1.1 تعریف او ډولونه:

تعریف : هغه معادله چي مشتقات ولري دتفاضلي معادلي په نوم یادیږي ، کیداشی چي دغه مشتقات معمولي مشتقات وي او یا قسمي مشتقات وي.

تفاضلي معادلي په دوه ډوله دي

معمولي تفاضلي معادله (Ordinary Differential Equation)

هغه معادله چي د x مستقل متحول ، د y غیرمستقل متحول چي y ته د x تابع هم وایو او د y هر ترتیب مشتق نظر x ته ولري دمعمولي تفاضلي په نامه سره یادیږي.

مثالونه:

1. $\dfrac{dy}{dx} + 3y = 0$

2. $\dfrac{dy}{dx} + y = e^x$

3. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + 2y = 0$

4. $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + 2y = \sin x$

5. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} + 3y = 0$

6. $\left(\dfrac{d^3y}{dx^3}\right)^2 + 7\dfrac{d^2y}{dx^2} + 8\dfrac{dy}{dx} - 9y = \log x$

قسمي تفاضلي معادله (Partial Differential Equation)

هغه تفاضلي معادله چي دوه یاڅو مستقل متحوله ، تابع او ددغه تابع قسمي مشتقات (هر ترتیب چي وي) ولري دقسمي تفاضلي معادلي په نامه سره یادیږي.

مثالونه:

که چېرته z د x او y تابع وي نو:

Ketabton.com

7. $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 8. $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2z$ 9. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

1.2 دتفاضلي معادلو ترتیب او درجه

دتفاضلي معادلي ترتیب:

په تفاضلي معادله کي لوړ ترین مشتق دتفاضلي معادلي دترتیب څخه عبارت دی.

دتفاضلي معادلي درجه:

په تفاضلي معادله کي دلوړترین ترتیب توان دتفاضلي معادلي ددرجي څخه عبارت دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورته مثالونو کې:

1) لومړی ترتیب او لومړۍ درجه
2) لومړی ترتیب او لومړۍ درجه
3) دوهم ترتیب لومړۍ درجه
4) لومړی ترتیب دوهمه درجه
5) دوهم ترتیب لومړۍ درجه
6) دریم ترتیب دوهمه درجه

همدارنګه د $\frac{d^2y}{dx^2} = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}$ تفاضلي معادلې دترتبیب او درجې دپیداکولو لپاره لومړی دمعادلې دواړه خواوې مربع کوو ، په نتیجه کې معادله لاندې شکل غوره کوي

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3$$

اوس پورته معادله دوهم ترتیب او دوهمه درجه تفاضلي معادله ده.

باید په یاد ولرئ چی دتفاضلي معادلو ترتبیب او درجه کوم چی مونږ تعریف کړل باید مثبت تام عدد وي.

دتفاضلي معادلو حل

یوه معمولي تفاضلي معادله لاندې عمومي شکل لری

$$F\left[x, y, y', y'', \dots\dots\dots\dots\dots y^{(n)}\right] = 0 \dots\dots\dots\dots (1)$$

دیوې تفاضلي معادلې حل عبارت دهغه تابع څخه دی ، کوم چې په راکړل شوی معادله کی صدق وکړي، φ(x) تابع ته د (1) تفاضلي معادلې حل ویل کیږي ، که چیرته :

$$F[x, \phi(x), \phi'(x), \dots\dots\dots\dots, \phi^n(x)] = 0$$

یاپه بل عبارت y=φ(x) تابع په (1) معادله کې صدق وکړي.

د n ام ترتیب تفاضلي معادلو حل ، چي n اختیاري ثابت عددونه ولري د عمومي حل (general solution) په نامه سره یادیږي، که چیرته په عمومي حل کې داختیاری ثابت عدد په ځای خاص قیمت وضعه شي ، دتفاضلي معادلې مشخص حل (particular solution) لاس ته راځي.

1.3 دتفاضلي معادلو ترتیب دپارامتر دحذفولوپه واسطه

ددې لپاره چې مونږ. ښه پوه شو چې څنګه کولای شو چی تفاضلي معادله دپارامتر دحذفولو په واسطه تشکیل کړو ، نو لاندې مثال په نظر کې نیسو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال : داسې تفاضلي معادله تشکيل کړئ ، کوم چې د $y = a\cos(x+b)$ منحنياتو مجموعه رابښايي ، a او b اختياري ثابت عددونه دي.

حل:

$$y = a\cos(x+b) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

داولې معادلې نظر x ته مشتق اخلو

$$\frac{dy}{dx} = -a\sin(x+b) \ldots\ldots\ldots\ldots.. (2)$$

اوس ددوهمې معادلې نظر x ته مشتق اخلو

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -a\cos(x+b) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

ددريمې معادلې څخه د a قيمت لمنځه وړو، په نتيجه کې لاندې تفاضلي معادله لاسته راځي

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -y \quad => \quad \frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

په نتيجه کې ويلای شو، که وغواړو يوه تفاضلي معادله تشکيل کړو ، نو لومړی بايد دورکړل شو منحنياتو مجموعي کوم چې د پارامترونو دلودونکې ده ، مشتق ونيسو او بيا پارامترونه حذف کړو.

يادابښت: (i) دمنحنياتو هغه مجموعه کوم چې يو پارامتر ولري ، لومړی ترتيب تفاضلي معادله تشکيلوی.

(ii) په عمومي ډول دمنحنياتو هغه مجموعه کوم چې n پارامترونه ولري ، n ام ترتيب تفاضلي معادله تشکيلوي.

1.4 لومړی ترتيب او لومړئ درجه تفاضلي معادله

په دې فصل کې مونږ د لومړی ترتيب او لومړئ درجې تفاضلي معادلو دحل لپاره مختلفي طريقو باندې بحث کوو، چې په عمومي ډول لومړی ترتيب او لومړئ درجه تفاضلي معادلې لاند شکل لري.

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. (1)$$

دپورته عمومی شکل ، عمومي حل عبارت دی له:

$$F(x, y, c) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. (2)$$

په دوهمه معادله کې c يو اختياري ثابت عدد دی ، کوم چې په لومړئ معادله کې صدق کوي، که چېرته c ته يومشخص قيمت وکړو ، نو په دې صورت کې عمومي حل په مشخص حل باندې بدليږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مونږ دلومړۍ معادلې ځینې معیاري شکلونه په لاندي طریقو باندې حل کوو.

(1) هغه معادلې چې متحولین یي دتفکیک وړ وي او یا دساده کولو څخه وروسته تفکیک ته برابریږي
(2) متجانسې تفاضلي معادلې
(3) متجانسو تفاضلي معادلوته بدلیدونکې تفاضلي معادلی
(4) کاملی تفاضلي معادلې
(5) کاملو تفاضلي معادلوته بدلیدونکی تفاضلي معادلې
(6) خطي تفاضلي معادلې
(7) خطي تفاضلي معادلوته بدلیدونکي تفاضلي معادلې (برنولي شکل)

1.5 دتفکیک وړ معادلې (Separation of variables):

ددې لپاره دتفاضلي معادلې لاندې شکل په نظر کې نیسو

$$\frac{dy}{dx}=\frac{f(x)}{g(y)} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (1) \qquad (g(y) \neq 0)$$

دمتحولینو په جداکولو سره لومړۍ معادله په لاندې شکل لیکو او بیا یې انتیګرال نیسو

$$g(y)dy=f(x)dx \qquad => \qquad \int g(y)dy=\int f(x)dx$$

دانتیګرال دنیونې څخه وروسته د (1) تفاضلي معادلې حل په لاندې ډول لاسته راځي

$$G(y)=F(x)+c$$

چې F(x) او G(y) په ترتیب سره د x او y توابع او c یو اختیاري ثابت عدد دی.

عملي مثالونه:

لومړی مثال: $\frac{dy}{dx}=\frac{1+y^2}{1+x^2}$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: دمتحولینو دجلاکولو څخه وروسته معادله په لاندې ډول حل کوو

$$\frac{dy}{1+y^2}=\frac{dx}{1+x^2}$$

$$\int\frac{1}{1+y^2}dy=\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$\tan^{-1}y=\tan^{-1}x+A$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\tan^{-1} y - \tan^{-1} x = A$$

$$\tan^{-1}\frac{y-x}{1+yx} = A$$

$$\tan^{-1}\frac{y-x}{1+yx} = \tan^{-1} c \quad => \quad \frac{y-x}{1+yx} = c \quad => \quad y - x = c(1+yx)$$

کوم چې دغوښتل شوي معادلې مطلوب حل دی

دوهم مثال: $\frac{dy}{dx} = e^{x+y} + x^2 e^y$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: لومړی یې متحولین سره بیلوو اوبیا یې ددواړو خواوو انتیګرال نیسو

$$\frac{dy}{dx} = e^x e^y + x^2 e^y$$

$$\frac{dy}{dx} = e^y(e^x + x^2)$$

$$e^{-y} dy = (e^x + x^2) dx$$

$$\int e^{-y} dy = \int (e^x + x^2) dx$$

$$-e^{-y} + c = e^x + \frac{x^3}{3} \quad \text{یا} \quad e^x + e^{-y} + \frac{1}{3}x^3 = c$$

دریم مثال: $e^x \tan y \; dx + (1 - e^x)\sec^2 y \; dy = 0$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: ددی لپاره چې متحولین یې سره بیل کړو ، نومعادله په $(1-e^x) \,.\, \tan y$ باندې ویشو

$$\frac{e^x}{1-e^x} dx + \sec^2 y \, dy = 0$$

$$-\int \frac{e^x}{e^x - 1} dx + \int \frac{\sec^2 y}{\tan y} dy = \log c$$

$$-\ln(e^x - 1) + \ln \tan y = \ln c$$

$$\ln\left(\frac{\tan y}{e^x - 1}\right) = \ln c \quad \text{یا} \quad \tan y = c(e^x - 1)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

خلورم مثال: $\tan y \frac{dy}{dx} = \sin(x+y) + \sin(x-y)$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: د *sin C +sin D* رابطې څخه په استفادې سره پورته معادله په لاندې شکل ليکوو

$$\tan y \frac{dy}{dx} = 2\sin x \cos y$$

$$\frac{\tan y}{\cos y} dy = 2\sin x \; dx$$

$$\sec y \tan y \; dy = 2\sin x \; dx$$

$$\int \sec y \tan y \; dy = 2\int \sin x \, dx$$

$$\sec y = -2\cos x + c \quad \text{يا} \quad \sec y + 2\cos x = c$$

پنځم مثال: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos(x+y)}$ تفاضلي معادله حل کړئ

په راکړل شوې معادله کی متحولين يو دبل څخه نه بيليږي ، خو که x+y=t سره تعويض کړو ، نو بيا کولای شو متحولين يې په اسانی سره بيل کړو

$$x + y = t \quad => \quad 1 + \frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx} \quad => \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx} - 1$$

دپورته قيمتونو په وضعه کولو سره معادله لاندې شکل غوره کوي

$$\frac{dt}{dx} - 1 = \frac{1}{\cos t} \quad => \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{\cos t} + 1 = \frac{1+\cos t}{\cos t}$$

اوس يې متحولين سره بيلوو ، چې لاندې شکل لاسته راکوي

$$\frac{\cos t \; dt}{1+\cos t} = dx$$

$$\left(\frac{\cos^2\frac{t}{2} - \sin^2\frac{t}{2}}{2\cos^2\frac{t}{2}}\right) dt = dx \quad => \quad \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\tan^2\frac{t}{2}\right) dt = dx$$

$$\frac{1}{2}\left(1 - \tan^2\frac{t}{2}\right) dt = dx \quad => \quad \frac{1}{2}\left(1 - \left(\sec^2\frac{t}{2} - 1\right)\right) dt = dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{1}{2}\left(2-\sec^2\frac{t}{2}\right)dt = dx \quad => \quad \left(1-\frac{1}{2}\sec^2\frac{t}{2}\right)dt = dx$$

$$\int\left(1-\frac{1}{2}\sec^2\frac{t}{2}\right)dt = \int dx \quad => \quad t-\tan\frac{t}{2} = x+c$$

$$x+y-\tan\left(\frac{x+y}{2}\right) = x+c \quad \text{يا} \quad y-\tan\left(\frac{x+y}{2}\right) = c$$

کوم چې دراکړل شوې معادلې عمومي حل دی

شپږم مثال: $\frac{dy}{dx}+1 = e^{x+y}$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: x+y=t سره نیسو

$$x+y=t \quad => \quad 1+\frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx}$$

دغه قیمتونه په معادله کې وضعه کوو ، او په لاندې ډول یې حل کوو

$$\frac{dt}{dx} = e^t \quad => \quad e^{-t}dt = dx$$

$$\int e^{-t}dt = \int dx$$

$$-e^{-t} = x+c$$

$$-e^{-(x+y)} = x+c \quad => \quad x+e^{-(x+y)}+c+0$$

اووم مثال: $(2x-3y+1)dx+(6y-4x+3)dy = 0$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: راکړل شوې معادله کی متحولین سره نه بیلیږي ، خوکه په لاندې ډول تعویض اجرا کړو ، نو بیا کولای شو چی په اسانۍ سره معادله کې متحولین سره بیل کړو

$$2x-3y=t \quad => \quad 2-\frac{3dy}{dx} = \frac{dt}{dx}$$

دغه قیمتونه په معادله کې وضعه کوو او په لاندې ډول یې حل کوو

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2x-3y)+1}{2(2x-3y)-3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{1}{3}\left(2-\frac{dt}{dx}\right)=\frac{t+1}{2t-3} \quad \text{یا} \quad \frac{dt}{dx}=\frac{t-9}{2t-3} \quad => \quad \frac{(2t-3)}{t-9}dt=dx$$

$$\int\left(\frac{2t-3}{t-9}\right)dt=\int dx \quad \text{یا} \quad \int\left(\frac{2t}{t-9}-\frac{3}{t-9}\right)dt=\int dx$$

$$2\int\frac{t-9+9}{t-9}dt-3\int\frac{1}{t-9}dt=\int dx$$

$$2\int\left(1+\frac{9}{t-9}\right)dt-3\int\frac{1}{t-9}dt=\int dx$$

$$2[t+9\ln(t-9)]-3\ln(t-9)=x+A$$

$$2t+15\ln(t-9)=x+A$$

$$(4x-6y)+15\ln(2x-3y-9)=x+A$$

$$3x-6y+15\ln(2x-3y-9)=A$$

$$\text{یا} \quad x-2y+5\ln(2x-3y-9)=c \qquad c=\frac{1}{3}A$$

اتم مثال: $\frac{dy}{dx}=\sin(x+y)+\cos(x+y)$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل:

$$t=x+y \quad => \quad \frac{dt}{dx}=1+\frac{dy}{dx}, \quad \frac{dy}{dx}=\frac{dt}{dx}-1$$

دغه قیمتونه په راکړل شوې تفاضلي معادله کې وضعه کوو

$$\frac{dt}{dx}-1=\sin t+\cos t \quad => \quad \frac{dt}{dx}=\sin t+\cos t+1$$

$$\frac{dt}{\sin t+\cos t+1}=dx \quad => \quad \frac{dt}{2\sin\frac{t}{2}\,\cos\frac{t}{2}+2\cos^2\frac{t}{2}}=dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

صورت او مخرج په $\cos^2\frac{t}{2}$ باندې ويشو

$$\frac{\sec^2\frac{t}{2}}{2\left[\tan\frac{t}{2}+1\right]}dt = dx$$

$$\int\frac{\sec^2\frac{t}{2}}{2\left[\tan\frac{t}{2}+1\right]}dt = \int dx$$

$$\ln\tan\left[\frac{t}{2}+1\right] = x + c \quad \text{يا} \quad \tan\left[\frac{x+y+2}{2}\right] = e^{x+c}$$

$$\tan\left(\frac{x+y+2}{2}\right) = A\, e^{x} \qquad (A = e^{c})$$

1.6 تمرينونه

لاندې تفاضلي معادلې حل کړئ

01. $(e^{y}+1)\cos x\ dx + e^{y}\sin x\, dy = 0$

02. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2y}{1+x^3}$

03. $(x+1)\frac{dy}{dx} + 1 = 2e^{-y}$

04. $y - x\frac{dy}{dx} = a\left(y^2 + \frac{dy}{dx}\right)$

05. $(x^2 - yx^2)\frac{dy}{dx} + y^2(1+x) = 0$

06. $\frac{dy}{dx} + xy = xy^3$

07. $x\sqrt{1+y^2}dx = y\sqrt{1+x^2}dy = 0$

$\frac{dy}{dx} + \frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}} = 0\,, \quad y = 1,\ \ x = 0$

09. $\frac{dy}{dx} = \frac{x(2\ln x + 1)}{\sin y + y\cos y}$

10. $a\left(x\frac{dy}{dx} + 2y\right) = 2xy\frac{dy}{dx}$

11. $\frac{dy}{dx}(1+x)(1+y^2)\,, \quad y = 1, \quad x = 0$

12. $\cos y\ \ \ln(\sec x + \tan x)dx = \cos x\ \ln(\sec y + \tan y)dy$

تفکیک ته بدلیدونکي تفاضلي معادلې

(c) ketabton.com: The Digital Library

13. $\frac{dy}{dx} = (3x + 2y + 4)^2$ 14. $\frac{dy}{dx} = \frac{6x - 2y - 7}{3x - y + 4}$

15. $(x + 2y - 1)dx = (x + 2y + 1)dy$ 16. $\frac{dy}{dx} = (x + y)^2$

17. $\frac{dy}{dx} = \sin(x + y)$ 18. $\frac{dy}{dx} = 1 + e^{x-y}$

19. $x^4 \frac{dy}{dx} + x^3 y + cosec\,(xy) = 0$ 20. $x\,dy + y\,dx + 4\sqrt{1 - x^2 y^2}\,dx = 0$

جوابونه:

01. $\sin(e^y + 1) = c$ 02. $y^3 = c(1 + x^3)$ 03. $(x + 1) = c(2 - e^y)$

04. $(x + a) = c \cdot \frac{y}{(1 - ay)}$ 05. $\ln\left(\frac{x}{y}\right) - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = c$ 06. $\frac{y^2 - 1}{y^2} = Ae^{x^2}$

07. $\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 + y^2} = c$ $\sin^{-1} x + \sin^{-1} y = \frac{\pi}{2}$ 09. $x^2 \ln x - y \sin y = c$

10. $e^{-2y}\, y^a\ \ x^{2a} = A$ 11. $\tan^{-1} y = x + \frac{x^2}{2} + \frac{\pi}{4}$

12. $[\ln(\sec x + \tan x)]^2 - [\ln(\sec y + \tan y)]^2 = c$

13. $\frac{1}{\sqrt{6}} \tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(3x + 2y + 4)\right] = x + c$

14. $2x - y - 15\ln(3x - y + 19) + c = 0$ 15. $x = y + \frac{2}{3}\ln\left(x + 2y - \frac{1}{3}\right) + c$

16. $\tan^{-1}(x + y) = x + c$ 17. $1 + \tan\left\{\frac{x + y}{2}\right\} + \frac{2}{x + c} = 0$

18. $x = e^{-(x-y)} + c$ 19. $\cos xy = -\frac{1}{2x^2} - c$ 20. $\sin^{-1}(xy) + 4x = c$

(c) ketabton.com: The Digital Library

متجانسې تفاضلي معادلې (Homogeneous Differential Equations)

$f(x,y)$ یوه n امه درجه متجانسه تابع ده ، که چیرته $f(\lambda x\,,\lambda y) = \lambda^n\, f(x,y)$ سره شي،
دمثال په ډول $x^2 + xy$ ، $\sqrt{x^2+y^2}$ او $\sin\left(\frac{x}{y}\right)$ په ترتیب سره دوهمه ، اوله او صفرمه درجه متجانسې توابع دي.

$M(x\,,y)\,dx + N(x\,,y) = 0$ یوه لومړی ترتیب او لومړی درجه متجانسه تفاضلي معادله ده ، که چیرته M او N یو شان درجه لرونکي متجانسې توابع وي، پورته معادله کولای شو د $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ په شکل ولیکو، چې $f(x,y) = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$ یوه صفرمه درجه متجانسه تابع ده ، دغه تابع بیا د $\frac{x}{y}$ یا $\frac{y}{x}$ په شکل لیکلای شو ، چې ددې څخه لاندې معادلې لاسته راځي

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(1) \qquad \text{یا} \qquad \frac{dx}{dy} = f\left(\frac{x}{y}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

په لومړی معادله کې $\frac{y}{x} = v$ سره تعویض کوو او په دوهمه معادله کې $\frac{x}{y} = v$ سره تعویض کوو، ورسته یې بیا متحولین سره بیلوو اوحل بیا یې حل کوو، چې دلومړی معادلې لپاره په لاندې ډول عمل اجراکوو

$$\frac{y}{x} = v \qquad => \qquad y = vx\,, \qquad \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

دغه قیمتونه په لومړی معادله کې وضعه کوو

$$v + x\frac{dv}{dx} = f(v)$$

اوس یې متحولین سره بیلوو او انتیګرال یې نیسو

$$\frac{dx}{x} = \frac{dv}{f(v)-v} \qquad => \qquad \ln x + c = \int \frac{dv}{f(v)-v}$$

چې c یو اختیاري ثابت عدد دی ، همدارنګه ددوهمې معادلې دحل لپاره په لاندې ډول عمل اجراکوو

$$\frac{x}{y} = v \qquad => \qquad x = vy\;, \qquad \frac{dx}{dy} = v + y\frac{dv}{dx}$$

دغه قیمتونه په دوهمه معادله کې وضعه کوو

$$v + y\frac{dv}{dx} = f(v)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پورته معادله هم دمتحولینو په جلا کولو سره حل کوو

عملي مثالونه:

لومړی مثال: $(x-y)dy-(x+y)dx=0$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: لومړی معادله د $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y}$ په شکل لیکو ، دمعادلې ښي صرف یوه متجانسه تابع ده ، او په لاندې ډول تعویض اجرا کوو

$$y=vx \quad => \quad \frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$$

دغه قیمتونه په معادله کې وضعه کوو

$$v+\frac{xdv}{dx}=\frac{x+vx}{x-vx} \quad => \quad v+\frac{xdv}{dx}=\frac{1+v}{1-v} \quad => \quad \frac{xdv}{dx}=\frac{1+v}{1-v}-v$$

$$\frac{xdv}{dx}=\frac{(1+v)-v(1-v)}{1-v} \quad \text{یا} \quad \frac{1-v}{1+v^2}dv=\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{1}{1+v^2}dv-\frac{1}{2}\int\frac{2v}{1+v^2}dv=\int\frac{1}{x}dx$$

$$\tan^{-1}v-\frac{1}{2}\ln(1+v^2)=\ln x+c \quad => \quad \tan^{-1}\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)=\ln x+c$$

$$\text{یا} \quad \tan^{-1}\frac{y}{x}-\ln\sqrt{x^2+y^2}=c$$

دوهم مثال: $(x^2-xy+y^2)dx-xydy=0$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: لومړی معادله په لاندې شکل لیکو

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2-xy+y^2}{xy}=\frac{1-\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^2}}{\frac{y}{x}}$$

دمعادلې ښي طرف یوه متجانسه تابع راښایي ، او دحل لپاره یې لومړی په لاندې دول تعویض اجراکوو

$$\frac{y}{x}=v \quad => \quad \frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$$

دغه قیمتونه په معادله کې وضعه کوو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{1 - v + v^2}{v} \quad \text{یا} \quad x\frac{dv}{dx} = \frac{1 - v - v^2}{v} - v \quad \text{یا} \quad x\frac{dv}{dx} = \frac{1 - v}{v}$$

اوس یي متحولین سره بیلوو او انتیګرل یي نیسو

$$\frac{dx}{dv} = \frac{v}{1 - v}dv \quad \text{یا} \quad \frac{dx}{v} = \left(\frac{v - 1 + 1}{1 - v}\right)dv$$

$$\int \frac{1}{x}dx = -\int \left(1 + \frac{1}{v - 1}\right)dv$$

$$\ln x = -[v + \ln(v - 1)] + c \quad \text{یا} \quad \ln x(v - 1) = c - v$$

$$\ln(y - x) = c - \frac{y}{x}$$

کوم چې دراکړل شوې معادلې عمومي حل دی

دریم مثال: $x\,dy - y\,dx = \sqrt{x^2 + y^2}dx$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: لومړی راکړل شوی معادله په لاندې شکل لیکو

$$x\frac{dy}{dx} - y = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$x\frac{dy}{dx} = y + \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x}$$

کومه چې یوه متجانسه تفاضلي معادله ده او دحل کولو لپاره یې په لاندې ډول تعویض اجراکوو

$$y = vx \quad => \quad \frac{dy}{dx} = v + \frac{xdv}{dx}$$

دغه قیمتونه په معادله کې وضعه کوو

$$v + \frac{xdv}{dx} = \frac{vx + \sqrt{x^2 + v^2x^2}}{x} = v + \sqrt{1 + v^2}$$

$$\frac{xdv}{dx} = \sqrt{1 + v^2}$$

متحولین یې سره بیلوو او انتیګرال یې نیسو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{dv}{\sqrt{1+v^2}}=\frac{dx}{x} \quad => \quad \int \frac{1}{\sqrt{1+v^2}}dv=\int \frac{1}{x}dx$$

$$\ln\left[v+\sqrt{1+v^2}\right]=\ln x+\ln c \quad => \quad v+\sqrt{1+v^2}=xc$$

$$\frac{y}{x}+\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}=xc \quad => \quad y+\sqrt{x^2+y^2}=x^2c$$

څلورم مثال: $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\tan\frac{y}{x}$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: لیدل کیږي چې دمعادلې ښی طرف یوه متجانسه تابع ده ، نودحل لپاره یې په لاندې ډول تعویض اجراکوو

$$\frac{y}{x}=v \quad => \quad y=vx \quad \therefore \quad \frac{dy}{dx}=v+\frac{xdv}{dx}$$

دغه قیمتونه په معادله کې وضعه کوو

$$v+\frac{xdv}{dx}=v+\tan x \quad => \quad \frac{xdv}{dx}=\tan v \quad \text{یا} \quad \frac{dv}{\tan v}=\frac{dx}{x}$$

$$\cot v\, dv=\frac{dx}{x} \quad => \quad \int \cot v\ dv=\int \frac{1}{x}dx$$

$$\ln\sin v+\ln c=\ln x \quad \text{یا} \quad x=c\sin v \quad \text{یا} \quad x=c\sin\left(\frac{y}{x}\right)$$

پنځم مثال: لاندې تفاضلي معادله حل کړئ

$$x\cos\left(\frac{y}{x}\right)(y\,dx+x\,dy)=y\sin\left(\frac{y}{x}\right)(x\,dy-y\,dx)$$

حل: تفاضلي معادله په لاندې شکل لیکو

$$\left[x\cos\left(\frac{y}{x}\right)+y\sin\left(\frac{y}{x}\right)\right]y-\left[y\sin\left(\frac{y}{x}\right)-x\cos\left(\frac{y}{x}\right)\right]x\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\left\{x\cos\left(\frac{y}{x}\right)+y\,sin\ \left(\frac{y}{x}\right)\right\}y}{\left\{y\sin\left(\frac{y}{x}\right)-x\,cos\ \left(\frac{y}{x}\right)\right\}\ x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left\{\cos\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x}\ sin\ \left(\frac{y}{x}\right)\right\}\frac{y}{x}}{\left\{\frac{y}{x}\sin\left(\frac{y}{x}\right) -\ \ cos\ \left(\frac{y}{x}\right)\right\}} \ \ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.(1)$$

اوس دمعادلې دحل لپاره په لاندې ډو تعويض اجراکوو

$$\frac{y}{x} = v \quad => \quad y = vx \quad \therefore \quad \frac{dy}{dx} = v + \frac{xdv}{dx}$$

ددغه قيمتونو په وضعه کولو سره لومړی معادله لاندې شکل غوره کوي

$$v + \frac{xdv}{dx} = \frac{v(\cos v + v\sin v)}{v\ sin\ v - \cos v}$$

$$\frac{xdv}{dx} = \frac{v(\cos v + v\sin v)}{v\ sin\ v - \cos v} - v = \frac{2v\cos v}{v\sin v - \cos v}$$

$$2\frac{dx}{x} = \frac{v\sin v - \cos v}{v\cos v}dv$$

$$2\int\frac{1}{x}dx = \int\left(\frac{\sin v}{\cos v} - \frac{1}{v}\right)dv$$

$$2\ln x = -\ln\cos v - \ln v + \ln c$$

$$\ln x^2 = \ln\left(\frac{c}{v\cos v}\right)$$

$x^2\ v\cos v = c$ يا $xy = \cos\left(\frac{y}{x}\right) = c$

شپږم مثال: لاندې تفاضلي معادله حل کړئ

$$\left(1 + e^{\frac{x}{y}}\right)dx + e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \frac{x}{y}\right)dy = 0$$

حل: راکړل شوی معادله کولای شو په لاندې ډول وليکو

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \frac{x}{y}\right)}{\left(1 + e^{\frac{x}{y}}\right)} \ \ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(1)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دمعادلې ښی طرف یوه متجانسه تابع راښايي ، نو دمعادلې دحل لپاره په لاندې ډول تعویض اجراکوو

$$x = vy \qquad \therefore \qquad \frac{dx}{dy} = v + y\frac{dv}{dy}$$

دغه قیمتونه په لومړۍ معادله کې وضعه کوو

$$v + y\frac{dv}{dy} = -\frac{e^v(1-v)}{(1+v)} \qquad y\frac{dv}{dy} = -\frac{e^v(1-v)}{(1+v)} - v = -\frac{(v+e^v)}{1+v}$$

اوس يې متحولین سره بیلوو او انتیګرال یی پیداکوو

$$\frac{1+e^v}{v+e^v}dv = -\frac{dy}{y} \qquad \therefore \qquad \int\left(\frac{1+e^v}{v+e^v}\right)dv = -\int\frac{1}{y}dy$$

$$\ln(v+e^v) = -\ln y + \ln c$$

$$\ln(v+e^v)\,y = \ln c \qquad \text{یا} \qquad y(v+e^v) = c$$

$$y\left(\frac{x}{y} + e^{\frac{x}{y}}\right) = c \qquad \text{یا} \qquad x + ye^{\frac{x}{y}} = c$$

1.7 تمرینونه

لاندې تفاضلي معادلې حل کړئ

01. $(x-y)\dfrac{dy}{dx} = x + 2y$ 02. $(x^3 - 3xy^2)dx = (y^3 - 3x^2y)dy$

03. $(3xy + y^2)dx - (x^2 + xy)dy = 0$ 04. $x\dfrac{dy}{dx} - y + x\sin\left(\dfrac{y}{x}\right) = 0$

05. $(x^2 - 2y^2)dx + xydy = 0$ 06. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} + \tan\left(\dfrac{y}{x}\right)$

07. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^3 + 2y^3}{2xy^2}$ 08. $\dfrac{dy}{dx} = 1 + \dfrac{y}{x} + \dfrac{y^2}{x^2}$

09. $y\,dx + x\left(\ln\left(\dfrac{y}{x}\right)\right) - 2x\,dy = 0$ 10. $x^2 + (x^2 - xy)\dfrac{dy}{dx} = 0$

11. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x - \sqrt{xy}}$ 12. $\left(x\tan\dfrac{y}{x} - y\sec^2\dfrac{y}{x}\right)dx + x\sec^2\left(\dfrac{y}{x}\right)dy = 0$

13. $(x^2 + y^2)dx = 2xdy \qquad y(1) = 0$ 14. $xe^{\frac{y}{x}} - y + xy' = 0 \qquad y(e) = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

جوابونه:

1. $\ln|x^2+xy+y^2| = 2\sqrt{3}\tan^{-1}\left(\frac{x+2y}{x\sqrt{3}}\right)+c$　　2. $(x^2-y^2) = c(x^2+y^2)^2$

3. $\ln\left|\frac{y}{x^3}\right| + \frac{y}{x} = c \qquad (x \neq 0\ ,\ \ y \neq 0)$

4. $x\sin\frac{y}{x} = c\left(1+\cos\frac{y}{x}\right)\left(x\sin\frac{y}{x}\right) \qquad (x \neq 0)$

5. $y^2 = x^2 + cx^4$　　6. $\sin\left(\frac{y}{x}\right) = cx$　　7. $2y^3 = 3x^3(\ln x + c)$

8. $y = x\tan\ln(cx)$　　9. $cy = \ln\frac{y}{x} - 1$　　10. $y = (\ln y + c)$

11. $2\cdot\sqrt{\frac{x}{y}} + \ln y = 0$　　12. $x\tan\frac{y}{x} = c$　　13. $x^2 - y^2 = x$

14. $y = -x\ln\ln|x| \qquad (x \neq 0)$

1.8　هغه معادلې چې په متجانسو معادلو باندې بدلیږی

داډول معادلې عموما د $\frac{dy}{dx} = \frac{ax+by+c}{Ax+By+C}$ په شکل دي، چې a, b ,c ,A ,B, C ثابت عددونه دي، دداډول معادلو دحل لپاره لاندې دوه حالتونه موجود دي.

اول حالت: که چیرته $\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = k$ (فرضیه) نو په دې صورت کې معادله لاندې شکل اختیاروي

$$\frac{dy}{dx} = \frac{k(Ax+By)+c}{Ax+By+C}$$

په داډول معادلو کې کولاي شو چې د $Ax + By = t$ تعویض څخه وروسته متحولین په اسانی سره بیل کړو.

دوهم حال: که چیرته $\frac{a}{A} \neq \frac{b}{B}$ سره وي، نو په دې صورت کې راکړل شوی تفاضلي معادله د $x = X + h$ او $y = Y + k$ په وضعه کولو سره معادله په متجانسه تفاضلي معادله باندې بدلیږي، چې h او k ثابت عددونه دي ، او دمعادلاتو دحل څخه لاسته راځي.

$$x = X + h \quad => \quad dx = dX\ , \qquad y = Y + k \quad => \quad dy = dY$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX}$$

اوس نو معادله لاندې شکل اختیاروي

$$\frac{dY}{dX} = \frac{(aX + bY) + (ah + bl + c)}{(AX + BY) + (Ah + Bk + C)}$$

که چیرته h او k داسي انتخاب کړو چې $Ah + Bk + C = 0$, $ah + bk + c = 0$ سره شي، نو په دی صورت کي پورته معادله لاندې شکل اختیاروي

$$\frac{dY}{dX} = \frac{aX + bY}{AX + BY}$$

پورته معادله یوه متجانسه تفاضلي معادله ده ، او دلاندې تعویض په اساس یی حل کوو

$$Y = VX\ ,\ \ V = V(X) \qquad\qquad X = VY\ ,\ \ V = V(Y)$$

عملي مثالونه: $\frac{dy}{dx} = \frac{x+2y+1}{2x+4y+3}$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: راکړل شوې معادله یوه متجانسه معادله نه ده ،خو نوموړی معادله په پورته حالتونو کې لومړې حالت رابنايي ، نوراکړل شوی معادله په لاندې شکل لیکو

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + 2y + 1}{2(x + 2y) + 3} \ \ldots\ldots\ldots (1) \qquad x + 2y = t \qquad => \qquad 1 + 2\frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx}$$

ددغه قیمتونو په وضعه کولو سره لومړی معادله لاندې شکل اختیاروي

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dt}{dx} - 1\right) = \frac{t + 1}{2t + 3}\ ,\ \ \frac{dt}{dx} - 1 = \frac{2t + 2}{2t + 3}$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{2t + 2}{2t + 3} + 1 = \frac{2t + 2 + 2t + 3}{2t + 3}$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{4t + 5}{2t + 3} \qquad => \qquad \left(\frac{2t + 3}{4t + 5}\right) dt = dx$$

$$\int \left(\frac{\frac{1}{2}(4t + 5) + \frac{1}{2}}{4t + 5}\right) dt = \int dx \qquad \frac{1}{2}\int \left(1 + \frac{1}{4t + 5}\right) dt = x + c$$

$$\frac{1}{2}\left[t + \frac{1}{4}\ln(4t + 5)\right] = x + c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$4t + \ln(4t+5) = 8x + 8c$$

$$4(x+2y) + \ln(4x+8y+5) = 8x + c_1$$

$$4(2y-x) + \ln(4x+8y+5) = c_1$$

کوم چي دراکړل شوی معادلې عمومي حل دی

دوهم مثال: $(x+2y)(dx-dy) = dx + dy$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: راکړل شوي معادله په لاندې ډول لیکو

$$(x+2y-1)dx = (x+2y+1) \quad \text{یا} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x+2y-1}{x+2y+1} \;\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$x+2y = t \quad => \quad 1 + 2\frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx} \quad \text{یا} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left[\frac{dt}{dx} - 1\right]$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{dt}{dx} - 1\right] = \frac{t-1}{t+1} \quad \text{یا} \quad \frac{dt}{dx} - 1 = \frac{2t-2}{t+1}$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{2t-2}{t+1} + 1 = \frac{2t-2+t+1}{t+1} = \frac{3t-1}{t+1}$$

اوس يې متحولين سره بیلوو

$$\left(\frac{t+1}{3t-1}\right)dt = dx \quad \text{یا} \quad \frac{1}{3}\left[1 + \frac{4}{3t-1}\right]dt = dx$$

اوس يې انتيګرال پيداکوو

$$\frac{1}{3}\int\left(1 + \frac{4}{3t-1}\right)dt = \int dx$$

$$\frac{1}{3}\left[t + 4\cdot\frac{1}{3}\ln(3t-1)\right] = x + c$$

$$\frac{1}{3}\left[x + 2y + \frac{4}{3}\ln(3x+6y-1)\right] = x + c$$

کوم چي دراکړل شوي معادلې عمومي حل دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم مثال: $\frac{dy}{dx}=\frac{x+2y-3}{2x+y-3}$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: راکړل شوي معادله $\frac{a}{A}\neq\frac{b}{B}$ په شکل ده ، نو دراکړل شوی معادلې دحل لپاره په لاندې ډول تعویض اجراکوو

$$x=X+h\,,\quad y=Y+k \qquad => \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{dY}{dX}$$

ددغه قیمتونو په وضعه کولو سره راکړل شوی معادله لاندې شکل غوره کوي

$$\frac{dY}{dX}=\frac{X+2Y+(h+2k-3)}{2X+Y+(2h+k-3)}$$

د $2h+k-3=0$ او $h+2k-3=0$ معادلو دحل څخه $k=1$ او $h=1$ لاسته راځي

$$\therefore\quad x=X+1\,,\quad y=Y+1 \qquad => \qquad X=x-1\,,\quad Y=y-1$$

اوس نوموړې معادله لاندي شکل اختیاروي، کومه چې یوه متجانسه معادله ده

$$\frac{dY}{dX}=\frac{X+2Y}{2X+Y}\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$Y=VX \qquad \text{نو} \qquad \frac{dY}{dX}=V+X\frac{dV}{dX}$$

دپورته قیمتونوپه وضعه کولوسره لومړی معادله لاندې شکل اختیاروي

$$V+X\frac{dV}{dX}=\frac{X+2VX}{2X+VX} \qquad => \qquad V+X\frac{dV}{dX}=\frac{1+2V}{2+V}$$

$$X\frac{dV}{dX}=\frac{1+2V}{2+V}-V=\frac{1+2V-2V-V^2}{2+V}=\frac{1-V^2}{2+V}$$

اوس یي متحولین سره بیلوو او دقسمي کسرونو دتجزیي په مرسته یي انتیګرال پیداکوو

$$\left(\frac{2+V}{1-V^2}\right)dV=\frac{dX}{X} \qquad => \qquad \left[\frac{3}{2}\left(\frac{1}{1-V}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+V}\right)\right]dV=\frac{dX}{X}$$

$$\frac{3}{2}\int\left(\frac{1}{1-V}\right)dV+\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+V}\right)dV=\int\frac{1}{X}dX$$

$$-\frac{3}{2}\ln(1-V)+\frac{1}{2}\ln(1+V)=\ln X+\ln c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-3\ln(1-V)+\ln(1+V)=2(\ln X+\ln c)$$

$$\ln\frac{1+V}{(1-V)^3}=2\ln X\,c$$

$$X^2c^2=\frac{1+V}{(1-V)^2}\qquad c^2(X-Y)^3=X+Y\qquad \left(\therefore V=\frac{Y}{X}\right)$$

$$(x-y)^3c^2=x+y-2$$

څلورم مثال: $\frac{dy}{dx}=\frac{3y-7x+7}{3x-7y-3}$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: راکړل شوې معادله دوهم حالته ته ورته ده ، او دحل لپاره يې په لاندې ډول تعويض اجراکوو

$$x=X+h\,,\qquad y=Y+k\qquad =>\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{dY}{dX}$$

دپورته قيمتونو په وضعه کولو سره راکړل شوې معادله لاندې شکل اختياروي

$$\frac{dY}{dX}=\frac{3Y-7X+(3k-7h+7)}{3X-7Y+(3h-7k-3)}$$

د $3k-7h+7=0$ او $3h-7k-3=0$ معادلو دحل څخه h=1 او k=0 څخه لاسته راځي، په نتيجه کې معادله لاندې شکل اختياروي، کومه چې يوه متجانسه تفاضلي معادله ده

$$\frac{dY}{dX}=\frac{3Y-7X}{3X-7Y}$$

$$Y=VX\qquad =>\qquad \frac{dY}{dX}=V+X\frac{dV}{dX}$$

$$V+X\frac{dV}{dX}=\frac{3VX-7X}{3X-7VX}=\frac{3V-7}{3-7V}$$

$$X\frac{dV}{dX}=\frac{3V-7}{3-7V}-V=\frac{3V-7-3V+7V^2}{3-7V}$$

$$X\frac{dV}{dX}=\frac{7(V^2-1)}{3-7V}$$

اوس يې متحولين سره بيلوو او دقسمي کسرونو دتجزيې په مرسته يې انتيګرال پيداکوو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$7\frac{dX}{X} = \frac{3-7V}{(V-1)(V+1)}dV$$

$$7\int\frac{1}{X}dX = -\int\left(\frac{2}{V-1}+\frac{5}{V+1}\right)dV$$

$$7\ln X = -[2\ln(V-1)+5\ln(V+1)]+\ln c$$

$$X^7(V-1)^2(V+1)^5 = c \qquad \text{یا} \qquad X^7\left(\frac{Y}{X}-1\right)^2\left(\frac{Y}{X}+1\right)^5 = c$$

$$(Y-X)^2(Y+X)^5 = c \qquad \text{یا} \qquad (y-x+1)^2(y+x-1)^2 = c$$

1.9 تمرینونه:

لاندې تفاضلي معادلې حل کړئ

1. $\frac{dy}{dx} = \frac{x-y+3}{2x-2y+5}$
2. $(6x-4y+3)dx = (3x-2y+1)dy$
3. $\frac{dy}{dx} = \frac{y-x+1}{y-x-5}$
4. $\frac{dy}{dx} = \frac{3x-4y-2}{3x-4y-3}$
5. $(2x-4y+3)dy + (x-2y+1)dx = 0$
6. $(x-2y+5)dx - (2x+y-1)dy = 0$
7. $\frac{dy}{dx} = \frac{y-x+1}{y+x+5}$
8. $(2x+3y-5)\frac{dy}{dx} + (3x+2y-5) = 0$
9. $(2x+y+6)dx = (y-x-3)dy$
10. $\frac{dy}{dx} = \frac{x-y+1}{x+2y-3}$
11. $\frac{dy}{dx} = \frac{x+2y-3}{2x+y-3}$
12. $(2y-x-1)dy - (2x-y+1)dx = 0$

جوابونه:

1. $(2y-x) = \ln(x-y+2) + c$
2. $(2y-x) = \frac{1}{4}\ln(12x-8y+1) + c$
3. $\frac{(y-x)^2}{2} - 5(y-x) = 6x + c$
4. $x - y = \ln(3x-4y+1) + c$
5. $\ln\{4(x-2y)+5\} = 4(x+2y) + c$
6. $x^2 - y^2 - 4xy + 10x + 2y = c$

(c) ketabton.com: The Digital Library

7. $\ln\{(x+2)^2+(y+3)^2\}^{\frac{1}{2}}+\tan^{-1}\left\{\frac{y+3}{x+2}\right\}=c$

8. $3x^2+4xy+3y^2-10x-10y+10=c$ 9. $y^2-2xy-2x^2-6y-12x-18=c$

10. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{X+\sqrt{2}Y}{X-\sqrt{2}Y}\right)-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2Y^2-X^2}{X^2}\right)=X+c \quad X=x-\frac{1}{3}\ ,\ Y=y-\frac{4}{3}$

11. $(y-x)^3=c(x+y-2)$ 12. $(3x-3y+2)(x+y)^3=c$

خطي تفاضلي معادلې (Linear Differential Equations)

هغه تفاضلي معادلې چې $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(1)$ شکل ولري ، خطي تفاضلي معادلې ورته وايي ، چې P او Q د x تابع دي، يا هم ثابت عددونه دي ، y او د y مشتق y' بايد يو مثبت تام عدد وي ، چې ديو ځخه به لوي هم نه وی، او نه به yy' دحاصل ضرب په شکل وي.

دلومړی معادلې دحل لپاره ، دمعادلې دواړه خواوې په $e^{\int Pdx}$ فکتور کې ضربوو ، کوم چې لاندې شکل اختياروي

$$\left[\frac{dy}{dx}+P(x)y\right]e^{\int Pdx}=Q(x)e^{\int Pdx} \quad \text{يا} \quad \frac{d}{dx}\left[y\,e^{\int Pdx}\right]=Q(x)e^{\int Pdx}$$

اوس يې نظر x ته انتيګرال نيسو

$$ye^{\int Pdx}=\int Q(x)e^{\int Pdx}\,dx+c$$

کوم چې غوښتل شوې حل دی

يادانښت: $e^{\int Pdx}$ فکتورته دانتيګرال فکتور ته دلومړی معادلې دانتيګرال فکتور وايي، همدارنګه ځينې وخت خطي تفاضلي معادله لاندې شکل اختياروي

$$\frac{dx}{dy}+P(y)x=Q(y)$$

چي په دې صورت کې دراکړل شوې معادلې دانتيګرال فکتور عبارت د $e^{\int Pdy}$ ځخه دی ، او دمعادلې حل په لاندې ډول دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$xe^{\int P dy} = \int Q(y)e^{\int P dy}\,dy + c$$

عملي مثالونه:

لومړی مثال: $\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = x^3$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: راکړل شوې معادله $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ په شکل ده ، چې $Q = x^3$ او $P = \frac{2}{x}$ څخه دي، دانتیګرال فکتور یې په لاندې ډول پیداکوو

$$IF = e^{\int P dx} = e^{\int \frac{2}{x} dx} = e^{2\ln x} = e^{\ln x^2} = x^2$$

اوس دمعادلې عمومي حل دلاندې فورمول په اساس لاسته راوړو

$$y \times IF = \int Q.IF dx + c$$

قیمتونه په فورمول کې وضعه کوو

$$y\,x^2 = \int x^3.x^2 dx + c \quad \text{یا} \quad yx^2 = \int x^5 dx + c$$

$$yx^2 = \frac{x^6}{6} + c \quad \text{یا} \quad y = \frac{x^4}{6} + \frac{c}{x^2}$$

دوهم مثال: $\frac{dy}{dx} + y\sec x = \tan\ x$ تفاضلي معادله حل کړې

حل: $Q = \tan x$, $P = \sec x$ سره دي ، نو لومړی یې دانتیګرال فکتور په لاندې ډول پیداکوو

$$IF = e^{\int P dx} = e^{\int \sec x dx} = e^{\ln(\sec x + \tan x)} = (\sec x + \tan x)$$

پس دمعادلې عمومي حل په لاندې ډول دی

$$y(\sec x + \tan x) = \int \tan x\,(\sec x + \tan x)dx + c$$

$$y(\sec x + \tan x) = \int \sec x \tan x\,dx + \int (\sec^2 x - 1)dx + c$$

$$y(\sec x + \tan x) = \sec x + \tan x - x + c \qquad \therefore\ y = 1 + \frac{c - x}{\sec x + \tan x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم مثال: $\frac{dy}{dx}+\frac{2}{x}y=x\ln x$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل:

$$p=\frac{2}{x} \quad \text{او} \quad Q=x\ln x$$

دمعادلي دحل لپاره لومړی باید دانتیګرال فکټور پیداکړو

$$IF=e^{\int Pdx}=e^{\int\frac{2}{x}dx}=e^{2\ln x}=e^{\ln x^2}=x^2$$

اوس دراکړل شوې معادلې دحل لپاره په لاندې ډول عمل اجراکوو

$$y.x^2=\int x\ln x\,.x^2dx+c$$

پورته انتیګرال دانقسام په طریقه پیداکوو

$$yx^2=\ln x\,.\frac{x^4}{4}-\frac{x^4}{16}+c \quad \text{یا} \quad y=\frac{x^2}{4}\ln x-\frac{x^2}{16}+\frac{c}{x^2}$$

ځلورم مثال: $(1+x^2)\frac{dy}{dx}+y=e^{\tan^{-1}x}$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: راکړل شوې معادله لومړی په لاندې شکل لیکو

$$\frac{dy}{dx}+\frac{1}{(1+x^2)}y=\frac{e^{\tan^{-1}x}}{1+x^2}\ , \qquad P=\frac{1}{1+x^2} \quad \text{او} \quad Q=\frac{e^{\tan^{-1}x}}{1+x^2}$$

دراکړل شوې معادلې دحل لپاره لومړی دانتیګرال فکټور پیداکوو

$$IF=e^{\int Pdx}=e^{\int\frac{1}{1+x^2}dx}=e^{\tan^{-1}x}$$

اوس معادله په لاندې ډول پیداکوو

$$ye^{\tan^{-1}x}=\int\frac{e^{\tan^{-1}x}}{1+x^2}\,.e^{\tan^{-1}x}dx+c=\int\frac{e^{2\tan^{-1}x}}{1+x^2}dx+c$$

$$ye^{\tan^{-1}x}=I+c$$

په معادله کې موجود انتیګرال لومړی په تعویضي طریقه پیداکوو ، او بیا یې په معادله کې د I په ځای وضعه کوو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$I = \int \frac{e^{2\tan^{-1}x}}{1+x^2}dx \quad , \qquad \tan^{-1}x = t \quad => \quad \frac{1}{1+x^2}dx = dt$$

$$I = \int e^{2t}dt = \frac{e^{2t}}{2} = \frac{e^{2\tan^{-1}x}}{2}$$

نو دراکړل شوې معادلې حل په لاندې ډول دی

$$ye^{\tan^{-1}x} = \frac{e^{2\tan^{-1}x}}{2} + c \qquad y = \frac{e^{\tan^{-1}x}}{2} + c\, e^{-\tan^{-1}x}$$

پنځم مثال: $\sin^2 x \frac{dy}{dx} - y = \cot x$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: راکړل شوې معادله په لاندې شکل لیکو

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{\sin^2 x} = \frac{\cot x}{\sin^2 x} \qquad \text{یا} \qquad \frac{dy}{dx} - y\, cosec^2x = \cot x \;\; cosec^2x$$

$$P = -cosec^2x \qquad Q = \cot x \;\; cosec^2x$$

اوس یې دانتیګرال فکتور په لاندې ډول پیداکوو

$$IF = e^{\int Pdx} = e^{-\int cosec^2x\, dx} = e^{\cot x}$$

پس دمعادلې عمومي حل په لاندې ډول پیداکوو

$$ye^{\cot x} = \int (\cot x \;\; cosec^2x)\, e^{\cot x}dx + c$$

$$ye^{\cot x} = I + c$$

د I قیمت لومړی په لاندې ډول لومړی دتعویضي طریقې او وروسته دانقسام طریقې څخه په ګټه اخیستنې سره پیداکوو

$$I = \int (\cot x \;\; cosec^2x)e^{\cot x}dx \qquad \cot x = t$$

$$-cosec^2x\, dx = dt$$

$$I = -\int t\, e^t dt = -\left[t\, e^t - \int e^t.1\, dt\right]$$

$$I = -[t\, e^t - e^t] = e^t - t\, e^t = e^t(1-t)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په نتیجه کې لیکلای شو چې

$$y\, e^{\cot x} = e^{\cot x}(1-\cot x) + c \qquad \text{یا} \qquad y = (1-\cot x) + c e^{-\cot x}$$

شپږم مثال: $(x+\tan y)\, dy = \sin 2y\, dx$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: راکړل شوې معادله کولای شو په لاندې ډول ولیکو

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+\tan y}{\sin 2y} \qquad \text{یا} \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin 2y}x = \frac{\tan y}{\sin 2y}$$

کومه چې د $\frac{dx}{dy} + P(y)\, x = Q(y)$ شکل لري، ددې څخه لیکلای شو چې:

$$P = -\frac{1}{\sin 2y} \qquad \text{او} \qquad Q = \frac{\tan y}{\sin 2y}$$

لومړی دانتیګرال فکټور په لاندې ډول پیداکوو

$$IF = e^{\int P dy} = e^{-\int \frac{1}{\sin 2y} dy} = e^{-\frac{1}{2}\int \frac{\sec^2 y}{\tan y} dy} = e^{-\frac{1}{2}\ln \tan y} = e^{\ln \frac{1}{\sqrt{\tan y}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\tan y}} = \sqrt{\cot y}$$

اوس دراکړل شوې معادلې عمومي دفورمول په نظر کې نیولوسره په لاندې ډول حل کوو

$$x\sqrt{\cot y} = \int \frac{\tan y}{\sin 2y}\sqrt{\cot y}\ dy + c = \int \frac{\sec^2 y}{2\sqrt{\tan y}} dy + c$$

$$x\sqrt{\cot y} = \sqrt{\tan y} + c \qquad\qquad x = \tan y + c\sqrt{\tan y}$$

اووم مثال: $(1+y^2)\, dx = (\tan^{-1} y - x)dy$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: لومړی راکړل شوې معادله په لاندې ډول لیکو

$$\frac{dx}{dy} + \frac{1}{1+y^2}x = \frac{\tan^{-1} y}{1+y^2} \qquad \text{نو} \quad P = \frac{1}{1+y^2} \qquad \text{او} \quad Q = \frac{\tan^{-1} y}{1+y^2}$$

اوس دراکړل شوې معادلې دحل لپاره دانتیګرال فکټور په لاندې ډول پیداکوو

$$IF = e^{\int \frac{1}{1+y^2} dy} = e^{\tan^{-1} y}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پس دراکړل شوې معادلې عمومي حل په لاندې ډول پیداکوو

$$xe^{\tan^{-1}y} = \int \frac{\tan^{-1}y}{1+y^2}\, e^{\tan^{-1}y} dy + c$$

$$xe^{\tan^{-1}y} = \int t\, e^t dt + c \qquad t = \tan^{-1}y$$

$$xe^{\tan^{-1}y} = (t-1)e^t + c$$

$$xe^{\tan^{-1}y} = (\tan^{-1}y - 1)e^{\tan^{-1}y} + c$$

$$\therefore \qquad x = (\tan^{-1}y - 1) + ce^{\tan^{-1}y}$$

اتم مثال: $y\ln y\, dx + (x - \ln y)dy = 0$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: راکړل شوې معادله په لاندې ډول لیکو

$$\frac{dx}{dy} + \frac{1}{y\ln y}x = \frac{1}{y} \qquad P = \frac{1}{y\ln y}\ , \qquad Q = \frac{1}{y}$$

اوس دراکړل شوې معادلې دحل لپاره دانتیګرال فکټور په لاندې ډول پیداکوو

$$IF = e^{\int \frac{1}{y\ln y}dy} = e^{\ln\ln y} = \ln y$$

اوس راکړل شوې معادله په لاندې ډول حل کوو

$$x\ln y = \int \frac{1}{y}\,.\ln y\, dy + c = \int t\, dt + c\ , \qquad \ln y = t \quad => \quad \frac{1}{y}dy = dt$$

$$= \frac{t^2}{2} + c$$

$$x\ln y = \frac{(\ln y)^2}{2} + c \qquad \therefore x = \frac{\ln y}{2} + \frac{c}{\ln y}$$

نهم مثال: $\frac{dy}{dx} = x\sin 2y = x^3\cos^2 y$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: راکړل شوې معادله یوه معیاري خطي تفاضلي معادله نه ده ، ددې لپاره چې معادله په معیاري شکل ولیکو، نومعادله په $\cos^2 y$ باندې ویشو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sec^2 y\frac{dy}{dx} + 2x\tan y = x^3 \dots\dots\dots\dots\dots.(1)$$

په لومړی معادل کې په لاندې ډول تعویض اجراکوو

$$\tan y = t \qquad => \qquad \sec^2 y\frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx}$$

اوس لومړی معادله لاندې شکل اختیاروي

$$\frac{dt}{dx} + 2x\,t = x^3 \quad \text{نو} \quad P = 2x \quad \text{او} \quad Q = x^3$$

اوس یې دانتیګرال فکټور په لاندې ډول پیداکوو

$$IF = e^{\int Pdx} = e^{\int\, 2x\,dx} = e^{x^2}$$

دپورته قیمتونو په لرلوسره دمعادلې عمومي حل په لاندې ډول پیداکوو

$$te^{x^2} = \int x^3 e^{x^2}dx + c$$

$$= \int x.x^2 e^{x^2}dx + c \qquad x^2 = u\,;\ 2xdx = du;\ xdx = \frac{du}{2}$$

$$= \int ue^u du + c$$

$$= ue^u - \int e^u du + c$$

$$= ue^u - e^u + c$$

$$te^{x^2} = (u-1)e^u + c \qquad => \qquad te^{x^2} = (x^2-1)e^{x^2} + c$$

$$\therefore t = (x^2-1) + ce^{-x^2} \qquad t = \tan y$$

$$\tan y = (x^2-1) + ce^{-x^2}$$

یادابنت: پورته مثال $f'(y)\frac{dy}{dx} + f(y)P(x) = Q(x)$ شکل لري، دداډول معادلو دحل لپاره $f(y) = t$ وضعه کوو

(c) ketabton.com: The Digital Library

لسم مثال: $x\frac{dy}{dx} - y = x^3 \cos x \quad , \quad y(\pi) = 0$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: لومړی راکړل شوې معادله په لاندې ډول لیکو

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = x^2 \cos x\,, \qquad P = -\frac{1}{x} \quad \text{او} \quad Q = x^2 \cos x$$

اوس دراکړل شوې معادلې دحل لپاره دانتیګرال فکټور په لاندې ډول پیداکوو

$$IF = e^{-\int \frac{1}{x}dx} = e^{-\ln x} = e^{\ln\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$$

اوس دمعادلې عمومي حل په لاندې ډول پیداکوو

$$y\frac{1}{x} = \int x^2 \cos x \cdot \frac{1}{x} dx + c$$

$$\frac{y}{x} = \int x\,.\cos x\, dx + c$$

$$\frac{y}{x} = x \sin x - \int \sin x \cdot 1\, dx + c$$

$$\frac{y}{x} = x \sin x + \cos x + c$$

$$y = x^2 \sin x + x \cos x + cx \qquad\qquad x = \pi\,, \qquad y = 0$$

$$0 = \pi^2 \sin \pi + \pi \cos \pi + c\pi$$

$$0 = -\pi + c\pi, \qquad c\pi = \pi \quad => \quad c = 1$$

پس دمعادلې خصوصي حال په لاندې ډول دی

$$y = x^2 \sin x + x \cos x + x$$

تمرینونه:

لاندې تفاضلي معادلې حل کړئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

1. $x(x^2+1)\dfrac{dy}{dx} = y(1-x^2) + x^2\ln x$ 2. $\dfrac{dy}{dx} + y\cot x = \sin x$

3. $x\cos x\dfrac{dy}{dx} + y(x\sin x + \cos x) = 1$ 4. $(1-x^2)\dfrac{dy}{dx} + 2xy = x\sqrt{1-x^2}$

5. $\dfrac{dy}{dx} + y = \sin x$ 6. $(x+1)\dfrac{dy}{dx} - y = e^x(1+x)^2$

7. $\dfrac{dy}{dx} + y\tan x = \sin 2x$ 8. $\dfrac{dy}{dx} + 3y = e^{-x}\cos x$

9. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x + y\cos x}{1+\sin x}$ 10. $\dfrac{dy}{dx} + y\cot x = 4x\, cosec\, x$

11. $\dfrac{dy}{dx} - 2y\tan x = \sec^4 x$ 12. $(x+y+1)\dfrac{dy}{dx} = 1$

13. $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{\tan y}{1+x} = (1+x)\, e^x \sec y$ 14. $(x+2y^2)\dfrac{dy}{dx} = y$

15. $y^2 + \left(x - \dfrac{1}{y}\right)\dfrac{dy}{dx} = 0$ $\left(Hint\ reduce\ in\ form\ \ \dfrac{dx}{dy} + P_1 x = Q_1\right)$

16. $(x+1)\dfrac{dy}{dx} + (1+x)y = 2\sin x$ $y(0) = 2$

17. $x\dfrac{dy}{dx} + y = x\cos x + \sin x$ $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$

18. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{2x}{x^2+1}y = \dfrac{1}{(x^2+1)^2}$ $y(0) = 0$

1. $\dfrac{[y(x^2+1)]}{x} = \dfrac{1}{2}x^2\ln x - \dfrac{1}{4}x^2 + c$ 2. $y\sin x = \dfrac{1}{2}\,x - \dfrac{1}{4}\sin 2x + c$

3. $y\,x\sec x = \tan x + c$ 4. $\dfrac{y}{(1-x^2)} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} + c$

5. $y = \dfrac{1}{2}\,(\sin x - \cos x) + ce^{-x}$ 6. $y = (x+1)(e^x + c)$

7. $y\sec x = c - 2\cos x$ 8. $y = ce^{-3x} + e^{-x}\left(\dfrac{\sin x + 2\cos x}{5}\right)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

9. $y(1+\sin x)+\frac{x^2}{2}=c$ 10. $y=(2x^2+c)cosec\,x$

11. $y\cos^2 x=c+\tan x$ 12. $x=ce^y-(y+2)$

13. $\sin y=(1+x)(c+e^x)$ 14. $\frac{x}{y}=y^2+c$

15. $x=ce^{\frac{1}{y}}+\frac{1}{y}+1$ 16. $y=\frac{\sin x-\cos x}{1+x}+\frac{3e^{-x}}{1+x}$

17. $y=\sin x$ 18. $y=\frac{\tan^{-1}x}{x^2+1}$

1.13 برنولي معادله (Bernoulli's Equation)

ځینې لومړی ترتیب تفاضلي معادلې دې چې خطي شکل نه لري ، خو دمتحولینو په مناسب تعویض سره کولای شو چې نوموړې معادلې په خطي تفاضلي معادلو باندې تبدیلې کړو، یو شکل ددوی څخه دبرنولي معادله هم ده ، کوم چې دسویس ریاضي پوه (1654-1705) jacob Bernoulli په واسطه منځ ته راغلې دي، دبرنولي دمعادلې عمومي شکل په لاندې ډول دی

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1), \qquad (n\neq 0\,,\quad n\neq 1)$$

چې P او Q د x تابع دي او یا هم امکان لري چې ثابت عددونه وي، لومړۍ معادله کولای شو چې دخطي معادلې په شکل ولیکو ، ددې کار لپاره لومړۍ معادله y^n باندې ویشو، نو لاندې معادله لاسته راکوي

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+P\,y^{1-n}=Q \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

اوس په لاندې ډول تعویض اجراکوو

$$y^{1-n}=v \quad => \quad (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx}$$

دپورته قیمتونو په وضعه کولو سره دوهمه معادله لاندې شکل اختیاروي

$$\frac{1}{1-n}\frac{dv}{dx}+P\,v=Q \qquad \text{یا} \qquad \frac{dv}{dx}+P(1-n)v=Q(1-n)\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریمه معادله یوه خطي تفاضلي معادله ده ، چې کولای شو نوموړې معادله دانتيګرال دفکتور په پيداکولو سره حل کړو.

عملي مثالونه:

لومړی مثال: $\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=y^2$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: راکړل شوې معادله برنولي معادله ده ، لومړی راکړل شوې معادله په y^2 باندې ويشو

$$\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx}-\frac{y^{-1}}{x}=1 \quad \text{يا} \quad y^{-2}\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x}y^{-1}=1$$

اوس دپورته معادلې دحل لپاره په لاندې ډول تعويض اجراکوو

$$y^{-1}=v \qquad => \qquad -y^{-2}\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx}$$

دپورته قيمتونو په وضعه کولو سره معادله په لاندې خطي تفاضلي معادلې باندې بدليږي

$$-\frac{dv}{dx}-\frac{1}{x}v=1 \quad \text{يا} \quad \frac{dv}{dx}+\frac{1}{x}v=-1$$

اوس يې دانتيګرال فکتورپه لاندې ډول پيداکوو

$$P=\frac{1}{x}\,, \quad Q=-1 \quad \text{نو} \quad IF=e^{\int Pdx}=e^{\int\frac{1}{x}dx}=e^{\ln x}=x$$

پس دراکړل شوې معادلې عمومي حل په لاندې ډول دې

$$v\,x=\int -1\,x\,dx+c \quad \text{يا} \quad v\,x=-\frac{x^2}{2}+c \quad \text{يا} \quad y^{-1}x=-\frac{x^2}{2}+c$$

دوهم مثال: $x\frac{dy}{dx}+y=y^2\ln x$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: لومړی راکړل شوې معادله په لاندې ډول ليکو

$$y^{-2}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y^{-1}=\frac{1}{x}\ln x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

اوس دمعادلې دحل لپاره په لاندې ډول تعويض اجراکوو

$$y^{-1}=v \qquad => \qquad -y^{-2}\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دپورته قیمتونوپه وضعه کولوسره معادله په لاندې خطي تفاضلي معادله باندې بدلیږي

$$-\frac{dv}{dx}+\frac{1}{x}v=\frac{1}{x}\ln x \quad \text{یا} \quad \frac{dv}{dx}-\frac{1}{x}v=-\frac{1}{x}\ln x$$

اوس يې دانتیګرال فکټور پیداکوو

$$P=-\frac{1}{x} \quad , \quad Q=-\frac{1}{x}\ln x \qquad IF=e^{-\int\frac{1}{x}dx}=e^{-\ln x}=e^{\ln\frac{1}{x}}=x$$

پس دمعادلې عمومي حل په لاندې ډول دی

$$v\cdot\frac{1}{x}=\int-\frac{1}{x}\ln x\cdot\frac{1}{x}dx+c \quad \text{یا} \quad v\,x^{-1}=-\int x^{-2}\ln x+c$$

$$vx^{-1}=-\left[\ln x\frac{x^{-1}}{-1}+\int\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}dx\right]+c=-\left[-\frac{\ln x}{x}+\frac{x^{-1}}{-1}\right]+c$$

$$yx^{-1}=\ln x\cdot x^{-1}+x^{-1}+c \qquad y^{-1}=\ln x+1+cx$$

دریم مثال: $\frac{dy}{dx}-2y\tan x=y^2\tan^2 x$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: معادله په y^2 باندې ویشو

$$y^{-2}\frac{dy}{dx}-2y^{-1}\tan x=\tan^2 x$$

اوس دمعادلې دحل لپاره په لاندې ډول تعویض اجراکوو

$$y^{-1}=v \quad => \quad -y^{-2}\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx} \qquad \therefore\ -\frac{dv}{dx}-2v\tan x=\tan^2 x$$

$$\frac{dv}{dx}+2v\tan x=-\tan^2 x \quad , \qquad P=2\tan x \qquad Q=-\tan^2 x$$

دانتیګرال فکټور په لاندې ډول پیداکوو

$$IF=e^{\int Pdx}=e^{\int 2\tan x dx}=e^{2\ln\sec x}=e^{\ln\sec^2 x}=\sec^2 x$$

$$\therefore\ \ v\cdot\sec^2 x=-\int\tan^2 x\sec^2 x\,dx+c$$

$$v\cdot\sec^2 x=-\frac{\tan^3 x}{3}+c \quad \text{یا} \quad \frac{1}{y}\sec^2 x=-\frac{\tan^3 x}{3}+c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

څلورم مثال: $y(2x\,y + e^x)dx - xe^x dy = 0$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: لومړی راکړل شوې معادله برنولي معادلې په شکل ليکو

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = \frac{2}{e^x} y^2$$

پورته معادله برنولي معادله ده ، ددې لپاره چې دخطي معادلې په شکل يې وليکو ، نو راکړل شوې معادله به y^2 باندې ويشو

$$y^{-2}\frac{dy}{dx} - \frac{y^{-1}}{x} = \frac{2}{e^x} \qquad \text{پس} \quad y^{-1} = v \qquad => \qquad -y^{-2}\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}$$

$$-\frac{dv}{dx} - \frac{v}{x} = \frac{2}{e^x} \qquad \text{یا} \qquad \frac{dv}{dx} + \frac{1}{x}v = -\frac{2}{e^x}\ , \qquad P = \frac{1}{x} \qquad Q = -\frac{2}{e^x}$$

$$IF = e^{\int P dx} = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln x} = x$$

پس دمعادلې عمومي حل عبارت دې له

$$v\,x = -\int 2\,e^{-x}\,x\,dx + c = -2\left[-xe^{-x} + \int e^{-x} dx\right] + c$$

$$= -2[-xe^{-x} - e^{-x}] + c \qquad \text{یا} \qquad \frac{1}{y}x = 2e^{-x}(x+1) + c$$

پنځم مثال: $\frac{dy}{dx} + y\cos x = y^n \sin 2x$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: راکړل شوې معادله دبرنولي معادلې په شکل ده ، لومړی راکړل شوي معادله په y^n باندې ويشو

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + y^{1-n}\cos x = \sin 2x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(1)$$

$$y^{1-n} = v \qquad => \qquad (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}$$

دپورته قيمتونو په وضعه کولوسره لومړۍ معادله په لاندې خطي معادلې باندې بدليږي

$$\frac{1}{1-n}\frac{dv}{dx} + v\cos x = \sin 2x \qquad \text{یا} \qquad \frac{dv}{dx} + (1-n)\cos x \cdot v = (1-n)\sin 2x$$

$$P = (1-n)\cos x\ , Q = (1-n)\sin 2x$$

$$IF = e^{\int P dx} = e^{\int (1-n) csox} = e^{(1-n)\sin x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پس دمعادلې عمومي حل په لاندې ډول پيداکوو

$$v\, e^{(1-n)\sin x} = \int (1-n)\sin 2x\, e^{(1-n)\sin x}\, dx + c$$

$$(1-n)\sin x = t \qquad => \qquad \cos x\, dx = \frac{1}{n-1} dt$$

$$v\, e^{(1-n)\sin x} = \int (1-n) 2\sin x \cos x\, e^{(1-n)\sin x}\, dx + c$$

$$= \frac{2}{n-1}\int t\, e^t dt + c$$

$$= \frac{2}{n-1}\left[te^t - \int 1 . e^t dt\right] + c$$

$$= \frac{2}{n-1}[t\, e^t - e^t] + c = \frac{2}{n-1}[(t-1)e^t]$$

$$y^{(1-n)} e^{(1-n)\sin x} = \frac{2}{n-1}[(1-n)\sin x - 1]\, e^{(1-n)\sin x} + c$$

$$y^{1-n} = \left\{\frac{2}{n-1}\right\}[(1-n)\sin x - 1] + ce^{-(1-n)\sin x}$$

شپږم مثال: $\frac{dz}{dx} + \frac{z}{x}\ln z = \frac{z}{x^2}(ln\, z)^2$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: راکړل شوې معادله په z باندې ويشو، نولاندې نتيجه لاسته راکوي

$$\frac{1}{z}\frac{dz}{dx} + \frac{1}{x}\ln z = \frac{1}{x^2}(\ln z)^2 \qquad y = \ln z \quad => \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{z}\frac{dz}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{y^2}{x^2}$$

پورته معادله دبرنولي معادلي شکل دی، ددې لپاره چې په خطي شکل يې بدله کړو ، نو معادله په y^2 باندې ويشو

$$y^{-2}\frac{dy}{dx} + \frac{y^{-1}}{x} = \frac{1}{x^2} \qquad y^{-1} = v \quad => \quad -y^{-2}\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}$$

$$-\frac{dv}{dx} + \frac{v}{x} = \frac{1}{x^2} \qquad \text{يا} \qquad \frac{dv}{dx} - \frac{1}{x}v = -\frac{1}{x^2} \qquad P = -\frac{1}{x}\ ,\quad Q = -\frac{1}{x^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$IF = e^{\int Pdx} = e^{-\int \frac{1}{x}dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$$

اوس يې عمومي حل په لاندې ډول پيداکوو

$$v \cdot \frac{1}{x} = \int -\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x} dx + c = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2} + c$$

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2x^2} + cx \qquad y = \ln z$$

$$\therefore \quad \frac{1}{\ln z} = \frac{1}{2x} + cx$$

1.14 تمرينونه:

لاندې تفاضلي معادلات حل کړئ

1. $\frac{dy}{dx} - xy = x^3y^2 \quad Ans: \quad \frac{1}{y^2} = 1 - x^2 + ce^{x^2}$
2. $2\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = \frac{y^2}{x^2} \quad Ans: \quad \frac{1}{y} = \frac{1}{x} - \frac{c}{\sqrt{x}}$
3. $xy - \frac{dy}{dx} = y^3e^{-x^2} \quad Ans: \quad -\frac{1}{y^2}e^{x^2} = c - 2x$
4. $\sec^2 y \frac{dy}{dx} + 2x \tan y = x^3 \quad Ans: \quad \tan y\, e^{x^2} = c + \frac{1}{2}e^{x^2}(\tan y - 1) \quad put \tan y = v$
5. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = y^2x \quad Ans: \quad 1 + x^2y + cxy = 0$
6. $\frac{dy}{dx} + y\tan x = y^3 \sec x \quad Ans: \quad \cos^2 x = y^2(2\sin x + c)$
7. $x^3\frac{dy}{dx} + y^4 \cos x = x^2y \quad Ans: \quad x^3 = (c + 3\sin x)y^3$
8. $\frac{dy}{dx} + y\cot x = y^2 \sin^2 x \cos^2 x \quad Ans: \quad \frac{1}{y} = \frac{1}{3}\sin x \cos^3 x + c \sin x$
9. $\frac{dy}{dx} + x\sin 2y = x^3\cos^2 y \quad Ans: \quad tany = \frac{1}{2}(x^2 - 1) + ce^{-x^2}$
10. $\frac{dy}{dx}(x^2y^3 + xy) = 1 \quad Ans: \quad \frac{1}{x} = 2 - y^2 + ce^{-\frac{y^2}{2}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

كاملې تفاضلي معادلې (Exact Differential Equations)

هغه تفاضلي معادلي چې (1) .... $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ شكل ولري ، كاملې تفاضلي معادلې ورته وايي ، كه چيرته دلومړۍ معادلې چپ طرف ديوې تابع لكه $f(x,y)$ كامل ديفرنسيال وی، يعني $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = df$ ، ياپه ساده ډول باندې لومړۍ معادلې ته كامله تفاضلي معادله وايي كه چيرته $u(x,y)$ په لاندې ډول موجود وي

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y) \qquad \text{او} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y)$$

دمثال په ډول $x\,dy + y\,dx = 0$ تفاضلي معادله په نظر كې نيسو، نوموړې معادله كولای شو چې د $d(xy) = 0$ په شكل وليكو، كوم چې مونږ ته $df = 0$ شكل رابښايي ، چې f د x او y تابع ده، دانتيګرال نيوني څخه وروسته $xy = c$ لاسته راځي ، كوم چې دراكړل شوې معادلې عمومي حل دې، داډول معادلوته كاملې تفاضلي معادلې وايي.

قضيه: دلومړۍ معادلې دكامل والي لپاره لازمي اوكافي شرط عبارت له $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ څخه دی.

(i) دلازمي شرط لپاره ثبوت:

فرض كړئ چې لومړۍ معادله كامله ده ، مونږبايد وښايو چې $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ ، څرنګه چې لومړۍ معادله كامله ده ، نو دتعريف په اساس د $f(x,y)$ يوه تابع موجوده ده دكوم لپاره چې مونږ لاندې معادله لرو

$$df = M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy \quad ....(2)$$

دتيرو رياضياتوپه اساس لرو چې

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \quad ....(3)$$

ددوهمې او دريمې معادلو دمقايسې په اساس لرو چې

$$M = \frac{\partial f}{\partial x}\,, \quad N = \frac{\partial f}{\partial y} \quad ....(4) \;\; => \;\; \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,, \;\; \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 y}{\partial y \partial x}$$

څرنګه چې

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 y}{\partial y \partial x} \qquad \therefore \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

كوم چې لازمي شرط رابښايي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(ii) دکافي شرط لپاره ثبوت:

فرض کړئ چې $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ ، مونږ باید د $f(x,y)$ یوه تابع پیداکړو ، دکوم لپاره چې لاندې معادله صدق وکړي

$$\frac{\partial f}{\partial y}=N(x,y) \text{ او } \frac{\partial f}{\partial x}=M(x,y) \text{ یعني } df=M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy$$

مونږ باید د $f(x,y)$ تابع داډول لاسته راوړو ، دکوم لپاره چې څلورمه معادله کې لومړی حالت صدق وکړي، دنوموړی معادلې نظر x ته مشتق اخلو او y ثابت نیسو ، نو مونږ لاندې معادله لاسته راوړو

$$f=\int M(x,y)\ dx+\phi(y)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(5)$$

چې $\phi(y)$ یوه اختیاري تابع د y ده ، اوس $\phi(y)$ داډول انتخابوو چې په څلورمه معادله کې دوهم حالت لپاره هم صدق وکړي ، یعنې $\frac{\partial f}{\partial y}=N(x,y)\ \ldots\ldots\ldots(6)$ ، اوس د $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ په نظر کې نیولو سره $\phi(y)$ هروخت امکان لري.

د (5) څخه لیکلای شو چې

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[\int M(x,y)dx\right]+\phi'(y)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(7)$$

د (6) او (7) دمقایسې په اساس لیکلای شو چې

$$\phi'(y)=N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,u)\ dx\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(8)$$

د (8) چپ طرف د x څخه مستقل دی

راځی چې اوس د (4) حالت لاندې وښایو، x د (8) ښي طرف ته دننه کیدای نه شي ، ددی لپاره مونږ باید وښایو چې د (8) دښي طرف قسمي مشتق صفر دی.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[N-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right]=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial y}\int M\ dx\right]=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial x}\int M\ dx\right]$$

$$\frac{\partial}{dx}\int M\ dx=M(x,y) \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left[N-\frac{\partial}{\partial y}\int M\ dx\right]=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}=0$$

څکه $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ اوس د (8) مشتق نظر y اخلو، نو ترلاسه کوو چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\phi(y) = \int \left[N - \frac{\partial}{\partial y}\int M\,dx\right] dy + c \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

چې c یو اختیاري ثابت عدد دی ، اوس که (9) په (5) کې وضعه کړو ، نو غوښتل شوی تابع لاسته راکوي

$$f(x,y) = \int M\,dx + \int \left[N - \frac{\partial}{\partial y}\int M\,dx\right] dy + c$$

دکومې چې کامل ډیفرنسیال عبارت له $M\,dx + N\,dy$ څخه دی

دکاملوتفاضلي معادلو دحل طریقه:

ددادول معادلو دحل لپاره لومړی باید وښایو چې $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

1. د $M(x,y)$ انتیګرال نظر x ته پیداکوو او y ثابت په نظر کې نیسو، لاسته راغلي انتیګرال په I_1 سره ښایو.
2. په $N(x,y)$ کې هغه حدونه چې x ونلري ، نظر y ته انتیګرال نیسو او دغه انتیګرال په I_2 سره ښایو.
3. $I_1 + I_2 = c$ دراکړل شوې معادلې عمومي حل دی

عملي مثالونه:

لومړی مثال: $(2xy + 3y)\,dx + (x^2 + 3x)\,dy = 0$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل:

$M = 2xy + 3y$　او　$N = x^2 + 3x$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x + 3$　او　$\frac{\partial N}{\partial x} = 2x + 3$

څرنګه چې $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ پس راکړل شوی معادله یوه کامله تفاضلي معاده ، اوس یې عمومي حل په لاندې ډول پیداکو

$$\int (2xy + 3y)dx + \int (0)dy = c$$

$2y\frac{x^2}{2} + 3y\,x = c$　یا　$x^2y + 3xy = c$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پورته معادله کولای شو په لاندی ډول حل کړو، چې لومړی دمعادلې چپ طرف دیو کامل ډیفرنسیال په شکل لیکو

$$(2xy\,dx + x^2\,dy) + 3(x\,dy + y\,dx) = 0 \quad \text{یا} \quad d(x^2y) + 3d(xy) = 0$$

دانتیګرال څخه وروسته دراکړل شوې معادلې عمومي حل په لاس راځي

$$x^2y + xy = c$$

دوهم مثال: لاندې تفاضلي معادله حل کړئ

$$(5x^4 + 3x^2y^2 - 2xy^3)dx + (2x^3y - 3x^2y^2 - 5y^4)dy = 0$$

حل: پوهیږو چې

$$M = 5x^4 + 3x^2y^2 - 2xy^3 \quad \text{او} \quad N = 2x^3y - 3x^2y^2 - 5y$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6x^2y - 6xy^2 \quad \text{او} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 6x^2y - 6xy^2$$

څرنګه چې $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ پس راکړل شوی معادله یوه کامله تفاضلي معاده ، اوس یې عمومي حل په لاندې ډول پیداکو

$$\int (5x^4 + 3x^2y^2 - 2xy^3)dx + \int (-5y^4)dy = c$$

$$x^5 + x^3y^2 - x^2y^3 - y^5 = c$$

دریم مثال: $(e^y + 1)\cos x\;\; dx + e^y \sin x\, dy = 0$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: لیدل کیږي چې

$$M = (e^y + 1)\cos x \quad \text{او} \quad N = e^y \sin x$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = e^y \cos x \quad \text{او} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = e^y \cos x$$

څرنګه چې $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ پس راکړل شوی معادله یوه کامله تفاضلي معاده ، اوس یې عمومي حل په لاندې ډول پیداکو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int (e^y + 1)\cos x \; dx + \int (0)\, dy = c \qquad => \qquad (e^y + 1)\sin x = c$$

څلورم مثال: لاندې تفاضلي معادله حل کړئ

$$\left[y\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \cos y\right] dx + [x + \ln x - x\sin y] dy = 0$$

حل: پوهیږو چې

$$M = y\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \cos y \quad \text{او} \quad N = x + \ln x - x\sin y$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \left(1 + \frac{1}{x}\right) - \sin y \quad \text{او} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \left(1 + \frac{1}{x}\right) - \sin y$$

څرنګه چې $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ پس راکړل شوی معادله یوه کامله تفاضلي معاده ، اوس یې عمومي حل په لاندې ډول پیداکو

$$\int \left[y\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \cos y\right] dx + \int (0)\, dy = c$$

$$yx + y\ln x + x\cos y = c$$

پنځم مثال: لاندې تفاضلي معادله حل کړئ

$$(2x\ln y)\, dx + \left(\frac{x^2}{y} + 3y^2\right) dy = 0$$

حل: لیدل کیږي چې

$$M = 2x\ln y \quad \text{او} \quad N = \frac{x^2}{y} + 3y^2$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x \cdot \frac{1}{y} = \frac{2x}{y} \quad \text{او} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{2x}{y}$$

څرنګه چې $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ پس راکړل شوی معادله یوه کامله تفاضلي معاده ، اوس یې عمومي حل په لاندې ډول پیداکو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int (2x \ln y)\, dx + \int 3y^2 dy = c \qquad => \qquad x^2 \ln y + y^3 = c$$

شپږم مثال: لاندې تفاضلی معادله حل کړئ

$$\left(1 + e^{\frac{x}{y}}\right) dx + e^{\frac{x}{y}} \left(1 - \frac{x}{y}\right) dy = 0$$

حل: لیدل کیږي چې

$$M = \left(1 + e^{\frac{x}{y}}\right) \qquad N = e^{\frac{x}{y}} \left(1 - \frac{x}{y}\right)$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = e^{\frac{x}{y}} \left(-\frac{x}{y^2}\right) \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = e^{\frac{x}{y}} \left(-\frac{1}{y}\right) + \left(1 - \frac{x}{y}\right) e^{\frac{x}{y}} \frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{e^{\frac{x}{y}}}{y} + e^{\frac{x}{y}} \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2} e^{\frac{x}{y}} = \left(-\frac{x}{y^2}\right) e^{\frac{x}{y}}$$

څرنګه چې $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ پس راکړل شوی معادله یوه کامله تفاضلي معاده ، اوس یې عمومي حل په لاندې ډول پیداکو

$$\int \left(1 + e^{\frac{x}{y}}\right) dx + \int (0) dy = c$$

$$x + \frac{e^{\frac{x}{y}}}{\frac{1}{y}} = c \qquad \text{یا} \qquad x + y\, e^{\frac{x}{y}} = c$$

1.16 تمرینونه

لاندې تفاضلي معادلې حل کړئ

1. $3x(xy - 2)dx + (x^2 + 2y)dy = 0$
2. $y \sin 2x \;\, dx - (1 + y^2 + \cos^2 x)dy = 0$
3. $(x^2 - 2xy + 3y^2)dx + (y^2 + 6xy - x^2)dy$
4. $(y^2 - x^2)dx + 2xy\, dy = 0$
5. $\left(1 + 3e^{\frac{x}{y}}\right) dx + 3e^{\frac{x}{y}} \left(1 - \frac{x}{y}\right) dy = 0$
6. $(y \sec^2 x + \sec x \tan x)dx + (\tan x + 2y)dy = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

7. $(e^y + 1)\cos x \; dx + e^y \sin x \; dy = 0$

8. $\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2 y}\right) dx - \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x^2 y}\right) dy = 0$

9. $\left(x + \frac{y^3}{x^2}\right) dx - 3y^2 dy = 0$

10. $(\cos x - 3x^2 \tan y)dx - x^3 \sec^2 y \; dy = 0$

11. $(ax + hy + g)dx + (hx + by + f)dy = 0$

12. $\left[\cos x \; \log_e(2y - 8) + \frac{1}{x}\right] dx + \frac{\sin x}{y - 4} \; dy = 0 \qquad y(1) = \frac{9}{2}$

جوابونه:

1. $x^3 y - 3x^2 + y^2 = c$

2. $3y\cos 2x + 6y + 2y^3 = c$

3. $x^3 - 3x^2 y + 9xy^2 + y^3 = c$

4. $\frac{x^3}{3} - xy^2 = c$

5. $x + 3ye^{\frac{x}{y}} = c$

6. $y\tan x + \sec x + y^2 = c$

7. $(e^y + 1)\sin x = c$

8. $\mathrm{Ln}\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{1}{xy} = c$

9. $x^3 - 2y^3 = cx$

10. $3y\cos 2x + (6y + 2y^3) = c$

11. $ax^2 + 2h\,xy + by^2 + 2gx + 2fy + c$

12. $\mathrm{Sin}\,x \ln(2y - 8) + \ln x = 0$

1.17 هغه تفاضلي معادلې چې په کاملو تفاضلو معادلوباندې بدلیږي

په دې برخه کې ځیني معادلې تربحث لاندې نیسو ، کومې چې $Mdx + Ndy = 0$ شکل ولري خو کاملې نه وي، ولې دیوې مناسبې تابع دضربولو څخه وروسته په کاملوتفاضلي معادلوباندې بدلیږي ، چې دغه مناسبې تابع ته دانتیګرال فکتور یا داتمام عامل وایي ، دانتیګرال فکتور دپیداکولو لپاره لاندې قوانین بغیر دثبوت څخه ترڅیړنې لاندې نیسو.

لومړی قانون: که چیرته راکړل شوی تفاضلي معادله یوه متجانسه تفاضلي معادله وي او همدارنګه $Mx + Ny \neq 0$ ، نو $\frac{1}{Mx+Ny}$ عبارت دانتیګرال فکتور څخه دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: $(x^4+y^4)dx - xy^3dy = 0$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: راکړل شوې معادله یوه متجانسه تفاضلي معادله ده ، نو لومړی یې دانتیګرال فکتور پیداکوو

$$IF = \frac{1}{Mx+Ny} = \frac{1}{(x^4+y^4)x+(-xy^3)y} = \frac{1}{x^5}$$

اوس راکړل شوې معادله په $\frac{1}{x^5}$ کې ضربوو

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{y^4}{x^5}\right)dx - \frac{y^3}{x^4}dy = 0$$

پورته معادله یوه کامله تفاضلي معادله ده او په لاندې ډول یې حل کوو

$$\int\left(\frac{1}{x}+\frac{y^4}{x^5}\right)dx + \int(0)dy = c \qquad => \quad \ln x - \frac{y^4}{4x^4} = c$$

دوهم مثال: $y^2dx+(x^2-xy-y^2)dy = 0$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: راکړل شوې معادله یوه متجانسه تفاضلي معادله ده ، نو دانتیګرال فکتور یې په لاندې ډول پیداکوو

$$IF = \frac{1}{Mx+Ny} = \frac{1}{y^2x+(x^2-xy-y^2)y} = \frac{1}{y(x^2-y^2)}$$

اوس راکړل شوې معادله په لاسته راغلي انتیګرال فکتور کې ضربوو، نو معادله لاندې شکل اختیاروي

$$\frac{y}{x^2-y^2}dx + \left(\frac{1}{y}-\frac{x}{x^2-y^2}\right)dy = 0$$

پورته معادله یوه متجانسه تفاضلي معادله ده ، او په لاندې ډول یې حل کوو

$$\int\frac{y}{x^2-y^2}dx + \int\frac{1}{y}dy = c$$

$$y\cdot\frac{1}{2y}\ln\frac{x-y}{x+y} + \ln y = c \quad \text{یا} \quad \frac{1}{2}\ln\frac{x-y}{x+y} + \ln y = c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دوهم قانون: که چیرته $\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}$ یواځې د x تابع وي ، د f(x) په شکل یې فرض کوو، نو $e^{\int f(x)dx}$ عبارت دانتیګرال فکټور څخه دی.

لومړی مثال: $2y\,dx + (2x\ln x - xy)dy = 0$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل:

$$M = 2y \qquad N = 2x\ln x - xy$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2 \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 2\left(x\cdot\frac{1}{x} + \ln x\right) - y = 2(1+\ln x) - y$$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{2-2-2\ln x + y}{2x\ln x - xy} = \frac{-2\ln x + y}{x(2\ln x - y)} = -\frac{1}{x} = f(x)$$

$$\therefore \quad IF = e^{\int f(x)dx} = e^{-\int\frac{1}{x}dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$$

اوس راکړل شوې معادله په $\frac{1}{x}$ کې ضربوو ، نو ترلاسه کوو

$$\frac{2y}{x}dx + \frac{2x\ln x - xy}{x}dy = 0 \quad \text{یا} \quad \frac{2y}{x}dx + (2\ln x - y)dy = 0$$

پورته معادله یوه کامله تفاضلي معادله ده ، او په لاندې ډول یې حل کوو

$$\int\frac{2y}{x}dx + \int(-y)dy = c \qquad => \qquad 2y\ln x - \frac{y^2}{2} = c$$

دوهم مثال: لاندې تفاضلي معادله حل کړئ

$$(6x^2 + 4y^3 + 12y)\,dx + 3x(1+y^2)\,dy = 0$$

حل:

$$M = 6x^2 + 4y^3 + 12y \qquad N = 3x + 3xy^2$$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{12y^2 + 12 - 3 - 3y^2}{3x(1+y^2)} = \frac{12(y^2+1) - 3(1+y^2)}{3x(1+y^2)} = \frac{3}{x} = f(x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\therefore \quad IF = e^{\int f(x)dx} = e^{\int \frac{3}{x}dx} = e^{3\ln x} = e^{\ln x^3} = x^3$$

راکړل شوې معادله په x^3 کې ضربوو

$$(6x^5 + 4x^3y^3 + 12x^3y)\, dx + 3x^4(1 + y^2)\, dy = 0$$

پورته معادله یوه کامله تفاضلي معادله ده ، نو په لاندې ډول یې حل کوو

$$\int (6x^5 + 4x^3y^3 + 12x^3y)\, dx + \int (0)dy = c$$

$$x^6 + x^4y^3 + 3yx^4 = c$$

دریم قانون: که چېرته $\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}$ د y تابع وي ، او د f(y) په شکل یې وښایو نو $e^{\int (y)dy}$ دانتیګرال فکتور دی.

لومړی مثال: لاندې تفاضلي معادله حل کړئ

$$(y^4 + 2y)dx + (xy^3 + 2y^4 - 4x)dy = 0$$

حل:

$$M = y^4 + 2y \qquad N = xy^3 + 2y^4 - 4x$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 4y^3 + 2 \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = y^3 - 4$$

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = \frac{(y^3 - 4) - (4y^3 + 2)}{(y^4 + 2y)} = \frac{-3(y^3 + 2)}{y(y^3 + 2)} = \frac{-3}{y} = f(y)$$

اوس یې دانتیګرال فکتورپه لاندې ډول پیداکوو

$$IF = e^{\int (y)dy} = e^{-\int \frac{3}{y}} = e^{-3\ln y} = e^{-\ln y^3} = \frac{1}{y^3}$$

اوس راکړل شوې معادله په $\frac{1}{y^3}$ کې ضربوو ، نو ترلاسه کوو

$$\left(y + \frac{2}{y^2}\right) dx + \left(x + 2y - \frac{4x}{y^3}\right) dy = 0$$

پورته معادله یوه متجانسه معادله ده ، نو عمومي حل یې په لاندې ډول دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int \left(y+\frac{2}{y^2}\right)dx+\int 2y\,dy=c$$

$$xy+\frac{2x}{y^2}+y^2=c \quad \text{یا} \quad x\left(y+\frac{2}{y^2}\right)y+y^2=c$$

ځلورم قانون : که چېرته راکړل شوې معادله د $f_1(x,y)y\,dx+f_2(x,y)x\,dy=0$ شکل ولري، چې $M=f_1(x,y)y$ او $N=f_2(x,y)x$ وي او $Mx-Ny\neq 0$ نو په دې صورت کې $\frac{1}{Mx-Ny}$ عبارت دانتیګرال فکټور څخه دی.

مثال: لاندې تفاضلي معادله حل کړئ

$$y(1+2xy)\,dx+x(1-xy)\,dy=0$$

حل:

$$M=yf_1(x,y) \qquad N=xf_2(x,y)$$
$$M=y(1+2xy) \quad N=x(1-xy)$$

$$Mx-Ny=xy(1+2xy)-xy(1-xy)=xy+2x^2y^2-xy+x^2y^2$$

$$Mx-Ny=3x^2y^2\neq 0$$

پس دراکړل شوې معادلې دانتیګرال فکټور عبارت دی له

$$IF=\frac{1}{Mx-Ny}=\frac{1}{3x^2y^2}$$

راکړل شوې معادله په $\frac{1}{3x^2y^2}$ کې ضربوو، نو ترلاسه کوو چې

$$\left(\frac{1}{3x^2y}+\frac{2}{3x}\right)dx+\left(\frac{1}{3xy^2}-\frac{1}{3y}\right)dy=0$$

پورته معادله یوه متجانسه معادله ده او عمومي حل یې په لاندې ډول دی

$$\int \left(\frac{1}{3x^2y}+\frac{2}{3x}\right)dx+\int -\frac{1}{3y}\,dy=c$$

$$-\frac{1}{3xy}+\frac{2}{3}\ln x-\frac{1}{3}\ln y=c \quad \text{یا} \quad -\frac{1}{xy}+2\ln x-\ln y=k \qquad (k=3c)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم قانون : که چېرته معادله د $x^a y^b (my\,dx + nx\,dy) + x^c y^d (py\,dx + qx\,dy) = 0$ چې p, d, c, n, m, b, a او q ثابت عددونه دي شکل ولري، نو دراکړل شوي معادلي دانتيګرال فکټور عبارت د $x^h y^k$ څخه دی ، د k او h دلاسته راوړلو لپاره لومړی راکړل شوې معادله په $x^h y^k$ کې ضربوو ، ترڅو معادله په کامله تفاضلي معادله باندې بدله شي ، بيا يې د کامل والي دشرط څخه په استفادی سره ، دضريبونو دمقايسي څخه د k او h قيمتونه لاسته راوړو، دغه موضوع په لاندې مثال کې واضح کوو

مثال: $(y^2 + 2x^2 y)dx + (2x^3 - xy)\,dy = 0$ معادله حل کړئ

حل: لومړی راکړل شوې معادله په لاندې ډول ليکو

$$y(y\,dx - x\,dy) + x^2(2y\,dx + 2x\,dy) = 0$$

اوس راکړل شوې معادله په $x^h y^k$ کې ضربوو ، نو ترلاسه کوو

$$(x^h y^{k+2} + 2x^{h+2} y^{k+1})dx + (2x^{h+2} y^k - x^{h+1} y^{k+1})dy = 0 \quad \ldots\ldots\ldots..(1)$$

پورته معادله بايد يوه کامله تفاضلي معادله وي

$$M = x^h y^{k+2} + 2x^{h+2} y^{k+1} \quad , \quad N = 2x^{h+2} y^k - x^{h+1} y^{k+1}$$

څرنګه چې لومړی معادله کامله ده ، نو لروچې

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$(k+2)x^h y^{k+1} + 2(k+1)x^{h+2} y^k = 2(h+3)x^{h+2} y^k - (h+1)x^h y^{k+1}$$

دپورته عينيت دضريبونو د مساوات څخه لرو چې

$k + 2 = -(h+1)$ او $2(k+1) = 2(h+3)$

يعنې $h + k = -3$ او $h - k = -2$

دپورته سيستم دحل څخه د h او k قيمتونه عبارت دي له

$$h = -\frac{5}{2} \qquad k = -\frac{1}{2} \qquad \therefore \quad IF = x^{-\frac{5}{2}} y^{-\frac{1}{2}}$$

اوس راکړل شوې معادله په $x^{-\frac{5}{2}} y^{-\frac{1}{2}}$ کې ضربوو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\left(x^{-\frac{5}{2}}y^{\frac{3}{2}} + 2x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}\right)dx + \left(2x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}} + x^{-\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}\right)dy = 0$$

پورته معادله یوه متجانسه معادله ده ، او عمومي حل يې په لاندې ډول دی

$$y^{\frac{3}{2}}\left(-\frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}}\right) + 2y^{\frac{1}{2}}\left(2x^{\frac{1}{2}}\right) = c \quad \text{یا} \quad 6x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}} = c$$

1.18

لاندې تفاضلي معادلې حل کړئ

1. $(x^2 - 3xy + 2y^2)\,dx + x(3x - 2y)\,dy = 0$
2. $(x^2y - 2xy^2)\ dx + 2y\,dy = 0$
3. $(xy - y^2)\,dx - x^2dy = 0$
4. $(x^2 + y^2 + 2x)\,dx + 2y\,dy = 0$
5. $(3xy - 2ay^2)\,dx + (x^2 - 2ayx)\,dy = 0$
6. $(x^3 - 2y^2)\,dx + 2y\,dy = 0$
7. $(xy^2 - x^2)\,dx + (3x^2y^2 + x^2y - 2x^3 + y^2)\,dy = 0$
8. $(y^4 + 2y)\,dx + (xy^3 + 2y^4 - 4x)\,dy = 0$
9. $(xy^2 + y)\,dx + 2(x^2y^2 + x + y^4)\,dy = 0$
10. $(xy\sin xy + \cos xy)y\,dx + (xy\sin xy - \cos xy)x\,dy = 0$
11. $(x^2y^2 + xy + 1)\,y\,dx + (x^2y^2 - xy + 1)x\,dy = 0$
12. $(2y\,dx + 3x\,dy) + 2xy(3ydx + 4xdy) = 0$

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library