# شمیر پوهنه

## (ریاضي)

## ستر کتاب

Ketabton.com

لومړی برخه

دویم غځېدلی چاپ

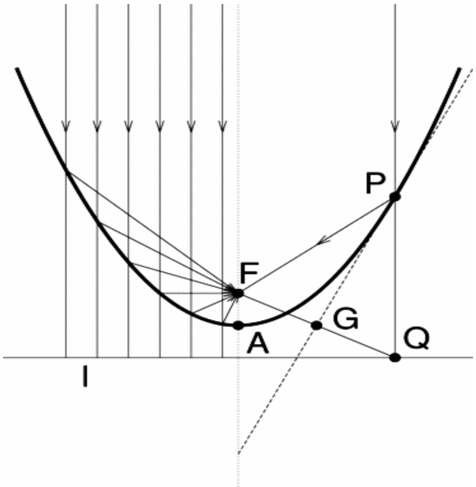
لیکونکی: ډاکتر ماخان (میرې) شینواري

(c) ketabton.com: The Digital Library

# شمیرپوهنه

(رياضي)

## سترکتاب




دويم غزېدلی چاپ

ليکونکی: ډاکتر ماخان ميړي شينواري

(c) ketabton.com: The Digital Library

## دلوي ښځوي ښتن په نامه

په دې هيله، چې په دې ليکنو او ژباړو به مې  زموږ د بې وزلي او له پوهې پاتې ملت - په ما د پوهنې لپاره د لګښت - لپاره د پوهنې په لور داسې لږ ونده اخستې وي.

## كتاب پيژندنه


د كتاب نوم: د شميرپوهنه ستر كتاب( لومړی برخ)

ليكونكی: ډاكتر ماخان،، ميرى،، شينوارى



makhanshinwari@gmail.com



د خپريدو لړی

خپرندوی: د افغانستان كلتوري ودې ټولته

جرمني

چاپ كال ۲۰۱۲

## چاپ چارې

دانش خپرندويې ټولنې تخنيكي څانګه

WWW.danishpress.com



د چاپ حقوق خپرندوي ټولنې ليكونكي يا ژباړي سره خوندي دي.


پښتو مو ژبه او شميرپوهنه پرې ساده ده

(c) ketabton.com: The Digital Library

# د خپرندوی ټولنې یادښت

له هغې مودې را په دې خوا، چې د افغانستان د کلتوري ودې ټولنې د علمي، ساینسي او طبي اثرو د خپرولو لړۍ پیل کړې، تراوسه یې په دې لړ کې مهم اثار خپلو هیواولو ته وړاندې کړې دي.

موږ باور لرو، چې پښتو ژبه هغه وخت په یوه مهمه غني ژبه بدلیدلای شي، چې د پوهې په ګانه سمبال شي او په علمي او اکاډمیکو اثارو غني شي.

اوس چې زموږ ملي سراسري ژبه د بیلابیلوګواښونو او چلنجونو سره مخامخ ده، پر موږ ټولو ده، چې د دغه ګواښونو په وړاندې به په نره ودریږو او د علم او قلم په ژبه به ځواب ورته ووایو.

د اتحادیي له حوا د ډاکتر ماخان شینواري تراوسه زیاتو چاپ شویو اثارو په څنګ کې، د ده د پنځه وپښت شمیر پوهنې نویو ژباړو او لیکنو او دوه ټولنیزو لیکنو تر منځ، دغه اثر په همدې لړ کې ځکه د ارزښت وړ دی، چې د علمي، ساینسي اثارو د خپراوي په لړ کې د یوه مهم ګام په توګه ګڼل کیدای شي او هیله ده، چې د دې برخې مینه وال لوستوال، زده کوونکي او د پوهنتو زده کړې کتّه ترې واخستلی شي.

په درناوي

د افغانستان کلتوري ودې ټولنه

۲۰۰۱۲ ز ک

(c) ketabton.com: The Digital Library

# د ليکونکي مننه

د هر څه له مخه د هغو ليکونکو پروفيسرانو څخه زياته مننه، چې د ليکنو څخه يې زما د ژباړې لپاره تفاهم لري. ماته د دوي د ليکنو د ژباړې په هيڅ ډول مادي ګټه نه شته او دا کار مې يوازې په يوه د پوهنې توانمندې ، مګر وروسته پاتې ژبې ويونکي ولس ته وړاندې دی، دا دې د دې پروفيسرانو له خوا په پوهنيزه اړخ کې زمونږ په دې اړخ کې هم مرستې ته اړ ولس سره مرسته وي.

همدا ډول زمونږ،، د افغانسان کلتورې ودې ټولنه،، جرمنې، د غړو، مرستندويانو او په تيره بيا د مشر تابه څخه زياته مننه کوم، چې پرته له خپرندوې ټولنې په توګه يې د دې ليکنو زياته اقتصادي ونډه هم په غاړه اخستې.

دې لاندې زما کليوالو ملګرو او ملګرو د دې کتابونو په چاپ کې د توان سره سمه اقتصادي ونډه اخستې، چې زه ترې زياته مننه کوم:

د ښاغلي ډپلوم انجنير ريحان الدين حساس، ښاغلي ډپلوم انجنير محمد اکبر نور، ښاغلی ډاکتر سردار ګانه وال، ښاغلی ډاکترماڼوګل ګانه وال، ښاغلي ټولنپوه محمدعارف بيان، ښاغلي ډپلوم انجنيرمحمد ايوب بيان، همداسې زما د ملګري اروابناد ډاکتر حاجي محمد سلطانزي د ځوي ښاغلي ډاکتر صالح محمد سلطانزي ، ډپلوم انجنير او ډپلوم اقتصاد پوه رحمت الله فتحي او نه اخر زما د لور ډاکتر څانګې شينواري او زما د ځوي اقتصاد پوه او ټولنساپوه اباسين شينواري.

نه د ټولو په اخر کې زما له ميرمن ښاپرۍ څخه ډېره زياته مننه، چې زما د ليکنو- نه دا چې مخه يې نه ده نيولې- پوره ملاتړ کړي.

بيا هم له دوي څخه د زړه له کومې مننه کوم او لوي ښتن دې ورته اجرونه ورکړي، چې داسې مرستو ته دوام ورکړي.

په مننه : ستاسو ماخان شينواری

جرمني د بن ښار

۲۰۱۲ ز ک

(c) ketabton.com: The Digital Library

نیولیک

نوې سریزه

سریزه

افغاني، یوناني ، لاتین الف ب

شمیرپوهنیزې نخښې

| | | |
|---|---|---|
| ٠ ١ | د شمیرپوهنې سم اند یا منطق | ١ |
| ١ ٠ ١ | پوهنیزه ژبه او پیدایښت یا طبیعي ژبه | ١ |
| ٢ ٠ ١ | د شمیرپوهنې سم اند بنستیزه کلیمې | ٣ |
| ١ ٠ ٣ ٠ ١ | ثابتې ، اووښتونې یا واریابلې ، ترمونه | ٣ |
| ٢ ٠ ٢ ٠ ١ | وینا | ٥ |
| ٣ ٠ ٢ ٠ ١ | د دوه ارزښتوالي اصول یا پرینځیپ | ٧ |
| ٤ ٠ ١ | وینا فورم یا ٠بڼه او کوانتورونه | ١٣ |
| ٥ ٠ ١ | اړیین او پوره کیدونکي شرطونه | ٢٨ |
| ٦ ٠ ١ | د شمیرکلیمه یا د لغاتو ............. | ٣١ |
| ٧ ٠ ١ | برابرون او نابرابرون | ٣٣ |
| ٨ . ١ | تمرینونه | ٣٨ |
| ٢ ٠ | ډیر ۍ پوهنه | ٣٩ |
| ١ ٠ ٢ | د ډیرۍ پوهنې کلیمه | ٤٠ |
| ٢ . ٢ | د ډېریو ترمنځ اړیکې | ٤٥ |

(c) ketabton.com: The Digital Library


| | | |
|---|---|---|
| | برخېدېرې | ۴۶ |
| | د يوې ډېرې توان يا تواندېرې (توانسټ) | ۴۸ |
| ۲ ۰ ۳ | په ډېرې کې کارونې يا عمليې(۱) | ۵۰ |
| | غوڅېدېرې يا متقاطعډېرې | ۵۲ |
| | د يوې ډېرې يا سټ کمپليمنت | ۵۷ |
| ۲ ۰ ٤ | څېرونه | ۵۸ |
| | تمرينونه | ۶۷ |
| ۳ ۰ | د رييل ګڼونو سره د شميرلو بنسټيزې... | ۷۰ |
| ۳ ۰ ۱ | د ګڼونو- يا اعدادو سيستم جوړښت | ۷۰ |
| ۳ ۰ ۱ ۰ ۱ | پيدايښتي يا طبيعي ګڼونه | ۷۰ |
| ۳ ۰ ۱ ۰ الف | د پيدايښت يا طبيعي ګڼونو جوړښت | ۷۱ |
| ۳ ۰ ۱ ۰ ب | د پيدايښت ګڼونو انځورونه او شميرنه | ۷۲ |
| ۳ ۰ ۱ ۰ پ | د شميرنې بنسټيز قوان ين | ۷۸ |
| ۳ ۰ ۱ ۰ ۲ | ټولګڼونه | ۸۴ |
| ۳ ۰ ۱ ۰ ۲ | الف د ويش تيوري | ۸۶ |
| ۳ ۰ ۱ ۰ ۲ ب | غټ ګډ پرويشونې(بزګترين مقسوم عليه ...) | ۸۸ |
| ۳ ۰ ۱ ۰ ۳ | راشنلګڼونه | ۱۰۶ |
| ۳ ۰ ۱ ۰ ٤ | رييلګڼونه | ۱۰۸ |
| ۳ ۰ ۲ ۰ ۱ | ماتشميرنه | ۱۱۹ |

(c) ketabton.com: The Digital Library


| | | |
|---|---|---|
| ۳ . ۳ | تمرینونه | ۱۳۰ |
| ٤ ۰ | پوتنځ یا توان ، ریښه یا جذر | ۱۴۱ |
| ٤ ۰ ۱ | توان د ټولګنیز په جګ یا اکسپوننت | ۱۴۱ |
| ٤ ۰ ۲ | ریښه او توان د راشنل اکسپوننت یا جګګن سره | ۱۴۴ |
| ٤ ۰ ۳ | توان د ریيلګڼ اکسپوننت یا جګګڼ سره | ۱۵۱ |
| ٤ ۰ ٤ | ټولګه | ۱۵۲ |
| ۵ ۰ | لوګاریتم | ۱۵۸ |
| ۵ ۰ ۱ | د لوګاریتم کلیمه | ۱۵۸ |
| ۵ ۰ ۳ | ټولګه | ۱۶۶ |
| ٦ ۰ | ګونومتري | ۱۶۹ |
| ٦ ۰ ۱ | بنسټیزه څمککچپوهنه یا هندسه | ۱۶۹ |
| ٦ ۰ ۱ ۰ ۱ | ټکی او کرښه | ۱۶۹ |
| ٦ ۰ ۱ ۰ ۲ | کونج | ۱۷۱ |
| ٦ ۰ ۱ ۰ ۳ | درېګوډئ | ۱۷۴ |
| ٤ ۰ ۱ ۰ ٤ | کونکروانیخ او ورته والی | ۱۷۸ |
| ٦۰ ۱ ۰ ۵ | ولاړکونجيز دریګوډئ | ۱۸۴ |
| ٦ ۰ ۲ | په ولاړکونجيز دریګوډئ کې د ... | ۱۸۸ |
| ٦ ۰ ۳ | په یوونګردئ کې د کونج بلواک .. | ۱۹۰ |
| ٦ ۰ ٤ | د ساین او کوساین جملې | ۱۹۵ |

(c) ketabton.com: The Digital Library

| | | |
|---|---|---|
| ٦ ٠ ٥ | تریګنومتریکي کتمتوالی | ۲۰۵ |
| ۶ . ۵ | تریګنومتریکي یا کونجکچیز فرمولونه | ۲۱۵ |
| ۷ ٠ | کمپلکس ګنونه | ۲۲۲ |
| ۸ ٠ | د ښوونې یا ثبوت متودونه | ۲۳۵ |
| ۸ ٠ ۱ | سیده ښوونه | ۲۳۵ |
| ۸ . ۲ | ناسیده ښوونه | ۲۳۷ |
| ۸ ٠ ۳ | د پوره ایندکشن له لارې ښوونه | ۲۳۹ |
| ۹ | لاینیز برابرون له یوې اوړیدونې یا ... | ۲۴۳ |
| ۹ ٠ ۱ | لاینیز برابرون | ۲۴۴ |
| ۱۰ | کومبیناترویک، د بینوم جمله | ۲۶۶ |
| ۱۰ ٠ ۱ | فاکولتیت یا فاکتوریل | ۲۶۶ |
| ۱۰ ٠ ۲ | د بینوم ځله ونه | ۲۶۷ |
| ۱۰ ٠ ۳ | د بینوم جمله | ۲۷۰ |
| ۱۰ ٠ ٤ | کومبیناتوریک | ۲۷۴ |
| ۱۰ ٠ ٤ ٠ ۱ | پرموتیشن | ۲۷۵ |
| ۱۰ ٠ ٤ ٠ ۲ | واریېشن | ۲۸۰ |
| ۱۰ ٠ ٤ ٠ ۳ | کمبینیشن | ۲۸۶ |
| ۱۰ ٠ ٤ ٠ ٤ | د پرموتیشن، واریېشن او .... | ۲۹۱ |
| ۱۱ ٠ | لانیز الجبري برابرونونه | ۲۹۵ |

(c) ketabton.com: The Digital Library


| | | |
|---|---|---|
| ۱۱ ۰ ۱ | لانيز برابرون له دوه اوړيدونو يا ... | ۲۹۶ |
| ۱۱ ۰ ۱ ۰ ۳ | دويمه درجه ديترمينانت او د كرامر... | ۳۰۷ |
| ۱۱ ۰ ۱ ۰ ٤ | د ګاوس الګوريتم | ۳۱۲ |
| ۱۱ ۰ ۱ ۰ ٥ | له دوه وو زيات برابرونونه له دوه ... | ۳۱۶ |
| ۱۱ ۰ ۲ | لاينيز برابرونونه له درې .... | ۳۱۷ |
| ۱۱ ۰ ۲ ۰ ۱ | يو برابرون له درې ناپيژندونو سره | ۳۱۷ |
| ۱۱ ۰ ۲ ۰ ۲ | دوه برابرونونه له درې ... | ۳۱۸ |
| ۱۱ ۰ ۲ ۰ ۳ | دريمه درجه ديترمينانت او د ... | ۳۱۹ |
| ۱۱ . ۲. ۴ | د ګاوس لګوريتم | ۳۲۲ |
| ۱۱ ۰ ۳ | په خوښه ډېر مساوات د په خوښه ... | ۳۲۵ |
| ۱۱ ۰ ۳ ۰ ۱ | د n -م درجې ديترمينانت او د ... | ۳۲۶ |
| ۱۱ ۰ ۳ ۰ ۲ | د ګاوس الګوريتم | ۳۲۸ |
| | تمرنونه | ۳۳۳ |
| ۱۲ | الجبري برابرونونه | ۳۴۰ |
| ۱۲ ۰ ۱ | نالاينيز برابرونونه | ۳۴۰ |
| ۱۲ ۰ ۲ | څلورئ ئيز يا مربع برابرونونه | ۳۴۳ |
| ۱۲ ۰۲ . ۱ | د دوه په جګ برابرونونه ، د وييتا جمله | |
| ۱۲ ۰ ۲ ۰ ۲ | څلورئ برابرونونه ، چې په نورمال | ۳۵۰ |
| ۱۲ ۰ ۲ ۰ ۳ | د n -م درجې ځانګړي برابرو... | ۳۵۱ |

(c) ketabton.com: The Digital Library

| | | |
|---|---|---|
| ۱۲ ۰ ۳ | دریمه درجه برابرونونه | ۳۵۷ |
| ۱۲ ۰ ٤ | د ریښي برابرونونه | |
| ۱۳ | ترانسڅیندنت برابرونونه | ۳۷۵ |
| ۱۳ ۰ ۱ | لوګاریتم برابرونونه | ۳۷۵ |
| ۱۳ ۰ ۲ | اکسپوننشل- یا په جګګڼ برابرونونه | ۳۸۰ |
| ۱۳ ۰ ۳ | ګونومتریکي یا کنجکچیز برابرونونه | ۳۸۵ |
| ١٤ | له نابرابرونونو او مطلقه ارزښت .. | ۳۹۶ |
| ١٤ ۰ ۱ | نابرابرونونه | ۳۹۶ |
| ١٤ ۰ ۱ ۰ ۱ | بنسټیزې کلیمې او شمیر قوانین | |
| ١٤ ۰ ۱ الف | اینتروال | ۳۹۷ |
| ١٤ ۰ ۱ ۰ ۲ | نابرابرونونه له یوې ناپیژندونکی... | ۴۰۰ |
| ١٤ ۰ ۱ ۰ ۳ | د نابرابرونونو سیستم ... | ۴۰۹ |
| ١٤ ۰ ۱ ۰ ٤ | نابرابرونونه له دوه ناپیژندونکو سره | ۴۱۱ |
| ١٤ ۰ ۲ | برابرونونه او نابرابرونونه .... | ۴۱۴ |
| ١٤ ۰ ۲ ۰ ۱ | له مطلقه ارزښت سره شمیرنه | ۴۱۴ |
| ١٤ ۰ ۲ ۰ ۲ | برابرونونه له مطلقه ارزښت سره | ۴۱۵ |
| ١٤ ۰ ۲ ۰ ۳ | نابرابرونونه له مطلقه ارزښت سره | ۴۲۰ |
| ۱۵ | بلواک یا فنکشنونه یا طابع | ۴۳۰ |
| ۱۵ ۰ ۱ | د بلواک کلیمه او د بلواک انځورونه | ۴۳۰ |

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ ۰ ۱۵ د بلواک خویونه ۴۳۳

## د ستر کتاب دویمه برخه

۱٦ د هوارې یا سطحې شننیزه هندسه ... ۴۶۶

۱ ۰ ۱٦ کرښه ۴۶۶

۲ ۰ ۱٦ ګردۍ ۴۷۵

۳ ۰ ۱٦ ایلیپسې ۴۸۲

٤ ۰ ۱٦ هیوپربول ۴۸۷

۵ ۰ ۱٦ پارابول ۴۹۲

٦ ۰ ۱٦ ټولګه ۴۹۴

۱۷ وکتور شمیرنه ۵۰۲

۱ ۰ ۱۷ د وکتور پیژند یا تعریف، ۵۰۲

په کارتیزي کواوردینات سیستم کې د وکتور انځورونه ۵۰۲

۲ ۰ ۱۷ د دوه وکتورونو سکالار ځل ۵۰۹

۳ ۰ ۱۷ د دوه وکتورونو وکتوري ځل ۵۱۲

٤ ۰ ۱۷ غبرګهواریز یا موازي الاضلاع ضرب ۵۱۷

۵ ۰ ۱۷ په شننیزه ځمککچ کې د وکتورونو ....

۱ ۰ ۵ ۰ ۱۷ د یوې کرښې وکتوري انځورونه ۵۲۱

۲ ۰ ۵ ۰ ۱۷ د هوارې یا سطحې وکتوري انځورونه ۵۲۴

۵ ۰ ۱۷ د هواربرابرونونو سکالارفورم یا ۰بڼه ۵۲۵

(c) ketabton.com: The Digital Library


۱۸ پرلپسې او پرلپسې لړۍ ۵۳۳

۱۸ ۰ ۱ پیل ۵۳۳

۱۸ ۰ ۲ د ګنون - عددونوپرلپسې کلیمه ۵۳۴

۱۸ ۰ ۲ ۰ ۱ مونوتوني پرلپسې ۵۴۲

۱۸ ۰ ۲ ۰ ۲ اریتمیتیکي پرلپسې ۵۴۵

۱۸ ۰ ۲ ۰ ۳ هندسي پرلپسې ۵۴۷

۱۸ ۰ ۲الف لړۍ ۵۵۰

۱۸ ۰ ۲ الف ۰ ۱ هندسي لړۍ ۵۵۵

۱۸ ۰ ۲ الف ۲ اریتمیتیکي لړۍ ۵۵۷

۱۸ ۰ ٤ د پرلپسې او لړیو د پولې ... ۵۵۸

۱۹ د فنکشنونو پولې او ناپریکیدنه ۵۷۸

۱۹ ۰ ۱ بنسټیزې کلیمې

د پولو یا حدونو خویونه ۵۸۶

د راشنل، کسري یا نسبتي ۵۹۲

د مثلثاتي یا درېکوڼي کچ توابعو پولې ۵۹۶

ناپرېکیدنې ۶۰۴

۱۹ ۰ ۲ په پوله ارزښت او ناپریکیدنې څو جملې

۱۹ ۰ ۳ د ناپریکیدونکو فنکشنونو خویونه ۶۱۰

۱۹ ۰ ٤ د بنسټیزو فنکشنونو ناپریکیدنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ځپرکي ټولګه ۶۱۶

۲۰ دفرنځیالشمیرنه ۶۲۶

د تابع تغیرمنځ ارزښت(منځنی قیمت) ۶۲۶

په یوه ټکي کې د تابع ګراف ... ۶۲۸

د لحضوی(سترګورپ) تغیر... ۶۳۰

کمښتوپش ( تقسیم تفاضل؟) ۶۳۱

دفرنشلوپش یا رابیلیدنه یا مشتق ۶۳۳

کمښتوپش او مشتق یا رابیلیدنه ۶۳۶

د $x_o$ په ځای کې د فنکشن مشتق ۶۴۳

د تانجنت پیژند او خویونه ۶۴۷

د تانجنت او عمود یا ولاړ تولیز مساوات ۶۵۰

په بیدیا کې جګوالی ۶۵۲

۲۰. ۱ ۰ ۱ الف : د تانجنت یا جګیدنې غوره والی

۲ ۰ ۲۰ د فرنځیال یا رابیلیدنې یا مشتق قاعدې ۶۵۶

د درېګوډیزو یا مثلثاتي ..... ۶۶۲

د اکسپوننشل یا په جګ توابعو.... ۶۷۰

د مشتق استعمال په طبیعي پوهن کې ۶۷۶

د ایمپلیځیت توابعو مشتف ۶۸۳

د بنستیزو رابیلیدنو(مشتقونو) جدول ۶۸۶

(c) ketabton.com: The Digital Library

| | | |
|---|---|---|
| | ټولګه | ۶۸۸ |
| | د يوې تابع د مشتق قابليت | ۶۹۱ |
| | د معکوس- - يا په ځټ توابعو مشتق | ۶۹۸ |
| ۲۰ ۳. | د بنسټيزو بلواکو رابيليدنه | ۷۰۱ |
| | د رول قضيه | ۷۱۰ |
| | د وايرشتراس قضيه | ۷۱۱ |
| ۲۰.٤۰ | افراطي ارزښتونه او اوړونټکی | |
| | د دفرنشل منځ ارزښت قضيه | ۷۱۲ |
| | يوعږيزې توابع | ۷۱۵ |
| | ځای اړوند افراطي ټکي | ۷۲۰ |
| | د انعطاف – يا اوړونټکی | ۷۲۴ |
| | د کوږ يا منحني بحث يا خبرې | ۷۳۳ |
| | ناټاکلي حدونه يا پولې | ۷۴۶ |
| | د برنولي او د لو پيتال .... | ۷۵۰ |
| ۲۰ ۰ ۵ | د غټو ګټو پرابلم | ۷۵۷ |
| | تمرينونه | ۷۶۷ |
| | په ټوټه کسرونو ټوټه کونه | ۷۷۸ |
| ۲۱ | انتيګرالشميرنه | ۷۸۷ |
| | پيلراوړنه | ۷۸۷ |

(c) ketabton.com: The Digital Library


| | | |
|---|---|---|
| ۲۱ | انتیګرالشمیرنه | ۷۸۹ |
| | د ریمن(ناټاکلی) انتیګرال | ۷۹۰ |
| | بنسټیزه یا لومړنی تابع | ۷۹۴ |
| | سطحه او لومړنی تابع | ۷۹۶ |
| | ناټاکلی انتیګرال | ۷۹۹ |
| | د ټاکلي انتیګرال شمیرنه | ۸۱۲ |
| | تکمیلیدونکي بنسټونه | ۸۱۴ |
| | د ټاکلي انتیګرال ځخه و ټاکلي ... | ۸۱۵ |
| | د انتیګرالوني قاعدې | ۸۱۷ |
| | د اکسپوننشل توابعو انتیګرال | ۸۱۹ |
| | د لوګاریتمي توابعو انتیګرال | ۸۱۹ |
| | بدلون قانون | ۸۲۱ |
| | توابع، چې بې د بدلون له لارې... | ۸۲۷ |
| | ټوټه انتیګرالونه | ۸۳۲ |
| | د ټوټه انتیګرالوني لار | ۸۳۴ |
| | د ټوټه راشنل کسرونو انتیګرال | ۸۳۸ |
| | ناپای(مبهم) انتیګرال | ۸۴۱ |
| | د ټاکلو انتیګرالونو حل د بدلون له لارې | ۸۵۲ |
| | د انتیګرالشمیرنې استعمال | ۸۶۲ |

(c) ketabton.com: The Digital Library



د ډاکټر ماخان شینواري چاپ شوې لیکنې او ژباړې

د ډاکټر ماخان شینواري چاپ ته چمتو لیکنې او ژباړې

د ژباړي یا لیکونکي ژوند ته لنډه کتنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

# د مهربان او بخښونکی خدای(ج) په نامه

## سریزه

ګرانو هیوادوالو !
یو څه چي پیل لري نو پاي هم باید ولري، د داسی یوه کار پیل او پای ته ځما هم لوړه او تنده دومره زیاته ده، چی مېرښت یی زما لپاره هم ناشونی دی.

د هیواد په هراړخیزه بدبختیو یو سړی هلته نور هم پوره پوهیدلی شي، چی په یوه کار پیل وکړي، څکه چی سملاسی ورته څرګندیږي، چی په هیڅ شي کی څموږ په هیواد کی لاتراوسه څه نه دي شوي په جوړښتیزه لور، په ورانی کی مو د نړی سرکښي ځانته ګټلی.
موږ ګورو چی په مسلکي چارو کی له پیل دا ستونځي موجود دي، چی تراوسه حتی هغه بنسټیز مسلکي نومونه مو له خپلی ژبی نه دي را اخستلي، چی مسلك ته اسانتیاوې پیښوي. له کومه ځاي چی ماته روښانه ده، تر نن ورځی په دې هکله چا په شمیرپوهنه د ستونځوبیو لپاره کومی هڅي هم نه دي کړي او ستتونځي یي نه دي ګاللي، چی دلته طبعآ افراد ملامت نه دې، بلکه څموږ دهیواد دتاریخ په اوږدو کی دولتني جوړښت، دپوهنی او همدا ډول د کلتور او ژبي د ودې دنده د حکومتونو ده، چی څموږ په هیواد کی څموږ حکومتونو خپل ځانونه د دې کار جوګه نه دې ګڼلي، کیدی شي چی ووایو چي په ریښتیني یي ددې کار مخه هم نیولی ده، چی په افغاني ژزبه دې څه کار وشي.
ګرانو لوستونکو !
داکار څکه په افغانی او په ولسی افغاني لیکل شوی، چی زه په مسلکي اړخ کی یواځي، په علمي توګه په الماني ژبه پوهیږم، د انګلیسی سره هم بلد یم، نو دا

(c) ketabton.com: The Digital Library



نومونه چی له دې دباندنیو ژبو را اړووم ، داچي په ښوونځي کي څما لیك لوست په افغاني ژبه وو، په افغاني ژبه په ولسي پوهنیزه توګه اړولی شم. ماته دا کلیمي په مروجه افغاني ژبه نه دي معلومی او یا کومي چي ماته معلومی دي او زه ورسره بلد یم هغه همغه وخت ماته د پوهیدلو له امله د ستونځو ډکی ښکاریدلی .

شمیر پوهنه هم، د نورو پوهنو په څیر، یوه پراخه پوهنه ده او زیاتی څانګکی لري. دا چی څما په فکر دا متآسفانه نه یواځي زما لمړی کار دی، بلکه دا د افغاني ژبی په دې توګه یو لمړی علمي اثر دی، چی په دې بنستیزه توګه په درسي او تمرینی ډول سرته رسیږي.

نن نړی او د انسانانو فکر دومره پر مختګ کړی او دا نور هم په خورا چټکتیاوده کوي، چي پخپله انسان ورته د تعجب په سترګه ګوري، مګر موږ لا تراوسه په هغه بنستیزو ستوځوبیو ( د ستونځو حل باندې ) پیل نه دی کړی ، که دا په هره څانګه کی هم وي. څموږ پرابلمونه هراړخیز دي او هراخیزو هڅو ته مو ضرورت شته.

## شمیرپوهنه څه شی دی ؟

شمیرپوهنه یو مرستندویه پوهنه ده، چی په ټولو پوهنو کی نغښتي یا په بل عبارت : په ټولو پوهنو کی د پوهیدلو بنستیزه ریښه جوړه وي، که دا پوهنی اجتماعي وي او که طبعی ( پیدایښتی ) یعنی که ساپوهنه وي که اقتصاد او که کیمیا وي یا فزیك. بیله شمیر پوهني یی وده او په پوهیدنه ناشونی ده. شمیرپوهنه له بلی خوا یواځني خپلواکه پوهنه هم ده. شمیر پوهنه بل څه ته اړ نه ده.

ددې کتاب لیکلو زما زیات وخت په بر کی ونیوه او لیکل یی د پوره ستونځو سره

(c) ketabton.com: The Digital Library



ټول کار زما په غاړه وو او بل چا را سره متآسفانه چی مرسته هم نه شوه کولی.

د داسی یوه کتاب لیکنی مسئولیت باید د دولت په غاړه وي او مسلکي باید د داسی لیکنی څخه خپل ژوند تآمین کړای شي. د همدې هدف لپاره د مسلك زدکړه کیږي. ما په دې کرښه غوښتل، چی څمونږ د هیواد ستنځي نورې هم ګوته لك کړم.

زه غواړم چی خپلی د سر خبرې په لاندې توګه رالنډې کړم
– د لیکونکی راهڅونی دلیلونه یا د شوق رابیدارول
– دداسی کتاب لیکنه په هغه وخت کی شوني کیږي، چی د لیکونکي اقتصادي ژوند تآمین وي، زه د ټولنیزو مرستو پیسو څخه ژوند کوم، یعنی د نورو خلکو د مالیا پیسو باندې. کار نه پیداکیږي او اجازه یي هم نه لرم چي پیسی وګټم.

– وخت باید پوره موجود وي او داهم ما پوره لروده، چی له دې د مخه می په سیاسی هلو ځلو دا وخت تیر کړی او دا اوس می خپل مسلك ته رامخه شوه.

– ددې کتاب لیکلو لپاره باید یو لیکونکی د خپلی ټولنی او د خپلی ټولنی د خلکو سره مینه ولری او په همدې ډول، د خپلی ټولنی او د ټولنی د خلکو او د ټولو څخه د مخه د خپل ځان لپاره هم خوبونه ولري، خیالونه ولري، چی یواځی د خوبونو ریښتیا کولو لپاره په داسی کار بریالی کیدی شي. ما ددې کار ستونځی په پوره مینه په غاړ واخستلی او دا کار می په پوره مینه سر ته ورساوه.
– په دې برسیره لیکونکی دې وظیفی ته هم باید شعوري وي، چی دی ددې کار لپاره د ملت په پیسو تربیه شوی او د ملت پور هم باید ادا شي، د داسی لږ پور اداکولو هم ما ته پوره خوښي راو بخښله.

(c) ketabton.com: The Digital Library



په کور کی هم باید تر یوې ممکنه اندازې پورې یو تفاهم موجود وي یعنی یو غبروالی باید په کورنی کی وي، که داسی هم نه وي ، خو د داسی کار مخه باید ونه نیول شي ، د نورو ستونځوبیو ( ستونځو حل ) په خاطر، چی موږ افغانان یی په ځانګړې توګه اقتصادی اړخ کی پوره لرو، چی نه یواځې د ځان لپاره بلکه د خپلوانو لپاره هم باید پام وي، مګر ما دا توان په خپل ځان کی ددې امله نه کوته چی امکانات یې ځما لپاره نه وو.

## دوم : د کتاب د لیکنو ستونځې:

د داسی کتاب لیکنه د پوره ستونځو سره مل ده، چی زه دې ستونځو ته په لاندې توګه ګوته نیسم.

۱ – دا کتاب په داسی ژبه لیکل کیږي چی له مری ځخه نیول شوې، زیندی شوې، خپه شوي، خو د مرګ ځخه بچ ده، له ښارونو شړل شوې، او یواځی په غرو او رغو کی ژوندی پاتی شوې.

دې ته باید ګوته ونیسم، چی دا کرښی دا مطلب نه لري، چی ګوندې زه به، خدای (ج) دې ونه کړي، د بلی ژبی په خلاف یم. دا زما کار نه دی او نه دا حق ځان ته ورکوم، خو دا حق لرم چی خپلی ژبی، د خپل ولس ژبی ته ، چی کړیدلی او وروسته پاتی ساتل شوې، ګوته ونیسم. موږ افغانانود افرادو په توګه هم افغاني ژبه پرینښوولی چی ولس یعنی د یوه هیواد د ژبی دپرینښوولو حق ځوك نه لري، نه دولت او نه افراد. دا کار متاسفانه د افغاني ژبی په ضد او بیا د ټولو په سر کی پخپله د افغانانو ځخه شوی دی، د بل ځا ځخه ځوك باید ګیله من نه وي.

افغاني ژبه، که ځه هم پوهانو او د لیك لوست خاوندانو په زیات شمیر، نه ټولو، د لاسه ورکړې، خو بیا هم دا ژبه دا استعداد، د نورو ژبو په ځیر لري، چی یوه پوهنیزه لیکنه ورباندې وشی یا بهتره پوهنیزه شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



ژبه یواځې د پوهولو او پوهیدلو اله نه ده، بلکه د ولس پوهنیزه وده کې پوره غوره رول لري او د کلتوري ودې لارښودې او بنسټ دی، په دې برسیره د پوهې د اسانوولو خورا غوره اله ده. د یوه ولس د پرمختګ او د ژبې پرمخوده یو بل باندې سیده او په ځتې اغیز من دي، چې ولس وروسته پاتې وي، ژبه یې وروسته پاتې ده او که یوه ژبه وروسته پاتې وي، نو هغه ولس د نورو ولسونو سره په پوهه کې سیالي نه شي کولی او د ولس خلك د نورو ولسونو د خلکو سره د سیالی کولو استعداد ځان کی نه شي روزلی، که څه هم استعدادونه به موجود وي.

ما کوښښ کړی چې کم له کمه بنسټیزې کلیمې په افغاني واړوم، چې دا کار مې په پوره بریالیتوب، د پوره ستونځو سره سره سرته رسولی او په دې هکله مې زیات فکر هم په کار اچولی چې مسلکي بنسټیزې کلیمې په روانه افغاني راواړل شي. هغه نومونه چې ټاکل شوي، داسې نومونه دي، چې د هغه شي ماهیت په کې روښانه دی. دا کا د هرڅه لمړی ددې لپاره باید وشي، چې په پوهنیزو شیانو او نومونو پوهیدل باید ساده شي.
په پوهنه کې له بلې ژبې تیریدنه ناشونی ده او یا په بل عبارت په بله ژبه صرف نظر نه شي کیدی. دلته هم هدف دا نه دی چې افغاني ژبه دې د نورو ژبو د لغاتو څخه پاکه شي، دا کار یواځې هلته کیږي، چې یوه ژبه له پوهنې وروسته پاتې وي.
د پوهنیزې ودې سره ژبې ته د نورو ژبو لغات راننوځي او ضرور هم دي. ما کوښښ کړی چې که د کوم لغات لپاره د پښتو نوم یا نه وي او یا مناسب نه وي، هغه په جهاني مروجه لغاتو ولیکم.
دا چې افغاني د افغانستان ژبه او بیا هم ژوندۍ شوې ژبه ده، دا د دولت کار وو او افغاني ژبې ته د تنفس ورکولو یا بهتره د افغاني ژبې د ژوندۍ څخه خلاسون یا د افغاني ژبې څخه د لعنت د کړی لرې کولو دنده هم د دولت ده، خو ترهغې باید موږ هم دې ته پام ولرو او دا پاملرنه خپله دنده وګرځوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د یوه ولس په ژبنیو ستونځو هلته پوهیدل ممکن کیږي، چې څوك د ژبې سره په پوهنیزه توګه مخامخ شي. په افغاني ژبه دلمړي ځل لپاره داسې یوه لیکنه د ستونځو سره مل ده، مګر ناشونې نه ده.
دلته غواړم چې دې ته هم ګوته ونیسم، چې د نومونو په ټاکلو کې ما کله کله دوه نومونو کارولې، چې هغه مې په ټول کتاب کې شاید اصلاح کړې نه وي، خو په دې باور لرم چې په هدف کې ستونځې نه پیښوي لکه د بیلګې په توګه: ما لمړی ګنپوهنه لکیلې وه، چې وروسته مې شمیر پوهنې بانډې واړوله. شاید په ټولو ځایونو کې مې نه وي شمیرپوهنه کړي. دربڅوډي ما لمړی دریکونجی لیکلی وو، چې دا هم شاید د کتاب په اوږدوکي نه وي اصلاح شوی، داسې نور څه به هم وي، خو دې ته بیا ګوته نیسم، چې د پوهیدلو لپاره دا کومې ستونځې ه پیښوي.

## ۲ – تخنیکي ستونځې:

د ګرانو لوستونکو پام به دې ته راوګرځې، چې څمور لپاره د داسې کتاب لیکلوپه لار کې تخنیکي ستونځې هم خورا زیاتې دي. ما په کمپیوتر د شمیرپوهنې د فرمولونو لیکلو سره ستونځې لرودي، نو له دې امله مې د نورو کتابونو دکاپیو څخه بیاتې کړې او دلته مې سریښ کړې، چې کله کېږې هم سریښ شوې دي او په دې هم پوهیږم، چې دا یو غیر قانوني کار هم دی، خو هیله ده چې د رااخستلشووکتابونو لیکونکې او چاپوونکې به دې ته تفاهم ولري او زه له دوي د هرڅه له مخه د دوي له دې تفاهم څخه د خوښې څرګندونه کوم.

غواړم د ګرانو لوستونکو دې ته هم پام راوګرځوم چې املایي غلطې به شوي وي،، خو په پوهیدلو کې به ستونځې پیښې نه کړي، د هغې بخښنه غواړم، زه نور دا کار نه شم ځنډولی، ځکه چې ډیر ورسره ستړی شوم.
ما هیڅ دا فکر نه کاوه، چې زه دې داسې یو کار سر ته ورسوم، خو خدای(ج) په

(c) ketabton.com: The Digital Library



حرکت کی برکت اېښوولی دی.
لنډه دا، چی ددې کتاب د چاپ پورې چمتووالي کار ټول زما په غاړه وو، چی زه ورسره همدومره ستړی شوی هم یم او نورې سهوې او د غلطیئو سمولو لپاره می نور د زړه زور ختلی، که څه هم په دې اخرو ورځو کی د ملګرو په فشار ما ، خما په فکر ټولی سهوې لرې کړی.

## دریم – کتاب د کومو لوستونکو لپاره دی؟

ګران لوستونکی به د را اخستلشوو کتابونو څخه دې ته پام راوګرځولی شي، چی دا کتاب د نوو څه ډول لیکنو څخه راټول شوی. ددې کتاب لوستونکی د پوهنتون د شمیرپوهنی، پیداېښتي پوهنو، اقتصاد او همداسی د نورو پوهنو زدکړي دي.
دا کتاب په ښوونځي کی هم کارول کیدی شي، خو ښوونکی باید دې ته پام وکړي، چي هغه څه، چی د کتاب په پیل کی هم دي، په پیل کی نه شي لوستل کیدی.
ځنی څه په همدې لمړی برخه کی راغلي، چی تابلدو زدکوونکو ته به ستونځي پیدا کړي، خو دې ته د لږ پام وروسته، پام راګرځیدلی شي.

## څلورم – دلوستلو وړاندیز

ما لږ ستونځي لرودې، چی دا کتاب په خپله خوښه ترتیب کړم. زه مجبور شوم چي یو کتاب د بنستیز کتاب په توګه ونیسم او د نورو کتابونو رااخستنی بیا په کی ځاي کړم.
ما د بنستیز کتاب په څیر د شیفر–جورج–تریپلر کتاب ونیوه. نو له دې امله می برخه ویش هم په همغه ډول کړی. ما غوښتل، چی د کتاب پیل په سمسوح یا بهتره سم اند ( لنډ سمند ) یعني منطق وکړم، خو هغه په اوومه برخه کي ځېړل شوی.
خما وړاندیز دادی، چی اوومه– اتمه او نهمه برخه دې د هرڅه لمړی ولوستل شي

(c) ketabton.com: The Digital Library



اومه اتمه او نهمه برخه څمور په هيواد کی زما په فکر ، چی نا اشنا وي. په هر صورت د اوومی برخی سريزه خو دي د هرڅه له مخه ولوستل شي او همداسی د ډيري پوهی سره اشناييينه هم خورا ضرور ده

**شپږم . مننه**

ددې کتاب ليکلو کی ، که څما د دوستانو لخوا دې کار ته راهڅول نه وی، نو دا کار سرته نه شو رسيدلی، په تيره بيا په المان کي د « افغانستان کلتوري ودې ټولنی »دوستانو. زه له دې د ټولو د زړه له کومی خوښنه کوم. د دې ټولنی د غړو او پلويانو زياته خوښتنه، چی ددې کتاب چاپ يی د ټولنی په چوکاټ کي په غاړه اخستی.

ډير محترم پوهاند مجاوراحمد زيار څخه زياته مننه، چی د لغاتو د نظر څخه تيريدنه او همدا ډول په ټولو ماناوو کي ماته خوراګټوره مشوره هم راکړي.
زما ميرمن زما د ستونځو شاهده وه. په زړه ناروغه، خو په پراخه او لوي زړه او پوره حوسيله يی زما د دې ليکنی ملاتړ کاوه، چی بی ددې له ملاتړ به دا کار هم سرته نه وی رسيدلی، که څه هم دا به يی کله کله ويل، چی ګوندې پيسی می بايد ګټلی وی ، خو په دې پوهيږي، چی ددې چانس نه شته، کله کله به، چی به تنګه شوه نو ويل به يي چی نور دا د چرګانو ټونګي بايد بس کړم. له دې امله زما دميرمن ښاپيری څخه هم د زړه له کومی خوښنه کوم او دا پراخه سينه او دا ناروغه زړه يی همداسی ښه تکړه ورته د لوي خداي(ج) څخه غواړم، چی زما د داسی کارونوملاتړ نور هم وکړي.

راتلونکی کارونه: د همدې کتاب سره سم ما يو د هندسی کتاب ژباړلی، چی د

(c) ketabton.com: The Digital Library



المان د پنځم ټولګی ښخه هندسه په کی راغلی د څه نونورو شمیرپوهنیزو مضوعاتو سره. دا به هم په دې کتاب پسی ترلی چاپ ته ورکړي شي.
زه یو بل خوب هم لرم، چی همدا اوس دې د یوه بل الجبر کتاب لیکلو باندې پیل وکړم. موضوعات می په سر کی راګرځي.
که چیرې نور دوستان او شمیرپوهان د شمیر پوهنی په څانګه کی څه لیکل غواړي او په دې هکله ستونځي لري، او ستوڅوبیو وړاندیزونه لري نو زه به ورسره وعده وکړم، چی دلته افغانان و ملاتړ ته راوهڅوم. د هغو دوستانو سره چي د شمیر پوهنی کوم کتاب ته یی د ژباړنی نیت وي او په افغانستان او پاکستان کی ژوند کوي نود هغو سره به وعده وکړم چی دلته ورته په دې ټولنه کی او یا د ټولنی دباندې د مرستی هلی ځلی وکړم. څما هدف دادی، چی موږ باید داسی کارونو ته ملا راوتړو. له ما ښخه لټ بل څوك نه شته، دا چی ما دا کار سرته رسولی ، باور وکړي، چی هر بل افغان یی هم سرته رسولی شي،

په مینه ستاسو ماخان

(c) ketabton.com: The Digital Library



## افغاني ، يوناني او الماني الف بی

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ا | ب | پ | ت | ټ | ث | ج | چ |
| څ | ځ | ځ | ح | خ | د | ډ | ذ |
| ر | ړ | ز | ژ | ږ | ص | ض | ط |
| ظ | ع | غ | ف | ك | ګ | ق | ل |
| م | ن | و | ه | ي | ى | ې | ئ ۍ |

### يوناني الف بی

| | | |
|---|---|---|
| Α α | *Α α* | Alpha |
| Β β | *Β β* | Beta |
| Γ γ | *Γ γ* | Gamma |
| Δ δ | *Δ δ* | Delta |
| Ε ε | *Ε ε* | Epsilon |
| Ζ ζ | *Ζ ζ* | Zeta |
| Η η | *Η η* | Eta |
| Θ ϑ | *Θ ϑ* | Theta |
| Ι ι | *Ι ι* | Iota |
| Κ κ | *Κ ϰ* | Kappa |
| Λ λ | *Λ λ* | Lambda |
| Μ μ | *Μ μ* | My |
| Ν ν | *Ν ν* | Ny |
| Ξ ξ | *Ξ ξ* | Xi |
| Ο ο | *Ο ο* | Omikron |
| Π π | *Π π* | Pi |
| Ρ ρ | *Ρ ϱ* | Rho |
| Σ σ | *Σ σ* | Sigma |
| Τ τ | *Τ τ* | Tau |
| Υ υ | *Υ υ* | Ypsilon |
| Φ φ | *Φ φ* | Phi |
| Χ χ | *Χ χ* | Chi |
| Ψ ψ | *Ψ ψ* | Psi |
| Ω ω | *Ω ω* | Omega |

### الماني الف بي

| | | |
|---|---|---|
| A a | *A a* | 𝔄 𝔞 |
| B b | *B b* | 𝔅 𝔟 |
| C c | *C c* | ℭ 𝔠 |
| D d | *D d* | 𝔇 𝔡 |
| E e | *E e* | 𝔈 𝔢 |
| F f | *F f* | 𝔉 𝔣 |
| G g | *G g* | 𝔊 𝔤 |
| H h | *H h* | ℌ 𝔥 |
| I i | *I i* | ℑ 𝔦 |
| J j | *J j* | 𝔍 𝔧 |
| K k | *K k* | 𝔎 𝔨 |
| L l | *L l* | 𝔏 𝔩 |
| M m | *M m* | 𝔐 𝔪 |
| N n | *N n* | 𝔑 𝔫 |
| O o | *O o* | 𝔒 𝔬 |
| P p | *P p* | 𝔓 𝔭 |
| Q q | *Q q* | 𝔔 𝔮 |
| R r | *R r* | ℜ 𝔯 |
| S s | *S s* | 𝔖 𝔰 |
| T t | *T t* | 𝔗 𝔱 |
| U u | *U u* | 𝔘 𝔲 |
| V v | *V v* | 𝔙 𝔳 |
| W w | *W w* | 𝔚 𝔴 |
| X x | *X x* | 𝔛 𝔵 |
| Y y | *Y y* | 𝔜 𝔶 |
| Z z | *Z z* | ℨ 𝔷 |

اومیګا پښتو دینه ← ← په الماني دینه

## شمیرپوهنیزي نخښې

| | |
|---|---|
| مساوي ......... | $=$ |
| نامساوي ( نوروکتابونو کی ) | $\neq$ ( $=$ ) |
| کوچنی له ......... | $<$ |
| لوي له......... | $>$ |
| کوچنی یا مساوي له ......... | $\leq$ |
| لوي یا مساوي له ......... | $\geq$ |
| ډیر کوچني ......... | $\ll$ |
| ډیر لوي ......... | $\gg$ |
| ورته یا متناسب......... | $\sim$ |
| کونګروائنټ ......... | $\cong$ |
| همداسې یا ښایي یا په ګوره کوي | |
| کتیمټ......... | $\equiv$ |
| غبرګ ......... | $\parallel$ |
| ناغبرګ......... | $\nparallel$ |
| ولاړ په ......... | $\perp$ |
| دریګوډی ......... | $\triangle$ |
| ګردی ......... | $\bigcirc$ |
| نیمی یا قطر......... | $\oslash$ |
| کونج ......... | $\angle$ |
| د دوه کرښو g او h ترمنځ کونج | $\angle(g,h)$ |
| کرښه، له A و B ته ......... | $\overline{AB}$ |
| له A و B ته لوریزه کرښه..... | $\overrightarrow{AB}$ |

(c) ketabton.com: The Digital Library



لینده.................... AB

مطلقه ارزښت د ............ $|a|$

ایماجینار یوون (واحد )....... $i$

د اویلرګڼ = ...2,7182818 $e$

پي د لودولف ګڼ $\pi$ = ...3, 14149

د په لور هڅېږي یا کونورجنت کېږي $\rightarrow$

ناپای.................... $\infty$

د x فنکشن یا په واك چي بلواك مو بللی $f(x)$

(لوستل یي ( f د x یا د f, x لنډ : fx )

د x ځیرونه په $f(x)$ : لیکو: $f(x) \rightarrow x$ f: x →

دلته h د x فنکشن، g د x فنکشن $h(x); g(x)$

لیمس یا پوله............... lim

| | | |
|---|---|---|
| | ساین ............... | sin |
| تریګونومتریکي | کوساین ............ | cos |
| بلواك | تانجنت ............. | tan |
| | کوتنجنت............ | cot |
| | ارکوس ساین.......... | arc sin |
| ځیکلومتریکي | ارکوس کوساین ...... | arc cos |
| بلواك | ارکوس تانجنت ....... | arc tan |
| | ارکوس کوتانجنت..... | arc cot |

لوګاریتم و بنسټ a ته $\log_a$

لوګاریتم و بنسټ ۱۰ ته $\lg_{10}$

دیکادیکي لوګاریتم.....

لوګاریتم و بنسټ e ته $\ln$

طبعي یا پیدایښتي لوکاریتم

(c) ketabton.com: The Digital Library



کمپلکس ګڼونه........... $\mathbb{C}$

رییلګڼونه ............... $\mathbb{R}$

ټولګڼونه ............... $\mathbb{Z}$

نامنفي ټولګڼونه یا

طبعي ګڼونه د صفر سره $\mathbb{N}^*$

طبعي ګڼونه ........... $\mathbb{N}$

تعریفډیرۍ ........... D

ارزښتډیرۍ........... W

حلډیرۍ ........... L

د ډیري A پوتنځډیرۍ P(A)

ډیري............. M,N,A,B

تشډیرۍ ......... $\emptyset$

برخه ډیرۍ...........

پورته یا لویډیرۍ ( چې بل ډیرۍ خوندي لري )

ټولنډیرۍ........... $\cup$

غوڅډیرۍ .......... $\cap$

د A کومپلیمنت ..... CA , A'

د ډیریو ورته والی ...... A~B

د ډیریو ځل........... A × B

لوستل B اتیران A یا - ځل -

توپیرډیرۍ : A بي له B ده A\ B

دلته: a د b پرویشونی ده یا a b ویشي a | b

د a او b غټ ګډ په ویشونی(لنډ: غ ګ و ) ggt(a,b)

د a او b کوچني ګډ زیاتځله(لنډ: ك ګ ځ ) kgv(a,b)

(c) ketabton.com: The Digital Library



دلته : a د M توکی دی ........ $a \in M$

او a د M توکی نه دی ............ $a \notin M$

ټولنخښه ( د ټولو x لپاره باور لري ) $\forall$

د موجودیت نخښه: یو x موجود دی $\exists$

کونیونکشن A او B لیکو $A \wedge B$

دیسینکشن A یا B لیکو $A \vee B$

( کله کله الترناتیو )

ایمپلیکاشن: له A څخه B لاس ته راځي $A \Rightarrow B$

نیګیشن یا نه والی $\neg$

د A او B ویناو ورته والی یا اکویوالنت $A \Leftrightarrow B$

له A څخه B لاس ته راځ او له B څخه A لاس ته راځي.

ماتریکس......... A نورو کتابونو کي ||A||

دیترمینانت |A|

د a څخه n–امه ریښه $\sqrt[n]{a}$

د x اکسپونتشلبلواك

د n – فاکولتیت یعنی n!=1.2.3....n $n!$

بینومخلوونی $\binom{n}{p}$

لوستل:n په p باندې

له a تر b واز اینتروال ]a,b[

$= \{ x \mid a < x < b \}$

له a تر b بند اینتروال [a , b]

$= \{ x \mid a \leq x \leq b \}$

کیڼ واز اینتروال ]a , b]

$= \{ x \mid a < x \leq b \}$

ښي واز اینتروال [a, b[

$= \{ x \mid a \leq x < b \}$

د زیاتون نښنه (سیګما) $\sum_{i=1}^{n}$

که د زیاتون نښنه داسی وي

لوستل: له $i = 1$ تر $n$ پورې

څلنښنه (پي) $\prod_{i=1}^{n}$

که داسی لیکل شوي وي

لوستل: له $i = 1$ تر $n$ پورې

پرموتیشن یا بدلون $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{pmatrix}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

## ۱ ۰ د شمیرپوهنې سم اند (د ریاضیاتو منطق (logic ))

سم اند (سماند) یا منطق ( logic یونانی کلمه ده، چې اند( فکر) یا وی( لغات) ته وایی).

د وینا د تیک یا کره فرمولولو لپاره د سم اند(منطق) څخه کاراخستل کیږي د فورمال سم اند، د سم اند پوهنی بنسټ، د فکر ډول او فکر کولوقوانینو په څیر یې څیړنه د اریستو تلس( ۳۸٤ تر ۳۲۲ ز۰ ک۰ ا)) له خوا کیښول شوې۰

د ریاضیاتو منطق(د شمیرپوهنی سم اند) د شمیر پوهنې د یوې برخی په څیر پرمختګ یا وده وکړه۰ سم اند د شمیرپوهنی بنسټ دی او د شمیر پوهنی په ټولو څانګو کی ننوتی۰

یادونه : سم اند په خپله ختهٔ کې په فلسفه پورې تړلی مسلک دی نو له دې امله دا لیکنه د ټولو مینه والولپاره په زړه پورې خوندیونې( متن ) لرودی شي۰ هیله ده، چې ګڼ هیوادوال به یې وګوری او کمي به یې راپوره کړي، دلته او یا په ځانله لیکنه کی۰

## ۱ .۰۱ پوهنیزه ژبه او پیدایښتي- یا طبیعي ژبه

اند ( فکر) او ژبه یو له بل سره داسې تړلي، چې بیلیدنه یې ناشوني ده. په ورځني ژوند کی انسانان خپل اند یا فکر په طبیعي ژبه څرګندوي، مګر دا د مسلکي ژبی په څیر د

(c) ketabton.com: The Digital Library



پوهنی( علم) لپاره بسیا نه کوي، ځکه چی د ځنو لغاتو مانا کره یا ټینګه نه ده ټاکل شوی، دا په دې مانا، چی په طبیعي ژبه کی یو لغات بیلی بیلې ماناوي لري لکه لور(د ریبلو لور) او لور( په کومه لور) او یا څو لغاتونه ، لکه شلغم، ټیپر او منګرېتي، چی همغه یو څه یا شی په ګوته کوي.
په مسلکی نومونو کې یو څوترمینولوجي(Terminology لاتین، یونانی): په یوه مسلک کی شته(موجود دي ) د مسلکي لغاتونو ټولګه او په همدې توګه د هغوي ښوونه ، منځ ته راوړل کیږي، چې د کلمو موخور(هدفمند) کره یاکلک ایښوولو ( ځای پرځاي کولو) د نورمي ویناو استعمال او د هغوي او د ورځنی ژبی ویناودد څخه ګټه اخلي٠

په دې ډول په شمیرپوهنه یا ریاضیاتو کی هم یوه پوهنیزه ژبه منځ ته راغلې، چی له پیدایښتي یا طبیعي ژبې او یوې ځانګړی ترمینولوجي سره یوځاي شوې یا په بل ډول : د پوهنیزې ژبی او یوې ځانګړي ترمینولوژي ټولګه ده٠

له دې امله شمیرپوهنه په یوه لوړه کچه ټیکوالی(Exaktheit ) ، په یوه لنډ، روښانه ، څرګند او له دې امله یو لیدوړ « وینا ډول» درلودی شي٠

شمیرپوهنه او سم اند یا منطق دواړه دیوې سمبولیک ژبی څخه د کارونی یا استعمال کار اخستی شي. د لغاتو په ځاي نخښی ایښوول کیږي، چی مصنوعي منځ ته راغلي او په ځانګړو ماناو سمبال دي٠

د شمیرپوهنی پوهنیزه ژبه کې غوښتنه داده، چې باید په کلکه او روښانه توګه د ریښتونو ( Realität واقعیتونو) شیانوObjects ، د هغو شمیرنیزو څیرو او د دې لپاره پیدا یا منځ ته راغلو نخښو ترمنځ توپیر وکړي. شیان له انسانانو احساسیږي، د یوه ذهنیت ( Abstruction ابسترکشن) له لارې په یوه کلیمه څیره ( متصور؟ ) کیږي. او شته والی یې د یوې نخښې جوړښت construction ممکنوي. څیره کوونه یې د شمیرنې شیان دی او یوه «نخښونه» غوره کوي، چې دیوه نوم اوزیات وخت د یوې نخښې په څیر ځان نیسي، د بیلګې په توګه : لکه هر طبیعي ګڼ(عدد) د یوې نخښې داسي په نامه د عددنخښې (ګڼنخښې) له لارې انځوریږي. دا نخښه څیفر Ziffer یا ګڼنخښه(عددنخښه)، چې عربې همغهٔ صفر دی, بلل کیږي. داسې نخښوني دبنسټیزو نخښؤ څخه منځ ته راغلي. په درسي ځاي سیستم کې بنسټیز څیفرونه یا ګڼنخښې په لاندی ډول دي:

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

۰ ، ۱ ، ۲ ، ۳ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ۷ ، ۸ ، ۹ .

## ۱ ۰ ۲ د شمیر پوهنی سم اند بنسټیزې کلمې

### ۱ ۰ ۲ ۰ ۱ ثابتی، متحولې او ترومونه(۱)

Constants, variables, terms

په شمیرپوهنه کې شیان ، د شیانو ترمنځ اړیکې او د شیانو تړنې په نخښو( سومبولونو) انځوریږي.

### ۱ – شمیرپوهنیزې نخښې

- د ثابتو(تل همغو) لپاره نخښې ( علامې): دا د یوه کره ټاکلې مانا لپاره نخښې دي یانې تغیر نه خوري، لکه ۷ ، ۱۲ ، $\pi$ ، e, او داسې نور

- د اووښتونو یا واریابلو(متحولو) لپاره نخښې: دا د یوې ورکړ شوې ډیرۍ یا سټ ( په ډیرۍ پوهنه کې روښانه کیږي) داسې په زړه پورې توکی لپاره یوه نخښه ده، کومه چې د اووښتونویا متحولو بنسټسټ یا-ډیرۍ بلل کیږي، دا په لاتین تورو په نخښه کیږي او کله کله په اندکس(ز۰ایندکسونو) یا پیژندنخښه index ( ز۰ پیژندنخښې Indices ) چې ایندکس د تورو پښنو ته راځي په نخښه کیږي۰

لکه: $a_1; a_2; b_i; i = 1,2,3 \ldots$

- اړیکنخښې : دا د شیانو اوګڼونو یا اعدادو ترمنځ د اړیکو نخښې دي لکه $<$ , $>$، = , $\leq$, $\geq$ ,

- د نښلونو،کارونو، تړنو یا عملیونخښې : لکه زیاتون-(جمعه)، کمون-تفریق-) ، ځل-(ضرب-)، او ویش -یا تقسیم نخښې: / ، : +, -, *

(c) ketabton.com: The Digital Library



------------------------------------------------------------- -------------

- تخنیکې نخښې : لکه سیمیکولوم (,, ,,)، نوکان ( ) او نور ډولونه یې او کوما ،

د نخښو لړۍ : که نوکان، واریابلی( اووښتونې), ثابتی او د هغوي يوځاي ایښودل د اړیکو- ، نښلونو- ، او تخنیکی نخښو يوځاي ایښوول موخه ور یا هدفمند یو په بل زیات شي، نو یوه د نخښو لړی ترې منځ ته راځی٠

(١) ثابتې((تل) همغه یا تل همغه، همغه ارزښتیزې) ،

متحولې :اوښتونی یا اوړیدونی یا واریابلې او ترمونه

بیلګه :

الف : د $3.( 1 + 2a ) – a + 144$ یوه د نخښو لړی (ترادف) ده

ب : $11x =6 – 3a ).( b – 12)$ ، دا د نخښو لړی نه ده، ځکه چې د نخښو لړۍ موخه وره یا هدفمنده نه ده ایښوول شوې، د برابرنخښې پسې نوک نه شته، دا په دې مانا، چې له دې څخه څه نه پوهیږو.

٢ - ترمونه terms, Termen : که په یوه لړۍ کې، یواځې ثابتې ( همغه )، اووښتونې( متحولې، واریابلې) نښلونې او تخنیکي نخښې کارول شوې وي، یانې اړیکې نه وي کارول شوي، نو دې ته ترم ویل کیږي. هر یو ترم پورې که واریابلی ولرې پیژندډیرۍ یا تعریفسټ هم اړه لري، دا د داسې اووښتونو یا متحولو اصلی بنسټسټ یوه برخډیرۍ او یا هغې سره برابر برخه سټ یا - ډېرۍ ده، په کوم کې چې د ترم ارزښت بیرته د بنسټډېرۍ توکی دی. د ترم ارزښت شمیرل کیدی شي، که د مخه ټاکلشوې نارونې یا عملیې اجرا شي، که چېرې اووښتونې یا واریابلې د پيژندډېرۍ د توکو نخښونه غوره کړي. دا په لویو لاتین تورو( اکه: $(T, T_1, T_2$ په نخښه کیږي. که ترمونه اووښتونې ولري، نو د اووښتونو یوه ورزاته نخښه په نوکانو کې نیولکیږي، لکه :

T(x); T(x,y)

بیلګه :

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

الف : ترم 3/4 + 126 ، چې اووښتونې یا متحولې نه لري په T سره په نخښه کوو او

لیکو: T=126 + 3/4 یا $T=126+\frac{3}{4}$

ب : ترم 2x + 10 چې اووښتونې یا متحولې x لري یانې T(x) = 10 + 2x ۰ د اووښتونو بنسټیزې یا ـډېرۍ دې یا د طبیعي اعدادو ډیرۍN°وي

تعریفډیرۍ د بنسټیزې سره برابره ده، که په ترم کې د اووښتونې یا واریابلی x پۀ ځای

یو پیدایښتې ګڼ یا طبیعي عدد 2 کیږدو، نو د ترم ارزښت دی : T(2) = 14

پ : (x+2y)/x یا $\frac{x+2y}{x}$

ترم دی چې دوه متحولې لري او په T(x,y) سره یې په نخښه کوو۰ د اووښتونو یا متحولو بنسټیزې دې د پیدایښتي یا طبیعي اعدادو سټN وي, نو د x لپاره تعریفډیرۍ N° ده۰ د y لپاره N ( پیدایښتی ګڼونډیرۍN° تعریفډیرۍ لپاره ترم نه دی تعریف یاپیژند نه لري)

د x = 0 لپاره ترم نه دی تعریف یا پیژند ند لري

د ترم T(x,2y) = (x,y) /x یا $T(x,2y)=\frac{x+2y}{x}$

ارزښتشمیرنه د x=2 او y= 3 لپاره په دې ډول ده :4 = 2 / (2+6) = T(2,3)

یادونه: د ګڼونو لپاره دې دریمه او څلورمه برخه وکتل شي، چې هلته ګڼونډیرۍ ورکړ شوي دي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

دا چې انسان د خپل چاپېرپال د ټولو شیانو او پیدایښتونو سره لاس په ګریوان دی، نو پوښتنې او هیلې رامنځ ته کیږي،غوښتنې لري او ویناوې کوي، په کومو ویناو کې،

چې شیان او ریښتونی( واقعیتونه) بیرته هنداره ( منعکس) کیږي یا په یوه څه یا شي، چې وینا کیږي، نو موخه ترې د هغه څه ریښتون حالت یا ځانئیونه ده۰ یوه وینا په واقعیت کې ټیک هلته ریښتیا ده، کله، چې په هغې کې شي حالت یا بهتره شي ځانئیونه په ریښتونې شته یا موجود وي، په بل حالت کې دا وینا ناریښتیا ( غلطه ) ده. مور نیسو، چې دا څه دې په شمیرپوهنه کې کره ټاکلي وي او پریکړه دې پرې کیدی شي۰

پژند( تعریف ) ۱ ۰ ۱ :

وینا د یوه شی ، څرنګوالي (چې څنګه دی)، د هغۀ بیرته هندارونه یا منعکسونه ده۰ ( دا په دې مانا، چې وینا یو شی په وینا کې همهغسی ښایي لکه څنګه چې دی له دې امله شي هندارونه یامنعکسونه)، چې د ژبی له لارې وړاندې کیږي یا په همدې ډول په نخښه کیږي۰

یا په بل عبارت وینا د کلیمو داسې هدفمند یوځایوالی یا یوځاي ایښوول دي، چې د یوه شی حالت (ځانئیونه) یا شکل او د شیانو ریښتونې اړیکی بیرته هنداره یا منعکسوي او موخه وردی، چې د هغه دریښتیاوالي پوښتنه رامنځ ته کړای شي۰

یا په بل ډول :

د وینا لاندې سری یو ژبنی یوون، یا یووالی ( واحد unit ,Einheit)پوهیږي، کوم چې د شي اړیکی ( د شي څرنګوالی) بیانوي۰ دلته دا مهمه نه ده، چې دا وینا په کومه ژبه، په پیدایښتي (طبیعي) او که په مصنوعي ژبه ویل شوې ( افاده شوي) دا هم غوره نه ده، چې دا وینا د طبیعي پوهنو لپاره ده، د هوا حالاتو لپاره او که د بازار د نرخ لپاره ده۰

په بل او ورځني ډول: یوه وینا یوه جمله ده یا فرمول دی، چې یا ریښتیا او یا ناریښتیا ده۰ داسې هم ویل کیږي، چې وینا یو «ریښتیاارزښت » ،، ریښتیا یا نا ریښتیا ،، لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library



یعنې : د شمیرپوهنې سم اند لپاره پریکړی د وینا « ریښتیا ارزښت»(رښښتیا یا نارښتیا) دئ٠ نور خویونه په راتلونکی کې نه څېړل کيږي٠

ویناوې د لاتین په لویو تورو *A , A په نخښه کوو او داسې نور ٠

## ۱ ٠ ۲ ٠ ۳ د دوه ارزښتوالی اصول یا پرينځیپ جمله

هره وینا یوائې یو ممکن « ریښتیا ارزښت» لرودئ شي، دا په دې نامه، چی وینا یا ریښتیا ده او یا ناریښتیا. ( د دریم نه والی اصول یا پرينځیپ)٠

دا په دې ماناو چې ددې دوه ارزښتونو تر منځ بل ارزښت ناشونی دئ. دوه ارزښتوالی او د دریم نه والی باید سره بدل نه شي.

که یوه ژبنئ افاده یا وینه د وینا په څیر ترتیبوو، دا بیا دلته ارزښتناکه ده، چی د وینا‌ارزښت حتمآ باید څرګند یا معلوم نه وي٠ که بالاخره ټوله پوهنه د رښتیا لور غوره کړي وي، بیاهم موږ څرګند ژبنیو موادو ته اړ یو، چی د هغه شي حالت (ځاننیونه) افاده کړاي شو یا وویلی شو، د کومو په شته والی یا نه شته والی، چی پریکړه وشي٠

ټولې ویناوې له دې امله په دوه ټولګیو یا کلاسو ویشل کيږي، د رښتیا ویناو ټولګی او د نارښتیا ویناو ټولګی یا کلاس(صنف)٠

که وینا ریښتیا وي، نو ریښتیا ارزښت یې ریښتیادئ او په w سره یې ښایو، که وینا ریښتیا ارزښت ناریښتیا ولري ، نو په f یا،، نه،، یې ښایواو وایو، چې د وینا ریښتیا ارزښت ناریښتیا دئ

تکرار : هره جمله، چی « ریښتیا ارزښت» ( ریښتیا یا نا ریښتیا) ولري، وینا بلل کيږي

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

شمیرپوهنیز سم اند( منطق) د ویناو سره سر او کار لري..

بیلګې:

غونډاله ( جمله)

الف : » د کابل سین د کونړ له سین سره ګډیږي«ریښتیا وینا ده۰

ب : $3 + 4 = 7$ ریښتیا وینا ده

پ : » ٦ لومړنی ګڼ دی« دا ناریښتیا- یا ناتیک وینا ده۰( د اعدادو په برخه کې لومړني اعداد یاګڼونه کتلکیدی شي)

پوښتنجملی : » ته د څو کالو یې ؟ « نه شي کیدی یو ریښتیا ارزښت باندې تنظیم شي۰ له دې امله وینا نه ده۰

نورې بیلګې :

ویناوې دي:

(دپیتاګوراس (فیثاغورس) جمله۰

د کاتیتونو یا د یو بل سره ولاړو یا عمودو اړخونو یا ضلعو مربعګانو (څلوریو) زیاتون(جمعه) د هیپوتینوزې(اوږده اړخ قایمې زاویې ته مخامخ ضلعه یا قطر) د څلوری یا مربع سره برابر دی.

نورې بیلګې :

سرک لوند دی

ټول سپي خطرناک دي

$3 > 5$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

په لاندې کې که یو کاربن له دوه اکسیجنه سره یوځاي یا زیات شي، نو کاربن دوه اکسیډ $CO_2$وښایي

د دي پرڅېړ یا مخامخ یا پر خلاف یا برعکس : ویناوې نه دي:

د کابل ښار;NaCl　;　لمده کوڅه

د افغانستان د خلکو ژوند په دیرش کلن جنګ کې

لاندې ویناوې

کیمیا یوه طبیعي یا پیدایښتي پوهنه (علم) ده

٧ پر دریو بی له پاتې ( باقي) نه ویشل کیږي

د وینا «ریښتیا ارزښت » ریښتیا لري

لاندې ویناوې

برلین یو کوچنی ښار دئ

3 < 5　　پنځه له دریو کوچنی دئ

ټول لومړني اعداد یاګنونه ناجوړه ( طاق) دي

کابل د کونړ پر سین پروت دئ

هره یوه له دې ویناو « ریښتیا ارزښت » نا ریښتیا لري

نومه ونې: پورته مې د جفت لپاره، چې ورسره بلد یو جوړه ولیکه، نو طاق ته ناجوړه وایو٠

په لاندې کې به وڅیرو، چې ویناوې شته، چې نورې ویناوې د خپلې برخې په څیر په ځان کې خوندي( لنډ : خوندي) لري٠ داسې ویناوو ته یوځاېشوې یا یوځای ایښول شوې یا ځنځیري ویناوې وایو او که غواړئ ! مرکبې ویناوې.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د دې لپاره بیلګه راوړو » کهٔ د کوم ګڼ(عدد)a پروت زیاتون یا پرته جمعه په 3 ویشوړ وي، نو داعدد یا ګڼ په 3 ویشوړ دی، یانی که عدد 1521 ولرو ، نو د دې عدد پرته جمعه 1+5+2+1=9 په 3 ویشوړ ده له دې لاس ته راځي، چی پخپله ۱۵۲۱ هم په 3 ویشوړ دی۰

که کومه وینا په داسې ویناوو ویشوړ یا ټوټه کیدونکې نه وي، نو دې ته بیا ساده وینا ویل کیږي۰

لکه : سپین غر یوه خورا جګه څوکه لري

یوه بله بیلګه د یوځای شوې( ځنځیري) وینا لپاره

سپینغر خورا خواریکښ دی، هغه په دې پوهیږي، چی نور کار ته وهڅوي۰

څرګنده ده، چی دواړه ساده جملې د برخویناو په څیر یوځاي شوي ویناوې دي: » سپینغر خورا خواریکښ دی« همدا ډول » هغه (سپیغر) پوهیږي، چی نور کارته وهڅوي«۰

دا ویناوې کیدی شي په نورو ډولونو هم یو له بل سره داسې وتړل شي، چې رښتیاارزښت یې همغه پاتې شي۰

د بیلګي په توګه:

۱ - سپینغرخورا خواریکښ دی۰ یا هغه پوهیږي، چی نور کار ته وهڅوي

۲ - ځکه، چی هغه پوهیږي، نو کار ته وهڅوي، نو سپینغر خورا خواریکښ دی۰

۳ - دا چی سپینغر پوهیږي، چی نور کار ته وهڅوي ، نو سپیغر خورا خواریکښ دی۰

٤ – سره له دې، چی هغه پوهیږي، نور کار ته وهڅوي، هغه خورا خواریکښ دی۰

ګورو، چی په دې ډول یو له بل توپیریدونکی تړلې یا ځنځیري، یا یوځاي شوی ویناوې جوړیږي، چی په خپله رښتیاارزښت کی یو له بل توپیر کیدی نه شي۰ د دوي توپیر د

(c) ketabton.com: The Digital Library



دوي یو له بل سره تړلو ځرنګوالي له لارې مخ ته پروت دئ یا رامنځ ته شوی دئ٠ په لاندې کې به ممکنه« ویناترنه» ( یا نورهم ښه: ویناځنځیرونه) تر ځیړنې لاندې ونیول شي.

پیژند ۱ ۰ ۲ :

یوه «ویناترنه» یا یو «ویناتړاو» ( نوره هم ښه: «زنځیرونه») داسې ژبنۍ ویینې(افادې ) دي، چې د هغوي په مرسته له یوې یا ډېرو وینا ؤ ځخه نوې ویناوې جوړیدی شي.

موږ د سم اند یا منطق سټپرینځیپ په لاس ته راوړنو سره ځانونه په داسې ویناو رابندوو، کومې چې داسې جوړې وي، چې رېښتیا ارزښت یې یوازې او یوازې د «برخویناو» رېښتیا ارزښت په واک کې وي٠

بیلګی

الف: سپین ډیر خواریکښ دی، هغه په دی پوهیږي، چې نور کار ته وهڅوي٠

ب : سپین یا راځی او یا لوبه نه کیږي٠

پ – د فوټبال په لوبه کې نه دباندې رفري او نه دننه رفري فاول یا ناسمي ولید٠

## ۱ ۰ ۲ ۰ ٤ ویناتړنه یا وینابلواک ( - فنکشن یا – تابع)

د ویناترنو (عملیو)په هکله مو پورته بیلګو کې ولیدل، چې که ځوک د تړنو لپاره « او » او یا « سره له دې» ونیسي تل یوه یوځای شوې وینا منځ ته راځي. دا وینا هلته او فقط هلته رېښتیا ده، چې دواړه «برخویناوې» رېښتیا وي. دلته د خبرو پرځای غواړو «رېښتیا فنکشن یا رښتیا تابع» وپیژنو. موږ پریکړه کوو، چې د په زړه پورې ویناوو ( ویناواریابلو یا وینا اووښتونو(وینا متحولو)) لپاره سومبولونه p,q,r,... او یا ا ، ب پ، وکارول شي یا استعمال شي. موږ دا غواړو ساده پیل کړو، یانی د یوه یو

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

ځاینیونکی(یوځائیز یا یوګوني) بلواک یا فنکشن او که همغه پخوانی ډول تابع مو ښه راځي، له تابع څخه٠

یادونه: د بلواک یا تابع کلمه وروسته څیړل کیږي، دلته د بلواک یا فنکشن پرځاي ویناتړنه یا عملیه بسیا کوي. دا ځنی ویونه(لغات) ستونځی لري، چی د ښونځي زده کوونکي یې هغه ساده ډول فکر ته رابولم او د لوړو زده کړو خاوندانو ته دا کومې ستونځی نه لري.

نه والی(نفی)Negation

د وینا تړاو یا ویناتړنی(عملیې) «نه والی»: دیوی ویناP نه والی هغه وینا ده، چې هلته او یواځی هلته د رېښتیا ارزښت نارېښتیا لري، چیP رېښتیا ارزښت رېښتیا ولري٠

موږ د وینا P نه والی نفی په Pنه سره ښایو ، شمیرپوهنیزه نخښونه یې په لاندې توګه ده ¬P په یوه جدول کې رېښتیا فنکشن یا رېښتیابلواک کې داسی څرګند وو( دا چې زه کله کله هغه شمیرپوهنیز سومبول د نه p لپاره ¬P نه شم لیکلی، نو دا به همغسې p نه ولیکم.

| P | نهP یا ¬P |
| --- | --- |
| w | F |
| f | w |

د یوې وینا P تکرار نه والي یا بیا نه والي لاس ته راوړنه، لکه چې لاندې یې ګورو، هم خورا څرګنده ده .

| p | ¬p | ¬¬p |
| --- | --- | --- |
| w | f | w |
| f | w | f |

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

دوه واره نه والی د همغې لومړنۍ وينا رښتيارزښت لري

په پيدايښتي ژبه کی نه والی په«نه» يا « نا » خپل رښتينوالی مومي۰ «اباسين هغه خپل ټاکلی وخت ته را نه غی۰ دا د اباسين خپل ټاکلي وخت ته راغی « نه والی» دی۰

نه والی ته بيلګه : د وينا ¬ A نه والی : "7 > 3 " وينا نهA ده: دا چی A رښتيا ده، نو ¬ A نارښتيا ده۰

ترنه(عمليه) يا کنجنکشن Conjunction ( لاتين: ترنه، دلته د « او (and)» ترنه يا تړاو):

## وينافورم يا – بڼه:

د وينا په څټ يا - مخامخ يا - برعکس وينا بڼه رښتيا ارزښت نه لري، د وينافورم يا – بڼې لپاره بيلګی دي لکه پوښتنې، امرونه او نظرونه ياعقيدې:
۱ – هوا څنګه ده ؟

۲ - کورته لاړ شه

۳ – شين يو ښه رنګ دی۰

که په ترمونو کې، چې واريابلی يا اوښتونې لري، اړيکنخښی وليکل شي، يوه وينابڼه منځ ته راځي۰ يوه د نخښو لړۍ کم له کمه د يوې اووښتونې يا متحولې د بيلګې په توګه

3 + x <5 د بنسټيزورشو N کې نه ريښتيا ده او نه ناريښتيا۰ دا له دې امله وينا نه ده۰ که چيرې د واريابلې يا اووښتونې يا متحولې پر ځاي ۰ او ۱ وليکل شي، نو بيا يوه رښتيا وينا ترې منځ ته راځي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library



که چیرې په ځاي یې نور د پیدایښتي ګڼونو توکی ځاي په ځاي شي، نو بیا ناریښتیا ویناوې منځ ته ترې راځي٠

دا چی اووښتوني یا متحولي د بنسټیزی یا بنسټ ستې څخه په خوښه توکی اخستلی شي، نو له دې امله دا اووښتوني د خپلواک یا ازاده اووښتونی(متحولی) په نامه یادیږي٠

پیژند :

یوه وینابڼه د نخښو لړی ده، چې کم له کمه یوه خپلواکه اوښتونې(متحوله) لري او د

- د دې اووښتوني په ځاي د بنسټیزې ورشو یا ساحې او یا
- د دې اووښتوني ترلو څخه د کوانتیفیکاتورونو( کوانتورونو) په مرسته یوه وینا جوړیدی شي.

یادونه :

که په لاندې کې د تړاو یا تړني کلمه منځ ته راځي، نو موخه ترې د « او » تړنه یاکنجنکشن conjunction دی٠ له ګرامر سره په توپیر، چې هلته تړنه یا تړاو یو « تړونتیکی، تړاولغات» ښایي په سم اند کې تړنه یو څرګند( دوه ځایلرونکی یا دوه ځاییزیا نوره هم ښه دوه ګونی) جملي ترل یا په بل عبارت دوه ځاینیونکي ( نوره هم ښه : دوه ییز یا دوه- ګونی) فنکشن یا تابع(بلواک) تعریفوي یا پیژنی٠

د « او» تړنه او نخښه یې $\wedge$

پیژند ۱ ٠ ۳ :

$p\wedge q$ دوه ویناوې p او q یانې د «او » یوځایوالیp او q یواځې او یواځې هلته یو ریښتیا ارزښت ریښتیا لري، چې p اوq دواړه ریښتیا ارزښت ریښتیا ولري٠ که له دې څخه یوه وینا هم ناریښتیا وي، نو بیا د « او » تړنه ناریښتیا ده ٠

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

د ترړني نخښنه ددوه ویناو qاو p ترمنځ لیکل کیږي p/\q او ویل کیږي p او p

موږ د « او » ترړنه په لاندې جدول کې روښانه کوو یا انځوروو:

یادونه: په لاندې کې w رښتیا او f نارښتیا په معنا دي

| p | q | p/\q |
|---|---|---|
| w | w | w |
| w | f | f |
| f | w | f |
| f | f | f |

د « او » ترړني ته بیلګه :

د دوه رښتینو ویناو د A وینا : ,, 7 < 3 ,, او د B وینا : 3 یو لومړنی ګڼ دی رښتیا وینا A /\ B ده « ۳ له ۷ کوچنی او لومړنی ګڼ هم دی»۰

یادونه: موږ ګران لوستونکي به سره یوځاي فکر وکړو، چې دا پریمګنونه لومړي او که لومړني ګڼونه وبولو۰ زه فکر کوم، چې لومړي ګڼونه لومړني نه دي۰ دا ځکه لومړي ګڼونه دي، چې له دوي له زیاتون او یا کمون څخه لومړی ګڼونه جوړیږي۰ موږ به یي زیاتون په پام کې راولو، چې : 3+5=8

د دوه ویناو دا ترړنه یا کنجنکشن، چې مختلف رښتیاارزښتونه ولري یانې د A وینا: 3 ,, 7 < ,, (رښتیا او د B وینا: « ۳ یو جوړه ګڼ دی ( نارښتیا)، نو A/\B وینا : چې ۳ له ۷ کوچنی دی او جوړه ګڼ دی « ( نارښتیا) ده۰ دا ویناترړنه ویناارزښت نارښتیا لري۰

د دوه ویناو د « او» ترړنه دA وینا: 7 < 3 او د B وینا « ۳ یو جوړه ګڼ یا جفتعدددی» یوه نارښتیا وینا ده : ۳ یو لومړنی ګڼ دی او له ۷ لوي دی۰

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

ومو لیدل، چې د « او » ترنه او یا کنجنکشن په ورسره بلده ( عادې) توګه هلته جوړیږي، چې دوه ویناجملې په «او» سره وترل شي:

غوټې «پټیدځاي» پیداکړ او دا پټیدنه یې پټه وساتله»۰ کیدی شي له «مګر» « سره له دې هم» « په همدې ډول » ترنه وویله – یا افاده شي۰

پورته ډول ، د بیلګی په توګه: په پټپټکي کې « که سپین پټ شي او هوسۍ د هغه د پټیدو ځاي پیدا کړي او دا چاته ونه ښایې»، نو داسې وایو « او » یا « هم »

هوسۍ د سپین د پټیدو ځاي پیدا کړ« او » دا پټیدځاي یې پټ واسته۰

۱ ) هلمند موړ(بډا) شو او هیواد یې پرېښود ۰

۲ ) سره له دې، چې برلین کوچنۍښار دۍهلته د منی د المپیک لوبې کیږي

۳ ) ۱۵ ګڼ جوړه دۍ، د هغه پروت زیاتن په ۳ ویشونۍدۍ

په ټولیزه توګه د « او » ترنه هلته رښتیا ارزښت رښتیا لري، چې د جملې ټولې برخې رښتیاارزښت ریښتیا ولري، اړین نه ده، چې نظم په پام کی ونیول شي۰ په وینا ترنه کې کیدی شي زیاتې وینابرخې سره په ترنه « او » وترل شي لکه « هغه راغی، ویې لیدل او برۍ یې په برخه شو»

پیژند ۱ ۰ ٤ :

د« یا(or)» ترنه یا دیسجنکشن Disjunction (لاتین: ټاکنه یا پریکړه) Alternative الترناتیو یا د » یا « ترنه» دا په « یا » بیرته ورکړ شوې «جمله ترنه» تل ژوروالی ته راهڅوي: باید جوته شي، چې ترې تیریدنه یا صرف نظر په نه کیدونکی اوکه ترې نه تیریدونکی « یا » موخه ده۰ د دیسجنکشن یا د «یا»ترنی پیژند یا تعریف یواځنی دۍ او دا $\vee$ د یا ترننخښه ده.

د دیسجنکشن نخښه د دوه ویناو p اوq ترمنځ ځایول کیږي p$\vee$q او ویل کیږي p یا q او

په لاندې ډول څرګندیږي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

| p | Q | p\/q |
|---|---|---|
| w | W | w |
| w | f | W |
| f | w | w |
| f | f | f |

له دې پورته جدول څخه پوره جوتيږي، چې ديسجنکشن يا د « يا » تړنه p\/q يو داسې رښتياتابع (-بلواک يا- فنکشن) دی، کوم چې هلته او هلته رښتيا فنکشن رښتيا اخلي، کله چې کم له کمه د « يا » تړنې يو غړی د رښتيا ارزښت رښتيا ولري يا واخلي۰ که د ديسجنکشن دواړه غړي نارښتيا وي نو p\/q هم نا رښتيا دی۰ دا د رښتيا فنکشن کې د ځايونې « يا» څخه بل څه نه دي۰ يوه د «نه خونديکونې» يا « نه ځايونې» يا « په برکې نه نيونې» د « يا » وييينه يا افاده ده، چې دا په نورو ژبو کې په بل ډول مګر په پښتو کې « يا۰۰۰ او يا ۰۰۰» ليکل کيږي۰

بيلګه ( د « يا » تړنې ته):

د دوه رېښتينو ويناو د « يا» تړنه د A وينا: „ 7 < 3„ اود B وينا: « ۳ د ٦ پرويشونی دی» يوه رښتيا وينا A\/B ده : «۳ له ۷ کوچنی دی او د ٦ پرويشونی هم دی»۰

د دوه ويناو تړنه، چې مختلف ارزښتونه لري.

د A وينا „ 7 < 3 „ رښتيا او د B وينا: „ 7 =3 „ ( نارښتيا) ، نو A \/ B ده، چې 7 < 3 يا 7 = 3 دا وينا تړنه د رښتيا ارزښت رښتيا w لري۰

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

د دوه نارښتیا ویناو د « یا »( " Or" ) ترړنه:

د A وینا : "7 > 3 " او د B وینا: ۳ یو جوړه ګڼ (جفتت عدد)دئ یوه نارښتیا وینا A∨B ده:

« ۳ له ۷ لوي او نا جوړه ګڼ (طاق عدد)دئ»

الترناتیوAltenative یا انتیوالنخ Antivalenz ویناوې : دا د » یا « ویناترړنه باید د « یا ... او یا سره بدله نه شي، ځکه چې دا هلته هم نارښتیا ده، که چیرې دواړه ویناوی رښتیا وي۰

بیلګه : ( دوه الترناتیو ویناو ته ، چې رښتیا وي)

د وینا 7 > 3 او« ۳ یو لومړی ګڼ دئ» د الترناتیو په نامه داسې دئ « ۳ یا له ۷ کوچنئ دئ او یا یو لومړی ګڼ دئ» نارښتیا دئ۰

بیلګی : ( نه والي، کنجنکشن، دیسجنکشن ته )

یادونه: په لاندې w (Wahr) د رښتیا اوf(Falsch) د نارښتیا لپاره کارول شوي.:

ویناتړاو

| | | |
|---|---|---|
| A | $\pi$ پي تولګڼ دئ | f |
| B | $\pi$ ایراشنل ګڼ دی | W |
| C | صفر له پي$\pi$ کوچنی دئ | W |
| D | $\pi$ پي له دری کوچنی دئ | f |

(c) ketabton.com: The Digital Library



| | | |
|---|---|---|
| A | π ټولګې نه دی | W |
| C | π کوچنی برابر له صفر | F |
| A∨C | π ټولګې او له صفر لوي دی | f |
| B∧C | π ایراشنل او له صفر لوي دی | W |
| A∨C | πپي ټولګې یا له صفر لوي دی | W |
| A∨D | π ټولګې یا له ۳ کوچنی دی | f |

بیلګه : له دې بیلګی دمخه هغۀ فرمول دی

یا کتاب لولم او یا فلم ګورم۰ په دې بیلګه کی الترناتیو یا بدیل شته دی، یانې د » او یا « امکان شته۰ دا د » او یا « کارونه یا استعمال د خرڅلاو شیانو باندې باید بند وي۰ یانې دوه نرخونه باید ورنه کړای شي۰

دا لاندې فزیکي بېلګه ده، چې ګران لوستونکي دې پخپله هم ورته پام وکړي او ځیره دې یې په پام کې راولی۰ په شالت یا سرکت الجبر کې د کجنکشن یا د »او« ترنې« ریښتینوالی لپاره دوه پرلپسی(لړی) شالتونه ترل شوي دي،

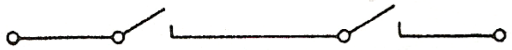


Bild 7.1

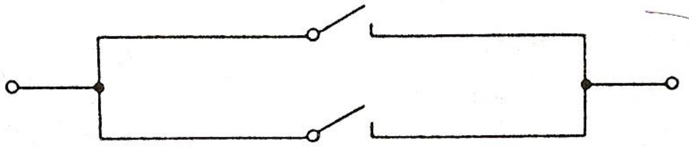


Bild 7.2

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

## کمپلکس رښتیابلواک یا – فنکشنونه

دا وروستۍبیلګه په ګوته کوي، چې داسې یوځای شوې ویناوې جوړیدۍ شي، په کومو کې چې له یو زیات تړوني موجود وي۰

که دا ساده وینا که چې «په تیاتر کې نن لوبه کیږي» په p پس له دې جملې کمپلکس جوړخت دا نه ترۍ تیریدونکې ( رښتیا - بلواک یا رښتیا فنکشن » نهp\/ p دۍ۰ د دې لپاره هم د رښتیاارزښت فنکشن ورکول کیږي۰ د رښتیا ارزښت لپاره p له دې څخه نهp یا p نه ( دا دواړه دې برابر ومنل شي) او بیا هم نهp\/p جوړیږي، چې جدول یې په لاندې ډول ورکړ شوی دۍ

د یوې وینا نه والی

| p | Pنه | p\/pنه |
|---|---|---|
| w | f | W |
| f | w | w |

لاس ته راوړنه یا نتیجه هکپک کوونکې نه ده یوه وینا نهp\/p تل رښتیا ده، بې له ځانګړي حالت او له دې خپلواک، چې p کوم رښتیاارزښت غوره کوي .

ویناسم اندیزې ویینې یا افادې، چې د هغې رښتیابلواک کټمټ یا identisch(identic) رښتیا دۍ( دا په دې مانا، چې که د ویناؤوښتونکې یا واریابلې ته هر رښتیاارزښت ورکړ شي یانې رښتیا یا نارښتیا تل د رښتیا ارزښت رښتیاغوره کوي)، وینا سم اندیزه قوانین بلل کیږي، یا ورته تاوتولوژي Tautologien

ویناسم اندیزې ویینې یا افادې، چې د هغو رښتیاارزښت بلواک کټمټ نارښتیا دۍ ( دا په دې مانا چې د متحولې یا اووښتونې په هره وینا ارزښت وینا نارښتیا ارزښت غوره کوي)

(c) ketabton.com: The Digital Library



کونترا-دیکتوریکي وینا بلل کیږي٠ورته ویناوې کونترادیکشنونه contradiction ( د دوه ویناوو مخامخوالی یا – تضاد)

بیلګه :

ربښتیاارزښت دې د وییني یا افادې نه(p\/q) لپاره وشمیرل شي په همدې وخت کې دې د نهp\/q ربښتیاارزښت هم وشمیرل شي او له بل سره دې پرتله شي.

جمله : ښایو، چې $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

$$
\begin{array}{l}
p...q....p \vee q....\neg(p \vee q)......\neg p...\neg q...\neg p \wedge \neg q \\
w...w......w.........f.............f.....f.........f \\
w...f.......w........f.............f......w........f \\
f...w........w........f............w.......f.........f \\
f...f........f.........w............w........w.........w
\end{array}
$$

داچې د مخ ته پراته جدول څلورم او اوم درځ یو په بل پریوځي یا یو د بل سره برابر دي، نو ویېني یا افادې $\neg(p \vee q)$ او $\neg p \wedge \neg q$ په څرګند ډول همغه ربښتیا بلواک یا –فنکشنونه دي. دا په دې معنا چې ،، جملې: دا نارښتیا ده، چې p یاq ،، او ،، نه q او نهp ،، همغه ربښتیا - ( او په دې ډول همغه نارښتیا-) شرایط لري، که دp اوq په ځای بلې یوې لیدونکي جملې ځای نیولی وي. دا ډول دوه وینا تړاو -وینا تړنه ) او تل همغه ارزښت ورکوي.

که په دې عملیو کې نوکان ځا په ځای شي، نو د عملیې ارزښت طبعاً همغه نه پاتیږي، لکه د بې نوکانو عملیې.

## ایمپلیکیشن implication (لاتین: وررا ګډول، خورول):

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

که دوه ويناوې د خپل تړاو له لارې« که۰۰۰، نو سره تنظيم يا ترتيب شي اپيليکيشن سومبول=> چې دا سومبول د دواړو ويناو Aاو B ترمنځ ولاړ دئ: او دا مانا لري:

که A نو B يا په همديډول «له A څخه B لاس ته راځي» وينا A ته پريميس Prämisse ( لاتين نيونه (فرضيه) وايي او وينا B ته کونکلوزيون Konklusion ( لاتين: پاي لاس ته راوړنه ) وايي۰ د دوه ويناو ايمپليکيشن ټيک هلته نارښتيا دئ، چې پريميسس رښتيا او کونکلوزيون نارښتيا وي۰ په بل ډول رښتيا دئ۰

د دوه ويناو لاس ته راوړنه يا تعقيب د لاندې جدول له لارې يواځنی څرګنديدی شي

د لاس ته راوړنې يا ايمپليکيشن يا پسې راتلنی، په ځان پسې لرنې سومبول =>

| P | q | p=> q |
|---|---|---|
| w | w | w |
| w | f | f |
| f | w | w |
| f | f | w |

دلته داسی يوه تړنه لرو، چې له دوه برخه ويناو A او B ټيک هلته يو نارښتيا يوځاي شوې ويناچې په p=/>qسره ښايو)۰

کله چې لومړ ىبرخه وينارښتيا او دومه برخه وينا نارښتيا وي په کمپيوتري يا پروګام ژبه کې داسی ويل کيږي: If….., then…..

کومې ژبنۍ افادې يا ويينې په دې رښتيا فنکشن بيرته اړول کيږي. بيرته يا په څټ

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

راګرځیدلی شي. په ښکاره ډول د بیلګې په توګه جمله: که پسرلی لوبه وګټي، نو ماښام د تلویزیون کتلو ته کورته راځي.

ناریښتیا ده، که د جملې لومړۍ برخه ربښتیاوي او دویمه نارښتیا. که په جدول کې برخه جملو ارزښتونه لکه د بیلګې په توګه د جدول لومړۍ همداسې څلورمه کرښه سره یو د بل پرتله شي(که دواړه برخه جملې رښتیا همداسې نا رښتیا وي) پرابلمونه نه پیښوي، په دې حالت کې ټوله وینا رښتیا ده، که لومړۍ برخه وینا نارښتیا او معکوس دویمه برخه ربښتیاوي، نو په دې حالت کې به د بیلګې په توګه جمله نارښتیا ونه لیدل شي( که پسرلی لوبه ونه ګټي او سره له دې هم تلویزیون لیدلو ته راشي)، نو بیا د دوه ارزښتوالي پرینځیپ له مخې یواځې دا ارزښت ،، رښتیا،، باقي پاتې کیږي. د پورته فنکشني پوره والي له مخې په ګوته کوو، چې هم $\neg p \vee q$ او هم $\neg(p \vee \neg q)$ ټیک بیرته بیا(بیرته) د ایمپلیکیشن د رښتیا فنکشنونه ورکوي.

په بل ډول افادې یې: q که p، او یا هم p ، د q لپاره پوره کیدونکی شرط دی( په بل ډول یې: qد p لپاره اړیین شرط دی)

ورته والی :یوارزښتوالی(برابرارزښتوالی ) Äquivalent

که دوه وبناوې qاو p خپله ترڼه په » ټیک هلته ، که » په هم دې ډول « هلته او هلته، که» تنظیم کړي، دې ته ورته والی یا ایکویوالنت وایي۰ د ایکویوالنت سومبول دی ≈ د دواړو ویناو pاوq ترمنځ دا سومبول پروت دیq ≈ p په دې مانا، چې p ټیک هلته که q ۰ ایکویوالنت سومبول یې په دواړو خواو ایمپلیکیشن لري: له p څخه q لاس ته راځي او له qڅخه p

د دوه ویناو ایکویوالنت ټیک هلته رښتیا دی، که دواړه ویناوې رښتیا یا دواړه ویناوې نارښتیا وي۰

دا شي څرنګوالی یا شي حالت په لاندې جدول کې روښانوو:

(c) ketabton.com: The Digital Library



| p | q | P⇔q |
|---|---|---|
| w | w | W |
| w | f | F |
| f | w | F |
| f | f | W |

سیده او مخامخ یا په ښځ دي په دي مانا وي، چی له p څخه q لاس ته راځی او په ښځ، یا نی له q څخه p لاس ته راځی۰

۱ ۰ ۳ د وینابلواکو یا ـفنکشنونو ترمنځ اړیکي

د دوه ویناو ترنه سم اندیزه یا منطقي برابرارزښته بلل کیږي، که د ویناو رښتیاارزښت د ترنویناارزښت سره یو په بل وخوري یا یو بل سره برابر شي۰ دا د یو وینارزښت جدول له لارې څرګندیدی شي۰ ومو لیدل، چی ایکویوالنت په دواړو لورو لاس ته راوړنه یا ایمپلیکیشن دیۍ۰ په لاندي جدول کی به وګورو، چې دریم او شپږم درځونه، متې یا ستنی څنګه یو بل سره ځان نیسی یا ګورو، چی سره یوارزښته دي۰

| p | q | p ⇔ q | p=>q | q ⇒ p | (p ⇒ q) (q ⇒ p) |
|---|---|---|---|---|---|
| W | w | w | w | w | ...........W |
| *w* | *f* | f | f | *w* | .........*f* |
| F | *w* | *f* | *w* | *f* | .........F |
| *f* | *f* | w | w | *w* | .........*w* |

ورته والی اړیکی د ورته والی یا ایکویوالنت سومبول باندې هم ښوول کیږي

$$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)(q \Rightarrow p)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



--------------------------------------------------------------------------------

دا ورته والي ويناتړنه موږ ته دا اجازه راکوي، چی یو بل سره بدل کړو یانی د یوه ځاي د بل سره بدل کړو٠ له دې ځخه پیچلو تړنو کې لکه د شالت الجبر کې کار اخستل کیږي٠

د دې ورته والی ويناتړنې غوره بیلګه د،،دي مورګان،، قاعده ده De Morgansche Regel

$$(1)......(\overline{p \wedge q}) \Leftrightarrow (\overline{p} \vee \overline{q})$$
$$(2)......(\overline{p \vee q}) \Leftrightarrow (\overline{p} \wedge \overline{q})$$

د کنجنکشن او دیسجنکشن لپاره دیستریبوتیو قانون:

(3)   [p/\(q\/r)]   □   [(p/\q) \/ (p/\r)]

(4)   [p\/(q/\r)]   □   [(p\/q) /\ (p\/r)]

## ۱ ٠ ٤ وينافورم يا - بڼه او کوانتورونه

وينا سم اند په  لاندې ډول ساده تولیز کیدی شي٠ د بیلګي په توګه که مختلف شیان همغه خویونه ولري، نو ضرور ده، چې دا فورمال وویلي - -  یا افاده کړای شو: دلته د ويناو پر ځاي د وينافورم ځخه خبري دي، یا غږیږو٠ دا داسی ژبنی وییني یا افادې دي، چې د شیانو لپاره واریابلی یا اووښتوني لري او لومړی د مناسب انفرادې ځاي پرځاي وروسته یوه وینا شي٠ بیلګي یی په لاندی ډول دي

لومړی   :  xپر دوه ویشونی دئ »

دویم : » z یو هوار ځلورګوډی( ځلورضلعي) » دئ٠

دریم : «u  له v  ځخه لوي » دئ او داسی نور

(c) ketabton.com: The Digital Library



ترهر ځاي پرځاي کولو وروسته ربښتیا یا نارښتیا وینا لاس ته راځي. که په دویم کی دz پرځاي «ډیرګوډی» (کثیرالاضلاع) ځاي پرځاي شي، نو یوه ربښتیا وینا لاس ته راځي.

که په لومړي کیx د7 پرځاي ځاي پرځاي شي، نو یوه نارښتیا وینا لاس ته راځی. دریم یوه اړیکه(ریلیشن( ده، چې هلته د انفرادیو د ایښولو ترتیب هم یو رول لري. دلته که د تورو پر ځاي ګڼونه ږدو، نو هلته دا ربښتیا وینا ده که د لومړي توري پرځاي ستر ګڼ ځاي پرځاي شي.د فورمال سم اند په ژبه د پریدیکات په شکل.( له دې امله دي د سم اند برخی ته د پري دیکات first-order logic سم اند یا منطق وایي.

بیرته داسی لیکو P(x), Q(z), R(u,v)

یوه بله کارونه یا عملیه شته، چې له وینا بڼې څخه وینا جوړوي. چې کوانتیفیکیشن Quantifikationبلل کیږي. دا ویناهغه وخت منځ ته راځي، چې ټول د وینا بڼی افراد همغه خویونه ولري، چې ټولوینا (Allaussage) ورته وایو.یاچې په پوښتل شوي چاپریال کې داسې افراد شته وي، چې همغه خویونه ولري، دې ډول وینا ته موږ د شتون یا موجودیت وینا یا Existenzaussage وایو. زموږ په بیلګه کې یی استعمال لاندې را په ګوته وکي

څلورم : (پیداینتی یا طبیعي) ګڼونه یا اعداد شته، چې په دوه ویشل کیږي

پنځم : ټولې څلوری (مربع) هوارې ډیرګوډی یا کثیرالاضلاع دي.

د ټولکوانتور یا ټولوینا لپاره نخښه∀

د شتون- یا موجودیتکوانتور یا شتونوینا لپاره نخښه ∃

یادونه : د ټولکوانتور لپاره نخښه د سرچپه A په څیر ده او د شته والي کوانتور لپاره نخښه د په څټ E په څیر ده په پام کې دې وي، چی د کوانتورونو ورکونې وروسته اووښتونې ( ویاریابلی یا مجهولی) ورکول کیږي.

څلور ۱ : $\exists x \in P(x)$

داسی يي لولو، چی یوx په P(x) کې شته

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

پنځه ۱ : $\forall z \in Q(x)$

دا داسی لولو: د ټولوz لپاره ، چې په Q(x) کې پروت دئ ( یا د ټولو۰۰ له ۰۰۰ څخه )

دا سومبول $\exists$ دا مانا لري،چې« کم له کمه یو ۰۰۰ شته»د وینابنې او په دې پورې اړوند واریابلو یا اووښتونو ډیریو جوړه، د دې سومبول سره یوه د« شتون- یا موجودیت وینا» ورکوي، په نامه د اووښتونو ساحه یا ډیری کې، په کوم کې چی کم له کمه یوه داسې اووښتونې ځاي په ځایونه شته وي کومه چې وینابڼه رښتیا وینا کوي۰

بیلګی ( د رښتیا شتون - موجودیت ویناوي)

اول - $\exists x \in R: x+1=0$

( لوستل : یو داسی رییل ګڼ یا عدد x له( په) R (کې) شته ،د کوم لپاره چې$x+1=0$ باور لري) دلته x دا مانا لري، چې x د رییلګڼډیری یا ریل ا عدادو سټ R توکی دئ او $\in$ په دې مانا دی، چې توګي له ۰۰۰ دی۰

دویم : $\exists x \in R:$

$$x^2 + 4x = 0$$

(لوستل: یو x له(په) R څخه(کې) شته د کوم لپاره ، چې $x^2+4x=0$ باور لري)

دریم : $\exists x \in R: \quad x^2 - 4 = 0$

( په دې جمله کې حتی دوه رییلګڼونه شته دی، چې د هغې لپاره $x^2-4 = 0$ باور لري

: (2، -2)

جمله ( د یوې شتونوینا یا موجودیتوینا نه والی یا نفی)

$$\exists x \notin R: x^2+1=0$$

لوستل: داسې رییلګڼ x نه شته، د کوم لپاره چې برابرون $x^2+1 = 0$ باور ولري

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

داسې وينابنې هم شته، د كومو لپاره، چې د اووښتونډيرۍ يا واريابلډيرۍ ټولو توكو لپاره رښتيا وينا شي٠

بيلګه: وينابنه « x په 2 ويشونی دی » د جوړه ګڼونو هريوه لپاره رښتيا ارزښت لري په

دا سومبول $\forall$ په دې مانا دی، چې « د ټولو x لپاره» د وينابنې او په همدې پورې اړوند د وينا متحولو ډېرئ يا سټ (ويناااووښتونډيرۍ يا واريابلډيرۍ) ترنه له دې سومبول سره يوه Universalaussage يونيورزالوينا يا ټولوينا منځ ته راځي٠ په دې مانا چې د دې متحولو ډېرئ(اووښتونډيرۍ) هر توكی لپاره د وينابنې څخه يوه رښتيا وينا جوړيږي٠

جمله : (دUniversalaussage يونيورزال- يا ټوليزې وينا يا ټولوينا لپاره

$$(1)........\forall x \in G : 2 \mid x$$

( د ټولو جوړه ګڼونو (جفت اعدادو)لپاره باور لري، چې x په ۲ ويشونی دی )

$$(2).......\forall \in R, x^2 > x$$

( د ټولو رييلاعدادو x لپاره, كوم چې له يوه لوي وي باور لري $x^2 > x$ )

جمله : ( د نارښتيا ټوليزې وينا لپاره )

$$\forall x \in R : x^2 > x$$

دا وينا نارښتيا ده، ځكه چې دا د $1 \leq x \leq 0$ لپاره باور نه لري، پس دا وينا د ټولو ريل عددونو لپاره باور نه لري٠

۱ ۰ ۵ اړين – يا ضروري- او پوره كيدونكي شرطونه

د ايمپليكيكشن سومبولA=>B («كهA نوB » « له A څخه Bلاس ته راځي»)يا په بل ډول : كه A باور ولري، نوB هم باور لري»

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

په شمیرپوهنه کې ځانګړي فرمولونه شته٠

الف ) « A د B لپاره پوره کیدونکی شرط دی»

ب ) « B د A لپاره یو اړیین یا ضروري شرط دی»

فرمولونه الف ) وايي، چې د A رښتینوالی د B رښتینوالی ځان پسی لري یانی له آ څخه ب پوره کیږي یا له یوه څخه وبل ته رسیږو یا د A شرطونه د B د شرطونو پوره کیدنو لپاره نیونه(فرضیه) ده او ب شرط پوره کیدنه اړیینه یا ضرور ده، چی آ پوره شي٠

بیا : وینا باور لري٠

د B وینا د باور لرلو لپاره دا پوره دی یا پوره کیدونکی دی یا بسیا کوي، که د A وینا باور ولري

بیلګي د پوره کیدونکو شرطونو لپاره:

۱ – وینا A : « ګڼ n پر ٦ ویشونی دی»

وینا B : « ګڼ n پر ۳ ویشونی دی»

$$A => B$$

د دې لپاره پوره کیدونکی شرط دی یا بسیا کوي، چې یو رییل ګڼ n پر ۳ ویشونی دی، که دا پر ٦ ویشونی وي٠
که n پر ٦ ویشونی وي، نو پر ۳هم ویشونی دی ٠ دا نو تراوسه دا مانا نه لري، چې ضرور دې ګڼ n که پر ۳ ویشونی وي، پر ٦ دې هم ویشونی وي٠ د بیلګي په توګه ګڼ ۹ پر ۳ ویشونی دی ، مګر په ٦ نه دی ویشونی٠

۲ - وینا A : "$n > 7$„

وینا B :وي دې $n > 6$:

$$A => B$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

د دې لپاره دا پوره کیدونکی دئ، چې یو رییلګې ن له ٦ څخه لوي دئ٠ که اړیکې، چې ن له ٦ لو دئ، باور ولري

داسې رییلګنونه هم شته، چې له ٦ څخه لوي دي، مګر له٧ څخه لوي نه دي٠ د بیلګې په توګه ٥ ،٦، یا شپږنیم

د ب) فرمولبندي وایي، چې وینا ب باورلرل غوښتونکی یا اړیین یا ضرور دئ، د دې لپاره، چې وینا A باور ولري٠

که وینا B باور ونه لري نو وینا A هم باور نه لري ٠

بیلګی د اړیین( ضروري ) شرطونو لپاره:

١ – د دې لپاره، چې یوګې n پر 6 وویشل شي، اړین(ضرور) ده، چې دا ګې پر3 ویشونی وي٠ یو ګې، چې پر3 نه وي ویشونی، نو پر ٦هم ویشونی نه دئ٠

٢ - ویناA : » څلور ګوډی یوه څلوری یا مربع ده«

وینا B : » څلور ګوډئ څلور ولاړ کونجونه لري« A => B

د دې لپاره ضرور، چې یوه څلورګوډئ یوه مربع(څلوری ) ده دا خویونه دي، چې څلور ولاړ کونجونه ولري، که ټول ګونجونه یې ولاړ نه وي، نو مربع یا څلوری نه ده که یوه څلورګډی څلور ولاړکونجونه ولري اړین نه ده، چې څلوری یا مربع دې وي٠

د برابروالي یا برابرارزښتي ( ایکویوالنت) سومبول«

A<=> B

(په دواړو لورو ایمپلیکیشن) لپاره په شمیرپوهنه کې هم فرمولبندي شته: دا وایي، چې A دB لپاره یو ضروري او پوره کیدونکی شرط دئ٠ « دا وایي، چېA ټیک هلته باور لري، کله چې B باور ولري

(c) ketabton.com: The Digital Library



بیلګی : د پوره کیدونکی او ضروري شرطونو لپاره

۱ – ویناA : « ګڼ یا عدد n پر ٦ ویشونی دئ»

وینا B : « عدد n پر ۳ او ۲ ویشونی دئ»

A <=> B

د دې لپاره ضرور او پوره کیدونکې دی، چې: n پر ٦ ویشونکی دئ، که دا عدد پر۳ او ۲ ویشونکي وي٠

۲ – وینا A : » څلورګوډی یا څلورضلعي یوه څلوری یا مربع ده«

ویناB : « څلورګوډی څلور ولاړ کونجونه لري او څلو برابر اوږده اړخونه یا ضلعې»
A<=>B

ددې لپاره، چې څلورګوډی یو مربع دئ ضرور او پوره کیدونکی دا خویونه دي، چې څلور ولاړ کونجونه او څلو برابر اوږده اړخونه( ضلعې ) ولري٠

۱ ٠ ٦ د شمیرکلمو یا ویو(لغاتونو) شمیرنیز مفهوم( ترې پوهیدنه)

پیژند ( تعریف ) څه شی دئ؟

د کلیمی ټاکنه ده، چې ټیک ټاکلي او له مخامخوالی(تضاد) ازاده وي٠ په عامو خبرو کی کله که کلیمی راځي ، چې په مختلفو اشکالو ترې ځانګړي ماناوي اخستل کیږي، خوپه شمیرپوهنه کې داسې نه ده٠

د شمیرنی ټاکنی یا پیژندونه (تعریفونه)د ټیک څرګندې پوهنې یوه نه پریښوونکی سمبال اله ده، یانې ترې تیریدل نه شي کیدای٠

(c) ketabton.com: The Digital Library



## جمله څه شی دی ؟

ټولې ربښتوني ویناوې په شمیرپوهنه کې جملې بلل کیږي، چې د پیژندنې لپاره ښوونې یا ثبوت ته اړتیا لري۰

## اکسیوم Axium څه شی دی؟

بې ثبوته ربښتینې وینا ته اکسیوم وایي

شمیرپوهنیزې یا د ریاضې جملې زیاتې نیونې( فرضیې) او ثابتول( غوښتنه،جوته ونه یا ښوونه) په بر کې- یا خوندي لري۰

که دا وینا داسې وي، نو پس داسې به هم وي۰ دلته که دا وینا داسې وي نیونه یا فرضیه ده او نو داسې هم ده۰ دا غوښتنه ده، چې باید ثبوت یا وښوول شي۰

اکسیوم : ۱ طبیعي عدد دی ( پیانو Peano)

: ټکی هغه دی، چې پر ویشونی نه وي یانې په ټکی ویشل بند دي۰ (Euklid)

: حتمي پیښه د پیښې امکان ۱ درجه لري۰

جمله: که درېګوډی ولاړکونجیز وي، نو( پس) د پیتا ګوراس (pythagoras ) درسې جمله باور لري

: یو لومړی ګڼ، چې له دوه لوي وي، باید ناجوړه( طاق) وي

: په اخره جمله کې نیونه(فرضیه) ده ( که یو پریم عدد له ۲ لوي وي۰۰۰) او ثبوت یې ( هر له دوه لوي عدد په دوه ویشل کیږي پس لومړی ګڼ نه شي کیدی، نو دا تل ناجوړه یاطاق دی)په څتوالي یا تضاد کې پیژندل کیږي۰
تل داسی نه ده، چې د جملې د ربښتینوالی ځخه دې د جملې په څتوالی یا تضاد هم ربښتیا وي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

لکه:

جمله:   که ٦٪ پس ٢٪ هم   ( ربښتیا)

جمله:  که  ٢ ٪  پس ٦٪ هم  ( ناربښتیا)

۰۰۰۰۰تیک هلته ، چۀ که۰۰۰۰یوځاي راوړي

بیلګه : که چیرې غبرګ اړخیز کې هر دننني کونج ۹۰ درجی وي، نو دا ولاړکونجیز(قام الزاویه) دئ۰

په څټ : که غبرګ اړخیز ولاړ کونجیز وي، نو دننني کونجونه ۹۰ درجی لوي دي۰

یوځایراوړل :

یو غبرګ اړخیزتیک هلته( هلته او هلته یا بیا او بیا یا یواځنې او یواځنې ټاکلی یا یواځنی ټاکلی او په څټ ) ولاړکونجیز دئ، کله چې دننني کونجونه ۹۰ درجی لوي وي۰

۱ ۰ ۷ برابرونونه او نابرابرونونه (مساوات او نامساوات)

پیلبیلګه:

لمسی ، پلار او نیکه په ګډه ۱۱۳ کلن دي۰ پلار د ځوي د عمر یوکال کم اوه ځله عمر لري او نیکه د پلار د عمر له دوه برابره څخه ٦ کاله نور هم زیات عمر لري۰

پوښتنه : له دوي څخه هر یو څو کلن دئ؟

د ځوي عمر په x سره ښایو، نو د پلار عمر 7 x-1 دئ او د نیکه عمر 2(7x-1)+6 کاله کیږي، چی د دې ټولو زړښت وختونو زیاتون یا جمع بیا ۱۱۳ کاله دئ یانی :

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

$$x+7x-1+2(7x-1)+6 = 113$$

يو ډول ترمونه رامنځ ته کيږي او ساده کيږي:

$$x+7x-1+14x-2+6= 113 \quad \vee \quad 22x +3 = 113$$

په کينې ۲۲ ځله د x ارزښت چې ۳ په ورزيات شوي او دا له ۱۱۳ سره برابر دی

نو دا ګڼې ۲۲ ځله x بيا ۱۱۰ کيږي: $22x = 110$ او د x ساده ارزښت ۲۲ – مه برخه د ۱۱۰ ده ياني: په دې لاس ته راوړني سره زوي ٥ کلن پلار ۳٤ کلن او نيکه ۷٤ کلن دی۰

که ترمونه $T^\wedge$ او$T^\circ$ د برابروننخښنی = باندې يو له بل سره وتړل شي، نولاندې برابرون پيداکيږي: $T^\circ = T^\wedge$ ۰

که چيرې ترمونه په دې نخښنو ≤ , ≥ , < , > او(نابرابروننخښه =|) يو له بل سره وتړل شي يو نابراون منځ ته راځي.

برابرونونه او نابرابرونونه چې ناټاکلي يا مجهولو سره يوځاي شي، هغې ته د وينافورم يا نوره هم ښه وينا بڼه ويل کيږي۰

دا يا رښتيا يا نارښتيا وينا کيدی شي۰ که ناټاکلي، چې اوښتوني يې هم بولو( د بيلګې په توګه z , x , y ) پر ځاي د بنسټيزيری ګڼونه وليکل شي۰ په برابرونپوهنه کې له پيژند – يا تعريفيدېری ښخه هغه ګڼونه غوره دي، چې د ورکړ شوي فورم يا بڼې يو برابرون يا نابرابرون رښتيا وينا کړي۰

د يو برابرون يا نابرابرون (مساوات يا نامساوات) هر عدد ځاي پرځاي کول، چې وينابڼه پيژند - يا تعريفيدېری پورې اړوند وي او دا وينا ريښتيني کوي، اوبيديری يا حلديری L کې پروت دی يا د برابرون يا نابرابرون په ډکوونکو ( پوره کوونکو) ډيريو پورې تړلی برابرون ته ، چې د ټولو ځاي پرځاي کولو لپاره ريښتوني وينا ورکوي کټمټ يا (identisch, identic) وينا وايي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library



--------------------------------------------------------------------------------

بیلګې :

الف ) $5x= 4$ د $x = 0,8 = 4/5$ لپاره ربنتيا وينا ته ځی : یانې

$5.0,8=4$ نو $L=\{0,8\}$

ب ) $3x^2 = 48$ د $x = 4$ لپاره او $x = -4$ لپاره ربنتیا وینا ته ځې

یانی $3.(-4)^2 = 48$ څخه لاس ته راځی او په څټ $3.4 = 48$ پس- $L = \{ -4;4\}$

۲ – نابرابرون الف) $2x > 1 \Rightarrow L= \{x \mid x> -1/2 \}$

ب ) $x < 3 \Rightarrow L = \{ x \mid x > -3 \}$

۳ – کتمتوالی : الف ) $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$

ب ) $(a+b)^2 = a^2+b^2 +2ab$

دوه برابرونونه یا نابرابرونونه، چې په خپل پیژندډیرۍکې سره برابر وي( یا یو پربل وخوري،

یانې یو د بل پرځاي ایښول کیدی شي) او همغه اوبی- یا حلډیرۍ ولري ایکویوالنت (Equivalent) یا «ځاي پرځاي کول برابر» یا ورته بلل کیږي٠

یادونه : دا لاندې د جدول په ډول دی، له پورته له ښي و کيڼ لور ته په درځ یانې ولاړ درځ لوستل کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

| | نابرابرون | براون |
|---|---|---|
| ۱ ) وینافورم کې کیدی شي،چې خواوې سره بدلې شي | $T° < T^ \quad T^ > T°$<br>$2x < 6 \qquad 6 > 2x$ | $T°=T^ \quad T^ = T°$<br>$3x=5y \qquad 5y = 3x$ |
| ۲ ) که وینافورم په دواړو خواووهمغه ترم زیات یا کم شي او د یوې ورزیات ترم پیژنددیرئ خوندې وساتل شي یا ځاي کړي یا تغیر ونه خوري۰ مخامخ یا کیڼ لوربیلګه کې تفریفدیرئ تغیر خوړلی | $T^ < T° \quad =>$<br>$T^ \pm T° < T° \pm T^$<br>$3y < 4x \quad \Leftrightarrow$<br>$\Leftrightarrow 4y \pm 2x < 4x \pm 2x$ | $T^ = T° =>$<br>$T^ \pm T° = T° \pm T^$<br>$2z = 8 \quad =>$<br>$2z \pm 3 = 8 \pm 3$ |

پر څټ بیلګه

$2z=8 \;|=> \; 2z+3-z=8+3-z$

دا چې $z=4$ دې نوي ورزیات شوي

ترم $3-z$ نه دئ تعریف یا پیژندنه

لري، ځکه چې $3 - z$ یو پیدایښتي یا طبیعي ګڼ نه دئ

۳ ) د وینافورم دواړه $T^=T° \Leftrightarrow \quad T^.T > T°.T \quad T^ < T° \Leftrightarrow$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

| | | |
|---|---|---|
| اړخونه کیدی شي چې | T^ < T° ⇔ | T^.T =T°.T |
| له همغه مثبت ترم سره | T^:T>T°:T | ⇔T^:T = T° : T |
| ځل او یا په همغه ترم | T > 0 که | T > 0 که وي |
| وویشل شي | 3y -12 < 30z -90 | 4x+2 = 10x-6 |
| | ⇔ y – 4 < 10z -30 | ⇔2x + 1 = 5x -3 |
| | ⇔ 4y -16 < 40z -120 | ⇔ 2xc + 10 = 50x-30 |
| ٤) د یوه برابرون | T^ <T° ⇔ T^.T > T°.T | T^=T° ⇔ |
| دواړه خواوې کیدی شي، | T^ < T° | T^.T =T°.T |
| چې له یوه منفی ترم سره | ⇔T^:T = T° : T | ⇔T^:T>T°:T |
| ځل شي یا دواړه خواوې په | T < 0 | T < 0 |
| همغه ترم وویشل شي۰ | -2y < -4 | 3x = 12 |
| که په دې فورم کې | ⇔ y> 2 | ⇔-9x= -36 |
| نابرابرونونه وي نو د | ⇔ 10y > 20 | ⇔ x = 4 |

برابرون لورې بدلیږي، یا نخښه بدلیږي

یادونه :

په تولیزه، چې په کتابونو کې لیکل شوي، ترمونه T او T یو دوه په لاندې توګه د ایندکس سره په نخښه کوي: $T_1, T_2$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

۱ . ۷ . تمرنونه:

۱ – په ۱ . ۳ –مه برخه کې د رښتیا ارزښت ورتو الی له (۱) څخه تر (۴) پورې وښایاست.

۲ – د رښتیا ارزښت جدول له لارې وښایاست، چې لاندط ویناتړاو منطقي مساوي ارزښت دی.

الف - ( A⇔B) او (B⇔A)

ب- (A=>B) او(AvB)

(c) ketabton.com: The Digital Library

## ۲ ۰ ډيرۍ پوهنه Die Mengenlehre, the set theory

ډيرۍ پوهنې يا سټ تيوري بايد خپل ځاي په شميرپوهنه او همدا ډول په نورو پيداينتي- يا طبيعی پوهنو کې نيولي وي، نو له دې امله د لنډ تير وخت را په دې خوا په پرمختللو هيوادونو او اوس هم په افغانستان کې د ښوونځيو په ليکلوست کې پيل شوه، ځکه چې بي له ډيرييپوهنې يا سټ تيوري شميرپوهنه بې مفهومه ده او ناشونې۰ دا به له دې ليکنې څخه همدا اوس څرګنده شي، چې پيداينتي يا طبيعي ګڼونه يا - اعداد او هرڅه د ګڼونو په څيره کې ، چې موږ ته څرګند وي هغه ټولې ډيرۍ يا سټ دي او بل څه نه دي۰

ډيري پوهنې (سټ تيوري)په پرمختللو هيوادونو کې هم د شلمې پيړۍ په دويه نيمه کې د ميندو او پلرونو لپاره ستونځې پيدا کړې، ځکه، چې دوي د ډيرۍ پوهنې سره بلد نه وو او د خپلو کوچنيانو سره يې مرسته نه شوه کولی۰

د ډيرۍ کلمه له عدددونو يا ګڼونو پخوانۍ ده، که څه هم پخوا انسانانو په خپله خوښه نه ښووله لکه اوس۰

(c) ketabton.com: The Digital Library



په تراوس ورسره بلد ډول هم سټ يا ډېرئ پيژندل کيږي، لکه د ښوونځی نجونې او هلکان، يا په يوه ټولګی کې ميزونه او چوکی، يا لکه هغه نيزوړي، چې نيز راوړي او د سپين په پټي کې يې ډيرئ ډيرئ اچولي يا د هسکې مينې د ښوونځي په لسم ټولګی کې د زده کوونکو، کتابونو، کتابچو پنسلونو، څوکيو او ميزونو سټ يا ډيرئ.

د ډېرئ پوهنې کلمه: موږ په افغانستان کې هم د ډيرئ له کليمې سره اوس بلد شوي يو که څه هم تربيلو بيلو پرديو نومونو لاندې، چې زما په اند به زده کوونکو او ښوونکو ته يواځې ذهني غوره والي لري، زه غواړم، چې د ډيرئ څو مختلف پيژندونه يا تعريفونه ورکړم، چې ښه مو ورته پام راوګرځي، دا له دې امله هم، چې د ډيري پوهنې ( سټ تيوري) غوره والی ته مو نور هم پام راوګرځي.

ډيرئ پوهنه د شميرپوهنې سټه جوړوي او د شميرپوهنې ټولې څانګې په ډيرئ پوهنه ودانې دي. نن شميرپوهنه بې له ډيرئ پوهنې داسې وده نه شي کولی او سټه يې وزي.

پيژند ۲ ۰ ۱

الف : ډيرئ يا سټ د ټاکلو شيانو يا کلمو ټولګه ( يوځايوالی، مجموعه) ده، چې پخپله خوښه د يوې ټاکلې بنسټډيرئ يا بنسټ سټ څخه ، چې د پيژندلشويو اصولو يا کرکتريين له مخې ټاکل شوې وي

ب : د الماني شميرپوه کانتور( George Cantor 1845 – 1918 ) پيژند:
زموږ د خيال يا ليد څرګند ټاکلو ، ټيک يو له بل توپيرکيدونکو شيانو ټولګې ( يوځايټولولو يا مجموعې ) ته ډيرئ وايي او هر شي ته، چې ډيرئ يې جوړه کړې يا ډيرئ ترې جوړه شوې وي، د ډيرئ – يا سټ توکی وايی.
( Set and elements of set ډيرئ او د ډيرئ توکی)

پ : د مختلفو شيانو ټولګې يوه يوون يا يووالی ( واحد Einheit, unite) ته په

(c) ketabton.com: The Digital Library



شمیرپوهنه کې ډیرئ وایی

یادونه : د واحد لپاره، چې تراوسه ورسره بلد یو یوون یا یووالی ښه نومه ونې دي۰ دا که څو واره وویل شي، نو باورلرم، چې ورسره بلدیږو۰

ت : څرګند شیان د ګډو نخښو پربنسټ، چې تر څیرنې لاندې نیول کیږي او د دې نخښو له امله یوځاي ټولیږي یا ټولګه جوړوي، ډیرئ یا سټ تشکیلوي۰ ګډې نخښې کیدی شي ښکلا، کوچنیوالی او داسې نور وي۰

یادونه: د ګرانو لوستونکو دې دي ته پام وي، چې په پورته پیژندونو کې یې غوره او د پام وړ پیژند یاتعریف د جورج کانتور پیژند دی.

بیلګه :

ګڼونه یا عددونه، نومونه، او توري کیدی شي د ډیریو بیلګو په توګه راوړل شي۰

ګورو، چې د ډیرئ یا سټ کلمه په شمیرپوهنه کې بل ډول ده لکه په ولسي ژبه کې، چې دلته ډیرئ د څنو شیانو زیات یوځاي کول موخه ده، د ځانګړو شرایطو لاندې.

په شمیرپوهنه کې ډیرئ په لویو لاتین تورو لیکل کیږي لکه A,B,.. او یا M,N,
X,Y,.... د ډیریو توکي د لاتین په کوچنیو تورو لیکل کیږي، لکه a,b,c,...
او m,n,x,v,...

د دې لپاره، چې وپوهیږو، چې ایا توکی a د ډیرئ A توکی دی که نه نو لیکو: $a \in A$

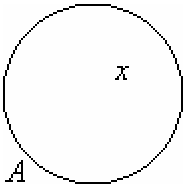
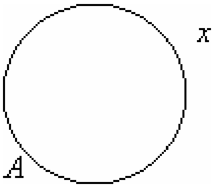
په پورته کې توکی a د ډیرئ A توکی دی.

که a د A توکی نه وي ، نو لیکو: $a \notin A$ دلته a د ډیرئ A توکی نه دئ

دا پورته لینکدود له ښی وکیڼ لور ته هم لیکلی شو، چې پرلپسی لړئ یې ساتلې پاتې شي۰ زه یې په څټ لیکنو سره لیکنیزې ستونځی لرم۰دا لاندې یې دیاګرام دی، خو توکي یې بل ډول لیکل شوي دي، چې ګرانو ستونکو ته به د پوهیدلو ستونځ پیدا نه کړي

(c) ketabton.com: The Digital Library



| | |
|---|---|
| <br>$a \notin A$<br>( a د A توکی دی ) | <br>$a \in A$<br>( a د A توکی نه دی) |

ډیرۍ A دې له a,b,c,d,e,f,g,h, توکو جوړه وي، چې په لاندې توګه یې لیکو

$$A = \{ a,b,c,d,e,f,g,h\}$$

ګورو، چې { } د ډیرۍ یا سټ نخښه ده

یادونه : دا د ډیرۍ کلمه موږ په افغانستان کې سټ set بولو ، چې انګریزي ده، په فارسي کې یې مجموعه بولي، چې ډیرۍ د شیانو مجموعه یا ټولګه ده او په الماني کې ورته مینګې Die Mengeوایي٠ هغه بنسټیزه خبره یې په پېژند یا تعریف کې ده، که موږ یې چې هرڅنګه وبولو، خو د یو بل څخه کره توپیرکیدونکو شیانو ټولګی ته ۰۰۰ وایو. د ټکو پر ځاي ، چې هر څه لیکی، خو موږ ګورو، چې په پښتو یې هغۀ مناسبه نوموه ونه ډیرۍ ده، دا د کوټې کوټې څخه یا راپنډ او داسې نورو څخه ماته ښه ښکاریږي او زموږ ولس د دې نامه سره بلد دی، چې په پوهنه او لا نور ښه په شمیرپوهنه کې باید وکارول شي٠ زه بیا په دې ټینګار کوم، چې دا خپل ، چې ما ټاکلی یا بل څوک یې که بل ډول بولی د انګریزي یا الماني یا بل پردي نوم څخه ښه او پوهوږ دی٠ د سټ مانا که په ډکشنري کی وګورۍ ،نو پوه به شو، چې له دې نوم څخه مو خپل د پښتو نوم ښه او مناسب دی. ګورووچې دا نوم اوس ژورنالستان هم زیات کاروي او وایي، چې ډېرۍ یا ډېرۍ خلکو.... وکتل.

(c) ketabton.com: The Digital Library



بیلګه ۲ ۰ ۱

الف ) $M_1$ ( لوستل M ایندکس ۱ دا به په لاندې نخښونه کې روښانه شي پام دې وي، چې (index(indeces ایندکش پیژند نخښې ته وایي) دې د لومړیو ګڼونو ډیر ۍ ( اعدادو سټ) وي، نو باور لري: $7 \in M_1, 8 \notin M_1$

ب ) $M_2$ دې د لاندې برابرونونو یا مساواتو د اوبیونو(حلونو) ډیرۍ وي

$$(x+1)(x-2) = 0$$

نو باور لري : $-1 \in M_2, 2 \in M_2, 1 \notin M_2$

بیلګه ۲ ۰ ۲ :

الف ) د مساوات $(x+1)(x-2) = 0$ حل ډیرۍ $M_2$ ده $M_2 = \{-1, 2\}$

ب ) د جوړه (جفت) عددونو یاګڼونو ډیرۍ $M_3$ ده $M_3 = \{0, 2, -2, 4, -4, ....\}$

ډیرۍ لکه، چې ومو ویل د توکو د خویونو له لارې هم څرګندیدۍ شي یا ورکول کیدۍ شي۰

M = { x | ۰۰۰ سره د خوویونو x}

(لوستل: M د ټولو x ډیرۍ ده له خویونو ۰۰۰۰۰ سره )

بیلګه ۲ ۰ ۳

الف ) { د ټولو x سټ ، چې هلته x یو لومړنی عدد یا ګڼ دۍ| M = { x

b ) M = { x | (x+1)(x-2) = 0 }

$c)..........M = \{x \mid x \in R, 0 \le x \le 1\}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



تشډيرۍ: ډيرۍ، چې کوم توکی ونه لري تشډيرۍ يا خالي سټ بلل کيږي او داسی يې ليکو: $\theta$ يا $\{\}=\emptyset$

دا دې د يوې ډيرۍ يا سټ سره، چې يوائی له صفر څخه جوړه ده، نه بدليږي يانې

$\{\} = \emptyset \neq \{0\}$

بيلګه ۲ ۰ ٤

$$\{x \mid x \in Z, x^2 + x - \frac{3}{4} = 0\} = \theta$$

ځکه، چې د برابرون يا مساوات $x^2+x-3/4 = 0$ حلډيرۍ

$\{x|x^2+x-/4= 0 \} = \{ 1 / 2 , -3/2\}$

کوم ټولګڼ يا تام عدد خوندي نه لري۰

ټولګڼونو پيژند ته دې پام وي، چې د راشنلګڼونو برخډيرۍ ده۰دريمه برخه دې وکتلشي

بيلګه ۲ ۰ ۵ : د ز۰ کال د دويمې نيمايي مياشتو سټ يا ډيرۍ په Ju , aug sep , ok,no, de سره ښايو او ليکو: A= { jul,aug,sep.ok,no,de}

نو داسې لرو يا نوره هم ښه داسی ليکلی شو: $jul \in A, jun \notin A$

دا په دې مانا، چې جولای د A توکی دی او جون د A توکی نه دی

بيلګه ۲ ۰ ٦ : ټول منديزي، چې نن مازيګر لمانځه ته د غارخلي لمنځتون يا جماعت ته راغلي۰

بيلګه ۲ ۰ ۷ : د هغو ميږو ، غواوو او وزو ډېرۍ، چې نن په نخاس کې خرڅې شوې.

بيلګه ۲ : ۸ د ټولو هغۇ ګڼونو ډيرۍ(عددونو سټ) M، چې ۳۰ ويشي يانې

۱ ، ۲ ، ۳ ، ۵ ، ٦ ، ۱۰ ، ۱۵ ، ۳۰

(c) ketabton.com: The Digital Library



داسې يې ليکو : $M = \{ 1,2,3,5,6,10,15,30\}$

دا سټ پاي سټ ده داسې وايو، چې ډيرۍ يا سټ M د ټولو هغو توکوx - لکه پورته - جوړ شوې، چې ۳۰ ويشي او داسې يې ليکو: $M =\{ x \mid x$ د ۳۰ پرويشونى ګڼ $\}$

د ټولو پيداينښتې يا طبيعي ګڼونو ډيرۍ(اعدادو سټ) N ټاکو او داسې يې ليکو:

$$N = \{ 1,2,3,4\ldots.\}$$

دا نه پاى لرونکى يا لايتناهي ډيرۍ( سټ) ده ، چې په لاندې ډول يې نخښه ده يا په لاندې ډول په نخښه کيږي: $\infty$

ګورو، چې په شميرپوهنه کى موږ پر پاى ګڼونو برسيره ناپاى عددونو سره هم مخامخ يو.

## ۲ . ۲ د ډيريو ترمنځ اړيکې relation between sets

د سټونو ترمنځ غوره اړيکى د برابروالى او خونديونې يا خوندي لرنې ( مساويوالى او يو په بل کې ځاي لرلو) اړيکې دي.

پيژند ۲ . ۲ دوه ډيري يا سټونه $M_1$ او $M_2$ يو د بل سره برابرې دي، يانې $M_1 = M_2$

که چيرې د ډيرۍ يا سټ $M_1$ هر توکى د ډيرۍ يا سټ $M_2$ توکى هم وي او پر څټ يا برعکس هر د $M_2$ توکى د $M_1$ توکى هم وي.

برابرې ډيرۍ برابر توکي هم لري

(c) ketabton.com: The Digital Library



د بيلګى په توګه

$$M_1 = \{x \mid (x+1)(x-2)(x+3)=0\}$$
$$M_2 = \{-1, 2, -3\}$$
$$\Leftrightarrow M_1 = M_2$$

ګورو، چې $M_1$ د $M_2$ سره برابر دئ

## برخډيرى(سبسټ subset)

پيژند ۲ ۰ ۳ :

يوه سټ $M_1$ د سټ يا ډېرئ $M_2$ برخډيرى ( لاندې ډيرى، خوندي ډيرى يا سب سټ ) بلل کيږي يا $M_1$ په $M_2$ کې ځاى ده يا نوره هم ښه $M_1$ په $M_2$ کې خوندي ده، ليکندود يا ليکنډول:

$M_1 \subseteq M_2$ که د ډيرى $M_1$ هر توکى دسټ يا ډېرئ $M_2$ توکى هم وي۰

کيدى شي، چې $M_1$ د $M_2$سره برابر هم وي، که برابروالى يا مساوات نا شوني وي نو بيا د اصلي برخډيرى يا اصلي سب سټ ښخه غږيږو۰

پيژند ۲ ۰ ٤ :

يوه ډيرى يا سټ $M_1$ د $M_2$ اصلي برخډيرى ده او داسې يې ليکو: $M_1 \subset M_2$

(c) ketabton.com: The Digital Library



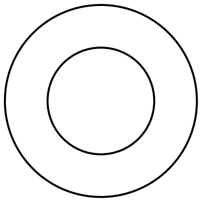
که $M_1 \subseteq M_2$ باور ولري او کم له کمه د $M_2$ يو توکی د $M_1$ توکی نه وي.

بيلګې:

الف) که ولرو $M_1 = \{-1,1\}, M_2 = \{-1,0,1\}$ نو $M_1$ په $M_2$ کې اصلی خوندي دی

ب ) د ټولو څلوريو ( مربعو) ډيرۍ د ټولوڅلورګوډيو( څلور اضلاعو) اصلي برخډيرۍ ده.

پ) څيره ۱ ۰ ۱ په هواره يا سطحه کې ټکوډيرۍ ښايي، د کومو لپاره چې باور لري، که $M_1$ او $M_2$ د ټکو ډيرۍ يا-سټ وي $M_1 \subset M_2$



که په پورته څيره کې وګورو، نو يوه ګردۍ ( دايره ) $M_1$ په بله لويه $M_2$ ګردۍ کې خوندي ده.

تشډيرۍ په هره ډيرۍ کې خوندي ده. هره ډيرۍ په خپل ځان کې د نااصلي برخډيرۍ په څير خوندي ده.

يا دا پيژند :

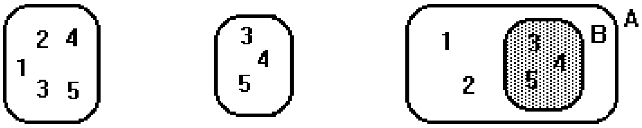
B⊆A که باور ولري : x ⇒ A∈ x ∈ B

بيلګه:

A={1,2,3,4,5} B={3,4,5} B⊆A

(c) ketabton.com: The Digital Library






پیژند ۲ ۰ ۵ :

هغه ډیری، چې هیڅ توکی ونه لري تشډیری بلل کیږي او داسې یی لیکو: $M=\theta=\{\}$

یادونه : پام دې وي، چې صفر ډیری او تشډیری سره بدلې نه شي یانې لاندې ته:
$\{\}=\theta\neq\{0\}$

## د یوې ډېری توان یا تواندېری ( توانسټ)

پیژند ۲ ۰ ٦ :

د یوې ډیری M د ټولو برخډیریو ډیری پوتنخډیری یا په تواندیری(-سټ) بلل کیږي او داسې یې لیکو:(P(M په تواندیری توکي لري، چې هر یو یی بیا خپله ډیری ده۰

بیلګه : د $M = \{ a,b.c\}$ ډیری دا لاندې په تواندیری لري

$$P(M) = \{ \{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$$

هره ډیری چې د توکو څخه جوړه وي هغه ټیک n جګ 2n توکی لري یانی : $n^{2n}$

دا پورته د جملې په څیر د پوره ایندکشن له لارې اوبی ( حل-) کیدی شي( لومړی برخه دې وکتل شي)۰ دا دنده د ګرانو لوستونکو د خوښې کار دی، که کوي یي۰

پیژند ۲ ۰ ۷ : د ډیریM زور |M| لاندې د ډیری د توکو تعداد یاګڼون پوهیږو۰ که دوه ډیری M اوN همغه زور ولري هغه ته یوزوریزه – یا برابرزوریزه ډیری وایو او داسې یې لیکو: $|M| = |N|$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د برابرونونو یا مساواتو او خونديې ساتنو خویونه

الف ) رفلکسیو- یا د انعکاس( هنداروینزيې) اړیکيreflexivity

هغه اړیکي، چې د هغه او د هغه دخپل ځان ترمنځ ریښتوني ویناوې ورکړ شوي وي
رفلیکسیویا انعکاسي اړیکي بلل کیږي لکه: $M = M, M \subseteq M$

خونديي لرل اړیکي رفلکسیو نه دي $M \not\subset M$

دا په دې مانا، چې هیڅ ډېرۍ د خپل ځان اصلي برخډېرۍ یا برخسټ نه شي کیدی٠

ب) سیومتریکي اړیکي Symetric relation

هغه اړیکي سیومتریک بلل کیږي، چې د شیانو ترمنځ چې کارول کیږي یا استعمالیږي
یو له بل سره بدلیدلی شي٠

لکه $M_1 = M_2 \Leftrightarrow M_2 = M_1$

خونديي لرل سیومتریکي اړیکي نه دي:

که وي $M_1 \subseteq M_2$ نو اړیکی $M_2 \subset M_1$ نارښتیا یا ناټیک دي

دا هلته چې وي: $M_1 \neq M_2$

پ ) ترانزیتیویتي Transitivity یا وړون اړیکي

ترانزیتیویتي هغه اړیکي دي، چې له یوه نه وبل ته یي د وړلو امکان شته یا موجود
وي٠

له L = M او M = N څخه لاس ته راځي L = N

او

$$M_1 \subseteq M_2 \wedge M_2 \subseteq M_3 \Rightarrow M_1 \subseteq M_3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



پورته داسې لولو: که $M_1$ د $M_2$ برخډيرئ او $M_2$ د $M_3$ برخډيرئ وي، نوله دې څخه لاس ته راځی، چې $M_1$ د $M_3$ برخډيرئ ده

برابونونه يا مساوات او په بل کې ځايه ونه يا خوندي ساتنه ترانزيتيو اړيکې يا خويونه دي

## ۲ . ۲ په ډيرئ کې کارونې يا عمليې

ټولنډيرئ (د اتحاد سټ )

پيژند۲ . ۸ :

د دوه ډيريو $M_1$ او $M_2$ ټولنډيرئ(unionاتحاد سټ)، چې د ډيريو ټولنه ورته وايو ده:

$$M = M_1 \cup M_2$$

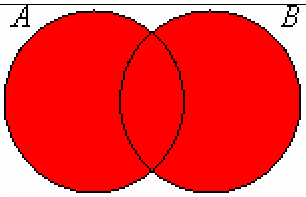
دلته داسې پوهيږو، چې M د ټولو هغو توکو څخه جوړه شوې ډيرئ يا سټ ده، چې لږ تر لږه د $M_1$ او $M_2$ توکي هم خوندي ولري.

د ټولنې $M = M_1 \cup M_2$ هر توکی د $M_1$ يا $M_2$ توکی هم دئ ( پرتله ۱ –مه برخه د يا سره پرتله) يانې دا د ټولنډيرئ توکی د $M_1$ يا $M_2$او يا د دواړو توکي دي.

يا لاندې دياګرام

(c) ketabton.com: The Digital Library



| | |
|---|---|
|  | A ? B<br>$A \cup B$ ( B تولنه A)<br>x ) د A سره B اړیکې لري |

بیلګې

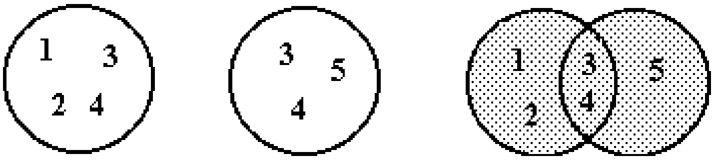
الف ) $M_1$ دې د ځوانانو ډیرې وي، چې بکلوریا لري او $M_2$ دې د هغو ځوانانو ډیرې وي، چې مسلکي شهادتنامې لري، نو $M = M_1 \cup M_2$ د ټولو هغو ځوانانو ډیرئ ده، چې بکلوریا او مسلکي شهادتنامې ولري او یا دواړه شهادتنامې ولري٠

ب )

$$M_1 = \{k, a, r\}, M_2 = \{u, r, s, e, l\}$$
$$M_1 \cup M_2 = \{k, a, r, u, s, e, l\}$$

یا په لاندې توګه پیژند او بیلګه: A او B دې دوه ډیرې وي د دې ډیریو ټولنه داسې لیکو

A∪B = {x | x∈A ∨x∈B}
A={1,2,3,4}     B={3,4,5}       A∪
B={1,2,3,4,5}




تل په ټکو ټکي شوې ټکیډیرې ټولنډیرې په ګوته کوي٠

ب – خیره ۲ ٠ ۲ دوه په هواره کې ټکیډیرې په ګوته کوي، چې

(c) ketabton.com: The Digital Library



الف ) ټکيپردئ دي٠ ب) ګډ ټکي لري٠

پ) اړيکې $M_1 \subset M_2$ پوره کوي:

د دې لپاره ځيرې په لاندې کې په بيلګو کې راغلې دي٠

د ټولنې لپاره کموتاتيو قانون باور لري» $M_1 \cup M_2 = M_2 \cup M_1$ دا په دې مانا، چې د لړيپرلپسې دلته(لنډ: لړئ) د ډيريو په ټولنه کې رول نه لوبوي

يادونه : که ګڼونه ۱ ، ۲ ، ۳ ، ٤ ٠٠٠ ولرو، نو دا پرلپسې بولو او که بيا دا سره جمعه کړو لکۀ

$$1\ ,\ 1+2,1+2+3,1+2+3+4+,1+2+3+4++..+....$$

نو دا لړيپرلپسې یا لنډ: لړئ بولو( پرلپسی برخه کې دې وکتل شي) دا په دې مانا، چې له دوو څخه د زياتو ډيريو ټولنه لړيپرلپسې( لنډ: لړئ ) رول نه لري٠

اسوځياتيو قانون باور لري٠

$$(M_1 \cup M_2) \cup M \ = M_1 \cup (M_2 \cup M_3) = M_1 \cup M_2 \cup M_3$$

غوځډيرئ (د ډيريو غوځې یا –متقاطع سټ) intersection

يادونه : دا کړئ شو، چې د ډيرو ګډغوځې وبولو( دا د ګرانو لوستونکو خوښه ده،کوم ناټيکوالی په کې نه شته)

پيژند:

ډيرئ M د ډيرئ $M_1$ او ډيرئ $M_2$ غوځډيرئ یا د تقاطع سټ ده( لوستل: $M_1$

غوځ(پرې)په $M_2$ ( لنډ: غوځې): $M = M_1 \cap M_2$

(c) ketabton.com: The Digital Library



که د ډيرۍ M ټول توکي د ډيرۍ $M_1$ او ډيرۍ $M_2$ توکی وي.

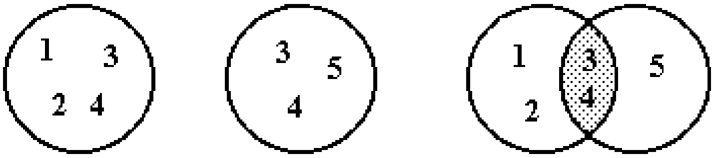
د غوښډيرۍ $M = M_1 \cap M_2$ هرتوکی د ډيرۍ $M_1$ او ډيرۍ $M_2$ توکي دي ( د ۱ ـمې برۍ د هم او هم په مانا يا د «او» په مانا)

يا دا پيژند :

د ډيريو A او B غوښی $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

بيلکه:

A = { 1,2,3,4}, B = { 3,4,5} => $A \cap B = \{3, 4\}$




يادونه: دې پورته ډول دياګرام ته د ون دياګرام Venn-Diagram يا د Euler-Venn- Diagram وايی

بيلګې :

لومړۍ : يوه ډله زده کوونکي له ننګرهار او پکتيا څخه راځي، چې په $M_1$ يې په نخښه کوو. يوه بله ډله ، چې په $M_2$ يې په نخښه کوود کندهار او همغه د پکتيا زده کوونکي، چې په M سره يې ښايو، دي. د دې دواړو ډلو غوښډيرۍ

$$M = M_1 \cap M_2$$

د پکتيا زده کوونکي دي.

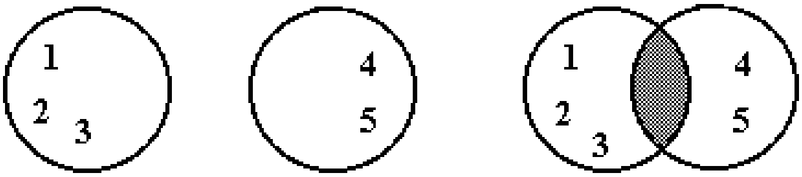
(c) ketabton.com: The Digital Library



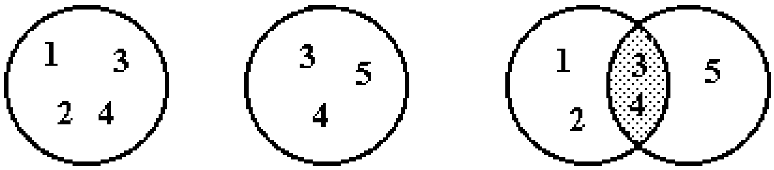
دويم:

$$M_1 = \{k, a, r\}, M_2 = \{u, r, s, e, l\},$$
$$M = M_1 \cap M \ = \{r, l\}$$

دريم څيره ۲ ۰ ۳ په هواره يا سطحه کې ښايي، چې  الف) ګنون پردي دي




ب) يو بل سره ګډ ټکی لري




پ ) اړيکی

$$M_1 \subset M_2$$

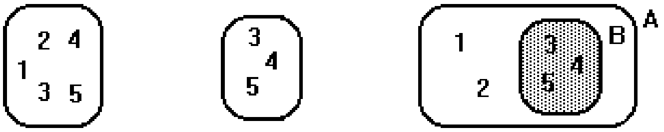
پوره کوي

بيلګه:

A={1,2,3,4,5}  B={3,4,5}  B⊆A

(c) ketabton.com: The Digital Library






هغه ټکو باندې ټکي شوې ډېرۍ اصلي برخډېرۍ ده

دوه ډېرۍ، چې غوڅډېرۍ يې تشډېرۍ وي

$$M_1 \cap M_2 = \theta$$

لکه د مخه مو چې ګوته ورته ونيوله پردۍ بلل کيږي

د غوڅډېرۍ لپاره ، لکه څنګه د ټولنډېرۍ لپاره کموتاتيو قانون باور لري

$$M_1 \cap M_2 = M_2 \cap M_1$$

او اسوځياتيو قانون

$$(M_1 \cap M_2) \cap M_3 = M_1 \cap (M_2 \cap M_3) = M_1 \cap M_2 \cap M_3$$

ددواړو د ډېرۍکارونو يا ډېرۍ عمليو يانې ټولنډېرۍ او غوڅډېرۍ لپاره دواړه ديستريبوتيو قانونونه پوره کيږي يا باور لري

$$M_1 \cup (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cup M_2) \cap (M_1 \cup M_3)$$

$$M_1 \cap (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3)$$

( د ګڼونو د شميرکارونو يا عمليو لپاره يواځې يو دستريبوتيو قانون شته والی لري:

$$a_1.(a_2 + a_3) = a_1.a_2 + a_1.a_3$$

مګر په ټوليزه توګه باور نه لري

$$a_1 + (a_2.a_3) = (a_1 + a_2).(a_1 + a_3)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



پیژند :

کمونډیرۍ یا تفریق سټ $M_2$ د ډیرۍ $M_1$ او ډیرۍ M کموالی یا فرق دۍ او

داسې یې لیکو: $M_2 = M / M_1 = \{x \mid x \in M \wedge x \notin M_1\}$

له M څخه د $M_1$ ډیرۍ کمه شوې

یا کله چې د $M_2$ توکي د M هغه توکي وي، چې هغه د ډیرۍ $M_1$ توکي نه وي۰

لیکندود یالیکنډول :

$A / B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

لوستل : د A او B توپیرډیرۍ یاکمونډیرۍ یا تفریقډیرۍ له ټولو هغو توکوx جوړه ده، د کومو لپاره، چې باور لري : x د A توکی دی او x د B توکی نه دۍ

بیلګې :

لومړۍ : په یوه ټولګي کې $M_1$ د ټولو نارینه وو زده کړو ډیرۍ ده او $M_2$ دټولو زده کړو ډیرۍ ( د نارینه وو او ښځینه وو ) ، چې په شمیرپوهنه کې لس نمرې وړي۰

$M_1 / M_2$

د هغو زده کړو ډیرۍ ده، چې ۲ ، ۳ ، ٤ ، ٥ ، ٦، ۷ ، ۸ ، ۹، نمرې وړي او ټول د هغو نجونو ډیرۍ ده، چې په شمیرپوهنه کې یې لس نمرې وړي۰

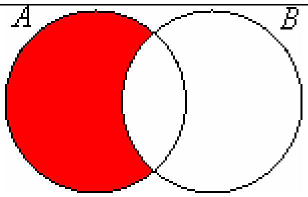
که په ټولګي کې یواځې نارینه زده کړي وي، نو باور لري

$M_1 / M_2 = \theta$

یا دا لاندې :

(c) ketabton.com: The Digital Library



| | |
|---|---|
| $A \backslash B$<br>( A بې له B )<br>( x له A سره B اړیکې لري ) |  |



دویم :

$$M_1 = \{k,r,a,i\}, M_2 = u,r,s,e,l\}$$
$$M_1 / M_2 = \{k,a\}, M_2 / M_1 = \{u,s,a\}$$

لکه څنګه، چې د کمون یا تفریق پیژند او بیلګي را په ګوته کوي په ټولیزه توګه باور نه لري:

$$M_1 / M_2 \neq M_2 / M_1$$

## د یوې ډیرۍ یا سټ کمپلمنت یا پوره کوونکی :

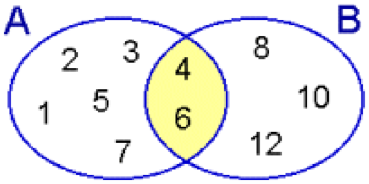
دا کارونه یا عملیه د نورو کارونو څخه توپیر لري، چې په ډیرۍ کی مو څیړلي۰ دا یوه یوځاییزه کارونه ده او دا نورې دوه ځایزې کارونی یا عملیې دي۰

موږ بنسټډیرۍ په U او د ټولو هغو توکو ډیرۍ، چې U کې پراته دي یانې د U توکي دي او هغه په M کې نه دي پراته یانې د M توکي نه دي پوره ډیرۍ یا کمپلیمنت بولو او د $\bar{M}$ سره یې په نخښه کوو۰

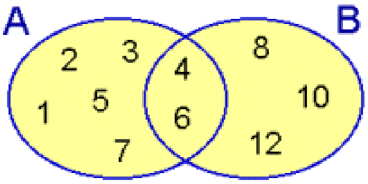
په لاندې څیره کې بیا د ډیرۍ غوځې، - ټولنه او – کمون او برخډیرۍ ته د ګرانو لوستونکو لا زیات پام را اړوو۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

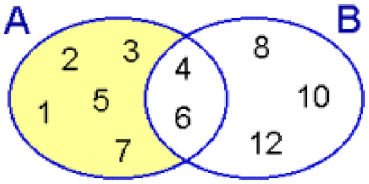




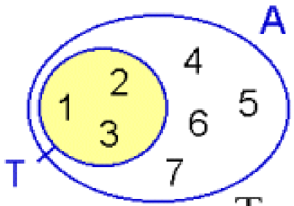

$A \cap B$




$A \cup B$




$A \setminus B$




$T \subseteq A$

پیژند:

پوره کوونکی- یا تکمیلډیرۍ ( یا د یوې ډیرۍ کمپلیمنت ) د یوې ډیرۍ M پوره کوونکې ډیرۍ $\bar{M}$ ټیک هغه توکي لري( د بنسټډیرۍ U څخه) ، کوم چې د M توکي نه وي٠

دوه ځله کمپلیمنټډیرۍ جوړول خپلې لومړنۍ وینا ته ځي ، یانې $\bar{\bar{M}} = M$

دلته یواځې یوه ساده بېلګه راوړو: په یوه کلي کې دوه کورنۍ د توپیر او برګ کورنۍ اوسیږي٠ که دا دوه کورنۍ یو له بل سره خپلوي ونه لري، نو دوي یو له بل سره پوره ډیرۍ یا تکمیلډیرۍ بلل کیږي یانې دا کلی پوره کوي٠

## ۲ . ٤ خیرونه mapping یا اړیکې:

(c) ketabton.com: The Digital Library



يادونه : پام دې وي، چې دا هغه ورسره بلد تابع کلمه نه ده، چې وروسته به ورسره بلد شو۰

په دې برخه کې لومړۍ د ډيرئ ضرب کلمه پيژنو يا تعريفوو او بيا د ضرب کلمې کارونه څيړو۰

پيژند ۲ ۰ ۹ : د دواړو ډيريو M يو او M 2 ډيريضرب( اتيرانضرب) هم ورته وايي، يانې په x سره ځليږي يا ضربيږي

$$M = M_2 \times M_2$$

د ټولو تنظيم يا ترتيب شويو توکو

$$x \in M_1, y \in M_2$$

جوړو (x,y) ډيرئ ده۰

بيلګې

$$M_1 = (a,b\}, M_2 = \{1,2,3\}$$
$$M_1 \times M_2 = \{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\}$$

د جوړو د غوښتل شوي تنظيم له مخې ځل په ډيريو کې کموتاتيو نه دئ دا په دې مانا، چې

په ټوليزه توګه باور نه لري: $M_1 \times M_2 \neq M_2 \times M_1$

۲ – R دې د ټولو رييلګڼونو ډيرئ وي۰ په هندسي مانا د کرښې د ټولو ټکو ډيرئ۰ RxR د ټولو رييلګڼونو جوړو ډيرئ ده، په هندسي مانا د هوارې يا سطحې د ټولو ټکو ډيرئ ده۰

پيژند ۲ ۰ ۱۰ :

د څيرونې F لاندې د دوه ډيريو د ضربډيرئ $M_2 \times M_2$ برخډيرئ پوهيږو۰

(c) ketabton.com: The Digital Library



پس د جوړه تنظیم شوو توکو ډیری، چې $x \in M_1$ له یوه یا ډیرو توکو $y \in M_2$ سره تنظیم یا بهتره په باندې ځیره شي.

داسی هم ویلی شو: د1 M توکي د2 M په یوه یا ډیرو توکو تنظیمیږي یا ځېره کیږي.

که $M_1 \times M_2 \supseteq F \ni (x.y)$ وي، نو x اوریجنل یا اصلي توکی او y ځیره توکی بلل کیږي.

د ټولو اصلي توکو ډیری پیژندورشو یا تعریفورشو یا پیژنددیری یا تعریفدیری بلل کیږي او د ټولو ځېره توکو ډیری د ځېرونې ډېری، ارزښتورشو یا ارزښتدیری بلل کیږي.

بیلګی

$$M_1 = \{a,b,c,d\}, M_2 = \{1,2,3,4\}$$

د جدول په توګه دM یو توکو ځېرونه ونه یا ځېره کوونه د M دوه په توکو

ځېره توکی اصلي توکه یا ځیره کوونکی توکی

a -----------------------→ 1 , 2 ,5

b -----------------------→ 4

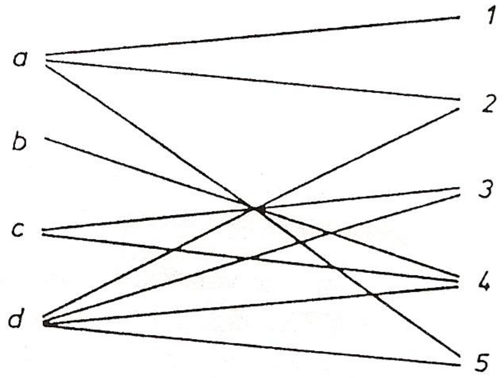
c -----------------------→ 3,4

d -----------------------→ 2,3,4,5

یا دا لاندې:

(c) ketabton.com: The Digital Library






څيرونه:

F = { (a,1),(a,2),(a,5),(b,4),(c,3),(c,4),(d,2),(d,3),(d,4),(d,5)}

( د M يو او M دوه ډيريو د ټولو توكو جوړو ډيرى)

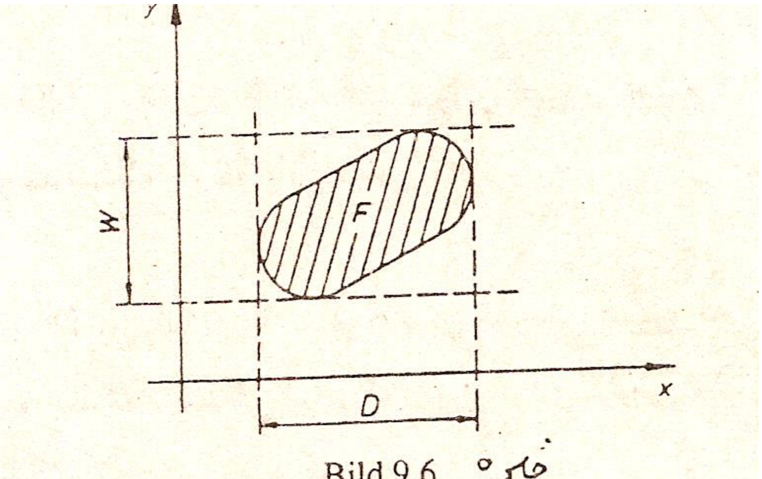



Bild 9.6 ځيره

دريم : هر پيدايښتي يا طبيعي ګڼ a د هغه په دوه ځله b=2a باندې څيره كيږي٠ داسي پيژند شوې يا تعريف شوې څيره ونه په لاندې بڼه هم انځوريدلى شي٠

$$F = \{(a,b) \mid a \in N, b = 2a\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



دلته هم N د پيداينښتي يا طبيعي ګڼونو ډيرئ٠ پيژنددیرئ يا تعريف- د ټولو پيداينښتي ګڼونوډيرئ ده او ارزښتډیرئ د ټولو جوړه ګڼونو ډيرئ ده٠

څلورم : که M يو په يوه ښوونځي کې د ښوونکو ډيرئ وي او M دوه په ښوونځي کې د ځانګړو ټولګيو ډيرئ وي نو ښوونکي، چې په ټولګيو کې درس ورکوي دا يوه څېرونه ده٠ د ښوونکو ډيرئ د ځانګړو ټولګيو په ډيرئ کې

موږ د څېره ونې څلور حالتونه توپيروو:

پيژندونه( دې ته دې ګران لوستونکي ښه پام وکړي):

لکه په لومړئ بيلګه کې په څيره ونه F کې د1 M ، چې تعريفډيرئ D سره برابر دئ او M2 ، چې له څيره ډيرئ , W سره برابر دئ ، توکي مو مخ ته پراته دي٠

له يوې څيرونې Fغبرېږو د1 M په M2 باندې٠ دلته دې « د » او « په » ته پام وي)

وي دې: $D \subset M_1, W \subset M_2$

لکه په دويمه بيلګه کې ، نو د يوې څيره ونې F غبرېږو له M1 په M2 کې ( دلته دې

« په » او په کې » ته پام ور واړول شي)

وي دې : $D = M_1 \wedge W \subset M_2$

دلته د يوې څيره ونې غبرېږو د1 M په M2 کې دلته دې دريمه بيلګه په پام کې راواړل شي٠

وي دې: $D \subset M_1 \wedge W = M_2$

نو د يوې څيره ونې غبرېږو له M1 په M2 باندې٠ دلته څلورمه بيلګه د بيلګي په توګه راوړو٠ د دې نيونې لاندې چې ټول ښوونکی ځانګړي ټولګيو ته درس ورکوي٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

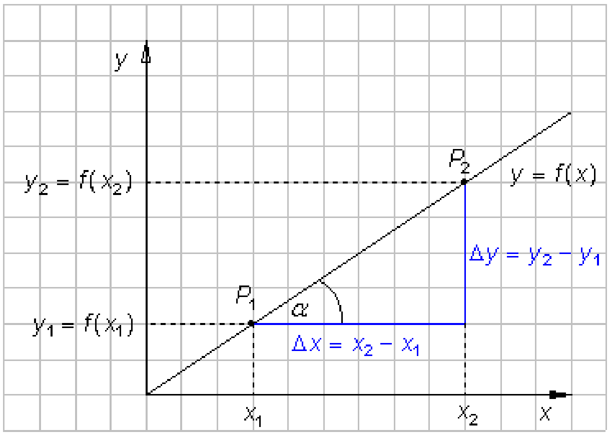


يادونه : دا لاندې برخه دې ګران لوستونکي وګوري، خو د دې اوس وخت لپاره لږ ستونځمنه ده او شايد ځيرې هم رانه شي، خو که لږ د شميرپوهنې سره بلد شو، بيا پرې پوهيدل ساده دي۰ زه مخ ته لرم، چې په دې هکله ليکلی کتاب، چې چاپ شوی نه دی دلته پر ليکه کړم، چې هلته بيا دا موضوع لږ غزيدلې ده۰

بېلګه ۲ ۰ ۵ : موږ په هواره يا سطحه کې ځرګند شوي کړی د ډېريځل RxR په ځير د برابرونونو له لارې رانيسو( R د رييلګنونو ډيری د ګنکرښې ټکي دي( ګنونه دې وکتل شي))۰

الف ) $y = 2x$ يوه ځيره ونه ده د R په R باندې ، ځکه چې باور لري

$$D=W=R$$




يادونه : په پورته ځيره کې برابرون $y = ax+b$ دی.

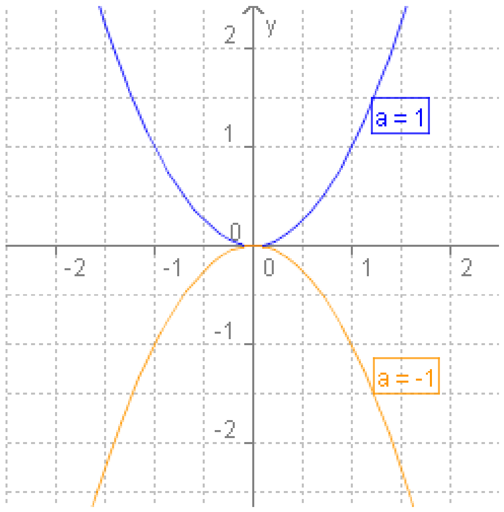
ب ) $y = x^2$

يوه ځيره ونه ده د R په R کې ، ځکه چې باور لري

$$D = R\ ,\ W = [0, \infty]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library





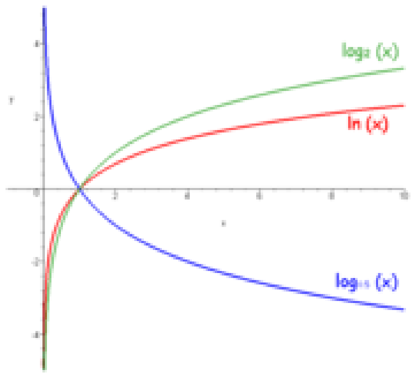

یادونه :

پوته بلواک د $x \mapsto ax^2 + bx + c$ دول دی، چې b = 0 , c = 0 او a = 1 , a = -1
ایښول شوي دي۰

پ ) y = log x

یوه خیره ونه ده له R په R باندې « ځکه چې باور لري۰

$$D = (0, \infty) \wedge W = R$$



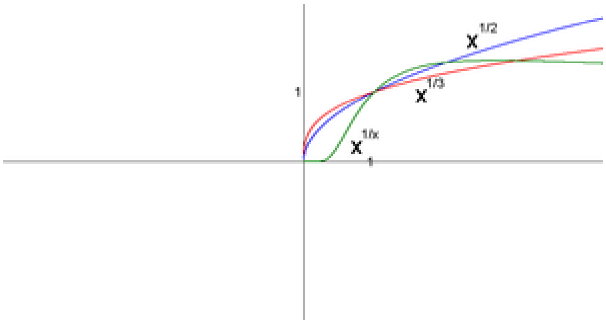
(c) ketabton.com: The Digital Library



ت ) $y = +\sqrt{x}$

يوه ځيرونه ده له R په R ، ځکه چې باور لري

$D = W[0, \infty]$




يادونه : پورته د دوېي ،دريمي او په x -مې ريښې په مانا دى

ځيرې له ويکي څخه په مننه راکښته شوي دي٠

پيژند ۲ ٠

يوه ځيره ونه E يواځنى بلل کيږي٠ که هر $x \in D$ په ټيک يوه $y \in W$

باندې ځيره شي٠ دا په دې مانا، چې هر $x \in D$ ټيک يووار په $y \in W$

تنظيمډيرى يا جوړه ډيرى کې رامنځ ته کيږي٠ يوه يواځنى ځيره ونه فنکشن

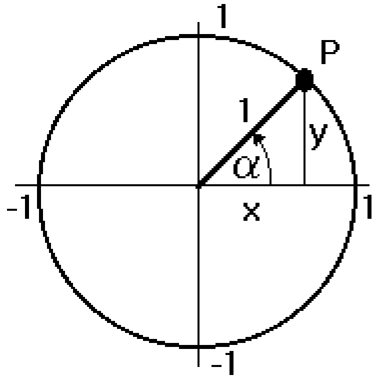
يا« بلواک» بلل کيږي او يا لکه تراوسه ورسره بلد يو يوه تابع بلل کيږي٠

پام:

دا دې دلته کره په ګوته شوې وي، چې زه « يوازنۍ ځيره ونه » بلواک يا فنکشن بولم٠

(c) ketabton.com: The Digital Library






بیلګه ۲ ۰ ٦ : په بیلګه ۲ ۰ ٥ کې له الف تر ت پورې تولې څیروني فنکشنونه یا بلواک دي۰ د دې پر څنګ لاندې برابرون ( یوونګردۍ یاني ګردی، چې وړانګه یې یو یوون یایووالی یا واحد وي څیره ۰ ) انځور شوې څیره ونه له R په R کې ([-1,1] D=W) فنکشن یا بلواک نه دی ، ځکه چې اصل دوه څیرې لري یاني که په تنظیمجوړه کې د څیره ونې لړي پرلپسې( لنډ:لړی ) بدله شي، نو یوې پرڅټ څیره ونې ته راځو:

پیژند ۲ : څیره ونې F ته پرڅټ څیرونه $F^{-1}$ د ټولو جوړو (x,y) ډیری ده له $(x,y)\in F$ سره ۰

پیژند ۳ ۰ یوه څیره ونه یویواځنۍ بلل کیږي، که یواځنۍF او $F^{-1}$ یوازنۍ څیروه ونې وي، دا په دې مانا، چې که هر $x\in D$ او $y\in W$ ټیک یو ځل په تنظیم کې منځ ته راشي۰

یادونه : د څیروني نوم څخه باید ونه ډار شو دا څیره ونې څیرې کووني (که څوک یو کالی یا رخت څیرېکوي)او څیره کووني توپیر، ځکه سره کیدی شي، چی هغه منځپانګه یې یو له بل توپیر لري۰ موږ پښتو کې نږدې یو ډول لیکونکي ویونه ( لغات) لرو، خو دا هغې منځپانګې له مخې توپیریږي۰
ډیرۍ پوهنه د شمیرپوهنې ستنه ده، نو په راتلونکې کې به یې نوره هم ژوره وڅیړو او همدا اوس هم نور ګران هیوادوال دې ته رابولم، چې له ما سره ګډ کار یا خپلواک دې کار ته ملا راوتړي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library



ما دا برخه غزولې، چې په خپل شووني وخت کې به ګرانو لوستونکو ته په ځانله توګه د یوه کتاب په څیر هم وړاندې شي۰

۲ . ۵ تمرینونه

۱ – د لاندې ډېۍ یا سټ توکي د شمیرنې له لارې انځور کړۍ

الف $\{x$ لومړی عدد او$20 > x \mid x\}$( لوستل: د ټولو عددونو $x$ ډېرۍ یا سټ، چې $x$لومړنی عدد او $x < 20$ دی).

ب- $\{x|x^2+x-6=0\}$

پ-$\{x^2+x-6=0$ او $x> 0$ |$x\}$ دا په نوکانوکې ټول له کیڼ ښي لور ته لولو

ت ) $\{x \mid x$ رییلګڼ او $x^2 + 1 = 0\}$ دا ټول له ښي و کیڼې لور ته ولولی

۲ – د توکو $x, y, z$ اړلرونوالی و ډیري $M$ ته وښیۍ !

الف ) $M$ د لمړنیو ګڼونو ډیرۍ

$x = 4, y = 5, z = 6$

ب ) $M$ د لاندې مساواتو حلډیرۍ ( اوبیډیرۍ )

$x^3 + x^2 - 6x = 0$

$x = 0, y = 2, z = 3$

پ ) $M$ د ریشنلګڼونو ډیرۍ چې په اینتروال $[-3, 3]$ کې پراته دي

$x = -2, \quad y = \sqrt{2}, \quad z = 1/3$

ت ) $M$ د رییلګڼونو ډیرۍ چې په اینتروال $[-3, 3]$ کې پراته دي

$x = -4, \quad y = \sqrt{2}, \quad z = 3$

۳ – د لاندې ډیریو ترمنځ کومې اسریکې پرتې دي

الف ) $M_1$د ټول جفت ګڼونو ډیرۍ

(c) ketabton.com: The Digital Library



او $M_2$ د ټولو ټولګټونو ډيرى

ب ) د ټولو مساواتو $x^2 + 2x - 3 = 0$ , حلونو ( اوبيو ) ډيرى

$M_2 = \{ -3 , 1 \}$

پ ) $M_1$ د ټولو ګنو ډيرى چي پر ۶ ويشل کيږي.

او $M_2$ د ټولو ګنونو ډيرى چي په ۳ ويشل کيږي !

او $M_3$ د ټولو ګنو ډيرى چي په ۱۲ ويشل کيږي !

۴ – د ډيرى $\{ a,u,t,o \}$ ټول برخډيري ورکړی !

۵ – د لاندي ډيريو څخه ټولنډيرى ، غوځډيري او دواړه ټوټډيري جوړ کړی !

الف ) $M_1 = \{ k,a,m,e,l \}$ , $M_2 = \{ m,a,u,l,t,i,e,r \}$

ب ) $M_1 = \{ 2,4,6,.. \}$, $M_2 = \{ 3,6,9,.... \}$

پ ) $M_1 = \{ x \mid x^2 + x +- 2 = 0 \}$ , $M_2 = \{ x \mid x^2 - 3x + 2 = 0 \}$

۶ – د يوه ډيرى $M$ او د تشډيري $\emptyset$ ټولنډيرى، غوځډيرى او توپيرډيرى جوړ کړی !

۷ – د يوه ډيرى $M$ او خپل همدي ډيرى ټولنډيرى ، غوځډيرى او توپيرډيرى جوړ کړی !

۸ – وي دي $M_1 = \{ 4 , 8 , 12 \}$ $M_2 = \{ 3 , 6 , 8 \}$

$M_3 = \{ 0 , 2 , 4 , 6 \}$ , $M_4 = \{ 6 , 12 , 18 \}$

جوړ کړی : $M = [(M_1 \cup M_2) \cap M_3 ] \setminus M_4$ !

۹ – جوړ کړی

الف ) $M_1 \cup (M_1 \cap M_2)$ پ ) $M \setminus \emptyset$

ب ) $M_1 \cap (M_1 \cup M_2)$ ت ) $\emptyset \setminus M$

۱۰ – وي دي

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$M_1 \cup M_2 = \{1,2,3,4,5\},$$
$$M_1 \cap M_2 = 71,3,5\}$$
$$M_1 \setminus M_2 = \{2,4\},\ M_1 \setminus M_2 = \emptyset$$

له دې پورته څخه $M_1$ او $M_2$ وټاکئ !

۱۱ – وي دي

الف ) $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ ب ) $M_1 \subset M_2$ ,

وټاکئ: $M_1 \setminus M_2$ !

۱۲ – وي دی $M_1$ , $M_2$ (د نیمواز) اینتروال تکي ډېري:

$$M_1 = \{-3, 3\},\ M_2 = [1, 7]$$

وټاکئ

الف ) $M_1 \cup M_2$ ب ) $M_1 \cap M_2$ پ ) $M_1 \setminus M_2$

ت ) $M_2 \setminus M_1$ ټ ) $M_1 \times M_2$

۱۳ – وي دي $M_1 = \{1, 2, 3\}$ , $M_2 = \{\{a, b\}$

الف ) د $M_1 \times M_2$ ځل جوړ کړئ

ددې لاندې ب ) تر ت ) برخی تمرین لپاره دي ۹ الف برخه وکتل شي.

ب ) دا لاندې کوم ډول ځیرونی دي

$$F_1 = \{(1,a),(1,b)\}$$
$$F_2 = \{(1,a),(3,a)\},$$
$$F_3 = \{(1,a),(2,b),(3,b)\},$$
$$F_4 = \{(1,a),(2,a),3,a)\},$$
$$F_5 = \{(1,a),(2b)\}$$

په ټولو حلنونو (اوبیو) کی $F_1$ تر $F_5$ ورکړئ .

پ ) په ځت ځیرونه ورکړئ

ت ) د ځیرونو $F_1$ څخه تر $F_5$ پورې، کوم یواځنی او کوم حتی یویواځني دي ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

## ۳. دحقیقي اعدادو (ګڼونو) سره د شمیرلو بنسټیزې نښلونې

( ترنی، کارونی یا عملیي)

## ۳ . ۱ د اعدادو د سیستم جوړښت

### ۳ . ۱ . ۱ طبیعی اعداد یا ګڼونه natürliche Zahlen

انسانانو له پخوا څخه اعدادو ته اړتیا درلوده. له دې امله یې پرمخ ودیینه کې هڅې وکړې، چی له ډیرئ (سیټ) (د لیکنې په دننه کې ډیرئ پوهنه هم څیړلشوې)) سره داسې لارغوره کړي، چی دا ډیرئ تشریح کړای شي او د انسانانو او چاپیریال( طبیعت) د پرلپسې اخ او ډب په نتیجه کې د ګڼ یا عدد وی( کلمه یا لغات) راپیداشوی، چې د عدد یا ګڼ کلیمې پربنسټ د ریښتینو شیانو څرګند څومره والي ( کمیت)Quantitative ترلاسه کړي. د طبیعی اعداد و څخه په ګڼلو یا که غواړې شمیرلو کې ګټه اخستل کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



## ۳ ۰ ۱ ۰ ۱ ۰ الف د طبيعي عددونو(پيدايښتي ګنونو) جوړښت

پيژند (تعريف)۳ ۰ ۱:

الف ) ټول طبيعی اعداد د ډيری په څير يوه ټولګه جوړوي او د طبيعی اعدادو ډيری يا سټ په نامه ياديږي يا يې طبيعی اعداد بولو او په N او همداسې N° سره يې په نخښه کوو۰

ډير پای طبيعي اعداد شته ، ځکه چی په هر طبيعی عدد پسی راتلونکی طبيعی عدد هم شته دی ( يعنی په هرڅومره لوي طبيعی عدد پسی راتلونکی طبيعی عدد شته دی، چې دا وروسته روښانه کيږي)۰

## ب) دطبيعي ګڼونو(اعدادو) اکسيوماتيکيAxiomatic جوړښت

اکسيوم جمله ده، چی اوبيونه ( حل ) نه غواړي او همداسی منل کيږي۰ دا چی جمله ، اکسيوم څه دي په لومړی برخه يانې سم اند ( منطق ) کې دې وکتل شي۰

طبيعی عدد کلمه د جيوسيپې پيانو( Giuseppe Peano له ۱۸۵۸ – ۱۹۲ ز ۰کال) اکسيومونو پر بنسټ لاندې پيژند لري يا په لاندې توګه تعريف کيږي:

۱ – د صفر ګڼ يو پيدايښتي ګڼ دی

۲ - د هرطبيعي عدد يا ګڼ m لپاره يو يوائځنی ټاکلی طبيعي عدد n شته، چې سملاسي(ترلی) د m پسی ګڼ دی، د کوم لپاره چی لرو: $m+1 = n = m^{\wedge}$

دلته $m^{\wedge}$ د m پسې سملاسې يا ترلی ګڼ يا عدد په ګوته کوي۰

۳ – هرطبيعي عدد زيات له زياته په يوه طبيعی عدد پسی سملاسي راتلونکی ګڼ دی۰

(c) ketabton.com: The Digital Library



٤ – هيڅ طبيعي عدد نه شته، چی پسی راتلونکی پیدایښي عدد یې صفر وي٠

٥ – که طبيعي عددو ډیری M صفر د توکي په څير ولري او که له هر طبيعي عدد m سره د هغه پسی ترلی راتلونکی عدد یا ګڼ `m هم د M توکی وي، نو M ټول

طبيعي عددونه خوندي لري یا په بل ډول » ټول طبيعي اعداد په کې ځاي دي٠

یادونه: ځنې ادبیاتو کې، د پیانو سیستم کې، د صفر په ځای ۱ لیکل شوی. په دې حالت کې بیا صفر ته د طبيعي عدد یا ګڼ په څير نه کتل کيږي. که بیا صفر ورسره مل کړو، نو د صفر سره طبيعي ا عدادو ډیرئ یا –سټ یې د صفر سره بولو.

## ۱ . ۱ ب : د طبیعی اعدادو یا ګڼونو انځورونه او سیستمونه:

طبيعي اعداد په نخښو ( دې ته په الماني کې Zifferوایي، چه همغه د صفر په معنا دی، خو دلته ترې مطلب، چې دا څیرو، دی) انځوریږي. د دې لپاره چې دا لړ ځای ونیسي، نو د لویو او وړو اعدادو لپاره نخښې له کوچنیو سره یوځای کیښول شوې دي. دا چې څرنګه یوه د عدد یا ګڼ نخښه له بل توپیریږي، په لاندې ډول یې د زیاتون یا جمعي سیستم او ځای سیستم کې ښایو.

په زیاتون سیستم کې هر بنسټیز ،،ځای،، یو ،، ځای ارزښت،، لري. د څیفرونو زیاتون د یو په بل کې د ورزیاتشوي بنسټیز څیفر پخپله هغه عدد یا ګڼ ورکوي. بیلګه یې په رومي ګڼونو کې راړو. دا له بنسټیزو څیفرونو جوړ شوی( ترې لاندې لسیز د اعدادو سیستم دی). زه دلته د ضرورت په بنسټ ټول ضروري څیفرونه چې موخه ترې عددونه دي، له پیل راوړم:

(c) ketabton.com: The Digital Library



| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| رومي عددونه: | M | D | C | L | X | V | I |
| عربي عددونه: | 1000 | 500 | 100 | 50 | 10 | 5 | 1 |

طبيعي عدونه له دې امله يو د بل ترڅنګ ليکو چې کم ځای ونيسي لکه د بيلګې په توګه:
CXX په دې معنا چې C+X+X

په رومي ګڼونو کې، که بنستيز کوچني ګڼنخښې لکه C , V , I د لوي ګڼنخښې و کيڼ لور ته وليکل شي نو دا مانا لري چې دا کوچنی ګڼ له لوي ګڼ څخه کم شوی.
د بيلګې په توګه: XC = C - X .

**بيلګې:** **الف:** MMDCCLXVIII په دې مانادی 2768

ب : MCMXXIX په دې مانا دی 1929

پ : CCCIV په دې مانا دی 304

**ځايسيستم:** په ځاي سيستم کې هره بنستيزه نخښه يو «ځاي ارزښت نخښه ارزښت» لري.

لکه : g– ئيز ځاي سيستم( پوزيشن سيستم ( Positionssystem ) ): د طبعي ګڼ n انځورونه په g– ئيزځای سيستم کې په دې ډول ده چې د يوه ورکړشوي ستې په بنسټ( $g \in N$ ) $g \geq 2$ هر طبعي ګڼ n په لاندې ځانګړي ډول انځوريدلی شي:

$$n = a_k g^k + a_{k-1} g^{k-1} + .... + a_1 g + a_0$$

دلته بنستيزې ګڼنخښې $a_i$ ، g د $i = 0,1,2,...,k$ او $k \geq 0$ د $0 \leq a_i \leq g-1$ چې $a_k \neq 0$ وي په کار راځي يا اړتيا ورته شته.
ليکلی شو :

$$n = a_k a_{k-1} .....a_1 a_0$$

که د بدليدلو ( د بل څه سره ) امکانات رامنځ ته کيږي، نو بهتره به وي چې په

(c) ketabton.com: The Digital Library



لاندې ډول ولیکل شي

$$n = [a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0]_g$$

نن په ټوله نړۍ کې ګڼل په لسیز سیستم ( ګڼځای ارزښت ) باندې کیږي، چې تل داسې نه وه، لکه په افغانستان کې چې دا اوس هم د ډوډۍ پور لپاره په لرګي کرښه را کاږي، چې څو ډوډۍ واخستل شوې.

په لسیز سیستم کې ګڼځای «ارزښت» لري چې انځور شي، مګر په لرګي کې ځای ارزښت نه لري چې کرښه چیرته کښل شوې، هلته د پور کرښو له ګڼون یا تعداد څخه پور څرګندیږي.

بل د ګڼلو سیستم . لکه د مخه مو چې تر پام لاندې ونیوه، د ګڼلو رومي سیستم دی چې نن هم د ارزښت وړ دی او همدارنګه د مفهوم ډك، زیاتونسیستم(جمعي – ) څرګندیږي.

بیا هم غواړو چې دا په لاندې ډول ځانګړی کړو:

۱ – هره لاندې نخښه I, X, C کړای شي چې زیات ترزیاته ۳ ځله( ۳ واری ) په یو ګڼ کې پرله پسې یا ښخګ تر ښخګ راشي

۲ – هره، د ګڼ نخښه V, L, M ,خورا زیاته یو ځل ښخګ تر ښخګ په یوه ګڼ کې راتلی شي.

۳ – که بنستیز نخښه I, X او یا ..........__-- ددې نخښو د ارزښت نه لوړو ارزښت نخښو V, X, L, C, D یا M CXI تر مخ ځای په ځای شوې یا انځوروي نو د لوي ارزښت څخه کمیږي .

زیاتون او کمون (جمعه او منفي )

(c) ketabton.com: The Digital Library



۴ – په هرګڼ انځورونې (Zahlendarstellung ) کی کیدی شي چې یواځې یو بستهیز ګڼ تر مخ ځای په ځای یا انځور شي لکه: MXCVII = 1098 مګر نه IMIC
۵ – د یو ګڼ لپاره د امکان په حال باید کمی نخښې په کار واچول شي.

**عربي ګڼونه** : دا ګڼونه، چې موږ ورسره بلد یو، د لسیز سیستم ګڼونه دي، چی عربی ګڼونه بلل کیږي. دا د ګڼلو لسیز سیستم عربو د هند څخه راوړی، چې په دولسمه پیړۍ کې یې اروپا ته یو وړ. دا اصلي ګڼونه له صفر ( ۰ ) تر ۹ پورې دي یا له 0 تر 9 پورې، چې

ځیفر ورته واي (همغه عربی صفر دی ) چي دلته ترې بنستهیز ګڼونه پوهیدل کیږي.

لکه چې ګوته مو ورته ونیوه، زیاتونسیستم نور ارزښت نه لري، ځکه چی د یو ګڼ ارزښت د ګڼ نخښی زیاتون باندې انځور کیږي. د ځای سیستم سره د ګڼونو انځورول ساده دي.

> **تعریف ۱ . ۱ ب** : په یو «ځاي ارزښت سیستم» کی هغه ګڼ لوي دی چی زیات ځایونه ولري، که چیرې د ګڼ د ځایونو شمیر سره برابر وي ( مساوي وي ) نو هغه ګڼ ستر دی چی له کینی لورې یی نخښنه لویه وي.

**لسیز – یا لسګونی سیستم**: لسیز سیستم هغه ځای ارزښت سیستم دی چي له انځورونی یی څرګندیږي. په لسیز سیستم کی د ګڼ انځورولو نخښی، لکه د مخه مو چی انځور کړې، ۰،۱،۲،۳،۴،۵،۶،۷،۸،۹ دي. ۱۰ ګڼ د لسیز سیستم بنستهیزه نخښنه ده. دا چی نور ګڼونه نه انځوریږي، نو ځای هلته ډک دی چی پرله پسی ( ترتیب یانظم ) د ۰ تر ۹ یعنی له 0 تر 9 ګڼونو پورې په ځای شوي وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



په دې ډول د پسی جگ ځای یوون (واحد) د په کار اچول شووګڼنځنبو ګڼون (تعداد یا شمیر) دی، څموږ په حالت کی ۱۰ .

لکه چی د مخه مو ګوته ورته ونیوله، د پای (نه لایتناهی) ډیري(set , die Menge ګڼو ګڼلو لپاره لاندې ګڼونه کفایت کوي: ۱، ۲، ۳، ۴، او ۹ –امه برخه دې وکتل شي)) داسی نور. ټولودې ګڼونو ته چی دصفرګڼ ورسره مل شي د طبعي ګڼونو ډیری N ویل کیږي. ددې لپاره لیکو :

$$N = \{ 0, 1, 2, . 3 . 4 , 5 , 6,....\} ; \qquad N^* = \{ 1, 2, 3, 4, .....\}$$

موږ ګڼونه په کوچنیو لاتینی ټکو یا حروفو ښایو لکه n . ... a ,b,c, . دا رینښتوني

(رینښتینوالی یا واقعیت) چی n دې یو طبعي ګڼ وي، داسی لیکل کیږي $n \in N$ یا $n \in N^*$ (ویل کیږي چی: n د طبعي ګڼونوډیري N یا*N توکی دی(لنډ n د N یا *N څخه دی)) په دې ځای کی دې دګڼ او ګڼځای (ځیفر) توپیر ته پام وي.

موږ دګڼونو ټاکلو لپاره بلد یا اشنا د نځنبډیري لسیز سیستم په کار اچوو (استعمالوو)

$$N_{10} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,\}$$

د ګڼونو د نځنبو $a_i \in N_{10}$ پرله پسی، لکه د مخه مو چی په ګوته کړل، په لاندې ډول یو طبعي ګڼ انځوروي:

$$a_n\, a_{n-1}\, a_{n-2} \cdots a_2\, a_1 a_0 = a_n.10^n + a_{n-1}10^{n-1} + a_{n-2}\,.10^{n-2} + ..+ a_2\,.10^2 + a_1.10 + a_0\, 10^0$$

$$a_i \in N.$$

ګڼونه په نورو ځیفرونو ډیري هم انځوریدی شي. د بیلګي په توګه په اینفورماتیك (Infrormatik) کی، چی د دوالسیستم ( Dualsystem ) (دوئیز سیستم) څخه کار اخستل کیږي. ددې لپاره دوه ګڼځنبي (ځیفرونه) لیکل کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library



N = { 0,1 }

په لاندې جدول کې دلسيز او دوه ئيز سيستمونو لمړني ګڼونه يو د بل ترڅنګ کښل شوي:

| لسيز سيستم | دوه ئيز سيستم |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |
| 2 | 10 |
| 3 | 1 1 |
| 4 | 100 |

په ټوليزه توګه( عمومي توګه) دلته يو څيفر پرلبسې(د عددون ترادف) $a_i \in N_2$ يو طبيعي عدد په لاندې ډول انځوروي،

$$a_na_{n-1} \ldots a_2a_1a_0 = a_n.2^n + a_{n-1}.2^{n-1} + \ldots\ldots + a_2.2^2 + a_1.2^1 + a_0.2^0 \text{ , } a_i \in N$$

بيلګه ۱ . ۱ :

$$59 = 1.32 + 1.16 + 1.8 + 0.4 + 1.2 + 1.1$$

$$= 1.2^5 + 1.2^4 + 1.2^3 + 0.2^2 + 1.2^1 + 1.2^0 = 111011$$

يا دونه :: څه لنډ لنډيزونه

د طبيعي اعدادو ډيرۍ يا سټ داسی په نخښنه کوو:

د پيدايښتي يا طبيعی ګڼونو ډيرۍ $N = \{ 1, 2 , 3 , \ldots \}$

دپيدايښتي ګڼونو ډيرۍ د صفر سره $N^\circ = \{ 0, 1 , 2 , \ldots \}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



ه کتابونو کی دا د صفر نخښنه په لاندې برخه کی راځي۰

## ۳ ۰ ۱ ۰ ب د طبیعي اعدادو یا ګڼونو انځورونه:

طبیعي اعداد په نخښو انځوریږي۰ دا عددونه یا ګڼونه د ځان لپاره یو سیستم لري، چی هغه زیات یې موږ نه څیرو۰ زموږ لپاره غوره هغهٔ عربی اعداد یا ګڼونه دی۰

یا په بل ډول : دا عددونه چی موږ ورسره بلد یو د لسیز ځایستسم عددونه دي، چی دا مو د مخه په ګوته کړل۰ دا کورونه (خوني یا خانې) لري او په هر کور کی له صفر تر ۹ ځاي نیوی شي او بیا یې هر ځاي یو ارزښت لري، له دې امله دا » ځاي ارزښت سیستم« دی۰ لومړي کور ته یویز، دوم ته لسیز، دریم ته سلیز او همداسی ، چی دا مو د مخه لږ روښانه کړي۰

انځورونه یا څیفرونه یې دي : ۰ ، ۱ ، ۲ ، ۳ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ۷ ، ۸ ، ۹ دا د بنسټیز ګڼونو نخښی دي، نور یې په کورونو یا ځایسیستم باندې روښانه کیدی شي۰

پیژند ۳ ۰ ۱ ۰ ب :

په یو» ځاي ارزښت سیستم « کې هغه ګڼ لوي دی، چی ډیر ځایونه ولري۰ که چیرې د ګڼ د ځایونو یا کورونو ګڼون ( تعداد ) سره برابر وي۰ نو بیا هغهٔ ګڼ لوي دی، چی کیڼ لور یې ګڼنخښه لویه وي۰

۳ ۰ ۱ ۰ پ : طبیعي اعدادو کي د شمیرنې بنسټیز قوانین

اوس په لاندې ډول د پیداینت ګڼونو، په ټولیزه توګه د رییل ګڼونو لپاره او وروسته د کمپلکسو ګڼونو لپاره هم باوري( معتبر) بنسټیز د شمیرنې قوانین وړاندې کوو:

(c) ketabton.com: The Digital Library



الف : د انډول (نظم یا ترتیب یا لوي واړه ترتیب( Anordnung) بنسټیز قوانین:

که > ولرو، نو دې ننوتي کونج کی یا د نخښی خوله کی عدد یا ګڼ لوي دی او د وتلی کونج یا لوي کونج >که نخښه یا داسی کونجکی یا څټ یا ککره کې لیکل شوی عدد کوچنی دی۰ که ګڼونه یا اعداد ۱۵ او ۲۳ ولرو نو د لویواړه اړیکی داسی لیکو، یانې که 23 > 15 ولرو نو ترې څرګندیږي، چی عدد۱۵ له عدد ۲۳ کوچنی دی .

د دوه طبیعي اعدادو a اوb ترمنځ له لاندې اړیکو څخه ټیک یوه اړیکه باور لري»

$a < b \quad , a = b \quad , a > b$

۲ ـ ۲۱ =۲۱ که د ۲۱ په ځاي توری ولیکو هم $a = a$ به وي اینه ونه یا هندارونه یا منعکسونه (ریفلیکسیویتي Reflexivity )

۳ – له $a = b$ => ( لاس ته راځي) $b = a$ ( سیومتري، انډول، ورته وايي ( Symmetry

د انعکاسي (ایینه ونیز – یا هندارونیز) برابروالی یانی که چیري دا عددونه ورواینه یا هنداره یا انعکاس شي، نو دواړه عددونه په دا بل لور بیرته سره برابر دي یا برابریږي۰ که انعکاسي(اینه ونیز)برابر نوم ورته کیږدو، نو هم مناسب به وي، خو موږ به یې همغه سیومتري وبولو۰

٤ ـ له $a = b$ او $b = c$ => ( لاس ته راځی) $a = c$ (ترانزیتیوTransitivity)

ترانزیتیو ګورو، چی یو له بل اړوند مانا ته نزدی دی، ځکه چی دا ګڼونه یو د بل سره په واکوالي تړلي یا له یو څخه وبل ته ځی یا وړل کیږي۰

٥ – له $a < b$ او $b < c$ => ( لاس ته راځی) یا $a < c$ یا $a < b, b < c \Rightarrow a < c$

وړاندیز : که چیری دا پورته وي یا لغاتونه یا نومه ونی په همغه لاتین نومونو ولیکو ښه

(c) ketabton.com: The Digital Library



به وي، خو له شمیرپوهنی پرته مانا باندی یې هم پوهیدنه ښه او اړیینه ده٠

ب : د زیاتون ( جمع) Addition n. بنسټیز قوانین

که چیرې له طبیعي اعدادو څخه یو ، دوه یا څو ګڼونه یو په بل زیات شي، نو یو پیدایښتي ګڼ ترې لاس ته راځی او دا کارونه( عملیه) «زیاتون یت جمعه » بولو، ځکه، چی ګڼونه یو په بل زیاتیږي٠

پیژند: د همغه ډول شیانو یا یو څه یو په بل زیاتیدلو ته زیاتون (جمع) وایو

که عدد ۱۰ په عدد ۱۸ ورزیات کړو نوعدد ۲۸ ترې لاس ته راځی یا

۱۰ + ۱۸ = ۲۸

په پورته کې ۱۰ او ۱۸ یو پر بل زیاتیږي، نو له دې امله یې «زیاتېدونی» ( ما تراوسه زیاتووني بللي، خو فکر کوم،چې زیاتیدوني یې ښه نومه ونه ده) بولي، ۱۰ + ۱۸ جمعه او ۲۸ « جمع ارزښت» بلل کیږي ٠ چی په هغه پخوانی نوم مو ورته حاصل جمع وایه ٠ + زیاتوننخښه ده او = برابروننخښه ( مساوات علامه) بولو

دجمعې یا زیاتون بنسټیز قوانین

۱ - د دوه طبیعي اعدادو a او b لپاره تل یو زیاتون ( جمع) a + b شته دی

۲ - یواځنوالی : له a’ = a او b’ = b څخه لاس ته راځي: a’+b’ = a + b

۳ - COMMUTATIVE LAWکموتاتیو- یا بدلون قانون دی:a + b = b +a

۴ - assotiative law اسوځیاتیو - سره ګډېدنې قانون. لرو
(a+b)+c=a+(b+c)=a+b+c

۵ - Monotony law مونوتوني – یا همغږیزوالي قانون :

(c) ketabton.com: The Digital Library



له $a < b$ څخه لاس ته راځي $a+c < b+c$

يادونه : په $a+b=c$ کې $a$ اوb زياتېدوني $a+b$ زياتون او $c$ زياتون ارزښت بلل کيږي

يادونه : په زياتون کې لاندی زياتونقوانين هم باوري دي:

ناپيلی توکی: په $N°$ کی يو توکی شته، چی که د هرپيدايښتي توکی سره په زياتون يا جمعه کی ور زيات شي همغه توکي ورکوي٠ دا توکی صفر دی: $a+0=a$

ناپيلی توکی کړی شو نالوريز وبولو ،ځکه،چې د کومې لور ګڼ باندې يې په زياتون کې بدلون نه راولی يا د زياتون ارزښت همغه پاتيږي، همداسې ناړونده او که بل څه مو په خوښه وي همغسې يې وبولی٠

## پ : د کمون ( تفريق)Subtraction بنستيز قوانين

پيژند:د پيدايښتي ګڼونو $a$ او $b$ لپاره، چې $a>b$ وي، يواځی يو $x$ شته دی، د کوم لپاره ، چې باور لري: $a - b = x$

که $x= a -b$ شته وي، نو تيک يواځني شته دي( موخه $x$ دی)

نومه ونې: $b$ کميدونی يا مفروق ( تراوسه مې کمونی بللی) $a$ ترې کمونی يا مفروق منه $a +b$ کمون او $x$ کمون- يا تفريق ارزښت بلل کيږي يا بولو :

موږ پورته د لاتين تورو لپاره طبيعي اعدادونخښی ليکو، چی ساده يې ونوموو:

$20 – 10 = 10$

(c) ketabton.com: The Digital Library



په پورته کی موږ له ۲۰ لس کم کړل، چی لاس ته راوړنه یې ۱۰ ده، نو له دی امله یې داسی نوموو:

تر مخ یادونه: په لاندې کې ع . د عربي په معنا دی

۲۰ «ترې کمونی »، څکه، چی ترې کمیږي( ع۰ مفروق منه)، ۱۰ «کموونی« یا کمیدونی( ع۰ مفروق) دا بل لس یې «کمون ارزښت» یا د کمون لاس ته راوړنه( لنډ: لاس ته راوړنه یا کمون) (ع ۰ حاصل تفریق) ، – کموننخښه او = برابروننخښه ده۰

## ت : د ځل ( ضرب Multiplication) بنسټیز قوانین:

۱ - د دوه پیدایښتي ګڼونو a او b لپاره د پیدایښتي ګڼونو په ډیری کې تل یو ځل a.b شته دی. د a.b لپاره داسي هم لیکو ab په پورته کې a او b ځلووني ( ضریبونه) او ab=x « ځل ارزښت » یا ځل( حاصل ضرب) دی۰

وایي چی ضرب وهلو ته وایي او د جمع ( که جمعي) لنډه طریقه، چی۰۰۰۰وي یا د زیاتون لنډه لار ده۰ ګورو، چی دا پیژند، چی وهل او دربول دي زموږ لپاره دومره موخور نه دی او ځل د پښتو ښه نوم دی، چی له دربولو مو ځانونه راویستلي وي۰

که ووایو، چی : د کابل او جلالاباد ترمنځ لار ۱۵۰ کیلو متره ده۰ زمری له کابل څخه جلال اباد ته ۸ ځله لاړ، نو زمري به جلال اباد ته د تګ ټوله څومره لار وهلی وي؟

لیکو: ۱۵۰ × ۸ = ۱۲۰۰ ، نو زمري به ټوله ۱۲۰۰ کیلو متره لار وهلي وي۰ ګورو، چی د ځل نومونه د ضرب لپاره ښه او اسانه ده، څکه چی پښتو ده او له ضریبونو څخه به هم ځلوونی اسان وي، به ۰۰۰وي نه، بلکی اسان دي۰

۲ - له $a = a'$ او $b = b'$ څخه لاس ته راځي $a'b' = ab$ ( یواځیتوب)

۳ - لرو $ab = ba$ کموتاتیو – یا د بدلون قانون

(c) ketabton.com: The Digital Library



٤ - لرو $(ab)c = a(bc)$ د ګډولو- اسوشیاتیو قانون

٥ – لرو $(a+b)c = ac + bc$ د ویشونې- یا دیستریبوتیو قانون Distributive law

٦ - له $a < b$ او $c > 0$ لاسته راځي $ac < bc$

جګتیتوالي یا یوغرېزوالي قانونMonotony

ت – د ویش بنسټیز قانون Division

پیژند٣ ٠ ٢ :

که د دوه طبیعي عددونو a اوb لپاره، چې $a \neq b$ او $a \neq 0$ وي یانی صفر نه وي یو طبیعي عددx شته، چې برابرون ( مساوات) $ax = b$ پوره کړي، نو

$x = \frac{b}{a}$ یا $b/a$ د b او a ویش (تقسیم) بلل کیږي، چې ماتګې(کسر) یې هم بولو

١ – که $a / b = x$ یا $x = \frac{a}{b} = a/b$ شته یا موجود وي ، نو یواځنی شته دی( یواځني په دې مانا، چې بل ګڼ x نه شته او یواځې همدا ګڼ x دی )

نومه ونې : په پورته برابرون کې $a/b$ وېش x ویش ارزښت، b ویشونی یا ویشه وونی دی، ځکه چې په یوڅه ویشل کیږي او a پرویشونی بلل کیږي، ځکه، چې څه پر ویشل کیږي یا مقسوم، مقسوم علیه یا قاسم ، حاصل تقسیم ٠

ګورو چې له قاسم یا مقسوم او همداسی د مقسوم علیه او حاصل تقسیم څخه مو دا د پښتو نومه ونی پر- یا پرې ویشونی ، ویشه ونی اوویش ارزښت یا لاس ته راوړنه ساده او زر پوهېږ دي، خو په خواشینی به وه وایم، چې تراوسه په شمیرپوهنه کی ورسره نابلد یو ٠

(c) ketabton.com: The Digital Library



که ۱۲ کتابچې پر څلورو زده کوونکو وویشو، نو هر یوه ته درې کتابچې رسیږي. ګورو، چې ۱۲ په یو څه ویشلکیږي، نو ویشونی یې ښه نوم دی. دا ۱۲ په څلور ویشل کیږي پر ... ویشل کیږي، نو له دې امله څلور پر ویشونی بولو، درې یې لاس ته راوړنه ده لکه چې تراوسه مو ورته حاصل تقسیم وایه، له دې امله ورته ویش ارزښت وایو او دا کارونه یا عملیه خو ویش بلل شوی.

## ۳ . ۱ . ۲ ټولګڼونه یا تام اعداد INTEGERs

د دووو طبیعي عددونوa او bکمون یا تفریق (x= b-a ) ټیک او ټیک هلته یا هلته او هلته د طبیعي عددونو ډیری یا سټ کی شته، چې وي : $a \le b$

د شمیرپوهنې نخښنو باندې داسې لیکل کیږي:

$$x = b - a \Leftrightarrow a \le b$$

انګریزي یې if and only if ټیک او ټیک هلته یا هلته او هلته( دا شننه یا وینه پورته د شمیرپوهنې نخښې ته ده).

که هغی نخښی ته وګورو، نو هم لاندې ترې څرګندیږي، له ښی لور کیڼ لاس ته راځی او په څټ( برعکس) له کیڼ لور ښی لاس ته راځی. یا که... وي، نو ... لاس ته راځی او په څټ.

ټولګڼونه یا تام اعداد هم د انسانانو د اړتیاو پر بنسټ منځ ته راغلي ، یا منځ ته راوړل شوي.که چیرې سپین د خړ ۱۰۰ افغانۍپوروړی وي او سپین ورته اتیا افغانۍ ورکړي، نو سپین بیا هم شل افغانی پوروړی پاتیږي، دا په دی ما، چې ۸۰ + ۱۰۰ - = ۲۰ - . ګورو، چی ۲۰ – یو پیداینتي ګڼ یا طبیعي عدد نه دی.یا 20- = 100 – 80

(c) ketabton.com: The Digital Library



په هغه حالت کی، چی کموونی (مفروق) له ترېکموني(مفروق منه) څخه لوي وي، نو لاس ته راوړنه يې طبيعي عدد نه دی٠ اوس يوه د اعدادو بلې ډيری پيژند ته اړ کيږو، چی هغه د ټولګڼونوډيری ده او دا د طبيعي عددونو او د طبيعي عددونو کمي( منفي) او صفر سره يوځاي کوو، چی ټولنه جوړوي( په ډيری کۀ به روښانه شي)، هغه څه، چي له دې ټولنې لاس ته راځي هغه د ټولګڼونو ډيری ده او داسې يی ليکو:

$$Z = N \cup -N \cup 0$$

$$Z = \{\ldots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots\}$$

د دې لپاره، چې ترې کمونی د کمېدونی کوچنی وي ، نو پيدايښتي ګڼونه په کمګڼونو غزوو يا پراخوو، دا په دې مانا، چی د پيدايښتي ګڼونو مخنخښه په کموننخښه يا منفي نخښه باندې سنبالوويانې ( کيدی شي زموږ هيوادوال د څټ نخښی په نامه ورسره بلدوي، خو هره نخښه، چې د ګڼ زياتی يا کمی ښايې د ګڼ کيڼ لور ته ليکل کيږي، چې دا ما مخنخښه ليکلې او بللی

هغه په برخه ۳ ۰ ۱ ۰ ۱ کې ورکړ شوي شميرقوانين په Z کې هم باور لري

د ټولګڼونوډيری

$$Z = \{ \ldots. -3, -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , 3 , \ldots. \}$$

د مخه مو شميرقوانين، چې د پيدايښتي ګڼونو لپاره ورکړل، هغۀ د ټولګڼونو لپاره هم باور لري

د کمون يا تفريق بنسټقوانين ( پسی يا دوام):

۲ - د هرو دوو ټولګڼونو يا تام اعدادو a او b لپاره يو ټولګڼ x=b-a شته، د کوم لپاره، چیa+x=b برابرون باوري دی

د ويش تيوري:

(c) ketabton.com: The Digital Library



## ۳ ۰ ۱ ۰ ۲ الف د ويش قاعدې ، لارې يا خويونه

د طبيعي عددونولپاره د نورو قاعدو ترڅنګ ، چې د لومړنيو ګڼونو د ټوټه ونې يا تجز يي لپاره خورا ګټور دی باور لري

الف ) يو ګڼ په ۲ (٤ ، ۸ ، ۱٦ ) ويشونی دی، که د اخر ځيفر يا کور ( له اخره( موخه تری ښی لور دی) دوه ، درې ، څلور ۰۰۰ بنستيزو ځيفرونو ) څخه جوړ ګڼ په ۲ ( ٤ ، ۸ ، ۱٦ ۰۰۰ويشونی وي) په دوه ويشونی ګڼ جوړه ( جفت) نوميږي او بل ډول يی ناجوړه( طاق) بلل کيږي۰ ګورو، چی دلته هم په جوړې او ناجوړه ښه پوهيدلی شو

ب ) يو ګڼ په ٥ ( ۲٥ ، ۱۲٥ ، ٦۲٥ ، ۰۰ ) ويشونی دی، که د اخر( له ښي لور) بنستيز ځيفر ( د اخر دوه، درې ، څلور ، ۰۰۰ بنستيز ځيفرونو) جوړ ګڼونه په ٥ ( ۲٥، ۱۲٥ ، ٦۲٥ ۰۰۰) ويشوني وي

يادونه : په لاتين کی هغه، چی ښي لور ته وي هغه ته اخر وايې او موږ يې شايد لومړی وبولو۰ زه کوښښ کوم، چې دا پوهوړ وليکم، خو بيا دې هم ګران لوستونکی تری ټيک ناپوهيدنه ماته وبخښي او مشوری دې راکړي۰

پ ) يو ګڼ په ۳ همداسی ۹ ويشونی دی ، که د ګڼ پروت زياتون پر دې ګڼونو ويشونی وي۰

د يوه ګڼ پروت زياتون لاندې د هغه ګڼ بنستيز ه ګڼونخښو(ځيفرونو) زياتون پوهيږو، بی له دې، چې د هغه ځاي ارزښت په پام کې ونيول شي۰

بيلګۀ : د 126 پروت زياتون يا پرته جمعه ده: 1+2+6=9

ت) يو ګڼ په 11 ويشونی دی که د هغه ګڼ الترنيري( نخښه بدلونکی) پروت زياتون۰ پر 11 ويشونی وي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library



الترنيري پروت زياتون، چې پروت کمون هم ورته وايی له بنستيزو څيفرونو ۱ ، ۳ ، ۵ زياتون څخه د ۲ ، ٤ ، ٦ ،۰۰۰ زياتون کمون پو هيږو ، بی له دې، چی ځاي ارزښت يې په پام کی ونيول شي يا په بل ډول، که د ناجوړه کور زياتون څخه د جوړه د زياتون کم کړو۰

بيلګه: ۱۷۳۸ په ۱۱ ويشوني دي، ځکه، چې : ۱۵= ۸+ ۷ او ٤ - = ۳ – ۱ -، چی الترنيري زياتون يانی ۱۱ = ٤ – ۱۵ يې په ۱۱ ويشونی دی۰

ټ ) يو ګڼ پ ه ۳۷ وېشوړ دی که ( د ګڼ له اخر څخه جړ.ړشوي) د درېګوني ګڼونو زياتون پر ۳۷ وېشونی وي.

بيلګه:

$37|(448+352+216+20) \Leftrightarrow 37|1036$ ځکه چې $37|20216352448$

ث ) يو ګڼ په ۷ همداسې په ۱۳ ويشوړ دی، که د هغه ( د ګڼ له لخ څخه جوړ) درېګونی الترنيري زياتون پر ۷ همداسې پر ۱۳ وېشونی وي.

بيلګې : $7 | 37604$ ځکه چې $7 | 567 \Leftrightarrow 7|(604-37)$

$13 | 9679293889$ ځکه ، چې $13|1209 \Leftrightarrow 13|(889-293+709-96)$

ج) يو ګڼ په ۱۰۱ وېشونی دی، که (د ګڼ له اخر څخه جړشوی) دوهګونی الترنيري زياتون په ۱۰۱ وېشونی وي.

بيلګه:

$101|7930630669$ ځکه چې $101|202 \Leftrightarrow 101|(69-06+63-03+79)$

(c) ketabton.com: The Digital Library



یادونه : که پیداښتي ګڼونه a او b ولرواو ولرو a : b ، نو a پر b وېشو، که وېش

ارزښت یې هر ګڼ وي او که پېداښتي ګڼونه a او b ولرو او ولرو b|a ، نو دا په دې مانه، چې ګڼ b ګڼ a ویشي بې له پاتي یانې ګڼ a په ګڼ b وېشوړ دۍ.

## ۳ . ۱ . ۲ټ) خوراغټ ګډ پرویشونی او خورا کوچنی ګډ زیاتځله

یا بزرګترین قاسم مشترک و کوچکترین مضرب مشترک(ذو الاضعافالاقل)

Great common divisor and small common multiple

ددې لپاره، چې دا په سرلیک کې ورکړ شوي څه ښه و پېژندلی شو ، داسې مخ ته ځو:

لاندې ګڼونه دې ورکړ شوي وي، سملاسي یې په لومړنیو ګڼونو ټوټه کوو

$$260 = 2.130=2.2.65=2.2.5.13 = 2^2.5.13$$

$$468=2.234=2.2.117=2.2.3.39=2.2.3.3.13=2^2.3^2.13$$

له پورته دواړو ګڼونو د لومړنیوګڼونو ځله وونو هر یوه څخه هغه لومړنی ګڼ رانیسو او سره ځله وو بې، چې په دواړو ګڼونو کې ګډ وي او توان( په خپل ځای کې دې وکتل شي) یا جګګڼ بې ټیټ یا کم وي . یانې

$$2^2.13 = 2.26 = 52$$

دا پورته لاس ته راوړی ګڼ یانې ۵۲ پورته دواړه ګڼونه وېشي یانې د دواړو ګڼونو پرووېشونی

دۍ او خورا غټ پرووېشونی هم دۍ. یانې ۵۲ خورا غټ او ددواړو ګډ پرووېشونی دۍ.

(c) ketabton.com: The Digital Library



لنډ : ۵۲ د یورته ګڼونو خورا غټ ګډ پروېشونی دئ.

داسې ګڼ , خوراغټ ګډ پروېشونی, بولو ( لنډ ونه یې : غ ګ و )

هغه ګڼ، چې د دوه یا ډېرو ګڼونو ګډ پروشونی او خورا غټ هم وي، نو دې ګڼ ته خورا,,

غټ ګډ پروېشونی ,, ( لنډونه: غ ګ و) وایو. یا

(Greatest commom divisor(g c d)بزرګترین عامل ( مقسوم علیه ) مشترک)

اوس بیا داسې مخ ته ځو:

په پورته کې هغه د دواړو ګڼونو لومړني ځله ووني، له هر څخه یو چې په جګ توان وي

یاني خورا غټ جګګڼ ولري ، هغه د جګ توان رابېلوو او بیا یې سره خله وو، چې لاس ته

ترې راځي: $2^2.3^2.5.13=2340$

دا پورته ګڼ یاني ۲۳۴۰ د دواړو ورکړ شوو ګڼونو ګډ زیاتځله دئ ( یاني ګډ په دواړو

وېشل کیږي) او دا خورا کوچنی ګڼ هم دئ. دا په دې مانا،چې له دې ګڼ بل کوچنی ګڼ نه

شته، چې د پورته ګڼونو دواړو ګډ زیاتځله( څو برابره ) وي.:

لنډ : خورا کوچنی ګڼ دئ. د دواړوګڼونو (یاني ګډ) زیاتځله (ګډ څو واره) دئ

لنډ یې : خورا کوچنی ګډ زیاتځله ( لنډونه یې: خ ګ ځ) یا
(Least common multiple(l.c.m.)کوچکترین مضرب مشترک یا ذوالاضعاف الاقل)

(c) ketabton.com: The Digital Library



ګران هیوادوال دې ورته پام وکړي، چې کوم نوم به زموږ لپاره زر یا بیخي پوهوړ او ساده وي.

وروسته داسې مخ ته ځو:

دا چې موږ په پیدایښت یا طبیعي ګڼونو کې له شمیرلو سره بلد شو ، نو په لاندې ډول پیژند ورکوو:

پیژند( تعریف)۳ ۰ ۳ :

a او b دې تولګڼونه وي۰ وایو چې « ګڼ a ګڼ bویشي» ( او یا هم a د bپروېشونې دئ او یا همa د b څو برابره ( زیاتځله ) دئ) که یو تولګڼ u شته یا موجود وي او دا باوري کړيau=b ددې لپاره لیکوa|b (وایو، چې ګڼ aګڼ b ویشي ، خو اړیین یا ضرور نه ده، چې کلمه ګڼ ورسره وویل شي۰

که a د bپروېشونی نه وي، نو د دې لپاره لیکوa|/b(دا نخښه /| دې د نه ویشونی لپاره ومنل شي)

بیا لیکو، چې : پیدایښتي ګڼونه، چې په ۲ ویشل کیږي جوړه ( جفت) ګڼونه بلل کیږي او که نه نو ناجوړه ( طاق) ګڼونه بلل کیږي۰ د صفر ګڼ د پیدایښتي ګڼونو په ډیری کې یو ځانګړی حالت لري۰

په لاندې جمله کې بې له ښوونې یا اوبیونې د دې ویشکلمی لپاره یو څو ساده شمیرقاعدې را یوځاي کوو، چې په راتلونکې کې ترې کار اخستل کیږي۰

جمله ۳ ۰ ۱ :

د په خوښه یا زړه پورې تولګڼونو a,b,c,d لپاره باوري دي:

( ۱ ) 1 ± او a± ویش ( دا په نامه « ساده» پروېشونې دي)

(c) ketabton.com: The Digital Library



(۲) د ۱ پرویشونی ۱ او ۱ - دي

( ۳ ) تل باور لري، چې $0 | a$ او $a | 0$ یواځی په هغه حالت کې باور لري، چې $a = 0$ وي

( ٤ ) له $a|b$ او $b|c$ <= $a|c$

( ٥ ) له $a|b$ لاس ته راځي: $ac|bc$ ۰که $c \neq 0$ وي ، نو د دې په څېر هم باوري

دي۰ دا په دې مانا چې، که $ac|bc$ وي، نو $a|b$ هم باور لري۰د ګڼونو

لیکدود له مخې، که نړیوالجال ته پورته شو داسې لیکو، که نه دا پورته بسیا

کوي: $c \neq 0, a|b \Rightarrow ac|bc$

( ٦ ) له $a|b$ او $c|d$ څخه لاس ته راځي او په څېر $ac|bd$ لنده لیکنه یې(که نړیوالجال ته پورته شوه ): $a|b, c|d \Leftrightarrow ac|bd$

( ۷ ) له $a | b$ او $b| a$ لاس ته راځي $a = \pm b$

( ۸ ) له $a |b$ او $a|c$ څخه لاس ته راځي $a|(bx+cy)$ د ټولو ټولګڼونو $x$ او $y$ لپار

( ۹ ) تیک هلته $a|b$ کله چی وي $|a| | |b|$،

( ۱۰) که $a | b$ او $b = 0$ نه وي نو باوري دي $-|b| < a < |b|$

حل ( اوبی ) : ( ۱ ) له $a = (-a)(-1) = a1$ لاس ته راځي

( ۲ ) له $a0 = 0$ لرو $a | 0$ . که وي $a | 0$ , نو یو تولګڼ $u$ شته د کوم لپاره چی وي $a = 0u$

او له کومی چی لاس ته راځي $a = 0$ .

( ۳ ) ساده دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



( ۴ ) که $a \mid b$ او $b \mid c$ , نو تولګنونه u او v د $au = b, bv = c$ سره موجود دی . له دي لاس ته راځي $c = bv = a(uv)$ ، پس $a \mid c$ .

( ۵ ) که $a|b$ ، پس یو تولګنې u د $au = b$ سره موجود دی، او هم د $(ac)u = bc$ سره، د کوم څخه چی لاس ته راځي $ac \mid bc$ . د $c \neq 0$ لپاره دا اخرځنځیر په شټ کیدی هم شي.

( ۶ ) د $a|b , c|d$ او ( ۵ ) څخه لاس ته راځي چی $ac|bc$ او $bc|bd$ ، د ( ۴ ) له مخی $ac \mid bd$ .

( ۷ ) د $a \mid b$ او $b \mid a$ څخه د تولګنونو u او v موجودیت لاس ته راځي د $au = b$ او $bv = a$ سره. برسیره پر دي لاس ته راځي $a(uv) = a$ , پس $a=0$ یا $u=v=\pm1$ . په لمړي حالت کی د $a \mid b$ له امله $b = 0$ , پس $a = b$ . په دوم حالت کی $a =\pm b$ دی.

( ۸ ) د تولګنونو $u , v$ لپاره دي $au = b$ او $av = c$ ، نو له دي $a(ux+vy)=bx+cy$ لاس ته راځی، پس $a \mid (bx+cy)$ د تولو تولګنونو x او y لپاره.

( ۹ ) وي دي $a|b$ . له $a \mid b$ ، $a| \mid |a|$ او $b \mid |b|$ څخه او د ( ۴ ) څو واره استعمال څخه لاس ته راځي، چی $|b| \mid |a|$ . په څټ: که $|b| \mid |a|$ باورلری، نو د $|b| \mid |a|$ ، $a \mid |a|$ او $|b| \mid b$ څخه په ورته ډول لاس ته راځي $a \mid b$ .

( ۱۰ ) دی $a \mid b$ ، پس د ( ۹ ) هم $|b| \mid |a|$ . که $b \neq 0$ وي ، پس یو طبعي ګڼ u لاس ته راځي د $|a|u = |b|$ سره، له کوم چی $|a| \leq |b|$ لاس ته راځي.

که $b|a$ د تولګنونو $a,b$ لپاره د $b \neq 0$ سره، نو یو یواځنی معلوم ګڼ q شته ( د a او b همداسی د «کومپلیمنت پرویشونی» بلل کیږي )، چی لرو $a = bq$ .

په تولیزه توګه لاندې جمله باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library



جمله ۳ ۰ ۲ ( د ویش الګوریتم): a او b دې ټولګنونه وي۰ د $b \neq 0$ سره ۰ نو یواځني ټاکلي، په پاى پلونو(قدمونو) کی شمیرلکیدونکي ټولګنونه q او r (چې د a پرb ویش

څخه لاس ته راځي او «ویش» په همدې ډول « پاتی بلل کيږي، شته دی،د کومو لپاره چی باور لري: $a = bq + r \;\wedge\; |0| \leq r < b$

هر یو ټولګڼ کم له کمه ساده پرویشونی لري یعنی $\pm 1$ او پخپله د دې ټولګڼ زیاتیز( مثبت) او کمیز( منفي)۰ دې پرویشؤنو ته «سادهٔ پرویشونی» وایو۰

پیژند ۳ ۰ ب :

هر یو ټولګڼ، چې یواځی او یواځي ساده پرویشونی ولري مونږ ورته لومړنی ګنونه وایو او دا لومړنی یا پریم ګنونهPrimzahlen په pسره په نخښنه کوو، چې دا پریم یا لومړی ګڼ د پیداینتي ګنونوتوکی دی۰

هریو ټولګڼ، چی لومړنی ګڼ نه وي د لومړنیو ګنونو په څلونو( څله وونو)(ضریبونو) ټوټه یا تجزیه کیدی شي۰

بیلګی :

1 - $240 = 24 . 10 = 3 . 8 . 2 . 5 = 2 . 2 . 2 . 2 . 3 . 5 = 2^4 \cdot 3 . 5$

-2 $2310 = 2 . 1155 = 2 . 3 . 385 = 2 . 3 . 5 . 77 = 2 . 3 . 5 . 7 . 11$

$3750 = 25 . 15 . 10 = 5 . 5 . 3 . 5 . 2 . 5 = 2 . 3 . 5^4$

که پورته بیلګو ته په ځیر شو نو په ۱ او ۳ راغلو ګنونو کی ګڼ ۲ د دواړو پر ویشونی دی او همدا ډول ۳ هم د دواړوګنونو پرویشونی دی یانی $2.3 = 6$ برسیره پردې ګڼ ۵ هم نو $2.3.5 = 30$ دواړه ګنونه ویشي او شاید په دې ګنونو کی یو خورا غټ ګډ پرویشونی هم وي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library



په پورته درېواړو بیلګو کې ۲ ، ۳ ، ۵ د ځلوونو په څیر خوندي دي یانې دا ګڼونه ویش، چې له دې امله ګڼ ۳۰ د درجواړو ګڼونو غ۰ګ۰پ دی

پیژند ۳ ۰ پ :

a او b دې تولګڼونه وي او d دې یو مثبت یا زیاتونی تولګڼ وي، د کومو لپاره، چې باور لري:

$$(1) d \mid a \wedge d \mid b$$
$$(2) t \mid a \wedge t \mid b \Rightarrow t \mid d$$

پس d د a او b خورا غټ ګډ پرویشونی(غ۰ګ۰پ) بلل کیږي d لپاره داسی لیکو:

$$d = (a,b)$$

نو d خورا غټ ګډ پرویشونی( لنډ: غ۰ګ۰پ) بلل کیږي۰

که باوري وي: $(a,b) = 1$ نو a او b پروېش پردي بلل کیږي یانې له ۱ پرته بل داسې ګڼ نه شته، چې دواړه ګڼونه پر وویشل شي.

یادونه : په زیاتو ادبیاتو کې لنډونه په درېتورو کیږي، خو که غواړی دا خورا غټ ګډ پرویشونی داسې رالنډوو : خ غ ګ پ

یادونه: ما د خورا غټ ګډ پرویشونی لپاره دا پورته درې توکي غوره کړي، که ګران لوستونکي بل وړاندیز لري، نو زه یې ضرور په پام کی په پوره خوښی نیسم۰ دې دوه کلمو ته په فارسي ادبیاتو کې بزرګترین قاسم مشترک او کوچکتریب مضرب مشترک وايي او ذوالاضعاف الاقل یې هم بولي۰

یادونه : که چیرېd او *d دواړه دa او b غ ګ پ وي، نو له پورته پیژند څخه لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library



چی $d \mid d^*$ او $d^* \mid d$ ، نو د $d^* , d \geq 0$ له امله لرو $d^* = d$

لاندې جمله په وښايي ، چې داسې غ ګ و تل شته دی

جمله ٣ ٠ ٣ :
په خوښه ټولګښونو a او b لپاره دې غ ګ پ d شته وي، نو ټولګښونه x او y شته د کومو لپار، چې لرو: $d = ax + by$

حل( اوبې ): که $a = b = 0$ وي ، نو 0 د a او b غ ګ و دی، نور ساده دی. د a او b د ممکنه بدلون ( په پام کی دې وي چې د ( a , b ) تعریف په a او b کی سیومتریك دی) له امله اجازه لرو چې $b \neq 0$ ونيسو.
موږ اوس رکورسيف (rekursiv) ( دا په دې مانا چې د مخه غړي څخه وروستی يعني وريسی غړی لاس ته راوړلکيږي )
ټولګښونه......., $r_{-1}, r_0, r_1, r_2$ او .......... $q_1, q_2$ په لاندې ډول تعريفوو : وي دې , $r_{-1} = a$
$r_0 = b$ د $i \geq 1$ او $r_{i-1} \neq 0$ لپاره ټولګښونه $q_i$ , $r_i$ داسی تعينوو چی $r_{i-2} = q_i r_{i-1} + r_i$

او $o \leq r_i < |r_{i-1}|$ کوم چی له جملی ( ٣ . ١ ) څخه ممکن کيدی شي . بايد يو نه منفی ګڼ n ورکړ شوی وي، د کوم لپاره چی لرو $r_n \neq 0$ مګر $r_{n+1} = 0$ , چی بی له دې بيا يوه نه پای د طبعي ګڼونو لويدونکی يا کميدونکی پرلپسی لاس ته راځي، کوم چی ناشونی(ناممکن ) دی. دامو اوس ددې لاندې مساواتو شيما ته لارښودوي

$$a = q_1 b + r_1$$

$$b = q_2 r_1 + r_2$$

..................

.............

$$r_{n-2} = q_n r_{n-1} + r_n$$

$$r_{n-1} = q_{n+1} r_n$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



که دا مساوات د ښکته پورته وویل شي، نو په ترتیب (یو په بل پسی) لاس ته راځي:

$$r_n \mid r_{n-1} , r_n \mid r_{n-2} , \ldots r_n \mid b , r_n \mid a$$

دا په دې مانا چی $r_n$ د a او b یو غ ګ و دی. t دې د a او b یو بل غ ګ و وي، نو په دې حالت کی که دا پورته مساوات له پورته ښکته ولولو، نو یو په بل پسی لرو

$$t \mid r_0 , t \mid r_1 , t \mid r_2 ,\ldots, t \mid r_{n-1} , t \mid r_n$$

دا په دې مانا چی $|r|$ د a اوb غ ګ و دی.

هر د دې ګڼونو $r_i$د ( $-1 \leq i \leq n$ ) سره، په ځانګړي ډول $r_n$ او ددې سره (b , a) یو د a او b لاینې کمبینیشن دی ، په لاندې ډول $au + bv$ , چی u او v تولګڼونه دي.

د $r_{-1} = a$

او $r_0 = b$ لپاره ساده دی. که د یوه i لپاره د $1 \leq i \leq n$ سره، که یو د a او b یو لاینې کمبینشن ښوونه د $r_{i-1}$ او $r_{i-2}$ لپاره همدا سم د لاسه پیداشوي وي، نوله $r_{i-2} = q_i r_{i-1} + r_i$ څخه د یوې داسی $r_i$ د ځاي په ځاي کولو له لارې هم ، چی په دې ډول د ایندکشن له لارې غوښتنه لاس ته راځي. ( پای )

یادونه : د غ ګ پ د ښوونې متود ، چی پورته او په لاندې بیلګه کې راوړل شي د اویکلید الګوریتم"Euklid Algorithmus„ د یوې ګڼیزې دندې یا کارونی (عملیې) شیماتیکي اوبیونې( حل) متود په نامه یادیږي، نو له دې سرهx او y هم له a څخه

$d = ax + by$ اکسپلیځیتExplizit ( لاتین: ځرګند، واضح، روښانه) شمیرل کیدی شي.

بیلګه:

غوښتنه $d = ( 2124 , 1764)$ ۰ د اویکلید الګوریتم کارونی له لارې لرو:

$$2124 = 1 . 1764 + 360$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$1764 = 4.360 + 323$$

$$360 = 1.324 + 36$$

$$324 = 9.36$$

$$\Rightarrow d=36$$

که پورته وګورو نو غ ک پ $d = 36$ دئ

د دې لپاره ، چېd لهx او y سره په $d = ax+by$ ډول انځور کړی شو، نو په لاندې توګه مخ ته ځو:

$$36 = 360 - 1.324 = 360 - 1( 1764 - 4.360) = (-1).1764 + 5.360$$

$$= ( -1) . 1764 + 5.(2124 - 1764) = 2124 . 5 + 1764.(-6)$$

د پورته څخه دa اوb لپاره لاندې مهمه پیژند نخښنه یا نخښنونه لاس ته راځي

یادونه : ماته دا لاندې جملې ښه ښکارېږي، چې ګرانو لوستونکو ته یې بې له اوبیونې

وړاندې کړم، دا جملې په خته کې د ګڼونوتیوري دنده ده، چې په ګڼونتیوري کې بیا د ښوونې سره ښوول کیږي۰

جمله۳ ۰ ۹ :

a اوb دې ټولګڼونه وي. د a اوb یو ګډ پرویشونی $t \geq 0$ هلته او هلته د a او b ګ غ پ دئ کله چې دا شکل $t = ax + by$ د a اوb ټولګڼونو سره انځور کړاي شو۰ په ځانګړي ډول a اوb هلته او هلته ویشپردي دي، که ټولګڼونه x او y شته وي د کومو لپاره چې باور لر:

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$ax + by = 1$$

اوبيونه : د شرايطو ضرورت سم د لاسه له ۳ ږ ۶ څخه لاس ته راځي. دا چې شرايط پوره کېدونکي هم دي، له دې لاس ته راځي، چې هر د او پروېشوني د پروېشوني هم دي..

څو جملې په لاندې کې روړو، ګڼونتېري پورې اړه لر او دلته يې نه ښايو.

جمله : ۱۰ . ۳

a او b دې تولګڼونه وي۰ د a او b هر ګډ پرويشونی $t \geq 0$ لپاره باور لري:

$$(a/t,b/t) = ( a,b) / t$$

په ځانګړي توګه t د a او b يو ګډ پرويشونی هلته اوهلته غ ګ پ دی چې باور ولري

$$(a/t,b/t) = 1$$

ليما۳ ۰ ۱۱( جمله ګی)( اويکليد): په خوښه تولګڼونو a او b او c لپاره باور لري

له $a|bc$ او $(a,b) = 1$ لاس ته راځي $a|c$

تعريف ۲ ت : $a_1 , a_2 , .... a_n$ دې تولګڼونه وي $( n \geq 1 )$, او d دې يو نه منفي تولګڼ وي د کوم لپاره چې باور لري :

لمړی : $d | a_i$ د ټولو $i = 1 ,...., n$ لپاره

ب : له $t | a_i$ څخه د ټولو $i = 1 ,...., n$ لپاره لاس ته راځي $t | d$ .

نو d د $a_1,...., a_n$ غ ګ و بلل کيږي او د d لپاره هم داسی ليکو $(a_1 , .... , a_n)$.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د $a_n$ , .... , $a_1$ لپاره د داسی غ ګ و یواختتوب په ۳ . ۵ کی کتل کیدی شي او د موجودیت لپاره یی لرو :

جمله ۳ . ۱۳ : د خوښي تولګنونو $a_n$ , ... , $a_1$ لپاره ( $n \geq 1$ ) غ ګ و موجود او d د $a_n$ , ... , $a_1$ خطي (لاینتي) کمبینیشن دی دا په دې مانا چی

$$d = a_1x_1 + ... + a_nx_n$$

د مناسبو تولګنونو $x_n$ , ... , $x_1$ لپاره.

یادونه : له دې بیا لاس ته راوړل کیدی شي:

$$(a_1 , .... , a_n) = ((a_1 ,..., a_{n-1}), a_n)$$

د په خوښه تولګنونو $a_n$ ,..., $a_1$ د ( $n \geq 1$ ) لپاره. سړی کړی شي چی د $a_1,...,a_n$ غ ګ و پل په پل د اویکلید الګوریتموس له لارې پیدا کړي، چی دلته یی د اوبی یا حل شخه تیریږو.

د اوبی یا حل لپاره یی د n په لور د پوره ایندکشن شخه کار اخستل کیږي چې په ۸ –امه برخه کې شیړل شوی دی.

بیلګې:

۱ - ګنونه 240 او3750 غ ګ پ 30 = 2.3.5 لري

۲ – لرو 408 او748

$$408 = 2^3.3.17, 748 = 2^2.11.17$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



پس غ ګ پ دی: 17 . 2<2> = (408,748 ) یا دا لاندې که ن ج پورته شول

$(408,748) = 2^2.17 = 68$

۳ – پ غ ګ پ د ګڼونو او غ ګ پ 6 = (30.66.114 ) دی، ځکه، چې
$30 = 2.3.5$

او $66 = 2.3.11$ او $114 = 2.3.19$ دي

٤ – ګڼونه 54 او 65 ګډ پرویشونی نه لري دا موږ پرویشپردی بولو، ځکه، چې دي:

$65 = 5.13 \quad \wedge \quad 54 = 2.3.3.3$

## خورا کوچنی ګډ زیاتځلی(کوچکترین مضرب مشترک )

موږ په لاندې کې د خورا کوچني ګډ زیاتځله ( لنډ: ک ګ ز) کلیمې په ځیرنه پیل کو۰ دا کلمه و غ ګ پ یوه دوه ییزه یا دوه ګونی یا غبرګه (دوال Dual) کلمه ده، موږ په لاندې ډول سملاسي تولیز پیژند ورکوو

تعریف ۳ . ت : $a_1 ,....., a_n$ دې $( n \geq 2 )$ تولګڼونه وي، او $v$ دې یو داسی نه منفی تولګڼ وي، د کوم لپاره چی باور لري:

الف – $a_i | v$ د $n$ , ... ,, $i = 1$ لپاره

ب – له $a_i | w$ څخه د $n$ , ... , $i = 1$ لپاره لاس ته راځي $v | w$ .

نو $v$ د $a_1 , ... , a_n$ کوچنی ګډ زیاتځله( لنډ : ك ګ ځ ) بلل کیږي او داسې یې لیکو:

$$v = [a_1 , ... , a_n ]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



پيژند (د دوه ګڼونو لپاره )

a او b دې تېولګڼونه وي او v دې يو داسې نه کميز يا نه منفی تېولګڼ وي، د کوم لپاره، چې باور لري:

( ۱ ) $v|a$ او $v|b$

( ۲ ) له $a|w$ او $b|w$ څخه لاس ته راځی $v | w$

نو v د a او b خورا کوچنی ګډ زياتځله ( لنډ» ک ګ ز او که غواړی خ ک ګ ز) بلل کيږي او په لاندې توګه يې ليکو

$$v = [a,b]$$

جمله :

په خوښه تېولګڼونو $a,b,c,\dots,n$ لپاره ک ګ ز شته دی او دا يواځنی دئ

$$[a,b,c,\dots,n]$$

يادونه: موږ لاندې مساوات هم د مختلفو جملو او د هغو له حلونولاس ته راوړو:

دتېولګڼونو ( $n \geq 3$ ) $a_1, \dots a_n$ لپاره لرو $[a_1,\dots,a_n] = [[a_1,\dots,a_{n-1}], a_n]$

او هم $|a_1a_2| = [a_1, a_2] (a_1, a_2)$

لاس ته راوړنې ( داهم په همدې مانا مګر د جملی په څير دی ): د په خوښه تېولګڼونو $a, b, c$ لپاره باور لري: له $a | c , b | c$ او $(a,b) = 1$ څخه لاس ته راوړو $ab | c$

د ګڼتيوري بنسټيزه جمله:

(c) ketabton.com: The Digital Library



پيژنده :

يو ټولګڼ $n > 1$ لومړی ګڼ (prime number) بلل کيږي، که له ساده پرويشونv بل پرويشونی ونه لري٠

لومړي ګڼونه لاندې غوه خويونه لري.:

ليما (لکه کوچنۍ جمله ): که p يولمړی ګڼ وي او $p \mid a_1 \ldots a_n$ د ټولګڼونو $a_1, \ldots, a_n$ لپاره. نو $p \mid a_i$ د کم له کمه يوه i د $1 \leq i \leq n$ سره.
حل ( اوبی ): حل يی د ايندوکشن له لارې صورت نيسی، چی ددې لپاره بايد ۸ - امه برخه کتل شوي وي.
د $n = 1$ لپاره ښوونه ساده ده . اوس دې $n > 1$ وي او ليما دې $n-1$ لپاره سملاسي باور ولري. نو لرو $p \mid a_n$ ، په بل ډول بيا له $p \nmid a_n$ څخه لاس ته راځی چې $(p, a_n) = 1$ دې . له مخته تيرې جملی لاس ته راځي، چې که $p \mid a_1 \ldots a_{n-1}$ وي ، نو داسې دی $p \mid a_i$ د يو i لپاره چې $1 \leq i \leq n-1$ وي د ايندکشن د نيونې په بستې.

د لومړنيو ګڼونو غوره والی د « ګڼونتيوري بنسټيزی جملې» څخه لاس ته راځي

جلمه ( د ګڼونتيوري بنسټيزه جمله):

هر يو پيداينتي ( طبيعي) ګڼ ،د ګڼونو تر تيب پورې، په يواځني او يواځني ( يويواځنی (له دې کلمو څخه موخه داده، چې دا په يواځی يو ډول ليکل کيدی شي او بس٠ کيدی شي د ګڼونو پروتځاي بدل وي، خو ضريبونه همغه دي)) ډول د لومړنيو ګنونو ځل په څير ليکل کيدی شي٠

اوبی : ښوونه د n په لور ايندکشن له لارې مخ ته بيايو (برخه ۸ دې ودې کتل شي )
د $n = 1$ لپاره باور لري، که. لکه معمول ، 1 د طبعي ګڼونو د تش(خالي ) ځل په څير تعريف کړو. له دې امله دې $n > 1$ وي او جمله دې د ټولو طبعي ګڼونو $n >$ لپاره ښوول

(c) ketabton.com: The Digital Library



شوي وي. موږ اوس ټول د n پرويشونی $t > 1$ په نظر کي نيسو. کم له کمه يو داسی ګڼ شته لکه n . که p د دې پرويشونو کوچني پرويشونی وي، نو p لمړی ګڼ دی. په بل ډول به نو بيا p يو پرويشونی q لرودی د $1 < q < p$ سره، او دا چی q د n پرويشونی وي، نو دا به د p تعريف رد کړي. دا چی $n / p < n$ د ايندونکشن نيوني په بنسټ $\frac{n}{p}$ د لمړي ګڼونو د څل په څير ليکل کيدی نو په همدې ډول پخپله n هم.

وي دې $n = p_1p_2..p_r = p'_1p'_2...p'_s$ د n دوه ډوله د لمړيوګڼونو د څل په څيرليکنه . له $p_1 | p'_1...p'_s$ اوس لاس ته راځي $p_1 | p'_i$ د يو i د $1 \leq i \leq s$ سره . د نمري بدلولو له لارې دې وي $p_1 | p'_1$ . داچي بيا $p_1 = p'_1$ باور لري، نو لاس ته راځي $p_2...p_r = p'_2....p'_s$ ، له کومو چی د ايدکشن له نيونی لرو $r - 1 = s-1$ ، پس $r = s$ او ( او د ترتيب بدلون ) هم له $p_i = p'_i$ $2 \leq i \leq r$ لاس ته راځي .

پای.

د بنسټيزي جملی د ګټور استعمال لپاره لاندې جمله ده

---

**جمله** : هر طبعی ګڼ n په ټيک يو ډول په لاندې فورم انځوريدلی شي

$n = \prod_p p^{\nu_p}$ ($0 \leq \nu_p$ ، $\nu_p = 0$ يواځي د پای ډيرو p لپاره ) .( $\nu$ نيولو شتل کيږي)

چيرته چی p ټولو طبعي ګڼونو کې په جګيدونکي لړی پرلپسې کې ځغلي.

---

يادونه: د عملي شميرنې لپاره په هغو ګڼونو چې جګ يې صفر وي تيريدل کيدی شي، لکه : $n = 2^2.7$ , $n = 28$ د $n = 2^2 . 3^0 . 5^0 . 7$ لپاره

لاس ته راوړنې : $( a,b ) = 1$ او $( a , bc ) = 1$ ، نو هم $( a , bc ) = 1$ ، د په خوښه ټولګڼونو a , b , c لپاره

(c) ketabton.com: The Digital Library



اوبی یا حل : نیولی دي وي چې $(a, bc) > 1$ ، نو بیا به یو لمړنی ګڼ p موجود وي د p/a او p / bc سره، د لیما ۲ . ۲ له مخې به یې باور لرودی p/b یا p/c داد $(a,b)=(a,c)=1$ سره تضاد دی.

---

**جمله :** a او b دې له صفر مختلف ګڼونه وي او $|a| = \prod_p p^{\alpha_p}$ او $|b| = \prod_p p^{\beta_p}$ د دوي مطلقه ارزښتونو لمړی فاکتورتجزیه د ۲ . ۴ له مخې ، نو a | b هلته او هلته باور لري که د ټولو لمړي ګڼونو p لپاره باور ولري $\alpha_p \le \beta_p$

---

**لاس ته راوړني :** وي دې a او b له 0 مختلف ګڼونه، $|a|=\prod_p p^{\alpha_p}$ همداسې $|b|=\prod_p p^{\beta_p}$ دې د مطلقه ارزښتونو لمړني فاکتورتوټونه ( تجزیه ) وي. نو باور لري

$$(a,b)=\prod_p p^{\min(\alpha_p,\beta_p)}, \quad [a,b]=\prod_p p^{\max(\alpha_p,\beta_p)}$$

چیرته چې $\min(\alpha_p,\beta_p)$ د دواړو ګڼونو $\alpha_p$ او $\beta_p$ خوراکوچنی او $\max(\alpha_p,\beta_p)$ خورا لوي په ګوته کوي.

**بیلګه :** $a = 2124 = 2^2.3^2.59$ او $b = -1764 = -2^2.3^2.7^2$ نو لرو $(a,b)=2^2.3^2 = 36$ او $[a,b] = 2^2.3^2.7^2.59 = 104076$

**یادونه :** د لاس ته راوړني ۲ څخه سم د لاسه له دوو څخه زیاتو ټولګنونوباندې غ ګ و او ك ګ ز هم استعمالیدی شي.

یو څو په لمړیو ګڼونو اړونده پرابلومونو دې پوښتنو ته چې ایا ناپای زیات لمړي ګڼونه موجود دي که نه اویکلید لخوا ځواب ورکړ شوی. لاندې یو ښکلي ځواب دی چې له هغه رینبه نیسي:

(c) ketabton.com: The Digital Library



لاس ته راوړني : وي دې a اوb له 0 مختلف ګڼونه، $|a|=\prod_p p^{\alpha_p}$ همداسې $|b|=\prod_p p^{\beta_p}$ دې د مطلقه ارزښتونو لمړني فاکتورونونه ( تجزيه ) وي. نو باور لري

$$(a,b)=\prod_p p^{\min(\alpha_p,\beta_p)}\ ,\ [a,b]=\prod_p p^{\max(\alpha_p,\beta_p)}$$

چېرته چې $\min(\alpha_p,\beta_p)$ د دواړو ګڼونو $\alpha_p$ او $\beta_p$ خوراکوچنی او $\max(\alpha_p,\beta_p)$ خورا لوي په ګوته کوي.

بېلګه : $a = 2124 = 2^2.3^2.59$ او $b = -1764 = -2^2.3^2.7^2$ نو لرو $(a,b)=2^2.3^2 = 36$ او $[a,b] = 2^2.3^2.7^2.59 = 104076$

يادونه : د لاس ته راوړنې ۲ څخه سم د لاسه له دوو څخه زياتو تولګڼونوباندې غ ګ و او ك ګ ز هم استعماليدی شي.

يو څو په لمړيو ګڼونو اړونده پرابلومونو دې پوښتنو ته چې ايا ناپای زيات لمړي ګڼونه موجود دي که نه اويکليد لخوا ځواب ورکړ شوی. لاندې يو ښکلي ځواب دی چې له هغه ربښه نيسي:

جمله: ناپاي ډېر لومړني ګڼونه شته٠

حل(اوبی) : موږ جمله ناسيده يا ناسمه ښايو ( ۸ –امه برخه دې وکتل شي ) او نيسو چې پايډير لمړی ګڼونه $p_1 , p_2 , p_3$ , ........, $p_r$ موجود دي. ګڼ $N = p_1p_2...p_r+1$ له 1 لوي دی او له دې امله په يوه لمړي ګڼ p ويشونکی دی. د نيوني له مخی لرو $p = p_i$ د $1 \le i \le r$ سره . د P|N او $p \mid p_1p_2....p_r$ له امله لاس ته راځي $p \mid 1$ .کوم چې ناشونی دی ( ناممکن ) له دې امله بايد ناپای زيات لمړي ګڼونه موجود وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

یادونه : د میلاد څخه پخوا د « اریتوتنس غلبیل» متود څرګندوو، چې موږ د 1 او 100 ترمنځ د لمړي ګڼونو معلومول دي متود له لارې په لاندې توګه څرګند وو

~~1~~ 2 3 ~~4~~ 5 ~~6~~ 7 ~~8~~ ~~9~~ ~~10~~ 11 ~~12~~ 13 ~~14~~
~~15~~ ~~16~~ 17 ~~18~~ 19 ~~20~~ ~~21~~ ~~22~~ 23 ~~24~~
~~25~~ ~~26~~ ~~27~~ ~~28~~ 29 ~~30~~ 31 ~~32~~ ~~33~~ ~~34~~ ~~35~~ ~~36~~
37 ~~38~~ ~~39~~ ~~40~~ 41 ~~42~~ 43 ~~44~~ ~~45~~ ~~46~~ 47 ~~48~~ ~~49~~ ~~50~~
~~51~~ ~~52~~ 53 ~~54~~ ~~55~~ ~~56~~ 57 ~~58~~ 59 ~~60~~ 61 ~~62~~ ~~63~~ ~~64~~
~~65~~ ~~66~~ 67 ~~68~~ ~~69~~ ~~70~~ 71 ~~72~~ 73 ~~74~~ ~~75~~ ~~76~~ ~~77~~
~~78~~ 79 ~~80~~ ~~81~~ ~~82~~ 83 ~~84~~ ~~85~~ ~~86~~ ~~87~~ ~~88~~ 89 ~~90~~ ~~91~~
~~92~~ ~~93~~ ~~94~~ ~~95~~ ~~96~~ 97 ~~98~~ ~~99~~ ~~100~~

### ۳ . ۱ . ۳ - راشنل ګڼونه Rational Nnumbers

( لاتین: عاقلانه یا هوښیار اعداد یا ګڼونه)

د افغانستان په دري ادبیاتو کې داسی ګڼونه او ایراشنلګڼونه کله ناطق د ګونګ اوداسې نورو ګڼونو په نامه یا دیږي، کله یې ماتګڼونه بللي، خوزه دا ښه بولم، چې دا همداسې یانې راشنلګڼونه وبلل شي، که څوک یې هوښیار ګڼونه بولی هم خوښه یی او یا مات ګڼونه ، خو دلته راځیو Ratio nهوښیار په معنا نه بلکه د نسبي په معنا دی۰

یادونه : که / ولرو یاني که ولرو a / b نو دا په دې مانا، چېa په b ویشل کیږي۰ که ولرو≠ نود نابرابروننخښنه ده۰ دا په دې مانا، چې b له 0 سره برابره نه ده۰ د دوه ګڼونود a او b ویش x = b / a د ټولګڼونو په ډیرۍ کې تل هلته شته دئ، چې a د b ټولګڼیز څو ځله وي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library



د دې لپاره، چې بيا هم ویش$a$ : $b$ ( دلته هم $b$ پر$a$ ويشل کيږي) کيدونی شي» سره له دې، چی ويش تل په ټولګڼونوکی پيژند نه لري يا تعريف نه دی يا صورت نه نيسي« بايد د ټولګڼونو ډيری ماتګڼونو(کسر) ډيری‌ته پراخه شي، چی د لومړي ځل لپاره افاده يا وييڼه $b/a$ سومبوليک مانا لري، د نوو ګڼونو په څير نيسو او په ټولګڼونو يې ور زياتوو، نو هغۀ ګڼونه، چې لاس ته راځی موږ ورته راشنلګڼونه وايو ۰ دلته دا راشنل ګڼ د جوړې په څير ورکړ شوی دی

$cb / ca$ هلته باور لري، چې$c \neq 0$ دټولګڼ او$a$ |$b$ د ماتګڼ په څير ورکړ شوي وي

د راشنلګڼونو ډيری، چې په $Q$ سره ښايو د ټولګڼونو ماتګڼو $b/a$ چې $a \neq 0$ او$a$ او $b$ د ټولګڼونو له ډيری وي، د ټولګڼونوپراخوالی دی او ټول د مخه تير بنسټيز قوانين په کې باور لري او د ويش بنسټيز قانون ته داسې پراخيدلی شي

ټ : د ويش(تقسيم) بنسټيز قانون( دوام)

۲ - د دوه راشنل ګڼونو$a$ ،$a \neq 0$ او $b$ لپاره يواځنی راشنل ګڼ $x = b/a$ شته دی، چې برابرون يا مساوات$ax = b$ پوره کوي

راشنل ګڼونه هم د ورځنيو اړتياو پر بنسټ منځ ته راغلی

بيلګه :

که شپږ منه غنم په دولسو تنو وويشو، نو د هر تن نيم من غن, راسيږي، چې دا نيم يې

راشنلګڼ دی، ياني $6 : 12 = 1 / 2 = 1 : 2$ يا $\frac{1}{2}$

دا بايد په ګوته کړو، چې راشنل ګڼونه د پای يا ناپای لسميز ګڼ په څير ليکل کيدی شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

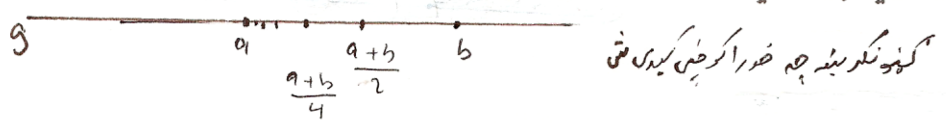


## ٣ ٠ ١ ٠ ٤ - رییل ګڼونه( Real numbers (reele Zahlen

( فرانسوي: په ریښتوني شته یا موجود)

د ریشنلګڼ په بنسټ هغه ورځنی تیوریکی اړتیاوي چې د شمیرعملیو بی بندیزه (نامحدود ) په کار اچولو یا استعمال ته موجود وي حل یا اوبی شوې او همدارنګه عملي اړتیاوي چې اندازه کولو ته موجود وي هم حل شوې وي.

د ریشنلګڼ له لارې کیدی شي چې د کرښی اوږدوالی ټیك ورکړ شي یا په همدې مانا : په هرڅومره وړوکی ګڼونکرښه انتروال کی هم ناپای زیات ګڼونه، چې په ټکو یا نقطو انځور شوي، پراته دي.



د ټولو دې امکاناتو سره سره هم بیا په یوه کرښه کی هر ټکی د ریشنلګڼ په ذریعه نه شي ښودل کیدی یا په بل عبارت د کرښی هر ټکی د ریشنلګڼ په مانا نه دی . دا ګڼونه چې د «ایریشنلګڼونو»په نامه یادیږي، کیدی شي د یوه پریودیکي(periodische ) (د ګڼونو کړی نه شلیږي ) ناپای لسیزمات له لارې وښوول شي.

د بیلګي په توګه د مربع د نیمي(قطر ) x اندازه چې د مربع یو اړخ ۱ وي نه شي کیدی چې په ریشنلګڼ وښوول شي. د پیتاګوراس د جملی په بنسټ د x لپاره لاندې مساوات لرو : $x^2 = 1^2 + 1^2$ , پس $x = \sqrt{2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د رييلګڼ کليمه يوه ژوره کليمه ده چې د پوهيدلو لپاره يې «پولی» ( ليمس lim ) ته اړتيا موجود ده چې په ۱۸ –امه برخه کې به تر ښېړنی لاندې ونيول شي.

ډير اينتروالبنديدل چې په همغه يوه ټکی راځرځي مساوي(ورته ) ارزښته (Äquivalent لاتين :مساوي ارزښته) ليدل کيږي

رييلګڼديری R چې په ريشنلګڼديري د ايريشنلګڼديري ورزياتول دي چې له ۱ . ۱ . ۲ تر ۳ . ۱ . ۲ برخې پورې ټول بستېزقوانين په کې باور لري. د رييلګڼ له لارې دکرښې ټول ټکي په بر کې نيول کيدی شي. په دې ډول رييلګڼونه ټولی د شميرلو او اندازه کولو اړتياوې پوره کوي.

ګورو چې $x^2 + 1 = 0$ د رييلګڼ حل يا اوبې نه لري. دلته د دې ګڼونو پراخوالي ته اړتيا پيښيږي چې کمپلکسګڼونو ته پراخ شي، او په ۵ –امه برخه کی به تر ښېړنی لاندې ونيول شي.

يا دا لاندې په لنډه توګه:

موړ ګڼونه يا اعداد لرو، چې هغه راشنل ګڼونه نه دي يانی که موړ د ۲ ګڼ رينه(جذر) ونيسو، نو داسی يو ګڼ لاس ته راځي، چې هغه په لسميزه توګه پاي ته نه شي رسيدی يانی پريوديکی ( تل بيرته راګرځيدونی يا پسی نور هم پراخيدونی ) دي٠ داسی ګڼونو ته ايراشنل ګڼونه وايو٠

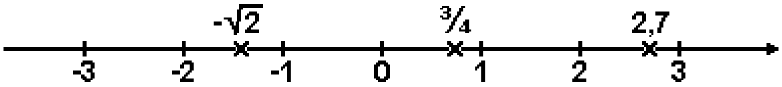
تل بيرته راګرځيدنيز ( periodi(cal تل بيرته راګرځيدوني ,Period د ګڼونو ځنځير نه شليږي

(c) ketabton.com: The Digital Library



## ايراشنل – يا نانسبي عددونه ياګڼونهIrational numbers

د راشنل او ايراشنل ګڼونوټولنى ته رييل ګڼونه وايو( دا چې ټولنه څه شى دى، په ډيرۍ پوهنه يا سيټتيوري كې به ولوستل شي) .۰ موږ د ګڼونو د ښوولو لپاره لاندې ګڼونكرښه باسو په كومه كې چې له صفر سره پيداينتي-، ټول- راشنل-،اراشنل ګڼونه كښل شوي دي يانې ريل ګڼونكرښه




۳ ۰ ۲ - رابيلشوى( له نورو - ) د شمير قواعد

په دې برخه كې د رييل ګڼونو لپاره رابيل شوي قوانين څيرو، چې د مخه تيرو قواعدو باندې ولاړ دي۰ دلته درانده ټكى دا لاندې دي:

- په رييلګڼونو كى څلور بنسټيز شميرډولونه په ځانګړي توګه په لاندې ډول د نوكانو افادى (وييني ) سره شميرنه ( نوكان ايښوول)۰ له زياتون ګډ فاكتورونه يا ځلووني له نوكانو راوستل، د بينوميال فرمولونه۰

- پر صفر ويشنه د ناشونوالى په پام كى ساتنه

- له ماتو ( كسرونو ) سره شميرل او په ځانګړي توګه لنډول ( واړه كول ) پراخول يا غزول او د اصلي ګډ ماتلاندې ( مخرج المشترک) جوړول۰ د داسى ماتلاندى( مخرج) چې له ټاكلو او ناټاكلو ترمونو څخه جوړ وي۰

نوموني: كسر ته مات وايو او صورت او مخرج ته موږ ماتباندې او ماتلاندې وايو، چې سملاسي يې په مانا هم پوهيږو۰

(c) ketabton.com: The Digital Library



## ۳ ۰ ۲ ۰ ۱ _ جمعه او تفریق (زیاتون او کمون)

د زیاتون او کمون بنسټیزو قوانینو څخه لاندې لاس ته راځي

$$-(-a) = a\ ,\ .\quad a - b = a + (-b),$$

$$(a + b + c \ldots - c - d - \ldots) + (e + f + \ldots - g - h - \ldots) = a + b + \ldots - c - d - \ldots + e + f + \ldots - g - h - \ldots$$

دا دا مانا لري، چې که چیرې د نوکانو دباندې زیاتوننخښه ( د جمع علامه ) وي، نو د نوکانو څخه ویستلو کې ګڼ خپله مختخښه نه بدلوي٠ که د نوکانو د باندی کموننخښه (منفي نخښه ) وي، نو د ګڼونو له نوکانو ایستلو په حال کی د نوکانو دننه نخښی بدلیږي٠ یانی کموننخښه زیاتوننخښه او زیاتوننخښه کموننخښه کیږي٠ بیلګه یې لاندې ګورو

$$(a + b + \ldots - c - d - \ldots) - (e + f + \ldots - g - h - ..) = a + b + \ldots - c - d - \ldots .. - e - f - \ldots \ldots + g + h + \ldots$$

په همدې ترتیب کیدی شي نوکان هم ځاي پرځای شي٠

دلته باید مطلق ارزښت هم په ګوته شي ، چې په ګڼکرښه د صفر څخه د یوه ریيلګڼ واټن په ګوته کوي،

د کوم لپاره چی لیکو :

مطلق عدد یا - ګڼ یا بي اړیکو ګڼ (absolut number)

دا په دې مانا، چې د دې ګڼ سره زیاتیزه او کمیزه نخښه یا مثبت او منفي نه لیکل کیږي یا یون( واحد) هم ورسره نه وي، دا ټیک او ټیک یو ګڼ ښایج او بس٠

$$|a| = a\ ;\ a > 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



$|a| = 0 \; ; a = 0$

$|a| = -a \; ; < 0$

یانې که a زیاتیزه یا مثبت وي،نوa پخپله لیکواو که a کمیزه یا منفي وي، نوa- لیکواو که a صفر وي نو د هغه لپاره 0 لیکو

۳ ۰ ۲ ۰ ۲ ځل(ضرب)

د ځل لپاره لاندې د مخنخښی قوانین باور لري:

$(+a)(+b) = +ab, (+a)(-b) = -ab , ( -a)(-b) = + ab, (-a)(+b) = -ab$

که چیرته ډیر نوکبندونه راګرځیدلی وي، نو دا د ځل قانون پل په پل پر مخ ځی بیلګه:

$$(a+b)(c-d)(e-f-g) = (ac - ad + bc - bd)(e-f-g)$$

$$= (ace-acf-acg-ade+adf+adg + bce-bcf-bcg-bde-bdf+bdg)$$

د ځانګړي حالت په توګه د بینوم پیژندل شوی فرمولونه راوړو:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a-b) = a^2 - b^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



ګران لوستونکی کولی شي، چې پورته فرمولونه وښايي، چې تيک دي.

دا په لاندې ډول کارولکيږي :

**بيلګه ۱ . ۳ :**

$$4a^2 + 12ab + 9b^2 = (2a + 3b)^2 .$$

$$a^2x^2 - 2abxy + b^2y^2 = (ax - by)^2 = (by - ax)^2.$$

$$16u^2 - 2v^2 = (4u + 2\ v)(4u - 2\ v)$$

۳ ۰ ۲ ۰ ۳ ويش

په پام دې کې ولرو، چې b:a د $a = 0$ لپاره کوم مفهوم نه لري۰ پر صفر ويش ناشونی دی

په ويش کی نوکبندول د زياتون، کمون او ځل په څير ساده نه کيږي۰ په ويش کی د زياتون په ډول ليکل شوی هر توکی په ماتلاندې ويشل کيږي:

بيلګه ۳ ۰ ٤ :

$$(3a^2b - 6ab^2 + 12\ abc) : 3ab = a - 2b + 4c$$

يا داسې

$$\frac{3a^2b}{3ab} - \frac{6ab^2}{3ab} + \frac{12abc}{3ab} = a - 2b + 4c$$

د $ab \neq 0$ لپاره

(c) ketabton.com: The Digital Library



دې لاس ته راوړنې(نتيجې) ته سرې د ګډو څلوونو يا فاكتورونو يا خپلواكنوک څخه وتلو له لارې هم رسيدلى شي:

$$3a^2b - 6ab^2 + 12\,abc = 3ab(\,a - 2b + 4c)$$

له دې څايه كيدی شي، چې د بولينوم وېش بيل شي

بيلګه ۳ . ۵ :

$$(3a^2b - 6ab^2 + 5c) : 3ab = a - 2b \ \text{Rest}\ 5c \quad \text{باقي} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{3a^2b}{3ab} - \frac{6ab^2}{3ab} + \frac{5c}{3ab} = a - 2b + \frac{5c}{3ab} \quad \text{لپاره} \quad ab \neq 0,$$

د يوه زياتو يا چمعې وېش په يوه چمعه، كيدی شي د بينوم جكلې له لارې صورت ونيسي

بيلګه ۳ . ۶ : $(a^2 + 2ab + b^2) : (a + b) = a + b \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{(a+b)^2}{a+b} = a + b$ لپاره $a \neq -b.$

بيلګه ۳ . ۷ : $(a^2 - b^2) : (a + b) = a - b \Leftrightarrow \dfrac{a^2 - b^2}{a+b} = a - b$ لپاره $a \neq -b.$

بيلګه ۳ . ۸ : $\dfrac{(ax - by)^2}{by - ax} = \dfrac{(by - ax)^2}{by - ax} = by - ax$ لپاره $ax \neq by,$

دلته هم وېش د پاتې يا باقي سره شونى دى.

بيلګه ۳ . ۹ : $a^2 - 2ab + b^2) : (a - b) = [(a - b)^2 + b^2] : (a - b) = a - b$ :
باقي يا پاتې $b^2$

له دې لاس ته راځى او په څټ

بیلګه ۱ . ۱۰

$$\frac{(a-b)^2+b^2}{a-b}=\frac{(a-b)^2}{a-b}+\frac{b^2}{a-b}=a-b+\frac{b^2}{a-b}$$ باقي $a \neq b$,

$(16u^2-v^2):(4u+\sqrt{2}v)=4u-\sqrt{2}v$ Rest $v^2$ باقي $\Leftrightarrow$

$$\frac{16u^2-v^2}{4u+\sqrt{2}v}=\frac{16u^2-2v^2+v^2}{4u+\sqrt{2}v}=\frac{16u^2-2v^2}{4u+\sqrt{2}v}+\frac{v^2}{4u+\sqrt{2}v}$$
$$=4u-\sqrt{2}v+\frac{v^2}{4u+\sqrt{2}v}$$

د $4u \neq -\sqrt{2}v$ لپاره

فورمال ور د دوه پولینومونو ویش دی ( برخه ۱۲ دي اندول(پرتله) شي ):

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x^1+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x^1+b_0}=P_n(x):Q_m(x),$$

که د ماتباندې پولینوم درجه د ماتلاندې پولینوم درجې لوي یا مساوي وي($n \geq m$).

موږ نیسوچی: $Q_m(x) \neq 0$ او $a_n \neq 0,\ b_m \neq 0$ .

د دواړو ویشو« ټوټه ویشو» ( پارخیالویش( Partialdivision ) ) دا دی چی دا

د $P_n(x):Q_n(x)$ ویش په لاندې ډول ولیکلی شو:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\text{Polynom }1+\frac{\text{Polynom }2}{Q_m(x)},$$

چیرته چی د پولینوم 2 درجه له $Q_m(x)$ درجې څخه کوچنی ده.

دي هدف ته په لاندې ډول رسیږو

۱ – سړی یواځی د جګ نظم غړي $a_nx^n:b_mx^m$ ویشي او له دي سره یوه

غلطي $F(x)$ کوي:

$$Q_{n(x)}:Q_m(x)=\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}+F(x)$$ *

(c) ketabton.com: The Digital Library



۲ – سرې (*) په ماتلاندې پولينوم $Q_m(x)$ ويشي

$$P_n(x) = (a_n / b_m)\, x^{n-m}\, Q_m(x) + F(x)$$

او له دې غلطی $F(x)$ ، په لاندې فورم يا ډول لاس ته راځي

$$F(x) = P_r(x) / Q_m(x)$$

د $P_r(x) = P_n(x) - (a_n / b_m)\, x^{n-m}\, Q_m(x)$ سره

چيرته چې د پولينوم $P_r(x) = c_r x^r + c_{r-1} x^{r-1} + .. + c_0$ درجه r د پيل پولينوم $P_n(x)$ له درجې n څخه کم له کمه په يوکوچنی وي . د ګڼونو شمير په

تکيه ويلی شو، چې $P_r(x)$ پاتی پولينوم يا په ساده ډول پاتی ( باقي ) دی.

۳ – که لا تراوسه د $Q_m(x)$ درجه r له m کوچنې وي نو د ټکو ۱ – او ۲ – ټوټه ويش په $P_r(x) : Q_m(x)$ استعماليږي، د لاندنی نتيجی سره

$$P_r(x) : Q_m(x) = (c_r / b_m)\, x^{r-m} + P_t(x)/Q_r(x)$$

چيرته چې د $P_t(x)$ درجه t کم له کمه په يو له $P_r(x)$ درجې کوچنی وي.

د ټوټه ويش دا عمليه اخر ته رسيږي، که ( د پای ډيرو پلونو (قدمونو) اخستلو وروسته د ماتباندې غلطی پولينوم درجه له m څخه کوچنی وي.

بيلګه ۲ . ۱۱ . لمړی دې د ټوټه ويش ۱ او۲ پلونه ( قدمونه، کدمونه ) په پراخ ډول د لاندې ويش په بيلګه توضيح شي

$$P_n(x) : Q_m(x) = P_3(X):Q_1(x) = (6x^3+5x^2-3x+1):(3x-2)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



| | |
|---|---|
| | $P_3(x)\quad : Q_1(x) = (a_3 / b_1)x^2 + F(x)$ |
| $(a_3 / b_1)x^2 Q_1(x) = 2x^2 (3x-2) =$ | $(6x^3 + 5x^2 - 3x + 1) : (3x-2) = 2x^2 \quad + F(x)$<br>$6x^3 - 4x^2$ |
| $P_2(x) = P_3(x) - (a_3 / b_1) x^2 Q(x) =$ | $9x^2 - 3x + 1$ |
| $F(x) = P_2(x) : Q_1(x) =$ | $(9x^2 - 3x + 1) : (3x - 2)$ |

بيلگه ۱۳ . ۱۲ : د تیوته ویش بیلگه ۱ . ۱۱د $F(x)$ غلطی ته دوام ورکوو، ترڅو چی د لیکنی شکل لنډ شي:

$$F(x) = P_2(x) : Q_1(x) = (9x^2 - 3x + 1) : (3x-2) = 3x + G(x)$$

$$3x.Q_1(x) \qquad = \quad (9x^2 - 6x)$$

ياباقي $\qquad 3x+1 \quad =$ پاتي

$$G(x) = (3x+1) : (3x-2)$$

له دې لاندې نتجه لاس ته راځي :

$$(6x^3 + 5x^2 - 3x + 1) : (3x-2) = 2x^2 + 3x + G(x)$$

$$G(x) \quad = (3x+1) : (ex-2) = \ 11 + H(x)$$

$$Q_1(x) = 3x-2$$

پاتی $= \qquad 3 \quad =$ ياباقي

$$H(x) = \ 3 : (3x-2)$$

پس باور لري

$$(6x^3 + 5x^2 - 3x + 1) : (3x-2) = 2x^2 + 3x + 1 + 3/(3x-2)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



تول تو‌ته ويش کيدی شي په لاندي ډول مخ ته يوړ شي .

(1) (4) (7) (۱۰)

$$(6x^3+5x^2-3x+1):(3x-2) = 2x^2 + 3x + 1 + 3/(3x-2)$$

(2) $\underline{6x^3-4x^2}$

(3) $-9x^2-3x+1$

(5) $\underline{9x^2-6x}$

(6) $3x+1$

(8) $\underline{3x-2}$

(9) $3$

دلته ( i ) د پرلپسی پل اخستلو په مانا ده.

جمله ۳ . ۱۳

(1) (4) (7) (10)

$$(18x^4 + 15x^3 + 0x^2 - 2x + 1) : (3x^2 + x - 1) = 6x^2 + 3x + 1 + \frac{2}{3x^2 + x - 1}$$

(2) $\underline{18x^4 + 6x^3 - 6x^2}$

(3) $9x^3 + 6x^2 - 2x + 1$

(5) $\underline{9x^3 + 3x^2 - 3x}$

(6) $3x^2 + x + 1$

(8) $\underline{3x^2 + x - 1}$

(9) $2$

(c) ketabton.com: The Digital Library



## ۳ ۰ ۲ ۰ ٤ ماتشميرنه ( کسرشميرنه)

د مات m/n کلمه د لومړي ځل لپاره د ټولګڼونو m,n څخه د ريشنلګڼونو انځورونو لپاره تعريف شوې۰ کيدی شي، چې دا کلمه a/b ته، چې a او b رييل ګڼونه دي، وغزول شي۰

بايد په پام ې ور،چې ماتباندې صفر نه شي..

د بيلګي په توګه:

ويش a/(b-c) تيک هلته مفهوم لري، چې $b \neq c$ وي۰ ماتګڼ a/b همدا ګڼ ښايي

لکه a : b او يا $\frac{a}{b}$ ، دلته هم بايد b |=0 وي.

په اخر کې بايد په ګوته شي، چې مات لاندی – او همدارنګه ماتباندې ګڼ هم هر ماتګڼ کيدی شي او هم دواړه۰ دا بايد دلته هم په پام کې وي، چې هيڅ يو ماتلاندې ګڼ بايد صفر نه وي يانی دلته بی له اولنی ماتباندې نور يو ګڼ هم، چې ماتلاندې پورې اړه لري، نه شي صفر کيدی دا موږ د ماتو مات ( کسرالکسر) بولو۰

بيلګې:

a : (b/c) = a / (b/c) , b |=0 , c|= 0 ,

(a/b) : c = (a/b) / c b|=0, c|= 0

(a/b): (c/d) = (a/b) / ( c/d), b |= 0 , c |= 0 , d |=0

يا په لاندې ډول:

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$\frac{a}{b}:\frac{\frac{a}{b}}{c}, b\neq 0, c\neq 0,..., \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}, b\neq 0, c\neq 0, d\neq 0$$

په ځو واره ماتګې کې باید اصلي ماتکرښه څرګنده پیژندونکي وي، چې په دې توګه د هر ډول ناټیکوالی مخه نیول شوي وي۰ په ټولیزه توګه باور لري

$$\frac{\frac{a}{b}}{c}\neq\frac{\grave{a}}{\frac{b}{c}}$$

هریو ماتګې b|=0, a / b په یوه ګڼ c |= 0 پراخیدی او همداسې لنډیدی شي

یانې ماتلاندې او ماتباندې په یوه ګڼ c ځلیدی یا ویشل کیدی شي او دا کړنلار په اصلي ګڼ کې تغیر نه راولي

$$\frac{a}{b}=\frac{a.c}{b.c}=\frac{a:c}{b:c}, b\neq 0, c\neq 0$$

د ماتګې لنډوالی ددې لپاره ښه دی، چې ماتګې ساده کړي.

د بیلګې په توګه:

$$\frac{8}{12}=\frac{2}{3}, \frac{ax-ab}{y-ac}=\frac{x-b}{y-c}; a\neq 0, y\neq c$$

باید تل په پام کې ولرو، چې یوائنی فکتور یا ځلوونی یا ضریب لنډیدی شي او نه زیاتوونی د بیلګي په توګه لاندې ماتګې

(c) ketabton.com: The Digital Library



$(a+c):b+c)$ چې $b \neq -c$ وي نه شي لنډيدی دا $(a+c):(b+c) = a:b$

باور لري،چې $b \mid= 0, c = 0 \ \lor -c \mid= a, a = b$

پراخوالی يا غزول د دې لپاره اړيين دی، چې ډير ماتګڼونه په ګډ ماتباندې (مخرج المشترک) راوستلی شي، ځکه چې يواځې هغهٔ مات يو په بل زياتيدی يا يو له بل کميدی شي، چې ګډ ماتلاندې ولري.

لکه : $\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}, c \neq 0$

که چيرې پرځښ يا برعکس ماتګڼونه$a / b$ او $c/d$ د نابرابر ماتلاندې لرونکی سره زياتوو او يا کموو ، نو دا په ګډ ماتلاندې بايد راولو۰ ګډ ماتلاندې د ټولو ماتلاندو څخه دی۰ د بيلګې په توګه لاندې باور ي دی:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} = \frac{adf + bcf + bde}{bdf}, b \neq 0, d \neq 0, f \neq 0 \Leftrightarrow bdf \neq 0$$

او دا لاندې

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{cb}{bd} = \frac{ad \pm cb}{bd}, b \neq 0, d \neq 0 \Leftrightarrow bd \neq 0$$

تل بايد ماتګڼونو ګڼلو کې ماتلاندې سره حل نه شي، چې ګډ ماتلاندې لاس ته راولو، دا د ښوونځي په څرګنده بيلګه باندې ښايو

بيلګه: $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{15} - \frac{1}{36}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



کیدی شي، چې اصلي ماتلاندې)ا۰م۰ل (وتاکل شي

ا ۰ م ۰ ل ۰ 97200 =2.3.5.6.15.36 =

کیدی شي، چې ا۰م۰ل۰ د لومړنیو ګڼونو حٔل په څیر هم ولیکو:

2 = 2

3= 3

5 = 5

6 = 2. 3

15= 3 .5

3۰. 3.۰2۰36 = 2

-----------------------------------------------

$2^2.3^2.5 = 4.9.5 = 180$

پس د ګډ ماتلاندې لپاره د لوړکڼ یا لوړ جګګڼ یا لوړ طاقت لومړي څلووني رانیول کیږي۰ چې ګڼل خورا ساده کوي۰

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{15} - \frac{1}{36}$$

$$\frac{90 - 60 + 36 - 30 + 12 - 5}{180} = \frac{43}{180}$$

دا چې دا تګلار څنګه د ماتو په تولیزه افاده استعمالیدی شي لاندې بیلګه یی ښایي:

(c) ketabton.com: The Digital Library



بیلګه ۳ ۰ ۱۵ په لاندې بیلګه کې

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}-\frac{1}{a^2b}+\frac{1}{ab^2}$$

چې یواځی د لاندې لپاره موخه ور دی $a \neq 0 \wedge b \neq 0$

د اصلي ماتلاندې لپاره یانې

$$a.b(ab)(a^{2}b).(ab^{2}) = a^{3}.b^{3}$$

نه ټاکي، نو له دې امله دی

$$a = a$$

$$b = b$$

$$ab = a \quad b$$

$$a^2 . b = a^2 \quad b$$

$$ab^2 = a \quad b^2$$

-------------------

دا ا۰م۰ل۰ په لاندې توګه دی $= a^2 \quad b^2$

له دې امله لرو:

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}-\frac{1}{a^2b}+\frac{1}{ab^2}=\frac{ab^2-a^2bab-b+a}{a^2b^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



بيلګه ۳ ۰ ۱٦ : د ويينې يا افادې

$$\frac{2}{a-2}+\frac{2}{a-1}-\frac{1}{a+1}-\frac{a+3}{a^2-1}-\frac{a+6}{a^2-4}, a\neq 0, a\neq \pm 2$$

لپاره ټاکو

a-2 = (a-2)

a – 1 = (a-1)

a+1 = (a+1)

a + 2 = (a+2)

$a^2$ - 1 = (a-1)(a+1)

$a^2$-4 = (a-2) (a+2)

---------------------------------------------------------------

(a-2)(a-1)(a+1)(a+2) = ($a^2$-1)($a^2$-4)

دا پورته لاس ته راوړنه ا۰م۰ل۰- چۀ دا په همدې وخت کې غ ک پ هم دی- په ګوته کوي او له پورته څخه د مخه ورکړشوې افادې لپاره لاس ته راځي:

$$\frac{2(a^2-1)(a+2)+2(a^2-4)-(a-1)(a^2-4)-(a-2)(a^2-1)}{(a^2-1)(a^2-4)}$$

$$=\frac{(a+3)(a^2-4)+(a+6)(a^2-1)}{(a^2-1)(a^2-4)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

د دې مات ماتباندې صفر دې‌په دې ډول په پورته پيل کې ورکړ شوې افاده يا وينه د صفر پيچلې ليکلو بيلګه ده او بس۰

د ځل او ويش لپاره لاندې قاعدې باور دي:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd},b\neq\wedge d\neq\Leftrightarrow bd\neq 0$$

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c};b\neq 0,c\neq 0,d\neq 0\Leftrightarrow bcd\neq 0$$

بيلګه ۳ ۰ ۱۷ الف)

$$1-\frac{1}{1-a\frac{1}{1-\frac{b}{a}}}=1-\frac{1}{1-\frac{a}{\frac{a-b}{a}}}=1-\frac{1}{1-\frac{a^2}{a-b}}=1-\frac{1}{\frac{a-b-a^2}{a-b}}$$

$$=1-\frac{a-b}{a-b-a^2}=\frac{a-b-a^2-a+b}{a-b-a^2}=\frac{-a^2}{a-b-a^2}=\frac{a^2}{a^2-a+b}$$

د $a\neq 0, a\neq b, a^2-a+b\neq 0$

لپاره۰ دا په دې مانا، چې

$$a\neq\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{1-4b})$$

بيلګه ۳۰ء ۱۷ ب:

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$\frac{\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}}{\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}}=\frac{\frac{a(a+b)-b(a-b)}{(a-b)(a+b)}}{\frac{a(a-b)+b(a+b)}{(a+b)(a-b)}}=\frac{a(a+b)-b(a-b)}{(a^2-b^2)}\cdot\frac{(a^2-b^2}{a(a-b)+b(a+b)}$$

$$=\frac{a^2+ab-ab+b^2}{a^2-ab+ab+b^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}=1,\forall\,|a|\neq|b|$$

يادونه: په پورته ليکنه کې د ګڼونو موضوع لږ وغزول شوه، خو لږ څه نور هم بايد راغلي وی٠ دلته اړيين د ګڼونو شميرقوانين دي او د ګڼونو پيژندل٠ د ګڼؤنو اړيکې د خونديونې له لارې

$N \subset Z \subset Q \subset R$

او په دې کنونو کې باوري د شمير قوانين، چې هغه زياتون ، کمون ، ځل ، ويش دی او د ويش په بنسټ ماتشميرنه٠ دا بايد په همغه ساده ډول زده کړای شي٠

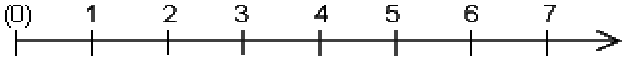
موږ هغه د لومړي وار لپاره اړيين د ګڼونو شميرنقوانين په لاندې توګه رالنډوو، چې د لومړي وار لپاره په همدې پوهيدنه بسيا کوي٠

ګڼونديری ( لنډه ټولګه)

پيدايښتي – يا طبيعي ګڼونديری

N = {1, 2, 3, 4, 5, ... }.)

په وړانګه د پيدايښتي ګڼونو انځورونه



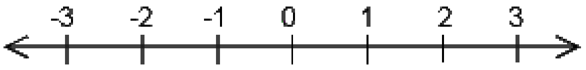
(c) ketabton.com: The Digital Library



د ټولګڼونو ډیری

Z = { ... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... }

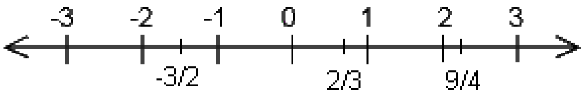
د ټولګنونو ډیرۍ انځورونه په یوه کرښه




د راشنلګڼونو ډیرۍ

$$Q = \{\frac{p}{q} | p, q | Z \wedge q \neq 0\}$$

په ګڼونکرښه راشنلګڼونه د ټولګڼونو تر منځ پراته دي




هر راشنل ګڼ د لسمیز یا پریودیکی ګڼ په څیر لیکل کیدئ شي

د ماتو سره شمیرنه

د دوه راشنلګڼونو ترمنځ تل ناپاي زیات نور راشنلګڼونه شته ، دا ګڼ پارته دي، مګر بیا یې هم ترمنځ نور ګڼونه یا ځایونه هم شته، چې ګڼونه په کې ځاي دی او دې ګڼونو ته مو ایراشنل ګڼونه وویل ۰ لکه چې یو راشنلګڼ نه دئ

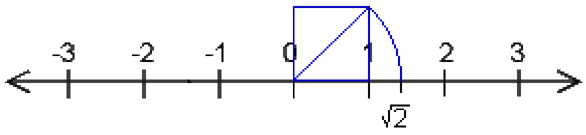
راشنل او ایراشنلګڼونه رییل ګڼونه جوړوي

## د رییل ګڼونوډیرۍ یا حقیقي اعدادو سټ

(c) ketabton.com: The Digital Library



د رییلګڼونو ډیرئ د ګڼونکرښی ټولو ټکو څخه جوړه ده، لاندې ګڼونکرښه کې روښانه ده




په رییلګڼونوکي بی له بندیزونو شمیرل کړی شو، خو په ماتلاندې کې باید صفر نه وي او دا د هر ډول ګڼونولپاره باور لري

شمیرډولونه لومړی پوړئ

Addition:زیاتون یا جمعه

زیاتوونی +زیاتونی = زیاتون

د زیاتون کموتاتیو قانون $a + b = b + a$

د زیاتون اسوشیاتیو قانون $(a + b) + c = a + (b + c)$

و زیاتون ته د یوه بی اغیزه یا ناپیلی توکی شتون$a + 0 = a$

مخامخ – یا په څټ ګڼ یا برعکس عدد$a + (-a) = 0$

Subtraktion:کمون

د زیاتون په څټ کارونه یا عملیه ۰ ترې کمه وونی – کمه ونی = کمون

$a + x = b \Leftrightarrow x = b - a$

(c) ketabton.com: The Digital Library



بیلګه: $7 + x = 10 \Leftrightarrow x = 10 - 7 = 3$

شمیرډولونه:

دویمه پوړۍ

ضرب یا ځل: فاکتور ( ځله وونی ضریب ) ۰ فاکتور( ځله وونی) ځل
د زیاتون تکرار، بیلګه. $4 + 4 + 4 = 3·4 = 12$

د ضرب یا ځل کموتایتو قانون $a.b = b.a$

د ضرب یا ځل اسوښیاتیو قانون$(a·b)·c = a·(b·c)$

دستریبوتیو قانون $a·(b + c) = a·b + a·c$

و ضرب ته د یوه ناپیلي توکي شتون( بي اغیزه توکی یې که وبولو هم بده به نه وي)

$a·1 = a$

په ښت ارزښت یا برعکس قیمت$a·(1/a) = 1$

یو ضرب ټیک هلته صفر دئ، چې د صرب یو ضریب صفر وي $a·0 = 0$

ویش:
ویشونی : پرویشونی = ویش ( لوستل یې له ښي وکیڼ لورته)

ویش د ضرب یا ځل په ښت کارونه ده) $a:b=c$

$a·x = b \Leftrightarrow x = b:a$

د بېلګې په توګه z.B.: $4·x = 12 \Leftrightarrow x = 12:4 = 3$

په صفر ویش پیژند نه لري یا تعریف نه لري

(c) ketabton.com: The Digital Library



### ۳ . ۳ تمرينونه

۱ – د اعدادو يا ګڼونو ډولونه او د د اعدادو انځورونه

۱ ، ۱ – په کوم د اعدادو ډېرئ يا سټ کې د عدد a او عدد bلپاره د شميرلو څلور قاعدې يا لارې باور لرې؟

يادونه: دلته دې ترې کمونی يا مفروق منه او وېشونش يا مقسوم تل a وي همداسې دې کمونی يا مفروق او پروېشونی يا مقسوم عليه تل b وي.

a) $a = 8, \quad b = 2$
b) $a = 5, \quad b = 8$
c) $a = 7, \quad b = 0$
d) $a = -6, \quad b = 1$

۱ . ۲ عددونه او يو له بل سره پرتله کړئ او ورکړئ، چې له دې دواړو کوم لو دی!

a) $a = \frac{13}{17}, b = \frac{169}{289}$
b) $a = \frac{11}{21}, b = \frac{121}{231}$
c) $a = \frac{888}{901}, b = \frac{896}{911}$
d) $a = -\frac{13}{12}, b = -\frac{143}{130}$

۱ . ۳ – د اعدادو يا ګڼونو او څخه تفرسق، ضر ب او وېش جوړ کړئ! ورکړئ، چې دا نتيجې د اعدادو کومو ډولونو پورې اړه لري!

د پوښتنې ۱ ، ۱ يادونه دلته هم باور لري.

a) $a = \pi, \quad b = 5$
b) $a = \sqrt{2}, b = \sqrt{2}$
c) $a = \frac{2}{3}, \quad b = \frac{3}{2}$
d) $a = 0, \quad b = 1$

۱ . ۴- په دوه ييز سيستم کې لاندې ګڼونه يا اعداد انځور کړئ!

a) 28 b) 47 c) 73 d) 112

(c) ketabton.com: The Digital Library



۱ . ۵ – لاندې ربښتوني يا راشنل اعداد د کوټيو کې اچوني يا کوټی وني له لارې په نږدې ۵ ځايونږ ټيک پيدا کړی.

a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt{18}$ c) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

۲ . د زياتيزو او ځليزو ( د جمعې او ضرب) نوکانو وازول

۲ . ۱ – لاندې نوکان واز کړئ

a) $7a - 3b + (-a + 2c) - (3c - 6b) - (6a - 3c)$
b) $5a + [7c - (2a - 3b)] - (4c - a + b)$
c) $7a - [3a - (7 + 5b)] + [a - (4 - 6b)] - (2a + 7b)$
d) $8a - \{a + [(3a - 2b) - (5a + 3b)] - [(-a + 6b)]\}$

2.2. a) $(-a)(b - a - c)$
b) $2a[a - (b - 3a)]$
c) $3(a + b + c) - 5(a + b) - c - 2(b - c - a)$
d) $|a| \cdot (b - 2a) - b \cdot (a + 2b)$

2.3. a) $(2a - b)(9a + 4b)$ b) $(9a - 2b)(7a - 3b)$
c) $(a + b - c)(a - b - c)$ d) $(3a + 2b)(4a - 3b)(5a - 7b)$

2.4. a) $(7a - 5b)(3a + 4b) - (5a - 9b)(4a - b)$
b) $(a + 4)(a - 2) - (a + 2)(a - 1)$
c) $(a + b)(c - d) - (a - b)(c + d)$
d) $(1 - a)(a - 1) - 2(a + 1)(a - 2)$

۳ – د بينوم فرولونه

۳ . ۱ – د بينوم فرمولونه وکاروئ يا استعمال کړئ او د شوننتيا سره سم يې ساده کړئ

a) $(-a + 3b)^2$ c) $(-a - b)(a - b)$
b) $(-1 + a)(a + 1)$ d) $(-1 + a)^2 - (1 - a)^2$

3.2. a) $(4a^2 - 3)(4a^2 + 3) - (3a - 4)^2 + (5a + 1)^2$
b) $(a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library



c) $(3a + 2b - 5c)^2$
d) $(a + b - c - d)^2$

3.3. a) $49a^2 + 42a + 9$
b) $25a^2 + 40ab + 16b^2$
c) $169a^2 - 130ab + 25b^2$
d) $9a^4b^2 + 12a^2b + 4$

3.4. a) $(8a - b)^2 - 16a^2$
b) $81a^2 - 16(4a - 3b)^2$
c) $4a + 12\sqrt{ab} + 9b$
d) $(\sqrt{ab} - 1)(-1 - \sqrt{ab})$

3.5. a) $(a + b + 1)(a + b - 1)$
b) $(a + b)^2 + 2a + 2b + 1$
c) $a^2 - 2ab + b^2 - 2a + 2b + 1$
d) $a^2 + 2ab + b^2 - 4(a + b) + 4$

۳ . ۶ لاندې وييني يا افادې ساده کړئ، داسې چې د مربع تکميلوني له لارې پوره مربع وې جوړې کړئ!

a) $4a^2 - 12a + 9b^2 - 24b = 0$
b) $16a^2 + 25b^2 - 128a + 50b = 0$
c) $3a^2 - 2b^2 - 2\sqrt{6}\,a + 2\sqrt{6}\,b = 0$
d) $4x^2 + 12xy - 9a^2 + 12ab = 0$

۴ . د مناسبو ضريبونو له نوکانو راوسته له ۴ .
۱ تر ۴ . ۴ پورې پوښتنو کې ورکړ شوې وييني يا افادې په ضريبونو ټوټه کړئ او تر شوونتيا پورې يې ساده کړئ.

4.1. a) $a + a^2$
b) $-a^2 - a$
c) $8ab + 20b^2$
d) $ab + ac - ad$

4.2. a) $a^2b^2 + ab + ab + 1$
b) $ab - ac - b + c$
c) $3a + 3 - 2a - 2 + 4b(a + 1)$
d) $8(7a - 5b) - 5c(7a - 5b)$

4.3. a) $3ac - 3bc - 2ad + 2bd + 4ac - 4bc - 7ad + 7bd$
b) $a^2b + ac - ab - c$
c) $15ab - 5a - 1 + 3b$
d) $4a^2 + 20ab + 25b^2 - a^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library



4.4. a) $(a^3 - a^2)(2a - 2a^2)$ b) $(-5a - 3b)^2 + (-5a + 3b)^2$ c) $(-5a - 10b)(-3a + 6b)$ d) $(-a - 1)(a - 1) - (a^2 - 1)$

۴ . ۵ – هر ځل د n لوی توان $(n=1,2,3,\ldots)$ له نوکانو راوباسئ!

a) $n^2 + n + 1$

b) $3n^2 - n + 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$

c) $(1 - 2n)^3$

d) $(\frac{1}{4}n^2 + 3n - 1)^2$

۵ – د په نوکانو کې افادو وېش

لاندې وېش سره ته ورسوئ.

دا چې وېش په صفر ناشونی دی، په دې او لاندې ټولو تمرینونو کې دا ا رزښتونه له شمیره وباسئ، کوم چې $a,b,\ldots$ یې نه شي نیولی یا اخستلای.

5.1. a) $(10a^2 - 2ab + 16ac) : 2a$ b) $(25ab - 40b^2) : (-5b)$ c) $(28a^3 - 20a^2 + 32a) : (-4a)$ d) $(27a^2b - 63ab^2) : (-9ab)$

5.2. a) $(3a^2 + 5ab + 2b^2) : (a + b)$ b) $(a^2 - 2ab - 3b^2) : (a - 3b)$ c) $(3a^2 + 2a - 5) : (3a + 5)$ d) $(4a^2 - 7ab + 3b^2) : (4a - 3b)$

5.3. a) $(35a^2 + 24ab - 15ac + 4b^2 - 6bc) : (5a + 2b)$
b) $(15a^3 + 67ab^2 - 52a^2b - 28b^3) : (5a - 4b)$
c) $(21ax - 15bx + 9cx - 35ay + 25by - 15cy) : (7a - 5b + 3c)$
d) $(12a^2 + ab - 17ac - 20b^2 + 29bc - 5c^2) : (3a + 4b - 5c)$

5.4. a) $(a^3 + b^3) : (b + a)$
b) $(1536b^3 + 375a^3) : (25a^2 + 64b^2 - 40ab)$
c) $(144a^4 - 81b^2) : (27b + 36a^2)$
d) $(a^3 - b^3) : (a - b)$

5.5. a) $(9a^3 - 7ab^2 + 2b^3) : (3a + 2b)$
b) $(a^2 - 10a - 25) : (a - 5)$
c) $(a^3 - 2ab + b^3) : (a + b)$
d) $(24a^4 - 26a^3 - 76a^2 + 32a) : (4a^2 - 7a - 8)$

(c) ketabton.com: The Digital Library



5.6. a) $(x^4 - x^3 - 5x^2 - 40x + 7) : (x^2 + 3x + 9)$
b) $(2x^2 - x + xy - y^2 + 2y - 2) : (2x - y + 1)$
c) $(13a^2b + 4b^3 - ab^2 + 10a^3) : (2a + 3b)$
d) $(3a^3 + 2a^2 - 7a^2b + 3a - 2ab + 4ab^2 - 4b + 3) : (3a - 4b + 2)$

## ۶ . ماتشميرنه يا كسرشميرنه

۶ . ۱ – لاندې كسرونه صورت او م خرج يعني د ماتباندې او ماتلاندې د خورا غټ ګډ پروېشوني سره د لومړنيو ضريبونو يا ځلوونو له لارې لنډ كړئ

a) $\frac{6\,732}{20\,196}$

b) $\frac{2\,730}{5\,005}$

c) $\frac{20\,520}{2\,280}$

d) $\frac{69\,069}{138\,138}$

۶ . ۲ – د لاندې اعداد خورا كوچنى ګډ زاتځلى (ذ الاضعافالاقل) پيدا كړئ

په لاندې كې und د او په معنا دى

a) 3, 6, 9, 18, 27, 54 und 81
b) 8, 12, 21, 42, 56 und 84
c) 5, 13, 16, 20, 26 und 42
d) 120, 252, 264, 315 und 616

۶ . ۳ . د برابر نوميزو يا برابرمخرج كسرونو شميرنه

6.3.1. a) $\frac{1}{3}+3\frac{1}{3}+3\cdot\frac{1}{3}-4\frac{2}{3}$
b) $\frac{3}{7}-\frac{1-6}{7}+2\frac{1}{7}-7\frac{2}{7}$
c) $10\frac{1}{5}-\frac{4-5}{5}-5\cdot\frac{1}{5}+\frac{10-1}{5}$
d) $2\frac{2}{26}+\frac{5-3}{13}+3\frac{33}{39}-0\cdot\frac{25}{65}$

6.3.2. a) $\frac{a+1}{a}-\frac{a-1}{a}-\frac{1-a}{a}$

c) $\frac{(a-b)^2}{ab}-\frac{1-2ab}{ab}-\frac{a^2+b^2}{ab}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



b) $\frac{a+1}{b}-\frac{a-b}{b}-\frac{b-a}{b}$ d) $\frac{(a-b)^3}{2ab}-\frac{(a+b)^3}{2ab}$

۶ . ۴ – د نا برابرنومیزو کسرونو جمعه او تفریق، په مخرج یا ماتلاندې کې ضریبونه

6.4.1. a) $5\frac{7}{12}+1\frac{41}{72}+2\frac{17}{24}+9\frac{5}{9}$ c) $\frac{5}{18}+\frac{5}{6}-\frac{1}{3}+\frac{14}{27}+\frac{71}{81}$

b) $36\frac{14}{39}+19\frac{4}{13}+15\frac{5}{6}-2\frac{19}{72}$ d) $\frac{15}{64}-\frac{77}{96}+\frac{1}{243}-\frac{3-8}{24}+3\frac{1}{1296}$

6.4.2. a) $\frac{b+5c-a}{6}-\frac{3a-7b+6c}{4}+\frac{4a-5b+7c}{3}$

b) $\frac{a-9}{18}+\frac{a-2}{6}+\frac{5(2a-1)}{12}-\frac{3(a-1)}{8}-\frac{2(3a-4)}{9}$

c) $\frac{16b+3a}{48}+\frac{7a-8b+9c}{24}-\frac{9a+8b+12c}{32}$

d) $\frac{4c-3a}{12ac}+\frac{5b-2c}{10bc}-\frac{b^2-c}{4b^2c}+\frac{4b^2-5a}{20ab^2}+\frac{2}{3a}+\frac{a-b}{5ab}$

6.4.3. a) $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}-\frac{a^2+b^2}{2b}-1$

b) $\frac{5a-6b}{30c^2}-\frac{b(5c^2-3a)}{15ac^2}-\frac{a}{4b}+\frac{a(3c^2-2b)}{12bc^2}+\frac{b}{3a}$

c) $\frac{3a^2+8b^2}{6ab}-\frac{a(4b-5c)}{10bc}+\frac{4a-5b}{10c}+\frac{b(3a-2c)}{6ac}$

d) $\frac{4c-3a}{12ac}+\frac{5b-2c}{10bc}-\frac{b^2-c}{4b^2c}+\frac{4b^2-5a}{20ab^2}+\frac{2}{3a}+\frac{a-b}{5ab}$

۶ . ۵ - د نابرابر نومیزو ماتونو(کسرونو) جمعه او تفریق( زیاتون او کمون)، جمعه مخرج یا ماتلاندې کې.

۶ . ۵ . ۱: د a لپاره یو په بل پسې ورکړشوي ارزښت ځای په ځای کړئ‌او دا داسې لاس ته راغلي ماتونه(کسرونه) سره یوځای کړئ! بیا په ټولیزه توګه د ورکړ شوو کسرونو لاس ته راوړنې ورکړئ او هغه ارزښتونه لرې کړي، چې د a د اخستلو یا نیولو اجازه نه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library



| | |
|---|---|
| a) $\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}$ | د a=1,2,3 سره |
| b) $\frac{1}{a-2}-\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a+2}$ | د a=3,4,5 سره |
| c) $\frac{a}{a-1}+\frac{a}{a+1}-2$ | د a=2,3,4 سره |
| d) $\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a-1}+\frac{1}{(a+1)^2}-\frac{1}{(a-1)^2}$ | د a=2,3,4 سره |

6.5.2. a) $\frac{3a-1}{4a-1}-\frac{3}{4}$

b) $\frac{a-2}{a-3}-\frac{a-1}{a-2}$

c) $\frac{1}{a+1}+\frac{4}{3a+2}-\frac{3}{a+1}$

d) $\frac{10}{2a-2}-\frac{6a}{3a^2-6a}-\frac{9b}{3ab-9b}$

6.5.3. a) $\frac{3ax-3by}{6x^2y-6xy^2}-\frac{5a^2x+5aby}{10ax^2y+10axy^2}$

b) $\frac{6ab+9b}{6ab-6b}-\frac{6ab-4b}{6ab+6b}-\frac{10b^2}{12a^2b^2-12b^2}$

c) $\frac{1}{a^2-b^2}-\frac{2b^2}{2a^4-2a^2b^2}-\frac{b^2}{a^2b^2}+\frac{1}{a^2+b^2+2ab}$

d) $\frac{24a^2b-72ab^2}{60a^2b+24ab^2}-\frac{49a^2b-28ab^2}{35a^2b+14ab^2}-\frac{20a-10b}{10a-5b}$

6.5.4. a) $\frac{3a+b}{2a^2+2ab}-\frac{a^2+b^2}{2a^2b+2ab^2}+\frac{2a-5b}{4ab+4b^2}$

b) $\frac{a+2b}{3a^2-3ab}-\frac{1}{2b}-\frac{3b-a}{2ab-2b^2}$

c) $\frac{2a-5}{a+3}-\frac{3a-4}{a+2}+\frac{a^2+6a+10}{a^2+5a+6}$

d) $\frac{5a-2b}{3a+b}-\frac{88a^2+28ab+0,25b^2}{48a^2+7ab-3b^2}+\frac{24a+b}{16a-3b}$

6.5.5. a) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-\frac{b^2}{a^2+ab}-\frac{a^2}{ab+b^2}$

b) $\frac{6a-5b}{8a^2+24ab+18b^2}-\frac{2a-b}{36a^2-81b^2}+\frac{3}{12a-18b}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



c) $\frac{2a+3b}{2ab+b^2}-\frac{4a^2+b^2}{4a^2b+2ab^2}-\frac{5a-b}{4a^2+2ab}$

d) $\frac{9a-b}{6a^2-2ab}-\frac{6a+b}{3ab-b^2}+\frac{1}{2b}$

۶ . ۶: د ماتونو يا کسرونو ضربونه( يا ځلونه):

6.6.1. a) $3\cdot\frac{1}{3}$ b) $b\cdot\frac{1}{a}$ c) $\frac{5}{8}\cdot\frac{8}{5}$ d) $\frac{0}{b}\cdot\frac{b}{c}$

6.6.2. a) $\left(\frac{a}{3b}+\frac{3b}{a}\right)\cdot 3ab$ c) $\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{3b}\right)\cdot(2a-3b)$

b) $\left(\frac{5a}{6bc}-\frac{6b}{7ac}+\frac{2c}{3ab}\right)\cdot 84abc$ d) $\left(\frac{2}{a}+\frac{3}{b}\right)\cdot\left(\frac{a}{2}-\frac{b}{3}\right)$

6.6.3. a) $\frac{4a^2-9b^2}{21a^2b+14a^3}\cdot\frac{7a+5ab}{6b-4a}$ b) $\frac{16a^4-a^2}{24a^3+8a^2}\cdot\frac{36a^2+24a+4}{4a+1}$

c) $\frac{a^2+1}{(a+1)^2}\cdot\frac{a^3+a^2+a+1}{(a^2+1)^2}$ d) $\frac{4ab-3a}{9ab-3b^2}\cdot\frac{18a-6b}{4a^2+10ab}\cdot\frac{8ab-6a}{4ab+10b^2}$

۶ . ۷ . د ماتونو وېش:

6.7.1. a) $\frac{2}{3}:3$ b) $a:\frac{1}{b}$ c) $\frac{a}{b}:b$ d) $\frac{0}{a}:\frac{1}{b}$

۶ . ۷ . ۲ : د لاندې وېينو يا افادو برعکس يا په څټ ارزښتونه پيدا کړئ.

a) $\frac{a}{b}$ b) $\frac{a+1}{b}$ c) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ d) $\frac{1}{a+b}$

6.7.3. a) $\left(\frac{a}{2b}-\frac{2b}{a}\right):\frac{a}{a+2b}$ c) $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right):\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)$

b) $\left(1-\frac{2}{a}+\frac{1}{a^2}\right):\frac{1-a^2}{a^2}$ d) $\left(\frac{a+b}{b}+\frac{a+b}{a}\right):\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

(c) ketabton.com: The Digital Library



6.7.4. a) $\dfrac{1-\dfrac{1}{a}}{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a^2}}$

b) $\dfrac{\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+1}{\dfrac{a^2+b}{b}-\dfrac{a+b^2}{a}}$

c) $\dfrac{\dfrac{a}{a-b}+\dfrac{b}{a+b}}{\dfrac{a}{a+b}-\dfrac{b}{a-b}}$

d) $\dfrac{\dfrac{a}{1-a}+\dfrac{a+1}{a}}{\dfrac{a-1}{a}-\dfrac{a}{a+1}}$

6.7.5. a) $\dfrac{\dfrac{1}{a^3}-\dfrac{1}{b^3}}{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{b^2}}$

b) $\dfrac{\dfrac{x^2}{ab}+x\cdot\left(\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}\right)-\dfrac{1}{ab}}{\dfrac{x}{a}-\dfrac{1}{b}}$

c) $\dfrac{\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}}{\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}}$

d) $\dfrac{\dfrac{1}{16a^2}+\dfrac{1}{2ab}+\dfrac{1}{b^2}}{\dfrac{1}{8a}+\dfrac{1}{2b}}+\dfrac{\dfrac{1}{16a^2}-\dfrac{1}{2ab}+\dfrac{1}{b^2}}{\dfrac{1}{8a}-\dfrac{1}{2b}}$

6.7.6. a) $\dfrac{a+\dfrac{1}{1-ab}}{1-\dfrac{1}{1-ab}}$

b) $\dfrac{1}{a-\dfrac{a}{1-\dfrac{a}{a-b}}}$

c) $1-\dfrac{1}{1-a\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{b}{a}}}$

d) $\dfrac{\dfrac{a+\frac{1}{4}b}{a-\frac{1}{4}b}-\dfrac{a-\frac{1}{4}b}{a+\frac{1}{4}b}}{1+\dfrac{b^2}{16a^2-b^2}}$

۶ . ۸ . لاندې ماتونه یا کسرونه، که ممکن وي، ساده کړئ ( که غواړئ د مخکني شکل بدلون څخه وروسته)

6.8.1. a) $\dfrac{35ac-50bc}{7a-10b}$

b) $\dfrac{a-\sqrt{a}\cdot b}{b-\sqrt{a}}$

c) $\dfrac{34ax+51bx-119cx}{2a+3b-7c}$

d) $\dfrac{a^2-ab+ac}{b-a-c}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



6.8.2. a) $\frac{ax+bx+ay+by}{a+b}$ c) $\frac{91ab+7b+39a^2+3a}{13a+1}$

b) $\frac{ab+\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}a-\frac{1}{4}}{a+\frac{1}{2}}$ d) $\frac{ax+\frac{x}{b}-\frac{a}{y}-\frac{1}{by}}{\frac{1}{b}+a}$

6.8.3. a) $\frac{25a^2-130ab+169b^2}{25a-65b}$ c) $\frac{\frac{1}{4}a^2b^2+17ab+289}{\frac{17}{2}\left(\frac{1}{17}ab+2\right)}$

b) $\frac{2x^2+8xy+8y^2}{(x+2y)^2}$ d) $\frac{25a-20\sqrt{ab}+4b}{ab(\sqrt{a}-0{,}4\sqrt{b})}$

6.8.4. a) $\frac{a^4-b^4}{(a+b)^2(a-b)}$ c) $\frac{(a^2-b^2)^2-(a^2+b^2)^2}{ab(a+b)}$

b) $\frac{(a+b)^4-(a-b)^4}{a^2+b^2}$ d) $\frac{(a^2+b^2)^2(a^2-b^2)^2+2a^4b^4}{a^4+b^4}$

6.8.5. a) $\frac{(\frac{1}{9}a^2+b^2+\frac{2}{3}ab)(x^3-27y^3)}{(2b+\frac{2}{3}a)(x-3y)}$ c) $\frac{(80-40ab+5a^2b^2)(4-ab)}{64\cdot\left(\frac{ab}{4}-1\right)^3}$

b) $\frac{(2x^2-20x+50)(2a-1)(a+\frac{1}{2})}{(1-2a)(2a+1)(25-x^2)}$ d) $\frac{(32a^3b^2x-18ax^3y^2)\cdot 3by}{(12ab^2y+9bxy^2)\cdot 2ax}$

6.8.6. a) $\frac{(a+b+1)(a+b-1)+(a-b)^2-2\cdot\left(b^2+\frac{1}{2}\right)}{a+1}$

b) $\frac{\left(4a+\frac{1}{4}b-2\sqrt{ab}\right)\cdot\left(2\sqrt{a}+\frac{1}{2}\sqrt{b}\right)}{2\sqrt{a}-\frac{1}{2}\sqrt{b}}$

c) $\frac{(a+1)^2-b^2}{a^2+2ab+b^2+2a+2b+1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



d) $\frac{(a-1)^2-(b-1)^2}{a^2+b^2+2ab-4(a+b-1)}$

۶ . ۹ . د (1-) سره شميرنه

الف- ورکړشوی دې وي a(b-c) /c. a=-1 ځای په ځای کړئ او داسې لاس ترې راغلي کسر یا مات لپاره مختلف لیکدودونه ورکړئ.

ب – ورکړي دې (5c -3b-a)/(1-a) وي په صورت او مخرج ( ماتباندې او ماتلاندې) کې (1-) له نوکانو راوباسئ او دا عدد لنډ کړئ.

پ – کسر یا مات $(b^2 - a^2)$ /(-a-b) د (1-)سره پراخ کړئ او ساده یې کړئ.

ت- ورکړی دې وي $1-\frac{25a^2-36b^2}{6b-5a}$ په مخرج یا ماتلاندې کې (1-) له نوکانو راباسئ او دا وبینه یا افاده ساده کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

## ٤ ۰ توان ( پوتنځ) او ريښه ( جذر) Potenz , Wurzel ( Root)

په دې برخه کې د توان او جذر يا ريښې قوانين ترڅيړنې لاندی نيسو، دلته غوره دا ده، چې د کارونې يا استعمال چټکتيا ته پرمختک ( تکامل) ورکړو ۰ دا مشوره کيږي، چې ريښه دې په پوتنځ واړول شي، چې د اکسپوننت - يا جګعدد يې نسبي يا راشنل وي۰ د دې فورمال ټيک کره د ګڼلو قوانينو په څنګ کې د باوري کيدو لپاره بايد په نيونو(فرضيو ) هم ژور فکر وشي۰

د ريښې پيژند د خلاف يا پر ځنډ عمليو مخه بايد نيول شوي وي، چې د هغې له مخې راديکاند ( ريښه ويستونی يعنی هغه ګڼ، چې ريښه يی وېستلکيږي يا نيول کيږي،د ريښی نخښې لاندی ګڼ او هم د ريښی ارزښت نامنفي اعداد ( ناکميز ګڼونه) وي۰ د توان زړه پورې ريل اکسپوننت ( په جګ) هلته کره دی يا باوري دی، چې د بنسټ لپاره د مثبت عددونو نيونه يا فرضيه شوي وي۰

### ٤ ۰ ١ توان ( پوتنځPotenz ) په ټولګڼيز يا تام عدد په جګ يل اکشسپوننت

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

پيژند ٤ ٠ ١:

د يوه په خوښه ريل ګڼ توان لاندې موږ د a د خپل ځان سره n- م واره ځل

پوهيږو٠ د دې لپاره ليکو: $a^n = b$ دلته a بنسټ ... ,n = 1,2,3

اکسپوننت(جګګڼ، لنډ: جګ) او b د پوتنځ يا توان ارزښت بلل کيږي٠

د بيلګي په توګه

$$a = a\ ,\ a^2 = a\ .\ a\ ,\quad a^3 = a.a.a$$

(4,1) د $n = 0$ لپاره کره ټاکل کيږي $a^\circ = 1$ د $a \,|\!= 0$ سره

د پيژند يا تعريف پر بنسټ ( او د څه بنديزونو په څلورديوالی کې، چې لاندې شوي) ښوول کيدی شي، چې د خوښی يا زړه پورې رييلګڼونو $a, b \in R$ او $m, n \in N^*$ نامنفی ټولګڼونو اکسپوننت يا جګګڼ لپاره لاندې باورلري

$$a^n . b^n = (a.b)^n ;.........................................(4,2)$$

$$a^n : b^b = (\frac{a}{b})^n = (a/b)^n ; b \neq 0;.................(4,3)$$

$$a^n . a^m = a^{n+m} ;.........................................(4,4)$$

$$a^n : a^m = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} ; a \neq 0, n \geq m;.............(4,5)$$

$$(a^n)^m = a^{n.m} ;.........................................(4,6)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

دا پورته د توان اړیکې د ټولګنیز مثبت جګړ یا اکسپوننت لپاره باور لري، کیدی شي، چی ټولګنونو ته وغزول شي، که چیرې پیژند ورکړو یا تعریف کړو:

$$\frac{1}{a^n}=a^{-n};n=1,2,3,....,..a\neq 0,..................(4,7)$$

دا پورته د توان قوانین د ټولګنیز جګ(اکسپوننت) لپاره بی بندیزونو یواځې د نه ورکیدونکو رییل بنسټونو یانې د $a \mid= 0$ او$0 \mid= b$ لپاره باور ي دي ۰ په (4,5) کې بیا بندیز $n \geq m$ اړیین نه دی۰

د توان قوانین کیدی شي په بڼه بدلونکو افادو یا وییڼو وکارول- یا استعمال شي۰

بیلګه4 .1

$$[\frac{4a^{-3}b^0}{x^2y^{-1}}]^{-2}=(4abx^{-2}y]^{-2}=4^{-2}a^6x^4y^{-2}=\frac{a^6x^4}{16y^2},abxy\neq 0$$

بیلګه 4 . 2

$$\frac{9^4(a^2\sqrt{ab})^2}{18^2.(3ab)^3}=\frac{3^8.a^4.a.b^2}{2^2.3^4.3^3.a^3.b^3}=\frac{3a^2}{4b},a>0,b\neq 0$$

بیلګه4 . 3

$$\frac{3-a}{a^{m-4}}+\frac{a^6-a^5+2a^3-1}{a^{m+1}}-\frac{2a^2+1}{a^{m-2}}=$$

$$=\frac{a^5(3-a)+a^6-a^5+2a^3-1-a^3(2a^2+1)}{a^{m+1}}=$$

$$=\frac{3a^5-a^6-a^5+2a^3-1-2a^5-a^3}{a^{m+1}}=\frac{a^3-1}{a^{m+1}},a\neq 0,m\in Z$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د -----------------------------------------------------------------------------

پوتنځ زياتون او کمون کې بايد پام وي، چې يوازې د برابر  پوتنځ ګڼونه يو له بل  سره زياتيدی او يو له بل  کميدی شي٠

بيلګه 4 . 4

$$3a^n + 2a^n = 5a^n$$

بيلګه4 . 5

$$4a^{n+1} + 2a^n + 5b^{n+1} - 3b^n - 3a^{n+1} + a^n - 4b^{n+1} + 3b^3 = a^{n+1} + 3a^n + b^{n+1}$$

دې ته بيا ګوته نيسو، چې د بنسټ -  او پوتنځ مخنخښې کې دې توپير وشي٠ پوتنځ له مثبت - يا زياتونمخنخښې سره تل مثبت يا  زياتيز پوتنځ ارزښت لري، په دې ترځ کې، چې پوتنځ د منفي - يا کميز بنسټ سره که اکسپوننت جوړه وي مثبت زياتيز  او که اکسپوننت ناجوړه وي نو منفي - يا کمون ارزښت لري٠

باور لري:

$$(2a)^{2n} = +a^{2n}, ...., (-a)^{2n} = +2a^{2n}$$
$$(+a)^{2n+1} = +a^{2n+1}, ..., (-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}, n \in Z, a > 0$$

٤ ٠ ٢ – ريښه او توان له ريشنل جګ عدد (اکسپوننت) سره

پيژند  ٤ ٠ ٢

د يوه نامنفي ګڼ a لپاره  n -مه ريښه هغه نامنفي ګڼ  b  دی، د کوم لپاره چې

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

باور لري: $b^n = a$

د دې لپاره ليکو:

$$b = \sqrt[n]{a}, n = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4,8)$$
$$a \geq 0, b \geq 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4,9)$$

دلته a راديکاند Radikand ، يا ګڼ، چې ريښه (جذر) يې نيولکيږي( موږ دا

ريښه نيووني يا ريښه ويستونی بولو) او n دريښې جګ(اکسپوننت) اوb د

ريښې ارزښت يا ريښه ارزښت بلل کيږي۰

بايد پردې تينګار وشي، چې ريښه يوائې د نامنفی راديکاند يا ريښه ويستوني (ريښه نيوني) $a \geq 0$ راوستل کيږي يا نيول کيږي او پخپله په لاندې توګه يو نامنفي - يا ناکميز ارزښت لري يانی

$$b = \sqrt[n]{a} \geq 0$$

د دې کره کونې لپاره لاندې يادونې شوي دي:

۱ – د جوړه $n = 2,4,6,\ldots$ لپاره د $a<0$ سره ريښه b په ريېلګڼونو کې نه شته، کوم ، چې (4,8) پوره کړي

ځکه، چې د b جوړه په توان تل نامنفي يا ناکميز يانې زياتيز ګڼ دی۰

۲ – د جوړه او مثبت - يا زياتيز برابرون $b^n = a$

په ختڼه په ريښتوني دوه ريېل اوبيوني ياحلونه لري د بيلګي په توګه $b^2 = 4$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

یانې $n = 2$ او $a = 4$ اوبیونې

$$b_1 = 2, b_2 = -2$$

دي۰ د دې لپاره، چې د رادیکاند د شمیرلو کارونې یوائځنۍ سرته ورسولی شو، باید د یوې اوبیونې لپاره پریکړه وکړو، نو له دې امله موږ مثبت ارزښت غوره بول

۳ – د ناجوړه $n= 1 , 3 , 5$ . او $a\geq 0$ لپاره

$$b^n = a$$

تل یوائځني زیاتیز(مثبت) اوبی یا حل لري یانې $b\geq 0$

٤ – د ناجوړه $n$ او کیمز یا منفي $a$ لپاره $b^n = a$

تل یوائځنې یو منفی اوبی یا حل لري۰ یانې $b < 0$ د بیلګې په توګه دا $b^3= -8$ یوائځې

اوبی $b = -2$ لري.

په هر صورت باید د جوړه...$n=2,4,6$ ګڼونو لپاره $a\geq 0,b\geq 0$ وغوښتل شي، ځکه چې په بل صورت کې به یا رېښه شته نه وي او یا به یوائځنی اوبی نه لري، یانې څو اوبی به شته وي

د ناجوړه یا طاقو,...$n = 1,3,5$ لپاره کیدی شي، چې له دواړو غوښتنو تیر شو۰ دلته به یوائځې تاوان یا زیان دا وي، چې د تولو ممکن حالتونو لپاره به بیل بیل د رېښې د قوانینو غوره کولو ته اړ کیږو۰ له بلې خوا به رېښی د قوانینو ترتیبول د پوتنځ لپاره ، چې پورته ایښول شوي بندیزونه nقوانینو لپاره ستونځمن وي۰ له دې امله د ناجوړه رېښو

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

اکسپوننت غوره کوو او د يوائخني يو اوبى لپاره 2- د 8- = $b^3$ او نه $-2 = \sqrt[3]{-8}$

بلکه $-2=-\sqrt[3]{8}$ ليکو٠ په دې اړوند او د يادو شوو نيونو په بنسټ دې دا لاندې اوبى په ګوته شوى وي

$$\sqrt{a^2} = a, \ldots\ldots\ldots\ldots(4,10)$$

څلورى رېښه يا مربع رېښه $\sqrt{a^2}$ د ټولو حقيقي اعدادو يا - ګڼونو a لپاره تعريف شوي٠ د نامثبت يا نازياتيز ې a لپاره به (4,10) په داسى حال کې، چې د منفي a لپاره به بيا د (4,10) اوبى منفي يا متيز وي، کوم، چې نيونه $b \geq 0$ نفې کوي.

په ځانګړي حالتونوکې به د ( 4 , 10 ) ښول شويو حالتونو استعمال لاندې مخامخوالي يا مضاد لاس ته راولي، لکه :

$$\sqrt{4} = \sqrt{2^2} = 2, \sqrt{4} = \sqrt{(-2)^2} = -2$$

يانې د 2- = 2 سره٠

د (10 , 4 ) ټيک داسې ليکل کيدى شي:

$$\sqrt{a^2} = |a| = \{a, a \geq 0, \ldots\ldots\ldots\ldots(4,11)$$

$$= \{ -a \quad , a \leq 0 \qquad (4,11)$$

د رېښې يا جذر له پيژند ( 9 , 4 ) , ( 8 , 4 ) سره سم کيدى شي، چې لاندې باوري د رېښې قوانين وليکل شي د....n = 1,2,3 او $a , b \geq 0$ لپاره

$$\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \ldots\ldots\ldots\ldots(4,12)$$

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a} / \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a/b}, b > 0 \ldots\ldots(4,13)$$

$$\sqrt{a}.\sqrt[m]{a} = \sqrt[n.m]{a^{n+m}} \ldots\ldots\ldots\ldots(4,14)$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a} \ldots\ldots\ldots\ldots(4,15)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

پورته د (4,15),(414),(413,),(4.12) ترمنځ بايد لږ واټن وي، خو کومه ترې ناسمه پوهيدنه نه رامخ ته کوي • دلته پيژندل کيږي، چې د ريښې قوانين د پوتنځقوانينو ته، چې په(4,2) تر (4,6)پورې ورکړ شوي،د پرتلې وړ دي• په ربښتيا چې دا د پوتنځقوانينو لاس ته راتلی شي، که پوتنځ د ريشنل اکسپوننت سره په لاندې ډول تعريف شي يا يې لاندې پيژند ورکړ شي•

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n} \Leftrightarrow \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m .......(4,16)$$

د $a \geq 0 , n = 1,2,3,\ldots, m = 1 , 2 , 3\ 4 \ldots$ لپاره

د بيلګې په توګه (١٦ ، ٤ ) په لاندې ډول ليکل کيږي

$$\sqrt[n]{a}.\sqrt[m]{a} = a^{1/n} \cdot a^{1/m} = a^{(1/n)+(1/m)} = a^{(n+m)/n.m} = \sqrt[n.m]{a^{n+m}}$$

دا اړيکې (4,16) کيدی شي منفي $m = -1,-2,-3,\ldots$ ته هم پراخه شي، چيرته، چې (4,17) په ټينګه - يا کره باور ولري

$$a^{-(m/n)} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}, a > 0....................(4,17)$$

بې له بنديزونو د خوښې جګو n او m لپاره د پوتنځقوانين (4, 2 ) تر (4,6) باور لري، خو يوائې هلته، چې نه ورکيدونو بنسټونو يانې $a>0, b>0$ نيونه شوې وي•

د ريښې شميرلو لپاره بايد اساساً د(4,16) له مخې ريشنل اکسپوننتونه واوړي او له (4,2) تر (4,6) استعمال کړي

اړتيا لرو، چې د پوتنځ او ريښې سره شميرلو د قوانينو استعمال نيوني تل و ازمايلی شو• په ځانګړي ډول د بنسټ نه منفيتوب کمونوالی يا نامنفيوالی يا مثبتتوب(مثبتوالی يا زياتونوالی) پريږدو، چې لاندې ناسم پاي کيدډول وښايو•

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

$$\sqrt{-a} = (-a)^{1/2} = (-a)^{2/4} = \sqrt[4]{(-a)^2} = \sqrt[4]{a^2} = a^{2/4} = a^{1/2} = \sqrt{a}$$

برابرون یوازې د دې ساده حالت0 = a لپاره شته دی یا باور لري، د 0=|a یا $a \neq 0$ لپاره a-او یا a منفي دي دا په دې مانا، چې a یاa- پیژند نه لري یا تعریف نه دی۰

د توان قوانین د توان سره شمیرلو، چې راشنل جګ لري، په لاندې بیلګو کې روښانه کوو:

پام: په لاندې بیلګو کې دا تراوسه د شمیر بنسټیز قوانین ټول راغلي، د نو ورسره بلدېدونکو ګرانو لوستونکو ته دې دا روښانه وي، چې د لږ فکر وروسته هرڅه روښانه کیدی شي۰ شمیرنه یې لږ وخت نیسي، که غواړی پخپله یې یو ځل وشمیری۰

بیلګه ٤ ۰ ٦

$$\sqrt[3]{\sqrt{125}} = \{(125)^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{3}} = (125)^{\frac{1}{6}} = (5^3)^{\frac{1}{6}} = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5} = 2,2361$$

بیلګه ٤ ۰ ٧

$$\frac{a^2\sqrt{b}c^{-2}}{\sqrt[3]{a^2}b^{-3}} : \frac{d^2\sqrt{c}}{\sqrt[5]{d}a^{-5}} = \{a^{(2-\frac{2}{3})}b^{(\frac{1}{2}+3)}c^{-2}\} : \{a^5c^{-2}d^{(2-\frac{1}{5})}\} =$$

$$= a^{(2-\frac{2}{3}-5)}b^{(\frac{1}{2}+3)}c^{(-2-\frac{1}{2})}d^{(-2+\frac{1}{5})} = a^{-\frac{11}{3}}b^{\frac{7}{2}}c^{-\frac{5}{2}}d^{-\frac{9}{5}} =$$

$$= \frac{\sqrt{b^7}}{\sqrt[3]{a^{11}}.\sqrt{c^5}.\sqrt[5]{d^9}} = \frac{b^3.\sqrt{b}.c^2}{a^3.\sqrt[3]{a^2}.c^2.\sqrt{c}..d^5.\sqrt{d^4}}$$

بیلګه ٤ ۰ ٨

$$8.\sqrt[3]{343} - 4.\sqrt[3]{125} + 5\sqrt[3]{8} - 5\sqrt[3]{729}$$

$$= 8.\sqrt[3]{7^3} - 4\sqrt[3]{5^3} + 5.\sqrt[3]{2^3} - 5.\sqrt[3]{3^6} = 8.7 - 4.5 + 5.2 - 5.9 = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

بيلګه ٤ ۰ ۹

$$5.\sqrt{63}-2.\sqrt{175}-\sqrt{343}+3.\sqrt{28}$$
$$=5.\sqrt{7.3^2}-2.\sqrt{7.5^2}-\sqrt{7.7^2}+3.\sqrt{7.2^2}=$$
$$=5.3\sqrt{7}-2.5\sqrt{7}-7.\sqrt{7}+3.2.\sqrt{7}=$$
$$=15.\sqrt{7}-10.\sqrt{7}-7.\sqrt{7}+6.\sqrt{7}=4.\sqrt{7}$$

بيلګه ٤ ۰ ۱۰

$$\sqrt{a-\sqrt{a^2-b^2}}.\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}=\sqrt{(a-\sqrt{a^2-b^2}).(a+\sqrt{a^2-b^2})}=$$
$$=\sqrt{a^2-(\sqrt{a^2-b^2})^2}=\sqrt{a^2-a^2+b^2}=|b|$$

د $|a| \geq |b|$ لپاره

د مختلفو شميرلو لپاره موخور دی، چې مات لاندې کې منځ ته راغلې ريښې له منځه يوسو ( د ماتلاندې ريشنل کول)۰

که په ماتلاندې کې يوه ريښه $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$ د فاکتور يا ځلوونی په څيررامنځ ته شي، نو دا د وظيفې لپاره يوازې اړيين ده چې $m < n$ ( $m , n > 0$) او $m, n \in Z$ په پام کې راوړو

کارونه يا عمليه په لاندې ډول اجرا کيږي$(N^*|= 0 , a > 0)$

$$Z\Big/N=\frac{Z}{N}=\frac{Z}{N*\sqrt[n]{a^m}}=\frac{Z.a^{1-\frac{m}{n}}}{N*a^{\frac{m}{n}}.a^{1-\frac{m}{n}}}=\frac{Z.\sqrt[n]{a^{n-m}}}{N*a},..........(4,18)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



بیلګه ٤ ۰ ۱۱

$$\frac{3}{2\sqrt[3]{3}}=\frac{3}{2.3^{\frac{1}{3}}}=\frac{3.3^{\frac{2}{3}}}{2.3.3^{\frac{2}{3}}}=\frac{3^{1+\frac{2}{3}}}{2.3^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}}=\frac{3^{\frac{5}{3}}}{2.3}=\frac{3^{\frac{2}{3}}}{2}=\frac{1}{2.\sqrt[3]{9}}$$

که په ماتلاندې کې د څلورۍ- یا مربع ریښې زیاتون یا کمون وي $N=\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ نو ماتلاندې له مات $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ سره غزوو او د بینوم فرمول استعمال سره له $a > 0$ او $b > 0$،چې $a \neq b$ وي لاس ته راځي:

$$\frac{Z}{N}=\frac{Z}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}=\frac{Z.(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})}{(\sqrt{a}\pm\sqrt{b}).(\sqrt{a}\mp\sqrt{b})}=\frac{Z.(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})}{a-b},...(4,19)$$

بیلګه ٤ ۰ ۱۲

$$\frac{1}{2-\sqrt{3}}=\frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=\frac{2+\sqrt{3}}{4-3}=2+\sqrt{3}$$

بیلګه ٤ ۰ ۱۳

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

## ۴ . ۳ توان( پوتېنځ) د حقیقي – یا رییل جګ ( اکسپوننت ) سره

دلته دا په ګوته کوو یا دې دا ویل شوي وي، چې د توان ټول قوانین له (4,2) تر (4,7) دې په خوښه حقیقي اعدادو اکسپوننتونو(جګعددونو)m,n لپاره باور لري،طبعاً بې بندیزه ټیک د مثبت بنسټ لپاره. یعنې a,b>0 ، برسیره پردې دې باید توان $a^{\alpha}; a > 0$ د ناریښتوني یا ایراسنل عدد α لپاره تعریف شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

که α یو ایراشنل – یا ریښتونی عدد وي، نو موږ د ۳ . ۱ . ۴ برخې سره سم انترروالونو بندولو په بنبټ لرو: $\propto = \{a_{n;} a'_n\}$. دلته $a_{n;} a'_n$ هوښیار یا راشنل اعداد دي.

بیا نو

$$\beta = \{a^{a_n}; a^{a'_n}\} \qquad (4{,}20)$$

هم په انتورالونو بندول دي چې غږي یې ( ۴،۲ ) لاندې تعریف شوي توانونه دي د راشنل اکسپوننت سره. د هغه موجود په انتروالونو بندولو سره په دې توپیر، چې

$$2^1 < 2^{\sqrt{2}} < 2^2$$
$$2^{1,4} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,5}$$
$$2^{1,41} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,42}$$
$$2^{1,414} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,415}$$
$$2^{1,4142} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,4143}$$
$$\vdots$$

اخرني مساوات په دې معنا دی

نو لرو $\sqrt[10000]{2^{1412} < 2^{\sqrt{2}} < \sqrt[10000]{2^{14143}}}$

٤ ، ۳ تولګه : د $a>0, b>0$ رییل او $m,n \in N(n \neq 0)$

همدا ډول $m,n \in N(n\neq 0)$ ییلو لپاره باور لري

$$\alpha, \beta \in R$$

$$a^0 = 1, \frac{1}{a^\alpha} = a^{-\alpha}, \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}, \sqrt[n]{a^m} =$$

$$= (\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



دا پورته موضوع تر دې ځايه بسيا کوي، که نور څه مخته راتلل، چې اړيين وو، هغه به بيا په ګډه ورزياتوو

۴ . ۵ . تمرينونه

۱ . د توان کلمه، د توان جمعه او تفريق يا زياتون او کمون

۱ . ۱ – د توان په څير يې وليکئ

a) $(-a^{-1})\cdot(-a^{-1})\cdot(-a^{-1})\cdot(-a^{-1})$ b) $-\left(\frac{1}{a^{-2}}\cdot\frac{1}{a^{-2}}\cdot\frac{1}{a^{-2}}\right)$

c) $-(b-a)\cdot(a-b)\cdot(a-b)$ d) $-(a^0 b)\cdot(a^0 b)\cdot(a^0 b)\cdot(a^0 b)$

1.2. a) $-3^{-4}$ b) $(-5)^3$ c) $(-2^{-1})^3$ d) $-\left(\frac{2}{3}\right)^2$

1.3. a) $12a^2b-6ab^2-15a^2b+6ab^2-7a^2b$

b) $(3a+2b)x^4-x^4(2b-3a)+x^4(3a+2b)$

c) $4(a-b)^2+2(b-a)^2-3(a-b)^2$

d) $18(a-1)^3-3(1-a)^3-15(a-1)^3+4(1-a)^3+3(1-a)^3$

۲ – د توانو ضرب او وېش د برابر بنسټ سره

2.1. a) $\frac{3a^{n+1}\cdot 6x^{n+7}\cdot 9b^{x+1}}{3x^n\cdot 2b^{x+1}\cdot 3a}$ c) $\frac{a^{x+1}\cdot b^{x+3}\cdot a^{3x-1}\cdot b^{x+3}}{a^{x-2}\cdot b^{3-x}\cdot a^x\cdot b^{x+1}}$

b) $\frac{a^{n+1}\cdot a^{n+1}\cdot a^n}{a^0\cdot a^n\cdot a^{n-1}}$ d) $\frac{a^{3n-x}\cdot b^{2n+x}}{a^{n+2x}\cdot b^{2n-x}}\cdot\frac{x^{3n+2}\cdot y^{2n-1}}{x^{2n-3}\cdot y^{n+1}}$

2.2. a) $\frac{18x^{a+4}}{2y^{5a+7}}:\frac{4x^{7-3a}}{9y^{8+5a}}$ c) $\frac{42a^2b^3\cdot x^{n+1}}{36c^3\cdot y^2\cdot z^{n-3}}:\frac{70a^3b^2\cdot x^{n+2}}{54c^2y^4\cdot z^{n-2}}$

b) $\frac{a^{5x-2y}}{b^{6m-1}}:\frac{a^{4x+y}}{b^{m-2}}$ d) $\frac{45xa^3\cdot 9y^n(a-1)^2}{9yb^3\cdot 30x^n(a+1)^2}:\frac{9y^{n-1}(1-a)^3}{24x^{n+1}(1+a)^2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

۲ . د توان ضرب او جمعه(زیاتون) د همغه بنسټ سره:

2.3. a) $(x^{5n+3} + x^{4n+5} - x^{3n+4}) : x^{2n+3}$

b) $(143a^4b^5 - 221a^3b^5 - 247a^5b^4) : 13a^3b^4$

c) $(a^{n+1}b^{x-1} + a^nb^x + a^{n-1}b^{x+1}) : a^{n-2}b^{x-1}$

d) $(16a^8 - a^4b^2 + 9b^4) : (4a^4 - 5a^2b + 3b^2)$

د لوګاریتم بنسټ فرمولونو استعمال.

په لاندې کې x وشمیرئ

۳ . د توان په توانونه، د توانونو ضرب او وېش د برابر جګګڼ یا جګعدد سره، د کمیزو یا منفي اکسپوننتونو سره شمیرنه

3.1. a) $\left(1\frac{3}{4}\right)^2 : \left(2\frac{1}{3}\right)^2$

b) $4^{-2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-4}$

c) $\left(-\frac{1}{a^{-4}}\right)^{-5}$

d) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{-3}$

3.2. a) $\dfrac{18^4(a^2b)^2}{27^3 \cdot (2a\sqrt{a} \cdot b)^2}$

b) $\dfrac{(6ab)^3 \cdot (5a^2b)^4}{2^4 \cdot 3ab^2 \cdot (25a\sqrt{b})^2}$

c) $\left(\dfrac{4b^2y^2}{6a^2x^2}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{8a^3y^2}{6b^3x^3}\right)^4 \cdot \left(\dfrac{18b^3x^6}{16a^3y^3}\right)^2$

d) $\left(\dfrac{45b^2y^3}{24a^3x}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{6bx^3}{9ay^3}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{75b^3x^3}{36a^4y}\right)^2$

3.3. a) $\dfrac{(3a-9b)^2}{81b^2-9a^2}$

b) $\dfrac{(6a-12b)^2 \cdot (3a+6b)^2}{(6a^2-24b^2)^2}$

c) $\dfrac{(4a^2-9b^2)^2}{(3a^2-2ab)^2} \cdot \left(\dfrac{9a^2-4b^2}{2a^2+3ab}\right)^2$

d) $\left(\dfrac{2xb^3}{3ya^3}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{15x^2a^3}{8y^3b}\right)^2 : \left(\dfrac{25x^3b^3}{12y^4a}\right)^2$

3.4. a) $\dfrac{27x^{-5} \cdot y^{-6} \cdot z^{-1}}{45x^{-4} \cdot y^{-5} \cdot z^0} \cdot \dfrac{49x^{-2} \cdot y^{-3} \cdot z^{-4}}{42x^{-3} \cdot y^{-4} \cdot z^{-3}}$

b) $\dfrac{a^{-2} \cdot x^{-4} \cdot y^{-6}}{b^3 \cdot c^{-4} \cdot z^{-5}} : \dfrac{a^{-3} \cdot b^{-5} \cdot x^{-3}}{c^{-5} \cdot y^6 \cdot z^{-7}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



c) $\dfrac{(ax-ay)^m \cdot (3bx+3by)^n}{(cx^2-cy^2)^{m+n}}$

d) $\left(\dfrac{(x+y)^{3a-4}}{x^{a-1}y^2} : \dfrac{y^{2a-5}}{x^{4a-3}(x+y)^{3-2a}}\right)\dfrac{x^{4-3a}y^{3a-6}}{(x+y)^{a-2}}$

۴ . د کومو شرليطو لاندې کيدی شي لاندې عددونه د يوه مربع – يا څلورې ريښه وي؟

4.1. a) $+a, -a$ b) $+a^2, -a^2$ c) $+a^3, -a^3$ d) $ab$

4.2. a) $+(a-b), -(a-b)$ b) $+(a-b)^2, -(a-b)^2$ c) $a^2-b^2$ d) $a^2+b^2$

۵ - د ريښو جمعه او تفريق)زياتوناو کمون)

5.1. a) $6\sqrt{27}+2\sqrt{108}-7\sqrt{75}$

b) $\sqrt{50}+\sqrt{8}-\sqrt{72}+\sqrt{18}$

c) $3\sqrt[4]{256}-4\sqrt{49}-7\sqrt[3]{27}+2\sqrt[5]{32}$

d) $3\sqrt{50}-\sqrt{98}+4\sqrt{288}+14\sqrt{162}-\sqrt{25-9}\cdot\sqrt{2}$

5.2. a) $\dfrac{x(2r^2-4x^2)}{\sqrt{r^2-x^2}}-8x\sqrt{r^2-x^2}$

b) $\dfrac{r(4r^2-3rH)}{\sqrt{4r^2-2rH}}-3r\sqrt{4r^2-2rH}$

c) $2\sqrt{(x-k)^2+x^2}-\dfrac{(2x-k)^2}{\sqrt{2x^2-2kx+k^2}}$

d) $\dfrac{h^2+\left(c-\frac{c}{2}\right)^2-\left(c+\frac{c}{2}\right)^2}{\sqrt{h^2+\left(c-\frac{c}{2}\right)^2}}-\dfrac{h^2+2\cdot\frac{c^2}{4}}{\sqrt{h^2+\frac{c^2}{4}}}$

5.3. a) $\sqrt{1-x}+\dfrac{x+1}{2\sqrt{1-x}}$

b) $\dfrac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{3x^2}{(1-x^2)^2\sqrt{1-x^2}}$

c) $\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2-x^2}+\dfrac{x^2}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$

d) $\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}+\dfrac{x}{(x+\sqrt{x^2+a^2})\cdot(\sqrt{x^2+a^2})}$

۶ – د ريښو يا جذرونو ضرب او وېش

(c) ketabton.com: The Digital Library



6.1. a) $\sqrt{3\cdot7}\cdot\sqrt{3\cdot5}\cdot\sqrt{5\cdot7}$ c) $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{4}}:\sqrt{\frac{a^2-b^2}{4}}$

b) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$ d) $\sqrt{\frac{a^2+b^2+2ab}{2}}\cdot\sqrt{\frac{b^2-2ab+a^2}{2}}$

6.2. a) $(3-\sqrt{2})(2+3\sqrt{2})$ c) $\sqrt{12x^2-12x}\cdot\sqrt{3x^2-3}$

b) $\sqrt{8+2\sqrt{10}}\cdot\sqrt{8-2\sqrt{10}}$ d) $\sqrt{a^2+a}\cdot\sqrt{ab+b}$

6.3. a) $\left(4^{-\frac{1}{4}}+\left(\frac{1}{2^{-\frac{3}{2}}}\right)^{-\frac{4}{3}}\right)\cdot\left(4^{-0,25}-(2\sqrt{2})^{-\frac{4}{3}}\right)$ c) $\frac{\sqrt{a+c}+\sqrt{b+c}}{\sqrt{a+c}-\sqrt{b+c}}$

b) $\sqrt{6x^2-6}\cdot\sqrt{\frac{3x-3}{2x+2}}$ d) $\frac{\sqrt{(a-b)^2+a^2+b^2-2ab}}{\sqrt{2(a^2+b^2)(a^2-b^2)}}$

## ۷ – د توان او ریښې ریښه وېستنه (حلونه)

.1. a) $\sqrt{0,04^5}$ b) $\sqrt[3]{4200}$ c) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{8}}$ d) $\sqrt{\sqrt[4]{256}}$

.2. a) $\sqrt[2n-1]{a^{4n^2-1}}$ c) $\sqrt{\sqrt[3]{a^6\cdot b^{12}}}$

b) $\sqrt[4]{a^2\cdot\sqrt[3]{a^2}}$ d) $\sqrt[3]{\sqrt{a^6\cdot b^8}}$

.3. a) $\sqrt[3]{(a-b)^3(a+b)^4}$ c) $\frac{4\pi r^3-8\pi r^3}{\sqrt{\left(4r^2-2r\cdot\frac{4}{3}\cdot r\right)^3}}$

b) $\sqrt{\frac{1}{8}a^2+\sqrt{\left(\frac{a^2}{8}\right)^2+\frac{a^4}{8}}}$ d) $\pm\sqrt{\left(\frac{x_0y_1^2}{y_1^2-y_2^2}\right)^2-\frac{y_1^2x_0^2}{y_1^2-y_2^2}-\frac{x_0y_1^2}{y_1^2-y_2^2}}$

.4. a) $\sqrt[4]{\frac{a}{b}\cdot\sqrt[3]{\frac{b^2}{a}\cdot\sqrt{\frac{1}{a^2}}}}$ c) $\sqrt{a\cdot\sqrt[8]{a^5\cdot\sqrt[3]{a}}}:\sqrt[4]{a\cdot\sqrt[3]{a^2\cdot\sqrt{a}}}$

b) $\sqrt[3]{a^3\cdot\sqrt{a^2\cdot\sqrt[5]{a^8\cdot\sqrt[4]{a^3}}}}$ d) $\frac{\sqrt[6]{a^5\cdot\sqrt[3]{a^2}}}{\sqrt[3]{a^2\cdot\sqrt[6]{a^4}}}:\frac{\sqrt{a^3\cdot\sqrt[9]{a^7}}}{\sqrt[9]{a^7\cdot\sqrt{a}}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



۸ – لاندې ماتونه يا کسرونه داسې شکل ته واړوئ، چې مخرج ريښه نه وي.

8.1. a) $\frac{3}{4\sqrt{3}}$ b) $\frac{4}{\sqrt[3]{2}}$ c) $\frac{10}{3\sqrt{8}}$ d) $\frac{15}{\sqrt[11]{243}}$

8.2. a) $\frac{a^2}{\sqrt[3]{a^5}}$ b) $\frac{1}{\sqrt[9]{x^{13}}}$ c) $\frac{y^2x}{\sqrt{x^3y}}$ d) $\frac{ab}{\sqrt[7]{a^2b^3}}$

8.3. a) $\frac{13}{7-\sqrt{10}}$ b) $\frac{6}{\sqrt{5}+1}$ c) $\frac{15}{3-\sqrt{6}}$ d) $\frac{16}{3+\sqrt{5}}$

8.4. a) $\frac{8}{3\sqrt{2}+4}$ b) $\frac{17}{3\sqrt{5}-2\sqrt{7}}$ c) $\frac{6}{\sqrt{8}+\sqrt{5}}$ d) $\frac{6}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$

8.5. a) $\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$ b) $\frac{3(\sqrt{5}-\sqrt{8})}{\sqrt{8}+\sqrt{5}}$ c) $\frac{3+\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ d) $\frac{4\sqrt{10}-7\sqrt{3}}{\sqrt{10}-\sqrt{3}}$

8.6. a) $\frac{7\sqrt{5}+4\sqrt{3}}{5\sqrt{3}+2\sqrt{5}}$ c) $\frac{\sqrt{3-\sqrt{2}}}{\sqrt{3+\sqrt{2}}}$

b) $\frac{2\sqrt{6}+3\sqrt{5}}{2\sqrt{6}-3\sqrt{5}}$ d) $\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

# ۵ ۰ لوګاریتم یا لوګاریتموس Logarithmus

په دې برخه کې د لوکاریتم کلمه ترڅېړنې لاندې نیسو او د لوګاریتم د قوانینود استعمال اسانتیاوي، چې په کره یا په کلکه یې په نیونو (فرضیو) پاملرنه شوي وي څېړو۰

## ۵ ۰ ۱ د لوګاریتم کلمه

موږ په دې برخه کې لوګاریتم تر څېړنې لاندې نیسو، د لوګاریتم د قوانینو اسانتیاوې څېړو ، چې په نیونو یا فرضیو کې باید پوره پاملرنه شوې وي ۰د لوګاریتم $c = \log_b a$ پیژند لپاره د یوه زیاتیز - یا مثبت عدد a یوه زیاتیز - یا مثبت عدد b ته چې $b \neq 1$ او د لوګاریتم بنسټ بلل کیږي له لاندې برابرون یا مساوات څخه مخ ته ځو د په خوښه لپاره c

$$b^c = a\,; a > 0; b > 0; b \neq 1 \qquad (5,1)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



----------------------------------------------------------------------

که a او b له مخه ورکړ شوي وي، نو د برخی ٤ سره یواځنی ټاکلی دئ۰ که a او b له مخه ورکړشوي وي، نودپورتنیو نیونو سره یواځنی رییل ګڼc شته دئ، چې برابرون(4,1) پوره کوي۰ دې ته د a لوګاریتم وایود b پر بنسټ:

پیژند ۵ ۰ ۱:

د ریلل مثبت ګڼ a لوګاریتم لاندې، چې له یوه سره نابرابر بنسټ bولري، هغه ریلل ګڼ c پوهیږو , له کوم سره، چې bد هغه په توان یا پوتنځ کړو او ګڼ a ترې لاس ته راشي۰ لکه (5,1)

د دې لپاره لیکو:

$$c = \log_b a; a > 0; b > 0; b \neq 1, .............(5,2)$$

(5,1) او (۲ ۰ ۵ ) یو ارزښت لري د دې لپاره، چې د لوګاریتم قوانین له (5,2) سره سم لاس ته راوړو، نو د(5,1) ته بیرته ورګرځو۰ دا به په لاندې بیلګه کې روښانه شي،په کوم کې چې له a,b,c څخه تل دوه ګڼونه ورکړ شوي دي

بیلګه ۵ ۰ ۱

۵ ۰ ۱ الف : له $2^x = 16$ لرو x=4 ، ځکه، چې $16 = 2^4$

ب له $3^x = \frac{1}{9}$ څخه لرو x=-2 ، ځکه چې $3^{-2} = 1/3^2 = 1/9 = \frac{1}{9}$

۵ ۰ ۱ ۰ ۲ الف: $2 = \log_x 36$ د x²=36 سره یو ارزښت لري، نو لروx=6

ب : $-6 = \log_x \frac{1}{36}$ د $x^{-6} = \frac{1}{64} = \frac{1}{2^6} = 2^{-6}$ سره یو ارزښت لري،

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

نو لرو $x = 2$

۵ ۰ ۱ ۰ ۳ الف : $x = \log_5 125$ د $5^x = 125 = 5^3$ سره، يوارزښت لري،

نو $x = 3$

ب: $x = \log_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{16})$ د $(\frac{1}{2})^x = 1/16 = (1/2)^4$

سره يو ارزښت لري، نو لرو $x= 4$

۳ ۰ ۱ ٤ الف $5 = \log_3 x$ د $3^5 = x$ سره يو ارزښت لري، نو $x=243$

ب : $-5 = \log_2 x$ د $2^{-5} = x$ سره يو ارزښت لري، نو لرو $x = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$

۵ ۰ ۱ ۰ ۵ الف $2 = \log_x(-6)$ تعريف نه دی يا پيژند نه لري۰

ب : $x = \log_{-5} 125$ پيژند نه لري يا تعريف نه دی

پ: $\log_1 x$ پيژند يا تعريف نه دی

له (5,1) او(5,2) څخه لاس ته راځي

$$a = b^{\log a}, \ldots\ldots\ldots\ldots (5,3)$$

$$\log_b 1 = 0, \log_b b = 1, \ldots\ldots\ldots\ldots (5,4)$$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

د ځانګړي بنسټ لپاره لاندې سومبول کارولکيږي

$b = e = 2,71828 \Leftrightarrow b = 10$

$$\log_{10} a = \log a, \log_e a = \ln a, ................(5,5)$$

د lga لوګاریم ته لسیز لوګاریتم وايي او lna ته پیدایښتي یا طبیعي لوګاریتم وايي( e وروسته څیړو) زیات وخت د لشمیز لوګاریتم لپره داسې هم لیکو:

$$c = \log a \qquad (5,6)$$

که سومبولlog څو واره رامنځ ته شي، نو په پام کې دې وي، چې په خوښه، مګر همغه بنسټ باید وکارول شي.

۵ . ۲ د لوګاریتم قوانین

د لوګاریتم د پیژند سره سم د (5,1) او(5,2) له مخې کیدی شي د پوتنځ د قوانینو(5,3) تر(5,7) په مرسته لاندې لوګاریتم قوانین رابیل کړای شو، کوم چې په خوښه مګر همغه لوګاریتم بنسټ b |= 0 ، b>0 او د زیاتیز(مثبت) x> 0 , y > 0 لپاره باور لري

$$\log(x.y) = \log x + \log y, ......................(5,7)$$

$$\log \frac{x}{y} = \log x - loy, ...........................(5,8)$$

$$\log x^a = a \log x, a \in R, .......................(5,9)$$

$$\log \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log, n = 1, 2, ..., ............(5,10$$

د پوتنځ قوانینو له مخې د دې فرمولونو راوستل یو د وړاندیز وړ د لوګاریتم ژورې څیړنې لپاره تمیرن ښایي

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

د بيلګې په توګه له ( ۷ ، ۵ ) همداسې

$$\log_b (x.y) = \log_b x + \log_b y, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5,11)$$

ښخه په لاندې ډول او له (5,2)،(5,1 ) ښخه لرو

$$c_1 = \log \ x, c_2 = \log_b y, c = \log_b (x+y), \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5,12)$$

د لاندې سره يو ارزښت لري

$$b^{c_1} = x, b^{c_2} = y, b^c = x.y, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5,13)$$

له(5,13) او د پوتنځ قانون( 4, 2 ) پر بنسټ لرو :

$$b^c = x.y = b^{c_1}.b^{c_2} = b, \Rightarrow c = c_1 + c_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5,14)$$

او له (5,11) همداسې د(5,7) ښوونه د (5,12) له امله د لوګاريتم د (5,7) تر(5,10)

قوانينو کيدی شي د پيچلي لوګاريتم له افادې ښخه د لوګاريتم ساده بنسټيزې افادې ته بيرته راوګرځو اوپه ښټ۰

بيلګه ۵ ۰ ۲

$$\log \frac{2\sqrt{a+b}\,a^3 b^2}{\sqrt[3]{c}(a+c)^2}$$

$$= \log 2 + \frac{1}{2}\log(a+b) + 3\log a + 2\log b - \frac{1}{3}\log c - 2\log(a+c)$$

بيلګه ۵ ۰ ۳

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

$$\log(a+b)+2\log(a-b)-\frac{1}{2}\log(a^2-b^2)$$
$$=\log\frac{(a+b)(a-b)}{\sqrt{a^2-b^2}}=\log\frac{(a^2-b^2)(a-b)}{\sqrt{a^2-b^2}}=\log[(a-b)\sqrt{a^2-b^2}]$$

اوس باید وښایو، چې تر کومو شرایطو لاندې دا اړیکې باور لري۰

په بیلګه ۵ ۰ ۲ کې په کینې اړخ کې لوګاریتم ځای لري، چې د ټولوa,b,c تعریف دی او لاندې برابرون پوره کوي یا ډکوي:

وي دې$a+b>0$ ( د دې لپاره ، چې ریښه تعریف وي او صفر نه شي، ځکه، چې بیا لوګاریتم اوبی یا حل نه لري۰

وي دې$c > 0$ ( د دې لپاره چې ریښه تعریف او ماتلاندې صفر نه شي)

وي دې $a+b\neq 0$ ( د دې لپاره، چې لوګاریتم تعریف وي)

وي دې $b\neq 0, a>0$ ( د دې لپاره، لوګاریتم تعریف وي)

د کینې اړخ لوګاریتم په ځانګړي ډول د $a = 2 . b = -1 , c = 1$ لپاره تعریف دی۰ په ښي اړخ کې ولاړ برابرون شکلبدلون یا څیره بدلون ریښتونی کیدی نه شي، ځکه چېLog بې ځایه دی ۰ د دې لپاره، چې د څیرې بدلون ریښتونوالی ممکن شي، باید د $b\neq 0$ پر ځای په ټینګه یا کره$b>0$, وغوښتل شي ۰

په بیلګه۵ ۰ ۳ کې کینه خوا یواځې هلتهموخه وره ده، چې وي:

$a+b>0, \quad a-b>0$

نو بیا$a^2-b^2 = (a+b)(a-b)> 0$ او په دې بیلګ کې رامنځ ته شوي ټول لوګاریتمونه هم تعریف دي۰ دا اړیکې د ټولو a ، bلپاره هم باور لري،د کومو لپاره چېپورته نابرابرون ډک وي۰ دا کیدی شي$a > - b , a > b$ له امله هم و$a >|b|$ ته راغونډ شي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library



ته دي هم ګوته نيولې وي، چې لوګاريتم په يوه بنسټ b  يوه بل لوګاريتم يوه په خوښه بل بنسټd ته د شميراوړون د شميرنې اړول  کيدی شي $(b>0, b\neq 1, d>0, d\neq 1, a>0)$

د(۵،۳) له مخې باور لري $a=b^{\log_b a}$

د دې برابرون لوګاريتم نيول و بنسټd ته لرو:

$$\log_d a=\log_d b^{\log_b a}=(\log_b a)(\log_d b), \ldots\ldots\ldots\ldots(5{,}15)$$

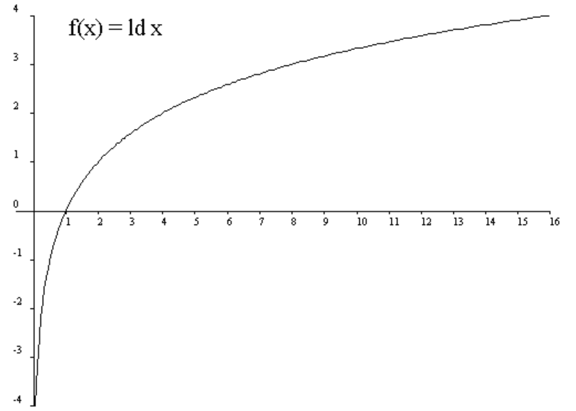
د

لسيز لوګاريتم اړول په پيداينتي يا طبيعي لوګاريتم او په څټ لپاره ليکوb=10, d = e همداسې  b = e , d = 10 او لاس ته راځي :

Lga = (lge)(lna); …………………(16)

Lna=(ln10)(lga) = 2,30429lga;……(17)

$$\lg a=(\lg e)(\ln a), \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5{,}16)$$
$$\ln a(\ln 10)(\lg a)=2{,}30429\lg a, \ldots\ldots\ldots\ldots(5{,}17)$$




د لوګاريتم فنکشن يا بلواک او دياګرام يې

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

$$b^{\log_b n} = n$$

$$\log_b b^x = x$$

تکرار د نورو تورو سره

د یوه ځل لوګاریتم

$$\log_b (n \cdot m) = \log_b n + \log_b m$$

$$\log_b \frac{n}{m} = \log_b n - \log_b m$$

د پوتنځ لوګاریتم

$$\log_b n^m = m \cdot \log_b n$$

د ریښې لوګاریتم

$$\log_b \sqrt[m]{n} = \frac{1}{m} \log_b n$$

د لوګاریتم یو په بل بدلیدل

$$\log_b n = \log_b d \cdot \log_d n$$

د کوما یا لسمیزمات نخښهٔ وروسته بینارځایونه ó او لسمیزسیستم

(c) ketabton.com: The Digital Library



| | binär | dezimal |
|---|---|---|
| $2^{-1}$ | 0,1 | 0,5 |
| $2^{-2}$ | 0,01 | 0,25 |
| $2^{-3}$ | 0,001 | 0,125 |
| $2^{-4}$ | 0,0001 | 0,062.5 |
| $2^{-5}$ | 0,0000.1 | 0,031.25 |
| $2^{-6}$ | 0,0000.01 | 0,015.625 |
| $2^{-7}$ | 0,0000.001 | 0,007.812.5 |
| $2^{-8}$ | 0,0000.0001 | 0,003.906.25 |
| $2^{-9}$ | 0,0000.0000.1 | 0,001.953.125 |

## ۵ ۰ ۳ ټولګه

لوګاریمتم د اکسپوننشل فنکشن یا بلواک په څېړ بلواک دی

$$x = \log_b n \quad \Leftrightarrow \quad b^x = n$$

د $a,b,x,y,d, > 0$ رییل ګڼونواو $a, b, d \neq 1$ لپاره باور لري:

$$c = \log_b a \Leftrightarrow b^c = a, b^{\log_b a} = a, \log_b 1 = 0, \log_b b = 1, b \neq 1$$

$$\log_{10} a = \lg a, \log_e a = \ln a, e = 2,71828.....$$

$$\log(x.y) = lox + \log y, \log \frac{x}{y} = lodx - \log y,$$

$$\log x^{\alpha} = \alpha, \alpha \in R, \log \sqrt[n]{x} \frac{1}{n} \log x, n = 1,2,3,....$$

$$\log_b a = (lod_b d)(.(\log_d a),$$

$$\lg a = (\lg e).(\ln a) = 0,43429 \ln a, \ln a = (\ln 10).(\lg a) = 2,30259 \lg a$$

## ۵ . ۴ – تمرینونه

۱ . د د لوګاریتم تعریف

(c) ketabton.com: The Digital Library



دلوګاریتم تعرف وکاروئ یا استعمالکړئ او x وټاکئ.

1.1. a) $\log_7 49 = x$ b) $\log_3 1 = x$ c) $\log_5 \sqrt[6]{25} = x$ d) $\log_{0,5} \frac{1}{32} = x$

1.2. a) $\lg \frac{1}{10} = x$ b) $\lg 10^{-\frac{1}{3}} = x$ c) $\lg \sqrt[3]{100} = x$ d) $\lg \sqrt{\frac{1}{10}} = x$

1.3. a) $\log_x 8 = 3$ b) $\log_x 25 = 2$ c) $\log_x 243 = 5$ d) $\log_x 1024 = 10$

1.4. a) $\log_x 4 = \frac{1}{2}$ b) $\log_x \frac{1}{5} = -1$ c) $\log_x \sqrt{10} = \frac{1}{2}$ d) $\log_x \frac{1}{32} = -5$

1.5. a) $4^x = 64$ b) $64^x = 64$ c) $9^x = 3$ d) $8^x = 4$

1.6. a) $2^x = \frac{1}{8}$ b) $3^x = \frac{1}{27}$ c) $5^x = 0,04$ d) $10^x = 0,0001$

1.7. a) $\lg x = 3$ b) $\lg x = -2$ c) $\log_2 x = 6$ d) $\log_{0,5} x = 4$

1.8. a) $\ln x = 2$ b) $\ln x = \frac{1}{2}$ c) $\ln x = -1$ d) $\ln x = 0$

۲ . د لوګاریتم قوانینو استعمال دلوګاریتم قوانیناستعمال کړئ دو د a,b,c,d,m,n باور لرلو ورشو کره وټاکئ.

2.1. a) $\lg 2^4$ b) $\lg \left(\frac{1}{2}\right)^3$ c) $\lg \sqrt{10}$ d) $\lg \sqrt{\frac{1}{100}}$

2.2. a) $\ln \left(\sqrt{e}\right)^3$ b) $\ln \sqrt{e^{3(\ln e^2 + \ln e^6)}}$ c) $\ln \sqrt{\frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}}$ d) $\ln \sqrt{\frac{5e}{e^{\ln 5}}}$

2.3. a) $\lg \sqrt[7]{a^5}$ b) $\lg \frac{a^2 b^3}{c}$ c) $\lg \sqrt[3]{\frac{ac^2}{bd}}$ d) $\lg \frac{a^2 \sqrt{b}}{\sqrt{a^5 b^3}}$

2.4. a) $\lg (a^4 - b^4)$ b) $\lg (a^2 + b^2)^2$ c) $\lg \frac{(a^2 - b^2)^2}{a^4 - b^4}$ d) $\lg \frac{a^2 - b^2}{(a^2 + b^2)^2}$

2.5. a) $\log \sqrt{\frac{1-a}{1+a}}$ c) $\ln \frac{\sqrt{a} \cdot b^{-2}}{\sqrt[3]{c} \cdot d^{-3}}$

b) $\lg \sqrt[n+1]{a^n \cdot \sqrt[m]{b^{-1}}}$ d) $\log 2 \sqrt{3 \cdot \sqrt[3]{a^2 b \cdot \sqrt[4]{ac^2}}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

2.6. a) $\frac{1}{3}\log(a+b)+\frac{1}{3}\log(a-b)^{-1}$

b) $\lg a + n\lg(a+b) + n\lg(a-b)$

c) $\lg a - \frac{1}{2}\lg b + \frac{4}{3}\lg c$

d) $\frac{1}{3}\lg(a^2-b^2) - \frac{1}{2}\lg(a-b) - \frac{1}{2}\lg(a+b)$

2.7. a) $\frac{1}{3}\lg a + \frac{1}{3}\left\{\frac{1}{2}\lg(a+b) + \frac{1}{2}\lg(a-b) - \lg a - \lg b\right\}$

b) $\frac{1}{2}\lg(a^2+b^2) - \frac{1}{3}\{\lg(a-b)+\lg(a+b)\}$

c) $\frac{1}{3}(\lg a + 3\lg b) - \frac{1}{2}(4\lg c - 2\lg d)$

d) $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{b}{a}+\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-1}\right) - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{b-\sqrt{b^2-a^2}} + \ln\sqrt{a}$

۳ . د لوګاریتم بنسټیز فرمولونو استعمال.

x وشمیرئ.

3.1. a) $x = \lg 5 \cdot \lg 20 + (\lg 2)^2$

b) $x = 2 \cdot 10^{2\lg 2}$

c) $x = 3 \cdot 10^{-2\lg 3}$

d) $x = \left(100^{\frac{1}{2}\lg 49}\right)^{\frac{1}{2}}$

3.2. a) $x = \sqrt{10^{2+\lg 9}}$

b) $x = \sqrt[3]{10^{4-\frac{1}{2}\lg 100}}$

c) $x = \sqrt[3]{10^{\frac{1}{2}(\lg 2 + \lg 32)}}$

d) $x = \sqrt{\sqrt{10}^{\lg 16}}$

3.3. a) $x = \ln\frac{7{,}63}{\sqrt{e^3}}$

b) $x = \ln\frac{0{,}23}{2e^2}$

c) $x = \left\{\left(\sqrt[3]{e}\right)^2\right\}^{\ln 8}$

d) $x = \left(\sqrt{e}\right)^{3\ln 5}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

## ٦ ۰ ګونومتري ( کونجکچ یا مثلثات Gonometry)

دا برخه هم د ښوونځي له امله یو تکراري خوي لري. ددې وظیفه به داوي چې د کونجکچ چېکتیاته ( ګونومتري شمیرنی ته) په ګراد- او لینده کچ، دکونجفنکشن په استعمال د ولاړکونجیز - او عمومي درېګوډیود تریګونومتري فرمولونو په استعمال د تریګونومتري افادو په څیره بدلون ته پر مختګ ورکړي یا پر مخ بوزي. غواړم چې د بنسټیزې هندسي کلیمی او قوانین مو د هرڅه له مخه مخ ته پراته وي . خو سره له دې به هم ددې کتاب لوستونکی د بنسټیزې هندسی سره بلد وي ۰ زه به کوښښ وکړم چې ځنی هندسي کلیمی،کم له کمه په څیره کی ګرانو لوستونکو ته، په مناسب ځاي کی وړاندې کړم یا بهتره په پښتو ونوموم .

### ۱ ۰ ٦ بنسټیزه هندسه

#### ٦ . ۱ . ۱ ټکی او کرښه point (stright) line

ټکی او کرښه د بنسټیزې هندسی مهمی بنسټیزې کلیمی دي. دا ابسترکتی( خیالي، فکري ، نه لیدیدونکی) کلیمي په خورا ټیك راوړوندود هم نه شي تعریف کیدی، مګر ددوي ترمنځ موجودې اړیکي کیدی شي په شمیرنه کی په خورا زیاتو ډولونو استعمال شي، ٦

(c) ketabton.com: The Digital Library



--------------------------------------------------------------------------------

۱ . ۴ په چی ځنګه لکه شي وګرځول لیدوړ کربښه او ټکی چی کیږي هڅه هم دې له سره امه برخه کی پیښ شوي. دلته کربښي په g ښوول شوي او غشی یی ناپای پراخوالی په ګوته کوي. دا د غشي انځورونه دکربښی په انځورونه کی پریښول کیږي یعني نه انځوریږي، که دا مو و ناریښتیاو ته ونه هڅوي ۰ ټکی کیدی شي د دوه کربښو غوځځاي په ځیر ونیوله شي ) ځیرې په غور وګورئ

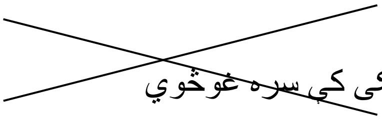
وړانګه ray A

کربښه g

(stright line

بند کربښه یا ټوټه کربښه Line segment

A B



دوه کربښې په ټکی کې سره غوځوي

د بیلګي په توګه لاندې ویناوې باور یا صدق لري

- ددوه ټکو له لارې یوه کربښه ټاکل کیږي( پورته ځیره وګورئ)، چی دا کربښه دا ټکي خوندي ساتي یا پخپل بر کی لري .

- دوه ناغبرګي او په یوه هواره کی پرتی کربښی یو بل ټیك په یوه ټکي کی سره غوځوي (پورته ځیرو کې کتل کیږي)

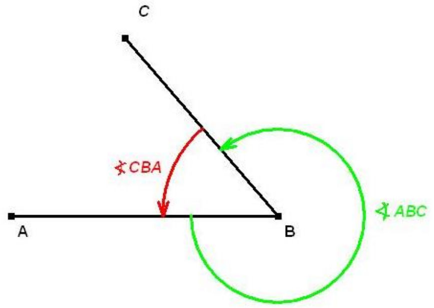
یوه وړانګه $s_1$ له یوې لور په یوه ټکي A بنده کربښبرخه ده ) ( او یوه پایکربښه له دوه ټکو A او B بنده یا راګیر کربښه ده )

(c) ketabton.com: The Digital Library



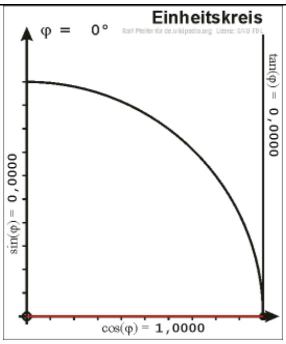
## ٦ . ١ . ٢  کونج angle یا زاویه

که یوه وړانګه $s_1$ د خپل پیلځای څخه په S و خپل اخر ځای $s_2$ ( ځیره ۴ . ۲الف ) ته یووړه شي، نو دا وهل شوې هواره دننني هواره، $s_1$ او $s_2$ پښی او په همدې ډول د S کونج $\alpha$ (الفا) ککره بلل کیږي.

| | |
|---|---|
| <br> | که څرخون د ساعت نخښي په څټ یا مخامخ وې نو دا څرخونلورمثبت یا زیاتیزه او همداسی کونج مثبت یا ز یاتیز کونج بولو او بل ډول څرخونلور یې منفي- یا کمیز کونج بلل کیږي.<br><br>په مخامخ ه کې سور په نخښه شوی کونج ننوتی او زرغون په نخښه شوی کونج وتلی کونج دی |

کیدی شي چی یو کونج x په ګراد اندازه شي

$$x = a° \qquad (6.1)$$

| | |
|---|---|
| <br> | په داسی حال کی چی ولاړکونج، کوم چی یو په بل ولاړې کرښي $g_1 \wedge g_2$ (او ته دې پام وي یې جوړوي، له ِِِ90° سره مساوي وښایو(لاندې ځیره ، که نورېځیرې و نه کښل شوې) . کیدی شي چی کونج x (ایکس دلته د الفا په ځاي دی، توري پروانه لري، چي کوم وي)په لینده اندازه هم ورکړ شي<br><br>$x = b \qquad (6.2)$ |

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

په پورته یونګردۍ کې ګورو، چې هر ډول کوجونه کښل او ټاکل کیدی شي

په دې ډول ټاکل شوی ګردۍ لینده په وړانګه( شعاع) ویشل کیږي. له دې لارې x د یوه بي نومه ګڼ په څېر لاس ته راځي، چې د ډیرو ګڼلو لپاره ګټور دی. یوه په لینده اندازه ورکړ شوی کونج x په یوې یوونګردۍ ) r = 1 ( کې انځوروړ دی، چیرته چې دا د اړوند ګردیلیندې اوږدوالی ښاي ( څېره په پورته کې کښل شوې )

په دې پسې یا ددې په تعقیب یو د 360° کونج د یوونګردۍ چاپیری ) محیط( په ګوته کوي . له دې امله د ګرادGradmass ( درجکچ ( او )ګردي-) لیندې اندازې یا لیندیکچ یو په بل بدلون ممکن کیږي.

$$a^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} b = 57,296^\circ b, b = \frac{\pi}{180^\circ} a^\circ = 0,017453a, .....(4,3)$$

پام : په پورته څیره کې هر ډول کونجونه که له ۳٦٠ درجو زیات هم وي کره کیدی ، که ځیرې روښانه نه وو لیکل شوي، چې دا شپږمه برخه ده یا ٤ – مه برخه لیکل شوي وي،نو هغه دې ،نو ٤ دې په ٦ بدل شي٠.

د لاندې بیلګو له لارې دې د کونجورکولو یو څو امکاناته ونومول شي او په همدې ډول دې د »شمیراوړون اړیکی« یاپه بنه توګه د شمیر یو په بل بدلون اړیکی وڅیړل شي.

یادونه : زما شمیرونی یو ډول پرابلم لري او هغه دا چې د دقیقې او ثانیي نخښې هغهسې، چې ورسره بلد یو نه کاږی، دا به راته ګران لوتونکي وبخښي٠

بیلګه ٦. ١ :

کونج "47°12'36 = a دې په لینده اندازه واړول شي. موږ لمړی کونج په دڅیمالو یا لسیزو برخو اړوو، دا په دې مانا چې ورکړ شوې دقیقي او ثانیي دې په ورته لسیزمات افاده شي:

12’=720“

720 = '12 "

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

پس په ټولیزه توګه 720’+36“ = 756“ له دې لاس ته راځی

1’=(1/3600)° (<= )

له دې وروسته په همدې توګه 756.(1/3600)°=0,21°

له دې لاس ته راځي : a=47°12’36“=47,21°

په عمومي توګه باور لري

$$\alpha' = (\frac{\alpha}{60})°, \beta'' = (\frac{\beta}{3600})$$

د( ۶ . ۳ ) پسی باور لري b=0.017453.47,21=0,826

دلته ځیرې راځي، خو د دې ځیرو په ځاي به موږ په پورته ځیرو بسیا وکړو، دا چې موږ تراوسه د لږ څه ځمککچ سره بلد یو ( د دې لپاره دې زما د ځمککچ کتاب وکتل شي )، نو دا کومې ستونځې نه رامنځ ته کوي۰

بیلګه ۶ . ۲ :

کونج $\frac{\pi}{7}$ دې په درجه کچ یا -اندازه ) لسیز او سکساګسیمال (لاتین :یوناني: د بابلیانو په ۶۰ اباد شوی ګڼیز سیستم( ځاي ارزښت سیستم ) ویشنو ( برخو) ورکړ شي. د (۳ . ۴ ) له

مخی لرو

اړولو په دقیقو او ثانیو ورکوي 0,701° د a° = 57,296°.(3,14/7)=25,701°

0,701° = 0,701.60' = 42,06', 0,06' = 0,06.60=3,6“

پس داسی دی $\frac{\pi}{7} = 25,701° = 25°42'3,6''$

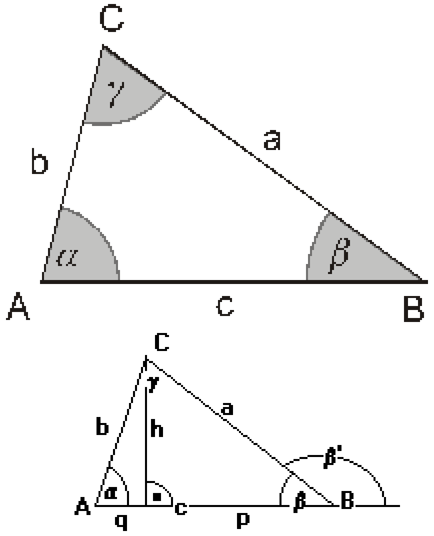
(c) ketabton.com: The Digital Library



دا پورته داسی لوستل کیږي ۲۵ درجي، ۴۲ دقیقي او ۶ ، ۳ ثانیي

## ٦ . ۱ . ۳      دریګوډی

یادونه: موږ دلته بیا د نومونو( نومه ونو) د ستونځو سره مخامخ کیږو. هغه هواره چی له کرښو راګیر وي دلته له دریې کرښو یا هغه هواره، چې ګوډونه ، کونجونه یا ګوټونه ولري، موږ دا ۰۰۰ کونجي یا۰۰۰ ګوټي او یا ۰۰۰ګوډي بولو. ځموږ ژبه او الماني تر یوې ډیرې اندازی په ترکیبي نومونو کی او یا نورو نومونو ډولونوکی یو بل ته ورته دي او په الماني کی هم دې ته ځانګړي نومونه شته. ماته یو کونج چې له دباندې ورته کتل کیږي او د یوې بندې هواره وي ګوډ مناسب ښکاریږي. موږ په ورځنی یا مروجه ژبه کی وایو ، چی د هغه کلی په ګوډ کی .... دا تخنیکي هم درست دی، ځکه چی دا هم دلته مات دی یعنی ګوډ دی. که یو کونج له دننه وګورو نو هغی ته موږ تل کونج وییلی. که څوك په یوه ګوټه کی ناست وي نو وایي، چه په هغه کونج کی دلته نو بیا ګوډ نه وایي. ما د کتاب په اوږدو کی لمړی ځل د ټولو لپاره کونج کارولی، که ټول مو همغسی سم یا اصلاح نه کړل ، نو فکر کوم چی د ګرانو لوستونکو به ورته پام وي .




په ټولیزه توګه په یوه سطحه یا هواره کی له پرتو کرښو g2 , g2 , g1 څخه یو مثلث یا دریګوډی جوړیږي، چی ګوډونه یی A . B . C ، اړخونه یی c. b. a او کونجونه یی $\alpha,\beta,\gamma$ دي ( د مثلث دننه کونجونه یا زا ویې او دباندې ګوډونه دي، چې موږ یط په پښتو کې همداسې بولو)) مخامخ ځیرې دې وکتل شي

(c) ketabton.com: The Digital Library



لاندې جملې باور لري چې بې له ښوونې دلته راوړل کیږي

- په دریګوډي کې د کونجونو زیاتون 180° درجې دی یا $\pi$ دی

- یو دباندنی کونج د په نه پراته دننني کونجونو د زیاتون سره مساوي ده، له دې امله د یوه دریګوډي د دباندنیو کوجونو زیاتون 360° یا $2\pi$ دی۰

- د یوه دریګوډي د اړخونو نیمي په یوه ټکي کې یو بل سره پري کوي، چې دا په همدې وخت کې د دریګوډي » دروندټکی یا دثقل مرکز « دی. اړخنیمي یو بل په تناسب د۱ : ۲ پرې کوي یا په پښتو:

د اړخونو ځاننیونه یې۱ :۲ ده ) په ځیره کې وګورئ ) د یوه دریګوډي منځولاړې

یو بل په یوه داسې ټکي کې سره غوځوي، کوم چې په همدې وخت کې د چاپیر ګردي ) هغه ګردئ یا دایره چې دریګوډی په خپل دننه کې نیسي یا بهتره، د دریګوډي خوندیګردئ( منځټکی دئ )۰

د یوه دریګوډی کونجنیمي یو بل په یوه ټکي کی سره پرې کوي، چې دا په همدې وخت کی د دننه ګردئ ) ګردئ چې د دریګوډي

په دننه کی ده یا ګردئ یا دایره کې خوندي دریګوډی ( منځټکی دئ ) لاندې کې نې ځیره شته ) د یوه دریګوډي جګې یا د ارتفاع کرښې په یوه ټکی کی سره غوځوي.) ځیرې ټولې لاندې کتل کیږي

د هوارې ځمککچ کې غوره ټکي دا لاندې دي :او په دوي پورې لاندې ځیرې اړه لري، چې تکرار راځی، خو پروا نه لري۰

د جګیو غوځټکی Orthocenter **Höhenschnittpunkt** (*H*),

(c) ketabton.com: The Digital Library



---------------------------------------------------------------------------------

(*U*) **Umkreismittelpunkt** circumcenter د· دباندنی- یا په راتاو ګردی منځټکی

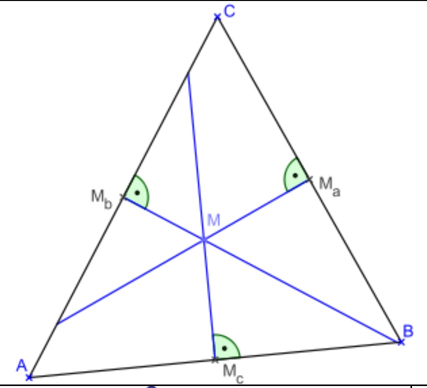
Seitensymmetralen), seid symetry د· اړخسیومتریو غوڅټکی

(*I*) **Inkreismittelpunkt** den inscribed circle, incircle د· دننه ګردی منځټکی

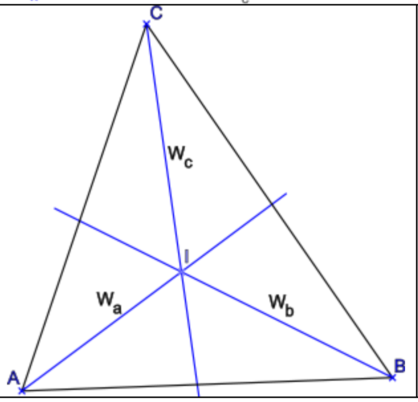
Winkelsymmetralen r · د کونجسیومتري

r (*S*) **Schwerpunkt** centroid · دروندټکی

Seitenhalbierenden) median اړخنیمی·




مخامخ خیره کې مثلث یاد دریګوډي په منځ عمود یا - ولاړې کرښې ښایي



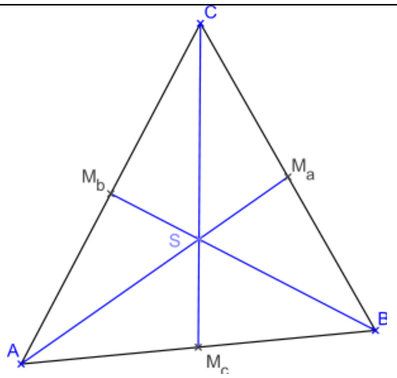

دامخامخ مثلث هغه کرښې ښایي، چې کونج نیموي او موږ یې کونجنیمی (ناصف الزاویه) بولو ( په پورته خیره په نیم اړخ ولاړې کرښې دي )

(c) ketabton.com: The Digital Library

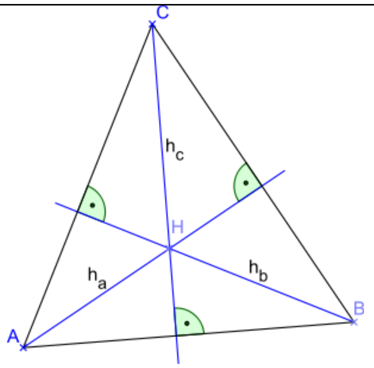


---

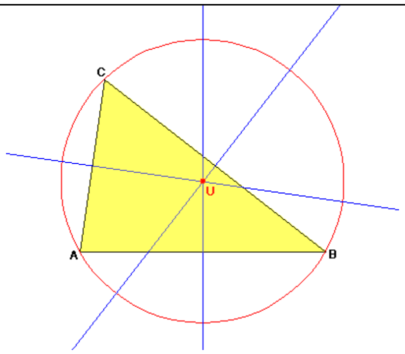
لاندې مثلث کې هغه کرښې دي، چې له
کونج څخه اړخ نیموي٠ موږ یې
اړخنیمی یا ناصف الاضلاع بولو٠

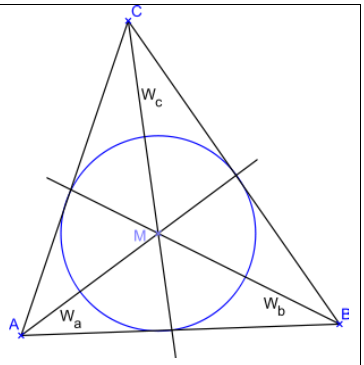



لاندې څېره کې د مثلث هغه کرښې دي، چې له
کونج په اړخ ولاړې دي٠ دا د اړخ جګوالی په
ګوته کوي، چې ما جګی یا ارتفاع بللي دي٠




په پورته څېره کې کونجنیمی دي ، چې منځ ټکی یې د خوندې ګردی یا دننه ګردی
منځټکی هم دی



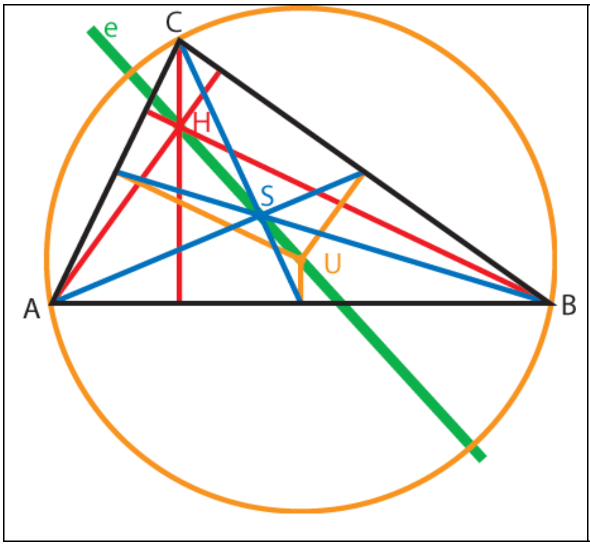
(c) ketabton.com: The Digital Library



په پورته  کینه خیره کې د اړخ په نیمه ولاړې کرښې دي،  چې غوځټکی یې د په راتاو ګردی یا چاپېرګردی  منځټکی دی٠

دا په یو ډول درې کرښې هرې درې یې په یوه ټکی کې سره غوځوي٠

که د یوې درېګوډی   د منځولاړو په غوځټکي یوه ګردی داسی ووهل شي، چې د ګردی کږه درېګوډیٔ  له یوه ګوډ څخه تیره شي، نو  دا ګردی د درېګوډي له نورو دوه ګوډونو څخه هم تیریږي٠ که درېګوډی تیره کونجیزه وي، نو د ګردی منځټکی د درېګوډي په دننه کې پروت دی ، که درېګوډی ولاړکونجیزه وي، نو کونج د ګردی په هیپوتینوز ې یا اوږده اړخ پروت دی ( د تالس جمله دې وکتل شي)  او که درېګوډی پڅکونجیزه وي، نو منځټکی له درېګوډی دباندې پروت دی٠




که درېګوډی $ABC$ وي ، $S$ دروندټکی، $U$ د چاپیریالګردی منځپکی ، او $H$ د جګیو غوځپکی وي، نو کرښه په لاندي ځانتیونه یا تناسب پراته دي :دا په لاندې خیره کې کتل کیږي ٠

$$\overline{HS} : \overline{SU} = 2 : 1$$

۶ . ۱ . ۴     برابرارزښتوالی او ورته والی یا مشابهتCongruence and Similarity

دوه دریګوډي    ABC    او   A'B'C' یو بل سره کونګروانیڅ یا برابر پټووني دي

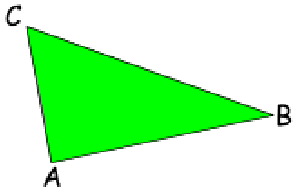
یانې براربارزښته دي

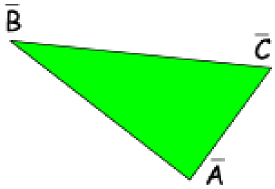
(c) ketabton.com: The Digital Library



ABC ≡ A'B'C'

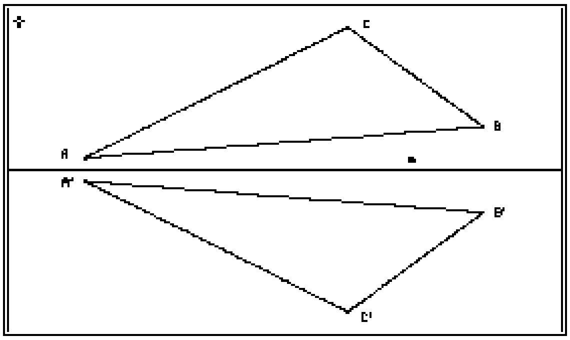
(4.4) که وکښول شي یانې که هرې لورته یووړل شي( وکښول شي) او وڅرخول شي او اینه ونه یا هندارونه یې یو بل پوره پټ کړي یا یو په بل پوره پریوځي (لاندې ځیر)




که دریګوډي سره کونګروانیځ وي، نو باید کم له کمه په دري اصلي ټوټو ( اړخونو او کونجونو) کی یو بل سره مساوي وي

په ښټ یی هم باور لري S اړخ او W کونج په ګوته کوي.



(c) ketabton.com: The Digital Library



جملې: دریکوډي ټیك هلته کونګرواینځ دي چی یو بل سره مساوي شي په

۱ - درې اړخونو کی SSS

۲ - دوه اړخونو او ددې اړخونو ترمنځ کونج کی SWS

۳ - دوه کوجونو او د لوي اړخ ته مخامخ کونج کی SSW

۴ - یوه اړخ او ددې اړخ دواړه خواو کونجونو کي ,WSW

د دې جملو په څټ هم باور لري، دا په دې مانا چی که دریګوډي په کونګروانیځ جملو کی ورکړشوو اصلي برخو کی سره برابر وي، نو دا کونګروانیځ دي. د کونګروانیځ جملو په بنسټ کیدی شي په ځانګړي توکه دریګوډیجوړښت سرته ورسول شي، کوم چی د کونګروانیځ جملو کارونی په ځیر لیدل کیدای شي .

د دوه هوارو شکلونو ورته والی ( Ähnlichkeit)هلته مخ ته پروت دی، کله چی په همغو یا اړوند درې کونجونو کی یو بل سره برابر وي او د همغو یا اړوند اړخونو تر منځ یی تناسب یا ځاننیونه موجود وي .

دا جملي هلته هم باور لري که د کونګروانیځ له جملو ورته جملو ته ورشو

جمله:

دوه دریګوډي ټیك هلته یو بل ته ورته دي که یو دبل سره برابر وي، په :

۱ - دري اړخونود اوږدوالي ترمنځ ځان نیونی یا تناسب کی

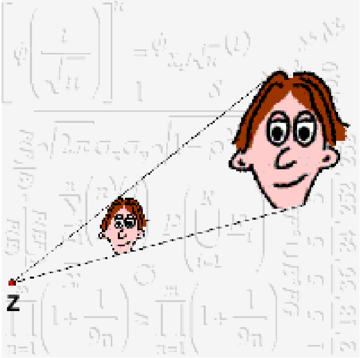
۲ - د دوه اړخونو د اوږدوالي ترمنځ تناسب او ددې اړخونو ترمنځ کونج کی
۳ - د دوه اړخونو او د لوي اړخ مخامخ کونجونو ترمنځ تناسب یا ځاننیونه کی
۴ - دوه مساوي پرتو کونجونو کی

(c) ketabton.com: The Digital Library



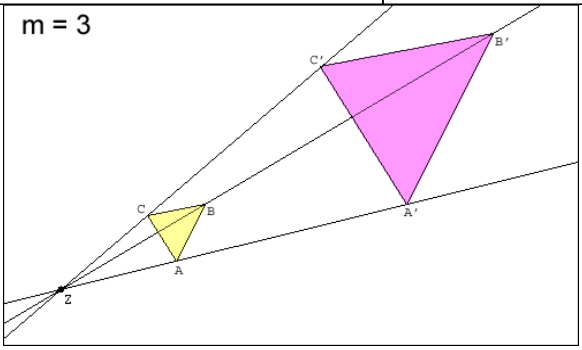
---

دا مخامخ څيرې ورته دي ، که د دې دوه کرښو پاى سره په يوه کرښه وتړى او د يوه اړخ د د په خوښه ټکي سره د مخ ته کرښې سره غبګه کرښه وباسى، نو دوه ورته درېګودي لاس ته راځي

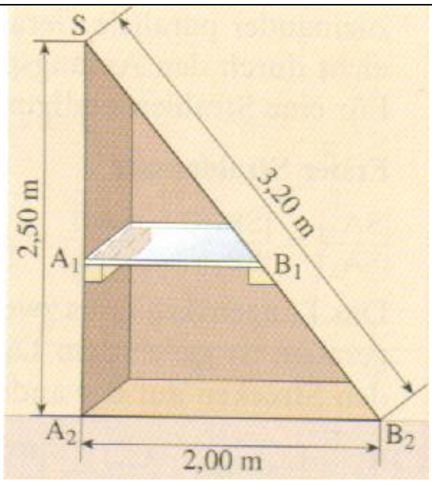



په لاندې څيره کې کښل شوي دريګودي ورته دي، دا په دې مانا چي باور لري:

$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$




د ورته جملو سره خپلواني جملى د وړانګو جملى دي:

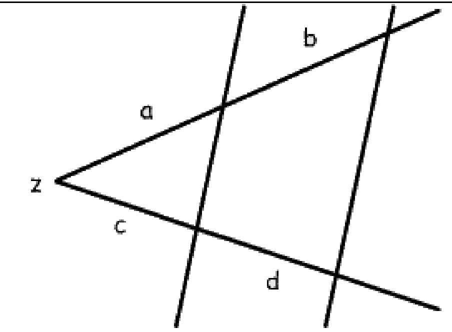
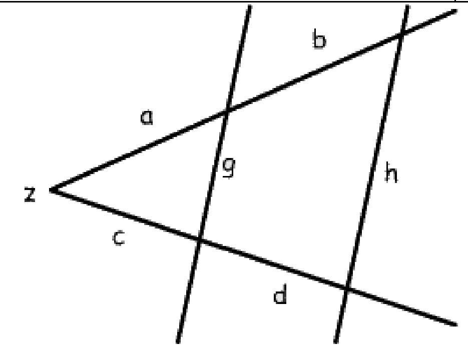



په دې پورته څيره کې درېګودي يو بل ته ورته دي٠

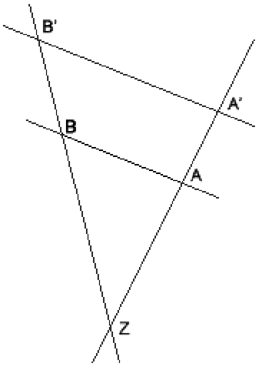
(c) ketabton.com: The Digital Library

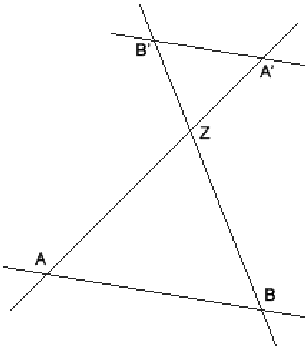


---

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>د وړانګې لومړۍ جمله:<br><br>دوه له یوه ټکی وتلي وړانګې ، که له دوه غبرګو کرښو غوڅې شي نو ټوټې یې لاندې اړیکی سره<br>$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ $\frac{a}{(a+b)}=\frac{c}{(c+d)}$<br>لري۰</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>د وړانګې دویمه جمله:<br><br>که له یوه ټکي دوه کرښې وکښل شي او دا بیا له دوه غبرګو کرښو غوڅې شي، نو د ټوټو ترمنځ دا لاندې اړیکی لري، دا ته والي له جملو ده۰ ټکی چې ځنګهدي په پام کې نیول کیدی شي او د دې او پورته جملې ترمنځ توپیر ته هم پام نیولی شو<br><br>$\frac{g}{h}=\frac{a}{(a+b)}$ $\frac{g}{h}=\frac{c}{(c+d)}$</td>
</tr>
</table>

یا دالاندې، چې هرڅه یې روښانه دي



(c) ketabton.com: The Digital Library



$$\overline{ZA'} : \overline{ZA} = \overline{ZB'} : \overline{ZB}$$
$$\overline{ZA} : \overline{AA'} = \overline{ZB} : \overline{BB'}$$
$$\overline{ZA'} : \overline{AA'} = \overline{ZB'} : \overline{BB'}$$

$$\overline{A'B'} : \overline{AB} = \overline{ZA'} : \overline{ZA}$$
$$\overline{A'B'} : \overline{AB} = \overline{ZB'} : \overline{ZB}$$

( دا لاندې د لیکنې له لارې روښانه شوې څېره دې ګران لوستونکي وکاږي )

که درې په یوه ټکي کی پریکیدونکی کرښي g1 , g2 او g3 د دوه غبرګو) موازی( کرښو g4 او g5 لخوا پرې شي، نو د بیلګي په توګه له ۴ . ۱۰ کښل شوي څېرې څخه لاندې اړیکي لاس ته راځي:

. 1 OA1 : OA2 = OB1 : OB2 , OA1 : OA2 = A1B1 : A2B2

دا په دې ماناچی په وړانګو پرتي ورته برخی په مساوي تناسب یا ځاننیوںی سره پرتی دي:

. 2 A1A2 : B1B2 = OA1 : OB1 = OA2 : OB2

دا په دې مانا چی: په وړانګو پرتي ورته برخی په مساوي تناسب یا ځاننیونی پرتی دي لکه اړونده، د ککری اندازه شوې برخي چی په وړانګه پرتی دي.

۳ - A1A2 : A2A3 = B1B2 : B2B3 , A1A2 : B1B2 = A2A3 : B2B3

دا په دې مانا چی: په غبرګو پرتی کرښي په همغه برخوکی یو له بل سره په مساوي تناسب یا ځاننیونی پرتی دي

د وړانګو جملی هم باور لري، که د دوه غبرګو په څیر رامنځ ته شي یا که ککره د غبرګو ترمنځ پرته وي) په دې حالت کی دې وړانګي د کرښو په ځاي بدلی یا ولیکل شي )

(c) ketabton.com: The Digital Library



بیلګه ۴ . ۳ : د اړخونو a او c اوهمداسی د کونج الفا څخه دې

یو دریګوډی جوړ شي. لاندې حالتونه تر څېړنې لاندې نیسو

$a > c$ - 1

موږ کاږو $AB = c$ او په ټکي A کونجالف

د c په کچه کاږو. په B یو ګردبلیننده کاږو د a

په کچه چی د الفا ازاده پښه په ټکې C کې غوځوي )

څېره دې ګران لوسونکی پخپله وکاږي، روښانه ده

$a < c$ - 2

دلته درې امکاناته شته دی( د دې درې امکاناتو څېره وکاږئ )

۲ . ۱ : د ګردیلینده په B د a په اندازه د $\alpha$ ازاده پښه په دوه هغوټکو کي پرې کوي، په کومو کی چی اوبی یواځنی نه دی٠

۲ . ۲ : ګردبلینده د $\alpha$ ازاده پښه لمسوي٠

۲ . ۳ : ګردبلینده د $\alpha$ اندازه پښه نه غوځوي .

$a = c$ ( ۳

ګردبلینده په B د a په اندازه د $\alpha$ ازاده پښه په دوه ټکو ، په نامه A او C کي پرې کوي. دې لپاره چی حالتونه ۲ - او ۳ - له منځه لرې او تل یواځنی حل ولرو، نو $a > c$ نیونه په دریم کونګرواینځ جمله کی ضرور ده

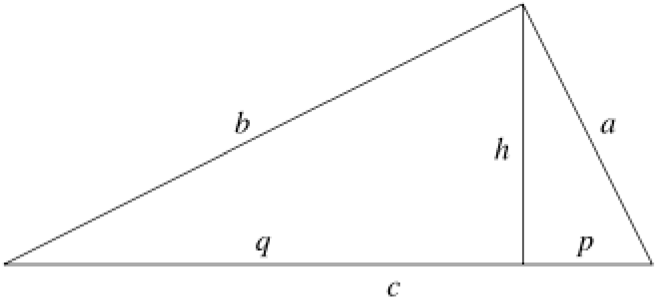
٦ . ۱ ٠ ۵ .ولاړکونجیز دریګوډی مثلث قایم الزاویه

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

د مختلفو دريګوډيو څخه موږ په لاندې برخه کی ولاړ کونجيز دريګوډی ترڅيړنی لاندې نيسو .په ولاړکونجيز دريګوډي کی د ولاړ کونج مخامخ اړخ هوپوتينوزې ) Hypotinuse(بلل کيږي، نور دواړه اړخونه کاتيتونه يو: کاتيت ( Katheten )بلل کيږي. هغه ولاړکونجيز دريګوډي ته روځنی يا ورسره بلدې يا مروجی په نخښه کونه يا لنډ په نخښونه به له څيرې ۴ . ۱۳ څخه واخلئ




په ولاړکونجيز دريګوډي کی دا لاندې راوړل شوې اړيکی باور لري چی دلته يی بی له اوبی )ښوونی( راوړو:

يادونه : په ولاړګوډيز کې د ولاړکونج مخامخ اړخ اوږد اړخ بولو او د ولاړ ګوډ پېښې ولاړ اړخونه، چې غوښتوني کونج ته مخامخ مخامخ اړخ ( پښه) او په موخه ور کونج پرته پښه په کونج پروت اړخ (- پښه) بولو او يا په دې لاتين نوموونو يانې مخامخ کاتېت او (په کونج) پروت کاتېت.

د پيتاګوراس ( Pythagoras) جمله:

په ولاړکونجيز دريګوډي کی د هيپوتينوزې مربع هواره د دواړو کاتيتو د مربع هوارو زياتون سره برابر يا مساي ده:

$$c^2 = a^2 + b^2 \qquad (6.5)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



دکاتیتو( د ولاړاړخونو یا د مخامخ او په پراته اړخ(ضلع) ) جمله:

په ولاړکونجیز دریګوډي کی د کاتیت مربع هواریزمساوي ده د ولاړ کونجي هوارې سره، چی له هیپوتینوزې او ددې کاتیت له پرویکشن یا پریوستون څخه لاس ته راځی:

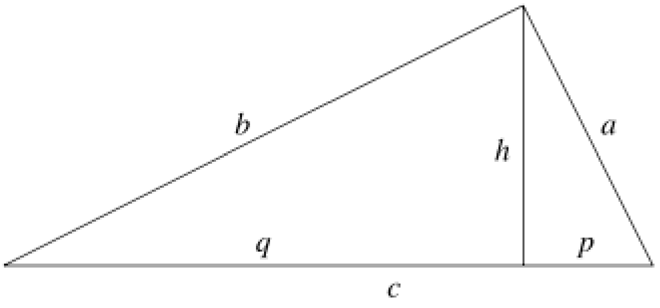
$$a^2 = p.c \, , \, b^2 = q.c \qquad (6,6)$$

جګجمله :

په ولاړکونجیز دریګوډي کی د هیپوتیزې په جګي مربع هواریزمساوي ده د هیپوتینوزې ( لوي اړخ) برخو څخه منځ ته راغلې ولاړکونجي هوارې سره

$$h^2 = q \, . \, p \qquad (6.\,7)$$

یا په لاندې کې لنډ بیا ورکړ شوي




لنډ: ( ددې لپاره دې پورته څېره وکتل شي)

پیتاګوراس جمله : $c^2 = a^2 + b^2$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

د اويکليد د کاتيتونو( پروت – ،مخامخ اړخونو) جملې

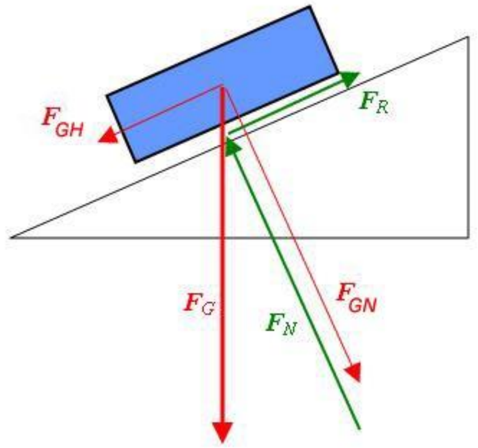
$$a^2 = c \cdot p$$

$$b^2 = c \cdot q$$

$$c = p + q$$

د اويکليد جګجمله $h^2 = p \cdot q$

بيلګه ۴ . ۴ : (څيره نه ده کښل شوې، د ې ته دې ګران لوستونکج فکر وکړي. دا يوه فزيکي دنده هم ده( څېره وکښل شوه، نخښې هم لږ بدلې دي)) د يوه بدن د وزن G تجزيه څرګندوي ( د بدن دروند ټکی) دا د فزيك له مخی هغه ټکی دی چی د بدن ټول وزن پرې پروت وي ) KSP = )چی په يوه مائله هواره پروت دی، دا وزن مائلي هوارې سره غبرګ په يوه کښته کشونکی زور FH او په مائلی هوارې نيغ ولاړ ، ولاړ) عمودي( زور) قوه FN )تجزيه کيږي. د ښوولو ده چی، دريګوډي ABC د KSPاو FN او FH له خوا ټاکلي دريګوډي سره ورته دی

| | |
|---|---|
|  | يادونه: په ليکنه کې زور يا توان د لاندې څېرې سره داسې بدلوو:شين تنيا د مستطيل شکل G دی<br><br>$F_H = F_{GH}, F_N = F_{GN}, G = F_G$<br><br>ګوډونه : له پورته ګوډ A کښته ښی لور ته ګوډ C کښته کيڼ لور ته ګوډ B په ګوډ A کونج $\alpha$ ، په ګوډ B کونج $\beta$ |

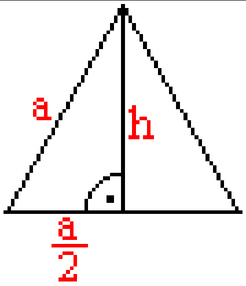
(c) ketabton.com: The Digital Library



داچې G||AC ځغلي، نو FH او G يو کونج $\alpha$ جوړوي. دا چې $\beta = R - \alpha$ ده، نو FN او G کونج $\beta$ جوړوي، دواړه دريګوډي په دې برسيره په ولاړکونج کی يو بل ته ورته دي۰

يادونه : داسې بيلګې، چې ښيره يې نه شم ايستلی که وي هم بدې نه دي، ګران لوستونکي کړای شي،چې داسې ښيرې پخپله وباسي، دا دې يو تمرين وي۰ زما زړه نه شي، چې له ليکلو يې تير شم۰

بيلګه ۴ . ۵ : په يوه مساوي اړخيز دريګوډي کی دې ( لاندې ښيره ) جګی و شميرل شي .د ٦ . ۴ ( له مخی لرو( جګی په همدې وخت کې د مخامخ اړخ نيمی هم دی، دا په دې درېګوډي کې وکاړی)

| | |
|---|---|
| $h^2 = a^2 - (a/2)^2$<br>$h^2 = a^2 - a^2/4$<br>$h^2 = (3/4)a^2$<br>$h = (\sqrt{3}/2)a$ |  |

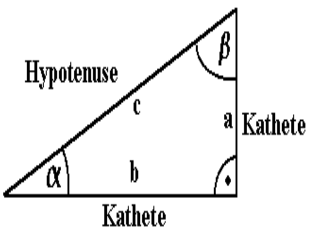
٦ . ۲ په ولاړکونجيز دريګوډي کی د اړخونو تناسب

د کونجکچ لپاره د اړخونو تناسب هم مساعد دی، چې يوه ولاړکونجيز دريګوډي کي جوړيږي( لاندې ښيره ). که د کونج $\alpha$ مخامخ اړخ يا -کاتيت a gegkathete د مخامخ اړخ په ښير وښايو، د b اړخ په $\beta$ پروت اړخ ankathete او hypothenuse لوي اړخ وي، نو په ولاړکونجيز دريګوډي کی لاندې اړخځانيوني منځ ته راځي يا جوړيږي

(c) ketabton.com: The Digital Library



---




$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{katheta}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{kathetb}{c}$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{opk}{ank}$$

$$\cot\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{ank}{opk}$$

د وړانګو جملو له امله دا اړیکي یا تناسب یواځي د کونج په واك کی دی. که په پام کی ونیول شي چي $\beta = 90° - \alpha$ دی، نولاندې اړیکی لیکلی شو

$$\sin\beta = \frac{b}{c} = \sin(90-\alpha) = \cos\alpha$$

$$\cos\beta = \frac{a}{c} = \cos(90-\alpha) = \sin\alpha$$

$$\tan\alpha = \frac{b}{a} = \tan(90-\alpha) = \cot\alpha$$

$$\cot\beta = \frac{a}{b} = \cot(90-\alpha) = \tan\alpha$$

له دې لیدل کیږي، چی د دې څلورو ارزښتونو د پیداکولو لپاره دوه ګنجدولونه پوره دي یا بسیا کوي .ورپسي یا ددې په تعقیب پیژندوړ دي

$$\tan\alpha = \frac{in\alpha}{\cos\alpha}, \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\cot\alpha};.....................(6,10)$$

برسیره پردې د پیتاګوراس د جملی په پام کی نیولو سره لرو

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;.......................(6,11)$$

$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}; 1 + \cot^2 = \frac{1}{\sin^2\alpha};............(6,12)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



۳.۰۶ په یوونګردۍ کی د کونج فنکشنونه ( -بلواك )

په ۲.۴ برخه کی $\sin\alpha; cis\alpha; \tan\alpha; \cot\alpha$ یوائې د لیدیدونکو Konkrete) اړختناسبونو لپاره په یوه ولاړکونجیز دریګوډي کی ځاي په ځاي دي. دا ویناوې یوائې یا په ځانګړې توګه د $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} (0 < \alpha < 90°)$ لپاره تعریف دي. که د $\alpha$ خپلواك واریابل په ځیر ونیسو، نو $\sin\alpha$ او داسی نور فنکشنونه راپه ګوته کوي چی په برخه ۱۵ کی انځور دي او کوجنفنکشنونه بلل کیږي. په یاده شوې برخه کی ) ځیرې ۱۵ . ۲۰ الف او ب

ددې لپاره چی د دې تعریفونو پراخوالی په زړه پورې کونجونو لپاره ممکن شي، نودا مو د یوون ګردي باندې مخ نخښی په واك کی کرښو ته لاربښودوي .د لته ټولی کرښی ) د لته به له کرښو ځمورږ مطلب پای کرښی وي( ، چی پخپله او یایی پرویکشن یا پریوستون یا پریوتنه په وړانګو s1 او s2 پروت وي زیاتون مخنخښه) مثبت مخنخښه( لري، ټولی کرښي او یایي پرویکشنونه پریوستونونه چی په وړانګو s'1 او s'2 پرتی وي کمون مخنخښه ( منفي مخنخښه) لري .د لاندې ځیرو کښلو سره کیدی شي تعریفونه ۸ . ۴ ( د په خوښه کونجونو لپاره پراخه شي

$$\sin\alpha = \overline{QP}, \cos\alpha = \overline{OP}, \tan\alpha = \overline{AD}, \cot\alpha = \overline{BE}; \qquad (6,13)$$

د کونج $\alpha$ لپاره چي په لومړي ځلورمه یا کوادرانت Quadrant (لاتین: د کواوردیناتسیستم ځلورمه کی پروت دئ( لاندې ځیره له کیڼ و ښی لورته کښته دا په فرمولونوکې کارول شي توري ساده ایښوول کیږي۰ په ځیرو کې شنې کرښې د ساین دي او سرې کرښې کوساین دئ او کونجونه ټول په ترتیب له یوه سره پهالف سره په نخښه کیږي، چی د دې لارې تانجنت او کوتانجنت هم پیدا دي او توري هم ایښوولی شو )، دا تعریفونه د هغو تعریفونو سره سر خوري، کوم چی په ولاړکونجیز دریګوډي کی تر ځیرنی نیول شوي دي .په پام کی دې وي چی کونج $\alpha$ په لینده اندازه کی د ګردیلیندې اوږدوالي AP سره مساوي دئ، چیرته چی په زیات ځرخون له 2 ځخه لوییدلی هم شي .برسیره پر دې له تعریفونو ) ۱۳ . ۴ ( ځخه لاس ته راځي، چی ساین-او کوساین فنکشنونه، پریود :°360 ) 2 ( periode (تل تکراریدونکی ، بیرته

(c) ketabton.com: The Digital Library



----------------------------------------------------------------------------

راګرځيدونکی(، تنجنت - او کوتنجنت فنکشنونه پريود(°180 ) لري .

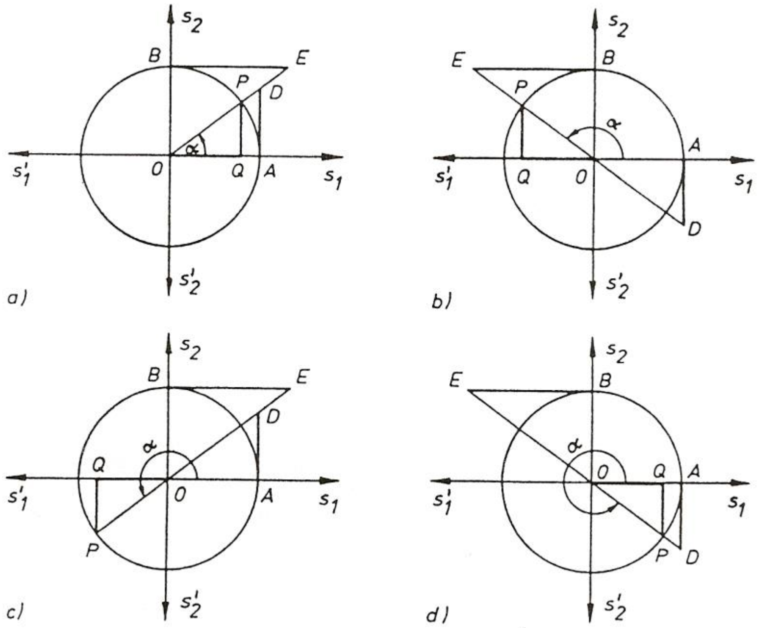



Bild 4.17

پس لرو

$$\sin(\alpha + 2\pi) = \sin(\alpha + 360°) = \sin\alpha$$
$$\cos(\alpha + 2\pi) = \cos(\alpha + 360°) = \cos\alpha; \qquad (6.14)$$
$$\tan(\alpha + 2\pi = \tan(\alpha + 360°) = \tan\alpha$$
$$\cot(\alpha + 2\pi) = \cot(\alpha + 360°) = \cot\alpha$$

په

ټوليزه )عمومي( توګه لرو

$$\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin(\alpha + k.360°) = \sin\alpha$$
$$\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos(\alpha + k.360°) = \cos\alpha; \qquad (6.15)$$
$$\tan(\alpha + 2k\pi = \tan(\alpha + k.360°) = \tan\alpha$$
$$\cot(\alpha + 2k\pi) = \cot(\alpha + k.360°) = \cot\alpha$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

د ټولو ټولګنونو ....3 , 2, 1,0,1-,2-,3-.. = k لپاره

یادونه :د کوادرانت لپاره څلورمه لیکلی شو خو دا باید په پام کی وي چی دا په کواوردیناتسیستم کی دی

جدول یا تخته ۴ . ۱ د کونج-یازاویو توبعو وخنخبنه

| | لومړۍ څلورمه $(0;\frac{\pi}{2})$ | دویمه څلورمه $(\frac{\pi}{2};\pi)$ | دریمه څلورمه $(\pi;\frac{3}{2}\pi)$ | څلورمه څلورمه $(\frac{3}{2}\pi;2\pi)$ |
|---|---|---|---|---|
| sinx | + | + | - | - |
| cosx | + | - | - | + |
| Tan x | + | - | + | - |
| cotx | + | - | + | - |

برسیره پر دي لاندي اړیکی باور لري:

$$\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha, \quad \cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$$
$$\tan(\pi-\alpha) = -\tan\alpha, \quad \cot(\pi-\alpha) = -\cot\alpha \qquad (4.16)$$
$$\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha, \quad \cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha,$$
$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha, \quad \cos(-\alpha) = \cos\alpha$$
$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha, \quad \cot(-\alpha) = -\cot\alpha$$

بیلګه ۴ . ۶ : د جبشمیروني سره د کونجفنکشن د $\alpha = 446°$ لپاره پیداکوو. دا چی $\alpha$ په درجی اندازه ورکړ شوي ده، نو اومشالتریا سویچ ( بدون ) دلته مطلب د

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

جبشميري اړونه ده، پۀ غوښتل شوي فنکشن کی ) په « DEG » سموو او بيا لاندې ورکوتی کوو.
په همدې ډول تکمي وهو

جدول یا تخته ۴ . ۱ د کونجفنکشنونو مخنخښه

دنده مو د لاندې مساوت حل یا اوبی دی

1. $\sin\alpha = a$ , 2. $\cos\alpha = a$,
3. $\tan\alpha = a$ , 4. $\cot\alpha = a$

دلته تمرینونه ۱ او ۲یواځي هلته موخه ور یا هدفمند ي، چې باور ولري$-1 \le a \le 1$

او په تمرین ۳ او ۴ کط په خوښه هر ارزښت نیولی شي.
یو «بنستیزوبی یا بنستیز حل»$\alpha$د هر تمرین د جبشمیرني سره په لاندې ډول یا همداسی تکموترتیب لاس ته راځي ( دا په دې اړه لري چې$\alpha$په درجه اندازه یا لینده اندازه اندازه کوو، نو په ورته ډول د سویچبدلون په "DEG" یا "RAD" باندې راولو )

1. [a] [F] [sin]  2. [a] [F] [cos]
3 [a] [F] [tan]  4. [a] [1/x] [F] [tan]

تکمه F د په ځتې فنکشن ته تلنه ممکنوي.
دلته نو بیاد $\alpha$ هر بنستیزحل په درجه یا لینده کچ ځرګندیږي.
د $a = -0{,}55$ لپاره لاندې بنستیزحلونه لاس ته راځي :

1. $\alpha_0 = -33{,}367013° = -0{,}58236,$
2. $\alpha_0 = 123{,}36701° \quad = 2{,}1531606,$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

$$3.\ \alpha_0 = -28{,}810793° = -0{,}5028432,$$
$$4.\ \alpha_0 = -61{,}189206° = -1{,}0679531.$$

د مخ ت ه تیرو په بنسټ لو

$$1.\ \sin\alpha = \sin(180° - \alpha) = \sin(\pi - \alpha),$$
$$2.\ \cos\alpha = \cos(-\alpha)$$

او په ورته توګه،، فرعي یا ځنګیز حل یا اوبی،،

$$1.\ \beta_0 = 180° - \alpha_0 = \pi - \alpha_0,$$
$$2.\ \beta_0 = -\alpha_0$$

لاس ته راشي

د لیدیدونکي حالت $a = -0{,}55$ لپاره په دې مانا چې :

$$1.\ \beta_0 = 213{,}367013° = 2{,}1531563,$$
$$2.\ \beta_0 = -123{,}36701° = -2{,}1531606.$$

د $\alpha$ ټول حلونه د ( ۱۵ . ۴ ) له امله په لاندې فورم لاس ته راځي

$$1.\ \text{und}\ 2.\quad \alpha = \alpha_0 + k\cdot 360° = \alpha_0 + 2k\pi,$$
$$\alpha = \beta_0 + k\cdot 360° = \beta_0 + 2k\pi,$$
$$3.\ \text{und}\ 4.\quad \alpha = \alpha_0 + k\cdot 180° = \alpha_0 + k\pi.$$

**بیلګه ۴ . ۹ : لرو $\sin x = 1/2\sqrt{3}$ . ودې شمیرل شي $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$ .**

$$\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x} = \pm\sqrt{1-\frac{3}{4}} = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2},$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\pm\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{3},$$

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{\pm\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

**بیلګه ۴ . ۱۰ : په بیلګه ۴ . ۴ کې ورکړشوی زور $F_H$ او $F_N$ څومره لویې دي، که په مایل هواره پروت بدن وزن 700 N وي (دلته N د Newton لپاره دی چی وزن پرې اندازه کیږي ) او مائلی هوارې مایلکونج $\beta = 28°$ وي؟**

$$\sin\beta = \frac{F_H}{G}, \quad F_H = G \cdot \sin\beta = 700\ \text{N} \cdot \sin 28° = 700\ \text{N} \cdot 0{,}4695 = 328{,}65\ \text{N}.$$

$$\cos\beta = \frac{F_N}{G}, \quad F_N = G \cdot \cos\beta = 700\ \text{N} \cdot \cos 28° = 700\ \text{N} \cdot 0{,}8829 = 618{,}03\ \text{N}.$$

## ۴. ٦ دساین- او کوساین جملی

دا دواړه جملی ممکنوي چی په ټولیز یا عمومي دریګوډي کی شمیرنی پلی کړای شو

۱ . د ساین جملهد څیرې ۴ . ۱۸ له نخښوني سره لرو

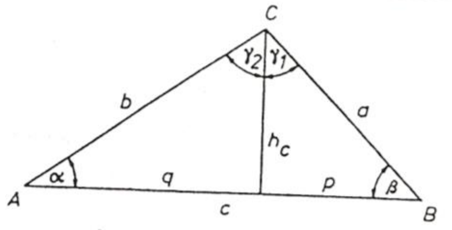



Bild 4.18

$$\sin\alpha = \frac{h_c}{b}, \quad \sin\beta = \frac{h_c}{a}$$

او له دې امله

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b} \quad \text{bzw.} \quad \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}.$$

په ورته توګه ښوول کیدی شي، چې په عمومي توګه صدق کوي

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}. \qquad (4.17)$$

څیره پورته او لاندې کښل شوي، دا یو ولاړکونجیز دریګوډی کښل کیږي( پورته او لاندې څیرې )

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

په ورته توګه ښوول کیدی شي، چی په عمومي توګه صدق کوي

د ساین جمله کیدی شي استعمال شي، که د یوه دریګوډي -دوه اړخونه او لوي اړخ ته

مخامخ کونج - SSW یو اړخ او داړه پرې پراته کونجونه WSWورکړشوي وي

۲ . د کوساین جمله

د څیرې ۴ . ۱۸ ځخه لاس ته راځي

$$
\begin{aligned}
h_c^2 &= b^2 - q^2 \\
h_c^2 &= a^2 - p^2 \\
\hline
a^2 &= b^2 + p^2 - q^2, \quad p = c - q, \\
a^2 &= b^2 + (c-q)^2 - q^2, \\
a^2 &= b^2 + c^2 - 2cq + q^2 - q^2, \quad q = b\cos\alpha,
\end{aligned}
$$

نو $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$ لرو او همداسې:

$$
\begin{aligned}
a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha, \\
b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta, \\
c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.
\end{aligned}
\qquad (4.18)
$$

د کوساین جله استعمالیدی شي، که په یوه درېګوډي یا مثلث کې

- درې اړخونه یا ضلعې یا

- دوه ا ړخونه(ضلعې) او له هغو رابند کونج یا زاویه

ورړ شوي وي.

بیلګه ۴ . ۱۱ :د دوه قوو(زور F1 )او F2 لاس ته راوړل شوې R1 چی په پراته لورد F1سره کونج جوړوي ، څنګه شمیرل کیږي؟ د دې دوه قوو F1 او F2 برسیره له دوي جوړکونج هم معلوم دئ .د دې پوښتنی کولو د روښانولو لپاره څیره ۴ . ۱۹

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

ورکړ شوې، له کومی څخه چی د دوي ترمنځ اړیکي هم معلومیږي .په دې پسی په

$\alpha$ ،ABCدریګوډي کی، F1 = c, F2 = a او ss - 180° = ss' معلوم دي

او R = b لټوونکی یا غوښتونکی لویي دي؟

د کوساین جملی ( ۱۸ . ۶ ) څخه لرو

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ cosss$$

همداسی یا⇔

$$R^2 = F1^2 + F2^2 - 2F1F2\ \cos(180° - ss')$$

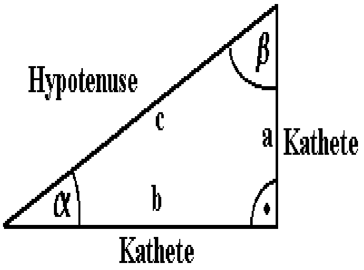
او د ساین له جملی (۱۷ .۶ ) لاس ته راځي

له کومو چی $\alpha$ تاکل کیدی شي .

لوي اړخ او ولاړ یا عمود اړخونه (هیپوتینوز او کاتیتونه یا مخامخ- او په پروت اړخ):

۱ – په ولاړکونجیز دریګوډي کې ولاړ کونج ته مخامخ اړخ هیپوتینوز یا لوي اړخ بولو ۰

۲ - نور دواړه اړخونه غوښتوني – یا مطلوب کوج ته مخامخ اړخ او په مطلوب کونج پروت اړخ یا ولاړ اړخونه یا کاتیتونه بولو ۰

| | |
|---|---|
|  | مخامخ دریګوډی دې ورکړشوی وي: په لاندې دریګوډي کې کونجونه، او اړخونه جوت یا څرګند روښانه دي . د اړخونو نومونه: الفا کونج ته مخامخ مخامخ اړخ بولو او په الفا پروت اړخ په پروت یا پروت اړخ بولو. ولاړ کونج ته مخامخ لوی اړخ بولو |

(c) ketabton.com: The Digital Library

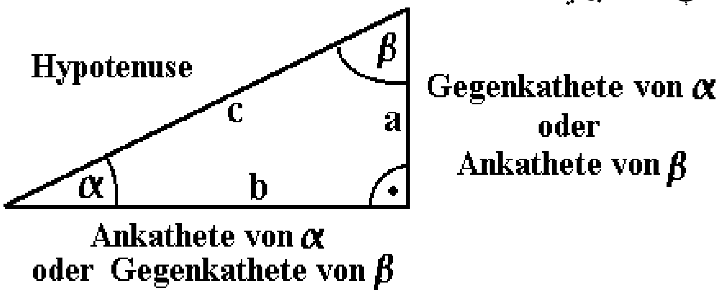


---

لند یا تکرار :پورته او په لاندې بیلګه کې دا اړخونه دغوښتوني کونج مخامخ او په پراته اړخونه بلل کیږي

بیلګه

بیا دې همغه پورته درېګوډی ورکړ شوی وي، چې په بیتا پروتاوخ یا کاتیت د الفا مخامخ اړخ یا کاتیت او په څټ په الفا پرو اړخ یا ه کاتیت د بیتا مخامخ اړخ یا کاتیت ده، چې په څیره کې لیدلکیږي٠




د ساین جمله

په تریګونومتري کې ساینجمه د درېګوډي د یوه کونج او د دې کونج مخامخ اړخ ترمنځ اړیکی ښایي٠ دا له البتانی میندل شوي او ښوول شوي٠ د درېګوډي درې اړخونه او درې ګونجونه ، وړانګه او چاپیری ورکړ شوي ( لکه په فرمول کې ) نو باور لري:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r = \frac{u}{\pi}$$

یادونه : دا پورته فرمول دې (6,14)وي ٠

زیات وخت د ساین جمله په داسې ډول هم ورکول کیږي:

$$\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = a : b : c$$

که چیرې په درېګوډي کې د ساین جملې له لارې څه ښوول کیږي ، نو دې ته دې پام وي، چې په اینتروال [0°;180°] کې په ټولیزه توګه د همغه کونج دوه یو له بل بیل ارزښتونه لیدل کیږي، دا: دوه ګونوالی ګونګرواینځجمله په ګوته کوي٠

(c) ketabton.com: The Digital Library



د دې لپاره دې د کوساین جمله هم وکتل شي

ښوونه : ( دا خیره دې ٦ ، ١٨ وي او دا نا نومول شوي کونجونه دې x,y وي)

$$\sin\alpha = \frac{h_c}{b}$$

$$\sin\beta = \frac{h_c}{a}$$

په $h_c$ پسې یې اوبی کوو

$$h_c = b \cdot \sin\alpha$$

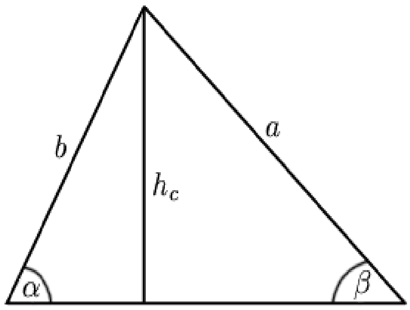
د برابراینوني له لارې لاس ته راځي

$$a \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\alpha$$

که په $\sin\alpha \cdot \sin\beta$ وویشو، نو د غوښتنې لومړی برخه کې لاس ته

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

راځي




برابرون له $\frac{c}{\sin\gamma}$ سره په پیدایښتي توګه جګی $h_a$ او یا $h_b$ لاس ته راکوي

د کارونې بیلګه : درجګوډی ABC لارو او ورکړ شوي :

$$a = 5,4\,\mathrm{cm} \text{ ، } b = 3,8\,\mathrm{cm} \text{ ، } \alpha = 73^\circ$$

دا نورې لویې دې په درېګوډي کی پیداشي

د β شمیرلو لپاره د ساین جمله کارول کیږي

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$\sin\beta = \frac{b \cdot \sin\alpha}{a} = \frac{3{,}8\,\text{cm} \cdot \sin 73^\circ}{5{,}4\,\text{cm}} = 0{,}67$$

$$\beta = \underline{42^\circ}$$

لکه د خه مو، چې ګوته ورته ونیوله یو بل کونج هم د همدې ارزښت سضته شته ، یانې

$$\beta' = 180^\circ - 42^\circ = 138^\circ$$

د دې اوبی په پوښتنه کې نه راځي، ځکه چې د درېګوډي د کونجونو زیاتون به له ۱۸۰ درجو څخه واوړي۰

او نو ګاما د کونج زیاتون جملې له لارې لاس ته ر اوړو

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 73^\circ - 42^\circ = \underline{65^\circ}$$

اړخ $c$ هم داسې لاس ته راځي

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

$$c = \frac{a \cdot \sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{5{,}4\,\text{cm} \cdot \sin 65^\circ}{\sin 73^\circ} = \underline{5{,}118\,\text{cm}}$$

دکوساین جمله

په تریګونومتري کې کوساینجمله په درېګوډي کې د درېګوډي د اړخونو او کونجونو

ترمنځ اړیکې ښایې ، چې په لاندې توګه ورکړ شوي دي :

یادونه : دا لاندې فرمولونه دې ( ۱۸ ۰ ۹ ) وي

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta$$

که ګاما ۹۰ درجې وي، نو دپیتاګوراس جملې له مخې لرو:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

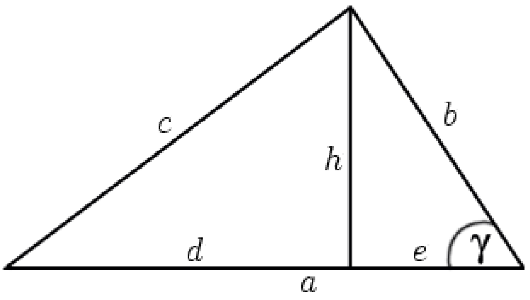
د کوساین جمله استعمالیدی شي، که په یوه دریګوډي کی

- درې اړخونه (SSS) یا

- دوه اړخونه او له هغو بند کونج (SWS) ورکړ شوي وي.

که له پورته څخه یې درې ورکړ شوي وي، نو څلورم یې پیداکولی شو

ښوونه :




د دریګوډي په کینۍ لور د پیتاګوراس قضیه استعمالوو، چې د $c^2$ لپاره یوه شمیرافاده یا – وبینه پیداکړو، د دې لپاره د دې خوا د ولاړاړخونو یا کاتیتو اوږدوالی څلوری یا مربع باید پیدا شي

$$h^2 = b^2 - e^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د بنې اړخ لپاره د پیتاګواراس قضیې استعمال څخه لرو

$$d^2 = (a-e)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot e + e^2$$

( د بینوم فرمول )

د پیتاګوراس جملې له مخې د کیڼ لور لپاره لرو:

$$c^2 \ = h^2 + d^2$$

اوس دواړه پورته پیداشوي شمیرویینې یا- افادې سره زیاتوو:

$$c^2 = b^2 - e^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot e + e^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot e$$

اوس باور لري $\cos\gamma = \frac{e}{b} (\frac{ankathet}{Hypotenuse})$

له دې لاس ته راځي $e = b \cdot \cos\gamma$

دا پورته ځاي په ځاي کوو، نو د $c^2$ لپاره لاس ته راځي:

$$c^2 = \underline{\underline{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma}}$$

بیلګه:

یو درېګوړیABC ، جې اړخونه یې ښرګند دي، ورکړ شوی

$a = 4{,}9 \text{ cm}$ ،

$b = 2{,}8 \text{ cm}$

$c = 3{,}5 \text{ cm}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د کونج $\beta$ لویوالی غواړو پیداکړو

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta$$

$$2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta = a^2 + c^2 - b^2$$

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c} = \frac{(4{,}9\,\mathrm{cm})^2 + (3{,}5\,\mathrm{cm})^2 - (2{,}8\,\mathrm{cm})^2}{2 \cdot 4{,}9\,\mathrm{cm} \cdot 3{,}5\,\mathrm{cm}} = 0{,}83$$

$$\beta = \underline{34^\circ}$$

دا پیژند ورکو یا داسې تعریفوو

$$\sin A = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}} \qquad \cos A = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}$$

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\text{opp}}{\text{adj}} \qquad \sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{\text{hyp}}{\text{adj}}$$

$$\cot A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{\text{adj}}{\text{opp}} \qquad \csc A = \frac{1}{\sin A} = \frac{\text{hyp}}{\text{opp}}$$

**Common formularکډ وډ فرمولونه**

**Pythagorean identitiesد پیتاګوراس کتمېوالی**

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

$$1 + \tan^2 A = \sec^2 A$$

$$1 + \cot^2 A = \csc^2 A$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



**Sum and difference identitiesزیاتون او کمون کتمتوالی**

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

$$\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

$$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

$$\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$

**Double-angle identities دوه برابره کونج کې ګتمتوالي**

$$\sin 2A = 2 \sin A \cos A$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$$

$$\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A} = \frac{2\cot A}{\cot^2 A - 1} = \frac{2}{\cot A - \tan A}$$

**Half-angle identities د نیم کونج ګتمتوالی**

$$\sin \frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$$

$$\cos \frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

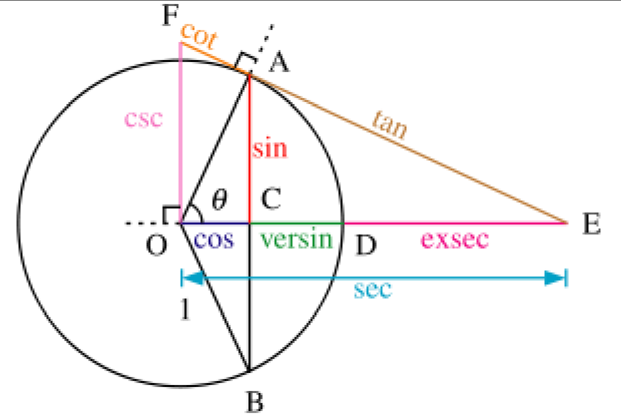


---

$$\tan\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}} = \frac{\sin A}{1+\cos A} = \frac{1-\cos A}{\sin A}$$

د ترېګونومتریکي کتمتوالي لیست List of trigonometric identities

نوره ژوره څېرنه دلته نه کړو، دې ته ګوته نیسو، چې په لاندې څېره کې ترېګونومتریکي فنکشنونه روښانه دي

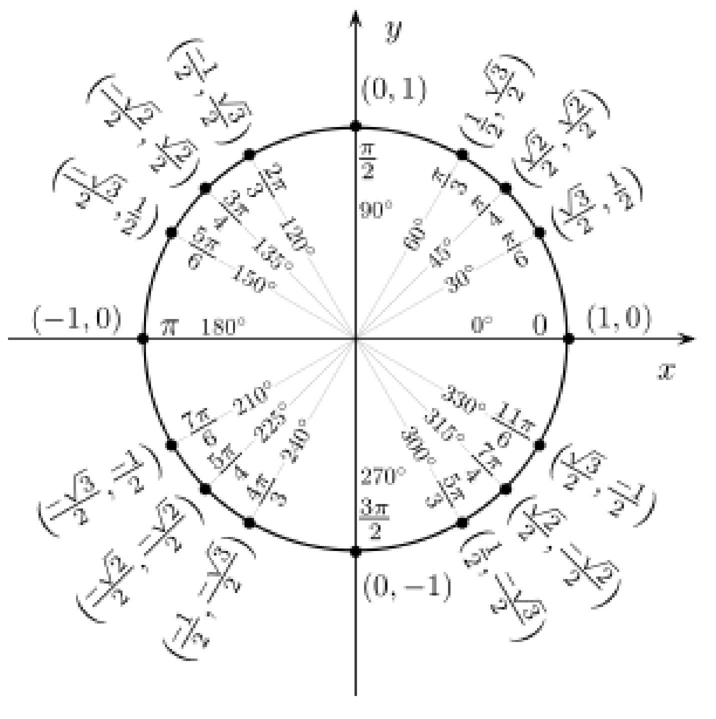



د یوه کونج θ ټول ترېګونومتریکي فنکشنونه په $O$ باندې د یوې یونګردی ترم له لارې ورکول کېدی شي ( یونګردی لاندې ورکړ شوي او کونجونه هم په نخښه شوي )

مخامخ:

یوونګردی(یووالي یا واحد ګردی)

The unit circle



(c) ketabton.com: The Digital Library



**لیکنبڼهNotation**

دا لاندې لیکنبڼه یا - ډول د ټولو تریګونومتریکي – یا مثلثاتي فنکشنونو ساین، کوساین ، تانجنت ، کوتانجنت ، سیکانت، کوسیکانت لپاره باور لري، د لنډوني لپاره په لاندې جدول کې یواځې ساین او کوساین لیکل شوي دي

$\arcsin(x)$ کیدی شي$\sin^{-1}(x)$ ولیکل شي، خو د $(\sin(x))^{-1}$ سره باید بدل نه شي

Definitionsپیژند:

$$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \qquad \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{\tan(x)}$$

تل بیرته راګرځیدنه ، سیومتري او بدلونPeriodicity, symmetry, and shifts .

:په یوون(یووالي-) ګردئ یا دایره کې ساده لیدل کیږي

**Periodicity تل بیرته راګرځیدنه**

ساین ، کوساین ، سیکانت، کوسیکانت تل بیرته راګرځیدنه $2\pi$ ده( پوره ګردئ ) ( تکرار دئ )

$$\sin(x) = \sin(x + 2k\pi)$$

$$\cos(x) = \cos(x + 2k\pi)$$

$$\sec(x) = \sec(x + 2k\pi)$$

$$\csc(x) = \csc(x + 2k\pi)$$

تانجنت ، کوتانجنت تلبیرته راګرځیدنه $\pi$ لري( نیمګردئ یا نیمدایره ) :

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$\tan(x) = \tan(x + k\pi)$$

$$\cot(x) = \cot(x + k\pi)$$

**Symmetry سیومتري**

د تریګونومتریکي فنکشنونو لپاره سیومتري ، لکه لاندې کښل شوي

$x \to -x, x \to \pi/2 - x$ ،یا $x \to \pi - x$ په لاندې ډول ده

$$\begin{aligned}
\sin(-x) &= -\sin(x), & \sin\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) &= \cos(x), & \sin(\pi - x) &= \sin(x) \\
\cos(-x) &= \cos(x), & \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) &= \sin(x), & \cos(\pi - x) &= -\cos(x) \\
\tan(-x) &= -\tan(x), & \tan\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) &= \cot(x), & \tan(\pi - x) &= -\tan(x) \\
\cot(-x) &= -\cot(x), & \cot\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) &= \tan(x), & \cot(\pi - x) &= -\cot(x) \\
\sec(-x) &= \sec(x), & \sec\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) &= \csc(x), & \sec(\pi - x) &= -\sec(x) \\
\csc(-x) &= -\csc(x), & \csc\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) &= \sec(x), & \csc(\pi - x) &= \csc(x)
\end{aligned}$$

بدلون : د $\pi/2$ او $\pi$ بدلون دی

$$\begin{aligned}
\sin\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) &= \cos(x), & \sin(x + \pi) &= -\sin(x) \\
\cos\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) &= -\sin(x), & \cos(x + \pi) &= -\cos(x) \\
\tan\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) &= -\cot(x), & \tan(x + \pi) &= \tan(x) \\
\cot\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) &= -\tan(x), & \cot(x + \pi) &= \cot(x) \\
\sec\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) &= -\csc(x), & \sec(x + \pi) &= -\sec(x) \\
\csc\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) &= \sec(x), & \csc(x + \pi) &= -\csc(x)
\end{aligned}$$

د پیتاګوراس کتمتوالی Pythagorean identities

د دې بنسټ د پیتاګوراس قضیه ده

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$
.

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

د کونج د زیاتون او کمون کتمتوالی Angle sum and difference identities

$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$$

د کمون او زیاتوننخښې په ورته ترتیب راځي لکه په فرمولونو کې

$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$$

که په کېڼ لور " + " وي، نو په ښې لور"-" راځي او په ځټ

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(x)\tan(y)}$$

**د کونج دوه ځلوالي فرمول Double-angle formulae**

که $x = y$ کیږدو د پیتاګوراس یا موفریي فرمول له لارې لرو د $n = 2$ له امله ۰

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) = \frac{2\tan(x)}{1+\tan^2(x)}$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x) = \frac{1-\tan^2(x)}{1+\tan^2(x)}$$

$$\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$$

$$\cot(2x) = \frac{\cot(x) - \tan(x)}{2}$$

**د نیمکونج فرمول Half-angle formular**

(c) ketabton.com: The Digital Library



-------------------------------------------------------------------------------

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(x)}{2}}$$

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(x)}{2}}$$

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}. \qquad (1)$$

که د رېښي لاندې ماتباندې او مات لاندې له $1 + \cos x$ سره ځل شي ، نو د پيتاګوراس جملې له مخه لرو:

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{(1+\cos x)(1+\cos x)}} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos^2 x}{(1+\cos x)^2}}$$

$$= \frac{\sin x}{1+\cos x}.$$

په ورته توګه که برابرون له ( ۱ ) له $1 - \cos x$ سره ځل شي، نو لور

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{(1-\cos x)(1-\cos x)}{(1+\cos x)(1-\cos x)}} = \pm\sqrt{\frac{(1-\cos x)^2}{(1-\cos^2 x)}}$$

$$= \frac{1-\cos x}{\sin x}.$$

د نيمکونج فرمولونه د تانجنت لپاره دي:

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)} = \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



که کیږدو $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right),$

**نو لرو:** $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$

**د ځل و زیاتون ته کټمټوالی Product-to-sum identities**

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{\cos(x-y) + \cos(x+y)}{2}$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2}$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{\sin(x-y) + \sin(x+y)}{2}$$

**د زیاتون- و- ځل ته کټمټوالی ( برابرون) Sum-to-product identities**

که د $x$ لپاره $(x+y)/2$ او $y$ لپاره $(x-y)/2$ کیږدو نو لرو

$$\cos(x) + \cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin(x) + \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos(x) - \cos(y) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin(x) - \sin(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

که $x, y,$ او $z$ د کوم درېګوډي کونجونه وي یا په نورو کلیمو، نو

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

که= $\text{if } x + y + z = \pi = \text{half circle,}$ نیمګردۍ یا نیمدایره

او *نو یا* tan x + tan y + tan z = tanx.tany.tanz

$\text{and } \sin(2x) + \sin(2y) + \sin(2z) = 4\sin(x)\sin(y)\sin(z).$

**ټریګونومتریکي په څتوالی Trigonometric conversions**

هر ټریګونومتریکي فنکشن د بل ټریګونومتریکي فنکشن سره سیده یا سیخې اړیکی لري٠ داسې اړیکی د په څښت اړیکو له لارې افاده یا ویل کیدی شي، لکه : که φ او ψ د ټریګنومتریکي فنکشنونو د یوې جوړې نمایندکی وکړي ، او arcψ دې د ψ په څښت وي، داسې چې ψ(arcψ(*x*)) = *x* ٠ نو φ(arcψ(*x*)) کیدی شي د یو الجبري فنکشن ترم *x* په څیر وویلی شي یا افاده شي٠

داسې فرمولونه د لاندې جدول له لارې ښوول کیدی شي : موږ دا نوره نه روښانه کوو او په لاندې جدول پوهیدی شو

| **cot** | **sec** | **csc** | **Tan** | **cos** | **sin** | **φ \ ψ** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\frac{1}{x}$ | $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\sqrt{1-x^2}$ | $x$ | **sin** |
| $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ | $\frac{1}{x}$ | $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$ | $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ | $x$ | $\sqrt{1-x^2}$ | **Cos** |
| $\frac{1}{x}$ | $\sqrt{x^2-1}$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ | $x$ | $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ | $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ | **Tan** |
| $\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$ | $x$ | $\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ | $\sqrt{1+x^2}$ | $\frac{1}{x}$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | **sec** |
| $x$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ | $\sqrt{x^2-1}$ | $\frac{1}{x}$ | $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ | **cot** |

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$\sin 0 = \sin 0^\circ = 0 = \cos 90^\circ = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin 30^\circ = 1/2 = \cos 60^\circ = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin 45^\circ = \sqrt{2}/2 = \cos 45^\circ = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin 60^\circ = \sqrt{3}/2 = \cos 30^\circ = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

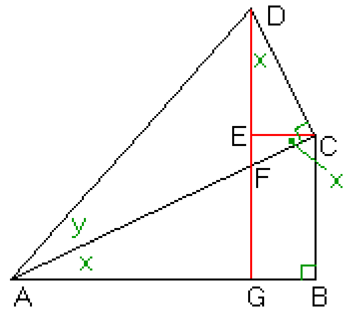
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin 90^\circ = 1 = \cos 0^\circ = \cos 0$$

د طیلایي نسبت $\varphi$ له امله لرو

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4} = \varphi/2$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{\varphi-1}{2} = \frac{1}{2\varphi}$$

**جیومتریکي غوښتنه (ثبوت)Geometric proofs**




**sin(*x* + *y*) = sin(*x*) cos(*y*) + cos(*x*) sin(*y*)**

په مخامخ خیره کي کونج x د ولاړکونجیز درېکودي ABC برخه ده، او کونج y د و لاړکوڼیز درېکودي ACD برخه ده ۰ نو جوړښت DG و AB باندې ولاړ او CE و AB ته غبرګ دی

(c) ketabton.com: The Digital Library



کونج ACE =کونجBAC = Angle x

EG = BC. کونج CDE= x

$$\sin(x+y)$$

$$= \frac{DG}{AD}$$

$$= \frac{EG+DE}{AD}$$

$$= \frac{BC+DE}{AD}$$

$$= \frac{BC}{AD} + \frac{DE}{AD}$$

$$= \frac{BC}{AD}\cdot\frac{AC}{AC} + \frac{DE}{AD}\cdot\frac{CD}{CD}$$

$$= \frac{BC}{AC}\cdot\frac{AC}{AD} + \frac{DE}{CD}\cdot\frac{CD}{AD}$$

$$= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y).$$

**$\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$**

Using the above figure:د پورته ښيرې ښخه کار اخلو

$$\cos(x+y)$$

$$= \frac{AG}{AD}$$

$$= \frac{AB-GB}{AD}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$= \frac{AB - EC}{AD}$$

$$= \frac{AB}{AD} - \frac{EC}{AD}$$

$$= \frac{AB}{AD} \cdot \frac{AC}{AC} - \frac{EC}{AD} \cdot \frac{CD}{CD}$$

$$= \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AC}{AD} - \frac{EC}{CD} \cdot \frac{CD}{AD}$$

$$= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y).$$

**د $\sin(x-y)$ او $\cos(x-y)$ فرمولونو ښوونه**

د $\cos(x-y)$ او $\sin(x-y)$ لپاره فرمولونه ساده ښوول کیږي، که د $\cos(x+y)$ او $\sin(x-y)$ لپاره فرمولونه وپیژنو

$$\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y)$$

که په فمرول $\sin(x+y)$ کې د y په ځای -y کیږدو نو لرو

$$\sin(x+(-y)) = \sin(x)\cos(-y) + \cos(x)\sin(-y).$$

که د فاکت څخه، چې ساین جوړه او کوساین ناجوړه فنکشنونه دي، نو لرو

$$\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y).$$

$$\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$$

**موږ په پورته فرمول $\cos(x+y)$ کې د y په ځاي -y ږدو ، نو لرو**

$$\cos(x+(-y)) = \cos(x)\cos(-y) - \sin(x)\sin(-y).$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

که د فاکت څخه، چې ساين جوړه او کوساين ناجړه فنکشنونه دي، نو لاس ته راوړو

$$\cos(x-y)=\cos(x)\cos(y)+\sin(x)\sin(y).$$

۶ . ۵ تريګونومتريکي يا کونجکچ فرمولونه

د کونجبلواك يا کونجفنکشن د شميرلو لپاره، له دا اوس څرګند فرمولونو، يوه د اړيکو ډله شته ) د زياتون)جمع( تيوريم(، له کومو يى چى دلته يوڅو راوړل غواړو .د همغو فرمولتولګه) کتاب چي فرمولونه په کي راټول وي( کى لاندې فرمولونه پيدا کيدى شي

$$\sin(x\pm y)=\sin x.\cos y\pm\cos x.\sin a;........................(6,19)$$

$$\cos(x\pm y)=\cos x.\cos y\mp\sin x.\sin y;........................(6,20)$$

$$\sin 2x=2\sin x.\cos x;\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x;...................(6,21)$$

$$\tan(x\pm y)=\frac{\tan x\pm\tan y}{1\mp\tan x.\tan y};.....................(6.22)$$

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2};..........................(6,23)$$

$$\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}.\sin\frac{x-y}{2};$$

$$cox+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2};.............................(6,24)$$

$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}.\sin\frac{x-y}{2}$$

ددې اړيکو ښوونه يوه مهمه کورني دنده ده، خو څه به په دې لاندې بېلګه کې وښايو

(c) ketabton.com: The Digital Library



بیلګه ۶ . ۱۲ :

Cos(x+) = cosx.cosy –sinx.siny

مونږ له ځيرې ۴ . ۱۸ څخه مخ ته ځو، او ځاي په ځاى کوو $\gamma_1 = x$ , $\gamma_2 = y$ ،
نو لرو $\gamma = x + y$ .

د کوساين له جملې لاس ته راځي

$$2ab\cos\gamma = a^2 + b^2 - c^2, \quad a^2 = p^2 + h_c^2, \quad b^2 = q^2 + h_c^2, \quad c^2 = (q+p)^2$$
$$= p^2 + h_c^2 + q^2 + h_c^2 - (q+p)^2,$$
$$= p^2 + h_c^2 + q^2 + h_c^2 - q^2 - 2qp - p^2$$

له $2ab\cos\gamma = 2h_c^2 - 2qp$ څخه لاس ته راځي

$$\cos\gamma = h_c^2 / ab - qp / ab = (h/a).(h/b) - (q/b).(p/a),$$
$$\cos\gamma = \cos\gamma_1 . \cos\gamma_2 - \sin\gamma_1 . \sin\gamma_2$$
$$\cos(x+y) = \cos x . \cos y - \sin x . \sin y$$

څه چې د ښوولو وو

يادونه: ځاى په ځاى بايد دې ته ګوته ونيسم، چې د ضرب او وېش تړاو نسبت و جمعې اړ تفريق يا زياتو او کمون تړاو ته کلک يا کلک نښتى دى.

بیلګه ۴ . ۱۳ – لاندې ويينې يا افادې دې ساده شي

$$a)\ y = \sin(\alpha - \frac{\pi}{4}) + \sin(\alpha + \frac{\pi}{4})$$

دې (۶ . ۲۳) پسې د مساوات(برابرون) ښى اړخ د لاندې سره يو- يا هم ارزښته ده.

$$2\sin\frac{\alpha - \frac{\pi}{4} + \alpha + \frac{\pi}{4}}{2} \cdot \cos\frac{\alpha - \frac{\pi}{4} - \alpha - \frac{\pi}{4}}{2} = 2\sin\alpha\cos(-\frac{\pi}{4}) = 2\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4},$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

له کوم چې $y = \sqrt{2}\ \sin\alpha$ لاس ته راځي

b) $y = \cos(\frac{3}{2}x + \pi)$

د ( ۶ . ۲۰ ) پسې لرو

$$\cos(\frac{3}{2}x + \pi) = \cos\frac{3}{2}x \cdot \cos\pi - \sin\frac{3}{2}x \cdot \sin\pi.$$

دا چې $\cos\pi = -1, \sin\pi = 0$ دی، نو لاس ته راځي

$$y = \cos(\frac{3}{2}x + \pi) = -\cos\frac{3}{2}x.$$

دې نتیجې ته د ( ۶ . ۱۶ ) استعمال وروسته هم رسیږو، له کومې چې لاس ته راځي

$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$ ist.

بیلګه ۶ . ۱۴ برابرون یا مسات $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}, \quad 0 \le \alpha \le 2\pi,$ دې وښوول شي

دی $1 = \cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}$ او $\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$ او له دې سره

$$\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2} - (\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2})}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2}} = |\sin\frac{\alpha}{2}| = \sin\frac{\alpha}{2} \quad (\text{wegen } 0 \le \alpha \le 2\pi).$$

۶ . ۶ تمرینونه

۱ – بنسټیزه هندسه یا څمککچونه

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

۱ . ۱ – لاندې کونجونه دې په لینده اندازه همداسې په درجه اندازه( د څسیما یا دسیمال یا لسمیز او سمساګیسیمال ( د ۶۰ په بنسټ جوړ شوي ګڼل(که غواړئ شمیرل) برخو) ورکړ شوي دي،

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1.1.1.a) $15°$ | b) $225°$ | c) $105°$ | d) $277{,}5°$ |
| 1.1.2.a) $\frac{\pi}{8}$ | b) $\frac{\pi}{12}$ | c) $2\pi+\frac{\pi}{2}$ | d) $\pi-\frac{\pi}{3}$ |
| 1.1.3.a) $4{,}24°$ | b) $70{,}9°$ | c) $31°\ 17'\ 20''$ | d) $228{,}1923°$ |
| 1.1.4.a) 5,19 | b) 0,22 | c) 2,31 | d) 1 |

۱ . ۲ – یو درېګوډی له $a = 4{,}5\ cm$ , $b = 12{,}2\ cm$ او $c = 11{,}7\ cm$ سره ورکړ شوی دی. دا دریګوډی جوړ کړی ! د اړخونو نیموونکی وکاږی، د منځ ولاړې ، کونجنیموونکي او جګې، همداسی یي ګردیخوندي او خوندیګردي ګردی( یعنی دباندې او دننه ګردی ) رسم کړی.

۱ . ۳ – لاندې دریګوډی جوړ کړی

a) $a = 11{,}7\ cm$ , $b = 9{,}2\ cm$ , $\gamma = 43{,}5°$

b) $c = 16{,}1\ cm$ , $\alpha = 84{,}6°$ $\beta = 51{,}9°$

وښايي چی ولی دواړه دریګوډي ورته د;

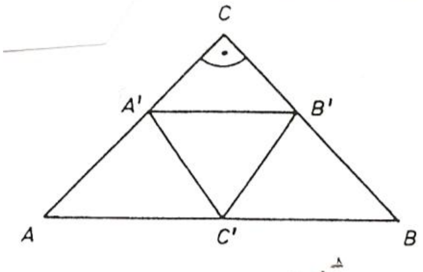



Bild 4.20 ځېره

۱ . ۴ – یو مساوي پښبیز، ولاړکونجیز درېګوډي ABC ته یو مساوي اړخیز دریګوډی A'B'C' داسی په دننه کی ورکړ شوی چی $\overline{A'B'} \parallel \overline{AB}$ څغلي او C' په $\overline{AB}$ پرته ده ( ځیره ۴ . ۲۰ دې وکتل شي ).

ورکړی $\overline{A'B'} = \overline{A'C'} = \overline{B'C'}$ د $\overline{AC} = \overline{BC}$ سره!

(c) ketabton.com: The Digital Library



------------------------------------------------------------------------

۱ . ۵ – په یوه ولاړکونجیز دریګوډي کی د خیري ۴ . ۲۱ سره سم په لیدوړ ډول په دننه کی یوه مربع ورکړ شوې. د مربع اړخونه وشمیری

الف ) له کاتتو څخه

ب ) له هیپوتینوزپېرخو څخه

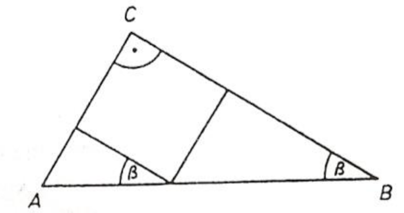



Bild 4.21

۲ . د جبشمیرنی سره د ارزښتونوتاکنه

۲ . ۱ – له لاندې کونجونو څخه د لاندېکونجونو لپاره فنکشن ارزښتونه پیداکړی:

a ) $\alpha$ = 47,15° , b ) $\alpha$ = -390° , c ) $\alpha$ = 7,784 , d ) $\alpha$ = 13,195

۲ . ۲ – کونج β دې د sinß = a , cos ß = a , tan ß = a , cot ß = a څخه د

a ) a = 0,8290 , b) a = -0,2907 , c) a = -2,145, d ) a = 0,8660

لپاره وشمیرل شي ( په اوبی کی دې د الفا په ځاي بیتا ولیکل شي !!! )

۳ . په ولاړکونجیز دریګوډي کې شمیرنې

۳ . ۱ – په ولاړکونجیز ( $\gamma$ = 90° ) دریګوډي کې معلوم دي

الف ) a = 3 cm , b = 4 cm ، ب ) a = 5 cm , c = 12 cm

کوم ازښتونه sin $\alpha$ , cos $\alpha$ , tan $\alpha$ , cot $\alpha$ لري؟

۳ . ۲ – ولاړکونجیز دریګوډي کې ( $\gamma$ = 90° ) نه ورکړشوي کونجونه او نه ورکړ شوي اړخونه وشمیری ، لاندې لوبیي موړ ته معلومي دي:

a ) a = 50cm , b ) a = 40cm , c ) b = 70 cm , d) c = 65 cm

b= 78,1 cm $\alpha$ = 43°36' $\alpha$ = 18°55' ß = 59° 29'

۳ . ۳ – وشمیری ! $h_c$ , A او همداسی د ټاکلي مساوي پښیز دریګوډي ورکړ شوي پاتې کونجونه او اړخونه ( ß = $\alpha$, a = b ):

a ) a = 66cm , b ) c = 22,4 cm , c ) a = 38,9 cm , d ) c = 30,3 cm

c = 130 cm $\alpha$ = 47,8°, $\gamma$ = 33,3° $\gamma$ = 48,2°

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

ب ) درې قوې دې د زوریا قوت $F_1 = 167{,}5N$ , $F_2 = 112$ N او $F_3 = 157$ N سره ورکړ شوې وي، چې په ګډه یو دریګوډی جوړوي. د دې دریګوډي کونجونه چې له اړخونو رابند دي، څومره لوي دی؟

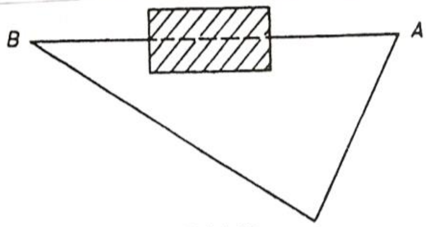


Bild 4.23 ځاره

پ ) دوه ټکي A او B چې یوه کور یې مخه پټه کړې وي، یو له بل څومره لرې دي، که $\overline{BC} = 75{,}25$ m , $\overline{AC} = 51{,}75$m او $\sphericalangle BCA = 71°15' 45"$ وي ( ځیره ۴ . ۲۳ )

ت ) د دوه یخ هاکي لوبغاړو $S_1$ او $S_2$ ترمنځ یو د مخالف ټیم لوبغاړی G ولاړ دی. $S_1$ په داسې ډول توپ و $S_2$ ته وهي چې توپ په یوه دیوال ولګیږي. ( ځیره ۴ ، ۲۳ وګورئ ).

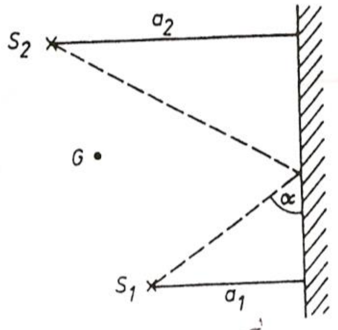


Bild 4.24 ځاره

د دواړو لوبغاړو $S_1$ او $S_2$ لریوالی څومره دی؟ که د دوي واټن له دیوال $a_1 = 2{,}5$m همداسې $a_2 = 6{,}5$ m وي او توپ د یوه دې دیوال سره په یوه کونج $\propto = 42°$ ولګیږي.؟

۵ . د تریګونومتریکي یا دریګوډیزو(مثلثاتي) فرمولونو استعمال

۵ . ۱ – بې له جبشمیري او جدول دې نور دوه درې فنکشن ارزښتونه دې وشمیرل شي، که ورکړ شوي وي: $(0 < \alpha < 2\pi)$:

a) $\sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ b) $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ c) $\tan\alpha = \sqrt{3}$ d) $\cot\alpha = -\sqrt{3}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

۵ . ۲ - لاندې مساوات وښایی:

5.2.1. a) $1 + \tan^2 \alpha = \dfrac{1}{\cos^2 \alpha}$

b) $1 + \cot^2 \alpha = \dfrac{1}{\sin^2 \alpha}$

c) $\cos \alpha \cdot \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} = 1$

d) $1 + 2 \cos \alpha = 4 \cos^2 \dfrac{\alpha}{2} - 1$

5.2.2. a) $\sin \dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{1 - \cos\alpha}{2}}$

b) $\cos \dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{1 + \cos\alpha}{2}}$

c) $\tan \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha}$

d) $\cot \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha}$

5.2.3. a) $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$

b) $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$

c) $\tan 3\alpha = \dfrac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha}$

d) $\cot 3\alpha = \dfrac{\cot^3 \alpha - 3 \cot \alpha}{3 \cot^2 \alpha - 1}$

5.2.4. a) $\cos 2\alpha = \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha$

b) $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - 4 \sin^2 \dfrac{\alpha}{2} \cos^2 \dfrac{\alpha}{2}$

c) $\cos 2\alpha = 1 - 8 \sin^2 \dfrac{\alpha}{2} \cos^2 \dfrac{\alpha}{2}$

d) $\cos 2\alpha = \dfrac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$

5.2.5. a) $\sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \cos 2\alpha = \dfrac{1}{4} \sin 4\alpha$

b) $\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = -(\cos \alpha + \sin \alpha)$

c) $\sin \alpha + \sin (\alpha + \dfrac{2\pi}{3}) + \sin (\alpha + \dfrac{4\pi}{3}) = 0$

d) $\sin^2 (3\pi - \alpha) + \sin^2 (6{,}5\pi + \alpha) = 1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

## ۷ ۰ ګډوله ګڼونه يا کمپليکس اعداد Komplexe Zahlen

د مخه مو وليدل، چې ځنګه يوه ګڼډيرۍ پر بله ګڼډيرۍ ودانه شوې ده۰ که ولرو

$$x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \quad x^2 = -1 \qquad (7,1)$$

که پورته برابرون ته وګورو، نو ځرګند ليدل کيږي، چې دا په ريبلګڼونډيرۍ کې اوبی يا حل نه لري، نو له دې امله بايد (7 , 1) د ګڼنو ډيرۍ وغزول شي۰ له

$$x_1 = \sqrt{-1}, x_2 = -\sqrt{-1}, .........(7,2)$$

د $\sqrt{-1}$ ګڼ، چې د لومړي ځل لپاره د ريبل مانانه لري، دا سومبول د $i = \sqrt{-1}$

ټاکل کيږي چيرته، چې لرو: $i^2 = -1$ د

$$x_1 = i, x_2 = -i \Leftrightarrow x_{12} = \pm i, ..................(7,3)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

لیکو : دا پورته د لاندې سره

$i^2 = -1$ (7 , 4)

د (7,1) ځای نیسي، ځکه، چې باور لري

$$x_1^2 = i^2 = -1 \Leftrightarrow x_2^2 = i^2 = -1$$

دا چې i رییل مانا نه لري، نو دې سومبول ته ایماجینارګڼ imaginär( لاتین: فقط خیالي)یوون(واحد)وایو.

برابرون

$$x^2+a = 0 \Leftrightarrow x^2 = -a \quad , a > 0 \qquad (7,5)$$

کیدی شي په لاندې ډول ولیکل شي

$$x_1 = \sqrt{-a} = \sqrt{a}.\sqrt{-1} = \sqrt{a}.i, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7,6)$$
$$x_2 = -\sqrt{-a} = -\sqrt{a}.\sqrt{-1} = -\sqrt{a}.i$$

دلته د(7,4) له امله باور لري

$$x_1{}^2 = ai^2 = -a, x_2{}^2 = (-\sqrt{a})^2 i^2 = -a, \ldots\ldots\ldots\ldots.(5,7)$$

اوس د ایماجینار ګڼ یوون(واحد) تولیز کوو

$$z = bi, b \in R, i^2 == -1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(5,8)$$

ایماجیناریوون(واحد)z= i یو ځانګړی ایماجینارګڼ b=1 دی

د تولیزې څلوری (عمومي مربع) برابرون(مساوات) اوبی(حل) :

$$x^2 + px + q = 0, p, q \in R, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(7,9)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

په لاندې ډول د څلورې پوره کولو یا مربع تکمیلول له لارې

$$(x + p/2)^2 = x^2 + px + p^2/4$$

لاس ته راځی یالرو=>

$$x^2 + px + q = (x + p/2)^2 = +(q - p^2/4) \qquad (7,10)$$

$$(x + p/2)^2 = p^2/4 - q \qquad (7,11)$$

او که فورمال پسی وګڼل شي

$$(x+p/2)_{1,2} = \pm\sqrt{p^2/4 - q}$$

نو لرو

$$x_{12} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{p^2/4 - q}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7,12)$$

د $p^2 = 4q$ لپاره رییل «ډبل» اوبی یا حل لاس ته راځي

$$x_1 = x_2 = -\frac{p}{2}$$

که $p^2 > 4q$ وي نو(7,12) دوه مختلف رییل اوبیونې یا حلونه منځ ته راوړي۰

که $P^2 < 4q$ وي، نو رییل اوبی نه شته دئ

د ایماجینار ګڼ په مرسته کیدی شي ولیکو

$$\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = \sqrt{[q - \frac{p^2}{4}](-1)} = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.i$$

که اوس ځاي پر ځاي کړو

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$-\frac{p}{2} = a \in R, \sqrt{q - p^2/4} = b \in R$$

نو په لاندې بڼه دوه اوبیونې یا حلونه لاس ته راځي

$$x_{1,2} = a \pm bi; a, b \in R$$

د دې فورم یا بڼې ګڼونه کمپلکس ګڼونهKomplexe Zahlen (لاتین: پوره کوونکي - یا پوره کیدونکي-) بلل کیږي

$$z = a+bi\ ,\ i^2 = -1;\ a,b \in R \qquad (7,13)$$

د کمپلکس ګڼونوډیرۍ په C سره په نخښه کوو

$$\bar{z} = a - bi, .................................(7,14)$$

دا پورته (7,14) و(7.13) ته کنجوګیري کمپلکس ګڼ بلل کیږي، لنډ کنجوګیري کمپلکس ګڼ یا اوښتی ګڼ

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, ..............................(5,15)$$

د دې مطلقه یا ساده ارزښت

$$a = re(z) \Leftrightarrow b = Im(z) \qquad (7,16)$$

د دې رییل همدا رنګه ایماجینار برخه

دوه کمپلکسګڼونه برابر بلل کیږي، که دوي په رییل او ایماجینار برخه کې یو له بل سره برابر وي:

$$a_1 + b_1 i = a_2 + b_2 i \Leftrightarrow a_1 = a_2, b_1 = b_2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

موږ تل په پام کې لرو، چې $i^2 = -1$ اېښول شوې

ګډوله یا کمپلکس عدد کیدی شي په سطحه یا هاره کې د لاندې شکل سره سم( د ګاوس د اعدادوسطحه). سرې د کمپلکسو اعدادو سره همغسې شمیرنه کوي، لکه د حقیقي اعدادو سره او په پام کې نیسي چې: $i^2 = -1$

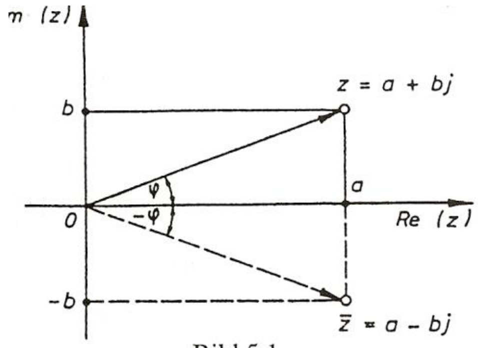



Bild 5.1

موږ دې سیستم ته پروت ولاړ سیستم وایو یا کواوردیناتسیستم Koordinaten systm

پورته ځیره دې وکتل شي

پروتولاړ سیستم ته د (x,y) - سیستم هم وایي په پروتولاړ سیستم کې پروت څرخون( محور ) د x - محور ته د هوارې یاسطځې ریبلبرخه او ولاړ محور یا د y – محور ته یپایماجینار برخه وایي لکه څنګه، انځور شوي دي۰ په دې توګه په پروتولاړ سیستم کې یو ټکی منځ ته ر اځي، چې کمپلکس ګڼ انځوروي۰(موږ دا اوس دا برخه نوره نه ځیرو، خو دا د وکتورونو په ډول انځوریږي او کارونی یا عملي یې هم همداسي دي، لکه د ورسره بلدو وکتورونو) یادونه : هغه ګران هیوادوال، چې نوي د شمیرپوهنی د دې برخې سره بلدیږي، د هغو لپاره دې په دا لومړي ځل ځنې وییونه یا لغاتونه یاکلمې په پام کې نه راځی، لکه د وکتور کلمه، خو دا پورته یا لاندې ځیرو کې کتلی شو، چې د کمپلکس ګڼونو زیاتون او کمون څنګه دی

۷ ۰ ۱ زیاتون او کمون:

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

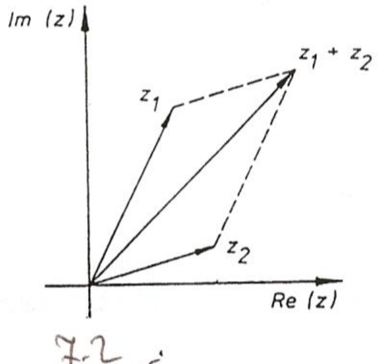
لاندې ښيرو ته دې پام وي او ګورو، چې رييل برخه او ايماجينار برخه د Re(z) او Im(z) سره په نخښه شوي دي

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 + b_1 i) \pm (a_2 + b_2 i) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2),.......(7,17)$$

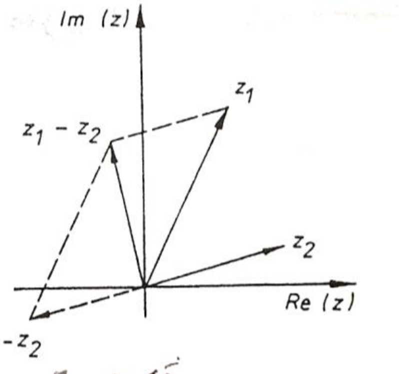
بيلګه ۷ ۰ ۱ ورکړ شي:

$$z_1 = 2 - 3i, z_2 = 3 + 2i$$
$$\Rightarrow z_1 + z_2 = 5 - i, z_1 - z_2 = -1 - 5i$$
$$\Rightarrow$$
$$| z_1 |= \sqrt{2^2 + 3} = \sqrt{13}, | z_1 |= \sqrt{13}$$
$$-z_1 = -2 + 3i, -z_2 = -3 - 2i$$

زياتون يا جمعه ( او په همدې توګه کمون يا تفريق يعنې د( -z2) په زياتون)کيدی شي د ښېرې ۵ ( په همدې توګه د ښېرې ۷ . ۳) د ګراف له لارې هم ښوول شي.




7.2 ښېره
Bild 5.2



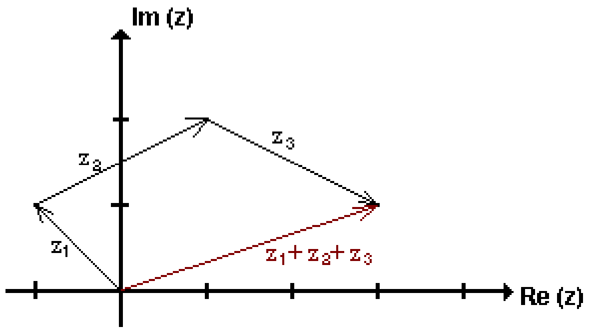

7.3 ښېره
Bild 5.3

(c) ketabton.com: The Digital Library

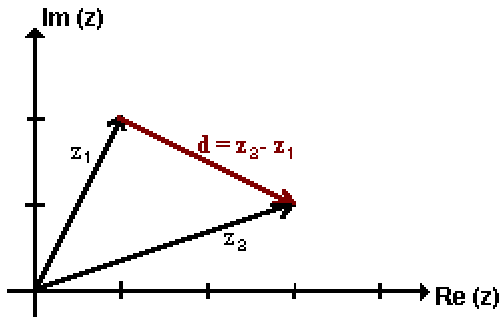


---

یا لاندې:




په پورته او لاندې ځیرو کې د کملپکس ګنونو د زیاتون او کمون انځور لیدلکیږي٠




**دکملپکس ګنونو ارزښت**

د وکتورz اوږدوالی د کملپکس ګنونو ارزښت بلل کیږي٠

دا د په |z| سره ښایو او د پیتاګوراس( فئثاغورث) د جملې

سره ښوول کیږي، د دې لپاره دې پورته اخرنی لیکه

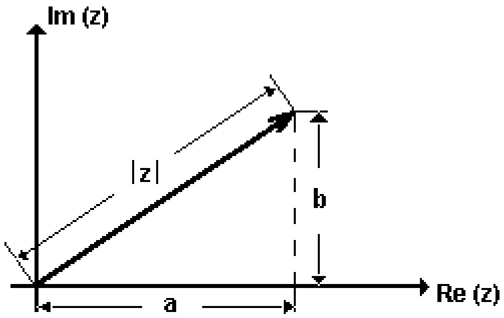
هم وکتل شي٠ مخامخ ځیره موږ ته د کمپلکس ګڼ

د ارزښت انځور ښایي

(c) ketabton.com: The Digital Library



-----------------------------------------------------------------------------




$|z| = |a+bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

په درې ګوډي كې د اړخونو ځانتيونه يا تباسب له امله باور لري

$$||z_1| - |z_2|| \le |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|, \ldots\ldots\ldots\ldots(7,18)$$

برسيره پر دې باور لري:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$$

٧ . ٢ د كمپلكس ګڼونو ځل:

د ورسره بلد نوک اينوولو له لارې لاس ته راځي

$$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i + b_1 b_2 i^2$$
$$= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i + b_1 b_2 (-1)$$
$$\Rightarrow$$

نو بارورل ري

$$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i \qquad (7, 20)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



--------------------------------------------------------------------------------

ګران لوستونکی به زما په ستونځو پوه شي، چې لاتین توري په بدل ډول لیکل شوي، چې دا هم زما تخنیکي ستونځې دي، دا که په هرځایکې وي،دا به راته ګران د شمیرپوهنې مینه وال وبخښي۰ دا لاندې هم ساده ازمایل کیدی شي

$$\overline{z_1.z} = z_1.z_2 \quad , \quad |z_1 .z_2| = |z_1||z_2| \qquad (7,21)$$

بیلګه ۷ ۰ ۲

د $z.\bar{z}$ = (a+bi) ( a-bi) = a²+b²+(-ab + ab)i =a²+b²

او (۱۵ ، ۷ ) له امله لاس ته راځي:

$$\Rightarrow \quad z.\bar{z} = |z|^2 \qquad (7 , 22)$$

۷ ۰ ۳ ویش

$$z_1 : z_2 = (a_1+b_1 i):(a_2+b_2 i) = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1+b_1}{a_2+b_2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{\bar{z}}_2}{z_1\bar{\bar{z}}_2} = \frac{(a_1+b_1 i)(a_2-b_2 i)}{(a_2+b_2 i)(a_2-b_2 i)} =$$

$$= \frac{(a_1a_2+b_1b_2)+(a_2b_1-a_1b_2)i}{a_2^2+b_2^2}$$

$$z_1 : z_2 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1+b_1 i}{a_2+b_2 i} = \qquad (7,23)$$

$$= \frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2} + \frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2} i$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

په دې پسې لاس ته راځي

$$\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}, \left(\overline{\frac{Z_1}{Z_2}}\right) = \frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}} \qquad (7,24)$$

بیلګه ۷ . ۳ :

د ( ۷ . ۲۴ ) د دوهمې برخې ښوونه:

$$\frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}} = \frac{\overline{Z}_1.Z_2}{\overline{Z}_2.Z_2} = \frac{(a_1 - b_1 i)(a_2 + b_2 i)}{(a_2 - b_2 i)(a_2 + b_2 i)} =$$

$$= \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_1 b_2 - a_2 b_1) i}{a_2^2 + b_2^2} =$$

$$= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} - \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i = \overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)}$$

بیلګه ۷ ۰ ٤ :د Z1 او Z2 لپاره له سره سم لاس ته راځي:

$$Z_1 : Z_2 = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{2-3i}{3+2i} = \frac{(2-3i)(3-2i)}{(+2i)(3-2i)} = \frac{(6-6)-(4+9)i}{3^2+2^2} = \frac{13}{13} i = -i$$

۷ . ۴ . تمرینونه

۱ - مېلق یا همغه ارزښتونه او انځورونه

۱ . ۱ – لاندې په اریتمیتیکي یا شمیرنیزه توګه ورکړ شوي ورکړ شوي کمپلکس عددونه په ګاوس سېحه کې انځور کړئ! د دې عددونو مېلقه ارزښتونه وشمیرئ.

a) $z = 1 - i$ b) $z = \sqrt{2} + \sqrt{2} i$

c) $z = 2(1 - \sqrt{3} i)$ d) $z = -1 - i$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

۱ . ۲ – د ګاوس د عددونو سطحه کې د هغو لاندې مخلوط یا کمپلکس عددونو ځای وټاکئ، د کومو لپاره چې باور لري:

a) $|z| = \sqrt{2}$ b) $|z| < \sqrt{2}$ c) $|z| > \sqrt{2}$ d) $|z| = r$

۲ – جمعه او تفریق(زاتون او کمون)

۲ . ۱ – د شمیرنې او کارنې یا رسم کونې له لارې پیدا کړئ

a) $(1+2i)+(2+i)$ b) $(-2+i)+1-2i)$

c) $(1-2i)-(1-2i)$ d) $(-1-2i)+(2-i)$

۲ . ۲ - د شمیرنې او کارنې یا رسم کونې له لارې پیدا کړئ

a) $(22+5i)+(2+i)$ b) $(3+2i)-(5+2i)$

c) $(1+2i)-(1+2i)$ d) $i-(1-2i)$

۳ . ضرب(ځل) او وېش:

په لاندې کې a,b,c,d,x,y حقیقي ګڼونه دي.

۳ . ۲ – وشمیرئ

a) $(2+\sqrt{3}\,i).(3-\sqrt{2}i)$ b) $(3+2\sqrt{2}\,i).(3-2\sqrt{2}\,i)$

c) $(1+\sqrt{5}\,i).(1-\sqrt{5}\,i).(13-12i))$ d) $\sqrt{3+\sqrt{7}i}.\sqrt{3-\sqrt{7}i}$

۳ . ۲ – وشمیرئ

a) $(x+y\,i)(2x+yi)$ b) $(\sqrt{x}+\sqrt{y}\,i)(\sqrt{x}-\sqrt{y}\,i)$

c) $\left(\frac{2}{3}a-3bi\right)\cdot\left(\frac{4}{3}a+5bi\right)$ d) $(c-\sqrt{d}\,i)(-c-2\sqrt{d}\,i)$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

۳ . ۳ – د لاندې ماتونو مخرج یا ماتلاندې حقیقي ورګرځوئ ( a ، b حقیقي دي)

3.3.1. a) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}\,i}{\sqrt{3}+\sqrt{2}\,i}$ b) $\frac{1-20\sqrt{5}\,i}{7-2\sqrt{5}\,i}$

c) $\frac{56+33i}{12-5i}$ d) $\frac{63\ +\ 16i}{4\ +\ 3i}$

3.3.2. a) $\frac{5i}{\sqrt{2}-\sqrt{3}\,i}$ b) $\frac{3-27\sqrt{5}\,i}{7-3\sqrt{5}\,i}$

c) $\frac{i-\sqrt{3}}{\sqrt{3}\,i-2}$ d) $\frac{i}{8-i}(i+1)$

3.3.3. a) $\frac{3a+4bi}{4a-3bi}+\frac{4a-3bi}{4a+3bi}$ b) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}\,i}{\sqrt{a}-\sqrt{b}\,i}-\frac{\sqrt{b}+\sqrt{a}\,i}{\sqrt{b}-\sqrt{a}\,i}$

c) $\frac{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}\,i}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}\,i}-\frac{\sqrt{1-a}+\sqrt{1+a}\,i}{\sqrt{1-a}-\sqrt{1+a}\,i}$

d) $(5-i)\,(6-i)+\frac{5-i}{6-i}$

۴ . سره رایوځی شوې پوښتنې

ګډوله ګڼونه یا اعداد ورکړ شوي.

$z_1 = \frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{i}{2}$ او $z_2 =-\frac{1}{4}-\sqrt{3}\frac{i}{4}.$

۳ - د لوګاریتم بنسټ فرمولونو استعمال. په لاندې تمرینونوکې x وشمرئ.

$z_1 = \frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{i}{2}$ und $z_2 =-\frac{1}{4}-\sqrt{3}\frac{i}{4}.$

وشمیرئ:

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

4.1. a) $z_1 + z_2$ b) $z_1 - z_2$ c) $z_1 \cdot z_2$ d) $\frac{z_1}{z_2}$

4.2. a) $|z_1|$ b) $|z_2|$ c) $\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ d) $\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

4.3. a) $|z_1 + z_2|$ b) $|z_1 - z_2|$ c) $\bar{z}_1 + \bar{z}_2$ d) $\bar{z}_1 - \bar{z}_2$

4.4. a) $|z_1| \cdot |z_2|$ b) $\frac{|z_1|}{|z_2|}$ c) $|z_1 \cdot z_2|$ d) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$

۴ . ۵ – د لاندې مربع مساواتو حلونه ورکړئ!

a) $x^2 + (1 + i)\, x - 2\,(1 - i) = 0$

b) $x^2 + (3 - 2i)\, x + 3\,(1 - i) = 0$

c) $x^2 - \frac{i}{2}\sqrt{2}\, x + 1 = 0$

d) $16\, x^2 + 8\,(i + 1)\, x + 2\,(i + \frac{9}{2}) = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

# ۸ - د ښوونې(ثبوت) متودونه

په شمیرپوهنه کې داسې مخ په وړاندې ځو، چې د ځینو نیونو یا فرضیو په فرمولولو سره، غوښتنو یا ښوونو او یا لکه تراوسه د ثبوتولو پرابلم ( د ګڼپوهنې جملې په څیر) منځ ته رااچوو، چې دا نیونې او غوښتنې ویناوې دي۰ په جملو کې دې ماتماتیکې یا شمیرپوهنیزه تړنه بیا ایمپلیکیشن یا لاس ته راوړنه ده( مخ ته دې وکتل شي)یانې A => B دا غوښتنه د رښتیا ارزښت w غوښتنه B کې نغښتې او دا اوبې یا حل B له V او د دې تراوسه اوبې- یا حل شوو جملو لاس ته راځی۰ د دې لاس ته راوړنو لپاره بیلابیلې لارې شته ، چې په لاندې کې یې څیړو

۸ ۰ ۱ سیده یاسیخه (مستقیمه) ښوونه

په سیده ښوونه ( ثبوت) کې سرې له یوې وینا A څخه مخ ته ځي، چې رښتیاارزښت یې څرګند دی او په دې لاس ته راوړنې پسې د B وینا لاس ته راوړي۰

دا وینا B هم رښتیا ده، ځکه چې له یوې رښتیا پریمیسې Prämisse (نیونې یا فرضیې) څخه رښتیا کونکلوزیون Konklusion ( لاس ته راوړنه یا نوره هم ښه ښوونه یا ثبوت)( د اینمپلیکیشن ۱ او ۲ لیکه د رښتیاارزښت په جدول کې ) له یوې رښتیا پریمیسې څخه د نارښتیا کونکلوزیون لاس ته راوړنې نارښتیا دي ( ایمپلیکیشن رښتیا ارزښت ۲ ــم جدول)۰

(c) ketabton.com: The Digital Library



بيلګه : سيده اوبيونه يا حل:

نيونه V : $x \geq 1$

غوښتنه B : $6x+3 \geq 3x + 6$

اوبی : وينا A ، چې رښتيا ارزښت w يې جوت دی، نيونه يې $x \geq 1$ ده۰ له 3 سره ځل له امله لاس ته راوړنې لرو چې په لاندې ډول دی: $3x \geq 3$ د 3 زياتون له لارې لرو: $3x + 3 \geq 6$ د 3x زياتون له امله لاس ته راځي:

$$6x + 3 \geq 3x+6.$$

بيلګه:

د يوه ناټيک اوبيونې يا حل کارونه ( متود)

د ښوونې دی $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a.b}$

د ښوونې وړ وينا څخه لاندې لاس ته راوړنې لرو:

$$(a+b)^2 \geq ab$$

$$a^2+b^2+2ab \geq 4ab$$

$$a^2 -2ab+b^2 \geq 0$$

$$(a-b)^2 \geq 0$$

لاس ته راوړل شوې ويناوې $(a-b)^2 \geq 0$ بې بنديزه رښتيا دي۰ مګر دا د ښوولو وينا يواځې د شرايطو $a \geq 0, b \geq 0$ لاندې باور لري۰ له دې امله که له رښتيا وينا څخه غوښتل شوې يا د ښوولو ويناو ته نه شي راتلی( سيده ښوونه) او په ناسداړه يا غيرمستقيم ه ښوونه يا اوبيونه باندې استعمال شي نو ګټوره به وي، چې په لاندې توګه تر څېړنې لاندې ونيول شي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library



۸ ۰ ۲ ناسیده ښوونه یا - ثبوت:

په ناسیده ښوونه کې له یوه نفي یا نیګیشن یا نه والي څخه مخ ته ځو، چې A « ناغوښتنه» او له دې یوه وینا B لاس ته راوړل کیږي، کومه چې نارښتیا ده۰ وینا یعنې نفیې غوښتنه یا ثبوت هم نارښتیا دی، ځکه چې له یوې نارښتیا نیونې څخه یوه نارښتیا ښوونه یا ثبوت لاس ته راتلی شي( د ایمپلیکیشن څلورمه کرښه).

له یوې رښتیا نیونې څخه د یوې نارښتیا ثبوت لاس ته راوړنه نارښتیا ده۰ (د ثبوت د

رښتیا جدول څخه) که د غوښتنو نفی نارښتیا وي، نو غوښتنه بیا په دې اوبیونې یا حل کې رښتیا ده۰

بیلګه : ناسیده ښوونه یا ثبوت

نیونه V : a , b دې رییل ګڼونه وي او وي دې: $a \geq 0, \quad b \geq 0$

ښوونه یا غوښتنه B :

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

اوبیونه : د غوښتنو نفیې ده $\frac{a+b}{2} \prec \sqrt{a.b}$

د پورته نابرابرون له څلورې یا مربع کولو له امله لاس ته راوړنه لرو:

$$(a+b)^2/4 < a.b$$

دواړه لورې له څلورو سره ضربوو، نو لاس ته راځی

$$(a+b)^2 < 4a.b$$

له څلورې وتنې یامربعوتنې څخه لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$a^2+b^2+2ab < 4ab$$

په دواړو لورو د 4ab کموني څخه لاس ته راځي

$$a^2-2ab+b^2 < 0$$

د نابرابرون کينه لور د څلورى • مربع په بڼه ليکل کيدى شي او هيڅکله له صفر څخه نه شي کوچنئ کيدى• دا په دې مانا، چې $(a+b)^2 < 0$ نارښتيا دئ يا غلط دى، نو له دې سره $(a+b) < ab$ نارښتيا دى يانې

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

رښتيا دئ •

۲ – غوښتنه B :د ۲ رينه يا جذر $\sqrt{2}$ ايرشنل دئ

اوبيونه يا حل : د غوښتني نفيي ده، چې : د ۲ رينه $\sqrt{2}$ ريشنل ګڼ دئ ( د ريشنل ګڼونو لپاره دې برخه ۳ وکتل شي)، نو بايد بيا دوه ټولريشنل ګڼونه q, p, د $q \neq 0$ سره شته وي، چې دا باوري شي:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow p^2 = 2q^2$$

له دې پورته برابرون سره $p^2$ يو جوړه( (جفت) ګڼ دئ• نو له دې امله p هم يو جوړه ګڼ دئ، ځکه چې يواځې د جوړه ګڼ مربع يا څلورى جوړه کيدى شي $p=2p'$ له مربع يا څلورئ کولو او پر ځاي اينوولو لاس ته راځي:

$$P^2 = 4p'^2،$$

$$2q^2 = 4p'^2$$

$$q^2 = 2p'^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



له اخرنی برابرون لاس ته راځي، چې q هم یو ځلوری یا مربع ګڼ دی٠ په دې پسې لرو p او q پر ۲ ویشونی دی، یانې پرویشپردی نه دی٠ که پرویشپردي ټول ګڼونه p اوq له $\sqrt{2}$

سره شته نه وي، نو دا ډول ټولګڼونه نه شي کيدی، چې شته یا موجود وي٠

۸ ۰ ۳ د پوره ایندکشن له لارې ښوونه

د پوره ایندکشن ثبوت یا حل د هغو غوښتنو لپاره کارول کيږي، چې د یوه ټاکلي ګڼ ( n0 صفر باید لږ د ن د پښی لاندې ولیکل شي) څخه د ټولو پیدایښتي ګڼونو لپاره باوري کيدی شي٠ یانې دلته نوینه داده، چې یوه وینا د لپاره که باور ولري، نو دا بیا د ټولو پیدایښت ګڼونو لپاره باور ي کیدی شي٠

بیلګه ۱ :

د ټولو $0 \geq n$ لپاره ۲ په توان دn له صفر لوي یا له صفر بسره برابر دي یعنې باور لري: $2^n \geq 0$

بیلګه : د ټولو $0 \geq n$ لپاره باور لري $1+3+5+\ldots 2n+1) = n^2$

د پوره ایندکشن د ښوونې لپاره د « پوره ایندکشن پرینځیپ بنسټ» مخ ته پروت دی:

که یوه وینا دn= n0 یا(په لاندې، که ن،ج، ته پورته شو،نو صفر په پښه کېلیکل شوی )
$n = n_0$ لپاره باور ولري او که د دې وینا د یوه په خوښه پیدایښتي ګڼ n = k لپاره اور لرلو څخه د n = k+1 لپاره باوریوالی ترې لاس ته راشي، نو دا وینا د ټولو پیدایښتي ګڼونو $n \geq n_0$ لپاره ریښتونې ده ٠

(c) ketabton.com: The Digital Library



په دې پسې په ترتيب د اينډکشن ښوونه په دوه پلونو يا قدمونو سرته رسيږي

۱ - د اينډکشن پيل

ښوول کيږي، چې دا وينا د $n \geq n_0$ لپاره باور لري

۲ – د اينډکشن پل

اوس بايد يو ايمپليکيشن يا لاس ته راوړنه وښوول شي۰ له دې امله د اينډکشن پل يا له برخه پلونو جوړ دی

۲ الف: د اينډکشن نيونه :

نيول کيږي، چې وينا د $n = k \geq 0$ لپاره باور لي او دا نيونه په V فرمولبند کيږي

يادونه V د نيونې لپاره ځاي پرځاي کيږي يا راوړل کيږي۰

۲ ب – د اينډکشن غوښتنه:

غوښتل کيږي، چې دا وينا د $n = k+1$ لپاره باور لري او دا غوښتنه په B فرمولبندي کوو۰ دا په ګوته کوو، چې B دلته د غوښتنې پرځاي ليکو

۲ ج – د اينډکشن ښوونه :

ښوول کيږي، چې B له A څخه لاس ته راځي: $A \Rightarrow B$

بيلګه ۱ :

۱ – د $n = 0$ لپاره باور لري $2^0 = 1 > 0$

۲ ۰ ۱ ۰ V ته :

$2^k > k$

و ۲ ۰ ۲ B ته

(c) ketabton.com: The Digital Library



$2^{k+1} > k+1$

۲ ۰ ۳ له $B <= V$ : له $2^k > k$ او $2 > 1$ څخه د زياتون له امله لاس ته راځي :

$2 + 2^k > k+1$

او له دې لاس ته راځي: $2.2^k > k+1, 2^{k+1} > k+1$

بيلګه ۲ :

۱ ۰ د $n = 1$ لپاره باور لري $1 = 1° = 1$

و ۲ ۰ ۱ V ته: $1+3+5++\ldots+(2k-1) = k^2$

و ۲ ۰ ۲ B ته:

و ۲ ۰ ۳ $V => B$ ته: له نيونې څخه د زياتوون 2k+1 زياتونې او له دې د ښي خوا د يوه بينومځلورى(-مربع) په څير انځورونې څخه لاس ته راځي:

$1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1=k^2+2k+1$

او له دې د ښى خوا انځورونې څخه د بينوم ځلورى(-مربع) لاس ته راځى :

$1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1)= (2k+1)^2$

يادونه : د V او B پر ځاي کړى شو، چې نيونه او غوښتنه وليکو، يانې مورږ درې څه لرو، چې نيونه غوښتنه او ښوونه ده٠ په هغه ورسره بلد ډول يې ښوونه د يوه پارابلم حل دى، چې ما اوبى يا اوبيونه بللى( اوبي پښتو ده او ښه کره، همدې وي يا لغات ته مناسب خپل د پښتو نوم دى، چې ورسره بلد هم يو، لکه ملګوبى، خړوبى، چې موخه ترې همدا اوبى دى او په نورو ژبو کې هم همداسې دى)

دلته د شميرپوهنې سم اند درس ته د پاى ټکى ږدو، کۀ نور څه مو ښه مخ ته راغله هغه به بيا د ټرنې په ډول ورسره مل کړو٠ ستاسو وړانديزونو ته هم سترګى په لار يم٠

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

## ۸ . ۴ تمرينونه

۱ – سيده وښايي

الف ) له $a + 1/a = b$ څخه لاس ته راځي $a^3 + 1/a^3 = b^3 - 3b$

ب ) د دوه تيرو کونجونو $\alpha$ ، $\beta$ لپاره صدق کوي

$$\sin(\alpha + \beta) < \sin\alpha + \sin\beta$$

۲ – ناسيده وښايي :

الف ) د ټولو x لپاره ، چې وي $0 < x < \infty$ ، صدق کوي

$$(3x - 4) / (2x + 4) > 1$$

ب ) $\sqrt{2}$ يو ايريشنل کمیت دی

۳ – د پوره اندکشن له لارې يې وښايئ

a) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{(n+1)\,n}{2}.$

b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{(2n+1)(n+1)\,n}{6}.$

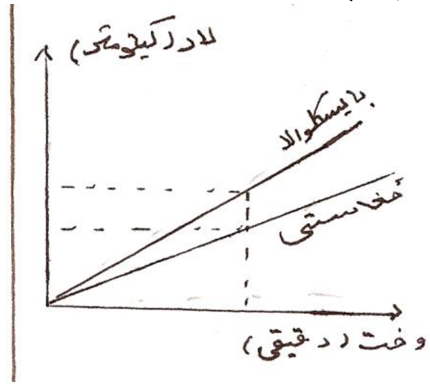
c) $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1.$

(c) ketabton.com: The Digital Library

## ۹ ۰ کرښیز- یا خطي-یا لاینیز مساوات د یوې متحولې سره

پیل بیلګه

یو بایسکل ځغلوونکی او یو پلی له یوه ځایه په همغه وخت خوزي یا حرکت کوي، کوم چی په ګراف کی کښل شوی دی( که د ګراف کښل راته ناشوني شول بخښنه غواړم۰ که بل چا دا کار وکولی شو نو دا به یې هم مرسته وي، خو پرې پوهیدل کومې ستونځې نه لري) بایسکل په ګړۍ کی ۱۵ کیلومتره ځغلي او پلی ۱۰ کیلو متره په ګړۍ کي ځغلي. دوي پس له یونیم ساعت سره یوځاي کیږي. هر یو څومره لار وهي او یو له بل څومره لرې دي؟



(c) ketabton.com: The Digital Library



دا موږ دلته، لکه په ځنو کتابونو کی چی د فنکشن د نامه لاندې يادېږي، په همغه نامه نه يادوو خو هدف به همغه وي که دا د برابرون يا مساوات په نامه وبولو .

وخت ) په دقيقه ( په t ښايو لار ) کيلومتر( په s ښايو د لارانځورونی ښځه په ګراف کی ځرګندېږي چی بايسکلځغلوونکی له ۶۰ دقيقو وروسته ۱۵ کيلو متره ځغليدلي يعني 15km /hاو پلی ۱۰ کيلو متره يعني 10km/h

غواړود هرڅه لمړی وښايو چی هر يو له يونيم ساعت وروسته څومره لار وهلي او بيا دويمي پوښتني ته ځواب ورکوو.

بايسکل ځغلوونکی به له دوه ساعته وروسته 2.15km = 30 kmځغليدلی وي او پلی به 2.10km=20kmځغليدلی وي بايسکل ځغلونکی به له tوخته وروسته t.15km

15.tkm=لار وهلي وي. دلته وختt خپلواك اوړيدونی يا نا پژندونکی او لار s بلواك اوړيدونی يا ناپيژندونکی يعني د t په واك کی دئ. دا کليمي به بيا د فنکشن او ځيرونو په برخو کی پوره تر ځيرني لاندې ونيول شي. د بايسکل ځغلوونکي وهلې لار، چی په r يې ښايو برابرون داسی ليکو:

$$S_r = 15.t; t \in Q_0^+$$

د بايسکل ځغلونکی وهلی لار، tچی د بايکلځغلولو وخت دی طبعاً زياتيز يا مثبت دئ ورته دپلي چی په lيې ښايو وهلي لار هم ټاکل کيږي،يعني د l وهلی لار:

$$S_l = 10.t; t \in Q_0^+$$

له دې سره مو وښوول چی دواړه له پيل ټکي له 1,5 ساعته يو له بل څومره لرې دي. وهل شوې لار :

د بايسکل ځغلوونکي $S_r = 15.1,5 = 22,5km$

د پلي $S_l = 10.1,5 = 15,0km$

ددې په تعقيب له 1,5 ساعته وروسته دواړه يو له بل 7,5 km لرې دي .

۹ . ۱ لاينيز- يا کربنيز مساوات :

د کربنيز مساوات فرمول د يوې اوښتونې يا مجهولې x سره داسی دئ

$$Ax = a \qquad (9.1)$$

دلته A , a حقيقي اعداد دي. د ( ۱ . ۶ ) برابرون اوبيونه ( حل) دا مانا لري چی ټول هغه حقيقي اعداد وښوول شي چی که په پورته ( ۱ . ۹) برابرون يا مساوات کې ځای په ځای شي، د مساوات شرايط پوره کړي. د حقيقي اعداد و بنسټيز قانون ( ۳ – مجه

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

برخه دې وکتل شي) په بنسټ کیدی شي چې د حقیقي عددد مساوات دواړه خواوي په یوه عدد سره ځل یا ضرب کړو. بی له دې چې مساوت زخمي شي. داچې ویش په د $\frac{1}{A}; A \neq 0$ ځل سره برابر دی نو لیکل کیږي

$$x = \frac{a}{A}; A \neq 0; .....................(9,2)$$ .............

دا د ( ۱ . ۹) یواځنی ممکن حل دی۰که په څټ یا برعکس A = 0 وي، نو دلته دوه حالتونه یو د بل توپیروو

۱ – که $a \neq 0$ وي: دا مساوات بیا داسی دي $0.x = a; a \neq 0$

دا یو مخامخوالی یا تضاد یا نوره هم ښه په څتوالی تشکیلوي ، نو په دې حالت کی حقیقي عدد x شته نه دی چی دا( ۱ . ۹ ) مساوات پوره کړي.

۲ - که a = 0 وي، نو بیا برابرون (۱ . ۹ ) لاندې شکل نیسي

0.x = 0

دا برابرون بیا د ټولو ریپلګنونو xلپاره پوره (ډك ) دی. یا برابرون پوره کوي.

دا بیا داسی هم لیکل کیږي : ( په خوښه x = (bel پس دا لاندې باور لري:

برابرون ( ۱. ۹ . ) د $A \neq 0$ لپاره یواځنی ټاکلې اوبیونه ( ۹ .۲ ) لريږد A = 0 او $a \neq 0$ لپاره اوبیونه نه لري د A = 0 او a = 0 لپاره هر ریپلګن x اوبیونه یا حل دی.

په دې لاس ته راوړنوکی، د یوې اووښتونې یا مجهولی سره د ریپل برابرونونو د ګڼلو ټوله تیورې خوندي ده .

یو لاینیز برابرون ( مساوات ) ( یو برابرن، چی د برابرونونو په دواړو خواوکی د لاینیزو برابرونونو ترمونو زیاتون $a_i + x_i + b_i$ پرت وي) دا مخکني نورمالفورم (۹ . ۱ ) مو له مخه مخ ته نه دی پروت، پس سړی په دواړو خواو د لاینیزو ترمونو د هدف په لور زیاتون ( همداسی کمون ) له لارې همغه مخکني نورمالفورم ته بیرته رااړوي، دا د II . 2 بنستیز قانون له مخی یو ورته فورمبدلون یا بڼه بدلون دی )( د اوبي یا حل ډیری تغیر نه دی خوړلی ) د بیلګي په توګه لاندې مساوات ورکړ شوی

$$a_1x - b_1x + c_1 - d_1 = a_2x - b_2x + c_2 - d_2$$

پس کیدی شي چی په دواړو خوا $b_2x + d_1$ ور زیات کړو او $a_2x + c_1$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

ترې کم کړو، نو لاس ته راځي

$$a_1x - b_1x - a_2x + b_2x = c_2 - d_2 - c_1 + d_1;......................(9.3)$$

دلته هغه د x لرونکی غړي د مساوات په کيڼ لور او ثابت د برابرون په ښي لورپراته دي. داسی ليکو

$$A = a_1 - b_1 - a_2 + b_2; a = c_2 - d_2 - c_1 + d_1$$

نو دا برابرون ( ۳ . ۹) د برابرون (۱ . ۹) سره (ته) کټمټ (ورته) دی، که په لاندې فورم يا بڼه يو مساوات ورکړ شوی وی

$$\frac{a_1}{a_2}x = \frac{b_1}{b_2}$$

( دا ټيك هلته موخه ور يا هدفمند دی چی $a \neq 0; b \neq 0$ وي) . نو برابرون د x په لور حل کيدلی شي ، که دا په a2 ځل شي او د a1 |=0 په حالت کی په a1 وويشل شي:

$$x = \frac{a_2b_1}{a_1b_2}$$

بيلګه ۹ . ۱ :

برابرون $\frac{a^2x - b^2}{a} - \frac{a(b-ax)}{b} + \frac{b^2}{a}$ هلته موخه ور دی چی $a \neq 0; b \neq 0$ وي. ددې لپاره چی د ماتلاندې ځخه ځانونه خلاص کړو، نو پورته ورکړ شوي برابرون د ګډماتلاندي a.b سره ځل کوو:

$$b(a^2x - b^2) - a^2(b - ax) + b^2 = a^2b$$

$$a^2bx - b^3 - a^2b + a^2x + b^3 = a^2b$$

اوس برابرون ترتيبيږي او راټوليګی، xله نوکانو ځخه راوځي

$$a^2bx + a^3x = a^2b + b^3 + a^2b - b^3$$

$$a^2(ax + b) = 2a^2b$$

د $a \neq 0$ له امله کيدی شي په $a^2$ وويشل شي (a+b)x=2b

دا د لاينيز برابرونونو بنسټيزه بڼه ( فورم) ( ۱ . ۹) ده

که ( $a + b \neq 0, (a \neq -b)$ وي ، نو( x = 2b /(a + b )

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

یوګونی یا یواځنی اوبیونه یا حل دی
که( a = -b ) a + b = 0 ، نو د $b \neq 0$ له امله اوبیون شته نه ده .
هغه حالت چی ناپاي زیاتې اوبیونې یا حلونه منځ ته راځي( د x =په خوښه) ، د نیونی یا فرضیي له امله چی باید $b \neq 0$ وي، موجود نه دی.
پام:
په دې هکله زیاتې بیلګی کیدی شي راوړل شي، چې ضریب یا ځله وونې په مختلفو توانونو وي۰ زه دلته یواځې دومره یادونه کوم، چې په مساواتو کې، چې اوښتونی یا متحولې ولري، همغهسی شمیرل کیږي، لکه په ریبلعددونو کې۰
دلته هم باید دې ته پام وي، چې ماتلاندې صفر نه شي۰ که چیرې اړیینې وې او یا ګرانو لوستونکو یې راوړل وغوښتل، نو زه به بیا دا کار سرته ورسوم او بیلګي به هم راوړم او که چیرې کوم د شمیرپوهنې مینه وال په دې هکله د پوښتنو ځوابونه غوښتل، زه به وهڅیږم او دا کار به هم سر ته ورسوم، که لوي څښتن غوښتل۰ زه دومره یادونه کوم، چې په دې هکله زما د شمیرپوهنې بنسټیز کتاب کې زیاتې بیلګي راوړل شوي، خو نه پوهیږي، چې دا کتاب به چا ته ورسیږي او که نه

بیلګه 9 . ۲ :
برابرون $(x/a)-((a-x)/2bc)+(a-x)/3c=1$ یوائې
د $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ لپاره موخه ور دی.
ددې لپاره چی مات لاندې له منځه یوسو، نو مساوات د ا.م.ل. 6abc ا(صلي ماتلاندې)
سره ځل کوو: $6bcx-3a(a-x)+2ab(a-x)=6abc$
ورپسی نور، په لاندې ډول، د څرګندو شمیرلارو یا - قاعدو له لارې لاس ته راځي:

$$6bcx-3a^2+3ax+2a^2b-2abx=6abc$$

$$(6bc+3a-2ab)x=6abc+3a^2-2a^2b,$$

$$(6bc+3a-2ab)x=a(6bc+3a-2ab)$$

دا بیرته د لاینې مساوات ( ۹ . ۱ ) بنسټیزه ده، او له دې امله صدق کوي:
د $6bc+3a-2ab \neq 0$ لپاره x=a د مخ ته پراته مساوات یوائنی حل دی.
د $6bc+3a-2ab=0$ لپاره د $0x=0$ له امله هر ریبل کې x اوبیونه ده.
نو لرو x=a د $6bc+3a-2ab \neq 0$ لپاره د $6bc+3a-2ab=0$ لپاره x په خوښه
دلته د څیړل شوو برابرونونو، چی په ساده ډول یی لاینیزوالی یا لاینیزتوب پیژندل کیږي، په ځنګ کی برابرون شته چی په اصل (پرینځیپ) کی کرښیز یا لاینیز نه دي

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

مګر په لاینیز مساوات یا برابرونونو اړول کیدی شي. دلته ددې غوښتنو په څنګ کی چی د ناپیژندونکو ضریبونو a,b,c ..... لپاره شوي، زیات وخت په x هم شرطونه ایښول کیږي.

ددي لپاره لاندې کی درې ساده بیلګي راوړو:

بیلګه ۹ . ۳ :

برابرون $(8x - 9)(3x - 4) - (5x - 6)^2 = (4 + x)(3 - x) - 9$

د لومړي حُل لپاره څلوری برابرږن یا مربع مساوات دی، څکه چی څلوری( مربع) غړي لري. د یو له بل څلولو یا ضربولو وروسته څلوری غړي له منځه ځي. یو لایني مساوات د یوې ځانګړي سره سره پاتي کیږي:

$$24x^2 -32x-27x+36 - (25x^2 - 60x + 36) = 12 - 4x +3x -x^2 -9$$

$$-x^2 + x = 3 - x - x^2$$

$$2x = 3$$

$$x = 3 / 2$$

بیلګه ۹ . ۴ : برابرون $(2x -a ) / (x-b) = 1$ یواځي هلته هدفمند دی که حل x دا شرط $x \neq b$ پوره کړي. نو بیا لرو: $2x-a=x-b \Rightarrow x=a-b$

د $x \neq b$ له امله باید باوري وي $a - b \neq b$ له دې امله لرو $a \neq 2b$ پس ورکړ شوی مساوات د $a \neq 2b$ لپاره یواځنی ټاکلی حل $x = a-b$ لري او پرته له دې ( $a = 2b$) حل نه لري.

بیلګه ۹ . ۵ :

مساوات $(a / x) + (b / x) - (c / x ) = 1$

یواځي هلته هدفمند دی چی $x \neq 0$ وي. ددې نیونو لاندې باور لري . $x = a + b -c$ دا نو د $x \neq 0$ له امله یواځي هلته حل دی، کله چی $a + b \neq c$ وي. پس ورکړ شوي مساوات یواځي د $a + b \neq c$ لپاره یواځنی ټاکلی حل $x = a + b -c$ لري، په غیر له دې ( $a+b=c$) حل یا اوبیونه نه لري

بیلګه ۹ . ۶ : د لاندې مساوات څیرنه:

$$\frac{b^3c^2x - \frac{1}{a^2}}{121500ab^4c^3} - \frac{a^2x - \frac{1}{b^3c^2}}{2880a^3bc} + \frac{abcx - \frac{1}{ab^2c}}{5400(abc)^2} = 0,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

چې ټيك د $abc \neq 0$ لپاره يو هدف لري، بايد د اصلي مات لاندې پيدا كولو لپاره د مات لاندې ك.ګ.څ. تكرار شي

$$12150ab^4c^3 = 2^2.3^5.5^3.a.b^4.c^3$$

$$2880a^3bc = 2^6.3^2.5.a^3.b.c$$

$$5400(abc)^2 = 2^3.3^3.5^2.a^2.b^2.c^2$$

---

$$................ = 2^6.3^5.5^3.a^3.b.c^3 = 64.243.125.a^3bc^3$$

دا پورته ګڼ اصلي ماتلاندې (ا.م.ل) دئ

كه برابرون د ا.م.ل. سره ځل شي، نو ماتونه له منځه ځي او لاس ته راځي:

$$16a^2(b^3c^2x - \frac{1}{a^2}) - 225b^3c^2(a^2x - \frac{1}{b^3c^2}) + 120c.(abcx - \frac{1}{ab^2c}) = 0$$

د نوكانو يو له بل ځلولو راټول، ترتيبونه او ويشنه د x تر څنګ ولاړو فاكتورونو يا ضريبونو $(A = 89a^2b^3c^2 \neq 0)$ څخه د نيونو سره سم دا لاندې لاس ته راوړكيږي

$$x = 1 / a^2b^3c^2,\ \ abc \neq 0$$

د دې وظيفي لپاره د حل نور امكانات نه شته.
تر اوسه مو هغه ماتونه وڅيړل چې مات لاندې يي له ځلونو جوړ وو، غواړو چې اوس داسې ماتونه وڅيرو چي مات لاندې يي له زياتونونو جوړ وي، چې د نوكانو له لارې په ځلوونو ټوټه كيدلي يا تجزيه كيدلی شي .

بيلګه ۹ . ۷ :
برابرون

$$\frac{a^2(2bx-1)}{a^4b^2x^2-b^2} + \frac{b}{a^2b+b} = \frac{a^2bx}{a^2bx-b} + \frac{b^2(2ax-3)}{a^4x^2x^2-b^2} - 1$$

ټيك د دې نيونو سره صدق كوي $ab \neq 0$ , $|x| \neq 1 / a^2$. :

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

اصلي مات لاندې) ا م ل ( په لاندې ډول پیداکوو

$$a^4b^2x^2 - b^2 = b^2.(a^4x^2 - 1)$$

$$= b^2.(a^2x+1)(a^2x-1)$$

$$a^2bx + b = b.(a^2x+1)$$

$$a^2bx - b = b.(a^2x-1)$$

---

$$b^2.(a^2x+1).(a^2x-1) = b^2(a4x^2 - 1 =$$

اصلي ماتلاندی)ا م ل

د اصلي مات لاندې مساواتو له نوکانو څخه راوتلو) چي یو یا څو غړی د نوکانو دباندې او نور په نوکانو کی بندیږي( ، لندېونو او ځلوونو له لارې لاس ته راځي

$$.....a^2(2bx-1)+b^2(a^2x-1) = a^2b^2x(a^2x+1)+b^2(2ax-3)-b^2(a^4x^2-1)$$

$$2a^2bx - a^2 + a^2b^2x - b^2 = a^4b^2x^2 + a^2b^2x + 2ab^2x - 3b^2 - a^4b^2x^2 - b^2$$

$$.............2a^2bx - 2ab^2x = a^2 - b^2$$

$$.................2ab(a-b)x = (a+b)(a-b)$$

$$..................................x = \frac{a+b}{2ab}$$

د $b \neq a$ او $0 \neq ab$ لپاره( دا د نیونو له لارې تل پوره دی )که $a = b$ وي، نو $x$ د $0.x = 0$له امله په خوښه ارزښتونه نیولی شي، بی له هغو چی په بنسټیزو نیونو کی له نیونو د باندې ساتل شوي وي) یعني په مساوات کی ځاي ورته نه وي(. په دې حالت کی د $x$مطلقه ارزښت د کېونو $a = b$ د په څېر ارزښت سره نه شي مساوي کیدی .د $x$ لپاره نیول شوې نیونی د حل ورکولو کی باید په پام کی نیول شوي وي دا په دې مانا چي باید تل پوره وي:

$$\pm 1 / a^2 \neq \frac{a+b}{2ab}$$

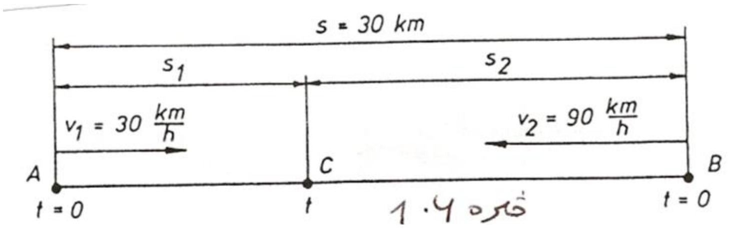
بیلګه ۹ . ۸ :

دوه ګاډي تمځایونه Aاو B یو له بل km30 لرې دي. د A څخه یو بارګاډی په ساعت کی د دیرش کیلومتره 30km/h په یوه ثابت سرعت یا چټکتیا باندې د B په لور

(c) ketabton.com: The Digital Library



خوزیږي. د Bڅخه یو تیز ګاډی D د 90km/h ثابت سرعت سره دA په لور حرکت کوي. که دواړه ګاډي په همغه وخت کي حرکت وکړي ، کله به یو بل سره مخامخ شي؟دلته درې فزیکي لویي یو رول لري : لار، وخت او سرعت. دا به په سومبولونو t , s او vسره وښول شي. ددې شي ځانګړتیاوې لپاره ځیره ځېره وکاږئ




پوښتنه » چیرته « د دواړو ګاډو د یوځایوالی ټکی C ته متوجه ده. دا کیدی شي د A څخه و C ته لریوالي(د بار کاډي لارs1 ) یا د Bلریوالي وC څخه( د تیزګاډي D لار s2) سره وشمیرل شي. پوښتنه »کله« د ګاډو یوځایوالي وخت t ته متوجه ده. دا هدفمند دی کی د وخت لپاره د وخت کمون له روانیدو تر یوځایکیدو وټاکو. دلته درې اوړېدونې یا مجهولی مخ ته لرو s1 , s2 او t .

د پورته ورکړشو شي نیونی سره مناسب لاندې اړیکی باور لري:

$$v_1 = s_1 / t \quad , v_2 = s_2 / t \quad , \quad s_1 = + s_2 = s$$

د باورې ارزښتونو مارونې یا استعمال سره لاس ته راځي

$$s_1 = 30\, t \;\; , s_2 = 90\, t \;\; , s_1 + s2 = 30$$

(دلته د اندازی یونونه(واحدونه ) پریښوول کیږي. او پریکړه کوو چی لار په کیلو متر او وخت په ساعت ښایو )!

دا درې مجهولی s1 , s2 او t دی د دې برابرونونو یا مساواتو سره چی حل به یی په همداسی په برخه ۱۱ کی ورکړشوی وي، مګر دا دومره ساده دې چي د یوې له پیژندلو سملاسي نورې هم شمیرل کیدی شي. کیدی شي چی دا مساوات په یوې مجهولی مساواتو بیرته واړول شي. ددې مجهولی x په ځای کیدی شي s1 , s2 او t وټاکل شي .

که ولیکو s1 = x ، نو د اخري برابرون څخه لاس ته راځي .s2 = 30 - x دا په لمړنیو دوه مساواتو کی ځاي په ځاي کوو او دواړه د t په لور حلووو:

$$t = s1 / 30 = s2 / 90 = x / 30 = (30 - x) / 90$$

نو لرو: $x / 30 = (30-x) / 90$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

لاینیز ټاکنبرابرون یا ټاکنبرابرون د x لپاره دی، چی ساده حل کیدی شي:

$30x = 30 - x$ , $4x = 30$ $x = 7{,}5$

نو لرو

$s_1 = 7{,}5$ km , $s_2 = 22{,}5$ km , $t = (7{,}5 / 30)h = 1h/4 = 15$ min

که ولیکو $s2 = x$ ، نو شمیرنه لاندې لار غوره کوي یا بهیر نیسي:

$s_1 = 30 - x$ , $t = s_1 / 30 = s_2 / 90 = (30 - x)/ 90$

$3(30 - x) = x$

$90 = 4x$

, $x = 22{,}5$

$s_2 = 22{,}5$km , $s_1 = 7{,}5$ km , $t = (22{,}4/90)h = 1h/4 = 15$ min

که بالاخره وخت $t = x$ د اووښتونې یا ناپیژندونی په څیر وټاکو، نو بار لري یا صدق کوي: $s1 + s2 = 30x + 90x = 30$

$20x = 30$

$x = 30 / 120 = 1/ 4$ , $t = (1/4)h = 15$ min

$s1 = 30t = 30/4$ km$=7{,}5$km

$s2 = 90t = 22{,}5$ km

دواړه ګاډي له ټکی A څخه د $0{,}25$ h$= 15$ min حرکت وروسته په $7{,}5$ km لریوالی یو بل سره مخامخ کیږي

بیلګه ۹ . ۵ – مساوات $(a/x)+(b/x)-(c/x)=1$

یواځې هلته هدفمند دی چی $x \neq 0$ وي. ددې نیونو لاندې باور لري $x = a + b - c$ . دا نو د $x \neq 0$ له امله یواځې هلته حل دی، کله چې $a + b \neq c$ وي. پس ورکړ شوي مساوات یواځې د $a + b \neq c$ لپاره یواځنی ټاکلی حل $x = a + b - c$ لري، په غیر له دې $(a+b=c)$ حل نه لري.

بیلګه۹ . ۶ – د لاندې مساواتو څیړنه

$$\frac{b^3c^2x - \frac{1}{a^2}}{121500ab^4c^3} - \frac{a^2x - \frac{1}{b^3c^2}}{2880a^3bc} + \frac{abcx - \frac{1}{ab^2c}}{5400(abc)^2} = 0,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

چې تيک د $abc \neq 0$ لپاره يو هدف لري، بايد د اصلي مات لاندې پيدا کولو لپاره د مات لاندې ک.ګ.خ. تکرار شي.

$121500ab^4c^3 = 2^2 . 3^5 . 5^3 . a . b^4 . c^3$

$2880a^3bc = 2^6 . 3^2 . 5 . a^3 . b . c$

$5400\, a^2b^2c^2 = 2^3 . 3^3 . 5^2 . a^2b^2c^2$

---

اصلي ماتلاندې لنډ «ا م ل» $= 2^6 . 3^5 . 5^3 . a^3b . c^3 = 64.243.124.a^3bc^3$

که مساوات د ا.م.ل. سره ځل شي، نو ماتونه له منځه ځي او لاس ته راځي

$$16a^2 \cdot \left(b^3c^2x - \frac{1}{a^2}\right) - 225b^3c^2 \cdot \left(a^2x - \frac{1}{b^3c^2}\right) + 120ab^2c \cdot \left(abcx - \frac{1}{ab^2c}\right) = 0.$$

د نوکانو يو له بل خلولو راټول، ترتيبونه او ويشنه د x تر ځنګ ولاړو فاکتورونويا ضريبونو ( $A = 89a^2b^3c^2 \neq 0$ ) ځخه د نيونو سره سم دا لاندې لاس ته راوړکيږي

$$x = 1 / a^2b^3c^2 \quad , \quad abc \neq 0$$

د دې وظيفې لپاره د حل نور امکانات نه شته.

تر اوسه مو هغه ماتونه وڅيړل چې مات لاندې يې له څلونو جوړ وو، غواړو چې اوس داسې ماتونه وڅيړو چې مات لاندې يې له زياتونونو جوړ وي، چې د نوکانو له لارې په څلونو توټه کيدلي يا تجزيه کيدلې شي.

بيلګه ۹ . ۷ :

$$\frac{a^2(2bx-1)}{a^4b^2x^2-b^2} + \frac{b}{a^2bx+b} = \frac{a^2bx}{a^2bx-b} + \frac{b^2(2ax-3)}{a^4b^2x^2-b^2} - 1$$

تيک د دې نيونو سره صدق کوي: $ab \neq 0$ , $|x| \neq 1/a^2$.

اصلي مات لاندې( ا م ل ) په لاندې ډول پيداکوو:

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

$$a^4b^2x^2 - b^2 = b^2.(a^4x^2 - 1)$$
$$= b^2.(a^2x+1)(a^2x-1)$$
$$a^2bx + b = b.(a^2x+1)$$
$$a^2bx - b = b. \quad (a^2x-1)$$

---

اصلي ماتلاندی(ا م ل) $= b^2.(a^2x+1).(a^2x-1) = b^2(a^4x^2 - 1)$

د اصلي مات لاندې مساواتو له نوکانو څخه راوتلو ( چې یو یا څو غړی د نوکانو دباندې او نور په نوکانو کی بندیږي ) ، لنډونو او خلوونو له لارې لاس ته راځي:

$$
\begin{aligned}
a^2 (2bx - 1) + b^2 (a^2 x - 1) &= a^2 b^2 x(a^2 x + 1) + b^2 (2ax - 3) - b^2 (a^4 x^2 - 1) \\
2a^2 bx - a^2 + a^2 b^2 x - b^2 &= a^4 b^2 x^2 + a^2 b^2 x + 2ab^2x - 3b^2 - a^4 b^2 x^2 + b^2 \\
2a^2 bx - 2ab^2 x &= a^2 - b^2 \\
2ab (a - b) x &= (a + b) (a - b) \\
x &= \frac{a + b}{2ab}
\end{aligned}
$$

د $a \neq b$ او $ab \neq 0$ لپاره ( دا د نیونو له لارې تل پوره دی)

که $a = b$ وي، نو $x$ د $0.x = 0$ له امله په خوښه ارزښتونه نیولی شي، بې له هغو چې په بنستیزو نیونو کې له نیونو د باندې ساتل شوي وي( یعني په مساوات کی ځاي ورته نه وي). په دې حالت کی د $x$ مطلقه ارزښت د کنونو $a = b$ د په څټ ارزښت سره نه شي مساوي کیدی.

د $x$ لپاره نیول شوي نیونې د حل ورکولو کې باید په پام کې نیول شوي وي؛ دا په دې مانا چې باید تل پوره وي:

$$\pm 1 / a^2 \neq (a+b) / 2ab$$

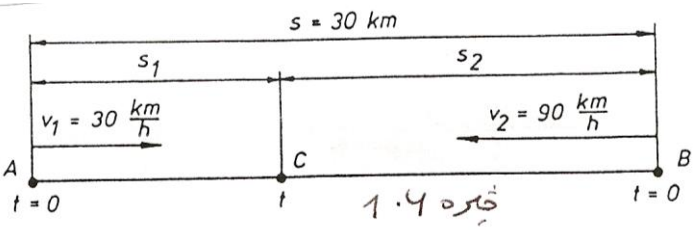
(c) ketabton.com: The Digital Library



---

**بیلګه ۶ . ۸ :** دوه ګاډي تمځایونه A او B یو له بل 30 km لرې دي. د A څخه یو بارګاډی په ساعت کی د دیرش کیلومتره 30 km/h په یوه ثابت سرعت یا چټکی باندې د B په لور حرکت کوي. دB څخه یو تیز ګاډی D د 90km / h ثابت سرعت سره د A په لور حرکت کوي. که دواړه ګاډي په همغه وخت کي حرکت وکړي ، کله به یو بل سره مخامخ شي؟

دلته درې فزیکي لویې یو رول لري : لار ، وخت او سرعت. دا به په سومبولونو s , t او v سره وښول شي. ددې شي ځانتیوني لپاره ځېره ۶ . ۱ ورکړ شوې.



ځېره ۱.۶

پوښتنه « چیرته » د دواړو ګاډو د یوځایوالی ټکی C ته متوجه ده. دا کیدی شي د A څخه و C ته لریوالي(د بار ګاډي لار $s_1$ ) یا د B لریوالي و C څخه ( د تیزګاډي D لار $s_2$ ) سره وشمیرل شي.

پوښتنه «کله» د ګاډو یوځایوالي وخت t ته متوجه ده. دا هدفمند دی کی د وخت لپاره د وخت کمون له روانیدو تر یوځایکیدو وټاکو.

دلته درې مجهولی مخ ته لرو $s_1$ , $s_2$ او t . د پورته ورکړشو شي نیوني سره مناسب لاندې اړیکی باور لري:

$$v_1 = s_1 / t \quad , v_2 = s_2 / t \quad , \quad s_1 = + s_2 = s$$

د باوری ارزښتونو استعمال سره لاس ته راځي

$$s_1 = 30\,t \ , \ s_2 = 90\,t \quad , s_1 + s_2 = 30$$

( دلته د اندازی یونونه پرېښوول کیږي. او پریکړه کوو چی لار په کیلو متر او وخت په ساعت ښایو!)

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

دا درې مجهولې $s_1$ , $s_2$ او $t$ دی د درې مساواتو سره چې حل به يې په ۶ الف او يا همداسې په برخه ۱۱ کې ورکړشوی وي، مګر دا دومره ساده دي چې د يوې له پيژندلو سملاسي نورې هم شميرل کيدی شي. کيدی شي چې دا مساوات په يوې مجهولې مساواتو بيرته واړول شي. ددې مجهولې x په ځای کيدی شي $s_1$ , $s_2$ او $t$ وټاکل شي. که وليکو $s_1 = x$ ، نو د اخري مساوات څخه لاس ته راځي $s_2 = 30 - x$. دا په لمړنيو دوه مساواتو کې ځاي په ځاي کوو او دواړه د $t$ په لور حلووو:

$$t = s_1 / 30 = s_2 / 90 = x / 30 = (30 - x) / 90$$

نو لرو

$$x / 30 = (30 - x) / 90$$

لايني ټاکنمساوات د x لپاره دي، چې ساده حل کيدی شي:

$$30x = 30 - x\ ,\ 4x = 30$$

$$x = 7{,}5$$

$$s_1 = 7{,}5\ \text{km},\quad s_2 = 22{,}5\ \text{km},\quad t = \frac{7{,}5}{30}\text{h} = \frac{1}{4}\text{h} = 15\,\text{min}.$$

نو باور لري:

که s2=x کيږدو،نو شميرنه په لانې ډول ځغلي يا لاندې لار غوره کوي:

$$s_1 = 30 - x,\quad t = \frac{s_1}{30} = \frac{s_2}{90} = \frac{30 - x}{30} = \frac{x}{90}\ ,$$

$$\begin{aligned} 3\,(30 - x) &= x, \\ 90 &= 4x, \\ x &= 22{,}5, \end{aligned}$$

$$s_2 = 22{,}5\ \text{km},\ s_1 = 7{,}5\ \text{km},\quad t = \frac{22{,}5}{90}\ \text{h} = \frac{1}{4}\ \text{h} = 15\,\text{min}.$$

که بالاخره وخت د نامعلومې په څير وټاکل شي، يعنې x=t ، نو باور لري:

$$\begin{aligned} s_1 + s_2 &= 30x + 90x = 30, \\ 20\,x &= 30, \\ x &= \frac{30}{120} = \frac{1}{4},\quad t = \frac{1}{4}\ \text{h} = 15\ \text{min}. \end{aligned}$$

$$s_1 = 30\,t = \frac{30}{4}\ \text{km} = 7{,}5\ \text{km},$$

$$s_2 = 90\,t = 22{,}5\ \text{km}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



--------------------------------------------------------------------------------

دواړه ګاډي له ټکي A څخه د 0,25h=15min خوزښت(حرکت) وروسته په 17,5kmکې يو بل سره مخامخ کيږي.

۹ . ۲ تمرينونه

۱ . ناکرښيز يا نالاينيز مساوات د يوې مجهولې سره

لاندې مساوات حل کړئ aاوb نتيجه يې د ازمايئ! د مجهولو ضريبونو سره ارزښتونه راوباسئ; چې a او b يې نه شي غوره کولی يا نيولی.

دا ورکړئ چې مساوات د کومو a او b لپاره يواځنی حل لري، حل نه لري او يا ناپای ډېر حلونه لري.

همداسې تلنه طا رويه د نورو مجهولو ضريبونوسره هم وکړئ، چې په نورو برخو کې منځ ته راځي.

۱ . ۱ ــبې له کسرونو يا ماتونو مساوات حل کړئ.

1.1.1. a) $8\left(\frac{1}{2}x-1\right)-2(x-1)=0$

b) $(3-x)(x+4)-9=(3x-4)(8x-9)-(5x-6)^2$

c) $2a(x+3)=(3+x)(5+2a)$

d) $3a-(7b+11a)-(3x-12b-9c)=(3x-8a)+5b-(3c-6x)$

1.1.2. a) $(a-x)(x+c)=2c(a-x)-(b-x)(c-x)$

b) $a(x+1)(ax+b)+b(a+bx)(1-x)=x^2(a-b)(a+b)$

c) $(x+a)(a-x)-b(b-a)=(x+a)(b-x)$

d) $a^2(x-a)+ab^2=b^2(x+b)-a^2b$

۱ . ۲ – کسري مساوات په مخرج کې د ټاکلو ضريبونو او فاکتورونو سره .

1.2.1. a) $\frac{3x-16}{3}+\frac{2x-10}{5}=3-\frac{x+1}{15}$  b) $4-\frac{10-3x}{5}=3-\frac{10-7x}{10}+\frac{x}{2}$

c) $\frac{2x+1}{2}+\frac{3x+1}{4}+\frac{5x+1}{8}=1-\frac{7x+1}{8}$  d) $\frac{4x+1}{3}+\frac{6x-1}{2}=5+5\cdot\frac{8x-10}{9}$

1.2.2. a) $\frac{4x-3}{20}-\frac{1}{12}(4x-5)=1-\frac{3}{5}(2x+11)$

b) $3(6\frac{1}{2}+x)-\frac{7}{3}(2x-\frac{19}{2})-\frac{8}{3}x+\frac{5}{3}=0$

c) $\frac{7x-16}{3}-\frac{4}{5}(x+1)+6=\frac{3x}{2}$  d) $\frac{3x}{4}-\frac{4}{3}(x-4)=3$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

1.2.3. a) $\frac{3x-7}{5}-\frac{7-4x}{7}=\frac{5x-11}{10}-\frac{19-10x}{14}$

b) $\frac{17+4x}{10}-\frac{7+x}{5}=\frac{7x+13}{25}-\frac{5+x}{20}$

c) $\frac{2x-11}{15}-\frac{x}{5}+\frac{59}{40}=\frac{8x-59}{30}-\frac{16x-145}{24}$

d) $\frac{4x+4}{5}-\frac{5x-4}{55}=\frac{2x+9}{4}-\frac{12x-3}{44}$

1.2.4. a) $\frac{5x+17}{3}-\left(\frac{3x+8}{2}-3\right)=\frac{3x+12}{2}-\left(\frac{x+4}{6}+3\right)$

b) $2-\left(\frac{3x+8}{4}-\frac{2x+2}{3}\right)=1-\left(\frac{7x+20}{8}-\frac{2x-7}{3}\right)$

c) $\frac{4-x}{2}-\left(\frac{8-x}{3}-\frac{x+2}{4}\right)+\left(\frac{8-x}{6}-\frac{3(2+x)}{8}\right)+x=1$

d) $\frac{10-14x}{8x}-\left(\frac{6}{5}+\frac{4}{2x}\right)=\frac{5}{8x}-\left(\frac{12}{5}+\frac{14x+1}{10x}\right)$

۱ . ۳ – کسري – یا ماتمساوات، چې په مخرج کې یې نا ټاکلي ضریبونه او فاکتورونه ورکړشوې وي.

1.3.1. a) $\frac{ax-1}{bcx}+\frac{bx-1}{acx}+\frac{cx-1}{abx}=0$ b) $\frac{ax-b}{bcx}+\frac{bx-c}{acx}+\frac{cx-a}{abx}=0$

c) $\frac{3(x-b)}{a}-\frac{2(x-a)}{b}-1=0$ d) $\frac{a-b^2}{x}-\frac{c-b^2}{x}-b=0$

1.3.2. a) $\frac{bx-a}{a}+b=bx-1$ b) $\frac{x-a}{a}-a=\frac{x-b}{b}-b$

c) $\frac{a+b}{x}-a=ab-\frac{a-b}{x}$ d) $\frac{ax^2-bx+1}{a}=\frac{bx^2-ax+1}{b}$

1.3.3. a) $\frac{bx-a^2}{a}+\frac{ax-b^2}{b}=\frac{b-ab}{a}+\frac{a-ab}{b}$

b) $\frac{20a-x}{5a}+\frac{6b-cx}{2b}=10-\frac{9c-ax}{3c}$

c) $\frac{a^3}{b}(x-1)-\frac{b+c}{b}(1-2x)=b^2(1-x)+\frac{b+c}{b}$

d) $\frac{x(b-a)}{ab}+\frac{b(c-x)}{ac}=\frac{x+b}{a}-\left(\frac{b}{c}+\frac{x}{b}\right)$

۱ . ۴ - کسري – یا ماتمساوات، چې په مخرج کې یې نا ټاکلي ضریبونه او فاکتورونه ورکړشوې وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

1.4.1. a) $\frac{5}{x+2}+\frac{3}{2(x+2)}=\frac{1}{2}-\frac{7}{2(x+2)}$ b) $\frac{12x+5}{16x-15}-\frac{16x+1}{15}=\frac{3-2x}{5}-\frac{2x-1}{3}$

c) $\frac{10-2x}{3}+\frac{13+2x}{7}=\frac{14x+26}{2x+21}-\frac{17+8x}{21}$

d) $\frac{2x^{n}+7x^{n-1}}{9}+\frac{7x^{n}-44x^{n-1}}{5x-14}=\frac{4x^{n}+27x^{n-1}}{18}$

1.4.2. a) $\frac{8x+7}{9x^{2}-4}=\frac{16}{15x-10}$ b) $\frac{24-5x}{6-2x}-5=\frac{34-14x}{9-3x}$

c) $\frac{x+4}{12x+4}-\frac{x-4}{3x+1}=5$ d) $\frac{10x-11}{12x+18}=\frac{3}{2}-\frac{4x+1}{6x-9}$

e) $\frac{x}{x-2}-\frac{x-2}{3x-6}=\frac{1}{6}$ f) $\frac{8-x}{5-10x}=2-\frac{5}{3-6x}$

g) $\frac{12x}{10x+5}+\frac{6x-10}{2x+1}-\frac{2x+25}{12x+6}+\frac{10x-1}{8x+4}=2$

h) $\frac{3x-2}{5x+10}-10=\frac{2x+1}{3x+6}+\frac{2(1-4x)}{x+2}$ i) $\frac{6x-1}{4x-6}+\frac{10x-7}{6x-9}=11-\frac{14x+1}{8x-12}$

j) $\frac{3x}{2x-\frac{1}{2}}-\frac{16x^{2}}{3(4x-1)}=\frac{4(1-x)}{3}-\frac{4}{12x-3}$

1.4.3. a) $\frac{x-2}{x+2}-\frac{x+4}{x-2}=2\frac{x-38}{x^{2}-4}$ b) $\frac{12}{x+4}-\frac{x+4}{x-4}+\frac{x^{2}}{x^{2}-16}=0$

c) $\frac{5x^{2}-120}{10-x}+\frac{3x^{2}+80x}{10+x}=\frac{2x^{3}+160}{100-x^{2}}$

d) $\frac{15x+2}{5x-2}+\frac{25x-2}{5x+2}=\frac{200x^{2}-25x+18}{25x^{2}-4}$

e) $\frac{16x^{2}-20x+4}{4x^{2}-16}=\frac{2x-1}{2x-4}+\frac{3(2x+1)}{2(x+2)}$

f) $\frac{7x^{2}+8}{2(x^{2}-1)}=\frac{2(x+1)}{x-1}+\frac{3x-4}{2x+2}$

g) $\frac{16x^{2}-6x}{2x+1}-\frac{6x}{1-2x}=\frac{32x^{3}-16x^{2}+4x+16}{4x^{2}-1}$

۱ . ۴ . ۴ –

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

a) $\frac{2x-5}{x-5}+\frac{3x-5}{x-9}=\frac{5x^2-39x+30}{x^2-14x+45}$

b) $\frac{2x-9}{x-12}+\frac{x-6}{x-24}=\frac{3x^2-87x-36}{x^2-36x+288}$

c) $\frac{11x+6}{x^2-3x-54}=\frac{3x-14}{2x-18}-\frac{3(x+2)}{2x+12}$

d) $\frac{7x-15}{3x-6}+\frac{8x-21}{3x-3}+\frac{10x+21}{3x^2-9x+6}=5$

e) $\frac{1}{3x+21}+\frac{1}{3(x-5)}-\frac{x+6}{4(x^2+2x-35)}=0$

f) $\frac{136x^2-4x-266}{48x^2-32x+5}=\frac{14x-19}{4x-1}-\frac{8x+25}{12x-5}$

g) $\frac{8x-3}{6x-4}+\frac{6x-4}{10x-6}=\frac{116x^2+10x-34}{60x^2-76x+24}$

۱ . ۴. ۵ -

a) $\frac{5x-12}{2}=\frac{5\cdot\left(\frac{1}{2}x^2+3\right)}{x+1}-\frac{7x-10}{2x-10}$ b) $\frac{28}{45-7x}=\frac{5}{x-9}-\frac{9}{x-5}$ ؛

c) $\frac{x+6}{x-2}+\frac{3x-8}{x-4}=\frac{6(x+9)}{x+6}$ d) $\frac{x-13}{x+3}+\frac{8x+45}{x+5}=\frac{9x+7}{x+2}$

۱ . ۵ – کسري مساوات، چې په مخرج یا مات لاندې کې یې ناټکلي ضریبونه او فکتورونه ورکړ شوي وي.

۱ . ۵ . ۱ –

a) $\frac{2a+x}{2a-x}=\frac{a+b}{a-b}$ b) $\frac{a-b}{2c-x}=\frac{a+b}{2c+x}$

c) $\frac{a}{a-2x}-\frac{b}{b-2x}=0$ d) $\frac{x-\sqrt{a}}{x-\sqrt{b}}-\frac{x-\sqrt{a}}{x+\sqrt{b}}=0$

۱ . ۵ . ۲ –

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

a) $\frac{a}{x+b}-1=1+\frac{b}{x+b}$ b) $a-\frac{ax}{x-1}=\frac{1}{a}-\frac{x}{ax-1}$

c) $a+b+\frac{x}{a+b}=a-b+\frac{x}{a-b}$ d) $\frac{1}{a+b}+\frac{a+b}{x}=\frac{1}{a-b}+\frac{a-b}{x}$

e) $\frac{x}{ab}+ab=\frac{1}{a+b}+(a+b)x$ f) $\frac{ax}{b}+\frac{bx}{a}+\frac{2ab}{a+b}=\frac{(a+b)^2x}{ab}$

g) $\frac{a+1}{b}x+\frac{b+1}{a}x+\frac{2ab}{a+b}=a+b+1$

1.5.3. a) $\frac{2(6x^2-11a^2)}{4x^2-9a^2}=5-\frac{4x+a}{2x+3a}$ b) $\frac{a}{1-x}-\frac{b}{x+1}=\frac{(a-b)(ab+1)}{1-x^2}$

c) $\frac{2a}{2-x}-\frac{2b}{x+2}=\frac{4(a^2b+ab^2+a-b)}{4-x^2}$

d) $\frac{b-x}{a+x}+\frac{1-x}{a-x}=\frac{a(1-2x)}{a^2-x^2}$ e) $\frac{ax+b}{ab-b^2}-\frac{a-bx}{ab+b^2}=\frac{2(ax+b)}{a^2-b^2}$

f) $\frac{2a+ab^2x}{a+ab^2x}-\frac{a^2(3-2bx)}{a^2-a^2b^4x^2}=\frac{b^2(2ax-1)}{a^2-a^2b^4x^2}-\frac{ab^2x}{a-ab^2x}$

۶,۱ – کسرمساوات یا ماتبرابرون له دوه کسرونو سره

a) $\frac{\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}-x}-\frac{2}{3}=\frac{2}{3}-\frac{\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}-x}$ b) $\frac{\frac{3}{2}-\frac{1}{x}}{\frac{3}{2}+\frac{1}{x}}-\frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{x}}{\frac{2}{3}+\frac{1}{x}}=\frac{\frac{3}{2}-\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x}+1}$

c) $\frac{a-\frac{1}{x}}{a+\frac{1}{x}}-\frac{1}{x}=\frac{x-\frac{1}{a}}{x+\frac{1}{a}}-\frac{1}{a}$ d) $\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{x}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{x}}=\frac{a-\frac{1}{x}}{a+\frac{1}{x}}$

۱ . ۷ . شي تمرينونه

۱ . ۷ ۱ – که د یوه ګڼ خلور ځله او ۱۴ زیاتون ۴۰ وي ، نو هغه ګڼ کوم دی؟

۱ ۷ . ۲ – که د یوه ګڼ خلورځله او ۴ زیاتون ددې ګڼ او ۱۴ زیاتون سره برابر وي ، نو هغه ګڼ کوم دی ؟

۱ . ۷ . ۳ – د یوه ګڼ خلورمه برخه او پنځه ځله ۴۲ ګڼ ورکوي ، نو هغه ګڼ کوم دی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

۱ . ۷ . ۴ – که د یوه ګڼ څلوربرابره څخه ۲ کم شي او په یوه ګڼ وویشل شي چې ۴
تری کم شوی او ۱۱ لاس ته تری راشي، نو دا ګڼ به کوم وي؟
۱ . ۷ . ۵ – د یوه ګڼ پنځه څله او د ۳ زیاتو دوه څله لوي دی. لکه د دې ګڼ دري
څله او ۱ کمون. دا ګڼ کوم دی؟
۱ . ۷ . ۶ – د یوه ګڼ څلورڅله او ۱۴ کمون نیم دومره لوي دی لکه ددې ګڼ دوه څل
او ۸ . دا ګڼ څه نومیږي؟

۱ . ۷ . ۷ – د یوه ګڼ شپږ څله او د ۵ کمون یا توپیر چې ددې ګڼ په څلور څله او ۵
زیاتون وویشل شي، ۱ ور کوي. دا ګڼ څه نومیږي؟
۱. ۷ . ۸ – د یوه مات ماتباندې په ۵ له ماتلاندې کوچنی دی. که ماتباندې په ۲۳ او
مات لاندې په ۸ لوي شي، نو د ورکړشوي مات په څټ ارزښت لاس ته
تري راځي. دا ګڼ څه نومیږي.
۱ . ۷ . ۹ – ۲۵ داسې په دوه ګڼونو بیل کړی یا تجزیه یا ټوټه کړی، چې د مربع توپیر
یې ۱۲۵ شي.
۱ . ۷ . ۱۰ – د دوه ګڼونو توپیر یا کمون ۶ او مربع یې ۱۸۰ دی . ګڼونه څه نومیږي؟
۱ . ۷ . ۱۱ – دوه ګڼونه داسې تناسب کې دي، یا یو بل ته داسې ځانونه نیسی .
که دوم په لمړی وویشل شي، نو ۲ لاس ته راځي او پاتی یې ۷ دي.
دواړه ګڼونه کوم دي؟
۱ . ۷ . ۱۲ – د دوه ځاینیونکي ګڼ پروت زیاتون ۱۲ دی. که له دې ګڼ ۱۸ کم شي،
نو یو دوه ځاینیونکی ګڼ لاس ته راځي، د همغه ځایګڼونو سره مګر په
څټ ترتیب سره.
۱ . ۷ . ۱۳ – یو زدکړی غواړي د یوه ګڼ څخه مربع ریښه د یو په بل کې بندولو
پرینځیپ یا اصول له لارې پیدا کړي. دی لمړی یو ګڼ د ریښې په خیر

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

ټاکي، چې مربع یې په ۲۷ کوچنی دی. بیا یوه ریښه ټاکي ، کومه چې دوه له هغه لوي دی چې لمړی ټاکل شوی. ددې ریښې مربع په ۳۳ لوي دی ، هغه ګڼ کوم دی چې مربع ریښه یې غواړو پیدا کړو ؟

۱ . ۷ . ۱۴ – یو د سپورت ملګرو ټولنه له څلورو ډلو جوړه ده. لمړی ډله ۳۷ دملګرو غړي لري، په داسې حال کې چې نورو ډلې 1 / 4 , 1 / 5 په همدې ډول 2 / غړي په بر کې نیسي. د غړو شمیر څومره دی او د هرې ډلې څومره دي

۱ . ۷ . ۱۵ – یو نفر په درې ورځو کې مجلې په داسې شمیر خرڅوي: په لمړی ورځ 1 / 9، دومه ورځ 1 / 6 او په دریمه ورځ 1 / 4 د مجودو لوټوکه .

دی اوس له هغومجلو د نیمایي دوه کمي د څان سره لري. هغه څومره مجلې د خرڅلاو لپاره لرودې؟

۱ . ۷ . ۱۶ – یوه میلمه د یوه زدکوونکي څخه د هغه د عمر پوښتنه وکړه. زدکوونکي په ټوکه ځواب ورکړ« څما پلار چې درې میاشتې پخوا یې خپله ۵۵ کلنی ولمانځله، څما د عمر څلورواره څخه 1 / 4 زیات زوړ دی.» زدکوونکی څومره عمر لري؟

۱ . ۷ . ۱۷ – د یوه زدکوونکي پلار څلورنیم ځله زوړ دی لکه د هغه خوي. دواړه ۲۷ کاله د هغه د یو اوپاکلن نیکه څخه ځوان دي، پلار او ځوي څومره زاړه دي؟

۱ . ۷ . ۱۸ – په یوه معما کې یو زدکوونکی د ې بل ته وایي:« که زه لما سره بټوه کې پیسو سره ۵،۲ افغانی ور زیاتي کړم ، زیاتون یې له ۵ سره ځل یا ضرب کړم او له دې ځل څخه ۱۲ کمی کړم او دا لاس ته راغلی کمون یا توپیر په 11 وویشم نو نتیجه یې ۸ افغانۍ ده. » هغه زدکوونکی په خپله بټوه کې څومره پیسې لري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

۱ . ۷ . ۱۹ – په یو په بل پسې تړلو مقاومتونو کی لمړی او دوهم یو ډول لوي دي،
دریم دوه څله او څلورم دریځله دومره لوي دي لکه لمړی دوه یاد شوي
مقامتونه، ټول مقاومت ۱۰۵۰ ( اومیګا ) ، په دې پروت شپانونك
۱۱۰ ولټه دی. اوس الف ) یوګوني مقاومتونه څومره لوي دي، ب
برققوه، برخه مقاومتونه ؟

۱ . ۷.۲۰ – د دوه غبرګ چالان عمومي مقاومت ( ماته متآسفانه په افغانسان کی د
فزيك مروج نومونه دې معلوم، خو فکر کوم چي په هدف به پوه شو ) دی
a) $1000\Omega$ , b) $2000\Omega$
یو مقاومت$4000\Omega$دی، هغه بل څومره لوي دی؟

۱ . ۷ . ۲۱ . د دریې غبرك قاومتونو څخه یی دوم دوه واره دومره لوي دی لکه لمړی
او دا دریم یی درېواره دومره لوي دی لکه دوم ، هر مقاومت څومره لوي
دی، که عمومي مقاومت a) $12 k\Omega$, b) $300\Omega$ وي؟

. ۲۱ . د دريې غبرګو مقاومتونو څخه یی دوم دوه واره دومره لوي دی لکه لمړی
او دا دریم یی درېواره دومره لوي دی لکه دوم ، هر مقاومت څومره لوي
دی، که عمومي مقاومت الف ) $12 k\Omega$
ب ) $300\Omega$ وي؟

. ۲۲ په اوبو کي یو د لرګي منډه باید څومره لوي وي، چي د لمبیدو استعداد
یی ۷۵۰ نیوټونه وي او د لرګي خاص وزن یا کلکوالی ( د فرمول څخه
معلومیږي چی دا څه شی دی ) $4\frac{N}{dm^3}$ وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

۷ . ۲۳ د سونګموادو ټانك د دوم ماشین لپاره ۴۰ لیتره ګډوډ د سونګ مواد لري.
څومره تیل او څومره بتزین په ټانك کی موجوددي که ګډونه یی وي؟

۷ . ۲۴ د ښار د ښکلا لپاره د ښارمنځ د سرك په اوږدوالي ۸۵ ونی کینول کیږي.
دا چی د مخه خرکړ شوی او تل همغه واټن په یوه متر کوچنی شي ، نو په
سرك بیا ۲۰ ونی زیاتی کیښنول کیدی شي. د دې هرې ونې واټن وبلی ته
څومره لویي دی؟

۷ . ۲۵ د بایسکلځغلونوکو ډله له سر څخه ۵۰ متره اوږدوالی لري. هغه ۴۵
کیلومتره په ساعت کی سرعت لري، چی په یوه پله چی اوږدوالی یی
متره دی ، څومره وخت ته ضرورت لري، چی له پله پورې لاړ شي.

۷ . ۲۶ واورومنډه کی ، دا وروسته وړونکی د پروسېرکلني وړونکی څخه یوه نیمه
دقیقه وروسته په ځغاسته پیل کوي. د څو کیلو متره وروسته دی کړی
چی لمړني ځغلیدونکي څخه مخ ته شي، که د ده منځنی سرعت ۵ متره
ثانیه کی وي او د لمړي ۴ ، ۸ متره په ثانیه کی وي ؟

۷ . ۲۷ د تامنځي د دز سره د سپورت میله کي ۲۰۰ متره ځغاستی د منډې ډله په
ځغاسته پیل کوي. ځغلیدونکی د پیل کرښي څخه لس متره شا ته ولاړدي.
برخه نیوونکی په منډه پیل کوي ، چی د تومانچی د ډز کرد وګوري دو
وخت توپیر څومره دی، که غږ رسیدنه په نظر کی ونه نیول شي او د غږ
سرعت ۳۴۰ متره په ثانیه کی وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

# ۱۰ کومبیناتوریك - د بینوم جمله

کومبیناتریک څخه په شمیرپوهنه کې د دې لپاره کار خلي، چې یو ګڼ ، پل ځاي بدلو
څومره والبښابې او که څو ګنونهخپل ځاي بدل کړې دا څنګه لیکل کیږي۰ د ځای بدلون
شمیرنه ده
او د هغې ډولونه۰
په ۱۰۱۰ او ۲۰۱۰ برخو کی به د شمیرپوهنی مرستندوي مواد د بینوم
جملی(۳.۱۰)
برخه( او کومبیناتوریك ( ۱۰ . ۴ برخه) د فاکولتیت کلیمي او بینومیالکوایفیڅینت
(بینوم ځلوني) پیل شي .

## ۱۰ . ۱ فاکولتیت Die Fakultät, factorial

پیژند ۱۰ . ۱ :
د n!سومبول (ویل کیږی n « فاکولتیت « ) لاندې سړی له1 تر n پورې ګڼونو ضرب
پوهیږي، یعنی $n ! = 1.2....(n-2).(n-1).n$ برسیره پر دې تعریفوو: $0! = 1$

د فاکولتیت له پیژند څخه څرګندیږي، چی $(n+1)! = n!.(n+1)$ لرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

یادونه:
په افغاني ادبیاتو کی تر هغي چی ماته معلومات شته د فاکولتیت په ځاي فاکتوریال لیکل شوی. ما په دې کتاب کی دا د الماني کلیمه یا پښتو ، ځلهووني،، زیات کاره ولی، هیله ده چی تاسو به یی په خپله خوښه وټاکی. په دې کی کومه سهوه منځ ته نه شي راتلی٠

بیلګی :
الف $n!$ : د $n = 5$ لپاره په دې ډول دی: $5! = 1 . 2 . 3 . 4 . 5 = 120$
ب : په دې ډول دی : $0!.2!.4! = 1.(1.2).(1.2.3.4) = 48$
پ: په دې ډول دی: $5!/3! = 1.2.3.4.5 / 1.2.3 = 4.5 = 20$
ت : په دې ډول دی

$$(n+2)!/(n-1)! = 1.2.3....(n-1)(n).(n+1).(n+2)/1.2.3...(n-1)$$
$$= n.(n+1).(n+2)$$

ټ: داسی دی

$$2.n! = 2.(1.2....n),$$
$$(2.n)! = 1.2....n.(n+1)....2n.$$

۱۰ . ۲ د بینوم ځلووني یا ضریبونه

پیژند: ۱۰ . ۲
د سیمبول $\binom{n}{k}$ ( وییل کیږي n « پر » k لاندې د دوه ځله ونو ویش پوهیدل کیږي چی هر یو k ځله ووني یا ضریبونه یا فاکتورونه لري :

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \prod_{i=1}^{k} \frac{n+1-i}{i}$$

برسیره پر دې دا هم په کلکه کره کیدلی شي:

$$\binom{0}{0} = 1; \quad \binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1; \quad \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1};$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

$$\binom{n}{1} = n$$

د k ګڼ يو پيداينتي يا طبعي ګڼ دی او د ماتلاندي او مات باندې ګڼونو ګڼون يا تعداد ښايي،په مات لاندې کي د لومړيو k پيداينت يا طببعي ګڼونو فاکتورونه دي. دn ګڼ رييل دی او د مات پورته لومړنی فاکتور دی. دوم فاکتور1 - n ، دریم n-2 تر k –م فاکتور n-k+1 پورې . دا $\binom{n}{k}$ سومبول د اويلر( leo nard Euler له ۱۷۰۷ - ۱۷۸۳سويسي ګڼپوه، فزيکپوه او استرولوګ) لخوا د لومړې ځل لپاره پيل شو، له دې امله ورته د اويلر سومبول وايي پرتله يا مقايسه برخه ۱۰ . ۳ (. که څوك ديوه بينوم پوتنڅ يا توان شميري ) ۱۰ . ۳ برخه(، نو سيمبول $\binom{n}{k}$ لاس ته راځي چی د يوا-
ځنيو زياتونونو ځلونه دي، او له دې امله ورته بينوم ضريب يا بينوم ځلهووني ويل کيږي.

بيلګی :

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4}{2!} = \frac{20}{2} = 10$$

$$\binom{49}{6} = 13.983.816 \text{ ،} \binom{3}{5} = 0$$

$$\binom{2}{1/3}$$

تعريف نه دی ، ځکه چی 3 / 1 پيدأينتي يا طبعي ګڼ نه دی.

د بينوم ضريبونو يا ځلونوخويونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

۱ - د $n<k$ ، $n,k \in N$ لپاره باور لري $\binom{n}{k} = 0$

که n یو طبعي ګڼ وي او لهk کوچنی وي، نو صفر په ماتباندې کی یوځله وونی

یا ضیرب دی

۲ - د $n > k$ ، $n,k \in N$ لپاره باور لري

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

اوبیونه (حل ): سرې د !(n-k سره د مات $\binom{n}{k}$ پراخوالي له امله لاس ته راوړي

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \prod_{i=1}^{k} \frac{n+1-i}{i}$$

دا پورته برابرون له $\frac{(n-k)!}{(n-k)!}$ سره ځلوو، نو لاس ته راځي

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

له دې نور لاس ته راځي، که د k په ځاي n - k ولیکل شي

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-n+k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

۳ - باور لري

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

حل (اوبی) : د کښ اړخ زیاتون څخه دا لاندې لاس ته راوړل کیدی شي، که د بینوم ضریبونه یا ځلووني د ماتو په څیر ولیکل شي ، ماتونه ور زیات کړي او د زیاتونون ګډ فاکتورونه چی په ماتباندې کی دی په نوکانو کی ونیسي اوپاتی ساده کړي :

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}+\frac{n(n-k)...(n-k+1)(n-k)}{(k+1)!}=$$

$$=\frac{n(n-1)...(n-k+1)+n(n-k)...(n-k+1)(n-k)}{(k+1)!}=$$

$$=\frac{n(n-1)...(n-k+1)[k+1+n-k]}{(k+1)!}=$$

$$=\frac{n(n-1)...(n-k+1)(n+1)}{(k+1)!}$$

که په پورته ا افاده یا وپینه کې د مات پورته اخرنی فاکتور د لومړي ځله ووني په څیر ولیکل شي، لاندې بینومیال یا بینوم ځلوونی ( ضریب) تعریفوي:

$$\binom{n+1}{k+1}$$

## ۱۰ . ۳ د بینوم جمله

د بینوم لاندې سرې د دوه توکو ( ګنونو) زیاتون پوهیږي. یعني: x+y
د بیونم جمله موږ ته ښايي چی څنګه د یو بینوم

$$(x+y)^n$$

پوتنځ، چی پیدایښتي ګڼ n یی ایکسپوننت یا جکګڼ یا لنډ جګ وي، د زیاتون په څیر پر مخ بیول کیږي. که د x + y بینوم پوتنځ د n = 0,1,2,3,4,5,6 اکسپوننت لپاره شمیرو، نو لاندې نتیجه لاس ته راوړو :
پاسکال دریګوډی

$$(x+y)^0=..................1$$
$$(x+y)=..................x+y$$
$$(x+y)^2=..............x^2+2xy+y^2$$
$$(x+y)^3=............x^3+3x^2x+3xy^2+y^3$$
$$(x+y)^4=.........x^4+4xy+6x^2y^2+4xy^3+y^4$$
$$(x+y)^5=....x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5$$
$$(x+y)^6=x^6+6x^5y+15x^4y^2+20x^3y^3+15x^2y^4+6xy^5+y^6$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

په دې د زیاتونونو پرمخبیولوکی یو قانونیت لیدل کیږي. د زیاتونو ګڼون(شمیر، تعداد) د بینوم د اکسپوننت څخه په یو لوي دی . ټول زیاتونی د x او y پوتنخ ځل لري، په داسی ډول چی د x او y پوتنخ زیاتون په n برابریږي او په دې ډول د x پوتنخ په کمیدلو) د y پوتنخ په زیاتیدلو دx په اکسپوننت په ترتیب پرلپسی

n , n-1, ....1 , 0

د yاکسپوننت په ترتیب 0,1 n-1,n..,دي. د بینوم پوتنخ کوایفڅینتونه داسی په نامه پاسکال Blaise Pascal( ۱۶۲۳ - ۱۶۶۲ فرانسوي شمرنپوه( ګڼوندریګوډی جوړوي .

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | 1 | | | | | | | |
| | | | | | | 1 | | 1 | | | | | | |
| | | | | | 1 | | 2 | | 1 | | | | | |
| | | | | 1 | | 3 | | 3 | | 1 | | | | |
| | | | 1 | | 4 | | 6 | | 4 | | 1 | | | |
| | | 1 | | 5 | | 10 | | 10 | | 5 | | 1 | | |
| | 1 | | 6 | | 15 | | 20 | | 15 | | 6 | | 1 | |
| 1 | | 7 | | 21 | | 35 | | 35 | | 21 | | 7 | | 1 |

په دې کی هر ګڼ د دواړو پورته کیڼ-ښي پرتوګڼونوزیاتون دی، چی بي له کړاو د نورو اکسپوننتویا په جګو n = 7,8, ... .. لپاره پرمخ بیول کیدی شي. د ډیرو لویو اکسپوننتو n لپاره بیا هم دالار له کړاو ډکه ده لیونارد اویلرLeonhard Euler د کومبیناتوریك فکرونو کی د کوایفیڅینتونو یووني یا یوونوالي یا بهتره یوونوالیز ستروکتورونه یا جوړښتونه وپیژندل. په n -م n ( د بینوم جګ یا اکسپوننت ( لیکه اوK- م ځای، n ,.... , 1 , 0 = k کی ولاړ ضریب دفورم څخه دیَ) له کومه امله چی په ۱۰ . ۲ برخه کی د اویلر سومبول په نوم داسی بلل شوي د بینوم ضریب په

ځیر رامنځ ته شو)که د پاسکال ګڼونو دریګوډیَ د اویلر سومبول استعمال په ځیرولیکل شي نو لاس ته راځي٠

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

$$\cdots\cdots\binom{0}{0}$$

$$\cdots\cdots\binom{1}{0}\binom{1}{1}$$

$$\cdots\cdots\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{1}$$

$$\cdots\cdots\binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3}$$

$$\cdots\cdots\binom{4}{0}\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{4}$$

$$\cdots\binom{5}{0}\binom{5}{1}\binom{5}{2}\binom{5}{3}\binom{5}{4}\binom{5}{5}$$

$$\binom{6}{0}\binom{6}{1}\binom{6}{2}\binom{6}{3}\binom{6}{4}\binom{6}{5}\binom{6}{6}$$

داويلر سومبول کی د فاکتور پرځاي ، چې ګڼونه دی ، سومبول $\binom{n}{k}$ ليکل کيږي.

يادونه : ما کله $a,b$ او کله بيا $x,y$ ليکلي، دا په يو ډول ليکنه ښکلې ښکاريږي، خو زه کله کله داسې ستونځې لرم .

په ۱۰ . ۲ برخه کی د بينوميالکوايفيڅينت لپاره ښوول شوو خويونو ۲ په بنسټ د پاسکال دريکوډي منځنی محور ته سيومتري پراته کوايفيڅينته سره مساوي دي. داچی هر کو- ايفيڅينت ورباندې پورته کوايفيڅينتونو زياتون سره مساوي دی په ۳ کی وښوول شو) د تمرين وظيفه ۱۰ . ۴ دې هم ورسره پر تله ) مقايسه( شي ) د اويلر سيمبول په استعمال

د يوه بينوم $(a+b)^n$ د پوتنځ د زياتون پرمختک د يوه طبيعي ګڼ n لپاره په لاندې ډول ليکلو ته اجازه راکوي

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

جمله ۱۰ . ۱ ( د بینوم جمله)

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

$$= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}b^i$$

اوبونه ( حل): د پوره ایندکشن له لارې:

د ایندوکشن پیل : ( n = 0 )

$$(a+b)^{k+1} = \binom{k+1}{0}a^{k+1} + \binom{k+1}{1}a^k b + \binom{k+1}{2}a^{k-1}b^2 + \ldots + \binom{k+1}{k}ab^n + \binom{k+1}{k+1}b^{k+1}$$

$$(a+b)^0 = \binom{0}{0}a^0 = 1$$

د ایندکشن نیونه : ( n = k )

$$(a+b)^k = \binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + \ldots + \binom{k}{k-1}ab^{n-1} + \binom{k}{k}b^k$$

د اندکشن غوښتنه: (n = k + 1 )

$$(a+b)^{k+1} = \binom{k+1}{0}a^{k+1} + \binom{k+1}{1}a^k b + \binom{k+1}{2}a^{k-1}b^2 + \ldots + \binom{k+1}{k}ab^n$$

$$+ \binom{k+1}{k+1}b^{k+1}$$

دایندکشن ښوونه:

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)^k(a+b)$$

$$= \binom{k}{0}a^{k+1} + \binom{k}{1}a^k b + \binom{k}{2}a^{k-1}b^2 + \ldots + \binom{k}{k}ab^k$$

$$+ \binom{k}{0}a^{k+1}b + \binom{k}{1}a^{k-1}b^2 + \binom{k}{2}a^{k-2}b^3 + \ldots + \binom{k}{k-1}ab^k + + \binom{k}{k}b^{k+1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

که یو د بل سره (یو د بل لاندې په څنګ یا کږې پرتی) برابر پوتنځ یا توان ځلونه د اویلر فرمول یا سومبول د زیاتونخویونو د استعمال له لارې سره راټول (یوځاي) شي

$$C_{W_6}^{(4)} = \binom{6+4-1}{4} = 126$$

$$\binom{k}{1}+\binom{k}{0}=\binom{k+1}{1},\binom{k}{2}+\binom{k}{1}=\binom{k+1}{2},\ldots,\binom{k}{k}+\binom{k}{k-1}=\binom{k+1}{k}$$

لومړي او اخر زیاتون ضریبونه ولیکل شي نو غوښتل شوې اړیکی لاس ته راځي

$$\binom{k}{0}=\binom{k+1}{0},\binom{k}{k}=\binom{k+1}{k+1}$$

د (a-b)=a+(-b) له امله د بینوم له جملی د یوه n -م پوتنځ دکمون څخه لاس ته راځي

$$(a-b)^n = \binom{n}{0}a^n - \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 - \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \ldots \pm \binom{n}{n}b^n$$

$$= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}(-b)^i$$

بیلګې:

$$(x+y)^3 = \binom{3}{0}x^3 + \binom{3}{1}x^2y + \binom{3}{2}xy^2 + \binom{3}{3}y^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x-y)^3 = \binom{3}{0}x^3 + \binom{3}{1}x^2(-y) + \binom{3}{2}x(-y)^2 + \binom{3}{3}(-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

## ۱۰ . ۴ کومبیناتوریك:

کومبیناتوریك د یوې ډیری د پای غړو یوځای درولو یا راوړلو ترتیب قوانینو سره سر او کارلري. کیدی شي د ټولو غړو یا یوې برخي یوځاییولو په څیر راوړل شي، په یوځاییولو کی کیدی شي د غړو ترتیب یو رول ولوبوي او یا هم نه، او همدارنګه په راټوځاییولو کی

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

کیدی شي د غړو تکرار راشی او یا هم نه. له دې امله د یوځاییولو یا ټولګی درې ډولونه توپیروو( Komplexion هم ورته وایي )، په نامه پرموتیشن، وارییشن، کمبینیشن ( Permutation, Variation, Kmobination) کوم چې په لاندې برخو کی یو په بل پسی څیړل کیږي او په اخرنی جدول کی به لیدیدونکی څرګند شي یا لیدوړو ښوول شي

۱۰ . ۴ . ۱۱ پرموتیشنPermutare

( لاتین: ..سره بدلول، دلته دا اصلاً ځاي بدلون دی. لنډ: بدلون)

پیژند ۱۰ . ۳ :

د n غړو یو پرموتیشن ( ځاي بدلون )بې له تکرار داسی »یوځاي درول« دي، په کوم کی چې n غړي په یوه د زړه پورې ترتیب کی څنګ په څنګ ولاړ وي. د n غړو مختلفه ترتیبونه تل د مختلفو پرموتیشنونو یا ځایبدلونونو په مانا ده

بیلګی:

۱ - د دوه غړو پرموتیشن

الف : 2 1 دی 12 21

ب : a , m دی a m m a

۲ - د درې غړو پرموتیشنونه

الف : ۱ ، ۲ ، ۳ دي:

۱۲۳ ۲۱۳ ۳۱۲

۱۳۲ ۲۳۱ ۳۲۱

ب : a,m,s دی:

ams mas sam

asm msa sma

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

۳ - د څلور غړو پرموتیشنونه

الف : 1,2,3,4 دي:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1234 | 2134 | 3124 | 4123 |
| 1243 | 2143 | 3142 | 4132 |
| 1324 | 2314 | 3214 | 4213 |
| 1342 | 2341 | 3241 | 4231 |
| 1423 | 2413 | 3412 | 4312 |
| 1432 | 2431 | 3421 | 4321 |

دا پورته پرموتیشنونه له پورته وکښته لور ته لیکسیکایي ترتیب دي، دې ته به د کرانو لوستونکو پام وي، وروسته هم همداسی دي، که دا توري وي او که ګڼونه ۰ په ګڼونو کی پیدایښتي ده، چې د پښتو لیکسیکایي ترتیب پچه [ام کی نیول شوی۰له ښي لور کښته بیا بیرته ګین لور خوزښت دی۰

ب : a,m,s,u دي:له کښ کښته لور ته بیا بیرته پورته

| | | | |
|---|---|---|---|
| amsu | masu | samu | uams |
| amus | maus | saum | uasm |
| asmu | msau | smau | umas |
| asum | msua | smua | umsa |
| aums | muas | suam | usam |
| ausm | musa | suma | usma |

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

پ ( ا ت ج ګ دي:دلته طبعاً له ښي وکيڼ لورته ترتيبيږي(

اتجګ تاجګ جاتګ ګاتج

اتګج تاګج جاګت ګاجت

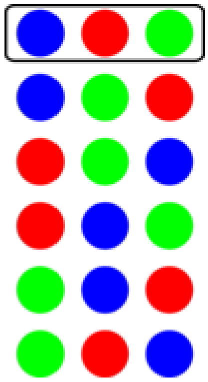
اجتګ تجاګ جتاګ ګتاج

اجګت تجګا جتګا ګتجا

اګتج تګاج جګات ګجات

اګجت تګجا جګتا ګجتا

د ټولو پرموتيشنونود ليکلو لپاره مرستندوی مواد، د بيلګی په ډول له څلورو غړو څخه د ۲۴ پرموتيشنونو، ليکسيکني ترتيب، دا په دې مانا چی د ليکسکا لغاتو ترتيب ته »کتې مټ« (ورته) دی، چی د غړو پيدايښتي لړی مخته پرته وي ( په تورو، په ګڼونوکتطبعی يو په بل پسي). دبيلګي په توګه د غړو a , m , s , u ۲۴ پرموتيشنونه په لکسيکا ترتيب ورکړ شوي. د دې غړو) يا تورو( جوړ شوي پرموتيشنونه ) لغاتونه( maus همدا رنګه saum په دې ترتيب کی ۸ -ام همدا ډول په ۱۴ -ام ځاي کی ولاړ دي. همدا ډول په پ ( کی د څلورو تورو ا ، ت ، ج ، ګ پرموتيشن ورکړ شوی چی ۸ -۱م ځا ي کی يي تاګج ولاړ او په ۱۵ – م ځای کی يي جتاګ ولاړ دی.



(c) ketabton.com: The Digital Library



---

د پورته درې غونډارو لپاره نظم یا ترتیب ۲ ۰ ۳ = ٦ دی۰

که لیکو ، چې 1.2.3.4.5.6نو ددې پرځاي لیکو :720 = !6

جمله ۱۰ . ۲ :

د پرموتیشنونو Pn ګڼون ( شمیر یا تعداد) ، د n یوله بل مختلفو غړو، په لاندې

ډول دی : $P_n = n!$

اوښونه : د پوره ایندکشن له لارې :

داپندکشن پیل : $(n = 1):\quad P_1 = 1! = 1$

د ایدکشن نیونه : $(n = k):\quad P_k = k!$

د ایندکشن غوښتنه : $(n = k+1):\quad P_{k+1} = (k+1)!$

د ایندکشن ښوونه : k غړو ته په !k پرموتیشنونو کی د ځل په څیر یو(k+1 ) -ام غړی راځي. دا ( k+1 ) - ام غړی کیدی شي له لومړې تر ( k+1 ) - ام ځاي پورې ودریږي، داسی چی د ( k+1 ) -ام غړي ورنیولو د هر k غړو پرموتیشن k+1 پرموتیشنونه د k+1 غړو پرموتیشنونه شي. له دې امله باور لري

$$P_{k+1} = P_k\,(k+1) = k!(k+1) = (k+1)!$$

بیلګه :

په څومره مختلفو لړیو پرلپسی ( دا مړضوع په ۱۸ برخه کې کتلی شئ) کی لس زدکوونکی په یوه لیست کی خپل نومونه لیکلی شي ؟

اوبی یا حل : $P_{10} = 10! = 3628800$ ۰

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

پيژند ۱۰ . ۴ :

هر د k غړو ترتيبونه، د كومو څخه چې i-ام غړی ni - ځله رامنځ ته كيږي،

د $i = 1, 2, ..., k$ لپاره، نو پرموتيشن د تكرار) د تكرارسره پرموتيشن( سره نوميږي
. د غړو شمير په پرموتيشن كی بيا داسی دی $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$

بيلګی :

۱ - د دوه غړو a , b پرموتيشن په كوم كی چې غړی a يو ځل او غړی b دوه ځله رامنځ ته كيږي،

$(k = 2; n_1 = 1; n_2 = 2; n = n_1 + n_2 = 1 + 2 = 3)$

په دې ډول دی: abb bab bba

۲ - د غړو a , b پرموتيشن، په كوم كی چې a دوه ځله، غړی b درې ځله رامنځ ته كيږي $(k = 2; n_1 = 2; n_2 = 3; n = n_1 + n_2 = 2 + 3 = 5)$ په لاندې ډول دی

| | | | |
|---|---|---|---|
| abbba | abbab | ababb | aabbb |
| | babba | babab | baabb |
| | bbbaaa | bbaba | bbaab |

جمله ۱۰ . ۳ : د k غړو د پرموتيشن ګنون يا تعداد $P_n^{(n_1, n_2, ..., n_k)}$ ، له كومو چې i-ام غړی ni -ځله رامنځ ته كيږي ، په لاندې ډ ول دی:

$$P_n^{(n_1, n_2, ..., n_k)} = \frac{n!}{n_1!.n_2!....n_k!}$$

حلونه يا اوبيونه: كه په پرموتيشن كی $n = n1 + n2 + ... + nk$ (دلته دې ګنونه دn اينډكس كې ومنل شي) غړو يو له بل توپير لرودی ( مختلف وي ) ، نو $n!$ پرموتيشنونه

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

به موجود وی، که i - ام غړی ni -ځله رامنځ ته شي، داچی د ni غړو لپاره ni!
پرموتیشنونه موجود دي، نو ni پرموتیشنونه د یوه پرموتیشن په څیر رایو ځاي کیږي،

دا په دې مانا چی د!n شمیر په $n_i!$ باید وویشل شي (i = 1 . ..., k)

بیلګی :

۱ - د k = 2 مختلفو غړو پرموتیشن، په کوم کی چی لومړی ( $n_1$-1 )- ځله او دویم ( $n_1$-2 )- ځله رامنځ ته کیږي، دی:

$$P_3^{(1,2)} = \frac{(1+2)!}{1!2!} = \frac{3!}{1!.2!} = 3$$

۲ - د k = 2 مختلفو غړو پرموتیشن، په کومو کی چی لومړی (n1=2) -ځله او دویم ( n2 = 3 ) -ځله رامنځ ته شي، دی

$$P_5^{(2,3)} = \frac{5!}{2!.3!} = 10$$

۱۰ . ۴ . ۲ واریيشن اوښتنه یا بدلیدنه Variation :

تعریف ۱۰ . ۵:

د n غړو واریشن (بدلیدنه یا اووښتنه Variation ) لاتین( بدلونه اووښتنه تغیرونه یا بیا تغیرونه) و k -ام ټولګي ته( وهرې k ټوټی ته، $n \leq k$ ) هر له k غړو یوځانکول ( یوځاي درول، یوځاي لیکل) دی، کوم چی د n غړو د لړی پرلپسی په نظر کی نیولو سره جوړیږي..

بیلګي:

۱ - د درې غړوa,b,c واریيشن و دویم ټولګي ته دي :

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

| | | |
|---|---|---|
| ab | ba | ca |
| ac | bc | cb |

۲ - د څلورو غړو d , a , b , c واريیشنونه و۲ - م ټولګي ته دي:

| | | | |
|---|---|---|---|
| ab | ba | ca | da |
| ac | bc | cb | db |
| ad | bd | cd | dc |

د څلورو غړو d , a , b , c واريیشنونه و ۳ - ۱م ټولګي ته دې

| | | | |
|---|---|---|---|
| abc | bac | cab | dab |
| abd | bad | cad | dac |
| acb | bca | cba | dba |
| acd | bcd | cbd | dbc |
| adb | bda | cda | dca |
| adc | bdc | cdb | dcb |

۳ - د پنځه غړو 1 , 2 , 3 ,4, 5 واريیشنونه و ۲ - ۱م ټولګي ته دي

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 12 | 21 | 31 | 41 | 51 |
| 13 | 23 | 32 | 42 | 52 |
| 14 | 24 | 34 | 43 | 53 |
| 15 | 25 | 35 | 45 | 54 |

(c) ketabton.com: The Digital Library



--------------------------------------------------------------------------------

د n غړو واریشنونه و n -ام ټولګي ته د n غړو پرموتیشن سره یو شی یا براابر کیږي

جمله ۱۰ ۰ ٤ :

د n غړو و k -ام ټولګي ته د واریشنونو ګڼون (تعداد) $V_n^{(k)}$ دئ :

$$V_n^{(k)} = n(n-1)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

اوبنونه : د مکلمل (پوره یا بشپړ ایندکشن له لارې ) ایندکشن په k اړه لري، n ځاي په ځاي دئ یا ځاي په ځاي کلك ولاړ دی

ایندکشن پیل :( k = 1 )

$$V_n^{(1)} = n!/(n-1)! = n$$

ټیك ( صحیح) دئ ، ځکه چی له n غړوکیدی چی له یوه غړی جوړ واریشنونه جوړکړی شي.

ایندکشن نیونه : ( k = k0 ) :

$$V_n^{(k_0)} = n!/(n-k_0)!$$

ایندکشن غوښتنه(ثبوت: ):( k0 +1 = k )

$$V_n^{(k_0+1)} = n!/(n-k_0-1)!$$

دایندکشن ښوونه : د k0 - م درجی هر واریيشن لپاره، په دې واریيشن کی نه رامنځ ته کیدونکو پاتی n - k0 غړو شمیر دی .که په ترتیب یو له دې n - k0 غړو د دې k -م ټولګی واریشنونو $V_n^{(k)}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

په اخرکی ځاي په ځاي شي، نو له دې یو دk+1 ټولګي n - k0 واریشنونه لاس ته راځي، او که دا کار په ټولو واریشنونو $V_n^{(k)}$ وشي، نولاندې واریشنونه لاس ته راځي:

$$\frac{n!}{(n-k_0)!}(n-k_0)=\frac{n!}{(n-k_0-1)!}$$

(که چیرې یود n - k0 غړو ورزیات په یو بل ځای کیښوولی وی، نو یودk+1 ټولګي واریيشن به یی لاس ته راوړی وی، کوم چی همدا اوس موجود دی. دا سړی په بیلګه ۲ ( k = 2 , k = 4, n = 3 ) باندې لیدوړ کولی شي)

بیلګي:

۱ - د درې غړو واریيشنونو شمیر و دوم ټولګي ته دی : $v_3^{(2)}=\frac{3!}{(3-2)!}=6$

۲ - د څلور غړو واریيشنونو شمیر و دوم ټولکی ته دی: $v_4^{(2)}=\frac{4!}{(4-2)!}=12$

د څلور غړو واریيشنونو شمیر ودریم ټولګي ته دی: $v_4^{(3)}=\frac{4!}{(4-3)!}=24$

۳ - د پنځه غړو واریيشنونو شمیر ودوم ټولګي ته دی: $v_5^{(2)}=\frac{5!}{(5-2)!}=20$

پیژند ۱۰ . ۶ :

د n غړو واریيشنونه و k - ام ټولګي ته په کوم کی چی یوګونی غړي تر k-ځله تکرار وي نو واریيشنونه د تکرار سره نومیږي یا بلل کیږي.

بیلګی: ۱ - د درې غړو a , b , c واریيشنونه و دوم ټولګي د تکرار سره دي:

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

| | | |
|---|---|---|
| ca | ba | aa |
| cb | bb | ab |
| cc | ba | ac |

۲ - څلور غړو a , d , c , b د دويم ټولگی واريیشنونه د تکرار سره دي:aa

| | | | |
|---|---|---|---|
| da | ca | ba | |
| db | cb | bb | ab |
| dc | cc | bc | ac |
| dd | cd | bd | ad |

۳ - د درې غړو 1 , 2 , 3 د دريم ټولگي واريیشنونه دي( دا لاندې ولاړ ترتيب له کينې وښې لور ته دی، خو په لاندې کې په څېټ شوی)

| | | |
|---|---|---|
| 311 | 211 | 111 |
| 312 | 212 | 112 |
| 313 | 213 | 113 |
| 321 | 221 | 121 |
| 322 | 222 | 122 |
| 323 | 223 | 123 |
| 331 | 231 | 131 |
| 332 | 232 | 132 |
| 333 | 233 | 133 |

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

جمله ۱۰ . ۵ : د n غړو د k -ام ټولګي د وارییشنونو شمیر $V_{W_n}^{(k)}$

$V_{W_n}^{(k)} = n^k$ :د تکرار سره دی $C_6^{(4)}.C_{43}^{(2)} = \binom{6}{4}\binom{43}{2} = 13545$

حل)اوبی): په k د پوره ایندکشن له لارې:

د ایندکشن پیل ( k = 1 ) :

د $V_{W_n}^{(1)} = n^1$ لپاره صحیح دی، ځکه چی له n غړو څخه n وارییشنونه،چی هر یوله یوه غړي جوړ دی، جوړیږي.

د ایندکشن نیونه ( k0 = k ) : $V_{W_n}^{(k_0)} = n^{k_0}$

د ایندکشن غوښتنه ( k0+ 1 = k ): $V_{W_n}^{(k_0+1)} = n^{k_0+1}$

د ایندکشن ښوونه : د ( k0 + 1 ) -ام درجی وارییشنونه د nk وارییشنونو چی k0 – امه درجه وارییشنونو څخه لاس ته راځي، په کوم کی چی له دوي هر یو په ترتیب د n غړو اخر ته یو ور واچوي یا ورزیات ( علاوه ) کړي ( یادونه دې، چی په واریشنونو بی له تکرار شوې ، وکتل شي) .

له دې امله د دې شمیر $n^{k_0}.n = n^{k+1}$ وارییشنونه دی.

بیلګي :

۱ - د درې غړو و دوم ټولګي ته د وارییشنونوشمیر له تکرار سره دی

$V_{W_3}^{(2)} = 3^2 = 9$

۲ - د څلور غړو و دوم ټولګی ته د وارییشنونو شمیر له تکرار سره دی

$V_{W_4}^{(2)} = 4^2 = 16$

(c) ketabton.com: The Digital Library



۳ - د درې غړو و دريم ټولګي ته ض واريېشنونو شمير له تکرار سره دی

$$V_{W3}^{(3)} = 3^3 = 27$$

۴ - د مورس نخښه ( Morsezeichen ) له دوه غړو ، ټکی او لنډې کرښی يوځای کيږي.

د يوه ، دوه درې او څلورو غړو جوړه نخښنو شمير دی

$$V_{W2}^{(1)} + V_{W2}^{(2)} + V_{W2}^{(3)} + V_{W2}^{(4)} = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 30$$

## ۱۰ . ۴ . ۳ کمبينيشن ( Kombination (لاتين: يو بل سره تړل)

تعريف ۱۰ . ۷ :

د n غړو و k-ام ټولګي ته ( n > k ) يو کمبنيشن هغه دی چی هر يو له k غړو يوځاي دروولو څخه ، کوم چی له n غړو، بی د غړو له نظم په پام کی نيولو سره، جوړوي.

کمبينيشن له واريېشن منځ ته راځي، که چيری نظم په پام کی ونه نيول شي.

بيلګي:

۱ - د درې غړو a , b , c و دوم ټولګي ته کمبينيشن په لاندې ډول دی:

ac bc

ac .....

۲ - د څلور غړو d , a , b , c و دوم ټولګي ته کمبينيشن په لاندې ډل دی

ab bc cd

..... ac bd

ad ...........

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

د دې څلو غړو ودریم ټولګي ته کمبینیشنونه په لاندې ډول دي:

abc bcd

acd

۳ - د پنځه غړو 1 , 2 , 3, 4 , 5 و دریم ټولګي ته کمبینیشنونه په لاندې ډول دي( لاندی هم باید له کیڼ لاندې لورته په ښۍ لور لیکل شوي وی)

123 234 345

124 235

125 245

134

135

145

جمله ۱۰ . ۶ : د n غړو و k -م ټولګي ته د کمبینیشنونو شمیر دی $C_n^{(k)}$

$$C_n^{(k)} = \binom{n}{k}$$

اوبی (حل): د n غړو و k-ام ټولګي ته د اوریيشنونو شمیر دی:

$$V_n^{(k)} = \frac{n!}{n-k}$$

کمبینیشنونه له واریيشنونو په دې توپیریږي، چی ترتیب په نظر کی نه نیول کیږي، دا بیا دا مانا لري چی ټول د k غړو k! پرموتیشنونه په یو کمبینیشن کی یوه ته یوځاي کیږي

له دې امله لرو : $C_n^{(k)} = \frac{V_n^{(k)}}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!.k!} = \binom{n}{k}$.

(c) ketabton.com: The Digital Library



بیلګی :

۱ - و دوم ټولګي ته د درې غړو کمبینشنونو شمیریا ګڼون دی

$$C_3^{(2)} = \binom{3}{2} = 3$$

۲ - و څلورم ټولګي ته د څلور غړو کمبینیشنونو شمیر دی‌د څلورو غړو و دریم ټولګي ته د کمبینیشنونو شمیر دی

$$C_4^{(2)} = \binom{4}{2} = 6$$

۳ - د پنځه غړو ودریم ټولګي ته د کمبینیشنونو شمیر دی

$$C_4^{(3)} = \binom{4}{3} = 4$$

۴ - په لاتري ( ۶ له ۴۹ څخه ) د امکاناتو لپاره شمیر دی

الف ( یو شیږ $C_{49}^{(6)} = \binom{49}{6} = 13983816$

ب : یو څلور $C_6^{(4)}.C_{43}^{(2)} = \binom{6}{4}\binom{43}{2} = 13545$

۶ تیپ عددونه د یوه ۴ عددونوګروپ څخه ںوځاي کیږي، چی له ایستل شوو شیږ عددونو ( ۴ تیک یا صحیح) او دوه عددونه( ۲ پاتی عددونه) دي .

پیژند ۱۰ . ۸ :

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

د n غړو و k-ام ټولګي ته کمبينيشن، په کوم چی يواځني غړي k - ځله تکراروي، کمبينيشنونه د تکرار سره نوميږي.

بيلګي:

۱ - د درې غړوc , b , a و دويم ټولګي ته د تکرار سره کمبينشنونه دي.

aa ۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰

bb ab ۰ ۰۰۰۰۰

cc bc ac

۲ - د څلور غړو c , b , a , d و دويم ټولګي ته د تکرار سره کمبينيشنونه دي

aa ۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰

bb ab ۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰

cc bc ac ۰۰۰۰۰۰۰۰

dd cd bd ad

۳- د درې غړو 1 , 2 , 3 و دريم ټولګي ته د تکرار سره کمبينيشنونه دي( لاندي ليکنه بايد له کيڼ لور پيل وی، خو دلته له ښی لور پيل شوی وکيڼ لور ته )

331 221 111

332 222 112

333 223 113

123

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

جمله ۱۰ . ۷ : د n غړو و k - ام ټولګې ته د تکرار سره د کمبینیشنونو شمیر یا ګڼون دی:

$$C_{W_n}^{(k)} = \binom{n+k-1}{k}$$

دلته دې له ښوونی( چی په kد پوره ایندکشن له لار ې صورت نیسی ) تیر شو.

بېلګې: ۱ - د درې غړو و دویم ټولګې ته د تکرار سره کمبېنیشنونه ګڼون یا شمېر دی

$$C_{W_3}^{(2)} = \binom{3+2-1}{2} = 6$$

۲ - دڅلورو غړو و دویم ټولګې ته د تکرار سره کمبېنیشنونه ګڼون یا شمېر دی

$$C_{W_4}^{(2)} = \binom{4+2-1}{2} = 10$$

۳ - د درې غړو و دریم ټولګې ته د تکرار سره کمبېنیشنونه ګڼون یا شمېر دی

$$C_{W_3}^{(3)} = \binom{3+3-1}{3} = 10$$

۴ - د څلورو مکعبونو ، چې اړخونه یې د یوه تر شپږ نخښه وي . (نخښه شپږ اړخیز) ممکن مختلف اچول ، په دې مانا چې کومې سترګې سره لویږي لاندې دي.

$$C_{W_6}^{(4)} = \binom{6+4-1}{4} = 126$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



----------------------------------------------------------------------------------------

### ۱۰ . ۴ . ۴ د برموتییشن،واریيشن،کمبینیشن ټولګه

| داا | د په پا یوې برخی راټولونه م کی نیولو شوو غړو | | د ټولو په پام کی نیول شوو غړو راټولونه یا ټولګه |
|---|---|---|---|
| | له نظم تیریدنه | نظم په پام کی نیونه | |
| | کمبینیشن | واریيشن | پرموتیشن |
| د ټول غړي یوله بل توپیر لري | د n غړو کمبینیشن و k-ام ټولګي ته شمیر یا ګڼون $C_n^{(k)}=\binom{n}{k}$ | د n غړو واریيشن و k-ام ټولګي ته شمیر یا ګڼون $V_n^{(k)}=\frac{n!}{(n-k)!}$ | دn غړو پرموتیشن شمیر یا ګڼون $P_n=n!$ |
| له تکرار سره | د n غړو دکمبینیشن شمیر وk -ام ټولګي د تکرار سره $C_{W_n}^{(k)}=\binom{n+k-1}{k}$ | د n غړوواریيشن شمیر د تکرار سره $V_{W_n}^{(k)}=n^k$ | د k غړو پرموتیشن د ni غړو سره په k -م ګروپ کی $P_n^{(n_1,n_2,\ldots n_k)}=$ $=\frac{n!}{n_1!.n_2!\ldots.n_k!}$ |

(c) ketabton.com: The Digital Library



## ۱۰ . ۵ تمرینونه

۱ - لاندي فاکولتی وشمیری

الف ) 7! ، ب ) 3!.5! ، پ ) 6! / 4!.I0!

۲ - لاندي ویشونه ساده کړی

a ) (n+1)! / ( n-2)!  b) (2n)! / n!  c ) n! / 2n!

۳ - لاندي افادي وشمیری!

a) $\binom{6}{4}$  b) $\binom{1,5}{3}$  c) $\binom{-1}{6}$  d) $\binom{4}{1}$  e) $\binom{4}{0}$

f) $\binom{8}{8}$  g) $\binom{5}{4}\cdot 4!$  h) $\binom{7}{6}\cdot 3!$  i) $\binom{6}{7}\cdot 3!$  j) $\dfrac{\binom{7}{6}}{3!}$

۴ - لاندي زیاتونونه وشمیری!

a) $\binom{2}{1}+\binom{2}{2}$  b) $\binom{3}{1}+\binom{3}{2}$  c) $\binom{3}{2}+\binom{3}{3}$

d) $\binom{4}{1}+\binom{4}{2}$  e) $\binom{4}{2}+\binom{4}{3}$  f) $\binom{4}{3}+\binom{4}{4}$

۵ - لاندي افادي د بینوم د فرمول کارونی(استعمال ) په بنسټ وګڼی!

a ) $(x+y)^7$  b ) $(a-6)^6$  c ) $(5a+4y)^3$

d ) $(x/2 - y/3)^4$  e ) $(2\quad a+3\quad b)^2$  f ) $(x^2+y^2)^3$

۶ - لاندي افادي ساده کړی!

a) $(-1+a)^2 - (1-a)^2$  b) $(a^2+b^2)^2 - (a^2-b^2)^2$

c ) $(\quad ab-1)(-a-\quad ab)+ab$

۷ - د بینوم په یو خل یی بیل( تجزیه ) کړی!

a ) $25a^2 + 10\,ab + b^2$  b) $(49a^2 - 42a + 9$

c ) $169a^2 - 130\,ab + 25b^2$  d ) $2x+2.\quad 6xy+3y$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

۸ - الف ) د غړو ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ پرموتیشنونه په لکسیکوګرافي نظم ولیکی!

ب ) د a,e,f,h,n پرموتیشنونو په څو ځایونو کی« fahne » او« hafen » ولاړ دي؟ دا الماني کلیمي دي چی دپښتو اړونه یی « بیرغ» او« بندر» دي.

۹ - الف ) په څو ځایترتیب یا تنظیم کیدی شي ، شپږ کسه ځاي ونیسی؟

ب ) څومره پنځهٔ ځیفري ګڼونه د پنځه ځیفرونو4, 3, 2, 1, 0 سره کیدی شي ولیکل شي، که هغه ګڼونه چی په صفر پیل کیږي ونه لیکل شي ؟

پ ) د غړوa,b,c,d,f څومره پرموتیشنونه په c ، په de ، په cdef پیل کیږي؟

۱۰ - الف ) د غړو a , b , c تول پرموتیشنونه ولیکی، په کومو کي چي a او b هره یوځل، غړی c دوه ځله رامنځ ته کیږي.

ب ) د دې پرموتیشنونو ګڼون یا شمیر وګڼی!

۱۱ - څومره تنظیم شوي جوړې د الفبا د۲۶ (لاتین توري ) تورو څخه جوړیدلی شي ؟

۱۲ - د څلورم تولګي څومره مختلف واریشنونه د

الف ) بې له تکرار

ب ) له تکرار سره د غړو 8 , 6 , 4, 2, 0 موجود دي؟

۱۳ - یوه سوری کارت له ۸۰ سوریدرځونو چي هریو لس سوري لري، جوړ دی. څومره سوریو یوځایلیکل ممکن دي، که هر درځ ټیك یو ځل سوری شي؟

۱۴ - له شپږ غړو جوړ کمبینیشن ګڼون و څلورم تولګي ته او پنځم تولګي ته څومره لوي دي،

الف ) بې له تکرار

ب ) له تکرار سره؟

۱۵ - یادونه : دا د کارتو لوبولپاره تمرین نه دی لیکل شوی

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

۱۶ – څومره مختلفی ازمایني ممکن دي که په یوه تولید کی له هر ۲۰ یوه وازمایل شي؟

۱۷ – په موټرو ترافیك نخښې په لاندې توګه یوځای شوی : یوه د ځاي نښونه ډله د نخښې الف بې پسې څلور ګروپ یا ډله راځي، چې له څیفرونو ۰ تر ۹ څخه جوړ وي. د یوې کره ټاکلې الف بې پیژندنښې یا ترافیکی نخښې ممکن دي؟

۱۸ – د مختلفو اندازو او د خامموادو جوړ نلونه ، د رنګونی له لارې یو له بل توپیریدی شي ، که څلور رنګ نښونی ولرو؟

۱۹ – د منډې یوه میچ په اخرکی شپږ پاتی منډې وهونکی برخه اخلي. د منډو څومره امکانات موجود دي؟

۲۰ – په څومره ډوله

الف ) اته مختلفی مرغلرې،

ب ) درې سرې، څلور شنې، یوه زرغونه مرغلره

ترتیبیدلی شي؟

۲۱ – څومره تلفونونه کیدی شي وتړل شي کی یواځي پنځه ځایزه نمره موجود وي؟ څومره تلفون تړل ممکن دي که تلفون نمرې شپږځایزې وي او په 0 پیلکیدنه یی اجازه ونه لري؟

۲۲ – د درې شپږسترګیو ( یا –اړخیزو ) سره ( څیره مکعب دی اومخونه له یوې تر شپږ سترګو باندې په نخښه دي، ماته یي د پښتو نوم نه راځي او االماني یی Würfel دی ) څومره مختلفی اچونی ممکن دي، چې ټولې شپږسترګې مختلفې سترګې ګنون وښايي؟

څومره مختلفې اچونې له درې شپږسترګیو سره ممکن دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

# ۱۱ کرښیز-، خطي – یا لاینیز الجبر

یادونه : د لته دې هم د هرڅه له مخه بیا دې ته ګوته نیول شوي وي ، چې څه به تکرار وي، خو هغه لاتین متل دی، چې » تکرار د زدکړې مور ده .«
لاندې مخ ته پرته اصلي برخه دm برابرونونو ځوابونو ته چې n اووښتونې یا مجهولی یا ناپیژندونکی لري، وقف ده، چیرته چې m د برابرونونو ګڼون یا تعداد n د ناپیژندونکو یا مجهولو ګڼون (تعداد) سره برابر او همدا ډول لوي او یا کوچنی کیدی شي
په ۱۱ . ۱ برخه کی د دوه ناپیژندونکو یا مجهولو سره د برابرونونو سیستمونه تر څیړنی لاندې نیول کیږي، چې د ښوونځي شمیرپوهنی تکرار دی، مګر دلته د برابرونونو سیستمونه د ناټاکلوځلونو یا ضریبونو یا فاکتورونو سره هم راوړل کیږي، چې د حالتونو توپیریدنه یي اړیینه ده۰
دا راوړنی به په ۱۱ . ۲ برخه کی درې ناپیژندونکو یا نامعلومو او په ۱۱ . ۳ برخه کی په خوښه زیاتوناپیژندونکو ته وغزیږي، په ټولو برخو کی پل په پل د دیترمینانت کلیمه او د ګاوس الګوریتم د کار ډګر ته را اچول کیږي .
په ۱۱ . ۴ برخه د هوموجینو برابرونونو سیستم ځانګړي ځوابونه په بر کی نیسي۰
یادونه : ولې لاینیز برابرونونه او نه کریز یا بندکرښیز یا خطی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

مورږ د برابرونونو له څيرې پوهيږو، چۀ دا يوه کرښه ورکوي، چې لاتين يا کۀ غواړئ انګريزي يې لاين نوموليٓ د کرښو اوبندکرښو نومونه هم شته، خو د دې لپاره، چې د نورو درسې منځپانګی سره يې توپير وي،نو مورږ هم ورته له دې امله لاينيز وايوٓ

## ۱۱ . ۱ . لاينيز برابرون د دوه ناپيژندونکو سره

داسی يو مساوات د دوه ناپيژندونکو سرهکيدي چی په لاندې ډول انځور شي

$$ax + by = c \qquad (11.1)$$

دلته کيدی شي چی ناپيژندونکی لويي $x$ او $y$ په خوښه رييل ګنونه وي چی يو له بل سره په ورکړ شوي بڼه تړلي. يا په بل عبارت : $x$ او $y$ واريابلی(اووښتونکی يا لنډ: اووښتوني ) دي، برابرون ( ۱۱ . ۱) لاينيز فنکشن(بلواك) برابرون په ګوته کوي چی د هغي څيره په $y,x$ کواوردينات کی ناپای کرښه ده( ۱۶ - امه برخه دی وکتل شي )

ځانګړی حالت : $a = 0$ يا $b = 0$ په ځانګړې توګه کرښه انځوروي يا په ګوته کوي چی د $y$ - محوراو همداسی د $x$ - محور سره غبرګه د ه .

که دا ( ۱ . ۱۱ ) برابرون د دواړو نايژندونکو يا مجوهولو $x$ او$y$ لپاره ټاکنمساوات يا ټاکنبرابرون ونيول شي، نو دا پوښتنه رامنځ ته کيږي، چی ددې مسئلی د حل (اوبی) لاندې به څه پوهيدل غوښتونکی وي.

د ( ۱۱. ۱ ) برابرون اوبيونه په څرګند ډول د ټولو ارزښتجوړو $(x, y)$ ډيری ده، چی( ۱۱.۱ ) برابرون پوره کوي. که اصلي حالت $a , b |= 0$ ته پام وکړو نو برابرون (۱ . ۱۱ ) د $y$ په لور داسی ځوابوو.

$$y = -(a/b)\,x + c/b \qquad (11.2)$$

کيدی شي چی $x$ په خوښه وټاکل شي او$y$ له ( ۲ . ۱۱ ) برابرون څخه لاس ته راولو. ګورو چی ناپاي ډيرې اوبيونې يا حلونه لاس ته راځی يعني د اوبيونې ډيری يا اوبيډيری $L$ په لاندې ډول ده

$$L = \{ (x, y) \mid y = -(a/b)\,x + c/b \} \quad (11.3)$$

داسې لوستل کيږي: $L$ د ټولو $(x,y)$ جوړو ډيری ده ،داسې چې..... (ورپسې هغه برابرون)ٓ

ددې لپاره لنډ ليکل کيږي: د ( ۱۱ . ۱ ) برابرون اوبی يا حل $y = -(a/b)x+c/b$ ،د خوښی $x$ ٓ

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

طبعآ کیدی شي چي برابرون د x په لور هم اوبی شي. دلته y په خوښه نیسو، نو د لته د برابرون ( ۱۱ . ۱ ) ځواب داسی دی x = -(b/a)y + c/b , په خوښه y ۰

دا چي په لاندې کی مورږ د درېو یا ډیرو ناپیژندونکو یا نامعلومو برابرونونو سره سر او کار لرو، نو موخه ور بولو که ناپیژندونکي د x, y , z .... سره په نخښه نه کړو بلکه د $x_1, x_2, x_3, .....$ سره .

ددې په نخښونو سره کیدی شي چی په څرګند ډول وښایو:

لاندې برابرون د دوه ناپیژندونکو $x_1, x_2$ سره

$$a_1x_1 + a_2x_2 = b, .............(11,4)$$

د a |= 0 لپاره

$\infty^i$

ځوابونه لري

$\infty^i$

په دې مانا چی i = 1 , 2, 3۰۰۰ ناپیژندونکو یا نامعلومی لپاره په خوښه r ازښتونه کیښوول کیدی شي.

$$x_1 = -\frac{a_2}{a_1}x_2 + \frac{b}{a_1}, ...........(11,5)$$

$x_2$ په خوښه

د

$a_2 \neq 0$

لپاره

$\infty$

ځوابونه

$$x_2 = -\frac{a}{a_2}x_1 + \frac{b}{a_2}; ................(11,6)$$

$x_1$

په خوښه

د a1 =a2 = b = 0 (0.x1+ 0.x2= b = 0 (لپاره ناپای ډیر ځوابونه

د په خوښه

$$x_1, x_2, ..........................(11,7)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

د

$a_1 = 0; a_2 = 0; b \neq 0$

لپاره

$0.x_1 + 0.x_2 = b \neq 0$

په ښتوالی یا تضاد یا مخامخوالی دی، له دې امله ځواب نه شته.
نوټ : دلته

$\infty^i$

دا مانا لري چې د ناپیژندونې یا مجهولی

$x_i$

لپاره i = 1,2.. په خوښه ناپای ارزښتونه نیول کیدی شي.

۱۱ . ۱ . ۲ – دوه لاینیز برابرونونه د دوه ناپیژندونکو سره
د دوه برابرونونو سیستم د دوه ناپیژندونکو سره لاندې عمومي شکل لري

$$I............a_{11}x_1 a_{12}x_2 = a_1$$
$$II..........a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = a_2;..................(11,8)$$

دا ټاکلي برابرونونه کیدی شي چې په اووښتونو یا واریابلو x 1 اوx2کی د بلواکبرابرون یا فنکشنمساوات په څیر ونیول شي او په x1 , x2 - کواوردیناتسیستم کی د کرښو په ډول انځور شي. که کرښې یو بل غوڅې کړي نو دا د مساواتو په سیستم ( ۸ . ۱۱ ) کی د کرښو یوګونی( بهتره : یوګونی، یواځنی د بل څه لپاره کارول شوی ) اوبیونه ده یا حل دی.
که دواړه کرښې یو په بل پریوځي نو دا په دې مانا دي چې II همغه مساوات لکه I انځوروي. دلته دا بسیاکوي، چې د ۱۱ . ۱ . ۱ . له مخې ټیك یا فقط مساوات I یا مساوات II حل شي. دلته ناپاي ډیر

$\infty^1$

ځوابونه موجود دي.
داسي هم کیدی شي چې فورمال

$\infty^2$

رامنځ ته شي، که ټول

$a_{ik} \wedge a_i$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

د صفر سره برابر ي. موږ دلته دا حالت نه څیړو. دا څیړو چی، که دا برابرون اوبیونه ونه لري. دا حالت هغه وخت رامنځ ته کيږي، چي کرښه I اوکرښه II غبرګي ځغلي مګر یو په بل نه وي پرتی.

په دوه برابرونونو کي، د دوه ناپیژندونکو یا اووښتونو سره، کیدي شي لاندې حالتونه را منځ ته شي
۱ - یو یواځني ټاکلی ځواب مو مخ ته پروت دئ (اصلي حالت )
۲ - کوم ځواب مو و مخ ته نه دئ پروت (سیستم مخامخوالی یا تضاد لري )
۳ - ناپای ډیر ځوابونه موجود دی II ( برابرون برابر په I مساوات او یا د هغه څو برابره دی )
۴ - ناپاي ډیر ځوابونه موجود دي.
( ټول $a_{ik} = 0$ او ټول $a_i = 0$ دي )
د دوه برابرونونو له مخی چی دوه ناپیژندونکی لري، کیدی شي په اسانتیا وپیژندل شي، چی د برابرونونو کوم حالت مو مخ ته پروت دئ.
په سیستمونو کی چي درې یا زیاتي واریابلی یا اووښتونې لري ورته حالتونه په ساده ډول نه شو پیژندلی چي کوم حالت تر مخ لرو. دلته باید فورمال پرمخ لاړ شو، دا چی څنکه دا کار سرته رسولی شو غواړو چی د پوښتنو په فورمال ځواب پیل وکړو او د برابرونونو پوښتنو ته ځواب پیدا کړو. دلته باید دري بنسټیز د مساواتسیستم د ځواب کاردودونه)متودونه( تکرار شي:

۱ . د برابر یا مساوي ځاي په ځاي کولو متود:
دواړه برابرونونه د یوې نامعلومی په لور اوبی کیږي(د بیلګي په توګه د x دوه په لور(، دواړه برابرې لیکي او په دې ډول یو برابرون د یوې نامعلومي سره منځ ته راځي۰

۲ - یو د بل پر ځاي کینښولو متود:
برابرون یا مساوات د یوې ناپیژندونکې ( د بیلګي په توګهx دوه) په لور ځواب کیږي او دا لاس ته راوړنه په بل برابرون کی ځاي په ځاي کیږي، په دې ډول د یوې ناپیژندونې برابرون منځ ته راځي ( د بیلګي په توګه دx یو)

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

۳ - د زیاتون کارونه (جمع کولو عملیه):

سرړی یو ټاکلی څو برابره ( کیدی شي چی کمیز یا منفي هم وي) د II د I برابرون یوه ټاکلي څو برابره سره زیاتوي، داسی چي یوه ناپیژندونی بیا مخ ته نه راځی یا له منځه ولاړه شي. د نیتجي سره بیا دا بله ناپیژندوني څیړي. دا د داوړو نامعلومو( ناپیژندونو) لپاره کیداي شي . دا متود دبرابرونونو د سیستم لپاره بنسټیز دی چی د دیترمینانتو ( die Determinanten) له لارې د برابرونونو ځواب لاس ته راوړو .

دا متود په درې ځانګړو برابرونسیستمونو باندې باید وکارول شي، ټول څلورځلوني( ځله وونی یا ضریبونه) بایدله صفر توپیر ولري یعني $a_{ik} \neq 0$ که چیرې یو $a_{ik} = 0$ د بیلګي په توګه $a_{21} = 0$ نو بیا به مساواتو په لاندې ډول د درېګوډي جوړښت لرودی:

$$I.............a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = a_1;......a_{11} \neq 0$$

$$II.....................a_{22}x_2 = a_2,.......a_{22} \neq 0;..........(11,9)$$

دلته نو

$$a_{21} = 0$$

بیا له II سیده راویستل کیدی شو او د نتیجي څخه یي چی په I کی کښیښودل شوې وی $x_1$ هم معلومیدی شو. دلته دا په ګوته کوو چی د ګاوس الګوریتم په استعمال بیا برابرون د درېګوډي شکل باندې اړول کیږي .دا درې څرګند حالتونه په لاندې ډول دي :

سیستم ۱

I 2x1 + 3x2 = 4

II x1 - 2x2 = -5

دا سیستم یواځنی یوځواب لر II برابرون د I برابرون سره اړیکی نه لري

سیستم ۲

2x1 + 3x2 = 4

II 4x1 + 6x2 = 8

په اسانۍ ګورو چی دلته II برابرون په ۲ ځل شوی I برابرون دئ . دواړه برابرونونه همغه کرښه وښایی او په دې ډول د مساواتو اوبیونې ناپای دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

سیستم ۳:

I 2x1 + 3x2 = 4

II 4x1 + 6x2 = 10

دلته بې ډیله څرګندده ده چې برابرونونه یو د بل تضاد یا یو د بل په څټ دي .د Iبرابرون دوه برابره په لاندې ډول دی:

4x1 + 6x2 = 8

په دې توګه ناممکن ده چې II هم باوري وي، نو له دې امله دا سیستم ۳ اوبیونه نه لري.

بیلګه ۱۱ . ۱ :

سیستم۱ دې په پورته درې ورکړ شوو متودونو ځواب شي .

الف: مساوي اینوولوکارونه یا عملیه

$$I':.....x_1 = 2-(3/2)x_2;.......;II':.....x_1 = 2x_2 - 5$$

$$2-(3/2)x_2 = x_2 - 5$$

$$-(7/2)x_2 = -7$$

$$x_2 = 2;\Rightarrow$$

$$x_1 = 2-(3/2).2$$

$$x_1 = -1$$

ب) د بل په ځاي کینولوکاروونه ( عملیه) : II د x1 په لور ځواب کیږي او بیا په I کی ځاي په ځاي کیږي٠

$$II'::.........x_1 = 2x_2 - 5$$

$$2(2x_2 - 5) + 3x_2 = 4$$

$$4x_2 - 10 + 3x_2 = 4$$

$$7x_2 = 14$$

$$x_2 = 2 \Rightarrow x_1 = 2.2 - 5 \Rightarrow x_1 = -1$$

پ ) د زیاتونکاروونه: $x_1$ له منځه ځي، که ( -2 ) ځله د II برابرون و I ته زیات شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$I:................2x_1+3x_2=4$$
$$(-2)II:........-2x_1+4x_2=10$$
$$I-2II:....................7x_2=14$$
$$..................................x_2=2$$





کیدی شي، ود بیلګي په توګه، له II څخه x1 وشمیرل شي:

$$x_1=2x_2-5=4-5=-1$$

د زیاتون کاروونی په کلکه یا تل استعمال څخه کیدی شي

x2

له منځه یو وړل شي، په دې شکل چی د II درې برابره د I دوه ځله ته ورزیات کړی شي.

$$2.I:............4x_1+6x_2=8$$
$$3.II:............3x_1-6x_2=-15$$
$$---------------------$$
$$2.I+3.II:........7x_1..........=-7$$
$$........................x_1.............=-1$$

یادونه : په پورته کې یا نورو کومو ځایونو کې ، چې ټکی چیرته ایښول کیږي، پو هیږو، چې چیرته ټکی د ځای غزونې او چیرته د ځل لپاره ځای په ځای شوي دي

بیلګه ۱۱ . ۲ :

سیسم ۲ دې په پورته درې متودو ځواب شي:

الف ( مساوي اینوولو:

I' : x1 = 2 -(3/2).x2

II': x1 = 2 -(3/2)x2

2- (3/2)x2 = 2 - /3/2)x

0.x2 = 0

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته

$x_2$

په خوښه. دا په دي مانا چی

$x_2$

هر ارزښت نیوی شي ۰ له 'I څخه ناپای ډیر ځوابونه لاس ته راځي

$x_1 = 2 - (3/2)x_2$ او $x_2$ په خوښه.



---------------------------------------------------------------------------

ب ) د بل په ځاي ایښوولومتود: $I' \quad x_1 = 2-(3/2)x_2$ ,

په II کی ایښول کیږي

$$II' \quad 4.(2-(3/2)x_2) + 6x_2 = 8$$

$$8-6x_2+6x_2 = 8$$

$$0.x_2 = 0 \quad x_2$$

په خوښه له 'II لاس ته راځي

$I' : x_1 = 2 - 3/2\, x_2$ $x_2$ په خوښه

پ) د زیاتون متود یا لار یا طریقه:

$$2.I \quad 4x_1 + 6x_2 = 8$$

$$II \quad 4x_1 + 6x_2 = 8$$

$$II - 2.I : \; 0x_1 + 0x_2 = 0$$

که یواځی دا مساوات په نظر کي ونیول شي ، نو $x_1$ او $x_2$په خوښه ټاکل کیدی شي، دا چی د $x_1$ او $x_2$ ترمنځ په I یا II کی ورکړ شوي اړیکي دي ، نو یواځي یوه ناپیژندونکو په خوښه ټاکل کیدی شي . ځواب داسی دی:

$$x_1 = 2-(3/2)x_2$$

$x_2$په خوښه

په همدې ډول:

$$x_2 = 4/3 -(2/3)x_1 ,$$

دلته $x_1$ په خوښه ټاکل کیږي

بیلګه ۱۱ . ۳ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

سیستم ۳ دې په پورته  درې ورکړشوومتودونو ځواب شي.

الف ( مساوي ځاي په ځاي کولو متود:

$$I': \quad x1 = 2 -(3/2)x2$$
$$II': \quad x1 = 5/2 -(3/2)x2$$
$$2-(3/2)x2 = 5/2 -(3/2)x2$$
$$0.x2 = 1/ 2$$



دا یو  په ځتوالی  یا تضاد دی، ځکه چی هیڅ یو رییل ګڼ x2 نه شته چی دا مساوات پوره کړي، نو له دې امله کوم ځواب  نه شته یا وجود نه لري.

ب )  د بل په ځاي لیکلو عملیه:      $I': \quad x1 = 2 - (3/2)x2$ ,

په II  کی دی په ځای شي

$$II': 4.(2-(3/2)x2)+6x2 = 10$$
$$8 - 6x2 + 6x2 = 10$$
$$0.x2 = 2$$

دا مخامخوالی یا په ځتوالی  یا  تضاد دی ، پس ځواب نه شته.

پ )  د زیاتون متود:

$$2 . I \qquad 4x + 6x = 8$$
$$II \qquad 4x + 6x = 10$$

$$2.I - II \qquad 0.x + 0.x = -2$$

په ځتوالی  یا تضا د دی ، ځواب وجود نه لري

د  لاندې بیلګو سره غواړو د منځ ته راتللو پېښتنو ځوابونو لپاره  اړوند لارښوونه ګوته لك کړو.

بیلګه ۱۱ ۰ ٤  :   په لاندې فورم  یا بڼه    برابرونسیستم ورکړ شوی:

$$I \qquad x /(a+b) +y/(a-b)$$
$$II \qquad x /(a-b) +y/(a+b)$$

دا ټیك هلته   موخه ور یا هدفمند دی چی $a =| b$ او $a- =| b$ وي، یعنی $|b| =| |a|$ وي  .

(c) ketabton.com: The Digital Library

کيدی شي چې دا سيستم د پورتنيو متودونو څخه په يوه متود ترلی ځواب کړي، د يوه د مخه ورکړ شوي فورم يا بڼې اوړون له لارې هم ځواب کيدی شي.

لمړی د جمعی متود څخه کار اخلو:

د I ځل له $1/(a+b)$ او II ځل له $-1/(a-b)$ څخه وروسته دا لرو:

$$x/(a+b)^2+y/(a^2-b^2)=1/(a+b)$$

$$-x/(a-b)^2-y/(a^2-b^2)=-1/(a-b)$$

له دې سره د y دواړه ځله ووني ياضريبونه يو د بل مخامخ (يا په بل عبارت يو د بل په څټ ) نخښی لري او له دې امله د زياتون په حالت کی له منځه ځي، نو په دې توګه مو يو برابرون د يوې ناپيژندونکی سره مخ ته پروت دی:



---

$$\frac{x}{(a+b)^2}-\frac{x}{(a-b)^2}=\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a-b}$$

$$\frac{(a-b)^2-(a+b)^2}{(a+b)^2(a-b)^2}x=\frac{a-b-(a+b)}{a^2-b^2}$$

$$\frac{a^2-2ab+b^2-a^2-2ab-b^2}{(a^2-b^2)^2}x=\frac{a-b-a-b}{a^2-b^2}$$

$$-\frac{4ab}{a^2-b^2}x=-2b$$

$$2abx=b(a^2-b^2)....(*)$$

$$x=\frac{a^2-b^2}{2a};ab\neq 0$$

که I له $1/(a+b)$ او IIله $-1/(a-b)$ سره ځل شي کيدی شي: چی y په ورته ډول وشميرل شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{x}{a^2-b^2}-\frac{y}{(a-b)^2}=\frac{1}{a-b}$$

$$-\frac{x^2}{a^2-b^2}-\frac{y}{(a+b)^2}=\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a+b}$$

$$\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{(a-b)^2(a+b)^2}y=\frac{a-b-(a+b)}{a^2-b^2}$$

$$\frac{a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2}{(a^2-b^2)^2}y=\frac{a+b-a+b}{a^2-b^2}$$

$$-\frac{4ab}{a^2-b^2}y=2b$$

$$2aby=b(a^2-b^2)....(*)$$

$$y=\frac{a^2-b^2}{2a};ab\neq 0$$



دلته مو ځانګړی حالت مخ ته پروت دی، چی دواړه ناپیژندونکی مساوي دي، کومی چی څمونږ د څیړنی لپاره بي مفهومه دی.

دا د x , y لپاره شمیرل شوي ارزښتونه په هغه حالت کی باوري دی چی ab |= 0 وي.

نو څیړو چی کوم حالت توپیر د ab = 0 لپاره منځ ته راځي. . دلته مساوات ) * ( تر څیړنی لاندې نیسو او درې حالته توپیروو:

.1 a = 0 , b |= 0

مساوات )*( داسی دي

0.x = -2b3, 0 . y = -2b3

په دې حالت کی برابرون سیستم ځواب نه لري.) تضاد مخ ته پروت دی

. 2 a |= 0 , b = 0

برابرون( *)( په دې حالت کی داسی دی.

0 . x = 0 ; 0 . y = 0

دلته مخامخوالی یا په څټوالی یا تضاد نه شته ( له I او هم له II لاس ته راځي

x/a+y/a=1 <=> x+y=a

که y خپلواك وټاکل شي، نو لرو x=a-y دلته y په خوښه ټاکل کیدی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په بل حالت کی لرو , y = a - x دلته x په خوښه دی
3 . a=b=0
دا حالت د نیونی له مخی بند ، ناشونی یا ناممکن دی.

بیلګه ۱۱ . ۵:

$$\frac{11}{2x-3y}+\frac{18}{3x-2y}=13$$

$$\frac{27}{3x-2y}-\frac{2}{2x-3y}=1$$

که دا سیستم د (3x-2y)(2x-3y) سره ځلوني په بنسټ فورم بدل کړي، نو لرو:

$$69x-76y=78x^2-169xy+78y^2$$

$$48x-77y=6x^2-13xy+6y^2$$

او کتل کيږي چی په دې ډول لاینیز برابرونتسیستم د x او y لپاره منځ ته نه راځي . دا چی په دې هر یو سیستم کی دوه ماتلاندې سره برابر دي نو کیدی شي چی نوې ناپیژندونکی u , v و لیکو. دا وشمیرو او بیا له دې وروسته لویي x , y راپیدا کړو . موږ ځاي پر ځاي کو



---

u=1/(2x-3y) ,v=1/(3x-2y)
او لاس ته راوړو:

11u+18v=13 <=> 11u+18v=13
27v-2u=1 -2u+27v=1

موږ د زیاتون یا جمعی متود کاروو

33u+54v=39
4u-54v=-2

---

37u=37
u=1 => v=1/9

له دې سره کیدی شي x او y وشمیرل شي:

1=1/(2x-3y)<=> 2x-3y=1
1/9=1/(3x-2y) <=> 3x-2y=9

له دې څخه غوښتونکی ځواب x = 5 , y = 3 لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

## ۱۱ . ۱ . ۳ دویمه درجه دیترمیناتې او د کرامر قاعده

که په ټولیزسیستم(11.8 ) باندې د زیاتون متود استعمال شي، نود x2د له منځه وړلو په لار لاس ته راځي

$$I' = a_{22}.I - a_{22}.II$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$$

پورته برابرون دی) ۱۱،۱۰ ( وي

اود x1 د له منځه وړلو:

$$II' = a_{11}.II - _{21}.I:$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = (a_{11}a_2 - a_1a_{21})$$

دا پورته برابرون دې (۱۱،۱۱) وي

که 0 =| (a11a22 -a12a21) وي، نو له دې یواځنی ټاکلی ځواب لاس ته راځي

$$x_1 = \frac{a_1a_{22} - a_{12}a_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}};\ x_2 = \frac{a_{11}a_2 - a_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},.........(11,12)$$

که د ارزښتونه په ( 11 . 8 ) کی ځای په ځای شي نو تصدیقیږي، چې( 11 . 12 ) په ریښتینی د ( 11, 8 ) ځواب دی. له ( 11 . 10 ) تر ( 11 . 12 ) سړی په واقعیت یا رښتونی کی د دیترمینانت کلیمی په لور لاروی کوي( لارښودوي.)



---

پیژند ۱۱ . ۱: د یو منظم سیستم دوه ځله دوه رییلو ګڼونو $a_{ik}, (i, k = 1, 2)$ د د ۲ -امه درجه دیترمینانت لاندې ، لاندینی ګڼ پوهیږو:

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21};.............(11,13)$$

د اصلي دوه کونجتړي یا دیاګونال (قطر) د توکوځل، ترې کم( منفی ) د څنګ یا فرعی دوه کوجنتړي(قطر) د توکو ځل( یا ) د اصلي دوه کونجتړې یا قطر د توکو ځل څخه د څنګ یا فرعي دوه کونجتړې د توکو ځل کمیږي یا منفی کیږي)

یادونه : دا اوس او وروسته دیترمینانت بڼه د ماتریکس په څیره لیکل شوی، په دیترمینانت کې کرښی سمې دي، خو کومه ناسمپوهنه په کې نه راځي.

په ( 11 . 13 ) کی د xi ځله ووني یا ضریبونه داسی لیکل شوي لکه په ( 11 . 8 ) سیستم کی . د ( 11.13 ) دیترمینانت له دې امله د ( 11 8 ) (له ماځخه دانوکانو کې دننه ګڼونه کله کله بدلیږي، دې ته دې د ګرانو لوستونکو پام وي، دا شمیرپوهنیزه ناسمي منځ ته نه راولي) سیستم د ځلونو ( ضریبونو) دیترمینانت بلل کیږي.

که په ( 11. 13 ) کی لومړی ( درز، ستن یا مته یا ولاړه لیکه یا-کیله) د دیترمینانت ولاړه لیکه( په ځای ) چی د xi ځله ووني یا ضریبونه دی د ( 11 . 8 ) برابرونسیستم

(c) ketabton.com: The Digital Library

بني اړخ (مطلقه توکی) توکي a1 , a2 ولیکل شي نو( په x1 اړونده) لاندې دیترمینانت لاس ته راځي:

$$D_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_1 a_{22} - a_{12} a_2$$

د پورته برابرون ګڼه یا نمره دې) ۱۱،۱٤ ( وې‌په همدې ډول که د ) 11 . 13 ( دیترمینانت دوهم درز بدل کړی شي، نو دx2 پورې اړوند لاندې دیترمینانت لاس ته راځي

$$D_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_{21} & a_2 \end{pmatrix} = a_{11} a_2 - a_1 a_{21};\ldots\ldots\ldots\ldots(11,15)$$

که له ( 11 . 10 ) تر( 11 . 12 ) پورې له ( 11 . 13 ) تر ( 11 . 15 ) پرتله یامقایسه شي نو لاس ته راځي

جمله ۱۱ . ۱ (د کرامر قاعده):
که د ځله وونو یا ضریبونو دیترمینانت لپاره په ( 11. 13 ) کی



$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \neq 0;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(11,16)$$

باوري وي نو د مساواتو سیستم ( 11 . 8 ) یواځنی ټاکلی ځواب لري

$$x_1=D_1/D \quad ; x_2 = D_2/D \qquad /11,17)$$

په داسی حال چی D1 او D2 د ( 11 . 14 ) او ( 11 . 15 ) له مخی شمیرل کیږي.
د ( 11 . 10 ) او ( 11 . 11 ) له امله لرو

جمله ۱۱ . ۲ :
که په ( ۱۱ . ۱۳ ) کی د ځلونو دیترمینانت D لپاره باوري وي

$$0 = D \qquad (11,18)$$

او د کم له کمه یوې دیترمینانتD1 یا D2 لپاره په ( 14, 11 ) یا ( 11 , 15 ) باوري وي

$$D_1|=0 \ \vee D_2\ |=0 \qquad (11,19)$$

نو ( 11 . 8 ) سیستم ځواب نه لري، ځکه چي برابرون یی یو د بل سره مخامخ دي ( تضاد کی دي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله۱۱ . ۳ :

باوري دي

$$D=D1=D2=0 \quad (11 . 20)$$

نو يو له برابرونونو I يا II زياتي دئ ) دواړه برابرونونه يو بل ته اړ دی يا د بل په واك کی دي( او د ۱۱ . ۱ . ۱ . برخی متود استعماليدلی شي يا کار ترې اخستل کيدی شي.

د ښوونبيلګو په ځير دې اوس د ۱۱ . ۱ تر ۱۱ . ۳ پورې بيلګي ( ۱۱ . ۱ . ۲ برخه ) کارول شوي سيستمونه ۱ ،۲ او۳ ګران لستونکي په ديترنمنانتو ځواب کړي، که چيرې ما دا کار سرت ونه رساوه۰.

بيلګه ۱۱ . ۶ : د سيستم لپاره باور لري

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4-3=-7 \neq 0$$

پس يوائځنی تاکلی ځواب لري. پسی باور لري

$$D_1=\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} = -8+15=7 \neq 0; D_2=\begin{vmatrix} 24 \\ 1-5 \end{vmatrix} = -10-4=-14$$



---

له دې امله باوري دی

x1=D1/D=7/-7 , x2=D2/D=-14/-7= 2 ,

بيلګه۱۱ . ۷ :

د سيستم ۲ لپاره باور لري

$$D=\begin{vmatrix} 23 \\ 46 \end{vmatrix} = 12-12=0$$

او ورپسی

$$D_1=\begin{vmatrix} 43 \\ 86 \end{vmatrix} = 24-24=0; D_2=\begin{vmatrix} 24 \\ 48 \end{vmatrix} = 16-16=0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې امله ناپاي ډېر ځوابونه موجود دي) بيلګه۱۱ . ۲ دې وکتل شي.)

بيلګه ۱۱ . ۸ :   د  سيستم  ۳ لپاره باور لري

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0$$

D =   2       3   =12 -12 = 0

او ورپسی

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 10 & 6 \end{vmatrix} = 24 - 30 \neq 0$$

همدلت روښانه ده، چی  ځواب نه شته(د  0=| 4 = D2له شميرلوکيدی شي، چی تيرشو)

بيلګه ۱۱ . ۹ :

مونږ بالاخره غواړو چي په بيلګه ۱۱ . ۴  کی ورکړ شوی مساواتسيستم ته د ديترمينانت له لارې ځواب  ورکړواو ددې لپاره لومړی   D , D1  او  D2 شميرو:



---

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$D=\begin{vmatrix} \frac{1}{a+b} & \frac{1}{a-b} \\ \frac{1}{a-b} & \frac{1}{a+b} \end{vmatrix} = \frac{1}{(a+b)^2} - \frac{1}{(a-b)^2} = \frac{(a-b)^2-(a+b)^2}{(a+b)^2(a-b)^2}$$

$$.........................=\frac{a^2-2ab+{}^2-a^2-2ab-b^2}{(a^2-b^2)^2} = -\frac{4ab}{(a^2-b^2)^2};$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{a-b} \\ 1 & \frac{1}{a+b} \end{vmatrix} = \frac{1}{a+b} - \frac{1}{a-b} = \frac{a-b-(a+b)}{(a+b)(a-b)} = -\frac{2b}{a^2-b^2};$$

$$D_2=\begin{vmatrix} \frac{1}{a+b} & 1 \\ \frac{1}{a-b} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{a+b} - \frac{1}{a-b} = \frac{a-b-(a+b)}{(a+b)(a-b)} = -\frac{2b}{a^2-b^2}$$

لومړی حالت $ab \,|= 0$ :

دلته دیترمینانت $D \,|= 0$ او دا د برابرونسیستم یواځنی ټاکلی ځواب دی

$$x=\frac{D_1}{D}=\left(-\frac{2b}{a^2-b^2}\right):\left(-\frac{4ab}{(a^2-b^2)^2}\right)=\frac{2b}{a^2-b^2}\cdot\frac{(a^2-b^2)^2}{4ab}=\frac{a^2-b^2}{2a}$$

$$y=\frac{D_2}{D}=\frac{a^2-b^2}{2a}$$ (د $D1 = D2$ له امله )

دوم ۱ حالت $a=0, b|=0$ : دلته $D = 0$ مګر

$D1 = D2 \,|= 0$

او د مساواتسیستم ځواب نه لري

دوم ۲

دلته $D = D1 = D2 = 0$

او ناپای ډیر ځوابونه موجود دي چی په بیلګه ۱۱ . ۴ کي بنوول شوي .

دوم ۳ حالت $a = b = 0$ :



---------------------------------------------------------------------------------

دلته مساواتسیستم هدفمند نه دی ( په صفر ویش مخ ته پروت دی) مشوره کیږي چی

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندی د برابرونونو  سیستم دې د لاندې بریالي فورم بدلولو   وروسته دبیلا بیلو لارو ځواب شي او د ځواب متودونه دې یو د بل سره  پرتله  یا مقایسه شي.

$$(a-b)x+(a+b)y=a^2-b^2$$
$$(a+b)x+(a-b)y=a^2-b^2$$

۱۱ ۰ ۱ ۰ ٤ د ګاوس الګوریتم

په ۱۱ . ۱ . ۲ . برخه کي څېړل شوو متودو ټیك په نظر نیولو سره ( برابرو  لیکلو- په ځاي - او د زیاتون عملیه ) ، کره  پوهیدلی شو چی ددې په مرسته  ټولیز  د برابرونسیستم ( 8 . 11 )

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = a_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = a_2$$

په یوه دربېګوډیز جوړ سیتسم

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = a_1$$
$$\ldots\ldots\ldots a_{22}x_2 = a_2$$

بدلولي شو، کوم چی بیا خورا ساده ځواب کیدی شي

۱ . که 0 =| a22 وي، نو  لاس ته راځي:

الف)    x2=a2/a22

ب  )  برسیره پر دې که $a_{11} \neq 0$  وي، نو لاس ته راځي:

x1=(a1/a11)-(a12/a11)x2= (a1/a11)-(a12/a11).(a2/a22)

۲ . که 0 = a22 او 0 =| a2 وي نو ځواب موجود نه دی یا نه شته

۳ . که 0= a22 او 0 = a2 وي، نو  ۲- م برابرون  بی هوده دی  ( د ضرورت وړ نه دی)، او سړی بیا ا.  برابرون  د ۱۱ . ۱ . ۱ برخی متود په مرسته ځوابولی  شي.

د ( 11 . 8 )  سیستم د  ځواب پرابلم په دې ډول کمیږي، چی دا سیستم په دریګوډی بڼه یا – څیره  واړوي . هغه الګوریتم چی دا په هر حالت کی ځواب کولی شي، د ګاوس الګوریتم دی. یا ( 11 . 8 ) سیستم دریګوډی څیره  لري او یا ټول aik  د صفر سره برابر  نه دي.



---

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې کی ( 11 . 8 ) سیستم په روځنی - یا مروج ډول او هم شیماتیکي ډول لیکل کیږي.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | x1 | x2 | RS |
| I | a11x1+a12x2= a1 | | a11 | a12 | a1 |
| II | a21x1+a22x2= a2 | | a21 | a22 | a2 |

(دلته RS د مساواتو د ښي خوا (ښ خ ) یا ښی لور یا ښی اړخ مانا ورکوي)، که I په ځای پریښودل شي اود II برابرون a11 / a21 - ځله له I برابرون څخه کم شي ، نولرو

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | ............................................................................ $x_1$ | $x_2$ | Rs | |
| I | $a_{11}x_1+a_{12}x_2 = a_1$ | | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $a_1$ |
| II' | $0.x_1+(a_{12}-a_{11}.a_{22}/a_{21})x_2=a_1-a_{11}.a_2/a_{21}$ | 0 | $a_1- a_{11}.a_{22}/a_{21}$ | $a_1-a_{11}.a_2/ a_{21}$ | |

که II' لنډ په دی فورم ولیکل شي

نو ټول سیستم لاندې شکل غوره کوي :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | x1 | x2 | RS |
| I | a11x1+a12x2= a1 | a11 | a12 | a1 |
| II' | b22x2 = b2 | | b22 | b2 |

اوس بیرته باید زیات حالتونه یو له بل توپیر شي:

-که b22 |= 0 وي ، نو x2 له II' اوx1 لهI لاس ته راځي.
-که b22 = 0 , b2 |=0 وي، نو ځواب وجود نه لري.
-که b22 = b2 = 0 وي، نو ناپای زیات ځوابونه موجود دي، چی لهI او ۱۱ . ۱ . ۱ برخی ته ورته را څرګندیدی شي (معلومیدلی شي.)

سیستمونه ۱ ، ۲ ، ۳ د ګاوس په الګوریتم ښوول کیږي

بیلګه ۱۱ . ۱۰ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا سیستم داسی لیکل او شیماتیك کیږی:

| | | | $x_1$ | $x_2$ | RS |
|---|---|---|---|---|---|
| I | $2x_1 + 3x_2 = 4$ | | 2 | 3 | 4 |
| II | $x_1 - 2x_2 = -5$ | | 1 | -2 | -5 |

که غوښتونکی دریګوډیڅیره غواړو لاس ته راولو نو Iهمداسی پریږدو او له II څخه دI یو یو په دوه ځله کموو :

| | | $x_1$ | $x_2$ | RS |
|---|---|---|---|---|
| I | $2x_1 + 3x_2 = 4$ | 2 | 3 | 4 |
| II' | $0.x_1 - (7/2)x_2 = -5$ | 0 | -7/2 | -5 |

له II' لاس ته راځي $x2 = 2$
او له I څخه لاس ته راځي. $x1 = 2 -(3/2)\ x2 = -1$

بیلګه ۱۱ . ۱۱:

دلته سیستمونه ۲ او ۳ یواځي په شیماتیکي ډول (جدول په شکل (څیړو. دلته د لمړی لیکی دوه ځله د دوهمی لیکی کمیږي

سیستم ۳

| | x1 | x2 | RS |
|---|---|---|---|
| I | 2 | 3 | 4 |
| II | 4 | 6 | 10 |
| II'=II-2.I | 0 | 0 | 2 |

سیستم۲

| | x1 | x2 | RS |
|---|---|---|---|
| I | 2 | 3 | 4 |
| II | 4 | 6 | 8 |
| II'=II-2.I | 0 | 0 | 0 |

په سیستم ۲ کی ګورو چی لمړی برابرون د دوم برابرون په مخامخ څه نوی نه لري ( 0 = 0 تضاد یا مخامخوالی نه شته). له دې امله یو برابرون (د بیلګي په توګه I ) موجود دی چی د ۱۱ . ۱ . ۱ برخي او یا ۱۱ . ۲ په څیر ځواب کیږي. په سیستم ۳ کی تضاد همدا اوس لیدل کیږي" 0 = 2 " ، نو له دې امله ځواب نه شته.

بیلګه ۱۱ . ۱۲ :

سیستم I دې په څلور ډوله یا واریانتو د ګاوس الګوریتم په مرسته وڅېړل شي

دوم واریانت

x1 x2 RS

I 2 3 4

II 1 -2 -5

II'=II+(2/3).I 7/3 0 -7/3

1. 2 1 -1

اول واریانت

x1 x2 RS

I 2 3 4

II 1 -2 -5

II'=II-(1/2).I 0 -7/2 -7

2. -1 2. 2

څلورم وایانت

x1 x2 Rs

I 2 3 4

II 1 -2 -5

I=I-2.II 0 7 114

دریم واریانت

x1 x2 RS

I 2 3 4

II 1 -2 -5

I'= I+(3/2).II 7/2 0 -7/2

2. 2 2. -1 1. -1 1. 2

دا دلته د یو ګڼ په چوکات یا څلورګوډیز کی نیول دا مانا لري چی د هغی د پاسه ناپیژندونکي د مساوات څخه شمیرل کیږي، کومه چی په هغه لیکه کی پرته ده چی چوکاټ شوې، دا په یواځني ډول دا مانا لري :

واریانت ۱:

ا ) له I څخه دې x1 و شمیرل شي

ب ) له II' څخه دې x2 وشمیرل شي

پ ) په 1 کی x2 له II' شمیرل کیږي:

$$x2= -7 / (-7/ 2) =2$$

ت ) په 2 کی x1 له I شمیرل کیږي:

$$x = (1/ 2)(4 - 3.2 ) = -1$$

واریانت ۲ :

ا ) له I څخه دې x2 وشمیرل شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

ب ) له II' څخه دې x1 وشمیرل شي
پ ( له II' لرو: 1- = x1
ت ) له I څخه لرو: x2 = 2
واریانت (امکان ) ۳
ا) له II څخه دې x2 وشمیرل شي
ب ) له I' څخه دې x1 وشمیرل شي
پ ) له I' لرو 1- = x1
ت ( له II لرو 2 = x2
واریانت ( امکان) ۴
ا ) له II دې x1 و شمیرل شي
ب ) له I' څخه دې x2 وشمیرل شي
پ ( له I' لر x2 = 14 / 7 = 2
ت ) له II لرو:
1- = x1 = -5+2.2

ټولی څلور واریانتی یا امکانت برابر ارزښتونه لری، خو دا چی په څلورمه واریانت کی په ټولګټونو شمیرنه کیږي، »مخته وونه« یا مخوونه( برتري ) یا نوره هم ښه وړاندې توب ورکول کیږي.

## ۱۱ . ۱ . ۵ له دوه وو زیات برابرونونه د دوه ناپیژندونکو سرهره

که څوك له دوه زیات برابرونونه د دوه اوښتونو یا ناپیژندونکو سره ځواب کوي، په ټولیزه (عمومي) توګه باید په نخښه شي چی لومړي دوه برابرونونه x1, x2 ځوابونه لري. که دا ځوابونه په نورو برابرونونو کی ځای په ځای شي تضاد ته رسیږو. د دوه ناپیژندونکو سره له دوه زیات مساوات په ټولیزه توګه حل نه لري. یواځي په ځانګړی حالت کی دا سیستم ځواب لرودی شي. موږ دا پروسه اول په عمومي ښوونلارې څیړو او بیا د ګاوس الګوریتم له لارې.

بیلګه ۱۱ . ۱۳: لاندني دوه سیستمونه ورکړ شوي دي

a ) I $x_1 + 2x_2 = 3$ b) I $x_1 + 2x_2 = 3$

II $2x_1 - x_2 = 1$ II $2x_1 - x_2 = 1$

III $3x_1 + x_2 = 2$ III $3x_1 + x_2= 4$

له I او II څخه د څرګندو یا معلومومتودونو له لارې په دواړو سیستمونو کی لاندې، په لومړی ځل یواځنی پیژندل شوی، ځواب لاس ته راځي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

له ) a او )b څخه لرو1 = x1 + 2x2 که دا ارزښتونه په IIIکی ځاي په ځاي شي نو لرو:

په ( a ) کې :3.1+1.1 = 4 |= 2, په ( b ) کی : 3.1 + 1.1 = 4

نو سیستم ( a ) ځواب نه لري او سیستم ( $\hat{b}$ ) یواځني ټاکلی ځواب لري یعني x1=x2=1

بیلګه ۱۱ . ۱۴ :

په بیلګه ۱۱ . ۱۳ کي ورکړ شوي مساوت اوس د ګاوس د الګوریتم له لارې ځواب کوو.

| a) | x1 | x2 | RS | b) | x1 | x2 | RS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I | 1 | 2 | 3 | I | 1 | 2 | 3 |
| II | 2 | -1 | 1 | II | 2 | -1 | 1 |
| III | 3 | 1 | 3 | III | 3 | 1 | 4 |
| II'=II-2.I | 0 | -5 | -5 | II'=II-2.I | 0 | -5 | -5 |
| III'=II-3.I | 0 | -5 | -7 | III=III-3.I | 0 | -5 | -5 |
| III''=III'-II' | 0 | 0 | -2 | III=III'-II' | 0 | 0 | 0 |

په ( a ) کی تضاد پیژندلکیږي ( III':0.x1+0.x2=-2) ځواب نه شته یا وجود نه لري .

په ( b ) کی تضاد مخ ته نه دی پروت .(III':0.x1+0.x2=0 ) لهII' څخه لرو:

x2 = 1 او له I څخه لاس ته راځی : x1=3-2.1=1

۱۱ . ۲ لاینیزبرابرونتسیستم د درې ناپیژندونکو سره

۱۱. ۱ ۰ ۲ ۰ یو برابرون د دري ناپیژندونکو سره

مو ږ یو مساوات د دري ناپیژندونکو سره تر څیړني لاندې نیسو:

a11x1 + a12x2+ a13x3 = a1 ( 11 . 21 )

دوه مختلف حالتونه ۱ او ۲ او نورمال فورم ۳ ممکن دي

I . a11=a12=a13=0 ( 11 . 22 )

دلته x1 , x2 او x3 یو له بل پوره خپلواك ټاکل کیدی شي. ویل کیږي چی ناپاي ډېر ځوابونه مخ ته پراته دي ( x1 په خوښه، x2په خوښه او x3په خوښه)

2. a11=a12= a13= 0 ,a1|=0 ( 11 . 23 )

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

دلته تضاد مخ ته پروت دی

$0x_1+0.x_2+0.x_3 = a_1 \neq 0$

اوبیونه نه شته.

۳- د کم له کمه یوه ځلجوړې i , k لپار دې 0 ≠ aik وي. ( بې د تولیز وبندیزونو یا عمومیت د محدود والی دې 0≠a11 وي (. کیدی شي چی x2 او x3 په خوښه وټاکل شي ( ناپاي ډیر ځوابونه)، او لاس ته راځي

$x_1=(1/a_{11})(a_1-a_{12}x_2-a_{13}x_3)$ په خوښه x1 او x3 (11,24)

## ۱۱ . ۲ . ۲ دوه برابرونونه د درې ناپیژندونکو سره

لاندې د دوه برابرونسیستمونه د درې اوښتونو یا ناپیژندونکو سره

$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=a_1$ (11,25)

$a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3= a_2$ (11,25)

موږ دا را ویستلي حالتونه ، چیرته چی د ټولو i, k لپاره aik= 0 ، په پام کی نه نیسو. دا حالت هم په پام کي نه نیسو چی دوم برابرون د لومړي په څیر وي ( ناپاي ډیر ځوابونه. او یا دوهم برابرون د لمړي سره په مخامخوالي یا ښتوالي یا تضاد کی وي ( ځواب نه وي) . دا ټول حالتونه اسان پیژندونکي دي. موږ په یوه بیلګه کی دا اصلي حالت څیړو چی یو ناپیژندونکي یا نامعلوم ( د بیلګي په توګه x3) په خوښه ټاکل کیږي او دا نورې دوه ناپیژندونکی یا اووښتونې ( x1 او x2) یواځنی لاس ته راځي، او یا یواځنی ورکول کیدی شي ( ناپاي ډیر ځوابونه).

بیلګه ۱۱ . ۱۵:

| | | | | | x1 | x2 | x3 | RS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I | $x_1+x_2+x_3=3$ | | | | 1 | 1 | 1 | 3 |
| II | $x_1+2x_2+3x_3=6$ | | | | 1 | 2 | 3 | 6 |
| II'=II-I | $0.x_1+x_2+2x_3=3$ | | | | 0 | 1 | 2 | 3 |

له 'II لاس ته راځي

$x_2 = 3 -2x_3$

له I څخه لاس ته راځي

$x_1=3-x_2-x_3=3-(3-2x_3)-x_3, \; x_1= x_3$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

او له دې لاس ته راځي
$x_1=x_3, x_2 = 3 -2x_3$ , $x_3$ په خوښه.

## ۱۱ . ۲ . ۳ دریمه درجه دیترمینانت او د کرامر قاعده

اوس درې برابرونونه یا معادلې یا مساوات د درې ناپیژندونکو سره څیړو

$$\text{I} \quad a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3= a_1 \quad (11.26)$$
$$\text{II} \quad a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3= a_2 \quad (11,26)$$
$$\text{III} \quad a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3= a_3 \quad (11,26)$$

له دې سیستم څخه کیدی شي چې د ۱۱ . ۱ . ۲ برخې د برابر لیکلو او یو د بل په ځای لیکلو متودونه په ساده ډول استعمال شي. د زیاتونتیورم (-قضیه) فکر غواړي او د دریمي درجي دیترمینانت او د کرامر قاعدې په لور مو د ( ۱۱ . ۲۶ ) سیستم ځواب پیدا کولو لپاره هڅوي

پیژند ۱۱ . ۲:
رییل ګڼونو $a_{ik}$ ( i,k = 1,2,3 )یو درې درجه منظم د دیتمرمینانت سیستم

$$D=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix};.................................(11,27)$$

لاندې سرې لاندنی رییلګڼ پوهیدلی شي):

$$D=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}=a_{11}\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}-a_{12}\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}+a_{13}\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}=$$
$$a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32)})-a_{12}(a_1a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{33});............(11,28)$$

له دې سره د دریمی درجي دیترمینانت شمیرنه د دوهمی درجی دیترمینانت په شمیرنه بدله شوه. ۱۱ . ۲ تعریف او په ځانګړې توګه ( 11 .28 ) فرمول په لاندې ډول توضیح کیدی شي:
پیژند ۱۱ . ۳ : په ( 11 . 27 ) کی د دیترمینانت D لاندېدیترمینانت Aik لاندې هغه دومه درجه دیترمینانت پوهیدلی شو، چې د D دیترمینانت i- می لیکی او k - م درځ یا متې د لرې کولو یا د منځه وړلو له لارې منځ ته راځي( زه د ماتریکس په دننه

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

کې دا ليکې او مټې يا ستې له منځه نه شم وړلی، خو دا کومې ستونځې نه پيښوی ، ځکه، چې لاس ته راوړنه يې پسې ليکل شوې )

$$A_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$A_{12} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$A_{13} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

په دې ډول کيدی شي چی د ۱۱ . ۲ ديترمينانت په دې فورم وليکل شي

پيژند ۱۱ . ۴ :
د دريمی درجي ديترمينانت D لاندې، چی په (11 . 27 ) کی ورکړ شوی دی، دا لاندې ګڼ پوهيدل کيږي:

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

د زياتون عمليي ښخه، چی دلته نسبت د دوه ناپيژندونکو مساواتو ته چی دوه ناپيوندونکی لري، روښانه ده، د ( 11 . 26 ) ښخه لاس ته راوړل کيږي:

$$Dx1 = D1 \,,\ Dx2 = D2 \,,\ Dx3 = D3 \quad (11 . 29)$$

په داسی حالت کی چی Di داسي لاس ته راځي چی د ځله وونوديترمينانت ( 11 . 28 ) کی سړی i - م درځ يا ستن يا مټه د (11. 26 ) برابرون ښي لور ته ځای په ځای کړي.

$$D_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_{12} & a_{13} \\ a_2 & a_{22} & a_{23} \\ a_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; D_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_1 & a_{13} \\ a_{21} & a_2 & a_{23} \\ a_{31} & a_3 & a_{33} \end{pmatrix}; D_{13} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_3 \end{pmatrix}; ......(11, 30)$$

موږ دا نتيجه بي له ښووني ورکوو.
له ( ۱۱ . ۲۹ ) ځخه لاندې جملی لاس ته راځي:

جمله ۱۱ . ۴ ( د کرامر قاعده) :
که د ( ۱۱ . ۲۶ ) د ځله وونوديترمينانتو( ۱۱ ). ۲۷ ،په همدې ډول ( ۱۱ . ۲۸ ) لپاره

(c) ketabton.com: The Digital Library



$D \neq 0$ ( 11 . 31 )

با وري وي ، نو ( ۱۱ . ۲۶ ) برابرونسیستم یواځنی ځواب لري

$x1=D1/D$ ; $x2=D2/D$ ; $x3=D3/D$ (11,32)

جمله ۱۱ . ۵ :

که $D = 0$ مګر $|Di| = 0$ کم له کمه د یوه i ($i = 1,2,3$) لپاره وي، نو د ( ۱۱ . ۲۶ )
برابرونسیستم ځواب نه لري ( په ( ۱۱ . ۲۹ کی تضاد دی)

جمله ۱۱ . ۶ :

که $D = D1 = D2 = D3 = 0$ وي، نو په ( ۱۱ . ۲۶ ) کی کم له کمه یو برابرون
له ضرورته زیات دی او دا ( ۱۱ . ۲۶ ) برابرونسیستم کیدي شي چې د ۱۱ . ۲ . ۲
متودونو باندې ځواب شي ( وړاندیز دئ چی د ګاوس الګوریتم له متود ; چی په ۱ . ۲ .
۴ برخه کی ورکړ شوي ځواب شي.)

بیلګه ۱۱ . ۱۶ :

په لاندې سیستم

$$\begin{aligned} I \quad & x1 - x3 = -2 \\ II \quad & x1 + x2 - x3 = 0 \\ III \quad & 2x1 - x2 = 0 \end{aligned}$$

کی دئ

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 1.\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - 0.\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + (-1).\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = -1 - 0 - 1.(-1-2) = 2$$

$$D_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - 0\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 2;$$

$$D_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1.\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - (-2)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - 1.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 4;$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1.\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 9 \end{vmatrix} - 0.\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 6$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

نو یوائځنی ټاکلی ځواب موجود دئ.

$x1=D1/D=2/2=1,\ x2=D2/D=4/2=2,\ x3=D3/D=6/2=3$

بیلګه ۱۱ . ۱۷ :

په لاندې سیستم

$$\begin{array}{ll} I & x1 + x2 + x3 = 0 \\ II & x1 \quad -x3 = 0 \\ III & 2x1 + x2 \quad = 1 \end{array}$$

کي دئ.

دا بیلګه دې ګران لوستونکی پخپله وښايي ، چې اوبیونه نه شته ۰ دې ته باید ګوته ونیسم، $D = 0$ او $D1= -1 |=0$ ، چې ځواب نه لري۰

۱۱ . ۲ . ۴ د ګاوس الګوریتم

د ګاوس الګورتیم لومړی د ( ۱۱ . ۲۶ ) برابرونسیستم لپاره استعمالیږي. دا د دوه مساواتو لپاره چې درې ناپیژندونکي لري او همدارنګه د زیاتو مساواتو سیستم لپاره چې درې ناپیژندونکي لري د استعمال وړ دی.

د ګاوس د الګوریتم موخه په دې کی پرته ده چی ( 11 . 16 ) سیستم د ورته بدلونفورم له لارې په دریګوډیفورم را اوړي.

$$\begin{array}{ll} I & a11x1+a12x2+a13x3=a1 \quad (11\ .\ 34) \\ II & b22x2+b23x3=b2 \\ III & c33x3=c3 \end{array}$$

بنسټیز حالت : که $a11|=0, b11|=0, c11|=0$ وي نو یو په بل پسی سړی کړی شي چی له III $x3$, او له II $x2$, وشمیري. مګر په ( 11 . 34 ) کی ځانګړي حالتونه هم پیژندل کیږي:

-که $c3|=0, c33=0$ وې، نو یو په ښتوالی یا تضاد مخ ته پروت دی، ځواب وجود نه لري

- که $c3=c33=0$ وی، نو III له ضرورتزیات دی سړی یوائځی I او II څیړي.

- که $c33=c3=0$ او برسیره پر دې $a11|=0, b11|=0$ وي، نو $x3$ په خوښه ټاکل کیدی شي او $x2$ له II او $x1$ له I چی $x3$ ته اړ وي، شمیرلکیدی شي ( ناپای ډیر ځوابونه )

-برسیره پر دې که $b22=b23=0$ , $b2|=0$ وي، نو ځواب وجود نه لري

-که نور هم ولرو چی $c33=c3=0$ او $b22=b23=b3=0$ وي ، نو II له ضرورت زیات دی او له $a11|=0$ کیدی شي چی $x2$ او $x3$ په خوښه وټاکل شي، او $x1$ له I لاس

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

ته راځي چی $x2$ او $x3$ ته اړ (په واك کی يا تابع) وي ( ناپاي ډير ځوابونه ځوابونه) .
كه ټول ځلونه او د مساواتو ښی خوا صفر وي ، نو ناپاي ځوابونه موجود دی.

د ګاوس الګوريتموس د درې ناپيژندونكو( 11 . 26 ) سره له دوه پلونو(قدم) جوړ دئ
لومړی پل ( قدم) : نيسو چی په ( 11 . 2 6 )کی $|a11| \neq 0$ دی. دا د نمرې بدلولو په
بنسټ هميشه لاس ته راوړی شو) بي له ورکړ شووحالتونو) چی ټول $aik = 0$ وي) .
دلته I ورکول كيږي، او له II د I دا $a21/a11$ - ځله او له III دا $a31 / a11$ - ځله د I
كموي. ددې څخه لاندې سيستم لاس ته راځي:

$$\begin{aligned} &\mathrm{I} \quad a11x1+a12x2+a13x3=a1 \quad (11.35) \\ &\mathrm{II} \quad b22x2+b23x3=b2 \\ &\mathrm{III} \quad c33x3=c3 \end{aligned}$$

دويم پل ( قدم ) : د $|b22| \neq 0$ نيوني سره په 'II او 'III باندې د ۱۱ . ۱ . ۴ برخې سره
سم د ګاوس الګوريتم استعماليږي : سړی 'II بي تغيره پريږدي اوله'III دا b32/b22-ځله
د 'II كموي، له دې راپيداكيږي

$$\begin{aligned} &\mathrm{I} \quad a11x1+a12x2+a13x3=a1 \quad (11.37) \\ &\mathrm{II} \quad b22x2+b23x3=b2 \\ &\mathrm{III} \quad c33x3=c3 \end{aligned}$$

د ګاوس د شيما فورماليتي سره سم بيا دا شكل غوره كي

| | x1 | x2 | x3 | RS |
|---|---|---|---|---|
| I | a11 | a12 | a13 | a1 |
| II | a21 | a22 | a23 | a2 |
| III | a31 | a32 | a33 | a3 |
| II' = II-(a21/a11)I | | b22 | b23 | b2 |
| III' = III-(a31/a11)I | | b32 | b33 | b3 |
| III'' = III' - (b32/b22)II' | | | c33 | c3 |

$$x3 = c3 / c33$$

$$x2=(1/b22)(b2-b23x3)$$

$$x1=(1/a1)(a1-a12x2-a13x3)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



بیلګه ۱۱ . ۱۸ : دا سیستم ۰(مقایسه بیلګه ۱۱ . ۱۶)

I x1 -x3= -2

II x1 + x2-x3 = 0

III 2x1 -x2 = 0

د ګاوس الګوریتم سره په لاندې ډول حل کیږي

| | x1 | x2 | x3 | RS |
|---|---|---|---|---|
| I | 1 | 0 | -1 | -2 |
| II | 1 | 1 | -1 | 0 |
| III | 2 | -1 | 0 | 0 |
| II'= II - I | 0 | 1 | 0 | 2 |
| III'= III - 2.I | 0 | -1 | 2 | 4 |
| III'' = III' + II' | 0 | | 2 | 6 |

x3=6/2=3

x2=2……………………

x1=-2+x3=-2+3=1

بیلګه۱۱ . ۱۹: (پرتله بیلګه ۱۱ . ۱۷ ( دا سیستم

I x1 + x2- x3 = 0

II x1 -x3 = 0

III 2x1+ x2 = 1

د ګاوس د الګوریتم په مرسته په لاندې ډول حل کیږي

| | x1 | x2 | x3 | RS |
|---|---|---|---|---|
| I | 1 | 1 | 1 | 0 |
| II | 1 | 0 | -1 | 0 |
| III | 2 | 1 | 0 | 1 |

(c) ketabton.com: The Digital Library



| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| II'=II-I | 0 | -1 | -2 | 0 |
| III'=III-2.I | 0 | -1 | -2 | 1 |
| III''=III'-II' | 0 | 0 | 0 | 1 |

دلته دی "0 = 1 " تضاد. سيستم نه اوبی کيږي يا حل نه لري.

بيلګه ۱۱ . ۲۰: ( مقايسه يا پرتله بيلګه ۱۱ . ۱۷ ) دا سيستم

I $x1 + x2 + x3 = 3$

II $x1 + 2x2 + 3x3 = 6$

III $2x1 + 3x2 + 4x3 = 9$

په لاندې ډول د ګاوس په الګوريتم اوبيونه ده

| | x1 | x2 | x3 | RS |
|---|---|---|---|---|
| I | 1 | 1 | 1 | 3 |
| II | 1 | 2 | 3 | 6 |
| III | 2 | 3 | 4 | 9 |
| II'=II-I | 0 | 1 | 2 | 3 |
| III'=III-2I | 0 | 1 | 2 | 3 |
| III'' = III'-II' | 0 | 0 | 0 | 0 |

=x3 په خوښه

$x2 = 3 - 2x3$

$x1 = 3 - x2 - x3 = 3 - (3 - 2x3) - x3 = x3$

## ۱۱ . ۳ په خوښه ډير مساوات ، په خوښه ډير ناپيژندونکو سره

موږ په عمومي ډول د لاينيز سيستم برابرونونو په لار ښونی پيل کوو m ( برابرون د nناپيژندونکو سره)

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+....+a_{1n}x_n=a1..................(11,37)$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}+....+a_{2n}x_n=a_2$$
....................................................

.........................................................

$$a_{nm}x_1+a_{m2}x_2+a_{m3}x_3+.....+a_{mn}x_n=a_m$$

دا په خوبنه یا ازاد پرېږدو چی د برابرونونو گنون ( تعداد) m د ناپیژندونکوn د گڼون ( تعداد ) څخه لوي، کوچنی او که برابر دی. په څرگندو دندو یا وظایف مونږ دلته له څلور ناپیژندونکو څخه نه پورته کېږو او یواځی لاندې دوه متودونه څیړو

۱۱ ۰ ۳ . ۱ دn - م درجی دیترمینانت او د کرامر قاعده

پیژند ۱۱ . ۵ :

د n رییل گڼونو aik یوه منظم سیستم n- م درجي دیترمینانت

$$D=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix};.........................(11,38)$$

لاندې سرې لاندنې رییل گڼ پوهیږي:

$$D=a_{11}A_{11}-a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}-a_{14}A_{14}+...\pm a_{1n}A_{1n}.....(11,39)$$

دلته aik غړي پورې مربوطه لاندې دیترمینانت Aik د (n-1) - م درجی دیترمینانت ده، چی پاتیږي، که په Dکیi - مه لیکه اوk - م درځ ، مته یا ستن ( لیکه او درځ چی aikپه کی ولاړ وی ) په کربنه لرې کړي یا کربنه پرې تیره کړي، یعنی ووهي.

په دي ډول د-n ام درجی دیترمینانت شمیرل و- (n-1)-ام درجی دیترمینانت شمیرلو ته راتیټیږي .

په ځانگړي توره د څلورمی درجی دیترمینانت لپاره دا لرو

$$A_{11}=\begin{vmatrix} a_{22}a_{23}a_{24} \\ a_{32}a_{33}a_{34} \\ a_{42}a_{43}a_{44} \end{vmatrix};A_{12}=\begin{vmatrix} a_{21}a_{23}a_{24} \\ a_{31}a_{33}a_{34} \\ a_{41}a_{43}a_{44} \end{vmatrix};....A_{1n}\,etc$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



که n برابرونونه د n ناپیژندونکو سره مخ ته ولرو ) په ) 11 . 37 ( کی لرو) n=m د جمع تیورم په مرسته داسی سیستمونو لپاره لاندې نتیجه لاس ته راوړو

$$D_{x1}=D1, D_{x2}=D2, \ldots D_{xn}= D_n \qquad (11.42)$$

د Di دیترمینانت داسی لاس ته راځي چی د ځله وونویا ضریبونو په دیترمینانت ) ۱۱ . ۳۸ ( کی د-i ام درځ متې یا ستن د برابرونسیستم د ښي لاس سره بدل کړي .
د بیلګی په توګه یوسیستم د ۴ مساواتو او۴ ناپیژندونکو سره ( پرتله مقایسه ۱۱ . ۴۰ )

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_1 a_{12} a_{13} a_{14} \\ a_2 a_{22} a_{23} a_{24} \\ a_3 a_{32} a_{33} a_{34} \\ a_4 a_{42} a_{43} a_{44} \end{vmatrix}; D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} a_1 a_{13} a_{14} \\ a_{21} a_2 a_{23} a_{24} \\ a_{31} a_3 a_{33} a_{34} \\ a_{41} a_4 a_{43} a_{44} \end{vmatrix}; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11,43)$$

له(11 . 42 ) څخه لاس ته راځي

جمله ۱۱ . ۷ ( د کرامر Cramer قاعده):
د ځله وونې یا ضریب دیترمینانت (۳۸.۱۱) لپاره د یوه مساوات سیستم د n مساواتو د nناپیژندوکو سره په ( ۱۱ . ۳۷ ) د m = n سره) باوري دی

$D \,|= 0$ (اصلي حالت ) (44 . 11 )

نو دا برابرونسیستم یواځنی ټاکلی ځواب لري( حل لري

$$x1=D1/D, x2=D2/D, \ldots, xn=Dn/D. \quad (11.45)$$

برعکس که , 0 = D مګر 0 =| D1 کم له کمه د یوه i لپاره نو دا سیستم حل نه لري .
که D=D1=D2=...=Dn=0 وي، نو کم له کمه یو مساوات غیر ضروري دی (دلته د اوبیونې لپاره د ګاوس الګوریتم وړاندیز کوو )

بیلګه ۱۱ . ۲۱:
لا ندې سیستم دې حل شي

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| I | $x_1$ | | $+x_3$ | | $= 0$ |
| II | $2x_1$ | $+x_2$ | | $+x_4$ | $=0$ |
| III | | $x_2$ | | $-x_4$ | $= 4$ |
| IV | $x_1$ | $-x_2$ | $-x_3$ | $+x_4$ | $= -2$ |

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

$$D=\begin{vmatrix}1010\\2102\\010-1\\1-1-11\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}102\\10-1\\-1-11\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}212\\01-1\\1-11\end{vmatrix}=-3-3=-6$$

$$D_1=\begin{vmatrix}0010\\0102\\410-1\\-2-1-11\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}012\\41-1\\-2-11\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}2-1\\-21\end{vmatrix}+2.\begin{vmatrix}41\\-2-1\end{vmatrix}=-2-4=-6$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1010\\2002\\040-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}002\\40-1\\-2-11\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}202\\04-1\\1-21\end{vmatrix}=2.\begin{vmatrix}40\\-2-1\end{vmatrix}+\left|2\begin{vmatrix}4-1\\-21\end{vmatrix}\right|+2\begin{vmatrix}04\\1-2\end{vmatrix}=$$

$$=2.(4)+.2+2.(-4)=-12$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1000\\2102\\014-1\\1-1-21\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}102\\14-1\\-1-21\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4-1\\-21\end{vmatrix}+\left|2.\begin{vmatrix}14\\-1-2\end{vmatrix}=4-2+2(-2+4)=6\right|$$

$$D_4=\begin{vmatrix}1010\\2100\\0104\\1-1-1-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}100\\104\\-1-1-2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}210\\014\\1-1-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}04\\-1-2\end{vmatrix}+2.\begin{vmatrix}14\\-1-2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}01\\1-2\end{vmatrix}=$$

$$=4+2.2-(-4)=12;$$

$$x_1=\frac{-6}{-6}=1;x_2=\frac{-12}{-6}=2;x_3=\frac{6}{-6}=-1;x_4=\frac{12}{-6}=-2$$

۱۱ .۳ . ۲ د ګاوس الګوریتم:

موږ ولیدل چی د ګاوس الګوریتم له لارې د مساوتو یو دریکوجشکل سیستم لاس ته راوستی شو، چی د هغي له مخی څرګندولی شو چی کوم حل )ځواب( مخ ته پروت دی .

دا په لاندې بیلګه څرګندوو

بیلګه ۱۱ . ۲ ۲ :

که په بیلګه ۱۱ . ۲۱ کی ورکړ شوی سیستم د ګاوس الګوریتم له لارې حل کړو، نو لاندني شیما لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

| | x1 | x2 | x3 | x4 | Rs |
|---|---|---|---|---|---|
| I | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| II | 2 | 1 | 0 | 2 | 0 |
| III | 0 | 1 | 0 | -1 | 4 |
| IV | 1 | -1 | -1 | 1 | -2 |
| II'=II -2.I | 0 | 1 | -2 | 2 | 0 |
| 4III' = III | 0 | 1 | 0 | -1 | 4 |
| IV' = IV-I | 0 | 1 | -2 | 1 | -2 |
| III" = III' - II' | 0 | 0 | 2 | -3 | 4 |
| IV" = IV' +II' | 0 | 0 | -4 | 3 | -2 |
| IV''' = IV" + 2.II" | 0 | 0 | 0 | -3 | 6 |

x4 = -2

x3=1/2(4+3.(-2))= -1

x2=0+(-1)(-2)= 2......

x1 = -(-1) = 1 ..........

بيلگه ۱۱ . ۲۳:

دا برابرونسيستم

I x1 +x2 +x3 +x4=4

II x1 -x2 -x3 +x4=0

III 3x1 -x2 -x3 +x4=2

حل يا اوبيونه ی نه لري، لکه د گاوس له شيما څخه چی ليدل کيږي:

| | x1 | x2 | x3 | x4 | RS |
|---|---|---|---|---|---|
| I | 1 | 1 | 1 | 1 | 4 |

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| II | 1 | -1 | -1 | 1 | 0 |
| III | 3 | -1 | -1 | 3 | 2 |
| II' = II-I | 0 | -2 | -2 | 0 | -4 |
| III' = III-3.I | 0 | -4 | -4 | 0 | -10 |
| III" = III' - 2.II' | 0 | 0 | 0 | 0 | -2 |

دلته III" په ښتوالی یا تضاد خوندي لري " 0 = -2 "

بیلګه ۱۱ . ۲۴:

لاندې سیستم د ۵ برابرونونو او ۴ ناپیژندونکو سره

I x1 +x2 +x3 +x4= 4

II x1 -x2 -x3 +x4= 0

III 3x1 -x2 -x3 +3x4= 4

IV x1 +2x2 +3x3 +4x4=10

V 3x1 +x2 + x3 +3x4= 8

ګورو چی oe1 ( ناپای ډیر) اوبیونې لري

| | x1 | x2 | x3 | x4 | RS |
|---|---|---|---|---|---|
| I | 1 | 1 | 1 | 1 | 4 |
| II | 1 | -1 | -1 | 1 | 0 |
| III | 3 | -1 | -1 | 3 | 4 |
| IV | 1 | 2 | 3 | 4 | 10 |
| V | 3 | 1 | 1 | 3 | 8 |
| II' = II-I | 0 | 2 | - 2 | 0 | -4 |
| III'= III-3.I | 0 | -4 | -4 | 0 | -8 |
| IV' = IV -I | 0 | 1 | 2 | 3 | 6 |
| V' = V-3.I | 0 | -2 | -2 | 0 | -4 |

(c) ketabton.com: The Digital Library



----------------------------------------------------------------------------

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| II"= II'+2.IV' | 0 | 0 | 2 | 6 | 8 |
| III'=III'+4.IV' | 0 | 0 | 4 | 12 | 16 |
| V" = V' +2.IV' | 0 | 0 | 2 | 6 | 8 |
| III''' = III"-2.II' | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| V'''=V"-II | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

ګورو چی III''' او V''' تضاد نه لري. سړی کړي شي چی x4 په خوښه وټاکي او لاس ته راوړي

له , x3=4-x4 "II له x2=6-2(4-3x4)-3x4=-2+3x4 'IV او لهI

x=4-x2-x3-x4=4-(-2+3x4)-(4-3x4)-x4=2-x4

نو x1=2-x4 په خوښه x4 ټاکو

او x2=-2+3x4 ، په خوښه x4 ټاکو

او x3=4-3x4 په خوښه x4 ټاکو

یادونه : هغه ګڼ یا نوره هم ښه هغه ځلهووني، چې غواړو صفر شي یا له منځه وړو هغه مو شنه کړي۰

سړی د ګاوس شیما په دوم بلاك کی پیژندلی شي، مساوات، کوم چی په 'III او 'V پوري اړه لري، بل څه نه افاده کوي په غیر له هغی چی په 'II اړه لرونکي دي. کیدی شو چی په 'III او 'V لیکو مو کرښه تیره کړې وی ) له منځه وړې وی (. دریم بلا ك به یواځي له کرښی 'II جوړ وی، او د ګاوس الګوریتم به له دې سره پاي میندلی وی.

۱۱ . ۴ هوموژین مساواتسیستم:

د n مساواتو یو سیستم د n نامعلومو سره چی د ټولو مطلقه غړي ورك شي، هموګین مساواتسیسمتم بلل کیږي .

د n = 3 لپاره دا د مثال په توګه هوموګېن سیستم بلل کیږي

I a11x1+a12x2+a13x3= 0.............

II a21x1+a22x2+a23x3= 0 (11. 46

III a31x1+a32x2+a33x3= 0…………..………………….

یو داسی هموژینسیستم تل یوه اسانه اوبیونه یا اسان حل لري

x1=x2=x3=...=xn=0 ( 11. 47 )

که د ځلوونو د یترمینانت ( ۱۱ . ۳۸ ) لپاره 0 =| D باور ولري، نو د جملی ۱۱ . ۷ شیما څخه یواځي اسان trivial اوبیونه یاحل موجود دی او باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

جمله ۱۱ . ۸ : يو هوموګين مساواتسيستم يواځ هلته سخت حل لري، که D = 0 باوري وي

بيلګه ۱۱ . ۲۵ :

دا هوموژين برابرونسيستم

I $x1 \quad +x3=0$

II $x1 \; -x2 \quad =0$

III $x1 \; +x2 +x3=0$

د

$$D=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&-1&0\\1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&0\\1&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&-1\\1&1\end{vmatrix}=-1+(1+1)\neq 0$$

له امله يواځنى ساده اوبيونه $x1=x2=x3=0$ لري.

بيلګه ۱۱ . ۲۶:

دا هموګين مساواتسيستم

I $x1 \quad +x3 = 0$

II $x1 +x2 \quad = 0$

III $x1 +x2 +x3 = 0$

$$D=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&-1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&0\\1&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&-1\\0&1\end{vmatrix}=-1+1=0$$

د

له امله ناساده اوبنونه هم لري دا په لاندې ډول د ګاوس د الګوريتموس څخه لاس ته راځي: په لاندې کې RS د پاتې- يا باقي سيستم په معنا دی.

x1 x2 x3 RS

---

0 0 1 I 1

0 II 1 -1 0

0 III 0 1 1

---

II'=II-I 0 -1 -1 0

III' = III 0 1 1 0

---

II'' = II + III' 0 0 0 0

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

ګورو چې II"تضاد نه لري x3په خوښه ټاکو، او له III' لاس ته راځيx3-=x2 او له I
څخه لاس ته راځي x1=-x3نوx3- =x1نو X3 په خوښه او x3- = x2 نوx3 په خوښه

## . تمرینونه

د نامعلومو لپاره -لکه له ښوونځي چې ورسره بلد یو-پوهیږو او یا هم

۱ – کربنیز مساواتسیستم له دوه مجهولو سره.

مشوره مو داده، چې د دې تمرینونو د حل لپاره د مختلفو تګلارو څخه کار اخستلس شي، چې بیایې و ازمایو. د لته دې د زیاتون یا جمعې قانون او همداسې د ګاوس الګوریتم ته لومړیتوب ورکړ شي ا و د دیترمینانت سره شمیرنه دې یوه بله د استعمال لار وي.

۱ . ۱ – مساوتسیستم د ټاکلو ضریبونو سره

1.1.1. a) $2x_1 + 3x_2 = 8$, $3x_1 - 6x_2 = -30$   b) $x_1 = 3x_2 - 14$, $x_2 = 3x_1 - 22$

c) $51x - \frac{3}{20y} = 3$, $48x - \frac{1}{10y} = 2$   d) $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 3$, $\frac{5}{x} - \frac{1}{y} = 4$

1.1.2. a) $5(x_2 + 2) - 3(x_1 + 1) = 23$, $3(x_2 - 2) = 19 - 5(x_1 - 1)$   b) $3(2x_1 - x_2) + 4(x_1 - 2x_2) = 87$, $2(3x_1 - x_2) - 3(x_1 - x_2) = 82$

c) $4 - \frac{1}{3}(2x - y - \frac{9}{2}) = \frac{1}{8}(3x - 6 - 4y)$, $4 - \frac{x - \frac{1}{2}y + 3}{3} = \frac{2y - x - 6}{8}$   d) $3y - \frac{3(4x - 3y)}{2} = 2x - 3y - 1$, $3x - \frac{3(3x - 2y)}{5} = 5x - 3y - 1$

1.1.3. a) $\frac{1}{\frac{7}{2}x - 3} = \frac{1}{4y - 3}$, $\frac{1}{\frac{5}{2}x + 4} = \frac{1}{3y + 1}$   b) $\frac{1}{3x - 5} = \frac{4}{7y - 13}$, $\frac{1}{y - x} = \frac{8}{3x + y}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



c) $\frac{1}{y-10} = \frac{25}{12x+19}$
$\frac{1}{45-x} = \frac{8}{15y+1}$

d) $4+y = x$
$\frac{2}{5-3x} = \frac{3}{7-2y}$

1.1.4. a) $(x-1)(2y+5) = (y+1)(2x-1)$
$(2x+7)(y-2) = (2y-3)(x+2)$

b) $4(5y-3)(2x+1) = (10x+7)(4y-3)$
$2(2y+1)(x+4) = (2x+5)(2y+3)$

c) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} = \frac{1}{2}$
$\frac{1}{x}-\frac{1}{y} = \frac{1}{6}$

d) $\frac{3}{x}+\frac{8}{y} = 3$
$\frac{15}{x}-\frac{4}{y} = 4$

1.1.5. a) $\frac{9x_1}{2}+\frac{3x_2}{2} = 3$
$3x_1+x_2 = 2$

b) $\frac{2x_2-5x_1}{6}+\frac{x_1}{6} = \frac{x_2-2x_1}{3}$
$\frac{5-3x_1}{3}-\frac{4x_2-1}{4} = \frac{6x_1+23}{12}-\frac{3x_1-4x_2}{2}$

c) $\frac{12}{4x_1+3x_2}-\frac{1}{3(3x_1-2x_2)} = \frac{1}{6}$
$\frac{5}{3x_1-2x_2}+\frac{6}{4x_1+3x_2} = 5{,}25$

d) $3(x_1-2)+4(2x_2+\frac{3}{2}) = 0$
$5(x_1+3)-3(x_2-\frac{1}{3}) = 16$

1.1.6. a) $3x_1+4x_2 = 8$
$5x_1-2x_2 = 9$
$7x_1-8x_2 = 10$

b) $6x_1-x_2 = 1$
$9x_1+2x_2 = 5$
$3x_1-x_2 = 1$

c) $5x_1-3x_2 = -3$
$3x_1+5x_2 = 5$
$3x_1-1{,}8x_2 = -1{,}8$
$0{,}9x_1+1{,}5x_2 = 1{,}5$

d) $2x_1-3x_2 = 10$
$-\frac{1}{3}x_1+\frac{1}{2}x_2 = -\frac{5}{3}$
$x_1-1{,}5x_2 = 5$
$0{,}5x_1-0{,}75x_2 = 2{,}5$

## ۱ ، ۲ – مساواتسیستم د ناټاکلو ضریبونو سره

1.2.1. a) $x_1+x_2 = a$
$ax_1-x_2 = b$

b) $3x_1-2x_2 = 5a$
$2x_1-3x_2 = 5b$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

c) $10x + 6y = 4a + b$
$6x + 10y = 4a - b$

d) $14x - 15y = 24a$
$10x - 21y = 24b$

1.2.2. a) $\frac{x_1}{2a+b} - \frac{x_2}{2a-b} = \frac{8ab}{b^2 - 4a^2}$
$\frac{x_1}{2a+b} + \frac{x_2}{2a-b} = \frac{8a^2 + 2b^2}{4a^2 - b^2}$

b) $-(a+b)x_1 + (a-b)x_2 = 0$
$(a-b)x_1 + (a+b)x_2 - 4ab = 0$

c) $\left(\frac{a^2+b^2}{2b}\right)^2 \cdot x - \left(\frac{b^2-a^2}{2b}\right)^2 \cdot y = a^2$
$\frac{a^2+b^2}{2b} \cdot x + \frac{b^2-a^2}{2b} \cdot y = b$

d) $\frac{x}{b+c} - \frac{y}{a+c} = a - c$
$\frac{x}{a+b} - \frac{y}{b+c} = b - a$

1.2.3. a) $x + y = \frac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2}$
$x - y = \frac{4ab}{a^2-b^2}$

b) $x + y = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$
$2x + 3y = \frac{2a^2+ab+3b^2}{a^2-b^2}$

c) $ax + by = 2a$
$a^2x - b^2y = a^2 + b^2$

d) $ax + by = a^3 + 2a^2b + b^3$
$bx + ay = a^3 + 2ab^2 + b^3$

1.2.4. a) $ax + by = 2a$
$x + y = \frac{a^2+b^2}{ab}$

b) $(a-b)x + (a+b)y = a + b$
$\frac{x}{a+b} - \frac{y}{a-b} = \frac{1}{a+b}$

c) $\frac{x-a}{y-a} = \frac{a-b}{a+b}$
$\frac{x}{y} = \frac{a^3-b^3}{a^3+b^3}$

d) $(a-b)x + y = \frac{a+b+1}{a+b}$
$x + (a+b)y = \frac{a-b+1}{a-b}$

۱ . ۳ – شي شمیرنه

۱ . ۳ . ۱ کوم دوه اعداد لاندې خوبونه لري؟ که هرعدد په ۵ لوی شي، د مربع یا څلورئ کمون(تفریق) یې په ۱۰۰ لوییږي، په داسې حال چې ضرب یې په۳۲۵ زیاتیږي.

۱ . ۳ . ۲ د دوه عددونو جمعه یا زیاتون دومره لوي دی، لکه د تفریق مربع یې.

که ۴ لومړي عدد تع ورزیات شي او له دویم عدد کم شي، نو د مربع کمون د یا تفریق یې ۹۹ دی، وښایئ چې عددونه څومره لوی دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

۱ . ۳ . ۳ د هرو دوه ګڼونو څخه هر یویې په 2 لویوي، نو ګڼونه ځانونه نیسي لکه: 4 : 3 . که له هر یوه ددې دوه ګڼونوڅخه 3 کم شي ، نو داسې لاس ته راغلي ګڼ ځان نیسي لکه : 3 : 2 . دواړه ګڼونه کوم دي؟

۱ . ۳ . ۴ د دوه ګڼونو زیاتون 999 دی. که لمړی ګڼ په 9 وویشل شي او دوم په 6 ، نو د ویشونکو زیاتون 138 دی . هر یو ددې دوه ګڼونو شومره لوي دی؟

۱ . ۳ . ۵ د دوه ګڼونو زیاتون 1000 دی. که لمړی له 2 او دوم له 3 سره ځل یا ضرب شي، نو د ځلونو زیاتون بی 2222 دی. هر یو له دې ګڼونوشومره لوي دی؟

۱ . ۳ . ۶ په دوه ګڼونو کې یو له بل په 0,909 لوي دی، زیاتون یې 3,191 دی. دواړه ګڼونه څه نومیږي یا کوم دي؟

۱ . ۳ . ۸ . د یوه دربکونجي د دوه اړخونواوږدوالي زیاتون 8,4 cm دی او پړیکشن یا پریوستون یې د دریکونجي په دریم اړخ 4 cm او 1,6 cm دی. د دریګوډي اړخونه شومره لوي دي؟

۱ . ۳ . ۹ . د یوه لوي ښار ترمخ دوه کلي X او Y د ښار له مرکز Z سره یو دریګوډی جوړوي . له X څخه چې له Z څخه تیریږي ،Y ته اوږدوالي 12 cm دی، Y له مرکز Z څخه 2 km زیات لرې دی نسبت و X ته ، دواړه مخ کلي X او Y له مرکز Z څخه شومره لرېدي؟

۱ . ۳ . ۱۰ . د یوه فوټبال میدان څخه د څلورکونجي شکله د لرګیو راګرځیدلی دیوال، چې 420 m اوږد دی ، باید په اغزیو سیمانو بدل کړي. دلته یوه خوا په 5 m کوچنۍ کیږي، که بل اړخ په 10 m اوږده شي. له دې سره د سیمګرځي اوږده د هوارې دننه په $100\ m^2$ زیاتیږي. د څلورکونجیز اړخونه شومره لوي دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

۱ . ۳ . ۱۱ . د یوه موټر ماشین یخی ۸ لیتره اوبه خوندي کوي او دوه وتللارې لري، دا کیدی شي خالي شي، که د بیلګي په توګه لمړی 5 دقیقی او دوم 2 دقیقی واز کړي او یا دوم 6 دقیقي او لمړي 3 دقیقي واز شي. په هرنل کي څومره اوبه په یوه دقیقه کی وزي؟

۱ . ۳ . ۱۲ . یو پلار له خوي څخه ۳۶ کاله زوړ دی په ۵ کاله کی پلارد خوي 1/4 عمرڅخه ور زیات 3 برابره د خوي عمر لري اوس پلار او خوي هر یو څومره عمر لري؟

۱ . ۳ . ۱۳ . د شربت د ګډولو لپاره دوه ډوله شربتونه سره ګډیږي. که له لمړې درې بوتله واخستل شي او له دوم ۷ بوتله نو د یوه بوتل ارزښت دې ۲ مارکه وشمیرل شي. مګر که له لمړې ۷ بوتله او له دوم درې بوتله سره ګډ شي، د یوه بوتل ارزښت 40 , 2 الماني مارکه(DM ) کیږي. د په کارونو شربتونو بوتل به څومره ارزښت ولري؟

۱ . ۳ . ۱۴ . یود $450\ m^3$ اوبو اوبه ډکی یا اوبه ساتی ( بیلر ) له دوه نلونو ډکیږي. که لمړی نل درې دقیقي او دوم یوه دقیه واز وي،نو په اوبه ساتي کی $40\ m^3$ اوبه جریان لرودی شي. مګر که لمړی یوه دقیقه او دوم نل ۷ دقیقي وازې وي، نو اوبه ساتي ته $60 m^3$ اوبه جریان لري. هر نل په یوه دقیقه کی څومره اوبه اوبه ساتي ته غورځوي؟ څومره باید هر نل له همغه یوه وخته واز وي چی اوبه ساتی ډك شي؟

۱ . ۳ . ۱۵ . دوه کارګرو ته د کندنی کار ور په غاړه کیږي. که دواړه یو ځاي کار وکړي، نو ۱۲ ورځو ته ضرورت دی. که لمړی دوه ورځي او دوم درې ورځي کار وکړي، نو په دې وخت کی یواځي 1 / 5 برخه د کار کړه کیږي. څومره ورځی به له دوي هر یو ځانله د دې کار لپاره ضرورت ولري ؟ اړتیا ده؟

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

۱ . ۳ . ۱۶ . د یوې ګردۍ په چاپیري چې ۱۰۰ متره اوږد دی، دوه بدنونه په حرکت راځي. هغوي هر ۲۰ دقیقې حرکت کوي، که هغوي په همغه لور حرکت وکړي او هر ۴ دقیقې، که هغوي یو د بل په خټ لور حرکت وکړي، هر بدن په یوه ثانیه کې څومره واټن تې کوي یا وهي؟

۱ . ۳ . ۱۷ . په یوه ګردۍ چې چاپېرې یې ۹۹۹ متره اوږد دی دوه بدنونه په همغه لور حرکت کوي او دا حرکت په هرو ۳۷ ثانیوکې. د واړو بدنونو سرعت څومره دی، که د لمړي سرعت څلور واره لوي لکه د دوم ۳ړی ؟

۲

## ۲ . ۲ . کرښیز مساوات سیستمونه د درې مجهولو سره

### ۱ – مساواتسیستم د ټاکلو ضریبونو سره

a) $x + y = 14$
$x + z = 15$
$y + z = 16$

b) $x_1 - x_2 = 4$
$x_1 + x_3 = 18$
$x_2 - x_3 = 6$

c) $x_1 + x_2 = 6{,}6$
$x_1 - x_3 = 2{,}6$
$x_2 - x_3 = 2$

d) $x + y + z = 25$
$3x - 2z = 1$
$20y - 16z = 0$

e) $2x + 3z = 13$
$3x - 4y = 3$
$5y - 6z = 9$

f) $12x + 24y - 42z = 30$
$4x + 8y - 14z = 10$
$6x + 12y - 21z = 15$

g) $5x + 3y + 2z = 207$
$5x - 3y = 37$
$3y - 2z = 19$

h) $x_1 + x_2 - x_3 = 17$
$x_1 - x_2 + x_3 = 13$
$-x_1 + x_2 + x_3 = 14$

i) $x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 11$
$2x_1 - 3x_2 + x_3 = 6$
$6x_1 - 16x_2 + 10x_3 = 39$

j) $4x + 4\frac{1}{2}y - 6\frac{3}{4}z = 20$
$2\frac{1}{5}x - 2\frac{1}{3}y + 1\frac{1}{2}z = 5\frac{2}{3}$
$1\frac{2}{3}x + 1\frac{3}{4}y - 4\frac{1}{2}z = 3\frac{1}{3}$

k) $\frac{2}{5}x - y = 0$
$\frac{2}{3}x - z = 1$
$-\frac{2}{3}y + z = 2$

### ۲ . ۲ – مساوات سیستمونه د ناټاکلو ضریبونو سره

a) $x_1 + x_2 = 2c$
$x_1 + x_3 = 2b$
$x_2 + x_3 = 2a$

b) $x_1 + x_2 = 2(a + b)$
$x_1 + x_3 = 2(a + c)$
$x_2 + x_3 = 2(b + c)$

c) $ax + by - z = 1$
$ax - by + z = b$
$-ax + by + z = a$

(c) ketabton.com: The Digital Library



d)
$$\begin{aligned} ax + y - cz &= 2a \\ -ax + y + cz &= 2c \\ ax - y + cz &= 2ac \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= 2a \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{z} &= 2b \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= 0 \end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned} -\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= \frac{2}{a} \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= 0 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} &= \frac{2}{b} \end{aligned}$$

g)
$$\begin{aligned} x + \frac{y}{b} - \frac{z}{c} &= a \\ y + \frac{z}{c} - \frac{x}{a} &= b \\ z + \frac{x}{a} - \frac{y}{b} &= c \end{aligned}$$

h)
$$\begin{aligned} \frac{x}{b+c} + \frac{y}{c-a} &= a + b \\ \frac{y}{c+a} + \frac{z}{a-b} &= b + c \\ \frac{z}{a+b} + \frac{x}{b-c} &= c + a \end{aligned}$$

۳ . په خوبنه زيات مساوات د په خوبني زياتو مجهولو سره

a)
$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 &= 7 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 7 \\ 0{,}5x_1 + x_2 + 1{,}5x_3 - 0{,}5x_4 &= 3 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= 10 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= 6 \\ x_1 + 0{,}5x_2 + x_3 &= 1 \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 + x_4 &= 10 \\ 6x_1 + 0{,}5x_2 + 5x_3 + x_4 &= 9 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 - 2x_5 &= 1 \\ -2x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 &= 3 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 - 2x_5 &= 5 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 + x_5 &= 2 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 &= 4 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 &= 21 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + x_6 &= 1 \\ 6x_1 - 5x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 2x_5 - x_6 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 - 6x_6 &= 19 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 6x_5 - 7x_6 &= -24 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + x_6 &= 3 \end{aligned}$$

هوموجين مساوات سيستمونه:

a)
$$\begin{aligned} 3x_1 - 4x_2 + 7x_3 &= 0 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 0 \\ -2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 0 \\ 5x_1 - 3x_2 + 6x_3 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 20x_1 - 10x_2 + 15x_3 &= 0 \\ -12x_1 + 6x_2 - 9x_3 &= 0 \\ 8x_1 - 4x_2 + 6x_3 &= 0 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 9x_1 - 5x_2 + 6x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

# ۱۲ . الجبري مساوات یا - برابرونونه

## ۱۲ . ۱ نالاینیز- یا ناکرښیز- یا ناخطي برابرونونه

ټول مساوات چی د نورمالفورم

$$A . x = a \qquad (12.1)$$

سره یوارزښته ( اکویوالنت ) نه وي ، نالاینیز – یا ناکرښیز مساوات بلل کیږي او عمومي فورم یی په لاندې ډول دی

$$F( x ) = 0 \qquad ( 12 . 2 )$$

دلته $F ( x)$ په x کی یوه ناکرښیزه یا ناخطي ویینه یا افاده ده . د ( 12 . 2 ) حل دا مانا لري چی ټول د xارزښتونه پیدا شي د کومو لپاره چی ( 12 . 2 ) باوري وي. باید په پام کی ونیول شي چی ایا یواځي رییل ارزښتونه پیدا کوو او که کمپلس ارزښتونه هم غواړو چی پیدا کړو. د بیلګی په توګه لاندې ناکرښیز یا لاینیز مساوات

$$x^2 - x - 2 = 0$$

لاندې دواړه رییل ځوابونه لري

$$x1 = -1 , x2 = 2$$

چی د ارزښتونو ځاي په ځاي کولو سره یی مساوات باوري کیږي .ددې په څټ یا برعکس دا برابرون $x^2 + 1 = 0$ رییل ځواب نه لري ( ۵ -مه برخه دي وکتل شي)، بلکه لاندې ایماګینار ځوابونه لري : $x1= i , x2 = -i$

د دې حالت د ښه روښانولو لپاره دې ( ۱۵ برخه دې وکتل شي ) د برابرون او فنکشن ترمنځ اړیکو ته پاملرنه وشي: اړیکو $y=F(x )$ ته فنکشنبرابرون او x ته متحوله

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

وايي، چې زه يې کله اووښتونی او کله ناپيژندوني بولم( ښه نومه ونه يې اوښتوني ده) په څټ يا برعکس ( 2 . 12 ) يو ټاکنمساوات دی او x هلته يوه ناپيژندونکی يا اوښتونی دی.

د ( 2 . 12 ) برابرون يا مساوات اوبيوني يا حل ته د برابرون د F ( x ) صفرځای يا د مساوات F(x)=0 جذر يا ريښه هم وايي.

هغه برابرون يا مساوات چی په ( ۱۲ . ۲ ) فورم نه دئ ورکړ شوی کيدی شي چی په دې لاندې فورم واړول شي. د بيلګي په توګه د دې برابرون لپاره :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = a; g(x) \neq 0$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = a; g(x) \neq 0 \quad \text{او} \quad f(x)=g(x)$$

نورمال فورم په لاندې ډول لاس ته راوړل کيږي

$$F(x)=f(x)-a.g(x)=0 \quad \text{او} \quad F(x)= f(x)-g(x)= 0$$

د نالاينيزو برابرونونو لپاره د لاينيزو برابرونونو په څير راغونده (اختماميه، رابنده، راتړلی ) تيوري نه شته. په پوليزه يا عمومي ډول څوك نور فرمول نه شي ورکولی، د کوم له مخی چی د صفرځاي معلوميدی شي. بايد په نومريکو ( numerischen Methoden ) متودونو يا ورپسې ګڼ متودونو په ورنزدې يا تقريبي ډول پيداشي

نالاينييز برابرونونه په دوه ټولګيو ويشل کيږی: الجبري او تراسځندنت چی په دې او راتلونکی څپرکي يا لکه چی ما استعمال کړې برخه کی يی څيړو، چي اوبيونې يی روښانه افاده شوې ( explizit لاتين: واضح يا روښانه ، افاده شوی، اکسپليځت) دي.

له ۱۲ . ۲ څخه تر ۱۲ . ۴ پورې الجبري برابرونونه څيړل کيږي چی په لاندې نورمال فورم يا – بڼه اړول کيدی شي

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1 x + a_0 = 0 .................. (12,3)$$

دلته په ( 2 . 12 ) کی يو نالاينيز بلواك يا – فنکشن ( F ( x د يوه n - م درجی پولينوم په څير مخ ته پروت دی . موږ په ( ۱۲ . ۲ ) کی د ضريبونو( ځله وونو) لپاره يواځی رييل ګڼونه پريږدو ( په دې مانا چي ځلونه يواځي رييل وي، يواځی رييل ګڼونو ته اجازه ورکوو) .

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

دا په ( ۱۲ . ۳ ) کې کېږ اړخ ته n - م درجه پولینوم

$$F(x) = P_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1x + a_0 = 0 ..................(12,4)$$

ته ټول ریشنل ( - ریښتونی ) بلواک یا فنکشن هم وایي، ځکه چې د ریشنل شمیرله عملیو زیاتون، کمون، او ځل له لاري او نه په x واریابلی او ai د رییل ضریبونو، ځلونو یا فاکتورونو باندې د ویش کارونی کارولو (عملي استعمال ) له لارې منځ ته راځي .ټولیز برانرون یا

$$b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + ... + b_1x + b_0 = 0; b_n \neq 0 ..................(12,5)$$

کیدي شي په bn|= 0 ویش باندې په ( ۱۲ . ۳ ) نورمال فورم واړول شي .

که دا نه لاینیزفنکشن یا ۰ بلواک F ( x ) په ( ۱۲ . ۲ ) باندې په واریابلي یا اووښتوني x او ځلونو باندې ټول د شمیر کاروني یا عملیي او بالاخره دویش کارونه وکارول شي یا اجرا شي او رییل پارامتر (Parameterپه شمیرپوهنه کې ثابت (همغۀ) او یا مرستندویه لوي ده) تشکیل شي نو فنکشنونو ته بیا مات ریشنل فنکشنونه ویل کیږي. دا تل د دوه پولینومونو یا ریشنل فنکشنونو د ویش په څیر انځوروړ دي

$$F(x) = R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + ... + b_1x + b_0}{c_mx^m + c_{m-1}x^{m-1} + c_{m-2}x^{n-2} + ... + c_1x + c_0}; .....(12,6)$$

په همدې ډول برابرون

$$F(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = 0; ..........................(12,7)$$

تل په ( ۱۲ . ۵ ) یا ( ۱۲ . ۳ ) برابرون اړول وړ دي . دا باید په پام کې وي چې د (۱۲ . ۳ ) لپاره یواځنی هغه ځواب په پوښته کې راځي، د کوم لپاره چې باوري وي:

$$Q_m(x) \neq 0$$

که چیرې د نالاینیزبلواک یا - فنکشن جوړولو کې د ریشنل شمیرعملیو تر څنګ د توان ( مټ، په جګ) یا پوتنځ کول او جذر نیولوته هم اجازه ورکړل شي نو بیا سرې د الجري فنکشنونو څخه غږیږ. یعني داسي فنکشنونو ته الجبري فنکشنونه ویل کیږي او ( ۱۲ . ۲ ) برابرون بیا الجبري برابرون بلل کیږي ، دا ډول مساوات هم کیدی شي چې په ( ۱۲ . ۳ ) فورم واړول شي.

هره n - مه ریښه یا جذر $\sqrt{G(x)}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

د G( x ) افادې یا وییني له منځه وړل کیدی شي, که چیرې څوك دا برابرون په یوه خوا راوړي او بیا د برابرونونو دواړه خواوې دn په توان کړي یا د n پوتنځ یا مټ ته جګ کړي . دا په ۱۲ . ۴ برخه کی په ځرګندو یا معلومو بیلګوځیړل کیږي . په نومولو تګلارو د الجبري مساواتو ځینه د ( ۱۲ . ۳ ) فورم برابرونونو ته راکښته کیدلی شي. د الجبري مساواتو دا نورمال فورم د n - می درجي برابرون هم بلل کیږي. ټول نالاینیز برابرونونه چی الجبري برابرون نه دي، ترانسځیندنت برابرون بلل کیږي . د ترانسځیندنت رابرونونو درې تیوپونه، په نامه ، اکسپوننشل برابرونونه ، لوګاریتمي برابرونونه ، او ګونومتریکي برابرونونه دي چي په برخه ۱۳ کی به تر ځیرني لاندې ونیول شي.

## ۱۲ . ۲ ځلوری(مربع-) مساوات په توان( مټ، جګ) د ۲

### ۱۲ . ۲ . ۱ په جګ د ۲ مساوات په نورماله بڼه

د نالاینیزو الجبري برابرونونو ساده بڼه د ۲ په توان یا مټ ( په جګ ۲ هم ویل کیږي ) برابرونونه دي چی ځلوری یا مربع برابرونونه بلل کیږي .د دې ټولیزه بڼه ( عمومي فورم) داسی ده ۰ دی

$$b_2x^2 + b_1x + b_0 = 0; b_2 \neq 0; ............................(12,8)$$

په b2 یي ویش په لاندې ډول یو ورته ارزښته ( اکویوالنت äquivalent ) نورمالبڼه یا نورمالفورم ورکوي

$$x^2 + a_1x + a_0 = 0; (a_1 \neq b_1 / b_b; a_0 \neq b_0 / b_2); ............................(12,9)$$

ددې حل د ځلوری پوره کونې یا مربعتکمیل څخه په ګټه د بینوم په فورمل ودې کتل شي: ۱ . ۲ . ۲) ولاړ دی.

$$[x + a_a / 2]^2 = x^2 + a_1x + \frac{a^2{}_1}{4}; ......................(12,10)$$

په دې ډول کیدی شي چی ( ۱۲ . ۹ ) برابرون په لاندې فورم داسی واړول شي:

$$x^2+a_1x+a_0=(x+a_1/2)^2+a_0-a_1^2/4 = 0 <=>$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

[x+a1/2]²=(a1²/4)-a0 (12,11)

که وي

(a1²/4)-a0>0 <=> a1² -4a0>0 <=> a1²>4a0 (12,12)

نو دوه امکانات شته دی، چی ( ۱۲ . ۱۱ ) برابرون پوره کړي:
داصدق کوي

$$x+\frac{a_1}{2}=\sqrt{(a_1^2/4)-a_0};.........................(12,13)$$

یا

$$x+\frac{a_1}{2}==-\sqrt{(a_1^2/4)-a_0};.........................(12,14)$$

دا دواړه خواو په توان د ۲ څخه، د ( ۱۲ . ۱۳ ) او همداسی د ( ۱۲ . ۱۴) څخه (۱۲ ۱۲)برابرون او په دې ډول (۱۲ . ۹ ) برابرون لاس ته راځي ( په پام کی دې وي چی a د ۲ اصلي برخی په بینا تل نا کمیز یا نامنفي ګڼ پوهیدل کیږي، چی څلوری یا مربع یی a ده ) . له ( ۱۲ . ۱۳ ) په همدې ډول له ( ۱۲ . ۱۴ ) څخه رییل ځوابونه لاس ته راځي،

$$x_1=-\frac{a_1}{2}+\sqrt{(a_1^2/4)-a_0};x_2=-\frac{a_1}{2}-\sqrt{(a_1^2/4)-a_0};.........................(12,15)$$

او ددې لپاره دا هم لیکلی شو

$$x_{1,2}=-\frac{a_1}{2}\pm\sqrt{(a_1^2/4)-a_0};.........................(12,16)$$

په ( ۱۲ . ۹ ) کی د ( ۱۲ . ۱۵ ) په همدې توګه ( ۱۲ . ۱۶ ) ځاي پر ځاي کولو څخه پوهیدل کیږي چی دواړه ارزښتونه
x1 او x2
په ریښتونی څلوری برابرون یا مربع مساوات پوره کوي.
په لاندې حالت کی

$$(a_1^2/4)-a_0=0\Leftrightarrow a_1^2-4a_0=0\Leftrightarrow a_1^2=4a_0;.............(12,17)$$

د ( ۱۲ . ۱۶ ) له لارې تیك یو رییل اوبی لرو:

$$x_{1,2}=x_1=x_2=-(a_1/2)\pm 0=-a\ \ /2;.................................(12,18)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

په ( ۱۲ . ۱۵ ) همداسی په ( ۱۲ . ۱۶ ) باندې په تکیه دا اوبی دوه واره دی یا په بل عبارت دوه واره رامنځ ته کیږي او په دې ډول د یوه دوه واره اوبیونې ( ۱۲ . ۱۸ )څخه غږیږو.
که وي

$$(a_1^2/4)-a_0<0 \Leftrightarrow a_1^2-4a_0<0 \Leftrightarrow a_1^2<4a_0;................/12,19)$$

نو ( ۱۲ . ۱۱ ) همداسی ( ۱۲ . ۹ ) رییل حل نه لري. که په کمپلس ګڼونو شمیرنه وکړو نو له ۵ - برخی څخه لاندې لاس ته راوړو

$$x+a_1/2=\sqrt{a_0-(a_1^2/4)i} \wedge x+a_1/2=-\sqrt{a_0-(a_1^2/4)i}$$

او په دې ډول د کونجوګیرت کمپلکس حل جوړه لاس ته راځي:

$$x_{1,2}=-a_1/2\pm\sqrt{a_0-(a_1^2/4)i};....................(12,20)$$

له دې څخه هم چی په ( ۱۲ . ۹ ) ځای په ځای شي څرګندیږي چی د x1 او x2 ارزښتونه پیل برابرون یا مساوات پوره کوي.

که په ( ۱۲ . ۱۹ ) حالت کی لاندې څرګندونی ته پام وي

$$\pm\sqrt{a_0-(a_1^2/4)i}=\pm\sqrt{(a_1^2/4)i-a_0};....................(12,21)$$

نو لاندې جمله بی راغونډه داسی فرمولولی شو

جمله ۱۲ . ۱: ( د څلوری یا مربع ) په توان یا جګ د ۲ ) برابرونونو د اوبیونې فرمول ) د څلوری- یا مربع برابرونونو(مساواتو) x²+a1x+a0=0

$$x_{1,2}=-a_1/2\pm\sqrt{a_0-(a_1^2/4)i}$$

ټیک دوه ځوابونه لري
د $a_1^2>4a_0$

په حالت کی دوه مختلف رییل حلونه دی، د $a_1^2=4a_0$ په حالت کی یو رییل دوه برابره( ډبل) حل دی او د $a_1^2<4a_0$ په حالت کی یو جوړه کونیوګیرت - کنجوګیریکمپلکس حل شته دي.

په ساده ډول لاندې د وییتا جمله هم د مربع مساوتو لپاره ښوول کیدی شي

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

جمله ۱۲ . ۲ ( د ویيتا( Vieta)جمله ) :

که x1 او x2 د خلوری - یا مربع برابرونونو (۱۲ . ۹ ) همداسی د ( ۱۲ . ۸ ) اوبیوني وي نو باوري دی

$$a_1 = b_0 / b_1 = x_1.x_2; ............................(12,22)$$

$$a_2 = b_1 / b_2 = -(x_1 + x_2); .....................(12,23)$$

حل : ( ۱۲ . ۲۳ ) فرمول په دریواړو حالتونو کی سم د لاسه له لاندې ښخه لاس ته راځي:

$$-(x_1 + x_2) = \left[\frac{a_1}{2} - \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}\right] + \left[\frac{a_1}{4} + \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}\right] = a_i$$

د ( ۱۲ . ۲۲ ) فرمول د تصدیق لپاره د بینوم دریم فرمول او $i^2 = -1$ استعمال ښخه په په ( ۱۲ . ۱۲ ) حالت کی باور لري :

$$x_1.x_2 = \left[-\frac{a_1}{2} + \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}\right].\left[-\frac{a_1}{2} - \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}\right] = \frac{a_1^2}{4} - \left[\sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}\right]^2$$

$$= \frac{a_1^2}{4} - \frac{a_1^2}{4} + a_0 = a_0$$

په ( ۱۲ . ۱۷ ) حالت کی لاس ته راځي:

$$x_1.x_2 = \left[-\frac{a_1}{2} + 0\right]\left[-\frac{a_1}{2} - 0\right] = \frac{a_1^2}{4} = a_0$$

په ( ۱۲ . ۱۹ ) حالت کی باوري دي:

$$x_1.x_2 = \left[-\frac{a_1}{2} + \sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}\,i\right].\left[-\frac{a_1}{2} - \sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}\,i\right] = \frac{a_1^2}{4} - \left[\sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}\right]^2 i^2$$

$$= \frac{a_1^2}{4} - [a_0 - \frac{a_1^2}{4}].(-1) = \frac{a_1^2}{4} + a_0 - \frac{a_1^2}{4} = a_0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

د وييتا جملی په مرسته لاندې جمله باوري کيږي يا تصديقيږي

جمله ۱۲ . ۳ :

يو ۲ درجييز پولينوم کيدی شي چی په دوه لايني فاکتورونو يا ضريبونو يا ځله وونو بيل يا ټوټه يا تجزيه شي:

$$x^2+a_1x+a_0=(x-x_1)(x-x_2);..................(12,24)$$

په همدې ډول

$$b_2x^2+b_1x+b_0=b_2(x-x_1)(x-x_2);..................(12,25)$$

چيرته چي $x1$ او $x2$ د څلوری برابرونونو يا مربع مساواتو ( ۱۲ . ۹ ) په همدې ډول د ( ۱۲ . ۸) دواړه ځوابونه دي

اوبيونه : له ( ۱۲ . ۲۲ ) ، ( ۱۲ . ۲۳ ) څخه د ( ۱۲ . ۹ ) همداسی د (۱۲ . ۸ ) په پام کي نيولو سره لرو

$$(x-x_1)(x-x_2)=x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=x^2+a_1x+a_0=$$

$$=\frac{1}{b_2}(b_2x^2+b_1x+b_0)$$

د جملی ۱۲ . ۳ څخه دې ته راځول کيږو چی د ( ۱۲ . ۱۷ ) حالت کی د دوه برابره ريپل اوبيو څخه خبرې وکړو( وغږيږو). د $x1 = x2$ له امله لاس ته راځي

$$x^2+a_1x+a_0=(x-x_1)^2;a_1^2=4a_0;..................(12,26)$$

دا دري حالتونه(۱۲ . ۱۲ ) .( ۱۲ . ۱۷ ) او ( ۱۲ . ۱۹ ) کيدی شي چی د فنکشن

$$y=p_2(x)=x^2+a_1x+a_0$$

ځيرو يا شکلونو ( ګراف ) په مرسته د کتلو شي.

ګراف په بنسټيزه توګه پارابول انځوروي، چی پورته خوا ته سرواز دی. ځکه چی که x هرڅومره کوچنی شي )که x د کميز ناپای په جګ يا توان شي ) اوهمدارنګه x هرڅومره لوي شي ( که x د ∞ (ناپای) په جګ شي y لوييږي ( ستريږي يا غټيږي) ، ځکه چی$x^2$ نسبت و x ته په توان يا قوي جګيږي له ټولو پولو( yد ناپای لور ته ځي)٠ د دې ډول پولو کره پيژند يا تعريف په ۱۹ - برخه کي لوستل کيدی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

په ( ۱۲ . ۱۲ ) حالت کې د x - محور په داړو ریښلو ځایونو x1 او x2 کې غوڅیږي؛ په ( ۱۲ . ۱۷ ) حالت کې په x1 = x2 ځای کې يې لمسوي او په ( ۱۲ . ۱۹) حالت کې ګډ ټکي ورسره نه لري یا نه وررسيږي ( پرتله څيره . ۱۲ . ۱)

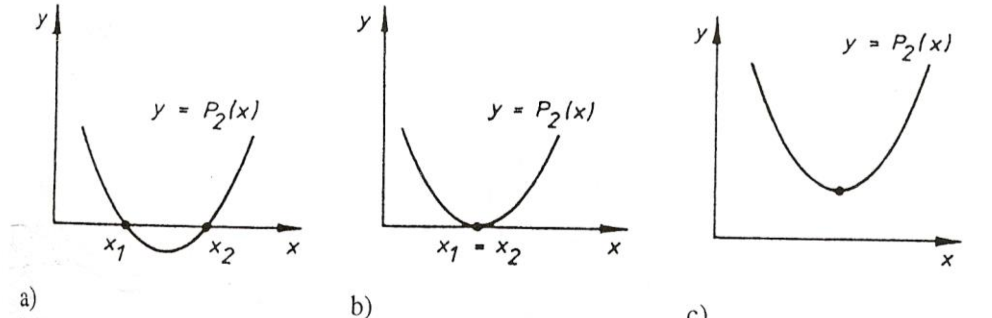



Bild 12.1

له جملې ۱۲ . ۱ تر ۱۲ . ۳ پورې به په درې ساده ډوله د (۱۲ . ۱۲) ، (۱۲ ، ۱۷ ، ۱۲ . ۱۹ ) سره مناسبو بېلګو روښانه شي.

بېلګه ۱۲ . ۱ :

په برابرون $x^2 - x - 6 = 0$ کې لرو

$a1 = -1 , a0 = -6$ او د $a_1^2 - 4a_0 1 + 24 = 25 > 0$

له امله ( ۱۲ ، ۱۲ ) حالت مخ ته پروت دی.
دواړه له صفر مختلف ځایونه د جملې ۱۲ . ۱ څخه په لاندې فورم لاس ته راځي:

$$x_{1,2} = 1/2 \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = 1/2 \pm \sqrt{1/4 + 24/4} = 1/2 \pm \sqrt{25/4} = 1/2 \pm 5/2$$

$$\Rightarrow x_1 = 3; x_2 = -2$$

جمله ۱۲ . ۲ :

له لاندې لاس ته راوړنې یاتعقیب څخه باوري کیږي

$$a_0 = -6 = x_1 x_2 = 3(-2) = -6$$

$$a_1 = -1 = -(x_1 + x_2) = -(3 - 2) = -1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



له جملی ۱۲ . ۳ څخه لاس ته راځي: $x^2-x-6=(x-3)(x+2)$

بيلګه ۱۲ . ۲ :

له مساواتو $x^2-4x+4=0$ لرو $a1=-4,a0=4$ او د $a_1^2-4a_0=16-4.4=0$

له امله ( ۱۲ . ۱۷ ) حالت مخ ته لرو۰ دوه ئيز رييل حل په لاندې ډول له جملی ۱۲ . ۱
څخه لاس ته راځي $x_{1,2}=2\pm\sqrt{4-4}=2$ نو لرو $x1=x2=2$

جمله ۱۲ . ۳ :
په لاندې ډول باوري کيږي

$$a_0=4=x_1.x_2=2.2=4$$
$$a_1=-4=-(x\ \ +x_2)=-(2+2)=-4$$

د جملی ۱۲ . ۳ له مخی لرو $x^2-4x+4=(x-2)^2$

بيلګه ۱۲ . ۳ :

له مساواتو $x^2-4x+13=0$ څخه لرو , $a1=-4$ ,$a0=13$او د $a_1^2-4a_0=16-52-36$

له امله حالت ( ۱۲ ، ۱۹ ) مخ ته لرو.

د کونيوګيرت( کنجوګيري) کمپلکس جوړه اوبيونو يا حلونو له جملی ۱۲ . ۱ څخه په لاندې بڼه يا فورم لاس ته راولو

$$x_{1,2}=2\pm\big)4-13=2\pm\sqrt{-9}=2\pm3i$$
$$\Rightarrow x\ \ =2+3i;x_2=2-3i$$

د جملی ۱۲ . ۲ سره سم باور لري

$$a_0=-4=-(x_1+x_2)=-(2+3i+2-3i)=-4$$
$$a_1=13=x_1.x\ \ =(2+3i)(2-3i)=4-9i^2=4+9=13$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



-----------------------------------------------------------------------

او د جملې ۱۲ . ۳ له مخې داسې دئ

$x^2-4x+13=(x-2-3i)(x-2+3i)$

د مربع مساوات (۱۲ . ۸ ) همداسې ( ۱۲. ۹) اوبې په ښکاره ډول ساده کيږي، که يو ځلې a0 اويا a1 ورك شي:

د a0 = 0 لپاره لرو

$$x(x+a_1)=0 \Leftrightarrow x_1=0; x_2=-a_1$$

د a1=0 لپاره لرو

$$x^2+a_0=0$$

$$\Rightarrow x^2=-a_0; x_{,2}=\pm\sqrt{a_0}$$

## ۱۲ . ۲ . ۲ څلورئ(مربع-)برابرون چې په نورمالبڼه

مخ ته نه دي پراته

که يو مربع مساوات په نورمال فورم ( ۱۲ . ۹ ) مخ ته نه وي پروت، له دې د مخه چې جمله ۱۲ . ۱ وکارول شي، نو بايد په دې بڼه واړول شي.

بليگه ۱۲ . ۴ :

$2x-(x+2)^2=(x-2)^2-4(x+1)$

$2x-x^2-4x-4=x^2-4x+4-4x-4$

$-x^2-2x-4=x^2-8x$

$x^2-3x+2=0$

$$x_{1,2}=3/2\pm\sqrt{9/4-2}=3/2\pm\sqrt{9/4-8/4}=3/2\pm\sqrt{3/2}\pm\sqrt{1/4}=3/2\pm1/2$$

$$\Rightarrow x_1=2; x_2=1$$

که مجهول يا ناپيژندلې يا اوړيدونې x د مات لاندې رامنځ ته شي، نو بايد په صفر ويش ناممکن يا ناشونوالی په پام کي ونيول شي.

بيلگه ۱۲ . ۵ :

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

برابرون $(x^2+2x)/(2x^2+2x-4)=1$

ټيك هلته مانا لري، چې وي $2x^2+2x-4 \neq 0$

لومړی ورکړشوی برابرون اوبی کيږي او بيا ازمائل کيږي، چې ايا د ماتلاندې شرايط پوره دی، که نه.

$$x^2+2x=2x^2+2x-4$$

$$-x^2 = -4$$

$$x_{,2} = \pm 2; x = 2; x_2 = -2$$

د $x=x1=-2$ لپاره په ماتلاندې کی لرو

$$2x^2 + 2x - 4 = 8 + 4 - 4 = 8 \neq 0$$

او $x = x2 = -2$ لپاره په ماتلاندې کی لرو

$$2x^2 + 2x - 4 = 8-4-4 = 0$$

له دې امله $x1 = 2$ د پيل برابرون اوبی دی

## ۱۲ . ۲ . ۳ د n - م درجې ځانګړي برابرونونه ،

چی په څلوری یا مربع برابرونونو بيرته بدليدلی شي

د n - مې درجی مساواتو( ۱۲ . ۳ ) يو څو ځانګړي حالتونه کيدی شي چی د څلوری برابرونونو یا مربع مساواتو په مرسته ځواب شي یا اوبی شي٠ دا ځانګړی حالت موجود دی یا شته دی که باور ولري

$$a_1 = a_1 = ... = a_{n-3} = 0 \qquad (12, 27)$$

دn- می درجی برابرون بيا داسی دي

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} = 0; ..........................(12,28)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x^{n-2}(x^2 + a_{n-1}x + a_{n-2}) = 0$$

$$\Rightarrow x^{n-2} = 0 \vee x^2 + a_{n-1}x + a_{n-2} = 0; ................(12,30)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

يادونه : په پورته کې له ( ۱۲ ، ۳۰) پورته برابرون (۱۲،۲۹ ) دئ
د دې برابرونونو دوهم برابرون يو څلورئ - يا مربع برابرون دی، چې د جملي ۱۲
. ۱ په بنسټ لاندې ځواب لري

$$x_{1,2} = -\frac{a_{n-1}}{2} \pm \sqrt{\frac{a_{n-1}^2}{4} - a_{n-2}}$$

لومړی برابرون دا اوبی يا حل لري $x = 0$ چې دا ( n-2 )- ځله رامنځ ته کيږي $x3 = x4 = ... = xn=0$

بيلګه ۱۲ . ۶:

برابرون $x^6 + 2x^5 - 3x^4$ د $x^6 + 2x^5 - 3x^4 = x^4(x^2 + x - 3)$
او $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+3} = -1 \pm 2$
لاندې اوبيونې لرو

$$x_1 = 1, x_2 = -3; x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$$

نور هم هغه حالت ساده دی، که $a_{n-2} = 0$ وي، او باور ولري

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} = 0; x^{n-1}(x + a_{n-1}) = 0 \Rightarrow$$
$$x_1 - a_{n-1}, x_2 = x_3 = ... = x_n = 0; ....................(12,32)$$

يو بل ځانګړی حالت مخ ته لرو، که د برابرون ( ۱۲ ، ۳) درجه n جوړه ګڼ يا جفت - وي

$$n = 2k \qquad (12 . 33)$$

او فقط ( ټيك) ځله وونې يا كوايفيڅينتونه a0 او ak له صفر سره برابر نه وي:

$$x^{2k} + a_k x^k + a_0 = 0; ....................(12,34)$$

دلته داسی ځاي په ځاي کوو

$$y = x^k; ............................................(12,35)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

او له دې سره د y لپاره څلوری برابرون یا مربع مساوات لاس ته راځي:

$$y^2 + a_k y + a_0 = 0 \qquad (12, 36)$$

د لاندې ځوابونو سره ( پرتله : جمله ۱۲ ، ۱)

$$y_{1,2} = -(a_k/2) \pm \sqrt{\frac{a_k^2}{4} - a_0}; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12,37)$$

د( ۱۲ ، ۳۵ ) له امله دې د لاندې دوه برابرونونو

$$x^k = y_2 \wedge x^k = y_1; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12,38)$$

ټولې اوبیونې وخیرلی شي، چی د $k = 1$ لپاره ساده دی، د $k = 2$ لپاره( بیکوادرات برابرون) ( د څلوری څلوری یا د مربع مربع ) یا د ریبلو y1 او y2 لپاره د تراوسه څرګندو میتودو سره تل کیدونکی دی . نور حالتونه ددې اوس وخت لپاره په ټولیزه توګه ستونځی لري.

بیلګه ۱۲ . ۷ :

لاندې بیکوادرات برابرون $x^4 + 5x^2 - 6 = 0$ کیدی د سوبستیچیوشن یعني بدلون له لارې $y = x^2$ په څلوری برابرون $y^2+5y-36=0$ باندې بدل شي. د جملی ۱۲ ۱ په بنسټ لرو .

$$y_{,2} = -5/2 \pm \sqrt{25/4 + 36} = -5/2 \pm \sqrt{25/4 + 144/4}$$

$$= -5/2 \pm \sqrt{169/4} = -5/2 \pm 13/2$$

$$\Rightarrow y_1 = 4; y_2 = -9$$

دواړه برابرونونه ، چی د بیرته بدلون( -سوبستیچیوشن) له امله لاس ته راوړو

$$x^2 = 4 \ , \ x^2 = -9$$

لاندې اوبی یا حل لري

$$x1 = 2 \ , \ x2 = -2 \ , \ x3 = 3i \ , \ x4 = -3i$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

## ۱۲ . ۲ . ۴ د برابرونسيستمونه چی بيرته په څلوری برابرونونو بد لید لی شي

يوه د نالاينيزو مساواتسيستمونو لړی کيدی شي چی په څلوری برابرون يا مربع مساواتو بيرته واړول شي. ددې لپاره دوه ساده بيلګي راوړو.

بيلګه ۱۲ . ۸:

$$x + y = 1 \qquad (12, 39)$$
$$x^2 + y^2 = 13 \qquad (12, 40)$$

لومړی برابرون د y په لور حل کيږي، y= 1-x، او دا حل په دوم برابرون کی اينوول کيږي:

$$x^2 + (1-x)^2 = 13$$
$$x^2 + 1 - 2x + x^2 = 13$$
$$2x^2 - 2x - 12 = 0$$
$$x^2 - x - 6 = 0$$
$$x_{1,2} = 1/2 \pm \sqrt{1/4 + 6} = 1/2 \pm \sqrt{25/4} = 1/2 \pm 5/2 \Leftrightarrow$$
$$x = 3, x_2 = -2$$

د ( ۱۲ ، ۴۰ ) له مخی په دې لاندې د y - ارزښتونه اړه لري

$$y1 = -2, \; y2 = 3$$

نو دا نه لاينيز برابرون لاندي اوبيوني لري

$x1 = 3, y1 = -2$ او $x2 = -2, y2 = 3$

بيلګه ۱۲ . ۹ :

د لاندې مساواتو سيستم کی

$$ax + y = 1; \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



چې یواځې د $x \neq 0, y \neq 0$ لپاره موخه وریا هدفمند دی، دوم برابرون په xy ځلولو( ضربولو)سره په لاندې بڼه اړول کیږي:

$$y+x=xy \qquad (12,42)$$

لومړی برابرون د y په لور ځواب کیږي

$$y = 1 - ax \qquad (12, 43)$$

او په ( ۱۲ . ۴۲ ) کی ایښول کیږی یا ځای په ځای کیږي

$$1-ax+x=x(1-ax) = x - ax^2$$

$$, ax^2- ax+ 1 = 0 \qquad (12,44)$$

د $a = 0$ په حالت کی ( ۱۲ . ۴۴ ) برابرون مخامخوالی لري یا په ځېوالی لري یا تضاد لاس ته راکوي » $1 = 0$ « نو ځواب نه شته

د $a \neq 0$ لپاره د(۱۲ . ۴۴ ) ښخه لاس ته راځی $x^2 - x +1/a = 0$

او د جملی ۱۲. ۱ له امله لرو $x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{4} - \frac{1}{a}$

د

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{a} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{4} ........................(12.45)$$

لپاره مو ( ۱۲ . ۱۲ ) حالت مخ ته پروت دی . دوه برخی حالتونه باید په پام کی ونیول شي:

د $a > 0$ لپاره له ( ۱۲ ، ۴۵ ) ښخه لرو $a > 4$ , او د $a < 0$ لپاره له ( ۱۲ ، ۴۵ ) ښخه لرو . $a < 4$ له دې امله د

$$a < 0 \text{ او } a > 4 \qquad (12, 46)$$

لپاره د ( ۱۲ ، ۴۴ ) دوه مختلف ریل ځوابونه موجود دي:

$$x_1 = 1/2 + \sqrt{1/4 - 1/a}, x_2 = 1/2 - \sqrt{1/4 - 1/a}; ....................(12.47)$$

په دې پوروې د ( ۱۲ ، ۴۶ ) له مخی دواړه دy - ارزښتونه هم اړه لري

$$y_1 = 1 - a/2 - a.\sqrt{1/4 - 1/a}; y_2 = 1 - a/2 + \sqrt{1/4 - 1/a}; .................(12.48)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

باید وازمایيل شي چې د ( ۱۲ ، ۴۶ ) په حالت کی x1 , x2 , y1 ,y2 (ټول ) نابرابر په صفر دي . ټل x1 > 1 /2 دی. که x2 = 0 وی، نو باوري به وی

$$1/2 = \sqrt{1/4 - 1/a} ; 1/4 = 1/4 - 1/a$$

دا د هیڅ a لپاره ممکن نه دی. له دې امله $x_2 \neq 0$ دی
که y1= 0 يا y2 = 0 وی، نو لاندې به باور لرودی:

$$1 - a + a^2/4 = a^2/4 - 1 \Leftrightarrow 1 = 0$$

دا هم ناشونی یا ناممکن دی، نو دلته هم*لرو* $y_1 \neq 0; \ y_2 \neq 0.$
په ( ۱۲ ، ۴۶ ) حالت کی د ( ۱۲ ، ۴۱ ) د ( ۱۲ ، ۴۷ ) ، ( ۱۲ ، ۴۸ ) سر ه سم، دوه

مختلف رییل ځوابونه شته دی - غواړی- موجود دي
د x1 , y1 او . x2, y2

$$1/4-1/a=0 <=> a=4 \qquad ( 12 , 49 )$$

لپاره( ۱۲ ، ۱۷ ) حالت مخ ته پروت دی، او برابرون ( ۱۲، ۴۴ ) ډبل رییل حل لري

$$x1 = x2 = 1 /2 \qquad (12,50)$$

په دې پورې د (۱۲ ، ۴۳ ) له مخې هغه y - ارزښت ډبل ګڼ اوبی پورې هم اړه لري.

$$y 1 = y2 = 1 - 4. (1 /2) = -1$$

د ( ۱۲ ، ۴۹ ) په حالت کی پس د ( ۱۲ . ۱۹ ) یو ریل، ډبل ګنلی حل موجود دی

$$x1=x2=1/2 , y1=y2= -1 \qquad ( 12 , 51 )$$

د

$$1/4-1/a < 0 <=> 1/a > 1/4 \qquad ( 12 , 52 )$$

لپاره ( ۱۲ ، ۱۹ ) حالت مخ ته پروت دی. د a > 0 لپاره ( ۱۲ ، ۵۲ ) د a<4 کتمت (ورته) دی، او د a< 0 لپاره دa>4 سره کتمت دی ( له دې امله په ښتوالی یا تضاد ) .
نو د( ۱۲ ،۵۲ ) باور لري، د

$$0 < a < 4 \qquad ( 12 , 53 )$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

لپاره . په دې حالت کی ( ۱۲ ، ۴۴ ) کونجوګیري کمپلکس اوبیونې لري:

$$x_1 = 1/2 + \sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{4}}i; x_2 = 1/2 - \sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{4}}i; ..............(12.54$$

د ( ۱۲ ، ۴۳ ) له مخی په دې پورې د y - ارزښتونه اړه لري:

$$y_1 = 1 - a/2 - a\sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{4}}i; y_2 = 1 - a/2 + a\sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{4}}i; ............(12,55)$$

له دې ارزښتونو هیڅ هم صفر کیدی نه شي .پس په یوځاي شوي یا راټوله توګه لرو:
برابرونسیستم ( ۱۲ ، ۴۱ ) د $a = 0$ لپاره اوبی نه لري، د , $a < 0$ په همدې ډول $a >$
4لپاره دواړه ریل اوبي ( ۱۲ ، ۴۷ ) ، ( ۱۲ ، ۴۸ ) ، د $a = 4$ لپاره رییل ډبل ګڼلي
اوبۍ ( ۱۲ ، ۵۱ ) او د $4 < a < 0$لپاره دوه کونجوګیري کمپلکس اوبي ( ۱۲ ، ۵۴ ) ،
( ۱۲ ، ۵۵ ) لري.

۱۲ . ۳ دریمه درجه مساوات یا - برابرونونه

ددې لپاره چی په زړه پورې -n ( ام ( درجي مساواتو حلول ساده کړای شو نو لکه د
مساواتو مربع سیستم جملو ته ورته جملی د دریمی درجی مساوات لپاره ځیړو.
د دریمی درجی مساواتو نورمال فورم په د ( ۱۲ . ۳ ) سره سم په لاندې ډول دی.

$$x^3+a2x^2+a1x+a0=0 \qquad (12,56)$$

دا پولینوم

$$y=P3(x)=x^3+ a2x^2+a1x +a0 \qquad ( 12 , 57 )$$

لاندې بنستیز خویونه لري: که x ډیر لوي شي یعني ناپای په لور لاړشي $x \to \infty$
نو y هم د ناپای په لور ځي، ځکه چی د$x^3$ ارزښت نسبت د $x^2$ ارزښت ته په بیړه
جګیږي او بیا همداسې و x ته هم . که a1 او a2 کمیز یا منفي هم وي نو y به د لویو
x- ارزښتونو لپاره زیاتیز یا مثبت وي. داچي $x^3$ د کمیز x - ارزښت لپاره له صفر
کوچنی دی، نو په همدې ډول
x->-o د y -> -o
لپاره .د دې ډول »پولوارزښت یا لیمس« لپاره کره تعریفونه بیا په ۱۹ برخه کی په
پراخه توګه څیړل کیږي .د یو-x ارزښت ) خورا کوچنی هم کیدی شي ( شته چی د هغه

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

لپاره 0 > y وي اود يو x - ازښت ) چی خورا لوي هم کيدی شي ) ، د کوم لپاره چی y>0 دی. ددې دواړو ارزښتونو تر منځ بايد د مساوات ( ۱۲ . ۵۶ ) يو رييل اوبی پروت وي.

په ډيرو لاندې بيلګو کی سړی کړی شي چی په ساده ډول د جدول په مرسته ازمائيلي حلونه پيدا کړي، په عمومي توګه بيا هم بايد وشميرل شي.

ددې لپاره يو څو بيلګی:

بيلګه ۱۲ ، ۱۰ الف:

د پولينوم

$$y = x^3 - 3x^2 - 4x + 12 \qquad (12, 58)$$

لپاره لاندې د ارزښت جدول لاس ته راځي

$$X = 0, 1, -1, 2$$

$$Y = 12, 6, 12, 0$$

په دې توګه يو رييل صفرځاي پيدا شو

$$x1 = 2 \qquad (12, 59)$$

په ۱۵-مه برخه کی به د هورنر شيما په بنسټ يو متود ورکړ شي ، دکومی له لار ې چی بيا د مټ( توان= لوړولو ته اړتيا نه پيدا کيږي او پولينومونو د فنکشن ارزښت ساده پيدا کيدی شي يا شميرل کيدی شي

بيلګه ۱۲ . ۱۱ الف:

دا برابرون

$$2x^3 + 11x^2 + 12x - 9 = 0 \qquad (12,60)$$

لاندې نورمال فورم يا -بڼه لري

$$x^3 + (11/2)\, x^2 + 6x - 9/2 = 0 \qquad (12 . 61)$$

د صفرځاي پيداکولو لپاره دې د ( ۱۲ . ۶۰ )مساوات لپاره د ارزښت جدول جوړ شي )ترتيب شي وشميرل شي (، ځکه چی هلته ماتونه منځ ته نه راځي:

$$X = 0, 1, 1/2$$

$$Y = -9, 16, \quad 0$$

نو

$$x1 = 1/2 \qquad (12, 62)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

د مساوات ( ۱۲ . ۶۰ ) په همدې ډول ( ۱۲ . ۶۱ ) یو رییل صفرځای دی

بیلګه ۱۲ . ۱۲ الف:

د لاندې برابرون لپاره

$$x^3-9x^2+27x-27=0 \qquad (12, 63)$$

د ارزښت جدول

X = 0 , 1 , -1 ; 2 , -2, 3
Y = -27 , -8 , -64 , -1 , -25, 0

له لارې لاندې رییل صفرځاي لاس ته راځي

$$x = 3 \qquad (12, 64)$$

بیلګه ۱۲ . ۱۳ الف :

د برابرون

$$x^3 -9x^2 +27x -27 =0 \qquad (12, 65)$$

لپاره د جدول

X = 0 , 1
Y = -3 ; 0

سره لاندې صفرځاي لاس ته راځي

$$x = 1 \qquad (12, 66)$$

په ټولیزه توګه کیدی شي په کلکه څرګند شي ، چې د دریم درجی برابرونسیستم ( ۱۲ . ۵۶ ) لپاره تل یو رییل اوبی یاحل $x_1$ شته دی. دا یو واقعیت دی چې بي له ښوونی یی لیکو، چې دا پولینوم ( ۱۲، ۵۷ ) بي له پاتي په لاینیز فاکتور ( x - x1 ) ویشل کیدی شي او یو دومه درج پولینوم ترې لاس ته راځي:

$$(x^3+a_2x^2+a_1x+a_0):(x-x_1)=x^2+b_1x+b_0$$

له دې امله داسی دی

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

جمله ۱۲ . ۴ :

هر دریمه درجه برابرون ( ۱۲ . ۵۶ ) کم له کمه یو رییل اوبی x1لري او دا لاندې باوري دي

$$P_3(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = (x - x_1)(x^2 + b_1x + b_0);.............(12,67)$$

دلته نو بیا نور د دریمي درجي مساواتو ( ۱۲ . ۵۶ ) دوه حلونه x2 او x3لاس ته راځي که څلورې برابرون یا مربع مساوات $x^2 + b1x + b0 = 0$ اوبی شي، او د جملو ۱۲ . ۱او ۱۲ . ۳ سره کیدی شي چی لاندې جمله فرمولبندې کړی شو

جمله ۱۲ . ۵ :

هر دریمه درجه برابرون درې اوبیونې یا اوبي x1 , x2,x3 لري او دا باور لري

$$x^3+a2x^2+a1x+a0=(x-x1)(x-x2)(x-x3) \quad ( 12 , 68 )$$

دلته دا لاندني حالتونه ممکن دي

۱ - درې رییل مختلف حلونه x1 , x2 او x3 شته دی ( موجود دي)

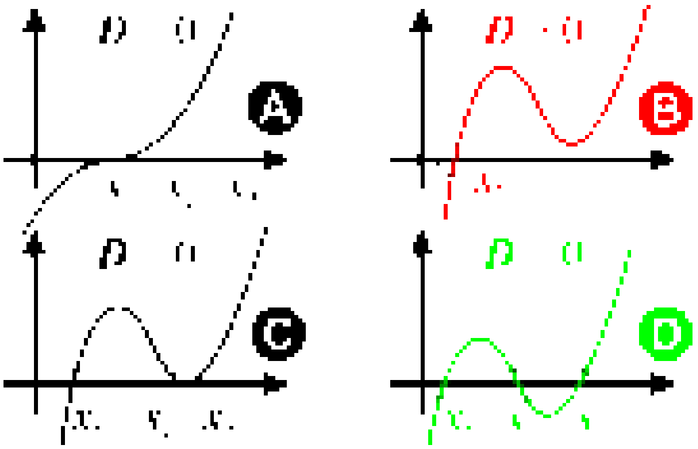
۲ - یو رییل حل x1 او ددې سره مختلف یو ډبل رییل حل x2=x3شته دی .

۳ - یو رییل درېګونی حل شته دی

$$x1 = x2 = x3$$

۴ - یو رییل حل x1 او یوه جوړه کونجوګیرت کملکس اوبیونې یا اوبي $x_2 = \overline{x_3}$ شته دی

دا لاندې څیره د ټولو راشنل فنکشنونو( ۱۲ . ۵۷ ) تیپیکي تلنه د جملی ۱۲ . ۵ څلورو حالتونو کی ښایي



(c) ketabton.com: The Digital Library



---

د ( ۱۲ . ۶۸ ) فرمول په مرسته د بني اړخ په ځلولواو فاکتورونو(ځله وونو) پرتلی یا انډول له لارې کیدی شي د دریمی درجي پولینومو لپاره د وییتا جمله تصدیق کړي چی د جملی ۱۲ . ۲ سره سر خوري

جمله ۱۲ . ۶ :

که x1 , x2 او x3 د دریمي درجي برابرون ( ۱۲ . ۵۶ ) اوبیونې وي ، نو لاندې باوري دي

$$a0=-x1.x2.x3 \qquad (12,69)$$

$$a1=x1x2+x1x3+x2x3 \qquad (12,70)$$

$$a2=-(x1+x2+x3) \qquad (12,71)$$

جملی ۱۲ . ۴ په مرسته دې اوس د بیلګو ۱۲ . ۱۰ الف، تر ۱۲ . ۱۳ الف پورې د نورو دواړوx2 او x3 اوبیونې ولټول شي.

بیلګه ۱۲ . ۱۰ ب :

( ۱۲ . ۵۸ ) برابرون د ( ۱۲ . ۵۹ ) برابرون له مخی x1 = 2 حل لري. سړی دا ځواب د ۱ . . ۴۲ . برخي له مخي د پارشل Partial -(ټوټه-( ویش په بنسټ لاس ته راوړي.

$$(x^3-3x^2-4x+12):(x-2)=x^2-x-6$$

$$..\underline{x^3+2x^2}$$

$$........-x^2-4x+12$$

$$.........\underline{-x^2+2x.........}$$

$$..............-6x+12$$

$$..............-6x+12$$

له x² - x - 6 = 0 څخه لاس ته راځي

$$x_{2,3}=1/2\pm\sqrt{1/4+6}=1/2\pm\sqrt{1/4+24/4}=1/2\pm 5/2,$$

$$x2=3, x_3=-2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

دلته د جملی ۱۲ . ۵ لومړی حالت لرو، د لاندې مختلفو ریيلو ځوابونو سره
، $x1 = 2 , x2 = 3 , x3 = -2$
او داسی دئ:
$$x^3-3x^2-4x+12 = (x - 2)( x-3 )(x + 2)$$

بیلګه ۱۲ . ۱۱ ب :

(۱۲ . ۶۰ ) برابرون د ( ۱۲ . ۶۲ ) برابرونونو له مخی اوبی
$x1 = 1 / 2$
لري او داسی دئ:
$$( 2x^3+11x^2+12x-9):(x-1/2)=2x^2+12x+18$$

او له $2x^2 + 12x + 18 = 0$

په همدې ډول یا ( □ ) له $x^2 +6+9=0$ څخه لاس ته راځي
$$x_{2,3} = -3 \pm \sqrt{9-9} = -3 \Leftrightarrow x_2 = x_3 = -3$$

دلته د جملي ۱۲. ۵ دوم حالت مخ ته پروت دی د یوه ریيل حل او یو بل له دې حل مختلف ډبل ریيل حل سره، یعنی لرو $x1=1/2 , x2=x3=-3$ او داسی دئ
$$x^3+(1/2)x^2+6x-9/2)=(x-1/2)(x+3)^2$$

بیلګه ۱۲ . ۱۲ب :

( ۱۲ . ۶۳ ) برابرون د( ۱۲ . ۶۴ ) له مخی $x1 = 3$ ځواب لري. دلته باور لري
$$(x^3-9x^2+27x-27):(x-3)=x^2-6x+9$$
له $x^2-6x+9=0$ څخه لاس ته راځي
$$x_{2,3} = 3 \pm \sqrt{9-9} = 3$$
نو دلته مو د جملی ۱۲ . ۵ د دریم حالت درې برابره ځواب مخ ته پروت دی یعنی
$$x_1 = x_2 = x_3 = 3$$
او داسی دئ
$$x^3+-9x^2+27x-27=(x-3)^3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

بیلګه ۱۲ . ۱۳ ب : (۱۲ . ۶۵ ) برابرون د ( ۱۲ . ۶۶ ) برابرونونو له مخې ځواب $x1 = 1$ لري، او داسې دی

$$( x^3 -5x^2 +17x-13):(x-1) = x^2-4x+13$$

له $x^2-4x+13 = 0$ څخه لاندې لاس ته راځي

$$x_{2,3} = 2 \pm \sqrt{4-13} = 2 \pm 3i$$

دلته د جملې ۱۲ . ۵ څلورم حالت د یوه ریښ حل او یوه جوړه کونیوګیرت کملکس ځوابونوسره مخ ته پروت دي.

$$x1 = 1 , x2 = 2+3i , x3 = 2 - 3i,$$

او دا باوري دي

$$x^3-5x^2+17x-13=(x-1)(x-2-3i)(x-2+3i) =(x-1)(x^2-4x+13)$$

## ۱۲ . ۴ د ریښې (جذر) برابرون

په ۱۲ . ۱ برخه کې د ریښې رابرون وڅېړل شو. او دا هم څرګند شو چې ځنګه د ریښې برابرون په ریشنل برابرونو اوله دې سره n- مې درجې برابرونو بدلیدلي شي۰ دا دې دلته د بیلګو په څېر پاتي وي. یواځي ریښ اوبیونې به و څېړل یا و پلټل شي.

جمله ۱۲ . ۱۴ :

د ریښي برابرون

$$7+3\sqrt{2x+4} =16;............................(12,72)$$

ډېر ساده کیدی شي چې په لاینیزو برابرونونو واړول شي

$$3\sqrt{2x+4} =9; \sqrt{2x+4} = 3; 2x+4 = 9; 2x = 5; x = 5/2;........(12,73)$$

د ازمایلو لپاره که ( ۱۲ . ۷۳ ) برابرون په ( ۱۲ . ۷۲ ) برابرونونو کې خوندي شي، نو څرګندیږي چې دا دx-ارزښتونه په ریښتیا د مخه ورکړ شوي ارزښتونه پوره کوي

$$7+3\sqrt{5+4} = 7+3.3 =16$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

بیلګه ۱۲ . ۱۵:

د ریښی برابرون یا مساوات

$$\sqrt{2x+19}+5=0; .......... (12,74)$$

کیدی شي په ساده بڼه واړول شي

$$\sqrt{2x+19}=-5; 2x+19=5; x=3; .......................... (12,75)$$

د ازمایني لپاره، که ( ۱۲ . ۷۵ ) د پیل په برابرون ( ۱۲ . ۷۴ ) کی خوندي شي، نو دا برابرون ورکوي

$$\sqrt{2x+19}=10\neq 0$$

له دې امله ارزښت $x = 3$ د برابرون ( ۱۲ . ۷۴ ) ځواب نه دی . په دې لاس ته راوړنو سره یا په دې تعقیب د پیل برابرون ځواب نه لري.) داسي کیدی هم نه شي، ځکه چي تل $2x + 19 > 0$ دی)۰

دا ساده بیلګی موږ ته را ښایي چي باید د ریښی مساواتو حل تل وازمایل شي چي ایا په ریښتوني دا ځواب دی او که نه، او دا په داسی ډول چی شمیرل شوي ارزښتونه په پیل مساوات کی کیږدي چی ایا مساوات پوره کوي که نه . دا عمل یواځي د ازمایلو لپاره نه دئ چي ګوندې ټیك یا صحیح شمیرنه شوې او که نه، بلکه دا ځواب یو اړیین سما ندیز پل یا ضروری منطقي پل دئ .

په ټولیزه توګه باور لري: که برابرون:

$$f(x)=g(x) \qquad (12,76)$$

په یو ې نوي بڼه واړول شي

$$F(x)=G(x) \qquad (12,77)$$

چی د برابرون دواړو لورو ته یا یو څه ور زیات شي ، یا تری کم شي، یاداوړه خواوې په یوه ګڼ ځل ( ضرب ) شي او یا وویشل شي ( په دې حال کی باید پرویشونی صفر نه وي، ځکه چی په صفر ویشل اجازه نه لرو) که دواړه خواوی د ریښی لاندې راشي او یاپه توان پورته شي نود پیل برابرون ( ۱۲ ، ۷۶ ) هر ابی بدل شوي برابرون (۱۲ . ۷۷) ځواب هم دی ، مګر نه په څټ ( برعکس، مخامخ). کیدی شي چی اړول شوی برابرون ( ۱۲ . ۷۷ ) زیات ځوابونه ولري نسبت و پیل برابرون ( ۱۲ ، ۷۶ ) ته . دا به په لاندې بیلګه کي روښانه شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

بیلګه ۱۲ . ۱۶:

د ریښي یا جذر برابرون یا مساوات

x-x-1=2x-1 ( 12 . 78)

څلوری یا مربع ته د جګولو له لارې دا بڼه غوره ګوي

$$x + (x-1) - 2\sqrt{x(x-1)} = 2x-1$$

x+(x-1)-2x(x-1)=2x-1 ,

نو $\sqrt{x(x-1)} = 0$

په بیا څلوری یا مربع کولو سره سرې یو مربعمسوات لاس ته راوړي

x(x-1) = 0 ( 12 , 79 )

چې لاندې اوبی یا ځواب لري :

x1 = 0, x2 = 1 ( 12 . 80 )

دا د ( ۱۲ . ۷۹ ) اوبیونې دي، مګر باید و ازمایل شي چې ایا دا د ( ۱۲ . ۷۸ ) اوبیونې هم دي که نه.

د x = 0 لپاره په ( ۱۲ . ۷۸ ) کی دوه ریښی نه دې تعریف یا ددوه ریښو پیژند نه شته، نو x = 0 د (۱۲ . ۷۸ ) اوبیونه نه ده .

د x = 1 لپاره لاس ته راځي 1 - 0 = 1

له دې امله x = 1 د پیل بیلګی ( ۱۲ . ۷۸ ) یوګونی ځواب یا اوبی دی .

بیلګه ۱۲ . ۱۷:

د ریښی برابرون

$$\sqrt{x}.\sqrt{x-3} - \sqrt{x^2-4x+3} - \sqrt{2x^2-7x+3} = 0, ............(12,81)$$

کیدی شي چې په ورته ډول لکه ( ۱۲ . ۷۸ ) بڼه واړول شي:

$$\sqrt{x}.\sqrt{x-3} = \sqrt{x^2-4x+3} + \sqrt{2x^2-7x+3} =>$$

$$x(x-3) = (x^2-4x+3) + (2x^2-7x+3) + 2\sqrt{(x^2-4x+3)(2x^2-7x+3)} =>$$

$$-2\sqrt{(x^2-4x+3)(2x^2-7x+3)} = 2x^2-8x+6$$

$$(x^2-4x+3)(2x^2-7x+3) = (x^2-4x+3)^2; .........(12.82)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

دا برابرون یا مساوات پوره دی، که $x^2-4x+3=0$ باور ولري، نو د لاندې لپاره

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-3} = 2 \pm 1, x_1 = 3, x_2 = 1, \ldots\ldots\ldots\ldots(12,83)$$

د ټولونورو x لپاره $x^2-4x+3| = 0$ دی ، او ( ۱۲ . ۸۲ ) کیدی شي چي په لاندې فاکتور وویشل شي:

$$2x^2- 7x + 3 = x^2 -4x + 3$$

$$x^2 - 3x = 0$$

$$x(x-3) = 0$$

$$x3 = 0, x4 = x1 = 3$$

او په ( ۱۲ . ۸۱ ) کی ځاي په ځاي کولو سره ازمایل کیږي، چی کوم له لاندې ارزښتونو

$$x_1 = 3, x_2 = 2, x_3 = 0$$

پیل برابرون ډکوي.( باوري کوي، پوره کوي )

د $x = 3$ لپاره باور لري:

$$\sqrt{3}.\sqrt{0} - \sqrt{9-12+3} - \sqrt{18-21+3} = 0$$

له دې امله $x = 3$ د پیل برابرون یا مساوات ( ۱۲ ۸۱ ) اوبی یا حل دی . د

$x3 = 0$ او $x2 = 1,$

لپاره ریښي پیژند نه لري یا تعریف نه دی، نو له دې امله د پیل برابرون ( ۱۲ . ۸۱ ) اوبی حل $x = 3$ ( 12 . 85 )

یواځني حل دی

۱۲ – تمرینونه

۱ – مربع مساوات

۱,۱- مربع مساواتدټاکلو ضربیونو سره

1.1.1. a) $x^2 - 4 = 0$ b) $3x^2 + 27 = 0$

c) $x^2 - 9x = 0$ d) $5x^2 = 125\,x$

1.1.2. a) $(x + \frac{1}{3})\,(x - \frac{1}{3}) = \frac{7}{12}$ b) $(x + \frac{1}{2})\,(x - \frac{1}{2}) = \frac{5}{16}$

c) $(x - 6)\,(x + 5) = 0$ d) $(x - \sqrt{7})\,(x - \sqrt{5}) = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library



1.1.3. a) $x^2 - 6x + 8 = 0$ b) $x^2 + 4x + 2 = 0$

c) $x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = 0$ d) $x^2 + 27\frac{1}{12} = 10\frac{7}{12}x$

1.1.4. a) $3x^2 - 20 = x$ b) $7x^2 + 23x = 84$

c) $(43 + 10x)^2 + (66 + 10x)^2 = (79 + 14x)^2$

d) $(3x - 5)^2 - (2x + 5)^2 = 0$

1.1.5. a) $\frac{8-x}{2} - \frac{2x-11}{x-3} = \frac{x-2}{6}$ b) $3x - \frac{3x-10}{9-2x} = 2 + \frac{6x^2-40}{2x-1}$

c) $\frac{5x-1}{6x-9} - \frac{9x-4}{8x+12} - \frac{3x+8}{4x^2-9} = \frac{1}{2}$ d) $\frac{3}{x-2} - \frac{8}{4-3x} = \frac{19}{2x+1}$

۱ . ۲ – مربع مساوات د ناټاکلو ضریبونو سره

1.2.1. a) $x^2 - a^2 = 0$ b) $x^2 - ax = 0$

c) $x^2 + \frac{4}{3}ax + \frac{1}{3}a^2 = 0$ d) $x^2 + \frac{1}{2}bx - \frac{1}{2}b^2 = 0$

1.2.2. a) $8x^2 - 10bx - 3b^2 = 0$ b) $12x^2 - 34ax + 10a^2 = 0$

c) $16x^2 - 8ax + a^2 - b^2 = 0$ d) $ax^2 + bx + c = 0$

1.2.3. a) $a^2 - x^2 = (a - x)(b + c - x)$

b) $(x - a + b)(x - a + c) = (a - b)^2 - x^2$

c) $(a + bx)^2 + (ax - b)^2 = 2(a^2x^2 + b^2)$

d) $(x + a + b)(x - a + b) + (x + a - b)(x - a - b) = 0$

1.2.4. a) $ax^2 - (a^2 + 1)x + a = 0$ b) $abx^2 - (a^2 + b^2)x + ab = 0$

c) $a^2(a - x)^2 = b^2(b - x)^2$

d) $(a - x)^2 - (a - x)(x - b) + (x - b)^2 = (a - b)^2$

1.2.5. a) $x + \frac{1}{x} = \frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b}$ b) $x - \frac{1}{x} = \frac{a}{b} - \frac{b}{a}$

c) $\frac{a+x}{b+x} + \frac{b+x}{a+x} = \frac{5}{2}$ d) $\left(\frac{a-x}{x-b}\right)^2 = 8\left(\frac{a-x}{x-b}\right) - 15$

۱ . ۳ – مساوات سیتم، کوم مو مربع مساوتو ته لاربنبودوي یا بیایي

1.3.1. a) $3x + 2y = 3$, $xy = 3$ b) $10x + y = 10$, $5x(15x + y) = 75$

c) $3x + 7y = 21$, $3x^2 - 7y = \frac{21}{2}$ d) $x^2 + xy + y^2 = 1372$, $2x - y = 2$

(c) ketabton.com: The Digital Library



1.3.2. a) $x + y = a$, $xy = b$ b) $xy = a$, $\frac{x}{y} = b$

c) $x^2 + y^2 = c^2$, $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$ d) $ax^2 - \frac{b}{y^2} = 2(a^2 - b^2)$, $bx^2 - \frac{a}{y^2} = a^2 - b^2$

۱ . ۴ – د n-مې درجې ځانګړي مساوات، چېپه مربع مساوات بیرته اړول کیدی شي

۱ . ۴ . ۱ – بې مربع مساوات د ټاکلو یا معلومو ضریبونو سره

a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ b) $(x^2 - 5)^2 + (x^2 - 1)^2 = 40$

c) $(x^2 - 10)(x^2 - 3) = 78$ d) $10x^4 - 21 = x^2$

۱ . ۴ . ۲ - بې مربع مساوات د ناټاکلو یا نامعلومو ضریبونو سره

a) $x^4 + a^4 + b^4 = 2a^2x^2 + 2b^2x^2 + 2a^2b^2$

b) $(a^2x^2 + b^4)(x^2 - a^2) = b^2(x^4 - a^4)$

c) $\frac{a^2b^2x^2}{a^3b + ab^3x^2} + \frac{ab - x^2}{x^2 - 1} = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2x^2}$

d) $\frac{(a-b)x^4}{a^2 - b^2} + \frac{4x^2}{a+b} = x^2 + 4$

۱ . ۴ . ۳ – د n-مې رجې مساوات د $a_0 = a_1 = \dots = a_{n-3} = 0$ سره

a) $x^{10} + 6x^9 + 5x^8 = 0$ b) $\frac{5}{2}x^5 + 7x^4 = -20x^3$

c) $abx^8 - (a^2 + b^2)x^7 = -abx^6$ d) $ax^{22} - a^2x^{11} + a^2 - a = 0$

۱ . ۵ – لاندې مساوات هم د x او هم د a پسې حل کړئ!

a) $x^2 + \sqrt{a}\,x - a = 0$ b) $x^2 - 2bx + 2(ab - \frac{1}{2}a^2) = 0$

c) $x^2 + 9ab = (a + b)(x + 2a + 2b)$ d) $(x + b)(x - b) = a(2x - a)$

۱ . ۶ . – شي شوالونه

۱ . ۶ شي سوالونه

۱ . ۶ . ۱ الف دوه ګڼونه ځان داسې نیسي لکه 3 : 1 . ددې ګڼونو د مربع زیاتون ۱۵۶۰ دی. دا ګڼونه څه نومیږي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

ب ) د درې يو په بل پسې ګڼونو د لوي ګڼ مربع دومره ده ، لکه د دوه کوچنيوګڼونو د مربعو زياتونون. دا ګڼونه څه نوميږي يا کوم دي؟

پ ) د کوم مثبت ګڼ لسرځله د هغه د مربع څخه ۹۹۹ کوچنی دی؟

ت ) مات 1/4 په دوه فاکتورونو a او b داسې تجزيه کړی، چې لاندې زياتون $(a^2 + b^2)/(a^2 - b^2)$ يې لاس ته راشي.

۶ . ۲ . الف ) په يوه برابر برقجريان کی مقاومت په ديرش اوم Ω 30 لوييږي، په کوم کې چی د برققوه په همغه د 220 V ( وولټه ) شپانونګ په پنځه امپير ( 1,65A ) کوچنی‌شي . مقاومت او برققوه څومره دي؟

ب ) دوه سيخونه چی مقاومت يی Ω 60 يو له بل توپير لري، چې يوه د غبرګ چالانولوعمومي مقاومت Ω 22,5 کړي. دواړه برخه مقاومتونه څومره لوي دي؟

۶ . ۳ . الف ) يوه د بايسکلځغلونی لار چې ۲۲۵ کيلو متره اوږده ده، د يوه موادو موټر څخه په دريتيم ساعته لنډ وخت کې وهل کيږي،چې د موټر په منځني سرعت چې 26, 25 km/h نسبت و بايسکلځغلونکي ته د موادو موټر او بايسکل ځغلونکي سرعت او د وهلو وخت څومره دي؟

ب ) د سپورت جشن کې يو سپورتي چې له A و B ته په 5km/h سرعت ځغلي، له خپل منډپيل څخه يونيم ساعت وروسته له يوه بايسکلسپورتي څخه وروسته کيږي، کوم چې له مخامخ کيدو, نيم ساعت وروسته B ته رسيږي، او سملاسي بيرته ګرځي او په همغه وخت کې A ته رسيږي په کوم کې چې ځغاستني و B ته رسيږي، د $\overline{AB}$ کرښه څومره لرې ده؟

پ ) دوه ډبډبي ځغاستي،يوبل باندې نيغ ولاړو سرکونو د څلورلاري په لور،په ډبډبيو ځغلي. د لمړي سرعت ۵ متره په ثانيه کی، دوم څلور متره په ثانيه کی دي دوي له ۳ ثانيو وروسته يو ۳۵ متره لريوالی يو له بل لري، دوي يو

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

له بل په سرچینه کې د څلور لاري څومره لرېوالی لروده، که لمړی له دوم ۴ متره ورته نژدې وو؟

ت ) د ګادي یو لاین د موټرڅغاست سرك لمړی برخې سره غبرګ غزیدلی. د یوه موټر څغاستي پیل کې د یو مخته راتلونکي ګاډي واټن ۲۲۵ متره لرې دی. کله دوه ماشینونه په همغه ځګوالي دي، که موټرڅغاستی منظم تعجیل او یو تعجیل د $10m/s^2$ کی لري، په داسی حال کی چی د ګاډی سرعت ثابت او $72\ km/h$ دی؟

ټ ) په منځنی سرعت $v_m = 18km/h$ په ۶ بجو له لاپیخیړ څخه د دیساو په لور بایسکل څغلیدونکی په ۸ بجو ، په همغه وخت کی له دیساو څخه د لاپیخیړ په لور راتلونکی بایسکل څغاستی سره مخامخ کیږي. ورستنی ۱۰۰ دقیق د مخه دیساو ته راځي لکه دوم ولاپیخیړ ته. د دیساو او لاپیخیړ ترمنځ لرېوالي یا واټن څومره دی؟

۱ . ۶ . ۴ . الف ) په ولاړنجیز دریګوډي کې ، کاتیتې ځانونه داسې یوبل سره نیسي لکه 3:4 ، هیپوتینوزې ۵۰ سانتي متره ده ، کاتیتې څومره اوږدې دي؟

ب ) د یوه ولاړکونجیز دریګوډي اړخونه څومره لوي دي ، که د دواړو کاتیتو زیاتون یي۱۷ سانتیمتره اود یوې کاتیتې او هیپوتینوزې زیاتون ۱۸ سانتي متره وي ؟

پ ) د یوه سمکونجیز ( ولاړکونجیز ) دریګوډي کاتیتې څومره لویې دي، که د هغوي زیاتون ۴۲ سانتیمتره وي ، د دریګوډي هواردننه ۲۱۶ مربع سانتي متره وي ؟

ت ) د یوه ولاړګوډي نیمی ( قطر ) ۳۵ سانتي متره اوږد دی، که د ولاړ ګوډي اوږد اړخ ۸ سانتي متره وغزول شي او لنډ اړخ ۶ سانتي متره وغزول شي، د نیمي اوږدوالی ۱۰ سانتیمتره لویږي. د سمکونجیز اړخونه څومره لوي دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

ت ) که د مربع یوه خوا ۷ سانتي متره وغزوي او بل اړخ په همدې ارزښت لنډ کړي،نو مربع او سمکونجیز دواړه د هوارې دننه ۴۹۵۱ مربع سانتي متره لري.
د سم اړخیز اړخونه څومره لوی دي؟ (یا ولاړ اړخ)

ټ ) د یوې ګردی وړانګه ۱۶ سانتي متره اوږده ده. په ګرد کی دننه ځای مربع اړخ څومره لوی دی؟ (یا ځوندی مربع اړخ)

ج ) د یوې ګردی نیمی باید څومره لوي، که په دننه منځشوې مربع اړخ ۱ سانتي متره د هغه د وړانګې څخه لوی وي؟

ح ) که د یوې ګردی نیمی ( قطر ) ۳ سانتي متره لوی شي ،نو د ګردی هواره دوه برابره کیږي. د ګردی سرچینې نیمی څومره لویه ده؟

خ ) د یوه نیمغونډي نیمی څومره دی، که د هغه د دیوال لویوالی ۳ سانتیمتره او او تشه کی یي ۵۰۱۶ مکعبسانتي متره وي؟

۲ – د دریمې او څلورمې درجې مساوات

2.1 a) $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$ b) $x^3 + x^2 - 5x - 84 = 0$

c) $3x^3 - x^2 - 9x + 3 = 0$ d) $x^3 + x - 2 = 0$

12.5 Übungsaufgaben 1

2.2. a) $4x^4 - 12x^3 + 7x^2 + 3x - 2 = 0$ b) $x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 6x = 0$

c) $x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 4x - 5 = 0$ d) $6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0$

۳ . ریښه مساوات:

ټول ارزښتونه x وشمیرئ، چې د لاندې مساواتو حلونه یا اوبیونې دي. د هرې پوښتنې د ټیکاوي لپاره ازماېښت وکړئ!

۳ . ۱ – ریښه مساوات د ټاکلو ضریبونو یا ځلوونو سره:

3.1.1. a) $\sqrt{x} = 3$ b) $\frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{2}{3}\sqrt{x} + 7 = 2\sqrt{x}$

c) $\frac{5}{3}\sqrt{15x} - \frac{3}{5}\sqrt{15x} - 11 = \frac{1}{3}\sqrt{15x}$

d) $\sqrt[3]{x} = 5$

3.1.2. a) $(3\sqrt{x} - 5)(5\sqrt{x} - 3) = 5(3x - 31)$

(c) ketabton.com: The Digital Library



b) $(5\sqrt{x} - 2)^2 + (12\sqrt{x} - 9)^2 = (13\sqrt{x} - 9)^2$

c) $\frac{5\sqrt{x}+12}{7\sqrt{x}+15} = \frac{4}{5}$ d) $\frac{2\sqrt{x}+3}{2\sqrt{x}-3} = 7$

3.1.3. a) $\frac{\sqrt{x}-3}{7} - \frac{\sqrt{x}-25}{5} = 7 - \frac{2+\sqrt{x}}{4}$ b) $\frac{16-\sqrt{x}}{2} - \frac{10-\sqrt{x}}{3} = \sqrt{x}$

c) $\sqrt{x} + \sqrt{2x} = 1$ d) $2\sqrt{x} - \sqrt{2x} = 2 + \sqrt{2}$

3.1.4. a) $10 - \sqrt{x-2} = 3$ b) $\sqrt{3x-5} + 4 = 5$

c) $\sqrt[3]{7x-6} + 6 = 10$ d) $4\sqrt[3]{5x-8} = 3\sqrt[3]{9x+1}$

3.1.5. a) $9\sqrt{5x+1} = 20 + 4\sqrt{5x+1}$ b) $\sqrt{7x+2} = \frac{5x+6}{\sqrt{7x+2}}$

c) $3\sqrt{4x-3} - \frac{10x}{\sqrt{4x-3}} = \frac{1}{\sqrt{4x-3}}$ d) $\frac{9x}{\sqrt{10x-9}} - \sqrt{10x-9} = \frac{2}{\sqrt{10x-9}}$

3.1.6. a) $\sqrt{9x^2-10x-55} = 3x-5$ b) $x+1 = \sqrt{2x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}}$

c) $17 - 4\sqrt{\frac{3x+5}{x-7}} = 1$ d) $24 - 7 \cdot \sqrt[3]{\frac{4x-1}{x-6}} = 3$

3.1.7. a) $\sqrt{52 - 3\sqrt{5x+6}} = 2\sqrt{10}$ b) $\sqrt{x+1-\sqrt{2x+3}} = 1$

c) $\sqrt{37 - 7\sqrt{5x+4}} = 4$ d) $\sqrt[4]{19 - 3\sqrt[3]{5x-9}} = 2$

3.1.8. a) $\sqrt{9x-17} - 3\sqrt{x-4} = 1$ b) $2\sqrt{9x+4} - 3\sqrt{4x-11} = 1$

c) $\sqrt{x+9} - \sqrt{x+2} = \sqrt{4x-27}$ d) $\sqrt{9x+10} - \sqrt{x-1} = \sqrt{4x+9}$

3.1.9. a) $\sqrt{x+4} - \sqrt{x-8} + \sqrt{x-3} - \sqrt{x+13} = 0$

b) $\sqrt{x+9} + \sqrt{x-12} = \sqrt{x} + \sqrt{x-7}$

c) $\sqrt[3]{9x+10} - \sqrt{3x+4} = 0$ d) $\left|\sqrt{3x+7}\right| + \left|\sqrt{4-x}\right| = 3$

3.1.10. a) $\frac{1}{1+\sqrt{1-x}} + \frac{1}{1-\sqrt{1-x}} = \frac{2x}{9}$ b) $\sqrt[3]{76+x} + \sqrt[3]{76-x} = 8$

c) $\left(\sqrt[3]{x} - 1\right)^2 + \sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{x}$ d) $\sqrt[4]{x^3} - 2\sqrt{x} + x = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

۳ . ۲ – رينه مساوات د نامعلومو ضريبونو سره

3.2.1. a) $\sqrt{x} = a$ b) $\sqrt[3]{x} = b$

c) $a - \sqrt[3]{x} = b$ d) $a\sqrt{x} - b = c\sqrt{x} - d$

3.2.2. a) $\sqrt{x-a} = b$ b) $\sqrt[3]{a-x} = b$

c) $\sqrt[4]{a^4 + x} = a$ d) $\sqrt[6]{a^6 - x} = b$

3.2.3. a) $(\sqrt{ax} + \sqrt{b})(\sqrt{ax} - \sqrt{b}) = (a+1)(a-1)b$

b) $(a - \sqrt{x})\,(b - \sqrt{x}) = (c + \sqrt{x})\,(d + \sqrt{x})$

c) $\dfrac{\sqrt{ax} - b}{\sqrt{ax} + b} = \dfrac{3\sqrt{ax} - 2b}{3\sqrt{ax} + 5b}$ d) $\dfrac{2a + 3\sqrt{bx}}{3a + 2\sqrt{bx}} = \dfrac{3b + 2\sqrt{ax}}{2b + 3\sqrt{ax}}$

3.2.4. a) $\sqrt{x} + \dfrac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a}}$ b) $\dfrac{\sqrt{a} + \sqrt{x}}{\sqrt{a} - \sqrt{x}} = \dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{a} + \sqrt{x}} - \left|\dfrac{(x+a)^2}{a(x-a)}\right|$

c) $\dfrac{a + b\sqrt{x}}{a + b} = \dfrac{c + d\sqrt{x}}{c + d}$ d) $\dfrac{a + b\sqrt{x}}{a\sqrt{x} + b} = \dfrac{c + d\sqrt{x}}{c\sqrt{x} + d}$

3.2.5. a) $x + \sqrt{x^2 - a^2} = a$ b) $x - \sqrt{ax(1+x) + 1 - x} = 1$

c) $\sqrt{x+a} = a - \sqrt{x}$ d) $\sqrt{x + a^2} - \sqrt{x} = b$

3.2.6. a) $\sqrt{a-x} + \sqrt{b-x} = \dfrac{b}{\sqrt{b-x}}$ b) $\sqrt{x+a} - \sqrt{5x - 3a - 4b} = \dfrac{2b}{\sqrt{x+a}}$

c) $\sqrt{x+a} - \sqrt{x-a} = \dfrac{x + a - b}{\sqrt{x+a}}$

d) $\sqrt{3a - 2b + 2x} - 2\sqrt{3a - 2b - 2x} = \dfrac{a + 2b + 2x}{\sqrt{3a - 2b + 2x}}$

3.2.7. a) $\dfrac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}} = \dfrac{a}{b}$ b) $\dfrac{\sqrt{3x^2 - 1} + \sqrt{3 - x^2}}{\sqrt{3x^2 - 1} - \sqrt{3 - x^2}} = \dfrac{a}{b}$

c) $\sqrt[3]{a+x} + \sqrt[3]{a-x} = \sqrt[3]{2a}$ d) $\sqrt[3]{a+x} + \sqrt[3]{a-x} = \sqrt[3]{c}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



------------------------------------------------------------------------

۳ ، ۳ – مساوات سيستمونه، چې ريښه مساوات خوندي لري

3.3.1 a) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=8$, $\sqrt{xy}=15$

b) $x+y=58$, $\sqrt{x}+\sqrt{y}=10$

c) $\sqrt{x-5}+\sqrt{y+2}=5$, $x+y=16$

d) $\sqrt{5-3x+x^2}+\sqrt{5-3y+y^2}=6$, $x+y=3$

3.3.2 a) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\dfrac{a}{b}$, $xy=(a^2-b^2)^2$

b) $\dfrac{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}=\dfrac{a}{b}$, $x^3-c^3=c^3-y^3$

c) $x\sqrt{x+y}=a$, $y\sqrt{x+y}=b$

d) $x\sqrt[3]{x^2+y^2}=a$, $y\sqrt[3]{x^2+y^2}=b$

(c) ketabton.com: The Digital Library

# ۱۳ ترانسځندنت برابرونونه یا ـ مساوات

لکه څنګه چی په ۱۲ . برخه کی دې ته ګوته نیول شوې وه، چی دلته یواځي هغه ترانسځندنت مساوات څېړل کیږي، کوم چی بیرته په الجبري مساواتو اړول کیدی شي.
دا بیرته په الجبري مساواتو اړول، لکه څنګه په ریښه مساواتوکی، په خوښه په بل شکل اړول کیږي او په داسي ډول دي لکه هملته:

د فرمول په اړولو( فورم بدلون یا بڼه بدلون) سره کوم ځواب له منځه نه ځي، خو کیدی شي چی اړولی فرمول زیاتې اوبیونې یا حلونه نسبت د پیل برابرون ته ولري. له دې امله باید د اړول شوي برابرون ټولې اوبیونې په پیل برابرون کی ځاي په ځاي یا کینښوول شي او وکتل شي چی کوم له دې د پیل مساوات حلونه هم دي

لکه څنګه په ریښه یي برابرونونو یا مساواتو کی ، دلته هم یواځی رییل اوبیونې پلټل کیږي.

۱۳ . ۱ لوګاریتمي مساوات

د لوګاریتمي مساواتو او اکسپوننشل یا په جګ سماواتو د حل (اوبي) پیدا کولو لپاره اړیین یا ضرور(ضروري یا اړیین شرایط) دی، چی د یو عدد(ګڼ) aلوګاریتم، د b په بنسټ، معلوم کړو یا وڅیړو.

$$x = \log_b a; a > 0, b >, b \neq 1 .............................(13,1)$$

د بنسټ b = 10 لپاره(lga) او د بنسټ b=e لپاره ( ln a) کیدی شي ( ۱۳ . ۱ )

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

سیده د جبشمیري له لارې پیداشي. په ځتې یا برعکس د 10 =| e|= b لپاره برابرونونه په دې ډول اړول کیږي

$$x = \log_b a = \lg a / \lg b = \ln a / \ln b ......................(13.2)$$

د لوګاریتمي مساواتو یو ساده ډول یا شکل ( تیپ ) دا دئ

$$l\,\text{og}_b\, x = c ..................................(13.3)$$

دا برابرون د (7. ۱ ) ، (7. ۲ ) له مخې لاندې ته ورته دئ:

$$x = b^c ..........................................(13,4)$$

دا سی افاده هم د جبشمیري سره شمیرل کیدی شي.

بیلګه ۱۳ . ۱ $\log_2 x = 1,5; x = 2^{1,5} = 2.8284$ :

په همدې ډول د ( ۱۳ . ۳ ) بڼې اوبیونه په لاندې ټولیز شوي شکل هم ساده دی

$$\log_b f(x) = c........................................(13,5)$$

دلته ( f(x یوه الجبري وبینه یا افاده ده، د ( ۱۳ . ۵ ) سره الجبري برابرون کټمټ ( ورته) دئ

$$f(x) = b^c ..........................................(13,6)$$

ټولې د ( ۱۳ . ۶ ) اوبیونې د ( ۱۳ . ۵ ) اوبیونې هم دي

بیلګه ۱۳ . ۲ : لوګاریتمیز برابرون

$$\log_2 (x^2 + x + 6) = 3$$

دلاندې مساواتوسره کټمټ دي

$x^2+x+6=2^3= 8$ (همداسی) ⇔ $x^2+x-2=0$

او لاندې اوبیونې لري

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

$$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}; x_1 = -2; x_2 = 1$$

یو د ( ۱۳ . ۵ ) ډول (تیپ) برابرون هم مخ ته لرو، که د هغه کیڼې لور ( ارخ) ته یود لوګاریتم ریشنل لاینیز کمبینشن الجبري وییڼه یا افاده موجوده وي

$$r_1.\log_b g_1(x) + r_2.\log_2(x) + r_3.\log_b g_3(x) + ... = c.........(13,7)$$

دلته ځلوني ri راشنل ګڼونه دي. د لوګاریتم قوانینو (۷. ۷ ) ، (۷. ۹ ) کاروني یا استعمال څخه، ۷ برخه وګورئ، ( ۱۳ ، ۵ ) لاس ته راځي او دا د لاندې برابرونونو سره

$$f(x) = \{g_1(x)\}^{r_1}.\{g_2(x)\}^{r_2}.................................(13,8)$$

بیلګه ۱۳ . ۳:

لومړی له $\log_3(x-1) + \frac{1}{2}\log_3 x - \frac{1}{2}\log_3(x-1) = 2$ څخه لاندې لاس ته راځي

$$\log[(x-1)(\frac{x}{x-1})^{\frac{1}{2}}]$$

اوله دې څخه رېښه برابرون $\sqrt{x}.\sqrt{x-1} = 9$ ،

د کوم له څلوری یا مربع کولو څخه $x(x-1)=81$ یعني $x^2-x-81=0$

د لاندې ځواب سره

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{324}{4}} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{325}{4}} = \frac{1}{2} \pm (\frac{1}{2}).18.03;$$

$$x_1 = 9,515; x_2 = -8,515$$

ټیك دا $x1 = 9,515$ پیل برابرون پوره کوي

. د $x=x2<0$ لپاره $\log x$ او په همدې ډول $\log(x-1)$ پیژند نه لري یا تعریف نه دي.

بیلګه ۱۳ . ۴:

له $\log_b(2x+3)=\log_b(x-1)-1$ څخه لاس ته راځي

$$\log_b[(2x+3)/(x-1)] = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

او نور پسی $\frac{2x+3}{x-1} = b^1 = b$ پس

$2x+3=bx-b$

$b+3=x(b-2)$

$x=(b+3)/b-1)$

پیل وینه یا افاده د $x>1$ لپاره موخه وره یا هدفمنده ده، یعني
که $1<(b+3)/b-2)$ وي.
د $b>2$یعنی $b-2>0$ څخه لاس ته راځ $b+3 > b-2$
له دې لرو $-2<3$دا د ټولو b لپاره پوره دی
د. $b \le 2$ لپاره د $b+3 \le b-2$ $b+3 < b-2$ څخه $2 \le 3$ لاس ته راځي اودا د هیڅ b لپاره باور نه لري .
له دې امله کره د $b > 2$ لپاره اوبی شته دی. د $2 \le b$ لپاره اوبیونه نه شته دی.

د لاندې لوګاریتمي تیپ برابرون هم کیدی شي په الجبري مساواتو بیرته واړول شي

$$F(\log_b f(x)) = 0 \qquad (13 . 9)$$

چیرته چی F او هم f الجبریزې وییني یا افادې دي. د بدلون کاروایي یا عملیه اجرا کوو

$$y=\log_b f(x) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13,10)$$

او په لمړي پل کی الجبري برابرون اوبی کوو

$$F(y)=0 \qquad (13 . 11)$$

ددې اوبیونه ..$y1,y2$ په ( ۱۳/۱۰ ) کی ږدو، نو د هر yi لپاره د تیپ ( ۱۳/۵ ) لوګاریتمي مساوات لاس ته راځي:

$$\log_b f(x) = y_i; \quad i = 1,2,3,\ldots\ldots\ldots \qquad (13 . 12)$$

له دې څخه لاندې الجبري مساوات لاس ته راځي

$$f(x)=b^{y_i} \qquad (13 . 13)$$

ددې لپاره چی و ازمائیلی شو چی ایادا هم برابرون پوره کوي، نو ټول ددې برابرونونو اوبیونې یا ځوابونه باید په پیل برابرون ( ۱۳/۹ ) کی کینوول شي یا ځاي په ځای شي،

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

بیلګه ۱۳ . ۵ : برابرون $\log^2 x-\lg x-2=0$ د سبستیټیوشن(بدلون) $y=\lg x$ سره په ځلوری برابرون $y^2-y-2=0$ بدلیږي .
د $y_1 = 2$ او $y_2 = -1$ ځوابونو سره
له $\lg x=2$ او $\lg x=-1$ لاس ته راځي.

$$x_1 = 10^2=100 \quad \text{او} \quad x_2 = 10^{-1} = \frac{1}{10}$$

دواړه ځوابونه د پيل برابرون ځوابونه دي.

بیلګه ۱۳ . ۶ :

له برابرون $(6 /(\lg x +1)) + (8 / (\lg x -1)) = 3$

د,$x>0$ مګر $(x \neq 1/10,\ x \neq 10)$ چې د اصلي ماتلاندې $(\lg x-1)(\lg x+1)$ سره ځل شی، لاس ته ترې راځي

$$6(\lg x-1)+8(\lg x+1)=3(\lg^2 -1)$$
$$,\quad 6\lg x-6+8\lg x+8=3\lg^2 x-3$$
$$0=3\lg^2 x-14\lg x-5$$

او د بدلون $y = \lg x$ سره مو لاندې ځلوری بڼې یا مربعفورم ته بیایي:

$$3y^2-14y-5=0\ ,\ y^2-(14/3)y-5/3=0$$

د لاندې ځوابونو سره

$$y_{1,2}=\frac{7}{3}\pm\sqrt{\frac{49}{9}+\frac{15}{9}}=\frac{7}{3}\pm\frac{8}{3};\ y_1=lox_1=5;\ y_2=\lg x_2=-\frac{1}{3}$$

$$x_1=10^5;\ x_2=x^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{10}}$$

دواړه ارزښتونه پیل مساوات پوره کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

که په یوه برابرون کی لوګاریتمونه د مختلفو بنسټونو bسره رامنځ ته شي، نو کیدی شي د ( ۱۳ . ۲ ) په مرسته په همغه برابر بنسټ واړول شي

بیلګه ۱۳ . ۷ :

له $\log_2(x-1) + \log_4(x-1) - 1 = 0$

ځخه دلاندې برابرون په مرسته لاس ته راځي:

$$\log_4(x-1) = \frac{\log_2(x-1)}{\log_2 4} = \frac{1}{2}\log_2(x-1),$$

$$\log_2(x-1) + \frac{1}{2}\log_2(x-1) - 1 = 0,\ \log_2(x-1) = \frac{2}{3},\ x-1 = 2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4},$$

$$x = 1 + \sqrt[3]{4}.$$

دا ارزښت د پیل برابرون اوبی یا ځواب هم دی:

$$\log_2\sqrt[3]{4} + \log_4\sqrt[3]{4} - 1 = \frac{1}{3}\log_2 4 + \frac{1}{3}\log_4 4 - 1 = \frac{1}{3}\cdot 2 + \frac{1}{3} - 1 = 0.$$

## ۱۳ . ۲ اکسپوننشل – یا په جګ برابرونونه

ساده اکسپوننشل برابرون( مساوات)

$$a^x = b; a > 0, a \neq 1, b > 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (13,14)$$

کیدی شي چی د لوګاریتم نیولو سره سملاسي حل شي( ځواب شي)

$$x = \log_a b = \lg_b / \lg_a = \ln b / \ln a \qquad (13, 15)$$

لاندني برابرونونه په ساده ډول په ( ۱۳ ، ۱۴ ) ډول (رقم ( تیوپ ) برابرونونو باندې اړول کیدی شي.

بیلګه ۱۳ . ۸:

$$2^x + 3^{x+2} - 2^{x+2} - 3^{x+1} = 0.$$

$$2^x(1-2^2) + 3^x(3^2-3) = 0,\ \text{bzw.}\ 6\cdot 3^x = 3\cdot 2^x,\ \text{bzw.}\ \left(\frac{2}{3}\right)^x = 2,$$

$$x = \frac{\lg 2}{\lg\frac{2}{3}} = \frac{\lg 2}{\lg 2 - \lg 3} = -1{,}7095.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

که په ( ۱۳ . ۱۴ ) د الجبري ويينې يا افادي( f (x اکسپوننتونه ياجګګنونه وي، نو:

$$af(x)=b, a>0, a|=1, b>0 \quad (13 . 16)$$

په دې ډول د لوګاريتمولو له لارې يو الجبري برابرون لاس ته راځي

$$f(x)=\log_a b \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(13,17)$$

د کومو ځوابونه چی د ) ۱۳ . ۱۶ ( ځوابونه هم دی.

بيلګه ۱۳ . ۹ : مساوات $2^{x^2+x-4} = 4$

مو لاندې ځلوری برابرون يا مربع مساوات ته بيايي ( لاربنودوي)

$$(x^2+x-4)=\log_2 4 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + x - 6 = 0$$

د $x_1 = 2$ , $x_2 = -3$ ځوابونوسره ، کوم چی د پيل برابرون اوبيونې يا ځوابونه هم دي٠

بيلګه ۱۳ . ۱۰ :

په برابرون $\left(\frac{3}{2}\right)^{x+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{3}$ کی د يوه پوتنځ بنسټ د بل پوتنځ د بنسټ په څټ ارزښت دی. له دې امله باور لري

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x+1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$$

له دې څخه لاس ته راځي

$$x_1 + 1 = -3 , x_2 = -4$$

بيلګه ۱۳ . ۱۱ : په مساوات $16^{(3^x)} = 4^{(6^x)}$

کې کيدی شي چي ناپيژندونکي د اکسپوننت يا په چګ څخه د دوه واره لوګاريتمولو له لارې لاس ته راشي (راحل شي):

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

$$3^x \cdot \lg 16 = 6^x \cdot \lg 4 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{6}\right)^x = \frac{\lg 4}{\lg 16} \Leftrightarrow x \cdot \lg 0{,}5 = \lg \frac{\lg 4}{\lg 16} = \lg \frac{2\lg 2}{4\lg 2},$$

$$x \cdot \lg 0{,}5 = \lg 0{,}5 \qquad \text{یا oder} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2},$$

$$x = 1 \qquad\qquad x = 1.$$

بیلګه ۱۳ . ۱۲ : $7\sqrt[x]{22} - 15\sqrt[x]{25} = 0$

یو د تیپ یا ډوی مساوات دي، ځکه چې باور لري

$$\frac{\sqrt[x]{22}}{\sqrt[x]{25}} = \frac{15}{7} \Leftrightarrow \sqrt[x]{\frac{22}{25}} = \frac{15}{7} \Leftrightarrow \left(\frac{22}{25}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{15}{7}$$

او له دې ځایه

$$\frac{1}{x} = \frac{\lg\frac{15}{7}}{\lg\frac{22}{25}} \Leftrightarrow x = \frac{\lg 22 - \lg 25}{\lg 15 - \lg 7} = 0{,}1677.$$

که د مساوات په کیڼ اړخ د اکسپوننشل افادو ځلونه او یا ویشونه هم وي، د مختلفو بنسټونو او مختلفو الجبري اکسپوننتونو سره، کیدی شي چی د لوګاریتمولو له لارې الجبري مساوات لاس ته راشی.

له

$$\frac{a_1^{f_1(x)}.a_2^{f_2(x)}........}{b_1^{g_1(x)}.b_2^{g_2(x)}........} = c;..................................(13,18)$$

څخه لاس ته راځي:

$$f_1(x)\lg a_1 + f_2(x)\lg a_2 + ... - g_1(x)\lg b_1 - g_2(x)\lg b_2 - ....... = \lg c \qquad (13.19)$$

که یو مساوات مو مخ ته پروت وي، په کوم کی چی د یوه اکسپوننشل افادې یوه الجبري وبینه یا افاده F د الجبري اکسپوننت$f(x)$ سره رامنځ ته شي

$$F(a^{f(x)}) = 0 \;;...................................(13,20$$

نو دا بدلونه کوو

$$y = a^{f(x)} \qquad (13.21)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

د برابرون

$$F(y) \qquad (13.22)$$

د ټولواوبيونو $y_1, y_2, y_3;$............... لپاره بايد

$$a^{f(x)} = y_i; i=1,2,3....... \qquad (13.23)$$

په همدې ډول

$$f(x) = \log_a y_i \quad ; i = 1, 2, 3 ....... \qquad (13.24)$$

اوبی شي

بيلګه ۱۳ . ۱۳:

برابرون $3^{2x} + 3^x = 2$ کيدی شي چی د بدلون $y = 3^x \, (y^2 = 3^{2x})$ سره په څلوری

برابرون يا مربع مساوات $y^2+y-2=0$ بيرته واړول شي. لاس ته راځي

$$y_{1.2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}; y_1 = 3^x = 1; y_2 = 3^x = -2$$

له دې څخه لاس ته راځي

$$x_1.\lg 3 = \lg 1 = 0, \; x_1 = 0$$

دا برابرون $x_2.\lg 3 = \lg(-2)$ اوبيونه نه لري

بيلګه ۱۳ . ۱۴ :

په برابرون

$$\sqrt{e^{x^2-1}} - \sqrt{e^{x^2-1} - 1} = \sqrt{2e^{x^2-1} - 1} .........................(13,25)$$

کې داسی بدلوو:

$$y = e^{x^2-1} .......................................(13,26)$$

او لاس ته راوړو

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

$$\sqrt{y}-\sqrt{y-1}=\sqrt{2y-1};..............................(13,27)$$

له دې څخه د مربع کوولو له لارې لاس ته راځي:

$$y+y-1-2\sqrt{y(y-1)}=2y-1\Rightarrow-2\sqrt{y(y-1)}=0 => y(y-1)=0$$

$$y_1=0; y_2=1$$

$y_2=1$ تیك (۱۳ ، ۲۷) پوره کوي. له دې امله

$$e^{x^2-1}=1;...............................................(13,28)$$

حل اوبی . د لوګاریتمولو څخه تعقیبیږي:

$x^2-1=\ln 1=0,$

$x1 = 1 , x2 =-1$

دواړه ارزښتونه پیلبراارون پوره کوي٠

برسیره پر دې باید وښوول شي، چې په برخی ۱۳ . ۱ او ۱۳ ۲ کی انځور شوي متودونو سره یوه د مساواتو ټوله لړی حل کیدی شي، په کوم کی اکسپوننشل افادې او لوګاریتم یوځاي رامنځ ته کیږي.

بیلګه ۱۳ . ۱۵ :

له $2^{(\ln^2x-\ln x+1)}=8$ څخه د بیلګي په توګه د بنسټ 2 لوګاریتموولو له لارې لاس ته راځي

$\ln^2x-\ln x+1=\log_2 8 = 3$

که کیږدو $y = \ln x$ ، نو دا څلوری برابرون یا مربع مساوات $y^2-y-2=0$ لاس ته راځي،د ځوابونو

$y1 = -1 , y2 = 2$

سره او له دې بیا لاس ته راځي:

$\ln x=-1 , \ln x=2, x1=e-1=1/e , x2=e^2$

## ۱۳ . ۳ ګونومتریکي- یا کونجکچ برابرون

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

د ګونومتري ساده برابرون لاندې څېره لري

$$\sin x=a\ ,\ \cos x=a \qquad (13\ .\ 29)$$

$$\tan x=a\ ,\ \cot x=a, \qquad (13\ .\ 30)$$

دلته فقط دواړه لومړي برابرونونه ( ۱۳ . ۲۹ ) ځوابونه لري ، که $-1 \le a \le 1$ باور ولري، نور ارزښتونه sin x او cos x نه شي غوره کولی( پرتله برخه ۶ . ۳) د جبشميرني سره د تکمو یا ګوټکونو په پرلپسی د ( ۱۳ . ۲۹ ) همداسی ( ۱۳ . ۳۰) یو ځواب لاس ته راځي
د(۱۳، ۲۹ ) لپاره

a F sin a F cos

د (۱۳،۳۰ ) لپاره

a F tan a 1/x tan

دا چي tan x او cotx پریودې همداسی 180°لري او په یوه اینتروال کی چي اوږدوالی همداسی 180°لري د( ۱۳ ۳۰ ) تیك یو ځواب پروت دی، لاندې جمله صدق کوي

جمله ۱۳ . ۱ :که x0 د( ۱۳ . ۳۰ ) یو ځواب وي) چی د بیلګي په توګه د جبشميرنی په مرسته لاس ته راځي)، نو د ( ۱۳ . ۳۰ ) د لاندې بڼی ټول ځوابونه تر لاسه کوو

$$x_k = x_0 + k\pi = x_0 + k.180°; k = ... -3, -2, -1, 0 1, 2, 3, ...; .......... (13, 31)$$

په همدې ډول دې دلته هم د هندسی برخه په پام کی وي. چی د هغو له مخې په ( ۱۳ ، ۳۱ ) کی د بیلګي په توګه باور لري

$$x_k = \frac{\pi}{6} + k\pi = 30° + k.180°$$

د کونجونو فنکشنونه sin x او cos x پریودې( تل بېرته راګځېدنه یا دوران)

$$2\pi = 380°$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

لري. مساوات (۲۹.۱۳) ددې اوږدوالی اینتروال کی دوه حلونه لري. که چیرته د جبشمیرني سره یوه اوبیونه $x_0$ پیداشي، نو د sin x = a په حالت کی $x = -x_0$ هم یو حل دی، او $x = -x_0$ د cos x = a په حالت کی یو بل اوبی

یا حل دی. پس لرو:

جمله ۱۳ . ۲ : که x0 د ( ۱۳ ، ۲۹ ) یو هغه اربیونه یا حل وي، چی د بیلګي په توګه په جبشمیروني لاس ته راځي، نو د sin x = a ټول حلونه په لاندې ډول لاس ته راځي

$$x_k = x_0 + 2k\pi = x_0 + k.360°; k = .... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ....; ..................(13,32)$$

$$\bar{x} = \pi - x_0 + 2k\pi = 180° - x_0 + k.360°; ..................................................(13,33)$$

او د cos x = a ټول حلونه په لاندې ډول لاس ته راځی

$$x_k = x_0 + 2k\pi = x_0 + k.360°; k = .... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ....; ..................(13,34)$$

$$\bar{x} = -x_0 + 2k\pi = -x_0 + k.360°; ..............................................................(13,35)$$

بیلګه ۱۳ . ۱۶: د مساوات sin x = 0,23910 لپاره د جبشمیرني سره لاندې حلونه لاس ته راځي: ( په درجه کچ یا ګراد اندازه) x0 =13,833427°
(په لینده کچ)0,24143 = 0,017453. 3,833427
د ) ۱۳ . ۳۲ ( ، ) ۱۳ ، ۳۳ ( له امله په لاندې سره ټولې اوبیونې راکړ شوي دي

$$x_k = 13,833427 + k.360° = 0,24143 + k.6,28318,$$

$$\bar{x}_k = 166,16657° + k.360 = 2,9001 + k.6,28318.$$

بیلګه ۱۳ . ۱۷ : د برابرون cos x = -0,682000 اوبیونه د جبشمیروني سره مومو

$$x0 = 133,00013° = 133° = 2,32125.$$

د ( ۱۳ ، ۳۴ ) او ( ۱۳ . ۳۵ ) له مخی ټول حلونه په لاندې ډول لاس ته راځي

$$x_k = 133° + k.360° = 2,32125 + k.6,28318,$$

$$\bar{x}_k = -133° + k.360° = -2,34125 + k.6,28318$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

بیلګه ۱۳ . ۱۸:

د برابرون $\tan x = -\sqrt{3} = 4,843000$ حل په جبشمیرني پیداکوو

$x_0 = -59,999988° = -60° = -1,04718$

له دې امله د ) ۱۳ . ۳۱ ( له مخې ټول حلونه په لاندې ډول لاس ته راځي

$x_k = -60° + k.180° = -1,04718° + k.3,14159$

بیلګه۱۳ . ۱۹:

د برابرون $\cot x = 4,843000$ ټولې اوبیونې یا حلونه د جبشمیرني سره داسی

$x_0 = 11,666677° = 11,67° = 0,203675$

لاس ته راځي. په دې توګه د ( ۱۳ . ۳ ) له مخې ټول حلونه په لاندې ډول لرو:

$x_k = 11,67° + k.180° = 0,203675 + k.3,14159$

بیلګه ۱۳ . ۲۰ : مساوات $\sin x = \sqrt{2}$ د $1 < 2$ له امله اوبیونه ل نه لري .

د ګونومتري مساواتو نور تیپونه یا ډولونه، کوم چې تراوسه په څرګندومتودو یا لارو ځوابوړ دي، لاندې بڼه لري

$$\sin f(x) = a , \quad \cos f(x) = a \qquad (13 . 36)$$

$$\tan f(x) = a \quad , \cot f(x) = a \qquad (13 . 37)$$

دلته کیدی شي چی $f(x)$ الجبري او یا ترانسځیندنته افاده وي‌که بدل (سوبستیتوتي) شي

$$y=f(x) \qquad (13.38)$$

نو لاندې مساواتونه لاس ته راځي

$$\sin y= a , \cos y = a \qquad (13 . 39)$$

$$\text{Tan } y= a , \cot y = a \qquad (13 . 40)$$

دا کیدی شي د جملی ۱۳ . ۱ سره سم اوبی کړای شي. ددې اوبیونې یا حلونه دې $y3, y2, ,y1 , ...$ وي .

د ( ۱۳ ، ۳۷ ) سره سم د $f(x) = yi , \ i = 1,2,3,...$ ټولې اوبیونې یا حلونه لاس ته راځي ددې لپاره دې بیلګه ورکړ شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

بیلګه ۱۳ . ۲۱: $\sin(x-120°)/3=1/2$

د سبستیچیوشن یا بدلون $y=(x-120°)/3$ سره لاس ته راځي $\sin y=1/2$ د لاندې اوبیوني (حل) سره

$$y_k = 30° + k.360°\ ,\ k = ...,-3,-2,-1,\ 0,1,2,3...$$

$$\overline{y}_k = 150° + k.360°$$

ټول د $(x - 120°)3 = y_k$ , $(x - 120°)/3 = y_k$ اوبیوني (حلونهو پېه توګه لاس ته راځي:

$$x_k = 3y_k + 120 = 90°+3k.360°+120° = 210° + 3k.360°$$

$$\overline{x}_k = 3y_k + 120° = 450° + 3k\ .\ 360° + 120° = 570°+3k.360°$$

د ګونومتري فنکشنونو یو بل تیپ یا ډول ، له لاندې څخه لاس ته راځي

$$f(\sin x,\cos x,\tan x,\cot x,\sin 2x,\cos 2x,\tan 2x,\cot 2x,$$
$$\sin 3x,\cos 3x,\tan 3x,\cot 3x,\ ....) \qquad (13\ .\ 42)$$

دلته که د بیلګي په توګه بدل شي

$$y = \sin x \qquad (13\ .\ 43)$$

د ۴ . ۵ برخی تریګونومتري فرمولونو په مرسته ټول په (۴۲ ، ۱۳ ) رامنځ ته شوي کونجفنکشنونه په y سره افاده کولی شو:

$$\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x} = \pm\sqrt{1-y^2}\ ,$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{y}{\pm\sqrt{1-y^2}}\ , \qquad \cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\pm\sqrt{1-y^2}}{y}\ , \qquad (13.44)$$

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x = \pm 2y\sqrt{1-y^2}\ ,\ \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2y^2\ \ (\ \text{usw.}$$

ارای نور

له دې سره برابرون ( ۴۲ . ۱۳ )، پهy ، یو برابرون بدلیږي:

$$F(y) = 0 \qquad (13\ ,\ 45)$$

دا دې په همغه ډول حلیدونکي وي او حلونه دې ....y1 , y2 .y3 وي. نو بیاد(۱۳.۴۳ )سره مناسب لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

$$\sin x = y_i, i=1,2,3... \quad (13.46)$$

اوبی کړي او د ټولو اوبیونو سره، کوم چې په ( ۴۲ . ۱۳ ) کي ښول شي ، وازمایل شي، چې ایا دا هم پوره کوي، که نه په ( ۴۲ . ۱۳ ) کیدی د x په ځاي یوه افاده g(x) هم ولیکلی شي.

$$f(\sin g(x), \cos g(x),....) = 0 \quad (13.47)$$

نو بیا سړی بدلوي

$$y = \sin g(x) \quad (13.48)$$

د پورته متود تشریح لپاره په لاندې ډول دوه ساده بیلګي ورکول کیږي

بیلګه ۱۳ . ۲۲:
برابرون

$$\sin x + \cos x = 1 \quad (13.49)$$

د ( ۴۲ . ۱۳ ) ، (۴۴ . ۱۳ ) سره ځان په رینه ببرابرون بدلوي

$$y \pm \sqrt{1-y^2} = 1 \iff \pm\sqrt{1-y^2} = 1-y \iff 1-y^2 = 1 + y^2 - 2y \quad (13.50)$$

$$\iff 0 = 2y^2 - 2y = 2y(y-1)$$

$$y_1 = 0 , y_2 = 1 \quad (13.51)$$

اوس دې په یاد شي ، چې د y2=1 لپاره برابرون ( ۵۰ . ۱۳ ) او له دې سره سم برابرون ( ۴۹ . ۱۳ ) تل پوره دي. د دې په څېر یا خلاف y1 فقط د ( ۵۰. ۱۳ ) حل دئ ، که د
رینبی له مخه زیاتیز یا مثبت نخښه وي. دا حالت یوائې هلته مخ ته پروت دئ، چې $\cos x>0$ وي.

دا هلته هم پام ته راځي، که د برابرون ( ۵۱ . ۱۳ ) سره برابرون ( ۴۶ . ۱۳)حل یا اوبی شي او
حل یا اوبونه یې په ( ۴۹ . ۱۳ ) کې کیښول شي:

$$\sin x = y_1 = 0 , x_k = k\pi ; \; k=...-3,-2,-1,0,1,2,3... \quad (13.52)$$

$$\sin x = y_2 = 1 , x_k = \pi/2 + 2k ; k = ..,-3,-2,-1,0,1,2,3,... \quad (13.53)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

که ( ۱۳ . ۵۲ ) په ( ۱۳ . ۴۹ ) کیښوول شي، نو لاس ته راځي:

د جوړه k لپاره $\sin x_k + \cos x_k = \sin k\pi + \cos k\pi = 0 + 1$

د جوړه k لپاره $\sin x_k + \cos x_k = \sin k\pi + \cos k\pi = 0 - 1$

د پیلمساوات د زیاتځله حلونه یواځي جفت ګڼونه دي( $x\pi = 2k\pi$ ) که( ۱۳ . ۵۳ ) په ( ۱۳ . ۴۹ ) کیښوول شي، نو لاس ته راځي

$$\sin x_k + \cos x_k = \sin(\pi/2 + 2k) + \cos(\pi/2 + 2k) = \sin\pi/2 + \cos\pi/2 = 1 + 0 = 1$$

له دې وروسته ټول xk پیلبرابرون پوره کوي .

نو د ( ۱۳ . ۴۹ ) ټولې اوبیونې په لاندې بڼه لاس ته راځي

$$x_k = 2k\ ,\ x_k = \pi/2 + 2k\ ;\ k = ..-3,-2,-1,o,1,2,3,... \quad (13\ .\ 54)$$

بیلګه ۱۳ . ۲۳ : د برابرون $\cos x + \cos 2x = 0 \quad (13.55)$

سره کیدی شي د ریښی مساوات څخه لار واړوو یت تیرشو. که چیرته $y = \cos x$ بدل کړي. د

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = y^2 - (1 - y^2) = 2y^2 - 1 \qquad (13.57)$$

له امله له څخه (۱۳،۵۵) مربع مساوات لاس ته راوړو.

$$2y^2 + y - 1 = 0 \qquad (13.58)$$

د دې حل سره : $y_{1;2} = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{8}{16}} = -\frac{1}{4} \pm \frac{3}{4}$,

$$y_1 = \frac{1}{2}\ ,\quad y_2 = -1. \qquad (13.59)$$

په (۱۳ . ۵۶ ) کې ایښوولو له لارې لاس ته راځي

$$\cos x = y_1 = \frac{1}{2}\ ,\quad x_k = 60° + k \cdot 360° = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,$$

$$\bar{x}_k = 300° + k \cdot 360° = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, \qquad (13.60)$$

$$\cos x = y_2 = -1,\quad \bar{\bar{x}}_k = 180° + k \cdot 360° = \pi + 2k\pi, \qquad (13.61)$$

$$x = \begin{Bmatrix} 60° \\ 180° \\ 300° \end{Bmatrix} + k \cdot 360° = \begin{Bmatrix} \frac{\pi}{3} \\ \pi \\ \frac{5\pi}{3} \end{Bmatrix} + 2k\pi. \qquad (13.62)$$

## تمرینونه

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

ټول ارزښتونه x وشمیری، چې لاندې برابرونونه پوره کوي! پام دې وي، چې د هرې پ،ښتنې سره یې ازمایل یا ازماېښت اړیندی.

۱ - لوګاریتمي مساوات یا برابرونونه

1.1. a) $\log_4 (x+1) = -3$ b) $4 - 3\lg 2x = 10$

c) $\lg \sqrt{2x} = 1{,}314$ d) $\ln (x-1)^2 = 2$

1.2. a) $\lg (2x+5) - \lg (3x+1) = 2$ b) $\lg 4x + \lg 2x + \lg x = 6$

c) $\frac{1}{3}\ln x^6 = \frac{1}{2}\ln 81$ d) $\lg (x-1)^2 = 6 \lg 2$

1.3. a) $\lg (x-1) + \lg 3 = \lg (x^2 - 1)$

b) $\lg (x+1)^2 = \lg 2 + \lg (x+1) + \lg (x-1)$

c) $\lg x - \lg 4 = \lg 35 - \lg (x+4)$

d) $\lg (x-2) - \frac{1}{2} \lg 4 = \frac{1}{3} \lg 125 - \lg (x+1)$

1.4. a) $\lg x + \lg (x+1) + \lg (x-1) = \lg 24$

b) $\lg 3 + 2 \lg x = \lg (4 + x^3)$ c) $\lg (152 + x^3) - 3 \lg (x+2) = 0$

d) $2 \lg^2 x^3 - 3\lg x - 1 = 0$

1.5. a) $\lg x + \lg (a - \frac{1}{a}) = \lg (1 - \frac{1}{a}) + \lg (1 + \frac{1}{a})$

b) $\lg (ax) - \lg a + \lg \frac{b}{a} = \lg b + \lg \frac{x}{a}$

c) $\lg x - \lg \frac{x}{abx - 1} = \lg (a-1) + \lg (a+1)$

d) $\log_a (2x+1) = \log_a (x-1) + 1$

1.6. a) $\frac{10}{\lg x - 2} - \frac{5}{\lg x + 1} = 4$ b) $\frac{1}{\lg x + 1} - \frac{3}{\lg x - 3} = 2$

c) $\frac{2}{\log_2 x + 1} - \frac{1}{\log_2 x - 5} = 1$ d) $\frac{1}{5 - \lg x} + \frac{2}{1 + \lg x} = 1$

1.7. a) $\lg (x^2 + 1) = 2 \lg^{-1} (x^2 + 1) - 1$ b) $(\log_5 x - 2) \log_5 x = 25^{\log_5 \sqrt{3}}$

c) $\lg^2 x^3 - 10 \lg x + 1 = 0$ d) $\sqrt{\lg(1-x)} + 5 \lg (1-x) = 6$

1.8. a) $2\lg \lg x = \lg (3 - 2 \lg x)$ b) $\log_2 (x - 14) = 1 + \frac{1}{2} \log_2 (3x - 26)$

c) $4 \log_3^3 5x - 7 \log_3 15 x + 7 = 0$ d) $3 \lg^2 x^2 - \lg x - 1 = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

1.9. a) $x^{\lg x+2} = 1000$ b) $x = 10^{1-0,25\lg x}$
c) $x^{\log_5(5x)-4} = 625$ d) $x^{\log_a x} = a^2 x$

1.10. a) $x \lg \sqrt[5]{5^{2x-8}} - \lg 25 = 0$ b) $\log_2(4\cdot 3^x - 6) - \log_2(9^x - 6) = 1$
c) $\log_2(9 - 2^x) = 10^{\lg(3-x)}$ d) $x(\lg 5 - 1) = \lg(2^x + 1) - \lg 6$

1.11. a) $\log_2[2 + \log_3(x+3)] = 0$ b) $\log_5[\log_2(\log_4 x)] = 0$
c) $2\log_x 27 - 3\log_{27} x = 1$ d) $\dfrac{\lg x}{\lg(x+1)} = -1$

## ۲ ـ اکسپوننشل مساوات

2.1. a) $(a^{x-2})^{x+2} = (a^{x+3})^{x-4}$ b) $a(a^{x-3})^{x+2} = a^{3x+5}(a^x)^{x-6}$
c) $\sqrt[3]{a^{2x+9}} = \sqrt[4]{a^{3x+5}}$ d) $\sqrt[x-2]{a^{11-x}} = \sqrt[9-x]{a^{x+3}}$

2.2. a) $10^{5x} = 3^{10}$ b) $0,375^x = 2576$
c) $\sqrt[x]{6,325} = 1500$ d) $\sqrt[x]{10,27} = \sqrt[4]{5}$

2.3. a) $\left(\frac{3}{4}\right)^{2x-3} = \left(\frac{4}{3}\right)^{3x+5}$ b) $\left(\frac{6}{7}\right)^{3x+10} = \left(\frac{7}{6}\right)^{2x-3}$
c) $\left(\frac{3}{5}\right)^{2x+1} = \left(\frac{5}{8}\right)^{3x+4}$ d) $16\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-1} = 27\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}$

2.4. a) $\left(\frac{1}{100}\right)^{\frac{1}{x}} = 24,24^{\frac{1}{10}}$ b) $\sqrt[2x]{3^{3x+2}} = \sqrt[3x]{2^{2x+3}}$
c) $3^{(2^x)} = 2^{(3^x)}$ d) $8^{(5^x)} = 4^{(7^x)}$

2.5. a) $4^{x^2-x+1} = 8^x$ b) $3^{9x+1} = 9^{3x-1}$
c) $\sqrt{9^{x(x-1)-0,5}} = \sqrt[4]{3}$ d) $\sqrt[3]{\sqrt[x-1]{3^{10x+5}}} = \sqrt[3x-9]{27^{3x-7}}$
e) $2^{x^2-6x-2,5} = 16\sqrt{2}$ f) $2^{x^2-7,7x+16,5} = 8\sqrt{2}$
g) $5^{(x^2+x-2)(3-x)} = 1$ h) $4^{\sqrt{x+1}} = 64\cdot 2^{\sqrt{x+1}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



2.6. a) $7^{2x+1} - 3^{x-1} = 7^{2x+3} - 3^{x+1}$ b) $2^{x+1} - 3^{x} = 2^{x+3} - 3^{x+2}$

c) $3^{2x-1} - 5^{3x-2} = 3^{2x+1} - 5^{3x+2}$ d) $5^{2x} - 3 \cdot 5^{x} + 2 = 0$

e) $5^{4\sqrt{x}} - 6 \cdot 5^{2\sqrt{x}} + 5 = 0$ f) $2^{\frac{3}{\sqrt{x}}} - 2^{\frac{2}{\sqrt{x}}+1} + 2^{\frac{1}{\sqrt{x}}} - 2 = 0$

g) $3^{x+1} - 2 = 9^{x}$

h) $3^{x+1} + 3^{x-1} + 3^{x-2} = 5^{x} + 5^{x-1} + 5^{x-2}$

i) $2 \cdot 3^{x+3} + 7 \cdot 3^{x-2} = 493$ j) $3^{\sqrt{x}} - 3^{1-\sqrt{x}} = \frac{26}{3}$

k) $33 \cdot 2^{x-1} - 4^{x+1} = 2$ l) $3^{x} + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 5^{x}$

2.7. a) $5^{x-3} + 2 \cdot 5^{x-2} = 5{,}08$ b) $5^{\sqrt{x}} - 5^{3-\sqrt{x}} = 20$

c) $9^{\sqrt{x^2+3x}} + 0{,}5 + 9 = 28 \cdot 3^{\sqrt{x^2+3x}}$ d) $2^{-2x} - 17 \cdot 2^{-(x+2)} + 1 = 0$

e) $2^{x^2} + 2^{1-x^2} = \frac{9}{2}$ f) $12\sqrt[2x]{3} - \sqrt[x]{3} = 27$

g) $4^{\sqrt{3x^2-2x}+1} + 2 = 9 \cdot 2^{\sqrt{3x^2-2x}}$ h) $\sqrt{3^{x-56}} - 7 \cdot \sqrt{3^{x-60}} = 162$

i) $9^{x^2-1} - 36 \cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0$

2.8. a) $\frac{3^{x} + 3^{-x}}{3^{x+1} - 1} = \frac{5}{12}$ b) $\frac{2^{x} + 1}{2^{x} - 4^{x}} = 6$

c) $4 + \frac{2}{3^{x} - 1} = \frac{5}{3^{x-1}}$ d) $\frac{2^{x} + 10}{4} = \frac{9}{2^{x-2}}$

e) $x^{x} = x$

۳ – ګونومتریکي – یا کونجکچیز مساوات

3.1. a) $\tan x = \frac{1}{2}$ b) $\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ c) $\cot x = \frac{2}{5}$ d) $\tan x = -1$

3.2. a) $\sin(2x - \frac{\pi}{2}) = 0{,}309$ b) $\cos(2x - \frac{\pi}{3}) = 0{,}342$

c) $\sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{10}) = 0{,}809$ d) $\cos(x + \frac{\pi}{3}) = 0{,}471$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

3.3. a) $5\sin^2 x - 10\cos^2 x - 1 = 0$ b) $\cos^2 x + \frac{1}{3}\sin x\cos x + \frac{2}{3}\sin^2 x = 1$

c) $\cos^2 x + 2\cos x - \sin^2 x + 1 = 0$ d) $2\cos^2 x + \sin x - 1 = 0$

e) $\sin^2 x + 5\sin x\cos x + 8\cos^2 x = 0$ f) $\sin^2 x - \cos^2 x - 3\sin x + 2 = 0$

g) $\sin^2 x - 2\cos x + 2 = 0$ h) $\sqrt{1+\cos x} = \sin x$

i) $\sqrt{1+\sin x} + \cos x = 0$ j) $\sin^4 x = 2\cos^2 x - 1$

k) $\sqrt{\cos x} + \sqrt[4]{2}\,\sin x = 0$ l) $1 - \cos x = \sin x$

3.4. a) $\sin 2x = \sqrt{3}\sin x$ b) $\cos 2x = \cos x$

c) $\sin 2x \cdot \tan x = 1$ d) $\cos 2x + 3\cos x = 1$

e) $\cos\frac{x}{2} - \cos x = 1$ f) $2\sin\frac{x}{2} - \cos x + 1 = 0$

g) $\cos x + \cos 2x = \sin x + \sin 2x$

h) $2\sin x\cos 2x - 1 + 2\cos 2x - \sin x = 0$

i) $3(1 - \sin x) = 1 + \cos 2x$ j) $\sin 2x + 2\cot x = 0$

k) $3\cos 2x - 20\sin x = 9$ l) $\cos 2x + 2\cos x + 1 = 0$

3.5. a) $2\sin^2\frac{x}{2} + \cos 2x = 0$ b) $2\cos^2\frac{x}{2} + \cos 2x = 1$

c) $\tan x - \sin x = 2\sin^2\frac{x}{2}$ d) $\sin^2 x - \cos^2 x = \cos\frac{x}{2}$

e) $2\sin^2 x + \sin^2 2x = 2$ f) $3 - 2\sin^2 2x = 2\sin^2 x$

g) $5\cos 2x + 16\sin x + 14\sin^2 x + 7 = 0$

h) $3\cos 2x - 6\cos x + 4\sin^2 x = -3$

i) $2\cos x + 3 = 4\cos\frac{x}{2}$ j) $2\sin^2 x + \sin^2 2x = 0$

k) $\tan x + \tan 2x - \tan 3x = 0$

3.6. a) $\cos x\cos 2x = \cos 3x$ b) $\sin 5x\cos 3x = \frac{1}{2}\sin 8x - 0{,}5$

c) $\sin^2 x + \cos^2 2x = \sin^2 3x + \cos^2 4x$ d) $(\cos 8x)^2 \cdot 2 + \sin 16x = 1$

e) $2\cos^2 4x + \sin 10x = 1$ f) $2 - 6\sin x\cos x = \cos 4x$

g) $\cos 4x + 2\cos^2 x = 1$ h) $\sin x\cos 5x = \sin 9x\cos 3x$

(c) ketabton.com: The Digital Library



i) $\sin\frac{7x}{2}\cos\frac{3x}{2}=\sin\frac{9x}{2}\cos\frac{x}{2}$ j) $\cos\frac{7x}{2}\cos\frac{x}{2}=\cos\frac{9x}{2}\cos\frac{3x}{2}$

k) $\sin x-\sin 3x+\sin 5x-\sin 7x=0$ l) $\cos x+\cos 3x=\cos 5x+\cos 7x$

3.7. a) $2\sin^3 x-3\sin x\cos x=0$ b) $4\sin^3 x-8\sin^2 x-\sin x+2=0$

c) $\tan^3 x+\tan^2 x\ \ 3\tan x-3=0$ d) $\tan^3 x-\tan^2 x+\tan x=1$

3.8. a) $\sqrt{3}\sin x+3\cos x=0$ b) $\sqrt{3}\sin x+\cos x=\sqrt{3}$

c) $\sqrt{3}\sin 3x+\cos 3x=1$ d) $\sqrt{2\sin 2x}+2\sin x=0$

e) $1-\sin x=\sin^2(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})$ f) $2\sin^2\frac{x}{2}=\cos(\frac{3\pi}{2}+\frac{x}{2})$

g) $1-\cos 2x+\cos 6x-\cos 8x=0$ h) $\cos x-2\cos 3x+\cos 5x=0$

i) $\cos 4x+2\cos^2 x=0$ j) $1-\sin x\cos x+\sin x-\cos x=0$

k) $\cos 3x+\sin 3x=\cos x+\sin x$ l) $\sin x\cos x-\sin^2 x-\cos x+\sin x=0$

m) $\sin x+\cos x=\frac{1}{\cos x}$ n) $(\cos x)^{\sin x}=1$

o) $\frac{1+\cos 2x}{2\cos x}=\frac{\sin 2x}{1-\cos 2x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

# ۱۴. د نامساواتو یا نابرابرونونو او مطلقه ارزښتونو سره شمیرنه

## ۱۴ . ۱:نابرابرون( نامساوات)

### ۱۴ . ۱ . ۱ بنسټیزې کلیمی او شمیرقوانین

یو نابرابرون لاس ته راځي، که دوه ترمونه T1 او T2 د یوې اړیکنخښنی $<, \geq, >$ او $\leq$ له لارې یو د بل سره تړلي وي.
په لاندې کی به نابرابرونونه تر څیړنی لاندې ونیول شي، چی یوه یا دوه ریيلی واريابلی یا اوښتونی ولري . یو نابرابرون د دوه واريابلو(اووښتونو) سره د وینامنطق په بنسټ یو د وینا شکل ښايي، د هغو سره چی واريابلی هر ارزښت غوره کولی شي، د کومو لپاره چی ترمونه T1 او T2 څرګندډي . یو اوبی یا حل هر هغه ارزښت دئ ، په همدې توګه هغه ارزښت جوړه ده، چی واريابل یا اووښتوني یی غوره کولی شي او په ترم کی د هغي ځاي په ځاي کیدو سره نابرابرون یوه ریښتونی وینا وي . د ټولو اوبیونو یا ځوابونو ټولګه په حلډیري L کی سره راټولیږي.
په لاندې برخه کی به ډیر د وینامنطق( ویناسم اندیز) سومبولونه چی په برخه ۱ ۰ ۲ ( او د ډیري عملیو سومبولونه ) چی په برخه ۲ . ۳ راغلي په کار واچول شي. د دې سومبولونو د اهمیت یا غوره والي سره دې سړی بیا هم ځان اشنا کړي.
د نابرابرونونو سره شمیرنه کی دې لاندې قاعدې په پام کي ونیول شي( مقایسه برخه ۳ )، دلته دې a , b , c او dریيل ګڼونه وي. لاندې باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

$a<b \Leftrightarrow a \pm c<b\pm c,$ (14,1)

$a<b \wedge c>0 \Rightarrow a.c<b.c$ (14,2)

$a:b<b:c$ (14,2)

$a<b \wedge c<0 \Rightarrow a.c>a.c$ (14,3)

$a:c> b:c$ (14,3)

$a<b \wedge c=0 \Rightarrow a.c=b.c$ (14,4)

د برابرونونو شمیرنی سره انډول کی دې دلته ( ۱۴ . ۳ ) قاعده ځانګړې تر پام لاندې وي.د منفی یا کمیز ګڼ سره ځل یا ویش عملیه کی دا د نابرابرون نخښه راکرځي یا را په شا کیږي یا که غواړئ برعکس کیږي. د بیلګي په توګه $3 < 4$ مګر که داوړه خواوې د 1 - سره ځل شي نو لاس ته راځي $-3 > -4$

ټول د شمیرلو لپاره ورکړ شوي قواعد د نابرابرون لپاره په ورته ډول د اړیکنخښو < سره باور لري دا په دې مانا چی$a \le b$ دا چی په څرګند ډول د دوه ګڼونو ځل او ویش هلته زیاتیز ( مثبت )دی چی دواړه ګڼونه همغه مخنخښه ولري او کمیز (منفي) که چیری مخنخښي یی توپیر ولري، او لاندې اړیکی باور لري:

$a.b>0 \Leftrightarrow$ (14,5)

$\Leftrightarrow a:b>0\ (a>0 \wedge b>0) \vee (a<0 \wedge b<0),$ (14,5)

$a.b<0 \Leftrightarrow$ (14,6)

$\Leftrightarrow (a>0 \wedge b<0) \vee (a<0 \wedge b>0).$ (14,6)

دبرابرونونو شریکولو کی، په ځانګړي ډول د ویش لپاره، باید ونیول شي چی $b \mid= 0$ یعني د ځل او ویش لپاره دې توپیریدونکو قاعدو ته پام وي . د بیلګي په توګه دي:

$a.b\ge 0 \Leftrightarrow (a\ge \wedge(a\ge 0)\vee(a<0 \wedge b<0)$ (14,7)

$a:b \ge 0 \Leftrightarrow (a\ge 0 \wedge b>0)\vee(a\le 0 \wedge b<0)$ (14,8)

## ۱۴ . ۱ ۱الف اینتروال

د واریابلو د څیړنو لپاره باید ټول معتبر ډیري ورکړل شي، د بیلګي په توګه د یوه فنکشن یا بلواك تعریف - او ارزښت ډیري.

پیژند ۴ . ۱ الف :

یو اینتروال یو د یوبل سره اړوند د رییلګڼونوR برخه ډیر) ده٠

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

یو اینتروال له دې امله، بې له تشوالي یا تشي ، د ګڼکرښی یوه ټاکلی برخه ده، چی له دوه ګڼونو a او b رابندیږي. که د غاړې ټکي په اینتروال کی دننه وي یا خوندې وي نو د بند

اینتروال څخه غږیږو او که اینتروال پورې اړه ونه لرې، واز اینتروال دی، او په همدې ډول نیمبند او نیم واز اینترو الونه.
د اوبیډیری په ورکولو سره په ګڼکرښی باندې، لاندې د انیتروال انځورونه په کار اچول کیږي.

لاندې ۱۱ د اینتروال مختلف تیپونه دي یا نې ، چې a او b له R دي او $a < b$ ده۰

1. $(a,b) = \{x \,|\, a < x < b\}$ واز اینتروا ، اخر تخري په اینترول اړه نه لیر
2. $[a,b] = \{x \,|\, a \le x \le b\}$ بند اینتروال ، اخر توري په اینتروال ئورې اړه لري
3. $[a,b) = \{x \,|\, a \le x < b\}$ ښی واز اینتروال
4. $(a,b] = \{x \,|\, a < x \le b\}$ کیڼ واز اینتروال
5. $(a,\infty) = \{x \,|\, x > a\}$ ښي لورته ناپاي او کیڼ لور ته واز اینتروال
6. $[a,\infty) = \{x \,|\, x \ge a\}$ ښي لور ته ناپای او کیڼ لور ته بند اینترال
7. $(-\infty,b) = \{x \,|\, x < b\}$ ښي لور ته واز او کیڼ ورته ناپاي اینتروال
8. $(-\infty,b] = \{x \,|\, x \le b\}$ ښي لور ته بند او کیڼ لورت ناپاي اینتروال
9. $(-\infty,\infty) = \mathbb{R}$ ناپای اینتروال ، ټول رییلګڼونه
10. $\{a\}$ د دې یوه توري ډیری
11. $\varnothing$ تشډیری

لاندې اینترو الونه د ناپای په لور هم رابند دي یانې په دې مانا، چې د ناپای ډیری هم په اینتروال پورې اړه لري، یانې ناپای ډیری ټولنه ورسره جوړوي۰

1. $[-\infty,b] = \{x \,|\, x \le b\} \bigcup \{-\infty\}$
2. $[-\infty,b) = \{x \,|\, x < b\} \bigcup \{-\infty\}$
3. $[a,\infty] = \{x \,|\, x \ge a\} \bigcup \{\infty\}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

$$(a, \infty] = \{x \mid x > a\} \bigcup \{\infty\}$$

4. $[-\infty, \infty] = \mathbb{R}^+$

**پورته ته الترناتیو یا بدیلي لیکنبڼه Alternative notation**

په نړیواله توګه یو بل ډول لیکنبڼهٔ په لاندې ډول ورکو لکیږي

$]a,b[ = \{ x \mid a < x < b \}$

$[a,b] = \{ x \mid a \le x \le b \}$

$[a,b[ = \{ x \mid a \le x < b \}$

$]a,b] = \{ x \mid a < x \le b \}$

یادونه : داپورته د اینتروال ډولونه د نړیوال جال څخه راکښته شوي، دا می هم وغوښتل ګرانو لوستونکو ته وړاندی کړم

بند انیتروال : ۰۰۰۰ $[a,b]=\{x|a\le x\le b\}$

نیم و از اینتروال :۰۰۰۰۰ $(a,b]=\{x|a<x\le b\}$

نیم واز اینتروال :۰۰۰۰۰۰ $[a,b)=\{x|a\le x<b\}$

واز اینتروال : ۰۰۰۰۰ $(a,b)=\{x|a<x<b\}$

ښی بند ناپای اینتروال : $(-oe,b]=\{x|x\le b\}$

کښ بند ناپای اینتروال : $[a,oe)=\{x|x\ge a\}$

ښی واز ناپای اینتروال :۰ $(-oe,b)=\{x|x<b\}$

کیڼ واز ناپای اینتروال :۰ $(a,oe)=\{x|x<b\}$

ناپای اینتروال : ( -oe، oe)={x|x د ګښکرښی ټکی دی}

بیلګه ۱۴ . ۱الف:

په بنستیزه ډیری Rکی د لاندې برابرون پیژندډیری غوښتنه منځ ته رااچوو.

$x - 2 = 1 + 7 - x$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

حل : د دې ترم $T1(x) = x - 2$ پیژندډیری ده:

D1 = [ 2 , oe)

په همدې توګه د ترم $T2(x)=1+7-x$ پیژندډیری ی ده: D2 =(-oe,7 )

د برابرون دپیژندډیری لپاره لاس ته راوړو:

$$D = D_1 \bigcap D_2 = [2,\infty) \bigcap (-\infty, 7] = [2,7]$$

لاندې ځیره وګورې(متاسفانه، چې ښه ځېره نه شم کښلی)

## ۱۴ . ۱ ۲ .نابرابرون د یوې مجهولی سره

د شمیرقاعدې لومړی د هغونابرابرونونو لپاره په کار اچول کیږي چې یوه اوښتوني یا مجهوله ولري، او اوبیونې یی په ټولیزه توګه د اینتروالونو له لارې انځوریږي.
(۱۴ . ۱ ) قاعده د په خوښه ترمونو د زیاتون او کمون داسی اجازه راکوي، لکه په برابرونونو کی.

بیلګه ۱۴ . ۱:

لرو 5x-6<4+9x دواړو لورو ته 6 + 9x- ورزیاتوو، نو لرو 10 > 4x-
دواړه خواوې په 4 - ویشو.

د ( ۱۴ . ۳ ) له مخې لاس ته راځي x > -5/2

د اوبیونې ډیر یا اوبیډیری : L=(-5/2,oe)

که په یوه غوښتونکی حل یا ویش کی څله وونی، همداسې پرویشونی یو واریابل یا اووښتونی ترم وي، نو باید د ( ۱۴ . ۲ ) تر ( ۱۴ . ۴ ) سره سم ددې ترم د مخنخښي په واك والي کی د حالت توپیرونه(ښه یې : توپیره ونه) تر پام لاندې ونیول شي .

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

د یوګونو اوبیډیریو پیداکولوپه هکله، په هر ډول چی وي، باید په پام کی ولرل شي، چی یواځي هغه د نابرابرون شمیرل شوي د x - ارزښتونه اوبیونې دي، چي ټول ىی سملاسي ( په همدې وخت کی) هغه نیول شوی (فرض شوی) شرایط پوره کړي.

هر برخ اوبیډېرۍ یا برخحلډیرۍ کیدی شي چی د غوځډیرۍ په ځیر له همغه هرپورتني نماینده برخساحویا-ورشو(یا نوره هم ښه : -برخچاپیریالونو) واریابلی (اووښتونی) او د نابرابرون ډیرۍ شمیرل شوو واریابلو یا اووښتونکو ارزښتونو جوړ شي. د غوځډیرۍ جوړښت، کیدی شي چی د یوګونو ډیریو د ګرافیکی انځورونو په ځیر په ګنوړانګه ساده شي. د نامساوتو ټولې اوبیډیرۍ د برخ اوبیډیري یوه د یوګونو حالتونو ټولنډیرۍ ده .

بیلګه ۱۴ . ۲:

$$(3x-5)(x-2)<4(x-2)$$

که په (x-2) باندې وویشل شي، نو باید د شرایطو په پام کی لرلو سره سم

د $x > 2$ لپاره $(x-2)>0$

د $x = 2$ لپاره $(x-2)=0$

د $x < 2$ لپاره $(x-2)<0$

نابرابرن دې په درې برخه ساحو کی یو له بل بیل وځیړل شي.

لومړی حالت:

$$x > 2 <=> x \in (2,\infty)$$

دلته د مخ ته پراته نامساوت لاندې ورته بڼه بدلون ځخه لاس ته راځي

$$3x-5 \leq 4 <=> 3x \leq 9 \Leftrightarrow x \leq 3 \Leftrightarrow x \in (-\infty,3]$$

له دې x - ارزښتونو څخه یواځي هغه د مخه ورکړ شوي نابرابرون ، چي په لومړي حالت کی راوړل شوي اوبیونې دي ، یواځي هغه x د

$$x \in (2,\infty)$$

سره د اوبیو یا اوبیونو په ځیر نیسو. له دې امله د لومړي حالت اوبیډیري لرو:

$$L_1 = (2,\infty) \bigcap (-\infty,3] = (2,3]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

دوم حالت:

$$x = 2 \Leftrightarrow x \in \{2\}$$

د لته په ( x -2) باندې ویشل کیدی نه شي.
د x = 2 ارزښت لیکلو ربښتیا وینا 0 ≥ 0 لاس ته راځي او له دې امله

$$L2 = \{2\}$$

دریم حالت:

$$x < 2 \Leftrightarrow x \in \{-\infty, 2\}$$

د 0 > 2 - x له امله د ( ۱۴ . ۳ ) له مخې پخپله د مخه ورکړ شوي نابرابرون لاندې ورته فورمونه ورکوي

$$3x - 5 \geq 4 \Leftrightarrow 3x \geq 9 \Leftrightarrow x \geq 3 \Leftrightarrow x \in [3, \infty)$$

له دې x - ارزښتونو کوم یو نه شي کیدی چې په دریم حالت کې راوړل شي:

$$L_3 = (-\infty, 2) \cap [3, \infty) = \varnothing$$

د برخه اوبیډیریو ټولنی څخه ټول اوبیډیر) لاس ته راځي:

$$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = (2,3] \cup \{2\} \cup \varnothing = [2,3]$$

نو ټولې اوبیونې هغه x د ې د کومو لپاره چې لرو: 2< x < 3
په لاندې بیلګو کې نور دومره زیات توضیحات نه ورکول کیږي.

بیلګه ۱۴ . ۳ :

$$(3x-1)/(2x+4)<2$$

د شرایطو 0=|2x+4له مخې، دا په دې مانا چې 2=| x د مات لاندې سره ځله ونې له امله

د x>-2 لپاره $(2x+4)>0$
د x<-2 لپاره $2<(2x+4)$

سره سم یواځې دوه حالتونه توپیروو:
لومړی حالت:

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

$$x > -2 \Leftrightarrow x \in (-2, \infty)$$
$$3x - 1 < 4x + 8 \Leftrightarrow x > -9 \Leftrightarrow x \in (-9, \infty)$$
$$L_1 = (-2, \infty) \cap (-9, \infty) = (-2, \infty)$$

ځیره ۱۴ ۱ الف: دا ځېره لاندې کښل شوی، په هغې کې چې بیا دا اوبیډیری روښانه شو۰

دوم حالت:

$$x < -2 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -9)$$
$$3x - 1 > 4x + 8 \Leftrightarrow x < -9 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -9)$$
$$L_2 = (-\infty, -2) \cap (-\infty, -9) = (-\infty, -9)$$
$$L = L_1 \cup L_2 = (-\infty, -9)$$

پورته اخر د نابرابرون یا نامساوات حل یا اوبی دی۰

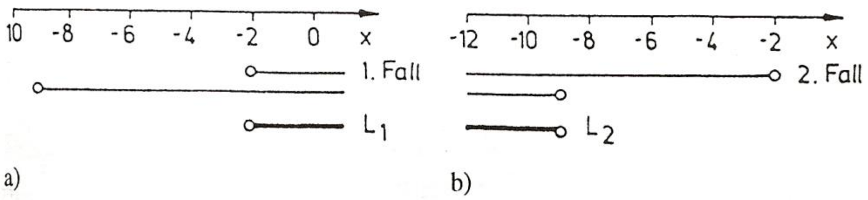



Bild 14 1

---

ځیره ۱۴ ا ب : دلته هم ګڼونوکرښې شته، چۀ په هغې کې دا اوبیډیری روښانه کاړل شوي دي۰ ، که ځیره مې ونه کاړله، نو داکار بچ ګران لوستونکی هم وکولای شي۰

د مخنخښی راوړلو په بنسټ د نابرابرن یوه ځانګړي بڼه یا فورم، چې په (۵.۱۴) تر ( ۱۴ . ۸ ) اړیکو کی استعمال شوي، اوبیونه ګټوره وښايي.

نابرابرونونه

دلته هم څو بیلګې راوړل کیږي، چې نابرابرونونه په کې اوبی شوي دي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

دا برخه د نړیوالجال څخه راکښته شوي، له دې امله یې لیکښه د مخکنی لیکښې سره توپیر لري. دا لاندې لرو .

$$ax + b > 0, \quad a \neq 0$$
;

$$x^2 - 5 < 0$$
;

$$|2x - 5| \leq x + 10$$
;

دلته اوبیونې اینتروالونه دي. ښول کیږي، چې اوبیډیری څنګه پیداکیږي او د دې لپاره

اړیین شرایط کوم دي.

- په دواړو لورو همغه ګڼ زیاتیدلی یا کمیدلی شي
- که دواړه خواي د کمیز ګڼ سره ځل شي یا په کمیز ګڼ وویشل شي، نو مخنخښه تغیر خوري. که زیاتیز وي، نو دواړه خوا په توان کیدی شي او ریښنج یې وستل کیدی شي، پام دې وي، چې برابرون بیا زیاتیزه او که کمیزه مخ نخښه غوره کوي او یا دواړه
- موږ (1.9:1 اوبی کوو

د $a > 0$ سره لورو

$$ax + b > 0 \Longleftrightarrow ax > -b \Longleftrightarrow x > -\frac{b}{a}$$

د لاندې حلست یا اوبیډیری

$$\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{b}{a}\} = (-\frac{b}{a}, \infty).$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

د $a < 0$ سره لرو

$$ax + b > 0 \Longleftrightarrow ax > -b \Longleftrightarrow x < -\frac{b}{a}$$

د لاندې اوبیډیرۍ سره

$$\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{b}{a}\} = (-\infty, -\frac{b}{a}).$$

موږ (1.9:2 اوبی کوو :

$$x^2 - 5 < 0 \Longleftrightarrow x^2 < 5 \Longleftrightarrow |x| < \sqrt{5}$$

په اخرنې پل کې دې دې ته پام وي $\sqrt{x^2} = |x|.)$ د روابنه تشیرح لپاره یا شننې لپاره یو د حالت توپیر رامنځ ته کوو :

په حالته $x \geq 0$ کې $|x| = x,$ او $|x| < \sqrt{5}$ په ساده ډول $x < \sqrt{5}.$ مانا لري

په حالت ist $x < 0$ کې $|x| = -x,$ او $|x| < \sqrt{5}$ د , $-x < \sqrt{5}$ په مانا یا $x > -\sqrt{5}.$ ورته نو لرو

$$|x| < \sqrt{5} \Longleftrightarrow -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$$

او اوبیډیرۍ

$$\mathcal{L} = (-\sqrt{5}, 0) \cup [0, \sqrt{5}) = (-\sqrt{5}, \sqrt{5}).$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

موږ 1.9:3 اوبی کوو د یوه حالت تو[پر سره

$$2x-5 \leq x+10 \quad x \leq 15, \quad \Longleftrightarrow$$

$$2x-5 \geq 0 \quad x \geq \frac{5}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad 2x \geq 5 \quad \Longleftrightarrow$$

(i) که وي $2x-5 \geq 0;$ نو دی $|2x-5| = 2x-5,$ او موږ لرو

له دې لاس ته راځي

$$\frac{5}{2} \leq x \leq 15.$$

(ii) $2x-5 < 0.$ نو دی $|2x-5| = -(2x-5)$ او لرو

$$-2x+5 \leq x+10 \quad \Longleftrightarrow \quad -3x \leq 5 \quad \Longleftrightarrow x \quad \geq -\frac{5}{3},$$

$$2x-5 < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2x < 5 \quad \Longleftrightarrow \quad x < \frac{5}{2}.$$

له دې لاس ته راځي:

$$-\frac{5}{3} \leq x < \frac{5}{2}.$$

د نابرابرون اوبیونډیری له دې امله ده

$$\mathcal{L} = [-\frac{5}{3}, \frac{5}{2}) \cup [\frac{5}{2}, 15] = (-\frac{5}{3}, 15].$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

په لاندې کې یو څو تمرینونه ورکړ شوي، کۀ ګران مینه وال یې غواړې تمرین کړي۰

لاندې نابرارونونه اوبی کړئ

(i) $\frac{3}{x+5} < 2$ ,

(ii) $\sqrt{x^2+x+2} > x$ ,

(iii) $|x+5| > |x-2|$ .

بیلګه ۱۴ . ۴:

1/(3-x)>2/(x+6) , x|=-6 ; x |= 3

د اصلي ماتلاندې (3-x)(x+6) سره د ځل له امله باید بیا هم د هغه مخنخبنه په پام کی ونیول شي. شرایط، د کوموله مخی چی مات لاندې مثبت د ی، کیدی شي د ( ۱۴ . ۵ ) له لارې ومیندل شي:

(3-x)(x+6)>0⇔(3-x)>0/\x+6>\/ (3-x)<0 /\ x+6<0

⇔ (x<3/\x>-6)\/ (x>3 /\x<-6)⇔ -6<x<3

نو ( ۱۴ . ۶ ) شوونې کوي یا ممکنه وي، چی هغه ورشو( ساحه یا ډیری یا نه هم شهچاپیریال ) پیدا کړو چیرته چی اصلي مات لاندې کمیز یا نفي دئ:

$(3-x)(x+6)<0 \Leftrightarrow (3-x) >0 \wedge x+6><0 \vee (3-x)<0 \wedge x+6>0$

$\Leftrightarrow (x<3 \wedge x<-6) \vee (x>3 \wedge x>-6) \Leftrightarrow x < -6 \vee x>3$

له دې امله د ( ۱۴ . ۲ ) او ( ۱۴ . ۳ ) په پام کي لرلو سره شمیرنه لاس ته راځي:

لمړی حالت :

$-6 < x < 3 \Leftrightarrow x \in (-6 , 3)$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

د زیاتیز ځله وونې یا مثبت فاکتور $(3-x)(x+6)$ سره ځلولو له امله د اړیکو نخښه ساتلی پاتیږي:

$$x+6 \ge 6-2x \Leftrightarrow x \ge 0 \Leftrightarrow x \in [0,\infty),$$

$$L_2 = (-6,3) \cap [0,\infty) = [0,3)....(mape(zirah)14.2a)$$

دوم حالت : $x < -6 \vee x > 3) \Leftrightarrow x \in (-\infty,-6) \cup (3,\infty)$

دا چی د لته اصلي مات لاندې منفی دی، نو ځل د اړیکو نخښه باندې راګرځیدونی یا په څټ (چپه یا برعکس( تاسیر لري:

$$x+6 \le 6-2x \Leftrightarrow x \le 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty,0)$$

$$L_2 = [(-\infty,-6) \cup (3,\infty)] \cap (-\infty,0) = (-\infty,-6)....(mape(zirah)14.2b)$$

اوبیډیری $: L = L_1 \cup L_2 = [0,3) \cup (-\infty,-6) = (-\infty,-6) \cup [0,3)$

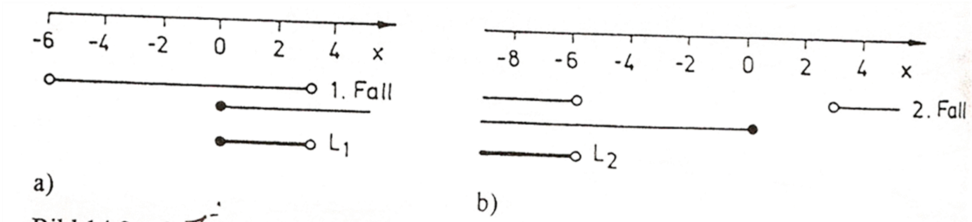



Bild 14.2 خاکره

د ځلوری برابرون یا مربع نامساوات حل لپاره کیدی شي د ځلوری ترم ځل انځورونی څخه کار واخستل شي.

بیلګه ۱۴ . ۵ : $-x^2+9x<0$

لومړی د ( ۱۴ . ۳ ) په پام کي نیولو سره د$x^2$ د مخ ( کیڼ لور) کمیز- یا منفي ځلو,وونوباندې ویشل کیږي:

$$x2 - (9/2)x + 2 > 0$$

ددې لپاره چی دا نامساوات د ځل په ځیر ولیکلی شو، د مربع مساواتو حل شمیرو، کومه چی د اړیکنخښي په ځاي د مساواتنخښی ځاي په ځاي کولووروسته منځ ته راځي.

$$x^2-(9/2)x+2=0 \Rightarrow x1=4 , x2=1/2$$

$$x^2 - \frac{9}{2}x + 2 > 0 \Leftrightarrow (x-4)(x-\frac{1}{2}) > 0 \Leftrightarrow (x > 4 \wedge x > \frac{1}{2}) \vee (x<4 \wedge x<\frac{1}{2})$$

$$\Leftrightarrow x>4 \vee x<\frac{1}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

له دې سره د ( ۱۴ . ۵ ) په کارولو د نابرابرون حل لاس ته راځي:

حلډېرى : $L=(-\infty;\frac{1}{2})\cup(4;\infty)=R\setminus\{\frac{1}{2};4\}$

په دې برسیره دې په یاد وي چې داډول نامساوات د مشهور مربع فنکشن د کرړې کښلو له مخې هم حل کیدی شي، په ځانګړې ډول هلته، چې اړوند مربع شکل رېیل حل نه لري٠ بالاخره پهپای کې د وېش د مخنښې راوړلو یوه بیلګه ښایو.

بیلګه ۱۴ . ۶ : $\frac{x+5}{3x-2}\leq 0,\ x\neq\frac{2}{3}$.

حل ( ۱۴,۸ ) ته ورته دی

$$\frac{x+5}{3x-2}\leq 0 \Leftrightarrow (x\geq -5 \wedge x<\frac{2}{3}) \vee (x\leq -5 \wedge x>\frac{2}{3}) \Leftrightarrow -5\leq x<\frac{2}{3}.$$

د سیستم حل ډېرى یا حل سټ: $L=[-5,\frac{2}{3})$.

## ۱۴ . ۱ . ۳ د نابرابرونسیستم د یوې ناپيژندونکی یا مجهولی یا اوښتونې سره

د یوه نابرابرون سیستم اوبیډیرى L د یوګونو نابرابرونونو اوبیډیریو غوڅډیرى ده . ګتور یا موخه وربه وي (دا هدفمند دی)، که نابرابرون لکه په یوه برابرونسیستم کی په نمره کړی شي ، ددې لپاره چی دا یوګوني ( دا په دې مانا چی یو یو ) اوبی کړی شو.

بیلګه ۱۴ . ۷

$$5-2x\geq 3-x$$
$$x^2-5x-6<0$$
$$I.5-2x\geq 3-x \Leftrightarrow x\leq 2 \Rightarrow L_I=(-\infty,2]$$
$$II.x^2-5x<0 \Leftrightarrow (+1)(x-6)<0 \Leftrightarrow -1<x<6 \Rightarrow L_{II}=(-1,6)$$
$$\Rightarrow L=L_I\cap L_{II}=(-\infty,2]\cap(-1,6)=(-1,2]$$

د سیستم اوبیډیرى: L دی

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

بیلگه ۱۴ . ۸

$$-2<\frac{4x-10}{x-1}<3,\ x\neq 1$$

د داسی نابرابرون څنځیرونه یا یو بل سره تړنه د دواړو نابرابرونونو د سیستم سره په یوه مانا دی:

$$I.\ -2<\frac{4x-10}{x-1}$$

$$II.\ \frac{4x-10}{x-1}<3$$

د همغه فاکتور( x-1) سره د حٔل اړیین یا ضروری حالت توپیریدنه کیدی شي د دواړو نابرابرونونو لپاره غبرگ د لیدوړ بنی سره وخیړل شي (مخ په وړاندې یووړ شي) :
(یادونه: په لاندي کې دې Fall(1) لومړې حالت او Fall(2) دویم حالت وي)

........................................$I$.........................................$II$

1. $Fall^{(1)}$, $x\in(1,\infty)$

$$-2x+2<4x-10 \qquad\qquad 4x-10<3x-3$$

$$\Leftrightarrow x>2 \Leftrightarrow x\in(2,\infty). \qquad\qquad \Leftrightarrow x<7 \Leftrightarrow x\in(-\infty,7).$$

$$L_{I_1}=(1,\infty)\cap(2,\infty)=(2,\infty) \qquad\qquad L_{II_1}=(1,\infty)\cap(-\infty,7)=(1,7)$$

2. $Fall^{(2)}$, $x\in(-\infty,1)$

$$-2x+2>4x-10 \qquad\qquad 4x-10>3x-3$$

$$\Leftrightarrow x<2 \Leftrightarrow x\in(-\infty,2). \qquad\qquad \Leftrightarrow x>7 \Leftrightarrow x\in(7,\infty).$$

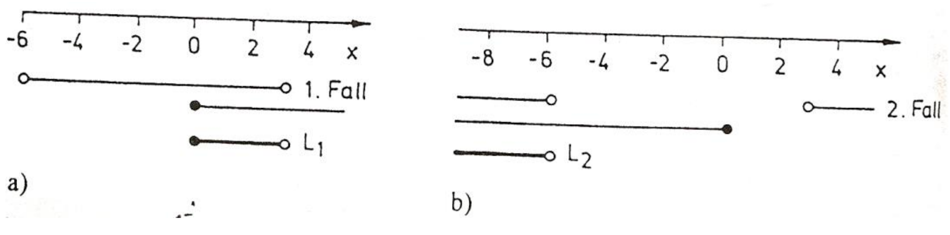
$$L_{I_2}=(-\infty,1)\cap(-\infty,2)=(-\infty,1) \qquad\qquad L_{II_2}=(-\infty,1)\cap(7,\infty)=\varnothing$$

$$L_I=L_{I_1}\cup L_{I_2}=(-\infty,1)\cup(2,\infty) \qquad\qquad L_{II}=L_{II_1}\cup L_{II_2}=(1,7)$$

د LI او LII غوښدیری جوړول بیرته کیدی شي چي د یوگونو اوبیدیریوگنوړانگه باندې د لیدنی شي )(خیره ۱۴ . ۳

د سیستم اوبیدیری:

$$L=L_I\cap L_{II}=(2,7)$$



(c) ketabton.com: The Digital Library



---

## ۱۴ . ۱ . ۴ نابرابرون د دوه اووښتونو یا مجهولو( ناپیژندونکو) سره

د دوه نابرابرون - یا نابرابرونسیستمونو اوبیډیرۍ د یوه اوبیډیرۍ $R^2 = R\times R$ برخډیرۍ ده، چی د هوارۍ په څیر د لیدنی کیدی شي. له دې امله ګرافیکي ښوونه د ټکو ډیري په ځیر په یوه کواوردینات سیستم کی مساعد دی. په دې برخه کی به موږ یواځي د لاندې ډول لاینیزنابرابرون::

$$ax + by + c > 0 \ ( \geq 0 \ , <0, \leq 0 \ ) \qquad (14.9)$$

واریابلو یا اوښتونو $x , y$ او ثابتو ځله وونو( ضریبونو)

$$a, b, c \in R$$

سره د شرایطو $a|=0 \vee b|=0$ سره سم تر څیړنی لاندې ونیسو.

که ددې اړیکو نخښه د برابرون سره بدله کړو نو د یوې کرښي برابرون $ax+by+c=0$ لاس ته راځي، کومه چی د پروتولاړ - یا کواوردینات سیستم په دوه نیمو هواورویا ستحو ویشي. د نابرابرونسیستم ( ۱۴ . ۹ ) ، چی ټیك په یوه له دې دوه هوارو کی باور لري، په راتلونکي بیلګه ۱۴ . ۹ کی ښوول کیږي. د اوبیډیرۍ په هواره کی د کرښونو یا کرښو کرښو کولو( د ډیرو کرښو کښلو) له لارې په نخښه کیدی شي. که په نابرابرون کي برابرون نه وي پریښوول شوي یعني برابرون په کی نه وي ځاي شوي، نو راتلونکی کرښه د اوبیډیرۍ پورې اړه نه لري او کیدی شي یواځي ټوټه ټوټه کرښی ( پرې لاین یا غوڅکرښو) په څیر په نخښه شي، لکه څنګه چی د ډیرۍ ګرافیکي ښوونه ورځنی یا بلده یا معمول ده. که برابرون ورپورې اړه ولري، نو کرښه د اوبیډیرۍ پورې اړه لرونکی برخی په څیر په نخښه کیږي.

بیلګه ۱۴ . ۹ :

$$2x+5y-10>0$$

که نابرابرون د $y$ په لور اوبی شي، نو دې ته ورته نابرابرون $y>-(2/5).x+2$ لاس ته راځي، کوم چی په یوه کره نیولي $x$ په روښانه توګه د لویو $y$ - ارزښتونو لپاره پوره دی نسبت ورته برابرون ته . له دې امله دهوارې چی د کرښې $y=-(2/5).x+2$ څخه پورتني نیمی هوارې ټول ټکی اوبیډیرۍ $L$ جوړوي ش که څیره ون کښل شوه، نو پل په پل داکار ګران د شمیرپوهنې مینه وال کولی شوي ۱۴ . ۴ )

دا په بیلګه ۱۴ . ۹ کی تشریح تګلار په نابرابرون ( ۱۴ . ۹ ) کی د مخه نیسي چي $b|=0$ دی. په ټولیزه توګه یا عمومي ډول دا متود د استعمال وړ دی، چی د کواوردینات سیستم

(c) ketabton.com: The Digital Library

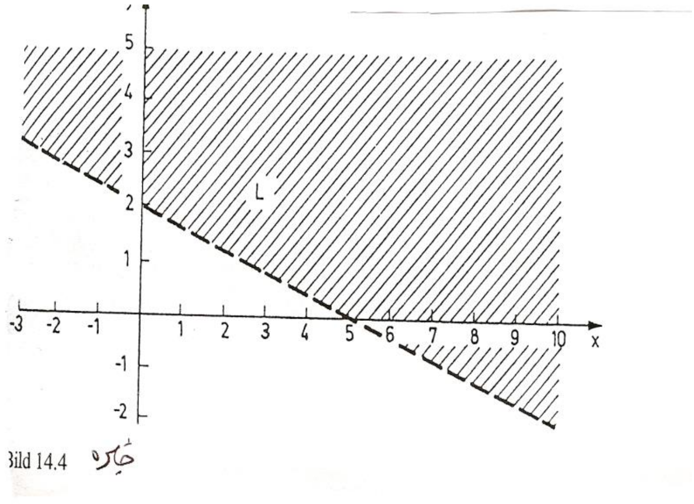


---

يوه په خوښه ټاکلي ټکی ځای په ځاي کولو کی ، چی په کرښه ax+bx+c=0 نه وي پروت٠

ازمايو چي ايا دا نابرابرون په اړونده نيمه هواره کی باور لري او يا نه.که ممکن وي نو د شميرنی د ساده والي له امله ځانګړی ټکی(0.0 ) ټاکو. دا په بيلګه ۱۴ . ۹ کی ددې ټکی بدلون وروسته نا ريښتيا وينا 10 - > 0 لاس ته راکوي او په دې ډول د اوبيډيرۍ پيداشوی ځاي ( ښه به پروتځاي وي خو د لنډونی له امله ځاي بسيا کوي) تصديقوي.
دلته يوه ځيره کښل کيږي دلته د اوښتونو پرځاي ګڼونه ږدو او بيا کرښه باسو٠ په کواوردينات کي د هوارې هغه برخه، چې اوبيډيرۍ ده کرښ کرښه کوو، دا په دې مانا، چې د کرښی هغه دکرښونو لور ته ابيډيرۍ ده٠

د يوه نابرابرونسيستم چی دوه مجهولی ولري، نو هر نابرابرون ځانله ځانله اوبی کيږی او بالاخر ه بي د يوګونو اوبيډيريو غوڅډيری نيول کيږي يا جوړيږي.



بيلګه ۱۴ . ۱۰:

I . $2x+y<6$

II. $4x-y>0$

(0,0 ) نابرابرون I پوره کوي او له دې امله په اړونده اوبيډيري LI کی پروت دی. دا چی په نابرابرون II کی د ( 0 , 0 ) سيده برابرون باوري دي، نو دلته بايد يو بل ټکی د بيلګي په توګه ( 0 , 1 ) کيښول شي، کوم چی د په ځنوالي يا تضاد په لور ځي، او له

(c) ketabton.com: The Digital Library



دې امله اوبیډیری LII کی نه دی پروت. ( ؟؟؟ش ۱۴ . ۵ الف( . ش ۱۴ . ۵ ب دسیستم حلډیری L ښايي چي له دوه نيمکرښو بنديږي يا له دوه نيم کرښومحدوديږي.
د وړانديزارزښت لري چی د تمرينونو په خپلواك كار كولو کی د غوښتونکو اوبيډيريو L د يوګونو نيمهوارو غوځډيری حتي تر غاړې پورې رنګينه يا كرښی كرښی راوكښل شي، چی په دې ډول یی يو كواورديناتسيستم د انځورولو لپاره بسيا وكړي .ش ۱۴ . ۵

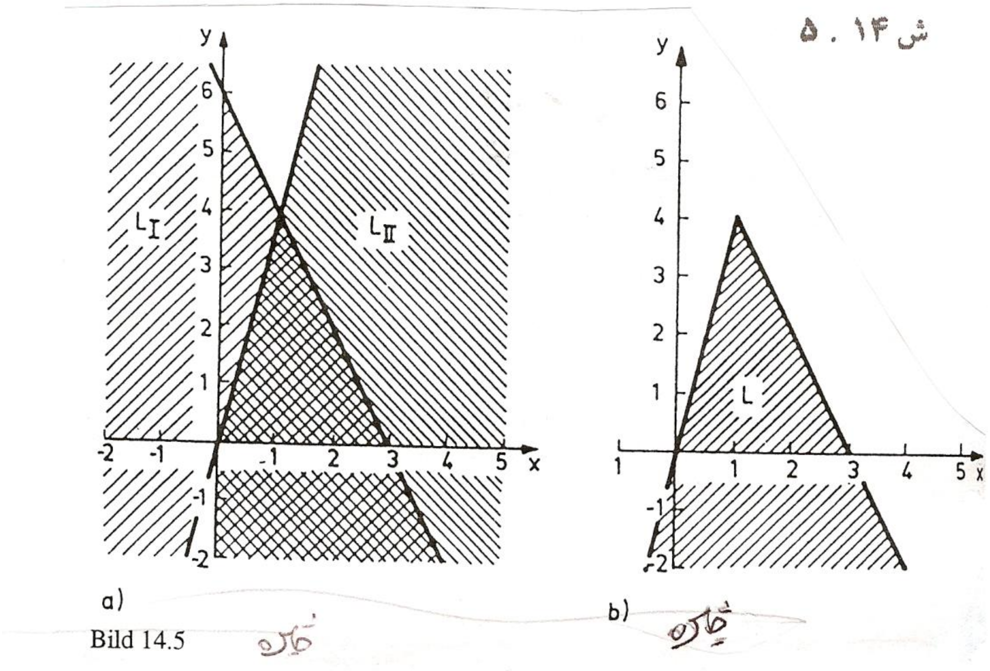


Bild 14.5

بيلګه ۱۴ . ۱۱:

I . $x-3y-6<0$ II. $-x+y+1<0$

III. $x-6<0$

دا اوبيډيری په ش ۱۴ . ۶ کی انځور ۱۲ كرښي
د پورته نابرابرونسيستم له مخې د هر نابرابرون لپاره کرښه کشل کيږي، په يوه كواورديناټ سيستم كې او بيا د هوارې هغه برخه، چې دريواړه كرو كې رابنده منهواره وي، هغه يې اوبی دی۰

(c) ketabton.com: The Digital Library



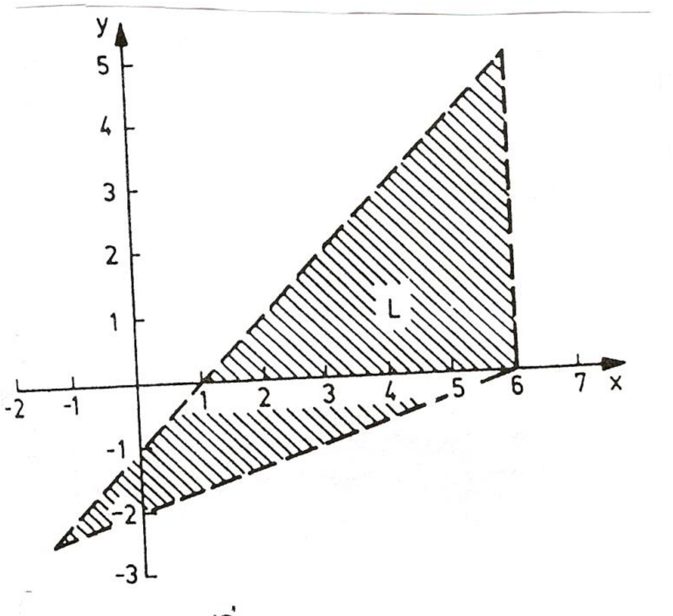



Bild 14.6 شکل

۱۴ . ۲ برابرون او نابرابرون د مطلقه ارزښتونو سره

۱۴ . ۲ ۱ د مطلقه ارزښتونو سره شمیرنه

که په یوه براورن یا نابرابرون کی د ترمونو مطلقه ارزښتونه د مجهولی په څیر رییلي واریابلي یا اووښتونی وي، نو د مجهول په لور له ابیولو د مخه باید یو د مطلقه ارزښت خپلواك فورم پیداشي. داچي له برخی ۳ څخه څرګنده ده چی د یوه رییل ګڼ مطلقه ارښت د

مخنخښی په واك په توپیري ډول جوړیږي نو د یوه ترم لیکل بي له مطلقه ارزښت، په پرینځیپ کی دوه حالتونه توپیریږي٠
داسی دئ:

$$T(x) = T(x) \quad \text{لپاره} \quad T(x) \geq 0 \quad \text{د} \qquad (14,10)$$

$$T(x) = -T(x) \quad \text{لپاره} \quad T(x) < 0 \quad \text{د} \qquad (14,10)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

که مطلقه ارزښت د صفر لوي یا په صفر برابر وي، نو کیدی شي چې د مطلقه ارزښت لرې پریښول شي، یا د نورو ترمونو سره په تړلو په نوکانو بدل شي. که مطلقه ارزښت متن منفي وي یعني د مطلقه ارزښت دننه، نو د مطلقه ارزښت نخښو په ځاي نوکان لیکل کیږي او دا نوکان بیا په ( ۱ -) ځلیږي. هغه ټکي چې په ( ۱۴ ، ۱۰ ) کی ورکړ شوي شرایط پوره کوي، نو پریښول کیږي چې ځانونه په قاعده کي په اینتروال وښایي، کوم چی دیسیونکت( پردي) برخه ډیری د اوښتونوچاپیریالونه دي، د کوم لپاره چی ( T(x ښوول شوی دی. د دواړو برخه چاپیریالونو ټولنډیري، باید بیرته د ټول هغه واریابلچاپیریال ورکړي، کوم چې د کنترول لپاره باید و ازمایل شي. په دې ځاي کی دې د ځله وونی او ویش مطلقه ارزښتونو لپاره قواعد ورکړ شي، چی د بدلون لپاره د ارزښت وړ دي.

که a اوb رییل ګڼونه وي ، نو لاندې باور لري کیږي۰

$$|a . b | = |a | . |b|$$

$$|a : b | = |a| : |b|$$ د $b |= 0$ لپاره

## ۱۴ . ۲ . ۲ برابرون د مطلقه ارزښت سره

د یوه مطلقه ارزښت مساوات حل لکه چی د حالت توپیرولوکی توضیح شوی ، باید په هر حالت کی وازمایل شي چی ایا دا اوبیونې په نیول شوي یا فرض شوي اینتروال کي پراته دی او که یواځي د اوبي په څیر ښکاریدونکي رامنځ ته کیږي . یوګوني اوبیوني اوبیډیري L کی رایوځاي کیږي. د مقایسي یا انډول یا پرتلی لپاره د برابرونونو هغه کرافیکي اوبیونې شونی یا ممکن دی، په کوم کی چی هره لور یا اړخ د یو فنکشن تنظیم عملیي راوړل کیږي یا رانیول کیږي او په x , y - پروت ولاړ – یا کواوردینات سیستم

کی انځوریږي .

د دواړو فنکشنونو غوځټکي x - کواوردیناتونه په همدې وخت کی د برابرونونو اوبیونې دي.

بیلګه ۱۴ . ۱۲:

$$|x+1|=(x/2)+2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

باور لري:

$(x+1) \geq 0$ د $x > -1$ لپاره

$(x+1) < 0$ د $x < -1$ لپاره

(14,11) د $x \geq -1$ لپاره $|x+1| = x+1$

(14,11) د $x < -1$ لپاره $|x+1| = -x-1$

لومړی حالت

$$x \in [-1, \infty)$$

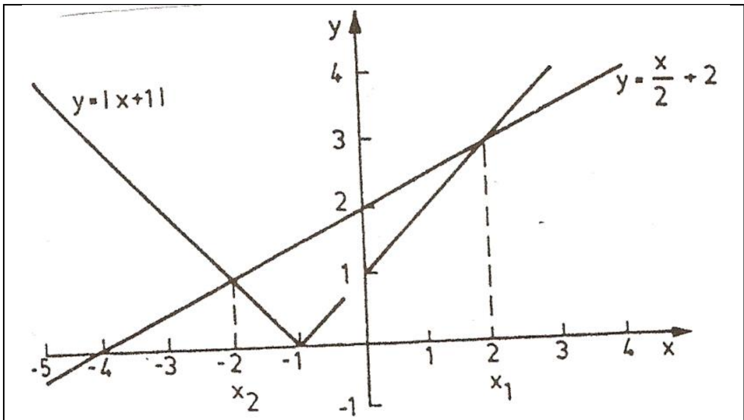
$$|x+1| = x/2+2 \Leftrightarrow x+1 = x/2+2 \Leftrightarrow x = 2 \in [-1, \infty] \Rightarrow x_1 = 2$$

دوم حالت:

$$x \in [-1, \infty)$$

$$|x+1| = x/2+2 \Leftrightarrow -x-1 = x/2+2 \Leftrightarrow x = -2 \in [-\infty, -1] \Rightarrow x_2 = -2$$

د برابرون یا مساوات اوبیډیری $L = \{ -2 ,2\}$




په داسی حال کی چی د ښی اړخ د ورکړشوي برابرون، $y = x/2 + 2$ , ګرافیکی انځورونه، په څرګند ډول یوه کرښه ده، کینې اړخ، $y = |x+1|$ د ( ۱۴ . ۱۱ ) سره د دوه نیموکرښو په څیر منځ ته راځي.

اوبی : کیدی شي په څ. ۱۴ . ۷ کی ولوستل شي

که یو برانرون د لاینیزو ترمونو زیات مطلقه ارزښتونه ولري، نو شوونې یا مساعد ده چی لومړی د هغه ګنوړانګه په هغه ځاي کی وویشل شي، چیرته چی د ترمونو مخنخښه د مطلقه ارزښت په دننه کی تغیر خوري او د هر یوه مطلقه ارزښت څرګندونه په داسی لاس ته راغلو برخه اینتروالونو کی د لیدلو وړ یوځاي راټول کړي.

بیلګه ۱۴ . ۱۳ :

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

|1- x|-|2x+3|=1

د ( ۱۴ . ۱۰ ) پسی لرو:

د x<1 لپاره |1-x|=1-x

د x>1 لپاره =-1+x

او( لاندې او پورته هم لومړی له کیڼ وښی لو رته لوستل کیږي

د x>-3/2 لپاره |2x+3|=2x+3

د x<-3/2 لپاره =-1x-3

یوځاي راټول یا د ګډ فرمولولو لاندې تر پام یا تر تظر

| | x<-3/2 | -3/2<x <1 | x>1 |
|---|---|---|---|
| \|-1+x\| | 1-x | 1-x | −1+x |
| \|2x+3\| | 2x+3 | -2x-3 | \|2x+3\| |

له دې امله د برابرون اوبې کی درې حالتونه توپیروو. برسره پر دې باید کمیزه – یا منفي نخښه د دویم مطلقه ارزښت د مخه په پام کی ونیول شي:

لمړی حالت:

$$x \in (-\infty, -3/2)$$

$$1 - x - (-2x - 3) = 1 \Leftrightarrow x + 4 = 1 \Leftrightarrow x = -3 \in (-\infty. -3/2) \Rightarrow x_1 = -3$$

دم حالت:

$$x \in [-3/2, 1]$$

$$1 - x - (2x + 3) = 1 \Leftrightarrow -3x - 2 = 1 \Leftrightarrow x = -1 \in (-\infty. -3/2) \Rightarrow x_2 = -1$$

دریم حالت:

$$x \in (1, \infty)$$

$$-1 + x - (2x + 3) = 1 \Leftrightarrow -x - 4 = 1 \Leftrightarrow x = -5 \notin (1, \infty)$$

په وروستی حالت کی شمیرل شوی ارزښت د نیونی سره په څټ یا تضادکی دی، چی x3 = -5

یواځي ښکارندډوله اوبی دی( دا په دې مانا چی یواځی د اوبي په څیر یا - غوندې ښکاریږي) .

اوبډیری : L = {-3,-1}

د ښکارندډوله اوبي منځ ته راتګ کیدی شي، چی د ګراف اوبي – یا حللارې له لارې څرګند

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

شي. د کيڼ اړخ یا لور مطلقه ارزښت خپلواك یا ازاد ښودل کیدی شی چی توته توته د مخه تيرشوي شميرنو په بوګونوحالتونو کی لاس ته راځی. له دې امله تعقيبيږي:

د $x > -3/2$ لپاره $=x+4$

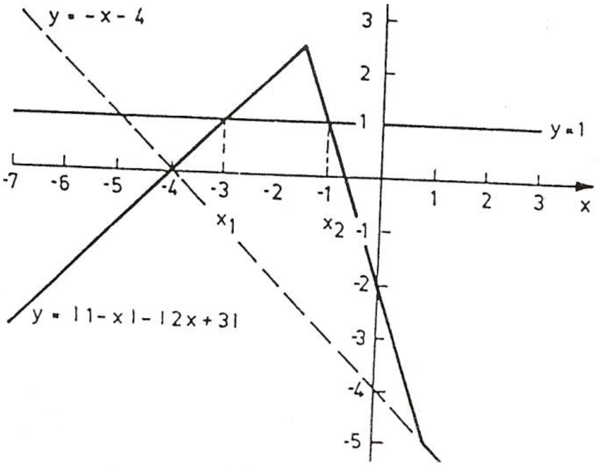
د $-2/3 < x < 1$ لپاره $|1-x|-|2x+3|=-3x-2$

د $x > 1$ لپاره $=-x-4$

ښی لور همغه - یا ثابت فنکشن $y = 1$ دی . د مخه شميرل شوو اوبيونو پرتلې له پرتلې مقايسي ځيره شته، خو زما په ستونځو ګرانلوستونکی اوس بلد دي ۱۴ . ۸ ښايي، چی دواړه کرښې ريښتيا د $-3/2 > x$

او $-3/2 < x < 1$-لپاره ربښتيا هره يوه بله يوځل پرې کوي، مګر د $x > 1$ لپاره يو بل نه پريکوي. په دريم حالت کی د اړوند کرښی توتی $y = -x-4$ د اوږدوالی پرتکی راکوي، د کرښي $y = 1$ د حل په ځير حل د نيول شوي اينتراوال د باندې دی ځيره ( شايد داځيره هم ځيره نه شي، کۀ کرانو مينه والو داکار پخپله وکړ ، نو نور به هم ګتور به وي)ش . ۱۴ . ۸

دلته هغه ځيره بايد ريشی او يا راغلی وي، يا راغلې وی٠




که د مطلقه ازښت نخښنی په يوه ځلوري - يا مربع ترم کی له منځه وړل کيږي، نو کيدی شي چی د مخنخښني غوښتل شوي ځيرنی چي په برخه ۱۴. ۱ . ۲ کی تر ځيړني نيول شوې د مربع نامساوات د حل متود ګټه ترې واخستل شي.) بيلګه ۱۴ . ۵ دې مقايسه شي )

بيلګه ۱۴ . ۱۴:

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

$|x^2 - 6x + 5| = 3$

د $x^2-6x+5>0 \Leftrightarrow (x-1)(x-5)>0 \Leftrightarrow x<1 \vee x>5$

او $x^2-6x+5<0 \Leftrightarrow (x-1)(x-5)<0 \Leftrightarrow 1<x<5$

سره لاس ته راځي

(14,12) د $x<1 \vee x>5$ لپاره $|x^2-6x+5|=x^2-6x+5$

(14,12) د $1<x<5$ لپاره $|x^2-6x+5|=-x^2+6x-5$

لومړی حالت: $x \in (-\infty, -1] \cup [5, \infty)$

$x^2-6x+5=3 \Leftrightarrow x^2-6x+2 = 0,$

$L \Rightarrow x_1=3+\sqrt{7}=5{,}65 \in [5, \infty)$ , $x_2= 3 - \sqrt{7} = 0{,}35 \in (-oe , 1]$

دوم حالت $x \in (1,5)$ :

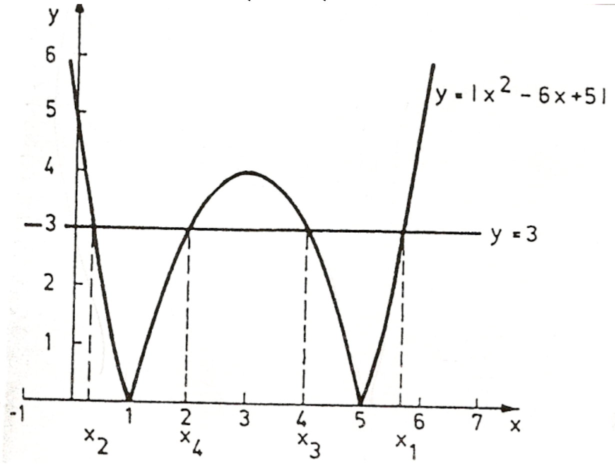
$-x^2+6x-5=3 \Leftrightarrow x^2-6x+8=0,$

$L \Rightarrow x_3=4 \in (1, 5)$ , $x_4= 2 \in (1, 5)$

پام : که چیرې حل یا اوبی مو نه وو لیکلی او L مو لیکلی وو ، نو دا د اوبی په مانا دی المانی Lösung ورته وايي چی لند په L لیکل کیږي .

اوبیدیری: $L = \{3 - \sqrt{7}); 2;4;3;3+\sqrt{7}\}$

شیره ۱۴ . ۹ د ګراف له لاری اوبی ښایي. کیڼ لور $y=|x^2-6x+5|$ د ( ۱۴ . ۱۲ ) له امله د پارابوللیندو څخه یوځاي کیږي. شیره ۱۴ . ۹




شیره ۱۴. ۹

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

په ټولیزه توګه د یوه برابرون اوبې کې ، په کوم کې چې n مختلف ارزښتوییني یا - افادې یعني $|T_i(x)|$ , $i = 1,2,...n$ منځ ته راځي، $2^n$ حالتونه یو له بل توپیر کیږي. دا د هغه کیدونکو کیدنو یا ممکن امکاناتو ګڼون یا تعداد دئ ، کوم چې موجود دی ، چې د ترم $T_i(x)$ د تیپ یا بڼې وي چې یا

$T_i(x) > 0$ او یا $T_i(x) < 0$ راکوي، یعنې د دوه توکو د واریيشن امکاناتو ټولګې ته ( پرتله ۱۰ . ۴ . ۲ برخه) د ارزښت نخښې د له منځه وړلو له امله د ( ۱۴ ، ۱۰ )
قاعدې سره سم $2^n$ برابرونونه منځ ته راځي، چې په ټولیزه یا عمومي توګه دې اوبیونې $x_1,x_2,x_3,......$ ولرودئ شي. یوائې دا باید وازمایل شي ، چې ایا دا اوبې xi پیلبرابرون پوره کوي که نه.
د دې ټولیزې تګلار پسې موږ په بیلګې ۱۴ . ۱۳ کې د
$T1(x)=1-x, T2=(2x+1)$
سره، په لاندې $2^2 = 4$ حالتونو باندې کار کوو:

1. $T_1(x) \geq 0 \wedge T_2(x) \geq 0$: $(1-x)-(2x+3)=1 \Rightarrow x_1=-1.$
2. $T_1(x) \geq 0 \wedge T_2(x) < 0$: $(1-x)+(2x+3)=1 \Rightarrow x_2=-3.$
3. $T_1(x) < 0 \wedge T_2(x) \geq 0$: $-(1-x)-(2x+3)=1 \Rightarrow x_3=-5.$
4. $T_1(x) < 0 \wedge T_2(x) < 0$: $-(1-x)+(2x+3)=1 \Rightarrow x_4=-\frac{1}{3}.$

پیلبرابرون د $x1=1, x2 = -3$ لپاره پوره دي مګر د x3 او x4 لپاره پوره نه دي.

## ۱۴ . ۲ . ۳ نابرابرون دمطلقه ارزښت سره

که په نابرابرونو کې مطلقه ارزښتونه منځ ته راشي، نو داسې دي لکه په برخه. ۱۴ .۲ ۲ کې د حالتونو توپیر سره ونیسې یعني د کارپیل په وکړي، کوم چې بي له مطلقه ارزښتنخښو د انځوروني لپاره ضرر یا غوښتونکي دي. د واریابلو یا اووښتونکو اړونده برخه چاپیریال په دننه بیا مختلف نابرابرون ۱۴ .۱ سره سم حل کوو، د کوم سره چې بیرته د حالت توپیر اړیین دئ

بیلګه ۱۴ . ۱۵ : $|7-3x|>2$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

لومړی حالت:

$$7-3x \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 7/3]$$
$$7-3x \geq 2 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 5/3]$$
$$L_1 = (-\infty, 7/3] \cap (-\infty, 5/3) = (-\infty, 5/3]$$

دویم حالت:

$$7-3x < 0 \Leftrightarrow x \in (7/3, \infty)$$
$$-7+3x \geq 2 \Leftrightarrow x \in [, \infty)$$
$$L_2 = (7/3, \infty) \cap [3, \infty) = [3, \infty)$$
$$\Rightarrow$$
$$L = L_1 \cup L_2 = (-\infty, 5/3] \cup [3, \infty) = R \setminus (5/3, 3)$$

په پورته کې د دې د غشي څوکه له پامه کې نه راړل کيږي:

بيلګه ۱۴ . ۱۶: |x-5|<|x+1|

د يوګونو ترمونو انځورونه بي له ارزښتنخښی:

د x > 5 لپاره |x-5|= x–5

د x < 5 لپاره |x-5|=-x+5

او

د x ≥ 1 لپاره |x+1|=x+1

د x ≤ -1 لپاره |x + 1| = -x - 1

په يوه ليد وږ توګه په لاندې توګه راټوليګي رايوځاي کيږي يا راغونديږي :

| | X > -1 | -1≤ x<5 | x≥ 5 |
|---|---|---|---|
| \|x-5\| = | -x+5 | -x+5 | x-5 |
| \|x+1\|= | -x-1 | x+1 | x+1 |

لومړی حالت: $x \in (-\infty, -1)$

|x-5|<|x+1|<=>-x+5<-x-1 <=> 0<-6

د هر x<-1 نابرابرون يوې ناريښتيا وينا ته لاربښودوي، چی په دې حالت کی کوم اوبه وي ، دا په دې مانا چي: L1 = Ø

دوم حالات $x \in [-1, 5)$ :

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

|x-5|<|x+1|<=> -x+5<-x-1 <=> x>2<=>

$x \in [2, \infty]$

$L_2 = [-1, 5) \cap (2, 5) = (2, 5)$

دریم حالت: $x \in [5, \infty)$

|x-5| < |x + 1| <=> x - 5 < x + 1 <=> 0<6

هر x ≥ 5 نابرابرون پوره کوي، دا په دې مانا چې: L3 = [5 , oe)

حلډیری: $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = (2, 5) \cup ([5, \infty) = (2, \infty)$

بیلګه ۱۴ . ۱۷: |x²-4x-21|<24

د x²-4x-21≥0 <=> x<-3 v x≥7

او x²-4x-21<0 <=> -3<x<7

څخه لاس ته راځي:

د x<-3 v x≥7 لپاره |x²-4x-21|=x²-4x-21

د -3<x<7 لپاره = -x²+4x+21

لومړی حالت: $x \in (-\infty, -3] \cup [7, \infty)$

|x²-4x-21|<24 <=> x²-4x-21<24 <=> x²-4x-45<0

<=> -5 < x < 9 <=>

x ∈ (-5,9)

$L_1 = [(-\infty, -3] \cup [7, \infty)] \cap (-5, 9) = (-5, -3] \cup [7, 9)$

دویم حالت: $x \in (-3, 7)$

|x²-4x-21|<24 <=> -x²+4x+21<24 <=> x²-4x+3>0

<=> x < 1 v x > 3 <=>

$x \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty),$

$L_2 = (-3, 7) \cap [(-\infty, 1)] \cup (3, \infty) = (-3, 1) \cup (3, 7)$

اوبیډیری:

$L = L_1 \cup L_2 = (-5, 1) \cup (3, 9)$

دا بیلګې د دې درس لپاره بسیا کوي، دا بیا دلته هم تکرار لیکم، که په کومه موضوع کې ګرانو لوستونکو څه زیات غوښتل هغه هم په پام کې نیول کیږي او کړی شو، چې په ګډه هره موضوع وغزوو۰

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

په لاندې کې به په یوه بیلګه کې داسې نامساوات وڅیړو، په کومه کې چې مجهوله په مطلقه ارزښت افاده شوي وي او هم مات لاندې کې منځ ته راشي.

بیلګه ۱۴ . ۱۸: $|1+2x| / (1-x) < 1 , x \neq 1$

د ( ۱۴ ، ۱۰) له مخې د مطلقه ارزښت له منځه وړلاو د مات لاندې سره د نابرابرون ځله ونه د ( ۱۴ . ۲ ) او ( ۱۴ . ۳ ) له مخې په هر وخت کې د همغه ترم مخنخښه باید په پام کې ونیول شي. باور لري یا صدق کوي:

د $x \geq -1/2$ لپاره $|1+2x| = 1+2x$

د $x<-1/2$ لپاره $|1+2x|=-1-2x$

او

د $x < 1$ لپاره $(1-x)>0$

د $x > 1$ لپاره $(1-x) < 0$

دلته هم په همغه دوه تیریدونکو ځایونو کې ګنوړانګه سره بیله یا ټوټه کیږي، داسې چې په راتلونکو ګڼلو کې یا ځانیزه توګه درې حالتونه یو له بل توپیریږي.

| | X<-1/2 | -1≤x<1 | x>1 |
|---|---|---|---|
| \|1+2x\| | -1-2x> | 1+2x | 1+2x |
| =1-x | >0 | >0 | <0 |

لومړی حالت: $x \in ( -oe, -1/2)$

$$-1-2x \leq 1-x \iff x \geq -2 \iff x \in [-2 , oe)$$

$$L_1 = (-oe, -1/2) \cap [ -2 , oe ) = [-2 , -1/2)$$

دویم حالت $x \in [ - 1/2,1)$ :

$$1+2x < 1- x \iff x<o \iff x \in (-oe,0]$$

$$L_2 = [ -1/2 ,1] \cap (-oe,0] = [-1/2, 0)$$

دریم حالت:

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

$x \in (1, oe)$

$1+2x \geq 1 - x \iff x \geq 0 \iff x \in [0, oe)$

$L_3 = (1, oe) \cap [0, oe) = (1, oe)$

د حلونو سټ(اوبیډیری):

$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = [-2;0] \cup (1,oe)$

د دوه ناپیژندونکو سره د یوه نامساوات ارزښت حلډیري پیدا کولو لپاره هم باید لمړی ارزښت له منځه ولاړ شي. مساوات ( ۱۴ . ۱۰ ) ته ورته د واریابلو یا اوښتونکو x او y سره، د یوه لایني ترم ارزښت سره، باور لري:

(14,13) د $ax+by+c \geq 0$ لپاره $= ax+by+c$

( ۱۴ ، ۱۳) د $ax+by+c < 0$ لپاره $|ax+by+c| = -(ax+by+c$

د نیونو یا فرضیو سره $a \neq 0 \ v \ b \neq 0$

دواړه ښي لیکل شوي شرطونه په برخه ۱۴ . ۱ . ۴ کی د کارول شوې بڼی(۱۴ . ۹ ) نابرابرون
هم کارول شوي . له دې امله باید یو نامساوات د ارزښت افادي ( ۱۴ . ۹ ) سره، د کرښی $ax + by + c = 0$ له لارې ورکړ شوې، یو له بل بیلی یا جدا، د x,y-هوارې نیمه هوارې یو له بل بیلی اوبی کړی شي.

بیلګه ۱۴ . ۱۹:

$|x-y+1| > x-2x-4$

د ( ۱۴ . ۱۳ ) اړیکو باور لري :

د $-x-y+1 \geq 0$ لپاره $|-x-y+1| = -x-y+1$

د $x-y+1 < 0$ لپاره $= x + y - 1$

لومړی حالت: $-x - y + 1 > 0$

$|-x-y+1| > x-2y-4 \iff -x-y+1 > x-2y-4 \iff -2x+y+5 > 0$

$L1 = \{(x,y) | -x-y+1 \geq 0, -2x+y+5 > 0\}$

دوم حالت: $x-y+1 < 0$

$|-x-y+1| > x-2y-4 \iff x+y-1 > x-2y-4 \iff 3y+3 > 0 \iff y < -1$

(c) ketabton.com: The Digital Library



$L2=\{(x;y)|-x-y+1<0 ,y>-1\}$

له دې سره L1 او L2 د اوبیډیری دوه نابرابرونونو غوڅډیری ده او کیدی شي، لکه ځنګه یو نابرابرون د یوه ګراف سره انځور شي ( ځیره دلته هم په پوښتنه کې ده ۱۴ . ۱۰ الف ) اوبیډیری بیرته د ورکړ شوو نابرابرونونو برخ اوبیډیریو ټولنډیری ده۰ ( ځیره ۱۴ . ۱۰ ب ) دلته هم همغه د مخه پام لرنه)۰

که په یوه نابرابرون کی دوه ارزښت افادې یا – وییني د ( ۱۴ . ۱۳ ) بڼی رامنځ ته شي، نو د ارزښت ترپام نیولو سره ځلور حالتونه یو له بل توپیر کیدی شي.

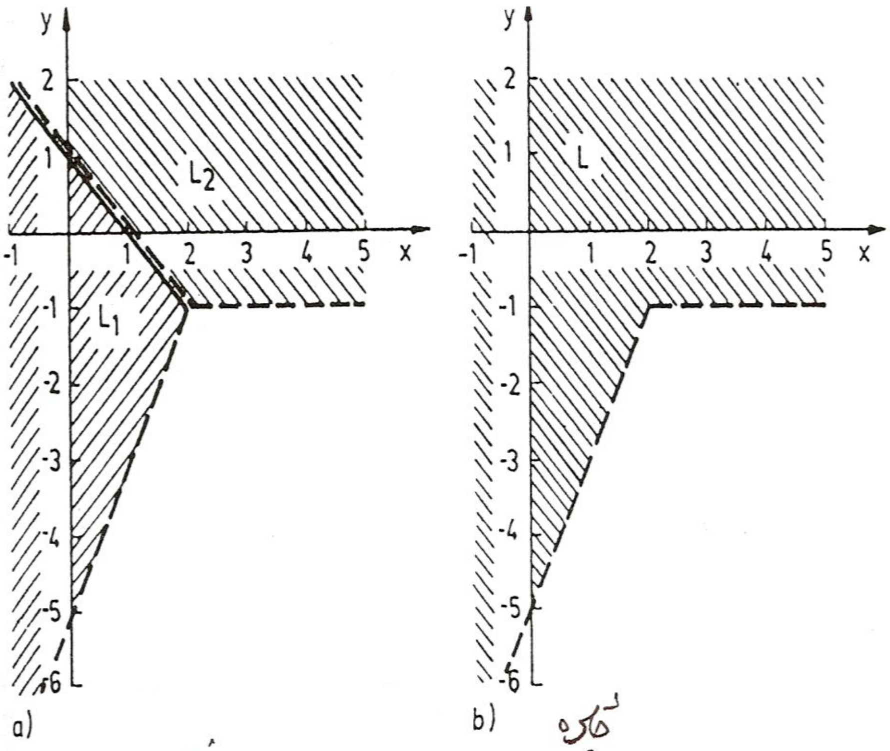



Bild 14.10 ځاره

تمرینونه

(c) ketabton.com: The Digital Library



لاندې نامساواتو حلډېرۍ پیدا کړئ

1. a) $8x-3<2x+9$  b) $5-7x\le 3x-10$

c) $\frac{x}{2}-\frac{2}{3}>\frac{1}{2}+\frac{x}{9}$  d) $3(3x-2)\ge 4(3-2x)$

e) $\frac{8x-5}{5}\le\frac{2x+5}{3}$  f) $\frac{3}{4}-\frac{2}{3}x>\frac{5}{4}x+\frac{1}{6}$

g) $\frac{8}{9}+6x\ge 2(\frac{5}{6}+3x)$  h) $\frac{1}{3}(\frac{x}{8}-6)<\frac{x}{6}-\frac{x}{8}+1$

2. a) $(3x+1)(2x-1)<(5x-3)(2x-1)$

b) $(8x-9)(3x+2)\ge(2+7x)(2+3x)$

c) $(7x-3)(5-7x)>(3-7x)(5x+3)$

d) $(5+2x)(7-5x)\le(10+4x)(2-3x)$

e) $x^2-x-6\le 2x+4$  f) $x^2+5x-6>3-3x$

g) $x^2+3x\ge -2x-6$  h) $x^2-4x+4<4x-8$

3. a) $\frac{3}{2x-4}\le 2$  b) $\frac{3x-4}{2-3x}\ge 4$

c) $\frac{2x-2}{2x+2}<2$  d) $\frac{5x+3}{x}<-2$

e) $\frac{4x+1}{3x-2}>5$  f) $\frac{9-3x}{x-3}>-3$

g) $\frac{4x+6}{2x+3}<3$  h) $\frac{3(4x-1)}{x-1}\ge 12-\frac{2(4x-5)}{x-1}$

4. a) $\frac{3}{4x-4}\le\frac{2}{x-6}$  b) $\frac{1}{5-3x}>\frac{1}{5x+4}$

c) $\frac{x+1}{x-3}<\frac{x-1}{x+2}$  d) $\frac{4x-3}{2x+1}\le\frac{2x+3}{x+2}$

e) $\frac{2x-1}{2x+1}+\frac{3x+1}{x-2}>4$  f) $\frac{x-3}{1-6x}-\frac{2x+1}{4x+3}\ge-\frac{2}{3}$

g) $\frac{2x+1}{2x-2}+\frac{2x-3}{3x-3}\ge 1$  h) $\frac{2-5x}{3-x}-\frac{2-6x}{1-3x}<\frac{3}{8}\cdot 27^{\log_3 2}$

5. a) $(2x-3)(3x-2)<0$  b) $(x+3)(7-x)\le 0$

c) $x^2+4x+3\ge 0$  d) $x^2-8x+7\le 0$

e) $x^2+4x+5<0$  f) $x^2-6x+10>0$

(c) ketabton.com: The Digital Library



g) $x^2 - 2x + 1 > \frac{5}{2}x - 1$ h) $2x^2 - 3x - 3 < 3(x - 1)$

6. a) $(x^2 - 6x + 5)(x^2 + 1) < 0$ b) $(x^2 - 4x + 5)(x^2 + 1) \le 0$

c) $(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 4) > 0$ d) $(9 - x^2)(x^2 + 3x + 2) \ge 0$

e) $(x^2 + 4x - 5)(x^2 - 4) > 0$ f) $2x^4 - x^3 + 10x^2 - 5x > 0$

g) $-x^3 - 3x^2 + 16x + 48 \le 0$ h) $\frac{x^3}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}\,x^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}x + \sqrt{2} < 0$

7. a) $\frac{x+4}{x+3} > 0$ b) $\frac{x+3}{x-7} < 0$

c) $\frac{2x+3}{3x-4} \le 0$ d) $\frac{x-2}{5x+1} \ge 0$

e) $\frac{6+9x}{4+6x} < 0$ f) $\frac{2x-1}{8x-4} > 0$

g) $\frac{3x-12}{x^2-4x} \ge 0$ h) $\frac{x^2-25}{2x+10} \le 0$

8. a) $x - 8 + \frac{7}{x} < 0$ b) $x + 3 - \frac{4}{x+3} > 0$

c) $8(x - 2) \ge \frac{20}{x + 1} + 3(x - 7)$ d) $\frac{3x-24}{4} - (2x - 6) > -\frac{5}{x}$

د لاندې نامساواتسیستمونو حل ډېرۍ وټاکئ

9. a) $2 + x \ge 2x - 7$
$5(x - 3) \ge 2(x - 3)$

b) $x + 6 < 14 - 3x$
$6 + 7x \ge 3x + 5$

c) $\frac{2}{3} - \frac{x}{2} > \frac{x}{3} + \frac{1}{6}$
$\frac{1}{2} + \frac{3}{4}x < \frac{8-x}{3}$

d) $x + \frac{1}{3} \le 2x - \frac{7}{6}$
$5(x - \frac{3}{2}) \le 2x - 3$

10. a) $x^2 - 3x < 0$
$2(x + 2) < 4x - 1$

b) $x^2 + 6x + 8 < 0$
$2(x + 2) > x + 3$

c) $x^2 - 9 < 0$
$x + 2 > 2(x - 1)$

d) $x^2 - 3x + 3 > 0$
$4(x - 1) < 2(x + 1)$

11. a) $x^2 - 4x - 5 \le 0$
$x^2 + 6x - 16 < 0$

b) $x^2 + 2x - 8 < 0$
$x^2 - 3x - 4 > 0$

c) $x^2 - 5x > 0$
$x^2 - 9 > 0$

d) $x^2 - 6x + 5 < 0$
$x^2 + 8x + 15 < 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library



12. a) $3x + 2 > 2x + 1 > 3(x - 4)$ b) $-1 < \frac{7x-3}{8x-5} < 1$

c) $2 < \frac{5x+1}{2x-1} < 5$ d) $1 < \frac{x^2+4x+5}{x+1} < 4$

13. a) $3 - x < 2 - 4x$
$x + 3 < \frac{1}{2}(x+1)$
$\frac{x}{2} > x + \frac{1}{2}$

b) $x + 5 > \frac{7}{2}x + \frac{3}{2}$
$4(x-1) < 13 - \frac{1}{4}x$
$2x - 1 > x + 6$

د لاندې نامساواتو او همداسې د نامساواتسیستمونو حاڼېرې په کارتیزې کواوردینات – یاپروتولاړ سیستم کې ګرافیکې انځور کړۍ.

14. a) $y \geq -\frac{3}{2}x + 3$ b) $y < -\frac{2}{3}x + 2$

c) $x < 2y + 2$ d) $x > -y + 3$

e) $4x - 5y > 12$ f) $-3x - 8y \leq 24$

g) $2(y - 3) \leq 6(x - 1)$ h) $5x - y + 2 > 3y - 3x - 10$

15. a) $2x + 3y > -6$
$x - y < 2$

b) $3x - y > 3$
$x + y > 4$

c) $x > 1$
$x + 2y < 4$
$y + 3 > x$

d) $x - 4y - 6 \leq 0$
$2x + y - 3 \leq 0$
$y - 5 \leq 0$

16. a) $-2 < x + y < 2$
$-2 < x - y < 2$

b) $x > 2$
$-3 < y < 2 + x$
$x + y < 5$

c) $x^2 - y^2 \leq 0$ d) $(2x + y + 1)(3y - x - 1) > 0$

د لاندې نامساواتو حاڼېرې د شمیرلو او همداسې ګرافیکي لارې پیداکړی.

17. a) $|x - 3| = 5$ b) $|x + 2| = 7$

c) $|1 - \frac{x}{2}| = x + \frac{5}{2}$ d) $|x + 3| = |3x - 4|$

e) $|x - 4| = |2x + 3|$ f) $|9 - 3x| - |2x - 1| = 4 - 2x$

g) $|2 - 3x| - |x + 1| + |2x + 2| = 3$ h) $|x - 3| - |3x - 4| + |2x + 1| = 6$

18. a) $|x^2 - 2x - 8| = 7$ b) $|8 - 2x^2| = 6$

(c) ketabton.com: The Digital Library



c) $|2x - x^2| = 8$ d) $|x^2 + 6x + 5| = 5$

e) $|x^2 - 4x + 3| = 1$ f) $|x^2 - 2x - 3| = 1$

g) $|4x^2 + 4x + 4| = 3$ h) $|x^2 - 3x + 7| = 4$

19. a) $\left|\frac{2x+4}{x-3}\right| = 1$ b) $\left|\frac{2x-4}{x+3}\right| = 2$

د لاندې نامساتو حلډېرۍ پیدا کړئ

20. a) $|x - 2| < 3$ b) $|2 - 4x| \geq 1$

c) $2 - |1 - x| \geq 1 + x$ d) $|2x - 3| < x + 3$

e) $|3x - 5| > 2|x + 2|$ f) $|3x + 3| \geq \left|\frac{1}{2}x - 1\right|$

g) $|x - 4| + |2 - x| \leq 2$ h) $|3 - x| < 2 - |x - 5|$

21. a) $|x^2 + 2x - 3| \leq 12$ b) $|x^2 - 6x + 8| \geq 3$

c) $|x^2 + 4x - 5| > 2$ d) $|15 + 2x - x^2| < 7$

e) $|x^2 - 6x + 11| < 1$ f) $|x^2 + 4x + 7| > 2$

g) $|3 + 6x + 3x^2| > 0$ h) $|x^2 + 4x| < 4$

22. a) $\left|\frac{x+3}{1-x}\right| > 3$ b) $\left|\frac{1-4x}{2-x}\right| > 4$

c) $\frac{2x+3}{|x+4|} \leq 1$ d) $\frac{\frac{2}{3}x - \frac{3}{2}}{\left|\frac{3}{4} + \frac{x}{2}\right|} \leq \frac{5}{6}$

e) $\frac{|3x-2|}{x+2} \geq 2$ f) $\frac{|x-1|}{2x+2} \geq 1$

د
لاندې نامساواتو حلډېرۍ په یوه په یوه کواوردیناتسیستم کې انځور کړئ او ا نځور یې وکاږئ

23. a) $x + y < |3x + 2|$ b) $y + |x + 2| \leq 4$

c) $x + |y - 2| < 3$ d) $|2x + y - 3| \geq 2y - 3x + 4$

e) $|x + 3| + |y - 5| \leq 3$ f) $|x + y - 2| > |y - x + 1|$

g) $|x + y + 1| \leq |x - y - 1|$ h) $|x - y| > |x - 2y - 2|$

(c) ketabton.com: The Digital Library

# ۱۵ فنکشنونه( بلواك يا تابع)

## ۱۵ . ۱ د فنکشن کلیمه او د فنکشن انځورونه:

غواړم چی ددې برخی په پیل کی دی کلیمي ته د لوستونکو پام راوګرځوم: د فنکشن کلیمه کله د یواځنی ځیرونی، چی په هندسه کی خورا ډیره کارول کیږي یا استعمالیږي ، کله د تابع(بلواك) او بیا زیاته د فنکشن په نامه څموږ په دې کار کی بلل شوې چی موږ ورسره تراوسه د تابع تر نامه لاندې هم بلد یو، څما په اند یا فکر که دا موږ بلواك وبولو، نو هدفمند به مو نومولی وي. په لاندې کي به وګور چی خپلواکی او بلواکی ناپیوندونکی څموږ د ځیړلو متن جوړوی

پیژند ۱۵ . ۱:

د یوې ریيلی واریابلی ریيل ارزښته فنکشن( لنډ: فنکشن ) د ریيلو ګڼونو ډیری باندې ، د یوې ډیری $D \subseteq R$ یوه یواځنی ځیرونه ده. D دپیژند ډیری نومیږي .

د ټولو ارزښتونو ډیری چي y یی د ځان لپاره غوره کولی شي، که x د پیژنددیری یا تعریف ډیري په دننه کی وځغلي، د ارزښت ډیری W بلل کیږي .

د ي وې قانونمندی f له مخی هر $x \in M$ یواځني یوه $y \in W$ باندې تنظیمیږي:

$$y = f(x)$$

اوس نو x خپلواك واریابل یا اووښتونی یا مجهوله بلل کیږي یا نومیږي او y بلواك واریابل یا اووښتونی بلل کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

د فنکشن مختلف انځورډولونو ترمنځ سړی توپیروي. د فنکشن »کلیمه انځورونه« یوه په خوله ویونکی یا یو اعلانونکی ، له ماتماتیکي یا شمیریز سومبولیك څخه تیریدونکی یا په شمیریز سومبولیك صرف نظر کوونکی، مګر ددې لپاره یو پیچلی، د تشریح شکل دی، چی په لاندې کې به ورسره بلد شو.

بیلګه ۱۵ . ۱ : هر رییل ګڼ د همغه رییلګڼ په نیم ور زیات ۱ باندې تنظیمیدل.

بیلګه ۱۵ . ۲ : هر یو منفي ګڼ به د هغه په مطلقه ارزښت او هر یو مثبت ګن او صفر به د هغه په مربع تنظیم شي.

د شمیرپوهی سومبولونو تر استعمال لاندې، تحلیلي ( شننیزه) انځورونه د بلواک یا فنکشن تشریح ده. دلته x او y د نورو رییلو ګڼونو سره د بنسټیزو کارونو یا عملیو ، زیاتون، کمون ، ځل ، ویش ، او د بنسټیزو فنکشنونو له لارې تړل دي ( پرتله برخه ۱۵ . ۴)

بیلګی ۱۵ . ۱ ته: $y=(x/2)+1, D=R , W=R$

بیلګی ۱۵ . ۲ ته : د $x<0$ لپاره $y=|x|$
دلته $D=R,W = [0,\infty)$ د $x>0$ لپاره $y=x^2$
پام دې وي چی په داسی حالت کي له کیڼ و ښي لور ته یا ګډوډلوستل کیږی یعنی داسی لولو: $y$ د $x$ مطلقه ارزښت سره مساوي دی ، که چیرې $x$ له 0 کوچنی وي. داسی لیکنو ته دې ګران لوستونکی پوره پام ولري او فکر کوم چی له اشتباه سره به نه مخامخ کیږو) . تحلیلي( شننیزه) انځورونه اکسپلیځیت( واضح)روښانه و څرګند) explizit نومیږي، که د فنکشن برابرون ، لکه په بیلګو ۱۵ ، ۱ او ۱۵ . ۲ چی په یوه د y په لور حلکیدونکي فورم مخ ته پروت وي: $y =f(x)$ که چیرې داسي نه وي نو د تحلیلي - یا شننیزې انځوروني شکل $F(x,y)=0$ دی او فنکشن ایمپلیځیت ( ورسره ځای شوي یا وراسره تړلی implizit ) بلل کیږي یا نومیږي . د بیلګی په توګه به $2y-x-1=0$ $D=R,W=R$,فنکشن د بیلګي ۱۵ . ۱ یو ایمپیلیځیت انځورونه وی. دیوه فنکشن نه هره ایمپلیځیت شنینیزه بڼه ( ایمپلیځیت تحلیلي فورم) کیدی شي په

اکسپلیځیت شننیزه یا سپړنیزه بڼه (تحلیلي فورم) واړول شي. د بیلګی په توګه : که $x+y+y^5-1=0$ وي، نو دا د y په لور اکسپلیځیت حل کیدونکی نه دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

د یو فنکشن تحلیلي یا شننیزې انځورونی ځانګړې بڼه پارامتری څرګندونه ده. دلته تنظیم د یوه مرستندوي اووښتونې یا واریابلی t ، دا په نامه پارامتر، له لاري لاربښودیږي. هر پارامتر ( له یوه پارامتر ساحی څخه)

$$x = \varphi (t) \quad , y = \Psi (t)$$

په یو ارزښتجوړې x,y تنظیمیږي.

بیلګه ۱۵ . ۱ ته: $x=2t ,y=t+1; -oe< t <oe$ به یوه پارامتري انځورونه وی
او $x = t , y = t/2 + 1$ به یوه بله پارامتري انځورونه وي.
زیات وخت فنکشنونه د جدول په څیر ورکول کیږي
بیلګي ۱۵ . ۱ته:

| X ....... | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 .... |
|---|---|---|---|---|---|
| Y . ..... | 2 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 ..... |

بیلګي ۱۵ ، ۲ ته:

| X.... | -3 | 2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Y.... | 3 | 2 | 1 | 0 | 1 | 4 | 9 ... |

د فنکشن ګرافیکی انځورونه (د یوې ټوټې) په x,y- کواوردینات سیستم کی د یوې کرښې له لارې، د هغه فنکشن انځورونی ځخه عبارت ده ، چی د واریابلو

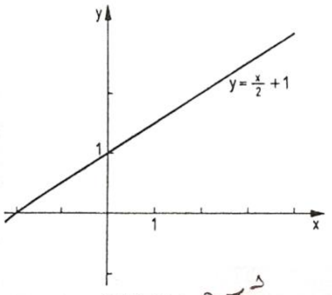



Bild 15.1 څېره

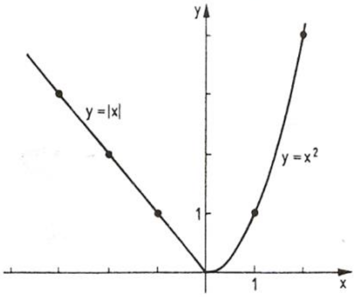



Bild 15.2 څېره

یا اووښتونوجوړې د x,y - هواره یا سطحه کی یواځني او یواځني ټکي باندې تنظیمیږي .
څیره ۱۵ . ۱ . او ۱۵ . ۲ ) بیلګي ۱۵ . ۲ته بیلګي ۱۵ . ۱ته

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

## ۱۵ . ۲ د فنکشنونو- یا بلواکو خویونه

پیژند ۱۵ . ۲: $y = f(x)$
په ایټروال ]a,b[ کی هلته او هلته یا ټیك هلته مونوتون جګیدونکی
( مونوتون لویدونکی ) دی، چیرته چی ددوه په زړه پورې ارزښتونو
لپاره د$x1<x2$ سره باور ولري: $x \in [a,b] \wedge y \in [a,b]$

$$f(x1) \leq f(x2) \quad (f(x1)>f(x2))$$

که د برابروننخښه باور ونه لري نو له کره یا کلکی مونوتوني غږیږو.

وبیلګي ۱۵ . ۱ ته: $y=(1/2)x+1$ په $D = R$ کی کلك مونوتون دئ

و بیلګي ۱۵ . ۲ ته: $y=|x|$ د $x<0$ لپاره
او $y= x^2$ د $x>0$ لپاره
په اینټروال ) [oe,0] کي مونوتون ټیټیدونکی یا -لویدونکی
او په اینټروال [oe,0) کی مونوتون جګیدونکی دی

پیژند یا تعریف ۱۵ . ۳ :

په یوه اینټروال ] a,a-[ کی یو تعریف شوی فنکشن ( $y = f(x$ هلته او هلته جوړه (جفت ) یا سیومتریك symetrisch,( ناجوړه (طاق) یا نا- یا انټیسیومتریكantisymetrisch بلل کیږي چی باوري وي

$$f(-x) = f(x) \quad (f(-x) = -f(x))$$

د جوړه فنکشنونو ځیرې اکسیال یا محوري سیومتریك و y - محور ته ځغلي ) دلته هم ځیره شته ، نو تل به همغه څه لیکم؟ ۱۵ . ۳ ( ، طاق فنکشنونه و سرچینی ته منځني یا مرکزي سیومتریك ځغلي ) بیا هم ځیره او ۰۰۰۰ش ۱۵ . ۴ )

بیلګه ۱۵ . ۴
فنکشن $y= x^3 ,D= R$
یو ناجوړه یا طاق فنکشن دئ :

$$(-x^3) = -x^3$$

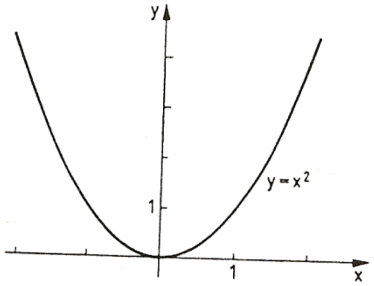
بیلګه ۱۵ . ۳ :
فنکشن $y=x^2,D=R$
یو جوړه یا جفت فنکشن دئ:

$$(-x)^2 = x^2$$

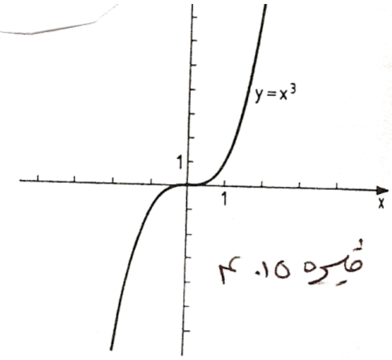
(c) ketabton.com: The Digital Library



---




څېره ۱۵.۳




څېره ۱۵.۴

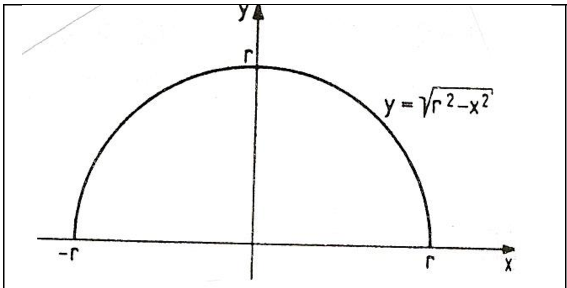
د بیلګي ۱۵ . ۱ او ، ۱۵ . ۲ فنکشنونه نه جوړه یا جفت او نه ناجوړه یا طاق دي

پیژند ۱۵ . ۴:

$y = f(x)$ تیك هلته په D ( پیژندډیرئ ده) بند یا رابند( محدود)بلل کیږي که یو $k > 0$ داسی شته وي چي دا باور ولري :

$|f(x)| < k \quad \forall x \in D$

بیلګه ۱۵ . ۵:

| | |
|---|---|
| فنکشن $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ , $D = [-r, r]$<br>بند یا راګیر( محدود)( زه به دا له دې وروسته<br>بند وبولم) دی، ځکه چی لرو:نیم یوونګردی څیره ده<br>ش . ۱۵ . ۵ $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \le r$ |  |

پیژند ۱۵ . ۵:

$y = f(x)$ پریودیکي( دوراني یا بیرته- یا تل بیرته راګرځیدونکی periodical بلل کیږي د دوران یا راګرځیدونی p سره ، که باور ولري:

$f(x + p) = f(x)$

د دورانی یا تل راګځیدونکو (پریودیکي) فنکشنونو تیوپیکي بیلګي تریګونومتریکي فنکشنونه دي ( پرتله برخه ۱۵ . ۳)

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

پیژند ۱۵ . ۶ :

ټول x ∈ D د $f(x)=0$ سره، د فنکشن $f(x)$ صفر ځایونه بلل کیږي۰

د فنکشن صفرځایونه د مساوات $f(x) = 0$ د حل له لارې پیدا کیږي. داحلونه د x- محور سره د فنکشن کرږې د غوڅېدو x - ارزښتونه دي.

بیلګی ۱۵ . ۱ته:

د فنکشن $y = 1/2\,x + 1$ صفرځایونه د مساوات $x/2 + 1 = 0$ اوبی $x = -2$ دیَ (ځیره ۱۵ . ۱ )

بیلګه۰ ۱۵ . ۶:

فنکشن $y = x^2 - 4$ دوه صفرځایونه لري:

$$x^2 - 4 = 0 \iff x1 = 2, \quad x2 = -2$$

فنکشن $y = x^2 + 4$ صفرځایونه نه لري. ) بیا هم ځیر ۱۵ . ۶ )

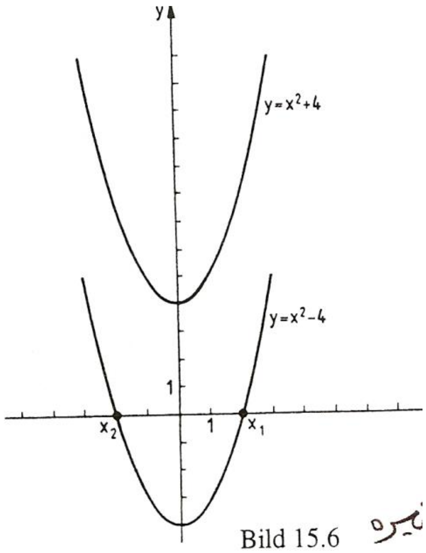



Bild 15.6 ځیره

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

پیژند ۱۵ . ۷:

$x \in D$ , $y \in W$ y =f(x),

یویواځنی« یا یواځنی او یواځنی بلل کیږي، که هریو $y \in W$ د یوه $x \in D$ په واك کی وي یا هر یو $y \in W$ ته یوه $x \in D$ څیره شوی وي، د کوم لپاره چی باور ولري: ( y = f(x)یو یویواځنی یایواځنی او یواځنی فنکشن په ښکیدونکی دی ، دا په دې مانا چي دا یو فنکشن ( x = g(y تعریفوي، یعني په څټ یا چپه فنکشن. که دلته د اووښتونو یا واریابلو د نخښی( نخونی) سره بدلی شي، نو د په څټ فنکشن په توګه لرو y=g(x) دا د فنکشن روځنی یا وسره بده یا که غواړی مروجه څیره ده، چی x خپلواك اوyبلواك ، دلته د x په واك کی واریابل یامجهولی یا ناپیزندونکی دي د y=f(x) په څټ یا برعکس فنکشن لپاره داسی هم لیکلی شو: $y = f^{-1}(x)$

فنکشن y = x د خپل په څټ فنکشن سره کټمټ(- ورته ) identic دی۰ د په څټ یا برعکس فنکشن $y = f^{-1}(x)$
کرافیکی څیره y = x په کرښه د y =f(x)( هندارونه) یعنی په هنداره کی څیرونه او لنډ یی: هندارونه) ده۰

بیلګي ۱۵ ، ۱ ته :

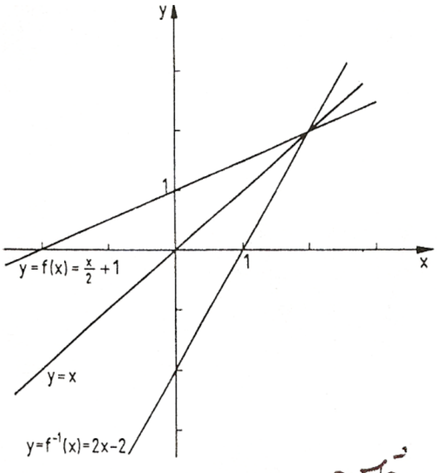


Bild 15.7a ځایره

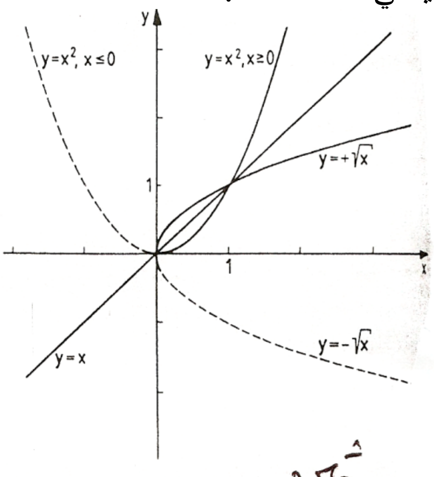


Bild 15.7b ځایره

د فنکشن y = f(x)= x/2 +1 چپه یا په څټ فنکشن داسی دی

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

$y = f^{-1}(x) = 2x - 2$

سرې $y = x/2 + 1$ د x په لور اوبی کوي: $x=2y-2$ او بالاخره x او y سره بدلوي .

(ځيره. ۱۵ ۷ الف)

بيلګي ۱۵ . ۳ ته : فنکشن

$x \in D$ $y = x^2$ ,

ځيرره ش ۱۵ . ۳ ) په ښتکيدونکی دي يا په ښتکيدونکی نه دی.

هر $y \in W$ $=[0,oe]$ پورې دوه$[-oe,oe]$ = $x \in D$ اړه لري، يعنی $x=+y$او $x=-y$

مګر $y= x^2$کلك مونوتون جګيدونکی دی ( او په دې ډول يواځنی او يواځنی ).

د $x \geq 0$ لپاره او کلك مونوتون لويدونکی د $x < 0$ لپاره. $y=x^2,x\geq0$

ته چپه- يا په ښت فنکشن $y=+ x$ دی، او $y = x^2$ , $x < 0$ ته چپه- يا په ښت فنکشن $y = -x$ دی. ( ځيره ۱۵ . ۷ ب) .

په ټوليزه (عمومي) توګه لاندې جمله باور لري

جمله ۱۵ . ۱ :

که $y = f( x )$کلك مونوتون جګيدونکی ) لويدونکی ( وي ،نو په ښت فنکشن $y = f^{-1}( x)$ موجود دی او دا هم کلك مونوتون جګيدونکی (لويدونکی ) دی.

۱۵ . ۳ . بنسټيز فنکشنونه

په دې برخه کي بنسټيز فنکشنونه تعريفيږي. دا ټول راشنل فنکشنونه، مات راشنل فنکشنونه، پوتنځ يا په توان فنکشنونه، ايکسپوننشل فنکشنونه او لوګاريتم فنکشنونه، تريګونومتري فنکشنونه او ځيکلومتري فنکشنونه دي. دا بنسټيز فنکشنونه به د خپلوځانګړدوله خويونو له مخی وځيرل شي. په برخه ۱۵ . ۴ که به دفنکشن فنکشنونه (ځنځيری - يا تړلي فنکشنونه) وځيرل شي. د فنکشنونو ځيرل به د هغو ځانګړدوله يا کرکتريستيکي خويونو له مخی هلته هم دوام وومومي، که د ديفرنشل شميرنی کومکي مواد مو مخ ته پراته وي ( برخه ۲۰ . ۴ )

پيژند ۱۵ . ۸ :

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

فنکشن

$$y=a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a^2 x^2 + a_1 x + a_0, n \in N; a_i \in R, a_n \neq 0 \quad (15.1)$$

د ټولو $x \in R$ لپاره تعریف دی او n - مه درجه ټولریشنلفنکشن نومیږي.دې ډول فنکشنونو ته پولینوم فنکشنونه( یا لنډ : پولینوم) هم ویل کیږي

یو ساده ټول ریشنل - ۱ - امه درجه ( n = 1 ) یالاینې فنکشن په لاندې ډول دی:

$$y = mx + n \qquad (15.2)$$

دلته m او n په ( ۱۵ . ۱ ) کې پارامترونو a1 او a0 په مانا دي. د لاینې فنکشنونو ځیره(ګراف ) یوه کرښه ده چې په y = n کې دy - محور غوڅوي (x = 0 ) او جګوالی $m = \tan\alpha$

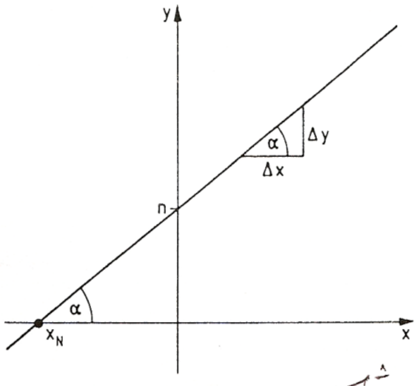



Bild 15.8 ګاره

لري (ځیره پورته . ۱۵ . ۸ ) جګوالی د y - ارزښت د تغیر د x - ارزښت تغیر سره متناسب دی: $m = \Delta y / \Delta x = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

کرښه جګیږي که $m > 0$ او لویږي یا ټیټیږي که $m < 0$ وي اوکه $m = 0$ وي، دx - محور سره غبرګه ځغلي . کرښه ،که $|m| = 0$ نیول شوی وي، ټیك یو صفرځاي ( y = 0 ) لري: $x_N = - n/m$

که را په غاړه شي چې د یوې کرښې برابرون، چې له دوه ټکو (x1,y1) او (x2,y2) تیریږي، پیدا کړو چې یو په بل نیغي نه وي ولاړې ، نو د هغو جګوالی m او د هغو پرتېکی

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

یا نوره ښه غږ ښتکی n په y - محور د برابرونسیستم

$y1 = x1m + n , y2 = x2m + n$

له مخی پیدا کوو او په دې توګه لاس ته راوړو
$(y-y1)/(x-x1)=(y2-y1)/(x2-x1)$

په بل پل)قدم( کی مورږ ۲ -امه درجه ټولریشنل فنکشنونه یا مربع فنکشنونه رامنځ ته کوو لکه په ( ۱۵ . ۱ ) کې $a_2 = a, a_1 = b, a_0 = c$

$y=ax^2+bx+c , a \neq 0$ ( 15 .3)

د مربع فنکشنونو څیره ) ګراف ( پارابول دئ چی د هغي سیومتري محور و y - محور ته غبرګ ځغلي. کوایفیڅینت) ځله ووني یا ځلیدونکی (a,b,c) د پارابول د ککرې ځاي او بنه)فورم( ټاکی.

مورږ د مربع فنکشن یو څو ځانګړي حالتونه تر څیړنې لاندې نیسو.

1. $y=x^2(a=1 ,b=0,c=0 )$ ( 15 . 4 )

نورمال پارابول، د ککرې کواوردینات: $x_s = 0 , y_s = 0$
(خ . ۱۵ . ۹)

2. $y=x^2+px+q$ (a=1 , b=p , c=q ) ( 15 . 5 )

او $x^2 + px$ ته د څلورئ - یا مربع تکمیلولو ورزیاتونی څخه لاس ته راځي:
$y=x^2+px (p/2)^2+q-(p/2)^2=(x+p/2)^2+q-p^2/2$ (15,5)
یو و (نسبت) ( ۱۵ . ۴ ) ته (مخامخ) د x - لور په p/2 - اودy - لور په $q - p^2 /4$ راکښل ( راښکل-یا راکش -) شوی نورمال پارابول د ی ، دا په دې مانا چی په ( ۱۵ . ۵ ) راکښل شوی پارابول دا ککره لري:
$x_s= -p/2 , y_s=q - p^2/4$

بیلګه ۱۵ . ۷:

$y=x^2+6x+10, xs=-6/2=-3,ys=10-6^2/2=1$
(خ،۱۵ . ۹ )

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

3. $y = ax^2$ ( a|=0,b=0, c = 0 )

د ککرۍ ( سر یا رآس) کواوردینات . $x_s = 0$ , $y_s = 0$

پارابول د $|a| > 1$ لپاره خور، د $|a|<1$ لپاره پرسیدلی،د $a > 0$ لپاره پورته لور ته او د $a < 0$ لپاره کښته لورته واز دی ( خلاص دی)

بیلګه ۱۵ . ۸:

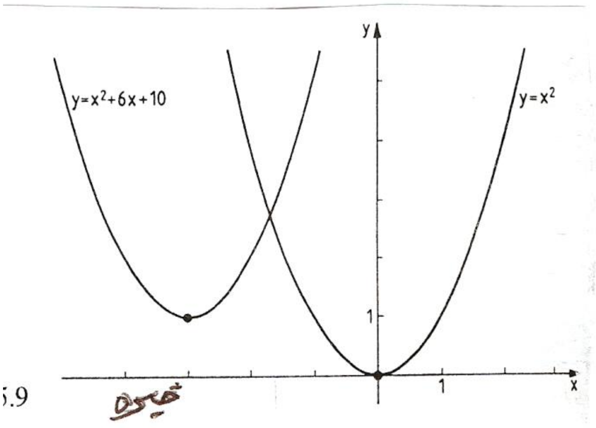
$y = 2x^2$ , $y = (1/2)x^2$, $y = -2x^2$

(ځ . ۱۵ . ۱۰)

4. $y=ax^2+bx+c=a[x^2+(b/a)x+c/a]$

د ککرۍ (رأس) کواوردینات داسی دی ( لکه په ۱۵ . ۵ کی یی چی مخ ته تللي یو)

$x_s = -b/2a; y_s = a[(c/a)-(b^2/4a^2)] = c - b^2/4a^2$




5.9 شیره

بیلګه ۱۵ . ۹:

$y=-(1/2)x^2+x+4$ ,(a=-1/2, b=1, c=4)

دککرۍ کواوردینات:

$x_s = -1/(2.(1/2)) = 1, y_s = 4 - 12/(4.(-1/2)) = 9/2$

دا چي $a = -1/2$ دی، نو پارابول پرسیدلی او لاندې لور ته واز دی ( ش ۱۵ . ۱۱ )

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

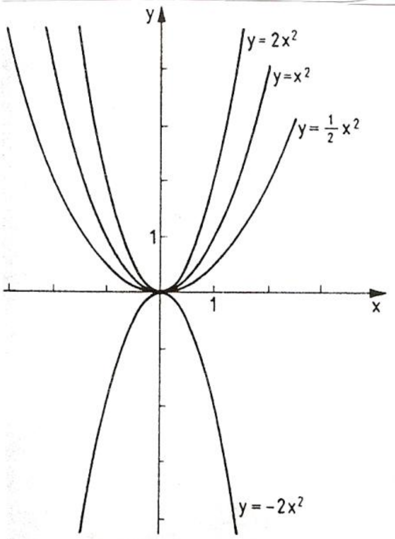



Bild 15.10 ځېره

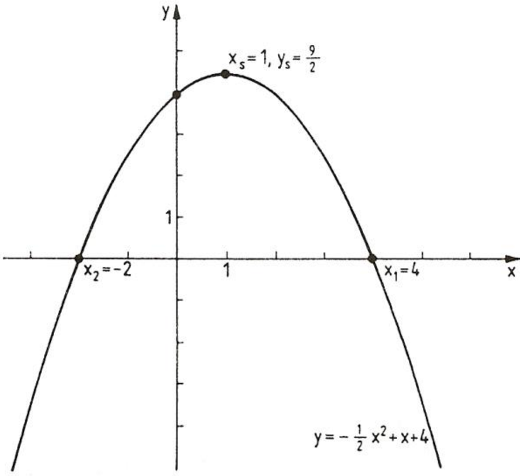



Bild 15.11 ځانګړه

د فنکشن y=ax²+bx+c د صفرځایونه د برابرون ax²+bx+c=0 اوبیونـي دي.
وبیلګي ۱۵ . ۹ ته (خ. ۱۵ . ۱) :
صفر ځایونه له دې لاس ته راځي : –(1/2)x²+x+4=0 ، چی دلته $x_1 = 4, x_2 = -2$ دي.

و بیلګي ۱۵ . ۷ (ځیره ۱۵ . ۹ ) ته :
د x²+6x+10=0 یاني $x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9-10} = -3 \pm \sqrt{-1} = -3 \pm i$ څخه لاس ته راځي چی برابرون رییل صفرځایونه نه لري .

فنکشن y = x² غبرګ یا جوړه( ډبل) صفرځایونه لري یاني $x_{1,2} = 0$ دي
د ټولریشنل فنکشن دریمو او لوړو درجو لپاره به د بیلګي په توګه دټولریشنلفنکشنونو بیلګي له مخې، دریمه درجه ټولریشنل فنکشن راوړو
چي د فنکشن ارزښت شمیرلو یو ځانګړی لیدوړ فورم دی، د هورنرشیما(بنه) Hornerschema، معرفي شي. ددې لپاره به د( ۱۵ . ۶ ) فورم بدل شي.

$$x_{4,5} = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm 2i$$

$$y = [a_3x^2 + a_2x + a_1]x + a_0 = [(a_3x + a_2)x + a_1)x + a_0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

هغه ورکړ شوي خپلواك $x_1$ پورې اړوند فنکشن ارزښت $y_1 = f(x_1)$ کيدی شي له دې بنی سره په لاندې ډول وشميرل شي:
a3 له x1 سره ځل کيږي، دې سره a2 زياتيږي، زياتون يی له x1 سره ځل، او a1 ور زياتوو، زياتون د x1 سره ځل او a0 ور زياتوو. دا د عمليوپرلپسی په لاندې ډول د لاندې شيما (د هورنرشيما) له لارې په ليدوړ ډول مخ ته بيايو (ځرکندوو)

| | $a_2$ | $a_1$ | $a_0$ | ځلونه يا ضريبونه |
|---|---|---|---|---|
| | $a_3x_1$ | $(a_3x_1+a_2)x_1$ | $[(a_3x_1+a_2)x_1+a_1]x_1$ | منځنی ځلونه |
| $a_3$ | $a_3x_1+a_2$ | $(a_3x_1+a_2)x_1+a_1$ | $[(a_3x_1+a_2)x_1+a_1]x_1+a_0 = f(x_1)$ | منځنی زياتون |

ددې شيما پوهيدل لږ نابلد دی او ځه فکر غواړي، خو پرې پوهيدل له نورو مساواتو ځخه روښان دی.

بيلګه ۱۵ . ۱۰ : د فنکشن $y=x^3-3x^2-14x-5$ لپاره دفنکشن ارزښتونه له لاندې خپلواکو $x_1 = -2$ او $x_2 = 5$ ځخه شميرل کيږي.
يادونه: دا د هورنر شيمت زما په دې اوسنی د برينکمن ژباړه کې مفصل شته(ژباړی). اوبيونه ) :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | -2 | -14 | -5 |
| $x_1 = -2$ | | -2 | 8 | 12 |
| | 1 | -4 | -6 | 7 = f(-2) |
| $x_2 = 5$ | | 5 | 15 | 5 |
| | 1 | 3 | 1 | 0=f(5) |

لرو $f(-2) = 7$ او $f(5) = 0$ (صفرځايونه)

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

که چړې ددريمی درجی ريشنلفنکشن يو صفرځاي ولري، نو کړی شو چی د پولينوم ويش له لارې دا لايني فاکتور بيل کړو( پرتله ۱۲ - امه برخه، جمله ۱۲ . ۴ )

بيلګي ۱۵ . ۱۰ ته: $(x^3-2x-14x-5):(x-5)=x^2+3x+1$ له دې امله لرو:

$$y = x^3-2x^2-5 = (x^2+3x+1)(x-5)$$

د ويش پولينومونو ځلووني ، يعنی 1 د($x^2$) سره ، 3 د ( x ) سره او 1 د هورنرشيما په اخره ليکه کی ولاړ دی. د هورنرشيما له لاری د صفرځاي شميرلو سره په همغه وخت يا دمګړی کی د پولينوم ويش صورت نيسي. لرو:

$$[a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0):(x-x_1)=a_3x^2+(a_3x_1+a_2)x+[(a_2x_1+a_1)x_1+a_1]$$

او0 = f ( x1 ) چی د$(x-x_1)$سره د ځلونې له لارې دا تصديقيدلی شي. پاتی صفر ځايونه د ځلورۍ – يا مربع برابرنی د اوبيونې له لارې لاس ته راځي

$$x^2+3x+1=0;x_{2,3}=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-1}=-(3\pm\sqrt{5})/2$$

په دې ډول د دريمی درجي فنکشن د درې لايني فنکشنونو د ځلونې په څير ليکل کيدی شي ( پرتله: برخه ۱۲ جمله ۱۲ . ۵)

$$y=x^3-2x^2-14x-5 = (x-5)[x-\frac{-3+\sqrt{5}}{2}][x-\frac{-3-\sqrt{5}}{2}]$$

د جملی۱۲ . ۵ وينا په عمومي توګه د ټولوn- م درجو ريشنل فنکشنونولپاره لاندېجمله باور ي کوي

جمله ۱۵ . ۲ :

هر n - م درجه ټول ريشنلفنکشن n صفرځايونه لري . کيدي شي دا ټول يو له بل توپير ولري او يادا صفرځايونه څوځله هم رامنځ ته شي، رييل او يا جوړه کونجوګيري کملکس کيدی شي.

که $x_1, x_2, ,..., x_n$ دلاندې فنکشن n صفر ځايونه وي

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

نو دا د لاینیز فاکتورونو د ځلونې په څیر په لاندې ډول لیکل کیدی شي:

$$y=(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)a_n$$

د هورنرشیما په استعمال کی دې لاندې په پام کی ونیول شي:
که په یوه n - م درجه پولینوم کی یو x - پوتنځ نه وي ، نو د هغه د کوایفیشینت یا ځله وونې لپاره دې صفر ولیکل شي .

بیلګه ۱۵ . ۱۱ :
5 - مه درجه ټول ریشنلفنکشن $y=2x^5-6x^3-20x^2-8x+80$ درې صفرځایونه

$$x_1=x_2=2, x_3=-2$$

لري. نور صفرځایونه دې پیداکړی شي او فنکشن دې د لاینیزو فاکتورونو د ځلونې په څیر ولیکل شي.

ځواب : د هورن جملی له لارې یو په بل پسی د پولینوم ویش یو پاتی 2 - مه درجه پولینوم لاس ته راکوي:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | 0 | -6 | -20 | -8 | 80 |
| $x_1$ = 2 | | 4 | 8 | 4 | -32 | -80 |
| | 2 | 4 | 5 | -1 | -40 | 0 = f(0 |
| $x_2$ = 2 | | 4 | 16 | 36 | 40 | .... |
| | 2 | 8 | 18 | 20 | 0=f(2) | |
| $x_3$ = -2 | | -4 | -8 | -20 | | |
| | 2 | 4 | 10 | 0=f(-2) | | |

دا پاتی پولینوم $2x^2+4x+10 = 2(x^2+2x+5)$ د $x^2+2x+5 = 0$ له امله
د $x_{4,5} = -1\pm\sqrt{1-5} = -1\pm 2i$
لپاره لاندې د ځل فورم لري- $2x^2+4x+10 = 2(x+1-2i)(x+1+2i)$

په دې ډول ورکړشوی پولینوم په لاندې ډول لیکل کیږي

$$y=2(x-2)^2(x+2)(x+1-2i)(x+1+2i)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

ددې لپاره چی د دریمي او جګو درجو د تول ریشنلفنکشنونو یوه څیره یا تصویر ولرودی شو، نور کرکتریستیکی یا د خویونو تکی یی د دیفرنځیالشمیرني له لارې لاسته راوستی شو( برخه ۲۰ . ۴)

بي له دې چی د دفیرنځیالشمیر له مرستي کار واخلو ، کیدی شي چی د هغه د ناپای په هکله وینا وي وکړی شو. مورږ په لیدیدونکی ډول د فنکشن د پولی کلیمه په کار اچوو، کومه به چی په برخه ۱۹ کی تیلک تعریف شي. دا د بیلګي په توګه دا مانا لري چی $\lim_{x\to\infty} f(x) = g$ سره ( f(x تل ارزښت g ته نزدې کیږي، که x د oe یانې ناپای په لور لاړشي. د

( ۱۵ . ۱ ) لپاره باورلري:

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty} x^n . \lim_{x\to\pm\infty} [a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + ... + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}] = a_n \lim_{x\to\pm\infty} x^n$$

دا چی

xn -> oe

د x -> ± oe لپاره که n جوړه (جفت) وي

او xn ->±oe د x ->±oe لپاره که n ناجوړه (طاق) وي، او له دې لاس ته راځي

که n جوړه او $a_n$ زیاتیز یا مثبت وي، نو لرو $\lim_{x\to\infty} y = \infty; \lim_{x\to-\infty} y = \infty$

(کږه له oe - څخه دoe په لور ځي) .

که n جوړه او $a_n$ کمیز یا منفي وي، نو لرو: $\lim_{x\to\infty} y = -\infty; \lim_{x\to-\infty} y = -\infty$

کږه د oe - څخه د oe - په لور ځي) .

که n ناجوړه او $a_n$ کمیز یا مثبت وي ، نو لرو: $\lim_{x\to\infty} y = \infty; \lim_{x\to-\infty} y = -\infty$

کږه له oe - څخه د oe په لور ځي)

کهن n ناجوړه او $a_n$ کمیز وي ، نو لرو: $\lim_{x\to\infty} y = -\infty; \lim_{x\to-\infty} y = \infty$

کږه لهoe څخه د oe - په لور ځي)

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

پیژند ۱۵ . ۹ :
فنکشن

$$y = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0};..........(15,7)$$
$$n,m \in N_0; a_k, b_i \in R; Q_m \neq 0$$

مات ریشنلفنکشن بلل کیږي او د ټولو x د $Q_m(x) \neq 0$ لپاره تعریف دی.

فنکشن ( ۱۵ . ۷ ) اصلي مات نومیږي، که n<m وي او نااصلي مات دئ که $n \geq m$ ۰ نااصل مات فنکشن کیدی شي چي د پولینوم ویش له لارې تجزیه ( ټوټه ) شي او د یوه ټول ریشنلفنکشن او یوه ریښتونی ماتی برخی د زیاتون په څیر ولیکل شي.

بیلګه ۱۵ . ۱۲:

فنکشن $y = \frac{2x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 13x - 6}{x^3 - 4x}$ اصل مات نه دی(n =4,m=3) په ماتلاندې
فنکشن باندې دماتباندې فنکشن ویش څخه لاس ته راځي:
$$(2x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 13x - 6) : (x^3 - 4x) = 2x - 3$$

د $2x^2+x-6$پاتی ( باقي) سره. پس لرو:
$y=2x-3+(2x^2+x-6)/(x^3-4x)$.

فنکشن ( ۱۵ . ۷ ) د x = x0 لپاره یو صفرځاي لري، که x = x0وي نو باور لري:
$P_n(x_0) = 0$ مګر $Q_m(x) \neq 0$

دا د $x = x_L$لپاره تشځاي (Lücke) لري،که وي: $P_n(x_0) = 0$ او $Q_m(x)=0$
د $x = x_P$لپاره یو قطب pol لري که وي: $P_n(x_P) \neq 0$ مګر $Q_m(x_P)=0$

بیلګه ۱۵ . ۱۳ :

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

فنکشن ( y=(2x²+x-6)/(x³-4x د ماتباندې- او ماتلاندې فکشنونو ټوټې کولو وروسته په لاندې فورم د لاینې فاکتورونوپه توګه لیکل کیږي.

$$y = \frac{2(x - \frac{3}{2})(x+2)}{x(x+2)(x-2)}$$

د $x = x_0 = 3/2$ لپاره ماتباندې صفر دئ، مګر مات لاندې صفر نه دئ ( صفرځای)مات لاندې- او مات باندې فنکشنونه د $x = xL = -2$ لپاره صفر دې ( تشځای )
د $x = x_{P1} = 0$ او $x = x_{P2} = 0$ لپاره ماتلاندې صفر او مات باندې صفر نه دئ ( قطب)
که x سره د قطب ځاي ته نزدې شي، نو y د ناپای په لور ځي چی د قطبځای ( ټیك ناپای ځای بللکیږي) xpکی کږه داسیمپټوټي کرښي $x = xP$ ته نزدې کیږي .د یوه تشځای xL په حالت کی ماتفنکشن د نامعلومی افادې 0 / 0 شکل غوره کوي، له دې امله د $x = xL$ لپاره تعریف نه دی.

په ناپای کی د فنکشن ځان نیونی ته:

د اصل ماتفنکشن ( n<m ) د x په جګ پوتنځ یعنی $x^m$ د ماتباندې او ماتلاندې د ویش څخه لاس ته راځی:

$$y = \frac{\frac{a_n}{x^{-n+m}} + \frac{a_{n-1}}{x^{-n+1+m}} + \ldots + \frac{a_1}{x^{-1+m}} + \frac{a_0}{x^m}}{b_m + \frac{b_{m-1}}{x} + \ldots + \frac{b_1}{x^{m-1}} + \frac{b_0}{x^m}} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{0}{b_m} = 0$$

داچی د x ټول اکسپوننتونه مثبت دي، او د x ټول پوتنځونه د ناپای په لور ځي ، نو د آصل مات فنکشن ځیره د x->±oe لپاره د x - محور ته نزدې کیږي. فنکشنونه

چی آصل مات نه وي نو د x->±oe لپاره داسی ځانونه نیسي، چی اصل د ماتفنکشن برخه یی د صفر په لور ځي، لکه ټولریشنل برخه .
د نااصل مات فنکشن ځیره د x -> ±oe سره ، ځان خپل ټولریشنلبرخی ته نزدې کوي.

بیلګه ۱۵ . ۱۴:

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

الف: ( $y = x /(x^2+1)$ د $x0 = 0$ په ځاي کی صفرځای لري. تشځاي او پول
یا قطب نه لري ریيل اوبیونه نه لري) او د$x \to \pm oe$ لپاره دx- محور ( $y = 0$ )
د اسیمپتوتی په څیر لري ( څیره. ۱۵ . ۱۲ )

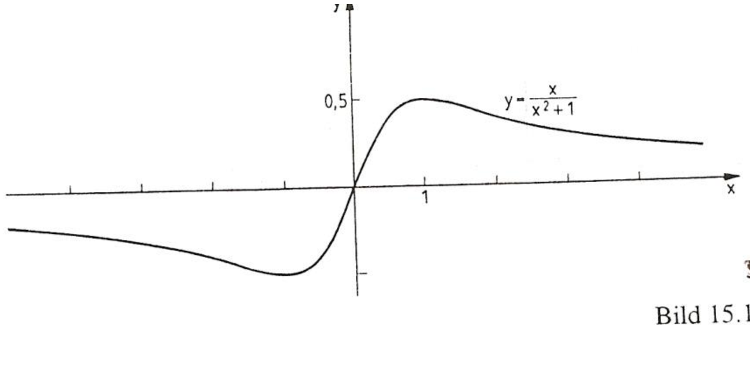
ب: ( $y=(x^2+2x-3)/(x+2)=x- 3/(x+2)$ صفرځایونه( $x^2+2x-3 =0$ ) په $x1 =-3$
او $x1=1$ کی لري . تشځای نه لري او په $x3 = -2$ کی قطب لري دا په دې مانا چی $x =$
2-اسیمپتوتی دی، او د $x \to \pm oe$ لپاره فنکشن $y = x$ اسیمپتوتي کیږي)دا سیمپتوتی
کلیمه دې په برخه ۱۶ . ۴ کی هم وکتل شي )

موږ په دې پسی ځانله شوي ځانګړي ټول - یا مات ریشنلفنکشنونه راوړو:
فنکشن

$$y = x^n; n \in Z \setminus \{0,1\} ................................(15,8_a)$$

یو ځانګړی پوتنځفنکشن دی( د پوتنځ پیژند 6 ۰ ۱ )

( 15.8)د زیاتیززیاتیز یا مثبت ټولګې n لپاره یو ټولرشنل فنکشن دی. د جوړه ټولګې
nلپاره ټولریشنل فنکشن دی. د ټولګې n لپاره ټولی کرې د تعریف ډیری( - ) = D
oe,oe، د ارزښت ډیری( $W=(0,oe$ او ګډ ټکی (1,1 )، ( 0,0 ),(1,1 ) لري. (څیره
۱٤ الف ۱۵ ) د ناجوړه ګې د n لپاره( $D = (-oe,oe$
او( $W = ( -oe,oe$ ) دي او ( 1-,1-) , (0,0 ). ( 1,1) ګډ ټکي دي ( څیره ۱۵ . ۱۴
ب)۰




څیره

Bild 15.12

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

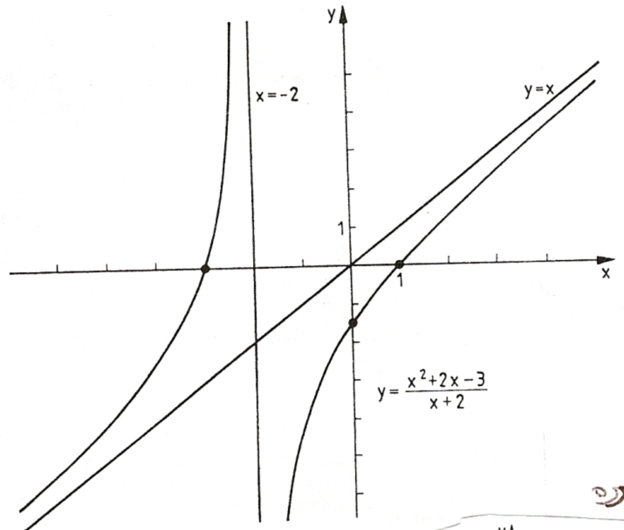



Bild 15.13

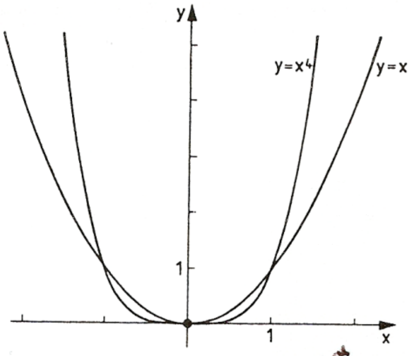



Bild 15.14a

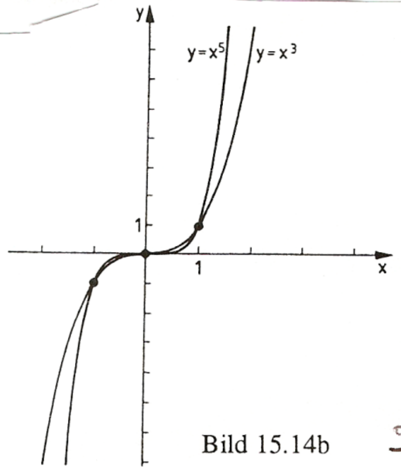



Bild 15.14b

(۱۵ ، ۸ الف) د ټول کمیز یا منفي ګڼ nلپاره یو مات ریشنل فنکشن دئ په x = 0 کی د یوه قطب او y = 0 کی یوې اسیمپتوتی په څیر. د جوړه ګڼون یا تعداد ( کمیز n لپاره ټولی کرږ د پیژند ډیري
D = ( -oe,oe)\{0} د ارزښت ډیري( W = (0,oe لري اوګډټکي (1,1), (1,1-)
؟؟؟ څیره ش. ۱۵/۱۵الف) .
د ناجوړه ګڼون ( کمیز n)لپاره{ D = (-oe,oe)\{0 او( W=(-oe,oe او(1-،1-) ( 1,1 ) ګډ ټکی دی ( څیره »۱۵ . ۱۵ ب) .
دوه څیرې دي

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

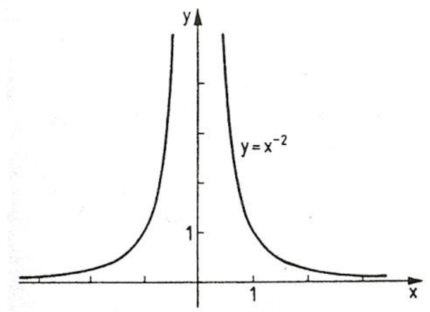



Bild 15.15a

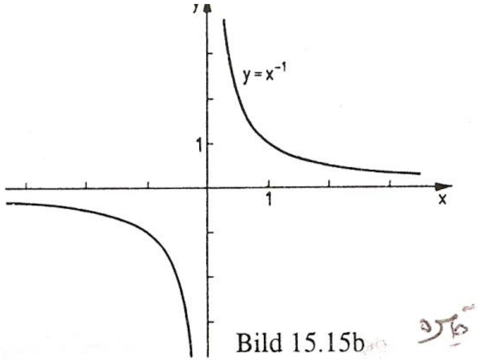



Bild 15.15b

د پوتنځ فنکشن پر ښځ بلواک لپاره دې د مونوتوني اینتروال په پام کی ونیول شي.( پرتله بیلگه( بیلگه ۱۵ .۳)
د فنکشن) لوستل له کيڼ وښي لور ته

$$y = x^n; n \in N^*\{1\}, D = [0,\infty), W = [0,\infty)$$

چپه- یا پر ښځ فنکشن په لاندي ډول دی.

$$y = \sqrt[n]{x} \ , n \in N \setminus \{1\} \ , D = [0,\infty), W = [0,\infty) ............... (15,8_b)$$

او ریښه فنکشن نومیږي (پیژند ۶ . ۲ دې وکتل شي) پوتنځ فنکشن کیدی شي و
ریشنل ایکسپوننت ته پراخه شي ) دلته لرو $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} (\sqrt[n]{x})^m = x^{\frac{n}{m}}$ (پرتله برخه ۴)

که پوتنځ فنکشنونه د ریشنل فنکشنونو لپاره راوړل شي:

$$y = x^n \ , a \in Q \ , x > 0 \qquad ( 15 . 8c )$$

نو د ریښي فنکشن ( ۱۵ . ۸ ب ) دې د پوتنځ فنکشن په څیر وپوهیدی شي.

د پوتنځ فنکشن ( ۱۵ . ۸ ث) پرښت بیرته پوتنځ فنکشن دی.
ټولیز پوتنځ فنکشن پیژند د رییل ایکسپوننت لپاره ورکړ شوی( د رییلگڼونو کلیمه دې وکتل شي برخه ۳ ۰ ۱ . ۴ کی)

پیژند ۱۵ . ۱۰ : فنکشن

$$y = x^{\alpha} \quad , \quad \alpha \in R \ , x > 0 \qquad ( 15. 8d)$$

پوتنځ فنکشن نومیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

بیلګه ۱۵ . ۱۵ : فنکشن

$y = x^{\frac{3}{2}} = \sqrt{x^3}$ , $x \geq 0$

لاندې چپه - یا پر ښۍ فنکشن لرو $y = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}$ , $x \geq 0$

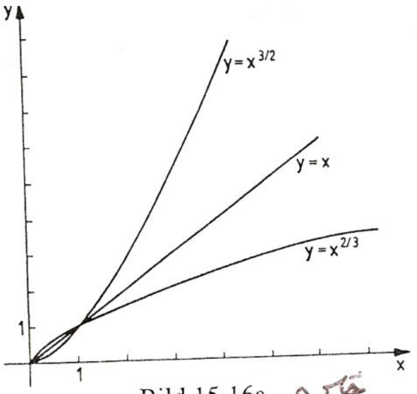



Bild 15.16a ځیره ب)

(ځیره ۱۵ . ۱۶ الف )

فنکشن لاندې چپه فنکشن لري: $y = x^{-1/2} = 1/\sqrt{x}, x > 0$

ځیره ۱۵ . ۱۶ ب)

$y = x^{-2} = 1/x^2$ , $x > 0$

یادونه : په پیژند ٤ . ۲ کی مو وویل چی یوائی د ناکمیز رادیکاندو رینه ویستل کیدو اجازه لرو. دا کړنلار دې د پرښۍ فنکشن جوړولو برسیره د مونوتوني غوښتلو لپاره هم په
پام کی وي. د بیلګي په توګه فنکشن
$y=x^3$ په ټول تعریفدیري کي مونوتون پورته کیدونکی وی او له دې امله ټول په ښۍ کیدونکی وی، $y = \sqrt[3]{x}$ د فنکشن $y = x^3$ په پیژنددیری( $D = [0,\infty$ کی پر ښۍ فنکشن دی، په داسی حال کی، چی د$y= x^3$ پرښۍ فنکشن د[ $D= (-\infty,0$
سره په $y = -\sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{|x|}$ فنکشن کی ورکړ شوی دی( ش. ۱۵ . ۱۷) ۰

پیژند ۱۵ . ۱۱: فنکشن

$y=a^x, a > 0, a \neq 1$...................................(15,9)

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

ایکسپوننشلفنکشن یا په جګ( لنډ »جګ«) بلواك بلل کیږي۰
( د ایکسپوننت یا »جګ« کلیمی لپاره دی پیژند ۴ . ۱ وکتل شي)

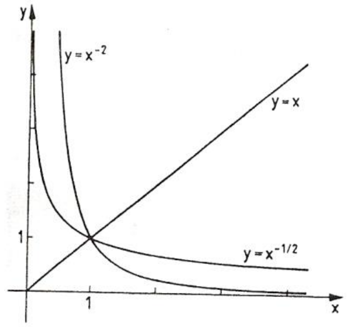



Bild 15.16b

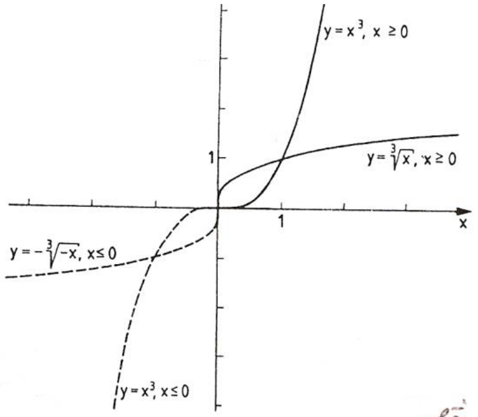



Bild 15.17

پورته دوه څیرې دې پام کې ونیول شي

فنکشن ( ۱۵ . ۹ ) لاندې پيژندديری( D=(-oe,oe او ارزښتديری( W=(o,oe لري. د $a^0 = 1$ له امله ټکی( 0,1 () د ټولو کږو ګډ ټکی دی

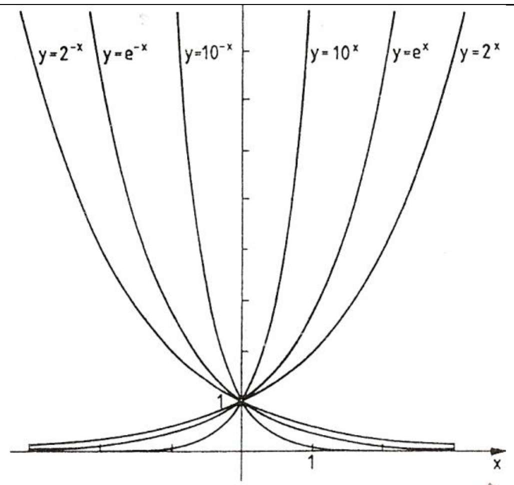



Bild 15.18

د a>0 لپاره ( ۱۵ . ۹ )
په کلکه يو غږيز- يا مونوتونجګيدونکی دئ اود x->oe سره د x - محور ته اسيمپوتيك ورنزدې کيږي .د 0<a<1 لپاره ) ۱۵ . ۹ ( په کلکه مونوتون لويږي او ځان د oe -> x سره د x -محور ته اسيمپتوتيك نزدې کوي .

د اکسپوننشل فنکشنونو يو څو بيلګې
(a=2; e ; 10 ; 1 /2 ; 1/e ; 1/10 )
په څيره ۱۵ . ۱۸ کی انځور شوي

پيژند ۱۵ . ۱۲ :

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

لاندې فنکشن د ایکسپوننشل فنکشن په څېړ فنکشن دی

$$y = \log_a x \,,\ a > 0 \,,\ a \mid= 1 \qquad (15.10)$$

او لوګاریتم فنکشن بلل کیږي

د لوګاریتم کلیمي لپاره پیژند ۵ . ۱ وګورئ) فنکشن ( ۱۵ . ۱۰ ) پیژنددیری $D = (0.oe)$ او د ارزښتدیری( $W=(-oe,oe)$ لري.

د $y = \log_a x$ کرږې د ګړو $y=a^x$ هنداورونه ده، په کرښه $y=x$ ۰ ټکی$(1,0)$ د ټولوکرو ګډ ټکی دی ( څیره شته دی)

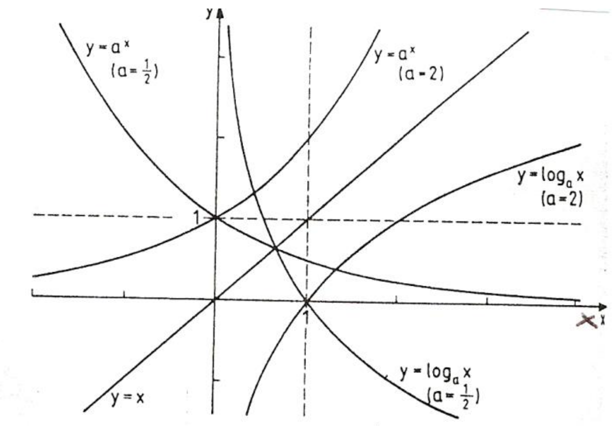



Bild 15.19 څېره

د $a>1$لپاره( ۱۵ . ۱۰ ) کلك مونوتونجګیدونکی اود $x\text{-}>0$لپاره اسیومپتوتیك د کمیز $y$ - محور ته نزدې کیږي. د $0<a<1$لپاره ( ۱۵ . ۱۰ ) کلك مونوتون لویدونکی دی او د $x>0$لپاره اسیمپتوتیك د زیاتیز $y$ - محور ته نزې کیږي. په شکل ۱۵ . ۱۹ کی $y=a^x$ او په څېړ یی یعني $y = \log_a x$

د $a= 2$ او $a=1/2$ لپاره انځوریږي .

په ځانګړې توګه لیکل کیږي $y = \log_{10}x = \lg x \,,\ y = \log_e x = \ln x$ ۰

پیژند ۱۵ . ۱۳:

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

د تریګونومتري فنکشنونو یا د کونجفنکشنونو لاندې( پرتله برخه ۶ . ۳ ) دا لاندني فنکشنونه په نخښه کيږي یا راوړل کيږي.

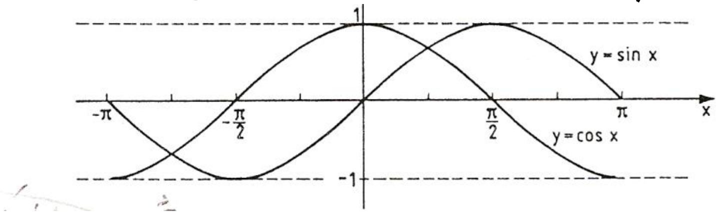
$y=\sin x ;D=R,W=[1,1]$..................................................$(15,11_a)$

$y=\cos x; D=R, W=[-1,1]$..........................................$(15,11_b)$

$y=\tan x=\sin x/\cos x; D=R\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi\}, W=R, k\in Z$....$(15,11_c)$

$y=\cot x=\cos x/\sin x; D=R\setminus\{k\pi\}, W=R, k\in Z$..........$(15,11_d)$

د دې ګرووتګلار په ش. ۱۵ .۲۰الف او ۱۵ . ۲۰ ب کی انځور شوی.




تریګونومتریکی فنکشنونه $y = \sin x,\ y = \tan x\ ,\ y = \cot x$ ناجوړه فنکشنونه، او $y = \cos x$ یو جوړه فنکشن یا – بلواک دی.

تریګونومتریکي فنکشنونه پریودیکي فنکشنونه دي( مقایسه ۱۵ . ۵)

فنکشنونه $y=\sin x\ ,\ y=\cos x$ پریودې $2\pi$ لري، دا په دې مانا چی لرو:

$\sin (x+2k\pi) = \sin x\ ;\ \cos(x+2k\pi) = \cos x\ ,\ k\in Z$

لاندې فنکشنونه پریود $\pi$ لري

$y=\tan x\ ,\ y=\cot x$. دا په دې مانا چي

$\tan ( x + k\pi) = \tan x,\ \ \cot ( x + k\pi) = \cot x\ ,\ k\in Z$

د تریګونومتریکي فنکشنونو صفرځایونه دي $x_k = k\pi, k\in Z$

د $y=\tan x\ ,\ k\in Z\ \ x_k=\frac{\pi}{2}+k\pi$ $y=\sin x$ لپاره او د $y = \cos x\ \ ,\ y = \cot x$

لپاره تانجنت - او کوتنجنت فنکشنونه قطب ځایونه(ناپاځایونه ) لري یعني $y = \tan x$

په $x_k=\frac{\pi}{2}+k\pi\ \ ,\ k\in Z$ او $y = \cot x$ په $x_k = k\pi\ \ ,\ k\in Z$ کی.

د تریګونومتریکی فنکشنونو لپاره دې د هغو مونوتوني خویونه په پام کی ونیول شي. د بیلګي په توګه

(c) ketabton.com: The Digital Library



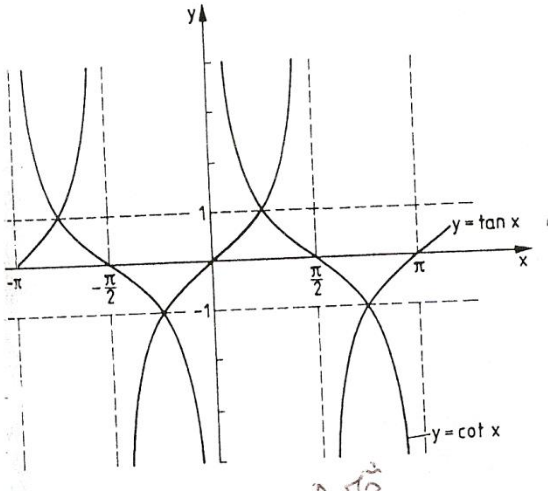



Bild 15.20b

فنکشن y = sin x په ایتروال $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ کي مونوتون جګیدونکی دئ او په انتروال $[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$ کی مونوتون لویدونکی، او دا مونوتوني خویونه په یوه پوره پریودې کی تکراریږي. پس ویلی شو:

د $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ لپاره y = sin x جګیدونکی یا پورته کیدونکی دئ

د $\frac{\pi}{2}+2k\pi \le x \le \frac{3\pi}{2}+2k\pi$ لپاره لویدونکی دئ، او په ورته توګه

د $-\pi+2k\pi \le x \le 0+2k\pi$ لپاره y = cos x پورته کیدونکی دی٠

د $0+2k\pi \le x \le \pi+2k\pi$ لپاره لویدونکی دئ

د $-\frac{\pi}{2}+2k\pi \le x \le \frac{\pi}{2}+2k\pi$ لپاره y = tan x جګیدونګی دئ

د $0+k\pi < x < \pi+k\pi; k \in Z$ لپاره y =cot x جګیدونکی دئ ،

په تنجنت ـ او کوتنجنت فنکشنونو کی د قطب ځایونه د مونوتوني اینتروالونو ترمنځ پراته دي، له دې امله دا مونوتوني ایتروالونه واز اینتروالونه دي.د ساین فنکشنونه د بیلګي په توګه د وخت په پریودیکي انځور کی خپل استعمال مومي Schwingung (شوینګونګ: رپیدنه=. په عمومي ډول دلته خپلواك واریابل په t نخښه کیږي .فنکشن

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

$$y = a \sin (\omega t + \varphi) \qquad (15 . 11e)$$

هارموني فنكشن بلل كيږي.

يادونه: فنكشن ( ۱۵ . ۱۱ت) د پيژند ( ۱۵ . ۱۵ ) له مخی تړلی يا ځنځيري فنكشن دی. موږ ترڅيرني لاندې نيسو چي د سا ين فنکشن د مخه فاکتور a فاکتور د خپلواك واريابل tاو زياتوونکی د ساين فنکشن په خپلواك )Argoment( د كږښځيره باندې څه تاسير اچوي.

۱ - د فاكتور a تاثير په فنكشن y = a . sin t د y = sin t فنكشن ارزښت باندې غزول يا راكشول دی كه ( |a| > 1 )او يا پړسول دي كه |a| < 1)وي y= a.sin x فنكشن ارزښت a - ځله د فنكشن ارزښت y = sin t دی، چيرته چی برسيره پردې د 0 < a لپاره په t - محور يوه اينه څيرونه هم منځ ته راولي ( څېره ش. ۱۵ ۲۱ الف .) (a = 2 , a = 1 / 2 په فنكشن كی a امپلیتودې Amplitude(جګوالی( نوميږي او د شوينګنګ Schwingungرپيدنی پراخوالی يا ښه : سور باندې تاثير اچوي.
څيره شته

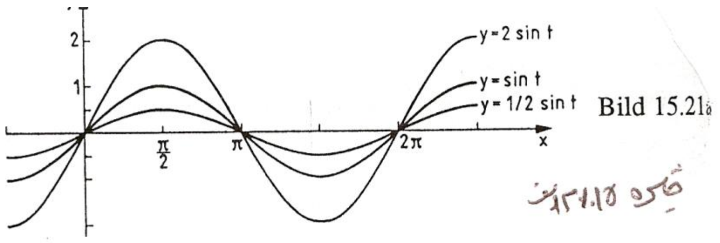
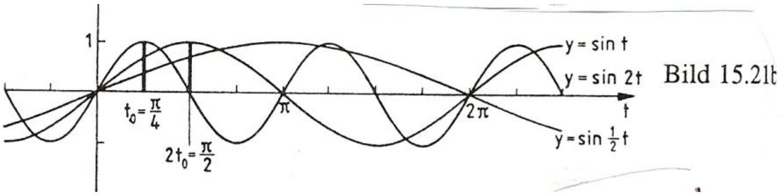



Bild 15.21a

۲ - په فنكشن y = sin$\omega$ t كی فاكتور $\omega$ په فنكشن y = sin t باندې يو وختني غزول كه $|\omega|<1$ يا پړسول كه $|\omega|>1$ وي تاثير اچوي.چيرته چی د $\omega > 0$ لپاره برسيره پردې يو په y- محور اينونه هم ده.
د يوه ټاكلي خپلواك $t = t_0$ لپاره په فنكشن y = sin$\omega$ t يوه فنكشن ارزښت، دy = sin t خپلواك $\omega$-ځله ، يعني $t = \omega t_0$ لپاره غوره كوي ( څيره ؟؟ ش . ۱۵ . ۲۱ ب ).
ګردی فركونځ ( Kreisfrequenz) بلل كيږي، دا په پريودې تاثير اچوي او y = $\omega$ t پريودې $P = \frac{2\pi}{\omega}$ لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library





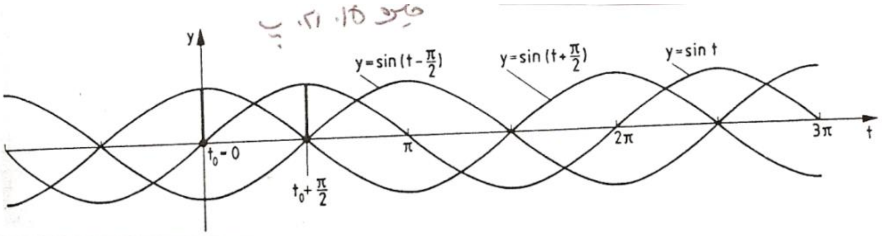

۳ – زیاتیدونکی $\varphi$ په فنکشن $y = \sin(t+\varphi)$ کی د $y = \sin t$ باندې دیوې راکښنې تاثیر په $|\varphi|$ له کینې لور $\varphi > 0$ او یا له ښي لور $\varphi < 0$ اچوي .
د یوه ټاکلي خپلواك $t = t0$ لپاره د فنکشن $y = \sin(t+\varphi)$ سره یو فنکشن ارزښت، چې د $y=\sin t$ لپاره ۰
د $\varphi$ په کچه راکښل شوی ( یعنی د یوه ځاي څخه بل ځای ته وړل شوی ) وي، یعني د $t = t_0+\varphi$ لپاره، غوره کوي.(څیره ، ۱۵ . ۲۱ پ)

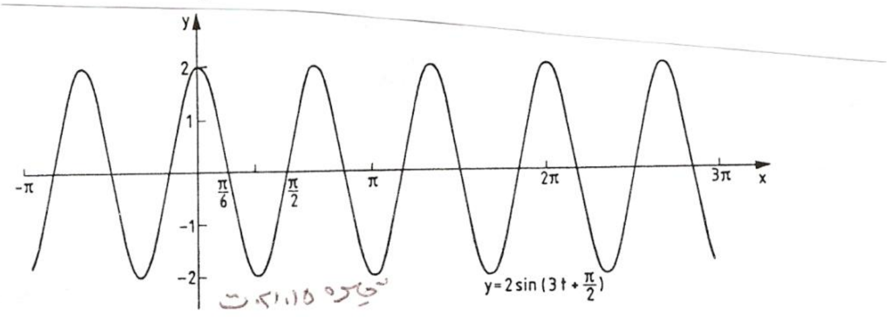
$$(\varphi = \frac{\pi}{2}, \varphi = -\frac{\pi}{2})$$

په فنکشن

$$y = a.\sin(\omega t + \varphi) = a.\sin\omega\,(t + \frac{\varphi}{\omega})$$

کی $\varphi$ چی فازې نومیږي یو د راکښلو تاثیر په کره $y = a.\sin\omega t$ د $\frac{\varphi}{\omega}$ په اندازه اچوي.



(c) ketabton.com: The Digital Library



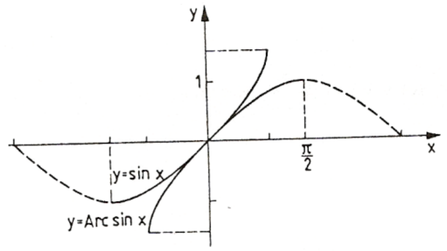
---

په پورته شکل ۱۵ .۲۱ ت کی هارموني فنکشن $y = 2 . \sin ( 3t+\frac{\pi}{2} )$ انځوردی. هغه امپليتود $a = 2$ لري، پريودې يی $P=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2}{3}\pi$ او په $\frac{\varphi}{\omega}=\frac{\pi}{6}$ کې د sint و کيڼ لورته راکښل شوی دی.

ځبره ۱۵ . ۲ پ $\varphi=\frac{\pi}{2}, \varphi=-\frac{\pi}{2}$

د تريګونومتري فنکشنونو( يواځني) په معکوسوالي يا په څتوالي کی موږ په ځانګړو يوغږيزو يا مونوتوني اينتروالونو تکيه کوو، د لاندې تعريف سره مناسب

پيژند .۱۵ ۰ ۱۴ :
( پام: ځيرې له تشريح د مخه راغلې، بله لار نه وه)



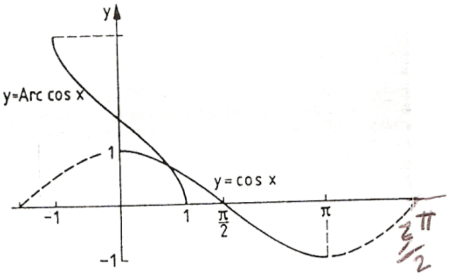
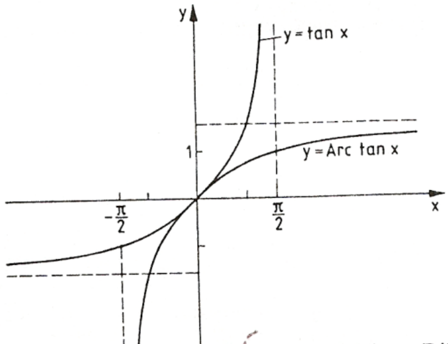




Bild 15.22 Bild 15.23



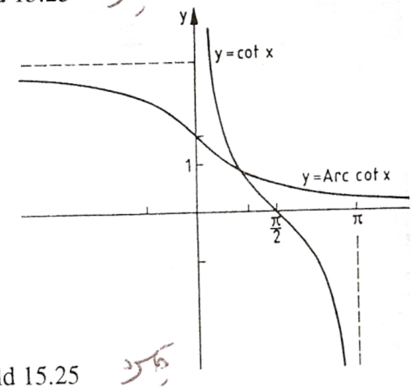




Bild 15.24 Bild 15.25

د لاندې فنکشنونو

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

$$1.\ y=\sin x,\quad D=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right],\ W=[-1,1] \qquad (15.12a)$$

$$2.\ y=\cos x,\quad D=[0,\pi],\quad W=[-1,1] \qquad (15.12b)$$

$$3.\ y=\tan x,\quad D=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),\ W=\mathbf{R} \qquad (15.12c)$$

$$4.\ y=\cot x,\quad D=(0,\pi),\quad W=\mathbf{R} \qquad (15.12d)$$

پرخڼ یا چپه فنکشنونه لاندې ځیکلومتریکي فنکشنونه ( ارکوس فنکشنونه ) دي:

$$1.\ y=\mathrm{Arc}\sin x,\quad D=[-1,1],\quad W=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \qquad (15.13a)$$

$$2.\ y=\mathrm{Arc}\cos x,\quad D=[-1,1],\quad W=[0,\pi] \qquad (15.13b)$$

$$3.\ y=\mathrm{Arc}\tan x,\quad D=\mathbf{R},\quad W=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \qquad (15.13c)$$

$$4.\ y=\mathrm{Arc}\cot x,\quad D=\mathbf{R},\quad W=(0,\pi) \qquad (15.13d)$$

د تریګونومتري فنکشنونو برخی په مونوتوني ایتروالونو ) ۱۵ .۱۲ الف( تر) ۱۵ . ۱۲ ت ( او د هغوي چپه ) ۱۵ . ۱۳ الف ( تر ) ۱۵ . ۱۳ ت ( په ځیرو ۱۵ . ۲۲ تر ۱۵ ۲۵ پورې انځور دي.

## ۱۵ . ۴ ځنځیري ( تړلي ) فنکشنونه

پیژند ۱۵ . ۱۵ :

د x ∈ Dلپاره یو فنکشن ( z = g(x د ارزښتدیري W سره ورکړ شوی او برسیره پر دې د z ∈ Wلپاره یو فنکشن y= f(z)ورکړشوی، نو

$$y = f(g(x)) \qquad (15.14)$$

د x تړلی ( ځنځیري) فنکشن بلل کیږي٠

یادونه : یو تړلی فنکشن کیدی شي چی زیاتو ځنځیرونو سره هم رامنځ ته شي: د بیلګي په توګه z = f(x

دx ∈D, z∈ Wلپاره او ( w=h (z د z ∈W,w∈ W*لپاره

او y=f(w) د W∈ W* لپاره لرو،

نو y=f[h(g(x))] هم د x یو تړلی فنکشن دئ

بیلګه ۱۵ . ۱۶ :

الف : د z = 2x + 4 او $y=e^z$ سره تړلی فنکشن $y=e^{2x+4}$ لاس ته راځي .

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

ب : په ترلي فنکشن $y = \sin x^2$ کی $z = x^2$ دننني - او $y = \sin z$ د باندنی فنکشن دی.
په ترلي فنکشن $y = \sin^2 x= (\sin x)^2$ کي $z = \sin x$ د ننني - او $y=z^2$ دباندنی فنکشن دئ

پ : د

$, y = \cos w \;\; w = \sqrt{z} \;\; , \;\; z = 2x + 4,$

سره ترلي فنکشن $y = \cos \sqrt{2x + 4}$ لاس ته راځي

ت : په ترلي فنکشن $y=\mathrm{Arctan}1/(x-1)$ کی$z=x-1$ دننني، $w=1/z$ منځنی او $y=\mathrm{Arctan}\ w$ دباندنی فنکشن دئ .

یادونه : د یوه ورکړشوي x - ارزښت لپاره د ځنځیري فنکشنونو د فنکشن ارزښت شمیرنی

له » دننه « پیل کیږي .

بیلګي ۱۵ . ۱۶ ته :

ب) د $x = 0.5$ لپاره دئ

$z=x^2=0,5^2=0,25;y=\sin x^2=\sin z=\sin 0,25=0,24740$

او

$z=\sin x=\sin 0,5=0,47942;y=\sin^2 x=z^2=0,47942^2=0,22984$

پ) د $x = 2$ لپاره دئ $z=x-1=2-1=1 \; ; \; w=1/z=1/1=1$

$y=\mathrm{Arctan}w=\mathrm{Arctan}1=\frac{\pi}{4}$

روښانونه، تشریح:

$y=f(x)$ تحلیلي( شننیزه) وینا بلل کیږي، که( $f(x)$ له رییل ګڼونواو بسټیزو فنکشنونوڅخه د زیاتون، کمون،ځل، ویش، له لارو ترلی یا ناترلي( ځنځیري یا نا ځنځیري) جوړیږي

د بیلګي په توګه دې په پام کی وي، چي ماتلاندې فنکشن دې صفر نه وي د پوتنځ بنسټ او همداډول رادیکاند منفی نه شي کیدلی، او یا باید مثبت وي، چی د لوګاریتم نومروس باید

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

مثبت وي او( Arc sin f(x همداډول( Arc cosf(x تيك د $x \in [-1,1]$ لپاره پېژند لري يا تعريف دي

بيلګه ۱۵ . ۱۷ :

د لاندې تحليلي ويناو لپاره دې تعريفدېري پيداکړی شي.

الف $y = \sqrt{x^2 - 3}$

راديکاند بايد کميز يا منفي نه وي، چی دا مان لري:

$x^2-3 \geq 0 <=> x^2 \geq 3 <=> |x| \geq 3$ ( $x \geq \sqrt{3}$ v $x \leq -\sqrt{3}$)

نو لرو $D = (-oe , - 3] \cup [3 ,oe]$

ب )( $y=lg(x+2)+1/(3+2x-x^2$ له لمړي زياتونی کی بايد $Numerus > 0$ نومروس وي دا په دې مانا چی : $x +2 >0 <=> x > -2$ ،

پس( $D1=(-2,oe$

په دوم زياتوني کی بايد مات لاندې په صفر برابر نه وي ( =| 0 ) وي . د مات لاندې صفرځايونه

له $3-2 \ x-x^2 = 0$ څخه لاس ته راځي او دي $x1=2,x2=-1$.

نو $D2=R\backslash(2;-1)$ دی

د فنکشن تعريفدېری بايد دا اول زياتونی او همداسی د دوم زياتونی تعريفدېري وي يعنی د D1 او D2

غوڅدېری: $D=D_1 \cap D_2 = (2 ,oe) \setminus \{2; -1\}$

پ) $y = Arc \sin (x-1)/5)$ د ارکوس ساين-فنکشن د تعريفدېري په پام کی نيولو سره بايد باور ولري-

$-1 \leq (x-1)/5 \leq 1 <=> -5 \leq x-1 \leq 5 <=> -4 \leq x \leq 6 => D=[-4,6]$

ت $( y = 1 / \sqrt{( x^2 - 4)}$

راديکاند بايد له صفر لوي وي او مات لاندې دصفرسره نامساوي، دا په دې مانا چی

$x^2-4>0 <=> x^2<4 <=> x>2$ يا $x<-2$

نو دی $D=(-\infty,-2) \cup (2,\infty)$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

## ۱۵ . ۵ تمرینونه

۱ – د ایمپلیڅیت توابعو ایکسپلیڅیت انځورونه ورکړئ

الف - $6x-10y=15$ ب - $x+y/3 = 5$

پ - $2x^2 -3y +3 = 0$ ت – $x^2 -4x + 2y – 8 = 0$

۲ – لاندې فنکشنونه په پارامترانځورونی ورکړ شوي

a) $x = 2t \quad y = -t^2 + 3t$ b) $x = \sqrt{t} \quad y = 2t+1$

c) $x = 1/t \quad y = 2(t-3)$ d) $x(/2)t - 1 \quad y = t^2$

پارامتر له منځه یوسی او په دې سره ورکړی $y = f(x)$

۳ – لاندې فنکشنونه په مونوتوني وڅیړی، او که ممکن وي نو مونوتونی اینتروالونه په تعریفېدونکو بیل (تجزیه) کړی، یا لوی نه کړی.

a) $y = 2x - 3$ b) $y = -2x + 3$ c) $y = x^2$

d) $y = -2x^2$ c) $y = 2x^2 + 1$ f) $y = |x|$

۴ – پریکړه وکړی چی لاندې فنکشنونه جفت، ناجفت او یا له دې دووکوم نه دي:

a) $y = x$ b) $y = x + 1$ c) $y = x - 1$

d) $y = 2x^2$ e) $y = 2x^2 + 1$ f) $y = (x-1)^2$

g) $y = x^2 /2$ h) $y = x^5$ i) $y = |x|$

۵ – د لاندې فنکشنونو د صفر ځایونه پیدا کړی

(c) ketabton.com: The Digital Library



a ) $y = -2x + 3$  b ) $y = (x-1)(x+2)$  c ) $y = x^2 - x - 2$

d) $y = 2x^2 - 12x + 18$  e ) $y = x^2 + 1$  f ) $y = x^3$

۶ – لاندېفنکشنونو ته په خټ فنکشونونه پیدا کړی

a ) $y = -2x + 3$  b ) $y = x^2 + 1$ , $D = [0, \infty)$, $W = [0, \infty)$

c ) $y = (x+1)^2$ , $D = [-1, \infty)$, $W = [0, \infty)$,  d) $y = x^3 / 2$ , $D = [0, \infty)$, $W = [0, \infty)$

۷ – لاندې لاینې فنکشنونه ورکړ شوي دي

a ) $y = 0,4x - 1,6$  b) $y = -x + 1$  c) $y = (1/5)(3x + 1,5)$

d ) $y = 2$  e ) $3x - 3y - 7 = 0$  f ) $4y + x = -1$

کرښې دې وکښل شي. جګوالي کونج $\alpha$ دې پیدا شي. او صفرځایونه $x_N$ و ګنی!

۸ – کومه کرښه له لاندې ټکو تیریږي

a ) (2,3)  (5,5)  b ) (1 ,1 ) او (3,7)  c) (-1,0) او ( -2,-3) ?

۹ – لاندې مربع بلواك یا فنکشنونه ورکړ شوي

a) $y = x^2 - 4x + 3$  b) $y = x^2 - 8x + 16$  c ) $y = x^2 - 6x + 10$

d ) $y = (x-5x)(x-1)$  e ) $2x^2 - 10x + 12$  f ) $y = 3x^2 + 6x$

g) $y = -\frac{x^2}{2} + x + 4$  h) $y = x^2 / 4 + x + 2$  i ) $y = 5x^2 + 45$

د ککرې کواوردینات دې پیداشي. صفرځایونه دې وګټل شي او پارابول دې انځور شي

۱۰ – د لاندې تولریشنل فنکشنونه دې دورکړشوو x ارزښتونو سره د هورنرشیما د استعمال له لارې وګټل شي. فنکشنونه دګی د خلفورم باندګی انځور شي

a ) $y = f(x) = x^3 - 6x + 5$;  $x_1 = 1$ , $x_2 = -1$

b ) $y = f(x) = (1/2)x^3 - x^2 - (13/2)x - 5$; $x_1 = 1/5$  $x_2 = 5$

c ) $y = f(x) = x^3 + 2x + 2x$ ; $x_1 = -2$  $x_2 = 0,2$

d ) $y = f(x) = x^4 - x^3 - 28x^2\ 32x + 40$ ; $x_1 = 2$  $x_2 = 5$

e ) $y = f(x) = 2x^4 - 3x^2 - 6x^2 + 5x + 6$ ; $x_1 = 1,5$  $x_2 = 2$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

۱۱ – مات ریشنل فنکشنونه ورکړل شي :

a) $y=\frac{x^2+x-2}{x^2+2x-3}$ b) $y=\frac{x^4-3x^3-4x^2}{x^2+5x+6}$

c) $y=\frac{x^3+2x^2+x}{x^4-13x^2+36}$ d) $y=\frac{x}{(x^3+6x^2+9x)(x^2-4x+4)}$

e) $y=\frac{2x^3-x^2+6x-3}{x^2+3}$.

صفرځایونه دې وګټل شي، پول. تشځایونه او د $\pm 8$ <- x لپاره ځان نیونه!

۱۲ – لاندېفنکشنونو ته په څټ فنکشنونه جوړ کړی

a ) $y = 2^{x-1}$ , D = R , W=(0,∞) b ) $y = 2^x -1$, D = R , W =(-1,∞)

c ) $y = \log_3 x$, D = (0,∞), W = R d) y = ln(x-1) , D =(1,∞), W = R

۱۳ – لاندې فنکشنونو ته مونوتوني اینتروالونه ورکړی او برخه په څټ فنکشنونه:

a ) $y =(x-1)^2$ b ) $y = x^2 -1$ c) $y=(x+1)^2 + 1$

d) $y= x^2 -4x +5$ e) $y = 4x^2$ f ) $y = (1/4)x^2 +x/2 + 1$

۱۴ – ترلې فنکشنونه $y = f[h(g(x))]$ په دننه او دباندې فنکشنونو

$y = f(w)$ , $w = h(z)$ , $z = g(x)$

بیل ( تجزیه ) کړی( د تعریف–او ارزښتدیریوورکولو څخه کیدی شي تیرشو )

a) $y=e^{(x+1)^2}$ b) $y=(e^{x+1})^2$ c) $y=\lg\sqrt{2x-3}$

d) $y=\sqrt{\lg(2x-3)}$ e) $y=\tan\sqrt{x-3}$ f) $y=\sqrt{\tan(x-3)}$

g) $y=\sqrt{\tan x-3}$ h) $y=\tan\sqrt{x}-3$ i) $y=\operatorname{Arc}\sin x^2+$

j) $y=[\operatorname{Arc}\cos(3x-2)]^{\frac{1}{2}}$ k) $y=\ln\sin\frac{x}{3}$ l) $y=\sin\ln(x+\frac{1}{3}$

m) $y=\sqrt{\frac{1}{\sin x}}$ n) $y=\frac{1}{\sqrt{\sin x}}$ o) $y=\frac{1}{\sin\sqrt{x}}$

p) $y=\operatorname{Arc}\cot e^{2x+1}$.

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

۱۵ - ترلي فنکشنونه $y = f[h\{g(k(x))\}]$ په دباندې او دننه فنکشنونو

$y = f(v),\ v = h(w), w = (g(z)),\ z = k(x)$

بيل کړی (د تعريف- او ارزښتدیري باندې تیرونه کیدی شي )

a) $y = \left[\operatorname{Arc}\cot\left(e^x + 1\right)\right]^{\frac{1}{2}}$ b) $y = e^{\operatorname{Arccot}(2x+1)^{\frac{1}{2}}}$ c) $y = \sin\left[\cos\frac{x-4}{3}\right]^2$

d) $y = \sqrt{5 - \tan\sqrt{x}}$ e) $y = \cos\left[\ln\left(x^2 - 1\right) + 1\right]$ f) $y = \log_3\left[\sqrt{2^x + 1}\right]$

g) $y = e^{\tan\sqrt{7x-1}}$ h) $y = \tan e^{\sqrt{7x-1}}$.

۱۶ - د لاندې شننیزویا سپرنیز (تحلیلي ) افادو لپاره تعریفدیري پیدا کړی.

a) $y = \sqrt{x-3}$ b) $y = \sqrt{3 - x^2}$ c) $y = \sqrt{x^2 - 9}$

d) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 9}}$ e) $y = \dfrac{1}{x^2 + x - 6}$ f) $y = \ln(2x + 5)$

g) $y = \operatorname{Arc}\cos(2x - 4)$ h) $y = \sqrt{x} + \dfrac{1}{x}$ i) $y = \ln x + \dfrac{1}{x-1}$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

# د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوې لیکنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړی:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

1987 Vienna (Austria):

دویم:

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

*Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, at the University of Vienna/Austria*

لاندې د شمیرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره ( دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې لیکنه به یې ځنو ځایونو غزېدلې او ځنې ځایونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمککچپوهنه( هندسه) ، په سلو زرو کې شمیرنه، د ګټې – او کټې د کټې شمیرنه ، د احتمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتیاوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه ( د الجبر بنستونه دي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني ـ پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

*Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German*

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنڅیال برابرون ( دا کتاب په دې څانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

*Differential equation Translation; An Introduction*

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

*Mathematical Formulas*

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپینې خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا

یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپېدو یې پیل کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې چې همدا اوس چاپ شوې دي:

: *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برینککن لیکنې چې له پرینمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

١ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

٢ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دويم ټوک

٣ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دريم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصایه یا ستاتیستیک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي، را ژباړل شوي دي.

۶ – انالیزی ١

٧ – انالیزې ٢

٨ – کرښیز الجبر

٩ - د شمیرپوهنې بنسټونه

١٠ - د فرمولونو ټولګه

١١ – فنکشنل انالیز

١٢ – وکتور شمیرنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

نورې ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښیز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې : همدا اوس ځنې چاپ شوي او ځنې چاپ ته چمتو دي.

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره :

دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلې

کتب په دوه برخو کې چاپ شوی دی

الف . لومړۍ برخه

ب . دویمه برخه

۱۶ - ځمککچپوهنه ( هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند ( منطق ریاضي)

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

۲۲- داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزي پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې( دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې وبه غزیږي.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپریږي:

د ګروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اومم ټولګې پورې ژباړل شوی ( دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیونې سره په کې راغلي او ماته زیات ګټور برېښي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

# د ليکوال ژوند ته لنډه کتنه

ماخان په اولني نوم ميرې شينواری د اروابنادې پستو او اروابناد نوررحمان زوي په ۱۳۲۰ ؟ ه لمريز کې د شينوارو هسکه مينه کې دې نړۍ ته سترګې راغړولي.

د هسکي ميني د لومړني ښوونځي (د لومړنيو زده کوونکو څخه ) څخه وروسته د رحمان بابا ليسه له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پورې( ښوونځي له لومړي ټولګې پيل او د دويم ټولګي څخه ګام او پای).

د ۱۹۶۶ تر سپټبر د کابل طب پوهنځی. له ۱۹۶۶ سپتمبر څخه د اتريش برس، چې هلته يې د شميرپوهنې ډاکتري په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

د۱۹۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فبروري تر پای د دباندنيو چارو وزارت کې مامور. د ۱۹۸۸ مارچ څخه تر ۱۹۹۲ جون پورې په بن کې د افغانستان جمهوريت سفارت شارژد افير( صفر نه وو). له هغې وروسته په جرمنې کې سياسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ څخه د ۲۰۰۹ دسمبر پورې د د رياضي څانګه کې د پوهنې وزارت درسي نساب کې دنده.

ماخان ميرې په ۱۹۷۲ کې له لرې د ميرمن ښاپيرۍ سره واده شوی، چې د واده خبر ورته اتريش ته راغی. ده له ميرمن ښاپيری سره په ۱۹۶۳ ز ک کې کوزده کړې وه.

دوي ته لوي څښتن په اتريش ويانا کې د مای په شلم ۱۹۷۹ ز ک دوه بچيان وبخښل، چې څانګه او اباسين نوميږي. څانګه په المان کې د پوهنتون علمي همکاره وه او د حقوقو ډاکتره ده او اباسين ملي اقتصاد او ټولنيزه سايکولوژي لوستلې.

ماخان شينواري بې کاره نه دی او لږ تر لږه له ۹۷ ۱۹ څخه همدا د کتابونو ليکلو اوو د ژباړې دنده يې په غاړه اخستې، چې خپل فکر د شونې پولې تازه وساتي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

**Get more e-books from www.ketabton.com**
**Ketabton.com: The Digital Library**