



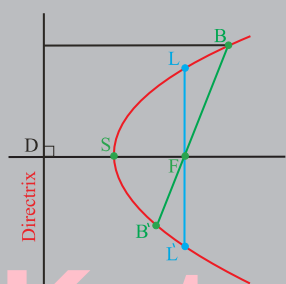
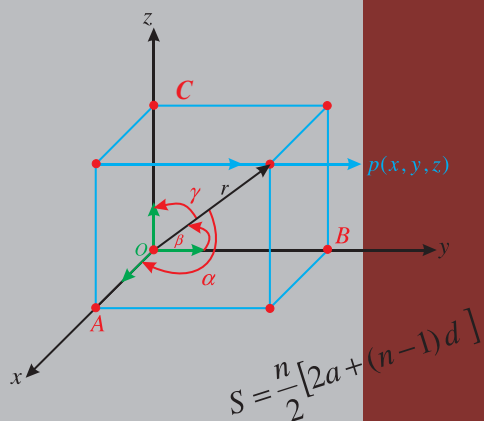
د پوهنې وزارت

د تعلیمي نصاب د پراختیا، د ښوونکو د روزنې او د ساینس
د مرکز مېنیت

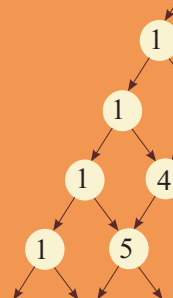
د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تالیف لوی ریاست

ریاضیات

ټولګی



ریاضیات ټولګی



په لړۍ کې پروت
ونکو سره به یې

Ketabton.com

د یو کال ۳۹۰



د پوهنې وزارت

د تعلیمي نصاب د پراختیا، د ښوونکو د روزنې او

د ساینس د مرکز مهمیت

د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تالیف
لوی ریاست

ریاضی ۱۱

فصل پنجم

د چاپ کال: ۱۳۹۰ هـ. ش.



ليکوالان:

- پوهنمل طلاباز حبيب زى د پوهنې وزارت د درسي کتابونو د تاليف د پروژې غړى
مهرېه ناصر د پوهنې وزارت د درسي کتابونو د تاليف د پروژې غړي
پوهندوى خالقداد فيروزکوهي د پوهنې وزارت د درسي کتابونو د تاليف د پروژې غړى
د مؤلف مرستيال محمد خالد ستورى(څلدران) د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تاليف علمي غړى

ژباړونکي:

- سر مؤلف نظام الدين د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تاليف علمي غړى
پوهنمل طلاباز حبيب زى د پوهنې وزارت د درسي کتابونو د تاليف د پروژې غړى
د مؤلف مرستيال محمد خالد ستورى(څلدران) د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تاليف علمي غړى
مختار نوید د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تاليف علمي غړى

علمي او مسلکي ايډيټ:

- ډاکټر عطاء الله واحدیار د پوهنې وزارت ستر سلاکار او د نشراتو رئيس.
حبيب الله راحل د پوهنې وزارت سلاکار د تعليمي نصاب د پراختيا په لوى رياست کې.
د مؤلف مرستيال محمد خالد ستورى(څلدران) د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تاليف علمي غړى

د ژبې ايډيټ:

- محمد قدوس دکوخیل

دیني، سیاسي او کلتوري کمیټه:

- مولوي عبدالوکیل د اسلامي تعلیماتو علمي غړى.
حبيب الله راحل د پوهنې وزارت سلاکار د تعليمي نصاب د پراختيا په لوى رياست کې.

د څارنې کمیټه:

- دکټور اسدالله محقق د تعليمي نصاب د پراختيا، د ښوونکو د روزنې او د ساينس مرکز معين
دکټور شېر علي ظریفې د تعليمي نصاب د پراختيا د پروژې مسؤول
د سر مؤلف مرستيال عبدالظاهر گلستاني د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تاليف لوى رئيس

طرح او ډیزاين:

- وليد «نوبل» نسيمي



بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ





ملي سرود

دا وطن افغانستان دی دا عزت د هر افغان دی

کور د سولې کور د توري هر بچی یې قهرمان دی

دا وطن د ټولو کور دی د بلوڅو د ازبکو

د پښتون او هزاره وو د ترکمنو د تاجکو

ورسره عرب، گوجر دي پامپریان، نورستانیان

براهوي دي، قزلباش دي هم ایماق، هم پشه یان

دا هیواد به تل خلیږي لکه لمر پر شنه آسمان

په سینه کې د آسیا به لکه زړه وي جواویدان

نوم د حق مودی رهبر وایو الله اکبر وایو الله اکبر



بسم الله الرحمن الرحيم

د پوهنې د وزیر پېغام گرانو ښوونکو او زده کورونکو،

ښوونه او روزنه د هر هېواد د پراختیا او پرمختګ بنسټ جوړوي. تعلیمي نصاب د ښوونې او روزنې مهم توکی دی چې د معاصر علمي پرمختګ او ټولنې د اړتیاوو له مخې رامنځته کیږي. څرګنده ده چې علمي پرمختګ او ټولنیزې اړتیاوې تل د بدلون په حال کې وي. له دې امله لازمه ده چې تعلیمي نصاب هم علمي او رغنده انګشاف ومومي. البته نه ښايي چې تعلیمي نصاب د سیاسي بدلونونو او د اشخاصو د نظریو او هیلو تابع شي. دا کتاب چې نن ستاسو په لاس کې دی، پرمهلي ارزښتونو چمتو او ترتیب شوی دی. علمي ګټورې موضوعګانې پکې زناتې شوې دي. د زده کړې په بهیر کې د زده کوونکو فعال ساتل د تدریسي پلان برخه ګرځیدلې ده.

هیله من یم دا کتاب له لارښوونو او تعلیمي پلان سره سم د فعالې زده کړې د میتودونو د کارولو له لارې تدریس شي او د زده کوونکو میندې او پلرونه هم د خپلو لویو او زامنو په پاکفیه ښوونه او روزنه کې پرله پسې ګډه مرسته وکړي چې د پوهنې د نظام هیلې ترسره شي او زده کوونکو او هېواد ته ښې بریاوې ور په برخه کړي. پر دې ټکي پوره باور لرم چې زموږ ګران ښوونکي د تعلیمي نصاب په رغنده پلي کولو کې خپل مسؤلیت په رښتوني توګه سرته رسوي.

د پوهنې وزارت تل زیار کاږي چې د پوهنې تعلیمي نصاب د اسلام د سپېڅلي دین له بنسټونو، د وطن دوستۍ د پاک حس په ساتلو او علمي معیارونو سره سم د ټولنې د څرګندو اړتیاوو له مخې پراختیا ومومي. په دې ډګر کې د هېواد له ټولو علمي شخصیتونو، د ښوونې او روزنې له پوهانو او د زده کوونکو له میندو او پلرونو څخه هیله لرم چې د خپلو نظریو او رغنده وړاندیزونو له لارې زموږ له مؤلفانو سره د درسي کتابونو په لایښه تألیف کې مرسته وکړي.

له ټولو هغو پوهانو څخه چې د دې کتاب په چمتو کولو او ترتیب کې یې مرسته کړې، له ملي او نړیوالو درنو مؤسسو، او نورو ملګرو هېوادونو څخه چې د نوي تعلیمي نصاب په چمتو کولو او تدوین او د درسي کتابونو په چاپ او ویش کې یې مرسته کړې ده، مننه او درناوی کوم.

ومن الله التوفیق

فاروق وردګ

د افغانستان د اسلامي جمهوریت د پوهنې وزیر





لږ ليک

مخونه

سرليک

لوړې څېړنې مخروځي مقاطع

• مخروځي مقاطع

• بيسوري

• د بيسوري معادله

• د بيسوري معادله چې مرکز يې يو کيفي ټکي وي

• پارابولا

• د پارابولا معادله

• د هغې پارابولا معياري معادله چې راس يې يو اختياري ټکي وي

• هالير بولا

• د هالير بولا معادله

• د هغې هالير بولا معادله چې مرکز يې يو اختياري ټکي وي

• ډيري کرنيې مو قعيت نظر مخروځي مقاطعو ته

• د څېړنې مهم ټکي

• د څېړنې پر بنسټي

دويم څېړنې مثال

• د ساين قانون

• د کوساين قانون

• د ټانجنټ قانون

• مثالني مطالعاتو ته

• مثالني معادلې

• دريمه درجه مثالني معادلې

• د دره مجهول مثالني معادلې يا سيستمونو حل

• د څېړنې مهم ټکي

• د څېړنې پر بنسټي



درېم څپر کې فعالې هندسه

- اساسي مفاهيم او اکسيو مو نه
- په درې بُعدې فضا کې کرښه او مستوي
- په فضا کې موازي مستقيمو نه
- په فضا کې د دوو مستقيمو کرښو تر منځ زاويه
- په فضا کې موازي مستقيمو نه او موازي مستوي گانې
- په فضا کې معامدې مستقيمي کرښې او مستوي گانې
- په فضا کې موازي مستوي گانې
- د څپر کې مهم ټکي
- د څپر کې پر بنسټي

۱۱۳

خلورم څپر کې ترادفونه

- ترادفونه
- حسابي ترادف
- هندسي ترادف
- د ترادفونو قسمني مجموعه
- د حسابي ترادف د 11 لومړيو حدودنو قسمني مجموعه
- د يوه هندسي ترادف د 11 حدودنو د جمعې حاصل
- لا پټاڼهي هندسي سلسلې
- د خلورم څپر کې مهم ټکي
- د څپر کې پر بنسټي

۱۴۹

پنځم څپر کې لوگارېتم

- اکسيو نشيل تابع گانې
- لوگارېتم
- لوگارېتمي تابع گانې
- معمولي لوگارېتم
- د لوگارېتم قوانين
- د لوگارېتم د قاعدې اول په بله قاعده
- کرکټرسيک او مائيس
- د لوگارېتم جدول
- انډي لوگارېتم
- خطي انټرپولېشن
- د لوگارېتمي او اکسيو نشيل معادلو حل
- درياضیکي عملیو په سرته رسو لو کې له لوگارېتم څخه کار اخيستنه
- د څپر کې مهم ټکي
- د څپر کې پر بنسټي

۱۸۹

۱۸۵

۱۷۹

۱۷۵

۱۷۱

۱۶۷

۱۶۳

۱۵۹

۱۵۷

۱۵۳

۱۴۹

۱۴۷

۱۴۳

۱۳۷

۱۳۳

۱۲۷

۱۲۳

۱۱۷

۱۱۳



نشيپږم څپر کی مټريکسونه

- مټريکسونه
- د مټريکسونو ډولونه
- د مټريکسونو جمع او تفریق
- په مټريکس کې د سکالر ضرب
- د دوو مټريکسونو ضرب
- د یوه مټريکس ترانسپوز مټريکس
- دیترومېنانت
- د دیترومېنانت خاصیتونه
- د 2×2 مرتبې مټريکسونو ضربني معکوس
- له معکوس مټريکس څخه په کار اخیستې د خطي معادلو د سیستم حل
- د خطي معادلو د سیستم حل د کرامر په طریقه
- د معادلو د سیستم حل د گوس (Gouse) په طریقه
- د نشيپږم څپر کې مهم ټکي
- د څپر کې پوښتنې

اووم څپر کی وکتورونه

- د وضعیه کمیتونو په قایم سیستم کې وکتورونه
- د دوو ټکو ترمنځ واټن او منځني ټکي
- وکتورونه په سطح او فضا کې
- په درې بعدي فضا کې د ټکي مختصات
- د یوه وکتور د جهت زاويې او کوساینونه
- د دوو وکتورونو د سکالري ضرب حاصل
- د وکتوري ضرب حاصل
- د څپر کې مهم ټکي
- د څپر کې پوښتنې

انٺم ڇڻڻ کي احصايه

- د بډلو نو نو ضريب
- په نور مال منځني کي پراگنده ګي (ټيټوالي)
- دنور مال توزيع د ټول شاخصونه
- څو منځوله ټولني
- د پراگنده ګي ګراف
- پيټو سنټون او ډيټو سنټون ضريب
- د خطي ميلان معادله
- د انٺم څڼر کي مهم ټاڪي
- د څڼر کي پوښتي

نهم څڼر کي احتمالات

- پرموټيشن يا توتيب
- توتيب يا کمپيټيشن
- توتيب
- تبديل
- د بڼو م قضيه
- دوه جمله يي احتمال
- د څڼر کي مهم ټاڪي
- د څڼر کي پوښتي

لومړۍ څپرکي

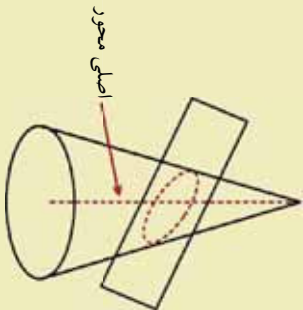
مخروطي مقاطع





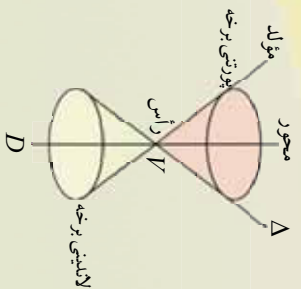
مخروطي مقاطع sections of Conic

آيا ويلاى شى چې د يوې مستوي او مخروط د تقاطع له
گډ فصل څخه څه ډول منځني گانې په لاس راځي.



د مخروطي مقاطعو تعريف

د Δ او D دوه مستقيم خطونه داسې په پام کې نيسو چې يو بل د V په ټکي کې قطع (برې) کړي. که چيرې د D خط ثابت او د Δ خط د هغه په چاپيرو څرخېږي، له دې څرخولو څخه په فضا کې دوه شکلونه چې يو يې د V (ټکي) پورته او بل يې د V د ټکي کښته خواته جوړېږي. هر يو يې مخروط دی، لکه مخامخ شکل د D مستقيم خط د مخروط محور او د Δ

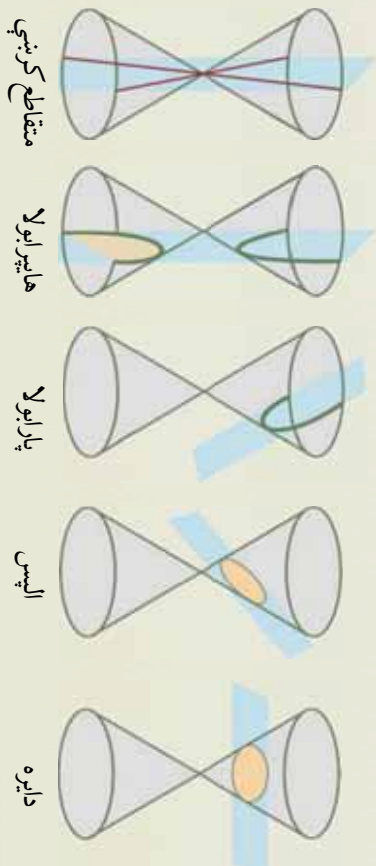


مستقيم خط د هغه مولد دی. د يوې مستوي په واسطه د يوه مخروط قطع کول مختلف حالتونه لري چې مختلفې منځني گانې منځ ته راځي چې مخروطي مقاطع بلل کېږي. په راتلونکي کې به هر يو په تفصيل سره ولوستل شي.

فعاليت

- يو مخروط د مستوي په واسطه داسې قطع کړئ چې مستوي د مخروط په اصلي محور باندې عمود او يا له قاعدو سره موازي وي، ويلاي شى، گډ فصل يې څه ډول منځني ده؟
- يو مخروط د يوې مستوي په واسطه داسې قطع کړئ چې د مستوي او مخروط له اصلي محور سره يې زاويه قايمه نه وي (نسبت اصلي محور ته مايل)، گډ فصل يې څه ډول منځني ده؟
- يو مخروط د يوې مستوي په واسطه داسې قطع کړئ چې مستوي د مخروط له مولد سره موازي وي، تقاطع يا گډ فصل يې څه ډول منځني ده؟
- دوه مخروطه چې راسونه يې سر په سر (منطقي) او قاعدې يې موازي وي، د يوې مستوي په واسطه چې اصلي محور سره موازي وي قطع کړئ. ويلاى شى چې له گډ فصل څخه يې څه ډول منځني په لاس راځي؟
- يو مخروط د يوې مستوي په واسطه داسې قطع کړئ چې مستوي د مخروط اصلي محور په بر کې ولري، تقاطع يا گډ فصل يې څه ډول هندسي شکل دی؟

له پورته فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:



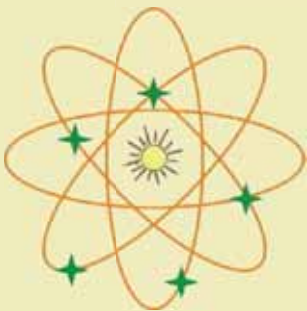
پایله:

- که چېرې مستوي یو مخروط داسې قطع کړي چې مستوي د مخروط په اصلي محور عمود او یا موازي له قاعدو سره وي، نو گډه فصل یې یوه دایره ده.
- که چېرې مستوي مخروط داسې قطع کړي چې مستوي او مخروط له اصلي محور سره یې زاویه قائمه نه وي، (مایل) لاس ته راغلي شکل الېس (Ellipse) یا بیضوي ده.
- که چېرې یوه مستوي یو مخروط داسې قطع کړي وي چې اصلي محور ته موازي او هغه په برکې ونه لري، نو په دې حالت کې د هغوی له گډه فصل څخه پارابولا (Parabola) په لاس راځي.
- که چېرې یوې مستوي دوه سر په سر یا څوکه په څوکه مخروطونه چې اصلي محور ته موازي وي قطع کړي وي، له گډه فصل څخه یې هائپرېولا (Hyperbola) په لاس راځي.
- که چېرې یوه مستوي اصلي محور په برکې ولري، نو گډه فصل یې له دوو مقاطع کرنيو څخه عبارت دی، چې هر یو یې په پورته شکلونو کې ښودل شوي دي.

پوښتي

- 1- د پورتنۍ شکل په پام کې نیولو سره، د مستوي او مخروط هغه مقاطع حالت رسم کړئ چې گډه فصل یې یوه دایره او یا یو ټکی وي.
- 2- که چېرې یوه مستوي دوه څوکه په څوکه مخروطونه داسې قطع کړي چې د دواړو مخروطونو اصلي محورونه په برکې ولري، گډه فصل یې څه ډول هندسي شکل دی؟
- 3- د یوې مستوي او مخروط گډه فصل په کوم حالت کې یوه کرینه ده؟ په دې حالت کې شکل رسم کړئ؟





بیضوي
Ellipse
 د سیارو حرکت د لمر په شاوخوا یا شمسي نظام څه ډول
 منځني گانې جوړوي؟

فعالیت

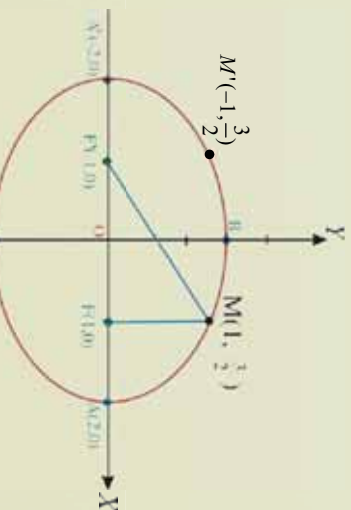
- د یوې سپینې کاغذي پاڼې پر مخ دوه سستې په یوه معین او ثابت ولن سره د F او F' په دوو ټکو کې ونومبئ.
- دیر تار څوکې چې اوږدوالی یې د $2c$ $\overline{FF'}$ څخه زیات دی، په دوږو ستنو کې وترئ، د لاندې شکل په پام کې نیولو سره یو پنسل د تار په غاړه د ستنو په شاوخوا وڅرخوئ.
- هغه شکل چې د یوې بشپړې دورې په لاس راځي څه ډول منځني ده؟



له پورته فعالیت څخه لاندې پایله بیانولای شو:

پایله: هغه شکل چې ددو ستنو تر منځ د معین او ثابت ولن په اندازه د تار په غاړه د پنسل له څرخولو څخه په لاس راځي، د ایس منځني بلل کېږي، د F او F' ټکي د ایس د محراقونو په نامه یادېږي.

فعالیت



- په مخامخ شکل کې د A', M, M', F, F' او A ټکو مختصات درکړل شوي، د دوو ټکو ترمنځ د فاصلي د پیدا کولو له فارمول څخه په کار اخیستې د $|MF'|$, $|MF|$ او $|AA'|$ اوږدوالی پیدا کړئ او بیا د $|AA'|$ او $|MF'| + |MF|$ اوږدوالی یو له بل سره پرتله کوئ.



- د $M'(-1, \frac{3}{2})$ ټکي د الپس په محيط باندې په نښه او همدارنگه د M' ټکي هم په پام کې ونیسئ.

- وروسته د $|M'F| + |MF|$ او $|M'F| + |MF|$ قیمتونه یو له بله سره پرتله کړئ.

له پورتنۍ فعالیت څخه لاندې تعریف بیانولای شو:

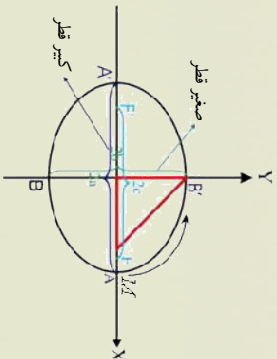
تعریف: په یوه مستوي کې د ټولو هغو ټکو هندسي محل چې له دوو ځای پر ځای ټکو څخه یې د فاصلو د جمعې حاصل تل مساوي یا ثابت اوږدوالی ولري، بیضوي بلل کېږي، مستقر ټکي چې په F او F' نورو بنسودل شوي، د الپس محراقونه او A, A' د الپس راسونه چې $AA' = 2a$ ثابت اوږدوالی دی.

$$|M'F| + |MF| = 2a, \quad |M'F| + |MF| = 2a$$

$$|M'F| + |MF| = |M'F| + |MF| = 2a$$

د الپس قطرونه او راسونه:

الپس یې شمېره قطرونه لري، لوی یې کبیر قطر یا اوږد قطر چې له محراقونو څخه تېرېږي او بیضوي په دوو ټکو د A, A' کې قطع کوي، د کبیر قطر یا Major axis په نامه او کوچنی قطر یې د FF' د نیمايي په ټکي عمود دی چې د صغیر قطر یا Minor axis په نامه یادېږي. د A, A' او B, B' ټکي د الپس راسونه دي، کبیر قطر په A, A' چې اوږدوالی یې یعنې $AA' = 2a$ او صغیر قطر په B, B' چې اوږدوالی یې $BB' = 2b$ دی، بنسودل کېږي.



یادداشت

که چېرې د M ټکي د صغیر قطر په راسونو یعنې په B یا B' باندې منطبق شي، په دې صورت کې له پورته شکل

$$\overline{MF} = \overline{MF'}, \quad \text{څخه لیکلای شو:}$$

له بلې خوا پوهیږو چې:

$$|MF| + |MF'| = 2a$$

$$2\overline{MF} = 2a$$

$$\overline{MF} = a$$

د محراقونو او قطرونو ترمنځ رابطه:

د محراقونو او قطرونو ترمنځ اړیکې د فیثاغورث د قضیې له مخې لیکلای شو:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

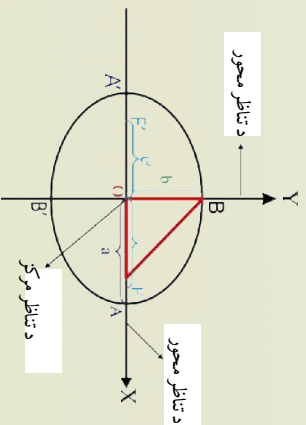
$$c = \pm \sqrt{a^2 - b^2}$$

د ایس تناظري مرکز او تناظري محور:

ایس دوه تناظري محورونه لري چې یو یې لوی محور د $A A'$ پر قطر باندې منطبق دی چې محراقي محور هم بلل کېږي او بل یې کوچنی تناظري محور چې د $B B'$ پر قطر باندې منطبق دی.

د دې دواړو محورونو د تقاطع ټکی د ایس تناظري مرکز بلل کېږي او په (O) سره ښودل کېږي.

$$\begin{aligned}\overline{OA} &= \overline{OA'} = a \\ \overline{OB} &= \overline{OB'} = b \\ \overline{OF} &= \overline{OF'} = c\end{aligned}$$



عن المركزيت (Eccentricity): د یوې بیضوي شکل د عن المركزيت په واسطه ټاکل کېږي عن المركزيت

د محراق او لوی محور له نسبت څخه عبارت دی، د بیضوي عن المركزيت په e سره ښودل کېږي او د $e = \frac{c}{a}$

شکل تعریف شوی دی.

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$$

پوهیږو چې په هره بیضوي کې $a < c < 1$ ، نو $0 < e < 1$ کېږي، د بیضوي د عن المركزيت او قطرونو تر

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

منځ داسې رابطه شته

زده‌کوونکي دې د قطرونو او محورونو ترمنځ د رابطې په کارونې سره نوموړي رابطه په لاس راوړي.

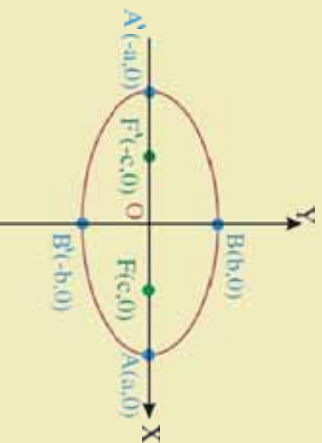
يادونه: که چیرې د e قیمت صفر ته نژدې شي، محراقونه یې د مرکز خوا ته نژدې کیږي. دلته بیضوي تقریباً دایروي شکل غوره کوي. که چیرې د e د 1 عدد ته نژدې شي، په دې صورت کې محراقونه د قطرونو د راسونو خوا ته نژدې کیږي چې یو اوږد شکل غوره کوي، د بیضوي په ډیرو مسایلو کې د عن المركزیت خڅنه کار اخیستل کیږي.

پوښتنې

1- که چیرې په بیضوي کې د کبیر قطر او صغیر قطر اوږدوالی یو له بل سره مساوي وي، څه ډول منځنۍ په لاس راځي؟

2- که چیرې د بیضوي عن المركزیت $\frac{2}{3}$ وي، په دې صورت کې د کبیر قطر او صغیر قطر نسبت پیدا کړئ.

د بیضوي معادله
 آیا د هغې بیضوي معادله چې مرکز یې د وضعیه کمیانو په مبداء کې وي، پیدا کولای شئ؟



فعالیت

- داسې بیضوي رسم کړئ چې مرکز یې د وضعیه کمیانو په مبداء کې وي او محراقونه یې د x د محور په مخ وټاکئ.
- د $M(x, y)$ یو اختیاري ټکی، د بیضوي پر محیط باندې وټاکئ او هغه له محراقونو سره ونښلوئ.
- د M او F د ټکو ترمنځ واټن او همدارنگه د M او F' د ټکو ترمنځ واټن پیدا کړئ او د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې د پیدا کولو له فارمول څخه په کار اخیستې د بیضوي معادله په لاس راوړئ.

ثبوت لومړۍ حالت: موږ لرو:

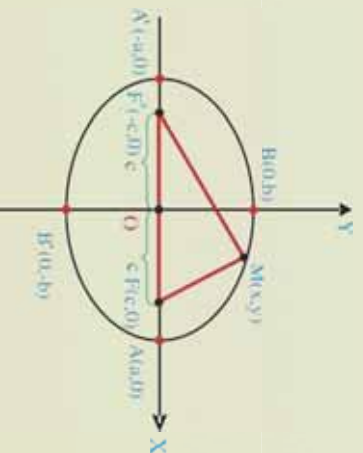
$$|MF| + |MF'| = 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

یا:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$



د دواړو خواوو له مربع کولو ورسته لیکو چې:

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2$$

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2$$

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 - 4a^2 - x^2 - 2cx - c^2 - y^2 = -4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$-4cx - 4a^2 = -4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \quad / \div (-4)$$



$$a^2 + cx = a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

یا

د پورته رابطې دواړه خواوې بیا مربع کوو او لیکو:

$$\begin{aligned}(a^2 + cx)^2 &= (a\sqrt{(x+c)^2 + y^2})^2 \\ a^4 + 2a^2cx + c^2x^2 &= a^2[(x+c)^2 + y^2] \\ a^4 + 2a^2cx + c^2x^2 &= a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2) \\ a^4 + 2a^2cx + c^2x^2 &= a^2x^2 + 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 \\ a^4 + c^2x^2 - a^2x^2 - a^2c^2 - a^2y^2 &= 0 \\ a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 - c^2x^2 - a^4 &= 0 \\ x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 &= a^4 - a^2c^2 \\ x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 &= a^2(a^2 - c^2) \\ \text{څرنگه چې } a^2 + b^2 &= c^2 \text{، نو } a^2 - c^2 = -b^2 \text{ کيږي، په دې صورت کې پورته معادله په لاندې توګه لیکو:} \\ x^2b^2 + a^2y^2 &= a^2b^2 \quad | \div a^2b^2 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1, \quad a > b\end{aligned}$$

پورتنۍ معادله دداسې بیضوي معادله راښيي چې د محراقونو وضعیه کمیات یې $(C, 0)$ ، $(-C, 0)$ او د X پر محور باندې واقع دي.

ثبوت دویم حالت: که چېرې د بیضوي محراقونه د Y په محور باندې وي، په دې صورت کې د بیضوي معادله عبارت ده له:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

زده کوونکي دې بیضوي رسم، د اوږد قطر، لنډ قطر او محراقونو مختصات دې ولیکي.

لومړی مثال: که چېرې د Y پر محور باندې د بیضوي د اوږد قطر اوږدوالی یعنې $|AA'| = 6$ او لنډ قطر

اوږدوالی یعنې $|BB'| = 4$ واحد وي، د بیضوي معادله پیدا کړئ.

حل:

$$\begin{aligned}|AA'| &= 2a = 6 \\ 2a = 6 &\Rightarrow a = 3 \\ |BB'| &= 2b = 4 \Rightarrow b = 2\end{aligned}$$

اوس د a او b قیمتونه په عمومي معادله کې اېږدو او معادله لیکو:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

دویم مثال: که چیرې د یوې بیضوي د اوږده قطر اوږدوالی $|AA'| = 10$ او لنډه قطر اوږدوالی یې $|BB'| = 8$ واحد وي، د بیضوي د اوږده او لنډه قطرونو د راسونو او محراقونو مختصات، محراقي فاصله،

د عنالمرکزیت قیمت پیدا او گراف یې رسم کړئ.

حل: پوهیږو چې:

$$\begin{aligned} |AA'| = 2a = 10 &\Rightarrow a = \pm 5 \\ |BB'| = 2b = 8 &\Rightarrow b = \pm 4 \end{aligned}$$

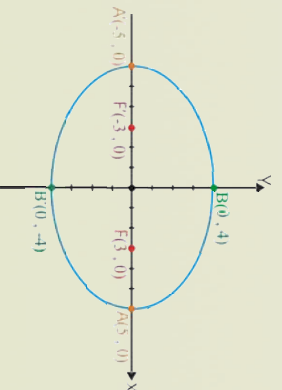
لیال کیږي چې $a > b$ دی، نو اوږد قطر یې د x پر محور باندې پروت دی، د اوږده قطر د راسونو

مختصات له $A(5, 0)$ او $A'(-5, 0)$ څخه عبارت دي.

د لنډ قطر د راسونو مختصات له: $B(0, 4)$ او $B'(0, -4)$ څخه عبارت دي.

د محراقونو د مختصاتو د پیدا کولو لپاره د c قیمتونه پیدا کوو:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 \\ \Rightarrow (5)^2 &= (4)^2 + c^2 \\ c^2 &= a^2 - b^2 \Rightarrow 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9 \\ c &= \pm 3 \end{aligned}$$



د محراقونو مختصات له $F(3, 0)$ او $F'(-3, 0)$ څخه عبارت دي.

$$\text{عنالمرکزیت: } e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5} \text{ دي}$$

درېم مثال: د داسې بیضوي گراف رسم کړئ چې معادله یې $x^2 + y^2 = 16$ وي، د راسونو او محراقونو مختصات یې پیدا کړئ.

حل: د معادلې دواړه خواوې په 16 ویشو:

$$\begin{aligned} \frac{4x^2}{16} + \frac{y^2}{16} &= \frac{16}{16} \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} &= 1 \end{aligned}$$

د راسونو مختصات:

$$\begin{aligned} a^2 &= 16 \Rightarrow a = \pm 4 \Rightarrow A(0, 4), A'(0, -4) \\ b^2 &= 4 \Rightarrow b = \pm 2 \Rightarrow B(2, 0), B'(-2, 0) \end{aligned}$$



د مخروطیو مختصات:

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$c^2 = (4)^2 - (2)^2$$

$$c^2 = 16 - 4 = 12 \Rightarrow c = \pm\sqrt{12}$$

$$F(0, \sqrt{12}), F'(0, -\sqrt{12})$$

څلورم مثال: د بیضوي د محیط پر مخ د یوه ټکی مختصات $P(2, 4)$ او د مخروطیو مختصات یې له

$F(3\sqrt{2}, 0), F'(-3\sqrt{2}, 0)$ څخه عبارت دي. د اوږده او لنډ قطر اوږدوالی یې پیدا کړئ.

حل: د بیضوي د تعریف له مخې لرو چې:

$$|PF| + |PF'| = 2a$$

د PF او PF' د فاصلو اوږدوالی پیدا کوو $|PF| = \sqrt{(2+3\sqrt{2})^2 + 4^2}$ او $|PF'| = \sqrt{(2-3\sqrt{2})^2 + 4^2}$

پورتني قیمتونه د تعریف په رابطه کې اېږدو:

$$\sqrt{(2+3\sqrt{2})^2 + 4^2} + \sqrt{(2-3\sqrt{2})^2 + 4^2} = 2a$$

$$\Rightarrow \sqrt{4+12\sqrt{2}+18+16} + \sqrt{4-12\sqrt{2}+18+16} = 2a$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{38+12\sqrt{2}} + \sqrt{38-12\sqrt{2}} \right)^2 = (2a)^2$$

$$38+12\sqrt{2}+2\sqrt{(38+12\sqrt{2})(38-12\sqrt{2})}+38-12\sqrt{2}=4a^2$$

$$76+2\sqrt{1444-288}=4a^2 \Rightarrow 76+2\cdot34=4a^2$$

$$\Rightarrow 76+68=4a^2 \Rightarrow 144=4a^2 \div 4$$

$$\Rightarrow 36=a^2 \Rightarrow a=\pm 6$$

$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow 36=b^2=18 \Rightarrow b=\pm 3\sqrt{2}$$

$$2a=2\cdot 6=12$$

$$2b=2\cdot 3\sqrt{2}=6\cdot\sqrt{2}$$

پوښتنې

1- لاندې معادلې په پام کې ونیسئ د اوږده قطر اوږدوالی د راسونو او مخروطیو ترمنځ فاصله پیدا کړئ.

$$a) \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$$

$$b) \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$$

2- د هغې ایس معادله ولیکئ چې عن المרכזت یې 0.8 وي.

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

د هغې بیضوي معادله چې مرکز یې یو اختیاري ټکی وي

ایا دداسې بیضوي معادله پیدا کولای شو چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې نه وي؟

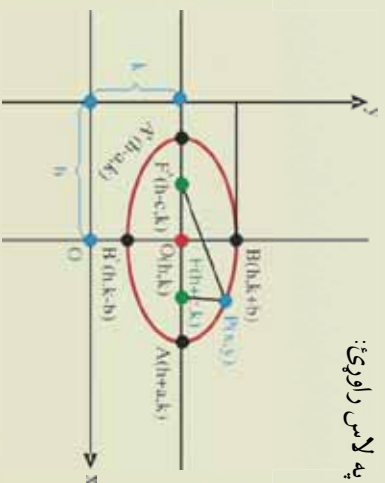
الهام فعالیت

یوه بیضوي د وضعیه کمیاتو په سیستم کې رسم کړئ چې مرکز یې (h, k) او لوی قطري د x له محور سره موازي وي.

د $P(x, y)$ یو ټکی د بیضوي په محیط باندې په پام کې ونیسي او هغه له F او F' سره ونښلوئ.

د بیضوي د مرکز مختصات (h, k) په پام کې نیولو سره د محراقونو F او F' ، راسونو A ، A' او B ، B' وضعیه کمیات په شکل کې ونښاست.

د دوو ټکو تر منځ د فاصلې د پیدا کولو له فارمول څخه په کار اخیستې او د بیضوي د تعریف د رابطې په کارونې سره معادله په لاس راوړئ:



$$|PF| + |PF'| = 2a$$

$$|PF| = \sqrt{[x - (h + c)]^2 + (y - k)^2}$$

$$|PF'| = \sqrt{[x - (h - c)]^2 + (y - k)^2}$$

$$\sqrt{[x - (h + c)]^2 + (y - k)^2} + \sqrt{[x - (h - c)]^2 + (y - k)^2} = 2a$$

$$\sqrt{[(x - h) - c]^2 + (y - k)^2} = 2a - \sqrt{[x - (h - c)]^2 + (y - k)^2}$$

یا:

دواړه خواي مربع او له اختصار وروسته لاندې رابطه په لاس راځي:

$$[x - (h + c)]^2 + (y - k)^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{[x - (h - c)]^2 + (y - k)^2} + [(x - h) + c]^2 + (y - k)^2$$

$$x^2 - 2x(h + c) + (h + c)^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{[x - (h - c)]^2 + (y - k)^2} + [(x - h) + c]^2 + (y - k)^2$$

$$\begin{aligned}
 x^2 - 2hx - 2cx + h^2 + 2hc + c^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{[x - (h - c)]^2 + (y - k)^2} + x^2 - 2hx + h^2 + 2cx - 2hc + c^2 \\
 4hc - 4cx &= 4(a^2 - a\sqrt{[x - (h - c)]^2 + (y - k)^2}) \\
 hc - cx &= a^2 - a\sqrt{[x - (h - c)]^2 + (y - k)^2} \\
 c(h - x) - a^2 &= -a\sqrt{[x - (h - c)]^2 + (y - k)^2} \quad / \div (-1) \\
 c(x - h) + a^2 &= a\sqrt{[x - (h - c)]^2 + (y - k)^2}
 \end{aligned}$$

دواړه خواوې مربع او ليکو:

$$\begin{aligned}
 c^2(h - x)^2 + 2ca^2(x - h) + a^4 &= a^2[\{x - (h + c)\}^2 + (y - k)^2] \\
 c^2(x - h)^2 + 2ca^2(x - h) + a^4 &= a^2[x - h + c]^2 + a^2(y - k)^2 \\
 c^2(x - h)^2 + 2ca^2(x - h) + a^4 &= a^2(x - h)^2 + 2a^2c(x - h) + a^2c^2 + a^2(y - k)^2 \\
 c^2(x - h)^2 - a^2(x - h)^2 - a^2(y - k)^2 &= a^2c^2 - a^4 \\
 (x - h)^2(c^2 - a^2) - a^2(y - k)^2 &= a^2(c^2 - a^2) \\
 -(x - h)^2(a^2 - c^2) - a^2(y - k)^2 &= -a^2(a^2 - c^2)
 \end{aligned}$$

خړنگه چې په يېضوي کې $a^2 - c^2 = b^2$ کېږي، نو ليکلاى شو:

$$\begin{aligned}
 -b^2(x - h)^2 - a^2(y - k)^2 &= -a^2b^2 \quad / \div (-a^2b^2) \\
 &= \frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1
 \end{aligned}$$

لومړۍ مثال: د يوې يېضوي د مرکز، محراقونو او اوږد قطر د انجاسونو مختصات چې معادله يې

$$\frac{(x - 6)^2}{36} + \frac{(y + 4)^2}{16} = 1$$

ده، پيدا او گراف يې رسم کړئ.

حل: خړنگه چې نوموړي معادله عمومي شکل لري، له دې امله د مرکز مختصات يې (6, -4) ده، لوی محور

يې د x له محور سره موازي دی.

$$a^2 = 36 \Rightarrow a = \pm 6$$

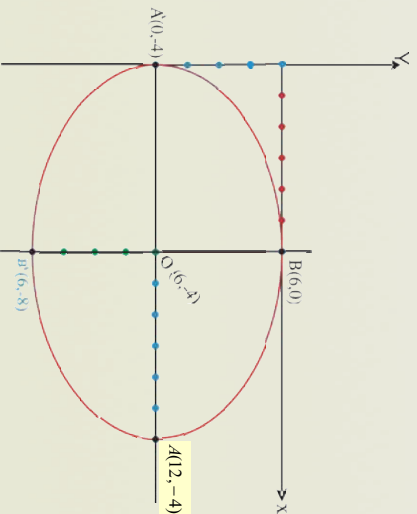
$$b^2 = 16 \Rightarrow b = \pm 4$$

$$c = \pm \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{36 - 16} = \sqrt{20} = \pm 2\sqrt{5}$$

د A او A' مختصات عبارت دي له:

$$A(h + a, k) = A(6 + 6, -4) = A(12, -4)$$

$$A'(h - a, k) = A'(6 - 6, -4) = A'(0, -4)$$



د B او B' مختصات عبارت دي له:

$$\begin{aligned} B(h, k+b) &= B(6, -4+4) = B(6, 0) \\ B'(h, k-b) &= B'(6, -4-4) = B'(-6, -8) \\ F(h+c, k) &= F(h+c, k) = (6+2\sqrt{5}, -4) \\ F'(h-c, k) &= F'(h-c, k) = (6-2\sqrt{5}, -4) \end{aligned}$$

دویم حالت: که چېرې محراقي محور د y له محور سره

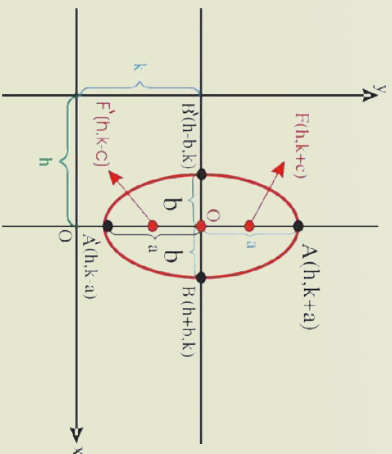
موازي وي، په دې حالت کې معادله لاندې بڼه غوره کوي.

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

$$A(h, k+a), A'(h, k-a)$$

$$B'(h-b, k), B(h+b, k)$$

$$F'(h, k-c), F(h, k+c)$$



د محراقيزو او راسونو مختصات دي زده کوونکو ته دنده ورکړله شي.

یادونه: د $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ معادله هم د بیضوي عمومي معادله ده، په داسې حال کې چې

$$A \neq C \quad \text{او هم علامه وي، یعنې} \quad C > 0, \quad A > 0 \quad \text{یا} \quad C < 0, \quad A < 0$$

دویم مثال: د $16x^2 - 64x + 25y^2 - 64y - 311 = 0$ معادله د بیضوي د معیاري معادلې په ډول ولیکئ.

حل: د مربع له بشپړولو څخه په کار اخیستې سره یې په معیاري ډول بدلوو.

$$16x^2 + 25y^2 - 64x + 50y = 311$$

$$16(x^2 - 4x) + 25(y^2 + 2y) = 311$$

$$16(x^2 - 4x + 4 - 4) + 25(y^2 + 2y + 1 - 1) = 311$$

$$16[(x-2)^2 - 4] + 25[(y+1)^2 - 1] = 311$$

$$16(x-2)^2 - 64 + 25(y+1)^2 - 25 = 311$$

$$= 16(x-2)^2 + 25(y+1)^2 = 311 + 64 + 25$$

$$16(x-2)^2 + 25(y+1)^2 = 400$$

$$\text{د پورته معادلې دواړه خواوې په 400 ویشو: } 1 = \frac{(y+1)^2}{16} + \frac{(x-2)^2}{25}$$

پورتنۍ معادله دداسې بیضوي معادله ده چې مرکز یې د $(-1, 2)$ ټکی دی.

درېم مثال: د بیضوي لاندې معادله د معادلې په ډول ولیکئ.

$$x^2 + 9y^2 + 4x - 18y - 23 = 0$$

حل: لومړۍ معادله ترتیب بیا د مربع له بشپړولو څخه په کار اخیستې سره هغه په معیاري شکل بدلوو:

$$x^2 + 4x + 9(y^2 - 2y) - 23 = 0$$

$$x^2 + 4x + (2)^2 - (2)^2 + 9[y^2 - 2y + (1)^2 - (1)^2] - 23 = 0$$

$$\underbrace{x^2 + 4x + (2)^2}_{\text{کامله مربع}} - (2)^2 + 9 \underbrace{[y^2 - 2y + (1)^2]}_{\text{کامله مربع}} - (1)^2 - 23 = 0$$

کامله مربع

کامله مربع

$$(x+2)^2 - 4 + 9(y-1)^2 - 9 - 23 = 0$$

$$(x+2)^2 + 9(y-1)^2 - 36 = 0$$

$$(x+2)^2 + 9(y-1)^2 = 36$$

د مساوات دواړه خواوې په 36 ویشو:

$$\frac{(x+2)^2}{36} + \frac{9(y-1)^2}{36} = \frac{36}{36}$$

$$\frac{(x+2)^2}{36} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$$

پوښتنې

1. د بیضوي په لاندې معادلو کې د مرکز، محراقونو او راسونو مختصات پیداکړئ.

$$a) \frac{(x+3)^2}{2} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$$

$$b) x^2 + 2y^2 + 4x - 12y + 20 = 0$$

2. د داسې بیضوي معادله ولیکئ چې مرکز یې د $(2, 0)$ ټکی، محراق یې د $(2, 6)$ ټکی او د $(6, 4)$ له ټکي څخه تیره شي.

3. د بیضوي لاندې معادلې د معیاري معادلو په ډول ولیکئ، د مرکز، راسونو، محراقونو وضعیت کمیات او همدارنګه د اوږده قطر، لنډ قطر اوږدوالی، عن المרכזیت پیدا او ګرافونه یې رسم کړئ.

$$a) 9x^2 + 25y^2 - 36x - 150y + 36 = 0$$

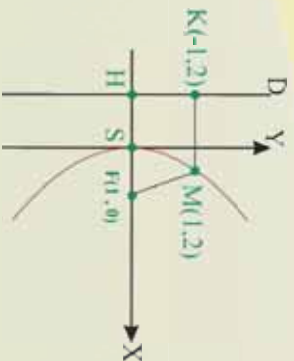
$$b) 16x^2 + 4y^2 + 96x - 8y + 84 = 0$$



پارابولا Parabola

که چیرې د لمر وړانګې په یوې معقري عدسي ولوبړي، انعکاسي (منعکسه) وړانګې یې له کوم ټکي څخه تیرېږي؟
دغه ټکی څه نومېږي او د عدسي ګډ فصل له یوې متقاطع مستوي سره چې د عدسي محور په برکې ولري، څه ډول منځني ده؟

فعالیت



د فعالیت د سرته رسولو لپاره مخامخ شکل په پام کې ونیسئ په شکل کې د F, M او K ټکو مختصات درکړل شوي دي، د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې د پیدا کولو له فارمول څخه په کار اخیستې سره د FM او KM هر یو اوږدوالی پیدا او یو له بل سره یې پرتله کړئ.

له پورته فعالیت څخه لاندې تعریف بیانولای شو:

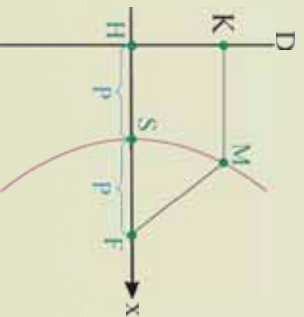
تعریف: په یوه مستوي کې د ټولو هغو ټکو هندسي محل چې د یوه ثابت یا مستقر ټکي او یوه ثابت مستقیم خط څخه په مساوي فاصله کې پراته وي، پارابولا بلل کېږي. دغه ثابت یا مستقر ټکی د پارابولا محراق (F) او د D

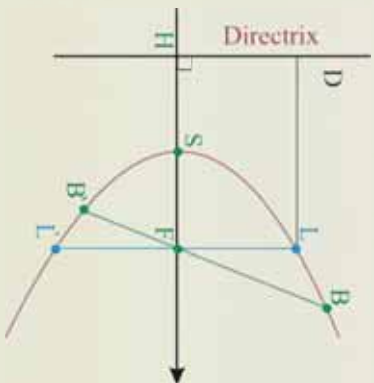
ثابت مستقیم خط ته د پارابولا موجه (Directrix) وایي $\overline{MF} = \overline{MK}$

هغه مستقیم خط چې د پارابولا له محراق او راس څخه تیر او د موجه (D) پر مستقیم خط عمود وي، د پارابولا د محراقي یا تناظري محور په نامه یادېږي.

د تناظري محور او منځني ګډ ټکی د پارابولا راس او په S سره ښودل کېږي.

آیا ویلای شئ چې S د $\overline{FH}$ نیمایي ټکی دی، ولې؟
په پارابولا کې عن المركبت ($e = 1$) دی ولې؟





د پارابولا وټرونه:

هغه مستقیم خط چې د پارابولا دوه ټکي سره ونښلوي، د پارابولا وتر بلل کېږي. په شکل کې $\overline{BB'}$ چې د پارابولا له محراق څخه تیر شوي دی، محراقي وتر دی او LL' چې د محراق په ټکي کې د تناظر پر محور باندې عمود دی عمودي وتر بلل کېږي.



د پارابولا د محراقي وتر اوږدوالی د $\overline{FH}$ څو برابره دی.

د پارابولا معادله

د هغې پارابولا د معادلې د پیدا کولو لپاره چې راس یې د وضعیه کمیانو په مبدا کې وي، لاندې فعالیت په پام کې ونیسئ:

$$y^2 = 4px$$

$$x^2 = 4py$$

فعالیت

- د وضعیه کمیانو قایم سیستم په پام کې ونیسئ او د Y له محور سره د هادي موازي خط رسم کړئ.
- د پارابولا منځني داسې رسم کړئ چې راس یې د وضعیه کمیانو په مبدا کې وي.
- د X پر محور باندې محراق داسې وټاکئ چې فاصله یې له مبدا څخه د هادي خط له فاصلې سره مساوي وي.
- په منځني باندې د $M(x, y)$ ټکۍ وټاکئ، هغه له F سره ونښلوئ او د M له ټکۍ څخه یو عمود پر هادي (موجه خط) باندې رسم او د تقاطع ټکۍ ته یې K ووايست.
- د F او K د ټکو مختصات ولیکئ.

اوس د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې پیدا کولو له فارمول څخه په کار اخیستنې سره د M او F ، K ټکو ترمنځ فاصله پیدا کړئ او بیا د پارابولا معادله د $|MK| = |MF|$ له رابطې څخه په لاس راوړئ.

ثبوت لومړۍ حالت: پوهیږو چې:

$$|MF| = \sqrt{(p-x)^2 + y^2}$$

$$|MK| = x + p$$

اوس د $|MF|$ او $|MK|$ قیمتونه د $|MF| = |MK|$ په رابطه کې اېږدو:

$$\sqrt{(p-x)^2 + y^2} = x + p$$

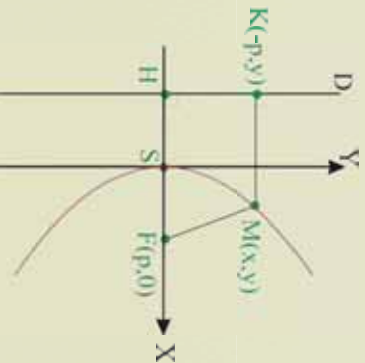
د پورته معادلې دواړه خواوې مربع کوو:

$$(\sqrt{y^2 + (p-x)^2})^2 = (x+p)^2$$

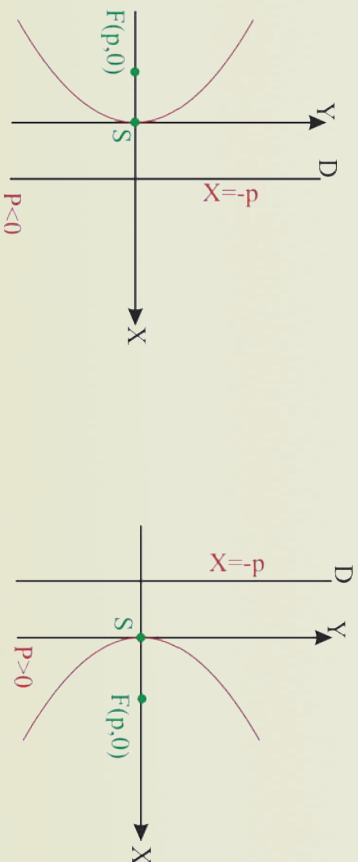
$$y^2 + (p-x)^2 = (x+p)^2$$

$$y^2 + p^2 - 2px + x^2 = x^2 + 2px + p^2$$

$$\Rightarrow y^2 = 4px$$



وروستی، رابطه داسې پارابولا معادله راښيي چې راس یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې $F(p, 0)$ د پارابولا محراق د x پر محور باندې پروت دی او موچه خط یې $p = -x$ دی. که چېرې $p > 0$ وي، د پارابولا خوله په افقي محور بڼې خواته خلاصه ده. که چېرې $p < 0$ وي، د پارابولا خوله په افقي محور باندې کښې خواته خلاصه ده.



لومړۍ مثال: د داسې پارابولا معادله په لاس راوړئ چې د محراق مختصات یې $F(2, 0)$ ، د هادي مستقیم خط معادله $x = -2$ سره وي او همدا رنگه د عمودي وتر د انجانونو مختصات یې پیدا کړئ.

حل: د محراق مختصات چې د x په محور باندې دي، ویلاي شو $P = 2 > 0$ ، له دې امله د پارابولا خوله ښي خواته خلاصه ده.

لرو چې: $y^2 = 4px$

اوس د $P = 2$ قیمت په معادله کې اېږدو:

$$y^2 = 4 \cdot 2x \Rightarrow y^2 = 8x$$

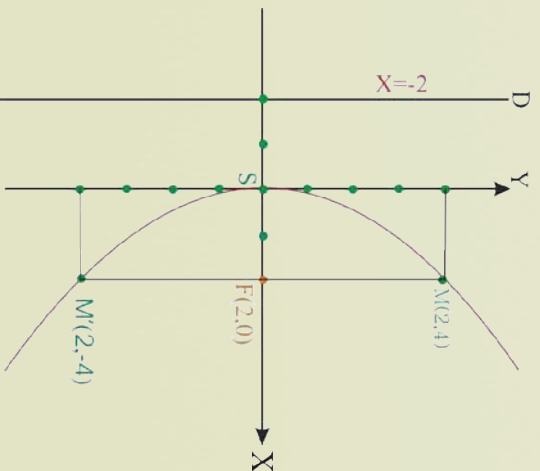
که چېرې د $x = 2$ قیمت د $y^2 = 8x$ په معادله کې کېږدو، په دې صورت کې د پارابولا دوه ټکي چې د عمودي وتر انجانونه دي په لاس راځي، هغه عبارت دي له:

$$y^2 = 8 \cdot 2 \Rightarrow y^2 = 16$$

$$y = \pm 4$$

$$M(2, 4) \quad , \quad M'(2, -4)$$

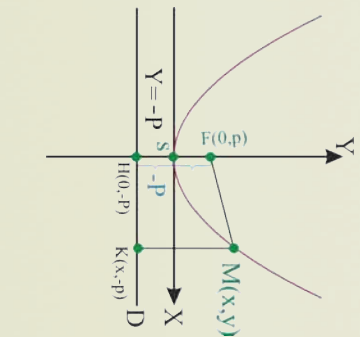
د پورته معلوماتو له مخې $y^2 = 8x$ پارابولا گراف رسم کړئ.



دویم حالت: که چیرې د پارابولا محراق (F) د Y پر محور باندې پروت او د D مستقیم خط د X له محور سره موازي وي، د پارابولا معیاري معادله پیدا کړئ.

حل: د پورته غوښتنې لپاره په پارابولا باندې یوټکی، لکه: $M(x, y)$ په پام کې نیسو، د پارابولا د تعریف له مخې لیکلای شو:

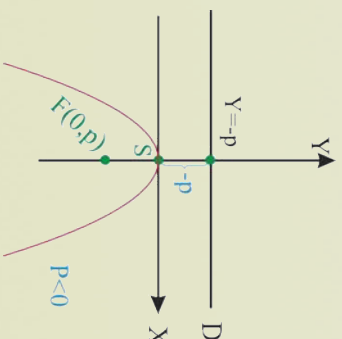
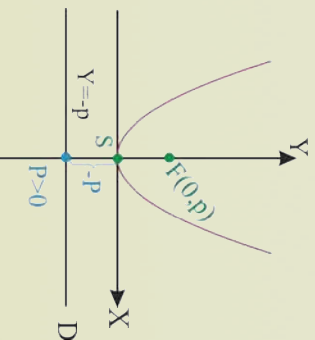
ثبوت:



$$\begin{aligned} |MF| &= |MK| \\ |\overline{MF}| &= \sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} = \sqrt{x^2 + (y-p)^2} \\ |\overline{MK}| &= \sqrt{(x-x)^2 + [(y-(-p))]^2} = \sqrt{(y+p)^2} \\ \Rightarrow (\sqrt{x^2 + (y-p)^2})^2 &= (\sqrt{(y+p)^2})^2 \\ \Rightarrow x^2 + (y-p)^2 &= (y+p)^2 \\ \Rightarrow x^2 + y^2 - 2py + p^2 &= y^2 + 2py + p^2 \\ \Rightarrow x^2 &= 4py \end{aligned}$$

پورته معادله د داسې پارابولا معادله ده چې راس یې د وضعیت کمیاتو د سیستم په مبدا کې او محراقي محور یې د Y محور دی چې د محراق مختصات یې $F(0, p)$ او $Y = -p$ یې د هادي مستقیم خط معادله ده.

که چیرې $p > 0$ وي، د پارابولا خوله پورته خواته خلاصه ده.
که چیرې $p < 0$ وي، د پارابولا خوله ښکته خواته خلاصه ده.



دویم مثال: د $x^2 = 12y$ په معادله کې د پارابولا د راس، محراق مختصات، د هادي خط معادله پیدا او گراف یې رسم کړی.

حل: لومړي د $4py = x^2 = 12y$ په معادله کې د P قیمت په لاس راوړو.

$$4p = 12$$

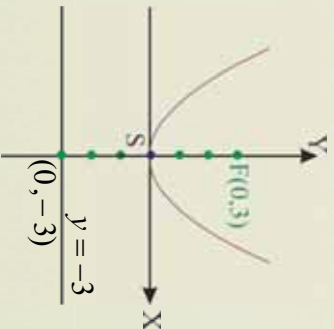
$$p = 3$$

خړنگه چې $0 < P = 3$ څخه دی، نو د پارابولا خوله پورته خړانه خلاصه ده.

$$\left. \begin{aligned} x^2 = 0 &\Rightarrow x = 0 \\ 3y = 0 &\Rightarrow y = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow S(0,0)$$

2- د محراق مختصات عبارت دي له: $F(0, 3)$

3- د هادي خط معادله عبارت ده له: $y = -3 \Rightarrow y = -p$



پوښتنې

1- د $0 = 4x - 2y^2$ او $2y^2 = x^2$ معادلو کې د هرې پارابولا د راس وضعیه کمیات او د هادي (موجه خط) معادلي پیدا او گرافونه یې رسم کړئ.

2- د لاندې قیمتونو له مخې د هرې پارابولا معادله پیدا کړئ.

- | | |
|-------------|-----------|
| a) $S(0,0)$ | $F(0,5)$ |
| b) $S(0,0)$ | $F(-2,0)$ |

د هغې پارابولا معياري معادله چې راس يې يو اختياري ټکي وي

آيا د داسې پارابولا معادله پيدا کولای شو چې د راس مشخصات يې د وضعيه کمپلټو په مېدا کې نه وي.

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

فعاليت

- يوه پارابولا د وضعيه کمپلټو په سيستم کې رسم کړئ چې مرکز يې (h, k) او د تناظري محوري يې د x له محور سره موازي وي.

- د پارابولا په منځني باندې د $M(x, y)$ ټکي وټاکئ او هغه له F سره ونښلوئ، بيا د M له ټکي څخه يو عمود خط پر هاډي خط (موجه) باندې رسم او هغه ته N ووايست.

اوس د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې څخه ديدا کولو په گټې اخېستې سره د M او F ټکو ترمنځ فاصله پيدا کړئ، بيا دهغې پارابولا معادله چې مرکز يې $S(h, k)$ ده، په لاس راوړئ.

ثبوت: څرنگه چې د F او M ټکو وضعيه کميات پېژنو او همدارنگه د N وضعيه کميات له $(h-p, y)$ څخه عبارت دی، د پارابولا د تعريف له مخې ليکو

$$|MF| = |MN|$$

د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې له مخې لرو:

$$\sqrt{[x-(h+p)]^2 + (y-k)^2} = \sqrt{[x-(h-p)]^2 + (y-y)^2}$$

د واره خو اوي مربع کوو او له اختصار وروسته لیکو:

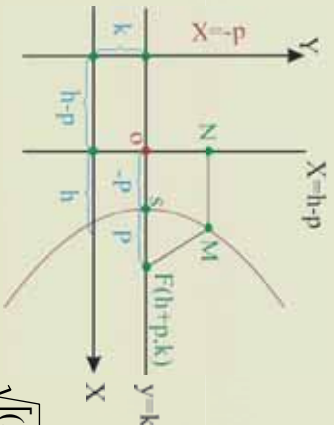
$$[(x-(h+p)]^2 + (y+k)^2 = [x-(h-p)]^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 2(h+p)x + (h+p)^2 + y^2 - 2ky + k^2 = x^2 - 2(h-p)x + (h-p)^2$$

د پورته رابطې له پراختيا او ساده کولو وروسته په لاس راځي چې:

$$y^2 - 2ky + k^2 = 4px - 4ph$$

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

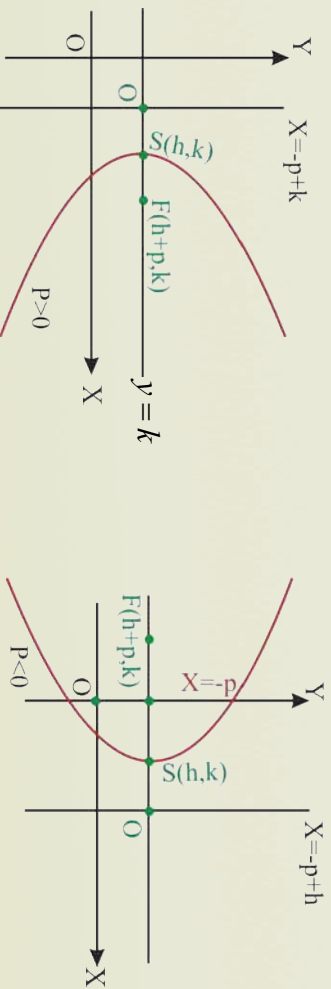


پورتی معادله دهني پارابولا معادله ده، چي د راس وضعيه کيميات يي $S(h, k)$ محراق يي $F(h + p, k)$ او د

موجه خط معادله يي $h + p = x$ ، تناظري محور يي $y = k$ دی.

که چيري $p > 0$ وي، د پارابولا خوله بني خواته خلاصه ده.

که چيري $p < 0$ وي، د پارابولا خوله چپي خواته خلاصه ده.



دويم حالت: د هني پارابولا معادله چي تناظري محور يي د y له محور سره موازي وي، عبارت ده

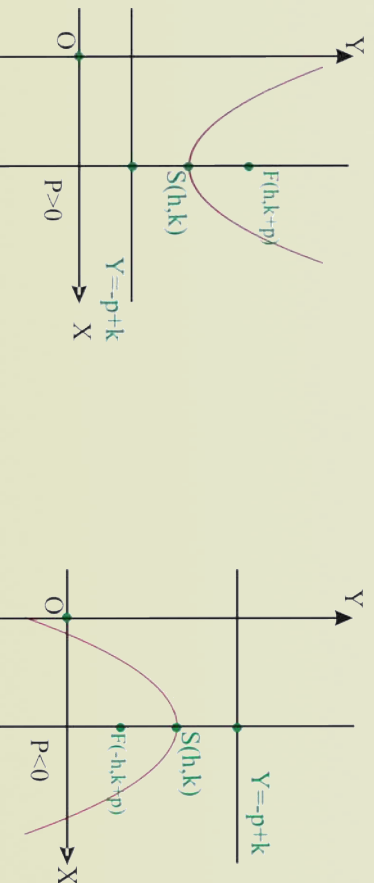
$$\text{له: } (x - h)^2 = 4p(y - k)$$

چي د پارابولا د راس مختصات $S(h, k)$ او د محراق مختصات يي $F(h, k + p)$ دي.

$p - k = y$ د پارابولا د هني خط معادله او $h = -x$ تناظري محور دی.

که چيري $p > 0$ وي، د پارابولا خوله پورته خواته خلاصه ده.

که چيري $p < 0$ وي، د پارابولا خوله ښکته خواته خلاصه ده.



لومړي مثال: غواړو د $(x - 1)^2 = 12(y - 2)$ د پارابولا په معادله کي د راس مختصات، د محراق مختصات،

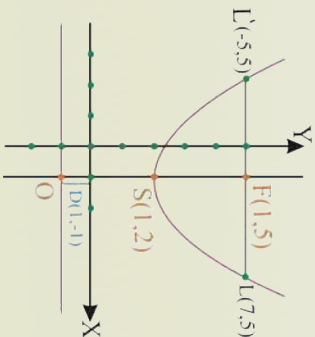
د موجه خط معادله، تناظري محور او د عمودي و تر د انجامونو مختصات پيدا کړو.

حل: څرنگه چي معادله د $(x - h)^2 = 4p(y - k)$ عمومي شکل لري.

$$\begin{aligned} \text{نو } 1, h=2, k=2 \text{ کپري، په دې صورت کي د پارابولا درس وضعيه کميات عبارت دي له: } S(1,2) \\ 4p=12 \Rightarrow p=\frac{12}{4}=3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{د محراق مختصات: } F(1,5) &\Rightarrow F(1,2+3) \\ \text{د موجه خط معادله } y=k-p &\Rightarrow 2-3=-1 \\ \text{د تناظر محور: } x=h &\Rightarrow x=1 \end{aligned}$$

د عمودي و تر دانجامونو د مختصاتو د پيدا کولو لپاره د y قيمت چي په محراق کي لرو په عمومي معادله کي اېږدو يعني $y=5$ دی.



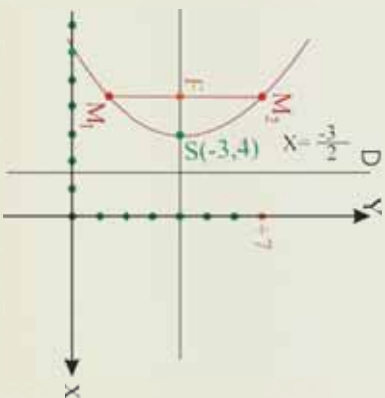
$$\begin{aligned} (x-2)^2 &= 12(5-2) \\ (x-1)^2 &= 12 \cdot 3 \Rightarrow (x-1)^2 = 36 \\ (x-1) &= \pm 6 \\ x_1 &= 6+1=7, \quad x_2 = -6+1=-5 \\ L(7,5) \quad L'(-5,5) \end{aligned}$$

دویم مثال: د $-6(x+3) = (y-4)^2$ معادله په پام کي ونیسی، د پارابولا دراس او محراق مختصات د موجه خط معادله، تناظري محور معادله، د عمودي و تر د انجامونو مختصات پيدا او گراف يي رسم کړئ.

$$\begin{aligned} \text{حل: دراس مختصات: } S(-3,4) &\Rightarrow S(-3,4) \\ 4P &= -6 \Rightarrow P = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

څرنگه چي $0 < -\frac{3}{2}$ ده، نو د پارابولا خوله چيې خوله خلاصه ده.

$$\begin{aligned} \text{د محراق مختصات: } F(h+p, k) &= (-\frac{9}{2}, 4) \\ \text{موجه خط معادله عبارت ده له: } x &= -\frac{3}{2} \\ \text{د تناظري محور معادله: } y &= k \\ \text{د } x &= -\frac{9}{2} \text{ قيمت په معادله کي اېږدو او د عمودي و تر د انجامونو مختصات په لاس راځي:} \end{aligned}$$



$$(y-4)^2 = -6(x+3) = -6\left(-\frac{9}{2}+3\right)$$

$$(y-4)^2 = 9 \Rightarrow y-4 = \pm 3$$

$$y_1 = 3+4=7$$

$$y_2 = -3+4=1$$

$$M_2\left(-\frac{9}{2}, 7\right), M_1\left(-\frac{9}{2}, 1\right)$$

يادونه: د $AX^2 + CY^2 + DX + EY + F = 0$ د معادلې گراف يوه پارابولا ده، په داسې حال کې چې $C = 0, A \neq 0$ وي يا $A = 0, C \neq 0$.

پوښتنه: د $(x-h)^2 = 4p(y-k)$ معادله په پراختيايي ډول وليکئ.

درېم مثال: د $y^2 - 2y + 8x + 25 = 0$ پارابولا معادله، د پارابولا د معياري معادلې په ډول وليکئ د راس، محراق مختصات، د مؤجه خط معادله او تناظري محور يې پيدا کړئ.

حل: په راکړل شوي معادله کې $A = 0$ دی، نو نظر د y متحول ته يې، مربع بشپړوو.

$$y^2 - 2y + (1)^2 - (1)^2 + 8x + 25 = 0$$

$$(y-1)^2 + 8x + 24 = 0 \Rightarrow (y-1)^2 + 8(x+3) = 0$$

$$\Rightarrow (y-1)^2 = -8(x+3)$$

په معادله کې ليدل کېږي: $P = -2 \Rightarrow 4P = -8$

د راس مختصات: $S(-3, 1) \Rightarrow h = -3, k = 1$

$$x = h - p \Rightarrow x = -3 + 2 = -1 \Rightarrow \text{د مؤجه خط معادله}$$

تناظر محور عبارت له $y = 1 \Rightarrow y = k$ څخه دی.



پوښتنې

1- د لاندي پارابولا معادله پيدا کړي، په داسې حال کې چې:

$$a) S(1,3), F(-1,3)$$

2- د $(y-1)^2 = 12(x-4)$ په معادله کې د پارابولا دراس مختصات، د محراق مختصات، د مؤجه خط

معادله او د تناظر محور پيدا او گراف يې رسم کړئ.

3- لاندي معادلې د پارابولا د معياري معادلې په ډول وليکئ او گراف يې رسم کړئ.

$$a) y^2 - 6y + 8x + 41 = 0$$

$$b) x^2 - 2x - 6y - 53 = 0$$



هایپربولای *Hyperbola*

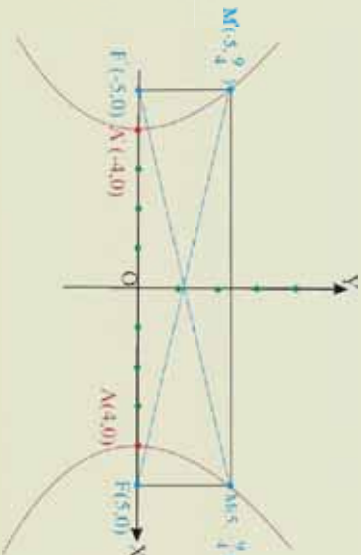
په یوه مستوي کې د ټولو هغو ټکو هندسي محل چې د فاصلو تفاضل یې له دوو مستقرو ټکو څخه تل له یوه ثابت اوږدوالي سره مساوي وي، څه ډول یوه منحنی کیدلای شي؟

فعالیت

- په لاندې شکل کې د A, M', M, F', F او A' ټکو مختصات درکړل شوي دي.
- د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې دینیدا کولو له فارمول څخه په کار اخیستني سره د $|MF'|$, $|MF|$ او $|AA'|$

اوږدوالي پیدا کړئ.

- د $|MF'| - |MF|$ د تفریق حاصل په لاس راوړئ او د $|AA'|$ له اوږدوالي سره یې پرتله کړئ.
- پورتنۍ فعالیت د M' ټکي لپاره تطبیق او پایله یې ولیکئ
- د $|MF'| - |MF|$ او $|M'F'| - |M'F|$ د تفریق حاصل یو له بل سره پرتله کړئ.



د پورتنۍ فعالیت له سرته رسولو وروسته لاندې تعریف بیانولای شو:

تعریف: په یوه مستوي کې دهغه ټکو هندسي محل چې د فاصلو تفاضل یې له دوو ځای ټکو څخه تل مساوي اوږدوالی ولري، هایپربولای *Hyperbola* بلل کیږي.

دوه مستقر ټکي د هایپربولاد محراقونو په نامه یادېږي، په شکل کې F او F' د هایپربولای محراقونه M او M' د هایپربولای دوه اختیاري ټکي دي، په دې صورت کې لیکو:

$$|M'F| - |M'F'| = |MF| - |MF'| = |AA'| = 2a$$

د FF' منځنۍ ټکي د هایپربول مرکز دی، د مرکز او هر یوه راس ترمنځ فاصله، لکه بیضوی په هایپربولا کې هم $AA' = 2a$ او $FF' = 2c$ اوږدوالی لري.

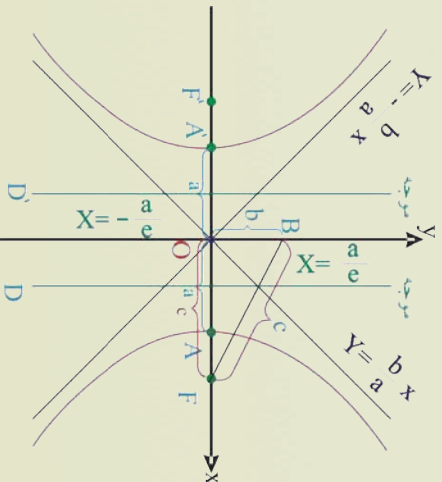
د هایپربول تناظري محورونه او راسونه:

د بیضوي په ډول هایپربولا هم دوه تناظري محورونه لري چې یوې په FF' باندې منطبق او د هایپربول له راسونو څخه تیرېږي. بل بې د FF' عمودي نیمایي کوونکی دی. د دې دواړو محورونو د تقاطع ټکي یا ځای، د هایپربول مرکز بلل کېږي. هغه تناظري محور چې له FF' څخه تیرېږي، د متقاطع محور په نامه یادېږي، ځکه چې هایپربول د A او A' په دوو ټکو کې قطع کوي چې دې دوو ټکوته د هایپربول راسونه وایي او اوږدوالي له $|AA'| = 2a$ څخه عبارت دی.

هغه خط چې د هایپربول په مرکز کې په متقاطع محور باندې عمود دی او هایپربول نه قطع کوي، خو د مرکز دواړو خواو ته د B او B' دوه ټکي په پام کې نیسو چې $OB = OB' = b$ وي، دا دوه ټکي د هایپربولا غیر حقيقي راسونه بلل کېږي چې $|BB'| = 2b$ غیر حقيقي محور دی.

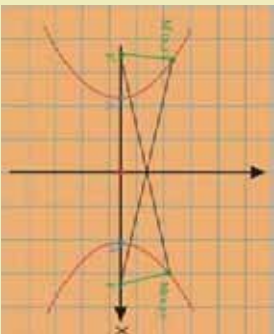
په یوه هایپربولا کې د a , b او c اوږدوالو ترمنځ داسې رابطه شته: $c^2 = a^2 + b^2$

عن المרכזیت: څرنگه چې په هایپربولا کې $a > c$ دی، نو $e > 1$ کېږي. چې د a , b , c او عن المרכזیت ترمنځ د $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$ رابطه شته. زده کوونکي دې د $e = \frac{c}{a}$ له رابطې څخه په کار اخیستې سره نوموړي رابطه په لاس راوړي.



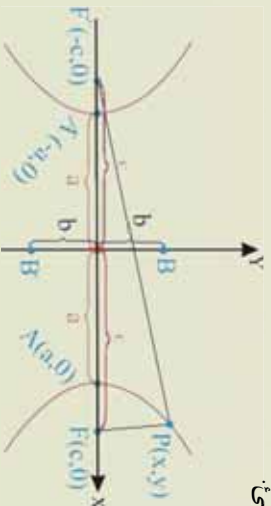
د هاپيرو لا معادله

آيا داسې يوه هاپيرو لا رسمو لاي شى چې مركزي د وضعيه كمپاټو په مبدا كې وي ؟



فعاليت

- داسې هاپيرو لا رسم كړئ چې مركزي د وضعيه كمپاټو په مبدا كې وي.
- د $P(x, y)$ ټكې په هاپيرو لا باندي وټاكئ او هغه د F او F' سره ونښلوئ
- د F, P او F', P ټكو ترمنځ د هاپيرو لا د تعريف رابطه وليكئ.
- د دوو ټكو ترمنځ د فاصلې د پيدا كولو له فارمول څخه په كار اخيستني سره د PF او PF' فاصلي پيدا كړي او بيا د هغو تفاضل په لاس راوړئ.
- د هاپيرو لا د تعريف له مخې ليكو: $|PF'| - |PF| = 2a$
- د دوو ټكو ترمنځ د فاصلې له فارمول څخه ليكلای شو.



$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

د مساوات د دواړو خواو له مربع او انكشاف څخه وروسته لرو:

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

$$\Rightarrow 4cx - 4a^2 = 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \div 4$$

$$\Rightarrow cx - a^2 = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

بيا هم د مساوات دواړه خواوې مربع او انكشاف وركوو:

$$(cx - a^2)^2 = a^2(x - c)^2 + y^2$$

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2)$$

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$\Rightarrow c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4 \Rightarrow (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

خړنگه چې $a > c$ دی، نو $0 < a^2 - c^2$ کېږي، له بلې خوا پوهیږو چې $b^2 = a^2 - c^2$ ده، نو په پورته افاده کې د $a^2 - c^2$ قیمت په اېنودلو سره لیکلای شو: $b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$

د مساوات د واره خواوې پر $a^2 b^2$ باندي وېشو:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

پورتني معادله د داسي هلیپربول معادله ده چې مرکزي د وضعیه کمیات په مبدأ او محراقونه یې په افقي محور پراته دي.

دویم حالت: که چېرې متقاطع محور یعنی $A'A$ د y پر محور پروت وي، یعنې محراقونه په عمودي محور پراته

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

وي، نو د هلیپربول معادله عبارت ده له:

پوښتنه

پورته فارمول او همدا رنگه د محراقونو او راسونو مختصات دې د شکل له مخې د زده کوونکو په واسطه پیداشي.

د هلیپربول موجه خط:

که چېرې د هلیپربول محراقونه د x یا y په محورونو پراته وي، په دې صورت کې لیکلای شو چې:

$$e = \frac{c}{a} \Rightarrow e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$$

له دې امله ولای شو چې دا موجه خطونه په متقاطع محور باندي عمود دي چې د هغو فاصله د هلیپربول له مرکز

څخه د $\pm \frac{a}{c}$ یا $\pm \frac{a^2}{c}$ څخه عبارت ده.

د هغې هلیپربول د هادي خط معادلې چې محراقونه یې د y پر محور باندي پراته دي له $y = \pm \frac{a}{e}$ څخه عبارت دي.

او د هغې هلیپربول د هادي خط معادلې چې محراقونه یې د x پر محور باندي پراته دي له $x = \pm \frac{a}{e}$ څخه عبارت دي.

د هلیپربول مجانبونه:

هغه مستقیم خطونه چې د هلیپربول له مرکز څخه تیر او په لایتناهي کې د هلیپربول له منځني سره تماس وي، د هلیپربول مجانبونه بلل کېږي.

$$1 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \quad \text{هائيربولا معادله په پام کې نيسو:}$$

$$a^2 y^2 = b^2 x^2 - a^2 b^2$$

$$a^2 y^2 = b^2 (x^2 - a^2)$$

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} (x^2 - a^2) = \frac{b^2}{a^2} \left[x^2 \left(1 - \frac{a^2}{x^2} \right) \right]$$

$$\Rightarrow y = \pm \frac{b}{a} x \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$$

که چيرې په پورتني رابطه کې x لايتناهي ته نژدې شي د $\frac{a^2}{x^2}$ کسر د صفر خوا ته نژدې کيږي په پايله

$$\left(1 - \frac{a^2}{x^2} \right) \text{ کې د يوه عدد ته تقرب کوي، په دې صورت کې } y = \pm \frac{b}{a} x \text{ لاس ته راځي.}$$

نو $y = \pm \frac{b}{a} x$ د هغو مجانبونو معادلې دي چې د هايپربولا محراقي نه د x پر محور باندې پراته وي.

که چيرې محراقي نه د y پر محور باندې پراته وي، د مجانبونو معادلې يې له $y = \pm \frac{a}{b} x$ څخه عبارت دي.

لومړي مثال: د هايپربولا $1 = \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4}$ په معادله کې د محراقيو مختصات، د راسونو مختصات، د موجه

خطونو معادلې او د مجانبونو معادلې پيدا او په شکل کې وښايست.

حل: د راسونو مختصات:

$$a^2 = 16 \Rightarrow a = \pm 4 \Rightarrow A(4, 0), A'(-4, 0)$$

د محراقيو مختصات: $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = \pm 2\sqrt{5}$

$$\Rightarrow F(2\sqrt{5}, 0), F'(-2\sqrt{5}, 0)$$

د موجه خطونو معادلې: څرنگه چې محراقي نه د x پر محور باندې پراته دي.

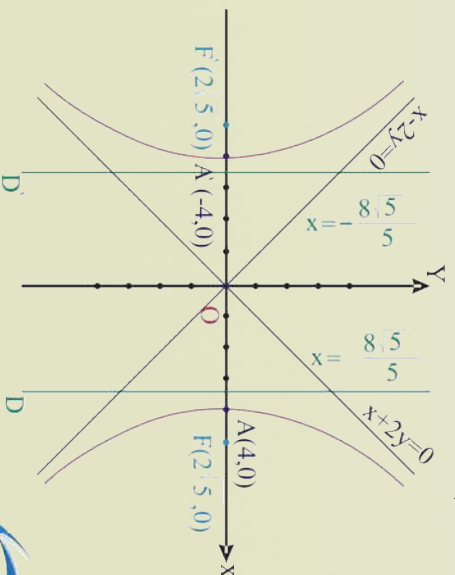
له دې امله:

$$x = \pm \frac{a}{e} = \pm \frac{a^2}{c} = \pm \frac{4^2}{2\sqrt{5}} = \pm \frac{16}{2\sqrt{5}} = \pm \frac{8}{\sqrt{5}} = \pm \frac{8\sqrt{5}}{5}$$

$$y = \pm \frac{b}{a} x \Rightarrow y = \pm \frac{2}{4} x = \pm \frac{1}{2} x$$

$$2y = \pm x$$

$$\text{يا: } x = \pm 2y \Rightarrow x + 2y = 0, x - 2y = 0$$



دویم مثال: ونښاست چې $1 = \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4}$ ، د هلیپربولایوه معادله ده، په نوموړي معادله کې د محراقونو، راسونو

مختصات، د مجانبونو او موچه خطونو معادلې پیدا او گراف یې رسم کړئ.

حل: پورتنۍ معادله د هلیپربولایو معیاري معادلې شکل لري چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې او د y

محور یې متقاطع محور دی چې محراقونه ور باندې پراته دي.

$$a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2 \quad A(0, 2), A'(0, -2) \quad \text{د راسونو مختصات:}$$

$$b^2 = 9 \Rightarrow b = \pm 3$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 4 + 9 = 13 \Rightarrow c = \pm \sqrt{13} \quad \text{د محراقونو مختصات:}$$

$$F(0, \sqrt{13}), F'(0, -\sqrt{13}) \quad \text{د مجانبونو معادلې:}$$

خرنگه چې متقاطع محور د y پر محور باندې منطبق دی، نو د مجانبونو معادلې عبارت دي له:

$$y = \pm \frac{a}{b}x \Rightarrow y = \pm \frac{2}{3}x \Rightarrow 3y = \pm 2x$$

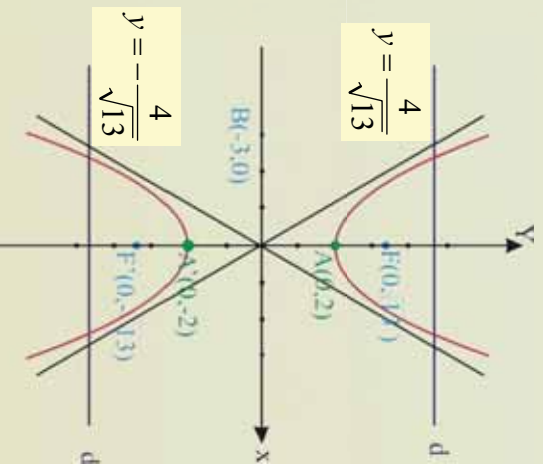
$$3y - 2x = 0, \quad 3y + 2x = 0$$

د موچه خط معادله: خرنگه چې د هلیپربولایو راسونه

د y پر محور باندې پراته دي، نو د موچه خطونو معادلې

عبارت دي له:

$$y = \pm \frac{a}{e} = \pm \frac{a^2}{c} = \pm \frac{4}{\sqrt{13}} = \pm 1,1$$



پوښتنې



د $4x^2 - y^2 = 16$ هلیپربولایو له معادلې څخه د محراقونو وضعیه کمیات، د راسونو وضعیه کمیات، د موچه خط

معادلې او د مجانبونو معادلې په لاس راوړئ او په پای کې یې گراف رسم کړئ.

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

د هغې هاپيروبوله معادله چې مرکز يې يو اختياري ټکی وي

آيا د داسې هاپيروبوله معادله شته چې مرکزي د وضعيه کمياتو په مېدا کې نه وي؟

فعاليت

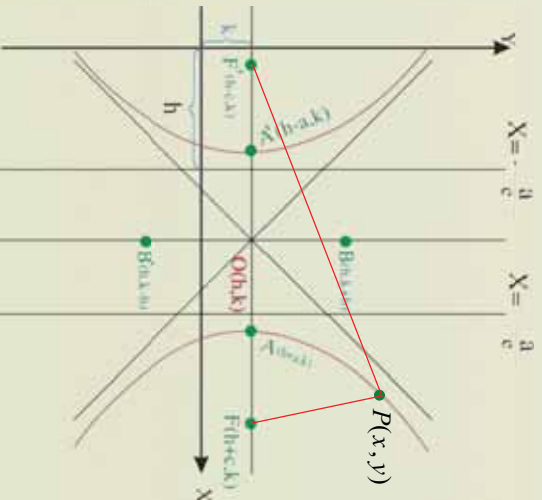
- د وضعيه کمياتو په سيستم کې داسې هاپيروبوله رسم کړئ چې د مرکز مختصات يې (h, k) او متقاطع محور يې موازي د x له محور سره وي.

- په هاپيروبوله باندې د $P(x, y)$ يو ټکی په پام کې ونيسئ او هغه د F او F' سره ونښلوئ.

- د هاپيروبوله د معادلې په پام کې نيولو سره د (h, k) ټکي د محراقونو مختصات يعني F او F' ، د راسونو مختصات يعني A ، A' ، B ، او B' په شکل کې وښايست.

د هاپيروبوله د تعريف لسه مخې لیکو:

$$|PF'| - |PF| = 2a$$



د دوو ټکو تر منځ د فاصلي د پيدا کولو له فارمول څخه په کار اخېستې سره ليکلای شو:

$$\sqrt{[x-(h-c)]^2 + (y-k)^2} - \sqrt{[x-(h+c)]^2 + (y-k)^2} = 2a$$

$$\sqrt{[x-(h-c)]^2 + (y-k)^2} = 2a + \sqrt{[x-(h+c)]^2 + (y-k)^2}$$

يا

د پورتنۍ مساوات دواړه خواوې مربع کوو:

$$\left(\sqrt{[x-(h-c)]^2 + (y-k)^2} \right)^2 = \left(2a + \sqrt{[x-(h+c)]^2 + (y-k)^2} \right)^2$$

$$[x-(h-c)]^2 + (y-k)^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{[x-(h+c)]^2 + (y-k)^2} + [x-(h+c)]^2 + (y-k)^2$$

$$x^2 - 2x(h-c) + (h-c)^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{[x-(h+c)]^2 + (y-k)^2} + x^2 - 2x(h+c) + (h+c)^2$$

د مشابه حلونو له جمعې او تفریق وروسته لیکلای شو: $cx - (ch + a^2) = a\sqrt{[x - (h + c)]^2 + (y - k)^2}$ بیا هم د مساوات دواړه خواوې مربع کوو:

$$\{cx - (ch + a^2)\}^2 = \{a\sqrt{[x - (h + c)]^2 + (y - k)^2}\}^2$$

$$c^2x^2 - 2cx(ch + a^2) + (ch + a^2)^2 = a^2[x - (h + c)]^2 + (y - k)^2$$

د ضرب، او طاقتونو له ساده کولو وروسته مشابه حدودنه جمع او تفریقو او پورتني رابطه په لاندې ډول لیکو:

$$c^2x^2 - a^2x^2 + 2c^2hx + a^2hx + c^2h^2 - a^2h^2 - a^2(y - k)^2 = a^2c^2 - a^4$$

$$x^2(c^2 - a^2) - 2hx(c^2 - a^2) + h^2(a^2 - c^2) - a^2(y - k)^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

$$(c^2 - a^2)(x^2 - 2hx + h^2) - a^2(y - k)^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

$$(c^2 - a^2)(x - h)^2 - a^2(y - k)^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

$$b^2(x - h)^2 - a^2(y - k)^2 = a^2b^2$$

خړنگه چې $b^2 = c^2 - a^2$ دي، نو پورته رابطه په لاندې ډول لیکو:

دواړه خواوې په a^2b^2 ویشو:

$$\frac{b^2(x - h)^2}{a^2b^2} - \frac{a^2(y - k)^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2}$$

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

د حقيقي راسونو مختصات: $A(h + a, k)$ $A'(h - a, k)$

د غیر حقيقي راسونو مختصات: $B(h, k + b)$ $B'(h, k - b)$

د محراقونو مختصات: $F(h + c, k)$ $F'(h - c, k)$

$$y = \pm \frac{b}{a}(x - h) + k$$

که چېرې د هایپربول د مرکز مختصات (h, k) او متقاطع محورېي موازي د y له محور سره وي په دې صورت

$$کې د هایپربول د معادله عبارت ده له: \frac{(y - k)^2}{a^2} - \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1$$

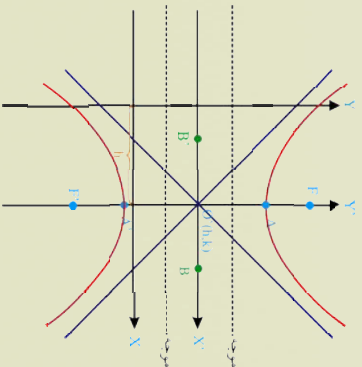
زده کړونکي دي د مرکز مختصات، د محراقونو مختصات، د موخه خط معادله او د مجانبونو معادلې وليکي؟

دویم حالت: که چېرې محراقونه د y له محور سره موازي پر

متقاطع محور پراته وي، نو د هایپرولا معادله عبارت ده له:

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

مختصات، محراقونو مختصات د موخه خطونو معادلې او د مجانبونو معادلې پیدا کړئ.



يادونه: د هاپيرولا غزول شوي معادله له $AX^2 + BY^2 + DX + EY + F = 0$ څخه عبارت ده په داسې حال

کې چې $A \neq B$ يا $A = B$ خو مختلف اشاره وي.

څرنگه کولای شو، د هاپيرولا غزول شوي معادله په لاس راوړو؟

لومړي مثال: د $4(x-3)^2 - 9(y+1)^2 = 144$ معادله په پام کې ونيسئ، د مرکز، د راسونو، محراقيونو

مختصات او همدارنگه د مجانبونو معادلي پيدا کړئ.

حل: راکړل شوي معادله په معياري ډول ليکو:

$$\frac{9(x-3)^2}{144} - \frac{4(y+1)^2}{144} = \frac{144}{144}$$

$$\frac{(x-3)^2}{16} - \frac{(y+1)^2}{36} = 1$$

د مرکز مختصات: $h=3, k=-1$ يعني $(3,-1)$ دي

د راسونو مختصات: $a=\pm 4 \Rightarrow a^2=16$

$$A(h+a, k) = A(3+4, -1) = A(7, -1)$$

$$A'(h-a, k) = A'(3-4, -1) = A'(-1, -1)$$

او همدارنگه پوهيږو چې:

$$\begin{cases} b^2 = 36 \Rightarrow b = \pm 6 \\ B(h, k+b) = B(3, 6-1) = B(3, 5), B'(h, k-b) = B'(3, -6-1) = B'(3, -7) \end{cases}$$

د محراقيونو مختصات: $F(h+c, k) = F(3+\sqrt{52}, -1)$ $F'(h-c, k) = F'(3-\sqrt{52}, -1)$

پوهيږو چې په هاپيرولا کې: $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 16 + 36 = 52 \Rightarrow c = \pm\sqrt{52}$

که چيرې متقاطع محور د x له محور سره موازي وي، نو د مجانبونو معادلي عبارت دي له:

$$y-k = \pm \frac{b}{a}(x-h) \Rightarrow y = \pm \frac{6}{4}(x-3) - 1 = \pm \frac{3}{2}(x-3) - 1$$

$$y = \pm \frac{3}{2}(x-3) - 1 \quad / \cdot 2$$

$$2y = \pm 3(x-3) - 2 \Rightarrow 2y = 3x - 9 - 2 \Rightarrow 2y - 3x + 11 = 0$$

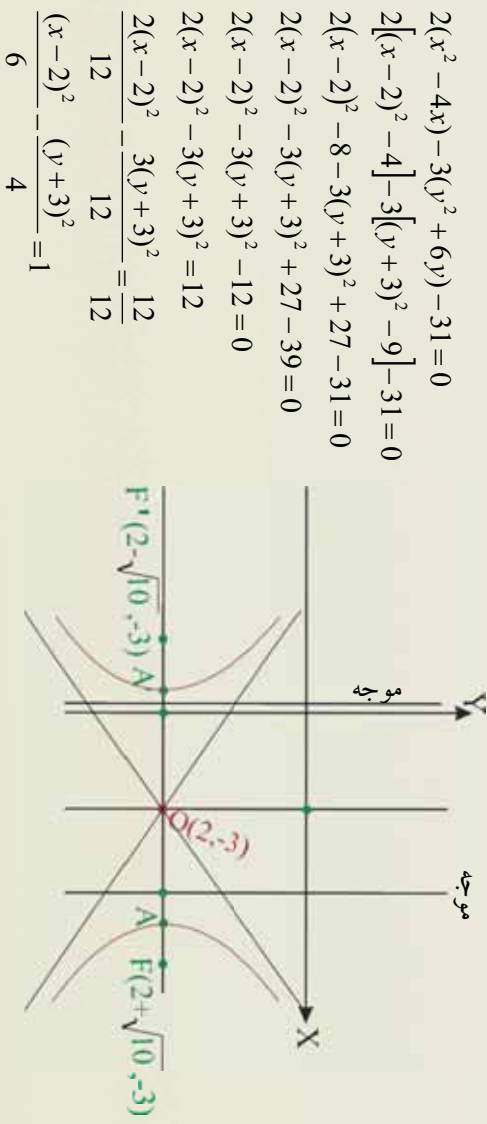
$$2y = -3x + 9 - 2 \Rightarrow 2y + 3x - 7 = 0$$

دويم مثال: د $18y^2 - 8x^2 - 3y^2 - 2x^2 = 0$ معادله په پام کې ونيسئ.

د هاپيرولا د مرکز مختصات د راسونو مختصات، د محراقيونو مختصات او د موجه خطونو معادلي، د محاليونو

معادلي په لاس راوړئ.

حل:



پورتني معادله په معياري ډول وړول مشوره، ليدل كيږي چې $h = -3$ او $k = 2$ دی، د مرکز مختصات

بڼې: $O(2, -3)$

له بلې خوا:

$$b^2 = 4 \Rightarrow b = \pm 2, \quad a^2 = 6 \Rightarrow a = \pm \sqrt{6}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \pm \sqrt{a^2 + b^2} = \pm \sqrt{6 + 4} = \pm \sqrt{10}$$

د محراقونو مختصات: بڼې $F'(2 - \sqrt{10}, -3)$, $F(2 + \sqrt{10}, -3)$

د راسونو مختصات: $A'(2 - \sqrt{6}, -3)$, $A(2 + \sqrt{6}, -3)$

$$\text{د موچه خطونو معادلي: } x - h = \pm \frac{a}{e} \Rightarrow x = \pm \frac{a}{e} + h = \pm \frac{6\sqrt{10}}{10} + 2$$

د مجانبونو معادلي: څرخگه چې متقاطع محور د x له محور سره موازي دی، نو ليکلاي شو:

$$y - k = \pm \frac{b}{a}(x - h) \quad y = \frac{2}{\sqrt{6}}(x - 2) - 3 \quad / \cdot \sqrt{6}$$

$$\sqrt{6}y = 2(x - 2) - 3\sqrt{6}$$

$$y + 3 = \pm \frac{2}{\sqrt{6}}(x - 2)$$

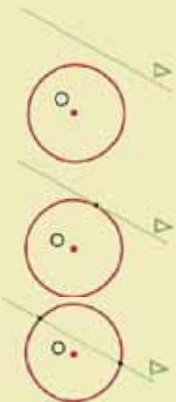
$$\Rightarrow \sqrt{6}y = 2x - 4 - 3\sqrt{6}$$

$$\Rightarrow \sqrt{6}y + 2x - 4 + 3\sqrt{6} = 0$$



$$\text{د } 9x^2 - 4y^2 + 54x + 16y - 79 = 0 \text{ معادله د هايپربول پر معياري معادلي باندې وړوئ.}$$

دیوې کرښې مو قیمت نظر مخروږطي مقاطعو ته
یوه اختیاري کرښه، یوه دایره د امکان په صورت کې په
خو ټکو کې قطع کولای شي؟



فعالیت

O دایره او د Δ مستقیمه کرښه په پام کې ونیسئ:

- یوه دایره او مستقیمه کرښه داسې رسم کوئ، چې یوازې یو ګډه ټکی سره ولري.
- آیا کېدای شي چې یوه مستقیمه کرښه، یوه دایره له دوو ونکو څخه په زیاتو ټکو کې قطع کړي؟
- که چېرې د یوې دایرې د مرکز او کرښې تر منځ واټن، د دایرې له شعاع یا وړانګې څخه لوی وي، دایره او کرښه څو ګډه ټکي لري؟

له پورتنۍ فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

پایله: په یوه مستوي کې یوه اختیاري کرښه او یوه دایره امکان لري، یوازې یوه، دوه او یا هېڅ ګډه ټکي ونلري.

لومړي مثال: د $x^2 + y^2 = 9$ دایره او $x + 3 = y$ مستقیمه کرښه رسم او موقعیت یې وښایاست.

حل: په شکل کې لیدل کېږي، چې پورتنۍ دایره او کرښه یو بل په $(0, 3)$ او $(-3, 0)$ دوو ټکو کې قطع کوي ددې پایلې د لاس راوړلو لپاره که چېرې د y قیمت د دایرې په معادله کې وضع کړو عین نتیجه به لاس راځي:

$$x^2 + y^2 = 9$$

$$y = x + 3 \Rightarrow x^2 + (x + 3)^2 = 9$$

$$x^2 + x^2 + 6x + 9 = 9$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 6x = 0$$

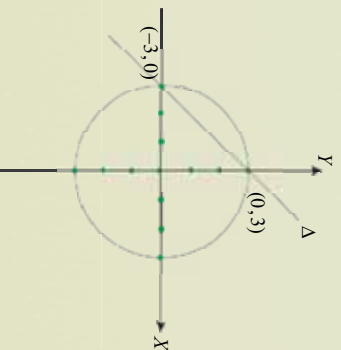
$$x_1 = 0, \quad x_2 = -3$$

د x قیمتونه د $x + 3 = y$ په معادله کې اېږدو او د y قیمت په لاس راځي.

$$y_1 = 0 + 3 \Rightarrow y_1 = 3$$

$$y_2 = -3 + 3 \Rightarrow y_2 = 0$$

د $(0, 3)$ او $(-3, 0)$ د دایرې او مستیمې کرښې د تقاطع ټکي دي.



په دې ډول د پوزيتيو قيمتونو په پام کې نيولو سره د $(0,3)$ او $(-3,0)$ مرتبي جوړي چې د دواړو معادلو د تقاطع ټکي دي په لاس راځي.

په عمومي ډول کله چې د مستقيمي کرني له معادلې څخه د x يا y متحول حل او د مخروطي مقاطعو په معادله کې نې کېږدو، د حل لپاره يوه دويمه درجه معادله لاسته راځي چې حل يې د Δ په قيمت پورې اړه لري. دغه مسئله په لاندې ډول د څېړلو، او پام وړ، پايلې لري:

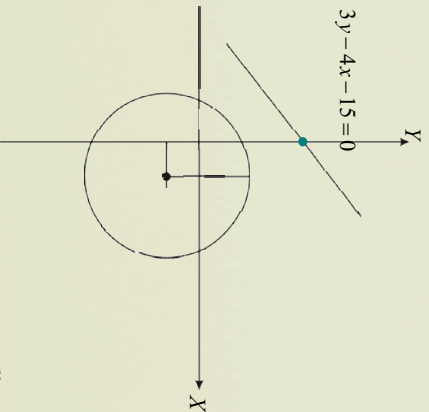
- 1- که چېرې $\Delta > 0$ وي، معادله دوه حلونه لري، نو په دې ډول کرښه او منځني يوبل په دوو ټکو کې قطع کوي.
- 2- که چېرې $\Delta = 0$ وي، معادله دوه مضاعف يا مساوي جذرونه لري او په دې ډول کرښه د مخروطي مقاطعو له منځني سره يوازې يو ګډ ټکی چې مماس بلل کېږي لري.

3- که چېرې $\Delta < 0$ وي، معادله حل نلري، په بل عبارت، کرښه او منځني يوبل نه قطع کوي.

دويم مثال: د $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ دایره او $3y - 4x - 15 = 0$ کرښه په پام کې ونيسئ، او موقعيته يې له يو بل سره وڅېړئ.

حل: ديوړتيو معادلو د بدلولو لپاره چې معياري حالت ته راوگرځول شي، په لاندې ډول گام پورته کوو:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 &= 0 \\ x^2 - 2x + (1)^2 - (1)^2 + y^2 + 4y + (2)^2 - (2)^2 - 4 &= 0 \\ (x-1)^2 + (y+2)^2 - 9 &= 0 \\ \Rightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 &= 9 \quad C(1,-2) \end{aligned}$$



له پورتنۍ معادلې څخه يو هپرو چې د دايرې مرکز $C(1,-2)$ او شعاع يې $r = 3$ دی.

همداڅه راز د مستقيمي کرني لپاره لرو: $5 + x = \frac{4}{3}y \Rightarrow y = \frac{4}{3}x + 5$

که چیرې له پورتنۍ معادلې څخه د y قیمت د دایرې په معادله کې کیدو او معادله حل کړو، نو لاندې پایله به لاس راځي.

$$(x-1)^2 + \left(\frac{4}{3}x + 5 + 2\right)^2 = 9$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 + \left(\frac{4}{3}x + 7\right)^2 = 9 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 + \frac{16}{9}x^2 + 14\frac{4}{3}x + 49 - 9 = 0$$

$$\Rightarrow 9 \cdot \frac{25}{9}x^2 - 9 \cdot \frac{50}{3}x + 9 \cdot 40 = 0$$

$$\Rightarrow 25x^2 + 150x + 360 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 22500 - 36000 = -13500, \quad \Delta < 0$$

څرنگه چې $\Delta < 0$ ده، کرښه او دایره ګڼېکې نه لري.

دیرم مثال : د $y = x - 1$ د کرښې موقعیت د $y - x^2 + 1 = 0$ پارابولا ته وڅیړئ.

حل : د پورتنۍ مسئلې د څیړلو لپاره د y قیمت د پارابول په معادله کې وضع کوو، او بیا ګام په ګام د معادلې حل په پام کې نیسو:

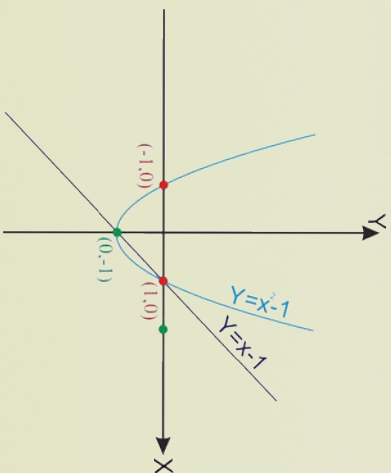
$$y = x - 1$$

$$y - x^2 + 1 = 0 \Rightarrow (x - 1) - x^2 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x - 1 - x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 - x = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-1) - 4(1)(0) \Rightarrow 1 - 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 1$$



څرنگه چې لیدل کېږي $\Delta = 1 > 0$ څخه ده، نو موږ یې کرښه یعنې $y = x - 1$ په لاندې ډول په لاس راځي او د $y - x^2 + 1 = 0$ پارابول یو بل په دوو ټکو کې قطع کوي چې د دې دویمې درجې معادلې حل

$$x^2 - x = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{1}}{2}$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 0$$

که چیرې په لاس راغلي قیمتونه د کرښې په معادله کې کیدو، نو د نوموړې کرښې او پارابولا د قطع کولو ټکي په لاس راځي، هغه عبارت دي له: $(0, -1)$, $(1, 0)$ دغه ټکي په ګراف کې هم په ښکاره ډول لیدل کېږي.

څلورم مثال: د $x = 5$ د مستقیمې کرنيې او $1 = \frac{y^2}{4} + \frac{(x-2)^2}{9}$ بیضوي موقعیتونه وڅیړئ.

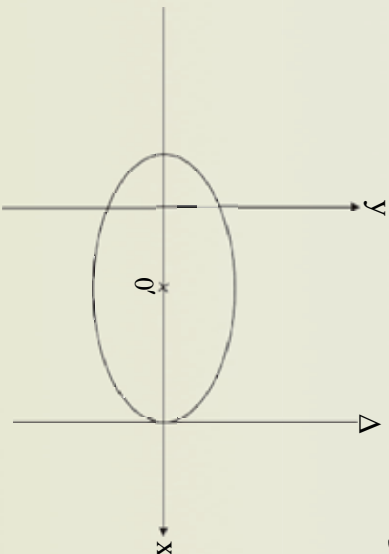
حل: که چېرې د $x = 5$ د مستقیمې کرنيې قیمت د

بیضوي په معادله کې کښیږدو، نو په لاس راځي:

$$\frac{y^2}{9} + \frac{9}{4} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{4} + \frac{(5-2)^2}{9} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{4} = 1 - 1 = 0$$

خړنگه چې: $\Delta = b^2 - 4ac = 0$



په دې ډول وپلای شو چې مستقیمه کرښه او بیضوي یو ګاټه کې لري چې په شکل کې په ښکاره ډول لیدل کیږي.

یادونه: د مخروطي مقاطعو غزیدلی یا انکشاف ورکړل شوي، معادله په لاندې ډول ده:

$$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0, A, B, D, E, F \in \mathbb{R}$$

د پورتنۍ معادلې د پیژندلو لپاره په یاد ولرئ چې:

1- که چېرې $A = B$ یو شان علامې ولري، یوه دایره ده.

2- که چېرې $A \neq B$ او یو شان علامې ولري، یو الیس دی.

3- که چېرې $A = B$ یا $A \neq B$ او مختلفې علامې ولري، هلیپربولا ده.

4- که چېرې معادلې لاندې شکل ولري، ګراف یې یوه پارابولا ده.

$$Ax^2 + By + Cx + D = 0 \text{ او } Ax^2 + Bx + Cy + D = 0$$

پوښتنې

1- لاندې معادلې د هغوی د ګرافونو د منځني له مخې وټاکئ:

a) $y^2 - 2y + x + 3 = 0$

c) $25x^2 + 16y^2 = 400$

e) $y^2 + 6y - x + 2 = 0$

2- د $36 = 4y^2 + 9x^2$ الیس او $3 = y$ مستقیم خط یو بل په څو ټکو کې قطع کوي؟

3- د $x = y$ خط او $4 = x^2 - 2y^2$ هلیپربول د تقاطع ټکي پیدا کړئ.

د څپرکي مهم ټکي

مخروطي مقاطع: د يوې مستوي او مخروط د تقاطع گډ فصل عبارت ده له: دايرې، پارابول، هلاپيرولا، يو ټکي، بيضوي او يا دوره متقاطع کرښې.

بيضي: په يوه مستوي کې د ټولو هغو ټکو هندسي محل چې له دوو مستورو ټکو څخه يې د فاصلو د جمعې حاصل يې يو ثابت اوږدوالی وي، بيضوي بلل کېږي، مستور ټکي چې په F^1 او F^2 تورو بنسودل شوي، د بيضوي مخروطونه او $AA' = 2a$ ثابت اوږدوالی دی

شماره	معادلې	د مرکز وضيعه کميات	د اوږده قطر انجامونه	د لنډه قطر انجامونه	محراقونه
1	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $a > b$	$(0,0)$	$(a,0), (-a,0)$ د x پر محور باندې دي	$(0,b), (0,-b)$ د y پر محور باندې دي	$(c,0), (-c,0)$ د x پر محور باندې دي
2	$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ $a > b$	$(0,0)$	$(0,a), (0,-a)$ د y پر محور باندې دي	$(b,0), (-b,0)$ د x پر محور باندې دي	$(0,c), (0,-c)$ د y پر محور باندې دي
3	$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ $a > b$	(h,k)	$(h \pm a, k)$ قطر د x له محور سره موازي دي	$(h, k \pm b)$ قطر د y له محور سره موازي دي	$(h \pm c, k)$ د x پر محور باندې دی
4	$\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$ $a > b$	(h,k)	$(h, k \pm a)$ قطر د y له محور سره موازي دی	$(h \pm b, k)$ قطر د x له محور سره موازي دی	$(h, k \pm c)$ د y پر محور باندې دي

د بيضوي غزول شوي عمومي معادله عبارت ده له: $AX^2 + CY^2 + DX + EY + F = 0$: (يعنې دواړه هم علامه وي.)
په داسې حال کې چې $A > 0$ او $C > 0$ وي:

$$e = \frac{c}{a} \text{ ديفيروي دصن المركزيت په نامه يادېږي.}$$

پاراېولا: په يوه مستوي کې د ټولو هغو ټکو هندسي محل چې د يوه ثابت يا مستقر ټکي او ثابت مستقيم خط څخه په مساوي فاصله کې پرته وي، پارابولا بلل کېږي، دغه ثابت يا مستقر ټکي ته د پارابولا محراق (F) او ثابت مستقيم خط ته د پارابولا ها دي (موجه) وايي، معادله يې $y'^2 = 4px$ ده

تناظري محور	د موجه خط معادله	د محراق مختصات	دراس وضعيه کميات	د پارابولا معادلې	نېټه
$x = 0$	$x = -p$	$F(P, 0)$	$S(0, 0)$	$y^2 = 4Px$	1
$y = 0$	$y = -p$	$F(0, P)$	$S(0, 0)$	$x^2 = 4Py$	2
$y = k$	$x = h - p$	$F(h + p, k)$	$S(h, k)$	$(y - k)^2 = 4P(x - h)$	3
$x = h$	$y = k - p$	$F(h, k + p)$	$S(h, k)$	$(x - h)^2 = 4P(y - k)$	4

د پارابولا غزول شوي معادله $F = 0$ يا $Dx + Ey + F = 0$ په داسې حال کې چې $A = 0$ يا $C = 0$ وي، نه دواړه. ($A = 0, C \neq 0$ يا $A \neq 0, C = 0$ وي) په پارابولا کې $e = 1$ دی.

هايپربول: په يوه مستوي کې د هغو ټکو هندسي محل چې د فاصلو تفاضل يې له دوو ثابتو مستقرو ټکو څخه تل ثابت اوږدوالی ولري، هايپربول بلل کېږي.

دوه ثابت مستقر ټکي د هايپربول محراقونه دي، د دواړو محراقونو ترمنځ فاصله $2c$ ده.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ د هايپربول محراقونه پر افقي محور پرانه دي.}$$

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \text{ د هايپربول محراقونه پر عمودي محور پرانه دي.}$$

محراقونه	غير حقيقي رأسونه	د رأسونو وضعيه كميات	د مرکز وضعيه كميات	د هليپربولا معادلې
$F(c,0)$ $F'(-c,0)$ د x پر محور باندې	$(0,b), (0,-b)$ د y پر محور باندې	$(a,0), (-a,0)$ د x پر محور پراته دي	$S(0,0)$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
$F(0,\pm c)$ د y پر محور باندې	$(b,0), (-b,0)$ د x پر محور باندې	$(0,a), (0,-a)$ د y پر محور پراته دي	$S(0,0)$	$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$
$F(h \pm c, k)$	$B(h, k \pm b)$	$A(h \pm a, k)$	$S(h, k)$	$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$
$F(h, k \pm c)$	$B(h \pm b, k)$	$A(h, k \pm a)$	$S(h, k)$	$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$

د مجانبونو معادلې	د موجې خطونو معادلې
$y = \pm \frac{b}{a}x$	$x = \pm \frac{a}{c}$
$y = \pm \frac{a}{b}x$	$y = \pm \frac{a}{c}$
$y - k = \pm \frac{b}{a}(x - h)$	$x = h \pm \frac{a}{c}$
$y - k = \pm \frac{a}{b}(x - h)$	$y = k \pm \frac{a}{c}$

هليپربولا عمومي غزول شوې معادله: $Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$ څخه عبارت ده
په داسې حال کې چې $A = B$ يا $A \neq B$ ، خو مختلف اشاره وي، عن المركبت $e > 1$ دی.



هرې پوښتنې ته څلور ځوابه ورکړل شوي دي، سم ځواب په نښه او کرښه تړي نا و کړئ.

1- که چېرې یوه مستوي یو مخروط په مايل ډول قطع کړي، نو د مستوي او مخروط گډ فصل عبارت دی له:

a بیضوي b دایره c هلیربولا d دوه متقاطع خطوطه

2- د الېس محراقونه هغه ټکي دي چې د الېس له مرکز څخه:

a برابر و الېن ولري b مختلف و الېنونه لري

c د اوږد قطر نیمایي و الېن لري d د لنډ قطر نیمایي ده.

3- که چېرې M د الېس یو ټکی F او F' محراقونه او $2a$ د اوږد قطر اوږه ولري وي، نو په دې صورت کې لرو

چې:

$$a \quad |MF| + |MF'| = a \quad b \quad |MF| - |MF'| = 2a$$

$$c \quad |MF| + |MF'| = 2a \quad d \quad |MF| + |MF'| = 0$$

4- د الېس عن المركزیت له لاندې کومې بړې رابطې څخه په لاس راځي:

$$a \quad e = \frac{a}{c} : (b \quad e = \frac{c}{a} : (c \quad e = \frac{b}{c} : (d \quad e = \frac{c}{b})$$

5- د لنډ قطر او محراقونو ترمنځ اړیکه عبارت ده له:

$$a \quad a^2 = b^2 - e^2 \quad b \quad a^2 + b^2 = c^2$$

$$c \quad a^2 = b^2 + e^2 \quad d \quad a^2 = b^2 + c^2$$

6- د $4p(x-h)^2 = (y-k)^2$ په معادله کې $p > 0$ سره وي، نو:

a د پارابولا خوله پاس خواته خلاصه ده. b د پارابولا خوله لاندې خواته خلاص ده

c د پارابولا خوله بڼې خواته خلاص ده d د پارابولا خوله کښې خواته خلاص ده.

7- د $8(y-2)^2 = (x+1)^2$ یو پارابولا معادله په پام کې ونیسئ، دمحراق وضعیه کمیات یې عبارت دي له:

$$a \quad F(-1, -2) \quad b \quad F(-1, 4) \quad c \quad F(-1, 2) \quad d \quad F(-4, -1)$$

8- که چېرې F او F' د هلیربولا محراقونه وي، د P ټکي په کوم شرط د هلیربولا د محیط یو ټکی کېدلای شي؟

$$a \quad |PF| + |PF'| = 2a \quad b \quad |PF| - |PF'| = a$$

$$c \quad |PF| - |PF'| = 2a \quad d \quad |PF| - |PF'| = 0$$

9: د $x^2 = y$ د پارابولا گراف متناظر دی نظر:

b) د x محور ته

a) د y محور ته

c) د وضعیه کمیانو مبدا ته

c) د x او y محورونو ته

10: په لاندې څوابونو کې کوم یو د هاپیربولا عن المړکړیت بنسټي؟

d) $e = -1$

c) $e > 1$

b) $e = 1$

a) $e < 1$

11: د $1 = y^2 + \frac{x^2}{4}$ د بیضوي د اوږد قطر موقعیت:

b) د x پر محور باندې دی.

a) د y پر محور باندې دی.

d) د y له محور سره موازي دی.

c) د x پر محور عمود دی.

12: په یوه مستوي کې د ټولو هغو ټکو هندسي محل چې له یوه ثابت ټکي څخه مساوي فاصلې لري، د څه په نامه یادېږي؟

d) بیضوي

c) پارابولا

b) دایره

a) کره

13: د $-4(x+2) = y^2$ پارابول دراس مختصات عبارت دي له:

d) $(-2,0)$

c) $(2,0)$

b) $(4,2)$

a) $(2,4)$

14: د $0 = 3 + y + 8y^2 + 4x^2$ معادله عبارت ده له:

d) هاپیربولا

c) پارابولا

b) بیضوي

a) دایري

15: د $x = 2$ y مستقیم خط د $1 = \frac{(y-2)^2}{9} - \frac{(x-1)^2}{4}$ هاپیربولا په څو ټکو کې قطع کوي؟

16: $3x = 2y$ مستقیم خط د $0 = 12 - 5x + 6y - 2y^2$ منحنی په څو ټکو کې قطع کوي؟

17: لاندې معادلې په پام کې ونیسئ، لومړی هغه په معیاري ټول ولیکئ، بیا یې گرافونه رسم کړئ.

a) $x^2 + 4y^2 = 4$

b) $9x^2 + 2y^2 = 15$

c) $16x^2 - 96x + 9y^2 + 90y + 225 = 0$

d) $x^2 + 12x - 120y + 288 = 0$

18: د لاندې قیمتونو له مخې یوې بیضوي معادله پیدا کړئ:

a) $(0,0)$ مرکزي مختصه، $a = -2$ ، $e = 0,75$ دي او لوی قطري د y پر محور باندې پروت دی.

b) $(0,0)$ مرکزي مختصه، $b = 64$ ، $e = 0,5$ دي او لوی قطري د x پر محور باندې پروت دی.

19: له لاندې معادلو څخه د بیضوي ټول اجزايې پیدا کړئ.

a) $4 = y^2 + 4(x-1)^2$ b) $1 = \frac{y^2}{9} + \frac{x^2}{4}$

20: د پارابولا لاندې معادلي لومړي په معياري شکل وليکئ او بيلگي گرافونه رسم کړئ.

$$\begin{aligned} \text{a} \quad & x^2 - 11y = 0 \\ \text{b} \quad & y^2 - 4y - 4x + 2 = 0 \end{aligned}$$

21: د پارابولا لاندې هره يوه معادله په معياري ډول واورئ:

$$\begin{aligned} \text{a} \quad & 4x^2 - y^2 - 8y - 32 = 0 \\ \text{b} \quad & 2y^2 + 4y - x^2 + 10x - 25 = 0 \end{aligned}$$

22: د هغې هايپربولا معادله پيدا کړئ چې $(-4, 0)$ او $(4, 0)$ د راسونو مختصات او $x = \pm \frac{5}{4}y$ د مجانبونو

معادلي وي.

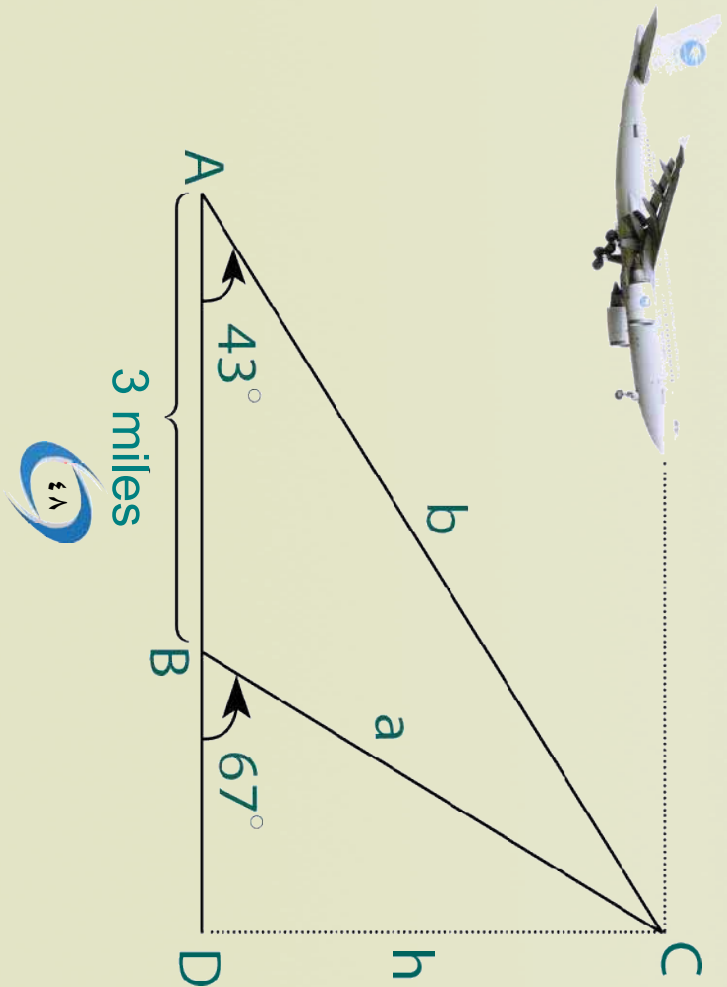
23: د هغې هايپربولا معادله پيدا کړئ چې $(-1, 3)$ ، $(1, 3)$ د راسونو مختصات او محراقي اوږدوالی يې 4 واحد وي.

$$24: \text{ د } y = 2x \text{ مستقيم خط د } 1 = \frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{9}$$

هايپربولا په څو ټکو کې قطع کوي؟

دویم خبر کی مثلات

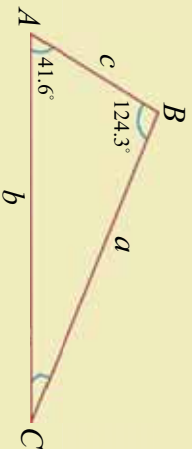




د ساين قانون

Law of sine

څرنگه کولای شو په مخامخ شکل کې د a د ضلعي او C زاويې اندازه پيدا کړو؟



فعالیت

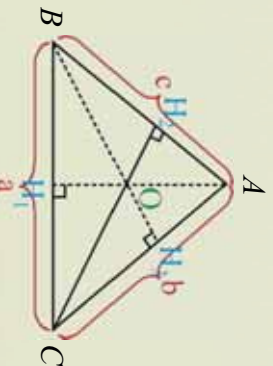
- د ABC یو حادالزاویه مثلث رسم او د ضلعو اوږدوالی یې وټاکئ.
- د مثلث له هر رأس څخه د هغې پرمخامخ ضلعي د ($\overline{AH_1}$, BH_3 , $\overline{CH_2}$) ارتفاعگانې رسم کړئ.
- د ABH_1 او BCH_1 په قایم الزاویه مثلثونو کې د ($\overline{AH_1}$) ارتفاع د $\sin B$ او $\sin C$ له جنسه پيدا او یو له بله سره یې پرتله کړئ.

- د ABH_3 او ACH_2 په قایم الزاویه مثلثونو کې د ($\overline{BH_3}$) ارتفاع د $\sin A$ او $\sin C$ له جنسه پيدا او یو له بله سره یې پرتله کړي.

له پورتنی فعالیت څخه لاندې ثبوت په لاس راوړلی شو.

ثبوت:

د ACH_1 او BAH_1 په قایم الزاویه مثلثونو کې لرو چې:



$$\sin B = \frac{\overline{AH_1}}{AB} = \frac{\overline{AH_1}}{c}$$

$$\overline{AH_1} = c \sin B \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\sin C = \frac{\overline{AH_1}}{AC} = \frac{\overline{AH_1}}{b}$$

$$\overline{AH_1} = b \sin C \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$c \sin B = b \sin C \quad \div bc$$

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \quad \dots\dots\dots 1$$

د (1) او (2) اړیکو له پرتلې څخه لیکلی شو چې:

په همدې ډول د ABH_3 او BCH_3 په قايم الزاويه مثلثونو کې ليکلی شو چې:

$$\sin A = \frac{\overline{BH_3}}{c} \Rightarrow \overline{BH_3} = c \sin A \dots\dots\dots (3)$$

$$\sin C = \frac{\overline{BH_3}}{a} \Rightarrow \overline{BH_3} = a \sin C \dots\dots\dots (4)$$

د (3) او (4) اړيکې له پر تلې څخه لرو چې:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c} \dots\dots\dots II$$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

د I او II اړيکې له پر تلې څخه ليکلی شو چې:

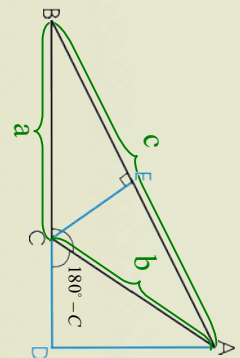
ښايي: په هر $\triangle ABC$ کې په داسې حال کې چې A, B, C زاويې او a, b, c د ضلعو اوږدوالی وي، لرو:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

پورتنۍ اړيکه (رابطه) په يوه مثلث کې د ساين د قانون (Law of sine) په نامه يادېږي.

د ساين د قضیې ثبوت په منفرج الزاويه مثلث کې:

د ABC په مثلث کې چې د C زاويه يې منفرجه ده
په پام کې نيسو د $\overline{AD}$ او $\overline{CE}$ ارتفاع ګانې رسموو.



د ADC په قايم الزاويه مثلث کې لرو: $\sin(180^\circ - C) = \frac{\overline{AD}}{b}$

د بلې خوا د متمم زاويو څخه پوهېږو چې: $\sin(180^\circ - C) = \sin C$

نو:
$$\sin C = \frac{\overline{AD}}{b} \dots\dots(I)$$

همدارنگه د ADB له قايم الزاويه مثلث څخه لرو چې: (2) $\sin B = \frac{\overline{AD}}{c} \dots\dots(I)$

اوس (1) او (2) رابطې خوا په خوا يو پر بل وېشو:

نو:
$$\frac{\sin C}{\sin B} = \frac{c}{b} \longrightarrow \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \dots\dots\dots(1)$$

$$\sin A = \frac{\overline{CE}}{b} \dots (3)$$

$$\sin B = \frac{\overline{CE}}{a} \dots (4)$$

$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{a}{b}$$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} \dots (5)$$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

الهام فعالیت

- زده کونکي دي، د ساين قانون په قايم الزاويه مثلث کې وڅېړي او ثبوت دې کړي.

لومړۍ مثال: که چيرې د ABC په مثلث کې د $B = 60^\circ$ او $b = 9\text{ cm}$ او $c = 6\sqrt{3}\text{ cm}$ وي، ديوي ضلعي او دوو زاويو اندازې يې پيدا کړئ؟

حل: د ساين د قضيې يا قانون له مخې ليکلی شو چې:

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{9}{\sin 60^\circ} = \frac{6\sqrt{3}}{\sin C} \Rightarrow \sin C = \frac{6\sqrt{3} \cdot \sin 60^\circ}{9} = \frac{6\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{9}$$

$$\sin C = \frac{3 \cdot 3}{9} = 1 \Rightarrow \sin C = 1$$

څرنگه چې: $\sin 90^\circ = 1$ دی، نو: $C = 90^\circ$

همدارنگه پوهېږو چې په يوه مثلث کې:

$$A + B + C = 180^\circ$$

$$A + 60^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

$$A = 180^\circ - 150^\circ$$

$$A = 30^\circ$$



د a ضلعي قیمت په لاندې ډول پیدا کولی شو:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} \Rightarrow a = \frac{\sin A \cdot b}{\sin B} \Rightarrow a = \frac{\sin 30^\circ \cdot 9}{\sin 60^\circ}$$

$$a = \frac{\frac{1}{2} \cdot 9}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow a = \frac{9}{\sqrt{3}} = \frac{9 \cdot \sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{3}$$

$$a = 3\sqrt{3} \text{ cm}$$

دویم مثال: یو ساختماني انجینر غواړي چې د دوو ټکو تر منځ ولټن چې په منځ کې یې یوه غونډې پرته ده پیدا کړي.

حل: د ساین د قانون په کارولو سره $\sin A$ او $\sin C$ په پام کې نیسو:

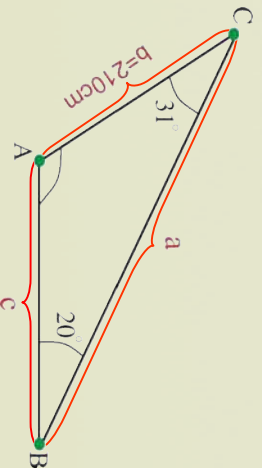
$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}$$

$$c = \frac{a \cdot \sin C}{\sin A} = \frac{422 \text{ ft} \cdot \sin 110^\circ}{\sin 30^\circ}$$

خړنگه چې: $\sin 110^\circ = 0.9396$ او $\sin 30^\circ = 0.5$.

$$\text{نو: } c = \frac{422 \text{ ft} \cdot 0.9396}{0.5} \Rightarrow c = 793.0224 \text{ ft}$$

دریم مثال: په مخامخ شکل کې د دوو زاویو او یوې ضلعي اندازه راکړل شوې ده، د یوې نامعلومې زاوې او دوو ضلعو اندازه پیدا کړئ.



حل: پوهېږو چې د یوه مثلث د داخلي زاویو مجموعه 180° ده؛ نو نامعلومې زاوې یې داسې پیدا کولی شو:

$$A = 180^\circ - (31^\circ + 20^\circ) = 180^\circ - 51^\circ$$

$$A = 129^\circ$$

د a دپداکولو لپاره لاند تناسب په پام کې نیسو:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} \Rightarrow \frac{\sin 129^\circ}{a} = \frac{\sin 20^\circ}{210}$$

$$a = \frac{\sin 129^\circ \cdot 210 \text{ cm}}{\sin 20^\circ}$$

خرنگه چې $\sin 20^\circ = 0.342$ او $\sin 129^\circ = 0.7771$ دی؛ نو:

$$a = \frac{0.7771 \cdot 210}{0.342} = \frac{163.191}{0.342} = 477.166 \text{ cm}$$

$$a = 477.166 \text{ cm}$$

اوس د c ضلعي اوږدوالی د $\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$ له رابطې څخه پيدا کوو:

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \Rightarrow \frac{\sin 20^\circ}{210} = \frac{\sin 31^\circ}{c}$$

$$c = \frac{210 \text{ cm} \cdot \sin 31^\circ}{\sin 20^\circ}$$

خرنگه چې $\sin 31^\circ = 0.5150$ او $\sin 20^\circ = 0.342$ دی د پورته قيمتونو په اېښودلو سره لیکلای شو چې:

$$c = \frac{0.5150 \cdot 210}{0.342} = \frac{108.15}{0.342} = 316.2$$

يادونه:

د ساين قانون هغه وخت کارولی شو چې:

- دوي زاويې او دمنځ ضلع يې معلومه وي. (ASA) ، A زاويه او S ضلع ښيي.
- دوه ضلعي او د منځ زاويه يې معلومه وي. (SAS) ، S ضلع او A زاويه ښيي.



1. که چیرې د یوه مثلث د ضلعو اوږدوالی $a = 8$, $b = 5$ او $c = 10$ واحد وي، د B د زاوې اندازه پیدا کړئ.

2. لاندې شکل په پام کې ونیسئ د A او B د ښارونو ترمنځ واټن پیدا کړئ؟



د کوساین قانون

Law of cosine



د يوه شکل چارټ د مېنځ په مرسته د دېوال پر منځ خړول شوی دی، که چېرې د مېنځ د دوو خواوو د تار اوږدوالی هر یو 4 cm وي او د منځ زاویه یې 60° وي، د (x) تار د دوو ټکو ترمنځ واټن د کوم قانون په مرسته پیدا کولی شو؟

فعالیت

- د ABC کیني مثلث رسم او د هر رأس مخامخ ضلعي په ترتیب سره په a, b, c وښایاست.
- د B له رأس څخه د $\overline{AC}$ پر ضلع ارتفاع رسم کړئ.
- په جوړ شوو قائم الزویه مثلثونو کې د فیثاغورث قضیه تطبیق کړئ.
- په قائم الزویه مثلثونو کې د $\overline{BH}$ او $\overline{HC}$ قیمتونه د B او C زاویو د $\cos$ له جنسه، په ترتیب سره پیدا او د فیثاغورث په رابطه کې یې وضع کړئ.
- ممکنه الجبري محاسبې ترسره او وروستی رابطه یې ولیکئ.

د پورتنۍ فعالیت د سرته رسولو څخه وروسته داسې ثبتوږ:

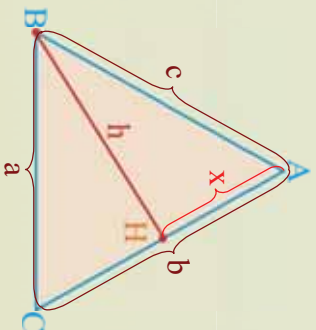
ثبوت: د ABC په حادثه الزویه مثلث کې د $\overline{BH}$ ارتفاع رسموو

$$\overline{CH} = b - x, \quad \overline{AH} = x, \quad \overline{BH} = h$$

د BCH په قائم الزویه مثلث کې لرو:

$$\overline{BC}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{BH}^2$$

$$a^2 = (b - x)^2 + h^2 \dots\dots\dots \text{I}$$



د AHB په قائم الزویه مثلث کې د h اوږدوالی پیدا کوو:

$$h^2 = c^2 - x^2 \dots\dots\dots \text{II}$$

د I او II له اړیکو څخه لیکلی شو چې:

$$a^2 = (b - x)^2 + c^2 - x^2$$

$$a^2 = b^2 - 2bx + x^2 + c^2 - x^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bx$$



$$\cos A = \frac{x}{c} \Rightarrow x = c \cdot \cos A$$

د AHB په قائم الزاویه مثلث کې:

په پورتني اړیکه کې د x پر ځای $c \cdot \cos A$ قیمت اېږدو، نو:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \quad \text{یا} \quad \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

پایله: په هر مثلث کې دا لاندې اړیکې سمې دي:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \quad \text{یا} \quad \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \quad \text{یا} \quad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ba \cos C \quad \text{یا} \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

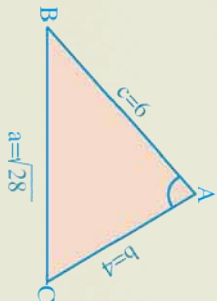
فعالیت

- په همدې مثلث کې دې دوی نورې اړیکې، یعنې $\sin C$ او $\sin B$ زده کوونکي ثبوت کړي. **یادونه:** د کوساین قانون هغه وخت کارولی شو چې:
 - چې دوی ضلعي او د منځ زاوې بې معلومې وي. (SAS)، S ضلع او A زاویه ښيي.
 - د مثلث درې ضلعي معلومې وي. (SSS)، S یوه ضلع ښيي.
- د ساین او کوساین د قانون له کارولو څخه، د مثلث د عناصرو د پیدا کولو لپاره له لاندې جدول څخه کار اخلو:

دیوه مثلث د عناصرو پیدا کول	
د کارولو فورمول	د کارل شوی معلومات
د کوساین او وروسته دساین قانون	(SSS) ضلع، ضلع، ضلع
د ساین قانون	(SAA) (زاویه، زاویه، ضلع)
د ساین قانون	(ASA) (زاویه، ضلع، زاویه)
د کوساین قانون وروسته د ساین	(SAS) (ضلع، زاویه، ضلع)
امکان نه لري	(AAA) (زاویه، زاویه، زاویه)

لوړې مثال: د ABC په مثلث کې د هغو درېو ضلعو اندازې په لاندې ډول راکړل شوي دي، د A زاوې اندازه وټاکئ.

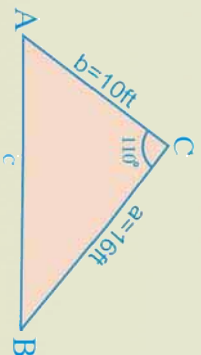
حل:



$$\begin{aligned} a &= \sqrt{28}, \quad b = 4, \quad c = 6, \quad A = ? \\ a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A \\ (\sqrt{28})^2 &= (4)^2 + (6)^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cos A \\ 28 &= 16 + 36 - 48 \cos A \Rightarrow 28 = 52 - 48 \cos A \\ 48 \cos A &= 52 - 28 \Rightarrow 48 \cos A = 24 \\ \cos A &= \frac{24}{48} = \frac{1}{2} \\ A &= 60^\circ \end{aligned}$$

دویم مثال: د ABC په مثلث کې که چیرې دوي ضلعي بې هر یوه $a = 16$, $b = 10$ واحدو او د منځ زاوې بې $C = 110^\circ$ وي، د c ضلعي اوږدوالی پیدا کړئ.

حل:



$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C \\ c^2 &= (16)^2 + (10)^2 - 2(16)10 \cos 110^\circ \\ c^2 &= 256 + 100 - 320 \cos 110^\circ \\ c^2 &= 356 - 320 \cos 110^\circ \\ c &= \sqrt{356 - 320 \cos 110^\circ} \end{aligned}$$

خړنگه چې: $\cos 110^\circ = 0.342$ دی، نو:

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{356 - 320(0.342)} \Rightarrow c = \sqrt{356 - 109.44} \\ c &= 15.70 \end{aligned}$$

دریم مثال: یو پټنگ (کاغذ پران) له $100m$ واټن تار سره په هوا کې دی، که تار د ځمکې له سطحې سره 60° زاویه جوړه کړي وي، له ځمکې څخه د پټنگ لوړوالی پیدا کړئ.

حل: د OHL په قائم الزاویه مثلث کې لرو، چې:

$$\cos 60^\circ = \frac{OL}{OH} = \frac{x}{100} \Rightarrow x = 100 \cdot \cos 60^\circ = 100 \cdot \frac{1}{2} = 50m$$

د کوساين قانون له مخې لرو چې:



$$\begin{aligned}\overline{HL^2} &= \overline{OH^2} + \overline{OL^2} - 2\overline{OH} \cdot \overline{OL} \cdot \cos 60^\circ \\ \overline{HL^2} &= (100)^2 + (50)^2 - 2 \cdot 100 \cdot 50 \cdot \frac{1}{2} \\ \overline{HL^2} &= 10000 + 2500 - 5000 \\ \overline{HL^2} &= 7500m^2 \Rightarrow \overline{HL} = \sqrt{7500}m = 50\sqrt{3}m \\ \overline{HL} &= 86.6m\end{aligned}$$

څلورم مثال: که چېرې د ABC په مثلث کې $A = 60^\circ$, $c = 8$, $b = 5$ وي، د a او $\sin C$ اندازه پيدا کړئ.

حل: لومړی د کوساين د قضیې په کارولو سره د a ضلع او بيا $\sin C$ پيدا کوو.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \Rightarrow a^2 = 25 + 64 - 80 \cdot \frac{1}{2} = 89 - 40$$

$$a^2 = 49 \Rightarrow a = 7$$

د ساين د قضیې له مخې لیکو چې:

$$\frac{\sin C}{c} = \frac{\sin A}{a}$$

$$\sin C = \frac{c \cdot \sin A}{a} = \frac{8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{7}$$

$$\sin C = \frac{4\sqrt{3}}{7}$$



پوښتنې

1. که چېرې د ABC په مثلث کې $a = 5ft$, $b = 4ft$, او $A = 45^\circ$ وي، د مثلث نامعلومې ضلعې او زاوې پيدا کړئ.

2. که چېرې په یوه مثلث کې $a = 3cm$ او $b = 9cm$ او دوی ترمنځ زاویه 60° وي د c د ضلعې اوږدوالی پيدا کړئ؟

د ټانجنټ قانون

Law of tangent

په هر مثلث کې د زاویو او ضلعو ترمنځ د $\tan$ له جنسه مخامخ اړیکه شتون لري.

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan \frac{A+B}{2}}{\tan \frac{A-B}{2}}$$

فعالیت

- د ساین قانون مساوي په D وليکئ.
- د $\sin$ قانون هر دوه، نسبتونه يعنې $\frac{a}{\sin A}$ او $\frac{b}{\sin B}$ په جلا جلا ډول مساوي له D سره وليکئ.
- پورته دوه نسبتونه د ضلعو د اوږدوالي له مخې وليکئ.
- دوه پورتنۍ اړیکې لومړۍ جمع او بيا يې تفریق کړئ.
- لاسته راغلي اړیکې يو پر بل وويستئ.
- الجبري محاسبې ترسره او د پايلې فورمول وليکئ.

پورته فعاليت په لاندې ډول ثبتوو.

ثبوت: د ساین قانون په پام کې نيسو:

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = D$$

$$\frac{a}{\sin A} = D \Rightarrow a = D \sin A$$

$$\frac{b}{\sin B} = D \Rightarrow b = D \sin B$$

پورتنۍ اړیکې لومړۍ جمع او بيا تفریقوو:

$$\begin{aligned} a + b &= D(\sin A + \sin B) \\ a - b &= D(\sin A - \sin B) \end{aligned}$$

پورتنۍ اړیکې يو پر بل وويستو:

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{a-b} &= \frac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B} = \frac{2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}}{2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}} \\ \frac{a+b}{a-b} &= \tan \frac{A+B}{2} \cdot \cot \frac{A-B}{2} \end{aligned}$$



$$\text{خرنگه چې } \frac{A-B}{2} = \frac{1}{\tan \frac{A-B}{2}} \cot \frac{A-B}{2}.$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan \frac{A+B}{2}}{\tan \frac{A-B}{2}}$$

نو په پايله کې ليکلی شو چې:

فعاليت

- لاندې اړيکې پيدا کړئ.

$$\frac{c+a}{c-a} = \frac{\tan \frac{C+A}{2}}{\tan \frac{C-A}{2}}, \quad \frac{b+c}{b-c} = \frac{\tan \frac{B+C}{2}}{\tan \frac{B-C}{2}}$$

- پورتنۍ اړيکې په يوه مثلث کې د ضلعي او زاويې ترمنځ اړيکې د $\tan$ اړيکه بلل کېږي.
- لومړۍ مثال: د ABC په مثلث کې $A = 90^\circ$ او $\frac{b-c}{b+c} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ دی، د B او C زاويو اندازه پيدا کړئ.

حل: يو ډبرو چې په هر مثلث کې:

$$A + B + C = 180^\circ$$

$$B + C = 180^\circ - 90^\circ$$

$$B + C = 90^\circ \Rightarrow \frac{B+C}{2} = 45^\circ$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{b-c}{b+c} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \\ A &= 90^\circ \\ B &=? \\ C &=? \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\tan \frac{B-C}{2}}{\tan \frac{B+C}{2}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\tan 45^\circ}$$

$$\tan \frac{B-C}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan 30^\circ, \quad \tan \frac{B-C}{2} = \tan 30^\circ$$

$$\frac{B-C}{2} = 30^\circ \Rightarrow B-C = 60^\circ \dots\dots\dots 1$$

$$A + B + C = 180^\circ$$

$$B + C = 180^\circ - A \Rightarrow B + C = 180^\circ - 90^\circ$$

$$B + C = 90^\circ \dots\dots\dots II$$

له بلې خوا په هر مثلث کې:

$$\begin{array}{l} B - C = 60^\circ \quad \dots\dots\dots I \\ B + C = 90^\circ \quad \dots\dots\dots II \end{array}$$

له I او II اړیکو څخه لاندې پایله په لاس راځي:
د نوموړي سیستم له حلولو څخه وروسته د B قیمت په لاس راوړو:

$$2B = 150^\circ$$

$$\boxed{B = 75^\circ}$$

اوس د B قیمت په اېښودلو سره د C زاویه پیدا کوو:

$$B - C = 60^\circ$$

$$75^\circ - C = 60^\circ$$

$$-C = 60^\circ - 75^\circ$$

$$\boxed{C = 15^\circ}$$

دویم مثال: که چېرې د ABC په یوه مثلث کې $30' \quad 42^\circ \quad B = 432$, $c = 925$ وي، د مثلث

نورې اجزاوې پیدا کړئ.

حل:

$$A + B + C = 180^\circ \Rightarrow A + C = 180^\circ - B \Rightarrow A + C = 180^\circ - 42^\circ \quad 30'$$

$$A + C = 179^\circ \quad 60' - 42^\circ \quad 30' \Rightarrow A + C = 137^\circ \quad 30' \quad \dots\dots\dots I$$

$$\frac{A + C}{2} = \frac{137^\circ \quad 30'}{2} \Rightarrow \frac{A + C}{2} = \frac{136^\circ \quad 90'}{2} = 68^\circ \quad 45'$$

$$\tan \frac{A + C}{2} = \frac{a + c}{a - c}$$

$$\tan \frac{A - C}{2} = \frac{a - c}{a + c}$$

اوس د زاویې او ضلعو قیمتونه په پورتني اړیکه کې اېږدو، یعنې:

$$\frac{\tan 68^\circ \quad 45'}{\tan \frac{A - C}{2}} = \frac{925 + 432}{925 - 432} \Rightarrow \frac{\tan 68^\circ \quad 45'}{\tan \frac{A - C}{2}} = \frac{1357}{493}$$

$$1357 \cdot \tan \frac{A - C}{2} = 493 \cdot \tan 68^\circ \quad 45' \Rightarrow \tan \frac{A - C}{2} = \frac{493}{1357} \cdot \tan 68^\circ \quad 45'$$

یا:

له مثالاني جدول څخه پرهبرو چي $\tan 68^{\circ} 45' = 2.5714$ نو:

$$\tan \frac{A-C}{2} = 0.9341 \Rightarrow \frac{A-C}{2} = 42^{\circ} 59'$$

$$\boxed{A-C = 85^{\circ} 58' \dots\dots \text{II}}$$

اوس د I او II اړيکو په پام کي نيولو سره ليکو:

$$A+C = 137^{\circ} 30' \dots\dots \text{I}$$

$$A-C = 85^{\circ} 58' \dots\dots \text{II}$$

$$2A = 222^{\circ} 88'$$

$$\boxed{A = 111^{\circ} 44'}$$

$$C = 137^{\circ} 30' - A \Rightarrow C = 137^{\circ} 30' - 111^{\circ} 44'$$

$$C = 136^{\circ} 90' - 111^{\circ} 44'$$

$$\boxed{C = 25^{\circ} 46'}$$

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \Rightarrow b = c \cdot \frac{\sin B}{\sin C}$$

$$b = \frac{432 \sin 42^{\circ} 30'}{\sin 25^{\circ} 46'}$$

$$\sin 42^{\circ} 30' = 0.6756$$

$$\sin 25^{\circ} 46' = 0.4346$$

$$b = \frac{432}{0.4346} \cdot 0.6756 = 994.01 \cdot 0.6756 = 671.5582 \text{ cm}$$

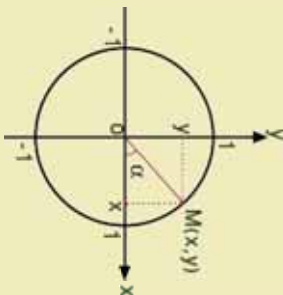
پوښتي



د لاندي ورکړل شوو عناصرو له مخي د مثلث نامعلومي اجزاوي پيدا کړئ.

(a) که چيري $a = 35 \text{ ft}$, $B = 60^{\circ}$, $C = 75^{\circ}$ وي.

(b) که چيري $\alpha = 45^{\circ}$, $b = 37 \text{ m}$ او $\gamma = 75^{\circ}$ وي.



مثلاثي مطابقونه Trigonometry identities

پوهېږو چې $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ يو الجبري
مطابقت دی، ځکه د a او b په ټولو قيمتونو سره د
مساوات داوړه خواوې برابرېږي.

آيا $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ يو مثلاثي مطابقت کيدلی شي؟

الهي فعالیت

- په لاندې جدول کې د α د مختلفو قيمتونو لپاره د A او B افادو قيمتونه بشپړ کړئ.

α	$A = \frac{\cot \alpha}{\csc \alpha - 1}$	$B = \frac{\csc \alpha + 1}{\cot \alpha}$
0°		
30°		
45°		
60°		
90°		

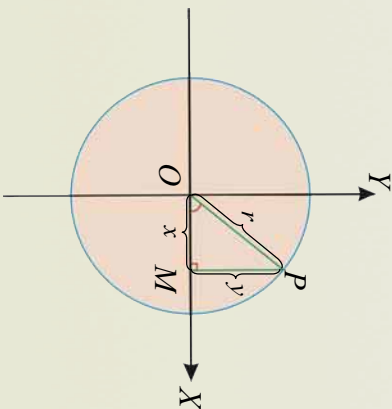
- د جدول له بشپړولو څخه وروسته د A او B قيمتونه پرتله او اړیکه یې وليکئ.
له پورتنۍ فعالیت څخه لاندې تعريف لاسته راځي.

تعريف: هغه مثلاثي مساوات چې د زاويې په ټولو قيمتونو سره ، د مساوات داوړه خواوې برابرې شي،

مثلاثي مطابقت بلل کېږي، لکه:

$$\frac{\cot \alpha}{\csc \alpha - 1} = \cot \alpha$$

که α هر قيمت واخلي، د پورته مساوات داوړه خواوې مساوي کېږي.



د α د زاويې د هر قيمت لپاره د $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ مطابقت ثبوت کړئ.

ثبوت: د $C(O, r)$ په مثالني دایره کې د OMP په قیام-

الزاویه مثلث کې گورو او لیکلی شو چې:

$$\sin \alpha = \frac{y}{r} \quad \text{او} \quad \cos \alpha = \frac{x}{r}$$

له بلې خوا د فیثاغورث له قضیې څخه لرو:

$$y^2 + x^2 = r^2$$

د مساوات دواړه خواوې په r^2 وېشو:

$$\left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{x}{r}\right)^2 = 1 \quad \text{یا} \quad \frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2}$$

اوس د $\frac{y}{r}$ په ځای $\sin \alpha$ او $\frac{x}{r}$ په ځای $\cos \alpha$ لیکو.

نو لیکلی شو: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ یا $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$

مثالني اساسي اړیکې عبارت دي له:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad 1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha, \quad 1 + \cot^2 \alpha = \csc^2 \alpha$$

د مثالنيو فرعي اړیکې عبارت دي له:

$$\begin{aligned} \sec \alpha &= \frac{1}{\cos \alpha}, & \cos \alpha \cdot \sec \alpha &= 1 \\ \csc \alpha &= \frac{1}{\sin \alpha}, & \sin \alpha \cdot \csc \alpha &= 1 \\ \tan \alpha &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, & \tan \alpha \cdot \cot \alpha &= 1, & \cot \alpha &= \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \\ & & \cot \alpha &= \frac{1}{\tan \alpha} \end{aligned}$$

اوس غواړو د $\sec^2 \alpha = 1 + \tan^2 \alpha$ اړیکه ثبوت کړو.

ثبوت: د فیثاغورث د قضیې په کارلو سره لیکو $x^2 + y^2 = r^2$

د مساوات دواړه خواوې په x^2 ویشو. $\frac{x^2}{x^2} + \frac{y^2}{x^2} = \frac{r^2}{x^2} \Rightarrow 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \left(\frac{r}{x}\right)^2$

په نتیجه کې په پورته افاده کې د $\frac{y}{x}$ او $\frac{r}{x}$ د قیمتونو په لیکلو سره لیکو: $1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha$

- د مثلثاتي نسبتونو په کارولو سره ثبوت کړئ چې : $1 + \cot^2 \alpha = \csc^2 \alpha$
په عمومي توګه د مطابقتونو د حل یا ثبوت لپاره د مساوات له پورې خوا له افادې څخه د بلی خوا افاده لاسته راوړو، یعنې یوې خواته مختلفې عملېې لکه مربع کول، تجزیه، ضرب او نورې عملېې سرته رسوو، خو د بلي خوا افاده لاسته راشي، که چېرې په یوه الجبري افاده کې مثلثاتي نسبتونه یوه یا څو زاوې وي، مثلثاتي افاده بلل کېږي، د مثلثاتي اړیکو په واسطه مثلثاتي افادې ساده کولی شو.
د موضوع د لابنه پوهېدو لپاره لاندې لارښوونې او مثالونه په پام کې ونیسئ.

لوړې مثال : د $\frac{\sin \alpha \cos \alpha \cdot \tan \alpha \cot \alpha}{1 - \sin^2 \alpha}$ مثلثاتي افاده ساده کړئ.

حل :

$$\frac{\sin \alpha \cos \alpha \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$$

دویم مثال : د $\sin^2 \beta \cdot \cot^2 \beta + \cos^2 \beta \cdot \tan^2 \beta = 1 + \tan^2 \beta$ مثلثاتي مطابقت ثبوت کړئ.

حل : په لاندې ډول افاده ساده کوو:

$$\begin{aligned} \sin^2 \beta \cot^2 \beta + \cos^2 \beta \tan^2 \beta + \tan^2 \beta &= \sin^2 \beta \frac{\cos^2 \beta}{\sin^2 \beta} + \cos^2 \beta \cdot \frac{\sin^2 \beta}{\cos^2 \beta} \\ + \tan^2 \beta &= \cos^2 \beta + \sin^2 \beta + \tan^2 \beta = 1 + \tan^2 \beta \end{aligned}$$

درېم مثال : لاندې افاده د $\cos \beta$ له جنسه حساب کړئ.

$$(1 - \sin^2 \beta) (1 + \sec^2 \beta) = ?$$

$$\text{حل : } (1 - \sin^2 \beta)(1 + \sec^2 \beta) = \cos^2 \beta \left(1 + \frac{1}{\cos^2 \beta}\right) = \cos^2 \beta \left(\frac{\cos^2 \beta + 1}{\cos^2 \beta}\right) = \cos^2 \beta + 1$$

خلورم مثال: ثبوت ڪريئ ڇي $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 2$
 حل: د مطابقت د ڪٻي اڻڄ قوسونو ته انڪشاف ورڪرو.

$$(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 2$$

$$\sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = 2$$

$$2 \sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha = 2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 2 \cdot 1 = 2$$

پنڊم مثال: لائڊي مطابقت ثبوت ڪريئ.

$$\frac{\sin A}{1 + \cos A} + \frac{1 + \cos A}{\sin A} = 2 \csc A$$

حل:

$$\begin{aligned} \frac{\sin A}{1 + \cos A} + \frac{1 + \cos A}{\sin A} &= 2 \csc A \\ \frac{\sin^2 A + (1 + \cos A)^2}{\sin A(1 + \cos A)} &= \frac{\sin^2 A + 1 + 2 \cos A + \cos^2 A}{\sin A(1 + \cos A)} = \frac{\sin^2 A + \cos^2 A + 1 + 2 \cos A}{\sin A(1 + \cos A)} \\ &= \frac{1 + 1 + 2 \cos A}{\sin A(1 + \cos A)} = \frac{2(1 + \cos A)}{\sin A(1 + \cos A)} = 2 \cdot \frac{1}{\sin A} = 2 \csc A \end{aligned}$$

$$\frac{1 + \tan^2 A}{1 + \cot^2 A} = \tan^2 A \quad \text{شپڙم مثال: وٺاڻاست ڇي}$$

حل:

$$\begin{aligned} 1 + \tan^2 A &= \sec^2 A \\ 1 + \cot^2 A &= \csc^2 A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sec^2 A}{\csc^2 A} &= \tan^2 A \Rightarrow \frac{1}{\frac{\cos^2 A}{1}} = \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} = \tan^2 A \\ \tan^2 A &= \tan^2 A \end{aligned}$$

اووم مثال : لاندې مطابق ثبوت کریئ.

$$(\sin \alpha + \cos \alpha)(\cot \alpha + \tan \alpha) = \frac{1}{\cos \alpha} + \frac{1}{\sin \alpha}$$

حل : د کینې خوا په افاده کې د $\cot \alpha$ او $\tan \alpha$ قیمتونه د $\sin \alpha$ او $\cos \alpha$ له جنسه اېږدو.

$$\begin{aligned} & (\sin \alpha + \cos \alpha) \left(\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right) \\ &= (\sin \alpha + \cos \alpha) \left(\frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} \right) = (\sin \alpha + \cos \alpha) \frac{1}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} \\ &= \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha} + \frac{1}{\sin \alpha} \\ & (\sin \alpha + \cos \alpha)(\cot \alpha + \tan \alpha) = \frac{1}{\cos \alpha} + \frac{1}{\sin \alpha} \end{aligned}$$

اټم مثال : د $\tan x + \cot y$ مطابق ثبوت کریئ.

حل :

$$\begin{aligned} \frac{\cos(x-y)}{\cos x \sin y} &= \frac{\cos x \cos y + \sin x \sin y}{\cos x \sin y} \\ &= \frac{\cos x \cos y}{\cos x \sin y} + \frac{\sin x \sin y}{\cos x \sin y} \Rightarrow \frac{\cos y}{\sin y} + \frac{\sin x}{\cos x} \\ &= \cot y + \tan x = \tan x + \cot y \end{aligned}$$

نهم مثال : د $\frac{\tan x - \sin x}{2 \tan x} = \sin^2 \frac{x}{2}$ مطابق ثبوت کریئ.

حل : پوهېږو چې $\frac{1 - \cos x}{2} = \sin^2 \frac{x}{2}$ دی.

اوس د معادلې دواړه خواوې په $\frac{\tan x}{\tan x}$ کې ضربو؛ نو:

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos x}{2} &= \frac{\tan x - \sin x}{2 \tan x} \\ &= \frac{\tan x}{\tan x} \cdot \frac{1 - \cos x}{2} = \frac{\tan x - \tan x \cos x}{2 \tan x} \\ &= \frac{\tan x - \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right) \cos x}{2 \tan x} = \frac{\tan x - \sin x}{2 \tan x} \end{aligned}$$

لسم مثال : د $\frac{1 + \sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{1 + \sin x} = 2 \sec x$ مطابقت ثبوت کړئ.

حل:

$$\begin{aligned} \frac{1 + \sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{1 + \sin x} &= \frac{(1 + \sin x)^2 + \cos^2 x}{\cos x(1 + \sin x)} \\ &= \frac{1 + 2 \sin x + \sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x(1 + \sin x)} \\ &= \frac{2 + 2 \sin x}{\cos x(1 + \sin x)} = \frac{2(1 + \sin x)}{\cos x(1 + \sin x)} \\ &= \frac{2}{\cos x} = 2 \cdot \frac{1}{\cos x} \\ &= 2 \sec x \end{aligned}$$

پوښتنې

1. د مثالونو د اساسي اړیکو په پام کې نیولو سره د هرې پوښتنې معادل افاده پیدا کړئ.

a) $\frac{\sin 250^\circ}{\cos 250^\circ}$

b) $\sqrt{\sec^2 \beta - 1}$

c) $\frac{1}{\cos 80^\circ}$

2. هره افاده د $\sin \beta$ له جنسه پیدا کړئ.

a) $\cot \beta \cos \beta$

b) $\cot^2 \beta$

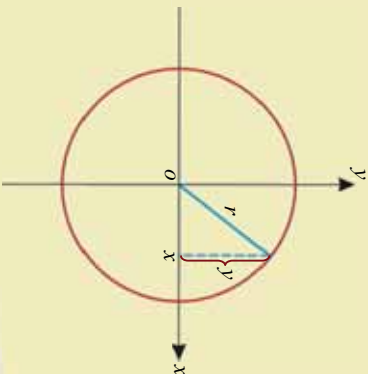
3. لاندې مطابقتونه ثبوت کړئ.

a) $\frac{\cos \sec \alpha}{\cot \alpha \tan \alpha + \tan \alpha} = \cos \alpha$

b) $\frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \cos 2x$

c) $\frac{\sin \alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha} = \tan \alpha$

d) $\frac{\tan x - \cot x}{\tan + \cot x} = 1 - 2 \cos^2 x$



مثلاثي معادلې

Trigonometric equation

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ یو مثلاثي مطابقت دی،

آیا $\sin \alpha + \cos \alpha = 1$ یو مطابقت دی که یوه

معادله؟

فعالیت

- په لاندې جدول کې د $1 - 2 \sin \beta = 0$ او $\sec^2 \beta = 1 + \tan^2 \beta$ د کومو قیمتونو لپاره صحیح دي.

β	$1 - 2 \sin \beta = 0$	$1 + \tan^2 \beta = \sec^2 \beta$
0°		
30°		
60°		
90°		

- د β د مختلفو قیمتونو لپاره د $\sec^2 \beta = 1 + \tan^2 \beta$ او $1 - 2 \sin \beta = 0$ ترمنځ څه ډول اړیکې شتون لري.

– آیا $\sec^2 \beta = 1 + \tan^2 \beta$ یو مطابقت دی، که یوه معادله؟

– آیا $1 - 2 \sin \beta = 0$ یو مطابقت دی، که یوه معادله؟

له پورتنۍ فعالیت څخه لاندې تعریف په لاس راځي.

تعریف: هغه مثلاثي مساوات چې د زاويې په ځینو قیمتونو سره د مساوات دواړه خواوې مساوي کېږي، مثلاثي معادله بلل کېږي.

هر مثلاثي مطابقت یوه معادله کېدای شي، خو هره مثلاثي معادله، مثلاثي مطابقت نه شي کېدلای. هره مثلاثي معادله له لاندې څلورو حالتونو څخه به یو حالت باندې حلولاى شو.

لومړۍ حالت: د $a \sin \alpha + b = 0$ معادله د پورتني معادلې په حل کې د مناسب ځواب د پیدا کولو

لپاره لاندې مثالونه په پام کې ونیسئ.

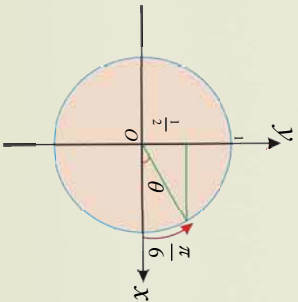
مثال: د $2 \sin x - 1 = 0$ مثلثي معادلې د حل سټ پیدا کړئ.

حل: لومړی د $\sin x$ قیمت لاسته راوړو: $\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2 \sin x = 1 \Rightarrow 2 \sin x - 1 = 0$

اوس د $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ په انټروال کې هغه زاویه پیدا کړو

چې $\sin$ یې $\frac{1}{2}$ شي.

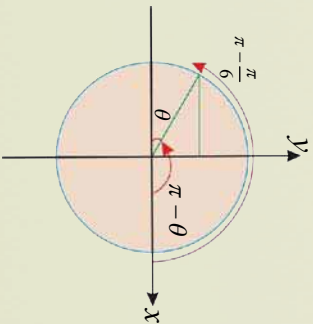
$$\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{6}$$



یوه مثلثي دایره په پام کې نیسو او هغه زاوې پیدا کړو

چې $\sin$ یې $\frac{1}{2}$ وي.

$$x = \frac{\pi}{6}, 2\pi + \frac{\pi}{6}, 4\pi + \frac{\pi}{6}, \dots, 2k\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$$



په دویمه مثلثي دایره کې $(\pi - \theta)$ له رابطې څخه

هغه زاوې پیدا کړو چې $\sin$ یې $\frac{1}{2}$ وي.

$$x = \pi - \frac{\pi}{6}, 3\pi - \frac{\pi}{6}, 5\pi - \frac{\pi}{6}, \dots, (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$$

نو د $\sin x = \frac{1}{2}$ د معادلې حل په لاندې دوو ستونزو کې دی.

$$A_1 = \left\{ \frac{\pi}{6}, 2\pi + \frac{\pi}{6}, 4\pi + \frac{\pi}{6}, \dots, 2k\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$A_2 = \left\{ \pi - \frac{\pi}{6}, 3\pi - \frac{\pi}{6}, 5\pi - \frac{\pi}{6}, \dots, (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

په عمومي ډول پورتني ستونزه په لاندې ډول لیکلې شو:

$$A_1 \cup A_2 = A = \left\{ x / x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \wedge x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6} \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$$

دویم مثال : د $2 \sin x - 3 = 0$ مثلثي معادلي د حل سټ پیدا کړئ.

حل : $2 \sin x - 3 = 0 \Rightarrow 2 \sin x = 3 \Rightarrow \sin x = \frac{3}{2}$

اوس د $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ په انټروال کې هغه زاویه پیدا کړو چې $\sin x = \frac{3}{2}$ شي، دا چې د هرې زاوې $\sin$

-1 او $+1$ په منځ ($-1 \leq \sin x \leq 1$) دی، نو هغه زاویه چې $\sin$ یې $\frac{3}{2}$ وي، وجود نه لري، نو په دې

اساس معادله حل نه لري.

دویم حالت : $a \cos x + b = 0$

د پورتنۍ معادلي د حل مناسب ځواب د پیدا کولو لپاره لاندې مثالونو ته پام وکړئ.

لومړی مثال : د $2 \cos x - \sqrt{3} = 0$ مثلثي معادلي د حل سټ پیدا کړئ.

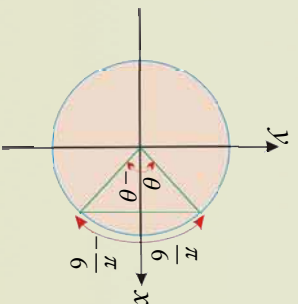
حل : پورتنۍ معادلي څخه $\cos x$ لاسته راوړو :

$$2 \cos x - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow 2 \cos x = \sqrt{3} \Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

اوس د $[0, \pi]$ په انټروال کې هغه زاویه پیدا کړو یا

لټو چې $\cos$ یې $\frac{\sqrt{3}}{2}$ وي، هغه له $\frac{\pi}{6}$ څخه

عبارت دی، نو لیکلی شو چې $\cos \frac{\pi}{6} = \cos x$.



اوس د مثلثي دایرې په پام کې نیولو سره ټولې هغه زاوې چې $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ وي، پیدا کړو.

$$x = \frac{\pi}{6}, 2\pi + \frac{\pi}{6}, 4\pi + \frac{\pi}{6} \dots$$

$$x = -\frac{\pi}{6}, 2\pi - \frac{\pi}{6}, 4\pi - \frac{\pi}{6}$$

په عمومي توګه د پورتنیو حلونو سټ داسې لیکل کېږي : $x = 2n\pi \pm \theta$

$$A = \left\{ x / x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \wedge x = 2k\pi - \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

په عمومي توګه د هرې θ زاوې لپاره لیکو :

دویم مثال : د $2 \cos x + \sqrt{2} = 0$ معادله په $(0, 2\pi)$ انټروال کې خوځولنه لري؟

حل : $\sqrt{2} \cos x = -\sqrt{2} \Rightarrow \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

له بلې خوا پوهېږو چې د $(0, 2\pi)$ په انټروال کې $\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x$ کېږي.

له دې امله د معادلې حل $x = \frac{3\pi}{4}$ په لاس راځي.

د حل سټې بې مساوي دی له:

$$A = \left\{ x / x = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \wedge x = 2k\pi - \frac{3\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

لیدل کېږي چې معادله د $(0, 2\pi)$ په انټروال کې دوه حلونه لري.

$$\begin{aligned} x &= 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \xrightarrow{k=0} x_1 = \frac{3\pi}{4} \\ x &= 2k\pi - \frac{3\pi}{4} \xrightarrow{k=1} x_2 = \frac{5\pi}{4} \end{aligned}$$

درېم حالت : $\tan x + b = 0$

د عمومي حل د پیدا کولو لپاره لاندې مثالونو ته څیر شئ.

مثال : $\tan x - \sqrt{3} = 0$ حل کړئ.

حل : له پورتنۍ تساوي څخه $\tan x$ په لاس راوړو: $\tan x = \sqrt{3}$

اوس د $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ په انټروال کې د x هغه زاویه لټوو چې $\tan x = \sqrt{3}$ وي او هغه زاویه له $\frac{\pi}{3}$ یا 60° څخه

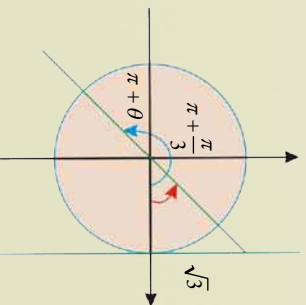
عبارت دی.

له دې امله پورتنۍ معادله د $\tan x = \tan \frac{\pi}{3}$ په صورت لاسته راځي، په مثلثي دایره کې وینو چې کومې

زاوې له $\tan \frac{\pi}{3}$ سره مساوي دي.

$$x = \left\{ \frac{\pi}{3}, 2\pi + \frac{\pi}{3}, 4\pi + \frac{\pi}{3}, \dots \right\}$$

$$x = \left\{ \pi + \frac{\pi}{3}, 3\pi + \frac{\pi}{3}, 5\pi + \frac{\pi}{3}, \dots \right\}$$



په عمومي ډول پورتنی ستونډه داسې ليکلی شو چې:

$$A = \left\{ x / x = k\pi + \frac{\pi}{3} \quad k \in Z \right\}$$

يا په عمومي ډول د هرې θ زاويې لپاره لرو چې:

$$A = \{ x / x = k\pi + \theta, \quad k \in Z \}$$

دویم مثال: لاندي معادله حل کړی.

$$\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

حل: $\tan x = \tan \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$

د معادلې د حل سټ $A = \left\{ x / x = k\pi + \frac{\pi}{6} \quad k \in Z \right\}$

درېم مثال: د $\tan(2x - \frac{\pi}{4}) = \tan(x + \frac{\pi}{3})$ د معادلې حلونه د $[0, 2\pi]$ په انټروال کې لاسته راوړی.

حل:

$$\tan(2x - \frac{\pi}{4}) = \tan(x + \frac{\pi}{3}) \Rightarrow 2x - \frac{\pi}{4} = k\pi + (x + \frac{\pi}{3})$$

$$2x - x = k\pi + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$$

د k پر ځای صحیح عددونه لیکو، تر څو زاويې چې د $[0, 2\pi]$ په انټروال کې دي، لاسته راشي.

$$x = k\pi + \frac{7\pi}{12} \quad \begin{matrix} \xrightarrow{k=0} & x_1 = \frac{7\pi}{12} \\ \xrightarrow{k=1} & x_2 = \pi + \frac{7\pi}{12} = \frac{19\pi}{12} \end{matrix}$$

څلورم حالت: د $\cot x + b = 0$ معادله، د معادلې د عمومي حل لپاره لاندي مثالونو ته پام وکړی.

لومړی مثال: د $\cot x - 1 = 0$ معادله حل کړی.

حل: له پورتنی څخه $\cot x$ پيدا کوو: $\cot x = 1 \Rightarrow \cot x - 1 = 0$

اوس د $[0, 2\pi]$ په انټروال کې هغه زاويه گورو چې $\cot$ يې $(+1)$ وي او هغه زاويه له $\frac{\pi}{4}$ يا 45° څخه

عبارت ده:



نو: $\cot x = \cot \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$

$$x = \frac{\pi}{4}, 2\pi + \frac{\pi}{4}, 4\pi + \frac{\pi}{4}, \dots$$

$$x = \pi + \frac{\pi}{4}, 3\pi + \frac{\pi}{4}, 5\pi + \frac{\pi}{4}, \dots$$

نو د معادلې د حل سټ په لاندې ډول دی.

$$A_1 = \left\{ \frac{\pi}{4}, 2\pi + \frac{\pi}{4}, 4\pi + \frac{\pi}{4}, \dots \right\}$$

$$A_2 = \left\{ \pi + \frac{\pi}{4}, 3\pi + \frac{\pi}{4}, 5\pi + \frac{\pi}{4}, \dots \right\}$$

$$A = \left\{ x / x = k\pi + \frac{\pi}{4}, (2k+1)\pi + \frac{\pi}{4} \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$$

یا په عمومي ډول د هرې θ زاوېې لپاره داسې لیکو:

درېم مثال: د $\cot 3x = \cot x$ معادله حل کړئ.

حل:

$$\cot 3x = \cot x \Rightarrow 3x = k\pi + x = 3x - x = k\pi \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$



پوښتنې

د لاندې معادلو د عمومي حل ځوابونه پیدا کړئ.

a) $3 \cos x + 5 = 0$ b) $4 \tan x + \cot x - 5 = 0$

c) $\tan x = \sqrt{3}$

دویمه درجه مثلثاتي معادلې

$$a \sin^2 x + b \cos^2 x + c \sin x \cos x = d$$

په تېرو درسونو کې مو ساده مثلثاتي معادلې حل کړې دي اوس دویمه درجه مثلثاتي معادلې خبرو. د مثلثاتي معادلې عمومي شکل عبارت دی لــه:

$$a \sin^2 x + b \cos^2 x + c \sin x \cos x = d$$

په a, b, c او d ثابت عددونه دي.

لومړی مثال: د $6 \sin^2 x - 5 \sin x + 1 = 0$ معادله حل کړئ.

حل: په پورتنۍ معادله کې د $\sin x$ پر ځای y لیکو، او معادله داسې لیکلې شو:

$$6y^2 - 5y + 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-5)^2 - 4(6)(1)$$

$$\Delta = 25 - 24 \Rightarrow \Delta = 1$$

$$y_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{12}, \quad y_1 = \frac{5+1}{12} = \frac{6}{12}, \quad y_2 = \frac{5-1}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$y_2 = \frac{5-1}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$\sin x = y_1 = \frac{1}{2}$$

$$\sin x = y_2 = \frac{1}{3}$$

په دې ډول هغه کوچني زاویه چې $\sin$ یې $\frac{1}{2}$ وي، له $\frac{\pi}{6}$ څخه عبارت ده نو:

$$A = \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6} \end{cases} \quad k \in Z$$

او یا لیکلې شو چې:

$$x = n\pi + (-1)^n \alpha \Rightarrow x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

په همدې ډول د $\sin x = \frac{1}{3}$ لپاره ډېره کوچنۍ زاويه 0.33 ده او د مثبتي جدول له مخې د $\sin x = \frac{1}{3}$ لپاره $19^\circ 30'$ يا $\frac{13\pi}{120}$ دی.

$$A = \left\{ \begin{array}{l} x = 2k\pi + \frac{13\pi}{120} \\ x = (2k+1)\pi - \frac{13\pi}{120} \end{array} \right\} \quad k \in \mathbb{Z}$$

دویم مثال: د $\cos 2x + \sin x = 0$ معادلې د حل سټ پیدا کړئ.

حل: پوهېږو چې $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ دی، نو لیکلی شو چې:

$$\begin{aligned} 1 - 2\sin^2 x + \sin x &= 0 \\ 2\sin^2 x - \sin x - 1 &= 0 \end{aligned}$$

که چېرې په پورتنۍ معادلې کې د $\sin x$ په ځای y وضع کړو، نو لیکو:

$$\begin{aligned} 2y^2 - y - 1 &= 0 \Rightarrow (2y+1)(y-1) = 0 \\ 2y+1 &= 0 \Rightarrow 2y = -1 \Rightarrow y_1 = -\frac{1}{2} \\ y-1 &= 0 \Rightarrow y_2 = 1 \end{aligned}$$

د $\sin x = y$ د تعویض لپاره چې مو په پام کې نیولي دي، نو د لاسته راغلو قیمتونو لپاره لرو چې:

$$\begin{aligned} \sin x = y_1 &= -\frac{1}{2} \\ \sin x = y_2 &= 1 \end{aligned}$$

په دې ډول د $\sin x = -\frac{1}{2}$ لپاره هغه کوچنۍ زاویه چې $\sin x = -\frac{1}{2}$ وي له $\frac{7\pi}{3}$ څخه عبارت ده.

بنا پر دي د حلولنو سست ټپي عبارت دی له:

$$A = \begin{cases} \sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \\ \sin x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{7\pi}{6} \end{cases}$$

$$A_1 = \left\{ \frac{\pi}{2}, 2\pi + \frac{\pi}{2}, 4\pi + \frac{\pi}{2}, \dots \right\}$$

$$A_2 = \left\{ 2\pi + \frac{7\pi}{6}, 4\pi + \frac{7\pi}{6}, 6\pi + \frac{7\pi}{6}, \dots \right\}$$

پا په عمومي ډول:

$$A = \left\{ x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{2}, \quad x = 2n\pi + \frac{7\pi}{6}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \right\}$$

درېم مثال: د $2 \sin^2 x - \sqrt{2} \sin x = 0$ معادله حل کړئ.

حل:

$$\sin x (2 \sin x - \sqrt{2}) = 0$$

$$\sin x = 0 \Rightarrow x_1 = 0^\circ$$

$$2 \sin x - \sqrt{2} = 0$$

$$2 \sin x = \sqrt{2}$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x_2 = \frac{\pi}{4}$$

د معادلې د حلولنو سست عبارت دی له:

$$A_1 = \{0^\circ, \pi, 3\pi, 5\pi, \dots\}$$

$$A_2 = \{2\pi, 4\pi, \dots\}$$

په عمومي توګه لیکلای شو:

$$x = n\pi + (-1)^n \theta$$

$$x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4}$$



د لاندې معادلو د حل ستونزه پيدا کړئ:

$$\cos 2x + 1 = 2 \sin^2 \frac{x}{2} - 1$$

$$3 \cos^2 x + 2 \cos x - 5 = 0 \quad -2$$

$$\sin^2 x - (1 - \sqrt{3}) \sin x \cdot \cos x - \sqrt{3} \cos^2 x = 0 \quad -3$$

د دوه مجهولہ مثلثاتي معادلو يا سېسټمونو حل

د الجبري معادلو سېسټم مو حل کړ. آیا د مثلثاتي معادلو سېسټم حلولای شئ؟

$$\begin{cases} \sin x \pm \sin y = a \\ x \pm y = \alpha \\ \cos x \pm \cos y = a \\ x \pm y = \alpha \end{cases}$$

دغه معادلې په شپږو گروپونو باندې وېشلې شو:

لومړۍ گروپ: د دغه گروپ معادلې په لاندې اتو سېسټمونو کې راټولې شوې دي.

$$\begin{cases} \sin x \pm \sin y = a \\ x \pm y = \alpha \end{cases} \quad \begin{cases} \cos x \pm \cos y = a \\ x \pm y = \alpha \end{cases}$$

خرنگه چې a معلوم عدد او α معلوم قوس يا زاويه ده، x او y مجهول قوسونه يا زاويې دي، نو له دغو

سېسټمونو څخه حلولو:

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = a \quad \dots I \\ x + y = \alpha \dots \dots \dots II \end{cases}$$

د لومړۍ معادلې قيمت د ضرب د فورمولونو په کارولو سره لیکو، ځکه چې د دوو سینونو مجموعه ده.

$$\begin{aligned} \sin x + \sin y &= a \\ 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} &= a \dots I \\ x + y &= \alpha \dots II \end{aligned}$$

په دې اساس:

اوس له II معادلې څخه د $x + y$ قيمت يعنې α د I په معادله کې اېږدو:

$$2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{x-y}{2} = a \dots I$$

د I اړيکې دواړه خواوې په $2 \sin \frac{\alpha}{2}$ باندې وېشو:

$$\cos \frac{x-y}{2} = \frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$$

نېصرو: د پورتنۍ معادلې ښې لوری له $+1$ څخه لوی او له -1 څخه کوچنی نه دی، ځکه چې د قوس يا زاويې سین دى. يا په بل عبارت مربع يې له يو څخه لوی نه دى.

$$-1 \leq \frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \leq 1$$

پورتنی غیر مساوات د $1 < \frac{a}{\alpha \sin \frac{\alpha}{2}} < 0$ ، په شکل لیکو بیا یې دواړه خواوې مربع کوو:

$$\frac{a^2}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \leq 1$$

دواړه خواوې په $4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \neq 0$ کې ضربوو:

$$a^2 \leq 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$a^2 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \leq 0$$

پورتنی اړیکه د سیستم د حل له شرط څخه عبارت ده.

لومړی مثال: د لاندې معادلو سیستم حل کړئ.

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = 1 \\ x + y = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

حل: په پورتنی سیستم کې $a = 1$ او $\alpha = \frac{\pi}{2}$ دی، وینو چې راکړل شوی شرط د سیستم د حل لپاره

$$\text{صدق کوي او که نه؟} \quad a^2 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \leq 0$$

د a او α قیمتونه په پورتنی اړیکه کې اېږدو:

$$1 - 4 \sin^2 \frac{\pi}{2} \leq 0 \Rightarrow 1 - 4 \sin^2 \frac{\pi}{4} \leq 0 \Rightarrow 1 - 4 \left(\sin \frac{\pi}{4}\right)^2 \leq 0$$

$$1 - 4 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \leq 0 \Rightarrow 1 - 4 \frac{2}{4} \leq 0 \Rightarrow 1 - 2 \leq 0 \Rightarrow -1 \leq 0$$

لیدل کېږي چې سیستم د حل وړ دی، نو د تبدیل د فورمولونو په مرسته د لومړي معادلې کینې لوری شکل

$$\text{ته تغیر ورکوو: } 1 = \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$$

$$\text{خرنگه چې } x + y = \frac{\pi}{2} \text{ له دې امله } \frac{\pi}{4} = \frac{x+y}{2} \text{ کېږي نو:}$$

$$\begin{aligned} 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{x-y}{2} &= 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{x-y}{2} &= 1 \Rightarrow \sqrt{2} \cos \frac{x-y}{2} = 1 \\ \cos \frac{x-y}{2} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos \frac{x-y}{2} = \cos \frac{\pi}{4} \\ \frac{x-y}{2} = \frac{\pi}{4} &\Rightarrow x-y = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x-y = \frac{\pi}{2} \dots\dots\dots I \\ x+y = \frac{\pi}{2} \dots\dots\dots II \end{cases} \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2x = \frac{2\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

د x قیمت په I معادله کې اېږدو نو د y قیمت په لاس راځي:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} - y = \frac{\pi}{2} &\Rightarrow y = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \\ y &= 0 \end{aligned}$$

دویم ګروپ: ددغه ګروپ اړوند سیستمونه په لاندې ډول دي:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \sin x \cdot \cos y = a \end{cases} \quad \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \cos x \cdot \sin y = a \end{cases}$$

خرنگه چې a معلوم عدد او α معلوم قوس یا زاویه ده. x او y مجهول قوسونه یا زاوې دي.

$$\text{د سیستم د حل شرط عبارت دی له: } -\cos^2 \frac{\alpha}{2} \leq a \leq \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

دویم مثال: د لاندې معادلو سیستم حل کړي.

$$\begin{cases} x + y = \pi \\ \sin x \sin y = 1 \end{cases}$$

حل: په پورتنۍ سیستم کې $a = 1$ ، $\alpha = \pi$ دی ددغو معادلو د حل د امکان شرط عبارت دی له:

$$-\cos^2 \frac{\alpha}{2} \leq a \leq \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$-\cos^2 \frac{\alpha}{2} = -\cos^2 \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \sin^2 \frac{\pi}{2} = 1$$

د سیستم د حل شرط ته په کتنې سره کولای شو ولیکو:

$$-\cos^2 \frac{\pi}{2} \leq a \leq \sin^2 \frac{\pi}{2}$$

$$0 \leq a \leq 1$$

د II معادلې کینې لوری د تحلیل د فورمول په کارولو سره لاندې شکل ځانته غوره کوي:

$$2 \sin x \sin y = \cos(x - y) - \cos(x + y)$$

څرنگه چې $\sin x \sin y = 1$ ، بیا پر دې $\cos(x - y) - \cos(x + y) = 2$

له بلې خوا $x + y = \pi$ دی نو: $\cos(x - y) - \cos \pi = 2$

همدارنگه پوهیږو چې $\cos \pi = -1$ دی.

نو:

$$\cos(x - y) - (-1) = 2 \Rightarrow \cos(x - y) + 1 = 2$$

$$\Rightarrow \cos(x - y) = 2 - 1 \Rightarrow \cos(x - y) = 1$$

$$\cos(x - y) = \cos 0^\circ$$

$$x - y = 0 \Rightarrow x = y$$

د I له معادلې څخه د x قیمت پیدا کوو:

$$x + y = \pi \Rightarrow x + x = \pi \Rightarrow 2x = \pi$$

$$x = \frac{\pi}{2}, y = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = y = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{2}$$

دریم گروپ: دغه گروپ څلور لاندې سیستمونه تشکیلوي، چې عبارت دي له:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \frac{\sin x}{\sin y} = a \end{cases} \quad \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \frac{\cos x}{\cos y} = a \end{cases}$$

چې α معلومه زاویه او a معلوم عدد دی. x او y مجهول قوسونه یا زاوې دي.

دریم مثال: لاندې مثالني سیستم حل کړئ.

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2} \\ \frac{\sin x}{\sin y} = \sqrt{3} \end{cases}$$

حل: لیدل کېږي چې دغه سیستم له دریم گروپ سره مطابقت لري نو، په لاندې ډول کرښه کوو یعنې د سیستم

$$\frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$$

دویمه معادله د تناسب د خواصو په پام کې نیولو سره داسې لیکو:

د $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$ او $\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$ پورتنی اړیکه کې اېږدو:

$$\frac{2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}}{2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

خړنگه چې $\frac{\pi}{2} = x + y$ دی، نو $\frac{\pi}{4} = \frac{x+y}{2}$ سره کېږي.

$$\cot \frac{\pi}{4} \tan \frac{x-y}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

له بلې خوا $1 = \cot \frac{\pi}{4}$ دی نو معادله لاندې شکل خاڼه غوره کوي:

$$\tan \frac{x-y}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

$$\tan 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

$$\tan \frac{x-y}{2} = \tan 15^\circ \Rightarrow \frac{x-y}{2} = 15^\circ$$

$$x-y=30^\circ = \frac{\pi}{6}$$

$$\begin{cases} x+y = \frac{\pi}{2} \\ x-y = \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

د معادلو سیستم حلونو:

$$2x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{6}$$

$$x = \frac{4\pi}{12} = \frac{\pi}{3}$$

اوس د x قیمت په پورتنۍ یوه معادله کې اېږدو او د y قیمت په لاس راځي:

$$x - y = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{\pi}{3} - y = \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = y \Rightarrow \frac{2\pi - \pi}{6} = y$$

$$y = \frac{\pi}{6}$$

$$x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{3} \text{ او } y = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}$$

څلورم گروپ: دغه گروپ اته لاندې سیستمونه تشکیلوي:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \tan x \pm \tan y = a \end{cases} \quad \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \cot x \pm \cot y = a \end{cases}$$

خړنگه چې α معلومه زاویه او a معلوم عدد دی. x او y مجهول قوسونه یا زاوې دي.

د سیستم د حل شرط عبارت دی، له: $a^2 - 4 + 4a \cot \alpha \geq 0$

څلورم مثال: د لاندې معادلو سیستم حل کړئ.

$$\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{3} \\ \tan x - \tan y = -2\sqrt{3} \end{cases}$$

حل: کولی شو لومړۍ معادله داسې ولیکو: $\tan(x - y) = \tan \frac{\pi}{3}$

له بلې خوا پوهېږو چې $\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \cdot \tan y} = \sqrt{3}$

$$\frac{-2\sqrt{3}}{1 + \tan x \cdot \tan y} = \sqrt{3} \quad \text{د } \tan x - \tan y = -2\sqrt{3} \text{ قیمت په پانښي معادله کې اېږدو:}$$

د مساوات دواړه خواوې په $\sqrt{3}$ باندې وېشو او لیکو.

$$\frac{-2}{1 + \tan x \cdot \tan y} = 1 \Rightarrow 1 + \tan x \cdot \tan y = -2$$

$$\Rightarrow \tan x \cdot \tan y = -3$$

$$\begin{cases} \tan x \cdot \tan y = -3 \dots\dots\dots I \\ \tan x - \tan y = -2\sqrt{3} \dots\dots\dots II \end{cases} \quad \text{نو:}$$

د $\tan x$ قیمت له II معادلې څخه په لاس راوړو په I کې یې اېږدو:

$$\tan x = -2\sqrt{3} + \tan y$$

$$(-2\sqrt{3} + \tan y) \tan y = -3$$

$$\tan^2 y - 2\sqrt{3} \tan y + 3 = 0$$

$$(\tan y - \sqrt{3})^2 = 0 \Rightarrow \tan y - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \tan y = \sqrt{3}$$

$$y = \frac{\pi}{3}$$

هغه مثبت کوچنی قوس چې په دغه معادله کې صدق کوي، عبارت دی له: $y = \frac{\pi}{3}$

د y د قیمت په پام کې نیولو سره د I له معادلې څخه د x قیمت په لاس راوړو.

$$\tan x \cdot \tan y = -3$$

$$\tan x \cdot \sqrt{3} = -3 \Rightarrow \tan x = \frac{-3}{\sqrt{3}} = -\frac{3\sqrt{3}}{3} = -\sqrt{3}$$

$$x = 2\frac{\pi}{3}$$

پنځم گروپ: دغه گروپ لاندې دوه سیستمونه تشکیلوي:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \tan x \cdot \tan y = a \end{cases}$$

د تېر په څېر بیا هم α معلومه زاویه او a معلوم عدد دی. x او y معلوم قوسونه یا زاوې دي.

دپورتني سیستم د حل شرط عبارت دی، له: $-1 \leq \frac{1+a}{1-a} \cos \alpha \leq 1$

پنځم مثال: د لاندې معادلو سیستم حل کړئ.

$$\begin{cases} x + y = 7\frac{\pi}{6} \\ \tan x \cdot \tan y = 0 \end{cases}$$

لیدل کېږي چې دغه سیستم په پنځم گروپ پورې اړه لري او په لاندې ډول یې حلوو:

$$\tan x \tan y = \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y}$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x-y) + \cos(x+y)] \text{ او } \sin x \sin y = \frac{1}{2} [\cos(x-y) - \cos(x+y)]$$

د قيمتونه په اړونده اړيکه کې اېږدو.

$$\tan x \tan y = \frac{\frac{1}{2} [\cos(x-y) - \cos(x+y)]}{\frac{1}{2} [\cos(x-y) + \cos(x+y)]}$$

د $x + y$ قيمت د سيستم له لومړۍ معادلې څخه په پورتنۍ اړيکه کې اېږدو:

$$\tan x \cdot \tan y = \frac{\cos(x-y) - \cos 7\frac{\pi}{6}}{\cos(x-y) + \cos 7\frac{\pi}{6}}$$

څرنگه چې $\tan x \cdot \tan y = 0$ سره راکړل شوی دی، نو لیکو:

$$\frac{\cos(x-y) - \cos 7\frac{\pi}{6}}{\cos(x-y) + \cos 7\frac{\pi}{6}} = 0$$

ددې لپاره چې کسر مساوي په صفر شي، نو بايد صورت يې له صفر سره برابر شي؛ يعنې:

$$\cos(x-y) - \cos 7\frac{\pi}{6} = 0$$

$$\cos 7\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(x-y) + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$\cos(x-y) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x-y = \frac{5\pi}{6}$$

هغه کوچنۍ قوس چې په معادله کې صدق کوي، عبارت دی له:

$$\begin{cases} x-y = 5\frac{\pi}{6} \\ x+y = 7\frac{\pi}{6} \end{cases}$$

نوموړی سيستم حلوو:

$$2x = \frac{5\pi}{6} + \frac{7\pi}{6} = \frac{12\pi}{6} = 2\pi, \quad x = \pi$$

د x قیمت د I په معادله کې اېږدو او د y قیمت په لاس راځي:

$$x - y = 5\frac{\pi}{6} \Rightarrow \pi - y = 5\frac{\pi}{6}, \quad -y = \frac{5\pi}{6} - \pi$$

$$y = \pi - \frac{5\pi}{6} \Rightarrow y = \frac{6\pi - 5\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$$

$$y = \frac{\pi}{6}$$

شپږم گروپ: په دغه گروپ کې لاندې سیستمونه شتون لري:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \frac{\tan x}{\tan y} = a \end{cases}$$

$$-1 \leq \frac{a-1}{a+1} \sin \alpha \leq 1$$

د حل د امکان شرط عبارت دی، له:

شپږم مثال:

$$\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{2} \\ \frac{\tan x}{\tan y} = -3 \end{cases}$$

د تناسب د خواصو په پام کې نیولو سره لرو:

$$\frac{\tan x - \tan y}{\tan x + \tan y} = \frac{-3 - 1}{-3 + 1} = 2$$

د مساوات په کټنې خوا کې د صورت او مخخرج قیمتونه د $\sin$ او $\cos$ له جنسه داسې اېږدو:

$$\frac{\sin(x - y)}{\cos x \cos y} = 2 \Rightarrow \frac{\sin(x - y)}{\sin(x + y)} = 2$$

$$\cos x \cos y$$

$$2 \sin(x + y) = \sin(x - y)$$

خرنګه چې $\frac{\pi}{2} = x - y$ دی، نو:

$$2 \sin(x+y) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

$$\sin(x+y) = \frac{1}{2}$$

هغه کړچني قوس چې په معادله کې صدق کوي، عبارت دی له: $\frac{\pi}{6}$ چې د معادلو لاندې سیستم

جوړو:

$$x+y = \frac{\pi}{6}$$

$$x-y = \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{cases} x+y = \frac{\pi}{6} \dots\dots I \\ x-y = \frac{\pi}{2} \dots\dots II \end{cases}$$

نوموړی سیستم حلو:

$$2x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2x = \frac{\pi+3\pi}{6} = \frac{4\pi}{6}$$

$$x = \frac{4\pi}{12} = \frac{\pi}{3}$$

د x قیمت د I په معادله کې اېږدو او د y قیمت په لاس راځي:

$$x+y = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{\pi}{3} + y = \frac{\pi}{6} \Rightarrow y = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3}$$

$$y = \frac{\pi-2\pi}{6} = -\frac{\pi}{6}$$

$$y = -\frac{\pi}{6}$$

پوښتي



د لاندې مثلثاتي معادلو سیستمونه حل او وړایاست چې په کوم گروپ پورې اړه لري؟

$$a) \begin{cases} x+y = \frac{\pi}{4} \\ \tan x + \tan y = 1 \end{cases} \quad b) \begin{cases} x-y = \frac{\pi}{3} \\ \frac{\sin x}{\cos x} = 2 \end{cases}$$

د څپر کې مهم ټکي

د ساين قانون: د ABC په هر مثلث کې لاندې اړيکې شته:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

پورتني اړيکه د ساين د قانون په نوم يادېږي.

د کوساين قانون: د ABC په هر مثلث کې چې دضلعو اوږدوالي a, b, c وي، د ضلعو او زاويو تر منځ لاندې اړيکې شته:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

د $\tan$ قانون: د ABC په هر مثلث کې د هغه د ضلعو او زاويو ترمنځ د $\tan$ له جنسه لاندې اړيکې شته:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan \frac{A+B}{2}}{\tan \frac{A-B}{2}}, \quad \frac{c+a}{c-a} = \frac{\tan \frac{C+A}{2}}{\tan \frac{C-A}{2}}, \quad \frac{b+c}{b-c} = \frac{\tan \frac{B+C}{2}}{\tan \frac{B-C}{2}}$$

مثلاثي مطابقت: هغه مثلاثي مساوات چې د زاويې د ټولو قيمتونو لپاره د مساواتو دواړه خواوې مساوي شي، مثلاثي مطابقت بلل کېږي.

مثلاثي معادلې: هغه مساوات چې د زاويې په ځينو قيمتونو سره دواړه خواوې مساوي شي، معادله بلل کېږي.

د مثلاثي معادلو سيسټمونه

مثلاثي معادلو سيسټمونه په لاندې شپږو گروپونو وېشل شوي دي:

لومړی گروپ:

$$\begin{cases} \sin x \pm \sin y = a \\ x \pm y = \alpha \end{cases} \quad \begin{cases} \cos x \pm \cos y = a \\ x \pm y = \alpha \end{cases}$$

دویم گروپ:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \sin x \cdot \cos y = a \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \sin x \cdot \sin y = a \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \cos x \cdot \cos y = a \end{cases}$$

دریم گروپ:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \frac{\sin x}{\sin y} = a \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \frac{\cos x}{\cos y} = a \end{cases}$$

خلورم گروپ:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \tan x \pm \tan y = a \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \cot x \pm \cot y = a \end{cases}$$

پنجم گروپ:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \tan x + \tan y = a \end{cases}$$

شپږم گروپ:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \frac{\tan x}{\tan y} = a \end{cases}$$



د خبر کي پوښتني

لاندي پوښتني په خبر سره ولولئ، هرې يوې ته څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، سم ځواب يې په نښه کړئ.

1. که چيرې $A = 20^\circ$, $b = 10$, $c = 7$ وي، د a د ضلعي اوږدوالی عبارت دی له:

a) 16.4	b) 16
c) 15.9	d) 16.8
2. که چيرې $a = 8$, $b = 5$ او $c = 10$ وي، د B زاويې اندازه عبارت ده له:

a) 28°	b) 29°
c) 29.4°	d) 28.5°
3. که چيرې $A = 48^\circ$, $B = 22^\circ$, $a = 5$ وي د b اوږدوالی عبارت دی له:

a) 8	b) 8.5
c) 9	d) -9.5
4. د $\sec x(\sec x - \cos x)$ مثالني مطابق مساوي دی له:

a) $\tan x$	b) $\frac{1}{\tan x}$
c) $\cot x$	d) $\tan^2 x$

لاندي پوښتني حل کړئ.



1. که چيرې د $A = 30^\circ$, $c = 8$, $b = 5$ واحد وي، د a ضلع او $\sin C$ پيدا کړئ.
2. که په يوه مثلث کې $a = 8$, $b = 5$, $c = 10$ واحد وي، د B زاويې اندازه پيدا کړئ.
3. د ABC په مثلث کې که $\frac{c}{b} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ او $A = 30^\circ$ وي، د B او C زاويو اندازه پيدا کړئ.
4. دوي بېړۍ د A له ټکي څخه په دوو خواوو داسې په حرکت پيل کوي چې د منځ زاويه يې 30° ده، که له يوه ساعت څخه وروسته، لومړۍ بېړۍ 40 km او دويمه بېړۍ 60 km ولټن وهلی وي، د دوو بېړيو ترمنځ ولټن پيدا کړئ.

5. $\cot^2 \beta$ او $\sin \beta$ له جنسه محاسبه کړئ.

6. لاندې مطابقونه سادہ کریں.

$$a) \frac{\sin 2A}{1 + \cos 2A} = \tan A$$

$$b) \frac{1 - \cos 2A}{1 + \cos 2A} = \tan^2 A$$

$$c) \tan A + \cot A = 2 \csc 2A$$

$$d) \frac{1 - \cos A + \cos B - \cos(A+B)}{1 + \cos A - \cos B - \cos(A+B)} = \tan \frac{A}{2} \cdot \cot \frac{B}{2}$$

$$e) \frac{\cos A}{1 - \sin A} = \tan(45^\circ + \frac{A}{2})$$

$$f) \cos \alpha \cos(60^\circ - \alpha) \cos(60^\circ + \alpha) = \frac{1}{4} \cos 3\alpha$$

7. لاندې مثلثاتي معادلي حل کریں.

$$a) \cos^2 x + \cos^4 x = 0$$

$$b) \tan^2 x - 4 \tan x + 3 = 0$$

$$c) 4 \cos \beta - 2 = 0$$

$$d) \cos x - \sqrt{3} \sin x = 1$$

$$e) \cos^2 x + 3 \sin x \cdot \cos x = -1$$

8. آیا د $2 \cos 2x + \sin x = 2 \sin^2 x - \cos x$ مساوات یو مطابقت دی او که معادلہ؟

9. لاندې افادې سادہ کریں.

$$a) \frac{2 \tan 15^\circ}{1 - \tan^2 15^\circ}$$

$$b) 1 - 2 \sin^2 \alpha + \cos 2\alpha = ?$$

$$c) \cos 4x + 2 \sin^2 2x$$

$$d) (\cos^2 x + 2 \sin x \cos x - \sin^2 x)^2$$

10. د لاندې مثلثاتي معادلو سیستمونه لومړی تشخیص او بیا یې حل کریں.

$$a) \begin{cases} \tan x + \tan y = 1 \\ \cos x \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \sin(x+y) = \cos(x-y) \\ \tan x - \tan y = 1 \end{cases}$$

دریلم څپرکی فضایي هندسه



**اقلیدس د دوه اړخیزې (دوه بڼې) او درې
اړخیزې (درې بڼې) هندسي بنسټ اېښودونکی دی.**



د اقليدس د هندسي مفاهيمو څېړنې په دوو بڼو پيلوي. د مسطحې هندسې په نامه يادېږي. هغه هندسي مفاهيم، چې په ديو اړخيزو (بڼو) کې څيړل کېږي، فضايي هندسه نومېږي.



- د مفاهيمو په برخه کې لکه لومړني اصطلاحات، دليل، برهان او قضيو په هکله فکر وکړئ. خپل مينځ کې خبرې او د موضوع په هکله بحث وکړئ.

له پورتنی بیان او بحث څخه وروسته کولای شو، لاندې تعریف وکړو:

لومړنۍ اصطلاح گانې Postulates: د هر علم په برخه کې د لومړنیو اصطلاح گانو څخه سترگې پټولای نشو د نورو علومو په ډول په هندسه کې هم هغه مفاهیم او مفکورې، چې پرته له کوم تعریف څخه منل کېږي لومړنۍ اصطلاحات بلل کېږي. لکه: ټکي (نقطه)، کرښه(خط)، مستوی او فضا.

منطقي دليل او برهان Logical Reason :برهان ته دهن هغه عمل ته ويل كېږي چې له يو لړ مخكښينو سمو وړانديزونو او څېړنو څخه و روستيو څېړنو ته د سپړي چې د هغې سموالې مخكې منل شوې وي . موږ هم كولاى شو، هغه و منو.

قضيه Theorem: هنڌا دعا چي دهغي سمولي او صحت يوازي منطقي دلايلو ته اڙتيا ورتي، قضيه بلل ڪبري.

ټکی (نقطه) : موږ نقطه د یو ذهني مفهوم په ډول پیژنو او هغه د لومړنۍ اصطلاح (تعریف شوې ده) په توګه منو. **مستقیم خط :** کش شوی تار، د میز څخه او د خط کش ټپه د مستقیم خط مفهوم او مطلب بیانوي، د مستقیم خط بېلېدونکي علائقې دا دي چې د دوو راکړل شوو ټکو څخه یوازې د یو مستقیمه کرښه تیریدلای شي. مستقیم خط د لومړنۍ اصطلاح (تعریف شوی نه دی) په ډول منو.

ٻايل فڪر موري چي يو مستقيم خط دواو و خواو و نه ترلا ٿينهي پوري غزلاي شي.

لومړی اصل: دوی ښکاره او ټاکلې نقطې یوازې او یوازې یو مستقیم خط څرگندوي.

دويم اصل: هر مستقيم خط اړ تر لږه دوي څرگندي نقطې لري چې په يو مستقيم خط باندې واقع دي، اړ تر لږه داسې درې نقطې شتون لري چې په يو مستقيم خط باندې واقع نه وي.

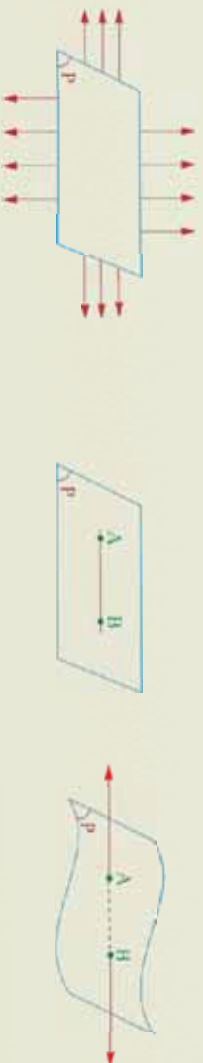
دريښ اصل: کولای شو په يوه مستقيم خط باندې د هرو دوو نقطو تر منځ يوه دريمه نقطه په لاس راوړو.

مستوي: د ولاړو اويو سطح او د توکلي تخته د مستوي مفهوم څر گندوي او مستوي د لومړني اصطلاح (تعريف) شوي نه ده (د) په توگه منل کېږي.

لومړی اصل: په هره مستوي کې لږ تر لږه درې نقطې شتون لري چې د یوه مستقیم خط په استقامت واقع نه وي. دویم اصل: له هرو دریو نقطو څخه، چې د یوه مستقیم خط په استقامت پرتې نه وي، یوه مستوي تیرېږي.

دویم اصل: که چیرې د یوه مستقیم خط دوی نقطې په یوې مستوي کې وي، دا خط په مستوي کې دی.

په مسطحه هندسه کې د مستوي رسمېدلو ته اړتیا نشته، ځکه چې ترل شکلونه لکه د کاغذ مخ، د لرگي نخه، چې هر یو یې یوه مستوي څرگندوي رسېږي، خو په فضايي هندسه کې د مستوي رسمولو ته اړتیا شته، ځکه چې په فضايي هندسه کې مستوي یوه نه، بلکې ټوړې دي. زياتره په فضايي هندسه کې مستوي د متوازي الاضلاع، مستطیل او یا هوارې سطحې په واسطه ښودل کېږي او په یوه کونج کې یې یو ټوری لیکي.



نا محدوده مستوي

محدوده مستوي

مستوي نه ده

دا مستوي ګانې چې په تېرو شکلونو کې لیدل کېږي، په همدې پراخوالي نه دي، بلکې ترلايتياهي پورې امتداد لري. دا چې مستوي ګانې په پورته شکلونو کې لیدل کېږي هغه متوازي الاضلاع او مستطیل نه دي، بلکې د مستوي په یوې هوارې سطحې کې ښودل دي.

ټولې نښې چې په مسطحه هندسه او ریاضي کې استعمالېږي، په فضايي هندسه کې هم استعمالېږي. هغه اکسیومونه، چې په مسطحې هندسې کې موجود دي، په فضايي هندسه کې هم له دې اکسیومونو څخه کار اخیستل کېږي.

سربېره په مسطحه هندسه په فضايي هندسه کې هم یو لړ ځانګړي اکسیومونه شته چې په لاندې ډول بیانېږي.

د مستوي لومړنی اکسیوم M: هغه مستقیم خط چې د مستوي دوی مختلفې نقطې سره نښلوي په دې مستوي کې شامل دی.

د مستوي دویم اکسیوم M: له هغو دریو نقطو څخه چې په یوه مستقیم خط واقع نه دي، یوازې او یوازې یوه مستوي تېرېږي.

د مقاطع مستوي ګانو اکسیوم M: که چیرې دوی مستوي ګانې یو ګډ ټکی ولري، مقاطع دي او په همدې ډول که چیرې یو ګډ مستقیم خط ولري، دغه مقاطع خط نه د دوی مستوي ګانو مشترک فصل ولري.

فضا: فضا هم د لومړني اصطلاح (تعریف شوې نه ده) په توګه پېژنو.

لومړی اصل: دلایتي نقطو مجموعې ته فضا وايي.

دویم اصل: لږ تر لږه څلور داسې نقطې شته چې په یوه مستوي کې واقع نه دي.

پوښتنې

1. څرګنده کړئ چې ولې درې پښې لرونکي مېز د څلورو پښو لرونکي مېز په پرتله ټینګ دی؟
2. ولې نقطه، کرښه او مستوي لومړني اصطلاح ګانې بولي؟
3. له دوو نقطو څخه څو مستوي ګانې تیرېدلای شي چې دواړه نقطې په کې پرتې وي.



په درې بُعدي فضا کې کرښه او مستوي
 په فضا کې دوه قلمونه، دوه کتابونه، یو کتاب او یو قلم
 کوم حالتونه لري؟

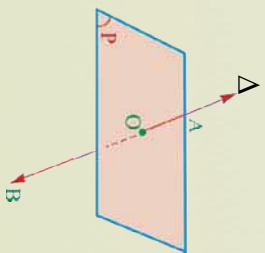
د درې بُعدي فضا:

هغه فضا، چې موږ په کې ژوند کوو، درې بُعدي فضا ده. دا درې بُعدي فضا یوه له نه تعریف شوو لومړنیو مفهومونو څخه ده.

فضا دلايتناهي نقطو مجموعه ده، خط او مستوي هم په ترتيب سره یو بعد، دوه بعدونه لري چې هر یو د فضا د سټ یوه برخه (جزء) دی.

د یوې مستقیمې کرښې او یوې مستوي نسبتي حالت: یوه مستقیمه کرښه او یوه مستوي
 لاندې درې حالتونه لري:

1. که چېرې یو مستقیم خط او یوه مستوي یوه مشترکه نقطه ولري، دا خط او مستوي یو له بل سره متقاطع دي. د مثال په ډول په دې شکل کې د Δ مستقیمه کرښه د P مستوي د O په نقطه کې قطع کړي ده.

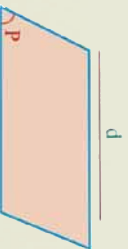


2. که چېرې یو مستقیم خط له یوې مستوي سره دوه او یا له دوو څخه زیاتې مشترکې نقطې ولري دا مستقیمه کرښه له مستوي سره منطبقه

ده او يا داسې ويل كېږي چې مستقيمه کرښه په مستوي کې شامله

ده، د مثال په ډول د d مستقيم د P په مستوي کې شامل دی.

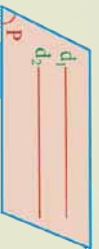
3. که چيرې يوه مستقيمه کرښه له يوې مستوي سره هيڅ گډه نقطه ونه لري، دا مستقيم له مستوي سره موازي دي، مثلاً په لاندې شکل کې د d مستقيم خط له P مستوي سره موازي دی.



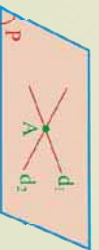
له يو بل سره د دوو مستقيمو کرښو نسبي حالت:

1- که چيرې دوه مستقيم خطونه په يوه مستوي کې شامل وي، نوموړي خطونه د همغې مستوي خطونه بلل کېږي، او يو له لاندنيو حالتونو (ضعيفونو) څخه لري.

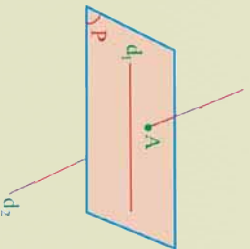
په يوې مستوي کې دوه خطونه هغه وخت موازي بلل کېږي چې هيڅ گډه کې ونه لري.

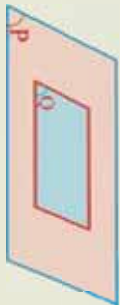


2- په يوه مستوي کې دوه خطونه، چې يوه گډه (مستړه) نقطه ولري، متقاطع خطونه بلل کېږي.

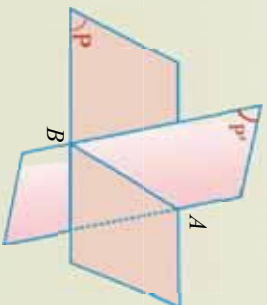


3- دوه مستقيم خطونه چې په يوه مستوي کې پراته نه وي او کومه مشترکه نقطه هم ونه لري، متناظر خطونه بلل کېږي؟

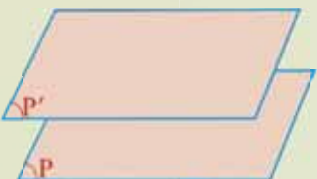




د دوو مستوي گانو نسبي حالت :
 په عمومي ډول دوي مستوي گانې لاندې درې حالتونه لري.
منطبق : که چيري دوي مستوي گانې لږ تر لږه درې مشترکې نقطې ولري چې د يو مستقيم خط په امتداد پرتې وي، يو پر بل منطبقې مستوي گانې بلل کېږي، لکه په مخامخ شکل کې د P او Q دوي مستوي گانې يو پر بل منطبقې دي.



مقاطع مستوي گانې : که چيري دوي مستوي گانې يو ګډ مستقيم خط ولري متقاطع مستوي گانې بللې کېږي. دغه د AB مشترک خط ته مشترک فصل هم وايي. لکه مخامخ شکل.



3- که چيري دوه مستوي گانې هيڅ کوم ګډه ټکي ونه لري، سره موازي دي، د مثال په توګه د P او P' مستوي گانې.

فعاليت

- په فضا کې له يورې نقطې څخه څو مستقيم خطونه تيرېږي ؟
- له دوو نقطو څخه څو مستقيم خطونه تيرېږي ؟
- له يوي نقطې څخه څو مستوي گانې تيرېږي ؟
- له دوو نقطو څخه څو مستوي گانې تيرېږي ؟
- له دريو نقطو څخه څو مستوي گانې تيرېږي چې درې واړې نقطې ېکې شاملې وي ؟



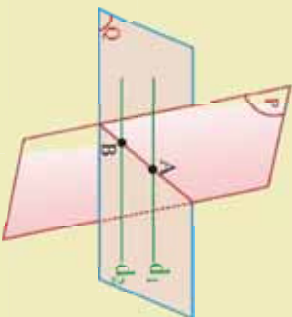
1- د R او T نقطې د P په مستوي کې پرته دي، د کوم دلیل له مخې د $\overline{RT}$ خط د P په مستوي کې پروت دی؟

2- که د Δ مستقیم خط د P په مستوي کې پروت نه وي، د Δ مستقیم خط به د P مستوي په څو نقطو کې قطع کړي؟

3- که چېرې د AB مستقیم خط او د P مستوي د M او K دوه ګډې نقطې ولري، د $\overline{AB}$ مستقیم خط د P په مستوي کې پروت دی؟

4- د A, B او C نقطې د P په مستوي کې واقع دي او هم د A, B او C نقطې د P' په مستوي کې پرته دي، د P او P' مستوي ګانې یوه له بلې سره څه اړیکه لري؟

په فضا کې موازي مستقيم خطوطه
آيا په فضا کې مستقيم خطوطه موازي دي؟



تعريف:

دوه مستقيم خطوطه چې په يوې مستوي کې پراته او ګډه نقطه ونه لري، موازي خطوطه بلل کېږي.

د موازاتو ا کسبوم له يوې خارجي نقطې څخه له يوې مستقيمې کرښې سره يوازې او يوازې يوه موازي مستقيمه کرښه رسمولای شو او بس.

فعاليت

• د A ټکي د P مستوي او د d_1 مستقيم خط چې د A ټکي وړاندې پروت نه وي، په پام کې ونيسئ؟

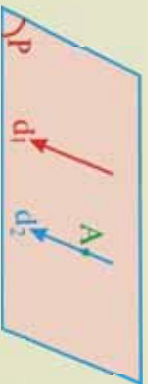
• د A ټکي او د d_1 له مستقيم خط څخه څو مستوي ګانې تېرېدلای شي؟ ولې؟
له پورتني فعاليت څخه د قضیې متن او ثبوت بيانوو.

قضيه: له يوې خارجي نقطې څخه له يوه مستقيم خط سره يوازې يو موازي مستقيم خط رسمولای شو او بس.

ثبوت: د A له نقطې او د d_1 له مستقيمې کرښې څخه يوازې يوه د P مستوي تېرېږي، ولې؟

اوس د P په مستوي کې د A له نقطې څخه يوازې د d_2 مستقيم خط د d_1 له مستقيم خط سره موازي رسمولای شو.

(پورتنی ثبوت په مسطحه هندسه کې لوستل شوی). نو پورتنی ددوا چې ټکي او خط په فضا کې وي، هم سوالی لري.



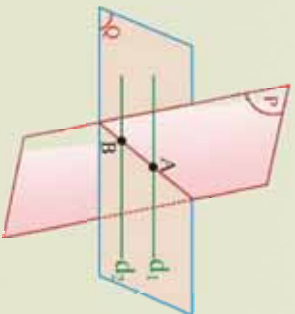
دوه د d_1 او d_2 موازي خطونه او يوه د A نقطه د P له مستوي څخه بهر (خارج) په پام کې ونیسئ.

- آیا د d_1 او d_2 مستقیم خطونه يوه بله مستوي ټاکلي شي؟
- که چیرې د P مستوي د Q مستوي د A په ټکۍ کې قطع کړي، آیا د P مستوي به د d_2 مستقیم خط هم قطع کړي؟

- آیا دوي مستويگانې يوه بله د يوه مستقیم خط په اوږدو کې قطع کوي، ولې؟
- د پورتنۍ فعالیت له سرته رسولو څخه وروسته د قضیې متن او ثبوت بیانوو.

قضیه: که دوه مستقیم خطونه موازي وي او مستوي یو له هغو څخه قطع کړي، بل یې هم قطع کوي.

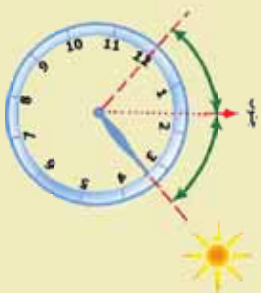
ثبوت: د d_1 او d_2 یو له بل سره موازي مستقیمونه د Q په مستوي کې پراته دي.



که د P مستوي د d_1 مستقیم د A په نقطه کې قطع کړي، نو موږ یې مستوي د d_2 مستقیم هم د B په نقطه کې قطع کوي د تعریف له مخې د d_1 او d_2 موازي خطونه یوه د Q مستوي ټاکي، د P او Q مستوي-گانې د A یوه مشترکه نقطه لري، که چیرې دوي مستويگانې یوه بله په یوه نقطه کې قطع کړي، نو ویلای شو چې هغوی یو بل د یوې مستقیمې کرښې په اوږدو کې قطع کوي، له دې امله د P او Q مستويگانې د d_2 مستقیمه کرښه د B په نقطې کې هم قطع کوي. ځکه یو مستقیم خط چې په یوې مستوي کې له دوه موازي خطونو څخه یو قطع کړي، بل یې هم قطع کوي.

پوښتنې

- 1- که چیرې دوه مستقیم خطونه له یوه دریم مستقیم خط سره موازي وي ثبوت کړئ چې دا مستقیم خطونه په خپل منځ کې هم موازي دي؟
- 2- که چیرې د E او F مستويگانې سره موازي او د L_1 مستقیم خط د E مستوي کې او د L_2 مستقیم خط د F په مستوي کې واقع وي آیا $L_1 \parallel L_2$ دی؟
- 3- که د E او F مستويگانې سره متقاطع او د P مستوي هغوی دواړه قطع کړي، آیا د E او F گډ فصل د E او P له مشترک فصل او د F او P له مشترک فصل سره موازي دی؟



په فضا کې د دوو مستقیمو کرښو تر منځ زاویه

که چیرې د یوې زاوې دوراني لوری د ساعت د عقربې په مخالف لوری حرکت وکړي، زاویه مثبت او که د ساعت د عقربې په همجهت (عین لوری) وي زاویه منفي ده.

فعالیت

- د XOY او $X'O'Y'$ زاوې داسې په پام کې ونیسئ چې ضلعي یې سره موازي او هم جهته وي.
- د $\overline{OX}$ او $\overline{O'X'}$ له ضلعو څخه د $\overline{OA}$ او $\overline{O'A'}$ دوه مساوي قطعه خطونه او د $\overline{OY}$ او $\overline{O'Y'}$ له ضلعو څخه د $\overline{OB}$ او $\overline{O'B'}$ مساوي قطعه خطونه پیل کړئ.
- د $OAA'O'$ شکل، کوم هندسي شکل لري، دلیل یې وړیاست، د OAB او $O'A'B'$ جوړ شوي

مثله له یو بل سره څه اړیکه لري؟

د پورتنۍ فعالیت له مخې د قضیې متن او ثبوت په لاندې ډول بیانولی شو.

قضیه: په فضا کې دوه زاوې، چې دوه په دوه موازي او هم جهته ضلعي ولري، یوه له بلې سره مساوي دي.



ثبوت: د XOY او $X'O'Y'$ زاوې په پام کې نيسو، داسې چې $\overline{OX} \parallel \overline{O'X'}$ او $\overline{OY} \parallel \overline{O'Y'}$ دي، یو لوری (یو جهت) هم لري. په شکل کې د OX او $O'X'$ پر خطونو د OA او $O'A'$ قطعه خطونه سره مساوي موازي او هم جهته دي.

نو د $OAA'O'$ شکل یوه متوازي الاضلاع ده. له دې امله د $\overline{OB}$ او $\overline{O'B'}$ قطعه خطونه موازي، مساوي او هم لوري (هم جهت) دي. نو $\angle ABB'A' = \angle A'B'O'$ هم یوه متوازي الاضلاع ده او $AB = A'B'$ دی.

د $O'A'B'$ او OAB مثلثونه انطباق منونکي دي. ځکه $\overline{OA} = \overline{A'O'}$, $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ او $\overline{OB} = \overline{O'B'}$ دي له دې امله $\hat{A}OB = \hat{A'O'B'}$ دي.

د قضیې پایله:

- i) که په ترتیب سره د دوو زاویو ضلعې موازي او هم لوري وي، نوموړي زاوې یو له بل سره مساوي دي.
- ii) که د دوو زاویو یوه، یوه ضلع موازي او هم جهته وي او د هغو یوه، یوه ضلع یې موازي او مختلف جهته نه (لوري) ولري، د دغو دواړو زاویو پراخوالي 180° دی. (ثبوت یې د زده‌کوونکو دنده ده).

د دوو متناظر و مستقیمو کرښو ترمنځ زاویه:

تعریف: په فضا کې د دوو متناظر و مستقیمونو ترمنځ زاویه له هغې زاوې څخه عبارت ده چې د یوې مستوي په یوه اختیاري نقطه کې له هغو سره د دوو موازي مستقیمونو د رسمولو په واسطه حاصلیږي



پوښتنې

- 1- که د دوو زاویو پراخوالی سره مساوي وي او د یوې زاوې یوه ضلع د بلې زاوې ضلعې سره موازي وي، آیا د هغو زاویو نورې ضلعې یو له بل سره موازي دي. ولې؟
- 2- که د دوو زاویو ضلعې سره موازي وي، ثابت کړئ چې د دغو زاویو، ناصف‌الزاوې سره موازي او یا سره عمود دي.
- 3- د d_1 , d_2 دوو متناظر و مستقیمونو ترمنځ زاویه پیدا کړئ.

په فضا کې موازي مستقیمونه او موازي مستوي ګانې



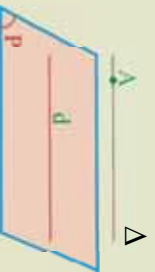
یوه مستقیمه کرښه هغه وخت له یوې مستوي سره موازي بلل کېږي چې هیڅ ګډ ټکی ونه لري. مستوي ګانې په فضا کې هغه وخت سره موازي دي چې هیڅ ګډ ټکی ونه لري.

فعالیت

- که چیرې د d مستقیم د P په مستوي کې پروت او د Δ مستقیمه کرښه د P د مستوي بهر او د d مستقیم سره موازي وي، آیا د Δ مستقیم د P له مستوي سره موازي کېدای شي؟
- دوي د P او Q متقاطع مستوي ګانې او یو مستقیم خط له دغو مستوي ګانو څخه بهر د P او Q له مستوي ګانو سره موازي په پام کې ونیسئ.

- د d مستقیم (مشترک فصل) د Δ له مستقیم خط سره موازي کېدای شي؟
- له یوې ټاکلې نقطې څخه د d_1 او d_2 دوو مستقیمو کرښو سره څو موازي مستوي ګانې چې موازي نه وي رسمولای شو؟ د فعالیتونو د هرې برخې له ترسره کولو وروسته د قضیو متن او ثبوت په ترتیب بیانوو.

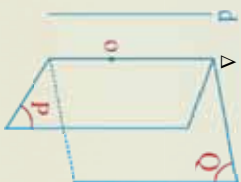
قضیه: که یو مستقیم خط د یوې مستوي له یوه خط سره موازي وي. نوموړی مستقیم خط له همدې مستوي سره موازي دی.



ثبوت: د d مستقیم خط چې د P په مستوي کې پروت او د Δ مستقیمه کرښه د P د مستوي بهر او د d له مستقیم سره موازي راکړل شوي، ثابتوو چې د Δ مستقیمه کرښه د P له مستوي سره موازي ده، که د P مستوي د Δ مستقیمه کرښه قطع کړي، د d مستقیمه کرښه چې د Δ له مستیمې کرښې سره موازي ده هم قطع کوي. دا د فرضيې خلاف ده، ځکه د d مستقیمه کرښه د P په مستوي کې پرته ده، نو د P مستوي د Δ مستقیم قطع کولای نشي.

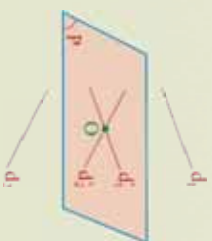
قضيه: که يوه مستقيمه کرښه له دوو متقاطع مستويگانو سره موازي وي، نوموړي مستقيمه کرښه د نوموړو مستويگانو له گډه فصل سره موازي ده.

ثبوت: د P او Q دوي متقاطع مستويگانې په پام کې نيسو چې هره يوه يې د d له مستقيمې کرښې سره موازي ده، لکه مخامخ شکل.



که د P ، Q د مستويگانو د Δ په مشترک فصل باندې د O نقطه وټاکو او له هغې نقطې څخه د d له مستقيمې کرښې سره يو موازي رسم کړو، دا موازي د Δ په مستقيمې کرښې منطبق کېږي ځکه Δ يوازني خط دی چې په دواړو مستويگانو يعني په P او Q کې شامل دی.

قضيه: د (O) له يوي ټاکلي نقطې څخه د d_1 او d_2 مستقيم خطونه چې يو له بل سره موازي نه دي يوازې يوه موازي مستوي رسمولای شو او بس.



ثبوت: د (O) له نقطې څخه د d_1' او d_2' خطونه چې په پرته بېل له d_1 او d_2 مستقیمونو سره موازي وي، رسموو د P مستوي چې د (O) له نقطې څخه تېرېږي او د d_1' او d_2' مستقيمې کرښې په خپل ځان کې لري له d_1 او d_2 سره موازي دي؟ ولې؟

که چېرې d_1 او d_2 يو له بل سره موازي وي، نو d_1' او d_2' يو پر بل منطبق کېږي.

پوښتنې

1- که چېرې د d_1 او d_2 مستقيم خطونه سره موازي وي، خو موازي مستويگانې له هغو سره رسمولای شې؟

2- که چېرې د Δ_1 ، Δ_2 او Δ_3 موازي خطونه د P مستوي او د Δ مستقيمې کرښې په واسطه په داسې حال کې چې د Δ مستقيمه کرښه د P له مستوي سره موازي ده قطع شي، ثبوت کړئ چې مخامخ قطع شوي قطعات يو له بل سره مساوي دي.

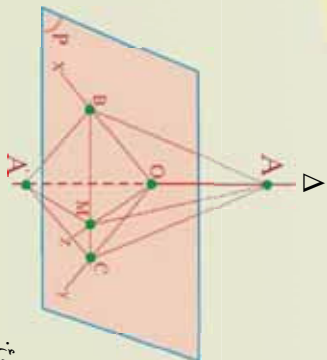


په فضا کې متعامدي مستقیمې کرښې او مستوي گانې

که د Δ مستقیمه کرښه د P مستوي په (O) ټکي کې عمود وي، آیا هغه ټول مستقیم خطونه چې د (O) له نقطې څخه تیرېږي، د Δ په مستیمې کرښې باندې عمود دي؟

فعالیت

- مخامخ شکل په پام کې ونیسئ د OX او OY مستیمونه د Δ په مستیم د (O) په نقطه کې عمود رسم کوئ.



- د P په مستوي کې د OZ اختیاري مستیمه کرښه په پام کې ونیسئ.
 - د Δ له مستیمې کرښې څخه د OA' او OX مساوي الفاصله قطعه خطونه جلا کوئ.
 - یو اختیاري قاطع داسې رسم کوئ چې د OX مستیمه کرښه د B او OY مستیمه کرښه د C او د OZ مستیمه کرښه د M په نقطو کې قطع کړي. OX او OY له AA' سره څه اړیکه لري.
 - د OZ مستیمه کرښه د Δ پر مستیمه کرښه عمود ده؟ ولې؟
- د پورتني فعالیت له تر سره کولو وروسته د قضیې متن او ثبوت داسې بیانوو.
- قضیه:** که د Δ یوه مستیمه کرښه پر هغو دوو مستیمو کرښو چې دواړه د Δ مستیمه کرښه د (O) په نقطه کې قطع کوي عمود وي، په هغو ټولو مستیمو خطونو باندې چې په مستوي کې متقاطع دي او د (O) له نقطې څخه تیرېږي، عمود ده.

ثبوت: دوي مستقيمې کرښې د $\overline{OX}$ او $\overline{OY}$ په پام کې نيسو، دا دوه مستقيموڼه د Δ پر مستقيم چې د (O) له نقطې څخه تېرېږي، عمود دي او د P مستوي جوړوي، د P په مستوي کې د OZ اختياري (کيفي) مستقيمه کرښه په پام کې نيسو، د Δ له مستقيمې کرښې څخه د $\overline{OA'}$ او $\overline{OA''}$ دوه متساوي الفاصله قطعه خطونه جلاکړو.

او د P په مستوي کې يو قاطع رسمو چې $\overline{OX}$ د B او $\overline{OY}$ د C او $\overline{OZ}$ مستقيم د M په نقطه کې قطع کړي.

$$\overline{BA'} = \overline{BA''}$$

$$\overline{CA'} = \overline{CA''}$$

د ABC او $A'B'C'$ مثالونه انطباق موندنې دي. د انطباق منلو د عمليې په وخت کې د C, B او M نقطې ثابتې پاتې کېږي او د A نقطه په A' او $\overline{MA'}$ په $\overline{MA''}$ منطبق کېږي، نو ليکلې شو. $\overline{MA'} = \overline{MA''}$ د $\Delta MA'A''$ مثل متساوي الساقين دي او د $\overline{MO}$ منځنۍ (ميانه) په عين وخت کې د $\overline{AA'}$ منځنۍ عمود دی په نتيجه کې د Δ مستقيمه کرښه د $\overline{OZ}$ پر مستقيمې کرښې باندې عمود دی.

فعاليت

- که د B او C نقطې د P او Q له ټکو څخه متساوي الفاصله وي، د BC مستقيمې کرښې هره نقطه له P او Q څخه متساوي الفاصله ده. اوس د X يوه اختياري (کيفي) نقطه د BC پر مستقيمه کرښه وټاکئ او ثابت کړئ چې P د X او Q څخه متساوي الفاصله دی.



پوښتنې

- 1- که چېرې د d_1 او d_2 خطونه يو له بل سره موازي وي، له هغو سره څو موازي مستويگانې رسمولای شئ؟
- 2- که د L خط د P پر مستوي عمود وي، آیا ټولې هغه مستويگانې چې د L خط په کې پروت دی د P په مستوي باندې عمود دی؟

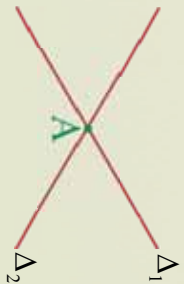
په فضا کې موازي مستوي ګانې
دوي مستوي ګانې چې هيڅ مشترکه نقطه ونه لري،
موازي مستوي ګانې بلل کېږي.



فعاليت

- د Δ_1 او Δ_2 مستقيم خطونه، چې د A په نقطه کې متقاطع دي، په پام کې ونستئ
- له دې دوو مستقيمو خطونو او د A له نقطې څخه يوه

مستوي تېرولی شو.



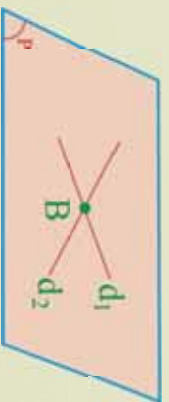
- له دې مستوي څخه بهر د d_1 او d_2 دوي مستقيمي کرنيې چې په ترتيب سره د Δ_1 او Δ_2 سره موازي او يو بل د B په

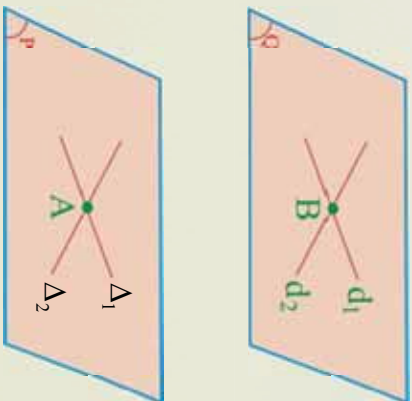
ټکي کې قطع کړي، رسم کړئ.

- هغه مستوي چې د Δ_1 او Δ_2 او د A له نقطې څخه جوړه شوې، له هغې مستوي سره چې د d_1 او d_2 مستيمو کرښو او د B له ټکي څخه جوړه شوې ده، څه اړيکه لري؟
- د پورتني فعاليت له ترسره کولو وروسته د قضبي متن او ثبوت بيانولی شو.

قضيه: که د يوې مستوي دوي متقاطع مستقيمي کرښې د بلې مستوي له متقاطع مستيمو کرښو سره موازي وي، نوموړې مستوي ګانې سره موازي دي.

ثبوت: د Δ_1 او Δ_2 مستقيم خطونه د A په نقطه کې متقاطع دي او يوه د P مستوي جوړوي. د B له نقطې څخه (چې د P مستوي بهر ده) د d_1 او d_2 مستقيم خطونه له Δ_1 او Δ_2 سره موازي رسم شوي دي، چې d_1 او d_2 هم يوه د O مستوي جوړوي، ثابتوو چې د P او O مستوي ګانې سره موازي دي.





خړنگه چې d_1 او Δ_1 سره موازي دي، نو d_1 د P له مستوي سره هم موازي دي. همدارنگه d_2 له Δ_2 سره موازي دي نو d_2 هم د P له مستوي سره موازي دی. اوس که چیرې د P او Q مستوگانې یو بل سره قطع کړې، مشترک فصل یې هم په همدې وخت کې له d_1 او d_2 سره موازي کېږي، ولې؟

دا امکان نه لري، ځکه چې د d_1 او d_2 مستقیم خطونه مقاطع دي، په نتیجه کې د P او Q مستوگانې یوه بله سره قطع کولای نشي، نو یو بل سره موازي دي.

پوښتنې

که چیرې د E او F مستوگانې سره موازي وي او د L_1 مستقیمه کرښه په E مستوي او د L_2 مستقیمه کرښه د F په مستوي کې پرتې وي، آیا $L_1 \parallel L_2$ دی؟

د څپر کې مهم ټکي

1 - دفضايي هندسې بنسټيز مفاهيم او اکسيومونه:

لومړنۍ، اصطلاحگانې Postulates:

هغه مفاهيم او مفکورې، چې پرته له کوم تعريف څخه منل کېږي، لومړني اصطلاحات بلل کېږي د مثال په توگه. ټکي (نقطه)، کرښه (خط)، مستوي او فضا.

دليل او برهان Logical Reason:

برهان د ذهن هغه عمل ته ويل کېږي چې له يو لړ مخکښو سمو وړاندیزونو او څېړنو څخه وروسته وروستيو څېړنو ته رسېږي او د هغې سموالی مخکې منل شوی وي، موږ هم کولی شو، هغه و منو.

قضيه: Theorem

هغه ادعا چې د هغې سموالی او صحت يولر منطقي دلايلو ته اړتيا ولري، قضيه بلل کېږي.

ټکي (نقطه): موږ نقطه د يو ذهني مفهوم په ډول پېژنو او هغه د لومړنۍ اصطلاح (تعريف شوې نه ده) په توگه منو.

مستقيم خط: کش شوی تار، د ميز څنډه او د خط کش ټيغه د مستقيم خط مفهوم او مطلب بيانوي. مستقيم خط د لومړنۍ اصطلاح (تعريف شوی نه دی) په ډول منو.

د مستوي لومړی اکسيوم: هغه مستقيم خط چې د يوې مستوي دوي مختلفې نقطې سره ونښلوي، په هغه مستوي کې شامل دی.

د مستوي دويم اکسيوم: له هرو درېو نقطو څخه چې د يوه مستقيم خط په استقامت پرته نه وي، يوه مستوي تېرېږي.

د متقاطع مستويگانو اکسيوم: که چېرې دوه مستويگانې يو گډ ټکی ولري، متقاطع دي او په همدې ډول که چېرې يو مستقيم خط ولري، دغه متقاطع خط ته د دوو مستويگانو مشترک فصل وايي.

فضا: فضا هم (تعريف شوې نه ده) لومړنۍ اصطلاح په توگه پېژنو.

لومړی اصل: فضا د لايتناهي نقطو مجموعه ده.

دويم اصل: لږ تر لږه د فضا څلور داسې نقطې شته چې په يوه مستوي کې واقع نه دي.

په درې بُعد فضا کې خط او مستوي:

درې بعدي فضا: هغه فضا چې موږ په کې ژوند کوو درې بعدي فضا ده.

له یو بل سره په فضا کې د دوو مستقیمو خطونو نسبي حالت

موازي

منطبق

مقاطع

متناظر

د یوې مستقیمې کرنيې او یوې مستوي نسبي حالت

مقاطع

منطبق

موازي

د دوو مستویگانو نسبي حالت

منطبق

مقاطع

عمود

په فضا کې موازي مستقیمونه:

دوې مستیمې کرنيې چې په یوې مستوي کې واقع او مشترکه نقطه ونه لري، موازي مستیمونه بلل کېږي.

په فضا کې د دوو مستیمونو تر منځ زاویه: په فضا کې دوي متوازي الاضلاع او هم جهته زاويې

سره مساوي دي.

په فضا کې موازي مستیمونه او مستوي: یو مستقیم خط له یوې مستوي سره هغه وخت موازي

بلل کېږي، چې هیڅ مشترکه(ګډه)نقطه ونه لري.

په فضا کې متعامد مستیمونه او مستویګانې:

که د Δ مستقیم د (O) په نقطه کې د P پر مستوي عمود وي، ټول هغه مستقیم خطونه چې د (O) له نقطې

خڅه تېرېږي، د Δ پر مستیمه کرښه باندې عمود دي؟

په فضا کې موازي مستوي ګانې: دوي مستویګانې، چې هیڅ ګډ ټکی ونه لري، موازي مستوي ګانې بلل کېږي.

د څپرکي پوښتنې

هرې پوښتنې ته څلور ځوابونه ورکړل شوي، سم ځواب يې پيدا او کړۍ ترې تاو کړئ.

1- د P مستوي د A او B نقطې مفروض دي. که د A او B د نقطو فاصله له P مستوي سره مساوي

وي، د P مستوي په هر حال کې:

a- AB له خط سره موازي دی b- AB خط بې له منځه تيرېږي

c- AB خط عمودي ناصف دی d- AB له خط سره موازي دي يا له AB څخه تيرېږي

2- که د Δ خط د P د مستوي په ټولو خطونو عمود وي، نو:

a- Δ د خط د مستوي پر ټولو خطونو عمود دی.

b- Δ د خط يوازي د P مستوي پر دوو خطونو عمود دی.

c- Δ د خط د P مستوي له بې شمېره خطونو سره موازي دی.

d- Δ د خط يوازي د P مستوي له يوه خط سره موازي دی.

3- په دقيق ډول له لاندې کومو اجزاو څخه يوه مستوي نه تيرېږي له:

a- هغو درې نقطو څخه چې پر يو مسقيم واقع دی. b- له دوو متقاطع خطونو څخه

c- د يو خط او د هغې له خارجي نقطې څخه d- څلور متمايزې (مختلفې نقطې)

4- له لاندې ځوابونو څخه کوم يو بې هر وخت سم نه وي.

a- که د Δ مستقيم خط د P له مستوي سره موازي وي او له هغه خط څخه يوه مستوي تېره کړو، دا

مستوي د P له مستوي سره موازي دی.

b- که د Δ او Δ' دوه خطونه د d له خط سره موازي وي، هغه وخت Δ او Δ' يو له بل سره موازي دي.

c- که د Δ او Δ' دوه خطونه موازي وي او د P مستوي د Δ خط قطع کړي، د Δ' خط هم قطع کولای شي.

d- که دوي مختلفې مستوي گانې په يوه نقطه کې شريکې وي، نو نورې مستوي گانې د ياد شوي ټکي په

امتداد شريکې دي.

5- د Δ خط د P مستوي قطع کوي، خو د P پر مستوي عمود نه دی. دا خط د P د مستوي په څو

خطونو باندې عمود دی؟

a) 0 b) 1 c) 2 d) بې شمېره

6- له لاندې ځوابونو څخه کوم یو بې هر وخت سم نه دي.

a- که کوم خط د مستوي له خطونو سره موازي وي او متمايز وي، نوموړی خط د هغې له مستوي سره موازي دی.

b- که یو خط یو له متقاطع مستویگانو څخه قطع کړي، بله هم قطع کوي.

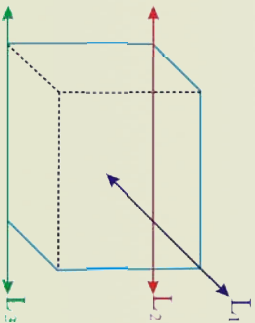
c- که یو خط یوه له دوو موازي مستویگانو څخه قطع کړي، بله یې هم قطع کوي.

d- که یوه مستوي یوه له دوو موازي مستويگانو څخه قطع کړي، بله یې هم قطع کوي.

لاندې سوالونه حل کړئ:

1- که دوه مستقیم خطونه له یوې مستوي سره موازي وي، نوموړي خطونه خپل منځ کې عمود کېدای شي.

2- په لاندې مستطیل کې د L_1 او L_3 خطونو موقعیت نظر یو بل ته څرگند کړئ. د دې خطونو کومې جوړې متقاطع، کومې جوړې یې موازي او کومې جوړې متنازې دي؟



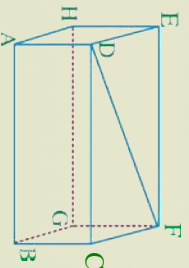
3- که د P_1 او P_2 مستويگانې د P پر مستوي باندې عمود وي، د P_1 او P_2 مستويگانې په خپل منځ کې موازي دي؟

4- په مخامخ شکل کې هر څلور ضلعي یو مستطیل دی.

a- د دوو مستويگانو نومونه واخلي چې پر AD عمود وي او ووايي ولې عمود دي؟

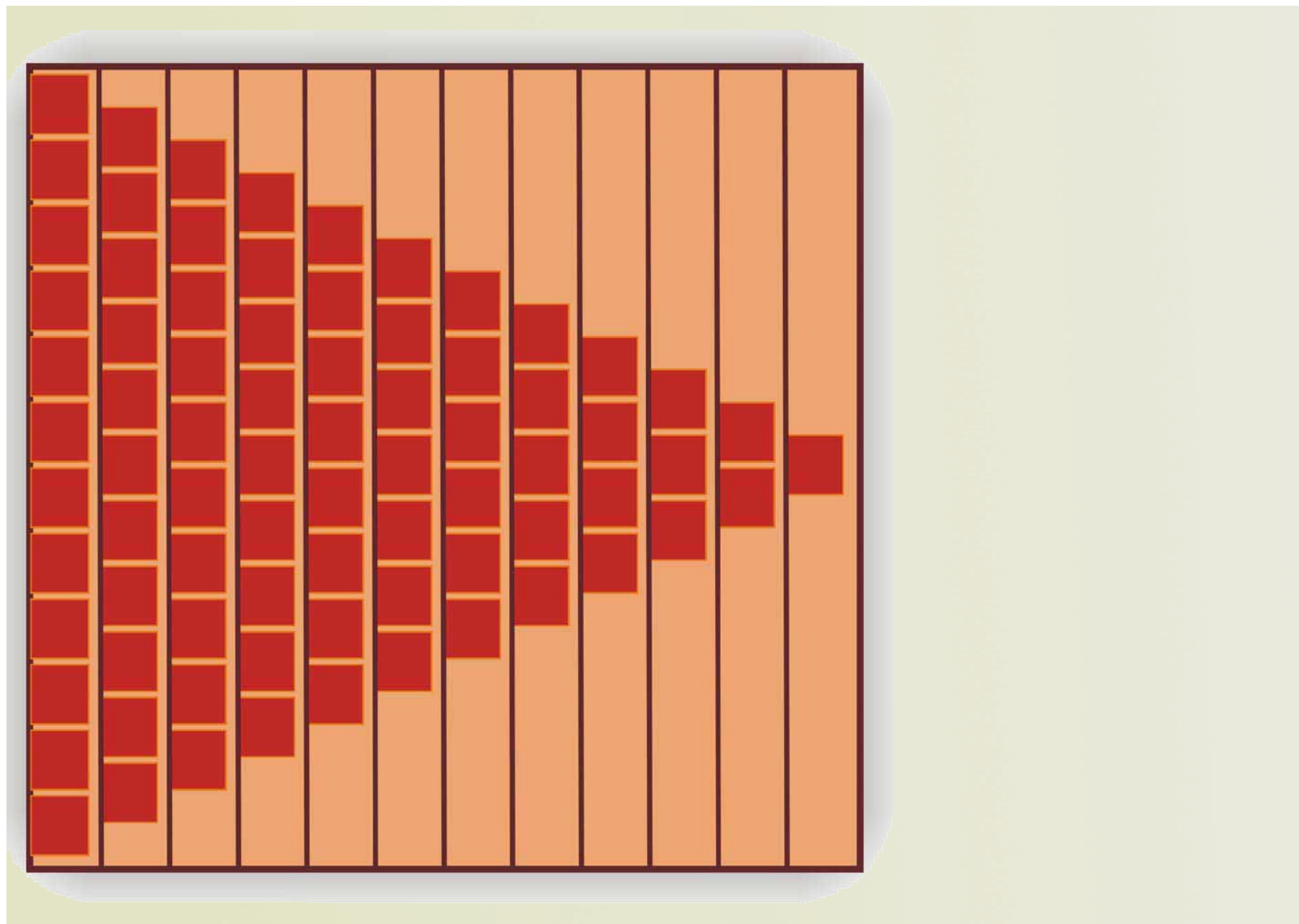
b- د دریو قطعیه خطونو، نومونه واخلي چې پر $ABCD$ مستوي باندې عمود وي.

c- د EDF زاویه قایمه ده. د $\hat{D}FC$ زاویه قایمه ده.



ڄام ڇپرڪي

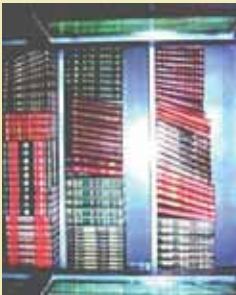
تراڌفونہ او سلسلي



ترادفونه

Sequence

په مخامخ شکل کې څه ډول ترتیب وینئ.
هر ترتیب چې شتون لري، توضیح یې کړئ.



تعریف: د $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ عددونه د عددونو د ترادف په نامه یادېږي،

یا په بل عبارت ترادف له هغې تابع څخه عبارت دی چې د تعریف ناحیه یې طبیعي عددونه او د قیمتونو ناحیه یې حقیقي عددونه تشکیلوي. غیر منظم (نامرتب) د عددونو لیکل یو ترادف نه دی.

له پورتنیو عددونو څخه هر یو د نوموړي ترادف حدوده دی، a_1 یې لومړی حد او a_n یې دویم حد او a_n دترادف $n - m$ حد دی، ترادف په لنډ ډول داسې لیکي: $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ په دې حالت کې a_n د ترادف $n - m$ حد دی.

د جفتو عددونو ترادف $2, 4, 6, 8, \dots, 2n$

د طاقو عددونو ترادف $1, 3, 5, 7, \dots, 2n-1$

د 5 د مضرب عددونو ترادف $5, 10, 15, 20, \dots, 5n$

معمولاً یو ترادف د یوه اختیاري $n - m$ حد په واسطه ټاکل او تعریفېږي؛ مثلاً:

$$a_n = 2n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$b_n = 2n - 1, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$c_n = 5n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

فعالیت

- د $\{a_n\}$ ترادف په پرمختللي (انکشافی) شکل ولیکئ.
- د $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ ترادف په پرمختللي (انکشافی) شکل ولیکئ.

هغه ترادف چې د حدودنو عددي قیمت یې په تدریجي ډول زیاتېږي متزايد ترادف بلل کېږي، لکه د جفت، طاق او 5 مضرب عددونو ترادفونه.

او هغه ترادف چې د حدودنو عددي قیمت یې په تدریجي ډول کمېږي، متناقص ترادف بلل کېږي، لکه: د 5 مضرب عددونو معکوس ترادف $\frac{1}{5n}, \dots, \frac{1}{15}, \frac{1}{10}, \frac{1}{5}$

لومړۍ مثال: د $a_n = n^2$ او $b_n = \frac{3}{n}$ ترادفونه متزايد دی، که متناقص؟
حل:

$$a_n = n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad a_n = 1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots$$

$$b_n = \frac{3}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad b_n = 3, \frac{3}{2}, 1, \frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \dots$$

ليدل کېږي چې د a_n د ترادف د حدونو عددي او عددي قیمت په تدریجي ډول زیاتېږي، نو د a_n ترادف متزايد، همدارنګه لیدل کېږي چې د b_n د ترادف د حدونو عددي قیمت په تدریجي ډول کمېږي، نو د b_n ترادف یو متناقص ترادف دی.

یادونه: هغه ترادفونه چې د حدونو شمېر یې معلوم وي معین ترادفونه او هغه ترادفونه چې د حدونو شمېر یې معلوم نه وي، د غیر معینو ترادفونو په نامه یادېږي.

دویم مثال: که د یوه ترادف $a_n = \frac{n^2}{n+1}$ وروستې حد درکړل شوی وي، 5 لومړنی حدونه یې پیدا کړئ.

حل: د 5 لومړنیو حدونو د پیدا کولو لپاره $n = 1, 2, 3, 4, 5$ قیمتونه ورکړو او په ترادف کې یې وضع کوو چې په دې ډول د ترادف 5 لومړني عناصر (حدونه) په لاس راځي.

$$a_n = \frac{n^2}{n+1}$$

$$\begin{aligned} n=1, & \quad a_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \\ n=2, & \quad a_2 = \frac{2^2}{2+1} = \frac{4}{3} \\ n=3, & \quad a_3 = \frac{3^2}{3+1} = \frac{9}{4} \\ n=4, & \quad a_4 = \frac{4^2}{4+1} = \frac{16}{5} \\ n=5, & \quad a_5 = \frac{5^2}{5+1} = \frac{25}{6} \end{aligned}$$

پوښتنې

1- په لاندې ترادفونو کې $n - m$ حد وټاکئ؟

$$\left\{ \begin{array}{l} 1, 3, 5, 7, \dots \\ \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \dots \end{array} \right\}$$

2- که یو ترادف $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ راځي شوی وي، 6 لومړني پرله پسې حدونه یې وليکئ.



حسابي تړادف
Arithmetic Sequences
 که په یوه تړادف کې د دوو پرله پسې (متعاقبو)
 حدونو ترمنځ توپیر یو ثابت عدد وي، تړادف په
 څه نوم یادېږي.

فعالیت

- مخامخ عددونه په پام کې ونیسئ 5, 8, 11, 14, 17, 20
- د لومړۍ او ورپسې حدونو ترمنځ توپیر څو دی؟
- د پورتنیو عددونو ترتیب له څو حدونو څخه جوړ شوی دی؟
- له ښې څخه کينې خواته د پورتنیو عددونو تړادف ولیکئ.

له پورتنی فعالیت څخه لاندې پایله بیانېږي:

تعریف: که په یوه حسابي تړادف کې د دوو پرله پسې حدونو ترمنځ توپیر یو ثابت عدد وي، هغه د حسابي تړادف په نوم یادېږي.

دغه ثابت عدد له ګډ توپیر (Common difference's) څخه عبارت دی او په d سره ښودل کېږي که d یو مثبت عدد ($d > 0$) وي، تړادف متزايد او که d منفي ($d < 0$) وي، تړادف متناقص بلل کېږي، لکه په لاندې مثالونو کې:

$$\left. \begin{array}{l} 2, 5, 8, 11, 14, 17, \dots \\ d = 5 - 2 = 3 \\ d = 8 - 5 = 3 \\ d = 11 - 8 = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow d = 3 > 0$$

نو تړادف متزايد دی.

$$\left. \begin{array}{l} 4, 0, -4, -8, -12, -16, -20, \dots \\ d = 0 - 4 = -4 \\ d = -4 - 0 = -4 \\ d = -8 - (-4) = -4 \\ d = -12 - (-8) = -4 \\ d = -16 - (-12) = -4 \end{array} \right\} \Rightarrow d = -4 < 0$$

ترادف متناقص دی.

لومړی مثال: داسې یو ترادف ولیکئ چې لومړی حد یې $\frac{3}{2}$ او گڼه توپیر یې 2 وي.

حل: څرنگه چې لومړی حد یې $a_1 = \frac{3}{2}$ او گڼه توپیر یې $d = 2$ دی، نو:

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

$$a_2 - a_1 = d \Rightarrow a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 - a_2 = d \Rightarrow a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 - a_3 = d \Rightarrow a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d$$

اوس د $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ قیمتونه په ترادف کې وضع کوو:

$$a_1, (a_1 + d), (a_1 + 2d), (a_1 + 3d), \dots$$

$$\frac{3}{2}, \left(\frac{3}{2} + 2\right), \left(\frac{3}{2} + 2 + 2\right), \left(\frac{3}{2} + 2 + 2 + 2\right), \dots$$

$$\frac{3}{2}, \frac{7}{2}, \frac{11}{2}, \dots, \frac{15}{2}, \dots$$

دویم مثال: کوم یوله لاندې ترادفونو څخه حسابي ترادف دی.

$$a) 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4, \dots$$

$$b) 1, 2, 4, 8, 16, \dots$$

ده جزء حل: د حسابي ترادف د تعریف په پام کې نیولو سره د حدونو گڼه توپیر په لاس راوړو:

$$1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4$$

$$d = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

$$d = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

$$d = 3 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$$

$$d = \frac{7}{2} - 3 = \frac{1}{2}$$

$$d = 4 - \frac{7}{2} = \frac{1}{2}$$

ليدل کيږي چې د پورتنۍ ترادف د ټولو حدونو ترمنځ گڼه توپير $\frac{1}{2}$ ثابت عدد دی، نو د حسابي ترادف د

تعريف پر بنسټ ويلي شو چې نوموړی ترادف يو حسابي ترادف دی.

د b جزء حل:

$$1, 2, 4, 8, 16$$

$$d = 2 - 1 = 1$$

$$d = 4 - 2 = 2$$

$$d = 8 - 4 = 4$$

$$d = 16 - 8 = 8$$

ليدل کيږي چې د پورتنۍ ترادف د ټولو عناصرو ترمنځ گڼه توپير يو ثابت عدد نه دی، نو ياد شوی ترادف حسابي ترادف نه دی.

په يوه حسابي ترادف کې د a_1 - a_n حد ټاکل:

که چيرې د يوه حسابي ترادف $a_1, a_2, \dots, a_n$ لومړی حد په a او گڼه توپير يې d وي، د a_1 - a_n حد د پيدا کولو لپاره له لاندې تحليلي ثبوت څخه گڼه اخلو، ددې کار لپاره د $5, 7, 9, 11, \dots$ ترادف په پام کې نيسو.

$$5, 7, 9, 11, \dots$$

$$d = 7 - 5 = 2$$

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

$$a_1, (a_1 + d), (a_1 + 2d), (a_1 + 3d), \dots$$

$$5, 5 + 2, 5 + 2 \cdot 2, 5 + 2 \cdot 2 \cdot 2, \dots$$

$$a_1 = 5, a_2 = 5 + 2 \cdot 2, a_3 = 5 + 2 \cdot 2 \cdot 2, \dots$$

د پورتني مثال په پام کې نيولو سره په عمومي توگه کولای شو وليکو چې:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 \\ a_2 - a_1 &= d \Rightarrow a_2 = a_1 + d \\ a_3 - a_2 &= d \Rightarrow a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d \\ a_4 - a_3 &= d \Rightarrow a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d \\ &\vdots \\ a_n - a_{n-1} &= d \Rightarrow a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-1)d \end{aligned}$$

لومړي حد	دويم حد	درېم حد	څلورم حد	م-م حد
a	$a+d$	$a+2d$	$a+3d$	$a+(n-1)d$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
a_1	a_2	a_3	a_4	a_n

په پايله کې په لاس راځي چې د a ، d ، n او a_n ترمنځ لاندې اړيکه شتون لري:

$$a_n = a + (n-1)d$$

لومړی مثال: د دغه $5, 12, \dots, -2$ حسابي ترادف 30-م حد پيدا کړئ.

حل:

$$\begin{aligned} a_1 &= -2 \\ d &= 5 - (-2) = 7 \\ n &= 30 \\ a_{30} &= ? \end{aligned} \quad \begin{cases} a_n = a + (n-1)d \\ a_{30} = -2 + (30-1)7 \\ a_{30} = -2 + 29 \cdot 7 \\ a_{30} = -2 + 203 \Rightarrow a_{30} = 201 \end{cases}$$

دويم مثال: دلاندې حسابي ترادف د حدونو شمېر په لاس راوړئ.

حل: پوهېږو چې:

$$\begin{aligned} 35, 40, 45, \dots, 2000 \\ a_n &= a + (n-1)d \\ a &= 35 \quad 2000 = 35 + 5n - 5 \\ d &= 40 - 35 = 5 \quad 2000 = 30 + 5n \\ a_n &= 2000 \quad 2000 - 30 = 5n \\ n &= ? \quad 1970 = 5n \Rightarrow n = 394 \end{aligned}$$

- که چترې په یوه حسابي ترادف کې $a_1 = -11, d = 4$ وي، a_2 او a_3 حدوده پیدا کړئ.

د حسابي ترادف وسطي حد:

که د یوه حسابي ترادف درې پرله پسې حدوده د a_{n-1}, a_n, a_{n+1} ولرو، په داسې حال کې چې

$$n = 2, 3, 4.$$

$$a_{n-1} + a_{n+1} = [a_1 + (n-2)d] + [a_1 + nd]$$

$$= [a_1 + nd - 2d] + [a_1 + nd] = [a_1 + nd - 2d + a_1 + nd]$$

$$a_{n-1} + a_{n+1} = [2a_1 + 2nd - 2d] = 2[a_1 + (n-1)d] = 2a_n$$

$$\Rightarrow 2a_n = a_{n-1} + a_{n+1} \Rightarrow a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

لومړی مثال: د 7 او 23 عددونو حسابي اوسط عبارت دی له:

$$a_n = \frac{7+23}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

دویم مثال: د x عدد داسې وټاکئ چې د $\underbrace{2x+1}_{a_{n+1}}, \underbrace{2x-4}_{a_n}, \underbrace{3x+3}_{a_{n-1}}$ درې حده حسابي ترادف تشکیل

کړي، ترادف یې ولیکئ.

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \Rightarrow 2x - 4 = \frac{3x + 3 + 2x + 1}{2} = \frac{5x + 4}{2}$$

$$4x - 8 = 5x + 4 \Rightarrow 4x - 5x = 4 + 8 = 12 \Rightarrow -x = 12$$

$$x = -12$$

$$\text{ترادف یې عبارت دی له: } 3(-12) + 3, \quad 2(-12) - 4, \quad 2(-12) + 1$$

$$-24 + 1, -24 - 4, -36 + 3 \Rightarrow -23, -28, -33, -38, -43, \dots$$

یادونه

که د یوه حسابي ترادف n -ام او m -ام حدوده معلوم وي، یعنې:

$$a_n = a + (n-1)d \quad \dots\dots\dots I$$

$$a_m = a + (m-1)d \quad \dots\dots\dots II$$

لوہوچی مثال: دیوہ حسابی ترادف پنہم حد 27 او نہم حد یی 47 دی، گنہ تویر او لوہوچی حد یی پیلدا کرئی، پہ پائی کی یی ترادف بستی کرئی.

$\square$, $\square$, $\square$, $\square$, $\square$, $\square$, 27 , $\square$, $\square$, $\square$, 47

حل:

ترادف يي عبارت دی له: 7,12,17,22,27,32,37,42,47

دویم مثال: د طبیعی عددونو معکوس ترادف یو هارمونیکی ترادف دی.

$$\{a_n\} = \frac{1}{n}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}$$

دريم مثال : که چيري په يوه هارمونيکي ترادف کې $a_1 = \frac{1}{4}$ او $d = -3$ وي، هارمونيکي ترادف يې په

لاس راوړئ

حل :

$$\frac{1}{4}, \left(\frac{1}{4} - 3\right), \left(\frac{1}{4} - 3 - 3\right), \left(\frac{1}{4} - 3 - 3 - 3\right), \dots$$

$$\frac{1}{4}, -\frac{11}{4}, -\frac{23}{4}, -\frac{35}{4}, -\frac{47}{4}, \dots$$

آيا د طبيعي طاقو عددونو معکوس ترادف يو هارمونيکي ترادف دی، $n - 1$ م حد يې وليکئ.

هارمونيکي حسابي اوسط: که درې مسلسل عناصر a_{n-1} ، a_n او a_{n+1} په داسې حال کې چې

$$d = \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n-1}}$$

د a_{n+1} او a_{n-1} ترمنځ چې a_n خرنګه چې

يوه هارمونيک ترادف حلونه دي لرو، چې:

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_{n-1}} \quad \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{(a_{n+1})(a_{n-1})} = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \cdot \frac{1}{a_n} = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2a_n}$$

$$a_n = \frac{2(a_{n-1})(a_{n+1})}{a_{n-1} + a_{n+1}}$$

په پايله کې پورتنی اړیکه چې هارمونيک حسابي اوسط ښيي، ليکلای شو:

$$a_n = \frac{2(a_{n-1})(a_{n+1})}{a_{n-1} + a_{n+1}}$$

مثال : د 2 او 8 عددونو هارمونيکي اوسط پيدا کړئ.

حل: له $a_n = \frac{2(a_{n-1})(a_{n+1})}{a_{n-1} + a_{n+1}}$ فارمول څخه په کار اخيستي سره لرو چې:

$$a_n = \frac{2(2 \cdot 8)}{2 + 8} = \frac{2 \cdot 16}{10} = \frac{16}{5} = 3.2$$



1- د مخامخ ترادف 35-ام حد پيدا کړئ. $-2, 5, 12, \dots$

2- آيا $1, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}$ يو حسابي ترادف تشکيلوي؟ د پوښتنې د سموالی په صورت کې يې مشترک توپير پيدا کړئ.

3- د $2\sqrt{2}$ او $16\sqrt{2}$ تر منځ حسابي اوسط په لاس راوړئ.

4- که $a_1 = -\frac{1}{2}$ ، $a_{10} = \frac{84}{2}$ وي د d قيمت په لاس راوړئ.

5- له لاندي ترادفونو څخه کوم يو حسابي ترادف نه دی.

a) $2, \frac{9}{4}, \frac{5}{2}, \frac{11}{4}, \dots$

b) $3, 6, 9, 12, \dots$

هندسي ترادف

Geometric Sequences

که د شطرنج د یوې تختې په لومړۍ خانه کې یوه دلته غنم او په دویمه خانه کې یې دوه دانې غنم په همدې ډول که په هره وروستی خانه کې په مخکنۍ خانې دوه برابره غنم کېښودل شي، نو د شطرنج د تختې په اخره خانه کې (یوه د شطرنج تخنه 64 خانې لري) به څو دانې غنم وي.



فعالیت

- د مخامخ ترادف عددونه په پام کې ونیسئ.
 - د پورتنۍ ترادف د عناصرو ترمنځ کومه اړیکه موجوده ده؟
 - د پورتنۍ ترادف د دوو پرله پسې حلدونو ترمنځ نسبت پیدا او یو له بل سره یې پرتله کوئ.
- له پورتنۍ فعالیت څخه کولای شو لاندې پایله بیان کړو:

پایله

هغه ترادف چې د دوو پرله پسې حلدونو ترمنځ نسبت یې یو ثابت عدد q وي، د هندسي ترادف په نامه یادېږي، یعنې:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \Leftrightarrow a_{n+1} = a_n \cdot q, \quad n=1,2,3, \dots$$

$$a_{1+1} = a_1 \cdot q \Rightarrow a_2 = a_1 q$$

$$a_{2+1} = a_2 \cdot q = a_1 q \cdot q = a_1 q^2$$

$$a_{3+1} = a_3 \cdot q = a_1 q^2 \cdot q = a_1 q^3$$

دلته q گډه نسبت او a_1 د ترادف لومړۍ حد دی.

هندسي ترادف هغه وخت پېژندل کېږي چې لومړۍ حد او گډه نسبت یې معلوم وي.

لومړۍ مثال: د $6, 12, 24, 48, 96$ هندسي ترادف په پام کې ونیسئ، گڼه نسبت یې په لاس راوړئ.

حل: هر حد یې په مخکیني حد باندې ویشو:

$$\begin{array}{ccccccc} 96 & & 48 & & 24 & & 12 & & 6 \\ & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\ q = \frac{48}{96} = \frac{1}{2} & & q = \frac{24}{48} = \frac{1}{2} & & q = \frac{12}{24} = \frac{1}{2} & & q = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \end{array}$$

فعالیت

- په یوه هندسي ترادف کې $a_1 = 2$ او $q = 3$ دی، a_2 ، a_3 او a_4 حدونه پیدا کړئ.

يادونه

$q > 1$ لپاره ترادف متزايد دی.

$q < 1$ لپاره ترادف متناقص دی.

$q = 1$ لپاره ثابت ترادف په لاس راځي.

دویم مثال: د $100, 300, 900, 2700$ هندسي ترادف په پام کې ونیسئ لومړی حد او گڼه نسبت یې په لاس راوړئ او وویاست چې پورتنۍ هندسي ترادف متزايد دی او که متناقص.

حل:

$$\text{حد لومړی} = a = 2700$$

$$\text{نسبت گڼه} = q = \frac{900}{2700} = \frac{1}{3}$$

په پورتنۍ مثال کې $q = \frac{1}{3} < 1$ دی، نو نوموړی ترادف متناقص دی.

په هندسي ترادف کې د $m-n$ حد پيدا کول:

که په يوه هندسي ترادف کې a لومړی حد، q ګڼه نسبت او n د ترادف د حدودو شمېر وي، نو د $m-n$ حد پيدا کولو لپاره له لاندې تحليلي ثبوت څخه کار اخلو.

که چيرې هندسي ترادف د $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ په پام کې ونيسو، نو په لاندې ډول کرڼه کوو:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 \\ q &= \frac{a_2}{a_1} \Rightarrow a_2 = a_1 \cdot q \\ q &= \frac{a_3}{a_2} \Rightarrow a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q \cdot q = a_1 q^2 \\ q &= \frac{a_4}{a_3} \Rightarrow a_4 = a_3 \cdot q = a_1 q^2 \cdot q = a_1 q^3 \\ &\vdots \\ q &= \frac{a_n}{a_{n-1}} \Rightarrow a_n = a_{n-1} \cdot q = (a_1 q^{n-2}) \cdot q = a_1 q^{n-1} \end{aligned}$$

اوس د $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ په ترادف کې يې قيمتونه ږدو:

لومړی حد	دویم حد	درېم حد	څلورم حد	$m-n$ حد
a_1	a_2	a_3	a_4 , ... , a_n	
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$, ... , $\downarrow$	
a_1	$a_1 q$	$a_1 q^2$	$a_1 q^3$, ... , $a_1 q^{n-1}$	

يعنې په هندسي ترادف کې $m-n$ حد يا عمومي حد، د دغې اړيکې $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ په واسطه پيدا کېږي.

لومړی مثال: د لاندې هندسي ترادف شپږم حد پيدا کړئ.
حل: $5, -10, 20, -40, \dots$

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 5 \\ q = \frac{-10}{5} = -2 \\ n = 6 \\ a_6 = ? \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} a_n = aq^{n-1} \\ a_6 = 5(-2)^{6-1} \\ a_6 = 5(-2)^5 \Rightarrow a_6 = 5(-32) \\ a_6 = -160 \end{array} \right.$$

دویم مثال: د $2, 4, 8$ هندسي ترادف دوولسم حد په لاس راوړئ.
حل:

$$\left\{ \begin{array}{l} n = 12 \\ a = 8 \\ q = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_n = aq^{n-1} \\ a_{12} = 8\left(\frac{1}{2}\right)^{12-1} = 8\left(\frac{1}{2}\right)^{11} = 8 \frac{1}{2^{11}} \\ a_{12} = \frac{8}{2^{11}} = \frac{2^3}{2^{11}} = 2^{3-11} = 2^{-8} = \frac{1}{2^8} = \frac{1}{256} \end{array} \right.$$

د هندسي ترادف وسطي حد:

که a, M, b د هندسي ترادف پر له پسې حلونه وي، د a, M, b ترمنځ اړیکه پيدا کړئ.

$$\left\{ \begin{array}{l} q = \frac{M}{a} \\ q = \frac{b}{M} \end{array} \right\} \Rightarrow q = q \Rightarrow \frac{M}{a} = \frac{b}{M} \Rightarrow M^2 = a \cdot b$$

$$M = \sqrt{a \cdot b}$$

له پاستي فورمول څخه ویلی شو که چېرې a او b دوه مثبت حقيقي عددونه وي، نو د M حقيقي مثبت عدد ته د a او b هندسي اوسط (Geometric mean) ویلي.

درېم مثال: د 3 او 12 عددونو هندسي وسط پيدا كړئ.

حل:

$$\left. \begin{array}{l} a=3 \\ b=12 \end{array} \right\} M = \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{3 \cdot 12} = \sqrt{36} = 6$$

$$M = 6$$

څلورم مثال: د 2، 32، ؟، ؟، ؟، ؟ هندسي ترادف نا معلوم حدوده پيدا كړئ.

حل:

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = 2 \\ n = 5 \\ a_5 = 32 \\ q = ? \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a_5 = a \cdot q^{n-1} \Rightarrow 32 = 2q^{5-1} \Rightarrow 32 = 2q^4 \\ q^4 = \frac{32}{2} = 16 \Rightarrow q^4 = 16 \Rightarrow q^4 = 2^4 \Rightarrow \boxed{q = 2} \end{array}$$

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = a_1 \cdot q = 2 \cdot 2 = 4$$

$$a_3 = a_2 \cdot q = a_1 q^2 = 2 \cdot 2^2 = 8$$

$$a_4 = a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^3 = 2 \cdot 2^3 = 16$$

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \text{ يا } 2, 4, 8, 16, 32$$

نو هندسي ترادف ټي عبارت دي له:

فعاليت

- که په هندسي ترادف کې a_n ، m - امد، n د ترادف د حدودنو شمېر او q گڼه نسبت وي، د q لپاره عمومي فورمول پيدا کړئ.

لوېمری مثال: x داسې وټاکئ چې له لاندې حدودنو څخه يو هندسي ترادف جوړ شي.

$$x-1, x+3, x+1$$

$$M = \sqrt{a \cdot b} \Rightarrow (x+3) = \sqrt{(x-1)(x+1)} \Rightarrow (x+3)^2 = (x-1)(x+1)$$

$$x^2 + 6x + 9 = x^2 - 1 \Rightarrow 6x + 10 = 0, x = -\frac{10}{6} = -\frac{5}{3}$$

$$x = -\frac{5}{3}$$



1- د هندسي ترادف 5 حلونه داسې وليکئ چې لومړی حد يې 5 او اخيري حد يې $\frac{5}{16}$ وي.

2- کوم يو له لاندې ترادفونو څخه هندسي ترادف دی.

a) $\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \dots$

b) $-4, -2, 0, 2, 4, \dots$

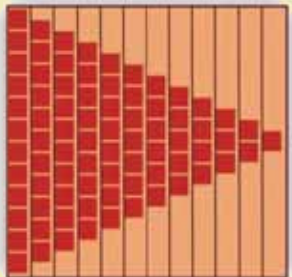
3- د $\frac{5}{2}, \frac{5}{8}, \dots$ هندسي ترادف دوولسم حد پيدا کړئ.

4- د $\sqrt{3}$ ، $\frac{\sqrt{3}}{4}$ هندسي وسط په لاس راوړي.

5- د 27 ، ؟ ، ؟ ، ؟ ، $\frac{1}{3}$ حدونو تر منځ درې هندسي وسطونه په لاس راوړئ.

د ترادفونو قسمي مجموعه

- a - په لسم کتار کې د قوطیو شمېر څو دی ؟
b - په الماری کې د ټولو قوطیو شمېر پیدا کړئ ؟



فعالیت

- د $2, 4, 6, 8, \dots$ ترادف په پام کې ونیسئ.
 - د دویم او دریم حدونو د جمعې حاصل ولیکئ.
 - د لس لومړیو حدونو د جمعې حاصل پیدا کړئ.
 - د $n - 1$ ام حد د جمعې حاصل ولیکئ.
- له پورتنی فعالیت څخه لاندې پایله بیانېږي:

څرنگه چې د لومړی n حدونو د جمعې حاصل مشکل دی چې ټول n حدونه یې ولیکو، نو ځکه یې دوه یا درې لومړی حدونه لیکو او وروسته له دریو ټکو $n - 1$ ام حد لیکو.

څرنگه چې یو ترادف د بې نهایت حدونو لرونکی دی، که د زیاتو حدونو د جمعې حاصل، لکه: 100, 1000 او داسې نورو حدونو په پام کې وي، نو د جمعې حاصل یې سرخوړي جوړوي.

په عمومي ډول د ترادف n لومړیو حدونو $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ د جمعې حاصل په لاندې ډول لیکو:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i$$

د اسانتیا او لنډیز لپاره په محاسبو کې د $\sum$ له سمبول څخه کار اخلي.

د $\sum$ پورتنی او ښکتنی نښې داراښتي چې له 1 څخه تر n پورې ټول نام عددونه اخلي، i د انلوکس په نامه یادېږي. د یوې مجموعه د انلوکس لپاره هر حرف کارول کېږي، خو د j, k, n, i حروف ډېر معمول دي.

$$\sum_{k=1}^n 2k = \sum_{i=1}^n 2i = \sum_{j=1}^n 2j = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + 2n$$

مثلاً:

لوپړی مثال: لاندې مجموع ($\sum_{i=1}^7$) په غږیدلي شکل ولیکئ.

$$\sum_{i=1}^7 \frac{1}{i} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} = \frac{1089}{420} \quad \text{حل:}$$

دویم مثال: لاندې د جمعې حاصل د مجموعې ($\sum$) په شکل ولیکئ.

a) $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1)$

b) $1 + 4 + 9 + \dots + n^2$

د a جزء حل:

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1) = \sum_{i=1}^n (2i - 1)$$

د b جزء حل:

$$1 + 4 + 9 + \dots + n^2 = \sum_{i=1}^n i^2$$

درېم مثال: لاندې مجموعه په پرمختللي (غږیدلي) شکل ولیکئ.

$$\sum_{i=4}^n i(i+2) = ?$$

حل:

$$\sum_{i=4}^n i(i+2) = 4(4+2) + 5(5+2) + 6(6+2) + 7(7+2) + \dots + n(n+2)$$

$$= 4 \cdot 6 + 5 \cdot 7 + 6 \cdot 8 + \dots + n(n+2)$$

$$= 24 + 35 + 48 + 63 + \dots + n(n+2)$$

څلورم مثال: د دغې مجموعې $\sum_{n=7}^{10} \frac{n+1}{n-1}$ حاصل په لاس راوړئ.

حل:

$$\sum_{n=7}^{10} \frac{n+1}{n-1} = \frac{7+1}{7-1} + \frac{8+1}{8-1} + \frac{9+1}{9-1} + \frac{10+1}{10-1} = \frac{8}{6} + \frac{9}{7} + \frac{10}{8} + \frac{11}{9}$$

$$= \frac{4032 + 3888 + 3780 + 3696}{3024} = \frac{15396}{3024} = \frac{5132}{108}$$

تراسه مويوازي د يوه ترادف د n حدونو د جمعې حاصل وڅېړل، که وغواړو د يوه ترادف $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ د ټولو حدونو د جمعې حاصل پيدا کړو، په دې صورت کې ليکو:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

په دې حالت کې i ټول طبيعي عددونه اخېستلاى شى.

د $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ سلسله د بې نهايت سلسلې (Series) په نامه يادېږي.

د $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ عددونه د سلسلې حدونه او a_n د سلسلې n -ام حد يا دسلسلې عمومي حد بلل کېږي.

څرنگه چې موږ نشو کولای، د عددونو بې نهايت شمېر جمع کړو، خو په رياضي کې د ځينو قاعدو په کارولو سره کولای شو، يړې سلسلې ته د يوې مجموعې نسبت ورکړو، خو دلته غواړو د يوې سلسلې د n حدونو مجموعه پيدا کړو.

د يوې سلسلې د n لومړنو عناصرو مجموعه $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ د $\sum_{i=1}^{\infty} a_k$ د نوموړي سلسلې د n حدونو د قسمي مجموعې په نامه يادېږي، که هغه په S_n وښيو، نو لرو:

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_k \end{aligned}$$

مثال: د $1 + 2 + 3 + \dots + n$ او S_8 حساب کړئ.

حل:

$$S_6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$$

$$S_8 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$$

که $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ او $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ دوي سلسلې او c يو ثابت عدد وي لاندې، خاصيتونه د قسمي مجموعو لپاره سم دي:

$$\sum_{k=1}^n c = c + c + \dots + c = nc$$

$$\sum_{k=1}^n ca_k = c \sum_{k=1}^n a_k$$

$$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k$$



1. لاندې مجموعې حساب کړئ.

$$a) \sum_{i=1}^6 \sqrt{i}$$

$$b) 3 \sum_{i=1}^6 \frac{1}{i+1}$$

$$c) \sum_{k=1}^3 (4k^2 - 3k)$$

2. لاندې مجموعې د $\sum$ په شکل کې ولیکئ.

$$a) \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{19}{20}$$

$$b) 1 + 4 + 9 + \dots + n^2$$

$$c) 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n-1)$$

3. لاندې قسمي مجموعې په لاس راوړئ.

$$a) \sum_{i=4}^n i(i+2)$$

$$b) \sum_{i=1}^n (3i-2)$$

$$c) \sum_{i=1}^n (2+5i)$$

د حسابي ترادف د n لومړيو حدودو قسمني مجموعه
 که $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ یو حسابي ترادف وي، نو
 $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ د یوې حسابي سلسلې
 قسمني مجموعه کېدلای شي؟

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \\ d &= \\ a_n &= \end{aligned} \right\} ?$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n =$$

$$\frac{n}{2} \cdot [2a + (n-1) \cdot d]$$

که چېرې د یوه حسابي ترادف د حدودو ترمنځ د جمعې نښه وي، هغې ته حسابي سلسله ویل کېږي. بیا به بل عبارت د یوه حسابي ترادف د جمعې حاصل ته حسابي سلسله ویلي.

په یوه حسابي ترادف کې چې لومړی حد یې a گڼد فرق یې d او اخیري حد یې a_n وي، د حدودو د جمعې لپاره عمومي فورمول داسې په لاس راوړو:

$$S = a + (a + d) + (a + 2d) + (a + 3d) + \dots + (a_n - 2d) + (a_n - d) + a_n \quad \dots I$$

$$S = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \dots + (a + 2d) + (a + d) + a \quad \dots II$$

د I او II اړیکې خوا په خوا جمع کوو:

$$2S = \underbrace{(a + a_n) + (a + a_n) + (a + a_n) + \dots + (a + a_n) + a + a_n}_{n \text{ ځلې } n}$$

$$2S = n(a + a_n) \Rightarrow S = \frac{n}{2}(a + a_n) \dots I$$

د I فورمول د حسابي سلسلې جمع رانښتي چې لومړی حد، اخیري حد او د جملاتو شمېر یې معلوم وي.

لومړۍ مثال: د حسابي سلسلې د جمعې حاصل په لاس راوړئ، داسې چې $a_n = 25, a = 4$ او د
حدونو شمېر يې 8 وي.

حل:

$$a = 4$$

$$a_n = 25 \quad S = \frac{n}{2}(a + a_n)$$

$$n = 8 \quad S = \frac{8}{2}(4 + 25) \Rightarrow S = 4(29) = 116$$

که چيرې په يوه حسابي سلسله کې لومړۍ حد، د حدونو شمېر او گډه توير ورکړل شوی وي، د جمعې
حاصل يې له لاندې اړیکې څخه په لاس راځي:

$$S = \frac{n}{2}(a + a_n)$$

$$a_n = a + (n - 1)d$$

$$S = \frac{n}{2}[a + a + (n - 1)d] \Rightarrow S = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d] \dots\dots\dots \text{III}$$

دویم مثال: د لاندې سلسلې د 201 حدونو د جمعې حاصل په لاس راوړئ:

$$7 + 11 + 15 + \dots$$

حل:

$$\left. \begin{array}{l} a = 7 \\ d = 4 \\ n = 201 \\ S_{201} = ? \end{array} \right\} \begin{array}{l} S = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d] \\ S_{201} = \frac{201}{2}[2 \cdot 7 + (201 - 1)4] \\ S_{201} = \frac{201}{2}(14 + 200 \cdot 4) \Rightarrow S_{201} = \frac{201}{2}(14 + 800) = \frac{201}{2} \cdot 814 \\ S_{201} = 81807 \end{array}$$

فعالیت

- د طبیعی عددونو سلسله په پام کې ونیسئ، لومړی حد، گڼد توپیر او $n - m$ حد یې ولیکئ وروسته د مسلسلو طبیعی عددونو د جمعې د حاصل عمومي فورمول په لاس راوړئ.

په یاد ولرئ: د طبیعی جفت پر له پسې عددونو د جمعې حاصل هم یوه حسابي سلسله ده چې فورمول یې په لاندې ډول په لاس راوړو: $2 + 4 + 6 + 8 \dots$

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 2 \\ d = 2 \\ n = n \\ S_n = ? \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d] \\ S_n = \frac{n}{2} [2 \cdot 2 + (n-1)2] \\ S_n = \frac{n}{2} [4 + 2n - 2] = \frac{n}{2} (2 + 2n) \Rightarrow S_n = n(n+1) \end{array}$$

درېیم مثال: د جفتو پر له پسې عددونو د سلسلې $(\dots + 8 + 6 + 4 + 2)$ د 200 حدونو د جمعې حاصل په لاس راوړئ:

حل:

$$\left\{ \begin{array}{l} n = 200 \\ S_{200} = ? \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} S_n = n(n+1) \\ S_{200} = 200(200+1) \Rightarrow S_{200} = 200(201) \\ S_{200} = 40200 \end{array}$$

فعالیت

- د طبیعی طاقو پر له پسې عددونو د حسابي سلسلې د جمعې حاصل فورمول پیدا کړئ.
- او د طبیعی پر له پسې عددونو د جمعې حاصل د $S = \frac{n}{2} (n+1)$ فورمول په واسطه محاسبه کړئ (د پورته فورمولونو ثبوت د زده‌کوونکو دنده ده).



1. د لاندې حسابي ترادفونو لسم او n - ام حدوده پيدا او همدارنگه د نوموړو ترادفونو د لس حدودو د جمعې حاصل په لاس راوړئ.

i) $2, 0, -2, -4, \dots$

ii) $1, 5, 9, 13, \dots$

iii) $-2, -1, 0, 1, 2, \dots$

2. که یو ترادف د $2, 5, 8, 11, \dots$ په ډول راځي شوی وي. د لاندې مجموعو قیمتونه حساب کړئ.

a) S_8

b) S_{10}



د یوه هندسي ترادف د n حدونو د جمعي حاصل

که چیرې یوه مڼه نیمه او نیمه بیا نیمه او همداسې ادامه ورکړو یو هندسي ترادف په لاس راځي، له لومړۍ برخې نیولې، څو برخې سره جمع کړو چې د جمعي حاصل مساوي په 2 منډ شي.

فعالیت

- یو هندسي ترادف چې لومړۍ جمله یې a_1 او د دوو پرله پسې جملو ترمنځ نسبت یې مساوي په q راکړل شوی وي، لاندې فعالیت سرته ورسوئ.
- د ترادف دویمه جمله څو ده؟
- که چیرې دویمه جمله په q کې ضرب شي، د ضرب حاصل یې له دریمې جملې سره پرتله کړئ.
- د ترادف د n جملو د جمعي حاصل د فورمول پیدا کولو لپاره څه وړاندیز لري؟

پایله:

په یوه هندسي ترادف کې هر راتلونکی حد د مخکیني حد له ضرب څخه په q کې، په لاس راځي. دا خبره د ټولو حدونو لپاره یوه باوري خبره ده، په دې ډول د یوه هندسي ترادف $\{a_n\}$ د n جملو د جمعي د

$$\text{حاصل } (S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n) \text{ قیمت عبارت دی، له: } q \neq 1, \quad S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

د بورتني اړیکې ثبوت کولای شو په اسانۍ سره په لاس راوړو:

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-1} \quad \dots\dots\dots I$$

$$S_n \cdot q = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \dots + a_1q^{n-1} + a_1q^n \quad \dots\dots\dots II$$

له I اړیکې څخه د II اړیکه کموو:

$$S_n - S_n \cdot q = a_1 - a_1q^n = a_1(1 - q^n)$$

$$S_n(1 - q) = a_1(1 - q^n)$$

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{(1 - q)}, \quad q \neq 1$$

پاسنې اړیکه هغه اړیکه ده، چې د هندسي ترادف د n جملو د جمعي حاصل په لاس راوړي.

لومړۍ مثال: په يوه هندسي ترادف کې لومړی حد $a_1 = 2$ او ثابت نسبت $q = \frac{1}{2}$ دی. د پاسني ترادف 5 لومړۍ متوالي حدوده او د لسو جملو د جمعې حاصل پيدا کړئ.

حل: پورهېرو چې $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ ده، نو:

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = 2 \\ q = \frac{1}{2} \\ S = ? \end{array} \right\} \begin{array}{l} a_1 = 2\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 2 \\ a_2 = 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \\ a_3 = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{3-1} = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \end{array} \quad \begin{array}{l} a_4 = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{4-1} = \frac{1}{4} \\ a_5 = 2\left(\frac{1}{2}\right)^4 = 2 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{8} \end{array}$$

$$S_n = a_1 \frac{(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow S_{10} = 2 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{2}} \Rightarrow S_{10} = 2 \cdot \frac{1024 - 1}{2 - 1} = 2 \cdot \frac{1024}{1} = 2048$$

$$S_{10} = 2 \cdot \frac{1024}{1} = 2048 \quad \frac{1023}{1} \cdot \frac{4}{1} = 4092 \quad \frac{4092}{1024} = 3.99609375$$

دویم مثال: د لاندې هندسي ترادف د څو جملو مجموعه 80 کېږي؟

2, 6, 18, ...

حل:

$$\left. \begin{array}{l} a = 2 \\ q = \frac{6}{2} = 3 \\ n = ? \\ S = 80 \end{array} \right\} \begin{array}{l} S = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1} \\ 80 = \frac{2(3^n - 1)}{3 - 1} \\ 80 = (3^n - 1) \Rightarrow 80 + 1 = (3^n) \\ 81 = 3^n \Rightarrow (3)^4 = 3^n \\ \Rightarrow n = 4 \end{array}$$

يعني د پاسني هندسي ترادف د 4 جملو مجموعه 80 کېږي.

پوښتنې

1. په $2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \dots$ هندسي ترادف کې د 10 جملو د جمعې حاصل په لاس راوړئ.
2. د 3, 6, 12, ... هندسي ترادف د حدودو شمېر او مجموعه پيدا کړئ.
3. په 4, 12, 36, ... ترادف کې د څو جملو د جمعې حاصل 484 کېږي، د n - ام حد قيمت پيدا کړئ.

لايتناهي هندسي سلسلي

$$S_{\infty} = \frac{a}{1-q}, |q| < 1$$

که د ترادف جملو ته په غور پاملرنه وکړو، په اسانۍ ليدل کېږي چې ترادف، جمله په جمله کوچنی کېږي. آیا هر هندسي ترادف يوه عدد ته نږدې کېږي؟

که چيرې په يوه هندسي سلسله کې $|q| \geq 1$ او د حدونو شمېر يې معلوم نه وي، هغه د متبايعې سلسلې (Divergent series) په نامه يادېږي.

او که چيرې $|q| < 1$ وي، هغه د متقاربې سلسلې (Convergent series) په نامه يادېږي. د متقاربو او متبايعو سلسلو د جمعې حاصل د پيدا کولو فورمول:

$$S = a \frac{1-q^n}{1-q} = a \frac{-(q^n-1)}{-(q-1)} = a \left(\frac{q^n-1}{q-1} \right)$$

که سلسله متبايعه $|q| \geq 1$ او د حدونو شمېر يې نهايت وي، يعنې $n \rightarrow \infty$ نو پورهېږو چې:

$$S_{\infty} = \frac{aq^{\infty} - a}{q-1} = \frac{aq^{\infty} - a}{q-1} = \frac{\infty - a}{q-1} = \infty \Rightarrow S_{\infty} = \infty$$

که سلسله متقارب $|q| < 1$ او د جملو شمېر يې نهايت وي، نو $q^n \rightarrow 0$ کوي.

$$S = a \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \Rightarrow S_{\infty} = \frac{a-aq^n}{1-q} = \frac{a-a \cdot 0}{1-q} = \frac{a}{1-q}$$

يعنې که سلسله متقارب ($|q| < 1$) او د جملو شمېر يې يې نهايت وي، د نوموړی سلسلې د جمعې حاصل

$$\text{عبارت دی له: } S_{\infty} = \frac{a}{1-q}$$

لومړی مثال: د $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$ د مجموعې حاصل محاسبه کړئ.

حل: په دې سلسله کې $a = 1$ ، $q = \frac{1}{2}$ دی، څرنگه چې $\left| \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} < 1$ دی، نو سلسله متقارب ده:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{a}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

دویم مثال: که په یوه هندسي سلسله کې $a_1 = 27$ او $q = \frac{1}{3}$ وي، د سلسلې د حدونو مجموعه په لاس راوړئ.

حل: پوهېږو چې $\left| \frac{1}{3} \right| = \frac{1}{3} < 1$ دی، نو سلسله متقارب ده:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \frac{a}{1-q}$$

$$27 + 9 + 3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots = \frac{27}{1-\frac{1}{3}} = \frac{27}{\frac{2}{3}} = \frac{27 \cdot 3}{2} = \frac{81}{2} = 40.5$$

$$27 \cdot \frac{3}{2} = \frac{81}{2} = 40.5$$

درېم مثال: $0.\overline{623}$ پېریودیک (متوالي) اعشاري کسر په عام کسر واړوئ.

حل: دا عدد کولای شو په لاندې ډول په هندسي ترادف واړوو.

$$0.\overline{623} = 0.6232323\dots = 0.6 + 0.023 + 0.00023 + 0.0000023 + \dots$$

$$= \frac{6}{10} + \frac{23}{1000} + \frac{23}{100000} + \frac{23}{10000000} + \dots$$

$$= \frac{6}{10} + \frac{23}{1000} \left[1 + \frac{1}{100} + \left(\frac{1}{10000} \right) + \dots \right]$$

په پانسی سلسله کې $a = 1$ او $\left| \frac{1}{100} \right| = \frac{1}{100} < 1$ دی، نو سلسله متقارب ده.

$$\begin{aligned} &= \frac{6}{10} + \frac{23}{1000} \left[1 + \frac{1}{100} + \left(\frac{1}{100} \right)^2 + \dots \right] \\ &= \frac{6}{10} + \frac{23}{1000} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{6}{10} + \frac{23}{1000} \cdot \frac{99}{99} \\ &= \frac{6}{10} + \frac{23}{1000} \cdot \frac{100}{99} \Rightarrow 0.6\overline{23} = \frac{6}{10} + \frac{23}{990} = \frac{594 + 23}{990} = \frac{617}{990} \Rightarrow 0.6\overline{23} = \frac{617}{990} \end{aligned}$$

څلورم مثال: د $0.\overline{3}$ متوالي اعشاري کسر د هندسي سلسلې په کارولو سره په عام کسر وپوړئ.

حل: پوهېږو چې:

$$\begin{aligned} 0.\overline{3} &= 0.3333 \dots = 0.3 + 0.03 + 0.003 + 0.0003 + \dots \\ &= \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + \dots \\ &= \frac{3}{10} \left[1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots \right] \end{aligned}$$

ليدل کېږي چې: په پانسی سلسله کې $a = 1$ او $\left| \frac{1}{10} \right| = \frac{1}{10} < 1$ دی، نو سلسله متقارب ده.

$$\begin{aligned} 0.\overline{3} &= \frac{3}{10} \cdot \frac{a}{1 - q} = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} \\ &= \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{10 - 1} = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{3}{10} \cdot \frac{10}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \Rightarrow 0.\overline{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$



1. لاندې هندسي مجموعې په لاس راوړئ.

i) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots$

ii) $5 + 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots$

2. لاندې اعشاري پیرودیک (متوالي) کسرونه په عام کسر واوړئ.

a) $0.2\overline{4}$

b) $0.\overline{5}$

د څلورم څپر کې مهم ټکي

د ترادف تعريف: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ د عددونو د ترادف په نامه يادېږي.

پاسنۍ هر يوه عدد ته د ترادف حد يا جمله وايي، a_1 د ترادف لومړۍ حد او a_n د ترادف n -ام حد دی يا په بل عبارت، ترادف له هغې تابع څخه عبارت دی چې د تعريف ناحیه يې طبيعي عددونه او د قيمتونو ناحیه يې حقيقي عددونه تشکیلوي.

حسابي ترادف: که په يوه ترادف کې د دوو پرله پسې حدونو ترمنځ ګډ توپير يو ثابت عدد وي، نو نوموړی ترادف د حسابي ترادف په نامه يادېږي.

د حسابي ترادف وسطي حد: که درې پرله پسې حدونه a_{n-1}, a_n, a_{n+1} ولرو، نو:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

په حسابي ترادف کې د n -ام حد فورمول $a_n = a + (n-1)d$

هندسي ترادف: هغه ترادف چې د هغه د هر حد او مخکيني حد ترمنځ نسبت يو ثابت عدد q وي، د هندسې ترادف په نامه يادېږي، په هندسي ترادف کې د n -ام حد فورمول: $a_n = aq^{n-1}$

د هندسي نوادف وسطي حد: که درې پرله پسې حدونه a_{n-1}, a_n, a_{n+1} په داسې حال کې چې $a_n = \sqrt{(a_{n-1})(a_{n+1})}$ هندسي ترادف حدونه وي، نو د ترادف وسطي حد عبارت له:

$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i$ هندسي مجموعه، $n = 2, 3, 4, \dots$ د ترادفونو قسومي مجموعه،

يادېږي.

او د $\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ د نوموړی n -ام سلسلې د جمعې قسومي حاصل دی.

د حسابي ترادف د n لومړيو حدونو قسومي حاصل جمع:

$$S = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$$

د هندسي ترادف د n لومړيو جملو قسومي حاصل جمع:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

ټي نهايت هندسي سلسلې: په يوه هندسي سلسله کې که $|q| < 1$ وي، سلسله متقارب او د n جملو د جمعې حاصل يې د $\frac{a}{1-q}$ عدد ته نږدې کېږي او قيمت يې د دغه فرمول $\sum_{k=1}^{\infty} aq^{k-1} = \frac{a}{1-q}$ په واسطه محاسبه او لاسته راځي.

دغه هندسي سلسله چې په هغې کې $|q| \geq 1$ او د حدونو شمېر يې هم بې نهايت وي، سلسله متباعد او د n لومړيو جملو مجموعه يې هم بې نهايت ده، يعنې $S_n = \infty$



د څپرکي پوښتي

لاندي پوښتي ولولئ، د هرې پوښتي لپاره څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، سم ځواب يې پيدا او له هغه څخه کړۍ تالو کړئ.

1. د $\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \dots$ 2 ترادف n -م حد کوم دی؟

a) $\frac{\sqrt{n}-1}{n}$ b) $\frac{\sqrt{n}+3}{n+2}$ c) $\frac{n}{n-1}$ d) $\frac{n+1}{n}$

2. که $a_n = \frac{3n-1}{2n-1}$ د ترادف n -م حد وي، د دغه ترادف خوږوم حد $\frac{11}{7}$ دی؟

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6

3. د $9, -5, -1, 3, \dots$ حسابي ترادف دوولسم حد عبارت دی، له:

a) 35 b) 38 c) -35 d) -38

4. د $0.1, 0.4, 0.7, 1, 1.3, \dots$ حسابي ترادف گډه تېير عبارت دی، له:

a) 0.3 b) 0.1 c) $\frac{2}{3}$ d) $-\frac{2}{3}$

5. د $96, 48, 24, 12, 6, \dots$ هندسي ترادف گډه نسبت عبارت له:

a) $-\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $-\frac{2}{3}$

6. د $\frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{8}, \frac{5}{16}, \dots$ هندسي ترادف لسم حد عبارت دی، له:

a) $\frac{3}{512}$ b) $\frac{5}{510}$ c) $-\frac{5}{512}$ d) $\frac{5}{512}$

7. د يوه هندسي ترادف د n جملو د جمعې حاصل فورمول عبارت دی، له:

a) $S_n = a \frac{1+q^n}{1-q}$ b) $S = a \frac{q^n-1}{q-1}$

c) $S = a \frac{1+q^n}{1+q}$ d) هيڅ يو

8. په بې نهايت هندسي متقايرو سلسلو کې گډه نسبت عبارت دی، له:

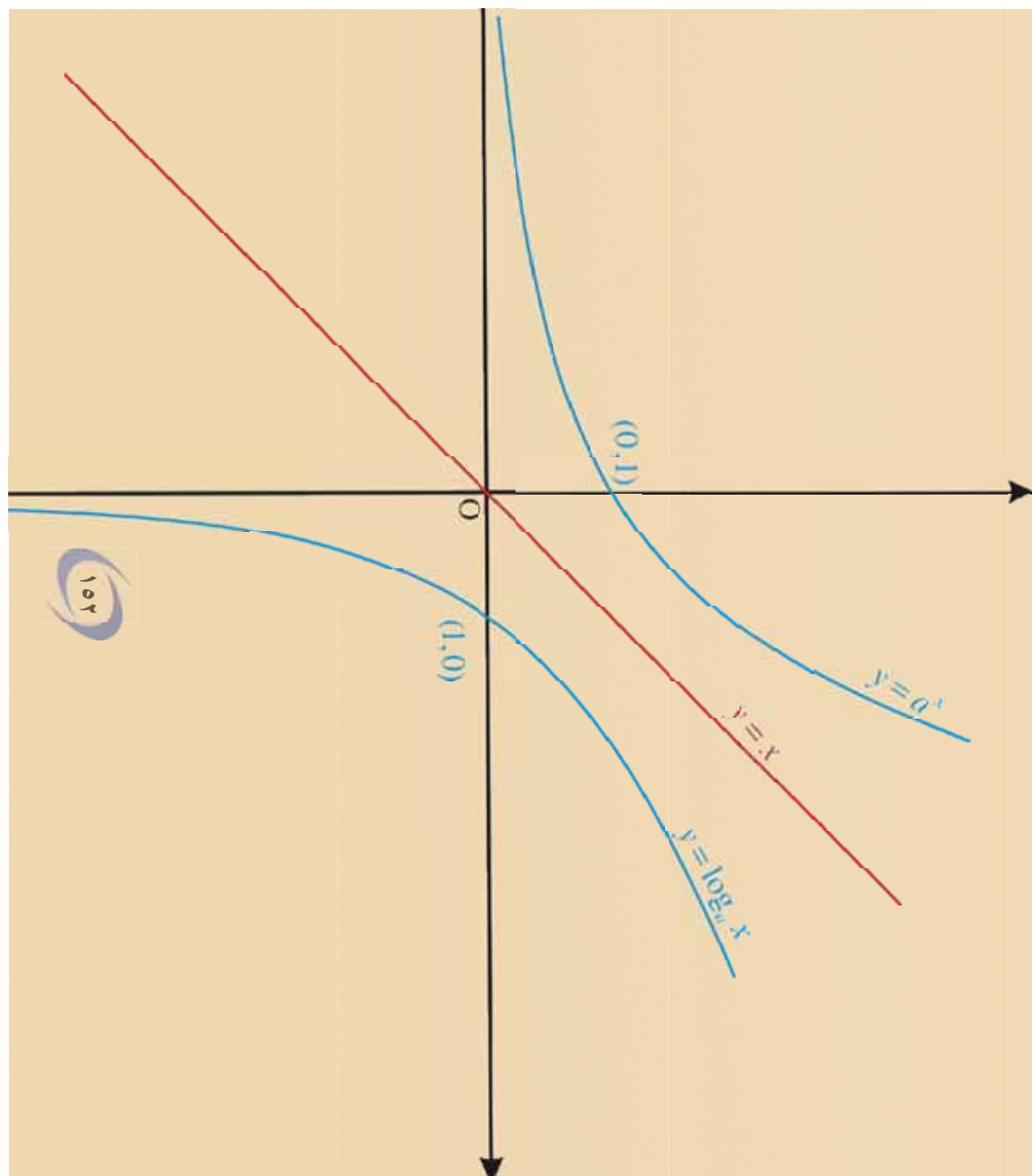
a) $q = 0$ b) $|q| > 1$ c) $|q| < 1$ d) هيڅ يو

لاندې پوښتنې حل کړئ:

1. خو دوه رقمي طبيعي عددونه لرو چې د څلورو مضرب وي؟
2. د 21 او 31 ترمنځ په پيل بېل ډول درې حسابي وسطونه وليکئ. 31, $\square$, $\square$, $\square$, 21.
3. که ديوه حسابي ترادف د لومړۍ او وروستۍ جملې مجموعه $a_1 + a_n = 24$ او د n لومړيو جملو مجموعه 3720 وي، د نوموړي ترادف د حدونو شمېر وټاکئ؟
4. د لاندې ترادف د 100 جملو د جمعې حاصل په لاس راوړئ.
3, 5, 7, 9, 11, ...
5. که د يوه هندسي ترادف دويمه جمله 6 او اوومه جمله يې 192 وي، گډ نسبت يې وټاکئ.
6. د يوه هندسي ترادف د 8 لومړيو جملو د جمعې قسمي حاصل 17 برابره، د هغه د څلورو لومړيو جملو دۍ، د نوموړي ترادف گډ نسبت حساب کړئ.
7. د لاندې سلسلې د جمعې قسمي حاصل په لاس راوړئ.
 $0.1 + 0.01 + 0.001 + 0.0001 + \dots$
8. د يوه ناپايه هندسي ترادف لومړۍ حد 9 او پنځم حد يې $\frac{1}{9}$ دۍ، د نوموړي ترادف د حدونو د جمعې حاصل پيدا کړئ.
9. د 3 او 96 عددونو ترمنځ 4 هندسي وسطونه په پيل بېل ډول وليکئ.
3, $\square$, $\square$, $\square$, $\square$, 96
10. د $\dots + \frac{2}{9} + \frac{2}{3} + 2$ هندسي سلسلې د اته لومړيو حدونو د جمعې حاصل په لاس راوړئ.
11. که $a = 4$ او $d = 3$ وي، هارمونيکي ترادف د $n = 12$ لپاره په لاس راوړئ.
12. لاندې پيرويډيک (متوالي) کسرونه په عامو کسرونو واوړئ.
a) $2.\overline{8}$ b) $3.\overline{57}$

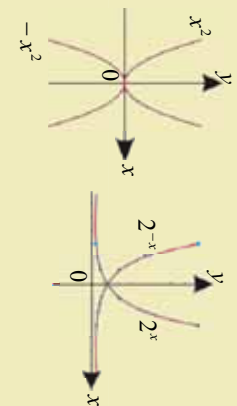
پنجم حیر کی لوگاریتم





اکسپوننشیل تابع گانې

Exponential function



پوهیږئ چې د $f(x) = x^2$ او $f(x) = -x^2$ تابع گانو
گرافونه نظرد لا محور ته یوله بل سره متناظر دي. آیا
تراوسه مو د $f(x) = 2^x$ او $f(x) = 2^{-x}$ تابع گانو د
گرافونو په هکله فکر کړی دی؟

تعریف

که چیرې a یو مثبت عدد او $a \neq 1$ وي، نو د $f(x) = a^x$ تابع ته د a په قاعده اکسپوننشیل تابع وايي.

$$a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$f(x) = a^x$$

$$f(x) = 2^x \quad \text{او} \quad f(x) = 2^{-x} \quad \text{اکسپوننشیل تابع گانې د 2 په قاعده دي.}$$

فعالیت

- د $x \in \mathbb{Z}$ مختلفو قیمتونو لپاره د $f(x) = 2^x$ تابع گراف رسم کړئ.
- د $f(x) = 2^x$ تابع گراف د لا محور په کوم ټکي کې قطع کوي؟
- آیا د $f(x) = 2^x$ تابع متزايد، متناقصه او که ثابت ده؟ ولې؟
- د $f(x) = 2^x$ او $f(x) = 2^{-x}$ تابع گانو گرافونه دوه ضمیمه کمیاتوبه سیستم کې رسم او یوله بله سره یې پرتله کړئ.
- پورتني فعالیت د $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ تابع لپاره سرته ورسوئ.
- له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي.
د $f(x) = 2^x$ تابع قیمت د $x \in \mathbb{Z}$ ټولو قیمتونو لپاره همیشه مثبت ده
د $2^x = 2^{-x}$ او $2^x = 2^{-x}$ تابع گانو گرافونه نظر لا محور ته متناظر دي، یعنې د $2^x = 2^{-x}$ لا تابع گراف هر ټکی د 2^{-x} لا تابع گراف له هر ټکي سره یوه یو متناظر دی.

که چیري په اکسپوننسیل تابع کې $a > 1$ وي متراید، که $a < 1$ وي متنقص او که $a = 1$ وي ثابت تابع ده.

د $y = 2^{-x}$ د تابع متراید ده، ځکه چې $2 > 1$ دی.

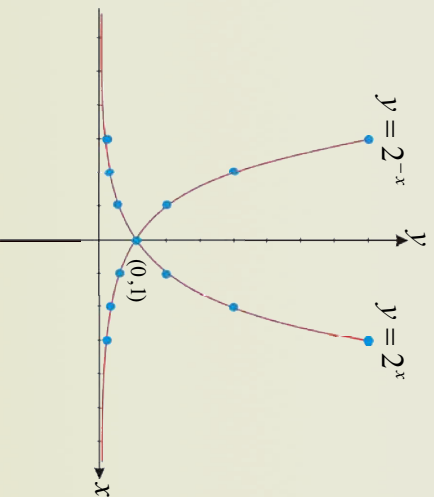
د $y = 2^x$ او $y = 2^{-x}$ د تابع گانو گرافونه رسمو.

د $y = 2^x$ د تابع گراف

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

د $y = 2^{-x}$ د تابع گراف

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

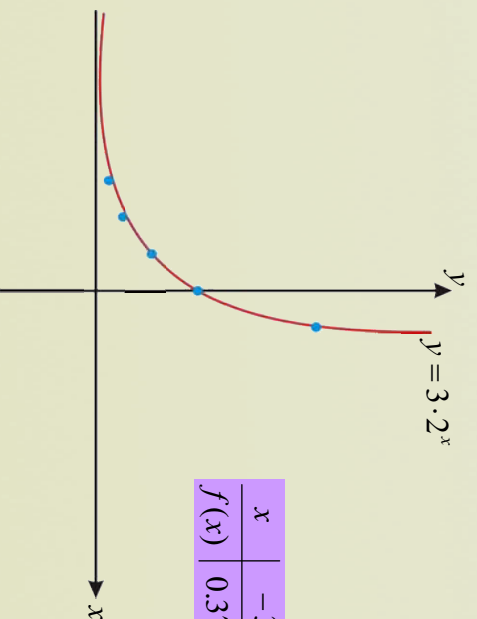


مثال: د $f(x) = 3 \cdot 2^x$ اکسپوننسیل تابع رسم کړئ

حل: د پایلي په پام کې نیولو سره پوهیږو چې د $f(x) = 3 \cdot 2^x$ اکسپوننسیل تابع قاعده $a = 2$ ده، نو په دې اساس پورتنی اکسپوننسیل تابع مترایده ده، ددې لپاره چې د پورتنی اکسپوننسیل تابع دقیق رسم کړو، نو د x متحول ته مختلف قیمتونه ورکړو د y قیمتونه پیدا او په یوه جدول کې یې لیکو، وروسته دغه ټکي (x, y) د قایمو مختصلاًو په سیستم کې په نښه کوو.

چې له نښلولو وروسته یې گراف رسم کړي.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	0.375	0.750	1.5	3	6	12	24



- د $a^x = f(x)$ اکسپوننشیل تابع په پام کې نیولو سره د x او y ټولو حقیقي عددونو لپاره ثبوت کړئ چې:

$$F(x+y) = f(x) \cdot f(y)$$

$$f(x-y) = \frac{f(x)}{f(y)}$$

$$f(a \cdot x) = (f(x))^a$$

د اکسپوننشیل تابع خاصیتونه: له تیرو معلوماتو څخه په ګټه اخیستنې سره د اکسپوننشیل تابع خواص په لاندې

ډول بیانوو

1. د هرې اکسپوننشیل تابع د تعریف ناحیه ټول حقیقي عددونه او د قیمتونو ناحیه یې مثبت حقیقي عددونه دي.
2. هره اکسپوننشیل تابع یوه یو (injective) ده یعنې د هر

$$x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

4. هره اکسپوننشیل تابع د $a > 1$ لپاره متزایده او د $a < 1$ لپاره متناقصه ده.

5. د هرې اکسپوننشیل تابع ګراف د $(0, 1)$ له ټکي څخه تیرېږي.

6. د $a^x = f(x)$ او $a^{-x} = g(x)$ اکسپوننشیل تابع ګانو ګرافونه نظر یې محوره متناظر پرته دي

7. هره اکسپوننشیل تابع معکوس لري چې معکوسه تابع یې $\log_a x$ دی او د $a^x = f(x)$ اکسپوننشیل تابع معکوس تابع $a^{-x} = g(x)$ دی.

دلاډې اکسپوننشل تابع گانو گرافونه په قايمو مختصاتو کې رسم کړئ.

a) $f(x) = 2 \cdot 3^x$

b) $f(x) = 2 \cdot 3^{-x}$

c) $f(x) = (-2)^x$

d) $f(x) = (-2)^{-x}$

لوگارېتم

Logarithm

آيا کولای شئ چې اکسپوننشنل تابع په بل ډول هم وليکئ؟

$$y = a^x \Leftrightarrow \log_a y = x$$

فعاليت

لاندې جدول بشپړ کړئ

y = درکړل شوي عددونه	0.0001	0.001	0.01	100	1000	10000
a^x = طاقت لرونکي عددونه		10^{-3}				10^4
x = توان	-4			2		

- د 10^{-3} طاقت لرونکي عدد قاعده او توان خو دي؟
 - آيا ديوه عدد قاعده او توان د 1 عدد کېدلای شي؟
 - آيا تاسو کولای شئ چې طاقت لرونکي عدد په بل ډول وښايست؟
- د پورتنۍ جدول له بشپړولو وروسته لاندې تعريف کولای شو، بيان کړو.
- تعريف:** د طاقت لرونکي عدد يوې بېلې ښوونې ته لوگارېتم وايي، يا په بل عبارت د مجهول توان محاسبه د لوگارېتم په نامه يادېږي .

$$y = a^x \Leftrightarrow \log_a y = x$$

په پورتنۍ اړيکه کې a ته د لوگارېتم قاعده (Base) او y ته لوگارېتمي عدد وايي، د يوه طاقت لرونکي عدد توان له لوگارېتم څخه عبارت دی، که د قاعدې په اندازه توان لور شي، راکړل شوی عدد په لاس را کوي.

په تېر جدول کې د 10 د قاعدو توانونه دراکړل شوو عددونو له لوگارېتم څخه عبارت دي.

د ساري په توگه: $\log_{10} 10^{-3} = -3$ $\log_{10} 0.001 = -3$
هر مثبت عدد پرته له 1 څخه د لوگارېتم قاعده کېدای شي.

مثال: د لوگارېتم د تعريف په کارولو سره لاندي افادي په معادلر (طاقت لرونکو عددي) افادو وړوئ.

a) $\log_2 8 = 3$

b) $\log_{10} 1000 = 3$

حل:

$\log_2 8 = 3 \Leftrightarrow 8 = 2^3$

$\log_{10} 1000 = 3 \Leftrightarrow 1000 = 10^3$



1. لاندي لوگارېتمي اړيکي د هغوی په اړوندو افادو وړوئ.

a) $\log_{10} N = x$

b) $\log_1 36 = -2$

c) $\log_9 81 = 2$

d) $\log_5 5 = 1$

2. لاندي افادي (طاقت لرونکي عددونه) د لوگارېتم په شکل وليکي

a) $4^3 = 256$

b) $2^5 = 32$

c) $10^4 = 10000$

d) $10^{-1} = 10^y$

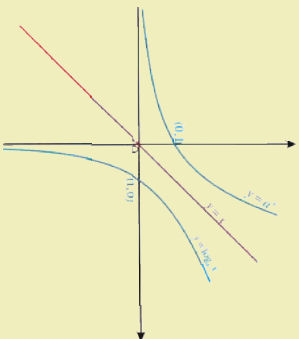
e) $y = 2^x$

f) $y = 3^x$

لوگاریتمی تابع گانې

آيا ویلې شي چې کوم ډول تابع گانې معکوسي تابعگانې لري؟

آيا ویلې شي هغه تابع گانې چې معکوس لري، په فایمو مختصلو کې نظر کوم مستقیم خط نه منظرې دي.



تعریف: د اکسپوننشیل تابع معکوسه تابع د لوگاریتمی تابع او هره اکسپوننشیل تابع لوگاریتمی تابع ده.

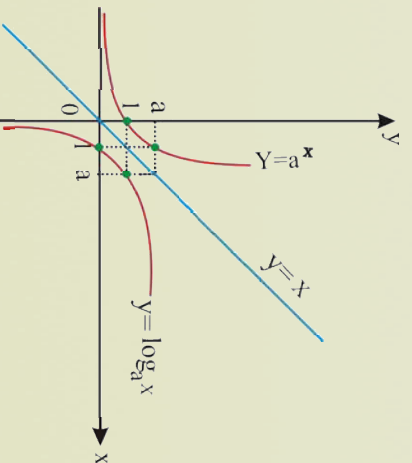
د یوې $a \neq 1$ او $a \in \mathbb{R}^+$ اکسپوننشیل تابع، معکوسه تابع د a په قاعده، هغه لوگاریتمی تابع ده چې د $\log_a x$ سره ښوول کېږي.

هره لوگاریتمی تابع، معکوسه تابع لري چې د $f(x) = a^x$ او $g(x) = \log_a x$ تابعگانې یو د بل معکوسي تابع گانې او گروونه یې د $y = x$ مستقیم ته منظرې دي.

$$y = a^x \Leftrightarrow \log_a y = x$$

$$f^{-1}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, f^{-1}(x) = \log_a x, a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1$$

د $a^x = f(x)$ تابع گراف د $x = 1$ لپاره لاندې شکل لري.



x	0	1	a	$+\infty$
$\log_a x$	$-\infty$	0	1	$+\infty$

که چیري $a > 1$ وي، نوډ $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \forall x_1, x_2$ لپاره لرو چې:

که $x_1 > x_2$ وي؛ نو $\log_a x_1 > \log_a x_2$ دی.

$$a^0 = 1 \Leftrightarrow \log_a 1 = 0 \quad \text{لپاره } x = 0 \quad \text{تابع گراف د } f(x) = a^x$$

لومړی مثال: د $y = 3^x$ او $y = \log_3 x$ تابع گانو گرافونه رسم کړئ.

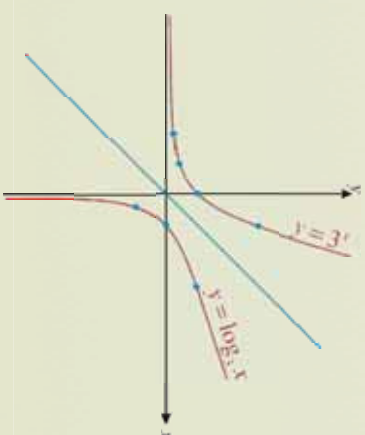
حل: د $y = 3^x$ تابع په پام کې نیسو:

x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9

اوس $y = \log_3 x$ تابع په پام کې نیسو:

$$\begin{aligned} x=1 & \quad y=\log_3 1 \quad (1,0) & x=3 & \quad y=\log_3 3 \quad (3,1) \\ x=\frac{1}{3} & & & & \\ y=\log_3 \frac{1}{3} & = y = \log_3 3^{-1} = -1 & & & \left(\frac{1}{3}, -1\right) \end{aligned}$$

x	$\frac{1}{3}$	0	1	3
y	-1	1	0	1



فعالیت

د $y = 2^x$ او $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ اکسپوننشل تابع گانو د گراف په پام کې نیولو سره او د اکسپوننشل تابع گانو د تعریف له

مخې ددوی د اړوندو معکوسو اکسپوننشل تابع گانو قیمتونه د $x = 1, 2$ لپاره پیدا کړئ او نتیجه یې په عمومي ډول ولیکئ.

پایله: د هرې لوگاریتمې تابع لکه $y = \log_a x$ د یوې اختیاري فاعدي لپاره لرو.

$$\log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1, \quad a \in \mathbb{R}, \quad a > 0, \quad a \neq 1$$

دویم مثال: که چیري $x = \log_3 f(x)$ را کرل شوی وي نو $f(3), f(9), f(3^{-2}), f(1)$ په لاس راوړي.
حل: په را کرل شوي تابع کې د X پر ځای قیمتونه اېږدو.

$$f(x) = \log_3 x \Rightarrow f(3) = \log_3 3 = 1$$

$$f(x) = \log_3 x \Rightarrow f(9) = \log_3 9 = \log_3 3^2 = 2 \log_3 3 = 2 \cdot 1 = 2$$

$$f(x) = \log_3 x \Rightarrow f(3^{-2}) = \log_3 3^{-2} = -2 \cdot \log_3 3 = -2 \cdot 1 = -2$$

$$f(x) = \log_3 x \Rightarrow f(1) = \log_3 1 = 0$$

درېم مثال: که $x = \log_3 x$ وي، د x قیمت په لاس راوړئ.

$$\text{حل: پورتني لوگارتم د طاقت په شکل لیکو } x = 3^4 \Rightarrow x = 4 \Leftrightarrow \log_3 x = 4$$

د تیرو معلوماتو په کارولو سره د لوگارتمي تابع خاصیت په لاندې ډول بیانېږي.

د لوگارتمي تابع خاصیتونه:

1. د لوگارتمي تابع د قیمتونو ساحه د مثبتو عددونو، له سټ څخه عبارت ده.

2. څرنگه چې $\log_a 1$ د هرې اختیاري قاعدې لپاره مساوي په صفر ده، نو په دې اساس لوگارتمي تابع یوازې یو جذر $x_0 = 1$ لري چې په ترتیب سره د لوگارتمي تابع گراف په قایمو مختصاتیږي د $(0, 1)$ له ټکي څخه

تیرېږي.

3. هره لوگارتمي تابع یو په یو یا انجکتیف (injective) ده یعنې $x_1 \neq x_2$ لپاره تل $f(x_1) \neq f(x_2)$ دی.

د 2 په قاعده لوگارتم:

$$د \quad x = \log_2 x \quad \text{تابع قیمت د} \quad x = 16, \frac{1}{8} \quad \text{لپاره پیدا کړئ.}$$

حل: په را کرل شوی تابع کې د x برخای قیمتونه وضع کوو چې په پایله کې د تابع قیمت په لاس راځي.

$$f(x) = \log_2 x \Rightarrow f(16) = \log_2 16 = \log_2 2^4 = 4 \cdot \log_2 2 = 4 \cdot 1 = 4$$

$$f(x) = \log_2 x \Rightarrow f\left(\frac{1}{8}\right) = \log_2 \left(\frac{1}{8}\right) = \log_2 2^{-3} = -3 \log_2 2 = -3 \cdot 1 = -3$$

فعاليت

- د x $f(x) = \log_2 x$ تابع قيمت د $\sqrt{2}, 28, x$ لپاره په لاس راوړئ.



1. د x $f(x) = \log_2 x$ تابع قيمتونه په $f(2), f(1), f(\frac{1}{32}), f(32)$ کې پيدا کړئ.
2. د x $f(x) = \log_3 x$ تابع قيمتونه په $f(1)$ او $f(\frac{1}{81})$ کې په لاس راوړئ.

$$\left. \begin{array}{l} \log_e N \\ \log_{10} 10^3 \end{array} \right\} = ?$$

معمولي لوگاريتم *Common logarithm*
طبيعي لوگاريتم *Natural logarithm*
 آيا يوازي 2 او 3 د لوگاريتم قاعدې دي او که نور عددونه هم د لوگاريتم قاعده کېدای شي ؟

تعريف

خرنگه چې ومو ليدل، هر مثبت عدد پرته له 1 څخه کېدای شي د لوگاريتم قاعده شي، خو په عمل کې د 10 او e قاعدې معمول او په کار وړل کېږي.

1 - هغه لوگاريتم چې قاعده يې 10 وي، د معمولي لوگاريتم Common logarithm يا اعشاري (Briggs) لوگاريتم په نامه يادېږي چې د $\log$ په سمبول يې ښيي او په لاندې ډول ښودل کېږي.

$$f: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_{10} x = \log x$$

مثال: د $10^{-1}, 10^0, 10^1, 10^2, 10^3$ عددونو لوگاريتمونه پيدا کړئ.

حل:

$$\log_{10} 10^0 x = \log 10^0 = y \Leftrightarrow 10^y = 1 \Rightarrow 10^0 = 10^0 \Rightarrow y = 0$$

$$\log_{10} 10 = \log 10 = y \Leftrightarrow 10^y = 10^1 \Rightarrow y = 1$$

$$\log_{10} 10^2 = \log 10^2 = y \Leftrightarrow 10^y = 10^2 \Rightarrow y = 2$$

$$\log_{10} 10^3 = \log 10^3 = y \Leftrightarrow 10^y = 10^3 \Rightarrow y = 3$$

$$\log_{10} 10^{-1} = \log 10^{-1} = y \Leftrightarrow 10^y = 10^{-1} \Rightarrow y = -1$$

⋮

$$n \in \mathbb{Z}, \log_{10} 10^n = \log 10^n = y \Leftrightarrow 10^y = 10^n \Rightarrow y = n$$

د x د مختلفو قیمتونو له مخې بې گراف رسمو



x	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	10^0	10^1	10^2	10^3
$\log x$	$\dots -3$	-2	-1	0	1	2	3

2- هغه لوگاریتم چې قاعده یې e وي د طبیعي لوگاریتم (Natural logarithm) په نامه یادېږي او په $\ln$ سره ښودل کېږي، e یو ناظم عدد دی چې تقریبي قیمت یې عبارت دی له: $e = 2.718281828\dots$ چې د $(1 + \frac{1}{x})^x$ فورمول څخه هغه وخت چې x بې نهایت ته نږدی شي په لاس راځي د e قیمت پیدا کول د لوړو ریاضیاتو کار دی. د e عدد د اولر عدد په نامه یادېږي او $f(x) = e^x$ تابع د طبیعي اکسپوننشل تابع په نوم

یادېږي او داسې هم لیکي: $Exp(x) = e^x$

د $e^x = y$ تابع گراف لکه $y = a^x$ د y تابع گراف په څېر ده.

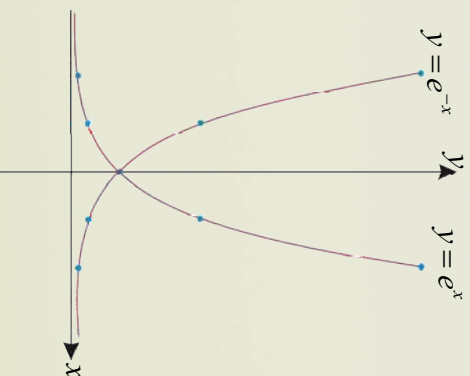
د $e^x = y$ په تابع کې x ته مختلف قیمتونه ورکړو:

x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{7.3}$	$\frac{1}{2.71}$	1	2.71	7.34

د $e^{-x} = y$ په تابع کې x ته بېلابېل قیمتونه ورکړو:

x	-2	-1	0	1	2
y	7.34	2.71	1	$\frac{1}{2.7}$	$\frac{1}{7.3}$

د پورتنیو تقریبي قیمتونو په پام کې نیولو سره د $y = e^x$ او $y = e^{-x}$ تابع گانو گرافونه رسموو:



د طبیعي لوگارتم مطالعه په لوړو ریاضیاتو کې لکه ساینس، انجینري، تجارت او تخنیک کې زیات استعمال لري. د طبیعي لوگارتم د تابع $y = \ln x$ گراف په لاندې ډول دی.

مثال: $\ln e^1, \ln e^2, \ln e^3, \ln e^0, \ln e^{-1}, \ln e^{-2}$ او $\ln e^1$ پیدا کړئ.

حل: د تعریف په پام کې نیولو سره لرو چې: $y = \ln x = \log_e x$

$$\ln e^1 = y \Leftrightarrow e^y = e^1 \Rightarrow y = 1$$

$$\ln e^2 = y \Leftrightarrow e^y = e^2 \Rightarrow y = 2$$

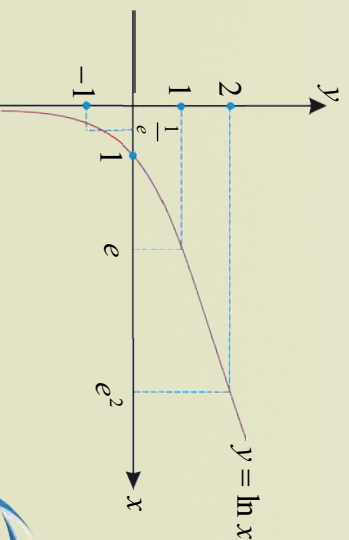
$$\ln e^3 = y \Leftrightarrow e^y = e^3 \Rightarrow y = 3$$

$$\ln e^0 = y \Leftrightarrow e^y = e^0 \Rightarrow y = 0$$

$$\ln e^{-1} = y \Leftrightarrow e^y = e^{-1} \Rightarrow y = -1$$

$$\ln e^{-2} = y \Leftrightarrow e^y = e^{-2} \Rightarrow y = -2$$

د $y = \ln x$ تابع گراف عبارت دی له:





- د $y = \ln \frac{1}{e^7}$ قیمت پیدا کړی او د $\log 0.0001$ قیمت په لاس راوړئ.



لاندې لوګاریتمونه حساب کړئ.

a) $\log_e e^8$

b) $\ln \frac{1}{e^{-3}}$

c) $\log 0.01$

d) $\log \frac{1}{10^{-2}}$

د لوگارېتم قوانين

Low of logarithm

پوهېږي چې د عددونو طاقت خپل قوانين لري، آيا د عددونو لوگارېتم هم قوانين لري او که نه؟

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$\log(x \cdot y) = \log x + \log y$$

$$\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y$$

فعاليت

- د طاقت لرونکو عددونو د ضرب قوانين وليکئ.
 - د طاقت لرونکو عددونو د تقسيم قوانين وليکئ.
 - هر عدد د صفر او ياد يوه په توان مسلوې په خوندۍ؟
- د طاقت قوانينو ته ورته لوگارېتم هم ځينې قوانين لري

لومړی قانون: د هر عدد لوگارېتم د لوگارېتم د تعريف په ساحه کې په خپله قاعده مساوي په يو دی؛ مثلاً:

$$a \in \mathbb{R}, a \neq 1, \log_a a = 1$$

ثبوت: پوهېږو چې $\forall a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}, a^1 = a$ دي، نو $\log_a a = 1$

$$\text{لومړی مثال: } 5^1 = 5 \Leftrightarrow \log_5 5 = 1$$

دویم قانون: د 1 عدد لوگارېتم په هره اختياري قاعده مساوي په صفر دی؛ مثلاً: $a^0 = 1, \forall a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ نو

$$\log_a 1 = 0$$

$$\text{دویم مثال: } 1 = (\sqrt{5})^0 \Rightarrow \log_{\sqrt{5}} 1 = 0$$

درېم قانون: د دوو يا څو عددونو د حاصل ضرب لوگارېتم د هغو د لوگارېتمونو له مجموع سره مساوي دی يعنې:

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

ثبوت: که چېرې $x = a^p$ او $y = a^q$ ولرو

$$x = a^p \quad \dots \quad \text{I}$$

$$y = a^q \quad \dots \quad \text{II}$$

$$I \cdot II \Rightarrow x \cdot y = a^p \cdot a^q = a^{p+q}$$

د I او II اړیکې خوا په خوا ضربوو:

$$\log_a (x \cdot y) = p + q$$

د پورتنۍ اړیکې له دواړو خواوې لوگارتم نیسو:

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

د p او q قیمتونو په اېښودلو سره لیکو:

لومړي مثال: د 50 عدد لوگارتم په لاس راوړئ.

$$\text{حل: } \log 50 = \log(5 \cdot 10) = \log 5 + \log 10 = \log 5 + 1$$

$$\text{دویم مثال: } ? = \log_4 2 + \log_4 8 = ?$$

حل:

$$\begin{aligned} \log_4 2 + \log_4 8 &= \log_4 (2 \cdot 8) = \log_4 (4 \cdot 4) \\ &= \log_4 4 + \log_4 4 = 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

فعالیت

- دلاندې غیر مساواتو سم والی، د مثال په واسطه وښایاست.

$$\log_a (x + y) \neq \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a (x \cdot y) \neq \log_a x \cdot \log_a y$$

خلوړم قانون: د دوو عددونو د تقسیم لوگارتم د لوگارتمونو له تفاضل سره مساوی دي، یعنې:

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

ثبوت: که چیرې $x = a^p$ او $y = a^q$ ولرو:

$$\left. \begin{aligned} x &= a^p \dots\dots\dots I \\ y &= a^q \dots\dots\dots II \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\log_a x}{\log_a y} = \frac{p}{q}$$

د I او II اړیکې خوا په خوا یو په بل وویشو.

$$\frac{I}{II} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

$$\log_a \frac{x}{y} = p - q$$

د پورتنۍ اړیکې له اطراف څخه لوگارتم نیسو:

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

د p او q قیمتونو په اېښودلو سره لیکو:

لومړي مثال: د $\log \frac{5}{2}$ محاسبه کړئ داسې چې $\log 5 = 0.6990$, $\log 2 = 0.3010$ وي.

حل: $\log \frac{5}{2} = \log 5 - \log 2 = 0.6990 - 0.3010 = 0.3980$

دویم مثال: $\log_y (2xy) - \log_y (10y^2x)$ حاصل په لاس راوړئ.

حل: څلورم قانون له ټپي لوري څخه چپ لوري ته تطبیقوو.

$$\begin{aligned}\log_y (10y^2x) - \log_y (2xy) &= \log_y \frac{10y^2x}{2xy} \\ &= \log_y (5y) = \log_y y + \log_y 5 \\ &= \log_y 5 + 1\end{aligned}$$

پنځم قانون: د یوه توان لرونکي عدد لوگارتم مساوي دی د توان او د طاقت د قاعدې د لوگارتم له حاصل ضرب سره یعنې که چیرې $(a^x)^n$ ولرو نو $\log_a x^n = n \log_a x$ دی.

$$\begin{aligned}\log_a x^n &= \log_a (x \cdot x \cdot x \cdot \dots \cdot x) \\ \log_a x^n &= \underbrace{\log_a x + \log_a x + \dots + \log_a x}_{\text{ځلي } n \text{ ځلي } \log_a x}\end{aligned}$$

په پایله کې $\log_a x^n = n \log_a x$
له پنځم قانون څخه په گټې اخیستې سره کولای شو ولیکو.

$$\log_a \sqrt[n]{x} = \log_a (x)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log_a x$$

لومړی مثال: $\log 625 = ?$
حل: $\log 625 = \log 5^4 = 4 \log 5 = 4(0.6990) = 2.7960$

دویم مثال: دغه لوگارتم پیدا کړئ؟

حل: $\log_3 \sqrt[3]{9} = \log_3 \sqrt[3]{3^2} = \log_3 (3)^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \log_3 3 = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}$



- لاندې لوگارتمونه پیدا کړئ.

$\log_3 (0.12) = ?$ $\log_5 \sqrt{8} = ?$



1. لاندې ضربې افادې د جمعې د حاصل په شکل او د جمعې د حاصل ضرب په شکل ولیکئ او د امکان په صورت کې یې وروستی قیمت په لاس راوړئ.

a) $\log_4(5x^2) = ?$

b) $\log_{10}(10x^2y) = ?$

c) $\log_{10} 5 + \log_{10} 20 = ?$

d) $\log_{12} 36 + \log_{12} 4 = ?$

2. لاندې د خارج قسمت افادې په تفاضل او د تفاضل افادې په خارج قسمت واوړئ، د امکان په صورت کې وروستی ځواب په لاس راوړئ.

a) $\log_7 \frac{63}{49} = ?$

b) $\log \frac{125}{80} = ?$

c) $\log_a(x^2a) - \log_a x^2 = ?$

d) $\log_{10} 1000 - \log_{10} 100 = ?$

3. لاندې لوگارېتمونه حساب کړئ.

a) $\log_{10}(0.0001)$

b) $\log_2(8)^{\frac{1}{3}}$

د لوگاریتم د یوې قاعدې اړول په بله قاعده

که د یوه عدده لوگاریتم په یوه مشخصه قاعده راځي شوی وي، څرنگه کولای شو، نوموړی عدد په بله قاعده وړوو.

$$\log_b m = \frac{\log_a m}{\log_a b}$$

شپږم قانون: په عین قاعده مساوي دی په د دوو عددونو د تقسیم د حاصل لوگاریتم:

$$\frac{\log_a m}{\log_a b} = \log_b m$$

ثبوت: د $y^x = \log_b m$ ثبوت لپاره معادل شکل یې لیکو یعنې $m = b^y$ اوس له اطرافو څخه د a په قاعده

$$\log_b m = \log_a b^y \Rightarrow \log_b m = y \log_a b$$

لوگاریتم نیسو:

$$\log_a m = \log_b m \cdot \log_a b$$

اوس د y قیمت په پورتنۍ اړیکه کې اېږدو:

د پورتنۍ اړیکې دواړه خواوې په $\log_a b$ ویشو:

$$\frac{\log_a m}{\log_a b} = \frac{\log_b m \cdot \log_a b}{\log_a b} = \log_b m \Rightarrow \frac{\log_a m}{\log_a b} = \log_b m$$

لومړی مثال: $\log_3 27$ محاسبه کړئ.

حل: له شپږم قانون څخه په کار اخیستنې سره لرو:

$$\log_3 27 = \frac{\log_3 27}{\log_3 9} = \frac{\log_3 (3)^3}{\log_3 (3)^2} = \frac{3 \log_3 3}{2 \log_3 3} = \frac{3 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \frac{3}{2}$$

دویم مثال: $\log_3 75$ حساب کړئ.

حل: بیا هم د شپږم قانون په کارولو سره لرو چې:

$$\log_3 75 = \frac{\log_5 75}{\log_5 3} = \frac{\log_5 (3 \cdot 5^2)}{\log_5 3} = \frac{\log_5 3 + 2 \log_5 5}{\log_5 3} = \frac{\log_5 3 + 2}{\log_5 3}$$

يادونه: د يوه عدد معکوس لوگاریتم مساوي دی، د هغه عدد له منفي لوگاریتم څخه چې هغه د کو لوگاریتم (co-logarithm) په نامه يادېږي.

$$\log_a \frac{1}{M} = -\log_a M = \text{co} \log_a M$$

مثال: $\log_2 \frac{1}{32} = ?$

حل: $\log_2 \frac{1}{32} = \log_2 1 - \log_2 32 = \log_2 1 - \log_2 2^5 = 0 - 5 \log_2 2 = -5 \cdot 1 = -5$

اووم قانون: د يوه عدد معکوس لوگاریتم مساوي دی په: $\log_a M = \frac{1}{\log_M a}$

ثبوت: د ثبوت لپاره $\frac{1}{\log_M a} = x \Rightarrow \frac{1}{\log_M a} = x \Rightarrow x \log_M a = 1 \Rightarrow \log_M a^x = 1$

د 1 عدد په ځاي ليکلی شو چې $\log_M M = 1$

$$\log_M a^x = \log_M M \Rightarrow \log a^x = \log M \Rightarrow a^x = M$$

اوس د دواړو خواوو لوگاریتم نيسو يعنې $\log_a M = x$

په پورتنۍ اړيکه کې د x په ځای قيمت اېږدو: $\log_a M = x = \frac{1}{\log_M a}$

مثال $\log_{125} \sqrt{5} = ?$

حل: $\log_{125} \sqrt{5} = \log_{125} (5)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_{125} 5 = \frac{1}{2 \log_5 125} = \frac{1}{2 \log_5 5^3} = \frac{1}{6 \log_5 5} = \frac{1}{6}$

فعاليت

لاندي لوگاریتمونه حساب کړئ.

$$\log_{64} 2 = ? \quad \log_4 \sqrt{25^6} = ?$$

اتم قانون: د يوه عدد لوگاریتم په توان لرونکي قاعده مساوي دی په $\log_{a^n} x = \frac{1}{n} \log_a x$

ثبوت: د ثبوت لپاره $\log_a x = m \Rightarrow \log_a x = m \Rightarrow \log_{a^n} x = \frac{1}{n} \log_a x$ نيسو او هغه داروند طاقت په شکل ليکو:

$$\log_a x = m \Rightarrow x = a^m \Rightarrow x = (a^n)^{\frac{m}{n}} \Rightarrow x = (a^n)^{\frac{m}{n}}$$

د بورتني رابطي د دواړو خواوو څخه لوگاریتم نيسو: $\log_{a^n} x = \frac{1}{n} \log_a x$

$$\log_a x = \frac{1}{n} \log_a x^n$$

اوس د m په ځای قیمت اېږدو:

له پورتنۍ قانون څخه لاندې پايلې په لاس راځي

$$1) \log_a x^m = \frac{m}{n} \log_a x$$

$$2) \log_a \frac{1}{x} = \log_a x^{-1}$$

$$3) \log_a x^n = \log_a x^n$$

لومړۍ مثال: $\log_{25} 125 = ?$

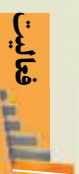
$$\log_{25} 125 = \log_{5^2} 5^3 = \frac{3}{2} \log_5 5 = \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2}$$

حل:

دويم مثال: $\log_{\frac{1}{\sqrt[3]{3}}} (27)^2 = ?$

$$\log_{\frac{1}{\sqrt[3]{3}}} (27)^2 = \log_{\frac{1}{3^{\frac{1}{3}}}} (3^3)^2 = \log_{3^{-\frac{1}{3}}} (3^6) = \frac{6}{-\frac{1}{3}} \log_3 3 = \frac{6}{-\frac{1}{3}} \cdot 1 = -18$$

حل:



د پورتنیو خاصیتونو په کارولو سره لاندې لوگاریتمونه ساده کړئ.

a) مخامخ لوگاریتم په معکوس ډول ولیکئ. $\log_3 6 = ?$

$$b) \log_8 \sqrt[3]{4} = ?$$

د معمولي او طبعي لوگاریتمونو ترمنځ اړیکه: د دغو دوو لوگاریتمونو (اعشاري او طبعي) په پام کې

نیولو سره یعنې د 10 او e عددونه د $\log_a x = \log_b x \cdot \log_a b$ له اړیکې څخه په گټې اخیستې

چې a, b او x مثبت عددونه a او b د 1 خلاف دي:

که چېرې $a = e$ او $b = 10$ وضع شي، نو لرو چې:

$$\log_{10} x = \frac{\log_e x}{\log_e 10}$$

$$\log_e x = \log_{10} x \cdot \log_e 10$$

پوهېږو چې $\ln x = \log_e x$ دی، نو:

$$\ln x = \log_e 10 \cdot \log_e x$$

$$\ln x = 2.3026 \cdot \log_e x$$

که چیري $e = b$ او $a = 10$ وضع شي، نو:

$$\log_e x = \frac{\log_{10} x}{\log_{10} e}$$

$$\log_{10} x = \log_e x \cdot \log_{10} e$$

$$\log x = \log_{10} e \cdot \ln x$$

$$\log x = 0.4343 \cdot \ln x$$

خړنگه چې $\log_{10} e = 0.4343$ دی، نو لاندې اړیکه لرو:

لومړي مثال: د $\ln 4.69$ قیمت په لاس راوړئ.

حل: پوهېږو چې:

$$\ln x = 2.3026 \cdot \log x$$

$$\ln 4.69 = 2.3026 \cdot \log 4.69$$

$$\ln 4.69 = 2.3026 \cdot 0.6712 = 1.5455$$

دویم مثال: د $\log 6.73$ قیمت پیدا کړئ، په داسې حال کې چې $\ln 6.73 = 1.9066$ وي.

حل: د تیرې اړیکې په کارولو سره لرو چې:

$$\log x = 0.4343 \cdot \ln x$$

$$\log 6.73 = 0.4343 \cdot \ln 6.73$$

$$= 0.4343 \cdot 1.9066 = 0.8280$$

پوښتي

لاندې لوگاریتمونه ساده کړئ.

a) $\log_1 3^{-4} = ?$

b) $\log_9 27 = ?$

c) $\log_8 4 = ?$

d) $\log_{121} 14641 = ?$

e) $\ln 672000$

f) $\ln 0.00927$

g) $\ln 672000$

h) $\ln 0.235$

$$\left. \begin{array}{l} \log 0.501 \\ \log 5.01 \\ \log 50.1 \\ \log 501 \end{array} \right\} = ?$$

کرکترستیک او مانیس

Characteristic and Mantissa

پوهېزو چې:

$$\log_{10} 1 = 0, \log_{10} 100 = 2, \log_{10} 1000 = 3$$

دی. آیا دیوه عدد د ارقامو دشمیر او لوگارتم ترمنځ کومه

اړیکه شتون لري؟

تعریف

پوهېزو چې د x هر حقیقي مثبت عدد د " $x = S \cdot 10^n$ " په شکل لیکل کېدای شي، داسې چې $1 \leq S < 10$ او

n یو تام عدد وي.

که چېرې د x لوگارتم غوښتل شوي وي، په لاندې ډول یې پیدا کولای شو.

$$\log x = \log(S \cdot 10^n) = \log S + \log 10^n = \log S + n \log 10 = \log S + n$$

د $\log S$ په هغه صورت کې چې $1 \leq S < 10$ وي، S د x د لوگارتم مانیس یا اعشاري برخه او n چې یو تام عدد دی، د x د لوگارتم مشخصه یا کرکترستیک څخه عبارت دی. څرنگه چې $1 \leq S < 10$ دي نو:

$$\begin{aligned} \log 1 &\leq \log S < \log 10 \\ 0 &\leq \log S < 1 \end{aligned}$$

له پورتني اړیکې څخه دا پیله په لاس راځي چې دیوه عدد لوگارتم د یو او صفر ترمنځ قرار لري.

فعالیت

- لاندې جدول بشپړ کړئ.

مجموعه یوولس روڼه شکل	$0.001 = 10^{-3}$	$0.01 = 10^{-2}$	$1 = 10^0$	$1000 = 10^3$	$4 = 10^{0.602}$	$7 = 10^{0.845}$	$10 = 10^1$	$20 = 10^{1.390}$
د عددونو لوگارتمې شکل	$\log_{10} 0.001$		$\log_{10} 1$			$\log_{10} 7$		$\log_{10} 20$
لوگارتم	-3	-2		3	0.602		1	

د هغو عددونو لوگارتمونه چې د $0, 10, 100, 1000, 0.01$ د 0.001 عددونو ترمنځ واقع دي، مساوي له

څو سره دي؟

- آیا هر خنومره چي عدد لوی شي لوگارتم يې هم لوثيري؟
- له 1 څخه د کونچينو عددونو د لوگارتم علامه منفي ده، که مثبت؟

له پورتنی فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

- که چيري $1 \leq x < 10$ سره وي، کرکترستيک يې صفر دی.
- که چيري $10 \leq x < 100$ وي کرکترستيک يې مساوي له 1 سره دی.
- که چيري $100 \leq x < 1000$ وي، نو کرکترستيک يې 2 دی.

دپوه عدد په لوگارتم کې صحيح برخه کرکترستيک او اعشاري برخه يې مانيس نومېږي.

هغه وخت چي عدد د عدد ليکنې په علمي طريقه وليکل شي، د 10 د عدد توان له کرکترستيک څخه عبارت دی.

د عدد ليکنې علمي طريقه Scientific notation

کولاي شو هر عدد د 10 د توان په څير وليکو، لکه: د $N = a \cdot 10^n$ چي په دي حالت کې $1 \leq a < 10$ او n يو نام عدد دی

لومړی مثال: لاندې عددونه د عدد ليکنې په علمي طريقه وليکئ.

$$a) \quad 2573 \qquad b) \quad 573216 \qquad c) \quad 0.0028$$

حل:

$$a) \quad 2573 = 2.373 \cdot 10^3$$

$$b) \quad 573216 = 5.73216 \cdot 10^5$$

$$c) \quad 0.0028 = \frac{28}{10000} = \frac{28}{10^4} = 28 \cdot 10^{-4} = 2.8 \cdot 10^{-4} = 2.8 \cdot 10^{-3}$$

قاعدۀ: که چيري دپوه عدد صحيح برخه چي د صفر خلاف وي، نو د هغه عدد دلوگارتم کرکترستيک مساوي

دی، د صحيح برخې د ارقامو په شمير، منفي يو.

دویم مثال: د $\log 526.9$ کرکتر سټیک مساوي له خو سره دی؟

حل: د صحیح ارقامو شمیر له 3 سره برابر دی، نو کرکتر سټیک یې $2 = 3 - 1$ دی.
او له یوه څخه د کوچنیو عددونو کرکتر سټیک منفي علامه لري او قیمت یې د اعشاري د علامې دېني خوا د صفرونو له شمیر څخه، د یوه په اندازه زیات دی.

دریم مثال: د $\log 0.002$ کرکتر سټیک مساوي په خو دی؟

حل:

$$\begin{aligned}\log 0.002 &= \log(2 \cdot 10^{-3}) \\ &= \log 2 + \log 10^{-3} \\ &= \log 2 - 3 \log 10 = \log 2 - 3\end{aligned}$$

نو کرکتر سټیک یې $3 -$ دی.

له تېرو دوو مثالونو څخه په کار اخیستنې سره کولای شو، د لاندې عددونو کرکتر سټیک په لاس راوړو.

لوگاریتمونه		کرکتر سټیک
$\log 89435$	$5 - 1$	4
$\log 56.784$	$2 - 1$	1
$\log 0.995$	$0 - 1$	-1
$\log 0.0789$	$-1 - 1$	-2

دلاندې لوگارېتمونو کرکټرستیک په شفاهي ډول وړایاست؟

- a) $\log 0.9560$
- b) $\log 956.0$
- d) $\log 2345$
- e) $\log 3.875$
- c) $\log 9560$
- f) $\log 0.0009560$

د لوگاریتم جدول

څرنگه چې په تیرلو ست کې مو ولوستل چې د یوه عدد لوگاریتم له دوو برخو (کرکترسټیک او مانیتس) څخه تشکیل شوی دی، د مانیتس د پیدا کولو لپاره په څه ډول عمل کوئ.

$$\left. \begin{array}{l} \log 0.501 \\ \log 5.01 \\ \log 50.1 \\ \log 501 \end{array} \right\} = ?$$

د مانیتس د پیدا کولو طریقه:

پوهیږو چې هر لوگاریتمي عدد له دوو یعنې صحیح او اعشاري برخو څخه جوړ شوی دی، څرنگه چې صحیح برخه یا مشخصه د خپل عدد د ارقامو له مخې او مانیتس یې د لوگاریتمي جدول له مخې چې مخکې ترتیب شوی، ټاکل کېږي، دغه جدول تر 7 ځینې یې تر 4 او 3 اعشاري ځانو پورې ترتیب شوی چې د مانیتس د پیدا کولو لپاره ترې کار اخلي چې د اعشاري نامو عددونو د ارقامو د شمیر په پام کې نیولو سره جدولونه نومول شوی دي. لکه 7 رقمي جدولونه 5، رقمي جدولونه او داسې نور.

د یوه عدد د مانیتس د پیدا کولو لپاره د نوموړي عدد ارقام له چپ لوري څخه په پام کې نیول کېږي په دې ډول چې ټولې لورې د یوه رقم په استثنا هغه د جدول په داسې ستون کې لټوو چې د ټولې څاله رقم سره مطابقت ولري، نو هغه اعشاري عدد چې د سطر او ستون تقاطع وي، له مانیتس څخه عبارت دی.

مثال:

حل:

$$\log 765 = ?$$

$$\log 765 = \log (7.65 \cdot 10^2)$$

$$= \log 7.65 + \log 10^2$$

$$= \log 7.65 + 2$$

↙ ↘
مانیتس کرکترسټیک

د 2 عدد د کرکترسټیک څخه عبارت دی او د مانیتس د پیدا کولو لپاره یعنې $\log 7.65$ په 76 سطر او 5-م ستون کې گورو چې د 8837 عدد سره مطابقت کوي یعنې د نوموړي عدد مانیتس 0.8837 دی چې په حقیقت کې د 765 عدد مانیتس دی.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
7										
4										
7										
5										
7	0.8808	0.8814	0.8820	0.8825	0.8831	0.8837	0.8842	0.8848	0.8854	0.8859
6										
7										
7										
8										
7										
9										

$$\log 765 = \log 7.65 + 2 = 0.8837 + 2 = 2.8837$$

دويم مثال: په لاس راوړئ؟

حل:

$$\begin{aligned}\log 70.9 &= \log(7.09 \cdot 10) \\ &= \log 7.09 + \log 10^1 \\ &= \log 7.09 + 1\end{aligned}$$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
79										
⋮										
79										

د 709 عدد د 9 ستون لاندې لټور چې له 8506 عدد سره مطابقت کوي، یعنې د 7.09 عدد ماننيس

دی، په پايله کې یې لوگاریتم داسې حسابوو:

$$\log 70.9 = 0.8506 + 1 = 1.8506$$

درېم مثال: د 0.0247 لوگاریتم حاصل په لاس راوړئ.

حل:

$$\begin{aligned}\log 0.0247 &= \log(2.47 \cdot 10^{-2}) \\ &= \log 2.47 + \log 10^{-2} \\ &= \log 2.47 - 2\end{aligned}$$

د 2.47 عدد په 24- ام سطر او 7- ام ستون لاندې لټوو چې له 3927 عدد سره مطابقت کوي یعنې د 2.47 عدد مانتیس عبارت دی له: 0.3927 په پایله کې د لوگارتم حاصل داسې په لاس راوړو:

$$\log 0.0247 = \log 2.24 - 2 = 0.3927 - 2 = \bar{2}.3927$$

يادونه: څرنگه چې مانتیس هميشه مثبت دی، که کرکتر سټیک منفي وي او وغواړو دواړه د يوه مثبت عدد په شکل وليکو، نو منفي علامه د کرکتر سټیک له پاسه لیکو؛ مثلاً په پورتنی مثال کې:

$$0.3927 - 2 = \bar{2}.3927$$

فعالیت

- د لوگارتم د جدول په پام کې نیولو سره 9280 عدد لوگارتم حساب کړئ.
- څلورم مثال:** د لاندې جدول په پام کې نیولو سره د 900, 105, 15, $\frac{3}{4}$, 0.007 عددونو لوگارتمونه پیدا کړئ.

عدونه	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
لوگارتمونه	0.0000	0.30103	0.47712	0.60206	0.69897	0.77815	0.84570	0.90309	0.95424	1.0000

$$\log 15 = (3 \cdot 5) = \log 3 + \log 5 = 0.47712 + 0.69897 = 1.17609$$

$$\log(105) = \log(5 \cdot 3 \cdot 7) = \log 5 + \log 3 + \log 7$$

$$= 0.69897 + 0.47712 + 0.84570$$

$$= 2.02079$$

$$\log(900) = \log(9 \cdot 10^2) = \log 9 + \log 10^2$$

$$= 0.95424 + 2$$

$$= 2.95424$$

$$\log\left(\frac{3}{4}\right) = \log 3 - \log 4 = 0.47712 - 0.60206$$

$$= -0.12486$$

$$\log(0.007) = \log(7 \cdot 10^{-3}) = \log 7 + \log 10^{-3} = \bar{3}.84570$$



1. دلاندې لوگارېتمونو کرکټرستیک په شفاهي ډول وړایاست او هانتیس یې د جدول له مخې پیدا کړئ.

- | | |
|-------------------|----------------------------|
| a) $\log 222$ | b) $\log 0.921$ |
| c) $\log 928$ | d) $\log 527$ |
| e) $\log 0.024$ | f) $\log 2400$ |
| h) $\log 0.00024$ | j) $\log 24$ |
| a) $\log(2.73)^3$ | b) $\log \sqrt[5]{0.0762}$ |

2. د لاندي لوگارېتمونو قیمتونه په لاس راوړئ.

انتي لوگارېتم

Anti Logarithm

که چېرې د يوه عدد لوگارېتم راکړل شوی وي څرنگه کولای شو، عدد يې پيدا کړو؟

$$\log 481 = 2.6821$$

$$\log N = 1.6580$$

$$N = ?$$

تعريف: که چېرې $x = \log y$ وي، نو y د x د لوگارېتم انټي لوگارېتم بلل کېږي. يعنې $y = \text{anti log } x$

مثلاً که چېرې $\log 34 = 1.5315$ وي، نو د $\log 34 = 1.5315$ انټي لوگارېتم د 34 له عدد سره مساوي دی.

فعاليت

- که چېرې $\log N = 2.8779$ وي، نو د N عدد وټاکئ.
- د نوموړي عدد کرکټرستيک پيدا کړئ.

- د ماننيس په جدول کې د 0.8779 عدد له کوم سطر او ستون سره مطابقت لري؟

له پورتنۍ فعاليت څخه کولای شو لاندې پايله بيان کړو:

څرنگه چې د 2 عدد کرکټرستيک دی، نو N يو درې رقمي عدد دی، ماننيس يې په جدول کې له 75 سطر او

ستون سره مطابقت لري، نو د N عدد عبارت دی له: 755

لومړي مثال: $\log N = 2.9939$ د N عدد په لاس راوړئ.

حل: د نوموړي لوگارېتم د ماننيس برخه يعنې 0.9939 د لوگارېتم په جدول کې پيدا کړو، گورو چې په کوم سطر او

ستون کې ځای لري. دغه د سطر او ستون عدد داسې ليکو چې د ستون عدد داوښد سطر ښي لوري ته قرار ولري چې عبارت دی له 9.86 څخه يعنې د 986 عدد ماننيس 0.9939 دی، په پورتنۍ پوښتنه کې د کرکټرستيک په

توگه راکړل شوی، نو د صحيح رقمونو شمېرې 3 دی، چې مطلب عدد عبارت دی له 986 يعنې: $N = 986$

$$\log 986 = 2.9939$$

$$\text{anti log } 2.9939 = 986$$

9.5	0.9912	0.9917	0.9921	0.9926	0.9930	0.9934	0.9939	0.9943	0.9948	0.9952
9.6							↑			
9.7										
9.8										
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

دویم مثال: که چیرې $\log N = 0.9791$ وي N په لاس راوړئ.

حل: دلته هم د 9791 عدد په جدول کې پیدا کوو، د سطر او ستون اړوند عددونه لکه د تیر په شان لیکو، څرنگه چې 953 ماننيس ښيي چې د مطلوب عدد 953 رقمونه دي څرنگه چې کرکټر سټیک صفر دی، نو مطلوب عدد یعنې N یو صحیح رقم لري چې عبارت دی له:

$$N = 9.53$$

$$\log 9.53 = 0.9791$$

$$\text{anti} \log 0.9791 = 9.53$$

درېم مثال: $\log N = -3.0531$ دی، د N عدد پیدا کړئ.

په مثال کې لیدل کیږي چې کرکټر سټیک او ماننيس دواړه منفي دي او په جدول کې منفي عدد وجود نه لري، ددې لپاره چې ماننيس مثبت شي، د 1 عدد له ماننيس سره جمع او له کرکټر سټیک څخه یې کموو، په مساواتو کې تغیر نه راځي.

اوس کولای شو د ماننيس 0.9469 په مرسته د N عدد له جدول څخه پیدا کړو، چې عبارت دی له 886.

کرکټر سټیک ښيي چې د اعشاري د علايقې او له چېې خوا څخه د لومړي 8 عدد تر منځ درې صفرونه ځای لري

$$\text{anti} \log -3.0531 = 0.000885 \text{ نو } N = 0.000885$$

څلورم مثال: دلاندې عددونو لوگارېتمونه محاسبه کړئ.

$$a) 2 \qquad b) 0.2 \qquad c) 0.02 \qquad d) 0.0002$$

حل:

$$a) \log 2 = 0.3010$$

$$b) \log 0.2 = 0.3010 - 1 = \bar{1}.3010$$

$$c) \log 0.02 = 0.3010 - 2 = \bar{2}.3010$$

$$d) \log 0.0002 = 0.3010 - 4 = \bar{4}.3010$$

له پورتنی مثال څخه دا پایله په لاس راځي چې دیوه عدد د لوگارېتم ماننيس یوازې د رقمونو په ترتیب پورې اړه لري په پورتنی مثال کې ټول عددونه یو شان ماننيس 0.3010 لري، ښي او یا چې لوري ته د صفرونو زیاتول په ماننيس باندې کومه اغیزه نه لري.

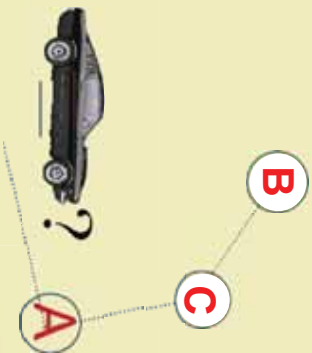


پوښتنې

دلاندې هر یوه انټی لوگارېتم قیمت په لاس راوړئ.

$$a) \text{anti} \log 4.9479$$

$$b) \text{anti} \log -5.0521$$



خطي انٽرپوليشن Linear Interpolation

يوگنڊي موٽر په متوسط سرعت په 30 دقيقو کي د A ښار ته او بيا ښار ته ورسيږي، ورواياست چې په همدې ثابت سرعت به نوموړی موټر د C ښار ته چې د A او B ښارونو تر منځ پروت دی، په څومره وخت کي ورسېږي.

فعاليت

- که چيرې $\log A = a$, $\log B = b$, $\log C = c$ وي، په داسې حال کې چې $A < B < C$ دی.

- $\log C$ د حقيقي عددونو په کومه فاصله کې ځای لري.
- په اټکل ډول ووايست چې که (a, b) يو ل ته نژدې عددونه وي، نو د C لوگاريتم چيرې پروت دی؟
- د a او b تر منځ قيمتونه د حسابي وسط له مخې په لاس راوړئ.

پاياله: که چيرې ديوه نامعلوم قيمت د پيدا کولو لپاره چې ددو معلومو عددونو تر منځ پروت وي، د معلومو عددونو په مرسته نامعلوم عدد پيدا کړو، په دې صورت کې نوموړي طريقه د خطي انټرپوليشن په نامه يادېږي.

که يو څلور رقمي عدد لکه: 1.234 ولرو، نه شوکولای د هغه لوگاريتم له درې رقمي جدول څخه په لاس راوړو، نو د دې ډول عددونو لوگاريتم د خطي انټرپوليشن په واسطه پيدا کولای شو.

لومړې مثال: د $\log 5.235$ قيمت په لاس راوړئ.

حل: ښکاره ده چې دنوموړي عدد لوگاريتم په جدول کې نشته، خو د 5.230 او 5.240 عددونو په منځ کې پراته دي چې لوگاريتمونه يې په جدول کې شته، او په لاندې ډول يې په لاس راوړو.

$$\begin{aligned}\log 5.230 &= 0.7185 \\ \log 5.240 &= 0.7193\end{aligned}$$

خزانگه چې $5.24 < 5.235 < 5.23$ دی، نو:

$$\begin{aligned}\log 5.230 &< \log 5.235 < \log 5.240 \\ 0.7185 &< \log 5.235 < 0.7193\end{aligned}$$

که چيرې $x = \log 5.535$ په پام کې ونيسو، نو په دې صورت کې ليکو چې: $0.7185 < x < 0.7193$

د عددونو د لوگارېتم او مائېسو نو ترمېخ توپير په پام کې نيسو.

عدونه	لوگارېتمونه
5.240	0.7193
$\begin{bmatrix} 5.235 \\ 5.230 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} x \\ d \end{bmatrix}$
د لوگارېتمونو توپير	0.0008
0.010 د عددونو توپير	

د خطي انټرپولېشن په طريقه کې له دې څلورو عددونو څخه يو تناسب چې يو له بل سره متناسب دي جوړوو او نامعلوم قيمت پيدا کړو يعنې:

$$\frac{d}{0.0008} = \frac{0.005}{0.010} \Rightarrow d = \frac{0.005 \cdot 0.0008}{0.010} \Rightarrow d = \frac{0.000004}{0.010} = 0.0004$$

اوس د d قيمت د کوجني عدله مائېس سره جمع کړو. چې حاصل يې د مطلوب عدد لوگارېتم دی.

$$0.0004 + 0.7185 = 0.7189$$

$$\log 5.235 = 0.7189$$

دويم مثال: د 0.0007957 عدد لوگارېتم پيدا کړئ.

حل: يو هېرو چې:

$$\begin{aligned} \log 0.0007957 &= \log(7.957 \cdot 10^{-4}) \\ &= \log 7.957 + \log 10^{-4} \\ &= \log 7.957 - 4 \log 10 \\ &= \log 7.957 - 4 \end{aligned}$$

د 7.957 عدد لوگارېتم په جدول کې نشته، ليدل کېږي چې کرکټرستېک يې 4- دی، خو د 7.96 او 7.95 عددونو لوگارېتم په جدول کې شته.

$$\begin{aligned} \log 7.960 &= 0.9009 \\ \log 7.950 &= 0.9004 \end{aligned}$$

څرنگه چې $7.950 < 7.957 < 7.960$ نو:

$$\log 7.950 < \log 7.957 < \log 7.960$$

د $x = \log 7.957$ په پام کې نیولو سره، دخطي انټرپولیشن پراسطه یې لوگارېتم په لاس راوړو.

لوگارېتمونه	عدونه
0.9009	7.96
x	7.957
d	7.950

د لوگارېتمونو توپیر 0.0005

$$\frac{d}{0.0005} = \frac{0.007}{0.01} \Rightarrow$$

$$d = 0.0005 \frac{0.007}{0.01} = 0.00035 \approx 0.0004$$

$$0.9004 + 0.0004 = 0.9008$$

اوس د d قیمت د کوچني عدد له مانتیس سره جمع کوو:

په پای کې په لاس راځي چې:

$$\log 0.0007957 = 0.9008 + (-4) = \bar{4}.9008$$

درېم مثال: 4.5544 عدد انټي لوگارېتم پیدا کړئ.

حل: که چېرې $x = \log 4.5544$ وضع شي، نو باید x پیدا کړو، له پورتنۍ اړیکې څخه داسې پایله په لاس راځي.

$$\log x = 4.5544 = 4 + 0.5544$$

$$\log x = \log(t \cdot 10^4) = \log t + 4$$

د 4.5544 عدد په جدول کې نشته، خو د 0.5539 او 0.5551 عدونه په جدول کې شته، انټي لوگارېتم یې پیدا کړو، ددغه عدونو په مرسته د x قیمت د انټرپولیشن په طریقه پیدا کړو، د عدونو تفاضل لکه په تېرو مثالونو کې په لاس راوړو او تناسب یې د تېر په شان تشکیلوو.

عدونه	مانتیسونه
3.59	0.5551
t	0.5544
d	0.5539

د مانتیسونو توپیر 0.0012

$$\frac{d}{0.0012} = \frac{0.0005}{0.01}$$

$$d = 0.01 \cdot \frac{0.0005}{0.0012} = \frac{0.000005}{0.0012} = 0.0041667$$

$$d = 0.0042$$

د t د قیمت پیدا کولو لپاره د d قیمت له کوچني عدد سره جمع کوو.

$$t = 3.58 + d = 3.58 + 0.0042 \\ = 3.5842$$

$$\log x = \log(3.5842 \cdot 10^4)$$

$$\log x = \log 35842$$

هغه وخت چې ددو عددونو لوگارېتمونه سره مساوي وي، خپله عددونه په خپل منځ کې سره مساوي دي، نو:

$$x = 35842$$



پوښتنې

په لاندې اړیکو کې د X او Z قیمتونه پیدا کوئ.

a) $z = \log 0.001582$

b) $x = \log 6.289$

د لوگاریتمي او اکسپوننشل معادلو حل

Exponential and logarithmic equations

آیا تر اوسه مود $5^x = 5^{\frac{1}{2}x-2}$ او $\log_2(x^2-1) = 3$ معادلو د

حل په اړه فکر کړی دی؟

د x په کومو قیمتونو پورتنی مساوات سم دی؟

خرنگه کولای شو په دغه ډول معادلانو کې د x مجهول قیمت وناکړ.

$$\begin{aligned}\log_2(x^2-1) &= 3 \\ 5^x &= 5^{\frac{1}{2}x-2}\end{aligned}$$

تعریف

همغه معادلې چې توانونه یې مجهول وي، دا اکسپوننشل معادلو په نامه یادېږي، د مجهول د پیدا کولو لپاره که چیرې وکړای شو، د دواړو خواوو قاعدې سره مساوي کړو، نو د طاقت د قوانینو له مخې، چې قاعدې مساوي وي، نو توانونه یې هم یو له بل سره مساوي دي.

لومړی مثال: که $2^{x-1} = 32$ وي، د x قیمت په لاس راوړئ.

حل: د مساواتو د دواړو خواوو قاعدې سره مساوي کوو.

$$2^{x-1} = 32 \Rightarrow 2^{x-1} = 2^5 \Rightarrow x-1 = 5, \quad x = 6$$

دویم مثال: د $8^{3x-1} = 2^4$ اکسپوننشل معادله حل او وازمؤ.

حل:

$$\begin{aligned}8^{3x-1} &= 2^4 \\ (2^3)^{3x-1} &= 2^{3(3x-1)} = 2^4\end{aligned}$$

خرنگه چې قاعدې یو له بل سره مساوي دي، نو توانونه یې هم مساوي دي؛ نو لیکو:

$$\begin{aligned}3(3x-1) &= 4 \\ 9x-3 &= 4 \Rightarrow 9x = 4+3 \\ 9x &= 7 \Rightarrow x = \frac{7}{9}\end{aligned}$$

آزمونه:

$$8^{\frac{7}{9}-1} = 2^4$$

$$8^{\frac{7}{3}-1} = 2^4$$

$$8^{\frac{7-3}{3}} = 2^4 \Rightarrow 8^{\frac{4}{3}} = 2^4 \Rightarrow 2^4 = 2^4$$

فعاليت

- د $16^{x+1} = 64^{x-2}$ اکسپوننشيال معادله کې د x قيمت پيدا کړئ.

لوگاريتمي معادلې:

هغه لوگاريتمي افادې چې په هغوی کې متحول او یا مجهول شتون ولري، د لوگاريتمي معادلو په نامه یادېږي. له یوې لوگاريتمي معادلې څخه د مجهول قیمت پیدا کولو لپاره لومړی معادله د لوگاریتم د قوانینو له مخې ساده کوو، وروسته یې د الجبري قوانینو او یا له اکسپوننشيال معادلو څخه په کار اخیستې سړو د مجهول یا متحول قیمت په لاس راوړو.

لاندې مثالونه د لوگاريتمي معادلو بېلګې دي چې د مختلفو قوانینو له مخې د مجهول قیمت محاسبه شوی دی.

لومړی مثال: له لاندې لوگاريتمي معادلې څخه د x قیمت په لاس راوړئ.

حل:

$$\log_2(x^2 - 1) = 3$$

پورته لوگاريتمي شکل داسې لیکو:

$$x^2 - 1 = 2^3$$

$$x^2 = 1 + 8 = 9$$

$$x^2 = 9 \Rightarrow \sqrt{x^2} = \pm\sqrt{9}, \quad x = \pm 3$$

دویم مثال: په $9 \log_3(x+2) = 2 \log_3(x+2)$ لوگاریتمي معادله کې د x قیمت پیدا کړئ.

حل:

$$\log_3(x+2) = 2 \log_3 9$$

$$\log_3(x+2) = \log_3 9^2$$

څرنگه چې د لوگاریتمونو قاعدې سره مساوي دي، نو عددونه هم پرله بل سره مساوي دي.

$$x+2 = 9^2 \Rightarrow x = 81-2$$

$$x = 79$$

درېم مثال: په $4 = \log_{\sqrt{5}} 5 + \log_{\sqrt{5}} 3 - \log_{\sqrt{5}} x - \log_{\sqrt{5}} 3$ لوگاریتمي معادله کې د x قیمت په لاس راوړئ.

حل: د دوو عددونو د لوگاریتم د ضرب او وېش په کارولو سره پورتنۍ معادله په لاندې ډول لیکو:

$$\log_{\sqrt{5}} x = \log_{\sqrt{5}} 3 + \log_{\sqrt{5}} 5 - \log_{\sqrt{5}} 4 = \log_{\sqrt{5}} \frac{3 \cdot 5}{4} = \log_{\sqrt{5}} \frac{15}{4} \Rightarrow x = \frac{15}{4}$$

څلورم مثال: په $x+1 = \log_3(3^{2x}+2)$ معادله کې د x قیمت محاسبه کړئ.

حل:

$$\log_3(3^{2x}+2) = x+1 \Rightarrow 3^{2x}+2 = 3^{x+1}$$

$$3^{2x} - 3^{x+1} + 2 = 0 \Rightarrow 3^{2x} - 3 \cdot 3^x + 2 = 0$$

$$(3^x)^2 - 3 \cdot 3^x + 2 = 0$$

که $t = 3^x$ وضع کړو، نو:

$$t^2 - 3t + 2 = 0 \Rightarrow (t-1)(t-2) = 0$$

$$t_1 = 1, \quad t_2 = 2$$

$$3^x = t_1 = 1 \Rightarrow 3^x = 3^0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$3^x = t_2 = 2 \Rightarrow \log_3 2 = x \Rightarrow x_2 = \log_3 2$$

پنځم مثال: په لاندې لوگاریتمي معادله کې د x قیمت محاسبه کړئ.

$$\log(x^2 + 36) - 2 \log(-x) = 1$$

حل:

$$\log(x^2 + 36) - \log(-x)^2 = 1$$

$$\log \frac{x^2 + 36}{x^2} = \log 10 \Rightarrow \frac{x^2 + 36}{x^2} = 10$$

$$x^2 + 36 = 10x^2 \Rightarrow 10x^2 - x^2 - 36 = 0$$

$$9x^2 = 36 \Rightarrow x^2 = 4$$

$$x_{1,2} = \pm 2, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = -2$$

پوڻهتي



په لاندې لوگاريتمي او اڪسپوننشيئل معادلو كې د x قيمت په لاس راوړئ.

a) $(11)^{3x-1} = 11$

b) $7^{2x-1} = 3^{x+3}$

c) $\log \sqrt{x} + 3 = 4$

d) $\log_5 \frac{x-1}{x-2} = 2$

د ریاضیکي عملیو په سرته رسو لو کي له لوگارېتم څخه کار اخیستنه

آیا کولای شو د اعشاری عددونو عمليې لکه ضرب، تقسیم، توان او جذر د لوگارېتم په کارولو سره په اسانه سرته ورسوو.

$$\left. \begin{array}{l} 28.8 \\ 78.8 \\ 3.17 \cdot 88.2 \end{array} \right\} = ?$$

د ضرب حاصل پیدا کول د لوگارېتم په مرسته: کولای شو ددو یا څو عددونو د ضرب حاصل، د لوگارېتم د

$$\text{لاندې قانون له مخې پیدا کړو: } \log(M \cdot N) = \log M + \log N$$

لومړي مثال: غواړو چې د $3.17 \cdot 88.2$ عددونو د ضرب حاصل د لوگارېتم په مرسته پیدا کړو.

حل: د ضرب د قانون په اساس لیکلای شو:

$$\begin{aligned} \log(3.17 \cdot 88.2) &= \log 3.17 + \log 88.2 \\ &= 0.5011 + 1.9455 = 2.4466 \end{aligned}$$

لیدل کېږي چې د 0.4466 مانتیس عدد په جدول کې نشته، خود 0.4456 او 0.4472 مانتیسونو له جدول څخه لیدل کېږي چې:

عددونه په جدول کې شته.

$$\begin{aligned} \text{anti log } 0.4456 &= 2.79 \\ \text{anti log } 0.4472 &= 2.80 \end{aligned}$$

عددونه	مانتیسونه
2.79	0.4456
t	0.4466
2.80	0.4472
د عددونو توپیر	د مانتیسونو توپیر
0.01	0.0006

$$\frac{d}{0.01} = \frac{0.0006}{0.0016} \Rightarrow d = \frac{0.0006 \cdot 0.01}{0.0016} = \frac{0.00006}{0.0016}$$

$$d = 0.00375$$

د d قیمت له کوچني عدد سره جمع کوو:

$$t = 2.79 + 0.00375 = 2.79375$$

$$\log x = \log(2.79375 \cdot 10^2) \Rightarrow x = 297.375$$

$$\text{په داسې حال کې چې } anti \log 2.4466 = 297.375 \text{ دی، نو: } 3.17 \cdot 88.2 = 297.375$$

آیا پوهېږئ؟

ددو یا څو عددونو د ضرب لپاره لومړی د لوگارېتم د جمعې حاصل پیدا کوو، وروسته یې انټي لوگارېتم په لاس راوړو چې دغه انټي لوگارېتم د نوموړو عددونو د ضرب حاصل تشکیلوي.



- د $74.2 \cdot 62$ د ضرب حاصل د لوگارېتم په واسطه پیدا کړئ.

د خارج قسمت پیدا کول د لوگارېتم په مرسته:

کولای شو د لوگارېتم له څلورم قانون څخه په کار اخیستې سره، د دوو اعشاري عددونو د تقسیم حاصل

$$\text{په لاس راوړو یعنې: } \log \frac{M}{N} = \log M - \log N$$

مثال: غاړو د $\frac{8750}{3.49}$ خارج قسمت د لوگارېتم پر اسطه پیدا کړو.

$$\log \frac{8750}{3.49} = \log 8750 - \log 3.49$$

حل:

د لوگارېتم له جدول څخه لرو چې:

$$\log 8750 = 3.9420$$

$$\log 3.49 = 0.5428$$

$$\log 8750 - \log 3.49 = 3.9420 - 0.5428 = 3.3992$$

$$anti \log 3.3992 = 2507$$

$$\frac{8750}{3.49} = 2507$$

يادونه: ددو عددونو د خارج قسمت د حاصل پيدا کولو لپاره لومړی د مقسوم له لוגاريتم څخه د مقسوم عليه لوجاريتم کموو، وروسته ددغه تفاوت انټي لوجاريتم په لاس راوړو چې داد مطلوب خارج قسمت حاصل دی.

فعاليت

- د $\frac{374}{16.2}$ حاصل د لوجاريتم په مرسته په لاس راوړئ.

د لوجاريتم په واسطه د توان لرونکي عدد محاسبه:

د هغو توان لرونکو عددونو محاسبه چې توانونه يې تام اويا کسرونه وي، د لوجاريتم له پنځم قانون څخه کار

$$\log M^n = n \log M$$

اخلو يعنې

مثال: غواړو چې د $(1.05)^6$ عدد محاسبه کړو.

حل:

$$\begin{aligned}\log(1.05)^6 &= 6 \log 1.05 = 6(0.0212) \\ &= 0.1272\end{aligned}$$

$$\text{بناړې د } \text{anti} \log 0.1272 = 1.340$$

په لنډ ډول ويلای شو چې: ديوه توان لرونکي عدد قيمت پيدا کولو لپاره لومړی د عدد توان په لوجاريتم کې ضربوو، ددغه حاصل ضرب انټي لوجاريتم د توان لرونکي عدد قيمت دی.

فعاليت

- د 694^2 عدد قيمت د لوجاريتم په واسطه پيدا کړئ.



1. لاندي د ضرب حاصل د لوگارېتم په واسطه محاسبه کړئ.

$$0.097 \cdot 7.78 = ?$$

2. لاندي د تقسيم حاصل د لوگارېتم په واسطه حساب کړئ.

$$a) \frac{8}{737} = ? \quad b) \frac{32.2}{25.1} = ?$$

3. لاندي توان لرونکي عدد د لوگارېتم په واسطه محاسبه کړئ.

$$(964)^{\frac{2}{3}} = ?$$

د څپرکي مهم ټکي

اکسپوننشل تابع: که a یو مثبت عدد او $a \neq 1$ وي، نو د $a^x = f(x)$ تابع اکسپوننشل تابع د a په قاعده نومېږي.

د اکسپوننشل تابع خاصیتونه:

- د اکسپوننشل تابع د تعریف ناحیه حقیقي عددونه او دقیمتونو ناحیه یې مثبت حقیقي عددونه دي.
- د هر $x_1 \neq x_2$ لپاره $f(x_1) \neq f(x_2)$ دی.
- د اکسپوننشل تابع گراف چې $a \neq 1$ وي، منځني یې د $(0, 1)$ له ټکي څخه تېرېږي.
- د اکسپوننشل تابع گراف نظر Y محور ته متناظر واقع دی.
- هره اکسپوننشل تابع معکوس لري چې معکوس تابع یې $Log_a x$ دی.
- لوگارېتمي تابع: $x = \log_a x$ چې د $y = a^x$ اکسپوننشل تابع معکوس دی، د لوگارېتمي تابع په نامه یادېږي.

د لوگارېتمي تابع خواص

- دلوگارېتمي تابع د قیمتونو ساحه مثبت حقیقي عددونه تشکیلوي.
- د لوگارېتمي تابع گراف په قایمو مختصاتو کې د $(1, 0)$ له ټکي څخه تېرېږي.
- د هر $x_1 \neq x_2$ لپاره تابع $f(x_1) \neq f(x_2)$ دی.
- د قایمو مختصاتو په سیستم کې د هرې لوگارېتمي تابع $x = \log_a x = f(x)$ مخالف، د Y محور دی.

د لوگارېتم قوانین:

- لومړی قانون $\log_a a = 1$
- دویم قانون $\log_a 1 = 0$
- دریم قانون $\log_a x + \log_a y = \log_a (x \cdot y)$
- څلورم قانون $\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$
- پنځم قانون $\log_a x^n = n \log_a x$
- شپږم قانون $\log_a M = \frac{1}{\log_M a}$
- اووم قانون $\log_a M = \log_b M \cdot \frac{\log_a b}{\log_a M}$
- اتم قانون $\log_{a^n} x = \frac{1}{n} \log_a x$

د لوگارېتم ډولونه:

معمولې لوگارېتم هغه لوگارېتم چې قاعده یې 10 وي، معمولي لوگارېتم یا اعشاري (Brigys) لوگارېتم بلل کېږي چې د (log) په سمبول سره ښودل کېږي.

طبیعي لوگارېتم هغه لوگارېتم چې قاعده یې e وي، د طبیعي لوگارېتم په نامه یادېږي، چې طبیعي لوگارېتم د $\ln$ په سمبول ښودل کېږي یعنې $\log_e x = \ln x$

کرکټوسټیک او ماننيس

کرکټوسټیک که چېرې $\log x = n + \log S$ وي داسې چې $1 \leq n$ او n یو تام عدد دی n د مشخصې یا کرکټوسټیک په نامه یادېږي چې د عدد د رقمونو له مخې ټاکل کېږي.

ماننيس: د (log S) اعشاري برخه د ماننيس په نامه یادېږي چې د جدول له مخې ټاکل کېږي، ماننيس یو مثبت عدد د صفر او یوه ترمنځ دی.

انټي لوگارېتم (antilogarithm): که $\log_a y = x$ وي، نو y د x د لوگارېتم انټي لوگارېتم دی یعنې

$$y = \text{anti} \log x$$

خطي انټیروېلېشن: که یو نامعلوم عدد ددو معلومو عددونو په منځ کې واقع وي او د معلومو عددونو په مرسته نامعلوم عدد پیدا کړو، پدې صورت کې دا طریقه د خطي انټیروېلېشن په نامه یادېږي.

اکسپوننشل او لوگارېتمي معادلې

- اکسپوننشل معادلې هغه معادلې چې په هغې کې د جدولونو، توانونه مجهول وي، د اکسپوننشل معادلې په نامه یادېږي، د مجهول د پیدا کولو لپاره د طاقت له قوانینو څخه ګټه اخلو.
- لوگارېتمي معادلې هغه لوگارېتمي مساوات چې په هغوی کې مجهول موجود وي، د لوگارېتمي معادلې په نامه یادېږي.



د څپرکي پوښتني

لاندي پوښتني په غور ولولئ، د هرې پوښتني لپاره څلور ځوابونه ورکړل شوي، سم ځواب يې پيدا اوله هغه څخه کړئ، نو کړئ.

1. $\log_{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{4}\right)$ مساوي له څو سره دی؟

- a) 4 b) -4 c) 3 d) -3

2. د $\frac{1}{4} = \log_b \sqrt[4]{81}$ اړیکه کې د b قیمت عبارت دی له:

- a) $\frac{1}{4}$ b) 81 c) $\sqrt{81}$ d) -4

3. د $\log_3 81 - \log_2 0.01$ افادي قیمت په لاس راوړئ.

- a) 0 b) 4 c) 8 d) 9

4. د x قیمت په $\log 3 = \log 2x - \log 81$ افاده کې مساوي له څو سره دی.

- a) 2 b) 3 c) 4 d) 5

5. $\log_2 16 = ?$

- a) 4 b) 3 c) 5 d) -4

6. $\log_1 125$

- a) 3 b) -3 c) 4 d) 5

7. د $\log_1 \frac{1}{2}$ قیمت عبارت دی له:

- a) $\frac{1}{2}$ b) $-\frac{1}{2}$ c) 1 d) -1

8. د x قیمت د $3^{x-1} = 9$ په معادله کې عبارت دی له:

- a) $x = -3$ b) $x = 9$ c) $x = -9$ d) $x = 3$

9. د $\log 234.21$ مشخصه یا کټرسيټیک عبارت دی له:

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3

10. د یوه عدد د لوگارتم معکوس عبارت دی له:

- a) $\log_a m = \frac{1}{\log_a m}$ b) $\log_a m = -\frac{1}{\log_a m}$ c) $\log_a m = \frac{1}{\log_m a}$ d) مخې برعکس

1. په لاندې معادلو کې د x قیمت پیدا کړئ

$$\begin{array}{ll} a) 3^x = 3^{3x+2} & b) 3^{2x} = 9^{4x-1} \\ c) \log_3(x+2) = 2\log_3 9 & d) 16^{x+1} = 64^{x-2} \\ e) 15^{2x-1} = 7^{x+1} & f) \log \sqrt{x+1} = 1 - \frac{1}{2} \log x \\ g) \log(4x-3) = 2 - \log 20 & h) \log_5(x-1) - \log_5(x-2) = \log_5 2 \end{array}$$

2- لاندې لوگاریتمي افادې د لوگاریتم د قوانینو په کارولو سره ساده کړئ.

$$\begin{array}{ll} a) \log_8 3\sqrt{4} = ? & b) \log_3 \frac{1}{243} = ? \\ c) \log_{10} \sqrt[4]{100} = ? & d) \log\left(\frac{8}{\sqrt{128}}\right) = ? \\ & e) \log_{10} \frac{\sqrt[3]{10}}{0.1} = ? \end{array}$$

3. لاندې لوگاریتمونه محاسبه کړئ.

$$\begin{array}{ll} a) \log_8 \sqrt[3]{4} = ? & b) \log_3 \frac{1}{243} = ? \\ c) \log_{10} \sqrt[4]{100} = ? & d) \log_{10} \frac{\sqrt[3]{10}}{0.1} = ? \\ & e) \log \frac{8}{\sqrt{128}} = ? \end{array}$$

4. لاندې اتني لوگاریتمونه پیدا کړئ.

$$a) 1.7300 \quad b) 0.8954 \quad c) 4.5682 \quad d) \bar{2}.1987$$

5. دلاندې هر عدد لوگاریتم حساب کړئ.

$$a) 89500 \quad b) 91 \quad c) 3065.3 \quad d) \log 0.002$$

6. د لوگاریتم په مرسته لاندې حاصل ضرب پیدا کړئ.

$$a) \quad 2.01 \cdot 52.9 \quad b) \quad (0.0062)(-34.8)$$

7. د لاندې تقسیم حاصل د لوگاریتم په مرسته پیدا کړئ.

$$a) \quad 0.888 \div 256 \quad b) \quad 17.3 \div 7.47$$

8. د لاندې توان لرونکو عددونو قیمتونه د لوگاریتم په مرسته پیدا کړئ.

$$a) (7.42)^3 \quad b) (-84.7)^2 \quad c) \sqrt{418} \quad d) \sqrt[3]{0.21}$$

د لو گاریتم جدول چي مانیس یی خور اعشاري رقمونه لري

No.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
1.1	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
1.2	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
1.3	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
1.4	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
1.5	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
1.6	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
1.7	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
1.8	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
1.9	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
2.0	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
2.1	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
2.2	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
2.3	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
2.4	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
2.5	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
2.6	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
2.7	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
2.8	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
2.9	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
3.0	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
3.1	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
3.2	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
3.3	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
3.4	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
3.5	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
3.6	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
3.7	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
3.8	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
3.9	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
4.0	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
4.1	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
4.2	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
4.3	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
4.4	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
4.5	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
4.6	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
4.7	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
4.8	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
4.9	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
5.0	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
5.1	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
5.2	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
5.3	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
5.4	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396

No.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.5	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
5.6	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
5.7	7539	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
5.8	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
5.9	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
6.0	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
6.1	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
6.2	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
6.3	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
6.4	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
6.5	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
6.6	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
6.7	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
6.8	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
6.9	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
7.0	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
7.1	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
7.2	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
7.3	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
7.4	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
7.5	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
7.6	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
7.7	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
7.8	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
7.9	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
8.0	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
8.1	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
8.2	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
8.3	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
8.4	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
8.5	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
8.6	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
8.7	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
8.8	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
8.9	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
9.0	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
9.1	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
9.2	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
9.3	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
9.4	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
9.5	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
9.6	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
9.7	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
9.8	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
9.9	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996

سپریم چیرکی

میتریکسو نه



په همدې ډول: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ او $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ هر يو د p' ، p او s' ، s د ډگريدل شوي وسيله

ده.

لاندې هرې پرې وسيلې ته (چې د ډگريد بدلولو د بڼليدو دنده په غاړه لري) مټريکس وايي.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

تعريف: د شیانو، عددونو يا تورو گډهځي چې په سطري او ستوني ډول، په يوه مستطيلي جدول کې ترتيب شي، د مټريکس (Matrix) په نامه يادېږي.

د مستطيلي جدول هر عنصر د مټريکس د عنصر په نامه يادېږي. لوی حروفونه د $A, B, C, \dots$ مټريکس

ښيي او واړه حروفونه $a, b, c, \dots$ د مټريکس عناصر دي.

د عددونو هر يو لاندی جدول يو مټريکس په گوته کوي.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & 7 & 5 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{لومړی سطر} \\ \text{دویم سطر} \\ \text{درېم سطر} \end{array} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{لومړی سطر} \\ \text{دویم سطر} \\ \text{درېم سطر} \end{array}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{3} & 7 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{سطر}$$

لومړی ستون دویم ستون درېم ستون

که چېرې a د يوه مټريکس په i -م سطر او j -م ستون کې ځای ولري، هغه د a_{ij} په شکل ښودل کېږي چې i او j طبيعي عددونه دي، په ترتيب سره د سطر او ستون له شمېر څخه ښکارندويي کوي.

$$i=1, 2, 3, \dots, j=1, 2, 3, \dots$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

د متريکس مرتبه: که د A د متريکس د سطرونو شمېر m او د ستونونو شمېر n وي، وليو چې د A متريکس مرتبه د $m \times n$ څخه عبارت دی او داسې ويل کېږي m په n کې متريکس او ليکو $A = (a_{ij})_{m \times n}$ د هر متريکس د سطرونو او ستونونو شمېر د هماغه متريکس مرتبه ښيي.

فعاليت

- د لاندي متريکسونو مرتبه وټاکئ.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

پاملرته وکړئ، هغه متريکس چې يو سطر او يو ستون لري يعنې $A = (X)_{1 \times 1}$ ، نو د A متريکس د هغه له

$$\text{داخلي عدد سره مساوي دی. } A = (7)_{1 \times 1} = 7$$

مثال: لاندي متريکسونه د مستطلي جدول په ډول وليکئ.

$$a) \quad (a_{ij})_{2 \times 2} = (i + j)_{2 \times 2}$$

$$b) \quad (a_{ij})_{3 \times 2} = (i \cdot j)_{3 \times 2}$$

حل: د پورتنی هر مثال د حل لپاره لومړی د متريکس عمومي شکل ليکو، د a جزء د متريکس عمومي شکل 2×2 کې يو متريکس دی.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$a_{ij} = i + j$$

$$a_{11} = 1 + 1 = 2, \quad a_{12} = 1 + 2 = 3, \quad a_{21} = 2 + 1 = 3, \quad a_{22} = 2 + 2 = 4$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

په پايله کې غوښتل شوی متريکس عبارت دی له:

د b جزء: د b جزء د متريکس عمومي شکل يو (3×2) کې متريکس دی، يعنې 3 سطره او 2 ستونه لري.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

$$a_{11} = 1 \cdot 1 = 1, \quad a_{21} = 2 \cdot 1 = 2, \quad a_{31} = 3 \cdot 1 = 3$$

$$a_{12} = 1 \cdot 2 = 2, \quad a_{22} = 2 \cdot 2 = 4, \quad a_{32} = 3 \cdot 2 = 6$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \text{ په پايله کې غوښتل شوی متريکس عبارت دی له:}$$

دوه، هم مرتبه متريکسونه هغه وخت سره مساوي دي چې د هغوی هر عنصر يو په يو سره مساوي وي،
 مثلاً: $\begin{pmatrix} a & 2 \\ b & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ هغه وخت يوله بل سره مساوي دي چې $a = -1$ او $b = 2$ وي، آیا
 متريکسونه يوله بل سره مساوي دي اوکه نه؟ ولې؟

پوښتنې

1. د لاندې متريکسونو مرتبې وليکئ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

2. لاندې متريکسونه د مستطلي جدول په شکل وليکئ.

$$a) (a_{ij})_{3 \times 3} = (2i + 3j)_{3 \times 3} \quad b) (a_{ij})_{2 \times 3} = \left(\frac{i}{j}\right)_{2 \times 3}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

د متريکسونو دو لونه

د متريکسونو مخامخ شکلونه څو سطرونه او څو ستونونه لري؟

آيا صفرونه د متريکس عناصر کېدای شي؟

1. سطري متريکس (Row Matrix): هغه متريکس چې يوازې او يوازې يو سطر ولري، سطري متريکس يې بولي، مثلاً:

$$A = (4 \quad 5 \quad 9 \quad 0)_{1 \times 4}$$

2. ستوني متريکس (Column Matrix): هغه متريکس دی چې يوازې يو ستون ولري، د ستوني

$$A = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}_{3 \times 1}$$

متريکس په نامه يادېږي، مثلاً:

3. صفري متريکس (Null matrix): هغه متريکس چې ټول عناصر يې صفرونه وي، له صفري متريکس څخه عبارت دی او د $0_{m \times n}$ په شکل يې نښي.

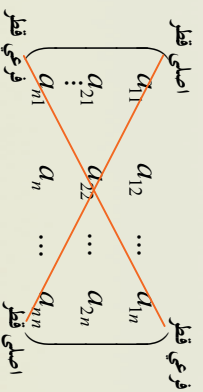
$$0_{2 \times 4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{2 \times 4} \quad 0_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{3 \times 2}$$

4. مربعي متريکس (Square Matrix): که چېرې په يوه متريکس کې د سطرونو شمېر د ستونونو له شمېر سره برابر ($m = n$) شي، د مربعي متريکس په نامه يادېږي، مثلاً:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 9 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}_{3 \times 3}, \quad m = n \Rightarrow 3 = 3$$

هر مربعي متريکس دوه قطرونه لري.

هغه قطر چې عناصر يې $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ وي، اصلي قطر (Mean diagonal) او هغه قطر چې عناصر يې $a_{1n}, \dots, a_{nn}, a_{11}, \dots, a_{21}$ وي، فرعي قطر (Minor Diagonal) بلل کېږي.



فعالیت

- داسې متريکسونه وليکئ چې مرتبې يې 1×3 ، 4×1 وي، دا څه ډول متريکسونه دي؟

5. قطري متريکس (Diagonal Matrix): هغه متريکس چې ټول عناصر يې پرته له اصلي قطر څخه صفرونه وي، د قطري متريکس په نامه يادېږي.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}_{3 \times 3}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

6. سکالر متريکس (Scalar Matrix): هغه قطري متريکس چې د اصلي قطر عناصر يې سره مساوي وي، د سکالر متريکس په نامه يې يادوي، لکه:

$$A = \begin{pmatrix} K & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & K & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & K \end{pmatrix}_{m \times n}$$

7. واحد متريکس (Unit Matrix): که چېرې په يو سکالر يا قطري متريکس کې د اصلي قطر ټول عناصر د (1) عدد وي، دغه ډول متريکس ته واحد متريکس وايي او په I_n سره ښودل کېږي.

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

- یو د 3×3 مرتبې متريکس وليکئ چې د اصلي قطر ښکته ټول عناصر يې صفرونه وي.
- په همدې ډول یو د 3×3 مرتبې متريکس وليکئ چې د اصلي قطر پورتي عناصر يې ټول صفرونه وي.

له پورتي فعالیت څخه لاندې تعريف بيانېږي:

که چېرې په یوه مربعي متريکس کې د اصلي قطر پورتي او يا ښکته ټول عناصر يې صفرونه وي، په دغه صورت کې متريکس د منلې متريکس (Triangular matrix) په نامه يادېږي. که چېرې د اصلي قطر پورتي ټول عناصر صفرونه وي، د پورتي منلې متريکس (Upper triangular matrix) او که چېرې د اصلي قطر ښکته ټول عناصر صفرونه وي، د ښکته منلې متريکس (lower triangular matrix) په نامه يادېږي.

په لاندې مثالونو کې A يو پورتي منلې متريکس او B ښکته منلې متريکس دی.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 7 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

متقابل (متضاد) متريکس:

که چېرې د A متقابل متريکس په $(-A)$ سره ونيوډل شي نو، دا هغه متريکس دی چې هر عنصر د A د متناظر عنصر متضاد دی. که چېرې $A = (a_{ij})_{m \times n}$ يو متريکس وي، نو متقابل (متضاد) متريکس يې $(-A)$ په لاندې ډول تعريفېږي:

$$A = (a_{ij})_{m \times n} \xrightarrow{\text{متقابل}} -A = (-a_{ij})_{m \times n}$$

لکه په لاندې مثال کې:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow -A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -5 \\ 1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$



1. لاندې متریکسونه په پام کې ونیسئ، مرتبې او اړوند نومونه یې وټاکئ:

$$a) A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b) B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$c) C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$d) D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$e) E = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$f) F = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$g) G = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$h) H = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} A+A= \\ A-A= \\ A+B= \\ A-B= \\ B+B= \\ B-B= \end{array} \right\} ?$$

د متريکسونو جمع او تفریق

Addition and subtraction of Matrix

په مخالف متريکسونو کې د هغوی د جمعي او تفریق په اړه د امکان په صورت کې څه ويلاى شى.

1) د متريکسونو جمع :

که چيرې $A=(a_{ij})_{m \times n}$ او $B=(b_{ij})_{m \times n}$ دوه متريکسونه وي، نو $A+B=C$ عبارت له هغه متريکس څخه دى چې د C_{ij} هر عنصر يې د a_{ij} او b_{ij} د جمعي له حاصل څخه لاس ته راغلي وي، يعنې د دوو متريکسونو جمع کول يوازې هغه وخت امکان لري چې د دواړو متريکسونو مرتبې سره مساوي وي. څرنگه چې C_{ij} د دوو حقيقي عددونو د جمعي حاصل دى، نو:

$$A_{m \times n} + B_{m \times n} = C_{m \times n} \Rightarrow (a_{ij})_{m \times n} + (b_{ij})_{m \times n} = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n} = (C_{ij})_{m \times n}$$

مثال:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}_{3 \times 2}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}_{3 \times 2}$$

$$A+B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3 & 2+2 \\ -2+1 & 0+2 \\ 1+0 & 7+(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = C_{3 \times 2}$$

2) د متريکسونو تفریق :

د جمعي عملي ته ورته کولای شو، د دوو متريکسونو تفاضل يا د تفریق حاصل په لاس راوړو. که د جمعي څخه دى چې د $B=(b_{ij})_{m \times n}$ وي، نو د تفریق حاصل يې په لاندې ډول په لاس راوړای شو:

$$A_{m \times n} - B_{m \times n} = (a_{ij})_{m \times n} - (b_{ij})_{m \times n} = (a_{ij} - b_{ij})_{m \times n} = C_{m \times n}$$

فعاليت

- که $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ او $B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ وي، $A-B$ په لاس راوړئ.

د متریکسونو د جمعې او تفریق خاصیتونه:

1. د متریکسونو جمع کول بدلون خاصیت لری، خو د متریکسونو تفریق د بدلون خاصیت نه لري، یعنې:

$$A + B = B + A$$

$$A - B \neq B - A$$

$$(A \pm B) \pm C = A \pm (B \pm C)$$

2. د متریکسونو جمع او تفریق انحدادی خاصیت لری.

3. د عینیت عنصر (Identity Element) د متریکسونو په جمع کې صدق کوي، خو د متریکسونو په

$$A + 0 = 0 + A = A \quad \text{تفریق کې صدق نه کوي.}$$

لومړی مثال: که $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ او $B = \begin{pmatrix} 11 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ راکړل شوی وي، نو $A - B$ په لاس راوړئ.

حل: څرنگه چې د دواړو متریکسونو مرتبه سره برابره (3×3) ده، نو کولای شو د تفریق حاصل یې په لاس راوړو.

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 11 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -11 & 2 & -1 \\ 2 & -0 & 5 & -3 \\ 6 & -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 4 & -5 & -5 \end{pmatrix}$$



• د یوه مثال په واسطه وینایاست چې $A - B \neq B - A$ دی.

دویم مثال: که چیرې $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ او $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ وي، د امکان په صورت کې $A + B$ او

$A - B$ په لاس راوړئ.

حل: لیدل کېږي چې د A او B متریکسونو مرتبې سره خلاف دی، له دې امله یې جمع او تفریق امکان نه لري، ځکه د A د متریکس مرتبه 3×2 او د B متریکس مرتبه 2×3 ده.



لاندې متریکسونه د امکان تر حده جمع او تفریق کړئ:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$K \cdot A = K \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

په مټریکس کې د سکالر ضرب

موږ د مټریکسونو د مجموعې او تفریق قاعده ولیدله،
که $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ یو مټریکس او K یو سکالر
وي، د هغوی د ضرب حاصل په اړه څه فکر کوئ.

فعالیت

- که $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ یو مټریکس او k یو سکالر وي، د $K \cdot A$ حاصل په لاس راوړئ.

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}, \quad KA = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

- د $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ مټریکس په کوم عدد کې ضرب شي، تر څو یې د ضرب حاصل یو واحد مټریکس شي.

کو لای شو د فعالیت له اجراء وروسته یې په لاندې ډول تعریف کړو.

تعریف: که $A = (a_{ij})_{m \times n}$ یو مټریکس او $K \in IR$ یو حقیقي عدد وي، نو KA د C له مټریکس څخه

عبارت دی، داسې چې د C_{ij} هر عنصر د K د ضرب حاصل په a_{ij} کې دی.

$$C_{ij} = K(a_{ij})$$

لومړی مثال: که $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ وي، د KA د ضرب حاصل پیدا کوئ.

$$KA = 2 \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 3 & 2 \cdot 6 \\ 2 \cdot 2 & 2 \cdot 1 & 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot 0 & 2(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 12 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

حل:

په مټریکس کې د سکالر ضرب خاصیتونه:

که چېرې A او B دواړه د یو شان مرتبې مټریکسونه، α او β دوه حقیقي عددونه وي، نو:

$$a) \alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$$

$$b) (\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$$

$$c) \alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A = \beta(\alpha A)$$

دویم مثال: که چېرې $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$ ، $\alpha = 3$ ، $\beta = 2$ راکړل شوي وي، وپایاست چې

$$\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A = \beta(\alpha A)$$

حل:

$$\begin{aligned} \alpha(\beta A) &= 3 \left[2 \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} \right] = 3 \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 & 2 \cdot 6 \\ 2 \cdot (-3) & 2 \cdot 9 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ -6 & 18 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \cdot 6 & 3 \cdot 12 \\ 3 \cdot (-6) & 3 \cdot 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 36 \\ -18 & 54 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\alpha\beta)A &= (3 \cdot 2) \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 \cdot 3 & 6 \cdot 6 \\ 6 \cdot (-3) & 6 \cdot 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 36 \\ -18 & 54 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta(\alpha A) &= 2 \left[3 \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} \right] = 2 \begin{pmatrix} 3 \cdot 3 & 3 \cdot 6 \\ 3 \cdot (-3) & 3 \cdot 9 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 9 & 18 \\ -9 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 36 \\ -18 & 54 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \alpha(\beta A) &= (\alpha\beta)A = \beta(\alpha A) \end{aligned}$$

پوښتنې

1. که چېرې $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ، $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ او $\alpha = 2$ ، $\beta = 1$ راکړل شوي وي، په

مټریکس کې د سکالر ضرب درې خاصیتونه تطبیق کړئ؟

2. که $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ او $K = 3$ وي، $K A$ او $\frac{1}{K} A$ پیدا کړئ.

د دوو متريکسونو ضرب

Multiplication of two Matrices

آيا د دوو متريکسونو د ضرب لپاره کوم نظر ورکولای شئ؟

تاسو د دوو متريکسونو د جمعې لپاره پيدا کړل چې

$A + B = B + A$ دی، د متريکسونو د ضرب لپاره څه

فکر کوئ؟

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = ?$$

تعريف

دوه متريکسونه د $A = (a_{ij})_{m \times n}$ او $B = (b_{ij})_{n \times p}$ په پام کې ونیسئ، د دې لپاره چې دا دواړه متريکسونه يو په بل کې ضرب شي، نو بايد د لومړي متريکس د ستونزو شمېر د دويم متريکس د سطرونو له شمېر سره برابر وي. د متريکسونو د ضرب حاصل بيا هم يو متريکس دی، لکه: $C = (a_{ij})_{m \times p}$ چې د سطرونو شمېر يې د لومړي متريکس د سطرونو په اندازه او د ستونزو شمېر يې د دويم متريکس د ستونزو له شمېر سره برابر دی.

$$A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = C_{m \times p}$$

د دوو متريکسونو د ضرب لپاره په لاندې ډول کرڼه کوو:

د لومړي متريکس لومړی سطر د دويم متريکس په ټولو ستونزو کې په وار سره ضربوو او په هماغه سطر کې يې ليکو، په دويمه مرحله کې بيا هم د لومړي متريکس دويم سطر د دويم متريکس په ټولو ستونزو کې په وار سره ضربوو او په هماغه (دويم سطر) کې يې ليکو، دغه عمل ته تر هغه دوام ورکوو، ترڅو ټول سطرونه د لومړي متريکس په دويم متريکس کې ضرب شي، په دغه ډول د متريکسونو د ضرب حاصل محاسبه کېږي. دغه مطلب کولای شو په لاندې ډول وښوو.

$$(a_{ij})_{m \times n} \cdot (b_{ij})_{n \times p} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} b_{ij} = (C_{ij})_{m \times p}$$

لومړی مثال: که چیرې $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ او $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ راکړ شوی وي، نو $A \cdot B$ پیدا کړئ.

حل: د دوو متريکسونو د ضرب له تعریف څخه پوهېږو:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) \\ -1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

دویم مثال: که چیرې $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ او $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ راکړ شوي وي، نو $A \cdot B$ حاصل

په لاس راوړئ.

حل: بیا هم د متريکسونو د ضرب له تعریف څخه په کار اخیستې لرو چې:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{2 \times 3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}_{3 \times 2}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) & 2 \cdot 3 + 3 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 \\ (-2) \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) & -2 \cdot 3 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+6+1 & 6+0-2 \\ -2+2-2 & -6+0+4 \end{pmatrix}_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

دویم مثال: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ او $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ وي $A \cdot B$ پیدا کړئ.

حل:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 3 \cdot 6 & 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 3 \cdot 7 \\ 5 \cdot 3 + 2 \cdot 6 & 5 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 5 \cdot 0 + 2 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+18 & 2+3 & 0+21 \\ 15+12 & 10+2 & 0+14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 5 & 21 \\ 27 & 12 & 14 \end{pmatrix}$$

- که $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ او $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ وي، د ضرب د حاصل دشتون په صورت کې AB او BA پيدا او يو له بله سره يې پرتله کړئ.

څلورم مثال: که $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ او $D = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$ وي، CD او DC پيدا او يو له بل سره يې پرتله کړئ.

حل:

$$\begin{aligned} CD &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(-3) + (-1)(-4) & 2 \cdot 4 + (-1)(-3) \\ 1(-3) + 2(-4) & 1 \cdot 4 + 2(-3) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -6 + 4 & 8 + 3 \\ -3 - 8 & 4 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 11 \\ -11 & -2 \end{pmatrix} \\ DC &= \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 & (-3)(-1) + 4 \cdot 2 \\ -4 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) & -4(-1) + (-3) \cdot 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -6 + 4 & 3 + 8 \\ -8 - 3 & 4 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 11 \\ -11 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

معلومېږي چې $CD = DC$ دی.

د متريکس د ضرب خواص:

لوړوی خاصیت: په عمومي ډول د دوو متريکسونو په ضرب کې د بدلون خاصیت صدق نه کوي.

يعني که A او B دوه متريکسونه او AB او BA تعريف شي، نو: $AB \neq BA$

په ځانگړي حالت کې د $m \times m$ مرتبې متريکسونه د تبدیلی خاصیت لري.

دویم خاصیت: د متريکسونو د ضرب د ضرب اتحادی خاصیت لري. که چېرې A, B او C د $m \times n$

$$\text{مرتبې متريکسونه وي، نو } (AB)C = A(BC)$$

درېم خاصیت: د متريکسونو ضرب توزیعي خاصیت د جمعې او ضرب لپاره لري، نو لرو:

- $A(B + C) = AB + AC$
- $(A + B)C = AC + BC$
- $K(AB) = (KA)B = A(KB)$, $K \in \mathbb{R}$
- $IA = AI = A$

د لاندې متريکسونو د ضرب حاصل په لاس راوړئ.

$$a) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = ?$$

$$b) \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = ?$$

$$c) \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$d) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = ?$$

د یوه متریکس ترانسپوز متریکس

Transpose of Matrix

که په یو متریکس کې سطرونه په ستونونو او ستونونه په سطرونو بدل شي نو یی متریکس چې په لاس

راځي په څه نوم یادېږي.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

فعالیت

- د $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ متریکس په پام کې ونیسئ، سطرونه ستونونه او ستونونه سطرونو ته ولېږدوئ، هغه

نوی متریکس چې په لاس راځي ونی لیکئ.

- که چېرې د یوه متریکس د سطرونو او ستونونو ځایونه یوله بل سره بدل کړاځي لیکې په عمودي او عمودي په افقي واړوئ، هغه نوی متریکس چې لاس ته راځي، آیا له لومړی متریکس سره مساوي دي، نوی متریکس په څه نوم یادېږي؟

له پورتنی فعالیت څخه لاندې تعریف په لاس راځي.

تعریف: که چېرې د یوه متریکس چې مرتبه یې $(m \times n)$ وي، سطر په ستون او ستون په سطر واړول شي، هغه نوی متریکس چې په لاس راځي، له ترانسپوز (Transpose) متریکس څخه عبارت دی، د A ترانسپوز متریکس په A^T ښودل کېږي. د ترانسپوز متریکس مرتبه $(n \times m)$ ده.

مثلاً: که چېرې $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$ وي، نو ترانسپوز متریکس یې عبارت دی له: $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}_{3 \times 2}$ ، که یو

ترانسپوز متریکس یعنی A^T له خپل ځان يعني A سره مساوي شي، نو په دې صورت کې A متریکس ته متناظر متریکس (Symmetric Matrix) وایي.

مثلاً: $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ یو متناظر متریکس دی، ځکه: $A^T = A \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

د متناظر متریکس پېژندل: په متناظرو متریکسونو کې عناصر نظر اصلي قطر ته متناظر او مساوي دي:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & f \\ c & f & d \end{pmatrix}$$



د ترانسپوز مټریکس خواص:

لوړې خاصیت: د یوه ترانسپوز مټریکس ترانسپوز له خپل لومړي مټریکس سره مساوي دی.

$$(A^T)^T = A \Rightarrow [a_{ij}]^T = (a_{ji})^T = (a_{ij}) = A$$

دویم خاصیت: د دوو یا څو ترانسپوز مټریکسونو د جمعې او تفریق حاصل د دوی د هر یوه د جمعې او تفریق له

ترانسپوز مټریکسونو سره مساوی دی. $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$

او یا په عمومي ډول $(A \pm B \pm C \pm \dots)^T = A^T \pm B^T \pm C^T \pm \dots$

درېم خاصیت: $(AB)^T = B^T \cdot A^T$

څلورم خاصیت: $(\alpha A)^T = \alpha A^T$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$(-A)^T = -A^T$

فعالیت

- که چېرې $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ او $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ راکړل شوي وي، وښایست چې:

$$(A - B)^T = A^T - B^T, \quad (A + B)^T = A^T + B^T$$

مثال: د لاندې مټریکسونو ترانسپوز مټریکسونه په لاس راوړئ.

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 7 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & 3 \end{pmatrix}_{3 \times 3}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$$

حل:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}_{2 \times 3} \Rightarrow B^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}_{3 \times 2}$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 7 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & 3 \end{pmatrix}_{3 \times 3} \Rightarrow C^T = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 5 & 2 & -6 \\ 7 & 1 & 3 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

پوښتنې

1. د A او B مټریکسونه په پام کې ونیسئ، د هغوی ترانسپوز مټریکسونه په لاس راوړئ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}_{3 \times 3}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

2. په پورتنيو مټریکسونو باندې د 3 عدد لپاره د ترانسپوز مټریکس 4 خاصیتونه وښایست.

دیتر مینانت

Determinant

په یوه عددي مثال کې یو مربعي متریکس داسې وټاکئ، چې د $ad - bc$ حاصل تفریق مساوي په صفر شي.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

تعريف

که چېرې د A متریکس یوه حقیقي عدد ته نسبت ورکړل شي، د A د متریکس له دیتر مینانت څخه عبارت دی، د $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ د متریکس دیتر مینانت په $|\det A|$ او یا $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ په ډول ښودل کېږي.

په همدې ډول که چېرې د $n \times n$ مرتبې یو متریکس چې n سطرونه او n ستونزه ولري، اړوند دیتر مینانت یې له n درجې څخه دی. د $A = (a_{ij})_{n \times n}$ یو مربعي متریکس په پام کې نیسو او د تعریف

$$|A| = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix}_{n \times n}$$

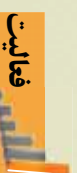
سره سم لرو چې:

د 2×2 مرتبې متریکسونو د دیتر مینانت محاسبه: د $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ متریکس دیتر مینانت په لاندې ډول تعریفوو.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

مثال: د $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$ متریکس دیتر مینانت حساب کړئ.

$$\text{حل: } |A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 7 \cdot 4 = 6 - 28 = -22$$



فعالیت

• د $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$ متریکس دیتر مینانت محاسبه کړئ.



۲۲۳

د 3×3 مټریکسونو د دیترینانت محاسبه: د $A_{3 \times 3}$ مټریکس، دیترینانت په پام کې نیسو:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

حل: د $A_{3 \times 3}$ دیترینانت د محاسبې لپاره لاندې گامونه په پام کې نیسو:

لومړۍ پړاو: اول ستون او دریم سطر له منځه وړو(حذفوو)، د 2×2 مرتبې دیترینانت محاسبه او د لومړي ستون او دریم سطر د تقاطع په عنصر کې یې ضربوو:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow (a_{12} a_{23} - a_{13} a_{22}) a_{31}$$

دویم پړاو: دریم ستون او دریم سطر حذف، د 2×2 مرتبې دیترینانت محاسبه او د دریم ستون او دریم سطر د تقاطع په عنصر کې یې ضربوو، هېره دې نه وي چې د دیترینانت د محاسبې لپاره علامې په متناوب ډول بدلون مومي:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow -(a_{11} a_{23} - a_{21} a_{13}) a_{32}$$

دریم پړاو: دریم ستون او دریم سطر له منځه وړو(حذفوو)، د 2×2 مرتبې دیترینانت محاسبه، د دریم سطر او دریم ستون د تقاطع په عنصر کې یې ضربوو:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) a_{33}$$

خلوړم پړاو: د 1، 2 او 3 ټول پړاونه سره جمع کوو، په دې ډول د A دیترینانت مقدار په لاس راځي.

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{12} a_{23} - a_{13} a_{22}) a_{31} - (a_{11} a_{23} - a_{21} a_{13}) a_{32} + (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) a_{33} \\ &= a_{12} a_{23} a_{31} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{11} a_{23} a_{32} + a_{21} a_{13} a_{32} + a_{11} a_{22} a_{33} - a_{12} a_{21} a_{33} \end{aligned}$$

$$B = \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix}$$

مثال: د لاندې دېټرېمانټ مقدار په لاس راوړئ.

حل: له تېرو معلوماتو څخه کار اخلو:

$$I) \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix} = (6 \cdot 2 - 1(-3)) \cdot 4 = (12 + 3) \cdot 4 = 15 \cdot 4 = 60$$

$$II) \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix} = -(2 \cdot 2 - 5(-3))(-1) = 4 + 15 = 19$$

$$III) \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix} = (2 \cdot 1 - 5(6)) \cdot 7 = (2 - 30) \cdot 7 = -28 \cdot 7 = -196$$

$$I + II + III = 60 + 19 - 196 = -117$$

فعالیت

• د $A = \begin{vmatrix} a & 0 & 3 \\ -4 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ له دېټرېمانټ څخه د a قیمت په لاس راوړئ.

دویمه طریقه: د ساروس په طریقه د دېټرېمانټ محاسبه: په دغه طریقه کې د دېټرېمانټ دوه لومړي ستونزه بڼې لورې ته په لاندې ډول تکرار لیکو:

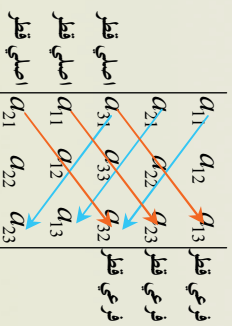
$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

فرعي قطرونه اصلي قطرونه

د اصلي قطر عناصر یو له بل سره ضرب او جمع کوو، په همدې ډول د فرعي قطر عناصر یو له بل سره ضربوو او وروسته یې جمع کوو، همدارنګه د اصلي قطرونو د عناصرو د حاصل ضرب له مجموع څخه، د فرعي قطرونو د عناصرو د حاصل ضرب مجموع کموو، په دې ډول د A د مټریکس دېټرېمانټ مقدار په لاس راځي:

$$|A| = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$$

په دغه طریقه کې کولای شو د لومړۍ او دویم ستون د لېږد په ځای لومړۍ او دویم سطر د دیتر مېنانت لاندینی برخې ته انتقال کړو او د تېر په ډول کرښه سرته رسوو.



دویم مثال: د لاندې دیتر مېنانت قیمت د ساروس په طریقه په لاس راوړئ.

$$|M| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 0 \\ 5 & -2 & 6 \end{vmatrix}$$

حل:

$$|M| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 0 \\ 5 & -2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 0 \\ 5 & -2 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= (3 \cdot 3 \cdot 6 + 2 \cdot 0 \cdot 5 + (-1)(-4)(-2)) - ((-1) \cdot 3 \cdot 5 + 3 \cdot 0(-2) + 2(-4) \cdot 6) \\ = (54 + 0 - 8) - (-15 + 0 - 48) = 46 + 63 = 109$$

فعالیت

- لاندې د $|A|$ دیتر مېنانت د ساروس په طریقه په لاس راوړئ، په داسې حال کې چې دوه لومړني سطرونه د دیتر مېنانت لاندې برخې ته ولېږدوئ او عملیه سرته ورسوئ.

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

پوښتنې

1. د لاندې دیتر مېنانتونو مقدار په لنډ ډول محاسبه کړئ.

$$a) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}, \quad b) \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}, \quad c) \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix}, \quad d) \begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -5 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

2. د لاندې دیتر مېنانتونو مقدار د ساروس په طریقه په لاس راوړئ.

$$a) \begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 7 \end{vmatrix}, \quad b) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

د دیترمینانت خاصیتونه

که چېرې په یوه دیترمینانت کې د سطر ځای له ستون سره بدل شي، د دیترمینانت په قیمت کې تغیر راځي او که نه؟

فعالیت

- د $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ او $|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ دیترمینانته محاسبه کړئ.
- د $|A| = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ دیترمینانت په پام کې ونیسئ، ترانسپوز یې په لاس راوړئ، وروسته یې $|A^T|$ له پورتنۍ فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي.

(دیترمینانت) محاسبه کړئ او وینایاست چې $|A| = |A^T|$.

که چېرې A یو متریکس وي، د $|A|$ دیترمینانت لپاره لاندې خواص صادق کوي.

- که د A متریکس د یوه سطر او یا یوه ستون ټول عناصر صفرونه وي، نو د $|A|$ دیترمینانت مساوي له صفر سره دی.
$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0, \quad |A| = \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ 0 & c & d \\ 0 & e & f \end{vmatrix} = 0$$
- که چېرې د A متریکس دوه سطرونه یا دوه ستونونه سره مساوي وي، نو اړوند دیترمینانت یې مساوي له صفر سره دی.
$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0$$
- که د A متریکس د یوه سطر او یا یوه ستون عناصر د بل سطر او یا ستون د عناصرو ګډ فکتور وي، نو
$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ \lambda a & \lambda b & \lambda c \\ d & e & f \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = \lambda |A|$$

- د A متریکس دیترمینانت او A^T متریکس دیترمینانت یو له بل سره مساوي دي، په همدې ډول دیترمینانت ځینې نور خاصیتونه یا ځانګړنې هم لري، لکه:

که چیري په یوه دیترمینانت کې د دوو سطرونو یا دوو ستونونو ځایونه یو له بل سره بدل شي، د دیترمینانت اشاره بدلون مومي.

لوړی مثال: د $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ دیترمینانت لومړي ستون له دویم ستون سره بدل کړئ او وروسته د دواړو دیترمینانتونو قیمتونه سره پرتله کړئ.

حل:

$$A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow (0+6+4)-(24-4+0) = -10$$

$$B = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (0+24-4)-(4+6+0) = 20-10 = 10$$

لیدل کېږي چې د A په دیترمینانت کې دویم ستون له لومړي ستون سره بدل شوی، په ورته ډول کولای شو، دوه سطرونه هم یو له بل سره بدل کړو، نو داسې پایله په لاس راځي: $|A| = -|B|$ که د K یو ثابت عدد په دیترمینانت کې ضرب شي، دغه عدد یوازې په یوه سطر او یا یوه ستون کې په اختیاري ډول ضربېدلای شي. په همدې ډول کولای شو د یوه دیترمینانت گڼعامل له یوه سطر او یا یوه ستون څخه گڼه عددو ټاکو چې د دیترمینانت گڼه فکتور بلل کېږي.

دویم مثال: د $|A|$ دیترمینانت گڼه ضربې عامل پیدا کړئ.

$$A = \begin{vmatrix} 16 & 3 & 22 \\ 8 & 2 & 21 \\ 20 & 1 & 25 \end{vmatrix}$$

حل: لیدل کېږي چې د دیترمینانت په لومړي ستون کې د 4 عدد گڼه ضربې عامل دی چې په حقیقت کې دا عدد د دیترمینانت گڼه ضربې عامل دی.

$$|A| = \begin{vmatrix} 16 & 3 & 22 \\ 8 & 2 & 21 \\ 20 & 1 & 25 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 4 & 3 & 22 \\ 2 & 2 & 21 \\ 5 & 1 & 25 \end{vmatrix}$$

پوښتنې

د دیترمینانت دخواصو په مرسته د لاندې دېریمینانتونو قیمت په لاس راوړئ.

$$a) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix} \quad b) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 7 & 9 & 11 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad c) \begin{vmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

د 2×2 مټریکسونو ضربني معکوس

Multiplication inverse of 2×2 matrices

آیا د حقیقي عددونو د ضرب قاعده مو په یاد ده؟

د a حقیقي عدد ضربني معکوس کوم عدد دی؟

په همدې ډول د ځینو مربعي مټریکسونو لپاره هم دا خاصیت، د $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ مټریکسونو د خاصیتونو په پام کې نیولو سره شتون لري.

فعالیت

- د $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ مټریکس په پام کې ونیسئ او دیتربینانت یې محاسبه کړئ.
- د $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ مټریکس د A له مټریکس سره ضرب او پایله یې ولیکئ.

له پورتنۍ فعالیت څخه لاندې پایله بیانولای شو:

تعریف: د $A = (a_{ij})_{n \times n}$ غیر صفري مربعي مټریکس په پام کې نیسو، که چېرې د B مربعي مټریکس داسې

موجود وي، چې: $AB = BA = I$

په دې صورت کې د B مټریکس د A د مټریکس معکوس بلل کېږي او هغه په A^{-1} سره نښتي. له دې امله

لیکلې شو چې: $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

په یاد ولرو: د A مربعي مټریکس ته منفرد مټریکس (Singular Matrix) ویل کېږي، کله چې $|A| = 0$ وي او همدارنګه د A مربعي مټریکس ته غیر منفرد مټریکس (non singular matrix) ویل کېږي، که چېرې $|A| \neq 0$ وي.

له دې امله هغه وخت یو مټریکس د معکوس مټریکس لرونکی دی چې:

1. مټریکس مربعي وي.

2. دیتربینانت یې د صفر خلاف وي.

لومړی مثال: وینایست چې $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$ ، $B = \begin{pmatrix} -7 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ یو د بل معکوس دي.

حل:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)(-7) + 3(-2) & (-1)(-3) + 3(-1) \\ 2(-7) + (-7)(-2) & 2(-3) + (-7)(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7-6 & 3-3 \\ -14+14 & -6+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -7 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7-6 & -21+21 \\ 2-2 & -6+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

لیلل کېږي چې: $I = BA = AB$ ، نو A او B یو د بل معکوس دي.

الحاقی متریکس (Ad joint of matrix): د 2×2 مرتبې الحاقی متریکس د پیدا کولو لپاره د اصلي قطر د عناصرو ځایونه سره بدلون او فرعي قطر د اشارې په بدلون سره لیکو، هغه نوی متریکس چې لاس ته راځي، له الحاقی متریکس (adjoint=ad) څخه عبارت دی، د مثال په ډول:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Adj } A = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Adj } K = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

هغه وخت یو متریکس معکوس متریکس لري چې د تیرمېنت یې د صفر خلاف وي، یعنې $|A| \neq 0$ وي. البته د بحث موضوع 2×2 مرتبې متریکس دی چې له لاندې فورمول څخه په لاس راځي:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj } A \quad |A| \neq 0$$

لومړی مثال: که چېرې $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ وي، معکوس متریکس یې پیدا کړئ.

حل: $|A| = \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -18 + 10 = 8 \neq 0$

لیدل کېږي چې د A متریکس د تیرمېنت د صفر خلاف دی، نو د A متریکس معکوس متریکس لري.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj } A = \frac{1}{-8} \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{8} & -\frac{2}{8} \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{4} & \frac{5}{4} \\ -\frac{15}{4} & \frac{15}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

ازموینه:

په عمومي ډول ویلی شو، د هر $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ متریکس چې د تیرمېنت یې د صفر خلاف یعنې $|A| \neq 0$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

وي، معکوس لري چې له دې فورمول څخه په لاس راځي:

یو پښتني



1. د لاندې متریکسونو څخه کوم یو متریکس معکوس لري.

a) $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -10 & -2 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 5 & 19 \\ 4 & 15 \end{pmatrix}$

2. د لاندې متریکسونو معکوس متریکس په لاس راوړئ او وازمؤ.

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ 2) $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ 3) $C = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$



له معکوس متريکس څخه په کار اخېستني د خطي معادلنو د سيستم حل

آيا تر اوسه مو له معکوس متريکس څخه په گټه اخېستني د خطي معادلنو د سيستم د حل په اړه فکر کړی دی؟

$$X = A^{-1} \cdot B$$

فعاليت

د خطي دوه مجهوله معادلنو سيستم
$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$
 په پام کې ونیسئ:

- د ضربونو متريکس، د مجهولینو متريکس، د ضربونو او مجهولینو متريکس ولیکئ.
- هر متريکس د معادلې په ډول ولیکئ.

- د لاس ته راغلي معادلې اطراف د ضربونو د متريکس په معکوس کې ضرب کړئ.
- له پورتنۍ فعالیت څخه کولای شو لاندې پایله بیان کړو:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

څرنگه چې A د سيستم د چپ لوري د ضربونو متريکس، B د ښي لوري د ثابتو عددونو ستوني متريکس او X د مجهولو عددونو ستوني متريکس دی، نو د A^{-1} په پام کې نیولو سره سيستم داسې حلېږي:

$$AX = B$$

$$A^{-1} \cdot AX = A^{-1} \cdot B \Rightarrow (A^{-1} \cdot A)X = A^{-1} \cdot B$$

$$IX = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot B$$

لوپړی مثال: له معکوس متريکس څخه په کار اخيستنې سره، د خطي دوه مجهوله

سیستم حل کړئ.

حل: پوهېږو چې $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ او $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ، $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ دی.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0$$

څرنگه چې د A متريکس دیرمېنلټ د صفر خلاف دی، نو د A متريکس معکوس لري او په لاندې ډول يې په لاس راولړو:

$$Adj\ A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 \\ -1 \cdot 5 + 1 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 - 14 \\ -5 + 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x = 1, \quad y = 2$$

دویم مثال: له معکوس متريکس څخه په کار اخيستنې سره د دغه خطي معادلو $\begin{cases} 5x - 2y = 2 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$

سیستم حل کړئ.

حل: پوهېږو چې:

$$B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -5 + 6 = 1 \Rightarrow A \neq 0$$

ليدل کيږي چي $|A| \neq 0$ دی، نو A معکوس مټريکس لري.

$$Adj A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj A = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \\ -3 \cdot 2 + 5 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + 6 \\ -6 + 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x = 4, \quad y = 9$$

درېم مثال: د x او y په کومو قيمتونو کې لاندې معادلې په يو وخت کې صدق کوي.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 4x - 6y = 1 \end{cases}$$

د ياد شوی سیستم حل د سیستم د ضريبونو د مټريکسونو له تشکيل څخه په لاس راوړو:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = -12 + 12 = 0$$

څرنگه چې د A مټريکس ديتريمنانت صفر دی، نو د A مټريکس معکوس نه لري، په پايله کې ويلاى شو چې سیستم حل نه لري.



له معكوس ميٽريڪس ڇخه ٻه گڻهه اڻڄڻي ۽ ڊ لائڊي خطي معادلر سسٽمونه حل ڪري.

$$a) \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 5x - 2y = 2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 3p - 5q = 7 \\ 2p - 4q = 6 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} a + b = 11 \\ 4a - b = 9 \end{cases}$$

د خطي معادلو د سیستم حل د کرامر په طریقه

Cramer's rule

آیا کولای شو، د ضربونو د متريکس د دیتر مېنانت او

له مجهولینو یعنې د x, y, z سره د متناظر

متريکسونو د دیتر مېنانت په واسطه د خطي معادلو د

سیستم حل پیدا کړو؟

$$x = \frac{|A_x|}{|A|}$$
$$y = \frac{|A_y|}{|A|}$$
$$z = \frac{|A_z|}{|A|}$$

د خطي درې مجهوله معادلو سیستم په پام کې نیسو او د ضربونو متريکس یې په A سره ښیو:

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = d_1$$

$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = d_2$$

$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = d_3$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

کولای شو د x, y, z او z قیمتونه له لاندې اړیکو څخه په لاس راوړو، په داسې حال کې چې $|A| \neq 0$

وی:

$$x = \frac{|A_x|}{|A|}, \quad y = \frac{|A_y|}{|A|}, \quad z = \frac{|A_z|}{|A|}$$

په پورتنیو اړیکو کې $|A_x|$ ، $|A_y|$ او $|A_z|$ په ترتیب سره د x, y, z اړوند متناظر متريکسونو دیتر مېنانتونه دي. د هغوی د محاسبې لپاره په لاندې ډول کرڼه کوو، د سیستم زیات شوي متريکس لیکو:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & d_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & d_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & d_3 \end{array} \right)$$

د $|A_x|$ د محاسبې لپاره د لومړۍ ستونزې د x ضریبونو په ځای څلورم ستونزې(هغه ثابت مقدارونه چې د سیستم بڼې لوري ته پراته دي) ځای پر ځای کوو، د 3×3 مرتبې متريکس دیتر مینانت په لاس راوړو او د $|A_r|$ د محاسبې لپاره د دویم ستونزې د r ضریبونو په ځای څلورم ستونزې(هغه ثابت مقدارونه چې د سیستم بڼې لوري ته پراته دي) ځای پر ځای کوو او د 3×3 مرتبې د متريکس دیتر مینانت محاسبه کوو. او د $|A_z|$ د محاسبې لپاره دریم ستونزې د z ضریبونو په ځای څلورم ستونزې ځای په ځای کوو او د 3×3 مرتبې متريکس دیتر مینانت قیمت په لاس راوړو.



- له پورتنيو معلوماتو څخه په گټې اخېستې سره $|A_x|$ ، $|A_r|$ او $|A_z|$ پيدا کړئ.

لومړی مثال: د
$$\begin{cases} x-3y=3 \\ 2x+y=2 \end{cases}$$
 سیستم حل د کرامر په طریقه په لاس راوړئ.

$$\text{حل: } 0 \neq 7 = 1 + 6 = 1 - (-6) = 1 - \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

څرنگه چې $|A| \neq 0$ دي؛ نو سیستم حل لري.

اوس زیات شوی متريکس لیکو:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{3 - (-6)}{7} = \frac{3 + 6}{7} = \frac{9}{7}$$

$$x = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{2 - 6}{7} = -\frac{4}{7}$$

دویم مثال: لاندې درې مجهولہ سیستم د کرامر په طریقہ حل کړئ.

$$\begin{cases} 3x - 2y + 2z = -4 \\ x + 3y + z = 5 \\ 2x + 2y - z = 11 \end{cases}$$

حل:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{matrix} = -9 - 4 + 4 - 12 - 6 - 2 = -21 - 8 = -29 \neq 0$$

څرنگه چې $|A| \neq 0$ دى نو له دې امله سیستم حل لري.

$$|A_x| = \begin{vmatrix} -4 & -2 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \\ 11 & 2 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{matrix} = 12 - 22 + 20 - (66 - 8 + 10) = 10 - 68 = -58$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{-58}{-29} = 2$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 11 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} = -15 - 8 + 22 - (20 + 33 + 4) = -23 + 22 - 57 = -58$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{-58}{-29} = 2$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{matrix} = 99 - 20 - 8 - (-24 + 30 - 22) = 71 + 16 = 87$$

$$z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{87}{-29} = -3$$

ميزان:

د x, y, z او z په لاس راځي قيمتونه په اصلي سيستم کې وضع کوو:

$$3(2) - 2(2) + 2(-3) = 6 - 4 - 6 = -4 \Rightarrow -4 = -4$$

$$2 + 3(2) - 3 = 2 + 6 - 3 = 8 - 3 = 5 \Rightarrow 5 = 5$$

$$2(2) + 2(2) - (-3) = 4 + 4 + 3 = 11 \Rightarrow 11 = 11$$

پوښتنې

د لاندې معادلو سيستمونه حل کړئ.

$$a) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y - z = 2 \\ 2x + y - 2z = 1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + y - az = 0 \\ ax + 2y - z = 0 \\ 2x + ay + 2z = 0 \end{cases}$$

د معادلو د سیستم حل د گوس (Gouse) په طریقه

آیا کولای شو له متواریکس څخه په کار اخیستې سره

د x, y او z مجهول قیمتونه پیل کړو.

$$\begin{cases} x+2y=5 \\ x+3y=7 \end{cases}$$

د گوس په طریقه د معادلو د سیستم د حل لپاره د ضربونو متواریکس او ثابت قیمتونه

لیکو وروسته په سطرونو او ستونزو، باندې لومړنۍ عملیې (جمع، تفریق، ضرب او تقسیم) سرته رسوو، یا سطرونه او ستونزه په یو سکالر کې ضربوو چې په پایله کې دوه مجهول له منځه ځي او دریم مجهول محاسبه کېږي، وروسته د نورو مجهولونو قیمت په لاس راوړو، د متواریکس سطرونه په

..... R_1, R_2, R_3 ټیټو:

لومړی مثال: لاندې د خطي معادلو سیستم د گوس په طریقه حل کړئ.

$$\begin{cases} x+2y=5 \\ x+3y=7 \end{cases}$$

حل: د ضربونو متواریکس لیکو:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{لومړی سطر منفي دوم سطر تفریق حاصل په دوم سطر کې}]{R_1 - R_2 \rightarrow R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{دوم سطر په (-1) کې ضرب بدلون په دوم سطر کې}]{R_2 \cdot (-1) \rightarrow R_2}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \Rightarrow y=2, \quad x+2y=5, \quad x+2(2)=5 \Rightarrow x=5-4=x=1$$

پاملرنه: $R_1 \rightarrow R_2$ په دې معنا چې له لومړي سطر څخه دویم سطر تفریق شوی او په دویم سطر کې

بدلون لیکل شوی دی.

$R_2 \rightarrow R_2(-1)$ داسې مفهوم لري چې دویم سطر په (-1) کې ضرب شوی او په دویم سطر کې لیکل

شوی دی.

- د خطي دوه معادلو سیستم د گوس په طریقه حل کړئ.

$$\begin{cases} x+2y=-3 \\ 2x-y=4 \end{cases}$$

دویم مثال: د لاندې درې مجهولہ معادلو سیستم د گوس په طریقه حل کړئ.

$$\begin{cases} 2x+3y-z=5 \\ 3x+y+2z=11 \\ 4x-2y+z=3 \end{cases}$$

حل: لومړی د سیستم د مجهولینو د ضربونو او ثابتو عددونو متبریکس لیکو:

$$\begin{array}{l} R_1 \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \end{array} \right) \\ R_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 11 \end{array} \right) \\ R_3 \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 1 & 3 \end{array} \right) \end{array}$$

په لومړی پړاو کې د x ضریب په دویم سطر کې له منځه وړو. داسې چې لومړی سطر په -3 کې ضرب د

دویم سطر له دوه چنده سره جمع او په دویم سطر کې یې لیکو:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 11 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{-3R_1+2R_2 \rightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

په دویم گام کې د x ضریب په دویم سطر کې له منځه وړو داسې چې لومړی سطر په -2 کې ضرب له

دویم سطر سره جمع او په دویم سطر کې یې لیکو:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{-2R_1+R_3 \rightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \\ 0 & -8 & 3 & -7 \end{array} \right)$$

په دویم پړاو کې د x ضریب له دویم سطر څخه حذفوو، داسې چې دویم سطر په -8 کې ضرب د دویم سطر له 7 چنده سره جمع او په دویم سطر کې یې لیکو:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \\ 0 & -8 & 3 & -7 \end{array} \right) \xrightarrow{-8R_2+7R_3 \rightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & -35 & -105 \end{array} \right)$$

له دریم سطر څخه کولای شو، د z قیمت په لاس راوړو:

$$-35z = -105 \Rightarrow z = 3$$

د z قیمت په دویم سطر کې وضع او د y قیمت په لاس راوړو:

$$-7y + 7z = 7 \Rightarrow -7y + 21 = 7 \Rightarrow -7y = -14, \quad y = 2$$

په دریم پړاو کې د y او z قیمتونه په لومړي سطر کې اېږدو او x په لاس راځي.

$$2x + 3y - z = 5 \Rightarrow 2x + 3 \cdot 2 - 3 = 5 \Rightarrow 2x + 3 = 5$$

$$2x = 5 - 3 = 2, \quad x = 1$$

د خطي معادلو د سیستم حل عبارت دی له: $(x, y, z) = (1, 2, 3)$

دریم مثال: د لاندې خطي معادلاتو سیستم د گوس په طریقه حل کړئ.

$$2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 18$$

$$4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 24$$

$$2x_1 + 7x_2 + 12x_3 = 40$$

حل:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 6 & 18 & 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 & 0 & -3 & -6 & -12 \\ 2 & 7 & 12 & 40 & 2 & 7 & 12 & 40 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{\text{لومړی پړاو} \\ -2R_1 + R_2 \rightarrow R_2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 6 & 18 & 2 & 4 & 6 & 18 \\ 0 & -3 & -6 & -12 & 0 & -3 & -6 & -12 \\ 2 & 7 & 12 & 40 & 2 & 7 & 12 & 40 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\substack{\text{دویم پړاو} \\ -R_1 + R_3 \rightarrow R_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 6 & 18 & 2 & 4 & 6 & 18 \\ 0 & -3 & -6 & -12 & 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & 3 & 6 & 22 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 + R_3 \rightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 6 & 18 & 2 & 4 & 6 & 18 \\ 0 & -3 & -6 & -12 & 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{array} \right)$$

لیدل کېږي چې په لاس راغلی متريکس کې د x_1, x_2 او x_3 ضریبونه په دریم سطر کې صفر دي، په داسې حال کې چې په یاد شوي سطر کې ثابت عدد 10 دی او دا غیر ممکن دی چې $0 = 10$ (چې $0 = x_3 = x_2 = x_1$) نو سیستم حل نه لري.

د لاندې معادلو سیستم حل او میزان کړئ.

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

پاملرته: که چیرې د خطي معادلو په سیستم کې یو له مجهولینو څخه موجود نه وي، د هغه ضریب صفر په پام کې نیسو، وروسته د خطي معادلو د ضریبونو او د ثابتو مقدارونو متبریکس تشکیلو:

پوښتنې

د لاندې خطي معادلو سیستمونه د گوس په طریقه حل کړئ.

a) $\begin{cases} 3x - y = -5 \\ x + 3y = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 4y - 10z = -2 \\ 3x + 9y - 21z = 0 \\ x + 5y - 12z = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + 2y = 2 \\ x + 2y = 3 \\ -3y = -6 \end{cases}$

د شپږم څپرکي مهم ټکي

د مټریکس تعریف: یوه گڼه‌ئ عددونه یا توري چې په سطري او ستوني ډول په یوه مستطيلي جدول کې ځای پر ځای شوي وي. د مټریکس (Matrix) په نامه یادېږي.

د مټریکسونو ډولونه:

- سطري مټریکس: هغه مټریکس چې یوازې یو سطر ولري.
- ستوني مټریکس: هغه مټریکس چې یوازې یو ستون ولري.
- صفري مټریکس: هغه مټریکس چې ټول عناصر یې صفرونه وي.
- مربعي مټریکس: هغه مټریکس چې د سطرونو او ستونونو شمېر یې سره برابر وي.
- مساوي مټریکسونه: دوه مټریکسونه، هغه وخت سره مساوي دي چې ټول عناصر یې په یو سره برابر او مساوي وي.

- قطري مټریکس هغه مټریکس چې ټول عناصر یې پرته له اصلي قطر څخه صفرونه وي، قطري مټریکس بلل کېږي.
- سکالر مټریکس: هر قطري مټریکس چې د اصلي قطر عناصر یې سره برابر وي، سکالري مټریکس بلل کېږي.
- واحد مټریکس: په هر سکالري مټریکس کې که د اصلي قطر عناصر د 1 عدد وي، واحد مټریکس بلل کېږي.
- په مټریکسونو باندې لومړني عملیات:

- د مټریکسونو جمع او تفریق: د مټریکسونو جمع او تفریق هغه وخت امکان لري چې:

$$A_{m \times n} \pm B_{m \times n} = (a_{ij})_{m \times n} \pm (b_{ij})_{m \times n} = (a_{ij} \pm b_{ij})_{m \times n} = C_{m \times n}$$

د مټریکسونو د جمعي او تفریق خواص:

- 1) $A + B = B + A$
- 2) $A - B \neq B - A$
- 3) $(A \pm B) \pm C = A \pm (B \pm C)$
- 4) $A + 0 = 0 + A = A$
- 5) $A + (-A) = -A + A = 0$

په مټریکس کې د سکالر ضربول: که $K \in \mathbb{R}$ او $A = (a_{ij})_{m \times n}$ وي، نو:

$$KA = K(a_{ij})_{m \times n} = (C_{ij})_{m \times n} = C_{m \times n}$$

په مټریکس کې د سکالر ضرب خواص:

- a) $\alpha (A + B) = \alpha A + \alpha B$
- b) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
- c) $\alpha (\beta A) = (\alpha \beta)A = \beta(\alpha A)$

د دوو مټریکسونو ضرب: د دوو مټریکسونو ضرب هغه وخت ممکن دی چې د لومړي مټریکس د ستونونو شمېر، د دویم مټریکس د سطرونو له شمېر سره برابر وي، که $A = (a_{ij})_{m \times n}$ او $B = (b_{ij})_{n \times p}$ وي، نو:

$$A \cdot B = (a_{ij})_{m \times n} \cdot (b_{ij})_{n \times p} = (C_{ij})_{m \times p} = C_{m \times p}$$

يعني د دوو متریکسونو د ضرب حاصل هغه دریم متریکس دی چې د سطرونو شمېر يې له لومړي متریکس سره او

د ستونزو شمېر يې له دویم متریکس سره برابر وي.

د متریکسونو د ضرب خواص: که A او B دوه متریکسونه وي، نو:

- 1) $AB \neq BA$
- 2) $(AB)C = A(BC)$
- 3) $A(B + C) = AB + AC$
- 4) $I \cdot A = A \cdot I = A$

5) $K(AB) = (KA)B = A(KB)$

د یوه متریکس ترانسپوز متریکس: که د یوه $A_{m \times n}$ متریکس ستونونه په سطرونو او سطرونه په ستونونو بدل شي، هغه نوری متریکس چې لاسته راځي، د ترانسپوز متریکس په نامه یادېږي. د A ترانسپوز متریکس په A^T سره ښیي.

مثلي متریکس: که په یوه متریکس کې د اصلي قطر پورتي او یا ښکني عناصر ټول صفرونه وي، نوموړی متریکس د مثلي متریکس په نامه یادېږي.

متناظر متریکس: که د A یو متریکس له خپل ترانسپوز A^T متریکس سره برابر شي ($A = A^T$) نو د A متریکس ته متناظر متریکس وایي.

دیترېمینانت: که د A متریکس یوه حقيقي عدد ته نسبت ورکړل شي، د A د متریکس له دیترېمینانت څخه عبارت دی، او د $|A|$ یا $\det A$ په شکل سره ښودل کېږي.

د دیترېمینانت خواص:

1. که د $A_{n \times n}$ متریکس د یوه سطر او یا ستون ټول عناصر صفرونه وي، نو دیترېمینانت يې صفر دی، يعني: $\det A = |A| = 0$
2. که د دیترېمینانت دوه سطرونه او یا دوه ستونونه سره برابر (مساوي) وي، نو دیترېمینانت يې صفر دی. $|A| = 0$
3. که $A_{n \times n}$ متریکس د یوه سطر یا ستون عناصر د بل سطر یا ستون د عناصرو مضرب وي، نو دیترېمینانت يې صفر دی. $|A| = 0$
4. د A متریکس او د A ترانسپوز متریکس دیترېمینانته سره مساوي وي، يعني: $|A^T| = |A|$

د متریکسونو ضربي معکوس: د $A = (a_{ij})_{m \times n}$ مربعي متریکس په پام کې نیسو، که چېرې د B مربعي متریکس داسې موجود وي چې $AB = BA = I$ ، په دې صورت کې د B متریکس د A د متریکس معکوس دی او د A د متریکس معکوس متریکس په A^{-1} سره ښیي: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

د خطي معادلو د سیستم حل:

- له معکوس متریکس څخه په ګټه اخیستې د خطي معادلو د سیستم حل.
- د خطي معادلو د سیستم حل د کرامر په طریقه.
- د ګوس په طریقه د خطي معادلو د سیستم حل.



د خپر کی پو بستی

لانڊي پو بستی ته څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، له سم ځواب څخه کړی تلو کړی.

1. که $|A| = 3$ وي، نو $|A^{-1}|$ پیدا کړی.

- a) $\frac{1}{3}$ b) 9 c) $\frac{1}{9}$ d) 3

2. که $A = \begin{pmatrix} 2m-3 & -1 \\ 1 & m \end{pmatrix}$ معکوس منونکی متريکس وي، نو د m قیمت به څو وي؟

- a) $m = 1, \frac{1}{2}$ b) $m \neq 1$ c) $m = 0$ d) $m \neq 1, \frac{1}{2}$

3. که $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ وي، د x هغه متريکس په لاس راوړی چې په دغه رابطه $Ax = A^{-1}$ کې صدق وکړي.

- a) $\begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 25 & 14 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -25 & 14 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 9 & 5 \\ -25 & -16 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -9 & 5 \\ -25 & -12 \end{pmatrix}$

4. د $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ متريکس لانډي د $y = 2x$ د خط بدلون منونکي خط پیدا کړی.

- a) $y = 0$ b) x محور c) $y + 2x = 0$ d) y محور

5. د x په کومو قیمتونو دغه ديتريمنانت $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix}$ صفر دی؟

- a) $x = 1, 2$ b) $x = 3, 1$ c) $x = \frac{1}{2}, 3$ d) $x = 3, 2$

7. د $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ ديتريمنانت حاصل په لاس راوړی.

- a) 29 b) 39 c) 19 d) 9

لاندي پوښتني حل کړئ.

1. که $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ او $B = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ وي، لاندي محاسبې غوښتل شوي دي:

a) $3A - 2B$

b) $-4A + 3B$

2. فرض کړئ که $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ او $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ راکړل شوی وي، نو AB او BA محاسبه کړئ.

او وړايست چې $AB = BA$ دی.

3. لاندي مټريکسونه په پام کې ونيسي:

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

اشتراکي خاصیت، توزيعی خاصیت او د مټريکسونو ضرب د درو مټريکسونو لپاره وښايست.

4. لاندي ديترمينانت په لنډ ډول محاسبه کړئ.

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

5. د لاندي مټريکس معکوس مټريکس د الحاق (adjoint) په طريقه پيدا کړئ.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$$

6. د لاندي خطي معادلو سيستمونه د کرامر په طريقه حل کړئ.

a)
$$\begin{cases} 2x + y + z = 6 \\ x - 2y + 2z = 10 \\ 3x - y - z = 4 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 = 5 \end{cases}$$

7. د لاندي خطي معادلو سيستمونه د گوس په طريقه حل کړئ.

a)
$$\begin{cases} 2x - 3y + 3z = 0 \\ 3x + 2y - 5z = 0 \\ 5x - 4y - 2z = 0 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 2x + 3y - 7 = 1 \\ 2y + 27 = -2 \end{cases}$$

8. د لاندي خطي معادلو سيستمونه د معکوس مټريکس په طريقه حل کړئ.

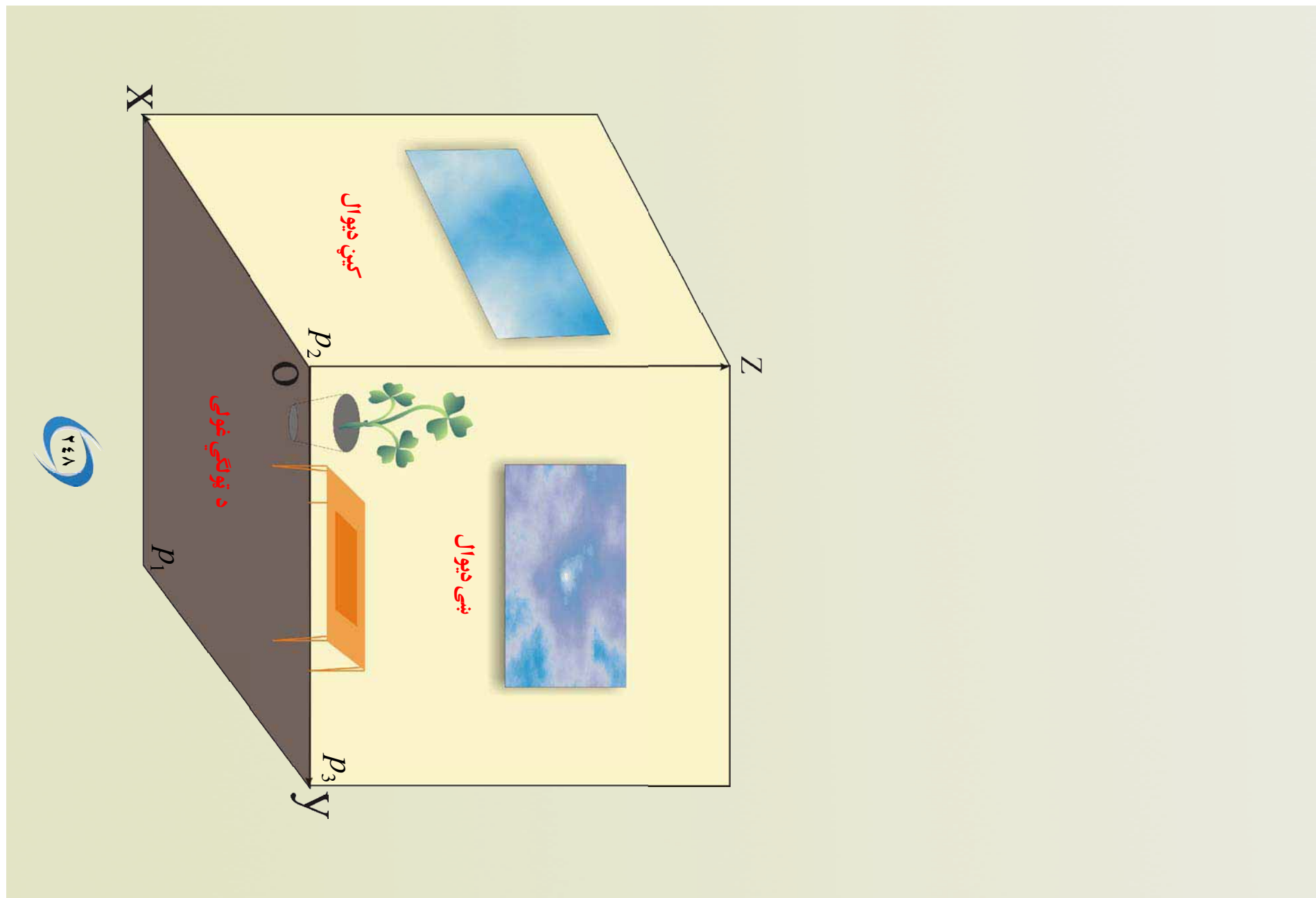
a)
$$\begin{cases} 3x + y + 1 = 0 \\ 4x + 3y - 2 = 0 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x - y = 2 \\ x + 2y = -1 \end{cases}$$



اووم چپر کی وکتورونہ







د وضعيه کمپونونو په قايم سيستم کي وکتورونه

له يوه ټاکلي ټکي څخه د هغې شاوخوا بېلابېلو پرتو شيانو ته لنډه لاره په نښه کړئ.

تعريف

جهت لرونکي قطعه خط ته وکتور وايي، يا په بل عبارت هغه کميت چې هم مقدار لري او هم جهت لري؛ لکه قوه، فاصله، تعجيل او داسې نور. هر غشي د يو وکتور ممثل دی.

هغه وکتور چې مبدا يې د وضعيه کمپونونو د قايم سيستم په مبدا کې پروت وي، د شعاع وکتور (Position Vector) په نامه يادېږي.

فعاليت

- د وضعيه کمپونو په قايم سيستم کې شعاع وکتور داسې رسم کړئ چې د پای ټکي يې د $B(5,5)$ مختصات ولري.

- د پورتنی راکړل شوي وکتور درې ممثل وکتورونه په راکړل شوو قايمو محصولاتو کې داسې رسم کړئ چې وکتور او شعاع وکتورونه يې توپير سره ولري.

- يو بل وکتور رسم کړئ چې له پورتنی وکتور سره مساوي او مخالف لوري او شعاع وکتور وي. له پورتنی فعالیت څخه لاندې پايله ترلاسه کېږي.

پايله: په يوه مستوي او په فضا کې هر ممثل وکتور د خپل شعاع وکتور په اندازه وي، نولرو چې:

1. د a او b دوه وکتورونه هغه وخت مساوي بلل کېږي، چې اوږدوالی يې مساوي، $(|\vec{a}| = |\vec{b}|)$ موازي او

د يو جهت لرونکی وي.

2. که چېرې يو وکتور $\vec{AB} = 0$ وي، په دې صورت کې د $\vec{AB}$ وکتور صفري وکتور (Zero Vector) بلل کېږي.

3. دوه وکتورونه هغه وخت مخالف یا منفي بلل کېږي چې اوږدوالی یې مساوي او جهت یې مخالف وي، د بېلګې په توګه:

که $\vec{OA} = a$ وي، نو $\vec{AO} = -a$ دی، په داسې حال کې چې: $\vec{OA} = |\vec{OA}|$ وي.

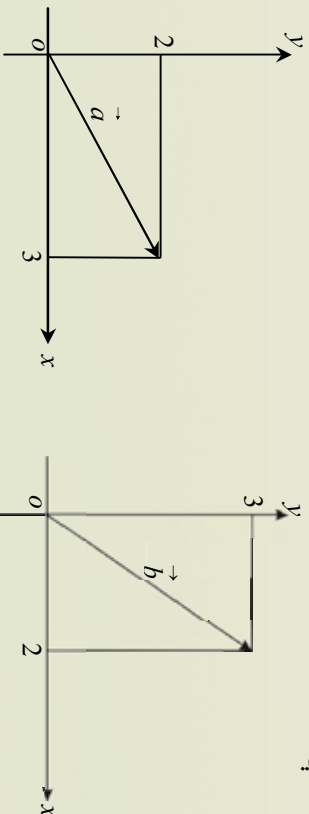
تعریف: د وضعیه کمیتونو په قائم سیستم کې یو وکتور په ستوني شکل داسې ښودل کېږي $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ په

داسې حال کې چې a_x د x پرمحور وضعیه کمیت او a_y د y پرمحور د a وکتور فاصله او ترتیب

ښیي.

لومړی مثال: د وضعیه کمیتونو په قائم سیستم کې د $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ او $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ وکتورونه وښایست؟

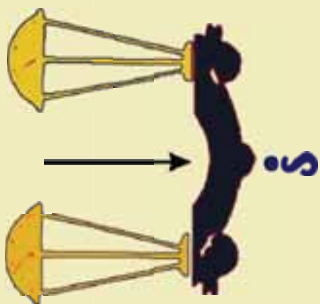
حل: د پورتنۍ تعریف له مخې لرو:



یادونه: د یو وکتور د ښودلو لپاره یوه مستوي په دې خاطر کارول کېږي، چې د قائم مختصاتو په سیستم کې د یو ټکي د ښودلو لپاره د مختصاتو په سیستم کې یوازې یو ځای شته، په داسې حال کې چې په مستوي کې د یو وکتور د ښودلو لپاره چې هماغه وکتور په مستوي کې ځای نیولی شي، بې نهایت ځایونه شته.

پوښتنې

- د هغو وکتورونو لپاره چې په لومړي مثال کې ورکړل شوي دي، مطلوب دي:
 - د هریوه وکتور درې ممثل وکتورونه رسم کړئ.
 - دواړه وکتورونه د شعاع وکتور په موقعیت کې رسم کړئ.
 - د هغوی مخالف وکتورونه کوم وکتورونه دي؟



د دوو ټکو ترمېنځ واټن او منځنۍ ټکي

د تلې دوه یو شان او هم وزنه پلې په پام کې نیسو، چې د یو شاهین په دواړو خواوو کې تړل شوي دي. د تلې د شاهین په لاس کې نیولو لپاره کوم ټکی وټاکو چې په نیولو یې د تلې پلې تعادل غوره کړي؟

فعالیت

د وضعیه کمیاتو په قایم سیستم کې د لاندې شکل په څیر $P(1,2)$ او $Q(4,4)$ ټکي په پام کې ونیستی:

• د $\vec{PQ}$ وکتور اوږدوالی څومره دی؟

• آیا د $\vec{PQ}$ د وکتور د اوږدوالی یا د P او Q دوو ټکو ترمېنځ د واټن لپاره فارمول ورکولای شئ؟

• د $\vec{PQ}$ د منځنۍ ټکي وضعیه کمیټونه څومره دي؟

• آیا کولای شئ د دوو ټکو د واټن او د هغوی د منځنۍ ټکي

• لپاره د فورمول په واسطه یو عمومي حالت څرگند کړئ؟

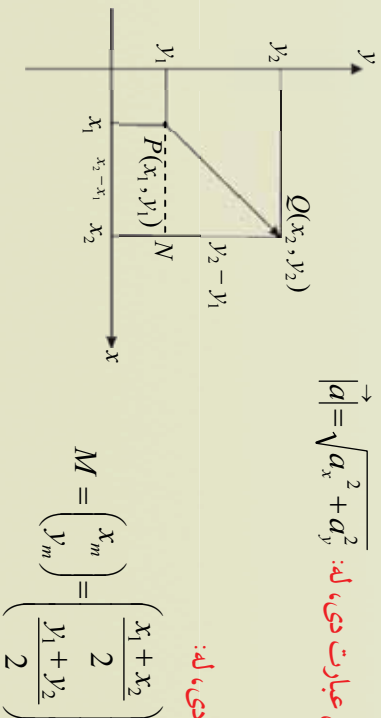
د پورتنۍ فعالیت له پای څخه لاندې پایلې ته رسېږو:

پایله: د $\vec{PQ} = a$ وکتور د هرو دوو اختیاري ټکو لپاره چې $P(x_1, y_1)$ مېدانه او $Q(x_2, y_2)$ انجام دی

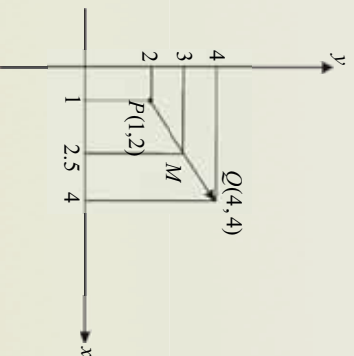
په دې صورت کې وکتور په $a = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$ سره نښو، د $\vec{PQ}$ قایم الزاویه مثلث په پام کې

نیولو سره د $|\vec{a}|$ د وکتور اوږدوالی عبارت دی، له: $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$

• د $\vec{PQ}$ منځنۍ ټکي عبارت دی، له:



$$M = \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1 + x_2}{2} \\ \frac{y_1 + y_2}{2} \end{pmatrix}$$



لومړۍ مثال: د $P(1, 2)$ او $Q(4, 4)$ د دوو ټکو ترمنځ واټن او منځنۍ ټکي پيدا کړئ؟

حل: د منځنۍ ټکي د فورمول په کارولو سره لرو:

$$M = \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+4}{2} \\ \frac{2+4}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{6}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

نو د منځنۍ ټکي وضعيه کيښت له $M = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 3 \end{pmatrix}$ څخه عبارت دی او د P او Q د دوو ټکو د واټن د

پيدا کولو لپاره د فيثاغورث د قضیې په پام کې نيولو سره لرو:

$$|\vec{PQ}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(4 - 1)^2 + (4 - 2)^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

دویم مثال: د $A(2, 4)$ او $B(5, 5)$ د ټکو ترمنځ واټن او منځنۍ ټکي پيدا کړئ.

حل: د منځنۍ ټکي د فورمول په کارولو سره لرو:

$$M = \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2+5}{2} \\ \frac{4+5}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.5 \\ 4.5 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(5 - 2)^2 + (5 - 4)^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$$



پوښتنې

د لاندې درک شوی ټکو ترمنځ واټن او منځنۍ ټکي پيدا کړئ.

- | | | | |
|------|-----------|---|-----------|
| i) | $B(2, 7)$ | , | $A(3, 4)$ |
| ii) | $N(5, 1)$ | , | $M(1, 5)$ |
| iii) | $Q(8, 8)$ | , | $P(1, 8)$ |



وکتورونه په سطح او فضا کې

د تلسکوپ په واسطه د ستورو د تګلوري لیدل په فضا کې ځانګړې وکتورونه ښیي.

د یوې سطحې پرمخ د وکتورونو لپاره یوه بېلګه راوړلای شئ؟

فعالیت

د لاندې شکل له مخې د وضعیه کمیانو د قایم سیستم او د $IR^2 = \{(x, y) / x, y \in IR\}$ سټ په پام کې نیولو سره لاندې فعالیت سرته ورسوئ.

- د وضعیه کمیانو په سیستم کې د P یو ټکی چې وضعیه کمیته یې (x, y) دی، په مستوي کې وټاکئ.
- د $\vec{u}$ یو شعاع وکتور چې وضعیه کمیته یې $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ دي، د وضعیه کمیټونو په سیستم کې ونښئ.
- په مستوي کې د P یو ټکی چې وضعیه کمیته یې (x, y) دی، په مستوي کې له $\vec{u}$ یو وکتور سره څه توپیر لري چې وضعیه کمیته یې $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ وي؟

- د $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ او $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ دوه اختیاري وکتورونه او $a \in IR$ یو سکالر لپاره په هندسي توګه د وضعیه

کمیټونو په قایم سیستم کې په جلا جلا ډول ونښئ، چې:

$$\begin{aligned} \text{i) } \vec{u} + \vec{v} &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix} \quad (\text{د جمعې قاعده}) \\ \text{ii) } a \cdot \vec{u} &= a \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ ay \end{pmatrix} \quad (\text{د سکالري ضرب قاعده}) \end{aligned}$$

تعریف: د هغو ټولو مرتبو جوړو سټ چې د پورته قاعدې په څېر د جمعې او سکالري ضرب قاعدې پرې تطبیق وي، د IR^2 (مستوي) د وکتورونو فضا او یا په مستوي کې د وکتور په نامه یادېږي.

له پورتني فعالیت او تعریف څخه لاندې پایله لاسته راځي:

پایله: د دوو ځانګړو وکتورونو $\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ او $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ په پام کې نیولو سره چې اوږدوالی یې یو واحد او

$|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$ دي. هر اختیاري وکتور لپاره لرو:

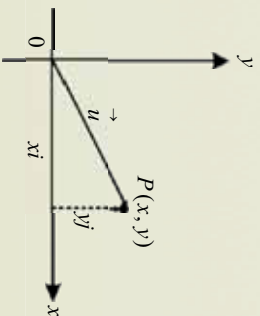
$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$$\Rightarrow \vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$\vec{i}$ او $\vec{j}$ واحد وکتورونه دي چې د X او Y محورونو په امتداد پراته دي.

واحد وکتور (unit vector): هغه وکتور دی

چې طول یې یو واحد او د مختصې د جهت د تزیاد لپاره ترې کار اخلي.



لومړی مثال: که $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ او $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ وي، د لاندې وکتورونو قیمت پیدا کړئ.

$$\vec{u} - \vec{v} = ? \quad \text{(iii)} \qquad 4\vec{u} + 2\vec{v} = ? \quad \text{(ii)} \qquad \vec{u} + \vec{v} = ? \quad \text{(i)}$$

$$|\vec{u}| = ? \quad \text{(v)} \qquad \vec{u} - \vec{u} = ? \quad \text{(iv)}$$

حل:

$$i) \quad \vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 \\ -3+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$$

$$ii) \quad 4\vec{u} + 2\vec{v} = 4\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+4 \\ -12+10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \end{pmatrix} = 8\vec{i} - 2\vec{j}$$

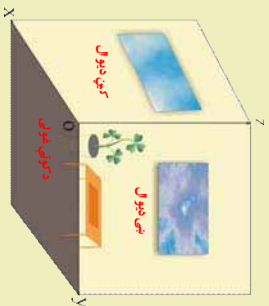
$$iii) \quad \vec{u} - \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ -3-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \end{pmatrix} = -\vec{i} - 8\vec{j}$$

$$iv) \quad \vec{u} - \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$v) \quad |\vec{u}| = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

پوښتنه

1. که $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ او $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ وي، $\vec{u} + 2\vec{v}$ ، $\vec{u} - 2\vec{v}$ او $2\vec{u} + 4\vec{v}$ پیدا کړئ.



په درې بعدي فضا کې د ټکي مختصات

که د ټولګي په فضا کې یو ټکی وټاکئ آیا داسې یوه د حل لاره شته چې د ټکي واټن نسبت د ټولګي غولۍ او مجاور دیوال ته وټاکو ؟

تعریف

درې بعدي IR^3 فضا د ټولو هغو مرتبو درې گونو (x, y, z) څخه عبارت دی چې په لاندې ډول تعریفېږي:

$$IR^3 = IR \times IR \times IR = \{(x, y, z) / x, y, z \in IR\}$$

هغه درې مستو ښکاري P_1, P_2, P_3 چې دوه په دوه یو په بل عمود دي، د درې بعدي فضا د مختصاتو مستو ښکاري بل کېږي.

د دغو مستو ښکاريو د دوه په دوه ګډ فصل درې قایمې زاوې جوړوي چې هغه د درې بعدي فضا قایم مختصات بولي. د درې بعدي فضا قایم مختصات داسې نوموي چې که یو تن ودرېږي، هغه محور چې د لیدونکي د نښې په لور دی، د z محور او هغه محور چې د لیدونکي د لید په لور دی د y محور او هغه محور چې د لیدونکو د نښې لاس په لور پروت دی، د x محور دی او د دغو درې واړو محورونو د تقاطع ټکی له O ټکي څخه عبارت دی .

چې د قایمو مختصاتو مبداء ښيي.

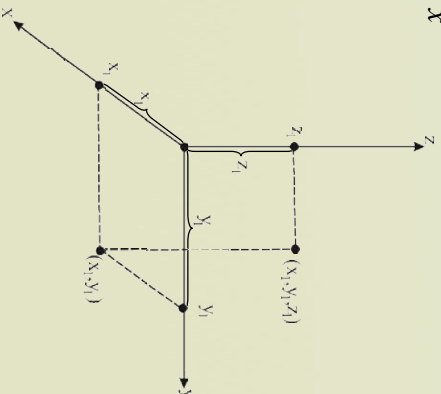
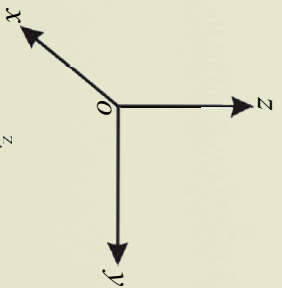
په درې بعدي فضا کې د یوه ټکي مختصات له هغه واټن څخه عبارت دی چې له درې

واړو مستو ښکاريو څخه یې لري.

د ټکي واټن د مختصاتو له مستو ښکاريو څخه په $|x|$ ، $|y|$ او $|z|$ سره ښيي.

په درې بعدي فضا کې د یوه ټکي د ځای ټاکل:

د درې بعدي فضا په قایمو مختصاتو کې د (x_1, y_1, z_1) ټکي د ټاکلو لپاره د هرې مختصې په اړوند محور باندې د مختصې د علامې په پام کې نیولو سره فاصلې جلا کوو، لومړی د x له محور څخه موازي خط د y له محور سره رسموو، د تقاطع ټکی یې چې (x, y) دی، پیدا او وروسته له یاد شوي ټکي څخه یو بل خط موازي د z له محور سره رسموو، په پایله کې د تقاطع ټکی په لاس راځي چې په دې ترتیب د ټکي ټاکل په درې بعدي فضا کې بشپړېږي.



يادونه: په درې بعدي فضا کې د x, y, z او $A(2, 4, 3)$ او $B(-2, -3, 3)$ ټکي د درې بعدي فضا قلم سیستم کې وښايي.

عبارت دی.

فعاليت

- د $A(2, 4, 3)$ او $B(-2, -3, 3)$ ټکي د درې بعدي فضا قلم سیستم کې وښايي.
- په فضا کې د $P(x, y, z)$ يو ټکی چې د $\vec{OP}$ وکتور له $\vec{u}$ سره مساوي دی، د IR^2 د فضا په شان په درې بعدي په فضا يا IR^3 کې هم د جمعې او سکالري ضرب قاعدې د u او v دواړو وکتورونو لپاره او د a سکالر لپاره صورت نيسي:

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \end{pmatrix} \quad \text{(د جمعې قاعده)}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{u} = a \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ ay \\ az \end{pmatrix} \quad \text{(د سکالري ضرب قاعده)}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ او } \vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ وي، } \vec{v} - \vec{w} = \begin{pmatrix} 2-(-1) \\ 1-4 \\ 3-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

لومړی مثال: که $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ او $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ وي، $\vec{v} - \vec{w}$ او $2\vec{w}$ لپاره پیدا کړئ.

حل: لرو چې:

$$i) \quad \vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 1+4 \\ 3+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$ii) \quad \vec{v} - \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 \\ 1-4 \\ 3-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$iii) \quad 2\vec{w} = 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$iv) \quad \left| \vec{v} - 2\vec{w} \right| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 2+2 \\ 1-8 \\ 3-0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4^2 + (-7)^2 + 3^2} \\ = \sqrt{16 + 49 + 9} = \sqrt{74}$$

يادونه:

A- کيدای شي سطحې ته ورته درې واحد وکتورونه $\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ، $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ، $\vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ چې:

$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$ دي، په درې بعدي فضا کې په پام کې نيول شوی، د x, y, z محورونو په امتداد د واحد

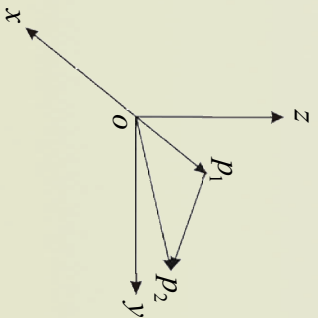
د وکتورونو په نامه ياد کړو. د جمعې د قاعدې په پام کې نيولو سره د $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ هر اختياري وکتور د واحد

وکتور په پام کې نيولو سره په لاندې توگه بنسټلی شو:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

B- په فضا کې د دوو ټکو ترمنځ واټن: که چېرې $\vec{OP_1}$ او $\vec{OP_2}$ د $P_1(x_1, y_1, z_1)$ او $P_2(x_2, y_2, z_2)$ د ټکو دوه شعاع وکتورونه وي، په دې توگه لرو:

$$\begin{aligned} \vec{OP_1} + \vec{P_1P_2} &= \vec{OP_2} \Rightarrow \vec{P_1P_2} = \vec{OP_2} - \vec{OP_1} \\ &\Rightarrow \vec{P_1P_2} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



نو د P_1 او P_2 د ټکو ترمنځ د واټن د پيدا کولو لپاره لرو:

$$|\vec{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

پورتنی فورمول د P_1 او P_2 ټکو ترمنځ واټن نښي.

C- که په درې بعدي فضا کې د يو ټکي واټن له مبداء څخه مطلب وي يعنې $(x_1, y_1, z_1) = (0, 0, 0)$ او $(x, y, z) = (x_2, y_2, z_2)$ وي؛ نو د ټکي واټن له مبداء څخه د لاندې فورمول په واسطه پيدا کولای شو:

$$|\vec{P_1P_2}| = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2 + (z - 0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

دویم مثال: که $\vec{a} = (-5, 4, 5)$ وی؛ نو د نوموړي شعاع وکتور طول خو دی؟
حل: د شعاع وکتور موقعیت ته په کتنې څرنگه چې د شعاع وکتور مبدأ د وضعیه کمیانو په مبدأ کې پرته ده د C جز له فورمول څخه گټه اخلو:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(-5)^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{25 + 16 + 25} = \sqrt{66}$$

دریم مثال: که $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$ ، $\vec{v} = 4\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k}$ او $\vec{w} = 6\vec{i} - 9\vec{j} - 3\vec{k}$ راکړل شوی وي.

i) $\vec{u} + 2\vec{v} = ?$

ii) $|\vec{u} - \vec{v} - \vec{w}| = ?$

ومومئ

حل: لرو چې:

i) $\vec{u} + 2\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k} + 2(4\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k})$

$$= 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k} + 8\vec{i} + 12\vec{j} + 4\vec{k} = (10\vec{i} + 15\vec{j} + 5\vec{k})$$

ii) $|(2 - 4 - 6)\vec{i} + (3 - 6 - 9)\vec{j} + (1 - 2 + 3)\vec{k}| = |-8\vec{i} - 12\vec{j} + 2\vec{k}|$

$$= \sqrt{(-8)^2 + (-12)^2 + 2^2} = \sqrt{64 + 144 + 4} = \sqrt{212}$$

پوښتنې

1. د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ وکتورونو جهت ته واحد وکتور پیدا کړئ.

2. په دریم مثال کې چې $\vec{u}$ او $\vec{w}$ وکتورونه راکړل شوي دي په پام کې ونیسئ او لاندې پوښتنو ته ځوابونه ومومئ.

a) $2\vec{u} - 6\vec{v} + 4\vec{w} = ?$

b) $|\vec{u} - \frac{1}{3}\vec{v} - 2\vec{w}| = ?$

3. $\vec{u}$ او $\vec{v}$ او $\vec{w}$ وکتورونو ترمنځ ولان پیدا کړئ.

4. هغه وکتور واحدونه پیدا کړئ چې د $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ او $\vec{w}$ وکتورونو په جهت پراته دي؟

د یوه وکتور د جهت زاويې او کوساینونه



تعريف: که د $\vec{r}$ شعاع وکتور د فایمو مختصانو له محورونو سره په ترتیب د α, β, γ او γ زاويې جوړې کړي په دې صورت کې شکل ته په پام لیکلای شو:

$$\begin{aligned}\vec{OP} &= \vec{r} \\ \vec{OA} &= \vec{r}_x \\ \vec{OB} &= \vec{r}_y \\ \vec{OC} &= \vec{r}_z\end{aligned}$$

کولای شو د $\vec{r}$ د وکتور د جهت کوساینونه په لاندې ډول ولیکو:

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{x}{r} \Rightarrow x = r \cos \alpha \\ \cos \beta &= \frac{y}{r} \Rightarrow y = r \cos \beta \\ \cos \gamma &= \frac{z}{r} \Rightarrow z = r \cos \gamma\end{aligned}$$

د پورتنيو لیکو چپ لوری مربع کوو او وروسته یې سره جمع کوو:

$$\begin{aligned}\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma &= \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} + \frac{z^2}{r^2} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2} \\ \text{پوهیږو چې } x^2 + y^2 + z^2 &= r^2 \text{ دی، نو:} \\ \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma &= \frac{r^2}{r^2} = 1\end{aligned}$$

فعالیت

که چېرې په یوه درې بعدي فضا کې $\vec{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ وکتور چې د صفر خلاف دی، ورکړ شوی وي، داسې چې د پورته شکل په شان α, β او γ په ترتیب سره د $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ واحد وکتورونه وي، په دې ډول لاندې فعالیت اجرا کړئ.

• آیا ویلاي شى شى چې د α , β او γ زاويې په کومه اندازه تحول کوي؟

• آیا له پورتنیو زاویو څخه یوه بې منفي کیډلای شې؟

• که چېرې له زاویو څخه یوه بې صفر شې، د وکتور د موقعیت په هکله څه ویلاى شى؟

• د $\vec{v}$ د وکتور جهت زاویو کوساین لپاره یوه گډه اړیکه پیدا کړئ؟

له پورتنی فعالیت فعالیت څخه لاندې پایلې ته رسیږو:

پایله: که په فضا کې د $\vec{v}$ یو وکتور، چې صفر نه وي، یعنې $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ، راکړل شوی وي، نو د جهت د

زاویو د کوساینونو ترمنځ لاندې اړیکې شته:

$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$

د پورتنی پایلې د ثبوت لپاره پوهیږو، چې:

$$\left| \vec{v} \right| = \left| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

له بلې خوا د جهت د واحد وکتور یا د $\vec{OP} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ مسیر عبارت دی، له:

$$\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \begin{pmatrix} \frac{v_x}{|\vec{v}|} \\ \frac{v_y}{|\vec{v}|} \\ \frac{v_z}{|\vec{v}|} \end{pmatrix}$$

پوښتنې

1. که $\vec{u} = i + 2\vec{j} - k$ ، $\vec{v} = 3i - 2\vec{j} + 2k$ او $\vec{w} = 5i - \vec{j} + 3k$ وي، پیدا کړئ؟

a) $\vec{u} + 2\vec{v} + \vec{w} = ?$ b) $\vec{v} - 3\vec{w} = ?$ c) $\left| 3\vec{v} + \vec{w} \right| = ?$

2. د α اندازه داسې پیدا کړئ چې د $\vec{u} = i + 2\vec{j} + 2k$ او $\vec{v} = i + (\alpha + 1)\vec{j} + k$ وکتور اوږدوالی مساوي په 3 وي.

د دوو وکتورونو د سکالري ضرب حاصل

د دوو وکتورونو د سکالر ضرب حاصل د انجینرۍ او فزیک په زده کړه کې په کارېږي او د هغو ترمنځ زاوې په پام کې نیولو سره له یو سکالري کمیت سره مساوي دی، که چېرې:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \theta$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = b \cdot a \cdot \cos \theta \quad \text{وي، نو } |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = a \cdot b \text{ ده، که نه؟}$$

تعریف

$\vec{u}$ او $\vec{v}$ دوه وکتورونه چې صفر نه وي په مستوي یا فضا کې په پام کې نیسو.

$$\vec{u} \text{ او } \vec{v} \text{ سکالري ضرب حاصل په } \vec{u} \cdot \vec{v} \text{ سره ښو، چې حاصل یې عبارت دی، له: } \cos \theta = \frac{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}{\vec{u} \cdot \vec{v}}$$

په داسې حال کې چې θ د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ ترمنځ زاویه جوړه کړي او $(0 \leq \theta \leq \pi)$ سره دي.

فعالیت

د وکتورونو د سکالري ضرب د حاصل په پام کې نیولو سره وښایاست، چې:

$$(i) \quad \vec{i} \cdot \vec{i} = 1, \quad \vec{j} \cdot \vec{j} = 1, \quad \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$$

$$(ii) \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = 0, \quad \vec{j} \cdot \vec{k} = 0, \quad \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$$

$$(iii) \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

(iv) که $\vec{u}$ او $\vec{v}$ د صفر خلاف او $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ وي، نو وکتورونه یو ټر بل عمود دي.

- د دوه $\vec{z} = a_1 \vec{i} + b_1 \vec{j} + c_1 \vec{k}$ او $\vec{b} = a_2 \vec{i} + b_2 \vec{j} + c_2 \vec{k}$ وکتورونو لپاره د $\vec{a} \cdot \vec{b}$ د ضرب حاصل د $a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2$ له سکالري قیمت سره مساوي دی.

- په فضا کې د $\vec{a} \cdot \vec{b}$ د ضرب حاصل مطلوب یا غوښتنل شوی په ډول چې $\vec{b} = a_1 \vec{i} + b_1 \vec{j} + c_1 \vec{k}$ او $\vec{a} = a_2 \vec{i} + b_2 \vec{j} + c_2 \vec{k}$ وي.

د وکتورونو د سکالري ضرب حاصل لپاره له پورتنۍ فعالیت څخه لاندې پايله لاسته راځي:

پايله: که $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ او $\vec{w}$ درې اختیاري وکتورونه او C یو حقيقي عدد وي، نو لرو:

$$(i) \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$$

$$(ii) \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} \quad (\text{د ضرب تبادلي خاصيت يا ځانگړتيا}).$$

$$(iii) \quad \vec{u}(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \quad (\text{د ضرب توزيعي خاصيت په جمع}).$$

$$(iv) \quad \vec{c}(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (\vec{c} \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v} \quad (\text{د ضرب توزيعي خاصيت}).$$

لومړۍ مثال: که $\vec{u} = a_1 \vec{i} + b_1 \vec{j} + c_1 \vec{k}$ او $\vec{v} = a_2 \vec{i} + b_2 \vec{j} + c_2 \vec{k}$ دوه وکتورونه د صفر خلاف وي، د سکالري ضرب حاصل يې پيدا کړئ.

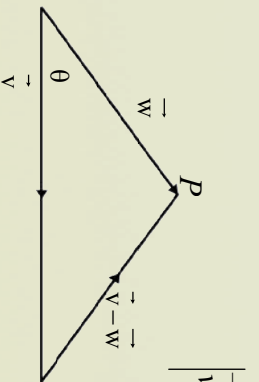
حل: د تعريف له مخې لرو چې:

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= (a_1 \vec{i} + b_1 \vec{j} + c_1 \vec{k})(a_2 \vec{i} + b_2 \vec{j} + c_2 \vec{k}) \\ &= a_1 \cdot a_2 (\vec{i} \cdot \vec{i}) + a_1 b_2 (\vec{i} \cdot \vec{j}) + a_1 c_2 (\vec{i} \cdot \vec{k}) + b_1 a_2 (\vec{j} \cdot \vec{i}) + b_1 b_2 (\vec{j} \cdot \vec{j}) + b_1 c_2 (\vec{j} \cdot \vec{k}) \\ &\quad + c_1 \cdot a_2 (\vec{k} \cdot \vec{i}) + c_1 b_2 (\vec{k} \cdot \vec{j}) + c_1 c_2 (\vec{k} \cdot \vec{k}) = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 \end{aligned}$$

دويم مثال: که $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ او $\vec{w} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ د يوې مستوي دوه وکتورونه وي، وبنځاياست چې:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

حل: د تعريف له مخې لرو: $\vec{v} \cdot \vec{w} = \cos \theta \cdot |\vec{v}| \cdot |\vec{w}|$



څرنگه چې $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ ، $\vec{w} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ په پايله کې $\vec{v} \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix}$ دي، نو د پورتنۍ اړيکې څخه لرو:

$$|\vec{v} - \vec{w}|^2 = |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 - 2|\vec{v}| |\vec{w}| \cos \theta$$

$$\Rightarrow -2x_1 x_2 - 2y_1 y_2 = -2|\vec{v}| |\vec{w}| \cos \theta$$

$$\Rightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 = |\vec{v}| |\vec{w}| \cos \theta = \vec{v} \cdot \vec{w}$$

دریم مثال: که چیري د $\vec{u} = i + 2j - k$ او $\vec{v} = i + 2j - k$ وکتورونه درکړ شوي وي، د سکلاري ضرب حاصل یې پیدا کړئ.

حل: د فورمول په پام کې نیولو سره لرو:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (i + 2j - k) \cdot (i + 2j - k) = i^2 + 4j^2 + k^2 = 1 + 4 + 1 = 6$$

څلورم مثال: وینایاست چې د $\vec{u} = 2i - 4j + 5k$ او $\vec{v} = 4i - 3j - 4k$ وکتورونه یو پر بل عمود دی.

حل: په دې هکله لرو:

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= (2i - 4j + 5k) \cdot (4i - 3j - 4k) = (2)(4) + (-4)(-3) + (5)(-4) \\ &= 8 + 12 - 20 = 0 \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{v} \end{aligned}$$

څرنگه چې د وکتورونو د سکلاري ضرب حاصل مساوي په صفر شو، نو وکتورونه یو پر بل عمود دي.

پنځم مثال: د α قیمت داسې پیدا کړئ چې د $\vec{u} = 2i + \alpha j + 5k$ او $\vec{v} = 3i + j + \alpha k$ وکتورونه یو پر بل عمود وي.

حل: د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ وکتورونو له عمود والي څخه دې پایلې ته رسېږو چې: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ دی، نو لرو:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (2i + \alpha j + 5k) \cdot (3i + j + \alpha k) = 0 \Rightarrow 6 + \alpha + 5\alpha = 0, \alpha = -1$$

شپږم مثال: وینایاست چې د $\vec{u} = 2i - j + k$ ، $\vec{v} = i - 3j - 5k$ او $\vec{w} = 3i - 4j - 4k$ وکتورونه د یو قایم الزاویه مثلث ضلعي دی.

حل: که $\vec{AB} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ او $\vec{BC} = \vec{i} - 3\vec{j} - 5\vec{k}$ د مطلوب مثلث دوه ضلعي په پام کې ونیسو، نو

دریمه ضلع یې د مثلث د وکتورونو د جمعې حاصل په پام کې نیولو سره چې د مثلث دریمه ضلع ټاکي

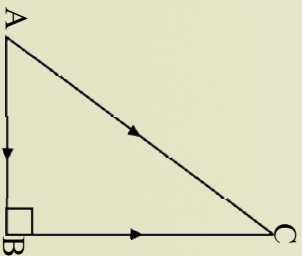
$$\vec{AB} + \vec{BC} = (2i - j + k) + (i - 3j - 5k)$$

عبارت دی له:

(چې د مثلث له درېمې ضلعي څخه عبارت دی) $\vec{AC} = 3i - 4j - 4k$ اوس ښیو چې نوموړی مثلث قایم

الزاویه دی، د دې لپاره د وکتوري ضرب حاصل $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0$ وي.

$$\begin{aligned} \vec{AB} \cdot \vec{BC} &= (2i - j + k) \cdot (i - 3j - 5k) \\ &= (2)(1) + (-1)(-3) + (1)(-5) = 2 + 3 - 5 = 0 \\ &\Rightarrow \vec{AB} \perp \vec{BC} \end{aligned}$$

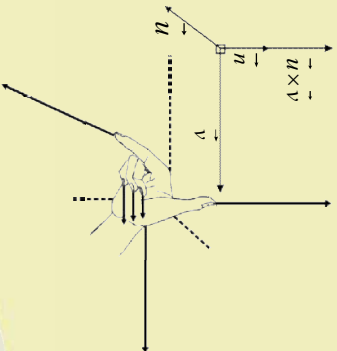




1. وٽٻاڻست چڻي د $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ د وڪٽور مرتسمونه د $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ واحد وڪٽورونو په امتداد په ترتيب سره له a, b, c سره مساوي دي.

2. وٽٻاڻست چڻي هر $\triangle ABC$ کي لاندې اړيکي وجود لري:

- i) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$ ii) $a = b \cdot \cos C + c \cdot \cos B$
3. ثبوت کړئ چڻي: $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$



د وکتوري ضرب حاصل

The cross Product

د راکړل شوي شکل له مخې د کوم لاس (ښي یا کښي) په واسطه د $\vec{u} \times \vec{v}$ او $\vec{v} \times \vec{u}$ وکتورونه داسې وښیو چې $\vec{u}$ د وړغوي په جهت، $\vec{v}$ د څنگل په جهت او $\vec{u} \times \vec{v}$ د ښي لاس د غټې گوټې په لور واقع شي؟

تعريف

د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ دوه وکتورونه، چې صفر نه وي، په پام کې نیسو. د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ دوو وکتورونو د وکتوري ضرب حاصل په $\vec{u} \times \vec{v}$ چې $\vec{u}$ کرس $\vec{v}$ لوستل کېږي عبارت دی، له: یعنې د دوو وکتورونو وکتوري ضرب له هغه دریم وکتور څخه عبارت دی چې د دوی د مبدأ په ټکي عمود وي.

$$\vec{u} \times \vec{v} = (|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \sin \theta) \vec{n}$$

په داسې حال کې چې θ د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ زاویه $0 \leq \theta \leq \pi$ وکتورنو تر منځ زاویه او $\vec{n}$ د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ دوو وکتورونو په واسطه جوړه شوې مستوي له عمود واحد وکتور څخه عبارت دی، د ښي لاس قاعدې په واسطه (Right hand rule) ښودل کېږي.

د دوو وکتورونو وکتوري ضرب

مخکې له دې چې د دوو وکتورونو وکتوري ضرب توضیح کړو، لازمه ده چې د وکتورونو خطي ترکیب، وکتوري فضا، د وکتورونو خطي خپلواکي (استقلال) په لنډه ډول تر څېړنې لاندې ونیسو.

1. د وکتورونو خطي ترکیب: د یوه سټ د وکتورونو د سکالري مضربونو مجموعه د همغه سټي د

وکتورونو د خطي ترکیب په نامه یادېږي.

که $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ د یوه سټ وکتورونه او $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in IR$ سکالرونه وي، په دې صورت کې د $\vec{a}$ وکتور په داسې حال کې چې $\vec{a} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n$ وي، $\vec{a}$ وکتور د $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ وکتورونو د خطي ترکیب په نامه یادېږي.

لومړی مثال: که $\vec{a}_1 = 2i + j - 3k$ او $\vec{a}_2 = i + 2j + 2k$ وکتورونه راکړل شوي وي، د هغوی خطي ترکیب په لاس راوړئ، په داسې حال کې چې $\alpha_1 = 5$ او $\alpha_2 = 2$ وي.

حل:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= 5\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 = 5(2i + j - 3k) + 2(i + 2j + 2k) \\ &= 10i + 5j - 15k + 2i + 4j + 4k \\ &= 12i + 9j - 11k\end{aligned}$$

د $\vec{a}$ وکتور د $\vec{a}_1$ او $\vec{a}_2$ وکتورونو د خطي ترکیب په نامه یادېږي.

دویم مثال: که $\vec{a}_1 = (2, 3)$ او $\vec{a}_2 = (5, 1)$ وکتورونه راکړل شوی وي، وینایاست چې د

$(-5, 6)$ وکتور د $\vec{a}_1$ او $\vec{a}_2$ وکتورونو خطي ترکیب دی.

حل: خوښه چې $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ سکالرونه دي، نو:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= (6, -5) = \alpha_1(2, 3) + \alpha_2(5, 1) \\ &= (6, -5) = (2\alpha_1, 3\alpha_1) + (5\alpha_2, \alpha_2) \\ &= (6, -5) = (2\alpha_1 + 5\alpha_2, 3\alpha_1 + \alpha_2) \\ \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 + 5\alpha_2 = 6 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 = -5 \end{cases}\end{aligned}$$

له پورتني سیستم څخه د α_1 او α_2 قیمتونه په لاس راوړو:

$$\begin{aligned}3 \begin{cases} 2\alpha_1 + 5\alpha_2 = 6 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 = -5 \end{cases} \\ 6\alpha_1 + 15\alpha_2 = 18 \\ \underline{-6\alpha_1 + 2\alpha_2 = -10} \\ 13\alpha_2 = 28 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{28}{13}\end{aligned}$$

$$2\alpha_1 + 5\frac{28}{13} = 6$$

$$2\alpha_1 + \frac{140}{13} = 6 \Rightarrow 2\alpha_1 = 6 - \frac{140}{13} = \frac{78 - 140}{13}$$

$$2\alpha_1 = \frac{-62}{13} \Rightarrow \alpha_1 = -\frac{62}{26} = -\frac{31}{13}$$

$$\vec{a} = (6, -5) = \alpha_1(2, 3) + \alpha_2(5, 1)$$

$$\vec{a} = (6, -5) = -\frac{31}{13}(2, 3) + \frac{28}{13}(5, 1)$$

یعنې که α_1 او α_2 قیمتونه په $\vec{a}_1$ او $\vec{a}_2$ وکتورونو کې ضرب شي، په پایله کې د $\vec{a}$ وکتور په لاس راځي، نو وموږ لیدل چې $\vec{a}_1$ او $\vec{a}_2$ وکتورونه د $\vec{a}$ د وکتور خطي ترکیب دی.

د طبيعي واحد وکتورونو د خطي ترکيب په واسطه د يوه وکتور شمول:

که په دوه بعدي، درې بعدي او بالاخره په Π بعدي فضا کې شعاع وکتورونه راکړل شوی وي. کولای شو هغه د واحد وکتورونو د ضربونو د مجموعې په شکل په لاندې ډول وښیو.

$$\begin{aligned} \text{a) که دوه بعدي فضا وي } (x_1, x_2) &= (x_1, 0) + (0, x_2) \\ &= x_1(1, 0) + x_2(0, 1) \end{aligned}$$

نو: که $e_1 = (1, 0)$ او $e_2 = (0, 1)$ وي.

$$\text{نو: } (x_1, x_2) = e_1 x_1 + e_2 x_2$$

او په بل ډول يې هم ليکلای شو:

$$\begin{aligned} (x, y) &= (x, 0) + (0, y) = x(1, 0) + y(0, 1) \\ &= x e_1 + y e_2 = x i + y j \end{aligned}$$

b) که فضا درې بعدي وي، نو په لاندې ډول کرښه کوو:

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3) &= (x, y, z) = (x_1, 0, 0) + (0, x_2, 0) + (0, 0, x_3) \\ &= x_1(1, 0, 0) + x_2(0, 1, 0) + x_3(0, 0, 1) \end{aligned}$$

خرنگه چې $e_1 = (1, 0, 0)$ ، $e_2 = (0, 1, 0)$ او $e_3 = (0, 0, 1)$ په درې بعدي فضا کې واحد وکتورونه دي، نو:

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3) &= x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \\ (x, y, z) &= x i + y j + z k \end{aligned}$$

c) په عمومي حالت کې که فضا n بعدي وي

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, \dots, x_n) &= (x_1, 0, \dots, 0) + (0, x_2, \dots, 0) + \dots + (0, 0, \dots, x_n) \\ &= x_1(1, 0, \dots, 0) + x_2(0, 1, \dots, 0) + \dots + x_n(0, 0, \dots, 1) \\ &= x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n \end{aligned}$$

په داسې حال کې چې $e_1, e_2, \dots, e_n$ طبيعي واحد وکتورونه دي.

د وکتورونو خطي خپلواکي: د $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ وکتورونه په يوه وکتوري ساحه کې خطي خپلواکي (خطي استقلال) لري، که چيرې دغه خطي ترکيب $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n = 0$ مساوي په صفر وي او همدارنگه $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ وي.

که $\{1, 0, 0, 0\}, \{0, 1, 0, 0\}, \{0, 0, 1, 0\}, \{0, 0, 0, 1\}$ وي رښايست چې S خطي خپلواکي لري.

غير خپلواک خطي وکتورونه: د $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ وکتورونه خطاً مربوط(خطي غير خپلواک) يا خطي انحصار لري، که چيرې يوازې او يوازې $0 = \alpha_n \vec{a}_n + \dots + \alpha_2 \vec{a}_2 + \alpha_1 \vec{a}_1$ وي او کم ترکمه يوله ضربونو د $\alpha_n, \dots, \alpha_2, \alpha_1$ څخه د صفر خلاف وي.

يادونه:

ددې لپاره چې د وکتورونو يو سټ په لاس راوړو چې خطي خپلواکي ولري، نو لاندې پړاوونه په پام کې نيسو:

لومړی پړاو: د وکتورونو ترکيب په لاس راوړو او له صفر وکتور سره يې مساوي نيسو.

دویم پړاو: د وکتورونو د جمعې عملیه سرته رسوو.

درېم پړاو: د معادلانو سيستم تشکيلوو.

خلورم پړاو: د معادلانو سيستم د سکالرونو لپاره حلوو، په هغه صورت کې چې ټول سکالرونه صفر شي نو وايو چې نوموړی وکتورونه خطي خپلواکي لري او که چيرې له ټولو سکالرو څخه کم ترکمه يو سکالر د صفر خلاف وي، نو وکتورونه خطي خپلواکي نه لري.

مثال: د $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ وکتورونو په لاندې ټول راکړل شوي دي $\vec{a}_1 = (1, 2, 0)$ ، $\vec{a}_2 = (0, 3, 1)$ ، $\vec{a}_3 = (2, 3, 1)$ وښايست چې $\vec{a}_1$ او $\vec{a}_3$ وکتورونه خطي خپلواکي لري او که نه؟

حل: د خطي خپلواکو وکتورونو له اړيکې څخه په گڼې اخيستي کولای شو، وليکو:

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \alpha_3 \vec{a}_3 = \alpha_1 (1, 2, 0) + \alpha_2 (0, 3, 1) + \alpha_3 (2, 3, 1) = 0$$

دويم پړاو:

$$= (\alpha_1, 2\alpha_1, 0) + (0, 3\alpha_2, \alpha_2) + (2\alpha_3, 3\alpha_3, \alpha_3) = (0, 0, 0) \\ = (\alpha_1 + 0 + 2\alpha_3, 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3, 0 + \alpha_2 + \alpha_3) = (0, 0, 0)$$

درېم پړاو:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 0 + 2\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ 0 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

خلورم پړاو: اوس د معادلانو سيستم د α_1 ، α_2 او α_3 لپاره حلوو:

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= -\alpha_3 \\ 2\alpha_1 + 3(-\alpha_3) + 3\alpha_3 &= 2\alpha_1 - 3\alpha_3 + 3\alpha_3 = 0 \Rightarrow 2\alpha_1 = 0, \alpha_1 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_3 &= 0 \\ 0 + 2\alpha_3 &= 0 \Rightarrow \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3 &= 0 \\ 0 + 3\alpha_2 + 0 &= 0 \Rightarrow 3\alpha_2 = 0, \quad \alpha_2 = 0 \end{aligned}$$

خړنگه چې $0 = \alpha_3 = \alpha_2 = \alpha_1$ دي، نو نوموړی وکتورونه خطي خپلواکي لري.

فعالیت

د تعریف له مخې د ښيي لاس د قاعدې په واسطه د $\vec{u} \times \vec{v}$ او

$\vec{v} \times \vec{u}$ مسیر او یا جهت په مخامخ شکل کې وښيي.

وښایست چې $\vec{i} \times \vec{i} = 0$ او $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$ دی.

- د پورتنیو څیړنو له مخې د $\vec{j} \times \vec{j}$ ، $\vec{k} \times \vec{k}$ ، او $\vec{k} \times \vec{i}$ وکتورونه حاصل په هکله څه ویلای شئ؟

• وښایست چې: $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$ او $\vec{u} \times \vec{u} = 0$ دی.

- په عمومي ډول ویلای شو چې د $\vec{i}$ ، $\vec{j}$ او $\vec{k}$ وکتورونو د ضرب حاصل په دایروي ډول د لومړنی او دویم وکتور د ضرب له حاصل څخه دریم وکتور، لکه د ورکړل شوي دایرې په څیر لاس ته راځي.



له پورتنی فعالیت څخه لاندې پایلې لاس ته راځي:

پایله: د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ دوو وکتورونو (چې صفر نه وي)، د وکتوري ضرب له حاصل څخه او د ښيي لاس د قاعدې په کارولو سره لرو:

- $\vec{u} \times \vec{u} = 0$
- $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$
- $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$
- $\vec{u} \times (k\vec{v}) = (ku) \times \vec{v} = k(\vec{u} \times \vec{v})$, $k \in \mathbb{R}$

د وکتوري ضرب د تعریف له مخې د پورته پایلې ثبوت دې زده کوونکو ته پریښودل شي.

لومړی مثال: که چېرې $\vec{u} = a_1\vec{i} + b_1\vec{j} + c_1\vec{k}$ او $\vec{v} = a_2\vec{i} + b_2\vec{j} + c_2\vec{k}$ وکتورونه صفر نه

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = (b_1c_2 - c_1b_2)\vec{i} - (a_1c_2 - c_1a_2)\vec{j} + (a_1b_2 - b_1a_2)\vec{k}$$

وي، نو وښایست چې:

حل : د تعريف په کارولو لرو، چې:

$$\begin{aligned}
 \vec{u} \times \vec{v} &= (a_1 \vec{i} + b_1 \vec{j} + c_1 \vec{k}) \times (a_2 \vec{i} + b_2 \vec{j} + c_2 \vec{k}) \\
 &= a_1 a_2 (\vec{i} \times \vec{i}) + a_1 b_2 (\vec{i} \times \vec{j}) + a_1 c_2 (\vec{i} \times \vec{k}) + b_1 a_2 (\vec{j} \times \vec{i}) + b_1 b_2 (\vec{j} \times \vec{j}) + b_1 c_2 (\vec{j} \times \vec{k}) \\
 &\quad + c_1 a_2 (\vec{k} \times \vec{i}) + c_1 b_2 (\vec{k} \times \vec{j}) + c_1 c_2 (\vec{k} \times \vec{k}) \\
 &\left. \begin{aligned} \vec{i} \times \vec{j} &= \vec{k} \\ \vec{i} \times \vec{k} &= -\vec{j} \\ \vec{j} \times \vec{i} &= -\vec{k} \end{aligned} \right\}, \left. \begin{aligned} \vec{j} \times \vec{k} &= \vec{i} \\ \vec{k} \times \vec{i} &= \vec{j} \\ \vec{k} \times \vec{j} &= -\vec{i} \end{aligned} \right\}, \left. \begin{aligned} \vec{i} \times \vec{i} &= 0 \\ \vec{j} \times \vec{j} &= 0 \\ \vec{k} \times \vec{k} &= 0 \end{aligned} \right\} \\
 &= a_1 b_2 \cdot \vec{k} - a_1 c_2 \cdot \vec{j} - b_1 a_2 \cdot \vec{k} + b_1 c_2 \cdot \vec{i} + c_1 a_2 \cdot \vec{j} - c_1 b_2 \cdot \vec{i} \\
 &= (b_1 c_2 \cdot \vec{i} + c_1 a_2 \cdot \vec{j} + a_1 b_2 \cdot \vec{k}) - (c_1 b_2 \cdot \vec{i} + a_1 c_2 \cdot \vec{j} + b_1 a_2 \cdot \vec{k}) \\
 &= (b_1 c_2 - c_1 b_2) \cdot \vec{i} + (c_1 a_2 - a_1 c_2) \cdot \vec{j} + (a_1 b_2 - b_1 a_2) \cdot \vec{k} \\
 &= (b_1 c_2 - c_1 b_2) \cdot \vec{i} - (a_1 c_2 - c_1 a_2) \cdot \vec{j} + (a_1 b_2 - b_1 a_2) \cdot \vec{k} \\
 \Rightarrow \vec{u} \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = (b_1 c_2 - c_1 b_2) \cdot \vec{i} - (a_1 c_2 - c_1 a_2) \cdot \vec{j} + (a_1 b_2 - b_1 a_2) \cdot \vec{k}
 \end{aligned}$$

دويم مثال : ويناياست چې د $a = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ او $b = 4\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ لپاره د $a \times b$ حاصل له

$$\vec{-i} + 6\vec{j} + 8\vec{k} \text{ سره مساوي دی.}$$

حل : د لومړي مثال په کارولو سره پوهېږو، چې:

$$\begin{aligned}
 a \times b &= (2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) \times (4\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}) = 8(\vec{i} \times \vec{i}) + 4(\vec{i} \times \vec{j}) - 2(\vec{i} \times \vec{k}) \\
 &\quad + 4(\vec{j} \times \vec{i}) + 2(\vec{j} \times \vec{j}) - (j \times k) + 4(k \times i) + 2(k \times j) - (k \times k) \\
 &= 0 + 4\vec{k} + 2\vec{j} - 4\vec{k} + 0 - \vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{i} - 0 = -3\vec{i} + 6\vec{j}
 \end{aligned}$$

د مخلوط ضرب حاصل (درې گوني ضرب) Triple Product

تعريف: د دوو يا څو وکتورونو د ضرب لپاره څو امكانه شته چې هر يو يې په لاندې ډول تر څېړنې لاندې نيسو:

$$i \quad d \quad c \quad (a \cdot b) \quad \text{د ضرب حاصل.}$$

$\vec{a}$ او $\vec{b}$ وکتورونو د ضرب حاصل چې په سکالري ډول ضرب شوی، یو سکالر دی. وروسته نوموړی سکالر د $\vec{c}$ په وکتور کې ضرب شوی چې له پایله یې وکتور په لاس راځي دغه وکتور له $\vec{c}$ د وکتور سره هم جبهه دی.

په پورتنۍ ضرب کې لاندې قانون شته: $\vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$

د $\vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c})$ وکتور جبهه د $\vec{a}$ د وکتور هم جبهه او د $\vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c})$ وکتور جبهه د $\vec{b}$ د وکتور هم جبهه دی.

$$\text{i) } \begin{vmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 \\ \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \vec{b}_3 \\ \vec{c}_1 & \vec{c}_2 & \vec{c}_3 \end{vmatrix} = \vec{a}(\vec{b} \times \vec{c})$$

$$\text{ii) } \vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c}(\vec{a} \times \vec{b})$$

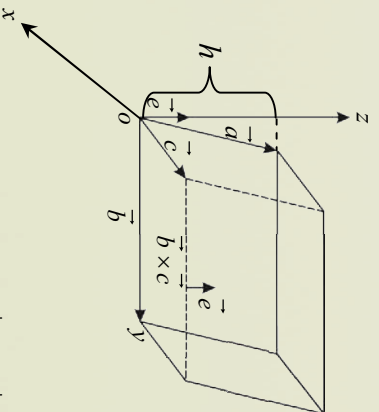
$$\text{iii) } \vec{a}(\vec{a} \times \vec{b}) = 0$$

iv) د $\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c})$ اړیکه د هغه متوازي السطوح له حجم

خه عبارت دی چې $\vec{a}$, $\vec{b}$ او $\vec{c}$ د متوازي السطوح اضلاع

دی، څرنگه چې په شکل کې لیدل کېږي $|\vec{b} \times \vec{c}|$

متوازي السطوح قاعده او h د متوازي السطوح جگوالی دی، نو له دې امله:



$$v = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})| = |\vec{b} \times \vec{c}| |\vec{a}| \cos \theta = |\vec{b} \times \vec{c}| h$$

$$v = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})| = |\vec{b} \times \vec{c}| h$$

تطبیقاتي مسئلې:

1- که چېرې $\vec{a} = 4\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$ او $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ وکتورونه راکړل شوي وي، هغه وکتور مطلوب او

غوښتل کېږي چې پر دواړو وکتورونو عمود وي، ایا دغه وکتور یوازینی وکتور دی، که څنګه؟ دلیل مو څه دی؟

حل: د ښي لاس د قاعدې په کارولو پوهیږو چې د $\vec{a} \times \vec{b}$ وکتور پر هغو وکتورونو عمود دی، نو لرو:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 7\vec{i} - 6\vec{j} - 10\vec{k}$$

نو د $\vec{b} \times \vec{a} = 7\vec{i} - 6\vec{j} - 10\vec{k}$ وکتور پر $\vec{a}$ او $\vec{b}$ وکتورونه یوازیني عمود وکتورونه دي، بلکې $\vec{b} \times \vec{a}$ وکتور

هم د $\vec{a}$ او $\vec{b}$ په وکتورونو عمود دي، یعنې لرو:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -7\vec{i} + 6\vec{j} + 10\vec{k} = -(7\vec{i} - 6\vec{j} - 10\vec{k}) = -\vec{a} \times \vec{b}$$

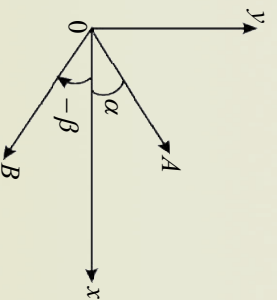
2- ټیټ کټ چرټ چې د α او β د هـ اختیاري زاوړې لپاره

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

حل: که $\vec{OA}$ او $\vec{OB}$ دوه وکتورونه د x, y په مستوي کې

داسې راکړل شوي دي چې د x له محور سره د α او β

زاوړې جوړې کړي، له شکل څخه پوهیږو: $\angle AOB = \alpha + \beta$



له بلې خوا پوهیږو چې $\vec{OA} = \cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j}$ او $\vec{OB} = \cos(\beta) \vec{i} + \sin(\beta) \vec{j}$ نو لرو:

$$\vec{OA} \times \vec{OB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ \cos \beta & -\sin \beta & 0 \end{vmatrix} = (\cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j}) \times (\cos \beta \vec{i} - \sin \beta \vec{j})$$

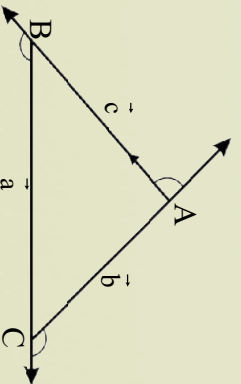
$$= k(-\sin \beta \cos \alpha - \sin \alpha \cos \beta) = -k \sin(\alpha + \beta)$$

$$\Rightarrow |\vec{OA}| |\vec{OB}| \sin(\alpha + \beta) = |\vec{OA} \times \vec{OB}| = |-k| \sin(\alpha + \beta)$$

$$3- \text{په یوه کيفي مثلث کې ونښئ، چې: } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

حل: فرضو چې د لاندې شکل له مخې د $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ او $\vec{c}$ وکتورونه د $\vec{AB}$ او $\vec{CA}$ ، $\vec{BC}$ د مثلث د ضلعو په امتداد راکړل شوي دي، نو لرو:

$$\Rightarrow \vec{b} + \vec{c} = -\vec{a} \quad \dots\dots\dots (i)$$



که د مساوات دواړه خواوې په $\vec{c}$ وکتور کې وکتوري ضرب کړو، لاسته راځي، چې:

$$\begin{aligned} \vec{(b+c)} \times \vec{c} &= -a \times \vec{c} \\ \vec{(b \times c)} + \vec{(c \times c)} &= -a \times \vec{c} = \vec{c \times a} \\ \vec{c \times c} &= 0 \Rightarrow \vec{b \times c} = \vec{c \times a} \Rightarrow \left| \vec{b \times c} \right| = \left| \vec{c \times a} \right| \end{aligned}$$

ډیورټینو مساواتو د تعریف له مخې داسې لیکلای شو:

$$\begin{aligned} |\vec{b}| |\vec{c}| \sin A &= |\vec{c}| |\vec{a}| \sin B \\ \Rightarrow |\vec{b}| |\vec{c}| \sin A &= |\vec{c}| |\vec{a}| \sin B \Rightarrow b \sin A = a \sin B \quad / \div AB \\ \frac{\sin B}{b} &= \frac{\sin A}{a} \quad \dots\dots\dots (ii) \quad \text{یا} \quad \frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A} \quad \dots\dots\dots (ii) \end{aligned}$$

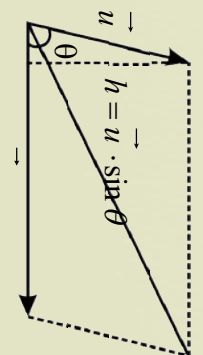
د پورته په شان که چېرې د (i) د رابطې دواړه خواوې په $\vec{b}$ وکتور کې په وکتوري ډول ضرب شي، لاسته راځي چې:

$$\begin{aligned} (\vec{b+c}) \times \vec{b} &= -a \times \vec{b} = \vec{b \times a} \\ (\vec{b \times b}) + (\vec{c \times b}) &= \vec{b \times a} \\ \vec{b \times b} &= 0 \Rightarrow (\vec{c \times b}) = \vec{b \times a} \\ |\vec{c}| |\vec{b}| \sin A &= |\vec{b}| |\vec{a}| \sin C \\ c \sin A &= a \sin C \quad / \div ac \end{aligned}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \quad \dots\dots\dots iii \quad \text{یا} \quad \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}$$

د (ii) او (iii) معادلو له برتلې (مقایسې) څخه د ساين قضیه لاسته راځي: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

4- د یوې متوازي الاضلاع مساحت: د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ دوه وکتورونه چې صفر نه وي، د دوی ترمنځ زاویه θ د لاندې شکل په څیر په پام کې نیسو. گورو چې $\vec{u}$ او $\vec{v}$ د متوازي الاضلاع ضلعې دي چې د مخې د مساحت د پیدا کولو لپاره کولای شو، ولیکو:

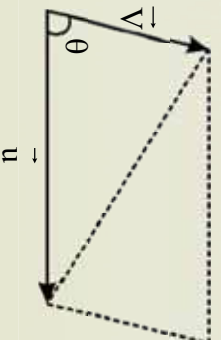


ارتفاع $\times$ قاعده = د متوازي الاضلاع مساحت
 څرنگه چې: $|\vec{v}| = \text{قاعده او } |\vec{u}| \sin \theta = \text{ارتفاع ده}$
 $|\vec{u \times v}| \sin \theta = |\vec{u}| |\vec{v}| \sin \theta = \text{د متوازي الاضلاع مساحت}$

يعني د يوي متوازي الاضلاع مساحت، د يوي متوازي الاضلاع د ضلعو د وکتوري ضرب له حاصل څخه عبارت دی چې د متوازي الاضلاع ضلعي هم دي.

پايله: څرنگه چې د يوه مثلث مساحت د متوازي الاضلاع مساحت نيمه دي، نو د مثلث مساحت د لاندې شکل په پام کې نيولو سره عبارت دی، له:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \frac{1}{2} |\vec{u} \times \vec{v}| \quad (\text{د متوازي الاضلاع مساحت}) \quad \frac{1}{2} = \text{د مثلث مساحت}$$



پوښتني

1. که $\vec{a}_1 = t^2 + t + 2$ ، $\vec{a}_2 = 2t^2 + t$ او $\vec{a}_3 = 3t^2 + 2t + 2$ وي وښايست چې نوموړی وکتورونه خطي خپلواکي لري؟

خطي خپلواکي لري؟

2. وښايست چې $\vec{a} = 2i + 3j + 4k$ او $\vec{b} = 4i + 6j + 8k$ وکتورونه يو له بل سره کوم ډول خطي اړيکه لري؟

3. ثبوت کړئ چې $\vec{a}_1 = 2i$ ، $\vec{a}_2 = 5j$ ، او $\vec{a}_3 = 9k$ وکتورونه خطي خپلواکي لري.

4. د هغه مثلث مساحت پيدا کړئ چې راسونه يې د $A(1, -1, 1)$ ، $B(2, 1, -1)$ او $C(-1, 1, 2)$ وکتورونو په واسطه درکړل شوي وي. همدارنگه هغه واحد وکتور چې پر ABC مستوي عمود وي، مطلوب دي.

5. د هغه متوازي الاضلاع مساحت پيدا کړئ چې د $Q(-1, 2, 4)$ ، $R(2, -1, 4)$ او $S(1, 1, 8)$ وکتورونو په واسطه ځانگړی شوي وي.

6. که $\vec{u} = 2i - j + k$ ، $\vec{v} = 4i + 2j - k$ ، د لاندې وکتورونو د ضرب حاصل پيدا کړئ؟

$$\begin{array}{lll} \vec{u} \times \vec{u} & \text{(i)} & \vec{u} \times \vec{v} \quad \text{(ii)} \\ \vec{v} \times \vec{u} & \text{(iii)} & \end{array}$$

د څپر کې مهم ټکي

د وضعيه کمپونونو په قائم سیستم کې وکتورونه: هغه کمپونونه چې هم جهت اوم مقدار ولري وکتور نومېږي. هغه وکتورونه چې اوږدوالی يې مساوي او عين جهت ولري، يو له بله سره د ممثلو وکتورونو په نامه يادېږي. هغه وکتور چې مبدا يې د وضعيه کمپونونو د قائم سیستم په مبدا کې پرته وي شعاع وکتور

(Position Vector) بل کېږي. يو وکتور په مستوي کې د $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ په څير بنودل کېږي. چې a_x

د x او a_y د y محور پرمخ له فاصلې او ترتيب څخه عبارت دی.

د دوو ټکو ترمنځ واټن او منځنی ټکی: که $P(x_1, y_1)$ وکتور مبدا او $Q(x_2, y_2)$ د پای ټکی د $\vec{a} = \vec{PQ}$ وکتور وي. په دې ډول $\vec{a}$ وکتور په $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$ بڼو او د $\vec{PQ}$ قائم الزاويه

مثلت او $|\vec{a}|$ وکتور اوږدوالي له مخې لرو چې:

د P او Q ټکو ترمنځ واټن، $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = |\vec{a}|$ اوږدوالي د P او

منځنې ټکی $M = \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1 + x_2}{2} \\ \frac{y_1 + y_2}{2} \end{pmatrix}$ د $\vec{PQ}$ د منځنې ټکي وضعيه کمپونه يا مختصات دی.

واحد وکتور: هغه وکتور چې د راکړل شوی وکتور په عين جهت ثروت او يو واحد اوږوالی ولري، د واحد وکتور په نامه يادېږي.

مثال: $\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ او $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ په قائم سیستم کې د x او y د يوې مستوي د محورونو په جهت واحد

وکتورونه دي، په داسې حال کې چې $\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ، $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ او $\vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ په فضا کې د وضعيه کمپونونو

په قائم سیستم کې د x ، y او z محورونو په جهت واحد وکتورونه دي.

د وکتورونو سکالري ضرب: د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ دوه وکتورونه، چې صفر نه وي، د سکالري ضرب حاصل يې په

مستوي او فضا کې عبارت دی له: $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \theta$

په داسې حال کې چې θ د u او v ترمنځ زاویه ده. او د وکتوري ضرب حاصل یې یو وکتور دی چې د

$$u \times v \rightarrow = |u| |v| \sin \theta \rightarrow n$$

په داسې حال کې چې د $u \times v$ وکتور د u او v پر وکتورونو عمود دی او n او v وکتورونه سره د بنې لاس قاعدې په واسطه ټاکل کېږي.

د بنې لاس قاعده: که د شهادت گوته په قایم ډول کره شي، لکه د لاندې شکل په شان، په دې صورت کې د شهادت گوته د u محور په جهت، د څنګل په جهت د v محور او غټه گوته د $u \times v$ وکتور حاصل

ضرب نښي.

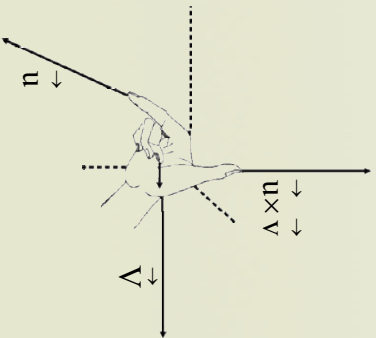
په فضا کې د دوو وکتورونو وکتوري ضرب:

$$b = a_2 i + b_2 j + c_2 k \text{ او } a = a_1 i + b_1 j + c_1 k$$

ورکړل شوی وي، په دې صورت کې وکتوري حاصل ضرب

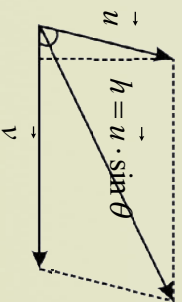
یعنې $a \times b$ عبارت دی له:

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$



مساحت او د وکتوري ضرب حاصل: د a او b دوه وکتورونه، چې صفر نه وي، د وکتوري ضرب قیمت یې د متوازي الاضلاع له مساحت څخه عبارت دی، چې د وکتورونو په واسطه په لاندې شکل کې تشکيلېږي.

$$|u \times v| = \text{د متوازي الاضلاع مساحت}$$





د څپرکي پوښتنې

1: که $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$ او $\vec{b} = 4\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$ وي:

$$\vec{a} : \vec{b} \quad \vec{b} : \vec{a} \quad \text{مطلوب دی}$$

2: که چېرې د $P(2,3)$ او $Q(6,-2)$ ټکي د OP او OQ شعاع وکتورونو پای وي، په دې صورت کې

د Q او P په مستوي کې د $xi + yj$ په څېر ولیکئ.

3: که چېرې $A(1,-1)$ ، $B(2,0)$ او $C(-1,3)$ درکړل شوي وي، د $\vec{AB}$ او $\vec{CD}$

وکتورونو حاصل جمع مطلوب ده.

4: که چېرې $A(2,5)$ ، $B(-1,1)$ او $C(2,-6)$ درکړل شوي وي، مطلوب دی:

$$i) \vec{AB} = ? \quad ii) 2\vec{AB} - \vec{CB} = ? \quad iii) 2\vec{CB} - 2\vec{CA} = ?$$

5: که چېرې $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ ، $\vec{v} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$ او $\vec{w} = 5\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ ورکړل شوي وي،

مطلوب دی:

$$i) \vec{u} + 2\vec{v} + \vec{w} \quad ii) \vec{v} - 3\vec{w} \quad iii) \left| 3\vec{v} + \vec{w} \right| = ?$$

(iv) $\vec{u}$ او $\vec{v}$ را کړل شوو وکتورونو په جهت واحد وکتورونه پیدا کړئ

6: د $\vec{a}$ او $\vec{b}$ درکړل شوو وکتورونو لپاره سکالري ضرب حاصل د $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ، $\vec{b} \cdot \vec{a}$ او وکتوري ضرب

حاصل د $\vec{a} \times \vec{b}$ او $\vec{b} \times \vec{a}$ پیدا او دوه په دوه یې پرتله کړئ، که چېرې $\vec{a}$ او $\vec{b}$ په لاندې توګه وي:

$$i) \begin{cases} \vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} \\ \vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k} \end{cases} \quad ii) \begin{cases} \vec{a} = \vec{i} + \vec{j} \\ \vec{b} = \vec{i} - \vec{j} \end{cases}$$

$$iii) \begin{cases} \vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k} \\ \vec{b} = \vec{i} + \vec{j} \end{cases} \quad iv) \begin{cases} \vec{a} = -4\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k} \\ \vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \end{cases}$$

7: د هغو مثلثونو مساحت مطلوب دی چې راسونه یې د لاندې ټکو په واسطه ټاکل کېږي:

i): $P(0,0,0)$, $Q(2,3,2)$, $R(-1,1,4)$

ii): $P(1,-1,-1)$, $Q(2,0,-1)$, $R(0,2,1)$

8: د هغه متوازي الاضلاع مساحت مطلوب دی چې راسونه یې د لاندې ټکو په واسطه ټاکل شوي وي.

i): $A(0,0,0)$, $B(1,2,3)$, $C(2,-1,1)$, $D(3,1,4)$

ii): $A(1,2,-1)$, $B(4,2,-3)$, $C(6,-5,2)$, $D(-3.5,-4)$

iii): $A(1,-1,1)$, $B(-1,2,2)$, $C(-3,4,-5)$, $D(-3,5,-4)$

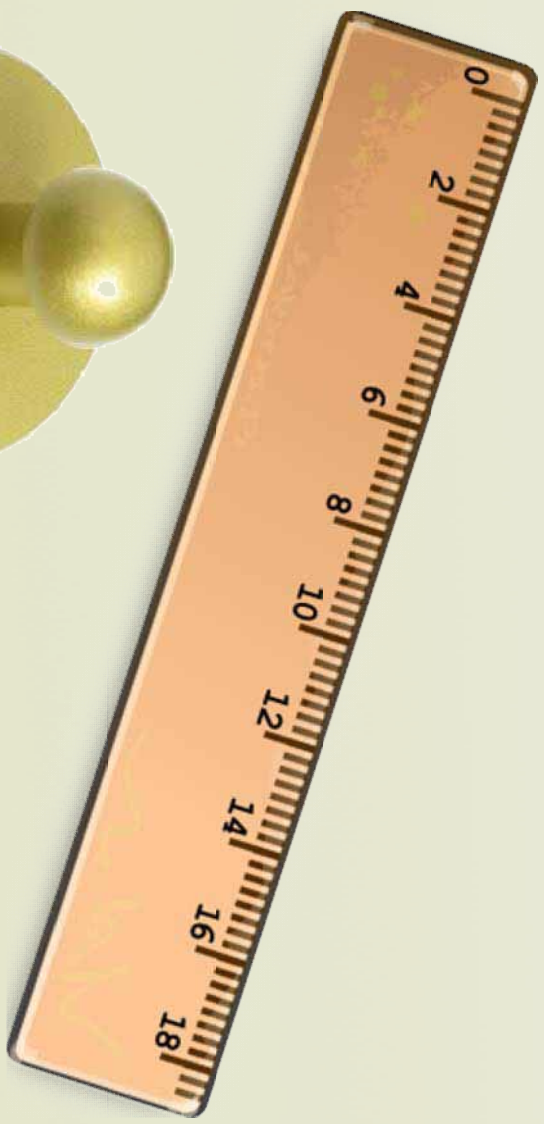
9: کوم وکتورونه عمود او کوم موازي دي؟

i): $\vec{u} = 5i - j + k$, $\vec{v} = j - 5k$, $\vec{w} = -15i + 3j - 3k$

ii): $\vec{u} = i + 2j - k$, $\vec{v} = i + j + k$, $\vec{w} = -\frac{\pi}{2}i + \frac{\pi}{2}j$

ایم خبر کی احصائے





$$\frac{\text{وزن}}{\text{وزنه}} = \frac{150kg}{170cm} = ?$$



د بدلونونو ضريب

Coefficient Variations

که چيرې د يوې ټولنې پراگنده گي په متر او د بلې ټولنې په کيلوگرام بنډول شوي وي. آيا فکر کولای شئ چې دغه دواړه پراگنده گي په دواړو ټولنو کې د پرتلې وړ دي او که نه؟



$$\frac{\text{وزن}}{\text{ونه}} = \frac{150\text{kg}}{170\text{cm}} = ?$$

فعاليت

10 تنه زده کوونکي له خپل ټولگي څخه په تصادفي ډول وټاکئ؟

- د زده کوونکو ونه او وزن تشخیص کړئ.
- د زده کوونکو د ونې او وزن وړانس او معياري انحراف محاسبه کړئ.
- آيا فکر کولای شئ چې د دې دواړو متحولينو د پراگندگي د ميزان پرتله د وړانس او معياري انحراف له لارې امکان لري؟ ولې؟

- که چيرې معياري انحراف په اوسط ووېشل شي، نو د په لاس راغلي مقدار يا عدد واحد به څه وي؟
- د بدلونونو يا تغيراتو ضريب يا نسبي پراگنده گي داسې کارونې لري، چې وړانس او معياري انحراف هغه نه لري. يو له دغو کارونو څخه د دوو نا متجانسو ټولنو پرتله ده چې د يادولو وړ ده.

د بدلونونو يا تغيراتو ضريب چې په $C.V$ بنډول کېږي عبارت له هغه خارج قسمت څخه دی، چې د معياري انحراف پر اوسط مطلق بې واحد عدد دی په لاس راځي يعنې:

$$C.V = \frac{S}{\bar{x}} \quad \text{يا} \quad \text{معياري انحراف} = \frac{\text{د بدلونونو يا تغيراتو ضريب}}{\text{اوسط}}$$

که د تغيراتو ضريب په 100 کې ضرب شي، د تحول ضريب په لاس راځي:

$$C.V = 100 \cdot \frac{S}{\bar{x}}$$

- د بدلون ضريب يوازې د مثبتو ډېټاوو لپاره تعريف شوي وي.
- که چيرې ټوله ډېټا سره برابر وي، د بدلون ضريب مساوي په صفر دی.
- که ټوله ډېټا په يو مثبت عدد کې ضرب شي، د بدلون ضريب تغير نه کوي.

- که په ټوله ډیټا یو مثبت عدد ورزیات شي، د بدلون نوی ضریب چې په لاس راځي له لومړي ضریب څخه کوچنی دی.

لومړی مثال: د لاندې ډیټا د بدلون ضریب محاسبه کړئ:

$$\{1, 3, 5\}$$

حل: د فورمول له مخې لیکلای شو:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{1+3+5}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

$$S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{(1-3)^2 + (3-3)^2 + (5-3)^2}{3} = \frac{4+4}{3} = 2.67$$

$$S = \sqrt{2.67}$$

$$C \cdot V = \frac{S}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{2.67}}{3} = 0.543$$

دویم مثال: د تصوري تولیدي لایونو یو تولیدونکی دوه ډوله لایونه A او B تولیدوي، په داسې حال کې چې د A متوسط عمر مساوي په 1495 او د B متوسط عمر مساوي په 1875 ساعته دی او معیاري انحرافونه یې په ترتیب سره 280 او 310 دي، تولیدوي:

د کوم یوه تصویر لایپ تصویر له پاسنې ډولونو څخه د نسبي پراگنده گي (پا بدلون ضریب) قیمت زیات دی؟

حل: د فورمول له مخې لرو چې:

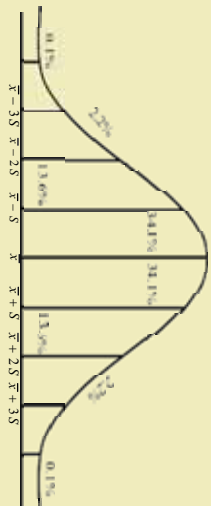
$$C \cdot V_A = \frac{S_A}{\bar{x}_A} = \frac{280}{1495} \cdot 100 = 18.7\% \quad \text{د A لایونو د بدلون ضریب}$$

$$C \cdot V_B = \frac{S_B}{\bar{x}_B} = \frac{310}{1875} \cdot 100 = 16.5\% \quad \text{د B لایونو د بدلون ضریب}$$

څرنگه چې $C \cdot V_B > C \cdot V_A$ څخه دی، له دې کبله د A لایپ ډیره پراگنده گي لري، ولې ټینګښت یې کم دی.

پوښتي

1. دلاندې ډیټا د بدلون یا تغیراتو ضریب حساب کړئ؟
1 3 4 5 6
2. که چېرې اوسط مساوي په 4 او معیاري انحراف مساوي په 6 وي، د بدلون یا تغیراتو ضریب څو دی؟
3. ستاسو د ټولگي د زده کونکو د سن بدلون ضریب 10 کاله وروسته څومره تغیر یا بدلون کوي؟ کمېږي او که ډېرېږي؟



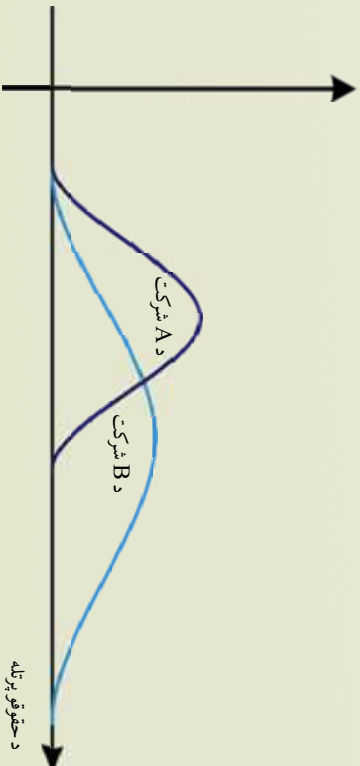
په نورمال منځني کې پر اګنده ګي (ټټوالی)

اوریدلي به مو وي چې ولایي: یو ښه تصویر د زر کلمیو ارزښت لري.

لاندې شکل ته وګورئ، د هغه په اړوند فکر او بحث وکړئ.

فعالیت

لاندې دوه ګرافونو د دوه A او B شرکتونو د حقوقو تادیه ښيي.



- کوم شرکت په اوسط ډول د حقوقو تادیه ډیره لري؟
- کوم شرکت د حقوقو د تادیې په میزان کې خپلو کارمندانو ته لږه پراخه ګانده ګي لري؟
- د دواړو شرکتونو د حقوقو تادیات سره پرتله کړئ.
- لاندې ټکي د اوسط او معیاري انحراف په نورمال منځني کې صدق کوي.
 - که چیرې $\bar{x}$ اوسط او S معیاري انحراف وي؛ نو 68% د پلټنې موارد د $(\bar{x} - S, \bar{x} + S)$ په فاصله کې، یعنې د اوسط په شا او خوا د معیاري انحراف په فاصله کې ځای لري.
 - 96% د پلټنې موارد د $(\bar{x} - 2S, \bar{x} + 2S)$ په فاصله کې، یعنې د اوسط په شاوخوا د دوه معیاري انحرافونو په فاصله کې ځای لري.
 - 99% د پلټنې موارد د $(\bar{x} - 3S, \bar{x} + 3S)$ په فاصله کې، یعنې د اوسط په دواړو خواوو درې معیاري انحرافونو په فاصله کې قرار لري.

- په يوه نورمال منځني کې له $2S$ څخه ډېر انحراف غیر عادي او له $3S$ څخه زیات انحراف زیات غیر عادي شمېرل کېږي.

هغه ډېټا چې د $3S$ په اندازه له اوسط څخه فاصله یا واټن ولري؛ نو باید د پراگنده ګي یا ټیټې ډېټا په نامه وګڼل شي.

مثال: که د یوې مؤسسې د کارکوونکو د معاش اوسط 12500 افغانۍ او معیاري انحراف یې مساوي په 700 افغانۍ وي نو:

الف: له نورمال توزیع څخه د فیصدي په ګټه اخیستو، د ورکړل شوي معاش توزیع تشریح کړی؟
ب: آیا ویلاي شي چې د 1400 افغانیو معادل معاش یو غیر عادي معاش دی؟

د الف حل: لومړی د $S \pm \bar{x}$ ، $2S \pm \bar{x}$ ، $3S \pm \bar{x}$ قیمتونه په لاس راوړو.

فیصدي	فاصله د افغانیو له مخې	فاصله د S له مخې
68%	11800 – 13200	$\bar{x} \pm S$
96%	11100 – 13900	$\bar{x} \pm 2S$
99.6 %	10400 – 14600	$\bar{x} \pm 3S$

د ب حل: لومړي $\bar{x} - 1400$ په لاس راوړئ چې مساوي په 1500 کېږي؛ یعنې 1400 افغانیو په اندازه 1500 افغانۍ له اوسط څخه ډیرې دي، که چېرې اوس دغه رقم په S وپوښو په لاس راځي:

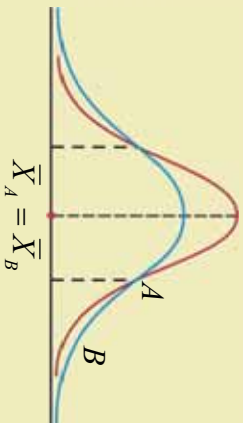
$$\frac{1500}{700} = 2.1$$

په دې ډول د 1400 افغانیو معاش غیر عادي معاش دی، ځکه چې د $2S$ له اندازي څخه زیات او له $\bar{x}$ څخه پورته دی.

پوښتنه



که چېرې 62.28% فیصده مشاهدات د $(S + \bar{x}, \bar{x} - S)$ په فاصله کې پراته وي، آیا ویلاي شی، چې 95.45% او 99.73% مشاهدات په کومه فاصله کې قرار لري؟ انتروالونه له نورمالې منځني سره وبنایاست؟



دنورمال توزیع دډول شاخصونه

د مرکزي پراگنده‌ګي دوه شاخصونه یو زيات شمېر د یوې احصایوې مجموعې اطلاعاتو ته په لنډه ډول انعکاس ورکوي. ددې لپاره چې د یوې احصایوې مجموعې اطلاعات، تناظر او د مثبت او منفي اشارو لرونکي وي؛ نو له کوم ډول منحنی څخه باید ګټه واخلو.

فعالیت

- په یو نه نورماله توزیع کې وسط، اوسط او د موډ شاخصونه څه وخت سره مساوي دي؟
 - که توزیع د اوسط په اطراف کې متنظره نه وي، د وسط اوسط او موډ د کمیټونو په اړه څه فکر کوې؟
 - که چیرې یوه توزیع متنظره وي؛ نو د اوسط او وسط تفاضل څو ده؟
 - که چیرې دواړه توزیع ګانې یو شان اوسط او تناظر ولري؛ نو د جګوالي او ټیټوالي له اړخه به څه وضعیت ولري؟
- د توزیع د ډول شاخصونه په دوو لاندې حالتونو څېړل کېږي:
- 1- د **خمېدلو (skewness)** (خمیده ګي) **شاخص**: هغه توزیع چې د اوسط په دواړو خواوو متنظره نه وي، خمېدل نومېږي، چې په دوو لاندې ضریبونو ښودل کېږي.

الف: د خمېدلو ضریب: دا هغه شاخص دی چې د خمېدلو د میزان د ټاکلو لپاره کارول کېږي، چې په لاندې ډول

$$\alpha_3 = \frac{\frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^3}{s^3}$$

تعریف شوی دی:

هغه عدد دی چې یوازې د پرتله کولو لپاره ترې کار اخېستل کېږي.

که $\alpha_3 = 0$ وي؛ نو توزیع متنظره ده.

که $\alpha_3 > 0$ وي؛ توزیع مثبت خمېدل (positive skewness) لري، یعنې ښې لورې ته خمېدنه لري. او که $\alpha_3 < 0$ وي؛ توزیع منحنی منفي خمېدل (negative skewness) لري یعنې کین لورې ته خمېدنه لري.

که چیرې د کثرت جدول موجود وي، خمېدنه (عدم تناظر) یې د $\alpha_3 = \frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^3}{s^3}$ فورمول په واسطه

پیدا کېږي. چې f_i فریکونسي ښيي.

ب: د پیرسون د خمېدلو ضریب: د پیرسون ضریب په لاندې ډول تعریف شوی دی.

$$S_{k(p)} = \frac{3(\bar{x} - med)}{s}$$

په مناظره توزیع کې د پیرسون د خلیدلو ضریب مساوي په صفر دی. د پیرسون د خمېدلو د لو ضریب مثبت او منفي قیمتونه په ترتیب سره د توزیع د منحنی مثبت یا منفي خمېدل ښيي.

2- د پړسوب kurtosis شاخص: د پړسوب شاخص ددې ښودونکې دی چې د توزیع یوه منحنی څه وخت جگه او څه وخت ټیټوالې لري.

د پړسوب شاخص هغه معمولي شاخص دی چې د یوې منحنی د پړسېدلو د اندازه کولو لپاره په کار اچول کېږي او

$$\alpha_4 = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4}{s^4}$$

په لاندې ډول تعریف شوی دی:

که د کثرت جدول په لاس کې ولرو، نو د پړسوب شاخص فورمول $\alpha_4 = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_i (x_i - \bar{x})^4}{s^4}$ دی چې دلته f_i فریکونسي، x_i ډیټا او $\bar{x}$ د x_i اوسط او s معیاري انحراف دی.

د پړسوب شاخص د توزیع په ځای او پراگنده کې پورې اړه نه لري. دغه شاخص د بېرته کېدو لپاره په کار لوېږي.

مثال: مخامخ شکل په پام کې ونیسئ د α_4 ضریب د درې ډوله خپېدلو او پړسوب ډولونه چې په شکل کې د هغوي توزیع ښودل شوي ده ښیي.

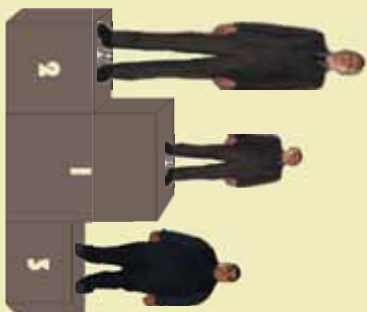


حل: د نورمالې توزیع د پړسوب د درجې او میزان د بېرته کېدو لپاره لکه یو سټنډرډ په کار اچول کېږي. د نورمالې توزیع لپاره د α_4 قیمت مساوي په 3 دی، په داسې حال کې چې که چېرې α_4 له 3 څخه زیاته وي نظر نورمال منحنی ته د منحنی پړسوب زیات دی. یا په بل عبارت یوه پړسېدلي توزیع چې څوکه لري او که چېرې α_4 له 3 لږ وي، نظر نورمالې منحنی ته یې پړسوب کم دی چې د ملامستې یا اوږدې توزیع په نامه یادېږي.

پوښتنې

د یوه ټولګي د زده‌کوونکو د احصایې د مضمون نمري په لاندې ډول ورکړ شوي دي، د پیرسون د پړسوب ضریب حساب کړئ.

نمرې	د زده‌کوونکو شمېر
40-50	4
50-60	6
60-70	10
70-80	4
80-90	4
90-100	2



څو متحول له ټولنې

که چیرې د خپل یوه ټولګیوال د ونې په اندازه ویو هېږئ، کولای شئ هغه ته په پام د هغه د وزن په اندازه پوه او په دې اړوند فکر وکړئ.

فعالیت

آیا په تېرو درسونو کې مو د اشخاصو د ونې او وزن په اړوند یو ځای مطالعه او څېړنه کړې ده.

- فکر کولای شئ چې د یوه سړي د ونې او وزن مقدار د یو متحول په توګه کولای شو چې اړانه کړو؟
- که وغواړو چې د یوه ټولګي د زده کوونکو د ونې او وزن مقدار یو ځای وڅېړو، نو دغه یوه ټولنه ده.
- دخپلو 10 تنو ټولګیوالو ونې او وزن اندازه کړئ.
- په لاس راغلي ډیټا د مرتبو جوړو په توګه ولیکئ.
- هغه ټکي چې د مرتبو جوړو په مرسته په مستوي کې ټاکل کېږي، څه ډول شکل لري؟ د یوه خط په واسطه یې وصل کړئ.

- آیا ویلای شئ هغه ټکي چې په مستوي کې وصل شي، کوم شکل لري؟

له پاسني فعالیت څخه یو هېږو چې د بحث موضوع، دوه ډوله متحولین دي. تر اوسه مو په تېرو درسونو کې داسې ټولنې پاتلې چې ټولنو په هغوی کې یوازې یو متحول درلوده اوس غواړو داسې ټولنې ولټوو چې دوه او یا له هغو څخه زیات متحولین ولري، دکار آسانې لپاره معمولاً د یو یا څو متحولینو تر منځ دریاښکي اړیکې په مرسته د قایمو مختصلاً په قائم سیستم کې جوړېږي.

په لومړي ګام کې په دې منظور د معادلو د جوړېدو لپاره لازم معلومات را ټول شي او په دویم ګام کې را ټول شوي معلومات د ارزښت لرونکو متحولینو په څېر په یوه مستوي کې راټول او په نښه کېږي، هغه شکل چې د دغو ټکو له وصلېدو څخه لاس ته راځي، مونږ ته یو ګراف را ښيي.

مثال: یو متخصص د غذایی رژیم یو ډول تاثیر په یو شمېر موږکانو څېړلی دی. په دې ډول یې د هر موږک لومړنی وزن اندازه کړی او بیا یې د عملیې په تطبیق پیل کړي چې په پای کې یې بیا د موږکانو وزن اندازه کړی چې لاندې ډیټا په لاس راغلي ده: (2, 4), (3, 5), (1, 7), (2, 3), (1, 8).

په دې ډول لومړۍ مختصه د مورک لومړنی او دویمه مختصه د مورک وزن دغذایي رژیم له تطبیق څخه وروسته ښیي.

- ډېټا په یوه سطري او ستوني جدول کې ترتیب کړئ؟
 - که چېرې ډېټا د یوې ټولنې په څېر وگڼل شي، نو دغه ټولنه به څو متحولین ولري؟
- حل:** لاندې سطري جدول په پام کې نیسو:

د مورکاتو شمیر	1	2	3	4	5
د مورکاتو لومړني وزن	1	2	1	3	2
د غذایي رژیم له تطبیق څخه وروسته د مورکاتو وزن	8	3	7	5	4

لاندې ستوني جدول په پام کې نیسو:

د غذایي رژیم له تطبیق څخه وروسته د مورکاتو وزن	د مورکاتو لومړني وزن	د مورکاتو شمیر
8	1	1
3	2	2
7	1	3
5	3	4
4	2	5

پاسنی ډېټا یوه دوه متحوله ټولنه معرفي کوي.

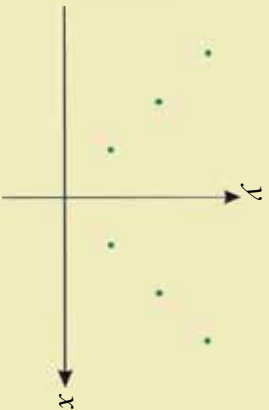
پوښتنه

د زراعتي محصولاتو دلوړوالي لپاره فکټورنه، لکه اوبه کود د کود ډول لمر او د خاورې ډول موثر گڼل کېږي، آیا ویلی شی چې په دغه ټولنه کې لږ تر لږه له څو ډوله متحولینو سره سروکار لری؟

د پراگنده گي گراف

Scatter diagram

مخامخ شکل ته په پام ، هغه ټکي چې په مستوي کي په نښه شوي دي، د مرتبو جوړو په ډول ترتيب او رياضيکي معادله يي وليکئ:



فعاليت

لاندي مرتبي جوړي ورکړل شوي دي:

(1,2) (2,3) (3,4) (4,5)

- د ورکړل شوو مرتبو جوړو گراف په دقيق ډول رسم کړئ.
- مشخص شوي ټکي سره ونښلوئ او رياضيکي معادله يي پيدا کړئ.
- په لاندي ډول د دغې ډيټا د هريوه، دويمه مختصه په لاندي ډول بدلور.
- د هر ټکي لپاره يوه سکه پورته وغورځوئ، که شپږ راغله په Y يو واحد اضافه او که خط راغی له Y څخه يو واحد کم کړئ، د په لاس راغلو ټکو يا تغيراتو گراف رسم کړئ.
- دغه عملیه څو ځلې تکرار، خو دا ځل کله چې قيمتونه زيات يا کموي، بدلون مه ورکوئ په X او Y پورې تړلي قيمتونه څنگه تغير کوي؟

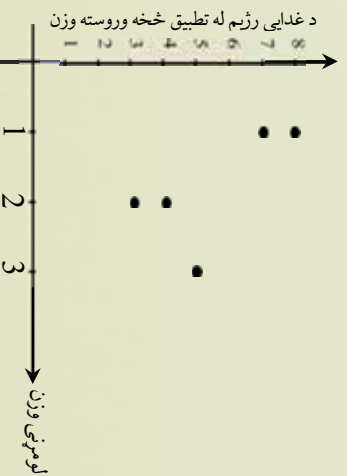
مثال: لاندي مرتبي جوړي چې پر مورکانونو دغذايي رژیم تاثیراتو څخه مو په لاس راوړي دي، په پام کې

ونیسئ: (2,4) (1,7) (3,5) (2,3) (1,8)

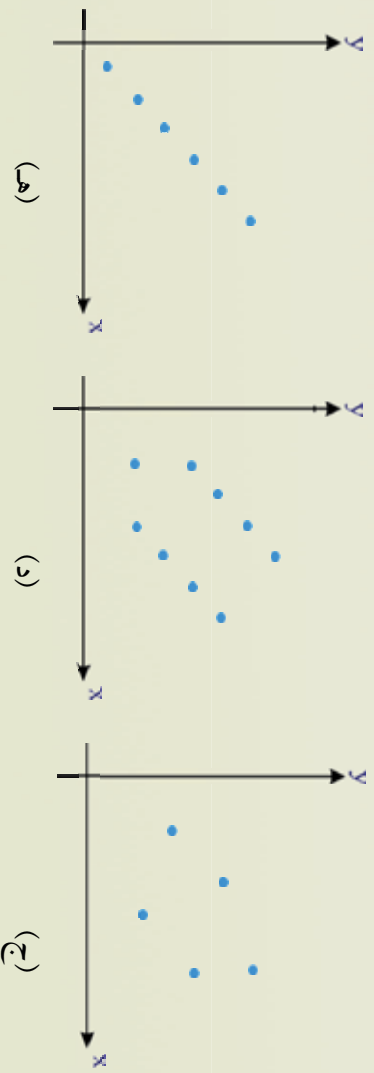
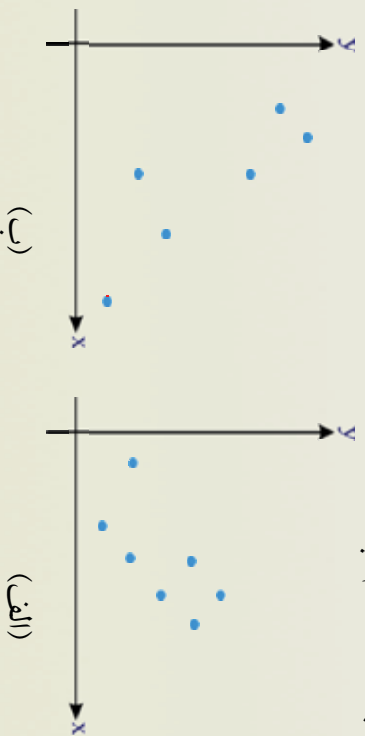
دغه مرتبي جوړي د مخامخ شکل په څېر په يوه مستوي

کې ښودل شوي دي.

پاسنی گراف چې د مورکانونو وزن رانښيي، د هغو پاشلو ټکو مجموعه په مستوي کې ده چې د اړوندې ډيټا په اندازه کيلو په يوه دوه متحوله ټولنه کې د مختصاتو په سیستم کې لاسته راځي.



مثلاً: لاندې گرافونه په پام کې ونیسئ:

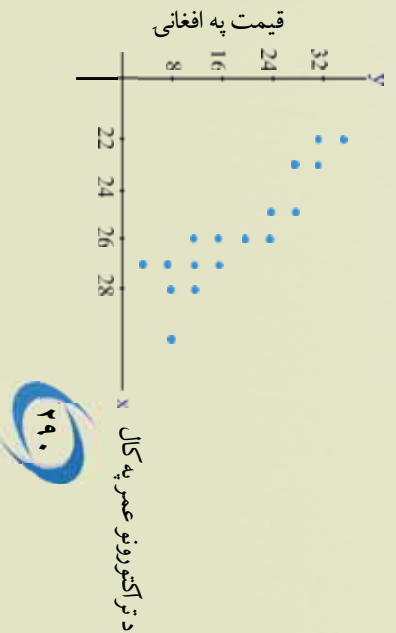


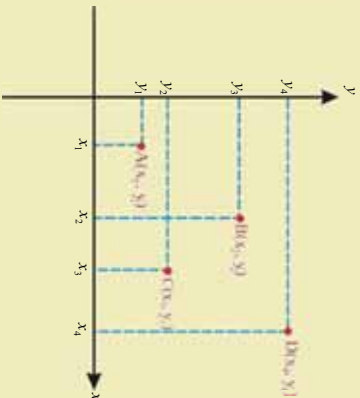
د(الف) په گراف کې لیدل کېږي چې که چیرې د X قیمتونه زیات شي؛ نو د Y قیمتونه هم زیاتېږي، خو د (ب) په گراف کې برعکس د X قیمتونو په زیاتوالي د Y قیمتونه کمېږي.

د(ج) په گراف کې د X په قیمت کې تغیرات هیڅ ډول اطلاع د Y بدلونونو په اړوند نه ورکوي ځکه د X قیمت په درلودلو سره په ډېر پام په دې گراف کې د(الف) او (ب) گرافونو په پرتله زیاته ده، د (په گراف کې د Y د قیمت حدس په ډېرې پاملرنې صورت مومي.

پوښتنې

لاندې گراف د یو شمیر تراکترونو عمر رانښيي، آیا ددې دوو متحولینو تر منځ کومه اړیکه یا ارتباط وینئ؟
توضیح یې کوئ.



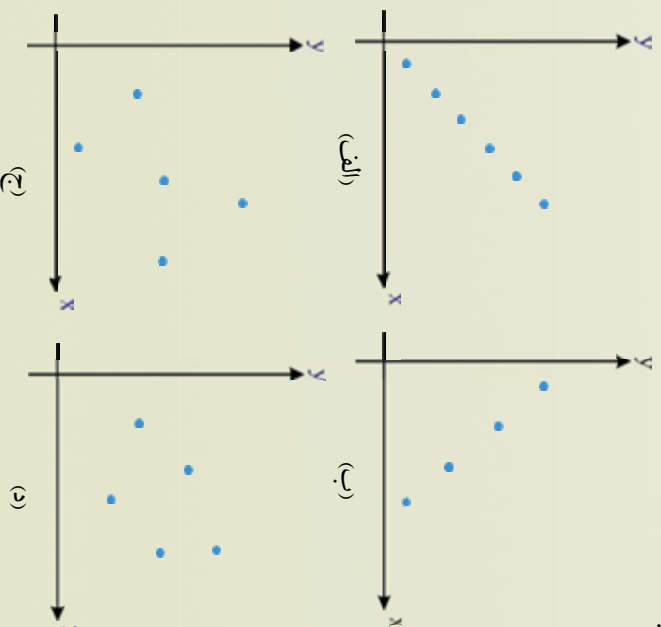


پیوستون او دیو ستون ضریب

د A, B, C او D ټکي لکه مخامخ شکل راکړل شوي دي، آیا شونې ده چې ټکي په یوه مستقیمه کرښه سره وصل شي، ولې؟

فعالیت

لاندې شکلونه په پام کې ونیسئ:



- د (الف) او (ب) په شکلونو کې کولای شو چې د Y متحول د هغې کرښې په مرسته چې له دغو ټکو تېرېږي وټاکو.

- د (الف) او (ب) په شکلونو کې د X او Y تر مینځ څه ډول اړیکه ده؟
- آیا کولای شو چې د (ج) او (د) په شکلونو کې داسې یوه کرښه وټاکو چې ټول ټکي پرې برابره وي؟
- د (ج) او (د) په شکلونو کې د X او Y تر مینځ اړیکې په څه ډول دي؟
- - د (الف) او (ب) د شکلونو اړیکې د (ج) او (د) د شکلونو له اړیکو سره پرتله او وړاندې چې د Y د متحول خط د X د متحول په مرسته په کوم شکل کې ډېره ده؟

له باسني فعالیت څخه داسې پوهېږو چې که چيرې ټکي په مستوي کې يوې مستقيمې کرښې ته نږدې پراته وي؛ نو په دې صورت کې $\bar{y}$ د متحول خطا نظر $\bar{x}$ ته لږ ده او برعکس هر څومره چې ټکي له کرښې لرې پراته وي، نو په هم هغه اندازه د $\bar{y}$ خطا ډېره ده.

له دې کبله داسې معيار غواړو در وېزنو چې د ټکو پيوستون مونږ ته اندازه کړي.

هغه فورمول چې د پيوستون د محاسبې لپاره ورکړ شوي ده، د پيوستون د ضريب په نامه ياد او په r سره ښودل کېږي چې عبارت دی له:

$$r = \frac{\sum \bar{y}y - \bar{x}\bar{y}}{n} = \frac{\sum y^2 - \bar{y}^2}{n} \quad \text{د } \bar{y} \text{ گانو اوسط (د } \bar{x} \text{ ونو اوسط) - د } \bar{x} \text{ او } \bar{y} \text{ د ضرب د حاصل مجموعه}$$

$$r = \frac{\sum x^2 - \bar{x}^2}{n} \quad \text{د } \bar{x} \text{ گانو معياري انحراف (د } \bar{x} \text{ ونو معياري انحراف)}$$

مثال: دموبرکانو د لومړني وزن او غذايي رژیم څخه وروسته دېټا لکه لاندې جدول په پام کې ونیسئ.

د $\bar{x}$ او $\bar{y}$ د ضرب حاصل	له عمليې څخه وروسته وزن $\bar{y}$	لومړني وزن $\bar{x}$	دموبرکانو شمېره
8	8	1	1
6	3	2	2
7	7	1	3
15	5	3	4
8	4	2	5
$\sum 44$	$\sum 27$	$\sum 9$	

دلومړني او وروسته د غذايي رژیم د وزنونو تر منځ د پيوستون ضريب محاسبه کړئ.

حل: که چيرې $\bar{x}$ لومړني وزنونه او $\bar{y}$ د غذايي رژیم له تطبيق څخه وروسته وزنونه او $n = 5$ د موبرکانو شمېر په پام کې ونیسو، نو د $\bar{x}$ او $\bar{y}$ اوسطونه عبارت دي له:

$$\bar{x} = \frac{9}{5} = 1.8, \quad \bar{y} = \frac{27}{5} = 5.4$$

$$S_x^2 = \frac{(1-1.8)^2 + (2-1.8)^2 + (1-1.8)^2 + (3-1.8)^2 + (2-1.8)^2}{5} = \frac{0.64 + 0.04 + 0.64 + 1.44 + 0.04}{5} = \frac{2.8}{5} = 0.56$$

$$S_y^2 = \frac{(8-5.4)^2 + (3-5.4)^2 + (7-5.4)^2 + (5-5.4)^2 + (4-5.4)^2}{5} = \frac{6.76 + 5.76 + 2.56 + 0.16 + 1.96}{5} = \frac{17.2}{5} = 3.44$$

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = \frac{\sum \bar{x} \cdot \sum \bar{y}}{n} = \frac{(1 \cdot 8) + (2 \cdot 3) + (1 \cdot 7) + (3 \cdot 5) + (2 \cdot 4)}{5} = \frac{44}{5} = 8.8$$

د ډيټا شمېر

په دې ډول په پایله کې د پیوستون ضریب په لاندې ډول لاس ته راځي:

$$r = \frac{8.8 - (1.8)(5.4)}{\sqrt{0.56} \cdot \sqrt{3.44}} = \frac{-0.92}{1.36} = -0.67$$

اوس داسې سوال را منځ ته کېږي چې د پیوستون د -0.67 ضریب د X او Y ترمنځ د ډېر پیوستون ښودونکې ده او که نه؟ د دې سوال د ځواب د پیدا کېدو لپاره د پیوستون ضریب له لاندې مثالونو څخه په څو مرحلو کې په لاس

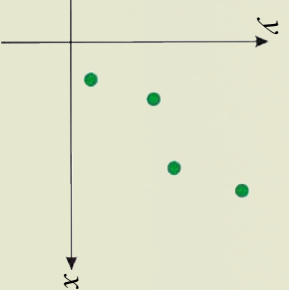
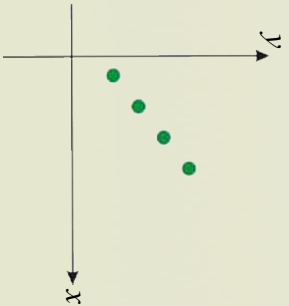
راوړو:

مثال: لاندې جدولونه په پام کې ونیسئ:

x	y
1	3
2	5
3	7
4	9

x	y
1	2
2	6
3	6
4	10

x	y
1	2.5
2	5.5
3	6.5
4	8.5



(الف)

(ب)

(ج)

د (الف) په شکل کې ټکي ټول په یوه کرښه پراته دي، نو په دې ډول د ټکو ترمنځ د پیوستون ضریب ډېر لوړ قیټ لري.

د (ب) په شکل کې ټکي د یوې مستقیمې کرښې په شاوخوا پراته دي، نو له دې کبله نظر د (الف) حالت ته د ټکو ترمنځ د پیوستون ضریب لږ دی د (ج) په شکل کې څرنگه چې ټکي د مستقیمې کرښې د (ب) د حالت په اندازه نږدې پراته دي، نو باید ضریب یې په دې حالت کې د (ب) له حالت زيات، خو د (الف) له حالته لږ دی، د دې خبرې د پخلی لپاره موضوع په لاندې ډول څیړو، د پیوستون ضریب د (الف) حالت لپاره:

$$\bar{x} = \frac{10}{4} = 2.5 \quad \bar{y} = \frac{24}{4} = 6$$

$$x \text{ د وټو واریانس} = \frac{(-1.5)^2 + (-0.5)^2 + (0.5)^2 + (1.5)^2}{4} = \frac{2.25 + 0.25 + 0.25 + 2.25}{4} = \frac{5}{4} = 1.25$$

$$y \text{ د گانو واریانس} = \frac{(-3)^2 + (-1)^2 + 1^2 + 3^2}{4} = \frac{9 + 1 + 1 + 9}{4} = \frac{20}{4} = 5$$

$$x \text{ او } y \text{ گانو د ضرب حاصل} = (1 \cdot 3) + (2 \cdot 5) + (3 \cdot 7) + (4 \cdot 9) = 70$$

$$\frac{70}{4} - (2.5)(6) = \frac{17.5 - 15}{\sqrt{6.25}} = \frac{2.5}{2.5} = 1$$

د ډيو ستون ضرب د (ب) په حالت کې:

$$\bar{x} = 2.5, \quad \bar{y} = \frac{24}{4} = 6$$

$$x = 1.25, \quad y = \frac{16 + 0 + 0 + 16}{4} = 8$$

$$x = 2 + 12 + 18 + 40 = 72$$

$$\frac{72}{4} - (2.5)(6) = \frac{3}{\sqrt{10}} = 0.9486$$

$$\bar{x} = 2.5, \quad \bar{y} = \frac{23}{4} = 5.75$$

د (ج) په حالت کې د ډيو ستون ضرب:

$$x = 1.25, \quad y = 4.6875$$

$$\frac{x}{4} = 16.75$$

$$\frac{16.75 - (2.5)(5.75)}{\sqrt{1.25 \cdot 4.6875}} = \frac{2.375}{\sqrt{5.858}} = 0.9812$$

په یاد ولرئ چې په هغو شرایطو کې چې y لږ خطاو لري (د x او y مقدارونه خط ته نژدې پراته دي) که چېرې د ډيو ستون ضریونه ۱ او -۱ وي، x او y پر یوه مستقیمه کرښه پراته دي. غیر له هغه څخه د ډيو ستون ضرب د دغو دوو مقدارونو تر منځ پروت دی.

پوښتنې

۱- لاندې ډېټا راکړل شوي ده.

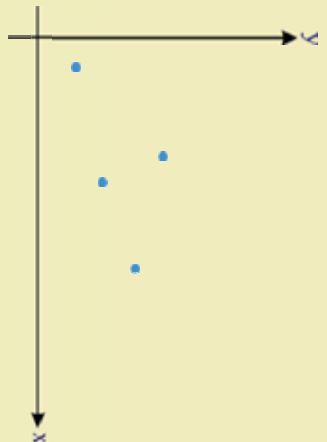
x	1	2	3	4	5
y	4	3	2	1	0

د ډېټا ډيو ستون ضرب محاسبه کړئ.

۲- د خپلو ټولګيوالو د ونې او وزن تر منځ د ډيو ستون ضرب حساب کړئ؟

د خطي ميلان معادله

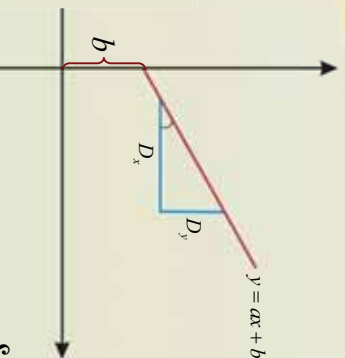
The linear regression equation



فرض کړئ چې یو پاشلي گراف په لاندې ډول راکړل شوی وي. یوه مستقیمه کرښه چې معادله یې د $y = ax + b$ په ډول ورکړل شوي وي، پیدا کړئ چې گراف یې ټولو ټکو ته نږدې فاصله یا واټن ولري.

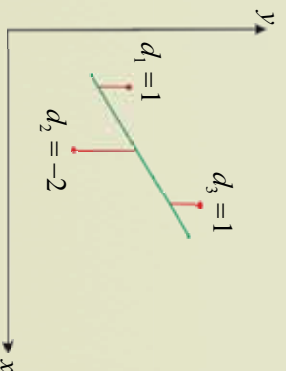
فعالیت

په مخامخ شکل کې یوه خطي تابع (لومړۍ درجه) چې گراف یې مستقیمه کرښه ده، رسم شوې ده.



- د $y = ax + b$ خطي تابع کې a او b څه ډول مقدارونه دي؟
- د $y = ax + b$ په تابع کې د X او Y متحولین په کوم نوم یادېږي؟
- د $y = ax + b$ مستقیمې کرښې میل پیدا کړئ؟
- د $y = ax + b$ په معادله کې د Y بدلون، د یو واحد په اندازه په x کې وټاکئ؟
- د $y = ax + b$ معادله کې که چیرې $a > 0$ وي؛ د تابع گراف متزايد او که متناقص دی؟
- همدغه راز که چیرې $a < 0$ سره وي، د تابع گراف څه شکل لري؟
- او که چیرې $a = 0$ وي، د تابع دگراف شکل وټاکئ؟

مخامخ شکل په پام کې ونیسئ:



د فاصلو مجموع $d_1 + d_2 + d_3$ او $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2$ محاسبه کړئ.

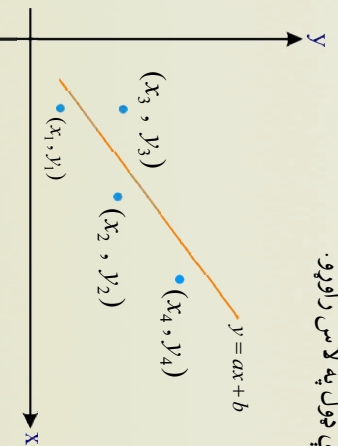
له پاسني فعالیت څخه پوهېږو چې د $y = ax + b$ معادله يوه خطي تابع ده چې د a ضريب ددې معادلې ميل جوړوي او کله چې a مثبت وي، مستقيمه کرښه متزايد او که چېرې a منفي وي، نو کرښه متناقصه ده.

پاملرنه وکړئ چې که د (x, y) جوړه د $y = ax + b$ په معادله کې صدق وکړي، په دې صورت کې نوموړې ټکي د مستقيمې کرښې په گراف پروت دی.

هر څومره چې د ټکو پاتل مستقيمې کرښې ته نژدې وي، نو د پيوستون ضريب به -1 او $+1$ ته ورژدې وي، که چېرې د يوې مستقيمې کرښې معادله ولرو او پوه شو چې د پيوستون ضريب مناسب او کولای شو د y د متحول په مرسته متحول وټاکو او که چېرې مستقيمه کرښه ونلرو، کولای شو چې دغه کرښه په داسې يوه تگلاره چې د لږکيو ميتود اصغري سازي¹ مربعو په نامه يادېږي، په لاندې ډول په لاس راوړو.

فرض کوو چې د باشلو ټکو گراف (متفرقه ډياگرام يا

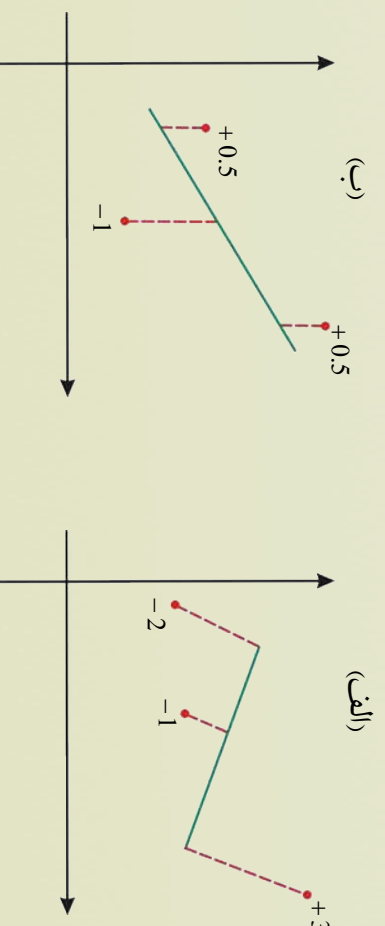
Scatter diagram) په دې ډول راکړل شوی وي.



او غواړو داسې يوه کرښه چې معادله يې $y = ax + b$ وي، د ټکو له منځ څخه داسې تېره کړو چې ټولو ټکو ته نږدې وي. په دې تگلاره کې بايد په مناسب ډول د کرښې معادله داسې جوړه شي چې د عمودي انحرافونو د دويم توان مجموع له مستقيمې کرښې څخه لږ تر لږه اصغري وي، مخ کې له فورمول څخه لاندې مثال په پام کې نيسو:

x	1	5	9
y	6	5	7

لاندې شکلونه د دغې ډوټا لپاره رسمو او د کرښو خطاوي له مشاهدو څخه تشخيصوو.



¹ the method of least square -

ښکاره ده چې رسم شوي کرښه د (ب) په حالت کې په مرتبو د (الف) له حالتته ښه ده.

په دواړو حالتونو کې د کرښو د خطاگانو الجبري جمع صفر ده.

د (الف) حالت: $0 = 3 + (-1) + (-2) = 0$ د کرښې د خطاگانو الجبري جمع.

د (ب) حالت: $0 = 0.5 + (-1) + (0.5) = 0$ د کرښې د خطاگانو الجبري جمع.

څرنګه چې په دواړو حالتونو کې د جمعي حاصل مساوي په صفر ده، نو له دې کبله وړاندې نشو چې کومه کرښه يوه مناسبه کرښه ده. ددې لپاره چې خطاوي مثبت او منفي يو بل له منځه یوړنسي، نو هره کرښه

وروسته له مربع کولو جمع کوو:

$$14 = (3)^2 + (-1)^2 + (-2)^2 = \text{د خطاگانو د دويم توان مجموع}$$
$$1.5 = (0.5)^2 + (-1)^2 + (0.5)^2 = \text{د خطاگانو د دويم توان مجموع}$$

له دې کبله د کرښې د خطاگانو د دويم توان مجموع څرنګه چې د (ب) په حالت کې نظر له (الف) حالت څخه يې قيمت لږ دی، نو ولې شو چې:

مناسبه کرښه هغه ده چې د خطاگانو د مربعگانو مجموع يې له نورو کرښو کمه وي، دغه راز کرښو ته د ريګرېشن کرښې وايي.

که چيرې د ريګرېشن کرښې د مقدار او هغو مشاهداتو تر منځ د مقدارونو توپير چې منځ ته راځي په $\bar{y}$ وښو، په دې صورت کې د دويمو توانونو د مجموع د لا کوچنې والي په خاطر په لاندې ډول عمل کوو:

$$\begin{aligned} \sum [y - (ax + b)]^2 &= \sum (y - \bar{y})^2 = \text{د خطاگانو د دويمو توانونو مجموع} \\ &= \sum (y - b - ax)^2 \\ &= (ay_1 + b - y_1)^2 + (ay_2 + b - y_2)^2 + \dots \end{aligned}$$

په دې حالت کې x او y ثابت، a او b متحولين دي.

پرتله له دې مونږ هغه تګلاره چې د a او b د محاسبې او په لاس راوړلو لپاره په کار لويېدلې، ورننو څو، يوازې د هغوي د محاسبې خطا په پام کې نيسو:

$$b = \frac{\sum y - \text{معياري انحراف} \times \text{د يو ستون ضريب}}{\text{د } x \text{ معياري انحراف}}$$

د a او b د محاسبې دغه لاره چې د لږکيو مربعگانو تګلارې په نامه يادېږي.

ډاډل: د ريګرېشن کرښه هغه وسيله ده چې د يو متحول د مقدار د وړاند وړنې لپاره د بل متحول په حسابولو چې ورسره تړلې دی، د استفادې وړ ګرځي.

مثال: لاندې ډیټا په پام کې ونیسئ.

x	1	2	3	4	5
y	4	3	2	1	0

د y د ریگریشن کړننه نظر x ته په لاس راوړئ.

حل: څرنگه چې:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{4+3+2+1+0}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

$$S_x^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{2} = \frac{4+1+0+1+4}{5} = \frac{10}{5} = 2 \Rightarrow S_x = \sqrt{2}$$

$$S_y^2 = \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n} = \frac{4+1+0+1+4}{5} = \frac{10}{5} \Rightarrow S_y = \sqrt{2}$$

$$\frac{\sum xy}{n} = \frac{4+6+6+4+0}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

$$r = \frac{\frac{1}{n} \sum xy - \bar{x} \cdot \bar{y}}{S_x \cdot S_y} = \frac{4 - 3 \cdot 2}{\sqrt{2} \sqrt{2}} = \frac{-2}{2} = -1$$

له دې کبله:

$$b = \bar{y} - b\bar{x} = 2 - b \cdot 3$$

$$a = r \frac{S_y}{S_x} = -1 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -1$$

$$b = \bar{y} - b\bar{x} = 2 - (-1)(3) = 2 + 3 = 5$$

$$y = ax + b = -x + 5$$

په دې ډول د ریگریشن معادله عبارت ده له:

پوښتنه



که چېرې $3 + 2x = y$ د y د ریگریشن معادله نظر x ته او د x اوسط مساوي په 2 راټول شوي وي، د

y اوسط څومره وي؟

د اتم څپر کې مهم ټکي

د بدلون ضريب: د بدلون ضريب د معياري انحراف له اوسط څخه عبارت دی چې مطلق يې واحدۀ عدد دی؛ لکه:

$$C.V = \frac{S}{\bar{x}} \quad \text{يا} \quad \frac{\text{معياري انحراف}}{\text{اوسط}} = \text{د بدلون ضريب}$$

دغه ضريب ډېر ځلې د فيصلي په ډول بنودل کېږي چې د تحول د ضريب په نامه يادېږي.

$$C.V = 100 \cdot \frac{S}{\bar{x}} \quad \text{د تحول ضريب}$$

د بدلون ضريب د مثبتې ډېټا لپاره تعريفېږي، په ياد يې ولرئ که چيرې ډېټا سره مساوي وي، نو د پراگندګۍ ټول شاخصونه مساوي له صفر سره دي.

په نورمال منحني کې پراگندګۍ: نورمال منحني د احصايوي مجموعې يوه داسې توصيفي وسيله ده چې په نورمال منحني کې ډېټا په نورمال توزيع او کثرت منحني کې متناظر پراته دي؛ نو رابنس عمده نقش لري، په حقيقت کې د دوو پارامټرو مشخص کيدل او معياري انحراف په نورمال توزيع کې په عمومي ډول مشخص او د هر ټول شاخص د محاسبي زمينه برابره ده.

د نورمال توزيع شکل خاصونه: د اوسط او معياري انحراف په مرسته کولای شو د ليد څرنگوالی د کرېډو (خمېډو) او پرېډو (اوج) په ډول په ښه توګه څرګند او وړاندې کړو.

د کرېډو شاخص د کرېډو او پيرستون ضريبونو په مرسته چې د اندازه کولو او اندازه پرته کولو لپاره پکارېږي په لاندې ډول ليکل کېږي:

$$\alpha_3 = \frac{\frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^3}{S^3}, \quad \alpha_3 = \frac{\frac{1}{n} \sum f_i (x_i - \bar{x})^3}{S^3}, \quad SK_{(p)} = \frac{3(\bar{x} - med)}{S}$$

د پرېډو (جګېډلو) شاخص د پرېډو د ضريب α_4 په مرسته اندازه او پرته کېږي.

$$\alpha_4 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4}{S^4}, \quad \alpha_4 = \frac{\sum_{i=1}^n f_i (x_i - \bar{x})^4}{S^4}$$

خو متحولۀ ټولنې: په احصايوي څېړنو کې تر ټولو لويه موخه (هدف) وړاندوینه او د يو متحول ټاکل د بل متحول له مخې دی. کله چې د دوو شیانو ترمنځ اړيکې خپل زموږ مقصد وي، په حقيقت کې هدف يوه دوه متحولۀ ټولنه ده؛ لکه د يو غاز د حجم او فشار ترمنځ اړيکه د صحت او حرکت د ميزان ترمنځ اړيکه، د کرنې او د حاصل د مقدار ترمنځ اړيکه او يا هم د يوې دايرې د شعاع او مساحت ترمنځ اړيکه چې ټولې دغه راز اړيکې دوه متحولۀ ټولنې بيانوي. د آسانتيا لپاره معمولاً د دوه يا څو متحولينو ترمنځ اړيکه د رياضي معادلو په مرسته وړاندې کوي.

د پراگنده‌ګي گراف: د پراگنده‌ګي گراف د رسمولو لپاره ډېټا د مرتبو جوړو په شکل په يوه مستوي کي د قايمو مختصلانو په سېسټم کي ښودل کېږي. کېدای شي د ټکو او پراگنده‌ګي گراف په مرسته درې ډوله اطلاعات زموږ په اختيار کي راځي.

الف: آيا داسې نمونه چې د څېړنو ترمنځ اړيکه ښيي، شته او که نه؟

ب: د يو ډول اړيکي د شتون په صورت کي دغه اړيکه خطي ده او که نه؟

ج: که چېرې اړيکه خطي وي، نو څه ډول اړيکه ده؟

پيوستون او د پيوستون ضريب: پيوستون د متحولينو ترمنځ د اړيکو د مېنډلو درجه ده، کله کله دواړه متحولين په يوه لوري بدلون کوي يعني x او y دواړه په يوه کرښه لوی او پهاړم کوچني شي، چې پيوستون يې مستقيمه کرښه ده. که چېرې د دوو متحولينو اندازه يو د بل پر خلاف بدلون وکړي يعني که چېرې x لوی شي y کوچنی کېږي. او يا هم برعکس صورت نيسي.

د پېژندنې ډېر ښه معيار د پيوستون شتون او نه شتون دی او حتماً خطي پيوستون ډول، جهت او ميزان د پيوستون ضرب دی، چې د لاندې فورمول په واسطه ښودل کېږي:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n xy - (\bar{x} \cdot \bar{y})}{S_x \cdot S_y}$$

په پورتنیو اړيکو کي $\sum xy$ د x ونو او y گانو د ضرب د حاصل مجموع، $\bar{x}$ د x ونو اوسط او $\bar{y}$ د y گانو اوسط دی، همداراز S_x د x ونو معياري انحراف او S_y د y گانو معياري انحراف دی.

د ريگرېشن کوښښ: ريگرېشن (تخميني) د تابع د يوه متحول له قيمت لاسته راوړل او سنجش څخه عبارت دی، چې د يو يا څو مستقلو متحولينو له ارزښت څخه په لاس راځي.

هغه معادله چې د متحولينو ترمنځ اړيکي افاده کوي، د ريگرېشن معادلي په نامه يادېږي.

کو لای شو دغه معادله د ډېرو لږو مربعگانو د محاسبې په طريقه حساب او همدارنگه د a او b ضريبونه د دغې

$$\text{طريقي په مرسته په لاندې ډول په لاس راوړو:} \quad a = \bar{y} - b\bar{x} \quad , \quad b = r \frac{S_y}{S_x}$$

چې r د y معياري انحراف او S_x د x معياري انحراف دی، په داسې حال کي چې r د پيوستون ضريب، $\bar{x}$ د x ونو اوسط او $\bar{y}$ د y گانو اوسط دی.

د خپرکي پوښتني



- 1- که چیرې په یوه ټولنه کې چې اوسط یې $\bar{x} = 50$ او واریانس یې $S^2 = 64$ سره وي، د بدلون ضریب γ چې له $10 + 2x$ رابطې سره سم بدلون مومي خو دی؟
- 2- که چیرې د هر زده کوونکي په نمره کې 20% نمرې ورزاتې شي، نو د نمرې د بدلون په ضریب څه اغیزه کوي؟
- 3- د هغو ټولنو فیصدي چې په لاندې درکړل شورو منځني گانو کې پرته ده، ولیکي؟



- 4- لاندې اړیکو ته په پاملرنې وړیاست چې کومه یوه له دغو اړیکو څخه یو متحول، دوه متحول او درې متحول اړیکي دي.

الف: ستاسو د ټولگيوالو د وزن اندازه؟

ب: د یو شی د عمومي مصرف او جنس ترومنځ اړیکه؟

ج: د یوې استوګنې د حجم، جگوالې او د قاعدې د مساحت ترمنځ اړیکې؟

- 5- د یو ټولګی د مصرف شورو ساعتونو د شمېر او د زد کوونکو د نمرې ترمنځ چې د 20% له مخې اخیستل شوی دی، د مرتبو جوړو په شکل په لاندې ډول دی:

(2,10) , (3,10) , (3,14) , (4,10) , (4,14)
 (5,14) , (5,16) , (6,12) , (6,16) , (6,18)
 (7,14) , (7,18) , (7,20) , (8,16) , (8,18)

د زده کوونکو د مصرف شورو ساعتونو او نمرې ترمنځ د اړیکو له مخې گراف رسم او خپلې پایلې وڅېړئ؟

6- مخامخ ډیټا په پام کې ونیسئ:

x	1	1	2	3
y	1	5	4	2

په ورکړ شوي ډیټا کې د پیوستون ضریب حساب کړئ؟

7- که چیرې د پیوستون ضریب صفر ته نژدې وي، نو خطا ډېره، که لږه ده؟

8- که چیرې د پیوستون ضریب د $1 +$ او $1 -$ عدد ته نژدې وي، نو د γ د خطا په اړوند څه وایئ؟

- 9- د سروې له مخې چې د یوه ښوونځي په دو 4 او B ټولګیو کې شوي ده، لاندې عددونه د کیلوګرام په حساب د زده کوونکو د وزن لپاره راټول شوي دي:

A:	65	63	67	64	62	70	66	68	67	78	69	71
B:	68	66	68	65	69	66	68	65	71	67	68	70

د باسنيو اعدادو په پام کې نيولو سره:

الف: د دوپټا د پراگنده کي گراف رسم کړئ؟

ب: د ارواندي مستقيمي کرښې معادله په لاس راوړئ a او b وټاکئ؟

ج: اړونده مستقيمه کرښه نظر د ريگرېشن معادلې ته رسم کړئ؟

10- که چيرې x او y سره بشپړ پيوستون او معکوس ولري، يعني $K_x = K_y$ ، نو د y نسبت x ته د ريگرېشن خط کوم دی؟

$$1) y = -\frac{1}{2}x + b \quad 2) y = \frac{1}{2}x + b \quad 3) y = x + b \quad 4) y = -x + b$$

11- د 20 تنو زده کورونکو د رياضي او فزيک د مضمون 20% د آزموني پايلې چې په لاندې ټول ورکړ شوي، رسم کړئ؟

11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	
زده کورونکي											
12	10	16	6	10	6	16	18	12	8	18	
د رياضي نمرې											
10	14	10	6	10	10	14	18	8	10	16	
د فزيک نمرې											

20	19	18	17	16	15	14	13	12		
زده کورونکي										
12	14	14	6	12	18	16	10	12		
د رياضي نمرې										
16	14	12	8	12	12	16	12	6		
د فزيک نمرې										

- د ريگرېشن د کرښې معادله په لاس راوړئ؟

- آيا د دور آزمونو د پايلو تر منځ اړيکې شتون لري؟

12- پر چنگښو د خوراک د مالگې د 5 او يو فيصده محلول اغيزې د يون پلازما پر ميزان د هغوی په بدن کې په

لاندې جدول کې ثبت شوي دي؟

0	5	10	20	30	40	50	
د مالگې په محلول کې د پټاپکېدو وخت							
د يون پلازما ميزان (mm)							
90	110	118	122	126	132	136	

- په باسني جدول کې متحولين وڅېړئ؟

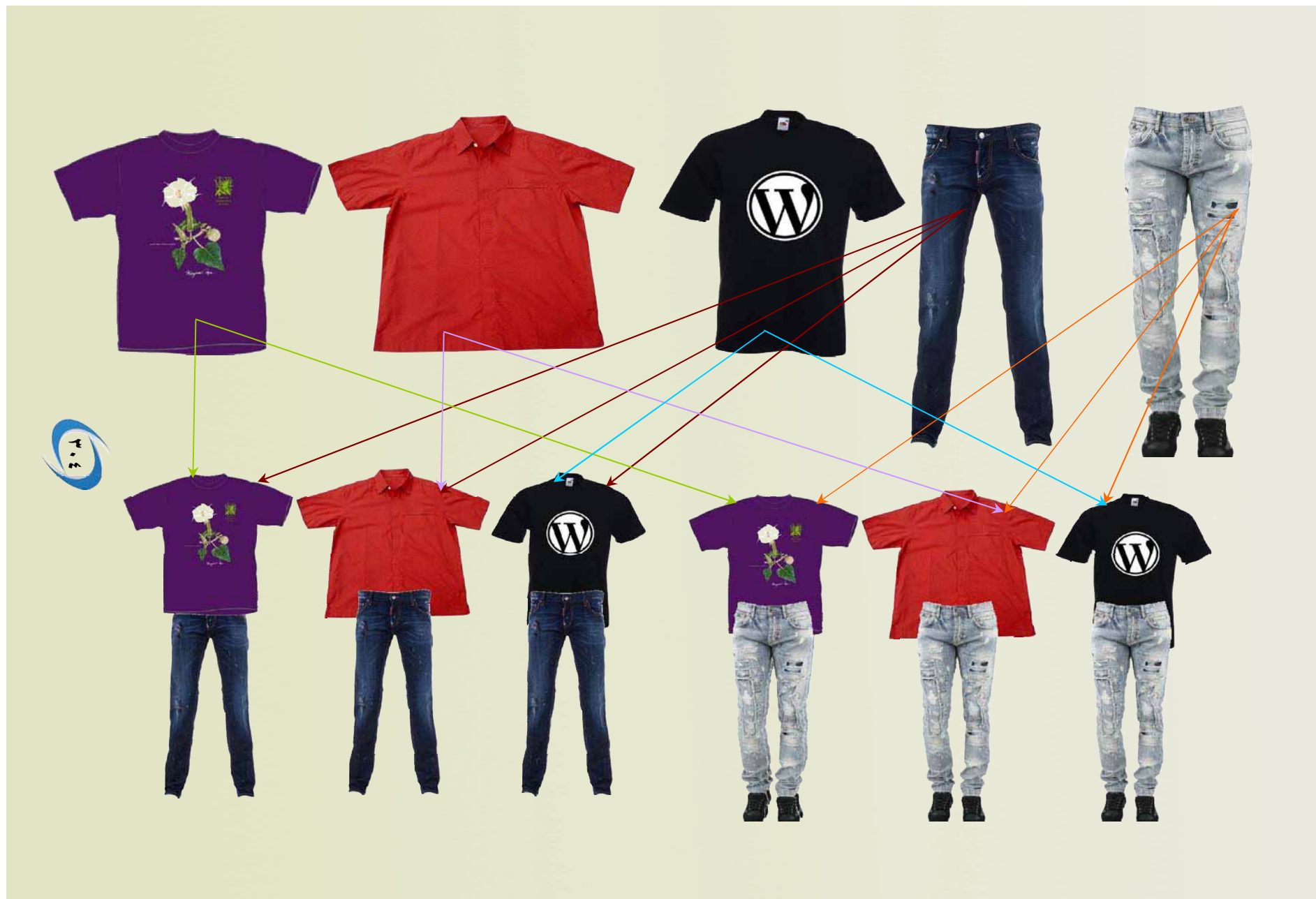
- په پورتنیو متحولينو کې کوم يو خپلواک او کوم يو ناخپلواک متحول دی؟

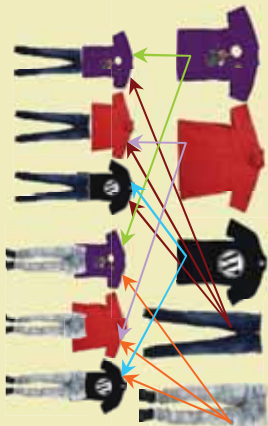
- يو داسې گراف رسم کړئ چې د دواړو متحولينو تر منځ اړيکه وښيي؟

- د دې گراف په رسم کې خپلواک متحول په افقي محور وښايست؟

فہم چپر کی احتمالات







پرموټېشن یا ترتیب

Permutation

که چېرې دری بیلابیل کمیسونه او دوه پتلونونه ولرو،
په څو ډوله کولای شو هغه سره جوړه جوړه
واغوندو؟

فعالیت

خپل درې تنه ملګري و آزموی چې په څو ډوله کولای شي په یو کتار کې و درېږي؟

- له درې یو رقمي اختیاري عددونو څخه څو درې رقمي عددونه کولای شو جوړ کړو.
- له پورتنیو عددونو څخه چې پورته مو د درې رقمي عددونو د جوړولو لپاره ټاکلي دي څو درې رقمي عددونه جوړولای شو، په دې شرط چې په عدد کې رقم تکرار نه وي.
- د پاسني فعالیت د اول، دویم او دریم پاراګراف پایلې سره پرتله او وړاندې چې څه اړیکې سره لري؟
له پاسني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

پایله

د n شیانو د ترتیب د شمېر ډولونه چې سره خوا په خوا راښيي عبارت دي له:

- که تکرار مجاز نه وي مساوي په $2 \cdot 1 \cdot \dots \cdot n \cdot (n-1) \cdot n$ سره دي.
- که تکرار مجاز وي مساوي په $n \cdot n \cdot \dots \cdot n = n^n$ سره دي.

$$\underbrace{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_n$$

تعریف: د یوه طبیعي عدد لپاره د $(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n)$ حاصل ضرب په لنډه ډول په $n!$ - فکتوریل

ښودل کېږي. او د تعریف له مخې $1! = 1, 0! = 1$ سره دي.

2: د n عنصرونو د ترتیب ډولونه چې د n غړو د پرموټېشن (Permutation) په نامه هم یادېږي

په P_n سره ښودل کېږي. که چېرې تکرار په ترتیب کې ناشونی او یا مجاز نه وي.

نو د پاسني تعریف په پام کې نیولو سره $P_n = n!$ سره کېږي.

که چیري په ترتیب تکرار شوني او یا مجاز وي، نو په دې صورت کې د ترتیب ډولونه او یا پرمختلوننه په

$$P_n^{(k)} = \frac{n!}{k!}, \quad (k \leq n)$$

لومړی مثال:

(d): د لاندې عددونو قیمت پیدا کړئ.

$$3!, 8!, 5!$$

(ii): د هر یو طبیعي عدد لپاره ونښئ چې $n! = n(n-1)!$ سره ده؟

حل (i): د تعریف له مخې لرو چې:

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

$$8! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40320$$

$$(ii) \text{ پوهېږو چې: } n! = (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n)(n-1)! = n(n-1)!$$

دویم مثال: د آزمونې لپاره په یو سالون کې 16 زده کونکي له بېلابېلو ټولګیو د سمې آزمونې لپاره راغونډ شوي دي.

په څو ډوله کولای شو د 16 میزونو تر شا په لیکه کښنئ چې د هر یو د ځای تغیر د ناستې یو حالت وشمېرل شي.

حل: پوهېږو چې 16! دي چې تکرار پکې ناشونی دی. که چیرې تکرار مجاز وي، په دې صورت کې مسئله عبارت له ترتیب د n شیانو چې k عدده یې د مثال په ډول په تکراري ډول رابښکارېږي، نو په دې

$$P_n^k = \frac{n!}{k!}, \quad (k \leq n)$$

صورت کې لرو چې:

مثلاً په پاسني مثال کې، که چیرې 16 زده کونکي وغواړي خپل ځایونه په خپلو لاسي بکسونو ونيسي او له دې څخه 4 تنه یو ډول لاسي بکسونه ولري، نو لرو چې:

$$P_{16}^{(4)} = \frac{16!}{(16-4)!} = \frac{16!}{12!} = 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 = 43680$$

که چیرې د دې مسئلې عمومي حالت په پام کې ونیسو، نو په دې صورت کې د $P_n^{(k_1, k_2, \dots, k_n)}$ ترتیب یا پرمختلوننه چې په هغه کې تکرار مجاز نه او په حقیقت کې، m ګریه شیان چې هر یو یې په ترتیب سره د $k_1!, k_2!, \dots, k_n!$ پسه اندازه ستره شو شیان دي، لرو چې:

$$P_n^{(k_1, k_2, \dots, k_n)} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot k_3! \cdot \dots \cdot k_n!}$$

دریم مثال: له پنځه (4, 5, 4, 5) عددونو څخه په څو ډوله کولای شو، پنځه رقمي عددونه جوړ کړو.

حل: پوهیږو چې د فورمول له مخې د عددونو شمیر عبارت دي له: $P_3^{(2,3)} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$

چې په خپله عددونه په لاندې ډول دي:

45545 , 45554 , 54554 , 55454 ,
54455 , 55445 , 54545 , 44555

څلورم مثال: د سبا کاروران ترانسپورتي شرکت د کابل جلال آباد په لین کې 5 لوی سرویسونه او د جلال آباد- کنړ په لاره 3 مېنې بسه لري. په څو ډوله کولای شو، د نوموړي ترانسپورت په سرویسونو او مېنې بسونو کې له کابل- کنړ ته سفر وکړو؟

حل: پوهیږو له کابله تر جلال آباد پورې د نوموړي شرکت له سرویسونو څخه یوازې 5 امکانه وجود لري، چې د هر یوه امکان په وړاندې 3 امکانه د مېنې بس د انتخاب چانس له جلال آباد څخه تر کنړه، د نوموړي شرکت وجود لري.

په دې ډول ټول امکانات مساوي دي په: $5 \times 3 = 15$

پنځم مثال: د 2, 7, 8 او 5 عددونو په مرسته څو درې رقمي عددونه پراته له تکراره جوړولای شو.

حل: دې خبرې ته په پاملرنې سره چې عددونه درې رقمي دي، نو درې خالي ځایونه لرو، چې په لاندې ډول د هغو ډکول په عددونو امکان لري:

2	3	4
د دریم رقم ځای	د دویم رقم ځای	د لومړي رقم ځای

پوهیږو چې د لومړي رقم د ځای د ډکولو لپاره 4 امکانه شتون لري، په دې ډول د دویم رقم د ځای د ډکولو لپاره 3 امکانه پاتې کېږي، ځکه چې له څلور عددونو څخه یو د لومړي رقم لپاره نیول شوی دی، او بلې خواته څرنګه چې تکرار مجاز نه دی، نو یوازې 3 امکانه د دویم رقم د ځای د ډکولو لپاره شته او د دریم رقم د ځای د ډکولو لپاره دوه امکانه شته چې ټول حالتونه عبارت دي له: $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ او د فورمول له

$$P_4^{(3)} = \frac{4!}{(4-3)!} = 24$$

مخې لرو چې:



1. خو پنځه رقمي عددونه وجود لري چې لومړی رقم يې 2 او وروستی رقم يې مساوی په 4 وي، په عدد کې هېڅ رقم تکراري نه وي؟
2. په څو ډوله 10 نفره کولای شي، د یوه گردۍ میز په شاوخوا کښېني چې له دې جملې څخه 2 تنه غواړي په هر حالت کې سره خوا په خوا کښي.
3. په څو ډوله کولای شئ 3 سره تيوبونه، 2 آسماني او څلور زير تيوبونه سره خوا په خوا په يو کتار کې کېږدو. (د هم رنگه تويونو په کتار کې د هم رنگه تويونو ځای بدلول بل حالت نه شمېرل کېږي.)



ترکیب یا کمبینیشن

Combination

د 1 او 2 عددونو ترکیب څه دی؟

د 1 او 2 عددونو ترتیب کوم دی؟

ستا سو له نظره ترکیبونو او ترتیبونو څه سره توپیر لري؟

مخکي له دې چې لاندې فعالیت سرته ورسو، لاندې تعریف چې

په فعالیت کې به له هغه څخه کار واخلو په پام کې نیسو.

تعریف

د $\binom{n}{k}$ لیکدود چې n د k له پاسه ویل کېږي او په حقیقت کې د ښوم د ضریبونو په نامه یادېږي چې k

د ښوم توان ښيي او په لاندې ډول دی:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad 0 \leq k \leq n, \quad k, n \in \mathbb{N}$$

فعالیت

د پاسني تعریف په پام کې نیولو سره، د ښوم د $(a+b)^2$ دوه جدي په انکشاف کې د ښوم ضرایب چې

مسوي په $\binom{2}{k}$ سره دي، $k = 0, 1, 2$ ، پرته کړئ:

$$(a+b)^2 = \square a^2 + \square ab + \square b^2$$

• د ښوم ضریبونه چې په پاسني انکشاف کې، په چوکاټونو کې نیول شوي، د $\binom{2}{k}$ سره دي، $k = 0, 1, 2$ له قیمتونو سره پرتله کړئ؟

• څرنگه چې $1 = \binom{2}{2} = \binom{2}{0}$ سره دي، ویلای شئ چې د هر $n \in \mathbb{N}$ لپاره $\binom{n}{n}$ او د $\binom{n}{0}$ قیمتونه هم سره برابر او مساوي په 1 دي؟

• د $(a+b)^n$ په انکشاف کې د ښوم د ضریب د دویم حد قیمت د $\binom{n}{k}$ له مخې حساب کړئ.

• د $\binom{4}{k}$ ، $k = 0, 1, 2, 3, 4$ ، قیمتونه د ښوم د انکشاف له کومو ضریبونو سره مساوي دي، ویي لیکي؟

له پاسني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

پایله: د هر n او k طبیعي عددونو لپاره، په داسې حال کې چې $0 \leq k \leq n$ سره دی لرو:

$$(i) \quad \binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{n} = 1$$

$$(ii) \quad \binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} = \binom{n+1}{r}$$

(iii) له Ω څخه د Γ شیانو ترکیونه عبارت د یو Ω عنصره سټ د غړو د ترکیب یا کمپوزیشن د Γ له Ω

شیانو څخه ده چې په C_r'' سره ښودل کېږي او قیمت یې عبارت دی له:

$$C_r'' = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

لومړی مثال: په یوه ښوونځي کې د لسم 7 ټولګي شتون لري. د ښوونځي اداره غواړي چې لسم ټولګي له 7 تنو اول نمرة ګانو، 4 تنه وټاکي. په څو ډوله دغه انتخاب کېدلای شي؟

حل: لیدل کېږي چې له 7 تنو څخه د 4 تنو په ټاکنه کې هیڅ ډول برلاسي او ترتیب په پام کې نشته؛ یعنې دا چې، مهمه نه ده زده کوونکي د کوم ټولګي دي؛ نو دا ډول مسئله عبارت له ترکیب څخه ده چې له 7

$$\text{تنو څخه } 4 \text{ تنه وټاکو؛ نو لرو چې: } 35 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot (7-4)!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{6} = C_4^7$$

دویم مثال: که له 7 تنو زده کوونکو 4 تنه د لسم ټولګي د زده کوونکو د اتحادیې د مشران په لپاره، داسې چې لومړی تن رئیس، دویم معاون، دریم منشي او څلورم تن د مالي مسئول په توګه وټاکل شي، په دې صورت کې لرو چې:

څرنګه چې لیدل کېږي په دې ټاکنه کې ترتیب مهم دی، ځکه چې د ABCD د انتخاب ترتیب په داسې حال کې چې A رئیس، B معاون، C منشي او D مالي مسئول دی، په داسې حال کې چې د CABD په ترکیب کې C رئیس، A معاون، B منشي او D مالي مسئول ګڼل کېږي.

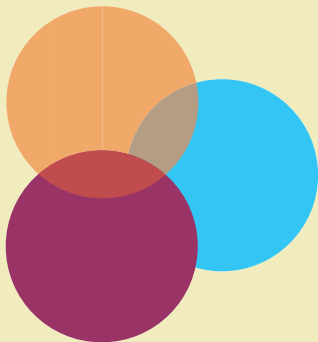
دا ډول مسئله عبارت له ترتیب یا پرومپشن څخه ده چې له 7 تنو څخه د 4 تنو په ترتیب انتخاب دي؛ یعنې لرو چې:

$$P(7, 4) = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7!}{3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 120 \cdot 7 = 840$$

پوښتنې



- 1- له اوو حرفونو څخه لکه A, B, C, D, E, F او G څو 4 حرفي کلمې، پرته له تکراري حرفه جوړولای شو؟
- 2- د والیال په یوه لیګ کې، 7 تیمونه ګډون لري. په څو ډوله تیمونه کولای شي لومړی، دویم او دریم مقام لاس ته راوړي؟
- 3- له 4 نارینه وو او 6 مېرمنو څخه 2 نارینه او 3 ښځې داسې ټاکو چې نارینه په کې یو رئیس او دویم بې مالي مسئول وي.



ترکیب

Combination

آیا پوهېږئ چې اصلي رنگونه کوم دي؟
د نارنجي او بنفش رنگ ترکیب کوم رنگ دی؟
ستاسو په نظر ډېر رنگ د کومو رنگونو له ترکیبه جوړېږي؟
آسماني رنگ، بنفش رنگ، نارنجي رنگ.

فعالیت

د خپلو ۵ تنو ټولگيالو څخه ۳ تنه په خو ډوله ټاکلی شی؟

- موضوع په عملي توگه په ټولگي کې تجربه او حالتونه يې و شمېرئ؟
 - که چېرې له ۵ تنو زده‌کونکو څخه ۳ تنه داسې و ټاکل شي چې، لومړی کس سرگروپ، دویم د سرگروپ مرستیال او دریم تن منشي وي، د درې تنو گروپ، د ټاکلو ټول ډولونه خو دي؟
 - د پورتنۍ فعالیت لومړی او وروستی جزء یو تړله څه توپیر لري؟
 - آیا فکر کو لاى شی د پاسنیو گروپونو د ټاکلو شمېر مساوي له کوم عدد سره دی؟
- له پاسني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

پایله: دلته د k په شمېر غړو یو گروپ له یو سټ څخه چې n غړي لري، په عمومي ډول په دوه ډوله صورت نیسي چې په یوه کې ترتیب په پام کې دی، خو په بل کې ترتیب مهم نه شمېرل کېږي، یوازې د هغوي ترکیب د پام وړ دی.

په دې ترتیب د یو ترکیب یا کمبینیشن چې k شیان له n بېلابېلو شیانو څخه مطلب دی، چې په لاندې تعریف کې بیانېږي.

تعریف: د k شیانو ترکیب له یوه n عنصره سټ څخه چې په C_k^n ښودل کېږي او عبارت له ترکیبي امکاناتو څخه دی چې د k په شمېر غړي يې پرته له ترتیب څخه ټاکل کېږي، عبارت دي له:

$$C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad 0 \leq k \leq n$$

لومړۍ مثال: له 30 تنو څخه د 4 تنو ټاکل چې ترتیب په کې مهم نه دی، حساب کړئ؟
حل: پوهېږو چې مسئله عبارت له 30 تنو څخه د 4 تنو دی چې د فورمول له مخې به لاندې ډول په لاس راځي:

$$C_4^{30} = \binom{30}{4} = \frac{30!}{4!(30-4)!} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26!}{26! \cdot 4!} = 27405$$

دویم مثال: له $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ سټ څخه څو 3 عنصره فرعي سټونه په لاس راځي؟
حل: پوهېږو چې مسئله په حقیقت کې له 5 غړو څخه د 3 غړو ټاکل دي چې شمیر یې په لاندې ډول په لاس راځي:

$$C_3^5 = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 10$$

پوښتي

- 1- که چېرې په یوه آزمونه کې له 10 پوښتنو څخه 7 پوښتنو ته ځواب مطلوب وي، په څو ډوله کولای شو چې له 10 پوښتنو څخه 7 پوښتي د حل لپاره وټاکو؟
- 2- په یوه مستوي کې پنځه ټکي چې په یوه کرښه پراته نه دي، په پام کې ونیسئ د دې ټکو په نښلولو سره په څو ډوله مثلث جوړولای شو.
- 3- که چېرې $C_2'' = 36$ - سره وي، د $P(n, 2)$ قیمت پیدا کړئ؟



تبدیل Variation

په یوه المپیا کې له 10 ورزشي ټیمونو څخه په څو ډولونو د سرو زرو، سپینو زرو او برونزو ملالونه شتون لري؟

فعالیت

- د n بیلابیلو شیانو په پام کې نیولو سره د k په شمیر شیان ټاکو، د هغوی مجموعي شمېر څو دی؟
- که چیرې د k شیانو په ټاکلو کې ترتیب داسې وي، چې په هغوی کې لومړی، دویم، درېیم او ... شتون ولري، ټول مجموعي حالات به څو وي؟

- د پاسنیو دواړو ډولونو ترمنځ توپیر په کومه اندازه ده؟

پایله: د هغو ترکیبونو شمېر چې د k غړو د پرله پسې ترتیب په انتخاب کې له n غړو څخه په پام کې وي، نو په دې صورت کې یې شمېر مساوي په $k! \cdot C_k^n$ سره کېږي.

دغه ترکیب د ورځین Variation یا تبدیل په نامه یاد او په V_k^n سره ښودل کېږي چې عبارت دی له:

$$V_k^n = k! \cdot C_k^n = k! \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!} \Rightarrow V_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

مثال: څو امکانه وجود لري چې په یوه انتخابي غونډه کې له 30 تنو گډون کوونکو څخه 4 تنه د مشرتابه لپاره په داسې حال کې چې یو تن رئیس، یو لومړی مرستیال، یو دویم مرستیال او څلورم تن د منشي په توګه دنده ترسره کړي؟

حل: مسئله په حقیقت کې د 4 تنو تبدیل له 30 تنو څخه ده، چې د تعریف له مخې له لاندې فورمول څخه په لاس راځي:

$$V_4^{30} = \frac{30!}{(30-4)!} = \frac{30 \cdot 27 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 26!}{26!} = 657520$$

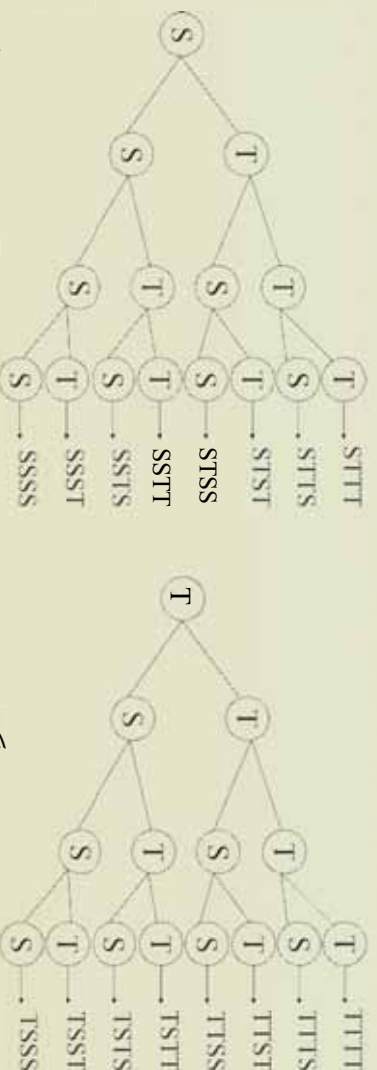
پورتني حالات چې تر اوسه مو د ترکیبونو، ترکیبونو او تبدیلونو لپاره تر بحث لاندې و نیول په لاندې جدول کې را ټول شوي دي.

د امکاناتو شمیر		د ټاکلو ډول k غړي له n غړو
له تکرار سره $k \leq n$	پرته له تکراره $k \leq n$	څخه
$P(n, k) = \frac{n!}{k!}$	$P(n, k) = n!$, $n = k$	ترتیب یا پرمختلشن
$C_k^n = \binom{n+k-1}{k}$	$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	ترکیب یا کمېنېشن
$V_k^n = n^k$	$V_k^n = k! \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!}$	تبدیل یا ورکشن

پوښتنې

- 1- په یوه ورزشي سیالی کې د فوټبال 12 ټیمونه، په څو ډوله لومړی، دویم او دریم مقام گټلی شي؟
- 2- د یوولسم ټولگي له 20 تنو زده کوونکو څخه په څو ډوله 2 تنه د ټولگي د استازي او د استازي د مشر مرستیال په توگه ټاکلی شو؟

مثال: د یوې سکې په اچولو سره چې د راټک امکان یې، شیر یا خط ممکن دی او د هرې خوا د راټک احتمال یې مساوي په $\frac{1}{2}$ دی، په پام کې ونیسئ، که چیرې سکۀ 2 ځلې، درې ځلې، شپږ ځلې، اته ځلې او یا 16 ځلې وغورځوو، پوهېږو چې د هم چانسو لومړنیو پېښو په نمونه یي فضا کې په یوه ونډیز گراف کې لاندې حالت لرو: (شیر S او خط T) دی.

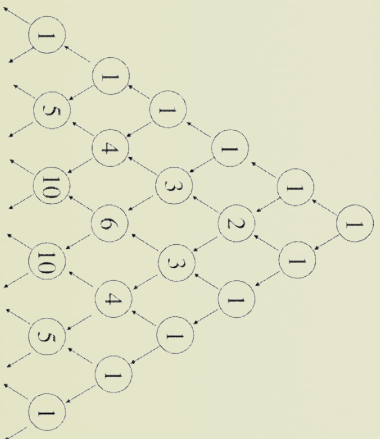


د پاسني مثال د شیر او خط د راټک احتمال په یوه دوه، درې او څلور ځلې اچولو کې په لاندې جدول کې راټول شوي دي.

د سګې	هیڅ ځل		یو ځل		دوه ځله		درې ځله		څلور ځله	
غورځول	خط	احتمال	خط	احتمال	خط	احتمال	خط	احتمال	خط	احتمال
د خط دراتګ شمېر	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{16}$
							1	$\frac{3}{8}$	1	$\frac{4}{16}$
			1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{2}{4}$	2	$\frac{3}{8}$	2	$\frac{6}{16}$
			1	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{4}$	3	$\frac{1}{8}$	3	$\frac{4}{16}$

که چېرې جدول ته په څیر سره پاملرنه وکړئ، د هر وار د احتمال د کسرونو په صورت کې یو نظم وینو چې د بنیوم په انکشاف کې په ترتیب سره د حدونو ثابت غړي دي چې د لومړي ځل لپاره د پاسکال له خوا راپېژندل شول او تر اوسه د هغه په نامه یادېږي.

دغه نظم مثلاً په مخامخ مثلث کې په یوه لیکه کې اعداد د کینې او بڼې خوا د عددونو سره په پورته لیکه کې له جمعې لاس ته راغلي دي.



په دې ډول کولای شو چې مثلث ته تر ښه پام وکړو، چې که چېرې هغوی د یو دوه جملېني له انکشاف سره پرتله کړو، لکه د راکړل شوي پاسکال مثلث عدونه دي؛ مثلاً پاملرنه وکړئ چې د دوه

جمله‌یی په انکشاف کې له هغو عددونو څخه مو حلقه تاو کړې ده د مثلث له اعدادو سره چې حلقه ترې

تاو شوې ده یو شان ده:

$$\begin{aligned}(a+b)^0 &= \textcircled{1} \\(a+b)^1 &= \textcircled{1}a + \textcircled{1}b \\(a+b)^2 &= \textcircled{1}a^2 + \textcircled{2}ab + \textcircled{1}b^2 \\(a+b)^3 &= \textcircled{1}a^3 + \textcircled{3}a^2b + \textcircled{3}ab^2 + \textcircled{1}b^3 \\(a+b)^4 &= \textcircled{1}a^4 + \textcircled{4}a^3b + \textcircled{6}a^2b^2 + \textcircled{4}ab^3 + \textcircled{1}b^4\end{aligned}$$

چې دغه ضریبونه د $(a+b)^n$ په انکشاف کې د k له پاسه د ضریبونو استعمال په لاندې ډول لیکلی شو:

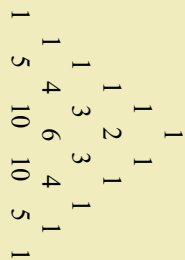
$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

د " علامه د پاسنی مجموع لپاره استعمال شوې ده.

په دې ډول د خط راتللو احتمال په $1-k$ امه مرتبه کې عبارت دي له: $P = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$ (خط راتگ)



1. د فوټبال په یوه سیالي کې 12 ټیمونه گډون لري، په څو ډوله کولای شو گټونکي لومړی، دویم او دریم مقام ته وټاکو.
2. د بیورولسم ټولگي له 20 تنو زده‌کونکو څخه په څو ډوله دوه تنه، د ټولگي د استازي او د استازي د مرستیال په توگه وټاکو.



د ښځو قضيې

د پاسکال د مثلث له مخې د ښځو د انکشاف

ضرېونه وټاکي.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

فعاليت

- په يوه ناڅاپي تجربه کې چې يوازې دوه ناڅاپي پېښې د A او $\bar{A}$ پېښېري، يعنې د $\{A, \bar{A}\}$ نمونوي فضا لري. د A د پېښې احتمال عبارت دی له:
- که چېرې $P(A) = P(\bar{A})$ د A د پېښې احتمال وي، د هغې د مکمله پېښې احتمال يعنې $\bar{A}$ خو دی $P(\bar{A}) = ?$

- د پورتنۍ تجربې له بيا بيا تکرار څخه که چېرې د A حادثې پېښې ته 1 او د نه پېښېدو حالت ته 0 ورويو لاندې جدول د تجربې د بيا بيا تکرار يعنې $n = 2$ لپاره بشپړ کړي.

k	ممکنې پایلې	احتمال	د ښځو د ضرېونو اړايه
0		$(1-p)^2$	$\binom{2}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^2$
1	10	$2p(1-p)$	
2	11		$\binom{2}{2} p^2 (1-p)^0$
		$(p + (1-p))^2$	$\sum \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = ?$

د ښځو د حلونو د انکشاف مجموع يعنې $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ پيدا کړئ؟

له پورتنۍ فعاليت څخه لاندې پايله په لاس راځي:

پایله: په یوه ناڅاپي تجربه کې چې د نمونې فضا غږي یې په مساوي احتمال په تجربه کې بیا د تکرار وړ وي، نو د تجربې په n ځله تکرار کې د بنسټ د انکشاف $k - m$ حد کې لاندې احتمال لري:

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

پورتنۍ بنسټ په $B(n, p, k)$ بنسټ کېږي، د برنولي د پرابلم د احتمال په نامه یادېږي او لیکو:

$$B(n, p, k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

مثال: له n تنو څخه د 10 تنو په شمېر په ناڅاپي ډول ټاکو، د k اتو انتخاب شویو خلکو له جملې څخه

$$2 \text{ تنه ټاکو، پیدا کړئ د دې احتمال چې دواړه تنه په یوه ورځ زیږېدلي وي. } P(k \leq n) = ?$$

حل: په دې ډول د Ω په نمونېي فضا کې داسې فرضو چې د هرې ورځې احتمال $\frac{1}{365}$ او د زیږېدنې

ورځ د سوال وړ ده نه، د زیږېدنې کال.

په دې ډول Ω په نمونېي فضا کې ټول امکانات له 365 ورځو څخه د k شمېر لپاره عبارت دی له:

$$|\Omega| = (365)^k$$

په دې ډول اوس که چیرې د A ناڅاپي پېښه چې لږترلږه دوه تنه په یوه ورځ زیږېدلي وي، په ساده ډول داسې د محاسبې وړ ده، چې د A د حادثې مکمله په پام کې نیسو، په دې ډول $\bar{A}$ عبارت له هغې ناڅاپي پېښې څخه ده چې k تنه په بېلابېلو ورځو کې زیږېدلي دي. په دې ډول $\bar{A}$ عبارت د k پرموېشن له 365

$$P(\bar{A}) = (365, k) = \frac{365!}{(365 - k)!}$$

$$\text{څخه ده چې لرو: } P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{365!}{|\Omega|} = 1 - \frac{1}{(365 - k)!}$$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{|\bar{A}|}{|\Omega|} = 1 - \frac{1}{(365 - k)!}$$

په دې ډول:

پوښتنې

وښیئ چې:

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0 \quad (I)$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n \quad (II)$$



دوه جمله يي احتمال

آيا کولای شو چې د هرې نمونېي فضا پایلې په دوه ناڅاپي پېښو چې له یو بل سره هېڅ ګډه عنصر نلري، ترتیب کړو. موضوع د سټ د تیوري له مخې په یوه اختیاري نمونېي فضا کې، دوه ناڅاپي پېښو ته چې اتحاد یې نمونېي فضاوي په مثال کې یې تشریح کړي.

فعالیت

- د هغو تجربو څخه چې تر اوسه یې پېژنئ یا دونه وکړئ او یوه نمونېي فضا د دوه اتفاقي یا ناڅاپي پېښو په اړایه چې ټوله نمونېي فضا یې یوازې دوه غړي ولري.
 - آیا هغه ناڅاپي تجربې چې نمونېي فضاګانې یې له 2 څخه زیات غړي لري. کولای شو په داسې نمونېي فضاګانو واورو چې یوازې 2 غړي ولري؟ مثال راوړئ.
 - په عمومي ډول څه ډول کولای شو چې یوه نمونېي فضا چې ډیر غړي لري، په یوه داسې نمونېي فضا چې 2 غړي لري، واورو؟
 - که چیرې د دا ډول فضاګانو د یو غړي د پېښې احتمال P وي، د بلې پېښې د احتمال قیمت به څو وي؟
 - که چیرې تجربه n ځلې سرته ورسوو، او د k په شمیر له n ځلې ($0 \leq k \leq n$) وړل او نور یې بایلل دل وي، د k ځلې بریالیتوب (P) په n ځلې تکرار کې پیدا کړئ؟
- له پورتنۍ فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

- **پایله:** د هرې ناڅاپي تجربې نمونېي فضا کولای شو چې په داسې یوې نمونېي فضا واورو چې دوه غړي ولري.
- که چیرې د دا ډول نمونېي فضا د یو غړي احتمال (P) وي، نو هرو مرو د بل حالت احتمال $1 - P$ او بایلل دي.
- که چیرې دا ډول تجربې n ځلې تکرار شي، نو د $k - m$ ځلې وړل په n ځلې تکرار کې او د بایللو احتمال به $q = 1 - p$ سره دي، یعنې لرو چې:

$$k - m \text{ ځلې وړل په } n \text{ ځلې تکرار کې} \quad \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad 0 \leq k \leq n$$

لومړی مثال: پاملرنه وکړئ چې که چیرې په یوه تجربه کې د وړلو احتمال $\frac{1}{2}$ ، د بیللو احتمال هم مساوي په $\frac{1}{2}$ سره وي، په دې ډول ناڅاپي پیښو کې پورتنی اړیکه په لاندې ډول حسابېږي:

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-k} = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

پورتنی پایله د یوې تجربې په n ځله تکرار کې چې له هغې جملې څخه k ځلې بې وړل وي، یوې دوه عنصره نمونه یي فضا ته وڅیړئ؟

دویم مثال: په یو 5 اولاده فامیل کې، د دې احتمال چې له اولادونو څخه 2 تنه هلکان او پاتې نښتني وي، څو دی؟

حل: که چیرې د اولادونو د هملک او نښلی زېږد برابر په پام کې ونیسو لرو چې:

څرنگه چې په دې مثال کې $p = \frac{1}{2}$ او $q = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ سره دی، نو لیکلای شو:

$$\binom{5}{2} \frac{10}{2^5} = \frac{10}{2^5} = \frac{5}{16} = 0.3125 = 31.25\% \quad \text{د دې احتمال چې دوه هلکان او درې نښتني وي.}$$

درېم مثال: درمل یوه دانه 6 ځلې غورځوو، د دې احتمال پیدا کړئ چې په 4 ځلې غورځېدو کې راغلي خالونه له دریو څخه لږ وي؟

حل: که چیرې له 3 څخه لږ راتلل حالت وړل په پام کې ونیسو؛ نو:

$$p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0.3333 = 33.33\%$$

$$q = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} = 0.6666 = 66.66\%$$

$$\text{د دې احتمال چې په 4 ځله غورځېدو کې له 6 ځلې څخه، خالونه له 3 څخه لږ وي} = \binom{6}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{20}{243} = 0.0823 = 8.23\%$$

څلورم مثال: يوه فلزي سکه داسې جوړه شوې ده چې د خط راتلو احتمال يې مساوي په $\frac{1}{3}$ وي، که

چيرې دغه سکه 4 ځلې وغورځول شي، د دې احتمال چې لږ تر لږه 3 ځلې شپږ راشي، مطلوب دی.

حل: که چيرې د سکه د خط راتلو حالت ته ورل او احتمال يې P په پام کې ونيسو، نو د خط د نه

راتلو يا شپږ راتگ مساوي په $1 - P$ سره دی؛ يعنې: $1 - P = \frac{1}{3}$

له دې څخه $p = \frac{3}{4}$ او $q = \frac{1}{4}$ په لاس راځي:

$$\left\langle \begin{array}{l} \text{د دې احتمال چې په 4 ځله غورځېدو کې} \\ \text{لږ تر لږه 3 ځله شپږ راشي} \end{array} \right\rangle = \binom{4}{3} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{4}\right)^3}_{\text{3 ځلې شپږ}} \cdot \underbrace{\left(\frac{3}{4}\right) + \left(\frac{4}{4}\right)}_{\text{1 ځل خط}} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{4}\right)^4}_{\text{4 ځلې شپږ}} = \frac{3}{64} + \frac{1}{256} = \frac{13}{256}$$

پنځم مثال: يوه نورماله سکه څو ځلې وغورځوو چې لږ تر لږه د خط راتلو احتمال يې له 0.99 څخه ډير

وي؟

حل: داسې فرضو چې سکه n ځلې غورځوو د دې احتمال چې لږ تر لږه يو ځل سکه خط راشي مساوي

ده په:

(د هر n ځلې شپږ راتگ احتمال) $1 - 1 = 1$ دی، لږ تر لږه يو ځل خط راتلو احتمال

$$= 1 - \binom{n}{n} \cdot \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

په دې ډول ددې شرط $0.99 > 1 - \frac{1}{2^n}$ يا $0.01 < \frac{1}{2^n}$ سره دی چې $n \geq 7$ سره کېږي.

په دې ډول بايد سکه 7 ځلې وغورځوو چې لږ تر لږه يو ځل خط راشي، احتمال به يې له 0.99 څخه لوي

وي.



يوه سکه خو ځله غورځوو، د دې احتمال پيدا کړي چې:

- (i) په 4 ځله غورځيدو کې، 2 ځلې خط راشي.
- (ii) په 6 ځله غورځيدلي، 3 ځلې خط راشي.
- (iii) په 8 ځله غور ځيدو کې، 4 ځلې خط راشي.
- (iv) فکر وکړئ چې که سکه $2n$ ځلې وغورځول شي او n ځلې خط راشي، د n په ډېریدلو، د P بدلون په څه ډول دي؟

د څپرکي مهم ټکي

فکتوریل: د هر طبيعي n عدد لپاره $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ د ضرب حاصل په لنډه ډول په $n!$ فکتوریل (نبودل کېږي، د تعريف له مخې $0! = 1$ سره دی.

پرموټيشن يا ترتيب: د n غړو ترتيب په P_n نبودل کېږي که چېرې:

- په ترتيب کې تکرار مجاز او ممکن نه وي: $P_n = n!$

خو که چېرې تکرار مجاز وي، د ترتيبونو شمېر مساوي په P_k^n سره ده او داسې معنا ورکوي چې k ځلې په n ځلې ترتيبونو کې تکرار وجود لري، چې د پورتي حالت په پام کې نيولو سره ټول حالتونه مساوي دی

$$P_k^n = \frac{n!}{k!}, \quad k \leq n$$

په:

له $\binom{n}{k}$ ، n ، k له پاسه: د $\binom{n}{k}$ ، n ، k له پاسه، د بينوم هغه ضريبونه دي چې k د بينوم د توان په ټاکلو سره، د ضريبونو لپاره داسې صورت نيسي:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad n, k \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq k \leq n$$

- له n شیانو څخه د r شیانو ترکیبونه په:

$$C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}, \quad r \leq n$$

ورژن يا نډېدلونه: په ترتيبونو کې چې پر له پسې ترتيب د k انتخابي غړو له Ω غړو څخه مطلب وي، په نامه دی، Ω په k بډیلونو یاد او لیکو:

$$V_k^n = k! \cdot C_k^n = k! \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$V_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

دینوم قضیه: د $(a+b)^n$ دو جملېني انکشاف عبارت دی له:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k}$$

دیوي تجربې په n ځلې تکرار کې، چې هر حالت یې p او $q = 1 - p$ احتمال لري.

د $k - a$ ځلې وړلو يعنې p له n ځلې څخه او نور پاتې حالتونه چې بډیول گڼل کېږي يعنې $q = 1 - p$ سره دي او صورت نيسي:

$$\left\langle \begin{array}{l} \text{د } k \text{ ځلې وړلو د احتمال قیمت د تجربې} \\ \text{د } n \text{ ځلې په پای کې} \end{array} \right\rangle = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}, \quad 0 \leq k \leq n$$

د خپړکي پوښتنې



1- د لاندې عددونو سټ په پام کې ونیسئ:

$$S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

(i): په څو ډوله کولای شو له پاسنیو عددونو څخه 3 رقمي عددونه جوړ کړو.

(ii): ټول 3 رقمي جفت عددونه به څو وي؟

2- په څو ډوله 6 تنه زده‌کوونکي په یوه کتار کې څنګ په څنګ درېدلې شي؟

3- په څو ډوله ابوبکر، زبیر، یاسر، هنترله او خبیب کولای شي، په یو کتار کې خوا په خوا د یو یادګاري

تصویر د اخیستلو لپاره ودرېږي؟

4- په څو ډولونو کولای شو چې 9 تنه په درې 3 گروپونو ووېشو؟

5- د پاسکال د مثلث له مخې د $(a + b)^7$ انکشاف په لاس راوړئ؟

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library