

$$\begin{array}{r|l} & A \cdot X_1 = b \\ - & A \cdot X_2 = b \\ \hline = & A \cdot (X_1 - X_2) = 0 \end{array}$$

له ن ج : بنستیز درس | کرنیز الجبر

2012

Ketabton.com

ژیاری: ډاکتر ماخان(میری) شینواری

کرنیز الجبر

$$\begin{array}{r|l} & A \cdot X_1 = b \\ - & A \cdot X_2 = b \\ \hline = & A \cdot (X_1 - X_2) = 0 \end{array}$$

dr.shinwari@hotmail.com

له ن ج : بنسټيز درس | کرنیز الجبر

ژباړی: ډاکټر ماخان(میری) شینواری

۱	نظر يا د پيداكيډو فكر
۲	هندسي لړۍ پرلپسې يا لړۍ
۳	د برنولي نا مساوات يا نابرابرون
۴	د يوه كرښيز مساوات سيستم جوړښت
۵	ماتريكسونه:
۷	تراسپوني ماتريكس
۷	سيومتريكي ماتريكسونه
۸	نا يو ډوله يا اينهوموجين
۹	يو ډوله يا هوموجين
۹	ليكه پوريز بڼه
۱۳	ديترمينانتونه
۱۳	رانگ
۱۳	د حلفضا د ديمنزيون (بعد، پراخيدونۍ) ټاكل
۱۴	د گاوس - تلنلار يا - - قانون
۱۶	د گاوس الكوريتموس ټيكاوې
۱۷	د حلونو يا اوبيونو نور قوانين
۱۹	ورته والي - يامشابهت اړيكي
۱۹	ډېرۍ يا سټ له ترنو يا عمليو سره
۲۰	لاندي برخه (كه ټوټه برخه يا كښته برخه):
۲۰	گروپ

۲۱	د ابل - يا کموتاتيو گروپ
۲۱	کری
۲۳	بدن يا تن
۲۳	پاتې تولگي يا باقي تولگي
۲۷	وکتور فضا
۲۷	کرښيز خپلواکوالی
۲۸	کرښيز بلواکوال
۲۸	د وکتور فضا تعريف
۲۹	د يوه وکتور فضا جوړونه يا که غواړی تولید
۳۴	سپاين يا کرښيزه Spann، (کرښيزه) رابنده ورشو
۳۴	جوړښتسيستم (توليدي سيستم)
۳۵	ښست
۳۵	د شتايښخ بدلونجمله
۴۰	بعد يا پراخېدونی
۴۲	لاندې وکتور فضا
۴۳	د لاندې فضاو لپاره د بعد يا پراخيدوني فرمول
۴۴	د فنکشنونو يا څيرونو(توابعو) خويونه
۴۴	په کې (فنکشن يا تابع)
۴۴	په (په باندې او په کې فنکشن يا -- تابع)

- ۴۵ کرښيز فنکشنونه يا توابع
- ۴۵ زړی(هسته) او عکس يا څېره
- ۴۶ ځانگړي کرښيز فنکشنونه
- ۵۰ د ارزښتوني فنکشنونه يا توابع يا څېروني
- ۵۱ ايزومورفيزمونه
- ۵۲ ماتريکسونه
- ۵۳ د يوه ماتريکس رانگ
- ۵۵ د متي(درز يا ستنې يا ولاړې ...
- ۵۵ په څټ- يا معکوس ماتريک
- ۵۶ ديترمينانتونه
- ۵۸ د لاپلاس د ودیزېني جمله
- ۵۹ د ديترمينانتونو ساده ټاکنه
- ۶۱ د ايندومورفيزم ديترمينانتونه
- ۶۲ اِيگن ارزښت
- ۶۲ اِيگنوکتور
- ۶۲ دوه -کونجټري کيدونکي يا دوه-کونجټري
- ۶۳ اِيگن فضاوې
- ۶۴ ماتريکس سړی څنگه دوه-کونجټري يا...
- ۶۵ سکالار ضرب(د نننۍ ځل يا -ضرب) او نورم
- ۶۷ د کوشي -شوارخ- نامساوات

سرلیک

۶۸	اورتوگونال وکتورونه
۶۸	اورتونورمال بنسټونه:
۶۸	خای بدلون
۶۸	ترانپوزیشن
۷۰	د ډاکټر ماخان شینواري لیکنې

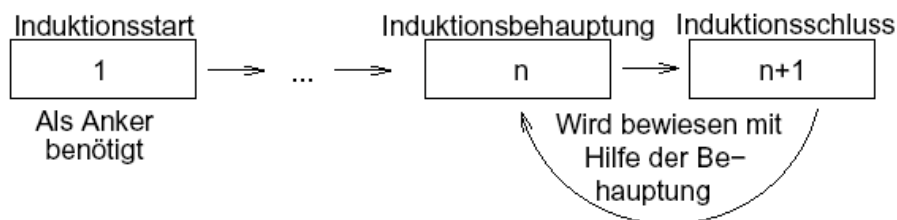
د ژباړې نیولیک

د دې سرلیک لاندې یوه بله لیکنه هم شته. دا مخ ته پرته لیکنه ساده او د پیل په څیر باید وکتل شي. دا لیکنه د بنسټیزو لیکنو ن ج څخه راژباړل شوې ده.

نظر یا د پیداکیدو فکر

پوره اندکشن د ښوونې یو متود یا لار ده، هغه چې په کرښیزه الجبر کې زیات کارول کیږي. د ښوونې لپاره نیول کیږي چې یو ټاکلی فرمول د اندکشن ثبوت د n لپاره صدق کوي. د اندکشن پای یا ختمېدلو — چې د اندکشن پل هم بلل کیږي — ښوول کیږي، چې دا

فرمول د $n+1$ لپاره صدق کوي، دایې چې بېرته د اندکشن ثبوت باندې لاس ولرو یا راوښو. د دې لپاره چې ښوونه پيڅي ټیک یا پوره ټیک وي، د یوه ښلون ټکي ته اړتیا شته، له کوم چې n پیل کیږي. دا ښلونتیک د اندکشن پیل ټکی هم بلل کیږي. یا د اندکشن پیل او په ښوونه کې په پیل کې راوړل کیږي.



د پورته دېښتو ژباړه له کین و ښي لور ته:

پورته: د ایندکشن پیل. لاندې: د په باندې اینولو (کلکولو) لپاره اړین.

لوریزئ کرښي: لرو .

بېرته څیره پورته: د ایندکشن غوښتنه یا ثبوت د ایندکشن پای. لاندې: د غوښتنې یا ثبوت په مرسته ښوول کیږي.

هندسي لړۍ پرلپسې يا لړۍ ()

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}$$

د بنوولو دی:

د اندکشن پیل: $n = 1$

$$\begin{aligned} q^0 &= 1 \\ &= \text{Okay} \\ \frac{1-q^1}{1-q} &= 1 \end{aligned}$$

د اندکشن وړاندنیونه (فرضیه): د n لپاره دې بنوول شوي وي:

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}$$

د اندکشن پیل: $n \rightsquigarrow n+1$

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

دا د بنوولو دی.

کين پیل کوو

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n q^k &= \sum_{k=0}^{n-1} q^k + q^n \\ &=_{\text{nach Vor.}} \frac{1-q^n}{1-q} + q^n \\ &= \frac{1-q^n}{1-q} + \frac{(1-q)q^n}{1-q} \end{aligned}$$

سرلیک

$$\begin{aligned}
&= \frac{1 - q^n + (1 - q)q^n}{1 - q^n + q^n - q^{n+1}} \\
&= \frac{1 - q}{1 - q^{n+1}} \\
&= \frac{1 - q}{1 - q}
\end{aligned}$$

د برنولي نا مساوات يا نابرابرون Bernoulische Ungleichung

$$(1 + x)^a \geq 1 + ax \quad \text{دې وېنول شو}$$

د اندکشن پیل : $a = 1$

$$1 + x \geq 1 + x \quad \text{تیک دی.}$$

د اندکشن پل:

$$a \rightsquigarrow a + 1$$

$$(1 + x)^{a+1} \geq 1 + (a + 1)x$$

دې وېنول شي

موږ بېرته له بنی لوري پیل کوو

لاندې کې : Die Voraussetzung = نیونه (فرضیه)

$$\begin{aligned}
(1 + x)^{a+1} &= (1 + x)^a \cdot (1 + x) \\
&\geq_{\text{Voraussetzung}} (1 + ax) \cdot (1 + x) \\
&= 1 + x + ax + ax^2 \\
&= 1 + (a + 1)x + ax^2 \\
&\geq 1 + (a + 1)x
\end{aligned}$$

د پوره اندکشن سره نور د وېنولو فرمولونه

$$(1 + x)^a \geq 1 + ax \quad \forall x \geq 0$$

د لومړیو n طبیعي اعدادو مجموعه:

$$\sum_{i=0}^n i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

د یوه کرښیز مساواتسیستم جوړښت

یو کرښیز مساواتسیستم د یو کرښیزو مساواتو تعداد څخه جوړ دی. دا مساوات نامعلومي خوندي لري، هم داسې په نامه واریابلي (اوښتوني یا متحولي). نامعلومي د ضریبونو سره ضربیږي. که د نامعلومي ضریب 0 - وي یعنې باور ولري: $0 \cdot x_k$ (دلته x_k نامعلومه ده) - نو دا ډول نامعلومه په مساواتو کې هم پرېښوول کېږي یعنې نه لیکل کېږي. دا لاندې د یوه کرښیز مساواتسیستم یوه بېلگه ده:

$$\begin{aligned} x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 &= 5 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 &= 0 \end{aligned}$$

او دا ټول a_{ij} عمومي ضریبونه دي او x_j واریابلي یا متحولي یا اوښتوني:

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot x_1 + \dots + \dots + a_{1n} \cdot x_n &= b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + \dots + \dots + a_{2n} \cdot x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + \dots + \dots + a_{mn} \cdot x_n &= b_m \end{aligned}$$

وکتور $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ کوم چې زیات وخت عمود لیکل کېږي د حل وکتور بلل کېږي. د یوه مساواتسیستم د ممکنه حلونو ډېری یا سټ د حلونو ډېری بلل کېږي:

$$\text{Lös}(A, b) := \{x \in \mathbb{K}^n | Ax = b\}$$

که د حلونو ډېری تشه وي، نو د مساواتسیستم ناحلور یا نه حل کېدونکی دی.

ماتریکسونه:

سری کړی شي په لږ ځای کې کرښیز مساوات د ماتریکس په ډول ولیکي. د مخه له دې چي دا کار کوو باید ماتریکسونه راوړو یا رامنځ ته کړو.

یو ماتریکس یو ولاړکودیز یا ولاړکونجیز جدول دی د m کیلو یا لیکو او n درځونو یا متو یا ولاړو لیکو سره.

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

د ماتریکس لیکندول $m \times n$ - ماتریکس

سری کړی شي د ماتریکسونو یوگوني کرښی رادباندي ولیکي. دا بیا د لیکو وکتورونه بلل کيږي. په ټیک دې ترتیب د ولاړو لیکو یا متو یا ستنو وکتورونه هم لاس ته راوړی شوو، که سری یوگوني متي رادباندي ولیکي.

سری کړی شي ماتریکسونه یو له بل سره جمعہ کړي.

$$\begin{aligned} A + B &:= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

او سره ضرب کړي: +

$$\begin{aligned}
 A \cdot B &:= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + \dots + a_{1n} \cdot b_{n1} & \dots & a_{11} \cdot b_{1m} + \dots + a_{1n} \cdot b_{nm} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} \cdot b_{11} + \dots + a_{mn} \cdot b_{n1} & \dots & a_{m1} \cdot b_{1m} + \dots + a_{mn} \cdot b_{nm} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

د ماتریکسونو په جمعه ساده پوهیدل کیدی شي. سری سره جمعه کوي، چې اړونده کمپوننتونه یو له بل سره جمعه کړي، داسې نتیجه لاس ته راځي. د ماتریکسونو ضرب ستونځمندی. په ضرب کې د لومړۍ ماتریکس لیکه د دویمې ماتریکس د متې سره ضرب کېږي او ورپسې سره جمعه کېږي. او نتیجه یې داسې لاس ته راځي، چې c_{ij} یعنې i -مه لیکه، j -مه متې کې ضرب د حل ماتریکس چې لاسته راشي، د لومړي ماتریکس د i -مې لیکې د j -مې متې یا ستون د توکو سره ضربوو او له ټولو ضربونو څخه جمعه جوړوو. دا یو ځل بیا لیکو:

$$\begin{aligned}
 &\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dots & b_{1j} & \dots & \dots \\ \dots & b_{2j} & \dots & \dots \\ \dots & \vdots & \dots & \dots \\ \dots & b_{nj} & \dots & \dots \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

هیله ده، چې په دا موضوع کې به لږه روښننیا منځ ته راغلي وي. داسې وایو چې سری دېنې دېترمینانت مټه په 90° درجو د ساعت څرخوني (عقربک؟؟) په لور څرخوي، چې د کینې ماتریکس په لیکه پریوځي، یو په بل پراته توکي بیا سره ضربیوي او په دې پسي یې بیا له دې ضربونو جمعه جوړوي.

سرليک

اوس د ماتريکس د ضريوني په بنديزونو هم پوهيږو. سړی کړی شي $n \times m$.
ماتريکس فقط د $n \times m$ -ماتريکس سره ضرب کړي. دا په دې معنا، چې د کين
ماتريکس ليکي ټيک دومره بايد اوږدې وي لکه د ښي ماتريکس مټي (درځونه، ستنې)،
پرته له دې ته په ليکه نه،، پرېوځي، يا سرخوري .

تراسپوني ماتريکس

د يوې ماتريکس ترانسپوني ماتريکس داسې لاس ته راوړو، چې ليکي او مټي سره بدلي
شي. له توکي a_{ij} څخه توکي a_{ji} لاس ته راځي.

$$a_{ij} = a_{ji}$$

بيلگه:

$$T \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \end{pmatrix}$$

د مربع ماتريکسونو لپاره دا په همدې معنا دی لکه په ،،دوه – کونجټري،، (قطر) باندې
هندارونه(انعکای).

سيومتريکي ماتريکسونه

يو ماتريکس ټيک هلته سيومتريک دی، چې باور ولري:

$$a_{ij} = a_{ji}$$

د کرښيز مساوات سيستم ځاي سپمايزه ليکنډول

د يوه ماتريکس په مرسته او کېدی شي کرښيز مساوات انرري – او ځای سپمايز
وليکو. موږ ته دا بام ودريري، چې دا نامعلومې تل په هر مساوات کې همغه دي . نو
لکه په ماتريکس ضربوني کې د ماتريکس ضربوني په مرسته دا د مساوات سيستم
څخه دباندې راباسو او په دې توگه د ضريونو(ځلوونو) ماتريکس A لاس ته راوړو:

$$A \cdot x = b$$

د لیکنې له مخې دا داسې برېښي:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

د ګاوس تفلار لپاره، چې لاندې لیکل شوي ده، دا بیا په لنډه توګه تکراروو او x^- وکتور هم لري بریږدو. له دې سره نوکان او مساوات هم لري پریږدو یا نه لیکو او دا ټول په یوه **Kasten** کاستن یا کارتون کې لیکو، چې دا لګه چې ګورو، په لاندې توګه لیکل کیږي.

$$\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}$$

نا یو ډوله یا اینهموجینبرابرون

یو کرښیز مساوات سیستم نایوډوله (اینهموجین) بللکیري، که که لږ تر لږه د یو b_i لپاره $(1 \leq i \leq n)$ باور ولری

$$b_i \neq 0$$

په ریښتیني توګه دا پهدې معنا دی: پهنی لور صفرماتریکس نه دی ولاړ یا ځای په ځای نه دی.

یو ډوله یا هوموجین Homogen

د دې برعکس یو مساوات سیستم برابر ډوله (هوموجین) بلل کیږی، که b صفروکتور وي، دا په دې معنا چې دټول b_i لپاره $(1 \leq i \leq n)$ باور لري

$$b_i = 0$$

دا دا معنا لري، چې په بني اړخ صفروكتور پروت دی

لیکه- پوریز بڼه Zeilenstufenform

موږ اوس طبعاً د کرښیز مساواتسیستم د اوبیوني یا حل سره مینه لرو. دا گاوس الگوریتم چې یوڅه کښته راځي، د اوبیونو یا حلونو د پیداکولو لپاره مرسته کوي. دا ماتریکس د ساده لیکه بدلون بني څخه په لیک-پورې-بني باندې اړوي. په لیکپوریز بڼه کې یو ماتریکس مخ ته لرو، که هغه خورا ټیټه لیکه دا اکثره کین پراته صفرونه ټولې لیکې خوندي ولري او د کین پرتو صفرونو تعداد (ګنون) پورته لور ته کم شي، د کوم سره چې کله کله یې له لیکې و لیکې ته یو حل برابر باتې کیږي. لاندې ماتریکس د لیکې-پوریز-بني ماتریکس بیلګه ده

$$\begin{pmatrix} 0 & \otimes & \oslash & \oslash & \oslash & \oslash & \oslash \\ 0 & 0 & \otimes & \oslash & \oslash & \oslash & \oslash \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \otimes & \oslash & \oslash \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \otimes & \oslash \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \otimes \neq 0 \\ \oslash \neq 0 \text{ oder } 0 \end{array}$$

پورته الماني: د ،،،،، په معنا

جمله:

موږ کړی شو هر ماتریکس په لیکه-پوریز-بڼه ماتریکس واړوو. داچې د گاوس تلنار د دې لپاره یو الگوریتم راکوي، چې دا متمین ده او دا جمله ښوول شوې.

د حلونو کریتیریوم

(نځې، چې د دوه یا زیاتو شیانو یا کسانو ترمنځ پرې پرېکړه کیږي)

د دې لپاره چې د کرښیز مساواتسیستم د حلونو تعداد وټاکلی شو، د حلونو کریتیرین یا نځې(توپیرنځې) شتون لري..

برابردوله یا هموجین مساواتسیستم کړی شي یا ساده حل ولري او یا ډېر حلونه ولري.
ساده حل:

ساده حل یې صفروکتور دی، دا په دې معنا، چې ټول مساوات ټیک هلته پوره کيږي، که ټولې واریابلې (متحولې یا اووښتونې) صفر کېښوول شي.

دا حالت هلته رامنځ ته کیږي، چې که برابردوله مساوات سیستم په داسې لیکه-بوریز-بڼه و اړولی شي، چې په هره لیکه کې له بورته تر کښته یو صفر ځا په ځای وي. او همدومره د ماتریکس متي ولرو لکه لیکي.
د یوه کرښیز مساوات سیستم بیلگه، چې یو د لیکه-پوړۍ-بڼې ماتریکس سره، چې ښایي، چې فقط ساده حل شتون لري.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

د دې مساواتسیستم د اخرنې لیکې څخه لاس ته راځي $x_3 = 0$. له دویمې لیکې لاس ته راځي $x_2 = 0$ او بالاخره $x_1 = 0$ ، له کومه امله چې موږ د حل په څېر فقط صفروکتور لاس ته راوړو.

د یو هموجین مساواتسیستم سره کړی شو و ازمایو، چې ایا وکتورونه یو بل ته کرښیز خپلواک ای کرښیز بلواک دي. موږ له دې سره وکتورونه په متاریکس کې د متي وکتورونو په څیر لیکو. که داسې لاس ته راوړی هموجین کرښیز مساوات سیستم فقط ساده حلونه لري، ن و وکتورونه یو بل ته کرښیز خپلواک دي.

زیات حلونه یا اوبیوني:

دا هموجین کرښیز مساوات سیستم زیات حلونه لري، که خپلواکه متحوله (اووښتونې) شتون ولري.. یوه خپلواکه اووښتونې هغه اووښتونې ده چې مساواتسیستم حل له لارې کره نه وي ټاکل شوي. موږ مری شو داسې اووښتونې په خپله خوښه وټاکو او همداسې په خوښه زیات حلونه د مساوات سیستم لپاره لاس ته راځي.

دا حلونه یو وکتورفضا غزوي.

سرلیک

دا څنگه پېژنو، چې ایا یو میواتسیستم خپواکي متخولي لري؟ خپلواکي متخولي ټیک هلته شتون لري، چې په سیستم کې لږ مساوات شتون ولري، نسبت اووښتونو ته.

بیلگه:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

داسې مساواتسیستمونه شته، چې په هغې کې داسې نه ده، چې د متخولو څخه دې مساوات لږ وي. په داسې مساواتسیستم کې پېژنو، چې په لیکه پوریزه کونه کې یوه صفرا لیکه شتون لري. پېهه موجدېنګرېنیز سیستم کې کېدې شي داسې لیکه له منځه یوسو) پام! داپه ناهموجین کې مکنه نه ده، ځکه چې دا حقیقت به مو لهنځه وری وي، چې کومحل شتون نه لري). که د دې لهنځه ورنې سره زیاتې متخولي پاتې شي نسبت مساواتو ته، ن و یو م ساواتسیستم بهولرو د **خپلواکو (ازاده) متخولو** سره . که د یوه هوموجین مساوات سیستم د حل سره، په کوم کې چې ماتریکس له مټو وکتورونو جوړ دی، چې کرېنیز خپلواکوالی یې یو بل ته ازمایل کېږي، لاس ته راشي، نو وکتورونه یو بل ته کرېنیز بلواک دي.

انهوموجین مساواتسیستمونه کېدې شي هېڅ حل، ټیک یو حل او یا ریات حلونه ولرو دای شي.

هېڅ حل یا نه حل: یو انهوموجین کرېنیز سیستم کوم حل نه لري، که د دیوه مساوات ضربیونه صفر وي، او اړونده b_i صفر نه وي...

یعنې

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = b_i \quad b_i \neq 0$$

داسې یو برابرېون یا مساوات بڼه اړولی بڼه بدل. **entartet** بلل کېږي. بڼه اړول شوي مساوات نه پوره کېږي او له دې سره تېرلمساوات سیستم نه پوره کېدونکی دی، له کومه کبله چې موږ حل هم نه لرو.

ټيک يو حل:

يو انهوموجين مساوات ټيک يو حل لري، که دا اړونده هوموجين مساوات سيستم — دا اړونده هوموجين مساوات سيستم جوړ شي، په کومکي چي ټول b_i د صفر سره برابر وليکل شي — فقط ساده حلونه ولري.

د دې لپاره چي حلونه وشميرلي شو، دا انهوموجين کرښيز سيستم د ليکي پوريزبڼه باندې اړوو، لکه پورته مو چي داسي وکړل، د کوم سره چي موږ b_i ($1 \leq i \leq n$) هم بايد په پام کي ونيسو.

يو ناهوموجين مساوات سيستم کيدی شي د دې لپاره وکارول شي، چي و ازمایي، چي ايا يو وکتور د نورو وکتورونو څخه د کرښيز کمبينېشن په څېر جوړی شي که نه. ټيک هلته يو حل شته، که b د متو يا ستنو وکتورونو د کرښيز کمبينېشن څخه جوړولی شي. که داسي يو حل شتون ونه لري، نو نه شي کېدی چي د متو وکتورونو څخه کمبيني يا ترکيب کړي. که يو يا حتا زيات حلونه شتون ولري، نو دا په لاندې توگه دي:

زيات حلونه يا اوبيوني:

لکه په کرښيز هوموجين مساوات سيستم کي ازادې متحولي په ناهوموجين مساوات سيستم کي هم راپيدا کيږي يا منځ ته اړخي. دا بېرته په هغه وختکي شتون لري، که سړی ذاتي متحولي ولري نسبت مساواتو ته. په ناهوموجين سيستمکي هم سړی کړی شي صفرليکي لري کړي، چېرته چي $b_i = 0$ هم وي. په هر حالت دا بڼه تغير شوي مساوات له منځه نهشي وړل کېدی.

ديترمینانتونه Determinante :

که د يوه مربع ماتريکس وکتورونه يو بل ته کرښيز بلواک وي، نو ديترمينات $\neq 0$ دی. په بل حالت کي $\neq 0$. له دې سره د $Ax = b$ لپاره باور لري:

د هوموجين مساواتسيستم لپاره ساده حل،	$\det A \neq 0$ $\Rightarrow$
د ناهوموجين مساوات سيستم لپاره حلونه.	$\det A = 0$ $\Rightarrow$
د ناهوموجين سيستم لپاره حلونه يو حل يا هېڅ حل	

رانگ Rang

$$\text{rang}(Ab) = \text{rang}(A)$$

حل شتون لري. د يوه ناهوموجين سيستم لپاره يو حل شتون لري. د يوه هوموجين سيستم لپاره ساده حل شتون لري.

د حلفضا د ديمنزيون (بعد، پراخيدونى) ټاكل

د يوه هوموجين مساواتسيستم د حلديريو د د بعد ټاكلو لپاره موږ كړى شو د ديمنزيون يا بعد فرمول څخه كار واخلو. دا چې هر ماتريكس A په يوه ټاكلي بنسټ f_A ايندومورفيزم انخوړوي د هوموجين كرنيز مساوات سيستم حلفضا لپاره

$$\text{Lsg}(A, 0) = \text{Kern}(f_A)$$

باور لري او داسې كړس شو د بعد د فرمول

$$\dim V = \dim(\text{Kern}(f)) + \dim(\text{Bild}(f)) \Leftrightarrow d$$

$$\dim(\text{Kern}(f)) = \dim V - \dim(\text{Bild}(f))$$

سره د حلفضا بعد وټاكو

بعد یا پراخیدونی

یا Δ دی : نو بیا ټیک ساده حل شتون لري، داسې په نامه صفروکتور.

یا $\Delta > 0$ دی : نو په دې حالت کې ازادې اووښتونې (متحولې) شتون لري، بعد لویوالی د متحولو تعداد دی، چې لرو یې:

پوښتنه:

مور عکس (خیره) څنگه ټاکو؟ مور دلته باید یوون - واهدوکتورنه په ماتریکونو وځغوو یا راوړو. مور بای د پسي د بیلد (څېرې) پراخېدونې وشمېرو، داسې چې په هغې کې بېرته یو کرښیز مساواتسیستم حل کړو. مور له دې سره یو د شمیرنې پانگه لرو دی شو. او که اشتباه کړم؟

د گاوس - تلنلار یا - - قانون Gauss-Verfahren

د گاوس-قانون د دې لپاره دی، چې یو ماتریکس په لیکه وکتورونو راوړي. د لیکه وکتورونو بدلیدنه او لیکه کمون یا تفریق د تر مخه سکالار ضرب په بنسټ د برخه اخستونکو لیکو تر هغې مخ ته بیایي، چې ماتریکس په لیکه پوریز ماتریکس بدل شي. د گاوس قانون تل د کترولو دی یا عملي کیدی شي. خو سه له دې هم کېدی شي، چې په قوي ډول ناتیګ وي. اوس الګوریتموس، پروګرامي،، کوو:

لاندې یا کښته برخه:

د گاوس قانون د یوه ماتریکس د لیکه پوریز بڼې باندې اړولو لپاره

- په پیل کې ازمايو، چې ایاماتریکس ماتریکس همرا اوس لیکه پوریز بڼه لري. په بېخي ځانګړې توګه $A = 0$ ، یعنې فقط له 0 -نو څخه جوړ ماتریکس لیکه پوریز بڼه لري.

- د دې عمل جراکولو له مخه - او نظري په دې مهال هم- کېدی شي او باید هم لیکې بدلې شي، که دا کار ګټور وي. دا په دې معنا، چې د لیکې د پيوت توکي (Pivotelemente) له پورته بېخي کین تل پسي بڼې لور ته لاړ شي. د پيوت توکي

سرلیک

هغه توکي بللکیري، کوم چې له ښې لوري کتل شوي په یوه لیکه کې لومړی یا په سر کې د 0 سره نابرابر وي.

- د i سره پیل شوې هرې لیکې لپاره د پورته لیکې د $i = 1$ سره تر د اخیږ لیکې پورې لاندې ډول مخ ته څو:

د هرې لیکې لپاره، چې وي - لیکه j تل له لیکې i کښته پرته ده - د i ډیرواره له لیکې j ته ور زیاتوي یا تر کموي (که غواړی، جمعه کوي یا ترې تفریقوي)، داسې چې a_{ji} - دلته i اووښتونې یا متحوله د مټې یا درځ ګڼه (نمره) په ګوته کوي - 0 شي.

د ګاوس الګوریتموس یوه لیدنه

په لاندې کې Aktuelles ورځنۍ یا اکتول

لومړی پل یا تلنلار $i=1$

Aktuelles $i \rightarrow$	X	X	X	X	Aktuelles $i \rightarrow$	X	X	X	X
Aktuelles $j \rightarrow$	0	X	X	X		0	X	X	X
	X	X	X	X	Aktuelles $j \rightarrow$	0	X	X	X
	X	X	X	X		X	X	X	X
	↑					↑			
Aktuelles $i \rightarrow$	X	X	X	X					
	0	X	X	X					
	0	X	X	X					
Aktuelles $j \rightarrow$	0	X	X	X					
	↑								

دویمه پل یا تلنه $i=2$

	X	X	X	X		X	X	X	X
Aktuelles $i \rightarrow$	0	X	X	X	Aktuelles $i \rightarrow$	0	X	X	X
Aktuelles $j \rightarrow$	0	0	X	X		0	0	X	X
	0	X	X	X	Aktuelles $j \rightarrow$	0	0	X	X
	↑					↑			

دریم پل یا تلنه $i=3$

	X	X	X	X
	0	X	X	X
Aktuelles $i \rightarrow$	0	0	X	X
Aktuelles $j \rightarrow$	0	0	0	X
			$\uparrow$	

له ماتریکی داسې په لاس راړی لیکه پوریز بڼه وکتور څخه کېدی شي حلونه (اوبیوني) وشمېرل شي.

دا داسې کوو چې دا مساواتسیستم بېرته په ماتریکس بڼه په یوگونو مساواتو بدل کړو او له لاندې څخه په پیل په اړونده متحولې پسې حل کړو.

کڅ دا مساواتسیستم زیات حلونه لروډی شي، نو له دې سره پېژنو، چې متحولې شتون لري، چې د هغو ارزښتونه ه شو ټاکلی. دا نو ازادې متحولې دي.

د گاوس الگوریتموس ټیکاو

د دې لپاره چې وښایو چې گاوس قانون یو کرښیز مساوات سیستم $\bar{A}$ د ټیک همغه یا برابر حلېږی (حلست) سره لکه مساواتسیستم A یې چې تولیدوي، باید وښایو، چې لاندې بڼه بدلونونه په حلونو کوم اغیز نه لري.

لومړی: د لیکو بدلونه

دویم: د لیکو صربونه د سره او بالاخره یې د بلې لیکې سره زیاتول یا کمول (جمعه او تفریق)

بنوونه یې:

لومړی: دا ساده دی. د یوه مساواتسیستم د لیکو بدلون په حلونو کوم اغیز نه لري، ځکه چې لري پرلپسې پروا نه لري..

سرلیک

دویم : موږ د مساواتسیستم دوه لیکي ترڅېړني لاندې نیسو، ځکه چې بڼه بدلون فقط د دې دوه لیکو په مرسته صورت نیسي. نور و دوه لیکو سره سراوکار نه لرو او د حلونو ډېری تغیر نه خوري:

$$\begin{aligned} (1) \quad & a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \\ (2) \quad & a_{j1}x_1 + \cdots + a_{jn}x_n = b_j \end{aligned}$$

لومړۍ لیکه د λ سره ضربوو، په مساوات کې تغیر نه راځي، ځکه چې سړی λ بیرته لنډولی شي یا کمولی شي یا که غواړي اختصار کولی شي:

$$\lambda \cdot a_{i1}x_1 + \cdots + \lambda \cdot a_{in}x_n = \lambda \cdot b_i$$

دا (1) اوس د دویمې (2) لیکي سره جمعه کوو، لکه چې ترې لرو

$$a_{j1}x_1 + \cdots + a_{jn}x_n + (\lambda \cdot a_{i1}x_1 + \cdots + \lambda \cdot a_{in}x_n) = b_j + (\lambda \cdot b_i)$$

پوهیږو چې دلته هم په حل کې کوم تغیر نه راځي، ځکه چې مساوات ورسره زیاتوو، چې په دواړو لورو ته راغلی او دواړو لورو ته همغه برخه ورکوي. دا بیرته سره لنډیدي شي او موږ بیرته وتونمساوات لرو.

د حلونو یا اوبیونو نور قوانین

د یوه کرښیز مساواتسیستم د حل لپاره د گاوس قانون ترڅنګ نور قوانین هم شته. په ښوونځي کې مو د بدلون قوانین وپیژندل. په دې کې یو مساوات د یوې متحولې یا اووښتونې سره حل کيږي او بیایي ارزښت د مساوات سیستم په بل مساوات کې کېښوول کيږي. په همدې ترتیب دې کار ته دوام ورکوو، چې بېداشو اووښتونې ارزښت د مساوات سیستم په هبل مساوات کز څا په ځای کيږي، تر څو چې د ټولو متحولو ارزښتونه پیداشي. که د اووښتون و ارزښتونه په پای کز څا په ځای شي او لاس ته راشي، $0 = 0$ ، نو مساوات سیستم ناپای ډېر حلونه یا اوبیوني لري. که د دې څا په ځای کوني وروسته،

کين اړخ $\neq$ ښی اړخ، نو کوم حل شتون نه لري. په ورته توګه دا مساوي ایشوني قانون هم کارول کيږي، د کوم سره چې دوه مساوات د یوهې اووښتونې په لور حل شي او بیا

برابر ولیکل شي.

په پای کې باید وکورو، چې د یوه کرښیز مساوات سیستم څنگه حلونه لاس ته راوړو، که ورته سیستم حل کړ شوی وي:

غواړو د یوه ناهوموجین کرښیز مساوات سیستم حلېږی I وټاکو. موږ د هوموجین کرښیز مساوات سیستم حلېږی یا حل سټ H پیژنو. د هوموجین کرښیز مساواتسیستم حلونو ډېری یا سټ H د اړونده تابع د زیري (هستي) Kern سره برابره ده. برسره پردې موږ د ناهوموجین سیستم ټوټه یا برخه حل یا د حل یوه برخه حل v_0 پیژنو.

موږ کړی شو د دې ناهوموجین سیستم حلېږی I پیداکړو، داسې چې

د ناهوموجین سیستم ټولو حلونه v_0 جمعه کوو:

$$I = v_0 + H = \{v_0 + h \mid h \in H\}$$

د هوموجین کرښیز مساواتسیستم حلونه $Ax = 0$ د کرښیزو توابعو زیری (که غواړئ: هسته) دی. موږ کړی شو، لکه د ماتریکس A سره چې انځور یږي، دا زیری و دې ټوټه — یا برخا حل ته ورزیات یا ور جمعه کړو. دا ځانله (تنها) د ناهوموجین مساوات سیستم سره نه کوو بلکه د هوموجین مساوات سیستم سره هم همداسې مخ ته ځو.

$$Lsg(A, 0) = v_0 + Kern(A)$$

د هوجین مساواتسیستم ته تل یو ساده حل 0 شتون ري، له دې سره لرو

$$Lsg(A, 0) = 0 + Kern(A) = Kern(A)$$

موږ د ناهوموجین مساواتسیستم دوه حلونه لرو. له دې دوه وو څخه یو حل د هوموجین مساوات سیستم لپاره جوړولی شو، داسې دواړه حلونه یو بل کم یا تفریق کړو:

سرلیک

$$\begin{array}{r|l} & A \cdot X_1 = b \\ - & A \cdot X_2 = b \\ \hline = & A \cdot (X_1 - X_2) = 0 \end{array}$$

ورته والي - يامشابهت اړيکي Äquivalenzrelationen

په A يوه اړيکه $\sim$ تیک هلته ورته بللکيږي، که د ټول $a, b, c \in A$ لپاره باور ولري

لومړی: $a \sim a$ يا $(a, a) \in \sim$ انهکاس يا هندارون اړيکي يا (Reflexiv)

دویم: که $a \sim b$ ، نو $b \sim a$ يا که $(a, b) \in \sim$ ، نو $(b, a) \in \sim$ سیومتريک اړيکي (Symmetrisch)

دریم: که $a \sim b$ او $b \sim c$ ، نو $a \sim c$ يا که $(a, b), (b, c) \in \sim$ ، نو $(a, c) \in \sim$ ترانسیتیو اړيکي (Transitiv)

ورته اړيکي يوه ډېری (ست) په، ورته ټولگيو، ویشي.

ډېری يا ست له ترنو يا عملیو سره

د بنوونځي او هم د شمېرپوهنې په ورځني ژوند کې له دې سره بلد یو، چې له کومو سره ترمونه ساده کېدی شي. دا زیات وخت ډېره مرسته کوي. د بېلگې په توگه د ډېستریبوتیو قانون په مرسته لاندې ترم خورا زر گڼلی شو، لکه به له دې قانون.

$$\left(\frac{1}{8} + \frac{13}{2}\right) \cdot \frac{8}{13} = \frac{1}{8} \cdot \frac{8}{13} + \frac{13}{2} \cdot \frac{8}{13} = \frac{1}{13} + 4 = 4\frac{1}{13}$$

د بینوم لومړۍ جملې هم د ډېستریبوتیو قانون ډېر واره استعمالول دي

$$(a+b)^2 = (a+b) \cdot (a+b) = (a+b) \cdot a + (a+b) \cdot b = a \cdot a + b \cdot a + a \cdot b + b \cdot b = a^2 + 2ab + b^2$$

په لاندې برخه کې اوس شمېرنې نور قوانین ، چې د اکسیومونه بلل کېږي و تعریفو. دا قوانین د ډېریو لپاره صدق کوي د اړونده ترنو سره. زیات وخت پوښتنې رامنځ ته کېږي، چې دا اکسیومونه له کومه راځي. اکسیومونه خویونه ل ږي، چې دا په ساده توګه تعریفیږي، بې له ثبوت. طبعاً دا په خوښه نه ټاکل کېږي. مګر په لومړي سر کې یا د پیل زده کوونکو لپاره په دې بسیا کوو، چې دا دې شتون ولري.

لاندې برخه (که ټوټه برخه یا کښته برخه):

Unterabschnitte

موږ او یو په بل پسې یوګوني تعریفونه ورکوو. له دې سره پورته و کښته لور ته تل زیات امسیمونه باور لري. د بیلګې په توګه تنونه یا اجسام له دوه کموتاتیو ګروپونو منځ ته راځي، یو ځل نسبت جمعي یا زیاتون + ته او یوځل نسبت و ضرب * یا * ته او دې سره اړونده دیستریبوتیو قانون څخه یو ځای یا په ګډه، یعنې بدن یا تن یا جسم له ګروپ څخه زیات دی.

ګروپ

یوه حوړه یا یو ګون $(G, +)$ ، چې G یوه ډېری ده او $+$ یوه ترنه یا عملیه ده،

$$+ : G \times G \rightarrow G$$

ګروپ بللکیري، که لاندې اکسیومونه پوره وی:

سرلیک

G1 : $(a + b) + c = a + (b + c) \forall a, b, c \in G$ اسوخیاتیو قانون.

G2 : $e \in G$ (ناپیلی توکی) شتون لري چې د $\forall a \in G$ لپاره لاندې خویونه پوره کوي:

$$e + a = a$$

لومړی:

دویم: د هر $a \in G$ لپاره یو $a' \in G$ شتون لري (په څټ یا برعکس توکی) د

$$a' + a = e$$

سره

د ابل - یا کموتاتیو گروپ **Abelsche / kommutative Gruppe**

یو گروپ د ابل گروپ بلل کیږي، که د د گروپ د اکسیومونو **G1** او **G2** برسېره دا $\forall a, b \in G \quad a + b = b + a$ هم باور ولري (کموتاتیو قانون) **(Kommutativgesetz)**.

کړی Ring

یو گون $(R, +, *)$ ، چېرته چې R یوه ډبرې او $+, *$ دوه تړونونه یا عمليې دي د لاندې سره

$$+ : R \times R \rightarrow R \quad * : R \times R \rightarrow R,$$

کړی یا رینګ بلل کیږي، که لاندې اکسیومونه پوره وي:

R1 : د + سره یو ځای کموتاتیو گروپ (اسوځاتیوؤ ناپیلی توکی، په څنټ یا برعکس توکی دی.

R2 : $(a * b) * c = a * (b * c) \forall a, b, c \in R$ (د * لپاره اسوځاتیو دی.

R3 : دپستربوتیو قانون باور لري:

$$\forall a, b, c \in R : (a + b) * c = a * c + b * c \quad (a)$$

$$\forall a, b, c \in R : a * (b + c) = a * b + a * c \quad (b)$$

کړی د یوې توکي (واحد توکي) سره Ring mit Einselement

$(R, +, *)$ یوه کړی ده، له دې امله باور لري:

$\exists 1 \in R$ (ناپیلی توکی یا یوې توکی د ترنې لپاره) د هغه لپاره چې باور لري:

$$1 * a = a$$

کموتاتیو کړی: Kommutativer Ring

$(R, +, *)$ یوه کړی ده، له دې امله باور لري:

$$\forall a, b \in R : a * b = b * a \quad (د * لپاره کموتاتیو قانون)$$

کموتاتیو کړی د یوې توکي (واحد عنصر) سره

کړی، په کومو کې چې کموتاتیو قانون باور لري او دا هم یو یویتوکی ولري، یعنې د دوه پورته اکسیومونو سره، کموتاتیو کړی د یویتوکی سره بللکیري.

Field Körper بدن یا تن یا پتی

یو ارزښت نظم یا توپل $(K, +, *)$ یو تن دی، که باور ولري

K1 : د کموناتیو کړۍ اکسیومونه د یوټوکي سره باور لري.

K2 : داسې چې $a * a^{-1} = 1$ باور لري (د ترنې $*$ لپاره په خټ یا برعکس توکۍ) $\forall a \in K \exists a^{-1}$

پولینوم کړۍ Polynomring

$\mathbb{K}$ دې یو تن وي. د $\mathbb{K}_n[t]$ ډېری د لاندې بڼې پولینومونو څخه جوړه ده

$$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n$$

د کومو سره $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ ، t یوه اووښتونې (متحوله) او n د پولینوم درجه

بللکیري. د پولینومونو دا ډېری یو کموناتیو کړۍ ده. د یوه پلینوم P خورا جگ

ضریب (څلوونۍ) - په پورتنۍ بېلگه کې یعنې n ، چې باید $a_n \neq 0$ وي - د پولینوم

درجه بللکیري. که دا 0 وي، یعنې د ټولو i لپاره $a_i = 0$ ، نو دا پولینوم صفر پولینوم بلل کیري. د صفرپلینوم درجه ناپای ده:

$$\deg P := \begin{cases} \infty & \text{falls } P = 0 \\ n & \max (i \text{ für das gilt } a_i \neq 0) \end{cases}$$

پاتي ټولگي يا باقي ټولگي Restklassen

اوس غواړم د بدن لپاره یوه بله بېلگه دروپېژنم یا معرفي کړم، د لومړنیو گڼونو پاتي ټولگي. د لومړنیو گڼونو پاتي ټولگي کېدۍ شي بدنونه شي، داسې چې په هغو کې

جمعه(زیاتون) او ضرب(ځل) تعریف شي. داسې تنونه $\mathbb{F}_p$ بللکیري یعنی د بېلگې په توگه $\mathbb{F}_7$ د پاتېتولگي 7 لپاره. په روځني ژوند کې د پاتې تولگي سره ډېر شمېرل کیري، د بېلگې په توگه د لیکنیزې جمعې سره [2.2](#) :

$$\begin{array}{r} 8 \\ + \quad 1 \quad 9 \\ \hline 1 \quad 7 \end{array}$$

مور 8 او 9 د 7 سره جمعه کړل چې چېرته مو هغه لاس ته راغلی زیات هېر کړی نه دی. مور اوس کړی شو چې هغه زیات یا لاس ته راغلی پرېږدو او ولیکو

$$8 \bmod 10 + 9 \bmod 10 \equiv 7 \bmod 10$$

چېرته چې ،، mod ،، مودولو modulo په معنا دی، یعنی د وېش پاتې یا باقی.

په ورته توگه نور پاتې تولگي هم تعریفولی شو. د دې په ځایچې په 10 یې ووېشو په 3 یې وېشو.

$$\begin{array}{r} 3 \\ + \quad 1 \quad 2 \\ \hline 1 \quad 2 \end{array}$$

د دې لپاره کړی شو، چې یو د جمعې او ضرب جدول جوړ کړو:

+	0	1	2	·	0	1	2
0	0	1	2	0	0	0	0
1	1	2	0	1	0	1	2
2	2	0	1	2	0	2	1

په همدې توگه دا کار بیا کړو، دا وار د پاتې تولگي 4 لپاره:

+	0	1	2	3	·	0	1	2	3
0	0	1	2	3	0	0	0	0	0
1	1	2	3	0	1	0	1	2	3
2	2	3	0	1	2	0	2	0	2
3	3	0	1	2	3	0	3	2	1

اوس کړی شو د بدن اکسیومونه په یوگوني ډول په هغو پاتي ټولگيو پورې اړونده بدن باندې د جدول ارزښتونو په مرسته و ازمایو. کموتاتیو قانون باور لري، که جدول په دوه -کونجترې (قطر) باندې هندارون یا انعکاس سیومتریک وي. په خټ یا معکوس توکی شتون لري، که د جدول په هره لیکه او هره مټه کې د بدن هر توکی یوځل منځ ته راشي یا شتون ولري. صفرتوکی شتون لري، که په هره لیکه او هره مټه کې منځ ته راشي یا شتون ولري. اسوخیاتیو او دبسترپیوتیو قوانین له جدول څخه په ساده توگه نه شي لوستل کېدی.

وروسته له دې چې دا نښلونټکي (د نښلونو ټکي) لرو، پېژنو، چې بدن $\mathbb{F}_4$ شتون نه لري. دا د ضرب د معکوس توکی قانون په خلاف دی. داسې x نه شته چې $2 \cdot x = 1$ باوري کړي

یعنې د 4 پاتي ټولگي څخه بدن نه شي جوړېدلای. برعکس یو بدن $\mathbb{F}_3$ له پاتي ټولگي 3 څخه ممکن دی، ځکه چې هېڅ اکسیوم نه زیانمن یا زخمی کيږي: گورو چې سیمتریک، برعکس او ناپېلی توکي شتون لري. همداسې د نږدې پسي ازمایلو څخه گورو چې اسوخیاتیو او دبسترپیوتیو قوانین هم باوري دي.

که نور هم ځیرنه ژوره کړو، نو په دې کې یو سیستم گورو، چې کله یو پاتي ټولگی p یو بدن $\mathbb{F}_p$ کيږي. دا حالت ټیک هلته رامنځ ته کيږي، چې p یو لومړنی گڼ (عدد) وي. دا ثبوت دلته نه راوړو.

مگر غواړو چې په پای تعریف کړو، چې یو کرکتریسټیک (خوی ټاکونی) څه شی دی او ولې د یوه په خوبه بدن $\mathbb{K}$ کرکتریسټیک تل یو لومړنی گڼ او یا 0 دی:

پېژند(تعریف):

$\mathbb{K}$ دې یو بدن وي او 1 د ضرب یو ناپېلی توکی (یوونټوکی، عنصر واحد) وي. د یوه زیاتیز یا مثبت عدد n لپاره د $n \cdot 1$ لاندې پوهیږو

$$n \cdot 1 = \underbrace{1 + \dots + 1}_{n \text{ mal}}$$

د بدن $\mathbb{K}$ کرکتریسټیک په لاندې توګه تعریف دی

که $n > 0$ شتون ونه لري، چې $n \cdot 1 = 0$ باور ولري که n شتون ونه لري، چې باور ولر $n \cdot 1 = 0$	$\text{char} \mathbb{K} = \begin{cases} 0 \\ n \end{cases}$
---	---

ښوونه: n تل یو لومړنی ګڼ دی:

وي دې $n \neq 0$ (د تعریف دویم حالت). که n لومړنی عدد نه وي، نو دا په لاندې ضقیبونو ټوټه کیږي [2.3](#).

$$\begin{aligned} n \cdot 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (n_1 \cdot n_2) \cdot 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow n_1 \cdot 1 \cdot n_2 \cdot 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow n_1 \cdot 1 = 0 \wedge n_2 \cdot 1 &= 0 \end{aligned}$$

دا تضاد دی. ځکه چې $n_1 < n$ او $n_2 < n$ باید کرکتریسټیک $\mathbb{K} = n_1$ او یا $\mathbb{K} = n_2$ $\text{char} \mathbb{K} = n$ وي. دی $\mathbb{K} = n$ او له دې سره n په ضریبونو نه شي ټوټه (تجزیه) کېدی، نو له دې امله یو لومړنی عدد دی.

موږ د ښوونځي څخه غوره بدنونه پېژنو، لکه د هوبینار اعدادو (کسري-) $\mathbb{Q}$ ، د ریل یا حقیقي اعداد $\mathbb{R}$ بدنونه او ورپسې د کمپلکس اعدادو $\mathbb{C}$ بدنونه هم. دا ټول بدنونه کرکتریسټیک 0 لري. نور د اعدادو غوره ډېری هم شته لکه د ټول ګڼونو (- اعدادو) ډېری. دا فقط یو کموتاتیو ګروپ جوړوي، ځکه چې په نسبت و ضرب ته معکوس توکی نه لری. دا له دې امله داسې ده، چې موږ په دې عددونو کې ماتونه (کسرونه) نه لرو. د ټولو طبیعي اعدادو $\mathbb{N}$ ډېری چې ورسره تړلی دی او یا نه،

سرلیک

متأسفانه چې حتا یو گروپ هم نه دی، ځکه چې د جمعې معکوس توکي نه لرو، د بېلگې په توګه د $3 + x = 1$ لپاره x شتون نه لری، ځکه چې $x = -2$ شتون نه لري.

وکتور فضا der Vektorraum

لاندې برخه

کرنیز بلواکوالی (خطي تابعیت)

یادونه (ژباړی): ګ، رو چې دلته مو تابع کلیمه، چې د فنکشن لپاره کارول کیږي، ناتیګاوي ته لارښودوي. دلته د بلواکوالی یا تابعیت څخه موخه فنکشن نه دی. پای.

یو د وکتورونو $(v_1, \dots, v_n)$ کورنی کېدی شي کرنیز بلواکه یا کرنیز خپلواکه وي، نه دواړه یو ځای کېدی شي او هم نه له دوه څخه یوه هم نه. یوه کورنی هغه ډېری ده، چې یو توکی په کې دوه ځله هم راتلی شي. پس موږ په خوښه وکتورونه لرو- په کوم کې چې همغه وکتور حتی دوه ځله راتلی شي- کوم چې موږ داپه خپلو اړیکو کې یو له بل سره څېړو.

کرنیز خپلواکوالی

V دې یو $\mathbb{K}$ -وکتور فضا وي. یوه د وکتورونو $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ پای کورنی له V څخه کرنیز خپلواک بلل کیږی، که له $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$$

څخه لاس ته راشي، چې $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ دي.

دا په دې معنا، چې صفر وکتور د نورو وکتورونو $v_1, v_2, \dots, v_n$ څخه ساده ترکیب کیدی شي

کرنیز بلواکوال:

V دې بیا هم یو $\mathbb{K}$ -وکتور فضا وی. یوه د وکتورونو $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ پای کورنۍ له V څخه کرنیز بلواک بلل کیږي، که له $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$$

لاس ته راشي، چې هم ساده حل $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ شته، او هم یو حل له کوم سره چې لږ تر لږه یو $(1 \leq i \leq n) \lambda_i \neq 0$ دی.

دا په دې معنا دی، چې موږ صفرو وکتورونه د ساده حلونو یا اوبیونو څخه په بل ډول هم د وکتورونو د کورنۍ څخه جوړولی شو

د وکتور فضا تعریف:

اوس د وکتور فضا تعریف ته راځو:

$\mathbb{K}$ دې یو بدنوي. یو درېگون $(V, +, *)$ چې V یوه n -گون

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

او⁺ او* ترني يا عمليي وي

$$+ : V \times V \rightarrow V$$

$$* : \mathbb{K} * V \rightarrow V$$

$\mathbb{K}$ -وكتور فضا بلل کيږي، که لاندې اکسيونونه باور ولري:

$$(V, +)$$

يو کموناتيو گروپ دی.

$$\lambda * (\mu * v) = (\lambda * \mu) * v \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, v \in V \quad \text{S1} : \text{باور لري} \quad (\text{آسوخياټيو قانون})$$

$$1 \in \mathbb{K} : \forall v \in V : 1 * v = v \quad \text{S2} : \text{(ناپيلي توکي)}$$

$$(\lambda + \mu) * v = \lambda * v + \mu * v \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, v \in V \quad \text{D1} : \text{باور لري} \quad (\text{ديستريبيوټيو قانون})$$

$$\lambda * (v + w) = \lambda * v + \mu * w \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, v, w \in V \quad \text{D2} : \text{باور لري} \quad (\text{دېټريبيوټيو قانون})$$

د يوه وكتور فضا جوړونه يا که غواړی توليد Erzeugen eines Vektorraums

اوس غواړو n -گونی [3.1](#) $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ، چې دوكتور فضا د توليد لپاره اړتی ورته لرو توليد کړو. دا کړی شو که موږ دا ټول وليکو . دا د ډېرو کمو وكتورونو لپاره هم موخه وړ دی. مگر د زياتو وكتور فضاو لپاره دا نا ممکن دی، ځکه چې موږ ناپای ډېر گونونه لرو. موږ بايد دا د يوه شمېر قانون سره توليد کړو.

کربنیز ترکیبوالی

وي دي $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ په $\mathbb{K}$ -وکتور فضا کې یوه د وکتورونو کورنۍ. هر
د $(\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K})$ بنې

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$$

وکتور v د $v_1, v_2, \dots, v_n$ کربنیز ترکیب بلل کیږي.
اوس، د کلمو، کربنیز خپل(بل)واک، او د، کربنیز ترکیب، ترمنځ یو څو ښوونې یا
ثبوتونه راپل کیږي. د دې ښوونو لاس ته راوړنې به شاید د ډېرو زده کړو په غوښه
او وینو ته تللي وي. تاسو پوهیږئ چې دا داسې دی. خو بیا هم موږ باید دا یو ځل
وښایو:

جمله ؛

که د کورنۍ $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ وکتورونه یو بل ته کربنیز خپلواک وي، نو کېدی شي
هر وکتور $v \in L(v_1, v_2, \dots, v_n)$ د دوی له لارې په یوه ټاکلې لار ترکیب شي. له

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n \quad v = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_n v_n$$

څخه لاس ته راځي

$$\lambda_1 = \mu_1; \lambda_2 = \mu_2; \lambda_n = \mu_n$$

ښوونه:

$$\begin{aligned} v &= v \\ \Leftrightarrow \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n &= \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_n v_n \\ \Leftrightarrow (\lambda_1 - \mu_1) v_1 + (\lambda_2 - \mu_2) v_2 + \dots + (\lambda_n - \mu_n) v_n &= 0 \end{aligned}$$

د کربنیز خپلواکوالي له امله باور لري:

سرلیک

$$\lambda_1 - \mu_1 = 0; \lambda_2 - \mu_2 = 0; \dots \lambda_n - \mu_n = 0 \\ \Rightarrow \lambda_1 = \mu_1; \lambda_2 = \mu_2; \dots \lambda_n = \mu_n$$

له دې سره کېدی شي وکتور ټیک په یوه ډول ترکیب شي.

برعکس یا په خټ کېدی شي وښوول شي:

جمله :

که چیرې یو وکتور v ټیک په یوه ډول له وکتور کورنیو $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ څخه د کرښیز ترکیب کېدی شي، نو نو د دې کورنی وکتورونه یو بل ته کرښیز خپلواک دي.

ټیک په یوه ډول ترکیب په دې معنا دی، چې که

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \\ \text{und } v = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n$$

$$\lambda_i - \mu_i = 0 \quad \text{باور ولري،} \quad \lambda_i = \mu_i \quad \text{باور لري او له دې سره}$$

$$v = v \\ \Leftrightarrow \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n \\ \Leftrightarrow (\lambda_1 - \mu_1) v_1 + \dots + (\lambda_n - \mu_n) v_n = 0$$

داچې $1 \leq i \leq n$ د $\lambda_i - \mu_i = 0$ لپاره د کورنی وکتورونه کرښیز خپلواک دي.

جمله:

که د یوې کورنۍ $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ وکتورونه کرښیز بلواک وي، نو له یوه څخه زیات امکانات شته چې وکتور v ترکیب کړو. کرښیز بلواک په دې معنا دی، چې لږ تر لږه یوه v_i ($1 \leq i \leq n$) لپاره باور ولري:

$$v_i = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \dots + \lambda_n v_n.$$

ښوونه:

که موږ وکتور v ولرو، کړی شو دا په لاندې ډول ترکیب کړو:

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n.$$

له دې څخه لاس ته راځي $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. اوس کړی شو دا پورته یادشوی کرښیز

ترکیب د v_i لپاره ځای په ځای کړو او لاس ته راوړو

$$\begin{aligned} v &= \lambda_1 v_1 + \dots + \\ &\quad \lambda_i \cdot (\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \dots + \lambda_n v_n) \\ &\quad + \dots + \lambda_n v_n \\ \Leftrightarrow v &= (1 + \lambda_i) \lambda_1 v_1 + \dots + (1 + \lambda_i) \lambda_n v_n \end{aligned}$$

نو $(1 + \lambda_i) \lambda_1, \dots, (1 + \lambda_i) \lambda_n$ یو نوی امکان دی چې v ترکیب کړو او د دې سره همدا اوس دوه امکانات لرو

موږ کړی شو چې لاندی دوه واقعیتونه هم ثبوت کړو:

جمله:

که یو وکتور v_i د کورنی $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ کرښیز د کورنی $(v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n)$ څخه نه شي ترکیبېدی، نو د کورنی $(v_1, \dots, v_n)$ وکتورونه یو بل ته کرښیز خپلواک دي.

ښوونه:

نیسو چې دا کرښیز بلواک دي. داپه دې معنا، چې د

سرليک

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0$$

لپاره لږ تر لږه د يوه λ_i لپاره $(1 \leq i \leq n)$ باور لري

$$\lambda_i \neq 0$$

دا په دې معنا چې

$$\begin{aligned} \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \dots + \lambda_n v_n &= -\lambda_i v_i \\ \Leftrightarrow \frac{\lambda_1}{-\lambda_i} v_1 + \dots + \frac{\lambda_{i-1}}{-\lambda_i} v_{i-1} + \frac{\lambda_{i+1}}{-\lambda_i} v_{i+1} + \dots + \frac{\lambda_n}{-\lambda_i} v_n &= v_i \end{aligned}$$

نو کېدی شي، چې v_i له $(v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n)$ کرښيزه ترکیب کړای شي. دا نيوې ته تضاد دی. نو باید وکتورونه کرښيز خپلواک وي.

په همدې توگه برعکس ی په څټ هم باور لري:

جمله:

که د کورنۍ $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ وکتورونه یو بل ته کرښيز خپلواک وي، نو کوم یو وکتور د بل څخه کرښيز ترکیب کېدی نه شي.

ښوونه:

نیسو، چې دا شونۍ دی، یو وکتور v_i $(1 \leq i \leq n)$ کېدی شي کرښيز ترکیب کړای شي. نو باور لري:

$$v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \dots + \lambda_n v_n$$

گورو، چې $\lambda_i \neq 0$ دی، څکه چې $\lambda_i = -1$. او د کورنۍ وکتورونه به کرښیز بلواک وی. تضاد. نو دا ممکن نه ده، چې له دې وکتورونو څخه کوم یو له بل څخه کرښیز ترکیب کړي، څکه چې بیا به کرښیز خپلواکوالی زخمی شوی یا زیانمن شوی وي.

سپاین یا کرښیزه **Spann**، (کرښیزه) رابنده ورشو **Abschluss، lineare Hülle**

په یوه $\mathbb{K}$ - وکتور فضا کې د یوې کورنۍ $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ د ټولو کرښیز ترکیبونو ډېری سپاین یا کرښیزه رابنده ورشو بلل کېږي

$$\text{span}(v_1, \dots, v_n)$$

یا د وکتورونو د کورنۍ کرښیزه (که غواړئ) سمڅه (**Hülle**)

روښانه دي وي: د یوه سپاین وکتورونه ناجبري کرښیز خپلواک نه دي.

جوړښت سیستم (تولیدی سیستم) Erzeugendensystem

د وکتور کورنۍ $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ د وکتور فضا V تولیدی سیستم بلل کېږي، که باور ولري

$$V = \text{span}(v_1, v_2, \dots, v_n)$$

دایه دي معنا چې وکتورونه د وکتور فضا V مکمله یا پوره غزوي.

دلته کېدی شي، چې د وکتورونو کورنۍ کرښیز بلواک یا کرښیز خپلواک وي. دا یواځې باید وکتور فضا و غزوي.

بنسټ Basis

د وکتورونو $(v_1, \dots, v_n)$ کورنۍ د وکتور V بنسټ بلل کېږي، که د کورنۍ یوگوني وکتورونه

- یو بل ته کرښیز خپلواک دي

- او که د وکتورونو کورنۍ ټول وکتور V وغزوي، یعنې د V یو تولیدي (جوړختیز) سیستم دی:

$$V = \text{span}(v_1, \dots, v_n)$$

او

$$\text{und } \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0 \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$$

له دې سره یو تولیدي سیستم ټیک هلته یو بنسټ دی، چې د دې تولیدي سیستم وکتورونه یو بل ته کرښیز خپلواک دي.

د شتاینیچ بدلونجمله Austauschatz von Steinnitz

جمله:

په یوه د $\mathbb{K}$ - وکتورونو کورنۍ (که فضا) V کې دې یو بنسټ

$$B := \{v_1, \dots, v_r\}$$

او یوه کرښیز خپلواکه کورنۍ

$$(w_1, \dots, w_n)$$

ورکړ شوي وي.

دی $r \geq n$. سری کړی شي د بنسټ n وکتورونه د n کرښیز خپلواکو وکتورونو کورنیو سره بدل کړای شي، داسې چې نوی بنسټ B^* بېرته کرښیز خپلواک دی او د وکتور فضا V_K بنسټ دی. د ایدنکس د گڼې بدلون وروسته کېدی شي داسې ولیکو:

$$B^* := \{w_1, \dots, w_n, v_{n+1}, \dots, v_r\}$$

$$B^* := \{w_1, \dots, w_n, v_{n+1}, \dots, v_r\}$$

یا په ځانګړي حالت $n = r$:

$$B^* := \{w_1, \dots, w_n\}$$

ښوونه:

ښوونه د بدلون لیما سره صورت نیسي. دا د بدلون لېما (وړه جمله) د د بنټ څخه یو وکتور اخلي او یو بل ورزیاتوي:

Austauschlemma گڼه جمله

یو K -وکتور فضا V دې د بنسټ

$$B := \{v_1, \dots, v_r\}$$

سره ورکړ شوي وي او یوه w د

$$w = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{k-1} v_{k-1} + \underline{\lambda_k v_k} + \lambda_{k+1} v_{k+1} + \dots + \lambda_r v_r \in V$$

د $(*) \lambda_k \neq 0$ سره او

$$\lambda_k \neq 0.$$

$$B' := \{v_1, \dots, v_{k-1}, w, v_{k+1}, \dots, v_r\}$$

بېرته یو د V بنسټ دی .

یعنې سړی کړی شي v_k د w وکتور سره بدل کړي. (دا نور $\lambda_1 \dots \lambda_r$ بې له λ_k باید حتماً 0 نه وي، مگر دوی کړی شي).

د بدلون جملې بنسټونه **Beweis des Austauschlemmas** :

د لیکنې د ساده کونې لپاره نیسو، چې $k = 1$ دی. موږ ښایو چې

$$B' := \{w, v_2, \dots, v_r\}$$

هم د V_K بنسټ دی.

- د بنسټ 3.2 ټول وکتورونه $v \in V$ د کرښیز ترکیب په څېر لیکل کېدی شي یعنې

$$v = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_r v_r \quad (**)$$

دا چې $\lambda_1 \neq 0$ دي، کړی شو په لاندې ډول یې ښهېدل کړو

$$\begin{aligned} w &= \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r & (v \text{ on } *) \\ \Leftrightarrow \lambda_1 v_1 &= w - \lambda_2 v_2 - \dots - \lambda_r v_r \\ \Leftrightarrow v_1 &= \frac{w}{\lambda_1} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2 - \dots - \frac{\lambda_r}{\lambda_1} v_r \end{aligned}$$

- اوس کړی شو دا په $**$ کې ځای په ځای کړو

$$\begin{aligned}
 v &= \mu_1 \left(\frac{w}{\lambda_1} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2 - \dots - \frac{\lambda_r}{\lambda_1} v_r \right) + \dots + \mu_r v_r \\
 &= \mu_1 \frac{w}{\lambda_1} - \mu_1 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2 - \dots - \mu_1 \frac{\lambda_r}{\lambda_1} v_r + \dots + \mu_r v_r \\
 &= \frac{\mu_1}{\lambda_1} w + \left(\mu_2 - \mu_1 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) v_2 + \left(\mu_3 - \mu_1 \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \right) v_3 + \dots + \left(\mu_r - \mu_1 \frac{\lambda_r}{\lambda_1} \right) v_r
 \end{aligned}$$

له دې لاس ته راځي، چې نوی بنسټ لږ تر لږه یو تولیدي سیستم دی.

- اوس پاتې دادی چې کرښیز خپلواکوالی و ښایو

$$\mu w + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_r v_r = 0$$

د * ځای په ځای کونه:

$$\begin{aligned}
 &\mu(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_r v_r) + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_r v_r = 0 \\
 \Leftrightarrow &\mu \lambda_1 v_1 + (\mu \lambda_2 + \mu_2) v_2 + (\mu \lambda_3 + \mu_3) v_3 + \dots + (\mu \lambda_r + \mu_r) v_r = 0
 \end{aligned}$$

نو $\mu \lambda_1 = \mu \lambda_2 + \mu_2 = \mu \lambda_3 + \mu_3 = \dots = \mu \lambda_r + \mu_r = 0$ ، ځکه چې B کرښیز خپلواکه وه $(\mu_2 = \mu_3 = \dots = \mu_r = 0)$ او $\mu = 0$ ، ځکه چې $\lambda_1 \neq 0$.

له دې څخه کرښیز خپلواکوالی لاس ته راځي

د بدلون جملې ښوونه:

له دې وروسته چې ومو ښوول، چې سړی یو وکتور v_k له بنسټ څخه را اخستی شي او د وکتور w سره یې بدلولی شي، که دا اړونده $\lambda_k \neq 0$ وي(کړی شي، چې د نمرې یا گڼې بدلون سره له ټیټ ځای ته راوړل شي)، باید وښایو، چې د زاړه بنسټ لپاره تل داسې یوه شتون لري، داسې چې موږ وکتورونه پرلپسې سره بدلولی شو:

سرلیک

- که صفر وکتورونه سره بدل کړو، نو ښوونې ته نه اړکيږو. موږ اړین نه یو چې کوم وکتور پیدا کړو، چې له هغو سره بنسټ وکتور بدل کړو. دا زموږ د ایندکشن پیل دی.

- زموږ د ایندکشن نیونه ده، چې k وکتورونه مو سره بدل کړي دي او بېرته مو یو بنسټ لاس ته راوړی دی:

$$B' = \{w_1, \dots, w_k, v_{k+1}, \dots, v_r\}$$

- د ایندکشن پای :

که موږ وکتور w_{k+1} بدل کړو، نو باید یو λ_i د $k+1 \leq i \leq r$ سره پیداکړو، د کوم لپاره چې $\lambda_i \neq 0$ باور لري. باور لري :

$$w_{k+1} = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_k w_k + \underbrace{\lambda_{k+1} v_{k+1} + \dots + \lambda_r v_r}_{\text{mindestens ein } \lambda_i \neq 0}$$

دا پورته لږ تر لږه یوه $\lambda_i \neq 0$.

دا چې کرښیز خپلواکه کورنۍ $(w_1, \dots, w_k, w_{k+1}, \dots)$ کرښیز خپلواکه وه، اجازه نه شته چې $\lambda_1 = \dots = \lambda_k \neq 0$ وي، ځکه چې پرته له دې کرښیز خپلواکوالی زحمتی شوی وي.

دا چې w_{k+1} هم صفر وکتور نه دی، ځکه چې بیا به کرښیز خپلواکوالی زحمتی شوی وي، نو یو λ_i ($k+1 \leq i \leq r$) شتون لري د $\lambda_i = 0$ سره.

د ښوونې څخه لاس ته راوړنه

- که یو K - وکتور فضا V یو پای بنسټ ولري، نو د V هر بنسټ پای دی.
- د یوې وکتور فضا هر دوه بنسټونه برابر اوږدوالی لري.
- بنسټ پوره کېدنه:

په یوه پای ټولېدکېدونکي وکتور فضا V کې دې کرښیز خپلواک وکتورونه $w_1, w_2, \dots, w_n$ ورکړل شوي وي. نو کېدی شي سړی پیدا کړي، داسې چې

$$B := \{w_1, w_2, \dots, w_n, w_{n+1}, \dots, w_r\}$$

د V یو بنسټ وي.

- دې د کرښیز خپلواک وکتورونو ډېری وي، چې یوه وکتور فضا $v_i, \dots, v_n$ غزوي، نو د $v_i, \dots, v_{n+1}$ ډېری په هر حالت کرښیز بلواک ده.

دا په دې معنا چې بل وکتور نه شي پیدا کېدی چې و $v_i, \dots, v_n$ ته کرښیز خپلواک وي.

- د بنسټ بدلید جمله:

دې کرښیز خپلواک وکتورونه وي، چې یوه وکتور فضا غزوي (دا په دې $v_i, \dots, v_n$ معنا چې دا یو بنسټ دی)، نو $w_i, \dots, w_n$ کرښیز خپلواک وکتورونه، چې د وکتورونو $v_i, \dots, v_n$ د کرښیز ترکیب څخه جوړیدی شي، برابره وکتور فضا غزوي.

بعد یا پراخېدونی (Dimension)

که V یوه K - وکتور فضا وي، نو تعریفوو

سرلیک

که V پای بنسټ ونه ري، که V د r اوږدوالي بنسټ ولري	$\dim_k V = \begin{cases} \infty \\ r \end{cases}$
--	--

د پراخېدونې يا بعد جمله:

وي دي $f : V \rightarrow W$ د V, W دلته $\mathbb{K}$ -وکتورفضاوي دي) يو کرښيز بلواک. نو د بعد پراخېدونې جمله باور لري:

$$\dim V = \dim \text{Bild}(f) + \dim \text{Ker}(f)$$

Bild څیره او $\text{Ker}(\text{Kern})$ زړی يا هسته

ښوونه :

يادونه:

$\dim V$: د V د بنسټ وکتورونو گڼون يا تعداد.

$\dim \text{Bild}(f)$: د وکتورونو گڼون يا تعداد د V د لاندې وکتورفضا $\text{Bild}(f)$ کې.

$\dim \text{Ker}(f)$: د f په زړي (هسته) کې د وکتورونو گڼون يا تعداد. دا بېرته د V لاندې وکتورفضا ده.

لومړی: دا چې زړی $\text{Ker}(f)$ د V لاندې وکتورفضا ده، په هر حالت لرو

$$\dim V \geq \dim \text{Ker}(f).$$

د $v_1, v_2, \dots, v_n$ د زړي د بنسټونو وکتورونه يو بل ته کرښيز خپلواک دي.

د بنسټکیلو جملې په بنسټ کېدی شي دې بنسټ ته کرښيز خپلواک وکتورونه V ته ورزیات کړي او دا بنسټ په دې توګه د V یوه بنسټ ته پوره يا تکمیل کړي:

$$B_V := \{v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1}, \dots, v_k\}.$$

لومړۍ: موږ اوس پریږدو چې تابع f د وکتور فضا V په بنسټ وځغلي. نو لاس ته راوړو:

$$Bild(f) = \underbrace{\sum_{i=1}^n \lambda_i f(v_i)}_{=0} + \sum_{i=n+1}^k \lambda_i f(v_i) = \sum_{i=n+1}^k \lambda_i f(v_i)$$

د زړې بنسټو وکتورونه په 0 تنظیمیږي یا **خبره** کیږي. له دې امله د خبرې یا عکس د بنسټو وکتورونو ګڼون یا تعداد او له دې سره د عکس پرخېدونی یا بعد دی.

$$\begin{aligned} \dim Bild &= \dim V - \dim Kern \\ \Leftrightarrow \dim V &= \dim Bild + \dim Kern \quad !!! \end{aligned}$$

لاندې وکتور فضا

تعریف (پېژند):

د وکتور فضا V په $\mathbb{K}$ باندې یو لاندې وکتور فضا U منځ ته راځي، که سړی د وکتور فضا ټاکلي توکي لري پریږدي (لنډ: پریږدي). له دې سره باید د لاندې وکتور فضا پاتې توکي دا لاندې ځویونه پوره کړي:

$$U \neq \emptyset$$

- د ټول $x, y \in U$ لپاره $x + y \in U$ باور لري او د ټولو $\lambda \in \mathbb{K}$ ، $x \in U$ لپاره $\lambda x \in U$ باور لري.

خوښنه:

- له دې سره یو وکتور فضا لږترلږه ډېره لاندې وکتور فضاوې لري. یو ځل دا اکسیومونه پخپله په وکتور فضا کې ورکړل شوي، داسې چې دا وکتور فضا و خپل ځان ته لاندې وکتور فضا ده. له بلې خوا هر وکتور فضا صفر وکتور لري. دا صفر وکتور ځانله هم یوه وکتور فضا ده.

- $U_1 \cap U_2$ لاندې فضا ده، که U_1 او U_2 لاندې فضاوې وي.

- V_K دې یوه وکتور فضا وي او $v_1, \dots, v_n \in V_K$ هر کرښیز ترکیب $L(v_1, \dots, v_n)$ یوه لاندې فضا ده.

د لاندې فضاو لپاره د بعد یا پراخیدونې فرمول

$$\dim(U_1 \cap U_2) + \dim(U_1 + U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2)$$

ښوونه د وکتور فضاو د بنسټ د وکتورونو د ګڼون یا تعداد باندې مخ ته بیول کېږي. د وکتور فضا $U_1 \cap U_2$ بنسټ یو ځل وکتور فضا U_1 او یو ځل وکتور فضا U_2 ته ورپوره یا تکمیل کېږي. د وکتور فضا $U_1 + U_2$ [3.3](#) بنسټ د غوڅي بنسټ دی جمعه یې دا نور د U_1 او U_2 وکتورونه

فکشنونه یا توابع، په ځانګړې توګه کرښیزې.

تعریف: X او Y ډېرې یا ستونه دي. یو تابع f یو ترتیب یا تنظیم دی، د کومو له لارې چې هر توکی $x \in X$ په ټیم یوه توکی $f(x) = y \in Y$ تنظیم شي

$$f : X \longrightarrow Y$$

- دا چې دا توکی ځنگه ترتیبیږي دا پروا نه لري. لومی په کرښیزو توابعو کې بندیزونه راول کيږي، دا چې تابع باید کرښیزه وي.

- د Y په توکي کېدی شي د X ډېر توکي وښايي یا په ډېرو توکو ترتیب یا تنظیم شي. مگر برعکس ممکن نه دی. دا په Y کې توکی، کوم چې د X توکی له ښودل کيږي یا په کوم چې د X توکی تنظیم شي، باید تل یواځنی ټاکلی وي.

د فنکشنونو یا څیرونو (توابعو) ځویونه Eigenschaften von Abbildungen

په باندې فنکشن (- تابع) Surjektiv

$$f : V \rightarrow W$$

دې یوه تابع وي. تابع په باندې ده، چه باور ولري:

$$f(v) = w \quad \forall w \in W \exists v \in V$$

، داسې چې

په کې (فنکشن (څیرونه یا تابع)) Injektiv

$$f : V \rightarrow W$$

دې یو تابع وي. تابع په باندې دی، که باور ولري:

$$\forall x, y \in V$$

$$f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y \quad x \neq y \Leftrightarrow f(x) \neq f(y)$$

په (په باندې او په کې فنکشن یا -- تابع) Bijektiv

په توابع هم په باندې تابع دي او هم په کې تابع (سوزجکتیو، اینجکتیو) دي یخه په باندې اویپه والی پوره کوي:

سرلیک

$\forall w \in W \exists v \in V$ ، داسې چې باور لري $f(v) = w$. (هر $w \in W$ ټيک يو پخوا يا تر مخځېره $v \in V$ لري)

کربنيز فنکشنونه يا توابع Linear Abbildung

تعريف (پېژند)

يو تابع $f : V \rightarrow W$ ، د کوم سره چې V او W وکتور فضاوې دي په همغه بدن K ، کربنيز بلل کيږي (يا د وکتورونو هومومورفيزم)، که $\forall x, y \in V$ او $r \in K$ لپاره باور ولري:

$$L1 : f(x + y) = f(x) + f(y)$$

$$L2 : r \cdot f(x) = f(r \cdot x)$$

سری کړی شي دواړه اکسيومونه په باندې تګه سره رايوځای کړي:

$$L : f(r \cdot x + y) = r \cdot f(x) + f(y)$$

زړی (هسته) او عکس يا څېره Bild und Kern

د يوه تابع $f : V \rightarrow W$ څېره يا عکس په لاندې توګه تعريف دی

د لږ تر لږه يوه لپاره.

$$\text{Img}(f) := \{w \in W | f(v) = w \text{ für mindestens ein } v \in V\}$$

د یوه تابع $f : V \rightarrow W$ زری په لاندې توګه تعریف دی

$$\text{Kern}(f) := \{v \in V | f(v) = 0\}$$

ځانګړي کرښیز فنکشنونه (توابع)

یو کرښیز تابع $F : V \rightarrow W$

یو مونومورفیزم Monomorphismus بلل کیږي، که F اینجکتیو وي.

ایپیمورفیزم Epimorphismus ، که F سورجکتیو وي،

ایزومورفیزم Isomorphismus ، که F بیجکتیو وي،

اینډومورفیزم Endomorphismus ، که $V = W$ او

اوتومورفیزم Automorphismus ، که $V = W$ او F بیجکتیو وي.

د په باندې، په کې ، په (باندې او کې) فنکشنونو یا توابعو لپاره ښوونه

$$X \rightarrow X$$

وي دی $f : X \rightarrow X$. لاندې ویناوې برابر ارزښته یا ایکویوالنت دي:

(i) f په کې دی injektiv

(ii) f surjektiv په باندې دی

(iii) f bijektiv په دی

دا چې له (iii) څخه (i) او (ii) لاس ته راځي او څخه لاس ته راځي روښانه ده.

د بنوولو دی چې لومړی. (i) → (ii) او دویم. (ii) → (i)

لومړی: اینجکتیو له دې لاس ته راځي سورجکتیو. دا داسط ښایو، که په کې وښایو، چې، نه سورجکتیو له دې لاس ته راځي نه اینجکتیو،. د نور کلمو سره: تابع سورجکتیو ده، که دا اینجکتیو وي، ځکه چې که سورجکتیو نه وي، نو ایجکتیو به هم نه شوی کېدی:

- په باندې یا سورجکتیو په دې معنا ده، چې د ټولو $x \in X$ لپاره په وتونډېرۍ کې یو شتون لري، داسې چې باور $f(x') = x$ لري. . که یو تابع په باندې نه وي، نو یو $x \in X$ په کوڅه ډېرۍ کې له مخه څېره ونه لري (یعنې چې دا یې څېره وي). نو $f(X) \neq X$ باور لري.

وي دې $X := \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ، نو $|X| = n$ ، $|f(X)| = m < n$ 4.1 دی. نو نو اوس دا **Schubfachprinzip von Dirichlet** (د ډیرینلیت (شمیر پوه) د میز کورونو) لکه چې د میز خانه یې پول، خو داسې چې ډیتر کورگري ولري (ژباړی) اصول وایي، چې که n شیان په m کورونو (خانو) کې کېږدو او $n > m$ وي، نو لږ ترلږه په یوه کور کې له یوه زیات شیان باید واچول شي.

د دې لاس ته راوړنې سره اینجکتیووالی نه دی ورکړ شوی، ځکه چې $f(x) = f(x')$ مگر $x \neq x'$ (ټیک هلته چې په یوه کور کې دوه توکي پراته دي).

دویم: سورجکتیو له دې لاس ته راځي اینجکتیو. موږ ښایو چې که تابع اینجکتیو نه وي، نو سورجکتیو هم نه ده.

1. f په کې نه ده، نو $f(x) = f(x')$ شتون لري د $x \neq x'$ سره. نو $f(X) \neq X$ دی او دا چې لږ تر لږه په $|f(X)| < |X|$ کې یو توکی کم دی لږ تر لږه $|f(X)| = n - 1$ کېدی شي وي، داسې چې $|f(X)| < |X|$ او له دې

سره تابع په باندې نه ده، داسې چې په موخه ډېرې کې یو توکي $x \in X$ شتون لري د کوم لپاره چې په وتونډېرې کې $x' \in X$ شتون نه لري.

$$\text{Ker}(F) = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} 0 \in W & \text{او} & x, v_1, v_2, n \in V & \text{او} & F : V \rightarrow W \end{matrix}$$

له دې لاس ته راځي:

دا چې F په کې یا اینجکتیو دی نو هر شکل یا څېره یو پخوا یا ترمخ شکل لري.

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} \text{د } 0 \text{ پخواشکل یا ترمخ شکل یا څېره دې } n \text{ وي.} \\ \text{Ker}(F) = \{n\} \Rightarrow F(n) = 0 \end{matrix}$$

دا چې کرښیز دی باید باور ولري:

$$\begin{aligned} F(x) + F(n) &= F(x + n) \\ \Leftrightarrow F(x) &= F(x + n) - F(n) \\ \Leftrightarrow F(x) &= F(x + n) - 0 \\ \Leftrightarrow F(x) &= F(x + n) \\ \Rightarrow n &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{Ker}(F) = 0 \quad \text{نو}$$

له دې لاس ته راځي ($\Leftarrow$):

$$\text{Ker}(F) \Leftrightarrow \{v \in V | F(v) = 0\}$$

د په باندېوالي خوښه: دا چې تابع کرښیزه دی باور لري:

د په کې والي ښوونه:

$$\begin{aligned} F(v_1) &= F(v_2) \\ \Leftrightarrow F(v_1) - F(v_2) &= 0 \\ \Leftrightarrow F(v_1 - v_2) &= 0 \\ \text{Da } \text{Ker}(F) = 0 &\Rightarrow F(v_1 - v_2) = F(0) \end{aligned}$$

سرلیک

$$v_1 = v_2$$

له دې سره دی .

L په کې $\Leftrightarrow$ کرښیز خپلواک وکتورونه په کرښیز خپلواک وکتورونو څېره کيږي

L په کې $\Leftrightarrow$ کرښیز خپلواک $\perp$ کرښیز خپلواک

له دې لاس ته راځي ($\Leftarrow$) :

$$L(v) = L(w) \Rightarrow \dots \Rightarrow v = w$$

ښایو:

وي دې $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ بنسټ، $v, w \in V$ او بنسټ او

$L(v_1), \dots, L(v_i), \dots, L(v_n)$ کرښیز خپلواک

$$\begin{aligned} L(v) &= L(w) \\ \Leftrightarrow L(\sum \lambda_i v_i) &= L(\sum \mu_i v_i) \\ \Leftrightarrow \sum \lambda_i L(v_i) &= \sum \mu_i L(v_i) \\ \Rightarrow \sum (\lambda_i - \mu_i) L(v_i) &= 0 \end{aligned}$$

(د کرښیز کمپینیشن د یواځیوالي له امله)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum (\lambda_i - \mu_i) v_i &= 0 \\ \Rightarrow v &= w \end{aligned}$$

په کې والی ښایي

له دې لاس ته راځي یا

$\Rightarrow$:

$$L(\sum \lambda_i v_i) = 0$$

ښایو:

$$\Leftrightarrow \sum \lambda_i v_i = \sum \mu_i v_i$$

$$\Leftrightarrow \sum \lambda_i L(v_i) = \sum \mu_i L(v_i)$$

د اینجکتیویتي له امله

$$\begin{aligned}\Rightarrow \sum (\lambda_i - \mu_i) L(v_i) &= 0 \\ \Rightarrow \sum (\lambda_i - \mu_i) &= 0 \\ \Rightarrow L(\sum \lambda_i v_i) &= 0\end{aligned}$$

د ارزښتوني فنکشنونه یا توابع یا څېرونې

موږ د بېلگې په توګه درې پولینومونه P_1, P_2, P_3 لرو د لاندې سره

$$\begin{aligned}P_1 &= (x-1)(x-2)(x-4) \\ P_2 &= (x-3)(x-5)(x-1) \\ P_3 &= (x-4)(x-2)(x-3)\end{aligned}$$

موږ اوس کړی شو یو د ارزښتوني تابع یا څېرونه تعریف کړو (a ځای دی په کوم کې چې ارزونه کېږي)

$$W_a(P) : P \mapsto P(a)$$

د ارزښتوني پولینوم کرښیز دی ځکه چې لاندې لري : $\forall P, Q \in \mathbb{Q}[X] \text{ او } \lambda \in K$ [4.2](#) باور

$$W_a(\lambda P + Q) = \lambda W_a(P) + W_a(Q)$$

په دې توګه د ارزښتوني تابع سره کرښیز خپلواک وکتورونه په کرښیز خپلواک وکتورونو څېره کېږي ای مابینګ mapping جوړوي، دا په دې معنا چې

$$P_1, P_2, P_3 \quad \text{کرښیز خپلواک دي، که} \quad W_a(P_1), W_a(P_2), W_a(P_3) \quad \text{کرښیز خپلواک وي.}$$

وي.

موږ د

$$\lambda_1 W_a(P_1) + \lambda_2 W_a(P_2) + \lambda_3 W_a(P_3) = 0$$

لپاره بنایو

$$: \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 :$$

$P(1)$ په دې معنا چې P د 1 په ځای کې ارزښتول کيږي، یعنې دپولینوم ارزښت ټاکل کيږي، که 1 ځای په ځای کړو :

	$P(1)$	$P(2)$	$P(3)$	
P_1	$= 0$	$= 0$	$\neq 0$	$\Rightarrow \lambda_3 = 0$
P_2	$= 0$	$\neq 0$	$= 0$	$\Rightarrow \lambda_2 = 0$
P_3	$\neq 0$	$= 0$	$= 0$	$\Rightarrow \lambda_1 = 0$

داچې درې وکتورونه، چې د ارزښتوني له لارې جوړيږي یا منځ ته راځي یا تولیديږي، کرښیز خپلواکدي، دادرې وکتورونه P_1, P_2, P_3 هم کرښیز خپلواک دي.

ایزومورفیزمونه Isomorphismen

V او W دې $\mathbb{K}$ - وکتورفضاوې وي. V د $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ وکتور فضا بنسټ وي. تابع $f: V \rightarrow W$ ټیک هلته ایزومورفیزم [4.3](#) ده، که

$$(f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n))$$

د W یو بنسټ وي. دا جمله په ځټ یا برعکس هم باور لري.

V دې يو $\mathbb{K}$ -وکتروفضا او $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ دې بنسټ وي.

موږ ايزومورفيزم

$$\mathbb{K}^n \longrightarrow V$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \longrightarrow \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$$

کانونیکي بنسټ- ايزومورفيزم بولو. د اړتیا په حالت کې دا په $\Phi(v_1, v_2, v_n)$ توګه هم بڼایو. موږ دلته ګورو چې د کانونیکي بنسټ- ايزومورفيزم څخه کار اخستلای شو، چې د یوونوکتورونو (واحد-) سره (کانونیکي بنسټ) او د وکتروفضا V د بنسټوکتورونو څخه یو ماتریکي جوړ کړو، چې د دواړو وکتورفضاو ترمنځ ترنفرمي کيږي.

موږ دا داسې کړو چې د V د بنسټ وکتورونه یو په بل پسې په ماتریکس کې ولیکو.

ماتریکسونه Matrizen

$$Mat(m \times n; K)$$

یو ماتریکس m لیکو او n درځونو (متو، ستونو) نظم دی د K بدن (پټي، ورشو، ساحه) څخه. د یوه ماتریکس د یوگونو توکو د لیکي — او — متي کېدی شي د ایندکس لیکدود Indizeschreibweise سره ټیک کره شي:

$$a_{ij}$$

دلته i لیکه او j مټه په کوته کوي.

کربنيزي فنکشنونه (توابع) د ماتریکسونو په څېر

هر کربنيزه تابع کېدی شي په ټیک یوه ماتریکس تنظیم شي

د یوه ماتریکس رانگ Rang

د یوه ماتریکس رانگ د کرښیز خپلواکو لیکو/ یا د همغې د متو گڼون یا تعداد دی.

د متو رانگ = د لیکو رانگ Zeilenrang = Spaltenrang

جمله:

د هر $m \times n$ ماتریکي لپاره باور لري:

د لیکوراځ = د متو رانگ یا رانگ

بنوونه:

ورگر شوی یو $(m \times n)$ ماتریکس

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

مور د $R_1, \dots, R_m$ سره لیکي-وکتورونه ښایو:

$$\begin{aligned} R_1 &= (a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}) \\ R_2 &= (a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n}) \\ &\vdots \\ R_m &= (a_{m1}, a_{m2}, \cdots, a_{mn}) \end{aligned}$$

که r د لیکي رانگ وي، نو مور r کرښیز خپلواک وکتورونه لرو، کوم چې د دې لپاره بنسټ جوړوي:

$$S_1 = (b_{11}, b_{12}, \cdots, b_{1n}), S_2 = (b_{21}, b_{22}, \cdots, b_{2n}), \dots, S_r = (b_{r1}, b_{r2}, \cdots, b_{rn})$$

هر لیکه وکتور R_i د لاندې بنسټ وکتورونو کرښیز ترکیب دی:

$$\begin{aligned} R_1 &= k_{11}S_1 + k_{12}S_2 + \dots + k_{1r}S_r \\ R_2 &= k_{21}S_1 + k_{22}S_2 + \dots + k_{2r}S_r \\ &\vdots \\ R_m &= k_{m1}S_1 + k_{m2}S_2 + \dots + k_{mr}S_r \end{aligned}$$

د دې لپاره چې د ماتریکس هر توکی a_{ji} لاس ته راوړو، باید ټول ضریبونه، د لیکې وکتور ونه د لیکېضائخه وکتوروفضا انځور کړ، د بنسټ وکتور د اړونده توکي سره ضرب کړو. دا د a_{11} لپاره د بېلګې په توګه دی

$$a_{11} = k_{11} \cdot b_{11} + k_{12} \cdot b_{21} + \dots + k_{1r} \cdot b_{r1}$$

له دې سره a د ټولو i لپاره د لیکې ډول دی.

$$\begin{aligned} a_{1i} &= k_{11}b_{1i} + k_{12}b_{2i} + \dots + k_{1r}b_{ri} \\ a_{2i} &= k_{21}b_{1i} + k_{22}b_{2i} + \dots + k_{2r}b_{ri} \\ &\vdots \\ a_{mi} &= k_{m1}b_{1i} + k_{m2}b_{2i} + \dots + k_{mr}b_{ri} \end{aligned}$$

موږ کړی شو اوس هر د مټي وکتور په لاندې توګه ولیکو:

$$\begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} = b_{1i} \cdot \begin{pmatrix} k_{11} \\ k_{21} \\ \vdots \\ k_{m1} \end{pmatrix} + b_{2i} \cdot \begin{pmatrix} k_{12} \\ k_{22} \\ \vdots \\ k_{m2} \end{pmatrix} + \dots + b_{ri} \cdot \begin{pmatrix} k_{1r} \\ k_{2r} \\ \vdots \\ k_{mr} \end{pmatrix}.$$

له دې امله دا وکتورونه د r وکتورونو کرښیز ترکیب دی:

$$\begin{pmatrix} k_{11} \\ k_{21} \\ \vdots \\ k_{m1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k_{12} \\ k_{22} \\ \vdots \\ k_{m2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} k_{1r} \\ k_{2r} \\ \vdots \\ k_{mr} \end{pmatrix}$$

سرلیک

اړيښ نهنه چي داوکتورونه دي يو بل ته کړنيز خپلواک وي. مگر په هر حالت بايد هغه خوراځگ گن(عدد) په r رابند يا محدود وي، چي له کومهامله دي

د متي(درز يا ستنې يا ولاړې ليکې يا کيلې) رانک $\text{Spaltenrang} \leq r$

سړي همداسي د تراسپوني شوي ماتريکس سره هم مخ ته ځي او په دي توگه،،
 Zeilenrang د ليکې رانک،، لاس ته راوړي. له دي سره دي:

د ليکې رانک = د متي رانک

په څټ- يا معکوس ماتريک Inverse Matrix

يو مربع يا څلوريزه $n \times n$ ماتريکس A يو معکوس ماتريکس A^{-1} لري،، که يو لهندي لاندي برابر ارزښته اړيکو څخه يو پوره وي.

- د متو (ليکو) وکتورونه کړنيز خپلواک دي.
 $\text{rang}(A) = n$

$\text{det}(A) \neq 0$

- له دي سره اړوند کړنيزه تابع f_A يو ايزومورفيزم دي.

څرخون- او هدارون-ماتريکسونه(--- د انعکاسوني --)

په $\mathbb{R}^2$ کي څرخون يا څرخونه:

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

په $\mathbb{R}^2$ کې هندارونه:

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$$

دېترمینانتونه Determinanten

دېترمینانتونه دڅه لپاره دي؟

دېترمینانتونه په $\mathbb{R}^2$ کې د غبرګ اړخیز (موازی الاضلاع) په $\mathbb{R}^2$ کې د یوه شپات (کشکول شوی کواډر یا مکعب) او په $\mathbb{R}^n$ کې د یوه غبرګ خوايز سطحه ورکوي. له دې سره روښانه کېدی شي، چې ولې یو دېترمینانت صفر دی، که وکتورونه یو بل ته کرښیز بلواک وي. که په کې دوه وکتورونه ورکړ شوي وي او دا یو بل ته کرښیز بلواک وي، نو دا یو غبرګ اړخیز نه شي غزولی او له دې امله مساحت صفر دی. له دې سره هر مربع – یا څلوری-ماتریکس یوه ګڼ یا عدد سره تنظیمیږي.

تعریف (پېژند) Definition

دېترمینانت هر ماتریکس $M(n \times n, \mathbb{K})$ یو عدد $\mathbb{K}$ باندې تنظیموي:

$$\det : M(n \times n, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$$

فنکشن (تابع) لاندې خویونه لري:

لومړی: دېترمینانت په هره لیکه کې ګرښیزه ده. داپه دې معنا، چې که سړی له ماتریکس M یوه کرښه لري بریږدي یا پرېږدي او د یو کتور x سره بدله کړي، چې بیا دا تابع نسبت دې وکتور ته ځان کرښیز نیسي.

دویم: که د ماتریکس د لیکي رانګ نسبت د لیکي تعداد n ته کوچنی وي، نو $\det A = 0$ ده.

دریم : د یوونماتریکس یا واحد ماتریکس ډیترمینانت 1 دی:

$$\det(E) = 1$$

ټیک یوه تابع شته، چې دا خویونه پوره کوي. دا باید وښایو، داسې چې موږ یواځنوالی او شتونوالی وښایو. دا هر شرط لپاره باید په یواځې تګهوبنول شي.

مرشتندوي جمله: Hilfssätze :

د ښوونې لپاره لومړی لاندې مرستندوی جملې ښایو:

لومړی: که په ماتریکس A کې دوه لیکې بدلې شي، نو ماتریکس A' لاس ته راځي، نو باور لري.

$$\det A' = -\det A$$

دویم: که د یوعماتریکس لیکه د یوه سکالار λ سره ضرب شي نو ماتریکس A' لاس ته راځي او له دې سره باور لري:

$$\det A' = \lambda \det A$$

دریم: که په یوه ماتریکس A کې یوه لیکه د ماتریکس د بلې لیکې سره جمعه (ورزیاته) شي نو ماتریکس A' لاس ته راځي، نوله دې څخه ډیترمینان بي اغیزه پاتې کیږي: $\det A = \det A'$

د دې مرستندوی او یواځنوالی او شتون جملو ښوونه دې په Jänich وکتل شي.

د ډیترمینانتو ساده شمېرنه

لاندې برخه

$$\begin{array}{c} 2 \times 2 \\ 3 \times 3 \end{array} \cdot$$

د لاپلاس د ودیزیني جمله Laplace Entwicklungssatz

د لاپلاس د ودیزیني جمله مرسته کوي، کد له 3×3 ماتریکسونو څخه لوی دیترمینانتونه ټاکو [6.1](#) .

سری کړی شي دیترمینانت ته وده ورکړای شي، که ماتریکس تل په کوچنیو دیترمینانتونو و وېشي. دلته لاندې ماتریکس A_{ij} هغه ماتریکس ده، چې د ماتریکس A د i -مې او j -مې لیکي همداسې مټي د لري کولو څخه لاس ته راځي. سری کړی شي چې ودیزینه سرته ورسوي یا د لیکي له لاري

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot A_{ij}$$

یا د مټوو پسي

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot A_{ij}$$

د ضریب یا څلووني $(-1)^{i+j}$ په مرسته یو د سترنجنختي ډوله مخ یا **موسترمنځ** ته راځي. له دې سره د دیترمینانت مخنځینه ټاکل کيږي:

+	-	+	-	+
-	+	-	+	-
+	-	+	-	+
-	+	-	+	-
+	-	+	-	+

بېلگه:

سرلیک

وډيزينه پورته لیکه پسې پورته لیکه = < په لاندې دیترمینات کې د لیکې په څیر له منځه وړل کيږي =	$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$
--	---

$+a_{11} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$ 1. Spalte ausgeblendet ۱ -م درځ لري کړي	$-a_{12} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$ 2. Spalte ausgeblendet ۲ -م درځ لري کړي
$+a_{13} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{pmatrix}$ 3. Spalte ausgeblendet ۳ -م درځ لري کړی	$-a_{14} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix} =$ 4. Spalte ausgeblendet ۴ -م درځ لري کړي

د دیترمینانتونو ساده ټاکنه

- که یوه لیکه یا مټه کرښیز بلواک وي، نو باور لري

$$\det A = 0$$

دا د لاندې سره په برابره معنا ده (د لیکو تعداد همداسې د مټو تعداد)

$$\text{rang } A < n$$

- که څوک یوه مټه د بلې سره بدله کړي یا یوه لیکه د بلې سره بدله کړي،

مخنځېنه تغیر خوري (دا چي د دیترمینانت تابع الترنیري (بدیلی)
alternierend ده)

$$\det A_{ij} = -\det A_{ji}$$

- کهد ماتریکس یوه لیکه د سکالار سره ضرب شي، نو باید تنها دیترمینانت هم د همغه سکالار سره ضرب شي:

$$\det \begin{pmatrix} \lambda & \cdots & \lambda & \lambda a & \lambda & \cdots & \lambda \\ \vdots & & & & & & \vdots \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} \cdots & a & \cdots \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

په همدې توگه که دیترمینانت د λ^n سره هم ضربې شي، د کوم سره چي n د لیکو تعداد دی، داسي ده لکه که یوه ماتریکس ټوله له λ سره ضرب شي.

$$\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det A$$

- د یوونماتریکس (واحد-) دیترمینانت 1 ده:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

- د یوه درېگودي ماتریکس دیترمینانت د هغه د دوه کونجترې ضرب دی:

$$\det \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \cdots \cdot \lambda_n$$

داسي یوه درېگویزه ماتریکس کړی شو د هر په خوښه $n \times n$ - ماتریکس څخه د ساده لیکو عملیو څخه د گاوسقانون له مخي لاس ته راوړو. موږ باید د دیترمینانت په ټاکلو یواځي دې ته پام وکړو، چي لیکه بدلون دیترمینانت ته له

سرلیک

ځانسره یوسو. نو که r د لیکو د بدلون تعدادوي، چې موږ سر ته رسولې چې درېگودیزه بڼه لاس ته راوړو، باور ولري::

$$\det A' = (-1)^r \cdot a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$$

- که څوک یوه ماتریکس ترنسپوني کړي (دایه دې معنا چې د لیک څخه مټې جوړوي او له مټو څخه لیکې او یا په مربع یا څلوریزه ماتریکسونو کې دا په دوهمکونجټري (قطر) هنداره کوي) په دې حالت کې د ترادپوني ماتریکس دیترمینانت ارزښه د نه ترانپوني شوې ماتریکس د دیترمینانت سره برابر دی:

$$\det A = \det A^T$$

کوچنی بام: په ضرب کې دې پامدې وي. باور لري

$$(AB)^t = B^t A^t$$

- دیترمینانت- ضرب-جمله

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

..... ښوونه یې دلته ورزیاته کړی.

د ایندومورفیزم دیترمینانتونه

دا چې موږ هر ایندومورفیزم f د مربع – یا څلوری-ماتریکس سره انځورولی شو^{6.2}، له دې سره هکړی شو چې د ایندومورفیزم دیترمینانت هم تعریف کړو:

$$\det f := \det A_f \in \mathbb{K}$$

اوس داپوښتنه رامنځ ته کوو، چې ایا د V د مختلفو بنسټونو لپاره دیترمینانتونه مختلف دي. دا کېدی شي وښوول شي چې دیترمینانت د بنسټ د ټاکنو یا انتخاب څخه خپلواک

دي. له دې سره لهدې امله كړی شو چد د يوه ايندومورفيزم ديترمينانت يواځني ت عريف كړو.

اينگن ارزښت (Eigenwerte)

يادونه: دا اينگن په ټول ژبو كې همداسې ليكي. دا الماني وی يا لغات دی، د خپل په معنا دی.

اينگن ارزښت (Eigenwerte)

F دې د وكتور فضا V_K ايندومورفيزم وي. $\lambda \in K$ ايكنا رزښت بلل كيږي، كه يو $v \in V$ شتون ولري د $v \neq 0$ سره، داسې چې باور ولري.

$$F(v) = \lambda v$$

اينگوكتور (Eigenvektoren)

F دې د وكتور فضا V_K يو ايندومورفيزم وي. هر له صفر وكتور مختلف $v \in V$ د

$$F(v) = \lambda v$$

سره د F اينگوكتور بلل كيږي (اينگن ارزښت λ ته)

دوه-كونجټري كيدونكي يا دوه-كونجټري كيدنور (قطري كيدونكي)

Diagonalisierbar

يو ايندومورفيزم دوه كونجټري كېدونكي (قطري كېدونكي يا - وړ) بلل كيږي، كه د اينگن وكتورونو څخه يو بنسټ شتون ولري. دا په دې معنا چې د ايندومورفيزم لپاره يو دوه كونجټري ماتريكس د لاندي بڼه شتون لري (د متو وكتورونه بنسټ وكتورونه

شتون لري، λ_i ایگن ارزښتونه دي)

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

ایگن فضاوي Eigenräume

F دې V ایندومورفیزم وي او $\lambda \in K$ ، نو

$$Eig(F; \lambda) := \{v \in V : F(v) = \lambda v\}$$

F د یو ایگنفضا بولو نسبت و λ ته.

- اگن فضا د V وکتور فضا یو برخوکتور فضا ده.

- صفروکتور په لیگنوکتور کې خوندي نه دی.

- $Eig(F; \lambda) \setminus \{0\}$ د λ اړونده ایگنوکتورونو ډبرۍ ده

- (S.210) ...

کرکترېستیکي پولینوم یا سری ځکه ایگن ارزښتونه پیدا کوي؟

سری کړی شي چې ایگن ارزښتونه وټکي، داسې چې د کرکترېستیکي پولینوم صفرځایونه پیدا کوي. باور لري [7.1](#)

د ایگن ارزښت دی له دې لاس ته راځي او په څنډ

$$\lambda \text{ ist Eigenwert von } F \Leftrightarrow \det(F - \lambda \text{id}_V) = 0$$

سړی د لاندې ماتریکسونو دوه -کونجترې (قطر) پیدا کوي:

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$$

سړی ایګن وکتورونه او ایګن ارزښتونه څنګه پیدا کوي؟

که څوک ایګن-ارزښت λ ولري، نو کېدی شي و هغه ته مناسب ایګنوکتور وټاکي، داسې چې سړی لاندې برابرې - یا مساواتسیستم حل کړي:

$$(A - \lambda I)X = 0$$

لکه کریتیکي پولینوم لپاره سړی همداسې بېرته ماتریکس جوړوي، چېرته چې د λ لپاره ایګن ارزښتونه ځای په ځای کوي. بیا سړی دا هوموګېن مساواتسیستم حل کوي.

یو ماتریکس سړی څنګه دوه-کونجترې یا قطري کوي؟

لومړ: که لږ ایګنوکتورونه تولید یا جوړېدی شي، دې ته (نسبت دې ته) چې ماتریکس درزونه همداسې لیکي لري، نو ماتریکس دوه کونجترې کېدونکي نه ده.

که پوره وکتورونه شتون لري او ودې ته ایګن ارزښتونه نو $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ باور لري

$$D = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

سکالار ضرب (د نننۍ ځل یا -ضرب) او نورم

Skalarprodukt (Innenprodukt) und Norm

سکالار ضرب

تعریف یا پېژند:

يو تابع $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ ، سکالار ضرب بلل کيږي، که
 $\forall x, x', y \in \mathbb{R}^n$ دا لاندې باور ولري:

- $\langle x + x', y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle$ کرښيزوالی)
- $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ (Symmetrie سيومتري)
- $\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$ او $\langle x, x \rangle \geq 0$ مثبت او ديفينيت (Positiv und definit)

بېلگه:

$$\langle a, b \rangle \mapsto a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

Norm نورم

پېژند (تعریف): يوه څيرونه يا فنکشن $\| \cdot \| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ نورم بلل کيږي، که لاندې
 امسيومونه باور ولري

$$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ديفينيت}$$

$$\|x\| \geq 0 \quad \text{مثبت}$$

$$- \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \quad \text{هوموجين}$$

$$- \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \text{درې ګوډي يا مثاثاتي نابرابرون}$$

بيلګه:

$$\|a\|_{\infty} = \|(a_1, a_2, \dots, a_n)\|_{\infty} = \max(|a_i|; i = 1, \dots, n)$$

ماکسيموم يا خورا جګ ارزښت

$$\|a\|_1 = \|(a_1, a_2, \dots, a_n)\|_1 = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$$

(يو نورم)

$$\|a\|_2 = \|(a_1, a_2, \dots, a_n)\|_2 = \sqrt{\langle a, a \rangle} = \sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2 + \dots + |a_n|^2}$$

(د پيوټاګوراس نورم)

د وازيدو کونج تعريف:

د يوې وکتور فضا د x او y وکتورونو ترمنځ د وازېدو کونج α په لاندې توګه تعريف دی

$$\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| \cos \alpha \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}$$

د وازيدو کونج د تعريف لپاره بايد کوساين تل تعريف وي. موږ بايد وښايو، چې دا لاندې باور لري:

$$-1 \leq \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|} \leq 1$$

دا د کوشي-شوارخ-نامساواتو خونديونه ده.

د کوشي-شوارخ-نامساوات

دېه خوښه وکتورونو $u, v \in V$ لپاره باور لري:

$$\langle u, v \rangle^2 \leq \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle$$

يا ورته (اکويالنت):

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

ښوونه:

د $y = 0$ لپاره ساده دی. وي دې $y \neq 0$. موږ له يوه واړه چل څخه کار اخلو او

$$\lambda := \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|} \in \mathbb{R}$$

ږدو. لاندې باور لري:

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle x - \lambda y, x - \lambda y \rangle &= \langle x, x \rangle - 2\lambda \langle x, y \rangle + \lambda^2 \langle y, y \rangle \\ &= \|x\|^2 - 2 \frac{\langle x, y \rangle^2}{\|y\|^2} + \frac{\langle x, y \rangle^2}{\|y\|^2} \\ &= \|x\|^2 - \frac{\langle x, y \rangle^2}{\|y\|^2} \end{aligned}$$

په ورته توګه باور لري $\langle x, y \rangle^2 = \|x\|^2 \|y\|^2$ او له دې سره

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

نورمال شوي او اورتوګونال وکتورونه

وکتورونو نورماليدنه:

$$\langle v, v \rangle = 1$$

وکتورونه نورمال شوي دي، چې اوږدوالی 1 لري، دا په دې معنا، چې

$$\|v\| = 1$$

یا .

یو وکتور نورمال کیدی شي یا کيږي، داسې چې دی د په خټ یا معکوس ارزښت سره ضرب شي:

$$v_{\text{normalisiert}} = \frac{1}{\|v\|} \cdot v$$

اورتوگونال وکتورونه (یو په بل ولاړ -)

دوه وکتورونه v_1 او v_2 یو بل ته اورتوگونال دي، که دا یو په بل ولاړ یا عمود وي. یا نیغ ولاړ وي. له دې امله د دوي سکالار ضرب یا ځل 0 دی.

$$\langle v_1, v_2 \rangle = 0$$

هر وکتور فضا ته لږ ترلږه یو (یعنې په ریښتوني زیات) له اورتوگونال وکتورونو بنسټونه شته. کا دا هو اوږدوالی 1 ولري، نو دا **اورتونورمال** دي.

اورتونورمال بنسټونه:

یو اورتونورمال بنسټ هغه بنسټ دی، په هغه چې ټول وکتورونه دي چې نسبت سکالار ضرب ته اوږدوالی 1 لري او یو بل ته اورتوگونال دي.

سړی کړی شي هر بنسټ ته د شمیدت اورتوگونالیدونکي تڼلار **Schmidtschen**

Orthonormalisierungsverfahrens په مرسته یو اورتونورمال بنسټ جوړ کړي:

موږ غواړو د $i = 1$ تر $i = n$ پورې لاندې فرمول وځغلوو، د کوم سره چې n د بنسټ وکتورونو تعداد یا ګڼون دی، او یو بل پسې اورتوگونال وکتورونه د 1 اوږدوالي پیدا کوي یا میندي، چې دا موږ سملاسي د بل وکتور شمیرنو لپاره اړین مومو.

سرلیک

$$e_i = \frac{v_i - \sum_{k=1}^{i-1} e_k \cdot \langle v_i, e_k \rangle}{\left\| v_i - \sum_{k=1}^{i-1} e_k \cdot \langle v_i, e_k \rangle \right\|}$$

ځای بدلون Permutation

لیکندود

یو ځایبدلون یو په – یعنی بیجکتیو څیرونه یا فنکشن دی، کوم چې n توکي ($n > 0$) تنظیموي.

$$\sigma = \left(\begin{array}{c} 1 \\ \sigma(1) \end{array}, \begin{array}{c} 2 \\ \sigma(2) \end{array}, \dots, \begin{array}{c} n \\ \sigma(n) \end{array} \right)$$

دا پورته لیکنډول دا معنا لري، چې د بیلگې په توګه 1 د $\sigma(1)$ ځای ته راګنبل کیږي. په همدې توګه څیوکلکي یا تل بیرته راګرځیدوني لیکندود هم ورځنی یا بلد دی. د بیلگې په توګه:

$$(12)(3)(564) = \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 6 & 4 \end{array} \right)$$

ترانپوزیشن Transposition

یو ترانسپوزیشن د ټیک دوه یتوکو بدلون دی په څیوکلکي لیکندود یعنی (ab) . هر پرموتیشن د دوه ترانپوزیشنونو کمپوزشن (ضرب) دی.

د ممکنه ځای بدلونو ګڼون یا تعداد

که یوه ډېری یا سټ n توکي لري، نو دا $n!$ ځای بدلونونه ممکن دي.

پاتي يا تش ځایونه

که یو پرموتیشن له یوه کوچني ځای څخه و یوه لوي پسې څیره کړي، نو تشایونه تولیدیږي. که $j < k$ او $\sigma(k) < \sigma(j)$ وي، نو دا یو تشای دی.

د ډاکتر ماخان شینواري لیکنې

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوي لیکنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړی:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra :
general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

1987 Vienna (Austria):

دویم:

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren .
Uni. Wien

*Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras,
at the University of Vienna/Austria*

لاندې د شمیرپوهنې پښتوتول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه، له
خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسيره د انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې ليکنه به يې ځنو ځايونو غزېدلې او ځنې ځايونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمکچپوهنه (هندسه) ، په سلو، زرو کې شميرنه، د گټې – او کټې د کټې شميرنه ، د احتمالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتياوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شميرپوهنې انگرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شميرپوهنې الماني - پښتو - او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځيال برابرېون (دا کتاب په دې څانگه کې يو پيل دی، ساده ليکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمير پوهنې فرمولونو ټولگه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شميرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

يوولسم: د افغانستان په هکله سپينې خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغي او بيا ابادولو ټولنه،، له خو

يادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شينواري د ،،د افغانستان روغي او بيا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلي.

د ډاکتر ماخان ،،ميري،، شينواري ليکنې او ژباړې چې په چاپيدو يې پيل کيږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)

لاندې د برينکمن ليکنې چې له پرينکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شميرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړۍ ټوک

۲ - شميرپوهنه د ښوونځي لپاره دويم ټوک

۳ - شميرپوهنه د ښوونځي لپاره دريم ټوک

۴ - د احتمالي شميرنه د ښوونځي لپاره

۵ - احصايه يا ستاتيستيک دښوونځي لپاره

سرليک

لاندې کتابونه د شتوتگارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتگارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – اناليزی ۱

۷ – اناليزي ۲

۸ – کرښيز الجبر

۹ - د شميرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولگه

۱۱ – فنکشنل اناليز

۱۲ – وکتور شميرنه

نورې ژباړې

۱۳ – له www.grundstudium.info/linearealgebra څخه: کرښيز الجبر

۱۴ – Georg Guttenbrunner گڼونپوهنه يا د اعدادو تيوري

زما ليکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شميرپوهنې ستر کتاب دويم چاپ د پوره تغيراتو سره : دا کتاب د شميرپوهنې برخې برسيره د

انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسي د ښوونکو او زده‌کونکو لپاره پوره گټور دی. په

کتاب کې د اړتيا سره زياتونه او کونه راغلي

۱۶ - ځمکچپوهنه (هندسه) دويم چاپ د پوره تغيراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دويم چاپ له تغيراتو سره

- ۱۸ - ډېری پوهنه يا سټ تيوري
- ۱۹ - د شميرپوهنې سم اند (منطق رياضي)
- ۲۰ - د يو څو شميرپوهانو ژوندليک
- ۲۱ - د شمير پوهنې گډې ودې ليکنې
- ۲۲ - داهم ژباړه ده، خو ليکونکی يې متأسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتيگرا ل شميرنو ته تمرينونه او اوبيوني يا حلونه يې
- ۲۳ - د شميرپوهنې انگريزي پښتو او عربي + درې ډکشنري
- ۲۴ - د شميرپوهنې پښتو انگريزي ډکشنري
- ۲۵ - د شميرپوهنې پښتو ډکشنري د شميرپوهنيزو ويونو په پښتو روښانه ونه
- ۲۶ - د زړه له کومې (دا هغه ليکنې دي، چې ځنې يې په نړيوال جالونو کې خپرې شوي دي).
- ۲۷ - د افغانستان په هکله سپينې خبرې، چې وبه غزيږي.
- نوري ليکنې، چې په ژباړه يې پيل شوی، خو لا پوره نه دي
- د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتکارت پوهنتون ن ج څخه خپريږي:
- د گروپونو تيوري
- د بسوونځي لپاره فزيک د برينکمن ليکنه
- له پنځم ټولگي څخه تر اووم ټولگي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دويم مسلک فزيک دی، دا ليکنې ژباړم. دا هم د دې ليکوال يوه ډېره ښه ليکنه ده، چې د شميرپوهنې په څير- دلته هم زيات تمرينونه د حل يا اوبيوني سره په کې راغلي او ماته زيات گټور برېښي)

سرلیک

82



Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library