{k+1} + a_k$

g) $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_{k+2} = a_{k+1}^2 \cdot a_k$

h) $a_1 = 1,\ a_2 = -2,\ a_{k+2} = a_k : a_{k+1}$

بيلګه :

يوه پرلپسی د $a_k=k^2/(k+1)$ سره ورکړ شوې ده .د دې پرلپسی لومړني پنځه توکي وشميرۍ

اوبې:

$$a_1 = \frac{1^2}{1+1} = \frac{1}{2} \qquad a_2 = \frac{2^2}{2+1} = \frac{4}{3} \qquad a_3 = \frac{3^2}{3+1} = \frac{9}{4}$$

$$a_4 = \frac{4^2}{4+1} = \frac{16}{5} \qquad a_5 = \frac{5^2}{5+1} = \frac{25}{6}$$

بيلګه :

پرلپسی د $a_k = \frac{(-1)^k + 1}{k}$ سره ورکړ شوې ده .د دې پرلپسی ۳ -م، ۸ -م ۱۵ -م او ۲۰ -م توکي وشميرۍ

اوبې يا حل:

$$a_3 = \frac{(-1)^3 + 1}{3} = 0$$

$$a_8 = \frac{(-1)^8 + 1}{8} = \frac{1}{4}$$

$$a_{15} = \frac{(-1)^{15} + 1}{15} = 0$$

$$a_{20} = \frac{(-1)^{20} + 1}{20} = \frac{1}{10}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنی :
د لاندې پرلپسيو لومړني پنځه توکي ، ۲۰ ـم او ۴۵ ـم توکي وشميری

$$a)a_k = 2k+1; b)a_k = k^2+k; c)a_k = \frac{k^2+1}{k+1};$$

$$d)a_k = \frac{k^2-1}{k+1}; e)a_k = (-\frac{1}{10})^{k-1}; f)a_k = 1-(1/2)^k;$$

$$g)a_k = 1+(-1/2)^k; h)a_k = 1.2.3....k$$

په کارتيزي کواوردیناتسیستم کی د یوې پرلپسی د گراف انځورونه لاس ته راوړو، که هر توکی د x -کواوردینات باندې د پرلپسی هر توکی د توکي نمرې kسره کیښول شي او د y- کواوردینات باندې هر غړی د غړي د نمرې ak سره و کښل شي

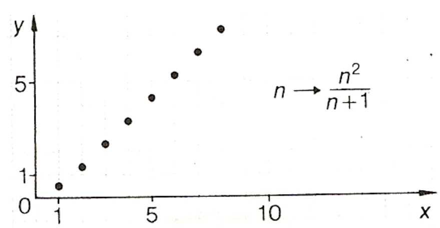


Bild 4

پوښتنی :
د لاندې پرلپسيو گراف په کارتيزي کواوردیناتسیستم کی وکاږۍ.
له دې ځايه وروسته بيا پيل دئ

a) $a_k = \frac{5k}{k+2}$ b) $a_k = 3k+2$ c) $a_k = (-1)^{k-1} \cdot \frac{12}{k}$

d) $a_k = \sin\frac{k\pi}{2}$ e) $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{k+1} = 1-2a_k$ f) $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_{k+2} = a_{k+1} \cdot a_k$

۱۸ . ۲ . ۱ يوغږېزې يا مونوتونی پرلپسی

بيلگه : د غړو ak = 2k - 1
(ما کله کله توکی او کله کله غړی نومونه کارولی، په په پرلپسی کې یو غړی د پرلپسی غړی ،دئ او د یوې ډیری یو د هغې ډیری توکی دی، دې ته به د گرابو لوستونکو پام وي)
سره پرلپسی هر توکی د مخته تیرشوي توکي لوي دئ . دا باور لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a_{k+1} > a_k$ د ټولو $k \in N$ لپاه

حل یا ثبوت :

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 2^{k+1} - 1 \\ &= 2.2^k - 1 \\ &= 2^k + 2^k - 1 \\ &= 2^k + (2^2 - 1) \\ &= 2^k + a_k \\ &> a_k \end{aligned}$$

تعریف ۱۸ . ۲ الف:

یوه پرلپسی(strictly monotonic increasing)
په کلکه – یا کره مونوتون جګیدونکی ده یا کره مونوتون جګیږي، که دا لاندې باور ولري :

د ټولو $k \in N$ لپاره $ak+1> ak$

که د یوې پرلپسی لپاره باوري وي

د ټولو $k \in N^*$ لپاره $ak+1 \geq ak$

نو دلته د مونوتون جګیدونکی monotonic increasingپرلپسی څخه غږیږو

بیلګه :

د پرلپسی د توکو

$ak = 10 - 4k$

سره هر غړی د مخ ته تیر غړي څخه کوچنی دی.

لرو:

$ak+1 < ak$ د ټولو $k \in N^*$ لپاره

اوبنونه::

$$ak+1 = 10 - 4(k+1)$$
$$=10 - 4k - 4$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$=(10-4k)-4$

$= a_k - 4$

$< a_k$

پیژند(تعریف) ۱۸ . ۳ :

یوه پرلپسی په کلکه مونوټونټیټېدونکی یا - لویدونکی strictlymonotonic decreasingده، که لاندې باور ولري:

د ټولو $k \in N$ لپاره $a_k < a_{k+1}$

که په یوه پرلپسی کي باور ولري(په پورته کي او همداسي که وروسته داسي څه راشي کا د ان توکی دی)

د ټولو $k \in N$ لپاره $a_1 \leq a_{k+1}$

نو دلته د یوغږیز-یا موتون لویدونکی- یا مونوتون ټیټېدونکی monotonicdecreasing پرلپسی څخه خبرې دي.

پوښتنه:

د یوې پرلپسي دوه ګاونډیو غړو توپیر یا کمون یاکمښت $a_{k+1} - a_k$، کوم شرطونه باید پوره کړي، چې دا لاندې صدق ولري

الف) کلکه مونوتون جګیدونکی وي

ب) کلکه مونوتون ټيټېدونکي یا –لویدونګې وي

پ) مونوتون جګیږي

ت) مونوتون لویږي؟

ددې دندې د اوبیوني په مرسته کیدی شي، چې د توکي $a_K=(k+1)/(k+2)$سره د پرلپسی مونوتونی په لاندې ډول وښوول شي:

$$a_{k+1} - a_k = \frac{(k+1)+1}{(k+1)+2} - \frac{k+1}{k+2} = \frac{k+2}{k+3} - \frac{k+1}{k+2}$$

$$= \frac{(k+2)^2 - (k+1)(k+3)}{(k+3)(k+2)} = \frac{(k^2+4k+4) - (k^2+4k+3)}{(k+3)(k+2)}$$

$$= \frac{1}{(k+3)(k+2)} > 0 \quad k \in N^*$$

له $a_{k+1}-a_k>0$ همداسی(<=) $(a_{k+1})>a_k$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټولو $k \in N^*$ لپاره لاس ته راځي، چې ورکړ شوې پرلپسی په کلکه مونوتون جګیږي.

۱۸ . ۲ . ۲ اریتمیتیکي پرلپسی

د پرلپسی ..... 14;11;8;5;2 هرغړی د خپل مخکښ غړي څخه په 3 لوي دئ.
ددې پرلپسی لپاره ورکړئ
الف(یوه رکورزیف انځورونه
ب) (یوه اکسپلیځیت انځورونه.

ځنی پرلپسي د ډیرې پاملرني ارزښت لري، په دې ډول چې د دوه په خوښه ګاونډیو غړو ak او ak+1 ترمنځ یو ثابت (تل همغه) بلواك یا تابع موجود دئ
غواړو چې دداسی دوه مهمو پرلپسی تیپونه (ډولونه ، رقمونه) په ځانګړې توګه څرګند راوباسو یا بهتره تر څیړنی لاندې ونیسو:

پیژند (تعریف) ۱۸ . ۴ :
په یوه اریتمیتیکي- یا ګنونشمیرنیزې پرلپسي یالنډ: شمیرنیزې پرلپسی کي د درې توکو منځنی توکی د دواړو دباندنیو توکو اریتمیتیکي منځ دی:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

په یوې ځمککچیزې لپسی(ټاکونی یا پیژند وروسته راځي) کی د درې یو په بل پسی توکو منځ غړی د دوو نورو دباندنیو غړو ځمککچیز یا هندسي منځ دی:

$$a_n = \sqrt{a_{n-1}.a_{n+1}}$$

لومړی اریتمیتیکی یا شمیرنیزه پرلپسی څیړو:
غوښتنه(ثبوت): یوه پرلپسی ورکړی، چې لومړی توکی يي ۵ او هر ورپسی راتلونکی توکی یی له مخ غړي څخه په ۱۲ کوچنی وي
الف) ددې پرلپسی لومړي پنځه توکي وشمیرئ
ب) د پرلپسی رکورزیف انځورونه ورکړئ
پ) د پرلپسی اکسپلیځیت انځورونه وکړئ
ت) د پرلپسی ۲۰ -م (۲۵ ، ۳۵،۵۰، ۱۰۰) توکي وشمیرئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند یا تعریف ۱۸ . ۵ :

یوه پرلپسی an اریتمیتیکي پرلپسی بلل کیږي، که د دوه پرلپسی توکو کمون یاکمښت تل ثابت یا همغه وي: $a_{n+1} - a_n = d \Leftrightarrow a_{n+1} = a_n + d$

بیلګې:

۱ - لاندنی پرلپسي ...;2;5,8;11;14;...;29;32;35
یوه اریتمیتیکي Arithmeticپرلپسی ده چی لومړی توکی یی a1 = 2
او ثابت یا همغه کمون یا کمښت یا فرق یی d = 3 دی.
۲ - دا پرلپسی ...;34- ,23- , 12- , 1- ; 10 اریتمیتیکي پرله پسی ده چی لومړی توکی يي a1=10 دی او d=-11 ده

که په هر پل(قدم) کی فنکشن $n \in N$; n—>an په همغی زیاته ووني d زیاتیږي یا همداسی کمیږي d=0 (لپاره ثابت دی) نو باید اریتمیتیکي پرلپسی یو لاینیز فنکشن(لاینیز بلواك) وي (D = N) د d په جګوالي . دا د لاندی اند لاس ته راوړنه یا فکر لاس ته اوړنه ده:

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d$$

.

.

$$a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-1).d = a_1 + d.n - d$$

$$f(n) = d.n + (a_1 - d)$$

د لاینیز فنکشن جګوالی d دی او ثابت یا همغه توکی a1 -d نومیږي(یادیږي یا بلل کیږي)
دلته an=2n+1 دلاینیز فنکشن په څیر دی، د d=2 په جګیدو او د y - محورغوڅی a1-d=1

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې سره د پرلپسی د هر توکي د شمیرلو امکانات ورکړ شوي دي:

تعریف ۱۸ . ۶ :

په اریتمیتیکي- یا شمیریزه پرلپسی کی n- م توکی د قاعدې له مخي داسي ورکړ شوی:
$a_n=a_{n-1}+d=a_1+(n-1).d$

بیلګی:

۱ - اریتمیتکي پرلپسی ... 53 , 2,19,36 ورکړ شوې.
غوښتونکي a20 ده.
داسی لرو: a1=2,d=17,n=20
نو $a_n=a_1+(n-1).d$ ⇔ $a_{20}=2+19.17=325$
۲ - ورکړ شوې دې وي
$a_{10} = -44,5$ او $a_1 = -o,5$
غوښتونکي d ده:
$a_n=a_1+(n-1).d \Leftrightarrow (a_n-a_1)/(n-1)=d \Rightarrow$
$d=(-44,5+0,5)/(10-1)=-44/9$

۱۸ . ۲ . ۳ځمککچیزې – یا هندسي پرلپسی

اوس غواړو هغه د مخه ویل شوی ،د یوه ثابت ((تل) همغه ارزښتیز) فنکشن سره، د پرلپسی ۲ -م تیپ د دوه غړو ترمنځ تر څیړنی ونیسو

پیلبیلګه :

یو هوښیار زدکړی غواړي په رسختی کی یوه میاشت کار وکړي(۲۰ د کار ورځی(. دئ کارورکوونکی ته وایي، چی دی ارزانه کار ورته کوي او لاندې وړاندیز ورته مخ ته کوی » د لمړی ورځي معاش دې 0,05 ډالره وي د دویمی دې دوه ځله د دریمی ورځی د دویمی ورځي دوه ځله څلورمه ورځ د دریمی ورځی دوه ځله او داسي نور، یعنی لمړی ورځ که 0,05 وي نو دومه ورځ 0,10، دریمه ورځ 0,20 او څلورمه ورځ 0,40 ډالره معاش کیږی او داسی نور

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنه : د

الف) د ۱ –می یا لومړی ورځی
ب) د ۱۵ - می ورځی
پ) د ۲۰ - می ورځی
معاش څومره کیږي. اندازه ګڼ(عدد) که په ډالرو وشمیرل شي، لاندې پرلپسی جوړوي:

0,05;0,1; 0,2; 0,4;0,8; 1,6; 3,2,......

پوښتنه :

ددې پرلپسی لپاره
الف) رکورزیف انځورونه
ب) اکسپلیڅیت انځورونه ورکړی

پیژند ۱۸ . ۷:

(ځمککچیزې یا هندسی پرلپسی) یوه پرلپسی an هندسي بلل کیږي، که د دوه یوبل پسی غړو ویش ثابت((تل) همغه) q وي:
یا په بل ډول یا په بل عبارت : یوه پرلپسی چې لومړی غړی $a_1 \neq 0$ وي اود همغه ګڼ یعنی ثابت ګڼ q سره د تل ځلونی څخه لاس ته راشي، ځمککچیزه یا هندسي پرلپسی بلل کیږي.

$n \in N; q \in \{R\} \setminus \{0\}$ د ټولو $a_{n+1} = a_n . q$; $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ لپاره

یو ځل بیا یوځای +d +d +d +d
اریتمیتیکي پرلپسی ...a5 a4 a3 a2 a1
هندسي پرله پسی..... a5 a4 a3 a2 a1
.q .q .q . q

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هندسي پرلپسی دوهم غړی دلومړي غړي سره د q ځل یا ضرب څخه لاس ته راځي، او دا د ټولو وروسته راتلونکو غړو لپاره باوري دي. له دې امله هندسی پرلپسي n ‹—— anاکسپونینشل فنکشن یا د جګګڼ بلواک بنايي چی q د بنسټ په توګه لري:

$$a_1 = a_1$$

$$a_2 = a_1.q$$

$$a_3 = a_2.q = a_1q^2$$

$$a_4 = a_3.q = a_1.q^3$$

.

.

.

$$a_n = a_{n-1}.q = a_1.q^{n-1}$$

$$f(n) = a_1.q^{n-1}$$

جمله ۱۸ :

په هندسي پرلپسی کی n- م توکی د لاندې قاعدې له مخي شمیرل کیږي

$$a_n = a_{n-1}.q = a_1.q^{n-1}$$

بیلګی:

1 - a1=3 , q=2 ,n=15 => $a_{15} = 3.2^{14} = 29152$

2 - a1=19,q=1,01,n=100 ;

= 50,8826363919.1,o1^{99} a100=

جمله :

یوه ځمککچیزه پرلپسی د زیاتیز یا مثبت پیلتوکي سره د q > 1 لپاره کلك مونوتون جګیدونکی ده د 0<q<1 لپاره کلك مونوتون لویدونکی ده

(c) ketabton.com: The Digital Library

غوښتنه :

د لاندې پرلپسیو ۱۰ لومړني غړي وشمیرئ

a) $a_k = \frac{k-2}{k+2}$ b) $a_k = \sin\frac{k\cdot\pi}{6}$ c) $a_k = \frac{1}{2}[1+(-1)^k]$

d) $a_k = 1-\left(\frac{1}{10}\right)^k$ e) $a_k = \left(1+\frac{1}{k}\right)^k$ f) $a_k = \cos\frac{k\cdot\pi}{2}$

g) $a_k = k^k$ h) $a_k = (-1)^{k-1}\cdot k^2$

i) $a_1 = 3;\quad a_{k+1} = \frac{1}{2}\left(a_k + \frac{4}{a_k}\right)$ k) $a_1 = 1;\quad a_2 = 2;\quad a_{k+2} = \sqrt{a_{k+1}\cdot a_k}$

l) $a_1 = 3;\quad a_{2n} = a_{2n-1} - 3;\quad a_{2n+1} = a_{2n} + 4\ (n \in \mathbb{N}^*)$

m) $a_k = 2k-1+\frac{1+(-1)^k}{2}+(-1)^{\frac{(k+3)(k+4)}{2}}$ n) $a_k = 3-\frac{1}{2^{k-2}}$

غوښتنه :

پرلپسی د مونوتون خویونو له پلوه وڅیرئ

a) $a_k = \frac{k-2}{k}$ b) $a_k = \frac{k+4}{k}$ c) $a_k = \frac{3k}{2k-1}$

d) $a_k = \frac{1-k^2}{k}$ e) $a_k = 2^k$ f) $a_k = 1-\sin\frac{\pi}{k+1}$

۱۸ . ۲ الف لړی

د هغه کارپلټونکی زدکړي وړاندیز ته بیرته پام راګرځوو، چی د لمړی ورځي 0,05 اجوره د دویمې ورځي 0,1 د دریمی ورځي 0,2 ، د څلورمی ورځي اجوره یی 0,4 ډالره وه او داسی نور.

په هغه وخت کی داسی پوښتنه رامنځ ته شوې:

د k - می ورځي لپاره زدکړی څومره اجوره اخلی ؟

دا مو یوې ځمککچیزې لړی ته لاربنودوي د $a_k = 0{,}05.2^{k-1}$ سره.

د هغي k - م توکی دk- می ورځي اندازه ګڼ یا د اجورې معیار دی.

دا په دې مانا چی زدکړی د k - می ورځي لپاره $0{,}05.2^{k-1}$ ډالره اجوره یا معاش اخلي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که غواړو چې وښايو چې زدکړې په لومړيو پنځو ورځو کې څومره اجوره اخلی ، نو بايد د لومړيو ورځو اجورې ځککچيزه پرلپسی، د $a_k = 0{,}05.2^{k-1}$ سره، يو بل سره زياته کړو

$$0{,}05+0{,}1+0{,}2+0{,}4+0{,}8 = 1{,}55$$

دا زدکړې د لومړيو پنځو ورځولپاره 1,55 ډالره معاش اخليکه د لومړيو n ورځو اجوره په Sn سره وښايو ، نو يوه لړۍ د لاندې غړو سره لاس ته راځي :

$$s_1 = 0{,}05\ .2^0 = 0{,}05$$
$$s_2 = s_1 + 0{,}05.2 = 0{,}05+0{,}1 = 0{,}15$$
$$s_3 = s_2 + 0{,}05.2^2 = 0{,}15+0{,}20 = 0{,}35$$
$$s_4 = s_3 + 0{,}05.2^3 = 0{,}35+0{,}40 = 0{,}75$$
$$s_5 = s_4 + 0{,}05.2^4 = 0{,}75 + 0{,}80 = 1{,}55$$
$$s_6 = s_5 + 0{,}05.2^5 = 1{,}55+0{,}160 = 3{,}15$$

غوښتنه:
پرلپسی ته د ۱۵ - م توکي پورې پر مخ وده ورکړې(مخ وديزه کړې)۰ که د ورکړ شوې پرلپسی ، چې توکي يې a1,a2,a3 ....
دي، دتوکو يو په بل پسې جمعه يا زياتون جوړ شي

$$s_1 = a_1 \qquad = a_1$$
$$s_2 = a_1 + a_2 \qquad = s_1 + a_2$$
$$s_3 = a_1+a_2+a_3 \qquad = s_2+a_3$$
$$.$$
$$s_{20} = (a_1+a_2+\ldots+a_{19})+a_{20} \qquad = s_{19}+a_{20}$$
$$.$$
$$s_{n-1} = (a_1+a_2+..+a_{n-2})+a_{n-1} \qquad = s_{n-2} + a_{n-1}$$
$$s_n = (a_1+a_2+\ldots+a_{n-1})+a_n \qquad = s_{n-1} + a_n$$
$$s_{n+1} = (a_1+a_2+\ldots+a_n)+a_{n+1} \qquad = s_n + a_{n+1}$$
$$.$$
$$.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو يوه پرلپسی...,S1,S2,s3 لاس ته راځي٠

پيژند يا تعريف ۱۸ . ۸:

د يوې پرلپسی ...;a1; a2; a3 څخه جوړه شوې پرلپسی ...S1;S2;S3
د رکورزيف انځورونی $s_1 = a_1; s_n = s_n + a_{n+1}$
سره پرلپسې لړۍ (د پرلپسيو لړۍ) يا لنډ : لړۍ بلل کيږي.

بيلګه :
د ak = 2k سره جوړې شوې پرلپسی څخه جوړه شوې لړۍ په لاندې ډول ده:

$$s_1 = 2^1 = 2$$

$$s_2 = s_1 + 2^2 = 2^1 + 2^2 = 6$$
$$s_3 = s_2 + 2^3 = 2^1 + 2^2 + 2^3 = 14$$
$$s_4 = s_3 + 2^4 = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 30$$
$$\vdots$$
$$s_n = s_{n-1} + a_n = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-1} + 2^n$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

بيلګه :

د ak = (2+3k)/(k+1) سره جوړه پرلپسی څخه جوړه شوې لړۍ، په لاندې ډول ده:

$$s_1 = \tfrac{5}{2}$$

$$s_2 = s_1 + \tfrac{8}{3} = \tfrac{5}{2} + \tfrac{8}{3} = \tfrac{31}{6}$$
$$s_3 = s_2 + \tfrac{11}{4} = \tfrac{5}{2} + \tfrac{8}{3} + \tfrac{11}{4} = \tfrac{95}{12}$$
$$s_4 = s_3 + \tfrac{14}{5} = \tfrac{5}{2} + \tfrac{8}{3} + \tfrac{11}{4} + \tfrac{14}{5} = \tfrac{643}{60}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$s_n = s_{n-1} + \frac{2+3n}{n+1} = \frac{5}{2} + \frac{8}{3} + \frac{11}{4} + \frac{14}{5} + \ldots + \frac{2+3n}{n+1}$$

پوښتنې:

د لاندې پرلپسیو څخه جوړه شوې لړۍ توکي Snورکړئ

a) $a_k = 2 \cdot 5^{k-1}$ b) $a_k = -3 \cdot 2^{k-1}$

c) $a_k = 5 \cdot 0{,}2^{k-1}$ d) $a_k = 4 \cdot (-3)^{k-1}$

پیژند ۱۸ . ۹ :

د اریتمیتیکي پرلپسی توکو یو له بل سره زیاتون یا جمعه په پام کی نیسو، دا څه چی لاس ته راځي، هغه اریتمیتیکي لړۍ پرلپسي (لنډ: لړۍ) بولو:

sn = a1 + a2 + ... + an

موږ دلته بیا پیل بیلګه را اخلو، چی د اریتمیتیکي لړۍ (داد پرلپسی زیاتون پرلپسی ده چی د لړۍ پرلپسي یی غواړو ونومو او په لنډه توګه یی له دې وروسته »لړۍ « و بولو) زیاتون او په ټولیزه توګه لړۍ زیاتون وشمیرو. ټاکونکی زیاتون له مختلفو لورو موږ دوه واره لیکو، چی دواړه هغي پسی زیات کړی شو یا یي زیاتون ونیولی شو:

$$s_{100} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

$$s_{100} = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} \ldots + a_2 + a_1$$

$$s_{100} = 3+7+11+\ldots +395 + 399$$

$$s_{100} = 399+395+\ldots +11+7+3$$

$$2s_n = (a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+\ldots+(a_n+a_1)$$

$$2s_n = (a_1+a_n) + (a_1+d+a_{n-1}) + \ldots + (a_1+(n-1).d+a_1)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$2s_{100} = 402 + 402 + 402+..$ $\quad$ $2s_n = (a_1+a_n)+(a_1+a_n)...+(a_1+a_n)$

$+402 + 402$

$2s_{100} = 100.402$ $\quad$ $2s_n = n.(a_1+a_n)$

$s_{100} = 50.402$

$s_{100} = 20100$ $\quad$ $s_n = n(a_1 + a_n)/2$

د پورته شميرني سره سم د اريتميتيکي لړی زياتون دی: $s_n = \frac{n(a_1+a_2}{2}$

که دلته د an=a1+(n-1)d ځاي په ځاي شي او د اسانتيا لپاره کموتاتيو قانون وکارل شي، دا په دې مانا چي n /2 ښي خوا ته راوړو، نو لاس ته راوړو:

$$s_n = \frac{(2a_1+(n-1)d)n}{2} = n.a_1 + \frac{(n-1)dn}{2}$$

بيلګې:

لومړی: $a_a = 3; d = 7; n = 50 => s_{50}(2.3+49.7)50/2 = 8725$

کنترول: $a_{50} = +49.7 = 346$ او له دې

$$s_{50} = \frac{(3+346)50}{2} = 8725$$

دويم- يو ميراث د شپږو ورونو ترمنځ داسی ويشل کيږي چی هر يو مشر د ورپسی مشر ورور څخه 470 0افغاني زياتي اخلي، د ځوان ورور 17000 افغانی رسيږي. معلوم کړئ چی ميراث څومره دی او هر يو ورور څومره ميراث اخلي؟

a1=17000;d=4700 ,s6=6/2(2.17000+5.4700)=172500 افغانئ

ورونه په لاندې ډول پيسی اخلي

17000 افغانی ،21400 افغانی، 26400 افغانی ،

31100افغانی ، 35800 افغانی او 40500 افغانی.

لکه څنګه چی د اريتميتيکي لړی زياتون پيداکيږي، همداسی د هندسي لړی زياتون هم پيداکيدی شي. عمومي فرمول به په پورتني ۱ - بيلګه کی ځانګړی يا ځانيزشي

(c) ketabton.com: The Digital Library

(مشخص). د زیاتون فرمول لاس ته راوړلو لپاره د لړئ sn څخه په q پراخه شوې لړئ کموو. په دې ډول لړی لړو توکو ته لړیږي:

۱۸ . ۲ الف .۱ ځمککچیزې یا هندسي لړپرلپسې (لنډ: لړی):

د ځمککچیزې پرلپسی څخه جوړه شوې لړی ځمککچیزه لړی بلل کیږي.
د هندسي پرلپسی د $a = 3.2^{k-1}$ څخه جوړه هندسي لړی په لاندې ډول ده:

$$s_1 = 3.2^0 = 3$$
$$s_2 = s_1 + a_2 = 3.2^0 + 3.2^1 = 3+6 = 9$$
$$s_3 = s_2 + a_3 = 3.2^0+3.2^1 + 3.2^2 = 3+6+12=21$$
.
.
$$s_n = s_{n-1} + a_n = 3.2^0+ 3.2+3.2^2+3.2^3+..+3.2^{n-1}$$
.
.

جمله : (اکسپلیځیت انځورونه):

د ځککچیزې پرلپسی د ak = a1 +(k- 1).d توکي سره جوړې پرلپسی څخه جوړې شوې هندسی لړئ لپاره صدق کوي:

Sn = a1+a2q+a3q²+...+a1qn-1=a1(qn-1)/(q-1);

q|=0;Sn=n.a1 q = 1

اوبی: د $q \neq 1$ لپاره باور لري:

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1} \\ s_n \cdot q &= \qquad a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n \end{aligned}$$

$$s_n - s_n \cdot q = a_1 \qquad - a_1 q^n$$
$$s_n(1-q) = a_1(1-q^n)$$
$$s_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

غوښتنه: اوبی د $q = 1$ لپاره د ګرانو لوستونکو د کور کار دی.

دلته یو بل ډول ښوونه پلی کوو: پرلپسی د-n ام غړي $an = 3.2n\text{-}1$ سره ورکړ شوې.
دلته په دې توګه د لړی غړي لړو غړو ته رالږيږي.

$s_{15} = 3 + 6 + 12 + \ldots + 24576 + 49152$ $\qquad s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots a_{n-1} + a_n$ $\qquad +$

$s_{15} . 2 = 6 + 12 + \ldots + 49152 + 98304$ $\qquad s_n.q = a_1.q + a_2.q + .. a_{n-1}.q + a_n.q$ $\qquad -$

$s_{15} - s_{15}.2 = 3 - 98304$ $\qquad s_n - s_n.q = a_1 - a_n.q$

$s_{15}(1-2) = 3-98304$ $\qquad s_n(1-q) = a_1 - a_n.q$

$s_{15} = (3-98304)/(-1)$ $\qquad s_n = (a_1 - a_n.q)/(1-q) = (a_1 - a_1.q^n)/(1-q)$

$s_{15} = 98401$ $\qquad s_n = a^1 . (1-q^n)/(1-q)$

له کمون یا کمښت وروسته د لړی په کښه لور تیك(یواځی) پورته لیکی لومړی توکی او د لاندې کرښی اخرنی توکی پاتیږي، نور ټول توکی یوبل سره لرې کوي، د بیلګي په توګه $a2-a1.q=0$ او یا $an-an-1.q=0$
دا روښانه ده چی q نه ارزښت صفر او نه ارزښت ۱ اخستلی شي ، په لومړي حالت که به مو پرلپسی
$a1, 0, 0, 0, 0 \ldots\ldots$
لرودی او په دوهم حالت که مو د پرلپسي $a1, a1, a1, a1$ سره سر او کار وي

بیلګي:

$1 - 7 ; -21 ; 63 ; -189 : \ldots\ldots q = -3; a_1 = 7$
غوښتونکی s_7

$s_7 = 7 . ((-3)^7 -1) / -3 -1 = -15316/ -4 = 3829$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کنترول:

$$a_7 = a_1 . q^6 = 7 . (-3)^6 = 5103 \quad , s_7 = 5103.(-3)^7-1/(-3)^7-(-3)^6 :$$

$$= 5103.2188/2916 = 3829$$

۱۸ . ۲ الف ۲ اریتمیتیکي لړی

دلته غواړو چی یو ځل بیا لنډ مګر د یوه لوي سرلیك په څیر اریتمیتیکي لړۍ ته یو نظر واچوو .یوه د اریتمیتیکی پرلپسی منځ ته راغلی یا جوړه شوې لړی اریتمیتیکی لړی نوموو. د

$$ak = 15 + (k - 1).4$$

سره جوړه اریتمیتیکي پرلپسی څخه جوړه شوې لړی په لاندې ډول ده:

$$s_1 = a_1 = 15$$

$$s_2 = s_1 + a_2 = 15+(15+4)=15+19=34$$

$$s_3 = s_2 + a_3 = 15+(15+4)+(15+2.4) = 15+19+23=57$$

.

.

$$s_n = s_{n-1} + a_n = 15+(15+4)+(15+2.4)+..+(15+(n-2).2+(15+(n-1).4$$

.

.

.

جمله : (د اریتمیتیکی لړی اکسپلیڅیت انځورونه):

$$ak = a1+(k-1).d$$ د

سره اریتمیتیکی پرلپسی څخه جوړه شوې لړی sn اریتمیتیکي لړی لپاره صدق کوي:

$$s_n = a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+..+(a_1+(n-1)d = (n /2) (2a_1 + (n-1)d)$$

اوبی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$s_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + (a_1 + (n-3)d) + (a_1 + (n-2)d) + (a_1 + (n-1)d)$$

$$s_n = (a_1 + (n-1)d) + (a_1 + (n-2)d) + (a_1 + (n-3)d) + \ldots + (a_1 + 2d) + (a_1 + d) + a_1$$

$$s_n + s_n = [2a_1 + (n-1)d] + [2a_1 + (n-1)d] + [2a_1 + (n-1)d] + \ldots + [2a_1 + (n-1)d] + [2a_1 + (n-1)d] + [2a_1 + (n-1)d]$$

$$2 \cdot s_n = n \cdot [2a_1 + (n-1) \cdot d]$$

$$s_n = \tfrac{n}{2} \cdot [2a_1 + (n-1) \cdot d]$$

غوښتنه:

وښايي چې sn=(n/2)(2a1+(n-1)d د sn=(n /2)(a1+an) سره په یوه مانا دي

۱۸ . ۶ د پرلپسی او لړیو پولی

موږ تراوسه داسی لړیو سره سراو کار لروده چی اخرنی توکي یی لاس ته راوړونکي وو. داسی لړی پایلړی بلل کیږي. داسي فکر هم کیدی شي چي د لړی اخرني غړي موجود نه وي، یعني لړی دې په خوښه دوام پیدا کولی شي. په عمل کی داسی پرابلمونو سره مخامخ کیږو چی دا مو ناپای لړیو ته هڅوي. دا څرګنده ده، چي داسی لړی اریتمیتیکی لړی نه دي، کم له کمه به ی اخرنی غړی په پوښتنه کی راتلی او یا د پاډیرو غړو زیاتون، په اریتمیتیي لړی کی بي مفهومه دی، څکه چي دواړه لویي د nد ارزښت سره په ټولو پولو لویږي په هندسی لړیو کی هم په یوه ناپای لړی کی د اخرني غړي او یا زیاتون پوښتنه بي مفهومه ده. دا روښانه ده چی د پیل غړی د|q| سره څل له امله تل جګیږي. دا د مثبت او همداډول د منفی q لپاره باور لري.

بیلګي:

۱ - اریتمیتیکي لړی 2+3+4+5+..... یو لاس ته راوړونکی د زیاتون یا جمعی ارزښت نه لري، څکه چی هر راتلونکی زیاته وونی د ټولو پولو لوییږي یاجګیږي۰

۲ – څمککچیزه یا هندسي لړی 2+3+4,5+6,75+10,125+15,1875+...... د لومړي توکي a1 = 2 او د ویش q = 1,5 سره په ټولو پولو لوییږي. یا جګیږي نه اخر توکی او نه د جمع ارزښت معلومیدی شي. د پای توکوګڼ زیاتون sn او اخرنی توکی an شمیریدونکی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۳ - ناپای ځمککچیزه یا هندسي لړۍ

1,5-3+66-122+24-48+966-....... د a1 =1,5 او q= -2

سره پای ارزښت زیاتون نه لري، ځکه چې د توکو مطلقه ارزښت د هر مخکي پولی څخه جګیږي یا لویږي .له دې سره به ځرګنده شوې وي چې کله د ناپای هندسي لړۍ د زیاتون ارزښت پای دی.

پیلبیلګه :

یو سخی سړی غواړي د معیوبو هستوګنځی ته بسپنه ورکړی . په لمړۍ میاشت کی دی ۱۰۰۰ افغانی بسپنه ورکوي او په نورو راتلونکو میاشتو کی د هغی د مخه میاشتی نیمایي یعنی په دومه میاشت کی ۵۰۰ افغانی او په دریمه کی ۲۵۰ افغانۍ او داسی نور.

دلته a1=1000او q=1/2دي. دوخت د کموالي له امله دا لړی باید پای لړۍ وي ، مګر موږ دې پوښتنی ته تیوریتیکي ځواب ورکوو.

د پای ځمککچیزو لړیو لپاره کیدی شي دلته د زیاتون له

فرمول $s_n = 1000(1-0,5^5)/ (1-0,5)$ څخه کار واخستل شي، که چیرې n یو ناپاي لوي ارزښت نیولی شوی. که په دې فرمول کی موږ ته معلوم ارزښتونه کیښول شي، نو لاس ته راځي:

$$s_n = 1000(1-0,5^5)/ (1-0,5)$$

اوس کیدی شي ولیکو $s = 1000(1-0,5^n)/(1- 0,5) = 2000.(1-(1/ 2)^n)$

که n له ټولو پولو تیر شي، باید د $(1/2)^n$ له امله دا مات (1/2) تل کوچنی شي.

دې مات (1/ 2) باندې کیدی شي، چی د لویو n توکو لپاره، بالاخره صرف نظر وشي.

دلته روښانوي چی په دې توګه د زیاتون ارزښت یوه ناپای هندسي لړۍ

1000+500+250+125+65,50+32,75+......

جوړوي، کومه چی ځان و 2000 ته نزدې کوي او هغه ته هیڅ نه رسیږي. دا سړی زیات له زیاته کیدی شي 2000 افغانی خیرات ورکړي.

یادونه : هغه د دې برخې په سر کې پوښتنه هم په همدې توګه ځواب کیدی شي۰

پرلپسی او د پرلپسی لړۍ په لوړو شمیرپوهنوکی غوره رول لوبوي« ډیرې ښوونی (اوبښونې) په دې ولاړې دي، چی ایا یوه ټیك ټاکلی پرلپسی یوې معلومی یا ټاکلی پولی ته هڅه کوي او که نه؟ چی په اول حالت کی پرلپسی(konvergent لیمټ لرونکی

(c) ketabton.com: The Digital Library

یاپوله لرونکي(بلل لکیږي او په دوهم حالت کی پرلپسی (divergent لیمټ یا پوله نه لرونکی) بلل کیږي.

بیلګه :

د ... مخ په اول او په درېمې بیلګو کی راوړل شوې پرلپسی دیورګنت یا پوله نه لرونکی ، په ۲ –مه بیلګه کی پرلپسی کونورګنت یا پوله لرونکی ده او د صفر لور ته هڅه کوي یا صفر ته کونورګنت ده یعني ددې پرلپسي پوله صفردی. او ۴ -مه بیلګه کی پرلپسی پوله لري او د ۳ لور ته هڅه کوی، یعني پوله یی ۳ دی.

پرلپسی شته چی د جګیدو سره یوه ټاکلی ګڼ ته په خوښه ورنزدې کیدی شي.د دې پرلپسی د په خوښه لویو غړو او د دې ګڼ کمون ترمنځ بالاخره دومره کوچنی کیږي، چی په جبشمیرني باندې هم نه شي شمیرل کیدی .

موږ د پرلپسیو دا ډول ځاننیونی، بی له جب شمیرنی یا جبشمیري، په لاندې بیلګو کی څیړو.

د پرلپسیو غړي

1 ; 1 /2; 1 /3 ; 1 /4 ;....| 0 ; 1 / 3 ; 2 / 4 ; 3 /5 ; 4 /6;.. | 3 /29 /4 ; 15 /8 : 33 /16

1;1/2;1/3;1/4;..|0;1/3;2/4;3/5;4/6;..
|3/29/4;15/8;33/16

د لاندې سره

$a_k = 1 /k$ | $a_k = (k - 1)/(k+1)$ | $a_k = 2+(- 1 /2)^k$

د k د جګیدو سره تل دا پرلپسځانونه ځانونه لاندې ګڼونو ته نزدې کوي

g = 0 | , g = 1 | g = 2

د ګراف ټکي یی تل د جګیدونکی غړی نمرې k سره د

دx - محور سره غبرګ | دx - محور سره غبرګ | x -محور ته

د y = 2 سره | د y=1 سره او په ریښتونی

له لاندې او پورته بدل | له لاندې راتلونکي

له پورته راتلونکي

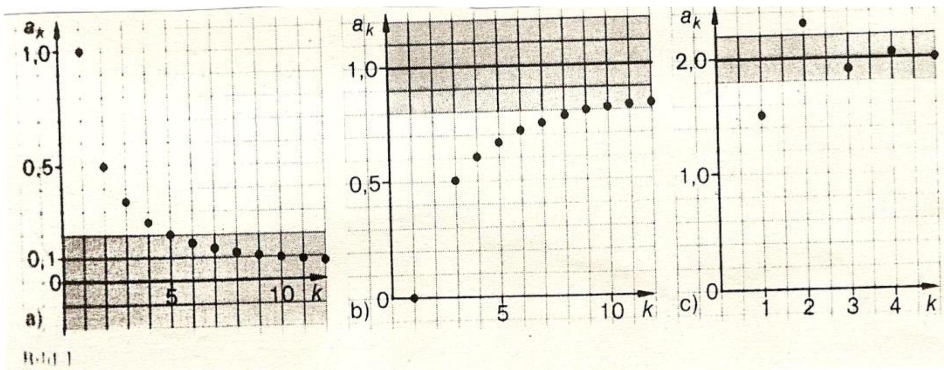
راتلونکی

که په کرښه یو دواړو لورو ته پټی وکښل شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $y= 2$ سره د $y = 1$ سره د $y = 0$ سره

نو د پوره لويي k نمره توکي سره د پرلپسی ټول غړی په دې پټی کی دننه پراته دي.



دا لاندې ديفرنځ يا کمون

$\lvert a_k - 2 \rvert$	$\lvert 1 - a_k \rvert$	$\lvert a_k - 0 \rvert$

دا مانا لري، چی د جګيدونکی k نمرې توکيه خورا کوچنی کيدی شي. دا پوښتنه مو چی د کوم غړی ak لپاره دا کمون د بيلګي په توګه له 0,0001 کوچنی کيدی شي، لاندې ناسمساوات ته را هڅوي

$$|a_k - 0| < 0{,}0001$$
$$\left|\frac{1}{k} - 0\right| < 0{,}0001$$
$$\frac{1}{k} < 0.0001$$
$$k > 10000$$

$$|1 - a_k| < 0{,}0001$$
$$\left|1 - \frac{k-1}{k+1}\right| < 0{,}0001$$
$$\left|\frac{(k+1)-(k-1)}{k+1}\right| < 0{,}0001$$
$$\frac{2}{k+1} < 0.0001$$
$$\frac{2}{0{,}0001} < k+1$$
$$19999 < k$$

$$|a_k - 2| < 0{,}0001$$
$$\left|2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^k - 2\right| < 0{,}0001$$
$$\left|\left(-\frac{1}{2}\right)^k\right| < 0{,}0001$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)^k < 0{,}0001$$
$$k \cdot \lg\tfrac{1}{2} < \lg 0{,}0001 \| : \lg\tfrac{1}{2} < 0 \ (!!)$$
$$k > \frac{\lg 0{,}0001}{\lg \frac{1}{2}}$$
$$k > \frac{-4}{-0{,}3010}$$
$$k > 13{,}29$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې مانا، : د ټولو پرلپسی غړو د

$k > 13$	$k > 19999$	$k > 10000$

سره کمون $|a k - g|$ له $0,0001$ کوچنی دی .
د ګراف لپاره باور لري، چی دا ټول ټکي د یوې پټۍ یا تسمې په دننه کی پراته دي
سور یي $2.0,0001$ په کرښه د مساوات

$y = 2$	$y = 1$	$y = 0$

$y = 0 \quad y = 1 \quad y = 2$

سره پروت وي .
که دا د $0,0001$ په ځاي کی یو په خوښه کوچنی رییل ګڼ ورکړ شي، او وله دې وغوښتل شي چی کمون یی له دې ګڼ کوچنی دی نو په ورته توګه مو لاندېنامساواتو ته لاربښودوي.

$\vert a_k - 0\vert < \varepsilon$	$\vert a_k - 1\vert < \varepsilon$	$\vert a_k - 2\vert < \varepsilon$
$\left\vert\frac{1}{k} - 0\right\vert < \varepsilon$	$\left\vert\frac{k-1}{k+1} - 1\right\vert < \varepsilon$	$\left\vert 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^k - 2\right\vert < \varepsilon$
$\frac{1}{k} < \varepsilon$	$\left\vert\frac{(k-1)-(k+1)}{k+1}\right\vert < \varepsilon$	$\left\vert\left(-\frac{1}{2}\right)^k\right\vert < \varepsilon$
$k > \frac{1}{\varepsilon}$	$\left\vert\frac{-2}{k+1}\right\vert < \varepsilon$	$\left(\frac{1}{2}\right)^k < \varepsilon$
	$\frac{2}{k+1} < \varepsilon$	$k \cdot \lg\frac{1}{2} < \lg\varepsilon \Vert : \lg\frac{1}{2} < 0$ (!!)
	$\frac{2}{\varepsilon} < k+1$	$k > \frac{\lg \varepsilon}{\lg \frac{1}{2}}$
	$\frac{2}{\varepsilon} - 1 < k$	

دا په دې مانا چی : د ټولو پرلپسیو لپاره د

$k > \log \varepsilon / (\log(1/2))$	$k > 2/\varepsilon - 1$	$k > 1/\varepsilon$

سره کمون $\frac{q^n}{1-q}$ دی .
پرلپسی له دې خویونو سره کونورګنت بلل کیږي او ګڼ g یی پوله.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند ۱۸ .۱ :

یوه پرله پسی کونورګنځ (لاتین Konvergent convergere یو د بل په لور ور ځغلیدل یعني یو بل ته ورنزدېکیدل(بلل کیږي یعني د یوې ټاکلی پولی په لور هڅیږی، کله چی د هغی غړي د جګیدونکی ایندکس n سره یوې پولی ته په خوښه نزدې شي. یوه لړۍ کونورګنت یا پوله لرونکی بلل کیږي، کله چی د برخه زیاتون پرلپسی د جګیدونکی n سره یوې پولی ته په خوښه نزدې شي.

هغه پرلپسی چی د صفر په لور هڅیږي صفرپرلپسی یی بولو هغه پرلپسی چی یوې ټاکلی پولی ته نه هڅیږي .دیورګنت بلل کیږی ») دا وروسته ه تر څیړنی لاندې نیول شوي دي.

جمله :

د ځمککچیزې یا هندسي لړی پولې تج ت لنې یا کونور ګنت لپاره شرطونه:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=|q|<1$$

که $|q|<1$ وي ، پس د پای ځمککچیزې لړی لپاره د زیاتون فرمول داسی دی

$$s_n=a_1\frac{1-q^n}{1-q}$$

د q^n ارزښت څخه تېرېدی شو یعنې ترې صرفنظر کیدی شي، که n پوره لوي وټاکل شي.

جمله :

دناپای ځککچیزې لړۍ ...+a1+a1.q+a1.q²+a1.q3 د زیاتون sn سره پوله
s = a1 / (1-q) تیك هلته لري، کله چی|q|<1

$$n=n_0(\varepsilon);...(18.7)$$

وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله :

هره پرلپسی د $a_k = \frac{b}{k^n}(b \in R; n, k \in N)$ سره یوه صفر پرلپسی ده

جمله:

هره پرلپسی د $a_k = cq^n (c \in R$ سره د1>|q| لپاره یوه صفرپرلپسی ده۰

دلته غواړو چې دا د پرلپسی د پولی کلیمه لږ نوره هم زوره کړو.
د یوې پرلپسی د غړو an ځاننیونی څېړنه د تل جګېدونکي n لپاره،وایو چې:
که n د oe (ناپای) په لوروهڅیږي او یا لنډ n—›oe ، نو دا مو د پولی ارزښت کلیمي ته بیایي او یا کونورګنځ (convergence). موږ پرلپسی{ an}={1/n} په پام کی نیسو، د جګېدونکي n سره، ګورو چې د پرلپسی غړي تل 0 ته په خوښه یا په زړه پورې ور نزدې کیږي .
که سړی هرڅومره کوچنی ګڼ 0< ε وټاکي د یوه معلوم($n = n_0(\varepsilon)$ د لته) $n_0(\varepsilon)$ د ε په واک کې دی) څخه وروسته ټول ګنونه د0 په ε -چاپیریال کی پراته دي

$$|a_n| = \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \forall\, n > n_0(\varepsilon). \qquad (18.1)$$

سړي کړی شي چی دا n دلته په ساده ډول ورکړي. د) ۱۸ . ۱ (له امله دی

$$n_0(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}. \qquad (18.2)$$

د

100 / 1 =

لپاره . n0 = 100 نو | 100 / 1 > | an د ټولو n > 100 لپاره، یعني د n = 101, n
=102 , n = 103........ لپاره. د = 1 / 1000000 لپاره لرو = ( ) n0
1000000پس, | 1000000 /1 > | an د ټول n > 1000000 لپاره

په لاندې حالت کی سړی وایي: چی پرلپسی
/n{ 1 {
کنورګنت ده. هغه د پولې 0 = a لور ته کونورګنت کیږي. د دې لپاره لیکو)

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ او یا په ساده ډول

$$\frac{1}{n} \to 0 \qquad (18.3)$$

(د 1/n لیمس د n—>oe لپاره په 0 مساوي دی او یا ساده 1/nد0 په لور ځي)

د $\{a_n\} = \{(-1)^n (1+\frac{1}{n})\}$ لاندې پرلپسی په څېړنه کره لاس ته راځي: د جوړه یا جفت n لپاره پرلپسی an د+1 لورته نزدې کیږي او د ناجوړه یا طاق n لپاره پرلپسی د1- لورته نزدې کیږي. د لته سړی د دوه پولو +1 او 1- څخه نه غږیږي بلکې دپرلپسی ددوه ډیرۍ شوو ټکو یا ځاي راټولشوو ټکو څخه . پرلپسی کونورګنت نه ده بلکه دیورګنت (divergence(ټیګ : ناټاکلی دیورګنس)ده ۰

پرلپسی {an}={n2} هم دیورګنت ده. دا چې an د جګیدونکی n سره د oe یا ناپای لورته ځي پس د هرڅومره لوي ارزښت K څخه اوړي یا جګیږي، نو سړی د oeپه لور د ټاکلی دیورګنت څخه غږیږي.

$$\lim_{n\to 0} n^2 = +\infty \vee n^2 \to +\infty; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (18.4)$$

په پورته کې V د یا لپاره ځای په ځای ده

له دې پیل یادونوڅخه اوس باید د پولو(حدونو) کلیمی کره وپیژندل شي:

پیژند ۱۸ . ۲ :

یو پرلپسی $\{a_n\}$ { an { پوله یا حد a لري

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow a_n \to a; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (18.5)$$

که د هر یوه (هرڅومره کوچنی هم) $\varepsilon > 0$

< 0

لپاره یو $n_0 = n_0(\varepsilon)$

داسی موجود وي چی باوري وي

$$| a_n - a | < \varepsilon; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (18.6)$$

د ټولو $n = n_0(\varepsilon); \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (18.7)$

وایو چی پرلپسی } an { کونورګنت یا په بل عبارت پرلپسی } an { د پولی a په لور کونورګنت کیږي .که پرلپسی داسی پوله ونه لري، نو دیورګنت بللکیږي(یا دیورګنت کیږي) .

(c) ketabton.com: The Digital Library

که یوې دیورګنتی پرلپسی } an { و هر (په خوښه لوی) ګن K لپاره یو
)n0 = n0(K
داسی موجود وي چی باوري وي

$$a_n > K \quad \text{یا} \quad a_n < -K \qquad (18.8)$$

د ټول

$$n > n_0(K) \qquad (18.9)$$

نو د پرلپسی څرګند یا معلوم دیورګنت بلل کیږي د + oe په لور اویا - oe په لوراو ددې لپاره لیکي

$$\lim_{n\to\infty} a = +\infty \iff (\text{په همدې ډول}) \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \qquad (18.10)$$

یا لنډ:

$$a_n \to +\infty \Rightarrow (\text{یا په همدې ډول}) \; a_n \to -\infty \qquad (18.11)$$

که یوه پرلپسی دیورګنت او ټاکلی دیورګنت نه وي، نو ناټاکلی دیورګنت بلل کیږي.
ددې پرلپس، $\{a_n\} = \{n/n+1\}$ څخه او د لاندې فورم بدلولو

$$a_n = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$$

اتکل کیدی شي چی دا پرلپسی پوله $a = 1$ لري، یعني $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(n/n+1) = 1$

اوس باید د (۱۸ . ۵) تر (۱۸ . ۷) وښوول شي . دا $n/(n+1) < 1$ له امله لاس ته راځي :

$$|a_n - 1| = |[n/(n+1)] - 1| = 1 - n/(n+1) = (n+1-n/(n+1) = 1/(1/n) < 1/\varepsilon$$

د $n+1 > n \iff n > (1/\varepsilon) - 1 = n_0(\varepsilon)$ لپاره .

د $= 1/100$ لپاره لرو $n_0(\varepsilon) = 99$. نود ټولو $n > 99$ لپاره داسې دی

$$|[n/(n+1)] - 1| = 1/(n+1) < 1/100.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ددې پورته سره کیدی شي چی تصدیق کړو چی: هر $\varepsilon>0$ ته یو $n_0(\varepsilon)=(1/\varepsilon)-1$ داسی موجود دی چی $|a_n-1|<\varepsilon$ د ټولو $n>n_0(\varepsilon)=(1/\varepsilon)-1$ لپاره دی.

دا ساده بیلګه د تعریف ۱۸ . ۲. پرابلم په ګوته کوي. دا تعریف جوړونکی نه دی، دا نه وایي چی پوله څرنګه پیداکیدی شي .مخکي له دې چی پولې ته تګ (کونورګنځ Konvergenz) وښوولی شو، نو پولې a ته ضرورت دی . مخکي له دې چی کونورګنځ

اټکل کیدی شي چی دا پرلپسی پوله a = 1 لري، یعني

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (n/n+1) = 1$$

اوس باید د (۱۸ . ۵) تر (۱۸ . ۷) وښوول شي . دا $n/(n+1) < 1$ له امله لاس ته راځي:

$$|a_n - 1| = |[n/(n+1)] - 1| = 1 - n/(n+1) = (n+1-n/(n+1) = 1/(1/n) < \varepsilon$$

د $n > (1/\varepsilon) - 1 = n_0(\varepsilon) \Longleftrightarrow n+1 > n$ لپاره .

د $= 1/100$ لپاره لرو $n_0(\varepsilon) = 99$. نود ټولو $n > 99$ لپاره داسې دی

$$|[n/(n+1)] - 1| = 1/(n+1) < 1/100.$$

ددې پورته سره کیدی شي چی تصدیق کړو چی: هر $\varepsilon>0$ ته یو $n_0(\varepsilon)=(1/\varepsilon)-1$ داسی موجود دی چی $|a_n-1|<\varepsilon$ د ټولو $n>n_0(\varepsilon)=(1/\varepsilon)-1$ لپاره دی.

ددې پورته سره کیدی شي چی تصدیق کړو چی: هر $\varepsilon>0$ ته یو $n_0(\varepsilon)=(1/\varepsilon)-1$

داسی شته دی چی $|a_n-1|<\varepsilon$ ،

د ټولو $n>n_0(\varepsilon)=(1/\varepsilon)-1$ لپاره دی .

دا ساده بیلګه د پیژند ۱۸ . . ۲ پرابلم په ګوته کوي. دا تعریف جوړونکی نه دی، دا دا نه وایي چی پوله څرنګه پیداکیدی شي .مخکي له دې چی پولې ته تګ (کونورګنځ Konvergenz)وښوولی شو، نو پولې a ته اړتیا شته دی . مخکي له دې چی

(c) ketabton.com: The Digital Library

کونورګنځ (ټولې تج تلنه) وښايو نو بايد پوله مو پيژندلي وي يا کم له کمه مو ګومان په راغلی وي.
په ټوليزه(عمومي) توګه د $n_0(\varepsilon)$ شميرل هم د ستونځو ډك دي. د پولی عملي شميرلو لپاره داسی عمليو يا کاره ونو ته اړتيا ده، چې بی د پيژند ۱۸ . ۲ د هر وار استعمال څخه ټولی راپيدا کړی شو. له دې پرابلم سره ۱۸ . ٤ ـامه برخه ځان مشغولوي.
کله کله دا بسوالی يا بسيا کوي چې سړی دومره پوه شي چې ايا پوله وجود لري يا شته دئ (ايا کونورګنت کيږی) بی له دې چې هغه وپيژني او يا يی وشميري. داسی د موجوديت ويناوي يواځي د کونورګنځ کريتيرين (- خويونه) کولی شي، له کومو څخه چې لاندې يو ورکول کيږي. دې ته بايد ګوته ونيسو چې دا کريتيرين د مخه د پولی پو هيدل ضرورر نه نيسي) دا د مخه نيونه نه ده يعني فرضيه نه ده) .

جمله ۱۸ . ۱:

هره بنده (محدوده) مونوتون پرلپسی an کونورګنت ده ۰

دا کريتيريوم څرګند د ليدلو دی. که يوه پرلپسی تل جګيږي (کميږی ،ټيټيږي) او ټاکلی يا معلوم پای ارزښت K څخه نه اوړي(K څخه نه ټيټيږي) نو بايد an يوځاي کی راپنډ شي. دا د مونوتوني له امله يواځي په يوځاي کی کيدی شي.

يادونه : څه ګنونه چې په يوځاي کې سره ډېر راټول شي ما ورته ډيری ليکلي، دا ښه نه ده، ځکه، چې ډيری مې د ډيری ياني د سيټ لپاره کارولی ، نو دلته ليکم، چې »راپنډ« شي۰

جمله ۱۸ . ۱ د بيلګي په توګه په دريمه برخه کی راوړلشوي، د طبعي لوګاريتم بنسټ په څيرګڼ e سره اړيکو يا رابطو کی استعمال لري . سړی د يو څه ستونځو سره ښوولی شي چې لاندې باوري دی

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < 3.$$

له دې امله دا پرلپسی

$$\{a_n\} = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$$

مونوتون او بنده (محدوده) ده او د جملی ۱۸ . ۱ له امله کونورګنت ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ددې پوله $e = 2,71828$ ده (پرتله یا مقایس برخه ۳ . ۱)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e. \tag{18.12}$$

۱۸ . ۴ د پولی شمیرنه

په دې برخه کی غواړو چی قاعدې ورکړو د کومو په مرسته چی د پیږندلشوو پرلپسی د کونورګنت څخه د نورو کونورګنت لاس ته راوستی شو، او همداسی، چی د هغی په مرسته د پیژندلشوو پرلپسیو د پیژندل شوي پولی ارزښت په مرسته د نورو پرلپسیو پولی ارزښت شمیرل کیدی شي.
لاندې بنسټیزه جمله ښاي چی د ځانګړو شرایطو لاندې د ګنونو پرلپسیو سره همداسی شمیرل کیدی شي لکه پخپله د ګڼونو سره.

جلمه ۱۸ . ۲ :

که پرلپسی $\{a_n\}$ او $\{b_n\}$ (پای)پوله ارزښت a اوb ولري ، یانې

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b, \tag{18.13}$$

وي، نو باوري دي

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b, \tag{18.14}$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b, \tag{18.15}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}, \; b_n \neq 0, b \neq 0, \tag{18.16}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = a^b, \; a_n > 0, a > 0, \tag{18.17}$$

$$\lim_{n\to\infty} \log a_n = \log a, \; a_n > 0, a > 0. \tag{18.18}$$

دا جمله دوه ګوني وینا کوي: که د پرلپسیو غړو an او bn د کونورګنت عددونو پرلپسي د جمعې، تفریق، ضرب (زیاتون کمون ، ځل) او ویش، پوتنځ یا لوګاریتم نیولو ، د یوې نوې پرلپسي یا ترادف غړي لاس ته راولي نو دا نوې پرلپسي (ترادف) کونورګنت ده او

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پولی ارزښت یی په ترتیب د کونورګنتو پرلپسیو یا ترادفون جمعه،تفریق،ضرب(زیاتون، کمون، حٔل)، ویش ، پوتنخ او لوګاریتم دی.
په لاندې کی غواړو یواځی اړیکی (۱۸ . ۱۴) وښایو. د ښوولو لپاره یی د پولی ارزښت پیژند ۱۸ . ۲ څخه غواړوکار واخلو (استعمال کړو) . نیونی (۱۸ . ۱۳) دا مانا لري، چی هر
< 0
ته یو
$(n1)$ او یو $(n2)$
داسی شته دی، چي باوري کوي $|a_n - a| < \varepsilon$ دتولو $n > n_1(\varepsilon)$, لپاره ،
$|b_n - b| < \varepsilon$ د ټولو $n > n_2(\varepsilon)$, لپاره‌پس معتبر دي
$|a_n - a| < \varepsilon$ او $|b_n - b| < \varepsilon$ د ټول $n > n_0(\varepsilon) = \max\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\}$
اوس باید یواځي وښایو چی د یوه ټاکلي n چه $|(a_n \pm b_n) - (a \pm b)|$
د هر ε لاندې راټیټیدلی شي. لاندې باور لري

$$|(a_n \pm b_n) - (a \pm b)| = |(a_n - a) \pm (b_n - b)| \le |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

د ټولو $n > n_0\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$. لپاره
په دې توګه (۱۸ . ۱۴) وښوول شوه.
د جملی ۱۸ . ۲ استعمال کی باید برسیره په نیونو یا فرضیو، چی په (۱۸ . ۱۵) تر (۱۸ . ۱۸) پورې شوي ټیك په پام کی ونیول شي چی پرلپسی $\{an\}$ او $\{bn\}$ څرګند پای پولی ارزښتونه a او b باید ولري. که د بیلګي په توګه $a_n \to \infty$, او $b_n \to \infty$, وي، نو فرمول (اجازه نه لرونکی استعمال !) (۱۸ ، ۱۴) په یوه په نامه ناټاکلي افادې په لورځی یعنی $\infty - \infty$,

$$(a_n - b_n) \to \infty - \infty. \tag{18.19}$$

که باور ولري $a_n \to 0, b_n \to \infty$، نو سړی د اجازې نه لرلو استعمال (۱۸ . ۱۵) یوه بله ناټاکلی افاده لاس ته راولي:

$$(a_n \cdot b_n) \to 0 \cdot \infty. \tag{18.20}$$

په لاندې کې .bzw د همداسې‌په معنا دی.

$$a_n \to 0,\ b_n \to 0 \quad \text{bzw.} \quad a_n \to \infty,\ b_n \to \infty,$$

$$\frac{a_n}{b_n} \to \frac{0}{0} \quad \text{bzw.} \quad \frac{a_n}{b_n} \to \frac{\infty}{\infty}. \tag{18.21}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د (۱۸ . ۱۷) استعمال مو د $a_n \to 0,\ b_n \to 0$ همداسې د $a_n \to \infty,\ b_n \to 0$ همداسې $a_n \to 1,\ b_n \to \infty$ حالتونو کې مو درې نورو ناټاکلو افادو ته لاربنود وي.

$$a_n^{b_n} \to 0^0 \quad \text{bzw.} \quad a_n^{b_n} \to \infty^0 \quad \text{bzw.} \quad a_n^{b_n} \to 1^\infty. \qquad (18.22)$$

په پورته انځورشوو اړیکو کی لاندې افادې

$$\infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0^0, \quad \infty^0, \quad 1^\infty \qquad (18.23)$$

ناټاکلی افادې بلل کیږي.

داسې پرلپسی چی د جملې ۱۸ . ۲ فورمال استعمال څخه ناټاکلو افادو ته لابنودوي ، دیورګنت او یا به مختلفو ارزښتو ته کونورګنت وي. دا یوې ځانګړی څیړنی ته اړ دي.

مخکی له دې چی داپوښتنی ځوابوو، نو باید یوڅو تیپیکي پرلپسی وڅیړل شي، کومی مو چی په نامه ټاکلو افادو ته لاربنود وي، که څه هم د جملی ۱۸ . ۲ نیوني یا فرضیي پوره نه وي.

که an —>+oe او bn —>+oe باور ولري نو طبعآ لاس ته راځي

$a_n + b_n \to \infty + \infty = \infty$	.........(18.24)
$a_n . b_n \to \infty . \infty = \infty$	.........(18.25)
$a_n - b_n \to \infty - \infty = \infty$	.........(18.26)

دا اړیکي (۱۸ . ۲۴) تر (۱۸ . ۲۵) طبعآ د ناڅرګندې پولی ارزښت - oe لپاره هم باوري دي.

که an —> a او bn —> oe وي، نو باور لري :

$a_n + b_n \to a + \infty = \infty,$	(18.27)
$a_n \cdot b_n \to a \cdot \infty = \infty,\ a > 0,$	(18.28)
$a_n \cdot b_n \to a \cdot \infty = -\infty,\ a < 0,$	(18.29)
$\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{\infty} = 0,$	(18.30)
$a_n^{b_n} \to a^\infty = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 < a < 1, \\ \infty & \text{für } a > 1, \end{cases}$	(18.31)
$a_n^{-b_n} \to a^{-\infty} = \begin{cases} \infty & \text{für } 0 < a < 1, \\ 0 & \text{für } a > 1, \end{cases}$	(18.32)
$b_n^{a_n} \to \infty^a = \infty,\ a > 0.$	(18.33)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لاندې لپاره باور لري :

$$a_n \to 0,\ b_n \to b, \tag{18.34}$$

$$\frac{b_n}{a_n} \to \frac{b}{0} = \infty,\ b > 0, a_n > 0, \tag{18.35}$$

$$a_n^{b_n} \to 0^b = \begin{cases} 0 & \text{für } b > 0, \\ \infty & \text{für } b < 0,\ a_n > 0, \end{cases} \tag{18.36}$$

$$\log a_n \to \log 0 = -\infty, a_n > 0. \tag{18.37}$$

د $a_n \to 0$ او $b_n \to \infty$ لپاره باور لري یا صدق کوي.

$$\frac{a_n}{b_n} \to \frac{0}{\infty} = 0,\ a_n > 0, \tag{18.38}$$

$$\frac{b_n}{a_n} \to \frac{\infty}{0} = \infty,\ a_n > 0, \tag{18.39}$$

$$a_n^{b_n} \to 0^\infty = 0,\ a_n > 0. \tag{18.40}$$

په دې همدا اوس ښوول شوي اړیکو کی لاندې افادې تاکلی افادی دي (نیونه د (۱۸ . ۲۴) تر (۱۸ . ۴۰) پورې دی په پام کي ونیول شي) :

$$\infty + \infty = \infty,\ a + \infty = \infty,\ \infty \cdot \infty = \infty,\ a \cdot \infty = \infty,$$
$$\frac{a}{\infty} = 0,\ \frac{a}{0} = \infty,\ \frac{0}{\infty} = 0,\ \frac{\infty}{0} = \infty,$$
$$\infty^\infty = \infty,\ a^\infty = \infty\ (a > 1),\ a^\infty = 0\ (0 < a < 1), \tag{18.41}$$
$$0^\infty = 0, 0^a = 0\ (a > 0),\ 0^a = \infty\ (a < 0),$$
$$\infty^a = \infty\ (a > 0),\ \infty^a = 0\ (a < 0),\ \log 0 = -\infty.$$

په لاندې بیلګه کی به یو څو ګنونپرلپسی ورکړ شي، کومی چی د تاکلو افادې په لور لاربښودوي) بیایي :)

بیلګه ۱۸ . ۳:

$$n^2 = n \cdot n \to \infty \cdot \infty = \infty, \qquad \sqrt{n} = n^{\frac{1}{2}} \to \infty^{\frac{1}{2}} = \infty, \qquad \frac{1}{n^2} \to \frac{1}{\infty} = 0,$$

$$2^n \to 2^\infty = \infty, \qquad \frac{1}{n^n} = \left(\frac{1}{n}\right)^n \to 0^\infty = 0, \qquad \log\frac{1}{n} \to \log 0 = -\infty,$$

$$\frac{n}{\sin\frac{1}{n}} \to \frac{\infty}{\sin 0} = \frac{\infty}{0} = \infty, \qquad n \cdot \log\frac{1}{n} \to \infty \cdot (-\infty) = -\infty.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

هغه پرلپسی چی د ناټاکلو افادو(۱۸ . ۲۳) . په لور مو لاربښودوي، څه ستونځي پیښوي. دا د هوښیارو فورمبدلولو یا ښه بدلون په بنسټ په داسی پرلپسو بدلیږي چی څرګنده – یا ټاکلي افادی (۱۸ . ۴۱) په لور مو بیایي یا چی د هغي کونورګنتځانونی معلوم دي . لومړی دې یو څو ځانګړې پرلپسی وکتل شي:

پرلپسی مو د $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ غړو سره د نا ټاکلی افادې 1^∞ په لور بیایي او د (۱۸ . ۱۲) له مخی پوله ارزښت e لري. سړی ښوولی شي (دلته دې دا نه ښوول کیږی) ، چی دا پولی ځاننیونه ساتلي پاتی کیږي، که څوك د an = 1/n په ځاي یوه په خوښه د صفر پرلپسی $a_n \to 0, a_n \neq 0$ وټاکي.

جمله ۱۸ . ۳ :

د هرې په خوښه صفر پرلپسی $\{a_n\}$,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \quad a_n \neq 0, \tag{18.42}$$

gilt

$$\lim_{n\to\infty} (1+a_n)^{\frac{1}{a_n}} = e. \tag{18.43}$$

بیلګه ۱۸ . ۴ : د جملی ۱۸ . ۳ په مرسته د بیلګي په توګه لاس ته راځي:

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \left(1+\left(-\frac{1}{n}\right)\right)^{-n\cdot(-1)} = \left(\left(1+\left(-\frac{1}{n}\right)\right)^{-n}\right)^{-1} \to e^{-1} = \frac{1}{e},$$

$$\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = \left(1+\frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{a}\cdot a} = \left(\left(1+\frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{a}}\right)^a \to e^a, \quad \left(\frac{n+2}{n-3}\right)^n = \left(\frac{1+\frac{2}{n}}{1-\frac{3}{n}}\right)^n = \frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{3}{n}\right)^n} \to \frac{e^2}{e^{-3}} = e^5,$$

$$\left(\frac{n+2}{n-3}\right)^{2n-3} = \frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{2n-3}}{\left(1-\frac{3}{n}\right)^{2n-3}} = \frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{-3}\cdot\left(1+\frac{2}{n}\right)^{2n}}{\left(1-\frac{3}{n}\right)^{-3}\cdot\left(1-\frac{3}{n}\right)^{2n}}$$

$$= \frac{\left(1-\frac{3}{n}\right)^3}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^3}\cdot\frac{\left(\left(1+\frac{2}{n}\right)^n\right)^2}{\left(\left(1-\frac{3}{n}\right)^n\right)^2} \to \frac{1^3}{1^3}\cdot\frac{(e^2)^2}{(e^{-3})^2} = e^{10},$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2 \cdot \frac{1}{n}} = \left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} \to e^0 = 1,$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n \cdot n} = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^n \to e^\infty = \infty.$$

د $a_n \to 0$ لپاره پرلپسی sinxn)/n) د ناټاکلی افادې 0/0 په لور ځي.

لاندې باور لري :

جمله ۱۸ . ۴: د هرې په خوښه صفر پرلپسی

(18.44)	$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, a_n \neq 0,$

لپاره باور لري (د لندې الماني ژباړه= an په لینده کچ)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin a_n}{a_n} = 1 \quad (a_n \text{ im Bogenmaß}). \qquad (18.45)$$

اوبنوه :د $\sin(-a_n) = -\sin a_n$ له امله او لەدې امله

چې $\frac{\sin(-a_n)}{-a_n} = \frac{\sin a_n}{a_n}$ دی، دلته دې(۱۸ . ۴۵) یوازې د an> 0 لپاره وښوول شي.

موږ دلته د یوونګردی یا واحد داېرې د کونج بلواک څخه کټه اخلو؟؟؟ څیره ش ۱۸ . ۱) د

درې ګوډي OAB منځهواره: $\frac{1 \cdot \sin a_n}{2}$,

د ګردۍ سکتور یا ګردیبرخه OABمنځهوارې

څخه‌کوچنی ده، او دا بیرته د درېګوډي $\frac{1^2 \cdot a_n}{2}$,

OACد منځهوارې. $\frac{1 \cdot \tan a_n}{2}$

څخه کوچنی دی. له دې امله باور لري

$\sin a_n < a_n$ او $a_n < \tan a_n = \frac{\sin a_n}{\cos a_n}$.

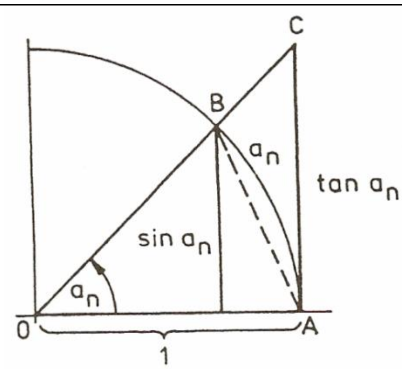


Bild 18.1

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوبنونه :د $\sin(-a_n) = -\sin a_n$

له امله او له دې امله چې $\frac{\sin(-a_n)}{-a_n} = \frac{\sin a_n}{a_n}$

دی، دلته دې(۱۸ . ۴۵) یواځې د $0 < an$ لپاره وښوول شي.
موږ دلته د یوونګردی یا واحد داېرې د کونج بلواک څخه ګڼه اخلو؟؟؟ څیره ش ۱۸ .

۱) د درې ګوډې OAB منځهواره: $\frac{1 \cdot \sin a_n}{2}$,
د ګردۍ سکتور یا ګردییرخه OAB
منځهوارې $\frac{1^2 \cdot a_n}{2}$,

څخه‌کوچنی ده، او دا بیرته د درېګوډې OAC د منځهوارې. $\frac{1 \cdot \tan a_n}{2}$
څخه کوچنی دی.

له دې امله باور لري $\sin a_n < a_n$ او $a_n < \tan a_n = \frac{\sin a_n}{\cos a_n}$
.

او ورپسی

$$\frac{\sin a_n}{a_n} < 1, \ \cos a_n < \frac{\sin a_n}{a_n}, \ \text{also} \ \cos a_n < \frac{\sin a_n}{a_n} < 1.$$

د $\cos a_n \to 1$ له امله $a_n \to 0$ لپاره فرمول (۱۸ . ۴۵) باور لري۰

بیلګه ۱۸ . ۵ : د جملی ۱۸ . ۴ په مرسته د بیلګي په توګه لاس ته راځي:

$$n \cdot \sin\frac{1}{n} = \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \to 1, \qquad n^2 \cdot \sin\frac{1}{n} = n\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \to \infty \cdot 1 = \infty,$$

$$\sqrt{n} \cdot \tan\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{\frac{\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}}{\cos\frac{1}{\sqrt{n}}} \to \frac{1}{1} = 1.$$

بیلګه ۱۸ . ۶ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پرلپسی $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$،

چې د ناټاکلی افادې $\frac{\infty}{\infty}$ په لور مو هڅوي کوښښ کیږي چې د مات باندې او ماتلاندې په یوه ګڼ وویشل شي، چې یو ټاکلی وینه یا افاده ترې رامنځ ته شي.

$$\frac{3n^2-n+1}{2n^2-1}=\frac{3-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{2-\frac{1}{n^2}}\to\frac{3}{2},\qquad \frac{6n^3+n-1}{7n^4+n^2+1}=\frac{\frac{6}{n}+\frac{1}{n^3}-\frac{1}{n^4}}{7+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}}\to\frac{0}{7}=0,$$

$$\frac{6n^3+n-1}{2n^2-1}=\frac{6n+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{2-\frac{1}{n^2}}\to\frac{\infty}{2}=\infty,\quad \frac{\sqrt{n^2-1}+n-1}{n+1}=\frac{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}+1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}\to\frac{2}{1}=2.$$

بیلګه ۱۸ . ۷ : پرلپسې $\{a_n-b_n\}$ ، چې ناټاکلې افادې $\infty-\infty$ ته مو لاربښودوي، کید ی شي د نورو ترمنځ لاندې بڼه غوره کړې:

$$a_n-b_n=\frac{(a_n-b_n)(a_n+b_n)}{a_n+b_n}=\frac{a_n^2-b_n^2}{a_n+b_n}\to\frac{?}{\infty}.$$

که صورت پولې ته و هڅیږي، نو یوه ټاکلې افاده بیا مخ ته لرو.

$$\sqrt{4n^2+5n+2}-2n=\frac{4n^2+5n+2-4n^2}{\sqrt{4n^2+5n+2}+2n}=\frac{5+\frac{2}{n}}{\sqrt{4+\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}}+2}\to\frac{5}{4},$$

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{2n-1}=\frac{n+1-2n+1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{2n-1}}=\frac{\frac{2}{n}-1}{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}}\to\frac{-1}{+0}\to-\infty,$$

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}=\frac{n+1-n+1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}\to\frac{2}{\infty}=0.$$

تمرینونه:

د ورکړ شوې پرلپسې $\{a_n\}$ یا ترادف پوله ارزښت a وشمیرئ (که شتون وري)! $n_0(\varepsilon)$ وټاکئ، داسې، چې د ټولو $n>n_0(\varepsilon)$ (18.6) لپاره باور ولري.

1. a) $a_n=\frac{n+1}{2n}$ b) $a_n=\frac{1}{n^2\sqrt{n}}+\frac{1}{n^3}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

c) $a_n = n\cdot\sqrt{1+\frac{1}{n}} - n$

d) $a_n = \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$

د لاندې پرلپسیو $\{a_n\}$ پوله ارزښت وشمیرئ، که شتونولري.

.1. a) $a_n = \frac{2n+3}{3-4n}$

b) $a_n = \frac{4n-3}{2-5n+7n^2}$

c) $a_n = \frac{5n^2-6}{3n+4}$

d) $a_n = \frac{3n^3-2n^2+5n-6}{2n^3-4n^2-7n+9}$

e) $a_n = \left(\frac{3n-2}{3-6n}\right)^2$

f) $a_n = \frac{(2n-3)^2}{4n+1}$

g) $a_n = \frac{2-\sqrt[3]{n^2}}{n^2+5}$

h) $a_n = \frac{3+(-1)^n+2n}{1-3n}$

i) $a_n = \frac{4\sqrt{n}-10n}{n\sqrt{n}}$

j) $a_n = \frac{(-1)^n}{1+n^2}$

k) $a_n = n\left(1-\sqrt[5]{1-\frac{1}{n}}\right)$

l) $a_n = n\left(\sqrt[3]{n^2+2}-\sqrt[3]{n^2+1}\right)$

.2. a) $a_n = \left(1+\frac{4}{n}\right)^n$

b) $a_n = \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$

c) $a_n = \left(\frac{cn+1}{cn}\right)^n$

d) $a_n = \left(\frac{2+n}{n-4}\right)^n$

e) $a_n = \left(\frac{\left(1-\frac{2}{n}\right)(n+3)}{n+2}\right)^n$

f) $a_n = \left(1-\frac{5}{n}\right)^{\frac{n}{4}+3}$

g) $a_n = \sqrt[n]{3}$

h) $a_n = \frac{27^{\log_3 n}}{16^{\log_2 n}}$

2.3. a) $a_n = [2n^{-1}\cdot\sin(2n^{-1})]$

b) $a_n = n\cdot\sin\frac{1}{n}$

c) $a_n = n\cdot\tan\frac{1}{n}$

d) $a_n = \sqrt{n}\tan\frac{1}{\sqrt{n}}$

e) $a_n = 2n^2\cdot\cos\frac{1}{n^2}\cdot\tan\frac{1}{n^2}$

f) $a_n = \sin\frac{1}{n} - n\cdot\cos\frac{1}{n}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

19 پوله (حد)"The Limit"

لاندې د اعدادو ترادف (پرلپسې) لرو:

(1) 1 / 2 , 1 / 3 , 1 / 4 , ... ,1 / n

(2) 3 / 2 , 4 / 3 , 5 / 4, ..., (n+1) / n

(3) 2,4,6,...2n

که n د ناپای په لور یانې $n \to \infty$ ته لاړ شي، نو د پورته ترادفونو څخه (۱) د صفر په لور، (۲) د یو په لور او (۳) د ناپای په لور ځي.

د Limit مانا پوله (حد) ده، چې له هغې تیرېدنه اجازه نه لري. په پخواني روم کې د یوه ښار د قلعې نوم هم Limitو. په ریاضیاتو کې ، لکه په ترادفونو (پرلپسې) کې مو چې ولیدل لیمیټ د پولې یا حد مفهوم لري.

د پولې (حد) د استعمال مفهوم په دې کې پروت دی، چې د یوه فنکشن یا تابع سلوک یا کاروايي داسې وڅېرو لکه ځنګه ، چې د فنکشن یا تابع (بلواک) د افقي محور (پروت - x– محور (abscissa)) باندې پرلبپسې یا ترادفونه یوې پولې یا حد(تکي) ته ورنږدېکېدنه. دا لکه په پورته ننوتنه کې، چې پرلپسې یا ترادفونه په پروت محور یوې پولې ارزښت ته ځي. وبه ګورو، چې پوله یا حد په ریاضیاتو کې ددې لپاره کارول کيږي، چې مشتق وپيژنو

فعالیت :

-ایا تاسو په ورځني ژوند کې د پولې(حد) د کلمې سره بلد یاست؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

ایا تاسو په ورځني ژوند کې یوه بیلګه راوړی شئ، چې یوې پولې ته له دواړو لورو، له ښی و کیڼ لورته او همداړول له کیڼ و ښي لورته نزدی شی یا لاړ شی؟

په یوه ټاکلي ځای کې د توابعو پوله :

یادونه: موږ له دې وروسته د پولې په ځای پوله ارزښت لیکو، چې دا ټیک زموږ غوښتنه په ګوته کوي.

فعالیت ۱ : یوه تابع $f(x) = x + 2$ په پام کې ونیسی، چې پروتولاړسیستم یا سیستم قېمت وضعیه کې ټکی $P(2,4)$ لري

۱ - د تابع جدول وکاږی.

۲ – د تابع ګراف وکاږی

۳ - $f(2)$ پیداکړی او د x خوزښت(حرکت) باندې بحث وکړی که x د 2 ارزښت ته دواړو لورونزدې شي

۴ - د x پولې ته تلنه په ګراف(ځیره) کې روښانه کړی.

بیلګه ۱ :

یوه تابع $f(x)=2x$ او یوټکی P_0 دې ورکړ شوی وي، چې کواوردینات($3/6$) لري.

۱) د تابع جدول وکاږی

۲) د تابع کراف یا ځیره , وکاږی

۳) $f(3)$ پیداکړی او د $f(x)$ تلنه باندې بحث وکړی که x د "3" ارزښت ته نزدې شي

۴) د $f(x)$ پولې ته تلنه په ځېره کې روښانه کړی.

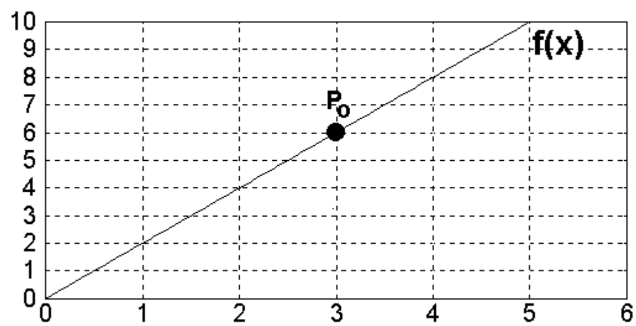
اوس غواړو دا پورته فعالیت روښانه کړو:

۱) د تابع جدول (دولی یې ګران لوستونکي پوره کوي)

x	-1	0	1	2
f(x)	-2	0	2	4

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲) د تابع ښیره



۳) $f(3) = 6$ او غواړو د درې ارزښتونو څخه چې له ښي او کیڼي لور و ۳ ته ورنږدې کیږي و ګورو، چې په دې درې ارزښتونو کې چیرته ځي. ددې لپاره لاندې ارزښتونه په دوه جدولونو کې ښیږو

x_k	$f(x_k)$	x_k	$f(x_k)$
2,98	5,96	3,001	6,002
2,99	5,98	3,01	6,02
2,999	5,998	3,02	6,04

په پورته جدول کې ګورو،چې له کیڼ لور وکښته ۲ ته نږدې کیږو او له ښي لور له کښته و پورته لورته هم ۲ ته نږدې کیږو.   بل جدول پروت کاږو

له ښي و کیڼ لور ته   له کیڼ و ښي لورته

$\longrightarrow 1 \longleftarrow$

x	2.98	2.99	2.999		3.001	3.01	3.02
f(x)	5.96	5.98	5.998		6.002	6.02	6.04

-------------→ 6 ←-------------

(c) ketabton.com: The Digital Library

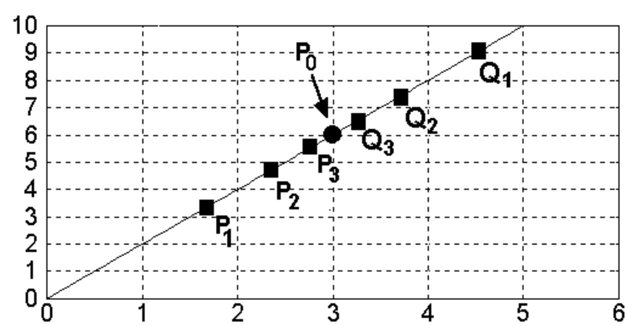
په درې پړاوونو کې د ،، f(3) " قېمت د "f(x) " قېمتونو سره پرتله کيږي. که "x" و "3" ته ورنزدې شي.

دا حالت موږ ته په ګوته کوي چې: که "x " و "3" ته ورنزدې شي، نو د f(x) ،،پوله (حد)،، برابر په 6 دئ او دا داسې ليکو: $\lim_{x \to 3} f(x) = 6$

۴) اوس پورته ګراف په لاندې توګه رسموو او ښي او کيڼ لور ته موخه ور ټکي - لکه په پورته جدول کې - په نخښه کوو.

د لاندې څېړې له مخې ټکي ... $P_1, P_2, P_3,$ په پام کې نيسو، چې ټکي P_0 ته تل له کيڼ لور نزدې کيږي. او همداسې ټکي ... $Q_1, Q_2, Q_3,$ چې له ښی لور ټکي P_0 ته نزودې کيږي.

کتل کيږي: هرڅومره، چې پورته ټکي و ټکي P_0 ته نزدې کيږي په همغه کچه د تابع ارزښتونه و ۶ نزدې کيږي (د ټکي $P_0(3,6)$ -قېمت له امله)



که په ګراف کې ځای x=3 ته نزدې شو، نو تابع ارزښت يا فنکشن ارزښت و قېمت(ارزښت) ۶ ته نزدې کيږي.

وايو: ۶ د فنکشنf(x) پوله ارزښت دئ د x-->3 لپاره (لوستل: x د 3 (درې) په لور تلنه).

د پوله ارزښت لپاره مو ليکډول ليکبنه(په پرله پسې يا ترادف کې) پيژندلی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 6$$

یادونه: د تابع پوله یا حد په هغه ځای کې چې تابع تعریف نه وي هم کیدی شي شته وي:

په پورته کې مو د یوه تابع f(x) حد په x=3 ځای کې تر څېړنې لاندې ونیو . دلته تابع په x =3 کې پیژند یا تعریف درلود.

اړیین نه ده ، چې تابع د x=3 په ځای کې تعر یف وي، ځکه چې پوله ارزښت د x لپاره یوازې د x=3 په نزدې کې تشریح شوې.

پام : په ځنو فنکشونو یا توابعو کې ،،پوله یا حد ،، په داسې ساده ډول لاس ته نه شو راوړی ـ لکه د مخه ـ مګر د تابع د ساده بدلون له لارې دا کار سرته رسولی شو .

بیلګه ۱ :

تابع $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}; x \neq 1$ راکړ شوي

۱) د تابع جدول او ګراف وکاږی!

که صور د x-1 سره لنډ کړو، نو لرو :

$$f(x) = x + 1$$

د تابع "f(x) " خوزښت تر بحث لاندې ونیسیکه "x" و "1" ته نزدې شي یا همداسې که $x \to 1$.
له دواړو یانې له ګراف او جدول څخه موږ لیکو چې f(x) د ریل عدد"1 " په لور هڅیږي. نو

ځېره دې ګران
لوستونکي وباسي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 2$$

له دې امله روښانه ده چې تابع په هغه ټکي کې تعریف(پېژند) نه لري، په هغه کې چې پوله (حد) شمېرل شوی.

یادونه : په پورته ډول تابع به سملاسي پسې وڅېړل شي، خو د هر څه لومړی پېژند راوړو:

پيژند (تعريف) :

تابع $f(x)$ يوه پوله L لري ، که x د یوه ریل عدد د c په لورترلی لاړ شي،او داسې یې لیکو: $\lim_{x\to c} f(x) = L$

فعالیت : ایا دا پیژند رښتیا دی، که $f(c) \neq L$ وي؟

فعالیت: که ولرو: $|x|$ ، چې تل مثبت دی.

- دا بې له دې مطلق ارزښت څنګه لیکو؟

- ایا دا هغو اعداو کارولی شو، چې یو لله بل سره د شمېرنیزو نخښنو له لارې تړلي وي، یعني چې اعداد یو له بل سره د جمعې، تفریق ... له لارې سره تړلي وي؟

فعالیت: هغه توابع چې په یوه عدد د بېلګې په توګه صفر کې تعریف نه وي ، څه بلل کیږي

بیلګه 2 : تابع $x \neq 0$, $f(x) = \frac{|x|}{x}$ راکړ شوی

1) تابع ولیکی، بې له دې، چې سومبول "| |" وکاروی:

2) د تابع ګراف وکاږی

3) د $f(x)$ ارزښت پیدا کړی، که x له ښي لور و 1 ته نزدې شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

4) د f(x) ارزښت پیدا کړی که "x" له کیڼ لور و 1- ته نژدې شي

5) وښایاست چې تابع f(x) څو پوله ارزښتونه لري .

یادونه: که یوه تابع چې په صورت او مخرج کې داړونده ارزښت لپاره صفر ولري او دا صفرځایونه له منځه تلی شي، نو دا ډول تابع په صفر ځای کې بې تعریف ده (یا تشیا؟ functional gap) لري.

بنوونه :

۱) تابع بې له سومبول "|" داسي ليکو:

$$f(x)=\begin{cases}1; x>0\\ -1; x<0\end{cases}$$

2) د تابع ګراف انځوروو :

که ځیره ونه کېنل شوه ساده ده

3) د f(x) ارزښت که x له ښي لور و 1 ته نژدې شي ، لاندې پوله راکوي

$$\lim_{x\to 1} f(x)=1$$

4) د f(x) پوله ارزښت که "x" له کيڼ لور 1- ته نژدې شي، په لاندې ډول دی.

$$\lim_{x\to -1} f(x)=-1$$

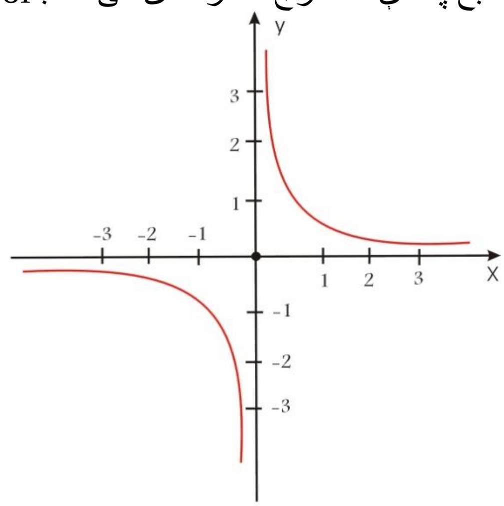
5) ګورو چې x ،،دوه،، ارزښتونو (1) او (1-) ته نژدې شي ، نو دوه پوله ارزښتونه لري يعني $\lim_{x\to \pm 1} f(x)=\pm 1$، نو له دې امله f(x) پوله نه لري

بیلګه ۳ : تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ لرو، چې $X\neq 0$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ په x = 0 ځای کي تابع ارزښت نه لري یانی په کي x=0 تعریف نه ده. دا په صفرځای کي قطب(Pol) لري(۱).لاندې ځېره دې وکل شي.

(۱) یادونه : هغه تابع، چې مخرج یې صفر وي او صورت یې صفر نه وي، وایو چې تابع په دې د مخرج صفر ځای کی قطبPol لري.



و x=0 ته د نزدې کېدو لپاره ترادف (پرلپسې) $(x_n)=\frac{1}{n}$ تاکو.

د اړونده تابع ارزښتونو ترادف (پرلپسې) $(x_n)=\left(\frac{1}{\frac{1}{n}}\right)=n$ دی.

دا د n>0 لپاره یو نامحدود سعودي ترادف دی،
او د n<0 لپاره نزولي- یا متناقص ترادف دی.
دا په دې معنی، چې تابع f(x) په 0 ځای کي حد نه لري. دا هلته یو قطب لري.

قٌضیه : که تابع " f(x) " همغه پوله (حد) "L" ولري که "x" له ښی یا کیڼ لورې وه "c" ته نزدې شي، نو پوله(حد) شته دی او د "L" سره برابره ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د حدونو خويونه يا خواص : " **Properties of Limits** "

فعاليت :

په دې برخه کې د ثابتو – او کټمټ توابعو Identity function حدونه وشميرئ

د ليميټ خويونو څخه کار واخلئ

د پولينوم تابعو حد (پوله) پيدا کړئ

پوهيږو : په رياضياتو (شميرپوهنه) کې ټول توابع چې راځي د ساده توابعو ګډوله والى combination دى، لکه د توابعو جمع(زياتون، ضرب(څل) وېش او زنحيرونه compositon . دلته دوه غوره او ساده توابع $f(x) = c$ او $g(x) = (x)$ شته، که دواړه توابع سره يوځای ګړو، نو لاس ته ترې راځي:

$h(x) = x + C$, يا $L(x) = cx$, يا $m(x) = x^2$ او داسې نور

هڅه:د توابعو $f(x) = x$, $g(x) = x - 2$, څخه کار واخلئ، چې درې نورې توابع ترې لاس ته راوړئ

فعاليت :

ايا د يوې تابع پوله کېدی شي د تابع له حل څخه پيدا شي؟

د بېلګې په توګه، که ولرو

$$f(x) = \lim_{x\to 2} 3 = 3\lim_{x\to 2}$$

نو دا تابع وليکئ.

يادونه: د پورته کارونې په څير همدا څه د هرې ثابتې تابع لپاره رښتيا دئ

د يوې ثابتې پوله ارزښت: که a او b ثابتې وي، نو $\lim_{x\to a} c = c$ باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

په همدې ډول کتمټ یا ایډنټیک تابعو $f(x) = I(x) = x$ لپاره هم لرو ، که " c " کوم حقیقي عدد وي، نو x و c ته نږدې کیږي. دا ،، ټیک داسې ده لکه،، چې $f(x) = I(x)$ وc ته نږدې شي

فعالیتونه:

1)که $f(x) = x$، $g(x) = 2$ وي ، نو لرو :

1) $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$, $\lim_{x\to 1} g(x) = 2$

2) که وي $h(x) = f(x) + g(x)$ لرو

$h(x) = x + 2$

3) د$h(x)$ ګراف

رسم دې ګران لوستونکي د ځانونو لپاره وکاږي

4)

$\longrightarrow 1 \longleftarrow$

0	.5	.8		1.2	1.5	2
2	2.5	2.8		3.2	3.5	4

$\longrightarrow 3 \longleftarrow$

تاسو په یاد ولرئ یا ولیکئ

$\lim_{x\to 1} h(x) =$	$\lim_{x\to 1} x + 2 = 3$

او $\lim_{x\to 1} h(x) = \lim_{x\to 1} f(x) + \lim_{x\to 1} g(x)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

هڅې

۱) که $f(x) = -2$ ، $h(x) = x$ وي، پيداکړئ

a) $f(x) \pm h(x)$

b) $f(x) . h(x)$

۲) وهڅيږئ، چې د پورته توابعو د a) او b)لپاره پولې وټاکئ، که x عدد3 ته نږدې شي.

۳) که $g(x) = x$ وي،نو پيداکړئ $\lim\limits_{x \to 4} 4x$.

۴) که $h(x) = x$ ، $f(x) = -2$ وي پيدا کړئ a) $f(x) + h(x)$ b) $\lim\limits_{x\to 2}(f(x) + h(x))$ c) $\lim\limits_{x\to 2} h(x) + \lim\limits_{x\to 2} f(x)$

بيلګه ۳ : د $g(x) = \sqrt{3-x}$ ګراف وکاږئ او پيدا کړئ

a) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$, b) $\lim\limits_{x\to -1} g(x)$; c) $\lim\limits_{x\to 3^-} g(x)$

حل:

دلته دې ګراف وکښل شي....

له ګراف څخه

$$\lim_{x\to 2} g(x) = 1,$$

الف- په لاندې توګه مخ ته ځو:

$$\lim_{x\to 2} \sqrt{3-x} = \sqrt{\lim_{x\to 2}(3-x)} = \sqrt{1} = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) له ګراف څخه $\lim_{x\to -1} g(x) = 2$

یادونه : $\lim_{x\to -1} \sqrt{3-x} = \sqrt{\lim_{x\to -1}(3-x)} = \sqrt{4} = 2$

c) $\lim_{x\to 3^-} g(x) = \lim_{x\to 3^-} \sqrt{3-x} = \sqrt{\lim_{x\to 3^-}(3-x)} = \sqrt{0} = 0$

ګڼ دلا یل شته چې پولې شمیرنه ساده کوي، موږ. به دا لاندې بې له ثبوته ومنو که f او g توابع وي C او L او M رییل عددونه وي، داسې چې باور ولري :

نو $\lim_{x\to c} f(x) = L$, او $\lim_{x\to c} g(x) = M$,

1) $\lim_{x\to c} (f+g)(x) = \lim_{x\to c} ((f(x) + g(x))$

$= \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x) = L + M$

2) $\lim_{x\to c} (f-g)(x) =$

$\lim_{x\to c} ((f(x) - g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x) = L - M$

3) $\lim_{x\to c} (f.g)(x) = \lim_{x\to c} (f(x) . g(x))$

$= \lim_{x\to c} f(x) . \lim_{x\to c} g(x) = L . M$

4) $\lim_{x\to c} (\frac{f}{g})(x) = \lim_{x\to c} (\frac{f(x)}{g(x)}) = \frac{L}{M}$; $(M\neq 0)$

5) $\lim_{x\to c} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$

(د $f(x) \geq 0$ لپاره او د ټولو x ارزښتونو لپاره چې c ته نږدې کیږي.)

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنه : موږ لاندې تابع لرو:

$f(x) =$	$x^2 - 1$	$x \le 0$
	$x - 1$	$0 < x < 2$
	$2x + 1$	$x \ge 2$

پیدا کړی

a) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ c) $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$

d) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ e) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

حل :

a) $\lim\limits_{x\to -2} (f(x) = \lim\limits_{x\to -2} (x^2-1) = (-2)^2 - 1 = 3$

b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x); \quad \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (x-1) = -1$

$= \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (x^2-1) = -1$

حد شته او $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -1$ دی:

c) $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = \lim\limits_{x\to 4} (2x+1) = 2\times 4 + 1 = 9$

d) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$;

له ښي لور $\lim\limits_{x\to 2^+} (2x + 1) = 2\times 2 + 1 = 5$

له کيڼ لور $\lim\limits_{x\to 2^-} (x-1) = 2 - 1 = 1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې امله پوله (حد) نه شته

$$e)\ \lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} (x-1) = 0$$

بیلګه: $\lim_{x\to 2} f(x)$ ، پیدا کړی، که $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ وي

حل:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} (2x^2 - 3x + 5)$$

$$= \lim_{x\to 2} 2x^2 - \lim_{x\to 2} 3x + \lim_{x\to 2} 5$$

$$= 2\lim_{x\to 2} x^2 - 3\lim_{x\to 2} x + \lim_{x\to 2} 5$$

$$2 + 5 = 7 \times 4 - 3 \times = 2$$

فعالیت : که $\lim_{x\to -2} f(x) = 3$ نو پیدا کړی $\lim_{x\to -2} (f(x))^n$

یادونه:

د یوه پولینوم لیمیټ ټیک داسې شمیرل کیږي، لکه د یوه فنکشن لیمیټ

بیلګه ۶ :

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{2x^2 + 1}$$ وي دې

$\lim_{x\to 3} f(x)$ ، پیدا کړی

حل : $f(x)$ د دوه توابعو $g(x) = x^2 - 2x + 5$ او $L(x) = 2x^2 + 1$ وېش دی

که x و 3 نزدې شي پوله یا حد کیدی شي د تابع د حل له لارې په $x = 3$ کې پیدا شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to3} f(x) = \lim_{x\to3} \frac{x^2 - 2x + 5}{2x^2 + 1}$$

$$= \frac{\lim_{x\to3}(x^2 - 2x + 5)}{\lim_{x\to3}(2x^2 + 1)}$$

$$= \frac{3^2 - 2\times3 + 5}{2\times3^2 + 1} = \frac{8}{19}$$

د راشنل- نسبتي- يا کسري فنکشنونو پولې

مورږ دا لاندې د پولينومونو ويش لرو

$$R(x) = \frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0}{b_m x^m + b_{n-1}x^{m-1} + ... + b_0} \;; b_0 \neq 0$$

په پورته پولينوم ويش کې که x=o وي، نو $\frac{a_0}{b_0}$ ترې لاس ته راځي د $b_0 \neq 0$ سره.

که n<m وي او x ناپای ته لاړ شي، پولينومويش صفر ته ځي

که n>m وي او x ناپای ته لاړ شي، د پولينوم ويش د ناپای په لور ځي.

که n = m وي، نو $R(x) = \frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{a_n}{b_m}$ لرو

پام : د نسبتي يا کسري فنکشنونو (ناطقو توابعو) پوله ارزښت (حد) غواړو پيداکړو.

ددې لپاره چې د ،،ويلندو،، توابعو پولې پيداکړو، که شته وي، نو د مختلو لارو يا متودونو څخه کار اخلو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوهیږو، چې د پولینومي توابعو پوله (حد) - د یوه ورکړ شوي x ارزښت لپاره، لکه د نورو ساده توابعو په څېر ، چې د جمعې . تفریق،ضرب او وېش په څېر ورکړ شوي دي وشمیرو.

که ولرو : $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ نو د تابع خواص د $\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$ لپاره ساده

کو چې د پورته پولینوم ویش، چې ګویاتابع ده پوله یا حد وشمېرو.

. بیلګه ۱ : پیداکړئ $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x}{x+2}$

که $x = 1,$ وي، نو تابع تعریف ده او لرو

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x}{x+2}=\frac{(1)^2+1}{1+2}=\frac{2}{3}$$

که $x = 1$)ځاي په ځای کړو Substitue(

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$ نو لاس ته راځي

بیلګه ۲ : پیدا کړئ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-1}{x+3}$

حل : تابع په $x = 0$ کې تعریف دی، نو لرو:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-1}{x+3}=\frac{0-1}{0+3}=-\frac{1}{3}$$

بیلګه ۳ ؛ پیداکړئ : $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x+1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل : تابع په $x = 1$ کې تعریف ده، نو لرو

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{x+1} = 0 = \frac{0}{2} = \frac{1^2+1-2}{1+1} =$$

که په یوه ځای یا عدد کې تابع تعریف نه وي، نو د مختلفو متودونو څخه کار اخلو، چې پوله(حد) پیداکړو، که شته وي.

بیلګه ۴ : پیداکړئ $\lim_{x\to1}\frac{x^2-6x+8}{x-2}$

حل : دا چې تابع $f(x)$ په $x=2$ کې تعریف نه ده، نو پوله(حد) د تابع د حل له لارې نه شي پیداکېدی. دا کېدی شي داسې پیدا کړو، چې تابع په ضریبونو تجزیه کړو .

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-6x+8}{x-2} \lim_{x\to2}\frac{(x-4)(x-2)}{(x-2)} =$$

د تابع پوله (حد) که x و 2 ته نزدې شي، دا مانا لري، چې $x \ddagger 2$ دی.

دا راشنل فنکشن (ګونګه؟ تابع) رالنډیږي: $(x-4)$ $\lim_{x\to2}$ او لاندې پوله لري:

$$\lim_{x\to2}(x-4) = 2-4 = -2$$

بیلګه ۵: پیداکړئ $\lim_{x\to16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}$

ګور، چې تابع په $x = 16$ کې تعریف نه ده یانې $x \neq 16$.

په یاد ولرئ چې : $\sqrt{a}\ \sqrt{b}$ - د $\sqrt{a}\ \sqrt{b}$ + جوړه(مزدوج) دی‌او بر عکس.

حل: د جوړې(مزدوج) سره یې ضرب کړئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}\times\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+4}\lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}$$

$$= \lim_{x\to 16}\frac{(x-16)}{(x-16)(\sqrt{x}+4)}$$

$$= \lim_{x\to 16}\frac{1}{\sqrt{x+4}} = \frac{1}{\sqrt{16}+4} = \frac{1}{8}$$

بیلګه ۶ : پیدا کړی $\lim_{x\to 3}\frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}$

حل : تابع په $x=3$ کې تعریف نه ده ، نو مخرج او صورت د محرج په مزدوج ضربوو او لرو:

$$= \lim_{x\to 3}\frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}\times\frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+2}\lim_{x\to 3}\frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{(3-x)(\sqrt{x+1}+2)}{(x+1-4)}$$

$$= \lim_{x\to 3} -1(\sqrt{x+1}+2)\lim_{x\to 3}\frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}$$

$$= -(\sqrt{3+1}+2) = -4$$

بیلګه ۷ : پیداکړی $\lim_{x\to 1}\frac{\frac{5}{2x-3}+5}{x^2-1}$

حل : تابع په $x = 1$ کې تعریف نه ده، نو په لاندې توګه مخ ته ځو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \lim_{x\to1} \frac{\frac{5+10x-15}{2x-3}}{x^2-1} \quad \lim_{x\to1} \frac{\frac{5}{2x-3}+5}{x^2-1}$$

$$= \lim_{x\to1} \frac{10x-10}{(2x-3)(x^2-1)}$$

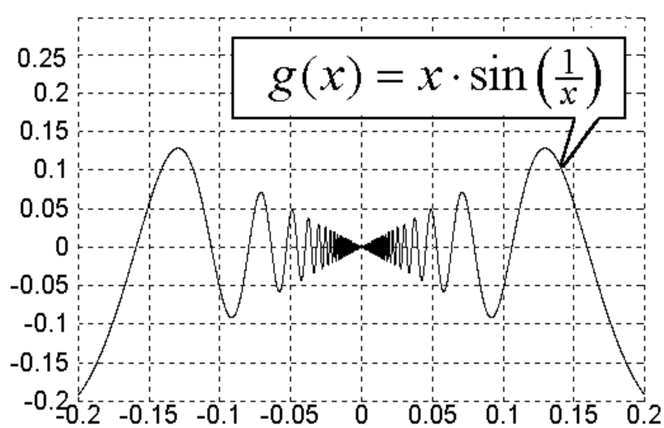
$$= \lim_{x\to1} \frac{10(x-1)}{(2x-3)(x^2-1)}$$

$$= \lim_{x\to1} \frac{10(x-1)}{(2x-3)(x-1)(x+1)}$$

$$= \lim_{x\to1} \frac{10}{(2x-3)(x+1)} = \frac{10}{(2(1)-3)(1+1)}$$

$$= \frac{10}{-2} = -5$$

د مثلثاتي توابعو پولې



بیلګه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

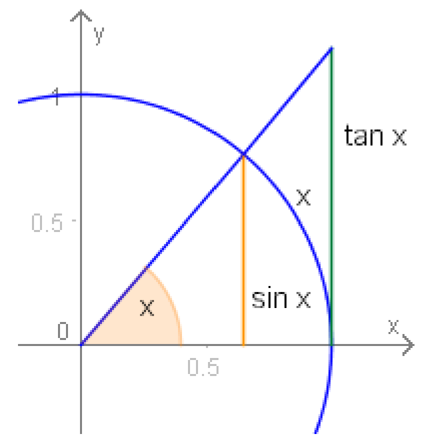
قضيه ؛ که x په راديان ورکړ شوی وي ،

نو $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ غواړو وټاکو.

يادونه : تابع $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ ناجوړه (طاق) دی

د دې لپاره چې $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ پيدا کړو، غواړو مخ له مخه لړ فکر په کار واچوو.

د ښووني لپاره ترې کار اخستلو په موخه دا مخامخ ځېره باسو او په لاندې توګه مخ ته ځو:



په يوه انتروال $x\epsilon[0,\frac{\pi}{2}[$ کې د رسم له حالته سملاسي لاندې نا برابرون يا نامسوات باور لري

$$\sin x \le x \le \tan x$$

موږ له دې سره لرو $\sin x \le x \le \frac{\sin x}{\cos x}$ او $x>0$ سره لاس ته راځي:

$$\frac{\cos x}{\sin x} \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{\sin x}$$

او د $\sin x$ سره ضرب (ځل) له امله لاندې نامساوات لاس ته راځي

$$\cos x \le \frac{\sin x}{x} \le 1$$

د پولې ته تګ له امله لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\leq \lim_{x\to +0}\frac{\sin x}{x}\leq 1 \quad , \quad 1=\lim_{x\to +0}\cos x$$

دا په دې معنا دی، چې **غوښتونکې پوله ارزښت 1 دی.**

د دې ښوونې سره موږ ښی پوله ارزښت پېداکړ، د کیڼ پوله ارزښت لپاره په ورته توګه مخ ته ځو او پوله ارزښت د $x<0$ لپاره پیدا کوو، یعني له دې څخه هم لاس ته راځي:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

که $-\frac{\pi}{2}<x<0$ او $x=-\alpha$ و لیکو ، نو دا لاندې لاس ته راوړنه هم لرو

$$=\frac{\sin(-\alpha)}{-\alpha}=\frac{-\sin\alpha}{-\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\alpha}\quad\frac{\sin x}{x}$$

.............(4

$$\boxed{\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin\alpha}{\alpha}}$$

د مساواتو (4) + (3) څخه غوښتنه لاس ته راځي

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$$

بیلګه ۱ : حل کړی $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$

حل : وي دې $2x=\alpha$ که $x\to 0$ نو $\alpha\to 0$ او

$$=\frac{2\sin 2x}{2x}=2\frac{\sin\alpha}{\alpha}\quad\frac{\sin 2x}{x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له پورته مساواتو ځخه لاس ته راځي :

$$= \ 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x} = 2\times 1 = 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$$

بیلګه ۲ : وښایاست $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{2x}$

که $y = 5x$ وي ; او $x\text{->}0$ ، نو $y\text{->}0$ هم

$$\frac{5}{2}\frac{\sin 5x}{2x} = \frac{5}{2}\frac{\sin 5x}{\frac{5}{2}(2x)} = \frac{\sin 5x}{5x}$$ او

$$= \frac{5}{2}\frac{\sin y}{y}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{5}{2}\frac{\sin y}{y} = \frac{5}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin y}{y}$$ له دې امله لرو

$$1 = \frac{5}{2}\times = \frac{5}{2}$$

قضیه : په درېګوډي ګچ یا مثلثاتو کې بل غوره پوله ارزښت دا لاندې دی.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$$

بیلګه : وښایاست : $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{x}$

حل : وي دې $3x= \theta$، نو $x= \theta /3$ ، که $\theta \to 0$ نو $x\text{->}0$

$$\frac{\tan 3x}{x} = 3\frac{\tan\theta}{\theta} = \frac{3\tan 3x}{(3x)} =$$ له دې امله

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو $3 = 1 \times 3 =$

بیلګه : حل کړی $\lim\limits_{x \to 0} \frac{5 \tan 2x}{7x}$

حل : وي دېy = 2x ، نو $x = \frac{y}{2}$ دی

که $x \to 0$ وي،نو $y \to 0$ دی

له دې امله

$$\frac{5 \tan 2x}{7x} \; \frac{2 \tan 2x}{2x} \cdot \frac{5}{7} =$$

$$\frac{\tan 2x}{2x} \; \frac{10}{7} =$$

$$\frac{\tan y}{y} \; \frac{10}{7} =$$

نو

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan y}{y} \; \frac{10}{7} \lim_{y \to 0} = \frac{5 \tan 2x}{7x}$$

$$= \frac{10}{7} \lim_{y \to 0} \frac{\tan y}{y}$$

$$1 = \frac{10}{7} \times \quad = \frac{10}{7}$$

پای

وهخیری ، چې وښایاست:

(c) ketabton.com: The Digital Library

که x په رادیان ورکړ شوی وي، نو لرو $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

الف) تانجنت $\tan x$ د $\sin x$ او $\cos x$ په ترمونو ولیکی

ب) $\frac{\tan x}{x}$ د $\sin x$ او $\cos x$ په ترمونو و لیکی

پ) پوله پیدا کړی

ت) ایا قضیه رښتیا یا ټیک ده؟

په یاد ولری:

$$\cos^2 x + \text{sim}^2 x = 1$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos 2x = \quad 1 - 2 \sin^2 x$$

$$2 \cos^2 x - 1$$

بیلګه ۵ : حل کړی $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 2x}{x}$

حل : $\lim_{x \to 0} \frac{2 \sin^2 x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 2x}{x}$

$$= 2 \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \sin x$$

$$0 = 0 \times 1 \times = 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۶ : وشمیرئ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\sin 5x}$

حل : شمیرو

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\tan 3x}{x}}{\frac{\sin 5x}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\sin 5x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3\tan 3x}{3x}}{\frac{5\sin 5x}{5x}}$$

$$=\frac{3\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{3x}}{5\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}}=\frac{3\lim\limits_{\theta\to 0}\frac{\tan}{\theta}}{3\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}}$$

$$=\frac{3}{5}\times\frac{1}{1}=\frac{3}{4}$$

بیلګه ۷ : وشمیرئ ؛ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 4x-\cos 6x}{x^2}$

حل : شمیرنه

$$\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin\frac{4x+6x}{2}\ \sin\frac{4x-6x}{2}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 5x\sin -x}{x^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin 5x \sin x}{x^2}$$

$$= 2 \lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$$

$$=2 \lim_{x\to 0} \frac{5\sin 5x}{5x} \times \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$$

$$= 10 \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \quad (y = 5x)$$

$$= 10 \times 1 \times 1 = 10$$

بیلګه ۸ : پیدا کړی $\lim_{x\to\alpha} \frac{\sin 6x - \sin 6\alpha}{x-\alpha}$

حل :

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{\sin 6x - \sin 6\alpha}{x-\alpha} = \lim_{x\to\alpha} \frac{2\cos 3(x+\alpha)\sin 3(x-\alpha)}{x-\alpha}$$

$$= 2 \lim_{x\to\alpha} \cos 3(x+a) \lim_{x\to\alpha} \frac{\sin 3(x-\alpha)}{x-\alpha}$$

$$= 2\cos 6\alpha \lim_{x\to\alpha} \frac{3\sin 3(x-\alpha)}{3(x-\alpha)}$$

وي دي $x - \alpha = y$, $x \to \alpha \Rightarrow y \to 0$ نو لاس ته راځي

$$= 2\cos 6\alpha \,(3) \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y}$$

$$= 6\cos 6\alpha \cdot 1 = 6\cos 6\alpha$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په یاد ولرئ : مثلثاتي کتمتوالی

$$\sin a - \sin b = 2\cos\frac{a+b}{2}\,\sin\frac{a-b}{2}$$

$$2\cos\frac{a+b}{2}\,\sin\frac{a-b}{2}$$

بیلګه ۹ : حل کړئ $\lim_{x\to 0}\frac{|\tan x|}{x}$

حل : $x > o$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|\tan x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} + \frac{\tan x}{x}$$

$$= 1$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{|\tan x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} - \frac{\tan x}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^-}\frac{\tan x}{x}$$

$$= -1$$

لرو $\lim_{x\to 0^+}\frac{|\tan x|}{x} \neq \lim_{x\to 0^-}\frac{|\tan x|}{x}$

ګورو، چې د پورته تابع پوله یا لیمیټ نه شته

ناپرېکیدنه(متمادیت)”Continuity“

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې برخه کې لولو ، چې يو فنکشن يا يو تابع په يوه ټکي يا يوه اينتروال کې څنګه ځان نيسي يا کوم حالت غوره کوي. ايا دا تابع په کوم ځای کې ټوب وهي، يا پرې کيږي او که يا په نه پرېکيدنې توګه د اينتروال په دننه کې ځغلي.

د تابعو ناپرېکيدنه Continuous functions

په دې موضوع کې مورږ د د يوې تابع د ناپرېکيدنې(متماديت) په هکله څېرنه کوو او د ناپرېکيدنې يا متماديت پيژند(تعريف) ورکوو.

// رسمه // // رسمه // // رسمه //

(3) (2) (1)

$f(x) = x^2 -1$ $f(x) = \frac{1}{x}$ $f(x) = \frac{|x|}{x}$

دا رسمونه دې هم ګران زده کوونکي وکاږي، زه د رسم کولو ستونځې لرم(تمرين)

b دې د تابع f په پيژندورشو يا تعريفساحه کې يو حقيقي(رييل) عدد وي. تابع f په bکې ناپرېکيدونکې (متمادي) ،بلل کيږي، که د ټکي (b.f(b)) نږدې د f ګراف وکښل شي، بې له دې، چې پنسل له کاغذ پورته کړی شي.

له دې امله تابع $f(x) = x^2 -1$ او تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ په ټکي x=b کې ناپرېکيدونکې دي.

تابع $f(x) = \frac{|x|}{x}$ په x=o کې ناپرېکيدونکې نه ده يانې پرېکيدونکې ده يا ټوپ وهي.

تابع په x=a کې پرېکيدونکې ده، که پرې شي(تشيا ولري)، ټوپ ووهي او يا ماته شي.

لرو $\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$ او $\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$ نو له دې امله $\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x}$ په x = o کې نه شته

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱ : وي دي $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 \; ; & x \geq 1 \\ 1 - x \; ; & x < 1 \end{cases}$

الف) ګراف وکاږی ګراف

ب) پیدا کړی $\lim_{x \to 3} f(x)$

پ) پیداکړی $\lim_{x \to 1} f(x)$

که تابع په x=3 او x=1 کې نابرېکیدونکې وي

حل :

الف) ګراف کینې لور ته کښل شوی دی

ب) $\lim_{x \to 3} f(x) = (2x + 1) = 7$
$f(3) = 7$

پ)

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (2x + 1) = 3$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} 1 - x = 0$$

له ب) او پ) څخه لرو

$$\lim_{x \to ^+1} f(x) \neq \lim_{x \to ^-1} f(x)$$

له دې امله تابع په x = 3 ناپرېکیدونکې او x =1 کې پرېکیدونکې ده یا نامتمادي

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۲ : وي دې $f(x) = \frac{x^3 + x}{x};\quad x \neq 0$

$=3 \quad ;$

// رسمه // الف) فنکشن رسم کړی

ب) بحث وکړی، چي تابع په $x = 2$ او $x = 0$ کي ناپرېکیدونکي ده او که نه

حل : الف) د تابع ګراف لپاره

x	-2	-1	0	1	2
f(x)	5	2	1	2	5

ب) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3 + x}{x} = \lim\limits_{x\to 2} (x^2+1) = 2^2+1 = 5$

$$f(2) = \frac{2^3 + 2}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

له دې امله د f پوله (حد) شته او $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2)$ ، نو تابع په $x = 2$ کي متمادي یا نه پرېکیدونکی دی

وي دې $x = 0$

$$f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3 + x}{x} = 1 \lim_{x\to 0^+}$$

$$f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x3 + x}{x} = 1 \lim_{x\to 0^-}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا دا مانا لري چې $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ په دې مانا دی چې $f(0) = 3$.

دا دا مانا لري، چې $\lim_{x\to 0} f(x) \neq f(o)$

تابع په $x = 0$ کې پرېکیدونکې(نامتمادي) ده

که له دې شرطونو کوم یو شرط پوره نه وي نو تابع پرېکدونکې(نامتمادي) ده

بیلګه ۳: **وي دې**

$f(x) = \frac{x^2-9}{x+3}$ ، $x \neq -3$

ایا تابع په $x = -3$ کې ناپرېکېدونکې ده؟

حل) تابع $f(-3)$ تعریف نه دی، له دې امله تابع په $x = -3$ کې متمادي نه دی

پیژند(تعریف) :

f دې یوه تابع وي، چې د ټولو x لپاره په همغه واز اینتروال کې چې $x=c$ لري تعریف وي.

تابع f په $x = c$ کې ناپرېکیدونکی بلل کیږي، که دا لاندې شرایطو پوره وي.

۱) $f(x)$ تعریف دی ۲) که $\lim_{x\to c} f(x)$ شته وي (موجود وي)

۳) $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

که تابع د ټولو $x \in (a,b)$ لپاره متمادي وي ، نو تابع په وازاینتروال (a, b) کې هم متمادي دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بېلګه ۴ : وي دې $f(x) = 2x^2 + 1 \quad ; \quad x \leq 1$

$= 4+x \quad ; \quad x > 1$,

وګورئ، چې تابع چېرته ناپرېکېدونکې ده او چېرته پرېکېدونکې.

حل : په $x = 1$ کې f تعریف دی

$$f(1) = 3.$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (2x^2 + 1) = 3$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (4+x) = 5$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim_{x \to 1^+} f(x)$$

له دې امله تابع په $x = 1$ کې پرېکېدونکې (نامتمادي) ده

بیلګه ۵ : وي دې

$=2x^2 + 1 \; ; \; x < 2$

$f(x) = \quad 3 \qquad x = 2$

$=x + 3 \; ; \; x > 2$

د تابع $f(x)$ متمادیت په $x = 2$ کې تر بحث لاندې ونیسی

حل : تابع $f(x)$ په $x = 2$ کې تعریف ده او لرو $f(2) = 3$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (x + 3) = 5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او

$$\lim_{x \to {}^{+}2} f(x) = \lim_{x \to {}^{-}2} f(x)$$

$$\lim_{x \to {}^{-}2} f(x) = \lim_{x \to {}^{-}2} (x^2 + 1) = 5 \;\Rightarrow\; \lim_{x \to 2} f(x) = 5$$

دا چې $f(x) = 3$ دی، نو له دې امله $\left(\lim_{x \to 2} f(x) \neq f(2)\right)$

دا په دې مانا دی، چې تابع په $x = 2$ کې پرېکيدونکې(نامتمادي) ده

د ناپرېکيدونکو يا متمادي توابعو خويونه

فعاليت:

۱) د توابعو f او g جمع (زياتون) پيداکړئ

$$(f+g)(x) = \ldots\ldots$$

۲) د f او g توابع په x=2کې متمادي(ناپرېکيدونکي= دي، نو :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ldots\ldots.. \;\&\; \lim_{x \to a} g(x) = \ldots\ldots$$

۳) د پوله ارزښتونو (حدونو) ارزښتونه وکاروئ

$$\lim_{x \to a} (f + g)(x) = \lim_{x \to a} (f(x) + g(x))$$

$$\ldots : \quad = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = (f + g)$$

$$(a)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې امله (f+g) په x=a کې متمادي دي.

که تابع f اوg په x=c کې متمادي وي، نو د لاندې توابعو څخه يې هره يوه په x=cکې متمادي ده

۱) د توابعو جمع $f+g$

۲) د توابعو تفريق(کمون) $f-g$

۳) د توابعو ضرب(ځل) $f.g$

د توابعو وېش $\frac{f}{g}; g \neq 0$

بېلګه ۱ : وي دې

$$f(x) = \sin x + 1,$$

$$g(x) = x^2 + 3x - 2$$

نو ۱) f او g په x=1 کې متمادي دي.

۲) وښيی، چې الف) $\sin x + x^2 + 3x - 1$

ب) $(\sin x + 1)(x^2 + 3x - 2)$

په x=1کې متمادي که نامتمادي دي

حل :

$$1)\ \lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = \sin 1 + 1$$

$\lim_{x\to 1} g(x) = g(1) = 2;$ نو f په x = 1کې متمادي دی

نوg په x = 1 کې متمادي دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم خوي وخيرئ

2) a) $\sin x + x^2 + 3x - 1 = (\sin x + 1) + (x^2 + 3x - 2)$

۲) الف)

$= f(x) + g(x) = (f + g)(x)$

د متمادي توابعو جمع په $x = 1$ کېمتمادي ده

(ب　b) $(\sin x + 1)(x^2 + 3x - 2) = f(x).\ g(x)$

$= (f.g)(x)$

نو د ناپرېکيدونکو- يا متمادي توابعو ضرب (حَل) په $x = 1$ کې متمادي دئ

بيلګه ۲ : وي دې

$f(x) = x + 1, \qquad g(x) = 3x - 2;$

وخيرئ، چې ايا $f(x).\ g(x)$ په $x = 2$ کې متمادي ده

حل :

$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2) = 3$

$\lim_{x\to 2} g(x) = 4 = g(2)$

$f(x) . g(x) = 3x^2 + x - 2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to 2} f(x).\ g(x) = 3(4) + 2 -2 = 12$$

$$= \lim_{x\to 2} f(x).\ \lim_{x\to 2} g(x)$$

$$= f(2)\ .\ g(2)$$

له پورته څخه لاس ته راځي، چې $f(x).g(x)$ متمادي دئ

په کښ لور بند ایتروال $[a,b]$ کې ګراف متمادي تابع په ګوته کوي یا ښایي، چیرته چې $f(a) \neq f(b).$ دئ.

که ولرو $f(a) < k < f(b)$ نو ګراف له ټکي $(b, f(b))$ څخه نه شي انځورېدلی تر څو پرته (افقي)کرښه $y = k$ د ثابتې k سره غوڅه نه کړي .

(انځور راځي)

له پورته څخه لیکلی شو:

که تابع f په بند اینتروال $[a,b]$ کې متمادي(ناپرېکېدونکې) اوk د b او ترمنځ پروت وي، نو هلته کم له کمه یو عددc د $f(a)$ او$f(b)$ ترمنځ شته داسې چې $f(c) = k$ دی

بیلګه ۳ : وي دې $f(x) = x^3 + 4x\ ,\ \ x \in [1,2]$

وښایی، چې یو $c \in (1,2)$ شته داسې،چې $f(c) = 11$ **وي.**

حل : $f(x)$ یو پولینوم دئ نو f په بند اینتروال $[1,2]$ کې متمادي دئ. لرو

$$f(1) =1^3 + 4\ (1) = 5;\ f(2) = 8 + 4\ (2) = 16$$

$f(1) \neq f(2)$ او $5 < 11 < 16$

له دې امله یو عدد $c \in (1,2)$ شته، داسې چې $f(c) = 11$ دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۴ : وي دې

$f(x) = 2x + 4; \quad -1 \le x < 2$

$; \quad 2 \le x \le 20 |x-10| =$

نو

الف) و ازمایی، چې تابع متمادي ده　ب) و ازمایی، چې یو $c \in (-1, 20)$ شته
داسې چې $f(c) = 6$ دئ او د c ارزښت پیدا کړی.

حل :

$f(x) = 2x^2 + 4 = 8 \lim_{x \to 2^-}$

$f(x) = 10 - 2 = 8 \lim_{x \to 2^+}$

له دې امله لرو

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2} f(x) = 8$

$f(x) = 10 - 2 = 8$

ګورو چې تابع په $[-1, 20]$ کې متمادي دئ

b) $f(-1) = 2x - 1 + 4 = 2$

$f(20) = |20-10| = 10 \quad \Rightarrow f(-1) \ne f(20)$

په دې اساس لرو　$2 < 6 < 10$

له دې امله لرو　$c \in (-1, 20): \; f(c) = 6$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$2x + 4 = 6 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1 \in (-1, 2).$

$= 6 \Rightarrow |x-10|$

$x - 10 = 6 \Rightarrow x = 16 \in (-2, 20)$

یا $10 - x = 6 \Rightarrow x = 4 \in (-2, 20)$

د c ارزښت دی $1, 4, 16$

بیلګه ۵ : وي دې

$f(x) = 2\sin x + 3;\ x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],$

وښایی چې $c \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ شته د کومې لپاره چې باور لري $f(c)=4$ او c پیداکړی.

حل : د تابع f د ساین تابع ده، نو له دې امله f متمادي(ناپرېکېدونکی) دی

$f(-\frac{\pi}{2}) = 2\sin -\frac{\pi}{2} + 3 = 2(-1) + 3 = 1$

$f(\frac{\pi}{2}) = 2\sin \frac{\pi}{2} + 3 = 2(1) + 3 = 5$

نو موږ لرو $f(-\frac{\pi}{2}) \neq f(\frac{\pi}{2})$:

تابع f متمادي ده او لرو $1 < 4 < 5$

دا په دې مانا چې $c \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ شته، د کوم لپاره چې $f(c) = 4$ صدق کوي

د دې لپاره چې c پیدا کړو نو لرو

$f(c) = 2\sin c + 3 = 4$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$2 \sin c = 1 \Rightarrow \sin c = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow c = \frac{\pi}{6}$$

د ګراف څخه څرګندیږي، چې f په ایتروال [a,b] متمادي دی ، f(a) او f(b) متضادې مخنخښې(علامې) لري، نو c د f(a) او f(b) ترمنځ د منځ ارزښت جملې له مخې د K=0 سره کم له کمه یو C د a او b ترمنځ شته، چې لاس ته ترې راځي f(c) = 0 .

دا په دې مانا چې x=c د f(x) = 0 مساواتو یو حل دی . انځور شته

بیلګه ۶ : وي دې $f(x) = x^3 + 5x - 23$

وښایی، چې تابع f د x -محور په اینتروال (2.3) کې غوڅوي.

حل : f پولینومتابع ده ، نو f په اینتروال کې [2,3] متمادي دی.

$$f(2) = 2^3 + 5\,(2) - 23 = -5$$

$$f(3) = 3^3 + 5\,(3) - 23 = 19$$

$f(2) \neq f(3)$ سره (عالمو) او د متضادو مخنخښو

له دې امله د $c \in (2,3)$ لرو چې $f(c) = 0$ دی

د څپرکي ټولګه " Chapter Summary "

پیژند: تابع f(x) یو حد L لري، که x ترلیي یو حقیقي عدد c ته لاړ شي. دا په دې معني چې د f(x) لپاره، چې ترلی و L ته ځي دا دی، چې x ترلیclose to c و ته لاړشي او داسې یې لیکو : $\lim_{x \to c} f(x) = L$

(c) ketabton.com: The Digital Library

قصيه : كه$f(x)$ همغه پوله ارزښت L ولري ،كه x د ښى يا كيڼي لور و c ته نزدې شي، نو پوله ارزښت شته او د L سره برابر دی.

د پوله ارزښت يا حد خويونه :

كه f او g توابع وي، c;L او M حقيقي اعداد وي داسې چې $\lim_{x \to c} f(x) = L$

او $\lim_{x \to c} g(x) = M$ ، نو لاندې لرو:

$$1)\ \lim_{x\to c} (f+g)(x) = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x) = L + M$$

$$2)\ \lim_{x\to c} (f-g)(x) = \lim_{x\to c} (f(x) - g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x) = L - M$$

$$3)\ \lim_{x\to c} (f \cdot g)(x) = \lim_{x\to c} f(x) \cdot \lim_{x\to c} g(x) = L \cdot M$$

$$4)\ \lim_{x\to c} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}; \ (M \neq 0)$$

$$5)\ \lim_{x\to c} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$$

(د $f(x) \geq 0$ او د x د ټولو ارزښتونو لپاره ، چې c ته ور نزدې كيږي.

قضيه : كه x په راديان وركړ شوی وي، نو لرو : $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

قضيه : كه x په راديان وركړ شوی وي، نو لر: $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

پيژند : f دې يو تابع وي، چې د ټولو x لپاره په يو واز انتروال كې چې $x = c$ ولري ،تعريف وی، نو وايو چې f په $x = c$ كې متمادي، د لاندې شرايطو لاندې:

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

1) f (x) تعریف دی 2) $\lim_{x \to c} f(x)$ شته دی

3) $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

که تابع د ټول $x \in (a, b)$ لپارره متمادي وي، نو تابع په ټول انتروال (a, b) کې متمادي ده.

پېژند : وایو چې یو تابع په یوه بند انتروال [a, b]کې متمادي ده، که تابع له ښي لور په x = a ې متمادي وي او له کېڼ لور په x = b کې او د واز انتروال (a, b) په هر ارزښت کې متمادي وي.

د متمادي توابعو خویونه : که f او g په x = c کې متمادي وي، نو دا لاندې توابع هر یو په x = c کې متمادي دی.

اول) د جمعي f+g تابع

دویم) د تفریقf-g تابع

دریم) د ضرب f.g تابع

څلورم) د ویش تابع

د منځني ارزښت قضیه: که تابعf په بند انتروال [a,b]کې متمادي وي او k د f(a) او f(b)ترمنځ یو عدد وي، نو کم له کمه د a او b ترمنځ یو عدد c شته، د کوم لپاره چې f(c)=k باور لري.

ترنه

د $x \to \pm\infty$ لپاره پوله ارزښت (حد)

اول : $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{5}{x-2} = \frac{5}{\pm\infty} = 0^{\pm}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ۵ وېشنه په یوه ډېر لوی (ناپای) مثبت(منفي) عدد باندې یو ډېر کوچنی مثبت(منفي) عدد ورکوي یانې □□ .

ګراف G_f یو پروت اسیمپتوت $y=0$ لري ، چې له پورته او کښته ګراف ته ور نزدې کیږي.

دویم :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-3}{x+1} = \frac{-3}{\pm\infty} = 0^{\mp}$$

د3- وېشنه په یوه ډېر لوی مثبت(منفي) عدد باندې یو ډېر کوچنی مثبت(منفي) عدد ورکوي یانې □□ .

ګراف G_f یو پروت اسیمپتوت $y=0$ لري ، چې له پورته او کښته ګراف ته ور نزدې کیږي.

دریم :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{5}{x^2-2x} = \frac{5}{+\infty} = 0^{+}$$

په مخرج کې فقط x^2 ستر رول لوبوي. د مربع کونې له لارې هر عدد مثبت کیږي.که ۵ په یوه ډېر لوی مثبت عدد ووېشل شي، نو یو خورا کوچنی مثبت عدد ترې لاس ته راځي، یانې
ګراف G_f یو پروت اسیمپتوت $y=0$ لري ، چې فقط له پورته لور ور نزدې کېدنې سره .

ځلورم :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-3}{x^2-2} = \frac{-3}{+\infty} = 0^{-}$$

د مخرج مربع کونې سره منفي عددونه هم مثبت میږي.. د3- وېشنه په یوه ډېر لوی مثبت عدد باندې یو ډېر کوچنی منفي عدد ورکوي یانې □ -.

ګراف G_f یو پروت اسیمپتوت $y=0$ لري ، چې فقط کښته ګراف ته ور نزدې کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پرېښودنې - یا ترې صرفنظر کونې اصول

اول :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-1}{x^2-2}= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0^{\pm}$$

په صورت کې د x توانونه، په مخرج کې د x^2 توانه په پام کې نیسو او همداسې له ټولو ثابتو تېرېږو (ټولې ثابتې پرېښول کیږي،صرف نظر ترې کیږي) او بیا x لنډیږي. که ۱ په ډېر لوی مثبت(منفي) عدد وویشل شي. نو □□ ترې لاس ته راځي.

څېره G_f پروت اسیمپتوت(مجانب) $y=0$ لري، چی له پورته او کښته ورنږدې کیږي.

دویم

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-2}{x+2}= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}x=\pm\infty$$

- په صورت کې د x^2 او په مخرج کې د x له ټولو توانونو په پام کې نیونو او له ټولو ثابتو تریږو (صرفدظر ترې کوو) او بیا یې د x سره لنډوو. په روښانه توګه ټول پوله ارزښتونه □□ لاس ته راځي.

څېره G_f مایله اسیمپتوتي راکوي، ځکه چې د صورت درجه له مخرج څخه د ۱ په اندازه ستره ده.

دریم :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2-2}{3x^2+2x}= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2}{3x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2}{3}=-\frac{2}{3}$$

په صورته او مخرج کې د x^2 ټول توانونه په پام کې نیسو او له ټولو ثابتو تېرېږو او بیایې د x^2 سره لنډوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټولې پولې په روښانه توګه 2/3- راکوي.

څيره G_f پرته اسيمپتوت راکوي ، چې $y=-2/3$ ده.

خلورم :
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2+2x-1}{3x^3+2x^2-3x+2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2}{3x^3}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2}{3x}=\frac{-2}{\pm\infty}=0^{\mp}$$

په صورت کې د x^2 څخه کوچنيو ټولو توانونو او په مخرج کې د x^3 له ټولو کوچنيو توانونو او همداسې له ثابتو تېرېږو (صرف دظر پرې کوو) . که په ووېشل شي ، نو يو کوچنې مثبت يا منفي عدد يانې$\mathbf{0}^{\mp}$ ترې لاس ته راځي.

څېره $\mathbf{G_f}$ يو پروت اسيمتوت$y = 0$ لري،چې له پورته او کښته لور ورنزدې کيږي.

شميرنيز حلونه

دويم :
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-1}{x^2-2}=$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{2}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x^2}}=\frac{0^{\pm}}{1}=0^{\pm}$$

په صورت او مخرج x^2 له نوکانو(قوسونو) راوستني او بيا د x^2 سرره لنډوني وروسته مخرج د ۱ په لور ځي او صورت د $+\infty$ په لور ، نو

ترمونه $2/x$ او$1 / x$ و صفر ته نزدې کيږي.

څيره G_f يوه مايله اسيومپتوت لري، ځکه چې د صورت درجه د مخرج له درجې څخه په ۱ لويه ده.

دريم :
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2-2}{3x^2+2x}=$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\left(-2-\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(3+\frac{2}{x}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2-\frac{2}{x^2}}{3+\frac{2}{x}}=-\frac{2}{3}$$

- که x^2 له نوکانو راووېستل شي او بیا لنډ شي،نو صورت د صفر په لور ځي یا صفر ته نزدي کیږي;مخرج ,۱ ته نزدې کیږي، ځکه ټول ترمونه د او و صفر ته ځي په صورت فقط ترم د صفر مخنخښه ټاکي.

خېره پرته اسیمپتوت لري له پورته او کښته نزدې کیدنې سره.

ځلورم: $$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2+1}{x^4-2x^2+2}=$$

په صورت او مخرج کې هغه د لوی توان x یعنې x^4 له نوکانو دباندې نیسو او بیا په ترتیب شمېرنیزه عملیه مخ ته بیاوو ، نو لاس ته ترې راځي:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^4\left(\frac{-2}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)}{x^4\left(1-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^4}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{-2}{x^2}+\frac{1}{x^4}}{1-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^4}}=\frac{0^-}{1}=0^-$$

ټولیز خویونه :

او ل : $$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2-2}{x+1}= \qquad \pm\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(3x-\frac{2}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{+\infty}{1}=+\infty$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورته بیلګه کې داسي مخ ته تللي ي،چې په صورت کې له ټولو عددونو تېرېږ، چې د خپلواکې متحولې توان له ۱ کوچنی یعنې صفر وي او په صورت کې له ټولوأه ۲ څخه کوچنې توان څخه تېرېږو. ګورو، چې په صورت کې پاتېکیږی، له دې امله پورته تابع د مثبت-منفي ناباى په لور ځي.

دویم : $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-1}{x^2-2}= \quad 0^{\pm}$

په پورته بېلګه کې په صورت کې له ۱ او مخرج کې له ۲ څخه تېرېږو او ببیا صورت او مخرج په x ویشو، چې لاس ته رانه یې یو یې د یوه ثابت عدد وېشل وي په x . چې د □□ **x** سره تابع و $0^{\pm}$ ته ځي.

بیلګه ۳ : لرو : $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2-2}{3x^2+2x}=$

په صورت کې له ۲ او مخرج کې له 2x څخه تېرېږو او د x^2 سره لنډوني وروسته د x^2 سره لنډیږي او په دې ډول لاندې پایله لرو :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2-2}{3x^2+2x}= -\frac{2}{3}$$

بیلګه ۴ : $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2+1}{x^4-2x^2+2}= \quad 0^{-}$

په صورت کې له ۱ او مخرج کې له اوو څخه تېرېږو او بیا له لنډوني وروسته یو ثابت عدد په ناپای وېشل کیږي، چې پایله یې 0^{-} دی، یعني لرو :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2+1}{x^4-2x^2+2}= 0^{-}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۹ . ۵ تمرینونه

۱ . د بلواکو پولی

۱ . ۱ لاندې پولی وټاکی

1.1.1. a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$ b) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$

c) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}\frac{4x^2-1}{2x+1}$ d) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x}{1-\sqrt{x}}$

1.1.2. a) $\lim\limits_{x\to 8}\frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$ b) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{27-x^3}{x-3}$

c) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^4-1}{1+x}$ d) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{2+x}{32+x^5}$

1.1.3. a) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-4x+3}{2x-6}$ b) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$

c) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$ d) $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$

1.1.4. a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x+1}}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+25}-5}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ d) $\lim\limits_{x\to 7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$

1.1.5. a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$ d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sin x\frac{\cos x}{x}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x}$ f) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}$

g) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 2x}$ h) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

i) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{1-\tan x}{1-\cot x}$ j) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

k) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos x - \cos\frac{\pi}{4}}{\sin x - \sin\frac{\pi}{4}}$

l) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x - \cos x}{1 - \tan x}$

۱.۲ په ورکړشوو ځایونو کی د لاندې بلواکو کینې او ښی پولې وټاکې

a) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ für $x = 0$

b) $f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$ für $x = 0$

c) $f(x) = e^{\frac{1}{1-x^2}}$ für $x = 1$

d) $f(x) = \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ für $x = 0$

e) $f(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{e^{\frac{1}{x}} + 1}$ für $x = 0$

f) $f(x) = \dfrac{x}{2x + e^{\frac{1}{x-1}}}$ für $x = 1$

g) $f(x) = 2^{\frac{1}{x-1}}$ für $x = 1$

h) $f(x) = \dfrac{2^{\frac{1}{x}} + 3}{3^{\frac{1}{x}} + 2}$ für $x = 0$

i) $f(x) = \dfrac{1}{1 + 3^{\frac{1}{x-1}}}$ für $x = 1$

j) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ für $x = 1$

k) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ für $x = -1$

l) $f(x) = \dfrac{x+1}{|x+1|}\,x$ für $x = -1$

۲ . ناپریکیدونکی بلواك : لاندې بلواك د کوم لپاره پریکیدونکی ځایونه لري،
دا د کوم ډول دی او که ممکن وي، په کومه توګه دا له منځه وړ لکیدی شي.

a) $y = \dfrac{|x-1|}{x-1}$

b) $y = \dfrac{x+2}{|x+2|} \cdot x$

c) $y = \dfrac{1-x}{1-|x|}$

d) $y = \dfrac{x+2}{x+2} + \dfrac{1}{x+1}$

e) $y = \dfrac{x-3}{\sqrt{1+x} - 2}$

f) $y = \dfrac{x-4}{\sqrt{x} - 2}$

g) $y = \sin\dfrac{1}{x}$

h) $y = x \cdot \sin\dfrac{1}{x}$

i) $y = x^2 \sin\dfrac{1}{x}$

j) $y = \dfrac{\sin x}{x}$

k) $y = x \cdot 2^{\frac{|x|}{x}}$

l) $y = \ln 2^{\frac{1}{x-1}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

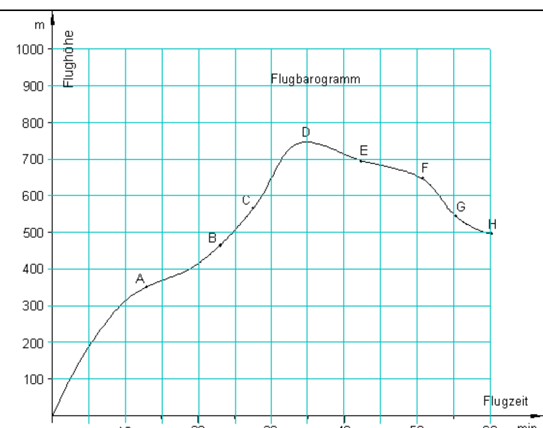
۲۰ . مشتقشمیرنه(رابیلیدنه)

د تابع تغیر منځ ارزښت (منځنی قیمت) II.1. Average rate of change

دکتاب په دې برخه کې موږ د ریاضیاتو یوه غوره برخه، چې د ریاضیاتو زړی ورته ویلی شو ، تر څېړنې لاندې نیسو، نو له دې امله لازم ګنم، چې په دې هکله داسې مهم څه د یوه یادښت په څېر راوړم:

که له یوه ځای څخه وبل ځای ته د تابع د تغیر منځ ارزښت Averagerate of change څخه غږېږو ، نو موخه ترې په یوه ټکي یا دوه ټکو کې د تابع جګوالی ، میل اویا تانجنت دی او دا دریواړه کلمې د ریاضیاتو له مخې په همغه یوه معنا دې او وبه ګورو، چې همداسې د تفاضل وېش(Difference quotient) هم.

په یوه ټکي کې د تابع د ګراف میل(جګېدنه)

په الوتکوکې د الوتنېدلیک(الوتنلیک) الې (Flight barogramm) جوړې دي، چې تل د الوتنې جګوالی د الوتنې د وخت په واک کې یا د وخت تابعیت کې رسموي او په هر جګوالي کې د هوا فشار هم لیکي. که دا په پښتو واړوو، نو د لیک بکس به ورته ووایو.	

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورته ګراف کې د يوې الوتکې د الوتنې د بيلا بيلو وختونوجګوالی ښوول شوی.

-ايا فکر کوئ، چې په ټکي B کې نسبت و ټکي A ته جګوالی زيات دی؟

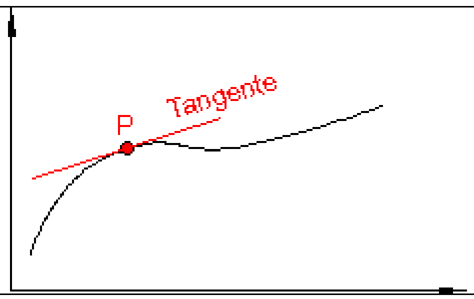
-ايا فکر کوئ، چې د E او G په ټکو کې جګوالی منفي دی؟ دلته د E په ټکي کې د ارزښت له مخې جګوالی زيات دی نسبت د G ټکي ته؟

-ايا د يوې کرښې او منحني جګوالی هرچېرته توپير لري او که نه ؟

لاس ته راوړنه :
۱ - ګورو، چې په يوه منحني کې د ګراف جګوالی هرچېرته برابر نه دی، نو له دې امله بايد ټکی په ګوته کړو، چې هلته ميل څېړل کيږي.

۲ - په لاندې بيلګه کې به روښانه کړو، چې تنها د يوې (سيده)کرښې ميل هرچېرته برابر دی، نو له دې امله دلته د يوې کرښې د ميل يا جګوالي څخه غږيږو.

بريښي چې لاندې پېژند يا تعريف عاقلانه دی:

پيژند (تعريف): د يوې تابع ګراف ميل (جګوالی) د P په يوه ټکي کې په همغه ټکي د تانجنت د ميل د ګراف سره برابر دی	

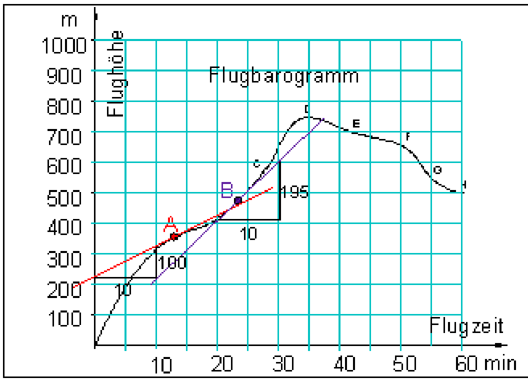
ليدل کيږي چې دلته يو تانجنت د کرښې تعريف لري، چې د لمسټکي(مماس) په چاپېريال کې د امکاناتو سره سم لمسټکي(مماس) ته ښه ور نږدې کيږي.

ددې پېژند يا تعريف له مخې په يوه ټکي کې د يوه ګراف ميل د يوې کرښې ميل دی.

د ګراف د جګيدنې ټاکلو لپاره د A اوB په ټکو هر يوه کې يوه کرښه (تانجنت) انځوروو، چې ګراف ته خورا زياته نږدې کيږي.

د ميل يا جګيدنې مثلث په مرسته جګېدنه په شډل يا ساده ډول شميرل کېدی شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library



د A په ټکي کي جګیدنه :

$$\frac{100\text{ m}}{10\text{ min}} = 10\,\frac{\text{m}}{\text{min}}$$

د B په ټکي کي جګیدنه :

$$\frac{195\text{ m}}{10\text{ min}} = 19{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{min}}$$

زموږ د بیلګي لپاره میل یا جګېدنه په یوه ټاکلي ټکي کي د لحظوي (سملاسي) میل د چټکتیا (سرعت) په معنا دی.

دA په ټکی کې : د الوتني وخت نږدې 12,5 min ، د میل یاجګېدني چټکتیا(سرعت) نږدې $10\,\frac{m}{\text{min}}$ ده

د B په ټکی کې : د الوتني وخت نږدې 23,0 min ، د جګیدني چټکتیا(سرعت) نږدې $19{,}5\,\frac{m}{\text{min}}$ ده.

تانجنت تر اوسه فقط د لیدني له مخې تعریف شوی ، چې د لمستکي چاپیریال ته خورا ډېر نږدې کیږي. له دې امله ممکن وه، چې د ګراف میل د A اوB په ټکو کې هم یواځې په نږدې ډول وټاکل شي، دا په عمل کې د قناعت وړ نه دی.

II.2 په یوه ټکي کې د تابع دګراف میل (جګیدنه):

معلومه ده ، چې یو ریلګاډی د تمځای څخه له خوزېدو(حرکت)وروسته خپله چټکتیا(سرعت) په ورو ورو (کراره کراره) زیاتوي.وهلې لار(د تمځای څخه لرېوالی) تل زیاتیږي. د تمځای څخه لریوالی د چټکتیا یا سرعت په واک کې ده .

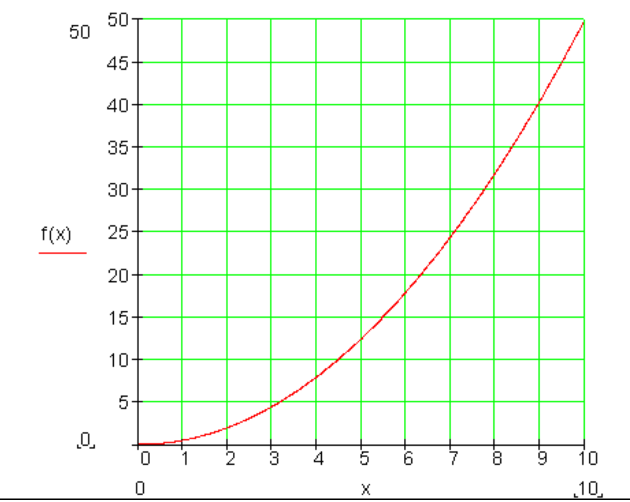
(c) ketabton.com: The Digital Library

دا عمل د لاندې تابعمساوات له لارې ليکلی شو.

دلته د x وخت د ثانيې او د s لار د متر لپاره ليکو

$s = f(x) = 0{,}5x^2$

مخامخ : د تابع گراف



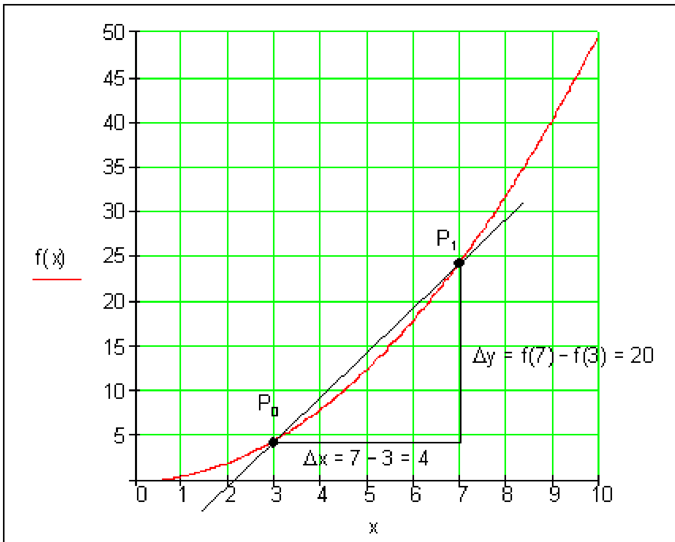
اوس بايد منځنی ارزښت(منځنی چگوالی) Averagerat of change د ۳ ــمي او ۷ ــمي ثانيی ترمنځ وشمېرل شي.

ددې لپاره اړونده سيکانت انځوروو او د هغې چگوالی شميرو.

اوس دې د تغير ارزښت (منځنی چگوالی) د ۳ ــمي او ۴ ــمي ثانيو ترمنځ وشميرل شي.

په دريمه ثانيه کې د ارزښت تغير يا چگوالی څومره دی؟

د منځنی چگوالي داسې مخ ته بوزی، چې د تکو P_1 او P_0 ترمځ واټن تل کوچنی شي،داسې چې تکی P_1 د تکي P_0 په لور وخوزيږي.



د ۳ ــمي او ۷-مي دقيقي ترمنځ

(c) ketabton.com: The Digital Library

منځنی تغیرارزښت (جګوالی)دی:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(7)-f(3)}{7-3}=\frac{24,5-4,5}{7-3}=\frac{20}{4}=5$$

د ۳ ــمې او ۴ ــمې دقیقې ترمنځ

منځنی تغیرارزښت(منځنی جګوالی) دی:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(4)-f(3)}{4-3}=\frac{8-4,5}{4-3}=\frac{3,5}{1}=3,5$$

دریمې دقیقې ته د ورنږدې کیدنې شمیرنه

Intervall $[3;x]$	$[3;4]$	$[3;3,1]$	$[3;3,01]$	$[3;3,001]$
$\Delta x=x-3$	1	0,1	0,01	0,001
$\Delta y=f(x)-f(3)$	3,5	0,305	0,03005	0,0030005
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	3,5	3,05	3,005	3,0005

پورته شمیرنه په ګووته کوي، چې که ټکی P_1 د ټکي P_0 په لور وخوزیږي یا ورنږدې شي، نو د تغیر ارزښت(جګیدنه) تل زیاته و ارزښت ۳ ته ورنږدې کیږي.

موږ په دې توګه یو ارزښت لاس ته راوړو، چې لحظوي تغیرارزښت (لحظوي جګیدنې) ته تل ورنږدې کیږي.
که موږ فیزیکي لویي (واحدونه) په خپله بېلګه کې وکاروو، نو د تغیرارزښت (جګوالي) لپاره m/s باور لري . دا د چټکتیا لپاره یوون(واحد) دی

دا په دې مانا دی،چې د لار-وخت دیاګرام چټکتیا (سرعت) په ګوته کوي.

II.3 د لحضوي(د سترګو رپ) تغیرارزښت شمیرلو ته شمیرنیزه تګلار

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $f(x) = 0,5x^2$ لپاره په اینتروال $[3 ; \Delta x]$ کې منځنی تغیر ارزښت جګوالی:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3+\Delta x) - f(3)}{\Delta x} = \frac{0,5(3+\Delta x)^2 - 0,5 \cdot 3^2}{\Delta x} = \frac{0,5\left[9 + 6\Delta x + (\Delta x)^2\right] - 0,5 \cdot 9}{\Delta x}$$

$$= \frac{0,5 \cdot 9 + 3\Delta x + 0,5(\Delta x)^2 - 0,5 \cdot 9}{\Delta x} = \frac{\Delta x(3 + 0,5\Delta x)}{\Delta x} = 3 + 0,5\Delta x$$

دا $3+0,5\Delta x$ د منځنی تغیرارزښت دی

که اوس Δx تل کوچنی شي، موږ وایو که Δx د صفر په لور وهڅیږي ($\Delta x \to 0$) ،نو د منځنی تغیر ارزښت $3+0,5\Delta x$ د3 به لور هڅیږي.

دا نو اوس لحظوي (د سترګو رپ) تغیرارزښت دی د x_0 په ځای کې.

د دې لپاره لیکو : د $\Delta x \to 0$ لپاره باور ري: $3+0,5\Delta x \to 3$

یا

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(3+0,5\Delta x) = 3$$

II.4کمښت ویش(د تفاضل(؟) ویش) Difference quotient

په ورته توګه د کمښت ویش یا د تفاضل ویش Difference quotient تر څېړنې لاندې نیسو.

د یوې کرښې میل یا جګیدنه بې له مشتق نیونې ټاکلکیدی شي:

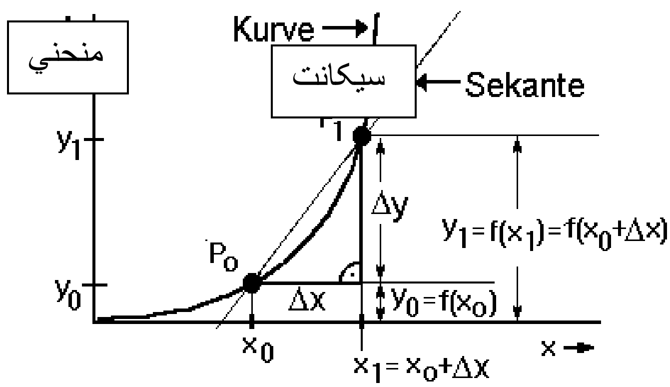
کرښه $y=f(x) = mx+a$ لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې کرښې د جګیدنې فرمول په لاندې ډول دی:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

د قاطع (seconce) پیژند : قاطع هغه کرښه ده، چې منحني د P_0 او P_1 په دوه ټکو کې غوڅوي(لاندې څېړه وګورئ)



پایله : د قاطع(غوڅوونيsecant) میل یا جګیدنه(جګوالی): دا چې قاطع هم یوه کرښه ده نو ،،میل (جګوالی) ،، یې هم د یوې کرښې میل په ډول شمېرل کیږي.

$$m_s = m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$m_S = m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

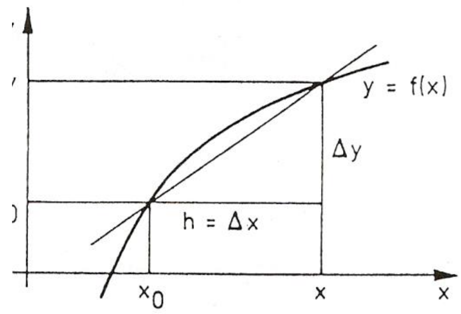
پیژند(تعریف)

د $y = f(x)$ تابع دې د x_0 په یوه چاپیریال او په x_0 کې پخپله تعریف شوې تابع وي، x د x_0 څخه بیل خو د چاپیریال په یوه خوښه یا په زړه پورې ځای دی(مخامخ څیره دې وکتل شي).

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو د تفاضل – یا کمښتویش Difference qutient د قاطع میل شته دی، چې په لاندې ډول يي ليکو:

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=$$
$$=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$



د پيژند لپاره خيره

د f تابع لپاره فرمول: $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. دا فرمول د f په ګراف باندې د دوه ټکو ترمنځ د قاطع د میل شمېرنه ده. دا ټکي د x – محور باندې د x او $x+h$ ټکي دي.
د کمښت وېش يا د تفاضلونو ويش د مشتق د تعريف لپاره په کار راځي.

بيلګه:
د $y=f(x)=3x^2-5x+4$ تابع دې ورکړ شوې وي. د دې تابع کمښت ويش(دتفاضل وېش) پيدا کړئ.

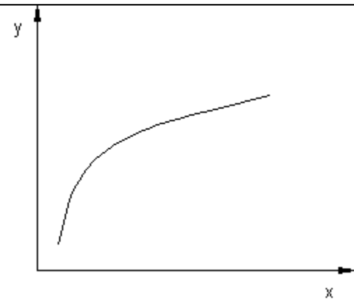
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{3(x+h)^2-5(x+h)+4-(3x^2-5x+4)}{h}$$
$$=\frac{3x^2+6xh+3h^2-5x-5h+4-3x^2+5x-4}{h}$$
$$=\frac{6xh+3h^2-5h}{h}$$
$$=6x+3h-5$$

II .2 مشتق Diffrentialquotient

(c) ketabton.com: The Digital Library

II.2.1 د غوڅوونې(تقاطع) ځګوالي څخه و د تانجنت ځګوالي یا ځګیدنې ته

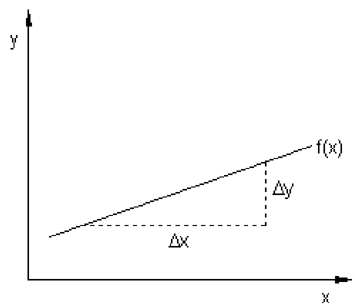
یو تابع $y = f(x)$ او اړونده ګراف دې ورکړ شوی وي.



که د تابع ځګیدنې حالت په پام کې ونیسو ،نو ګورو چې د تابع ځګیدنه په نزدې ټولو ټکو کې توپیر لري.

یوه ثابته ځګیدنه، لکه په لانیز تابع $f(x) = a_1 x + a_0$ ا کې د

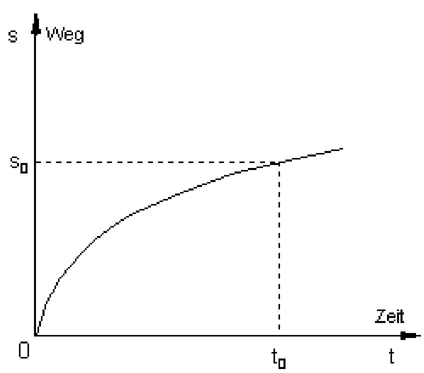
$$a_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = konstant$$



په زیاتو وختونو اړیینه ده ، چې د تغیرحالت(د ځګیدنې حالت) کې د تابع د تلنې حالت و څیړو.

نو له دې امله لحظوی چټکتیا(همغه وختیزه – یا سملاسي) $v(t_0)$ په لار-وخت دیاګرام کې وڅېړو.

د مشتقشمیرنې په مرسته دا پرابلم حل کیدی شي.

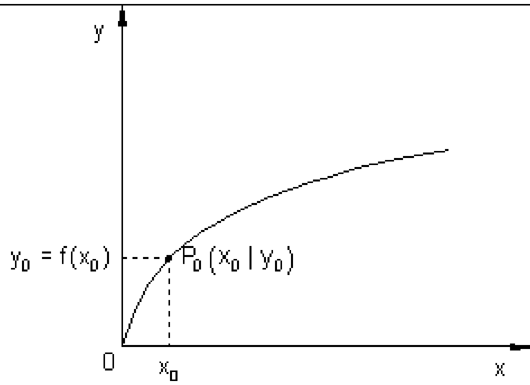


$t_0 \triangleq$	په پام کې نیولی سترګو رپ
$s_0 \triangleq$	تر دې سترګو رپ پورې وهلې لار

د یوه تابع د ځګېدنې ټاکنه په یوه د مخه ورکړ شوي ځای کې differenzieren د مشتق نیونه بلل کیږي.

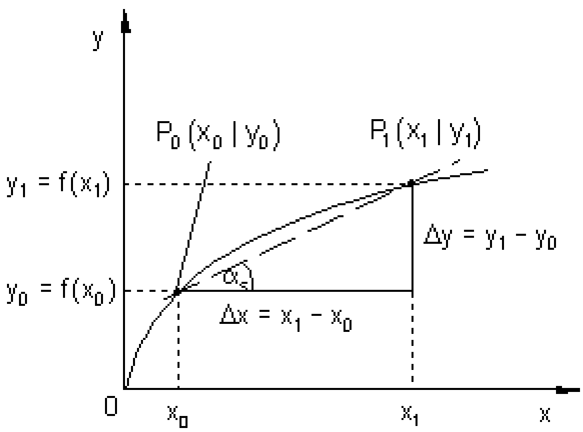
(c) ketabton.com: The Digital Library

يو تابع $y = f(x)$ او د هغه گراف دې ورکړ شوی. په ټکي $P_0(x_0 | y_0)$ کې ورکړ شوی وي. ددې جګوالی پیداکړی شي.



ددې پرابلم د حل لپاره داسې مخ ته ځو، چې لومړی جګوالی په نږدې توګه (تقریبي) پیدا کوو.

ددې لپاره یو بل ټکی $P_1(x_1 | y_1)$ د P_0 ټکي په نږدې کې ټاکو.



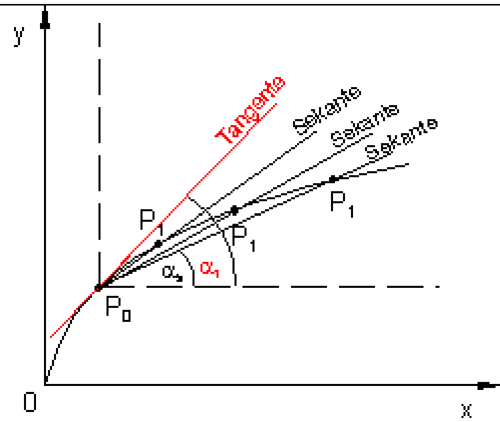
کرښه، چې دواړه ټکي سره ترې ،یعني سیکانت، یو جګوالی ښایي، چې د ټکو P_1 او P_0 ترمنځ د تابع ،،منځنی جګوالی،، په ګوته کوي.

دا د جګوالیمثلث له لارې ټاکل کیږي.

$$\tan \alpha_s = a_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

$\alpha_s \triangleq$	د سیکانت د جګېدو کونج
$a_s \triangleq$	د سیکانت د جګېدوضریب

(c) ketabton.com: The Digital Library

که ټکی P_1 د ټکي P_0 په نزدې کې وټاکو یا ځای په ځا ی کړو، نو دا په ټکي P_0 کې د تابع دنوي سیکانت جګوالی دی چې باید پیدا شي. که دا کار (تلنه) تل مخ ته بوزو، او ټکی P_1 تل و ټکي P_0 ته ورنزدې کړو، نو د پولي حالت په ځېر یوه کربنه منځ ته راځي، چې د تابع ګراف په ټکي P_0 کې لمسوي. د تانجنت جګېدنه په ټکي P_0 کې ټیک د تابع د ګراف جګېدنه په ټکي P_0 کې ښايي.	 α_t = د تانجنت د جګوالي (میلان ـ) کونج a_t = د تنجنت د جګوالي ضریب
داحالت یا تلنلار کیدی شي د ریاضي له لارې د پوله ارزښت په ځیر افاده شي.	$\lim\limits_{P_1\to P_0} \alpha_s = \alpha_t \quad \lim\limits_{P_1\to P_0} a_s = a_t$

II.2.2.کمبنتویش او مشتق Diference quotient and diferentialquotien

د سیکانت جګیدنه (منځنی تغیر

$$a_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x}$$

ارزښت)

$$\Delta x = x_1 - x_0 \Rightarrow x_1 = x_0 + \Delta x$$

د x لپاره د مساوات ښی خوا ځای په ځای کوو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

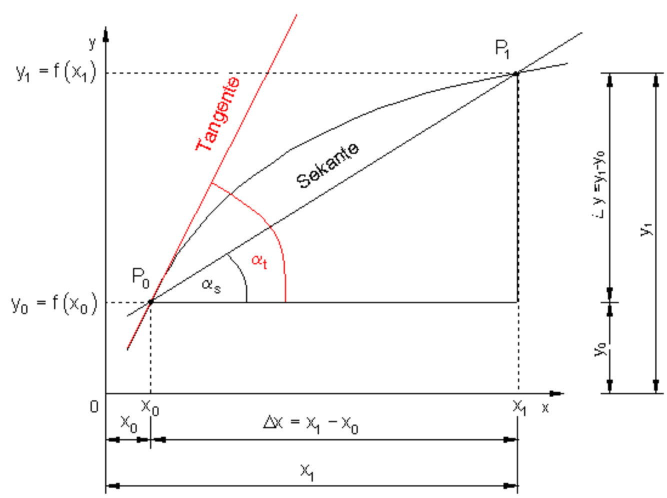
د تنجنت جګېدني سره د حد (پوله ارزښت) له لاري لرو

$$a_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

دا مشتق یا لحظوي – یا د سترګو رپ تغیر ارزښت دی

یا لنډ:

$$a_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$



په ورته توګه د کمښت ویش یا د تفاضل ویش Difference quotient تر څیرني لاندې نیسو:

د یوې کرښې میل یا جګیدنه بې له مشتق نیونې ټاکلکیدی شي.

کرښه $y = f(x) = mx + a$ لرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې کرښې د جګیدنې فرمول په لاندې ډول دی:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

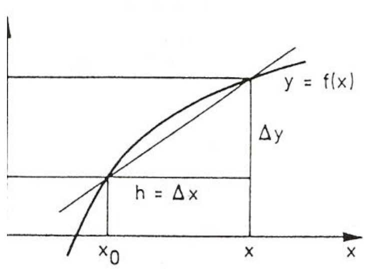
II.6 د غوڅوونې(قاطع seconce) پیژند:

قاطع هغه کرښه ده، چې منحني د P_0 او P_1 په دوه ټکو کې غوڅوي.

پایله: د قاطع میل یا جګیدنه(جګوالیsecant): دا چې قاطع هم یوه کرښه ده نو میل(جګوالی) یې هم د یوې کرښې میل په ډول شمېرل کیږي.

په لاندې کې m_S د جګوالي لپاره لیکل کیږي.

$$m_s = m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

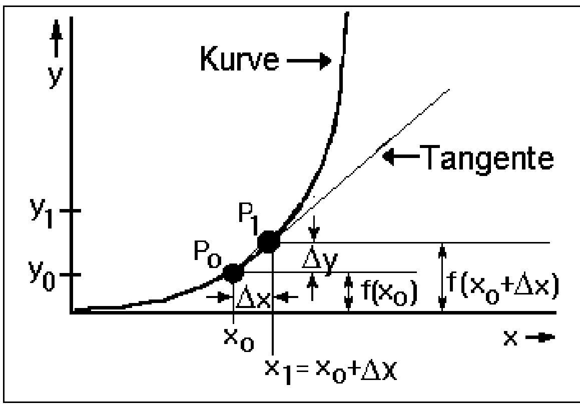
<table>
<tr>
<td>پېژند(تعریف): د $y = f(x)$ تابع دې د x_0 په یوه چاپیریال او په x_0 کې پخپله تعریف شوې تابع وي، x د x_0 څخه بیل خو د چاپیریال په یوه خوښه یا په زړه پورې ځای دی(مخامخ څیره دې وکتل شي). نو د تفاضل یا کمښتویش Difference qutient د قاطع میل شته دی، چې په لاندې ډول یې لیکو:
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$</td>
<td>د پیژند لپاره څیره

</td>
</tr>
</table>

(c) ketabton.com: The Digital Library

د f تابع غوځي ميل لپاره فرمول: $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. دا فرمول د f په ګراف باندې د دوه ټکو ترمنځ د قاطع د ميل شميرنه ده. ټکي د $x-$ محور باندې د x او $x+h$ ټکي دي.
د کمښت وېش يا د تفاضلونو ويش د مشتق د تعريف لپاره په کار راځي.
د يوه تابع د ميل يا ځګيدنې ټاکنه په يوه د مخه ورکړ شوي ځای کې د تابع د مشتق نيونه بلل کيږي.

مشتق شميرنه = د يوې منحنې ميل
Differential caculation)

تانجنت: که د P_1 او P_0, ټکي يو بل ته ناپای نږدې شي، نو له قاطع څخه تانجنت جوړيږي.



پايله : د تانجنت ځګيدنه : د تانجنت ځګيدنه د قاطع د ځګيدنې ،،حد ،،دی.

$$m_t = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_1)-f(x_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

پام: لکه د مخه مو چې ګوته ورته ونيوله، د derivativeکلمه نوې ده، نو له دې امله دا څو ټکي په پام کې نيسو : derivative د رابيليدنې په مانا دی، چې موږ يې تراوسه مشتق بولو،چې همدا معنا لرييعنط له اشتقاق سره تړاو لري.

تعريف: که د تابع دا کمښتويش (د تفاضل ويش) x- > x0 او(همداسې)⇔ (x->0)او يا په (همدې ډول)⇔
h- > 0 لپاره يو حد ولري , نو د y = f(x) تابع د $x = x_0$ په ځای کې د مشتق قابليت لري اود دې لپاره ليکو:
.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(\frac{dy}{dx})_{x=x_0} = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h};...$$

دا حد یا پوله داسې ښایو

$$(\frac{dx}{dy})_{x=x_0} = f'(x);$$

د x_0 ځاي کی د $y = f(x)$ تابع له مشتق(Derivativ,) یا رابیلدنې) څخه یوه بله سیده یا بل ډول کړه لار رابیله وو.

د مشتق ساده شمیرنې لپاره یوه بېلګه:

د $f(x) = x^2 - 3x + 2$ مشتق غواړو پیدا کړو.

ددې کمښتوېش په لاندې ډول دی:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$= \frac{((x_0 + \Delta x)^2 - 3(x_0 + \Delta x) + 2) - (x_0^2 - 3x_0 + 2)}{\Delta x}$$

$$= \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - 3x_0 - 3\Delta x + 2 - x_0^2 + 3x_0 - 2}{\Delta x}$$

$$= \frac{2x_0\Delta x + \Delta x^2 - 3\Delta x}{\Delta x}$$

$$= 2x_0 + \Delta x - 3$$

او د لیمیټ $\Delta x \to 0$ سره یې مشتق لاس ته راځي:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x - 3) = 2x_0 - 3.$$

د دې لپاره دا لاندې پېژند ورکوو:

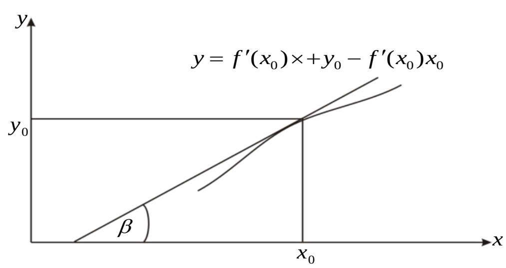
(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند :2

که یو د $y=f(x)$ تابع د x_0 په ځاي کی مشتقوړوي، نو هغه لاندنۍ کرښه چی د (x_0,y_0) ټکي څخه تیریږي او میل یا جګوالی یې $f'(x)=\tan\beta$ دی په لاندې ډول لیکو:

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=f'(x)\Leftrightarrow y=f'(x_0)x+y_0-f'(x_0)x_0$$

او دا د (x_0,y_0) په ټکي کی د ورکړ شوې منحني
$y=f(x)$ تانجنت بلل کیږي(پرتله مخامخ شکل)



موږ اوس د څو بنسټیزو توابعو مشتق شمیرنه تر څیړنې لاندې نیسو.

بیلګه ۱:

د یوې ثابتي مشتق :

موږ دالاندې تابع لرو،چې ارزښت یې یوثابت دئ
ثابت $y=f(x)=c=Const$

نو د هر x_0ځای لپاره لرو:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{c-c}{h}=0$$

$$\Rightarrow(\frac{dy}{dx})_{x=x_0}=f'(x_0)=0$$

بیلګه ۲:

یوه $f(x)=x$ خطي(کرښیزه)تابع لرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د x_0 په ځای کې غواړو د دې تابع مشتق پیدا کړو او د مشتق تابع هم:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x_0+\Delta x)-x_0}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x_0+\Delta x-x_0}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=1$$
$$\Rightarrow f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}1=\underline{\underline{1}}$$

نو $f'(x_0)=1$ د x_0 په ځای کې د تابع مشتق دی او $f'(x_0)=1$ د مشتق تابع ده یعني یوه ثابته ده.

بیلګه ۳ : د $y=f(x)=c.u(x)$ دوله تابع مشتق د c=ثابتې سره.

د یوې تابع مشتق، چې له یوې ساده تابع او یوې ثابتې سره د ضرب له لارې منځ ته راغلی وي، برابر دی د ساده تابع د مشتق سره، چې د(ثابتې=c) سره ضرب شوی وي. یعنې

له $y=f(x)=c.u(x)$ څخه لرو:

$$\Rightarrow f'(x)=c\cdot u'(x)$$

ثبوت:

$$f(x_0)=c\,u(x_0)$$
$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{c\cdot u(x_0+\Delta x)-c\cdot u(x_0)}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}c\cdot\frac{u(x_0+\Delta x)-u(x_0)}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow f'(x_0)=\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}c}_{c}\cdot\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x_0+\Delta x)-u(x_0)}{\Delta x}}_{u'(x_0)}$$
$$\Leftrightarrow f'(x_0)=\underline{\underline{c\cdot u'(x_0)}}$$

پیژند (تعریف): دفرنځیالوېش

(c) ketabton.com: The Digital Library

Der <u>Differentialquotient</u> $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) := \frac{dy}{dx}$
heißt <u>Ableitung</u> der Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0

د x_0 په ځای کې د تابع $f(x)$ مشتق یا رابیلیدنه بل کیږي

تعریف (پیژند): د تاپع لومړی مشتق یا رابېلېدنه دx_0 په ځای کې دتانجنت جګېدنه ورکوي، چې د تابع ګراف یې په ټکي $P_0(x_0, y_0)$ کې لمسوي او له دې سره غبرګ د تابع د ګراف جګېدنه ده په ټکي $P_0(x_0, y_0)$ کې. دا سړی د تابع جګېدنه هم بولي.

تانجنتجګېدنه په ټکي $P_0(x_0, y_0)$ کې

Tangentensteigung in $P_0(x_0 \mid y_0)$

$$a_t = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

د x_0 په ځای کې د تابع مشتق او د مشتق تابع

د x_0 په ځای کې د تابع مشتق یعنې څه؟

ددې د روښانه ونې لپاره د لاندې بېلګې څخه کار اخلو

بیلګه:
تابع $y = f(x) = x^2$ دې ورکړ شوې وي.
غواړو د $x = x_0$ په ځای کې او په ځانګړې توګه د $x_0 = 2$ په ځای کې د هر څه لومړی کمښتویش(د تفاضل وېش) پیداکوو.

$x = x_0:$ $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ $\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$	$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_0^2 + 2x_0 \Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$ $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x_0 \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس د لیمیټ د لاس ته راوړلو له لارې د مشتق ضریب ته راځو:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x_0+\Delta x)=2x_0$$

نو $f'(x_0)=2x_0$ لرو او د $x_0=2$ لپاره $f'(2)=2\cdot 2=4$ باور لري.

د په ځای کې د تابع لومړی مشتق په 4 برابر دی، دا په دې معنی چې تابع د په ځای کې میل یاجګوالی 4 لري.

اوس د لیمیټ د لاس ته راوړلو له لارې د مشتق ضریب ته راځو:

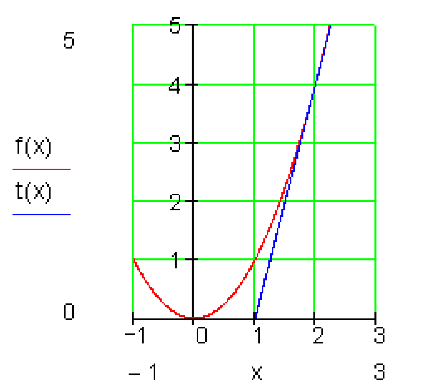
$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x_0+\Delta x)=2x_0$$

نو $f'(x_0)=2x_0$ لرو او د $x_0=2$ لپاره $f'(2)=2\cdot 2=4$ باور لري.

د $x_0=2$ په ځای کې د تابع $y=f(x)=x^2$ لومړی مشتق په 4 برابر دی، دا په دې معنی چې تابع د $x_0=2$ په ځای کې میل یاجګوالی 4 لري.

لاس ته راوړنه یې:

پایله یې کېدی شي، د تابع د ګراف له لارې و ازمایل شي، په داسې ډول چې د $P_0(x_0\,|\,y_0)=P_0(2\,|\,4)$ په ټکي کې تانجنت انځور کړو او د میل د مثلث له لارې جګېدنه لاس ته راوړو.



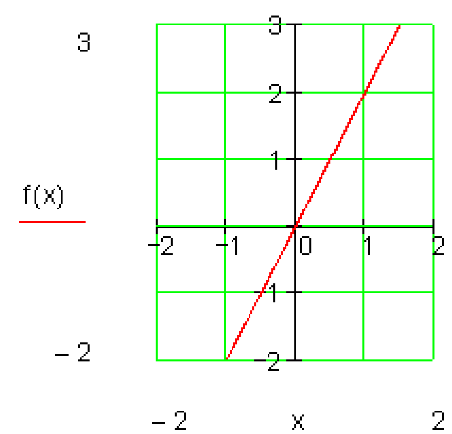
لکه پورته بېلګه کې: $y=f(x)=x^2$ په هر خوښه ځای x_0 کې تابع پیداکوو:

$$y=f(x)=x^2\ \Rightarrow\ f'(x_0)=2x_0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

x_0	-2	-1	0	1	2
$f'(x_0)$	-4	-2	0	2	2

ګراف یوه کرښه $f'(x)=2x$ انځوروي، چې د تابع مشتق بلل کیږي: پام: که د یوې تابع مشتق ونیول شي، نو بیرته یوه تابع ترې لاس ته راځي، چې دا د مشتق تابع بللکیږي. د مشتق تابع: د تابع ارزښتونه په هر ټکي کې بنسټ تابع انځوروي، له دې امله دا د میل تابع هم بلل کیږي.	

بیلګه: د $f(x)=x^3$ تابع دې ورکړ شوی دی.

فعالیت: ګران لوستونکي دې د $f(x)=x^3$ تابع او د تابع د مشتق ګراف وروسته له حله رسم کړي.

موږ غواړو په x_0 ټکي کې مشتق پیدا کړو او همداسې د مشتق تابع.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x_0+\Delta x)^3-x_0{}^3}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x_0{}^3+3x_0^2\Delta x+3x_0(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-x_0{}^3}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{3x_0^2\Delta x+3x_0(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta x(3x_0^2+3x_0\Delta x+(\Delta x^2))}{\Delta x}$$

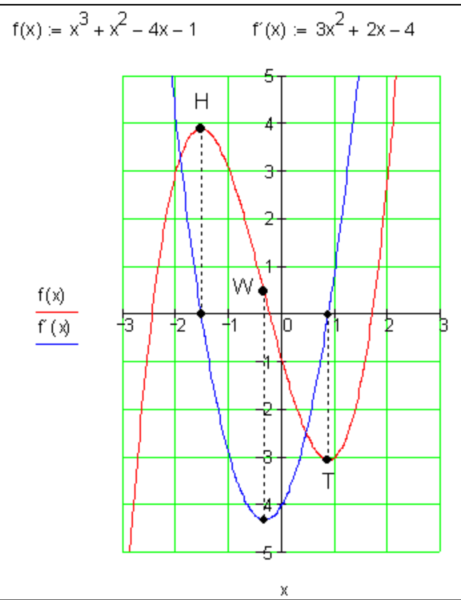
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=3x_0^2+3x_0\Delta x+(\Delta x^2)$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(3x_0^2+3x_0\Delta x+(\Delta x)^2=3x_0^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو $f'(x_0)=3x_0^2$ د تابع $f(x)=x^3$ مشتق دی په ځای يا ټکي x_0 کې.

د مشتق تابع داسي ده: $f'(x_0)=3x_0^2$



د وضعیه کمیاتو – یا پروتولاړ سیستم کې تابع او د تابع مشتق: مخامخ څیره وګوری:

تابع(سور): $f(x)=x^3+x^2-4x-1$

د تابع مشتق(شین رنګه): $f'(x)=3x^2+2x-4$ ، چې بیرته د مشتق يا د میل تابع ده.

بیلګه ۴ : یوه تابع $f(x)=\sqrt{x}$ دې ورکړ شوې وي.

د x_0 په ځای کې د تابع مشتق پیداکړی او د مشتق تابع.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0}}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\left(\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0}\right)\cdot\left(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}\right)}{\Delta x\cdot\left(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x_0+\Delta x-x_0}{\Delta x\cdot\left(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}\cdot\left(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}}$$

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x_0}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو $f'(x_0)=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$ د x_0 په ځای کې د پورته تابع مشتق دی

او د مشتق تابع $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ده

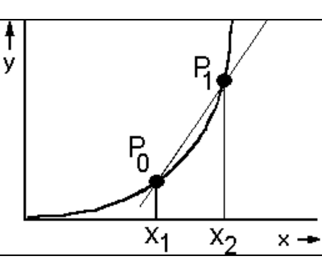
د شميرنې په بنسټ مو تر اوسه دا لاندې تر لاسه کړي:

	د مشتق تابع	تابع
$f'(x)=1\cdot x^0$	$f'(x)=1$	$f(x)=x$
$f'(x)=2\cdot x^1$	$f'(x)=2\cdot x$	$f(x)=x^2$
$f'(x)=3\cdot x^2$	$f'(x)=3\cdot x^2$	$f(x)=x^3$
$f'(x)=-x^{-2}$	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$	$f(x)=\frac{1}{x}=x^{-1}$
$f'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$f(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$

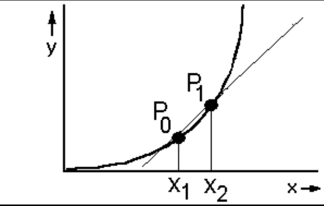
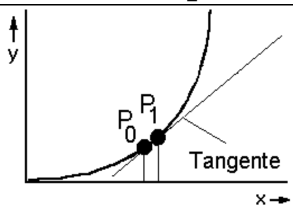
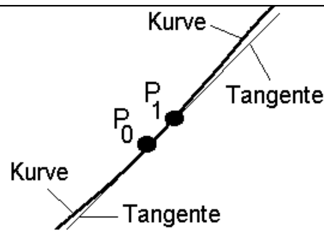
که دا پورته پنځه قوانين يو د بل سره پرتله شي، نو ګومان ترې لاس ته راځي، چې دا لاندې قوانين به باور ولري.

بيلګه: $f(x)=\frac{1}{x^2}=x^{-2}\Rightarrow f'(x)=-2x^{-3}=-\frac{2}{x^3}$

د تانجنت تعريف او خويونه:

مخامخ ځېره يو منحني او يوه قاطع په ټکو P_0 او P_1 کې ښايي.	

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس غواړو، چې ټکی P_0 د ټکي P_1 په لور و خوځيږي. پام : ددې سره قاطع خپل میل تغیروي	
بالاخره غواړو، چې P_1 ټکی و P_0 ټکي ته ناپای ډېر نږدې شي. په دې حالت کې قاطع داسې په نامه تانجنت ته ورنږدې کيږي	
چې دا پوره وپېژندلی شو د ټکو P_1 او P_0 په شاو خواژوو یا لویه وو: که د P_1 ټکی و P_0 ټکي ته ناپای نږدې شي، نو کتل کيږي، چې تانجنت په ټکي P_0 کې همداسې حالت غوره کوي، لکه منحني په P_0 ټکي کې.	

د دې خويونو غوره غوره والی یا لاس ته راوړنه(پایله):
ومو لیدل، چې د تانجنت میل په P_0 ټکي کې په همدې ټکي کې د منحني میل هم دی. له دې دا پایله لرو، چې که څوک غواړي د منحني میل په P_0 ټکي پیدا کړي، بسیا کوی، چې د تانجنت جګوالی یا میل په P_0 ټکي کې پیدا کړي.

د تانجنت او عمود عمومي فرمولونه:

پیل: تانجنت دې د $f(x)$ ګراف د $P(x_0, f(x_0))$ په ټکي کې لمس کړي. عمود (نورمال) دې د $f(x)$ ګراف د په $P(x_0, f(x_0))$ ټکي کې عمود یا ولاړ غوځ کړي.

د تانجنت مساوات: :

د سره لیکو:

دا چې $P(x_0), f(x_0))$ تانجنت یو ټکی دی، نو لاس ته راځي:

$$t(x_0) = f(x_0) \Leftrightarrow f'(x_0)\cdot x + b_t = f(x_0)$$
$$\Leftrightarrow b_t = f(x_0) - f'(x_0)\cdot x_0$$

په (1) کې ږدو، نو لر:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$t(x) = f'(x_0)\cdot x + f(x_0) - f'(x_0)\cdot x_0 = f'(x_0)\cdot x_0 + f(x_0)$$
$$= f'(x_0)\cdot(x - x_0) + f(x_0)$$

عمود (نورمال):

د منحني سره په همغه ټکي کې چې تانجنت په پروت دی، عمود څغلي.

د عمود میل:

$$m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{f'(x_0)}$$

$$\Rightarrow n(x) = -\frac{1}{f'(x_0)}\cdot(x - x_0) + f(x_0)$$

بیلګه:

د $f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2$ تابع لرو.

د تابع تانجنت او عمود(نورمال) پیدا کړئ:

حل:په لاندې توګه د تابع مشتق نیسو او ګراف یې(څېړه لاندې کښل شوې) کاږو:

x	-4	-1	0	1.5	3
$f'(x)$	4	2.5	2	1.25	0.5

لرو: $f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \;\Rightarrow\; f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x$

د تانجنت میل **په ټکي** x_0 **کې د میل ارزښت** 3 **لري.**

$$f'(x_0) = 3 \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{2}x_0 = 3 \Leftrightarrow x_0 = -2$$

$$f(x) = f(-2) = 2\cdot(-2) - \frac{1}{4}(-2)^2 = -5$$

د $P(-2,-5)$ په ټکي کې تانجنت په $f(x)$ باندې ارزښت 3 لري.

$$f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x \qquad ,P(2, f(2))$$

$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

د $x_0 = 2$ په ځاي کې دا لاندې لرو:

.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$t(x) = f'(2)(x-2) + f(2)$$

$$f(2) = 2\cdot 2 - \frac{1}{4}\cdot(2)^2 = 4-1 = 3 \qquad f'(2) - \frac{1}{2}\cdot 2 = 2-1 = 1$$

$$\Rightarrow t(x) = 1(x-2)+3 = x-2+3 = \underline{\underline{x+1}}$$

د نورمال یا عمود پیدا کونه:

$$f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x \ , \ \ P(2\,|\,f(2))$$

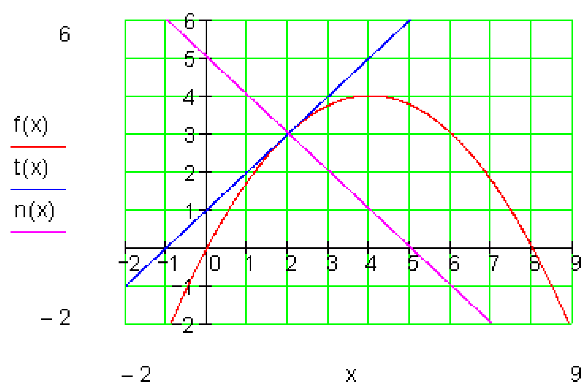
$$n(x) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$$

د $x_0 = 2$ سره لاندې راکوي:

$$n(x) = \frac{1}{f'(2)}(x-2) + f(2)$$

$$f(2) = 2\cdot 2 - \frac{1}{4}\cdot(2)^2 = 4-1 = 3 \qquad f'(2) - \frac{1}{2}\cdot 2 = 2-1 = 1$$

$$\Rightarrow n(x) = -\frac{1}{1}(x-2)+3 = -x+2+3 = \underline{\underline{-x+5}}$$



د تانجنت او عمود عمومي مساوات

بیلګه: تابع $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$ لرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تانجنت میل: د یوه تابع د ګراف میل په ټکي $P(x_0 \mid f(x_0))$ کې همغه معنی لري، لکه په دې ټکي د تانجنت میل.

موږ $f(x)$ تابع او د تابع مشتق ټیک په پام کې نیسو.

موږ $f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+1$ مربع تابع لرو

د تابع مشتق $f'(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

ارزښتجدول:

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
f(x)	4,75	3	1,75	1	0,75	1	1,75	3	4,75	7	9,75
f'(x)	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3

د $f(x)$ ارزښتجدول څخه لوستلی شو چې د پورته مربع تابع ککرئ ټکی دی:

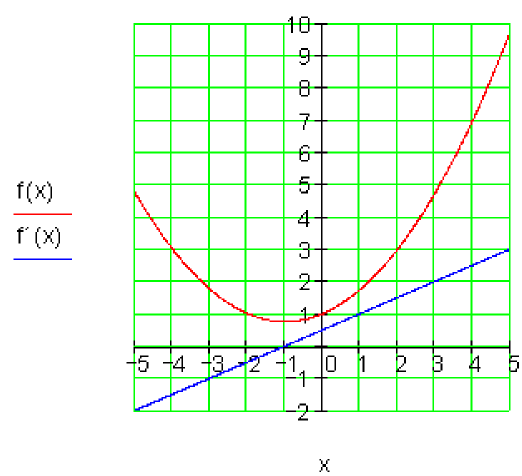
$S(-1,\ 0.75)$ د $x=-1$ ارزښت لپاره $f'(-1)=0$ د میل تابع ارزښت دی:

دا دا معنی لري، چې په ککرئ ټکي کې د $f'(x)$ میل صفر دی.

تانجنت په s کې هم دا معنی لري، چې صفر دی، دا هلته پروت(افقي) ځغلي؛ یعنې د $x-$ محور سره غبرګ ځغلي.

ګرافونه:

$f(x) := \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$ $f'(x) := \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$



(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه: تابع لرو: $f(x)=2x^3+7x^2+x-7$
تانجنت دې پيداکړی شي، چې د $f(x)$ ګراف د $P(-2,\ f(-2))$ په ټکي کې لمسوي،

$$f(x)=2x^3+7x^2+x-7 \Rightarrow f'(x)=6x^2+14x+1 \quad P(-2\,|\,f(2)) \Rightarrow x_0=-2$$
$$t(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$
$$f'(x_0)f'(-2)=24-28+1=-3$$
$$f(x_0)=f(-2)=-16+28-2-7=3$$
$$\Rightarrow t(x)=-3(x+2)+3=-3x-6+3=\underline{\underline{-3x-3}}$$

لاس ته راوړنه(پايله):
د $f(x)$ تابع ګراف کې تانجنت او عمود په $P(x_0\,,f(x_0))$ ټکي کې لاندې بڼه لري.

د تانجنت مساوات

$$t(x)=\underbrace{f'(x_0)}_{\text{جګيدنه}}(x-x_0)+f(x_0)$$

د عمود مساوات

$$n(x)=-\underbrace{\frac{1}{f'(x_0)}}_{\text{جګيدنه}}(x-x_0)+f(x_0)\ ;\quad f'(x_0)\neq 0$$

په بيديا کې جګوالی **Steigungen in der Landschaft**

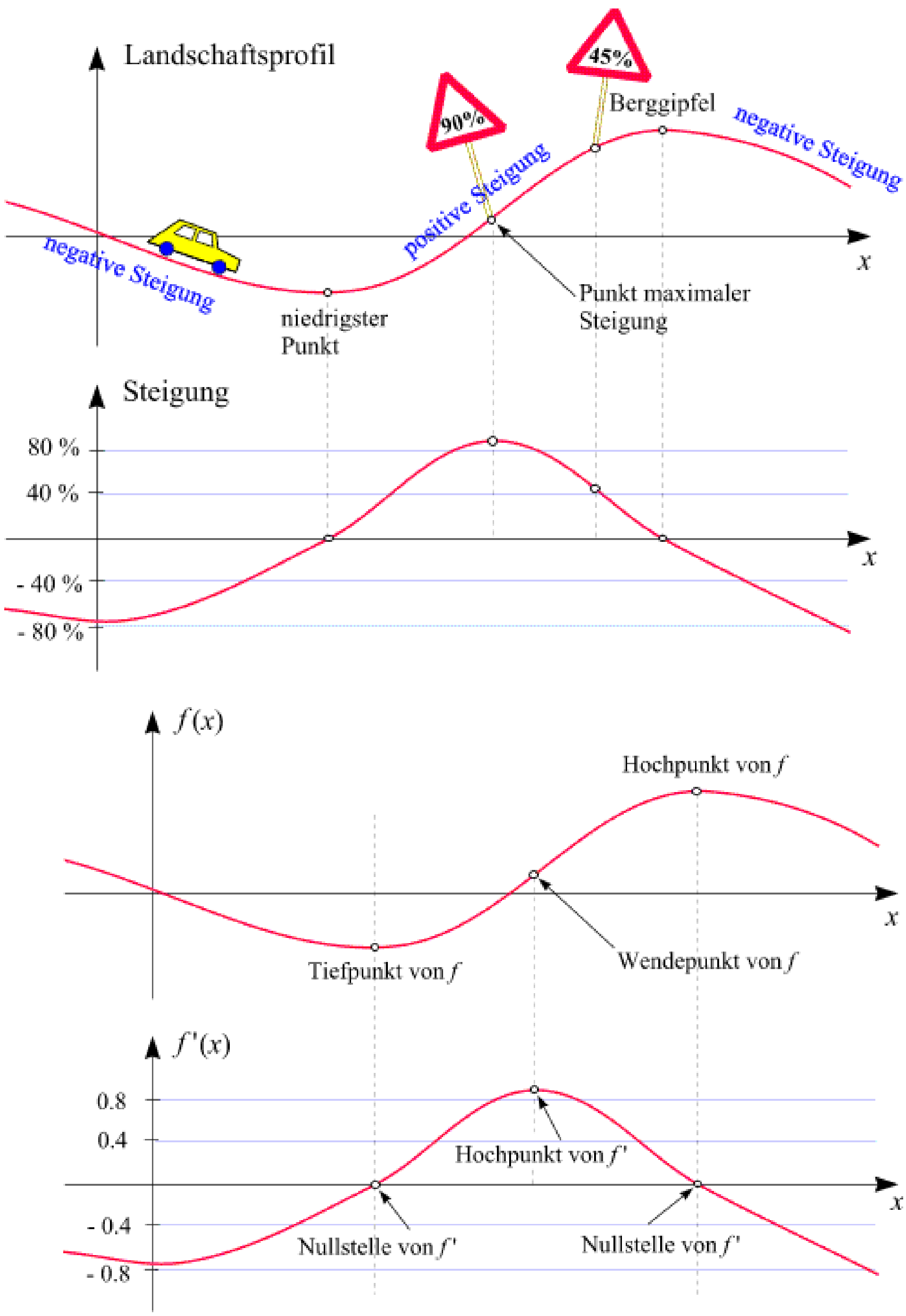
لاندې د د تابع ګراف د سرک په څير په فکر کې راولو، چې په بيديا کې جګ او ټيټيږي يا

کښتيپورته ځغلي، نو په ښه توګه يې رسمولی شو، چې د ګراف خويونه د مشتق سره په اړيکو کې راځي:

دپورته څيرو پښتو: له کيڼ لور کښته ښي لور ته: بيديا يا کرونده، منفي جګوالی، جګوالی،(بله کرښه) خورا ټيټ ټکی،(شي لورته بله کرښه(مثبته جګيدنه، (پسې کرښه) د غره څوکه، د خورا جګې جګيدنې ټکی، (اخره(کميز يا منفي جګيدنه.

د سرک کښته يا لاندې لور ته د ځانګړي دياګرام سره د سرک جګيدنه په هر ټکي کې انځور ده، د کومې سره چې يوه دويمه منحني ورکوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



(c) ketabton.com: The Digital Library

دپورته پښتو: له پورته کښته له کیڼ وښي لور ته: د f جګ ټکی، د f ټیټ ټکی، د f اوړونټکی یا د انعطاف ټکی، د f' جګ ټکی، د f' صفرځای، د f' صفرځای.

دیاګرامونه په کره توږه وګوری او وهڅیږۍ، چې د دویمې منحني خویونه د لومړی منحني له خویونو را برسیره کړی.
چیرته چې سرک خورا ټیټ ټکی لري، هلته د جګیدنې ارزښت 0% دی. دا په دې معنا چې که موټر له دې ځایه تیرېږي په افقي ئا پراته ډول ځغلي او په همدې توږه که موټر د غره په څوکه هم و ځغلي.دا ټیک هغه ټکي دي، د کومو په چاپیریال کې چې منفي او مثبته جګیدنه یوبل سره رابندوي یا پولې لري.

د دې په منځ کې یو چیرته یو ټکی شتون لري، چې هلته جګیدنه ماکزیمال یا خورا لویه ده (په دې بیلګه کې 90%) .

همدې ته ورته په دویمه منحني (کږې) کې یو ه څوکه لري، مګر دا په دې بیدیا کې هغه ستره ،،څوکه،، نه ده، مګر که څوک غواړي، نو یوه د ،،جګیدنې څوکه،، ده.

اوس دا دواړه کږې یا منحني په ورسره بلده یا معمول ریاضیکي ډول لاندې شکلونه لري:

لومړی منحني د f(x) ګراف دی، دویمه منحني یا کږه د مشتق تابع f'(x) ګراف دی.

دا دواړه ګرافونه بیا هم ټیک وګوری او وهڅږی، چې وپوهdږی، چې دا په هره برخه کې یو د بل سره ځنګه اړیکي لري.

د f(x) ګراف دوه ځانګړي ټکي مو سترګو ته راځي: په یوه کې f(x) مینیمال (خورا ټیټ ټکی) په بل کې f(x) ماکسیمال (خورا جګ ټکی) دی.

په دې ځایونو کې f(x) صفرځایونه لري.

هغه ټکی چې هلته د f(x) ګراف خورا ستوغ دی، هغه، هغه د انعطاف ټکی یا اوړونټکی بلل کیږي.

دا چې په دې ټکي کې د f(x) مشتق خورا جګ دی (په دې بیلګه کې 0,9)، دا د(f'(x عظمي نقطه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ازادې سترګي سره د هغه ځاي له لاندې منحني څخه ښه څرګندیږي، نسبت و پورته منحني ته.

مونږ د دې بیلګي څخه همدا اوس اټکل کولای شو یا ګومان راوړی شو:
که یوه تابع f(x) ولرو، نو د دې f(x) تابع په هکله د f(x) له مشتق څخه ارزښناک معلومات په لا س روړی شو.
دا مورته د ماکسیما او مینیما په هکله (چي دا دواړه د افراتي ارزښت تر نامه یادیږي) او په دې هکله چي ګراف چیرته خور یا ستوغ دی، پوره کټور معلومات راکوي.

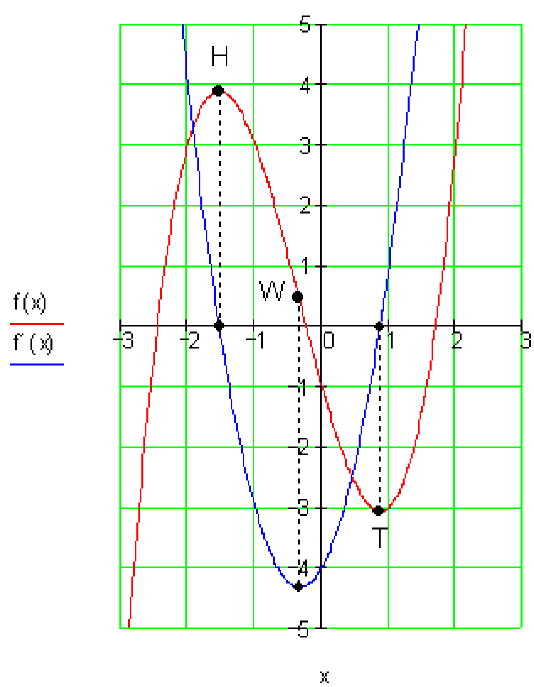
په کواوردینات (یوه پروت -ولاړ)- سیستم کې تابع اود تابع مشتق:

تابع : $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 1$

مشتق: $f'(x) = 3x^2 + 2x - 4$

د یوه تابع مشتق بیرته تابع دی. موږدا د مشتق تابع او یا د جګیدني (میلان) تابع بولو

$f(x) := x^3 + x^2 - 4x - 1 \qquad f'(x) := 3x^2 + 2x - 4$



(c) ketabton.com: The Digital Library

د دواړو توابعو ګراف په یوه قیمتي وضعیه (پروت ولاړ سیستم) کې و کښل شو.

هلته چې تابع f(x) یو جګ ټکی (H) همداسي ټیټ ټکی (T) لري ګراف د مشتق تابع x -محور کې غوځوي،په دې مانا جې د تابع ارزښت دلته صفر دی.

دا روښانه دی، ځکه چې په H او T کې تابع f(x) پروت یا افقي تانجنت لري، دا دا معنا لري، چې په دې ټکي کې د f(x) جګښدنه صفر ده.

د مشتق تابع f'(x) هلته مینیموم لري، چېرته چې د(f(x جګښدنه د H او T ترمنځ په پام ونیول شي د مطلق قیمت له مخې خورا لویه ده.

II.3.د مشتق شمیرني قوانین

قضیه (د جمعې یا زیاتون قاعده یا لار):
که یو تابع $f(x)$ د دوه توابعو $u(x)$ او $v(x)$ د جمعې څخه جوړ وي، نو مشتق یې هم د هر تابع د مشتق د جمعې څخه جوړ دی، یعني:

$$f(x) = u(x) + v(x)$$
$$\Rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

ښوونه:

$$f(x_0) = u(x_0) + v(x_0)$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x_0+\Delta x) - u(x_0)] + [v(x_0+\Delta x)] - v(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x_0+\Delta x) - u(x_0)]}{\Delta x} + \frac{[v(x_0+\Delta x)] - v(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow f'(x_0) = \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{u(x_0+\Delta x) - u(x_0)}{\Delta x}\right]}_{u'(x_0)} + \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{v(x_0+\Delta x) - v(x_0)}{\Delta x}\right]}_{v'(x_0)}$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \underline{\underline{u'(x_0) + v'(x_0)}}$$

بیلګه:
د دې ورکړ $f(x) = 5x^2 + 3x$, $u(x) = 5x^2$, $v(x) = 3x$ توابعو شتق وشمیرئ.
ښوونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=5x^2+3x \quad u(x)=5x^2 \quad v(x)=3x$$
$$\Rightarrow u'(x)=10x \qquad v'(x)=3$$
$$f'(x)=u'(x)+v'(x)=\underline{\underline{10x+3}}$$

د جمعي قاعدې تولیزه کونه:

که چیرې f_1، f_2،......، f_n توابع او k_1، k_2،....، k_n ثابت عددونه وي نو لرو(بې له ښوونې):

$$[k_1 f_1(x)+k_2 f_2(x)+.....+k_n f_n(x)]' = k_1 f_1'(x)+k_2 f_2'(x)+.....+k_n f_n'(x)$$

قضیه (د ضرب قاعده یا لار):

که $f(x)$ او $g(x)$ دوه توابع وي، نو ښایو:

$$(f(x)\cdot g(x))'= f(x)'\cdot g(x)\cdot g(x)'$$

ښوونه: $\dfrac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$

د مناسب فورم- یا بڼه بدلون یعني په صورت کې د $-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)$ ورزیاتولو څخه دا لاندې لرو:

$$\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$
$$=\frac{(f(x)-f(x_0))g(x)+f(x_0)(g(x)-g(x_0))}{x-x_0}$$
$$=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot g(x)+f(x_0)\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

له پورته څخه لاس راځي، یعني که د دواړو لورو لیمیت نیسو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} g(x) + f(x_0) \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

$$= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

بیلګه:

که $g(x) = x^2 - 1$ او $h(x) = \sqrt{x}$ ولرو، نو د $f(x) = g(x)h(x)$ مشتق غواړو پیدا کړو.

ښوونه: په لاندې توګه مخ ته ځو:

$$f(x) = (x^2 - 1)\sqrt{x},\ f'(x) = 2x\sqrt{x} + (x^2 - 1)\frac{1}{\sqrt[2]{x}} = \frac{5}{2}x\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

قضیه (د ویش قانون):

f او g دې دوه توابع وي. غواړو وښایو:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

ثبوت: کولای شو، چې دا قضیه له دوه لارو یا طریقو وښایو(ثبوت کړو).

لومړی لار:

لومړی لار یا طریقه یې په لاندې ښایو او دویمه لار دې ګران زده کوونکي وښایي:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}}{h} \quad , \quad g(x) \neq 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{g(x+h)g(x)}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{h}\right]$$

غواړو $f(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x)$ صورت ته ور زيات کړو، نو لرو:.

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)g(x)}\cdot\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x)+f(x)g(x)-f(x)g(x+h)}{h}$$

$$=\frac{1}{g(x)g(x)}[\lim_{h\to 0}g(x)\ \frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\lim_{h\to 0}f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}]$$

$$=\frac{1}{[g(x)]^2}\left[g(x)\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f(x)\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]$$

$$=\frac{1}{[g(x)]^2}[g(x).f'(x)-f(x).g'(x)]=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

يعني لرو: $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)\,g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

دويمه لار: د $\frac{1}{g(x)}$ مشتق غواړو پيدا کړو او ښايوچي دئ:

$$(\frac{1}{g(x)})'=-\frac{g'(x)}{g^2(x)} \qquad (*)\ (f(x))'=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

که $f(x)=\frac{1}{g(x)}$ کيږدو نو لرو:

$$(f(x))'=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{g(x+h)}-\frac{1}{g(x)}}{h}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \lim_{h\to 0}\frac{g(x)-g(x+h)}{g(x+h)g(x).h}$$

$$= \frac{\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}}{-\lim\limits_{h\to 0} g(x+h)g(x)} = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}$$

که دا $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x)\frac{1}{g(x)}$ وېش ولرو او وغواړو چې مشتق يې پيدا کړو،نو له پورته ښوونې ، د (*) اړيکې او د ضرب قاعدې له مخې لرو:

$$[\frac{f(x)}{g(x)}]' = [f(x)\frac{1}{g(x)}]'$$

$$= f(x)(\frac{1}{g(x)})' + \frac{1}{g(x)}f'(x)$$

$$= f(x)(\frac{g'(x)}{(g(x))^2}) + \frac{1}{g(x)}f'(x)$$

$$= \frac{-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} + \frac{f'(x)}{g(x)}$$

$$= \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

بیلګه:

د $f(x) = \frac{x^2}{x^2-4}$ تابع (د $x^2-4\neq 0$ سره) مشتق غواړو پيدا کړو.

حل: که چيرې $g(x) = x^2$ او $h(x) = x^2-4$

وضع شي نو لرو:

$$g'(x) = 2x$$
$$h'(x) = 2x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او د ویش قانون له مخي لرو:

$$f'(x) = \left[\frac{g(x)}{h(x)}\right]' = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{[h(x)]^2}$$

$$= \frac{2x(x^2-4) - x^2.2x}{[x^2-4]^2}$$

$$= \frac{-8x}{[x^2-4]^2}$$

بیلګه:

د $y = \sin x^2$ تابع یوه په لاندې توګه ورکړ شوی ځنځیري تابع ده:

$$y = \sin z \quad , \quad z = x^2$$

دا دواړه توابع په هرځای کې مشتق وړدي. له دې امله هر چیرته باور لري:

$$\frac{d\sin x^2}{dx} = \frac{d\sin z}{dz} . \frac{dx^2}{dx} = \cos z . 2x = 2x . \cos x^2$$

بیلګه:

د $y = \sin^2 x$ تابع په لاندې ډول تړلی ورکړ شوی.

$$y = z^2 \; , \; z = \sin x$$

دلته هم دواړه توابع هرچیرته مشتقوړ دي. نو له دې امله هرچیرته باور لري:

$$\frac{d\sin^2 x}{dx} = \frac{dz^2}{dz} . \frac{d\sin x}{dx} = 2z . \cos x = 2\sin x . \cos x = \sin 2x$$

بیلګه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $f(x)=(x^5+4)^8$ تابع مشتق وشمیرئ!

حل: هرکله چې $g(x)=x^8$ او $h(x)=x^5+4$ وضع کوو نو لرو:

$$f(x)=g(h(x))$$

$$f'(x)=(g(h(x))'=g'(h(x)).h'(x)$$

$g'(x)=8x^7$ $h'(x)=5x^4$ دی، نو لرو:

$$f(x)=8(h(x))^7 5x^4=40(x^5+4)^7.x^4$$

د مثلثاتي فنکشنتابعګانو مشتق

$$\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \quad .... \; I$$

$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \quad .... \; II$$

قضیه :د ساین تابع $y=f(x)=\sin x$ مشتق غواړو وښایوو چې
$f'(x)=(\sin x)'=\cos x$دی:

ددې قضیې د ښوولو له پاره پورتني په ننوتنه کې دوه لومړني فرمولونه په کار راځي.

د $y=f(x)=\sin x$ ساین تابع د هر x لپاره تعریف ده، نو د x_0 په خوښنه ټاکلوڅخه لاس ته راځي:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{\sin(x_0+h)-\sin x_0}{h}$$

$$=\frac{2}{h}\cos\frac{2x_0+h}{2}\cdot\sin\frac{h}{2}=\cos\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \; .$$

د لیمیټ د برخي په پام کی لرلو سره لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{h\to 0}\left(\cos\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right)=\cos x_0.$$

د ساين تابع په هر ځاي کی، د لاندې مشتق سره، د مشتق قابليت لري يا مشتقوړ ده:

$$\left(\frac{d\sin x}{dx}\right)_{x=x_0}=f'(x_0)=\cos x_0,$$ (Xپه لينده کچ يا راديان)

قضيه :

همداسي بنوول کيږي چی کوساين تابع هم په هرځاي کی مشتقوړ ده، دلاندې مشتق سره:

$$\left(\frac{d\cos x}{dx}\right)_{x=x_0}=f'(x_0)=-\sin x_0,$$ Xپه لينده کچ يا راديان

ثبوت: لرو:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+h)-f(x_0)}{h}=\frac{\cos(x+h)-\cos x_0}{h}$$

په پورته ننوتنه کې د دويم فرمول له مخې لرو:

$$=\frac{-2\sin\frac{x+h+x}{2}.\sin\frac{x+h-x}{2}}{h}$$

$$=\frac{-2\sin(x+\frac{h}{2}).\sin\frac{h}{2}}{h}$$

$$=-[\sin(x+\frac{h}{2}).\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د د پولې او د پولې یا حد د ضرب قاعدې له مخې لاس ته راځي :

$$-\lim_{h\to 0}\sin(x+\frac{h}{2})\ .\ \lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=-\sin x\cdot 1=-\sin x$$

له پورته مساواتو څخه په لنده توګه لیکو:

$$\frac{d\cos x}{dx}=-\sin x$$

قضیه : غواړو وښایو چې د تانجنت تابع f(x) = tanx مشتقوړ ده او د مشتق تابع یې $f\,'(x)=\frac{d\tan x}{dx}=\frac{1}{\cos^2 x}$ ده.

$$\frac{d}{dx}(\tan x)=\frac{d}{dx}(\frac{\sin x}{\cos x})$$

$$=\frac{\cos x\frac{d}{dx}(\sin x)-\sin x\frac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\cos x.\cos x-\sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$=1+\tan^2 x\ ,x\neq(2k+1).\frac{\pi}{2}$$

بیلګه: غواړو د $y=\cos\frac{\pi x}{180}$ تابع مشتق پیدا کړو.

حل: ړدو : $f(x)=\cos x$ او $g(x)=\frac{\pi x}{180}$ ، نو y په لاندي توګه لیکلی شو:

$y=f(g(x))$ ، نو د زنځیري قاعدې په بنسټ لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$
\begin{aligned}
y' &= f'(g(x))\cdot g'(x) \\
&= \cos'(g(x))\cdot(\frac{\pi}{180}\cdot x)' \\
&= -\sin(g(x))\cdot\frac{\pi}{180} = -\frac{\pi}{180}\cdot\sin\frac{\pi x}{180}
\end{aligned}
$$

بيلګې :

۱ - د $f(x) = \sin x$ تابع لومړي ځلور مشتقونه دې پيدا شي.

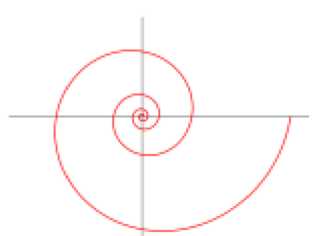
$$f'(x) = \cos x \; ; \; f''(x) = -\sin x \; ; \; f'''(x) = -\cos x \; ; \; f^{(4)}(x) = -(-\sin x) = \sin x$$

۲ - د $f(x) = x.\sin x$ تابع مشتق پيداکړئ
د ضرب قانون ځخه کار واخلئ.
$f'(x) = 1.\sin x + x\cos x = \sin x + x.\cos x$

۳ – د $f(x) = \sin\frac{1}{x}; x \neq 0$ تابع مشتق پيداکولو له پاره د ځنځير قونو ن ځخه نار اخلو.

ږدو $z = \frac{1}{x^2}$ او $u(z) = \sin z$ لا س ته راځي: $f'(x) = -\frac{2}{x^3}\cos\frac{1}{x^2}$

د لوګاريتم مشتق



(c) ketabton.com: The Digital Library

قضیه :

د لوګاریتم تابع مشتق:

قضیه: هر د لوګاریتم تابع $y=f(x)=\log_b x$ د $b>0, b\neq 0, x>0$ سره، مشتقوړ دی

او صدق کوي: $f'(x)=\frac{1}{x}\log e=\frac{1}{x.\ln b}$

ثبوت: دا چې تابع $y=f(x)=\log_b x$ یوائې د$x>0$ لپاره پیژند لري یا تعریف دی. په هر ځاي کی چی$x>0$ وي، نودا لاندې باوري دی :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{\log_b(x_0+h)-\log_b x_0}{h}=\frac{1}{h}\log_b\frac{x_0+h}{x_0}=\log_b(1+\frac{h}{x_0})^{\frac{1}{h}}$$

د (لومړئ برخې) له مخی دا لاس ته راځي:

$$\log_b(1+\frac{h}{x_0})^{\frac{1}{h}}=\left[\left(1+\frac{h}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{h}}\right]^{\frac{1}{x_0}}\to e^{\frac{1}{x_0}}$$

او له دې امله

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}=f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\log_b(1+\frac{h}{x_0})^{\frac{1}{h}}=\log_b e^{\frac{1}{x_0}}=\frac{1}{x_0}\log_b e$$

د لوګاریتم تابع په ورکړشوي مشتق سره د خپل ټول پیژند سټ کی د مشتق قابلیت لري.

$f'(x)=\frac{1}{x}\log_b e$ همداسې $f'(x)=\frac{1}{x}.\frac{\ln e}{\ln b}$ داچې $\ln e = 1$ نو صدق کوي:

$f'(x)=\frac{1}{x.\ln b}$. خه چې د ښوولو وو.

په ځانګړي ډول دا لاندې باور لري:

$$\left(\frac{d(\ln x)}{dx}\right)_{x=x_0}=\frac{1}{x_0}$$ پای.

بیلګه:

د $f(x)=\log\sqrt{x^3}$ مشتق وشمېرئ.

ښوونه: په لاندې توګه مخ تخ ځو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=\log\sqrt{x^3}=\log_{10}x^{3/2}=\frac{3}{2}\log_{10}x$$

$$\Rightarrow\ f'(x)=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x\cdot\ln 10}$$

$$=0.6514\cdot\frac{1}{x};\ D(f')=IR^{>0}$$

بیلگه:

د $y=\ln\frac{x-2}{x+2}$ تابع مشتق پیداکړئ

حل:

موږ لیکلاي شو :

$$y=\ln\frac{x-2}{x+2}$$
$$=\ln(x-2)-\ln(x+2)$$

دا چې $(\ln(x-2))'=\frac{1}{x-2}$ او $(\ln(x+2))'=\frac{1}{x+2}$ دی، نو لرو:

$$y'=(\ln(x-2))'-(\ln(x+2))'$$
$$=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}=\frac{x+2-x+2}{(x-2)(x+2)}$$
$$=\frac{4}{x^2-4}$$

بیلگه:

لرو: $f(x)=\log_2(x)$

غواړو پیدا کړو: ۱. مشتق $f'(x)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مشتق د $x_0=16$ په ځاي کې
حل: د حل لپاره د پورته فرمول څخه کار اخلو: $f'(x) = 1/(x\cdot\ln 2$
اوس د $x_0=16$ په ځاي کې مشتق ټاکو:
$f'(x_0)= 1/(16\cdot\ln 2)= 1/(16\cdot 0.69)= \underline{0.09}$
پای

اوس دې یوه بله د دیفرنسیشن قاعده ورکړل شي کومه چې په جدول 20-1 کې غیر مستقیم خوندې یا په بل عبارت دننه ده.

موږ غواړو د لاندې شکل تابع یا بلواك مشتق ونیسو

$$y = f(x)^{g(x)}$$

دا له دې امله

$$y = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x)\ln f(x)}$$

د ځنځیرقاعدې له مخې ترخیرني نیول کیدی شي، $y = e^z, z = g(x)\ln(f(x))$ د لاندې بلواك $u = \ln f(x) = \ln v, v = f(x)$ مشتق هم د ځنځیری قاعدې له مخې را پیداکیدی شي. دا لاندې صدق کوي:

$$u' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dv}\cdot = \frac{1}{v}\cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

او

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = e^z\cdot(g'(x)\ln f(x) + g(x)u')$$
$$= f(x)^{g(x)}\left(g'(x)\ln f(x) + \frac{g(x)f'(x)}{f(x)}\right)$$

د ځنځیری قاعدې د نیونو په نظر کی نیولو سره او د جملی 20-10 له مخی لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله 10-20 که $f(x)$ او $g(x)$ د $f(x) > 0$ سره د مشتق قابلیت لري ، نو
$y = f(x)^{g(x)}$

هم د لاندې مشتق سره مشتقوړ دي

بیلګه : تابع یا بلواك $y = x^x$ د $x > 0$ لپاره مشتقوړ دی. دا دې په (20-57) کې داسی $f = x,\ g = x$ ځاي په ځاي شي او له دې سره $f' = 1, g' = 1$. له دې امله اوس د $x > 0$ لپاره لرو: $dx^x / dx = x^x(\ln x + 1)$

(دا وروسته د ایمپلیځیت توابعو مشتق کې هم په همغه توګه رواړول شوې ده)

بیلګه: د $y = (x^2 - 1)\ln x$ د مشتق سره باید د $g = \ln x$ له امله وغوښتل شي چی $x > 0$ او د $f = (x^2 - 1) > 0$ له امله باید باور ولري $x^2 > 1$ او له همدې امله $|x| > 1$ پس کیدی شي چی فرمول(20-57) د $x > 1$ لپاره د $f = x_2 - 1$ او $g = \ln x$ سره استعمال شي:

بیلګه: د $f(x) = x^3.\ln 4x (x > 0)$ مشتق دې پیدا شي

د $u(x) = x^3$ د $u'(x) = 3x^2$ سره، $v(x) = \ln 4x$ د ځنزیري قانون له امله لرو:

$$v(x) = 4.\frac{1}{4x}\ \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = 3x^2.\ln 4x + x^3.\frac{1}{x} = 3x^2.\ln 4x + x^2 = x^2(3\ln 4x + 1)$$

بیلګه: د $f(x) = (x^2 + 2).\lg x\ (x > 0)$ مشتق غواړو پیداکړو

د ضرب قانون: $u(x) = x^2 + 2 ; v(x) = \lg x$ د $u'(x) = 2x$ او

$v'(x) = 1 / x.l\,10$ سره

$$f'(x) = 2x \cdot \lg x + (x^2 + 2)\frac{1}{x \cdot \ln 10} = \frac{1}{\ln 10} \cdot (2x \cdot \ln x + x + \frac{2}{x})$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اکسپوننشل توابعو مشتق

قضیه : هر اکسپوننشل تابع د $y=b^{x},(b>0)$ د ټولو ریلو اعدادو لپاره مشتقوړ دی او صدق کوي: $f'=b^{x}\ln b$

حل:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{y-y_0}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \qquad , \ f(x)=b^{x}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{b^{x}-b^{x_0}}{x-x_0}$$

$$=b^{x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{b^{x-x_0}-1}{x-x_0} \qquad , \ x-x_0=h$$

$$=b^{x_0}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{b^{h}-1}{h}$$

له پورته لرو $\begin{cases} b^{h}-1=k \\ h=\log_b(1+k)\end{cases}$ او لا س ته تري راځي

$$=b^{x_0}\cdot\lim_{k\to 0}\frac{k}{\log_b(1+k)}$$

$$=b^{x_0}\cdot\lim_{k\to 0}\frac{1}{\frac{1}{k}\cdot\log_b(1+k)}$$

د لوگاریتم قانون څخه لرو: $n\cdot\log x=\log x^{n}$ او لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$=b^{x_0}\cdot\lim_{k\to 0}\frac{k}{\log_b(1+k)}$$

$$=b^{x_0}\cdot\frac{1}{\log_b[\lim_{k\to 0}(1+k)^{\frac{1}{k}}]}\quad ,\lim_{k\to 0}(1+k)^{\frac{1}{k}}=e$$

له پورته لاس ته راځي

$$=b^{x_0}\cdot\frac{1}{\log_b e}\quad ,\ \log_b e=\frac{1}{\ln b}$$

$$=b^{x_0}\cdot\ln b\ ;\quad x_0\in IR\ ;b\in IR^{>0}$$

$$\Rightarrow f\ ':f\ '(x)=b^{x}\cdot\ln b\ ;\ D\ '(f\ )=IR\ ;b\in IR^{>0}$$

$$f\ '(x)=b^{x}\cdot\ln b$$

قضیه : د $y=f(x)=e^{x}$ مشتق پیدا کړئ.

حل:

$$y=f(x)=e^{x}$$

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{x_0+\Delta x}-e^{x_0}}{\Delta x}$$

موږ دا لرلي په پام کې نیسو: $e^{x_0+\Delta x}=e^{x_0}e^{\Delta x}$

$$\Rightarrow\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{x_0}\cdot e^{\Delta x}-e^{x_0}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{x_0}(e^{\Delta x}-1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}e^{x_0}\cdot\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}=e^{x_0}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}$$

موږ د ټل کوچنیکیدونکي Δx ارزښت لپاره خیرو $\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

Δx

Δx	1	0,1	0,01	0,001	0,0001
$\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}$	1,718...	1,051...	1,00501...	1,0005...	1,00005...

د دې په بنسټ موږ لاس ته راوړو:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x} = 1$$

زموږ د شمیرنې په پنسټ دا دا مهنا لري:

$$f'(x_0) = e^{x_0} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}}_{1} = e^{x_0} \cdot 1 = \underline{\underline{e^{x_0}}}$$

که x_0 د xپه ځای ځای په ځای کړو، نو لرو:

$$f(x) = e^x \text{ und } f'(x) = e^x$$

اکسپوننشل فنکشن e^x تیک $y' = f'(x) = e^x$ مشتق لري

لرو:

اکسپوننشلفنکشن یو فنکشن دی، په کوم کې چې فنکشن او د تابع مشتق سره برابر دي

e - تابع بیرته د مشتق له لارې تولیدیږي یا لاس ته راځي.

بل بدیل یا الترناتیو: که ولرو $y = f(x) = e^x$ ، نو $y' = f'(x) = e^x$ لاس ته راځي.

په پورته جمله کې مو وښووول: که ولرو $y = b^x$ دو $y' = y \cdot \ln b = b^x \cdot \ln b$ دی.

که b=e کړدو، نو لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f'(x) = b^x . \ln e \quad = e^x \cdot \ln e \quad \Rightarrow \ln e = 1$$
$$= e^x ; x \in IR$$
$$f : f(x) = e^x ; D(f) = IR$$
$$\Rightarrow f' : f'(x) = e^x ; D(f) - IR$$

گورو چې $f(x) = e^x ; D(f) = IR$ یواځنی تابع دی، چې مشتق یې پخپله $f'(x) = e^x ; D(f) - IR$ دی

$$f(x) = \log_a x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

د $a \in R^+ \setminus \{1\}$ $x \in R^+$ سره.

فرمول

$$f'(x) = f(x) \frac{d}{dx} \ln |f(x)|$$

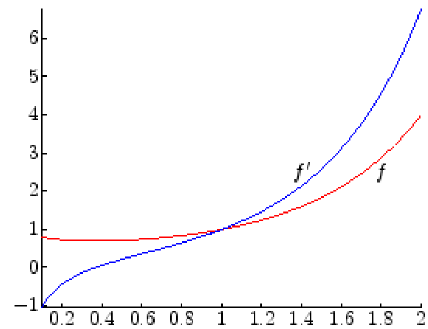
کیدی شي د $y = g(x)^{h(x)}$ بنې تابع چې $g(x) > 0$ دی، د مشتق لپاره وکارول شي

لاس ته ترې راځي:

$$\frac{dy}{dx} = g(x)^{h(x)} \frac{d}{dx} \left(h(x) \ln g(x) \right) .$$

لیکونکی:(App/Höllig) اپپ ، هیولیگ

(c) ketabton.com: The Digital Library



د $0 \to x$ لپاره $\ln f(x) = x \ln x$ د 0 په لور هڅیږي، پس f د 0 په لور. نو تابع په صفر کې ښي لوریزه متمادي ده. د مشتق لپاره یې دا حالت ده دی.

د $1 \to x^x$ او د $\ln x + 1 \to -\infty$ له امله د $0 \to x$ لپاره د f تابع په صغر کې یو عمود تآنجنت لري.

د $g(x) = x^{\ln x}$ لپاره لاس ته راځي:

$$g'(x) = x^{\ln x}\frac{d}{dx}(\ln x)^2 = 2x^{\ln x}\frac{\ln x}{x}.$$

)لیکونکي اپپ او هیولیګ

په طبیعت کې یې څیرنه:

د اکیوننشل توابعو مشتق

د تابع مساواتو جوړښت

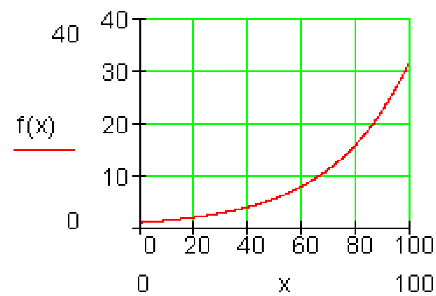
کولي باکتریا Coli - Bakterien د انسان په کلمو کې کاره سرته رسوي. دوي د کوټي ویش (حجره وېش) له لارې زیاتیږي. و مساعدو شرایطو لاندې دوي په هرو ۲۰ دقیقو

(c) ketabton.com: The Digital Library

کې څان تجزیه کوي. د غه عملیېي لپاره یو ارزښت جدول :اړ، او گراف یې کاړو. دلته
د x اووښتوني (متغيره) په دقیقو د وخت لپاره ده.
د y متحوله د باکتریا گانو د تعداد لپاره ده.

x = Minuten	0	20	40	60	80	100	دقیقې
y = Bakterienzahl	1	2	4	8	16	32	د بکتریاگانو تعداد

پورته جدول کې : x = دقیقې   y = د بکتریاو تعداد



بیلگه: لرو : $f : f(x) = b^{3x^2-10}$; $D(f) = IR; b \in IR^{>0}$

د پورته تابع مشتق ونیسئ.

$$D'(f) = D(f) = IR \quad \Rightarrow D(f') = IR$$

$$f(x) = b^{3x^2-10} = g[h(x)]$$

$$g(z) = b^z \quad \Rightarrow f'(z) = \underline{b^z \cdot \ln b}; z \in IR$$

$$h(z) = 3x^2 - 10 \quad \Rightarrow h'(x) = \underline{6x}; x \in IR$$

$$f'(x) = g'(x) \cdot h'(x)$$

$$= b^z \cdot \ln b \cdot 6x \quad \Rightarrow z = 3x^2 - 10$$

$$= b^{3x^2-10} \cdot \ln b \cdot 6x; \ x \in IR$$

$$= \underline{\underline{\ln b \cdot 6x \cdot b^{3x^2}; D(f) = IR; \ b \in IR^{>0}}}$$

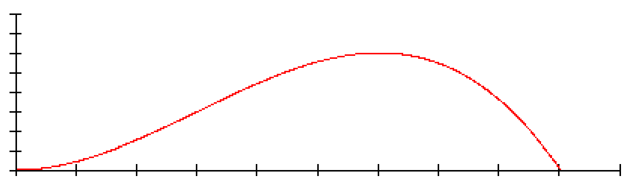
(c) ketabton.com: The Digital Library

- د مشتق استعمال په طبيعي علومو

په رياضياتو کې زيات وخت توابع راوړل کيږي، چې د يوې متحولې(اووښتونې) x په واک کې وي.

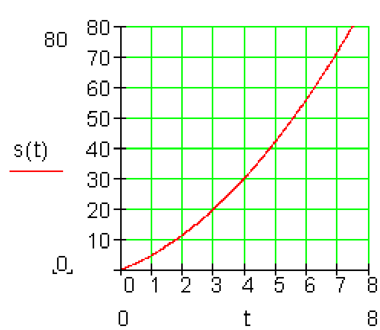
په طبيعي پوهنو کې زيات وخت توابع څيرو، چې د وخت په واک کې وي.

لکه په شکل کې د يوه توپ د غورځولو وهلې لار (دا وروسته روښانه کيږي)



بيلګه: د يوه په برابرډوله بيره (تعجيل) غورځول شوي شي لپاره د پيل چټکتيا (لومړنی سرعت) $v_0 = 4\frac{m}{s}$ او $a = 1{,}8\frac{m}{s^2}$ بيړې(تعجيل) سره د لار-وخت- قانون په لاندې ډول دی:

$$s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$$

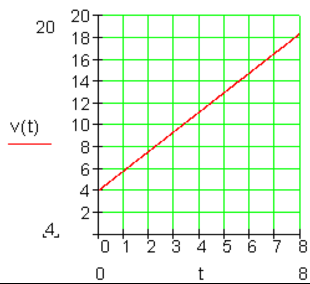
	حل: د پورته ورکړشوي د v_0 ارزښت لپاره باور لري: $S(t) = 0{,}9t^2+4t$ (tپه s(ثانيه) ، s(t) په m (متر)) منځنی چټکتيا (سرعت) $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ ده) لحظوی(سملاسي) چټکتيا په لاندې ډول ده:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = v$$

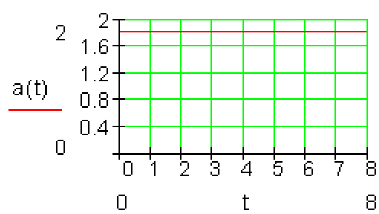
$$v = s'(t) = 1{,}8t + 4$$

په v-t - ډیاګرام کې یوه کرښه لاس ته راځي، دا په دې معنی چې چټکتیا په برابر ډول زیاتیږي. دا دلته ثابته جګېدنه $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ ده او $a = 1{,}8\,\frac{m}{s^2}$ بیړه(تعجیل) ده.



د بیړې یا تعجیل لپاره دا لاندې مساوات صدق کوي:

$$v'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = a$$



پام : د یوه برابرډوله په بیړه (تعجیلي) خوزښت لپاره لاندې باور لري:

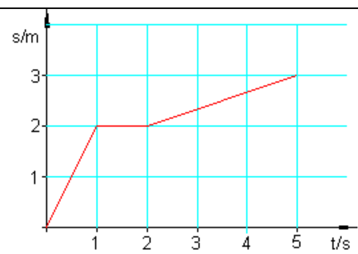
$$a(t) = v'(t) = a \qquad v(t) = s'(t) = at + v_0 \qquad s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$$

د یوې چټکتیا (سرعت) v لپاره د وخت پسې د لار مشتق لپاره $v(t)=s'(t)$ لرو. د $s'(t)$ لپاره داسې $v(t) = s'(t).$ هم لیکو.

فعالیت:

۱) د یوه خوزنده تن یا جسم د لار-وخت-دیاګرام ورکړ شوی. الف: دا خوزښت تشریح کړی.

ب : دې پورې اړونده د چټکتیا – وخت – دیا ګرام وکاږی.



(c) ketabton.com: The Digital Library

-- -------------------

۲) یوه تیږه د پیل چټکتیا $v_0 = 7\,\frac{m}{s}$ سره عمودي (ولاړه)پورته غورځول کیږي.

د لار-وخت-قانون دی: $s(t) = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$ د $g = 10\,\frac{m}{s^2}$ (را ټولې (؟؟کردې شوې)سره.

الف) د کوم وخت وروسته د تیږې چټکتیا (سرعت) صفر دی؟

ب) خورا جګ د میل جګوالی وشمیرئ.

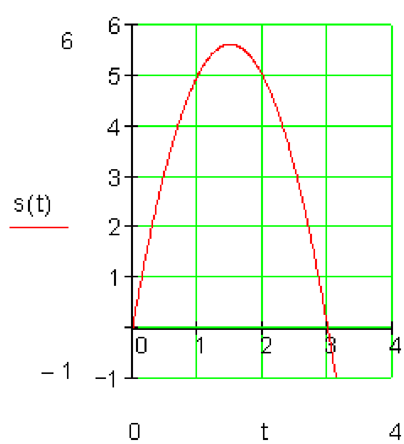
۳) تابع د یوه خوزښت د لار-وخت-دیاګرام ښايي.

الف) د ورځني ژوند څخه یوه بېلګه ورکړئ، د هغې لپاره چې دا تلنه ټیک وي.

د منحني تلنه د $t > 3$ لپاره فزیکي څه مفهوم لري؟

ب) د خوزښت لپاره د لار-وخت-دیاګرام $s(t) = \frac{1}{2} a \cdot t^2 + v_0 \cdot t$ په لاندې ډول دی.

a او v_0 وټاکئ



پ) د اړونده بیرې – وخت-دیاګرم وکاږئ او دا تشریح کړئ. یوه منفي چټکتیا (سرعت) څه معنا لري؟

۴) یوتن(جسم) په پورته ازاده غورځونه کې داسې حرکت کوي ،چې د t وخت کې $S(t)= 5.t^2$ لار وهي.

په وختونو $t=1;2;3$ کې لحظوي چټکتیا(سرعت) وښایی.

۴ – حل:

لحضوي جټکتیا د سملاسي تغیرارزښت سره په دې لاندې معنا دی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$t=1:\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{s(1+\Delta x)-s(1)}{\Delta x}=10+5\Delta x \Rightarrow$$

د $\Delta x \to 0$ لپاره باور لري: $10+5\Delta x \to 10$

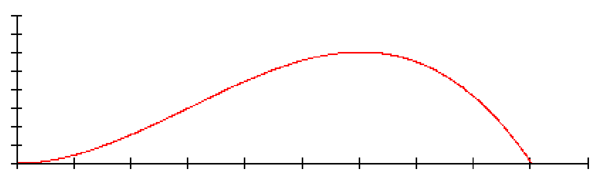
$$t=2:\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{s(2+\Delta x)-s(2)}{\Delta x}=20+5\Delta x \Rightarrow$$

د $\Delta x \to 0$ لپاره باور لري:: $20+5\Delta x \to 20$

$$t=3:\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{s(3+\Delta x)-s(3)}{\Delta x}=30+5\Delta x \Rightarrow$$

د $\Delta x \to 0$ ***لپاره باور لري*** $30+5\Delta x \to 30$

تمرین : لاندې د $f(x)=-\frac{1}{288}x^3+\frac{1}{16}x^2\ ;\ x>0$ تابع ګراف او په ورنزدي توګه د فوټبال میدان کې د توپ الوتنې منحني ښايي، چې لاندې څيره لري.



لاندې پوښتنې ځواب کړئ:

الف:توپ کوم خورا جګ(ماکسیمال) جګوالی لري او د وهلټکي(شوټ شوي ټکي) څخه کوم واټن لري؟
ب : د توپ وهلټکي (شوټ شوي ټکي)څخه توپ څومره لرې بېرته ځمکې ته راځي؟

پ : د لوبې د دفاع دېوال د توپ وهنې ځای څخه ۹ متره لرې او ۲ متره جګ دی. ایا توپ له دې څخه جګ الوزي؟

ت : توپ د تور لاین(د x محور) څخه په ۲ متره جګوالي الوزي. له ګول څخه په کوم لرېوالي دا ازاده شوټ وهل شوی دی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د جګو درجو مشتق

د لومړي مشتق پرته د لوړو درجو مشتق کونه هم شته، چي د ورپسي مشتق له لارې لاسته راځي
د f'(x) بیا مشتق نیوني سره د f''(x) مشتق تابع لاس ته راځي، چي د دویم مشتقتابع په نامه یادیږي.

بیلګه: $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 \Rightarrow f''(x) = 6x + 2$

د $f''(x)$ بیا مشتق نیونه و دریم مشتق ته اوداسې نور

$$f(x) = x^3 + x^2 + x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 \Rightarrow f''(x) = 6x + 2 \Rightarrow f'''(x) = 6$$

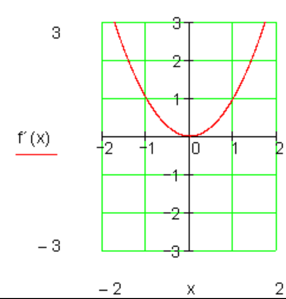
د $f(x) = \frac{x^3}{3}$ تابع دې ۴ واره مشتق ونیول شي

$$f(x) = \frac{x^3}{3} \Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2}{3} = x^2 \Rightarrow f''(x) = 2x \Rightarrow f'''(x) = 2 \Rightarrow f''''(x) = 0$$

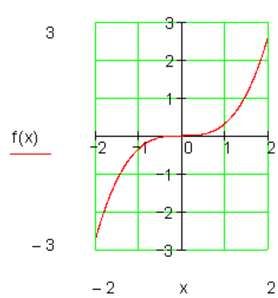
د تابع ګراف :

د یوه تابع انځورونه د اړونده مشتق تابع سره

$$f(x) = \frac{x^3}{3} \Rightarrow f'(x) = x^2$$

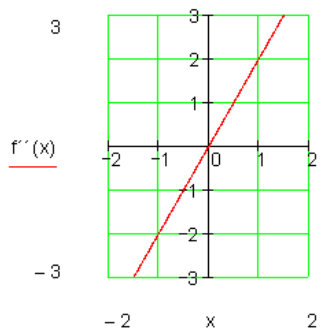


$$f(x) = \frac{x^3}{3}$$

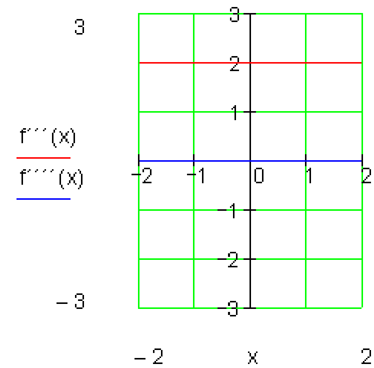


(c) ketabton.com: The Digital Library

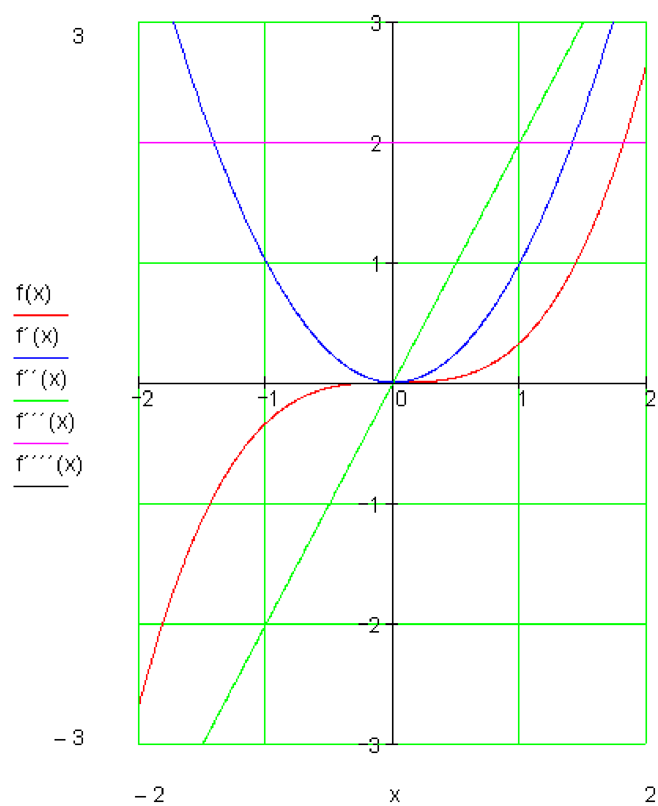
$f'(x) = x^2 \Rightarrow f''(x) = 2x$



$f''(x) = 2x \Rightarrow f'''(x) = 2 \Rightarrow f''''(x) = 0$



د ټولو توابعو ګراف په يوه پروت ولاړ سيستم



کې

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګې:

اول :

$$f(x) = 4x^3 - 2x^2 + x - 2$$
$$f'(x) = 12x^2 - 4x + 1$$
$$f''(x) = 24x - 4$$
$$f'''(x) = 24$$

دویم:

$$f(x) = \frac{3}{4}x^3 - 12x^2 + \frac{1}{4}x$$
$$f'(x) = \frac{9}{4}x^2 - 24x + \frac{1}{4}$$
$$f''(x) = \frac{9}{2}x - 24$$
$$f'''(x) = \frac{9}{2}$$

ټولګه: د f(x) لومړی مشتق دf(x) مشتق تابع $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$ ده :

دf(x) دویم مشتق د f'(x) مشتق تابع $f''(x) = \frac{d^2f(x)}{dx^2}$ دی:

د f(x)دریم مشتق د f''(x) مشتق تابع $f'''(x) = \frac{d^3f(x)}{dx^3}$ دی:

په ځانګړي ډول: ییو په خوښه ویاند تابعf(x) په خوښه د مشتق قابلیت لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- - د ایمپلیڅیت Implicit تابعو مشتق

د یوې تابع هغه زیات د استعمال وړ انځورونه د تابع د مساوات له مخې او د f(x) تابع د ورشو ورکولو سره په اکسپلیڅیتExplicit ډول، که تابع متحوله د برابرون په یوه اړخ ځانله شوې وي:

یا داسې: که یوه تابع $y = y(x)$ په ایمپلیڅیته توګه ورکړ شوې وي، دا په دې معنا چې په د x او y کې یوه مساوات له لارې ورکړ شوې، نو کیدی شي دا مساوات یل برابرون تړلی یې په x پسې مشتق ونیول شي. دلته په ځانله توګه کیدی شي په $y = y(x)$ ځنزیري قاونو وکارول شي.

د دې لپاره لاندې بیلګې راوړو:

بیلګه: $Y = 3x^2+7x$

د یوې تابع هغه زیات د استعمال وړه انځورنه د تابع د مساوات له مخې دی، د تابع د ورشو ورکولو سره په ایمپلیڅیت Implicit دول د بیلګې په توګه $Ex^2+7x+y=0$

فعالیت: که $Ex^2+7x+y=0$ولرو، څنګه کولی شو، چې ددې تابع مشتق پیدا کړو؟

قضیه: یوه تابع په ایمپلیڅیته بڼه $x^2+xy-y^2 = 1$ لرو، غواړو dy / dx پیدا کړو.:

ښوونه:

$$\frac{d}{dx}(x^2+xy-y^2)=\frac{d}{dx}(1)$$

$$2x+(1\cdot y+x\frac{dy}{dx})-2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$2x+y=\frac{dy}{dx}-x\frac{dy}{dx}$$

$$2x+y=\frac{dy}{dx}(2y-x)$$

$$\frac{2x+y}{2y-x}=\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x+y}{-x+2y} \quad \vee \quad \frac{2x+y}{2y-x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ایمپلیځیټ مشتق د یوې تابع مشتقنیولو لپاره یو امکان دی، چې نه ایمپلیځیت یعنې د یوه ترم سره ورکړ شوی وي، بلکې د ایمپلیځیت یعنې د یوه مساوات له مخې ورکړ شوی وي. دا قاعده د دې لپاره هم کارول کیږي، چې تابع په اکسپلیځیت یا څرګند ډول ورکړ شوې وي، خو د دې مشتقنیول ستونځمن وي.

بیلګه : د $f\left(x\right)=x^x$ تابع مشتق په ورسره بلدو مشتققوانینو نه شي نیول کیدی، ځکه چې په بنسټ او جګ اکسپوننت کې یې متحولې پرتې دي. د لوګاریتم له لارې د اکسپوننت متحوله له منحه وړل کېدی شي: $\ln f(x) = x\ln x$

اوس ایمپلځیت دا حل کوو، داسې چې دواړو لورو ته یې د x پسې مشتق نیسو:

$$\frac{\mathrm{d}(\ln f(x))}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}(x\ln x)}{\mathrm{d}x}$$

د دې مساوات مشتق د ځنځیرقانون له لارې صورت نیسي:

$$\frac{\mathrm{d}(\ln y)}{\mathrm{d}y}\, f'(x) = \frac{\mathrm{d}(x\ln x)}{\mathrm{d}x}$$

دلته $y = f(x)$. دی. د لوګاریتم او ضرب د مشتق قانون لاس ته راځي:

$$\frac{1}{y}\, f'(x) = \ln x + x\frac{1}{x}$$

که په $f'(x)$ پسې حل شي او د y له پاره بېرته $f(x) = x^x$ ځا په ځای کړو، نو دا حل لاس ته راځي:

$$f'(x) = y\left(\ln x + 1\right) = x^x\left(\ln x + 1\right)$$

بیلګه: دایره د r وړانګې سره مساوات $x^2 + y^2 = r^2$. لري. له دې ځنې برخې د $y =$ $f(x)$ تابع د ګراف په څېر لیکل کېدی شي. د دې مشتق د ایمپلېځیت مشتق له لارې په لاندې توګه حل کېدی شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

په تعریف شوي مساوات کې $y = f(x)$ ځاي په ځای کوو:

$$x^2 + f(x)^2 = r^2$$

د دې مساوات د مشتق له لار لرو : $2x + 2f(x)\,f'(x) = 0$

د $f'(x)$ پسې د حل له لارې لاس ته راځي:

$$f'(x) = -\frac{x}{f(x)} = -\frac{x}{y}$$

د دې مساوات سره د بېلګې په توګه لاس ته راځي، چې په داېرېتانجنت په ټکي (x,y) کې جګوالی $-\frac{x}{y}$ لري.

بیلګه: د بیلګیپه توګه د $E: \; x^2 + 3y^2 = 7$
له لارې ورکړ شوې ایلیپسې (هګۍ یا بیضوي) له لارې لرو:

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 + 3y^2\right) = 2x + 6yy' = \frac{d}{dx}7 = 0$$

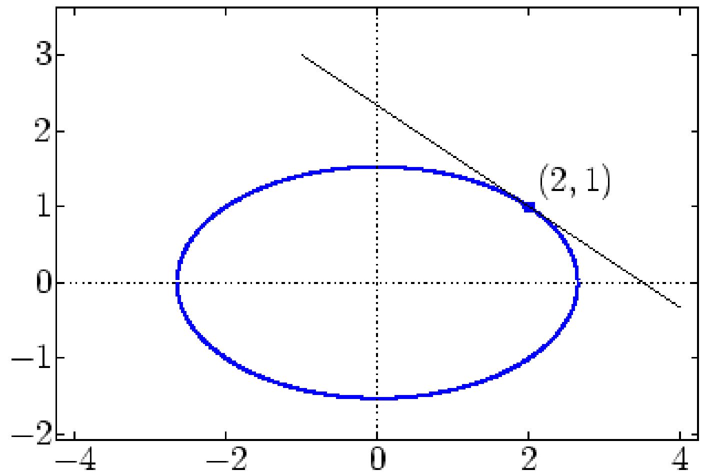
همداسې $y' = -\frac{1}{3}\frac{x}{y}$. له

دې سره کیدی شي په E باندې په یوه ټکي د $y \neq 0$ سره د تانجنت جګوالی وټاکل شي. د بیلګې په توګه د $(2,1)$ لپاره لاس ته راځي

$$y' = -\frac{1}{3}\frac{2}{1} = -\frac{2}{3}$$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library



په ورته توګه کیدی شي لوړ یا جګ مشتقونه هم وشمیرل شي. د yy' لپاره د ضرب قانون کارول یا استعمال له لارې دی

$$\frac{d}{dx}\left(2x+6yy'\right)=2+6(y')^2+6yy''=0\,.$$

له دې لاس ته راځي

$$y''=-\frac{1+3(y')^2}{3y}$$

.

بیرته په E د یوه ټکي د کواوردینات اینوولو او همدا اوس د $y'(x)$ ټاکلي ارزښت له لارې څرګند ارزښتونه وټاکل شي.

لیکونکي: هیولیک، کوپف

د بسټیزو مشتقونو جدول

(c) ketabton.com: The Digital Library

Nr	$f(x)$	$f'(x)$	نیونه یا فرضیه
1	$c = konst$	0	
2	X^n	$n.x^{n-1}$	$n = 1,2,3......$
3	X^n	$n.x^{n-1}$	x تیول عدد او $x \neq 0$
4	X^r	$r\,x^{r-1}$	$r \quad rational, \quad x > 0$
5	$\sqrt[n]{x = x^{\frac{1}{n}}}$	$\frac{1}{n}.x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{nx}\sqrt[n]{x}$	$n = 1,2,3......x > 0$
6	x^a	$a.x^{a-1}$	$x > 0, \ a \ reell$
7	a^x	$a^x \ln a = \frac{a^x}{\log_a e}$	$x > 0, \ a \neq 1$
8	e^x	e^x	
9	$\log_a x$	$\frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x \ln a}$	$a > 0, \ a \neq 1, \ x > 0$
10	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
11	$\sin x$	$\cos x$	
12	$\cos x$	$-\sin x$	
13	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in z$

•

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پورته جدول په مرسته کیدی شي چی کم له کمه په فورمـال ډول ، په خوښه د هرې شننيزې يا سپړنيزېې(تحليلي) وييني يا افادې مشتق په شننيزه توګه لاس ته راوړی شي، سره له دې هم باید سړی همغه نیونی په نظر کي ونيسي.

تولګه

کمبنتويش Differenzenquotient (د سیکانت جګېدنه) یا منځنی تغېر ارزښت

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(fx_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

مشتق Differetialquotient (د تانجنت چګوالی یا لحضوي تغير ارزښت)

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

د ثابتي قانون

$$f(x) = c \cdot u(x) \, mit \, c = constant$$

$$\Rightarrow f'(x) = c \cdot u'(x)$$

$$\boxed{f' = c \cdot u'}$$

د جمعي قانون

$$f(x) = u(x) + v(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = u'(x) + v(x)$$

$$\boxed{f' = u' + v'}$$

د ضرب قانو

$$f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

$$\boxed{f' = u' \cdot v + u \cdot v'}$$

د ویش قانون

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v(x)}{[v(x)]^2}$$

$$\boxed{f = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

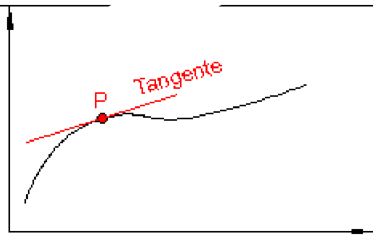
د ځنځیر قانون

$$f(x) = f[z(x)]$$

$$\Rightarrow f'(x) = f'(z) \cdot z'(x)$$

دا پورته الماني په پښتو شي(دا کمپيټريست سرته رسوم)

پيژند (تعريف): د يوه تابع ګراف ميل (جګوالی) په يوه ټکي P کې په همغه ټکي کې د تانجنت د ميل يا جګوالي ګراف سره برابر دی



د کمبنت ويش يا د تفاضل ويش **Difference quotient**

د يوې کرښې جګېدنه بې له مشتق نيونې ټاکلکېدی شي:

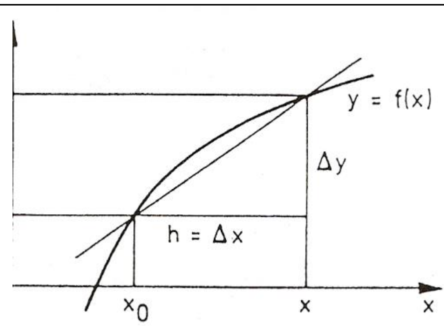
کرښه y=f(x) = mx+a لرو

د دې کرښې د جګیدنې فرمول په لاندې ډول دی:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

پيژند(تعريف1-2

y = f(x) دې د x_0 په يوه چاپيريال او په x_0 کې پخپله تعريف شوی تابع وي، x د x_0 څخه بيل خو د چاپيريال يو په خوښه يا په زړه پورې ځای دی(مخامخ ځيره دې وکتل شي). پس د تفاضل _ يا کمبنتويش Differenc equtient د سيکانتی ميلان يا جګوالی شته دی، چې په لاندې ډول يې ليکو:



د پيژند لپاره ځيره

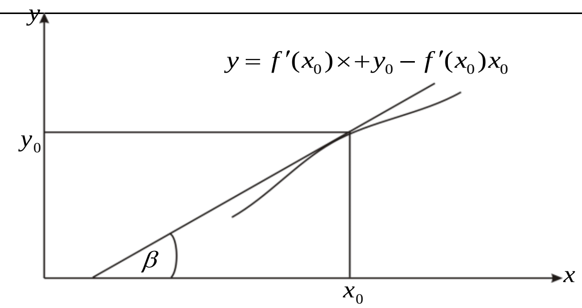
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$
$$=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

پیژند:که یو تابع یابلواك $y=f(x)$ د x_0 په ځاي کی د مشتق وړ(قابل اشتقاق،رابیلیدوړ) وي، نو هغه لاندنی کربښه چی د (x_0,y_0) ځخه تیریږي او میلان یا جګوالی $f'(x)=\tan\beta$ یی دی په لاندې ډول لیکو:

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=f'(x) \Leftrightarrow f'(x_0)x+y_0-f'(x_0)x_0$$

او دا د (x_0,y_0) په ټکي کی د ورکړ شوې منحني یا کړ ی $y=f(x)$ تانجنت بلل کیږي(پرتله یامقایسه لاندې خیره)



لومړی د تیرو جملو له مخې ددیفرنسیشن قاعدې د فورمال قاعدو په څیر بیا راتولوو یا رایوځاي کوو، بی له دې چی نیونی ورکړو. په استعمال کي یی بایددا نیوني کلکی تر پام لاندې ونیول شي. د لته د $f(x)$ او $g(x)$ بلواك په f او g لنډیږي.
د مشتق نیونو یا رابیلدنومشتق قاعدو جدول

گڼه د قاعدې نوم	فرمول
۱ د ثابتې سره ځل(ضرب) قاعده	$(cf)'=cf'$
۲ د زیاتون – کمون قاعده	$(f\pm g)'=f'\pm g'$
۳ د ځل (ضرب) قاعده	$(f\cdot g)'=f'\cdot g'$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګڼه د قاعدې نوم	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$
۴ ـ وېشقاعده	
۵ ـ د ځنځیروني قاعده	$y = f(z)\ ;\quad z = g(x);\ \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$
د په څټ یا برعکس قاعده	$y = f(x)\ ;\quad x = f^{-1}(y);\ \frac{dx}{dx} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$

قضیه : هر اکسپوننشل تابع د $y = b^x, (b > 0)$ د ټولو ریلو اعدادو لپاره مشتقوړ دی او صدق کوي: $f' = b^x \ln b$

قضیه: هر د لوګاریتم تابع $y=f(x)=\log_b x$ د $b > 0, b \neq 0, x > 0$ سره، مشتقوړ دی او صدق کوي: $f'(x) = \frac{1}{x}\log e = \frac{1}{x.\ln b}$

--- د یوې تابع د مشتق قابلیت

موږ ولیدل، چې یوه تابع په هر ځای کې تعریف نه ده، په هر ځای کې حد نه لري او همداسې په هرځای کې متمادي یا ناپرېکیدونکې نه ده. په همدې توګه یوه تابع هر چیرته د مشتق قابلیت هم نه لري.

تابع $f(x) = |x|$ په 0 ځای کې تعریف نه ده:

د ټولو $x > 0$ له پاره باور لري $f(x) = x$

او له دې سره $\lim_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0}\frac{x - 0}{x - 0} = 1$

د ټولو $x < 0$ لپاره د پورته په برعکس $f(x) = -x$ باور لري او له دې سره:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0}\frac{-x - 0}{x - 0} = -1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چې کېږ- او ښی اړخیز حد یو له بل سره سر نه خوري، حد(پوله) نه شته. تابع په دې راوړل شوي ځای کې مشتقوړ نه ده.

د تابع مشتق کېدنه په نورو ټولو ځایونو کې تر اوسه تل ورکړ شوي.

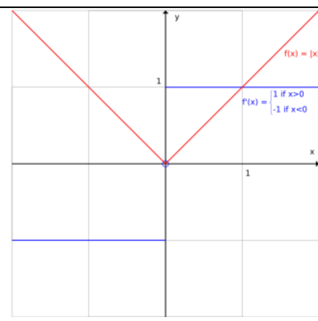
په صفر ځای کې سره له دې یو ښي اړخیز مستق ورکړ شوی، یعني لرو:

$$f'+(0)\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{-x-0}{x-0}=1$$

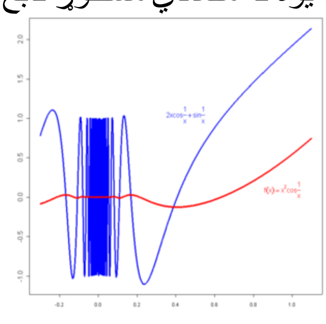
او یو کېڼ اړخیز مشتق هم:

$$f'-(0)\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{-x-0}{x-0}=-1$$

که مخامخ گراف ته وگورو، نو وبه پوهیږو، چې یوه مشتقوړ تابع باید گوډه نه وي یا په کوم ځای کې ماته نه وي یا په بل عبارت کونج جوړ نه کړي.



د یوه نه متمادي مشتقوړ تابع لپاره بېلګه:



یو تابع متمادي مشتقوړ بلل کیږي، که د هغې مشتق متمادي وي. که یوه تابع هرچېرته مشتقوړ وي، باید نه دی چې مشتق دې یې هم متمادي وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بیلګې په توګه:

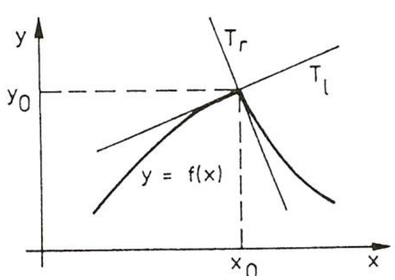
$$f(x)=\begin{cases} x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

تابع په هر ټکي کې حتي د $x=0$ سره مستقوړ دی. مشتق

$$f'(x)=\begin{cases} 2x\cos\left(\frac{1}{x}\right)+\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

یي ددې په خلاف په 0 ځای کې متمادي نه دی
مشتق د ټاکلو نیونویا فرضیو لاندې ممکن او له دې امله هلته هدفمند دی، چېرته چې لیمیټ (پولی) ته تګ ممکن وي یعني چیرته چې د تفاضل ویش یو لیمیټ د $x\to 0$ لپاره ولري.

که کومه منحني چیرته راماته وي (څېره 4)، ګورو چې هلته تانجنت نه شته او همدارنګه جګیدل او هم د تفاضل ویش نه شته. پس د مشتق قابلیت د متمادیت په څیر د یوې تابع ځانګړي خوي دی.

که په مخامخ څیره کی انځور شوې منحني د x_0 په ځاي کی یواځنی تانجنت هم ونه لري او له دې امله مشتق هم ونه لري، خو دلته یو کیڼ تانجنت T_1 یا کیڼ جګوالی لري اوپه دې ډول کیڼ مشتق لري او په همدې ډول یو ښی تنجت T_r او ښی جګوالی او په دي ډول ښی د تابع مشتق موجو د دی.	

یوه نامتمادي(پرېکیدونکې) تابع کی د تانجنت یا مشتق پوښتنه بی معناده.

اړیین یا ضروري شرطونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا دلته انځور شوی پرابلم يا مسأله اوس د شميرنې د ټيك فرمول لاندې راوړو.

وليدل شو چې په يوه ځای x_0 کی چې تابع متمادي نه وي د مشتق پوښتنه بی مانا ده. نيسو چې دا دې ښوول شوی وی. دا څرگنده ده چې هره متمادي تابع بايد ضرور مشتقوړنه وي. د بيلګي په توګه که تابع زاويه يا کونج ولري.

دې ته اړتيا ده چې وښايو، چې يوائې متمادي (نه پرېکيدونکې)توابع د مشتق قابليت لري، دا بيا دا معنا لري چې هره تابع چې مشتقوړ وي بايد لږ تر لګه متمادي(نه پرېکيدونکې) وي او په دې ډول مشتق متماديت په بر کی لري يا خوندي لري، په دې معنا چې متماديت د مشتقوړوالی لپاره اړيين يا ضروري شرطونه دي

جمله:

که د $y = f(x)$ تابع د x_0 په ځاي کی مشتقوړ وي، نو هلته ضرور متمادي ده.

ښوونه : د دمشتق د تعريف څخه لاس ته راځي، چی حد شته دی.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

ليميټ ياپوله يوائې هلته کيدی شي چې موجود وي، چی د $x \to x_0$ لپاره د مخرج سره صورت هم صفر ته ولاړ شي يانې $f(x) - f(x_0) -> 0$ لاړ شي.
نو باور لري: $f(x) -> f(x_0)$ د $x \to x_0$ لپاره.
دا د متماديت يا ناپرېکيدنې پيژند دی.
دا تفاضل يا کمښت وېش په يوه بله بڼه هم انځوريدلی شي که $x = x_0 + \Delta x$ وکاروو:
دلته مشتق $f'(x)$ په لاندې توګه ورکړ شوي دی:

د يوه تابع د مشتق قابليت د لومړي ځل لپاره يوائی په ځای (lokal) پورې اړ خوي دی يعنی په يو ځاي x=x0 کی تعريف دی. لکه څنګه چې په متماديت کی(لومړي ځپرکی دې وکتل شي) کيدی شي چې د مشتق قابليت او مشتق يوه واز يابند اينتروال ته وغزول شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تعریف: د $y=(x)$ یوه تابع په واز اینتروال (a,b) کې، د اشتقاق قابل(مشتقوړ) بلل کېږي، د لاندې مشق سره.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{df(x)}{dx}=f'(x)\ ;\ a<x<b$$

که داد $x=x_0\in(a,b)$ په هر ځای کې د مشتق قابلیت ولري د مشتق $f'(x_0)$ سره. دا په بند اینتروال $[a,b]$ کې مشتق وړ بلل کېږي، که دا سربېره پر دې د a په ځاي کی ښی اړخیز اود b په ځاي کي کیڼ اړخیز مشتق وړ هم وي.

بیلگه: د توان تابع $y=x^n,\ n=1,2,3,\ldots..$ په هرځاي کی د مشتق قابلیت لري د لاندې مشتق سره

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dx^n}{dx}=nx^{n-1}$$

د ساین تابع $y=\sin x$ او کوساین تابع $y=\cos x$ په هرځاي کی مشتقوړده، د لاندې مشتق سره

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d\sin x}{dx}=\cos x,\ \frac{dy}{dx}=\frac{d\cos x}{dx}=-\sin x$$

په یوه واز انتروال کی $y=f(x)$ مشتقوړ تابع مشتق بیرته $y'=f'(x)$ تابع ده ، نو په دې ډول یي د مشتق قابلیت اود متمادیت قابلیت پوښتنه کیدی شي.

پیژند: په یو د $x=x_0$ چاپیریال کي د مشتق قابل تابع (رابیلیدوړ بلواك) $y=f(x)$ په $x=x_0$ کې دوه واره د مشتق قابلیت لري(رابیلیدوړ دی)، که د هغي اشتقاق(رابیلیدنه) $y'=f'(x)$ هلته د مشتق قابلیت لري(رابیلیدوړ وي). سرِی د $f'(x)$ مشتق د تابع(رابیلیدنه د بلواك) $y=f(x)$ دویمه رابیلیدنه بولي او لیکي:

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=x_0}=f''(x_0)=\left(\frac{df'(x)}{dx}\right)_{x=x_0}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یو په یوه واز اینتروال کي مشتق کېدونکي تابع $y=f(x)$ هلته دوه واره مشتقوړ بلل کیږي، که د هغه مشتق $y'=f'(x)$ په دې اینتروال کې مشتق وړ وي.

ددې لپاره لیکل کېږي:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=f''(x)=\frac{df'(x)}{dx}$$

بیلګه ۲ . ۷ :

لاندې توابع $y=c; y=x^n; y=\sin x; y=\cos x$

هر چیرته دوه واره مشتقوړ دي، د لاندې مشتقونو سره:

$$\frac{d^2c}{dx^2}=0, \quad \frac{d^2x^n}{dx^2}=n(n-1)x^{n-2}, \ n\geq 2,$$
$$\frac{d^2\sin x}{dx^2}=-\sin x, \quad \frac{d^2\cos x}{dx^2}=-\cos x \ .$$

دا په ۲ . ۴ کی تعریف شوي کیلمی کیدی شي چی په ساده ډول په خوبنه پراخه شي یعني داکسپوننت مشتقونو ته واړول شي(n – م مستق (رابیلیدنه) یی وشمیرل شي) .

د y=f(x) تابع دلته n –واره مشتقوړ ده، که n – م مشتق ولري یعنی

$$\frac{d^ny}{d^nx}=\frac{d^nf(x)}{d^nx}=f^{(n)}(x)=\frac{df^{(n-1)}(x)}{dx};..$$

جمله:

که د(y=f(x تابع د x0 په ځاي کی مشتقوړ وي، نو هلته ضرور متمادي یا ناپرېکیدونکي ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ښوونه : د دمشتق د تعریف څخه لاس ته راځي، چی پوله یا حد شته دئ

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

پوله یا حد یوائی هلته کیدی شي چی موجود وي، چی دx->x0 لپاره د مخرج سره صورت هم صفر ته ولاړ شي یانیf(x)-f(x0)->0 لاړ شي.
نو باور لري: f(x)->f(x0) د x->x0 لپاره.
دا د ناپرېکیدني یا متمادیت تعیف یا پیژند دی.

دا کمښت-یا تفاضل وېش په یوه بله بڼه هم انځوریدلی شي که $x = x_0 + \Delta x$ وکاروو:

دلته مشتق (f'(x په لاندې توګه ورکړ شوي دی:

د یوه تابع د مشتق قابلیت د لومړي ځل لپاره یوائی په ځای (lokal) پورې اړوند یا تړلی خوي دی یعنی په یو ځاي x=x0 کی تعریف دئ. لکه څنګه چی په ناپرېکیدنه یا متمادیت کی(۱۹ - څپرکی دې وکتل شي) کیدی شي چی د مشتق قابلیت او مشتق یوه واز یابند اینتروال ته وغزول شي.

تعریف :

د y=f(x) یوه تابع په واز اینتروال(a,b) کی، د اشتقاق قابل(مشتقوړ) بلل کیږي، د لاندې مشق سره.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = f'(x); a < x < b$$

که داد(a,b) $x = x_0 \in$ په هر ځاي کی د مشتق قابلیت ولري د مشتق (f'(x0 سره.
دا په بند اینتروال[a,b] کی مشتقوړ بلل کیږي، که دا سربیره پر دې د a په ځاي کی ښی اړخیز اود b په ځاي کي کیڼ اړخیز مشتقوړ هم وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

--- د معکوس تابع مشتق invers funktion

د یوه گراف به مرسته تابع او د هغه په څېر تابع د بیلګې به توکه یوه مربع تابع.

اوس دې معکوسه تابع تر څېرنې لاندې ونیول شي . دلته دې ونیول شي،چې $y = f(x)$ په $x = x_0$ کې د $f(x) = 0$ سره او په یوه د x_0 چاپیریال کې جګیدونکی دی $f'(x_0) > 0$ او یا په کلکه لوېدونکی $f'(x_0 < 0$ او له دې امله معکوس کیدونکی هم دی، یعني $x = f^{-1}(y)$ ، نود کمښتویش لپاره معکوسه تابع لاس ته راځي:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

او دا چې $x -> x_0$ او $f(x)$ د متمادیت له امله هم $y -> y_0$ او باورلري.

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)_{y=y_0=f(x_0)} = \left(\frac{df^{-1}(y)}{dy}\right)_{y=y_0=f(x_0)} = \frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}} = \frac{1}{\left(\frac{df(x)}{dx}\right)_{x=x_0}}$$

که په د لاندې ټکي ځای $x = x_0$ لپاره ساده بیرته x ولیکو نو دا لاندې لنډ فورم لیکلی شي:

د $y = f(x)$ لپاره باور لري.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

د پورته ورکړ شوو نیونوسره سړی بیرته یو د تفاضل یا کمښت ویش لاس ته راوړي چې د هغه سره د

مروج ویش په څیر شمیرنه کیدی شي، لکه

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(f^{-1})`(y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{f`(x)}$$

جمله:

د معکوس تابع مشتق : که y = f(x) د x په یوه چاپیریال کی د $x=f^{-1}(y)$ سره معکوس او همله د f’ (x) |= 0 سره مشتقوړ وي، نو معکوس تابع د y = f (x) سره مشتقوړ دی او باوري دی

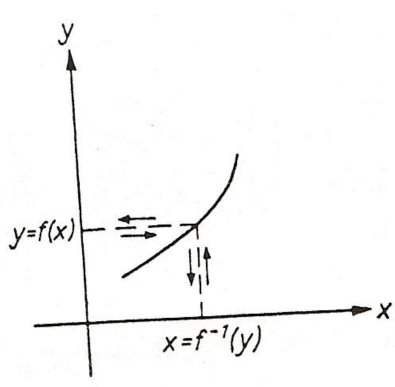
$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

حل: کیدی چی د f تابع د مشتق څخه د f^{-1} معکوس تابع مشتق لاس ته راوړو. له دې امله له 0<- x او هم 0<-y او معکوس څخه، د y = f(x+ x)-f(x) سره، لاس ته راځي:

$$(f^{-1})`(y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{f`(x)}$$

بالاخره لرو:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه: د $y = f(x) = x^n ; n = 1,2,3,4.....$ تابع لپاره که $x \geq 0$ وټاکل شي او په دې $x = \sqrt[n]{y} = y^{\frac{1}{n}} ; y \geq 0$ توګه معکوس تابع، نو لرو:

$\frac{dy}{dx} = f'(x)nx^{n-1}$ د $x>0$ لپاره. له دې امله د $y > 0$ لپاره د معکوس تابع مشتق شته دی او لاندې ارزښت لري

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d\sqrt[n]{y}}{dy} = \frac{dy^{\frac{1}{n}}}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{n \cdot x^{n-1}} = \frac{1}{n} \cdot x^{1-n} = \frac{1}{n} \cdot y^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n} \cdot y^{\frac{1}{y}-1}$$

که x او y سره بدل شي نو دا لاس ته راځي

$$dx^{1/n} / dx = (1/n).x^{n-1}$$

بیلګه: دا $y = x^{\frac{m}{n}}$ تابع د تام عدد m او د مثبت تام عدد n سره یعني د خوښې کسري اکسپوننت یا په«جګ عدد» کیدی شي چې د مخه څېړلي او د ځنځیری قاعدې له مخې یې مشتق نیول شي، چې د $x > 0$ لپاره باور لري.

$$y = x^{m/n} = z^m \quad , \quad z = x^{1/n}$$

او دا هم باوري دي

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dz}{dx} = m.z^{m-1}.\frac{1}{n}.x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n}.x^{\frac{m-1}{n}} \cdot x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m-n}{n}}$$

$$\frac{dx^{\frac{m}{n}}}{dx} = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m}{n}-1}, x > 0$$

په دې ډول د مخه طبیعي اکسپوننت کسري اکسپوننت ته پراخ شو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې جدول کې لاندې د بنسټیتابع مشتق ځاي په ځاي شوی. له کیڼ و ښي لور ته اول درځ نمره ده دویم درځ یی تابع $f(x)$ ښاى او په دریم درځ کی یی مشتق $f'(x)$ ځاي په ځای دي او په څلورم درځ کی د راپیداشوې پارامتر او د متحولې x نیونی ځای په ځاي شوي. که چیرې د واریابلی یا پارامتر لپاره نیونی نه وي شوي نو په خوښه نیول کیدی شي.

جدول د بنسټیتابعو مشتق

Nr.	$f(x)$	$f'(x)$	وړاند نیونه یا فرضیه
1	$c = konst$	0	
2	X^n	$n.x^{n-1}$	$n = 1,2,3.......$
3	X^n	$n.x^{n-1}$	$n \;\; ganz, \;\; x \neq 0$
4	X^r	$r\,x^{r-1}$	$r \;\; rational, \;\; x > 0$
5	$\sqrt[n]{x = x^{\frac{1}{n}}}$	$\frac{1}{n}.x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{nx}\sqrt[n]{x}$	$n = 1,2,3......x > 0$
6	x^a	$a.x^{a-1}$	$x > 0, \;\; a \;\; reell$
7	a^x	$a^x \ln a = \frac{a^x}{\log_a e}$	$x > 0, \;\; a \neq 1$
8	e^x	e^x	
9	$\log_a x$	$\frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x \ln a}$	$a > 0, \;\; a \neq 1, \;\; x > 0$
10	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
11	$\sin \; x$	$\cos \; x$	

(c) ketabton.com: The Digital Library

12	$\cos x$	$-\sin x$	
13	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x$	$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in z$
14	$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x} = -(1+\cot^2 x)$	$x \neq k\pi,\ k\ \ k \in z\ (Z)$
15	$Arc\sin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\|x\| < 1$
16	$Arc\cos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\|x\| < 1$
17	$Arc\tan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	
18	$Arc\cot$	$-\frac{1}{1+x^2}$	

د جدول 20-2 او همدارنګه د جدول20-1په مرسته کیدی شي چی کم له کمه په فورمال ډول ، په خوښه د هرې شننیزې یا سپړنیزې(تحلیلي) وییني یا افادې مشتق په شننیزه توګه لاس ته راوړی شي، سره له دې هم باید سړی همغه نیونی په نظر کي ونیسي.

بیلګه20-18: د زیاتون قاعده کیدی شي د ځل قاعدې په مرسته د یوې ثابتی سره یوځاي یا ګډه شي او ډیرو زیاتونکو یا د جمعې اعضاو باندې استعمال شي. لګه لاندې

$$y = f(x) = 3\sin x + 4e^x - 7tanx - 6\sqrt{x^3}$$
$$= 3\sin x + 4e^x - 7tanx - 6x^{\frac{3}{2}}$$

دلته tan x یواځي د $x \neq (2k+1)$ او د x^3 له امله یواځي د $x > o$ لپاره رابیلیدوړ دی او ددې بندیزونو (محدودیتونو) له امله لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$dy/dx = f'(x) = 3\cos x + 4e^{x} - 7 - 7\tan^{2} x - 6.(3/2).x^{)3/2)-1}$$
$$= 3\cos x + 4e^{x} - 7 - 7\tan^{2} x - 9\sqrt{x}$$

لکه چی بنسټیز بلواك او له دوي ټولی راجوړې شوي سپړنیزې افادې هرچیرته متمادي یا ناپریکیدونکی وې، چیرته چي تعریف شوي وې. نو د جدول 20-2 له مخی بنسټیز بلواك یواځي تعریف ډیري کی رابیلیدوړدی، په دې کي کوم تغیر نه راځي که په دې بلواکو څلور بنسټیزې عملي استعمال شي. یعني لاندې جمله باوري ده .

جمله20-8: د بنسټیز بلواکو د څلورو بنسټیزو عملیو له لارې جوړې شوي شننیزې (تحلیلي) افادې د دوي تعریفډیري په دننه کی رابیلیدوړ ده.

که څوك ځنځیري بلواك جوړوي نو دا وینا باید نوره هم رابنده یا محدوده شي

بیلګه20-19: دا بلواك $y = \sqrt{(x-1)^2(x+1)} = (x^3 - x^2 - x + 1)^{\frac{1}{2}}$

د $(x-1)^2(x+1) > 0$ ، پس د $x+1>0$ یعني $x>-1$ تعریف دی او هلته هم نه پریکیدونکی یا متمادي (د $x=-1$ په غاړه طبعآ ښی اړخیز) ده.

دا په ځانګړې توګه د $x=1$ لپاره هم ناپریکیدونکی یا متمادي دی(20-7دې وکتل شي)د پیژنددېری یا تعریف ډیری دننه $x>-1$ دی، او هلته تابع یا بلواك په واقعیت کی نه پریکیدونکی یا متمادي دی .اوس نو مخ ته پروت تابع یا بلواك تړلی(ځنځیري) ورکړ شوی:

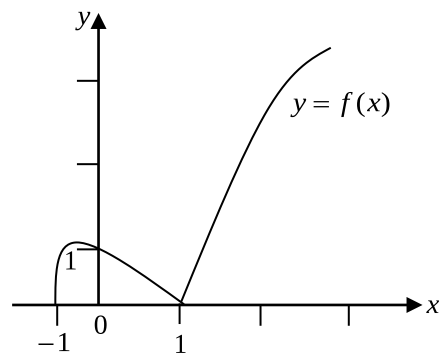
$$y = f(z) = \sqrt{2} = z^{\frac{1}{2}}$$
$$z = g(x) = (x-1)^2(x+1) = x^3 - x^2 - x + 1$$

$$z = g(x) = (x-1)2(x+1) = x3 - x2 - x + 1$$

بلواك $z = g(x)$ د ټولو x لپاره مشتقوړ یا رابیلیدوړ دی، تابع $y = f(z) = z^{\frac{1}{2}}$ له دې امله ځنځیري قاعده یواځی د $z > 0$ لپاره صدق کوي، پس د $x > -1,\ x \neq 1$ لپاره. هلته باور لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=\frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}\cdot(3x^2-2x-1)=\frac{3x^2-2x-1}{2\cdot\sqrt{(x-1)^2(x+1}}$$



د یو ځنځیري تابع مشتقوړوالی د هغه- x ارزښتونو لپاره باور لري یاهلته ډاډوړ دی، کوم چې د د ننني تابع یا بلواك په دننه کی پراته دي او په هغو کی د دننني تابع ارزښت د دباندني تابع د د تعریف ډیری په دننه کي پروت وي. که د - x ارزښتونو ډیری د بند تعریفډیري دننه وښایي ، نو لاندې جمله باور لري.

جمله 20-9: هره یوه شننیزه یا تحلیلي افاده د خپل بند(محدود) تعریفډیري په دننه کی رابیلدوړ ده.

بیلګه 20-20: ځنځیري قاعده هم استعمالیدونکی ده، که په یوه تړلي بلواك کی د ننني بلواك پخپله یو تړلی بلواك وي، پس (د لازمه وړاند نیونو لاندې) باور لري

$$y=f(z),\ \ z=g(u),\ \ u=h(x)$$

پس د $y=f(g(h(x)))$

ځنځیري قاعده

$$dy/dx=(dy/dz)(dz/du)(du/dx)$$

فنکشن یا بلواك یا تابع

$$y=Arc\sin\sqrt{1-x^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یو داسې تابع دی. دلته لرو:

$$y = f(z) = Arc\sin z, \qquad z = g(u) = u^{1/2}, u = h(x) = 1 - x^2$$

دلته $h(x)$رابیلیدوړ دی، $g(u)$ یواځی د$u > 0$ لپاره رابیلید وړ دی، پس د 1- ، $x_2 > 0$ او یا$x_2 < 0$ یاد $|x| < 1$ ، او $f(z`)$ د$|z| < 1$ لپاره، پس د$1 - x_2 < 1$لپاره پس د$11 - x_2 < 1$ لپاره په دې مانا چې $x_2 > 0$ د$|x| > 0$ لپاره.

رابیلیدوړوالی یواځې د لاندې چاپریال لپاره تضمین دی

$$0 < |x| < 1 <=> -1 < x < 0 \qquad \text{او یا}$$

$$0 < x < 1 <=> |x| < 1 \quad x |= 0 \qquad (20.53)$$

دپیژندډېرې پا تعر یفډیرۍ دننه $|x| < 1$دی. د تعریفډیري محدودیت(20-53 = دی.

فنکشن یا بلواك (20-52) یواځی همل‌ته تعریف او د (20-51) له مخې باور لري:

$$\begin{aligned}
\frac{dArc\sin\sqrt{1-x^2}}{dx} &= \frac{dArc\sin z}{dz}\cdot\frac{du^{\frac{1}{2}}}{du}\cdot\frac{d(1-x^2)}{dx}\\
&= \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\cdot\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2x)\\
&= \frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x)\\
&= -\frac{x}{\sqrt{x^2}\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{|x|\sqrt{1-x^2}}\\
&= \begin{cases} -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & fur \;\; 0 < x < 1,\\[2mm] +\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & fur \; -1 < x < 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس دې یوه بله د دیفرنسیشن قاعده ورکړل شي کومه چې په جدول 20-1 کې غیر مستقیم خوندې یا په بل عبارت دننه ده. دا د لاندې شکل بلواك دیفرنځیشن دی

$$y = f(x)^{g(x)}$$

دا له دې امله

$$y = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x)\ln f(x)}$$

د ځنځیرقاعدې له مخی ترځیرنې نیول کیدی شي، $y = e^z, z = g(x)\ln(f(x))$ د لاندې بلواك $u = \ln f(x) = \ln v, v = f(x)$ مشتق هم د ځنځیری قاعدې له مخی را پیداکیدی شي.

دا لاندې صدق کوي:

$$u' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dv}\cdot = \frac{1}{v}\cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$ او

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = e^z\cdot(g'(x)\ln f(x) + g(x)u')$$
$$= f(x)^{g(x)}\left(g'(x)\ln f(x) + \frac{g(x)f'(x)}{f(x)}\right)$$

د ځنځیری قاعدې د نیونو په نظر کی نیولو سره او د جملی 20-10 له مخی لاس ته راځي

جمله : که $f(x)$ او $g(x)$ د $f(x) > 0$ سره د مشتق قابلیت لري ، نو $y = f(x)^{g(x)}$

هم د لاندې مشتق سره مشتقوړ دی.

بیلګه : تابع $y = x^x$ د $x > 0$ لپاره رابیلیدوړ دی. دا دې داسی ځاي په $f = x,\ g = x$ ځاي شي او له دې سره $f' = 1, g' = 1$ له دې امله اوس د $x > 0$ لپاره لرو:

$$dx^x / dx = x^x(\ln x + 1)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه: د $y=(x^2-1)^{\ln x},\ x>1$ دیفرنسیشن سره باید د $g=\ln x$ له امله وغوښتل شي چی $x>0$ او د $f=(x^2-1)>0$ له امله باید باور ولري $x^2>1$ او له همدې امله $|x|>1$ پس کیدی شي چی د $x>1$ لپاره د $f=x^2-1$ او $g=\ln x$ سره استعمال شي:

$$\frac{dy}{dx}=(x^2-1)^{\ln x}\cdot\left(\frac{1}{x}\ln(x^2-1)+\frac{(\ln x)\cdot(2x)}{x^2-1}\right)$$
$$=(x^2-1)^{\ln x}\cdot\left(\frac{\ln(x^2-1)}{x}+\frac{2x\ln x}{x^2-1}\right),\quad x>1$$

بیلګه یا تمرین: د $y=f(x)=x^n; n=1,2,3,4......$ تابع لپاره که $x\geq 0$ وټاکل شي او په دې توګه $x=\sqrt[n]{y}=y^{\frac{1}{n}}; y\geq 0$ یې معکوس تابع وي، نو د معکوس تابع مشتق یې ونیسئ.

، نو لرو : $\frac{dy}{dx}=f'(x)nx^{n-1}$ د $x>0$ لپاره له دې امله د $y>0$ لپاره د معکوس تابع مشتق شته دی او لاندې ارزښت لري.

$$\frac{dx}{dy}=\frac{d\sqrt[n]{y}}{dy}=\frac{dy^{\frac{1}{n}}}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=\frac{1}{n\cdot x^{n-1}}=\frac{1}{n}\cdot x^{1-n}=\frac{1}{n}\cdot y^{\frac{1-n}{n}}=\frac{1}{n}\cdot y^{\frac{1}{n}-1}$$

که x او y سره بدل شي نو دا لاس ته راځي.

$$\frac{dx^{\frac{1}{n}}}{dx}=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$$

بیلګه -- د $y=x^{\frac{m}{n}}$, $m,n\in N$ تابع د معکوس تابع مشتق ونیسئ.

د تام عدد m او د مثبت تام عدد n سره یعني د خوښي کسري اکسپوننت

یا په«جګ عدد» کیدی شي چی د مخه څېړلي او د ځنځیری قاعدې له مخې یې مشتق ونیول شي، چې د $x>0$ لپاره باور لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = x^{\frac{m}{n}} = z^m \quad , \quad z = x^{\frac{1}{n}}$$

او دا هم باوري دي

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = m.z^{m-1} . \frac{1}{n} . x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n} . x^{\frac{m-1}{n}} \cdot x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m-n}{n}}$$

$$\frac{dx^{\frac{m}{n}}}{dx} = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m}{n}-1} , x > 0$$

په دې ډول د مخه طبیعي اکسپوننت کسري اکسپوننت ته پراخ شو.

بیلګه : یوه بډای چی په یوه ټاکلي وخت کی تولسټ (تولډیری) M تولید کړي او دا ټل اخستونکو ته ورسوي، نو له دې سره فیکس یا کره ټاکلی لګښتونه F تړلي دي.
کیدې شي چي سملاسی د دې تولید په تولسټ (تولډیری) M کی تولید کړي ، په یوه زخیره ځاي(زېرمتون؟) کی ځاي په ځاي کړي او اخستونکو ته یی سملاسي ورسوي. دلته د زېمتون (زخیره کونې) لګښتونه راپید کیږي(ددې د زخیرې لپاره ځاي او هلته بیا اچول او وړل). یا هم کیدی شي چی تولید په لږه کچه یا اندازه تولید شي او سملاسی اخستونکو ته وروړل شي. دلته نو د زخیره کولو لګښتونه منځ ته نه راځي. مګر ټل تولید په دې ډول تولید باندې درول، لګښتونه منځ ته راولي، چی د چمتووالی لګښتونه یی بولو.
کومه ډیری x (ازاده لویه) باید تولید شي، چی د امکان تر پولي کم لګښتونه پرې وشي؟
د زخیرې لګښت د چمتووالی لګښت سره متناسب دی ، د خرابیدو ارزښت د چمتووالي یا تولید ارزښت سره یعنی چي خرڅلاو ته چمتو کیږي، په څټ متناسب دی. که x لوي وي نو چمووالی ته کم اړتیا شته او که x کم وي نو چمتووالی بدلون ټل باید تغیر وخوري یعني. ټول لګښتونه

$y = f(x) = F + Lx + R/x$ دي ، چیرته چی F ثابت(همغه) یا په کلکه اینسول شوي لګښتونه دي، Lد زخیرې لګښتونه او R د چمتووالی لګښتونه دي. دا ازاده لویه x د

(c) ketabton.com: The Digital Library

تولیدډیری M څخه نه شي سترېدلی ، لوئیدلی یا غځیدلی. له دې امله صدق کوي_0 ≤ x ≤ M . مخ ته پروت د ستریدلو مسئله له دې امله په لاندې ډول ده

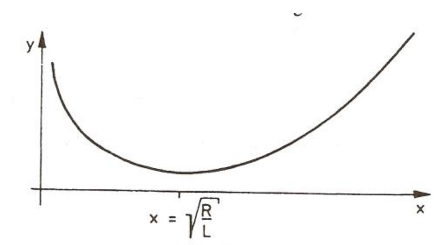
$$y = f(x) = F + Lx + R/x = Min! \quad (0 \leq x \leq M$$

(لمړی f(x)) دوه واره دیفرنځیال کیږي یا يي دوه واره رابیلیدنه نیول کیږي:

$$f'(x) = L - R/x^2, \qquad f''(x) = 2R/x^3$$

د مینیوم لپاره ضرور دي: , $f'(x) = 0$ پس لرو $x = R/L$ ؟؟؟

د $0 \geq x$ له امله $f''(x) \geq 0$ هم صدق کوي، پس دلته تل یو نسبي مینیموم مخ ته لرو



د کږې تګلار په څیره ۲۰ . ۱۵ کی انځور شوې.

څرګنده ده: که $x = R/L < M$ صدق ولري، نو مینیموم مو مخته پروت دی. که $x = (R/L) > M$ وي، نو یو منیموم په څنډه $x = M$ لرو.

نامساوت $x = R/L < M$ دا مانا لري $R/L < M^2$ په همدې ډول . $R^2 < M^2L$
پس مخ ته لرو: $x = R/L$ د $R < M^2L$ لپاره او $x = M$ د $R > M^2L$ لپاره

نو : که د چمتوالي لګښتونه , R زخیرې لګښتونو L څخه زیات لوي شي، نو سملاسی دې تول تولید $x = M$ صورت ونیس. که د ذخیرې لګښتونه د چمتووالی لګښت څخه کم وي، کیدی شي کوچنی ازاد x تولید شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټاکلی بیلګه : د $M = 10000, R = 1000, L = 10$ لپاره صدق کوي:

$R = 1000 < M^2L = 108 . 10 = 109$ ستر یا غټ ازاد لګښت دی

$x = R / L = 1000 / 10 = 100 = 10$ ازاد a دلته 10 یوونه باید

ورزیات شي ، چی 10000 یوونه تولید کړيږ $M = 10 , R = 1000 , L = 1$ لپاره

صدق کوي $R = 1000 > M^2L = 100$ غټ ازاده لویه له دې امله $x = M = 10$ ده .

یواځې یوه ازاده لویه دې تر تولید لاندې ونیوله شي. پای

د رول قضیه (Rolle)

ننوتنه :

که د f یوه تابع په بند اینتروال [a,b] کې متمادي اوc د a اوb ترمنځ پروت وي، نو هلته لږ تر لږه یو عددk د f(a) اوf(b) ترمنځ شته، داسې چې f(c) = k دی

د وایرشتراس قضیهWeierstrass

که د fیوه تابع په بند اینتراوال[a,b]کې متمادي یا ناپرېکیدونکې وي، نوfپه دېاینتراوال کی لږ تر لږه یو جګ ارزښت(اعظمي قیمت) او یو ټیټ ارزښت(اصغري قیمت) نیسی

دلته شننیز یا تحلیلي ځواب نه ورکول کیږي، دا وینا د لیدلو له مخې معقوله برېښي.

کیدی شي چی یو یوغږیز (monoton مونوتون یاجګتیټ)

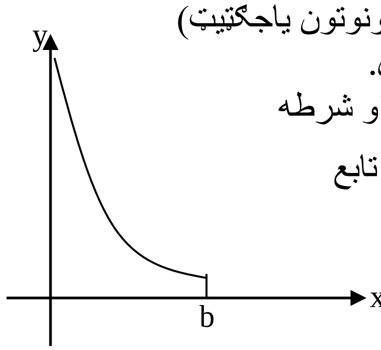
ارزښت د اینتروال په غاړه هم پروت وي.

د اینتروال محدودوالی (بندوالی) بی قید او شرطه

حتمي دی. د بیلګې په توګه د $y=f(x)=\frac{1}{x}$ تابع

په نیم بنداینتروال [0,b)کی متمادي ده،

مګر پورته لور ته بنده نه ده، چی په دې



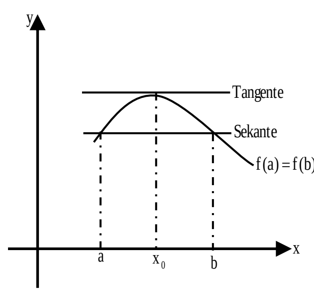
(c) ketabton.com: The Digital Library

توګه اعظمي تېکی نه لري.

۳. د مشتق منځ ارزښت قضیي

د تانجنت او قاطع ترمنځ او په همدې ډول د مشتق – اوتفاضل ویش ترمنځ داسی نږدې اړیکي وجود لري، کومې چې د انالیوزې په منځ ارزښت قضیو کی تشریح کیږي.
د تابع او انحرافي ارزښتونوخویونو څخه لومړی پسی تړلې لاندې د رول قضیه لاس ته راځي

د رول (Rolle) قضیه:



یوه د f تابع دې په بند اینتروال[a,b] کې متمادي وي د f(a)=f(b)سره او په واز ایتروال(a,b) کی مشتقوړ، نو لږ تر لږه یوځاي $c\in(a,b)$ شته دی د $f'(x_0)=0$ سره.
حل :

۱) کهf ثابت وي نو سملاسي لاس ته راځي: $f'(x_0)=0$
۲) که f ثابت نه وي، نو د وایرشتراس د قضی له مخی لږ تر لږه د تابع یوخورا لوي او یوخورا کوچنی ارزښت موجود دی. دا ارزښتونه توپیر لري، ځکه چیfثابت نه دی. نو له دی کبله لږ تر لږه له دې ارزښتونو څخه د (f(a)=f(b سره نامساوي دی . په دې اساس د اینتروال په دننه کی یو مونوتون (جګټیټ) ځای x_0 موجود دی. د مشتقوړ توابعو مونوتوني (جګټیټ ارزښت) شتون د اړیین یا ضروري شرطونوقضي له مخی لاس ته راځي: $f'(x_0)=0$

تر اوسه مو وښوول، چی د لازمو شرایطو لاندې یوې افقي قاطع ته یو افقي تانجنت هم شته دی.
دا هندسي پرابلم کیدی شي چی عمومي شي.

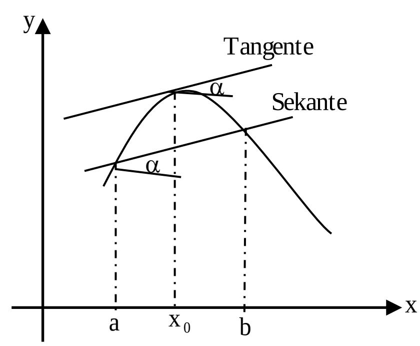
(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنه رامنځ ته کيږي، چې ايا يوې مايئلی قاطع ته په همغه ډول تانجنت د همغه ميل (جګوالي) سره جوړيدلی شي؟

ځواب يی لاندې قضيه راکوي

د مشتق د منځني ارزښت (وسطي قيمت) قضيه:
که $y=f(x)$ تابع په بند اينتروال$[a,b]$کی متمادي او په واز اينتروال (a,b)کی د مشتق وړ وي ، نو هلته يوځاي $x \in (a,b)$ شته دی، د کوم لپاره چی لرو:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(x_0)$$



(خيره ښه نه ده انځور شوې تيک دې
د الفا د کونج لاندې ضلعې بايد د x محور سره غبرګې وي)
حل:
دا پرابلم په يوه مرستندوې تابع داسی تعريفيږي، چی د رول قضيه وکارول شي. د دې لپاره د قاطع مساوات رامخ ته کوو:

$$y=g(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$$

د مرستندوې تابع په څير د مشتق تابع جوړيږي:

$$h:\ h(x)=f(x)-g(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)-f(a),$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو باور لري: $h(a)=h(b)=0$. برسیره پر دې h په (a,b) کې د مشتق وړوالی لري او په $[a,b]$کې متمادي ده. له دې سره د رول د قضیې وړاند نیونه(فرضیه) ورکړ شوې، دا په دې معنا چې یو ځاي $x \in (a,b)$شته دی د $h'(x)=0$ سره، چې له هغې لرو:

$$h'(x_0)=f'(x_0)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0, \text{ یعني } f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

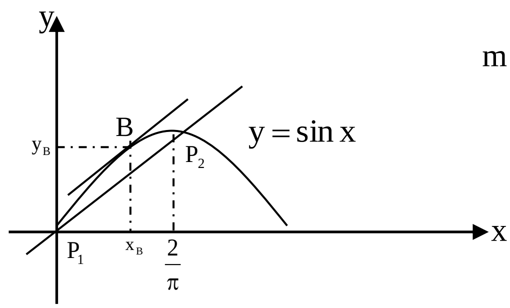
پورته لاسته راوړنه به دا لاندې بېلګې نوره هم روښانه کړي.

بیلګه :

د $f(x)=\sin x$ یوه تابع دې داسې ورکړشوې وي،چې په یوه ټکي $B(X_B, Y_B)$کی تانجنت د منحني مماس وي، اوکوم چه په $P_1(0,0)$ او $P_2(\frac{\pi}{2},1)$ټکو کی همغه میل یا جګوالی لري لکه قاطع.

ځواب: د قاطع (غوڅي) میل یاجګوالی:

$$m=\frac{\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0}{\frac{\pi}{2}-0}=\frac{2}{\pi}$$



د منحني میل د $B(x_B : y_B)$ په ټکی کې $f'(x_B)=\cos x_B=\frac{2}{\pi}$

له دې څخه لاس ته راځي: $x_B=\arccos\frac{2}{\pi}=0{,}88$ او $f(x_B)=f(0{,}88)=0{,}77$

لمس ټکی: $B(0{,}88 : 0{,}77)$

د تانجنت مساوات: $y=\frac{2}{\pi}(x-0{,}88)+0{,}77$

د منځ قضی د عمومیت څخه لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

پراخه شوې یا غزېدلې منځقضیه :

که $u = f(x)$ او$v = g(f)$ په بند اینتروال$[a,b]$کې متمادي توابع وي او په واز اینتروال (a,b)د مشتقوړاو $g'(x) \neq 0$ باور ولري ، نو د ټولو $x \in (a,b)$ لپاره، کم له کمه یوځاي $x_0 \in (a,b)$وجودلري چې لاس ته ترې راځي:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

حل: د $g'(x) \neq 0$ له املهg معکوس کېدونکی ده او$v=g(x)$ مساوات دx په لور معکوس کیدنه ورکوي، یعنې $x = g^{-1}(v)$

که دf په تابع کی هم نوې متحوله ځاي پر ځاي شي، نو یوه زنځیري تابع لاس ته ترې راځي:

$$u = f(x) = f(g^{-1}(v)) = h(v)$$

د زنځیرې قاعدې له مخې یې دا مشتق لاس ته راځي:

که په $u=h(x)$ تابع د $v_1 = g(a)$او $v_2 = g(b)$

سره د وسطې قیمت قضیه استعمال شي، نو د ځای $v_0 \in (v_1;v_2)$ په لاندې ډول موجود دی:

$$\frac{h(v_2) - h(v_1)}{v_2 - v_1} = h'(v_0)$$

له دې څخه د $h(v)=f(x),v=g(x)$ او $x_0 = g^{-1}(v_0)$سره لاس ته راځي:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

•

•

•

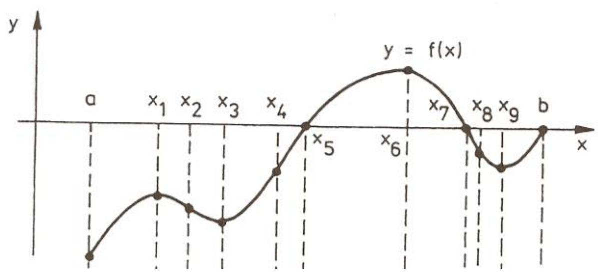
•

•

(c) ketabton.com: The Digital Library

یوغږیزي توابع(Monotony (یوناني: یوغږیز، برابرډوله)

جګیدونکي(متزاید)، ټیټېدونکي(متناقص) توابع(جګ-ټیټېدونکي توابع)



که د ټولو $x_1 < x_2$ لپاره دf یوه تابع په یوه اینتروال کي $f(x_1) \le f(x_2)$ $(f(x_1) \ge f(x_2))$ وي، نو تابع په دې اینتروال کي مونوتون جګیدونکې(- ټیټیدونکي) بلل کیږي، که $f(x_1) = f(x_2)$ په کې اجازه ونه لري، نو دا $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$ کره یا ټینګه مونوتون جکیدونکي (همغږیز ټیټیدونکي) بلل کیږي.

لاندې قواعد، چې له همغږیزوالي په لاس راځي، د همغږیزوالي حالت لپاره ګټور دي.

دf یوه تابع ټیک هلته د تعریف په ورشو(ساحه) D کې مونوتون جګیدونکې ده، که د خوښې x_1 او x_2 لپاره، چې په D کې پراته دي، باور ولري:

$$x_1, x_2 \in D \wedge x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$$

د f یو تابع ټیک هلته په D کې مونوتون ټیټېدونکې ده، که د خوښې x_1 او x_2 لپاره، چې په D کې پراته دي، باور ولري:

$$x_1, x_2 \in D \wedge x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$$

.

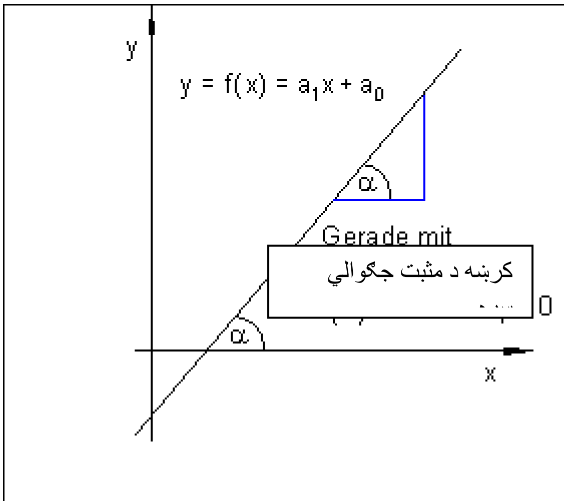
(c) ketabton.com: The Digital Library

يوغږيزوالی (يکنواخت) Monotony جګټيتوالی، د جګټيتوالی جملې

دا $f(x) = a_1x + a_0$ کرښيز(خطي) تابع خورا ساده تابع ده، چې انحنانه لري. ددې لپاره مسئول يې ثابته جګېدنه يا ثابت ميل $a_1 = \tan(\alpha)$, دی، چېرته چې α د کرښې او مثبت لوريز د

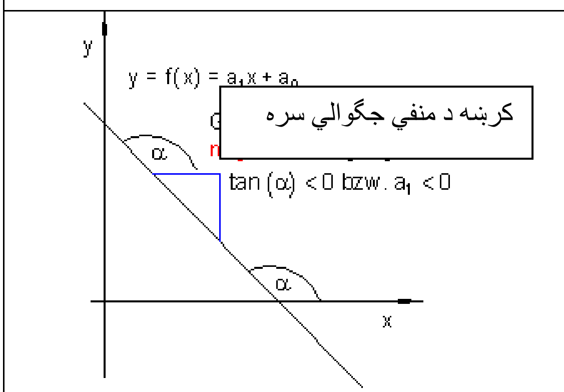
x -محور ترمنځ زاويه(کونج) ده.

په مخامخ شکل کې :کرښه د مثبت ميل سره $\tan\alpha > 0 \;\Leftrightarrow\; a_1 > 0$



که $0 < \alpha < 90^0$ يا $0 < a_1 < \infty$ وي ، دا په دې مانا چې $\alpha > 0 \vee a_1 > 0$ همداسې($\Leftrightarrow$)، نو کرښه جګيږي. دا دا معنی لري، چې د جګېدونکي x سره د تابع $f(x)$ ارزښت هم جګيږي.

په مخامخ شکل کې: کرښه د منفي جګېدنې سره: $\tan\alpha < 0$ همداسې($\Leftrightarrow$ $a_1 < 0$)



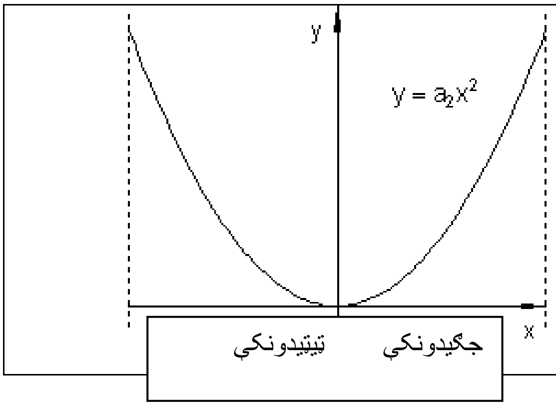
داپورته داسې دی: $\tan\alpha < 0$ همداسې $a_1 < 0$

که $90^0 < \alpha < 180^0$ يا $-\infty < a_1 < 0$ وي، دا په دې معنی، چې $\alpha < 0$ همداسې $a_1 < 0$ ، نو کرښه ټيټيږي يا لويږي. دا په دې معنی، چې د جګېدونکي x سره د تابع $f(x)$ ارزښت کوچنی کيږي.

په پورته دواړو حالتونو کې د همغږيزې تابع (يا د جګ-ټيټېدونکي تابع) غږيږو او له يوه مونوتون جګېدونکې تابع ښخه، که $a_1 > 0$ وي. له يوې مونوتون ټيټيدونکې تابع ښخه ، که $a_1 < 0$ وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا د مونوتوني کلمه په هغو توابعو هم کارول کیږي، چې د منحنیو تلنه راکوي، که فکر وشي، چې په ټولیزه توګه د منحنی د ګراف په هر ټکي تانجنت اینښول کېدی شي.



له دې امله د تابع $f(x)=a_2x^2$ لپاره باور لري:

$I_1 = \{x \mid -\infty < x < 0\}_{\mathbb{R}}$ په اینتروال کې تابع f(x) مونوتون ټیټیږي. او په اینتروال $I_2 = \{x \mid 0 < x < \infty\}_{\mathbb{R}}$ کې f(x) مونوتون جګیږي.

لکه د کرښې په ګراف کې، چې جګېدنه ثابته وه. اوس دا حالت مخ ته نه لرو، یعنې جګېدنه ثابته نه ده، بلکې دا د منحنې له یوه ټکې څخه بل ټکې ته تغیر خوري.

د تانجنت جګېدنه >0 ← منحني مونوتون جګیږي

د تانجنت جګېدنه < 0 ← منخني مونوتون ټیټیږي

د تانجنت جګېدنه، که صفر وي، ثابت پاتې کیږي.

روښانه ده چې د f(x) تابع لومړی مشتق f'(x) د تابع میل (جګوالی) ورکوي. ددې سره د مونوتونی قضیه په لاندې ډول فرمولوو .

قضیه: د f(x) تابع دې په اینتروال I کې مشتقوړ وي.

۱ که د f(x) تابع په اینتروال I کې مونوتون جګېدونکې وي، نو باور لري: $f'(x) \geq 0$ د ټولو $x \in I$ لپاره

که f(x) په اینتروال I کې مونوتون ټیټیدونکې وي، نو باور لري: $f'(x) \leq 0$ د ټولو $x \in I$ له پاره.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

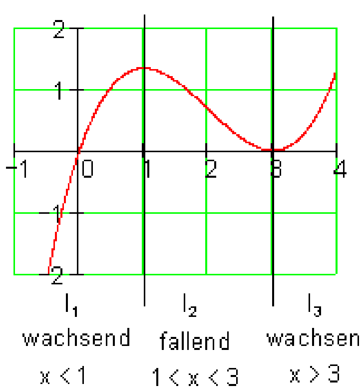
۲ . که $f'(x) \geq 0$ وي، دتولو $x \in I$ لپاره ، نو $f(x)$ په اینټروال I کې مونوتون جګیدونکې ده.

که $f'(x) \leq 0$ وي د تولو $x \in I$ لپاره ، نو $f(x)$ په ایترولIال کې مونوتون ټيټيدونکې ده.

۳ که $f'(x) > 0$ وي ، د تولو $x \in I$ لپاره، نو$f(x)$ په اینترول Iکې په کلکه مونوتون جګیدونکې ده

که $f'(x) < 0$ وي د تولو $x \in I$ لپاره،نو $f(x)$ په اینټروال Iکې په کلکه مونوتون ټيټيدونې ده.

د مونوتوني پيژند ورشو (تعریفساحو) تاکنه:

 	بلګه: د تابع ګراف څخه زيات وخت کېدی شي د مونوتوني ساحې لږ يا زيات ټیک و لوستل شي. لاندې ګراف لرو: مخامخ له بنې – وکیڼ لور ته:جګیدونکې، ټيټيدونکي چګيدونکي

د $I_1 = \{-\infty < x < 1\}_{\mathbb{R}}$ لپاره $f(x)$ په کلکه مونوتون جګېدونکی دی.

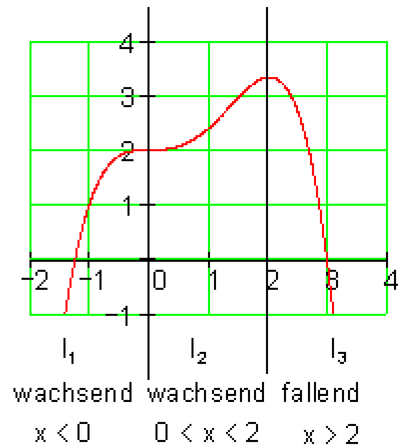
د $I_2 = \{1 < x < 3\}_{\mathbb{R}}$ له پاره $f(x)$ مونوتون ټیټېدونکې ده.

د $I_3 = \{3 < x < \infty\}_{\mathbb{R}}$ لپاره $f(x)$ په کلکه مونوتون جګېدونکې ده.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) := \frac{-1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + 2$$



بیلګه:

پورته له ښي – وکیڼ لور ته: جګیدونکي، جګیدونکي، ټیټیدونکي

له ګراف څخه لاندې مونوتوني ساحې لوستل کیږي.

د $I_1 = \{-\infty < x < 0\}_{\mathbb{R}}$ لپاره f(x) په کلکه مونوتونج ګېدونکي ده.

د $I_2 = \{0 < x < 2\}_{\mathbb{R}}$ له پاره f(x)په کلکه مونوتونجګېدونکي ده.

د $I_3 = \{2 < x < \infty\}_{\mathbb{R}}$ لپاره f(x) په کلکه مونوتون ټیټېدونکي ده.

ځای اړونده افراطي ټکي

یادونه: که په لیکنه انحرافي ټکي ګورئ،نو هغه افراپي ټکي دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د f(x) لپاره د x_0 په ځاي کی f' (x) = 0 ولرو نو یو نسبي ټیټ ټکی مخ ته لرو.

که دf(x) لپاره د x_0په ځاي کی f' (x)=0اوf''(x)>0 ولرو نویو نسبي ټیټ ټکمو مخ ته پروت دی.

که ددې برعکس ولرو: f ' (x) = 0 او f '' (x) < 0 ، نو یو نسبي ماکسیموم مو مخ ته پروت دی.

د بحراني ټکي(ټیټ ټکي یا جګ ټکي) لپاره خوي ټاکونکی دی، چی f ' (x) = 0 وي، او د f '' (x) مخ نښه (+ ، -)، په دې پریکړه کوي چی ایا یو ټیټ ټکی(اصغریټکی)او که جګ ټکی(اعظمي ټکی) مو مخ ته پروت دی.

د پورته اړیکو لپاره لاندې یادوني ضرور دي:

۱ – دا اړیکي یواځي د x_0 لپاره ارزښت لري چی د تعریف ست په دننه کی پروت وي او هلته د y = f (x) تابع پوره څو ځلې مشتقوړ وي، د غاړو(څنډو) او د هغوځایونو له پاره چی هلته f (x) تابع کم یا هیڅ مشتقوړ نه وي، ځانګړو څیړنو ته اړتیا ده.

۲ - شرایط چی f ' (x) = 0 وي (مشتقوړ تابع) یواځی د یوه انحرافي ارزښت لپاره ضرور دی (ضروري یا اړین شرایط) .

۳– شرایط f ' (x) = 0 او f '' (x) ≠0 د بحراني ټکي لپاره یواځی پوره کیدونکی دی او نه ضروري)

بیلګه :

د $f(x) = x^2 + 2$ تابع ګراف وکاږئ او که بحراني ارزښتونه لري، هغه د ګراف او د مشتق له لارې وټاکئ.

حل: د بیلګې له ګراف څخه روښانه ده، چې تابع د x=0 په ځاي کې خورا ټیټ ټکی(اصغري-) لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

گراف: که گراف دې ګران لوستونکي وباسي

د انحراف ټکي له پاره اړيين شرطونه:

۱ – د تابع لومړي مشتق دی: $f'(x) = 2x$ په دې مساوات کې د تابع مشتق د x_0 له پاره صفرځاي لري، يعنې دلته يو بحراني ټکي پروت دی.

۲ – د تابع دويم مشتق: $f(x)'' = 2$. دا چې $f''(x) > 0$ دی، نو يو نسبي ټيټ ټکي مخ ته لرو.

بيلګه : د $y = x^4$ تابع د $x = x_0 = 0$ لپاره نسبي ټيټ ټکی لري او باوري دي

$$f'(x) = 4x^3 \Rightarrow f'(0) = 0$$

$$f''(x) = 12x^2 \Rightarrow f''(0) = 0$$

ګورو چې دوهم مشتق د صفر څخه نه کوچنی او نه لوي دی.

د پورته شنني څخه لاندې پيژند ته راځو:

پيژند : د $x = x_0$ په چاپيريال کې د $y = f(x)$ تعريف شوې تابع يونسبي جګټکی په همدې دل نسبي ټيټ ټکی لري، که ټولو x_0 ته پوره نږدې x لپاره باور ولري:

$$f(x) > f(x_0) \quad \text{په همدې ډول} \quad f(x) \leq f(x_0)$$

جمله : (د يوه نسبي افراطي ټکي لپاره ضروري شرايط):

که په x_0 کې مشتقوړ تابع $y = f(x)$ انحرافي لري نو لرو: $f'(x) = 0$

دا جمله موږ ته وايي (يادونه ۲دې مقايسه شي): چيرته چې $f'(x) \neq$ وي نو هلته اکستريموم نه شته، د اکستريموم لپاره يواځې د x_0 ځاي په پوښتنه کې راځي، چې د هغي لپاره لرو$f'(x) = 0$ ، خو حمتي نه ده چې $y = f(x)$دې يواکستريموم و لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله : (د یوه افراطي ټکي لپاره پوره کیدونکی شرایط):

که په $x = x_0$ کی دوه واره مشتقوړ تابع $y = f(x)$ لپاره ولرو:

$$f'(x) = 0 \quad , \quad f''(x) \neq 0$$

نو تابع $y = f(x)$ هلته یو افراطي ټکی لري. خورا ټیټ ټکی مخ ته لرو، که وي:

$$f''(x) < 0$$

خورا جګ ټکی مخ ته پروت دی ، که وي:

$$f''(x) > 0$$

له ښی لور انحنا یا کوږوالی اوله کیڼ لور انحنا یا کوږوالی (مقعر او محدب)

که په یوه اینټروال کې د مشتقوړ تابع f دویم مشتق $f''>0$ وي، نو په دې اینټروال کې ګراف کیڼ کوږ شوی یا کیڼه انحنا لري او که دویم مشتق $f'' < 0$ وي، نو د تابع ګراف ښی کوږ یا ښی انحنا لري.

دوه ځیرې (د لاندې بیلګې ځیره و باسی ؟-)

بیلګه:

ټول ګونګتابع (راشنل تابع) f د $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 1$ سره په کومه ورشو(ساحه)کې کیڼکوږدی(کیڼه انحنا لري(ننوتی یا مقعر دی)) او په کومه ورشوکې ښی کوږ دی(ښی انحنا لري(محدب یا وتلی دی)؟

دویم مشتق: (لومړی مشتق(

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 4$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f''(x)= 6x-4$

د $6x-4>0 \Rightarrow x > 2/3$ لپاره کیڼ ګوړوال (کینه انحنا (ننوتی یامقعر)

د $6x-4<0 \Rightarrow x < 2/3$ لپاره ښی کوړوالی(ښی انحنا(وتلی یامحدب))

بیلګه: د مات راشنل تابع $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$ ګراف یو های پارابول دی. د های پارابول کومه څانګه کینه کږه ده یا کینه انحنا لري(مقعر)، او کومه یوه یې ښی کوړوالی - یا ښی انحنا لري(محدب)؟

دویم مشتق : $f'(x)=\dfrac{1}{(x+2)^2}\ ;\ f''(x)=\dfrac{2}{(x+2)^3}$

صورت تل مثبت دی.

د $x < -2$ لپاره د مخرج او همداسې د کسر ارزښت منفي دی. د های بارابول څانګه ښی کوړوالی یا انحنا لري (وتلی یا مخدب).

د لپاره $x > -2$ مخرج او همداسې ټول کسر(مات) مثبت دی.

های بارابول کینکوږ دی یا کینه انحنا لري(ننوتی یامقعر).

بیلګه : د دواړو توابعو $f(x)=\sqrt{x}$ او $g(x)=\sqrt{x^3}$ کوړوالی(انحنا) دې یو د بل سره پرتله شي.

دواړه توابع د لپاره تعریف دي.

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad g'(x)=\frac{\sqrt{x^3}}{2}$$

$$f''(x)=-\frac{1}{4\sqrt{x^3}} \qquad g''=\frac{3}{4\sqrt{x}}$$

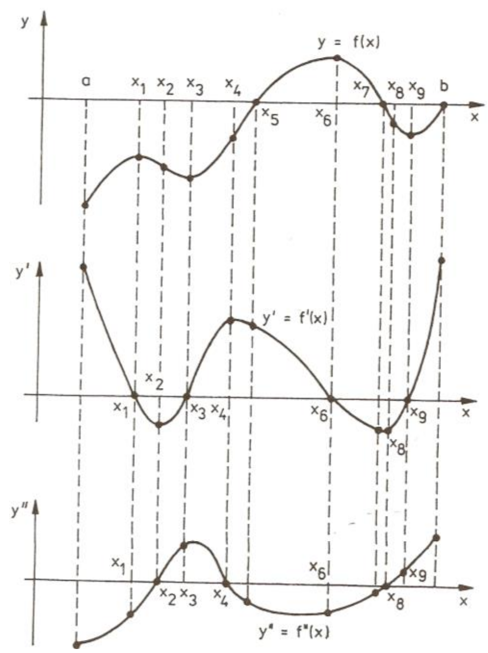
(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مشتقونه د $x \in R^+$ پاره تعریف دي.

په دې ساحه کې $f''(x) < 0$ دی. اړونده ګراف ښی کوږوالی یا انحنا لري، دا یو شي لور ته واز پارابول ښايي.

په همدې ساحه کې $f''(x) > 0$ دی. اړونده ګراف کیڼ کوږ دی یا کینه انحنا لري. اړونده ګراف یو کیڼ کوږوالی یا کینه انحنا لري، دا پورته لور ته واز پارابول دی.

د انعطاف ټکي(اوړونټکي)



یادونه: ولې اوړنټکی؟

وبه ګورو، چې په دې ټکي کې ګراف خپله لور اړوي، نو ...... موږ له
پورته څیرې اټکل کولی شو چې : که د x_0 ځاي کی دا لاندې ولړو $f''(x) = 0$ او $f'''($)
$0 < (x$، نو یو ښی-کیڼ- انعطاف ټکی (اوړونټکی)

(c) ketabton.com: The Digital Library

مو مخ ته پروت دی.

برعکس(په څټ):

که وي: $f''(x)=0$ او $f'''(x)<0$ نو يو کيڼ - ښی- د انعطاف ټکی مو مخ ته پروت دی.

د ا نعطافټکي لپاره خوی ټاکونکی دی، چی $f''(x)=0$ وي ، داچی دا ښی -کيڼ - او که کيڼ- ښی – انعطاف ټکی(اوړونټکي) دی، د $f''(x)$ مخ نښه يی ټاکي.

۴ - شرايط $f''(x)=0$ د انعطاف ټکي لپاره يواځی اړيين ياضروري دي.

د $y=x^4$ لپاره $f''(0)=0$ دی، مګر اوړونټکی مو مخ ته نه دی پروت.

۵ – شرايط $f''(x_0)=0$ او $f'''(x_0)\neq 0$ د انعطافټکي لپاره پوره کيدونکي دي.

ګورو چی $y=f(x)=x^5$ تابع د $x=x_0=0$ ځاي کی يو انعطافټکی لري او باوري دي:

$$f'(x)=5x^4\quad,\quad f'(0)=0$$

$$f''(x)=20x^3\quad,f''(0)=0$$

$$f'''(x)=60x^2\quad,f'''(x)=0$$

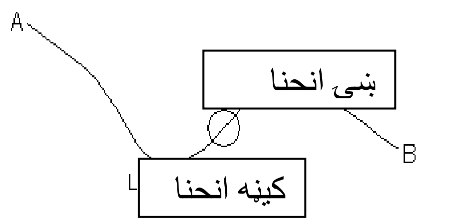
ګورو چي دريم مشتق $f'''(x)$ نه له صفرڅخه کوچنی او نه لوي دی.

ترمخ راوړني او د کلمې روښانه وني:

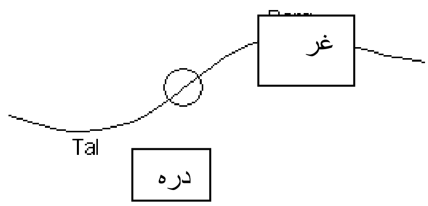
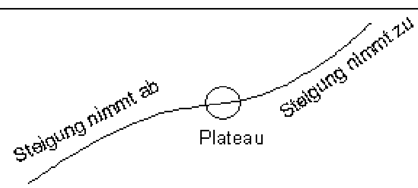
د دې کلمې د لا نورې روښانه کولو لپاره په لاندې توګه مخ ته ځو:

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بایسکل ځغاستي چي له A څخه ځغلي د منحنی څخه تیرېږي او B ته رسیږي. د همغه وخت د بایسکل ځغاستي د انډل حالت د ځغاستي په وخت کي په پام کي ولري. د کیني منحني(د کین لوري د انډل حالت) څخه وروسته د ښی لوري منحني کي ځغلي.	

د کیني- او ښی منحني(کږې) ترمنځ باید د بایسکل انډل سیده ولاړ وي(عمود وي)، چي دا د انډل بدلون دی له کیني لوري و ښی لوري ته. دا د کیني او ښی منحني ترمنځ اوړیدنه یاد **انعطاف ټکی** بلل کیږي.

تاسو له بایسکل سره په یوه غونډی ځغلی. وروسته له هغي، چي له تالي څخه تیېریږي، نو لار په جګیېدو پیل کوي. په لومړي سر کي نرم او بیا په نیغه جګیږي، بیا په دې پسي جګوالی بیرته کمیږي، چي پاس د غونډې په څوکه صفر ارزښت غوره کړي. یو چیرته په غونډیپورته صفرارزښت ته رسیږي. یو چیرته په لار جګیدنه خورا لویه وه. هلته د انعطاف ټکی پروت دی.	
د بایکل ځغلوونکي بل حالت، چي له څنګ دیاګرام څخه یي رانیسو: په غره د بایسکل ځغاستمیل یاجګیدنه لومړی کمیږي، چي له سره بیرته جګه شي. ددي ترمنځ یوه ساحه شته، د کم جګوالي سره (یوه نسبتاًهواره).ˇ دي نسبتاً هوار ځای کي د ټوټه کربني جګیدنه نسبت بل ځای ته کمه ده. هلته اوړونتکی(د انعطاف ټکی) پروت دی.	 له کین و ښي لور ته: جګیدنه کمیري، هواره ، جګیدنه زیاتیري

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوهیږو، چې د یوې تابع لومړی مشتق د تابع د جګوالی تابع دی، چې له ګراف څخه یې جګوالی لوستل کیږي.دا چې د انعطاف ټکی خورا لوي یا خورا کوچنی ټکی کېدی شي، داسې پیدا کیږي، چې د مشتق تابع انخرافي ارزښتونه پیدا کړو.

دا تلنلار همهغسې ده، لکه د پیل تابع **f(x)** لپاره مو ټاکلې. اوس د مشتق تابع **f'(x)** باندې دا کار یا عمل اجرا کیږي.

مخکې له دې چې یو لړ جملې د بحراني(جګ – ټیټ -) ارزښتونو او د انعطاف ټکو په هکله څیړو، غواړو چې دا کلیمې تعریف کړو .

دواړه کلمې به د نسبي بحراني ټکي په بڼه کې سره را غونډې شي.

پیژند ۲۰ . ۶ : په یوه چاپیریال x = x0 کې مشتقوړ تابع y = f (x) یو کیڼ- ښی- انعطافټکی په همدې ډول ښی- کیڼ- انعطافټکی لري، که د هغه مشتق هلته یو نسبي جګټکی(عظمي نقطه) په همدې توګه یو نسبي ټیټ ټکی ولري.

جمله ۲۰ . ۱۱ : (د یوه نسبي افراطي ټکي لپاره ضروري شرایط):   که په x0 کې مشتقوړ تابع y = f (x) اکستریموم لري نو لرو: f ' (x) = 0

دا جمله موږ ته وایي (یادونه ۲دې پرتله شي): چیرته چې f ' (x)≠ وي نو هلته بحراني ټکی نه شته، د بحراني ټکولپاره یوائې د x0 ځاي په پوښتنه کې راځي، چې د هغې لپاره0 = f ' (x) وي ، خو حمتي نه ده چې y = f (x)دې یوبحراني ټکی ولري.

د پورته جملې استعمال په y′ = f' (x) څخه لاندې جمله لاس ته راځي:

جمله ۲ . ۱۲ : (د اوړونټکي(انعطاف ټکي) لپاره اړیین شرایط):   که په x = x0 کې دوه واره مشتق وړ تابع y = f (x) هلته یو انعطاف ټکی ولري، نو لاس ته ترې راځي: f '' (x) = 0

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته هم باور لري (یادونه ۴ دې پرتله شي): چیرته چی $f''(x)\neq 0$ وي ، نو هلته نه شي کیدی چي اوړونتکي موجود وي. مګرچیرته چی $f''(x)=0$ وي ، اوړونتکی شته کېدلی شي، خو اړیین یا ضرور نه ده چی هلته انعطاف ټکی شته وي.

له پورته څخه لاندي جمله لاس ته راځي.

جمله ۲۰ ، ۱۳: (د اوړونتکي یا انعطافتکي لپاره پوره کیدونکی شرطونه)که په x $x_0=$کی دریوار مشتقوړ تابع $y=f(x)$ لپاره وي:

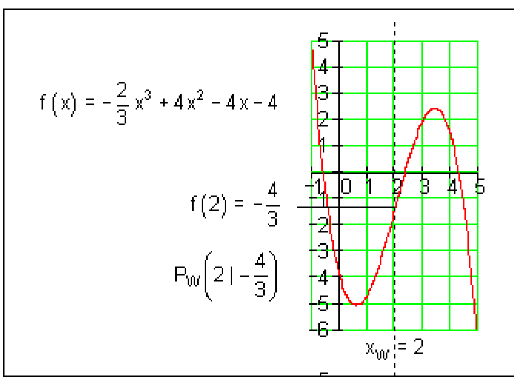
$f''(x)=0$, او $f'''(x)\neq 0$

نو هلته یو انعطاف ټکی مخ ته لرو. که $f'''(x)<0$ وي، نو یو کیڼ- ښي – انعطاف ټکي مخ ته پروت دی او د $f'''(x)>0$ لپاره یو ښی-کیڼ-انعطاف ټکی مخ ته لرو.

شننیزه یا تحلیلي بیلګه:

یادونه: موږ د x_E سره افراطي ټکی په نښه کوو او د x_W سره د انعطاف – یا اوړون ټکی په نښه کوو.

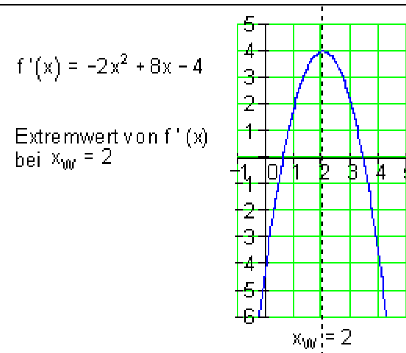
1- تابع مساوات د مشتق سره



$$f(x)=-\frac{2}{3}x^3+4x^2-4x-4$$
$$f'(x)=-2x^2+8x-4$$
$$f''(x)=-4x+8$$
$$f'''(x)=-4$$

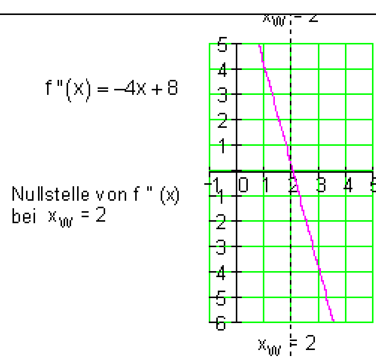
(c) ketabton.com: The Digital Library

۲- دویم مشتق صفر کړئ.

 د الماني پښو: د(x)'f ضفرځای په xw=2 کې	$f''(x)=0 \Leftrightarrow -4x+8=0$ $\Rightarrow x_W = 2$

3- د انعطاف ټکي له مخې ښوونه، چې ایا د انعطاف ټکی شته دی؟

	$f'''(x_W)=f'''(2)=-4$ 4- په $f(x)$ د انعطاف ځایونه ځای په ځای کولو له لارې د انعطاف ټکي ټاکنه

 د الماني پښو: د(x)''f ضفرځای په x_W=2 کې	$f(x_W)=f(2)=$ $-\frac{2}{3}(2)^3+4(2)^2-4(2)-4=-\frac{4}{3}$ $\Rightarrow P_{W\left(2 \mid -\frac{4}{3}\right)}$ $P_W(21-1.33)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

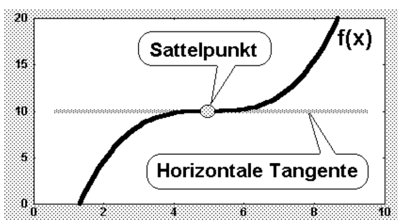
پام: په انعطاف ځای x_Wکې د $f(x)$ گراف کږېږي.

په يوه په خوښه ټکي x_0کې د کږوني(انحنا) لپاره باور لري:

$f''(x) > 0$ په دې معني دی،چې $f(x)$ کيڼ لور ته کږېږي(انحنا لري) دی.

$f''(x) < 0$ په دې معنی، چې تابع $f(x)$ گراف ښی لور ته کږېږي(انحنا کوي)

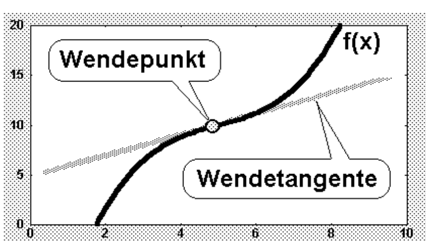
يو زينټکی Der Sattelpunkt څه شی دی؟

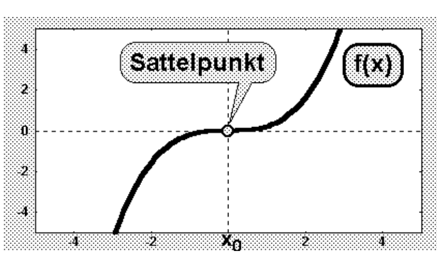


پيزند: د زينټکي(کله کله برنډې ټکی هم بلل کيږي)لاندې د انعطافټکي ځانگړی حالت پوهيږو، داسې انعطافټکی چې تانجنت يې افقي (پروت)

وي:

د پرتلي لپاره دې بيا يو ،،عادي،، انعطافټکی ورکړ شوی وي.دا يو مائل(نه افقي) تانجنت لري



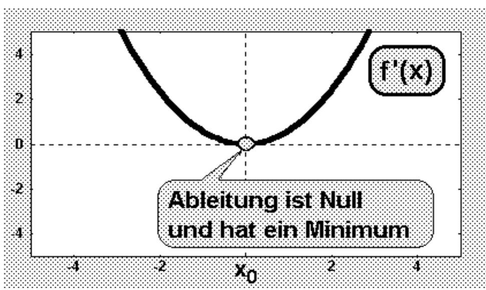


توضيح: اوس فکر کوو، چې يو زينټکی څنگه د شمېرلو له مخې پېژندل کېدی شي. په دې برخه کې په ځانگړي توگه دا مخ ته لرو، چې يو زينټکی له ښي ــو کيڼه انحنا و شمېرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره د $f(x)$ تابع جګوالی په پام کې نیسو، یعني لومړی مشتق: د زینتکي د مخه د $f(x)$ جګوالي کميږي، په زينتکي کې صفر ارزښت لري، او له زینتکي څخه وروسته بېرته جګيږي.

یو زينتکی (د ښي – کيڼ – بدلون سره) په دې پېژندل کيږي، چې لومړی مشتق $f'(x)$ يې هلته صفر شي او سربېره پر دې هلته یو نسبي ټيټکی (مينيموم) ولري.



د لومړي مشتق $f'(x)$ شکل داسې برېښي:

لومړی شرط دی، چې مشتق یعنې $f'(x)$ په زينتکي کې د صفر سره مساوي دی.

زينتکی(ښی-کيڼ-بدلون) $f'(x_0)=0$ دوم شرط دی، چې مشتق $f'(x)$ هلته یو نسبي مينيموم لري.

دا په دې معنادی، چې بل جګ مشتق $f''(x)$ بايد په صفر مساوي وي او مخنښه له منفي و مثبت ته بدلېږي.

له دې سره سم د زينتکي لپاره پوره کېدونکي قضيه ومیندل شوه:

د زينتکي لپاره جمله(خوي ټاکنه)(د ښي –کيڼ- انعطاف سره)

الف:د x_0 ځا کې لومړی مشتق $f'(x)$ صفر دی: $f'(x_0)=0$

ب : د x_0 په ځا ي کې لومړی مشتق $f'(x_0)$ یو مينيموم لري، دا په دې معنا، چې دوم مشتق صفر دی، يعنې $f''(x)=0$ دوم مشتق مخنخښه له منفي څخه و مثبت ته بدلوي.

بل بديل(د ګرانو دوستانو وړانديز)

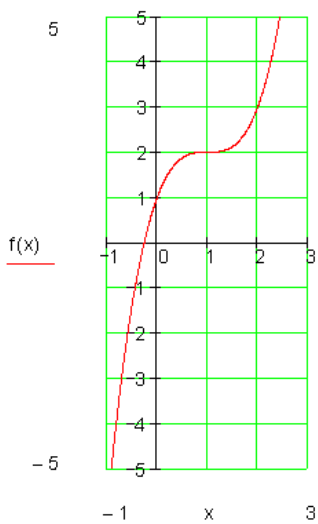
؟

\.

،

(c) ketabton.com: The Digital Library

زینتکی **Der Sattelpunkt**



د انعطاف ټکي یو ځانګړی حالت زینتکی دی. دا د انعطاف ټکی دی د صفر جګیدنې سره.که د کیڼ لور ورنږدې شو فکر کیږي، چې، نسبې جګتکی مو مخ ته پروت دی
که ښوک د ښي لور ور نږدې شي فکر کوي، چې یو نسبي ټیټتکی مخ ته لرو.
اوس دا حالت د ریاضیاتو له لورې ځیړو:
مشتق:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$$
$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$$
$$f''(x) = 6x - 6$$
$$f'''(x) = 6$$

$$f'(x) = 0 \iff 3x^2 - 6x + 3 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 1$$

$f''(1) = 6 \cdot 1 - 6 = 0$ $f'''(1) = 6$	1=> د $x=1$ سره د انعطاف ټکی	1=> د $x=1$ سره زینتکی

د انعطاف ټکي لپاره شرایط پوره دي.
دا چې د $f''(1) = 0$ له امله د انعطاف ټکی مخ ته لرو، نو دا د انعطاف ټکی همغه زینتکی دی.
د انعطاف ټکي پیداکونه:
د تابع ګراف باندې انعطاف ټکي کې تانجنت د انعطاف تانجنت بلل کیږي. د انعطاف تانجنت هم
همداسې پیدا کیږي لکه د تابع دګراف په یوه ټکي کې تانجنت، چې تانجنت مساوات ټاکل کیږي.
.
.
،
.
.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=\frac{1}{4}x^3-3x^2+9x-2$$

$$f'(x)=\frac{3}{4}x^2-6x+9$$

$$f''(x)\frac{3}{2}x-6 \qquad f'''(x)=\frac{3}{2}$$

$$f''(x_W)=0 \iff \frac{3}{2}x-6=0$$

د $x_W=4$ او $f'''(x_W)=\frac{3}{2}\neq 0$ د

تانجنت $f(x_W)=f(4)=2\Rightarrow \underline{P_W(4|2)}$

مساوات لپاره باور لري.

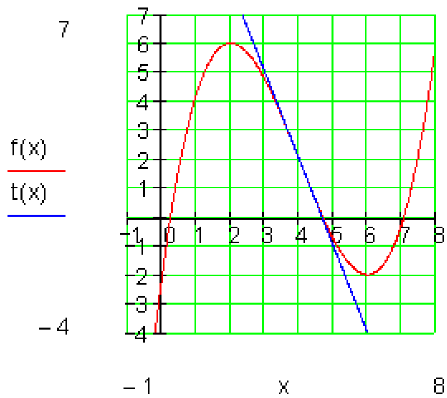
د x_W لپاره د تانجنت مساوات

$$t(x)=f'(x_W)(x-x_W)+f(x_W)$$

د $f'(x_W)=f'(4)=-3$

سره په لاندې ډول

دي $t(x)=-x(x+4)+2=\underline{\underline{-3x+4}}$



د انعطاف تانجنت د $f(x)$ گراف د انعطاف په ټكي $P_W(4,2)$ کې غوڅوي او دا لاندې مساوات لري:

$$t(x)=-3x+14$$

د انعطاف- یا وړون ټكي تانجنت پیداکونه:

په انعطاف ټكي کې د تابع دگراف تانجنت د انعطاف تانجنت بلل کیږي.
د انعطاف تانجنت مساوات همداسې تاکل کیږي، لکه د تانجنت مساوات د گراف په خوښه ټكي باندې.

داسي حالتونه، لکه $f'(x)=f''(x)=f'''(x)=0$ دلته تر څیړنی لاندې نه نیول کیږي.

د کرږې یا منحني بحث (Kurven Diskusion):

یوه تابع $y=x^3+x^2-3$ لرو. د دې تابع شکل رسم کړئ او بیا په دې رسم کې د تابع انحرافي ټكي او د انعطاف ټكي په نخښه کړئ، رښانه کړئ، چې انحنا چیرته له کینې لور و ښۍ لورې ته او له ښۍ لورې و کینې لورې ته ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت:

- تناظر تعریف کړئ.
- لاندې توابع رسم کړئ، جګ ټکي، ټیټ ټکي او د انعطاف ټکي يې پيدا اکړئ.
- $x^3 + x$
- $3x^3 + x + 2$

ددې لپاره چې یوه تابع رسم کړای شو، ساده ده که د تابع غوره ټکی و پېژنو. موږ دې بحث ته د منحنې بحث وایو. موږ په دا ډول خبرو اترو کې باید سیستماتیک مخ ته لاړ شو.

په لاندې ډول تلنه ګټوره بلل شوې.

دتعریف ساحه: د تابع ځېړنه یواځې په همدې ورشو کې موخه وره ده.

تناظر **Symetry** : باید وټاکل شي، چې تابع محوري متناظر او که مرکزي متناظر ده.

د محوري تناظر لپاره باور لري: $f(-x) = f(x)$

د مرکزي تناظر لپاره باور لري. $f(-x) = -f(x)$

په پورته دواړو حالتونو کې دې فقط$x \geq 0$ وځېړل شي.

په ټولیزه توګه که ټول ریل تابع په پام کې ونیسو، نو ګورو چې که توان(د پولینوم درجه)یې جفت(جوړه) وي، نو پولینوم محوري متناظر دی او که توان(د پولینوم درجه) طاق(ناجوړه) وي، نو پولینوم مرکزي متناظر دی.

بحراني ټکي**Extrema** : د نسبي بحراني ټکو ټاکل(جګټکی، ټيټټکی)

د جګټکی یا نسبي جګ ټکي پوره کېدونکي شرطونه:

$$f'(x_1) = 0 \ \wedge \ f''(x_1) < 0$$

انعطافټکی یا اوړونټکی Inflection Point :

د انعطافټکواو همداسې زینټکي ټاکلو له پاره پوره کېدونکي شرطونه:

$$f''(x_W) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x_W) \neq 0$$

زینټکی انعطافټکی دی د افقي تانجنت سره.

د تابع تقاطع د x او y محورونوسره(د محورونوِغوځټکی):

د $x-$ محور سرهِ غوځټکی: $P_{xi}(x_i \mid 0) \ \Rightarrow \ (x) = 0$

د y محور سره غوځټکی(صفرځای) ټاکي $f(0)$ $P_y(0 \mid y_s) \ \Rightarrow$

(c) ketabton.com: The Digital Library

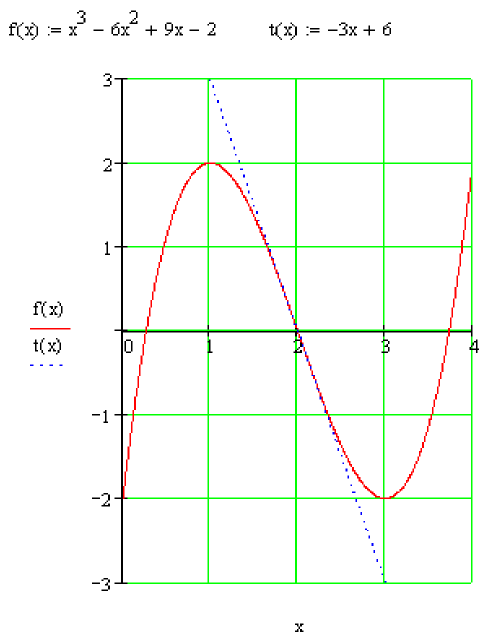
دګراف انځورونه: د ټولو تراوسه راټولو شوو معلوماتو سره کړی شو، چې ګراف انځور کړو. ددې لپاره لومړی یو ارزښتجدول انځورېږي. دا راته په ګوته کوي، چې نور کوم ارزښتونه شمېرل کیږي.

د انحنا حالت او یوغږیزوالی:
د انعطاف په ټکي X_w کې د $f(x)$ ګراف تغیر خوري.
په خوښه یوه ټکي x_0 کې د انحنا لپاره باور لري:
$f''(x_0) > 0$ په دې معنا، چې د $f(x)$ تابع ګراف کینه انحنا لري (کونوکس)
$f''(x_0) < 0$ په دې معنا، چې د $f(x)$ تابع ګراف ښی انحنا لري (کونکاو)
یوغږیزوالی

1- که د ټولو $x \in I$ لپاره وي $f'(x) \geq 0$ ، نو $f(x)$ په انتروال I کې مونوتون جګیږي. که د ټولو $x \in I$ لپاره $f'(x) \leq 0$ وي, نو $f(x)$ په انتروال I کې مونوتون ټیټېدونکی دی.
2- که د ټولو $x \in I$لپاره$f'(x) > 0$ وي، نو $f(x)$ تابع په انتروالI کې کره غښتلې مونوتون جګېدونکی ده.
که د ټولو $x \in I$ لپاره$f'(x) < 0$ وي، نو $f(x)$ تابع په انتروال I کې غښتلې مونوتون جګېدونکی ده.
د پېژند ورشو ژی ټکې:
د تابع ژی ټکې کتنه په پېژند ورشوکې. که پېژند ورشو نامحدوده وي، نو لیمیټ $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ او $\lim_{x\to\infty} f(x)$ ټاکو.

بیلګه :
د $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ تابع رسم کړئ.
.
.
.
.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مشتق کونه: $y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ $y' = f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ $y'' = f''(x) = 6x - 12$ $y''' = f'''(x) = 6 \qquad D = IR$ نسبي بحراني ټکي $P_{min}(3\|-2) \qquad P_{max}(1\|2)$ انعطاف ټکی او تانجنت $P_W(2\|0) \quad y = f_t(x) = -3x + 6$ صفرځایونه: $P_{x1}(2\|0) \quad P_{x2}(3.7\|0) \quad P_{x3}(0.3\|0)$ د y– محور سره غوڅټکی(دقاطع): $P_y(0\|-2)$	

یوغږیزوالی(مونوتوني یاجګ - ټیټوالی) په $I_1 = \{x \| -\infty < x \le 1\}_{\mathbb{R}}$ کې یوغږیز جګیږي. په $I_3 = \{x \| 3 \le x < \infty\}_{\mathbb{R}}$ کې یوغږیز جګیږي.	د تابع حالت په $x \to -\infty$ او $x \to \infty$ کې $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right) = -\infty$ $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right) = \infty$ سیومتري: نه لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کږوالي یا انحنا حالت:

ښی کږوالی یا انحنا(محدب) : $I_4 = \{x \mid -\infty < x < 2\}_{IR}$

کیڼ کږوالی یا انحنا (مقعر) : $I_5 = \{x \mid 2 < x < \infty\}_{IR}$

د افراطي د جګ-ټیټ ټکو جملې یعني دا وروستي نومولی جملی اوس باید په یو لړ بیلګو استعمال شي.

دلته دي د ورکړ شوو توابعو، د پیژند سټ (- ډیری)، انعطافټکي ، جګ-ټیټټکي (اکستریموم، قطبونه، اسیومپټوتی وښوول شي او په دې جوړ(ودان) دې د تابع تلنه وکښل شي. دې ښوونو یا څیړنو ته د کږو خبرې اترې یا – مباحثه ویل کیږي، یعنی دلته د کږو (انحنا) د مختلفو ډولونوپه خویونو غږیږو.

موږ خپل تمرکز د افراطي ټکو(اکستریموم) او انعطافټکو(اړونټکو) رامعلومو یا روښانو څیړنوته متوجه کوو او د »انحنا- خبرې اترې) د انحنا(کږې)-چڼون (« د لاندې شیما له لارې مخ ته بیایو:

0 - د چمتووالي لپاره د تابع (y = f (x د دریمي درجی پورې مشتق پیدا کیږي، بیا له ټولو هغو ارزښتونو xiڅخه سټ M جوړیږي (۴ ټکی) چی وروسته باید ځانګړې تر څیړنی لاندې ونیول شي.

په سټ M کی لومړی د غاړو ټکو ابسڅیز یا پراته ارزښتونه نیول کیږي. په دې پورې په ځانګړي ډول بیا تشځایونه (لوکی Lücke نیمګړتیا) او هم قطبونه اړه لري. د M سټ به وروسته په نورو ارزښتونو تکمیل شي.

۱ – د f (x) = 0 صفر ځایونو xi سټ M0 لټول کیږي.

۲ – ټول ځایونه x لټول کیږي، چی هلته (y = f (x د مشتق قابلیت نه لري او په ډیری Mکی یی نیسي. بیا د ټولو ارزښتونو xj ډیری M1 لټول کیږي، چیرته چی f’ (x) = 0 وي، (دا د بحراني ارزښتونو لپاره په پوښتنه کی راځي) ، او د (yj = f (xj تابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

ارزښتونه یی. ورپسې سرې د ټولو $x_j \in M_1$ ارزښتونه د f (xj) د دویم مشتق لپاره لټوي.

۳ - ټول هغه ارزښتونه x چیرته چی y = f (x) دوه ځله مشتقوړ نه دی د M پهسټ کي نیول کیږي.

ورپسې بیا سرې د ټولو xk سټ M2 لټوي، چیرته چی f''(x) = 0 وي (دلته نو د انعطاف ټکي پوښتنه کی راځي) او د هغه د تابع ارزښتونه yk = f (xk) .

بیا د ټول $x_k \in M_2$ لپاره دریم مشتق f '''(x) ازمائیل کیږي. د ټولو $x_k \in M_2$ ارزښتونو ډیری M_{21} د کومو لپاره چی f'''(xk) < 0 وي نو افقي(پراته) محور کیڼ - ښی-ااعطافتکی جوړوي. د ټولو $x_k \in M_2$ ارزښتونو ډیری ، د کومو لپاره چی وي f'''(xk) > 0نو د پراته- یا افقي محور د ښي - کیڼ - انعطافتکي جوړوي. د ټولو $x_k \in M_2$ ډیری د کومو لپاره چی f'''(xk) = 0وي او یا دریم رابیلیدونکی نه وي موجود نو په ډیری M کی نیول کیږي.

۴ – د تیرو درسونو تعریفونو او جملو سره سم په افراطي ټکو او انعطافتکي یا ا وړونټکي باندې د ډیري M ځیړنه د اصلي حالتونو لپاره اوس یو ځو بیلګی راوړو

بیلګه : بلواك y = f (x) = x³- 6x² + 9x هرچیرته پوره زیات مشتقوړ دی.

$$0 - f (x) = 3x^2 - 12 x + 9 , f (x) = 6x - 12, f (x) = 6$$

په سټ M کي یواځي $-\infty, \infty$ نیول کیږي د حد –یا پولي تیریدنو په موخه یا هدف : $M = \{-\infty, \infty\}$

$$1 - \quad f (x) = x^3 - 6x^2 +9x = x (x^2 - 6x + 9) = 0$$

$$M0 = \{x1 , x2 \} = \{ 0 , 3 \}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

2 - $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0$

$M1 = \{x_3, x_4\} = \{1, 3\}, \quad y_3 = 4, y_4 = 0$

$f''(x_3) = f(1) = -6 < 0$, Minimum (مینیموم

($f''(x_4) = f(3) = 6 > 0$, maximum (ماکسیموم)

$M11 = \{1\}, \quad M12 = \{3\}.$

3 - $f''(x) = 6x - 12 = 0$,

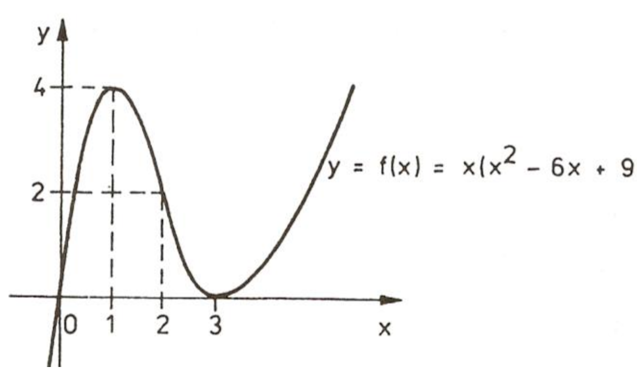
$M2 = \{x_5\} = \{2\}, \quad y_5 = 2$

$f'''(x_5) = f'''(2) = 6 > 0$ (

$M22 = \{2\}.$ ښی - کيڼ اوړیدونتکی

4 $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$

په دې ډول د منحني تګلار په لاندې ښېره کې لاس ته راځي



بیلګه : تابع $f(x) = x^4 - 4x^3$ پوره په خوښه مشتقوړده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

0 - f' (x) = $4x^3 - 12x^2$, f '' (x) = 12 x^2 - 24x , f ''' (x) = 24x - 24

په ستټ M يواځې $-\infty,\infty$ نیول کیږي: $M = \{-\infty, \infty\}$

1 - $f(x) = x^4 - 4x^3$ = x3 (x - 4) = 0

M0 = { x1 , x2 } = { 0 , 4 }.

2 - f ' (x) = 4x3 - 12 x2 = 4x2 (x - 3) = 0

M1 = { x3 } = { 3 } , y3 = -27

دا چې د x = 0 لپاره دويم مشتق f '' (0) = 0 دی، دا ارزښت د ۳ - لاندې څېړل کیږي

f '' (x3) = f '' (3) = 36 > 0 , Minimum, M12 = { 3 } .

3 - f '' (x) = 12x2 - 24x = 12x (x - 2) = 0

M2 = { x4 - x5 } = { 0 , 2 }, y4 = 0 , y5 = -16,

f ''' (x4) = f ''' (0) = -24 < 0

انعطاتېکی(کېن- ښی -انعطاتېکی M21 = { x4 } = { 0 },

f ''' (x5) = f ''' (2) = 24 > 0 ,

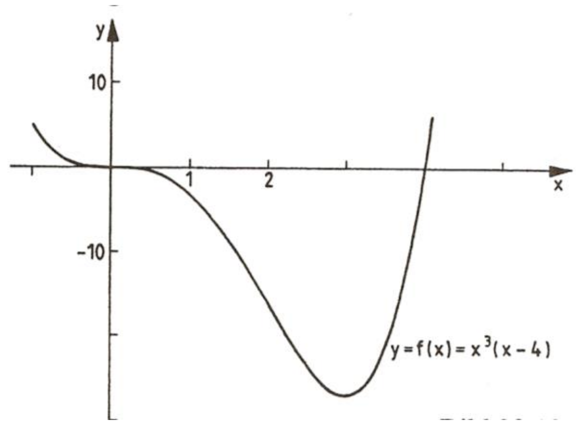
انعطافتېکی(ښی - کېن – انعطافتېکی)

M22 = { x5 } = 2 .

4– $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \infty$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لاندې ځیرې څخه د کړې تلنشکل لاس ته راځي .



بیلګه : تابع $y = f(x) = e^{x^3}$ پوره مشتقوړ دی:

صفر:

$$f'(x) = 3x^2 e^{x^3}$$
$$f''(x) = 3x(3x^3 + 2)e^{x^3}$$
$$f'''(x) = 9x^3 e^{x^3}(3x^3 + 2) + 6e^{x^3}(6x^3 + 1),$$

$M = \{\infty, -\infty\}$

۱ – تابع کوم صفرځای نه لري

۲ - $f'(x) = 3x^2 e^{x^3} = 0$

یوائې د $x_1 = 0$ لپاره ارزښت لري. مګر داچې f''(0) = 0 دئ ، نو x1 = 0 د ۳ - لاندې ځیرل کیږي

۳ –

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f''(x) = 3x(3x^3+2)e^{x^3} = 0,$$
$$M_2 = \{x_2, x_3\} = \left\{0, -\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right\},\ y_2 = 1,\ y_3 = \frac{1}{e^{\frac{2}{3}}}.$$

بنې – کېنې انعطافټکي:

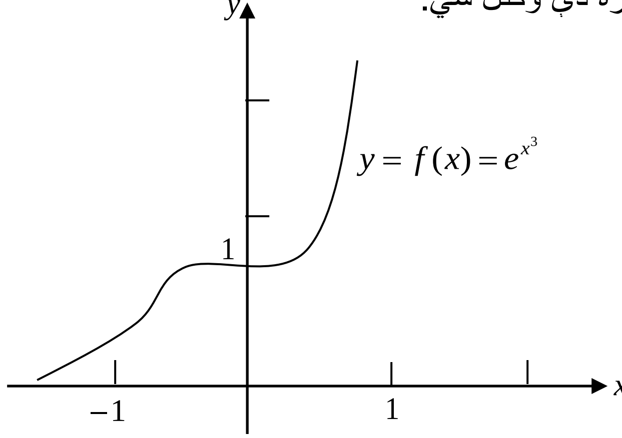
$$f'''(x) = f'''(0) = 6 > 0$$
$$M_{21} = \{x_2\} = \{0\}$$

کېنې- بنې انعطافټکي:

$$f'''(x_3) = f'''\left(-\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right) = 0 + 6\,e^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(-6\frac{2}{3}+1\right) < 0,$$
$$M_{22} = (x_3) = \left\{-\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right\}.$$

۴ - $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x^3} = 0,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x^3} = +\infty.$

لاندې ځېره دې وکتل شي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه: تابع $f(x)=x+\sqrt[3]{x^2}$ د ټولو x لپاره تعریف دی، مګر یواځي د = | x

$x \neq 0$لپاره مشتقوړ دی

صفر - د $x \neq 0$ لپاره باور لري یا صدق کوي.

$$f'(x)=1+\frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}},$$

$$f''(x)=-\frac{2}{9\sqrt[3]{x^4}}$$

دلته (f'''(x ته اړتیا نه پیښیږي

د M سټ له x = ± oe او x = 0 څخه جوړ دی

$$M=\{-\infty,0,\infty\}$$

اول: $f(x)=x+\sqrt[3]{x^2}=0$

د $x=-\sqrt[3]{x^2},\ x^3=-x^2,\ x^3+x^2=0$

له امله د حل لپاره په پوښتنه کی x1= 0 , x2 = -1 راځي. دواړه ارزښتونه ، لکه ازماینه روښانه کوي، صفرځایونه دي:

$$M_0=\{x_1,x_2\}=(0,-1)$$

M0 = { x1 , x2 } = {0 , -1}

دویم : $f'(x)=1+\frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}}=0.$

م - د دې مساواتو حلونه له لاندې لاس ته راوړني څخه لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$1+\frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}}=0,\quad \frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}}=-1,\quad \frac{8}{27x}=-1,\quad x=x_3=-\frac{8}{27},$$

$$y_3=f(x_3)=-\frac{8}{27}+\frac{4}{9}=\frac{4}{27}.$$

$$M_1=(-\frac{8}{27}).$$

$$f''\left(-\frac{8}{27}\right)=-\frac{8}{9^3x^4}<0, Maximum$$

$$M_{11}=\left\{-\frac{8}{27}\right\}.$$

۳ -

$$f''(x)=-\frac{2}{9\sqrt[3]{x^4}}=0$$

د کوم له پاره شوونې نه ده.

۴ - $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}+\left(1+\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^3}}\right)=-\infty,\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.$

هغه ځاي$x1 = 0$ ، دکوم لپاره چی $f(x)$ مشتقوړ نه دی او د کومی لپاره چی $f(0) =$ 0لرو، باید تر اوس تر څیرنې لاندې ونیول شي

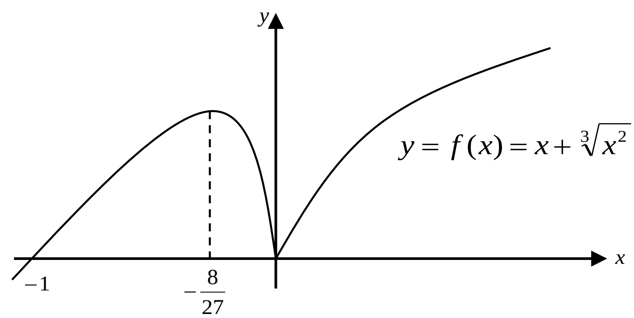
د $x > 0$ لپاره $f(x) > 0$ دی.

د $-1<x<0$ لپاره صدق کوي(د $x^2 > 0$ سره ضرب $-x^2 < x^3 < 0$) په همدې ډول(
⇔ لاس ته راځي او برعس) یعني $0<-x^3<x^2$ او له دې امله $0<\sqrt[3]{-x^3} < \sqrt[3]{x^2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

، نو $0<-x<\sqrt[3]{x^2}$ او له دې سره: $f(x)=x+\sqrt[3]{x^2}>0,$

له دې امله د $x1 = 0$ سره یو نسبي ټيټتکی (نقطه اضغري) مخ ته پروت دی. په دې توګه د کږې یاا منحني تلنلار د لاندې ځیرې سره سم روښانه ده.



په لاندې بیلګه کی دې د x ارزښتونه د $f''(x) = f''(x) = 0$ لپاره هم د M په ستټ کی ونیول شي.

بیلګه : تابع $y=f(x)=x^4+x$ پوره زیات مشتق وړ دی.

صفر:

$$f'(x)=4x^3+1,$$
$$f''(x)=12x^2,$$
$$f'''(x)=24x,$$
$$f^{(4)}(x)=24,$$
$$f^{(5)}(x)=f^{(6)}(x)=\ldots=0$$

په M کی یواځي د ابسځیزی یعنی دپراته محور د غاړوتکی یعنی $\pm\infty$ نیول کیدي شي:

$$M=\{-\infty,+\infty\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$1 \quad f(x) = x^4 + x = x(x3+1)0, \quad M = (0-1)$$

$$2 \quad f'(x) = 4x + 1 = 0$$

$$M_1 = \left\{-1/3\sqrt{4}\right\}, \; y_3 = -3/\ 4\sqrt[3]{4}. = \frac{3}{4\sqrt[3]{4}}$$

$$f''(-1/\sqrt[3]{4}) = 12(-1/\sqrt[3]{4})^2 > 0.Min, \; M_{12} = \left\{-1/\sqrt[3]{4}\right\}$$

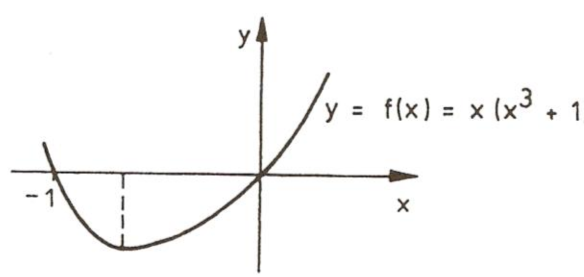
$$3 \quad f''(x) = 12x^2 = 0, \qquad M_2 = \{0\}$$

$$f'''(x) = 0$$

$$4 \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

د x=0 سره هیڅ اوړونټکی مخ ته نه لرو، ځکه چی f'(x) هلته اکستریموم ارزښتونه نه لري، بلکې يو اوړونټکی $y = x^3$ (په ۴ غزول شوی او د ۱ سره و پورته لور ته خوځول شوی یا پورته شوی) .

دا د ځیري ۲۰ ، ۱۳ سره سم د کږې تلنه ورکوي.



ناټاکلي حدونه یا پولې

یا د ناټاکلو افادو(وبینو) حدونه یا پولې

(c) ketabton.com: The Digital Library

که و لرو $x\neq 5$; $\frac{x^2+3x+2}{x+5}$ ، ومو ليدل، چې د داسې توابعو حد پيداکولی شو. دا ډول تابع ته ټاکلې افادې وايې، ځکه چې مشتق يې نيول کېدی شي، يعنې د کمښتونو ويش(د تفاضلونو ويش) حد يې ټاکل کيدی شي.

که $\frac{\sin 2x}{5x}$توابع ولرو،نود x=0 لپاره د دې تابع مشتق په ورسره بلده توگه نه شو نيولی، چې له دې امله ناټاکلې افادې ورته وايو.

پيل خيرنه:

د $\frac{0}{0}$ حالت

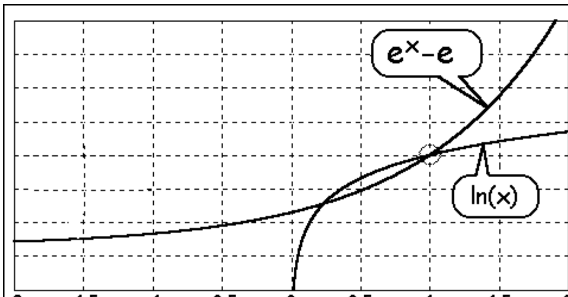
که پوله ارزښت جوړېدو کې يو کسر پيدا شي، چې صورت او مخرج يې دواړه د صفر په لور لاړ شي، نو دا پوله ارزښت،، ناټاکلې افاده،، بولو.

بيلگه: لاندې د الماني پښتو: صورت يا ماتباندې، مخرج يا ماتلاندې

$$\lim_{x\to 1}\frac{e^x-e}{\ln x}=\frac{Zähler\to 0}{Nenner\to 0}$$

په خيره کې برخه توابع رسم شوي دي، يعنې د صورت او همداسې د مخرج گرافونه.

گورو: د صورت او مخرج د توابعو ارزښتونه دواړه و صفر ته ځي. (که د ۱ په لور لاړشي)



(c) ketabton.com: The Digital Library

ليکندود(ليکنډول): د افادې $\dfrac{\text{صورت} \to 0}{\text{مخرج} \to 0}$

لپاره په پوله شميرنه کې لنډ ليکو:

$$\frac{0}{0}$$

دا په حقيقت کې دقيق نه دی، مګر په ټولېزه توګه داسې معمول دئ

روښانه ونه :

ناټاکلې افاده څه شی دی؟

دا پوښتنه رامنځ ته کيږي، چې دا ناټاکلې افاده خپل نوم له کومه ځايه اخلي. دا ،، ناټاکلی،، بلل کيږي، ځکه چې حدېې د عادي طريقو له لارې نه شي شميرل کيدی. د لوړې رياضي سره دا کار شميرنه شونی شوه(دبيلګې په توګه د لو پيتال قانون له مخې، چې پسې به وڅيړل شي).

روښانه ونو ته تشريح:

اوس ښايو، چې د داسې توابعو شميرل ولې ناشوني دي.

موږ بيا دا د تېر مخ بيلګه رانيسو:

$$\lim_{x \to 1} \frac{e^x - e}{\ln x} = \qquad \frac{\to 0}{\to 0}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{e^x - e}{\ln x} = \frac{Z\ddot{a}hler \to 0}{\text{مخرج}\ r \to 0}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ – که هځه وشي، چې حد پیدا کړو، داسې چې د x=1 په کسر کې ځای په ځای کړو، نو افاده 0:0 به ترې لاس ته راشي. دا تعریف نه لري، $u=f(\frac{1}{z})$ ځکه په صفرویش اجازه نه شته.

۲ – ترمخه مو د ناټاکلو افادو د شمیرلو لپاره یعني د ناطق کسري توابعو پوله شمیرنه کې د چل یا د طریقې څخه کار واخسته. اوس دا چل نه شو کارولی، لکه په پورته بیلګه کې.

۳ – د حد اټکل هم ناشونی دی: په لومړي لید کېدی شي په فکر راشو، چې که صورت او مخرج د صفر په لور لاړ شي، نو کسر به د ۱ په لور وخوزیږي:

$$\frac{0.000000001}{0.000000001}=1$$

$$\frac{0.000000001}{0.000000001}=1$$

که صورت او مخرج و صفر ته نږدې شي، دا به فقط دا معني ولري، چې دواړه به د ارزښت له مخې نزدې برابر شي.دا معني نه لري، چې د صورت او مخرج نسبت سره مساوي شي:

$$\frac{0.000000100}{0.000000001}=100$$

$$\frac{0.00000000100}{0.00000000100}=100$$

لکه چې ګورو صورت او مخرج د ارزښت له مخې خورا نزدې برابردي(دا په دې معنی، چې دواړه صفر په لور ځي)، مګر د دوی ترمنځ نسبت خورا لوی دی یعني (100) دی،

(c) ketabton.com: The Digital Library

د برنولي او د دې لو، پيتالقاعده Brnoulli and de L,Hospital

د برنولي او د دو لو پيتال قاعدې د $\frac{f(x)}{g(x)}$ ډوله توابعو حد شمېرلو کې ځانګړی رول لوبوي. داحالت په ځانګړي ډول هلته رامنځ ته کيږي، چي مخرج او صورت (ماتباندې او ماتلاندې) همغه صفرځاي x_0 ولري. دا ناټاکلی افاده $\frac{f(x_0)}{g(x_0)}=\frac{0}{0}$ موخه وره (هدفمنده) نه ده. کيدی شي چی د ويش حد $\lim\frac{f(x)}{g(x)}$ وڅېړل شي، په کومو کی چی صورت او مخرج د صفر لور ته ځي. ددې لپاره عمومي مناسب د توابعو ترمونه د غوښتلو دي. د بيلګي په توګه تابع

$$f:\quad y=f(x)=\frac{x^2+4x+4}{x+2}$$

صورت او مخرج همغه صفرځاي x0=-2لري، سره له دې هم پوله شته دی.

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+4x+4}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)^2}{x+2}=\lim_{x\to -2}(x+2)=0$$

دا ډول حدونه د مشتق په مرسته شميرل کيدی شي، چی د صورت او مخرج توابعو له نتيجې څخه لاس ته راځي. دا ډول قاعده د پراخ شوې منځ ارزښتقضيې استعمال هم بلل کيږي.

د برنولي او د دې لو، پيتال قاعده :

که توابع u=f(x) او v=g(x) د يوه $U(x_0)$ چاپيريال د x_0 په ځاي کی مشتقوړ وي د $g'(x)\neq 0$ سره او د ټولو $x\in U(x)$ لپاره او x_0 دfاوgیوصفرځاي وي،

د $f(x_0)=g(x_0)=0$ سره، نو باور لري:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

ترڅو په ښي لور حد شته وي.

په ورته توګه لاس ته راځي.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: تابع د پراخه شوې منځ ارزښت قضي نيونی پوره کوي. د هر $x \in U(x_0)$ لپاره يو xmد $x_m \in (x_0, x)$ سره موجود دی، په داسی ډول چی لرو

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(x_m)}{g'(x_m)}$$

د $f(x_0)=0 \wedge g(x_0)=0$ له امله لرو:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

داچی د x->x0 سره xm->x0 هم هڅه کوي.
دx->oe په حالت کی x=1/z ځاي په ځاي کوو. د زنځيري قضي په مرسته لاس ته راځي:

u=f(1/z)

د مشتق $du/dz = f(1/z)\cdot(-1-z^2)$ او مشتق $\frac{dv}{dz}=g'(\frac{1}{z}).(\frac{-1}{z^2})$ سره

، داسې چې لرو :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{g\left(\frac{1}{z}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\left(-\frac{1}{z^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\left(-\frac{1}{z^2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{g'\left(\frac{1}{z}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

يادونه : که په پورته حالت کی $f'(x_0)=g'(x_0)=0$ هم وي ، نو په ويش بیاله سره دا قاعده استعماليږي. که سږي دn-پلونو(قدمونو) وروسته بريالی وي نو دا قاعده لرو:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$$

چيرته چی $f^{(n)}$ او $g^{(n)}$ د تابع n - م مستق په معني دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ډول یا تیپ: $0/0$

بیلګه:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{2x-4}{1}=\frac{0}{1}=0$$

بیلګه:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\frac{1}{1}=1$$

بیلګه:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1}=\frac{0}{1}=1$$

تیپ یا ډول: $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^{\infty}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\alpha x^{\alpha}}=0 \qquad \alpha>0.$$

د یوه مثبت حقیقي توان(ځګعدد) α لپاره یو په خوښه توان x^{α} د x->oe لپاره په غښتلې توګه ځګیرږي، نسبت لوګاریتم تابع lnته

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^{\alpha}}=0 \qquad \alpha>0$$

له دې $f(x)=\frac{x^n}{e^x}$ تابع د لوپیتال د قاعدې د ډیرځله استعمال څخه لاس ته راځي:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x}=\ldots=\lim_{x\to\infty}\frac{n!}{e^x}=0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اکسپوننشل تابع e^x دx په هرتوان تابع څخه په غښتلي جګيږي:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=0 \qquad n\in N$$

نور حالتونه کيدی شی په بنه يا تيپ $\frac{0}{0}$ او يا $\frac{\infty}{\infty}$ بيرته واړول شي

له تيپ يا بڼي $\infty-\infty$ څخه و بڼي يا تيپ $\frac{0}{0}$ ته

ددي لپاره لاندې تابع بيلګه کيدی شي:

$$f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}$$

د $x\to 0$ لپاره

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x\cos x+\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2\cos x-x\sin x}=\frac{0}{2}=0$$

داچی دلته مشتق بيرته د بڼې تيپ $\frac{0}{0}$ ده، نو د لوپيتال قاعده استعماليدی شي.

له تيپ يا بڼي $0.(\pm\infty)$ څخه بڼي $\frac{\pm\infty}{\infty}$ ته:

د تيپ $0.(-\infty)$ حالت د بيلګي په توګه تابع $f(x)=x.\ln x$ د $x\to 0$ لپاره ښايي. په کوم کی چي ضرب د ويش په ځير انځور کړي، نو د لوپيتال د قاعدې په استعمال دا لاندې لاس ته راځي:

$$\lim_{x\to +0}(x\cdot\ln x)=\lim_{x\to +0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to +0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to +0}(-x)=0$$

له بڼي 0^0 څخه وبڼي e^0 ته:

دلته د بيلګي په توګه تابع $f(x)=x^x$ د $x\to 0$ لپاره تر ځيرنی لاندې نيول کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بڼي بدلون یا فورم بدلون و بنسټe ته د یوې انځورونې په مرسته په بریالی توګه لاس ته راځي:

$$\lim_{x\to+0} x^x = \lim_{x\to+0} e^{\ln(x^x)} = \lim_{x\to+0} e^{x\cdot\ln x} = e^0 = 1$$

له 1^∞ بڼې څخه و $e^{0.\infty}$ بڼې ته

د ښوونی ، د بیلګي په توګه د تابع $f(x)=(1+\frac{\mu}{x})^x$ پوله ده د $\mu\in R^+$ لپاره او x

د $x\to\infty$ $x\in R^+$ سره:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\mu}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} e^{x\cdot\ln(1+\frac{\mu}{x})} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}(x\cdot\ln(1+\frac{\mu}{2}))}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{\eta}{2}\right)}{\frac{1}{x}}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{\mu}{2}}\cdot\frac{-\mu}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\mu}{1+\frac{\mu}{x}}} = e^{\mu}$$

د $\mu=1$ له پاره لاس ته راځي

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

له بڼې ∞^0 و بڼې $e^{0.(\pm\infty)}$ ته

دا کارونه په یوې بیلګي روښانه کوو:

$$\lim_{x\to+0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} = \lim_{x\to+0} e^{\sin x\cdot\ln\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to+0}(\sin x\cdot\ln\frac{1}{x})}$$

$$\lim_{x\to+0}\frac{\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x\to+0}\frac{x\cdot(\frac{-1}{x^2}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to+0}\frac{\sin^2 x}{x\cdot\cos x} = \lim_{x\to+0}\frac{2\sin x\cos x}{\cos x - x\cdot\sin x} = 0$$

د $\lim\limits_{x\to+0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} = 1$ سره

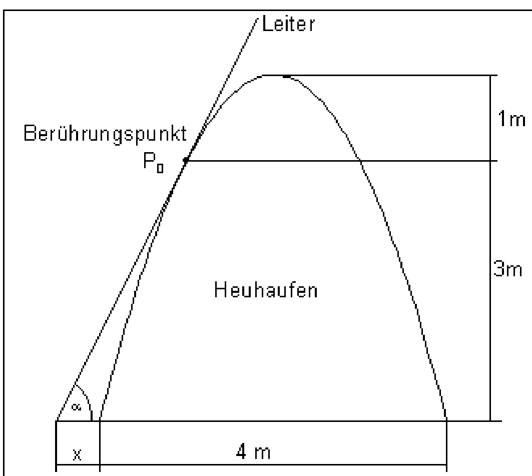
(c) ketabton.com: The Digital Library

باید لاندې جدول کې پام وشي. لرې یا ټې: شي

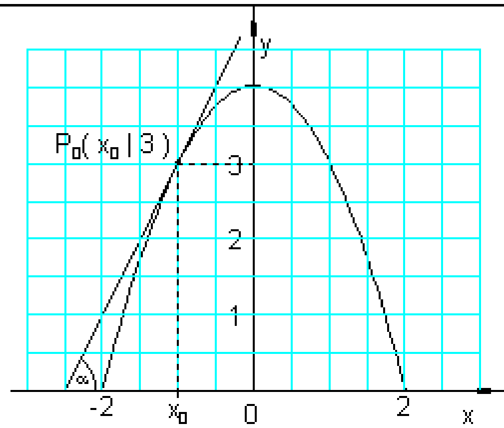
لاندې جدول د پورته ښوول شوو بڼویا ډولونو د بڼی بدلون ټولیزه کتنه ممکنوي

تیپ(ډول)	$f(x)\rightarrow$	$g(x)\rightarrow$	بڼه بدلون یا لنډ: بدلون
$-\infty$	0	0	$\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{g(x)}=\frac{g(x)-f(x)}{f(x)\cdot g(x)}\rightarrow\frac{0}{0}$
∞	0		$f(x)\cdot g(x)=\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}\rightarrow\frac{0}{0}$ $\wedge(Or)$ $f(x)\cdot g(x)=\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}\rightarrow\frac{\infty}{\infty}$
∞	0 1 0	0 0	$(f(x))^{g(x)}=e^{\ln(f(x)^{g(x)})}=e^{g(x)\cdot\ln f(x)}\rightarrow e^{0\cdot\infty}$ د f(x)>0 سره.

د یوې تابع د استعمال بیلګه د تانجنت له پاره :

	له څمکې څخه د وښو په ټوپۍ یوه زینه ایښول کیږي. دا زینه په درې متره جګوالي ټوپۍ لم د وښو توپی دې د یوه کیښکودي پارابول څېره ولري، چې بنسټ یې ۴ متره سرور دی او ۴ متره جګوالی لري. غواړو په دې یوه زینه کیږدو، چې د وښو ټوپۍ سره تانجنت جوړ کړي. په کومه زاویه(کونج)باید دا زینه کېښول شي؟ د وښو ټوپۍ له بیخ څخه دې په کوم لرېوالي په څمکه دا زینه کیښول شي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

موږ د y محور داسې کاږو،چې د پارابول له ککرۍ(څوکې) څخه تېرېږي. **پارابول دا لاندې د تابع مساوات لري:** $f(x) = a_2x^2 + 4$ $f(2) = 0 \Leftrightarrow 4a_2 + 4 = 0 \Leftrightarrow a_2 = -1$ $\Rightarrow f(x) = -x^2 + 4$ **موږ د x_0 لپاره ارزښت ټاکو:** $f(x_0) = 3 \Leftrightarrow -x_0^2 + 4 = 3$ $\Leftrightarrow x_0^2 = 1 \Leftrightarrow x_{01/2} = \pm 1$	

شمیرنه :

د نورو شمېرنو لپاره ارزښت x_0 = -1 کاروو. زینه توپې په $P_0(-1,3)$ ټکي کې لمسوي.موږ په $P_0(-1,3)$ ټکي کې د تانجنت مساوات ټاکو:

$$f(x) = -x^2 + 4 \quad P_0(-1|3) \Rightarrow \bar{x}_0 = -1;\ \bar{f}(x_0) = 3$$

$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

د $f'(x) = -2x$ سره لاس ته راځي

$$f'(x_0) = f'(-1) = -2 \cdot (-1) = 2$$

$$\Rightarrow t(x) = 2[x - (-1)] + 3 = \underline{\underline{2x + 5}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

-- -----------------------------------

جوړه زاویه: $\tan \alpha = 2 \Leftrightarrow \alpha \approx 63{,}4^0$

د زینې او د وښو ټوپۍ تر منځ واټن د **f(x)** د صفرځای او د تانجنت**t(x)** د صفرځای ترمنځ واټن دی.

صفرځایونه:

لرو:

$$f(x) = -x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_{1/2} = \pm 2$$
$$t(x) = 2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -2{,}5$$

د x ارزښتونو 2,5- او 2- ترمنځ واټن 0,5دی.

زینه د وښو د ټوپۍ له پښو څخه باید نیم متر لرې کېښول شي.

ددې پوښتنې څخه مو زده کړل، چې د تانجنت مساوات څنګه ټاکل کیږي، چې یو ګراف په تعریف شوي ځای کې لمسوي.

د سترې ګټې(غټو ګټو) مسئله یا قضیه

دا د سترې ګټې مسئله خورا ستره عملي مانا لري، چې په لاندې ډول به د یو څو بیلګو له لارې وڅیړل شي.

نزدې ټولو پروسو کې ، چې په عمل کې کارول کیږي یا صورت نیسي، له تاثیروونکو یا په همدې ډول د هغو ټاکلو لویو استعمال ته اړ دی، کومې چې موږ په ځانګړو یا مخصوصو پولو کې په اختیار کې لرودی شو.

موږ یواځې هغه پروسې تر څیړنې لاندې نیسو چې د یوې واریابلې یا اووښتونې x په واک کې وي. دا د بل په واک کې د یوې تابع $y = f(x)\ ,\quad x \in D$له لارې څرګندولی شو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که y ټول لګښتونه یا مصارف په کوته کړي، نو x باید داسی وټاکل شي چی f(x) مینیمال یا خورا کم شي.

که په ځنې یا برعکس y ګټه وي یا ګټور تاثیر وي، نو x باید داسی لاس ته راوړل شي، چې f(x) ماکسیمال یا خورا لوي شي. په قاعده کی اغزمنه یا مؤثره لویه یا په بل عبارت، خپلواك واریابل یا اووښتونی x د $-\infty$ او ∞ پولو ترمنځ ازاده ټاکونکی نه ده، بلکه د تخنيك یا تخنیکپوهنی له امله ، یواځی په ټاکلو پولو کی

$$a \le x \le b \qquad (*)$$

له دې امله عملي په زړه پورې د ګټې مسئلی ، په دې پورې اړه لري، چی ایا دا ګټه ده او که لګښت.

$$y = f(x) = \max! \qquad (a \le x \le b \qquad ($$

$$y = f(x) = \min! \quad (a \le x \le b) \qquad ($$

دا د افراطي ارزښتونو برخی پرابلمونو سره خورا نزدې یا ټینګ تړلی دی. دلته څموږ علاقه په ځانګړې توکه د لاندې پرابلم د کارکولو سره ده:

۱ - د بلواکیزو (y = f(x ګډو اړیکو راپیداکول، د دندې یا وظیفي ورکولو سره سم(د مودالیټي پرابلم)

۲ - د تخنیکپوهنی پولو په پام کی لرل (*)

دادې د دوه بیلګو له لارې وښول شي

بیلګه : یو د منډو(پټي ته په کلوکې د اغزو منډو کېښول کیږي، چې مالونه ور وا نه وړي) سیم لرو چې ټول اوږدوالی یې L دی. له دي سیم سره باید یوه مربع سطحه (څلورګوډیزه هواره)، چی د امکان ترحده باید لویه وي، منډو شي. دا وظیفه شوه یا په بل عبارت غوښتنه.

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس د مودالیتيArt und Weise پرابلم : غوښتنه مو د یوې ځلور ضلَي(ځلورګوډی) پیداکول دي. لکه چې معمول دي، ددې ځلورضلعي (-ګوډی) یو اړخ په a ښایو او بل اړخ يې په b ښايو، د ځیرې ۲۰ . ۱۴ له مخی) .

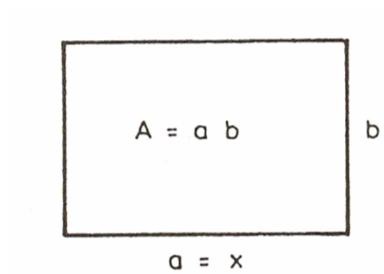
دا په سر کی دوه اغیزې لرونکي یا تاثیراچونکی لویي a او b دي. د

$$L = 2a + 2b, \quad b = (L/2) - a$$

له امله یواځي یوې اغیزمنې(تاثیراچوونکي) لویي ته اړیو د بیلګي په توګه $a = x$ ، دا ګټه (ستحه A)داسي ده $A = ab = x((L/2)-x)$

دا روښانه ده چې صدق کوي . $0 \le x \le L/2$

له دې امله د ستري ګټی پرابلم داسی دی



$$y = f(x) = x((L/2)-x) = Max! \quad (0 < x < L/2)$$

د $f(0) = f(L/2) = 0$ له امله باید ماکس د 0 او $L/2$ ترمنځ پروت وي.

د ماکس لپاره ضرور دي

$$y' = f'(x) = L/2 - 2x = 0$$

د ماکس لپاره یواځي $x = L/4$ په پوښتنه کی راځي.

د دې لپاره $y'' = f''(x) = -2 < 0$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ریښتیا چې یو ماکس مو مخ ته پروت دی. دلته تخنیکپوهنیزې پولی 0 او L / 2 رول نه لوبوي. نو صدق کوي. a = b = L /4

بیلګه : یوه بڼدای چې په یوه ټاکلي وخت کی تولسټ (تولډیری) M تولید کړي او دا تل اخستونکو ته ورسوي، نو له دې سره فیکس یا کره ټاکلی لګښتونه F تړلي دي. کیدې شي چې سملاسی د دې تولید په تولسټ (تولډیری) M کی تولید کړي ، په یوه زخیره ځاي(زېرمتون؟) کی ځاي په ځاي کړي او اخستونکو ته یی سملاسي ورسوي. دلته د زېمتون (زخیره کونې) لګښتونه راپید کیږي(ددې د زخیرې لپاره ځاي او هلته بیا اچول او وړل). یا هم کیدی شي چې تولید په لږه کچه یا اندازه تولید شي او سملاسی اخستونکو ته وروړل شي. دلته نو د زخیره کولو لګښتونه منځ ته نه راځي. مګر تل تولید په دې ډول تولید باندې درول، لګښتونه منځ ته راولي، چې د چمتووالی لګښتونه یی بولو. کومه ډیرئ x (ازاده لویه) باید تولید شي، چې د امکان تر پولي کم لګښتونه پرې وشي؟ د زخیرې لګښت د چمتووالی لګښت سره متناسب دئ ، د خرابیدو ارزښت د چمتووالي یا تولید ارزښت سره یعنی چي خرڅلاو ته چمتو کیږي، په څټ متناسب دی. که x لوي وي نو چمووالی ته کم اړتیا شته او که x کم وي نو چمتووالی بدلون تل باید تغیر وخوري یعني. ټول لګښتونه

$y = f(x) = F + Lx + R/x$ دي ، چیرته چی F ثابت(همغه) یا په کلکه اینسول شوي لګښتونه دي، Lد زخیرې لګښتونه او R د چمتووالی لګښتونه دي. دا ازاده لویه x د تولیددیرئ M څخه نه شي ستریدلی ، لوئیدلی یا غټیدلی. له دې امله صدق کوي $0 \leq x \leq M$. مخ ته پروت د ستریدلو مسئله له دې امله په لاندې ډول ده

$$y = f(x) = F + Lx + R /x = Min! \quad (0 \leq x \leq M$$

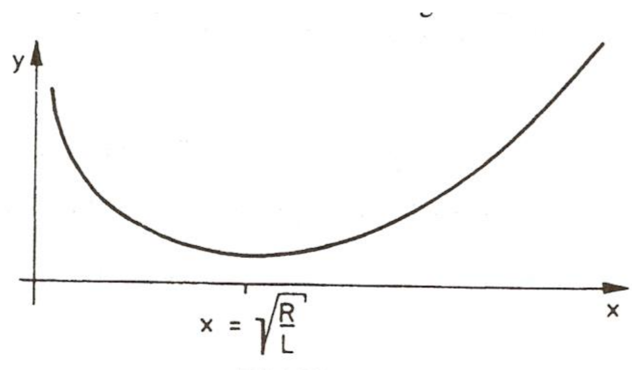
(لمړی $f(x)$) دوه واره دیفرنځیال کیږي یا یي دوه واره رابیلیدنه نیول کیږي:

$$f'(x) = L - R/x^2 , \qquad f''(x) = 2R / x^3$$

د مینیوم لپاره ضرور دي: $f'(x) = 0$, پس لرو $x = \quad R / L$ ؟؟؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $0 \geq x$ له امله $0 \geq (x)$ '' f هم صدق کوي، پس دلته تل یو نسبي مینیموم مخ ته لرو



د کرږې تګلار په څیره ۲۰ . ۱۵ کی انځور شوې. څرګنده ده: که $x = R/L < M$ صدق ولري، نو مینیموم مو مخته پروت دی. که $x = R / L>M$ وي، نو یو منیموم په څنډه $x = M$ لرو. نامساوت $x = R / L < M$ دا مانا لري $R / L < M^2$ په همدې ډول . $R^2< M^2L$ پس مخ ته لرو: $x = R/ L$ د $R < M^2L$ لپاره او$x = M$ د $R > M^2L$لپاره

نو : که د چمتوالي لګښتونه R , زخیرې لګښتونو L څخه زیات لوي شي، نو سملاسی دې ټول تولید $x = M$ صورت ونیس. که د ذخیرې لګښتونه د چمتووالی لګښت څخه کم وي، کیدی شي کوچنی ازاد x تولید شي.

ټاکلی بیلګه : د $M = 10000, R = 1000, L = 10$ لپاره صدق کوي > $R = 1000$ $M^2L = 108 . 10 = 109$ستر یا غټ ازاد لګښت دی $x = R / L = 1000 / 10$ $10 = 100$ = ازاد a دلته 10 یوونه باید ورزیات شي ، چی 10000 یوونه تولید کړې‌د $M = 10 , R = 1000 , L = 1$ لپاره صدق کوي $R = 1000 > M^2L = 100$ غټ ازاده لویه له دې امله $x = M = 10$ ده .یواځې یوه ازاده لویه دې تر تولید لاندې ونیوله شي. پای

په تولید کې د مشتق استعمال

فعالیت : یوه فابریکه x تولید کوي. په دې تولید د لګښت کيږي، چې دا د تولید په واک کې دی، چې موږ ورته د لګښت تابع وايو او په K(x) سره ښايو.

څنګه کولی شو، چې د زیات تولید لپاره لګښت را ټيټ کړو؟

د لګښت تابع K(x) د تولید سټ(ډېرى) او ټول لګښت تر منځ تړاو انځوروي.

که تولید د Δx شاو خوا کې زيات شي، نو لګښت هم د ΔK په شاو خوا کې زیاتیږي.

کمښتویش (تقسیم تفاضل) $\frac{\Delta K}{\Delta x}$ د منځني لګښت زیاتوالی ښایي، د یوه Δx تولید تغیر سره(منځنی تغیر ارزښت)

د x_0 ځای کې لحضوي تغیر ارزښت د مشتق لګښت بلل کيږي. دا د پوله ارزښت $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta K}{\Delta x}$ سره ټاکل کيږي، داپه دې معني، چې د لګښت د تابعK مشتق.

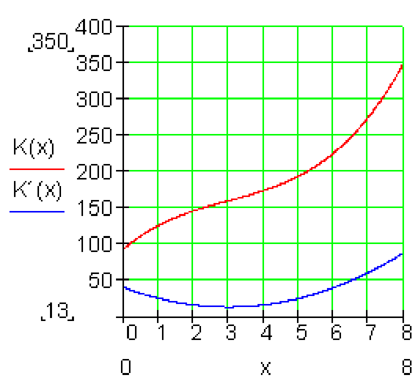
پيژند : د لګښتتابع **K(x)** مشتق د مشتفارزښت **K'(x)** په نامه یادوو یا یې پوله لګښت **K'(x)** هم بولو.

بېلګه: د لګښت تابع $K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94$ دې ورکړ شوې وي.

الف: مشتق ارزښت وټاکی، یو ارزښت جدول د **K(x)** او **K'(x)** لپاره وکاږۍاو په پروتولاړ سیستم یا کواوردیناتسیستم کې یې ګراف وکاږۍ.

پوله ارزښت د **I = [0 ; 6]** لپاره په ۱ پل(قدو) پراخوالي سره.

ب : د ډېر کم لګښتزاتوالی و ټاکی:



لاندې تابع لرو:

$$K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94$$

مشتف ارزښت

$$K'(x) = 3x^2 - 18x + 40$$

ارزښت جدول

x	0	1	2	3	4	5	6
K(x)	94	126	146	160	174	194	226
K'(x)	40	25	16	13	16	25	40

(c) ketabton.com: The Digital Library

خورا کم د لګښتزیاتوالی(لګښتجګېدنه) د پارابول **K'(x)** په ککره(څوکه) کې پروت دی ، یعنې هلته چې تانجنت **K'(x)** پروت یا افقي دی

$$K'(x) = 3x^2 - 18x + 40 \Rightarrow K''(x) = 6x - 18$$

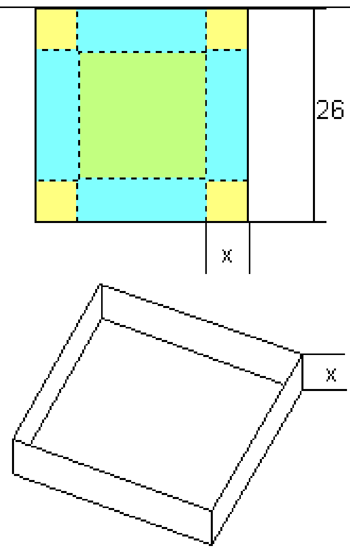
دد تانجنت د پروتوالي یا افقیت لپاره :

$$K''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 18 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x = 3}}$$

د ي، مربع کارتون(د کلک کاغذ څخه جوړ)څخه ، چې ۲۶ سانتیمتره د اړخ اوږدوالی لري یو بکس جوړوو بې له سرپوښ، چې د x جګوالی لري.

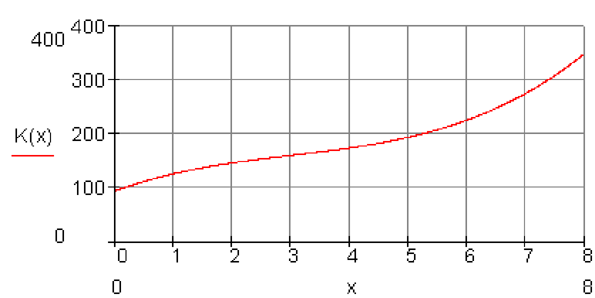
الف: د یوه تابع ترم وټاکی، چې د بکس حجم(ډکی) V د x په واکوالي یا تابعیت کې ښايي.

ب – ګراف وکاږی او په نردې توګه یې ماګسیما(خورا جګ) حجم و ټاکی.



- د یوه روغتون د نرختابع(مصرف تابع)K(x) د ناروغانو ګڼه (تعداد) x او د ټول مصرف ترمنځ اړېکي انځوروي، داسې چې x = 1 د 100 ناروغانو معنی او y = 1 دی معنی چې 1000 € / Tag. یوزر یورو په ورځ (1000 € / Tag.) .

$$K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

تولګه:

د رول(Rolle) قضیه:

یوه د f تابع دې په بند اینتروال $[a,b]$ کې متمادي وي د $f(a)=f(b)$ سره او په واز اینترول (a,b) کې مشتقوړ، نو لږ تر لږه یوځاي $c\in(a,b)$ شته دی د $f'(x_0)=0$ سره.

د مشتق د منځني ارزښت (وسطي قیمت) قضیه:

که $y=(x)$ تابع په بند اینترول $[a,b]$ کې متمادي او په واز اینترول (a,b) کې د مشتق وړ وي، نو هلته یوځاي $x\in(a,b)$ شته دی، د کوم لپاره چې لرو:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(x_0)$$

ځېږه په نوټ کې ده، دا بنه نه ده کېنل شوي

پراخه شوې منځقضیه:

که $u=f(x)$ او $v=g(f)$ په بند اینترول $[a,b]$ کې متمادي توابع وي او په واز اینترول (a,b) کې مشتقوړاو $g'(x)\neq 0$ باور ولري، نو د ټولو $x\in(a,b)$ لپاره، کم له کمه یوځای $x_0\in(a,b)$ وجودلري چې لاس ته ترې راځي:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

قضیه:

د $f(x)$ تابع دې په انترول I کې مشتقوړ وي.

1. که د $f(x)$ تابع په اینترول I کې مونوتون جګېدونکي وي، نو باور لري: $f'(x)\geq 0$ د ټولو $x\in 1$ لپاره

- که $f(x)$ په اینترول کې همغږیزتیټېدونکي وي، نو باور لري: $f'(x)\leq 0$ د ټولو $x\in 1$ لپاره.

- که $f'(x)\geq 0$ وي، دټولو $x\in 1$ لپاره، نو $f(x)$ په اینترول I کې همغږیز جګېدونکې ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- که$f'(x) \le 0$ وي د ټولو$x \in 1$ لپاره، نو $f(x)$ په ایټروالIکې همغږیز ټیټېدونکې ده.
- که$f'(x) > 0$ وي ، د ټولو$x \in 1$ لپاره، نو$f(x)$ په اینټروال I کې په کلکه همغږیزجګېدونکې ده.
- که$f'(x) < 0$ وي د ټولو$x \in 1$ لپاره،نو $f(x)$ په اینټروال Iکې په کلکه مونوټون ټیټېدونې ده.

که د $f(x)$ لپاره د x_0په ځای کې $f'(x)=0$ ولرو نو یو نسبي ټیټ ټکی مو مخ ته پروت دی.

که د $f(x)$ لپاره د x_0په ځای کې $f'(x)=0$ او $f''(x)>0$ ولرو نو یو نسبي ټکی مو مخ ته پروت دی.

که ددې برعکس ولرو: $f'(x)=0$ او $f''(x)<0$ ، نو یو نسبي ماکسیموم مو مخ ته پروت دی.

د بحراني ټکي(ټیټ ټکي یا جګ ټکي) لپاره خوي ټاکونکی دی، چې $f'(x)=0$ وي، او د $f''(x)$ مخ نښه (+ ، -)، په دې پریکړه کوي چې ایا یو اصغري ټکی او که اعظمي ټکی مو مخ ته پروت دی.

پېژند: د $x=x_0$په چاپیریال کې د $y=f(x)$ تعریف شوې تابع یونسبي جګ ټکی په همدې ډول نسبي ټیټ ټکی لري، که ټولو x_0ته پوره نږدی x لپاره باور ولري:

$f(x) > f(x_0)$په همدې ډول $f(x) \le f(x_0)$

جمله: (د یوه نسبي بحراني ټکي لپاره ضروري شرایط):

که په x_0 کې مشتق وړ تابع $y=f(x)$ انحرافي ټکی لري نو لرو: $f'(x)=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا جمله موږ ته وايي: چیرته چي $f'(x) \neq 0$ وي نو هلته اکستریموم نه شته، د اکستریموم لپاره یواځې د x_0 ځای په پوښتنه کی راځي، چي د هغي لپاره لرو $f'(x)=0$ ، خو حمتي نه ده چي $y=f(x)$ دې یواکستریموم و لري.

جمله : (د یوه بحراني ټکي لپاره پوره کیدونکی شرایط):

که په $x=x_0$ کی دوه واره مشتقوړ $y=f(x)$ تابع لپاره ولرو: $f''(x)\neq 0$, $f'(x)=0$ نو تابع $y=f(x)$ هلته یو بحراني ټکی لري.

خورا ټیټ ټکی مخ ته لرو، که وي: $f''(x)>0$

خورا جګ ټکی مخ ته پروت دی ، که وي: $f''(x)<0$

پیژند: په یوه چاپیریال $x=x_0$ کي مشتق وړ تابع $y=f(x)$ یو کيڼ- ښی- انعطافټکی په همدې ډول ښی- کيڼ- انعطافټکی لري، که د هغه مشتق هلته یو نسبي جګټکی(عظمي نقطه) په همدې توګه یو نسبي ټیټ ټکی ولري.

جمله: (د یوه نسبي بحراني ټکي لپاره ضروري شرایط):

که په x_0 کي مشتق وړ تابع $y=f(x)$ اکستریموم لري نو لرو: $f'(x)=0$

دا جمله موږ ته وايي: چیرته چي $f'(x)\neq 0$ وي نو هلته بحراني ټکی نه شته، د بحراني ټکو لپاره یواځې د x_0 ځای په پوښتنه کي راځي، چي د هغي لپاره $f'(x)=0$ وي ، خو حمتي نه ده چي $y=f(x)$ دې یوبحراني ټکی ولري.

د پورته جملی استعمال په $y'=f'(x)$ څخه لاندې جمله لاس ته راځي:

جمله : (د اوړونټکي(انعطاف ټکي) لپاره اړیین شرایط):

که په $x=x_0$ کی دوه واره مشتق وړ تابع $y = f(x)$ هلته یو انعطاف ټکی ولري، نو لاس ته ترې راځي: $f''(x) = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیزند: د زینتکي(کله کله برندې ټکی هم بلل کیږي)لاندې د انعطافتکي ځانګړی حالت پوهیږو، داسې انعطافتکی چې تانجنت یې افقي (پروت) وي:

د پرتلي لپاره دې بیا یو ،،عادي،، انعطافتکی ورکړ شوی وي.دا یو مائل(نه افقي) تانجنت لري

د برنولي او د دې لو، پیتال قاعده:

که توابع $u = f(x)$ او $v = g(x)$ د یوه $U(x_0)$ چاپیریال د x_0 په ځاي کی مشتقوړ وي د $g'(x) \neq 0$ سـره او د ټولـو $x \in U(x)$ لپـاره او x_0 د f او g یوصـفرځاي وي، د $f(x_0) = g(x_0) = 0$ سره، نو باور لري: $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$,

ترڅو په ښي لور حد شته وي.

په ورته توګه لاس ته راځي: $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

تمرینونه:

۱ – د لاندې لیکل شوو تحلیلي افادو مشتق د x0 په ځای کې وشمېرئ او د فرمول د اعتبار ورشو(ساحه) ورکړئ.

a) $y = x^3 - 2x^2 + 1$ b) $y = \sqrt{x}$ c) $y = x\sqrt{x}$

d) $y = \frac{x^2+1}{x}$ e) $y = \frac{x}{x-1}$ f) $y = \sin\frac{x}{2}$

۲– د یوه تن یا جسم عمود پورته غورځونې د تن دروندټکي (د جسم د ثقل مرکز) د لار- وخت- مساوات په لاندې ډول دي:

$$s = f(t) = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیلچټکتیا یا پیل سرعت $v_0 = 30 \frac{m}{s}$ او د ځمکې بیړې(د ځمکېتعجیل) $g = 10 \frac{m}{s^2}$. سره. دا تن یا جسم کله خپل عظمي جګوالي ته رسیږي؟

دا جګوالی څومره لوي دی
۳ – یو تن په برابر ډوله چټکتیا خوزي(حرکت کوي)، داسې چې بیړه(تعجیل) یې $a = 2 \frac{m}{s^2}$ دی

په لاندې جدول کې د $\{(\Delta t)_n\}$ لپاره یو صفرترادف(- پرلپسې) کېږدی(د بیلګې په توګه لکه په اوله مټه(ستن) کې) او جدول پوره کړی.

له $t_0 = 3\ s$? وروسته د تن یا بدن لحظوي چټکتیا څومره ده.

۴ – د لاندې تحلیلي افادو مشتق ونیسی! پام وکړی، چې د مشتقنیولو کومه قاعده په کار وړی شی

a) $y = -\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + \frac{1}{x} - 5$

b) $y = a^2x^3 - \sqrt{b}x^2 + \frac{1}{2}cx - 1$

c) $y = -2x^{-5} + 3x^{-3} - \frac{1}{2}x^{-2} + 4$

d) $y = \frac{2}{\sqrt{x}} - 3\sqrt[3]{x^2} + \frac{6 \cdot \sqrt[3]{x}}{x}$

e) $y = (\sqrt{x} - 1)(1 + \sqrt{x})$

f) $y = (1 - x^{-4})(x^{-1} + x^2)$

g) $y = (x^2 + 2x\sqrt{x} + x)(x - \sqrt{x})$

h) $y = (ax^2 - b)^2$

i) $y = \frac{x^2 + x}{3x^3}$

j) $y = \frac{2x^3 - 3}{x^2}$

k) $y = \sqrt[3]{\sqrt{x}}$

l) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \cdot \left(1 + \sqrt[4]{x}\right)$

۵ – د لاندې ورکړل شوو تحلیلي افادو مشتق ونیسی، او هغه ارزښتونه ترې وباسی، د کومو له پاره چې مشتق شته (موجود) نه وي

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵ . ۱ –

a) $y = (x-1)(1-x^3)$

b) $y = (x^3+1)(1-x-x^2)$

c) $y = \left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt[3]{x^4}+\sqrt{x^3}\right)$

d) $y = \left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}\right)\left(\sqrt[4]{x}-2x\right)$

۵ . ۲ -

a) $y = \frac{x^3+1}{x^2+x+1}$

b) $y = 4x+\frac{1}{x^2+1}$

c) $y = \frac{x-4}{4-x}$

d) $y = \frac{x^3-2x+1}{2x^3-5}$

e) $y = \frac{\sqrt{3}x-\sqrt{2}}{3x^2-2}$

f) $y = \frac{1}{1+x}-\frac{1}{1-x}$

g) $y = \frac{1}{1-\sqrt{x}}$

h) $y = \frac{2x-\sqrt[3]{x}}{x^2-2x-1}$

i) $y = \frac{x^3+3\sqrt[3]{x}}{2x^2+x}$

j) $y = \frac{\sqrt{x}-1}{x-2\sqrt{x}+1}$

۵ . ۳ –

a) $y = \sqrt{x}\sin x$

b) $y = 2\sin x \cos x$

c) $y = 1-\cos^2 x$

d) $y = x^3\cos x$

e) $y = 2\sin x(x-\cot x)$

f) $y = \frac{\tan x}{\cot x}$

g) $y = \frac{x}{\sin x+\cos x}$

h) $y = \frac{x\sin x}{1+\tan x}$

i) $y = \tan x-\cot x-2x$

j) $y = \frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$

۵ . ۴ –

a) $y = \frac{x}{e^x}$

b) $y = \frac{e^x+e^{-x}}{2x^2}$

c) $y = e^x\tan x$

d) $y = \frac{5e^x}{\cos x}$

۵ . ۵ –

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

a) $y = \frac{\ln x}{x}$ b) $y = \sin x \ \ln x$
c) $y = x^2 \ln x$ d) $y = 10 \ln e \ln x$

۵ . ۶ -

a) $y = 5^x + 2^x$ b) $y = 3^x x^3$
c) $y = 2^x - 2x$ d) $y = \frac{4^x}{2^x}$

۵ . ۷ –

c) $y = 2^x - 2x$ d) $y = \frac{4^x}{2^x}$

a) $y = (2x+1)^4$ b) $y = (1-x^4)^5$
c) $y = \left(1-\frac{1}{x}\right)^8$ d) $y = \left(2x^2 - \frac{4}{x} + 3\right)^6$

۵ . ۸ -

a) $y = \sqrt{x^2 - 1}$ b) $y = \sqrt{1-2x}$ c) $y = \frac{1}{\sqrt[4]{(x-1)^3}}$
d) $y = \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3 - 1}}$ e) $y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ f) $y = \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2}}$
g) $y = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$ h) $y = \sqrt{\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}}$

۵ . ۹ –

a) $y = 5x^2 \ \sin 2x$ b) $y = \sin^2 x$ c) $y = \sin\sqrt{\frac{x}{2}}$
d) $y = \tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x$ e) $y = \cos\frac{1}{1+x}$ f) $y = \frac{1}{\cos^2 x}$
g) $y = \cot(1 - 3x)$ h) $y = \cot\sqrt{1-2x}$ i) $y = \sqrt{\tan x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

j) $y=\frac{\cos x^2}{\pi x}$ k) $y=\frac{1-\cos^2 x}{1+\cos^2 x}$

l) $y=\left(3+\frac{2}{\cos^2 x}\right)\frac{\sin x}{\cos^2 x}$ m) $y=\left(\frac{3}{\sin x}-5\right)\frac{1}{\sin x}$

n) $y=\tan\sqrt[3]{\frac{1-2x}{x}}$ o) $y=2\sin\sqrt[3]{\frac{3}{x}}$ p) $y=\frac{3\tan x-\tan^3 x}{1-3\tan^2 x}$

-۱۰ . ۵

a) $y=\text{Arcsin}\frac{x}{a}$ b) $y=\text{Arccos}\frac{a-x}{a}$ c) $y=\text{Arctan}\frac{1}{x}$

d) $y=\text{Arccos}\sqrt{1-x^2}$ e) $y=\frac{1}{2}\text{Arctan}\frac{2x}{1-x^2}$ f) $y=\text{Arctan}\sqrt{\frac{x}{x+a}}$

g) $y=\text{Arcsin}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ h) $y=\text{Arctan}\frac{x}{1+\sqrt{x^2+1}}$ i) $y=\text{Arccot}\frac{1+x}{1-x}$

j) $y=\text{Arcsin}\,2x\sqrt{1-x^2}$ k) $y=\text{Arctan}\frac{x-2}{2\sqrt{x^2+x-1}}$

l) $y=a\cdot\text{Arc}\cos\frac{a-x}{a}-\sqrt{2ax-x^2}$

-۱۱ . ۵

g) $y=\frac{e^{-\cos x}}{\sin x}$ h) $y=\sqrt{1-e^{-x}}$ i) $y=\frac{\sin\frac{x}{2}}{e^{2x}}$

j) $y=e^x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

-۱۲ . ۵

a) $y=\ln 2x$ b) $y=\ln x^2$ c) $y=(\ln x)^2$

d) $y=\ln\sqrt{x}$ e) $y=\sqrt{\ln x}$ f) $y=\ln\sqrt{1-x}$

g) $y=\ln\tan x$ h) $y=\ln\ln x$ i) $y=\ln\cot\frac{x}{2}$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

j) $y = \ln \tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$ k) $y = \ln \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}$

l) $y = \ln\left(x+\sqrt{x^2-a}\right)$ m) $y = \ln \frac{x}{x+\sqrt{x^2+1}}$ n) $y = \ln \sqrt{\frac{2x-3}{2x+3}}$

o) $y = \ln\left(a+x+\sqrt{2ax+x^2}\right)$ p) $y = \ln \sqrt[4]{\sin^3 x \cos^3 x}$

q) $y = \ln \frac{\sqrt[3]{(x+2)^2} \cdot \sqrt[5]{(x-2)^3}}{\sqrt[4]{(x^2-4)^5}}$

۵ . ۱۳ –

a) $y = |x|$ b) $y = \sqrt{|x|}$ c) $y = \ln |x|$

d) $y = \sqrt{|\ln \cos x|}$ e) $y = \ln |\ln |x| |$

۵ . ۱۴ -

a) $y = \sqrt[x]{x}$ b) $y = (x^x)^x$ c) $y = x^{(x^x)}$

d) $y = x^{\sin x}$ e) $y = (\cos x)^{\sin x}$ f) $y = a^x \cdot x^a$

g) $y = x^{e^x}$ h) $y = a^{e^x}$ i) $y = (\text{Arc}\tan x)^x$

j) $y = (\tan x)^{\frac{1}{\cos x}}$

۶ – تانجنت په $P_0(x_0, y_0)$ ټکي کې په منحني $f(x)$ د x–محور سره کومه زاویه (کونج) جوړوي

a) $y = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$ b) $y = \sqrt[3]{x+1}$, $x_0 = 0$

c) $y = \left(x^2 - \sqrt[3]{x^2}\right)^2$, $x_0 = 1$ d) $y = \sqrt{\frac{x^2-4}{9x^2-25}}$, $x_0 = 0$

e) $y = x\sqrt{x+1}$, $x_0 = 3$ f) $y = \frac{x}{x+\sqrt{x}}$, $x_0 = 1$

g) $y = \sqrt{x-\sqrt{x}}$, $x_0 = 1$ h) $y = \sqrt{1+\sqrt{x}}$, $x_0 = 1$

i) $y = \sin(2\pi - x)$, $x_0 = \pi$ j) $y = \sqrt{\sin 2x}$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

k) $y = \sin\sqrt{2x}$, $x_0 = \frac{1}{2}$ l) $y = (x-1)e^x$, $x_0 = 0$

۷ - په پروت تانجنت د -محور باندې پرته منحني کوم ټکي کې غوڅوي، که زاویه او همداسي وي.

a) $y = x^2$ b) $y = x^3$ c) $y = x \cdot |3-x|$

d) $y = \frac{x^2-3}{2x}$ e) $y = \frac{x^2+x+14}{x+2}$ f) $y = \frac{x^2(x-9)}{2(x-6)^3}$

۸ – د ورکړشوو تخلیلي افادو لومړي درې مشتقونه جوړ کړی! و ازمایې، چې ایا د مشتق قابلیت کې د یو ګونو ورشو ګانوو یا ساحو کې تغیر راځي!

د -م مشتق لپاره یو عمومي فرمول ورکړی، ترهغي چي شته وي.

a) $y = x^n$ b) $y = \sqrt{x}$ c) $y = \sqrt[4]{x^3}$

d) $y = \sqrt{1-x^2}$ e) $y = \frac{x}{1-x}$ f) $y = \frac{1+x}{1-x}$

g) $y = \cos x$ h) $y = \frac{1}{2}\sin 2x$ i) $y = \sin(1-2x)$

j) $y = x^2 \sin 2x$ k) $y = \tan x$ l) $y = \tan^2 x$

m) $y = e^x \sin x$ n) $y = e^{mx}$ o) $y = e^{-x} + e^{-2x}$

p) $y = \ln x$ q) $y = \ln\sqrt[3]{1+x^2}$ r) $y = \text{Arcsin}\, x$

۹ - د تانجنت مساوات $y = mx + n$ په $y = f(x)$ کیږدی.

۹ . ۱ -

a) $f(x) = x^2 + 1$, $P_1(1, y_1)$ bzw. $P_2(-1, y_2)$

b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$, $P_1(0, y_1)$ bzw. $P_2(2, y_2)$

c) $y^2 = 1 - x$, $P_0(-3, y_0)$ d) $y^2 = x - 1$, $P_0(5, y_0)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

----

۹ . ۲-

a) $f(x) = e^{-x}$, $m = -1$ b) $f(x) = -x^4 + 3x^2 - 4$, $m = 0$

c) $f(x) = \frac{x}{x+1}$, $m = 1$ d) $f(x) = \frac{1}{x-1}$, $m = -1$

۱۰ – د لاندې توابعو y=f(x) په څټ تابع (برعکس تابع) $f^{-1}(x)$ مشتق dx /dy په $P_0(x_0, y_0)$ ټکي کې وشمېرئ(جوړ کړئ)

a) $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x + 1$, $x_0 = -1$ b) $y = x^2 - 2x - 1 + \frac{2}{x}$, $x_0 = 1$

c) $y = \frac{1}{2x^2 - 5x + 9}$, $x_0 = \frac{5}{4}$ d) $y = \frac{x+1}{x+2}$, $x_0 = -3$

e) $y = \sqrt{1-x}$, $x_0 = 1$ f) $y = \sqrt{\frac{x}{a-x}}$, $x_0 = \frac{a}{2}$

g) $y = (x+1)\sqrt{1-x}$, $x_0 = -1$ h) $y = \sin x$, $x_0 = 0$

i) $y = \sin(2x + 3\pi)$, $x_0 = -2\pi$ j) $y = \sin^2 x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$

k) $y = x \cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$ l) $y = \frac{1+\cos x}{1-\cos x}$, $x_0 = \frac{3\pi}{2}$

m) $y = e^x \cos x$, $x_0 = 0$ n) $y = x\, e^{\cos x}$, $x_0 = 2\pi$

o) $y = e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)$, $x_0 = 1$

p) $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$, $x_0 = x \in (-\infty, \infty), a \neq 0$

q) $y = \ln(x+1)$, $x_0 > -1$ r) $y = \ln\sqrt{\frac{3x-4}{3x+4}}$, $|x_0| > \frac{4}{3}$

s) $y = x^{\frac{1}{x}}$, $x_0 > 0$, $x_0 \neq e$

۱۱ – لاندې تحلیلي افادې په متمادیت او مشتق والي باندې و څیړئ،

a) $y = \begin{cases} -a & \text{für} \quad x \leq 0 \\ +a & \text{für} \quad x > 0 \end{cases}$ b) $y = \begin{cases} -\frac{1}{2}x + 1 & \text{für} \quad x \leq 2 \\ -2 & \text{für} \quad x > 2 \end{cases}$ c) $y = |x - 1|$

d) $y = |\sin x|$ e) $y = -\frac{x^2}{2}$ f) $y = -|x|$

g) $y = \sqrt[3]{x^2}$ h) $y = (x+1)^3 \cdot \sqrt[3]{x^2}$ i) $y = e^{\frac{1}{x}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

j) $y = e^{\frac{x}{x-1}}$ k) $y = e^{\frac{x^2}{x^2-1}}$ l) $y = \text{Arccot}\,\frac{1}{x}$

m) $y = \text{Arcsin}\,(\sin x)$ n) $y = \text{Arctan}\,(\tan x)$ o) $y^2 = \frac{x^3}{4-x}$

p) $y^3 = 3x^2 - x^3$ q) $y^2 = \frac{1-x}{x}$

۱۲ - لاندې منحني چې د پسې برابرونونو سره ورکړ شوي، د افراطي ټکو او اوړونټکو(نقاط افراطي و انعطاف) له مخې وڅېړۍ.

a) $y = x^2 - 2x + 3$ b) $y = x^3 - 3x^2 + 6x + 7$ c) $y = x^3(8 - x)$

d) $y = (x - a)^4 + b$ e) $y = \frac{x}{x^2 + 1}$ f) $y = \frac{x^2 - 7x + 6}{x - 10}$

g) $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$ h) $y = \frac{ax^2}{ax + b}$

i) $y = \frac{a^2(a - x) + b^2 x}{x(a - x)}$ j) $y = \cos^2 x$ k) $y = \sin x\ \cos x$

l) $y = \sin 2x - 2\sin x$ m) $y = e^x \sin x$ n) $y = x\,e^x$

o) $y = x^n e^{-x}$ p) $y = e^{-x} + e^{2x}$ q) $y = e^{-x} - e^{-2x}$

r) $y = x \ln x$ s) $y = x \ln^2 x$ t) $y = \frac{1}{2}\ln x - \text{Arctan}\,x$

۱۳ - د دې لاندې برابرونونو سره ورکړ شوې منحني تر بحث لاندې ونیسۍ:

13.1. a) $y = x^2 - x - 2$ b) $y = -(x + 4)^2 + 4$

c) $y = x^3 - x^2$ d) $y = x^3 - 10x$

e) $y = -x\,(x + 3)^2$ f) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$

g) $y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 2$ h) $y = -x^3 + 6x^2 - 13x + 8$

i) $y = (x + 2)\,(x^2 - 4x + 3)$ j) $y = (1 - x)\,(x^2 + 6x + 8)$

k) $y = |x^3 + 9x^2 - 108|$ l) $y = |-x\,(x^2 - 16)|$

13.2. a) $y = x^4 - 8x^2 - 9$ b) $y = -x^4 + 5x^2 - 4$

c) $y = x^4 - 10x^2 + 9$ d) $y = (x - 2)^2\,(x - 4)\,(x + 3)$

e) $y = \frac{1}{24}x\,(x - 1)\,(x - 2)\,(x - 3)$ f) $y = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$

.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

13.1. a) $y = x^2 - x - 2$ b) $y = -(x+4)^2 + 4$

c) $y = x^3 - x^2$ d) $y = x^3 - 10x$

e) $y = -x\,(x + 3)^2$ f) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$

g) $y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 2$ h) $y = -x^3 + 6x^2 - 13x + 8$

i) $y = (x + 2)\,(x^2 - 4x + 3)$ j) $y = (1 - x)\,(x^2 + 6x + 8)$

k) $y = |x^3 + 9x^2 - 108|$ l) $y = |-x\,(x^2 - 16)|$

13.2. a) $y = x^4 - 8x^2 - 9$ b) $y = -x^4 + 5x^2 - 4$

c) $y = x^4 - 10x^2 + 9$ d) $y = (x-2)^2\,(x - 4)\,(x + 3)$

e) $y = \frac{1}{24}x\,(x - 1)\,(x - 2)\,(x - 3)$ f) $y = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$

g) $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$ h) $y = (x+2)^2(x-1)^3$

i) $y = x^2(x^2 - 1)^2$ j) $y = (x-4)^4(x+3)^3$

13.3. a) $y = \frac{1}{1+x^2}$ b) $y = \frac{3x-1}{2x+1}$ c) $y = \frac{5}{(2x+1)^2}$

d) $y = \frac{2x+x^2+25}{1+x^2+2x}$ e) $y = \frac{x^2+x+1}{x^2-1}$ f) $y = \frac{x^2+2x+1}{2x}$

g) $y = \frac{x^2-5x+4}{x-5}$ h) $y = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2-2x+1}$ i) $y = x - \frac{4}{x-1}$

j) $y = \frac{x^3+2}{2x}$ k) $y = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$

l) $y = \frac{2x^2-6x}{x^3-3x^2+x-3}$ m) $y = \frac{x^3}{x^2-2x+1}$ n) $y = \frac{5(3x^2-4)-13x}{\frac{1}{8}(2x-1)(4x+7)}$

13.4. a) $y = x\sqrt{9x-x^2}$ b) $y = x^2\sqrt{25-x^2}$

c) $y = x\sqrt{14+8x-x^2}$ d) $y = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$ e) $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

f) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-4}} - 2$ g) $y = \sqrt{\frac{x}{2-x}}$ h) $y = x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

i) $y = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$ j) $y = \sqrt{\frac{1-x^3}{3x}}$

k) $y = \sqrt{(x+1)^2 - x} - \sqrt{(x-1)^2 + x}$

l) $y = \frac{1}{2}\left(\sqrt{(x+1)^2 - x} + \sqrt{(x-1)^2 + x}\right)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

13.5. a) $y^2 = x^3 + x + 2$ b) $y^2 = x^3 - 3x + 2$ c) $y^2 = x^3 - 2x + 1$

d) $y^2 = x^4(x-1)$ e) $y^2 = x^2[x(1-x)]$ f) $y^2 = \frac{1-x}{x}$

g) $y^2 = \frac{x^2}{1+x}$ h) $y^2 = \frac{x^2}{1-x^2}$ i) $y^2 = \frac{x(1-x)}{(x+1)^2}$

13.6. a) $y = 2\sin^2 x$ b) $y = \sin 2x \cos x$ c) $y = \sin x \cos^2 x$

d) $y = \sin^2 x + 2\cos^2 x$ e) $y = x \sin x$ f) $y = \frac{\sin x}{x}$

g) $y = \frac{\sin 2x}{\sin x}$ h) $y = x^3 \cos x$

i) $y = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x$ j) $y = \sin^3 x + \cos^3 x$

k) $y = \sin x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ l) $y = \cos 2x + 2\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$

13.7. a) $y = e^{-2x}$ b) $y = xe^{-x}$ c) $y = x e^{\sqrt{x}}$

d) $y = (x^2 - 1) e^x$ e) $y = e^{\tan x}$ f) $y = 2 e^{-x} \sin 2x$

g) $y = e^{2x} \sin 3x$

13.8. a) $y = \ln 3x$ b) $y = \ln(x^2 - 1)$ c) $y = x^2 \ln x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ټوټه کسرونو ټوټه کونه

الف) اصلي کسرونه، چې مخرج يې مختلف کرښيز يا لاينيز ضريبونه لري.

بنسټ: که د یوه اصلي پولینوم $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ مخرجپولینوم $P_n(x)$ په مختلفو کرښيزو(لاينې) ضريبونو $P_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ ...\ (x - x_n)$ ټوټه کېدونکی وي، نو پولینوم $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ په لاندې بڼه بدلېدی شي.

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2} + \frac{C}{x - x_3}\ ...\ \frac{N}{x - x_n}$$

داسې یوه بڼه په ټوټه کسرونو ټوټه کونه،، بلل کېږي، چې A,B,C,...,N حقیقي عددونه دي.

بېلګه:

اصلي پولینوم کسر $\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10}$ په ټوټه کسر ټوټه کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: د مساوات $x^3-4x^2-7x+10=0$ لومړی حل $x_1=1$ د ازمایښت له لارې پیداکیږي.

د پولینوم ویش(لنډ: پولینوموېش) $(x^3-4x^2-7x+10):(x-1)=x^2-3x-10$ مو ټوټه ونې ته بیایي $x^3-4x^2-7x+10=(x^2-3x-10)(x-1)$ مساوات $x^2-3x-10$ اوس $x_2=-2$ او $x_3=5$ حلونه لري.

له دې امله $x^3-4x^2-7x+10=(x-5)(x-1)(x+2)$ دی.

د اصلي کسر $\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}$ په ټوټه کسرونو ټوټه کونه:

د کسرونو شمېرنو قاعدې له مخې کېدی شي ورکړ شوی پولینوم په درې جمعی برخو ټوټه شي، چې مخرجونه يې لاینیز (کرښیز-)ضریبونه دي:

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{A}{x-5}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}$$

د غزېدنې سره د ټوټه کسر جمعه:

اصلي مخرج د ټوټه کسر د پولینوم مخرج دی.

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{A(x-1)(x+2)+B(x-5)(x+2)+C(x-5)(x-1)}{(x-1)(x-5)(x+2)}$$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{Ax^2+Ax-2A+Bx^2-3Bx-10B+Cx^2-6Cx+5C}{x^3-4x^2-7x+10}$$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{(A+B+C)x^2+(A-3B-6C)x+(-2A-10B+5C)}{x^3-4x^2-7x+10}$$

دصورتونو ارزښت A ,B او C ټاکنه د ضریبونو(ځلوونو) د پرتلې له لارې:

د مساوي مخرجونو کسرکې بسیا کوي، چې صورتونه سره پرتله کړو. دلته باید د مساوي توانونو ضریبونه، دا په دې مانا چې د x^2, x او x_0 باید مساوي وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A+B+C=4 \qquad \text{I}$$
$$A-3B-6C=-1 \qquad \text{II}$$
$$-2A-10B+5C=39 \qquad \text{III}$$

د فاکتور 2 سره د I او II مساوات ضربونه او د هر يوه جمع د III سره پورته درې مساوات سيستم و دوه مساواتسيستم ته د دوه متحولو سره را لنډوي.

$$-8B=-72 \qquad \text{V}$$
$$-16B-7C=-41 \qquad \text{IV}$$

د مساوات IV.V څخه لرو: $B=3 \quad -24B=-72 \Rightarrow$

د $B=3$ په V کې اېښوونه: $-16.3-7C=-41 \Rightarrow C=-1$

د $B=3$ او $C=-1$ په I کې اېښوونه: $A+3-1=4 \Rightarrow A=2$

په ټوټه کونې فرمول کې اېښوونې سره غوښتونکی ټوټه کسر لاسته راځي:

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{2}{x-5}+\frac{3}{x-1}-\frac{1}{x+2}$$

ازمايښت:

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=$$

$$=\frac{(x-1)(x+2)+3(x-5)(x+2)-1(x-5)(x-1)}{(x-5)(x+2)(x+2)}=\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}$$

ب) اصلي پولينوم کسرونه، چې مخرج يې مساوي لاينيز(کرښيز) ضريبونه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د یوه اصلي پولینوم $P_n(x)$ مخرج $\frac{P(x)}{P_n(x)}$ د کربنیز فاکتور $x-x_0$ توان $\frac{A}{(x-x_0)}+\frac{B}{(x-x_0)^n}+...+\frac{N}{(x-x_0)^n}$ وي نو ددې کربنیزو فاکتورونو له پاره پولینوم لاندې بڼه لري: $\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}$

د نورو ټولو ساده منځ ته راغلو کربنیزو فاکتورونو ټوټه کسرونه (ماتونه) په بلده بڼه ورکول کیږي.

بیلګه:

د اصلي پولینوم کسر $\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}$ لپاره په ټوټه کسر ټوټه کونه ورکړئ.

د مخرج ټوټه ونه په کربنیزو فاکتورونو:

د پولینوم $x^3-4x^2+5x-2=0$ لومړی حل $x_1=1$ د ازمایښت له لارې پیدا کیږي.

پولینوم ویش $(x^3-4x^2+4x-2):(x-1)=x^2+3x+2$ مو لاندې ټوټه کونې ته لاربښودوي:

$$x^3-4x^2+4x-2=(x^2+5x-2)(x-1)$$

مساوات $x^2-3x+2=0$ دا $x_2=1$ او $x_3=2$ حلونه لري. نو له دې سره د مخرج لپاره ډبل حل دی:

$$x^3-4x^2+5x-2)=(x-2)(x-1)^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټوټه کسر پیل:

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-1)}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

د ټوټه کسر جمع د غزونې له لارې:

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{A(x-1)^2+B(x-2)(x-1)+C(x-2)}{(x-2)(x-1)^2}$$

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{(A+B)x^2+(-2A-3B+C)x+(A+2B-2C)}{x^3-4x+5x-2}$$

د A,B او C صورتونو ارزښت د ضریبونو پرتله کونې له لارې.

$$\begin{aligned}&A+B=3 && \text{I}\\&-2A-3B+C=-6 && \text{II}\\&A+2B-2C=2 && \text{III}\end{aligned}$$

د مساوات II د 2 سره ضرب او د III سره جمعه د I سره ګډ د دوه مساوات د دوه متحولو سره.

$$\begin{aligned}&A+B=3 && \text{I}\\&-3A-4B=-10 && \text{II}\end{aligned}$$

دا ضرب د 4 سره او جمعه یې د IV سره : A = 2

د A = 2 اینښوونه په I کې: $2+B=3\Rightarrow B=1$

د A = 2 او B = 1 اینښونه په III کې: $2+2.2-2C=2\Rightarrow C=1$

د ټوټه کونې فرمول له لارې ټوټه مسر ټوټه ونه لاس ته راځي:

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پ) اصلي پولينوم کسرونه، چې مخرج يې پوره په کرښيزو ضريبونو يا فاکتورونو نه ټوټه کيږي.

بنسټ:

که د يوه اصلي پولينوم کسر $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ مخرجپولينوم $P_n(x)$ نور په يوه حقيقی ضريب نه ټوټه کېدونکي ضريب ax²+bx+c مخ ته پروت وي، نو په ټوټه کېدو کې دې د يو ټوټه کسر $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ په بڼه کېښول شي يا راوړل شئ

بيلګه:

د پولينوم کسر $\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}$ له پاره دې په ټوټه کسر ټوټه ونه ورکړ شي.

د مخرج ټوټه کونه په کرښيزو ضريبونو:

لومړی حل دې $x_1=-1$ وي مساوات $x^3+3x^2+6x+4=0$ د ازماېښت له لارې پيدا کيږي.

بولينوم وېش $(x^3+3x^2+6x+4):(x+1)=x^2+2x+4$ مو لاندې ټوټه کونې ته بيايي:

$$x^3+3x^2+6x+4=(x+1)(x^2+2x+4)$$

دا چې مساوات x^2+2x+4 حقيقي حل نه لري، نو د حقيقي اعدادو په ورشو کې نوره ټوټه کونه ناشونې ده.

نو له دې امله پولينوم کسر لاندې بڼه لري: $\frac{Ax}{x^2+2x+4}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\frac{c}{x+1}$ بنې کسر سره یوځاي مو لاندې ټوټه کسر ټوټه کونې ته بیایي:

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{Ax+B}{x^2+2x+4}+\frac{C}{x+1}$$

د غزونې له لارې د ټوټه کسرونو جمع

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{(Ax+B)(x+1)+C(x^2+2x+4)}{x^3+3x^2+6x+4}$$

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{(A+C)x^2+(A+B+2C)x+(B+4C)}{x^3+3x^2+6x+4}$$

د ضریبونو A,B,C ټاکنه د پرتله کولو له لارې:

A+C = 5 I

A + B + 2C = 8 II

B + 4C = 9 III

د III کمښت (تفریق) له مساوات II څخه د I سره یې ګدولو څخه مساوات لاس ته راځي، چې دوه اووښتونې یا متحولې لري:

A – 2C = 5 IV

A + C = 5 I

مساواتIII منفي مساواتII: $-3C=-6 \Rightarrow C=2$

د C = 2 په اIئښوولو سره : $A+4.2=9 \Rightarrow B=1$

د C = 2 په III ایښوولو سره: $B+4.2=9 \Rightarrow B=1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که دا د ټوټه کونې فرمول کې کېږدو نو د ټوټهکسر ټوټه کونه لاس ته راځي

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{3x+1}{x^2+2x+4}+\frac{2}{x+1}$$

ج) نا اصلي پولينوم کسرونه:

که د يوه پولينوم $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ د صورت درجه د پولينوم د مخرج له درجې څخه لويه وي، نو دا په پولينومويش له لارې په ټولناطق کسر او يوه اصلي کسر ټوټه کېدی شي.

بيلګه:

کسري پولينوم $\frac{3x^3-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8}$ په ټوټه کسري پولينومونو ټوټه کړئ .

د پولينوم د صورت درجه درې ده او د مخرج دوه . نو له دې امله مو يو نا اصلي پولينومکسر مخ ته پروت دی.

پولينوم وېش:

$$(3x^3-6x^2-20x-1):\ (x^2-2x-8)=3x+\frac{4x-1}{x^2-2x-8}$$

$$\frac{-(3x^3-6x^2-24x)}{4x-1}$$

د پاتې – يا باقي کسر $\frac{4x-1}{x^2-2x-8}$ له پاره د ټوټه کسر ټوټه کونې کارونه (عمليه) مخ ته بيايو.مخرج په کرښيزو ضريبونو ټوټه کړی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مساوات $x^2 - 2x - 8 = 0$ له پاره حل $x_1 = -2$ او $x_2 = 4$ لرو.

نو $x^2 - 2x - 8 = (x-4)(x+2)$ دی.

د ټوټه کسر ټوټه کونې لپاره ځای په ځاي کوو:

$$\frac{4x-1}{x^2-2x-8} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+2}$$

د غزونې له لارې د ټوټه کسرونو جمعه کول:

$$\frac{4x-1}{x^2-2x-8} = \frac{A(x+2)+B(x-4)}{(x-4)(x+2)}$$

$$\frac{4x-1}{x^2-2x-8} = \frac{(A+B)x+(2A-4B)}{x^2-2x-8}$$

د ضریبونو د پرتله کوونې په مرسته د A او B تاکل:

$$A+B=4 \qquad \text{I}$$

$$2A-4B=4 \qquad \text{II}$$

د I ضرب له 2 سره او له II څخه يې تفريق يا کول $6B=9 \Rightarrow B=\frac{3}{2}$

په II کې اېښوول: $2A-4\frac{3}{2}=-1 \Rightarrow A=\frac{5}{2}$

منځنی لاس ته راوړنه $\frac{4x-1}{x^2-2x-8} = \frac{5}{2(x-4)} + \frac{3}{(2(x+2)}$

متحول (بنتونکی) په ټوټه کسر ټوټه کونه لاندی بڼه غوره کوي:

$$\frac{3x^3-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8} = 3x + \frac{5}{2(x-4)} + \frac{3}{2(x+2)}$$

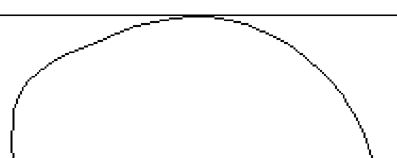
(c) ketabton.com: The Digital Library

د انتیګرالشمیرنه

د انتیګرالشمیرنې لپاره پیل راوړنې

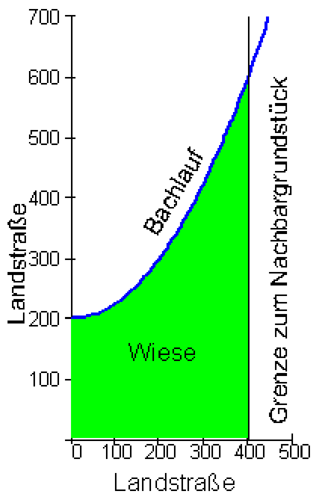
مونږ د ځمککچپوهنې یا هندسې له لارې بلد یو چې د کرښو رابند تنونو یا جسمونوسطحه او ډکی یا حجم څنګه وشمیرو.
که یوه سطحه له ګرڼط(-کرښې) رابنده وي، نو څه باید وشي؟
دا مو انتیګرال شمیرنې ته رابولې.

پخوانیو یونانیانو ته دا د منحني څخه رابندې سطحې شمیرلو اصول معلوم وو.
دا دمشتق شمیرنه، چې مونږ ورسره اوس سر او کار لرو، ډېر وروسته (د اوه لسمې پیړۍپای کې) د طبیعي علومو پوهانو لایبنیڅ او نیوټون له خوا رامنځ ته (اختراع) شو.



پیلبیلګه

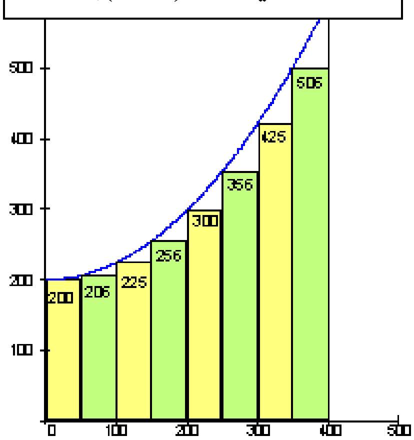
(c) ketabton.com: The Digital Library

دا ښېراه شوی چمن خرڅيږي. له پورته لور د ويالي را بند دی او له ښي لور د ګاونډي ځمکه ده او کيڼ لور ته کوڅه او له کښته لور هم د يوې کوڅي را بند دی. ددی لپاره چي چمن وپلورل شي، بايد سطحه وپيژندل شي. د پلورونکی لپاره سطحه بايد نزدي پوره مګر هيڅکله کمه ونه شمېرل شي. اخستونکی هم د ځان لپاره فکر کوي، چي پيسي بايد ورکړي، خو هيڅکله ځمکه د اصل څخه زيات ونه شمېرل شو.	

وروسته له دې چي رانيوونکي او پلورونکي د چمن سطحه معلومه کړه، دواړه د پيسو په تاديه سره يوځای کيږي او په دې هکله موافقه کوي.

ويالـه $f(x)=\frac{1}{400}x^2+200$ د تابع مساوات لري.

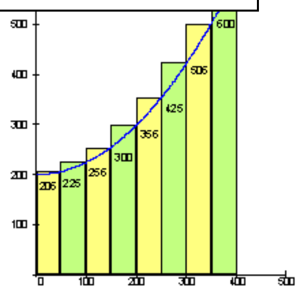
د اخستونکي له پاره ممکنه حل.

هره توټه(مستطيل پټی) 50m سره وره ده او په رسم کې ورکړشوی جګوالی لري. د ټولو پټيو، سطحه يو ځای شميرو. $200\cdot 50=10000$ $206\cdot 50=10300$ $225\cdot 50=11250$ $256\cdot 50=12800$ $300\cdot 50=15000$ $256\cdot 50=12800$ $425\cdot 50=21250$ $506\cdot 50=25300$ $\underline{123700}$	ځمکه په لاندې ډول په اوږدو توټو(پټيو) توټه کيږي د اوږدوالي واحد(يوون)په m 

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اخستونکي لپاره ټوله سطحه نږدې $123700\ m^2$ ده.

د پلورونکي له پاره ممکنه حل:

هره ټوټه(پټی) 50m سورلري او په رسم کې ورکړشوی جګوالی لري. د ټولو پټیو سطحه یوځای شمیرو. $206 \cdot 50 = 10300$ $225 \cdot 50 = 11250$ $256 \cdot 50 = 12800$ $300 \cdot 50 = 15000$ $356 \cdot 50 = 12800$ $425 \cdot 50 = 21250$ $506 \cdot 50 = 25300$ $600 \cdot 50 = 30000$ $\underline{143700}$	د اوږدوالي واحد(یوون)په m 

د د پلورونکي له پاره د ټولې سطحې مساحت نږدې $143700\ m^2$ دی.
اخستونکی او پلورونکی باید د دواړو قیمتونو ،،منځ،، ته راشي، دا په دې معنا چې دواړه د قیمتونو منځ ارزښت یو بل سره ومني. یعنې د سطحې منځ ارزښت، چې دی:

$$\frac{123700+143700}{2} = 133700unt^2$$

دا به وروسته د ټاکلي انتیګرال برخه (په مخ) کې وشمیږو، چې ریښتونی ارزښت یې $133333.\bar{3}m^2$ دی.
د اخستونکي په بېلګه کې دا ډول شمیږنه **لاندنی** ،،**جمعي جوړول**،، بلل کیږي.
د پلورونکي په بېلګه دا ډول شمیږنه،، **پورتنی جمعي**،، **جوړول** بلل کیږي.
دا د سطحې ریښتونی ارزښت یو چیږته په دا منځ کې پروت دی.
باید ددې له پاره یوه لار پیدا کړو، چې رښتونی ارزښت ترې لاس ته راشي. دد کار لپاره لږ نوره د چمتووالي لار شته.

انتیګرالشمیرنه Integralcalculation

(c) ketabton.com: The Digital Library

د سطحې تابع له پاره تر مخ راوړنه:
دا دانتیګرال هندسي مفهوم هم دی.
په کارتیزي وضعیه قیمت سیستم کي د ګراف په سرچینه کي یوه کرښه رسموو.
غواړو سطحه پیداکړو، چې د تابع دګراف او x - محور ترمنځ د x په واکوالي کي
پرته وي(د x تابع وي).

د ریمن (ټاکلی) انتلګرال

یادونه: انتیګرال څه شی دی؟

آنتېګرال کونه Integration د ورګډېدلو په معنی دی ، لکه چې یو څوک یوې پردۍ ټولنې ته ورګډیږي یعني ددې پردۍ ټولنې خویونه خپلوي، یعنې دی په دې ټولنه ورزیاتیږي. دا هم په همدې موخه دلته دا موضوع څېړلو ته وړاندې کیږي، چې څنګه د یوې کوچنۍ درجې تابع و یوه جګ درجې فنکشن یا تابع ته ځي.

د انتیګرال هندسي تعریف:

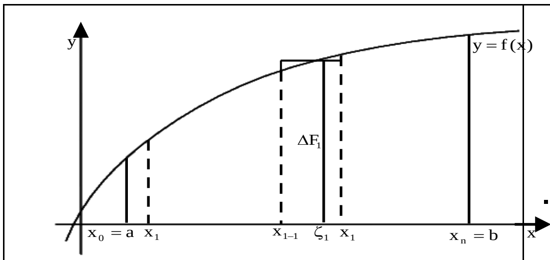
لوریزه سطحه-د انتیګرال تعریف:که یوه f تابع ولرو، نو دx محور او تابع ترمنځ سطحې شمېرل د انتیګرال له لارې کیږي. په دې سطحه کي د x محور پورته لورې ته سطحه مثبته مخنخښه لري او د x محور کښته لورې ته سطحه منفي مخنخښخ لري.

تحلیلي تعریف:

تعریف: د f یوه تابع ورکړ شوي، چې په یوه انتروال [a,b] باندې تعریف دی، نو دa څخه تر b پورې د تابع د انتیګرال څخه د x په محور د f د ګراف او د کرښې x=aاو x=b تر منځ یوه یوه لوریزه سطحه پوهیږو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې برخه کې غوارړو، چې د انتګرال کلیمې ته وده ورکړو. د سطحې کچونې یا اندازه کوونې څخه کړی شو د انتګرال شمېرنې ته راشو، له دې امله انتګرالنیول د مشتق په څېر یا برعکس کارونه یا عملیه ده.



یو تابع $y = f(x)$ لرو. غوارړو ددې تابع د ګراف او د x – محور باندې پرتو ټکو $x_0 = a$ او $x_n = b$ ترمنځ هواره (سطحه) وشمېرو داسې چې $f(x)>0$ وي. (څېره ۱ . ۱)

ددې دندې د حل لپاره د [a,b] اینټروال په n (نه اړیین) برابرو برخو انتروالونو $[x_{i-1}, x_i]$ټوټه کوو.

$$a = x_0 < x_1 <...< x_{i-1}x_i <...< x_n = b$$
$$x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$$

په اینتروال $[x_{i-1}, x_i]$ کې په خوښه$\xi_l \in [x_{i-1}, x_i]$ ټاکو.

د $x = x_{i-1}, x = x_i, y = f(x)$ تر منځ سطحه (هواره) دا لاندې د مستطیل سطحه (و لاړکونجیزه هواره) ده:

$$\Delta F_i(x) = f(\xi_l).\Delta x_i \,, \qquad (4.2)$$

د ټولو پورته مستطیل ډوله کوچنیو سطحو د جمعې (زیاتون) له لارې غوښتونکې، نزدې ټوله سطحه لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$F_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta F_i = \sum f(\xi)\Delta x_i ; ....(4,2)$$

دا نږدیوالی تر هغې ښه کیږي څومره چې د اینتروال [a , b] ویش نری شي یعني $\max \Delta x \to 0$، هرڅومره چې د زیاتیدونکو شمیر ($n \to \infty$) شي.

که (٤ . ٢) تل همغه پوله ارزښت F ولري، په دې اړه نه چې اینتروال [a , b] څنګه ویشل شوی

او $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ څنګه ټاکل شوي، نو f (x) په اینتروال [a,b] کی اینتیګرالوړ دی. دا د بیلګي په

توګه د ټولو ټوټه، متمادی او محدودو توابعو y = f (x) حالت دی.

پیژند (تعریف) ٤ . ١ : لیمیټ (پوله)

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx = F ; (\Delta x \to 0), ...(4,3)$$

که په اینتروال [a , b] کی موجود وي، نو دا د f (x) ټاکلی اینتیګرال بولو، یا د ریمن سطحه

F- Riemann . دلته a د اینتیګرال کېدونکي لاندې(کښته)پوله یا حد او b د ایتیګرال کېدونکي پورته پوله یا حد بلل کیږي او [a,b] د ایتیګرال کېدونکي اینتروال او((f (x Integrand) اینتیګرالېدونکی) او dx د اینتیګرال کېدونکي متحول (Integrationsvariable) بلل کیږي

یادونه ۱ : د ایتیګریشن واریابله یا اووښتونی کیدی شي په خپله خوښه په نخښه شي(مخنخښه یا علامه یی په خوښه وټاکل شي).

(c) ketabton.com: The Digital Library

مونږ لرو: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du$

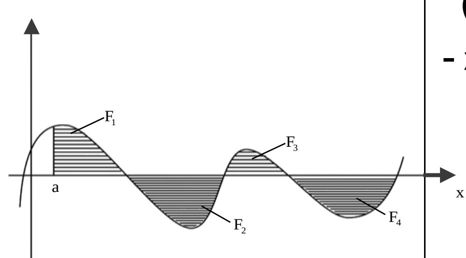
یادونه ۲ : دا پورته تعریف ٤ . ۱ کیدی شي هغه حالت ته پراخه شي، چیرته چی f (x) > 0 باوري نه وي .

که f (x) < 0 وي نو دا ټاکلی اینتیگرال بیا د x -محور تر لاندې منفي هواره لري

.

که د y = f (x) کږه - لکه په (ش ٤ . ۲) کی - داینتیگرآلونې په اینتروال کی د x -محور پرې کړي نو دا مخامخ فرمول د لاندې سطې سره باور لري :

$F = F_1 - F_2 + F_3 - F_4 \ldots$



د تعریف ٤ . ۱ پسې ترلې دا لاندې جمله لرو:

جمله٤ .۱ : که f (x) په [a , b] کې اینتیگرالوړ وي او $c \in [a,b]$ وي، نو باور لري:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

ددې لپاره چی دا پورته مساوات د c ارزښتونو ته پراخه کړی شو، بایدc له اینتروال [a,b]د باندې نه وي پروت، یعنې ټکي a,b او c په یوه اینتروال کی باید پراته وي، په هغه کی چی تابع f (x) اینتیگرالوړ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

موږ دا لاندې تعريف(پيژند) لرو :

پيژند يا تعريف ٤ . ۲ : f (x) په يوه بند انټروال[a, b] کې اينتيګرالوړ دی، نو باور لري:

$$\int_a^b f(x)\ dx = -\int_b^a f(x)\ dx$$

د پيژند تعريف ٤ . ۱ له مخې تل باور لري: $\int_a^a f(x)\ dx = 0$

بنسټيز- يا لومړنی تابع

ددې لپاره چې د مشتقنيولو او اينتيګرال نيولو ترمنځ اړيکی لاس ته راوړو، د لومړنی تابع کلمه په لاندې توګه تعريفوو:

پيژند (تعريف): تابع y = f (x) دې په يوه واز اينټروال I کی تعريف وي. هر يوه هلته موجوده مشتقوړ (x) F (x) تابع چې F' (x) = f (x) شرايط پوره کړي، د f (x) بنسټيز- ، ساده – يا لومړنی تابع بلل کيږي

په ساده توګه ليدل کيږي چې د يوې f (x) تابع لپاره نه يواځې يو بنسټيز تابع F (x) موجود دی، د بيلګي په توګه $F_0(x) = x^2,\ F_1(x) = x^2 + 1,\ F_2(x) = x^2 + 2$ تابع، بلکي په عمومي ډول

$F (x) = x^2 + C$، چې دا ټول مساوي مشتقونه f (x) = 2x لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پورته ښوونو پایله، چې څنګه سړی د یوه متمادي تابع f (x) لومړنۍتابع پیدا کوي، په لاندې ډول ده:

جمله:

y = f (x) دې په اینتروال I کې متمادي تابع وي، نو د $a \in I$ لپاره

$F_a(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ د f (x)، یوه لومړنۍتابع ده، دټولو $c \in I$ لپاره .

د f (x) هره بله لومړنۍ(بنسټیزه) تابع لاندې بڼه لري:

$$F(x) = F_a(x) + C, \; C \in R$$

ځواب :

ښایو چې Fa (x) د f (x) بنسټیز تابع ده. ددې د ښوولو لپاره ښایو چې د Fa (x) لپاره د پورته پېژند شرایط باور لري. د Fa (x) مشتق د $x \in I$ او $x \neq a$ لپاره په لاندې ډول ده.

$$F_a'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \left[\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^{x} f(t)dt \right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \int_a^{x+h} f(t)dt$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot h \cdot f(\xi), \; \xi \in [x, x+h]$$

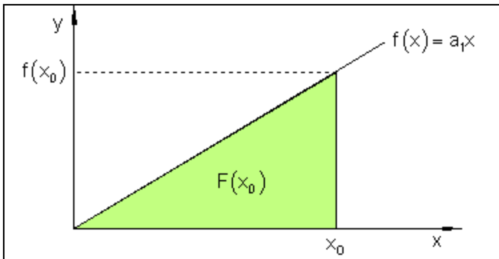
(c) ketabton.com: The Digital Library

(د لیمیټ منځ ارزښت جملې له مخې داسې یوه ξ شته دی
(د متمادیت له امله $(f(\xi) \to f(x))$
= f(x)

سطحه او لومړنی تابع:

سطحي تابع ته ترمخ راوړنه:

د تابع $f(x) = a_1 x$ ګراف په کارتيزي وضعيه سيستم (پروت ولاړسيستم) په سرچينه کې يوه کرښه انځوروي.
يو تابع غواړو پيدا کړو، چې د ګراف او x -محور ترمنځ، د x_0 په واکوالي يا تابعيت کې سطحه په ګوته کوي.
دا چې دا جوړه شوې سطحه يو مثلث دی، نو حل يې د مثلث د سطحي فرمول په مرسته $A = \frac{g \cdot h}{2}$ ساده پيدا کيږي:
زموږ د مسألې لپاره متحوله داسې تغيروو:
$A \to F(x_0);\ g \to x_0;\ h \to f(x_0) = a_1 x_0$



$$F(x_0) = \frac{x_0 \cdot f(x_0)}{2}$$

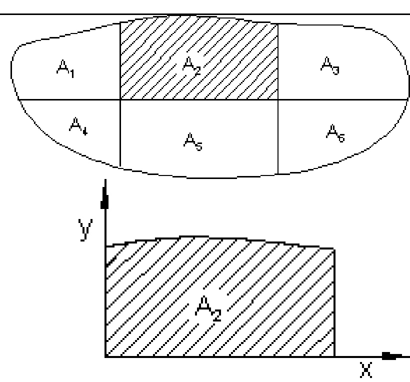
د $f(x_0) = a_1 x_0$ سره په لاندې ډول دی:

$$F(x_0) = \frac{x_0 \cdot a_1 x_0}{2} = \frac{a_1}{2} x_0^2$$

تابع $F(x_0)$ د ګراف او د x - محور ترمنځ سطحه د x_0 په واکوالي(تابعيت) کې تشريح کوي يا ښايي. موږ دا تابع د **سطحي تابع** بولو.

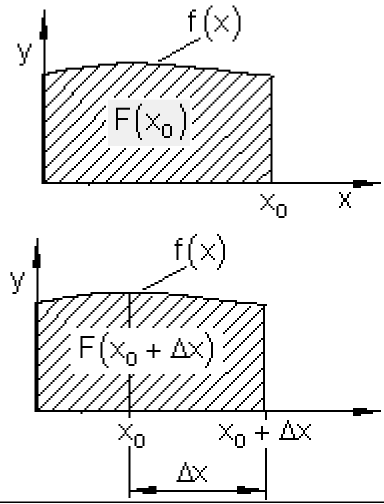
د سطحي پرابلم:

هره له کږوکرښو رابنده سطحه په پای ډېرو پلونو(قدمونو)، چې په هغې کې فقط يوه يوه کږه کرښه رامنځ ته کيږي.
نورې ټولې رابندونې سيده کرښيزې دي.
هره يوه د سطحې برخه(د بېلګې په توګه دلته A_2) کېدی شي د وضعيه قيمتونو سيستم کې د يوې سطحې په څېر انځور شي، چې د کږې کرښې او پروت محور ترمنځ پرته وي.

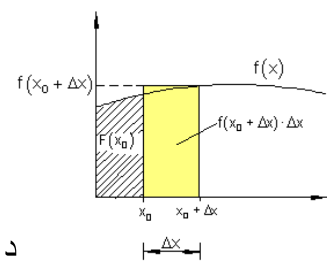


(c) ketabton.com: The Digital Library

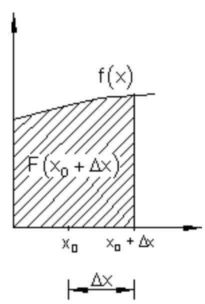
که له کړوکږښو رابند گراف د f(x) متمادي تابع وي، نو پوښتنه رامنځ ته کیږي، چې ایا یو تابع شته چې د افقي(پروت) محورارزښت x_0 په سطحه $F(x_0)$ تنظیم کړي، لکه په پیلبیږلگه کې؟
که داسې یو تابعF شتون ولري، او سطحه $F(x_0)$ چې د x_0 افقي محورارزښت تنظیم وي، نو باید د افقي(پروت) محور ارزښت $(x_0+\Delta x)$ په سطحه $F(x_0+\Delta x)$ باندې تنظیم کړای شي.



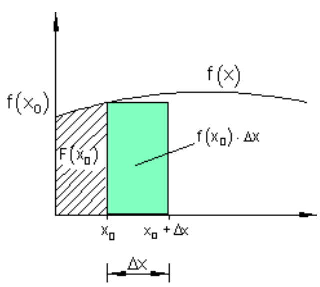
په یوه څلورضلعي(مستطیل) کې د سطحې رابندول:



د منحني لاندې په نخښه شوې سطحه د ربښتوني سطحې څخه لویه ده



$F(x_0+\Delta x)$ رېښتوني سطحه ده.



د منحني لاندې په نخښه شوې سطحه له رېښتوني سطحې څه کوچنۍ ده.

که د سطحې پټې (یا کوچنې مستطیلونه یا ولاړکوډیز)هرڅومره کوچنې شي، په همغه اندازه د اصلي سطحې د مساحت څخه یې توپیر کمیږي.
دا اړودوالی د ریاضیاتو له مخې په لاندې توگه فرمول بندي کیږدی شي:

$F(x_0)+f(x_0+\Delta x)\cdot\Delta x$	$F(x_0+\Delta x)$	$F(x_0)+f(x_0)\cdot\Delta x$

دا مو دې لاندې نابرابرونونویا نامساواتو ته راهڅوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$F(x_0)+f(x_0)\cdot\Delta x \le F(x_0+\Delta x) \le F(x_0)+f(x_0+\Delta x)\cdot\Delta x \quad |F(x_0)$$
$$\Leftrightarrow f(x_0)\cdot\Delta x \le F(x_0+\Delta x)-F(x_0) \le f(x_0+\Delta x)\cdot\Delta x \quad |:\Delta x$$
$$\Leftrightarrow f(x_0) \le \frac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0)}{\Delta x} \le f(x_0+\Delta x)$$

لیمیټ یې نیسو(پوله یې پیدا کوو):

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x_0) \le \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \le \lim_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x)$$
$$f(x_0) \le F'(x_0) \le f(x_0)$$
$$f(x_0) \le F'(x_0) = f(x_0)$$

نو لرو: $F'(x_0)=f(x_0)$

دا په دې معنا، چې د سطحې F(x) مشتق د کږې کرښې د تابع ارزښت $f(x_0)$ سره په x_0 ځای کې برابر دی.
موږ لیکو:

$$\boxed{F'(x)=\frac{dF(x)}{dx}=f(x)} \quad \text{یا} \quad F'(x_0)=\frac{dF(x_0)}{dx}=f(x_0)$$

که موږ بریالي شو، داسې یو تابع F(x) پیداکړو چې مشتق یې د رابندې کږې f(x)تابع وي، نو F(x) د سطحې تابع دی.
که موږ یو تابع د لومړني تابع څخه رابیل کړو، نو دا مشتق کول بولو. د یوې سطحې تابع پیدا کول په روښانه توګه ددې کړنلارې برعکس دی.

سړی کړی شي فورمال ووایي:
د یوې سطحې مساحت تابع، چې پیداکړو، دا معنا لري چې ورګډول یا انتېګرالول یې شمېرو.
د یوه ساده توان تابع په بیلګه د احساس له مخې یوه لار پیداکیدی شي، چې دا څنګه ایتېګرالوي.

توانتابع :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=x^3 \quad \Rightarrow f'(x)=3\cdot x^{3-1}=3x^2$$

مشتق په دې معنا چې: اکسپوننت په یو کمیږي او پوتنځتابع د زاړه پوتنځ سره ضربیږي.
انتیګرالونه (زیاتونه یاورګډونه) په دې معنا چې: اکسپوننت په یو جګیږي اوپوتنځتابع په نوي اګسپوننت وېشل کیږي.
دا همدا اوس ازمایو:

پوتنځتابع:

$$f(x)=3x^2 \quad \Rightarrow F(x)=\frac{3}{2+1}x^{2+1}=\underline{\underline{x^3}}$$

تابع F(x) د f(x) بنسټتابع (لومړنۍ تابع یا ساده تابع) بلل کیږي، ځکه چې f(x) له F(x) څخه لاس ته ارځي یا را پیداکیږي یا راځیږي.

ناټاکلی انتیګرال

و به ګورو، چې نا ټاکلی انتیګرال د لومړنۍ تابع لپاره بل نوم دی.

که دیوې ورکړ شوې f(x) تابع F(x) لومړنۍ تابع، یعني F(x) وپېژنو، نو د یوې ثابتې c د ور جمع کولوسره د f(x) د ټولو لومړنیو توابعو سټ G لاسته راوړو(c په خوښه یو حقیقي عدد دی).
موږ د f(x) تابع د F(x) لومړنۍ تابع ټاکنه یا اینتګرلونه هم بولو او ددې له پاره لیکو:

$$\frac{dF}{dx}=f(x) \quad \Leftrightarrow \quad dF(x)=f(x)dx \quad \Leftrightarrow \quad F(x)=\int dF(x)=\int f(x)dx$$

نو لرو : $F(x)=\int f(x)\,dx$

دا تراوسه فورمال لیکندود وو. اوس دا ژوند ته رابولو.
موږ لومړنۍ توابع پلټو

بیلګه: لومړنۍ تابع F(x) دې پیدا شي، چې مشتق یې f(x) = 2x دی. قاعده داسې ده $F(x)=\int f(x)dx=\int 2x\,dx$

(c) ketabton.com: The Digital Library

موږ ازمایو:

$F(x)=x^2$ ځکه چې $F'(x)=2x=f(x)$

$F(x)=x^2+2$ ځکه چې $F'(x)=2x=f(x)$. په ټولیزه توګه باور لري:

$F(x)=x^2+C$ ځکه چې په هرحالت کې لرو: $F'(x)=2x=f(x)$

دواړه توابع په ثابت غړي کې یو له بل توپیر لري. دوی همغه مشتق لري، ځکه چې د مشتق سره
هغه ثابت عدد له منځه ځي. له دې امله باید دې خپلې لار ته تغیر ورکړو.

قاعده(لار): باور لري: $\boxed{\int f(x)d\,x=F(x)+C}$

د لومړنیو توابعو سټ(ډېری)

بیلګه ښایي، چې د تابع f(x) لپاره نه یواځې یو لومړنی تابع بلکې ناپای ډېر توابع شته، چې یواځې ثابت عدد کې یو له بل سره توپېر لري، چې دا د f(x) د لومړنییو توابعو سټ بولو.

بیلګه

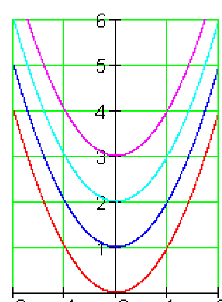
یو لومړنیتابع F(x) دې پیدا شي، چې د هغه مشتق $f(x) = 3x^2 + 2$ وي.

$F(x)=x^3+2x+C$ ، ځکه چې $F'(x)=3x^2+2=f(x)$

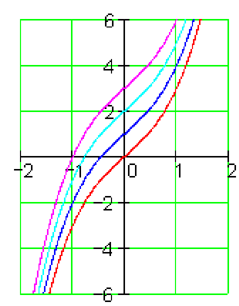
د ټولو لومړنیو توابعو ډېرئ دې د منحنیو ډلې په ځېړ انځور شي، چې فقط ثابتو عددونو کې یو له بل توپېر لري.

ددې لپاره دې د ګرافونو لاندې دوه بېلګې وکتل شي.

$F(x)=x^2+C$



$F(x)=x^3+2x+C$



(c) ketabton.com: The Digital Library

انتیګرالشمېرنه د مشتقشمېرنې برعکس دی.

لاندې توابع په اړونده توګه په ،، برعکس مشتقولو،، له لارې. موږ د مخه ځنې انتیګرال قاعدې لوستلي.

لکه چې ومو لیدل دواړه تمرینونه د همغه تیپ او اصولو له لارې اجرا کیږي، خو یواځې لیکنه یې توپیر لري

دویم(لاتین) د سطحې د شمېرلو لپاره د مشتق او انتیګرال اصلي جملې ته ګوته نیسو.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = \left|F(b) - F(a)\right|$$

د یوې ساده بیلګې له لارې د اصلي جملې په مرسته دا سې مخ ته ځو

تمرین (چا چې ډېر کار کوی وي) شوی لیدونکی ګوري یا پیژني، چې د سطحې مساحت په دې بیلګه کې بې له مطلق ارزښت شمیرل کېدای شي.، ځکه چې په دې بیلګه کې سطحه د x- محور پورته لور ته پرته ده .

د دې درس تکمیل – یا *پوره کیدنې لپاره بیلګې.

1 . ټول تام کسري تابع د x -محور او د کرښو x = -2 او x = 1 سره یوه سطحه پوره رابندوي یا راتړي. د سطحې مساحت وشمیرئ.

$$f(x) = 2x^3 + 2x^2 - x + 6$$
$$a = -2 \;,\;\; b = 1$$

2 . د دوه توابعو *f(x)* او *F(x)* مساوات ورکړ شوي دي (الف) صفرځایونه وشمېرئ او د *f(x)* ګراف وکاږئ. (ب) وښایئ، چې *F(x)* د *f(x)* لومړنی تابع دی. (پ) د *f(x)* اوx - محور څخه پوره رابندې سطحې مساحت وشمیرئ.

:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = 3e^{-x} \cdot \left(2x - x^2 + 1\right)$$
$$F(x) = 3 \cdot \left(x^2 - 1\right) \cdot e^{-x}$$

3 . د ٤ – مې درجې تامراشنل تابع د x- محور په درې ټکو کې غوڅوي او د هغې سره یوه سطحه مکمله رابندوي. د سطحې مطلقه مساحت وښایئ.

$$f(x) = x^2 \cdot (x+1) \cdot (x+3)$$

٤ . د *f(x)* مثلثاتي تابع د -محور د a او b ټکو او همداسر نورو ټکو کې غوڅوي. د *f(x)* او x -محور تر منځ د x=a تر x=b په انتروال کې د سطحې مساحت وشمېرئ.

$$f(x) = \sin 2x + \cos x$$
$$a = -\frac{\pi}{6}\ ,\ \ b = \frac{3}{2}\pi$$

5 . دوه تامراشنل توابع *f(x)* او *g(x)* په ټکو A, B او C کې غوڅوي. (الف) د شي حالت رسم کړئ. (ب) د سطحو مساحت د *f(x)* او *g(x)* ترمنځ له x=a څخه تر x=b انتروال کې وشمېرئ.

$$f(x) = x^3 + \tfrac{5}{4}x^2 - \tfrac{7}{4}x - \tfrac{1}{2}$$
$$g(x) = 2x^2 + 2x - 4$$
$$A(a;0)\ ,\ \ B(b;0)$$

6 . د وضعیه قېمتسیستم په لومړئ او دویمه څلورمه(ربع) کې تابع *f(x)* او *g(x)* تابع ټیک په دوه ټکو کې غوڅوي. (الف) غوڅټکي یې وښایاست او انځور یې وکاږئ. (ب) د دواړو ګرافونو څخه کوم د سطحې مساحت رابندیري.

$$f(x) = x + \frac{1}{x+1} \quad (x \neq -1)$$
$$g(x) = 3\tfrac{1}{4}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

7 . د دوه توابعو $f(x)$ او $F(x)$ مساوات ورکړل شوي دي. (الف) صفرځایونه يې وشمېرئ او د $f(x)$ گراف وکاږئ. (ب) وښايئ، چې $F(x)$ د $f(x)$ لومړی تابع دی.

(پ) د سطحې مساحت وشمېرئ، چې د $f(x)$ له گراف د وضعیه سیستم له محورونو او د کرښې x=4 خخه رابنده وي.

$$f(x)=\frac{x^2+2x-1}{x^2+2x+1}$$
$$F(x)=\frac{x^2+1}{x+1}$$

8 . کسري راشنل تابع د -محور ، کرښې او کرښې سره په دریمه څلورمه(ربع) یوه سطحه رابندوي.

د دې کچ عدد وښايئ.

$$f(x)=\frac{x^3+x^2+2x}{4x-2}=\tfrac{1}{4}x^2+\tfrac{3}{8}x+\tfrac{11}{16}+\frac{11}{32x-16}$$

حلونه.

$$F(x)=\tfrac{1}{4}x^4-\tfrac{4}{3}x^3+2x+c$$
$$G(x)=\tfrac{1}{20}x^5-\tfrac{1}{2}x^4+\tfrac{4}{3}x^3+c$$
$$H(x)=\frac{1}{3}a\cdot x^3-\frac{x^2}{6}+x+c$$
$$K(x)=\tfrac{1}{2}x^4-4x^2+c$$
$$L(x)=\frac{x^5}{10}+\frac{2}{9}x^3-4x+c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۲ -

$$\int f(x)\,dx = x^2 + \tfrac{1}{4}e^{4x} + c$$

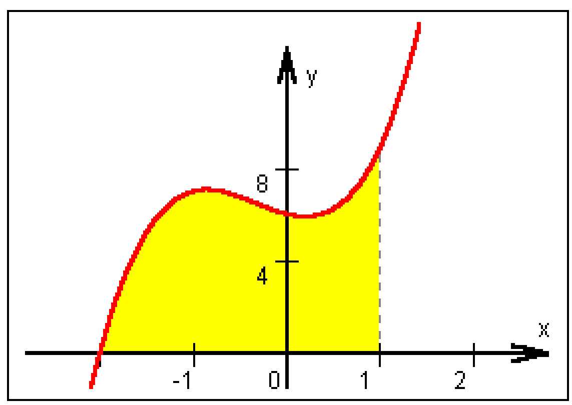
$$\int g(x)\,dx = \tfrac{1}{2}e^{x} - \tfrac{1}{2}e^{0,5x} + c$$

$$\int h(x)\,dx = \tfrac{1}{2}x^2 + 2x - 2\ln|x| + c$$

$$\int k(x)\,dx = -\cos x + \tfrac{1}{2}\sin 2x + c$$

$$\int l(x)\,dx = 2\sqrt{x^3} + c$$

۲ . ۱ –



$$A = \int_{-2}^{1}\left(2x^3 + 2x^2 - x + 6\right)\cdot dx$$

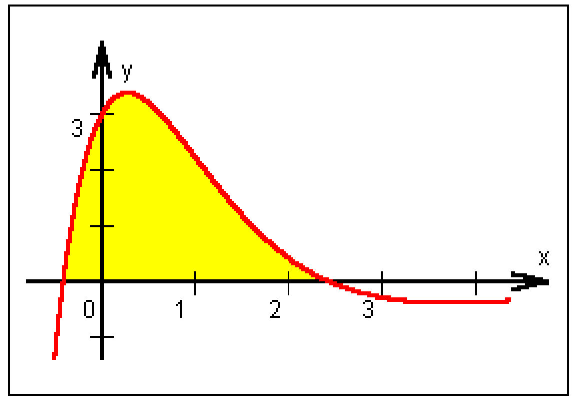
$$= \left[\tfrac{1}{2}x^4 + \tfrac{2}{3}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 + 6x\right]_{-2}^{+1}$$

$$= \left|6\tfrac{2}{3} - \left(-11\tfrac{1}{3}\right)\right| = \underline{\underline{18FE}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۲ : ۲ –



$$F'(x) = f(x)$$

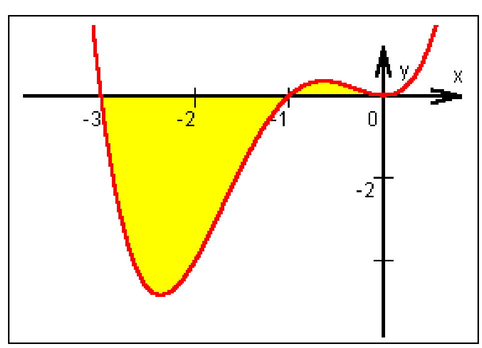
$$F'(x) = 3 \cdot 2x \cdot e^{-x} + 3(x^2 - 1) \cdot e^{-x} \cdot (-1)$$

$$= 3e^{-x} \cdot (2x - (x^2 - 1)) = f(x)$$

$$A = \int_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}} f(x) \cdot dx = [F(x)]_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}}$$

$$A = \left[3 \cdot (x^2 - 1) \cdot e^{-x}\right]_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}}$$

$$A \approx |1,30 - (-3,76)| = \underline{\underline{5,06\,FE}}$$



۲ : ۳

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x^2 \cdot (x+1) \cdot (x+3) = x^4 + 4x^3 + 3x^2$$

$$A = \int_{-3}^{-1} \left(x^4 + 4x^3 + 3x^2\right) \cdot dx + \int_{-1}^{0} \left(x^4 + 4x^3 + 3x^2\right) \cdot dx$$

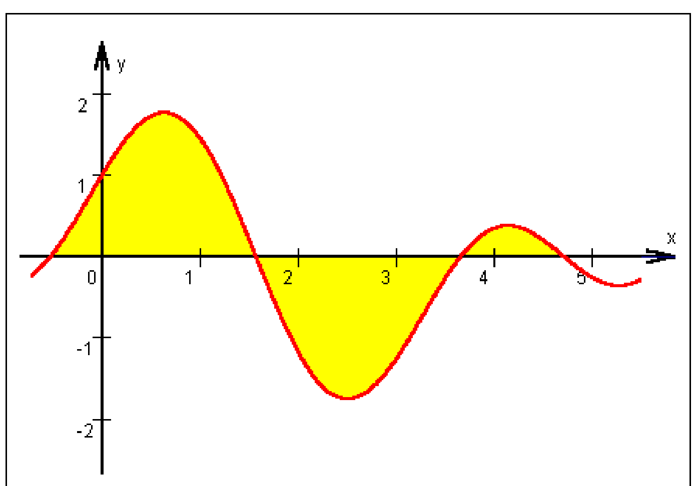
$$A = \left[\tfrac{1}{5}x^5 + x^4 + x^3\right]_{-3}^{-1} + \left[\tfrac{1}{5}x^5 + x^4 + x^3\right]_{-1}^{0}$$

$$A = \left|-0{,}2 - 5{,}4\right| + \left|0 - (-0{,}2)\right| = \underline{\underline{5{,}8\,FE}}$$

۲ . ٤ –

$$f(x) = \sin 2x + \cos x$$
$$= 2\sin x \cdot \cos x + \cos x$$
$$= \cos x \cdot (2\sin x + 1)$$

$$0 = \cos x \ \rightarrow\ x_1 = \tfrac{1}{2}\pi\,,\ x_2 = \tfrac{3}{2}\pi$$
$$0 = 2\sin x + 1 \ \rightarrow\ x_3 = -\tfrac{1}{6}\pi\,,\ x_4 = \tfrac{7}{6}\pi$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A = \int_{x_3}^{x_1} f(x)\cdot dx + \int_{x_1}^{x_4} f(x)\cdot dx + \int_{x_4}^{x_2} f(x)\cdot dx$$

$$A = \left[-\tfrac{1}{2}\cos 2x + \sin x\right]_{x_3}^{x_1} + [\ \ ]_{x_1}^{x_4} + [\ \ ]_{x_4}^{x_2}$$

$$A = 2{,}25\,FE + 2{,}25\,FE + 0{,}25\,FE = \underline{\underline{4{,}75\,FE}}$$

۲ . ٥ ـ

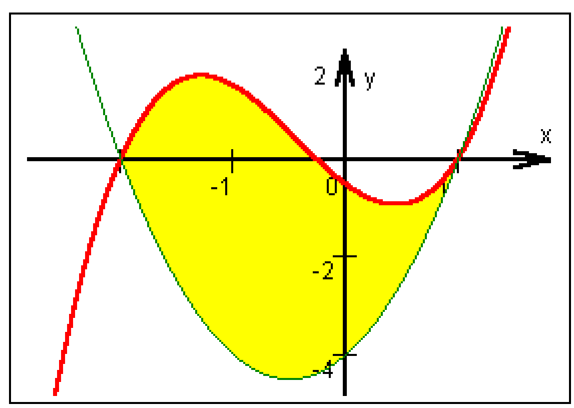
$$g(x) = 2x^2 + 2x - 4$$

$$0 = x^2 + x - 2$$

$$x_{1,2} = -\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{2{,}25}$$

$$\underline{\underline{x_1 = a = -2}}$$

$$\underline{\underline{x_2 = b = +1}}$$



$$A = \int_{-2}^{+1} \left(f(x) - g(x)\right)\cdot dx$$

$$= \int_{-2}^{+1} \left(x^3 - \tfrac{3}{4}x^2 - 3\tfrac{3}{4}x + 3\tfrac{1}{2}\right)\cdot dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \left[\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{4}x^3 - 1\tfrac{7}{8}x^2 + 3\tfrac{1}{2}x\right]_{-2}^{+1}$$

$$= \left|1\tfrac{5}{8} - \left(-8\tfrac{1}{2}\right)\right| = \underline{\underline{10\tfrac{1}{8}\ FE}}$$

۲ . ٦ –

$$x + \frac{1}{x+1} = 3\tfrac{1}{4}$$

$$\frac{x^2 + x + 1}{x+1} = 3\tfrac{1}{4}$$

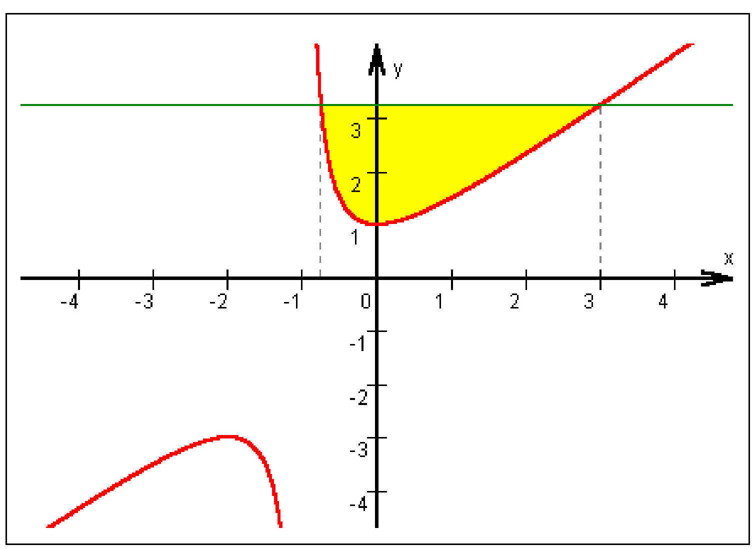
$$x^2 + x + 1 = 3\tfrac{1}{4}x + 3\tfrac{1}{4}$$

$$x^2 - 2\tfrac{1}{4}x - 2\tfrac{1}{4} = 0$$

$$x_{1,2} = \tfrac{9}{8} \pm \sqrt{\tfrac{81}{64} + \tfrac{144}{64}} = \tfrac{9}{8} \pm \tfrac{15}{8}$$

$$x_1 = a = -\tfrac{3}{4}$$

$$\underline{\underline{x_2 = b = 3}}$$

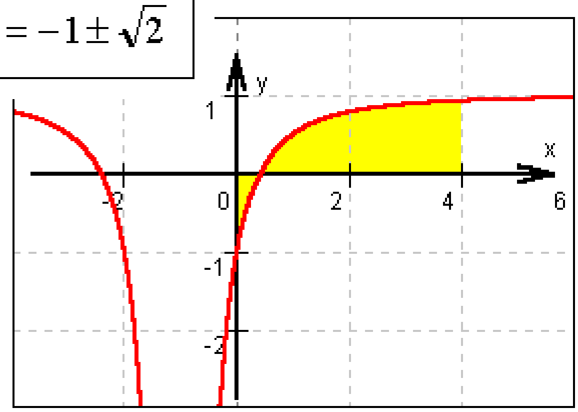


(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A=\int_a^b\left(g(x)-f(x)\right)\cdot dx$$
$$=\int_{-\frac{3}{4}}^{3}\left(3\tfrac{1}{4}-x-\frac{1}{x+1}\right)\cdot dx$$
$$=\left[3\tfrac{1}{4}x-\tfrac{1}{2}x^2-\ln(x+1)\right]_{-0,75}^{+3}$$
$$\approx\left|3{,}86-(-1{,}33)\right|=\underline{\underline{5{,}19\,FE}}$$

۲ . ۷ –

$$0=x^2+2x-1$$
$$x_{1,2}=-1\pm\sqrt{2}$$



$$F'(x)=\frac{2x\cdot(x+1)-(x^2+1)}{(x+1)^2}$$
$$=\frac{x^2+2x-1}{x^2+2x+1}=f(x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

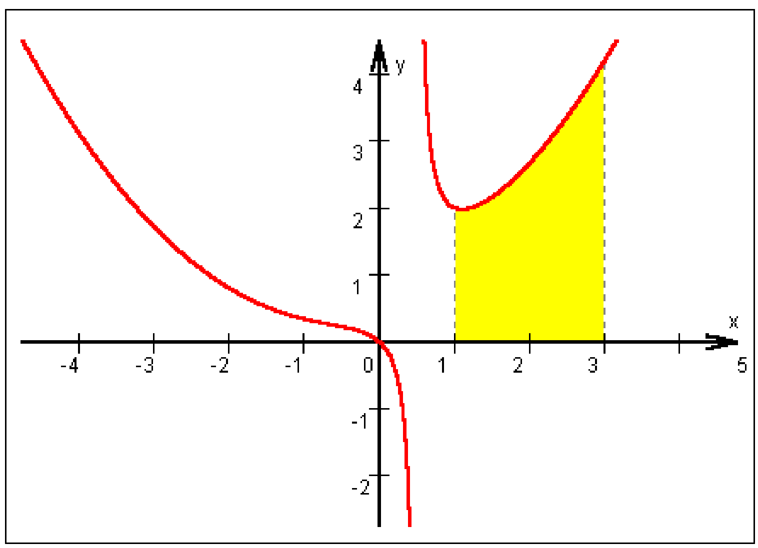
$$A = \int_{0}^{-1+\sqrt{2}} f(x)\cdot dx + \int_{-1+\sqrt{2}}^{4} f(x)\cdot dx$$

$$= \left[\frac{x^2+1}{x+1}\right]_0^{-1+\sqrt{2}} + \left[\frac{x^2+1}{x+1}\right]_{-1+\sqrt{2}}^{4}$$

$$= 0{,}17\,FE + 2{,}57\,FE = \underline{\underline{2{,}74\,FE}}$$

په پورته کي FE د سطحي واحد(يوون) په معنادى

۲ . ۸ _



$$A = \int_{1}^{3}\left(\tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{3}{8}x + \tfrac{11}{16} + \frac{11}{32x-16}\right)\cdot dx$$

$$= \int_{1}^{3}\left(\tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{3}{8}x + \tfrac{11}{16}\right)\cdot dx + \int_{1}^{3}\frac{11}{32x-16}\cdot dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A_1=\left[\tfrac{1}{12}x^3+\tfrac{3}{16}x^2+\tfrac{11}{16}x\right]_1^3=5\,\tfrac{1}{24}\;FE$$

$$z=32x-16$$

$$\frac{dz}{dx}=32\;\Rightarrow\;dx=\tfrac{1}{32}\,dz$$

$$A_2=\int_{16}^{80}\frac{11}{z}\cdot\tfrac{1}{32}\,dz=\tfrac{11}{32}\cdot[\ln z]_{16}^{80}\approx 0{,}55\,FE$$

$$\underline{\underline{A\approx 5{,}59\,FE}}$$

په پورته کي FE د سطحي واحد(یوون) په معنادی

بیلګه:

مشتقوړ مګر نامتمادي (پرېکیدونکی) مشتقوړ تابع:

لرو:

$f(x)=\begin{cases}x^2\,\sin\left(\frac{1}{x}\right)\\ 0\end{cases}$	د $x\neq 0$ لپاره د $x=0$ لپاره

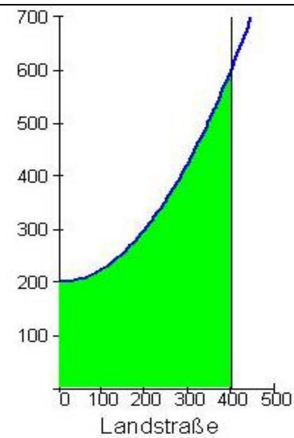
نو $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{f(x)}{x}=x\,\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\to 0$ د $x\to 0$ لپاره ، له امله مشتق$f'(0)=0$ دی. او د $\forall x\neq 0$ لرو:

$f'(x)=2x\,\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)-\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ ، جبرې چې $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)$ ناشته دی. تابع f له دې امله مشتقوړ دی مګر نه ناپرېکېدونکی(متمادي) مشتقوړ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټاکلي انتیګرال شمیرنه

ټاکلی انتیګرال همغه د ریمن انتیګرال دی، چې یوه د تابع د ګراف او x محور ترمنځ سطحه شمیري(پسې غزېدلی دی، خو تکرار د زده کړې مور ده).



ټاکلی انتیګرال:

که f یو حقیقي تابع وي، نو د ټاکل انتیګرال $\int_a^b f(x)dx$ (لوستل: د $f(x)$ انتیګرال د پولې(حد) a تر پولې(حد) b یا د a او b حدونو ترمنځ یا انتیګرال په $f(x)$ باندې له a تر b) لاندې یوه لوریزه سطحه پوهېږو د f ګراف لاندې د a او b تر منځ.

G دې په بند انتروال $a \leq x \leq b$ کې د g(x) لومړنی انتیګرال وي، د $g(x)=\int_a^x f(t)dt$ سره، نو باور لري: $\int_a^t f(t)dt = G(b)$

دا چې د دوه لومړنیو توابعو F او G تر منځ یو ثابت C توپیر شته، نو G(x) = F(x) + C باور لري. د x=b لپاره لاسته راوړو: G(b) = F(b) + C

دا چې $G(x) = \int_a^a f(t)dt = 0$ دی او G(a)=F(a)+ C دی، نو C = -F(a) ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې معنا، چې G(b) = F(b) – F(a) همداسې $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$.

د متحولې د نوم بدلون څخه وروسته لاس ته راوړو $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

له دې سره مو د مشتق او انتیګرال جمله لاس ته راوړه

یا دا وینا د مشتق - او انتیګرالشمېرنې بنسټیزه جمله بلل کیږي:

تعریف: f په انتروال a ≤ x ≤ b کې متمادي تابع ده او F د f لومړنی تابع ده، نو ټاکلی انتیګرال دی :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)_a^b = F(b) - F(a).$$

د F(b) – F(a) لپاره زيات وخت $[F(x)]_a^b$ لیکو. په دې توګه دی

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$$

له دې سره مو د ټاکي انتیګرال شمېرنه په لومړني انتیګرال بېرته واړوله او د مشتق او انتیګرال تر منځ مو اړیکې رامح ته کې.

بیلګې:

$$a)\ \int_1^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{x}\right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

$$b)\ \int_2^4 \frac{1}{x^2}dx = \int_2^4 x^{-2}dx = \left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_2^4 = \left[-\frac{1}{x}\right]_2^4 = \frac{1}{4}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$c)\ \int_1^3 \sqrt{x}\,dx = \int_1^3 x^{\frac{1}{2}}\,dx = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right] = \frac{2}{3}[\sqrt{x^3}]_1^3(\sqrt{3^3} - \sqrt{1^3}$$

$$= \frac{2}{3}(3\sqrt{3} - 1) = 2(\sqrt{3} - \frac{1}{3})$$

د ټاکلو انتیګرالونو لپاره لاندې جملې رښتیا دي:

$$\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b [f(x) + g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx +$$

تکمیلیدونکي بنسټونه:

د F(b) – F(a) له امله د انتګرالونې ثابته c له منځه ځي. له دې امله کولي شو د انتیګرال ثابتي ټاکلو لپاره c=0 ولیکو.

بیلګه:

: د ټاکلي انتیګرال $\int_{-\pi}^{+0,5\pi} \cos x dx$ ارزښت و ټاکی.

ښوونه: موږ په دا لاندې ډول ښایو:

$$\int_{-\pi}^{+0.5\pi} \cos x\,dx = [\sin x]_{-\pi}^{0.5\pi} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin(-\pi) = 1 - 0 = 1$$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه : دا چې په دې برخه کې یواځې د ټاکلي انتیګرال ارزښت غوښتل شوي دی او نه د یوې منحني لاندې سطحه، نو باید نه دی چې صفرځایونه په پام کې ونیول شي.

عوره یادونه: دادې په یاد وي، چې ناټاکلی انتیګرال تابع ده او ټاکلی انتیګرال یو عدد.

د ناټاکلي انتیګرال څخه و ټاکلي انتیګرال ته

ترمخ راوړنه یا وړاندراوړنه

مور ولیدل، چې څنګه یو تابع $f(x)$ ته لومړنی تابع $F(x)$ منځ ته راوړی شو، نو ناپای ډېر لومړني توابع شته دی، چې فقط د یوې ورجمع کوونکي ثابتې له امله یو له بل توپیر لري.

لرو: تابع $f(x)=3x^2+2$ او د دې د لومړنیو توابعو سټ $f(x)=x^3+2x+C$

پېژند : د ټولو لومړنیو توابعو سټ و یوې تابع $f(x)$ ته ،،ناټاکلی انتیګرال ،، بلل کیږي او ددې له پاره لیکو: $\int f(x)dx=F(x)+C$

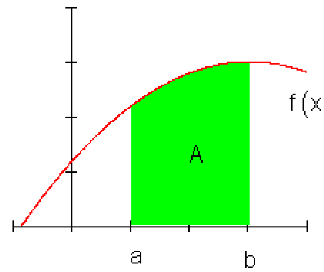
د مشتق- او انتیګرالشمېرني ترمنځ اړیکي کېدی شي د لاندې جملې له لارې لاس ته راشي.

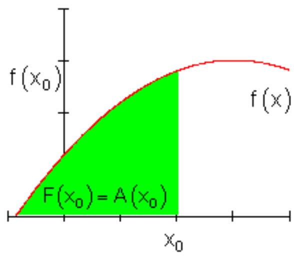
جمله(قضیه) : د ناټاکلی انتیګرالشمېرنه د مشتقشمېرني برعکس انځوروي

$$\frac{d\left[f(x)\right]+C}{dx}=\left[F(x)+C\right]'=f(x)$$

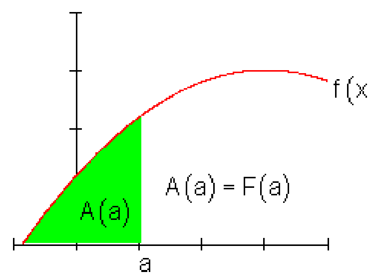
د تابع د ګراف لاندې او د انتروال $[a ; b]$ تر منځ سطحه دې و ټاکل شي. زمور په دې پرابلم مور تر اوسه لاس ته راوړې زده کړې کاروو.

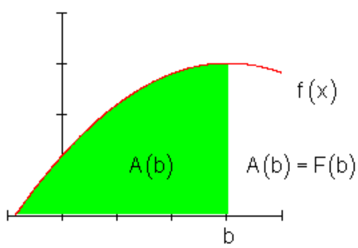
(c) ketabton.com: The Digital Library



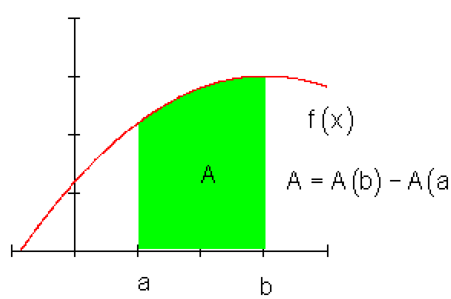


د یوې سطحې تابع شتون مو فکر دې لاندې پوهنې (زده کړې) ته لاربنوده وې:
د یوې سطحې، چې د یوې په پام کې نیولې $f(x)$ تابع ګراف لاندې ده تر x_0 ځای پورې او یوې $F'(x)$ تابع، چې د$F(x)$ تابع مشتق د x_0 ځاي د f تابع د تابع ارزښت سره د x_0 په ځاي کې برابر وي، ترمنځ اړیکې شته دی، یعنې $F'(x)=f(x)$





د انتروال [a,b] حدونو ترمنځ سطحې پیداکول د تابع د ګراف سطحو د کمښت څخه په ځاي (A(b)) b او سطحې په (A(a)) a ځاي کې .، یعنې
$A= A(b) – A(a)$په همدې توګه $F= F(b) – F(a)$ لاس ته راځي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

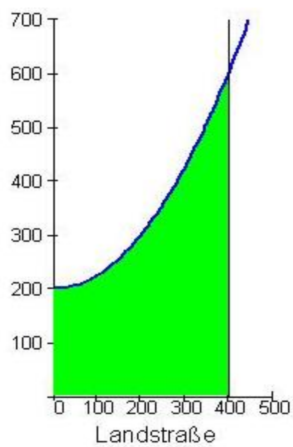
په انتروال [a,b] کې د تابعګراف لاندې سطحه د لومړنيو توابعو تفريق دی:

$$A = F(b) - F(a) := \int_a^b F(x)dx$$

دا انتيګرال ټاکلی انتيګرال هم بلل کيږي.

جمله :
دا تر اوسه لاس ته راوړو معلوماتو په بنسټ کړی شو، چې په پيل بېلګه کې راوړې د چمن سطحه وشمېړو.

ثابته له تفريق سره لرې کيږي. په عمل کې د دې مسآلې د حل لپاره يوه بله لار ګتوره راوستلې يا ګټوره ښوولې:



$$A = \int_0^{400} \left(\frac{1}{400} x^2 + 200 \right) dx = \frac{1}{1200} x^3 + 200 \cdot x |_0^{400}$$

$$= \frac{1}{1200} \cdot 400^3 + 200 \cdot 400 \left[\frac{1}{1200} 0^3 + 200 \cdot 0 \right]$$

$$= \frac{1}{1200} \cdot 400^3 + 200 \cdot 400 = 133333.\bar{3}$$

د انتيګرالوني قاعدی

د ناټاکلي ايتيګرال انتيګرالوني قاعدې: په لاندې اينتيګريشن قاعدوکي د اينتيګريشن ثابته باندې صرف نظر کيږيدلته مساوات تر يوې ورجمع شوې ثابتې C پورې مساوات دی ، په دې معنا چې دمساواتو تر منځ يواځې يوه ثابته کيدی شي زياته يا کمه وي. دا قاعده

(c) ketabton.com: The Digital Library

کيدی شي چی په ټاکلي انتيګرال کې ښوولي جملی سره سم ټاکلي ايتيګرال ته نقل شي يعني په ټاکلي ايتيګرال استعمال شي . دا قاعدې کيدی شي چی د تېرو درسونو سره سم د دواړو خواو د مشتق نيولو سره وښول شي.

جمله :

د يوې ثابتي سره ضرب : که تابع f (x) په يوه اينتروال کی متمادي وي ، نو لاندې باور لري:

$$\int a\cdot f\,(x)\,dx = a\int f\,(x)\,dx\,, \qquad a\in R$$

جمله: د جمعي (تفريق) قاعده که $f_1(x)$ او $f_2(x)$ په يوه ايتروال کی نه پرېکېدونکي وي ، نو باور لري

$$\int (f_1(x)\pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$$

بيلګې:

لاندې ايتيګرالونه کيدی شي چی د مخ ته تېرو جملو په استعماليدو او ساده څيره بدلون بيرته په بنسټيزو اينتيګرالونو بدلګړای شي

$$a)\quad \int \frac{dx}{3x^4} = \frac{1}{3}\int x^{-4}dx = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-3} + C = -\frac{1}{9x^3} + C,$$

$$b)\quad \int 3x^2 + 4x - 1)\,dx = 3\int x^2dx + 4\int xdx - \int dx = 3\cdot\frac{1}{3}x^3 + 4\cdot\frac{1}{2}x^2 - x + C$$

$$= x^3 + 2x^2 - x + C,$$

$$c)\quad \int \frac{2x^3 - 3x}{\sqrt{x}}dx = 2\int \frac{x^3}{\sqrt{x}}\,dx - 3\int \frac{x}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int x^{\frac{5}{2}}dx - 3\int x^{\frac{1}{2}}dx$$

$$= 2\cdot\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} - 3\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{4}{7}x^3\cdot\sqrt{x} - 2x\cdot\sqrt{x} + C$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اکسپوننشل توابعو انتیګرالونه

بنسټ :

د طبیعي اکسپوننشل تابع $f(x)=e^x$ لپاره لرو: $(a\in IR^+, a\neq 1)\int e^x dx = e^x + C$

د ټولیز اکسپوننشل تابع a^x لپاره لرو: $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

بیلګه :

دا ناټاکلی اکسپوننشل تابع $\int 2^{x-3}dx$ غواړو پیداکړو

بنه بدون:د توان قانون سره سم لرو $2^{x-3}=\frac{2^x}{2^3}=\frac{1}{8}2^x$

د فاکتوروني قانون سره سم لرو: $\int \frac{1}{8}2^x dx = \frac{1}{8}\int 2^x dx$

انتیګرال یې ونیسئ: $\frac{1}{8}\int 2^x dx = \frac{1}{8}\cdot\frac{2^x}{\ln 2}+c=\frac{2^x}{8\cdot\ln 2}+c=\frac{2^{x-3}}{\ln 2}+c$

د لوګاریتمي توابعو انتیګرالونه

بنسټ:

د طبیعي لوګاریتم تابع $f(x)=\ln x(x\in IR^+)$ لپاره $\int \ln x dx = x\cdot\ln x - x + c$ دی .

د ټولیز لوګاریتم تابع $f(x)=\log_a x, a\in IR^+, a\neq 1)$
لپاره $\int \log_a x dx = \frac{x\cdot\ln x - x}{\ln a}+c$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه :

ناټاکلی انتیګرال $\int \ln 3x dx$ غواړو پیدا کړو:

بنه بدلون او د فاکتور قاعدې استعمال:

$$\int \ln 3x dx = \int (\ln 3 + \ln x) dx = \int \ln 3 dx \div \int \ln x dx = x \cdot \ln 3 + x \cdot \ln x - x + c$$
$$\int \ln 3x dx = x \cdot (\ln 3 + \ln x - 1) + c$$

بنسټیز اینتیګرالونه په یوه جدول کې

د اینتیګرالولو او مشتق نیول د اړیکو په بنسټ کیدی شي چی د بنسټیزو اینتیګرالونو یو جدول ترتیب شي. دا په مشتق جدول کی راوړل شوو بنسټیزو توابعوبرعکس څرګندیږي.

Nr.	$f(x)$	$f(x) = \int f(x) dx$	نیونه یا فرضیه
1	x^n	$\frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$	$n \in Z \setminus \{-1\}$
2	$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$	$x \neq 0$
3	x^a	$\frac{1}{a+1} x^{a+1} + C$	$a \in R \setminus \{-1\},\ x > 0$
4	a^x	$\frac{1}{\ln a} a^x + C$	$a > 0,\ a \neq 1$
5	e^x	$e^x + C$	

(c) ketabton.com: The Digital Library

6	$\sin x$	$-\cos x + C$	
7	$\cos x$	$\sin x + C$	
8	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x + C$	$x \neq n \cdot \pi, \quad n \in Z$
9	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C$	$x \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi, \quad n \in Z$

بیلګه :

د جدول او تېرو جملو څخه په ګټه لاندې ایتیګرالونه په لاندې ساده ډول په بنستیز توابعو بدلیدلی شي .

a) $\int \frac{1}{x^5} dx = \int x^{-5} dx = -\frac{1}{4} x^{-4} + C$,..............................1,

b) $\int \frac{\sqrt{x}}{x} dx = \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x} dx = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = 2x^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C \quad (x > 0)$, ...3,

c) $\int \sqrt[3]{x \cdot \sqrt{x}}\, dx = \int \left(x \cdot x^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{3}} dx = \int x^{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3}} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C \quad (x > 0)$, ...3,

d) $\int \frac{\sin 2x}{2\sin x} dx = \int \frac{2\sin x \cos x}{2\sin x} dx = \int \cos x \, dx = \sin x + C$, ...(4,21) 6,

e) $\int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C \quad (x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi)$, (4,11) 9,

f) $\int (1 + \cot^2 x)\, dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\int \cot x + C \quad (x \neq n\pi)$ (4,12) 8,

g) $\int \frac{(1+x)(1-x)}{x - x^3} dx = \int \frac{1-x^2}{x(1-x^2)} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad (x \neq \pm 1, \; x \neq 0)$, $Nr.2$,

h) $\int_{-1}^{0} e^x dx = e^x \Big|_{-1}^{0} = e^0 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{2}$, ...5

Substitutionlaw بدلون قانون

(c) ketabton.com: The Digital Library

تراوسه پورې مو فقط انتیګرالونه او جملې حل کړې، چې د لومړنیو توابعو په انتیګرال اړول کېدل. له دې لاس ته راغلو لومړنیو انتېګرالونو د نورو انتېګرالولو حل جملې لاس ته راځي. د لومړنۍ انتېګرالونې سیده استعمال تل ساده نه دی، لکه چې په لاندې کې به ولیدل شي.

جمله :

د ،،بدلون (قاعده)،، (Substitution) لاتین :د $f(g(x))$ یوه ارزښت په ځاي د همغه ارزښت بله لویه ایښوول ، لنډ: بدلون) د نیونو یا فرضیو له مخې، چې u = g (x)نه برېکېدونکی یا متمادي او مشتقوړدی او y = f (u) متمادي، نو باور لري:

$$\int f[g(x)]g'(x)dx = \int f[f(u)]du$$

حل : د ښي اړخ مشتق د تېرو درسونو په بنسټ په لاندې ډول دی:

$$\frac{d}{dx}\int f(u)\,du = \frac{d}{du}\int f(u)\,du \cdot \frac{du}{dx} = f(u)\cdot u' = f[g(x)]\cdot g'(x),$$

دا د کیڼ اړخ د مشتق سره سر خوري. قاعده د ضرب انتیګرالېدو لپاره مساعده ده، په کوم کی چی یو فاکتور زنځیري تابع [f [g (x) وي او دا بل فاکتور (ضریب) یی د دننه تابع مشتق (g ' (x وي. سړی د دننه تابع لپاره په دې توګه متحولې بدلوي یا ځاي په ځاي کوي u = g (x) :

مشتق $\frac{du}{dx} = G'(x)$ جوړوي په همدې ډول du = g ' (x) dx

د بریالي انتیګرالېدو وروسته بدلون بیرته راګرځول کیږي.

بیلګه a :

لرو : $I = \int 2\cos(2x-1)dx$. د دې انتیګرال وشمېرئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بدلون یا په ځای کونه: $2x-1=u$

مشتق $2=du/dx$ همداسی $2dx=du$

$$I=\int\cos u\,du=\sin u+C=\sin(2x-1)+C$$

بیلګه b : لرو $I=\int 3\cos(2x+1)dx$

بدلوو : $2x=u-1$, مشتق $2=du/dx$ همداسی $dx=(1/2)\,du$

$$I=\int 3\cos u\cdot\frac{1}{2}du=\frac{3}{2}\int\cos u\,du=\frac{3}{2}\sin(2x-1)+C$$

ومولیدل چی څنځیري تابع د لاینې دننه تابع سره د بدلونو قاعدې سره تل اینتیګرال کیدی شي، څکه چی د لاینې تابع مشتق ثابت ده او ثابت فاکتور د تېرې جملی سره سم د اینتیګرال تر مخ(موخه کیڼ لور ده) لیکل کیږي.

بیلګه: لرو $I=\int\sqrt{-3x+5}\;dx$

بدلون: $-3x+5=u$

را بیلیدنه: $-3=du/dx\Leftrightarrow dx=-1/3\cdot du$

$$I=\int\sqrt{u}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)du=-\frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{2}}du=-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot u^{\frac{3}{2}}+C=-\frac{2}{9}\cdot\sqrt{(-3x+5)^3}+C.$$

$$b)\quad I=\int\frac{1}{2}e^{-2x-3}dx.$$

$$-2x-3=u,\quad\Rightarrow\quad -2=\frac{du}{dx}\quad\Rightarrow\quad dx=-\frac{1}{2}du,$$

$$I=\int\frac{1}{2}e^{u}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)du=-\frac{1}{4}\int e^{u}du=-\frac{1}{4}e^{u}+C=-\frac{1}{4}e^{-2x-3}+C.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$c)\quad I=\int\frac{2dx}{x+2}.$$

$$x+2=u,\qquad 1=\frac{du}{dx}\qquad dx=du$$

$$I=\int\frac{2du}{u}=2\int\frac{du}{u}=2\ln|u|+C=2\ln|x+2|+C.$$

د بنسټيزو اينتيګرالو سره ۱۰ او ۱۱) جدول ۲۱ . ۱ (متحولي x يواځي په جګ يا مټ د دوه منخ ته راځي. له دې امله داسی اينتيګرال، کومو کی چی د x2 په ځاي لايني ترم (Term)پروت دی، کيدی شي چی د لايني بدلولو له لارې په بنسټيز اينتيګرالو ۱۰ او ۱۱ بيرته واړول شي. ډيروخت يو د فورم بدلون ته هم اړتياموجود وي، چی د اينتيګراند فورم ته راشو.

بيلګه 5.2:

$$a)\quad I=\int\frac{dx}{1+2x^2}.$$

$$2x^2=\left(\sqrt{2}x\right)^2,\quad d\cdot h\cdot\ I=\int\frac{dx}{1+(\sqrt{2}x)^2},$$

$$\sqrt{2}x=u,\qquad \sqrt{2}=\frac{du}{dx}\qquad dx=\frac{1}{\sqrt{2}}du,$$

$$I=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{du}{1+u^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\text{Arctan}\,u+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\text{Arctan}(\sqrt{2}x)+C.$$

$$b)\quad I=\int\frac{dx}{\sqrt{9-36x^2}}.$$

$$9-36x^2=9(1-4x^2)=9(1-(2x)^2),\ d\cdot h\cdot$$

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{9(1-(2x)^2)}}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{\sqrt{1-(2x)^2}},$$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$2x = u, \qquad 2 = \frac{du}{dx} \qquad dx = \frac{1}{2}du$$

$$I = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{6}\text{Arcsin}\,u + C = \frac{1}{6}\text{Arcsin}(2x) + C.$$

اینتیګریشن قاعدې، که دننه تابع خطي یا لاینې نه وي، نو د اینتیګراند دوم فاکتور(تر ثابت فاکتور پورې) د دننی تابع د لومړي فاکتور مشتق وي، چی د (۲ . ۱۳) له لارې سړی بنستیز اینتیګرال ته راشي. دلته هم سړی بیا دننني تابع په نوې متحولې یا واریابلی بدلوي.

بیلګه 6.21: الف:

$$I = \int 4x\sqrt{x^2-1}\,dx$$

بدلون:د $x^2-1=u$ مشتق $2x = du/dx$ دی ،همداسې لرو: $xdx = \frac{1}{2}du$

$$I = \int 4\sqrt{u}\cdot\frac{1}{2}du = 2\int u^{1/2}du = 2\cdot 2/3\,u^{3/2} + C = 4/3\sqrt{(x^2-1)^3} + C$$

ب) $$I = \int \sin^3 x\cdot\cos x\,dx$$

بدلون: $\sin x = u$ را بیل شوي $\cos x = du/dx$ همداسې $\cos x\ dx$

$$I = \int u^3du = \frac{1}{4}u^4 + C = \frac{1}{4}\sin^4$$

$$c)\ I = \int\frac{1}{x}\cdot\ln^2 x\,dx$$

$$\ln x = u, \qquad :\frac{1}{x} = \frac{du}{dx} \qquad \frac{1}{x}dx = du,$$

$$I = \int u^2du = \frac{1}{3}u^3 + C = \frac{1}{3}\ln^3 x + C$$

$$d)\ I = \int\tan x\,dx.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, d \cdot h. \quad I = \int \frac{1}{\cos x} \cdot \sin x \, dx,$$

$$\cos x = u, \qquad -\sin x = \frac{du}{dx} \qquad \sin x \, dx = -du,$$

$$I = -\int \frac{1}{u} du = -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C.$$

$$e) \; I = \int_0^1 \frac{2x^2}{2-x^3} dx.$$

$$2 - x^3 = u, \qquad -3x^2 = \frac{du}{dx} \qquad x^2 dx = -\frac{1}{3} du,$$

$$I = -\frac{1}{3}\int_0^1 \frac{2du}{u} = -\frac{2}{3}\ln|u|\Big|_0^1 = -\frac{2}{3}\ln|2-x^3|\Big|_0^1 = -\frac{2}{3}(\ln 1 - \ln 2) = \frac{2}{3}\ln 2.$$

۲۱د بدلونقاعده) ۲۱ . ۱۳ (دې په چپه) یعني د ښی وکیڼ(لور هم استعمال شي .
اینتیګرال f (x) dx کیدی شي چی په بل واړول شي چی x په یو مناسب بلواك (
g (t بدل شي (21 . 14) f (x) dx = f [g(t)]. g(t)dt. دا:
افاده » مناسب« بلواك دې دلته داسي وپوهیدی شي چی سړی د بدلون وروسته یو ساده
او ممکن یو بنسټیز اینتیګرال لاس ته راوړي. د) ۲۱ . ۱۴ (استعمال په قاعده کی داسی
دی چی په یوه بلواك f (x) (کی موجود » پیچلی « ترم h (x) د t = h (x) په بدلون
له منځ څخه وړي او بیا) که ممکن وي (د x په لوریی حلوي

$$x = g(t) = h^{-1}(t)$$

بیلګه 7.21: الف:

$$: a) \; I = \int \frac{dx}{\sqrt{x}-1}$$

$$\sqrt{x} - 1 = t, \qquad x; x = (t+1)^2, \qquad dx = 2(t+1)dt:$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$I=\int\frac{2(t+1)}{t}dt=2\cdot\left[\int 1dt+\int\frac{1}{t}dt\right]=2(t+\ln|t|)+C=2(\sqrt{x}-1)+2\ln\left|\sqrt{x}-1\right|+C$$

مناسب تابع ، چې ورکړ شوی اینتګرال د دوه ایتکرالو جمعې ته بیایي، دلته

$x=g(t)=(t+1)^2$ وو.

$$b)\quad I=\int\frac{dx}{\sqrt{\sin x\cos^3 x}}.$$

$$\sin x\cdot\cos^3 x=\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\cos^4 x=\tan x\cdot\cos^4 x.$$

نو لرو:

$$I=\int\frac{dx}{\tan x\cos^4 x}=\int\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{1}{\sqrt{\tan x}}dx,$$

$$\tan x=t,\qquad \frac{1}{\cos^2 x}dx=dt,$$

$$I=\int\frac{1}{\sqrt{t}}dt=\int t^{-\frac{1}{2}}dt=2t^{\frac{1}{2}}+C=2\cdot\sqrt{\tan x}+C.$$

توابع، چې بې د بدلون له لارې حل کيږي لکه لاندې بلګه:

بیلګه:

عوارو د $f(x)=e^x$ مشتق بیدا کړو. دا مشتق په ساده ډول پیدا کولی شو، یعنې لرو:

$$f(x)=e^x\ \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=\int e^x dx=e^x+C$$

ګورو، چې $F'(x)=e^x=f(x)$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که ولرو: $f(x)=e^{2x}$ او د پورته په څېر لاړ شو، نو لاس ته به ترې راشي:

$$f(x)=e^{2x} \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=\int e^{2x}dx \neq e^{2x}+C$$

وي $F(x)=e^{2x}+C$ **که، دی** $F'(x)=2e^{2x} \neq f(x)$

له دې امله د بدلون قانون ته اړیو:

بیلګه:

د $f(x)=e^{2x}$ تابع انتیګرال ونیسی

$$f(x)=e^{2x} \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=\int e^{2x}dx=?$$

بدلون : $u(x)=2x=u$

جوړ کړئ: $u'(x)=\frac{du}{dx}=2 \Rightarrow dx=\frac{du}{2}$

$$\int f(x)dx=\int e^{u}\frac{du}{2}=\frac{1}{2}\int e^{u}du=\frac{1}{2}e^{u}+C$$

د بدلون برعکس: $\frac{1}{2}e^{u}+C=\frac{1}{2}e^{2x}+C$

نو لرو: $F(x)=\int(x)dx=\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^{2x}+C$

ازمايينت: $F(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+C \Rightarrow F'(x)=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot 2=e^{2x}=f(x)$

بیلګه :

وښايی چې باور

لري. $f(x)=(x+1)^{2} \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=\int (x+1)^{2}dx$.

بدلون $u(x)=x+1=u$

جوړ کړی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$u'(x)=\frac{du}{dx}=1 \quad \Rightarrow dx=\frac{du}{1}$$

$$\int f(x)dx=\int u^2\frac{du}{1}=\int u^2du=\frac{u^3}{3}+C$$

بیرته- یا په ځت بدلون: $\frac{u^3}{3}+C=\frac{(x+1)^3}{3}+C$

نو: $\int(x)dx=\int(x+1)^2dx=\frac{(x+1)^2}{3}+C$

بیلګه :

و بنایي چې باور لري:

$$f(x)=(3x+6)^3 \quad \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=\int(3x+6)^3dx$$

بدلون: $u(x)=3x+6=u$

جوړوو: $u'(x)=\frac{du}{dx}=3 \quad \Rightarrow dx=\frac{du}{3}$

$$\int f(x)dx=\int u^3\frac{du}{3}=\frac{1}{3}\int u^3du=\frac{u^4}{12}+C$$

بیړته بدلون: $\frac{u^4}{12}(3x+6)^4+C$

نو لرو: $\int(x)dx=\int(3x+6)^3dx=\frac{1}{12}(3x+6)^4+C$

بیلګه :

$$f(x)=x\cdot\ln\left(x^2\right)\Rightarrow F(x)=\int f(x)\,dx=\int\left(x\cdot\ln\left(x^2\right)\right)dx=?$$

بدلون : $u(x)=x^2=u$

جوړوو: $u'(x)=\frac{du}{dx}=2x\Rightarrow dx=\frac{1}{2x}du$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int f(x)\,dx = \int x \cdot \ln(u) \cdot \frac{1}{2x}\,du = \frac{1}{2}\int \ln(u)\,du = \frac{1}{2}\left[u \cdot \ln(u) - u + C\right] = \frac{1}{2}u \cdot \ln(u) - \frac{1}{2}u + C$$

بېرته بدلون:

$$\frac{1}{2}u \cdot \ln(u) - \frac{1}{2}u + C = \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln\left(x^2\right) - \frac{1}{2}x^2 + C$$

نو لرو:

$$\int (x)\,dx = \int \left(x \cdot \ln\left(x^2\right)\right)dx = \underline{\underline{\frac{1}{2}x^2 \cdot \ln\left(x^2\right) - \frac{1}{2}x^2 + C}}$$

د ټاکلو انتيګرالونو حل د بدلون له لارې:

ټاکلي انتيګرالونه هم د بدلون له لارې حل کېږي.

بېلګه :
وښاياست:

$$f(x) = e^{2x} \quad \Rightarrow F(x) = \int_{-1}^{1} e^{2x}dx$$

د انتيګرال حل د بدلون له لارې:

۱ – بدلون $u(x) = 2x$

۲ – د dx په ځای کېږدی

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 2 \quad \Rightarrow dx = \frac{1}{2}du$$

۳ – د پولو بدلون

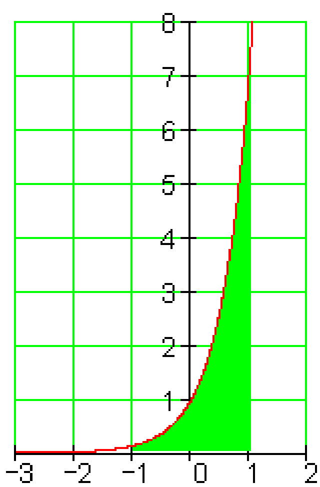
- لاندې پوله $u(-1) = -2$

- پورته پوله $u(1) = 2$

۴ - په انتيګرال کې ځا په ځای کړی

$$\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} e^u du = \frac{1}{2}\left[e^u\right]_{-2}^{2} = \frac{1}{2}\left[e^2 - e^{-2}\right] = \underline{\underline{3.627}}$$

$f(x) := e^{2 \cdot x}$



(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه :

$$f(x) = 2x \cdot \ln(x^2) \quad \Rightarrow F(x) = \int_1^2 2x \cdot \ln(x^2) dx$$

د انتیګرال حل د بدلون له لارې

۱ – بدلون $u(x) = x^2$

۲ – د ځای په ځای کونه

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x \quad \Rightarrow dx = \frac{1}{2x} du$$

۳ – د پولې بدلون

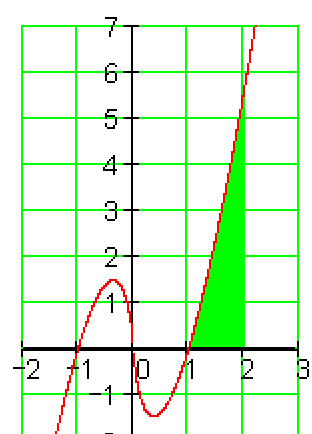
- لاندې پوله $u(1) = 1$
- پورته پوله $u(2) = 4$

۴ – په انتیګرال کې ځای په ځای کړی

$$\int_1^4 2x \cdot \ln(u) \cdot \frac{1}{2x} du = \int_1^4 \ln(u) du = [u \cdot \ln(u) - u]_1^4$$

$$= [4 \cdot \ln(4) - 4] - [1 \cdot \ln(1) - 1] \approx \underline{\underline{2.545}}$$

$$f(x) := 2x \cdot \ln(x^2)$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه :

$f(x)=\begin{cases} e^x-2 \\ (e^2-2)e^{-(x-2)} \end{cases}$	د $x<2$ له پاره د $x\geq 2$ له پاره

$$A=\underbrace{\int_1^2 (e^x-2)\,dx}_{I_1}+\underbrace{\int_2^4 (e^2-2)e^{-(x-2)}\,dx}_{I_2}$$

$$I_1=\int_1^2 (e^x-2)\,dx=\left[e^x-2x\right]_1^2=e^2-e-2$$

$$I_2=(e^2-2)\int_2^4 e^{-(x-2)}\,dx$$

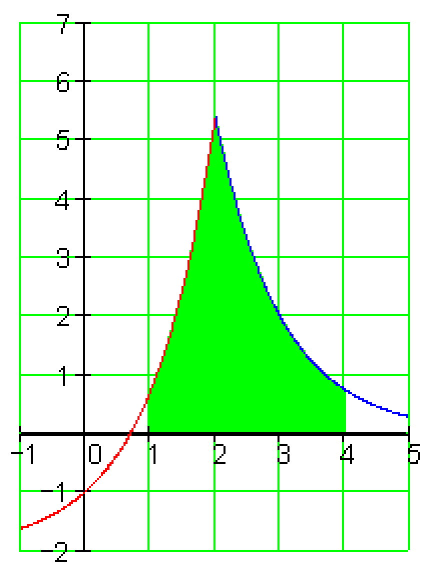
$$u(x)=-(x-2)=-x+2$$

$$\frac{du}{dx}=-1\Rightarrow dx=-du;\ u(2)=0;\ u(4)=-2$$

$$I_2=-(e^2-2)\int_0^{-2} e^u\,du=(e^2-2)\int_{-2}^{0} e^u\,du$$

$$=(e^2-2)\cdot\left[e^u\right]_{-2}^{0}=e^2+2e^{-2}-3$$

$$I=I_1+I_2=e^2-e-2+e^2+2e^{-2}-3=\underline{\underline{7,331}}$$



توټه انتيګرالونه Partialy Integration

توټه انتيګرالونه، چې ضرب انتيګرالونه هم بلل کيږي، په انتيګرالشميرنه کې د لومړنيو توابعو ټاکلو يا شمېرلو لپاره امکان دی. دا کېدی شي د مشتقشمېرنې د برعکسکونې په خير وکټل شي.

•

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټوټه انتيګرالوني له پاره لاندې قانون کارول کيږي، چې د متمادي (نه پرېکېدونکي) توابعو f او g له پاره باور لري.:

$$\int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)\cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x.$$

دا قانون ټيک هلته ګټور دی، که د f مشتقنيولو سره يو ساده تابع منځ ته راځي. پيل

د ضرب قانون (د ضرب مشتقنيوني) څخه لرو:

$$(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v'$$

$$u'\cdot v = (u\cdot v)' - u\cdot v'$$

له دې څخه لاس ته راځي:

$$\int u'\cdot v = \int (u\cdot v)' - \int u\cdot v'$$

$$\int u'\cdot v = u\cdot v - \int u\cdot v'$$

په دې پسې د ټاکلي انتيګرال لپاره باور لري:

$$\int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = f(b)\cdot g(b) - f(a)\cdot g(a) - \int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x$$

يا همدغسې، لکه په زياتو رياضي کتابونو کې چې پيداکيږي.

$$\int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)\cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x.$$

د دې مخ ته حدونو لپاره ګټور دی، چې لومړی ځان په ناټاکلي انتيګرال محدود کړو، چې دا نا اړينو حدونو څخه چې ليد مو رابندوي، ازاد يو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه:
د بیلګې په توګه لاندی انتیګرال شمیرو.

$$\int x \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x$$

یو ساده انتیګرالیدونکی تابع $g'(x)$ او همداسی یو ساده مستقکېدونکي تابع $f(x)$ لټوو. نیسو چې $f(x) = \ln(x)$ او $g'(x) = x$ ، ځکه چې د ln(x) انتیګرالونه نوې ln(x) راکوي. اوس د $f(x)$ مشتق نیسو)مشتق کوو) او انتیګرالوو، نو لرو:

$$f'(x) = \frac{1}{x} \text{ او } g(x) = \frac{x^2}{2}.$$

له دې څخه اوس دالاندې فرمول لاس ته راځي:

$$\int x \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x) - \frac{x^2}{4}$$

بدیل لیکبڼه:
اوس دی u اوv په خوښه توابع وي.U او V دې د u اوV لومړني توابع وي ، او همداسې دې 'u او 'v دu او v مشتقونه وي.
u تابع ده، چې د مشتق نیولو له پاره لومړیتوب لري، v تابع ده چې د انتیګرالونې له پاره لومړیتوپ لري. نو باورلري:

$$\int_a^b u(x) \cdot v(x)\,\mathrm{d}x = u(b) \cdot V(b) - u(a) \cdot V(a) - \int_a^b u'(x) \cdot V(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= [u(x) \cdot V(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot V(x)\,\mathrm{d}x$$

د ټوټه انتیګرالونې لار(طریقه)

د ټوټه انتیګرالونې ګټور استعمال له پاره مختلف معیاري چلول شته.

بیلګه : کله کله کېدی شي ګټور وي، جی د مساوات ښی لور ته ټوټه انتیګرال د څو واره انتیګرالونې وروسته بېرته راوګرځي، چې د په ورته بڼه د اصلي یا پخواني کیڼ لور انتیګرال سره یوځای کولی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int \sin(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x$$

که کېږدو f(x) = cos(x) او g'(x) = sin(x) ، نو ترې لرو:

$$f'(x) = -\sin(x) \text{ او } g(x) = -\cos(x)$$

او لاس ته ترې راځي

$$\int \sin(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x = [-\cos^2(x)] - \int \sin(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x.$$

که دواړو لورو ته وتون انتیګرال ورزیات کړو، نو راکوي:

$$2\int \sin(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x = -\cos^2(x)$$

که واړه لورې په 2 ووېشل شي، نو بالاخره لاس ته ترې راځي:

$$\int \sin(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cdot\cos^2(x) + C$$

بیلګه ۲ :

د ځنو انتیګرالونو سره داسې لاس ته راوړنه لرو، چې: که د g'(x) له پاره یو ترم وټاکو چې په انتیګرالونې کې هیڅ یا کو تغیر خوري، لکه د بېلګې په توګه اکسپوننشل تابع او یا مثلثاتي توابع. نو کېدې شي دا بل ترم ،،له منځه یووړل شي،،.

$$\int e^x\cdot(2-x^2)\,\mathrm{d}x$$

که هر ځل g'(x) = ex کېږدو او د f(x) له پاره، د انتیګرال لاندې ترم ، نو ترې لاس ته راځي:

.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int e^x \cdot (2-x^2)\,\mathrm{d}x = [e^x \cdot (2-x^2)] - \int e^x \cdot (-2x)\,\mathrm{d}x$$
$$= [e^x \cdot (2-x^2)] + [e^x \cdot 2x] - \int 2 \cdot e^x\,\mathrm{d}x$$
$$= [e^x \cdot (2-x^2)] + [e^x \cdot 2x] - [2 \cdot e^x]$$
$$= [e^x \cdot (2-x^2+2x-2)]$$
$$= [e^x \cdot (2x-x^2)] + C$$

بيلګه ۳ :

که تر انتيګرال لاندې فقط يو ترم ولرو، چې د هغه لومړنی تابع بې له جدول ارزښت څخه پاې ته نه رسيږي(نه پايول کيږي)(نه ختميږي) کېدی شي کله کله د ورزياتونې له لارې(ناڅرګند شته) ضريب "1" توته انتيګرال شي.

$$\int \ln(x)\,\mathrm{d}x = \int 1 \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x = \int g'(x) \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x$$

که $f(x) = \ln(x)$ او $g'(x) = 1$ کيږدو، نو لاس ته ترې راوړی شو

$$\int 1 \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x = x \cdot \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$
$$= x \cdot \ln(x) - \int 1\,\mathrm{d}x$$
$$= x \cdot \ln(x) - x + C$$

.

جمله : موږ د دې لاندې انتيګرال نيسو: $\int x\cos(x)\,dx$

ږدو $u = x$ ، نو لرو : $du = dx$

ږدو $dv = \cos(x)\,dx$ ، نو $v = \sin(x)$ لرو

په لاندې توګه مخ ته ځو:

$$\int x\cos(x)\,dx = \int u\,dv$$
$$= uv - \int v\,du$$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= x\sin(x) - \int \sin(x)\,dx$$
$$= x\sin(x) + \cos(x) + C.$$

C د انتیګرالونـې یوه په خوښه ثابته ده

د ټوټه انتیګرالونې د استعمال سره د انتیګرالونو لکه

$$\int x^2 e^x\,dx \quad \text{او} \quad \int x^3 \sin(x)\,dx$$

کیده شي په همدې لار حل شي:

یوه په زړه پورې بیلګه دا لاندې ده :

$$\int e^x \cos(x)\,dx$$

که په پوره سختوالي ونیسو، نو په ورسره بلده لار اړین نه دی، چې دا دې حل ولري.

دا بېلګه د دوه واره ټوټه انتیګرالونې استعمال له لارې حل کولی شو.

لومړی : $u = \cos(x)$ داسې چې $du = -\sin(x)\,dx$

$dv = e^x\,dx$ داسې چې $v = e^x$

نو لرو :

$$\int e^x \cos(x)\,dx = e^x \cos(x) + \int e^x \sin(x)\,dx.$$

اوس ، ددې له پاره چې پاتې انتیګرال حل شي، نو د ټوټه انتیګرالونې قاعده بیا استعمالوو ، د دې لاندې سره :

$u = \sin(x);\ du = \cos(x)\,dx$

$v = e^x;\ dv = e^x\,dx$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو لرو :

$$\int e^x \sin(x)\,dx = e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)\,dx$$

که دا سره یوځای کړو، نو لاس ته زاځي:

$$\int e^x \cos(x)\,dx = e^x \cos(x) + e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)\,dx.$$

که فکر وکړو، نو پورته مساوات دواړو لورو ته همغه انتیګرال لرو(بې له مخ نخښې)، نو د ښي لور انتیګرال که کیڼ لور ته یوسو ، لاس ته ترې راځي:

$$2\int e^x \cos(x)\,dx = e^x(\sin(x) + \cos(x)) + C$$

$$\int e^x \cos(x)\,dx = \frac{e^x(\sin(x) + \cos(x))}{2} + C'$$

C د انتیګرالونی یوه په خوښه ثابته ده

د ټوټه راشنل کسرونو انتیګرال

د $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{x^3 + 4x^2 + 4x}$ انتیګرال نیول

نیول تر واسه ورسره بلده لار شونی دی، که څنګه؟

بیلګه :

$$\int [\frac{(7x-12)}{(x^2-6x+8)}]dx$$

په مخرج کې مربع تابع د خپل صفرځایونو **x1 = 2-** او **x2 = -4** سره د کرښیزو توابعو په ضربیونو تجزیه کیږي:

$$x^2-6x+8 = (x-2)\ (x-4)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټوټه کسرونو ټوټه ونې له پاره لاندې پيل کوو:

$$\int [\frac{(7x-12)}{(x^2-6x+8)}]dx = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x-4)}$$

د جمعې له پاره په اصلي مخرج ورغزيږي او لاس ته ترې راځي:

$$\frac{[A(x-4) + B(x-2)]}{[(x-2)(x-4)]} = \frac{[Ax-4A + Bx-2B]}{[(x-2)(x-4)]} = \frac{[(A+B)x -4A-2B]}{[(x-2)(x-4)]}$$

د ضريبونو د پرتلې ځخه لاس ته راځي، چې د x له مخه يعني کينې لور ته (A+B) افاده بايد پرته وي

او (-4A-2B) ، چې ۱۲ - ورکوي (وتون مساوات وګورئ) : 7x-12 = (A+B)x (-4A-2B)

له دې ځ**خه لاندې مساواتسيستم لاس ته راځي:**

7= A+ B

-12=-4A-2B

بدلون يې دA او B پسې : **A= (7-B)**

-12=-4(7-B)-2B

-12=-28 +4B -2B |+28

+16= 2B

B=8

A= **(7-8)= -1**

ليکلی شو :

$$\int [\frac{(7x-12)}{(x^2-6x+8)}]dx = \int [\frac{-1}{(x-2)}]dx = \int [\frac{8}{(x-4)}]dx$$

لومړني تابع جوړه کړئ: $F(x)=\ln x \rightarrow f(x)=\frac{1}{x}$. دا چې طبيعي لوګايتم فقط له مثبت اعدادو شمېرل کيږي، نو يواځې ازښتونه نيسو.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int \left[\frac{(7x-12)}{(x^2-6x+8)}\right]dx = -1 \ln|x-2| + 8 \ln|x-4| + c$$

نا اصلي ماتراشنل توابع باید لومړی په پول راشنل تابع او اصلي مات راشنلمبع تېرته شي.
دا د ټوټه کسرونو ټوټه کووني له لارې کيري یا صورت نیسي.
بیلګه :

$$\int \left[\frac{(-5x+9)}{(x^2+x-6)}\right]dx$$

په مخرجکي مربع تابع په صفرځایونو **x1 = -2** او **x2 = +3** کې په کښیزو فاکتورونو تحزیه کيري :

$$x^2+x-6 = (x-2)\ (x+3)$$

د ټوټه کسرونو ټوټه کوني له پاره اصلي مخرج غزوو او بیا يې ضربوو :

$$\int \left[\frac{(-5x+9)}{(x^2+x-6)}\right]dx = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+3)}$$

د جمعي له پاره په اصلي مخرج غزيږي او بيا سره ضربيږي:

$$\frac{[A(x+3)\ +\ B(x-2)]}{[(x-2)(x+3)]} = \frac{[Ax+3A\ +\ Bx-2B]}{[(x-2)(x+3)]} = \frac{[(A+B)x\ +3A-2B]}{[(x-2)(x+3)]}$$

د ضریبونو پرتلي کوني له امله، چې د x ترمخه یعني کيڼ لور ته له (A+B) افادي څخه باید اوه لاس ته راشي او (+3A-2B) او یا ورته ۱۲ (وتونمساوات وګورئ) :

-5x+9 = (A+B)x (+3A-2B)

لاندې مساواتسیستم لاس ته راځي:

-5= A+ B

9= 3A-2B

د A او B پسې يې حل کړئ:

9= 3(-5-B)-2B

9=-15 -3B -2B |+15

24=-5B |:(-5)

<u>B=-4.8</u>

<u>A= (-5+4.8)= -0.2</u>

نو لیکلی شو :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int[\frac{(-5x+9)}{(x^2+x-6)}]dx = \int[\frac{-0.2}{(x-2)}]dx + \int[\frac{-4.8}{(x+6)}]dx$$

لومړی تابع جوړ کړی :

$$F(x)=\ln x \rightarrow f(x)=\frac{1}{2}$$

دا چې طبیعي لوګاریتم فقط له طبیعي اعدادو شمېرل کېدی شي، نو فقط مطلقه ارزښتونه نیسو.

$$\int[\frac{(-5x+9)}{(x^2+x-6)}]dx = -0.2\ln|x-2| - 4.8\ln|x+3| + C$$

ناپاي(مبهوم) انتیګرال

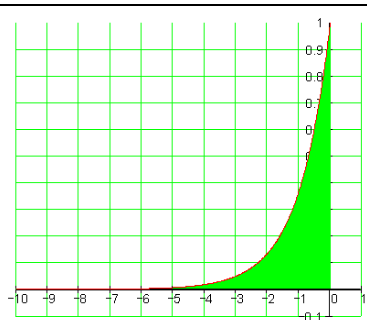
تعریف : که په یوه ټاکلي انتیګرال کې لږ تر لږه یو حد د مثبت یا منفي ناپاي لور ته لاړشي یا د انتیګرال ساحه ناپاي ځاي ته و غزول شو، نو دلته د ناپاي انتیګرال څخه غږیږو. په یوه مناسب ډول ناپا انتیګرال د عادي انتګیګرال د حد په څېر تعرفیږي.
په دې توګه په زړه پورې پوهېدني لاس ته راځي د بېلګې په توګه، چې څنګه د منفي تواند پوتنځ د ګراف لاندې ناپاي ته رسېدونکې په زړه پورې سطحې. نو باور لري

$$\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}dx = 2 \quad \text{او} \quad \int_1^\infty x^{-2}dx = 1$$

هم او د دې معکوس انتیګارلونه

$$\int_1^\infty x^{-1}dx \quad \text{او}$$

$$\int_0^1 x^{-1}dx$$ ناپاي ته ځې یا له ټولو حدونو اوړي
یعني د ناپای په لور ځي..



د $f(x) = e^x$ ، ګراف او x-محور ترمنځ دې په انټروال $(-\infty ; 0]$ کې ټوله سطحه و شمیرل شي، یعنې
.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^{x}\,dx$$

تر اوسه د یوه ټاکلي انتیګرال د پورته همداسې کښته(لاندې) پولې عددونه وو.
د انتیګرالونې ورشو یاا ساحه محدود وه.
په دې حالت کې یا اوس د انتیګرالولو ورشو محدوده نه ده،
داسې انتیګرال یو نامحدود انتیګرال بولو، د انتیګرالونی نامحدودې ورشو سره.
انتیګرالونه د دې لاندې بڼو څخه په یوې بڼې منځ ته راځي:

$\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$	$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$	$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$

د دې انتیګرال شمیرنې له پاره په لاندې توګه مخ ته ځو:

لومړی د یوه پای انتروال $[a;b]$ له پاره انتیګرال $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ شمېرو، بیا پسې د ورته افادو $a \to -\infty$ یا $a \to \infty$ همداسې $b \to -\infty$ یا $b \to \infty$ له پاره پولې جوړوو.

فورمال دا په لاندې ډول برېښي:

$$\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{x} f(x)\,dx + \lim_{b\to\infty} \int_{c}^{b} f(x)\,dx$$

زموږ د سطحې شمېرلو له پاره دا په لاندې ډول برېښي:

$$f(x) = e^{x}$$

$$A = \int_{-\infty}^{0} e^{x}\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} e^{x}\,dx = \lim_{a\to-\infty} \left[e^{x}\right]_{a}^{0}$$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \lim_{a\to -\infty}\left[e^0 - e^a\right] = \underbrace{\lim_{a\to -\infty} e^0}_{1} - \underbrace{\lim_{a\to -\infty} e^a}_{0} = \underline{\underline{1}}$$

بیلګه:
دا د y په محور هنداره شوې د e تابع دې د $f(x)=e^{-x}$ سره په انتروال $[0,\infty)$ کې د پورته سره برابره سطحه ولري.

$$A = \int_0^{\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^{b} e^{-x}\,dx$$

بدلون:

$$u(x) = -x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -1 \Rightarrow dx = \frac{du}{-1}$$

$$u(0) = 0\,;\, u(b) = -b$$

$$\lim_{b\to\infty}\int_0^{-b} e^u\,\frac{du}{-1} = -\lim_{b\to\infty}\int_0^{-b} e^u\,du = \lim_{b\to\infty}\int_{-b}^{0} e^u\,du$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[e^u\right]_{-b}^{0} = \lim_{b\to\infty}\left[e^0 - e^{-b}\right]$$

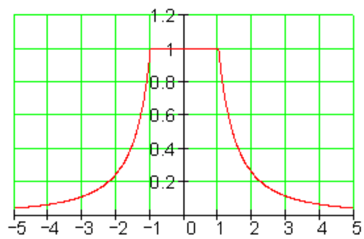
$$= \lim_{b\to\infty} e^0 - \lim_{b\to\infty} e^{-b} = 1 - 0 = \underline{\underline{1}}$$

بیلګه:
د یوه یوځاي اینسول شوې یا یو ځاي شوې تابع بېلګه لرو:

د x<-1 لپاراه د 1- $\leq$ x 1 لپاره د x > 1 لپاره	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} \\ 1 \quad f \\ \frac{1}{x^2} \end{cases}$ $A = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$

.
.
.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د انتیګرال په برخو وېشنه یا ټوټه کونه:
لاندې د انتیګرالونو تمعه دي و شمېرل شي.

$$A = \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\, dx + \int_{-1}^{1} dx + \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$$

لومړنی اند یا تر مخه فکرکونه:
د تناظر دلایلو له مخې لرو :

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\, dx = \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$$

داسې، چې دا انتیګرال باید فقط یوځل وشمېرل شي.

$$\int_{-1}^{1} dx = [x]_{-1}^{1} = [1] - [-1] = 1 + 1 = \underline{\underline{2}}$$

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_{1}^{b} \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = \underbrace{\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{b}\right]}_{0} - \underbrace{\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{1}\right]}_{-1} = 0 - (-1) = \underline{\underline{1}}$$

$$A = \underbrace{\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\, dx}_{1} + \underbrace{\int_{-1}^{1} dx}_{2} + \underbrace{\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx}_{1} = 1 + 2 + 1 = \underline{\underline{4}}$$

تولګه
د انتیګرال هندسي تعریف

لوریزه سطحه-د انتیګرال تعریف:که یوه f تابع ولرو، نو دx مخور او تابع ترمنځ سطحې شمېرل د انتیګرال له لارې کېږي. په دې سطحه کې د x محور پورته لورې ته سطحه مثبته مخنخښه لري او د x محور کښته لورې ته سطحه منفي مخنخښ لري.

تحلیلي تعریف: د f یوه تابع ورکړ شوې، چې په یوه انتروال [a,b] باندې تعریف دی، نو دa څخه تر b پورې د تابع د انتیګرال څخه د x په محور د f د ګراف او د کرښې x=aاو x=b تر منځ یوه یوه لوریزه سطحه پوهیږو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پېژند (تعریف ٤ . ١ : لیمیټ

$$\lim_{x \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx = F; (\max \Delta x \to 0), \ldots\ldots..(4,3)$$

که په اینتروال [a , b] کی موجود وي، نو دا د f (x) ټاکلی اینتیګرال بولو، یا

F- Riemann) د ریمن سطحه). دلته a د اینتیګراله ونې لاندې(کښته)پوله او د b اینتیګرالونې پورته پوله بلل کیږي او [a,b] د ایتیګرالوني اینترول او(f (Integrand) x)اینتیګرالېدونکی) او x د اینتیګرالوني (Integrationsvariable) متحول بلل کیږي

جمله٤ . ١ : که f (x) په [a , b] کې اینتیګرالوړ وي او $c \in [a,b]$ وي، نو باور لري:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

پېژند یا تعریف ٤ . ٢ : f (x) په یوه بند انترول[a, b] کې اینتیګرالوړ دی، نو باور لري:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

پېژند تعریف 3.2: تابع y = f (x) دې په یوه واز اینترول I کی تعریف وي. هر یوه هلته موجوده مشتقوړ F (x) تابع چې F' (x) = f (x) شرایط پوره کړي، د f (x (بنستیز- ، ساده – یا لومړنی تابع بلل کیږي

ټاکلی انتیګرال:

که f یو حقیقي تابع وي، نو د ټاکل انتیګرال $\int_a^b f(x)dx$ (لوستل: د $f(x)$ انتیګرال د a تر b او په پولو یا حدونو یا انتیګرال په $f(x)$ باندې له a تر b) لاندې یوه لوریزه سطحه پوهیږو د a او b تر منځ او د f ګراف لاندې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تعریف:

f په انتروال $a \le x \le b$ کې متمادي تابع ده او F د f لومړنی تابع ده، نو ټاکلی انتیګرال دی : $\int_a^b f(x)dx = [F(x)_a^b = F(b) - F(a).$

د F(b) – F(a) لپاره زیات وخت $[F(x)]_a^b$ لیکو. په دې توګه دی

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$$

جمله:

د یوې ثابتي سره ضرب : که تابع f (x) په یوه اینتروال کی متمادي وي ، نو لاندې باور لري:

$$\int a \cdot f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx\,, \qquad a \in R$$

جمله :

د جمعي (تفريق) قاعده که f1 (x) او f 2 (x) په یوه ایتروال کی نه پريکیدونکي وي ، نو باور لري

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$$

جمله :

د ،،بدلون (قاعده)،، (Substitution لاتین :د یوه ارزښت په ځاي د همغه ارزښت بله لویه اینسوول ، لنډ: بدلون) د نیونو لاندې چی u = g (x) متمادي اوو مشتقوړدی او y = f (u) متمادي، نو باور لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int f\left[g(x)\right]g'(x)dx = \int f\left[f(u)\right]du$$

د ضربونو انتيګرالونه

که د دوه توابعو د ضرب انتيګرال د ورسره بلدو متودونو یا لارو شمیږرو، نو زیات وخت دا ناشوني وي.

$$f(x) = x \cdot \ln\left(x^2\right) \Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx = \int\left(x \cdot \ln\left(x^2\right)\right)dx = ?$$

بدلون <u>Substitution</u>

د ناټاکلي انتيګرال حل د بدلون له لارې(ننوتنه راځي)

تراوسه پورې مو فقط د انتيګرالونه او جملې حل کړې، چې د لومړنيو توابعو په انتيګرال اړول کېدل. له دې لاس ته راغلو لومړنيو انتېګرالونو د نورو انتېګرالولو حل جملې راکوي. د لومړنی انتېګرالونې سيده استعمال تل ساده نه دی، لکه چې په لاندې کې ګوته ورته نيول کيږي.

جمله ۲ . ۶ : د ،،بدلون (قاعده)،، (Substitution لاتين :د یوه ارزښت په ځاي د همغه ارزښت بله لويه ايښوول ، لنډ: بدلون) د نيونو لاندې چی $u = g(x)$ متمادي اوو مشتقوړدی او $y = f(u)$ متمادي، نو باور لري:)(کتاب کتل که لاندی بې د انتيګرال له نخښې)

$$\int f\left[g(x)\right]g'(x)dx = \int f(u)du$$

حل : د (۲۱ . ۱۳) د ښي اړخ مشتق د ځنځيرقاعدې (جمله۲ . ۶) له مخی داسی دی

$$\frac{d}{dx}\int f(u)\,du = \frac{d}{du}\int f(u)\,du \cdot \frac{du}{dx} = f(u) \cdot u' = f\left[g(x)\right] \cdot g'(x),$$

دا د کين اړخ د رابيليدنی سره سر خوري (.۲۱ . ۱۳) قاعده د ضرب اينتګرالبدو(اينتيګريشن) لپاره مساعده ده، په کوم کی چی یو فاکتور ځنځيري بلواك $f[g(x)]$ وي

(c) ketabton.com: The Digital Library

او دا بل فاکتور (ضریب) یی د دننه تابع مشتق $g'(x)$ وي. سړی د دننه تابع لپاره متحولې یا واریابل بدلوي یا ځاي په ځاي کوي $u = g(x)$: جوړوي $du/dx = g'(x)$ په همدې ډول $du = g'(x)\,dx$

د بریالي ایتګرالپدو(اینتیګریشن) کیدو ورسته بدلون بیرته راګرځول کیږي.

بیلګه ۲۱ . ۳) a :

لرو $I = \int 2\cos(2x-1)\,dx$

بدلون یا په ځای کونه: $2x-1=u$

مشتق $2 = du/dx$ همداسی $2dx = du$

$$I = \int \cos u\,du = \sin u + C = \sin(2x-1) + C$$

بیلګه ۲۱ . ۳) b : لرو $I = \int 3\cos(2x+1)dx$

بدلوو : $2x = u-1$, کشتق $2 = du/dx$ همداسی $dx = (1/2)\,du$

$$I = \int 3\cos u \cdot \frac{1}{2}du = \frac{3}{2}\int \cos u\,du = \frac{3}{2}\sin(2x-1) + C$$

وموليدل چی ځنځیري تابع د لاینی دننه تابع سره د بدلونو قاعدې سره تل اینتیګرال کیدی شي، ځکه چی د لاینی تابع مشتق ثابت ده او ثابت فاکتور د جملی ۲۱ . ۴ سره سم د اینتیګرال تر مخ(موخه کیڼ لور ده) لیکل کیږي.

بیلګه 4.2: لرو $I = \sqrt{-3x+5}\;dx$

بدلون: $-3x+5=u$

را بیلیدنه: $-3 = du/dx \Leftrightarrow dx = -1/3 \cdot du$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$I=\int\sqrt{u}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)du=-\frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{2}}du=-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot u^{\frac{3}{2}}+C=-\frac{2}{9}\cdot\sqrt{(-3x+5)^3}+C.$$

b) $I=\int\frac{1}{2}e^{-2x-3}dx.$

$$-2x-3=u,\qquad -2=\frac{du}{dx}\qquad dx=-\frac{1}{2}du,$$

$$I=\int\frac{1}{2}e^{u}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)du=-\frac{1}{4}\int e^{u}du=-\frac{1}{4}e^{u}+C=-\frac{1}{4}e^{-2x-3}+C.$$

c) $I=\int\frac{2dx}{x+2}.$

$$x+2=u,\qquad 1=\frac{du}{dx}\qquad dx=du$$

$$I=\int\frac{2du}{u}=2\int\frac{du}{u}=2\ln|u|+C=2\ln|x+2|+C.$$

بیلګه:

$f(x)=e^x\Rightarrow F(x)=\int f(x)\,dx=\int e^x\,dx=e^x+C$

ځکه چې $F'(x)=e^x=f(x)$

مګر: $f(x)=e^{2x}\Rightarrow F(x)=\int f(x)\,dx=\int e^{2x}\,dx\neq e^{2x}+C$

ځکه چې $F'(x)=2e^{2x}\neq \bar{f}(x)$ **که** $\bar{F}(x)=e^{2x}+C$ ؛ **وی.**

په داسې حالتونو کې د بدلون قاعده مرسته کوي:

بیلګه: د $f(x)=e^{2x}$ تابع انتیګرال ونیسئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = e^{2x} \Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx = \int e^{2x}\,dx = ?$$

بدلون : $u(x) = 2x = u$

جوړ کړی: $u'(x) = \frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{du}{2}$

$$\int f(x)\,dx = \int e^{u}\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int e^{u}\,du = \frac{1}{2}e^{u} + C$$

د بدلون برعکس: $\frac{1}{2}e^{u} + C = \frac{1}{2}e^{2x} + C$

نو: $F(x) = \int f(x)\,dx = \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C$

ازمايښت : $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + C \Rightarrow F'(x) = \frac{1}{2}e^{2x}\cdot 2 = e^{2x} = f(x)$

بيلګه :

وښايئ چې $f(x) = (x+1)^2 \Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx = \int (x+1)^2\,dx = ?$ باور لري .

$$f(x) = (x+1)^2 \Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx = \int (x+1)^2\,dx = ?$$

بدلون: $u(x) = x + 1 = u$

جوړ کړی: $u'(x) = \frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow dx = \frac{du}{1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int f(x)\,dx = \int u^2 \frac{du}{1} = \int u^2\,du = \frac{u^3}{3} + C$$

بیرته ـ یا په ځت بدلون:

$$\frac{u^3}{3} + C = \frac{(x+1)^3}{3} + C$$

نو:

$$\int (x)\,dx = \int (x+1)^2\,dx = \frac{(x+1)^3}{3} + C$$

بیلګه :

$$f(x) = (3x+6)^3 \Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx = \int (3x+6)^3\,dx = ?$$

بدلون: $u(x) = 3x+6 = u$

جوړوو: $u'(x) = \frac{du}{dx} = 3 \Rightarrow dx = \frac{du}{3}$

$$\int f(x)\,dx = \int u^3 \frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int u^3\,du = \frac{u^4}{12} + C$$

بیرته بدلون: $\frac{u^4}{12} + C = \frac{1}{12}(3x+6)^4 + C$

نو لرو: $\int (x)\,dx = \int (3x+6)^3\,dx = \frac{1}{12}(3x+6)^4 + C$

بیلګه :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = x \cdot \ln\left(x^2\right) \Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx = \int\left(x \cdot \ln\left(x^2\right)\right) dx = ?$$

بدلون : $u(x) = x^2 = u$

جوړوو: $u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2x} du$

$$\int f(x)\,dx = \int x \cdot \ln(u) \cdot \frac{1}{2x}\,du = \frac{1}{2}\int \ln(u)\,du = \frac{1}{2}\left[u \cdot \ln(u) - u + C\right] = \frac{1}{2}u \cdot \ln(u) - \frac{1}{2}u + C$$

بېرته بدلون: $\frac{1}{2}u \cdot \ln(u) - \frac{1}{2}u + C = \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln\left(x^2\right) - \frac{1}{2}x^2 + C$:

نو لرو: $\int (x)\,dx = \int\left(x \cdot \ln\left(x^2\right)\right) dx = \underline{\underline{\frac{1}{2}x^2 \cdot \ln\left(x^2\right) - \frac{1}{2}x^2 + C}}$

د ټاکلو انتیګرالونو حل د بدلون له لارې

ټاکلي انتیګرالونه هم د بدلون له لارې حل کیږي.

بیلګه :

$$f(x) = e^{2x} \Rightarrow F(x) = \int_{-1}^{1} e^{2x}\,dx$$

د انتیګرال حل د بدلون له لارې:

۱ – بدلون $\bar{u}(x) = 2x$

۲ – د dx په ځای کېږدی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{1}{2} du$$

۳ – د پولو بدلون

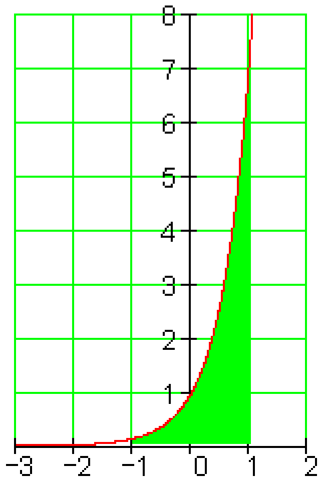
- لاندې پوله $u(-1) = -2$

- پورته پوله $u(1) = 2$

۴ - په انتيگرال کې ځا په ځای کړی

$$\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} e^{u}\, du = \frac{1}{2}\left[e^{u}\right]_{-2}^{2} = \frac{1}{2}\left[e^{2} - e^{-2}\right] = \underline{\underline{3{,}627}}$$

$f(x) := e^{2 \cdot x}$



بيلگه :

$$f(x) = 2x \cdot \ln\left(x^{2}\right) \Rightarrow F(x) = \int_{1}^{2} 2x \cdot \ln\left(x^{2}\right) dx$$

د انتيگرال حل د بدلون له لارې

۱ – بدلون $u(x) = x^{2}$

۲ – د ځای په په ځای کونه

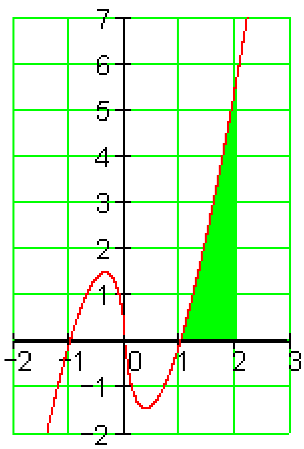
$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2x} du$$

۳ – د پولې بدلون

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = 2x \cdot \ln(x^2) \Rightarrow F(x) = \int_1^2 2x \cdot \ln(x^2)\, dx$$

$f(x) := 2x \cdot \ln(x^2)$



د انتیګرال حل د بدلون له لارې

۱ – بدلون $u(x) = x^2$

۲ – د ځای په ځای کونه

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2x} du$$

۳ – د پولې بدلون

- لاندې پوله $u(1) = 1$

- پورته پوله $u(2) = 4$

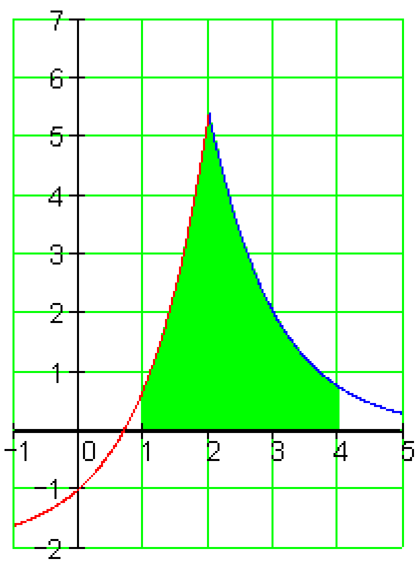
۴ – په انتیګرال کې ځای په ځایکړی

$$\int_1^4 2x \cdot \ln(u) \cdot \frac{1}{2x} du = \int_1^4 \ln(u)\, du = \Big[u \cdot \ln(u) - u\Big]_1^4$$

$$= \Big[4 \cdot \ln(4) - 4\Big] - \Big[1 \cdot \ln(1) - 1\Big] \approx \underline{\underline{2,545}}$$

بیلګه :

(c) ketabton.com: The Digital Library



$f(x)=\begin{cases} e^x-2 \\ (e^2-2)e^{-(x-2)} \end{cases}$	د $x<2$ له پاره د $x\geq 2$ له پاره

$$A=\underbrace{\int_1^2 (e^x-2)\,dx}_{I_1}+\underbrace{\int_2^4 (e^2-2)e^{-(x-2)}\,dx}_{I_2}$$

$$I_1=\int_1^2 (e^x-2)\,dx=\left[e^x-2x\right]_1^2=e^2-e-2$$

$$I_2=(e^2-2)\int_2^4 e^{-(x-2)}\,dx$$

$$u(x)=-(x-2)=-x+2$$

$$\frac{du}{dx}=-1\Rightarrow dx=-du;\ u(2)=0;\ u(4)=-2$$

$$I_2=-(e^2-2)\int_0^{-2} e^u\,du=(e^2-2)\int_{-2}^{0} e^u\,du$$

$$=(e^2-2)\cdot\left[e^u\right]_{-2}^{0}=e^2+2e^{-2}-3$$

$$I=I_1+I_2=e^2-e-2+e^2+2e^{-2}-3=\underline{\underline{7,331}}$$

جمله ۲ . ۶:

د ،،بدلون،، (Substitution لاتین :د یوه ارزښت په ځاي د همغه ارزښت بله لويه اینبوول ، لنډ: بدلون)قاعده: د نیونو لاندي چې $u = g(x)$ متمادي (نه پریکیدونکی) او د مشتق قابلیت لري او $y = f(u)$ متمادي دی، نو باور لري:

$$\int f\,[g(x)]g'(x)dx=\int f(u)du$$

حل : د (۲ . ۱۳) د بني اړخ مشتق د ځنځیرقاعدي (جمله۲ . ۶) له مخی داسی دی

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{d}{dx}\int f(u)\,du = \frac{d}{du}\int f(u)\,du \cdot \frac{du}{dx} = f(u)\cdot u' = f[g(x)]\cdot g'(x),$$

دا د کينِ اړخ د رابيليدنی سره سر خوري (۲۱. ۱۳) قاعده د ضرب اينتګرالېدو(اينتيګريشن) لپاره مساعده ده، په کوم کی چی يو فاکتور ځنځيري بلواك f [g (x)] وي او دا بل فاکتور (ضريب) يی د دننه تابع مشتق g ' (x) وي. سرِی د دننه تابع لپاره متحولي يا واريابل بدلوي يا ځاي په ځاي کوي u = g (x) : جوړوي du / dx = g ' (x) په همدېِ ډول du = g ' (x) dx

د بريالي ايتګرالېدو(اينتيګرېشن) کيدو ورسته بدلون بيرته راګرځول کيږي.

بيلګه ۲۱ . ۳) a : لرو $I = \int 2\cos(2x-1)\,dx$

بدلون يا په ځای کونه: $2x-1=u$

مشتق $2 = du/dx$ همداسی $2dx = du$

$$I = \int \cos u\,du = \sin u + C = \sin(2x-1) + C$$

بيلګه ۲۱ . ۳) b : لرو $I = \int 3\cos(2x+1)dx$

بدلوو : , 2x = u-1 کشتق 2= du / dx همداسی dx = (1/2) du

$$I = \int 3\cos u \cdot \frac{1}{2}du = \frac{3}{2}\int \cos u\,du = \frac{3}{2}\sin(2x-1) + C$$

وموليدل چی ځنځيري تابع د لايني دننه تابع سره د بدلونو قاعدېِ سره تل اينتيګرال کيدی شي، ځکه چی د لايني تابع مشتق ثابت دی او ثابت فاکتور د جملی ۲ . ۴ سره سم د اينتيګرال تر مخ(موخه کينِ لور ده) ليکل کيږي.

د بنسټيزو اينتيګرالو سره ۱۰ او ۱۱) جدول ۲۱ . ۱ (متحولي x يواځي په جګ يا مټ د دوه منځ ته راځي. له دېِ امله داسی اينتيګرال، کومو کی چی د x2 په ځاي لايني ترم

(c) ketabton.com: The Digital Library

(Term) پروت دی، کیدی شي چې د لایني بدلولو له لارې په بنستيز اينتيګرالو ۱۰ او ۱۱ بيرته واړول شي. ډيروخت یو د فورم بدلون ته هم اړتياموجود وي، چې د اينتيګراند فورم ته راشو.

بيلګه 5.2:

$$a)\quad I=\int\frac{dx}{1+2x^2}.$$

$$2x^2=\left(\sqrt{2}x\right)^2,\quad d\cdot h\cdot\ I=\int\frac{dx}{1+(\sqrt{2}x)^2},$$

$$\sqrt{2}x=u,\qquad \sqrt{2}=\frac{du}{dx}\qquad dx=\frac{1}{\sqrt{2}}du,$$

$$I=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{du}{1+u^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{Arctan}\,u+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{Arctan}(\sqrt{2}x)+C.$$

$$b)\quad I=\int\frac{dx}{\sqrt{9-36x^2}}.$$

$$9-36x^2=9(1-4x^2)=9(1-(2x)^2),\ d\cdot h\cdot$$

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{9(1-(2x)^2)}}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{\sqrt{1-(2x)^2}},$$

$$2x=u,\qquad 2=\frac{du}{dx}\qquad dx=\frac{1}{2}du$$

$$I=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\frac{1}{6}\mathrm{Arcsin}\,u+C=\frac{1}{6}\mathrm{Arcsin}(2x)+C.$$

اينتيګريشن قاعدې، که دننه تابع خطي يا لايني نه وي، نو د اينتيګراند دوم فاکتور(تر ثابت فاکتور پورې) د دننی تابع د لومړي فاکتور مشتق وي، چې د (۲ . ۱۳) له لارې سرې بنستيز اينتيګرال ته راشي. دلته هم سرې بيا دننۍ تابع په نوې متحولې يا واريابلې بدلوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه 6.21: الف: $I = 4x\sqrt{x^2-1}\,dx$

بدلون:د $x^2-1=u$ مشتق $2x = du/dx$ دی ،همداسې لرو: $xdx = \frac{1}{2}du$

$$I = \int 4\sqrt{u}\cdot \tfrac{1}{2}du = 2\int u^{1/2}du = 2\cdot 2/3\,u^{3/2} + C = 4/3\sqrt{(x^2-1)^3} + C$$

ب) $I = \int \sin^3 x \cdot \cos x\, dx$

بدلون: $\sin x = u$ را بیل شوي $\cos x = du/dx$ همداسې $\cos x\ dx$

$$I = \int u^3 du = \frac{1}{4}u^4 + C = \frac{1}{4}\sin^4$$

$$c)\ I = \int \frac{1}{x}\cdot \ln^2 x\ dx$$

$$\ln x = u, \qquad : \frac{1}{x} = \frac{du}{dx} \qquad \frac{1}{x}dx = du,$$

$$I = \int u^2 du = \frac{1}{3}u^3 + C = \frac{1}{3}\ln^3 x + C$$

$$d)\ I = \int \tan x\, dx.$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, d\cdot h.\quad I = \int \frac{1}{\cos x}\cdot \sin x\ dx,$$

$$\cos x = u, \qquad -\sin x = \frac{du}{dx} \qquad \sin x\ dx = -du,$$

$$I = -\int \frac{1}{u}\,du = -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C.$$

$$e)\ I = \int_0^1 \frac{2x^2}{2-x^3}dx.$$

$$2 - x^3 = u, \qquad -3x^2 = \frac{du}{dx} \qquad x^2 dx = -\frac{1}{3}du,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$I=-\frac{1}{3}\int_0^1\frac{2du}{u}=-\frac{2}{3}\ln|u|\Big|_0^1=-\frac{2}{3}\ln\left|2-x^3\right|\Big|_0^1=-\frac{2}{3}(\ln 1-\ln 2)=\frac{2}{3}\ln 2.$$

۲۱د بدلونقاعده) ۲۱ . ۱۳ (دې په چپه) یعني د بنی وکیڼ(لور هم استعمال شي . اینتیګرال f (x) dx کیدی شي چی په بل واړول شي چی x په یو مناسب بلواك (t) gبدل شي (21 . 14) $f(x)\,dx=\ f[g(t)].\ g(t)dt.$ دا: افاده » مناسب« بلواك دې دلته داسي وپوهیدی شي چی سړی د بدلون وروسته یو ساده او ممکن یو بنستیز اینتیګرال لاس ته راوړي. د) ۲۱ . ۱۴ (استعمال په قاعده کی داسی دی چی په یوه بلواك f (x) کی موجود » پیچلی « ترم h (x)د h (x) t = h (x) په بدلون له منځ څخه وړي او بیا) که ممکن وي (د x په لوریی حلوي

$$x=g(t)=h^{-1}(t)$$

بیلګه 7.21: الف: $a)\ \ I=\int\frac{dx}{\sqrt{x-1}}$

$$\sqrt{x}-1=t,\qquad x;\ x=(t+1)^2,\qquad dx=2(t+1)dt:$$

$$I=\int\frac{2(t+1)}{t}dt=2\cdot\left[\int 1dt+\int\frac{1}{t}dt\right]=2(t+\ln|t|)+C=2(\sqrt{x}-1)+2\ln\left|\sqrt{x}-1\right|+C$$

مناسب تابع ، چې ورکړ شوی اینتګرال د دوه ایتکرالو جمعي ته بیایي، دلته $x=g(t)=(t+1)^2$ وو.

$$b)\ \ I=\int\frac{dx}{\sqrt{\sin x\cos^3 x}}.$$

$$\sin x\cdot\cos^3 x=\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\cos^4 x=\tan x\cdot\cos^4 x.$$

نو لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$I=\int\frac{dx}{\tan x\cos^4 x}=\int\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{1}{\sqrt{\tan x}}dx,$$

$$\tan x=t,\qquad \frac{1}{\cos^2 x}dx=dt,$$

$$I=\int\frac{1}{\sqrt{t}}dt=\int t^{-\frac{1}{2}}dt=2t^{\frac{1}{2}}+C=2\cdot\sqrt{\tan x}+C.$$

موږ د دې لاندې انتیګرال نیسو: $\int x\cos(x)\,dx$

ږدو $u = x$ ، نو لرو : $du = dx$

ږدو $dv = \cos(x)\,dx$ ، نو $v = \sin(x)$ لرو

په لاندې ترګه مخ ته ځو:

$$\begin{aligned}\int x\cos(x)\,dx &= \int u\,dv\\ &= uv-\int v\,du\\ &= x\sin(x)-\int\sin(x)\,dx\\ &= x\sin(x)+\cos(x)+C.\end{aligned}$$:

C د انتیګرالوني یوه په خوښه ثابته ده

انتیګرالوونی Integrand د x توان یا e^x سره

د ټوټه انتیګرالوني د استعمال سره د انتیګرالونو لکه

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int x^2 e^x\, dx \quad \text{او} \quad \int x^3 \sin(x)\, dx$$

کېده شي په مدې لا حل شي:

یوه په زړه پورې بېلګه دا لاندې ده :

$$\int e^x \cos(x)\, dx$$

که په پوره سختوالي ونیسو ونیسو، نو په ورسره بلده لار اړین نه دی، چې دا دې حل ولي.

دا بېلګه د دوه واره ټوټه انتیګرالوني استعمال له لارې حل کولی شو.

لومړی : $u = \cos(x)$ داسې چې $du = -\sin(x)\, dx$

$dv = e^x\, dx$ داسې چې $v = e^x$

نو لرو :

$$\int e^x \cos(x)\, dx = e^x \cos(x) + \int e^x \sin(x)\, dx.$$

اوس ، ددې له پاره چې پاتې انتیګرال حل شي، نو د ټوټه انتیګرالوني قاعده بیا استعمالوو ، د دې لاندې سره :

$u = \sin(x)$; $du = \cos(x)\, dx$

$v = e^x$; $dv = e^x\, dx$

نو لرو :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int e^x \sin(x)\,dx = e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)\,dx$$

که دا سره يوځای کړو، نو لاس ته راځي:

$$\int e^x \cos(x)\,dx = e^x \cos(x) + e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)\,dx.$$

که فکر وکړو، نو د پورته مساوات دواړو لورو ته همغه انتيګرال لرو(بې له مخ نخښې)، نو د ښي لور انتيګرال که کيڼ لور ته يوسو ، لاس ته ترې راځي:

$$2\int e^x \cos(x)\,dx = e^x(\sin(x) + \cos(x)) + C$$

$$\int e^x \cos(x)\,dx = \frac{e^x(\sin(x) + \cos(x))}{2} + C'$$

C د انتيګرالونې يوه په خوښه ثابته ده

د اينتيګرال شميرنې استعمال

د سطحومساحت، چې د f(x) دګراف او x محور ترمنځ پرتې وي.

په ځلورم ځپرکي کې وويل شو چې ټاکلی اينتيګرال $\int_a^b f(x)dx = f(b) - f(a)$ د

سطحې مساحتA ښايي ، چې له منحنيy=f(x)، د x- محور y=(0) او د کرښیx=a اوx=b له خوا رابند وي. موږ له دې څخه مخ ته تللي يو چې y=f(x) د اينتيګرال اينتروال په دننه کې دx-محور پورته لور ته ځي، خو دا کېدی شي د محور کښته لور ته هم لاړ شي..

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت:

--د یوې په خوښه تابع د منحني یا کرښې او د x محور ترمنځ او یا د دوه توابعو د سطحې شمیرلو لپاره وړاندیزونه وکړئ.

- دا هم د شمیرلو لپاره په پام کې ونیسئ، که منحني یا د تابع کرښه د x د محور لاندې لور ته پراته وي.

- یوه په خوښه تابع ورکړئ، د تابع رسم وکاږئ او د تابع انتیګرال د x محور په ټاکلو پولو کې وشمېرئ.

- یوه په خوښه تابع ولیکئ، چې د انتروال په دننه کې د x محور کښته لور ته ځي. د تابع رسم و کاږئ او دا تابع به کومه محنخښه ولري؟ دا چې سطحه تل مثبت ده، نو د تابع د محنښې په ورکولو کې دا بیا وڅېړئ، چې ولې؟

یادونه: که موږ د سطحې مساحت شمېرلو کې هغه عدد ولیکو، نو د هغې سره دې دا په پام کې ونیول شي، چې د سطحې واحد(یوون) ور سره شته دی. که دا ورسره لیکل شوی نه وي، خو باید تل په پام کې وي.

دا پورته فعالیتونه مو دې لاندې بېلګو ته رابولي:

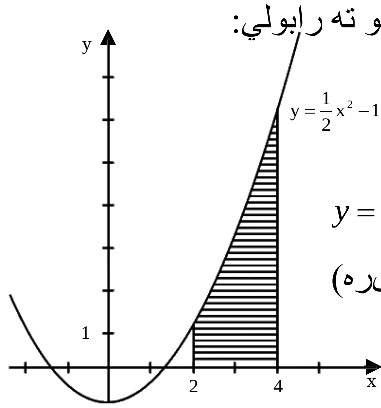


Bild 21,3

بیلګه ۵ . ۱ :

د سطحې مساحت د

$$y=\frac{1}{2}x^2-1\ ,\ y=0\ ,\ x_1=2\ ,\ x_2=4$$

ترمنځ په لاندې ډول دی(مخامخ څېړه)

$$A=\int_2^4(\frac{1}{2}x^2-1)dx=(\frac{1}{6}x^3-x)\Big|_2^4$$

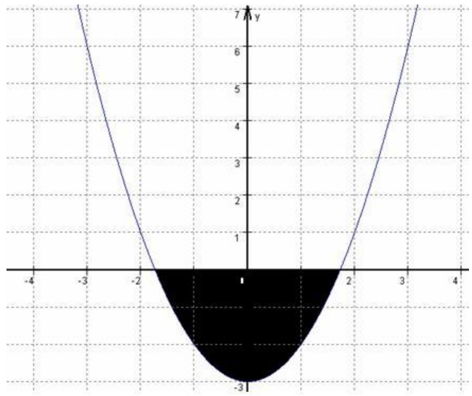
$$=\frac{1}{6}.64-4-\frac{1}{6}.8+2$$

$$=\frac{22}{3}$$

که د تابع y=f(x) سطحې د منحني تلنه دx- محور لاندې لور ته وي، نودا ټاکلی اینتیګرال به منفي وي. ددې لپاره چې د سطحې تل مثبت مساحت لاس ته راوړو، نو د اینتیګرال مطلقه ارزښت نیسو یعني منفي اینتیګرال.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library



بېلګه ۵ . ۲ :

د $f(x)=x^2-3$ ګراف د x محور سره یوه

سطحه رابندوي.د ګراف او x محور ترمنځ

د ټولې سطحې مساحت وشمېرئ.

تګلار:

۱ - د دې لپاره چې دا مسئله راته ښه روښانه شوې وي، نو دا پورته رسم کاږو.

۲ - د دې لپاره چې د انتیګرال حدونه لاس ته اروړی شو، باید صفرځایونه وشمېرو.

$$0 = x^2 - 3$$
$$x = \pm\sqrt{3}$$

۳ – اوس د سطحې د مساحت شمېرلو لپاره اړونده انتیګرال لیکو.

د تناظر پر بنسټ لومړی له 0 څخه تر $\sqrt{3}$ پوري انتیګرال شمېرو او نتیجه یې له 2 سره ضربوو، نو لرو:

$$\int_0^{\sqrt{3}} (x^2-3)dx = \int_0^{\sqrt{3}} (x^2)dx - 3\cdot\int_0^{\sqrt{3}} 1dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^{\sqrt{3}} - 3.x\Big|_0^{\sqrt{3}} = \sqrt{3} - 3\cdot\sqrt{3} = |-2\cdot\sqrt{3}|$$
$$A = 2\cdot\sqrt{3} + 2\cdot\sqrt{3} = 4\cdot\sqrt{3}$$

بېلګه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د سطحي مساحت د $y=\frac{1}{2}x^3-5\ ,\ \ y=0\ \ ,\ \ x_1=-1\ \ ,\ \ x_2=2$ ترمنځ دی: (لاندې ځیره)

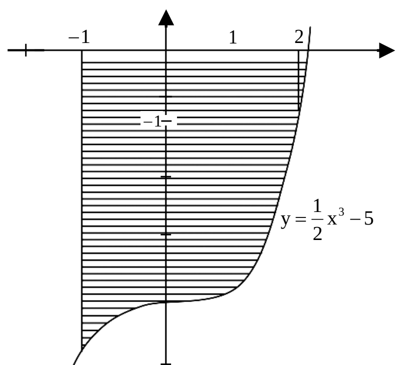
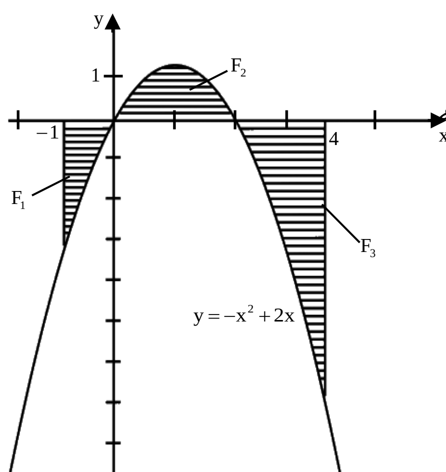


Bild 21,4

$$A=|\int_{-1}^{2}\frac{1}{2}x^3-5)dx\ |$$
$$=-\int_{-1}^{2}\frac{1}{2}x^3-5)dx$$
$$=(-\frac{1}{8}x^4+5x\ )|_{-1}^{2}$$
$$=(-2+10+1/8+5)=\frac{105}{8}$$

بیلگه:

د لاندې پولو $x_1=-1$ تر $x_2=4$ اودمنحني $y=-x^2+2x$ او $y=0$ ترمنځدx- محور پورته او کښته پرته سطحه (په مخامخ ځېره کي نښانه شوې ده) دې وشمیرل شي



حل : د تابع $y=-x^2+2x$, د $x_1=0$ د صفرځایونو $x_1=0$ او $x_2=2$ تر منځ پرته غوښتونکي سطحه دx-محور پورته، نوره کښته پرته ده. له دې امله لرو

$$A=-F_1+F_2-F_3$$
$$=\int_{-1}^{0}(-x^2+2x)dx+\int_{0}^{2}(-x^2+2x)dx-\int_{2}^{4}(-x^2+2x)dx$$
$$=-\left(-\frac{1}{3}x^3+x^2\right)\Bigg|_{-1}^{0}\left(-\frac{1}{3}x^3+x^2\right)\Bigg|_{0}^{2}-\left(-\frac{1}{3}x^3+x^2\right)\Bigg|_{2}^{4}=\frac{28}{3}$$

د لاندې پولو $x=-1$ تر $x=4$ او د کږې $y=-x^2+2x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او $y = 0$ ترمنځ (د x – محور پورته او کښته)

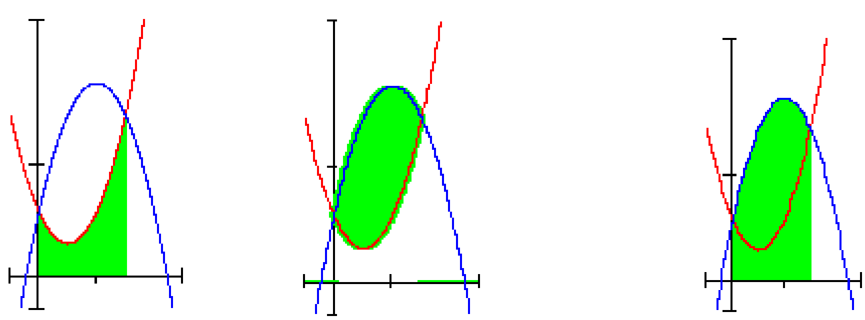
له دوه ګرافونو څخه رابندي سطحې د مساحت شمرنه:

ننوتنه د یوه ډنډ یا یوه بند څېره دې دلته راوړل شي یا دیوه پټي،چې له ګړو پولو را بند وي.

فعالیت:

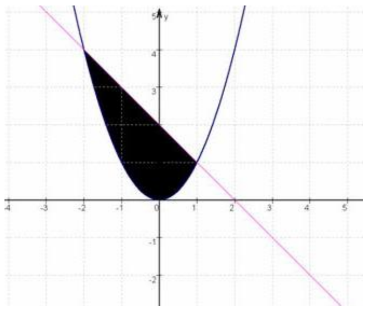
- که داسې یو ډنډ ولرو، نو فکر وکړئ، چې د دې ډنډ مساحت څنګه وشمېرو؟

په څنو پوښتنو کې د سطحې مساحت شمیرل کیږي، چې د دوه توابعو ګرافونو ترمنځ پرته ده. دا ډول د سطحې مساحت کېږدی شي د ټاکلو اینتګرالونو د کمښت له لارې و شمیرل شي. که دواړه ګرافونه د x-محور پورته لور ته پراته وي،نو د لاندې شیما څخه مخ ته ځو :



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A = A_1 - A_2$$



بیلګه ۵ . ۵ :

د $f(x) = x^2$ او $g(x) = -x+2$ دوه توابعو ترمنځ رابند د سطحې مساحت غواړو وشمېرو:

د تګلارې لار: دلته هم یو شکل یا ګراف رسموو، چې دا حالت راته روښانه شي.

۲ - د دې لپاره چې انتیګرال وشمېرو، د ګرافونو دقاطع ټکي ټاکو.

$x^2 = -x+2$

$x^2+x-2= 0$

P;q - فرمول

$$x_{(1,2)} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = -2$$

۳ – په ساده توګه لیدل کیږي.

$$\int_{x_1}^{x_2} g(x)\,dx - \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پس باور لري

$$A=\int_{1}^{-2}(-x+2)dx-\int_{1}^{-2}x^{2}dx=$$
$$-1\cdot\left(\frac{2^2}{2}-\frac{1}{2}\right)-6-\left(\frac{(-2)^3}{3}\right)-\frac{1}{3}$$
$$=-1,5-6++=-4.5$$
$$A=4,5$$

جمله :

که د ټولو x لپاره ، د a<x<b سره f(x)>g(x) وي، دا په دې معنا چې د f ګراف د a او b تر منځ دg پورته لور ته ځغلي, نو د دواړو ګرافونو په انتروال کې رابندې سطحې مساحت لپاره بارور لري.

$$A=\int_{a}^{b}(f(x)-g(x))\,dx$$

بیلګه ۵ . ٦ :

د توابعو$f(x)=x^2-2x+2$ او $g(x)=-x^2+4x+2$ ګرافونو ترمنځ سطحې مساحت غواړو پیداکړو.
د دواړو ګرافونو د x–ارزښتونو غوځټکي(د تقاطع ټکي) د اینتیګرال حدونه جوړوي.

د غوځټکو د x - کواوردیناتو ټاکل:

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow x^2-2x+2=-x^2+4x+2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-6x=0\ \Leftrightarrow$$

$x_1=0$ او $x_2=3$ د اینتېګرال لیمیټونه یا پولې دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

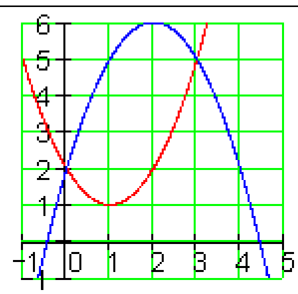
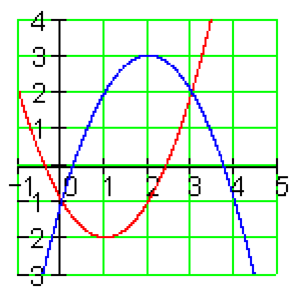
د اینتګرال جوړونه:

$$\int_0^3 f(x)dx = \int_0^3 (x^2 - 2x + 2)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x\right]_0^3 = \frac{1}{3}\cdot 27 - 9 + 2\cdot 3 = 9 - 9 + 6 = \underline{\underline{6}}$$

$$\int_0^3 g(x)dx = \int_0^3 (-x^2 + 4x + 2)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 2x\right]_0^3 = -\frac{1}{3}\cdot 27 + 2\cdot 9 + 2\cdot 3 =$$
$$= -9 + 18 + 6 = \underline{\underline{15}}$$

دا چې د دوه ګرافونو ترمنځ سطحه باید تل مثبت وي،نو له لوي ارزښت څخه کووچنی ارزښت باید کم شي.

$$A = \int_0^3 g(x)dx - \int_0^3 f(x)dx = 15 - 6 = \underline{\underline{9}}$$

 	لکه چې پوهیږو، د یوې سطحې مخنخښنه ددې په واک کې ده، چې ایا سطحه د **x** - محور پورته لور ته پرته ده او که کښته لور ته. موږ څېړو، چې ایا دا تاثیرات په پورتنی بیلګه کې پراته دي او که نه. موږ سطحه د **y** -محور په دري واحدونو(یوونونو) کښته لورته بیایو او سطحې نوې شمیرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د لید له مخې قضاوت وکړو،نو د ټولو لاس ته راوړنه به برابره وي.

د x–ارزښت غوښتکي هم او له دې سره د انتیګرال حدونه بې تغیره پاتیږي.

$$f(x)=x^2-2x-1 \quad \text{و} \quad g(x)=-x^2+4x-1$$

ځای په ځای کونه:

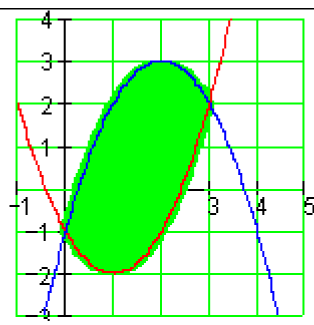
$$A=\int_0^3 f(x)dx-\int_0^3 g(x)dx=\int_0^3 (f(x)-g(x))\,dx$$

د $f(x)-g(x)=2x^2-6x$ سره کیږي:

$$A=\int_0^3 (2x^2-3x^2)\,dx=\left[\frac{2}{3}x^3-3x^2\right]_0^3=\frac{2}{3}\cdot 27-3\cdot 9=18-27=\underline{\underline{-9}}$$

دا چې د دوه منحنیو ترمنځ سطحه فزیکي سطحه ښایي، باید لاس ته راوړنه یو مثبت عدد وي. دا د مطلق ارزښت له لارې ترلاسه کوو.

$$A=\left|\int_0^3 (2x^2-6x)\,dx=\left|\left[\frac{2}{3}x^3-3x^2\right]_0^3\right|=\left|\frac{2}{3}\cdot 27-3\cdot 9\right|=|18-27|=|-9|=\underline{\underline{9}}\right|$$



د دې متود ټولیزه ونه(عمومیت) :

د دوه ګرافونو ترمنځ سطحه:

که یوه سطحه د یوې پورته او یوې کښته منحني څخه رابنده وي، چې تابع(f(x او تابع (g(x پورې اړه و لري، نو دا له دې رابنده سطحه په لاندې ډول شمیرل کیږي.

$$A=\left|\int_a^b [f(x)-g(x)]dx\right|$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د انتیکرالونې حدونه a او b د x – محور د دواړو ګرافونو د وضعیه قېمتونو غوڅټکي دي

-- د منحنیو $y=f_1(x)$ او $y=f_2(x)$

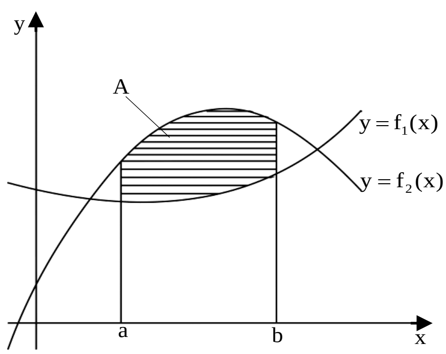


Bild 21,6

تر منځ پرتې سطحې مساحت په لاندې پولو کې له $x=a$ تر $x=b$ پورې او $y=f_1(x)$ او $y=f_2(x)$

اینتیګرالوړاو $f_1(x) < f_2(x)$
په $[a,b]$ اینتروال کی (ش ۱ . ۶) داسی لاس ته راوړل کیږي چی دتابع $y=f_2(x)$ لاندې سطحې مساحت څخه د $y=f_1(x)$ تابع لاندې سطحې مساحد کم کړئ.

$$A=\int_a^b\left[f_2(x)-f_1(x)\right]dx$$

سړی په ساده ډول خپل باور په دې راوستی شي چې ش ۲ . ۶ له دې خپلواك چی $f_1(x)$ او $f_2(x)$ په اینتروال $[a,b]$ کومه یوه مخنخښه ځان ته غوره کوي باوري دی.

بیلګه ۵ . ۷: د لاندې پارابولونو ترمنځ سطحه غواړو وشمیرو $y=x^2-1$ او $y=-x^2+1$

حل : د ایتیګرال پولې(حدونه) د افقي(پراته) محور غوڅټکي(د تقاطع ټکي) دي

$$x^2-1=-x^2+1$$

$$2x^2=2$$

$$x^2=1 \qquad x_1-a=1\,,\ x_2=b=-1$$

د اینتیګرلولو په اینتروال [1 , 1 -] کی لرو $-x^2+1>x^2-1$
(که چیرې په اینتروال $[a,b]$ او په (۲ . ۱) کی $f2(x)>f1(x)$ په نظر کي ونه نیول شي، نو د څرګند اینتیګرال به منفی شي او سړی(لکه د مخه چې ویل شوي) بیا داینتیګرال مطلقه ارزښت نیسي. له دې امله لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A=\int_{-1}^{1}\left[-x^{2}+1-(x^{2}-1)\right]dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(-2x^{2}+2)\,dx$$

$$=(-\frac{2}{3}x^{3}+2x)\Big|_{-1}^{1}=\frac{8}{3}$$

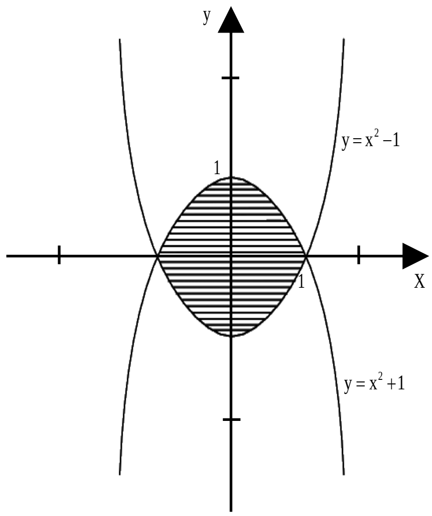


Bild 21.7

بیلګه ۵ . ۸ :
د (ش. ۲ . ۸) سره سم د لاندې توابعو ترمنځ
سطحه شمیرل کیږي.

$y=(x-1)^2, y=-4x+4, y=4$

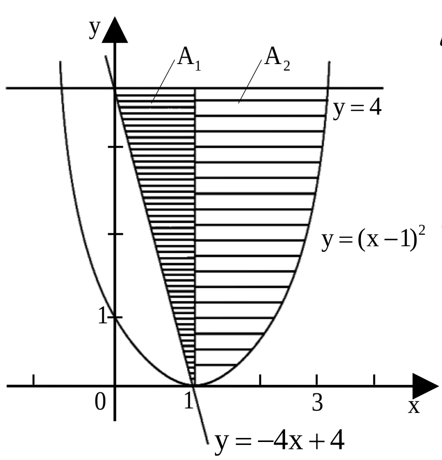


Bild 21.8

حل : دا د شمیرلو سطحه، د منحنیو ترمنځ د دوه
سطحوA1 او A2 له یوځای کیدو څخه لاس
ته راځي.
A1د منحنیو y=4 او y=-4x+4 ترمنځ
پروت دی. د اینتیګرال پولی(- حدونه) د لومړي

کواور ینات(x –محور) غوښتکی دی،
د y=4 او y=-4x+4 ترمنځ.

لرو $4=-4x+4,\ x_1=0$ په همدې ډول د

بنې غوښتکي لومړی وضعیه ارزښت (کواور دینات)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $y=-4x+4$ او $y=(x-1)^2$ ترمنځ

$$-4x+4=(x-1)^2,\ x^2+2x-3=0$$

$$x_{2,3}=-1\pm 2,\ x_3=1.$$

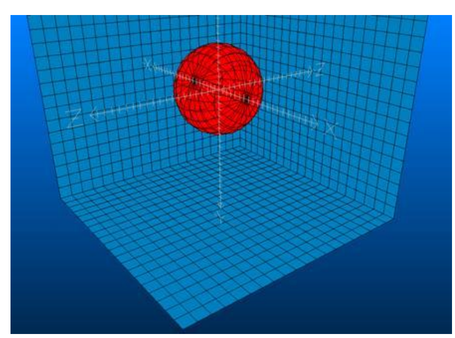
ګورو چیA2د y=-4 او$y=(x-1)^2$ تر
منځ پرته ده ، د اینتيګرال حدونه(پولی)x1=1 او د لومړي
وضعيه قيمت د بني غوختکي د y=4 او $y=(x-1)^2$.

غوښتوني سطحه داسې ده:

$$A=A_1+A_2=\int_0^1[4-(-4x+4)]dx+\int_0^1\left[4-(x-1)^2\right]dx$$

$$=\int_0^1 4x\,dx+\int_0^1(-x^2+2x+3)\,dx=2x^2\Big|_0^1+(1/3x^3+x+3x)\Big|_4^3=7\frac{1}{3}$$

د څرخيدونکو بدنونو(جسمونو) ډکي(حجم)



فعاليت:

- په ورسره بلده توګه د مستطيل حجم وليکئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- د کرې، استواني او د مخروط حجومونه، چې تراوسه مو لوستلي و ليکئ.

يادونه: دا دې تل په پام کې ونيول شي: که د انتيګرال شمېرني له لارې کوم عدد لاس ته راځي، نو هغه عدد د يوه جسم حجم ښايي. موږ ددې لپاره ليکو، چې د حجم مطلوبه واحد.

څرخdدونکي تنونه:

څرخېدونکي تنونه په هندسه کې هغه تنونه دي، چې په يوه څرخېدونکي محور باندې د يوې کرښې يا منحني څرخېدنې له لارې منځ ته راځي. کرښه يا منحني په يوه سطحه پرته ده او محور هم په همدې سطحه پروت دی. منحني محور نه غوڅوي، اويا زيات له زياته يې ممکن لمس کړي. چې غوره بېلګې به يې په لاندې کې و څېړل شي.

د xپه محور څرخېدنه(څرخون)

لکه د مخه مو چې وويل، حجم هم يو انتيګرال دی. دا داسې منځ ته راځي، چې که يوه تابع د X په محور و څرخول شي.

د يوه څرخېدونکي جسم (بدن يا تن) حجم(ډکی)

د يوه څرخېدونکي جسم لپاره، چې د سطحې په څرخېدنه د x په محور په انتروال [a,b] کې د f تابع له ګراف ، د x له محور او له دواړو کرښو $x = a$ او$x = b$ ترمنځ جوړېږي، رابنده وي.

د حجم شمېرل په لاندې ډول دی:

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 \, dx$$

د y په محور څرخيدنه

د يوې سطحې په څرخېدنې (د y په محور)، چې په [a,b] انتروال دf تابع ګراف دy محور او د دواړو کرښو $y = f(a)$ او $y = f(b)$ له خوا رابند وي بايد د $y = f(x)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بڼه بدله شي و $x = f^{-1}(y)$ معکوس تابع ته . دا شتون لري، که f متمادي او غښتلي يوغږيز وي. که نه(لکه په پورته شي شکل کې) نو شايد ممکن وي،چې f په ټوټو ټوټه شي، په هغو کې چې متمادي او غښتلی يوغږيز وي. دا دلته منځ ته راغلي حجمونه بيا ځانله شمېرل کيږي او سره جمعه کيږي.

$$V = \pi \cdot \int_{\min(f(a),\ f(b))}^{\max(f(a),\ f(b))} (f^{-1}(y))^2\ dy$$

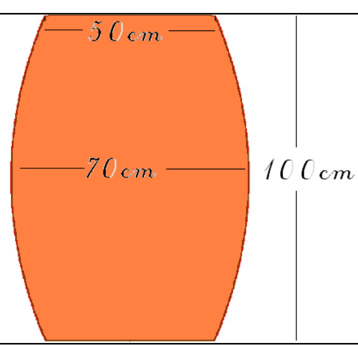
که دلته $x = f^{-1}(y)$ بدل کړو، نو د x په محور په لاندې توګه حجم لاس ته راوړو:

$$V = \pi \cdot \int_{\min(f(a),\ f(b))}^{\max(f(a),\ f(b))} x^2 dy = \pi \cdot \int_a^b x^2 \cdot |f'(x)|\, dx$$

د f' مطلق ارزښت او د انتيګرال په حدونو کې خورا جګ – ټيټ(min/max) توابع يو مثبت انتيګرال تظمينوي.

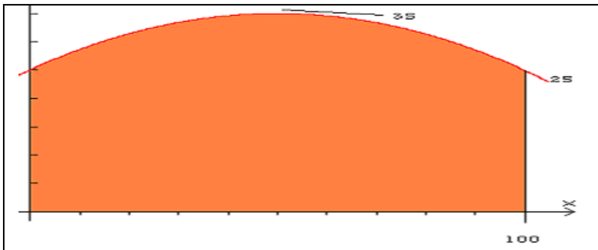
د سطحي په څرخولو(د y په محور)، چې د f تابع له ګراف او دواړو کرښو $x = a$ او $x = b$ څخه رابنده وي، لاندې فرمول باور لري.

$$V = \pi \cdot \int_a^b (x \cdot f))^2\, dx$$

د يوه مرتبان حجم: د يوه مرتبان حجم غواړو پيدا کړو چې جګوالی يې 1 متر، وړانګه يې 25 سنتي متره په پاي او 35 سانتيمتره په منځ کې ده.	

(c) ketabton.com: The Digital Library

که مرتبان په 90° درجو و څرخول شي، نو د مربع پارابول بڼه غوره کوي. د ژئ تابع باید ښکته لور ته واز پارابول وي، لکه دلته په شکل کې.



حل: د پارابول د تابع لیکښه کېدی شي ساده په ککرتکي یا راس باندې ولیکل شي.

ټولیز باور لري:

(dm ارزښت په دیسیمتر $f(x)-a\cdot(x-5)^2+3.5$)

په څرګند دول 5- د رآس راکښنه د +x په لور ورکوي او 3,5 د +y په لور. د غزونې ضریب a په لور اړین دی، چې ښکته لور واز پارابول لاس ته راوړو. اوس فقط ضریب a نه شته. که په فرمول کې یو معلوم ټکی کیږدو، کېدی شي a وشمېرل شي. دا ټکی (0/2,5) دی.

$$f(x)=-a\cdot(x-5)^2+3.5$$

د x ارزښت ځا په ځاي کوونو لرو $-a\cdot(0-5)^2+3.5$

له دې a دی: $\frac{2.5-3.5}{25}=-0.04$

او مساوات پوره بلل کیږي. $f(x)=-0.04\cdot(x-5)^2+3.5$

د ساده والي لپاره د رآس ټکي فرمول په نورمال یا عمودې فورم بدلوو:

$$f(x)=-0.04x^2+0.4x+2.5$$

تابع مربع کړئ $f(x)=(-0.04x^2+0.4x+2.5)^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو دی $f(x)=0.0016x^2-0.032x^3-0.04x^2+2x+6.25$

لومړنۍ تابع

$$f(x)=\frac{0.0016x^2}{5}\cdot x^5-\frac{0.032x^3}{4}\cdot\frac{-0.04x^2}{3}\cdot x^3+x^2+6.25x$$

د حجم شمېرلو لپاره ټاکلی انتیګرال دی؛

$$\pi\cdot\int_0^{10}(-0.04x^2+0.4x+2.5)^2\,dx=\pi\cdot\int_0^{10}(-0.0016x^2-0.032x^3-2x+6.25)\ dx$$

$$=\pi\left[\frac{0.0016}{5}\cdot 10^5-\frac{0.032}{4}\cdot x^4-\frac{0.04}{3}\cdot x^3+x^2+6.25x\right]_0^{10}$$

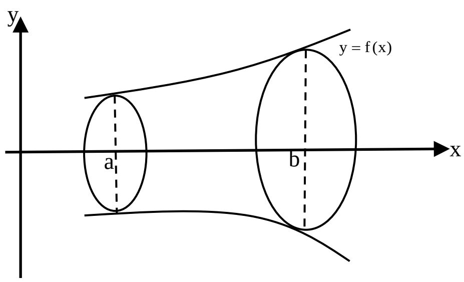
$$=\pi\left[32-80-13\frac{1}{3}+100+62.5\right]_0^{10}$$

$$=\pi\ \cdot 101.167$$

د حجم واحدونه (یوونونه)

دا چې موږ له پیله په دیخیمتر شمېرنه کړې، نو طبعآ دا په لیتر شمېرل کیږي.

$=317.824\ liter$



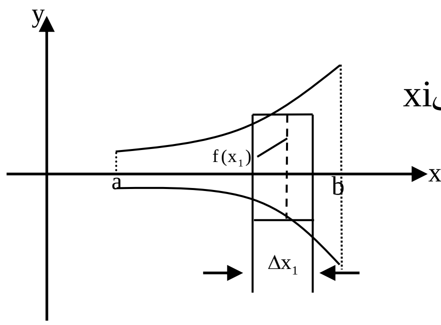
د تابع y=f(x),y=0,x=a,x=b ترمنځ سطحه چی دx-محورباندې څرخي(ش ۵ . ۹). دلته غوښتنه، په دې ډول رامنځ ته شوې یا- راغلي دڅرخیدونکي بدن ډکی(حجم) دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندېجمله باوري ده

جمله ۵ . ۸) د څرخیدونکي بدن ډکی(حجم):
په اینټروال[a,b]کي دی $y=f(x)$ متمادي وي، د څرخیدونکي بدن حجم چی د سطحو $y=f(x),y=0,x=a,x=b$ترمنځ ، راپیداکیږي داسی دی:

$$V = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$$



ښونه: V د توتو(استوانو)د جمعي له لارې چی وړانګه یې f(xi)، جګوالی یېxi د i=1,2,3,...n لپاره لری. (ش: 5 .10) دi-مې توتې (سلیندر ډکی(حجم) دی.

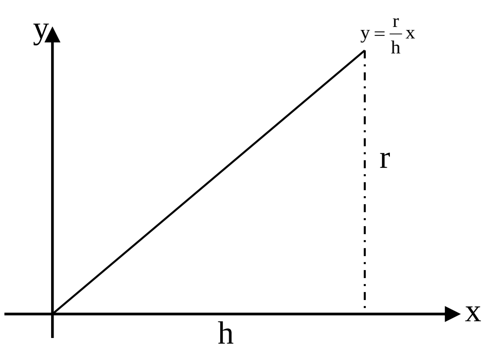
$$\Delta_i V = \pi \cdot [f(x_i)]^2 \cdot \Delta x_i$$

د ټولو n سلیندرونو یا توتو زیاتون

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = \sum_{i=1}^{n} \pi [f(x_i)]^2 \cdot \Delta x_i$$

د پولی ارزښت جوړونه) n->oe, xi->0 (د بنسټ اینتیګرال د تعریف سره سم

$V = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$ حجم (ډکی) راکوي.



بیلګه ۵ . ۹ :) دمخروط یا کیګل ډکی

(حجم) د $y = \frac{r}{h} x$ کرښي (د سرچیني تیره کرښه د $\frac{r}{h}$جګوالي سره) او دx- محور (y =0) د حدونو$x=0$ تر $x=h$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پورې(ش . ۱۱)

$$V = \pi \cdot \int_0^h \left[\frac{r}{h}x\right]^2 dx = \pi \cdot \frac{r^2}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^h = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

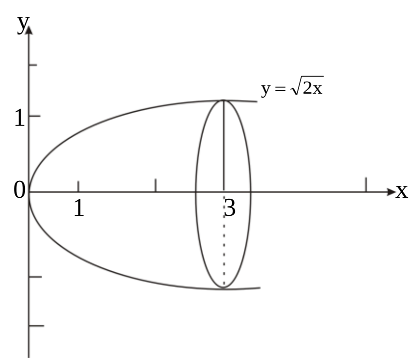
دا له بنسټیزې شمېرنې(د اساساتو) څخه معلومه نتیجه ده.

بیلګه ۵ . ۱۰:

د $y = \sqrt{2x},\ y = 0,\ x = 0,\ x = 3$

ترمنځ د x-محور باندې څرخېدلو جوړ(تولید) شوی جسم څرخېدلی پارابولویید دی (څ ۵ ېز ۱۲)

$$V = \pi \cdot \int_0^3 \left[\sqrt{2x}\right]^2 dx$$
$$= 2\pi \cdot \int_0^3 x dx$$
$$= 2\pi \cdot \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^3 = 9\pi.$$



د ارښیمیدس جمله Archimedischer Satz

د توتې، غونډارې(کرې) او مخروط د حجمونو ترمنځ تناسب:

$V_{\text{توته(استوتنه)}} : V_{\text{غونداری(کره)}} : V_{\text{مخروط}} = 3 : 2 : 1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د 1886 زک يوه درسي کتاب څخه

Figur 120.

Die Volumen der drei Körper verhalten sich wie die Ausdrücke unter 1), 2) und 3); man hat somit die Proportion:

$$Cyl.:Kugel:Kegel = 2r^3\pi : \frac{4}{3}\pi r^3 : \frac{2r^3\pi}{3}$$

oder: $\text{„} : \text{„} : \text{„} = 2 : \frac{4}{3} : \frac{2}{3}$

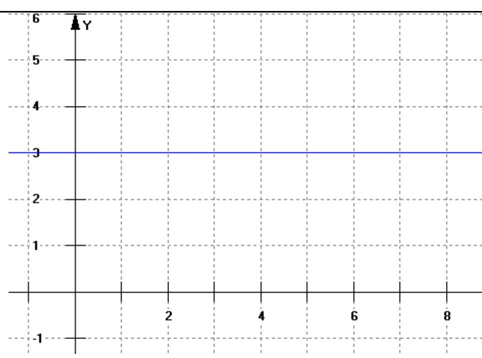
$\text{„} : \text{„} : \text{„} = 6 : 4 : 2$

$\text{„} : \text{„} : \text{„} = 3 : 2 : 1$

Archimedes war der erste, welcher dieses Verhältnis fand, daher heisst der hierdurch ausgedrückte Satz der Archimedische Satz.

د پورته الماني پښتو:ارښيمېدس لومړی کس وو، چې دا پورته تناسب يې وموندده، له دې امله دا دلته راغلې جمله د ارښيمېدس جلې په نامه نومول شوې.

د څرخېدونکي بدن(حسم) حجم.

بېلګه ٥ . ١١: استوانه(توته): استوانه د x په محور د $f(x) = c$ يوې ثابتې تابع(په دې حالت کې $f(x) = 3$ دی) د څرخېدو څخه لاس ته راځي.	

د يوې استوانې حجم (ډکی) شمېرنه:

اوس دې په [0;5] انټروال کې د توتې حجم وشمېرل شي. د استوانې د حجم د شمېرلو لپاره $V = \pi r^2 \cdot h$ عمومي فرمول دی. په دې حالت کې $r=3$ او $h=5$ دی. دx هر ارزښت لپاره د تابع ارزښته هم دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی له هرڅه غواړو $V = \pi r^2 \cdot h$ څخه فقط $r^2 \cdot h$ تر څېړنې لاندې و نیسو او غواړو یوه لار پیدا کړو ، چې د هغې لارې د انتیګرال په مرسته حجم وشمېرلای شو.
د سطحې مساحت د لاندې انتیګرال په مرسته وشمېرل شو :

$$\int_0^5 r dx = \int_0^5 f(x)\, dx$$

که د دې ناپای ډېرو مستطیلونو(د f(x) د مربع مساحت ا د صفر په لور ځغښلېدونکې پنډوالي dx سره) انتیګرال جوړ کړو، نو لاس ته ترې راځي:

$$\int_0^5 r dx = \int_0^5 [f(x)]^2\, dx$$

دا په دې معنا چې دا انتیګرال بل څه نه دی پرته له څخه، چې زموږ د پورتني فرمول څخه دد یوې توتې د حجم شمېرل دي. ز که دا له سره ضرب کړو، نو راکوي:

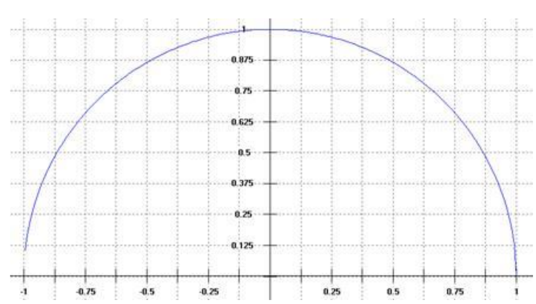
$$\pi r^2 h = \pi \int_0^5 [f(x)]^2\, dx$$

د دې ورکړ شوې استوانې د حجم شمېرنه:

$$\pi \int_0^5 [f(x)]^2\, dx = \pi \int_0^5 [9(x)]_0^5 = \pi \int_0^5 [45 - 0]_0^5 = 45\pi$$

د پرتلې لپاره: $\pi r^2 h = 45\pi$

کره (غونډارى يا غنډوسکه(توپ)):



(c) ketabton.com: The Digital Library

د x په محور د $f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$ تابع څرخېدني څخه غونداری يا کره منځ ته راځي(پورته د ننوتنې شکل.

دا تابع هم کېدی شي په ګردو ټوټو ټوټه شي، پرته غوڅوونکي تابع يې $q(x) = \pi[f(x)]^2$ ده. د دې ټوټو د انتيګرلولو له لارې بيا حجم وشمېرل شي.

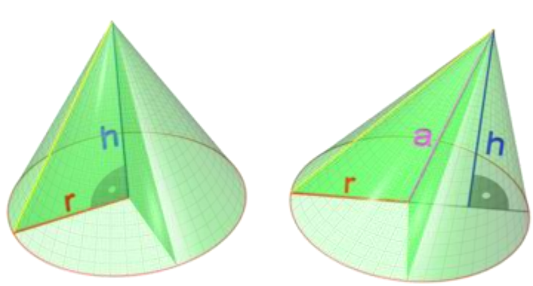
په دې بېلګه کې دې حجم وشمېرل شي، چې له صفر ځاي څخه و صفر ځاي ته د x په محور باندې

د $f(x)=\sqrt{1^2-x^2}$ تابع څرخېدنو له لارې منځ ته راځي ، يعنې په انتروال [-1;1] کې .

$$\pi\int_{-1}^{1}[f(x)]^2dx=\pi\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]=\pi\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}\pi$$

مخروطKegel (Geometrie)

دا هم ممکن ده، چې يو مخروط د يوه منظمn زاويو (اړخيزې(کونجيز) څخه رابندې بنستيزې سطحې(د n لپاره چې ناپاي ته ځي) اهرام ته ور نزدې کړو.



د مخروط حجم:

د انتيګرال په مرسته د يوه مستقيم مخروط د حجم د شمېرلو يوه بله مرستندويه لار. يو د کارتيزي وضعيه ارزښت (قيمت) سيستم په کار اچول کيږي، د هغه سره چې د مخروط څوکه په

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرچينه $(0|0)$ او منځ ټکی په ټکي $(h|0)$کې پروت دی. اوس کېدی شي، چې مخروط ناپاي کوچنيو توتو(استوانو) رايوځاي شوی په پام کې ونيسو، چې جګوالی(پنډوالی) يې dx دی. داچې د داسې يوې توتې يا استوانې ګردې توټې(کترې) واټن د مخروط له څوکې د وضعيه قيمت سيستم په x سره ور کړ شوی دی، د وړانګې جملې له مخې(دلته په افغانستان کې دا د ... جملې په نامه بلل شوې) باور لري.

د يوه ناپاي کوچنۍ توتې(استوانې) وړانګه:

$$r\,z\,(h)=\frac{r}{h}\cdot x$$

د يوې ناپاي کوچنۍ توتې(استوتنې) حجم:

$$(\frac{r}{h}\cdot x)^2\cdot\pi\cdot dx=\frac{r^2}{h^2}\cdot\pi\cdot x^2\,dx$$

دټول څرخېدونې مخروط د ټولو داسې کوچنيو توتو حجم دی. د شمېرلو لپاره يې ټاکلی انتيګرال جوړوو، د انتيګرال حدونو 0 او h سره:

$$V=\int_0^h\frac{r^2}{h^2}\cdot\pi\cdot x^2dx=\frac{r^2\cdot\pi}{h^2}\int_0^h x^2dx$$

$$V=\frac{r^2\cdot\pi}{h^2}\cdot\pi\cdot\left[\frac{x^3}{3}\right]^h$$

$$V=\frac{r^2\cdot\pi}{h^2}\cdot\pi\cdot\left(\frac{h^3}{3}-\frac{0^3}{3}\right)$$

$$V=\frac{r^2\cdot\pi}{h^2}\cdot\frac{h^3}{3}$$

له دې سره هغه مشهور فرمول ته (چې لروده مو) راځو:

$$V=\frac{r^2\cdot\pi\cdot h}{3}=\frac{1}{3}\cdot r^2\cdot\pi\cdot h$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یو مخروط د x په محور د f(x) = mx یوې کرښیزې (خطي) تابع(د بېلګې په توګه f(x) = 0,5x) څرخېدنه(څرخون) ده.

د یوه مخروط شمېرنه

دلته نه شو کولاي چې لومړی د کوادر حجم وشمېرو. دلته د دې ګراف لاندې په ډېرو کترو کتره کول دي د dx پنډوالې سره . د دې کترو د سطحو مساحت وشمېرئ، چې وړانګه f(x) لري داسې په نامه د پروت تقاطع تابع او بیا یې انتیګرال په ورکړ شوي [0;5] انتروال کې ونیسئ.

$$\pi\int_0^5 [f(x)]^2 dx = \pi\left[\frac{1}{12}x^3\right]_0^5 = 32.72$$

د پرتلې لپاره دئ د یوه مخروط د حجم معیاري (ستاندارد) بڼه وکتل شي.

$$\frac{1}{3}\pi r^2 h = 32.72$$

لنډ :

که یوه منحني د x یا y په محور وڅرخول شي، یو جسم چې لاس ته راځي، چې موږ دا جسم په نریو کترو یا زونونو ټوټه کوو، د پنډوالي x همداسې y سره او دا په ورته نژدې توګه په استوانو بدلوو، نو په نژدې توګه لکه د مخه د حجمونو لپاره لاندې بڼه لاس ته راځي:

د x په محور څرڅونه: $V_x = \pi\cdot\int_{x_1}^{x_2} y^2 dx$

د y په محور څرخونه: $V_y = \pi\cdot\int_{y_1}^{y_2} x^2 dx$

بېلګه ۵ . ۱۲:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $y = x^2/4$ تابع ګراف په $[0, 2]$ انتروال کې د وضعیه قیمتونو په محوررونو څرخي. دا د منځ ته راغلي څرخېدلي جسم حجم څومره دی؟

د x په محور څرخېدنه: $y^2 = x^4/16,\ x_1 = 0,\ x_2 = 2$

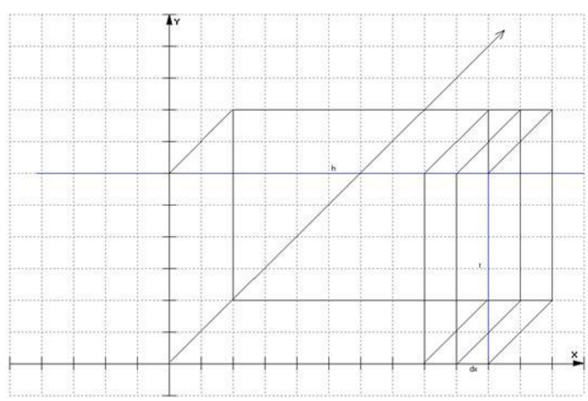
$$V_x = \pi \cdot \int_0^2 \frac{x^4}{16}\, dx = 0.4\pi$$

د y په محور څرخېدنه: $x^2 = 4y,\ y_1 = 0,\ y_2 = 1$

$$V_y = \pi \cdot \int_0^1 4y\, dy = 2\pi$$

د ناڅرخیدونکي جسم حجم.

شپږ اړخیز جسم یا مکعبډوله - 2.1 Quader



دا لید شکل د استوانې څخه راته معلوم دی، فقط دا ځل نه څرخي. حجم یې کېدی شي د عادي کوادر په څېر وشمېرل شي $(V = r^2h)$ او یا د صفر په لور تلونکي dx سرورې مربع وې ټوټه شي. د دې لپاره دې د پروت غوڅي (قاطع) سطحه وشمیرل شي، یعنې $q(x)$ د پروت قاطع تابع دې جوړه شي د دې بیا باید انتیګرال ونیول شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

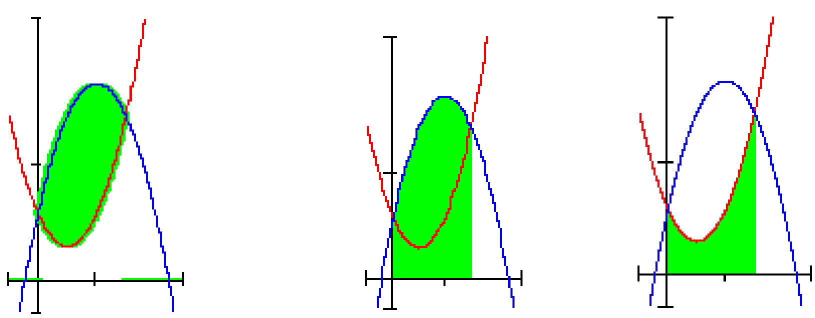
په ټولیزه توګه دا معنا لري: $V = \int_a^b q(x)dx$

په دې بېلګه کې تصادفي د پروتقاطع تابع د ژۍ تابع مربع ده: $q(x) = [f(x)]^2$

که موږ $f(x) = 3$ تابع له 0 تر 5 انتروال کې د پروتقاطع تابع سره انتیګرال کړو،
نو باید $V = r^2h = 45$ لاس ته راشي. $\int_0^5 q(x)dx = [9x]_0^5 = 45$
ټولګه

که د تابع $y=f(x)$ سطحې د منحني تلنه دx- محور لاندې لور ته وي، نودا ټاکلی اینتیګرال به منفي وي. ددې لپاره چې د سطحې تل مثبت مساحت لاس ته راوړو، نو د اینتیګرال مطلقه ارزښت نیسو یعني منفي اینتیګرال.

په ځنو پوښتنو کې د سطحې مساحت شمېرل کیږي، چې د دوه توابعو ګرافونو ترمنځ پرته ده. دا ډول د سطحې مساحت کېدی شي د ټاکلو اینتګرالونو د کمښت له لارې و شمېرل شي. که دواړه ګرافونه د x-محور پورته لور ته پراته وي،نو د لاندې شیما څخه مخ ته ځو :



A، A_1 ،A_2

$$A = A_1 - A_2$$

د منحنیو $y=f_1(x)$ او $y=f_2(x)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تر منځ پرتي سطحې مساحت په لاندې پولو کې

له$x=a$ تر $x=b$ پورې‌او $y=f_1(x)$ او $y=f_2(x)$.

د یوه څرخېدونکي جسم لپاره، چې د سطحې په څرخېدنه د x په محور په انتروال
$[a,b]$ کې د f تابع له ګراف ، د x له محور او له دواړو کرښو $x=a$ او$x=b$
ترمنځ جوړېږي، رابنده وي.

د حجم شمېرل په لاندې ډول دی:

$$V=\pi\cdot\int_a^b (f(x))^2\,dx$$

د y په محور څرخیدنه

د یوې سطحې په څرخېدنې (د y په محور)، چې په $[a,b]$ انتروال دf تابع ګراف
دy محور او د دواړو کرښو $y=f(a)$ او $y=f(b)$ له خوا رابند وي باید د $y=f(x)$
بڼه بدله شي و $x=f^{-1}(y)$ معکوس تابع ته . دا شتون لري، که f متمادي او غښتلي
یوغږیز وي. که نه(لکه په پورته شي شکل کې) نو شاید ممکن وي،چې f په ټوټو ټوټه
شي، په هغو کې چې متمادي او غښتلی یوغږیز وي. دا دلته منځ ته راغلي حجمونه بیا
ځانله شمېرل کیږي او سره جمعه کیږي.

$$V=\pi\cdot\int_{\min(f(a),\ f(b))}^{\max(f(a),\ f(b))}(f^{-1}(y))^2\ dy$$

جمله ۵ . ۸) د څرخیدونکي بدن ډکی(حجم):
په اینتروال$[a,b]$کي دی $y=f(x)$ متمادي وي، د څرخیدونکي بدن حجم چی د سطحو
$y=f(x), y=0, x=a, x=b$ترمنځ ، راپیداکیږي داسی دی:

$$V=\pi\cdot\int_a^b [f(x)]^2\,dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د توتې، غونډاري(کرې) او مخروط د حجمونو ترمنځ تناسب:

$V_{توته(استوانه)} : V_{غونداری(کره)} : V_{مخروط} = 3 : 2 : 1$

يو مخروط د x په محور د f(x) = mx يوې کرښيزې (خطي) تابع(د بېلګې په توګه f(x) = 0,5x) څرخېدنه(څرخون) ده.

که يوه منحني د x يا y په محور وڅرخول شي، يو جسم چې لاس ته راځي، چې موږ دا جسم په نريو کترو يا زونونو ټوټه کوو، د پنډوالي x همداسې y سره او دا په ورته نزدې توګه په استوانو بدلوو، نو په نزدې توګه لکه د مخه د حجمونو لپاره لاندې بڼه لاس ته راځي:

د x په محور څرخونه: $V_x = \pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} y^2 dx$

د y په محور څرخونه: $V_y = \pi \cdot \int_{y_1}^{y_2} x^2 dx$

د x په محور د $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ تابع څرخېدنې څخه کره منځ ته راځي(پورته د ننوتنې شکل.

دا تابع هم کېدی شي په ګردو ټوټو ټوټه شي، پرته غوڅوونکې تابع يې $q(x) = \pi[f(x)]^2$ ده. د دې ټوټو د انتيګرلولو له لارې دې بيا حجم وشمېرل شي.

تمرينونه

د بن

ستيز انتيګرال د جدول په کارونه يا استعمال لاندې انتيګرالونه وشميرئ

a) $\int (x^3 - 5x^2 + 7x - 2)dx$, b) $\int (2/x^3)\, dx$, c) $\int (1/3)\sqrt[3]{x}\, dx$

d) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\, dx$, e) $\int \sqrt{x \cdot \sqrt[3]{x}}\, dx$, f) $\int (\sqrt[3]{x^4} + 1)\, dx$,

(c) ketabton.com: The Digital Library

g) $\int \sqrt[3]{x^{-3}}\, dx$, h) $\int \frac{ax^2+bx+cx^{-1}}{x^4}\, dx$, i) $\int 3\cdot 2^x\, dx$,

j) $\int \frac{1}{2\sin^2 x}\, dx$, k) $\int \frac{1}{3+3x^2}\, dx$, l) $\int \cos\varphi \cdot s\, ds$,

m) $\int \frac{dt}{(2t-3)^{-2}}$, n) $\int \sqrt{t\cdot\sqrt{t\cdot\sqrt{t}}}\, dt$, o) $\int (1-u^2)^{-\frac{1}{2}}\, du$.

۱ . ۲ – د بیرته په اکلي انتیګرال وروسته یې انتیګرال ونیسی

a) $\int \frac{x^3+2x^2+x}{x^2(1+x)^2}\, dx$, b) $\int \frac{2\sin 2x}{3\cos x}\, dx$, c) $\int \frac{7\cos 2x}{\cos^2 x - \sin^2 x}\, dx$,

d) $\int \sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos^2 x}\, dx$, e) $\int (-2-2\tan^2 x)\, dx$, f) $\int \frac{2t^3-8t}{(t-2)(t+2)}\, dt$.

۳ – لاندې ټاکلي انتیګرالونه وشمیرئ

a) $\int_0^1 \frac{1}{2} e^x\, dx$, b) $\int_\pi^{2\pi} \cos x\, dx$, c) $2\int_2^3 dt$,

d) $\int_0^\pi \cos\pi \sin x\, dx$, e) $\int_0^1 \frac{4du}{1+u^2}$, f) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x+1}{\sin^2 x}\, dx$,

g) $\int_{x_1}^{x_2} (2x-1)\, dx$, h) $\int_0^8 \left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}\right) dx$, i) $\int_{\ln 2}^{\ln 3} e\cdot e^t\, dt$,

j) $\int_0^1 \frac{(u+1)^2}{\sqrt{u}}\, du$, k) $\int_0^1 \frac{x^n}{x^{1-n}}\, dx$, l) $\int_a^b a^x\, dx$.

۴ – د بدلون یا سبستچیشن له لارې یې انتیګرال وشمیرئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $\int \sqrt[3]{2x-7}\,dx$, b) $\int \frac{dx}{-x+1}$, c) $\int 2^{3x+6}\,dx$,

d) $\int \sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}\right)dx$, e) $\int \frac{dx}{1+(x+1)^2}$, f) $\int \frac{4}{\cos^2(4t-5)}\,dt$,

g) $\int x\cdot\sqrt[3]{x^2-7}\,dx$, h) $\int \frac{3x\,dx}{-x^2+1}$, i) $\int x\cdot e^{2x^2+3}\,dx$,

j) $\int 7\cos^7 x \sin x\,dx$, k) $\int (1-2\sin x)^3 \cos x\,dx$, l) $\int \frac{\sin x}{\cos^n x}\,dx$,

m) $\int \cot t\,dt$, n) $\int \frac{4x-5}{2x^2-5x+3}\,dx$, o) $\int \frac{\operatorname{Arc}\sin u}{2\cdot\sqrt{1-u^2}}\,du$,

p) $\int \frac{\sqrt{2\ln x+3}}{3x}\,dx$, q) $\int e^x\cdot\cos e^x\,dx$, r) $\int e^{\cos x}\cdot\sin x\,dx$.

۵ . د تر زیرنیونی فورمیدلون وروسته او په بنستیز اینتیګرال ۱۰ او ۱۱ د بدلون له لاري یی اینتیګرال وشمیری ،

a) $\int \frac{dx}{1+4x^2}$, b) $\int \frac{dx}{2+4x^2}$, c) $\int \frac{dx}{3+5x^2}$,

d) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}}$, e) $\int \frac{dx}{\sqrt{36-9x^2}}$, f) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}$,

g) $\int \frac{dx}{x^2-10x+34}$, h) $\int \frac{dx}{3x^2-6x+30}$, i) $\int \frac{dx}{\sqrt{-3+4x-x^2}}$.

۶ لاندي ټاکلي اینتیګرالونه وشمیری

a) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(4x-1)^3}$, b) $\int_{-1}^{0} e^{3x}\,dx$, c) $\int_{0}^{2} 2^{2x+1}\,dx$,

d) $\int_{-1}^{1} \frac{4x^2}{(3+2x^3)^5}\,dx$, e) $\int_{e}^{e^3} \frac{1}{x}\ln x\,dx$, f) $\int_{2}^{4} \frac{e^t}{1+e^t}\,dt$,

g) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{\sin x}\cos x\,dx$, h) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{2+8x^2}$, i) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin x\cdot\cos x\,dx$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۷ . د جملې ۲۱ . ۸ استعمال په بنسټ یې (ټوټه اینټیګرالونه) اینټیګرال کړئ

a) $\int 0{,}2x \cdot \sin x \, dx$, b) $\int 4x^3 \cdot \ln x \, dx$, c) $\int \cos^2 x \, dx$,

d) $\int \cos x \cdot \sin x \, dx$, e) $\int x^2 \cdot \sin x \, dx$, f) $\int x \cdot (\cos x + 1) \, dx$,

g) $\int x^3 \cdot e^x \, dx$, h) $\int \operatorname{Arc}\sin x \, dx$, i) $\int x^{\frac{1}{3}} \cdot \ln x \, dx$,

j) $\int \operatorname{Arc}\tan x \, dx$.

لاندې ټاکلي انتیګرالونه وشمیرئ

a) $\int_{-1}^{1} x \cdot e^x \, dx$, b) $\int_{1}^{2} \ln x \, dx$, c) $\int_{1}^{2} \frac{\ln x}{x^2} \, dx$,

d) $\int_{0}^{\pi} e^x \cdot \sin x \, dx$, e) $\int_{0}^{\pi} x^3 \cdot \sin x \, dx$, f) $\int_{0}^{\pi} x^4 \cdot \sin x \, dx$.

د هغې هوارې دننه وشمیرئ، چې د وکړ شوو مساواتو ګرو څخه راینده شوې وي

a) $y = e^{0{,}5x}$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 2$;

b) $y = \frac{1}{2}x^3$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 2$;

c) $y = \frac{1}{x^2}$, $y = 0$, $y = 9$, $x = -3$, $x = 3$;

d) $y = \cos x$, $y = 0$

e) $y = \cos x$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{5\pi}{6}$;

f) $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 4$;

g) $y = \left(\frac{x^2}{4} - 1\right)^2$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 2$;

h) $y = x^3 + 7$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$;

i) $y = x^3 + 7$, $y = x^3 - x^2 + 3x + 5$;

j) $y = 3 - \frac{1}{2}x^4$, $y = 3 - 4x$;

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

k) $y = \frac{1}{x}, \quad 3y + 3x = 10;$

l) $y = \cos x, \quad y = \sin x$;

m) $y = \sqrt{3x+1}, \quad y = 1, \quad x = 8;$

n) $y = \frac{x^2}{4}, \quad y = \frac{8}{4+x^2};$

o) $y = x^2, \quad x = y^2;$

p) $y = \frac{1}{6} \cdot \sqrt{x^3}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 3;$

q) $y = 2\sin x, \quad y = \sqrt{3}\tan x \quad , x = [0, \pi/2)$

f) $y = \tan x$

کرښه چې په کښې $y = \tan x$ پرتو ټکو $(0,0)$ او $(\pi/4, 1)$ تيريږي د x –محور باندې د ورکړ شوو مساواتو سره د ګږو ترمنځ هواره څرخي د راپورته شوي څرخيدونکی بدن يا جسم ډکی يا حجم وشميری. پام دې وي، چې په ورکړشوي حالت کې ورکړشوې هواره د دوه کږو څخه رابنده ده، نو له دې امله د لوي کږې ډکی څخه د کوچنی کږې ډکی کميږي.

---

a) $y = x^2, \quad y = 0, \quad x = h;$

b) $y = \sqrt[3]{x^2} + 1, \quad y = 0, \quad x = -2, \quad x = 2$

c) $y = e^x, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 2;$

d) $y = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 2;$

e) $y = 2\sqrt{x}, \quad y = 2x;$

f) $y = 4x - x^2, \quad y = 0;$

g) $y = \sin x, \quad y = 0, \quad x \in [0, \pi].$

ټراپيځ (څلورګوډی، چې تيك دوه اړخونه يو بل غبرګ وي) د کونجونو $(1,0),(5,0),(1,3),(5,5)$ د x–محور باندې څرخي، وشميری

الف) د جوړې شوې هوارې دننه

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) د څرخیدونکی بدن ډکی

د کږو $y=\sqrt{x}$, $y=0$, $y=-x+6$ ترمنځ هواره د x− محور

باندې څرخی، وشمیری

الف) د کږي غوڅټکو د پروت محور سره

ب) د کږو ترمنځ هواره

پ) د څرخویدونکی بدن ډکی

د هغهٔ څرخیدونکی بدن ډکی وشمیری، کوم چی په اینتروال $[\frac{\pi}{4}, \pi]$

کی د x−محور پورته خواته د کږو $y=\sin x$ او $y=\cos x$ ترمنځ

پرته هواره، چی د x−محور باندې څرخیږي!

۱۴ نیمګردی $y=\sqrt{9-x}$ د x−محور باندې څرخیږي. د ګوډیبرخی ډکی

وشمیري د پولو $x_1=1$, $x_2=3$ او ترمنځ !

۱۵ د څرخیدونکی ایلیپسوئید ډکی څومره لوي دی، کوم چی د x−محور

پورته خوا ته پرته د ایلیپسی نیمی هواري د رابندوونکی $x^2/a^2+y^2/b^2=1$

کږې سره د x−محور باندې تولیدوي؟

د څپرکي نور تمرینونه:

$$a)\ \frac{x^3+7x^2+9x-5}{x+5} \qquad b)\ \frac{x^4-3x^2+1}{x^2-2}$$

$$c)\ \frac{x^3-2x^2+x-5}{x^3+1} \qquad d)\ \frac{x^4-1}{x^3+x^2+x+1}$$

$$e)\ \frac{x^4+2x^3-6x^2-5x+3}{x-2} \qquad f)\ \frac{x^5-x^4+1}{x^2+2}$$

۱ - لاندې نااصلي پولینومونه دې د یوه ټول کسري پولینومونو او یوه اصلي پولینوم د جمعې په څېر ولیکل شي.

۲ - لاندې پولینومونه د جمعې په څېر ولیکئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a)\ \frac{2x^2+20x+12}{x^3+2x^2-5x-6} \qquad b)\ \frac{x^2+1}{x^3-x}$$

$$c)\ \frac{4x+10}{x^2+6x+8} \qquad d)\ \frac{-3x^2+19x-10}{x^3-2x^2-5x+6}$$

$$e)\ \frac{4x^2+6x-20}{x^3-4x} \qquad f)\ \frac{14}{x^2+20x+51}$$

۳ – د لاندې اصلي پولینومونو په ټوټه کسرونو ټوټه ونه وکاروئ.

$$a)\ \frac{3x^2+5x+10}{x^3+2x^2-4x-8} \qquad b)\ \frac{3x^2-18x+36}{x^3-6x^2+9x}$$

$$c)\ \frac{x^2+3x+4}{x^4-2x^2+1} \qquad d)\ -\frac{x^2+13x+10}{x^3-5x^2}$$

٤ - د لاندې اصلي پولینومونو په ټوټه کسرونو ټوټه ګونه ورکړئ.

$$a)\ \frac{x^2+2x-12}{x^3+2x^2+6x+5} \qquad b)\ \frac{4x^2-3x+8}{x^3-2x+4}$$

$$c)\ \frac{8x^2-16x+10}{x^3-4x^2+5x} \qquad d)\ \frac{x}{x^3+2x^2+2x+1}$$

۵ - د لاندې پولینوم کسرونو په ټوټه کسرونو ټوټه کونه ورکړئ.

$$a)\ \frac{x^3+7x^2+17x+17}{x^2+6x+8} \qquad b)\ \frac{2x^4-8x^3+7x^2-3x+4}{x^2-4x+3}$$

$$c)\ \frac{2x^3+x^2}{x^3-1} \qquad d)\ \frac{4x^3+16x^2-7x-49}{x^3+4x^2+x-6}$$

٦ – و ښایئ، چې د F تابع د f تابع لومړنی تابع ده.

$$a)\ f(x)=2x^2+4x-7 \quad , \quad f(x)=4x+4$$

$$b)\ F(x)=(x^2-x)^3 \quad , \quad f(x)=3\cdot(2x-1)\cdot(x^2-x)^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$c)\ F(x)=\sqrt{2x+1} \quad , \quad f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$

$d)\ F(x)=1+\sin x \quad , \quad f(x)=3x\cdot\cos 3x$

$e)\ F(x)=\frac{1}{3}x^3\cdot\ln x-\frac{4}{9}x^3 \quad , \quad f(x)=x^2\cdot(\ln x-1)$

۷ - وښايئ، چې د Fاو G توابع د همغه f تابع لومړني توابع دي.

$a)\ F(x)=x^3+x+4 \quad , \quad G(x)=x^3+x+1$

$b)\ F(x)=(x-3)^2 \quad , \quad G(x)=x^2-6x+4$

$c)\ F(x)=\frac{x+1}{x+2} \quad , \quad G(x)=\frac{3x+5}{x+2}$

$d)\ F(x)=1+\sin x \quad , \quad G(x)=\sin x$

۱۳ – لاندې ناټاکلي انتیګرالونه پیداکړئ او ټیکوالی یې و ازمایئ.

$a)\ \int x^3dx \quad b)\ \int 7dx \quad c)\ \int xdx \quad d)\ \int(1-x^2)dx$

$e)\ \int(x+\frac{1}{x})dx \quad f)\ \int(e^x+\cos x)dx \quad g)\ \int\frac{1}{\sin^2 x}dx \quad h)\ \int\frac{5}{\cos^2 x}dx$

$i)\ \int udx \quad k)\ \int(2+e^x)dx \quad l)\ \int(1+\ln x)dx \quad m)\ \int(\sqrt{x}+\sin)dx$

۱٤ – د لاندې ټاکلو انتیګرالونو ارزښت وشمېرئ

$a)\ \int_0^3 4dx \quad b)\ \int_{-3}^{-1} xdx \quad c)\ \int_1^e \frac{1}{x}dx$

$d)\ \int_1^e(2+\frac{1}{x})dx \quad e)\ \int_{-1}^0 e^xdx \quad f)\ \int_0^\pi \sin xdx$

$g)\ \int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} 4dx \quad h)\ \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{3}\pi}\frac{1}{\sin^2 x}dx \quad i)\ \int_{-2}^2 x^3dx$

$j)\ \int_2^6(1+x)dx \quad k)\ \int_1^2(x^2-x^5)dx \quad l)\ 0\int_{-2}^2(\frac{x^3}{4}+\frac{x^2}{3})dx$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱۷ د لاندې ټاکلو انتيګرالونو ارزښت وشمېرئ او ارزښتونه يې سره پرتله کوئ.

$$a)\ \int_{-3}^{1} 3dx und -\int_{-3}^{1} 3dx \qquad b)\ \int_{0}^{1}(1+e^{x})dx \ \wedge\ -\int_{0}^{1}(1+e^{x})dx$$

$$c)\ \int_{-\pi}^{0}\sin x dx \ \wedge\ -\int_{-\pi}^{0}\sin x dx$$

۱۷– هر دوه انتيګرالونه د يوه انتيګرال سره انځور کړئ.

$$a)\ \int_{0}^{0.5\pi}\cos x dx+\int_{0.5\pi}^{\pi}\cos x dx \qquad b)\ \int_{-1}^{0}(x+e^{x})dx+\int_{0}^{1}(x+e^{x})dx$$

$$c)\ \int_{2}^{3}3x^{2}dx+\int_{5}^{3}3x^{2}dx \qquad d)\ \int_{-2}^{1}(2+x)dx-\int_{4}^{1}(2+x)dx$$

۱۸- د لاندې ټاکلو انتيګرالونو لپاره ارزښت تخمين کړئ.

$$a)\ \int_{-4}^{-2}e^{x+3} \qquad b)\ \int_{0}^{8}\sqrt{1+x}\,dx$$

$$c)\ \int_{3}^{5}2^{4-x}dx \qquad d)\ \int_{0}^{0.5\pi}\sin^{2}x dx$$

۱۹ – د کومو x ارزښتونو لپاره لاندې انتيګرالونه ورکړشوي ارزښتونه لري؟

$$a)\ \int_{1}^{x}5t^{4}dt\ ,\quad la(x)=31 \qquad b)\ \int_{0}^{x}e^{t}dt\ ,\quad la(x)=e-1$$

۲۰ - لاندې انتيګراند توابع ته د انتيګرال توابع وټاکئ.

$$a)\ f(x)=x^{2}\ ,\ a=3 \qquad b)\ f(x)=2+e^{x}\ ,\ a=0$$

$$c)\ f(x)\frac{1}{\cos^{2}x}\ ,\ a=0 \qquad d)\ f(x)=2\ ,\ a\in IR$$

۲۱ - د لومړني انتيګرال په استعمال سره لاندې انتيګرالونه وشمېرئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$d)\ \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx, \quad e)\ \int \sqrt{x\cdot\sqrt[3]{x}}\,dx, \quad f)\ \int (\sqrt[3]{x^4}+1)\ dx,$$

$$g)\ \int \sqrt[3]{x^{-3}}dx, \quad h)\ \int \frac{ax^2+bx+cx^{-1}}{x^4}dx, \quad i)\ \int 3\cdot 2^x\,dx,$$

$$j)\ \int \frac{1}{2\sin^2 x}dx, \quad k)\ \int \frac{1}{3+3x^2}dx, \quad l)\ \int \cos\varphi\cdot s\quad ds,$$

$$m)\ \int \frac{dt}{(2t-3)^{-2}}, \quad n)\ \int \sqrt{t\cdot\sqrt{t\cdot\sqrt{t}}}\,dt, \quad o)\ \int (1-u^2)^{-\frac{1}{2}}du.$$ --------

۲۲ - د بيرته په بنستيز اينتيګرال بدلون وروسته يي اينتيګرال ونيسئ:

$$a)\ \int \frac{x^3+2x^2+x}{x^2(1+x)^2}dx, \quad b)\ \int \frac{2\sin 2x}{3\cos x}dx, \quad c)\ \int \frac{7\cos 2x}{\cos^2 x-\sin^2 x}dx,$$

$$d)\ \int \sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos^2 x}\ dx, \quad e)\ \int (-2-2\tan^2 x)dx, \quad f)\ \int \frac{2t^3-8t}{(t-2)(t+2)}dt.$$

۲۳-- لاندې ټاکلی اینتیګرالونه وشمیرئ:

$$a)\ \int_0^1 \frac{1}{2}e^x dx, \quad b)\ \int_\pi^{2\pi} \cos x\ dx, \quad c)\ 2\int_2^3 dt,$$

$$d)\ \int_0^\pi \cos\pi\sin x\ dx, \quad e)\ \int_0^1 \frac{4du}{1+u^2}, \quad f)\ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x+1}{\sin^2 x}dx,$$

$$g)\ \int_{x_1}^{x_2} (2x-1)\,dx, \quad h)\ \int_0^8 \left(\sqrt[3]{x^2+2\sqrt{x}}\right)dx, \quad i)\ \int_{\ln 2}^{\ln 3} e\cdot e^t\ dt,$$

$$j)\ \int \frac{(u+1)^2}{\sqrt{u}}du, \quad k)\ \int_0^1 \frac{x^n}{x^{1-n}}\,dx, \quad l)\ \int_a^b a^x\ dx.$$

۲٤- د بدلون يا سيتيچيوشن قاعدې استعمال له لارې يي اينتيګرال وشميري:

$$a)\ \int \sqrt[3]{2x-7}\,dx, \quad b)\ \int \frac{dx}{-x+1}, \quad c)\ \int 2^{3x+6}\,dx,$$

$$d)\ \int \sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}\right)dx, \quad e)\ \int \frac{dx}{1+(x+1)^2}, \quad f)\ \int \frac{4}{\cos^2(4t-5)}dt,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

g) $\int x\cdot\sqrt[3]{x^2-7}\,dx$, h) $\int \frac{3x\,dx}{-x^2+1}$, i) $\int x\cdot e^{2x^2+3}\,dx$,

۲۵- د تر زیرنیوني فورمبدلون وروسته او په بنستيز اینتیګرال 10 او 11 د بدلون له لارې يي اینتیګرال وشیمرئ

$$a)\ \int\frac{dx}{1+4x^2},\quad b)\ \int\frac{dx}{2+4x^2},\quad c)\ \int\frac{dx}{3+5x^2}.$$

$$d)\ \int\frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}},\quad e)\ \int\frac{dx}{\sqrt{36-9x^2}},\quad f)\ \int\frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}},$$

$$g)\ \int\frac{dx}{x^2-10x+34},\quad h)\ \int\frac{dx}{3x^2-6x+30},\quad i)\ \int\frac{dx}{\sqrt{-3+4x-x^2}}.$$

۲٦- لاندې ټاکلی اینتیګرالونه وشمیري:

$$a)\ \int_{-1}^{1}\frac{dx}{(4x-1)^3},\quad b)\ \int_{-1}^{0}e^{3x}dx,\quad c)\ \int_{0}^{2}2^{2x+1}dx,$$

$$d)\ \int_{-1}^{1}\frac{4x^2}{(3+2x^3)^5},\quad e)\ \int_{e}^{e^x}\frac{1}{x}\ln\times dx,\quad f)\ \int_{2}^{4}\frac{e^t}{1+e^t}dt,$$

$$g)\ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}e^{\sin x}\cos x\ dx,\quad h)\ \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{2+8x^2},\quad i)\ \int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin x\cdot\cos x\ dx.$$

۲۷-- لاندې توټه اینتیګرالونه اینتیګرال کړي:

$$a)\ \int 0,2x\cdot\sin x\ dx,\quad b)\ \int 4x^3\cdot\ln x\ dx,\quad c)\ \int\cos^2 x\ dx$$

$$d)\ \int\cos x\cdot\sin x\ dx\quad e)\ \int x^2\cdot\sin x\ dx\quad f)\ \int x\cdot(\cos x+1)\ dx$$

$$g)\ \int x^3\cdot e^x\ dx,\quad h)\ \int x^{\frac{1}{2}}\cdot\ln x\ dx,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډاکتر ماخان شینواري لیکنې او ژباړې

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوې لیکنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړی:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

1987 Vienna (Austria):

دویم:

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, at the University of Vienna/Austria

لاندې د شمیرپوهنې پښتوتول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې لیکنه به یې ځنو ځایونو غزېدلې او ځنې ځایونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

(c) ketabton.com: The Digital Library

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو زرو کې شمیرنه، د ګټي – او کټي د کټي شمیرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتیاوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني ـ پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنڅیال برابرون (دا کتاب په دې څانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

(c) ketabton.com: The Digital Library

یوولسم: د افغانستان په هکله سپیني خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلي.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برینککن لیکنې چې له پرینمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ ــ شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دویم ټوک

۳ ــ شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه د ښوونځي لپاره

۵ ــ احصایه یا ستاتیستیک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ ــ انالیزی ۱

۷ ــ انالیزې ۲

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۸ – کربنیز الجبر

۹ - د شمیرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ – فنکشنل انالیز

۱۲ – وکتور شمیرنه

نورې ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کربنیز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په

کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلي

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۲۰ - د يو څو شميرپوهانو ژوندليک

۲۱ – د شمير پوهنې ګډې وډې ليکنې

۲۲- داهم ژباړه ده، خو ليکونکى يې متآسفانه راڅخه نابلد شوى: د مشتق او انتيګرال شميرنو ته تمرينونه او اوبيونې يا حلونه يې

۲۳ – د شميرپوهنې انګريزې پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ – د شميرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شميرپوهنې پښتو ډکشنري د شميرپوهنيزو وييونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له كومې(دا هغه ليكنې دي، چې ځنې يې په نړيول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپينې خبرې، چې وبه غزيږي.

نوري ليكنې، چې په ژباړه يې پيل شوى، خو لا پوره نه دي

– د شتوتكارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپريږي:

د ګروپونو تيوري

- د ښوونځي لپاره فزيک د برينکمن ليکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اومم ټولګي پورې ژباړل شوى (دا چې زما دويم مسلک فزيک دى، دا ليکنې ژباړم. دا هم د دې ليکوال يوه ډېره ښه ليکنه ده، چې -د شميرپوهنې په څير- دلته هم زيات تمرينونه د حل يا اوبيونې سره په کې راغلي او ماته زيات ګټور برېښي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لیکوال ژوند ته لنډه کتنه

ماخان په اولني نوم میرې شینواری د ارواښادې پستو او ارواښاد نوررحمان زوي په ۱۳۲۰ ؟ ه لمریز کې د شینوارو هسکه مینه کې دې نړۍ ته سترګې راغړولي.

د هسکې مینې د لومړنې ښوونځي (د لومړنیو زده کوونکو څخه) څخه وروسته د رحمان بابا لیسه له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پورې(ښوونځي له لومړي ټولګې پیل او د دویم ټولګې څخه ګام او پای).

د ۱۹۶۶ تر سپتبر د کابل طب پوهنځی. له ۱۹۶۶ سپتمبر څخه د اتریش برس، چې هلته یې د شمیرپوهنې ډاکتري په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

د۱۹۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فبروري تر پای د دباندنیو چارو وزارت کې مامور. د ۱۹۸۸ مارچ څخه تر ۱۹۹۲ جون پورې په بن کې د افغانستان جمهوریت سفارت شارژد افیر(صفر نه وو). له هغې وروسته په جرمنې کې سیاسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ څخه د ۲۰۰۹ دسمبر پورې د د ریاضي څانګه کې د پوهنې وزارت درسي نساب کې دنده.

ماخان میرې په ۱۹۷۲ کې له لرې د میرمن ښاپیرۍ سره واده شوی، چې د واده خبر ورته اتریش ته راغی. ده له میرمن ښاپیری سره په ۱۹۶۳ ز ک کې کوزده کړې وه.

دوي ته لوي څښتن په اتریش ویانا کې د مای په شلم ۱۹۷۹ ز ک دوه بچیان وبخښل، چې څانګه او اباسین نومیږي. څانګه په المان کې د پوهنتون علمې همکاره وه او د حقوقو ډاکتره ده او اباسین ملي اقتصاد او ټولنیزه سایکولوژي لوستلي.

ماخان شینواري بې کاره نه دی او لږ تر لږه له ۹۷ ۱۹ څخه همدا د کتابونو لیکلو اوو د ژباړې دنده یې په غاړه اخستې، چې خپل فکر د شونې پولې تازه وساتي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library