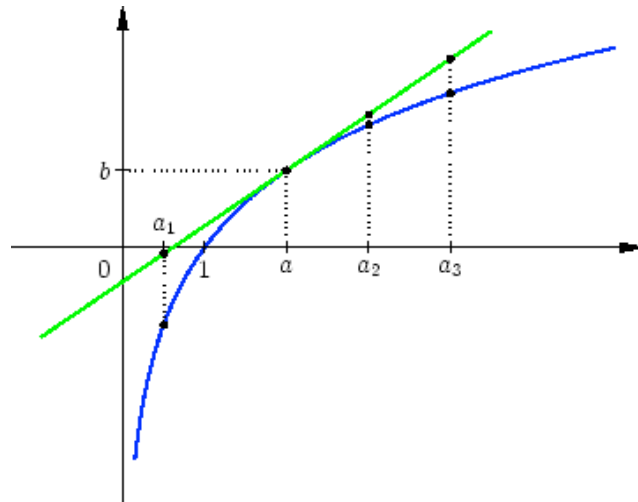


فونکشنل انالیز

Funktionalanalysis



Ketabton.com

ڊاڪٽر ماخان ميري شينواری

دلوي ڄڻتن په نامه

په دې هيله، چې په دې ليکنو او ژباړو به مې زموږ د بې وزلي او له پوهې پاتې ملت -
په ما د پوهنې لپاره د لگښت - لپاره د پوهنې په لور داسې لږ ونډه اخستې وي.

کتاب پېژندنه

د کتاب نوم: فنکشنټوري

ليکونکى:

ژباړى : ډاکټر ماخان،، مېړى،، شينواري

د خپريدو لړۍ

خپرنډوى: د افغانستان کلتوري ودې ټولنه

جرمني

چاپ کال ۲۰۱۲

د ژباړې برېښنا پته : smakhan1946@gmail.com

چاپ چارې

چاپ ته يې د هر چمتو هيوادوال مرسته په سترگو منل کيږي

.

پښتو مو ژبه او شميرپوهنه پرې ساده ده

نيولیک

۱	متریکي فضاوي
۲	د اویکلید یا اقلیدس متریک
۲	د هامینگ واټن
۳	په متریکي فضاو کې پولې ته تلنه
۴	په متریکي فضا کې د کوشي پرلپسې (ترادف)
۴	د یوې متریکي فضا پوره- یا تکمیلوالی
۵	نورم
۶	د یوې نورمې وکتور فضا متریک
۹	ایپسیلون- جال
۱۰	په متریکي فضاوو کې کومپاکټ (سره نښتی)
۱۱	په یوه ساحه باندې ناپرېکیدونکي توابع
۱۱	ازمابښتي توابع
۱۲	کمزوري یا ضعیف مشتقونه
۱۳	توپولوژیکي وکتور فضاوي
۱۴	د بانځ فضا
۱۴	په یوه کومپاکټ ډبريو باندې ناپرېکیدونکي توابع
۱۴	په کومپاکټ ډبريو باندې مشتقوړ توابع
۱۵	p -انتیگرالوړ توابع
۱۶	محدود توابع
۱۶	د موزونو اریتمیتیکی او هندسي منځ ترمنځ ..
۱۸	د انتیگرالونو لپاره د هولدر نابرابرونونه
۱۹	د انتیگرال لپاره د مینکوفسکي ناسوات
۲۱	د سوبولیف فضاوي
۲۵	د سوبولیو په کې خونديونې جمله
۲۷	د بانځ ځای په ځای ټکي جمله
۲۸	سکالار ضرب
۲۹	هیلبرت – فضا
۳۰	مربع جمعه کیدونکي پرلپسې
۳۰	مربع انتیگرالوړ توابع
۳۲	د مربع انتیگرالوړ توابعو سوبولیف – فضا
۳۳	د هارډي-لیبسک فضا
۳۴	پوره اورتونورمالسیستم

۳۴	په هیلبرت-فضا کې فوری-پروجکشن (پربوستون)
۳۶	په هیلبرت-فضا باندې د کونوکسو
۳۸	په هیلبرت-فضا کې اورتوگونال کومپلیمینټ
۳۹	په هیلبرت-فضا کې د بیسل-نامساوات
۴۰	په هیلبرت-فضا کې د فوریر(فوريي) ودیزینه
۴۱	په هیلبرت – فضا کې د پارزیوال-کټمټوالی
۴۲	ناپربکیدونکي کرښیز فنکشنال
۴۵	د هان-بانخ د دوام (مخ ته بیوني) جمله
۴۸	دوال- یا دوه گوني فضا
۵۰	بیدوالفضا
۵۰	د p - انتیگراور توابعو دوالفضا
۵۱	د ریسخ د انخوړولو جمله
۵۳	کمزوري پولې ته تلنه
۵۵	محدود کرښیز اوپراتورونه
۵۵	انتیگراال اوپراتور
۵۷	د کرښیزو اوپراتورونو پولې ته تلنه
۵۷	برابر ډوله پولې ته تلنه
۵۷	د برابر ډوله محدودوالي اصول
۵۸	د باناخ-شتاینهوز جمله
۶۱	کومپاکت اوپراتورونه
۶۳	د وازو توابعو په هکله جمله
۶۵	د رابند یا بند گراف جمله
۶۶	په هیلبرت-فضا کې د یوه کرښیز اوپراتور ماتریکس
۶۹	ادجونگيري اوپراتور
۷۰	یونیتار اوپراتور
۷۳	د یوه کرښیز اوپراتور آیگن ارزښتونه
۷۴	د هر میتیکي اوپراتورونو آیگن ارزښتونه
۷۵	د یوه هر میتیکي کومپاکت اوپراتور نورم
۷۹	د کومپاکت هر میتیکي اوپراتورونو سپکترال آنخوړون
۸۱	شتورم-لیوویل-پرابلم
۸۴	گړندی لوډونکی ازماښت تابع
۸۶	تیمپیری دیسریبوشنونه
۸۸	د تیمپیری دیسریبوشنونو مشتق
۸۹	دیراک- او هیویزاید – فنکشنال
۹۱	اپروکسيمي کټمټوالی

۹۳	د ګړندي لويدونکو توابعو د فوريې- ترانسفورميشن
۹۴	د يوه ټيمپريري ډيسټريبيوشن د فوريې- ترانسفورميشن
۹۶	د ماتو نظمونو د سوبوليف-فضاګانې
۹۹	ترانسليشن اينواريانت اوپراتورونه
۱۰۲	د لاپلاس - اوپراتور بنسټيزه اوبيونه (حل)
۱۰۵	د ډاکټر ماخان شينواري چاپ شوي ليکنې:

فونکشنل انلیزی Fuktionalanalysis

متریکی فضاوی

یوه ډبرۍ یا سټ M متریکی بلل کیږي، که په M باندې یو فنکشنوټن یا تابع وټن d د لاندې خویونو سره تعریف وي:

M1 زیاتیزوالی یا مثبتوالی $d(x, y) \geq 0$ او $d(x, y) = 0$ ټیک هلته، که $x = y$ وي.

M2 سیومتری $d(x, y) = d(y, x)$

M3 درېگودیز – یا مثلثاتي مساوات

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

د ټولو $x, y, z \in M$ لپاره.

تابع d د M متریکی په حیث هم بلل کیږي.

د متریکی له لارې په کانونیکی ډول په M باندې یوه توپولوژي هم تعریفیږي. له

$$B(x_0; r) = \{x \in M : d(x, x_0) < r\}$$

سره په x_0 باندې یو واز غونډاری د وړانګې r سره هم په نڅښه کیږي. یوه برخه

ډبرۍ $U \subseteq M$ نو له دې امله وازه بلل کیږي، که هر یوه $x \in U$ ته یوه وړانګه

$r > 0$ شتون ولري، داسې چې

$$B(x; r) \subseteq U$$

دی.

لیکونکي: اېپ او هولیک

د اویکلید یا اقلیدس متریک **Euklidische Metrik**

په $\mathbb{R}^n$ کې د اویکلید واټن

$$d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k - y_k|^2}$$

یو متریک دی.

مثبتوالی او سیومتری سملاسي لیدل کیږي او درېگوډي مساوات سیده د لاندې مینکوفسکي Minkowskischen نابرابرون څخه لاس ته راځي:

$$d_2(x, y) =$$

$$= \sqrt{\sum_{k=1}^n |(x_k - z_k) + (z_k - y_k)|^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k - z_k|^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^n |z_k - y_k|^2}$$

لیکونکي: اېپ، هیولیک

د هامینګ واټن **Hamming-Abstand**

پای پرلپسې له 0 او 1 د کودکول په تیوري کې (دوه بیز - Binär-) لغاتونه بلل کیږي.

د دوه n -خایزو لغاتونو x او y د همینګ-واټن

$d_H(x, y)$ د k ګڼون یا تعداد د $x_k \neq y_k$ سره

یو ماتریکس دی په n -خایزو بینارلغاتونو.

د بیلګې په توګه د $n = 3$ لپاره

$$d(011, 110) = 2$$

$$B(101; 2)$$

او واز غونډاری او $x = 101$ د وړانګې 2 سره توکي

001, 111, 100.

خوندي لري.

توكي چې له 101 په دوه ځايونو کې توپير لري، په دې پورې اړه نه لري، ځكه واټن بايد له دوه کوچني وي.

مثبوتالی او سيمتري روښانه دي. د درېگودي نامساوات د ورته واي تعريف څخه لاس ته راځي

$$d_H(x, y) = \sum_{j=1}^n |x_j - y_j|$$

او د مطلقه ارزښتونو

$$|x_j - z_j| = |x_j - y_j + y_j - z_j| \leq |x_j - y_j| + |y_j - z_j|.$$

لپاره د درېگودي نامساوات.

ليکونکي: اېپ، هيوليگ

په متریکي فضاو کې پولې ته تلنه

په متریکي فضا M کې یوه پرلپسې (x_n) پولې $x \in M$ ته تلونکي بلل کېږي، که دا لاندې باور ولري.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$$

توکی x د (x_n) پرلپسې پوله بلل کېږي او یواځنئ ده.

ليکونکي: اېپ، هيوليگ

که (x_n) د x او y په لور وهڅيږي، نو باور لري

$$d(x, y) \leq d(x_n, x) + d(x_n, y)$$

د ټول n لپاره، او داچې

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y) = 0$$

دی، باید

$$d(x, y) = 0$$

هم وي او له دي سره $x = y$ باور لري، داپه دي معنا چي پوله ارزښت يواځني دي.
ليکونکي: اېپ، هيوليگ

په متریکي فضا کې کوشي-پرلپسي (ترادف)

Cauchy-Folgen in metrischen Räumen

په يوه متریکي فضا M کې يوه پرلپسي (x_n) کوشي - پرلپسي بلل کيږي، که د هر $r > 0$ لپاره يوه پيژند نڅښه يا ايندکس n_0 شتون ولري، داسي چي د ټول $m, n > n_0$ لپاره

$$d(x_m, x_n) < r$$

باور ولري. په ځانگړې توگه پولي ته تلونکي پرلپسي کوشي-پرلپسي ده.
که په يوه متریکي فضا M کې هره کوشي-پرلپسي په M کې يو پوله ارزښت لري، نو M پوره يا مکمل بلل کيږي.
ليکونکي: اېپ، هيوليگ

په M کې دي (x_n) يوه پولي ته تلونکي پرلپسي وي د پولي ارزښت $x \in M$ سره. د هر $r > 0$ لپاره يو ايندکس n_0 شتون لري، داسي چي د ټولو $n > n_0$ لپاره

$$d(x_n, x) < r/2$$

باور لري. نو د دريگودي نامساوات له مخي بيا دا لاندې باور لري

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x, x_n) < r/2 + r/2 = r$$

د ټول $m, n > n_0$ لپاره. د دي په تعقيب په M کې هره پولي ته تلونکي پرلپسي کوشي - پرلپسي ده.

ليکونکي: اېپ، هيوليگ

د یوې متریکي فضا پوره- یا تکمیلوالی

که د یو متریکي فضا M یو واټن تابع d په یوه پورته ډېرې $\widetilde{M} \supset M$ تعریف وي، کومه چې په M کې د ټولو کوشي-پرلېسیو پوله رازښتونه خوندي ولري، نو پایونه $\overline{M} \subseteq \widetilde{M}$ نسبت و d ته د M پوره کیدونکې بلل کېږي.

په ټوله توګه کیدی شي د M پوره کیدنه بې له په پورته -ډیرې کې له خونديونې تعریف شي. له دې سره سرې $\overline{M}$ د پولې ته تلونکو پرلېسیو ورته ټولګې سره په نڅېنه کوي یا پیژني.

د ډېریو پوره کیدنه د ناپریکیدونکو توابعو په څیرنه کې غوره رول لوبوي. خوښه، کوم چې په کې باور لري، کیدی شي د د پوله ارزښت-جوړونو له لارې $\overline{M}$ ته یوول شي. پ ځانګړې توګه یو ناپریکیدونکی تابع همدا اوس په M د هغه ارزښتونو له لارې یواځنی ټاکل شوی دی. لیکونکي: اپې، هیولیک

نورم Norm

په حقیقي یا کومپلکس وکتور فضا V یو نورم یو تابع

$$\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$$

دی د لاندې خوښو سره:

• Positivität: مثبتوالی (زیاتیزوالی)

$$\|v\| > 0 \quad \text{د} \quad v \neq 0 \quad \text{لیاره}$$

• Homogenität: هوموجینیتی

$$\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$$

• Dreiecksungleichung: درېګودیز- مثلثاتي نامساوات

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

دلته u, v په خوښه وکترونه دي او λ یو په خوښه سکالار.

د یوه نورم په مرسته کیدی شي د

$$d(u, v) = \|u - v\|$$

له لارې د دوه وکترونو په منځ کې یو واټن تعریف شي.

لیکونکي: اپې، هیولیګ، هیورنر

د یوې نورمې وکتور فضا متریک

Metrik eines normierten Vektorraumes

په یوه وکتور فضا V د یوه نورم $\|\cdot\|$ دواړتیا یا واټن فنکشن

$$d(u, v) = \|u - v\|$$

سره برابر دی. دا ځانګړی متریک دوه ورزیات خپونه لري:

- ترانسلیشن اینواریانځ یا د د خوږښت یا کښولو سره بې تغیري

Translationsinvarianz

$$d(u + w, v + w) = d(u, v)$$

- Homogenität هوموجینیتی

$$d(\lambda u, \lambda v) = |\lambda| d(u, v)$$

د ټولو $u, v, w \in V$ او سکالار λ لپاره.

لیکونکي: اپې، هیولیګ

نیم نورم Halbnorm

په یوه حقیقي یا کومپلکس وکتور فضا V باندې یو نیم نورم یو تابع

$$p : V \rightarrow \mathbb{R}$$

دی د لاندې خویونو سره:

HN1) HN د نیم نظم لپاره

: ناکمیزوالی یا نامنفیوالی:

$$p(v) \geq 0$$

HN2

Homogenität: هوموجینوالی

$$p(\lambda v) = |\lambda|p(v)$$

HN3

Dreiecksungleichung: درېګودې یا مثلثي نابرابرون

$$p(u + v) \leq p(u) + p(v)$$

د ټولو $u, v \in V$ او λ لپاره.

یو نیم نورم ټیک هلته یو نورم دی، کله چې $p(x) = 0$ فقط د $x = 0$ لپاره باور ولري.

د نیم نورم د تعریف لپاره وروستني دواړه خویونه بسیا کوي. ناکمیزوالی کیدی شي له دوي لاس ته راوستل.

لیکونکي: اپې، هیولیګ

له هوموجینیتی څخه سیده لاس ته راځي

$$p(0) = p(0 \cdot x) = 0p(x) = 0$$

او د درېګودې نامساوات سره

$$0 = p(0) = p(x + (-x)) \leq p(x) + p(-x) = p(x) + |-1|p(x) = 2p(x),$$

دا په دې معنا چې ناکمیزوالی یا نامنفیوالی

$$p(x) \geq 0$$

دی، د ټولو $x \in V$ لپاره.

لیکونکي: اپې، هیولیګ

متریک، چې د نیم نورم څخه رامنځ ته کیږي

Metrik, induziert durch Halbnormen

که په یوه وکتور فضا V د نیمنورم یوې پرلپسې (p_k) لپاره

$$p_k(v) = 0, \quad k \in \mathbb{N} \implies v = 0$$

باور ولري، د ټول $v \in V$ لپاره، نو نیمنورم یو متریک منځ ته راوړي. د کانوني واټن تابع دا لاندې ده

$$d(u, v) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{p_k(u - v)}{1 + p_k(u - v)}.$$

نسبت دې متریک ته پرلپسې (v_n) ټیک هلته د v په لور ځي یا هڅیږي، که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_k(v_n - v) = 0$$

د ټولو $k \in \mathbb{N}$ لپاره باور ولري. لیکونکي: ایپ، هیولیگ

د متریک د اکسیمونو څخه یواځې د درېگودې نامساوات ساده نه دي. باور لري

$$\begin{aligned} \frac{p_k(u - w)}{1 + p_k(u - w)} &= 1 - \frac{1}{1 + p_k(u - w)} \\ &\leq 1 - \frac{1}{1 + p_k(u - v) + p_k(v - w)} \\ &\leq \frac{p_k(u - v)}{1 + p_k(u - v)} + \frac{p_k(v - w)}{1 + p_k(v - w)} \end{aligned}$$

او له دې سره دی

$$\leq d(u, v) + d(v, w). \quad d(u, w)$$

د پولې ته تلنې لپاره لومړی نیسو، چې

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(v_n, v) = 0$$

باور لري او یو k شتون لري، داسې چې

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_k(v_n - v) = 0$$

باور نه لري. له دې سره نو يو برخه پرلپسې (v_{n_j}) شتون لري چې د هغې لپاره تل

$$p_k(v_{n_j} - v) > \varepsilon > 0$$

باور لري او له دې امله

$$d(v_{n_j}, v) \geq 2^{-k} \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} > 0$$

باور لري، کوم چې مخامخوالی يا تضاد دی.

$$\varepsilon > 0$$

له بله پلوه دې وي او باور دې ولري

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_k(v_n - v) = 0$$

د ټول k لپاره. نو يو k_0 شتون لري، داسې چې

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty} 2^{-k} \frac{p_k(v_n - v)}{1 + p_k(v_n - v)} < \frac{\varepsilon}{2}$$

باور لري. پسي هم نسبت نیممتریک ته د پولې ته تلنې له امله لاس ته راځي، چې د 1

او k_0 تر منځ دهر k لپاره يو n_k شتون لري، داسې چې د ټولو $n > n_k$ لپاره

$$p_k(v_n - v) < \frac{2^{k-1}}{k_0} \varepsilon$$

باور لري. که کيږدو

$$n_0 = \max_{k=1, \dots, k_0} n_k,$$

نو د ټولو $n > n_0$ لپاره باور لري

$$= d(v_n, v)$$

$$\sum_{k=1}^{k_0} 2^{-k} \frac{p_k(v_n - v)}{1 + p_k(v_n - v)} + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} 2^{-k} \frac{p_k(v_n - v)}{1 + p_k(v_n - v)}$$

$$\sum_{k=1}^{k_0} 2^{-k} \frac{2^{k-1}}{k_0} \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

<

څه چې نسبت متریک ته پولې ته تلنه ښايي.

لیکونکي: اېپ، هیولیک

ایپسیلون-جال Epsilon-Netz

د یو متریکي فضا M د یوې برخې K لپاره یو ε - جال یو پوښوونکی یا پټوونکی دی، چې د پای ډېرو غونډارو $B(x_1; \varepsilon), \dots, B(x_n; \varepsilon)$

جوړ دی. دا مینیمال وړانګه $\varepsilon_n(K)$ ، چې د n منځنۍ x_i په ښه یا اوپټیمال ټاکنې د M پوښوونې ته بسيا کوي، د ε -اینټروپي ε -Entropie (فزیکي لویه چې د تودځی پروسې خوزبنتلور په نڅښه کوي) بلل کیږي.

که یوه K ته د ټولو $\varepsilon > 0$ لپاره یو ε -جال شتون ولري، نو K توتالي محدود یا رابند بلل کیږي. لیکونکي: اپې، هیولیک

په متریکي فضاوو کې کومپاکټ (سره نښتی) او نسبي کومپاکټ ډېرئ

د یوه متریکي فضا M کومپاکټ برخه ډېرئ K کیدی شي په درې ورته ډولونو خویونیز شي

لومړی: هره وازو ډطریو سره د K پټه ونه یا پوښونه هر پای برخه پوښونه لري. دویم: په K کې هره پرلپسې یوه پولې ته ت لونکې برخه پرلپسې په K کې لري. دریم: K توتالي محدوده او پوره ده.

په پام کې دې وي، چې په $\mathbb{R}^n$ کې باوري د کومپاکټ ډېرئ کرکټریزه کونه په دریم کې محدودیت او رابندوالی په گوته کوي.

د یوه متریکي فضا M یوه برخه ډېرئ R نسبي کومپاکټ بلل کیږي، که د $\overline{R}$ رابندوالی یا راټرلوالی کومپاکټ وي، یا دې ته ورته، که په R کې هره پرلپسې یوه پولې ته تلونکې برخه پرلپسې ولري. لیکونکي: اپې، هیولیک

د بیلګې په توګه به د حقیقی اعدادو مختلفې برخې ډېرئ تر څیړنې لاندې ونيول شی.

لومړی: انټروال $[0, 1]$ د $\mathbb{R}$ یو کومپاکټ (او له دې سره یو ن سبي کومپاکټ) برخه ډېرئ ده، ځکه چې رابنده یا ټرلې او محدوده ده.

دویم: انټروال $(0, 1]$ د $\mathbb{R}$ کومپاکټ برخه ډېرئ نه ده، ځکه چې د بیلګې په توګه ، د، پرلپسې $1/n$ ، $n \in \mathbb{N}$ پوله خوندي نه لري. دا چې $[0, 1] = \overline{(0, 1]}$ دی، نو دا نیم

واز انټروال نسبي کومپاکت دی. دریم: څلورم: انټروال $[0, \infty)$ د $\mathbb{R}$ کومپاکت برخه ده، ځکه چې په حقیقت کې د وازې ډبرې $(n-1, n+1)$ ، $n \in \mathbb{N}_0$ څخه پوښ کيږي، مگر دې ته یو پای برخه پوښونه شتون نه لري. له دې امله نیم ناپای انټروال هم نسبي کومپاکت نه دی، ځکه چې د بیلګې په توګه د طبیعي اعدادو پرلپسې $1, 2, \dots$ پولي ته تلونکې برخه پرلپسې نه لري. لیکونکي: ایپ، هیولیک

په یوه ساحه باندې ناپېرېدونکي توابع **Stetige Funktionen auf einem Gebiet**

په $\mathbb{R}$ باندې د (حقیقي- یا کومپلکس ارزښتیزو) ناپېرېدونکو توابعو په فضا $C(\mathbb{R})$ د نیمنورم

$$|f|_{[-k,k]} = \max_{|x| \leq k} |f(x)|$$

له لارې د لاندې سره یو متریک تولیدوي

$$d(f, g) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{|f - g|_{[-k,k]}}{1 + |f - g|_{[-k,k]}}.$$

نسبت دې متریک ته پولي ته تلنه په خوښه کومپاکت انټروال باندې برابر ډوله پولي ته تلنه په ګوته کوي. له دې سره پوره والی لاس ته راځي، ځکه چې په برابر ډوله پولي ته تلني سره ناپېرېدنه خوندي پاتې کيږي.

د ټولیزې ساحې $D \subseteq \mathbb{R}$ لپاره به ورته توګه مخ ته ځو. د انټروال $[-k, k]$ په ځای یوه دا ساحه جوړه وونکې د کومپاکتو ډبرو پرلپسې

$$K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \dots \subset D$$

کارول کيږي یا استعمالیږي.

د $C_0(D)$ سره په D د ناپېرېدونکو توابعو ډبرې په نخښه کوو، د کومپاکت وړونکي (انتقال کوونکي) سره. لیکونکي: ایپ، هیولیک

ازماینېنې توابع **Testfunktionen**

د یوې ساحې $D \subseteq \mathbb{R}$ لپاره په D باندې د ناپای دېرواره مشتقوړ توابعو لپاره ساحه $C^\infty(D)$ ده.

د تابع لاندې فضا، چې د کومپاکت برخه دېرې $K \subset D$ د باندې برته ده ورکیري، د $C_0^\infty(D)$ سره یا د ازماښت توابعو D په نڅېنه کیري. دا فضا چې له شوارخ (Schwartz) له خوا منځ ته راوستل شوې، په ټوټه انتگرال مساواتو او دیستریبوتیو تیوري مطالعه کې غوره رول لوبوي. لیکونکي: ایپ، هیولیک

کمزوري یا ضعیف مشتقونه **Schwache Ableitung**

د ټوټه انتیگرال په مرسته کیدی شي کلاسیکي مشتق کليمي ټولنيزي شي. یو تابع

$$\partial^\alpha f, \quad \partial^\alpha = \prod_\nu \left(\frac{\partial}{\partial x_\nu} \right)^{\alpha_\nu}$$

یو په تعریف ورشو یا ساحه D تعریف شوې تابع f د کمزوري مشتق په نامه یادوو، که

$$\int_D \partial^\alpha f(x) g(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_D f(x) \partial^\alpha g(x) dx, \quad \forall g \in C_0^\infty(D),$$

د $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ ، $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ سره باور ولري. له دې سره و

راندنیونه ده، چې د ازماښت توابع g لپاره دواړه انتیگرالونه شتون لري. د بیلگي په توګه دا حالت هلته رامنځ ته کیري، که $\partial^\alpha f$ او f په هر د D په هر کومپامتبرخه دېرې مطلق انتیگرالور وي. لیکونکي: ایپ، هیولیک

توپولوژیکي وکتور فضاوي **Topologischer Vektorraum**

یو توپولوژیکي وکتور فضا V یوه وکتور فضا ده، د وازو دېریو یاسټونو په یوه سیستم $\mathcal{U}$ باندې د لاندطویونو سره ورکړل شوی یا روښانه شوی دی

T1

$$\emptyset \in \mathcal{U}$$

T2

$$V \in \mathcal{U}$$

T3

د هرو وازو ډېريو يا ستونو $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ لپاره باور لري

$$U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}$$

T4

د په خوښه وازو ډېريو $U_i \in \mathcal{U}$ لپاره باور لري

$$\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{U}.$$

يوه وازه ډېرئ $U(v) \in \mathcal{U}$ د يوه ټکي $v \in V$ چاپيريال بلل کيږي، که $v \in U(v)$ باور ولري.

د سرچينې يا پيل د چاپيريالونو $U_i(0)$ ډېرئ لوکال بنسټ $\mathcal{B}$ بلل کيږي، که هر چاپيريال $U(0)$ د لوکال بنسټ يو توکی خوندي ولري

$$\exists_i : U_i(0) \subseteq U(0).$$

داسې يو توپولوژيکي جوړښت کيدی شي د بيلگي په توگه د يوه متریک يا نورم له لارې

کره وټاکل شي يا کره شي. دا يو ټولې ته تلنکليمه راکوي. يوه پرلپسې (v_n) ټيک هلته

يوه کوښي پرلپسې ده، که د ټولو $U_i(0) \in \mathcal{B}$ لپاره يو ايندکس n_0 داسې شتون ولري چې د ټولو $m, n > n_0$ لپاره

$$v_m - v_n \in U_i(0)$$

باور ولري.

که v_∞ د (v_n) ټول ارزښت وي، نو د v_∞ په هر چاپيريال U کې د پرلپسې ټول

غږي پراته دي تر د پای ډېرو غږو پورې يعنې پای ډېر غږي کيدی شي له دې چاپريال دباندې پراته وي.

ليکونکي: اېپ، هيوليگ

د بانخ فضا Banach-Raum

يو نورمي وکتور فضا V د بانخ فضا بلل کيږي، که د نورم له لارې منځ ته راغلي متریک پوره وي، دا په دې معنا چې که هره کوشي پرلپسې په V کې يو پوله ارزښت ولري.

$$U \subset V$$

هر رابنده لاندې وکتور فضا هم د د بانخ فضا ده. په ځانگړې توگه پای پراخيدونکې يا پای بعدې فضاوې نورمي وکتور فضاوې دي. ليکونکي: اېپ، هيوليگ

په يوه کومپاکت ډېريو باندې ناپېرېدونکې توابع

Stetige Funktionen auf einer kompakten Menge

د ناپېرېدونکو (حقيقي- يا کومپلکس ارزښتيز) توابع په يوه کومپاکت برخه ډېريو

$K \subseteq \mathbb{R}^n$ باندې فضا $C(K)$ بانخ فضا ده نسبت د

$$\|f\|_{\infty} = \max_{x \in K} |f(x)|$$

له لارې تعريف شوي نورم ته. پوره کيدنه لاس ته راځي، ځکه چې برابرېوله پولي ته تلنه ساتلې پاتې کيږي.

د تعريف ورشو کومپکتوالي روښانه دی. په وازه يا نامحدود ډېري باندې ناپېرېدونکې توابع بايد نه دی، ماکسيموم ولري، له دې امله د حالتونو سره سم پای نورم نه لري. ليکونکي: اېپ، هيوليگ

په کومپاکت ډېريو باندې مشتقور توابع

Differenzierbare Funktionen auf einer kompakten Menge

د m -ځله ناپېرېدونکو مشتقور توابعو (حقيقي - يا کومپلکس ارزښتيزي) فضا

$C^m(K)$ په يوه کومپاکت برخه ډېريو $K \subseteq \mathbb{R}^n$ نسبت و

$$\|f\|_{k,\infty} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha f\|_\infty$$

ته د تعريف شوي نورم يو باناخ-فضا ده. پوره والی لاس ته راځي، ځکه چې د ټوټه مشتقونو ، $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ $\partial^\alpha f$ ناپرېکيدونکی مشتق تابع، د برابر ډوله پولې ته تلنه ساتلې پاتې کيږي.

د تعريف ورشو کومپکتوالی روښانه دی. په وازه يا نامحدود ډېرۍ باندې ناپرېکيدونکي توابع بايد نه دی، ماکسيموم ولري، له دې امله د حالتونو سره سم پای نورم نه لري.

ليکونکي: اپې، هيوليگ

p-integrierbare Funktionen - انتيگرالور توابع

د يوې ساحې $D \subseteq \mathbb{R}^n$ لپاره ، $L^p(D)$ ، $1 \leq p < \infty$ ، د تابع باناخ-فضا په گوته کوي، چې هغه نسبت و نورم

$$\|f\|_p = \left(\int_D |f|^p \right)^{1/p}$$

ته د ناپرېکيدونکي له لارې د د کومپاکت وړونکي ډېرۍ سره ښېروکسيمي کيږي، دا په

دې معناچې د $L^p(D)$ رابندونه Abschuß ده نسبت و ته ده. $\|\cdot\|_p$ توابع فقط تر کچې صفر پورې په ډېرۍ ټکي ډوله تعريف دي. سړی ليکي $f = g$

ن.ه. : نږدې هرچېرته (almost everywhere)

د توابعو لپاره، چې فقط په يو صفر ډېرۍ يا فرست سره توپيري او داسې توابع راپېژني. په ټيکه توگه سړی ورته والی يا اکويوالنت تر څيرني لاندې نيسي، چې د هغوی لپاره

او f g ځای نيونکي يا نماينده گان دي.

$$L^p(D)$$

د لېسک انیگرال په مرسته کېدی شي په ټولیزه توګه د په خوښه لېسک-کچور دېرئ لپاره تعریف شي. د اپروکسیمیشن ته کېدی شي، ریمن-انٹیګرال ته ورته د زینې توابع کارول کېږي، چې د لېسک-کچور د D په برخه دېرئ ثابت دی. لیکونکي: ایپ، هیولیک

محدود توابع Beschränkte Funktionen

$$L^\infty(D)$$

$$D \subseteq \mathbb{R}^n \quad f$$

د لېسک کچور توابعو د ساحي یا ورشو لپاره د بانخ فضا د سره په نخښه کو، چې په یوه صفر دېرئ محدود دی، دا په دې معنا، چې

$$|f(x)| \leq c < \infty$$

نږدې هر چیرته دی. د c کوچني بند یا بندیز یا نور هم ښه پوله د

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{x \in D} |f(x)|$$

سره په نخښه کوو.

$$L^\infty(D)$$

فضا د ټول هر چیرته په D محدودو توابعو یوه اصلي برخه دېرئ ده. دواړه

$$\|\cdot\|_\infty$$

فضاوي کېدی شي نسبت ته د ناپرېکېدونکو توابعو سره جوړې یا تولید کړای

$$L^p(D)$$

شي. دا یو روښانه توپیر دی د p - انٹیګرلور توابعو ته.

لیکونکي: ایپ، هیولیک

د موزونو اریتمیتیکی او هندسي منخ ترمنخ نابرابرونونه

Ungleichung zwischen dem gewichteten arithmetischen und

geometrischen Mittel

$$a_1, \dots, a_n$$

د زیاتیزو یا مثبتو گڼونو لپاره اریتمیتیکی منخ نسبت هندسي منخ یا وسط ته کوچنی نه دی:

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}.$$

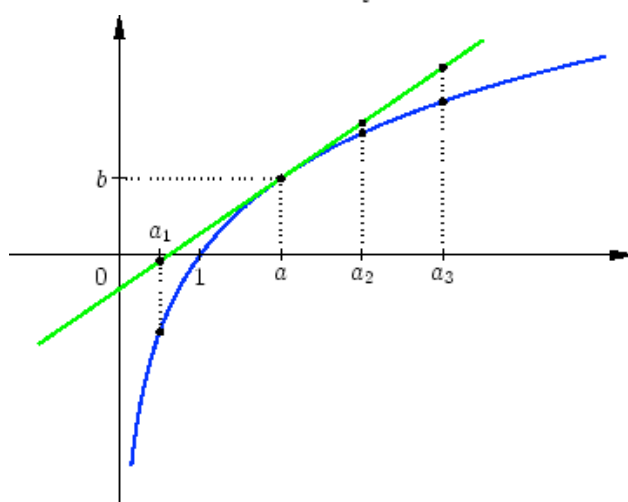
په ټوليزه توگه د مثبت وزن λ_i لپاره د $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ سره باور لري

$$\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n \geq a_1^{\lambda_1} \cdots a_n^{\lambda_n}.$$

برابروالی ټيک هلته باور لري، که $a_1 = \cdots = a_n$ باور ولري.

سری د $a = \sum_i \lambda_i a_i$ او $b = \ln a$ سره د لوگاریتم کوني وروسته موزن نابرابرون يا نامسوات ورته غوښتني لاسته راوړي.

$$\sum_i \lambda_i \ln a_i \leq \ln a.$$



که-لکه په مشتق کي چې ښوول شوی- وکارول شي، چې تانجنت

$$g : y = b + \frac{1}{a}(x - a)$$

د لوگاریتم د گراف پورته لور ته پروت دی، نو د $\sum_i \lambda_i = 1$ له امله لاس ته راځي

$$\sum_i \lambda_i \ln a_i \leq \sum_i \lambda_i \left(b + \frac{1}{a} (a_i - a) \right) = b + \frac{1}{a} \left(\sum_i \lambda_i a_i - a \right) = b$$

لکه چې غوښتل مو. لیکونکي: ایپ، هیولیک

د انتیگرالونو لپاره د هولدر نابرابرونه

Höldersche Ungleichung für Integrale

وي دي $f \in L^p(D)$ او $g \in L^q(D)$ د $1 < p < \infty$ او د $1/p + 1/q = 1$ سره نو $fg \in L^1(D)$ باور لري او لاندې د هولدر نامساوات باور لري

$$\int_D |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_D |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_D |g(x)|^q dx \right)^{1/q}.$$

مساوات ټیک هلته باور لري، که د توابعو $|f|^p$ ، $|g|^q$ څخه یو یې نږدې هر چیرته د د بل ډېرواره وي.

د پولې حالت $p = \infty$ ، $q = 1$ (همداسې) $p = 1$ ، $q = \infty$ د f او g سره بدلیدنې لپاره

$$\int_D |f(x)g(x)| dx \leq \|f\|_\infty \int_D |g(x)| dx.$$

باور لري

د $p = q = 2$ لپاره دا مساوات د کوشي-شوارخ نامساوات هم بلل کیږي. لیکونکي: ایپ، هیولیک

فقط دا ناساده حالت $1 < p < \infty$ تر څيرني لاندې نيسو. داپسي بي له ټوليزو بنديزونو کيدی شي ونيول شي يا فرض شي، چې انتيگرال

$$I_2 = \int_D |g(x)|^q dx \quad I_1 = \int_D |f(x)|^p dx$$

او

زياتيز يامثبت دي. که د بيلگي په توگه $I_1 = 0$ وي، نو $|f|^p$ او له دې سره به f هر

چيرته ورک شي، دا په دې معنا چې، $\int_D |f(x)g(x)| dx = 0$ او نا مساوات به په

ساده توگه پوره وي. دا چې نامساوات د سکالا کوني $f \rightarrow rf$ ، $g \rightarrow sg$ په مقابل

کې اينواريانت يا بي تغيره دي، کيدی شي برسېره پردې $I_1 = I_2 = 1$ ونيول يا فرض شي.

د موزنو اريتميتيکي - او هندسي - يا ځمکچيز منځ ترمنځ باور لري

$$|fg| = (|f|^p)^{1/p} (|g|^q)^{1/q} \leq \frac{1}{p} |f|^p + \frac{1}{q} |g|^q.$$

له دې سره $fg \in L^1(D)$ دی او د انتيگرالونې پسې لاس ته راځي

$$\int_D |f(x)g(x)| dx \leq \frac{1}{p} I_1 + \frac{1}{q} I_2 = 1.$$

ليکونکي: اپې، هيو ليگ

د انتيگرال لپاره د مينکوفسکي ناساوات
Minkowskische Ungleichung für Integrale

د دوه توابعو f او g په $L^p(D)$ کې د $1 \leq p < \infty$ سره د مينکوفسکي نامساوات باور لري

$$\left(\int_D |f(x) + g(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq \left(\int_D |f(x)|^p dx \right)^{1/p} + \left(\int_D |g(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

مساوات ټيک هلته باور لري، که د تابعو f ، g څخه يو يې تل هر چيرته د بل ډېرواره
يو نامنفي ولري.
ليکونکي: اپې، هيوليگ

دا چې حالت $p = 1$ ساده دی، په لاندې کې به $p > 1$ ونيول يا فرض شي. ورپسې دې
همداسې $1/p + 1/q = 1$ وي او انتيگرال

$$I = \int_D |f(x) + g(x)|^p dx$$

دې بې له ټوليزو محدوديتونو زياتيز وي. نو د درېگودي نا مساوات سره لاس ته راځي

$$\begin{aligned} I &= \int_D |f(x) + g(x)| |f(x) + g(x)|^{p-1} dx \\ &\leq \int_D |f(x)| |f(x) + g(x)|^{p-1} dx + \int_D |g(x)| |f(x) + g(x)|^{p-1} dx. \end{aligned}$$

د هولدر نامساوات او $(p-1)q = p$ سره

$$\leq \left(\int_D |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_D |f(x) + g(x)|^{(p-1)q} dx \right)^{1/q}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\int_D |g(x)|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_D |f(x) + g(x)|^{(p-1)q} dx \right)^{1/q} \\
& = \left(\left(\int_D |f(x)|^p dx \right)^{1/p} + \left(\int_D |g(x)|^p dx \right)^{1/p} \right) I^{1/q}.
\end{aligned}$$

د $I^{1/q}$ سره د وېشنې له لارې سړی د مینکوفسکي نامساوات لاس ته راوړي لیکونکي: اپې، هیولیگ

د سوبولیف فضاوې **Sobolev-Räume**

د ورشو $D \subseteq \mathbb{R}^n$ لپاره

$$W^{k,p}(D), \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

د توابعو باناخ فضا بنایي د $\leq k$ نظم د کمزورو مشتقونو سره په $L^p(D)$ او

$$\|f\|_{k,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_D |\partial^\alpha f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

کې همداسې

$$\|f\|_{k,\infty} = \max_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha f\|_\infty = \max_{|\alpha| \leq k} \operatorname{ess\,sup}_{x \in D} |\partial^\alpha f(x)|$$

اړونده نورم. اړونده نيم نورم

$$|f|_{k,p} = \left(\sum_{|\alpha|=k} \int_D |\partial^\alpha f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

همداسي

$$|f|_{k,\infty} = \max_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha f\|_\infty = \max_{|\alpha|=k} \operatorname{ess\,sup}_{x \in D} |\partial^\alpha f(x)|$$

فقط د جگ نظم مشتق کاروي.

په ځانگړې توگه دی

$$W^{0,p}(D) = L^p(D).$$

ليکونکي: اېپ، هيوليگ

د بيلگي په توگه تابع

$$f(x) = |x|^s, \quad s \neq 0,$$

په n -بعديزي يا n -پراخيدوني يونگردي (دايره واحد)

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$$

تر څيرني نيول کيږي. د $s > -n$ لپاره f انتيگرالور دی،، ځکه چې د گردی

کو او ردينا تونه (پراته ولاړ محرونه) ($r = |x|$) سړی لاس ته راوړي

$$\|f\|_{0,1} = \int_D |x|^s dx = c_n \int_0^1 r^s r^{n-1} dr,$$

چيرته چي c_n دا $n-1$ - بعديز حجمونو يونفضا (واحد فضا) ده. پسي دي

$$\partial_\nu f(x) = s|x|^{s-2}x_\nu$$

د $s > 1 - n$ لپاره د f يو انټيگرالور کمزوري مشتق دی، په سرچينه کې د سيگولاريتي سره. په غونډاري کواوډينات کې سري لاس ته رانږي

$$\begin{aligned}\|f\|_{1,2}^2 &= \int_D |f(x)|^2 dx + \sum_{\nu=1}^n \int_D |\partial_\nu f(x)|^2 dx \\ &= \text{const.} \int_0^1 (r^{2s} + s^2 r^{2s-2}) r^{n-1} dr\end{aligned}$$

د $r = |x|$ سره. له دې سره $f \in W^{1,2}$ دی د $s > 1 - n/2$ لپاره. دا چې د

$n > 2$ لپاره کميز اکسپوننتونه s هم منځ ته راتلی شي، له دې لاس ته راځي، چې مربع انټيگرالور مشتقونه نه اړين محدود دي. د مشتقونو کمزوروالي څخه ناپرېکښه لاس ته راځي.

که همدا توابع په ساحه

$$\tilde{D} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| > 1\}$$

وڅيرل شي، نو f مربع انټيگرالور دی د $s < -n/2$ لپاره او کمزوري مشتقونه د

$s < 1 - n/2$ لپاره مربع انټيگرالور دي، کوم چې بيرته د غونډاري کواوډينات

$$\sum_{\nu=1}^n \int_{\tilde{D}} |\partial_\nu f(x)|^2 dx = \text{const} \int_1^\infty r^{2s-2} r^{n-1} dr$$

سره بنوول کیدی شي.

لیکونکي: اپې، هیولیگ

کمزوري مشتقونه په حقیقت کې ټولگیزه یا کلاسیکي مشتقلیمه ټولیزه کوي، مگر قوي سینګولاریټي اجازه نه لري. د بیلګې په توګه تابع

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x_1 \geq 0, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

راوړو، په n -بعدي یا n -پراخیدوني انټروال

$$D = (-1, 1)^n$$

ترخیرني لاندې نیسو. تابع په هیوپر سطحه Hyperebene

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0\}$$

$$g = \partial_1 f \in L^2(D)$$

پربکیدونکي ده او مربع – انټیګرالوړ کمزوری مشتق لري، دا په دې معنا چې مساوات

$$\int_D g(x) \varphi(x) dx = - \int_D f(x) \partial_1 \varphi(x) dx$$

$$\varphi \in C_0^\infty(D)$$

د هیڅ کوم g لپاره د ټول وینایو، نو یو ازماښت تابع لپاره پوره وړ دی. د دې لپاره چې دا

$$\varphi(x) = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0, \quad \varphi(0) > 0,$$

ټاکو او ودې ته د $1 > \varepsilon > 0$ لپاره

$$\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} \varphi(x_1/\varepsilon, x_2, \dots, x_n), & x_1 \in (-\varepsilon, \varepsilon) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

له دې سره په پورته مساوات کې د ښي اړخ لپاره راکوي

$$\int_D f(x) \partial_1 \varphi_\varepsilon(x) dx = - \int_{x_1 \geq 0} \partial_1 \varphi_\varepsilon(x) dx$$

$$= \int_{(-1,1)^{n-1}} \varphi_\varepsilon(0, x_2, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n$$

$$\int_{n-1} \varphi(0, x_2, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n = \text{const} > 0$$

په داسې حال کې چې په کینه خوا د کوشي-شوارخ نامساوت

$$\left| \int_D g(x) \varphi_\varepsilon(x) dx \right| \leq \|g\|_2 \left(\int_D |\varphi(x_1/\varepsilon, x_2, \dots, x_n)|^2 dx \right)^{1/2}$$

$$\left(\int_D |\varphi(y_1, y_2, \dots, y_n)|^2 \varepsilon dy \right)^{1/2} = O(\varepsilon^{1/2})$$

د ε سره د صفر 0 په لور خپي.
لیکونکي: اېپ، هیولیک

د سوبولیو په کې خونديونې جمله **Sobolevscher Einbettungssatz**

د یوې لیخشیخ ورشو $D \subset \mathbb{R}^n$
لپاره د سوبولیو-فضا لپاره خونديونه

$$W^{k,p}(D) \subset W^{l,q}(D), \quad q > p, \quad \frac{k-l}{n} > \frac{1}{p} - \frac{1}{q},$$

باور لري، له کوم سره چې د $q = \infty$ لپاره ټيک يوه خونديونه په $W^{l,\infty}(D) \cap C^l(D)$

پسي منځ ته راځي.

د محدودې ورشو لپاره خونديونه کومپاکته، دا په دې معنا چې محدوده ډېرۍ په

$W^{k,p}(D)$ کې پولې ته تلونکي پرلپسې په کې لري. لیکونکي: اېپ، هیولیک

د بیلګې په توګه خونديونه

$$W^{1,p} \subset W^{0,q} = L^q$$

د تابع

$$f(x) = |x|^s, \quad s \neq 0$$

په مټه په n —بعدیز یونغونډاري

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$$

څیرل کیږي. تابعه د $s > -n/q$ لپاره —انتیګرالور ده، ځکه چې د غونډاري

کوارډینات $(r = |x|)$ سره لاس ته راځي

$$\|f\|_{0,q}^q = \int_D |x|^{sq} dx = c_n \int_0^1 r^{sq} r^{n-1} dr,$$

د کوم سره چې c_n د یونغونډاري —بعدیز حجم دی. نور پسي دی

$$\partial_\nu f(x) = s|x|^{s-2}x_\nu$$

د یو کمزوری مشتق دی، کوم چې د $s > 1 - n/p$ لپاره —انتیګرالور دی. دا بیرته کیدی شي د غونډاري کوارډینات له لارې وازمایل شي

$$\int_D |\partial_\nu f(x)|^p dx \leq |s|^p \int_0^1 r^{(s-1)p} r^{n-1} dr ,$$

د کوم سره چټ

$$|x_\nu|^p \leq \left(\sum_\nu |x_\nu|^2 \right)^{p/2} = r^p$$

$$W^{1,p} \subset W^{0,q}$$

دی، که

کارول شوی. د خوندیوني جملې پسې

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$$

همداسې

$$1 - \frac{n}{p} = n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{p} \right) > n \left(-\frac{1}{q} \right)$$

باور ولري، کوم چې په باندې د پورته شرایطو سره سر خوري.

لیکونکي: اپې، هیولیک

Banachscher Fixpunktsatz د بانخ های په های ټکي جمله

که g یو رایوهای کیدونکي تابع وي، کوم چې یوه نه تشه، رابنده ډېرې $D \subset \mathbb{R}^n$ په خپل ځان څیره کړي، دا په دې معنا چې، باور لري

$$\begin{aligned} D &= \overline{D} \\ x \in D &\Rightarrow g(x) \in D \end{aligned} \quad \bullet$$

$$\|g(x) - g(y)\| \leq c\|x - y\| \quad \forall x, y \in D \quad \bullet$$

د $c < 1$ سره، نو g یو یواځنی ځای ټکی $x_* = g(x_*) \in D$ لري. که له $x_0 \in D$ راوړو یا مخ ته لاړ شو، نو کیدی شي x_* د اتریشن پرلپسې (د تکرار پرلپسې) له لارې

$$x_0, x_1 = g(x_0), x_2 = g(x_1), \dots$$

اپروکسیمیر (په نږدې توګه ټاکل) شي یا نږدې (که غواړئ: تقریبي) وټاکل شي. د ناتیګاوي لپاره باور لري

$$\|x_* - x_k\| \leq \frac{c^k}{1 - c} \|x_1 - x_0\|$$

دا په دې معنا چې، که د اتریشن پرلپسې یا د تکرار پرلپسې د هر پیل ارزښت لپاره کرښیزه پولي ته لاړه شي.

د ځای په ځای ټکي جمله په ټولیزه توګه په پوره متریکي فضاو کې باور لري. دا چې د ترانسلیشن واریانځ او نورم هوموجینیټی ته اړتیا پېښه نه شي، کیدی شي سری

$$\|x - y\| \quad d(x, y)$$

د یوه ټولیز واټن تابع له لارې بدل کړي.

لیکونکي: اپې، بوسلي، هیولیګ

سکالار ضرب Skalarprodukt

یو سکالار ضرب په یو کومپلکس وکتور فضا V یو تابع دی

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$$

د لاندې خویونو سره:

• Positivität: مثبتوالی:

$$\langle v, v \rangle > 0 \quad \text{für } v \neq 0$$

• Schiefsymmetrie: مایلسیمتری

$$\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$$

• Linearität: کرښزوالی

$$\langle \lambda u + \varrho v, w \rangle = \lambda \langle u, w \rangle + \varrho \langle v, w \rangle$$

له دې سره او $\lambda, \varrho \in \mathbb{C}$ $u, v, w \in V$ په خوښه وکتورونه همداسې سکالار دي. د مایل سیومتري په بست یو کومپلکس سکالار ضرب نسبت و دویمې متحولې یا اووښتوني ته کرښیز نه دی:

$$\langle u, \lambda v + \varrho w \rangle = \bar{\lambda} \langle u, v \rangle + \bar{\varrho} \langle u, w \rangle.$$

یواځې د حقیقي سکالار لپاره کومپلکس کنجوگیشن بې معنا دی. لیکونکي: اپې، هیولیگ، کرایڅ

هیلبرت - فضا Hilbert-Raum

یوه هیبرت - فضا H یوه پوره نورمي (حقیقي یا کومپلکس) وکتور فضا ده، چې په کومه کې نورم د سکالار ضرب له لارې تعریف ده:

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

په ځانګړې توګه د کوشي - شواذرڅ نابرابرونونه باور لري

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$$

همداسې د غیرګ اړخیز-ایډنټیټي یا - کټمتوالی

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2.$$

سړی د هیلبرت-فضا Hilbert-Raum سپارابل Hilbert-Raum بولي، که یوه ګڼلور اورتونورمال بنسټ

$$e_1, e_2, \dots, \quad \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j},$$

$$v \in H$$

د فوري-وډیزینه-die Fourier شتون ولري. په دې حالت کې هر

Entwicklung

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} \langle v, e_k \rangle e_k,$$

چې نسبت پورته نورم ته پولي ته تلونکې ده.
لیکونکي: ایپ، هیولیک

مربع جمعه کیدونکې پرلپسې $\text{Quadratsummierbare Folgen}$

مربع جمعه کیدونکې پرلپسې

$$c_1, c_2, \dots, c_i \in \mathbb{C}$$

هیلبرت-فضا l^2 جوړوي سبت سکالار ضرب ته

$$\langle c, d \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \overline{d_k}.$$

فضا l^2 د یوه سپارابل هیلبرت-فضا H پروتو توپ دی، ځکه چې هر توکی

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k \in H$$

کیدي شي د د اور توگونال بنسټ د ضریب c_k سره معلومه identifiziert شي. له دې
سره باور لري

$$\|v\|_H = \|c\|_{l^2},$$

دا په دې معنا، چې فضاوي H او l^2 ایزومورف دي.

لیکونکي: ایپ، هیولیک

مربع انتیگر او توابع $\text{Quadratintegrierbare Funktionen}$

د یوې ورشو یا سطحې $D \subset \mathbb{R}^n$ لپاره $L^2(D)$ د تابع $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ فضا بنایي
د لاندې سر

$$\int_D |f(x)|^2 dx < \infty$$

او دا د سکالار ضرب

$$\langle f, g \rangle_2 = \int_D f(x) \overline{g(x)} dx$$

$$\| \cdot \|_2$$

له لاري منځ ته راغلی نورم .

$$L^2(D)$$

په بدیله توگه کیدی شي د بنويي تابع په څیر د رابندېدنې په توگه هم تعریف شي، دا په دې معنا ، چې هر مربع انټیگرالور تابع کېدی شي د یوې ناپای پرلپسې په

توگه د زیاتځله مشتقور تابع f_n له لاري اېروکسیمی یا په نږدې توگه انځور شي شي:

$$\|f - f_n\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

لیکونکي: اېپ، هیولیک

د بیلگې په توگه تابع

$$f(x) = |x|^s$$

په پراخیدونې یا - بعدیزې یوونگردي (دایره واحد)

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$$

تر څیرنې لاندې ونیل شي.

د غونډاري کواوردینات ($r = |x|$) سره لاس ته راځي

$$\int_D |f(x)|^2 dx = c \int_0^1 r^{2s} r^{n-1} dr = c \left[\frac{r^{2s+n}}{2s+n} \right]_0^1,$$

دا په دې معنا چې f د $2s > -n$ لپاره مربع اېیگرال وړ دی.

که همدا تابع په ساحه

$$\tilde{D} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| > 1\},$$

تر څیرنې لاندې ونیسو، نو بیا هم د غونډاري کواوردینات سر لاس ته راځي

$$\|f\|_2^2 = \int_{\bar{D}} |x|^{2s} dx = c \int_1^\infty r^{2s} r^{n-1} dr,$$

دا په دې معنا، چې f د $2s < -n$ لپاره مربع انتیگرالور دی. لیکونکي: اپې، هیولیگ

د مربع انتیگرالور توابعو سوبولیف – فضا Sobolev-Raum der quadratintegrierbaren Funktionen

$H^k(D) = W^{k,2}(D)$ $D \subseteq \mathbb{R}^n$ لپاره د یوې ورشو (حقیقي - یا کومپلکس) هیلبرت-فضا په ګوته کوي. توابع د مربع انتیگرالور کمزورو ټوټه مشتقونو سره، چې نظم $\leq k$ لري د سکالار ضرب

$$\langle f, g \rangle_{k,2} = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_D \partial^\alpha f(x) \overline{\partial^\alpha g(x)} dx$$

له لارې

$$\langle f, g \rangle_{k,2} = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_D \partial^\alpha f(x) \overline{\partial^\alpha g(x)} dx$$

منځ ته راغلي نورم $\|\cdot\|_{k,2}$ سره. اړونده نیم نورم

$$|f|_{k,2} = \left(\sum_{|\alpha|=k} \int_D |\partial^\alpha f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

فقط د جګ نظم مشتق کاروي. لیکونکي: اپې، هیولیگ

د فوریر- لړۍ

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$$

$$D = [-\pi, \pi]$$

په باندې مربع انټیګرالور دی، که

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 < \infty,$$

وي، ځکه چې

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx} \overline{c_j} e^{-ijx} dx = 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2$$

دی، د فوریۍ – بنسټ e^{ikx} د اورتوګونالیتي په اساس مشتق

$$f'(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} ik c_k e^{ikx}$$

مربع انټیګرالور دی، که

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} k^2 |c_k|^2 < \infty,$$

وي، ځکه چې

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx = - \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} k c_k e^{ikx} j \overline{c_j} e^{-ijx} dx = -2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} k^2 |c_k|^2.$$

$$f \in H^1$$

دا چې له دویم شرط لومړی لاس ته راځي، نو لرو

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} k^2 |c_k|^2 < \infty$$

لیکونکي: اپې، هیولیګ

د هاردي-لیبسک فضا **Hardy-Lebesgue-Raum**

د هاردي-لیسټ – فضا HL د ټولو د یوونګردی په ټیکلي

$$D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

هولومورف توابعو

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

خخه جوړه ده

د

$$\|f\|_{HL}^2 = \langle f, f \rangle_{HL} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \overline{c_k} < \infty.$$

سره.

پوره اورتونورمالسیستم **Vollständiges Orthonormalsystem**

$$\{e_i : i \in I\}$$

يو اورتونورمال سیستم کيږي، که په هيلبرت-فضا کي پوره يا ماسيما بلل

$$\forall_{i \in I} \quad \langle u, e_i \rangle = 0 \implies u = 0$$

باور ولري.

$$\forall_{i \in I} \quad \langle u, e_i \rangle = 0 \implies u = 0$$

يو اورتونورمال سیستم ټيک هلته د هيلبرت – فضا يو اورتونورمال بنسټدی، کله چط هغه پوره وي.

ليکونکي: اپپ، هيوليگ

په هيلبرت-فضا کي فوري-پروجکشن (پروستون)

Fourier-Projektion in Hilbert-Räumen

د يوه وکتور v فوريي-پروجکشن په يوه هيلبرت-فضا H کي د اورتونورمالسیستم

$$e_1, e_2, \dots$$

، سره

$$p_n v = \sum_{k=1}^n c_k e_k, \quad c_k = \langle v, e_k \rangle$$

و v ته بڼه اېروکیمیشن دی د سکالار ضرب $\langle \cdot, \cdot \rangle$ له لارې ایندوڅیرت (منځ ته راغلی) نور م $\|\cdot\|$ سره، دا په دې معنا چې

$$\|v - p_n v\| = \min_{q = \sum_{k=1}^n d_k e_k} \|v - q\|.$$

لیکونکي: ایپ، هیولیگ

سری لومړی په پام کې نیسي، چې

$$\langle v - p_n v, e_j \rangle = 0, \quad 1 \leq j \leq n.$$

دا د $\{e_j\}$ د اورتونورمالیټي څخه تړلي لاس ته راځي، ځکه چې

$$\langle p_n v, e_j \rangle = \sum_{k=1}^n c_k \langle e_k, e_j \rangle = \sum_{k=1}^n c_k \delta_{k,j} = c_j, \quad 1 \leq j \leq n.$$

$$q = \sum_{k=1}^n d_k e_k$$

د یوه په خوښه اېروکسیمیشن لپاره باور لري

$$\|v - q\|^2 = \|v - p_n v + p_n v - q\|^2$$

$$\begin{aligned} &= \|v - p_n v\|^2 + \langle v - p_n v, \underbrace{p_n v - q}_{\sum_{k=1}^n (c_k - d_k) e_k} \rangle + \langle \underbrace{p_n v - q}_{\sum_{k=1}^n (c_k - d_k) e_k}, v - p_n v \rangle + \|p_n v - q\|^2 \\ &= \|v - p_n v\|^2 + \|p_n v - q\|^2, \end{aligned}$$

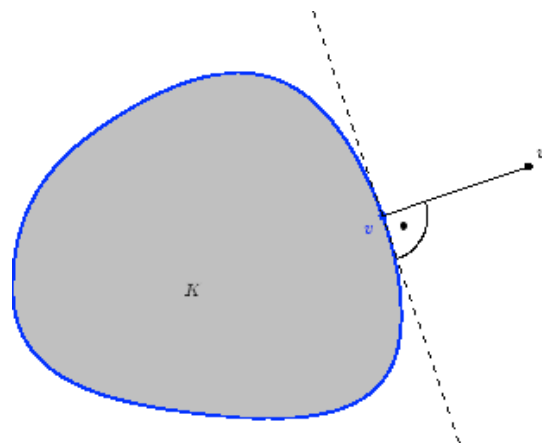
دا پهدې معنا، چې نټیکای مینیمال کیږي، که q د فوری-پروجکشن $p_n v$ وي. لیکونکي: ایپ، هیولیگ

په هیلبرت-فضا باندې د کونوکسو (وتلو) ډېریو خورا بڼه اړوکسیمیشن

Beste Approximation von konvexen Mengen in Hilbert-Räumen

د یوه هیلبرت-فضا H د یوه رابند کونوکس برخه ډېری K لپاره هر $u \in H$ ته یو یواځنی خورا بڼه اړوکسیمیشن شتون لري د دې لاندې سره

$$\|u - v\| = \inf_{w \in K} \|u - w\|.$$



خورا بڼه اړوکسیمیشن یواځنی د

$$\langle u - v, w - v \rangle \leq 0,$$

له لارې د ټولو $w \in K$ لپاره کرکتریزه (خوي ټاکنی) شوی، دا په دې معنا، چې د وکتورونو $u - v$ او $w - v$ ترمنځ کونج پخ دی.

په ځانګړې توګه د رابندو کرښیزو برخه فضاوو U خورا بڼه اړوکسیمیشن شتون لري. په دې حالت کې دا پورته سکالار ضرب صفر دی، دا په دې معنا، چې ناټیکاوې $u - v$ و U ته اورتوګونا دی.

لیکونکي: اپې، هیولیګ

که

$$d = \inf_{w \in K} \|u - w\|$$

خای په خای کړو

(u_n)

او یوه پرلپسې په K د

$$\|u - u_n\| \rightarrow d, \quad n \rightarrow \infty,$$

سره کې وټاکو، نو د K کونوکسیتي له امله باور لري

$$\frac{1}{2}(u_n + u_m) \in K$$

او ورپسې

$$\|2u - (u_n + u_m)\|^2 \geq 4d^2.$$

د غبرگ اړخیز-کټمتوالي څخه لاس ته راځي

$$\|(u - u_n) - (u - u_m)\|^2$$

$$= \{2\|u - u_n\|^2 + 2\|u - u_m\|^2\} - \|(u - u_n) + (u - u_m)\|^2$$

$$\leq \{2\|u - u_n\|^2 + 2\|u - u_m\|^2\} - 4d^2.$$

دا چې د کرور ورو نوکانو افاده یا وینه د $4d^2$ په لور هڅیږي، نو

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|u_m - u_n\|^2 = 0$$

(u_n)

لرو او په H کې یوه کوشي-پرلپسې ده، دا په دې معنا، چې یو $v \in K$ شتون لري

$$\|u - v\| = d. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = v$$

سره.

پوله ارزښت يواځنی دی، ځکه چې که یو بل پوله ارزښت $w \in K$ شتون لرو دی د
 $\|u - w\| = d$ سره، نو پرلپسې $v, w, v, w, \dots$ به لکه پورته پولې ته تلونکې وی
 $v = w$ او باید باور ولري.
 لیکونکي: اپې، هیولیګ

په هیلبرت-فضا کې اورتوگونال کومپلیمنت Orthogonales Komplement in Hilbert-Räumen

د یوې هیلبرت-فضا H هرې رابندې لاندې – یا برخه – فضا U ته یو اورتوگونال
 کومپلیمېنټ، دا په دې معنا، چې یوه رابنده لاندې فضا
 $U^\perp = \{v \in H : \langle u, v \rangle = 0, \forall u \in U\}$ ،

شتون لري د
 $H = U \oplus U^\perp$.

سره.
 لیکونکي: اپې، هیولیګ

دا چې $U^\perp$ د H یو لاندې – یا برخه فضا ده، سیده له سکالار ضرب $\langle u, v \rangle$ څخه لاس
 ته راځي، او د کونښ – شوارڅ مساوات له لارې رابندوالی لاس ته راځي.
 د $u \in U$ او $u \in U^\perp$ لپاره $\langle u, u \rangle = 0$ باور لري او له دې سره $u = 0$ همداسې
 $U \cap U^\perp = \{0\}$.

دا چې U کونوکس ده، نو د $w \in H$ لپاره یو خورا ښه اېروکسیمیشن $u \in U$
 شتون لري، هغه چې نورم $\|w - u\|$

میما ل کوي. که کیردو، نو د ټولو $v = w - u$ ، او ټولو $\tilde{u} \in U$ لپاره باور لري

$$\|v\|^2 \leq \|v - \alpha \tilde{u}\|^2 = \|v\|^2 - \bar{\alpha} \langle v, \tilde{u} \rangle - \alpha \langle \tilde{u}, v \rangle + \alpha \bar{\alpha} \|\tilde{u}\|^2.$$

د

$$\bar{\alpha} = \frac{\langle \tilde{u}, v \rangle}{\|\tilde{u}\|^2} \quad \alpha = \frac{\langle v, \tilde{u} \rangle}{\|\tilde{u}\|^2},$$

همداسي

سره لاس ته راځي

$$\|v\|^2 \leq \|v\|^2 - \frac{|\langle \tilde{u}, v \rangle|^2}{\|\tilde{u}\|^2}$$

او له دې سره

$$v \in U^\perp. \quad \langle \tilde{u}, v \rangle = 0$$

همداسي

$$w = u + v$$

دا چې دى، نو

$$H = U \oplus U^\perp$$

و بنوولشو.

ليکونکي: اپې، هيوليگ

په هيلبرټ-فضا کې د بيسل-نامساوات

Bessel-Ungleichung in Hilbert-Räumen

$$\{e_i : i \in I\}$$

په يوه هيلبرټ-فضا H کې د هر اورتونورمال سيستم لپاره باور لري

$$\sum_{i \in I} |\langle v, e_i \rangle|^2 \leq \|v\|^2$$

$$v \in H$$

د ټولو لپاره.

ليکونکي: اپې، هيوليگ

بنونه فقط يوه گڼلور اورتونورمال سيستم لپاره مخ ته بيايو.

وي دي $i_1, i_2, \dots, i_n$ د ايډکشن (پيژند نخبو) يوه په خوښه پرلپسې په I کې. د کومېکې اعدادو يوه په خوښه پرلپسې $c_{i_1}, c_{i_2}, \dots, c_{i_n}$ لپاره د e_i له اورتونورماليتي څخه لاس ته راځي

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \left\| v - \sum_{k=1}^n c_{i_k} e_{i_k} \right\|^2 \\
 &= \|v\|^2 - \sum_{k=1}^n c_{i_k} \langle e_{i_k}, v \rangle - \sum_{k=1}^n \overline{c_{i_k}} \langle v, e_{i_k} \rangle + \sum_{k=1}^n |c_{i_k}|^2 \\
 &= \|v\|^2 - \sum_{k=1}^n |\langle v, e_{i_k} \rangle|^2 + \sum_{k=1}^n |\langle v, e_{i_k} \rangle - c_{i_k}|^2.
 \end{aligned}$$

د $c_{i_k} = \langle v, e_{i_k} \rangle$ ټاکنو لپاره دا دا معنا لري

$$0 \leq \|v\|^2 - \sum_{k=1}^n |\langle v, e_{i_k} \rangle|^2$$

همداسي

$$\sum_{k=1}^n |\langle v, e_{i_k} \rangle|^2 \leq \|v\|^2.$$

دا نامساوات د پولې ته تګ $n \rightarrow \infty$ سره هم ساتلی پټي کيږي. لیکونکي: ایپ، هیولیک

په هیلبرت-فضا کې د فوریر (فوريي) ودیزینه

Fourier-Entwicklung in Hilbert-Räumen

په یوه هیلبرت-فضا H کې د یوه پوره اورتونورمال سیستم $\{e_i : i \in I\}$ لپاره سړی

$$u = \sum_{i \in I} \langle u, e_i \rangle e_i$$

د u د فوريي – وديزينه بولي.
ليکونکي: اپې، هيوليگ

په هيلبرت – فضا کي د پارزيوال-کټمتوالي

Parseval-Identität in Hilbert-Räumen

د يوې هيلبرت-فضا H د هر (نه په اړيښه توگه گڼلور) پوره اورتونورمال سيستم
 $\{e_i : i \in I\}$ لپاره باور لري

$$\sum_{i \in I} |\langle v, e_i \rangle|^2 = \|v\|^2, \quad v \in H,$$

دا په دې معنا، چي نورم v د بنسټ ضريونو د l^2 -نورم سره سره خوري.

ليکونکي: اپې، هيوليگ

بڼوونه سپار ابل خيلبرت-فضا لپاره مخ ته بيول کيږي.

د سکالار ضرب د ناپربکيدني له امله

$$\left\langle v - \sum_{k=1}^{\infty} \langle v, e_k \rangle e_k, e_j \right\rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\langle v - \sum_{k=1}^n \langle v, e_k \rangle e_k, e_j \right\rangle = \langle v, e_j \rangle - \langle v, e_j \rangle = 0$$

دی، د ټولو e_j لپاره، دا په دې معنا، چي

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} \langle v, e_k \rangle e_k.$$

له دې لاس ته راځي

$$\|v\|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=1}^n \langle v, e_k \rangle e_k \right\|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n |\langle v, e_k \rangle|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle v, e_k \rangle|^2$$

داپه دي معنا، چې د پارزيوال – کټوتوالی.

ليکونکي: اېپ، هيوليگ

ناپربکيدونکي کرښيز فنکشنال Stetiges lineares Funktional

په يوه حقيقي (کومپلکس) توپولوژيکي وکتورفضا V باندې يو ناپربکيدونکی کرښيز بنکشنل Λ يو ناپربکيدونکی کرښيز تابع دی د V په پسي. $\mathbb{R}(\mathbb{C})$.

په يوه نورمي وکتورفضا کې د Λ ناپربکيدنوالی ورته دی په صفر باندې د يوونگونداري يا واحدغونداري د څېرې ته. په دې حالت کې سړی

$$\|\Lambda\| = \sup_{\|v\|=1} |\Lambda v|$$

د کرښيز فنکشنل د نورم په حيث تعريفوي يا پېژند ورکوي.

د نورم د هوموجينيتي په بنسټ هم ورته تعريفونه

$$\|\Lambda\| = \sup_{v \neq 0} \frac{|\Lambda v|}{\|v\|} = \sup_{\|v\| \leq 1} |\Lambda v|$$

شوني دي.

ليکونکي: اېپ، هيوليگ

د دې لپاره چې وښايو، چې د ناپربکيدنې څخه محدودوالی لاس ته راځي، نيسو، چې Λ په نورمي وکتورفضا باندې ناپربکيدونکي دی، په صفر د يوونگونداري څېره يا عکس

نامحدود دی، داپه دي معنا، چې د هر $n \in \mathbb{N}$ لپاره په V کې يو v_n شتون لري د

$$| \Lambda v_n | > n . \quad \text{او} \quad \| v_n \| \leq 1$$

سره.

که کيږدو

$$u_n = \frac{1}{n} v_n ,$$

نو لاس ته راځي

$$\| u_n \| \leq \frac{1}{n} ,$$

دا په دې معنا، چې $u_n \rightarrow 0$ د $n \rightarrow \infty$ لپاره او د فنکشنل د ناپېښېدنې په بنسټ له $\Lambda(u_n) \rightarrow \Lambda(0)$ دې سره لاس ته راځي . د فنکشنل د کريزوالي سره باور لري

$$\Lambda 0 = \Lambda(0 \cdot v) = 0 \Lambda v = 0$$

د ټولو $v \in V$ لپاره او له دې سره $| \Lambda u_n | \rightarrow 0$. له بله اړخه دې

$$| \Lambda u_n | = \frac{1}{n} | \Lambda v_n | > 1 ,$$

چې تضاد انځوروي.

برعکس له محدودوالي څخه ناپېښېدنوالی لاس ته راځي، که سړی رنيسي، چې

$$| \Lambda u | < c$$

په صفر د یوونغونډاري د ټولو u لپاره. که اوس سری یوه په V کې په خوښه پرلپسې (v_n) ولري د $v_n \rightarrow v$ او $v_n \neq v$ سره د ټولو n لپاره، نو سری لاس ته راوړي

$$|\Lambda v_n - \Lambda v| = |\Lambda(v_n - v)| = \|v_n - v\| \left| \Lambda \left(\frac{v_n - v}{\|v_n - v\|} \right) \right| \leq \|v_n - v\|_C \rightarrow 0,$$

دا په دې معنا، چې د فنکشنال ناپرېکيدنه لرو.

لیکونکي: اپې، هیولیگ

د پیلګې لپاره دا کرښیز فنکشنال

$$\Lambda f = f(1)$$

د ټول $f \in C[0, 1]$ لپاره رانیسو.

د په $C[0, 1]$ د ماکسیموم نورم سره،

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in [0, 1]} |f(x)|,$$

لاس ته راځي

$$\|\Lambda\| = \sup_{\|f\|_\infty=1} |f(1)| \leq \sup_{\|f\|_\infty=1} \|f\|_\infty = 1,$$

دا به دې معنا، چې فنکشنال ناپرېکيدونکی دی. د تابع (فنکشن) $f(x) = 1$ سره د ټولو $x \in [0, 1]$ لپاره د فنکشنال د نورم لپاره راځوي

$$\|\Lambda\| = 1.$$

که د دې لپاره په $C[0, 1]$ باندې L^2 -نورم وکاروو،

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx \right)^{1/2},$$

او توابعو پرلپسې راواخلو

$$f_n(x) = \sqrt{2n+1}x^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

نوو سړی لاس ته راوړي

$$\|f_n\|_2^2 = \int_0^1 (2n+1)x^{2n} dx = 1,$$

مگر

$$f_n(1) = \sqrt{2n+1}$$

له ټولو پولو اوږي یا له ټول پولو لویږي، دا پهدې معنا، چې فنکشنل پرېکډونکی دی.

لیکونکي: ایپ، هیولیگ

د هان-بانخ د دوام (پسې تلنې یا مخ ته بیونې) جمله

Fortsetzungssatz von Hahn-Banach

د یوه نورمي وکتور فضا پ V ه یوه لاندېفضا یا برخه فضا U باندې هر ناپرېکډونکي کرښیز فنکشنال Λ ته یوه نورم ته وفاداره پرمخ ته تلنه شتون لري، داپه دې معنا، چې په V یو ناپرېکډونکی کرښیز فنکشنال $\tilde{\Lambda}$ شتون لري د

$$\tilde{\Lambda}u = \Lambda u, \quad u \in U$$

او

$$\sup_{v \in V, \|v\|=1} |\tilde{\Lambda}v| = \|\tilde{\Lambda}\| = \|\Lambda\| = \sup_{u \in U, \|u\|=1} |\Lambda u|.$$

سرہ

لیکونکی: ایپ، هیولیگ

د بیلگی په توگه د $L^2(-1,1)$ په لاندې فضا

$$U = \text{span}\{1, x, x^2\}$$

باندې د اړونده نورم

$$\|f\|_2 = \left(\int_{-1}^1 |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

سرہ کرینیز فنکشنال

$$\Lambda f = f(0)$$

راالځو.

یو تابع یا فنکشن

$$f = a + bx + cx^2$$

له U څخه لاندې نورم لري

$$\|f\|_2^2 = \int_{-1}^1 (a + bx + cx^2)^2 dx = 2a^2 + \frac{2}{3}b^2 + \frac{4}{3}ac + \frac{2}{5}c^2.$$

له دې سره له Λ څخه په U لاس ته راځي

$$\|\Lambda|_U\|^2 = \max_{0 \neq f \in U} \frac{|\Lambda f|^2}{\|f\|_2^2} = \max_{(a,b,c) \neq (0,0,0)} \frac{a^2}{2a^2 + \frac{2}{3}b^2 + \frac{4}{3}ac + \frac{2}{5}c^2}.$$

د ځای په ځای یا کلک a د $b = 0$ ، $c = -\frac{5}{3}a$ لپاره مخرج یا ماتلاندې مینیمال کيږي، دا په دې معنا، چې

$$\|\Lambda|_U\| = \sqrt{\frac{a^2}{\frac{8}{9}a^2}} = \frac{3}{4}\sqrt{2}.$$

په روښنه توګه په L^2 باندې د فنکشنال ارزښتونه پرېکږونکي ده. د دې لپاره چې د Λ لپاره یو پرمخ بیونه وګټو، نو ایښوونه

$$\tilde{\Lambda}f = \int_{-1}^1 \underbrace{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)}_{p(x)} f(x) dx$$

کوو او ضریبونه α, β, γ دغوښتو څخه ټاکو، چې $\tilde{\Lambda}$ د Λ سره د U په یوه بنسټ باید یو د بل سره سر وځوري.

$$\Lambda \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2\alpha + \frac{2}{3}\gamma \\ \frac{2}{3}\beta \\ \frac{2}{3}\alpha + \frac{2}{5}\gamma \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \tilde{\Lambda} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{Bmatrix}.$$

له دې لاس ته راځي

$$\alpha = \frac{9}{8}, \quad \beta = 0, \quad \gamma = -\frac{15}{8}.$$

د کوشي-شوارخ نامساوات په بنسټ دی

$$|\tilde{\Lambda} f| \leq \|p\|_2 \|f\|_2,$$

يعنې $\|\tilde{\Lambda}\| \leq \|p\|_2$. ډا چې $p \in U$ نو دا لاندې هم باور لري

$$\|\tilde{\Lambda}|_U\| \geq \frac{|\tilde{\Lambda} p|}{\|p\|_2} = \frac{\int_{-1}^1 |p(x)|^2 dx}{\|p\|_2} = \|p\|_2.$$

دې پسي يا د دې په تعقيب دی

$$\|\tilde{\Lambda}\| = \|p\|_2 = \sqrt{2 \left(\frac{9}{8}\right)^2 + 0 + \frac{4}{3} \frac{9}{8} \left(-\frac{15}{8}\right) + \frac{2}{5} \left(-\frac{15}{8}\right)^2} = \frac{3}{4}\sqrt{2},$$

دا په دې معنا، چې $\tilde{\Lambda}$ د Λ نورمساتونکی يا - وفادار پر مخ وړنه ده.

ليکونکي: اېپ، هيوليگ

دوال- يا دوه گوني فضا Dualraum

دبوه نورمي وکتور فضا V دوال- يا دوه گوني فضا V' په V د ناپرېکېدونکو کرښيزو فنکشنونو Λ لاندې د نورم

$$\|\Lambda\| = \sup_{\|v\|=1} |\Lambda v|$$

سره په V' نڅښه شوی يو بانځ-فضا ده.

ليکونکي: اپې، هيو ليگ

سيده ليدل کيږي، چې V' يوه نورمي وکتر فضا ده. د بنوول پې د V' پروه والی دی.

وي دي (Λ_n) يوه کوشي-پرلپسي په V' کې دا په دي معنا دی، چې د ټولو $\varepsilon > 0$

لپاره يو n_0 شتون لري، داسې چې د ټولو $n, m > n_0$ لپاره

$$\|\Lambda_n - \Lambda_m\| < \varepsilon$$

باور لري. نو د هر $v \in V$ لپاره باور لري

$$\|\Lambda_n v - \Lambda_m v\| = \|(\Lambda_n - \Lambda_m)v\| \leq \|\Lambda_n - \Lambda_m\| \|v\| < \varepsilon \|v\|$$

دا په دي معنا، چې $(\Lambda_n v)$ يوه سکالار کوشي-پرلپسي ده، نو يو پوله ارزښت

لري. دا د $\lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda_n v = \Lambda v$ له لارې تعريف شوی تابع کرښيز او له پورته تخمينونو نورم پرلپسي د ناپرکيدنې له لارې د $m \rightarrow \infty$ لپاره

$$\|(\Lambda_n - \Lambda)v\| \leq \varepsilon \|v\|$$

د $n > n_0$ لپاره. له دي لاس ته راځي، چې $\Lambda_{n_0} - \Lambda$ او له دي سره هم

$\Lambda = (\Lambda - \Lambda_{n_0}) + \Lambda_{n_0}$ ناپرکيدونکي دی، او

$$\|\Lambda_n - \Lambda\| < \varepsilon$$

د $n > n_0$ لپاره باور لري، دا په دي معنا، چې

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda_n = \Lambda.$$

ليکونکي: اپې، هيوليگ

بيدوالفضا (دوه دوه بيزه فضا) Bidualraum

د يوې نورمې وکتور فضا V بيدوال-يا بيدوه بيزه فضا V'' د V' دوه بيزه فضا ده. دا

چې هر توکي $v \in V$ دي

$$\Lambda \mapsto \Lambda v, \quad \Lambda \in V'$$

يو ناپريکيدونکي کرښيز فنکشنال په V' جوړ کړي، کيدی شي V د V'' يوې لاندې فضا سره جوړ شي يا منځ ته راشي. باورلري

$$V'' = V,$$

نو V رفلکسيو يا هنداروني بيل کيږي.

رفلکسيو باناخ-فضاوي فضاوي $L^p(D)$ ، $1 < p < \infty$ دي، همداسې هر پاي بعدي(پراخيدوني) وکتور فضاوي. $L^1(D)$ او $C[0, 1]$ د نا-هنداروني بيلگې باناخ - فضا دي

ليکونکي: اپې، هيوليگ

د p - انټيگراور توابعو دوالفضا

Dualraum der p -integrierbaren Funktionen

د يوې ورشو $D \subseteq \mathbb{R}^n$ او $1 \leq p < \infty$ لپاره دی

$$L^p(D)' = L^q(D), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

ليکونکي: اپې، هيوليگ

اوس يواځي $L^q(D) \subseteq L^p(D)'$ اينکلوزيون يا خونديونه بشوول کيږي.

هر $g \in L^q(D)$ ته د

$$\Lambda : f \mapsto \Lambda f = \int_D f(x)g(x) dx, \quad \forall f \in L^p(D),$$

له لارې په $L^p(D)$ يو ناپېرېکيدونکی کرښيز فنکشنال تعريف دی، خکه چې هولدر نامساوت پسې د د انتيگرالونو لپاره دی

$$\int_D |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_D |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_D |g(x)|^q dx \right)^{1/q} = \|f\|_p \|g\|_q < \infty$$

د $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ سره. له دې لاس ته راځي

$$\|\Lambda\| = \sup_{\|f\|_p=1} |\Lambda f| \leq \|g\|_q.$$

د $f = \text{sign}(g)|g|^{q-1}$ لپاره نامساوات تيره يا تيز دي، دا په دې معنا، چې سړی لاس ته راوړي

$$\|\Lambda\| = \|g\|_q.$$

ليکونکي: اپې، هيوليگ

د ريسخ د انځورولو جمله Darstellungssatz von Riesz

د يوې هيبرت-فضا H او يوه کره يا کلک $v \in H$ لپاره د

$$\Lambda : u \mapsto \Lambda u = \langle u, v \rangle, \quad \forall u \in H$$

له لاري یو ناپرېکيدونکی کرښيز تابع په H د

$$\|\Lambda\| = \|v\|$$

سره تعريف دی.

معکوس هر یو ناپرېکيدونکي کرښيز فنکشنال $\Lambda \in H'$ ته ټيک يو $v \in H$ شتون لري، داسې چې پورته مساوات باور لري.

ليکونکي: اېپ، هيوليگ

د بېلگې په توگه د مربعجمعه وړ پرلپسې l^2 رانيسو. وي دي ، نو ټيک يوه پرلپسې

$$\Lambda \in (l^2)'$$

په l^2 کې شتون لري د

$$\Lambda c = \langle c, d \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \bar{d}_k, \quad \forall c \in l^2.$$

سره.

د d څخه و Λ ته ديو اخني تنظيم له لاري کيدی شي فضا l^2 د خپل دوال- يا دوه گوني فضا $(l^2)'$

سره و ښوول شي ياو پيژندل شي.

ليکونکي: اېپ، هيوليگ

د بيلگې په توگه مربع انتيگرا لور توابع $L^2(D)$ په ورشو $D \subseteq \mathbb{R}^n$ رانيسو. وي

دې ، نو ټيک يو تابع $\Lambda \in L^2(D)'$ شتون لري د $g \in L^2(D)$

$$\Lambda f = \langle f, g \rangle = \int_D f(x) \overline{g(x)} dx, \quad \forall f \in L^2(D).$$

سره.

له g څخه و Λ ته د یواځني تنظیم له لارې کیدی شي فضا L^2 د خپلې دوال-یادوه $(L^2)'$ گوني فضا سره وپیژندل شي.

لیکونکي: ایپ، هیولیگ

کمزوري پولې ته تلنه *Schwache Konvergenz*

په یوه نورمي شوي وکتور فضا V یوه پرلپسې (v_n) کمزوري پولې v ته ځي، که

$$v_n \rightharpoonup v,$$

که

$$\Lambda(v_n - v) \rightarrow 0, \quad \forall \Lambda \in V'.$$

د Λ د ناپرېکيدنې په بنسټ هره پولې ته تلونکې پرلپسې

$$v_n \rightarrow v \Leftrightarrow \|v_n - v\| \rightarrow 0$$

هم کمزوري پولې ته تلونکې ده. معکوسوالی یا په ختوالی په ټولیزه توګه باور نه لري.

لیکونکي: ایپ، هیولیگ

د بیلګې په توګه په فضا کې مربع جمعه کیدونکې پرلپسې و l^2 کې پلپسې

$= (0, 0, 0, \dots)$	e
$= (1, 0, 0, \dots)$	e^1
$= (0, 1, 0, \dots)$	e^2
$\vdots$	

رانيول کيڙي. دا چي هر ناپرېکيدونکي کرښيز فنکشنال Λ په l^2 د رسسڅ (ويينه: ريڅ) د انځوريزي جملې

$$\Lambda c = \langle c, d \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \overline{d_k}$$

په حيث د کلک يا کره $d \in l^2$ سره ليکل کيږي، نو لاس ته راځ

$$\Lambda(e^n - e) = \langle e^n, d \rangle = \overline{d_n} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

ځکه چي d مربعجمعه وړ دی، دا په دې معنا، چي دی

$$e^n \rightharpoonup e, \quad n \rightarrow \infty.$$

مگر په ر حالت

$$\|e^n - e\| = 1,$$

داپه دې معنا، چي

$$e^n \not\rightarrow e.$$

لیکونکي: اپ، هیولیگ

محدود کرښیز اوپراتورونه Beschränkte lineare Operatoren

د نورمي وکتورونو فضاو تر منځ یو کرښیز تابع

$$L : V \rightarrow W$$

محدود کرښیز اوپراتور بلل کیږي، که د اوپراتور نورم

$$\|L\| = \sup_{\|v\|=1} \|Lv\|$$

پای وي. محدودوالی د L د ناپرېکیدنوالي سره په یوه معنا دی.

سری کرښیز اوپراتور هغه په کرښیز الجبر کې د کرښیز تابع په ځای کاروي، چې دانایې —بعديز Kontext غوره وښایو یا را مخ ته کړو.

د ټولو کرښیزو محدودو له V څخه د W پسې اوپراتورونو د $\mathcal{L}(V, W)$ سره په نڅښه کیږي. دا باناخ-فضا ده، که W یوه باناخ-فضا وی.

لیکونکي: اپ، هیولیگ

انتیګرال اوپراتور Integraloperatoren

د یوه تابع

$$K : D \times D \ni (x, y) \mapsto K(x, y) \in \mathbb{R}, \quad D \subseteq \mathbb{R}^n,$$

لپاره د

$$(Lf)(x) = \int_D K(x, y) f(y) dy$$

له لارې یو کرښیز اوپراتو تعریفیږي. د مخته څېرې- یا تابع - او ډڅېرې فضا(تابع تابع) V او W د داسې په نامه زړي تابع K د خویونو په واک کې دي. په لاندې کې یوه څو بیلګې او همداسې د اړونده اوپراتور نورمونه ورکړ شوي.

• په K ناپېرېدونکي، D محدود ده.

$$L : C(\overline{D}) \rightarrow C(\overline{D})$$

$$\|L\| = \max_{x \in \overline{D}} \int_D |K(x, y)| dy$$

$$K \in L^2(D \times D) \quad \bullet$$

$$L : L^2(D) \rightarrow L^2(D)$$

$$\|L\| \leq \left(\int_D \int_D |K(x, y)|^2 dx dy \right)^{1/2}$$

$$K(x, y) = \varphi(x - y), \quad D = \mathbb{R}^n \quad \bullet$$

$$L : L^p(D) \rightarrow L^p(D)$$

$$\|L\| = \int_D |\varphi(z)| dz$$

د کرښيزو اوپراتورونو پولې ته تلنه Konvergenz linearer Operatoren

د محدودو کرښيزو اوپراتورونو پرلپسېو لپاره لاندې دوه کلیمې کارول کېږي.

• Punktweise Konvergenz ټکي ډوله پولې ته تلنه

يوه پرلپسې $L_n \in \mathcal{L}(V, W)$ ټکيدوله د يوه اوپراتور L په لور پولې ته ځي،
که

$$L_n v \rightarrow L v, \quad \forall v \in V.$$

• Gleichmäßige Konvergenz برابرډوله پولې ته تلنه

يوه پرلپسې $L_n \in \mathcal{L}(V, W)$ برابرډوله د يوه اوپراتور L په لور پولې ته
تلونکې ده، که وي

$$\|L_n - L\| = \sup_{\|v\|=1} \|L_n v - L v\| \rightarrow 0.$$

د برابرډوله پولې ته تلنې څخه ټکي ډوله پولې ته تلنه راځي، معکوس په ټوليزه توګه باور نه لري.

د برابر ډوله محدودوالي اصول Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit

که د یوې باناخ-فضا V په یوه نورمي وکتور فضا W کې د یوې محدودې کرښیز
 اوپراتورونو (L_n) پرلپسې لپاره لاندې باور ولري

$$\sup_n \|L_n v\| < \infty \quad \forall v \in V,$$

نو لاس ته راځي

$$\sup_n \|L_n\| < \infty,$$

دا په دې معنا، چې د اوپراتور-نورم برابر ډوله مخدودوالی.

د باناخ-شتاینهوز جمله Satz von Banach-Steinhaus

وي دې V, W باناخ-فضا او U یوه د V ټینګه یا (غلیظه) برخه ډېرې، نو بیا یوه
 پرلپسې $L_n \in \mathcal{L}(V, W)$ ټیک هلته ټکي ډوله و یوه کرښیز محدود اوپراتور L ته ځي،

$$L_n v \rightarrow L v, \quad \forall v \in V,$$

که

(a)

$$\forall u \in U, \quad L_n u$$

پولي

$$\sup_n \|L_n\| < \infty. \quad (b)$$

د باناخ شرایط (a) او (b) دې پوره وي او v دې یو په خوښه وکتور له V څخه وي. دا
 چې U په V کې ټینګه یا کیمندلی ده، نو د $\varepsilon > 0$ لپاره یو $u \in U$ شتون لري،
 داسې چې دی

$$\|u - v\| < \frac{\varepsilon}{3 \sup_n \|L_n\|}.$$

پرلپسې $(L_n u)$ د نیوني یا ففضیي له مخې پولې ته ځي، یعنی یو ایندکس یا پیژندنځېنه n_0 شتون لري، داسې چې د $m, n > n_0$ لپاره

$$\|L_m u - L_n u\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

باور لري. له دې لاس ته راځي

$$\|L_m v - L_n v\| \leq \|L_m v - L_m u\| + \|L_m u - L_n u\| + \|L_n u - L_n v\|$$

$$\|L_n\| \frac{\varepsilon}{3 \sup_n \|L_n\|} + \frac{\varepsilon}{3} + \sup_n \|L_n\| \frac{\varepsilon}{3 \sup_n \|L_n\|} = \varepsilon,$$

دایه دې معنا، چې $(L_n v)$ په W کې یوه کوشي-پرلپسې ده. دا چې W پوره ده، ن و پوله ارزښت شتون لري، یعنی

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n v = Lv \in W.$$

د L محدودوالی او کرښیزوالی ترلی د نورم له ناپرېکېدنې لاس ته راځي.

د معکوسوني لپاره دې فقط شرایط (b) و ښوول شي. دا د برابرپوله محدودوالي له شرایطو څخه لاس ته راځي، ځکه چې

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n v = Lv$$

راکوي، چې $\sup_n \|L_n v\|$ د ټولو v لپاره پای دی.

وي دي

$$s_n f = \sum_{j=1}^n w_{j,n} f(x_{j,n})$$

د لاندې انتیګرال لپاره نږدېونه

$$s f = \int_0^1 f(x) dx .$$

که وزنونه $w_{i,n}$ زیاتیز یا مثبت وي او s_n ټیک دی د $n < \infty$ درجې پولینوم لپاره، نو لاس ته راځي

$$s f = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n f$$

د $f \in C[0, 1]$ لپاره.

بنسونه د باناخ-شتاینهوز له جملې ترلی لاس ته راځي، په کارول شوی په

$$s_n \in \mathcal{L}(C[0, 1], \mathbb{R}) \quad \text{او د} \quad C[0, 1] \quad \text{پولینومونو ټینګه برخه فضا باندې. د پولینوم}$$

$$s_n p = s p \quad \text{پولې ته تلنه روښانه دی،، ځکه چې} \quad \text{لپاره د} \quad s_n p$$

د دې لپاره چې برابر ډوله محدودوالی وښایو، سری په پام کې نیسي، چې

$$\sum_{j=1}^n w_{j,n} = 1,$$

دا چې s_n د ثابتو يا د تل همغو تابعو $f(x) = c$ لپاره ټيک دی. له دې لاس ته راځي

$$\|s_n\| = \sup_{\|f\|_\infty=1} |s_n f| = 1.$$

کومپاکت اوپراتورونه Kompakte Operatoren

د باناخ-فضاو تر څنځ يو اوپراتور $L \in \mathcal{L}(V, W)$ کومپاکت دی، که د V په W کې د يوونگونډاري (واحدغونډوسکې يا -کړې) B څېره يا عکس نسبي کومپاکت وي، دا به دېمعنا، چې په B کې د هرې پرلپسې (v_n) لپاره پرلپسې (Lv_n) يوه پولې ته تلونکې برخه پرلپسې ولري.

د بېلگې په توگه په $\mathcal{L}(V, W)$ کې دوه اوپراتورونه د $V = W = l^2$ سره رانيسو.

• Der Operator اوپراتور

$$L : (c_1, c_2, c_3 \dots) \mapsto (c_1, c_2, c_3 \dots)$$

کومپاکت نه دی، ځکه چې د بېلگې په توگه د پرلپسې و پرلپسې

$= Le_1 = (1, 0, 0, \dots)$	e_1	
$= Le_2 = (0, 1, 0, \dots)$	e_2	
$\vdots$	$\vdots$	

په B کې پولې ته تلونکې برخه پرلپسې نه لري.

• Der Operator کرښيزه تابع

$$L : (c_j) = (c_1, c_2, c_3, \dots) \mapsto (c_1, c_2/2, c_3/3, \dots) = (\tilde{c}_j),$$

$$, \quad \tilde{c}_j = c_j/j$$

کومپاکت دی. د دې لپاره دې وي (c_n) یوه په خوبه په B کې د پرلپسېو پرلپسې. نو سری په لومړي ځل کره کوي، چې په روښانه توگه د توکي

$$c_n = (c_{n,1}, c_{n,2}, c_{n,3}, \dots)$$

لپاره دا پرلپسې په هر ځای $c_{n,j}$ کې محدود دي. یعنې

$$|c_{n,j}| \leq 1.$$

که د دې پرلپسې هر فقط د ټولو پرلپسې توکو لومړني ځایونه $(c_{n,1})$ تر څیړنې

لاندې ونیسو، داسې چې د محدودوالي په بنسټ یوه برخپرلپسې $(c_{n_k(1)})$ پیداکړو، د کومو لپاره چې لومړي ځایونه پولې ته ځي. که د دې برخپرلپسېو

$(c_{n_k(1)})$ څخه اوس د هر توکي څخه لومړني دوه ځایونه

$$(c_{n_k(1),1}, c_{n_k(1),2}),$$

راونیسو، نو بېرته دمخدودوالي په بنسټ پرخپرلپسې پیداکولای شو، د کومو لپاره، چط د وه کونترې پرلپسې یا ورتړ پرلپسې

$$(d_k) = (c_{n_k(k)}), \quad k \in \mathbb{N}$$

لپاره نو د هر کره J لپاره د J د لومړني ځایونو وکتور $(d_{k,1}, \dots, d_{k,J})$ پولي ته ځي.

د دې لپاره چې وښايو، چې (d_k) غوښتونې برخپرلېسې ده، نو یوه د خوښې $\varepsilon > 0$ لپاره یو ایندکس K داسې ټاکو، چې

$$\sum_{j=K+1}^{\infty} \frac{4}{j^2} < \frac{\varepsilon}{2}$$

باور ولري. دا چې برخپرلېسې (d_k) د پورته جوړښتاصولو له مخې د لومړنيو $k, l > N$ ځایونو لپاره پولي ته ځي، نو یو ایندکس N شتون لري، داسې، چې د لپاره

$$\sum_{j=1}^K \frac{|d_{k,j} - d_{l,j}|^2}{j^2} < \frac{\varepsilon}{2}$$

باور لري. له دې سره د $k, l > N$ لپاره لرو

$$\|Ld_k - Ld_l\|_{l^2}^2 = \sum_{j=1}^K \frac{|d_{k,j} - d_{l,j}|^2}{j^2} + \sum_{j=K+1}^{\infty} \overbrace{\frac{|d_{k,j} - d_{l,j}|^2}{j^2}}^{\leq 4} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

د وازو توابعو په هکله جمله Satz über offene Abbildungen

د باناخ-فضاو تر منځ یو په باندې (surjektiver) محدود کرښیز اوپراتور L یوه وازه دېرئ په یوه وازه دېرئ څېره کوي.

که L په کې (injektiv) هم وي، نو محدودوالی له L^{-1} لاس ته راځي. له دې سره حقيقي عدونه a, b د

$$a\|v\| \leq \|Lv\| \leq b\|v\|$$

سره شتون لري د L د مخته څېرې څخه د ټولو v لپاره، چېرته چې دویم نامساوات سملاسي د L د محدودوالي څخه لاس ته راځي.

ليکوني: هيو ليگ، اپې

صرف نظر نه شي کولای، چې د عملیه يا اوپراتوري کيدنه L د باناخ-فضاو تر منځ ده. د دې ترمنځ کټمټوالی $L \in \mathcal{L}(V, W)$ څيرل کيږي، د کوم سره چې $V = l^1$ د نورم

$$\|v\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |v_k|$$

سره په نخښه کيږي او څېره فضا W د نورم

$$\|w\|_{\infty} = \sup_{k \in \mathbb{N}} |w_k|$$

سره په نخښه کيږي. د

$$\|v\|_{\infty} \leq \|v\|_1$$

له امله کټمټوالی L يو په (bijektiver) محدود کرښيز اوپراتو دی، مگر داچې

$$\left\| \sum_{k=1}^n e_k \right\|_{\infty} = 1$$

او

$$\left\| \sum_{k=1}^n e_k \right\|_1 = n$$

د $e_1 = (1, 0, 0, \dots), e_2 = (0, 1, 0, \dots), \dots$ سره، L^{-1} نامحدود دی.

لیکوني: هیولیگ، اپپ

Satz vom abgeschlossenen Graphen جمله گراف رابند یا بند

که د بانخ – فضاو ترمنځ اوپراتور $L : V \rightarrow W$ رابند وي، دا په دې معنا، چط له

$$w_n = Lv_n \rightarrow w \quad v_n \rightarrow v$$

لاس ته راځي، چې $w = Lv$ دی، نو L محدود دی.

لیکوني: هیولیگ، اپپ

له دې بیلگې څخه لیدل کیږي، چط سړی د رابند گراف په جمله کې په نیوني یا فرضیې صرف نظر نه شي کولای، داسې چې L د باناخ-فضاو ترمنځ عمل کوي یا اوپریشن کوي. د دې لپاره دفرنخیال اوپراتور

$$\mathcal{L}(V, W) \ni L : f \mapsto f'$$

رانیسو، د کوم سره چې $V = C^1[0, 1]$ د سوپریموم نورم $\|\cdot\|_\infty$ سره په نخبه

شوی دی او $W = C[0, 1]$ سره هم سوپریموم نورم دی. L یوو کرینیز اوپراتور

دی، ځکه چې د $f(x) = x^n$ لپاره

$$\|f\|_{\infty} = 1, \quad \|Lf\|_{\infty} = n$$

باور لري

محدود نه دی. مگر د L گراف رابند دی، له دې امله چې د یوې پرلپسې (f_n) لپاره
په V کې د $f_n \rightarrow f \in V$ ، $Lf_n \rightarrow g \in W$ سره باور لري، $f_n \rightarrow f$ برابر
ډوله دی، $f'_n \rightarrow g$ ، برابر ډوله دی.

L له دې لاس ته راځي، چې f مشتقور دی، او

$$f' = g$$

باور لري.

(Autoren: App/Höllig)

په هیلبرت-فضا کې د یوه کرښیز اوپراتور ماتریکس

Matrix eines linearen Operators im Hilbert-Raum

یو کرښیز اوپراتو

$$L : H \rightarrow H$$

په یوه سپارابل هیلبرت-فضا د اورتوگونال بنسټ $e_1, e_2, \dots$ سره کیدی شي د
ماتریکس

$$(a_{j,k}) : a_{j,k} = \langle Le_k, e_j \rangle$$

له لاري روښانه شي. باور لري

$$w = Lv \leftrightarrow w_j = \sum_{k=1}^{\infty} a_{j,k} v_k,$$

چيرته چې $u_l = \langle u, e_l \rangle$ د بنسټ ضريبونه ښايي يابه گوته کوي.

ليکونکي اپ، هيوليگ

د فورير-پروجکشن د پولې ته تلني او د L کرښيزوالي په بنسټ باور لري

$$w_j = \langle Lv, e_j \rangle = \left\langle \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n v_k Le_k, e_j \right\rangle.$$

که پوله او زياتون يا جمعه د سکالار ضرب سره بدل شي، نو سړی د L ماتريک انځورونه لاس ته راوړي.

ليکونکي اپ، هيوليگ

د بيلگې په توگه به د يوه 2π -پريودي يا 2π -تل بيرته راگرځيدوني تابع

$$\varphi = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_k e_k, \quad e_k(x) = e^{ikx}$$

لپاره په $L^2_{2\pi}$ دوه کرښيز اوپراتورونه رانيسو.

لومړۍ: ضرب $L : f \rightarrow \varphi f$: د فوریر – ضربونو له مخې د ماتریکس- راوړنو
Matrix-Einträge لپاره سړی لاس ته راوړي

$$a_{j,k} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) e^{i(k-j)x} dx = \varphi_{j-k}.$$

د نورو ویونو یا لغاتو سره د f ضرب د φ سره د f او φ د فوريي- ضربونو یو
 دیسکرت قټونه په ګوته کوي.

دویم قټونه غبرګونه $L : f \rightarrow \varphi \star f$: که د ماتریکس-قیمتونو

$$a_{j,k} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t) e^{i(kt-jx)} dt dx$$

په تعریف کې سړی $y = x - t$ بدل کړي، نو د

$$e^{i(kt-jx)} = e^{i((k-j)x)} e^{-iky}$$

له امله انتیګرال په y لاس ته راځي

$$a_{j,k} = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_k e^{i(k-j)x} dx = 2\pi \varphi_k \delta_{j,k}.$$

د قانوني ماتریکس دوه کونجټری یا دیاګونال دی، د f د فوريي- ضربونه د 2π —واره

د φ فوری-ضربونو سره ضربیږي

لیکونکي: اپې، هیولیګ

ادجونگيري اوپراتور Adjungierter Operator

په يوې سپارابلي هيلبرت-فضا H باندې د يوه محدود کرښيز اوپراتور L لپاره د

$$\langle Lv, w \rangle = \langle v, L^* w \rangle, \quad v, w \in H,$$

له لارې يو داسې په نامه ادجونگيري اوپراتور L^* د ماتريکس

$$(a_{j,k}^*) = (\overline{a_{k,j}})$$

سره تعريفيزي. که $L^* = L$ باور ولري، نو سړی L پخپله يا د ځان سره ادجونگيري يا هرميتيک بولي.

د بيلگې لپاره په $L^2(D)$ يو انتيگرا ل اوپراتور رانيسو. K دې يو زري تابع وي د

$$\int_D \int_D |K(x, y)|^2 dx dy < \infty,$$

سره، نو د

$$(Lf)(x) = \int_D K(x, y) f(y) dy$$

له لارې د هر $f \in L^2(D)$ لپاره يو کرښيز اوپراتو تعريفيزي. د انتيگرا ل لپاره د کوشي-شوارخ نامساوات څخه لاس ته راځي

$$\int_D |(Lf)(x)|^2 \leq \int_D \int_D |K(x, y)|^2 dy dx \int_D |f(y)|^2 dy,$$

دا په دې معنا، چې L یو محدود کرښیز اوپراتور دی په $L^2(D)$ د

$$\|L\| \leq \left(\int_D \int_D |K(x, y)|^2 dy dx \right)^{1/2}.$$

سره.

اړونده ادجونگيري اوپراتو L^* د

$$(L^*g)(x) = \int_D \overline{K(y, x)} g(y) dy$$

سره تعريفيري، دا په دې معنا، چې L ټيک هلته د ځان سره يا خپل ادجونگيري دی، که نږدې هر چيرته

$$K(x, y) = \overline{K(y, x)}$$

باور ولري.

يونيتار اوپراتور Unitärer Operator

په يوه هيلبرت-فضا کې يو محدود کرښیز اوپراتور $Q : H \rightarrow H$ يونيتار دی، که وي

$$QQ^* = I = Q^*Q,$$

چيرته چې I کټوتوالی په گوته کوي.

د يونيتار اوپراتورونو ورته خويي خووني يا کرگتريزه کوني دي

a)

$$\langle Qv, Qw \rangle = \langle v, w \rangle, \quad v, w \in H,$$

b)

$$\|Qv\| = \|v\|, \quad v \in H,$$

کوم ته چې هر چترته د Q سورجکتیویټي یا په باندې والی له مخه نیول شوی دی. لیکونکي: ایپ، هیولیک

که Q یونیتار وي، نو سملاسي لاس ته راځي، چې Q په باندې یا سورجکتیو ده او

$$\langle Qv, Qw \rangle = \langle v, Q^*Qw \rangle = \langle v, w \rangle, \quad v, w \in H,$$

خکه چې $Q^*Q = I$ ، دا په دې معنا، چې خويي a).

b) دا ساده لیدل کیږي، چې له خوي یا کرمتريزه a) څخه د $v = w$ سره سملاسي b) لاس ته راځي.

بالاخره له b) څخه لاس ته راځي

$$\langle Q^*Qv, v \rangle = \langle Qv, Qv \rangle = \|Qv\|^2 = \|v\|^2 = \langle v, v \rangle, \quad v \in H$$

د $L = Q^*Q - I = L^*$ سره له دې لاس ته راځي

$$\langle Lv, v \rangle = 0$$

د ټولو $v \in H$ لپاره، همداسي

$$\begin{aligned}
0 &= \langle L(v+w), v+w \rangle = \langle Lv, v \rangle + \langle Lv, w \rangle + \langle Lw, v \rangle + \langle Lw, w \rangle \\
&= \langle Lv, w \rangle + \langle w, Lv \rangle = \langle Lv, w \rangle + \overline{\langle Lv, w \rangle} \\
&= 2\operatorname{Re}\langle Lv, w \rangle
\end{aligned}$$

د ټولو $v, w \in H$ لپاره، که په ځټنگړې توګه کېږدو $w = Lv$ نو لاس ته ترې راځي

$$\operatorname{Re}\langle Lv, Lv \rangle = \langle Lv, Lv \rangle = \|Lv\|^2 = 0$$

او له دې سره $Lv = 0$ د ټولو $v \in H$ لپاره، نو $L = 0$ همداښه

$$Q^*Q = I.$$

د بېلګې په توګه په $L^2(\mathbb{R}^n)$ باندې سکالار شوی د فوريي – ترانسفورمېشن رانيسو د

$$(Lf)(y) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-iy^t x} dx, \quad y \in \mathbb{R}^n$$

سره. دا چې $\|Lf\| = \|f\|$ دی، نو L یونېتار دی، او اډیونکیري اوپراتور د، اړونده سکالار شوی، د معکوس فوريي-ترانسفورمېشن له لارې ورکړ شوی دی:

$$(L^*g)(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{ix^t y} dy, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

د یوه کرښیز اوپراتور آیگن ارزښتونه

Eigenwerte eines linearen Operators

که د یوه V وکتور فضا یوه کرښیز اوپراتور L لپاره په خپل ځانګې باور ولري

$$Lv = \lambda v, \quad v \neq 0, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

نو λ آیگن ارزښت بولو او v د آیگن وکتور په حیث (همداسې د یوه وکتور فضا V لپاره آیگن فنکشن). فضا

$$E_\lambda = \{v \in V : Lv = \lambda v\}$$

آیگن فضا بلل کیږي او $m_\lambda = \dim E_\lambda$ د آیگن ارزښت دېرواروالی بولو.

د بیلګې لپاره به یو ناپېرېکیدونکی نا- ثابت 2π - پریودیګي (تل بیرته راګرځیدونکی) تابع

$$\varphi(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_k e^{ikx}$$

لپاره په $L^2_{2\pi}$ دوه کرښیز اوپراتورونه راوښول شي.

(i) Der Multiplikationsoperator ضرب اوپراتور

$$L : f \mapsto \varphi f$$

آیگن ارزښت نه لري، ځکه چې له $Lf = \lambda f$ په $\varphi(x) = \lambda$ ، $x \in (-\pi, \pi)$ لاس ته راشي.

(ii) Der Faltungsoperator دقاتولو اوپراتور

$$L : f \mapsto \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\cdot - t) f(t) dt$$

اکسپوننشل تابع $e_j(x) = e^{ijx}$ د آیگن تابع په څیر لري. باور لري

$$(Le_j)(x) = \sum_k \varphi_k \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik(x-t)} e^{ijt} dt = \sum_k \varphi_k (2\pi) \delta_{j,k} e^{ikx} = 2\pi \varphi_j e_j(x),$$

دپه دې معنا، چې $2\pi \varphi_j$ اړونده آیگن ارزښتونه دي.

د هر میتیکي اوپراتورونو آیگن ارزښتونه

Eigenwerte hermitescher Operatoren

د یوه هر میتیکي اوپراتور $L : H \rightarrow H$ آیگن ارزښتونه حقیقي دي او آیگنوکتورونه و مختلفو آیگن ارزښتونو ته اورتوگونال دي.

که L هر میتیکي وي، نو باور لري

$$\overline{\langle Lv, v \rangle} = \overline{\langle v, Lv \rangle} = \langle Lv, v \rangle,$$

دا په دې معنا، چې $\langle Lv, v \rangle$ د ټولو $v \in H$ لپاره حقیقي دی. اوس دې $v \neq 0$ د آیگن وکتور وي و آیگن ارزښت λ ته، نو

$$\langle Lv, v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \lambda \underbrace{\langle v, v \rangle}_{\neq 0}$$

دی، همداسی

$$\lambda = \frac{\langle Lv, v \rangle}{\langle v, v \rangle}$$

حقیقی دی.

که $w \neq 0$ د L ایگنوتور وی و ایگن ارزښت μ ته، نو باور لري

$$\lambda \langle v, w \rangle = \langle Lv, w \rangle = \langle v, Lw \rangle = \mu \langle v, w \rangle$$

اوله $\lambda \neq \mu$ سره

$$\langle v, w \rangle = 0.$$

لیکونکي: اپې، هیولیگ

د یوه هر میتیکي کومپاکت اوپراتور نورم

Norm eines kompakten hermiteschen Operators

د یوه کومپاکت هر میتیکي اوپراتور $L : H \rightarrow H$ لپاره، $\|L\|$ یا $-\|L\|$ د L یو
ایگن ارزښت دی

بنوونه په دوه پلونو (قدمونو) کې صورت نیسي یا پلې کيږي.

(i) لومړی

$$\sup_{\|v\|=1} |\langle Lv, v \rangle| = \|L\|$$

ښوول کيږي..

د

$$s = \sup_{\|v\|=1} |\langle Lv, v \rangle|$$

او

$$|\langle Lv, v \rangle| \leq \|Lv\| \|v\|$$

سره سړی سملاسي لاس ته راوړي

$$s \leq \|L\|.$$

د دې لپاره چې معکوسونه یا په څتوالی وښوول شي، لومړی په پامې نیسو، چې د په خوښه حقيقي $\alpha > 0$ لپاره لرو

$$\begin{aligned} & \left\langle L\left(\alpha v + \frac{1}{\alpha}Lv\right), \alpha v + \frac{1}{\alpha}Lv \right\rangle - \left\langle L\left(\alpha v - \frac{1}{\alpha}Lv\right), \alpha v - \frac{1}{\alpha}Lv \right\rangle \\ &= \alpha^2 \langle Lv, v \rangle + \langle LLv, v \rangle + \langle Lv, Lv \rangle + \frac{1}{\alpha^2} \langle LLv, v \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -\alpha^2 \langle Lv, v \rangle + \langle LLv, v \rangle + \langle Lv, Lv \rangle - \frac{1}{\alpha^2} \langle LLv, v \rangle \\ & = 4 \langle Lv, Lv \rangle = 4 \|Lv\|^2. \end{aligned}$$

د

$$|\langle Lv, v \rangle| = \|v\|^2 \left| \left\langle L \frac{v}{\|v\|}, \frac{v}{\|v\|} \right\rangle \right| \leq s \|v\|^2$$

سره او د غبرګارڅيز – يا مازی الاضلاع کټمتوالي سره له دې لاس ته راځي

$$\begin{aligned} \|Lv\|^2 & \leq \frac{s}{4} \left(\left\| \alpha v + \frac{1}{\alpha} Lv \right\|^2 + \left\| \alpha v - \frac{1}{\alpha} Lv \right\|^2 \right) \\ & = \frac{s}{2} \left(\alpha^2 \|v\|^2 + \frac{1}{\alpha^2} \|Lv\|^2 \right). \end{aligned}$$

که په ځانګړې توګه کېږدو

$$\alpha = \left(\frac{\|Lv\|}{\|v\|} \right)^{1/2}$$

نو راګوي

$$\|Lv\| \leq s \|v\|$$

$$\|L\| \leq s$$

دایه دي معنا، چې .

(i) له (ii) Nach (i) existiert eine Folge (v_n) in H mit $\|v_n\| = 1$ und مخي په H کې يوه پرلپسې شتون لري د او

$$|\langle Lv_n, v_n \rangle| \rightarrow \|L\| ,$$

سره، دا په دي معنا، چې يوه برخه پرلپسې شتون لري د (v_{n_k})

$$\langle Lv_{n_k}, v_{n_k} \rangle \rightarrow \lambda$$

او

$$|\lambda| = \|L\| .$$

سره.

اوس فقط ښايو، چې

$$\|Lv_{n_k} - \lambda v_{n_k}\| \rightarrow 0$$

د دي لپاره په پام کې نيسو $\|Lv\| \leq \|L\|\|v\| = |\lambda|\|v\|$ او

$$\|Lv_{n_k} - \lambda v_{n_k}\|^2 = \|Lv_{n_k}\|^2 - \langle Lv_{n_k}, \lambda v_{n_k} \rangle - \langle \lambda v_{n_k}, Lv_{n_k} \rangle + |\lambda|^2$$

$$|\lambda|^2 \|v_{n_k}\|^2 - \bar{\lambda} \langle Lv_{n_k}, v_{n_k} \rangle - \lambda \langle v_{n_k}, Lv_{n_k} \rangle + |\lambda|^2 ,$$

د کوم سره چې بنی اړخ د $k \rightarrow \infty$ لپاره د

$$|\lambda|^2 - |\lambda|^2 - |\lambda|^2 + |\lambda|^2 = 0$$

په لور هڅیږي.

لیکونکي: ایپ، هیولیگ

د کومپاکت هر میتیګی اوپراتورونو سپکترال انځورونه

Spektraldarstellung kompakter hermitescher Operatoren

یوه کومپاکت هر میتیګی اوپراتور $L : H \rightarrow H$ ته په یوه هیلبرت-فضا یو اورتونورمل بنسټ له آیګن ارزښتونو څخه شتون لري

$$e_1, e_2, \dots,$$

د کوم سره چې مطلق ارزښتونو د اړونده آیګن رازښتونه λ_j یوه همغږیزه صفرپرلېسې جوړوي، یعنې

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots, \quad \lambda_j \rightarrow 0.$$

نسبت دې بنسټ ته L دا لاندې انځورونه لري

$$Lv = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \langle v, e_j \rangle e_j.$$

ښوونه یې په ډېرو برخه پلونو (قدمونو) کې پلی کیږي.

لومړۍ: د e_j جوړښت. د کومپاکت هر میتیکي اوپراتورونو نورم د خویونو په بنسټ یو
 آیگن ارزښت $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ شتون لري د لاندې سره

$$|\lambda_1| = \|L\|.$$

اوس سړی په پام کې نیسي، چې L د آیگنوکور e_1 څخه غزېدلې لاندې فضا
 $E_1^\perp$ او توگونال کومپلیمنت ایناریانت پرېږدي. د $v \in E_1^\perp$ لپاره دی

$$\langle Lv, e_1 \rangle = \langle v, Le_1 \rangle = \lambda \langle v, e_1 \rangle = 0,$$

دپه دې معنا، چې $Lv \in E_1^\perp$. د دې پسې یا د دې په تعقیب L همداسې په
 $E_1^\perp$ باندې یو کومپاکت هر میتیکي اوپراتور دی. د نورم خوی یا کرکتریزه بېرته یو
 آیگن لرښت $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ راځي د لاندې سره

$$|\lambda_2| = \|L|_{E_1^\perp}\|.$$

د λ_2 ارزښت $\leq |\lambda_1|$ دی، ځکه چې د یوې کوچنۍ فضا په نسبت نورم جوړیږي.

اوس سړی کړی شي جوړښت ایندوکتیو مخ ته بوزي:

$$|\lambda_n| = \|L|_{E_n^\perp}\|$$

د لومړیو n او توگونال آیگنوکتورونو کرښیز پوښ E_n سره. دا تلنلار پرې
 کيږي، که $L|_{E_n^\perp} = 0$ وي، دپه دې معنا، چې که

$$\dim \text{Bild}(L) = n < \infty$$

وي.

دويم: د صفر 0 په لور پولې ته تلنه: وړاندنيونه، چې $\lambda_j \geq \lambda > 0$ د ناپاي ډېرو j لپاره باور لري، لاندې تضاد ته لارښودوي. د L د کومپاکتوالي په بنسټ د $\{e_1, e_2, \dots\}$ څېره يا عکسدا لاندې محدوده ډېرې يا سټ

$$\{e_1/\lambda_1, e_2/\lambda_2, \dots\}$$

نسبي کومپاکت ده، بايد يوه پولې ته تلونکې برخه پرلپسې يې خوندي لروډې وي. دا د

$$\|e_j - e_k\|^2 = \|e_j\|^2 + \|e_k\|^2 = 2, \quad j \neq k$$

له امله ناشوني ده.

درېم: د L انځورونه: د جوړښت وروسته $e_1, e_2, \dots$ يو اورتونورمال بنسټ دی د

$$H = \text{Bild } L \oplus \ker L.$$

لپاره.

دا وديزېنه تړلې د کرښيزوالي څخه لاس ته راځي، چېرته چې آيگنوکتورونه، کوم چې د $\ker L$ لپاره بنسټ جوړوي، طبعاً ترې تيريدلی شو يا صرف نظر ترې کولای شو.

شتورم-ليوويل-پرابلم Sturm-Liouville-Problem

د ژئ ارزښت پرابلم

$$Lu = -(pu')' + qu = f \text{ auf } (0, 1),$$

$$u(0) = u(1) = 0,$$

د ناپرېکيدونکي، کره همغريزو توابعو p, q سره يو ځانگړی شتور-ليوويل پرابلم دی. د کومپاکت-هرميتيکي اوپراتورونو لپاره د سپکترال انځورنې سره کيدی شي يو اورتوکورمال بنسټ $e_1, e_2, \dots$ شتون د $L^2(0, 1)$ لپاره د L آيگن توابعو څخه وېنول شي، د آيگن ارزښتونو

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$$

او $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$ سره. د دې بنسټ په مرسته کيدی شي په

$$u = \sum_j \frac{1}{\lambda_j} \langle f, e_j \rangle e_j$$

بڼه انځور شي.

داوينا کيدی شي نوره هم تيزه شي. دا مگر له دې برسیره نور فکر کونې ته اړتيا لري. د آيگن توابعو څخه د اورتونورمال بنسټ شتون د دې برعکس تړلی د ټوليزې تيوريڅخه، لکه چې په لاندې کې روښانه کيږي.

لومړی: د $f = 0$ لپاره د ژی پرابلم فقط ساده حل لري. ځکه چې د u سره ضرب ټوټه انټيگرال

$$\int_0^1 \underbrace{p}_{\geq 0} (u')^2 + \underbrace{q}_{\geq 0} u^2 = 0,$$

راکوي، يعنې $u = 0$. د عادي دفرنشل مساواتو څخه اوس لاس ته راځي، چې د ژی

پرابلم د خوښي $f \in L^2(0, 1)$ لپاره یو یواځنی حل $u \in C^1[0, 1]$ لري.

دویم: دا حل u د f کرښیز په واک دی یا کرښیز تابع دی، نو هر L ته یو معکوس اوپراتور A شتون لري:

$$f \rightarrow u = Af.$$

دریم: د ټوټه انتیکریشن پهمرسته سری بنایي، چې A د ځان سره – یا خپل ادجونگيري

ده د $u = Af$ ، $v = Ag$ سره دی

$$\langle Af, g \rangle = \int_0^1 -u(pv')' + quv = \int_0^1 -(pu')'v' + quv = \langle f, Ag \rangle.$$

څلورم: د $u = Af$ سره د ضرب له مخې د دفرنشل مساوات د u سره لاس ته راځي او انتیکریشن

$$\int_0^1 p(u')^2 + qu^2 = \int fu$$

او له دې سره

$$c \|u\|_{1,2}^2 \leq \|f\|_0 \|u\|,$$

د کوم سره چې $c > 0$ د p او q لپاره یوه پورته بند یا بندیز دی، او $\|\cdot\|_{1,2}$ په

سوبولیو-فضا $H^1(0, 1)$ نورم بنایي. دا چې $\|u\| \leq \|u\|_{1,2}$ ، نو A په

$L^2(0,1)$ کی یوونغونڊاری (واحد کره) جوړوي، چې د یوه محدوده ډېرئ یاست په
 $H^1(0,1)$ کې. دا چې $\|u\| \leq \|u\|_{1,2}$ ، نو A په $L^2(0,1)$ کې یوونغونډاری
 $H^1(0,1)$ جوړوي، چې دا د محدودې ډېرئ په کې پروت دی، یعنې د سوبلیو
 خونډیوني جملې په بنسټ کومپاکت دی.

پنځم: د کومپاکت هر میتیکي اوپراتورونو شپکتاکولار انځوروني څخه له ایکن توابعو
 څخه د یوه اورتونورمال بنسټ شتون لاس ته راځي، چیرته چې د ایکنارزبنت مطلق
 ارزبنت λ_j یوه صفرپرلپسي جوړوي. په ورته توګه د معکوس اوپراتور A لپاره وینا
 سری لاس ته راوړی شي.

ګړندی لوېدونکی ازماېښت تابع Schnell abfallende Testfunktion

د ګړندي لوېدونکو ازماېښتتوابعو $\mathcal{S}$ فضا کومپلکس ارزبنتیز توابع
 $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ لري د

$$|f|_{\alpha,\beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| < \infty$$

سره د ټولو α, β لپاره.

نیمنورم $|\cdot|_{\alpha,\beta}$ په $\mathcal{S}$ باندې یو متریک تعریفوي. د یوه په خوښه کره ټاکلې پرلپسي
 (α_k, β_k) لپاره مولتی اینډکس جوړه Multiindexpaare سری

$$\varrho_k(f) = \frac{|f|_{\alpha_k, \beta_k}}{1 + |f|_{\alpha_k, \beta_k}}$$

بردي او

$$d(f, g) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \varrho_k(f - g)$$

د کانوني واټنتابع په حيث تعريفوي.

$$\mathcal{D} = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

فضا د شوارخ د ازمايښت تابع د $\mathcal{S}$ يو ښکته يا غليظه لاندې فضا ده. په اناليز کې په $\mathcal{S}$ باندې د ناپېرېدونکو توابعو کيدی شي سړی کړی شي په همغه ازمايښت توابعو د کومپاکت وړونکي سره ځان محدود کړي.

ليکونکي: هيوليگ، هيورنر

د ګرنډي لوېدونکو توابعو لپاره تيوپيکي بيلگې توابع دي د يوه اکسپوننشل د راکميدو حالت يا ځاننيوني **Abklingverhalten** سره، لکه د بيلگي په توګه

$$f(x) = p(x) \exp(-|x|^2),$$

چيرته چې P يو په خوښه پولينوم دی.

تابع

$$g(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right), & |x| < 1, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

په $\mathcal{D}$ کې د تابع لپاره يوه بېلګه ده. په همدې توګه د gh د $h \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ سره په $\mathcal{D}$ پورې اړه لري او له دې سره په $\mathcal{S}$ پورې.

تابع $f(x) = \exp(-|x|)$ په حقيقت کې ګړندۍ لويږي، مګر په اصل يا سرچينه کې ناپېرېدونکې مشتقون نه دي او له دې سره په S پورې اړه نه لري. لیکونکي: هيوليګ، هيورنر

تيمپريري ډيسټريبيوشنونه Temperierte Distributionen

تيمپريري ډيسټريبيوشن و فضا S ته د ګړنديو لوېدونکو ازماېښت توابعو دوال-يا دوه ګوني فضا S' جوړوي. يعنې يو تيمپريري ډيسټريبيوشن Λ يو کرښيز تابع دی، کوم چې هر تابع f د

$$|f|_{\alpha,\beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| < \infty$$

سره يو کومپلکس ګڼ يا عدد Λf ترتيبوي يا تنظيموي او اټکل

$$|\Lambda f| \leq c \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq n} |f|_{\alpha,\beta}$$

د پوره يا کافي لوی $n(\Lambda)$ لپاره پوره کوي.

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

په لاندې کې د تيمپريري ډيسټريبيوشنونو دوه ټيپيکي بېلګې تشرېح شوي دي.

(i)

کمزوري جګېدونکي توابع:

د یوه $k \in \mathbb{N}$ لپاره باور لري

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)| \frac{dx}{(1+|x|^2)^{k/2}} < \infty$$

نو

$$\Lambda_\varphi f = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi f, \quad f \in \mathcal{S},$$

یو تیمپریري دیستریبیوشن تعریفوي. د

$$(1+|x|^2)^{k/2} \leq c \sum_{|\alpha| \leq k} |x^\alpha|,$$

له امله کېدی شي $|\Lambda_\varphi f|$ د

$$c \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\varphi(x)|}{(1+|x|^2)^{k/2}} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} |x^\alpha f| \right) \leq \tilde{c} \sum_{|\alpha| \leq k} |f|_{\alpha,0}$$

له لاري تخمین یا اټکل شي.

(ii)

د مشتقونو کرښيز کمبینیشن:

د مشتقونو هره موزن یا دروند زیاتون یا جمعه

$$\Lambda f = \sum_{\alpha} c_{\alpha} \partial^{\alpha} f(x)$$

یو ټیمپریري دیستریبیوشن تعریفوي. په جوته توګه باور لري

$$|\Lambda f| \leq \left(\max_{\alpha} |c_{\alpha}| \right) \sum_{\alpha} |f|_{0, \alpha}.$$

په ازماښت توابعو د کرښیزو توابعو لپاره بېلګې چې په S ناپېرېکېدونکې (متمادي) نه دي، دي

$$\Lambda f = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(x^2) f(x) dx$$

او

$$\Lambda f = \sum_{k=1}^{\infty} f^{(k)}(k).$$

لیکونکي: هیولېګ، هیورنر

د ټیمپریري دیستریبیوشنونو مشتق

Ableitung von temperierten Distributionen

د یوه دیستریبیوشن $\Lambda \in S'$ ټوټه مشتق د

$$f \mapsto (\partial^{\alpha} \Lambda) f = (-1)^{|\alpha|} \Lambda (\partial^{\alpha} f), \quad f \in S,$$

له لارې تعریف شوی دیستریبیوشن دی. دا تعریف د کمزورو مشتقونو کونځپټ (کنسپټ) ټولیز کوي او د

$$\Lambda_{\varphi} f = \int_D \varphi(x) f(x) dx, \quad \varphi \in C_0^{\infty}(D),$$

لپاره د ورسره بلد مشتق تعریف سره سرخوري يا يو غريز کيږي.

$$\partial^\alpha \Lambda_\varphi = \Lambda_{\partial^\alpha \varphi}.$$

د تعریف سره سم تمپيريري ديستريبيشن ناپای زیات مشتقور دی.

لیکونکي: هیولیگ، هیورنر

دیراک- او هیویزاید – فنکشنال Dirac- und Heavyside-Funktional

د هیویزاید-فنکشنال H یو دیستريبيوشن دی، هغه چې د تابع

$$h : x \mapsto \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

له لاري ایندوڅیر کيږي، دا په دې معنا، چې

$$Hf = \int_0^\infty f.$$

د مشتق H' لپاره راکوي

$$f \mapsto H'f = -H(f') = -\int_0^\infty f' = -\left(\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - f(0)\right) = f(0) = \delta f,$$

دکوم سره چې δ یو دیراک-تابع دی.

لیکونکي: هیولیگ، هیورنر

د ټيمپيريري ډيسټريبيوشنونو ضرب (ځل)

Multiplikation von temperierten Distributionen

د يوه ټيمپيريري ډيسټريبيوشن $\Lambda \in \mathcal{S}'$ سره د يوه کمزوري چگېدونکي تابع $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ضرب د

$$(\varphi \Lambda) f = \Lambda (\varphi f), f \in \mathcal{S},$$

له لاري تعريف شري ټيمپيري ډيسټريبيوشن $(\varphi \Lambda)$ دی.

$$\sup_x \left| (1 + |x|^2)^{-s/2} \partial^\alpha \varphi \right| < \infty$$

د ټولو ضربيزو (ډېر) اندکشنې (پېژندنځې) α او $s(\alpha) > 0$ لپاره. دا شرايط په ځانگړي توگه د ټول پولينومونو لپاره پره دی.

ليکونکي: هيوليگ، هيورنر

د ټيمپيريري ډيسټريبيوشنونو قات کونه يا راغبرگونه

Faltung von temperierten Distributionen

د يوه ټيمپيريري ډيسټريبيوشن $\Lambda \in \mathcal{S}'$ لپاره اويوه گړندي لويدونکي ازماېنت تابع $\varphi \in \mathcal{S}$ لپاره

$$(\Lambda \star \varphi)(x) = \Lambda \varphi(x - \cdot)$$

د له لارې یوه قاتونه یا را غبرگونه تعریف ده.

تابع $\Lambda \star \varphi$ ناپای ډېر مشتقور دی او کمزوری جگېدونکی، کېدی شي د تېمپیریري دیسټریبیوژن سره و پېژندل شي،

که $\Lambda = \Lambda_\psi$ له $\psi \in \mathcal{D}$ سره وي، نو

$$(\Lambda \star \varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y) \psi(y) dy ,$$

قاتونه ده د دیسټریبیوژن سره یعنې د تابع لپاره ورسره بلد تعریف دی.

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

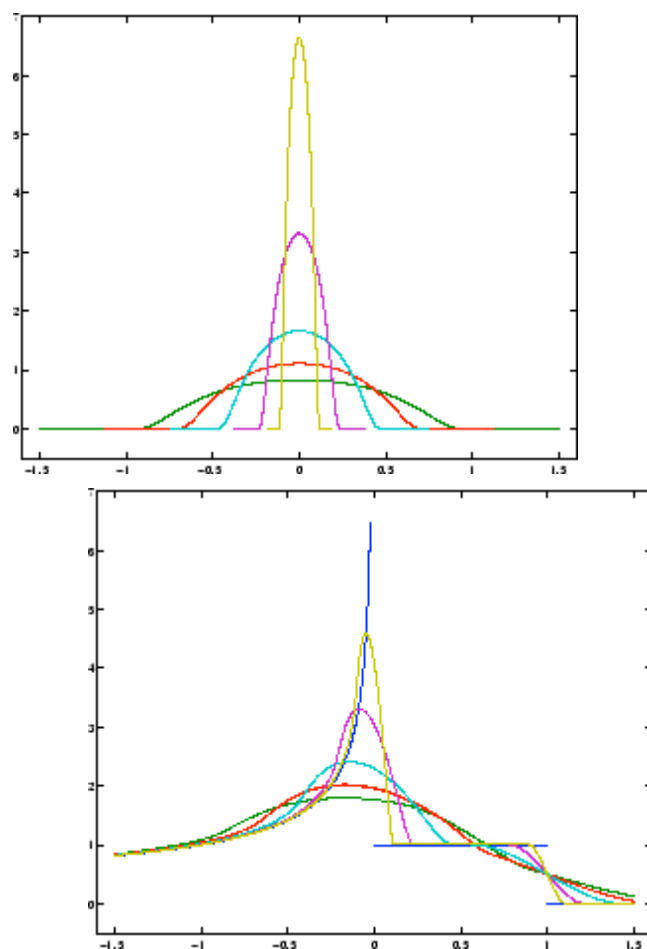
اپروکسیمي کټمټوالی Approximierende Identität

وي دې $\varphi \in \mathcal{D}$ یو د

$$\varphi \geq 0, \quad \int_{\mathbb{R}^n} \varphi = 1$$

سره ازماېنټي تابع او $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \varphi(x/\varepsilon)$ ، نو باور لري

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi_\varepsilon \star f = f, \quad f \in L^p(\mathbb{R}^n) .$$



کینه څیرونه یا تابع د $\varepsilon = 1, .75, .5, .25, .125$ لپاره φ_ε او

$$\varphi = c \exp(1/(x^2 - 1)), x \in \mathbb{R}$$

بنايي، بنی تابع یا څیرونه اړونده قانوني

بنايي.

لکه په تابع کې چې بنوول شوی دی، کیدی شي قانونه د توابعو د خویوني لپاره وکارول شي، ځکه چې

$$\varphi_\varepsilon \star f \in L^p \cap C^\infty.$$

د دې اړوکسیمیشن-پروسی په مرسته بسیا کوي، چې د بیلګې په توګه دا کټمټوالی د ناپرېکډونکو کرښیز اوپراتورونو لپاره فقط د خویو تابعو لپاره وښایو.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د ګړندي لویدونکو تابعو د فوريي- ترانسفورمیشن

Fourier-Transformation schnell abfallender Testfunktionen

د فوريي ترانسفورمیشن

$$f \rightarrow \hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \exp(-ixy) dx$$

د فوريي په څټ يا معکوس ترانسفورمیشن

$$g \rightarrow \check{g}(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \exp(ixy) dy$$

ناپرېکډونکي کرښیز اوپراتورونه دي د ګړندي لویدونکو ازماښت تابعو په فضا $\mathcal{S}$ باندې

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

تر یوه نورمي شوي ضریب د فوريي – ترانسفورمیشن او د فوريي په څټ يا معکوس

$$L^2(\mathbb{R}^n)$$

ترانسفورمیشن پورې په باندې ایزومتريګانې دي، کوم چې یو بل ته معکوس

$$\mathcal{S} \subset L^2(\mathbb{R}^n)$$

یا په څټ دی. دا چې دی، نو باید چې د $\mathcal{S}$ په توپولوزي کې

ناپرېکډونه وښایو:

د فوريې – ترانسفورميشن قوانينو سره سم باور لري

$$\left| (iy)^\alpha \partial^\beta \hat{f}(y) \right| =$$

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \partial^\alpha ((-ix)^\beta f(x)) \exp(-ixy) dy \right|$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^{-n} |(1 + |x|^2)^n \partial^\alpha (x^\beta f(x))| dx.$$

دا چې $\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^{-n} dx < \infty$ دی، نو کیدی شي بنی خوا د $\mathcal{S}$ د نیم نظم له لارې اټکل شي.

د په څټ یا معکوس فوريې – ترانسفورميشن لپاره په ورته توګه مخ ته ځو. لیکونکي: هیولېګ، هیورنر

د یوه ټیمپیریري دیسټریبیوشن د فوريې – ترانسفورميشن

Fourier-Transformation einer temperierten Distribution

د یوه ټیمپیریري دیسټریبیوشن $\Lambda \in \mathcal{S}'$ د فوريې – ترانسفورميشن د

$$\hat{\Lambda} \varphi = \Lambda \hat{\varphi}, \quad \varphi \in \mathcal{S}$$

له لارې تعریف دی او په $\mathcal{S}$ باندې یو ناپرېکيدونکی کرښیز اوپراتور تعریف دی.

ډيسټريبيوشن $\hat{\Lambda}$ کېدی شي په ډېرو حالتونو کې د

$$\hat{\Lambda}(y) = \Lambda_x e^{-ixy}$$

له لارې وشمېرل شي. د ټوليزو ټيمپريري ډيټريبيوشنونو Λ لپاره ډاکټمتوالي بايد د يوه اپروکسيميشن-پورسې په مرسته و بنوول شي، ځکه چې e^{-ixy} يو نه اجازه لرونکي ازمايښت تابع دی.

ليکونکي: هيوليگ، هيورنر

د $\Lambda = \Lambda_\psi$ لپاره د $\psi \in \mathcal{S}$ سره دی

$$\Lambda \hat{\varphi} = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \exp(-ixy) dx \psi(y) dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y) \exp(-ixy) dy \varphi(x) dx .$$

دويمه ليکه د $\Lambda_\psi \varphi$ سره برابره ده، دا په دې معنا، چې $\hat{\Lambda}$ د $\hat{\psi}$ له لارې ايندوڅير شوی ډيسټريبيوشن دی.

ليکونکي: هيوليگ، هيورنر

د ټمپوري ډيسټريبيوشنونو د فوريي – ټرانسفورميشن لپاره قواعد يا لارې

د توابعو د فوريي – ټرانسفورميشن ته ورته لاندې کټمتوالي د گړنديو لوېدونکو ازمايښت

توابعو و $\varphi \in \mathcal{S}$ لپاره باور لري او د ټيپريري ډيسټريبيوشنونو $\Lambda \in \mathcal{S}'$ لپاره:

• مشتقونه او ضربونه:

$$p(y) = \sum a_\alpha y^\alpha \quad \text{د یوه پولینوم لپاره باور لري}$$

$$p(\widehat{-i\partial})\Lambda = p\hat{\Lambda}.$$

لهدې سره دی $p(-i\partial) = \sum a_\alpha (-i)^{|\alpha|} \partial^\alpha$ په ځانګړې توګه $-i\partial_\nu$ توپه مشتقونه د y_ν سره ضرب په ګوته کوي (دلته دی $p(y) = y_\nu$).

په ورته توګه باور لري

$$\widehat{p\Lambda} = p(i\partial)\hat{\Lambda}.$$

• Faltung قاتونه:

$$\widehat{\Lambda \star \varphi} = \hat{\varphi} \hat{\Lambda}.$$

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

د ماتو نظمونو د سوبولیف-فضاګانې

Sobolev-Räume gebrochener Ordnung

د سوبولیف-فضا $H^s(\mathbb{R}^n)$ ، $s \in \mathbb{R}$ د ټولو نیمپیری دیسټریبیوشنونو Λ څخه جوړه ده د

$$w^s \hat{\Lambda} \in L^2(\mathbb{R}^n), \quad w(y) = (1 + |y|^2)^{1/2}.$$

سره .

دا خويونه يا کرکتاريزه کونه د $H^k(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{N}_0$ ټولگيز تعريف ټوليز کوي، د ټولو توابعو فضا په حيث د مربع انتيگرالور ټوټه مشتقونو سره بالاخره تر نظم k پورې. د کميز يا منفي اکسپوننت يا جگگن سره فضاوې د زياتيز يا مقبت اکسپوننت سره فضاوو دوه گونې فضاوې دي.

$$H^{-s}(\mathbb{R}^n) = H^s(\mathbb{R}^n)' , \quad s \geq 0 .$$

ليکونکي: هيوليگ، هيورنر

د بنوونې لپاره د $n = 1$ حالت تر څپرني لاندې نيسو. ټوليز حالت کېدې شي په ورته توگه تر څپرني لاندې ونيول شي او تنها تخنيکي پېچلې دی

(i)

د $k \in \mathbb{N}_0$ لپاره د تعريف سره همغريزووالی د پلانشرل-کټمتوالي Plancherel-Identität څخه لاس ته راځي

$$f, f', \dots, f^{(k)} \in L^2 \Leftrightarrow \hat{f}, |y|\hat{f}, \dots, |y|^k \hat{f} \in L^2 .$$

دا چې

$$|y|^j \leq (1 + |y|^2)^{k/2} \leq c(1 + |y|^k) , \quad y \in \mathbb{R}$$

د $j \leq k$ لپاره دی، ورته والی کرکتي کوني $(1 + |y|^2)^{k/2} \hat{f} \in L^2$ ته بيايي

(ii)

د دوال فضا کرکترې کونه کيدی شي د د يوه ابسترکت د ليل سره وېنول شي. که د فوريې ترانسفورميشن د F سره په نخښه شي w^s او د ضرب د W سره ، نو سړی لاندې دياگرام لري

$$L^2 \xleftarrow{W} \hat{H}^s \xleftarrow{F} H^s \xrightarrow{\Lambda} \mathbb{C}.$$

يو فنکشنال $\Lambda \in (H^s)'$ يو فنکشنال

$$\tilde{\Lambda} = \Lambda F^{-1} W^{-1} : L^2 \rightarrow \mathbb{C}.$$

ايندوڅيرت کوي.

دا چې $(L^2)' = L^2$ دی سړی کړی شي $\tilde{\Lambda}$ د يوه تابع $g \in L^2$ سره وېنول شي يا په نڅېنه شي

$$\tilde{\Lambda} f = \int_{\mathbb{R}} f \bar{g}.$$

نو د $(FF\varphi)(x) = 2\pi\varphi(-x)$ له امله لاندې باور لري

$$\hat{\Lambda}\varphi = \Lambda\hat{\varphi} = \tilde{\Lambda}WFF\varphi = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi} \varphi(-x) w^s(x) \overline{g(x)} dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi} w^s(-x) \overline{g(-x)} \right)}_{\hat{\Lambda}(x)} dx$$

له دې سره غوښتونۍ کرکټارۍ کونه $\hat{\Lambda}w^{-s} \in L^2$ لاس ته راځي، ځکه چې کومپلکس کونجوگیشن او هندارونه په انتیایبیلیني باندې کومه اغیزه نه ري.

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

ترانسلیشن اینواریانت اوپراتورونه Translationsinvariante Operatoren

هر محدود کرښیز اوپراتور $L : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ ، هغه چې له ترانسلیشن سره کومتیر دی ،

$$Lf(\cdot - h) = (Lf)(\cdot - h) ,$$

کیدۍ شي د یوه تیمپریري دیستریبیوشن Λ سره د محدود فوریي – ترانسلیشن سره انځور شي، دا په دې معنا، چې

$$L\varphi = \Lambda \star \varphi , \quad \varphi \in \mathcal{S} ,$$

او

$$\|L\| = \operatorname{ess\,sup}_{y \in \mathbb{R}^n} |\hat{L}(y)| .$$

لیکونکي: هیولیگ، هیورنر

د جملې یو اړخ د پلانشرل قضیې حخه لاس ته راځي:

$$\|\Lambda \star \varphi\|_2 = (2\pi)^{n/2} \|\hat{\Lambda} \hat{\varphi}\|_2 \leq (2\pi)^{n/2} \|L\| \|\hat{\varphi}\|_2 = \|L\| \|\varphi\|_2 ,$$

د کوم سره چې اټکلونه خورا ښه شوني(ممکنه) ده.

لیکونکي: هیولیگ، هیورنر

د دفرنشل-اوپراتورونو لپاره بنسټیزه اوبیونه(حل)

د هر دفرنشل اوپراتور

$$L = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha \partial^\alpha$$

لپاره د ثابت يا تل همغه ضريب c_α سره يو تيمپريري بنسټيز حل شتون لري، دا په دې معنا، چ يو تيمپريري ديستريبيوشن Λ د لاندې سره شتون لري

$$L\Lambda = \delta.$$

د دفرنسيشن او قاتولو قانو سره سم ، د ټوټه دنرنشيشن مساوات يا —برابرون

$$Lu = f, \quad f \in \mathcal{D},$$

يو حل به لاندې بڼه

$$u = \Lambda \star f$$

انځور شي.

ليکونکي: هيوليگ، هيورنر

د اونيوارينت دفرنشل اوپراتر

$$L = - \left(\frac{d}{dx} \right)^2 + 1$$

$$\Lambda = e^{-|x|/2}$$

لپاره تيمپريري بنسټيز حل دى، د دې لپاره چې دا وښوول شي، سړى د لاندې برابرونيا مساوات فوريي — ترانسفورمي جوړوي

$$L\Lambda = - \left(\frac{d}{dx} \right)^2 \Lambda + \Lambda = \delta$$

او لاس ته راوړي

$$-(iy)^2 \hat{\Lambda} + \hat{\Lambda} = 1 .$$

د $\hat{\Lambda}$ پسي حلونې پله مخې راكوي

$$\hat{\Lambda} = \frac{1}{1+y^2} ,$$

كوم چې د $e^{-|x|/2}$ فوريې - ترانسفورمي په گوته كوي.

نو د دفرنشل مساوات

$$-u'' + u = \sin x$$

يو حل دی

$$u(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|y|} \sin(x-y) dy$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 e^y \sin(x-y) dy + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-y} \sin(x-y) dy$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-y} \sin(x+y) dy + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-y} \sin(x-y) dy$$

$$= \sin x \int_0^{\infty} e^{-y} \cos y \, dy = \frac{\sin x}{2}.$$

ليکونکي: هيوليگ، هيورنر

د لاپلاس - اوپراتور بنسټيزه اوبيونه (حل)

Fundamentallösung des Laplace-Operators

د لاپلاس - اوپراتور

$$\Delta = \partial_1^2 + \cdots + \partial_n^2$$

په $\mathbb{R}^n$ کې لاندې بنسټيز حل لري

$$\frac{1}{(2-n)c_n} |x|^{2-n}, \quad n \geq 3,$$

د c_n سره د یوونسفر (واحد سفر) د $(n-1)$ - بعدیز ډکي یا حجم.

د $n=2$ لپاره

$$\frac{1}{2\pi} \ln |x|$$

یو بنسټيز حل دی.

ليکونکي: هيوليگ، هيورنر

د بنووني لپاره سړی د $\Delta \varphi = \Delta |x|^{2-n}$ له لارې منځ ته راغلی فنکشنال Λ اغیزه په

یوه ازماښت تابع $f \in C_0^\infty$ باندې تر څېړنې لاندې نیسو:

$$\Delta f = \int_{R^n} \varphi \Delta f.$$

که د انتیگریشن ورشو د غونډاري پوښ $K_{\varepsilon, R}$ له لاري اېروکسيمي کړو د د دنننئ وړانگي ε او دباندنئ وړانگي R سره، نو د گرین Green د دویم انتیگرال فورم یا بڼې له مخې باور لري

$$\int_{K_{\varepsilon, R}} \varphi \Delta f = \int_{\partial K_{\varepsilon, R}} \varphi \partial_{\perp} f - \int_{\partial K_{\varepsilon, R}} f \partial_{\perp} \varphi + \int_{K_{\varepsilon, R}} f \Delta \varphi,$$

د $\partial_{\perp}$ د نورمال مشتق سره. له دې سره پېښې اړخ دریم انتیگرال ورکیري، ځکه چې $\Delta \varphi = 0$ د $x \neq 0$ لپاره دی. لومړیو دواړو انتیگراله ونو ته فقط دنننئ ژی تر څپرني لاندې نیسو، ځکه چې f محدود وړونکی لري او د پوره لوی R لپاره د خپلو ټولو مشتقونو سره ورکیري.

که سړی پولاړ یا قطبي کواوردینات $x = r x^0$, $r \in [0, \infty)$, $x^0 \in S_n$ وکاروي، د کومو سره چې S_n $(n-1)$ -بعدیز یوونسفر په گوته کوي، نو دی

$$\int_{K_{\varepsilon}} \varphi \Delta f dx = - \int_{S_n} \varepsilon^{2-n} (\text{grad } f)(\varepsilon x^0) \cdot x^0 \varepsilon^{n-1} dS_n$$

$$+ \int_{S_n} f(\varepsilon x^0) (2-n) \varepsilon^{1-n} x^0 \cdot x^0 \varepsilon^{n-1} dS_n$$

$$= -\varepsilon \int_{S_n} (\text{grad } f)(\varepsilon x^0) \cdot x^0 dS_n$$

$$+(2-n) \int_{S_n} f(\varepsilon x^0) dS_n.$$

دا لومړۍ انتیګرال د ε سره د صفر په لور هڅیږي، ځکه چې $\text{grad } f$ محدود دی، اودویم انتیګرال د $n \neq 2$ لپاره ارزښت $(2-n) \text{vol}(S_n) f(0)$ راکوي. له دې سره دی

$$\frac{1}{(2-n)c_n} \Delta f = f(0) = \delta f.$$

د $n = 2$ لپاره کیدی شپیه ورته توګه مخ ته لاړ شو، له دې سره دی

$$\text{grad}(\ln r) = \frac{x^0}{r}, \quad r \neq 0,$$

$$\Delta(\ln r) = 0, \quad r \neq 0,$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \ln \varepsilon = 0.$$

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

،،له هر څه ستونځمن یو څه ته نیت اوملا راتړل دي(ژباړی)،،.

د ډاکټر ماخان شينواري چاپ شوي ليکنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړۍ:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra :
general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

1987 Vienna (Austria):

دويم:

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren .
Uni. Wien

*Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras,
Dissertation at the University of Vienna/Austria*

لاندې د شميرپوهنې پښتوتول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه، له
خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دریم: د شميرپوهنې ستر کتاب : د شميرپوهنې برسیره د انجنري، فزيک او اقتصاد
لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او
دا نوي ليکنه به يې ځنو ځايونو غزېدلې او ځنې ځايونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمکچپوهنه (هندسه) ، په سلو، زرو کې شميرنه، د گټې – او کټې د کټې
شميرنه ، د احتمالي شميرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتياوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمير پوهنې انگرېزي - پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمير پوهنې الماني - پښتو - او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنخيال برابر وړ (دا کتاب په دې څانگه کې يو پيل دی، ساده ليکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمير پوهنې فرمولونو ټولگه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمير پوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

يوولسم: د افغانستان په هکله سپينې خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغي او بيا ابادولو ټولنه،، له خو

يادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شينواري د ،،د افغانستان روغي او بيا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلي.

د ډاکتر ماخان ،،ميري،، شينواري ليکنې او ژباړې چې په چاپيدو يې پيل کيږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)

لاندې د برينکمن ليکنې چې له پرينکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شميرپوهنه د بنوونځي لپاره لومړۍ ټوک

۲ - شميرپوهنه د بنوونځي لپاره دويم ټوک

۳ - شميرپوهنه د بنوونځي لپاره دريم ټوک

۴ - د احتمالي شميرنه د بنوونځي لپاره

۵ - احصايه يا ستاتيستيک د بنوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتگارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتگارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ - اناليزی ۱

۷ - اناليزي ۲

۸ - کرښيز الجبر

۹ - د شميرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولگه

۱۱ - فنکشنل اناليز

۱۲ - وکتور شميرنه

نوري ژباړې

۱۳ - له www.grundstudium.info/linearealgebra څخه: کرښيز الجبر

۱۴ - Georg Guttenbrunner گڼونپوهنه يا د اعدادو تيوري

زما لیکنی

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسيره د

انجری، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده‌کوونکو لپاره پوره کتور دی. په

کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلي

۱۶ - ځمکچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ - الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېری پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ - د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ - د شمیر پوهنې گډې وې لیکنې

۲۲ - داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متأسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیگرال شمیرنو ته

تمرینونه او اوبیوني یا حلونه یې

۲۳ - د شمیرپوهنې انگریزي پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ - د شمیرپوهنې پښتو انگریزي ډکشنري

۲۵ - د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو ویونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې (دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ - د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې وېه غزیږي.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

- د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه، چې د شتوتکارت پوهنتون ن ج څخه خپریږي:

د گروپونو تیوري

- د بنوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولگي څخه تر اووم ټولگي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څېر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیوني سره په کې راغلي او ماته زیات گټور برېښي)

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library