کرنیز الجبر

$$\begin{array}{c|l} & A \cdot X_1 = b \\ - & A \cdot X_2 = b \\ \hline = & A \cdot (X_1 - X_2) = 0 \end{array}$$

له ن ج : بنستیز درس | کرنیز الجبر

2012

Ketabton.com

ژیاړی: ډاکتر ماخان(میری) شینواری

(c) ketabton.com: The Digital Library

کربنیز الجبر

$$
\begin{array}{c|l}
 & A \cdot X_1 = b \\
- & A \cdot X_2 = b \\
\hline
= & A \cdot (X_1 - X_2) = 0
\end{array}
$$

dr.shinwari@hotmail.com

له ن ج : بنسټیز درس | کربنیز الجبر

ژباړی: ډاکتر ماخان(میړی) شینواری

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليک

نظر يا د پيداکيدو فکر ١

هندسي لړی پرلپسي يا لړی ٢

د برنولي نا مساوات يا نابرابرون ٣

د يوه کرښيز مساواتسيستم جوړښت ۴

ماتريکسونه: ۵

تراسپوني ماتريکس ٧

سيومتريکي ماتريکسونه ٧

نا يو ډوله يا اينهوموجين ٨

يو ډوله يا هوموجين ٩

ليکه يوړيز بڼه ٩

ديترمينانتونه ١٣

رانګ ١٣

د حلفضا د ديمنزيون (بعد، پراخيدونی)ټاکل ١٣

د ګاوس - تلنلار يا - - قانون ١۴

د ګاوس الګوريتموس ټيکاوی ١۶

د حلونو يا اوبيونو نور قوانين ١٧

ورته والي - يامشابهت اړيکي ١٩

ډېری يا سټ له ترنو يا عمليو سره ١٩

لاندې برخه (که ټوټه برخه يا کښته برخه): ٢٠

ګروپ ٢٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ابل - یا کموتاتیو ګروپ ۲۱
کړۍ ۲۱
بدن یا تن ۲۳
پاتې ټولګې یا باقي ټولګي ۲۳
وکتور فضا ۲۷
کرښیز خپلواکوالی ۲۷
کرښیز بلواکواکوال ۲۸
د وکتور فضا تعریف ۲۸
د یوه وکتور فضا جوړونه یا که غواړۍ تولید ۲۹
سپاین یا کرښیزه Spann،((کرښیزه) رابنده ورشو ۳۴
جوړښتسیستم (تولیدي سیستم) ۳۴
بنسټ ۳۵
د شتاینیځ بدلونجمله ۳۵
بعد یا پراخېدونی ۴۰
لاندې وکتور فضا ۴۲
د لاندې فضاو لپاره د بعد یا پراخیدوني فرمول ۴۳
د فنکشنونو یا ځیرونو(توابعو) خویونه ۴۴
په کې (فنکشن یا تابع) ۴۴
په (په باندې او په کې فنکشن یا -- تابع) ۴۴

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

کرښیز فنکشنونه یا توابع ۴۵
زړی(هسته) او عکس یا څېره ۴۵
څانګړي کرښیز فنکشنونه ۴۶
د ارزښتوني فنکشنونه یا توابع یا څېروني ۵۰
ایزومورفیزمونه ۵۱
ماتریکسونه ۵۲
د یوه ماتریکس رانګ ۵۳
د متې(درز یا ستنې یا ولاړې ... ۵۵
په څټ- یا معکوس ماتریک ۵۵
دیترمینانتونه ۵۶
د لاپلاس د ودیزېنې جمله ۵۸
د دیترمینانتونو ساده ټاکنه ۵۹
د ایندومورفیزم دیترمینانتونه ۶۱
أیګن ارزښت ۶۲
أیګنوکتور ۶۲
دوه -کونجتړې کیدونکې یا دوه-کونجتړې ۶۲
أیګن فضاوې ۶۳
ماتریکس سړی څنګه دوه-کونجتړې یا... ۶۴
سکالار ضرب(دننني ځل یا ــضرب) او نورم ۶۵
د کوشي ــشوارڅ- نامساوات ۶۷

(c) ketabton.com: The Digital Library

اورتوګونال وکتورونه ۶۸

اورتونورمال بنسټونه: ۶۸

ځای بدلون ۶۸

ترانپوزیشن ۶۸

د ډاکتر ماخان شینواري لیکنې ۷۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

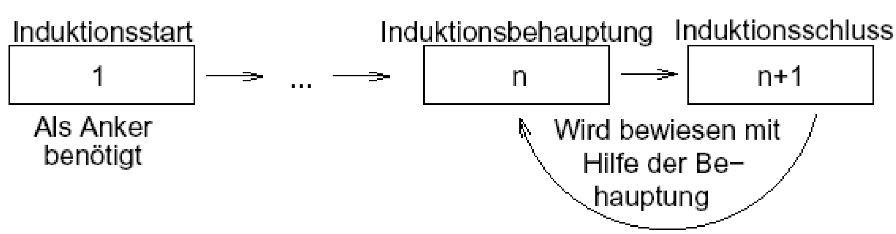
د ژباړې نیولیک

د دې سرلیک لاندې یوه بله لیکنه هم شته. دا مخ ته پرته لیکنه ساده او د پیل په څېر باید وکتل شي. دا لیکنه د بنسټیزو لیکنو ن ج څخه راژباړل شوې ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

نظر یا د پیداکیدو فکر

پوره اندکشن د ښووني يو متود يا لار ده، هغه چې په کرښيزه الجبر کې زيات کارول کيږي. د ښووني لپاره نيول کيږي چې يو ټاکلی فرمول د اندکشن ثبوت د n لپاره صدق کوي. د اندکشن پای يا ختمېدلو – چې د اندکشن پل هم بلل کيږي- ښوول کيږي، چې دا فرمول د $n+1$ لپاره صدق کوي، دايې چې ببرته د اندکشن ثبوت باندې لاس ولرو يا راونيسو. د دې لپاره چې ښوونه پيخي ټيک يا پوره ټيک وي، د يوه نښلون ټکي ته اړتيا شته، له کوم چې n پيل کيږي. دا نښلونټکی د اندکشن پيل ټکی هم بللکيږي. يا د اندکشن پيل او په ښوونه کې په پيل کې راوړل کيږي.



.

د پورته ديښتو ژباړه له کيڼ و ښي لور ته:

پورته: د ايندکشن پيل. لاندې: د په باندې ايښولو (کلکولو) لپاره اړين.

لوريزئ کرښي: لرو .

ببرته خيره پورته: د ايندکشن غوښتنه يا ثبوت   د ايندکشن پای. لاندې: د غوښتني يا ثبوت په مرسته ښوول کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

هندسي لړۍ پرلپسې يا لړۍ (   )

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}$$

د ښوولو دی:

د اندکشن پيل: $n = 1$

$$\begin{aligned} q^0 &= 1 \\ &= \mathrm{Okay} \\ \tfrac{1-q^1}{1-q} &= 1 \end{aligned}$$

د اندکشن وړاندنيونه(فرضيه): د n لپاره دې ښوول شوي وي:

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}$$

د اندکشن پل : $n \rightsquigarrow n+1$

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

دا دد ښوولو دی.

کيڼ پيل کوو

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} q^k &= \sum_{k=0}^{n-1} q^k + q^n \\ &=_{nach\ Vor.} \frac{1-q^n}{1-q} + q^n \\ &= \frac{1-q^n}{1-q} + \frac{(1-q)q^n}{1-q} \end{aligned}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1-q^n+(1-q)q^n}{1-q} \\
&= \frac{1-q^n+q^n-q^{n+1}}{1-q} \\
&= \frac{1-q^{n+1}}{1-q}
\end{aligned}
$$

د برنولي نا مساوات يا نابرابرون Bernoulische Ungleichung

$(1+x)^a \geq 1+ax$ دې وښوول شو

د االندکشن پيل : $a=1$

$1+x \geq 1+x$: تيک دی.

د اندکشن پل:

$a \rightsquigarrow a+1$

$(1+x)^{a+1} \geq 1+(a+1)x$

دې وښوول شي

موږ ببرته له ښی لورې پيل کوو

لاندې کې : Die Voraussetzug= نيونه(فرضيه)

$$
\begin{aligned}
(1+x)^{a+1} &= (1+x)^a \cdot (1+x) \\
&\geq_{Voraussetzung} (1+ax)\cdot(1+x) \\
&= 1+x+ax+ax^2 \\
&= 1+(a+1)x+ax^2 \\
&\geq 1+(a+1)x
\end{aligned}
$$

د پوره اندکشن سره نور د ښوولو فرمولونه

$(1+x)^a \geq 1+ax \quad \forall x \geq 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لومړيو n طبيعي اعدادو مجموعه:

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

د يوه کرښيز مساواتسيستم جوړښت

يو کرښيز مساواتسيستم د يو کرښيزو مساواتو تعداد څخه جوړ دی. دا مساوات نامعلومې خوندي لري، هم داسې په نامه واريابلې (اووښتونې يا متحولې). نامعلومې د ضريبونو سره ضربيږي. که د نامعلومې ضريب 0 - وي يعنې باور ولري: $0 \cdot x_k$ (دلته x_k نامعلومه ده) — نو دا ډول نامعلومه په مساواتو کې هم پرئښوول کيږي يعنې نه ليکل کيږي. دا لاندې د يوه کرښيز مساواتسيستم يوه بېلګه ده:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 5x_4 & = & 5 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & + & 6x_4 & = & 0 \end{array}$$

او دا ټول a_{ij} عمومي ضريبونه دي او x_j واريابلې يا متحولې يا اووښتونې :

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11} \cdot x_1 & + & \dots & + & \dots & + & a_{1n} \cdot x_n & = & b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 & + & \dots & + & \dots & + & a_{2n} \cdot x_n & = & b_2 \\ & & & & \vdots & & & & \\ a_{m1} \cdot x_1 & + & \dots & + & \dots & + & a_{mn} \cdot x_n & = & b_m \end{array}$$

وکتور $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ کوم چې زيات وخت عمود ليکل کيږي د حل وکتور بلل کئږي.
د يوه مساواتسيستم د ممکنه حلونو ډېری يا سټ د حلونو ډېری بلل کيږي:

$$\text{Lös}(A,b) := \{x \in \mathbb{K}^n | Ax = b\}$$

که د حلونو ډېری تشه وي، نو د مساواتسيستم ناحلوړ يا نه حل کيدونکی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ماتريکسونه:

سړی کړی شي په لږ ځای کې کرښيز مساوات د ماتريکس په ډول وليکي. د مخه له دې چې دا کار کوو باید ماتريکسونه راوړو يا رامنځ ته کړو.

يو متريکس يو ولاړکوډيز يا ولاړکونجيز جدول دی د m کيلو يا ليکو او n درځونو يا متو يا ولاړو ليکو سره.

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

د ماتريکس ليکنډول mxn - ماتريکس

سړی کړی شي د ماتريکسونو يوګوني کرښې رادباندې وليکي. دا بيا د **ليکو وکتورونه** بلل کيږي. په ټيک دې ترتيب د ولاړو ليکو يا متو يا **ستنو وکتورونه** هم لاس ته راوړی شوو، که سړی يوګوني متې رادباندې وليکي.

سړی کړی شي ماتريکسونه يو له بل سره جمعه کړي.

$$\begin{aligned} A+B \quad &:= \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \\ &= \quad \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

او سره ضرب کړي-+:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A \cdot B \;:=\; \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + \ldots + a_{1n} \cdot b_{n1} & \dots & a_{11} \cdot b_{1m} + \ldots + a_{1n} \cdot b_{nm} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} \cdot b_{11} + \ldots + a_{mn} \cdot b_{n1} & \dots & a_{m1} \cdot b_{1m} + \ldots + a_{mn} \cdot b_{nm} \end{pmatrix}$$

د ماتریکسونو په جمعه ساده پوهیدل کیدی شي. سرې سره جمعه کوي، جې اړونده کمپوننتونه یو له بل سره حمعه کړي، داسې نتیجه لاس ته راځي. د ماتریکسونو ضرب ستونځمندی. په ضرب کې د لومړۍ ماتریکس لیکه د دویمې ماتریکس د متې سره ضرب کیږي او ورپسې سره جمعه کیږي. او نتیجه یې داسې لاس ته راځي، چې c_{ij} یعنې i–مه لیکه ، j -مه متې کې ضرب د حل ماتریکس چې لاسته راشي، د لومړي ماتریکس د i–مې لیکې د j–مې متې یا ستن د توکو سره ضربوو او له ټولو ضربونو څخه جمعه جوړوو. دا یو ځل بیا لیکو:

$$\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cdots & b_{1j} & \cdots & \cdots \\ \cdots & b_{2j} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & b_{nj} & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nj} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

هیله ده، چې په دا موضوع کې به لږه روښنتیا منځ ته راغلې وي. داسې وایو چې سرې دښۍ دیترمینانت متې په $90°$ درجو د ساعت ځرخوني (عقربک؟؟)په لور څرخوي، چې د کیڼې ماتریکس په لیکه پریوځي، یو په بل پراته توکي بیا سره ضربیوي او په دې پسې یې بیا له دې ضربونو جمعه جوړوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس د ماتريکس د ضريوني په بنديزونو هم پوهيږو. سړی کړی شي $n \times m$- ماتريکس فقط د $n \times m$ -ماتريکس سره ضرب کړي. دا په دې معنا، چې د کيڼ ماتريکس ليکې ټيک دومره بايد اوږدې وي لکه د ښي ماتريکس متې (درځونه، ستنې) ، پرته له دې ته په ليکه نه ،، پربوځي،، يا سرخوري .

تراسپوني ماتريکس

د يوې ماتريکس ترانپوني ماتريکس داسې لاس ته راوړو، چې ليکې او متې سره بدلې شي. له توکي a_{ij} څخه توکی a_{ji} لاس ته راځي.

$$a_{ij} = a_{ji}$$

بيلګه:

$$T\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \end{pmatrix}$$

د مربع ماتريکسونو لپاره دا په همدې معنا دی لکه په ،،دوه – کونجتږې،، (قطر) باندې هندارونه(انعکاس).

سيومتريکي ماتريکسونه

يو ماتريکس ټيک هلته سيومتريک دی، چې باور ولري:

$$a_{ij} = a_{ji}$$

د کرښيزمساوات سيستم ځايسپماييزه ليکندول

د يوه ماتيريکس په مرسته او کېدی شي کرښيزمساوات انرږي – او ځای سپماييز وليکو. مور ته دا بام ودريږي، چې دا نامعلومې تل په هر مساوات کې همهغه دي . نو لکه په ماتريکس ضربونې کې د ماتريکس ضربونې په مرسته دا د مساوات سيستم څخه دباندې راباسو او په دې توګه د ضريبونو(ځلوونو) ماتريکس A لاس ته راوړو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$A \cdot x = b$

د لیکبڼي له مخې دا داسې برېښي:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

د ګاوس تلنلار لپاره ، چې لاندې ليکل شوې ده، دا بيا په لنډه توګه تکراروو او $x-$ - وکتور هم لرې بريږدو. له دې سره نوکان او مساوات هم لرې پريږدو يا نه ليکو او دا ټول په يوه Kasten, کاستن يا کارتون کې ليکو، چې دا لګه چې ګورو، په لاندې توګه ليکل کيږي.

$$\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \\ \hline \end{array}$$

نا يو ډوله يا اينهوموجينبرابرون

يو کرښيز مساوات سيستم نايوډوله (اينهوموجين) بللکيږي، که که لږ تر لږه د يو b_i لپاره $(1 \le i \le n)$ باور ولرى

$b_i \neq 0$

په رېښتيني توګه دا پهدې معنا دى: پهښى لور صفرماتريکس نه دى ولاړ يا ځاى په ځاى نه دى.

يو ډوله يا هوموجين Homogen

د دې برعکس يو مساوات سيستم برابرډوله (هوموجين) بلل کيږى، که b صفروکتور وي، دا په دې معنا چې دټول b_i لپاره ($1 \le i \le n$) باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$b_i = 0$

دا دا معنا لري، چې په بڼې اړخ صفروکتور پروت دی

لیکه- پوړیز بڼه Zeilenstufenform

موږ اوس طبعأ د کربڼیز مساواتسیستم د اوبیونې یا حل سره مینه لرو. دا ګاوس الګوریتم چې یوڅه کښته راځي، د اوبیونو یا حلونو د پیداکولو لپاره مرسته کوی. دا ماتریکس د ساده لیکه بدلون بڼې څخه په لیک –پوړې –بڼې باندې اړوي. په لیکبوړیزبڼه کې یو ماتریکس مخ ته لرو، که هغه خورا ټیټه لیکه دا اکثره کیڼ پراته صفرونه ټولې لیکې خوندي ولري او د کیڼ پرتو صفرونو تعدا(ګڼون) پورته لور ته کم شي، د کوم سره چې کله کله یې له لیکې و لیکې ته یو ځل برابر باتې کیږی. لاندې ماتریکس د لیکې- پوړیز- بڼې ماتریکس بیلګه ده

$$\begin{pmatrix} 0 & \otimes & \oslash & \oslash & \oslash & \oslash & \oslash \\ 0 & 0 & \otimes & \oslash & \oslash & \oslash & \oslash \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \otimes & \oslash & \oslash \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \otimes & \oslash \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \otimes \neq 0 \\ \oslash \neq 0 \text{ oder } 0 \end{matrix}$$

پورته الماني: د ،،یا،، په معنا

جمله :

موږ کړی شو هر ماتریکس په لیکه-پوړیز-بڼه ماتریکس واړوو. داچې د ګاوس تلنلار د دې لپاره یو الګوریم راکوي، چې دا متمین ده او دا جمله ښوول شوې.

د حلونو کریتیریوم

(نخښې، چې د دوه یا زیاتو شیانو یا کسانو ترمنځ پرې پرېکړه کیږي)

د دې لپاره چې د کربڼیزمساتسیستم د حلونو تعداد وټاکلی شو، د حلونو کریتیرین یا نځښې(توپیرنخښې) شتون لري..

(c) ketabton.com: The Digital Library

برابرڍوله يا هموجين مساواتسيستم کړی شي يا ساده حل ولري او يا ډېر حلونه ولري.

ساده حل:

ساده حل يې صفروکتور دی، دا په دې معنا، چې ټول مساوات ټيک هلته پوره کيږي، که ټولې واريابلې(متحولې يا اووښتونې) صفر کېښوول شي.

دا حالت هلته رامنځ ته کيږی، چې که برابرڍوله مساوات سيستم په داسې ليکه-بوږيز-بڼه و اړولی شي، چې په هره ليکه کې له بورته تر کښته يو صفر ځا په ځای وی. او همدومره د ماتريکس متې ولرو لکه ليکې.
د يوه کرښيز مساوات سيستم بيلګه، چې يو د ليکه-پوړی-بڼې ماتريکس سره ، چې ښايي، چې فقط ساده حل شتون لري.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

د دې مساواتسيستم د اخرنې ليکې څخه لاس ته راځي $x_3 = 0$. له دويمې ليکې لاس $x_2 = 0$ ته راځي او بالاخره $x_1 = 0$ ، له کومه امله چې موږ د حل په څېر فقط صفروکتور لاس ته راوړو.
د يو هموجين مسواتسيستم سره کړی شو و ازمايو، چې ايا ومتورونه يو بل ته کرښيز خپلواک ای ا کرښيز بلواک دي. موږ له دې سره وکتورونه په متاريکس کې د متې وکتورونو په څير ليکو. که داسې لاس ته راوړی هموجين کرښيز م ساوات سيستم فقط ساده حلونه لري، ن و وکتورونه يو بل ته کرښيز خپلواک دی.

زيات حلونه يا اوبيونې:

دا هوموجين کرښيز مساوات سيستم زيات حلونه لري، که خپلواکه متحوله (اووښتونې) شتون ولري.. يوه خپلواکه اووښتونې هغه اووښتونې ده چې مساواتسيستم حل له لارې کره نه وي ټاکل شوي. موږ مړی شو داسې اووښتونې په خپله خوښه وټاکو او همداسې په خوښه زيات حلونه د مساوات سيستم لپاره لاس ته راځي.

دا حلونه يو وکتورفضا غزوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا څنګه پيژنو،چې ايا يو مياواتسيستم خپواکې متڅولې لري؟ خپلواکې متحولې تيک هلته شتون لري، چې په سيستم کې لږ مساوات شتون ولري، نسبت اووښتونو ته.

بيلګه:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

داسې مساواتسيستمونههم شته، چې په هغې کې داسې نه ده، چې د متحولو څخه دې مساوات لږ وي. په داسې مساواتسيستم کې پيژنو، چې په ليکه پوړيزه کونه کې يوه صفرليکه شتونلري. پههوموجېنګربنيز سيستم کې کېدی شي داسې ليکه له منځه يوسو(پام! داپه ناهموجېن کې مکنه نه ده، ځکهچې دا حقيقت به مو لهمنځهوړی وي، چې کومحل شتون نه لري) . که د دې لهمنځه وړنې سره زياتې متحولې پاتې شي نسبت مساواتو ته ، ن و يو م ساواتسيستم بهولرو د خپلواکو (ازاده)متحولو سره .
که د يوه هوموجين مساوات سيستم د حل سره، په کوم کې چې ماتريکس له متو وکتورونو جوړ دی، چې کربنيز خپلواکوالی يې يو بل ته ازمايل کيږي، لاس ته راشي، نو وکتورونه يو بل ته کربنيز بلواک دي.

انهوموجين مساواتسيستمونه کېدی شي هيڅ حل، تيک يو حل او يا ريات حلونه ولرودای شي.

هيڅ حل يا نه حل: يو انهوموجين کربنيز سيستم کوم حل نه لري، که د ديوه مساوات ضريبونه صفر وي، او اړونده b_i صفر نه وي..:

يعني

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = b_i \quad b_i \neq 0$$

داسې يو برابرون يا مساوات بنه اړولی بنه بدل .**entartet** بلل کيږي. بنه اړول شوې مساوات نه پوره کيږي او له دې سره ټږلمسوات سيستم نه پوره کېدونکی دی، له کومه کبله چې موږ حل هم نه لرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټیک یو حل:

یو انهوموجین مساوات ټیک یو حل لري، که دا اړونده هومجین مساوات سیستم – دا اړونده هوموجین مساوات سیستم جوړ شي، په کومکې چې ټول b_i د صفر سره برابر ولیکل شي – فقط ساده حلونه ولري.

د دې لپاره چې حلونه وشمیرلی شو، دا انهوموجین کرښیز سیستم د لیکی پوړیزبڼه باندې اړوو، لکه پورته مو چې داسې وکړل، د کوم سره چې موږ b_i ($1 \le i \le n$) هم باید په پام کې ونیسو.

یو ناهوموجین مساوات سیستم کیدی شي د دې لپاره وکارول شي، چې و ازمايي، چې ایا یو وکتور د نورو وکتورونو څخه د کرښیز کمبینېشن په څېر جوړی شي که نه. ټیک هلته یو حل شته، که bد متو یا ستنو وکترونو د کرښیز کمبینېشن څخه جوړولی شي. که داسې یو حل شتون ونه لري، نو نه شي کېدی چې د متو وکترونو څخه کمبینی یا ترکیب کړي. که یو یا حتا زیات حلونه شتون ولري، نو دا په لاندې توګه دي:

زیات حلونه یا اوبیونې:

لکه په کرښیز هوموجېن مساواتسیستم کې ازادې متحولې په ناهوموجېن مساوات سیسم کې هم راپیدا کیږي یا منځ ته ارځي. دا بېرته په هغه وختکې شتون لري، که سړی زاتې متحولې ولري نسبت مساواتو ته. په ناهوموجېن سیستمکې هم سړی کړی شي صفرلیکې لرې کړي، چېرته چې $b_i = 0$ هم وي. په هرحالت دا بڼه تغیر شوې مساوات له منځه نهشي وړل کېدی.

دیترمینانتونه Determinante :

که د یوه مربع ماتریکس وکتورونه یو بل ته کرښیز بلواک وي، نو دیترمینات 0 دی. په بل حالت کې $\neq 0$. له دې سره د $Ax = b$ لپاره باور لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\det A \neq 0$ $\Rightarrow$	د هوموجين مساواتسيستم لپاره ساده حل،
$\det A = 0$ $\Rightarrow$	د ناهوموجين مساوات سيستم لپاره حلونه. د ناهوموجين سيستم لپاره حلونه يو حل يا هيڅ حل

رانګ Rang

$rang(Ab) = rang(A)$

حل شتون لري. د يوه ناهوموجين سيستم لپاره يو حل شتون لري. د يوه هوموجين سيستم لپاره ساده حل شتون لري.

د حلفضا د ديمنزيون (بعد، پراخيدونی)ټاکل

د يوه هوموجين مساواتسيستم د حلډېريو د د بعد ټاکلو لپاره مورږ کړی شو د ديمنزيون يا بعد فرمول څخه کار واخلو. دا چي هر ماتريکس A په يوه ټاکلي بنسټ f_A ايندومورفيزم انخوروي د هوموجېن کربنيزمساوات سيستم حلفضا لپاره

$$Lsg(A,0) = Kern(f_A)$$

باور لري او داسي کړس شو د بعد د فرمړل

$$\dim V = \dim(Kern(f)) + \dim(Bild(f)) \Leftrightarrow \text{d}$$

$$\dim(Kern(f)) = \dim V - \dim(Bild(f))$$

سره د حلفضا بعد وټاکو

(c) ketabton.com: The Digital Library

بعد يا پراخيدونی

يا 0 دی : نو بيا تيک ساده حل شتون لري، داسې په نامه صفروکتور.

يا >0 دی : نو په دې حالت کې ازادې اووښتونې(متحولې (شتون لري، بعد لويوالی د متحولو تعداد دی، چې لرو يې:

پوښتنه:

موږ عکس(څيره) څنګه ټاکو؟ موږ دلته بايد يوون – واهدوکتورنه په ماتريکونو وځغوو يا راوړو. موږ بای د پسې د بيلد(څېرې) پراخېدونی وشمېرو، داسې چې په هغې کې بېرته يو کربنيزمساواتسيستم حل کړو. موږ له دې سره يو د شميرنې پانګه لرودی شو. او که اشتباه کړم؟

د ګاوس - تلنلار يا - - قانون Gauss-Verfahren

د ګاوس-قانون د دې لپاره دی، چې يو ماتريکس په ليکه وکتورونو راوړي. د ليکه وکتورونو بدليدنه او ليکه کمون يا تفريق د تر مخه سکالار ضرب په بنسټ د برخه اخستونکو ليکو تر هغې مخ ته بيايي، چې ماتريکس په ليکه پوړيز ماتريکس بدل شي. د ګاوس قانون تل د کترولو دی يا عملي کيدی شي.خو سه له دې هم کېدی شي، چې په قوي ډول ناټيک وي. اوس الګوريموس ،، پروګرامي ،، کوو:

لاندې يا کښته برخه:
د ګاوس قانون د يوه ماتريکس د ليکه پوړيز بڼې باندې اړولو لپاره

- په پيل کې ازمايو، چې اياماتريکس ماتريکس همرا اوس ليکه پوړيز بڼه لري. په بېخي ځانګړې توګه $A=0$ ، يعنې فقط له 0 –نو څخه جوړ ماتريکس ليکه پوړيزبڼه لري.

- د دې عمل جراکولو له مخه – او نظري په دې مهال هم- کېدی شي او بايد هم ليکې بدلې شي، که دا کار ګټور وي. دا په دې معنا، چې د ليکې د پيوټ توکي(Pivotelemente) له پورته بيخي کيڼ تل پسې ښي لور ته لاړ شي. د پيوټ توکي

(c) ketabton.com: The Digital Library

هغه توکي بللکيږي، کوم چې له ښې لورې کتل شوي په يوه ليکه کې   لومړی يا په سر کې د 0 سره نابرابر وي.

-   د i سره پيل شوې هر ي ليکې   لپاره د پورته ليکې د $i = 1$ سره تر   د اخرې ليکې پورې   لاندې ډول مخ ته ځو:

د هرې   ليکې   لپاره ، چې   وي – ليکه j تل له ليکې i کښته پرته ده - دi

ډيرواره له ليکې j ته ور زياتوي يا تر کموي(که غواړی، جمعه کوي يا ترې

تفريقوي) ، داسې چې a_{ji} - دلته i اووښتوني يا متحوله د متې يا درځ ګڼه(نمره)   په ګوته کوي- 0 شي.

د ګاوس الګوريتموس يوه ليدنه

په لاندې کې Aktuelles ورځنی يا اکتول

لومړی پل يا تلنلار i=1

$$\begin{array}{r|cccc} \text{Aktuelles } i \rightarrow & X & X & X & X \\ \text{Aktuelles } j \rightarrow & 0 & X & X & X \\ & X & X & X & X \\ & X & X & X & X \\ & \uparrow & & & \end{array} \qquad \begin{array}{r|cccc} \text{Aktuelles } i \rightarrow & X & X & X & X \\ & 0 & X & X & X \\ \text{Aktuelles } j \rightarrow & 0 & X & X & X \\ & X & X & X & X \\ & \uparrow & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|cccc} \text{Aktuelles } i \rightarrow & X & X & X & X \\ & 0 & X & X & X \\ & 0 & X & X & X \\ \text{Aktuelles } j \rightarrow & 0 & X & X & X \\ & \uparrow & & & \end{array}$$

دويمه پل يا تلنه i=2

$$\begin{array}{r|cccc} & X & X & X & X \\ \text{Aktuelles } i \rightarrow & 0 & X & X & X \\ \text{Aktuelles } j \rightarrow & 0 & 0 & X & X \\ & 0 & X & X & X \\ & & \uparrow & & \end{array} \qquad \begin{array}{r|cccc} & X & X & X & X \\ \text{Aktuelles } i \rightarrow & 0 & X & X & X \\ & 0 & 0 & X & X \\ \text{Aktuelles } j \rightarrow & 0 & 0 & X & X \\ & & \uparrow & & \end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم پل یا تلنه i=3

$$
\begin{array}{rcccc}
 & X & X & X & X \\
 & 0 & X & X & X \\
\text{Aktuelles } i \rightarrow & 0 & 0 & X & X \\
\text{Aktuelles } j \rightarrow & 0 & 0 & 0 & X \\
 & & & \uparrow &
\end{array}
$$

له ماتریکی داسې په لاس راړی لیکه پوړیز بڼه وکتور څخه کېدی شي حلونه (اوبیونې) وشمېرل شي.

دا داسې کوو چې دا مساواتسیستم بېرته په ماتریکس بڼه په یوګونو مساواتو بدل کړو او له لاندې څخه په پیل په اړونده متحولې پسې حل کړو.

کخ دا مساواتسیستم زیات حلونه لرودی شي، نو له دې سره پېژنو، چې متحولې شتون لري، چې د هغو ارزښتونه ه شو ټاکلی. دا نو ازادې متحولې دي.

د ګاوس الګوریتموس ټیکاوی

د دې لپاره چې وښایو چې ګاوس قانون یو کرښیز مساوات سیستم$\overline{A}$ د ټیک همغه یا برابر حلډېری (حلسټ) سره لکه مساواتسیستمA یې چې تولیدوي، باید وښایو، چې لاندې بڼه بدلونونه په حلونو کوم اغیز نه لري.

لومړی: د لیکو بدلونه

دویم : د لیکو ضربونه د سره او بالاخره یې د بلې لیکې سره زیاتول یا کمول(جمعه او تفریق)

ښوونه یې:

لومړی : دا ساده دی. د یوه مساولتسیستم د لیکو بدلون په حلونو کوم اغیز نه لري، ځکه چې لړې پرلپسې پروا نه لري..

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم : موږ د مساواتسیستم دوه لیکي ترځېړني لاندې نیسو، څکه چې بڼه بدلون فقط د دې دوه لیکو په مرسته صورت نیسي. نور و دوه لیکو سره سراوکار نه لرو او د حلونو ډېرۍ تغیر نه خوري:

$$\begin{array}{lccccccc} (1) & a_{i1}x_1 & + & \cdots & + & a_{in}x_n & = & b_i \\ (2) & a_{j1}x_1 & + & \cdots & + & a_{jn}x_n & = & b_j \end{array}$$

لومړۍ لیکه د λ سره ضربوو، په مساوات کې تغیر نه راځي، څکه چې سرۍ λ بیرته لنډولی شي یا کمولی شي یا که غواړۍ اختصار کولی شي:

$$\lambda \cdot a_{i1}x_1 + \cdots + \lambda \cdot a_{in}x_n = \lambda \cdot b_i$$

دا(1) اوس د دویمې(2) لیکې سره جمعه کوو، لکه چې ترې لرو

$$a_{j1}x_1 + \cdots + a_{jn}x_n + (\lambda \cdot a_{i1}x_1 + \cdots + \lambda \cdot a_{in}x_n) = b_j + (\lambda \cdot b_i)$$

پوهیږو چې دلته هم په حل کې کوم تغیر نه راځي، څکه چې مساوات ورسره زیاتوو، چې په دواړو لورو ته راغلی او دواړو لورو ته همغه برخه ورکوي. دا بیرته سره لنډیدی شي او موږ بیرته وتونمساوات لرو.

د حلونو یا اوبیونو نور قوانین

د یوه کربنیزمساواتسیستم د حل لپاره د ګاوس قانون ترڅنګ نور قوانین هم شته. په ښوونځي کې مو د بدلون قوانین وپیژندل. په دې کې یو مساوات د یوې متحولې یا اووښتونې سره حل کیږي او بیایې ارزښت د مساوات سیستم په بل مساوات کې کېښوول کیږي.په همدې ترتیب دې کار ته دوام ورکوو، چې بیداشوط اوښتونې ارزښت د مساوات سیستم په هبل مساوات کز ځا په ځای کیږي، تر څو چې د ټولو متحولو ارزښتونه پیداشي.که د اووښتون و ارزښتونه په پای کز ځا په ځاشي او لاس ته راشی ، $0 = 0$ ، نو مساوات سیستم ناپای ډېر حلونه یا اوبیونې لري. که د دې ځا په ځای کونې وروسته ،، کینِ اړخ $\neq$ ښی اړخ،، نو کوم حل شتون نه لري. په ورته توګه دا مساوي ایښونې قانون هم کارول کیږي، د کوم سره چې دوه مساوات د یوهې اووښتونې په لور حل شي او بیا

(c) ketabton.com: The Digital Library

برابر ولیکل شي.

په پای کې باید وکورو، چې د یوه کرښیزمساوات سیستم ځنګه حلونه لاس ته راړو، که ورته سیستم حل کړ شوی وي:

غواړو د یوه ناهموجین کرښیز مساوات سیستم حلډېری I وټاکو. موږ د هوموجین کرښیز مساوات سیستم حلډېری یا حل سټ H پیژنو. د هوموجین کرښیز مساواتسیستم حلونو ډېری یا سټ H د اړونده تابع د زړي(هستې) Kern سره برابره ده. برسره پردې موږ د ناهوموجین سیستم ټوټه یا برخه حل یا د حل یوه برخه حل v_0 پیژنو.

موږ کړی شو د دې ناهوموجین سیستم حلډېری I پیداکړو، داسې چې

د ناهوموجین سیستم ټولو حلونه v_0 جمعه کوو:

$$I = v_0 + H = \{v_0 + h \ \forall \ h \in H\}$$

د هوموجین کرښیزمساواتسیستم حلونه $Ax = 0$ د کرښیزو توابعو زړی(که غواړی: هسته) دی. موږ کړی شو ، لکه د ماتریکس A سره چې انځور یړي، دا زړی و دې ټوټه – یا برخا حل ته ورزیات یا ور جمعه کړو. دا ځانله (تنها) د ناهوموجین مسوات سیستم سره نه کوو بلکه د هوموجین مساوات سیستم سره هم همداسې مخ ته ځو.

$$Lsg(A, 0) = v_0 + Kern(A)$$

د هوجین مساواتسیستم ته تل یو ساده حل0 شتون ري، له دې سره لرو

$$Lsg(A, 0) = 0 + Kern(A) = Kern(A)$$

موږ د ناهوموجین مساواتسیستم دوه حلونه لرو. له دې دوه وو څخه یو حل د هوموجین مساوات سیستم لپاره جوړولی شو، داسې دواړه حلونه یو بل کم یا تفریق کړو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{array}{c|l} & A\cdot X_1 = b \\ - & A\cdot X_2 = b \\ \hline = & A\cdot (X_1 - X_2) = 0 \end{array}$$

ورته والي - يامشابهت اړيکې Äquivalenzrelationen

په A يوه اړيکه~ ټيک هلته ورته بللکيږی، که د ټول $a,b,c \in A$ لپاره باور ولري

لومړی : $a \sim a$ يا $(a,a) \in\sim$ انهکاس يا هندارون اړيکې يا (Reflexiv)

دويم : که $a \sim b$، نو $b \sim a$ يا که $(a,b) \in\sim$، نو $(b,a) \in\sim$ سيومتريک اړيکې (Symmetrisch)

دريم : که $a \sim b$ او $b \sim c$، نو $a \sim c$ يا که $(a,b),(b,c) \in\sim$، نو $(a,c) \in\sim$ ترانسيتيو اړيکې (Transitiv)

ورته اړيکې يوه ډېری(سټ) په،، ورته ټولګيو،، ويشي.

ډېری يا سټ له ترنو يا عمليو سره

د ښوونځي او هم د شمېرپوهنې په ورځني ژوند کې له دې سره بلد يو، چې له کومو سره ترمونه ساده کېدی شي. دا زيات وخت ډېره مرسته کوي. د بېلګې په توګه د دېستزيبوتيو قانون په مرسته لاندې ترم خورا زر ګڼلی شو، لکه بې له دې قانون.

$$\left(\frac{1}{8}+\frac{13}{2}\right)\cdot\frac{8}{13}=\frac{1}{8}\cdot\frac{8}{13}+\frac{13}{2}\cdot\frac{8}{13}=\frac{1}{13}+4=4\frac{1}{13}$$

د بينوم لومړی جملې هم د ديستريبوتيو قانون ډېر واره استعمالول دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = (a+b)\cdot a+(a+b)\cdot b = a\cdot a+b\cdot a+a\cdot b+b\cdot b = \\ = a^2+2ab+b^2$$

په لاندې برخه کې اوس شمېرنې نور قوانین ، چې د اکسیومونه بلل کیږي و تعریفو. دا قوانین د ډېریو لپاره صدق کوي د اړونده ترنو سره. زیات وخت پوښتنې رامنځ ته کیږي، چې دا ااکسیومونه له کومه راځي. اکسیومونه خویونه ل ري، چې دا په ساده توګه تعریفیږي، بې له ثبوته. طبعأ دا په خوښه نه ټاکل کیږي. مګر په لومړي سر کې یا د پیل زده کوونکو لپاره په دې بسیا کوو، چې دا دې شتون ولري.

لاندې برخه (که ټوټه برخه یا کښته برخه):

Unterabschnitte

موږ او یو په بل پسې یوګوني تعریفونه ورکوو. له دې سره پورته و کښته لور ته تل زیات امسیمونه باور لري. د بیلګې په توګه تنونه یا اجسام له دوه کموتاتیو ګروپونو منځ ته راځي، یو ځل نسبت جمعي یا زیاتون + ته او یوځل نسبت و ضرب · یا * ته او دې سره اړونده دیستریبوتیو قانون څخه یو ځای یا په ګډه، یعنې بدن یا تن یا جسم له ګروپ څخه زیات دی.

ګروپ

یوه حوړه یا یو ګون $(G,+)$ ، چې G یوه ډېرئ ده او $+$ یوه ترنه یا عملیه ده،

$$+ : G \times G \to G$$

ګروپ بللکیږی، که لاندې اکسیومونه پوره وی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

G1 : $(a+b)+c=a+(b+c)\forall\ \ a,b,c\in G$ اسوڅياتيو قانون.

G2 : يو $e\in G$ (ناپيلی توکی) شتون لري چې د $\forall\ \ a\in G$ لپاره لاندې خويونه پوره کوي:

لومړی: $e+a=a$

دويم : د هر $a\in G$ لپاره يو $a'\in G$ شتون لري (په څېر يا برعکس توکی) د $a'+a=e$ سره

د ابل - يا کموتاتيو ګروپ **Abelsche / kommutative Gruppe**

يو ګروپ د ابل ګروپ بلل کيږي، که د د ګروپ د اکسيومونو **G1** او **G2** برسېره دا $a+b=b+a$ هم $\forall\ \ a,b\in G$ باور ولري (کموتاتيو قانون) *(Kommutativgesetz)*.

کړی Ring

يو ګون $(R,+,*)$، چېرته چې R يوه ډېرۍ او $+,*$ دوه ترونونه يا عمليې دي د لاندې سره

$$+:R\times R\to R\qquad *:R\times R\to R,$$

کړی يا رينګ بلل کيږي، که لاندې اکسيومونه پوره وي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

R1 : د + سره يو ځای کموتاتيو ګروپ (اسوشاتيوۀ ناپيلی توکی، په څټ يا برعکس توکی دی.

R2 : $(a*b)*c = a*(b*c)\forall\ a,b,c \in R$ (د $*$ لپاره اسوشاتيو دی.

R3 : دپسترېبوتيو قانون باور لري:

(a) $\forall\ a,b,c \in R : (a+b)*c = a*c + b*c$

(b) $\forall\ a,b,c \in R : a*(b+c) = a*b + a*c$

کړۍ د يوي توکي (واحد توکي) سره Ring mit Einselement

$(R,+,*)$ يوه کړی ده، له دې امله باور لري:

$\exists 1 \in R$ (ناپيلی توکی يا يوې توکی د ترڼې لپاره) د هغه لپاره چې باور لري:

$1*a = a$

کموتاتيو کړۍ:Kommutativer Ring

$(R,+,*)$ يوه کړی ده، له دې امله باور لري:

$\forall\ a,b \in R : a*b = b*a$ (د $*$ لپاره کموتاتيو قانون)

کموتاتيو کړۍ د يوی توکي (واحد عنصر) سره

کړی، په کومو کې چې کموتاتيو قانون باور لري او دا هم يو يويتوکی ولري، يعنې د دوه پورته اکسيومونو سره، کموتاتيو کړۍ د يويتوکي سره بللکيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بدن یا تن یا پټیField Körper

یو ارزښت نظم یا توپل $(K,+,*)$ یو تن دی، که باور ولري

K1 : د کموتاتیو کړۍ اکسیومونه د یویټوکي سره باور لري.

K2: $\forall a \in K \exists a^{-1}$ ، داسې چې $a * a^{-1} = 1$ باور لري (د ترڼي $*$ لپاره په څټ یا برعکس توکی)

پولینوم کړۍ Polynomring

$\mathbb{K}$ دې یو تن وي. د $\mathbb{K}_n[t]$ ډېرۍ د لاندې بڼې پولینومونو څخه جوړه ده

$$a_0 + a_1t + a_2t^2 + \ldots + a_nt^n$$

د کومو سره $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ ، t یوه اووښتونې(متحوله) او n د پولینوم درجه بللکیږي. د پولینومونو دا ډېرۍ یو کموتاتیو کړۍ ده. د یوه پلینوم P خورا جګ ضریب(ځلوونی) - په پورتنۍ بېلګه کې یعنې n ، چې باید $a_n \neq 0$ وي - د پولینوم درجه بللکیږي. که دا 0 وي، یعنې د ټولو i لپاره $a_i = 0$ ، نو دا پولینوم صفر پولینوم بلل کیږي. د صفرپلینوم درجه ناپای ده:

$$\deg P := \begin{cases} \infty & \text{falls } P = 0 \\ n & \max\ (i \text{ für das gilt } a_i \neq 0) \end{cases}$$

پاتې ټولګي یا باقي ټولګي Restklassen

اوس غواړم د بدن لپاره یوه بله بېلګه دروپېژنم یا معرفي کړم، د لومړنیو ګڼونو پاتې ټولګي. د لومړنیو ګڼونو پاتې ټولګي کېدی شي بدنونه شي، داسې چې په هغو کې

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمعه(زياتون) او ضرب(ځل) تعريف شي. داسې تنونه $\mathbb{F}_p$ بللکيږي يعنې د بېلګې په توګه $\mathbb{F}_7$ د پاتېتولګي 7 لپاره. په روښني ژوند کې د پاتې تولګي سره ډېر شمېرل کيږي، د بېلګې په توګه د ليکنيزې جمعې سره [2.2] :

$$\begin{array}{r} 8 \\ + \quad {}_1\,9 \\ \hline 1\;\;7 \end{array}$$

موږ 8 او 9 د7 سره جمعه کړل چې چېرته موهغه لاس ته راغلی زيات هېر کړی نه دی. موږ اوس کړی شو چې هغه زيات يا لاس ته راغلی پرېږدو او وليکو

$$8 \bmod 10 + 9 \bmod 10 \equiv 7 \bmod 10$$

چېرته چې ،، mod ،، مودولو**modulo** په معنا دی، يعنې د وېش پاتې يا باقي.

په ورته توګه نور پاتې تولګي هم تعريفولی شو. د دې په ځايچې په 10 يې ووېشو په 3 يې وېشو.

$$\begin{array}{r} 3 \\ + \quad {}_1\,2 \\ \hline 1\;\;2 \end{array}$$

د دې لپاره کړی شو، چې يو د جمعې او ضرب جدول جوړ کړو:

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

·	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

په همدې توګه دا کار بيا کړو، دا وار د پاتې تولګي 4 لپاره:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$+$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$\cdot$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

اوس کړی شو د بدن اکسیومونه په یوګوني ډول په هغو پاتې ټولګیو پورې اړونده بدن باندې د جدول ارزښتونو په مرسته و ازمایو. کموتاتیو قانون باور لري، که جدول په دوه -کونجتړې(قطر) باندې هنداروں یا انعکاس سیومتریک وي. په ځت یا معکوس توکی شتون لري، که د جدول په هره لیکه او هره مټه کې د بدن هر توکی یوځل منځ ته راشي یا شتون ولري. صفرتوکی شتون لري، که   په هره لیکه او هره مټه کې منځ ته راشي یا شتون ولري. اسوځیاتیو او دېستریبوتیو قوانین له جدول ځخه په ساده توګه نه شي لوستل کېدی.

وروسته له دې چې دا نښلونټکي(د نښلونو ټکي) لرو، پېژنو، چې بدن $\mathbb{F}_4$ شتون نه لري. دا د ضرب د معکوس توکی قانون په خلاف دی. داسې x نه شته چې $2 \cdot x = 1$ باوري کړي

یعنې د 4 پاتې ټولګي ځخه بدن   نه شي جوړېدلای. برعکس یو بدن $\mathbb{F}_3$ له پاتې ټولګي 3 ځځخه ممکن دی، ځکه چې هېڅ اکسیوم نه زیانمن یا زخمي کیږي: ګورو چې سیمتریک، برعکس او ناپیلی توکي شتون لري . همداسې د نږدې پسې ازمایلو ځخه ګورو چې اسوځیاتیو او دېستریبوتیو قوانین هم باوري دي.

که نور هم ځیرنه ژوره کړو، نو په دې کې یو سیستم ګورو،   چې کله یو پاتې ټولګی p یو بدن $\mathbb{F}_p$ کیږي. دا حالت تیک هلته رامنځ ته کیږي، چې p یو لومړنی ګڼ(عدد) وي. دا ثبوت دلته نه راوړو.

مګر غواړو چې په پای تعریف کړو، چې یو کرکتریستیک (خوی ټاکونی) ځه شی دی او ولې د یوه په خوښه بدن $\mathbb{K}$ کرکتریستیک تل یو لومړنی ګڼ او یا 0 دی:

پیژند(تعریف):

$\mathbb{K}$ دې یو ردن وي او 1 د ضرب یو ناپیلی توکی(یوونتوکی، عنصر واحد) وي. د یوه زیاتیز یا مثبت عدد n لپاره د $n \cdot 1$ لاندې پوهیږو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$n \cdot 1 = \underbrace{1 + \ldots + 1}_{n \text{ mal}}.$$

د بدن $\mathbb{K}$ کرکتریستیک په لاندې توګه تعریف دی

$\operatorname{char}\mathbb{K} = \begin{cases} 0 \\ n \end{cases}$	که n>0 شتون ونه لري، چې n.1=0 باور ولري که n شتون ونه لري، چې باور ولر n1=0

ښوونه: n تل یو لومړنی ګڼ دی:

وي دې $n \neq 0$ (د تعریف دویم حالت). که n لومړنی عدد نه وی، نو دا په لاندې ضقیبونو ټوټه کیږی [2.3] .

$$\begin{aligned} & n1 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (n_1 \cdot n_2)1 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & n_1 1 \cdot n_2 1 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & n_1 1 = 0 \wedge n_2 1 = 0 \end{aligned}$$

دا تضاد دی. څکه چې $n_1 < n$ او $n_2 < n$ باید کرکتریستیک char $\mathbb{K} = n_1$ اویا char $\mathbb{K} = n_2$ کرکتریستیک وي. دی char $\mathbb{K}$ = n او له دې سره n په ضریبونو نه شي ټوټه (تجزیه) کېدی، نو له دې امله یو لومړنی عدد دی.

موږ د ښوونځي څخه غوره بدنونه پېژنو، لکه د هوښیار اعدادو(کسري-) $\mathbb{Q}$ ، د ریل یا حقیقی اعداد $\mathbb{R}$ بدنونه او ورپسې د کمپلکس اعدادو $\mathbb{C}$ بدنونه هم. دا ټول زدنونه کرکتریستیک 0 لري. نور د اعدادو غوره ډېرۍ هم شته لکه د ټول ګڼونو (- اعدادو) ډېرۍ. دا فقط یو کموتاتیو ګروپ جوړوي، څکه چې په نسبت و ضرب ته معکوس توکی نه لری. دا له دې امله داسې ده،چې موږ په دې عددونو کې ماتونه(کسرونه) نه لرو. د ټولو طبیعي اعدادو $\mathbb{N}$ ډېرۍ چې 0 ورسره تړلی دی او یا نه،

(c) ketabton.com: The Digital Library

متأسفانه چې حتا يو ګروپ هم نه دی، څکه چې د جمعي معکوس توکي نه لرو، د بېلګې په توګه د $3+x=1$ لپاره x شتون نه لری، څکه چې $x=-2$ شتون نه لري.

وکتور فضا der Vektorraum

لاندې برخه

کرښيزبلواکوالی (خطي تابعيت)

يادونه (ژباړی): ګړرو چې دلته مو تابع کليمه، چې د فنکشن لپاره کارول کيږي، ناټيکاوي ته لاربنودوي. دلته د بلواکوالي يا تابعيت څخه موخه فنکشن نه دی. پای.

يو د وکتورونو $(v_1,\dots,v_n)$ کورنۍ کېدی شي کرښيز بلواکه يا کرښيز خپلواکه وي، نه دواړه يو ځای کېدی شي او هم نه له دوه ځخه يوه هم نه . يوه کورنۍ هغه ډېری ده، چې يو توکی په کې دوه ځله هم راتلی شي. پس موږ په خوښه وکتورونه لرو- په کوم کې چې همغه وکتور ختی دوه ځله راتلی شي- کوم چې موږ داپه خپلو اړيکو کې يو له بل سره ځېړو.

کرښيز خپلواکوالی

V دې يو $\mathbb{K}-$ -وکتورفضا وي. يوه د وکتورونو $(v_1,v_2,\dots,v_n)$ پای کورنی له V ځخه کرښيز خپلواک بلل کيږی، که له $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{K}$

$$\lambda_1 v_1+\dots+\lambda_n v_n=0$$

ځخه لاس ته راشي، چې $\lambda_1=\dots=\lambda_n=0$ دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې معنا، چې صفر وکتور د نورو وکتورونو $v_1, v_2, \ldots, v_n$ څخه ساده ترکيب کيدی شي

کربنيز بلواکواکوال:

V دې بيا هم يو $\mathbb{K}-$ -وکتورفضا وی. يوه د وکتورونو $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ پای کورنۍ له V څخه کربنيز بلواک بلل کيږی، که له $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$$

لاس ته راشي، چې هم ساده حل $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$ شته ، او هم يو حل له کوم سره چې لږ تر لږه يو $(1 \leq i \leq n)\, \lambda_i \neq 0$ دی.

دا په دې معنا دی، چې موږ صفروکتورونه د ساده حلونو يا اوبيونو څخه په بل ډول هم د وکترونو د کورنې څخه جوړولی شو

د وکتور فضا تعريف:

اوس د وکتورفضا تعريف ته راځو:

$\mathbb{K}$ دې يو بدنوي. يودرېګون $(V, +, *)$ چې V يوه n-ګون

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او $+$ او $*$ ترني یا عملیې وي

$$\begin{aligned} + &: V \times V \to V \\ * &: \mathbb{K} * V \to V \end{aligned}$$

$\mathbb{K}$ -وکتور فضا بلل کیږي، که لاندې اکسیونونه باور ولري:

$(V,+)$ یو کموتاتیو ګروپ دی.

S1 : $\forall \ \lambda, \mu \in \mathbb{K}, v \in V$ باور لري $\lambda * (\mu * v) = (\lambda * \mu) * v$ (آسوځیاتیو قانون)

S2 : $1 \in \mathbb{K} : \forall \ v \in V : 1 * v = v$ (ناپیلی توکی)

D1 : $\forall \ \lambda, \mu \in \mathbb{K}, v \in V$ باور لري $(\lambda + \mu) * v = \lambda * v + \mu * v$ (دیستریبوتیو قانون)

D2 : $\forall \ \lambda \in \mathbb{K}, v, w \in V$ باور لري $\lambda * (v + w) = \lambda * v + \mu * w$ (دېتریبوتیو قانون)

د یوه وکتور فضا جوړونه یا که غواړی تولید Erzeugen eines Vektorraums

اوس غواړو $n-$ ګونی 3.1 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ، چې دوکتورفضا د تولید لپاره اړتی ورته لرو تولید کړو. دا کړی شو که موږ دا ټول ولیکو . دا د ډېرو کمو وکتورونو لپاره هم موخه ور دی. مګر د زیاتو وکتورفضاو لپاره دا نا ممکن دی، ځکه چې موږ ناپای ډېر ګونونه لرو. موږ باید دا د یوه شمېرقانون سره تولید کړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

کربنیز ترکیبوالی

وي دي $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ په $\mathbb{K}-$ -وکتور فضا کې یوه د وکتورونو کورنۍ. هر د $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K})$ بڼې

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n$$

وکتور v د $v_1, v_2, \ldots, v_n$ کربنیز ترکیب بلل ګیږی.
اوس ، د کلمو،، کربنیز خپل(بل)واک،، او د ،،کربنیز ترکیب،، ترمنځ یو څو ښوونې یا ثبوتونه راړل کیږی. د دې ښوونو لاس ته راوړنې به شاید د ډېرو زده کړو په غوښنه او وینو ته تللې وي. تاسو پوهیږئ چې دا داسې دی. خو بیا هم موږ باید دا یو ځل وښایو:

جمله ؛

که د کورنۍ $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ وکتورونه یو بل ته کربنیزخپلواک وي، نو کېدی شي هر وکتور $v \in L(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ د دوی له لارې په یوه ټاکلې لار ترکیب شي. له

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n \qquad v = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \ldots + \mu_n v_n$$

ځخه لاس ته راځي

$$\lambda_1 = \mu_1; \;\; \lambda_2 = \mu_2; \;\; \lambda_n = \mu_n$$

ښوونه:

$$\begin{aligned} & v = v \\ \Leftrightarrow \quad & \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \ldots + \mu_n v_n \\ \Leftrightarrow \quad & (\lambda_1 - \mu_1) v_1 + (\lambda_2 - \mu_2) v_2 + \ldots + (\lambda_n - \mu_n) v_n = 0 \end{aligned}$$

د کربنیزخپلواکوالي له امله باور لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lambda_1 - \mu 1 = 0; \;\; \lambda_2 - \mu_2 = 0; \; \ldots \; \lambda_n - \mu_n = 0$$
$$\Rightarrow \;\; \lambda_1 = \mu 1; \;\; \lambda_2 = \mu_2; \; \ldots \; \lambda_n = \mu_n$$

له دې سره کېدی شي وکتور ټیک په یوه ډول ترکیب شي.

برعکس یا په څېړ کیدی شي وښوول شي:

جمله :

که چیرې یو وکتور v ټیک په یوه ډول له وکتورکورنیو $(v_1, v_2, \ldots v_n)$ څخه د کرښیز ترکیب کیدی شي، نو نو د دې کورنی وکتورونه یو بل ته کرښیز خپلواک دي.

ټیک په یوه ډول تکیبوړ په دې معنا دی، چې که

$$v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$$
$$\text{und} \quad v = \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_n v_n$$

باور ولري، $\lambda_1 = \mu_i$ باور لري او له دې سره $\lambda_i - \mu_i = 0$

$$v = v$$
$$\Leftrightarrow \;\; \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_n v_n$$
$$\Leftrightarrow \;\; (\lambda_1 - \mu_1) v_1 + \ldots + (\lambda_n - \mu_n) v_n = 0$$

داچې $\lambda_i - \mu_i = 0$ د $1 \leq i \leq n$ لپاره د کورنې وکتورونه کرښیز خپلواک دي.

جمله:

که د یوې کورنې $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ وکتورونه کرښیز بلواک وي، نو له یوه څخه زیات امکانات شته چې وکتور v ترکیب کړو. کرښیز بلواک په دې معنا دی، چې لږ ترلږه یوه v_i لپاره $(1 \leq i \leq n)$ باور ولري:

$$v_i = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \ldots + \lambda_n v_n.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ښوونه:

که موږ وکتور v ولرو، کړی شو دا په لاندې ډول ترکیب کړو:

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n.$$

له دې ځخه لاس ته راځي $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. اوس کړی شو دا پورته یادشوی کرښیز
ترکیب د v_i لپاره ځای په ځای کړو او لاس ته راړو

$$\begin{aligned} v &= \lambda_1 v_1 + \ldots + \\ &\quad \lambda_i \cdot (\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \ldots + \lambda_n v_n) \\ &\quad + \ldots + \lambda_n v_n \\ \Leftrightarrow \quad v &= (1+\lambda_i)\lambda_1 v_1 + \ldots + (1+\lambda_i)\lambda_n v_n \end{aligned}$$

نو $(1+\lambda_i)\lambda_1, \ldots, (1+\lambda_i)\lambda_n$ یو نوی امکان دی چې v ترکیب کړو او د دې سره
همدا اوس دوه امکانات لرو

موږ کړی شو چې لاندې دوه واقعیتونه هم ثبوت کړو:

جمله :

که یو وکتور v_i د کورنۍ $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ کرښیز د
کورنۍ $(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n)$ ځخه نه شي ترکیبېدی، نو د کورنۍ $(v_1, \ldots, v_n)$
وکتورونه یو بل ته کرښیز خپلواک دي.

ښوونه:

نیسو چې دا کرښیز بلواک دي. داپه دې معنا، چې د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$$

لپاره لږ تر لږه د يوه λ_i لپاره $(1 \leq i \leq n)$ باور لري

$$\lambda_i \neq 0$$

دا په دې معنا چې

$$\begin{aligned} & \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \ldots + \lambda_n v_n = -\lambda_i v_i \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{\lambda_1}{-\lambda_i} v_1 + \ldots + \frac{\lambda_{i-1}}{-\lambda_i} v_{i-1} + \frac{\lambda_{i+1}}{-\lambda_i} v_{i+1} + \ldots + \frac{\lambda_n}{-\lambda_i} v_n = v_i \end{aligned}$$

نو کېدی شي، چې v_i له $(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n)$ کرښيزه ترکيب کړاي شي. دا نيوني ته تضاد دی. نو بايد وکتورونه کرښيز خپلواک وي.

په همدې توګه برعکس ی په ځتې هم باور لري:

جمله:

که د کورنی $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ وکتورونه يو بل ته کرښيز خپلواک وي، نو کوم يو وکتور د بل ځخه کرښيز ترکيب کېدی نه شي.

ښوونه:

نيسو، چې دا شونی دی، يو وکتور v_i $(1 \leq i \leq n)$ کېدی شي کرښيز ترکيب کړاي شی. نو باور لري:

$$v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \ldots + \lambda_n v_n$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګورو، چې $\lambda_i \neq 0$ دی، ځکه چې $\lambda_i = -1$. او د کورنۍ وکتورونه به کرښيز بلواک وی. تضاد. بو دا ممکن نه ده، چې له دې وکتورونو ځخه کوم یو له بل ځخه کرښيز ترکیب کړي، ځکه چې بیا به کرښيز خپلواکوالی زخمي شوی یا زیانمن شوی وي.

سپاین یا کرښيزه **Spann**،((کرښيزه) رابنده ورشو)**lineare Hülle**، **Abschluss**

په یوه $\mathbb{K}-$ - وکتورفضا کې د یوې کورنۍ $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ د ټولو کرښيز ترکیبونو ډېرۍ سپاین یا کرښيزه رابنده ورشو بلل کیږي

$span(v_1, \ldots, v_n)$

یا د وکتورونو د کورنۍ کرښيزه (که غواړۍ) سمڅه(**Hülle**)

روښانه دې وي: د یوه سپاین وکتورونه ناجبري کرښيز خپلواک نه دي.

جوړښتسیستم (تولیدي سیستم) Erzeugendensystem

د وکتورکورنۍ $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ د وکتور فضا V تولیدی سیستم بلل کیږی، که باور ولري

$$V = span(v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

داپه دې معنا چې وکتورونه د وکتور فضا V مکمله یا پوره غزوي.

دلته کېدی شي، چې د وکتورونو کورنۍ کرښيز بلواک یا کرښيز خپلواک وی. دا یواځې باید وکتور فضا و غزوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بنسټ Basis

د وکتورونو $(v_1, \ldots, v_n)$ کورنۍ د وکتور V بنسټ بلل کيږي، که د کورنۍ یوګوني وکتورونه

- یو بل ته کربنيز خپلواک دي

- او که د وکتورونو کورنۍ ټول وکتور V وغزوي، يعني د V یو توليدي(جوړختيز) سيستم دی:

$$V = span(v_1, \ldots, v_n)$$

او

$$\text{und} \quad \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$$

له دې سره یو توليدي سيستم ټيک هلته یو بنسټ دی، چې د دې توليدي سيستم وکتورونه یو بل ته کربنيز خپلواک دي.

د شتاینيځ بدلونجمله Austauschsatz von Steinnitz

جمله:

په یوه د $\mathbb{K}-$ - وکتورونو کورنۍ(که فضا) V کې دې یو بنسټ

$$B := \{v_1, \ldots, v_r\}$$

او یوه کربنيز ځپلواکه کورنۍ

$$(w_1, \ldots, w_n)$$

ورکړ شوي وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$r \geq n$ دی . سړی کړی شي د بنسټ n وکتورونه د nکربښيز خپلواکو کتورونو کورنیو سره بدل کړای شي، داسې چې نوی بنسټB^* بېرته کربښيز خپلواک دی او د وکتورفضا V_K بنسټ دی. د ایدنکس د ګڼې بدلون وروسته کېدی شي داسې ولیکو:

$$B^* := \{w_1, \dots, w_n, v_{n+1}, \dots, v_r\}$$

$$B^* := \{w_1, \dots, w_n, v_{n+1}, \dots, v_r\}$$

یا په ځانګړي حالت $n = r$:

$$B^* := \{w_1, \dots, w_n\}$$

ښوونه:

ښوونه د بدلون لیما سره صورت نیسي. دا دبدلون لېما) وړه چمله) د د بنټ ځخه یو وکتور اخلي او یو بل ورزیاتوي:

بدلون جمله ګی Austauschlemma

یو $K-$ -وکتورفضا V دې د بنسټ

$$B := \{v_1, \dots, v_r\}$$

سره ورکړ شوې وي او یوه w د

$$w = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{k-1} v_{k-1} + \underline{\underline{\lambda_k v_k}} + \lambda_{k+1} v_{k+1} + \ldots + \lambda_r v_r \in V$$

د $\lambda_k \neq 0 \quad (\star)$ سره او

$$\lambda_k \neq 0.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو

$$B' := \{v_1, \ldots, v_{k-1}, w, v_{k+1}, \ldots, v_r\}$$

بېرته یود V بنسټ دی .

یعني سرې کړی شي v_k د w وکتور سره بدل کړي. (دا نور $\lambda_1 \ldots \lambda_r$ بې له λ_k باید حتمأ 0 نه وي.، مګر دوی کړی شي).

د بدلون جملې ښوونه**Beweis des Austauschlemmas** :

د لیکنې د ساده کونې لپاره نیسو، چې$k = 1$ دی. موږ ښایو چې

$$B' := \{w, v_2, \ldots, v_r\}$$

هم د V_K بنسټ دی.

- د بنسټ 3.2 ټول وکتورونه $v \in V$ د کربنیزترکیب په څېر لیکل کېدی شي یعني

$$v = \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_r v_r \quad (\star\star)$$

داچې $\lambda_1 \neq 0$ دي، کړی شو په لاندې ډول یې بنهبدل کړو

$$\begin{aligned} & w = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r \qquad (von\ \star) \\ \Leftrightarrow\ & \lambda_1 v_1 = w - \lambda_2 v_2 - \ldots - \lambda_r v_r \\ \Leftrightarrow\ & v_1 = \frac{w}{\lambda_1} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2 - \ldots - \frac{\lambda_r}{\lambda_1} v_r \end{aligned}$$

- اوس کړی شو دا په $\star\star$ کې ځای په ځای کړو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{aligned} v &= \mu_1\left(\frac{w}{\lambda_1}-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}v_2-\ldots-\frac{\lambda_r}{\lambda_1}v_r\right)+\ldots+\mu_r v_r \\ &= \mu_1\frac{w}{\lambda_1}-\mu_1\frac{\lambda_2}{\lambda_1}v_2-\ldots-\mu_1\frac{\lambda_r}{\lambda_1}v_r+\ldots+\mu_r v_r \\ &= \frac{\mu_1}{\lambda_1}w+\left(\mu_2-\mu_1\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)v_2+\left(\mu_3-\mu_1\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)v_3+\ldots+\left(\mu_r-\mu_1\frac{\lambda_r}{\lambda_1}\right)v_r \end{aligned}$$

له دې لاس ته راځي، چې نوی بنسټ لږ تر لږه یو تولیدي سیستم دی.

- اوس پاتې دادی چې کرښیز خپلواکوالی و ښایو

$$\mu w+\mu_2 v_2+\ldots+\mu_r v_r=0$$

د $\star$ ځا ي په ځای کونه:

$$\begin{aligned} &\mu(\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\ldots+\lambda_r v_r)+\mu_2 v_2+\ldots+\mu_r v_r=0 \\ \Leftrightarrow\quad &\mu\lambda_1 v_1+(\mu\lambda_2+\mu_2)v_2+(\mu\lambda_3+\mu_3)v_3+\ldots+(\mu\lambda_r+\mu_r)v_r=0 \end{aligned}$$

نو $\mu\lambda_1=\mu\lambda_2+\mu_2=\mu\lambda_3+\mu_3=\ldots=\mu\lambda_r+\mu_r=0$ ، څکه چې B کرښیزخپلواکه وه ($\mu_2=\mu_3=\ldots=\mu_r=0$) او $\mu=0$ ، څکه چې $\lambda_1\neq 0$.

له دې ځخه کرښیز خپلواکوالی لاس ته راځي

د بدلون جملې ښوونه:

له دې وروستهچې ومو ښوول، چې سړی یو وکتور v_k له بنسټ ځخه را اخستی شي او د وکتور wسره يې بدلولی شي، که دا اړونده $\lambda_k\neq 0$ وي(کړی شي، چې د نمرې یا ګڼې بذلون سره اِه ټیک ځای ته راوړل شي)، باید وښایو، چې د زاړه بنسټ لپاره تل داسې یوه $\lambda_k\neq 0$ شتون لري، داسې چې موږ وکتورونه پرلپسې سره بدلولی شو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

- که صفر وکتورونه سره بدل کړو، نو ښوونې ته نه اړکيږو. موږ اړيين نه يو چې کوم وکتور پيدا کړو، چې له هغو سره بنسټ وکتور بدل کړو. دا زموږ د ايندکشن پيل دی.

- زموږ د ايندکشن نيونه ده، چې k وکتورونه مو سره بدل کړي دي او بېرته مو يو بنسټ لاس ته راوړی دی:

$$B' = \{w_1, \ldots, w_k, v_{k+1}, \ldots, v_r\}$$

- د ايندکشن پای :

که موږ وکتور w_{k+1} بدل کړو، نو بايد يو λ_i د $k+1 \leq i \leq r$ سره پيداکړو، د کوم لپاره چې $\lambda_i \neq 0$ باور لري. باور لري :

$$w_{k+1} = \lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_k w_k + \underbrace{\lambda_{k+1} v_{k+1} + \ldots + \lambda_r v_r}_{\text{mindestens ein } \lambda_i \neq 0}$$

دا پورته لړ تر لږه يوه $\lambda_i \neq 0$.

دا چې کرښيزخپلواکه کورنۍ $(w_1, \ldots, w_k, w_{k+1}, \ldots)$ کرښيز خپلواکه وه، اجازه نه شته چې $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k \neq 0$ وي، ځکه چې پرته له دې کرښيز خپلواکوالی زخمي شوی وي.

داچې w_{k+1} هم صفر وکتور نه دی، ځکه چې بيا به کرښيز خپلواکوالی زخمي شوی وي، نو يو λ_i ($k+1 \leq i \leq r$) شتون لري د $\lambda_i = 0$ سره.

د ښوونې ځخه لاس ته راوړنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

- که یو $K-$ - وکتورفضا V یو پای بنسټ ولري، نو د V هر بنسټ پای دی.
- د یوې وکتورفصا هر دوه بنسټونه برابر اوږدوالی لري.
- بنسټ پوره کېدنه:

په یوه پای تولېدکېدونکي وکتور فضا Vکې دې کرښيز خپلواک وکتورونه $w_1, w_2, \ldots, w_n$ ورکړل شوي وي. نو کېدی شي سړی پیدا کړي، داسې چې

$$B := \{w_1, w_2, \ldots, w_n, w_{n+1}, \ldots, w_r\}$$

د V یو بنسټ وي.

- $v_i, \ldots, v_n$ دې د کرښيز خپلواک وکتورونو ډېرۍ وي، چې یوه وکتور فضا غزوي، نو د $v_i, \ldots, v_{n+1}$ ډېرۍ په هر حالت کرښيز بلواک ده.

دا په دې معنا چې بل وکتور نه شي پيداکېدی چې و $v_i, \ldots, v_n$ ته کرښيز خپلواک وي.

- د بنسټ بدليد جمله:

$v_i, \ldots, v_n$ دې کرښيز خپلواک وکتورونه وي، چې یوه وکتور فضا غزوي(دا په دې معنا چې دا یو بنسټ دی)، نو $w_i, \ldots, w_n$ کرښيز خپلواک وکتورونه ، چې د وکتورونو$v_i, \ldots, v_n$ د کرښز ترکيب څخه جوړيدی شي، برابره وکتورفضا غزوي.

بعد یا پراخېدونی(Dimension)

که Vیوه $K-$ - وکتور فضا وي، نو تعریفوو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$dim_k V = \begin{cases} \infty \\ r \end{cases}$	که V پای بنسټ ونه ري، کهV د r اوږدوالي بنسټ ولري

د پراخېدوني يا بعد جمله:

وي دې $f: V \to W$ (V, W دلته $\mathbb{K}-$ -وکتورفضاوې دي) يو کرښيزبلواک. نو د بعد ياپراخېدوني جمله باور لري:

$$dim\ V = dim\ Bild(f) + dim\ Ker(f)$$

Bildځيره او Ker(Kern) زړی يا هسته

ښوونه :

يادونه:

$dimV$: دV د بنسټ وکتورونو ګڼون يا تعداد.

$dim\ Bild(f)$: د وکتورونو ګڼون يا تعداد د V د لاندې وکتورفضا (f) Bild کې.

$dim\ Ker(f)$: د f په زړي(هسته) کې د وکتورونو ګڼون يا تعداد. دا بېرته د V لاندې وکتورفضا ده.

لومړی: دا چې زړی (f) Ker د V لاندېوکتورفضا ده، په هر حالت لرو

$$dimV \geq dim\ Ker(f).$$

د $v_1, v_2, \ldots, v_n$ د زړي د بنسټونو وکتورونه يو بل ته کرښيز خپلواک دي.

د بنسټتکيلېدوجملې په بنسټ کېدی شي دې بنسټ ته کرښيز خپلواک وکتورنه V ته ورزيات کړي او دا بنسټ په دې توګه د V يوه بنسټ ته پوره يا تکميل کړي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$B_V := \{v_1, v_2, \ldots, v_n, v_{n+1}, \ldots v_k\}.$$

لومړی: موږ اوس پرېږدو چې تابع f د وکتورفضا V په بنسټ وڅغلي. نو لاس ته راوړو:

$$Bild(f) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(v_i)}_{=0} + \sum_{i=n+1}^{k} \lambda_i f(v_i) = \sum_{i=n+1}^{k} \lambda_i f(v_i)$$

د زړې بنسټوکتورونه په 0 تنظيمېږي يا څېره کيږي . له دې امله د څېرې يا عکس د بنسټوکتورونو ګڼون يا تعداد او له دې سره د عکس پرخېدونی يا بعد دی.

$$\begin{aligned} & dim\ \ Bild = dim\ V - dim\ \ Kern \\ \Leftrightarrow\ & dim\ V = dim\ \ Bild + dim\ \ Kern \qquad !!! \end{aligned}$$

لاندې وکتور فضا

تعريف (پېژند):

د وکتورفضا V په $\mathbb{K}$ باندې يو لاندې وکتورفضا Uمنځ ته راځي، که سړی د وکتورفضا ټاکلي توکي لرې پرېږدي(لنډ:پرېږدي). له دې سره بايد د لاندېوکتورفضا پاتې توکي دا لاندې ځويونه پوره کړی:

- $U \neq \emptyset$

- د ټول $x, y \in U$ لپاره $x + y \in U$ باور لري او د ټولو $x \in U$ ، $\lambda \in \mathbb{K}$ لپاره $\lambda x \in U$ باور لري .

(c) ketabton.com: The Digital Library

خويونه:

- له دې سره يو وکتورفضا لږترلږه دوه لاندې وکتورفضاوې لري. يو ځل دا اکسيومونه پخپله په وکتورفضا کې ورکړل شوي، داسې چې داوکتور فضا و خپل ځان ته لاندېوکتورفضا ده. له بلې خوا هروکتورفضا صفروکتور لري. دا صفر وکتور ځانله هم يوه وکتورفضا ده.

- $U_1 \cap U_2$ لاندې فضاو ده، که U1 او U2 لاندې فضاوې وي.

- $V_{\mathbb{K}}$ دې يوه وکتورفضا وي او $v_1, \ldots, v_n \in V_{\mathbb{K}}$. هر کرښيز ترکيب $L(v_1, \ldots, v_n)$ يوه لاندېفضا ده.

د لاندې فضاو لپاره د بعد يا پراخيدوني فرمول

$$dim(U_1 \cap U_2) + dim(U_1 + U_2) = dim(U_1) + dim(U_2)$$

ښوونه د وکتورفضاو د بنسټ د وکتورونو د ګڼون يا تعداد باندې مخ ته بيول کيږي. د وکتورفضا $U_1 \cap U_2$ بنسټ يو ځل وکتورفضا U_1 او يو ځل وکتورفضا U_2 ته وړپوره يا تکميل کيږي. د وکتورفضا $U_1 + U_2$ بنسټ[3.3] د غوځې بنسټ دی جمعه يې دا نور د U_1 او U_2 وکتورونه

فنکشنونه يا توابع ، په ځانګړې توګه کرښيزې-

تعريف: X او Y ډېرۍ يا ستونه دي. يو تابع f يو ترتيب يا تنظيم دی، د کومو له لارې چې هرتوکی $x \in X$ په ټيم يوه توکي $f(x) = y \in Y$ تنظيم شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f : X \longrightarrow Y$

- دا چې دا توکی ځنګه ترتیبیږي دا پروا نه لري. لومی په کربنیزو توابعو کې بندیزونه راړل کیږي، دا چې تابع باید کربنیزهوي.

- د Y په توکي کېدی شي د X ډېر توکي وښايي ياپه ډېرو توکو ترتیب یا تنظیم شي. مګر برعکس ممکن نه دی. دا په Y کې توکی، کوم چې د X توکی له ښودل کیږي یا په کوم چې د X توکی تنظیم شي، باید تل یواځنی ټاکلی وي.

د فنکشنونو یا څیرونو(توابعو) خویونه Eigenschaften von Abbildungen

په باندې فنکشن(- تابع) Surjektiv

$f : V \to W$ دې یوه تابع وي. تابع په باندې ده، چه باور ولري:

$\forall\ w \in W\ \exists v \in V$ ، داسې چې $f(v) = w$.

په کې (فنکشن (څیرونه یا تابع)) Injektiv

$f : V \to W$ دې یو تابع وي. تابع په باندې دی، که باور ولري:

$\forall x, y \in V$

$$x \neq y \Leftrightarrow f(x) \neq f(y) \qquad f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$$

په (په باندې او په کې فنکشن یا -- تابع) Bijektiv

په توابع هم په باندې تابع دي او هم په کې تابع (سوزجکتیو، اینجکتیو) دي یخد په باندېولی اوپهکې والی پوره کوي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\forall\ w \in W \ \ \exists!\ v \in V$ ، داسې چې باور لري $f(v) = w$. (هر $w \in W$ تیک یو پخوا یا تر مخځېره $v \in V$ لري)

کرښيز فنکشنونه یا توابع Lineare Abbildung

تعریف(پيژند)

یو تابع $f : V \to W$ ، د کوم سره چې V او W وکتورفضاوې دي په همغه بدن K ، کرښيز بلل کيږي(یا د وکتورونو هوموموروفيزم)، که $\forall\ x, y \in V$ او $r \in K$ لپاره باور ولري:

$$L1: \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$
$$L2: \quad r \cdot f(x) = f(r \cdot x)$$

سرې کړی شي دواړهاکسیومونه په باندې تګه سره رایوځای کړي:

$$L : f(r \cdot x + y) = r \cdot f(x) + f(y)$$

زړی(هسته) او عکس یا ځېره Bild und Kern

د یوه تابع $f : V \longrightarrow W$ ځېره یا عکس په لاندې توګه تعریف دی

د لږ ترلږه یوه لپاره.

$$Img(f) := \{w \in W | f(v) = w \text{ für mindestens ein } v \in V\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه تابع $f : V \longrightarrow W$ زړی په لاندې توګه تعریف دی

$Kern(f) := \{v \in V | f(v) = 0\}$

خانګړي کرښیز فنکشنونه (توابع)

یو کرښیز تابع $F : V \to W$

یو مونومورفیزم Monomorphismus بلل کیږي، که F اینجکتیو وي.

ایپیمورفیزم Epimorphismus ، که Fسورجکتیو وي،

ایزومورفیزم **Isomorphismus** ،که F بیجکتیو وي،

ایندومورفیزم**Endomorphismus** ، که $V = W$ او

اوتومورفیزم**Automorphismus** ، که $V = W$ اوF بیجکتیو وي.

د په باندې، په کې ، په (باندې او کې) فنکشنونو یا توابعو لپاره ښوونه

X→X

وې دی $f : X \to X$. لاندې وېناوې برابر ارزښته یا ایکویوالنت دي:

(i) f په کې دی injektiv

(ii) f ist surjektivپه باندې دی

(iii) f ist bijektivپه دی

دا چې له (iii) څخه (i) او(ii) لاس ته راځي او څخه لاس ته راځي روښانه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ښوولو دی چې لومړی. (ii)→(i) او دويم. (i)→(ii)

لومړی: اينجکتيو له دې لاس ته راځي سورجکتيو. دا داسط ښايو، که په کې وښايو، چې،، نه سورجکتيو له دې لاس ته راځي نه اينجکتيو،،. د نور کلمو سره:: تابع سورجکتيو ده، که دا اينجکتيو وي، ځکه چې که سورجکتيو نه وي، نو ايجکتيو به هم نه شوی کېدی:

- په باندې يا سورجکتيو په دې معنا ده،چې د ټولو $x \in X$ لپاره په وټونډېرۍ کې يو $x' \in X$ شتون لري، داسې چې باور $f(x') = x$ لري . که يو تابع په باندې نه وي، نو يو $x \in X$ په کوخه ډېرۍ کې له مخه ځېره ونه لري(يعنې چې دا يې ځېرهوي).
نو $f(X) \neq X$ باور لري .

وي دې $X := \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ يعني $|X| = n$ ، نو $|f(X)| = m < n$ دی[4.1]. نو نو اوس دا **Schubfachprinzip** von Dirichlet (د ديريښليت(شمير پوه) د ميزکورونو(لکه چې د ميز خانه يې پول)، خو داسې چې ډيطر کورګړي ولري(ژباړی) اصول) وايي، چې که n شيان په mکورونو(خانو) کې کېږدو او $n > m$ وي، نو لږ ترلږه په يوه کور کې له يوه زيات شيان بايد واچول شي.

د دې لاس ته راوړني سره اينجکتيووالی نه دی ورکړ شوی، ځکه چې $f(x) = f(x')$ مګر $x \neq x'$ (ټيک هلته چې په يوه کور کې دوه توکي پراته دي).

دويم : سورجکتيو له دې لاس ته راځي اينجکتيو. موږ ښايو چې که تابع اينجکتيو نه وي، نو سورجکتيو هم نه ده.

1. f په کې نه ده، نو $f(x) = f(x')$ شتون لري د $x \neq x'$ سره . نو $f(X) \neq X$ دی او دا چې لږ تر لږه په $|f(X)| < |X|$ کې يو توکی کم دی لږ تر لږه $|f(X)| = n - 1$ کېدی شي وي ، داسې چې $|f(X)| < |X|$ او له دې

(c) ketabton.com: The Digital Library

سره تابع په باندې نه ده، داسې چې په موخه ډېرۍ کې یو توکی $x \in X$ شتون لري د کوم لپاره چې په وتونډېرۍ کې $x' \in X$ شتون نه لري.

F په کې(اینجکتیو) ⇔ Ker (F) = 0

وي دې $F : V \to W$ او $x, v_1, v_2, n \in V$ او $0 \in W$

له دې لاس ته راځي:

دا چې F په کې یا اینجکتیو دی نو هر شکل یا ځېره یو پخوا یا ترمخ شکل لري.

د 0 پخواشکل یا ترمخ شکل یا ځېره دې n وي. $\iff$

$$Ker(F) = \{n\} \Rightarrow F(n) = 0$$

دا چې کربنیز دی باید باور ولري:

$$\begin{aligned} & F(x) + F(n) = F(x+n) \\ \Leftrightarrow\quad & F(x) = F(x+n) - F(n) \\ \Leftrightarrow\quad & F(x) = F(x+n) - 0 \\ \Leftrightarrow\quad & F(x) = F(x+n) \\ \Rightarrow\quad & n = 0 \end{aligned}$$

نو $Ker(F) = 0$

له دې لاس ته راځي $(\Leftarrow)$:

$$Ker(F) \Leftrightarrow \{v \in V | F(v) = 0\}$$

د په باندېوالي خوونه: دا چې تابع کربنیزه دی با ور لري:

د په کې والي ښوونه:

$$\begin{aligned} & F(v_1) = F(v_2) \\ \Leftrightarrow\quad & F(v_1) - F(v_2) = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & F(v_1 - v_2) = 0 \\ Da\ \ Ker(F) = 0 \ \Rightarrow\quad & F(v_1 - v_2) = F(0) \end{aligned}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې سره دی $v_1 = v_2$.

L په کې ⇔ کرښيزخپلواک وکتورونه په کرښيز خپلواک وکتورونو څېره کيږي

L په کې ⇔ کرښيزخپلواک L کرښيز خپلواک

له دې لاس ته راځي(⇐:) :

ښايو: $L(v) = L(w) \Rightarrow \ldots \Rightarrow v = w$

وي دې $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ بنسټ، $v, w \in V$ او بنسټ او

$L(v_1), \ldots, L(v_i), \ldots, L(v_n)$ کرښيز خپلواک

$$\begin{aligned} & L(v) = L(w) \\ \Leftrightarrow \quad & L(\sum \lambda_i v_i) = L(\sum \mu_i v_i) \\ \Leftrightarrow \quad & \sum \lambda_i L(v_i) = \sum \mu_i L(v_i) \\ \Rightarrow \quad & \sum (\lambda_i - \mu_i) L(v_i) = 0 \end{aligned}$$

(د کرښيز کمبينيشن د يواځيوالي له امله)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & \sum (\lambda_i - \mu_i) v_i = 0 \\ \Rightarrow \quad & v = w \end{aligned}$$

په کې والی ښايي

له دې لاس ته راځي يا

⇒:

ښايو: $L(\sum \lambda_i v_i) = 0$

$$\begin{aligned} & \sum \lambda_i v_i = \sum \mu_i v_i \\ \Leftrightarrow \quad & \sum \lambda_i L(v_i) = \sum \mu_i L(v_i) \end{aligned}$$

د ا ينجکتيويتي له امله

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad \sum(\lambda_i - \mu_i)L(v_i) = 0 \\ &\Rightarrow \quad \sum(\lambda_i - \mu_i) = 0 \\ &\Rightarrow \quad L(\sum \lambda_i v_i) = 0 \end{aligned}$$

د ارزښتوني فنکشنونه يا توابع يا څېروني

موږ د بېلګې په توګه درې پولينومونه P_1, P_2, P_3 لرو د لاندې سره

$$\begin{aligned} P_1 &= (x-1)(x-2)(x-4) \\ P_2 &= (x-3)(x-5)(x-1) \\ P_3 &= (x-4)(x-2)(x-3) \end{aligned}$$

موږ اوس کړی شو یو د ارزښتوني تابع يا څېرونه تعريف کړو(a ځای دی په کوم کې چې ارزونه کيږی)

$$W_a(P) : P \mapsto P(a)$$

د ارزښتوني پولينوم کرښيز دی څکه چې لاندې $\forall \ P, Q \in \mathbb{Q}[X]$ او $\lambda \in K$ [4.2] باور لري :

$$W_a(\lambda P + Q) = \lambda W_a(P) + W_a(Q)$$

په دې توګه د ارزښتوني تابع سره کرښيز خپلواک وکتورونه په کرښيز خپلواک وکتورونو ځېره کيږي ای ماپينګmapping جوړوي، دا په دې معنا چې

P_1, P_2, P_3 کرښيز خپلواک دي، که $W_a(P_1), W_a(P_2), W_a(P_3)$ کرښيز خپلواک وي.

موږ د

$$\lambda_1 W_a(P_1) + \lambda_2 W_a(P_2)) + \lambda_3 W_a(P_3) = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره ښایو

: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$:

په دې معنا چې P د 1 په ځای کې ارزښتول کيږي، يعنې دپولينوم $P(1)$ ارزښت
ټاکل کيږي، که 1 ځای په ځای کړو :

	$P(1)$	$P(2)$	$P(3)$	
P_1	$=0$	$=0$	$\neq 0$	$\Rightarrow \lambda_3 = 0$
P_2	$=0$	$\neq 0$	$=0$	$\Rightarrow \lambda_2 = 0$
P_3	$\neq 0$	$=0$	$=0$	$\Rightarrow \lambda_1 = 0$

داچې درې وکتورونه، چې د ارزښتونې له لارې جوړيږي يا منځ ته راځي يا توليديږي،
کرښيز خپلواکدي، دادرې وکتورونه P_1, P_2, P_3 هم کرښيز خپلواک دی.

Isomorphismen ایزومورفیزمونه

V او W دې $\mathbb{K}-$ - وکتورفضاوې وي . V د $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ وکتور فضا
بنسټ وي. تابع $f: V \to W$ ټيک هلته ايزومورفيزم[4.3], ده، که

$$(f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n))$$

د W يو بنسټ وي. دا جمله په څټ يا برعکس هم باور لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

V دې یو $\mathbb{K}-$ -وکتروفضا او $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ دې بنسټ وي.

موږ ایزمورفیزم

$\mathbb{K}^n \longrightarrow V$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \longrightarrow \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n$$

کانونیکي بنسټ- ایزومورفیزم بولو. د اړتیا په حالت کې دا په $\Phi_{(v_1, v_2, v_n)}$ توګه هم ښایو. موږ دلته ګورو چې د کانونیکي بنسټ-ایزومورفیزم ځخه کار اخستلای شو، چې د یوونوکتورونو (واحد-) سره (کانونیکي بنسټ) او د وکتروفضا V د بنسټوکتورونو ځخه یو ماتریکی جوړ کړو، چې د دواړو وکتورفضاو ترمنځ ترنفورمي کیږي.

موږ دا داسې کړو چې د V د بنسټ وکتورونه یو په بل پسې په ماتریکس کې ولیکو.

ماتریکسونه Matrizen

یو ماتریکس $Mat(m \times n; K)$ یو د m لیکو او n درځونو(متو، ستنو) نظم دی د K بدن (پټي، ورشو، ساحه) ځخه. د یوه ماتریکس د یوګونو توکو د لیکې – او – متې کېدی شي د ایندکس لیکدودIndizeschreibweise سره ټیک کره شي:

a_{ij}

دلتهi لیکه او j متہ په کوته کوي.

کرښیزې فنکشنونه (توابع) د ماتریکسونو په څېر

هر کرښیزه تابع کېدی شي په ټیک یوه ماتریکش تنظیم شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوه ماتريکس رانګ Rang

د يوه ماتريکس رانګ د کرښيز خبلواکو ليکو/ يا د همغې د متو ګنون يا تعداد دی.

د متو رانګ = د ليکو راګ Zeilenrang = Spaltenrang

جمله :

د هر $m \times n$ ماتريکی لپاره باور لري:

د ليکوراک=د متو رانګ يا رانک

ښوونه:

ورکړ شوی يو $(m \times n)$ ماتريکس

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

موږ د $R_1, \ldots, R_m$ سره ليکې-وکتورونهښايو:

$$\begin{aligned} R_1 = & \quad (a_{11}, & a_{12}, & \quad \cdots, & a_{1n}) \\ R_2 = & \quad (a_{21}, & a_{22}, & \quad \cdots, & a_{2n}) \\ & & \cdots & & \\ R_m = & \quad (a_{m1}, & a_{m2}, & \quad \cdots, & a_{mn}) \end{aligned}$$

که r د ليکې رانک وي، نو موږ r کرښيز خپلواک وکتورونه لرو، کوم چې د دې لپاره بنسټ جوړوي:

$$S_1 = (b_{11}, b_{12}, \cdots, b_{1n}), S_2 = (b_{21}, b_{22}, \cdots, b_{2n}), \ldots, S_r = (b_{m1}, b_{m2}, \cdots, b_{mn})$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

هر لیکه وکتور R_i د لاندې بنسټ وکتورونو کرښیز ترکیب دی:

$$\begin{aligned} R_1 &= k_{11}S_1 + k_{12}S_2 + \ldots + k_{1r}S_r \\ R_2 &= k_{21}S_1 + k_{22}S_2 + \ldots + k_{2r}S_r \\ &\ldots \\ R_m &= k_{m1}S_1 + k_{m2}S_2 + \ldots + k_{mr}S_r \end{aligned}$$

د دې لپاره چې د ماتریکس هر توکی a_{ji} لاس ته راوړو، باید ټول ضریبونه، د لیکې وکتور ونه د لیکېفضاځخه وکتوروفضا انځور کړ، د بنسټ وکتور د اړونده توکي سره ضرب کړو. دا د a_{11} لپاره د بېلګې په توګه دی

$$a_{11} = k_{11} \cdot b_{11} + k_{12} \cdot b_{21} + \ldots + k_{1r} \cdot b_{r2}$$

له دې سره a د ټولو i لپاره د لیکې ډول دی.

$$\begin{aligned} a_{1i} &= k_{11}b_{1i} + k_{12}b_{2i} + \ldots + k_{1r}b_{ri} \\ a_{2i} &= k_{21}b_{1i} + k_{22}b_{2i} + \ldots + k_{2r}b_{ri} \\ &\ldots \\ a_{mi} &= k_{m1}b_{1i} + k_{m2}b_{2i} + \ldots + k_{mr}b_{ri} \end{aligned}$$

موږ کړی شو اوس هر د متې وکتور په لاندې توګه ولیکو:

$$\begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} = b_{1i} \cdot \begin{pmatrix} k_{11} \\ k_{21} \\ \vdots \\ k_{m1} \end{pmatrix} + b_{2i} \cdot \begin{pmatrix} k_{12} \\ k_{22} \\ \vdots \\ k_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + b_{ri} \cdot \begin{pmatrix} k_{1r} \\ k_{2r} \\ \vdots \\ k_{mr} \end{pmatrix}.$$

له دې امله دا وکتورونه د r وکتورونو کرښیز ترکیب دی:

$$\begin{pmatrix} k_{11} \\ k_{21} \\ \vdots \\ k_{m1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k_{12} \\ k_{22} \\ \vdots \\ k_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} k_{1r} \\ k_{2r} \\ \vdots \\ k_{mr} \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اړيين نهده چې داوکتورونه دې يو بل تهکربنيز خپلواک وي. مګر په هر حالت بايد هغه خوراجګ ګڼ(عدد) پهr رابند يا محدود وي، چې له کومهامله دی

د متې(درز يا ستنې يا ولاړې ليکې يا کيلې) رانک Spaltenrang $\leq r$

سرې همداسې د تراسپونی شوې ماتريکس سره هم مخ ته ځي او په دې توګه ،، Zeilenrangد ليکې رانک ،، لاس ته راوړي. له دې سره دی: $\leq r$

د ليکې رانک = دمتې رانک

په څټ- يا معکوس ماتريک Inverse Matrix

يو مربع يا څلوريزه $n \times n$ ماتريکسA يو معکوس ماتريکس A^{-1} لري،، که يو لهدې لاندې برابر ارزښته اړيکو څخه يو پوره وي.

- د متو (ليکو) وکتورونه کربنيز خپلواک دي.
- $rang(A) = n$
- $det(A) \neq 0$
- له دې سره اړوند کربنيزه تابع f_A يو ايزومورفيزم دی.

څرخون- او هدارون-ماتريکسونه(--- د انعکاسونې --)

په $\mathbb{R}^2$کې څرخون يا څرخونه:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په $\mathbb{R}^2$ کې هندارونه:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

دیترمینانتونه Determinanten

دیترمینانتونه دڅه لپاره دي؟

دیترمینانتونه په $\mathbb{R}^2$ کې د غبرګ اړخیز(موازی الاضلاع) په $\mathbb{R}^2$کې د یوه شپاټ(کشکول شوی کوادر یا مکعب) او په $\mathbb{R}^n$ کې د یوه غبرګ خوایز سطحه ورکوي.
له دې سره روښانهکېدی شي،چي ولي یو دیترمینات صفر دی، که وکتورونه یو بل ته کرښیز بلواک وي. که په کې دوه وکتورونهورکړ شوې وي او دا یو بل ته کرښیز بلواک وي، نو دا یو غبرګاړخیز نه شي غزولی او له دې امله مساحت صفر دی. له دې سره هر مربع – یا څلوری-ماتریکس یوه ګڼ یا عدد سره تنظیمیږي.

تعریف(پیژند) Definition

دیترمینانت هر ماتریکس $M(n \times n, \mathbb{K})$ یو عدد $\mathbb{K}$ باندې تنظیموي:

$$\det : M(n \times n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$$

فنکشن (تابع) لاندې خویونه لري:

لومړی: دیترمینانت په هره لیکه کې کرښیزه ده. داپه دې معنا، چي که سرې له ماتریکس M یوه کرښه لرې بریږدي یا پرېږدي او د یو کتور x سره بدله کړي، چي بیا دا تابع نسبت دې وکتور ته ځان کرښیز نیسي.

دویم : که د ماتریکس د لیکې رانک نسبت د لیکې تعداد n ته کوچنی وي، نو $\det A = 0$ ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم : د یوونماتریکس یا واحدماتریکس ډیترمینانت 1 دی:

$$\det(E) = 1$$

ټیک یوه تابع شته، چې دا خویونه پوره کوي. دا باید وښایو، داسې چې موږ یواځنوالی او شتونوالی وښایو. دا هر شرط لپاره باید په یواځې تګهوښول شي.

مرشتندوي جمله:Hilfssätze :

د ښوونې لپاره لومړی لاندې مرستندوی جملې ښایو:

لومړی: که په ماتریکس A کې دوه لیکې بدلې شي، نو ماتریکس A' لاس ته راځي، نو باور لري.

$$\det A' = -\det A$$

.

دویم : که د یوعماتریکس لیکه د یوه سکالار λ سره ضرب شي نو ماتریکس A' لاس ته راځي او له دې سره باور لري:

$$\det A' = \lambda \det A$$

دریم : که په یوه ماتریکس A کې یوه لیکه د ماتریکس د بلې لیکې سره جمعه (ورزیاته) شي نو ماتریکس A' لاس ته راځي، نوله دې څخه دیترمینان بې اغیزه پاتې کیږي: $\det A = \det A'$

د دې مرستندوی او یواځنوالی او شتون جملو ښوونه دې په Jänichکې وکتل شي.

د دیترمینانتو ساده شمېرنه

لاندې برحه

(c) ketabton.com: The Digital Library

- 2×2
- 3×3

د لاپلاس د وديزېنې جمله Laplace Entwicklungssatz

د لاپلاس د وديزېنې جمله مرسته کوي، کد له 3×3 ماتريکسونو څخه لوی ديترمينانتونه ټاکو[6.1] .

سرې کړی شي ديترمينانت ته وده ورکړای شي، که ماتريکس تل په کوچنيو ديترمينانتونو و وېشي. دلته لاندې ماتريکس A_{ij} هغه ماتريکس ده، چې د ماتريکس A د $i-$-مې او $j-$-مې ليکي همداسې متې د لرې کولو څخه لاس ته راځي. سرې کړی شي چې وديزيېنه سرته ورسوي يا د ليکې له لارې

$$det\ A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot A_{ij}$$

يا د متوو پسې

$$det\ A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot A_{ij}$$

د ضريب يا ځلووني $(-1)^{i+j}$ په مرسته يو د سترنجتختې ډوله مخ يا موسترمنځ ته راځي. له دې سره د ديترمينانت مخنخښه ټاکل کيږي:

+	−	+	−	+
−	+	−	+	−
+	−	+	−	+
−	+	−	+	−
+	−	+	−	+

بېلګه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$	ودیزیینه پورته لیکه پسې پورته لیکه => په لاندې دیترمینات کې د لیکې په څیر له منځه وړل کیږي =

$$+a_{11}\cdot \underbrace{det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}}_{1.Spalte\ \ ausgeblendet} \quad -a_{12}\cdot \underbrace{det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}}_{2.Spalte\ \ ausgeblendet}$$

۱ -م. درځ لرې کړي ۲ -م درځ لرې کړي

$$+a_{13}\cdot \underbrace{det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{pmatrix}}_{3.Spalte\ \ ausgeblendet} \quad -a_{14}\cdot \underbrace{det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}}_{4.Spalte\ \ ausgeblendet} =$$

۳ ــم درځ لرې کړی ۴ ــم درځ لرې کړي

د دیترمینانتونو ساده ځانګړنې

- که یوه لیکه یا متې کرښیز بلواک وي، نو باور لري

$$det\ \ A = 0$$

دا د لاندې سره په برابره معنا ده(د لیکو تعداد همداسې د متو تعداد)

$$rang\ A < n$$

- که څوک یوه متې د بلې سره بدله کړي یا یوه لیکه د بلې سره بدله کړي،

(c) ketabton.com: The Digital Library

مخنخښه تغیر خوري(دا چې د دیترمینانت تابع الترنیري(بدیلي)
alternierend ده)

$$det\ A_{ij} = -det\ A_{ji}$$

- کهد ماتریکس یوه لیکه د سکالار سره ضرب شي،نوباید تنها دیترمینانت هم د همغه سکالار سرهضرب شي:

$$det\begin{pmatrix} & \vdots & \\ \lambda\cdots\lambda & \lambda a & \lambda\cdots\lambda \\ & \vdots & \end{pmatrix} = \lambda\ det\begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & a & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}$$

په همدې توګه که دیترمینانت د λ^n سره هم ضربې شي، د کوم سره چې n د لیکو تعداد دی، داسې دهلکه که یوه ماتریکس ټوله له λ سره ضرب شي.

$$det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot det\ A$$

- د یوونماتریکس (واحد-) دیترمینانت 1 ده:

$$det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

- د یوه درېګوډي ماتریکس دیترمینانت د هغه د دوه کونجتړې ضرب دی:

$$det\begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \ \cdots \ \cdot \lambda_n$$

داسې یوه درېګویزه ماتریکس کړی شو د هر په خوښه $n \times n$ - ماتریکس څخه د ساده لیکو عملیو څخه د ګاوسقانون له مخې لاس ته راوړو. موږ باید د دیترمینانت په ټاکلو یو اخې دې ته پام وکړو، چې لیکه بدلون دیترمینانت ته له

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځانسره یوسو. نو که r د لیکو د بدلون تعدادوي، چې مور سر ته رسولې چې درېګوډیزه بڼه لاس ته راوړو، باور ولري::

$$\det A' = (-1)^r \cdot a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ \ldots \ \cdot a_{nn}$$

- که څوک یوه ماتریکس ترنسپوني کړي(داپه دې معنا چې د لیک څخه متې جوړوي او له متو څخه لیکې او یا په مربع یا ځلوریزه ماتریکسونوکې دا په دوهکونجترې(قطر) هنداره کوي) په دې حالت کې د ترادپوني ماتریکس دیترمینانت ارزښه د نه ترانپوني شوې ماتریکس د دیترمینانت سره برابر دی:

$$\det \ A = \det \ A^T$$

کوچنی بام: په ضرب کې دې پامدې وي. باور لري

$$(AB)^t = B^t A^t$$

- دیترمینانت- ضرب-جمله

$$\det(A \cdot B) = \det \ A \cdot \det \ B$$

.... ښوونه یې دلته ورزیاته کړی.

د ایندومورفیزم دیترمینانتونه

دا چې مور هر ایندومورفیزم f د مربع – یا ځلوری-ماتریکس سره انځورولی شو[6.2]، له دې سرهکړی شو چې د ایندومورفیزم دیترمینانت هم تعریف کړو:

$$\det f := det A_f \in \mathbb{K}$$

اوس داپوښتنه رامنځ ته کوو، چې ایا د V د مختلفو بنسټونو لپاره دیترمینانتونه مختلف دي. دا کېدی شي وښوول شي چې دیترمینانت د بنسټ د ټاکنو یا انتخاب څخه خپلواک

(c) ketabton.com: The Digital Library

دي. له دې سره لهدې امله کړی شو چد د یوه ایندومورفیزم دیترمینانت یواځنې ت عریف کړو.

أيګن ارزښت(Eigenwerte(Eigenvalue

یادونه: دا أیګن په ټول ژبوکې همداسې لیکي. دا الماني وی یا لغات دی، د خپل په معنا دی.

أيګن ارزښت(Eigenwerte(Eigenvalue

F دې د وکتورفضا V_K ایندومورفیزم وي. یو $\lambda \in K$ أیکنارزښت بلل کیږي، که یو $v \in V$ شتون ولري د $v \neq 0$ سره ، داسې چې باور ولري.

$$F(v) = \lambda v$$

أيګنوکتور Eigenvektoren

F دې د وکتورفضا V_K یو ایندومورفیزم وي. هر له صفر وکتور مختلف $v \in V$ د

$$F(v) = \lambda v$$

سره د F أیګنوکتور بلل کیږي(أیګن ارزښت λ ته)

دوه -کونجتړې کیدونکې یا دوه-کونجتړې کیدنوړ(قطري کیدونکې) Diagonalisierbar

یو ایندومورفیزم دوه کونجتړې کېدونکی (قطري کېدونکې یا – وړ) بلل کیږي، که د أیکن وکتورونو څخه یو بنسټ شتون ولري. دا په دې معنا چې د ایندومورفیزم لپاره یو دوه کونجتړی ماتریکس د لاندې بڼه شتون لري(د متو وکتورونه بنسټ ومتورونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

شتون لري، λ_i أيګن ارزښتونه دي)

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

أيګن فضاوې Eigenräume

F دې د V ايندومورفيزم وي او $\lambda \in K$ ، نو

$$Eig(F;\lambda) := \{v \in V : F(v) = \lambda v\}$$

د F يو أيګنفضا بولو نسبت و λ ته.

- اګن فضا د V وکتورفضا يو برخوکتور فضا ده.
- صفروکتور په ليګنوکتور کې خوندي نه دی.
- $Eig(F;\lambda)\{0\}$ د λ اړونده أيګنوکتورونو ډېرى ده
- (S.210) ...

کرکتريستيکي پولينوم يا سړى څکګه أيګن ا رزښتونه پيدا کوي؟

سړى کړى شي چې أيګن ارزښتونه وټکي، داسې چې د کرکتريستيکي پولينوم صفرځايونه پيدا کوي. باور لري[7.1]

د ايګن ارزښت دى له دې لاس ته راځي او په څټ

$$\lambda \ ist \ Eigenwert \ von \ F \Leftrightarrow det(F - \lambda id_V) = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

سړی د لاندې ماتریکسونو دوه -کونجتړې(قطر) پیداکوي:

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{mn}-\lambda \end{pmatrix}$$

سړی أیګن وکتورونه او أیګن ارزښتونه څنګه پیدا کوي؟

که څوک أیګن-ارزښت λ ولري،نو کېدی شي و هغه ته مناسب أیګنوکتور وټاکي، داسې چې سړی لاندې برابرون - یا مساواتسیستم حل کړي:

$$(A-\lambda I)X=0$$

لکه کریتیکي پولینوم لپاره سړی همداسې ببرته ماتریکس جوړوي، چېرته چې د λ لپاره أیګن ارزښتونه ځای په ځای کوي . بیا سړی دا هوموجېن مساواتسیستم حل کوي.

یو ماتریکس سړی څنګه دوه-کونجتړې یا قطري کوي؟

لومړ: که لړ ایګنوکتورونه تولید یا جوړېدی شي، دې ته (نسبت دې ته) چې ماتریګس درزونه همداسې لیکي لري، نو متریکس دوه کونجتړې کیدونکې نه ده.

که پوره وکتورونه شتون لري او ودې ته ایګن ازښتونه نو $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ باور لري

$$D=S^{-1}AS=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

سکالار ضرب(دننني څل یا ـضرب) او نورم

(c) ketabton.com: The Digital Library

Skalarprodukt (Innenprodukt) und Norm

سکالار ضرب

تعریف یا پیژند:

یو تابع $<,>: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, $(x,y) \to \; <x,y>$ سکالار ضرب بلل کیږي، که $\forall \; x, x', y \in \mathbb{R}^n$ دا لاندې باور ولري:

- $<x+x',y> = <x,y> + <x',y>$ کربنیزوالی (
- $<x,y> = <y,x>$ (سیومتري (Symmetrie
- $<x,x> \geq 0$ او $<x,x> = 0 \Rightarrow x = 0$ مثبت او دیفینیت(Positiv und definit)

بېلګه:

- $<a,b> \mapsto a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots a_nb_n$

نورم Norm

پیژند(تعریف): یوه ځیرونه یا فنکشن $|| \; || : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ نورم بلل کیږي، که لاندط امسیومونه باور ولري

- $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ دیفینیت
- $||x|| \geq 0$ مثبت

(c) ketabton.com: The Digital Library

- $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$ هوموجين

- $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$ درې ګوډي يا مثاثاتي نابرابرون

بيلګه:

$$||a||_\infty = ||(a_1, a_2, \ldots, a_n)||_\infty = \max(|a_i|; i = 1, \ldots, n)$$

ماکسيموم يا خورا جګ ارزښت

$$||a||_1 = ||(a_1, a_2, \ldots, a_n)||_1 = |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|$$

(يو نورم)

$$||a||_2 = ||(a_1, a_2, \ldots, a_n)||_2 = \sqrt{< a, a >} = \sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2 + \ldots + |a_n|^2}$$

(د پيوتاګوراس نورم)

د وازيدو کونج تعريف:

د يوې وکتورفضا د x او y وکتورونو ترمنځ د وازېدوکونج α په لاندې توګه تعريف دی

$$< x, y >= ||x|| \, ||y|| \, \cos\alpha \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{< x, y >}{||x|| \, ||y||}$$

د وازيدو کونج د تعريف لپاره بايد کوساين تل تعريف وي. موږ بايد وښايو، چې دا لاندې باور لري:

$$-1 \leq \frac{< x, y >}{||x|| \, ||y||} \leq 1$$

دا د کوشي –شوارخ- نامساواتو خونديونه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کوشي –شوارځ- نامساوات

دپه خوښه وکتورونو $u, v \in V$ لپاره باور لري:

$$< u, v >^2 \leq < u, u >< v, v >$$

يا ورته(اکويوالنت):

$$| < u, v > | \leq ||u|| \cdot ||v||$$

ښوونه:

د $y = 0$ لپاره ساده دی. وي دې $y \neq 0$. موږ له يوه واړه چل څخه کار اخلو او $\lambda := \frac{< x, y >}{||x|| \, ||y||} \in \mathbb{R}$ ږدو. لاندې باور لري:

$$\begin{aligned} 0 \leq < x - \lambda y, x - \lambda y > &= < x, x > -2\lambda < x, y > + \lambda^2 < y, y > \\ &= ||x||^2 - 2\frac{< x, y >^2}{||y||^2} + \frac{< x, y >^2}{||y||^2} \\ &= ||x||^2 - \frac{< x, y >^2}{||y||^2} \end{aligned}$$

په ورته توګه باور لري $< x, y >^2 = ||x||^2 ||y||^2$ او له دې سره $| < x, y > | \leq ||x|| \, ||y||$.

نورمال شوي ا و اورتوګونال وکتورونه

وکتورونو نورماليدنه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

وکتورونه نورمال شوي دي، چې اوږدوالی 1 لري، دا په دې معنا، چې $< v, v >= 1$
یا $||v|| = 1$.

یو وکتور نورمال کیدی شي یا کیږي، داسې چې دی د په څټ یا معکوس ارزښت سره ضرب شي:

$$v_{normalisiert} = \frac{1}{||v||} \cdot v$$

اورتوګونال وکتورونه (یو په بل ولاړ -)

دوه وکتورونه v_1 او v_2 یو بل ته اوتوګونال دي، که دا یو په بل ولاړ یا عمود وي. یا نیغ ولاړ وي. له دې امله د دوي سکالار ضرب یا ځل 0 دی.

$$< v_1, v_2 >= 0$$

هر وکتورفضا ته لږ ترلږه یو(یعنې په ریښتوني زیات) له اورتوګونال وکتورونو بنسټونه شته. کا دا هو اوږدوالی 1 ولري، نو دا *اورتونورمال* دي.

اورتونورمال بنسټونه:

یو اورتونورمال بنسټ هغه بنسټ دی، په هغه چې ټول وکتورونه دي چې نسبت سکالار ضرب ته اوږدوالی 1 لري او یو بل ته اورتوګونال دي.

سرې کړی شي هر بنسټ ته د شمیدت اورتوګونالیدونکي تلنلار **Schmidtschen Orthnormalisierungsverfahrens** په مرسته یو اورتونورمال بتسټ جوړ کړي:

موږ غواړو د $i = 1$ تر $i = n$ پورې لاندې فرمول وځغلوو، د کوم سره چې n د بنسټ وکتورونو تعداد یاګنون دی، او یو بل پسې اورتوګونال وکتورونه د 1 اوږدوالي پیدا کوي یا میندي، چې دا موږ سملاسې د بل وکتور شمیرنو لپاره اړین مومو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$e_i = \frac{v_i - \sum_{k=1}^{i-1} e_k \cdot < v_i, e_k >}{\left\| v_i - \sum_{k=1}^{i-1} e_k \cdot < v_i, e_k > \right\|}$$

ځای بدلون Permotation

ليکندود

يو ځايبدلون يو په – يعني بيجکتيو ځيرونه يا فنکشن دی، کوم چې n توکي ($n > 0$) تنظيموي.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma(1) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ \sigma(2) \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} n \\ \sigma(n) \end{pmatrix}$$

دا پورته ليکنډول دا معنا لري، چې د بيلګې په توګه 1 د $\sigma(1)$ ځای ته راکښل کيږي.

په همدې توکه ځيوکليکي يا تل بيرته راګرځيدونې ليکندود هم ورځنی يا بلد دی. د بيلګې په توګه:

$$(12)(3)(564) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

ترانپوزيشن Transposition

يو ترانسپوزيشن د ټيک دوه يتوکو بدلون دی په ځيوکليکي ليکندود يعنې (ab) .

هر پرموتيشن د دوه ترانپوزشنونو کمپوزشن(ضرب) دی.

د ممکنه ځای بدلونو ګڼون يا تعداد

(c) ketabton.com: The Digital Library

که یوه ډېرۍ یا سټ n توکي لري، نو دا $n!$ ځای بدلونونه ممکن دي.

پاتې یا تش ځایونه

که یو پرموتیشن له یوه کوچني ځای څخه و یوه لوي پسې څیره کړي، نو تشځایونه تولیدیږي. که $j < k$ او $\sigma(k) < \sigma(j)$ وي، نو دا یو تشځای دی.

د ډاکتر ماخان شینواري لیکنې

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوې لیکنې:

<u>1988 Vienna (Austria):</u>

<u>لومړی:</u>

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

<u>1987 Vienna (Austria):</u>

<u>دویم:</u>

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, at the University of Vienna/Austria

لاندې د شمیرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

2000 Bonn (Germany):

دريم: د شميرپوهنې ستر کتاب : د شميرپوهنې برسيره د انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې ليکنه به يې ځنو ځايونو غزېدلې او ځنې ځايونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو کې شميرنه، د ګټې – او کټې د کټې شميرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولي اړتياوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شميرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شميرپوهنې الماني ـ پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځيال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې يو پيل دی، ساده ليکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمير پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

(c) ketabton.com: The Digital Library

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

<u>1997 Bonn (Germany):</u>

یوولسم: د افغانستان په هکله سپیني خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de) :

لاندې د برینکمن لیکنې چې له پرینکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ ـــ شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دویم ټوک

۳ ـــ شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه د ښوونځي لپاره

۵ ـــ احصایه یا ستاتیستیک دښوونځي لپاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – اناليزی ۱

۷ – اناليزې ۲

۸ – کرښيز الجبر

۹ - د شميرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ – فنکشنل اناليز

۱۲ – وکتور شميرنه

نورې ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښيز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه يا د اعدادو تيوري

زما ليکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شميرپوهنې ستر کتاب دويم چاپ د پوره تغيراتو سره : دا کتاب د شميرپوهنې برخې برسيره د

انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په

کتاب کې د اړتيا سره زياتونه او کونه راغلې

۱۶ - څمککچپوهنه (هندسه) دويم چاپ د پوره تغيراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دويم چاپ له تغيراتو سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۸ - ډېرئ پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

-۲۲ داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزې پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه لیکنې دي، چې څنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې وبه غزیږي.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپریږي:

د ګروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیونې سره په کې راغلي او ماته زیات ګټور برېښي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library