شمیر پوهنه

(ریاضي)

ستر کتاب

Ketabton.com

لومړۍ برخه

دویم غځېدلی چاپ

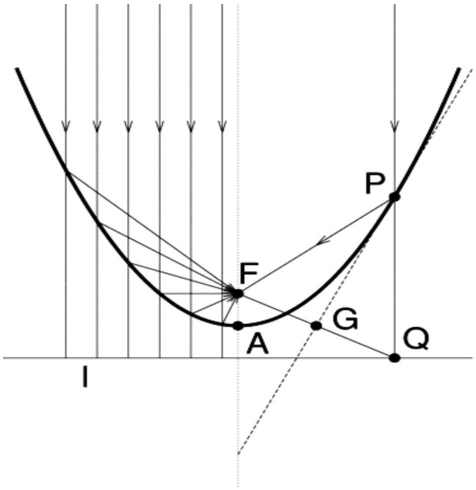
لیکونکی: ډاکتر ماخان (میرې) شینواري

(c) ketabton.com: The Digital Library

شمیرپوهنه

(ریاضي)

سترکتاب



دویم غزېدلی چاپ

لیکونکی: ډاکتر ماخان میرِي شینواري

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلوي ښبنتن په نامه

په دې هيله، چې په دې ليکنو او ژباړو به مې زموږ د بې وزلي او له پوهې پاتې ملت - په ما د پوهنې لپاره د لګښت - لپاره د پوهنې په لور داسې لږ ونده اخستې وي.

کتاب پيژندنه

د کتاب نوم: د شميرپوهنه ستر کتاب(لومړی برخ)

ليکونکی: ډاکتر ماخان،، ميری،، شينواری

makhanshinwari@gmail.com

د خپريدو لړی

خپرندوی: د افغانستان کلتوري ودې ټولنه

جرمني

چاپ کال ۲۰۱۲

چاپ چارې

دانش خپرندويې ټولنې تخنيکي څانګه

WWW.danishpress.com

د چاپ حقوق خپرندوې ټولنې ليکونکي يا ژباړي سره خوندي دي.

پښتو مو ژبه او شميرپوهنه پرې ساده ده

(c) ketabton.com: The Digital Library

د خپرندوی ټولنې يادښت

له هغې مودې را په دې خوا، چې د افغانستان د کلتوري ودې ټولنې د علمي، ساينسي او طبي اثرو د خپرولو لړۍ پيل کړې، تراوسه يې په دې لړ کې مهم اثار خپلو هيوادوالو ته وړاندې کړې دي.

موږ باور لرو، چې پښتو ژبه هغه وخت په يوه مهمه غني ژبه بدليدلای شي، چې د پوهې په ګڼانه سمبال شي او په علمي او اکاډميکو اثارو غني شي.

اوس چې زموږ ملي سراسري ژبه د بيلابيلوګواښونو او چلنجونو سره مخامخ ده، پر موږ ټولو ده، چې د دغه ګواښونو په وړاندې به په نره ودريږو او د علم او قلم په ژبه به ځواب ورته ووايو.

د اتحاديي له حوا د ډاکتر ماخان شينواري تراوسه زياتو چاپ شويو اثارو په څنګ کې، د ده د پنځه وېښت شمير پوهنې نويو ژباړو او ليکنو او دوه ټولنيزو ليکنو تر منځ، دغه اثر په همدې لړ کې ځکه د ارزښت وړ دی، چې د علمي، ساينسي اثارو د خپراوي په لړ کې د يوه مهم ګام په توګه ګڼل کيدای شي او هيله ده، چې د دې برخې مينه وال لوستوال، زده کوونکي او د پوهنتو زده کړې کڅه ترې واخستلی شي.

په درناوي

د افغانستان کلتوري ودې ټولنه

۲۰۰۱۲ ز ک

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ليکونکي مننه

د هر څه له مخه د هغو ليکونکو پروفيسرانو څخه زياته مننه، چې د ليکنو څخه يې زما د ژباړې لپاره تفاهم لري. ماته د دوي د ليکنو د ژباړې په هيڅ ډول مادي ګټه نه شته او دا کار مې يوازې په يوه د پوهنې توانمندي ، مګر وروسته پاتې ژبې ويونکي ولس ته وړاندې دی، دا دې د دې پروفيسرانو له خوا په پوهنيزه اړخ کې زموږ په دې اړخ کې هم مرستې ته اړ ولس سره مرسته وي.

همدا ډول زموږ،، د افغانسان کلتورې ودې ټولنه،، جرمنې، د غړو، مرستندويانو او په تيره بيا د مشر تابه څخه زياته مننه کوم، چې پرته له خپرندوې ټولنې په توګه يې د دې ليکنو زياته اقتصادي ونډه هم په غاړه اخستې.

دې لاندې زما کليوالو ملګرو او ملګرو د دې کتابونو په چاپ کې د توان سره سمه اقتصادي ونډه اخستې، چې زه ترې زياته مننه کوم:

د ښاغلي ډپلوم انجنير ريحان الدين حساس، ښاغلي ډپلوم انجنير محمد اکبر نور، ښاغلی ډاکتر سردار ګانه وال، ښاغلی ډاکترماڼوګل ګانه وال، ښاغلي ټولنپوه محمدعارف بيان، ښاغلي ډپلوم انجنيرمحمد ايوب بيان، همداسې زما د ملګري اروابناد ډاکتر حاجي محمد سلطانزي د ځوي ښاغلي ډاکتر صالح محمد سلطانزي ، ډپلوم انجنير او ډپلوم اقتصاد پوه رحمت الله فتحي او نه اخر زما د لور ډاکتر څانګې شينواري او زما د ځوي اقتصاد پوه او ټولنساپوه اباسين شينواري.

نه د ټولو په اخر کې زما له ميرمن ښاپرۍ څخه ډېره زياته مننه، چې زما د ليکنو- نه دا چې مخه يې نه ده نيولې- پوره ملاتړ کړي.

بيا هم له دوي څخه د زړه له کومې مننه کوم او لوي څښتن دې ورته اجرونه ورکړي، چې داسې مرستو ته دوام ورکړي.

په مننه : ستاسو ماخان شينواری

جرمني د بن ښار

۲۰۱۲ ز ک

(c) ketabton.com: The Digital Library

نیولیک

نوې سریزه

سریزه

افغاني، یوناني ، لاتین الف ب

شمیرپوهنیزې نخښې

۰ ۱	د شمیرپوهنې سم اند یا منطق	۱
۱ ۰ ۱	پوهنیزه ژبه او پیدایښت یا طبیعي ژبه	۱
۲ ۰ ۱	د شمیرپوهنې سم اند بنسټیزه کلیمې	۳
۱ ۰ ۳ ۰ ۱	ثابتې ، اووښتوني یا واریابلې ، ترمونه	۳
۲ ۰ ۲ ۰ ۱	وینا	۵
۳ ۰ ۲ ۰ ۱	د دوه ارزښتوالي اصول یا پرینځیپ	۷
٤ ۰ ۱	وینا فورم یا ۰بڼه او کوانتورونه	۱۳
٥ ۰ ۱	اړیین او پوره کیدونکي شرطونه	۲۸
٦ ۰ ۱	د شمیرکلیمه یا د لغاتو	۳۱
۷ ۰ ۱	برابرون او نابرابرون	۳۳
۱ . ۸	تمرینونه	۳۸
۰ ۲	ډیر ئ پوهنه	۳۹
۱ ۰ ۲	د ډیرئ پوهنې کلیمه	۴۰
۲ . ۲	د ډېریو ترمنځ اړیکې	۴۵

(c) ketabton.com: The Digital Library

	برخدېرې	۴۶
	د يوې ډېرې توان يا تواندېرې (توانسټ)	۴۸
۲ ۰ ۳	په ډېرې کې کاروني يا عمليې(۱)	۵۰
	غوڅدېرې يا متقاطعدېرې	۵۲
	د يوې ډېرې يا سټ کمپلېمنت	۵۷
۲ ۰ ٤	ځيرونه	۵۸
	تمرينونه	۶۷
۳ ۰	د رييل ګڼونو سره د شميرلو بنسټيزې...	۷۰
۳ ۰ ۱	د ګڼونو- يا اعدادو سيستم جوړښت	۷۰
۳ ۰ ۱ ۰ ۱	پيداينتي يا طبيعي ګڼونه	۷۰
۳ ۰ ۱ ۰ الف	د پيداينت يا طبيعي ګڼونو جوړښت	۷۱
۳ ۰ ۱ ۰ ب	د پيداينت ګڼونو انځورونه او شميرنه	۷۲
۳ ۰ ۱ ۰ پ	د شميرنې بنسټيز قوان ين	۷۸
۳ ۰ ۱ ۰ ۲	ټولګڼونه	۸۴
۳ ۰ ۱ ۰ ۲	الف د ويش تيوري	۸۶
۳ ۰ ۱ ۰ ۲ ب	غټ ګډ پرويشونی(بزګترين مقسوم عليه ...)	۸۸
۳ ۰ ۱ ۰ ۳	راشنلګڼونه	۱۰۶
۳ ۰ ۱ ۰ ٤	رييلګڼونه	۱۰۸
۳ ۰ ۲ ۰ ۱	ماتشميرنه	۱۱۹

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۳	تمرینونه	۱۳۰
۰ ٤	پوتنځ یا توان ، ریښه یا جذر	۱۴۱
۱ ۰ ٤	توان د ټولګنیز په جګ یا اکسپوننت	۱۴۱
۲ ۰ ٤	ریښه او توان د راشنل اکسپوننت یا جګګن سره	۱۴۴
۳ ۰ ٤	توان د ریيلګڼ اکسپوننت یا جګګڼ سره	۱۵۱
٤ ۰ ٤	ټولګه	۱۵۲
۰ ۵	لوګاریتم	۱۵۸
۱ ۰ ۵	د لوګاریتم کلیمه	۱۵۸
۳ ۰ ۵	ټولګه	۱۶۶
۰ ٦	ګونومتري	۱۶۹
۱ ۰ ٦	بنسټیزه څمککچپوهنه یا هندسه	۱۶۹
۱ ۰ ۱ ۰ ٦	ټکی او کرښه	۱۶۹
۲ ۰ ۱ ۰ ٦	کونج	۱۷۱
۳ ۰ ۱ ۰ ٦	درېګوډئ	۱۷۴
٤ ۰ ۱ ۰ ٤	کونکروانیځ او ورته والی	۱۷۸
۵ ۰ ۱ ٦۰	ولاړکونجیز دریګوډئ	۱۸۴
۲ ۰ ٦	په ولاړکونجیز دریګوډئ کې د ...	۱۸۸
۳ ۰ ٦	په یوونګردئ کې د کونج بلواک ..	۱۹۰
٤ ۰ ٦	د ساین او کوساین جملې	۱۹۵

(c) ketabton.com: The Digital Library

٦ ، ٥	تریګنومتریکي کتمتوالی	۲۰۵
۶ . ۵	تریګنومتریکي یا کونجکچیز فرمولونه	۲۱۵
۰۷	کمپلکس ګڼونه	۲۲۲
۰۸	د ښووني یا ثبوت متودونه	۲۳۵
۸ ، ۱	سیده ښوونه	۲۳۵
۸ . ۲	ناسیده ښوونه	۲۳۷
۸ ، ۳	د پوره ایندکشن له لارې ښوونه	۲۳۹
۹	لاینیز برابرون له یوې اوړیدونې یا ...	۲۴۳
۱ ، ۹	لاینیز برابرون	۲۴۴
۱۰	کومبیناترویک، د بینوم جمله	۲۶۶
۱۰ ، ۱	فاکولتیت یا فاکتوریل	۲۶۶
۱۰ ، ۲	د بینوم ځله ونه	۲۶۷
۱۰ ، ۳	د بینوم جمله	۲۷۰
۱۰ ، ٤	کومبیناتوریک	۲۷۴
۱۰ ، ٤ ، ۱	پرموتیشن	۲۷۵
۱۰ ، ٤ ، ۲	واریيشن	۲۸۰
۱۰ ، ٤ ، ۳	کمبینیشن	۲۸۶
۱۰ ، ٤ ، ٤	د پرموتیشن، واریيشن او	۲۹۱
۰۱۱	لانیز الجبري برابرونونه	۲۹۵

١١ ٠ ١ لانيز برابرون له دوه اوړيدونو يا ... ٢٩۶
١١ ٠ ١ ٠ ٣ دويمه درجه ديترمينانت او د كرامر... ٣٠٧
١١ ٠ ١ ٠ ٤ د ګاوس الګوريتم ٣١٢
١١ ٠ ١ ٠ ٥ له دوه وو زيات برابرونونه له دوه ... ٣١۶
١١ ٠ ٢ لاينيز برابرونونه له درې ٣١٧
١١ ٠ ٢ ٠ ١ يو برابرون له درې ناپيژندونو سره ٣١٧
١١ ٠ ٢ ٠ ٢ دوه برابرونونه له درې ... ٣١٨
١١ ٠ ٢ ٠ ٣ دريمه درجه ديترمينانت او د ... ٣١٩
١١ . ٢. ۴ د ګاوس لګوريتم ٣٢٢
١١ ٠ ٣ په خوښه ډېر مساوات د په خوښه ... ٣٢٥
١١ ٠ ٣ ٠ ١ د n -م درجې ديترمينانت او د ... ٣٢۶
١١ ٠ ٣ ٠ ٢ د ګاوس الګوريتم ٣٢٨
تمرنونه ٣٣٣
١٢ الجبري برابرونونه ٣۴٠
١٢ ٠ ١ نالاينيز برابرونونه ٣۴٠
١٢ ٠ ٢ څلورىٔ ئيز يا مربع برابرونونه ٣۴٣
١٢ ٠٢ . ١ د دوه په جګ برابرونونه ، د وييتا جمله
١٢ ٠ ٢ ٠ ٢ څلورىٔ برابرونونه ، چې په نورمال ٣۵٠
١٢ ٠ ٢ ٠ ٣ د n -م درجې ځانګړي برابرو... ٣۵١

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳۰۱۲	دریمه درجه برابرونونه	۳۵۷
۴۰۱۲	د ریښې برابرونونه	
۱۳	ترانسځیندنت برابرونونه	۳۷۵
۱۰۱۳	لوګاریتم برابرونونه	۳۷۵
۲۰۱۳	اکسپوننشل- یا په جګګړ برابرونونه	۳۸۰
۳۰۱۳	ګونومتریکي یا کنجکچیز برابرونونه	۳۸۵
۱٤	له نابرابرونونو او مطلقه ارزښت ..	۳۹۶
۱۰۱٤	نابرابرونونه	۳۹۶
۱۰۱۰۱٤	بنسټیزې کلیمې او شمیر قوانین	
۱۰۱٤ الف	اینتروال	۳۹۷
۲۰۱۰۱٤	نابرابرونونه له یوې ناپیژندونکی...	۴۰۰
۳۰۱۰۱٤	د نابرابرونونو سیستم ...	۴۰۹
٤۰۱۰۱٤	نابرابرونونه له دوه ناپیژندونکو سره	۴۱۱
۲۰۱٤	برابرونونه او نابرابرونونه	۴۱۴
۱۰۲۰۱٤	له مطلقه ارزښت سره شمیرنه	۴۱۴
۲۰۲۰۱٤	برابرونونه له مطلقه ارزښت سره	۴۱۵
۳۰۲۰۱٤	نابرابرونونه له مطلقه ارزښت سره	۴۲۰
۱۵	بلواک یا فنکشنونه یا طابع	۴۳۰
۱۰۱۵	د بلواک کلیمه او د بلواک انځورونه	۴۳۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ ۰ ۱۵ د بلواک خویونه ۴۳۳

د ستر کتاب دویمه برخه

١٦ د هوارې یا سطحې شننیزه هندسه ... ۴۶۶
١ ۰ ١٦ کربنه ۴۶۶
۲ ۰ ١٦ ګردۍ ۴۷۵
۳ ۰ ١٦ ایلیپسې ۴۸۲
٤ ۰ ١٦ هیوپربول ۴۸۷
٥ ۰ ١٦ پارابول ۴۹۲
٦ ۰ ١٦ ټولګه ۴۹۴
١٧ وکتور شمیرنه ۵۰۲
١ ۰ ١٧ د وکتور پيژند یا تعریف، ۵۰۲
په کارتیزي کواوردینات سیستم کې د وکتور انځورونه ۵۰۲
۲ ۰ ١٧ د دوه وکتورونو سکالار ځل ۵۰۹
۳ ۰ ١٧ د دوه وکتورونو وکتوري ځل ۵۱۲
٤ ۰ ١٧ غبرګهواریز یا موازي الاضلاع ضرب ۵۱۷
٥ ۰ ١٧ په شننیزه ځمککچ کې د وکتورونو ....
١ ۰ ٥ ۰ ١٧ د یوې کربنې وکتوري انځورونه ۵۲۱
۲ ۰ ٥ ۰ ١٧ د هوارې یا سطحې وکتوري انځورونه ۵۲۴
٥ ۰ ١٧ د هواربرابرونونو سکالارفورم یا ۰بڼه ۵۲۵

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۸	پرلپسې او پرلپسې لړۍ	۵۳۳
۱۸ ۰ ۱	پیل	۵۳۳
۱۸ ۰ ۲	د ګڼون - عددونوپرلپسې کلیمه	۵۳۴
۱۸ ۰ ۲ ۰ ۱	مونوتوني پرلپسې	۵۴۲
۱۸ ۰ ۲ ۰ ۲	اریتمیتیکي پرلپسې	۵۴۵
۱۸ ۰ ۲ ۰ ۳	هندسي پرلپسې	۵۴۷
۱۸ ۰ ۲الف	لړۍ	۵۵۰
۱۸ ۰ ۲ الف ۰ ۱	هندسي لړی	۵۵۵
۱۸ ۰ ۲ الف ۲	اریتمیتیکي لړۍ	۵۵۷
۱۸ ۰ ٤	د پرلپسې او لړیو د پولې ...	۵۵۸
۱۹	د فنکشنونو پولې او ناپریکیدنه	۵۷۸
۱۹ ۰ ۱	بنسټیزې کلیمې	
	د پولو یا حدونو خویونه	۵۸۶
	د راشنل، کسري یا نسبتي	۵۹۲
	د مشلثاتي یا درېکوڼي کچ توابعو پولې	۵۹۶
	ناپرېکیدنې	۶۰۴
۱۹ ۰ ۲	په پوله ارزښت او ناپریکیدنې څو جملې	
۱۹ ۰ ۳	د ناپریکیدونکو فنکشنونو خویونه	۶۱۰
۱۹ ۰ ٤	د بنسټیزو فنکشنونو ناپریکیدنه	

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ښېرکي ټولګه ۶۱۶

۲۰ دفرنښیالشمیرنه ۶۲۶

د تابع تغیرمنځ ارزښت(منځنی قیمت) ۶۲۶

په یوه ټکي کې د تابع ګراف ... ۶۲۸

د لحضوی(سترګورپ) تغیر... ۶۳۰

کمښتوېش (تقسیم تفاضل؟) ۶۳۱

دفرنشلوېش یا رابیلیدنه یا مشتق ۶۳۳

کمښتوېش او مشتق یا رابیلیدنه ۶۳۶

د x_o په ځای کې د فنکشن مشتق ۶۴۳

د تانجنت پیژند او خویونه ۶۴۷

د تانجنت او عمود یا ولاړ ټولیز مساوات ۶۵۰

په بیدیا کې جګوالی ۶۵۲

۲۰. ۱ ۰ ۱ الف : د تانجنت یا جګیدنې غوره والی

۲۰ ۰ ۲ د فرنښیال یا رابیلیدنې یا مشتق قاعدې ۶۵۶

د درېګوډیزو یا مثلثاتي ۶۶۲

د اکسپوننشل یا په جګ توابعو.... ۶۷۰

د مشتق استعمال په طبیعي پوهن کې ۶۷۶

د ایمپلیښیت توابعو مشتف ۶۸۳

د بنسټیزو رابیلیدنو(مشتقونو) جدول ۶۸۶

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټولګه ۶۸۸
د یوې تابع د مشتق قابلیت ۶۹۱
د معکوس- - یا په څټ توابعو مشتق ۶۹۸
۲۰ .۳ د بنسټیزو بلواکو رابیلیدنه ۷۰۱
د رول قضیه ۷۱۰
د وایرشتراس قضیه ۷۱۱
۲۰ .۰٤ افراطي ارزښتونه او اوړونټکی
د دفرنشل منځ ارزښت قضیه ۷۱۲
یوعږیزې توابع ۷۱۵
ځای اړوند افراطي ټکي ۷۲۰
د انعطاف – یا اوړونټکی ۷۲۴
د کوږ یا منحني بحث یا خبرې ۷۳۳
ناټاکلي حدونه یا پولې ۷۴۶
د برنولي او د لو پیتال ۷۵۰
۲۰ ۰ ۵ د غتو ګټو پرابلم ۷۵۷
تمرینونه ۷۶۷
په ټوټه کسرونو ټوټه کونه ۷۷۸
۲۱ انتیګرالشمیرنه ۷۸۷
پیلراوړنه ۷۸۷

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۱	انتیګرالشمیرنه	۷۸۹
	د ریمن(ناټاکلی) انتیګرال	۷۹۰
	بنسټیزه یا لومړنی تابع	۷۹۴
	سطحه او لومړنی تابع	۷۹۶
	ناټاکلی انتیګرال	۷۹۹
	د ټاکلي انتیګرال شمیرنه	۸۱۲
	تکمیلیدونکي بنسټونه	۸۱۴
	د ټاکلي انتیګرال څخه و ټاکلي ...	۸۱۵
	د انتیګرالوني قاعدې	۸۱۷
	د اکسپوننشل توابعو انتیګرال	۸۱۹
	د لوګاریتمي توابعو انتیګرال	۸۱۹
	بدلون قانون	۸۲۱
	توابع، چې بې د بدلون له لارې...	۸۲۷
	ټوټه انتیګرالونه	۸۳۲
	د ټوټه انتیګرالوني لار	۸۳۴
	د ټوټه راشنل کسرونو انتیګرال	۸۳۸
	ناپای(مبهم) انتیګرال	۸۴۱
	د ټاکلو انتیګرالونو حل د بدلون له لارې	۸۵۲
	د انتیګرالشمیرنې استعمال	۸۶۲

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرینونه ۸۸۸

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوې لیکنې او ژباړې

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ ته چمتو لیکنې او ژباړې

د ژباړي یا لیکونکي ژوند ته لنډه کتنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مهربان او بخښونکی خدای(ج) په نامه

سریزه

ګرانو هیوادوالو !
یو څه چي پیل لري نو پاي هم باید ولري، د داسي یوه کار پیل او پای ته څما هم لوړه او تنده دومره زیاته ده، چي مېښت یې زما لپاره هم ناشونی دی.

د هیواد په هراړخیزه بدبختیو یو سړی هلته نور هم پوره پوهیدلی شي، چي په یوه کار پیل وکړي، څکه چي سملاسي ورته څرګندیږي، چي په هیڅ شي کی څموږ په هیواد کی لاتراوسه څه نه دي شوي په جوړښتیزه لور، په ورانی کی مو د نړی سرکښي څانته ګټلی.
موږ ګورو چي په مسلکي چارو کی له پیل دا ستونځي موجود دي، چي تراوسه حتی هغه بنستیز مسلکي نومونه مو له خپلی ژبی نه دي را اخستلي، چي مسلك ته اسانتیاوې پیښوي. له کومه څاي چي ماته روښانه ده، تر نن ورځی په دې هکله چا په شمیرپوهنه د ستونځوبیو لپاره کومی هڅي هم نه دي کړي او ستتونځي یي نه دي ګاللي، چي دلته طبعآ افراد ملامت نه دې، بلکه څموږ دهیواد دتاریخ په اوږدو کی دولتني جوړښت، دپوهنی او همدا ډول د کلتور او ژبي د ودې دنده د حکومتونو ده، چي څموږ په هیواد کی څموږ حکومتونو خپل څانونه د دې کار جوګه نه دې ګڼلي، کیدی شي چي ووایو چي په ریښتیني یي ددې کار مخه هم نیولی ده، چي په افغاني ژزبه دې څه کار وشي.
ګرانو لوستونکو !
داکار څکه په افغانی او په ولسی افغاني لیکل شوی، چي زه په مسلکي اړخ کی یواځي، په علمي توګه په الماني ژبه پوهیږم، د انګلیسی سره هم بلد یم، نو دا

(c) ketabton.com: The Digital Library

نومونه چې له دې دباندنیو ژبو را اړووم ، داچي په ښوونځي کي څما لیك لوست په افغاني ژبه وو، په افغاني ژبه په ولسي پوهنیزه توګه اړولی شم. ماته دا کلیمي په مروجه افغاني ژبه نه دي معلومی او یا کومي چي ماته معلومی دي او زه ورسره بلد یم هغه همغه وخت ماته د پوهیدلو له امله د ستونځو ډکی ښکاریدلی .

شمیر پوهنه هم، د نورو پوهنو په څیر، یوه پراخه پوهنه ده او زیاتی څانګی لري. دا چې څما په فکر دا متآسفانه نه یواځي زما لمړی کار دی، بلکه دا د افغاني ژبی په دې توګه یو لمړی علمي اثر دی، چې په دې بنسټیزه توګه په درسي او تمریني ډول سرته رسیږي.

نن نړی او د انسانانو فکر دومره پر مختګ کړی او دا نور هم په خورا چټکتیاوده کوي، چې پخپله انسان ورته د تعجب په سترګه ګوري، مګر موږ لا تراوسه په هغه بنسټیزو ستوځوبیو (د ستونځو حل باندې) پیل نه دی کړی ، که دا په هره څانګه کی هم وي. څموږ پرابلمونه هراړخیز دي او هراخیزو هڅو ته مو ضرورت شته.

شمیرپوهنه څه شی دی ؟

شمیرپوهنه یو مرستندویه پوهنه ده، چی په ټولو پوهنو کی نغښتي یا په بل عبارت : په ټولو پوهنو کی د پوهیدلو بنسټیزه ریښه جوړه وي، که دا پوهنی اجتماعي وي او که طبعي (پیدایښتی) یعنی که ساپوهنه وي که اقتصاد او که کیمیا وي یا فزیك. بیله شمیر پوهنی یې وده او په پوهیدنه ناشونی ده. شمیرپوهنه له بلی خوا یواځنی خپلواکه پوهنه هم ده. شمیر پوهنه بل څه ته اړ نه ده.

ددې کتاب لیکلو زما زیات وخت په بر کی ونیوه او لیکل یې د پوره ستونځو سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټول کار زما په غاړه وو او بل چا را سره متآسفانه چی مرسته هم نه شوه کولی.

د داسی یوه کتاب لیکنی مسئولیت باید د دولت په غاړه وي او مسلکي باید د داسی لیکنی څخه خپل ژوند تآمین کړای شي. د همدې هدف لپاره د مسلك زدکړه کیږي. ما په دې کرښه غوښتل، چی څموږ د هیواد ستنځي نورې هم ګوته لك کړم.

زه غواړم چی خپلی د سر خبرې په لاندې توګه رالنډې کړم
- د لیکونکی راهڅونی دلیلونه یا د شوق رابیدارول
- دداسی کتاب لیکنه په هغه وخت کی شوني کیږي، چی د لیکونکي اقتصادي ژوند تآمین وي، زه د ټولنیزو مرستو پیسو څخه ژوند کوم، یعنی د نورو خلکو د مالیا پیسو باندې. کار نه پیداکیږي او اجازه یي هم نه لرم چی پیسی وګټم.

- وخت باید پوره موجود وي او داهم ما پوره لروده، چی له دې د مخه می په سیاسی هلو ځلو دا وخت تیر کړی او دا اوس می خپل مسلك ته رامخه شوه.

- ددې کتاب لیکلو لپاره باید یو لیکونکی د خپلی ټولنی او د خپلی ټولنی د خلکو سره مینه ولری او په همدې ډول، د خپلی ټولنی او د ټولنی د خلکو او د ټولو څخه د مخه د خپل ځان لپاره هم خوبونه ولري، خیالونه ولري، چی یواځی د خوبونو رینښتیا کولو لپاره په داسی کار بریالی کیدی شي. ما ددې کار ستونځی په پوره مینه په غاړ واخستلی او دا کار می په پوره مینه سر ته ورساوه.
- په دې برسیره لیکونکی دې وظیفی ته هم باید شعوري وي، چی دی ددې کار لپاره د ملت په پیسو تربیه شوی او د ملت پور هم باید ادا شي، د داسی لږ پور اداکولو هم ما ته پوره خوښي راو بخښله.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په کور کی هم باید تر یوې ممکنه اندازې پورې یو تفاهم موجود وي یعنی یو غبروالی باید په کورنی کی وي، که داسی هم نه وي ، خو د داسی کار مخه باید ونه نیول شي ، د نورو ستونځوبیو (ستونځو حل) په خاطر، چی موږ افغانان یی په ځانګړې توګه اقتصادی اړخ کی پوره لرو، چی نه یواځي د ځان لپاره بلکه د خپلوانو لپاره هم باید پام وي، مګر ما دا توان په خپل ځان کی ددې امله نه کوته چی امکانات یي ځما لپاره نه وو.

دوم : د کتاب د لیکنو ستونځی:

د داسی کتاب لیکنه د پوره ستونځو سره مل ده، چی زه دې ستونځو ته په لاندې توګه ګوته نیسم.

۱ – دا کتاب په داسی ژبه لیکل کیږي چی له مری ځخه نیول شوې، زیندی شوې، خپه شوي، خو د مرګ څخه بچ ده، له ښارونو شړل شوې، او یواځی په غرو او رغو کی ژوندی پاتی شوې.

دې ته باید ګوته ونیسم، چی دا کرښی دا مطلب نه لري، چی ګوندې زه به، خدای (ج) دې ونه کړي، د بلی ژبی په خلاف یم. دا زما کار نه دی او نه دا حق ځان ته ورکوم، خو دا حق لرم چی خپلی ژبی، د خپل ولس ژبی ته ، چی کمیدلی او وروسته پاتی ساتل شوې، ګوته ونیسم. موږ افغانانود افرادو په توګه هم افغاني ژبه پرینښوولی چی ولس یعنی د یوه هیواد د ژبی دپریښوولو حق څوک نه لري، نه دولت او نه افراد. دا کار متاسفانه د افغاني ژبی په ضد او بیا د ټولو په سر کی پخپله د افغانانو څخه شوی دی، د بل ځا څخه څوک باید ګیله من نه وي.

افغاني ژبه، که څه هم پوهانو او د لیك لوست خاوندانو په زیات شمیر، نه ټولو، د لاسه ورکړې، خو بیا هم دا ژبه دا استعداد، د نورو ژبو په څیر لري، چی یوه پوهنیزه لیکنه ورباندې وشی یا بهتره پوهنیزه شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ژبه یواځې د پوهولو او پوهیدلو اله نه ده، بلکه د ولس پوهنیزه وده کې پوره غوره رول لري او د کلتوري ودې لاربنودې او بنسټ دی، په دې برسیره د پوهې د اسانوولو خورا غوره اله ده. د یوه ولس د پرمختګ او د ژبې پرمخوده یو بل باندې سیده او په ځنې اغیز من دي، چې ولس وروسته پاتی وي، ژبه یې وروسته پاتې ده او که یوه ژبه وروسته پاتې وي، نو هغه ولس د نورو ولسونو سره په پوهه کې سیالي نه شي کولی او د ولس خلك د نورو ولسونو د خلکو سره د سیالی کولو استعداد ځان کې نه شي روزلی، که څه هم استعدادونه به موجود وي.

ما کوښښ کړی چې کم له کمه بنسټیزې کلیمې په افغاني واړوم، چې دا کار مې په پوره بریالیتوب، د پوره ستونځو سره سره سرته رسولی او په دې هکله مې زیات فکر هم په کار اچولی چې مسلکي بنسټیزې کلیمې په روانه افغاني راوړل شي. هغه نومونه چې ټاکل شوي، داسې نومونه دي، چې د هغه شي ماهیت په کې روښانه دی. دا کا د هرڅه لمړی ددې لپاره باید وشي، چې په پوهنیزو شیانو او نومونو پوهیدل باید ساده شي.
په پوهنه کې له بلې ژبې تیریدنه ناشونې ده او یا په بل عبارت په بله ژبه صرف نظر نه شي کیدی. دلته هم هدف دا نه دی چې افغاني ژبه دې د نورو ژبو د لغاتو څخه پاکه شي، دا کار یواځې هلته کیږي، چې یوه ژبه له پوهنې وروسته پاتې وي.
د پوهنیزې ودې سره ژبې ته د نورو ژبو لغات راننوځي او ضرور هم دي. ما کوښښ کړی چې که د کوم لغات لپاره د پښتو نوم یا نه وي او یا مناسب نه وي، هغه په جهانی مروجه لغاتو ولیکم.
دا چې افغاني د افغانستان ژبه او بیا هم زیندی شوې ژبه ده، دا د دولت کار وو او افغاني ژبې ته د تنفس ورکولو یا بهتره د افغاني ژبې د زیندی څخه خلاسون یا د افغاني ژبې څخه د لعنت د کړی لرې کولو دنده هم د دولت ده، خو ترهغې باید موږ هم دې ته پام ولرو او دا پاملرنه خپله دنده وګرځوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه ولس په ژبنیو ستونځو هلته پوهیدل ممکن کیږي، چې څوك د ژبې سره په پوهنیزه توګه مخامخ شي. په افغاني ژبه دلمړي ځل لپاره داسې یوه لیکنه د ستونځو سره مل ده، مګر ناشونې نه ده.
دلته غواړم چې دې ته هم ګوته ونیسم، چې د نومونو په ټاکلو کې ما کله کله دوه نومونو کارولي، چې هغه مې په ټول کتاب کې شاید اصلاح کړې نه وې، خو په دې باور لرم چې په هدف کې ستونځې نه پیښوي لکه د بیلګې په توګه: ما لمړی ګنپوهنه لکیلې وه، چې وروسته مې شمیر پوهنې بانده واړوله، شاید په ټولو ځایونو کې مې نه وي شمیرپوهنه کړې. دریګوډې ما لمړی دریکونجې لیکلې وو، چې دا هم شاید د کتاب په اوږدوکې نه وي اصلاح شوې، داسې نور څه به هم وي، خو دې ته بیا ګوته نیسم، چې د پوهیدلو لپاره دا کومې ستونځې ه پیښوي.

۲ – تخنیکي ستونځې:
د ګرانو لوستونکو پام به دې ته راوګرځې، چې څمور لپاره د داسې کتاب لیکلوپه لار کې تخنیکي ستونځې هم خورا زیاتې دي. ما په کمپیوتر د شمیرپوهنې د فرمولونو لیکلو سره ستونځې لرودې، نو له دې امله مې د نورو کتابونو دکاپیو څخه بیاتې کړې او دلته مې سریښ کړې، چې کله کړې هم سریښ شوې دي او په دې هم پوهیږم، چې دا یو غیر قانوني کار هم دی، خو هیله ده چې د رااخستلشووکتابونو لیکونکې او چاپوونکې به دې ته تفاهم ولري او زه له دوي د هرڅه له مخه د دوي له دې تفاهم څخه د خوښي څرګندونه کوم.

غواړم د ګرانو لوستونکو دې ته هم پام راوګرځوم چې املایي غلطې به شوي وي،، خو په پوهیدلو کې به ستونځې پیښې نه کړي، د هغې بخښنه غواړم، زه نور دا کار نه شم ځنډولی، ځکه چې ډیر ورسره ستړی شوم.
ما هیڅ دا فکر نه کاوه، چې زه دې داسې یو کار سر ته ورسوم، خو خدای(ج) په

(c) ketabton.com: The Digital Library

حرکت کې برکت اینښوولی دی.
لنډه دا، چې ددې کتاب د چاپ پورې چمتووالي کار ټول زما په غاړه وو، چې زه ورسره همدومره ستړی شوی هم یم او نورې سهوې او د غلطیئو سمولو لپاره مې نور د زړه زور ختلی، که څه هم په دې اخرو ورځو کې د ملګرو په فشار ما ، خما په فکر ټولی سهوې لرې کړی.

دریم – کتاب د کومو لوستونکو لپاره دی؟

ګران لوستونکی به د را اخستلشوو کتابونو څخه دې ته پام راوګرځولی شي، چې دا کتاب د نوو څه ډول لیکنو څخه راټول شوی. ددې کتاب لوستونکی د پوهنتون د شمیرپوهنی، پیداینبتي پوهنو، اقتصاد او همداسی د نورو پوهنو زدکړي دي.
دا کتاب په ښوونځي کی هم کارول کیدی شي، خو ښوونکی باید دې ته پام وکړي، چې هغه څه، چې د کتاب په پیل کی هم دي، په پیل کی نه شي لوستل کیدی.
څنی څه په همدې لمړی برخه کی راغلي، چې نابلدو زدکوونکو ته به ستونځي پیدا کړي، خو دې ته د لږ پام وروسته، پام راګرځیدلی شي.

څلورم – دلوستلو وړاندیز

ما لږ ستونځي لرودې، چې دا کتاب په خپله خوښه ترتیب کړم. زه مجبور شوم چې یو کتاب د بنستیز کتاب په توګه ونیسم او د نورو کتابونو رااخستنی بیا په کی ځای کړم.
ما د بنستیز کتاب په څیر د شیفر–جورج–تریپلر کتاب ونیوه. نو له دې امله مې برخه ویش هم په همغه ډول کړی. ما غوښتل، چې د کتاب پیل په سمسوح یا بهتره سم اند (لنډ سمند) یعني منطق وکړم، خو هغه په اوومه برخه کې څیړل شوی.
خما وړاندیز دادی، چې اوومه– اتمه او نهمه برخه دې د هرڅه لمړی ولوستل شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

اومه اتمه او نهمه برخه څمونږ په هیواد کی زما په فکر ، چی نا اشنا وي. په هر صورت د اوومی برخی سریزه خو دي د هرڅه له مخه ولوستل شي او همداسی د ډیري پوهی سره اشناییینه هم خورا ضرور ده

شپږم . مننه

ددې کتاب لیکلو کی ، که څما د دوستانو لخوا دې کار ته راهڅول نه وی، نو دا کار سرته نه شو رسیدلی، په تیره بیا په المان کي د « افغانستان کلتوري ودې ټولنی »دوستانو. زه له دې د ټولو د زړه له کومی خوښنه کوم. د دې ټولنی د غړو او پلویانو زیاته خوښتنه، چی ددې کتاب چاپ یی د ټولنی په چوکاټ کي په غاړه اخستی.

ډیر محترم پوهاند مجاوراحمد زیار څخه زیاته مننه، چی د لغاتو د نظر څخه تیریدنه او همدا ډول په ټولو ماناوو کي ماته خوراګټوره مشوره هم راکړي.

زما میرمن زما د ستونځو شاهده وه. په زړه ناروغه، خو په پراخه او لوي زړه او پوره حوسیله یی زما د دې لیکنی ملاتړ کاوه، چی بی ددې له ملاتړ به دا کار هم سرته نه وی رسیدلی، که څه هم دا به یی کله کله ویل، چی ګوندې پیسی می باید ګټلی وی ، خو په دې پوهیږي، چی ددې چانس نه شته، کله کله به، چی به تنګه شوه نو ویل به یي چی نور دا د چرګانو ټونګي باید بس کړم. له دې امله زما دمیرمن ښاپیری څخه هم د زړه له کومی خوښنه کوم او دا پراخه سینه او دا ناروغه زړه یی همداسی ښه تکړه ورته د لوي خداي(ج) څخه غواړم، چی زما د داسی کارونوملاتړ نور هم وکړي.

راتلونکی کارونه: د همدې کتاب سره سم ما یو د هندسی کتاب ژباړلی، چی د

(c) ketabton.com: The Digital Library

الماں د پنځم ټولګی ښخه هندسه په کی راغلی د څه نونورو شمیرپوهنیزو مضوعاتو سره. دا به هم په دې کتاب پسی تړلی چاپ ته ورکړي شي.
زه یو بل خوب هم لرم، چی همدا اوس دې د یوه بل الجبر کتاب لیکلو باندې پیل وکړم. موضوعات می په سر کی راګرځي.
که چیرې نور دوستان او شمیرپوهان د شمیر پوهنی په څانګه کی څه لیکل غواړي او په دې هکله ستونځي لري، او ستوځوبیو وړاندیزونه لري نو زه به ورسره وعده وکړم، چی دلته افغانان و ملاتړ ته راوهڅوم. د هغو دوستانو سره چي د شمیر پوهنی کوم کتاب ته یی د ژباړنی نیت وي او په افغانستان او پاکستان کی ژوند کوي نود هغو سره به وعده وکړم چی دلته ورته په دې ټولنه کی او یا د ټولنی دباندې د مرستی هلی ځلی وکړم. ځما هدف دادی، چی موږ باید داسی کارونو ته ملا راوتړو. له ما ښخه لټ بل څوک نه شته، دا چی ما دا کار سرته رسولی ، باور وکړي، چی هر بل افغان یی هم سرته رسولی شي،

په مینه ستاسو ماخان

(c) ketabton.com: The Digital Library

افغاني ، يوناني او الماني الف بی

ا	ب	پ	ت	ټ	ث	ج	چ
څ	ځ	ځ	ح	خ	د	ډ	ذ
ر	ړ	ز	ژ	ږ	ص	ض	ط
ظ	ع	غ	ف	ك	ګ	ق	ل
م	ن	و	ه	ي	ى	ې	ئ ۍ

يوناني الف بی

Α α	*Α α*	Alpha
Β β	*Β β*	Beta
Γ γ	*Γ γ*	Gamma
Δ δ	*Δ δ*	Delta
Ε ε	*Ε ε*	Epsilon
Ζ ζ	*Ζ ζ*	Zeta
Η η	*Η η*	Eta
Θ ϑ	*Θ ϑ*	Theta
Ι ι	*Ι ι*	Iota
Κ κ	*Κ ϰ*	Kappa
Λ λ	*Λ λ*	Lambda
Μ μ	*Μ μ*	My
Ν ν	*Ν ν*	Ny
Ξ ξ	*Ξ ξ*	Xi
Ο ο	*Ο ο*	Omikron
Π π	*Π π*	Pi
Ρ ρ	*Ρ ϱ*	Rho
Σ σ	*Σ σ*	Sigma
Τ τ	*Τ τ*	Tau
Υ υ	*Υ υ*	Ypsilon
Φ φ	*Φ φ*	Phi
Χ χ	*Χ χ*	Chi
Ψ ψ	*Ψ ψ*	Psi
Ω ω	*Ω ω*	Omega

الماني الف بي

A a	𝒜 𝒶	𝔄 𝔞
B b	ℬ 𝒷	𝔅 𝔟
C c	𝒞 𝒸	ℭ 𝔠
D d	𝒟 𝒹	𝔇 𝔡
E e	ℰ ℯ	𝔈 𝔢
F f	ℱ 𝒻	𝔉 𝔣
G g	𝒢 ℊ	𝔊 𝔤
H h	ℋ 𝒽	ℌ 𝔥
I i	ℐ 𝒾	ℑ 𝔦
J j	𝒥 𝒿	𝔍 𝔧
K k	𝒦 𝓀	𝔎 𝔨
L l	ℒ 𝓁	𝔏 𝔩
M m	ℳ 𝓂	𝔐 𝔪
N n	𝒩 𝓃	𝔑 𝔫
O o	𝒪 ℴ	𝔒 𝔬
P p	𝒫 𝓅	𝔓 𝔭
Q q	𝒬 𝓆	𝔔 𝔮
R r	ℛ 𝓇	ℜ 𝔯
S s	𝒮 𝓈	𝔖 𝔰
T t	𝒯 𝓉	𝔗 𝔱
U u	𝒰 𝓊	𝔘 𝔲
V v	𝒱 𝓋	𝔙 𝔳
W w	𝒲 𝓌	𝔚 𝔴
X x	𝒳 𝓍	𝔛 𝔵
Y y	𝒴 𝓎	𝔜 𝔶
Z z	𝒵 𝓏	ℨ 𝔷

اومیګا په پښتو کې دینه ← ← په الماني کې دینه

(c) ketabton.com: The Digital Library

شمیرپوهنیزې نخښې

مساوي .... =

نامساوي (نوروکتابونو کې) ≠ (=)

کوچنی له .... <

لوي له........ >

کوچنی یا مساوي له .... ≤

لوي یا مساوي له .... ≥

ډېر کوچني .... ≪

ډېر لوي .... ≫

ورته یا متناسب.......... ~

کونګروائنغ .... ≅

همداسی یا ښایي یا په ګوره کوي

کتمټ............... ≡

غبرګ .... ∥

ناغبرګ.............. ∦

ولاړ په .... ⊥

دریګوډی .... △

ګردی .... ○

نیمی یا قطر.............. ⊘

کونج .... ∠

د دوه کرښو g او h ترمنځ کونج ∠ (g,h)

کرښه، له A و B ته .... $\overline{AB}$

له A و B ته لوریزه کرښه.... $\overrightarrow{AB}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لینده.................... AB

مطلقه ارزښت د .... |a|

ایماجینار یوون (واحد)....... i

د اویلرګڼ = ...2,7182818 e

پي د لودولف ګڼ π= ...3, 14149

د په لور هڅیږي یا کونورجنت کیږي ->

ناپای.................. œ

د x فنکشن یا په واک چې بلواک مو بللی f(x)

(لوستل یې (f د x یا د f, x لنډ : fx)

د x څیرونه په f(x) : لیکو: ~~x~~ f(x) f: x →

دلته h د x فنکشن، g د x فنکشن h(x); g(x)

لیمس یا پوله.............. lim

	ساین	sin
تریګونومتریکي	کوساین	cos
بلواک	تانجنت	tan
	کوتنجنت...........	cot
	ارکوس ساین.........	arc sin
څیکلومتریکي	ارکوس کوساین	arc cos
بلواک	ارکوس تانجنت	arc tan
	ارکوس کوتانجنت.....	arc cot

لوګاریتم و بنسټ a ته $\log_a$

لوګاریتم و بنسټ ۱۰ ته $\lg_{10}$

دیکادیکي لوګاریتم.....

لوګاریتم و بنسټ e ته ln

طبعي یا پیدایښتي لوکاریتم

(c) ketabton.com: The Digital Library

کمپلکس ګڼونه........... $\mathbb{C}$

رییلګڼونه .... $\mathbb{R}$

ټولګڼونه .... $\mathbb{Z}$

نامنفي ټولګڼونه یا

طبعي ګڼونه د صفر سره $\mathbb{N}^*$

طبعي ګڼونه .... $\mathbb{N}$

تعریفډیری .... D

ارزښتډیری........... W

حلډیری L

د ډیري A پوتنځډیری P(A)

ډیري............. M,N,A,B

تشډیری .... $\emptyset$

برخه ډیری...........

پورته یا لویډیری (چې بل ډیری خوندي لري)

ټولنډیری........... $\cup$

غوځډیری .... $\cap$

د A کومپلیمنت ..... CA , A'

د ډیریو ورته والی ...... A~B

د ډیریو ځل.......... $A \times B$

لوستل B اتیران A یا - ځل -

توپیرډیری : A بې له B ده $A \setminus B$

دلته: a د b پرویشونی ده یا a b ویشي $a \mid b$

د a او b غټ ګډ پهویشونی(لنډ: غ ګ و) ggt(a,b)

د a او b کوچني ګډ زیاتځله(لنډ: ک ګ ځ) kgv(a,b)

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته : a د M توکی دی .... $a \in M$

او a د M توکی نه دی .... $a \notin M$

ټولنخښه (د ټولو x لپاره باور لري) $\forall$

د موجودیت نخښه: یو x موجود دی $\exists$

کونیونکشن A او B لیکو $A \wedge B$

دیسینکشن A یا B لیکو $A \vee B$

(کله کله الترناتیو)

ایمپلیکاشن: له A څخه B لاس ته راځي $A \Rightarrow B$

نیګیشن یا نه والی $\neg$

د A او B وېناو ورته والی یا اکویوالنت $A \Leftrightarrow B$

له A څخه B لاس ته راځ او له B څخه A لاس ته راځي.

ماتریکس......... A نورو کتابونو کي $\|A\|$

دیترمینانت $|A|$

د a څخه n–امه ریښه $\sqrt[n]{a}$

د x اکسپونتشلبلواك

د n – فاکولتیت یعنی n!=1.2.3....n $n!$

بینومخلوونی $\binom{n}{p}$

لوستل:n په p باندې

له a تر b واز اینتروال $]a,b[$

$= \{ x \mid a < x < b \}$

له a تر b بند اینتروال $[a, b]$

$= \{ x \mid a \leq x \leq b \}$

کینې واز اینتروال $]a, b]$

$= \{ x \mid a < x \leq b \}$

ښی واز اینتروال $[a, b[$

$= \{ x \mid a \leq x < b \}$

د زیاتون نخښه (سیګما) $\sum_{i=1}^{n}$

که د زیاتون نخښه داسې وي

لوستل: له $i=1$ تر n پورې

ځلنخښه (پي) $\prod_{i=1}^{n}$

که داسې لیکل شوي وي

لوستل: له $i=1$ تر n پورې

پرموتیشن یا بدلون

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ ۰ د شمیرپوهنې سم اند (د ریاضیاتو منطق (logic))

سم اند (سماند) یا منطق (logic یونانی کلمه ده، چي اند(فکر) یا وی(لغات) ته وایی).

د وینا د ټیک یا کره فرمولولو لپاره د سم اند(منطق) څخه کاراخستل کیږي د فورمال سم اند، د سم اند پوهنی بنسټ، د فکر ډول او فکر کولوقوانینو په څیر یې څیړنه د اریستو تلس(۳۸٤ تر ۳۲۲ ز۰ ک۰ ا)) له خوا کیښول شوې۰

د ریاضیاتو منطق(د شمیرپوهنی سم اند) د شمیر پوهنې د یوې برخی په څیر پرمختګ یا وده وکړه۰ سم اند د شمیرپوهنی بنسټ دئ او د شمیر پوهنی په ټولو څانګو کی ننوتی۰

یادونه : سم اند په خپله ختَه کې په فلسفه پورې تړلی مسلک دئ نو له دې امله دا لیکنه د ټولو مینه والولپاره په زړه پورې خوندیونې(متن) لرودئ شي۰ هیله ده، چې ګڼ هیوادوال به یې وګوری او کمي به یې راپوره کړي، دلته او یا په ځانله لیکنه کی۰

۱ .۰۱ پوهنیزه ژبه او پیدایښتي- یا طبیعي ژبه

اند (فکر) او ژبه یو له بل سره داسې تړلي، چې بیلیدنه یې ناشوني ده. په ورځني ژوند کی انسانان خپل اند یا فکر په طبیعي ژبه څرګندوي، مګر دا د مسلکي ژبی په څیر د

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوهنی(علم) لپاره بسیا نه کوي، ځکه چی د ځنو لغاتو مانا کره یا ټینګه نه ده ټاکل شوی، دا په دې مانا، چی په طبیعي ژبه کی یو لغات بیلی بیلې ماناوي لري لکه لور(د ریبلو لور) او لور(په کومه لور) او یا ځو لغاتونه ، لکه شلغم، ټیپر او منګریټې، چی همغه یو څه یا شی په ګوته کوي.
په مسلکی نومونو کې یو څوترمینولوجي(Terminology لاتین، یونانی): په یوه مسلک کی شته(موجود دي) د مسلکي لغاتونو ټولګه او په همدې توګه د هغوي ښوونه ، منځ ته راوړل کیږي، چې د کلمو موخور(هدفمند) کره یاکلک ایښوولو (ځای پرځاي کولو) د نورمي ویناو استعمال او د هغوي او د ورځنی ژبی ویناودو څخه ګټه اخلي٠

په دې ډول په شمیرپوهنه یا ریاضیاتو کی هم یوه پوهنیزه ژبه منځ ته راغلې، چی له پیدایښتي یا طبیعي ژبې او یوې ځانګړی ترمینولوجي سره یوځاي شوې یا په بل ډول : د پوهنیزې ژبی او یوې ځانګړي ترمینولوژي ټولګه ده٠

له دې امله شمیرپوهنه په یوه لوړه کچه ټیکوالی(Exaktheit) ، په یوه لنډ، روښانه ، څرګند او له دې امله یو لیدوړ « وینا ډول» درلودی شي٠

شمیرپوهنه او سم اند یا منطق دواړه دیوې سمبولیک ژبی څخه د کارونی یا استعمال کار اخستی شي. د لغاتو په ځاي نخښی ایښوول کیږي، چی مصنوعي منځ ته راغلي او په ځانګړو ماناو سمبال دي٠

د شمیرپوهنی پوهنیزه ژبه کې غوښتنه داده، چې باید په کلکه او روښانه توګه د ریښتونو (Realität واقعیتونو) شیانوObjects ، د هغو شمیرنیزو څیرو او د دې لپاره پیدا یا منځ ته راغلو نخښو ترمنځ توپیر وکړي. شیان له انسانانو احساسیږي، د یوه ذهنیت (Abstruction ابسترکشن) له لارې په یوه کلیمه څیره (متصور؟) کیږي. او شته والی یې د یوې نخښې جوړښت construction ممکنوي. څیره کوونه یې د شمیرنې شیان دی او یوه «نخښونه» غوره کوي، چې دیوه نوم اوزیات وخت د یوې نخښې په څیر ځان نیسي، د بیلګې په توګه : لکه هر طبیعي ګڼ(عدد) د یوې نخښې داسې په نامه د عددنخښې (ګڼنخښې) له لارې انځوریږي. دا نخښه څیفر Ziffer یا ګڼنخښه(عددنخښه)، چې عربې همغهٔ صفر دی, بلل کیږي. داسې نخښونې دبنسټیزو نخښؤ څخه منځ ته راغلي. په درسي ځاي سیستم کې بنسټیز څیفرونه یا ګڼنخښې په لاندی ډول دي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۰ ، ۱ ، ۲ ، ۳ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ۷ ، ۸ ، ۹ .

۱ ۰ ۲ د شمیر پوهنی سم اند بنسټیزې کلمې

۱ ۰ ۲ ۰ ۱ ثابتی، متحولې او ترومونه(۱)

Constants, variables, terms

په شمیرپوهنه کې شیان ، د شیانو ترمنځ اړیکې او د شیانو تړنې په نخښو(سومبولونو) انځوریږي.

۱ – شمیرپوهنیزې نخښې

- د ثابتو(تل همغو) لپاره نخښې (علامې): دا د یوه کره ټاکلې مانا لپاره نخښې دي یانې تغیر نه خوري، لکه ۷ ، ۱۲ ، π ، e, او داسې نور

- د اووښتونو یا واریابلو(متحولو) لپاره نخښې: دا د یوې ورکړ شوې ډیرۍ یا سټ (په ډیرۍ پوهنه کی روښانه کیږي) داسې په زړه پورې توکی لپاره یوه نخښه ده، کومه چی د اووښتونویا متحولو بنسټسټ یا-ډیرۍ بلل کیږي، دا په لاتین تورو په نخښه کیږي او کله کله په اندکس(ز۰ ایندکسونو) یا پیژندنخښه index (ز۰ پیژندنخښې Indices) چې ایندکس د تورو ښنو ته راځي په نخښه کیږي۰

لکه: $a_1; a_2; b_i; i = 1,2,3 \ldots$

- اړیکنخښې : دا د شیانو اوګڼونو یا اعدادو ترمنځ د اړیکو نخښې دي لکه $<$, $>$، = , $\leq$, $\geq$,

- د نښلونو،کارونو، تړنو یا عملیونخښې : لکه زیاتون-(جمعه)، کمون-تفریق-) ، ځل-(ضرب-)، او ویش -یا تقسیم نخښې: / ، : +, -, *

(c) ketabton.com: The Digital Library

- تخنيکې نخښی : لکه سيميکولوم („ „)، نوکان ( ) او نور ډولونه يې او کوما ،

د نخښو لړئ : که نوکان، واريابلی(اووښتونې), ثابتی او د هغوي يوځاي ايښودل د اړيکو - ، نښلونو - ، او تخنيکی نخښو يوځاي ايښوول موخه ور يا هدفمند يو په بل زيات شي، نو يوه د نخښو لړی ترې منځ ته راځئ٠

(۱) ثابتې((تل) همغه يا تل همغه، همغه ارزښتيزې) ،

متحولې :اوښتونی يا اوړيدونی يا واريابلې او ترمونه

بيلګه :

الف : د 3.(2a + 1) – a + 144 يوه د نخښو لړی (ترادف) ده

ب : 11x =6 – 3a).(12 – b) ، دا د نخښو لړی نه ده، ځکه چې د نخښو لړئ موخه وره يا هدفمنده نه ده ايښوول شوې، د برابرنخښې پسې نوک نه شته، دا په دې مانا، چې له دې څخه څه نه پوهيږو.

۲ - ترمونه terms, Termen : که په يوه لړئ کې، يواځې ثابتې (همغه)، اووښتونې(متحولې، واريابلې) نښلونې او تخنيکي نخښې کارول شوې وي، يانې اړيکې نه وي کارول شوي، نو دې ته ترم ويل کيږي. هر يو ترم پورې که واريابلی ولرې پيژندډيرئ يا تعريفستڼ هم اړه لري، دا د داسې اووښتونو يا متحولو اصلی بنستستڼ يوه برخډيرئ او يا هغې سره برابر برخه سڼ يا - ډيرئ ده، په کوم کې چې د ترم ارزښت بيرته د بنستډيرئ توکی دئ. د ترم ارزښت شميرل کيدی شي، که د مخه ټاکلشوې نارونې يا عمليې اجرا شي، که چيړې اووښتونې يا واريابلې د پيژندډيرئ د توکو نخښونه غوره کړي. دا په لويو لاتين تورو(اکه: $(T, T_1, T_2$ په نخښه کيږي. که ترمونه اووښتونې ولري، نو د اووښتونو يوه ورزاته نخښه په نوکانو کې نيولکيږي، لکه :

T(x); T(x,y)

بيلګه :

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف : ترم 3/4 + 126 ، چې اووښتونې يا متحولې نه لري په Tسره په نخښه کوو او

ليکو: T=126 + 3/4 يا $T=126+\frac{3}{4}$

ب : ترم 2x + 10 چې اووښتوني يا متحولې x لري ياني T(x) = 10 + 2x ۰ د
اووښتونو بنسټيزې يا –ډېرې دې يا د طبيعي اعدادو ډيرىN°وي

تعريفډيرې د بنسټيزې سره برابره ده، که په ترم کې د اووښتونې يا واريابلی x پۀ ځاي

يو پيداينښتې ګڼ يا طبيعي عدد 2 کيږدو، نو د ترم ارزښت دی : T(2) = 14

پ : (x+2y)/x يا $\frac{x+2y}{x}$

ترم دی چې دوه متحولې لري او په T(x,y) سره يې په نخښه کوو۰ د اووښتونو يا
متحولو بنسټيزې دې د پيداينتي يا طبيعي اعدادو سټN وي, نو د x لپاره تعريفډيرې
N° ده۰ د y لپاره N (پيداينتی ګڼونډيرىN° تعريفډيرې لپاره ترم نه دی تعريف
ياپيژند نه لري)

د 0 = x لپاره ترم نه دی تعريف يا پيژند ند لري

د ترم T(x,2y) = (x,y) /x يا $T(x,2y)=\frac{x+2y}{x}$

ارزښتشميرنه د x=2 او3 =y لپاره په دې ډول ده :4 = 2 / (2+6) = T(2,3)

يادونه: د ګڼونو لپاره دې دريمه او څلورمه برخه وکتل شي، چې هلته ګڼونډيرې ورکړ
شوي دي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چې انسان د خپل چاپیریال د ټولو شیانو او پیداېښتونو سره لاس په ګریوان دئ، نو پوښتنې او هیلې رامنځ ته کیږي،غوښتنې لري او ویناوې کوي، په کومو ویناو کې،

چې شیان او ریښتونی(واقعیتونه) بیرته هنداره (منعکس) کیږي یا په یوه څه یا شي، چې وینا کیږي، نو موخه ترې د هغه څه ریښتون حالت یا ځاننیونه ده۰ یوه وینا په واقعیت کې ټیک هلته ریښتیا ده، کله، چې په هغې کې شي حالت یا بهتره شي ځاننیونه په ریښتونې شته یا موجود وي، په بل حالت کې دا وینا ناریښتیا (غلطه) ده. موږ نیسو، چې دا څه دې په شمیرپوهنه کې کره ټاکلي وي او پریکړه دې پرې کیدی شي۰

پژند(تعریف) ۱ ۰ ۱ :

وینا د یوه شی ، څرنګوالي (چې څنګه دئ)، د هغهٔ بیرته هندارونه یا منعکسونه ده۰ (دا په دې مانا، چې وینا یو شی په وینا کې همهغسی ښایي لکه څنګه چې دئ له دې امله شي هندارونه یامنعکسونه)، چې د ژبی له لارې وړاندې کیږي یا په همدې ډول په نخښه کیږي۰

یا په بل عبارت وینا د کلیمو داسې هدفمند یوځایوالی یا یوځاي ایښوول دي، چی د یوه شی حالت (ځاننیونه) یا شکل او د شیانو ریښتونې اړیکی بیرته هنداره یا منعکسوي او موخه وردی، چې د هغه دریښتیاوالي پوښتنه رامنځ ته کړای شي۰

یا په بل ډول :

د وینا لاندې سړی یو ژبنی یوون، یا یووالی (واحد unit ,Einheit)پوهیږي، کوم چې د شي اړیکی (د شي څرنګوالی) بیانوي۰ دلته دا مهمه نه ده، چې دا وینا په کومه ژبه، په پیدایښتي (طبیعي) او که په مصنوعي ژبه ویل شوې (افاده شوي) دا هم غوره نه ده، چې دا وینا د طبیعي پوهنو لپاره ده، د هوا حالاتو لپاره او که د بازار د نرخ لپاره ده۰

په بل او ورځني ډول: یوه وینا یوه جمله ده یا فرمول دئ، چې یا رښتیا او یا ناریښتیا ده۰ داسې هم ویل کیږي، چې وینا یو «رښتیاارزښت » ،، رښتیا یا نا رښتیا ،، لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

یعنې : د شمیرپوهنې سم اند لپاره پریکړی د وینا « ریښتیا ارزښت»(رښښتیا یا نارښتیا) دی٠ نور خویونه په راتلونکی کې نه څیړل کیږي٠

ویناوې د لاتین په لویو تورو A , A* په نخښه کوو او داسې نور٠

۱ ٠ ۲ ٠ ۳ د دوه ارزښتوالی اصول یا پرینځیپ جمله

هره وینا یواځی یو ممکن « ریښتیا ارزښت» لرودی شي، دا په دې نامه، چی وینا یا ریښتیا ده او یا ناریښتیا. (د دریم نه والی اصول یا پرینځیپ)٠

دا په دې ماناو چې ددې دوه ارزښتونو تر منځ بل ارزښت ناشونی دی. دوه ارزښتوالی او د دریم نه والی باید سره بدل نه شي.

که یوه ژبنۍ افاده یا وینه د وینا په څیر ترتیبوو، دا بیا دلته ارزښتناکه ده، چی د ویناارزښت حتمآ باید څرګند یا معلوم نه وي٠ که بالاخره ټوله پوهنه د رښتیا لور غوره کړي وي، بیاهم موږ څرګند ژبنیو موادو ته اړ یو، چی د هغه شي حالت (ځاننیونه) افاده کړاي شو یا وویلی شو، د کومو په شته والی یا نه شته والی، چی پریکړه وشي٠

ټولې ویناوې له دې امله په دوه ټولګیو یا کلاسو ویشل کیږي، د رښتیا ویناو ټولګی او د نارښتیا ویناو ټولګی یا کلاس(صنف)٠

که وینا ریښتیا وي، نو ریښتیا ارزښت یې ریښتیادی او په w سره یې ښایو، که وینا ریښتیا ارزښت ناریښتیا ولري ، نو په f یا،، نه،، یې ښایواو وایو، چې د وینا ریښتیا ارزښت ناریښتیا دی

تکرار : هره جمله، چی « ریښتیا ارزښت» (ریښتیا یا نا ریښتیا) ولري، وینا بلل کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

شميرپوهنيز سم اند(منطق) د ويناو سره سر او کار لري..

بيلګې:

غونډاله (جمله)

الف : » د کابل سين د کونړ له سين سره ګډيږي« ريښتيا وينا ده٠

ب : $3 + 4 = 7$ ريښتيا وينا ده

پ : » ٦ لومړنی ګڼ دی« دا ناريښتيا- يا ناتيک وينا ده٠(د اعدادو په برخه کې لومړني اعداد ياګڼونه کتلکيدی شي)

پوښتنجملی : » ته د څو کالو يې ؟ « نه شي کيدی يو ريښتيا ارزښت باندې تنظيم شي٠ له دې امله وينا نه ده٠

نورې بيلګې :

ويناوې دي:

(دپيتاګوراس (فيثاغورس) جمله٠

د کاتيتونو يا د يو بل سره ولاړو يا عمودو اړخونو يا ضلعو مربعګانو (څلوريو) زياتون(جمعه) د هيپوتينوزې(اوږده اړخ قايمې زاويې ته مخامخ ضلعه يا قطر) د څلوری يا مربع سره برابر دی.

نورې بيلګې :

سرک لوند دی

ټول سپي خطرناک دي

$3 > 5$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې کې که یو کاربن له دوه اکسیجنه سره یوځای یا زیات شي، نو کاربن دوه اکسیډ CO_2 وښایي

د دې پرخت یا مخامخ یا پر خلاف یا برعکس : ویناوې نه دي:

د کابل ښار;NaCl ; لمده کوڅه

د افغانستان د خلکو ژوند په دیرش کلن جنګ کې

لاندې ویناوې

کیمیا یوه طبیعي یا پیدایښتي پوهنه (علم) ده

٧ پر دریو بی له پاتې (باقي) نه ویشل کیږي

د وینا «رېښتیا ارزښت » رېښتیا لري

لاندې ویناوې

برلین یو کوچنی ښار دی

3 < 5 پنځه له دریو کوچنی دی

ټول لومړني اعداد یاګنونه ناجوړه (طاق) دي

کابل د کونړ پر سین پروت دی

هره یوه له دې ویناو « رېښتیا ارزښت » نا رېښتیا لري

نومه ونې: پورته مې د جفت لپاره، چې ورسره بلد یو جوړه ولیکه، نو طاق ته ناجوړه وایو۰

په لاندې کې به وڅیړو، چې ویناوې شته، چې نورې ویناوې د خپلې برخې په څیر په ځان کې خوندي(لنډ : خوندي) لري۰ داسې ویناوو ته یوځاېشوې یا یوځای ایښول شوې یا ځنځیري ویناوې وایو او که غواړې ! مرکبې ویناوې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره بيلګه راوړو » کۀ د کوم ګڼ(عدد)a پروت زیاتون یا پرته جمعه په 3 ویشوړ وي، نو داعدد یا ګڼ په 3 ویشوړ دی، یانی که عدد 1521 ولرو ، نو د دې عدد پرته جمعه 1+5+2+1=9 په 3 ویشوړ ده له دې لاس ته راځي، چی پخپله ۱۵۲۱ هم په 3 ویشوړ دیٞ.

که کومه وینا په داسې ویناوو ویشوړ یا ټوټه کیدونکې نه وي، نو دې ته بیا ساده وینا ویل کیږي.

لکه : سپین غر یوه خورا جګه څوکه لري

یوه بله بیلګه د یوځای شوې(ځنځيري) وینا لپاره

سپینغر خورا خواریکښ دیٞ، هغه په دې پوهیږي، چی نور کار ته وهڅوي.

څرګنده ده، چی دواړه ساده جملې د برخویناو په څیر یوځاي شوي ویناوې دي: » سپینغر خورا خواریکښ دیٞ« همدا ډول » هغه (سپيغر) پوهیږي، چی نور کارته وهڅوي«.

دا ویناوې کیدی شي په نورو ډولونو هم یو له بل سره داسې وتړل شي، چې رښتیاارزښت یې همغه پاتې شي.

د بیلګي په توګه:

۱ - سپینغرخورا خواریکښ دیٞ. یا هغه پوهیږي، چی نور کار ته وهڅوي

۲ - ځکه، چی هغه پوهیږي، نو کار ته وهڅوي، نو سپینغر خورا خواریکښ دیٞ.

۳ - دا چی سپینغر پوهیږي، چی نور کار ته وهڅوي ، نو سپیغر خورا خواریکښ دیٞ.

٤ – سره له دې، چی هغه پوهیږي، نور کار ته وهڅوي، هغه خورا خواریکښ دیٞ.

ګورو، چی په دې ډول یو له بل توپیریدونکی تړلې یا ځنځیري، یا یوځاي شوی ویناوې جوړیږي، چی په خپله رښتیاارزښت کی یو له بل توپیر کیدیٞ نه شي. د دوي توپیر د

(c) ketabton.com: The Digital Library

دوي یو له بل سره تړلو ځرنګوالي له لارې مخ ته پروت دئ یا رامنځ ته شوی دئ۰
په لاندې کې به ممکنه« ویناتړنه» (یا نورهم ښه: ویناځنځیرونه) تر څېړنې لاندې ونیول شي.

پیژند ۱ ۰ ۲ :

یوه «ویناتړنه» یا یو «ویناتړاو» (نوره هم ښه: «زنځیرونه») داسې ژبنی وېینې(افادې) دي، چې د هغوي په مرسته له یوې یا ډېرو ویناو څخه نوې ویناوې جوړیدی شي.

موږ د سم اند یا منطق سټېرینځیپ په لاس ته راوړنو سره ځانونه په داسې ویناو رابندوو، کومې چې داسې جوړې وي، چې ریښتیا ارزښت یې یواځې او یواځې د «برخویناو» ریښتیا ارزښت په واک کې وي۰

بیلګی

الف: سپین ډېر خواریکښ دی، هغه په دې پوهیږي، چې نور کار ته وهڅوي۰

ب : سپین یا راځی او یا لوبه نه کیږي۰

پ – د فوټبال په لوبه کې نه دباندې رفري او نه دننه رفري فاول یا ناسمي ولیدء

۱ ۰ ۲ ۰ ٤ ویناتړنه یا ویناېلواک (- فنکشن یا – تابع)

د ویناتړنو (عملیو)په هکله مو پورته بیلګو کې ولیدل، چې که څوک د تړنو لپاره « او » او یا « سره له دې» ونیسي تل یوه یوځاي شوې وینا منځ ته راځي. دا وینا هلته او فقط هلته ریښتیا ده، چې دواړه «برخویناوې» ریښتیا وي. دلته د خبرو پرځاي غواړو «ریښتیا فنکشن یا رښتیا تابع» وپیژنو. موږ پریکړه کوو، چې د په زړه پورې ویناوو (ویناواریابلو یا وینا اوښتونو(وینا متحولو)) لپاره سومبولونه ...p,q,r, او یا ا ، ب پ، وکارول شي یا استعمال شي. موږ دا غواړو ساده پیل کړو، یانی د یوه یو

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځاینیونکی(یوځائیز یا یوګوني) بلواک یا فنکشن او که همغه پخوانی ډول تابع مو ښه راځي، له تابع څخه۰

یادونه: د بلواک یا تابع کلمه وروسته څیړل کیږي، دلته د بلواک یا فنکشن پرځاي ویناترنه یا عملیه بسیا کوي. دا ځنی ویونه(لغات) ستونځی لري، چی د ښونځي زده کوونکي يې هغه ساده ډول فکر ته رابولم او د لوړو زده کړو خاوندانو ته دا کومې ستونځی نه لري.

نه والی(نفی)Negation

د وینا تړاو یا ویناتړنی(عملیې) «نه والی»: دیوی ویناP نه والی هغه وینا ده، چې هلته او یواځی هلته د ریښتیا ارزښت ناریښتیا لري، چیP ریښتیا ارزښت ریښتیا ولري۰

موږ د وینا P نه والی نفی په Pنه سره ښایو ، شمیرپوهنیزه نخښونه یې په لاندې توګه ده ¬p په یوه جدول کې ریښتیا فنکشن یا ریښتیابلواک کې داسی څرګند وو(دا چې زه کله کله هغه شمیرپوهنیز سومبول د نه p لپاره ¬p نه شم لیکلی، نو دا به همغسې p نه ولیکم.

P	Pنه یا ¬p
w	F
f	w

د یوې وینا P تکرار نه والي یا بیا نه والي لاس ته راوړنه، لکه چې لاندې یې ګورو، هم خورا څرګنده ده .

p	p¬	p¬ ¬
w	f	w
f	w	f

(c) ketabton.com: The Digital Library

دوه واره نه والی د همغې لومړنی وینا رښتیاارزښت لري

په پیدایښتي ژبه کی نه والی په«نه» یا « نا » خپل رښتینوالی مومي٠ «اباسین هغه خپل ټاکلی وخت ته را نه غی٠ دا د اباسین خپل ټاکلي وخت ته راغی « نه والی» دی٠

نه والی ته بیلګه : د وینا ¬A نه والی : "7 < 3 " وینا نهA ده: دا چی A رښتیا ده، نو ¬A نارښتیا ده٠

ترڼه(عملیه) یا کنجنکشن Conjunction (لاتین: ترڼه، دلته د « او (and)» ترڼه یا تړاو):

وینافورم یا – بڼه:

د وینا په څېر یا - مخامخ یا - برعکس وینا بڼه رښتیا ارزښت نه لري، د وینافورم یا – بڼې لپاره بیلګی دي لکه پوښتنې، امرونه او نظرونه یاعقیدې:
۱ – هوا څنګه ده ؟

۲ - کورته لاړ شه

۳ – شین یو ښه رنګ دی٠

که په ترمونو کې، چې واریابلی یا اوښتونې لري، اړیکنخښی ولیکل شي، یوه وینابڼه منځ ته راځي٠ یوه د نخښو لړی کم له کمه د یوې اووښتونې یا متحولې د بیلګې په توګه

5> 3 + x د بنسټیزورشو N کې نه ریښتیا ده او نه ناریښتیا٠ دا له دې امله وینا نه ده٠ که چیرې د واریابلې یا اووښتونې یا متحولې پر ځاي ٠ او ۱ ولیکل شي، نو بیا یوه رښتیا وینا ترې منځ ته راځي٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

که چیرې په ځای یې نور د پیدایښتي ګڼونو توکی ځای په ځای شي، نو بیا ناریښتیا ویناوې منځ ته ترې راځي۰

دا چی اووښتونې یا متحولې د بنسټدیرۍ یا بنسټ سټ ځخه په خوښه توکی اخستلی شي، نو له دې امله دا اووښتوني د خپلواک یا ازاده اووښتونې(متحولې) په نامه یادیږي۰

پیژند :

یوه وینابڼه د نخښو لړی ده، چې کم له کمه یوه خپلواکه اوښتونې(متحوله) لري او د

- د دې اووښتونې په ځای د بنسټیزې ورشو یا ساحې او یا
- د دې اووښتونې تړلو ځخه د کوانتیفیکاتورونو(کوانتورونو) په مرسته یوه وینا جوړیدی شي.

یادونه :

که په لاندې کې د تړاو یا تړنې کلمه منځ ته راځي، نو موخه ترې د « او » تړنه یاکنجنکشن conjunction دی۰ له ګرامر سره په توپیر، چې هلته تړنه یا تړاو یو « تړونتیکی، تړاولغات» ښایي په سم اند کې تړنه یو ځرګند(دوه ځایلرونکی یا دوه ځاییزیا نوره هم ښه دوه ګونی) جملې تړل یا په بل عبارت دوه ځاینیونکې (نوره هم ښه : دوه ییز یا دوه- ګونی) فنکشن یا تابع(بلواک) تعریفوي یا پیژنی۰

د « او» تړنه او نخښنه یې $\wedge$

پیژند ۱ ۰ ۳ :

$p\wedge q$ دوه ویناوې p او q یانې د «او » یوځایوالیp او q یواځې او یواځې هلته یو ربنتیا ارزښت ربنتیا لري، چې p اوq دواړه ربنتیا ارزښت ربنتیا ولري۰ که له دې ځخه یوه وینا هم ناربنتیا وي، نو بیا د « او » تړنه ناربنتیا ده ۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ترني نخښنه ددوه ويناو qاو p ترمنځ ليکل کيږي p/\q او ويل کيږي p او p

موږ د « او » ترنه په لاندې جدول کې روښانه کوو يا انځوروو:

يادونه: په لاندې کې w رښتيا او f نارښتيا په معنا دي

p	q	p/\q
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

د « او » ترني ته بيلګه :

د دوه رښتينو ويناو د A وينا : ,, 3 < 7 ,, او د B وينا : 3 يو لومړنی ګڼ دی رښتيا وينا A /\ B ده « ۳ له ۷ کوچنی او لومړنی ګڼ هم دی»۰

يادونه: موږ ګران لوستونکي به سره يوځاي فکر وکړو، چې دا پريمګنونه لومړي او که لومړني ګنونه وبولو۰ زه فکر کوم، چې لومړي ګنونه لومړنی نه دي۰ دا ځکه لومړي ګنونه دي، چې له دوي له زياتون او يا کمون څخه لومړی ګنونه جوړيږي۰ موږ به يې زياتون په پام کې راولو، چې : 3+5=8

د دوه ويناو دا ترنه يا کنجنکشن، چې مختلف رښتياارزښتونه ولري ياني د A وينا: 3 ,, 7 < ,, (رښتيا او د B وينا: « ۳ يو جوړه ګڼ دی (نارښتيا)، نو A/\B وينا : چې ۳ له ۷ کوچنی دی او جوړه ګڼ دی « (نارښتيا) ده۰ دا ويناترنه ويناارزښت نارښتيا لري۰

د دوه ويناو د « او» ترنه دA وينا: 3 < 7 او د B وينا « ۳ يو جوړه ګڼ يا جفتعدددی» يوه نارښتيا وينا ده : ۳ يو لومړنی ګڼ دی او له ۷ لوي دی۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

ومو لیدل، چی د « او » تړنه او یا کنجنکشن په ورسره بلده (عادې) توګه هلته جوړیږي، چې دوه ویناجملې په «او» سره وتړل شي:

غوټۍ «پټیدځاي» پیداکړ او دا پټیدنه یې پټه وساتله»۰ کیدی شي له «مګر» « سره له دې هم» « په همدې ډول » تړنه وویله – یا افاده شي۰

پورته ډول ، د بیلګی په توګه: په پټپټکي کې « که سپین پټ شي او هوسۍ د هغه د پټیدو ځاي پیدا کړي او دا چاته ونه ښایې»، نو داسې وایو « او » یا « هم »

هوسۍ د سپین د پټیدو ځاي پیدا کړ« او » دا پټیدځاي یې پټ واسته۰

۱) هلمند موړ(بډا) شو او هیواد یې پریښود ۰

۲) سره له دې، چی برلین کوچنۍښار دۍهلته د منی د المپیک لوبې کیږي

۳) ۱۵ ګڼ جوړه دی، د هغه پروت زیاتن په ۳ ویشونۍدۍ

په ټولیزه توګه د « او » تړنه هلته ربښتیا ارزښت ربښتیا لري، چی د جملی ټولی برخې ربښتیاارزښت ریښتیا ولري، اړین نه ده، چې نظم په پام کی ونیول شي۰ په وینا تړنه کې کیدی شي زیاتې وینابرخی سره په تړنه « او » وتړل شي لکه « هغه راغی، ویې لیدل او برۍ یې په برخه شو»

پیژند ۱ ۰ ٤ :

د« یا(or)» تړنه یا دیسجنکشن Disjunction (لاتین: ټاکنه یا پریکړه) Alternative الترناتیو یا د » یا « تړنه» دا په « یا » بیرته ورکړ شوې «جمله تړنه» تل ژوروالی ته راهڅوي: باید جوته شي، چی ترې تیریدنه یا صرف نظر په نه کیدونکی اوکه ترې نه تیریدونکی « یا » موخه ده۰ د دیسجنکشن یا د «یا»تړنی پیژند یا تعریف یواځنی دۍ او دا $\lor$ د یا تړننخښه ده.

د دیسجنکشن نخښه د دوه ویناو p او q ترمنځ ځایول کیږي p$\lor$q او ویل کیږي p یا q او

په لاندې ډول څرګندیږي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

p	Q	p∨q
w	W	w
w	f	W
f	w	w
f	f	f

له دې پورته جدول څخه پوره جوتيږي، چې ديسجنکشن يا د « يا » تړنه p∨q يو داسې رښتياتابع (-بلواک يا- فنکشن) دی، کوم چې هلته او هلته رښتيا فنکشن رښتيا اخلي، کله چې کم له کمه د « يا » تړنې يو غړی د رښتيا ارزښت رښتيا ولري يا واخلي۰ که د ديسجنکشن دواړه غړي نارښتيا وي نو p∨q هم نا رښتيا دی۰ دا د رښتيا فنکشن کې د ځايونې « يا» څخه بل څه نه دي۰ يوه د «نه خونديکونې» يا « نه ځايونې» يا « په برکې نه نيونې» د « يا » وييڼه يا افاده ده، چې دا په نورو ژبو کې په بل ډول مګر په پښتو کې « يا۰۰۰ او يا ۰۰۰» ليکل کيږي۰

بيلګه (د « يا » تړنې ته):

د دوه ربښتينو ويناو د « يا» تړنه د A وينا: ,, 3 < 7 ,, اود B وينا: « ٣ د ٦ پرويشونی دی» يوه رښتيا وينا A∨B ده : «٣ له ٧ کوچنی دی او د ٦ پرويشونی هم دی»۰

د دوه ويناو تړنه، چې مختلف ارزښتونه لري.

د A وينا ,, 3 < 7 ,, رښتيا او د B وينا: ,, 3= 7 ,, (نارښتيا) ، نو A ∨ B ده، چې 3 < 7 يا 3 = 7 دا وينا تړنه د رښتيا ارزښت رښتيا w لري۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه نارښتيا ويناو د « يا »(" Or") تړنه:

د A وينا : "7 > 3 " او د B وينا: ۳ يو جوړه ګڼ (جفتت عدد)دئ يوه نارښتيا وينا A\/B ده:

« ۳ له ۷ لوي او نا جوړه ګڼ (طاق عدد)دئ»

الترناتيوAltenative يا انتيوالنځ Antivalenz ويناوې : دا د » يا « ويناتړنه بايد د « يا ... او يا سره بدله نه شي، ځکه چې دا هلته هم نارښتيا ده، که چيرې دواړه ويناوی رښتيا وي٠

بيلګه : (دوه الترناتيو ويناو ته ، چې رښتيا وي)

د وينا 7 > 3 او« ۳ يو لومړی ګڼ دئ» د الترناتيو په نامه داسې دئ « ۳ يا له ۷ کوچنئ دئ او يا يو لومړی ګڼ دئ» نارښتيا دئ٠

بيلګی : (نه والي، کنجنکشن، ديسجنکشن ته)

يادونه: په لاندې (Wahr) w د رښتيا او(Falsch)f د نارښتيا لپاره کارول شوي.:

ويناتړاو

A	π پي ټولګڼ دئ	f
B	π ايراشنل ګڼ دی	W
C	صفر له پيπ کوچنی دئ	W
D	π پي له دری کوچنی دئ	f

(c) ketabton.com: The Digital Library

A	π ټولګڼ نه دی	W
C	π کوچنی برابر له صفر	F
A∨C	π ټولګڼ او له صفر لوي دی	f
B∧C	π ایراشنل او له صفر لوي دی	W
A∨C	πپي ټولګڼ یا له صفر لوي دی	W
A∨D	π ټولګڼ یا له ۳ کوچنی دی	f

بیلګه : له دې بیلګی دمخه هغۀ فرمول دی

یا کتاب لولم او یا فلم ګورم۰ په دې بیلګه کی الترناتیو یا بدیل شته دی، یانې د » او یا « امکان شته۰ دا د » او یا « کارونه یا استعمال د خرڅلاو شیانو باندې باید بند وي۰ یانې دوه نرخونه باید ورنه کړای شي۰

دا لاندې فزیکي بېلګه ده، چې ګران لوستونکي دې پخپله هم ورته پام وکړي او ځیره دې یې په پام کې راولی۰ په شالت یا سرکت الجبر کې د کجنکشن یا د »او« ترنې« ریښتینوالی لپاره دوه پرلپسی(لړی) شالتونه ترل شوي دي،

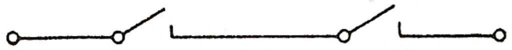


Bild 7.1

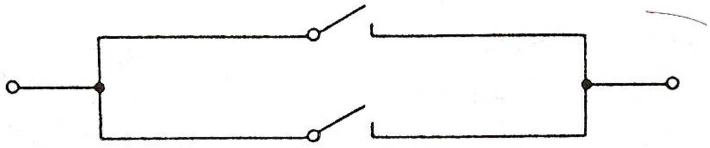


Bild 7.2

(c) ketabton.com: The Digital Library

کمپلکس ربنتیابلواک یا – فنکشنونه

دا وروستۍبیلګه په ګوته کوي، چې داسی یوځاي شوې ویناوې جوړیدۍ شي، په کومو کې چې له یو زیات ټروني موجود وي۰

که دا ساده وینا که چې «په تیاتر کې نن لوبه کیږي» په p پس له دې جملی کمپلکس جوړخت دا نه تری تیریدونکی (ربنتیا - بلواک یا ربنتیا فنکشن » نهp p\/ دۍ۰ د دې لپاره هم د ربنتیاارزبنت فنکشن ورکول کیږي۰ د ربنتیا ارزبنت لپاره p له دې څخه نهp یا p نه (دا دواړه دې برابر ومنل شي) او بیا هم نهp\/p جوړیږي، چې جدول یې په لاندې ډول ورکړ شوی دۍ

د یوې وینا نه والی

p	Pنه	p\/pنه
w	f	W
f	w	w

لاس ته راوړنه یا نتیجه هکیک کوونکې نه ده یوه وینا نهp\/p تل ربنتیا ده، بی له ځانګړي حالت او له دې خپلواک، چې p کوم ربنتیاارزبنت غوره کوي .

ویناسم اندیزې ویینې یا افادې، چې د هغې ربنتیابلواک کټمټ یا (identisch(identic ربنتیا دۍ(دا په دې مانا، چی که د ویناؤوبنتونکې یا واریابلې ته هر ربنتیاارزبنت ورکړ شي یانې ربنتیا یا نابنتیا تل د ربنتیا ارزبنت ربنتیاغوره کوي)، وینا سم اندیزه قوانین بلل کیږي، یا ورته تاوتولوژي Tautologien

ویناسم اندیزې ویینې یا افادې، چې د هغو ربنتیاارزبنت بلواک کټمټ نابنتیا دۍ (دا په دې مانا چې د متحولې یا اووبنتونې په هره وینا ارزبنت وینا نابنتیا ارزبنت غوره کوي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

کونترا-دیکتوریکي وینا بلل کیږي٠ورته ویناوې کونترادیکشنونه contradiction (د دوه ویناوو مخامخوالی یا – تضاد)

بیلګه :

ربښتیاارزښت دې د وییني یا افادې نه(p∨q) لپاره وشمیرل شي په همدې وخت کې دې د نه∨qp ربښتیاارزښت هم وشمیرل شي او له بل سره دې پرتله شي.

جمله : ښایو، چې $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

$$
\begin{array}{l}
p...q....p \vee q....\neg(p \vee q)......\neg p...\neg q...\neg p \wedge \neg q \\
w...w......w.........f.............f.....f.........f \\
w...f.......w........f.............f......w........f \\
f...w........w........f............w.......f.........f \\
f...f........f.........w............w........w........w
\end{array}
$$

داچې د مخ ته پراته جدول څلورم او اوم درځ یو په بل پریوځي یا یو د بل سره برابر دي، نو ویېنې یا افادې $\neg(p \vee q)$ او $\neg p \wedge \neg q$ په څرګند ډول همغه ربښتیا بلواک یا – قنکشنونه دي. دا په دې معنا چې ،، جملې: دا نارښتیا ده، چې p یاq ،، او ،، نه q او نهp ،، همغه ربښتیا - (او په دې ډول همغه نارښتیا-) شرایط لري، که دp اوq په ځای بلې یوې لیدونکې جملې ځای نیولی وي. دا ډول دوه وینا تړاو -وینا تړنه) او تل همغه ارزښت ورکوي.

که په دې عملیو کې نوکان ځا په ځای شي، نو د عملیې ارزښت طبعاً همغه نه پاتیږي، لکه

د بې نوکانو عملیې.

ایمپلیکیشن implication (لاتین: ورراګډول، خورول):

(c) ketabton.com: The Digital Library

که دوه ویناوې د خپل تړاو له لارې« که۰۰۰، نو سره تنظیم یا ترتیب شي اپیلیکیشن سومبول<= چې دا سومبول د دواړو ویناو Aاو B ترمنځ ولاړ دی: او دا مانا لري:

که A نو B یا په همدیډول «له A څخه B لاس ته راځي» وینا A ته پریمیس Prämisse (لاتین نیونه (فرضیه) وایي او وینا B ته کونکلوزیون Konklusion (لاتین: پاي لاس ته راوړنه) وایي۰ د دوه ویناو ایمپلیکیشن ټیک هلته نارښتیا دی، چې پریمیسس رښتیا او کونکلوزیون نارښتیا وي۰ په بل ډول رښتیا دی۰

د دوه ویناو لاس ته راوړنه یا تعقیب د لاندې جدول له لارې یواځنی څرګندیدی شي

د لاس ته راوړنې یا ایمپلیکیشن یا پسې راتلنی، په ځان پسې لرنې سومبول <=

P	q	p=> q
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

دلته داسی یوه تړنه لرو، چې له دوه برخه ویناو A او B ټیک هلته یو نارښتیا یوځاي شوې ویناچې په p=/>qسره ښایو)۰

کله چې لومړیبرخه وینارښتیا او دومه برخه وینا نارښتیا وي په کمپیوتري یا پروګام ژبه کې داسی ویل کیږي: If….., then…..

کومې ژبنۍ افادې یا ویینې په دې رښتیا فنکشن بیرته اړول کیږي. بیرته یا په څټ

(c) ketabton.com: The Digital Library

راګرځیدلی شي. په ښکاره ډول د بیلګې په توګه جمله: که پسرلی لوبه وګټي، نو ماښام د تلویزیون کتلو ته کورته راځي.

ناریښتیا ده، که د جملې لومړئ برخه رښتیاوي او دویمه نارښتیا. که په جدول کې برخه جملو ارزښتونه لکه د بیلګې په توګه د جدول لومړئ همداسې څلورمه کرښه سره یو د بل پرتله شي(که دواړه برخه جملې رښتیا همداسې نا رښتیا وي) پرابلمونه نه پیښوي، په دې حالت کې توله وینا رښتیا ده، که لومړئ برخه وینا نارښتیا او معکوس دویمه برخه رښتیاوي، نو په دې حالت کې به د بیلګې په توګه جمله نارښتیا ونه لیدل شي(که پسرلی لوبه ونه ګټي او سره له دې هم تلویزیون لیدلو ته راشي)، نو بیا د دوه ارزښتوالي پرینځیپ له مخې یواځې دا ارزښت ،، رښتیا،، باقي پاتې کیږي. د پورته فنکشني پوره والي له مخې په ګوته کوو، چې هم $\neg p \vee q$ او هم $\neg(p \vee \neg q)$ ټیک بیرته بیا(بیرته) د ایمپلیکیشن د رښتیا فنکشنونه ورکوي.

په بل ډول افادې یې: q که p، او یا هم p ، د q لپاره پوره کیدونکی شرط دی(په بل ډول یې: qد p لپاره اړیین شرط دی)

ورته والی :یوارزښتوالی(برابرارزښتوالی) Äquivalent

که دوه ویناوې qاو p خپله ترنه په » ټیک هلته ، که » په هم دې ډول « هلته او هلته، که» تنظیم کړي، دې ته ورته والی یا ایکویوالنت وایي۰ د ایکویوالنت سومبول دی ≈ د دواړو ویناو pاوq ترمنځ دا سومبول پروت دی p ≈q په دې مانا، چې p ټیک هلته که q ۰ ایکویوالنت سومبول یې په دواړو خواو ایمپلیکیشن لري: له p څخه q لاس ته راځي او له qڅخه p

د دوه ویناو ایکویوالنت ټیک هلته رښتیا دی، که دواړه ویناوې رښتیا یا دواړه ویناوې نارښتیا وي۰

دا شي څرنګوالی یا شي حالت په لاندې جدول کې روښانوو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

p	q	P⇔q
w	w	W
w	f	F
f	w	F
f	f	W

سیده او مخامخ یا په ځښ دي په دې مانا وي، چی له p څخه q لاس ته راځی او په ځښ، یا نی له q څخه p لاس ته راځی۰

۱ ۰ ۳ د ویناېلواکو یا ــفنکشنونو ترمنځ اړیکې

د دوه ویناو ترنه سم اندیزه یا منطقي برابرارزښته بلل کیږي، که د ویناو رښتیاارزښت د ترنویناارزښت سره یو په بل وخوري یا یو بل سره برابر شي۰ دا د یو ویناارزښت جدول له لارې څرګندیدی شي۰ ومو لیدل، چی ایکویوالنت په دواړو لورو لاس ته راوړنه یا ایمپلیکیشن دی۰ په لاندې جدول کی به وګورو، چې دریم او شپږم درځونه، متې یا ستنی څنګه یو بل سره ځان نیسی یا ګورو، چی سره یوارزښته دي۰

p	q	p ⇔ q	p=>q	q ⇒ p	(p ⇒ q) (q ⇒ p)
W	w	w	w	w	...........W
w	*f*	f	f	*w*	.........*f*
F	*w*	*f*	*w*	*f*	.........F
f	*f*	w	w	*w*	.........*w*

ورته والی اړیکی د ورته والی یا ایکویوالنت سومبول باندې هم ښوول کیږي

$$(p <=> q) <=> (p => q)\ (q => p)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا ورته والي ويناتړنه موږ ته دا اجازه راکوي، چې يو بل سره بدل کړو يانی د يوه ځاي د بل سره بدل کړو٠ له دې څخه پيچلو تړنو کې لکه د شالت الجبر کې کار اخستل کيږي٠

د دې ورته والی ويناتړنې غوره بېلګه د،،دي مورګان،، قاعده ده De Morgansche Regel

$$(1)......\overline{(p \wedge q)} \Leftrightarrow (\overline{p} \vee \overline{q})$$
$$(2)......\overline{(p \vee q)} \Leftrightarrow (\overline{p} \wedge \overline{q})$$

د کنجنکشن او ديسجنکشن لپاره ديستريبوتيو قانون:

(3) [p/\(q\/r)] □ [(p/\q) \/ (p/\r)]

(4) [p\/(q/\r)] □ [(p\/q) /\ (p\/r)]

١ ٠ ٤ وينافورم يا - بڼه او کوانتورونه

وينا سم اند په لاندې ډول ساده ټوليز کيدی شي٠ د بيلګي په توګه که مختلف شيان همغه خويونه ولري، نو ضرور ده، چې دا فورمال وويلي - - يا افاده کړای شو: دلته د يناو پر ځاي د وينافورم څخه خبري دي، يا غږيږو٠ دا داسی ژبنۍ ويينې يا افادې دي، چې د شيانو لپاره واريابلی يا اووښتوني لري او لومړی د مناسب انفرادې ځاي پرځاي وروسته يوه وينا شي٠ بيلګي يی په لاندی ډول دي

لومړی : xپر دوه ويشونی دی »

دويم : » z يو هوار څلورګوډی(څلورضلعي) » دی٠

دريم : «u له v څخه لوي » دی او داسی نور

(c) ketabton.com: The Digital Library

ترهر ځاي پرځاي کولو وروسته رښتيا يا نارښتيا وينا لاس ته راځي۰ که په دويم کی دz پرځاي «ډېرګوډی» (کثيرالاضلاع) ځاي پرځاي شي، نو يوه رښتيا وينا لاس ته راځي۰

که په لومړي کیx د7 پرځاي ځاي پرځاي شي، نو يوه نارښتيا وينا لاس ته راځی۰ دريم يوه اړيکه(ريليشن(ده، چې هلته د انفراديو د ايښولو ترتيب هم يو رول لري۰ دلته که د تورو پر ځاي ګڼونه ېږدو، نو هلته دا رښتيا وينا ده که د لومړي توري پرځاي ستر ګڼ ځاي پرځاي شي۰د فورمال سم اند په ژبه د پريديکات په شکل۰(له دې امله دې د سم اند برخی ته د پري ديکات first-order logic سم اند یا منطق وايي۰

بيرته داسی ليکو P(x), Q(z), R(u,v)

يوه بله کارونه يا عمليه شته، چې له وينا بڼي څخه وينا جوړوي۰ چې کوانتيفيکيشن Quantifikationبلل کيږي۰ دا ويناهغه وخت منځ ته راځي، چې ټول د وينا بڼی افراد همغه خويونه ولري، چې ټولوينا (Allaussage) ورته وايو۰ياچې په پوښتل شوي چاپريال کې داسي افراد شته وي، چې همغه خويونه ولري، دې ډول وينا ته موږ د شتون يا موجوديت وينا يا Existenzaussage وايو۰ زموږ په بيلګه کې يی استعمال لاندې را په ګوته وکي

څلورم : (پيداينتی يا طبيعي) ګڼونه يا اعداد شته، چې په دوه ويشل کيږي

پنځم : ټولې څلوری (مربع) هوارې ډېرګوډۍ يا کثيرالاضلاع دي۰

د ټولکوانتور يا ټولوينا لپاره نخښه∀

د شتون- يا موجوديتکوانتور يا شتونوينا لپاره نخښه ∃

يادونه : د ټولکوانتور لپاره نخښه د سرچپه A په څير ده او د شته والي کوانتور لپاره نخښه د په څټ E په څير ده په پام کې دې وي، چی د کوانتورونو ورکونې وروسته اووښتونې (وياريابلی يا مجهولی) ورکول کيږي۰

څلور ۱ : $\exists x \in P(x)$

داسی يي لولو، چی يوx په P(x) کې شته

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځه ۱ : $\forall z \in Q(x)$

دا داسی لولو: د ټولوz لپاره ، چې په Q(x) کې پروت دی (یا د ټولو۰۰ له ۰۰۰ څخه)

دا سومبول ∃ دا مانا لري،چې« کم له کمه یو ۰۰۰ شته»د وینابنی او په دې پورې اړوند واریابلو یا اووښتونو ډیریو جوړه، د دې سومبول سره یوه د« شتون- یا موجودیت وینا» ورکوي، په نامه د اووښتونو ساحه یا ډیری کې، په کوم کې چې کم له کمه یوه داسې اووښتونې ځاي په ځایونه شته وي کومه چې وینابڼه رښتیا وینا کوي۰

بیلګی (د رښتیا شتون - موجودیت وېناوي)

اول - $\exists x \in R: x+1=0$

(لوستل : یو داسی رییل ګڼ یا عدد x له(په) R (کې) شته ،د کوم لپاره چې0 =x+1 باور لري) دلته x دا مانا لري، چې x د رییلګڼډیری یا ریل ا عدادو سټ R توکی دی او ∈ په دې مانا دی، چې توګي له ۰۰۰ دی۰

دویم : $\exists x \in R:$

$x^2 + 4x = 0$

(لوستل: یو x له(په) R څخه(کې) شته د کوم لپاره ، چې $x^2+4x= 0$ باور لري)

دریم : $\exists x \in R: \quad x^2 - 4 = 0$

(په دې جمله کې حتی دوه رییلګڼونه شته دی، چې د هغې لپاره $x^2-4 = 0$ باور لري

: (2، -2)

جمله (د یوې شتونوینا یا موجودیتوینا نه والی یا نفی)

$\exists x \notin R: x^2+1=0$

لوستل: داسې رییلګڼ x نه شته، د کوم لپاره چې برابرون $x^2+1 = 0$ باور ولري

(c) ketabton.com: The Digital Library

داسې وینابنی هم شته، د کومو لپاره، چې د اووښتونډیرۍ یا واریابلډیرۍ ټولو توکو لپاره رښتیا وینا شي۰

بېلګه: وینابڼه « x په 2 ویشونی دی » د جوړه ګڼونو هریوه لپاره رښتیا ارزښت لري په

دا سومبول ∀ په دې مانا دی، چې « د ټولو x لپاره» د وینابڼې او په همدې پورې اړوند د وینا متحولو ډېرئ یا سټ (ویناااووښتونډیرۍ یا واریابلډیرۍ) ترڼه له دې سومبول سره یوه Universalaussage یونیورزالوینا یا ټولوینا منځ ته راځي۰ په دې مانا چې د دې متحولو ډېرئ(اووښتونډیرۍ) هر توکی لپاره د وینابڼې څخه یوه رښتیا وینا جوړیږي۰

جمله : (دUniversalaussage یونیورزال- یا ټولیزې وینا یا ټولوینا لپاره

$$(1)........\forall x \in G : 2 \mid x$$

(د ټولو جوړه ګڼونو (جفت اعدادو)لپاره باور لري، چې x په ۲ ویشونی دی)

$$(2).......\forall \in R, x^2 > x$$

(د ټولو ریيلاعدادو x لپاره, کوم چې له یوه لوي وي باور لري $x^2 > x$)

جمله : (د نارښتیا ټولیزې وینا لپاره)

$$\forall x \in R : x^2 > x$$

دا وینا نارښتیا ده، ځکه چې دا د $1 \le x \le 0$ لپاره باور نه لري، پس دا وینا د ټولو ریل عددونو لپاره باور نه لري۰

۱ ۰ ۵ اړین – یا ضروري- او پوره کیدونکي شرطونه

د ایمپلیکیکشن سومبولA=>B (« کهA نو B » « له A څخه Bلاس ته راځي»)یا په بل ډول : که A باور ولري، نو B هم باور لري»

(c) ketabton.com: The Digital Library

په شمیرپوهنه کې ځانګړي فرمولونه شته۰

الف) « A د B لپاره پوره کیدونکی شرط دی»

ب) « B د A لپاره یو اړیین یا ضروري شرط دی»

فرمولونه الف) وایي، چې د A رښتینوالی د B رښتینوالی ځان پسی لري یانی له آ څخه ب پوره کیږي یا له یوه څخه وبل ته رسیږو یا د A شرطونه د B د شرطونو پوره کیدنو لپاره نیونه(فرضیه) ده او ب شرط پوره کیدنه اړیینه یا ضرور ده، چی آ پوره شي۰

بیا : وینا باور لري۰

د B وینا د باور لرلو لپاره دا پوره دی یا پوره کیدونکی دی یا بسیا کوي، که د A وینا باور ولري

بیلګي د پوره کیدونکو شرطونو لپاره:

۱ – ویناA : « ګڼ n پر ٦ ویشونی دی»

وینا B : « ګڼ n پر ۳ ویشونی دی»

A => B

د دې لپاره پوره کیدونکی شرط دی یا بسیا کوي، چې یو رییل ګڼ n پر ۳ ویشونی دی، که دا پر ٦ ویشونی وي۰
که n پر ٦ ویشونی وي، نو پر ۳هم ویشونی دی ۰ دا نو تراوسه دا مانا نه لري، چې ضرور دې ګڼ n که پر ۳ ویشونی وي، پر ٦ دې هم ویشونی وي۰ د بیلګي په توګه ګڼ ۹ پر ۳ ویشونی دی ، مګر په ٦ نه دی ویشونی۰

۲ - وینا A : “n > 7„

وینا B :وي دې :n > 6

A => B

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره دا پوره کیدونکی دی، چې یو رییلګې n له ٦ څخه لوی دی۰ که اړیکې، چې n له ٦ لو دی، باور ولري

داسې رییلګنونه هم شته، چې له ٦ څخه لوي دي، مګر له۷ څخه لوي نه دي۰ د بیلګي په توګه ۵ ،٦ یا شپږ.نیم

د ب) فرمولبندي وايي، چې وینا ب باورلرل غوښتونکی یا اړیین یا ضرور دی، د دې لپاره، چی وینا A باور ولري۰

که وینا B باور ونه لري نو وینا A هم باور نه لري ۰

بیلګی د اړیین(ضروري) شرطونو لپاره:

۱ – د دې لپاره، چې یوګڼ n پر 6 وویشل شي، اړین(ضرور) ده، چې دا ګڼ پر3 ویشونی وي۰ یو ګڼ، چې پر3 نه وي ویشونی، نو پر ٦هم ویشونی نه دی۰

۲ - ویناA : » څلور ګوډی یوه څلوری یا مربع ده«

وینا B : » څلور ګوډی څلور ولاړ کونجونه لري« A => B

د دې لپاره ضرور، چې یوه څلورګوډی یوه مربع(څلوری) ده دا خویونه دي، چې څلور ولاړ کونجونه ولري، که ټول ګونجونه یې ولاړ نه وي، نو مربع یا څلوری نه ده که یوه څلورګډی څلور ولاړکونجونه ولري اړین نه ده، چې څلوری یا مربع دې وي۰

د برابروالي یا برابرارزښتي (ایکویوالنت) سومبول«

A<=> B

(په دواړو لورو ایمپلیکیشن) لپاره په شمیرپوهنه کې هم فرمولبندي شته: دا وايي، چې A دB لپاره یو ضروري او پوره کیدونکی شرط دی۰ « دا وايي، چېA ټیک هلته باور لري، کله چې B باور ولري

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګی : د پوره کیدونکی او ضروري شرطونو لپاره

۱ – ویناA : « ګڼ یا عدد n پر ٦ ویشونی دی»

وینا B : « عدد n پر ۳ او ۲ ویشونی دی»

A <=> B

د دې لپاره ضرور او پوره کیدونکې دی، چې: n پر ٦ ویشونکی دی، که دا عدد پر۳ او ۲ ویشونکي وي۰

۲ – وینا A : » څلورګوډی یا څلورضلعي یوه څلوری یا مربع ده«

ویناB : « څلورګوډی څلور ولاړ کونجونه لري او څلو برابر اوږده اړخونه یا ضلعې»

A<=>B

ددې لپاره، چې څلورګوډی یو مربع دی ضرور او پوره کیدونکی دا خویونه دي، چې څلور ولاړ کونجونه او څلو برابر اوږده اړخونه(ضلعې) ولري۰

۱ ۰ ٦ د شمیرکلمو یا ویو(لغاتونو) شمیرنیز مفهوم(ترې پوهیدنه)

پیژند (تعریف) څه شی دی؟

د کلیمی ټاکنه ده، چې تیک ټاکلي او له مخامخوالی(تضاد) ازاده وي۰ په عامو خبرو کی کله که کلیمی راځي ، چې په مختلفو اشکالو ترې ځانګړي ماناوي اخستل کیږي، خوپه شمیرپوهنه کې داسې نه ده۰

د شمیرنی ټاکنی یا پیژندونه (تعریفونه)د تیک څرګندې پوهنې یوه نه پرینووونکی سمبال اله ده، یانې ترې تیریدل نه شي کیدای۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله څه شی دی ؟

ټولې ربښتونې ویناوې په شمیرپوهنه کې جملې بلل کیږي، چې د پیژندنې لپاره ښوونې یا ثبوت ته اړتیا لري ۰

اکسیوم Axium څه شی دی؟

بې ثبوته ربښتینې وینا ته اکسیوم وایي

شمیرپوهنیزې یا د ریاضي جملې زیاتې نیونې(فرضیي) او ثابتول(غوښتنه،جوته ونه یا ښوونه) په بر کې- یا خوندي لري۰

که دا وینا داسی وي، نو پس داسی به هم وي۰ دلته که دا وینا داسې وي نیونه یا فرضیه ده او نو داسې هم ده۰ دا غوښتنه ده، چې باید ثبوت یا وښوول شي۰

اکسیوم : ۱ طبیعي عدد دی (پیانو Peano)

: ټکی هغه دی، چې پر ویشونی نه وي یانې په ټکی ویشل بند دي۰ (Euklid)

: حتمي پیښه د پیښي امکان ۱ درجه لري۰

جمله: که دریګوډی ولاړکونجیز وي، نو(پس) د پیتا ګوراس (pythagoras) درسي جمله باور لري

: یو لومړی ګڼ، چې له دوه لوي وي، باید ناجوړه(طاق) وي

: په اخره جمله کې نیونه(فرضیه) ده (که یو پریم عدد له ۲ لوي وي۰۰۰) او ثبوت یې (هر له دوه لوي عدد په دوه ویشل کیږي پس لومړی ګڼ نه شي کیدی، نو دا تل ناجوړه یاطاق دی)په خټوالي یا تضاد کې پیژندل کیږي۰
تل داسی نه ده، چې د جملی د ربښتینوالی څخه دې د جملی په خټوالی یا تضاد هم ربښتیا وي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

-- ----

لکه:

جمله: که ٦٪ پس ۲٪ هم (رښتیا)

جمله: که ۲ ٪ پس ٦٪ هم (نارښتیا)

۰۰۰۰۰تیک هلته ، چۀ که۰۰۰۰یوځای راوړي

بیلګه : که چیرې غبرګ اړخیز کې هر دنننی کونج ۹۰ درجی وي، نو دا ولاړکونجیز(قام الزاویه) دی۰

په څټ : که غبرګ اړخیز ولاړ کونجیز وي، نو دنننی کونجونه ۹۰ درجی لوي دي۰

یوځایراوړل :

یو غبرګ اړخیزتیک هلته(هلته او هلته یا بیا او بیا یا بیا یواځنې او یواځنې تاکلی یا یواځنی تاکلی او په څټ) ولاړکونجیز دی، کله چې دنننی کونجونه ۹۰ درجی لوي وي۰

۱ ۰ ۷ برابرونونه او نابرابرونونه (مساوات او نامساوات)

پیلبیلګه:

لمسی ، پلار او نیکه په ګډه ۱۱۳ کلن دي۰ پلار د ځوي د عمر یوکال کم اوه ځله عمر لري او نیکه د پلار د عمر له دوه برابره څخه ٦ کاله نور هم زیات عمر لري۰

پوښتنه : له دوي څخه هر یو څو کلن دی؟

د ځوي عمر په x سره ښایو، نو د پلار عمر 7 x-1 دی او د نیکه عمر 2(7x-1)+6 کاله کیږي، چی د دې ټولو زړښت وختونو زیاتون یا جمع بیا ۱۱۳ کاله دی یانی :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x+7x-1+2(7x-1)+6 = 113$$

یو ډول ترمونه رامنځ ته کیږي او ساده کیږي:

$$x+7x-1+14x-2+6= 113 \quad \vee \quad 22x +3 = 113$$

په کینې ۲۲ ځله د x ارزښت چې ۳ په ورزیات شوي او دا له ۱۱۳ سره برابر دی

نو دا ګڼې ۲۲ ځله x بیا ۱۱۰ کیږي: $22x = 110$ او د x ساده ارزښت ۲۲ – مه برخه د ۱۱۰ ده یانې: په دې لاس ته راوړنې سره زوي ۵ کلن پلار ۳٤ کلن او نیکه ۷٤ کلن دی۰

که ترمونه $T^\wedge$ او T° د برابرووننخښنی = باندې یو له بل سره وتړل شي، نو لاندې برابرون پیداکیږي: $T^\circ = T^\wedge$ ۰

که چیرې ترمونه په دې نخښو $\leq, \geq, <, >$ او(نابرابروننخښه =|) یو له بل سره وتړل شي یو نابراون منځ ته راځي.

برابرونونه او نابرابرونونه چې ناټاکلي یا مجهولو سره یوځاي شي، هغې ته د وینافورم یا نوره هم ښه وینا بڼه ویل کیږي۰

دا یا رښتیا یا نارښتیا وینا کیدی شي۰ که ناټاکلي، چې اوښتونې یې هم بولو(د بیلګې په توګه z , x , y) پر ځاي د بنسټېدیرۍ ګڼونه ولیکل شي۰ په برابرونپوهنه کې له پیژند – یا تعریفېدیرۍ څخه هغه ګڼونه غوره دي، چې د ورکړ شوي فورم یا بڼې یو برابرون یا نابرابرون رښتیا وینا کړي۰

د یو برابرون یا نابرابرون (مساوات یا نامساوات) هر عدد ځاي پرځاي کول، چې ویناښه پیژند - یا تعریفېدیرۍ پورې اړوند وي او دا وینا ریښتینې کوي، اوبیېدیرۍ یا حلېدیرۍ L کې پروت دی یا د برابرون یا نابرابرون په ډکوونکو (پوره کوونکو) ډیریو پورې تړلی برابرون ته ، چې د ټولو ځاي پرځاي کولو لپاره ریښتونې وینا ورکوي کټمټ یا (identisch, identic) وینا وایي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګې :

الف) $5x= 4$ د $x = 0,8 = 4/5$ لپاره ربښتیا وینا ته ځی : یانې

$5.0,8=4$ نو $L=\{0,8\}$

ب) $3x^2 = 48$ د $x = 4$ لپاره او $x = -4$ لپاره ربښتیا وینا ته ځې

یانی $3.(-4)^2 = 48$ څخه لاس ته راځی او په ښت $3.4 = 48$ پس $L = \{-4;4\}$

۲ – نابرابرون الف) $2x > 1 \Rightarrow L= \{x \mid x> -1/2 \}$

ب) $x < 3 \Rightarrow L = \{ x \mid x > -3 \}$

۳ – کتمتوالی : الف) $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$

ب) $(a+b)^2 = a^2+b^2 +2ab$

دوه برابرونونه یا نابرابرونونه، چې په خپل پیژندډیریکې سره برابر وي(یا یو پربل وخوري،

یانې یو د بل پرځاي ایښول کیدی شي) او همغه اوبی- یا حلډیری ولري ایکویوالنت (Equivalent) یا «ځاي پرځاي کول برابر» یا ورته بلل کیږي۰

یادونه : دا لاندې د جدول په ډول دی، له پورته له ښي و کیڼ لور ته په درځ یانې ولاړ درځ لوستل کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

	نابرابرون	براون
۱) وینافورم کې کیدی شي،چې خواوې سره بدلې شي	T° < T^ T^ > T° 2x < 6 6 > 2x	T°=T^ T^ = T° 3x=5y 5y = 3x
۲) که وینافورم په دواړو خواوو همغه ترم زیات یا کم شي او د یوې ورزیات ترم پیژندډیری خوندې وساتل شي یا ځاي کړي	T^ < T° => T^ ± T° < T° ± T^	T^ = T°=> T^ ±T° = T°± T^
یا تغیر ونه خوري٠ مخامخ یا کینږ لوربیلګه کې تفریفډیری تغیر خوړلی	3y < 4x ⇔ ⇔ 4y±2x < 4x±2x	2z = 8 => 2z ± 3 = 8 ±3

پر ځنې بیلګه

2z=8 |=> 2z+3-z=8+3-z

دا چې z=4 دې نوي ورزیات شوي

ترم 3-zنه دی تعریف یا پیژندنه

لري، ځکه چې z - 3 یو پیدایینتي یا طبیعي ګڼ نه دی

۳) د وینافورم دواړه ⇔ T^=T° T^.T > T°.T ⇔ T^ <T°

(c) ketabton.com: The Digital Library

اړخونه کېدی شي چې	$T^{\wedge} < T^{\circ} \Leftrightarrow$	$T^{\wedge}.T = T^{\circ}.T$
له همغه مثبت ترم سره	$T^{\wedge}:T > T^{\circ}:T$	$\Leftrightarrow T^{\wedge}:T = T^{\circ}:T$
ځل او یا په همغه ترم	$T > 0$ که	که $T > 0$ وي
وویشل شي	$3y - 12 < 30z - 90$	$4x+2 = 10x-6$
	$\Leftrightarrow y - 4 < 10z - 30$	$\Leftrightarrow 2x + 1 = 5x - 3$
	$\Leftrightarrow 4y - 16 < 40z - 120$	$\Leftrightarrow 2xc + 10 = 50x - 30$
٤) د یوه برابرون	$T^{\wedge} < T^{\circ} \Leftrightarrow T^{\wedge}.T > T^{\circ}.T$	$T^{\wedge} = T^{\circ} \Leftrightarrow$
دواړه خواوې کېدی شي،	$T^{\wedge} < T^{\circ}$	$T^{\wedge}.T = T^{\circ}.T$
چې له یوه منفی ترم سره	$\Leftrightarrow T^{\wedge}:T = T^{\circ}:T$	$\Leftrightarrow T^{\wedge}:T > T^{\circ}:T$
ځل شي یا دواړه خواوې په	$T < 0$	$T < 0$
همغه ترم وویشل شي۰	$-2y < -4$	$3x = 12$
که په دې فورم کې	$\Leftrightarrow y > 2$	$\Leftrightarrow -9x = -36$
نابرابرونونه وي نو د	$\Leftrightarrow 10y > 20$	$\Leftrightarrow x = 4$
برابرون لورې بدلیږي، یا نخښه بدلیږي		

یادونه :

په ټولیزه، چې په کتابونو کې لیکل شوي، ترمونه T یو او T دوه په لاندې توګه د ایندکس سره په نخښه کوي: T_1, T_2

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ . ۷ . تمرنونه:

۱ – په ۱ . ۳ –مه برخه کې د رښتیا ارزښت ورتو الی له (۱) څخه تر (۴) پورې وښایاست.

۲ – د رښتیا ارزښت جدول له لارې وښایاست، چې لاندط ویناتړاو منطقي مساوي ارزښت دی.

الف - (A⇔B) او (B⇔A)

ب- (A=>B) او(AvB)

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ ۰ ډيرۍ پوهنه Die Mengenlehre, the set theory

ډيرۍ پوهنې يا سټ تيوري بايد خپل ځاي په شميرپوهنه او همدا ډول په نورو پيداينېتي- يا طبيعی پوهنو کې نيولي وي، نو له دې امله د لنډ تير وخت را په دې خوا په پرمختللو هيوادونو او اوس هم په افغانستان کې د ښوونځيو په ليکلوست کې پيل شوه، ځکه چې بې له ډيرپيوهنې يا سټ تيوري شميرپوهنه بې مفهومه ده او ناشونې۰ دا به له دې ليکنې څخه همدا اوس څرګنده شي، چې پيداينېتي يا طبيعي ګڼونه يا - اعداد او هرڅه د ګڼونو په څيره کې ، چې موږ ته څرګند وي هغه ټولې ډيرۍ يا سټ دي او بل څه نه دي۰

ډيري پوهنې (سټ تيوري)په پرمختللو هيوادونو کې هم د شلمې پيړۍ په دويه نيمه کې د ميندو او پلرونو لپاره ستونځې پيدا کړي، ځکه، چې دوي د ډيرۍ پوهنې سره بلد نه وو او د خپلو کوچنيانو سره يې مرسته نه شوه کولی۰

د ډيرۍ کلمه له عدددونو يا ګڼونو پخوانۍ ده، که څه هم پخوا انسانانو په خپله خوښه نه ښووله لکه اوس۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

په تراوس ورسره بلد ډول هم سټ یا ډېرئ پېژندل کېږي، لکه د ښوونځی نجونې او هلکان، یا په یوه ټولګی کې میزونه او چوکۍ، یا لکه هغه نیزوږي، چې نیز راوړي او د سپین په پټي کې یې ډیرئ ډیرئ اچولي یا د هسکې مینې د ښوونځي په لسم ټولګی کې د زده کوونکو، کتابونو، کتابچو پنسلونو، څوکیو او میزونو سټ یا ډیرئ۰

د ډیرئ پوهنې کلمه: موږ په افغانستان کې هم د ډیرئ له کلیمې سره اوس بلد شوي یو که څه هم تربیلو بیلو پردیو نومونو لاندې، چې زما په اند به زده کوونکو او ښوونکو ته یواځې ذهني غوره والي لري، زه غواړم، چې د ډیرئ څو مختلف پیژندونه یا تعریفونه ورکړم، چې ښه مو ورته پام راوګرځي، دا له دې امله هم، چې د ډیري پوهنې (سټ تیوري) غوره والی ته مو نور هم پام راوګرځي۰

ډیرئ پوهنه د شمیرپوهنې سټه جوړوي او د شمیرپوهنې ټولې څانګې په ډیرئ پوهنه ودانې دي۰ نن شمیرپوهنه بې له ډیرئ پوهنې داسې وده نه شي کولی او سټه یې وزي۰

پیژند ۲ ۰ ۱

الف : ډیرئ یا سټ د ټاکلو شیانو یا کلمو ټولګه (یوځایوالی، مجموعه) ده، چې پخپله خوښه د یوې ټاکلې بنسټډیرئ یا بنسټ سټ څخه ، چې د پیژندلشویو اصولو یا کرکترییبن له مخې ټاکل شوې وي

ب : د الماني شمیرپوه کانتور(George Cantor 1845 – 1918) پیژند:

زموږ د خیال یا لید څرګند ټاکلو ، ټیک یو له بل توپیرکیدونکو شیانو ټولګې (یوځایتولولو یا مجموعې) ته ډیرئ وایي او هر شي ته، چې ډیرئ یې جوړه کړې یا ډیرئ ترې جوړه شوې وي، د ډیرئ – یا سټ توکی وایی۰

(Set and elements of set ډیرئ او د ډیرئ توکی)

پ : د مختلفو شیانو ټولګې یوه یوون یا یووالی (واحد Einheit, unite) ته په

(c) ketabton.com: The Digital Library

شمیرپوهنه کې ډیرۍ وایی

یادونه : د واحد لپاره، چې تراوسه ورسره بلد یو یوون یا یووالی ښه نومه ونې دي۰ دا که څو واره وویل شي، نو باورلرم، چې ورسره بلدیږو۰

ت : څرګند شیان د ګډو نخښو پربنسټ، چې تر څیرنې لاندې نیول کیږي او د دې نخښو له امله یوځاي ټولیږي یا ټولګه جوړوي، ډیرۍ یا سټ تشکیلوي۰ ګډې نخښې کیدی شي ښکلا، کوچنیوالی او داسې نور وي۰

یادونه: د ګرانو لوستونکو دې دې ته پام وي، چې په پورته پیژندونو کې یې غوره او د پام وړ پیژند یاتعریف د جورج کانتور پیژند دی.

بیلګه :

ګڼونه یا عددونه، نومونه، او توري کیدی شي د ډیریو بیلګو په توګه راوړل شي۰

ګورو، چې د ډیرۍ یا سټ کلمه په شمیرپوهنه کې بل ډول ده لکه په ولسي ژبه کې، چې دلته ډیرۍ د څنو شیانو زیات یوځاي کول موخه ده، د ځانګړو شرایطو لاندې.

په شمیرپوهنه کې ډیرۍ په لویو لاتین تورو لیکل کیږي لکه ..A,B, او یا ,M,N X,Y,.... د ډیریو توکي د لاتین په کوچنیو تورو لیکل کیږي، لکه ...a,b,c او m,n,x,v,...

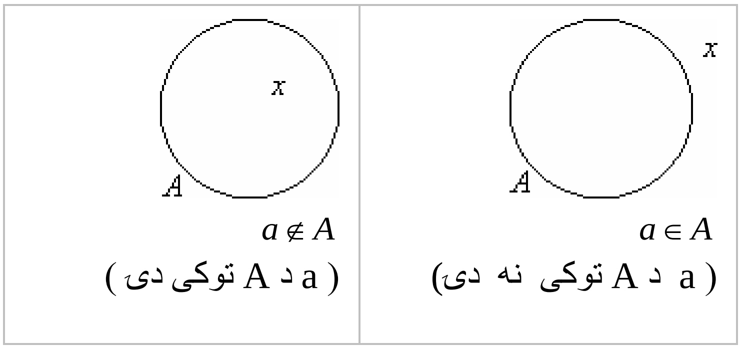
د دې لپاره، چې وپوهیږو، چې ایا توکی a د ډیرۍ A توکی دی که نه نو لیکو: $a \in A$

په پورته کې توکی a د ډیرۍ A توکی دی.

که a د A توکی نه وي ، نو لیکو: $a \notin A$ دلته a د ډیرۍ A توکی نه دی

دا پورته لینکدود له ښی وکیڼ لور ته هم لیکلی شو، چې پرلپسی لړۍ یې ساتلې پاتې شي۰ زه یې په څټ لیکنو سره لیکنیزې ستونځی لرم۰دا لاندې یې دیاګرام دی، خو توکي یې بل ډول لیکل شوي دي، چې ګرانو ستونکو ته به د پوهیدلو ستونځ پیدا نه کړي

(c) ketabton.com: The Digital Library



ډیرۍ A دې له a,b,c,d,e,f,g,h, توکو جوړه وي، چې په لاندې توګه یې لیکو

$$A = \{ a,b,c,d,e,f,g,h\}$$

ګورو، چې { } د ډیرۍ یا سټ نخښه ده

یادونه : دا د ډیرۍ کلمه موږ په افغانستان کې سټ set بولو ، چې انګریزي ده، په فارسي کې یې مجموعه بولي، چې ډیرۍ د شیانو مجموعه یا ټولګه ده او په الماني کې ورته مینګې Die Mengeوایي٠ هغه بنسټیزه خبره یې په پیژند یا تعریف کې ده، که موږ یې چې هرڅنګه وبولو، خو د یو بل څخه کره توپیرکیدونکو شیانو ټولګی ته ٠٠٠ وایو. د ټکو پر ځاي ، چې هر څه لیکی، خو موږ ګورو، چې په پښتو یې هغهٔ مناسبه نوموه ونه ډیرۍ ده، دا د کوټې کوټې څخه یا راپنډ او داسې نورو څخه ماته ښه ښکاریږي او زموږ ولس د دې نامه سره بلد دی، چې په پوهنه او لا نور ښه په شمیرپوهنه کې باید وکارول شي٠ زه بیا په دې ټینګار کوم، چې دا خپل ، چې ما ټاکلی یا بل څوک یې که بل ډول بولی د انګریزي یا الماني یا بل پردي نوم څخه ښه او پوهوړ دی٠ د سټ مانا که په ډکشنري کی وګورئ ،نو پوه به شو، چې له دې نوم څخه مو خپل د پښتو نوم ښه او مناسب دئ. ګورووچې دا نوم اوس ژورنالستان هم زیات کاروي او وایي، چې ډېرۍ یا ډېرۍ خلکو.... وکتل.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه ۲ ۰ ۱

الف) M_1 (لوستل M ايندکس ۱ دا به په لاندې نخښونه کې روښانه شي پام دې وي، چې (index(indeces ايندکش پيژند نخښې ته وايي) دې د لومړيو ګڼونو ډير ۍ (اعدادو سټ) وي، نو باور لري: $7 \in M_1, 8 \notin M_1$

ب) M_2 دې د لاندې برابرونونو يا مساواتو د اوبيونو(حلونو) ډيرۍ وي

$$(x+1)(x-2) = 0$$

نو باور لري : $-1 \in M_2, 2 \in M_2, 1 \notin M_2$

بيلګه ۲ ۰ ۲ :

الف) د مساوات $(x+1)(x-2) = 0$ حل ډيرۍ M_2 ده $M_2 = \{-1, 2\}$

ب) د جوړه (جفت) عددونو ياګڼونو ډيرۍ M_3 ده $M_3 = \{0, 2, -2, 4, -4, ...\}$

ډيرۍ لکه، چې ومو ويل د توکو د خويونو له لارې هم څرګنديدی شي يا ورکول کيدی شي۰

M = { x | x د خوويونو ۰۰۰ سره}

(لوستل: M د ټولو x ډيرۍ ده له خويونو ۰۰۰۰۰ سره)

بيلګه ۲ ۰ ۳

الف) { د ټولو x سټ ، چې هلته x يو لومړنی عدد يا ګڼ دی| M = { x

b) M = { x | (x+1)(x-2) = 0 }

$c)..........M = \{x \mid x \in R, 0 \le x \le 1\}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تشدیرۍ: ډیرۍ، چې کوم توکی ونه لري تشدیرۍ یا خالي سټ بلل کیږي او داسی یې
لیکو: θ یا $\{\}=\varnothing$

دا دې د یوې ډیرۍ یا سټ سره، چې یواځی له صفر څخه جوړه ده، نه بدلیږي یانې

$$\{0\}\neq\{\}=\varnothing$$

بیلګه ۲ ۰ ٤

$$\{x \mid x\in Z, x^2+x-\frac{3}{4}=0\}=\theta$$

ځکه، چې د برابرون یا مساوات $x^2+x-3/4 = 0$ حلډیرۍ

$$\{x|x^2+x-/4= 0\} = \{1/2, -3/2\}$$

کوم ټولګڼ یا تام عدد خوندي نه لري۰

ټولګیونو پیژند ته دې پام وي، چې د راشنلګنونو برخډیرۍ ده۰دریمه برخه دې وکتلشي

بیلګه ۲ ۰ ٥ : د ز۰ کال د دویمې نیمایي میاشتو سټ یا ډیرۍ په Ju , aug sep , ok,no, de سره ښایو او لیکو: A= { jul,aug,sep.ok,no,de}

نو داسې لرو یا نوره هم ښه داسی لیکلی شو: $jul\in A, jun\notin A$

دا په دې مانا، چې جولای د A توکی دی او جون د A توکی نه دی

بیلګه ۲ ۰ ٦ : ټول منديزي، چې نن مازیګر لمانځه ته د غارخلي لمنځتون یا جماعت ته راغلي۰

بیلګه ۲ ۰ ۷ : د هغو میرو ، غواوو او وزو ډیرۍ، چې نن په نخاس کې خرڅې شوې.

بیلګه ۲ : ۸ د ټولو هغۀ ګیونو ډیرۍ(عددونو سټ) M، چې ۳۰ ویشي یانې

۱ ، ۲ ، ۳ ، ٥ ، ٦ ، ۱۰ ، ۱٥ ، ۳۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

داسې یې لیکو : $M = \{ 1,2,3,5,6,10,15,30\}$

دا سټ پاي سټ ده داسې وایو، چې ډیرۍ یا سټ M د ټولو هغو توکوx - لکه پورته - جوړ شوې، چې ۳۰ ویشي او داسې یې لیکو: $M =\{ x \mid x$ د ۳۰ پرویشونی ګڼ$\}$

د ټولو پیداینښتي یا طبیعي ګڼونو ډیرۍ(اعدادو سټ) N ټاکو او داسې یې لیکو:

$$N = \{ 1,2,3,4....\}$$

دا نه پای لرونکی یا لایتناهي ډیرۍ(سټ) ده ، چې په لاندې ډول یې نخښنه ده یا په لاندې ډول په نخښنه کیږي: ∞

ګورو، چې په شمیرپوهنه کی موږ پر پای ګڼونو برسیره ناپای عددونو سره هم مخامخ یو٠

۲ ٠ ۲ د ډیریو ترمنځ اړیکې relation between sets

د سټونو ترمنځ غوره اړیکی د برابروالی او خوندیوني یا خوندي لرنې (مساویوالی او یو په بل کې ځاي لرلو) اړیکې دي٠

پیژند ۲ ٠ ۲ دوه ډیري یا سټونه M_1 او M_2 یو د بل سره برابرې دي، یانې

$$M_1 = M_2$$

که چیرې د ډیرۍ یا سټ M_1 هر توکی د ډیرۍ یا سټ M_2 توکی هم وي او پر ځټ یا برعکس هر د M_2 توکی د M_1 توکی هم وي٠

برابرې ډیرۍ برابر توکي هم لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بیلګې په توګه

$$M_1 = \{x \mid (x+1)(x-2)(x+3) = 0\}$$
$$M_2 = \{-1, 2, -3\}$$
$$\Leftrightarrow M_1 = M_2$$

ګورو، چې M_1 د M_2 سره برابر دئ

برخډیرۍ(سبسټ subset)

پیژند ۲ ۰ ۳ :

یوه سټ M_1 د سټ یا ډېرۍ M_2 برخډیرۍ (لاندې ډیرۍ، خوندي ډیرۍ یا سب سټ) بلل کیږي یا M_1 په M_2 کې ځای ده یا نوره هم ښه M_1 په M_2 کې خوندي ده، لیکندود یا لیکنډول:

$M_1 \subseteq M_2$ که د ډیرۍ M_1 هر توکی دسټ یا ډېرۍ M_2 توکی هم وي۰

کیدی شي، چې M_1 د M_2 سره برابر هم وي، که برابروالی یا مساوات نا شوني وي نو بیا د اصلي برخډیرۍ یا اصلي سب سټ څخه غږیږو۰

پیژند ۲ ۰ ٤ :

یوه ډیرۍ یا سټ M_1 د M_2 اصلي برخډیرۍ ده او داسې یې لیکو: $M_1 \subset M_2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

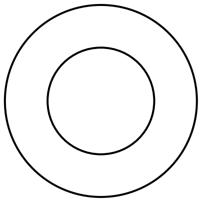
که $M_1 \subseteq M_2$ باور ولري او کم له کمه د M_2 یو توکی د M_1 توکی نه وي.

بیلګې:

الف) که ولرو $M_1=\{-1,1\}, M_2=\{-1,0,1\}$ نو M_1 په M_2 کې اصلی خوندي دی

ب) د ټولو څلوریو (مربعو) ډیری د ټولوڅلورګوډیو(څلور اضلاعو) اصلي برخډیری ده.

پ) څیره ۱ ۰ ۱ په هواره یا سطحه کې ټکوډیرۍ ښايي، د کومو لپاره چې باور لري، که M_1 او M_2 د ټکو ډیرۍ یا-سټ وي $M_1 \subset M_2$



که په پورته څیره کې وګورو، نو یوه ګردۍ (دایره) M_1 په بله لویه M_2 ګردۍ کې خوندي ده.

تشډیرۍ په هره ډیرۍ کې خوندي ده. هره ډیرۍ په خپل ځان کې د نااصلي برخډیرۍ په څیر خوندي ده.

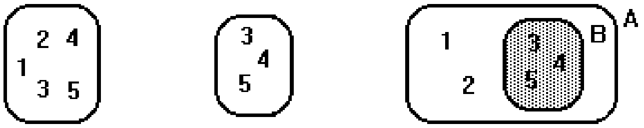
یا دا پیژند :

A⊆B که باور ولري : x∈ A ⇒x ∈ B

بیلګه:

A⊆A={1,2,3,4,5} B={3,4,5} B

(c) ketabton.com: The Digital Library



پيژند ۲ ۰ ۵ :

هغه ډيرۍ، چې هيڅ توکی ونه لري تشډيرۍ بلل کيږي او داسې يی ليکو: $M=\theta=\{\}$

يادونه : پام دې وي، چې صفر ډيرۍ او تشډيرۍ سره بدلې نه شي يانې لاندې ته:

$\{\}=\theta\neq\{0\}$

د يوې ډېرۍ توان يا تواندېرۍ (توانسټ)

پيژند ۲ ۰ ٦ :

د يوې ډيرۍ M د ټولو برخډيريو ډيرۍ پوتنخډيرۍ يا په تواندیرۍ(-سټ) بلل کيږي او داسې يې ليکو:$P(M)$ په تواندیرۍ توکي لري، چی هر يو يی بيا خپله ډيرۍ ده۰

بيلګه : د $M = \{ a,b.c\}$ ډيرۍ دا لاندې په تواندیرۍ لري

$$P(M) = \{ \{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$$

هره ډيرۍ چې د توکو څخه جوړه وي هغه ټيک n جګ 2n توکی لري يانی : n^{2n}

دا پورته د جملې په څير د پوره ايندکشن له لارې اوبی (حل-) کيدی شي(لومړۍ برخه دې وکتل شي)۰ دا دنده د ګرانو لوستونکو د خوښې کار دی، که کوي يي۰

پيژند ۲ ۰ ۷ : د ډيرۍM زور $|M|$ لاندې د ډيرۍ د توکو تعداد ياګڼون پوهيږو ۰ که دوه ډيرۍ M اوN همغه زور ولري هغه ته يوزوريزه – يا برابرزوريزه ډيرۍ وايو او داسې يې ليکو: $|M| = |N|$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د برابرونونو یا مساواتو او خونديږ ساتنو خویونه

الف) رفلکسیو- یا د انعکاس(هندارونیزيږ) اړیکيreflexivity

هغه اړیکي، چيږ د هغه او د هغه دخپل ځان ترمنځ رینتوني ویناويږ ورکړ شوي وي رفلیکسیویا انعکاسي اړیکي بلل کیږي لکه: $M = M, M \subseteq M$

خوندي لرل اړیکيږ رفلکسیو نه دي $M \not\subset M$

دا په دي مانا، چيږ هیڅ ډیرۍ د خپل ځان اصلي برخډیرۍ یا برخسټ نه شي کیدی٠

ب) سیومتریکيږ اړیکيږ Symetric relation

هغه اړیکيږ سیومتریک بلل کیږي، چيږ د شیانو ترمنځ چيږ کارول کیږي یا استعمالیږي یو له بل سره بدلیدلی شي٠

لکه $M_1 = M_2 \Leftrightarrow M_2 = M_1$

خوندي لرل سیومتریکيږ اړیکيږ نه دي:

که وي $M_1 \subseteq M_2$ نو اړیکی $M_2 \subset M_1$ نارښتیا یا ناټیک دي

دا هلته چيږ وي: $M_1 \neq M_2$

پ) ترانزیتیویتي Transitivity یا وړون اړیکيږ

ترانزیتیویتي هغه اړیکيږ دي، چيږ له یوه نه وبل ته یي د وړلو امکان شته یا موجود وي٠

له L = M او M = N څخه لاس ته راځي L = N

او

$$M_1 \subseteq M_2 \wedge M_2 \subseteq M_3 \Rightarrow M_1 \subseteq M_3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پورته داسې لولو: که M_1 د M_2 برخډيرئ او M_2 د M_3 برخډيرئ وي، نوله دې ځخه لاس ته راځی، چې M_1 د M_3 برخډيرئ ده

برابونونه يا مساوات او په بل کي ځايه ونه يا خوندي ساتنه ترانزيتيو اړيکې يا خويونه دي

۲ ۰ ۲ په ډيرئ کې کارونې يا عمليې

ټولنډيرئ (د اتحاد سټ)

پيژند۲ ۰ ۸ :

د دوه ډيريو M_1 او M_2 ټولنډيرئ(unionاتحاد سټ)، چې د ډيريو ټولنه ورته وايو ده:

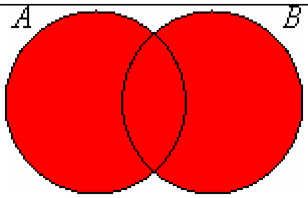
$$M = M_1 \cup M_2$$

دلته داسی پوهيږو، چې M د ټولو هغو توکو ځخه جوړه شوې ډيرئ يا سټ ده، چې لږ تر لږه د M_1 او M_2 توکي هم خوندي ولري۰

د ټولنې $M = M_1 \cup M_2$ هر توکی د M_1 يا M_2 توکی هم دئ (پرتله ۱ –مه برخه د يا سره پرتله) ياني دا د ټولنډيرئ توکی د M_1 يا M_2 او يا د دواړو توکي دي۰

يا لاندې دياګرام

(c) ketabton.com: The Digital Library

	$A ? B$ $A \cup B$ (B تولنه A) x) د A سره B اړیکې لري

بیلګی

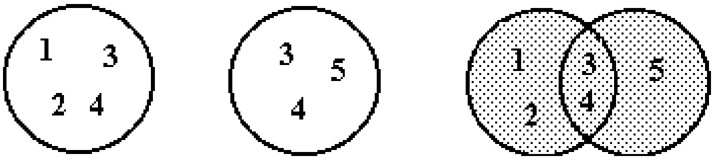
الف) M_1 دې د ځوانانو ډیرۍ وې، چې بکلوریا لري او M_2 دې د هغو ځوانانو ډیرۍ وې، چې مسلکي شهادتنامې لري، نو $M = M_1 \cup M_2$ د ټولو هغو ځوانانو ډیرۍ ده، چې بکلوریا او مسلکي شهادتنامې ولري او یا دواړه شهادتنامې ولري۰

ب)

$$M_1 = \{k, a, r\}, M_2 = \{u, r, s, e, l\}$$
$$M_1 \cup M_2 = \{k, a, r, u, s, e, l\}$$

یا په لاندې توګه پیژند او بیلګه: Aاو B دې دوه ډیرۍ وې د دې ډیریو ټولنه داسې لیکو

B} ∈x∨A ∈B = {x | x∪A
∪A={1,2,3,4} B={3,4,5} A
B={1,2,3,4,5}



تل په ټکو ټکي شوې ټکیډیرۍ ټولنډیرۍ په ګوته کوي۰

پ – خیره ۲ ۰ ۲ دوه په هواره کې ټکیډیرۍ په ګوته کوي، چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف) ټکيپردۍ دي٠ ب) ګډ ټکی لري٠

پ) اړيکې $M_1 \subset M_2$ پوره کوي:

د دې لپاره څيرې په لاندې کې په بيلګو کې راغلې دي٠

د ټولنې لپاره کموتاتيو قانون باور لري» $M_1 \cup M_2 = M_2 \cup M_1$ دا په دې مانا، چې د لړۍپرلپسې دلته(لنډ: لړۍ) د ډيريو په ټولنه کی رول نه لوبوي

يادونه : که ګڼونه ۱ ، ۲ ، ۳ ، ٤ ٠٠٠ ولرو، نو دا پرلپسې بولو او که بيا دا سره جمعه کړو لګۀ

$$1\ ,\ 1+2, 1+2+3, 1+2+3+4+, 1+2+3+4++..+....$$

نو دا لړيپرلپسې يا لنډ: لړۍ بولو(پرلپسی برخه کې دې وکتل شي) دا په دې مانا، چې له دوو څخه د زياتو ډيريو ټولنه لړۍپرلپسی(لنډ: لړۍ) رول نه لري٠

اسوڅياتيو قانون باور لري٠

$$(M_1 \cup M_2) \cup M\ = M_1 \cup (M_2 \cup M_3) = M_1 \cup M_2 \cup M_3$$

غوڅډيرۍ (د ډيريو غوڅی يا –متقاطع سټ) intersection

يادونه : دا کړی شو، چې د ډيرو ګډغوڅی وبولو(دا د ګرانو لوستونکو خوښه ده،کوم ناټيکوالی په کې نه شته)

پيژند:

ډيرۍ M د ډيرۍ M_1 او ډيرۍ M_2 غوڅډيرۍ يا د تقاطع سټ ده(لوستل: M_1

غوڅ(پرې)په M_2 (لنډ: غوڅی): $M = M_1 \cap M_2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د ډیرۍ M ټول توکي د ډیرۍ M_1 او ډیرۍ M_2 توکی وي۰

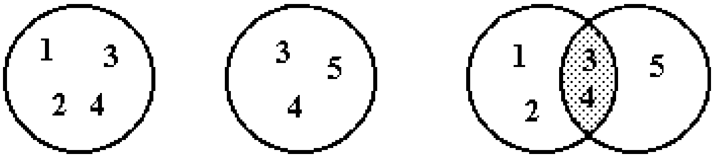
د غوڅډیرۍ $M = M_1 \cap M_2$ هرتوکی د ډیرۍ M_1 او ډیرۍ M_2 توکي دي (د ۱ –مې برۍ د هم او هم په مانا یا د «او» په مانا)

یا دا پیژند :

د ډیریوA او B غوڅی $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

بیلګه:

A = { 1,2,3,4}, B = { 3,4,5} => $A \cap B = \{3,4\}$



یادونه: دې پورته ډول دیاګرام ته د ون دیاګرام Venn-Diagram یا د Euler-Venn- Diagram وایی

بیلګې :

لومړۍ : یوه ډله زده کوونکي له ننګرهار او پکتیا څخه راځي، چې په M_1 یې په نخښنه کوو۰ یوه بله ډله ، چې په M_2یې په نخښنه کوود کندهار او همغه د پکتیا زده کوونکي، چې په M سره یې ښایو، دي۰ د دې دواړو ډلو غوڅډیرۍ

$$M = M_1 \cap M_2$$

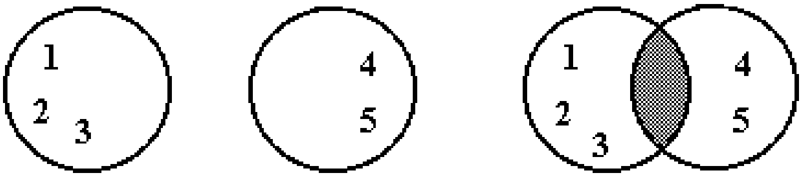
د پکتیا زده کوونکي دي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

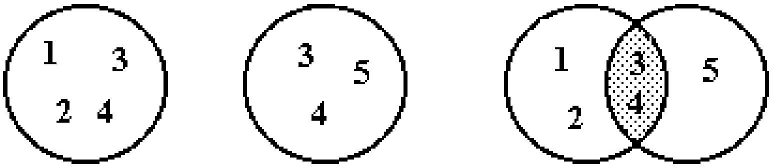
دويم:

$$M_1 = \{k, a, r\}, M_2 = \{u, r, s, e, l\},$$
$$M = M_1 \cap M \quad = \{r, l\}$$

دريم څيره ۲ ۰ ۳ په هواره يا سطحه کې ښايي، چې الف) ګنون پردي دي



ب) يو بل سره ګډ ټکی لري



پ) اړيکی

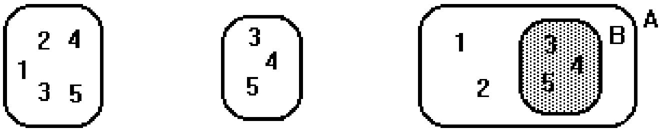
$M_1 \subset M_2$

پوره کوي

بيلګه:

A⊆ A={1,2,3,4,5} B={3,4,5} B

(c) ketabton.com: The Digital Library



هغه ټکو باندې ټکي شوې ډيرۍ اصلي برخډيرۍ ده

دوه ډيرۍ، چې غوڅډيرۍ يې تشډيرۍ وي

$$M_1 \cap M_2 = \theta$$

لکه د مخه مو چې ګوته ورته ونيوله پردۍ بلل کيږي

د غوڅډيرئ لپاره ، لکه څنګه د ټولنډيرۍ لپاره کموتاتيو قانون باور لري

$$M_1 \cap M_2 = M_2 \cap M_1$$

او اسوڅياتيو قانون

$$(M_1 \cap M_2) \cap M_3 = M_1 \cap (M_2 \cap M_3) = M_1 \cap M_2 \cap M_3$$

ددواړو د ډيرۍکارونو يا ډيرئ عمليو يانې ټولنډيرۍ او غوڅډيرۍ لپاره دواړه ديستريبوتيو قانونونه پوره کيږي يا باور لري

$$M_1 \cup (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cup M_2) \cap (M_1 \cup M_3)$$

$$M_1 \cap (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3)$$

(د ګڼونو د شميرکارونو يا عمليو لپاره يوائې يو دستريبوتيو قانون شته والی لري:

$$a_1.(a_2 + a_3) = a_1.a_2 + a_1.a_3$$

مګر په ټوليزه توګه باور نه لري

$$a_1 + (a_2.a_3) = (a_1 + a_2).(a_1 + a_3)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند :

کموندیرۍ یا تفریق سټ M_2 د ډیرۍ M_1 او ډیرۍ M کموالی یا فرق دی او

داسې یې لیکو: $M_2 = M / M_1 = \{x \mid x \in M \wedge x \notin M_1\}$

له M څخه د M_1 ډیرۍ کمه شوې

یا کله چې د M_2 توکي د M هغه توکي وي، چې هغه د ډیرۍ M_1 توکي نه وي۰

لیکندود یالیکنډول :

$A / B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

لوستل : د A او B توپیرډیرۍ یاکموندیرۍ یا تفریقډیرۍ له ټولو هغو توکوx جوړه ده، د کومو لپاره، چې باور لري : x د A توکی دی او x د B توکی نه دی

بیلګې :

لومړۍ : په یوه ټولګي کې M_1 د ټولو نارینه وو زده کړو ډیرۍ ده او M_2 دټولو زده کړو ډیرۍ (د نارینه وو او ښځینه وو) ، چې په شمیرپوهنه کې لس نمرې وړي۰

M_1 / M_2

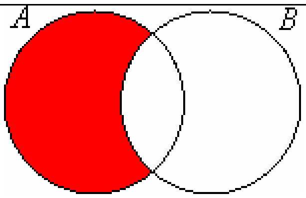
د هغو زده کړو ډیرۍ ده، چې ۲ ، ۳ ، ٤ ، ۵ ، ٦، ۷ ، ۸ ، ۹، نمرې وړي او ټول د هغو نجونو ډیرۍ ده، چې په شمیرپوهنه کې یې لس نمرې وړي۰

که په ټولګي کې یواځې نارینه زده کړي وي، نو باور لري

$M_1 / M_2 = \theta$

یا دا لاندې :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$A \backslash B$ (A بې له B) (x له A سره B اړیکې‌لري)	

دویم :

$$M_1 = \{k, r, a, i\}, M_2 = u, r, s, e, l\}$$
$$M_1 / M_2 = \{k, a\}, M_2 / M_1 = \{u, s, a\}$$

لکه څنګه، چې د کمون یا تفریق پیژند او بیلګې را په ګوته کوي په ټولیزه توګه باور نه لري:

$$M_1 / M_2 \neq M_2 / M_1$$

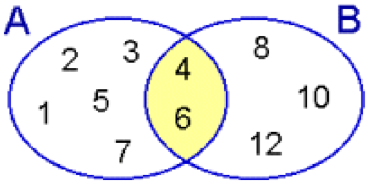
د یوې ډېرۍ یا سټ کمپلمنت یا پوره کوونکی :

دا کارونه یا عملیه د نورو کارونو څخه توپیر لري، چې په ډېرۍ کی مو څېړلي۰ دا یوه یوځاییزه کارونه ده او دا نورې دوه ځایزې کارونی یا عملیې دي۰

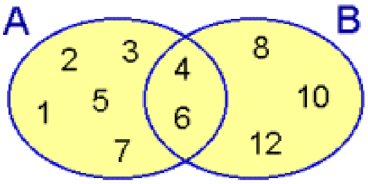
موږ بنسټډیرۍ په U او د ټولو هغو توکو ډیرۍ، چېU کې پراته دي یاني دU توکي دي او هغه په M کې نه دي پراته یاني د M توکي نه دي پوره ډیرۍ یا کمپلیمنت بولو او د $\bar{M}$ سره یې په نخښنه کوو۰

په لاندې څېره کې بیا د ډیرۍ غوڅې، - ټولنه او – کمون او برخډیرۍ ته د ګرانو لوستونکو لا زیات پام را اړوو۰

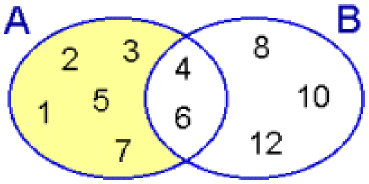
(c) ketabton.com: The Digital Library



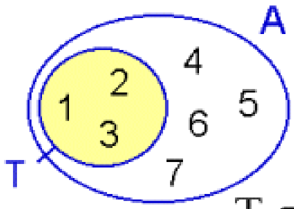
A ∩ B



A ∪ B



A \ B



T ⊆ A

پيژند:

پوره كوونكی- يا تكميلډيرئ (يا د يوې ډيرئ كمپليمنت) د يوې ډيرئ M پوره كوونكې ډيرئ $\bar{M}$ تيک هغه توكي لري(د بنسټډيرئ U څخه) ، كوم چې د M توكي نه وي٠

دوه ځله كمپليمنتډيرئ جوړول خپلې لومړنی وينا ته ځي ، يانې $\bar{\bar{M}} = M$

دلته يواځې يوه ساده بيلګه راوړو: په يوه كلي كې دوه كورنی د توپير او برګ كورنی اوسيږي٠ كه دا دوه كورنی يو له بل سره خپلوي ونه لري، نو دوي يو له بل سره پوره ډيرئ يا تكميلډيرئ بلل كيږي يانې دا كلی پوره كوي٠

٢ . ٤ ځيرونه mapping يا اړيكې:

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه : پام دې وي، چې دا هغه ورسره بلد تابع کلمه نه ده، چې وروسته به ورسره بلد شو٠

په دې برخه کې لومړی د ډیرئ ضرب کلمه پیژنو یا تعریفوو او بیا د ضرب کلمې کارونه څیړو٠

پیژند ٢ ٠ ٩ : د دواړو ډیریو M یو او M 2 ډیریضرب(اتیرانضرب) هم ورته وایي، یانې په x سره ځلیږي یا ضربیږي

$$M = M_2 \times M_2$$

د ټولو تنظیم یا ترتیب شویو توکو

$$x \in M_1, y \in M_2$$

جوړو (x,y) ډیرئ ده٠

بیلګې

$$M_1 = (a,b\}, M_2 = \{1,2,3\}$$
$$M_1 \times M_2 = \{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\}$$

د جوړو د غوښتل شوي تنظیم له مخې ځل په ډیریو کې کموتاتیو نه دئ دا په دې مانا، چې

په ټولیزه توګه باور نه لري: $M_1 \times M_2 \neq M_2 \times M_1$

٢ – R دې د ټولو رییلګڼونو ډیرئ وي٠ په هندسي مانا د کرښې د ټولو ټکو ډیرئ٠ RxR د ټولو رییلګڼونو جوړو ډیرئ ده، په هندسي مانا د هوارې یا سطحې د ټولو ټکو ډیرئ ده٠

پیژند ٢ ٠ ١٠ :

د څیرونې F لاندې د دوه ډیریو د ضربډیرئ $M_2 \times M_2$ برخډیرئ پوهیږو٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

پس د جوړه تنظیم شوو توکو ډیرۍ، چې $x \in M_1$ له یوه یا ډیرو توکو $y \in M_2$ سره تنظیم

یا بهتره په باندې ځیره شي۰

داسی هم ویلی شو: د1 M توکي د2 M په یوه یا ډیرو توکو تنظیمیږي یا ځېړه کیږي۰

که $(x.y) \in F \subseteq M_1 \times M_2$ وي، نو x اوریجنل یا اصلي توکی او y ځیره توکی بلل کیږي۰

د ټولو اصلي توکو ډیرۍ پیژندورشو یا تعریفورشو یا پیژنددیرۍ یا تعریفډیرۍ بلل کیږي او د ټولو ځېړه توکو ډیرۍ د ځېروني ډېرۍ، ارزښتورشو یا ارزښتډیرۍ بلل کیږي۰

بیلګی

$$M_1 = \{a, b, c, d\}, M_2 = \{1, 2, 3, 4\}$$

د جدول په توګه دM یو توکو ځېرونه ونه یا ځېړه کوونه د M دوه په توکو

ځېړه توکی   اصلي توکه یا ځیره کوونکی توکی

a -----------------------→ 1 , 2 ,5

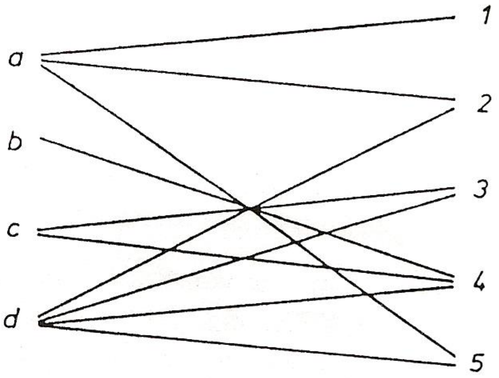
b -----------------------→ 4

c -----------------------→ 3,4

d -----------------------→ 2,3,4,5

یا دا لاندې:

(c) ketabton.com: The Digital Library



ځيرونه:

F = { (a,1),(a,2),(a,5),(b,4),(c,3),(c,4),(d,2),(d,3),(d,4),(d,5)}

(د M يو او M دوه ډيريو د ټولو توکو جوړو ډيرئ)

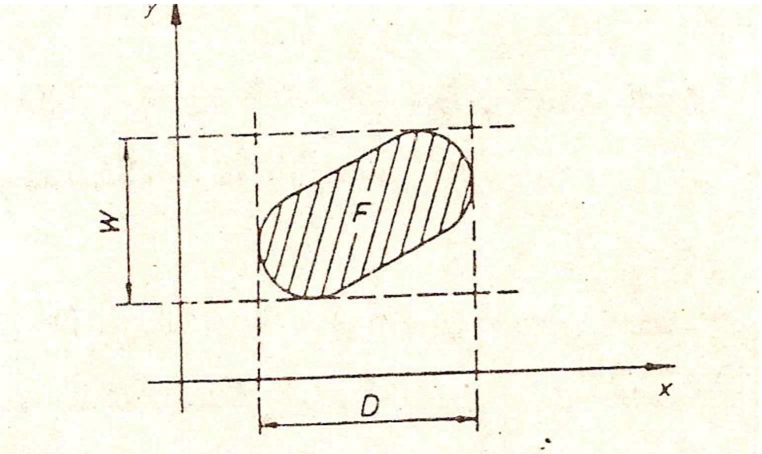


Bild 9.6 ځيره

دريم : هر پيدايښتي يا طبيعي ګڼ a د هغه په دوه ځله b=2a باندې ځيره کيږي٠ داسې پيژند شوې يا تعريف شوې ځيره ونه په لاندې بڼه هم انځوريدلی شي٠

$$F = \{(a,b) \mid a \in N, b = 2a\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته هم N د پيداينښتي يا طبيعي ګڼونو ډيرۍ. پيژندډيرۍ يا تعريف- د ټولو پيداينښتي ګڼونوډيرۍ ده او ارزښتډيرۍ د ټولو جوړه ګڼونو ډيرۍ ده.

څلورم : که M يو په يوه ښوونځي کې د ښوونکو ډيرۍ وي او M دوه په ښوونځي کې د ځانګړو ټولګيو ډيرۍ وي نو ښوونکي، چې په ټولګيو کې درس ورکوي دا يوه څېرونه ده. د ښوونکو ډيرۍ د ځانګړو ټولګيو په ډيرۍ کې

موږ د څېړه ونې څلور حالتونه توپيروو:

پيژندونه(دې ته دې ګران لوستونکي ښه پام وکړي):

لکه په لومړۍ بيلګه کې په څيره ونه F کې د1 M ، چې تعريفډيرۍ D سره برابر دۍ او M2 ، چې له څيره ډيرۍ , W سره برابر دۍ ، توکي مو مخ ته پراته دي.

له يوې څيرونې Fغبرګېږو د1 M په M2 باندې. دلته دې « د » او « په » ته پام وي)

وي دې: $D \subset M_1, W \subset M_2$

لکه په دويمه بيلګه کې ، نو د يوې څيره ونې F غبرګېږو له M1 په M2 کې (دلته دې « په » او ,په کې » ته پام ور واړول شي)

وي دې : $D = M_1 \wedge W \subset M_2$

دلته د يوې څيره ونې غبرګېږو د1 M په M2 کې دلته دې دريمه بيلګه په پام کې راواړل شي.

وي دې: $D \subset M_1 \wedge W = M_2$

نو د يوې څيره ونې غبرګېږو له M1 په M2 باندې. دلته څلورمه بيلګه د بيلګې په توګه راوړو. د دې نيونې لاندې چې ټول ښوونکی ځانګړي ټولګيو ته درس ورکوي.

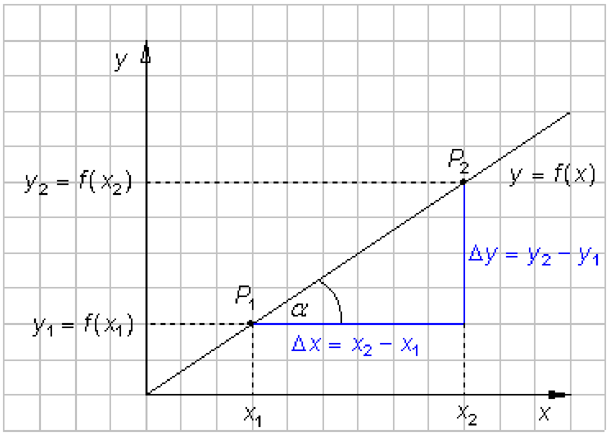
(c) ketabton.com: The Digital Library

يادونه : دا لاندې برخه دې ګران لوستونکي وګوري، خو د دې اوس وخت لپاره لږ ستونځمنه ده او شايد خيرې هم رانه شي، خو که لږ د شميرپوهنې سره بلد شو، بيا پرې پوهيدل ساده دي۰ زه مخ ته لرم، چې په دې هکله ليکلی کتاب، چې چاپ شوی نه دی دلته پر ليکه کړم، چې هلته بيا دا موضوع لږ غزيدلې ده۰

بيلګه ۲ ۰ ۵ : موږ په هواره يا سطحه کې څرګند شوي کړی د ډيريځل RxR په څير د برابرونونو له لارې رانيسو(R د رييلګنونو ډيری د ګڼکرښې ټکي دي(ګڼونه دې وکتل شي))۰

الف) $y = 2x$ يوه څيره ونه ده د R په R باندې ، څکه چې باور لري

$$D=W=R$$



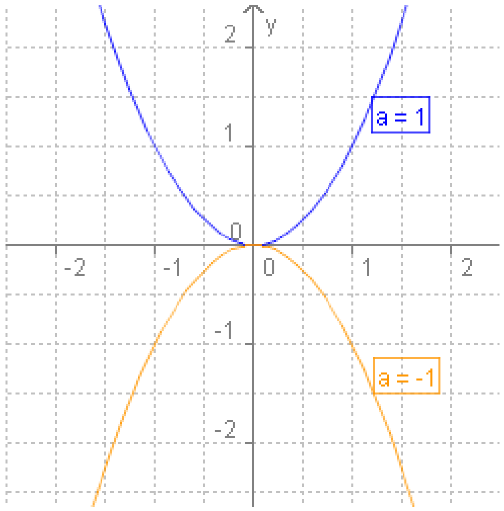
يادونه : په پورته څيره کې برابرون $y = ax+b$ دی.

ب) $y = x^2$

يوه څيره ونه ده د R په R کې ، څکه چې باور لري

$$D = R\ ,\ W = [0, \infty]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



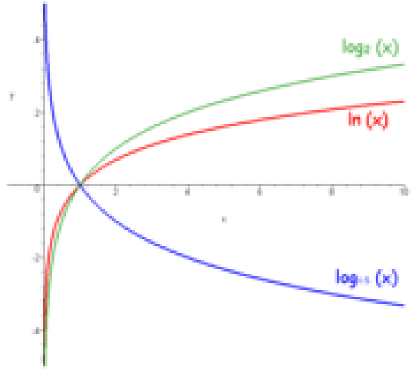
یادونه :

پوته بلواک د $x \mapsto ax^2 + bx + c$ دول دی، چې b = 0 , c = 0 او a = 1 , a = -1
اینول شوي دي.

پ) y = log x

یوه خیره ونه ده له R په R باندې « ځکه چې باور لري.

$D = (0, \infty) \wedge W = R$

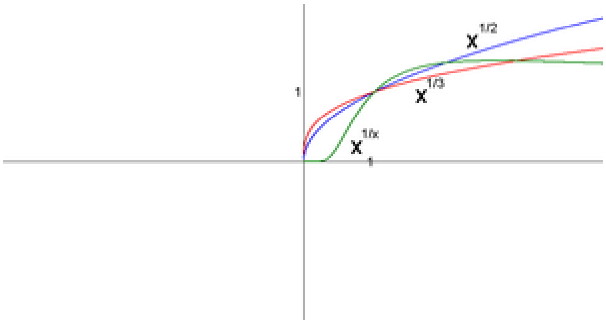


(c) ketabton.com: The Digital Library

ت) $y = +\sqrt{x}$

یوه څیرونه ده له R په R ، څکه چې باور لري

$D = W[0, \infty]$



یادونه : پورته د دویې ،دریمې او په x -مې ریښې په مانا دی

څیرې له ویکي څخه په مننه راکښته شوي دي۰

پیژند ۲ ۰

یوه څیره ونه E یواځنی بلل کیږي۰ که هر $x \in D$ په ټیک یوه $y \in W$

باندې څیره شي۰ دا په دې مانا، چې هر $x \in D$ ټیک یووار په $y \in W$

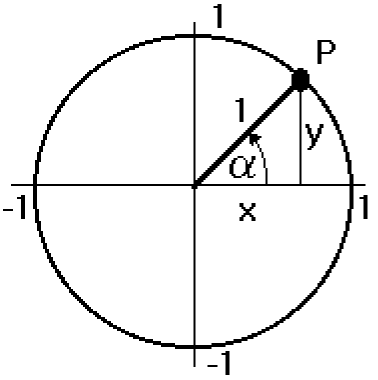
تنظیمډیرۍ یا جوړه ډیرۍ کې رامنځ ته کیږي۰ یوه یواځنی څیره ونه فنکشن

یا« بلواک» بلل کیږي او یا لکه تراوسه ورسره بلد یو یوه تابع بلل کیږي۰

پام:

دا دې دلته کره په ګوته شوې وي، چې زه « یوازنۍ څیره ونه » بلواک یا فنکشن بولم۰

(c) ketabton.com: The Digital Library



بیلګه ۲ ۰ ٦ : په بیلګه ۲ ۰ ٥ کې له الف تر ت پورې تولې څیرونې فنکشنونه یا بلواک دي۰ د دې پر څنګ لاندې برابرون (یوونګردۍ یانې ګردی، چې وړانګه یې یو یوون یایووالی یا واحد وي څیره ۰) انځور شوې څیره ونه له R په R کې [1,1-]) D=W) فنکشن یا بلواک نه دی ، ځکه چې اصل دوه څیرې لرې یانې که په تنظیمجوړه کې د څیره ونې لړي پرلپسې(لنډ:لړۍ) بدله شي، نو یوې پرڅنګ څیره ونې ته راځو:

پیژند ۲ : څیره ونې F ته پرڅنګ څیرونه F^{-1} د تولو جوړو (x,y) ډیرۍ ده له $(x,y) \in F$ سره ۰

پیژند ۳ ۰ یوه څیره ونه یویواځنۍ بلل کیږي، که یواځنۍF او F^{-1} یوازنۍ څیروه ونې وي، دا په دې مانا، چې که هر $x \in D$ او $y \in W$ ټیک یو ځل په تنظیم کې منځ ته راشي۰

یادونه : د څیرونې نوم څخه باید ونه ډار شو دا څیره ونې څیرې کوونې (که څوک یو کالی یا رخت څیرېکوي)او څیره کوونې توپیر، ځکه سره کیدی شي، چی هغه منځپانګه یې یو له بل توپیر لري۰ موږ پښتو کې نږدې یو ډول لیکونکي ویونه (لغات) لرو، خو دا هغې منځپانګې له مخې توپیریږي۰
ډیرۍ پوهنه د شمیرپوهنې سټه ده، نو په راتلونکې کې به یې نوره هم ژوره وڅیړو او همدا اوس هم نور ګران هیوادوال دې ته رابولم، چې له ما سره ګډ کار یا خپلواک دې کار ته ملا راوتړي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

ما دا برخه غزولې، چې په خپل شووني وخت کې به ګرانو لوستونکو ته په ځانله توګه د یوه کتاب په څیر هم وړاندې شي٠

۲ . ۵ تمرینونه

۱ – د لاندې ډېرۍ یا سټ توکي د شمیرنې له لارې انځور کړۍ

الف $\{x \mid x < 20$ او x لومړی عدد$\}$ (لوستل: د ټولو عددونو x ډېرۍ یا سټ، چې x لومړنی عدد او $x < 20$ دی).

ب- $\{x \mid x^2+x-6=0\}$

پ- $\{x \mid x>0$ او $x^2+x-6=0\}$ دا په نوکانوکي ټول له کیڼ ښي لور ته لولو

ت) $\{x \mid x$ رییلګڼ او $x^2+1=0\}$ دا په نوکانوکي له ښۍ وکیڼې لور ته ولولی

۲ – د توکو x, y, z اړلرونوالی و ډیري M ته وڅیړی !

الف) M د لمړنیو ګڼونو ډیری

$$x = 4 , y = 5 , z = 6$$

ب) M د لاندې مساواتو حلډیری (اوبیلډیری)

$$x^3 + x^2 - 6x = 0$$

$$x = 0 , y = 2 , z = 3$$

پ) M د ریشنلګڼونو ډیری چي په اینتروال $[-3, 3]$ کی پراته دي

$$x = -2 , \quad y = \sqrt{2} , \quad z = 1/3$$

ت) M د رییلګڼونو ډیری چی په اینتروال $[-3, 3]$ کي پراته دي

$$x = -4 , \quad y = \sqrt{2} , \quad z = 3$$

۳ – د لاندې ډیریو ترمنځ کومی اسمیکی پرتی دي

الف) M_1 د ټول جفت ګڼونو ډیری

(c) ketabton.com: The Digital Library

او M_2 د ټولو ټولګنونو ډيرى

ب) د ټولو مساواتو $x^2 + 2x - 3 = 0$, حلونو (اوبيو) ډيرى

$M_2 = \{ -3 , 1 \}$

پ) M_1 د ټولو ګنو ډيرى چي پر ۶ ويشل کيږي.

او M_2د ټولو ګنونو ډيرى چي په ۳ ويشل کيږي !

او M_3د ټولو ګنو ډيرى چي په ۱۲ ويشل کيږي!

۴ – د ډيرى $\{ a,u,t,o \}$ ټول برخډيري ورکړى!

۵ – د لاندي ډيريو څخه ټولنډيرى ، غوڅډيري او دواړه ټوډيري جوړ کړى !

الف) $M_1 = \{ k,a,m,e,l \}$, $M_2 = \{m,a,u,l,t,i,e,r\}$

ب) $M_1 = \{ 2,4,6,.. \}$, $M_2 = \{ 3 ,6 ,9,.... \}$

پ) $M_1 = \{ x \mid x^2 + x +- 2 = 0\}$, $M_2 = \{x \mid x^2-3x+2 = 0\}$

۶ – د يوه ډيرى M او د تشډيري$\emptyset$ ټولنډيرى، غوڅډيرى او توپيرډيرى جوړ کړى !

۷ – د يوه ډيرى M او خپل همدي ډيرى ټولنډيرى ، غوڅډيرى او توپيرډيرى جوړ کړى!

۸ – وي دي $M_1 = \{ 4 , 8 , 12 \}$ $M_2 = \{ 3 , 6 , 8\}$

$M_3 = \{0 , 2 ,4 ,6 \}$, $M_4 = \{ 6, 12 , 18 \}$

جوړ کړى : $M = [(M_1 \cup M_2) \cap M_3] \setminus M_4$!

۹ – جوړ کړى

الف) $M_1 \cup (M_1 \cap M_2)$ پ) $M \setminus \emptyset$

ب) $M_1 \cap (M_1 \cup M_2)$ ت) $\emptyset \setminus M$

۱۰ – وي دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$M_1 \cup M_2 = \{1,2,3,4,5\},$$

$$M_1 \cap M_2 = 71,3,5\}$$

$$M_1 \setminus M_2 = \{2,4\}, M_1 \setminus M_2 = \emptyset$$

له دې پورته څخه M_1 او M_2 وټاکی !

۱۱ – وي دي

الف) $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ ب) $M_1 \subset M_2$,

وټاکی: $M_1 \setminus M_2$!

۱۲ – وي دی M_1 , M_2 (د نيمواز) اينتروال ټکي ډيري:

$$M_1 = [-3, 3), M_2 = [1, 7]$$

وټاکی

الف) $M_1 \cup M_2$ ب) $M_1 \cap M_2$ پ) $M_1 \setminus M_2$

ت) $M_2 \setminus M_1$ ټ) $M_1 \times M_2$

۱۳ – وي دي $M_2 = \{\{a, b\}$, $M_1 = \{1, 2, 3\}$

الف) د $M_1 \times M_2$ ځل جوړ کړی

ددې لاندې ب) تر ت) برخی تمرين لپاره دي ۹ الف برخه وکتل شي.

ب) دا لاندې کوم ډول ځيرونی دي

$$F_1 = \{(1,a),(1,b)\}$$

$$F_2 = \{(1,a),(3,a)\},$$

$$F_3 = \{(1,a),(2,b),(3,b)\},$$

$$F_4 = \{(1,a),(2,a),3,a)\},$$

$$F_5 = \{(1,a),(2b)\}$$

په ټولو حلنونو (اوبيو) کی F_1 تر F_5 ورکړی .

پ) په ځټ ځيرونه ورکړی

ت) د ځيرونو F_1 څخه تر F_5 پورې، کوم يواځنی او کوم حتی يويواځني دي ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳. دحقيقي اعدادو (-ګڼونو) سره د شميرلو بنسټيزې نښلونې

(تړنی، کارونی يا عمليي)

۳ . ۱ د اعدادو د سيستم جوړښت

۳ . ۱ . ۱ طبيعی اعداد يا -ګڼونه natürliche Zahlen

انسانانو له پخوا څخه اعدادو ته اړتيا درلوده۰ له دې امله يې پرمخ ودیينه کې هڅې وکړې، چی له ډيری (سيټ) (د ليکنې په دننه کې ډيری پو هنه هم څيړلشوې)) سره داسې لارغوره کړي، چی دا ډيری تشريح کړای شي او د انسانانو او چاپيريال(طبيعت) د پرلپسې اخ او ډب په نتيجه کې د ګڼ يا عدد وی(کلمه يا لغات) راپيداشوی، چې د عدد يا ګڼ کليمې پربنسټ د ريښتينو شيانو څرګند څومره والي (کميت)Quantitative ترلاسه کړي۰ د طبيعی اعداد و څخه په ګڼلو يا که غواړې شميرلو کې ګټه اخستل کيږي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ ۰ ۱ ۰ ۱ ۰ الف د طبیعي عددونو(پیداینتي ګنونو) جوړښت

پیژند (تعریف)۳ ۰ ۱:

الف) ټول طبیعی اعداد د ډیری په څیر یوه ټولګه جوړوي او د طبیعی اعدادو ډیری یا سټ په نامه یادیږي یا یې طبیعی اعداد بولو او په N او همداسې N^{o} سره یې په نخښه کوو۰

ډیر پای طبیعي اعداد شته ، ځکه چې په هر طبیعی عدد پسی راتلونکی طبیعی عدد هم شته دی (یعنی په هرڅومره لوي طبیعی عدد پسی راتلونکی طبیعی عدد شته دی، چې دا وروسته روښانه کیږي)۰

ب) دطبیعي ګڼونو(اعدادو) اکسیوماتیکيAxiomatic جوړښت

اکسیوم جمله ده، چی اوبیونه (حل) نه غواړي او همداسی منل کیږي۰ دا چی جمله ، اکسیوم څه دي په لومړی برخه یانې سم اند (منطق) کې دې وکتل شي۰

طبیعی عدد کلمه د جیوسیپې پیانو(Giuseppe Peano له ۱۸۵۸ – ۱۹۲ ز ۰کال) اکسیومونو پر بنسټ لاندې پیژند لري یا په لاندې توګه تعریف کیږي:

۱ – د صفر ګڼ یو پیداینتي ګڼ دئ

۲ - د هرطبیعي عدد یا ګڼ m لپاره یو یوائځنی ټاکلی طبیعي عدد n شته، چې سملاسي(تړلی) د m پسی ګڼ دئ، د کوم لپاره چی لرو: $m+1 = n = m^{\wedge}$

دلته $m^{\wedge}$ د m پسې سملاسې یا تړلی ګڼ یا عدد په ګوته کوي۰

۳ – هرطبیعي عدد زیات له زیاته په یوه طبیعی عدد پسی سملاسي راتلونکی ګڼ دئ۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

٤ – هیڅ طبیعي عدد نه شته، چې پسی راتلونکی پیداینښي عدد یې صفر وي٠

٥ – که طبیعي عددو ډیری M صفر د توکي په څیر ولري او که له هر طبیعي عدد m سره د هغه پسی تړلی راتلونکی عدد یا ګڼ `m هم د M توکی وي، نو M ټول

طبیعي عددونه خوندي لري یا په بل ډول » ټول طبیعي اعداد په کې ځاي دي٠

یادونه: ځنې ادبیاتو کې، د پیانو سیستم کې، د صفر په ځای ۱ لیکل شوی. په دې حالت کې بیا صفر ته د طبیعي عدد یا ګڼ په څیر نه کتل کیږي. که بیا صفر ورسره مل کړو، نو د صفر سره طبیعي ا عدادو ډیرئ یا –ستډ یې د صفر سره بولو.

۱ . ۱ ب : د طبیعی اعدادو یا ګڼونو انځورونه او سیستمونه:

طبیعي اعداد په نخښو (دې ته په الماني کې Zifferوایي، چه همغه د صفر په معنا دی، خو دلته ترې مطلب، چې دا څیرو، دی) انځوریږي. د دې لپاره چې دا لړ ځای ونیسي، نو د لویو او وړو اعدادو لپاره نخښې له کوچنیو سره یوځای کیښول شوې دي. دا چې څرنګه یوه د عدد یا ګڼ نخښه له بل توپیریږي، په لاندې ډول یې د زیاتون یا جمعي سیستم او ځای سیستم کې ښایو.

په زیاتون سیستم کې هر بنسټیز ،،ځای،، یو ،، ځای ارزښت،، لري. د څیفرونو زیاتون د یو په بل کې د ورزیاتشوي بنسټیز څیفر پخپله هغه عدد یا ګڼ ورکوي. بیلګه یې په رومي ګڼونو کې راړو. دا له بنسټیزو څیفرونو جوړ شوی(ترې لاندې لسیز د اعدادو سیستم دی). زه دلته د ضرورت په بنسټ ټول ضروري څیفرونه چې موخه ترې عددونه دي، له پیل راوړم:

(c) ketabton.com: The Digital Library

رومي عددونه:	M	D	C	L	X	V	I
عربي عددونه:	1000	500	100	50	10	5	1

طبیعي عدونه له دې امله یو د بل ترڅنګ لیکو چې کم ځای ونیسي لکه د بیلګې په توګه:
CXX په دې معنا چې C+X+X

په رومي ګڼونو کې، که بنسټیز کوچني ګڼنخښې لکه C , V , I د لوي ګڼنخښې و کینۍ لور ته ولیکل شي نو دا مانا لري چې دا کوچنی ګڼ له لوي ګڼ څخه کم شوی. د بیلګي په توګه: XC = C - X .

بیلګې: الف: MMDCCLXVIII په دې مانادی 2768

ب : MCMXXIX په دې مانا دی 1929

پ : CCCIV په دې مانا دی 304

ځایسیستم: په ځاي سیستم کې هره بنسټیزه نخښه یو «ځاي ارزښت نخښه ارزښت» لري.

لکه : g– ئیز ځاي سیستم(پوزیشن سیستم ((Positionssystem)): د طبعي ګڼ n انځورونه په g– ئیزځای سیستم کې په دې ډول ده چې د یوه ورکړشوي ستې په بنسټ(g ∈N) $g \geq 2$ هر طبعي ګڼ n په لاندې ځانګړي ډول انځوریدلی شي:

$$n = a_k g^k + a_{k-1} g^{k-1} + ... + a_1 g + a_0$$

دلته بنسټیزې ګڼنخښې a_i، g د $i = 0,1,2,...,k$ او $k \geq 0$ د $0 \leq a_i \leq g-1$ چې $a_k \neq 0$ وي په کار راځي یا اړتیا ورته شته.

لیکلی شو :

$$n = a_k a_{k-1} .....a_1 a_0$$

که د بدلیدلو (د بل څه سره) امکانات رامنځ ته کیږي، نو بهتره به وي چې په

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندي ډول ولیکل شي

$$n = [a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0]_g$$

نن په ټوله نړۍ کي ګڼل په لسیز سیستم (ګڼځای ارزښت) باندې کیږي، چی تل داسی نه وه، لکه په افغانستان کي چی دا اوس هم د ډوډۍ پور لپاره په لرګي کرښه را کاږي، چی څو ډوډۍ واخستل شوې.

په لسیز سیستم کی ګڼځای «ارزښت» لري چی انځور شي، مګر په لرګی کی ځای ارزښت نه لري چی کرښه چیرته کښل شوې، هلته د پور کرښو له ګڼون یا تعداد څخه پور څرګندیږي.

بل د ګڼلو سیستم . لکه د مخه مو چی تر پام لاندې ونیوه، د ګڼلو رومي سیستم دی چی نن هم د ارزښت وړ دی او همدارنګه د مفهوم ډك، زیاتونسیستم(جمعی –) څرګندیږي.

بیا هم غواړو چی دا په لاندې ډول ځانګړی کړو:

۱ – هره لاندې نخښه I, X, C کړای شي چی زیات ترزیاته ۳ ځله(۳ واری) په یو ګڼ کی پرله پسی یا څنګ تر څنګ راشی

۲ – هره، د ګڼ نخښه V, L, M ,خورا زیاته یو ځل څنګ تر څنګ په یوه ګڼ کی راتلی شي.

۳ – که بنستیز نخښه I, X او یا ....__-- ددې نخښو د ارزښت نه لوړو ارزښت نخښو V, X, L, C, D یا M CXI تر مخ ځای په ځای شوې یا انځوروي نو د لوي ارزښت څخه کمیږي .

زیاتون او کمون (جمعه او منفي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

۴ – په هرګڼ انځورونو (Zahlendarstellung) کې کيدی شي چې يواځې يو بستيز ګڼ تر مخ ځای په ځای يا انځور شي لکه: MXCVII = 1098 مګر نه IMIC

۵ – د يو ګڼ لپاره د امکان په حال بايد کمې نخښې په کار واچول شي.

عربي ګڼونه : دا ګڼونه، چې موږ ورسره بلد يو، د لسيز سيستم ګڼونه دي، چې عربي ګڼونه بلل کيږي. دا د ګڼلو لسيز سيستم عربو د هند څخه راوړی چې په دولسمه پيړۍ کې يې اروپا ته يو وړ. دا اصلي ګڼونه له صفر (۰) تر ۹ پورې دي يا له 0 تر 9 پورې، چې

ځيفر ورته وای (همغه عربی صفر دی) چې دلته تری بنستيز ګڼونه پوهيدل کيږي.

لکه چې ګوته مو ورته ونيوه زياتونسيستم نور ارزښت نه لري، څکه چې د يو ګڼ ارزښت د ګڼ نخښی زياتون باندې انځور کيږي. د ځای سيستم سره د ګڼونو انځورول ساده دي.

تعريف ۱ . ۱ ب : په يو «ځاي ارزښت سيستم» کې هغه ګڼ لوي دی چې زيات ځايونه ولري، که چيرې د ګڼ د ځايونو شمير سره برابر وي(مساوي وي) نو هغه ګڼ ستر دی چې له کينی لورې يې نخښه لويه وي.

لسيز – يا لسګونی سيستم: لسيز سيستم هغه ځای ارزښت سيستم دی چې له انځورونی يی څرګنديږي. په لسيز سيستم کې د ګڼ انځورولو نخښې، لکه د مخه مو چې انځور کړې، ۰،۱،۲،۳،۴،۵،۶،۷،۸،۹ دي. ۱۰ ګڼ د لسيز سيستم بنستيزه نخښه ده. دا چې نور ګڼونه نه انځوريږي، نو ځای هلته ډك دی چې پرله پسی (ترتيب يانظم) د ۰ تر ۹ يعنی له 0 تر 9 ګڼونو پورې په ځای شوي وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې ډول د پسی جګ ځای یوون (واحد) د په کار اچول شووګڼنخنبو ګڼون (تعداد یا شمیر) دی، خمور په حالت کی ۱۰ .

لکه چی د مخه مو ګوته ورته ونیوله، د پای (نه لایتناهی) ډیري (set , die Menge) غېرو ګڼلو لپاره لاندې ګڼونه کفایت کوي: ۱، ۲، ۳، ۴، او ۹ —امه برخه دې وکتل شي)) داسی نور. تولودې ګڼونو ته چی دصفرګڼ ورسره مل شي د طبعي ګڼونو ډیری N ویل کیږي. ددې لپاره لیکو :

$N = \{ 0, 1, 2, . 3 . 4 , 5 , 6,....\}$; $N^* = \{ 1, 2, 3, 4, ...\}$

مور ګڼونه په کوچنیو لاتینی ټکو یا حروفو ښایو لکه n ... a ,b,c, . دا رینښتوني

(رینښتینوالی یا واقعیت) چی n دې یو طبعي ګڼ وي، داسی لیکل کیږي $n \in N$ یا $n \in N^*$ (ویل کیږي چی: n د طبعي ګڼونوډیري N یا*N توکی دی(لنډ n د N یا *N خخه دی)) په دې ځای کی دې دګڼ او ګڼځای (ځیفر) توپیر ته پام وي.

مور دګڼونو ټاکلو لپاره بلد یا اشنا د نخنبډیري لسیز سیستم په کار اچوو (استعمالوو)

$$N_{10} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,\}$$

د ګڼونو د نخنبو $a_i \in N_{10}$ پرله پسی، لکه د مخه مو چی په ګوته کړل، په لاندې ډول یو طبعي ګڼ انځوروي:

$$a_n\, a_{n-1}\, a_{n-2} \cdots a_2\, a_1 a_0 = a_n.10^n + a_{n-1}10^{n-1} + a_{n-2}\,.10^{n-2} + ..+ a_2\,.10^2 + a_1.10 + a_0\, 10^0$$

$$a_i \in N.$$

ګڼونه په نورو ځیفرونو ډیري هم انځوریدی شي. د بیلګي په توګه په اینفورماتیك (Infrormatik) کی، چی د دوالسیستم (Dualsystem) (دوئیز سیستم) خخه کار اخستل کیږي. ددې لپاره دوه ګڼنخنبي (ځیفرونه) لیکل کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$N = \{ 0,1 \}$

په لاندې جدول کې دلسیز او دوه ئیز سیستمونو لمړني ګڼونه یو د بل ترڅنګ ښکاره شوي:

دوه ئیز سیستم	لسیز سیستم
0	0
1	1
10	2
1 1	3
100	4

په ټولیزه توګه(عمومي توګه) دلته یو څیفر پرلبسې(د عددون ترادف) $a_i \in N_2$ یو طبیعي عدد په لاندې ډول انځوروي،

$$a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0 = a_n.2^n + a_{n-1}.2^{n-1} + \ldots\ldots + a_2.2^2 + a_1.2^1 + a_0.2^0 \;,\; a_i \in N$$

بیلګه ۱ . ۱ :
$$59 = 1.\,32 + 1.16 + 1.8 + 0.4 + 1.2 + 1.1$$
$$= 1.2^5 + 1.2^4 + 1.\,2^3 + 0.2^2 + 1.2^1 + 1.2^0 = 111011$$

یا دونه :: څه لنډ لنډیزونه

د طبیعي اعدادو ډیرۍ یا سټ داسې په نخښه کوو:

د پیدایښتي یا طبیعی ګڼونو ډیرۍ $N = \{ 1, 2 , 3 , \ldots \}$

دپیدایښتي ګڼونو ډیرۍ د صفر سره $N° = \{ 0, 1 , 2 , \ldots \}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ه کتابونو کی دا د صفر نخښنه په لاندې برخه کی راځي۰

۳ ۰ ۱ ۰ ب د طبيعي اعدادو يا ګڼونو انځورونه:

طبيعي اعداد په نخښو انځوريږي۰ دا عددونه يا ګڼونه د ځان لپاره يو سيستم لري، چی هغه زيات يې موږ نه ځيرو۰ زموږ لپاره غوره هغۀ عربی اعداد يا ګڼونه دی۰

يا په بل ډول : دا عددونه چی موږ ورسره بلد يو د لسيز ځايستسم عددونه دي، چی دا مو د مخه په ګوته کړل۰ دا کورونه (خوني يا خانې) لري او په هر کور کی له صفر تر ۹ ځاي نيوی شي او بيا يې هر ځاي يو ارزښت لري، له دې امله دا » ځاي ارزښت سيستم« دی۰ لومړي کور ته يويز، دوم ته لسيز، دريم ته سليز او همداسی ، چی دا مو د مخه لړ روښانه کړي۰

انځورونه يا ځيفرونه يې دي : ۰ ، ۱ ، ۲ ، ۳ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ۷ ، ۸ ، ۹ دا د بنسټيز ګڼونو نخښی دي، نور يې په کورونو يا ځايسيستم باندې روښانه کيدی شي۰

پيژند ۳ ۰ ۱ ۰ ب :

په يو» ځاي ارزښت سيستم « کې هغه ګڼ لوي دی، چی ډير ځايونه ولري۰ که چيرې د ګڼ د ځايونو يا کورونو ګڼون (تعداد) سره برابر وي۰ نو بيا هغۀ ګڼ لوي دی، چی کيڼ لور يې ګڼنخښه لويه وي۰

۳ ۰ ۱ ۰ پ : طبيعي اعدادو کې د شميرنې بنسټيز قوانين

اوس په لاندې ډول د پيدايښت ګڼونو، په ټوليزه توګه د رييل ګڼونو لپاره او وروسته د کمپلکسو ګڼونو لپاره هم باوري(معتبر) بنسټيز د شميرنې قوانين وړاندې کوو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف : د انډول (نظم یا ترتیب یا لوي واړه ترتیب(Anordnung) بنسټیز قوانین:

که > ولرو، نو دې ننوتي کونج کی یا د نخښی خوله کی عدد یا ګڼ لوي دئ او د وتلی کونج یا لوي کونج >که نخښه یا داسی کونجکی یا څټ یا ککره کې لیکل شوی عدد کوچنی دئ۰ که ګڼونه یا اعداد ۱۵ او ۲۳ ولرو نو د لویواړه اړیکی داسی لیکو، یانې که $23 > 15$ ولرو نو ترې ځرګندیږي، چی عدد۱۵ له عدد ۲۳ کوچنی دئ .

د دوه طبیعي اعدادو a اوb ترمنځ له لاندې اړیکو څخه ټیک یوه اړیکه باور لري»

$a < b \quad , a = b \quad , a > b$

۲ ـ ۲۱ =۲۱ که د ۲۱ په ځاي توری ولیکو هم $a = a$ به وي اینه ونه یا هندارونه یا منعکسونه (ریفلیکسیویتي Reflexivity)

۳ – له $a = b$ => (لاس ته راځي) $b = a$ (سیومتري، انډول، ورته واي (Symmetry

د انعکاسي (ایینه ونیز – یا هندارونیز) برابروالی یانی که چیري دا عددونه وراینه یا هنداره یا انعکاس شي، نو دواړه عددونه په دا بل لور بیرته سره برابر دي یا برابریږي۰ که انعکاسي(اینه ونیز)برابر نوم ورته کیږدو، نو هم مناسب به وي، خو موږ به یې همغه سیومتري وبولو۰

٤ ـ له $a = b$ او $b = c$ => (لاس ته راځی) $a = c$(ترانزیتیوTransitivity)

ترانزیتیو ګورو، چی یو له بل اړوند مانا ته نزدی دئ، ځکه چی دا ګڼونه یو د بل سره په واکوالي تړلي یا له یو څخه وبل ته ځی یا وړل کیږي۰

۵ – له $a < b$او $b < c$ => (لاس ته راځی) یا $a < c$ یا $a<b, b<c \Rightarrow a<c$

وړاندیز : که چیری دا پورته وي یا لغاتونه یا نومه ونی په همغه لاتین نومونو ولیکو ښه

(c) ketabton.com: The Digital Library

به وي، خو له شمیرپوهنی پرته مانا باندی یې هم پوهیدنه ښه او اړینه ده۰

ب : د زیاتون (جمع) Addition n. بنسټیز قوانین

که چیرې له طبیعي اعدادو څخه یو ، دوه یا څو ګڼونه یو په بل زیات شي، نو یو پیدایښتي ګڼ ترې لاس ته راځی او دا کارونه(عملیه) «زیاتون یت جمعه » بولو، ځکه، چې ګڼونه یو په بل زیاتیږي۰

پیژند: د همغه ډول شیانو یا یو څه یو په بل زیاتیدلو ته زیاتون (جمع) وایو

که عدد ۱۰ په عدد ۱۸ ورزیات کړو نوعدد ۲۸ ترې لاس ته راځی یا

۱۰ + ۱۸ = ۲۸

په پورته کې ۱۰ او ۱۸ یو پر بل زیاتیږي، نو له دې امله یې «زیاتېدونی» (ما تراوسه زیاتووني بللي، خو فکر کوم،چې زیاتیدوني یې ښه نومه ونه ده) بولي، ۱۰ + ۱۸ جمعه او ۲۸ « جمع ارزښت» بلل کیږي ۰ چی په هغه پخوانی نوم مو ورته حاصل جمع وایه ۰ + زیاتوننخښه ده او = برابروننخښه (مساوات علامه) بولو

دجمعي یا زیاتون بنسټیز قوانین

۱ - د دوه طبیعي اعدادو a او b لپاره تل یو زیاتون (جمع) $a + b$ شته دی

۲ - یواځنوالی : له $a' = a$ او $b' = b$ څخه لاس ته راځي: $a'+b' = a + b$

۳ - COMMUTATIVE LAWکموتاتیو- یا بدلون قانون دی: $a + b = b + a$

۴ - assotiative law اسوځیاتیو - سره ګډېدنې قانون. لرو $(a+b)+c=a+(b+c)=a+b+c$

۵ - Monotony law مونوتوني – یا همغږیزوالي قانون :

(c) ketabton.com: The Digital Library

له $a < b$ څخه لاس ته راځي $a+c < b+c$

یادونه : په $a+b=c$ کې a او b زیاتېدونې $a+b$ زیاتون او c زیاتون ارزښت بلل کیږي

یادونه : په زیاتون کې لاندی زیاتونقوانین هم باوري دي:

ناپیلی توکی: په $N°$ کی یو توکی شته، چی که د هرپیدایښتي توکی سره په زیاتون یا جمعه کی ور زیات شي همغه توکي ورکوي۰ دا توکی صفر دی: $a+0=a$

ناپیلی توکی کړی شو ناالوریز وبولو،ځکه،چې د کومې لور ګڼ باندې یې په زیاتون کې بدلون نه راولی یا د زیاتون ارزښت همغه پاتیږي، همداسې ناړونده او که بل څه مو په خوښه وي همغسې یې وبولی۰

پ : د کمون (تفریق)Subtraction بنستیز قوانین

پیژند:د پیدایښتي ګڼونو a او b لپاره، چې $a>b$ وي، یواځی یو x شته دی، د کوم لپاره ، چې باور لري: $a - b = x$

که $x= a -b$ شته وي، نو ټیک یواځني شته دي(موخه x دی)

نومه ونې: b کمیدونی یا مفروق (تراوسه مې کمونی بللی) a ترې کمونی یا مفروق منه $a +b$ کمون او x کمون- یا تفریق ارزښت بلل کیږي یا بولو :

موږ پورته د لاتین تورو لپاره طبیعي اعدادونخښی لیکو، چی ساده یې ونوموو:

$$20 – 10 = 10$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورته کی موږ له ۲۰ لس کم کړل، چی لاس ته راوړنه یې ۱۰ ده، نو له دی امله یې داسی نوموو:

تر مخ یادونه: په لاندې کې ع . د عربي په معنا دی

۲۰ «ترې کمونی »، ځکه، چی ترې کمیږي(ع۰ مفروق منه)، ۱۰ «کموونی« یا کمیدونی(ع۰ مفروق) دا بل لس یې «کمون ارزښت» یا د کمون لاس ته راوړنه(لنډ: لاس ته راوړنه یا کمون) (ع ۰ حاصل تفریق) ، – کموننښنه او = برابروننښنه ده۰

ت : د ځل (ضرب)Multiplication بنسټیز قوانین:

۱ - د دوه پیدایښتي ګڼونو a او b لپاره د پیدایښتي ګڼونو په ډیری کې تل یو ځل a.b شته دی. د a.b لپاره داسې هم لیکو ab په پورته کې a او b ځلووني (ضریبونه) او ab=x « ځل ارزښت » یا ځل(حاصل ضرب) دی۰

وایي چی ضرب وهلو ته وایي او د جمع (که جمعي) لنډه طریقه، چی۰۰۰۰وي یا د زیاتون لنډه لار ده۰ ګورو، چی دا پیژند، چی وهل او دربول دي زموږ لپاره دومره موخور نه دی او ځل د پښتو ښه نوم دی، چی له دربولو مو ځانونه راویستلي وي۰

که ووایو، چی : د کابل او جلالاباد ترمنځ لار ۱۵۰ کیلو متره ده۰ زمری له کابل څخه جلال اباد ته ۸ ځله لاړ، نو زمري به جلال اباد ته د تګ ټوله څومره لار وهلی وي؟

لیکو: $۱۵۰ \times ۸ = ۱۲۰۰$ ، نو زمري به ټوله ۱۲۰۰ کیلو متره لار وهلي وي۰ ګورو، چی د ځل نومونه د ضرب لپاره ښه او اسانه ده، ځکه چی پښتو ده او له ضریبونو څخه به هم ځلوونی اسان وي، به ۰۰۰وي نه، بلکی اسان دي۰

۲ - له $a = a'$ او $b' = b$ څخه لاس ته راځي $a'b' = ab$ (یواځیتوب)

۳ - لرو $ab = ba$ کموتاتیو – یا د بدلون قانون

(c) ketabton.com: The Digital Library

٤ - لرو $(ab)c = a(bc)$ د ګڼولو- اسوشیاتیو قانون

٥ – لرو $(a+b)c = ac + bc$ د ویشونې- یا دیستریبوتیو قانون
Distributive law

٦ - له $a < b$ او $c > 0$ لاسته راځي $ac < bc$

جګتیتوالي یا یوغږیزوالي قانون Monotony

ت – د ویش بنستیز قانون Division

پیژند۳ ۰ ۲ :

که د دوه طبیعي عددونو a او b لپاره، چې $a \neq b$ او $a \neq 0$ وي یانی صفر نه وي یو طبیعي عدد x شته، چی برابرون (مساوات) $ax = b$ پوره کړي، نو

$x = \frac{b}{a}$ یا b/a د b او a ویش (تقسیم) بلل کیږي، چی ماتګڼ(کسر) یې هم بولو

۱ – که $a / b = x$ یا $x = \frac{a}{b} = a/b$ شته یا موجود وي ، نو یواځنی شته دی(یواځني په دې مانا، چې بل ګڼ x نه شته او یواځې همدا ګڼ x دی)

نومه ونې : په پورته برابرون کې a/b وېش x ویش ارزښت، b ویشونی یا ویشه وونی دی، ځکه چی په یوڅه ویشل کیږي او a پرویشونی بلل کیږي، ځکه، چی څه پر ویشل کیږي یا مقسوم، مقسوم علیه یا قاسم ، حاصل تقسیم ۰

ګورو چی له قاسم یا مقسوم او همداسی د مقسوم علیه او حاصل تقسیم څخه مو دا د پښتو نومه ونی پر- یا پرې ویشونی ، ویشه ونی اوویش ارزښت یا لاس ته راوړنه ساده او زر پوهېږ دي، خو په خواشینی به وه وایم، چی تراوسه په شمیرپوهنه کی ورسره نابلد یو ۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

که ۱۲ کتابچې پر څلورو زده کوونکو وویشو، نو هر یوه ته درې کتابچې رسیږي۰ ګورو، چې ۱۲ په یو څه ویشلکیږي، نو ویشونی یې ښه نوم دی۰ دا ۱۲ په څلور ویشل کیږي پر ۰۰۰ ویشل کیږي، نو له دې امله څلور پر ویشونی بولو، درې یې لاس ته راوړنه ده لکه چې تراوسه مو ورته حاصل تقسیم وایه، له دې امله ورته ویش ارزښت وایو او دا کارونه یا عملیه خو ویش بلل شوی۰

۳ ۰ ۱ ۰ ۲ تیولګنونه یا تام اعداد INTEGERs

د دووو طبیعي عددونو a او bکمون یا تفریق (x= b-a) تیک او تیک هلته یا هلته او هلته د طبیعي عددونو ډیری یا سټ کی شته، چې وي : $a \leq b$

د شمیرپوهنې نخښو باندې داسې لیکل کیږي:

$$x = b - a \Leftrightarrow a \leq b$$

انګریزي یې if and only if تیک او تیک هلته یا هلته او هلته(دا شننه یا وینه پورته د شمیرپوهنې نخښې ته ده)۰

که هغی نخښی ته وګورو، نو هم لاندې ترې څرګندیږي، له ښی لور کیڼ لاس ته راځی او په څټ(برعکس) له کیڼ لور ښی لاس ته راځی۰ یا که۰۰۰ وي، نو ۰۰۰ لاس ته راځی او په څټ۰

تیولګنونه یا تام اعداد هم د انسانانو د اړتیاو پر بنسټ منځ ته راغلي ، یا منځ ته راوړل شوي۰که چیرې سپین د خړ ۱۰۰ افغانیپوروړی وي او سپین ورته اتیا افغانۍ ورکړي، نو سپین بیا هم شل افغانی پوروړی پاتیږي، دا په دی ما، چې ۸۰ + ۱۰۰ - = ۲۰ - ۰ ګورو، چی ۲۰ – یو پیداینتي ګڼ یا طبیعي عدد نه دی۰یا 20- = 100 – 80

(c) ketabton.com: The Digital Library

په هغه حالت کی، چی کموونی (مفروق) له ترېکموني(مفروق منه) څخه لوي وي، نو لاس ته راوړنه يې طبيعي عدد نه دی. اوس يوه د اعدادو بلې ډيری پيژند ته اړ کيږو، چی هغه د ټولګڼونوډيری ده او دا د طبيعي عددونو او د طبيعي عددونو کمي(منفي) او صفر سره يوځاي کوو، چی ټولنه جوړوي(په ډيری کۀ به روښانه شي)، هغه څه، چې له دې ټولنې لاس ته راځي هغه د ټولګڼونو ډيری ده او داسې يې ليکو:

$$Z = N \cup -N \cup 0$$

$$Z = \{ \ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots \}$$

د دې لپاره، چې ترې کمونی د کمېدونی کوچنی وي ، نو پيداينتي ګڼونه په کمګڼونو غزوو يا پراخوو، دا په دې مانا، چی د پيداينتي ګڼونو مخنخښه په کموننخښه يا منفي نخښه باندې سنبالوويانې (کيدی شي زموږ هيوادوال د څټ نخښی په نامه ورسره بلدوي، خو هره نخښه، چې د ګڼ زياتی يا کمی ښايي د ګڼ کيڼ لور ته ليکل کيږي، چې دا ما مخنخښه ليکلې او بللی

هغه په برخه ۳ ۰ ۱ ۰ ۱ کې ورکړ شوي شميرقوانين په Z کې هم باور لري

د ټولګڼونوډيری

$$Z = \{ \ldots. -3, -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , 3 , \ldots. \}$$

د مخه مو شميرقوانين، چې د پيداينتي ګڼونو لپاره ورکړل، هغۀ د ټولګڼونو لپاره هم باور لري

د کمون يا تفريق بنسټقوانين (پسی يا دوام):

۲ - د هرو دوو ټولګڼونو يا تام اعدادو a او b لپاره يو ټولګڼ x=b-a شته، د کوم لپاره، چیa+x=b برابرون باوري دی

د ويش تيوري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ ۰ ۱ ۰ ۲ الف د ویش قاعدې ، لارې یا خویونه

د طبیعي عددونولپاره د نورو قاعدو ترڅنګ ، چې د لومړنیو ګڼونو د ټوټه ونې یا تجز یې لپاره خورا ګټور دی باور لري

الف) یو ګڼ په ۲ (٤ ، ۸ ، ١٦) ویشونی دی، که د اخر څیفر یا کور (له اخره(موخه تری ښی لور دی) دوه ، درې ، څلور ۰۰۰ بنستیزو څیفرونو) څخه جوړ ګڼ په ۲ (٤ ، ۸ ، ١٦ ۰۰۰ویشونی وي) په دوه ویشونی ګڼ جوړه (جفت) نومیږي او بل ډول یی ناجوړه(طاق) بلل کیږي۰ ګورو، چی دلته هم په جوړې او ناجوړه ښه پوهیدلی شو

ب) یو ګڼ په ٥ (۲٥ ، ١۲٥ ، ٦۲٥ ، ۰۰) ویشونی دی، که د اخر(له ښي لور) بنستیز څیفر (د اخر دوه، درې ، څلور ، ۰۰۰ بنستیز څیفرونو) جوړ ګڼونه په ٥ (۲٥، ١۲٥ ، ٦۲٥ ۰۰۰) ویشوني وي

یادونه : په لاتین کی هغه، چی ښي لور ته وي هغه ته اخر وایې او موږ یې شاید لومړی وبولو۰ زه کوښښ کوم، چې دا پوهوړ ولیکم، خو بیا دې هم ګران لوستونکی تری ټیک ناپوهیدنه ماته وبخښي او مشوری دې راکړي۰

پ) یو ګڼ په ۳ همداسی ۹ ویشونی دی ، که د ګڼ پروت زیاتون پر دې ګڼونو ویشونی وي۰

د یوه ګڼ پروت زیاتون لاندې د هغه ګڼ بنستیز ه ګڼونخښو(څیفرونو) زیاتون پوهیږو، بی له دې، چې د هغه ځاي ارزښت په پام کې ونیول شي۰

بیلګۀ : د 126 پروت زیاتون یا پرته جمعه ده: 1+2+6=9

ت) یو ګڼ په 11 ویشونی دی که د هغه ګڼ الترنیري(نخښه بدلونکی) پروت زیاتون۰ پر 11 ویشونی وي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

الترنيري پروت زياتون، چی پروت کمون هم ورته وايی له بنستيزو ځيفرونو ۱ ، ۳ ، ۵ زياتون څخه د ۲ ، ٤ ، ٦ ،۰۰۰ زياتون کمون پوهيږو ، بی له دې، چی ځاي ارزښت يې په پام کی ونيول شي يا په بل ډول، که د ناجوړه کوږ زياتون څخه د جوړه د زياتون کم کړو۰

بيلگه: ۱۷۳۸ په ۱۱ ويشوني دي، ځکه، چې : ۱۵= ۸+ ۷ او ٤ - = ۳ – ۱ -، چی الترنيري زياتون يانی ۱۱ = ٤ – ۱۵ يې په ۱۱ ويشونی دی۰

ټ) يو ګڼ پ ه ۳۷ وېشوړ دی که (د ګڼ له اخر څخه جرړشوي) د درېګوني ګڼونو زياتون پر ۳۷ وېشونی وي.

بيلگه:

37|20216352448 ځکه چې 37|1036 ⇔(20+216+352+448)|37

ث) يو ګڼ په ۷ همداسې په ۱۳ ويشوړ دی، که د هغه (د ګڼ له لخ څخه جوړ) درېګونی الترنيري زياتون پر ۷ همداسې پر ۱۳ وېشونی وي.

بيلگې : 37604 | 7 ځکه چې 567 | 7 ⇔(604-37)|7

13 | 9679293889 ځکه ، چې 13|1209 ⇔ (96-709+293-889) |13

ج) يو ګڼ په ۱۰۱ وېشونی دی، که (د ګڼ له اخر څخه جړشوی) دوهګونی الترنيري زياتون په ۱۰۱ وېشونی وي.

بيلگه:

101|7930630669 ځکه چې 101|202 ⇔(79+03-63+06-69)|101

(c) ketabton.com: The Digital Library

يادونه : كه پيداښتي ګڼونه a او b ولرواو ولرو a : b ، نو a پر b وېشو، كه وېش

ارزښت يې هر ګڼ وي او كه پېداښتي ګڼونه a او b ولرو او ولرو b|a ، نو دا په دې مانه، چې ګڼ b ګڼ a ويشي بې له پاتي ياني ګڼ a په ګڼ b وېشوړ دئ.

۳ ۰ ۱ ۰ ۲ټ) خوراغټ ګډ پرويشونی او خورا کوچنی ګډ زياتځله

يا بزرګترين قاسم مشترک و کوچکترين مضرب مشترک(ذو الاضعافالاقل)

Great common divisor and small common multiple

ددې لپاره، چې دا په سرليک کې ورکړ شوي څه ښه و پېژندلی شو ، داسې مخ ته ځو:

لاندې ګڼونه دې ورکړ شوي وي، سملاسي يې په لومړنيو ګڼونو ټوټه کوو

$$260 = 2.130=2.2.65=2.2.5.13 = 2^2.5.13$$

$$468=2.234=2.2.117=2.2.3.39=2.2.3.3.13=2^2.3^2.13$$

له پورته دواړو ګڼونو د لومړنيوګڼونو ځله وونو هر يوه څخه هغه لومړنی ګڼ رانيسو او سره ځله وو بې، چې په دواړو ګڼونو کې ګډ وي او توان(په خپل ځای کې دې وکتل شي) يا جګګڼ بې ټيټ يا کم وي . ياني

$$22.13 = 2.26 = 52$$

دا پورته لاس ته راوړی ګڼ ياني ۵۲ پورته دواړه ګڼونه وېشي ياني د دواړو ګڼونو پرووېشونی

دئ او خورا غټ پرووېشونی هم دئ. ياني ۵۲ خورا غټ او ددواړو ګډ پرووېشونی دئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لنډ : ۵۲ د يورته ګڼونو خورا غټ ګډ پروېشونی دئ.

داسې ګڼ ، خوراغټ ګډ پروېشونی، بولو (لنډ ونه يې : غ ګ و)

هغه ګڼ، چې د دوه يا ډېرو ګڼونو ګډ پروشونی او خورا غټ هم وي، نو دې ګڼ ته خورا,,

غټ ګډ پروېشونی ,, (لنډونه: غ ګ و) وايو. يا

(بزرګترين عامل (مقسوم عليه) مشترک)Greatest commom divisor(g c d)

اوس بيا داسې مخ ته ځو:

په پورته کې هغه د دواړو ګڼونو لومړني ځله وونې، له هر ځخه يو چې په جګ توان وي

يانې خورا غټ جګګڼ ولري ، هغه د جګ توان رابېلوو او بيا يې سره خله وو، چې لاس ته

ترې راځي: $2^2.3^2.5.13=2340$

دا پورته ګڼ يانې ۲۳۴۰ د دواړو ورکړ شوو ګڼونو ګډ زياتځله دئ (يانې ګډ په دواړو

وېشل کيږي) او دا خورا کوچنی ګڼ هم دئ. دا په دې مانا،چې له دې ګڼ بل کوچنی ګڼ نه

شته، چې د پورته ګڼونو دواړو ګډ زياتځله(څو برابره) وي.:

لنډ : خورا کوچنی ګڼ دی. د دواړوګڼونو (يانې ګډ) زياتځله (ګډ څو واره) دئ

لنډ يې : خورا کوچنی ګډ زياتځله (لنډونه يې: خ ګ ځ) يا
(کوچکترين مضرب مشترک يا ذوالاضعاف الاقل)Least common multiple(l.c.m.)

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګران هیوادوال دې ورته پام وکړي، چې کوم نوم به زموږ لپاره زر یا بیخي پوهوړ او ساده وي.

ورپسې داسې مخ ته ځو:

دا چې موږ په پیدایښت یا طبیعي ګڼونو کې له شمیرلو سره بلد شو ، نو په لاندې ډول پیژند ورکوو:

پیژند(تعریف)۳ ۰ ۳ :

a او b دې ټولګڼونه وي۰ وایو چې « ګڼ a ګڼ bویشي» (او یا هم a د bپرویشونې دئ او یا همa د b څو برابره (زیاتځله) دئ) که یو ټولګڼ u شته یا موجود وي او دا باوري کړيau=b ددې لپاره لیکوa|b (وایو، چې ګڼ aګڼ b ویشي ، خو اړیین یا ضرور نه ده، چې کلمه ګڼ ورسره وویل شي۰

که a د bپرویشونی نه وي، نو د دې لپاره لیکوa|/b(دا نخښه /| دې د نه ویشونی لپاره ومنل شي)

بیا لیکو، چې : پیدایښتي ګڼونه، چې په ۲ ویشل کیږي جوړه (جفت) ګڼونه بلل کیږي او که نه نو ناجوړه (طاق) ګڼونه بلل کیږي۰ د صفر ګڼ د پیدایښتي ګڼونو په ډیرۍ کې یو ځانګړی حالت لري۰

په لاندې جمله کې بې له ښوونې یا اوبیونې د دې ویشکلمی لپاره یو څو ساده شمیرقاعدې را یوځای کوو، چې په راتلونکې کې ترې کار اخستل کیږي۰

جمله ۳ ۰ ۱ :

د په خوښه یا زړه پورې ټولګڼونو a,b,c,d لپاره باوري دي:

(۱) ± 1 او $\pm a$ ویش (دا په نامه « ساده» پرویشوني دي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

(۲) د ۱ پرويشونی ۱ او ۱ - دي

(۳) تل باور لري، چې 0 | a او a | 0 يوائی په هغه حالت کې باور لري، چې a = 0 وي

(٤) له a|b او b|c <= a|c

(٥) له a|b لاس ته راځي: ac|bc ٠که c |= 0 وي ، نو د دې په څېر هم باوري دي٠ دا په دې مانا چې، که ac|bc وي، نوa|b هم باور لري٠د ګڼونو ليکدود له مخې، که نړيوالجال ته پورته شو داسې ليکو، که نه دا پورته بسيا کوي: $c \neq 0, a|b \Rightarrow ac|bc$

(٦) لهa|b او c|d څخه لاس ته راځي او په څېر ac| bd لنډه ليکنه يې(که نج ته پورته شوه): $a|b, c|d \Leftrightarrow ac|bd$

(۷) له a | b او b| a لاس ته راځي a = ± b

(۸) له a |b اوa|c څخه لاس ته راځي a|(bx+cy) د ټولو ټولګڼونو x او y لپار

(۹) ټيک هلته a|b کله چی وي|b| | |a|،

(۱۰) که a | b او b = 0 نه وي نو باوري دي - | b| < a < |b|

حل (اوبی) : (۱) له a1 = (-a)(-1) = a لاس ته راځي

(۲) له a0 = 0 لرو a | 0 . که وي a | 0 , نو يو ټولګڼ u شته د کوم لپاره چی وي a = 0u او له کومی چی لاس ته راځي a = 0 .

(۳) ساده دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(۴) که a | b او b | c , نو تېولګنونه u او v د $au = b, bv = c$ سره موجود دی . له دې لاس ته راځي $c = bv = a(uv)$ ، پس a | c .

(۵) که a|b ، پس یو تېولګنۍ u د $au = b$ سره موجود دی، او هم د $(ac)u = bc$ سره، د کوم څخه چې لاس ته راځي ac | bc . د $c \neq 0$ لپاره دا اخرڅنځیر په څټ کیدی هم شي.

(۶) د a|b , c|d او (۵) څخه لاس ته راځي چې ac|bc او bc|bd ، د (۴) له مخې ac | bd .

(۷) د a | b او b | a څخه د تېولګنونو u او v موجودیت لاس ته راځي د $au = b$ او $bv = a$ سره. برسیره پر دې لاس ته راځي $a(uv) = a$, پس $a=0$ یا $u=v=\pm1$. په لمړي حالت کی د a | b له امله $b = 0$, پس $a = b$. په دوم حالت کی $a = \pm b$ دی.

(۸) د تېولګنونو u , v لپاره دي $au = b$ او $av = c$ ، نو له دې $a(ux+vy)=bx+cy$ لاس ته راځي، پس a | (bx+cy) د ټولو تېولګنونو x او y لپاره.

(۹) وي دې a|b . له a | b ، a| |a| او |b| | b څخه او د (۴) څو واره استعمال څخه لاس ته راځي، چې |a| | |b| . په څټ: که |b| | |a| باورلری، نو د |b| | |a| ، |a| | a او b| |b| څخه په ورته ډول لاس ته راځي a | b .

(۱۰) دی a | b ، پس د (۹) هم |a| | |b| . که $b \neq 0$ وي ، پس یو طبعي ګڼ u لاس ته راځي د $|a|u = |b|$ سره، له کوم چې $|a| \leq |b|$ لاس ته راځي.

که b|a د تېولګنونو a,b لپاره د $b \neq 0$ سره، نو یو یواځنی معلوم ګڼ q شته (د a او همداسی د b «کومپلیمنت پرویشونی» بلل کیږي)، چې لرو $a = bq$.

په ټولیزه توګه لاندې جمله باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۳ ۰ ۲ (د ویش الگوریتم): a او b دې تولګنونه وي۰ د $b \neq 0$ سره ۰ نو یواځني ټاکلي، په پای پلونو(قدمونو) کی شمیرلکیدونکي تولګنونه q او r (چې د a پر b ویش

څخه لاس ته راځي او «ویش» په همدې ډول « پاتی بلل کیږي، شته دی،د کومو لپاره چی باور لري: $a = bq + r \;\wedge\; |0| \leq r < b$

هر یو تولګڼ کم له کمه ساده پرویشونی لري یعنی ± 1 او پخپله د دې تولګڼ زیاتیز(مثبت) او کمیز(منفي)۰ دې پرویشؤنو ته «سادهٔ پرویشونی» وایو۰

پیژند ۳ ۰ ب :

هر یو تولګڼ، چې یواځی او یواځي ساده پرویشونی ولري موږ ورته لومړنی ګنونه وایو او دا لومړنی یا پریم ګنونهPrimzahlen په pسره په نخښه کوو، چې دا پریم یا لومړی ګڼ د پیدایښتي ګنونوتوکی دی۰

هریو تولګڼ، چی لومړنی ګڼ نه وي د لومړنیو ګنونو په ځلونو(ځله وونو)(ضریبونو) توټه یا تجزیه کیدی شي۰

بیلګی :

1 - $240 = 24 \,.\, 10 = 3 \,.\, 8 \,.\, 2 \,.\, 5 = 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 5 = 2^4 \cdot 3 \,.\, 5$

2- $2310 = 2 \,.\, 1155 = 2 \,.\, 3 \,.\, 385 = 2 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 77 = 2 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 7 \,.\, 11$

$3750 = 25 \,.\, 15 \,.\, 10 = 5 \,.\, 5 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 2 \,.\, 5 = 2 \,.\, 3 \,.\, 5^4$

که پورته بیلګو ته په ځیر شو نو په ۱ او ۳ راغلو ګنونو کی ګڼ ۲ د دواړو پر ویشونی دی او همدا ډول ۳ هم د دواړوګنونو پرویشونی دی یانی $2.3 = 6$ برسیره پردې ګڼ ۵ هم نو $2.3.5 = 30$ دواړه ګنونه ویشي او شاید په دې ګنونو کی یو خورا غټ ګډ پرویشونی هم وي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورته درېواړو بیلګو کې ۲ ، ۳ ، ۵ د ځلوونو په څیر خوندي دي یانې دا ګڼونه ویش، چې له دې امله ګڼ ۳۰ د درجواړو ګڼونو غ۰ګ۰پ دئ

پیژند ۳ ۰ پ :

a او b دې ټولګڼونه وي او d دې یو مثبت یا زیاتونی ټولګڼ وي، د کومو لپاره، چې باور لري:

$$(1) d \mid a \wedge d \mid b$$
$$(2) t \mid a \wedge t \mid b \Rightarrow t \mid d$$

پس d د a او b خورا غټ ګډ پرویشونی(غ۰ګ۰پ) بلل کیږي d لپاره داسی لیکو:

$$d = (a,b)$$

نو d خورا غټ ګډ پرویشونی(لنډ: غ۰ګ۰پ) بلل کیږي۰

که باوري وي: $(a,b) = 1$ نو a او b پروېش پردي بلل کیږي یانې له ۱ پرته بل داسې ګڼ نه شته، چې دواړه ګڼونه پر ووېشل شي.

یادونه : په زیاتو ادبیاتو کې لنډونه په درېتورو کیږي، خو که غواړی دا خورا غټ ګډ پرویشونی داسې رالنډوو : خ غ ګ پ

یادونه: ما د خورا غټ ګډ پرویشونی لپاره دا پورته درې توکي غوره کړي، که ګران لوستونکي بل وړاندیز لري، نو زه یې ضرور په پام کی په پوره خوښی نیسم۰ دې دوه کلمو ته په فارسي ادبیاتو کې بزرګترین قاسم مشترک او کوچکتریب مضرب مشترک وایي او ذوالاضعاف الاقل یې هم بولي۰

یادونه : که چیرې d او *d دواړه د a او b غ ګ پ وي، نو له پورته پیژند څخه لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

چی $d^* \mid d$ او $d \mid d^*$ ، نو د $d \geq 0$, d^* له امله لرو $d^* = d$

لاندې جمله به وښايي ، چې داسې غ ګ و تل شته دی

جمله ۳ ۰ ۳ :
په خوښه توليکنونو a اوb لپاره دې غ ګ پ d شته وي، نو تولګنونه x او y شته د
کومو لپار، چې لرو: $d = ax + by$

حل(اوبي): که $a = b = 0$ وي ، نو 0 د a او b غ ګ و دی، نور ساده دی. د a او b د ممکنه بدلون (په پام کی دې وي چی د (a , b) تعریف په a او b کی سیومتریك دی) له امله اجازه لرو چی $b \neq 0$ ونیسو.
موږ اوس رکورسيف (rekursiv (دا په دې مانا چی د مخه غړي څخه وروستی یعني وریپسی غړی لاس ته راوړلکیږي)
تولګنونه......, r_{-1}, r_0, r_1, r_2 او .... q_1, q_2 په لاندې ډول تعریفوو: وي دې $r_{-1} = a$, $r_0 = b$ د $i \geq 1$ او $r_{i-1} \neq 0$ لپاره تولګنونه r_i , q_i داسی تعینوو چی $r_{i-2} = q_i r_{i-1} + r_i$

او $0 \leq r_i < |r_{i-1}|$ کوم چی له جملی (۱ . ۳) څخه ممکن کیدی شي . باید يو نه منفی ګڼ n ورکړ شوی وي، د کوم لپاره چی لرو $r_n \neq 0$ مګر $r_{n+1} = 0$, چی بی له دې بیا یوه نه پای د طبعي ګڼونو لویدونکی یا کمیدونکی پرلپسی لاس ته راځي، کوم چی ناشونی(ناممکن) دی. دامو اوس ددې لاندې مساواتو شیما ته لاربشودوي

$$a = q_1 b + r_1$$

$$b = q_2 r_1 + r_2$$

....

....

$$r_{n-2} = q_n r_{n-1} + r_n$$

$$r_{n-1} = q_{n+1} r_n$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که دا مساوات د ښکته پورته وویل شي، نو په ترتیب (یو په بل پسې) لاس ته راځي:

$$r_n | r_{n-1} , r_n | r_{n-2} , \dots r_n | b , r_n | a$$

دا په دې مانا چې r_n د a او b یو غ ګ و دی. t دې د a او b یو بل غ ګ و وي،
نو په دې حالت کې که دا پورته مساوات له پورته ښکته ولولو، نو یو په بل پسې لرو

$$t | r_0 , t | r_1 , t | r_2 ,\dots, t | r_{n-1} , t | r_n$$

دا په دې مانا چې |r| د a او b غ ګ و دی.

هر د دې ګڼونو r_i د ($-1 \le i \le n$) سره، په ځانګړي ډول r_n او ددې سره (a , b) یو د a او b لایني کمبینیشن دی ، په لاندې ډول au + bv , چې u او v ټولګڼونه دي.

$r_{-1} = a$ د

او $r_0 = b$ لپاره ساده دی. که د یوه i لپاره د $1 \le i \le n$ سره، که یو د a او b یو لایني کمبینشن ښوونه د r_{i-1} او r_{i-2} لپاره همدا سم د لاسه پیداشوي وي، نوله $r_{i-2} = q_i r_{i-1} + r_i$ څخه د یوې داسې r_i د ځاي په ځاي کولو له لارې هم . چې په دې ډول د ایندکشن له لارې غوښتنه لاس ته راځي. (پای)

یادونه : د غ ګ پ د ښوونې متود ، چې پورته او په لاندې بیلګه کې راوړل شي د اویکلید الګوریتم"Euklid Algorithmus„ د یوې ګڼیزې دندې یا کارونې (عملیې) شیماتیکي اوبیونې(حل) متود په نامه یادیږي، نو له دې سره x او y هم له a څخه d = ax + by اکسپلیځیتExplizit (لاتین: څرګند، واضح، روښانه) شمیرل کیدی شي۰

بیلګه:

غوښتنه (2124 , 1764) = d ۰ د اویکلید الګوریتم کارونې له لارې لرو:

$$2124 = 1 \cdot 1764 + 360$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$1764 = 4.360 + 323$$

$$360 = 1.324 + 36$$

$$324 = 9.36$$

$$\Rightarrow d=36$$

که پورته وګورو نو غ ک پ $d = 36$ دئ

د دې لپاره ، چې d له x او y سره په $d = ax+by$ ډول انځور کړی شو، نو په لاندې توګه مخ ته ځو:

$$36 = 360 - 1.324 = 360 - 1(1764 - 4.360) = (-1).1764 + 5.360$$

$$= (-1) . 1764 + 5.(2124 - 1764) = 2124 . 5 + 1764.(-6)$$

د پورته څخه د a او b لپاره لاندې مهمه پيژند نخښه يا نخښونه لاس ته راځي

يادونه : ماته دا لاندې جملې ښه ښکاريږي، چې ګرانو لوستونکو ته يې بې له اوبيونې

وړاندې کړم، دا جملې په خته کې د ګڼونوتيوري دنده ده، چې په ګڼونتيوري کې بيا د ښوونې سره ښوول کيږي۰

جمله۳ ۰ ۹ :

a او b دې ټولګڼونه وي. د a او b يو ګډ پرويشونی $t \geq 0$ هلته او هلته د a او b ګ غ پ دئ کله چې دا شکل $t = ax + by$ د a او b ټولګڼونو سره انځور کړای شو۰ په ځانګړي ډول a او b هلته او هلته ويشپردې دي، که ټولګڼونه x او y شته وي د کومو لپاره چې باور لر:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$ax + by = 1$$

اوبيونه : د شرايطو ضرورت سم د لاسه له ۳ ېږ ۶ څخه لاس ته راځي. دا چې شرايط پوره کيږدونکي هم دي، له دې لاس ته راځي، چې هر د او پروېشوني د پروېشوني هم دي..

څو جملې په لاندې کې روړو، ګڼونتيږي پورې اړه لر او دلته يې نه ښايو.

جمله : ۱۰ . ۳

a اوb دې ټولګڼونه وي۰ د a اوb هر ګډ پرويشونی $t \geq 0$ لپاره باور لري:

$$(a/t,b/t) = (a,b) / t$$

په ځانګړي توګه t د a او b يو ګډ پرويشونی هلته اوهلته غ ګ پ دئ چې باور ولري

$$(a/t,b/t) = 1$$

ليما۳ ۰ ۱۱(جمله ګئ)(اويکليد): په خوښه ټولګڼونو aاوb اوc لپاره باور لري

له $a|bc$ او $(a,b) = 1$ لاس ته راځي $a|c$

تعريف۳ ت : $a_1 , a_2 , ... a_n$ دې ټولګڼونه وي $(n \geq 1)$, او d دې يو نه منفي ټولګڼ وي د کوم لپاره چې باور لري :

لمړی : $d | a_i$ د ټولو $i = 1 ,...., n$ لپاره

ب : له $t | a_i$ څخه د ټولو $i = 1 ,...., n$ لپاره لاس ته راځي $t | d$.

نو d د $a_1,...., a_n$ غ ګ و بلل کيږي او د d لپاره هم داسې ليکو $(a_1 , ... , a_n)$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د a_n , ... , a_1 لپاره د داسی غ ګ و یواځنتوب په ۳ . ۵ کی کتل کیدی شي او د موجودیت لپاره یې لرو :

> **جمله ۳ . ۱۳ :** د خوښې تولګنونو a_n , ... , a_1 لپاره ($n \geq 1$) غ ګ و موجود او d د a_n , ... , a_1 خطي (لایتي) کمبینیشن دی دا په دې مانا چې
>
> $$d = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$$
>
> د مناسبو تولګنونو x_n , ... , x_1 لپاره.

یادونه : له دې بیا لاس ته راوړل کیدی شي:

$$(a_1 , \ldots , a_n) = ((a_1 ,\ldots, a_{n-1}), a_n)$$

د په خوښه تولګنونو a_n , ..., a_1 د ($n \geq 1$) لپاره. سړی کړی شي چې د $a_1,\ldots,a_n$ غ ګ و پل په پل د اویکلید الګوریتموس له لارې پیدا کړي، چې دلته یې د اوبی یا حلخه تیریږو.

د اوبی یا حل لپاره یې د n په لور د پوره ایندکشن څخه کار اخستل کیږي چې په ۸ –امه برخه کې څیړل شوی دی.

بیلګې:

۱ - ګڼونه 240 او3750 غ ګ پ 30 = 2.3.5 لري

۲ – لرو 408 او748

$$408 = 2^3.3.17, 748 = 2^2.11.17$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پس غ ګ پ دی: 17 . 2<2> = (408,748) یا دا لاندې که ن ج پورته شول

$$(408,748) = 2^2.17 = 68$$

۳ – پ غ ګ پ د ګڼونو او غ ګ پ 6 = (30.66.114) دی، ځکه، چې
30 = 2.3.5

او 66 = 2.3.11 او 114 = 2.3.19 دي

٤ – ګڼونه 54 او 65 ګډ پرویشونی نه لري دا موږ پرویشپردی بولو، ځکه، چې دي:

65 = 5.13 /\ 54 = 2.3.3.3

خورا کوچنی ګډ زیاتځلی(کوچکترین مضرب مشترک)

موږ په لاندې کې د خورا کوچني ګډ زیاتځله (لنډ: ک ګ ز) کلیمې په څیرنه پیل کو۰ دا کلمه و غ ګ پ یوه دوه ییزه یا دوه ګونی یا غبرګه (دوال Dual) کلمه ده، موږ په لاندې ډول سملاسي تولیز پیژند ورکوو

تعریف ۳ . تې : $a_1 ,....., a_n$ دې $(n \geq 2)$ تولګڼونه وي، او v دې یو داسی نه منفی تولګڼ وي، د کوم لپاره چې باور لري:

الف – $a_i | v$ د $n , ... , ,, 1 = i$ لپاره

ب – له $a_i | w$ څخه د $n , ... , 1 = i$ لپاره لاس ته راځي $v | w$.

نو v د $a_1 , ... , a_n$ کوچنی ګډ زیاتځله (لنډ : ك ګ ځ) بلل کیږي او داسې یې لیکو:

$$v = [a_1 , ... , a_n]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند (د دوه ګڼونو لپاره)

a او b دې تولګنونه وي او v دې یو داسې نه کمیز یا نه منفی تولګڼ وي، د کوم لپاره، چې باور لري:

(۱) $v|a$ او $v|b$

(۲) له $a|w$ او $b|w$ څخه لاس ته راځی $v \mid w$

نو v د a او b خورا کوچنی ګډ زیاتځله (لنډ» ک ګ ز او که غواړی خ ک ګ ز) بلل کیږي او په لاندې توګه یې لیکو

$$v = [a,b]$$

جمله :

په خوښه تولګنونو $a,b,c,\ldots,n$ لپاره ک ګ ز شته دی او دا یواځنی دئ

$$[a,b,c,\ldots,n]$$

یادونه: موږ لاندې مساوات هم د مختلفو جملو او د هغو له حلونولاس ته راوړو :
دتولګنونو ($n \geq 3$) $a_1, \ldots a_n$ لپاره لرو $[a_1,\ldots,a_n] = [[a_1,\ldots,a_{n-1}], a_n]$
او هم $|a_1 a_2| = [a_1, a_2] (a_1, a_2)$

لاس ته راوړنې (داهم په همدې مانا مګر د جملی په څیر دی): د په خوښه تولګنونو a, b, c لپاره باور لري: له $a \mid c$, $b \mid c$ او $(a,b) = 1$ څخه لاس ته راوړو $ab \mid c$

د ګڼتیوري بنسټیزه جمله:

(c) ketabton.com: The Digital Library

پيژنده :

يو ټولګڼ$n > 1$ لومړی ګڼ (prime number) بلل کيږي، که له ساده پرويشونv بل پرويشونی ونه لري٠

لومړي ګڼونه لاندې غوه خويونه لري.:

ليما (لکه کوچنی جمله): که p يولمړی ګڼ وي او$p \mid a_1 \dots a_n$ د ټولګڼونو $a_1, \dots, a_n$ لپاره. نو $p \mid a_i$ د کم له کمه يوه i د $1 \leq i \leq n$ سره.
حل (اوبی): حل يی د ايندوکشن له لارې صورت نيسی، چی ددې لپاره بايد ۸ - امه برخه کتل شوي وي.
د $n = 1$ لپاره ښوونه ساده ده . اوس دې $n > 1$ وي او ليما دې $n - 1$ لپاره سملاسي باور ولري. نو لرو $p \mid a_n$ ، په بل ډول بيا له $p \nmid a_n$ څخه لاس ته راځی چې $(p, a_n) = 1$ دې . له مختنه تيرې جملی لاس ته راځي، چې که $p \mid a_1 \dots a_{n-1}$ وي ، نو داسې دی $p \mid a_i$ د يو i لپاره چې $1 \leq i \leq n-1$ وي د ايندکشن د نيونې په بستې.

د لومړنيو ګڼونو غوره والی د « ګڼونتيوري بنسټيزی جملې» څخه لاس ته راځي

جلمه (د ګڼونتيوري بنسټيزه جمله):

هر يو پيداينتي (طبيعي) ګڼ ،د ګڼونو تر تيب پورې، په يواځني او يواځني (يويواځنی (له دې کلمو څخه موخه داده، چې دا په يواځی يو ډول ليکل کيدی شي او بس٠ کيدی شي د ګڼونو پروتځاي بدل وي، خو ضريبونه همغه دي)) ډول د لومړنيو ګڼونو ځل په ځير ليکل کيدی شي٠

اوبی : ښوونه د n په لور ايندکشن له لارې مخ ته بيايو (برخه ۸ دې ودې کتل شي)
د $n = 1$ لپاره باور لري، که، لکه معمول ، 1 د طبعي ګڼونو د تش(خالي) ځل په ځير تعريف کړو. له دې امله دې $n > 1$ وي او جمله دې د ټولو طبعي ګڼونو $< n$ لپاره ښوول

(c) ketabton.com: The Digital Library

شوي وي. موږ اوس ټول د n پروېشونی $t > 1$ په نظر کي نيسو. کم له کمه يو داسې ګڼ شته لکه n . که p د دې پروېشونو کوچنی پروېشونی وي، نو p لمړی ګڼ دی. په بل ډول به نو بيا p يو پروېشونی q لرودی د $1 < q < p$ سره، او دا چې q د n پروېشونی وي، نو دا به د p تعريف رد کړي. دا چې $n / p < n$ د ايندونکشن نيوني په بنسټ $\frac{n}{p}$ د لمړي ګڼونو د څل په څېر ليکل کيدی نو په همدې ډول پخپله n هم.

وي دي $n = p_1 p_2 .. p_r = p'_1 p'_2 ... p'_s$ د n دوه ډوله د لمړيو ګڼونو د څل په څېرليکنه .
له $p_1 | p'_1 ... p'_s$ اوس لاس ته راځي $p_1 | p'_i$ د يو i د $1 \le i \le s$ سره . د نمري بدلولو له لارې دې وي $p_1 | p'_1$. داچې بيا $p_1 = p'_1$ باور لري، نو لاس ته راځي $p_2 ... p_r = p'_2 .... p'_s$ ، له کومو چې د ايدکشن له نيوني لرو $r - 1 = s - 1$ ، پس $r = s$ او (او د ترتيب بدلون) هم $p_i = p'_i$ له $2 \le i \le r$ لاس ته راځي .

پای.

د بنسټيزې جملې د ګټور استعمال لپاره لاندې جمله ده

جمله : هر طبعي ګڼ n په ټيك يو ډول په لاندې فورم انځوريدلی شي $n = \prod_p p^{\nu_p}$ (لپاره p د پای ډېرو يواځې ν_p (دی $\nu_p = 0$).(ν ګڼ نيولو شتل کيږي) چيرته چې p ټولو طبعي ګڼونو کې په جګيدونکې لمړی پرلپسې کې ځغلي.

يادونه: د عملي شميرنې لپاره په هغو ګڼونو چې جګ يې صفر وي تيريدل کيدی شي، لکه : $n = 28 , n = 2^2 . 7$ د $n = 2^2 . 3^0 . 5^0 . 7$ لپاره
لاس ته راوړنې : $(a,b) = 1$ او $(a , bc) = 1$ ، نو هم $(a , bc) = 1$ ، د په خوښه ټولګڼونو a , b , c لپاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوبی یا حل : نیولی دې وي چې $(a, bc) > 1$ ، نو بیا به یو لمړنی ګڼ p موجود وي د p/a او p / bc سره، د لیما ۲ . ۲ له مخې به یې باور لرودی p/b یا p/c داد $(a,c)=(a,b)=1$ سره تضاد دی.

جمله : a او b دې له صفر مختلف ګڼونه وي او $|a| = \prod_p p^{\alpha_p}$ او $|b| = \prod_p p^{\beta_p}$ د دوي مطلقه ارزښتونو لمړی فاکتورتجزیه د ۲ . ۴ له مخې ، نو $a \mid b$ هلته او هلته باور لري که د ټولو لمړي ګڼونو p لپاره باور ولري $\alpha_p \le \beta_p$

لاس ته راوړني : وي دې a اوb له 0 مختلف ګڼونه، $|a|=\prod_p p^{\alpha_p}$ همداسی $|b|=\prod_p p^{\beta_p}$ دې د مطلقه ارزښتونو لمړني فاکتورټوټونه (تجزیه) وي. نو باور لري

$$(a,b) = \prod_p p^{\min(\alpha_p, \beta_p)}, \quad [a,b] = \prod_p p^{\max(\alpha_p, \beta_p)}$$

چیرته چی $\min(\alpha_p, \beta_p)$ د دواړو ګڼونو α_p او β_p خوراکوچنی او $\max(\alpha_p, \beta_p)$ خورا لوي په ګوته کوي.

بیلګه : $a = 2124 = 2^2.3^2.59$ او $b = -1764 = -2^2.3^2.7^2$ نو لرو $(a,b)=2^2.3^2 = 36$ او $[a,b] = 2^2.3^2.7^2.59 = 104076$

یادونه : د لاس ته راوړني ۲ څخه سم د لاسه له دوو څخه زیاتو ټولګڼونوباندې غ ګ و او ك ګ ز هم استعمالیدی شي.

یو څو په لمړیو ګڼونو اړونده پرابلومونو دې پوښتنو ته چی ایا ناپای زیات لمړي ګڼونه موجود دي که نه اویکلید لخوا ځواب ورکړ شوی. لاندې یو ښکلي ځواب دی چی له هغه رینبه نیسي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاس ته راوړني : وي دې a اوb له 0 مختلف ګڼونه، $|a|=\prod_p p^{\alpha_p}$ همداسي $|b|=\prod_p p^{\beta_p}$ دې د مطلقه ارزښتونو لمړني فاکتورټوټونه (تجزيه) وي. نو باور لري

$$(a,b)=\prod_p p^{\min(\alpha_p,\beta_p)} \, , \, [a,b]=\prod_p p^{\max(\alpha_p,\beta_p)}$$

چيرته چې $\min(\alpha_p,\beta_p)$ د دواړو ګڼونو α_p او β_p خوراکوچنی او $\max(\alpha_p,\beta_p)$ خورا لوي په ګوته کوي.

بيلګه : $a = 2124 = 2^2.3^2.59$ او $b = -1764 = -2^2.3^2.7^2$ نو لرو $(a,b)=2^2.3^2 = 36$ او $[a,b] = 2^2.3^2.7^2.59 = 104076$

يادونه : د لاس ته راوړني ۲ ښخه سم د لاسه له دوو ښخه زياتو تولګنونوباندې غ ګ و او ك ګ ز هم استعمالیدی شي.

يو څو په لمړيو ګڼونو اړونده پرابلومونو دې پوښتنو ته چې ايا ناپای زيات لمړي ګڼونه موجود دي که نه اويکليد لخوا ځواب ورکړ شوی. لاندې يو ښکلي ځواب دی چی له هغه ريښنه نيسي:

جمله: ناپاي ډير لومړني ګڼونه شته.

حل(اوبی) : موږ جمله ناسيده يا ناسمه ښايو (۸ –امه برخه دې وکتل شي) او نيسو چې پايڼدير لمړی ګڼونه $p_1 , p_2 , p_3 , \ldots\ldots, p_r$ موجود دي. ګڼې $N = p_1p_2\ldots p_r+1$ له 1 لوي دی او له دې امله په يوه لمړي ګڼ p ويشونکی دی. د نيونی له مخی لرو $p = p_i$ د $1 \leq i \leq r$ سره . د $P|N$ او $p \mid p_1p_2\ldots p_r$ له امله لاس ته راځي $p \mid 1$.کوم چی ناشونی دی (ناممکن) له دې امله بايد ناپای زيات لمړي ګڼونه موجود وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه : د میلاد څخه پخوا د« اریتوتنس غلبیل» متود څرګندوو، چې موږ د 1 او 100 ترمنځ د لمړي ګڼونو معلومول دځي متود له لارې په لاندې توګه څرګند وو

~~1~~ 2 3 ~~4~~ 5 ~~6~~ 7 ~~8~~ ~~9~~ ~~10~~ 11 ~~12~~ 13 ~~14~~
~~15~~ ~~16~~ 17 ~~18~~ 19 ~~20~~ ~~21~~ ~~22~~ 23 ~~24~~
~~25~~ ~~26~~ ~~27~~ ~~28~~ 29 ~~30~~ 31 ~~32~~ ~~33~~ ~~34~~ ~~35~~ ~~36~~
37 ~~38~~ ~~39~~ ~~40~~ 41 ~~42~~ 43 ~~44~~ ~~45~~ ~~46~~ 47 ~~48~~ ~~49~~ ~~50~~
~~51~~ ~~52~~ 53 ~~54~~ ~~55~~ ~~56~~ 57 ~~58~~ 59 ~~60~~ 61 ~~62~~ ~~63~~ ~~64~~
~~65~~ ~~66~~ 67 ~~68~~ ~~69~~ ~~70~~ 71 ~~72~~ 73 ~~74~~ ~~75~~ ~~76~~ ~~77~~
~~78~~ 79 ~~80~~ ~~81~~ ~~82~~ 83 ~~84~~ ~~85~~ ~~86~~ ~~87~~ ~~88~~ 89 ~~90~~ ~~91~~
~~92~~ ~~93~~ ~~94~~ ~~95~~ ~~96~~ 97 ~~98~~ ~~99~~ ~~100~~

۳ . ۱ . ۲ - راشنل ګڼونه Rational Nnumbers

(لاتین: عاقلانه یا هوښیار اعداد یا ګڼونه)

د افغانستان په دري ادبیاتو کې داسی ګڼونه او ایراشنلګڼونه کله ناطق د ګونګ اوداسې نورو ګڼونو په نامه یا دیږي، کله یې ماتګڼونه بللي، خوزه دا ښه بولم، چې دا همداسې یانې راشنلګڼونه وبلل شي، که څوک یې هوښیار ګڼونه بولی هم خوښه یی او یا مات ګڼونه ، خو دلته راځیو Ratio nهوښیار په معنا نه بلکه د نسبي په معنا دی٠

یادونه : که / ولرو یانې که ولرو a / b نو دا په دې مانا، چېa په b ویشل کیږي٠ که ولرو≠ نود نابرابرونښنه ده٠ دا په دې مانا، چی b له 0 سره برابره نه ده٠ د دوه ګڼونود a او b ویش x = b / a د ټولګڼونو په ډیری کې تل هلته شته دی، چې a د b ټولګڼیز څو ځله وي٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره، چې بیا هم ویش$a : b$ (دلته هم b پرa ویشل کیږي) کیدونی شي» سره له دې، چې ویش تل په ټولګڼونوکی پیژند نه لري یا تعریف نه دی یا صورت نه نیسي« باید د ټولګڼونو ډیری ماتګڼونو(کسر) ډیری‌ته پراخه شي، چی د لومړي ځل لپاره افاده یا وینه b/a سومبولیک مانا لري، د نوو ګڼونو په څیر نیسو او په ټولګڼونو یې ور زیاتوو، نو هغهٔ ګڼونه، چې لاس ته راځی موږ ورته راشنلګڼونه وایو٠ دلته دا راشنل ګڼ د جوړې په څیر ورکړ شوی دی

cb / ca هلته باور لري، چې $c \neq 0$ دټولګڼ او$a |b$ د ماتګڼ په څیر ورکړ شوي وي

د راشنلګڼونو ډیری، چې په Q سره ښایو د ټولګڼونو ماتګڼو b/a چې $a \neq 0$ اوa او b د ټولګڼونو له ډیری وي، د ټولګڼونوپراخوالی دی او ټول د مخه تیر بنسټیز قوانین په کې باور لري او د ویش بنسټیز قانون ته داسې پراخیدلی شي

ټ : د ویش(تقسیم) بنسټیز قانون(دوام)

۲ - د دوه راشنل ګڼونوa ، $a \neq 0$ او b لپاره یواځنی راشنل ګڼ $x = b/a$ شته دی، چې برابرون یا مساوات$ax = b$ پوره کوي

راشنل ګڼونه هم د ورځنیو اړتیاو پر بنسټ منځ ته راغلی

بیلګه :

که شپږ منه غنم په دولسو تنو وویشو، نو د هر تن نیم من غن, راسیږي، چې دا نیم یې

راشنلګڼ دی، یاني $6 : 12 = 1 / 2 = 1 : 2$ یا $\frac{1}{2}$

دا باید په ګوته کړو، چې راشنل ګڼونه د پای یا ناپای لسمیز ګڼ په څیر لیکل کیدی شي

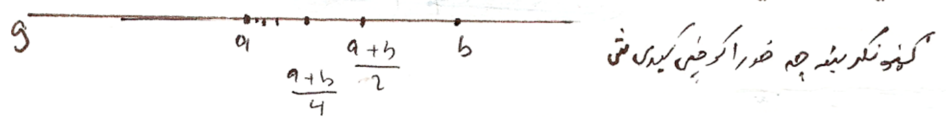
(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ ۰ ۱ ۰ ٤ - رييل ګڼونه(Real numbers (reele Zahlen

(فرانسوي: په ريښتوني شته يا موجود)

د ريشنلګڼ په بنسټ هغه ورځنی تيوريکی اړتياوي چی د شميرعمليو بی بنديزه (نامحدود) په کار اچولو يا استعمال ته موجود وي حل يا اوبی شوې او همدارنګه عملي اړتياوي چی اندازه کولو ته موجود وي هم حل شوې وي.

د ريشنلګڼ له لارې کيدی شي چی د کرښی اوږدوالی ټيك ورکړ شي يا په همدې مانا :
په هرڅومره وړوکی ګڼونکرښه انتروال کی هم ناپای زيات ګڼونه، چی په ټکو يا نقطو انځور شوي، پراته دي.



د ټولو دې امکاناتو سره سره هم بيا په يوه کرښه کی هر ټکی د ريشنلګڼ په ذريعه نه شي ښودل کيدی يا په بل عبارت د کرښی هر ټکی د ريشنلګڼ په مانا نه دی . دا ګڼونه چی د «ايريشنلګڼونو»په نامه ياديږي، کيدی شي د يوه پريوديکي(periodische) (د ګڼونو کړی نه شليږي) ناپای لسيزمات له لارې وښوول شي.
د بيلګي په توګه د مربع د نيمي (قطر) x اندازه چی د مربع يو اړخ ۱ وي نه شي کيدی چي په ريشنلګڼ وښوول شي. د پيتاګوراس د جملی په بنسټ د x لپاره لاندې مساوات لرو : $x^2 = 1^2 + 1^2$, پس $x = \sqrt{2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ریبلگڼ کلیمه یوه ژوره کلیمه ده چې د پوهیدلو لپاره یې «پولی» (لیمس lim) ته اړتیا موجود ده چې په ۱۸ –امه برخه کې به تر ښیرنی لاندې ونیول شي.

ډیر اینتروالبندیدل چې په همغه یوه ټکی راځرځي مساوي(ورته) ارزښته (Äquivalent لاتین :مساوي ارزښته) لیدل کیږي

ریبلگنډیری R چې په ریشنلگنډیري د ایریشنلگنډیري ورزیاتول دي چې له ۲ . ۱ . ۱ تر ۲ . ۱ . ۳ برخې پورې ټول بستزقوانین په کې باور لري. د ریبلگڼ له لارې دکربښی ټول ټکي په بر کې نیول کیدی شي. په دې ډول ریبلگنونه ټولی د شمیرلو او اندازه کولو اړتیاوې پوره کوي.

گورو چې $x^2 + 1 = 0$ د ریبلگڼ حل یا اوبی نه لري. دلته د دې گڼونو پراخوالي ته اړتیا پیبښیږي چې کمپلکسگڼونو ته پراخ شي، او په ۵ –امه برخه کې به تر ښیرنی لاندې ونیول شي.

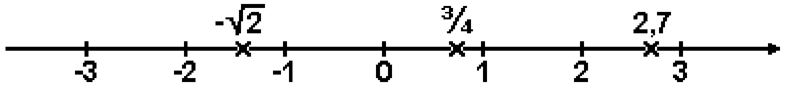
یا دا لاندې په لنډه توگه:

موړ گڼونه یا اعداد لرو، چې هغه راشنل گڼونه نه دي یانی که موړ د ۲ گڼ ریښه(جذر) ونیسو، نو داسی یو گڼ لاس ته راځي، چې هغه په لسمیزه توگه پاي ته نه شي رسیدی یانی پریودیکی (تل بیرته راگرځیدونی یا پسی نور هم پراخیدونی) دي۰ داسی گڼونو ته ایراشنل گڼونه وایو۰

تل بیرته راگرځیدنیز (periodi(cal تل بیرته راگرځیدوني ,Period د گڼونو ځنځیر نه شلیږي

ايراشنل – يا نانسبي عددونه ياګڼونهIrational numbers

د راشنل او ايراشنل ګڼونوټولنى ته رييل ګڼونه وايو(دا چې ټولنه څه شى دى، په ډيرى پوهنه يا سيټتيوري کې به ولوستل شي) .٠ موږ د ګڼونو د ښوولو لپاره لاندې ګڼونکرښه باسو په کومه کې چې له صفر سره پيداييښتي-، ټول- راشنل-،اراشنل ګڼونه کښل شوي دي يانې ريل ګڼونکرښه



٣ ٠ ٢ - رابيلشوى(له نورو -) د شمير قواعد

په دې برخه کې د رييل ګڼونو لپاره رابيل شوي قوانين څيرو، چې د مخه تيرو قواعدو باندې ولاړ دي٠ دلته درانده ټکى دا لاندې دي:

- په رييلګڼونو کى څلور بنسټيز شميرډولونه په ځانګړي توګه په لاندې ډول د نوکانو افادى (وييني) سره شميرنه (نوکان اينوول)٠ له زياتون ګډ فاکتورونه يا څلووني له نوکانو راوستل، د بينوميال فرمولونه٠

- پر صفر ويشنه د ناشونوالى په پام کى ساتنه

- له ماتو (کسرونو) سره شميرل او په ځانګړي توګه لنډول (واړه کول) پراخول يا غزول او د اصلي ګډ ماتلاندي (مخرج المشترک) جوړول٠ د داسى ماتلاندى(مخرج) چې له ټاکلو او ناټاکلو ترمونو څخه جوړ وي٠

نوموني: کسر ته مات وايو او صورت او مخرج ته موږ ماتباندې او ماتلاندې وايو، چې سملاسي يې په مانا هم پوهيږو٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ ۰ ۲ ۰ ۱ – جمعه او تفریق (زیاتون او کمون)

د زیاتون او کمون بنستیزو قوانینو څخه لاندې لاس ته راځي

$$-(-a) = a\ , \quad a - b = a + (-b),$$

$$(a+b+c\ \ldots -c - d - \ldots) + (e+f+\ldots -g-h-\ldots) = a+b+\ldots -c-d-\ldots +e+f+\ldots -g-h-\ldots$$

دا دا مانا لري، چې که چیرې د نوکانو دباندې زیاتوننخښه (د جمع علامه) وي، نو د نوکانو څخه ویستلو کې ګڼ خپله مخنخښه نه بدلوي۰ که د نوکانو د باندی کموننخښه (منفي نخښه) وي، نو د ګڼونو له نوکانو ایستلو په حال کی د نوکانو دننه نخښی بدلیږي۰ یانی کموننخښه زیاتوننخښه او زیاتوننخښه کموننخښه کیږي۰ بیلګه یې لاندې ګورو

$$(a+b+\ldots -c-d-\ldots)-(e+f+\ldots -g-h-..)= a+b+\ldots - c-d-\ldots..-e-f-\ldots\ldots +g+h+\ldots$$

په همدې ترتیب کیدی شي نوکان هم ځاي پرځای شي۰

دلته باید مطلق ارزښت هم په ګوته شي ، چې په ګڼکرښه د صفر څخه د یوه ریيلګڼ واټن په ګوته کوي،

د کوم لپاره چی لیکو :

مطلق عدد یا - ګڼ یا بې اړیکو ګڼ (absolut number)

دا په دې مانا، چې د دې ګڼ سره زیاتیزه او کمیزه نخښه یا مثبت او منفي نه لیکل کیږي یا یون(واحد) هم ورسره نه وي، دا ټیک او ټیک یو ګڼ ښایج او بس۰

$$|a| = a\ ;\ a > 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

a| = 0 ; a = 0

| a| = -a ; < 0

ياني كه a زياتيزه يا مثبت وي،نوa پخپله ليكواو كه a كميزه يا منفي وي، نوa- ليكواو كه a صفر وي نو د هغه لپاره 0 ليكو

۳ ۰ ۲ ۰ ۲ ځل(ضرب)

د ځل لپاره لاندې د مخنخښی قوانين باور لري:

(+a)(+b) = +ab, (+a)(-b) = -ab , (-a)(-b) = + ab, (-a)(+b) = -ab

كه چيرته ډير نوكبندونه راګرځيدلی وي، نو دا د ځل قانون پل په پل پر مخ ځی

بيلګه:

(a+b)(c-d)(e-f-g) = (ac – ad + bc –bd)(e-f-g)

= (ace-acf-acg-ade+adf+adg + bce-bcf-bcg-bde-) bdf+bdg

د ځانګړي حالت په توګه د بينوم پيژندل شوی فرمولونه راوړو:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګران لوستونکی کولی شي، چې پورته فرمولونه وښايي، چې تیک دي.

دا په لاندې ډول کارولکیږي :

بیلګه ۱ . ۳ :

$$4a^2 + 12ab + 9b^2 = (2a + 3b)^2 .$$

$$a^2x^2 - 2abxy + b^2y^2 = (ax - by)^2 = (by - ax)^2.$$

$$16u^2 - 2v^2 = (4u + 2\ v)(4u - 2\ v)$$

۳ ۰ ۲ ۰ ۳ ویش

په پام دې کې ولرو، چې b:a د a = 0 لپاره کوم مفهوم نه لري۰ پر صفر ویش ناشونی دی

په ویش کی نوکبندول د زیاتون، کمون او ځل په څیر ساده نه کیږي۰ په ویش کی د زیاتون په ډول لیکل شوی هر توکی په ماتلاندې ویشل کیږي:

بیلګه ۳ ۰ ٤ :

$$(3a^2b - 6ab^2 + 12\ abc) : 3ab = a - 2b + 4c$$

یا داسې

$$\frac{3a^2b}{3ab} - \frac{6ab^2}{3ab} + \frac{12abc}{3ab} = a - 2b + 4c$$

د $ab \neq 0$ لپاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

دې لاس ته راوړنې(نتیجې) ته سړی د ګډو ځلوونو یا فاکتورونو یا خپلواکنوک څخه وتلو له لارې هم رسیدلی شي:

$$3a^2b - 6ab^2 + 12\ abc = 3ab(a - 2b + 4c)$$

له دې څایه کیدی شي، چې د بولینوم وېش بیل شي

بیلګه ۳ . ۵ :

$$(3a^2b - 6ab^2 + 5c) : 3ab = a - 2b \text{ Rest } 5c \text{ باقي} \Leftrightarrow$$

$$\frac{3a^2b}{3ab} - \frac{6ab^2}{3ab} + \frac{5c}{3ab} = a - 2b + \frac{5c}{3ab} \quad \text{ لپاره } ab \neq 0,$$

د یوه زیاتو یا چمعې وېش په یوه چمعه، کیدی شي د بینوم جکلې له لارې صورت ونیسي

بیلګه ۳ . ۶ : $(a^2 + 2ab + b^2) : (a + b) = a + b \quad \frac{(a+b)^2}{a+b} = a + b$ لپاره $a \neq -b.$

بیلګه ۳ . ۷ : $(a^2 - b^2) : (a + b) = a - b \Leftrightarrow \frac{a^2 - b^2}{a+b} = a - b$ لپاره $a \neq -b.$

بیلګه ۳ . ۸ : $\frac{(ax - by)^2}{by - ax} = \frac{(by - ax)^2}{by - ax} = by - ax$ لپاره $ax \neq by,$

دلته هم وېش د پاتې یا باقي سره شونی دی.

بیلګه ۳ . ۹ : $a^2 - 2ab + b^2) : (a - b) = [(a - b)^2 + b^2] : (a - b) = a - b$:
باقي یا پاتې b^2

له دې لاس ته راځی او په څټ

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱ . ۱۰

$$\frac{(a-b)^2+b^2}{a-b}=\frac{(a-b)^2}{a-b}+\frac{b^2}{a-b}=a-b+\frac{b^2}{a-b}$$ باقي b^2 ، $a \neq b$,

C: $(16u^2 - v^2) : (4u + \sqrt{2}\, v) = 4u - \sqrt{2}\, v$ Rest v^2 باقي $\Leftrightarrow$

$$\frac{16u^2-v^2}{4u+\sqrt{2}\,v}=\frac{16u^2-2v^2+v^2}{4u+\sqrt{2}\,v}=\frac{16u^2-2v^2}{4u+\sqrt{2}\,v}+\frac{v^2}{4u+\sqrt{2}\,v}$$

$$=4u-\sqrt{2}\,v+\frac{v^2}{4u+\sqrt{2}\,v}$$

د $4u \neq -\sqrt{2}\, v$ لپاره

فورمال ور د دوه پولینومونو ویش دی (برخه ۱۲ دي انډول(پرتله) شي):

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x^1+a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x^1+b_0} = P_n(x) : Q_m(x),$$

که د ماتباندي پولینوم درجه د ماتلاندي پولینوم درجې لوي یا مساوي وي($n \geq m$).

مونږ نیسوچې: $Q_m(x) \neq 0$ او $a_n \neq 0,\ b_m \neq 0$.

د دواړو ویشو« ټوټه ویشو» (پارځیالویش(Partialdivision)) دا دې چې دا

د $P_n(x) : Q_n(x)$ ویش په لاندې ډول ولیکلی شو:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \text{Polynom } 1 + \frac{\text{Polynom } 2}{Q_m(x)} \ ,$$

چیرته چې د پولینوم 2 درجه له $Q_m(x)$ درجې څخه کوچنی ده.

دې هدف ته په لاندې ډول رسیږو

۱ – سرې یواځې د جګ نظم غړي $a_n x^n : b_m x^m$ ویشي او له دې سره یوه

غلطي $F(x)$ کوي:

$$Q_{n(x)}:\ Q_m(x) = \frac{a_n}{b_m}x^{n-m} + F(x) \qquad *$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ – سړی (*) په ماتلاندې پولینوم $Q_m(x)$ ویشي

$$P_n(x) = (a_n / b_m)\, x^{n-m} Q_m(x) + F(x)$$

او له دې غلطی $F(x)$ ، په لاندې فورم یا ډول لاس ته راخي

$$F(x) = P_r(x) / Q_m(x)$$

د $P_r(x) = P_n(x) - (a_n / b_m)\, x^{n-m}\, Q_m(x)$ سره

چیرته چی د پولینوم $P_r(x) = c_r x^r + c_{r-1}x^{r-1} + .. + c_0$ درجه r د پیل

پولینوم $P_n(x)$ له درجی n څخه کم له کمه په یوکوچنی وي . د ګنونو شمیر په

تکیه ویلی شو، چی $P_r(x)$ پاتی پولینوم یا په ساده ډول پاتی (باقي) دی.

۳ – که لا تراوسه د $Q_m(x)$ درجه r له m کوچني وي نو د ټکو ۱ – او ۲ – توپته ویش په $P_r(x) : Q_m(x)$ استعمالیږي، د لاندنی نتیجی سره

$$P_r(x) : Q_m(x) = (c_r / b_m)\, x^{r-m} + P_t(x)/Q_r(x)$$

چیرته چي د $P_t(x)$ درجه t کم له کمه په یو له $P_r(x)$ درجي کوچنی وي.

د توپته ویش دا عملیه اخر ته رسیږي، که (د پای ډیرو پلونو (قدمونو) اخستلو وروسته د ماتباندې غلطی پولینوم درجه له m څخه کوچنی وي.

بیلګه ۲ . ۱۱ . لمړی دې د توپته ویش ۱ او۲ پلونه (قدمونه، کدمونه) په پراخ ډول د لاندې ویش په بیلګه توضیح شي

$$P_n(x) : Q_m(x) = P_3(X):Q_1(x) = (6x^3+5x^2-3x+1):(3x-2)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

	$P_3(x) \quad : Q_1(x) = (a_3 / b_1)x^2 + F(x)$
$(a_3 / b_1)x^2Q_1(x) = 2x^2(3x-2) =$	$(6x^3 + 5x^2-3x+1) : (3x-2) = 2x^2 \quad +F(x)$ $6x^3 - 4x^2$
$P_2(x) = P_3(x) - (a_3 / b_1)x^2Q(x) =$	$9x^2 - 3x + 1$
$F(x) = P_2(x) : Q_1(x) =$	$(9x^2 - 3x + 1) : (3x - 2)$

بیلگه ۱۲ . ۱۲ : د تیري ویش بیلگه ۱ . ۱۱د F (x) غلطی ته دوام ورکوو، ترڅو چې د لیکنی شکل لنډ شي:

$$F(x) = P_2(x):Q_1(x) = (9x^2-3x+1):(3x-2) = 3x+G(x)$$

$$3x.Q_1(x) \quad = \quad (9x^2-6x)$$

یاباقي $\quad$ پاتي $\quad = \quad 3x+1$

$$G(x)= (3x+1):(3x-2)$$

له دې لاندې نتجه لاس ته راځي :

$$(6x^3+5x^2-3x+1):(3x-2)=2x^2+3x + G(x)$$

$$G(x) \quad = (3x+1):(ex-2) = \quad 11 +H(x)$$

$$Q_1(x) = 3x-2$$

پاتی $=$ $\quad$ یاباقي $= \quad 3$

$$H(x) = \quad 3 : (3x-2)$$

پس باور لري

$$(6x^3+5x^2 - 3x+1) : (3x-2) = 2x^2+ 3x+1 + 3/(3x-2)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تول توته ویش کیدی شي په لاندي ډول مخ ته يووړ شي .

(1) (4) (7) (۱۰)

$(6x^3+5x^2-3x+1) : (3x-2) = 2x^2 + 3x + 1 + 3/(3x-2)$

(2) $6x^3-4x^2$

(3) $-9x^2-3x+1$

(5) $9x^2-6x$

(6) $3x+1$

(8) $3x-2$

(9) 3

دلته (i) د پرلپسی پل اخستلو په مانا ده.

جمله ۳ . ۱۳

(1) (4) (7) (10)

$(18x^4 + 15x^3 + 0x^2 - 2x + 1) : (3x^2 + x - 1) = 6x^2 + 3x + 1 + \frac{2}{3x^2 + x - 1}$

(2) $18x^4 + 6x^3 - 6x^2$

(3) $9x^3 + 6x^2 - 2x + 1$

(5) $9x^3 + 3x^2 - 3x$

(6) $3x^2 + x + 1$

(8) $3x^2 + x - 1$

(9) 2

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ ۰ ۲ ۰ ٤ ماتشمیرنه (کسرشمیرنه)

د مات m/n کلمه د لومړي ځل لپاره د تولګڼونو m,n څخه د ریشنلګڼونو انځورونو لپاره تعریف شوې۰ کیدی شي، چې دا کلمه a/b ته، چې a او b ریبل ګڼونه دي، وغزول شي۰

باید په پام ې ور،چې ماتباندې صفر نه شي..

د بیلګي په توګه:

ویش a/(b-c) تیک هلته مفهوم لري، چې $b \neq c$ وي۰ ماتګڼ a/b همدا ګڼ ښایي

لکه a : b او یا $\frac{a}{b}$ ، دلته هم باید b |=0 وي.

په اخر کې باید په ګوته شي، چې مات لاندی – او همدارنګه ماتباندې ګڼ هم هر ماتګڼ کیدی شي او هم دواړه۰ دا باید دلته هم په پام کې وي، چې هیڅ یو ماتلاندې ګڼ باید صفر نه وي یانی دلته بی له اولنی ماتباندې نور یو ګڼ هم، چې ماتلاندې پورې اړه لري، نه شي صفر کیدی دا موږ د ماتو مات (کسرالکسر) بولو۰

بیلګې:

a : (b/c) = a / (b/c) , b |=0 , c|= 0 ,

(a/b) : c = (a/b) / c b|=0, c|= 0

(a/b): (c/d) = (a/b) / (c/d), b |= 0 , c |= 0 , d |=0

یا په لاندې ډول:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{a}{b}:\frac{\frac{a}{b}}{c}, b\neq 0, c\neq 0, ..., \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}, b\neq 0, c\neq 0, d\neq 0$$

په ځو واره ماتګې کې باید اصلي ماتکرښه څرګنده پیژندونکي وي، چې په دې توګه د هر ډول ناټیکوالی مخه نیول شوي وي. په ټولیزه توګه باور لري

$$\frac{\frac{a}{b}}{c}\neq\frac{\grave{a}}{\frac{b}{c}}$$

هریو ماتګې b|=0, a / b په یوه ګڼ c |= 0 پراخیدی او همداسې لنډیدی شي

یانې ماتلاندې او ماتباندې په یوه ګڼ c ځلیدی یا ویشل کیدی شي او دا کړنلار په اصلي

ګڼ کې تغیر نه راولي

$$\frac{a}{b}=\frac{a.c}{b.c}=\frac{a:c}{b:c}, b\neq 0, c\neq 0$$

د ماتګې لنډوالی ددې لپاره ښه دی، چې ماتګې ساده کړي.

د بیلګې په توګه:

$$\frac{8}{12}=\frac{2}{3}, \frac{ax-ab}{y-ac}=\frac{x-b}{y-c}; a\neq 0, y\neq c$$

باید تل په پام کې ولرو، چې یواځنی فکتور یا ځلوونی یا ضریب لنډیدی شي او نه زیاتوونی د بیلګي په توګه لاندې ماتګې

(c) ketabton.com: The Digital Library

(a+c):b+c) چې b ≠ - c وي نه شي لنډیدی دا (a+c) : (b+c) = a:b

باور لري،چې b |= 0, c = 0 \/ -c |= a, a = b

پراخوالی یا غزول د دې لپاره اړیین دی، چې ډیر ماتګنونه په ګډ ماتباندې (مخرج المشترک) راوستلی شي، ځکه چې یواځې هغهٔ مات یو په بل زیاتیدی یا یو له بل کمیدی شي، چې ګډ ماتلاندې ولري.

لکه : $\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}, c \neq 0$

که چیرې پرځښ یا برعکس ماتګنونهa / b او c/d د نابرابر ماتلاندې لرونکی سره زیاتوو او یا کموو ، نو دا په ګډ ماتلاندې باید راولو۰ ګډ ماتلاندې د ټولو ماتلاندو ځخه دی۰ د بیلګي په توګه لاندې باور ي دی:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} = \frac{adf + bcf + bde}{bdf}, b \neq 0, d \neq 0, f \neq 0 \Leftrightarrow bdf \neq 0$$

او دا لاندې

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{cb}{bd} = \frac{ad \pm cb}{bd}, b \neq 0, d \neq 0 \Leftrightarrow bd \neq 0$$

تل باید ماتګنونو ګڼلو کې ماتلاندې سره ځل نه شي، چې ګډ ماتلاندې لاس ته راولو، دا د ښوونځي په ځرګنده بیلګه باندې ښایو

بیلګه: $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{15} - \frac{1}{36}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کیدی شي، چې اصلي ماتلاندې)ا۰م۰ل (وټاکل شي

ا ۰ م ۰ ل ۰ 97200= 2.3.5.6.15.36 =

کیدی شي، چې ا۰م۰ل۰ د لومړنیو ګڼونو څل په ځیر هم ولیکو:

2 = 2

3= 3

5 = 5

6 = 2. 3

15= 3 .5

3٠. 3.٠2٠36 = 2

$2^2.3^2.5 = 4.9.5 = 180$

پس د ګډ ماتلاندې لپاره د لوړګڼ یا لوړ جګګڼ یا لوړ طاقت لومړي څلووني رانیول کیږي۰ چې ګڼل خورا ساده کوي۰

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{15}-\frac{1}{36}=$$

$$\frac{90-60+36-30+12-5}{180}=\frac{43}{180}$$

دا چې دا تګلار څنګه د ماتو په ټولیزه افاده استعمالیدی شي لاندې بیلګه یې ښایي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۳ ۰ ۱۵ په لاندې بیلګه کې

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}-\frac{1}{a^2b}+\frac{1}{ab^2}$$

چې یواځې د لاندې لپاره موخه ور دی $a \neq 0 \wedge b \neq 0$

د اصلي ماتلاندې لپاره یانې

$$a.b(ab)(a^2b).(ab^2) = a^2.b^2$$

نه ټاکي، نو له دې امله دی

$$a = a$$

$$b = b$$

$$ab = a \quad b$$

$$a^2 . b = a^2 \quad b$$

$$ab^2 = a \quad b^2$$

دا ۱۰م۰ل۰ په لاندې توګه دی $= a^2 \quad b^2$

له دې امله لرو:

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}-\frac{1}{a^2b}+\frac{1}{ab^2}=\frac{ab^2-a^2bab-b+a}{a^2b^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه ۳ ۰ ۱٦ : د وييني يا افادي

$$\frac{2}{a-2}+\frac{2}{a-1}-\frac{1}{a+1}-\frac{a+3}{a^2-1}-\frac{a+6}{a^2-4}, a\neq 0, a\neq \pm 2$$

لپاره ټاکو

a-2 = (a-2)

a – 1 = (a-1)

a+1 = (a+1)

a + 2 = (a+2)

a^2 - 1 = (a-1)(a+1)

a^2-4 = (a-2) (a+2)

$(a-2)(a-1)(a+1)(a+2) = (a^2-1)(a^2-4)$

دا پورته لاس ته راوړنه ا۰م۰ل۰- چۀ دا په همدې وخت کې غ ک پ هم دی- په ګوته کوي او له پورته څخه د مخه ورکړشوې افادې لپاره لاس ته راځي:

$$\frac{2(a^2-1)(a+2)+2(a^2-4)-(a-1)(a^2-4)-(a-2)(a^2-1)}{(a^2-1)(a^2-4)}$$

$$=\frac{(a+3)(a^2-4)+(a+6)(a^2-1)}{(a^2-1)(a^2-4)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې مات ماتباندې صفر دی‌په دې ډول په پورته پیل کې ورکړ شوې افاده یا وینه د صفر پیچلې لیکلو بیلګه ده او بس۰

د ځل او ویش لپاره لاندې قاعدې باور دي:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}, b\neq \wedge d\neq \Leftrightarrow bd\neq 0$$

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}; b\neq 0, c\neq 0, d\neq 0 \Leftrightarrow bcd\neq 0$$

بیلګه ۳ ۰ ۱۷ الف)

$$1-\frac{1}{1-a\frac{1}{1-\frac{b}{a}}}=1-\frac{1}{1-\frac{a}{\frac{a-b}{a}}}=1-\frac{1}{1-\frac{a^2}{a-b}}=1-\frac{1}{\frac{a-b-a^2}{a-b}}$$

$$=1-\frac{a-b}{a-b-a^2}=\frac{a-b-a^2-a+b}{a-b-a^2}=\frac{-a^2}{a-b-a^2}=\frac{a^2}{a^2-a+b}$$

د $a\neq 0, a\neq b, a^2-a+b\neq 0$

لپاره۰ دا په دې مانا، چې

$$a\neq\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{1-4b})$$

بیلګه ۳۰ء ۱۷ ب:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}}{\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}}=\frac{\frac{a(a+b)-b(a-b)}{(a-b)(a+b)}}{\frac{a(a-b)+b(a+b)}{(a+b)(a-b)}}=\frac{a(a+b)-b(a-b)}{(a^2-b^2)}\cdot\frac{(a^2-b^2}{a(a-b)+b(a+b)}$$

$$=\frac{a^2+ab-ab+b^2}{a^2-ab+ab+b^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}=1, \forall\ |a| \neq |b|$$

یادونه: په پورته لیکنه کې د ګڼونو موضوع لږ وغزول شوه، خو لږ څه نور هم باید راغلي وی. دلته اړیین د ګڼونو شمیرقوانین دي او د ګڼونو پیژندل. د ګڼونو اړیکې د خوندیونې له لارې

$N \subset Z \subset Q \subset R$

او په دې کنونو کې باوري د شمیر قوانین، چې هغه زیاتون ، کمون ، ځل ، ویش دئ او د ویش په بنسټ ماتشمیرنه. دا باید په همغه ساده ډول زده کړای شي.

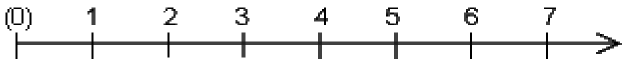
موږ هغه د لومړي وار لپاره اړیین د ګڼونو شمیرنقوانین په لاندې توګه راالنډوو، چې د لومړي وار لپاره په همدې پوهیدنه بسیا کوي.

ګڼونډیرئ (لنډه ټولګه)

پیداینتي – یا طبیعي ګڼونډیرئ

N = {1, 2, 3, 4, 5, ... }.)

په وړانګه د پیداینتي ګڼونو انځورونه

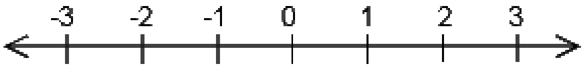


(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټولګنونو ډیری

$Z = \{ \dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$

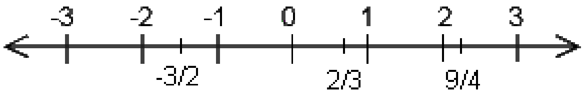
د ټولګنونو ډیرۍ انځورونه په یوه کرښه



د راشنلګڼونو ډیرۍ

$$Q = \{ \frac{p}{q} \mid p, q \mid Z \wedge q \neq 0 \}$$

په ګڼونکرښه راشنلګڼونه د ټولګڼونو تر منځ پراته دي



هر راشنل ګڼ د لسمیز یا پریودیکی ګڼ په څیر لیکل کیدی شي

د ماتو سره شمیرنه

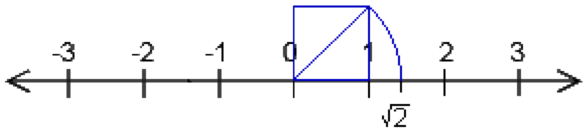
د دوه راشنلګڼونو ترمنځ تل ناپاي زیات نور راشنلګڼونه شته ، دا ګڼ پارته دي، مګر بیا یي هم ترمنځ نور ګڼونه یا ځایونه هم شته، چې ګڼونه په کې ځاي دی او دې ګڼونو ته مو ایراشنل ګڼونه وویل ۰ لکه چې یو راشنلګڼ نه دئ

راشنل او ایراشنلګڼونه رییل ګڼونه جوړوي

د رییل ګڼونوډیرۍ یا حقیقي اعدادو سټ

(c) ketabton.com: The Digital Library

د رییلګڼونو ډیرۍ د ګڼونکرښی ټولو ټکو څخه جوړه ده، لاندې ګڼونکرښه کې روښانه ده



په رییلګڼونوکې بی له بندیزونو شمیرل کړی شو، خو په ماتلاندې کې باید صفر نه وي او دا د هر ډول ګڼونولپاره باور لري

شمیرډولونه لومړی پوړی

Addition:زیاتون یا جمعه

زیاتوونی +زیاتونی = زیاتون

د زیاتون کموتاتیو قانون $a + b = b + a$

د زیاتون اسوځیاتیو قانون $(a + b) + c = a + (b + c)$

و زیاتون ته د یوه بی اغیزه یا ناپیلی توکی شتون $a + 0 = a$

مخامخ – یا په څټ ګن یا برعکس عدد $a + (-a) = 0$

Subtraktion:کمون

د زیاتون په څټ کارونه یا عملیه ، ترې کمه وونی – کمه ونی = کمون

$$a + x = b \Leftrightarrow x = b - a$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه: $7 + x = 10 \Leftrightarrow x = 10 - 7 = 3$

شمیرډولونه:

دویمه پوړۍ

ضرب یا ځل: فاکتور (ځله وونی ضریب) ۰ فاکتور(ځله وونی) ځل
د زیاتون تکرار، بیلګه. $4 + 4 + 4 = 3 \cdot 4 = 12$

د ضرب یا ځل کموتایتو قانون $a.b = b.a$

د ضرب یا ځل اسوځیاتیو قانون$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

دستریبوتیو قانون $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

و ضرب ته د یوه ناپیلي توکي شتون(بي اغیزه توکی یې که وبولو هم بده به نه وي)

$a \cdot 1 = a$

په څټ ارزښت یا برعکس قیمت$a \cdot (1/a) = 1$

یو ضرب ټیک هلته صفر دئ، چې د صرب یو ضریب صفر وي $a \cdot 0 = 0$

ویش:
ویشونی : پرویشونی = ویش (لوستل یې له ښي وکیڼ لورته)

ویش د ضرب یا ځل په څټ کارونه ده) $a : b = c$

$a \cdot x = b \Leftrightarrow x = b : a$

د بېلګې په توګه z.B.: $4 \cdot x = 12 \Leftrightarrow x = 12:4 = 3$

په صفر ویش پیژند نه لري یا تعریف نه لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۳ تمرينونه

۱ – د اعدادو يا ګڼونو ډولونه او د د اعدادو انځورونه

۱ ، ۱ – په کوم د اعدادو ډېرئ يا سټ کې د عدد a او عدد bلپاره د شميرلو څلور قاعدې يا لارې باور لري؟

يادونه: دلته دې ترې کمونی يا مفروق منه او وېشونش يا مقسوم تل a وي همداسې دې کمونی يا مفروق او پروېشونی يا مقسوم عليه تل b وي.

a) $a = 8, \quad b = 2$
b) $a = 5, \quad b = 8$
c) $a = 7, \quad b = 0$
d) $a = -6, \quad b = 1$

۱ . ۲ عددونه او يو له بل سره پرتله کړئ او ورکړئ، چې له دې دواړو کوم لو دی!

a) $a = \frac{13}{17}, b = \frac{169}{289}$
b) $a = \frac{11}{21}, b = \frac{121}{231}$
c) $a = \frac{888}{901}, b = \frac{896}{911}$
d) $a = -\frac{13}{12}, b = -\frac{143}{130}$

۱ . ۳ – د اعدادو يا ګڼونو او څخه تفرسق، ضر ب او وېش جوړ کړئ! ورکړئ، چې دا نتيجې د اعدادو کومو ډولونو پورې اړه لري!

د پوښتنې ۱ ، ۱ يادونه دلته هم باور لري.

a) $a = \pi, \quad b = 5$
b) $a = \sqrt{2}, b = \sqrt{2}$
c) $a = \frac{2}{3}, \quad b = \frac{3}{2}$
d) $a = 0, \quad b = 1$

۱ . ۴- په دوه ييز سيستم کې لاندې ګڼونه يا اعداد انځور کړئ!

a) 28 b) 47 c) 73 d) 112

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ . ۵ – لاندې ريښتوني يا راشنل اعداد د کوټيو کې اچوني يا کوټۍ ونې له لارې په نږدې ۵ ځايونږ تيک پيدا کړئ.

a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt{18}$ c) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

۲ . د زياتيزو او څليزو (د جمعې او ضرب) نوکانو وازول

۲ . ۱ – لاندې نوکان واز کړئ

a) $7a - 3b + (-a + 2c) - (3c - 6b) - (6a - 3c)$
b) $5a + [7c - (2a - 3b)] - (4c - a + b)$
c) $7a - [3a - (7 + 5b)] + [a - (4 - 6b)] - (2a + 7b)$
d) $8a - \{a + [(3a - 2b) - (5a + 3b)] - [(-a + 6b)]\}$

2.2. a) $(-a)(b - a - c)$
b) $2a[a - (b - 3a)]$
c) $3(a + b + c) - 5(a + b) - c - 2(b - c - a)$
d) $|a| \cdot (b - 2a) - b \cdot (a + 2b)$

2.3. a) $(2a - b)(9a + 4b)$ b) $(9a - 2b)(7a - 3b)$
c) $(a + b - c)(a - b - c)$ d) $(3a + 2b)(4a - 3b)(5a - 7b)$

2.4. a) $(7a - 5b)(3a + 4b) - (5a - 9b)(4a - b)$
b) $(a + 4)(a - 2) - (a + 2)(a - 1)$
c) $(a + b)(c - d) - (a - b)(c + d)$
d) $(1 - a)(a - 1) - 2(a + 1)(a - 2)$

۳ – د بينوم فرولونه

۳ . ۱ – د بينوم فرمولونه وکاروئ يا استعمال کړئ او د شونتيا سره سم يې ساده کړئ

a) $(-a + 3b)^2$ c) $(-a - b)(a - b)$
b) $(-1 + a)(a + 1)$ d) $(-1 + a)^2 - (1 - a)^2$

3.2. a) $(4a^2 - 3)(4a^2 + 3) - (3a - 4)^2 + (5a + 1)^2$
b) $(a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

c) $(3a + 2b - 5c)^2$
d) $(a + b - c - d)^2$

3.3. a) $49a^2 + 42a + 9$
b) $25a^2 + 40ab + 16b^2$
c) $169a^2 - 130ab + 25b^2$
d) $9a^4b^2 + 12a^2b + 4$

3.4. a) $(8a - b)^2 - 16a^2$
b) $81a^2 - 16(4a - 3b)^2$
c) $4a + 12\sqrt{ab} + 9b$
d) $(\sqrt{ab} - 1)(-1 - \sqrt{ab})$

3.5. a) $(a + b + 1)(a + b - 1)$
b) $(a + b)^2 + 2a + 2b + 1$
c) $a^2 - 2ab + b^2 - 2a + 2b + 1$
d) $a^2 + 2ab + b^2 - 4(a + b) + 4$

۳ . ۶ لاندې وېينې يا افادې ساده کړئ، داسې چې د مربع تکميلونې له لارې پوره مربع وې جوړې کړئ!

a) $4a^2 - 12a + 9b^2 - 24b = 0$
b) $16a^2 + 25b^2 - 128a + 50b = 0$
c) $3a^2 - 2b^2 - 2\sqrt{6}\,a + 2\sqrt{6}\,b = 0$
d) $4x^2 + 12xy - 9a^2 + 12ab = 0$

۴ . د مناسبو ضريبونو له نوکانو راوسته له ۴ .
۱ تر ۴ . ۴ پورې پوښتنو کې ورکړ شوې وېينې يا افادې په ضريبونو توټه کړئ او تر شوونتيا پورې يې ساده کړئ.

4.1. a) $a + a^2$
b) $-a^2 - a$
c) $8ab + 20b^2$
d) $ab + ac - ad$

4.2. a) $a^2b^2 + ab + ab + 1$
b) $ab - ac - b + c$
c) $3a + 3 - 2a - 2 + 4b(a + 1)$
d) $8(7a - 5b) - 5c(7a - 5b)$

4.3. a) $3ac - 3bc - 2ad + 2bd + 4ac - 4bc - 7ad + 7bd$
b) $a^2b + ac - ab - c$
c) $15ab - 5a - 1 + 3b$
d) $4a^2 + 20ab + 25b^2 - a^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

4.4. a) $(a^3 - a^2)(2a - 2a^2)$ c) $(-5a - 10b)(-3a + 6b)$
b) $(-5a - 3b)^2 + (-5a + 3b)^2$ d) $(-a - 1)(a - 1) - (a^2 - 1)$

۴ . ۵ – هر ځل د n لوی توان (n=1,2,3,…) له نوکانو راوباسئ!

a) $n^2 + n + 1$ c) $(1 - 2n)^3$
b) $3n^2 - n + 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$ d) $(\frac{1}{4}n^2 + 3n - 1)^2$

۵ – د په نوکانو کې افادو وېش

لاندې وېش سره ته ورسوئ.

دا چې وېش په صفر ناشونی دی، په دې او لاندې ټولو تمرینونو کې دا ا رزښتونه له شمیره وباسئ، کوم چې ... a,b, یې نه شي نیولی یا اخستلای.

5.1. a) $(10a^2 - 2ab + 16ac) : 2a$ c) $(28a^3 - 20a^2 + 32a) : (-4a)$
b) $(25ab - 40b^2) : (-5b)$ d) $(27a^2b - 63ab^2) : (-9ab)$

5.2. a) $(3a^2 + 5ab + 2b^2) : (a + b)$ c) $(3a^2 + 2a - 5) : (3a + 5)$
b) $(a^2 - 2ab - 3b^2) : (a - 3b)$ d) $(4a^2 - 7ab + 3b^2) : (4a - 3b)$

5.3. a) $(35a^2 + 24ab - 15ac + 4b^2 - 6bc) : (5a + 2b)$
b) $(15a^3 + 67ab^2 - 52a^2b - 28b^3) : (5a - 4b)$
c) $(21ax - 15bx + 9cx - 35ay + 25by - 15cy) : (7a - 5b + 3c)$
d) $(12a^2 + ab - 17ac - 20b^2 + 29bc - 5c^2) : (3a + 4b - 5c)$

5.4. a) $(a^3 + b^3) : (b + a)$
b) $(1536b^3 + 375a^3) : (25a^2 + 64b^2 - 40ab)$
c) $(144a^4 - 81b^2) : (27b + 36a^2)$
d) $(a^3 - b^3) : (a - b)$

5.5. a) $(9a^3 - 7ab^2 + 2b^3) : (3a + 2b)$
b) $(a^2 - 10a - 25) : (a - 5)$
c) $(a^3 - 2ab + b^3) : (a + b)$
d) $(24a^4 - 26a^3 - 76a^2 + 32a) : (4a^2 - 7a - 8)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

5.6. a) $(x^4 - x^3 - 5x^2 - 40x + 7) : (x^2 + 3x + 9)$
b) $(2x^2 - x + xy - y^2 + 2y - 2) : (2x - y + 1)$
c) $(13a^2b + 4b^3 - ab^2 + 10a^3) : (2a + 3b)$
d) $(3a^3 + 2a^2 - 7a^2b + 3a - 2ab + 4ab^2 - 4b + 3) : (3a - 4b + 2)$

۶ . ماتشميرنه يا كسرشميرنه

۶ . ۱ – لاندې كسرونه صورت او م خرج يعني د ماتباندې او ماتلاندې د خورا غټ ګډ پروېشوني سره د لومړنيو ضريبونو يا ځلوونو له لارې لنډ كړئ

a) $\frac{6\,732}{20\,196}$

b) $\frac{2\,730}{5\,005}$

c) $\frac{20\,520}{2\,280}$

d) $\frac{69\,069}{138\,138}$

۶ . ۲ – د لاندې اعداد خورا كوچنى ګډ زاتځلى (ذ الاضعافالاقل) پيدا كړئ

په لاندې كې und د او په معنا دى

a) 3, 6, 9, 18, 27, 54 und 81
b) 8, 12, 21, 42, 56 und 84
c) 5, 13, 16, 20, 26 und 42
d) 120, 252, 264, 315 und 616

۶ . ۳ . د برابر نوميزو يا برابرمخرج كسرونو شميرنه

6.3.1. a) $\frac{1}{3}+3\frac{1}{3}+3\cdot\frac{1}{3}-4\frac{2}{3}$
b) $\frac{3}{7}-\frac{1-6}{7}+2\frac{1}{7}-7\frac{2}{7}$
c) $10\frac{1}{5}-\frac{4-5}{5}-5\cdot\frac{1}{5}+\frac{10-1}{5}$
d) $2\frac{2}{26}+\frac{5-3}{13}+3\frac{33}{39}-0\cdot\frac{25}{65}$

6.3.2. a) $\frac{a+1}{a}-\frac{a-1}{a}-\frac{1-a}{a}$

c) $\frac{(a-b)^2}{ab}-\frac{1-2ab}{ab}-\frac{a^2+b^2}{ab}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

b) $\frac{a+1}{b}-\frac{a-b}{b}-\frac{b-a}{b}$ d) $\frac{(a-b)^3}{2ab}-\frac{(a+b)^3}{2ab}$

۶ . ۴ – د نا برابرنومیزو کسرونو جمعه او تفریق، په مخرج یا ماتلاندې کې ضریبونه

6.4.1. a) $5\frac{7}{12}+1\frac{41}{72}+2\frac{17}{24}+9\frac{5}{9}$ c) $\frac{5}{18}+\frac{5}{6}-\frac{1}{3}+\frac{14}{27}+\frac{71}{81}$

b) $36\frac{14}{39}+19\frac{4}{13}+15\frac{5}{6}-2\frac{19}{72}$ d) $\frac{15}{64}-\frac{77}{96}+\frac{1}{243}-\frac{3-8}{24}+3\frac{1}{1296}$

6.4.2. a) $\frac{b+5c-a}{6}-\frac{3a-7b+6c}{4}+\frac{4a-5b+7c}{3}$

b) $\frac{a-9}{18}+\frac{a-2}{6}+\frac{5(2a-1)}{12}-\frac{3(a-1)}{8}-\frac{2(3a-4)}{9}$

c) $\frac{16b+3a}{48}+\frac{7a-8b+9c}{24}-\frac{9a+8b+12c}{32}$

d) $\frac{4c-3a}{12ac}+\frac{5b-2c}{10bc}-\frac{b^2-c}{4b^2c}+\frac{4b^2-5a}{20ab^2}+\frac{2}{3a}+\frac{a-b}{5ab}$

6.4.3. a) $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}-\frac{a^2+b^2}{2b}-1$

b) $\frac{5a-6b}{30c^2}-\frac{b(5c^2-3a)}{15ac^2}-\frac{a}{4b}+\frac{a(3c^2-2b)}{12bc^2}+\frac{b}{3a}$

c) $\frac{3a^2+8b^2}{6ab}-\frac{a(4b-5c)}{10bc}+\frac{4a-5b}{10c}+\frac{b(3a-2c)}{6ac}$

d) $\frac{4c-3a}{12ac}+\frac{5b-2c}{10bc}-\frac{b^2-c}{4b^2c}+\frac{4b^2-5a}{20ab^2}+\frac{2}{3a}+\frac{a-b}{5ab}$

۶ . ۵ - د نابرابر نومیزو ماتونو(کسرونو) جمعه او تفریق(زیاتون او کمون)، جمعه مخرج یا ماتلاندې کې.

۶ . ۵ . ۱: د a لپاره یو په بل پسې ورکړشوي ارزښت ځای په ځای کړی‌او دا داسې لاس ته راغلي ماتونه(کسرونه) سره یوځای کړی! بیا په ټولیزه توګه د ورکړ شوو کسرونو لاس ته راوړنې ورکړئ او هغه ارزښتونه لرې کړي، چې د a د اخستلو یا نیولو اجازه نه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}$	د $a=1,2,3$ سره
b) $\frac{1}{a-2}-\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a+2}$	د $a=3,4,5$ سره
c) $\frac{a}{a-1}+\frac{a}{a+1}-2$	د $a=2,3,4$ سره
d) $\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a-1}+\frac{1}{(a+1)^2}-\frac{1}{(a-1)^2}$	د $a=2,3,4$ سره

6.5.2. a) $\frac{3a-1}{4a-1}-\frac{3}{4}$

b) $\frac{a-2}{a-3}-\frac{a-1}{a-2}$

c) $\frac{1}{a+1}+\frac{4}{3a+2}-\frac{3}{a+1}$

d) $\frac{10}{2a-2}-\frac{6a}{3a^2-6a}-\frac{9b}{3ab-9b}$

6.5.3. a) $\frac{3ax-3by}{6x^2y-6xy^2}-\frac{5a^2x+5aby}{10ax^2y+10axy^2}$

b) $\frac{6ab+9b}{6ab-6b}-\frac{6ab-4b}{6ab+6b}-\frac{10b^2}{12a^2b^2-12b^2}$

c) $\frac{1}{a^2-b^2}-\frac{2b^2}{2a^4-2a^2b^2}-\frac{b^2}{a^2b^2}+\frac{1}{a^2+b^2+2ab}$

d) $\frac{24a^2b-72ab^2}{60a^2b+24ab^2}-\frac{49a^2b-28ab^2}{35a^2b+14ab^2}-\frac{20a-10b}{10a-5b}$

6.5.4. a) $\frac{3a+b}{2a^2+2ab}-\frac{a^2+b^2}{2a^2b+2ab^2}+\frac{2a-5b}{4ab+4b^2}$

b) $\frac{a+2b}{3a^2-3ab}-\frac{1}{2b}-\frac{3b-a}{2ab-2b^2}$

c) $\frac{2a-5}{a+3}-\frac{3a-4}{a+2}+\frac{a^2+6a+10}{a^2+5a+6}$

d) $\frac{5a-2b}{3a+b}-\frac{88a^2+28ab+0,25b^2}{48a^2+7ab-3b^2}+\frac{24a+b}{16a-3b}$

6.5.5. a) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-\frac{b^2}{a^2+ab}-\frac{a^2}{ab+b^2}$

b) $\frac{6a-5b}{8a^2+24ab+18b^2}-\frac{2a-b}{36a^2-81b^2}+\frac{3}{12a-18b}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

c) $\frac{2a+3b}{2ab+b^2}-\frac{4a^2+b^2}{4a^2b+2ab^2}-\frac{5a-b}{4a^2+2ab}$

d) $\frac{9a-b}{6a^2-2ab}-\frac{6a+b}{3ab-b^2}+\frac{1}{2b}$

۶ . ۶: د ماتونو يا كسرونو ضربونه(يا ځلونه):

6.6.1. a) $3\cdot\frac{1}{3}$ b) $b\cdot\frac{1}{a}$ c) $\frac{5}{8}\cdot\frac{8}{5}$ d) $\frac{0}{b}\cdot\frac{b}{c}$

6.6.2. a) $\left(\frac{a}{3b}+\frac{3b}{a}\right)\cdot 3ab$ c) $\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{3b}\right)\cdot(2a-3b)$

b) $\left(\frac{5a}{6bc}-\frac{6b}{7ac}+\frac{2c}{3ab}\right)\cdot 84abc$ d) $\left(\frac{2}{a}+\frac{3}{b}\right)\cdot\left(\frac{a}{2}-\frac{b}{3}\right)$

6.6.3. a) $\frac{4a^2-9b^2}{21a^2b+14a^3}\cdot\frac{7a+5ab}{6b-4a}$ b) $\frac{16a^4-a^2}{24a^3+8a^2}\cdot\frac{36a^2+24a+4}{4a+1}$

c) $\frac{a^2+1}{(a+1)^2}\cdot\frac{a^3+a^2+a+1}{(a^2+1)^2}$ d) $\frac{4ab-3a}{9ab-3b^2}\cdot\frac{18a-6b}{4a^2+10ab}\cdot\frac{8ab-6a}{4ab+10b^2}$

۶ . ۷ . د ماتونو وېش:

6.7.1. a) $\frac{2}{3}:3$ b) $a:\frac{1}{b}$ c) $\frac{a}{b}:b$ d) $\frac{0}{a}:\frac{1}{b}$

۶ . ۷ . ۲ : د لاندې وېينو يا افادو برعكس يا په څټ ارزښتونه پيدا كړئ.

a) $\frac{a}{b}$ b) $\frac{a+1}{b}$ c) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ d) $\frac{1}{a+b}$

6.7.3. a) $\left(\frac{a}{2b}-\frac{2b}{a}\right):\frac{a}{a+2b}$ c) $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right):\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)$

b) $\left(1-\frac{2}{a}+\frac{1}{a^2}\right):\frac{1-a^2}{a^2}$ d) $\left(\frac{a+b}{b}+\frac{a+b}{a}\right):\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

6.7.4. a) $\dfrac{1-\dfrac{1}{a}}{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a^2}}$

c) $\dfrac{\dfrac{a}{a-b}+\dfrac{b}{a+b}}{\dfrac{a}{a+b}-\dfrac{b}{a-b}}$

b) $\dfrac{\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+1}{\dfrac{a^2+b}{b}-\dfrac{a+b^2}{a}}$

d) $\dfrac{\dfrac{a}{1-a}+\dfrac{a+1}{a}}{\dfrac{a-1}{a}-\dfrac{a}{a+1}}$

6.7.5. a) $\dfrac{\dfrac{1}{a^3}-\dfrac{1}{b^3}}{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{b^2}}$

c) $\dfrac{\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}}{\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}}$

b) $\dfrac{\dfrac{x^2}{ab}+x\cdot\left(\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}\right)-\dfrac{1}{ab}}{\dfrac{x}{a}-\dfrac{1}{b}}$

d) $\dfrac{\dfrac{1}{16a^2}+\dfrac{1}{2ab}+\dfrac{1}{b^2}}{\dfrac{1}{8a}+\dfrac{1}{2b}}+\dfrac{\dfrac{1}{16a^2}-\dfrac{1}{2ab}+\dfrac{1}{b^2}}{\dfrac{1}{8a}-\dfrac{1}{2b}}$

6.7.6. a) $\dfrac{a+\dfrac{1}{1-ab}}{1-\dfrac{1}{1-ab}}$

c) $1-\dfrac{1}{1-a\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{b}{a}}}$

b) $\dfrac{1}{a-\dfrac{a}{1-\dfrac{a}{a-b}}}$

d) $\dfrac{\dfrac{a+\frac{1}{4}b}{a-\frac{1}{4}b}-\dfrac{a-\frac{1}{4}b}{a+\frac{1}{4}b}}{1+\dfrac{b^2}{16a^2-b^2}}$

۶ . ۸ . لاندې ماتونه یا کسرونه، که ممکن وي، ساده کړئ (که غواړئ د مخکني شکل بدلون څخه وروسته)

6.8.1. a) $\dfrac{35ac-50bc}{7a-10b}$

c) $\dfrac{34ax+51bx-119cx}{2a+3b-7c}$

b) $\dfrac{a-\sqrt{a}\cdot b}{b-\sqrt{a}}$

d) $\dfrac{a^2-ab+ac}{b-a-c}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

6.8.2. a) $\dfrac{ax+bx+ay+by}{a+b}$ c) $\dfrac{91ab+7b+39a^2+3a}{13a+1}$

b) $\dfrac{ab+\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}a-\frac{1}{4}}{a+\frac{1}{2}}$ d) $\dfrac{ax+\frac{x}{b}-\frac{a}{y}-\frac{1}{by}}{\frac{1}{b}+a}$

6.8.3. a) $\dfrac{25a^2-130ab+169b^2}{25a-65b}$ c) $\dfrac{\frac{1}{4}a^2b^2+17ab+289}{\frac{17}{2}\left(\frac{1}{17}ab+2\right)}$

b) $\dfrac{2x^2+8xy+8y^2}{(x+2y)^2}$ d) $\dfrac{25a-20\sqrt{ab}+4b}{ab(\sqrt{a}-0{,}4\sqrt{b})}$

6.8.4. a) $\dfrac{a^4-b^4}{(a+b)^2(a-b)}$ c) $\dfrac{(a^2-b^2)^2-(a^2+b^2)^2}{ab(a+b)}$

b) $\dfrac{(a+b)^4-(a-b)^4}{a^2+b^2}$ d) $\dfrac{(a^2+b^2)^2(a^2-b^2)^2+2a^4b^4}{a^4+b^4}$

6.8.5. a) $\dfrac{(\frac{1}{9}a^2+b^2+\frac{2}{3}ab)(x^3-27y^3)}{(2b+\frac{2}{3}a)(x-3y)}$ c) $\dfrac{(80-40ab+5a^2b^2)(4-ab)}{64\cdot\left(\frac{ab}{4}-1\right)^3}$

b) $\dfrac{(2x^2-20x+50)(2a-1)(a+\frac{1}{2})}{(1-2a)(2a+1)(25-x^2)}$ d) $\dfrac{(32a^3b^2x-18ax^3y^2)\cdot 3by}{(12ab^2y+9bxy^2)\cdot 2ax}$

6.8.6. a) $\dfrac{(a+b+1)(a+b-1)+(a-b)^2-2\cdot\left(b^2+\frac{1}{2}\right)}{a+1}$

b) $\dfrac{\left(4a+\frac{1}{4}b-2\sqrt{ab}\right)\cdot\left(2\sqrt{a}+\frac{1}{2}\sqrt{b}\right)}{2\sqrt{a}-\frac{1}{2}\sqrt{b}}$

c) $\dfrac{(a+1)^2-b^2}{a^2+2ab+b^2+2a+2b+1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

d) $\frac{(a-1)^2-(b-1)^2}{a^2+b^2+2ab-4(a+b-1)}$

۶ . ۹ . د (-1) سره شمیرنه

الف- ورکړشوی دې وي/ a(b-c) /c . a=-1 ځای په ځای کړئ او داسې لاس ترې راغلي کسر یا مات لپاره مختلف لیکدودونه ورکړئ.

ب – ورکړي دې (5c -3b-a)/(1-a) وي په صورت او مخرج (ماتباندې او ماتلاندې) کې (-1) له نوکانو راوباسئ او دا عدد لنډ کړئ.

پ – کسر یا مات $(b^2 - a^2) /(-a-b)$ د (-1)سره پراخ کړئ او ساده یې کړئ.

ت- ورکړی دې وي $1-\frac{25a^2-36b^2}{6b-5a}$ په مخرج یا ماتلاندې کې (-1) له نوکانو راباسئ او دا وپينه یا افاده ساده کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

٤ ۰ توان (پوتنځ) او ريښه (جذر) (Potenz , Wurzel Root)

په دې برخه کې د توان او جذر يا ريښې قوانين ترڅېړنې لاندې نيسو، دلته غوره دا ده، چې د کارونې يا استعمال چټکتيا ته پرمختګ (تکامل) ورکړو۰ دا مشوره کيږي، چې ريښه دې په پوتنځ واړول شي، چې د اکسپوننت - يا جګعدد يې نسبي يا راشنل وي۰ د دې فورمال ټيک کره د ګڼلو قوانينو په څنګ کې د باوري کيدو لپاره بايد په نيونو(فرضيو) هم ژور فکر وشي۰

د ريښې پيژند د خلاف يا پر خټ عمليو مخه بايد نيول شوي وي، چې د هغې له مخې راديکاند (ريښه ويستونی يعنی هغه ګڼ، چې ريښه يی وېستلکيږي يا نيول کيږي،د ريښی نخښې لاندی ګڼ او هم د ريښی ارزښت نامنفي اعداد (ناکميز ګڼونه) وي۰ د توان زړه پورې ريل اکسپوننت (په جګ) هلته کره دی يا باوري دی، چې د بنسټ لپاره د مثبت عددونو نيونه يا فرضيه شوي وي۰

٤ ۰ ١ توان (پوتنځPotenz) په ټولګڼيز يا تام عدد په جګ يل اکشسپوننت

(c) ketabton.com: The Digital Library

پيژند ٤ ٠ ١:

د يوه په خوښه ريل ګڼ توان لاندې موږ د a د خپل ځان سره n- م واره ځل

پو هيږو٠ د دې لپاره ليکو: $a^n = b$ دلته a بنسټ $n = 1,2,3,\ldots$

اکسپوننت(جګګړ، لنډ: جګ) او b د پوتنځ يا توان ارزښت بلل کيږي٠

د بيلګي په توګه

$$a = a\,,\ a^2 = a\,.\,a\,,\quad a^3 = a.a.a$$

(4,1) د $n = 0$ لپاره کره ټاکل کيږي $a^\circ = 1$ د $a \neq 0$ سره

د پيژند يا تعريف پر بنسټ (او د څه بنديزونو په څلورديوالی کې، چې لاندې شوي) ښوول کيدی شي، چې د خوښی يا زړه پورې رييلګڼونو $a,b \in R$ او $m,n \in N^*$ نامنفی ټولګڼونو اکسپوننت يا جګګړ لپاره لاندې باورلري

$$a^n.b^n = (a.b)^n;\ldots\ldots\ldots\ldots(4,2)$$

$$a^n : b^b = (\frac{a}{b})^n = (a/b)^n; b \neq 0;\ldots\ldots\ldots\ldots(4,3)$$

$$a^n.a^m = a^{n+m};\ldots\ldots\ldots\ldots(4,4)$$

$$a^n : a^m = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}; a \neq 0, n \geq m;\ldots\ldots\ldots\ldots(4,5)$$

$$(a^n)^m = a^{n.m};\ldots\ldots\ldots\ldots(4,6)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا پورته د توان اړيکې د تولګنيز مثبت جګړې يا اکسپوننت لپاره باور لري، کيدی شي، چی تولګنونو ته وغزول شي، که چيرې پيژند ورکړو يا تعريف کړو:

$$\frac{1}{a^n} = a^{-n}; n = 1, 2, 3, ..., ..a \neq 0, ...(4,7)$$

دا پورته د توان قوانين د تولګنيز جګ(اکسپوننت) لپاره بی بنديزونو يواځې د نه ورکيدونکو رييل بنسټونو ياني د $a \mid= 0$ او $0 \mid= b$ لپاره باور ي دي . په (4,5) کې بيا بنديز $n \geq m$ اړيين نه دی.

د توان قوانين کيدی شي په بڼه بدلونکو افادو يا وييناو وکارول- يا استعمال شي.

بيلګه 4 .1

$$[\frac{4a^{-3}b^0}{x^2y^{-1}}]^{-2} = (4abx^{-2}y]^{-2} = 4^{-2}a^6x^4y^{-2} = \frac{a^6x^4}{16y^2}, abxy \neq 0$$

بيلګه 4 . 2

$$\frac{9^4(a^2\sqrt{ab})^2}{18^2.(3ab)^3} = \frac{3^8.a^4.a.b^2}{2^2.3^4.3^3.a^3.b^3} = \frac{3a^2}{4b}, a > 0, b \neq 0$$

بيلګه 4 . 3

$$\frac{3-a}{a^{m-4}} + \frac{a^6 - a^5 + 2a^3 - 1}{a^{m+1}} - \frac{2a^2+1}{a^{m-2}} =$$

$$= \frac{a^5(3-a) + a^6 - a^5 + 2a^3 - 1 - a^3(2a^2+1)}{a^{m+1}} =$$

$$= \frac{3a^5 - a^6 - a^5 + 2a^3 - 1 - 2a^5 - a^3}{a^{m+1}} = \frac{a^3-1}{a^{m+1}}, a \neq 0, m \in Z$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوتنځ زياتون او کمون کې بايد پام وي، چې يوازې د برابر پوتنځ ګڼونه يو له بل سره زياتيدی او يو له بل کميدی شي.

بيلګه 4 . 4

$$3a^n + 2a^n = 5a^n$$

بيلګه4 . 5

$$4a^{n+1} + 2a^n + 5b^{n+1} - 3b^n - 3a^{n+1} + a^n - 4b^{n+1} + 3b^3 = a^{n+1} + 3a^n + b^{n+1}$$

دې ته بيا ګوته نيسو، چې د بنسټ - او پوتنځ مخنخښې کې دې توپير وشي. پوتنځ له مثبت - يا زياتونمخنخښې سره تل مثبت يا زياتيز پوتنځ ارزښت لري، په دې ترځ کې، چې پوتنځ د منفي - يا کميز بنسټ سره که اکسپوننت جوړه وي مثبت زياتيز او که اکسپوننت ناجوړه وي نو منفي - يا کمون ارزښت لري.

باور لري:

$$(2a)^{2n} = +a^{2n},....,(-a)^{2n} = +2a^{2n}$$
$$(+a)^{2n+1} = +a^{2n+1},...,(-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}, n \in Z, a > 0$$

٤ ٠ ٢ – ريښه او توان له ريشنل جګ عدد (اکسپوننت) سره

پيژند ٤ ٠ ٢

د يوه نامنفي ګڼ a لپاره n -مه ريښه هغه نامنفي ګڼ b دی، د کوم لپاره چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

باور لري: $b^n = a$

د دې لپاره ليکو:

$$b = \sqrt[n]{a}, n = 1, 2, 3, ...(4,8)$$
$$a \geq 0, b \geq 0..............................(4,9)$$

دلته a راديکاند Radikand ، يا ګڼ، چې رېښه (جذر) يې نيولکيږي(مورږ دا

رېښه نيووني يا رېښه ويستونى بولو) او n درېښې جګ(اکسپوننت) اوb د

رېښې ارزښت يا رېښه ارزښت بلل کيږي.

بايد پردې ټينګار وشي، چې رېښه يوازې د نامنفى راديکاند يا رېښه ويستوني (رېښه نيوني) $a \geq 0$ راوستل کيږي يا نيول کيږي او پخپله په لاندې توګه يو نامنفي - يا ناکميز ارزښت لري يانى

$$b = \sqrt[n]{a} \geq 0$$

د دې کره کوني لپاره لاندې يادونې شوي دي:

۱ – د جوړه $n = 2,4,6,...$ لپاره د $a<0$ سره رېښه b په ريېلګڼونو کې نه شته، کوم ، چې (4,8) پوره کړي

ځکه، چې د b جوړه په توان تل نامنفي يا ناکميز يانې زياتيز ګڼ دى.

۲ – د جوړه او مثبت - يا زياتيز برابرون $b^n = a$

په خته په رېښتوني دوه ريېل اوبيوني ياحلونه لري د بيلګي په توګه $b^2 = 4$

(c) ketabton.com: The Digital Library

يانې n = 2 او a = 4 اوبيونې

$$b_1 = 2, b_2 = -2$$

دي٠ د دې لپاره، چې د راديکاند د شميرلو کارونې يواځنۍ سرته ورسولی شو، بايد د يوې اوبيونې لپاره پريکړه وکړو، نو له دې امله موږ مثبت ارزښت غوره بول

۳ – د ناجوړه . n= 1 , 3 , 5 او a≥ 0 لپاره

$$b^n = a$$

تل يواځني زياتيز(مثبت) اوبی يا حل لري يانې b≥ 0

٤ – د ناجوړه n او کيمز يا منفي a لپاره $b^n = a$

تل يواځني يو منفی اوبی يا حل لري٠ يانې b < 0 د بيلګي په توګه دا $b^3 = -8$ يواځې

اوبی b = -2 لري.

په هر صورت بايد د جوړه...n=2,4,6 ګڼونو لپاره a≥ 0,b≥ 0 وغوښتل شي، ځکه چې په بل صورت کې به يا ريښه شته نه وي او يا به يواځنی اوبی نه لري، يانې ځو اوبی به شته وي

د ناجوړه يا طاقو,...n = 1,3,5 لپاره کيدی شي، چې له دواړو غوښتنو تير شو٠ دلته به يواځې تاوان يا زيان دا وي، چې د تولو ممکن حالتونو لپاره به بيل بيل د ريښې د قوانينو غوره کولو ته اړ کيږو٠ له بلې خوا به ريښی د قوانينو ترتيبول د پوتنخ لپاره ، چې پورته ايښول شوي بنديزونه nقوانينو لپاره ستونځمن وي٠ له دې امله د ناجوړه ريښو

(c) ketabton.com: The Digital Library

اکسپوننت غوره کوو او د یواځني یو اوبی لپاره 2- د 8- = b³ او نه $-2=\sqrt[3]{-8}$

بلکه $-2=-\sqrt[3]{8}$ لیکو۰ په دې اړوند او د یادو شوو نیونو په بنسټ دې دا لاندې اوبی په ګوته شوی وي

$$\sqrt{a^2}=a,\dots\dots\dots\dots\dots(4,10)$$

ځلوری ریښه یا مربع ریښه $\sqrt{a^2}$ د ټولو حقیقي اعدادو یا - ګڼونو a لپاره تعریف شوي۰ د نامثبت یا نازیاتیز ې a لپاره به (4,10) په داسی حال کې، چې د منفي a لپاره به بیا د (4,10) اوبی منفي یا متیز وي، کوم، چې نیونه $b \geq 0$ نفي کوي.

په ځانګړي حالتونوکې به د (10 , 4) بنول شویو حالتونو استعمال لاندې مخامخوالي یا مضاد لاس ته راولي، لکه :

$$\sqrt{4}=\sqrt{2^2}=2,\sqrt{4}=\sqrt{(-2)^2}=-2$$

یانې د 2- = 2 سره۰

د (10 , 4) ټیک داسې لیکل کیدی شي:

$$\sqrt{a^2}=|a|=\{a,a\geq 0,\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(4,11)$$

$$=\{-a\quad,a\leq 0\qquad\qquad(4,11)$$

د ریښې یا جذر له پیژند (9 , 4) , (8 , 4) سره سم کیدی شي، چې لاندې باوري د ریښې قوانین ولیکل شي د....$n=1,2,3$ او $a,b\geq 0$ لپاره

$$\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(4,12)$$

$$\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a}/\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a/b},b>0\dots\dots(4,13)$$

$$\sqrt{a}.\sqrt[m]{a}=\sqrt[n.m]{a^{n+m}}\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(4,14)$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[n.m]{a}\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(4,15)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پورته د (4,15),(414),(413,),(4.12) ترمنځ باید لږ واټن وي، خو کومه ترې ناسمه پوهیدنه نه رامخ ته کوي ۰ دلته پیژندل کیږي، چې د رېښې قوانین د پوتنځقوانینو ته، چې په(4,2) تر (4,6)پورې ورکړ شوي،د پرتلې وړ دي۰ په رښتیا چې دا د پوتنځقوانینو لاس ته راتلی شي، که پوتنځ د ریشنل اکسپوننت سره په لاندې ډول تعریف شي یا یې لاندې پیژند ورکړ شي۰

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n} \Leftrightarrow \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m ....(4,16)$$

د... $a \geq 0$, $n = 1,2,3,\ldots$, $m = 1 , 2 , 3\ 4 \ldots$ لپاره

د بیلګې په توګه (١٦ ، ٤) په لاندې ډول لیکل کیږي

$$\sqrt[n]{a}.\sqrt[m]{a} = a^{1/n} \cdot a^{1/m} = a^{(1/n)+(1/m)} = a^{(n+m)/n.m} = \sqrt[n.m]{a^{n+m}}$$

دا اړیکې (4,16) کیدی شي منفي $m = -1,-2,-3,\ldots$ ته هم پراخه شي، چیرته، چې (4,17) په ټینګه - یا کره باور ولري

$$a^{-(m/n)} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}, a > 0 ....(4,17)$$

بې له بندیزونو د خوښې جګو n او m لپاره د پوتنځقوانین (4, 2) تر (4,6) باور لري، خو یواځې هلته، چې نه ورکیدونو بنسټونو یانې $a>0, b>0$ نیونه شوې وي۰

د رېښې شمیرلو لپاره باید اساساً د(4,16) له مخې ریشنل اکسپوننتونه واوړي او له (4,2) تر (4,6) استعمال کړي

اړتیا لرو، چې د پوتنځ او رېښې سره شمیرلو د قوانینو استعمال نیونې تل و ازمایلی شو ۰ په ځانګړي ډول د بنسټ نه منفیتوب کمونوالی یا نامنفیوالی یا مثبتتوب(مثبتوالی یا زیاتونوالی) پریږدو، چې لاندې ناسم پای کیدډول وښایو ۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sqrt{-a} = (-a)^{1/2} = (-a)^{2/4} = \sqrt[4]{(-a)^2} = \sqrt[4]{a^2} = a^{2/4} = a^{1/2} = \sqrt{a}$$

برابرون يوازې د دې ساده حالت0 = a لپاره شته دی يا باور لري، د 0=|a يا $a \neq 0$ لپاره a-او يا a منفي دي دا په دې مانا، چې a يا-a پيژند نه لري يا تعريف نه دی٠

د توان قوانين د توان سره شميرلو، چې راشنل جګ لري، په لاندې بيلګو کې روښانه کوو:

پام: په لاندې بيلګو کې دا تراوسه د شمير بنسټيز قوانين ټول راغلي، د نو ورسره بلدېدونکو ګرانو لوستونکو ته دې دا روښانه وي، چې د لږ فکر وروسته هرڅه روښانه کيدی شي٠ شميرنه يې لږ وخت نيسي، که غواړی پخپله يې يو ځل وشميری٠

بيلګه ٤ ٠ ٦

$$\sqrt[3]{\sqrt{125}} = \{(125)^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{3}} = (125)^{\frac{1}{6}} = (5^3)^{\frac{1}{6}} = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5} = 2,2361$$

بيلګه ٤ ٠ ٧

$$\frac{a^2\sqrt{b}c^{-2}}{\sqrt[3]{a^2}b^{-3}} : \frac{d^2\sqrt{c}}{\sqrt[5]{d}a^{-5}} = \{a^{(2-\frac{2}{3})}b^{(\frac{1}{2}+3)}c^{-2}\} : \{a^5c^{-2}d^{(2-\frac{1}{5})}\} =$$

$$= a^{(2-\frac{2}{3}-5)}b^{(\frac{1}{2}+3)}c^{(-2-\frac{1}{2})}d^{(-2+\frac{1}{5})} = a^{-\frac{11}{3}}b^{\frac{7}{2}}c^{-\frac{5}{2}}d^{-\frac{9}{5}} =$$

$$= \frac{\sqrt{b^7}}{\sqrt[3]{a^{11}}.\sqrt{c^5}.\sqrt[5]{d^9}} = \frac{b^3.\sqrt{b}.c^2}{a^3.\sqrt[3]{a^2}.c^2.\sqrt{c}..d^5.\sqrt{d^4}}$$

بيلګه ٤ ٠ ٨

$$8.\sqrt[3]{343} - 4.\sqrt[3]{125} + 5\sqrt[3]{8} - 5\sqrt[3]{729}$$

$$= 8.\sqrt[3]{7^3} - 4\sqrt[3]{5^3} + 5.\sqrt[3]{2^3} - 5.\sqrt[3]{3^6} = 8.7 - 4.5 + 5.2 - 5.9 = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه ٤ ۰ ۹

$$5.\sqrt{63}-2.\sqrt{175}-\sqrt{343}+3.\sqrt{28}$$
$$=5.\sqrt{7.3^2}-2.\sqrt{7.5^2}-\sqrt{7.7^2}+3.\sqrt{7.2^2}=$$
$$=5.3\sqrt{7}-2.5\sqrt{7}-7.\sqrt{7}+3.2.\sqrt{7}=$$
$$=15.\sqrt{7}-10.\sqrt{7}-7.\sqrt{7}+6.\sqrt{7}=4.\sqrt{7}$$

بيلګه ٤ ۰ ۱۰

$$\sqrt{a-\sqrt{a^2-b^2}}.\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}=\sqrt{(a-\sqrt{a^2-b^2}).(a+\sqrt{a^2-b^2})}=$$
$$=\sqrt{a^2-(\sqrt{a^2-b^2})^2}=\sqrt{a^2-a^2+b^2}=|b|$$

د $|a| \geq |b|$ لپاره

د مختلفو شميرلو لپاره موخور دی، چې مات لاندې کې منځ ته راغلې ريښې له منځه يوسو (د ماتلاندې ريشنل کول)۰

که په ماتلاندې کې يوه ريښه $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$ د فاکتور يا ځلووني په څيررامنځ ته شي، نو دا د وظيفې لپاره يوازې اړيين ده چې $m < n$ ($m , n > 0$) او $m,n \in Z$ په پام کې راوړو

کارونه يا عمليه په لاندې ډول اجرا کيږي($N^*|= 0$, $a > 0$)

$$Z\Big/N=\frac{Z}{N}=\frac{Z}{N*\sqrt[n]{a^m}}=\frac{Z.a^{1-\frac{m}{n}}}{N*a^{\frac{m}{n}}.a^{1-\frac{m}{n}}}=\frac{Z.\sqrt[n]{a^{n-m}}}{N*a},..........(4,18)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه ٤ . ١١

$$\frac{3}{2\sqrt[3]{3}}=\frac{3}{2.3^{\frac{1}{3}}}=\frac{3.3^{\frac{2}{3}}}{2.3.3^{\frac{2}{3}}}=\frac{3^{1+\frac{2}{3}}}{2.3^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}}=\frac{3^{\frac{5}{3}}}{2.3}=\frac{3^{\frac{2}{3}}}{2}=\frac{1}{2.\sqrt[3]{9}}$$

که په ماتلانديې کې د څلورې- يا مربع ريښې زياتون يا کمون وي $N=\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ نو ماتلانديې له مات $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ سره غزوو او د بينوم فرمول استعمال سره له $a > 0$ او $b > 0$،چې $a\neq b$ وي لاس ته راځي:

$$\frac{Z}{N}=\frac{Z}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}=\frac{Z.(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})}{(\sqrt{a}\pm\sqrt{b}).(\sqrt{a}\mp\sqrt{b})}=\frac{Z.(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})}{a-b},...(4,19)$$

بيلګه ٤ . ١٢

$$\frac{1}{2-\sqrt{3}}=\frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=\frac{2+\sqrt{3}}{4-3}=2+\sqrt{3}$$

بيلګه ٤ . ١٣

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

۴ . ۳ توان(پوتېنځ) د حقيقي – يا رييل جګ (اکسپوننت) سره

دلته دا په ګوته کوو يا دې دا ويل شوي وي، چې د توان ټول قوانين له (4,2) تر (4,7) دې په خوښه حقيقي اعدادو اکسپوننتونو(جګعددونو)m,n لپاره باور لري،طبعاً بې بنديزه ټيک د مثبت بنسټ لپاره. يعنې a,b>0 ، برسيره پردې دې بايد توان $a^{\alpha}; a>0$ د ناريښتوني يا ايراسنل عدد α لپاره تعريف شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که α یو ایراشنل – یا ریښتونی عدد وي، نو موږ د ۳ . ۱ . ۴ برخې سره سم انتروالونو بندولو په بنبټ لرو: $\propto = \{a_{n;} a'_n\}$. دلته $a_{n;} a'_n$ هوښیار یا راشنل اعداد دي.

بیا نو

$$\beta = \{a^{a_n} ; a^{a'_n}\} \qquad (4,20)$$

هم په انتورالونو بندول دي چې غږي یې (۴،۲) لاندې تعریف شوي توانونه دي د راشنل اکسپوننت سره. د هغه موجود په انتروالونو بندولو سره په دې توپیر، چې

$$\begin{gathered} 2^1 < 2^{\sqrt{2}} < 2^2 \\ 2^{1,4} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,5} \\ 2^{1,41} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,42} \\ 2^{1,414} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,415} \\ 2^{1,4142} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,4143} \\ \vdots \end{gathered}$$

اخرني مساوات په دې معنا دی

نو لرو $$\sqrt[10000]{2^{1412} < 2^{\sqrt{2}} < \sqrt[10000]{2^{14143}}}$$

٤ ۰ ۳ تولګه : د a>0, b>0 رییل او $m, n \in N (n \neq 0)$

همدا ډول $m,n \in N(n \neq 0)$ ییلو لپاره باور لري

$$\alpha, \beta \in R$$

$$a^0 = 1, \frac{1}{a^\alpha} = a^{-\alpha}, \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}, \sqrt[n]{a^m} =$$

$$= (\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا پورته موضوع تر دې ځايه بسيا کوي، که نور څه مخته راتلل، چې اړيين وو، هغه به بيا په ګډه ورزياتوو

۴ . ۵ . تمرينونه

۱ . د توان کلمه، د توان جمعه او تفريق يا زياتون او کمون

۱ . ۱ – د توان په څير يې وليکئ

a) $(-a^{-1}) \cdot (-a^{-1}) \cdot (-a^{-1}) \cdot (-a^{-1})$ b) $-\left(\frac{1}{a^{-2}} \cdot \frac{1}{a^{-2}} \cdot \frac{1}{a^{-2}}\right)$

c) $-(b-a) \cdot (a-b) \cdot (a-b)$ d) $-(a^0 b) \cdot (a^0 b) \cdot (a^0 b) \cdot (a^0 b)$

1.2. a) -3^{-4} b) $(-5)^3$ c) $(-2^{-1})^3$ d) $-\left(\frac{2}{3}\right)^2$

1.3. a) $12a^2b - 6ab^2 - 15a^2b + 6ab^2 - 7a^2b$

b) $(3a+2b)x^4 - x^4(2b-3a) + x^4(3a+2b)$

c) $4(a-b)^2 + 2(b-a)^2 - 3(a-b)^2$

d) $18(a-1)^3 - 3(1-a)^3 - 15(a-1)^3 + 4(1-a)^3 + 3(1-a)^3$

۲ – د توانو ضرب او وېش د برابر بنسټ سره

2.1. a) $\frac{3a^{n+1} \cdot 6x^{n+7} \cdot 9b^{x+1}}{3x^n \cdot 2b^{x+1} \cdot 3a}$ c) $\frac{a^{x+1} \cdot b^{x+3} \cdot a^{3x-1} \cdot b^{x+3}}{a^{x-2} \cdot b^{3-x} \cdot a^x \cdot b^{x+1}}$

b) $\frac{a^{n+1} \cdot a^{n+1} \cdot a^n}{a^0 \cdot a^n \cdot a^{n-1}}$ d) $\frac{a^{3n-x} \cdot b^{2n+x}}{a^{n+2x} \cdot b^{2n-x}} \cdot \frac{x^{3n+2} \cdot y^{2n-1}}{x^{2n-3} \cdot y^{n+1}}$

2.2. a) $\frac{18x^{a+4}}{2y^{5a+7}} : \frac{4x^{7-3a}}{9y^{8+5a}}$ c) $\frac{42a^2b^3 \cdot x^{n+1}}{36c^3 \cdot y^2 \cdot z^{n-3}} : \frac{70a^3b^2 \cdot x^{n+2}}{54c^2y^4 \cdot z^{n-2}}$

b) $\frac{a^{5x-2y}}{b^{6m-1}} : \frac{a^{4x+y}}{b^{m-2}}$ d) $\frac{45xa^3 \cdot 9y^n(a-1)^2}{9yb^3 \cdot 30x^n(a+1)^2} : \frac{9y^{n-1}(1-a)^3}{24x^{n+1}(1+a)^2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۲ . د توان ضرب او جمعه(زياتون) د همغه بنسټ سره:

2.3. a) $(x^{5n+3} + x^{4n+5} - x^{3n+4}) : x^{2n+3}$

b) $(143a^4b^5 - 221a^3b^5 - 247a^5b^4) : 13a^3b^4$

c) $(a^{n+1}b^{x-1} + a^nb^x + a^{n-1}b^{x+1}) : a^{n-2}b^{x-1}$

d) $(16a^8 - a^4b^2 + 9b^4) : (4a^4 - 5a^2b + 3b^2)$

د لوګاريتم بنسټ فرمولونو استعمال.

په لاندې کې x وشميرئ

۳ . د توان په توانونه، د توانونو ضرب او وېش د برابر جګګڼ يا جګعدد سره، د کميزو يا منفي اکسپونتتونو سره شميرنه

3.1. a) $\left(1\frac{3}{4}\right)^2 : \left(2\frac{1}{3}\right)^2$

b) $4^{-2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-4}$

c) $\left(-\frac{1}{a^{-4}}\right)^{-5}$

d) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{-3}$

3.2. a) $\dfrac{18^4(a^2b)^2}{27^3 \cdot (2a\sqrt{a} \cdot b)^2}$

b) $\dfrac{(6ab)^3 \cdot (5a^2b)^4}{2^4 \cdot 3ab^2 \cdot (25a\sqrt{b})^2}$

c) $\left(\dfrac{4b^2y^2}{6a^2x^2}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{8a^3y^2}{6b^3x^3}\right)^4 \cdot \left(\dfrac{18b^3x^6}{16a^3y^3}\right)^2$

d) $\left(\dfrac{45b^2y^3}{24a^3x}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{6bx^3}{9ay^3}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{75b^3x^3}{36a^4y}\right)^2$

3.3. a) $\dfrac{(3a-9b)^2}{81b^2-9a^2}$

b) $\dfrac{(6a-12b)^2 \cdot (3a+6b)^2}{(6a^2-24b^2)^2}$

c) $\dfrac{(4a^2-9b^2)^2}{(3a^2-2ab)^2} \cdot \left(\dfrac{9a^2-4b^2}{2a^2+3ab}\right)^2$

d) $\left(\dfrac{2xb^3}{3ya^3}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{15x^2a^3}{8y^3b}\right)^2 : \left(\dfrac{25x^3b^3}{12y^4a}\right)^2$

3.4. a) $\dfrac{27x^{-5} \cdot y^{-6} \cdot z^{-1}}{45x^{-4} \cdot y^{-5} \cdot z^0} \cdot \dfrac{49x^{-2} \cdot y^{-3} \cdot z^{-4}}{42x^{-3} \cdot y^{-4} \cdot z^{-3}}$

b) $\dfrac{a^{-2} \cdot x^{-4} \cdot y^{-6}}{b^3 \cdot c^{-4} \cdot z^{-5}} : \dfrac{a^{-3} \cdot b^{-5} \cdot x^{-3}}{c^{-5} \cdot y^6 \cdot z^{-7}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

c) $\frac{(ax-ay)^m \cdot (3bx+3by)^n}{(cx^2-cy^2)^{m+n}}$

d) $\left(\frac{(x+y)^{3a-4}}{x^{a-1}y^2} : \frac{y^{2a-5}}{x^{4a-3}(x+y)^{3-2a}}\right)\frac{x^{4-3a}y^{3a-6}}{(x+y)^{a-2}}$

۴ . د کومو شرليطو لاندې کيدی شي لاندې عددونه د يوه مربع – يا څلورى رېښه وي؟

4.1. a) $+a, -a$ b) $+a^2, -a^2$ c) $+a^3, -a^3$ d) ab

4.2. a) $+(a-b), -(a-b)$ b) $+(a-b)^2, -(a-b)^2$ c) a^2-b^2 d) a^2+b^2

۵ - د رېښنو جمعه او تفريق)زياتوناو کمون)

5.1. a) $6\sqrt{27}+2\sqrt{108}-7\sqrt{75}$

b) $\sqrt{50}+\sqrt{8}-\sqrt{72}+\sqrt{18}$

c) $3\sqrt[4]{256}-4\sqrt{49}-7\sqrt[3]{27}+2\sqrt[5]{32}$

d) $3\sqrt{50}-\sqrt{98}+4\sqrt{288}+14\sqrt{162}-\sqrt{25-9}\cdot\sqrt{2}$

5.2. a) $\frac{x(2r^2-4x^2)}{\sqrt{r^2-x^2}}-8x\sqrt{r^2-x^2}$

c) $2\sqrt{(x-k)^2+x^2}-\frac{(2x-k)^2}{\sqrt{2x^2-2kx+k^2}}$

b) $\frac{r(4r^2-3rH)}{\sqrt{4r^2-2rH}}-3r\sqrt{4r^2-2rH}$

d) $\frac{h^2+\left(c-\frac{c}{2}\right)^2-\left(c+\frac{c}{2}\right)^2}{\sqrt{h^2+\left(c-\frac{c}{2}\right)^2}}-\frac{h^2+2\cdot\frac{c^2}{4}}{\sqrt{h^2+\frac{c^2}{4}}}$

5.3. a) $\sqrt{1-x}+\frac{x+1}{2\sqrt{1-x}}$

b) $\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}+\frac{3x^2}{(1-x^2)^2\sqrt{1-x^2}}$

c) $\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2-x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$

d) $\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}+\frac{x}{(x+\sqrt{x^2+a^2})\cdot(\sqrt{x^2+a^2})}$

۶ – د رېښنو يا جذرونو ضرب او وېش

(c) ketabton.com: The Digital Library

6.1. a) $\sqrt{3\cdot 7}\cdot\sqrt{3\cdot 5}\cdot\sqrt{5\cdot 7}$

b) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$

c) $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{4}} : \sqrt{\frac{a^2-b^2}{4}}$

d) $\sqrt{\frac{a^2+b^2+2ab}{2}}\cdot\sqrt{\frac{b^2-2ab+a^2}{2}}$

6.2. a) $(3-\sqrt{2})(2+3\sqrt{2})$

b) $\sqrt{8+2\sqrt{10}}\cdot\sqrt{8-2\sqrt{10}}$

c) $\sqrt{12x^2-12x}\cdot\sqrt{3x^2-3}$

d) $\sqrt{a^2+a}\cdot\sqrt{ab+b}$

6.3. a) $\left(4^{-\frac{1}{4}}+\left(\frac{1}{2^{-\frac{3}{2}}}\right)^{-\frac{4}{3}}\right)\cdot\left(4^{-0,25}-(2\sqrt{2})^{-\frac{4}{3}}\right)$

b) $\sqrt{6x^2-6}\cdot\sqrt{\frac{3x-3}{2x+2}}$

c) $\frac{\sqrt{a+c}+\sqrt{b+c}}{\sqrt{a+c}-\sqrt{b+c}}$

d) $\frac{\sqrt{(a-b)^2+a^2+b^2-2ab}}{\sqrt{2(a^2+b^2)(a^2-b^2)}}$

۷ – د توان او ریښې ریښه وېستنه (حلونه)

.1. a) $\sqrt{0,04^5}$ b) $\sqrt[3]{4200}$ c) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{8}}$ d) $\sqrt{\sqrt[4]{256}}$

.2. a) $\sqrt[2n-1]{a^{4n^2-1}}$

b) $\sqrt[4]{a^2\cdot\sqrt[3]{a^2}}$

c) $\sqrt{\sqrt[3]{a^6\cdot b^{12}}}$

d) $\sqrt[3]{\sqrt{a^6\cdot b^8}}$

.3. a) $\sqrt[3]{(a-b)^3(a+b)^4}$

b) $\sqrt{\frac{1}{8}a^2+\sqrt{\left(\frac{a^2}{8}\right)^2+\frac{a^4}{8}}}$

c) $\frac{4\pi r^3-8\pi r^3}{\sqrt{\left(4r^2-2r\cdot\frac{4}{3}\cdot r\right)^3}}$

d) $\pm\sqrt{\left(\frac{x_0y_1^2}{y_1^2-y_2^2}\right)^2-\frac{y_1^2x_0^2}{y_1^2-y_2^2}}-\frac{x_0y_1^2}{y_1^2-y_2^2}$

.4. a) $\sqrt[4]{\frac{a}{b}\cdot\sqrt[3]{\frac{b^2}{a}\cdot\sqrt{\frac{1}{a^2}}}}$

b) $\sqrt[3]{a^3\cdot\sqrt{a^2\cdot\sqrt[5]{a^8\cdot\sqrt[4]{a^3}}}}$

c) $\sqrt{a\cdot\sqrt[8]{a^5\cdot\sqrt[3]{a}}} : \sqrt[4]{a\cdot\sqrt[3]{a^2\cdot\sqrt{a}}}$

d) $\frac{\sqrt[6]{a^5\cdot\sqrt[3]{a^2}}}{\sqrt[3]{a^2\cdot\sqrt[6]{a^4}}} : \frac{\sqrt{a^3\cdot\sqrt[9]{a^7}}}{\sqrt[9]{a^7\cdot\sqrt{a}}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۸ – لاندې ماتونه یا کسرونه داسې شکل ته واړوئ، چې مخرج رېښه نه وي.

8.1. a) $\frac{3}{4\sqrt{3}}$ b) $\frac{4}{\sqrt[3]{2}}$ c) $\frac{10}{3\sqrt{8}}$ d) $\frac{15}{\sqrt[11]{243}}$

8.2. a) $\frac{a^2}{\sqrt[3]{a^5}}$ b) $\frac{1}{\sqrt[9]{x^{13}}}$ c) $\frac{y^2x}{\sqrt{x^3y}}$ d) $\frac{ab}{\sqrt[7]{a^2b^3}}$

8.3. a) $\frac{13}{7-\sqrt{10}}$ b) $\frac{6}{\sqrt{5}+1}$ c) $\frac{15}{3-\sqrt{6}}$ d) $\frac{16}{3+\sqrt{5}}$

8.4. a) $\frac{8}{3\sqrt{2}+4}$ b) $\frac{17}{3\sqrt{5}-2\sqrt{7}}$ c) $\frac{6}{\sqrt{8}+\sqrt{5}}$ d) $\frac{6}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$

8.5. a) $\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$ b) $\frac{3(\sqrt{5}-\sqrt{8})}{\sqrt{8}+\sqrt{5}}$ c) $\frac{3+\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ d) $\frac{4\sqrt{10}-7\sqrt{3}}{\sqrt{10}-\sqrt{3}}$

8.6. a) $\frac{7\sqrt{5}+4\sqrt{3}}{5\sqrt{3}+2\sqrt{5}}$ c) $\frac{\sqrt{3-\sqrt{2}}}{\sqrt{3+\sqrt{2}}}$

b) $\frac{2\sqrt{6}+3\sqrt{5}}{2\sqrt{6}-3\sqrt{5}}$ d) $\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵ . لوګاریتم یا لوګاریتموس Logarithmus

په دې برخه کې د لوکاریتم کلمه ترڅیرنې لاندې نیسو او د لوګاریتم د قوانینود استعمال اسانتیاوې، چې په کره یا په کلکه یې په نیونو (فرضیو) پاملرنه شوې وې څیرو .

۵ . ۱ د لوګاریتم کلمه

موږ په دې برخه کې لوګاریتم تر څیرنې لاندې نیسو، د لوګاریتم د قوانینو اسانتیاوې څیړو ، چې په نیونو یا فرضیو کې باید پوره پاملرنه شوې وي . د لوګاریتم $c = \log_b a$ پیژند لپاره د یوه زیاتیز - یا مثبت عدد a یوه زیاتیز - یا مثبت عدد b ته چې $b \neq 1$ او د لوګاریتم بنسټ بلل کیږي له لاندې برابرون یا مساوات څخه مخ ته ځو د په خوښه لپاره c

$$b^c = a \,; a > 0; b > 0; b \neq 1 \qquad (5,1)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که a او b له مخه ورکړ شوي وي، نو د برخی ٤ سره یواځنی ټاکلی دی۰ که a او b له مخه ورکړشوي وي، نودپورتنیو نیونو سره یواځنی رییل ګڼc شته دی، چې برابرون(4,1) پوره کوي۰ دې ته د a لوګاریتم وایود b پر بنسټ:

پیژند ۵ ۰ ۱:

د ریلل مثبت ګڼ a لوګاریتم لاندې، چې له یوه سره نابرابر بنسټ bولري، هغه ریلل ګڼ c پوهیږو , له کوم سره، چې bد هغه په توان یا پوتنځ کړو او ګڼ a ترې لاس ته راشي۰ لکه (5,1)

د دې لپاره لیکو:

$$c=\log_b a; a>0; b>0; b\neq 1,.............(5,2)$$

(5,1) او (۲ ۰ ۵) یو ارزښت لري د دې لپاره، چې د لوګاریتم قوانین له (5,2) سره سم لاس ته راوړو، نو د(5,1) ته بیرته ورګرځو۰ دا به په لاندې بیلګه کې روښانه شي،په کوم کې چې له a,b,c څخه تل دوه ګڼونه ورکړ شوي دي

بیلګه ۵ ۰ ۱

۵ ۰ ۱ الف : له $2^x=16$ x=4لرو ، ځکه، چې $16=2^4$

ب له $3^x=\frac{1}{9}$ څخه لرو x=-2 ، ځکه چې $3^{-2}=1/3^2=1/9=\frac{1}{9}$

۵ ۰ ۱ ۰ ۲ الف: د $2=\log_x 36$ سره یو ارزښت لري، نو لروx=6 $x^2=36$

ب : د $-6=\log_x \frac{1}{36}$ $x^{-6}=\frac{1}{64}=\frac{1}{2^6}=2^{-6}$ سره یو ارزښت لري،

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو لرو$x = 2$

۵ ۰ ۱ ۰ ۳ الف : د $x = \log_5 125$ سره، یوارزښت لري، $5^x = 125 = 5^3$

نو$x = 3$

ب: د $x = \log_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{16})$ $(\frac{1}{2})^x = 1/16 = (1/2)^4$

سره یو ارزښت لري، نو لرو$x = 4$

۳ ۰ ۱ ٤ الف د$5 = \log_3 x$ $3^5 = x$سره یو ارزښت لري، نو $x=243$

ب : د$-5 = \log_2 x$ $2^{-5} = x$سره یو ارزښت لري، نو لرو $x = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$

۵ ۰ ۱ ۰ ۵ الف $2 = \log_x(-6)$تعریف نه دی یا پیژند نه لري۰

ب : $x = \log_{-5} 125$ پیژند نه لري یا تعریف نه دی

پ: $\log_1 x$پیژند یا تعریف نه دی

له (5,1) او(5,2) څخه لاس ته راځي

$$a = b^{\log a}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5,3)$$

$$\log_b 1 = 0, \log_b b = 1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5,4)$$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ځانګړي بنسټ لپاره لاندې سومبول کارولکیږي

$$b = e = 2,71828 \Leftrightarrow b = 10$$

$$\log_{10} a = \log a, \log_e a = \ln a, ...(5,5)$$

د lga لوګاریم ته لسیز لوګاریتم وایي او lna ته پیداینتي یا طبیعي لوګاریتم وایي(e وروسته څیړو) زیات وخت د لشمیز لوګاریتم لپره داسې هم لیکو:

$$c= \log a \qquad (5,6)$$

که سومبولlog څو واره رامنځ ته شي، نو په پام کې دې وي، چې په خوښه، مګر همغه بنسټ باید وکارول شي۰

۵ ۰ ۲ د لوګاریتم قوانین

د لوګاریتم د پیژند سره سم د (5,1) او(5,2) له مخې کیدی شي د پوتنځ د قوانینو(5,3) تر(5,7) په مرسته لاندې لوګاریتم قوانین رابیل کړای شو، کوم چې په خوښه مګر همغه لوګاریتم بنسټ b |= 0 ، b>0 او د زیاتیز(مثبت) x> 0 , y > 0 لپاره باور لري

$$\log(x.y) = \log x + \log y, ...(5,7)$$

$$\log \frac{x}{y} = \log x - loy, ...(5,8)$$

$$\log x^a = a \log x, a \in R, ...(5,9)$$

$$\log \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log, n = 1,2,..., ...(5,10$$

د پوتنځ قوانینو له مخې د دې فرمولونو راوستل یو د وړاندیز وړ د لوګاریتم ژورې څیړنې لپاره تمیرن ښایي

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بیلګې په توګه له (۷ ، ۵) همداسې

$$\log_b(x.y) = \log_b x + \log_b y, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5,11)$$

څخه په لاندې ډول او له (5,2)،(5,1) څخه لرو

$$c_1 = \log\ \ x, c_2 = \log_b y, c = \log_b(x+y), \ldots\ldots\ldots\ldots(5,12)$$

د لاندې سره یو ارزښت لري

$$b^{c_1} = x, b^{c_2} = y, b^c = x.y, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5,13)$$

له(5,13) او د پوتنځ قانون(4, 2) پر بنسټ لرو :

$$b^c = x.y = b^{c_1}.b^{c_2} = b, \Rightarrow c = c_1 + c_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5,14)$$

او له (5,11) همداسې د(5,7) ښوونه د (5,12) له امله د لوګاریتم د (5,7) تر(5,10)

قوانینو کیدی شي د پیچلي لوګاریتم له افادې څخه د لوګاریتم ساده بنسټیزې افادې ته بیرته راوګرځو اوپه ښت.

بیلګه ۵ . ۲

$$\log\frac{2\sqrt{a+b}\,a^3 b^2}{\sqrt[3]{c}(a+c)^2}$$

$$= \log 2 + \frac{1}{2}\log(a+b) + 3\log a + 2\log b - \frac{1}{3}\log c - 2\log(a+c)$$

بیلګه ۵ . ۳

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\log(a+b)+2\log(a-b)-\frac{1}{2}\log(a^2-b^2)$$

$$=\log\frac{(a+b)(a-b)}{\sqrt{a^2-b^2}}=\log\frac{(a^2-b^2)(a-b)}{\sqrt{a^2-b^2}}=\log[(a-b)\sqrt{a^2-b^2}]$$

اوس بايد وښايو، چې تر کومو شرايطو لاندې دا اړيکې باور لري۰

په بيلګه ۵ ۰ ۲ کې په کينۍ اړخ کې لوګاريتم ځاي لري، چې د ټولو a,b,c تعريف دئ او لاندې برابرون پوره کوي يا ډکوي:

وي دې a+b>0 (د دې لپاره ، چې ريښنه تعريف وي او صفر نه شي، ځکه، چې بيا لوګاريتم اوبی يا حل نه لري۰

وي دې c > 0 (د دې لپاره چې ريښنه تعريف او ماتلاندې صفر نه شي)

وي دې $a+b\neq 0$ (د دې لپاره، چې لوګاريتم تعريف وي)

وي دې $b\neq 0, a>0$ (د دې لپاره، لوګاريتم تعريف وي)
د کينۍ اړخ لوګاريتم په ځانګړي ډول د a = 2 . b = -1 , c = 1 لپاره تعريف دئ۰ په ښي اړخ کې ولاړ برابرون شکلبدلون يا څيره بدلون ريښنتونی کيدی نه شي، ځکه چې Log بې ځايه دئ ۰ د دې لپاره، چې د څيرې بدلون ريښنتونوالی ممکن شي، بايد د $b\neq 0$ پر ځاي په ټينګه يا کره b>0, وغوښتل شي ۰

په بيلګه ۵ ۰ ۳ کې کينه خوا يواځې هلتهموخه وره ده، چې وي:

a+b>0,   a-b>0

نو بيا a²-b² = (a+b)(a-b)> 0 او په دې بيلګ کې رامنځ ته شوي ټول لوګاريتمونه هم تعريف دي۰ دا اړيکې د ټولو a ، b لپاره هم باور لري،د کومو لپاره چې پورته نابرابرون ډک وي۰ دا کيدی شي a > - b , a > b له امله هم و a >|b| ته راغونډ شي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

دې ---

ته دې هم ګوته نیولې وي، چې لوګاریتم په یوه بنسټ b یوه بل لوګاریتم یوه په خوښه بل بنسټd ته د شمیراوړون د شمیرنې اړول کیدی شي $(b>0, b\neq 1, d>0, d\neq 1, a>0)$

د(۵،۳) له مخې باور لري $a = b^{\log_b a}$

د دې برابرون لوګاریتم نیول و بنسټd ته لرو:

د $\log_d a = \log_d b^{\log_b a} = (\log_b a)(\log_d b), ...(5,15)$

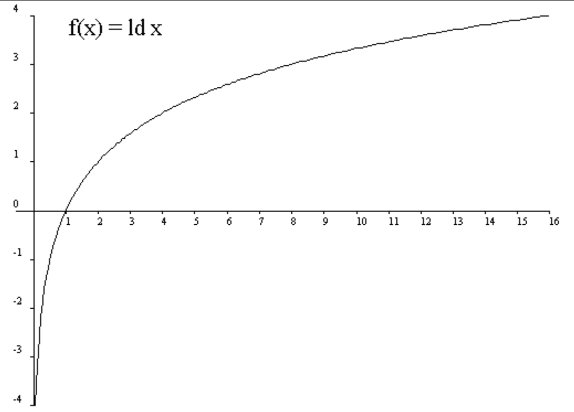
لسیز لوګاریتم اړول په پیداینتي یا طبیعي لوګاریتم او په څټ لپاره لیکو b=10, d = e همداسې b = e , d = 10 او لاس ته راځي :

Lga = (lge)(lna); …………………(16)

Lna=(ln10)(lga) = 2,30429lga;……(17)

$\lg a = (\lg e)(\ln a), ...(5,16)$

$\ln a (\ln 10)(\lg a) = 2,30429 \lg a, ...(5,17)$

	د لوګاریتم فنکشن یا بلواک او دیاګرام یې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$b^{\log_b n} = n$$

$$\log_b b^x = x$$

تکرار د نورو تورو سره

د يوه ځل لوګاريتم

$$\log_b (n \cdot m) = \log_b n + \log_b m$$

$$\log_b \frac{n}{m} = \log_b n - \log_b m$$

د پوتنځ لوګاريتم

$$\log_b n^m = m \cdot \log_b n$$

د ريښي لوګاريتم

$$\log_b \sqrt[m]{n} = \frac{1}{m} \log_b n$$

د لوګاريتم يو په بل بدليدل

$$\log_b n = \log_b d \cdot \log_d n$$

د کوما يا لسميزمات نخښۀ وروسته بينارځايونه ó او لسميزسيستم

(c) ketabton.com: The Digital Library

	binär	dezimal
2^{-1}	0,1	0,5
2^{-2}	0,01	0,25
2^{-3}	0,001	0,125
2^{-4}	0,0001	0,062.5
2^{-5}	0,0000.1	0,031.25
2^{-6}	0,0000.01	0,015.625
2^{-7}	0,0000.001	0,007.812.5
2^{-8}	0,0000.0001	0,003.906.25
2^{-9}	0,0000.0000.1	0,001.953.125

۵ ۰ ۳ ټولګه

لوګاریمتم د اکسپوننشل فنکشن یا بلواک په څېټ بلواک دی

$x = \log_b n \iff b^x = n$

د $a,b,x,y,d, > 0$ رییل ګڼونواو $a, b, d \neq 1$ لپاره باور لري:

$$c = \log_b a \Leftrightarrow b^c = a, b^{\log_b a} = a, \log_b 1 = 0, \log_b b = 1, b \neq 1$$

$$\log_{10} a = \lg a, \log_e a = \ln a, e = 2,71828.....$$

$$\log(x.y) = lox + \log y, \log\frac{x}{y} = lodx - \log y,$$

$$\log x^{\alpha} = \alpha, \alpha \in R, \log\sqrt[n]{x}\frac{1}{n}\log x, n = 1,2,3,....$$

$$\log_b a = (lod_b d)(.(\log_d a),$$

$$\lg a = (\lg e).(\ln a) = 0,43429\ln a, \ln a = (\ln 10).(\lg a) = 2,30259\lg a$$

۵ . ۴ – تمرینونه

۱ . د د لوګاریتم تعریف

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلوګاریتم تعرف وکاروئ یا استعمالکړئ او x وټاکئ.

1.1.	a) $\log_7 49 = x$	b) $\log_3 1 = x$	c) $\log_5 \sqrt[6]{25} = x$	d) $\log_{0,5} \frac{1}{32} = x$
1.2.	a) $\lg \frac{1}{10} = x$	b) $\lg 10^{-\frac{1}{3}} = x$	c) $\lg \sqrt[3]{100} = x$	d) $\lg \sqrt{\frac{1}{10}} = x$
1.3.	a) $\log_x 8 = 3$	b) $\log_x 25 = 2$	c) $\log_x 243 = 5$	d) $\log_x 1024 = 10$
1.4.	a) $\log_x 4 = \frac{1}{2}$	b) $\log_x \frac{1}{5} = -1$	c) $\log_x \sqrt{10} = \frac{1}{2}$	d) $\log_x \frac{1}{32} = -5$
1.5.	a) $4^x = 64$	b) $64^x = 64$	c) $9^x = 3$	d) $8^x = 4$
1.6.	a) $2^x = \frac{1}{8}$	b) $3^x = \frac{1}{27}$	c) $5^x = 0{,}04$	d) $10^x = 0{,}0001$
1.7.	a) $\lg x = 3$	b) $\lg x = -2$	c) $\log_2 x = 6$	d) $\log_{0,5} x = 4$
1.8.	a) $\ln x = 2$	b) $\ln x = \frac{1}{2}$	c) $\ln x = -1$	d) $\ln x = 0$

۲ . د لوګاریتم قوانینو استعمال دلوګاریتم

قوانیناستعمال کړئ دو د a,b,c,d,m,n باور لرلو ورشو کره وټاکئ.

2.1.	a) $\lg 2^4$	b) $\lg \left(\frac{1}{2}\right)^3$	c) $\lg \sqrt{10}$	d) $\lg\sqrt{\frac{1}{100}}$
2.2.	a) $\ln \left(\sqrt{e}\right)^3$	b) $\ln\sqrt{e^{3(\ln e^2 + \ln e^6)}}$	c) $\ln \sqrt{\frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}}$	d) $\ln \sqrt{\frac{5e}{e^{\ln 5}}}$
2.3.	a) $\lg \sqrt[7]{a^5}$	b) $\lg \frac{a^2 b^3}{c}$	c) $\lg \sqrt[3]{\frac{ac^2}{bd}}$	d) $\lg \frac{a^2\sqrt{b}}{\sqrt{a^5 b^3}}$
2.4.	a) $\lg (a^4 - b^4)$	b) $\lg (a^2 + b^2)^2$	c) $\lg \frac{(a^2 - b^2)^2}{a^4 - b^4}$	d) $\lg \frac{a^2 - b^2}{(a^2 + b^2)^2}$
2.5.	a) $\log \sqrt{\frac{1-a}{1+a}}$		c) $\ln \frac{\sqrt{a} \cdot b^{-2}}{\sqrt[3]{c} \cdot d^{-3}}$	
	b) $\lg \sqrt[n+1]{a^n \cdot \sqrt[m]{b^{-1}}}$		d) $\log 2 \sqrt{3 \cdot \sqrt[3]{a^2 b \cdot \sqrt[4]{ac^2}}}$	

(c) ketabton.com: The Digital Library

2.6. a) $\frac{1}{3}\log(a+b)+\frac{1}{3}\log(a-b)^{-1}$

b) $\lg a + n \lg (a+b) + n \lg (a-b)$

c) $\lg a - \frac{1}{2}\lg b + \frac{4}{3}\lg c$

d) $\frac{1}{3}\lg(a^2-b^2)-\frac{1}{2}\lg(a-b)-\frac{1}{2}\lg(a+b)$

2.7. a) $\frac{1}{3}\lg a+\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{2}\lg(a+b)+\frac{1}{2}\lg(a-b)-\lg a-\lg b\right\}$

b) $\frac{1}{2}\lg(a^2+b^2)-\frac{1}{3}\{\lg(a-b)+\lg(a+b)\}$

c) $\frac{1}{3}(\lg a+3\lg b)-\frac{1}{2}(4\lg c-2\lg d)$

d) $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{b}{a}+\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-1}\right)-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{b-\sqrt{b^2-a^2}}+\ln\sqrt{a}$

۳ . د لوګاريتم بنسټيز فرمولونو استعمال.

x وشميرئ.

3.1. a) $x = \lg 5 \cdot \lg 20 + (\lg 2)^2$

b) $x = 2 \cdot 10^{2\lg 2}$

c) $x = 3 \cdot 10^{-2\lg 3}$

d) $x = \left(100^{\frac{1}{2}\lg 49}\right)^{\frac{1}{2}}$

3.2. a) $x = \sqrt{10^{2+\lg 9}}$

b) $x = \sqrt[3]{10^{4-\frac{1}{2}\lg 100}}$

c) $x = \sqrt[3]{10^{\frac{1}{2}(\lg 2+\lg 32)}}$

d) $x = \sqrt{\sqrt{10}^{\lg 16}}$

3.3. a) $x = \ln\frac{7{,}63}{\sqrt{e^3}}$

b) $x = \ln\frac{0{,}23}{2e^2}$

c) $x = \left\{\left(\sqrt[3]{e}\right)^2\right\}^{\ln 8}$

d) $x = \left(\sqrt{e}\right)^{3\ln 5}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

٦ ۰ ګونومتري (کونجکچ یا مثلثات (Gonometry

دا برخه هم د ښوونځي له امله یو تکراري خوي لري. ددې وظیفه به داوي چې د کونجکچ چټکتیاته (ګونومتري شمیرنی ته) په ګراد- او لینده کچ، دکونجفنکشن په استعمال د ولاړکونجیز - او عمومي درېګوډیود تریګونومتري فرمولونو په استعمال د تریګونومتري افادو په څیره بدلون ته پر مختګ ورکړي یا پر مخ بوزي. غواړم چې د بنسټیزې هندسي کلیمی او قوانین مو د هرڅه له مخه مخ ته پراته وي . خو سره له دې به هم ددې کتاب لوستونکی د بنسټیزې هندسی سره بلد وي ۰ زه به کوښښ وکړم چې ځنی هندسي کلیمی،کم له کمه په څیره کی ګرانو لوستونکو ته، په مناسب ځاي کی وړاندې کړم یا بهتره په پښتو ونوموم .

٦ ۰ ١ بنسټیزه هندسه

٦ . ١ . ١ ټکی او کرښه point (stright) line

ټکی او کرښه د بنسټیزې هندسی مهمی بنسټیزې کلیمی دي. دا ابسترکتی(خیالي، فکري ، نه لیدیدونکی) کلیمي په خورا تیك راوړوندود هم نه شي تعریف کیدی، مګر ددوي ترمنځ موجودې اړیکي کیدی شي په شمیرنه کی په خورا زیاتو ډولونو استعمال شي، ٦

(c) ketabton.com: The Digital Library

سره له دې هم هڅه کیږي چې ټکی او کرښه لیدوړ وګرځول شي لکه څنګه چې په ۴ . ۱ - امه برخه کې پیښ شوي. دلته کرښې په g ښوول شوي او غشی یې ناپای پراخوالی په ګوته کوي. دا د غشي انځورونه دکرښې په انځورونه کې پرېښول کیږي یعني نه انځوریږي، که دا مو و ناریښتیاو ته ونه هڅوي ۰ ټکی کیدی شي د دوه کرښو غوڅځاي په څیر ونیوله شي) څیرې په غور وګورئ

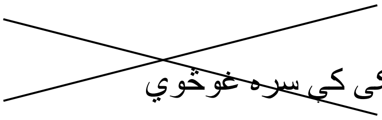
وړانګه ray A

کرښه g

(stright line

بند کرښه یا ټوټه کرښه Line segment

A B



دوه کرښې په ټکی کې سره غوڅوي

د بیلګي په توګه لاندې ویناوې باور یا صدق لري

- ددوه ټکو له لارې یوه کرښه ټاکل کیږي(پورته څیره وګورئ)، چې دا کرښه دا ټکي خوندي ساتي یا پخپل بر کی لري .

- دوه ناغبرګي او په یوه هواره کې پرتې کرښې یو بل ټیك په یوه ټکي کې سره غوڅوي (پورته څیرو کې کتل کیږي)

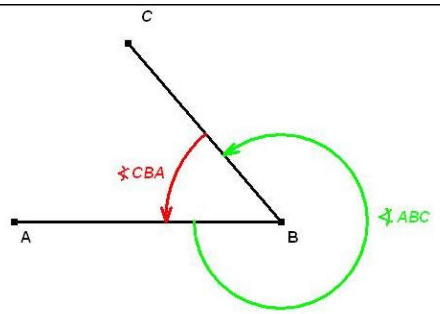
یوه وړانګه s_1 له یوې لور په یوه ټکي A بنده کرښبرخه ده) (او یوه پایکرښه له دوه ټکو A او B بنده یا راګیر کرښه ده)

(c) ketabton.com: The Digital Library

----

٦ . ١ . ٢ کونج angle یا زاویه

که یوه وړانګه s_1 د خپل پیلځاي څخه په S و خپل اخر ځاي s_2 (څیره ۴ . ۲الف) ته یووړه شي، نو دا وهل شوې هواره دننني هواره، s_1 او s_2 پښې او په همدې ډول د S کونج α (الفا) ککره بلل کیږي.

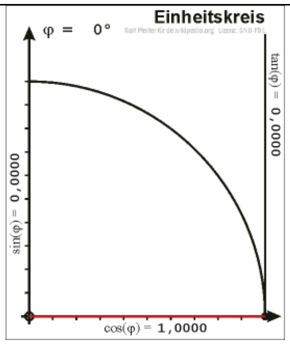


که څرخون د ساعت نخښې په څټ یا مخامخ وي نو دا څرخونلورمثبت یا زیاتیزه او همداسې کونج مثبت یا ز یاتیز کونج بولو او بل ډول څرخونلور یې منفي- یا کمیز کونج بلل کیږي.

په مخامخ ه کې سور په نخښه شوی کونج ننوتی او زرغون په نخښه شوی کونج وتلی کونج دی

کیدی شي چې یو کونج x په ګراد اندازه شي

$$x = a^\circ \qquad (6.1)$$



په داسې حال کې چې ولاړکونج، کوم چې یو په بل ولاړې کربښې $g_1 \wedge g_2$ (او ته دې پام وي) یې جوړوي، له 90° سره مساوي وښایو(لاندې څیره ، که نورېځیرې و نه کښل شوې) . کیدی شي چې کونج x (ایکس دلته د الفا په ځاي دی، توري پروانه لري، چې کوم وي)په لینده اندازه هم ورکړ شي

$$x = b \qquad (6.2)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورته یونګردۍ کې ګورو، چې هر ډول کوجونه کښل او ټاکل کیدی شي

په دې ډول ټاکل شوی ګردۍ لینده په وړانګه(شعاع) ویشل کیږي. له دې لارې x د یوه بې نومه ګڼ په څیر لاس ته راځي، چې د ډیرو ګڼلو لپاره ګټور دی. یوه په لینده اندازه ورکړ شوی کونج x په یوې یوونګردۍ) r = 1 (کی انځوروړ دی، چیرته چې دا د اړوند ګردیلیندې اوږدوالی ښاي (څیره په پورته کې کښل شوې)

په دې پسی یا ددې په تعقیب یو د 360° کونج د یوونګردۍ چاپیری) محیط(په ګوته کوي . له دې امله د ګرادGradmass (درجکچ (او)ګردي-) لیندې اندازې یا لیندیکچ یو په بل بدلون ممکن کیږي.

$$a^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} b = 57,296^\circ b, b = \frac{\pi}{180^\circ} a^\circ = 0,017453a, ...(4,3)$$

پام : په پورته څیره کې هر ډول کونجونه که له ۳٦۰ درجو زیات هم وي کره کیدی ، که ځیرې روښانه نه وو لیکل شوي، چې دا شپږمه برخه ده یا ٤ – مه برخه لیکل شوي وي،نو هغه دې ،نو ٤ دې په ٦ بدل شي۰.

د لاندې بیلګو له لارې دې د کونجورکولو یو څو امکاناته ونومول شي او په همدې ډول دې د »شمیراوړون اړیکی« یاپه بنه توګه د شمیر یو په بل بدلون اړیکی وڅیړل شي.

یادونه : زما شمیرونی یو ډول پرابلم لري او هغه دا چې د دقیقي او ثانیي نخښې هغهسې، چې ورسره بلد یو نه کاږی، دا به راته ګران لوټونکي وبخښي۰

بیلګه .٦. ۱ :

کونج a = 47°12'36" دې په لینده اندازه واړول شي. موږ لمړی کونج په دڅیمالو یا لسیزو برخو اړوو، دا په دې مانا چې ورکړ شوې دقیقي او ثانیي دې په ورته لسیزمات افاده شي:

12’=720“

720 = '12 "

(c) ketabton.com: The Digital Library

پس په ټولیزه توګه “756 = “720’+36 له دې لاس ته راځی

$1' = (1/3600)°$ (<=)

له دې وروسته په همدې توګه $756.(1/3600)° = 0,21°$

له دې لاس ته راځي : $a = 47°12'36'' = 47,21°$

په عمومي توګه باور لري

$$\alpha' = (\frac{\alpha}{60})°, \beta'' = (\frac{\beta}{3600})$$

د(٦ . ٣) پسی باور لري $b = 0.017453.47,21 = 0,826$

دلته ځیرې راځي، خو د دې ځیرو په ځاي به موږ په پورته ځیرو بسیا وکړو، دا چې موږ تراوسه د لږ څه ځمککچ سره بلد یو (د دې لپاره دې زما د ځمککچ کتاب وکتل شي)، نو دا کومې ستونځې نه رامنځ ته کوي.

بیلګه ٦ . ٢ :

کونج $\frac{\pi}{7}$ دې په درجه کچ یا -اندازه) لسیز او سکساګسیمال (لاتین :یوناني: د بابلیانو په ۶۰ اباد شوی ګنیز سیستم(ځاي ارزښت سیستم) ویشنو (برخو) ورکړ شي. د (۳ . ۴) له

مخی لرو

$a° = 57,296°.(3,14/7) = 25,701°$ د $0,701°$ اړولو په دقیقو او ثانیو ورکوي

$0,701° = 0,701.60' = 42,06'$, $0,06' = 0,06.60 = 3,6''$

پس داسی دی $\frac{\pi}{7} = 25,701° = 25°42'3,6''$

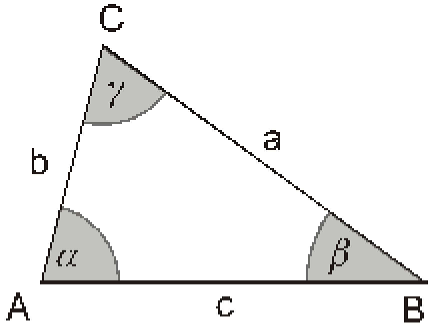
(c) ketabton.com: The Digital Library

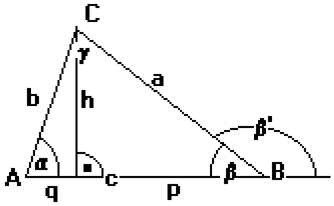
دا پورته داسی لوستل کيږي ۲۵ درجي، ۴۲ دقيقي او ۶ ، ۳ ثانيي

۳ . ۱ . ٦ دريګوډی

يادونه: موږ دلته بيا د نومونو(نومه ونو) د ستونځو سره مخامخ کيږو. هغه هواره چی له کرښو راګير وي دلته له دريې کرښو يا هغه هواره، چې ګوډونه ، کونجونه يا ګوټونه ولري، موږ دا ۰۰۰ کونجي یا۰۰۰ ګوټې او يا ۰۰۰ګوډي بولو. ځموږ ژبه او الماني تر يوې ډيرې اندازی په ترکيبي نومونو کی او يا نورو نومونو ډولونوکی يو بل ته ورته دي او په الماني کی هم دې ته ځانګړي نومونه شته. ماته يو کونج چي له دباندې ورته کتل کيږي او د يوې بندې هواره وي ګوډ مناسب ښکاريږي. موږ په ورځنۍ يا مروجه ژبه کی وايو ، چی د هغه کلی په ګوډ کی .... دا تخنيکي هم درست دی، ځکه چی دا هم دلته مات دی يعنی ګوډ دی. که يو کونج له دننه وګورو نو هغی ته موږ تل کونج وييلی. که څوك په يوه ګوټه کی ناست وي نو وايي، چه په هغه کونج کی دلته نو بيا ګوډ نه وايي. ما د کتاب په اوږدو کی لمړی ځل د ټولو لپاره کونج کارولی، که ټول مو همغسی سم يا اصلاح نه کړل ، نو فکر کوم چی د ګرانو لوستونکو به ورته پام وي .

په ټوليزه توګه په يوه سطحه يا هواره کی له پرتو کرښو g2 , g2 , g1 څخه يو مثلث يا دريګوډی جوړيږي، چی ګوډونه يی C . B . A ، اړخونه يی c. b. a او کونجونه يی α, β, γ دي (د مثلث دننه کونجونه يا زا ويې او دباندي ګوډونه دي، چې موږ يط په پښتو کې همداسې بولو)) مخامخ څيرې دې وکتل شي





(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې جملې باور لري چې بې له ښوونې دلته راوړل کيږي

- په دريګوډي کې د کونجونو زياتون 180° درجې دی يا π دئ
- يو دباندنی کونج د په نه پراته دنننې کونجونو د زياتون سره مساوي ده، له دې امله د

يوه دريګوډي د دباندنيو کوجونو زياتون 360° يا π 2 دی٠

- د يوه دريګوډي د اړخونو نيمي په يوه ټکي کی يو بل سره پري کوي، چې دا په

همدې وخت کی د دريګوډي » دروندټکی يا دثقل مرکز « دی. اړخنيمي يو بل په

تناسب د۱ : ۲ پرې کوي يا په پښتو:

د اړخونو ځانڼيونه يی۱ :۲ ده) په ښيره کې وګورئ) د يوه دريګوډي منځولاړې

يو بل په يوه داسی ټکي کی سره غوڅوي، کوم چې په همدې وخت کی د چاپير ګردي) هغه ګردئ يا دايره چې دريګوډی په خپل دننه کی نيسي يا بهتره، د دريګوډي خونديګردی(منځټکی دی)٠

د يوه دريګوډی کونجنيمي يو بل په يوه ټکي کی سره پرې کوي، چې دا په همدې وخت کی د دننه ګردی) ګردئ چې د دريګوډي

په دننه کی ده يا ګردئ يا دايره کې خوندي دريګوډی (منځټکی دئ) لاندې کې بې ښيره شته) د يوه دريګوډي جګی يا د ارتفاع کرښی په يوه ټکی کی سره غوڅوي.) ښيرې ټولې لاندې کتل کيږي

د هوارې ځمککچ کې غوره ټکي دا لاندې دي :او په دوي پورې لاندې ښيرې اړه لري، چې تکرار راځی، خو پروا نه لري٠

Höhenschnittpunkt (*H*), Orthocenter د جګيو غوڅټکی

(c) ketabton.com: The Digital Library

(*U*) **Umkreismittelpunkt** circumcenter ·د دباندنۍ- یا په راتاو ګردی منځټکی

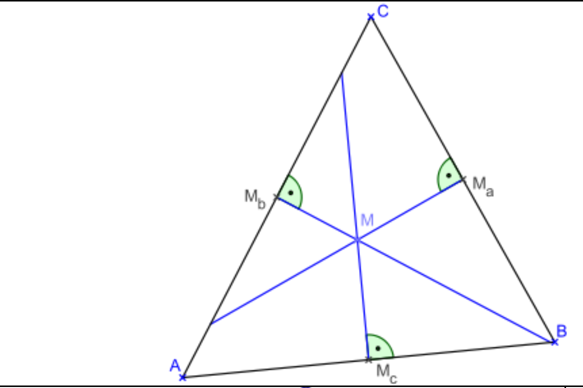
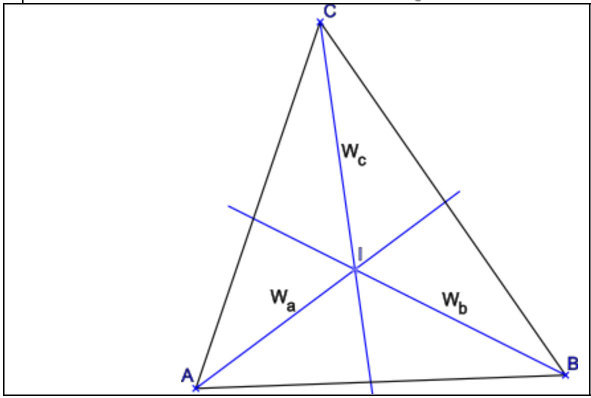
Seitensymmetralen), seid symetry ·د اړخسیومتریو غوڅټکی

(*I*) **Inkreismittelpunkt** inscribed circle, incircle den ·د دننه ګردی منځټکی

Winkelsymmetralen r · د کونجسیومتري

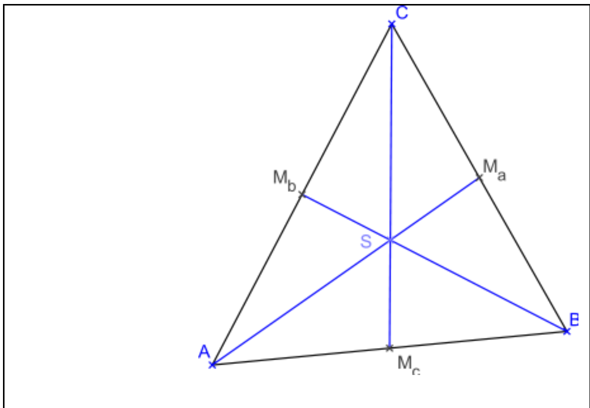
r (*S*) **Schwerpunkt** centroid · دروندټکی

Seitenhalbierenden) median ·اړخنیمی

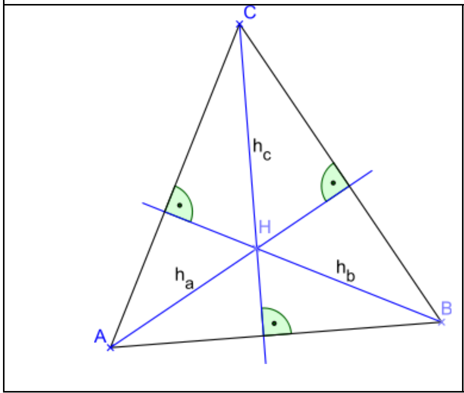
	مخامخ خیره کې مثلث یاد دریګوډي په منځ عمود یا - ولاړې کرښې ښایي
	دامخامخ مثلث هغه کرښې ښایي، چې کونج نیموي او موږ یې کونجنیمی (ناصف الزاویه) بولو (په پورته خیره په نیم اړخ ولاړې کرښې دي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

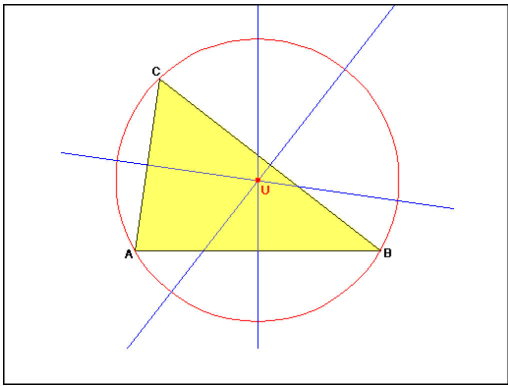
لاندې مثلث کې هغه کرښې دي، چې له کونج څخه اړخ نیموي٠ موږ یې اړخنیمی یا ناصف الاضلاع بولو٠

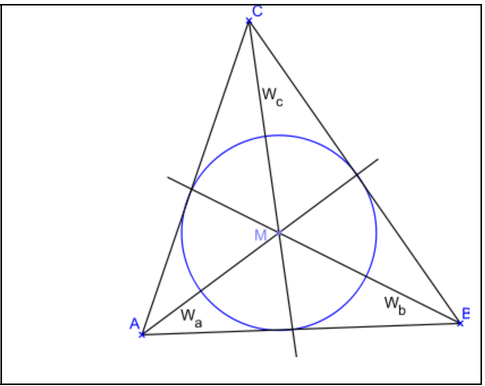


لاندې څېره کې د مثلث هغه کرښې دي، چې له کونج په اړخ ولاړې دي٠ دا د اړخ جګوالی په ګوته کوي، چې ما جګی یا ارتفاع بللي دي٠



په پورته څېره کې کونجنیمی دي ، چې منځ ټکی یې د خوندې ګردی یا دننه ګردی منځټکی هم دی



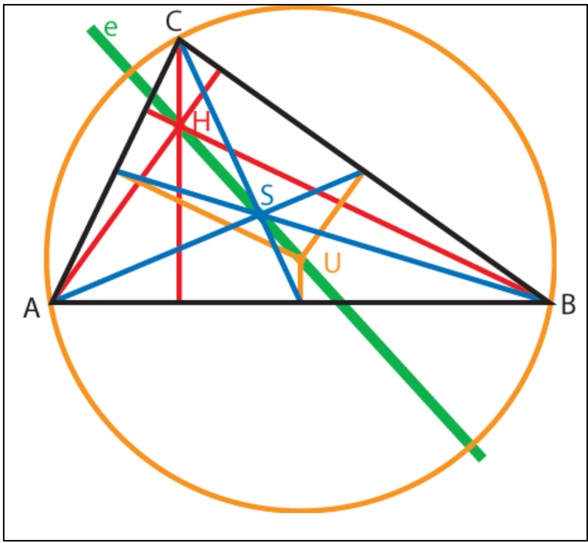


(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورته کینه خیره کې د اړخ په نیمه ولاړې کرښې دي، چې غوښتکی یې د په راتاو ګردی یا چاپېرګردی منځتکی دی۰

دا په یو ډول درې کرښې هرې درې یې په یوه ټکی کې سره غوځوي۰

که د یوې درېګوډی د منځولاړو په غوښتکي یوه ګردی داسې ووهل شي، چې د ګردی کږه درېګوډئ له یوه ګوډ څخه تیره شي، نو دا ګردی د درېګوډي له نورو دوه ګوډونو څخه هم تیریږي۰ که درېګوډی تیره کونجیزه وي، نو د ګردی منځتکی د درېګوډي په دننه کې پروت دی ، که درېګوډی ولاړکونجیزه وي، نو کونج د ګردی په هیپوتینوز ې یا اوږده اړخ پروت دی (د تالس جمله دې وکتل شي) او که درېګوډی پڅکونجیزه وي، نو منځتکی له درېګوډی دباندې پروت دی۰



که درېګوډی ABC وي ، S دروندتکی، U د چاپیریالګردی منځپکی ، او H د جګیو غوځپکی وي، نو کرښه په لاندي ځاننیونه یا تناسب پراته دي :دا په لاندې خیره کې کتل کیږي ۰

$$\overline{HS} : \overline{SU} = 2 : 1$$

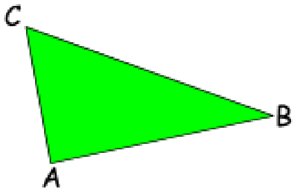
۶ . ۱ . ۴ برابرارزښتوالی او ورته والی یا مشابهت Congruence and Similarity

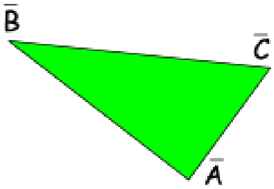
دوه دریګوډي ABC او A'B'C' یو بل سره کونګروانیخ یا برابر پټووني دي یانې براربارزښته دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

ABC ≡ A'B'C'

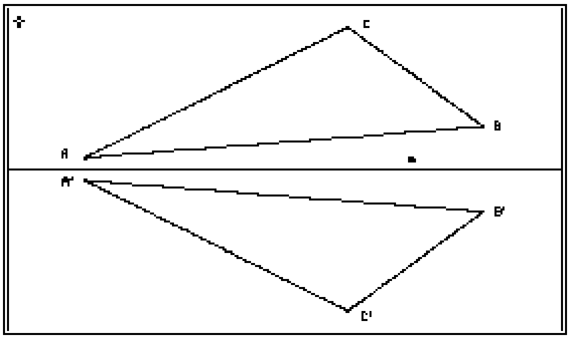
(4.4) که وکښول شي یانې که هرې لورته یووړل شي(وکښول شي) او وڅرخول شي او اینه ونه یا هندارونه یې یو بل پوره پټ کړي یا یو په بل پوره پریوځي (لاندې ځیر)





که دریګوډي سره کونګروانیخ وي، نو باید کم له کمه په دري اصلي توټو (اړخونو او کونجونو) کی یو بل سره مساوي وي

په ښټ یی هم باور لري S اړخ او W کونج په ګوته کوي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

جملې: دريکوډي ټيك هلته کونګروا ینځ دي چی یو بل سره مساوي شي په

۱ - دري اړخونو کی SSS

۲ - دوه اړخونو او ددې اړخونو ترمنځ کونج کی SWS

۳ - دوه کوجونو او د لوي اړخ ته مخامخ کونج کی SSW

۴ - یوه اړخ او ددې اړخ دواړه خواو کونجونو کي WSW,

د دې جملو په ځت هم باور لري، دا په دې مانا چی که دریګوډي په کونګروا ینځ جملو کی ورکړشوو اصلي برخو کی سره برابر وي، نو دا کونګروا ینځ دي. د کونګروا ینځ جملو په بنسټ کیدی شي په ځانګړي توکه دریګوډیجوړښت سرته ورسول شي، کوم چی د کونګروا ینځ جملو کارونی په ځیر لیدل کیدای شي .

د دوه هوارو شکلونو ورته والی (Ähnlichkeit)هلته مخ ته پروت دی، کله چی په همغو یا اړوند درې کونجونو کی یو بل سره برابر وي او د همغو یا اړوند اړخونو تر منځ یی تناسب یا ځاننیونه موجود وي .

دا جملي هلته هم باور لري که د کونګروا ینځ له جملو ورته جملو ته ورشو

جمله:

دوه دریګوډي ټيك هلته یو بل ته ورته دي که یو دبل سره برابر وي، په :

۱ - دري اړخونود اوږدوالي ترمنځ ځان نیونی یا تناسب کی

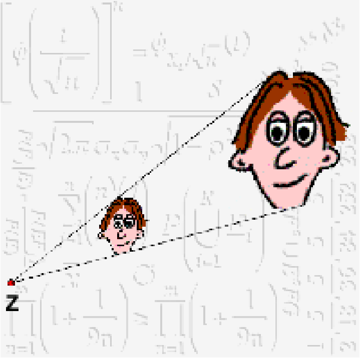
۲ - د دوه اړخونو د اوږدوالي ترمنځ تناسب او ددې اړخونو ترمنځ کونج کی

۳ - د دوه اړخونو او د لوي اړخ مخامخ کونجونو ترمنځ تناسب یا ځاننیونه کی

۴ - دوه مساوي پرتو کونجونو کی

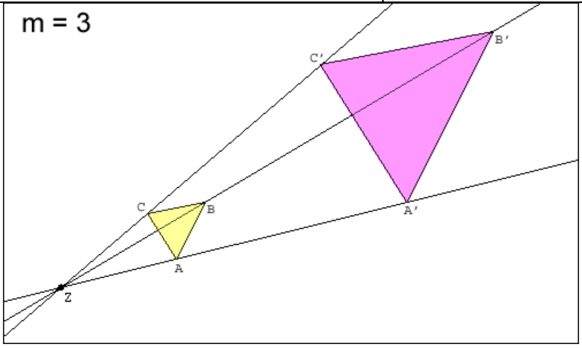
(c) ketabton.com: The Digital Library

دا مخامخ ځیرې ورته دي ، که د دې دوه کرښو پای سره په یوه کرښه وتړی او د یوه اړخ د د په خوښه ټکي سره د مخ ته کرښې سره غبګه کرښه وباسی، نو دوه ورته درېګودي لاس ته راځي

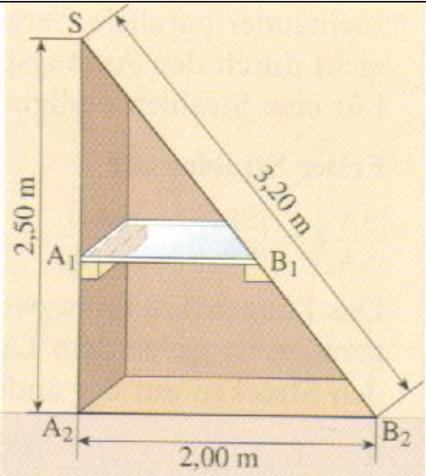


په لاندې ځیره کې کښل شوي دریګودي ورته دي، دا په دې مانا چې باور لري:

$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

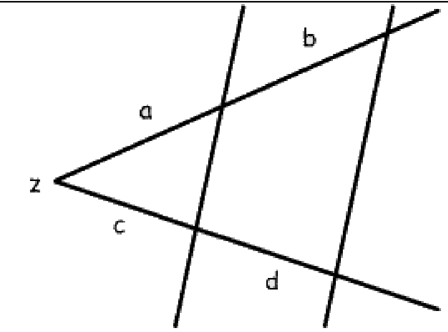
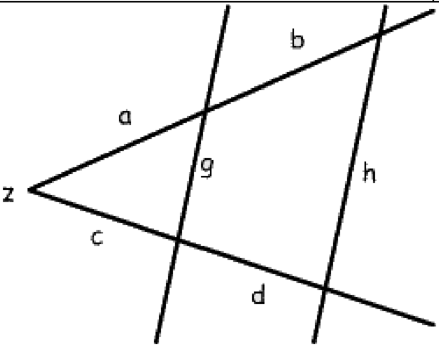


د ورته جملو سره خپلواني جملې د وړانګو جملې دي:

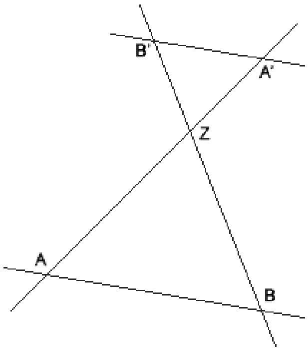


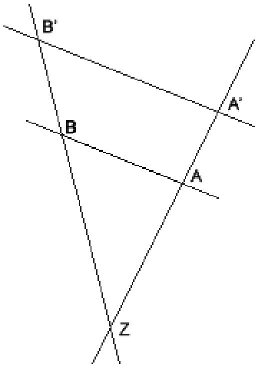
په دې پورته ځیره کې درېګودي یو بل ته ورته دي٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

د وړانګې لومړۍ جمله: دوه له يوه ټکی وتلي وړانګې ، که له دوه غبرګو کرښو غوڅې شي نو ټوټې يې لاندې اړيکی سره لري۰ $\frac{a}{(a+b)}=\frac{c}{(c+d)}$ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$	
د وړانګې دويمه جمله: که له يوه ټکي دوه کرښې وکښل شي او دا بيا له دوه غبرګو کرښو غوڅې شي، نو د ټوټو ترمنځ دا لاندې اړيکی لري، دا ته والي له جملو ده۰ ټکی چې څنګهدي په پام کې نيول کيدی شي او د دې او پورته جملې ترمنځ توپير ته هم پام نيولی شو $\frac{g}{h}=\frac{c}{(c+d)}$ $\frac{g}{h}=\frac{a}{(a+b)}$	

يا دالاندې، چې هرڅه يې روښانه دي





(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\overline{ZA'} : \overline{ZA} = \overline{ZB'} : \overline{ZB}$$
$$\overline{ZA} : \overline{AA'} = \overline{ZB} : \overline{BB'}$$
$$\overline{ZA'} : \overline{AA'} = \overline{ZB'} : \overline{BB'}$$

$$\overline{A'B'} : \overline{AB} = \overline{ZA'} : \overline{ZA}$$
$$\overline{A'B'} : \overline{AB} = \overline{ZB'} : \overline{ZB}$$

(دا لاندې د ليکنې له لارې روښانه شوې څيره دې ګران لوستونکي وکاږي)

که درې په يوه ټکي کی پريکيدونکی کرښي g1 , g2 او g3 د دوه غبرګو) موازی(کرښو g4 او g5 لخوا پرې شي، نو د بيلګي په توګه له ۴ . ۱۰ کښل شوي څيرې څخه لاندې اړيکي لاس ته راځي:

. 1 $OA1 : OA2 = OB1 : OB2 , OA1 : OA2 = A1B1 : A2B2$

دا په دې ماناچی په وړانګو پرتي ورته برخی په مساوي تناسب يا ځانيوی سره پرتی دي:

. 2 $A1A2 : B1B2 = OA1 : OB1 = OA2 : OB2$

دا په دې مانا چی: په وړانګو پرتي ورته برخی په مساوي تناسب يا ځانيونی پرتی دي لکه اړونده، د ککری اندازه شوې برخي چی په وړانګه پرتی دي.

۳ - $A1A2 : A2A3 = B1B2 : B2B3 , A1A2 : B1B2 = A2A3 : B2B3$

دا په دې مانا چی: په غبرګو پرتی کرښي په همغه برخوکی يو له بل سره په مساوي تناسب يا ځانيونی پرتی دي

د وړانګو جملی هم باور لري، که د دوه غبرګو په څير رامنځ ته شي يا که ککره د غبرګو ترمنځ پرته وي) په دې حالت کی دې وړانګي د کرښو په ځاي بدلی يا وليکل شي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۴ . ۳ : د اړخونو a او c اوهمداسی د کونج الفا څخه دې

یو دریګوڼی جوړ شي. لاندې حالتونه تر څیړني لاندې نیسو

1 - $a > c$

موږ کاږو $AB = c$ او په ټکي A کونجالف

د c په کچه کاږو. په B یو ګردبلینده کاږو د a

په کچه چی د الفا ازاده پښه په ټکې C کې غوڅوي)

څیره دې ګران لوسونکی پخپله وکاږي، روښانه ده

2 - $a < c$

دلته درې امکاناته شته دی(د دې درې امکاناتو څیره وکاږی)

۲ . ۱ : د ګردیلینده په B د a په اندازه د α ازاده پښه په دوه هغوټکو کي پرې کوي،
په کومو کی چی اوبی یواځنی نه دی.

۲ . ۲ : ګردبلینده د α ازاده پښه لمسوي.

۲ . ۳ : ګردبلینده د α اندازه پښه نه غوڅوي .

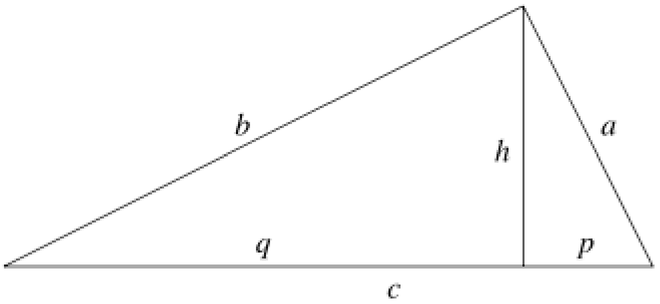
۳) $a = c$

ګردبلینده په B د a په اندازه د α ازاده پښه په دوه ټکو ، په نامه A او C کي پرې
کوي. دې لپاره چی حالتونه ۲ - او ۳ - له منځه لرې او تل یواځنی حل ولرو، نو $a > c$
نیونه په دریم کونګروانیخ جمله کی ضرور ده

۶ . ۱ . ۵ .ولاړکونجیز دریګوڼی مثلث قایم الزاویه

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مختلفو دریګوډیو څخه موږ په لاندې برخه کی ولاړ کونجیز دریګوډی ترڅیرنی لاندې نیسو .په ولاړکونجیز دریګوډي کی د ولاړ کونج مخامخ اړخ هوپوتینوزې) Hypotinuse(بلل کیږي، نور دواړه اړخونه کاتیتونه یو: کاتیت (Katheten)بلل کیږي. هغه ولاړکونجیز دریګوډي ته روځنی یا ورسره بلدې یا مروجی په نخښه کونه یا لنډ په نخښونه به له څیرې ۴ . ۱۳ څخه واخلئ



په ولاړکونجیز دریګوډي کی دا لاندې راوړل شوې اړیکی باور لري چی دلته یی بی له اوبی)ښوونی(راوړو:

یادونه : په ولاړګوډیز کې د ولاړکونج مخامخ اړخ اوږد اړخ بولو او د ولاړ ګوډ پښې ولاړ اړخونه، چې غوښتوني کونج ته مخامخ   مخامخ اړخ (پښه) او په موخه ور کونج پرته پښه په کونج پروت اړخ (- پښه) بولو او یا په دې لاتین نوموونو یانې مخامخ کاتېت او (په کونج) پروت کاتېت.

د پیتاګوراس (Pythagoras) جمله:

په ولاړکونجیز دریګوډي کی د هیپوتینوزې مربع   هواره د   دواړو کاتیتو د مربع هوارو زیاتون سره برابر یا مساي ده:

$$c^2 = a^2 + b^2 \qquad (6.5)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دکاتیتو(د ولاړاړخونو یا د مخامخ او په پراته اړخ(ضلع)) جمله:

په ولاړکونجیز دریګوډي کی د کاتیت مربع هواریزمساوي ده د ولاړ کونجي هوارې سره، چی له هیپوتینوزې او ددې کاتیت له پرویکشن یا پریوستون څخه لاس ته راځی:

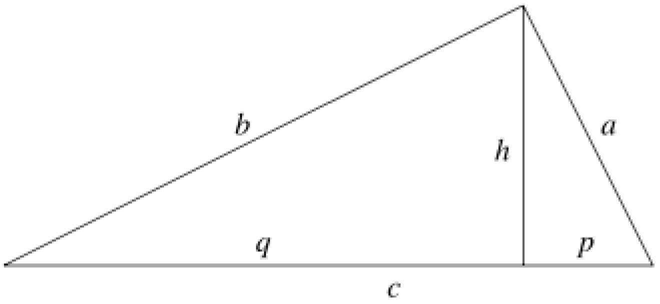
$$a^2 = p.c , b^2 = q.c \qquad (6,6)$$

جګجمله :

په ولاړکونجیز دریګوډي کی د هیپوتیزې په جګي مربع هواریزمساوي ده د هیپوتینوزې (لوي اړخ) برخو څخه منځ ته راغلې ولاړکونجي هوارې سره

$$h^2 = q . p \qquad (6. 7)$$

یا په لاندې کې لنډ بیا ورکړ شوي



لنډ: (ددې لپاره دې پورته څېره وکتل شي)

پیتاګوراس جمله : $c^2 = a^2 + b^2$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اویکلید د کاتیتونو(پروت – ،مخامخ اړخونو) جملې

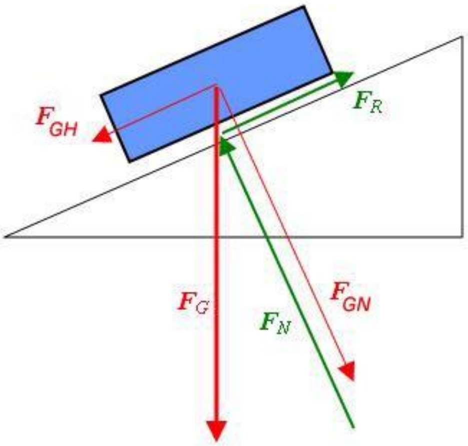
$$a^2 = c \cdot p$$

$$b^2 = c \cdot q$$

$$c = p + q$$

د اویکلید جګجمله $h^2 = p \cdot q$

بیلګه ۴ . ۴ : (ځیره نه ده کښل شوې، د ې ته دې ګران لوستونکج فکر وکړي۰ دا یوه فزیکي دنده هم ده(ځېره وکښل شوه، نخښې هم لړ بدلې دي)) د یوه بدن د وزن G تجزیه څرګندوي (د بدن دروند ټکی) دا د فزيك له مخی هغه ټکی دی چی د بدن ټول وزن پرې پروت وي) KSP =)چی په یوه مائله هواره پروت دی، دا وزن مائلي هوارې سره غبرګ په یوه کښته کشونکی زور FH او په مائلی هوارې نیغ ولاړ ، ولاړ) عمودي(زور) قوه FN)تجزیه کيږي. د ښوولو ده چی، دریګوډي د ABC KSPاو FN او FH له خوا ټاکلي دریګوډي سره ورته دی

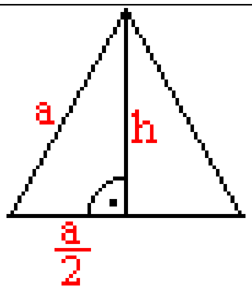
	یادونه: په لیکنه کې زور یا توان د لاندې ځېرې سره داسې بدلو:شین تنیا د مستطیل شکل G دی $F_H = F_{GH}, F_N = F_{GN}, G = F_G$ ګوډونه : له پورته ګوډ A کښته ښی لور ته ګوډ C کښته کيڼ لور ته ګوډ B په ګوډ A کونج α ، په ګوډ B کونج β

(c) ketabton.com: The Digital Library

داچې G||AC ځغلي، نو FH او G یو کونج α جوړوي. دا چې $\beta = R - \alpha$ ده، نو FN او G کونج β جوړوي، دواړه دریګوډي په دې برسیره په ولاړکونج کې یو بل ته ورته دي۰

یادونه : داسې بیلګې، چې ښيره یې نه شم ایستلی که وي هم بدې نه دي، ګران لوستونکي کړای شي،چې داسې ښيرې پخپله وباسي، دا دې یو تمرین وي۰ زما زړه نه شي، چې له لیکلو یې تیر شم۰

بیلګه ۴ . ۵ : په یوه مساوي اړخیز دریګوډي کې دې (لاندې ښيره) جګې و شمیرل شي .د ٦ . ۴ (له مخې لرو(جګې په همدې وخت کې د مخامخ اړخ نیمی هم دی، دا په دې درېګوډي کې وکاږی)



$$h^2 = a^2 - (a/2)^2$$

$$h^2 = a^2 - a^2/4$$

$$h^2 = (3/4)a^2$$

$$h = (\sqrt{3}/2)a$$

٦ . ۲ په ولاړکونجیز دریګوډي کې د اړخونو تناسب

د کونجکچ لپاره د اړخونو تناسب هم مساعد دی، چې یوه ولاړکونجیز دریګوډي کې جوړیږي(لاندې ښیره). که د کونج α مخامخ اړخ یا ـکاتیت a gegkathete د مخامخ اړخ په ښېر وښایو، د b اړخ په β پروت اړخ ankathete او hypothenuse لوي اړخ وي، نو په ولاړکونجیز دریګوډي کې لاندې اړخځانئیوني منځ ته راځي یا جوړیږي

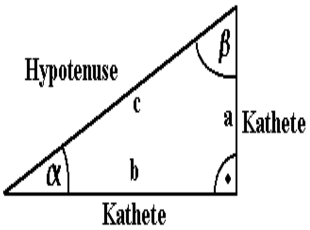
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{katheta}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{kathetb}{c}$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{opk}{ank}$$

$$\cot\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{ank}{opk}$$



د وړانګو جملو له امله دا اړیکي یا تناسب یوائي د کونج   په واك کی دی. که په پام کی ونیول شي چي $\beta = 90° - \alpha$ دی، نولاندې اړیکی لیکلی شو

$$\sin\beta = \frac{b}{c} = \sin(90-\alpha) = \cos\alpha$$

$$\cos\beta = \frac{a}{c} = \cos(90-\alpha) = \sin\alpha$$

$$\tan\alpha = \frac{b}{a} = \tan(90-\alpha) = \cot\alpha$$

$$\cot\beta = \frac{a}{b} = \cot(90-\alpha) = \tan\alpha$$

له دې لیدل کیږي، چی د دې څلورو ارزښتونو د پیداکولو لپاره دوه ګنجدولونه پوره دي یا بسیا کوي   .وړپسي یا ددې په تعقیب پیژندوړ دي

$$\tan\alpha = \frac{in\alpha}{\cos\alpha}, \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\cot\alpha};.....................(6,10)$$

برسیره پردې د پیتاګوراس د جملی په پام کی نیولو سره لرو

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;.......................(6,11)$$

$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}; 1 + \cot^2 = \frac{1}{\sin^2\alpha};...........(6,12)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

٦ ۰ .۳ په یوونګردۍ کی د کونج فنکشنونه (-بلواك)

په ۴ . ۲ برخه کی $\sin\alpha; cis\alpha; \tan\alpha; \cot\alpha$ یواځي د لیدیدونکو (Konkrete اړختناسبونو لپاره په یوه ولاړکونجیز دریګوډي کی ځاي په ځاي دي. دا ویناوې یواځي یا په ځانګړې توګه د $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} (0 < \alpha < 90°)$ لپاره تعریف دي. که د α خپلواك واریابل په څیر ونیسو، نو $\sin\alpha$ او داسی نور فنکشنونه راپه ګوته کوي چی په برخه ۱۵ کی انځور دي او کوجنفنکشنونه بلل کیږي. په یاده شوې برخه کی) څیرې ۱۵ . ۲۰ الف او ب

ددې لپاره چی د دې تعریفونو پراخوالی په زړه پورې کونجونو لپاره ممکن شي، نودا مو د یوون ګردي باندې مخ نخښی په واك کی کرښو ته لاربښودوي .د لته ټولی کرښی) د لته به له کرښو څموږ مطلب پای کرښی وي(، چی پخپله او یایی پرویکشن یا پریوستون یا پریوتنه په وړانګو s1 او s2 پروت وي زیاتون مخنخښه) مثبت مخنخښه(لري، ټولی کرښي او یایي پرویکشنونه پریوستونونه چی په وړانګو s'1 او s'2 پرتی وي کمون مخنخښه (منفي مخنخښه) لري .د لاندې څیرو کښلو سره کیدی شي تعریفونه ۸ . ۴ (د په خوښه کونجونو لپاره پراخه شي

$$\sin\alpha = \overline{QP}, \cos\alpha = \overline{OP}, \tan\alpha = \overline{AD}, \cot\alpha = \overline{BE}; \qquad (6,13)$$

د کونج α لپاره چي په لومړي څلورمه یا کوادرانت Quadrant (لاتین: د کواوردیناتسیستم څلورمه کی پروت دی(لاندې څیره له کیڼ و ښی لورته کښته دا په فرمولونوکې کارول شي توري ساده اینسوول کیږي۰ په څیرو کې شنې کرښې د ساین دي او سرې کرښې کوساین دی او کونجونه ټول په ترتیب له یوه سره پهالف سره په نخښه کیږي، چې د دې لارې تانجنت او کوتانجنت هم پیدا دي او توري هم اینبوولی شو)، دا تعریفونه د هغو تعریفونو سره سر خوري، کوم چی په ولاړکونجیز دریګوډي کی تر څیرنی نیول شوي دي .په پام کی دې وي چی کونج α په لینده اندازه کی د ګردیلیندې اوږدوالي AP سره مساوي دی، چیرته چی په زیات څرخون له 2 څخه لوییدلی هم شي .برسیره پر دې له تعریفونو) ۱۳ . ۴ (څخه لاس ته راځي، چی ساین-او کوساین فنکشنونه، پریود :°360) 2 (periode (تل تکراریدونکی ، بیرته

(c) ketabton.com: The Digital Library

راګرځيدونکی(، تنجنت - او کوتنجنت فنکشنونه پريود(180°) لري .

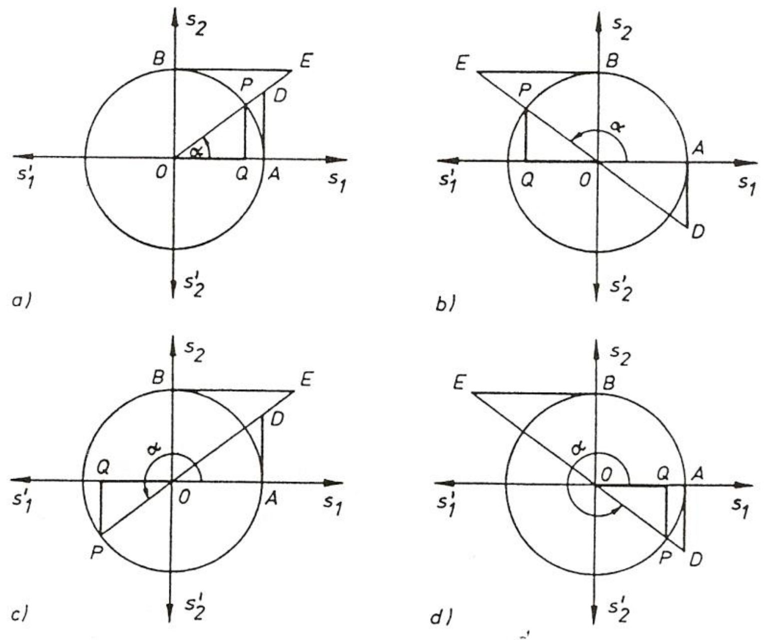


Bild 4.17

پس لرو

$$\sin(\alpha + 2\pi) = \sin(\alpha + 360°) = \sin\alpha$$
$$\cos(\alpha + 2\pi) = \cos(\alpha + 360°) = \cos\alpha; .... (6.14)$$
په
$$\tan(\alpha + 2\pi = \tan(\alpha + 360°) = \tan\alpha$$
$$\cot(\alpha + 2\pi) = \cot(\alpha + 360°) = \cot\alpha$$

ټوليزه)عمومي(توګه لرو

$$\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin(\alpha + k.360°) = \sin\alpha$$
$$\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos(\alpha + k.360°) = \cos\alpha; .... (6.15)$$
$$\tan(\alpha + 2k\pi = \tan(\alpha + k.360°) = \tan\alpha$$
$$\cot(\alpha + 2k\pi) = \cot(\alpha + k.360°) = \cot\alpha$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټولو ټولګټونو ....3 , 2, 1,0,1-,2-,3-.. = k لپاره

یادونه :د کوادرانت لپاره ځلورمه لیکلی شو خو دا باید په پام کی وي چې دا په کواوردیناتسیستم کی دی

جدول یا تخته ۴ . ۱ د کونج-یازاویو توبعو وخنخښه

	لومړۍ ځلورمه $(0;\frac{\pi}{2})$	دویمه ځلورمه $(\frac{\pi}{2};\pi)$	دریمه ځلورمه $(\pi;\frac{3}{2}\pi)$	ځلورمه ځلورمه $(\frac{3}{2}\pi;2\pi)$
sinx	+	+	-	-
cosx	+	-	-	+
Tan x	+	-	+	-
cotx	+	-	+	-

برسیره پر دې لاندې اړیکې باور لري:

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha\,,\quad \cos(\pi-\alpha)=-\cos.\alpha$$
$$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha\,,\quad \cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha \qquad (4.16)$$
$$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha\,,\quad \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha\,,$$
$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha\,,\quad \cos(-\alpha)=\cos\alpha$$
$$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha\,,\quad \cot(-\alpha)=-\cot\alpha$$

بیلګه ۴ . ۶ : د جبشمیروني سره د کونجفنکشن د $\alpha = 446^\circ$ لپاره پیداکوو. دا چې α په درجې اندازه ورکړ شوې ده، نو اومشالتریا سویچ (بدون [illegible]) دلته مطلب د

(c) ketabton.com: The Digital Library

جبشميري اړونه ده، پهٔ غوښتل شوي فنکشن کی) په « DEG » سموو او بيا لاندې ورکوني کوو.
په همدې ډول تکمي وهو

جدول یا تخته ۴ . ۱ د کونجفنکشنونو مختخښه

دنده مو د لاندې مساوت حل یا اوبی دی

1. $\sin \alpha = a$, 2. $\cos \alpha = a$,
3. $\tan \alpha = a$, 4. $\cot \alpha = a$

دلته تمرینونه ۱ او ۲یواځي هلته موخه ور یا هدفمند ي، چې باور ولري$-1 \le a \le 1$

او په تمرين ۳ او ۴ کط په خوښه هر ارزښت نيولی شي.
یو «بنستهيزوبی یا بنستيز حل»α د هر تمرين د جبشميرني سره په لاندې ډول یا همداسی تکموترتیب لاس ته راځي (دا په دې اړه لري چېα په درجه اندازه یا لينده اندازه اندازه کوو، نو په ورته ډول د سويچبدلون په "DEG" یا "RAD" باندې راولو)

1. [a] [F] [sin] 2. [a] [F] [cos]
3 [a] [F] [tan] 4. [a] [1/x] [F] [tan]

تکمه F د په څټ فنکشن ته تلنه ممکنوي.
دلته نو بیاد α هر بنستيزحل په درجه یا لينده کچ څرګندیږي.
د $a = -0,55$ لپاره لاندې بنستيزحلونه لاس ته راځي :

1. $\alpha_0 = -33,367013° = -0,58236,$
2. $\alpha_0 = 123,36701° = 2,1531606,$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

3. $\alpha_0 = -28{,}810793° = -0{,}5028432,$
4. $\alpha_0 = -61{,}189206° = -1{,}0679531.$

د مخ ت ه تیرو په بنسټ لو

1. $\sin\alpha = \sin(180° - \alpha) = \sin(\pi - \alpha),$
2. $\cos\alpha = \cos(-\alpha)$

او په ورته توگه،، فرعي یا ځنګیز حل یا اوبی،،

1. $\beta_0 = 180° - \alpha_0 = \pi - \alpha_0,$
2. $\beta_0 = -\alpha_0$

لاس ته راشي

د لیدیدونکي حالت $a = -0{,}55$ لپاره په دې مانا چې :

1. $\beta_0 = 213{,}367013° = 2{,}1531563,$
2. $\beta_0 = -123{,}36701° = -2{,}1531606.$

د α ټول حلونه د (۴ . ۱۵) له امله په لاندې فورم لاس ته راځي

1. und 2. $\alpha = \alpha_0 + k \cdot 360° = \alpha_0 + 2k\pi,$

$\alpha = \beta_0 + k \cdot 360° = \beta_0 + 2k\pi,$

3. und 4. $\alpha = \alpha_0 + k \cdot 180° = \alpha_0 + k\pi.$

بیلگه ۴ . ۹ : لرو $\sin x = 1/2\sqrt{3}$. ودې شمیرل شي $\cos x, \tan x, \cot x$.

$$\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x} = \pm\sqrt{1-\frac{3}{4}} = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2},$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\pm\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{3},$$

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{\pm\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۴ . ۱۰ : په بیلګه ۴ . ۴ کې ورکړشوی زور F_H او F_N څومره لویي دي، که په مایل هواره پروت بدن وزن 700 N وي (دلته N د Newton لپاره دی چی وزن پرې اندازه کیږي) او مائلی هوارې مایلکونج $\beta = 28°$ وی؟

$$\sin\beta = \frac{F_H}{G}, \quad F_H = G \cdot \sin\beta = 700\ \text{N} \cdot \sin 28° = 700\ \text{N} \cdot 0{,}4695 = 328{,}65\ \text{N}.$$

$$\cos\beta = \frac{F_N}{G}, \quad F_N = G \cdot \cos\beta = 700\ \text{N} \cdot \cos 28° = 700\ \text{N} \cdot 0{,}8829 = 618{,}03\ \text{N}.$$

۴ . ٦ دساین- او کوساین جملی

دا دواړه جملې ممکنوي چی په ټولیز یا عمومي درېګوډي کی شمیرنی پلی کړای شو

۱ . د ساین جمله‌د څیرې ۴ . ۱۸ له نخښوني سره لرو

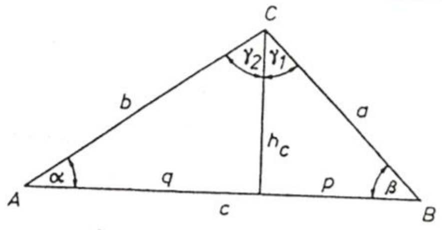


Bild 4.18

$$\sin\alpha = \frac{h_c}{b}, \quad \sin\beta = \frac{h_c}{a}$$

او له دې امله

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b} \quad \text{bzw.} \quad \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}.$$

په ورته توګه ښوول کیدی شي، چې په عمومي توګه صدق کوي

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}. \tag{4.17}$$

څیره پورته او لاندې کښل شوي، دا یو ولاړکونجیز درېګوډی کښل کیږي(پورته او لاندې څیرې)

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ورته توګه ښوول کیدی شي، چی په عمومي توګه صدق کوي

د ساین جمله کیدی شي استعمال شي، که د یوه دریګوډي -دوه اړخونه او لوي اړخ ته

مخامخ کونج - SSW یو اړخ او داړه پرې پراته کونجونه WSWورکړشوي وي

۲ . د کوساین جمله

د ځیرې ۴ . ۱۸ ځخه لاس ته راځي

$$h_c^2 = b^2 - q^2$$
$$h_c^2 = a^2 - p^2$$

$$a^2 = b^2 + p^2 - q^2, \quad p = c - q,$$
$$a^2 = b^2 + (c - q)^2 - q^2,$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cq + q^2 - q^2, \quad q = b \cos \alpha,$$

نو $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$ لرو او همداسې:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha,$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta, \quad (4.18)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

د کوساین جله استعمالیدی شي، که په یوه درېګوډي یا مثلث کې

- درې اړخونه یا ضلعې یا

- دوه ا ړخونه(ضلعې) او له هغو رابند کونج یا زاویه

ورړ شوي وي.

بیلګه ۴ . ۱۱ :د دوه قوو(زور F1)او F2 لاس ته راوړل شوې R1 چی په پراته لورد F1سره کونج جوړوي ، څنګه شمیرل کیږي؟ د دې دوه قوو F1 او F2 برسیره له دوي جوړکونج هم معلوم دی .د دې پوښتنی کولو د روښانولو لپاره ځیره ۴ . ۱۹

(c) ketabton.com: The Digital Library

ورکړ شوې، له کومې څخه چې د دوي ترمنځ اړیکي هم معلومیږي .په دې پسې په
ABCدریګوډي کې، F1 = c, F2 = a اوss - 180° = ss' معلوم دي، α

او R = b لټوونکې یا غوښتونکې لویي دي؟

د کوساین جملې (۱۸ . ۶) څخه لرو

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ cosss$$

همداسې یا⇔

$$R^2 = F1^2 + F2^2 - 2F1F2\ cos(180° - ss')$$

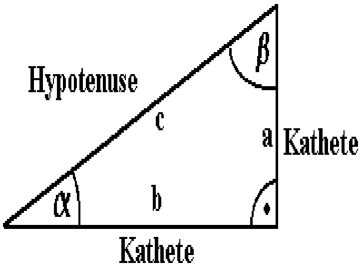
او د ساین له جملې (۱۷ .۶) لاس ته راځي

له کومو چې α ټاکل کیدی شي .

لوي اړخ او ولاړ یا عمود اړخونه (هیپوتینوز او کاتیتونه یا مخامخ- او په پروت اړخ):

۱ – په ولاړکونجیز دریګوډي کې ولاړ کونج ته مخامخ اړخ هیپوتینوز یا لوي اړخ بولو۰

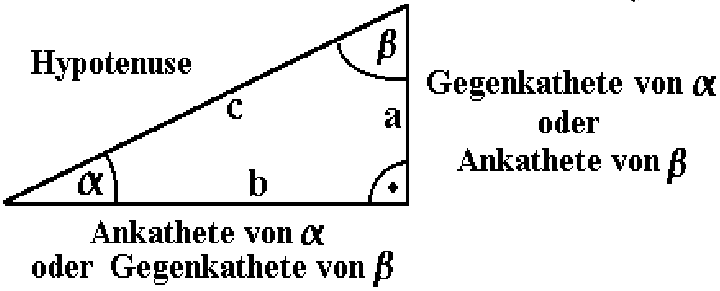
۲ - نور دواړه اړخونه غوښتوني – یا مطلوب کوج ته مخامخ اړخ او په مطلوب کونج پروت اړخ یا ولاړ اړخونه یا کاتیتونه بولو۰

	مخامخ دریګوډی دې ورکړشوې وي: په لاندې درېګوډي کې کونجونه، او اړخونه جوت یا څرګند روښانه دي . د اړخونو نومونه: الفا کونج ته مخامخ مخامخ اړخ بولو او په الفا پروت اړخ په پروت یا پروت اړخ بولو. ولاړ کونج ته مخامخ لوی اړخ بولو

(c) ketabton.com: The Digital Library

لند یا تکرار :پورته او په لاندې بیلګه کې دا اړخونه دغوښتوني کونج مخامخ او په پراته اړخونه بلل کیږي

بیلګه
بیا دې همغه پورته درېګوډۍ ورکړ شوی وي، چې په بیتا پروتاوخ یا کاتیت د الفا مخامخ اړخ یا کاتیت او په څنډ په الفا پرو اړخ یا ه کاتیت د بیتا مخامخ اړخ یا کاتیت ده، چې په څیره کې لیدلکیږي٠



د ساین جمله

په تریګونومتري کې ساینجمه د درېګوډي د یوه کونج او د دې کونج مخامخ اړخ ترمنځ اړیکی ښایي٠ دا له البتانی میندل شوي او ښوول شوي٠ د درېګوډي درې اړخونه او درې ګونجونه ، وړانګه او چاپیرۍ ورکړ شوي (لکه په فرمول کې) نو باور لري:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r = \frac{u}{\pi}$$

یادونه : دا پورته فرمول دې (6,14)وي ٠

زیات وخت د ساین جمله په داسې ډول هم ورکول کیږي:

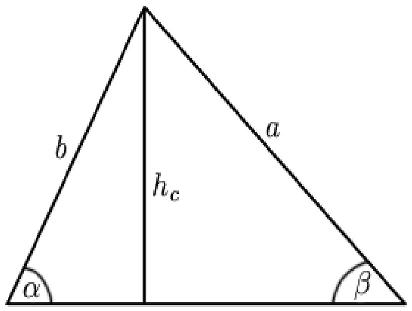
$$\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = a : b : c$$

که چیرې په درېګوډي کې د ساین جملې له لارې څه ښوول کیږي ، نو دې ته دې پام وي، چې په اینتروال [0°;180°] کې په ټولیزه توګه د همغه کونج دوه یو له بل بیل ارزښتونه لیدل کیږي، دا: دوه ګونوالی ګونګرواینځجمله په ګوته کوي٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره دې د کوساین جمله هم وکتل شي

ښوونه : (دا ځیره دې ٦ ، ١٨ وي او دا نا نومول شوي کونجونه دې x,y وي)

$\sin\alpha = \frac{h_c}{b}$ $\sin\beta = \frac{h_c}{a}$ په h_c پسې یې اوبی کوو $h_c = b\cdot\sin\alpha$ د برابرابینوني له لارې لاس ته راځي $a\cdot\sin\beta = b\cdot\sin\alpha$ که په $\sin\alpha\cdot\sin\beta$ وویشو، نو د غوښتنې لومړی برخه کې لاس ته $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$ راځي	

برابرون له $\frac{c}{\sin\gamma}$ سره په پیداینتي توګه جګی h_a او یا h_b لاس ته راکوي

د کاروني بیلګه : درجګوډی ABC لارو او ورکړ شوي :

$a = 5,4\,\mathrm{cm}$ ، $b = 3,8\,\mathrm{cm}$ ، $\alpha = 73°$

دا نورې لویې دې په درېګوډي کی پیداشي

د β شمیرلو لپاره د ساین جمله کارول کیږي

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sin\beta = \frac{b\cdot\sin\alpha}{a} = \frac{3{,}8\,\text{cm}\cdot\sin 73^\circ}{5{,}4\,\text{cm}} = 0{,}67$$

$$\beta = \underline{42^\circ}$$

لکه د خه مو، چې ګوته ورته ونیوله یو بل کونج هم د همدې ارزښت سضته شته ، یانې

$$\beta' = 180^\circ - 42^\circ = 138^\circ$$

د دې اوبی په پوښتنه کې نه راځي، ځکه چې د درېګوډي د کونجونو زیاتون به له ۱۸۰ درجو څخه واوړي۰

او نو ګاما د کونج زیاتون جملې له لارې لاس ته ر اوړو

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 73^\circ - 42^\circ = \underline{65^\circ}$$

اړخ c هم داسې لاس ته راځي

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

$$c = \frac{a\cdot\sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{5{,}4\,\text{cm}\cdot\sin 65^\circ}{\sin 73^\circ} = \underline{5{,}118\,\text{cm}}$$

دکوساین جمله

په تریګونومتري کې کوساینجمله په درېګوډي کې د درېګوډي د اړخونو او کونجونو

ترمنځ اړیکې ښایي ، چې په لاندې توګه ورکړ شوي دي :

یادونه : دا لاندې فرمولونه دې (۱۸ ۰ ۹) وي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta$$

که ګاما ۹۰ درجې وي، نو دپیتاګوراس جملې له مخې لرو:

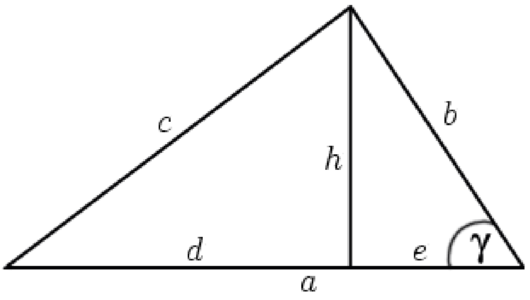
$$c^2 = a^2 + b^2$$

د کوساین جمله استعمالیدی شي، که په یوه دریګوډي کی

- درې اړخونه (SSS) یا
- دوه اړخونه او له هغو بند کونج (SWS) ورکړ شوي وي.

که له پورته څخه یې درې ورکړ شوي وي، نو څلورم یې پیداکولی شو

ښوونه :



د دریګوډي په کیڼ لور د پیتاګوراس قضیه استعمالوو، چې د c^2 لپاره یوه شمیرافاده یا – وییه پیداکړو، د دې لپاره د دې خوا د ولاړاړخونو یا کاتیتو اوږدوالی څلوری یا مربع باید پیدا شي

$$h^2 = b^2 - e^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بنې اړخ لپاره د پيتاګوراس قضيې استعمال څخه لرو

$$d^2 = (a-e)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot e + e^2$$

(د بينوم فرمول)

د پيتاګوراس جملې له مخې د کيڼ لور لپاره لرو:

$$c^2 = h^2 + d^2$$

اوس دواړه پورته پيداشوي شميروييني يا- افادې سره زياتوو:

$$c^2 = b^2 - e^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot e + e^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot e$$

اوس باور لري $\cos\gamma = \frac{e}{b} \left(\frac{ankathet}{Hypotenuse}\right)$

له دې لاس ته راځي $e = b \cdot \cos\gamma$

دا پورته ځاي په ځاي کوو، نو د c^2 لپاره لاس ته راځي:

$$c^2 = \underline{\underline{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma}}$$

بيلګه:

يو درېګودېABC ، چې اړخونه يې ځرګند دي، ورکړ شوی

$a = 4{,}9 \text{ cm}$،

$b = 2{,}8 \text{ cm}$

$c = 3{,}5 \text{ cm}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کونج β لویوالی غواړو پیداکړو

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta$$

$$2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta = a^2 + c^2 - b^2$$

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c} = \frac{(4{,}9\,\mathrm{cm})^2 + (3{,}5\,\mathrm{cm})^2 - (2{,}8\,\mathrm{cm})^2}{2 \cdot 4{,}9\,\mathrm{cm} \cdot 3{,}5\,\mathrm{cm}} = 0{,}83$$

$$\beta = \underline{34^\circ}$$

دا پیژند ورکو یا داسې تعریفوو

$$\sin A = \frac{\mathrm{opp}}{\mathrm{hyp}} \qquad \cos A = \frac{\mathrm{adj}}{\mathrm{hyp}}$$

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\mathrm{opp}}{\mathrm{adj}} \qquad \sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{\mathrm{hyp}}{\mathrm{adj}}$$

$$\cot A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{\mathrm{adj}}{\mathrm{opp}} \qquad \csc A = \frac{1}{\sin A} = \frac{\mathrm{hyp}}{\mathrm{opp}}$$

Common formularکډ وډ فرمولونه

Pythagorean identitiesد پیتاګوراس کتمټوالی

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

$$1 + \tan^2 A = \sec^2 A$$

$$1 + \cot^2 A = \csc^2 A$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

زیاتون او کمون کتمتوالی Sum and difference identities

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

$$\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

$$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

$$\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$

دوه برابره کونج کې ګتمتوالي Double-angle identities

$$\sin 2A = 2 \sin A \cos A$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$$

$$\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A} = \frac{2\cot A}{\cot^2 A - 1} = \frac{2}{\cot A - \tan A}$$

د نیم کونج ګتمتوالی Half-angle identities

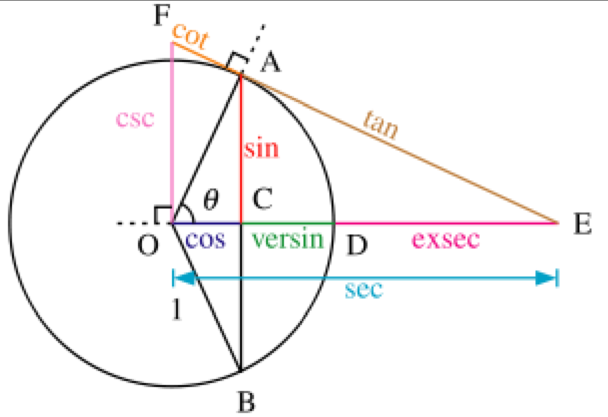
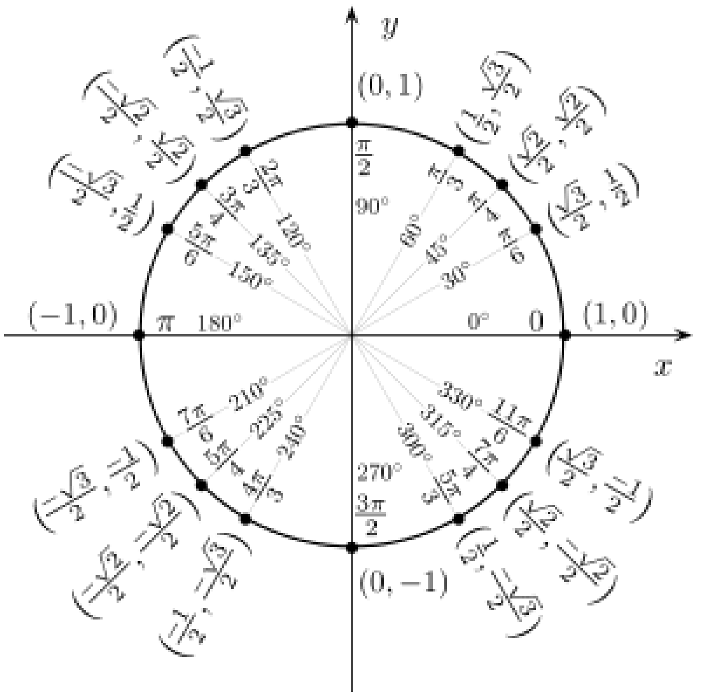
$$\sin\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$$

$$\cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\tan\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}} = \frac{\sin A}{1+\cos A} = \frac{1-\cos A}{\sin A}$$

د تريګونومتريکي کتمتوالي ليست List of trigonometric identities

	نوره ژوره ځيرنه دلته نه کړو، دې ته ګوته نيسو، چې په لاندې ځيره کې تريګونومتريکي فنکشنونه روښانه دي
	د يوه کونج θ ټول تريګونومتريکي فنکشنونه په O باندې د يوې يونګردی ترم له لارې ورکول کيدی شي (يونګردی لاندې ورکړ شوي او کونجونه هم په نخښه شوي) مخامخ: يوونګردی(يووالي يا واحد ګردی) The unit circle

(c) ketabton.com: The Digital Library

ليکنبڼهNotation

دا لاندې ليکنبڼه يا - ډول د ټولو تريګونومتريکي – يا مثلثاتي فنکشنونو ساين، کوساين ، تانجنت ، کوتانجنت ، سيکانت، کوسيکانت لپاره باور لري، د لنډوني لپاره په لاندې جدول کې يواځې ساين او کوساين ليکل شوي دي

$\arcsin(x)$ کيدی شي$\sin^{-1}(x)$ وليکل شي، خو د $(\sin(x))^{-1}$ سره بايد بدل نه شي

:پيژندDefinitions

$$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \qquad \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{\tan(x)}$$

تل بيرته راګرځيدنه ، سيومتري او بدلونPeriodicity, symmetry, and shifts .

:په يوون(يووالي-) ګردی يا دايره کې ساده ليدل کيږي

Periodicity تل بيرته راګرځيدنه

ساين ، کوساين ، سيکانت، کوسيکانت تل بيرته راګرځيدنه 2π ده(پوره ګردی) (تکرار دی)

$$\sin(x) = \sin(x + 2k\pi)$$

$$\cos(x) = \cos(x + 2k\pi)$$

$$\sec(x) = \sec(x + 2k\pi)$$

$$\csc(x) = \csc(x + 2k\pi)$$

تانجنت ، کوتانجنت تلبيرته راګرځيدنه π لري(نيمګردی يا نيمدايره) :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\tan(x) = \tan(x + k\pi)$$

$$\cot(x) = \cot(x + k\pi)$$

Symmetry سیومتري

د تریګونومتریکي فنکشنونو لپاره سیومتري ، لکه لاندې کښل شوي

$x \to -x,\ x \to \pi/2 - x$ ،یا $x \to \pi - x$ په لاندې ډول ده

$$\begin{aligned}
\sin(-x) &= -\sin(x), & \sin\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) &= \cos(x), & \sin(\pi - x) &= \sin(x)\\
\cos(-x) &= \cos(x), & \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) &= \sin(x), & \cos(\pi - x) &= -\cos(x)\\
\tan(-x) &= -\tan(x), & \tan\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) &= \cot(x), & \tan(\pi - x) &= -\tan(x)\\
\cot(-x) &= -\cot(x), & \cot\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) &= \tan(x), & \cot(\pi - x) &= -\cot(x)\\
\sec(-x) &= \sec(x), & \sec\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) &= \csc(x), & \sec(\pi - x) &= -\sec(x)\\
\csc(-x) &= -\csc(x), & \csc\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) &= \sec(x), & \csc(\pi - x) &= \csc(x)
\end{aligned}$$

بدلون : د $\pi/2$ او π بدلون دی

$$\begin{aligned}
\sin\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) &= \cos(x), & \sin(x + \pi) &= -\sin(x)\\
\cos\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) &= -\sin(x), & \cos(x + \pi) &= -\cos(x)\\
\tan\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) &= -\cot(x), & \tan(x + \pi) &= \tan(x)\\
\cot\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) &= -\tan(x), & \cot(x + \pi) &= \cot(x)\\
\sec\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) &= -\csc(x), & \sec(x + \pi) &= -\sec(x)\\
\csc\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) &= \sec(x), & \csc(x + \pi) &= -\csc(x)
\end{aligned}$$

د پیتاګوراس کتمتوالی Pythagorean identities

د دې بنسټ د پیتاګوراس قضیه ده

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کونج د زیاتون او کمون کتمتوالی Angle sum and difference identities

$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$$

د کمون او زیاتوننخښې په ورته ترتیب راځي لکه په فرمولونو کې

$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$$

که په کيڼ لور " + " وي، نو په ښي لور"-" راځي او په ځټ

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(x)\tan(y)}$$

د کونج دوه ځلوالي فرمول Double-angle formulae

که $x = y$ کيږدو د پيتاګوراس يا موفريي فرمول له لارې لرو د $n = 2$ له امله ۰

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) \;\; = \frac{2\tan(x)}{1+\tan^2(x)}$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x) \;\; = \frac{1-\tan^2(x)}{1+\tan^2(x)}$$

$$\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$$

$$\cot(2x) = \frac{\cot(x) - \tan(x)}{2}$$

د نيمکونج فرمول Half-angle formular

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(x)}{2}}$$

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(x)}{2}}$$

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}. \qquad (1)$$

که د ریښي لاندې ماتباندې او مات لاندې له $1 + \cos x$ سره ځل شي ، نو د پیتاګوراس جملې له مخه لرو:

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{(1+\cos x)(1+\cos x)}} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos^2 x}{(1+\cos x)^2}}$$

$$= \frac{\sin x}{1+\cos x}.$$

په ورته توګه که برابرون له (۱) له $1 - \cos x$ سره ځل شي، نو لور

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{(1-\cos x)(1-\cos x)}{(1+\cos x)(1-\cos x)}} = \pm\sqrt{\frac{(1-\cos x)^2}{(1-\cos^2 x)}}$$

$$= \frac{1-\cos x}{\sin x}.$$

د نیمکونج فرمولونه د تانجنت لپاره دي:

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)} = \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که کيږدو
$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right),$$

نو لرو:
$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$$

د ځل و زياتون ته کټمتوالی Product-to-sum identities

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{\cos(x-y)+\cos(x+y)}{2}$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2}$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{\sin(x-y)+\sin(x+y)}{2}$$

د زياتون- و- ځل ته کټمتوالی (برابرون) Sum-to-product identities

که د x لپاره $(x+y)/2$ او y لپاره $(x-y)/2$ کيږدو نو لرو

$$\cos(x)+\cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin(x)+\sin(y) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos(x)-\cos(y) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin(x)-\sin(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

که $x, y,$ او z د کوم درېګوډي کونجونه وي يا په نورو کليمو، نو

(c) ketabton.com: The Digital Library

نیمګردی یا نیمدایره $\text{if } x + y + z = \pi = \text{half circle,}$ =که

$\tan x + \tan y + \tan z = \tan x.\tan y.\tan z$ نو یا او

$\text{and } \sin(2x) + \sin(2y) + \sin(2z) = 4\sin(x)\sin(y)\sin(z).$

تریګونومتریکي په څتوالی Trigonometric conversions

هر تریګونومتریکي فنکشن د بل تریګونومتریکي فنکشن سره سیده یا سیخې اړیکی لري٠ داسې اړیکی د په څښ اړیکو له لارې افاده یا ویل کیدی شي، لکه : که φ او ψ د تریګنومتریکي فنکشنونو د یوې جوړې نمایندګی وکړي ، او arcψ دې د ψ په څښ وي، داسې چې $\psi(\text{arc}\psi(x)) = x$ ٠ نو $\varphi(\text{arc}\psi(x))$ کیدی شي د یو الجبري فنکشن ترم x په څیر وویلی شي یا افاده شي٠

داسې فرمولونه د لاندې جدول له لارې ښوول کیدی شي : موږ دا نوره نه روښانه کوو او په لاندې جدول پوهیدی شو

cot	sec	csc	Tan	cos	sin	φ \ ψ
$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\sqrt{1-x^2}$	x	**sin**
$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	x	$\sqrt{1-x^2}$	**Cos**
$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x^2-1}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	x	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	**Tan**
$\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$	x	$\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$	$\sqrt{1+x^2}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	**sec**
x	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\sqrt{x^2-1}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	**cot**

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sin 0 = \sin 0^\circ = 0 = \cos 90^\circ = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin 30^\circ = 1/2 = \cos 60^\circ = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin 45^\circ = \sqrt{2}/2 = \cos 45^\circ = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin 60^\circ = \sqrt{3}/2 = \cos 30^\circ = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

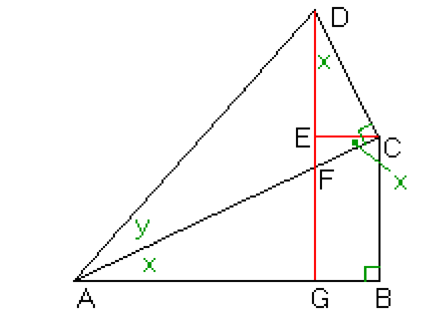
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin 90^\circ = 1 = \cos 0^\circ = \cos 0$$

د طیلایي نسبت φ له امله لرو

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4} = \varphi/2$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{\varphi-1}{2} = \frac{1}{2\varphi}$$

جیومتریکي غوښتنه (ثبوت)Geometric proofs



$\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$

په مخامخ ځیره کي کونج x د ولاړکونجیز درېکودي ABC برخه ده، او کونج y د و لاړکوډیز درېکودي ACD برخه ده ۰ نو جوړښت DG و AB باندي ولاړ او CE و AB ته غبرګ دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

کونج ACE =کونجBAC = Angle x

EG = BC. کونج CDE= x

$$\sin(x+y)$$

$$=\frac{DG}{AD}$$

$$=\frac{EG+DE}{AD}$$

$$=\frac{BC+DE}{AD}$$

$$=\frac{BC}{AD}+\frac{DE}{AD}$$

$$=\frac{BC}{AD}\cdot\frac{AC}{AC}+\frac{DE}{AD}\cdot\frac{CD}{CD}$$

$$=\frac{BC}{AC}\cdot\frac{AC}{AD}+\frac{DE}{CD}\cdot\frac{CD}{AD}$$

$$=\sin(x)\cos(y)+\cos(x)\sin(y).$$

$\cos(x+y)=\cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y)$

Using the above figure:د پورته ځیري ځخه کار اخلو

$$\cos(x+y)$$

$$=\frac{AG}{AD}$$

$$=\frac{AB-GB}{AD}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \frac{AB - EC}{AD}$$

$$= \frac{AB}{AD} - \frac{EC}{AD}$$

$$= \frac{AB}{AD} \cdot \frac{AC}{AC} - \frac{EC}{AD} \cdot \frac{CD}{CD}$$

$$= \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AC}{AD} - \frac{EC}{CD} \cdot \frac{CD}{AD}$$

$$= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y).$$

د $\sin(x-y)$ او $\cos(x-y)$ فرمولونو ښوونه

د $\cos(x-y)$ او $\sin(x-y)$ لپاره فرمولونه ساده ښوول کيږي، که د $\cos(x+y)$ او $\sin(x-y)$ لپاره فرمولونه وپيژنو

$$\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y)$$

که په فمرول $\sin(x+y)$ کې د y په ځاي -y کيږدو نو لرو

$$\sin(x+(-y)) = \sin(x)\cos(-y) + \cos(x)\sin(-y).$$

که د فاکت څخه، چې ساين جوړه او کوساين ناجوړه فنکشنونه دي، نو لرو

$$\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y).$$

$$\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$$

موږ په پورته فرمول $\cos(x+y)$ کې د y په ځاي -y ږدو ، نو لرو

$$\cos(x+(-y)) = \cos(x)\cos(-y) - \sin(x)\sin(-y).$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د فاکت څخه، چې ساین جوړه او کوساین ناجړه فنکشنونه دي، نو لاس ته راوړو

$$\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y).$$

۶ . ۵ تریګونومتریکي یا کونجکچ فرمولونه

د کونجبلواك یا کونجفنکشن د شمیرلو لپاره، له دا اوس څرګند فرمولونو، یوه د اړیکو ډله شته) د زیاتون)جمع(تیوریم(، له کومو یی چی دلته یوڅو راوړل غواړو .د همغو فرمولتولګه) کتاب چي فرمولونه په کي راټول وي(کی لاندې فرمولونه پیدا کیدی شي

$$\sin(x \pm y) = \sin x.\cos y \pm \cos x.\sin a; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6,19)$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x.\cos y \mp \sin x.\sin y; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6,20)$$

$$\sin 2x = 2\sin x.\cos x; \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6,21)$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x.\tan y}; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6.22)$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2}; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6,23)$$

$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}.\sin\frac{x-y}{2};$$

$$cox + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2}; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6,24)$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}.\sin\frac{x-y}{2}$$

ددې اړیکو ښوونه یوه مهمه کورني دنده ده، خو څه به په دې لاندې بېلګه کې وښایو

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۶ . ۱۲ :

Cos(x+) = cosx.cosy –sinx.siny

مونږ له ځیرې ۴ . ۱۸ څخه مخ ته ځو، او ځاي په ځاي کوو ، $\gamma_1 = x$ ، $\gamma_2 = y$
نو لرو $\gamma = x + y$.

د کوساین له جملې لاس ته راځي

$$2ab\cos\gamma = a^2 + b^2 - c^2, \quad a^2 = p^2 + h_c^2, \quad b^2 = q^2 + h_c^2, \quad c^2 = (q+p)^2$$

$$= p^2 + h_c^2 + q^2 + h_c^2 - (q+p)^2,$$

$$= p^2 + h_c^2 + q^2 + h_c^2 - q^2 - 2qp - p^2$$

له $2ab\cos\gamma = 2h_c^2 - 2qp$ څخه لاس ته راځي

$$\cos\gamma = h_c^2 / ab - qp / ab = (h/a).(h/b) - (q/b).(p/a),$$

$$\cos\gamma = \cos\gamma_1 . \cos\gamma_2 - \sin\gamma_1 . \sin\gamma_2$$

$$\cos(x+y) = \cos x . \cos y - \sin x . \sin y$$

څه چې د ښوولو وو

یادونه: ځای په ځای باید دې ته ګوته ونیسم، چې د ضرب او وېش تړاو نسبت و جمعې اړ
تفریق یا زیاتو او کمون تړاو ته کلک یا کلک نښتی دی.

بیلګه ۴ . ۱۳ – لاندې وېینې یا افادې دې ساده شي

$$a)\ y = \sin(\alpha - \frac{\pi}{4}) + \sin(\alpha + \frac{\pi}{4})$$

دې (۶ . ۲۳) پسې د مساوات(برابرون) ښی اړخ د لاندې سره یو- یا هم ارزښته ده.

$$2\sin\frac{\alpha - \frac{\pi}{4} + \alpha + \frac{\pi}{4}}{2} \cdot \cos\frac{\alpha - \frac{\pi}{4} - \alpha - \frac{\pi}{4}}{2} = 2\sin\alpha\cos(-\frac{\pi}{4}) = 2\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4},$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له کوم چې $y = \sqrt{2}\ \sin\alpha$ لاس ته راځي

b) $y = \cos(\frac{3}{2}x + \pi)$

د (۶ . ۲۰) پسې لرو

$$\cos(\frac{3}{2}x+\pi) = \cos\frac{3}{2}x\cdot\cos\pi - \sin\frac{3}{2}x\cdot\sin\pi.$$

دا چې $\cos\pi = -1, \sin\pi = 0$ دی، نو لاس ته راځي

$$y = \cos(\frac{3}{2}x+\pi) = -\cos\frac{3}{2}x.$$

دې نتیجې ته د (۶ . ۱۶) استعمال وروسته هم رسیږو، له کومې چې لاس ته راځي

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha \text{ ist.}$$

بیلګه ۶ . ۱۴ برابرون یا مسات $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}, \quad 0 \le \alpha \le 2\pi,$ دې وښوول شي

دی $1 = \cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}$ او $\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$ او له دې سره

$$\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}-(\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2})}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2}} = |\sin\frac{\alpha}{2}| = \sin\frac{\alpha}{2} \quad (\text{wegen } 0 \le \alpha \le 2\pi).$$

۶ . ۶ تمرینونه

۱ – بنسټیزه هندسه یا څمککچونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ . ۱ – لاندې کونجونه دې په لینده اندازه همداسې په درجه اندازه(د څسیما یا دسیمال یا لسمیز او سمساګیسیمال (د ۶۰ په بنسټ جوړ شوي ګڼل(که غواړۍ شمیرل) برخو) ورکړ شوي دي،

1.1.1.a) $15°$	b) $225°$	c) $105°$	d) $277{,}5°$
1.1.2.a) $\frac{\pi}{8}$	b) $\frac{\pi}{12}$	c) $2\pi+\frac{\pi}{2}$	d) $\pi-\frac{\pi}{3}$
1.1.3.a) $4{,}24°$	b) $70{,}9°$	c) $31°\ 17'\ 20''$	d) $228{,}1923°$
1.1.4.a) 5,19	b) 0,22	c) 2,31	d) 1

۱ . ۲ – یو درېګوټی له $a = 4{,}5$ cm , $b = 12{,}2$ cm او $c = 11{,}7$ cm سره ورکړ شوی دی. دا درېګوټی جوړ کړی ! د اړخونو نیموونکی وکاږی، د منځ ولاړې ، کونجنیموونکي او جګې، همداسی یي ګردیخوندي او خوندیګردي ګردی (یعنی دباندې او دننه ګردی) رسم کړی.

۱ . ۳ – لاندې درېګوټی جوړ کړی

a) $a = 11{,}7$ cm , $b = 9{,}2$ cm , $\gamma = 43{,}5°$

b) $c = 16{,}1$ cm , $\alpha = 84{,}6°$ $\beta = 51{,}9°$

وښایي چی ولی دواړه درېګوټي ورته دي

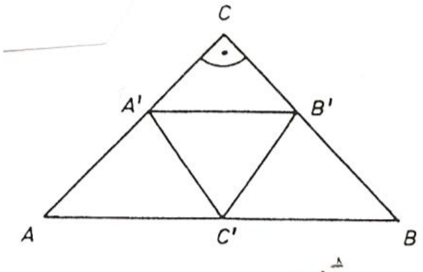


Bild 4.20 ځایره

۱ . ۴ – یو مساوي پښیز، ولاړکونجیز درېګوټي ABC ته یو مساوي اړخیز درېګوټی A'B'C' داسی په دننه کی ورکړ شوی چی $\overline{A'B'} \parallel \overline{AB}$ څغلي او C' په $\overline{AB}$ پرته ده (څیره ۴ . ۲۰ دې وکتل شي).

ورکړی $\overline{A'B'} = \overline{A'C'} = \overline{B'C'}$ د $\overline{AC} = \overline{BC}$ سره!

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ . ۵ – په یوه ولاړکونجیز دریګوډي کی د
خیرې ۴ . ۲۱ سره سم په لیدوړ ډول
په دننه کی یوه مربع ورکړ شوې. د مربع
اړخونه وشمیری
الف) له کانتو څخه
ب) له هیپوټینوزپېرخو څخه

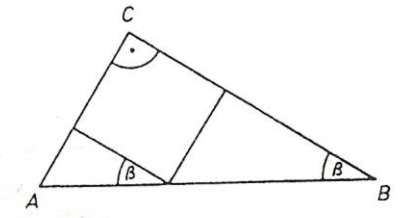


Bild 4.21

۲ . د جبشمیرنی سره د ارزښتونوټاکنه

۲ . ۱ – له لاندې کونجونو څخه د لاندېکونجونو لپاره فنکشن ارزښتونه پیداکړی:

a) $\propto$ = 47,15° , b) $\propto$ = -390° , c) $\propto$ = 7,784 , d) $\propto$ = 13,195

۲ . ۲ – کونج ß دې د sinß = a , cos ß = a , tan ß = a , cot ß = a څخه د

a) a = 0,8290 , b) a = -0,2907 , c) a = -2,145, d) a = 0,8660

لپاره وشمیرل شي (په اوبی کی دې د الفا په ځاي بیتا ولیکل شي !!!)

۳ . په ولاړکونجیز دریګوډي کې شمیرنې

۳ . ۱ – په ولاړکونجیز (γ = 90°) دریګوډي کې معلوم دي

الف) a = 3 cm , b = 4 cm ، ب) a = 5 cm , c = 12 cm

کوم ازښتونه sin $\propto$, cos $\propto$, tan $\propto$, cot $\propto$ لري؟

۳ . ۲ – ولاړکونجیز دریګوډي کې (γ = 90°) نه ورکړشوي کونجونه او نه ورکړ شوي اړخونه وشمیری ، لاندې لوبي موړ ته معلومي دي:

a) a = 50cm , b) a = 40cm , c) b = 70 cm , d) c = 65 cm

b= 78,1 cm $\propto$ = 43°36' $\propto$ = 18°55' ß = 59° 29'

۳ . ۳ – وشمیری ! A , h_c او همداسی د ټاکلي مساوي پښیز دریګوډي ورکړ شوي پاتې کونجونه او اړخونه (ß = $\propto$, a = b):

a) a = 66cm , b) c = 22,4 cm , c) a = 38,9 cm , d) c = 30,3 cm

c = 130 cm $\propto$ = 47,8°, γ = 33,3° γ = 48,2°

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) درې قوې دې د زوریا قوت $F_1 = 167{,}5N$, $F_2 = 112\ N$ او $F_3 = 157\ N$ سره ورکړ شوې وي، چې په ګډه یو دریګوډی جوړوي. د دې دریګوډي کونجونه چې له اړخونو رابند دي، څومره لوی دي؟

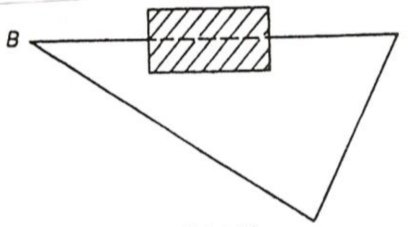


Bild 4.23
ځاکره

پ) دوه ټکي A او B چې یوه کور یې مخه پټه کړې وي، یو له بل څومره لرې دي، که $\overline{BC} = 75{,}25\ m$, $\overline{AC} = 51{,}75m$ او $\sphericalangle BCA = 71°15'\ 45''$ وي (څیره ۴ . ۲۳)

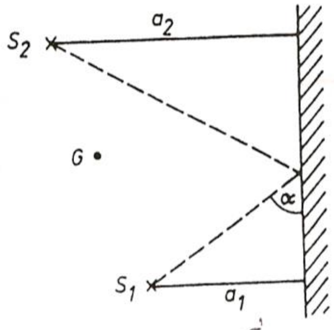


Bild 4.24
ځاکره

ت) د دوه یخ هاکي لوبغاړو S_1 او S_2 ترمنځ یو د مخالف ټیم لوبغاړی G ولاړ دی. S_1 په داسې ډول توپ و S_2 ته وهي چې توپ په یوه دیوال ولږېږي. (څیره ۴ ، ۲۳ وګورئ).

د دواړو لوبغاړو S_1 او S_2 لریوالی څومره دی؟ که د دوي واټن له دیوال $a_1 = 2{,}5m$ همداسې $a_2 = 6{,}5\ m$ وي او توپ د یوه دې دیوال سره په یوه کونج $\alpha = 42°$ ولږېږي.؟

۵ . د تریګونومتریکي یا درېګوډیزو(مثلثاتي) فرمولونو استعمال

۵ . ۱ – بې له جبشمیري او جدول دې نور دوه درې فنکشن ارزښتونه دې وشمیرل شي، که ورکړ شوي وي: $(0 < \alpha < 2\pi)$:

a) $\sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ b) $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ c) $\tan\alpha = \sqrt{3}$ d) $\cot\alpha = -\sqrt{3}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۵ . ۲ - لاندې مساوات وښایی:

5.2.1. a) $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ b) $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$

c) $\cos \alpha \cdot \sqrt{1+\tan^2 \alpha} = 1$ d) $1 + 2 \cos \alpha = 4 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1$

5.2.2. a) $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$ b) $\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$

c) $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$ d) $\cot \frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$

5.2.3. a) $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$ b) $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$

c) $\tan 3\alpha = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}$ d) $\cot 3\alpha = \frac{\cot^3\alpha - 3\cot\alpha}{3\cot^2\alpha - 1}$

5.2.4. a) $\cos 2\alpha = \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha$ b) $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - 4 \sin^2\frac{\alpha}{2} \cos^2\frac{\alpha}{2}$

c) $\cos 2\alpha = 1 - 8 \sin^2\frac{\alpha}{2} \cos^2\frac{\alpha}{2}$ d) $\cos 2\alpha = \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$

5.2.5. a) $\sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \cos 2\alpha = \frac{1}{4}\sin 4\alpha$

b) $\frac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} = -(\cos \alpha + \sin \alpha)$

c) $\sin \alpha + \sin (\alpha + \frac{2\pi}{3}) + \sin (\alpha + \frac{4\pi}{3}) = 0$

d) $\sin^2 (3\pi - \alpha) + \sin^2 (6,5\pi + \alpha) = 1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۷ ۰ ګډوله ګڼونه یا کمپلیکس اعداد Komplexe Zahlen

د مخه مو ولیدل، چې څنګه یوه ګڼډیرۍ پر بله ګڼډیرۍ ودانه شوې ده۰ که ولرو

$$x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \quad x^2 = -1 \qquad (7, 1)$$

که پورته برابرون ته وګورو، نو څرګند لیدل کیږي، چې دا په رییلګڼونډیرۍ کې اوبی یا حل نه لري، نو له دې امله باید (7 , 1)د ګڼنو ډیرۍ وغزول شي۰ له

$$x_1 = \sqrt{-1}, x_2 = -\sqrt{-1}, ...(7,2)$$

د $\sqrt{-1}$ ګڼ، چې د لومړي حل لپاره د رییل مانانه لري، دا سومبول د $i = \sqrt{-1}$

ټاکل کیږي چیرته، چې لرو: $i^2 = -1$ د

$$x_1 = i, x_2 = -i \Leftrightarrow x_{12} = \pm i, ...(7,3)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیکو : دا پورته د لاندې سره

$i^2 = -1$ (7 , 4)

د (7,1) ځاي نیسي، ځکه، چې باور لري

$$x_1^2 = i^2 = -1 \Leftrightarrow x_2^2 = i^2 = -1$$

دا چې i رییل مانا نه لري، نو دې سومبول ته ایماجینارګڼ imaginär(لاتین: فقط خیالي)یوون(واحد)وایو.

برابرون

$$x^2 + a = 0 \Leftrightarrow x^2 = -a \quad , a > 0 \qquad (7,5)$$

کیدی شي په لاندې ډول ولیکل شي

$$x_1 = \sqrt{-a} = \sqrt{a}.\sqrt{-1} = \sqrt{a}.i, ...(7,6)$$
$$x_2 = -\sqrt{-a} = -\sqrt{a}.\sqrt{-1} = -\sqrt{a}.i$$

دلته د(7,4) له امله باور لري

$$x_1^2 = ai^2 = -a, x_2^2 = (-\sqrt{a})^2 i^2 = -a, ...(5,7)$$

اوس د ایماجینار ګڼ یوون(واحد) ټولیز کوو

$$z = bi, b \in R, i^2 == -1, ...(5,8)$$

ایماجیناریوون(واحد)z= i یو ځانګړی ایماجینارګڼ b=1 دی

د ټولیزې څلوری (عمومي مربع) برابرون(مساوات) اوبی(حل) :

$$x^2 + px + q = 0, p, q \in R, ...(7,9)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې ډول د څلورې پوره کولو یا مربع تکمیلول له لارې

$$(x + p/2)^2 = x^2 + px + p^2/4$$

لاس ته راځی یالرو<=

$$x^2 + px + q = (x + p/2)^2 = +(q - p^2/4) \qquad (7, 10)$$

$$(x + p/2)^2 = p^2/4 - q \qquad (7, 11)$$

او که فورمال پسی وګڼل شي

$$(x + p/2)_{1,2} = \pm\sqrt{p^2/4 - q}$$

نو لرو

$$x_{12} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{p^2/4 - q}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7,12)$$

د $p^2 = 4q$ لپاره رییل «ډبل» اوبی یا حل لاس ته راځي

$$x_1 = x_2 = -\frac{p}{2}$$

که $p^2 > 4q$ وي نو(7,12) دوه مختلف رییل اوبیوني یا حلونه منځ ته راوړي.

که $P^2 < 4q$ وي، نو رییل اوبی نه شته دی

د ایماجینار ګڼ په مرسته کیدی شي ولیکو

$$\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = \sqrt{[q - \frac{p^2}{4}](-1)} = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.i$$

که اوس ځاي پر ځاي کړو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-\frac{p}{2}=a\in R,\sqrt{q-p^2/4}=b\in R$$

نو په لاندې بڼه دوه اوبيونې يا حلونه لاس ته راځي

$$x_{1,2}=a\pm bi;a,b\in R$$

د دې فورم يا بڼې ګڼونه کمپلکس ګڼونهKomplexe Zahlen (لاتين: پوره کوونکي - يا پوره کيدونکي-) بلل کيږي

$$z = a+bi\ ,\ i^2 =-1;\ a,b\in R \qquad (7,13)$$

د کمپلکس ګڼونوډيرۍ په C سره په نخښه کوو

$$\bar{z}=a-bi,..................................(7,14)$$

دا پورته (7,14) و(7.13) ته کنجوګيري کمپلکس ګڼ بلل کيږي. لنډ کنجوګيري کمپلکس ګڼ يا اوښتی ګڼ

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2},..............................(5,15)$$

د دې مطلقه يا ساده ارزښت

$$a = re(z) \Leftrightarrow b = Im(z) \qquad (7,16)$$

د دې رييل همدا رنګه ايماجينار برخه

دوه کمپلکسګڼونه برابر بلل کيږي، که دوي په رييل او ايماجينار برخه کې يو له بل سره برابر وي:

$$a_1+b_1i=a_2+b_2i\Leftrightarrow a_1=a_2,b_1=b_2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

موږ تل په پام کې لرو، چې$i^2 = -1$ اېښول شوې

ګډوله یا کمپلکس عدد کیدی شي په سطحه یا هاره کې د لاندې شکل سره سم(د ګاوس د اعدادوسطحه). سرې د کمپلکسو اعدادو سره همغسې شمیرنه کوي، لکه د حقیقي اعدادو سره او په پام کې نیسي چې:$i^2 = -1$

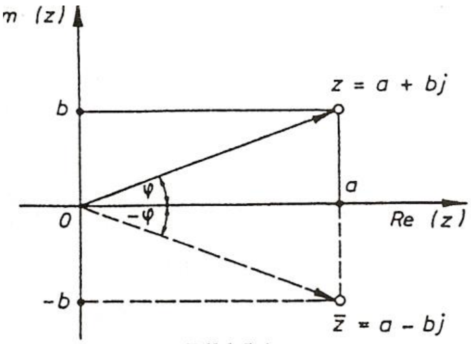


Bild 5.1

موږ دې سیستم ته پروت ولاړ سیستم وایو یا کواوردیناتسیستم Koordinaten systm

پورته څیره دې وکتل شي

پروتولاړ سیستم ته د (x,y) - سیستم هم وايي په پروتولاړ سیستم کې پروت څرخون(محور) د x - محور ته د هوارې یاسطڅي ریبلبرخه او ولاړ محور یا د y – محور ته يېایماجینار برخه وايي لکه څنګه، انځور شوي دي۰ په دې توګه په پروتولاړ سیستم کې یو ټکی منځ ته ر اځي، چې کمپلکس ګڼ انځوروي۰(موږ دا اوس دا برخه نوره نه څیړو، خو دا د وکتورونو په ډول انځورېږي او کارونی یا عملي يې هم همداسې دي، لکه د ورسره بلدو وکتورونو) یادونه : هغه ګران هیوادوال، چې نوي د شمیرپوهنی د دې برخې سره بلدیږي، د هغو لپاره دې په دا لومړي ځل ځني وییونه یا لغاتونه یاکلمې په پام کې نه راځی، لکه د وکتور کلمه، خو دا پورته یا لاندې څیرو کې کتلی شو، چې د کمپلکس ګڼونو زیاتون او کمون څنګه دی

۷ ۰ ۱ زیاتون او کمون:

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې څیرو ته دې پام وي او ګورو، چې رییل برخه او ایماجینار برخه د Re(z) او Im(z) سره په نخښه شوي دي

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 + b_1 i) \pm (a_2 + b_2 i) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2), ...(7,17)$$

بیلګه ۷ ۰ ۱ ورکړ شي:

$$z_1 = 2 - 3i, z_2 = 3 + 2i$$
$$\Rightarrow z_1 + z_2 = 5 - i, z_1 - z_2 = -1 - 5i$$
$$\Rightarrow$$
$$|z_1| = \sqrt{2^2 + 3} = \sqrt{13}, |z_1| = \sqrt{13}$$
$$-z_1 = -2 + 3i, -z_2 = -3 - 2i$$

زیاتون یا جمعه (او په همدې توګه کمون یا تفریق یعنې د(-z2) په زیاتون)کیدی شي د څېرې ۵ (په همدې توګه د څېرې ۷ . ۳) د ګراف له لارې هم ښوول شي.

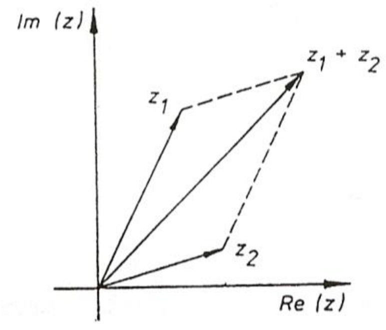


Bild 5.2 7.2 څېره

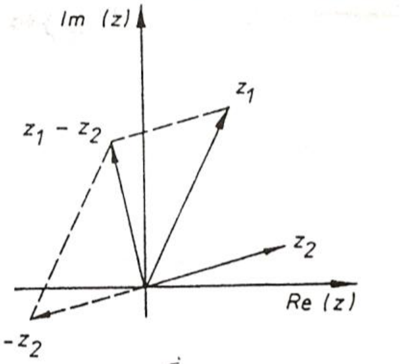
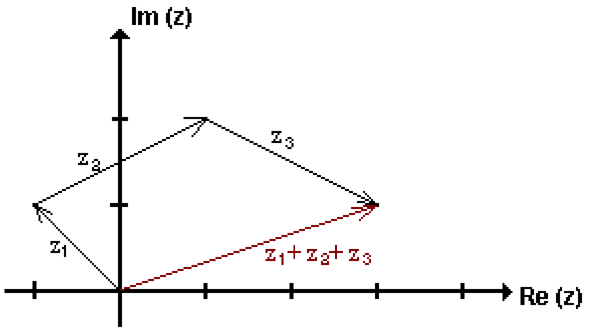


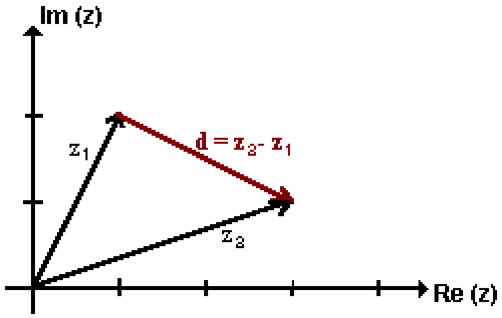
Bild 5.3 څېره

(c) ketabton.com: The Digital Library

یا لاندې:



په پورته او لاندې څېرو کې د کملپکس ګڼونو د زیاتون او کمون انځور لیدلکیږي۰



دکملپکس ګڼونو ارزښت

د وکتورz اوږدوالی د کملپکس ګڼونو ارزښت بلل کیږي۰

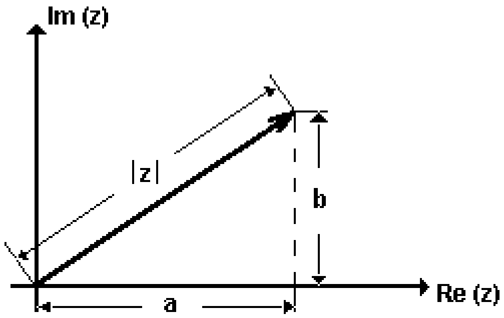
دا د په |z| سره ښایو او د پیتاګوراس(فیثاغورث) د جملې

سره ښوول کیږي، د دې لپاره دې پورته اخرنی لیکه

هم وکتل شي۰ مخامخ څېره موږ ته د کمپلکس ګڼ

د ارزښت انځور ښایي

(c) ketabton.com: The Digital Library



$|z| = |a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}.$

په درې ګوډي کې د اړخونو ځانښيونه یا تباسب له امله باور لري

$$||z_1|-|z_2|| \leq |z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|, ...(7,18)$$

برسيره پر دې باور لري:

$$z_1+z_2=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$$

٧ . ٢ د کمپلکس ګڼونوځل:

د ورسره بلد نوک اينوولو له لارې لاس ته راځي

$$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i) = a_1a_2 + a_1b_2i + b_1a_2i + b_1b_2i^2$$
$$= a_1a_2 + a_1b_2i + b_1a_2i + b_1b_2(-1)$$
$$\Rightarrow$$

نو باروړل ري

$$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i \qquad (7,20)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګران لوستونکی به زما په ستونځو پوه شي، چې لاتين توري په بدل ډول ليکل شوي، چې دا هم زما تخنيکي ستونځې دي، دا که په هرځايکې وي،دا به راته ګران د شميرپوهنې مينه وال وبخښي٠ دا لاندې هم ساده ازمايل کيدی شي

$$\overline{z_1.z_2} = \overline{z_1}.\overline{z_2} \quad , \quad |z_1 .z_2| = |z_1||z_2| \qquad (7,21)$$

بيلګه ۷ ٠ ۲

د $z.\bar{z}$ = (a+bi) (a-bi) = a²+b²+(-ab + ab)i =a²+b²

او (۱۵ ، ۷) له امله لاس ته راځي:

$$\Rightarrow \quad z.\bar{z} = |z|^2 \qquad (7, 22)$$

۷ ٠ ۳ ويش

$$z_1 : z_2 = (a_1+b_1 i):(a_2+b_2 i) = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1+b_1}{a_2+b_2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_1\overline{z_2}} = \frac{(a_1+b_1 i)(a_2-b_2 i)}{(a_2+b_2 i)(a_2-b_2 i)} = \\ = \frac{(a_1a_2+b_1b_2)+(a_2b_1-a_1b_2)i}{a_2^2+b_2^2}$$

$$z_1 : z_2 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1+b_1 i}{a_2+b_2 i} = \\ = \frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2} + \frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2} i \qquad (7,23)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پـه دې پسی لاس ته راځي

$$|\frac{Z_1}{Z_2}|=\frac{|Z_1|}{|Z_2|},\left(\overline{\frac{Z_1}{Z_2}}\right)=\frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}} \qquad (7,24)$$

بیلګه ۷ . ۳ :

د (۷ . ۲۴) د دوېمې برخې ښوونه:

$$\frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}}=\frac{\overline{Z}_1.Z_2}{\overline{Z}_2.Z_2}=\frac{(a_1-b_1i)(a_2+b_2i)}{(a_2-b_2i)(a_2+b_2i)}=$$

$$=\frac{(a_1a_2+b_1b_2)+(a_1b_2-a_2b_1)i}{a_2^2+b_2^2}=$$

$$=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}-\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i=\overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)}$$

بیلګه ۷ ۰ ٤ :د Z1 او Z2 لپاره له سره سم لاس ته راځي:

$$Z_1:Z_2=\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{2-3i}{3+2i}=\frac{(2-3i)(3-2i)}{(+2i)(3-2i)}=\frac{(6-6)-(4+9)i}{3^2+2^2}=\frac{13}{13}i=-i$$

۷ . ۴ . تمرینونه

۱ - مېلق یا همغه ارزښتونه او انځورونه

۱ . ۱ – لاندې په اریتمیتیکي یا شمیرنیزه توګه ورکړ شوي ورکړ شوي کمپلکس عددونه په ګاوس سېحه کې انځور کړئ! د دې عددونو مېلقه ارزښتونه وشمیرئ.

a) $z=1-i$ b) $z=\sqrt{2}+\sqrt{2}i$

c) $z=2(1-\sqrt{3}i)$ d) $z=-1-i$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ . ۲ – د ګاوس د عددونو سطحه کې د هغو لاندې مخلوط یا کمپلکس عددونو ځای ورکړئ، د کومو لپاره چې باور لري:

a) $|z| = \sqrt{2}$ b) $|z| < \sqrt{2}$ c) $|z| > \sqrt{2}$ d) $|z| = r$

۲ – جمعه او تفریق(زاتون او کمون)

۲ . ۱ – د شمیرنې او کارنې یا رسم کونې له لارې پیدا کړئ

a) $(1+2i)+(2+i)$ b) $(-2+i)+1-2i)$

c) $(1-2i)-(1-2i)$ d) $(-1-2i)+(2-i)$

۲ . ۲ - د شمیرنې او کارنې یا رسم کونې له لارې پیدا کړئ

a) $(22 + 5i) + (2 + i)$ b) $(3 + 2i) - (5+2i)$

c) $(1+2i) - (1+2i)$ d) $i -(1-2i)$

۳ . ضرب(ځل) او وېش:

په لاندې کې a,b,c,d,x,y حقیقي ګڼونه دي.

۳ . ۲ – وشمیرئ

a) $(2 + \sqrt{3}\, i) . (3-2i)$ b) $(3 + 2\sqrt{2}\, i) . (3 - 2\sqrt{2}\, i)$

c) $(1 + \sqrt{5}\, i).(1 - \sqrt{5}\, i) .(13 - 12i))$ d) $\sqrt{3 + \sqrt{7}i} . \sqrt{3 - \sqrt{7}i}$

۳ . ۲ – وشمیرئ

a) $(x + y\,i)(2x + yi)$ b) $(\sqrt{x} + \sqrt{y}\,i)(\sqrt{x} - \sqrt{y}\,i)$

c) $\left(\frac{2}{3}a - 3bi\right) \cdot \left(\frac{4}{3}a + 5bi\right)$ d) $(c - \sqrt{d}\,i)(-c - 2\sqrt{d}\,i)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۳ . ۳ – د لاندې ماتونو مخرج یا ماتلاندې حقیقي ورګرځوئ (a ، b حقیقي دي)

3.3.1. a) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}\,i}{\sqrt{3}+\sqrt{2}\,i}$ b) $\dfrac{1-20\sqrt{5}\,i}{7-2\sqrt{5}\,i}$

c) $\dfrac{56+33i}{12-5i}$ d) $\dfrac{63 + 16i}{4 + 3i}$

3.3.2. a) $\dfrac{5i}{\sqrt{2}-\sqrt{3}\,i}$ b) $\dfrac{3-27\sqrt{5}\,i}{7-3\sqrt{5}\,i}$

c) $\dfrac{i-\sqrt{3}}{\sqrt{3}\,i-2}$ d) $\dfrac{i}{8-i}(i+1)$

3.3.3. a) $\dfrac{3a+4bi}{4a-3bi}+\dfrac{4a-3bi}{4a+3bi}$ b) $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}\,i}{\sqrt{a}-\sqrt{b}\,i}-\dfrac{\sqrt{b}+\sqrt{a}\,i}{\sqrt{b}-\sqrt{a}\,i}$

c) $\dfrac{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}\,i}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}\,i}-\dfrac{\sqrt{1-a}+\sqrt{1+a}\,i}{\sqrt{1-a}-\sqrt{1+a}\,i}$

d) $(5-i)\,(6-i)+\dfrac{5-i}{6-i}$

۴ . سره رابوځی شوې پوښتنې

ګډوله ګڼونه یا اعداد ورکړ شوي.

$z_1 = \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{i}{2}$ او $z_2 = -\frac{1}{4} - \sqrt{3}\,\frac{i}{4}.$

۳ - د لوګاریتم بنسټ فرمولونو استعمال. په لاندې تمرینونوکې x وشمرئ.

$z_1 = \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{i}{2}$ und $z_2 = -\frac{1}{4} - \sqrt{3}\,\frac{i}{4}.$

وشمیرئ:

(c) ketabton.com: The Digital Library

4.1. a) $z_1 + z_2$ b) $z_1 - z_2$ c) $z_1 \cdot z_2$ d) $\frac{z_1}{z_2}$

4.2. a) $|z_1|$ b) $|z_2|$ c) $\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ d) $\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

4.3. a) $|z_1 + z_2|$ b) $|z_1 - z_2|$ c) $\bar{z}_1 + \bar{z}_2$ d) $\bar{z}_1 - \bar{z}_2$

4.4. a) $|z_1| \cdot |z_2|$ b) $\frac{|z_1|}{|z_2|}$ c) $|z_1 \cdot z_2|$ d) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$

۴ . ۵ – د لاندې مربع مساواتو حلونه ورکړئ!

a) $x^2 + (1 + i)\,x - 2\,(1 - i) = 0$

b) $x^2 + (3 - 2i)\,x + 3\,(1 - i) = 0$

c) $x^2 - \frac{i}{2}\sqrt{2}\,x + 1 = 0$

d) $16\,x^2 + 8\,(i + 1)\,x + 2\,(i + \frac{9}{2}) = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۸ - د ښوونې(ثبوت) متودونه

په شمیرپوهنه کې داسې مخ په وړاندې ځو، چې د ځینو نیونو یا فرضیو په فرمولولو سره، غوښتنو یا ښوونو او یا لکه تراوسه د ثبوتولو پرابلم (د ګڼپوهنې جملې په څیر) منځ ته رااچوو، چې دا نیونې او غوښتنې وېناوې دي۰ په جملو کې‌د دې ماتماتیکي یا شمیرپوهنیزه تړنه بیا ایمپلیکیشن یا لاس ته راوړنه ده(مخ ته دې وکتل شي)یانې A => B دا غوښتنه د ربښتیا ارزښت w غوښتنه B کې نغښتې او دا اوبی یا حل B له V او د دې تراوسه اوبی- یا حل شوو جملو لاس ته راځی۰ د دې لاس ته راوړنو لپاره بیلابیلې لارې شته ، چې په لاندې کې یې څیړو

۸ ۰ ۱ سیده یاسیخه (مستقیمه) ښوونه

په سیده ښوونه (ثبوت) کې سړی له یوې وینا A څخه مخ ته ځي، چې ربښتیاارزښت یې څرګند دی او په دې لاس ته راوړنې پسې د B وینا لاس ته راوړي۰

دا وینا B هم ربښتیا ده، ځکه چې له یوې ربښتیا پریمیسې Prämisse (نیونې یا فرضیي) څخه ربښتیا کونکلوزیون Konklusion (لاس ته راوړنه یا نوره هم ښه ښوونه یا ثبوت)(د اینمپلیکیشن ۱ او ۲ لیکه د ربښتیاارزښت په جدول کې) له یوې ربښتیا پریمیسې څخه د نارښتیا کونکلوزیون لاس ته راوړنې نارښتیا دي (ایمپلیکیشن ربښتیا ارزښت ۲ ــم جدول)۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه : سیده اوبیونه یا حل:

نیونه V : $x \geq 1$

غوښتنه B : $6x+3 \geq 3x + 6$

اوبی : وینا A ، چې رښتیا ارزښت w یې جوت دی، نیونه یې $x \geq 1$ ده۰ له 3 سره ځل له امله لاس ته راوړنې لرو چې په لاندې ډول دی: $3x \geq 3$ د 3 زیاتون له لارې لرو: $3x + 3 \geq 6$ د 3x زیاتون له امله لاس ته راځي:

$$6x + 3 \geq 3x+6.$$

بیلګه:

د یوه ناټیک اوبیونې یا حل کارونه (متود)

د ښوونې دی $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a.b}$

د ښوونې وړ وینا څخه لاندې لاس ته راوړنې لرو:

$$(a+b)^2 \geq ab$$

$$a^2+b^2+2ab \geq 4ab$$

$$a^2 -2ab+b^2 \geq 0$$

$$(a-b)^2 \geq 0$$

لاس ته راوړل شوې ویناوې $(a-b)^2 \geq 0$ بې بندیزه رښتیا دي۰ مګر دا د ښوولو وینا یواځې د شرایطو $b \geq 0, a \geq 0$ لاندې باور لري۰ له دې امله که له رښتیا وینا څخه غوښتل شوې یا د ښوولو ویناو ته نه شي راتلی(سیده ښوونه) او په ناسداه یا غیرمستقیم ه ښوونه یا اوبیونه باندې استعمال شي نو ګټوره به وي، چې په لاندې توګه تر څیړنې لاندې ونیول شي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

٨ ٠ ٢ ناسيده ښوونه يا - ثبوت:

په ناسيده ښوونه کې له يوه نفي يا نيګيشن يا نه والي څخه مخ ته ځو، چې A « ناغوښتنه» او له دې يوه وينا B لاس ته راوړل کيږي، کومه چې نارښتيا ده٠ وينا يعنې نفيې غوښتنه يا ثبوت هم نارښتيا دی، ځکه چې له يوې نارښتيا نيونې څخه يوه نارښتيا ښوونه يا ثبوت لاس ته راتلی شي(د ايمپليکيشن څلورمه کرښه).

له يوې رښتيا نيونې څخه د يوې نارښتيا ثبوت لاس ته راوړنه نارښتيا ده٠ (د ثبوت د

رښتيا جدول څخه) که د غوښتنو نفی نارښتيا وي، نو غوښتنه بيا په دې اوبيونې يا حل کې رښتيا ده٠

بيلګه : ناسيده ښوونه يا ثبوت

نيونه V : a , b دې رييل ګڼونه وي او وي دې: $a \geq 0, \quad b \geq 0$

ښوونه يا غوښتنه B :

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

اوبيونه : د غوښتنو نفيې ده $\frac{a+b}{2} \prec \sqrt{a.b}$

د پورته نابرابرون له څلورۍ يا مربع کولو له امله لاس ته راوړنه لرو:

$$(a+b)^2/4 < a.b$$

دواړه لورې له څلورو سره ضربوو، نو لاس ته راځی

$$(a+b)^2 < 4a.b$$

له څلورۍ وتنې يامربعوتنې څخه لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a^2+b^2+2ab < 4ab$$

په دواړو لورو د 4ab کموني څخه لاس ته راځي

$$a^2-2ab+b^2 < 0$$

د نابرابرون کينه لور د څلورئ ۰ مربع په بڼه ليکل کيدی شي او هيڅکله له صفر څخه نه شي کوچنی کيدی۰ دا په دې مانا، چې $(a+b)^2 < 0$ نارښتيا دئ يا غلط دی، نو له دې سره $(a+b) < ab$ نارښتيا دی يانې

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

رښتيا دئ ۰

۲ – غوښتنه B :د ۲ ريښه يا جذر $\sqrt{2}$ ايرشنل دئ

اوبيونه يا حل : د غوښتنې نفيې ده، چې : د ۲ ريښه $\sqrt{2}$ ريشنل ګڼ دئ (د ريشنل ګڼونو لپاره دې برخه ۳ وکتل شي)، نو بايد بيا دوه ټولريشنل ګڼونه q, p, د q≠0 سره شته وي، چې دا باوري شي:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow p^2 = 2q^2$$

له دې پورته برابرون سره p^2 يو جوړه((جفت) ګڼ دئ۰ نو له دې امله p هم يو جوړه ګڼ دئ، ځکه چې يواځې د جوړه ګڼ مربع يا څلورئ جوړه کيدی شي $p=2p'$ له مربع يا څلورئ کولو او پر ځاي اينوولو لاس ته راځي:

$$P^2 = 4p'^2،$$

$$2q^2 = 4p'^2$$

$$q^2 = 2p'^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له اخرنی برابرون لاس ته راځي، چې q هم يو څلوری يا مربع ګڼ دی٠ په دې پسې لرو p او q پر ۲ ويشونی دی، يانې پرويشپردی نه دی٠ که پرويشپردي ټول ګڼونه p او q له $\sqrt{2}$

سره شته نه وي، نو دا ډول ټولګڼونه نه شي کيدی، چې شته يا موجود وي٠

۸ ٠ ۳ د پوره ايندکشن له لارې ښوونه

د پوره ايندکشن ثبوت يا حل د هغو غوښتنو لپاره کارول کيږي، چې د يوه ټاکلي ګڼ n0 (صفر بايد لږ د ن د پښی لاندې وليکل شي) څخه د ټولو پيداينتي ګڼونو لپاره باوري کيدی شي٠ يانې دلته نوينه داده، چې يوه وينا د لپاره که باور ولري، نو دا بيا د ټولو پيداينت ګڼونو لپاره باور ي کيدی شي٠

بيلګه ۱ :

د ټولو $0 \leq n$ لپاره ۲ په توان دn له صفر لوي يا له صفر بسره برابر دي يعنې باور لري: $2^n \geq 0$

بيلګه : د ټولو $0 \leq n$ لپاره باور لري $1+3+5+\dots 2n+1)= n^2$

د پوره ايندکشن د ښوونې لپاره د « پوره ايندکشن پرينځيپ بنسټ» مخ ته پروت دی:

که يوه وينا دn= n0 يا(په لاندې، که ن،ج، ته پورته شو،نو صفر په ښنه کې‌ليکل شوی) $n = n_0$ لپاره باور ولري او که د دې وينا د يوه په خوښه پيداينتي ګڼ n = k لپاره اور لرلو څخه د n = k+1 لپاره باوريوالی ترې لاس ته راشي، نو دا وينا د ټولو پيداينتي ګڼونو $n \geq n_0$ لپاره ريښتونې ده ٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې پسې په ترتيب د اينډکشن ښوونه په دوه پلونو يا قدمونو سرته رسيږي

۱ - د اينډکشن پيل

ښوول کيږي، چې دا وينا د $n \geq n_0$ لپاره باور لري

۲ – د اينډکشن پل

اوس بايد يو ايمپليکيشن يا لاس ته راوړنه وښوول شي۰ له دې امله د اينډکشن پل يا له برخه پلونو جوړ دئ

۲ الف: د اينډکشن نيونه :

نيول کيږي، چې وينا د $n = k \geq 0$ لپاره باور لي او دا نيونه په V فرمولبند کيږي

يادونه V د نيونې لپاره ځاي پرځاي کيږي يا راوړل کيږي۰

۲ ب – د اينډکشن غوښتنه:

غوښتل کيږي، چې دا وينا د $n = k+1$ لپاره باور لري او دا غوښتنه په B فرمولبندي کوو۰ دا په ګوته کوو، چې B دلته د غوښتنې پرځاي ليکو

۲ ج – د اينډکشن ښوونه :

ښوول کيږي، چې B له A څخه لاس ته راځي: $A \Rightarrow B$

بيلګه ۱ :

۱ – د $n = 0$ لپاره باور لري $2^0 = 1 > 0$

۲ ۰ ۱ ۰ V ته :

$2^k > k$

و ۲ ۰ ۲ B ته

(c) ketabton.com: The Digital Library

$2^{k+1} > k+1$

۲ ۰ ۳ له B <= V : له $2^k > k$ او $1 < 2$ څخه د زياتون له امله لاس ته راځي :

$2+2^k > k+1$

او له دې لاس ته راځي: $2.2^k > k+1, 2^{k+1} > k+1$

بيلګه ۲ :

۱ ۰ د $n = 1$ لپاره باور لري $1 = 1° = 1$

و ۲ ۰ ۱ V ته: $1+3+5++\ldots+(2k-1) = k^2$

و ۲ ۰ ۲ B ته:

و ۲ ۰ ۳ B <= V ته: له نيونې څخه د زياتوون 2k+1 زياتونې او له دې د ښي خوا د يوه بينومځلوری(-مربع) په څير انځورونې څخه لاس ته راځي:

$1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1=k^2+2k+1$

او له دې د ښی خوا انځورونې څخه د بينوم څلوری(-مربع) لاس ته راځی :

$1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1)= (2k+1)^2$

يادونه : د V او B پر ځاي کړی شو، چې نيونه او غوښتنه وليکو، يانې موږ درې څه لرو، چې نيونه غوښتنه او ښوونه ده٠ په هغه ورسره بلد ډول يې ښوونه د يوه پارابلم حل دی، چې ما اوبی يا اوبيونه بللی(اوبي پښتو ده او ښه کره، همدې وي يا لغات ته مناسب خپل د پښتو نوم دی، چې ورسره بلد هم يو، لکه ملګوبی، خړوبی، چې موخه ترې همدا اوبی دی او په نورو ژبو کې هم همداسې دی)

دلته د شميرپوهنې سم اند درس ته د پای ټکی ږدو، کۀ نور څه مو ښه مخ ته راغله هغه به بيا د ترنې په ډول ورسره مل کړو٠ ستاسو وړانديزونو ته هم سترګی په لار يم٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۸ . ۴ تمرینونه

۱ – سیده وښایي

الف) له $a + 1/a = b$ څخه لاس ته راځي $a^3 + 1/a^3 = b^3 - 3b$

ب) د دوه تیرو کونجونو α ، β لپاره صدق کوي

$$\sin(\alpha + \beta) < \sin\alpha + \sin\beta$$

۲ – ناسیده وښایي :

الف) د ټولو x لپاره ، چې وي $0 < x < \infty$ ، صدق کوي

$$(3x - 4) / (2x + 4) > 1$$

ب) $\sqrt{2}$ یو ایریشنل ګڼ دی

۳ – د پوره اندکشن له لارې یې وښایئ

a) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{(n+1)\,n}{2}.$

b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{(2n+1)(n+1)\,n}{6}.$

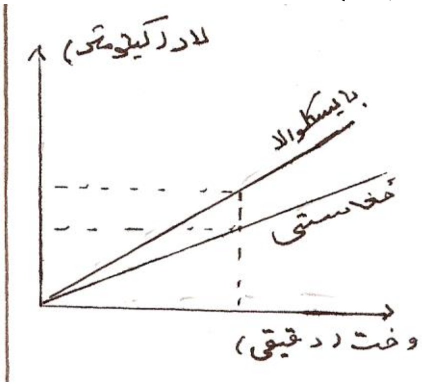
c) $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1.$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۹ ۰ کرښیز- یا خطي-یا لاینیز مساوات د یوې متحولې سره

پیل بیلګه

یو بایسکل ځغلوونکی او یو پلی له یوه ځایه په همغه وخت خوزي یا حرکت کوي، کوم چی په ګراف کی کښل شوی دی(که د ګراف کښل راته ناشوني شول بخښنه غواړم۰ که بل چا دا کار وکولی شو نو دا به یې هم مرسته وي، خو پرې پوهیدل کومې ستونځې نه لري) بایسکل په ګړۍ کی ۱۵ کیلومتره ځغلي او پلی ۱۰ کیلو متره په ګړۍ کي ځغلي. دوي پس له یونیم ساعت سره یوځاي کیږي. هر یو څومره لار وهي او یو له بل څومره لرې دي؟



(c) ketabton.com: The Digital Library

دا موږ دلته، لكه په ځنو كتابونو كى چى د فنكشن د نامه لاندې ياديږي، په همغه نامه نه يادوو خو هدف به همغه وي كه دا د برابرون يا مساوات په نامه وبولو .
وخت) په دقيقه (په t ښايو لار) كيلومتر(په s ښايو د لارانځورونى څخه په ګراف كى څرګنديږي چى بايسكلځغلوونكى له ۶۰ دقيقو وروسته ۱۵ كيلو متره ځغليدلي يعني 15km /hاو پلى ۱۰ كيلو متره يعني 10km/h
غواړود هرڅه لمړى وښايو چى هر يو له يونيم ساعت وروسته څومره لار وهلي او بيا دويمي پوښتني ته ځواب وركوو.
بايسكل ځغلوونكى به له دوه ساعته وروسته 2.15km = 30 kmځغليدلى وي او پلى به 2.10km=20kmځغليدلى وي بايسكل ځغلونكى به له tوخته وروسته t.15km
15.tkm=لار وهلي وي. دلته وخت t خپلواك اوړيدونى يا نا پژندونكى او لار s بلواك اوړيدونى يا ناپيژندونكى يعني د t په واك كى دى. دا كليمي به بيا د فنكشن او څيرونو په برخو كى پوره تر څيړني لاندې ونيول شي. د بايسكل ځغلوونكي وهلې لار، چى په r يې ښايو برابرون داسى ليكو:

$$S_r = 15.t; t \in Q_0^+$$

د بايسكل ځغلونكى وهلى لار، tچى د بايكلځغلولو وخت دى طبعاً زياتيز يا مثبت دى ورته دپلي چى په lيي ښايو وهلي لار هم تاكل كيږي،يعني د l وهلى لار:

$$S_l = 10.t; t \in Q_0^+$$

له دې سره مو وښوول چى دواړه له پيل ټكي له 1,5 ساعته يو له بل څومره لرې دي. وهل شوې لار :

د بايسكل ځغلوونكي $S_r = 15.1{,}5 = 22{,}5km$

د پلي $S_l = 10.1{,}5 = 15{,}0km$

ددې په تعقيب له 1,5 ساعته وروسته دواړه يو له بل 7,5 km لرې دي .

۹ . ۱ لاينيز- يا كرښيز مساوات :

د كرښيز مساوات فرمول د يوې اوښتونې يا مجهولې x سره داسى دى

$$Ax = a \qquad (9.1)$$

دلته A , a حقيقي اعداد دي. د (۱ . ۶) برابرون اوبيونه (حل) دا مانا لري چى ټول هغه حقيقي اعداد وښوول شي چى كه په پورته (۱ . ۹) برابرون يا مساوات كې ځاى په ځاى شي، د مساوات شرايط پوره كړي. د حقيقي اعداد و بنسټيز قانون (۳ – مجه

(c) ketabton.com: The Digital Library

برخه دې وکتل شي) په بنسټ کیدی شي چې د حقیقي عددد مساوات دواړه خواوي په یوه عدد سره ځل یا ضرب کړو. بی له دې چې مساوت زخمي شي. داچی ویش په د $\frac{1}{A}; A \neq 0$ ځل سره برابر دی نو لیکل کیږي

$$x = \frac{a}{A}; A \neq 0; ....(9,2)$$ ....

دا د (۱ . ۹) یواځنی ممکن حل دی۰که په څټ یا برعکس A = 0 وي، نو دلته دوه حالتونه یو د بل توپیروو

۱ – که $a \neq 0$ وي: دا مساوات بیا داسی دي $0.x = a; a \neq 0$

دا یو مخامخوالی یا تضاد یا نوره هم ښه په څتوالی تشکیلوي ، نو په دې حالت کی حقیقي عدد x شته نه دی چی دا(۱ . ۹) مساوات پوره کړي.

۲ - که a = 0 وي، نو بیا برابرون (۱ . ۹) لاندې شکل نیسي

0.x = 0

دا برابرون بیا د ټولو ریيلګڼونو xلپاره پوره (ډك) دی. یا برابرون پوره کوي.

دا بیا داسی هم لیکل کیږي : (په خوښه bel = xپس دا لاندې باور لري:

برابرون (۱. ۹ .) د $A \neq 0$ لپاره یواځنی ټاکلې اوبیونه (۹ .۲) لریډ A = 0 او $a \neq 0$ لپاره اوبیونه نه لري د A = 0 او a = 0 لپاره هر ریيلګڼ x اوبیونه یا حل دی.

په دې لاس ته راوړنوکی، د یوې اووښتونې یا مجهولی سره د ریيل برابرونونو د ګڼلو ټوله تیورې خوندي ده .

یو لاینیز برابرون (مساوات) (یو برابرن، چې د برابرونونو په دواړو خواوکی د لاینیزو برابرونونو ترمونو زیاتون $a_i + x_i + b_i$ پرت وي) دا مخکني نورمالفورم (۹ . ۱) مو له مخه مخ ته نه دی پروت، پس سرې په دواړو خواو د لاینیزو ترمونو د هدف په لور زیاتون (همداسی کمون) له لارې همغه مخکني نورمالفورم ته بیرته رااړوي، دا د II . 2 بنسټیز قانون له مخی یو ورته فورمبدلون یا بڼه بدلون دی)(د اوبي یا حل ډېری تغیر نه دی خوړلی) د بیلګي په توګه لاندې مساوات ورکړ شوی

$$a_1x - b_1x + c_1 - d_1 = a_2x - b_2x + c_2 - d_2$$

پس کیدی شي چی په دواړو خوا $b_2x + d_1$ ور زیات کړو او $a_2x + c_1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ترې کم کړو، نو لاس ته راځي

$$a_1x - b_1x - a_2x + b_2x = c_2 - d_2 - c_1 + d_1; ....(9.3)$$

دلته هغه د x لرونکی غړي د مساوات په کيڼ لور او ثابت د برابرون په ښي لورپراته دي. داسی ليکو

$$A = a_1 - b_1 - a_2 + b_2; a = c_2 - d_2 - c_1 + d_1$$

نو دا برابرون (۳ . ۹) د برابرون (۱ . ۹) سره (ته) کټمټ (ورته) دی، که په لاندې فورم يا بڼه يو مساوات ورکړ شوی وی

$$\frac{a_1}{a_2}x = \frac{b_1}{b_2}$$

(دا ټيك هلته موخه ور يا هدفمند دی چی $a \neq 0; b \neq 0$ وي) . نو برابرون د x په لور حل کيدلی شي ، که دا په a2 ځل شي او د 0=| a1 په حالت کی په a1 وويشل شي:

$$x = \frac{a_2b_1}{a_1b_2}$$

بيلګه ۹ . ۱ :

برابرون $\frac{a^2x - b^2}{a} - \frac{a(b - ax)}{b} + \frac{b^2}{a}$ هلته موخه ور دی چی $a \neq 0; b \neq 0$ وي. ددې لپاره چی د ماتلاندې ښخه ځانونه خلاص کړو، نو پورته ورکړ شوي برابرون د ګډماتلاندي a.b سره ځل کوو:

$$b(a^2x - b^2) - a^2(b - ax) + b^2 = a^2b$$

$$a^2bx - b^3 - a^2b + a^2x + b^3 = a^2b$$

اوس برابرون ترتيبيږي او راټوليګی، xله نوکانو ښخه راوځي

$$a^2bx + a^3x = a^2b + b^3 + a^2b - b^3$$

$$a^2(ax + b) = 2a^2b$$

د $a \neq 0$ له امله کيدی شي په a^2 وويشل شي (a+b)x=2b

دا د لاينيز برابرونونو بنسټيزه بڼه (فورم) (۱ . ۹) ده

که ($a + b \neq 0, (a \neq -b)$ وي ، نو) x = 2b /(a + b

(c) ketabton.com: The Digital Library

يوګونی يا يواځنی اوبيونه يا حل دی
که(a = -b) a + b = 0 ، نو د $b \neq 0$ له امله اوبيون شته نه ده .
هغه حالت چی ناپاي زياتې اوبيونې يا حلونه منځ ته راځي(د x =په خوښه) ، د نيونی يا فرضيي له امله چی بايد $b \neq 0$ وي، موجود نه دی.
پام:
په دې هکله زياتې بيلګی کيدی شي راوړل شي، چې ضريب يا ځله ووني په مختلفو توانونو وي۰ زه دلته يواځې دومره يادونه کوم، چې په مساواتو کې، چې اوښتونی يا متحولې ولري، همغهسی شميرل کيږي، لکه په رييلعددونو کې۰
دلته هم بايد دې ته پام وي، چې ماتلاندې صفر نه شي۰ که چيرې اړيينې وې او يا ګرانو لوستونکو يې راوړل وغوښتل، نو زه به بيا دا کار سرته ورسوم او بيلګي به هم راوړم او که چيرې کوم د شميرپوهنې مينه وال په دې هکله د پوښتنو ځوابونه غوښتل، زه به وهڅيږم او دا کار به هم سر ته ورسوم، که لوي ښتن غوښتل۰ زه دومره يادونه کوم، چې په دې هکله زما د شميرپوهنې بنستيز کتاب کې زياتې بيلګي راوړل شوي، خو نه پوهيږي، چې دا کتاب به چا ته ورسيږي او که نه

بيلګه 9 . ۲ :
برابرون $(x/a)-((a-x)/2bc)+(a-x)/3c=1$ يواځي
د $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ لپاره موخه ور دی.
ددې لپاره چی مات لاندې له منځه يوسو، نو مساوات د ا.م.ل. 6abc ا(صلي ماتلاندې) سره ځل کوو: $6bcx-3a(a-x)+2ab(a-x)=6abc$
ورپسی نور، په لاندې ډول، د ځرګندو شميرلارو يا - قاعدو له لارې لاس ته راځي:

$$6bcx-3a^2+3ax+2a^2b-2abx=6abc$$

$$(6bc+3a-2ab)x=6abc+3a^2-2a^2b,$$

$$(6bc+3a-2ab)x=a(6bc+3a-2ab)$$

دا بيرته د لايني مساوات (۹ . ۱) بنستيزه ده، او له دې امله صدق کوي:
د $6bc+3a-2ab \neq 0$ لپاره x=a د مخ ته پراته مساوات يواځنی حل دی.
د $6bc+3a-2ab=0$ لپاره د $0x=0$ له امله هر رييل کڼ x اوبيونه ده.
نو لرو x=a د $6bc+3a-2ab \neq 0$ لپاره د $6bc+3a-2ab=0$ لپاره x په خوښه
دلته د ځيرل شوو برابرونونو، چی په ساده ډول يی لاينيزوالی يا لاينيزتوب پيژندل کيږي، په څنګ کی برابرون شته چی په اصل (پرينځيپ) کی کرښيز يا لاينيز نه دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

مګر په لاینیز مساوات یا برابرونونو اړول کیدی شي. دلته ددې غوښتنو په څنګ کې چې د ناپیژندونکو ضریبونو a,b,c ..... لپاره شوي، زیات وخت په x هم شرطونه ایښول کیږي.

ددې لپاره لاندې کې درې ساده بیلګي راوړو:

بیلګه ۹ . ۳ :

برابرون $(8x - 9)(3x - 4) - (5x - 6)^2 = (4 + x)(3 - x) - 9$

د لومړي ځل لپاره څلوری برابرړن یا مربع مساوات دی، ځکه چې څلوری(مربع) غړي لري. د یو له بل څلولو یا ضربولو وروسته څلوری غړي له منځه ځي. یو لایني مساوات د یوې ځانګړي سره سره پاتي کیږي:

$$24x^2 - 32x - 27x + 36 - (25x^2 - 60x + 36) = 12 - 4x + 3x - x^2 - 9$$

$$-x^2 + x = 3 - x - x^2$$

$$2x = 3$$

$$x = 3 / 2$$

بیلګه ۹ . ۴ : برابرون $(2x - a) / (x - b) = 1$ یواځي هلته هدفمند دی که حل x دا شرط $x \neq b$ پوره کړي. نو بیا لرو: $2x - a = x - b \Rightarrow x = a - b$

د $x \neq b$ له امله باید باوري وي $a - b \neq b$ له دې امله لرو $a \neq 2b$ پس ورکړ شوی مساوات د $a \neq 2b$ لپاره یواځنی ټاکلی حل $x = a - b$ لري او پرته له دې $(a = 2b)$ حل نه لري.

بیلګه ۹ . ۵ :

مساوات $(a / x) + (b / x) - (c / x) = 1$

یواځي هلته هدفمند دی چې $x \neq 0$ وي. ددې نیونو لاندې باور لري . $x = a + b - c$ دا نو د $x \neq 0$ له امله یواځي هلته حل دی، کله چې $a + b \neq c$ وي. پس ورکړ شوي مساوات یواځي د $a + b \neq c$ لپاره یواځنی ټاکلی حل $x = a + b - c$ لري، په غیر له دې $(a + b = c)$ حل یا اوبیونه نه لري

بیلګه ۹ . ۶ : د لاندې مساوات څیړنه:

$$\frac{b^3c^2x - \frac{1}{a^2}}{121500ab^4c^3} - \frac{a^2x - \frac{1}{b^3c^2}}{2880a^3bc} + \frac{abcx - \frac{1}{ab^2c}}{5400(abc)^2} = 0,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چې ټيك د $abc \neq 0$ لپاره يو هدف لري، بايد د اصلي مات لاندې پيدا كولو لپاره د مات لاندې ك.ګ.ځ. تكرار شي

$$12150ab^4c^3 = 2^2.3^5.5^3.a.b^4.c^3$$

$$2880a^3bc = 2^6.3^2.5.a^3.b.c$$

$$5400(abc)^2 = 2^3.3^3.5^2.a^2.b^2.c^2$$

$$................ = 2^6.3^5.5^3.a^3.b.c^3 = 64.243.125.a^3bc^3$$

دا پورته ګڼ اصلي ماتلاندې (ا.م.ل) دئ

كه برابرون د ا.م.ل. سره ځل شي، نو ماتونه له منځه ځي او لاس ته راځي:

$$16a^2(b^3c^2x - \frac{1}{a^2}) - 225b^3c^2(a^2x - \frac{1}{b^3c^2}) + 120c.(abcx - \frac{1}{ab^2c}) = 0$$

د نوكانو يو له بل ځلولو راټول، ترتيبونه او ويشنه د x تر څنګ ولاړو فاكتورونو يا ضريبونو ($A = 89a^2b^3c^2 \neq 0$) څخه د نيونو سره سم دا لاندې لاس ته راوړكيږي

$$x = 1 / a^2b^3c^2, \; abc \neq 0$$

د دې وظيفي لپاره د حل نور امكانات نه شته.

تر اوسه مو هغه ماتونه وڅيړل چې مات لاندې يي له ځلونو جوړ وو، غواړو چې اوس داسې ماتونه وڅيرو چي مات لاندې يي له زياتونونو جوړ وي، چې د نوكانو له لارې په ځلوونو ټوټه كيدلي يا تجزيه كيدلى شي .

بيلګه ۹ . ۷ :

برابرون

$$\frac{a^2(2bx-1)}{a^4b^2x^2-b^2} + \frac{b}{a^2b+b} = \frac{a^2bx}{a^2bx-b} + \frac{b^2(2ax-3)}{a^4x^2x^2-b^2} - 1$$

ټيك د دې نيونو سره صدق كوي $ab \neq 0$, $|x| \neq 1 / a^2$. :

(c) ketabton.com: The Digital Library

اصلي مات لاندې) ا م ل (په لاندې ډول پیداکوو

$$a^4b^2x^2 - b^2 = b^2.(a^4x^2 - 1)$$

$$= b^2.(a^2x+1)(a^2x-1)$$

$$a^2bx + b = b.(a^2x+1)$$

$$a^2bx - b = b.(a^2x-1)$$

$$b^2.(a^2x+1).(a^2x-1) = b^2(a4x^2 - 1 =$$

اصلي ماتلاندی)ا م ل

د اصلي مات لاندې مساواتو له نوکانو څخه راوتلو) چي یو یا څو غړی د نوکانو دباندې او نور په نوکانو کی بندیږي(، لنډونو او ځلوونو له لارې لاس ته راځي

$$.....a^2(2bx-1)+b^2(a^2x-1) = a^2b^2x(a^2x+1)+b^2(2ax-3)-b^2(a^4x^2-1)$$

$$2a^2bx - a^2 + a^2b^2x - b^2 = a^4b^2x^2 + a^2b^2x + 2ab^2x - 3b^2 - a^4b^2x^2 - b^2$$

$$.............2a^2bx - 2ab^2x = a^2 - b^2$$

$$.................2ab(a-b)x = (a+b)(a-b)$$

$$..................................x = \frac{a+b}{2ab}$$

د $b \neq a$ او $0 \neq ab$ لپاره(دا د نیونو له لارې تل پوره دی)که $a = b$ وي، نو x د $0.x = 0$له امله په خوښه ارزښتونه نیولی شي، بی له هغو چی په بنسټیزو نیونو کی له نیونو د باندې ساتل شوي وي) یعني په مساوات کی ځاي ورته نه وي(. په دې حالت کی د xمطلقه ارزښت د کېونو $a = b$ د په څېټ ارزښت سره نه شي مساوي کیدی .د x لپاره نیول شوې نیونی د حل ورکولو کی باید په پام کی نیول شوي وي دا په دې مانا چي باید تل پوره وي:

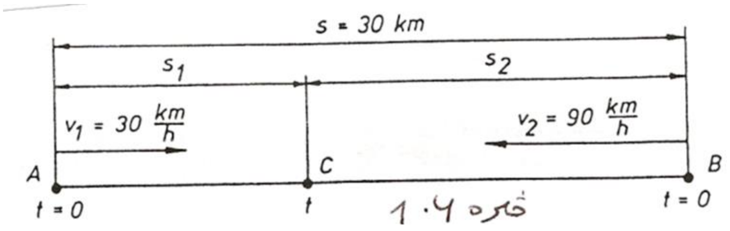
$$\pm 1 / a^2 \neq \frac{a+b}{2ab}$$

بیلګه ۹ . ۸ :

دوه ګاډې تمځایونه Aاو B یو له بل km30 لرې دي. د A څخه یو بارګاډی په ساعت کی د دیرش کیلومتره 30km/h په یوه ثابت سرعت یا چټکتیا باندې د B په لور

(c) ketabton.com: The Digital Library

خوزیږي. د Bڅخه یو تیز ګاډی D د 90km/h ثابت سرعت سره دA په لور حرکت کوي. که دواړه ګاډي په همغه وخت کي حرکت وکړي ، کله به یو بل سره مخامخ شي؟دلته دري فزیکي لویي یو رول لري : لار، وخت او سرعت. دا به په سومبولونو t , s او vسره وښول شي. ددې شي ځانتیوني لپاره څیره ځېره وکاږئ



پوښتنه » چیرته « د دواړو ګاډو د یوځایوالی ټکی C ته متوجه ده. دا کیدی شي د A څخه و C ته لریوالي(د بار کاډي لارs1) یا د Bلریوالي وC څخه(د تیزګاډي D لار s2) سره وشمیرل شي. پوښتنه »کله« د ګاډو یوځایوالي وخت t ته متوجه ده. دا هدفمند دئ کی د وخت لپاره د وخت کمون له روانیدو تر یوځایکیدو وټاکو. دلته درې اوړېدوني یا مجهولی مخ ته لرو s1 , s2 او t .

د پورته ورکړشو شي نیونی سره مناسب لاندې اړیکی باور لري:

$$v_1 = s_1 / t \quad , v_2 = s_2 / t \quad , \quad s_1 = + s_2 = s$$

د باورې ارزښتونو ماروني یا استعمال سره لاس ته راځي

$$s_1 = 30\ t \ , s_2 = 90\ t \ , s_1 + s2 = 30$$

(دلته د اندازی یونونه(واحدونه) پرېښوول کیږي. او پریکړه کوو چی لار په کیلو متر او وخت په ساعت ښایو)!

دا درې مجهولی s1 , s2 او t دی د دې برابرونونو یا مساواتو سره چی حل به یی په همداسی په برخه ۱۱ کی ورکړشوی وي، مګر دا دومره ساده دې چي د یوې له پیژندلو سملاسي نورې هم شمیرل کیدی شي. کیدی شي چی دا مساوات په یوې مجهولی مساواتو بیرته واړول شي. ددې مجهولی x په ځای کیدی شي s1 , s2 او t وټاکل شي .

که ولیکو s1 = x ، نو د اخري برابرون څخه لاس ته راځي s2 = 30 - x. دا په لمړنیو دوه مساواتو کی ځاي په ځاي کوو او دواړه د t په لور حلووو:

$$t = s1 / 30 = s2 / 90 = x / 30 = (30 -x) / 90$$

نو لرو: $x / 30 = (30-x) / 90$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاینیز ټاکنبرابرون یا ټاکنبرابرون د x لپاره دی، چی ساده حل کیدی شي:

$30x = 30 - x\ ,\ 4x = 30\quad x = 7{,}5$

نو لرو

$s_1 = 7{,}5\ km\ ,\ s_2 = 22{,}5\ km\ ,\ t = (7{,}5 / 30)h = 1h/4 = 15\ min$

که ولیکو $s2 = x$ ، نو شمیرنه لاندې لار غوره کوي یا بهیر نیسي:

$s_1 = 30 - x\ ,\ t = s_1 / 30 = s_2 / 90 = (30 - x)/ 90$

$3(30 - x) = x$

$90 = 4x$

$x = 22{,}5$,

$s_2 = 22{,}5km\ ,\ s_1 = 7{,}5\ km\ ,\ t = (22{,}4/90)h = 1h/4 = 15\ min$

که بالاخره وخت $t = x$ د اووښتونې یا ناپیژندونی په څیر وټاکو، نو بار لري یا صدق کوي: $s1 + s2 = 30x + 90\ x = 30$

$20x = 30$

$x = 30 / 120 = 1/ 4\ ,\ t = (1 /4)h = 15\ min$

$s1 = 30t = 30 /4\ km = 7{,}5km$

$s2 = 90\ t = 22{,}5\ km$

دواړه ګاډي له ټکی A څخه د $0{,}25\ h = 15\ min$ حرکت وروسته په $7{,}5\ km$ لریوالی یو بل سره مخامخ کیږي

بیلګه ۹ . ۵ – مساوات $(a/x)+(b/x)-(c/x)=1$

یواځې هلته هدفمند دی چې $x \neq 0$ وي. ددې نیونو لاندې باور لري $x = a + b - c$. دا نو د $x \neq 0$ له امله یواځې هلته حل دی، کله چې $a + b \neq c$ وي. پس ورکړ شوي مساوات یواځې د $a + b \neq c$ لپاره یواځنی ټاکلی حل $x = a + b - c$ لري، په غیر له دې $(a+b=c)$ حل نه لري.

بیلګه۹ . ۶ – د لاندې مساواتو څیړنه

$$\frac{b^3c^2x - \frac{1}{a^2}}{121500ab^4c^3} - \frac{a^2x - \frac{1}{b^3c^2}}{2880a^3bc} + \frac{abcx - \frac{1}{ab^2c}}{5400(abc)^2} = 0,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چې تیك د $abc \neq 0$ لپاره یو هدف لري، باید د اصلي مات لاندي پیدا کولو لپاره د مات لاندي ك.ګ.خ. تکرار شي.

$$121500ab^4c^3 = 2^2 . 3^5 . 5^3 . a . b^4 . c^3$$

$$2880a^3bc = 2^6 . 3^2 . 5 . a^3 . b . c$$

$$5400\, a^2b^2c^2 = 2^3 . 3^3 . 5^2 . a^2b^2c^2$$

اصلي ماتلاندي لنډ «ا م ل» $= 2^6 . 3^5 . 5^3 . a^3b . c^3 = 64.243.124.a^3bc^3$

که مساوات د ا.م.ل. سره ضرب شي، نو ماتونه له منځه ځي او لاس ته راځي

$$16a^2 \cdot \left(b^3c^2x - \frac{1}{a^2}\right) - 225b^3c^2 \cdot \left(a^2x - \frac{1}{b^3c^2}\right) + 120ab^2c \cdot \left(abcx - \frac{1}{ab^2c}\right) = 0.$$

د نوکانو یو له بل څخه راتول، ترتیبونه او ویشنه د x تر څنګ ولاړو فاکتورونویا ضریبونو ($A = 89a^2b^3c^2 \neq 0$) څخه د نیونو سره سم دا لاندي لاس ته راوړکیږي

$$x = 1 / a^2b^3c^2 \quad , \quad abc \neq 0$$

د دې وظیفي لپاره د حل نور امکانات نه شته.

تر اوسه مو هغه ماتونه وڅیړل چې مات لاندي یې له څلونو جوړ وو، غواړو چې اوس داسي ماتونه وڅیړو چې مات لاندي یې له زیاتونونو جوړ وي، چې د نوکانو له لارې په څلونو توته کیدلي یا تجزیه کیدلی شي.

بیلګه ۹ . ۷ :

$$\frac{a^2(2bx-1)}{a^4b^2x^2-b^2} + \frac{b}{a^2bx+b} = \frac{a^2bx}{a^2bx-b} + \frac{b^2(2ax-3)}{a^4b^2x^2-b^2} - 1$$

تیك د دې نیونو سره صدق کوي: $ab \neq 0$, $|x| \neq 1 / a^2$.

اصلي مات لاندي(ا م ل) په لاندي ډول پیداکوو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a^4b^2x^2 - b^2 = b^2.(a^4x^2 - 1)$$
$$= b^2.(a^2x+1)(a^2x-1)$$
$$a^2bx + b = b.(a^2x+1)$$
$$a^2bx - b = b. \quad (a^2x-1)$$

اصلي ماتلاتدی(ا م ل) $(\; = b^2.(a^2x+1).(a^2x-1) = b^2(a^4x^2 - 1)$

د اصلي مات لاندې مساواتو له نوکانو څخه راوتلو (چې يو يا څو غړی د نوکانو دباندې او نور په نوکانو کی بنديږي) ، لنډونو او څلوونو له لارې لاس ته راځي:

$$\begin{aligned} a^2(2bx-1)+b^2(a^2x-1) &= a^2b^2x(a^2x+1)+b^2(2ax-3)-b^2(a^4x^2-1) \\ 2a^2bx-a^2+a^2b^2x-b^2 &= a^4b^2x^2+a^2b^2x+2ab^2x-3b^2-a^4b^2x^2+b^2 \\ 2a^2bx-2ab^2x &= a^2-b^2 \\ 2ab(a-b)x &= (a+b)(a-b) \\ x &= \frac{a+b}{2ab} \end{aligned}$$

د $b \neq a$ او $ab \neq 0$ لپاره (دا د نيونو له لارې تل پوره دی)

که $a = b$ وي، نو x د $0.x = 0$ له امله په خوښه ارزښتونه نيولی شي، بې له هغو چې په بنستيزو نيونو کې له نيونو د باندې ساتل شوي وي(يعني په مساوات کی ځاي ورته نه وي). په دې حالت کی د x مطلقه ارزښت د کنونو $a = b$ د په څېر ارزښت سره نه شي مساوي کيدی.

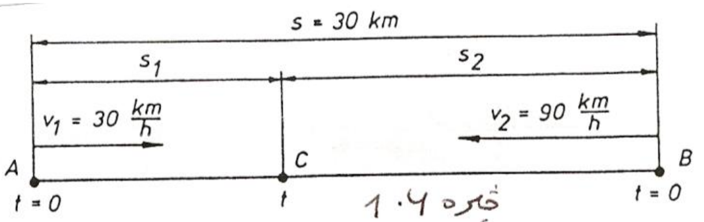
د x لپاره نيول شوي نيونې د حل ورکولو کې بايد په پام کې نيول شوي وي؛ دا په دې مانا چې بايد تل پوره وي:

$$\pm 1 / a^2 \neq (a+b) / 2ab$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه ۶ . ۸ : دوه ګاډي تمځايونه A او B يو له بل 30 km لرې دي. د A څخه يو بارګاډی په ساعت کې د ديرش کيلومتره 30 km/h په يوه ثابت سرعت يا چټکی باندې د B په لور حرکت کوي. دB څخه يو تيز ګاډی D د 90km / h ثابت سرعت سره د A په لور حرکت کوي. که دواړه ګاډي په همغه وخت کي حرکت وکړي ، کله به يو بل سره مخامخ شي؟

دلته درې فزيکي لويي يو رول لري : لار، وخت او سرعت. دا به په سومبولونو s , t اوv سره وښول شي. ددې شي ځانتيوني لپاره څيره ۶ . ۱ ورکړ شوې.



څېره ۶ . ۱

پوښتنه « چيرته » د دواړو ګاډو د يوځايوالی ټکی C ته متوجه ده. دا کيدی شي د A څخه و C ته لريوالي (د بار کاډي لار s_1) يا د B لريوالي و C څخه (د تيزګاډي D لار s_2) سره وشميرل شي.

پوښتنه «کله» د ګاډو يوځايوالي وخت t ته متوجه ده. دا هدفمند دی کی د وخت لپاره د وخت کمون له روانيدو تر يوځايکيدو وټاکو.

دلته درې مجهولې مخ ته لرو s_1 , s_2 او t . د پورته ورکړشو شي نيونې سره مناسب لاندې اړيکی باور لري:

$$v_1 = s_1 / t \quad , v_2 = s_2 / t \quad , \quad s_1 = + s_2 = s$$

د باوری ارزښتونو استعمال سره لاس ته راځي

$$s_1 = 30\,t \ , \ s_2 = 90\,t \ , \ s_1 + s_2 = 30$$

(دلته د اندازی يونونه پرينبنوول کيږي. او پريکړه کوو چې لار په کيلو متر او وخت په ساعت ښايو!)

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا دري مجهولي s_2 , s_1 او t دی د دري مساواتو سره چې حل به یې په ۶ الف او یا همداسي په برخه ۱۱ کی ورکړشوی وي، مګر دا دومره ساده دي چې د یوې له پیژندلو سملاسي نورې هم شمیرل کیدی شي. کیدی شي چې دا مساوات په یوې مجهولي مساواتو بیرته واړول شي. ددې مجهولي x په ځای کیدی شي s_2 , s_1 او t وټاکل شي. که ولیکو $s_1 = x$ ، نو د اخري مساوات څخه لاس ته راځي $s_2 = 30 - x$. دا په لمړنیو دوه مساواتو کی ځاي په ځاي کوو او دواړه د t په لور حلووو:

$$t = s_1 / 30 = s_2 / 90 = x / 30 = (30 - x) / 90$$

نو لرو

$$x / 30 = (30-x) / 90$$

لاینې ټاکنمساوات د x لپاره دي، چې ساده حل کیدی شي:

$$30x = 30 - x\ ,\ 4x = 30$$

$$x = 7{,}5$$

$$s_1 = 7{,}5\ \text{km},\quad s_2 = 22{,}5\ \text{km},\quad t = \frac{7{,}5}{30}\text{h} = \frac{1}{4}\text{h} = 15\,\text{min}.$$

نو باور لري:

که s2=x کیږدو،نو شمیرنه په لانې ډول ځغلي یا لاندې لار غوره کوي:

$$s_1 = 30 - x,\quad t = \frac{s_1}{30} = \frac{s_2}{90} = \frac{30-x}{30} = \frac{x}{90}\ ,$$

$$3\,(30 - x) = x,$$
$$90 = 4x,$$
$$x = 22{,}5,$$

$$s_2 = 22{,}5\ \text{km},\ s_1 = 7{,}5\ \text{km},\quad t = \frac{22{,}5}{90}\ \text{h} = \frac{1}{4}\ \text{h} = 15\,\text{min}.$$

که بالاخره وخت د نامعلومي په څیر وټاکل شي، یعني x=t ، نو باور لري:

$$s_1 + s_2 = 30x + 90x = 30,$$
$$20\,x = 30,$$
$$x = \frac{30}{120} = \frac{1}{4},\quad t = \frac{1}{4}\ \text{h} = 15\ \text{min}.$$
$$s_1 = 30\,t = \frac{30}{4}\ \text{km} = 7{,}5\ \text{km},$$
$$s_2 = 90\,t = 22{,}5\ \text{km}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دواړه ګاډي له ټکي A څخه د 0,25h=15min خوزښت(حرکت) وروسته په 17,5km کې یو بل سره مخامخ کیږي.

۹ . ۲ تمرینونه

۱ . ناکرښیز یا نالاینیز مساوات د یوې مجهولې سره

لاندې مساوات حل کړئ a او b نتیجه یې د ازمایئ! د مجهولو ضریبونو سره ارزښتونه راوباسئ; چې a او b یې نه شي غوره کولی یا نیولی.

دا ورکړئ چې مساوات د کومو a او b لپاره یوازنی حل لري، حل نه لري او یا ناپای ډېر حلونه لري.

همداسې تلنه طا رویه د نورو مجهولو ضریبونوسره هم وکړئ، چې په نورو برخو کې منځ ته راځي.

۱ . ۱ –بې له کسرونو یا ماتونو مساوات حل کړئ.

1.1.1. a) $8\left(\frac{1}{2}x-1\right)-2(x-1)=0$

b) $(3-x)(x+4)-9=(3x-4)(8x-9)-(5x-6)^2$

c) $2a(x+3)=(3+x)(5+2a)$

d) $3a-(7b+11a)-(3x-12b-9c)=(3x-8a)+5b-(3c-6x)$

1.1.2. a) $(a-x)(x+c)=2c(a-x)-(b-x)(c-x)$

b) $a(x+1)(ax+b)+b(a+bx)(1-x)=x^2(a-b)(a+b)$

c) $(x+a)(a-x)-b(b-a)=(x+a)(b-x)$

d) $a^2(x-a)+ab^2=b^2(x+b)-a^2b$

۱ . ۲ – کسري مساوات په مخرج کې د ټاکلو ضریبونو او فاکتورونو سره .

1.2.1. a) $\frac{3x-16}{3}+\frac{2x-10}{5}=3-\frac{x+1}{15}$ b) $4-\frac{10-3x}{5}=3-\frac{10-7x}{10}+\frac{x}{2}$

c) $\frac{2x+1}{2}+\frac{3x+1}{4}+\frac{5x+1}{8}=1-\frac{7x+1}{8}$ d) $\frac{4x+1}{3}+\frac{6x-1}{2}=5+5\cdot\frac{8x-10}{9}$

1.2.2. a) $\frac{4x-3}{20}-\frac{1}{12}(4x-5)=1-\frac{3}{5}(2x+11)$

b) $3\left(6\frac{1}{2}+x\right)-\frac{7}{3}\left(2x-\frac{19}{2}\right)-\frac{8}{3}x+\frac{5}{3}=0$

c) $\frac{7x-16}{3}-\frac{4}{5}(x+1)+6=\frac{3x}{2}$ d) $\frac{3x}{4}-\frac{4}{3}(x-4)=3$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1.2.3. a) $\frac{3x-7}{5}-\frac{7-4x}{7}=\frac{5x-11}{10}-\frac{19-10x}{14}$

b) $\frac{17+4x}{10}-\frac{7+x}{5}=\frac{7x+13}{25}-\frac{5+x}{20}$

c) $\frac{2x-11}{15}-\frac{x}{5}+\frac{59}{40}=\frac{8x-59}{30}-\frac{16x-145}{24}$

d) $\frac{4x+4}{5}-\frac{5x-4}{55}=\frac{2x+9}{4}-\frac{12x-3}{44}$

1.2.4. a) $\frac{5x+17}{3}-\left(\frac{3x+8}{2}-3\right)=\frac{3x+12}{2}-\left(\frac{x+4}{6}+3\right)$

b) $2-\left(\frac{3x+8}{4}-\frac{2x+2}{3}\right)=1-\left(\frac{7x+20}{8}-\frac{2x-7}{3}\right)$

c) $\frac{4-x}{2}-\left(\frac{8-x}{3}-\frac{x+2}{4}\right)+\left(\frac{8-x}{6}-\frac{3(2+x)}{8}\right)+x=1$

d) $\frac{10-14x}{8x}-\left(\frac{6}{5}+\frac{4}{2x}\right)=\frac{5}{8x}-\left(\frac{12}{5}+\frac{14x+1}{10x}\right)$

۱ . ۳ – کسري – یا ماتمساوات، چې په مخرج کې یې نا ټاکلي ضریبونه او فاکتورونه ورکړشوې وي.

1.3.1. a) $\frac{ax-1}{bcx}+\frac{bx-1}{acx}+\frac{cx-1}{abx}=0$

b) $\frac{ax-b}{bcx}+\frac{bx-c}{acx}+\frac{cx-a}{abx}=0$

c) $\frac{3(x-b)}{a}-\frac{2(x-a)}{b}-1=0$

d) $\frac{a-b^2}{x}-\frac{c-b^2}{x}-b=0$

1.3.2. a) $\frac{bx-a}{a}+b=bx-1$

b) $\frac{x-a}{a}-a=\frac{x-b}{b}-b$

c) $\frac{a+b}{x}-a=ab-\frac{a-b}{x}$

d) $\frac{ax^2-bx+1}{a}=\frac{bx^2-ax+1}{b}$

1.3.3. a) $\frac{bx-a^2}{a}+\frac{ax-b^2}{b}=\frac{b-ab}{a}+\frac{a-ab}{b}$

b) $\frac{20a-x}{5a}+\frac{6b-cx}{2b}=10-\frac{9c-ax}{3c}$

c) $\frac{a^3}{b}(x-1)-\frac{b+c}{b}(1-2x)=b^2(1-x)+\frac{b+c}{b}$

d) $\frac{x(b-a)}{ab}+\frac{b(c-x)}{ac}=\frac{x+b}{a}-\left(\frac{b}{c}+\frac{x}{b}\right)$

۱ . ۴ - کسري – یا ماتمساوات، چې په مخرج کې یې نا ټاکلي ضریبونه او فاکتورونه ورکړشوې وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

1.4.1. a) $\frac{5}{x+2}+\frac{3}{2(x+2)}=\frac{1}{2}-\frac{7}{2(x+2)}$ b) $\frac{12x+5}{16x-15}-\frac{16x+1}{15}=\frac{3-2x}{5}-\frac{2x-1}{3}$

c) $\frac{10-2x}{3}+\frac{13+2x}{7}=\frac{14x+26}{2x+21}-\frac{17+8x}{21}$

d) $\frac{2x^n+7x^{n-1}}{9}+\frac{7x^n-44x^{n-1}}{5x-14}=\frac{4x^n+27x^{n-1}}{18}$

1.4.2. a) $\frac{8x+7}{9x^2-4}=\frac{16}{15x-10}$ b) $\frac{24-5x}{6-2x}-5=\frac{34-14x}{9-3x}$

c) $\frac{x+4}{12x+4}-\frac{x-4}{3x+1}=5$ d) $\frac{10x-11}{12x+18}=\frac{3}{2}-\frac{4x+1}{6x-9}$

e) $\frac{x}{x-2}-\frac{x-2}{3x-6}=\frac{1}{6}$ f) $\frac{8-x}{5-10x}=2-\frac{5}{3-6x}$

g) $\frac{12x}{10x+5}+\frac{6x-10}{2x+1}-\frac{2x+25}{12x+6}+\frac{10x-1}{8x+4}=2$

h) $\frac{3x-2}{5x+10}-10=\frac{2x+1}{3x+6}+\frac{2(1-4x)}{x+2}$ i) $\frac{6x-1}{4x-6}+\frac{10x-7}{6x-9}=11-\frac{14x+1}{8x-12}$

j) $\frac{3x}{2x-\frac{1}{2}}-\frac{16x^2}{3(4x-1)}=\frac{4(1-x)}{3}-\frac{4}{12x-3}$

1.4.3. a) $\frac{x-2}{x+2}-\frac{x+4}{x-2}=2\frac{x-38}{x^2-4}$ b) $\frac{12}{x+4}-\frac{x+4}{x-4}+\frac{x^2}{x^2-16}=0$

c) $\frac{5x^2-120}{10-x}+\frac{3x^2+80x}{10+x}=\frac{2x^3+160}{100-x^2}$

d) $\frac{15x+2}{5x-2}+\frac{25x-2}{5x+2}=\frac{200x^2-25x+18}{25x^2-4}$

e) $\frac{16x^2-20x+4}{4x^2-16}=\frac{2x-1}{2x-4}+\frac{3(2x+1)}{2(x+2)}$

f) $\frac{7x^2+8}{2(x^2-1)}=\frac{2(x+1)}{x-1}+\frac{3x-4}{2x+2}$

g) $\frac{16x^2-6x}{2x+1}-\frac{6x}{1-2x}=\frac{32x^3-16x^2+4x+16}{4x^2-1}$

۱ . ۴ . ۴ –

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

a) $\frac{2x-5}{x-5}+\frac{3x-5}{x-9}=\frac{5x^2-39x+30}{x^2-14x+45}$

b) $\frac{2x-9}{x-12}+\frac{x-6}{x-24}=\frac{3x^2-87x-36}{x^2-36x+288}$

c) $\frac{11x+6}{x^2-3x-54}=\frac{3x-14}{2x-18}-\frac{3(x+2)}{2x+12}$

d) $\frac{7x-15}{3x-6}+\frac{8x-21}{3x-3}+\frac{10x+21}{3x^2-9x+6}=5$

e) $\frac{1}{3x+21}+\frac{1}{3(x-5)}-\frac{x+6}{4(x^2+2x-35)}=0$

f) $\frac{136x^2-4x-266}{48x^2-32x+5}=\frac{14x-19}{4x-1}-\frac{8x+25}{12x-5}$

g) $\frac{8x-3}{6x-4}+\frac{6x-4}{10x-6}=\frac{116x^2+10x-34}{60x^2-76x+24}$

۱ . ۴. ۵ -

a) $\frac{5x-12}{2}=\frac{5\cdot\left(\frac{1}{2}x^2+3\right)}{x+1}-\frac{7x-10}{2x-10}$ b) $\frac{28}{45-7x}=\frac{5}{x-9}-\frac{9}{x-5}$ ؛

c) $\frac{x+6}{x-2}+\frac{3x-8}{x-4}=\frac{6(x+9)}{x+6}$ d) $\frac{x-13}{x+3}+\frac{8x+45}{x+5}=\frac{9x+7}{x+2}$

۱ . ۵ – کسري مساوات، چې په مخرج یا مات لاندې کې یې ناټکلي ضریبونه او فکتورونه ورکړ شوي وي.

۱ . ۵ . ۱ –

a) $\frac{2a+x}{2a-x}=\frac{a+b}{a-b}$ b) $\frac{a-b}{2c-x}=\frac{a+b}{2c+x}$

c) $\frac{a}{a-2x}-\frac{b}{b-2x}=0$ d) $\frac{x-\sqrt{a}}{x-\sqrt{b}}-\frac{x-\sqrt{a}}{x+\sqrt{b}}=0$

۱ . ۵ . ۲ –

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

a) $\frac{a}{x+b}-1=1+\frac{b}{x+b}$ b) $a-\frac{ax}{x-1}=\frac{1}{a}-\frac{x}{ax-1}$

c) $a+b+\frac{x}{a+b}=a-b+\frac{x}{a-b}$ d) $\frac{1}{a+b}+\frac{a+b}{x}=\frac{1}{a-b}+\frac{a-b}{x}$

e) $\frac{x}{ab}+ab=\frac{1}{a+b}+(a+b)x$ f) $\frac{ax}{b}+\frac{bx}{a}+\frac{2ab}{a+b}=\frac{(a+b)^2x}{ab}$

g) $\frac{a+1}{b}x+\frac{b+1}{a}x+\frac{2ab}{a+b}=a+b+1$

1.5.3. a) $\frac{2(6x^2-11a^2)}{4x^2-9a^2}=5-\frac{4x+a}{2x+3a}$ b) $\frac{a}{1-x}-\frac{b}{x+1}=\frac{(a-b)(ab+1)}{1-x^2}$

c) $\frac{2a}{2-x}-\frac{2b}{x+2}=\frac{4(a^2b+ab^2+a-b)}{4-x^2}$

d) $\frac{b-x}{a+x}+\frac{1-x}{a-x}=\frac{a(1-2x)}{a^2-x^2}$ e) $\frac{ax+b}{ab-b^2}-\frac{a-bx}{ab+b^2}=\frac{2(ax+b)}{a^2-b^2}$

f) $\frac{2a+ab^2x}{a+ab^2x}-\frac{a^2(3-2bx)}{a^2-a^2b^4x^2}=\frac{b^2(2ax-1)}{a^2-a^2b^4x^2}-\frac{ab^2x}{a-ab^2x}$

۶,۱ – کسرمساوات یا ماتبرابرون له دوه کسرونو سره

a) $\frac{\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}-x}-\frac{2}{3}=\frac{2}{3}-\frac{\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}-x}$ b) $\frac{\frac{3}{2}-\frac{1}{x}}{\frac{3}{2}+\frac{1}{x}}-\frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{x}}{\frac{2}{3}+\frac{1}{x}}=\frac{\frac{3}{2}-\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x}+1}$

c) $\frac{a-\frac{1}{x}}{a+\frac{1}{x}}-\frac{1}{x}=\frac{x-\frac{1}{a}}{x+\frac{1}{a}}-\frac{1}{a}$ d) $\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{x}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{x}}=\frac{a-\frac{1}{x}}{a+\frac{1}{x}}$

۱ . ۷ .   شي تمرينونه

۱ . ۷ ۱ – که د یوه گڼ خلور خله او ۱۴ زیاتون ۴۰ وي ، نو هغه گڼ کوم دی؟

۱ ۷ . ۲ – که د یوه گڼ خلورخله او ۴ زیاتون ددې گڼ او ۱۴ زیاتون سره برابر وي ، نو هغه گڼ کوم دی ؟

۱ . ۷ . ۳ – د یوه گڼ خلورمه برخه او پنځه خله ۴۲ گڼ ورکوي ، نو هغه گڼ کوم دی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

----

۱ . ۷ . ۴ – که د يوه ګڼ څلوربرابره څخه ۲ کم شي او په يوه ګڼ وويشل شي چې ۴ ترې کم شوی او ۱۱ لاس ته ترې راشي، نو دا ګڼ به کوم وي؟

۱ . ۷ . ۵ – د يوه ګڼ پنځه ځله او د ۳ زياتو دوه ځله لوي دی. لکه د دې ګڼ درې ځله او ۱ کمون. دا ګڼ کوم دی؟

۱ . ۷ . ۶ – د يوه ګڼ څلورځله او ۱۴ کمون نيم دومره لوي دی لکه ددې ګڼ دوه ځل او ۸ . دا ګڼ څه نوميږي؟

۱ . ۷ . ۷ – د يوه ګڼ شپږ ځله او د ۵ کمون يا توپير چې ددې ګڼ په څلور ځله او ۵ زياتون وويشل شي، ۱ ور کوي. دا ګڼ څه نوميږي؟

۱ . ۷ . ۸ – د يوه مات ماتباندې په ۵ له ماتلاندې کوچنی دی. که ماتباندې په ۲۳ او مات لاندې په ۸ لوي شي، نو د ورکړشوي مات په څټ ارزښت لاس ته ترې راځي. دا ګڼ څه نوميږي.

۱ . ۷ . ۹ – ۲۵ داسې په دوه ګڼونو بېل کړی يا تجزيه يا ټوټه کړی، چې د مربع توپير يې ۱۲۵ شي.

۱ . ۷ . ۱۰ – د دوه ګڼونو توپير يا کمون ۶ او مربع يې ۱۸۰ دی . ګڼونه څه نوميږي؟

۱ . ۷ . ۱۱ – دوه ګڼونه داسې تناسب کې دي، يا يو بل ته داسې ځانونه نيسي . که دوم په لمړی وويشل شي، نو ۲ لاس ته راځي او پاتې يې ۷ دي. دواړه ګڼونه کوم دي؟

۱ . ۷ . ۱۲ – د دوه ځاينيونکي ګڼ پروت زياتون ۱۲ دی. که له دې ګڼ ۱۸ کم شي، نو يو دوه ځاينيونکی ګڼ لاس ته راځي، د همغه ځايګڼونو سره مګر په څټ ترتيب سره.

۱ . ۷ . ۱۳ – يو زدکړی غواړي د يوه ګڼ څخه مربع ريښه د يو په بل کې بندولو پرينځيپ يا اصول له لارې پيدا کړي. دی لمړی يو ګڼ د ريښې په خير

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټاکي، چې مربع يې په ۲۷ کوچنی دی. بیا یوه ریښنه ټاکي ، کومه چې دوه له هغه لوي دی چې لمړی ټاکل شوی. ددې ریښني مربع په ۳۳ لوي دی ، هغه ګڼ کوم دی چې مربع ریښنه یې غواړو پیدا کړو ؟

۱ . ۷ . ۱۴ – یو د سپورت ملګرو ټولنه له څلورو ډلو جوړه ده. لمړی ډله ۳۷ دملګرو غړي لري، په داسی حال کی چې نورو ډلی 1 / 4 , 1 / 5 په همدې ډول 2 / غړي په بر کی نیسي. د غړو شمیر څومره دی او د هرې ډلی څومره دي

۱ . ۷ . ۱۵ – یو نفر په درې ورځو کی مجلی په داسی شمیر خرڅوي: په لمړی ورځ 1 / 9، دومه ورځ 1 / 6 او په دریمه ورځ 1 / 4 د مجودو لوټوکه .

دی اوس له هغومجلو د نیمایي دوه کمي د څان سره لري. هغه څومره مجلی د خرڅلاو لپاره لرودې؟

۱ . ۷ . ۱۶ – یوه میلمه د یوه زدکوونکی څخه د هغه د عمر پوښتنه وکړه. زدکوونکي په ټوکه ځواب ورکړ« څما پلار چې درې میاشتی پخوا یې خپله ۵۵ کلنی ولمانځله، څما د عمر څلورواره څخه 1 / 4 زیات زوړ دی.» زدکوونکی څومره عمر لري؟

۱ . ۷ . ۱۷ – د یوه زدکوونکي پلار څلورنیم ځله زوړ دی لکه د هغه ځوي. دواړه ۲۷ کاله د هغه د یو اویاکلن نیکه څخه ځوان دي، پلار او ځوي څومره زاړه دي؟

۱ . ۷ . ۱۸ – په یوه معما کی یو زدکوونکی د ې بل ته وايي:« که زه لما سره بټوه کی پیسو سره ۵،۲ افغانی ور زیاتي کړم ، زیاتون یې له ۵ سره ځل یا ضرب کړم او له دې ځل څخه ۱۲ کمی کړم او دا لاس ته راغلی کمون یا توپیر په 11 وویشم نو نتیجه یې ۸ افغانی ده. » هغه زدکوونکی په خپله بټوه کی څومره پیسی لري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ . ۷ . ۱۹ – په یو په بل پسی تړلو مقاومتونو کی لمړی او دوهم یو ډول لوي دي، دریم دوه ځله او څلورم دریځله دومره لوي دي لکه لمړی دوه یاد شوي مقامتونه، ټول مقاومت ۱۰۵۰ (اومیگا)، په دې پروت شپانونك ۱۱۰ ولټه دی. اوس الف) یوگوني مقاومتونه څومره لوي دي، ب برققوه، برخه مقاومتونه ؟

۱ . ۷.۲۰ – د دوه غبرگ چالان عمومي مقاومت (ماته متأسفانه په افغانسان کی د فزيك مروج نومونه دې معلوم، خو فکر کوم چي په هدف به پوه شو) دی

a) 1000Ω, b) 2000Ω

یو مقاومت 4000Ω دی، هغه بل څومره لوي دی؟

۱ . ۷ . ۲۱ . د دریې غبرك قاومتونو څخه یی دوم دوه واره دومره لوي دی لکه لمړی او دا دریم یی درېواره دومره لوي دی لکه دوم . هر مقاومت څومره لوي دی، که عمومي مقاومت a) $12 k\Omega$, b) 300Ω وي؟

. ۲۱ . د دري غبرگو مقاومتونو څخه یی دوم دوه واره دومره لوي دی لکه لمړی او دا دریم یی درېواره دومره لوي دی لکه دوم . هر مقاومت څومره لوي دی، که عمومي مقاومت الف) $12 k\Omega$ ب) 300Ω وي؟

. ۲۲ په اوبو کي یو د لرگي منډه باید څومره لوي وي، چی د لمبیدو استعداد یی ۷۵۰ نیوټونه وي او د لرگي خاص وزن یا کلکوالی (د فرمول څخه معلومیږي چی دا څه شی دی) $4\ \frac{N}{dm^3}$ وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۷ . ۲۳ د سونګموادو ټانك د دوم ماشین لپاره ۴۰ لیتره ګډوړ د سونګ مواد لري.
څومره تیل او څومره بتزین په ټانك کی موجوددي که ګډونه یی وي؟

۷ . ۲۴ د ښار د ښکلا لپاره د ښارمنځ د سرك په اوږدوالي ۸۵ ونی کینول کیږي.
دا چی د مخه خرکړ شوی او تل همغه واټن په یوه متر کوچنی شي ، نو په
سرك بیا ۲۰ ونی زیاتی کینښنول کیدی شي. د دې هرې ونې واټن وبلی ته
څومره لویږ دی؟

۷ . ۲۵ د بایسکلځغلونوکو ډله له سر څخه ۵۰ متره اوږدوالی لري. هغه ۴۵
کیلومتره په ساعت کی سرعت لري، چی په یوه پله چی اوږدوالی یی
متره دی ، څومره وخت ته ضرورت لري، چی له پله پورې لاړ شي.

۷ . ۲۶ واورومنډه کي ، دا وروسته وړونکی د پروسږکلني وړونکی څخه یوه نیمه
دقیقه وروسته په ځغاسته پیل کوي. د څو کیلو متره وروسته دی کړي
چی لمړني ځغلیدونکي څخه مخ ته شي، که د ده منځنی سرعت ۵ متره
ثانیه کی وي او د لمړي ۸ ، ۴ متره په ثانیه کی وي ؟

۷ . ۲۷ د تامنځي د دز سره د سپورت میله کي ۲۰۰ متره ځغاستی د منډې ډله په
ځغاسته پیل کوي. ځغلیدونکی د پیل کرښي څخه لس متره شا ته ولاړدي.
برخه نیوونکی په منډه پیل کوي ، چی د تومانچی د ډز کرد وګوري دو
وخت توپیر څومره دی، که غږ رسیدنه په نظر کی ونه نیول شي او د غږ
سرعت ۳۴۰ متره په ثانیه کی وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۰ کومبیناتوریك - د بینوم جمله

کومبیناتریک څخه په شمیرپوهنه کې د دې لپاره کار خلي، چې یو ګڼ ، پل ځاي بدلو
څومره والبشانې او که څو ګنونهخپل ځاي بدل کړې دا څنګه لیکل کیږي۰ د ځای بدلون
شمیرنه ده
او د هغې ډولونه۰
په ۱۰۱۰ او ۲۰۱۰ برخو کی به د شمیرپوهنی مرستندوي مواد د بینوم
جملی(۳.۱۰)
برخه(او کومبیناتوریك (۱۰ . ۴ برخه) د فاکولتیت کلیمي او بینومیالکوایفیڅینت
(بینوم ځلوني) پیل شي .

۱۰ . ۱ فاکولتیت Die Fakultät, factorial

پیژند ۱۰ . ۱ :
د !nسومبول (ویل کیږی n « فاکولتیت «) لاندې سرې له1 تر n پورې ګڼونو ضرب
پوهیږي، یعنی $n! = 1.2....(n-2).(n-1).n$ برسیره پر دې تعریفوو: $0! = 1$

د فاکولتیت له پیژند څخه څرګندیږي، چی $(n+1)! = n!.(n+1)$ لرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه:
په افغاني ادبیاتو کی تر هغي چی ماته معلومات شته د فاکولتیت په ځاي فاکتوریال لیکل شوی. ما په دي کتاب کی دا د الماني کلیمه یا پښتو ، ځله ووني،، زیات کاره ولی، هیله ده چی تاسو به یی په خپله خوښه وټاکی. په دې کی کومه سهوه منځ ته نه شي راتلی۰

بیلګی :

الف $n!$: د $n = 5$ لپاره په دي ډول دی: $5! = 1 . 2 . 3 . 4 . 5 = 120$

ب : په دې ډول دی : $0!.2!.4! = 1.(1.2).(1.2.3.4) = 48$

پ: په دې ډول دی: $5!/3! = 1.2.3.4.5 / 1.2.3 = 4.5 = 20$

ت : په دې ډول دی

$$(n+2)!/(n-1)! = 1.2.3....(n-1)(n).(n+1).(n+2)/1.2.3...(n-1)$$
$$= n.(n+1).(n+2)$$

ټ: داسی دی

$$2.n! = 2.(1.2....n),$$
$$(2.n)! = 1.2....n.(n+1)....2n.$$

۱۰ . ۲ د بینوم ځلووني یا ضریبونه

پیژند: ۱۰ . ۲

د سیمبول $\binom{n}{k}$ (وییل کیږي n « پر » k لاندې د دوه ځله ونو ویش پوهیدل کیږي چی هر یو k ځله ووني یا ضریبونه یا فاکتورونه لري :

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \prod_{i=1}^{k} \frac{n+1-i}{i}$$

برسیره پر دې دا هم په کلکه کره کیدلی شي:

$$\binom{0}{0} = 1; \quad \binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1; \quad \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1};$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\binom{n}{1} = n$$

د k ګڼ يو پيداښتي يا طبعي ګڼ دی او د ماتلاندې او مات باندې ګڼونو ګڼون يا تعداد ښايي،په مات لاندې کي د لومړيو k پيداښت يا طبعي ګڼونو فاکتورونه دي. دn ګڼ رييل دی او د مات پورته لومړنی فاکتور دی. دوم فاکتور1 - n ، دريم n-2 تر k –م فاکتور n-k+1 پورې . دا $\binom{n}{k}$ سومبول د اويلر(leo nard Euler له ۱۷۰۷ - ۱۷۸۳سويسي ګڼپوه، فزيکپوه او استرولوګ) لخوا د لومړې ځل لپاره پيل شو، له دې امله ورته د اويلر سومبول وايي پرتله يا مقايسه برخه ۱۰ . ۳ (. که څوك ديوه بينوم پوتنځ يا توان شميري) ۱۰ . ۳ برخه(، نو سيمبول $\binom{n}{k}$ لاس ته راځي چی د يوا-
ځنيو زياتونونو ځلونه دي، او له دې امله ورته بينوم ضريب يا بينوم ځله ووني ويل کيږي.

بيلګی :

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3!}{2!\cdot 3!} = \frac{5\cdot 4}{2!} = \frac{20}{2} = 10$$

$$\binom{3}{5} = 0 \text{ ،} \binom{49}{6} = 13.983.816$$

$$\binom{2}{1/3}$$

تعريف نه دی ، ځکه چی 1 / 3 پيدأيښتي يا طبعي ګڼ نه دی.

د بينوم ضريبونو يا ځلونوخويونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ - د $n<k$ ، $n,k \in N$ لپاره باور لري $\binom{n}{k} = 0$

که n یو طبعي ګڼ وي او له k کوچنی وي، نو صفر په ماتباندې کی یوځله وونی

یا ضیرب دی

۲ - د $n > k$ ، $n,k \in N$ لپاره باور لري

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

اوبیونه (حل): سرې د !(n-k سره د مات $\binom{n}{k}$ پراخوالي له امله لاس ته راوړي

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \prod_{i=1}^{k} \frac{n+1-i}{i}$$

دا پورته برابرون له $\frac{(n-k)!}{(n-k)!}$ سره ځلوو، نو لاس ته راځي

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

له دې نور لاس ته راځي، که د k په ځاي n - k ولیکل شي

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-n+k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

۳ - باور لري

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

حل (اوبی) : د کیڼ اړخ زیاتون څخه دا لاندې لاس ته راوړل کیدی شي، که د بینوم ضریبونه یا ځلووني د ماتو په څیر ولیکل شي ، ماتونه ور زیات کړي او د زیاتونون ګډ فاکتورونه چی په ماتباندې کی دی په نوکانو کی ونیسي اوپاتی ساده کړي :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}+\frac{n(n-k)...(n-k+1)(n-k)}{(k+1)!}=$$

$$=\frac{n(n-1)...(n-k+1)+n(n-k)...(n-k+1)(n-k)}{(k+1)!}=$$

$$=\frac{n(n-1)...(n-k+1)[k+1+n-k]}{(k+1)!}=$$

$$=\frac{n(n-1)...(n-k+1)(n+1)}{(k+1)!}$$

که په پورته ا افاده يا وپينه کې د مات پورته اخرنی فاکتور د لومړي ځله ووني په ځير وليکل شي، لاندې بينوميال يا بينوم ځلوونی (ضريب) تعريفوي:

$$\binom{n+1}{k+1}$$

۱۰ . ۳ د بينوم جمله

د بينوم لاندې سړی د دوه توکو (ګڼونو) زياتون پوهيږي. يعني: $x+y$
د بيونم جمله موږ ته ښايي چی ځنګه د يو بينوم

$$(x+y)^{n}$$

پوتنځ، چی پيدايښتي ګڼ n يی ايکسپوننت يا جکګڼ يا لنډ جګ وي، د زياتون په ځير پر مخ بيول کيږي. که د $x + y$ بينوم پوتنځ د $n = 0,1,2,3,4,5,6$ اکسپوننت لپاره شميرو، نو لاندې نتيجه لاس ته راوړو :
پاسکال دريګوډی

$$(x+y)^0=......................1$$

$$(x+y)=....................x+y$$

$$(x+y)^2=................x^2+2xy+y^2$$

$$(x+y)^3=.............x^3+3x^2x+3xy^2+y^3$$

$$(x+y)^4=..........x^4+4xy+6x^2y^2+4xy^3+y^4$$

$$(x+y)^5=.....x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5$$

$$(x+y)^6=x^6+6x^5y+15x^4y^2+20x^3y^3+15x^2y^4+6xy^5+y^6$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پـه دې د زیاتونونو پرمخبیولوکی یو قانونیت لیدل کیږي. د زیاتونو ګڼون(شمیر، تعداد) د بینوم د اکسپوننت څخه په یو لوي دئ . ټول زیاتونی د x او y پوتنځ ځل لري، په داسی ډول چی د x او y پوتنځ زیاتون په n برابریږي او په دې ډول د x پوتنځ په کمیدلو) د y پوتنځ په زیاتیدلو د x په اکسپوننت په ترتیب پرلپسی

n , n-1, ...1 , 0

د y اکسپوننت په ترتیب 0,1 n-1,n..,دي. د بینوم پوتنځ کوایفځینتونه داسی په نامه پاسکال Blaise Pascal(۱۶۲۳ - ۱۶۶۲ فرانسوي شمرنپوه(ګڼوندریګوډی جوړوي .

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

په دې کی هر ګڼ د دواړو پورته کیڼ-ښي پرتوګڼونوزیاتون دی، چی بي له کړاو د نورو اکسپوننتویا په جګو n = 7,8, ... لپاره پرمخ بیول کیدی شي. د ډیرو لویو اکسپوننتو n لپاره بیا هم دالار له کړاو ډکه ده لیونارد اویلرLeonhard Euler د کومبیناتوریك فکرونو کی د کوایفیځینتونو یووني یا یوونوالي یا بهتره یوونوالیز ستروکتورونه یا جوړښتونه وپیژندل. په n -م n (د بینوم جګ یا اکسپوننت (لیکه او K- م ځای، k = 0 , 1 , ..., n کی ولاړ ضریب دفورم څخه دئ) له کومه امله چی په ۱۰ . ۲ برخه کی د اویلر سومبول په نوم داسی بلل شوي د بینوم ضریب په
ځیر رامنځ ته شو)که د پاسکال ګڼونو دریګوډئ د اویلر سومبول استعمال په ځیرولیکل شي نو لاس ته راځي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\binom{0}{0}$$

$$\cdots\cdots\cdots\binom{1}{0}\binom{1}{1}$$

$$\cdots\cdots\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{1}$$

$$\cdots\cdots\binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3}$$

$$\cdots\binom{4}{0}\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{4}$$

$$\cdots\binom{5}{0}\binom{5}{1}\binom{5}{2}\binom{5}{3}\binom{5}{4}\binom{5}{5}$$

$$\binom{6}{0}\binom{6}{1}\binom{6}{2}\binom{6}{3}\binom{6}{4}\binom{6}{5}\binom{6}{6}$$

داویلر سومبول کی د فاکتور پرځاي ، چې ګڼونه دی ، سومبول $\binom{n}{k}$ لیکل کیږي.

یادونه : ما کله a,b او کله بیا x,y لیکلي، دا په یو ډول لیکنه ښکلې ښکاریږي، خو زه کله کله داسې ستونځې لرم .

په ۱۰ . ۲ برخه کی د بینومیالکوایفیځینت لپاره ښوول شوو خویونو ۲ په بنسټ د پاسکال دریکوډي منځنی محور ته سیومتري پراته کوایفیځینته سره مساوي دي. داچی هر کو-ایفیځینت ورباندې پورته کوایفیځینتونو زیاتون سره مساوي دی په ۳ کی وښوول شو) د تمرین وظیفه ۱۰ . ۴ دې هم ورسره پر تله) مقایسه(شي) د اویلر سیمبول په استعمال

د یوه بینوم $(a+b)^n$ د پوتنځ د زیاتون پرمختګ د یوه طبیعي ګڼ n لپاره په لاندې ډول لیکلو ته اجازه راکوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۰ . ۱ (د بينوم جمله)

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

$$= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}b^i$$

اوبونه (حل): د پوره ايندكشن له لارې:

د ايندوكشن پيل : (n = 0)

$$(a+b)^{k+1} = \binom{k+1}{0}a^{k+1} + \binom{k+1}{1}a^k b + \binom{k+1}{2}a^{k-1}b^2 + \ldots + \binom{k+1}{k}ab^n + \binom{k+1}{k+1}b^{k+1}$$

$$(a+b)^0 = \binom{0}{0}a^0 = 1$$

د ايندكشن نيونه : (n = k)

$$(a+b)^k = \binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + \ldots + \binom{k}{k-1}ab^{n-1} + \binom{k}{k}b^k$$

د اندكشن غوښتنه: (n = k + 1)

$$(a+b)^{k+1} = \binom{k+1}{0}a^{k+1} + \binom{k+1}{1}a^k b + \binom{k+1}{2}a^{k-1}b^2 + \ldots + \binom{k+1}{k}ab^n$$

$$+\binom{k+1}{k+1}b^{k+1}$$

دايندكشن ښوونه:

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)^k(a+b)$$

$$= \binom{k}{0}a^{k+1} + \binom{k}{1}a^k b + \binom{k}{2}a^{k-1}b^2 + \ldots + \binom{k}{k}ab^k$$

$$+\binom{k}{0}a^{k+1}b + \binom{k}{1}a^{k-1}b^2 + \binom{k}{2}a^{k-2}b^3 + \ldots + \binom{k}{k-1}ab^k + + \binom{k}{k}b^{k+1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که یو د بل سره (یو د بل لاندې په څنګ یا کږې پرتی) برابر پوتنځ یا توان څلونه د اویلر فرمول یا سومبول د زیاتونخویونو د استعمال له لارې سره راټول (یوځاي) شي

$$C_{W_6}^{(4)} = \binom{6+4-1}{4} = 126$$

$$\binom{k}{1} + \binom{k}{0} = \binom{k+1}{1}, \binom{k}{2} + \binom{k}{1} = \binom{k+1}{2}, \ldots, \binom{k}{k} + \binom{k}{k-1} = \binom{k+1}{k}$$

لومړي او اخر زیاتون ضریبونه ولیکل شي نو غوښتل شوې اړیکی لاس ته راځي

$$\binom{k}{0} = \binom{k+1}{0}, \binom{k}{k} = \binom{k+1}{k+1}$$

د (a-b)=a+(-b) له امله د بینوم له جملی د یوه n -م پوتنځ دکمون څخه لاس ته راځي

$$(a-b)^n = \binom{n}{0}a^n - \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 - \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \ldots \pm \binom{n}{n}b^n$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i}(-b)^i$$

بیلګي:

$$(x+y)^3 = \binom{3}{0}x^3 + \binom{3}{1}x^2y + \binom{3}{2}xy^2 + \binom{3}{3}y^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x-y)^3 = \binom{3}{0}x^3 + \binom{3}{1}x^2(-y) + \binom{3}{2}x(-y)^2 + \binom{3}{3}(-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

۱۰ . ۴ کومبیناتوریك:

کومبیناتوریك د یوې ډیری د پای غړو یوځای درولو یا راوړلو ترتیب قوانینو سره سر او کارلري. کیدی شي د ټولو غړو یا یوې برخي یوځاییولو په څیر راوړل شي، په یوځاییولو کی کیدی شي د غړو ترتیب یو رول ولوبوي او یا هم نه، او همدارنګه په راټوځاییولو کی

(c) ketabton.com: The Digital Library

کيدی شي د غړو تکرار راشی او يا هم نه. له دې امله د يوځاييولو يا ټولګی دري ډولونه توپيروو(Komplexion هم ورته وايي)، په نامه پرموتيشن، واريشن، کمبينيشن (Permutation, Variation, Kmobination) کوم چې په لاندې برخو
کی يو په بل پسی څيړل کيږي او په اخرنی جدول کی به ليديدونکی څرګند شي يا ليدوړو ښوول شي

۱۰ . ۱۱۰٤۰ **پرموتيشن**Permutare
(لاتين: ..سره بدلول، دلته دا اصلاً ځاي بدلون دی. لنډ: بدلون)

پيژند ۱۰ . ۳ :

د n غړو يو پرموتيشن (ځاي بدلون)بې له تکرار داسی »يوځاي درول« دي، په کوم کی
چي n غړي په يوه د زړه پورې ترتيب کی څنګ په څنګ ولاړ وي. د n غړو مختلفه ترتيبونه
تل د مختلفو پرموتيشنونو يا ځايبدلونونو په مانا ده

بيلګی:

۱ - د دوه غړو پرموتيشن

الف : 2 1 دی 12 21

ب : a , m دی a m m a

۲ - د درې غړو پرموتيشنونه

الف : ۱ ، ۲ ، ۳ دي:

۱۲۳ ۲۱۳ ۳۱۲

۱۳۲ ۲۳۱ ۳۲۱

ب : a,m,s دی:

ams mas sam

asm msa sma

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۳ - د ځلور غړو پرموتیشنونه

الف : 1,2,3,4 دي:

4123	3124	2134	1234
4132	3142	2143	1243
4213	3214	2314	1324
4231	3241	2341	1342
4312	3412	2413	1423
4321	3421	2431	1432

دا پورته پرموتیشنونه له پورته وکښته لور ته لیکسیکایي ترتیب دي، دې ته به د کرانو لوستونکو پام وي، وروسته هم همداسی دي، که دا توري وي او که ګڼونه ۰ په ګڼونو کی پیدایښتي ده، چې د پښتو لیکسیکایې ترتیب پچه [ام کی نیول شوی۰له ښي لور کښته بیا بیرته ګین لور خوزښت دی۰

ب : a,m,s,u دي:له کښن کښته لور ته بیا بیرته پورته

uams	samu	masu	amsu
uasm	saum	maus	amus
umas	smau	msau	asmu
umsa	smua	msua	asum
usam	suam	muas	aums
usma	suma	musa	ausm

(c) ketabton.com: The Digital Library

پ (ا ت ج ک   دي:دلته طبعآ له ښي وکيڼ لورته ترتيبيږي(

اتجک   تاجک   جاتک   کاتج

اتکج   تاکج   جاکت   کاجت

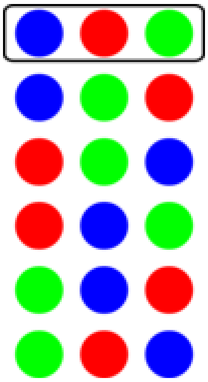
اجتک   تجاک   جتاک   کتاج

اجکت   تجکا   جتکا   کتجا

اکتج   تکاج   جکات   کجات

اکجت   تکجا   جکتا   کجتا

د ټولو پرموتيشنونود ليکلو لپاره مرستندوی مواد، د بيلګی په ډول له څلورو غږو څخه د ۲۴ پرموتيشنونو، ليکسيکني ترتيب، دا په دې مانا چې د ليکسکا لغاتو ترتيب ته »کتېمتې« (ورته) دی، چې د غږو پيدايښتي لړی مخته پرته وي (په تورو، په ګڼونوکطبعی يو په بل پسي). دبيلګي په توګه د غږو a , m , s , u ۲۴ پرموتيشنونه په لکسيکا ترتيب ورکړ شوي. د دې غږو) يا تورو(جوړ شوي پرموتيشنونه) لغاتونه(maus همدا رنګه saum په دې ترتيب کی ۸ -ام همدا ډول په ۱۴ -ام ځاي کی ولاړ دي. همدا ډول په پ (کی د څلورو تورو ا ، ت ، ج ، ک پرموتيشن ورکړ شوی چی ۸ -۱م ځا ي کی يي تاکج ولاړ او په ۱۵ – م ځای کی يي جتاک ولاړ دی.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د پورته دربې غونډارو لپاره نظم یا ترتیب ۲ ۰ ۳ = ٦ دی۰

که لیکو ، چې 1.2.3.4.5.6نو ددې پرځاي لیکو :720 = !6

جمله ۱۰ . ۲ :

د پرموتیشنونو Pn ګڼون (شمیر یا تعداد) ، د n یوله بل مختلفو غړو، په لاندې

ډول دی : $Pn = n!$

اوبنونه : د پوره ایندکشن له لارې :

داینډکشن پیل : $(n = 1) : \quad P_1 = 1! = 1$

د ایدکشن نیونه : $(n = k) : \quad P_k = k!$

د ایندکشن غوښتنه : $(n = k+1) : \quad P_{k+1} = (k+1)!$

د ایندکشن ښوونه : k غړو ته په !k پرموتیشنونو کی د ځل په څیر یو(k+1) -ام غړی راځي. دا (k+1) - ام غړی کیدی شي له لومړې تر (k+1) - ام ځاي پورې ودریږي، داسی چی د (k+1) -ام غړي ورنیولو د هر k غړو پرموتیشن k+1 پرموتیشنونه د k+1 غړو پرموتیشنونه شي. له دې امله باور لري

$$P_{k+1} = P_k\,(k+1) = k!(k+1) = (k+1)!$$

بیلګه :

په څومره مختلفو لړیو پرلپسی (دا مړضوع په ۱۸ برخه کې کتلی شئ) کی لس زدکوونکی په یوه لیست کی خپل نومونه لیکلی شي ؟

اوبی یا حل : $P_{10} = 10! = 3628800$ •

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند ۱۰ . ۴ :

هر د k غړو ترتیبونه، د کومو ښخه چی i-ام غړی ni - ځله رامنځ ته کیږي،

د i = 1 , 2 , ... ,k لپاره، نو پرموتیشن د تکرار) د تکرارسره پرموتیشن(سره نومیږي . د غړو شمیر په پرموتیشن کی بیا داسی دی $n = n_1 + n_2 + ... +n_k$

بیلګی :

۱ - د دوه غړو a , b پرموتیشن په کوم کی چی غړی a یو ځل او غړی b دوه ځله رامنځ ته کیږي،

$(k = 2; n_1 = 1; n_2 = 2; n = n_1 + n_2 = 1 + 2 = 3)$

په دي ډول دی: abb bab bba

۲ - د غړو a , b پرموتیشن، په کوم کی چی a دوه ځله، غړی b دري ځله رامنځ ته کیږي $(k = 2; n_1 = 2; n_2 = 3; n = n_1 + n_2 = 2 + 3 = 5)$ په لاندي ډول دی

abbba	abbab	ababb	aabbb
	babba	babab	baabb
	bbbaaa	bbaba	bbaab

جمله ۱۰ . ۳ : د k غړو د پرموتیشن ګڼون یا تعداد $P_n^{(n_1,n_2,...,n_k)}$ ، له کومو چی i-ام غړی ni -ځله رامنځ ته کیږي ، په لاندي ډ ول دی:

$$P_n^{(n_1,n_2,...,n_k)} = \frac{n!}{n_1!.n_2!....n_k!}$$

حلونه یا اوبیونه: که په پرموتیشن کی n = n1 + n2 + ...+ nk (دلته دي ګنونه دn ایندکس کي ومنل شي) غړو یو له بل توپیر لرودی (مختلف وي) ، نو n! پرموتیشنونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

به موجود وی، که i - ام غړی ni -ځله رامنځ ته شي، داچی د ni غړو لپاره ni!
پرموتیشنونه موجود دي، نو ni پرموتیشنونه د یوه پرموتیشن په څیر رایو ځاي کیږي،

دا په دې مانا چی د!n شمیر په $n_i!$ باید وویشل شي (i = 1 . ..., k)

بیلګی :

۱ - د k = 2 مختلفو غړو پرموتیشن، په کوم کی چی لومړی (n_1-1)- ځله او دویم (n_1-2)- ځله رامنځ ته کیږي، دی:

$$P_3^{(1,2)} = \frac{(1+2)!}{1!2!} = \frac{3!}{1!.2!} = 3$$

۲ - د k = 2 مختلفو غړو پرموتیشن، په کومو کی چی لومړی (n1=2) -ځله او دویم (n2 = 3) -ځله رامنځ ته شي، دئ

$$P_5^{(2,3)} = \frac{5!}{2!.3!} = 10$$

۱۰ . ۴ . ۲ واریيشن اوښتنه یا بدلیدنه Variation :

تعریف ۱۰ . ۵:

د n غړو واریشن (بدلیدنه یا اووښتنه Variation) لاتین(بدلونه اووښتنه تغیرونه یا بیا تغیرونه) و k -ام ټولګي ته(وهرې k ټوټی ته، n ≤ k) هر له k غړو یوځانکول (یوځاي درول، یوځاي لیکل) دی، کوم چی د n غړو د لړئ پرلپسی په نظر کی نیولو سره جوړیږي..

بیلګي:

۱ - د درې غړوa,b,c واریيشن و دویم ټولګي ته دي :

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

ab	ba	ca
ac	bc	cb

۲ - د څلورو غړو d , a , b , c واریېشنونه و ۲ - م ټولګي ته دي:

ab	ba	ca	da
ac	bc	cb	db
ad	bd	cd	dc

د څلورو غړو d , a , b , c واریېشنونه و ۳ - ام ټولګي ته دې

dab	cab	bac	abc
dac	cad	bad	abd
dba	cba	bca	acb
dbc	cbd	bcd	acd
dca	cda	bda	adb
dcb	cdb	bdc	adc

۳ - د پنځه غړو 1 , 2 , 3 ,4, 5 واریېشنونه و ۲ - ام ټولګي ته دي

51	41	31	21	12
52	42	32	23	13
53	43	34	24	14
54	45	35	25	15

(c) ketabton.com: The Digital Library

د n غړو واریشنونه و n -ام تپولګي ته د n غړو پرموتیشن سره یو شی یا برابر کیږي

جمله ۱۰ ۰ ٤ :

د n غړو و k -ام تپولګي ته د واریشنونو ګڼون (تعداد) $V_k^{(k)}$ دی :

$$V_k^{(k)} = n(n-1).(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

اوبڼونه : د مکلمل (پوره یا بشپړ ایندکشن له لارې) ایندکشن په k اړه لري، n ځاي په ځاي دی یا ځاي په ځاي کلك ولاړ دی

ایندکشن پیل :(k = 1)

$$V_n^{(1)} = n!/(n-1)! = n$$

تیك (صحیح) دی ، ځکه چی له n غړوکیدی چی له یوه غړی جوړ واریشنونه جوړکړی شي.

ایندکشن نیونه : (k = k0) :

$$V_n^{(k_0)} = n!/(n-k_0)!$$

ایندکشن غوښتنه(ثبوت:):(k0 +1 = k)

$$V_n^{(k_0+1)} = n!/(n-k_0-1)!$$

دایندکشن ښوونه : د k0 - م درجی هر واریيشن لپاره، په
دې واریيشن کی نه رامنځ ته کیدونکو پاتی n - k0
غړو شمیر دی .که په ترتیب یو له دې n - k0 غړو د دې k -م تپولګی واریشنونو $V_n^{(k)}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په اخرکی ځاي په ځاي شي، نو له دې يو دk+1 ټولګي n - k0 واريشنونه لاس ته راځي، او که دا کار په ټولو واريشنونو $v_n^{(k)}$ وشي، نولاندې واريښنونه لاس ته راځي:

$$\frac{n!}{(n-k_0)!}(n-k_0) = \frac{n!}{(n-k_0-1)!}$$

(که چیرې يود n - k0 غړو ورزيات په يو بل ځای کيښوولی وی، نو يودk+1 ټولګي واريیشن به يی لاس ته راوړی وی، کوم چی همدا اوس موجود دئ. دا سړی په بيلګه ۲ (k , 2 = n = 4, k =3 (باندې ليدوړ کولی شي)

بيلګي:

۱ - د درې غړو واريیشنونو شمير و دوم ټولګي ته دی : $v_3^{(2)} = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$

۲ - د څلور غړو واريیشنونو شمير و دوم ټولکی ته دئ: $v_4^{(2)} = \frac{4!}{(4-2)!} = 12$

د څلور غړو واريیشنونو شمير ودريم ټولګي ته دئ: $v_4^{(3)} = \frac{4!}{(4-3)!} = 24$

۳ - د پنځه غړو واريیشنونو شمير ودوم ټولګي ته دئ: $v_5^{(2)} = \frac{5!}{(5-2)!} = 20$

پيژند ۱۰ . ۶ :

د n غړو واريیشنونه و k - ام ټولګي ته په کوم کی چی يوګونی غړي تر k-ځله تکرار وي نو واريښنونه د تکرار سره نوميږي يا بلل کيږي.

بيلګی: ۱ - د درې غړو a , b , c واريیشنونه و دوم ټولګي د تکرار سره دي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

ca	ba	aa
cb	bb	ab
cc	ba	ac

۲ - څلور غړو a , d , c , b د دويم ټولګی واريیشنونه د تکرار سره دي:aa

	da	ca	ba
db	cb	bb	ab
dc	cc	bc	ac
dd	cd	bd	ad

۳ - د درې غړو 1 , 2 , 3 د دريم ټولګي واريیشنونه دي(دا لاندې ولاړ ترتيب له کيڼ وښې لور ته دی، خو په لاندې کې په څټ شوی)

311	211	111
312	212	112
313	213	113
321	221	121
322	222	122
323	223	123
331	231	131
332	232	132
333	233	133

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۰ . ۵ : د n غړو د k -ام ټولګي د واریيشنونو شمیر $V_{W_n}^{(k)}$

$V_{W_n}^{(k)} = n^k$ د تکرار سره دی: $C_6^{(4)}.C_{43}^{(2)} = \binom{6}{4}\binom{43}{2} = 13545$

حل)اوبی): په k د پوره ایندکشن له لارې:

د ایندکشن پیل (k = 1) :

د $V_{W_n}^{(1)} = n^1$ لپاره صحیح دی، ځکه چی له n غړو څخه n واریيشنونه،چی هر یوله یوه غړي جوړ دی، جوړیږي.

د ایندکشن نیونه (k0 = k) : $V_{W_n}^{(k_0)} = n^{k_0}$

د ایندکشن غوښتنه (k0+ 1 = k): $V_{W_n}^{(k_0+1)} = n^{k_0+1}$

د ایندکشن ښوونه : د (k0 + 1) -ام درجی واریيشنونه د nk واریيشنونو چی k0 – امه درجه واریيشنونو څخه لاس ته راځي، په کوم کی چی له دوي هر یو په ترتیب د n غړو اخر ته یو ور واچوي یا ورزیات (علاوه) کړي (یادونه دې، چی په واریشنونو بی له تکرار شوې ، وکتل شي) .

له دې امله د دې شمیر $n^{k_0}.n = n^{k+1}$ واریيشنونه دی.

بیلګي :

۱ - د درې غړو و دوم ټولګي ته د واریيشنونوشمیر له تکرار سره دی

$V_{W_3}^{(2)} = 3^2 = 9$

۲ - د څلور غړو و دوم ټولګی ته د واریيشنونو شمیر له تکرار سره دی

$V_{W_4}^{(2)} = 4^2 = 16$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۳ - د درې غړو و دريم ټولګي ته ض واريیشنونو شمير له تکرار سره دی

$$V_{W_3}^{(3)} = 3^2 = 27$$

۴ - د مورس نخښه (Morsezeichen) له دوه غړو ، ټکی او لنډې کرښی يوځای کيږي.

د يوه ، دوه درې او څلورو غړو جوړه نخښنو شمير دئ

$$V_{W_2}^{(1)} + V_{W_2}^{(2)} + V_{W_2}^{(3)} + V_{W_2}^{(4)} = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 30$$

۱۰ . ۴ . ۳ کمبينيشن (Kombination (لاتين: يو بل سره تړل)

تعريف ۱۰ . ۷ :

د n غړو و k-ام ټولګي ته (n > k) يو کمبنيشن هغه دئ چی هر يو له k غړو يوځاي دروولو څخه ، کوم چی له n غړو، بی د غړو له نظم په پام کی نيولو سره، جوړوي.

کمبينيشن له واريیشن منځ ته راځي، که چيری نظم په پام کی ونه نيول شي.

بيلګي:

۱ - د درې غړو a , b , c و دوم ټولګي ته کمبينيشن په لاندې ډول دئ:

ac bc

ac ......

۲ - د څلور غړو d , a , b , c و دوم ټولګي ته کمبينيشن په لاندې ډل دئ

ab bc cd

...... ac bd

ad ....

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې څلو غړو ودريم ټولګي ته كمبينيشنونه په لاندې ډول دي:

bcd abc

acd

۳ - د پنځه غړو 1 , 2 , 3, 4 , 5 و دريم ټولګي ته كمبينيشنونه په لاندې ډول دي(لاندی هم بايد له كينې لاندې لورته په ښې لور ليكل شوي وی)

345 234 123

235 124

245 125

134

135

145

جمله ۱۰ . ۶ : د n غړو و k -م ټولګي ته د كمبينيشنونو شمير دی $C_n^{(k)}$

$$C_n^{(k)}=\binom{n}{k}$$

اوبی (حل): د n غړو و k-ام ټولګي ته د اورييشنونو شمير دی:

$$V_n^{(k)}=\frac{n!}{n-k}$$

كمبينيشنونه له واريشنونو په دې توپيرېږي، چی ترتيب په نظر كی نه نيول كيږي، دا بيا دا مانا لري چی ټول د k غړو k! پرموتيشنونه په يو كمبينيشن كی يوه ته يوځاي كيږي

له دې امله لرو : $C_n^{(k)}=\frac{V_n^{(k)}}{k!}=\frac{n!}{(n-k)!.k!}=\binom{n}{k}$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګی :

۱ - و دوم ټولګي ته د درې غړو کمبینشنونو شمیریا ګڼون دی

$$C_3^{(2)} = \binom{3}{2} = 3$$

۲ - و څلورم ټولګي ته د څلور غړو کمبینیشنونو شمیر دی‌د څلورو غړو و دریم ټولګي ته د کمبینیشنونو شمیر دی

$$C_4^{(2)} = \binom{4}{2} = 6$$

۳ - د پنځه غړو ودریم ټولګي ته د کمبینیشنونو شمیر دی

$$C_4^{(3)} = \binom{4}{3} = 4$$

۴ - په لاتري (۶ له ۴۹ څخه) د امکاناتو لپاره شمیر دی

الف (یو شپږ $C_{49}^{(6)} = \binom{49}{6} = 13983816$

ب : یو څلور $C_6^{(4)}.C_{43}^{(2)} = \binom{6}{4}\binom{43}{2} = 13545$

۶ تیپ عددونه د یوه ۴ عددونوګروپ څخه بوځاي کیږي، چی له ایستل شوو شپږ عددونو (۴ تیک یا صحیح) او دوه عددونه(۲ پاتی عددونه) دي .

پیژند ۱۰ . ۸ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

د n غړو و k-ام ټولګي ته کمبینیشن، په کوم چی یواځني غړي k - ځله تکراروي، کمبینیشنونه د تکرار سره نومیږي.

بیلګي:

۱ - د درې غړو a , b , c و دویم ټولګي ته د تکرار سره کمبینشنونه دي.

aa ....

bb ab ......

cc bc ac

۲ - د ځلور غړو d , a , b , c و دویم ټولګي ته د تکرار سره کمبینیشنونه دي

aa ....

bb ab ....

cc bc ac ....

dd cd bd ad

۳- د درې غړو 1 , 2 , 3 و دریم ټولګي ته د تکرار سره کمبینیشنونه دي(لاندې لیکنه باید له کینې لور پیل وی، خو دلته له ښی لور پیل شوی وکینې لور ته)

331 221 111

332 222 112

333 223 113

123

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۰ . ۷ : د n غړو و k - ام ټولګي ته د تکرار سره د کمبينيشنونو شمير يا ګڼون دی:

$$C_{W_n}^{(k)} = \binom{n+k-1}{k}$$

دلته دې له ښوونی(چی په kد پوره ايندکشن له لار ې صورت نيسی) تير شو.

بېلګې: ۱ - د درې غړو و دويم ټولګې ته د تکرار سره کمبېنيشنونه ګڼون يا شمېر دی

$$C_{W_3}^{(2)} = \binom{3+2-1}{2} = 6$$

۲ - دڅلورو غړو و دويم ټولګې ته د تکرار سره کمبېنيشنونه ګڼون يا شمېر دی

$$C_{W_4}^{(2)} = \binom{4+2-1}{2} = 10$$

۳ - د درې غړو و دريم ټولګې ته د تکرار سره کمبېنيشنونه ګڼون يا شمېر دی

$$C_{W_3}^{(3)} = \binom{3+3-1}{3} = 10$$

۴ - د څلورو مکعبونو ، چې اړخونه يې د يوه تر شپږ نخښه وي . (نخښه شپږ اړخيز) ممکن مختلف اچول ، په دې مانا چې کومې سترګې سره لوېږي لاندې دي.

$$C_{W_6}^{(4)} = \binom{6+4-1}{4} = 126$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱۰ . ۴ . ۴ د برموتییشن،وارییشن،کمبینیشن تولکه

داا	د په پا یوې برخی راټولونه م کی نیولو شوو غړو		د ټولو په پام کی نیول شوو غړو راټولونه یا ټولګه
	له نظم تیریدنه	نظم په پام کی نیونه	
	کمبینیشن	وارییشن	پرموتیشن
د ټول غړي یوله بل توپیر لري	د n غړو کمبینیشن و k-ام ټولګي ته شمیر یا ګڼون $C_n^{(k)} = \binom{n}{k}$	د n غړو وارییشن و k-ام ټولګي ته شمیر یا ګڼون $V_n^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!}$	دn غړو پرموتیشن شمیر یا ګڼون $P_n = n!$
له تکرار سره	د n غړو دکمبینیشن شمیر وk -ام ټولګي د تکرار سره $C_{W_n}^{(k)} = \binom{n+k-1}{k}$	د n غړووارییشن شمیر د تکرار سره $V_{W_n}^{(k)} = n^k$	د k غړو پرموتیشن د ni غړو سره په k -م ګروپ کی $P_n^{(n_1,n_2,\dots n_k)} = \frac{n!}{n_1!.n_2!\dots.n_k!}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۰ . ۵ تمرينونه

۱ – لاندې فاكولتي وشميرئ

الف) 7! ، ب) 3!.5! ، پ) 6! / 4!.I0!

۲ – لاندې ويشونه ساده كړئ

a) (n+1)! / (n-2)!   b) (2n)! / n!   c) n! / 2n!

۳ – لاندې افادې وشميرئ!

a) $\binom{6}{4}$ b) $\binom{1,5}{3}$ c) $\binom{-1}{6}$ d) $\binom{4}{1}$ e) $\binom{4}{0}$

f) $\binom{8}{8}$ g) $\binom{5}{4}\cdot 4!$ h) $\binom{7}{6}\cdot 3!$ i) $\binom{6}{7}\cdot 3!$ j) $\frac{\binom{7}{6}}{3!}$

۴ – لاندې زياتونونه وشميرئ!

a) $\binom{2}{1}+\binom{2}{2}$ b) $\binom{3}{1}+\binom{3}{2}$ c) $\binom{3}{2}+\binom{3}{3}$

d) $\binom{4}{1}+\binom{4}{2}$ e) $\binom{4}{2}+\binom{4}{3}$ f) $\binom{4}{3}+\binom{4}{4}$

۵ – لاندې افادې د بينوم د فرمول كاروني (استعمال) په بنسټ وګڼئ!

a) $(x+y)^7$ b) $(a-6)^6$ c) $(5a+4y)^3$

d) $(x/2 - y/3)^4$ e) $(2\ \ a+3\ \ b)^2$ f) $(x^2+y^2)^3$

۶ – لاندې افادې ساده كړئ!

a) $(-1+a)^2 - (1-a)^2$ b) $(a^2+b^2)^2 - (a^2-b^2)^2$

c) $(\ \ ab - 1)(-a-\ \ ab) + ab$

۷ – د بينوم په يو ځل بيا بيل (تجزيه) كړئ!

a) $25a^2 + 10\ ab + b^2$ b) $(49a^2 - 42a + 9$

c) $169a^2 - 130\ ab + 25b^2$ d) $2x+2.\ \ 6xy + 3y$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۸ - الف) د عړو ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ پرموتیشنونه په لکسیکوگرافي نظم ولیکی!
ب) د a,e,f,h,n پرموتیشتونو په څو ځایونو کی« fahne » او«hafen » ولاړ دي؟ دا الماني کلیمي دي چی دپښتو اړونه یی « بیرغ» او« بندر» دي.

۹ - الف) په څو ځایترتیب یا تنظیم کیدی شي ، شپږ کسه ځاي ونیسی؟
ب) څومره پنځهٔ ځیفري ګڼونه د پنځه ځیفرونو4, 3, 2, 1, 0 سره کیدی شي ولیکل شي، که هغه ګڼونه چی په صفر پیل کیږي ونه لیکل شي ؟
پ) د عړوa,b,c,d,f څومره پرموتیشنونه په c ، په de ، په cdef پیل کیږي؟

۱۰ – الف) د عړو a , b , c ټول پرموتیشنونه ولیکی، په کومو کي چي a او b هره یوځل، عړی c دوه ځله رامنځ ته کیږي.
ب) د دې پرموتیشنونو ګڼون یا شمیر وګڼی!

۱۱ - څومره تنظیم شوي جوړې د الفبا د۲۶ (لاتین توري) تورو څخه جوړیدلی شي ؟

۱۲ – د څلورم ټولګي څومره مختلف وارییشنونه د
الف) بي له تکرار
ب) له تکرار سره د عړو 8 , 6 , 4, 2 , 0 موجود دي؟
۱۳ – یوه سوری کارت له ۸۰ سوریدرځونو چي هریو لس سوري لري، جوړ دی. څومره د سوریو یوځایلیکل ممکن دي، که هر درځ ټیك یو ځل سوری شي؟
۱۴ - له شپږ عړو جوړ کمبینیشن ګڼون و څلورم ټولګي ته او پنځم ټولګي ته څومره لوي دي،
الف) بې له تکرار
ب) له تکرار سره؟
۱۵ - یادونه : دا د کارتو لوبولپاره تمرین نه دی لیکل شوی

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱۶ – څومره مختلفی ازمایښتی ممکن دي که په یوه تولید کی له هر ۲۰ یوه وازمایل شي؟

۱۷ – په موټرو ترافیك تخټبی په لاندې توګه یوځای شوی : یوه د ځای نښوونه ډله د تخټبی الف بی پسی څلور ګروپ یا ډله راځي، چی له څیفرونو ۰ تر ۹ څخه جوړ وي. د یوې کره ټاکلی الف بی پیژندنښی یا ترافیکی تخټبی ممکن دي؟

۱۸ – د مختلفو اندازو او د خامموادو جوړ نلونه ، د رنګونی له لارې یو له بل توپیریدی شي ، که څلور رنګ نښوونی ولرو؟

۱۹ – د منډې یوه میچ په اخرکی شپږ پاتی منډې وهونکی برخه اخلي. د منډو څومره امکانات موجود دي؟

۲۰ – په څومره ډوله

الف) اته مختلفی مرغلرې،

ب) درې سرې، څلور شنی، یوه زرغونه مرغلره

ترتیبیدلی شي؟

۲۱ – څومره تلفونونه کیدی شي وتړل شي کی یواځي پنځه ځایزه نمره موجود وي؟
څومره تلفون تړل ممکن دي که تلفون نمرې شپږځایزې وي او په 0 پیلکیدنه یی اجازه ونه لري؟

۲۲ – د درې شپږسترګیو (یا –اړخیزو) سره (څیره مکعب دی اومخونه له یوې تر شپږ سترګو باندې په نخښه دي، ماته یې د پښتو نوم نه راځي او االماني یی Würfel دی) څومره مختلفی اچونی ممکن دي، چی ټولې شپږسترګی مختلفې سترګې ګڼون وښایي؟
څومره مختلفې اچونې له درې شپږسترګیو سره ممکن دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۱ کرښیز-، خطي – یا لاینیز الجبر

یادونه : د لته دې هم د هرڅه له مخه بیا دې ته ګوته نیول شوي وي ، چې څه به تکرار وي، خو هغه لاتین متل دی، چې » تکرار د زدکړې مور ده .«
لاندې مخ ته پرته اصلي برخه دm برابرونونو ځوابونو ته چې n اووښتونې یا مجهولی یا ناپیژندونکی لري، وقف ده، چیرته چې m د برابرونونو ګڼون یا تعداد n د ناپیژندونکو یا مجهولو ګڼون (تعداد) سره برابر او همدا ډول لوي او یا کوچنی کیدی شي
په ۱۱ . ۱ برخه کی د دوه ناپیژندونکو یا مجهولو سره د برابرونونو سیستمونه تر څیړنی لاندې نیول کیږي، چې د ښوونځي شمیرپوهنی تکرار دی، مګر دلته د برابرونونو سیستمونه د ناټاکلوځلونو یا ضریبونو یا فاکتورونو سره هم راوړل کیږي، چې د حالتونو توپیریدنه یي اړیینه ده٠
دا راوړنی به په ۱۱ . ۲ برخه کی درې ناپیژندونکو یا نامعلومو او په ۱۱ . ۳ برخه کی په خوښه زیاتوناپیژندونکو ته وغزیږي، په ټولو برخو کی پل په پل د دیترمینانت کلیمه او د ګاوس الګوریتم د کار ډګر ته را اچول کیږي .
په ۱۱ . ۴ برخه د هوموجینو برابرونونو سیستم ځانګړي ځوابونه په بر کی نیسي٠
یادونه : ولې لاینیز برابرونونه او نه کریز یا بندکرښیز یا خطی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

موږ د برابرونونو له څيرې پوهيږو، چۀ دا يوه کرښه ورکوي، چې لاتين يا کۀ غواړئ انګريزي يې لاين نوموليٜ د کرښو اوبندکرښو نومونه هم شته، خو د دې لپاره، چې د نورو درسي منځپانګی سره يې توپير وي،نو موږ هم ورته له دې امله لاينيز وايو۰

۱۱ . ۱ . لاينيز برابرون د دوه ناپيژندونکو سره

داسی يو مساوات د دوه ناپيژندونکو سرهکيدي چی په لاندې ډول انځور شي

$$ax + by = c \qquad (11 . 1)$$

دلته کيدی شي چی ناپيژندونکی لويي x او y په خوښه رييل ګڼونه وي چی يو له بل سره په ورکړ شوي بڼه تړلي. يا په بل عبارت : x او y واريابلی(اووښتونکی يا لنډ: اووښتوني) دي، برابرون (۱۱ . ۱) لاينيز فنکشن(بلواك) برابرون په ګوته کوي چی د هغي څيره په y,x کواوردينات کی ناپای کرښه ده(۱۶ - امه برخه دی وکتل شي)

ځانګړی حالت : a = 0 يا b = 0 په ځانګړې توګه کرښه انځوروي يا په ګوته کوي چی د y - محوراو همداسی د x - محور سره غبرګه د ه .

که دا (۱ . ۱۱) برابرون د دواړو نايژندونکو يا مجوهولو x اوy لپاره ټاکنمساوات يا ټاکنبرابرون ونيول شي، نو دا پوښتنه رامنځ ته کيږي، چی ددې مسئلی د حل (اوبی) لاندې به څه پوهيدل غوښتونکی وي.

د (۱۱. ۱) برابرون اوبيونه په څرګند ډول د ټولو ارزښتجوړو (x ,y) ډيری ده، چی(۱۱.۱) برابرون پوره کوي. که اصلي حالت a , b |= 0 ته پام وکړو نو برابرون (۱ . ۱۱) د y په لور داسی ځوابوو.

$$y = - (a/b)\, x + c/b \qquad (11 . 2)$$

کيدی شي چی x په خوښه وټاکل شي اوy له (۲ . ۱۱) برابرون څخه لاس ته راولو. ګورو چی ناپاي ډيرې اوبيونې يا حلونه لاس ته راځی يعني د اوبيونې ډيری يا اوبيډيری L په لاندې ډول ده

$$L = \{ (x, y) \mid y = - (a/b)\, x + c/b \} \quad (11 . 3)$$

داسې لوستل کيږي: L د ټولو (x,y) جوړو ډيری ده ،داسې چې..... (ورپسې هغه برابرون)۰

ددې لپاره لنډ ليکل کيږي: د (۱۱ . ۱) برابرون اوبی يا حل $y = -(a/b)x+c/b$ ، د x خوښی ۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

طبعاً کيدی شي چي برابرون د x په لور هم اوبی شي. دلته y په خوښه نيسو، نو د لته د برابرون (۱۱ . ۱) ځواب داسی دی , x = -(b/a)y + c/b په خوښهy ۰

دا چي په لاندې کی موږ د دریو یا ډیرو ناپیژندونکو یا نامعلومو برابرونونو سره سر او کار لرو، نو موخه ور بولو که ناپیژندونکې د x, y , z .... سره په نخښه نه کړو بلکه د $x_1, x_2, x_3, ...$ سره .

ددې په نخښونو سره کيدی شي چی په څرګند ډول وښايو:

لاندې برابرون د دوه ناپیژندونکو x_1, x_2 سره

$$a_1x_1 + a_2x_2 = b, ...(11,4)$$

د a |= 0 لپاره

∞^i

ځوابونه لري

∞^i

په دې مانا چی i = 1 , 2, 3۰۰۰ ناپیژندونکو یا نامعلومی لپاره په خوښه r ازښتونه کيښوول کيدی شي.

$$x_1 = -\frac{a_2}{a_1}x_2 + \frac{b}{a_1}, ...(11,5)$$

په خوښه x_2

د

$a_2 \neq 0$

لپاره

∞

ځوابونه

$$x_2 = -\frac{a}{a_2}x_1 + \frac{b}{a_2}; ....(11,6)$$

x_1

په خوښه

د 0 = b =0.x1+ 0.x2) 0 = b = a1 =a2(لپاره ناپای ډیر ځوابونه

د په خوښه

$$x_1, x_2, ...(11,7)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د

$$a_1 = 0; a_2 = 0; b \neq 0$$

لپاره

$$0.x_1 + 0.x_2 = b \neq 0$$

په ښتوالی یا تضاد یا مخامخوالی دی، له دې امله ځواب نه شته.
نوټ : دلته

$$\infty^i$$

دا مانا لري چی د ناپيژندونې یا مجهولی

$$x_i$$

لپاره i = 1,2.. په خوښه ناپای ارزښتونه نيول کيدی شي.

۱۱ . ۱ . ۲ – دوه لاينيز برابرونونه د دوه ناپيژندونکو سره

د دوه برابرونونو سيستم د دوه ناپيژندونکو سره لاندې عمومي شکل لري

$$I............a_{11}x_1a_{12}x_2 = a_1$$

$$II..........a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = a_2;..................(11,8)$$

دا ټاکلي برابرونونه کيدی شي چی په اوبښتونو یا واريابلو x 1 اوx2کی د
بلواکبرابرون يا فنکشنمساوات په څير ونيول شي او په x1 , x2 - کواوردیناتسيستم کی
د کرښو په ډول انځور شي. که کرښي یو بل غوڅي کړي نو دا د مساواتو په سيستم (۸ .
۱۱) کی د کرښو يوګونی(بهتره : يوګونی، یواځنی د بل څه لپاره کارول شوی)
اوبيونه ده یا حل دی.
که دواړه کرښي یو په بل پريوځي نو دا په دې مانا دي چې II همغه مساوات لکه I
انځوروي. دلته دا بسياکوي، چی د ۱۱ . ۱ . ۱ . له مخي ټيك یا فقط مساوات I یا
مساوات II حل شي. دلته ناپاي ډير

$$\infty^1$$

ځوابونه موجود دي.

داسي هم کيدی شي چی فورمال

$$\infty^2$$

رامنځ ته شي، که ټول

$$a_{ik} \wedge a_i$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د صفر سره برابر ي. موږ دلته دا حالت نه څيړو. دا څيړو چې، که دا برابرون اوبيونه ونه لري. دا حالت هغه وخت رامنځ ته کيږي، چي کرښه I اوکرښه II غبرگي ځغلي مگر يو په بل نه وي پرتي.

په دوه برابرونونو کي، د دوه ناپيژندونکو يا اووښتونو سره، کيدي شي لاندې حالتونه را منځ ته شي
۱ - يو يوائځني ټاکلی ځواب مو مخ ته پروت دئ (اصلي حالت)
۲ - کوم ځواب مو و مخ ته نه دئ پروت (سيستم مخامخوالی يا تضاد لري)
۳ - ناپای ډير ځوابونه موجود دی II (برابرون برابر په I مساوات او يا د هغه څو برابره دی)
۴ - ناپاي ډير ځوابونه موجود دي.
(ټول $a_{ik}=0$ او ټول $a_i=0$ دي)
د دوه برابرونونو له مخی چی دوه ناپيژندونکی لري، کيدی شي په اسانتيا وپيژندل شي، چی د برابرونونو کوم حالت مو مخ ته پروت دئ.
په سيستمونو کی چي درې يا زياتي واريابلی يا اووښتونې لري ورته حالتونه په ساده ډول نه شو پيژندلی چي کوم حالت تر مخ لرو. دلته بايد فورمال پرمخ لاړ شو، دا چی څنکه دا کار سرته رسولی شو غواړو چی د پوښتنو په فورمال ځواب پيل وکړو او د برابرونونو پوښتنو ته ځواب پيدا کړو. دلته بايد دري بنسټيز د مساواتسيستم د ځواب کاردودونه)متودونه(تکرار شي:

۱ . د برابر يا مساوي ځاي په ځاي کولو متود:
دواړه برابرونونه د يوې نامعلومی په لور اوبی کيږي(د بيلگي په توگه د x دوه په لور(، دواړه برابرې ليکي او په دې ډول يو برابرون د يوې نامعلومي سره منځ ته راځي۰

۲ - يو د بل پر ځاي کيښولو متود:
برابرون يا مساوات د يوې ناپيژندونکې (د بيلگي په توگهx دوه) په لور ځواب کيږي او دا لاس ته راوړنه په بل برابرون کی ځاي په ځاي کيږي، په دې ډول د يوې ناپيژندونې برابرون منځ ته راځي (د بيلگي په توگه دx يو)

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۳ - د زیاتون کارونه (جمع کولو عملیه):

سرې یو ټاکلی څو برابره (کیدی شي چې کمیز یا منفي هم وي) د II د I برابرون یوه ټاکلي څو برابره سره زیاتوي، داسې چې یوه ناپیژندونی بیا مخ ته نه راځی یا له منځه ولاړه شي. د نیتجي سره بیا دا بله ناپیژندوني څیړي. دا د داوړو نامعلومو(ناپیژندونو) لپاره کیداي شي . دا متود دبرابرونونو د سیستم لپاره بنسټیز دی چې د دیترمینانتو (die Determinanten) له لارې د برابرونونو ځواب لاس ته راوړو .
دا متود په درې ځانګړو برابرونسیستمونو باندې باید وکارول شي، ټول څلورځلوني(ځله ووني یا ضریبونه) بایدله صفر توپیر ولري یعني $a_{ik} \neq 0$ که چیرې یو $a_{ik} = 0$ د بیلګي په توګه $a_{21} = 0$ نو بیا به مساواتو په لاندې ډول د درېګوډي جوړښت لرودی:

$$I.............a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = a_1;......a_{11} \neq 0$$
$$II....................a_{22}x_2 = a_2,.......a_{22} \neq 0;..........(11,9)$$

دلته نو
$a_{21} = 0$

بیا له II سیده راویستل کیدی شو او د نتیجي څخه یي چې په I کی کښیښودل شوې وی x_1 هم معلومیدی شو. دلته دا په ګوته کوو چې د ګاوس الګوریتم په استعمال بیا برابرون د درېګوډي شکل باندې اړول کیږي .دا درې څرګند حالتونه په لاندې ډول دي :

سیستم ۱

I 2x1 + 3x2 = 4
II x1 - 2x2 = -5

دا سیستم یواځنی یوځواب لر II برابرون د I برابرون سره اړیکی نه لري

سیستم ۲

2x1 + 3x2 = 4
II 4x1 + 6x2 = 8

په اسانۍ ګورو چې دلته II برابرون په ۲ ځل شوی I برابرون دئ . دواړه برابرونونه همغه کرښه وښایی او په دې ډول د مساواتو اوبیونې ناپای دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

سیستم ۳:

I $2x1 + 3x2 = 4$

II $4x1 + 6x2 = 10$

دلته بي ډیله څرګنده ده چې برابرونونه یو د بل تضاد یا یو د بل په څټ دي .د Iبرابرون دوه برابره په لاندې ډول دی:

$4x1 + 6x2 = 8$

په دې توګه ناممکن ده چې II هم باوري وي، نو له دې امله دا سیستم ۳ اوبیونه نه لري.

بیلګه ۱۱ . ۱ :

سیستم۱ دې په پورته درې ورکړ شوو متودونو ځواب شي .

الف: مساوي اینوولوکارونه یا عملیه

$$I':.....x_1 = 2-(3/2)x_2;.......;II':.....x_1 = 2x_2 - 5$$

$$2-(3/2)x_2 = x_2 - 5$$

$$-(7/2)x_2 = -7$$

$$x_2 = 2;\Rightarrow$$

$$x_1 = 2-(3/2).2$$

$$x_1 = -1$$

ب) د بل په ځای کینولوکاروونه (عملیه) : II د x1 په لور ځواب کیږي او بیا په I کی ځای په ځای کیږي٠

$$II'::.........x_1 = 2x_2 - 5$$

$$2(2x_2 - 5) + 3x_2 = 4$$

$$4x_2 - 10 + 3x_2 = 4$$

$$7x_2 = 14$$

$$x_2 = 2 \Rightarrow x_1 = 2.2 - 5 \Rightarrow x_1 = -1$$

پ) د زیاتونکاروونه: x_1 له منځه ځي، که (2-) څله د II برابرون و I ته زیات شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$I:................2x_1+3x_2=4$

$(-2)II:........-2x_1+4x_2=10$

$I-2II:....................7x_2=14$

$..................................x_2=2$

کیدی شي، ود بیلګي په توګه، له II څخه x1 وشمیرل شي:

$x_1=2x_2-5=4-5=-1$

د زیاتون کاروونی په کلکه یا تل استعمال څخه کیدی شي
x2
له منځه یو وړل شي، په دې شکل چی د II درې برابره د I دوه ځله ته ورزیات کړی شي.

$2.I:............4x_1+6x_2=8$

$3.II:............3x_1-6x_2=-15$

$-------------------$

$2.I+3.II:........7x_1.........=-7$

$........................x_1.............=-1$

یادونه : په پورته کې یا نورو کومو ځایونو کې ، چې ټکی چیرته اینسول کیږي، پوهیږو، چې چیرته ټکی د ځای غزونې او چیرته د ځل لپاره ځای په ځای شوي دي

بیلګه ۱۱ . ۲ :
سیسم ۲ دې په پورته درې متودو ځواب شي:

الف (مساوي اینوولو:
I' : x1 = 2 -(3/2).x2
II': x1 = 2 -(3/2)x2
2- (3/2)x2 = 2 - /3/2)x
0.x2 = 0

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته
x_2
په خوښه. دا په دي مانا چی
x_2
هر ارزښت نیوی شي ۰ له I' څخه ناپای ډیر ځوابونه لاس ته راځي
$x_1 = 2 - (3/2)x_2$ او x_2 په خوښه.

ب) د بل په ځاي ایښوولومتود: $I' \quad x_1 = 2-(3/2)x_2$,
په II کی ایښول کیږي

$$II' \quad 4.(2-(3/2)x_2) + 6x_2 = 8$$
$$8-6x_2+6x_2 = 8$$
$$0.x_2 = 0 \quad x_2$$

په خوښه له II' لاس ته راځي
$I' : x_1 = 2 - 3/2\, x_2$ x_2 په خوښه

پ) د زیاتون متود یا لار یا طریقه:

$$2.I \quad 4x_1 + 6x_2 = 8$$
$$II \quad 4x_1 + 6x_2 = 8$$
$$II - 2.I : \; 0x_1 + 0x_2 = 0$$

که یوائی دا مساوات په نظر کي ونیول شي ، نو x_1 او x_2په خوښه ټاکل کیدی شي، دا چی د x_1 او x_2 ترمنځ په I یا II کی ورکړ شوي اړیکي دي ، نو یوائي یوه ناپیژندونکو په خوښه ټاکل کیدی شي . ځواب داسی دی:

$$x_1 = 2-(3/2)x_2$$

x_2په خوښه

په همدې ډول:

$$x_2 = 4/3 -(2/3)x_1 ,$$

دلته x_1 په خوښه ټاکل کیږي

بیلګه ۱۱ . ۳ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

سیستم ۳ دې په پورته درې ورکړشوومتودونو ځواب شي.

الف (مساوي ځاي په ځاي کولو متود:

$I': \quad x1 = 2 -(3/2)x2$

$II': \quad x1 = 5/2 -(3/2)x2$

$2-(3/2)x2 = 5/2 -(3/2)x2$

$0.x2 = 1/ 2$

دا یو په ښتوالی یا تضاد دی، ځکه چې هیڅ یو رییل ګڼ x2 نه شته چې دا مساوات پوره کړي، نو له دې امله کوم ځواب نه شته یا وجود نه لري.

ب) د بل په ځاي لیکلو عملیه: $I': \quad x1 = 2 - (3/2)x2 \quad ,$

په II کی دی په ځای شي

$II': 4.(2-(3/2)x2)+6x2 = 10$

$8 - 6x2 + 6x2 = 10$

$0.x2 = 2$

دا مخامخوالی یا په ښتوالی یا تضاد دئ ، پس ځواب نه شته.

پ) د زیاتون متود:

$2 . I \qquad 4x + 6x = 8$

$II \qquad 4x + 6x = 10$

$2.I - II \qquad 0.x + 0.x = -2$

په ښتوالی یا تضا د دئ ، ځواب وجود نه لري

د لاندې بیلګو سره غواړو د منځ ته راتللو پیښتنو ځوابونو لپاره اړوند لارښوونه ګوته لك کړو.

بیلګه ۱۱ ۰ ٤ : په لاندې فورم یا بڼه برابرونسیستم ورکړ شوی:

$I \qquad x /(a+b) +y/(a-b)$

$II \qquad x /(a-b) +y/(a+b)$

دا ټیك هلته موخه ور یا هدفمند دئ چی $a =| b$ او $a- =| b$ وي، یعنی $|b| =| |a|$ وي .

(c) ketabton.com: The Digital Library

کیدی شي چی دا سیستم د پورتنیو متودونو څخه په یوه متود ترلی ځواب کړي، د یوه د مخه ورکړ شوي فورم یا بڼې اوړون له لارې هم ځواب کیدی شي.

لمړی د جمعی متود څخه کار اخلو:

د I ځل له $1/(a+b)$ او II ځل له $-1/(a-b)$ څخه وروسته دا لرو:

$$x/(a+b)^2+y/(a^2-b^2)=1/(a+b)$$

$$-x/(a-b)^2-y/(a^2-b^2)=-1/(a-b)$$

له دې سره د y دواړه ځله وونې یاضریبونه یو د بل مخامخ (یا په بل عبارت یو د بل په څټ) نخښی لري او له دې امله د زیاتون په حالت کی له منځه ځي، نو په دې توګه مو یو برابرون د یوې ناپیژندونکی سره مخ ته پروت دی:

$$\frac{x}{(a+b)^2}-\frac{x}{(a-b)^2}=\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a-b}$$

$$\frac{(a-b)^2-(a+b)^2}{(a+b)^2(a-b)^2}x=\frac{a-b-(a+b)}{a^2-b^2}$$

$$\frac{a^2-2ab+b^2-a^2-2ab-b^2}{(a^2-b^2)^2}x=\frac{a-b-a-b}{a^2-b^2}$$

$$-\frac{4ab}{a^2-b^2}x=-2b$$

$$2abx=b(a^2-b^2)....(*)$$

$$x=\frac{a^2-b^2}{2a};ab\neq 0$$

که I له $1/(a+b)$ او IIله $-1/(a-b)$ سره ځل شي کیدی شي: چی y په ورته ډول وشمیرل شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{x}{a^2-b^2}-\frac{y}{(a-b)^2}=\frac{1}{a-b}$$

$$-\frac{x^2}{a^2-b^2}-\frac{y}{(a+b)^2}=\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a+b}$$

$$\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{(a-b)^2(a+b)^2}y=\frac{a-b-(a+b)}{a^2-b^2}$$

$$\frac{a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2}{(a^2-b^2)^2}y=\frac{a+b-a+b}{a^2-b^2}$$

$$-\frac{4ab}{a^2-b^2}y=2b$$

$$2aby=b(a^2-b^2)....(*)$$

$$y=\frac{a^2-b^2}{2a};ab\neq 0$$

دلته مو ځانګړی حالت مخ ته پروت دی، چی دواړه ناپیژندونکی مساوي دي، کومی چی څمورږ د څیړنی لپاره بي مفهومه دئ.

دا د x , y لپاره شمیرل شوي ارزښتونه په هغه حالت کی باوري دی چی ab |= 0 وي.

نو څیړو چی کوم حالت توپیر د ab = 0 لپاره منځ ته راځي. . دلته مساوات) * (تر څیړنی لاندې نیسو او درې حالته توپیروو:

.1 a = 0 , b |= 0

مساوات)*(داسی دي

0.x = -2b3, 0 . y = -2b3

په دې حالت کی برابرون سیستم ځواب نه لري.) تضاد مخ ته پروت دی

. 2 a |= 0 , b = 0

برابرون(*)(په دې حالت کی داسی دی.

0 . x = 0 ; 0 . y = 0

دلته مخامخوالی یا په ښتوالی یا تضاد نه شته (له I او هم له II لاس ته راځي

x/a+y/a=1 <=> x+y=a

که y خپلواك وټاکل شي، نو لرو x=a-y دلته y په خوښه ټاکل کیدی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په بل حالت کی لرو , $y = a - x$ دلته x په خوښه دی

3 . $a=b=0$

دا حالت د نیونی له مخی بند ، ناشونی یا ناممکن دی.

بیلګه ۱۱ . ۵:

$$\frac{11}{2x-3y}+\frac{18}{3x-2y}=13$$

$$\frac{27}{3x-2y}-\frac{2}{2x-3y}=1$$

که دا سیستم د $(3x-2y)(2x-3y)$ سره ځلوني په بنسټ فورم بدل کړي، نو لرو:

$$69x-76y=78x^2-169xy+78y^2$$

$$48x-77y=6x^2-13xy+6y^2$$

او کتل کیږي چی په دې ډول لاینیز برابرونتسیستم د x او y لپاره منځ ته نه راځي . دا چی په دې هر یو سیستم کی دوه ماتلاندې سره برابر دي نو کیدی شي چی نوې ناپیژندونکی u , v و لیکو. دا وشمیرو او بیا له دې وروسته لویي x , y راپیدا کړو .

موږ ځاي پر ځاي کو

$u=1/(2x-3y)$,$v=1/(3x-2y)$

او لاس ته راوړو:

$11u+18v=13$ <=> $11u+18v=13$

$27v-2u=1$ $-2u+27v=1$

موږ د زیاتون یا جمعی متود کاروو

$33u+54v=39$

$4u-54v=-2$

$37u=37$

$u=1$ => $v=1/9$

له دې سره کیدی شي x او y وشمیرل شي:

$1=1/(2x-3y)$<=> $2x-3y=1$

$1/9=1/(3x-2y)$ <=> $3x-2y=9$

له دې څخه غوښتونکی ځواب $x = 5$, $y = 3$ لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۱ . ۱ . ۳ دويمه درجه ديترميناتې او د كرامر قاعده

كه په ټوليزسيستم(11.8) باندې د زياتون متود استعمال شي، نود x2 د له منځه وړلو په لار لاس ته راځي

$$I' = a_{22}.I - a_{12}.II$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$$

پورته برابرون دی) ۱۱،۱۰ (وي

اود x1 د له منځه وړلو:

$$II' = a_{11}.II - {}_{21}.I:$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = (a_{11}a_2 - a_1a_{21})$$

دا پورته برابرون دې (۱۱،۱۱) وي

كه 0 =| (a11a22 -a12a21) وي، نو له دې يواځنى ټاكلى ځواب لاس ته راځي

$$x_1 = \frac{a_1a_{22} - a_{12}a_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}};\ x_2 = \frac{a_{11}a_2 - a_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},.........(11,12)$$

كه د ارزښتونه په (11 . 8) كى ځاى په ځاى شي نو تصديقيږي، چې(11 . 12) په ريښتينى د (11, 8) ځواب دى. له (11 . 10) تر (11 . 12) سړى په واقعيت يا رښتونى كى د ديترمينانت كليمى په لور لاروى كوي(لارښودوي.)

پيژند ۱۱ . ۱: د يو منظم سيستم دوه ځله دوه رييلو ګڼونو $a_{ik}, (i, k = 1, 2)$ د

د ۲ -امه درجه ديترمينانت لاندې ، لاندينى ګڼ پوهيږو:

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21};...........(11,13)$$

د اصلي دوه كونجتړي يا دياګونال (قطر) د توكوځل، ترې كم(منفى) د څنګ يا فرعى دوه كوجنتړي(قطر) د توكو ځل(يا) د اصلي دوه كونجتړې يا قطر د توكو ځل څخه د څنګ يا فرعي دوه كونجتړې د توكو ځل كميږي يا منفى كيږي)

يادونه : دا اوس او وروسته ديترمينانت بڼه د ماتريكس په څيره ليكل شوى، په ديترمينانت كې كرښى سمې دي، خو كومه ناسمپوهنه په كې نه راځي.

په (11 . 13) كى د xi ځله ووني يا ضريبونه داسى ليكل شوي لكه په (11 . 8) سيستم كى . د (11.13) ديترمينانت له دې امله د (11 8) (له ماڅخه دانوكانو كې دننه ګڼونه كله كله بدليږي، دې ته دې د ګرانو لوستونكو پام وي، دا شميرپوهنيزه ناسمي منځ ته نه راولي) سيستم د ځلونو (ضريبونو) ديترمينانت بلل كيږي.

كه په (11. 13) كى لومړى (درز، ستن يا مته يا ولاړه ليكه يا-كيله) د ديترمينانت ولاړه ليكه(په ځاى) چى د xi ځله ووني يا ضريبونه دى د (11 . 8) برابرونسيستم

(c) ketabton.com: The Digital Library

ښي اړخ (مطلقه توکی) توکي a1 , a2 وليکل شي نو(په x1 اړونده) لاندې ديترمينانت لاس ته راځي:

$$D_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_{12} \\ a_2 & a_{22} \end{pmatrix} = a_1 a_{22} - a_{12} a_2$$

د پورته برابرون ګڼه يا نمره دې) ١١،١٤ (وي‌په همدې ډول که د) 11 . 13 (ديترمينانت دوهم درز بدل کړی شي، نو د x2 پورې اړوند لاندې ديترمينانت لاس ته راځي

$$D_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_{21} & a_2 \end{pmatrix} = a_{11} a_2 - a_1 a_{21}; \ldots\ldots\ldots\ldots (11,15)$$

که له (11 . 10) تر(11 . 12) پورې له (11 . 13) تر (11 . 15) پرتله يامقايسه شي نو لاس ته راځي

جمله ١١ . ١ (د کرامر قاعده):
که د ځله وونو يا ضريبونو ديترمينانت لپاره په (11. 13) کی

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \neq 0; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11,16)$$

باوري وي نو د مساواتو سيستم (11 . 8) يوائځنی ټاکلی ځواب لري

x1=D1/D ; x2 = D2/D /11,17)

په داسی حال چی D1 او D2 د (11 . 14) او (11 . 15) له مخی شميرل کيږي.
د (11 . 10) او (11 . 11) له امله لرو

جمله ١١ . ٢ :
که په (١١ . ١٣) کی د ځلونو ديترمينانت D لپاره باوري وي

(11,18) 0 = D

او د کم له کمه يوې ډيترمينانتD1 يا D2 لپاره په (14, 11) يا (11 , 15) باوري وي

D1|=0 V D2 |=0 (11,19)

نو (11 . 8) سيستم ځواب نه لري، ځکه چي برابرون يی يو د بل سره مخامخ دي (تضاد کی دي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله۱۱ . ۳ :

باوري دي

$$D=D1=D2=0 \quad (11.20)$$

نو يو له برابرونونو I يا II زياتي دئ) دواړه برابرونونه يو بل ته اړ دی يا د بل په واك کی دي(او د ۱۱ . ۱ . ۱ . ۱ . برخی متود استعماليدلی شي يا کار ترې اخستل کيدی شي.

د ښوونبيلګو په څير دې اوس د ۱۱ . ۱ تر ۱۱ . ۳ پورې بيلګي (۱۱ . ۱ . ۲ برخه) کارول شوي سيستمونه ۱ ،۲ او۳ ګران لستونکي په ديترنمنانتو ځواب کړي، که چيرې ما دا کار سرت ونه رساوه۰.

بيلګه ۱۱ . ۶ : د سيستم لپاره باور لري

$$D=\begin{vmatrix}2 & 3\\1 & -2\end{vmatrix}=-4-3=-7\neq 0$$

پس يوائنی تاکلی ځواب لري. پسی باور لري

$$D_1=\begin{vmatrix}4 & 3\\-5 & -2\end{vmatrix}=-8+15=7\neq 0; D_2=\begin{vmatrix}2 & 4\\1 & -5\end{vmatrix}=-10-4=-14$$

له دې امله باوري دی

$$x1=D1/D=7/-7 , x2=D2/D=-14/-7= 2 ,$$

بيلګه۱۱ . ۷ :

د سيستم ۲ لپاره باور لري

$$D=\begin{vmatrix}2 & 3\\4 & 6\end{vmatrix}=12-12=0$$

او ورپسی

$$D_1=\begin{vmatrix}4 & 3\\8 & 6\end{vmatrix}=24-24=0; D_2=\begin{vmatrix}2 & 4\\4 & 8\end{vmatrix}=16-16=0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې امله ناپاي ډېر ځوابونه موجود دي) بیلګه۱۱ . ۲ دې وکتل شي.)

بیلګه ۱۱ . ۸ :   د سیستم ۳ لپاره باور لري

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0$$

D =   2   3   =12 -12 = 0

او ورپسی

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 10 & 6 \end{vmatrix} = 24 - 30 \neq 0$$

همدلت روښانه ده، چی ځواب نه شته(د D2 = 4 |=0 له شمیرلوکیدی شي، چی تیرشو)

بیلګه ۱۱ . ۹ :

موږ بالاخره غواړو چي په بیلګه ۱۱ . ۴ کی ورکړ شوی مساواتسیستم ته د دیترمینانت له لارې ځواب ورکړواو ددې لپاره لومړی   D , D1 او D2 شمیرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$D=\begin{vmatrix}\frac{1}{a+b} & \frac{1}{a-b}\\ \frac{1}{a-b} & \frac{1}{a+b}\end{vmatrix}=\frac{1}{(a+b)^2}-\frac{1}{(a-b)^2}=\frac{(a-b)^2-(a+b)^2}{(a+b)^2(a-b)^2}$$

$$.........................=\frac{a^2-2ab+^2-a^2-2ab-b^2}{(a^2-b^2)^2}=-\frac{4ab}{(a^2-b^2)^2};$$

$$D_1=\begin{vmatrix}1 & \frac{1}{a-b}\\ 1 & \frac{1}{a+b}\end{vmatrix}=\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a-b}=\frac{a-b-(a+b)}{(a+b)(a-b)}=-\frac{2b}{a^2-b^2};$$

$$D_2=\begin{vmatrix}\frac{1}{a+b} & 1\\ \frac{1}{a-b} & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a-b}=\frac{a-b-(a+b)}{(a+b)(a-b)}=-\frac{2b}{a^2-b^2}$$

لومړی حالت $ab \mid= 0$:

دلته دیترمینانت $D \mid= 0$ او دا د برابرونسیستم یواځنی تاکلی ځواب دی

$$x=\frac{D_1}{D}=\left(-\frac{2b}{a^2-b^2}\right):\left(-\frac{4ab}{(a^2-b^2)^2}\right)=\frac{2b}{a^2-b^2}\cdot\frac{(a^2-b^2)^2}{4ab}=\frac{a^2-b^2}{2a}$$

$$y=\frac{D_2}{D}=\frac{a^2-b^2}{2a}$$ (د D1 = D2 له امله)

دوم ۱ حالت a=0,b|=0 : دلته D = 0 مګر

D1 = D2 |= 0

او د مساواتسیستم ځواب نه لري

دوم ۲

دلته D = D1 = D2 = 0

او ناپای ډیر ځوابونه موجود دي چی په بیلګه ۱۱ . ۴ کي ښوول شوي .

دوم ۳ حالت a = b = 0 :

دلته مساواتسیستم هدفمند نه دی (په صفر ویش مخ ته پروت دی) مشوره کیږي چی

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندی د برابرونونو سیستم دې د لاندې بریالي فورم بدلولو وروسته دبيلا بيلو لارو ځواب شي او د ځواب متودونه دې یو د بل سره پرتله یا مقایسه شي.

$(a-b)x+(a+b)y=a^2-b^2$

$(a+b)x+(a-b)y=a^2-b^2$

١١ . ١ . ٤ د ګاوس الګوریتم

په ١١ . ١ . ٢ . برخه کي څیړل شوو متودو ټیك په نظر نیولو سره (برابرو لیکلو- په ځاي - او د زیاتون عملیه) ، کره پوهیدلی شو چی ددې په مرسته ټولیز د برابرونسیستم (11 . 8)

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = a_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = a_2$$

په یوه درېګوډيز جوړ سیتسم

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = a_1$$
$$\ldots\ldots\ldots a_{22}x_2 = a_2$$

بدلولي شو، کوم چی بیا خورا ساده ځواب کیدی شي

١ . که $|a22| = 0$ وي، نو لاس ته راځي:

الف) $x2=a2/a22$

ب) برسیره پر دې که $a_{11} \neq 0$ وي، نو لاس ته راځي:

$x1=(a1/a11)-(a12/a11)x2=$
$(a1/a11)-(a12/a11).(a2/a22)$

٢ . که $a22 = 0$ او $|a2| = 0$ وي نو ځواب موجود نه دی یا نه شته

٣ . که $a22 = 0$ او $a2 = 0$ وي، نو ٢- م برابرون بی هوده دی (د ضرورت وړ نه دی)، او سړی بیا ا. برابرون د ١١ . ١ . ١ برخی متود په مرسته ځوابولی شي.

د (11 . 8) سیستم د ځواب پرابلم په دې ډول کمیږي، چی دا سیستم په دریګوډی بڼه یا – څیره واړوي . هغه الګوریتم چی دا په هر حالت کی ځواب کولی شي، د ګاوس الګوریتم دی. یا (11 . 8) سیستم دریګوډی څیره لري او یا ټول aik د صفر سره برابر نه دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې کې (11 . 8) سیستم په روڼښی - یا مروج ډول او هم شیماتیکي ډول لیکل کیږي.

		x1	x2	RS
I	a11x1+a12x2= a1	a11	a12	a1
II	a21x1+a22x2= a2	a21	a22	a2

(دلته RS د مساواتو د ښي خوا (ښ خ) یا ښی لور یا ښی اړخ مانا ورکوي)، که I په ځای پرېښودل شي اود II برابرون a11 / a21 - ځله له I برابرون ښخه کم شي ، نولرو

		x_1	x_2	Rs
I	$a_{11}x_1+a_{12}x_2 = a_1$	a_{11}	a_{12}	a_1
II'	$0.x_1+(a_{12}-a_{11}.a_{22}/a_{21})x_2=a_1-a_{11}.a_2/a_{21}$	0	$a_1- a_{11}.a_{22}/a_{21}$	$a_1-a_{11}.a_2/ a_{21}$

که 'II لنډ په دی فورم ولیکل شي

نو ټول سیستم لاندې شکل غوره کوي :

		x1	x2	RS
I	a11x1+a12x2= a1	a11	a12	a1
II'	b22x2 = b2		b22	b2

اوس بیرته باید زیات حالتونه یو له بل توپیر شي:

-که b22 |= 0 وي ، نو x2 له 'II اوx1 لهI لاس ته راځي.
-که b22 = 0 , b2 |=0 وي، نو ځواب وجود نه لري.
-که b22 = b2 = 0 وي، نو ناپای زیات ځوابونه موجود دي، چی لهI او ۱۱ . ۱ . ۱ برخی ته ورته را څرګندیدی شي (معلومیدلی شي.)

سیستمونه ۱ ، ۲ ، ۳ د ګاوس په الګوریتم ښوول کیږي

بیلګه ۱۱ . ۱۰ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا سیستم داسی لیکل او شیماتیك کیږی:

		x_1	x_2	RS
I	$2x_1 + 3x_2 = 4$	2	3	4
II	$x_1 - 2x_2 = -5$	1	-2	-5

که غوښتونکی دریګوډیخیره غواړو لاس ته راولو نو Iهمداسی پریږدو او له II ځخه دI یو یو په دوه ځله کموو :

		x_1	x_2	RS
I	$2x_1 + 3x_2 = 4$	2	3	4
II'	$0.x_1 - (7/2)x_2 = -5$	0	-7/2	-5

له 'II لاس ته راځي $x2 = 2$

او له I ځخه لاس ته راځي. $x1 = 2 -(3/2)\ x2 = -1$

بیلګه ۱۱ . ۱۱:

دلته سیستمونه ۲ او ۳ یواځي په شیماتیکي ډول (جدول په شکل (ځیرو. دلته د لمړی لیکی دوه ځله د دوهمی لیکی کمیږي

سیستم ۳

	x1	x2	RS
I	2	3	4
II	4	6	10
II'=II-2.I	0	0	2

سیستم۲

	x1	x2	RS
I	2	3	4
II	4	6	8
II'=II-2.I	0	0	0

په سیستم ۲ کی ګورو چی لمړی برابرون د دوم برابرون په مخامخ څه نوی نه لري (0 = 0 تضاد یا مخامخوالی نه شته). له دې امله یو برابرون (د بیلګي په توګه I) موجود دی چی د ۱۱ . ۱ . ۱ برخي او یا ۱۱ . ۲ په ځیر ځواب کیږي. په سیستم ۳ کی تضاد همدا اوس لیدل کیږي" 0 = 2 " ، نو له دې امله ځواب نه شته.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلگه ۱۱ . ۱۲ :

سیستم I دې په څلور ډوله یا واریانتو د ګاوس الګوریتم په مرسته وڅیړل شي

دوم واریانت　　　　اول واریانت

x1 x2 RS　　　　x1 x2 RS

	x1	x2	RS
I	2	3	4
II	1	-2	-5
II'=II+(2/3).I	7/3	0	-7/3
1.	2	1	-1

	x1	x2	RS
I	2	3	4
II	1	-2	-5
II'=II-(1/2).I	0	-7/2	-7
2.	-1	2.	2

څلورم وایانت　　　　دریم واریانت

x1 x2 Rs　　　　x1 x2 RS

	x1	x2	Rs
I	2	3	4
II	1	-2	-5
I=I-2.II	0	7	114
2	1.	-1	1.

	x1	x2	RS
I	2	3	4
II	1	-2	-5
I'= I+(3/2).II	7/2	0	-7/2
-1	2.	2	2.

دا دلته د یو ګڼ په چوکات یا څلورګوډیز کی نیول دا مانا لري چی د هغی د پاسه ناپیژندونکي د مساوات څخه شمیرل کیږي، کومه چی په هغه لیکه کی پرته ده چی چوکاټ شوي، دا په یواځني ډول دا مانا لري :

واریانت ۱:

ا) له I څخه دې x1 و شمیرل شي

ب) له II' څخه دې x2 وشمیرل شي

پ) په 1 کی x2 له II' شمیرل کیږي:

$$x2= -7 / (-7/ 2) =2$$

ت) په 2 کی x1 له I شمیرل کیږي:

$$x = (1/ 2)(4 - 3.2) = -1$$

واریانت ۲ :

ا) له I څخه دې x2 وشمیرل شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) له II' څخه دې $x1$ وشميرل شي

پ (له II' لرو: $x1 = -1$

ت) له I څخه لرو: $x2 = 2$

واريانت (امکان) ۳

ا) له II څخه دې $x2$ وشميرل شي

ب) له I' څخه دې $x1$ وشميرل شي

پ) له I' لرو $x1 = -1$

ت (له II لرو $x2 = 2$

واريانت (امکان) ۴

ا) له II دې $x1$ و شميرل شي

ب) له I' څخه دې $x2$ وشميرل شي

پ (له I' لر $x2 = 14 / 7 = 2$

ت) له II لرو:

$$x1 = -5+2.2 = -1$$

ټولی څلور واريانتی يا امکانت برابر ارزښتونه لری، خو دا چی په څلورمه واريانت کی په ټولګڼونو شميرنه کيږي، »مخته وونه« يا مخوونه(برتري) يا نوره هم ښه وړاندې توب ورکول کيږي.

۱۱ . ۱ . ۵ له دوه وو زيات برابرونونه د دوه ناپيژندونکو سرهره

که څوك له دوه زيات برابرونونه د دوه اوښتونو يا ناپيژندونکو سره ځواب کوي، په ټوليزه (عمومي) توګه بايد په نخښه شي چی لومړي دوه برابرونونه $x1, x2$ ځوابونه لري. که دا ځوابونه په نورو برابرونونو کی ځای په ځای شي تضاد ته رسيږو. د دوه ناپيژندونکو سره له دوه زيات مساوات په ټوليزه توګه حل نه لري. يواځې په ځانګړی حالت کی دا سيستم ځواب لرودی شي. موږ دا پروسه اول په عمومي ښوونلارې څيړو او بيا د ګاوس الګوريتم له لارې.

بيلګه ۱۱ . ۱۳: لاندني دوه سيستمونه ورکړ شوي دي

$$\begin{array}{llll} a)\ I & x1 + 2x2 = 3 & b)\ I & x1 + 2x2 = 3 \\ II & 2x1 - x2 = 1 & II & 2x1 - x2 = 1 \\ III & 3x1 + x2 = 2 & III & 3x1 + x2 = 4 \end{array}$$

له I او II څخه د څرګندو يا معلومومتودونو له لارې په دواړو سيستمونو کی لاندې، په لومړی ځل يواځنی پيژندل شوی، ځواب لاس ته راځي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

له) a او)b څخه لرو1 = x1 + 2x2 که دا ارزښتونه په IIIکی ځاي په ځاي شي نو لرو:

په) a) کې :1.1+3.1 = 4 |= 2, په) b) کی : 3.1 + 1.1 = 4

نو سیستم) a) ځواب نه لري او سیستم) b̂) یواځني ټاکلی ځواب لري

یعني x1=x2=1

بیلګه ۱۱ . ۱۴ :

په بیلګه ۱۱ . ۱۳ کي ورکړ شوي مساوت اوس د ګاوس د الګوریتم له لارې ځواب کوو.

a)	x1	x2	RS	b)	x1	x2	RS
I	1	2	3	I	1	2	3
II	2	-1	1	II	2	-1	1
III	3	1	3	III	3	1	4
II'=II-2.I	0	-5	-5	II'=II-2.I	0	-5	-5
III'=II-3.I	0	-5	-7	III=III-3.I	0	-5	-5
III''=III'-II'	0	0	-2	III=III'-II'	0	0	0

په a) کی تضاد پیژندلکیږي (III':0.x1+0.x2=-2) ځواب نه شته یا وجود نه لري .

په b) کی تضاد مخ ته نه دئ پروت .(III':0.x1+0.x2=0) لهII' څخه لرو:

x2 = 1 او له I څخه لاس ته راځی : x1=3-2.1=1

۱۱ . ۲ لاینیزبرابرونتسیستم د درې ناپیژندونکو سره

۱۱. ۱ ۰ ۲ ۰ یو برابرون د دري ناپیژندونکو سره

مو ږ یو مساوات د دري ناپیژندونکو سره تر څیرني لاندې نیسو:

a11x1 + a12x2+ a13x3 = a1 (11 . 21)

دوه مختلف حالتونه ۱ او ۲ او نورمال فورم ۳ ممکن دي

I . a11=a12=a13=0 (11 . 22)

دلته x1 , x2 او x3 یو له بل پوره خپلواك ټاکل کیدی شي. ویل کیږي چی ناپاي ډیر ځوابونه مخ ته پراته دي (x1 په خوښه، x2په خوښه او x3په خوښه)

2. a11=a12= a13= 0 ,a1|=0 (11 . 23)

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته تضاد مخ ته پروت دی

$0x1+0.x2+0.x3 = a1 \neq 0$

اوبیونه نه شته.

۳- د کم له کمه یوه ځلجوړې i , k لپار دې aik |= 0 وي. (بې د تولیز وبندیزونو یا عمومیت د محدود والی دې a11|= 0 وي (. کیدی شي چی x2 او x3 په خوښه وټاکل شي (ناپاي ډېر ځوابونه)، او لاس ته راځي

x1=(1/a11)(a1-a12x2-a13x3) په خوښه x1 او x3 (11,24)

۱۱ . ۲ . ۲ دوه برابرونونه د درې ناپیژندونکو سره

لاندې د دوه برابرونسیستمونه د درې اوښتونو یا ناپیژندونکو سره

$$a11x1+a12x2+a13x3=a1 \quad (11,25)$$

$$a21x1+a22x2+a23x3= a2 \quad (11,25)$$

موږ دا را ویستلي حالتونه ، چیرته چی د ټولو i, k لپاره aik= 0 ، په پام کی نه نیسو. دا حالت هم په پام کي نه نیسو چی دوم برابرون د لومړي په ځیر وي (ناپاي ډېر ځوابونه. او یا دوهم برابرون د لمړي سره په مخامخوالي یا ښتوالي یا تضاد کی وي (ځواب نه وي) . دا ټول حالتونه اسان پیژندونکي دي. موږ په یوه بیلګه کی دا اصلي حالت څیړو چی یو ناپیژندونکي یا نامعلوم (د بیلګي په توګه x3) په خوښه ټاکل کیږي او دا نورې دوه ناپیژندونکی یا اووښتونې (x1 او x2) یواځنی لاس ته راځي، او یا یواځنی ورکول کیدی شي (ناپاي ډېر ځوابونه).

بیلګه ۱۱ . ۱۵:

	x1	x2	x3	RS
I x1+x2+x3=3	1	1	1	3
II x1+2x2+3x3=6	1	2	3	6
II'=II-I 0.x1+x2+2x3=3	0	1	2	3

له II' لاس ته راځي

$$x2 = 3 -2x3$$

له I څخه لاس ته راځي

$$x1=3-x2-x3=3-(3-2x3)-x3, x1= x3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او له دې لاس ته راځي
$x_1=x_3, x_2 = 3 - 2x_3$, x_3 په خوښه.

۱۱ . ۲ . ۳ دريمه درجه ديترمينانت او د کرامر قاعده

اوس درې برابرونونه يا معادلې يا مساوات د درې ناپېژندونکو سره څېړو

$$\begin{aligned} &I \quad a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3= a_1 \quad (11 . 26)\\ &II \quad a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3= a_2 \quad (11,26)\\ &III \quad a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3= a_3 \quad (11,26)\end{aligned}$$

له دې سيستم څخه کيدی شي چې د ۱۱ . ۱ . ۲ برخی د برابر ليکلو او يو د بل په ځای ليکلو متودونه په ساده ډول استعمال شي. د زياتونتيورم (-قضيه) فکر غواړي او د دريمي درجي ديترمينانت او د کرامر قاعدې په لور مو د (۱۱ . ۲۶) سيستم ځواب پيدا کولو لپاره هڅوي

پيژند ۱۱ . ۲:
رييل ګڼونو a_{ik} ($i,k = 1,2,3$ (يو درې درجه منظم د ديتمرمينانت سيستم

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix};.................................(11,27)$$

لاندې سرې لاندنی رييلګڼ پوهيدلی شي):

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12}\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13}\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} =$$

$$a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32)}) - a_{12}(a_1 a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{33});............(11,28)$$

له دې سره د دريمی درجي ديترمينانت شميرنه د دوهمی درجی ديترمينانت په شميرنه بدله شوه. . ۱۱ . ۲ تعريف او په ځانګړې توګه) 11 .28 (فرمول په لاندې ډول توضيح کيدی شي:
پيژند ۱۱ . ۳ : په (11 . 27) کی د ديترمينانت D لاندېديترمينانت Aik لاندې هغه دومه درجه ديترمينانت پوهيدلی شو، چی د D ديترمينانت i- می ليکی او k - م درځ يا متې د لرې کولو يا د منځه وړلو له لارې منځ ته راځي(زه د ماتريکس په دننه

(c) ketabton.com: The Digital Library

کې دا ليکې او مټې يا ستې له منځه نه شم وړلی، خو دا کومې ستونځې نه پېښوی ، ځکه، چې لاس ته راوړنه يې پسې ليکل شوې)

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

په دې ډول کيدی شي چې د ۱۱ . ۲ ديترمينانت په دې فورم وليکل شي

پيژند ۱۱ . ۴ :

د دريمې درجې ديترمينانت D لاندې، چې په (11 . 27) کی ورکړ شوی دی، دا لاندې ګڼ پوهيدل کيږي:

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

د زياتون عمليي څخه، چې دلته نسبت د دوه ناپيژندونکو مساواتو ته چې دوه ناپيوندونکی لري، روښانه ده، د (11 . 26) څخه لاس ته راوړل کيږي:

$$Dx1 = D1\ ,\ Dx2 = D2\ ,\ \ Dx3 = D3 \qquad (11\ .\ 29\ )$$

په داسی حالت کی چې Di داسي لاس ته راځي چې د ځله وونوديترمينانت (11 . 28) کی سړی i - م درځ يا ستن يا مټه د (11. 26) برابرون ښي لور ته ځای په ځای کړي.

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_{12} & a_{13} \\ a_2 & a_{22} & a_{23} \\ a_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 & a_{13} \\ a_{21} & a_2 & a_{23} \\ a_{31} & a_3 & a_{33} \end{vmatrix}; D_{13} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_3 \end{vmatrix}; ......(11,30)$$

موږ دا نتيجه بي له ښووني ورکوو.

له (۱۱ . ۲۹) څخه لاندې جملی لاس ته راځي:

جمله ۱۱ . ۴ (د کرامر قاعده) :

که د (۱۱ . ۲۶) د ځله وونوديترمينانتو(۱۱). ۲۷ ،په همدې ډول (۱۱ . ۲۸) لپاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$D \neq 0$ (11 . 31)

با وري وي ، نو (۱۱ . ۲۶) برابرونسیستم یواځنی ځواب لري

11,32) $x_3=D_3/D$; $x_2=D_2/D$; $x_1=D_1/D$

جمله ۱۱ . ۵ :

که $D = 0$ مګر $|D_i| = 0$ کم له کمه د یوه i ($i = 1,2,3$) لپاره وي، نو د (۱۱ . ۲۶)
برابرونسیستم ځواب نه لري (په (۱۱ . ۲۹ کی تضاد دی)

جمله ۱۱ . ۶ :

که $D = D_1 = D_2 = D_3 = 0$ وي، نو په (۱۱ . ۲۶) کی کم له کمه یو برابرون
له ضرورته زیات دی او دا (۱۱ . ۲۶) برابرونسیستم کیدي شي چي د ۱۱ . ۲ . ۲
متودونو باندې ځواب شي (وړاندیز دئ چی د ګاوس الګوریتم له متود ; چی په ۱ . ۲ .
۴ برخه کی ورکړ شوي ځواب شي.)

بیلګه ۱۱ . ۱۶ :

په لاندې سیستم

I $x_1 - x_3 = -2$

II $x_1 + x_2 - x_3 = 0$

III $2x_1 - x_2 = 0$

کی دی

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 1.\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - 0.\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + (-1).\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = -1 - 0 - 1.(-1 - 2) = 2$$

$$D_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - 0\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 2;$$

$$D_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1.\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - (-2)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - 1.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 4:$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1.\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 9 \end{vmatrix} - 0.\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 6$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو يواځنی ټاکلی ځواب موجود دی.

$x1=D1/D=2/2=1,\ x2=D2/D=4/2=2,\ x3=D3/D=6/2=3$

بيلګه ۱۱ . ۱۷ :

په لاندې سيستم

$$\begin{array}{ll} I & x1 + x2 + x3 = 0 \\ II & x1 \quad -x3 = 0 \\ III & 2x1 + x2 \quad =1 \end{array}$$

کي دی.

دا بيلګه دې ګران لوستونکی پخپله وښايې ، چې اوبيونه نه شته ۰ دې ته بايد ګوته ونيسم، $D = 0$ او $D1= -1 \neq 0$ ، چې ځواب نه لري۰

۱۱ . ۲ . ۴ د ګاوس الګوريتم

د ګاوس الګورتيم لومړی د (۱۱ . ۲۶) برابرونسيستم لپاره استعماليږي. دا د دوه مساواتو لپاره چې دري ناپيژندونکي لري او همدارنګه د زياتو مساواتو سيستم لپاره چې درې ناپيژندونکي لري د استعمال وړ دی.

د ګاوس د الګوريتم موخه په دې کی پرته ده چی (11 . 16) سيستم د ورته بدلونفورم له لارې په دريګوډيفورم را اوړي.

$$\begin{array}{lll} I & a11x1+a12x2+a13x3=a1 & (11 . 34) \\ II & \quad b22x2+b23x3=b2 & \\ III & \quad\quad c33x3=c3 & \end{array}$$

بنسټيز حالت : که $a11 \neq 0, b11 \neq 0, c11 \neq 0$ وي نو يو په بل پسی سړی کړی شي چی له III $x3$, او له II $x2$, وشميري. مګر په (11 . 34) کی ځانګړي حالتونه هم پيژندل کيږي:

-که $c3 \neq 0, c33=0$ وې، نو يو په ښتوالی يا تضاد مخ ته پروت دی، ځواب وجود نه لري

- که $c3=c33=0$ وی، نو III له ضرورتزيات دی سړی يواځی I او II څيړي.

- که$c33=c3=0$او برسيره پر دې $a11 \neq 0, b11 \neq 0$ وي، نو $x3$ په خوښه ټاکل کيدی شي او $x2$له II او $x1$ له I چی $x3$ ته اړ وي، شميرلکيدی شي (ناپای ډير ځوابونه)

-برسيره پر دې که $b22=b23=0$, $b2 \neq 0$ وي، نو ځواب وجود نه لري

-که نور هم ولرو چی $c33=c3=0$ او $b22=b23=b3=0$وي ، نو II له ضرورت زيات دی او له $a11 \neq 0$ کيدی شي چی $x2$ او $x3$ په خوښه وټاکل شي، او $x1$له I لاس

(c) ketabton.com: The Digital Library

ته راځي چې x2 او x3 ته اړ (په واك کې یا تابع) وي (ناپاي ډېر ځوابونه ځوابونه) .
که ټول ځلونه او د مساواتو ښی خوا صفر وي ، نو ناپاي ځوابونه موجود دی.

د گاوس الگوریتموس د درې ناپېژندونکو(11 . 26) سره له دوه پلونو(قدم) جوړ دی
لومړی پل (قدم) : نیسو چې په (11 . 2 6)کی 0 =| a11 دی. دا د نمرې بدلولو په بنسټ همیشه لاس ته راوړی شو) بي له ورکړ شووحالتونو) چې ټول aik = 0 وي) .
دلته I ورکول کیږي، او له II د I دا a21/a11 - ځله او له III دا a31 / a11 - ځله د I کموي. ددې څخه لاندې سیستم لاس ته راځي:

$$\begin{array}{ll} I & a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=a_1 \\ II & b_{22}x_2+b_{23}x_3=b_2 \\ III & c_{33}x_3=c_3 \end{array} \quad (11 . 35)$$

دویم پل (قدم) : د b22 |=0 نیوني سره په II' او III' باندې د ۱۱ . ۱ . ۴ برخي سره سم د گاوس الگوریتم استعمالیږي : سړی II' بي تغیره پریږدي اوله III' دا b32/b22-ځله د II' کموي، له دې راپیداکیږي

$$\begin{array}{ll} I & a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=a_1 \\ II & b_{22}x_2+b_{23}x_3=b_2 \\ III & c_{33}x_3=c_3 \end{array} \quad (11 . 37)$$

د گاوس د شیما فورمالیتي سره سم بیا دا شکل غوره کي

	x1	x2	x3	RS
I	a11	a12	a13	a1
II	a21	a22	a23	a2
III	a31	a32	a33	a3
II' = II-(a21/a11)I		b22	b23	b2
III' = III-(a31/a11)I		b32	b33	b3
III'' = III' - (b32/b22)II'			c33	c3

$$x_3 = c_3 / c_{33}$$
$$x_2=(1/b_{22})(b_2-b_{23}x_3)$$
$$x_1=(1/a_1)(a_1-a_{12}x_2-a_{13}x_3)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۱ . ۱۸ : دا سیستم ۰(مقایسه بیلګه ۱۱ . ۱۶)

I x1 -x3= -2

II x1 + x2-x3 = 0

III 2x1 -x2 = 0

د ګاوس الګوریتم سره په لاندې ډول حل کیږي

	x1	x2	x3	RS
I	1	0	-1	-2
II	1	1	-1	0
III	2	-1	0	0
II'= II - I	0	1	0	2
III'= III - 2.I	0	-1	2	4
III'' = III' + II'		0	2	6

x3=6/2=3

x2=2……………………

x1=-2+x3=-2+3=1

بیلګه۱۱ . ۱۹: (پرتله بیلګه ۱۱ . ۱۷ (دا سیستم

I x1 + x2- x3 = 0

II x1 -x3 = 0

III 2x1+ x2 = 1

د ګاوس د الګوریتم په مرسته په لاندې ډول حل کیږي

	x1	x2	x3	RS
I	1	1	1	0
II	1	0	-1	0
III	2	1	0	1

(c) ketabton.com: The Digital Library

-- ---------------------

II'=II-I	0	-1	-2	0
III'=III-2.I	0	-1	-2	1
III''=III'-II'	0	0	0	1

دلته دی "0 = 1 " تضاد. سیستم نه اوبی کیږي یا حل نه لري.

بیلګه ۱۱ . ۲۰: (مقایسه یا پرتله بیلګه ۱۱ . ۱۷) دا سیستم

I $x_1 + x_2 + x_3 = 3$

II $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$

III $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 9$

په لاندې ډول د ګاوس په الګوریتم اوبیونه ده

	x1	x2	x3	RS
I	1	1	1	3
II	1	2	3	6
III	2	3	4	9
II'=II-I	0	1	2	3
III'=III-2I	0	1	2	3
III'' = III'-II'	0	0	0	0

$=x_3$ په خوښه

$x_2 = 3 - 2x_3$

$x_1 = 3 - x_2 - x_3 = 3 - (3 - 2x_3) - x_3 = x_3$

۱۱ ، ۳ په خوښه ډېر مساوات ، په خوښه ډېر ناپیژندونکو سره

موږ په عمومي ډول د لاینیز سیستم برابرونونو په لار ښونی پیل کوو m (برابرون د nناپیژندونکو سره)

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = a1 .... (11,37)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23} + ... + a_{2n}x_n = a_2$$

....

....

$$a_{nm}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + ... + a_{mn}x_n = a_m$$

دا په خوښه يا ازاد پريړدو چی د برابرونونو ګڼون (تعداد) m د ناپيژندونکوn د ګڼون (تعداد) څخه لوي، کوچنی او که برابر دئ. په څرګندو دندو يا وظايف موږ دلته له څلور ناپيژندونکو څخه نه پورته کيږو او يوائی لاندې دوه متودونه څيړو

۱۱ ۰ ۳ . ۱ دn - م درجی ديترمينانت او د کرامر قاعده

پيژند ۱۱ . ۵ :

د n رييل ګڼونو aik يوه منظم سيستم n- م درجي ديترمينانت

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}; .... (11,38)$$

لاندې سړی لاندنې رييل ګڼ پوهيږي:

$$D = a_{11}A_{11} - a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} - a_{14}A_{14} + ... \pm a_{1n}A_{1n} ..... (11,39)$$

دلته aik غړي پورې مربوطه لاندې ديترمينانت Aik د (n-1) - م درجی ديترمينانت ده، چی پاتيږي، که په Dکیi - مه ليکه اوk - م درځ ، مته يا ستن (ليکه او درځ چی aikپه کی ولاړ وی) په کرښه لرې کړي يا کرښه پرې تيره کړي، يعنی ووهي.

په دې ډول د-n ام درجی ديترمينانت شميرل و- (n-1)-ام درجی ديترمينانت شميرلو ته راتيتيږي .

په ځانګړي توره د څلورمی درجی ديترمينانت لپاره دا لرو

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22}a_{23}a_{24} \\ a_{32}a_{33}a_{34} \\ a_{42}a_{43}a_{44} \end{vmatrix}; A_{12} = \begin{vmatrix} a_{21}a_{23}a_{24} \\ a_{31}a_{33}a_{34} \\ a_{41}a_{43}a_{44} \end{vmatrix}; .... A_{1n}\, etc$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که n برابرونونه د n ناپیژندونکو سره مخ ته ولرو) په) 11 . 37 (کی لرو) n=m د جمع تیورم په مرسته داسی سیستمونو لپاره لاندې نتیجه لاس ته راوړو

$$Dx1=D1,Dx2=D2, ...Dxn= Dn \qquad (11 . 42)$$

د Di دیترمینانت داسی لاس ته راځي چی د ځله وونویا ضریبونو په دیترمینانت) ۱۱ . ۳۸ (کی د-i ام درځ متې یا ستن د برابرونسیستم د ښي لاس سره بدل کړي .

د بیلګی په توګه یوسیستم د ۴ مساواتو او۴ ناپیژندونکو سره (پرتله مقایسه ۱۱ . ۴۰)

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_1 a_{12} a_{13} a_{14} \\ a_2 a_{22} a_{23} a_{24} \\ a_3 a_{32} a_{33} a_{34} \\ a_4 a_{42} a_{43} a_{44} \end{vmatrix}; D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} a_1 a_{13} a_{14} \\ a_{21} a_2 a_{23} a_{24} \\ a_{31} a_3 a_{33} a_{34} \\ a_{41} a_4 a_{43} a_{44} \end{vmatrix}; \ldots\ldots\ldots\ldots (11,43)$$

له(11 . 42) څخه لاس ته راځي

جمله ۱۱ . ۷ (د کرامر Cramer قاعده):

د ځله وونې یا ضریب دیترمینانت (۱۱,۳۸) لپاره د یوه مساوات سیستم د n مساواتو د nناپیژندوکو سره په (۱۱ . ۳۷) د m = n سره) باوري دی

$$D |= 0 \quad \text{(اصلي حالت)} \qquad (44 . 11)$$

نو دا برابرونسیستم یواځنی ټاکلی ځواب لري(حل لري

$$x1=D1/D,x2=D2/D,...,xn=Dn/D. \quad (11 . 45)$$

برعکس که , D = 0 مګر D1 |= 0 کم له کمه د یوه i لپاره نو دا سیستم حل نه لري .

که D=D1=D2=...=Dn=0 وي، نو کم له کمه یو مساوات غیر ضروري دی (دلته د اوبیونې لپاره د ګاوس الګوریتم وړاندیز کوو)

بیلګه ۱۱ . ۲۱:

لا ندې سیستم دې حل شي

$$\begin{array}{lllllll} \text{I} & x_1 & & +x_3 & & = 0 \\ \text{II} & 2x_1 & +x_2 & & +x_4 & =0 \\ \text{III} & & x_2 & & -x_4 & = 4 \\ \text{IV} & x_1 & -x_2 & -x_3 & +x_4 & = -2 \end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$D=\begin{vmatrix}1&0&1&0\\2&1&0&2\\0&1&0&-1\\1&-1&-1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&2\\1&0&-1\\-1&-1&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&1&2\\0&1&-1\\1&-1&1\end{vmatrix}=-3-3=-6$$

$$D_1=\begin{vmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&2\\4&1&0&-1\\-2&-1&-1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&1&2\\4&1&-1\\-2&-1&1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}2&-1\\-2&1\end{vmatrix}+2.\begin{vmatrix}4&1\\-2&-1\end{vmatrix}=-2-4=-6$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1&0&1&0\\2&0&0&2\\0&4&0&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&0&2\\4&0&-1\\-2&-1&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&0&2\\0&4&-1\\1&-2&1\end{vmatrix}=2.\begin{vmatrix}4&0\\-2&-1\end{vmatrix}+\left|2\begin{vmatrix}4&-1\\-2&1\end{vmatrix}\right|+2\begin{vmatrix}0&4\\1&-2\end{vmatrix}=$$

$$=2.(4)+.2+2.(-4)=-12$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&2\\0&1&4&-1\\1&-1&-2&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&2\\1&4&-1\\-1&-2&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4&-1\\-2&1\end{vmatrix}+\left|2.\begin{vmatrix}1&4\\-1&-2\end{vmatrix}\right|=4-2+2(-2+4)=6$$

$$D_4=\begin{vmatrix}1&0&1&0\\2&1&0&0\\0&1&0&4\\1&-1&-1&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0\\1&0&4\\-1&-1&-2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&1&0\\0&1&4\\1&-1&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&4\\-1&-2\end{vmatrix}+2.\begin{vmatrix}1&4\\-1&-2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0&1\\1&-2\end{vmatrix}=$$

$$=4+2.2-(-4)=12;$$

$$x_1=\frac{-6}{-6}=1;\ x_2=\frac{-12}{-6}=2;\ x_3=\frac{6}{-6}=-1;\ x_4=\frac{12}{-6}=-2$$

۱۱ .۳ . ۲ د ګاوس الګوریتم:

موږ ولیدل چی د ګاوس الګوریتم له لارې د مساوتو یو دریکوجشکل سیستم لاس ته راوستی شو، چی د هغي له مخی څرګندولی شو چی کوم حل)ځواب(مخ ته پروت دی .

دا په لاندې بیلګه څرګندوو

بیلګه ۱۱ . ۲ ۲ :

که په بیلګه ۱۱ . ۲۱ کی ورکړ شوی سیستم د ګاوس الګوریتم له لارې حل کړو، نو لاندني شیما لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

	x1	x2	x3	x4	Rs
I	1	0	1	0	0
II	2	1	0	2	0
III	0	1	0	-1	4
IV	1	-1	-1	1	-2
II'=II -2.I	0	1	-2	2	0
4III' = III	0	1	0	-1	4
IV' = IV-I	0	1	-2	1	-2
III'' = III' - II'	0	0	2	-3	4
IV'' = IV' +II'	0	0	-4	3	-2
IV''' = IV'' + 2.II''	0	0	0	-3	6

x4 = -2

x3=1/2(4+3.(-2))= -1

x2=0+(-1)(-2)= 2......

x1 = -(-1) = 1 ....

بيلګه ۱۱ . ۲۳:

دا برابرونسيستم

I	x1	+x2	+x3	+x4=4
II	x1	-x2	-x3	+x4=0
III	3x1	-x2	-x3	+x4=2

حل يا اوبيونه ى نه لرې، لکه د ګاوس له شيما څخه چى ليدل کيږي:

	x1	x2	x3	x4	RS
I	1	1	1	1	4

(c) ketabton.com: The Digital Library

II	1	-1	-1	1	0
III	3	-1	-1	3	2
II' = II-I	0	-2	-2	0	-4
III' = III-3.I	0	-4	-4	0	-10
III" = III' - 2.II'	0	0	0	0	-2

دلته III" په ښتوالی يا تضاد خوندي لري " 0 = -2 "

بيلګه ۱۱ . ۲۴:

لاندې سيستم د ۵ برابرونونو او ۴ ناپيژندونکو سره

I x1 +x2 +x3 +x4= 4

II x1 -x2 -x3 +x4= 0

III 3x1 -x2 -x3 +3x4= 4

IV x1 +2x2 +3x3 +4x4=10

V 3x1 +x2 + x3 +3x4= 8

ګورو چی oe1 (ناپای ډير) اوبيونې لري

	x1	x2	x3	x4	RS
I	1	1	1	1	4
II	1	-1	-1	1	0
III	3	-1	-1	3	4
IV	1	2	3	4	10
V	3	1	1	3	8
II' = II-I	0	2	- 2	0	-4
III'= III-3.I	0	-4	-4	0	-8
IV' = IV -I	0	1	2	3	6
V' = V-3.I	0	-2	-2	0	-4

(c) ketabton.com: The Digital Library

II''= II'+2.IV'	0	0	2	6	8
III'=III'+4.IV'	0	0	4	12	16
V'' = V' +2.IV'	0	0	2	6	8
III''' = III''-2.II'	0	0	0	0	0
V'''=V''-II	0	0	0	0	0

ګورو چی III''' او V''' تضاد نه لري. سږی کړي شي چی x4 په خوښنه وټاکي او لاس ته راوړي

له , x3=4-x4 II'' له x2=6-2(4-3x4)-3x4=-2+3x4 IV' او لهI

x=4-x2-x3-x4=4-(-2+3x4)-(4-3x4)-x4=2-x4

نو x1=2-x4 په خوښنه x4 ټاکو

او x2=-2+3x4 ، په خوښنه x4 ټاکو

او x3=4-3x4 په خوښنه x4 ټاکو

یادونه : هغه ګڼ یا نوره هم ښه هغه ځله ووني، چې غواړو صفر شي یا له منځه ورړو هغه مو شنه کړي۰

سږی د ګاوس شیما په دوم بلاك کی پیژندلی شي، مساوات، کوم چی په III' او V' پورې اړه لري، بل څه نه افاده کوي په غیر له هغی چی په II' اړه لرونکي دي. کیدی شو چی په III' او V' لیکو مو کرښه تیره کړې وی) له منځه وړې وی (. دریم بلا ك به یواځي له کرښی II' جوړ وی، او د ګاوس الګوریتم به له دې سره پاي میندلی وی.

۱۱ . ۴ هوموژین مساواتسیستم:

د n مساواتو یو سیستم د n نامعلومو سره چی د ټولو مطلقه غړي ورك شي، هموګین مساواتسیسمتم بلل کیږي .

د n = 3 لپاره دا د مثال په توګه هوموګېن سیستم بلل کیږي

$$I \quad a11x1+a12x2+a13x3= 0 ....$$

$$II \quad a21x1+a22x2+a23x3= 0 \quad (11.46$$

$$III \quad a31x1+a32x2+a33x3= 0 ....$$

یو داسی هموژینسیستم تل یوه اسانه اوبیونه یا اسان حل لري

$$x1=x2=x3=...=xn=0 \qquad (11.47)$$

که د ځلوونو د یترمینانت (۱۱ . ۳۸) لپاره 0 =| D باور ولري، نو د جملی ۱۱ . ۷ شیما څخه یواځي اسان trivial اوبیونه یاحل موجود دی او باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۱ . ۸ : یو هوموګین مساواتسیستم یواځ هلته سخت حل لري، که D = 0 باوري وي

بیلګه ۱۱ . ۲۵ :

دا هوموژین برابرونسیستم

I x1 +x3=0

II x1 -x2 =0

III x1 +x2 +x3=0

د

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + (1+1) \neq 0$$

له امله یواځنی ساده اوبیونه x1=x2 =x3= 0 لري.

بیلګه ۱۱ . ۲۶:

دا هموګین مساواتسیستم

I x1 +x3 = 0

II x1 +x2 = 0

III x1 +x2 +x3 = 0

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 1 = 0$$

د

له امله ناساده اوبنونه هم لري دا په لاندې ډول د ګاوس د الګوریتموس څخه لاس ته راځي: په لاندې کې RS د پاتې- یا باقي سیستم په معنا دی.

x1 x2 x3 RS

---

0 0 1 I 1

0 II 1 -1 0

0 III 0 1 1

II'=II-I 0 -1 -1 0

III' = III 0 1 1 0

II'' = II + III' 0 0 0 0

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګورو چی II"تضاد نه لري x3په خوښنه ټاکو، او له III' لاس ته راځيx3-=x2 او له I
څخه لاس ته راځي x3-=x1نوx3- =x1نو X3 په خوښه او x3- = x2 نوx3 په خوښه

. تمرينونه

د نامعلومو لپاره -لکه له ښوونځي چې ورسره بلد یو-پوهیږو او یا هم

۱ – کرښيز مساواتسیستم له دوه مجهولو سره.

مشوره مو داده، چې د دې تمرينونو د حل لپاره د مختلفو تګلارو څخه کار اخستلس شي، چې بيايې و ازمايو. د لته دې د زياتون يا جمعې قانون او همداسې د ګاوس الګوريتم ته لومړيتوب ورکړ شي ا و د ديترمينانت سره شميرنه دې يوه بله د استعمال لار وي.

۱ . ۱ – مساوتسيستم د ټاکلو ضريبونو سره

1.1.1. a) $2x_1 + 3x_2 = 8$, $3x_1 - 6x_2 = -30$ b) $x_1 = 3x_2 - 14$, $x_2 = 3x_1 - 22$

c) $51x - \frac{3}{20y} = 3$, $48x - \frac{1}{10y} = 2$ d) $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 3$, $\frac{5}{x} - \frac{1}{y} = 4$

1.1.2. a) $5(x_2 + 2) - 3(x_1 + 1) = 23$, $3(x_2 - 2) = 19 - 5(x_1 - 1)$ b) $3(2x_1 - x_2) + 4(x_1 - 2x_2) = 87$, $2(3x_1 - x_2) - 3(x_1 - x_2) = 82$

c) $4 - \frac{1}{3}(2x - y - \frac{9}{2}) = \frac{1}{8}(3x - 6 - 4y)$, $4 - \frac{x - \frac{1}{2}y + 3}{3} = \frac{2y - x - 6}{8}$ d) $3y - \frac{3(4x - 3y)}{2} = 2x - 3y - 1$, $3x - \frac{3(3x - 2y)}{5} = 5x - 3y - 1$

1.1.3. a) $\frac{1}{\frac{7}{2}x - 3} = \frac{1}{4y - 3}$, $\frac{1}{\frac{5}{2}x + 4} = \frac{1}{3y + 1}$ b) $\frac{1}{3x - 5} = \frac{4}{7y - 13}$, $\frac{1}{y - x} = \frac{8}{3x + y}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

c) $\dfrac{1}{y-10} = \dfrac{25}{12x+19}$
$\dfrac{1}{45-x} = \dfrac{8}{15y+1}$

d) $4+y = x$
$\dfrac{2}{5-3x} = \dfrac{3}{7-2y}$

1.1.4. a) $(x-1)(2y+5) = (y+1)(2x-1)$
$(2x+7)(y-2) = (2y-3)(x+2)$

b) $4(5y-3)(2x+1) = (10x+7)(4y-3)$
$2(2y+1)(x+4) = (2x+5)(2y+3)$

c) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{2}$
$\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{6}$

d) $\dfrac{3}{x}+\dfrac{8}{y} = 3$
$\dfrac{15}{x}-\dfrac{4}{y} = 4$

1.1.5. a) $\dfrac{9x_1}{2}+\dfrac{3x_2}{2} = 3$
$3x_1+x_2 = 2$

b) $\dfrac{2x_2-5x_1}{6}+\dfrac{x_1}{6} = \dfrac{x_2-2x_1}{3}$
$\dfrac{5-3x_1}{3}-\dfrac{4x_2-1}{4} = \dfrac{6x_1+23}{12}-\dfrac{3x_1-4x_2}{2}$

c) $\dfrac{12}{4x_1+3x_2}-\dfrac{1}{3(3x_1-2x_2)} = \dfrac{1}{6}$
$\dfrac{5}{3x_1-2x_2}+\dfrac{6}{4x_1+3x_2} = 5{,}25$

d) $3(x_1-2)+4(2x_2+\frac{3}{2}) = 0$
$5(x_1+3)-3(x_2-\frac{1}{3}) = 16$

1.1.6. a) $3x_1+4x_2 = 8$
$5x_1-2x_2 = 9$
$7x_1-8x_2 = 10$

b) $6x_1-x_2 = 1$
$9x_1+2x_2 = 5$
$3x_1-x_2 = 1$

c) $5x_1-3x_2 = -3$
$3x_1+5x_2 = 5$
$3x_1-1{,}8x_2 = -1{,}8$
$0{,}9x_1+1{,}5x_2 = 1{,}5$

d) $2x_1-3x_2 = 10$
$-\frac{1}{3}x_1+\frac{1}{2}x_2 = -\frac{5}{3}$
$x_1-1{,}5x_2 = 5$
$0{,}5x_1-0{,}75x_2 = 2{,}5$

۱ ، ۲ – مساواتسیستم د ناټاکلو ضریبونو سره

1.2.1. a) $x_1+x_2 = a$
$ax_1-x_2 = b$

b) $3x_1-2x_2 = 5a$
$2x_1-3x_2 = 5b$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

c) $10x + 6y = 4a + b$
$6x + 10y = 4a - b$

d) $14x - 15y = 24a$
$10x - 21y = 24b$

1.2.2. a) $\frac{x_1}{2a+b} - \frac{x_2}{2a-b} = \frac{8ab}{b^2 - 4a^2}$
$\frac{x_1}{2a+b} + \frac{x_2}{2a-b} = \frac{8a^2 + 2b^2}{4a^2 - b^2}$

b) $-(a+b)x_1 + (a-b)x_2 = 0$
$(a-b)x_1 + (a+b)x_2 - 4ab = 0$

c) $\left(\frac{a^2+b^2}{2b}\right)^2 \cdot x - \left(\frac{b^2-a^2}{2b}\right)^2 \cdot y = a^2$
$\frac{a^2+b^2}{2b} \cdot x + \frac{b^2-a^2}{2b} \cdot y = b$

d) $\frac{x}{b+c} - \frac{y}{a+c} = a - c$
$\frac{x}{a+b} - \frac{y}{b+c} = b - a$

1.2.3. a) $x + y = \frac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2}$
$x - y = \frac{4ab}{a^2-b^2}$

b) $x + y = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$
$2x + 3y = \frac{2a^2+ab+3b^2}{a^2-b^2}$

c) $ax + by = 2a$
$a^2x - b^2y = a^2 + b^2$

d) $ax + by = a^3 + 2a^2b + b^3$
$bx + ay = a^3 + 2ab^2 + b^3$

1.2.4. a) $ax + by = 2a$
$x + y = \frac{a^2+b^2}{ab}$

b) $(a-b)x + (a+b)y = a + b$
$\frac{x}{a+b} - \frac{y}{a-b} = \frac{1}{a+b}$

c) $\frac{x-a}{y-a} = \frac{a-b}{a+b}$
$\frac{x}{y} = \frac{a^3-b^3}{a^3+b^3}$

d) $(a-b)x + y = \frac{a+b+1}{a+b}$
$x + (a+b)y = \frac{a-b+1}{a-b}$

۱ . ۳ – شي شميرنه

۱ . ۳ . ۱ کوم دوه اعداد لاندې خويونه لري؟ که هرعدد په ۵ لوی شي، د مربع يا څلورئ کمون(تفريق) يې په ۱۰۰ لوييږي، په داسي حا لي جي ضرب يې په۳۲۵ زياتيږي.

۱ . ۳ . ۲ د دوه عددونو جمعه يا زياتون دومره لوي دی، لکه د تفريق مربع يې.

که ۴ لومړي عدد تع ورزيات شي او له دويم عدد کم شي، نو د مربع کمون د يا تفريق يې ۹۹ دی، وښايئ چې عددونه څومره لوی دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ . ۳ . ۳ د هرو دوه ګڼونو څخه هر یویې په 2 لویږي، نو ګڼونه څانونه نیسي لکه: 4 : 3 . که له هر یوه ددې دوه ګڼونوڅخه 3 کم شي ، نو داسې لاس ته راغلي ګڼ ځان نیسي لکه : 3 : 2 . دواړه ګڼونه کوم دي؟

۱ . ۳ . ۴ د دوه ګڼونو زیاتون 999 دی. که لمړی ګڼ په 9 وویشل شي او دوم په 6 ، نو د ویشونکو زیاتون 138 دی . هر یو ددې دوه ګڼونو شومره لوي دی؟

۱ . ۳ . ۵ د دوه ګڼونو زیاتون 1000 دی. که لمړی له 2 او دوم له 3 سره ځل یا ضرب شي، نو د ځلونو زیاتون یې 2222 دی. هر یو له دې ګڼونوڅومره لوي دی؟

۱ . ۳ . ۶ په دوه ګڼونو کې یو له بل په 0,909 لوي دی، زیاتون یې 3,191 دی. دواړه ګڼونه څه نومیږي یا کوم دي؟

۱ . ۳ . ۸ . د یوه درېکونجي د دوه اړخونواوږدوالي زیاتون 8,4 cm دی او پړیکشن یا پریوستون یې د دریکونجي په دریم اړخ 4 cm او 1,6 cm دی. د دریګوډي اړخونه څومره لوي دي؟

۱ . ۳ . ۹ . د یوه لوي ښار ترمخ دوه کلي X او Y د ښار له مرکز Z سره یو دریګوډی جوړوي . له X څخه چې له Z څخه تیریږي ،Y ته اوږدوالي 12 cm دی، Y له مرکز Z څخه 2 km زیات لري دی نسبت و X ته ، دواړه مخ کلی X او Y له مرکز Z څخه څومره لرېدي؟

۱ . ۳ . ۱۰ . د یوه فوټبال میدان څخه د څلورکونجي شکله د لرګیو راګرځیدلی دیوال، چې 420 m اوږد دی ، باید په اغزیو سیمانو بدل کړي. دلته یوه خوا په 5 m کوچنی کیږي، که بل اړخ په 10 m اوږده شي. له دې سره د سیمګرځی اوږده د هوارې دننه په $100\ m^2$ زیاتیږي. د څلورکونجیز اړخونه څومره لوي دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ . ۳ . ۱۱ . د یوه موټر ماشین یخی ۸ لیتره اوبه خونډي کوي او دوه وتللارې لري، دا کیدی شي خالي شي، که د بیلګي په توګه لمړی 5 دقیقی او دوم 2 دقیقی واز کړي او یا دوم 6 دقیقي او لمړي 3 دقیقي واز شي. په هرنل کي څومره اوبه په یوه دقیقه کی وزي؟

۱ . ۳ . ۱۲ . یو پلار له خوي څخه ۳۶ کاله زوړ دی په ۵ کاله کی پلارد خوي 1 / 4 عمرڅخه ور زیات 3 برابره د خوي عمر لري اوس پلار او خوي هر یو څومره عمر لري؟

۱ . ۳ . ۱۳ د شربت د ګډولو لپاره دوه ډوله شربتونه سره ګډیږي. که له لمړې درې بوتله واخستل شي او له دوم ۷ بوتله نو د یوه بوتل ارزښت دې ۲ مارکه وشمیرل شي. مګر که له لمړې ۷ بوتله او له دوم درې بوتله سره ګډ شي، د یوه بوتل ارزښت 40 , 2 الماني مارکه(DM) کیږي. د په کارونو شربتونو بوتل به څومره ارزښت ولري؟

۱ . ۳ . ۱۴ . یود 450 m³ اوبو اوبه ډکی یا اوبه ساتی (بیلر) له دوه نلونو ډکیږي. که لمړی نل درې دقیقي او دوم یوه دقیه واز وي،نو په اوبه ساتي کی 40 m³ اوبه جریان لرودی شي. مګر که لمړی یوه دقیقه او دوم نل ۷ دقیقي وازې وي، نو اوبه ساتي ته 60m³ اوبه جریان لري. هر نل په یوه دقیقه کي څومره اوبه اوبه ساتي ته غورځوي؟ څومره باید هر نل له همغه یوه وخته واز وي چی اوبه ساتی ډك شي؟

۱ . ۳ . ۱۵ . دوه کارګرو ته د کندنی کار ور په غاړه کیږي. که دواړه یو ځاي کار وکړي، نو ۱۲ ورځو ته ضرورت دی. که لمړی دوه ورځي او دوم درې ورځي کار وکړي، نو په دې وخت کی یواځي 5 / 1 برخه د کار کړه کیږي. څومره ورځي به له دوي هر یو ځانله د دې کار لپاره ضرورت ولري ؟ اړتیا ده؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ . ۳ . ۱۶ . د یوې ګردۍ په چاپیري چې ۱۰۰ متره اورد دی، دوه بدنونه په حرکت راځي. هغوي هر ۲۰ دقیې حرکت کوي، که هغوي په همغه لور حرکت وکړي او هر ۴ دقیې، که هغوي یو د بل په څټ لور حرکت وکړي، هر بدن په یوه ثانیه کی څومره واټن تی کوي یا وهي؟

۱ . ۳ . ۱۷ . په یوه ګردۍ چې چاپرې یې ۹۹۹ متره اورد دی دوه بدنونه په همغه لور حرکت کوي او دا حرکت په هرو ۳۷ ثانیوکی. دواړو بدنونو سرعت څومره دی،که د لمړي سرعت څلور واره لوي لکه د دوم وی ؟

۲

۲ . . کرښیز مساوات سیستمونه د درې مجهولو سره

۱ – مساواتسیستم د ټاکلو ضریبونو سره

a) $x + y = 14$, $x + z = 15$, $y + z = 16$

b) $x_1 - x_2 = 4$, $x_1 + x_3 = 18$, $x_2 - x_3 = 6$

c) $x_1 + x_2 = 6{,}6$, $x_1 - x_3 = 2{,}6$, $x_2 - x_3 = 2$

d) $x + y + z = 25$, $3x - 2z = 1$, $20y - 16z = 0$

e) $2x + 3z = 13$, $3x - 4y = 3$, $5y - 6z = 9$

f) $12x + 24y - 42z = 30$, $4x + 8y - 14z = 10$, $6x + 12y - 21z = 15$

g) $5x + 3y + 2z = 207$, $5x - 3y = 37$, $3y - 2z = 19$

h) $x_1 + x_2 - x_3 = 17$, $x_1 - x_2 + x_3 = 13$, $-x_1 + x_2 + x_3 = 14$

i) $x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 11$, $2x_1 - 3x_2 + x_3 = 6$, $6x_1 - 16x_2 + 10x_3 = 39$

j) $4x + 4\frac{1}{2}y - 6\frac{3}{4}z = 20$, $2\frac{1}{5}x - 2\frac{1}{3}y + 1\frac{1}{2}z = 5\frac{2}{3}$, $1\frac{2}{3}x + 1\frac{3}{4}y - 4\frac{1}{2}z = 3\frac{1}{3}$

k) $\frac{2}{5}x - y = 0$, $\frac{2}{3}x - z = 1$, $-\frac{2}{3}y + z = 2$

۲ . ۲ – مساوات سیستمونه د ناټاکلو ضریبونو سره

a) $x_1 + x_2 = 2c$, $x_1 + x_3 = 2b$, $x_2 + x_3 = 2a$

b) $x_1 + x_2 = 2(a + b)$, $x_1 + x_3 = 2(a + c)$, $x_2 + x_3 = 2(b + c)$

c) $ax + by - z = 1$, $ax - by + z = b$, $-ax + by + z = a$

(c) ketabton.com: The Digital Library

d) $\begin{aligned} ax + y - cz &= 2a \\ -ax + y + cz &= 2c \\ ax - y + cz &= 2ac \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= 2a \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{z} &= 2b \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= 0 \end{aligned}$

f) $\begin{aligned} -\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= \frac{2}{a} \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= 0 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} &= \frac{2}{b} \end{aligned}$

g) $\begin{aligned} x + \frac{y}{b} - \frac{z}{c} &= a \\ y + \frac{z}{c} - \frac{x}{a} &= b \\ z + \frac{x}{a} - \frac{y}{b} &= c \end{aligned}$

h) $\begin{aligned} \frac{x}{b+c} + \frac{y}{c-a} &= a + b \\ \frac{y}{c+a} + \frac{z}{a-b} &= b + c \\ \frac{z}{a+b} + \frac{x}{b-c} &= c + a \end{aligned}$

۳ . په خوښه زيات مساوات د په خوښې زياتو مجهولو سره

a) $\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 &= 7 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 7 \\ 0{,}5x_1 + x_2 + 1{,}5x_3 - 0{,}5x_4 &= 3 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= 10 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= 6 \\ x_1 + 0{,}5x_2 + x_3 &= 1 \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 + x_4 &= 10 \\ 6x_1 + 0{,}5x_2 + 5x_3 + x_4 &= 9 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 - 2x_5 &= 1 \\ -2x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 &= 3 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 - 2x_5 &= 5 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 + x_5 &= 2 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 &= 4 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 &= 21 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + x_6 &= 1 \\ 6x_1 - 5x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 2x_5 - x_6 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 - 6x_6 &= 19 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 6x_5 - 7x_6 &= -24 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + x_6 &= 3 \end{aligned}$

هوموجين مساوات سيستمونه:

a) $\begin{aligned} 3x_1 - 4x_2 + 7x_3 &= 0 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 0 \\ -2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 0 \\ 5x_1 - 3x_2 + 6x_3 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 20x_1 - 10x_2 + 15x_3 &= 0 \\ -12x_1 + 6x_2 - 9x_3 &= 0 \\ 8x_1 - 4x_2 + 6x_3 &= 0 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 9x_1 - 5x_2 + 6x_3 &= 0 \end{aligned}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۲ . الجبري مساوات یا - برابرونونه

۱۲ . ۱ نالاینیز- یا ناکرښیز- یا ناخطي برابرونونه

ټول مساوات چی د نورمالفورم

$$A . x = a \qquad (12.1)$$

سره یوارزښته (اکویوالنت)   نه وي ، نالاینیز – یا ناکرښیز مساوات بلل کیږي او عمومي فورم   یی په لاندې ډول دی

$$F(x) = 0 \qquad (12 . 2)$$

دلته F (x) په x کی یوه ناکرښیزه یا ناخطي ویینه یا افاده ده . د (12 . 2) حل دا مانا لري چی ټول د xارزښتونه   پیدا شي د کومو لپاره چی (12 . 2) باوري وي. باید په پام کی ونیول   شي چی ایا یواځي ریيل ارزښتونه پیدا کوو او که کمپلس ارزښتونه هم غواړو چی پیدا کړو. د بیلګی په توګه لاندې ناکرښیز یا لاینیز مساوات

$$x^2 - x - 2 = 0$$

لاندې دواړه ریيل ځوابونه لري

$$x1 = -1 , x2 = 2$$

چی د ارزښتونو ځاي په ځاي کولو سره یې مساوات باوري کیږي .ددې په څنګ یا برعکس دا برابرون $x^2 + 1 = 0$ ریيل ځواب نه لري (۵ -مه برخه دي وکتل شي)، بلکه لاندې ایماګینار ځوابونه لري : $x1= i , x2 = -i$

د دې حالت د ښه روښانولو لپاره دې (۱۵ برخه دې وکتل شي) د برابرون او فنکشن ترمنځ اړیکو ته پاملرنه وشي: اړیکو (y=F(x   ته فنکشنبرابرون او x ته متحوله

(c) ketabton.com: The Digital Library

وايي، چې زه يې کله اووښتونی او کله ناپيژندوني بولم(ښه نومه ونه يې اوښتوني ده) په څېر یا برعکس (12 . 2) یو ټاکنمساوات دی او x هلته یوه ناپيژندونکی یا اوښتونی دی.

د (12 . 2) برابرون یا مساوات اوبیونې یا حل ته د برابرون د (F (x صفرځای یا د مساوات F(x)=0 جذر یا ريښه هم وايي.

هغه برابرون یا مساوات چې په (۱۲ . ۲) فورم نه دئ ورکړ شوی کیدی شي چې په دې لاندې فورم واړول شي. د بيلګي په توګه د دې برابرون لپاره :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = a; g(x) \neq 0$$

$$f(x)=g(x) \text{ او } \frac{f(x)}{g(x)} = a; g(x) \neq 0$$

نورمال فورم په لاندې ډول لاس ته راوړل کيږي

$$F(x)=f(x)-g(x)=0 \text{ او } F(x)=f(x)-a.g(x)=0$$

د نالاينيزو برابرونونو لپاره د لاينيزو برابرونونو په څير راغونده (اختماميه، رابنده، راتړلی) تيوري نه شته. په پوليزه يا عمومي ډول څوك نور فرمول نه شي ورکولی، د کوم له مخی چې د صفرځاي معلوميدی شي. باید په نومریکو (numerischen Methoden) متودونو يا ورپسې ګڼ متودونو په ورنزدې يا تقريبي ډول پيداشي

نالاينيیز برابرونونه په دوه ټولګيو ویشل کيږی: الجبري او تراسځندنت چی په دې او راتلونکی څپرکي یا لکه چی ما استعمال کړې برخه کی يی څيړو، چي اوبيونې يی روښانه افاده شوې (explizit لاتين: واضح یا روښانه ، افاده شوی، اکسپليځت) دي.

له ۱۲ . ۲ څخه تر ۱۲ . ۴ پورې الجبري برابرونونه څيړل کيږي چی په لاندې نورمال فورم یا – بڼه اړول کيدی شي

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(12,3)$$

دلته په (12 . 2) کی یو نالاينيز بلواک یا – فنکشن (F (x د یوه n - م درجی پولینوم په څير مخ ته پروت دی . موږ په (۱۲ . ۲) کی د ضريبونو(ځله وونو) لپاره یواځی رییل ګڼونه پريږدو (په دې مانا چي ځلونه یواځي رييل وي، یواځی ريیل ګڼونو ته اجازه ورکوو) .

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په (۱۲ . ۳) کی کیږ اړخ ته n - م درجه پولینوم

$$F(x) = P_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1 x + a_0 = 0 ....(12,4)$$

ته ټول ریشنل (- ریښتونی) بلواک یا فنکشن هم وایي، ځکه چی د ریشنل شمیرله عملیو زیاتون، کمون، او ځل له لاري او نه په x واریابلی او ai د رییل ضریبونو، ځلونو یا فاکتورونو باندې د ویش کارونی کارولو (عملي استعمال) له لارې منځ ته راځي .ټولیز برانرون یا

$$b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + ... + b_1 x + b_0 = 0; b_n \neq 0 ....(12,5)$$

کیدي شي په bn|= 0 ویش باندې په (۱۲ . ۳) نورمال فورم واړول شي .

که دا نه لاینیزفنکشن یا ۰ بلواک F (x) په (۱۲ . ۲) باندې په واریابلي یا اوښتوني x او ځلونو باندې ټول د شمیر کاروني یا عملیي او بالاخره دویش کارونه وکارول شي یا اجرا شي او رییل پارامتر (Parameterپه شمیرپوهنه کې ثابت (همغځ) او یا مرستندویه لوي ده) تشکیل شي نو فنکشنونو ته بیا مات ریشنل فنکشنونه ویل کیږي.
دا تل د دوه پولینومونو یا ریشنل فنکشنونو د ویش په څیر انځوروړ دي

$$F(x) = R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + ... + b_1 x + b_0}{c_m x^m + c_{m-1}x^{m-1} + c_{m-2}x^{n-2} + ... + c_1 x + c_0}; .....(12,6)$$

په همدې ډول برابرون

$$F(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = 0; ....(12,7)$$

تل په (۱۲ . ۵) یا (۱۲ . ۳) برابرون اړول وړ دي . دا باید په پام کی وي چی د (۱۲ . ۳) لپاره یواځنی هغه ځواب په پوښته کی راځي، د کوم لپاره چی باوري وي:

$$Q_m(x) \neq 0$$

که چیرې د نالاینیزبلواک یا - فنکشن جوړولو کی د ریشنل شمیرعملیو تر څنګ د توان (متې، په جګ) یا پوتنځ کول او جذر نیولوته هم اجازه ورکړل شي نو بیا سرې د الجري فنکشنونو څخه غږیږ. یعني داسي فنکشنونو ته الجبري فنکشنونه ویل کیږي او (۱۲ . ۲) برابرون بیا الجبري برابرون بلل کیږي ، دا ډول مساوات هم کیدی شي چی په (۱۲ . ۳) فورم واړول شي.

هره n - مه ریښه یا جذر $\sqrt{G(x)}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ($G(x)$ افادې يا وييني له منځه وړل کيدی شي, که چيرې ځوك دا برابرون په يوه خوا راوړي او بيا د برابرونونو دواړه خواوې د n په توان کړي يا د n پوتنځ يا مټ ته جګ کړي . دا په ۱۲ . ۴ برخه کی په ځرګندو يا معلومو بيلګوځيړل کيږي . په نومولو تګلارو د الجبري مساواتو ځينه د (۱۲ . ۳) فورم برابرونونو ته راکښته کيدلی شي. د الجبري مساواتو دا نورمال فورم د n - مي درجي برابرون هم بلل کيږي. ټول نالاينيز برابرونونه چی الجبري برابرون نه دي، ترانسځيندنت برابرون بلل کيږي . د ترانسځيندنت رابرونونو درې تيوپونه، په نامه ، اکسپوننشل برابرونونه ، لوګاريتمي برابرونونه ، او ګونومتريکي برابرونونه دي چي په برخه ۱۳ کی به تر ځيرني لاندې ونيول شي.

۱۲ . ۲ ځلوری(مربع-) مساوات په توان(مټ، جګ) د ۲

۱۲ . ۲ . ۱ په جګ د ۲ مساوات په نورماله بڼه

د نالاينيزو الجبري برابرونونو ساده بڼه د ۲ په توان يا مټ (په جګ ۲ هم ويل کيږي) برابرونونه دي چی ځلوری يا مربع برابرونونه بلل کيږي .د دې ټوليزه بڼه (عمومي فورم) داسی ده ۰ دی

$$b_2x^2 + b_1x + b_0 = 0; b_2 \neq 0; ....(12,8)$$

په b2 يي ويش په لاندې ډول يو ورته ارزښته (اکويوالنت äquivalent) نورمالبڼه يا نورمالفورم ورکوي

$$x^2 + a_1x + a_0 = 0; (a_1 \neq b_1 / b_b; a_0 \neq b_0 / b_2); ....(12,9)$$

ددې حل د ځلوری پوره کونې يا مربعتکميل ځخه په ګټه د بينوم په فورمل ودې کتل شي: ۱ . ۲ . ۲) ولاړ دی.

$$[x + a_a / 2]^2 = x^2 + a_1x + \frac{a^2{}_1}{4}; ....(12,10)$$

په دې ډول کيدی شي چی (۱۲ . ۹) برابرون په لاندې فورم داسی واړول شي:

$x^2+a1x+a0=(x+a1/2)^2+a0-a1^2/4 = 0$ <=>

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$[x+a_1/2]^2=(a_1^2/4)-a_0 \qquad (12,11)$$

که وي

$$(a_1^2/4)-a_0>0 \Leftrightarrow a_1^2-4a_0>0 \Leftrightarrow a_1^2>4a_0 \quad (12,12)$$

نو دوه امکانات شته دی، چی (١٢ . ١١) برابرون پوره کړي:
داصدق کوي

$$x+\frac{a_1}{2}=\sqrt{(a_1^2/4)-a_0};\text{.........................}(12,13)$$

يا

$$x+\frac{a_1}{2}==-\sqrt{(a_1^2/4)-a_0};\text{.........................}(12,14)$$

دا دواړه خواو په توان د ٢ څخه، د (١٢ . ١٣) او همداسی د (١٢ . ١۴) څخه (١٢ ١٢)برابرون او په دې ډول (١٢ . ٩) برابرون لاس ته راځي (په پام کی دې وي چی a د ٢ اصلي برخی په بينا تل نا کميز يا نامنفي ګڼ پوهيدل کيږي، چی څلوری يا مربع يی a ده) . له (١٢ . ١٣) په همدې ډول له (١٢ . ١۴) څخه رييل ځوابونه لاس ته راځي،

$$x_1=-\frac{a_1}{2}+\sqrt{(a_1^2/4)-a_0};x_2=-\frac{a_1}{2}-\sqrt{(a_1^2/4)-a_0};\text{.........................}(12,15)$$

او ددې لپاره دا هم ليکلی شو

$$x_{1,2}=-\frac{a_1}{2}\pm\sqrt{(a_1^2/4)-a_0};\text{.........................}(12,16)$$

په (١٢ . ٩) کی د (١٢ . ١۵) په همدې توګه (١٢ . ١۶) ځاي پر ځاي کولو څخه پوهيدل کيږي چی دواړه ارزښتونه
x1 او x2
په رېښتونی څلوری برابرون يا مربع مساوات پوره کوي.
په لاندې حالت کی

$$(a_1^2/4)-a_0=0\Leftrightarrow a_1^2-4a_0=0\Leftrightarrow a_1^2=4a_0;\text{.............}(12,17)$$

د (١٢ . ١۶) له لارې تيك يو رييل اوبی لرو:

$$x_{1,2}=x_1=x_2=-(a_1/2)\pm 0=-a\ \ /2;\text{.................................}(12,18)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په (۱۲ . ۱۵) همداسی په (۱۲ . ۱۶) باندې په تکیه دا اوبی دوه واره دی یا په بل عبارت دوه واره رامنځ ته کیږي او په دې ډول د یوه دوه واره اوبیونې (۱۲ . ۱۸)ځخه غړیږو.

که وي

$$(a_1^2/4)-a_0<0 \Leftrightarrow a_1^2-4a_0<0 \Leftrightarrow a_1^2<4a_0;................/12,19)$$

نو (۱۲ . ۱۱) همداسی (۱۲ . ۹) رییل حل نه لري. که په کمپلس ګڼونو شمیرنه وکړو نو له ۵ - برخی ځخه لاندې لاس ته راوړو

$$x+a_1/2=\sqrt{a_0-(a_1^2/4)i} \wedge x+a_1/2=-\sqrt{a_0-(a_1^2/4)i}$$

او په دې ډول د کونجوګیرت کمپلکس حل جوړه لاس ته راځي:

$$x_{1,2}=-a_1/2\pm\sqrt{a_0-(a_1^2/4)i};...................(12,20)$$

له دې ځخه هم چی په (۱۲ . ۹) ځای په ځای شي ځرګندیږي چی د x1 او x2 ارزښتونه پیل برابرون یا مساوات پوره کوي.

که په (۱۲ . ۱۹) حالت کی لاندې ځرګندونی ته پام وي

$$\pm\sqrt{a_0-(a_1^2/4)i}=\pm\sqrt{(a_1^2/4)i-a_0};...................(12,21)$$

نو لاندې جمله ىی راغونډه داسی فرمولولی شو

جمله ۱۲ . ۱: (د ځلوری یا مربع) په توان یا جګ د ۲) برابرونونو د اوبیونې فرمول) د ځلوری- یا مربع برابرونونو(مساواتو) x²+a1x+a0=0

$$x_{1,2}=-a_1/2\pm\sqrt{a_0-(a_1^2/4)i}$$

ټیک دوه ځوابونه لري

د $a_1^2>4a_0$

په حالت کی دوه مختلف رییل حلونه دی، د $a_1^2=4a_0$ په حالت کی یو رییل دوه برابره(ډبل) حل دی او د $a_1^2<4a_0$ په حالت کی یو جوړه کونیوګیرت - کنجوګیریکمپلکس حل شته شته دي.

په ساده ډول لاندې د وییتا جمله هم د مربع مساوتو لپاره ښوول کیدی شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۲ . ۲ (د ويیتا(Vieta)جمله) :

که x1 او x2 د خلورئ - یا مربع برابرونونو (۱۲ . ۹) همداسی د (۱۲ . ۸) اوبیونې وي نو باوري دی

$$a_1 = b_0 / b_1 = x_1.x_2; ....(12,22)$$

$$a_2 = b_1 / b_2 = -(x_1 + x_2); ....(12,23)$$

حل : (۱۲ . ۲۳) فرمول په دریواړو حالتونو کی سم د لاسه له لاندې څخه لاس ته راځي:

$$-(x_1 + x_2) = \left[\frac{a_1}{2} - \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}\right] + \left[\frac{a_1}{4} + \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}\right] = a_i$$

د (۱۲ . ۲۲) فرمول د تصدیق لپاره د بینوم دریم فرمول او $i^2 = -1$ استعمال څخه په په (۱۲ . ۱۲) حالت کی باور لري :

$$x_1.x_2 = \left[-\frac{a_1}{2} + \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}\right].\left[-\frac{a_1}{2} - \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}\right] = \frac{a_1^2}{4} - \left[\sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}\right]^2$$

$$= \frac{a_1^2}{4} - \frac{a_1^2}{4} + a_0 = a_0$$

په (۱۲ . ۱۷) حالت کی لاس ته راځي:

$$x_1.x_2 = \left[-\frac{a_1}{2} + 0\right]\left[-\frac{a_1}{2} - 0\right] = \frac{a_1^2}{4} = a_0$$

په (۱۲ . ۱۹) حالت کی باوري دي:

$$x_1.x_2 = \left[-\frac{a_1}{2} + \sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}\,i\right].\left[-\frac{a_1}{2} - \sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}\,i\right] = \frac{a_1^2}{4} - \left[\sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}\right]^2 i^2$$

$$= \frac{a_1^2}{4} - [a_0 - \frac{a_1^2}{4}].(-1) = \frac{a_1^2}{4} + a_0 - \frac{a_1^2}{4} = a_0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د وییتا جملی په مرسته لاندې جمله باوري کیږي یا تصدیقیږي

جمله ۱۲ . ۳ :

یو ۲ درجییز پولینوم کیدی شي چی په دوه لایني فاکتورونو یا ضریبونو یا ځله وونو بیل یا ټوټه یا تجزیه شي:

$$x^2 + a_1 x + a_0 = (x - x_1)(x - x_2);..................(12,24)$$

په همدې ډول

$$b_2 x^2 + b_1 x + b_0 = b_2 (x - x_1)(x - x_2);..................(12,25)$$

چیرته چي x1 او x2 د ځلوری برابرونونو یا مربع مساواتو (۱۲ . ۹) په همدې ډول د (۱۲ . ۸) دواړه ځوابونه دي

اوبیونه : له (۱۲ . ۲۲) ، (۱۲ . ۲۳) ځخه د (۱۲ . ۹) همداسی د (۱۲ . ۸) په پام کي نیولو سره لرو

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = x^2 + a_1 x + a_0 =$$

$$= \frac{1}{b_2}(b_2 x^2 + b_1 x + b_0)$$

د جملی ۱۲ . ۳ ځخه دې ته راځول کیږو چی د (۱۲ . ۱۷) حالت کی د دوه برابره ریېل اوبیو ځخه خبرې وکړو(وغږیږو). د x1 = x2 له امله لاس ته راځي

$$x^2 + a_1 x + a_0 = (x - x_1)^2; a_1^2 = 4a_0;..................(12,26)$$

دا دري حالتونه(۱۲ . ۱۲) .(۱۲ . ۱۷) او (۱۲ . ۱۹) کیدی شي چی د فنکشن

$$y = p_2(x) = x^2 + a_1 x + a_0$$

ځیرو یا شکلونو (ګراف) په مرسته د کتلو شي.

ګراف په بنسټیزه توګه پارابول انځوروي، چی پورته خوا ته سرواز دی. ځکه چی که x هرځومره کوچنی شي)که x د کمیز ناپای په جګ یا توان شي) اوهمدارنګه x هرځومره لوي شي (که x د ∞ (ناپای) په جګ شي y لوییږي (ستریږي یا غټیږي) ، ځکه چیx^2 نسبت و x ته په توان یا قوي جګیږي له ټولو پولو(yد ناپای لور ته ځي)۰ د دې ډول پولو کره پیژند یا تعریف په ۱۹ - برخه کي لوستل کیدی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په (۱۲ . ۱۲) حالت کی د x - محور په داړو رییلو ځایونو x1 او x2 کی غوڅیږي؛ په (۱۲ . ۱۷) حالت کی په x1 = x2 ځای کی یي لمسوي او په (۱۲ . ۱۹) حالت کی ګډ ټکي ورسره نه لري یا نه وررسیږي (پرتله څیره . ۱۲ . ۱)

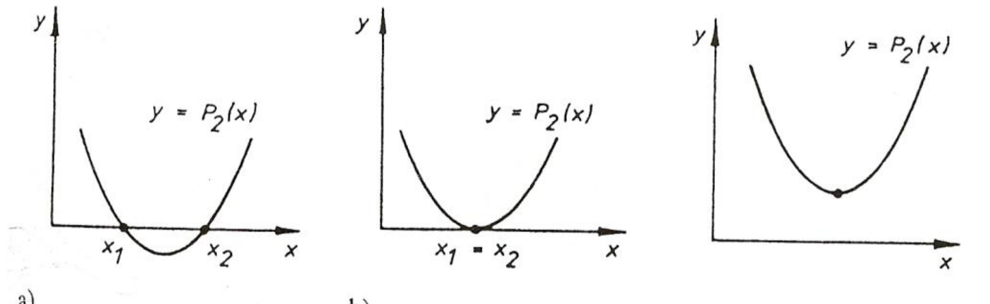


Bild 12.1

له جملی ۱۲ . ۱ تر ۱۲ . ۳ پورې به په درې ساده ډوله د (۱۲ . ۱۲) ، (۱۲ ، ۱۷ ، (۱۲ . ۱۹) سره مناسبو بیلګو روښانه شي.

بیلګه ۱۲ . ۱ :

په برابرون $x^2 - x - 6 = 0$ کی لرو

$a1 = -1 , a0 = -6$ او د $a_1^2 - 4a_0 1 + 24 = 25 > 0$

له امله (۱۲ ، ۱۲) حالت مخ ته پروت دی.
دواړه له صفر مختلف ځایونه د جملی ۱۲ . ۱ څخه په لاندې فورم لاس ته راځي:

$$x_{1,2} = 1/2 \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = 1/2 \pm \sqrt{1/4 + 24/4} = 1/2 \pm \sqrt{25/4} = 1/2 \pm 5/2$$

$$\Rightarrow x_1 = 3; x_2 = -2$$

جمله ۱۲ . ۲ :

له لاندې لاس ته راوړنی یاتعقیب څخه باوري کیږي

$$a_0 = -6 = x_1 x_2 = 3(-2) = -6$$

$$a_1 = -1 = -(x_1 + x_2) = -(3-2) = -1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له جملی ۱۲ . ۳ څخه لاس ته راځي: $x^2-x-6=(x-3)(x+2)$

بیلګه ۱۲ . ۲ :

له مساواتو $x^2-4x+4=0$ لرو $a1=-4,a0=4$ او د $a_1^2-4a_0=16-4.4=0$

له امله (۱۲ . ۱۷) حالت مخ ته لرو۰ دوه ئیز رییل حل په لاندې ډول له جملی ۱۲ . ۱ څخه لاس ته راځي $x_{1,2}=2\pm\sqrt{4-4}=2$ نو لرو $x1 = x2 = 2$

جمله ۱۲ . ۳ :

په لاندې ډول باوري کيږي

$$a_0=4=x_1.x_2=2.2=4$$
$$a_1=-4=-(x\ +x_2)=-(2+2)=-4$$

د جملی ۱۲ . ۳ له مخی لرو $x^2-4x+4=(x-2)^2$

بیلګه ۱۲ . ۳ :

له مساواتو $x^2-4x+13=0$ څخه لرو , $a1=-4$,$a0=13$ او د $a_1^2-4a_0=16-52-36$

له امله حالت (۱۲ ، ۱۹) مخ ته لرو.

د کونیوګیرت(کنجوګیري) کمپلکس جوړه اوبیونو یا حلونو له جملی ۱۲ . ۱ څخه په لاندې بڼه یا فورم لاس ته راولو

$$x_{1,2}=2\pm\big)4-13=2\pm\sqrt{-9}=2\pm 3i$$
$$\Rightarrow x\ =2+3i;x_2=2-3i$$

د جملی ۱۲ . ۲ سره سم باور لري

$$a_0=-4=-(x_1+x_2)=-(2+3i+2-3i)=-4$$
$$a_1=13=x_1.x\ =(2+3i)(2-3i)=4-9i^2=4+9=13$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او د جملی ۱۲ . ۳ له مخې داسی دی

$x^2-4x+13=(x-2-3i)(x-2+3i)$

د مربع مساوات (۱۲ . ۸) همداسی (۱۲. ۹) اوبی په ښکاره ډول ساده کیږي، که یو ځلی a0 اویا a1 ورك شي:

د a0 = 0 لپاره لرو

$$x(x+a_1)=0 \Leftrightarrow x_1=0; x_2=-a_1$$

د a1=0 لپاره لرو

$$x^2+a_0=0$$

$$\Rightarrow x^2=-a_0; x_{,2}=\pm\sqrt{a_0}$$

۱۲ . ۲ . ۲ څلوری(مربع-)برابرون چی په نورمالبڼه

مخ ته نه دي پراته

که یو مربع مساوات په نورمال فورم (۱۲ . ۹) مخ ته نه وي پروت، له دې د مخه چی جمله ۱۲ . ۱ وکارول شي، نو باید په دې بڼه واړول شي.

بلیګه ۱۲ . ۴ :

$2x-(x+2)^2=(x-2)^2-4(x+1)$

$2x-x^2-4x-4=x^2-4x+4-4x-4$

$-x^2-2x-4=x^2-8x$

$x^2-3x+2=0$

$$x_{1,2}=3/2\pm\sqrt{9/4-2}=3/2\pm\sqrt{9/4-8/4}=3/2\pm\sqrt{3/2}\pm\sqrt{1/4}=3/2\pm1/2$$

$$\Rightarrow x_1=2; x_2=1$$

که مجهول یا ناپیژندلی یا اوړیدونې x د مات لاندې رامنځ ته شي، نو باید په صفر ویشناممکن یا ناشونوالی په پام کي ونیول شي.

بیلګه ۱۲ . ۵ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

برابرون $(x^2+2x)/(2x^2+2x-4)=1$

ټيك هلته مانا لري، چې وي $2x^2+2x-4 \neq 0$

لومړی ورکړشوی برابرون اوبی کيږي او بيا ازمائل کيږي، چي ايا د ماتلاندې شرايط پوره دی، که نه.

$$x^2+2x=2x^2+2x-4$$

$$-x^2 = -4$$

$$x_{,2} = \pm 2; x = 2; x_2 = -2$$

د $x=x1=-2$ لپاره په ماتلاندې کی لرو

$$2x^2 + 2x - 4 = 8 + 4 - 4 = 8 \neq 0$$

او $x = x2 = -2$ لپاره په ماتلاندې کی لرو

$$2x^2 + 2x - 4 = 8-4-4 = 0$$

له دې امله $x1 = 2$ د پيل برابرون اوبی دی

۱۲ . ۲ . ۳ د n - م درجي ځانګړي برابرونونه ، چی په ځلوری يا مربع برابرونونو بيرته بدليدلی شي

د n - مي درجی مساواتو(۱۲ . ۳) يو څو ځانګړي حالتونه کيدی شي چی د ځلوری برابرونونو يا مربع مساواتو په مرسته ځواب شي يا اوبی شي۰ دا ځانګړی حالت موجود دی يا شته دی که باور ولري

$$a_1 = a_1 = ... = a_{n-3} = 0 \qquad (12, 27)$$

دn- می درجی برابرون بيا داسی دي

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} = 0; \text{..........................} (12, 28)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x^{n-2}(x^2 + a_{n-1}x + a_{n-2}) = 0$$

$$\Rightarrow x^{n-2} = 0 \vee x^2 + a_{n-1}x + a_{n-2} = 0; \text{................} (12, 30)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه : په پورته کې له (۱۲ ، ۳۰) پورته برابرون (۱۲،۲۹) دئ
د دې برابرونونو دوهم برابرون یو څلوریځ - یا مربع برابرون دی، چې د جملي ۱۲ . ۱ په بنسټ لاندې ځواب لري

$$x_{1,2} = -\frac{a_{n-1}}{2} \pm \sqrt{\frac{a_{n-1}^2}{4} - a_{n-2}}$$

لومړی برابرون دا اوبی یا حل لري x = 0 چې دا (n-2)- ځله رامنځ ته کیږي x3 = x4 = ... = xn=0

بیلګه ۱۲ . ۶:

برابرون $x^6 + 2x^5 - 3x^4$ د $x^6 + 2x^5 - 3x^4 = x^4(x^2 + x - 3)$
او $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+3} = -1 \pm 2$
لاندې اوبیونې لرو

$$x_1 = 1, x_2 = -3; x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$$

نور هم هغه حالت ساده دی، که $a_{n-2} = 0$ وي، او باور ولري

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} = 0; x^{n-1}(x + a_{n-1}) = 0 \Rightarrow$$

$$x_1 - a_{n-1}, x_2 = x_3 = ... = x_n = 0; ....(12,32)$$

یو بل ځانګړی حالت مخ ته لرو، که د برابرون (۱۲ ، ۳) درجه n جوړه ګڼ یا جفت - وي

n = 2k (12 . 33)

او فقط (ټیك) ځله ووني یا کوایفیځینتونه a0 او ak له صفر سره برابر نه وي:

$$x^{2k} + a_k x^k + a_0 = 0; ....(12,34)$$

دلته داسی ځاي په ځاي کوو

$$y = x^k; ....(12,35)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او له دې سره د y لپاره څلوری برابرون یا مربع مساوات لاس ته راځي:

$$y^2 + a_k y + a_0 = 0 \qquad (12, 36)$$

د لاندې ځوابونو سره (پرتله : جمله ۱۲ ، ۱)

$$y_{1,2} = -(a_k/2) \pm \sqrt{\frac{a_k^2}{4} - a_0};.......................(12,37)$$

د(۱۲ ، ۳۵) له امله دې د لاندې دوه برابرونونو

$$x^k = y_2 \wedge x^k = y_1;...........................(12,38)$$

ټولې اوبیونې وځیرلی شي، چی د $k = 1$ لپاره ساده دی، د $k = 2$ لپاره(بیکوادرات برابرون) (د څلوری یا د مربع مربع) یا د ریبلو y1 او y2 لپاره د تراوسه څرگندو میتودو سره تل کیدونکی دی . نور حالتونه ددې اوس وخت لپاره په ټولیزه توگه ستونځی لري.

بیلگه ۱۲ . ۷ :

لاندې بیکوادرات برابرون $x^4 + 5x^2 - 6 = 0$ کیدی د سوبستیچیوشن یعني بدلون له لارې $y = x^2$ په څلوری برابرون $y^2+5y-36=0$ باندې بدل شي. د جملی ۱۲ . ۱ په بنسټ لرو

$$y_{,2} = -5/2 \pm \sqrt{25/4+36} = -5/2 \pm \sqrt{25/4+144/4}$$

$$= -5/2 \pm \sqrt{169/4} = -5/2 \pm 13/2$$

$$\Rightarrow y_1 = 4; y_2 = -9$$

دواړه برابرونونه ، چی د بیرته بدلون(-سوبستیچیوشن) له امله لاس ته راوړو

$$x^2 = 4 , x^2 = -9$$

لاندې اوبی یا حل لري

$$x1 = 2 , x2 = -2 , x3 = 3i , x4 = -3i$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱۲ . ۲ . ۴ د برابرونسیستمونه چی بیرته په ځلوری برابرونونو بد لید لی شي

یوه د نالاینیزو مساواتسیستمونو لړی کیدی شي چی په ځلوری برابرون یا مربع مساواتو بیرته واړول شي. ددې لپاره دوه ساده بیلګي راوړو.

بیلګه ۱۲ . ۸:

$$x + y = 1 \qquad (12, 39)$$

$$x^2 + y^2 = 13 \qquad (12, 40)$$

لومړی برابرون د y په لور حل کیږي، $y= 1-x$، او دا حل په دوم برابرون کی اینوول کیږي:

$$x^2 + (1-x)^2 = 13$$

$$x^2 + 1 - 2x + x^2 = 13$$

$$2x^2 - 2x - 12 = 0$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$x_{1,2} = 1/2 \pm \sqrt{1/4+6} = 1/2 \pm \sqrt{25/4} = 1/2 \pm 5/2 \Leftrightarrow$$

$$x = 3, x_2 = -2$$

د (۱۲ ، ۴۰) له مخی په دې لاندې د y - ارزښتونه اړه لري

$$y1 = -2 , y2 = 3$$

نو دا نه لاینیز برابرون لاندي اوبیونې لري

$x2 = -2 , y2 = 3$ او $x1 = 3 , y1 = -2$

بیلګه ۱۲ . ۹ :

د لاندې مساواتو سیستم کی

$$ax + y = 1; \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چې يوائې د $x \neq 0, y \neq 0$ لپاره موخه وريا هدفمند دی، دوم برابرون په xy ځلولو(ضربولو)سره په لاندې بڼه اړول کيږي:

$$y+ x= xy \qquad (12,42)$$

لومړی برابرون د y په لور ځواب کيږي

$$y = 1 - ax \qquad (12 , 43)$$

او په (۱۲ . ۴۲) کې اېښول کيږی يا ځای په ځای کيږي

$$1-ax+x=x(1 - ax) = x - ax^2$$

$$, ax^2- ax+ 1 = 0 \qquad (12,44)$$

د a = 0 په حالت کې (۱۲ . ۴۴) برابرون مخامخوالی لري يا په ښتوالی لري يا تضاد لاس ته راکوي » 1 = 0 « نو ځواب نه شته

د $a \neq 0$ لپاره د(۱۲ . ۴۴) څخه لاس ته راځی $x^2 - x +1/a = 0$

او د جملې ۱۲. ۱ له امله لرو $x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{4} - \frac{1}{a}$

د

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{a} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{4} \text{........................}(12.45)$$

لپاره مو (۱۲ . ۱۲) حالت مخ ته پروت دی . دوه برخې حالتونه بايد په پام کې ونيول شي:

د a > 0 لپاره له (۱۲ ، ۴۵) څخه لرو , a > 4 او د a < 0 لپاره له (۱۲ ، ۴۵) څخه لرو . a < 4 له دې امله د

$$a < 0 \text{ او } a > 4 \quad (12 , 46)$$

لپاره د (۱۲ ، ۴۴) دوه مختلف ريل ځوابونه موجود دي:

$$x_1 = 1/2 + \sqrt{1/4 - 1/a}, x_2 = 1/2 - \sqrt{1/4 - 1/a}; \text{.....................}(12.47)$$

په دې پوروې د (۱۲ ، ۴۶) له مخې دواړه دy - ارزښتونه هم اړه لري

$$y_1 = 1 - a/2 - a.\sqrt{1/4 - 1/a}; y_2 = 1 - a/2 + \sqrt{1/4 - 1/a}; \text{.................}(12.48)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

باید وازمایيل شي چی د (۱۲ ، ۴۶) په حالت کی x1 , x2 , y1 ,y2 (ټول) نابرابر په صفر دي . تل x1 > 1 /2 دی. که x2 = 0 وی، نو باوري به وی

$$1/2 = \sqrt{1/4-1/a}; 1/4 = 1/4-1/a$$

دا د هيڅ a لپاره ممکن نه دی. له دې امله $x_2 \neq 0$ دی که y1= 0 یا y2 = 0 وی، نو لاندې به باور لرودی:

$$1-a+a^2/4 = a^2/4-1 \Leftrightarrow 1=0$$

دا هم ناشونی یا ناممکن دی، نو دلته هم*لرو* $y_1 \neq 0;\ y_2 \neq 0.$ په (۱۲ ، ۴۶) حالت کی د (۱۲ ، ۴۱) د (۱۲ ، ۴۷) ، (۱۲ ، ۴۸) سر ه سم، دوه

مختلف رييل ځوابونه شته دی - غواړی- موجود دي

x2, y2 . او x1 , y1

د

1/4-1/a=0 <=> a=4 (12 , 49)

لپاره(۱۲ ، ۱۷) حالت مخ ته پروت دی، او برابرون (۱۲، ۴۴) ډبل رييل حل لري

x1 = x2 = 1 /2 (12,50)

په دې پورې د (۱۲ ، ۴۳) له مخې هغه y - ارزښت ډبل ګڼ اوبی پورې هم اړه لري.

y 1 = y2 = 1 - 4. (1 /2) = -1

د (۱۲ ، ۴۹) په حالت کی پس د (۱۲ . ۱۹) یو ريل، ډبل ګڼلی حل موجود دی

x1=x2=1/2 , y1=y2= -1 (12 , 51)

د

1/4-1/a < 0 <=> 1/a > 1/4 (12 , 52)

لپاره (۱۲ ، ۱۹) حالت مخ ته پروت دی. د a > 0 لپاره (۱۲ ، ۵۲) د a<4 کتمت (ورته) دی، او د a< 0 لپاره دa>4 سره کتمت دی (له دې امله په ښتوالی یا تضاد) .

نو د(۱۲ ،۵۲) باور لري، د

0 < a < 4 (12 , 53)

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره . په دې حالت کی (۱۲ ، ۴۴) کونجوګیري کمپلکس اوبیونې لري:

$$x_1 = 1/2 + \sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{4}}\, i;\; x_2 = 1/2 - \sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{4}}\, i; \qquad (12.54)$$

د (۱۲ ، ۴۳) له مخی په دې پورې د y - ارزښتونه اړه لري:

$$y_1 = 1 - a/2 - a\sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{4}}\, i;\; y_2 = 1 - a/2 + a\sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{4}}\, i; \qquad (12,55)$$

له دې ارزښتونو هيڅ هم صفر کيدی نه شي .پس په يوځاي شوي یا راټوله توګه لرو:
برابرونسيستم (۱۲ ، ۴۱) د $a = 0$ لپاره اوبی نه لري، د $a < 0$, په همدې ډول $a > 4$ لپاره دواړه ريل اوبي (۱۲ ، ۴۷) ، (۱۲ ، ۴۸) ، د $a = 4$ لپاره ريیل ډبل ګنلي اوبۍ (۱۲ ، ۵۱) او د $0 < a < 4$ لپاره دوه کونجوګیري کمپلکس اوبي (۱۲ ، ۵۴) ، (۱۲ ، ۵۵) لري.

۱۲ . ۳ دريمه درجه مساوات یا - برابرونونه

ددې لپاره چی په زړه پورې -n (ام (درجي مساواتو حلول ساده کړای شو نو لکه د مساواتو مربع سيستم جملو ته ورته جملی د دريمی درجی مساوات لپاره څیړو.
د دريمی درجی مساواتو نورمال فورم په د (۱۲ . ۳) سره سم په لاندې ډول دی.

$$x^3+a2x^2+a1x+a0=0 \qquad (12,56)$$

دا پولينوم

$$y=P3(x)=x^3+ a2x^2+a1x +a0 \qquad (12 , 57)$$

لاندې بنستيز خويونه لري: که x ډير لوي شي يعني ناپای په لور لاړشي $x \to \infty$ نو y هم د ناپای په لور ځي، ځکه چی دx^3 ارزښت نسبت د x^2 ارزښت ته په بیړه جګيږي او بيا همداسې و x ته هم . که a1 او a2 کميز یا منفي هم وي نو y به د لويو x- ارزښتونو لپاره زياتيز یا مثبت وي. داچې x^3 د کميز x - ارزښت لپاره له صفر کوچنی دی، نو په همدې ډول

x->-o د y -> -o

لپاره .د دې ډول »پولوارزښت یا ليمس« لپاره کره تعريفونه بيا په ۱۹ برخه کی په پراخه توګه څیړل کيږي .د يو-x ارزښت) خورا کوچنی هم کيدی شي (شته چی د هغه

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره $y < 0$ وي اود یو x - ازښت) چی خورا لوي هم کیدی شي) ، د کوم لپاره چی $y>0$ دی. ددې دواړو ارزښتونو تر منځ باید د مساوات (۱۲ . ۵۶) یو رییل اوبی پروت وي.

په ډیرو لاندې بیلګو کی سړی کړی شي چی په ساده ډول د جدول په مرسته ازمائیلي حلونه پیدا کړي، په عمومي توګه بیا هم باید وشمیرل شي.

ددې لپاره یو څو بیلګی:

بیلګه ۱۲ ، ۱۰ الف:

د پولینوم

$$y = x^3 - 3x^2 -4x + 12 \qquad (12, 58)$$

لپاره لاندې د ارزښت جدول لاس ته راځي

$X = 0 , 1 , -1 , 2$

$Y = 12 , 6 , 12 , 0$

په دې توګه یو رییل صفرځاي پیدا شو

$$x_1 = 2 \qquad (12, 59)$$

په ۱۵-مه برخه کی به د هورنر شیما په بنسټ یو متود ورکړ شي ، دکومی له لار ې چی بیا د مټ(توان= لوړولو ته اړتیا نه پیدا کیږي او پولینومونو د فنکشن ارزښت ساده پیدا کیدی شي یا شمیرل کیدی شي

بیلګه ۱۲ . ۱۱ الف:

دا برابرون

$$2x^3 + 11x^2 + 12x - 9 = 0 \qquad (12,60)$$

لاندې نورمال فورم یا -بڼه لري

$$x^3 +(11 / 2) x^2 + 6x - 9/2 = 0 \qquad (12 . 61)$$

د صفرځاي پیداکولو لپاره دې د (۱۲ . ۶۰)مساوات لپاره د ارزښت جدول جوړ شي)ترتیب شي وشمیرل شي (، ځکه چی هلته ماتونه منځ ته نه راځي:

$X = 0 , 1 ,1 / 2$

$Y = -9 , 16 , \quad 0$

نو

$$x_1=1/2 \qquad (12, 62)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مساوات (۱۲ . ۶۰) په همدې ډول (۱۲ . ۶۱) یو رییل صفرځای دی

بیلګه ۱۲ . ۱۲ الف:

د لاندې برابرون لپاره

$$x^3-9x^2+27x-27=0 \qquad (12, 63)$$

د ارزښت جدول

X = 0 , 1 , -1 ; 2 , -2, 3
Y = -27 , -8 , -64 , -1 , -25, 0

له لارې لاندې رییل صفرځاي لاس ته راځي

$$x = 3 \qquad (12, 64)$$

بیلګه ۱۲ . ۱۳ الف :

د برابرون

$$x^3 -9x^2 +27x -27 =0 \qquad (12, 65)$$

لپاره د جدول

X = 0 , 1
Y = -3 ; 0

سره لاندې صفرځاي لاس ته راځي

$$x = 1 \qquad (12, 66)$$

په ټولیزه توګه کیدی شي په کلکه څرګند شي ، چې د دریم درجی برابرونسیستم (۱۲ . ۵۶) لپاره تل یو رییل اوبی یاحل x1 شته دی. دا یو واقعیت دی چې بي له شووني یی لیکو، چې دا پولینوم (۱۲، ۵۷) بي له پاتي په لاینیز فاکتور (x - x1) ویشل کیدی شي او یو دومه درج پولینوم ترې لاس ته راځي:

$$(x^3+a2x^2+a1x+a0):(x-x1)=x^2+b1x+b0$$

له دې امله داسی دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۲ . ۴ :

هر دریمه درجه برابرون (۱۲ . ۵۶) کم له کمه یو رییل اوبی x1لري او دا لاندې باوري دي

$$P_3(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = (x - x_1)(x^2 + b_1x + b_0);.............(12,67)$$

دلته نو بیا نور د دریمي درجي مساواتو (۱۲ . ۵۶) دوه حلونه x2 او x3لاس ته راځي که څلوری برابرون یا مربع مساوات $x^2 + b1x + b0 = 0$ اوبی شي، او د جملو ۱۲ . ۱او ۱۲ . ۳ سره کیدی شي چی لاندې جمله فرمولبندې کړی شو

جمله ۱۲ . ۵ :

هر دریمه درجه برابرون دري اوبیونې یا اوبي x1 , x2,x3 لري او دا باور لري

$$x^3+a2x^2+a1x+a0=(x-x1)(x-x2)(x-x3) \quad (12 , 68)$$

دلته دا لاندني حالتونه ممکن دي

۱ - دري رییل مختلف حلونه x1 , x2 او x3 شته دی (موجود دي)

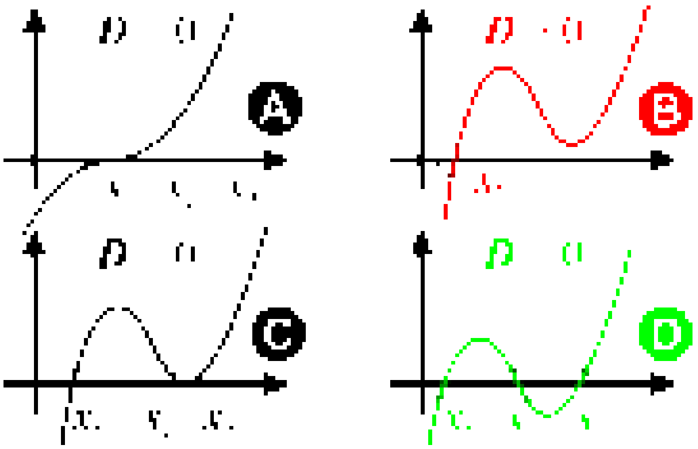
۲ - یو رییل حل x1 او ددې سره مختلف یو ډبل رییل حل x2=x3شته دی .

۳ - یو رییل درېګونی حل شته دی

$$x1 = x2 = x3$$

۴ - یو رییل حل x1 او یوه جوړه کونجوګیرت کملکس اوبیونې یا اوبي $x_2 = \overline{x_3}$ شته دی

دا لاندې څیره د ټولو راشنل فنکشنونو(۱۲ . ۵۷) تیپیکي تلنه د جملی ۱۲ . ۵ څلورو حالتونو کی ښایي



(c) ketabton.com: The Digital Library

د (۱۲ . ۶۸) فرمول په مرسته د بني اړخ په ځلولواو فاکتورونو(ځله وونو) پرتلی یا انډول له لارې کیدی شي د دریمی درجي پولینومو لپاره د وییتا جمله تصدیق کړي چی د جملی ۱۲ . ۲ سره سر خوري

جمله ۱۲ . ۶ :

که x1 , x2 او x3 د دريمي درجي برابرون (۱۲ . ۵۶) اوبیونې وي ، نو لاندې باوري دي

$$a0=-x1.x2.x3 \qquad (12,69)$$

$$a1=x1x2+x1x3+x2x3 \qquad (12,70)$$

$$a2=-(x1+x2+x3) \qquad (12,71)$$

جملی ۱۲ . ۴ په مرسته دې اوس د بیلګو ۱۲ . ۱۰ الف، تر ۱۲ . ۱۳ الف پورې د نورو دواړوx2 او x3 اوبیونې ولټول شي.

بیلګه ۱۲ . ۱۰ ب :

(۱۲ . ۵۸) برابرون د (۱۲ . ۵۹) برابرون له مخی x1 = 2 حل لري. سړی دا ځواب د ۱ . . ۲ ۴ . برخي له مخي د پارشل Partial -(ټوټه-(ویش په بنسټ لاس ته راوړي.

$$(x^3-3x^2-4x+12):(x-2)=x^2-x-6$$

$$..\underline{x^3+2x^2}$$

$$........-x^2-4x+12$$

$$.........\underline{-x^2+2x.........}$$

$$..............-6x+12$$

$$..............-6x+12$$

له x² - x - 6 = 0 څخه لاس ته راځي

$$x_{2,3}=1/2\pm\sqrt{1/4+6}=1/2\pm\sqrt{1/4+24/4}=1/2\pm5/2,$$

$$x2=3, x_3=-2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته د جملی ۱۲ . ۵ لومړی حالت لرو، د لاندې مختلفو ريیلو ځوابونو سره
، $x1 = 2 , x2 = 3 , x3 = -2$
او داسی دئ:

$$x^3-3x^2-4x+12 = (x-2)(x-3)(x+2)$$

بيلګه ۱۲ . ۱۱ ب :

(۱۲ . ۶۰) برابرون د (۱۲ . ۶۲) برابرونونو له مخی اوبی
$x1 = 1/2$
لري او داسی دئ:

$$(2x^3+11x^2+12x-9):(x-1/2)=2x^2+12x+18$$

او له $2x^2 + 12x + 18 = 0$

په همدې ډول يا (□) له $x^2 +6+9=0$ څخه لاس ته راځي

$$x_{2,3} = -3 \pm \sqrt{9-9} = -3 \Leftrightarrow x_2 = x_3 = -3$$

دلته د جملي ۱۲. ۵ دوم حالت مخ ته پروت دی د يوه ريیل حل او يو بل له دې حل مختلف ډبل ريیل حل سره، يعنی لرو $x1=1/2 , x2=x3=-3$ او داسی دئ

$$x^3+(1/2)x^2+6x-9/2)=(x-1/2)(x+3)^2$$

بيلګه ۱۲ . ۱۲ب :

(۱۲ . ۶۳) برابرون د(۱۲ . ۶۴) له مخی $x1 = 3$ ځواب لري. دلته باور لري

$$(x^3-9x^2+27x-27):(x-3)=x^2-6x+9$$

له $x^2-6x+9=0$ څخه لاس ته راځي

$$x_{2,3} = 3 \pm \sqrt{9-9} = 3$$

نو دلته مو د جملی ۱۲ . ۵ د دريم حالت درې برابره ځواب مخ ته پروت دی يعنی

$$x_1 = x_2 = x_3 = 3$$

او داسی دئ

$$x^3+-9x^2+27x-27=(x-3)^3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۲ . ۱۳ ب : (۱۲ . ۶۵) برابرون د (۱۲ . ۶۶) برابرونونو له مخی ځواب $x1 = 1$ لري، او داسی دی

$$(x^3 -5x^2 +17x-13):(x-1) = x^2-4x+13$$

له $x^2-4x+13 = 0$ څخه لاندې لاس ته راځي

$$x_{2,3} = 2 \pm \sqrt{4-13} = 2 \pm 3i$$

دلته د جملی ۱۲ . ۵ څلورم حالت د یوه ریيل حل او یوه جوړه کونیوګیرت کملکس ځوابونوسره مخ ته پروت دي.

$$x1 = 1 , x2 = 2+3i , x3 = 2 - 3i,$$

او دا باوري دي

$$x^3-5x^2+17x-13=(x-1)(x-2-3i)(x-2+3i) =(x-1)(x^2-4x+13)$$

۱۲ . ۴ د ریښی (جذر) برابرون

په ۱۲ . ۱ برخه کی د ریښی رابرون وڅیړل شو. او دا هم څرګند شو چی څنګه د ریښی برابرون په ریشنل برابرونو اوله دې سره n- می درجي برابرونو بدلیدلي شي۰ دا دې دلته د بیلګو په څیر پاتي وي. یواځي ریيل اوبیونې به و څیړل یا و پلټل شي.

جمله ۱۲ . ۱۴ :
د ریښي برابرون

$$7+3\sqrt{2x+4} =16;............................(12,72)$$

ډیر ساده کیدی شي چی په لاینیزو برابرونونو واړول شي

$$3\sqrt{2x+4} = 9; \sqrt{2x+4} = 3; 2x+4 = 9; 2x = 5; x = 5/2;........(12,73)$$

د ازمایلو لپاره که (۱۲ . ۷۳) برابرون په (۱۲ . ۷۲) برابرونونو کی خوندي شي، نو څرګندیږي چی دا دx-ارزښتونه په ریښتیا د مخه ورکړ شوي ارزښتونه پوره کوي

$$7+3\sqrt{5+4} = 7+3.3=16$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۲ . ۱۵:

د ریښی برابرون یا مساوات

$$\sqrt{2x+19}+5=0;..........(12,74)$$

کیدی شي په ساده بڼه واړول شي

$$\sqrt{2x+19}=-5; 2x+19=5; x=3;..........................(12,75)$$

د ازمايني لپاره، كه (۱۲ . ۷۵) د پيل په برابرون (۱۲ . ۷۴) کی خوندي شي، نو دا برابرون ورکوي

$$\sqrt{2x+19}=10\neq 0$$

له دې امله ارزښت $x = 3$ د برابرون (۱۲ . ۷۴) ځواب نه دی . په دې لاس ته راوړنو سره یا په دې تعقیب د پیل برابرون ځواب نه لري.) داسي کیدی هم نه شي، ځکه چي تل $2x + 19 > 0$ دی)۰

دا ساده بیلګی موږ ته را ښايي چی باید د ریښی مساواتو حل تل وازمايل شي چی ایا په ریښتوني دا ځواب دی او که نه، او دا په داسی ډول چی شمیرل شوي ارزښتونه په پیل مساوات کی کیږدي چی ایا مساوات پوره کوي که نه . دا عمل یواځي د ازمایلو لپاره نه دی چي ګوندې تیك یا صحیح شمیرنه شوې او که نه، بلکه دا ځواب یو اړیین سما ندیز پل یا ضروری منطقي پل دی .

په ټولیزه توګه باور لري: كه برابرون:

$$f(x) = g(x) \qquad (12, 76)$$

په یو ې نوي بڼه واړول شي

$$F(x) = G(x) \qquad (12,77)$$

چی د برابرون دواړو لورو ته یا یو څه ور زیات شي ، یا تری کم شي، یاداوړه خواوې په یوه ګڼ ځل (ضرب) شي او یا وویشل شي (په دې حال کی باید پرویشونی صفر نه وي، ځکه چی په صفر ویشل اجازه نه لرو) که دواړه خواوی د ریښی لاندې راشي او یاپه توان پورته شي نود پیل برابرون (۱۲ ، ۷۶) هر ابی بدل شوي برابرون (۱۲ . ۷۷) ځواب هم دی ، مګر نه په څټ (برعکس، مخامخ). کیدی شي چی اړول شوی برابرون (۱۲ . ۷۷) زيات ځوابونه ولري نسبت و پیل برابرون (۱۲ ، ۷۶) ته . دا به په لاندې بیلګه کي روښانه شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۲ . ۱۶:

د ریښې یا جذر برابرون یا مساوات

$$\sqrt{x}-\sqrt{x-1}=\sqrt{2x-1} \qquad (12 . 78)$$

څلوری یا مربع ته د جګولو له لارې دا بڼه غوره ګوي

$$x+(x-1)-2\sqrt{x(x-1)}=2x-1$$

$$x+(x-1)-2x(x-1)=2x-1 \,,$$

نو $\sqrt{x(x-1)}=0$

په بیا څلوری یا مربع کولو سره سړی یو مربعمسوات لاس ته راوړي

$$x(x-1) = 0 \quad (12 , 79)$$

چې لاندې اوبی یا ځواب لري :

$$x_1 = 0, x_2 = 1 \qquad (12 . 80)$$

دا د (۱۲ . ۷۹) اوبیونې دي، مګر باید و ازمایل شي چې ایا دا د (۱۲ . ۷۸) اوبیونې هم دي که نه.

د $x = 0$ لپاره په (۱۲ . ۷۸) کې دوه ریښې نه دي تعریف یا ددوه ریښو پیژند نه شته، نو $x = 0$ د (۱۲ . ۷۸) اوبیونه نه ده .

د $x = 1$ لپاره لاس ته راځي $1 - 0 = 1$

له دې امله $x = 1$ د پیل بیلګی (۱۲ . ۷۸) یوګونی ځواب یا اوبی دی .

بیلګه ۱۲ . ۱۷:

د ریښی برابرون

$$\sqrt{x}.\sqrt{x-3}-\sqrt{x^2-4x+3}-\sqrt{2x^2-7x+3}=0,............(12,81)$$

کیدی شي چې په ورته ډول لکه (۱۲ . ۷۸) بڼه واړول شي:

$$\sqrt{x}.\sqrt{x-3}=\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{2x^2-7x+3} \Rightarrow$$

$$x(x-3)=(x^2-4x+3)+(2x^2-7x+3)+2\sqrt{(x^2-4x+3)(2x^2-7x+3)} \Rightarrow$$

$$-2\sqrt{(x^2-4x+3)(2x^2-7x+3)}=2x^2-8x+6$$

$$(x^2-4x+3)(2x^2-7x+3)=(x^2-4x+3)^2;.........(12.82)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا برابرون یا مساوات پوره دی، که $x^2-4x+3=0$ باور ولري، نو د لاندې لپاره

$$x_{1,2}=2\pm\sqrt{4-3}=2\pm1, x_1=3, x_2=1,................(12,83)$$

د ټولونورو x لپاره $x^2-4x+3|=0$ دی ، او (۱۲ . ۸۲) کیدی شي چې په لاندې فاکتور وویشل شي:

$$2x^2-7x+3=x^2-4x+3$$

$$x^2-3x=0$$

$$x(x-3)=0$$

$$x3=0, x4=x1=3$$

او په (۱۲ . ۸۱) کی ځاي په ځاي کولو سره ازمایل کیږي، چی کوم له لاندې ارزښتونو

$$x_1=3, x_2=2, x_3=0$$

پیل برابرون ډکوي.(باوري کوي، پوره کوي)

د $x=3$ لپاره باور لري:

$$\sqrt{3}.\sqrt{0}-\sqrt{9-12+3}-\sqrt{18-21+3}=0$$

له دې امله $x=3$ د پیل برابرون یا مساوات (۱۲ ۸۱) اوبی یا حل دی . د

$x3=0$ او $x2=1,$

لپاره ریښي پیژند نه لري یا تعریف نه دی، نو له دې امله د پیل برابرون (۱۲ . ۸۱) اوبی حل $x=3$ (12 . 85)

یواځني حل دی

۱۲ – تمرینونه

۱ – مربع مساوات

۱,۱- مربع مساواتدټاکلو ضربیونو سره

1.1.1. a) $x^2-4=0$ b) $3x^2+27=0$

c) $x^2-9x=0$ d) $5x^2=125\,x$

1.1.2. a) $(x+\frac{1}{3})(x-\frac{1}{3})=\frac{7}{12}$ b) $(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})=\frac{5}{16}$

c) $(x-6)(x+5)=0$ d) $(x-\sqrt{7})(x-\sqrt{5})=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1.1.3. a) $x^2 - 6x + 8 = 0$ b) $x^2 + 4x + 2 = 0$
c) $x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = 0$ d) $x^2 + 27\frac{1}{12} = 10\frac{7}{12}x$

1.1.4. a) $3x^2 - 20 = x$ b) $7x^2 + 23x = 84$
c) $(43 + 10x)^2 + (66 + 10x)^2 = (79 + 14x)^2$
d) $(3x - 5)^2 - (2x + 5)^2 = 0$

1.1.5. a) $\frac{8-x}{2} - \frac{2x-11}{x-3} = \frac{x-2}{6}$ b) $3x - \frac{3x-10}{9-2x} = 2 + \frac{6x^2-40}{2x-1}$
c) $\frac{5x-1}{6x-9} - \frac{9x-4}{8x+12} - \frac{3x+8}{4x^2-9} = \frac{1}{2}$ d) $\frac{3}{x-2} - \frac{8}{4-3x} = \frac{19}{2x+1}$

۱ . ۲ – مربع مساوات د ناټاکلو ضریبونو سره

1.2.1. a) $x^2 - a^2 = 0$ b) $x^2 - ax = 0$
c) $x^2 + \frac{4}{3}ax + \frac{1}{3}a^2 = 0$ d) $x^2 + \frac{1}{2}bx - \frac{1}{2}b^2 = 0$

1.2.2. a) $8x^2 - 10bx - 3b^2 = 0$ b) $12x^2 - 34ax + 10a^2 = 0$
c) $16x^2 - 8ax + a^2 - b^2 = 0$ d) $ax^2 + bx + c = 0$

1.2.3. a) $a^2 - x^2 = (a - x)(b + c - x)$
b) $(x - a + b)(x - a + c) = (a - b)^2 - x^2$
c) $(a + bx)^2 + (ax - b)^2 = 2(a^2x^2 + b^2)$
d) $(x + a + b)(x - a + b) + (x + a - b)(x - a - b) = 0$

1.2.4. a) $ax^2 - (a^2 + 1)x + a = 0$ b) $abx^2 - (a^2 + b^2)x + ab = 0$
c) $a^2(a - x)^2 = b^2(b - x)^2$
d) $(a - x)^2 - (a - x)(x - b) + (x - b)^2 = (a - b)^2$

1.2.5. a) $x + \frac{1}{x} = \frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b}$ b) $x - \frac{1}{x} = \frac{a}{b} - \frac{b}{a}$
c) $\frac{a+x}{b+x} + \frac{b+x}{a+x} = \frac{5}{2}$ d) $\left(\frac{a-x}{x-b}\right)^2 = 8\left(\frac{a-x}{x-b}\right) - 15$

۱ . ۳ – مساوات سیتم، کوم مو مربع مساوتو ته لاربښودوي یا بیایي

1.3.1. a) $3x + 2y = 3$, $xy = 3$ b) $10x + y = 10$, $5x(15x + y) = 75$

c) $3x + 7y = 21$, $3x^2 - 7y = \frac{21}{2}$ d) $x^2 + xy + y^2 = 1372$, $2x - y = 2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1.3.2. a) $x + y = a$, $xy = b$ b) $xy = a$, $\frac{x}{y} = b$

c) $x^2 + y^2 = c^2$, $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$ d) $ax^2 - \frac{b}{y^2} = 2(a^2 - b^2)$, $bx^2 - \frac{a}{y^2} = a^2 - b^2$

۱ . ۴ – د n-مي درجې ځانګړي مساوات، چې‌په مربع مساوات بيرته اړول کيدی شي

۱ . ۴ . ۱ – بې مربع مساوات د ټاکلو يا معلومو ضريبونو سره

a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ b) $(x^2 - 5)^2 + (x^2 - 1)^2 = 40$

c) $(x^2 - 10)(x^2 - 3) = 78$ d) $10x^4 - 21 = x^2$

۱ . ۴ . ۲ - بې مربع مساوات د ناټاکلو يا نامعلومو ضريبونو سره

a) $x^4 + a^4 + b^4 = 2a^2x^2 + 2b^2x^2 + 2a^2b^2$

b) $(a^2x^2 + b^4)(x^2 - a^2) = b^2(x^4 - a^4)$

c) $\frac{a^2b^2x^2}{a^3b + ab^3x^2} + \frac{ab - x^2}{x^2 - 1} = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2x^2}$

d) $\frac{(a - b)x^4}{a^2 - b^2} + \frac{4x^2}{a + b} = x^2 + 4$

۱ . ۴ . ۳ – د n-مي رجي مساوات د $a_0 = a_1 = \ldots = a_{n-3} = 0$ سره

a) $x^{10} + 6x^9 + 5x^8 = 0$ b) $\frac{5}{2}x^5 + 7x^4 = -20x^3$

c) $abx^8 - (a^2 + b^2)x^7 = -abx^6$ d) $ax^{22} - a^2x^{11} + a^2 - a = 0$

۱ . ۵ – لاندې مساوات هم د x او هم د a پسې حل کړئ!

a) $x^2 + \sqrt{a}\,x - a = 0$ b) $x^2 - 2bx + 2(ab - \frac{1}{2}a^2) = 0$

c) $x^2 + 9ab = (a + b)(x + 2a + 2b)$ d) $(x + b)(x - b) = a(2x - a)$

۱ . ۶ . – شي شوالونه

۱ . ۶ شي سوالونه

۱ . ۶ . ۱ الف دوه ګڼونه ځان داسې نيسې لکه 1 : 3 . ددې ګڼونو د مربع زياتون ۱۵۶۰ دی. دا ګڼونه څه نوميږي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) د درې یو په بل پسې ګڼونو د لوي ګڼ مربع دومره ده ، لکه د دوه کوچنیوګڼونو د مربعو زیاتوونې. دا ګڼونه څه نومیږي یا کوم دي؟

پ) د کوم مثبت ګڼ لس‌ځله د هغه د مربع څخه ۹۹۹ کوچنی دي؟

ت) مات 1/4 په دوه فاکتورونو a او b داسې تجزیه کړی، چې لاندې زیاتون $(a^2 + b^2)/(a^2 - b^2)$ یې لاس ته راشي.

۶ . ۲ . الف) په یوه برابر برقجریان کی مقاومت په دیرش اوم Ω 30 لوییږي، په کوم کې چی د برققوه په همغه د 220 V (وولټه) شپانونګ په پنځه امپیر (1,65A) کوچنی‌شي . مقاومت او برققوه څومره دي؟

ب) دوه سیخونه چی مقاومت یی Ω 60 یو له بل توپیر لري؛ چې یوه د غبرګ چالانولوعمومي مقاومت Ω 22,5 دي. دواړه برخه مقاومتونه څومره لوي دي؟

۶ . ۳ . الف) یوه د بایسکلځغلونی لار چې ۲۲۵ کیلو متره اوږده ده، د یوه موادو موټر څخه په درینیم ساعته لنډ وخت کې وهل کیږي،چې د موټر په منځني سرعت چې 26, 25 km/h نسبت و بایسکلځغلونکي ته د موادو موټر او بایسکل ځغلونکي سرعت او د وهلو وخت څومره دي؟

ب) د سپورت جشن کې یو سپورتي چې له A و B ته په 5km/h سرعت ځغلي، له خپل منډپیل څخه یونیم ساعت وروسته له یوه بایسکلسپورتي څخه وروسته کیږي، کوم چې له مخامخ کیدو, نیم ساعت وروسته B ته رسیږي، او سملاسي بیرته ګرځي او په همغه وخت کې A ته رسیږي په کوم کې چې ځغاستنی و B ته رسیږي، د $\overline{AB}$ کرښه څومره لرې ده؟

پ) دوه ډبډبي ځغاستي،یوبل باندې نیغ ولاړو سرکونو د څلورلاري په لور،په ډبډبیو ځغلي. د لمړي سرعت ۵ متره په ثانیه کې، دوم څلور متره په ثانیه کې دي دوي له ۳ ثانیو وروسته یو ۳۵ متره لریوالی یو له بل لري، دوي یو

(c) ketabton.com: The Digital Library

له بل په سرچینه کې د څلور لارې څومره لرېوالی لرووه، که لمړی له دوم ۴ متره ورته نژدې وو؟

ت) د ګادي یو لاین د موټرځغاست سرك لمړی برخې سره غبرګ غزیدلی. د یوه موټر ځغاستې پیل کې د یو مخته راتلونکي ګاډي واټن ۲۲۵ متره لرې دی. کله دوه ماشینونه په همغه جګوالي دي، که موټرځغاستی منظم تعجیل او یو تعجیل د $10m/s^2$ کی لري، په داسی حال کی چی د ګاډی سرعت ثابت او $72\ km/h$ دی؟

ټ) په منځنی سرعت $v_m = 18km/h$ په ۶ بجو له لایپخیږ څخه د دیساو په لور بایسکل ځغلیدونکی په ۸ بجو ، په همغه وخت کی له دیساو څخه د لایپخیږ په لور راتلونکی بایسکل ځغاستی سره مخامخ کیږي. ورستنی ۱۰۰ دقیق د مخه دیساو ته راغې لکه دوم ولایپخیږ ته. د دیساو او لایپخیږ ترمنځ لرېوالی یا واټن څومره دی؟

۱ . ۶ . ۴ . الف) په ولاړنجیز دریڅګوډي کې ، کاتیتې ځانونه داسې یوبل سره نیسي لکه 3:4 ، هیپوتینوزې ۵۰ سانتي متره ده ، کاتیتې څومره اوږدې دي؟

ب) د یوه ولاړکونجیز دریګوډي اړخونه څومره لوي دي ، که د دواړو کاتیتو زیاتون یي۱۷ سانتیمتره اود یوې کاتیتې او هیپوتینوزې زیاتون ۱۸ سانتي متره وي ؟

پ) د یوه سمکونجیز(ولاړکونجیز) دریګوډي کاتیتې څومره لویې دي، که د هغوي زیاتون ۴۲ سانتیمتره وي ، د دریګوډي هواردتنه ۲۱۶ مربع سانتي متره وي ؟

ت) د یوه ولاړګوډي نیمی (قطر) ۳۵ سانتي متره اوږد دی، که د ولاړ ګوډي اوږد اړخ ۸ سانتي متره وغزول شي او لنډ اړخ ۶ سانتي متره وغزول شي، د نیمي اوږدوالی ۱۰ سانتیمتره لویږي. د سمکونجیز اړخونه څومره لوي دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

ت) که د مربع یوه خوا ۷ سانتي متره وغزوي او بل اړخ په همدې ارزښت لنډ کړي،نو مربع او سمکونجيز دواړه د هوارې دننه ۴۹۵۱ مربع سانتي متره لري.
د سم اړخيز اړخونه څومره لوي دي؟ (يا ولاړ اړخ)

ټ) د یوې ګردۍ وړانګه ۱۶ سانتي متره اوږده ده. په ګرد کې دننه‌خاي مربع اړخ څومره لوي دی؟ (یا څونډې مربع اړخ)

ج) د یوې ګردۍ نیمی باید څومره لوي، کهٔ دننه‌منخشوې مربع اړخ ۱ سانتي متره د هغه د وړانګې څخه لوي وي؟

ح) که د یوې ګردۍ نیمی (قطر) ۳ سانتي متره لوي شي ،نو د ګردۍ هواره دوه برابره کيږي. د ګردۍ سرچيني نيمی څومره لويه ده؟

خ) د یوه نیمغونډې نیمی څومره دی، که د هغه د دیوال لویوالی ۳ سانتیمتره او او تشه کی یي ۵۰۱۶ مکعبسانتي متره وي؟

۲ – د دريمي او څلورمي درجې مساوات

2.1 a) $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$ b) $x^3 + x^2 - 5x - 84 = 0$

c) $3x^3 - x^2 - 9x + 3 = 0$ d) $x^3 + x - 2 = 0$

12.5 Übungsaufgaben 1

2.2. a) $4x^4 - 12x^3 + 7x^2 + 3x - 2 = 0$ b) $x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 6x = 0$

c) $x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 4x - 5 = 0$ d) $6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0$

۳ . ريښه مساوات:

ټول ارزښتونه x وشميرئ، چې د لاندې مساواتو حلونه يا اوبيونې دي. د هرې پوښتنې د ټيکاوي لپاره ازماېښت وکړئ!

۳ . ۱ – ريښه مساوات د ټاکلو ضريبونو يا څلوونو سره:

3.1.1. a) $\sqrt{x} = 3$ b) $\frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{2}{3}\sqrt{x} + 7 = 2\sqrt{x}$

c) $\frac{5}{3}\sqrt{15x} - \frac{3}{5}\sqrt{15x} - 11 = \frac{1}{3}\sqrt{15x}$

d) $\sqrt[3]{x} = 5$

3.1.2. a) $(3\sqrt{x} - 5)(5\sqrt{x} - 3) = 5(3x - 31)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

b) $(5\sqrt{x}-2)^2+(12\sqrt{x}-9)^2=(13\sqrt{x}-9)^2$

c) $\frac{5\sqrt{x}+12}{7\sqrt{x}+15}=\frac{4}{5}$ d) $\frac{2\sqrt{x}+3}{2\sqrt{x}-3}=7$

3.1.3. a) $\frac{\sqrt{x}-3}{7}-\frac{\sqrt{x}-25}{5}=7-\frac{2+\sqrt{x}}{4}$ b) $\frac{16-\sqrt{x}}{2}-\frac{10-\sqrt{x}}{3}=\sqrt{x}$

c) $\sqrt{x}+\sqrt{2x}=1$ d) $2\sqrt{x}-\sqrt{2x}=2+\sqrt{2}$

3.1.4. a) $10-\sqrt{x-2}=3$ b) $\sqrt{3x-5}+4=5$

c) $\sqrt[3]{7x-6}+6=10$ d) $4\sqrt[3]{5x-8}=3\sqrt[3]{9x+1}$

3.1.5. a) $9\sqrt{5x+1}=20+4\sqrt{5x+1}$ b) $\sqrt{7x+2}=\frac{5x+6}{\sqrt{7x+2}}$

c) $3\sqrt{4x-3}-\frac{10x}{\sqrt{4x-3}}=\frac{1}{\sqrt{4x-3}}$ d) $\frac{9x}{\sqrt{10x-9}}-\sqrt{10x-9}=\frac{2}{\sqrt{10x-9}}$

3.1.6. a) $\sqrt{9x^2-10x-55}=3x-5$ b) $x+1=\sqrt{2x^2+\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}}$

c) $17-4\sqrt{\frac{3x+5}{x-7}}=1$ d) $24-7\cdot\sqrt[3]{\frac{4x-1}{x-6}}=3$

3.1.7. a) $\sqrt{52-3\sqrt{5x+6}}=2\sqrt{10}$ b) $\sqrt{x+1-\sqrt{2x+3}}=1$

c) $\sqrt{37-7\sqrt{5x+4}}=4$ d) $\sqrt[4]{19-3\sqrt[3]{5x-9}}=2$

3.1.8. a) $\sqrt{9x-17}-3\sqrt{x-4}=1$ b) $2\sqrt{9x+4}-3\sqrt{4x-11}=1$

c) $\sqrt{x+9}-\sqrt{x+2}=\sqrt{4x-27}$ d) $\sqrt{9x+10}-\sqrt{x-1}=\sqrt{4x+9}$

3.1.9. a) $\sqrt{x+4}-\sqrt{x-8}+\sqrt{x-3}-\sqrt{x+13}=0$

b) $\sqrt{x+9}+\sqrt{x-12}=\sqrt{x}+\sqrt{x-7}$

c) $\sqrt[3]{9x+10}-\sqrt{3x+4}=0$ d) $\left|\sqrt{3x+7}\right|+\left|\sqrt{4-x}\right|=3$

3.1.10. a) $\frac{1}{1+\sqrt{1-x}}+\frac{1}{1-\sqrt{1-x}}=\frac{2x}{9}$ b) $\sqrt[3]{76+x}+\sqrt[3]{76-x}=8$

c) $\left(\sqrt[3]{x}-1\right)^2+\sqrt[3]{x^2}=\sqrt[3]{x}$ d) $\sqrt[4]{x^3}-2\sqrt{x}+x=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۲ – ريينه مساوات د نامعلومو ضريبونو سره

3.2.1. a) $\sqrt{x} = a$ b) $\sqrt[3]{x} = b$

c) $a - \sqrt[3]{x} = b$ d) $a\sqrt{x} - b = c\sqrt{x} - d$

3.2.2. a) $\sqrt{x-a} = b$ b) $\sqrt[3]{a-x} = b$

c) $\sqrt[4]{a^4 + x} = a$ d) $\sqrt[6]{a^6 - x} = b$

3.2.3. a) $(\sqrt{ax} + \sqrt{b})(\sqrt{ax} - \sqrt{b}) = (a+1)(a-1)b$

b) $(a - \sqrt{x})\,(b - \sqrt{x}) = (c + \sqrt{x})\,(d + \sqrt{x})$

c) $\dfrac{\sqrt{ax} - b}{\sqrt{ax} + b} = \dfrac{3\sqrt{ax} - 2b}{3\sqrt{ax} + 5b}$ d) $\dfrac{2a + 3\sqrt{bx}}{3a + 2\sqrt{bx}} = \dfrac{3b + 2\sqrt{ax}}{2b + 3\sqrt{ax}}$

3.2.4. a) $\sqrt{x} + \dfrac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a}}$ b) $\dfrac{\sqrt{a} + \sqrt{x}}{\sqrt{a} - \sqrt{x}} = \dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{a} + \sqrt{x}} - \left|\dfrac{(x+a)^2}{a(x-a)}\right|$

c) $\dfrac{a + b\sqrt{x}}{a + b} = \dfrac{c + d\sqrt{x}}{c + d}$ d) $\dfrac{a + b\sqrt{x}}{a\sqrt{x} + b} = \dfrac{c + d\sqrt{x}}{c\sqrt{x} + d}$

3.2.5. a) $x + \sqrt{x^2 - a^2} = a$ b) $x - \sqrt{ax(1+x) + 1 - x} = 1$

c) $\sqrt{x+a} = a - \sqrt{x}$ d) $\sqrt{x + a^2} - \sqrt{x} = b$

3.2.6. a) $\sqrt{a-x} + \sqrt{b-x} = \dfrac{b}{\sqrt{b-x}}$ b) $\sqrt{x+a} - \sqrt{5x - 3a - 4b} = \dfrac{2b}{\sqrt{x+a}}$

c) $\sqrt{x+a} - \sqrt{x-a} = \dfrac{x + a - b}{\sqrt{x+a}}$

d) $\sqrt{3a - 2b + 2x} - 2\sqrt{3a - 2b - 2x} = \dfrac{a + 2b + 2x}{\sqrt{3a - 2b + 2x}}$

3.2.7. a) $\dfrac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}} = \dfrac{a}{b}$ b) $\dfrac{\sqrt{3x^2 - 1} + \sqrt{3 - x^2}}{\sqrt{3x^2 - 1} - \sqrt{3 - x^2}} = \dfrac{a}{b}$

c) $\sqrt[3]{a+x} + \sqrt[3]{a-x} = \sqrt[3]{2a}$ d) $\sqrt[3]{a+x} + \sqrt[3]{a-x} = \sqrt[3]{c}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

----

۳ ، ۳ – مساوات سیستمونه، چې ریښه مساوات خوندي لري

3.3.1 a) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=8$, $\sqrt{xy}=15$

b) $x+y=58$, $\sqrt{x}+\sqrt{y}=10$

c) $\sqrt{x-5}+\sqrt{y+2}=5$, $x+y=16$

d) $\sqrt{5-3x+x^2}+\sqrt{5-3y+y^2}=6$, $x+y=3$

3.3.2 a) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\dfrac{a}{b}$, $xy=(a^2-b^2)^2$

b) $\dfrac{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}=\dfrac{a}{b}$, $x^3-c^3=c^3-y^3$

c) $x\sqrt{x+y}=a$, $y\sqrt{x+y}=b$

d) $x\sqrt[3]{x^2+y^2}=a$, $y\sqrt[3]{x^2+y^2}=b$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۳ ترانسڅندنت برابرونونه یا ـ مساوات

لکه څنګه چی په ۱۲ . برخه کی دي ته ګوته نیول شوې وه، چی دلته یواځي هغه ترانسځندنت مساوات څېړل کیږي، کوم چی بیرته په الجبري مساواتو اړول کیدی شي.
دا بیرته په الجبري مساواتو اړول، لکه څنګه په ریښه مساواتوکی، په خوښه په بل شکل اړول کیږي او په داسي ډول دي لکه هملته:

د فرمول په اړولو(فورم بدلون یا بڼه بدلون) سره کوم ځواب له منځه نه ځي، خو کیدی شي چی اړولی فرمول زیاتې اوبیونې یا حلونه نسبت د پیل برابرون ته ولري. له دې امله باید د اړول شوي برابرون ټولې اوبیونې په پیل برابرون کی ځاي په ځاي یا کیښوول شي او وکتل شي چی کوم له دې د پیل مساوات حلونه هم دي

لکه څنګه په ریښه یي برابرونونو یا مساواتو کی ، دلته هم یواځی رییل اوبیونې پلټل کیږي.

۱۳ . ۱ لوګاریتمي مساوات

د لوګاریتمي مساواتو او اکسپوننشل یا په جګ سماواتو د حل (اوبي) پیدا کولو لپاره اړیین یا ضرور(ضروري یا اړیین شرایط) دی، چی د یو عدد(ګڼ) aلوګاریتم، د b په بنسټ، معلوم کړو یا وڅیړو.

$$x = \log_b a; a > 0, b >, b \neq 1 \text{............................}(13,1)$$

د بنسټ b = 10 لپاره(lga) او د بنسټ b=e لپاره (ln a) کیدی شي (۱۳ . ۱)

(c) ketabton.com: The Digital Library

سيده د جبشميري له لارې پيداشي. په څټ يا برعکس د 10 =| e|= b لپاره برابرونونه په دې ډول اړول کيږي

$$x = \log_b a = \lg a / \lg b = \ln a / \ln b ....(13.2)$$

د لوګاريتمي مساواتو يو ساده ډول يا شکل (تيپ) دا دئ

$$l\,\mathrm{og}_b\, x = c ....(13.3)$$

دا برابرون د (7. ۱) ، (7. ۲) له مخې لاندې ته ورته دی:

$$x = b^c ....(13,4)$$

دا سی افاده هم د جبشميري سره شميرل کيدی شي.

بيلګه ۱۳ . ۱ $\log_2 x = 1,5; x = 2^{1,5} = 2.8284$:

په همدې ډول د (۱۳ . ۳) بڼې اوبيونه په لاندې ټوليز شوي شکل هم ساده دی

$$\log_b f(x) = c ....(13,5)$$

دلته (f(x يوه الجبري وينه يا افاده ده، د (۱۳ . ۵) سره الجبري برابرون کټمټ (ورته) دئ

$$f(x) = b^c ....(13,6)$$

ټولې د (۱۳ . ۶) اوبيونې د (۱۳ . ۵) اوبيونې هم دي

بيلګه ۱۳ . ۲ : لوګاريتميز برابرون

$$\log_2 (x^2 + x + 6) = 3$$

دلاندې مساواتوسره کټمټ دي

$x^2+x+6=2^3=8$ (همداسی) ⇔ $x^2+x-2=0$

او لاندې اوبيونې لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{8}{4}}=\frac{1}{2}\pm\frac{3}{2};x_1=-2;x_2=1$$

يو د (۱۳ . ۵) ډول (تيپ) برابرون هم مخ ته لرو، که د هغه کينې لور (ارخ) ته يود لوګاريتم ريشنل لاينيز کمبينشن الجبري وييته يا افاده موجوده وي

$$r_1.\log_b g_1(x)+r_2.\log_2(x)+r_3.\log_b g_3(x)+...=c.........(13,7)$$

دلته ځلوني ri راشنل ګڼونه دي. د لوګاريتم قوانينو (۷. ۷) ، (۷. ۹) کاروني يا استعمال څخه، ۷ برخه وګورئ، (۱۳ ، ۵) لاس ته راځي او دا د لاندې برابرونونو سره

$$f(x)=\{g_1(x)\}^{r_1}.\{g_2(x)\}^{r_2}\,....................................(13,8)$$

بيلګه ۱۳ . ۳:

لومړی له $\log_3(x-1)+\frac{1}{2}\log_3 x-\frac{1}{2}\log_3(x-1)=2$ څخه لاندې لاس ته راځي

$$\log\left[(x-1)\left(\frac{x}{x-1}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

اوله دې څخه ريښه برابرون $\sqrt{x}.\sqrt{x-1}=9$ ،

د کوم له څلوری يا مربع کولو څخه $x(x-1)=81$ يعني $x^2-x-81=0$

د لاندې ځواب سره

$$x_{1,2}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{324}{4}}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{325}{4}}=\frac{1}{2}\pm(\frac{1}{2}).18.03;$$

$$x_1=9,515;x_2=-8,515$$

ټيك دا $x1=9,515$ پيل برابرون پوره کوي

. د $x=x2<0$ لپاره $\log x$ او په همدې ډول $\log(x-1)$ پيژند نه لري يا تعريف نه دي.

بيلګه ۱۳ . ۴:

له $\log_b(2x+3)=\log_b(x-1)-1$ څخه لاس ته راځي

$$\log_b[(2x+3)/(x-1)]=1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او نور پسی $\frac{2x+3}{x-1} = b^1 = b$ پس

$2x+3=bx-b$

$b+3=x(b-2)$

$x=(b+3)/b-1)$

پیل وینیه یا افاده د $x>1$ لپاره موخه وره یا هدفمنده ده، یعني
که $1<(b+3)/b-2)$ وي.
د $b>2$یعنی $b-2>0$ څخه لاس ته راځ $b+3 > b-2$
له دې لرو $3>-2$دا د ټولو b لپاره پوره دی
.د $2 \le b$ لپاره د $b+3 \le b-2$ $b+3 > b-2$ څخه $3 \le 2$ لاس ته راځي اودا د هیڅ b لپاره باور نه لري .
له دې امله کره د $b > 2$ لپاره اوبی شته دی. د $2 \le b$ لپاره اوبیونه نه شته دی.

د لاندې لوګاریتمي تیپ برابرون هم کیدی شي په الجبري مساواتو بیرته واړول شي

$$F(\log_b f(x)) = 0 \qquad (13.9)$$

چیرته چی F او هم f الجبریزې وینې یا افادې دي. د بدلون کاروایي یا عملیه اجرا کوو

$$y=\log_b f(x) \qquad (13,10)$$

او په لمړي پل کی الجبري برابرون اوبی کوو

$$F(y)=0 \qquad (13.11)$$

ددې اوبیونه ..$y1,y2$, په (۱۳,۱۰) کی ږدو، نو د هر yi لپاره د تیپ (۱۳,۵) لوګاریتمي مساوات لاس ته راځي:

$$\log_b f(x) = y_i ; \quad i = 1,2,3,\ldots \qquad (13.12)$$

له دې څخه لاندې الجبري مساوات لاس ته راځي

$$f(x)=b^{y_i} \qquad (13.13)$$

ددې لپاره چی و ازمائیلی شو چی ایادا هم برابرون پوره کوي، نو ټول ددې برابرونونو اوبیونې یا ځوابونه باید په پیل برابرون (۱۳,۹) کی کینوول شي یا ځاي په ځای شي،

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۳ . ۵ : برابرون $\log^2 x-\lg x-2=0$ د سبستیځیوشن(بدلون) $y=\lg x$ سره په ځلوری برابرون $y^2-y-2=0$ بدلیږي .
د $y_1 = 2$ او $y_2 = -1$ ځوابونو سره
له $\lg x=2$ او $\lg x=-1$ لاس ته راځي.

$$x_1 = 10^2=100 \quad \text{او} \quad x_2 =10^{-1}= \frac{1}{10}$$

دواړه ځوابونه د پیل برابرون ځوابونه دي.

بیلګه ۱۳ . ۶ :

له برابرون $(6 /(\lg x +1)) + (8 / (\lg x -1)) = 3$
د $x>0$، مګر $(x \neq 1/10, x \neq 10)$ چې د اصلي ماتلاندې $(\lg x+1)(\lg x-1)$ سره حل شی، لاس ته ترې راځي

$$6(\lg x-1)+8(\lg x+1)=3(\lg^2 -1)$$

$$,\quad 6\lg x-6+8\lg x+8=3\lg^2 x-3$$

$$0=3\lg^2 x-14\lg x-5$$

او د بدلون $y = \lg x$ سره مو لاندې ځلوری بڼې یا مربعفورم ته بیایي:

$$3y^2-14y-5=0 , y^2-(14/3)y-5/3=0$$

د لاندې ځوابونو سره

$$y_{1,2}=\frac{7}{3}\pm\sqrt{\frac{49}{9}+\frac{15}{9}}=\frac{7}{3}\pm\frac{8}{3}; y_1 = lox_1 = 5; y_2 = \lg x_2 = -\frac{1}{3}$$

$$x_1 = 10^5; x_2 = x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{10}}$$

دواړه ارزښتونه پیل مساوات پوره کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که په یوه برابرون کې لوګاریتمونه د مختلفو بنسټونو b سره رامنځ ته شي، نو کیدی شي د (۱۳ . ۲) په مرسته په همغه برابر بنسټ واړول شي

بیلګه ۱۳ . ۷ :

له $\log_2 (x-1) + \log_4 (x-1) -1 = 0$

څخه دلاندې برابرون په مرسته لاس ته راځي:

$$\log_4 (x-1) = \frac{\log_2 (x-1)}{\log_2 4} = \frac{1}{2}\log_2 (x-1),$$

$$\log_2 (x-1) + \frac{1}{2}\log_2 (x-1) - 1 = 0,\ \log_2 (x-1) = \frac{2}{3},\ x-1 = 2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4},$$

$$x = 1 + \sqrt[3]{4}.$$

دا ارزښت د پیل برابرون اوبی یا ځواب هم دی:

$$\log_2 \sqrt[3]{4} + \log_4 \sqrt[3]{4} - 1 = \frac{1}{3}\log_2 4 + \frac{1}{3}\log_4 4 - 1 = \frac{1}{3}\cdot 2 + \frac{1}{3} - 1 = 0.$$

۱۳ . ۲ اکسپوننشل – یا په جګ برابرونونه

ساده اکسپوننشل برابرون(مساوات)

$$a^x = b; a > 0, a \neq 1, b > 0 ....(13,14)$$

کیدی شي چې د لوګاریتم نیولو سره سملاسي حل شي(ځواب شي)

$$x = \log_a b = \lg_b / \lg_a = \ln b / \ln a \qquad (13, 15)$$

لاندني برابرونونه په ساده ډول په (۱۳ ، ۱۴) ډول (رقم (تیوپ) برابرونونو باندې اړول کیدی شي.

بیلګه ۱۳ . ۸:

$$2^x + 3^{x+2} - 2^{x+2} - 3^{x+1} = 0.$$

$$2^x (1-2^2) + 3^x (3^2 - 3) = 0,\ \text{bzw.}\ 6\cdot 3^x = 3\cdot 2^x,\ \text{bzw.}\ \left(\frac{2}{3}\right)^x = 2,$$

$$x = \frac{\lg 2}{\lg\frac{2}{3}} = \frac{\lg 2}{\lg 2 - \lg 3} = -1{,}7095.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که په (۱۳ . ۱۴) د الجبري وییني یا افادي(f (x اکسپوننتونه یاجګګنونه وي، نو:

$a^{f(x)}=b, a>0, a|=1, b>0$ (13 . 16)

په دې ډول د لوګاریتمولو له لارې یو الجبري برابرون لاس ته راځي

$f(x)=\log_a b$..............................(13,17)

د کومو ځوابونه چی د) ۱۳ . ۱۶ (ځوابونه هم دی.

بیلګه ۱۳ . ۹ : مساوات $2^{x^2+x-4} = 4$

مو لاندې ځلوری برابرون یا مربع مساوات ته بیایي (لاربنودوي)

$(x^2+x-4)=\log_2 4 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + x - 6 = 0$

د $x_1 = 2$, $x_2 = -3$ ځوابونوسره ، کوم چی د پیل برابرون اوبیونې یا ځوابونه هم دي.

بیلګه ۱۳ . ۱۰ :

په برابرون $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^{x+1}$ کی د یوه پوتنځ بنسټ د بل پوتنځ د بنسټ په څټ ارزښت دی. له دې امله باور لري

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x+1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$$

له دې څخه لاس ته راځي

$x_1 + 1 = -3$, $x_2 = -4$

بیلګه ۱۳ . ۱۱ : په مساوات $16^{(3^x)} = 4^{(6^x)}$

کې کیدی شي چې ناپیژندونکی د اکسپوننت یا په جګ څخه د دوه واره لوګاریتمولو له لارې لاس ته راشي (راحل شي):

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$3^x \cdot \lg 16 = 6^x \cdot \lg 4 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{6}\right)^x = \frac{\lg 4}{\lg 16} \Leftrightarrow x \cdot \lg 0{,}5 = \lg \frac{\lg 4}{\lg 16} = \lg \frac{2\lg 2}{4\lg 2},$$

$$x \cdot \lg 0{,}5 = \lg 0{,}5 \quad \text{یا} \quad \text{oder} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2},$$

$$x = 1 \qquad\qquad x = 1.$$

بېلګه ۱۳ . ۱۲ : $7\sqrt[x]{22} - 15\sqrt[x]{25} = 0$

یو د تیپ یا ډوی مساوات دي، ځکه چې باور لري

$$\frac{\sqrt[x]{22}}{\sqrt[x]{25}} = \frac{15}{7} \Leftrightarrow \sqrt[x]{\frac{22}{25}} = \frac{15}{7} \Leftrightarrow \left(\frac{22}{25}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{15}{7}$$

او له دې امله

$$\frac{1}{x} = \frac{\lg \frac{15}{7}}{\lg \frac{22}{25}} \Leftrightarrow x = \frac{\lg 22 - \lg 25}{\lg 15 - \lg 7} = 0{,}1677.$$

که د مساوات په کېن اړخ د اکسپوننشل افادو څلونه او یا ویشونه هم وي، د مختلفو بنسټونو او مختلفو الجبري اکسپوننتونو سره، کیدی شي چې د لوګاریتمولو له لارې الجبري مساوات لاس ته راشی.

له

$$\frac{a_1^{f_1(x)}.a_2^{f_2(x)}........}{b_1^{g_1(x)}.b_2^{g_2(x)}........} = c;..................................(13,18)$$

څخه لاس ته راځي:

$$f_1(x)\lg a_1 + f_2(x)\lg a_2 + ... - g_1(x)\lg b_1 - g_2(x)\lg b_2 - .... = \lg c \qquad (13.19)$$

که یو مساوات مو مخ ته پروت وي، په کوم کی چې د یوه اکسپوننشل افادې یوه الجبري وپینه یا افاده F د الجبري اکسپوننت(f(x سره رامنځ ته شي

$$F(a^{f(x)})=0\ ;...................................(13,20)$$

نو دا بدلونه کوو

$$y = a^{f(x)} \qquad (13.21)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د برابرون

$$F(y) \qquad (13.22)$$

د ټولواوبیونو $y_1, y_2, y_3;$............... لپاره باید

$$a^{f(x)} = y_i; i=1,2,3....... \qquad (13.23)$$

په همدې ډول

$$f(x) = \log_a y_i \quad ; i = 1, 2, 3 .... \qquad (13.24)$$

اوبی شي

بیلګه ۱۳ . ۱۳:

برابرون $3^{2x} + 3^x = 2$ کیدی شي چی د بدلون $y = 3^x \, (y^2 = 3^{2x})$ سره په ځلوری

برابرون یا مربع مساوات $y^2+y-2=0$ بیرته واړول شي. لاس ته راځي

$$y_{1.2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}; y_1 = 3^x = 1; y_2 = 3^x = -2$$

له دې ځخه لاس ته راځي

$$x_1.\lg 3 = \lg 1 = 0, \; x_1 = 0$$

دا برابرون $x_2.\lg 3 = \lg(-2)$ اوبیونه نه لري

بیلګه ۱۳ . ۱۴ :

په برابرون

$$\sqrt{e^{x^2-1}} - \sqrt{e^{x^2-1} - 1} = \sqrt{2e^{x^2-1} - 1}..........................(13,25)$$

کې داسی بدلوو:

$$y = e^{x^2-1}.......................................(13,26)$$

او لاس ته راوړو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sqrt{y}-\sqrt{y-1}=\sqrt{2y-1};............................(13,27)$$

له دې څخه د مربع کوولو له لارې لاس ته راځي:

$$y+y-1-2\sqrt{y(y-1)}=2y-1\Rightarrow -2\sqrt{y(y-1)}=0 => y(y-1)=0$$

$$y_1=0; y_2=1$$

$y_2=1$ ټیك (۱۳ ، ۲۷) پوره کوي. له دې امله

$$e^{x^2-1}=1 \qquad ....(13,28)$$

حل اوبی . د لوګاریتمولو څخه تعقیبیږي:

$x^2-1=\ln 1=0,$

$x1 = 1 , x2 =-1$

دواړه ارزښتونه پیلبراږون پوره کوي۰

برسیره پر دې باید وښوول شي، چې په برخی ۱۳ . ۱ او ۱۳ ۲ کی انځور شوي متودونو سره یوه د مساواتو ټوله لړی حل کیدی شي، په کوم کی اکسپوننشل افادې او لوګاریتم یوځاي رامنځ ته کیږي.

بیلګه ۱۳ . ۱۵ :

له $2^{(\ln^2 x-\ln x+1)}=8$ څخه د بیلګي په توګه د بنسټ 2 لوګاریتموولو له لارې لاس ته راځي

$$\ln^2x-\ln x+1=\log_2 8 = 3$$

که کیږدو $y = \ln x$ ، نو دا څلوری برابرون یا مربع مساوات $y^2-y-2=0$ لاس ته راځي،د ځوابونو

$y1 = -1 , y2 = 2$

سره او له دې بیا لاس ته راځي:

$\ln x=-1 , \ln x=2, x1=e^{-1}=1/e , x2=e^2$

۱۳ . ۳ ګونومتریکي- یا کونجکچ برابرون

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګونومتري ساده برابرون لاندې ډيره لري

$$\sin x=a\ ,\ \cos x=a \qquad (13\ .\ 29)$$

$$\tan x=a\ ,\ \cot x=a, \qquad (13\ .\ 30)$$

دلته فقط دواړه لومړي برابرونونه (۱۳ . ۲۹) ځوابونه لري ، كه $-1 \le a \le 1$ باور ولري، نور ارزښتونه sin x او cos x نه شي غوره کولی(پرتله برخه ۶ . ۳) د جبشميرني سره د تكمو يا ګوټكونو په پرلپسی د (۱۳ . ۲۹) همداسی (۱۳ . ۳۰) يو ځواب لاس ته راځي
د(۱۳، ۲۹) لپاره

a F sin a F cos

د (۱۳،۳۰) لپاره

a F tan a 1/x tan

دا چي tan x او cotx پريودې همداسی 180^{o}لري او په يوه اينتروال کی چي اوږدوالی همداسی 180^{o}لري د(۱۳ ۳۰) ټيك يو ځواب پروت دی، لاندې جمله صدق کوي

جمله ۱۳ . ۱ :كه x0 د(۱۳ . ۳۰) يو ځواب وي) چی د بيلګي په توګه د جبشميرنی په مرسته لاس ته راځي)، نو د (۱۳ . ۳۰) د لاندې بڼی ټول ځوابونه تر لاسه کوو

$$x_k = x_0 + k\pi = x_0 + k.180°; k = ... -3, -2, -1, 01, 2, 3, ...; .... (13,31)$$

په همدې ډول دې دلته هم د هندسی برخه په پام کی وي. چی د هغو له مخې په (۱۳ ، ۳۱) کی د بيلګي په توګه باور لري

$$x_k = \frac{\pi}{6} + k\pi = 30^{o} + k.180^{o}$$

د كونجونو فنكشنونه sin x او cos x پريودې(تل بېرته راګرځېدنه يا دوران)

$$2\pi = 380°$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لري. مساوات (۲۹.۱۳) ددې اوږدوالی اینتروال کی دوه حلونه لري. که چیرته د جبشمیرني سره یوه اوبیونه x_0 پیداشي، نو د sin x = a په حالت کی $x = -x_0$ هم یو حل دی، او $x = -x_0$ د cos x = a په حالت کی یو بل اوبی

یا حل دی. پس لرو:

جمله ۱۳ . ۲ : که x0 د (۱۳ ، ۲۹) یو هغه اربیونه یا حل وي، چی د بیلګي په توګه په جبشمیروني لاس ته راځي، نو د sin x = a ټول حلونه په لاندې ډول لاس ته راځي

$$x_k = x_0 + 2k\pi = x_0 + k.360°; k = ...-3,-2,-1,0,1,2,3,....;..................(13,32)$$

$$\bar{x} = \pi - x_0 + 2k\pi = 180° - x_0 + k.360°;..(13,33)$$

او د cos x = a ټول حلونه په لاندې ډول لاس ته راځی

$$x_k = x_0 + 2k\pi = x_0 + k.360°; k = ...-3,-2,-1,0,1,2,3,....;..................(13,34)$$

$$\bar{x} = -x_0 + 2k\pi = -x_0 + k.360°;...(13,35)$$

بیلګه ۱۳ . ۱۶: د مساوات sin x = 0,23910 لپاره د جبشمیرني سره لاندې حلونه لاس ته راځي: (په درجه کچ یا ګراد اندازه) x0 =13,833427º
(په لینده کچ)0,24143 = 0,017453. 3,833427
د) ۱۳ . ۳۲ (،) ۱۳ ، ۳۳ (له امله په لاندې سره ټولې اوبیونې راکړ شوي دي

$$x_k = 13,833427 + k.360º = 0,24143 + k.6,28318,$$

$$\bar{x}_k = 166,16657º + k.360 = 2,9001 + k .6,28318.$$

بیلګه ۱۳ . ۱۷ : د برابرون cos x = -0,682000 اوبیونه د جبشمیروني سره مومو

$$x0 = 133,00013º = 133º = 2,32125.$$

د (۱۳ ، ۳۴) او (۱۳ . ۳۵) له مخی ټول حلونه په لاندې ډول لاس ته راځي

$$x_k = 133° + k .360° = 2,32125 + k.6,28318,$$

$$\bar{x}_k = -133° + k.360° = -2,34125 + k.6,28318$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۳ . ۱۸:

د برابرون $\tan x = -\sqrt{3} = 4,843000$ حل په جبشمیرني پیداکوو

$x_0 = -59,999988° = -60° = -1,04718$

له دې امله د) ۱۳ . ۳۱ (له مخې ټول حلونه په لاندې ډول لاس ته راځي

$x_k = -60° + k.180° = -1,04718° + k.3,14159$

بیلګه۱۳ . ۱۹:

د برابرون $\cot x = 4,843000$ ټولې اوبیونې یا حلونه د جبشمیرني سره داسې

$x_0 = 11,666677° = 11,67° = 0,203675$

لاس ته راځي. په دې توګه د (۱۳ . ۳) له مخې ټول حلونه په لاندې ډول لرو:

$x_k = 11,67° + k.180° = 0,203675 + k.3,14159$

بیلګه ۱۳ . ۲۰ : مساوات $\sin x = \sqrt{2}$ د $1 < 2$ له امله اوبیونه ل نه لري .

د ګونومتري مساواتو نور تیپونه یا ډولونه، کوم چې تراوسه په څرګندومتودو یا لارو ځوابوړ دي، لاندې بڼه لري

$$\sin f(x) = a , \quad \cos f(x) = a \qquad (13 . 36)$$

$$\tan f(x) = a , \quad \cot f(x) = a \qquad (13 . 37)$$

دلته کیدی شي چې (f(x الجبري او یا ترانسڅیندنته افاده وېکه بدل (سوبستیتوتي) شي

$$y = f(x) \qquad (13.38)$$

نو لاندې مساواتونه لاس ته راځي

$$\sin y = a , \cos y = a \qquad (13 . 39)$$

$$\tan y = a , \cot y = a \qquad (13 . 40)$$

دا کیدی شي د جملې ۱۳ . ۱ سره سم اوبی کړای شي. ددې اوبیونې یا حلونه دې

$y3, y2, ,y1 , ...$ وي .

د (۱۳ ، ۳۷) سره سم د $f(x) = y_i , \; i = 1,2,3,...$ ټولې اوبیونې یا حلونه لاس ته راځي ددې لپاره دې بیلګه ورکړ شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۳ . ۲۱: $\sin(x-120°)/3=1/2$

د سبستیچیوشن یا بدلون $y=(x-120°)/3$ سره لاس ته راځي $\sin y=1/2$ د لاندې اوبیوني (حل) سره

$$y_k = 30° + k.360° , k = ...,-3,-2,-1, 0,1,2,3...$$

$$\overline{y}_k = 150° + k.360°$$

ټول د $(x - 120°)3 = y_k$, $(x - 120°)/3 = y_k$ اوبوني (حلونهو په توګه لاس ته راځي:

$$x_k = 3y_k +120 = 90°+3k.360°+120° = 210° +3k.360°$$

$$\overline{x}_k = 3y_k +120° = 450° + 3k . 360° + 120° = 570°+3k.360°$$

د ګونومتري فنکشنونو یو بل تیپ یا ډول ، له لاندې څخه لاس ته راځي

$$f(\sin x,\cos x,\tan x,\cot x,\sin 2x,\cos 2x,\tan 2x,\cot 2x, \sin 3x,\cos 3x,\tan 3x,\cot 3x, ...) \qquad (13 . 42)$$

دلته که د بیلګي په توګه بدل شي

$$y = \sin x \qquad (13 . 43)$$

د ۴ . ۵ برخی تریګونومتري فرمولونو په مرسته ټول په (۴۲ ، ۱۳) رامنځ ته شوي کونجفنکشنونه په y سره افاده کولی شو:

$$\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x} = \pm\sqrt{1-y^2},$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{y}{\pm\sqrt{1-y^2}}, \qquad \cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\pm\sqrt{1-y^2}}{y}, \qquad (13.44)$$

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x = \pm 2y\sqrt{1-y^2}, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1-2y^2$$ (usw. او داسې نور

له دې سره برابرون (۴۲ . ۱۳)، په y ، یو برابرون بدلیږي:

$$F(y) = 0 \qquad (13 , 45)$$

دا دې په همغه ډول حلیدونکي وي او حلونه دې ....y3. y2 , y1 وي. نو بیاد(۱۳.۴۳)سره مناسب لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sin x = y_i, i=1,2,3... \quad (13.46)$$

اوبی کړي او د ټولو اوبیونو سره، کوم چی په (۱۳ . ۴۲) کي ښول شي ، وازمایل شي، چی ایا دا هم پوره کوي، که نه په (۱۳ . ۴۲) کیدی د x په ځاي یوه افاده g(x) هم ولیکلی شي.

$$f(\sin g(x), \cos g(x), ...) = 0 \quad (13.47)$$

نو بیا سړی بدلوي

$$y = \sin g(x) \quad (13.48)$$

د پورته متود تشریح لپاره په لاندې ډول دوه ساده بیلګي ورکول کیږي

بیلګه ۱۳ . ۲۲:

برابرون

$$\sin x + \cos x = 1 \quad (13.49)$$

د (۱۳ . ۴۲) ، (۱۳ . ۴۴) سره ځان په رینه ببرابرون بدلوي

$$y \pm \sqrt{1-y^2} = 1 \iff \pm\sqrt{1-y^2} = 1-y \iff 1-y^2 = 1 + y^2 - 2y \quad (13.50)$$

$$\iff 0 = 2y^2 - 2y = 2y(y-1)$$

$$y_1 = 0 , y_2 = 1 \quad (13.51)$$

اوس دې په یاد شي ، چی د y2=1 لپاره برابرون (۱۳ . ۵۰) او له دې سره سم برابرون (۱۳ . ۴۹) تل پوره دي. د دې په څنګ یا خلاف y1 فقط د (۱۳ .۵۰) حل دی ، که د
رینی له مخه زیاتیز یا مثبت نخښه وي. دا حالت یوائي هلته مخ ته پروت دی، چی cos x>0وي.

دا هلته هم پام ته راځي، که د برابرون (۱۳ . ۵۱) سره برابرون (۱۳ . ۴۶)حل یا اوبی شي او
حل یا اوبونه یی په (۱۳ . ۴۹) کی کیښول شي:

$$\sin x = y_1 = 0 , x_k = k\pi ; \; k = ...-3,-2,-1,0,1,2,3... \quad (13.52)$$

$$\sin x = y_2 = 1 , x_k = \pi/2 + 2k ; \; k = ..,-3,-2,-1,0,1,2,3,... \quad (13.53)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که (۵۲ . ۱۳) په (۴۹ . ۱۳) کینبوول شي، نو لاس ته راځي:

د جوړه k لپاره $\sin x_k + \cos x_k = \sin k\pi + \cos k\pi = 0 + 1$

د جوړه k لپاره $\sin x_k + \cos x_k = \sin k\pi + \cos k\pi = 0 - 1$

د پیلمساوات د زیاتځله حلونه یواځي جفت ګڼونه دي($x\pi = 2k\pi$) که(۱۳ . ۵۳) په (۱۳ . ۴۹) کینبوول شي، نو لاس ته راځي

$$\sin x_k + \cos x_k = \sin(\pi/2 + 2k) + \cos(\pi/2 + 2k) = \sin\pi/2 + \cos\pi/2 = 1 + 0 = 1$$

له دې وروسته ټول xk پیلبرابرون پوره کوي .

نو د (۱۳ . ۴۹) ټولې اوبیونې په لاندې بڼه لاس ته راځي

$$x_k = 2k\ ,\ x_k = \pi/2 + 2k\ ;\ k = ..-3,-2,-1,o,1,2,3,...\quad (13\ .\ 54)$$

بیلګه ۱۳ . ۲۳ : د برابرون $\cos x + \cos 2x = 0$ (13.55)

سره کیدی شي د ریښنی مساوات ځخه لار واړوو یت تیرشو. که چیرته $y = \cos x$ بدل کړي. د

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = y^2 - (1 - y^2) = 2y^2 - 1 \quad (13.57)$$

له امله له ځخه (۱۳,۵۵) مربع مساوات لاس ته راوړو.

$$2y^2 + y - 1 = 0 \quad (13.58)$$

د دې حل سره : $y_{1;2} = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{8}{16}} = -\frac{1}{4} \pm \frac{3}{4}$,

$$y_1 = \frac{1}{2}\ ,\quad y_2 = -1. \quad (13.59)$$

په (۱۳ . ۵۶) کې ایښوولو له لارې لاس ته راځي

$$\cos x = y_1 = \frac{1}{2}\ ,\quad x_k = 60° + k \cdot 360° = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,$$

$$\bar{x}_k = 300° + k \cdot 360° = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, \quad (13.60)$$

$$\cos x = y_2 = -1,\quad \bar{\bar{x}}_k = 180° + k \cdot 360° = \pi + 2k\pi, \quad (13.61)$$

$$x = \begin{Bmatrix} 60° \\ 180° \\ 300° \end{Bmatrix} + k \cdot 360° = \begin{Bmatrix} \frac{\pi}{3} \\ \pi \\ \frac{5\pi}{3} \end{Bmatrix} + 2k\pi. \quad (13.62)$$

تمرینونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټول ارزښتونه x وشمیری، چې لاندې برابرونونه پوره کوي! پام دې وي، چې د هرې پ،ښتنې سره يې ازمايل يا ازماېښت اړېندی.

١ - لوګاريتمي مساوات يا برابرونونه

1.1. a) $\log_4 (x + 1) = -3$ b) $4 - 3\lg 2x = 10$

c) $\lg \sqrt{2x} = 1{,}314$ d) $\ln (x - 1)^2 = 2$

1.2. a) $\lg (2x + 5) - \lg (3x + 1) = 2$ b) $\lg 4x + \lg 2x + \lg x = 6$

c) $\frac{1}{3}\ln x^6 = \frac{1}{2}\ln 81$ d) $\lg (x - 1)^2 = 6 \lg 2$

1.3. a) $\lg (x - 1) + \lg 3 = \lg (x^2 - 1)$

b) $\lg (x + 1)^2 = \lg 2 + \lg (x + 1) + \lg (x - 1)$

c) $\lg x - \lg 4 = \lg 35 - \lg (x + 4)$

d) $\lg (x - 2) - \frac{1}{2} \lg 4 = \frac{1}{3} \lg 125 - \lg (x + 1)$

1.4. a) $\lg x + \lg (x + 1) + \lg (x - 1) = \lg 24$

b) $\lg 3 + 2 \lg x = \lg (4 + x^3)$ c) $\lg (152 + x^3) - 3 \lg (x + 2) = 0$

d) $2 \lg^2 x^3 - 3\lg x - 1 = 0$

1.5. a) $\lg x + \lg (a - \frac{1}{a}) = \lg (1 - \frac{1}{a}) + \lg (1 + \frac{1}{a})$

b) $\lg (ax) - \lg a + \lg \frac{b}{a} = \lg b + \lg \frac{x}{a}$

c) $\lg x - \lg \frac{x}{abx - 1} = \lg (a - 1) + \lg (a + 1)$

d) $\log_a (2x + 1) = \log_a (x - 1) + 1$

1.6. a) $\frac{10}{\lg x - 2} - \frac{5}{\lg x + 1} = 4$ b) $\frac{1}{\lg x + 1} - \frac{3}{\lg x - 3} = 2$

c) $\frac{2}{\log_2 x + 1} - \frac{1}{\log_2 x - 5} = 1$ d) $\frac{1}{5 - \lg x} + \frac{2}{1 + \lg x} = 1$

1.7. a) $\lg (x^2 + 1) = 2 \lg^{-1} (x^2 + 1) - 1$ b) $(\log_5 x - 2) \log_5 x = 25^{\log_5 \sqrt{3}}$

c) $\lg^2 x^3 - 10 \lg x + 1 = 0$ d) $\sqrt{\lg(1 - x)} + 5 \lg (1 - x) = 6$

1.8. a) $2\lg \lg x = \lg (3 - 2 \lg x)$ b) $\log_2 (x - 14) = 1 + \frac{1}{2} \log_2 (3x - 26)$

c) $4 \log_3^3 5x - 7 \log_3 15 x + 7 = 0$ d) $3 \lg^2 x^2 - \lg x - 1 = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1.9. a) $x^{\lg x+2} = 1000$ b) $x = 10^{1-0{,}25 \lg x}$
c) $x^{\log_5(5x)-4} = 625$ d) $x^{\log_a x} = a^2 x$

1.10. a) $x \lg \sqrt[5]{5^{2x-8}} - \lg 25 = 0$ b) $\log_2(4 \cdot 3^x - 6) - \log_2(9^x - 6) = 1$
c) $\log_2(9 - 2^x) = 10^{\lg(3-x)}$ d) $x(\lg 5 - 1) = \lg(2^x + 1) - \lg 6$

1.11. a) $\log_2[2 + \log_3(x+3)] = 0$ b) $\log_5[\log_2(\log_4 x)] = 0$
c) $2 \log_x 27 - 3 \log_{27} x = 1$ d) $\dfrac{\lg x}{\lg(x+1)} = -1$

۲ ـ اکسپوننشل مساوات

2.1. a) $(a^{x-2})^{x+2} = (a^{x+3})^{x-4}$ b) $a(a^{x-3})^{x+2} = a^{3x+5}(a^x)^{x-6}$
c) $\sqrt[3]{a^{2x+9}} = \sqrt[4]{a^{3x+5}}$ d) $\sqrt[x-2]{a^{11-x}} = \sqrt[9-x]{a^{x+3}}$

2.2. a) $10^{5x} = 3^{10}$ b) $0{,}375^x = 2576$
c) $\sqrt[x]{6{,}325} = 1500$ d) $\sqrt[x]{10{,}27} = \sqrt[4]{5}$

2.3. a) $\left(\frac{3}{4}\right)^{2x-3} = \left(\frac{4}{3}\right)^{3x+5}$ b) $\left(\frac{6}{7}\right)^{3x+10} = \left(\frac{7}{6}\right)^{2x-3}$
c) $\left(\frac{3}{5}\right)^{2x+1} = \left(\frac{5}{8}\right)^{3x+4}$ d) $16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3x-1} = 27 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}$

2.4. a) $\left(\frac{1}{100}\right)^{\frac{1}{x}} = 24{,}24^{\frac{1}{10}}$ b) $\sqrt[2x]{3^{3x+2}} = \sqrt[3x]{2^{2x+3}}$
c) $3^{(2^x)} = 2^{(3^x)}$ d) $8^{(5^x)} = 4^{(7^x)}$

2.5. a) $4^{x^2-x+1} = 8^x$ b) $3^{9x+1} = 9^{3x-1}$
c) $\sqrt{9^{x(x-1)-0{,}5}} = \sqrt[4]{3}$ d) $\sqrt[3]{\sqrt[x-1]{3^{10x+5}}} = \sqrt[3x-9]{27^{3x-7}}$
e) $2^{x^2-6x-2{,}5} = 16\sqrt{2}$ f) $2^{x^2-7{,}7x+16{,}5} = 8\sqrt{2}$
g) $5^{(x^2+x-2)(3-x)} = 1$ h) $4^{\sqrt{x+1}} = 64 \cdot 2^{\sqrt{x+1}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2.6. a) $7^{2x+1}-3^{x-1}=7^{2x+3}-3^{x+1}$ b) $2^{x+1}-3^{x}=2^{x+3}-3^{x+2}$

c) $3^{2x-1}-5^{3x-2}=3^{2x+1}-5^{3x+2}$ d) $5^{2x}-3\cdot5^{x}+2=0$

e) $5^{4\sqrt{x}}-6\cdot5^{2\sqrt{x}}+5=0$ f) $2^{\frac{3}{\sqrt{x}}}-2^{\frac{2}{\sqrt{x}}+1}+2^{\frac{1}{\sqrt{x}}}-2=0$

g) $3^{x+1}-2=9^{x}$

h) $3^{x+1}+3^{x-1}+3^{x-2}=5^{x}+5^{x-1}+5^{x-2}$

i) $2\cdot3^{x+3}+7\cdot3^{x-2}=493$ j) $3^{\sqrt{x}}-3^{1-\sqrt{x}}=\frac{26}{3}$

k) $33\cdot2^{x-1}-4^{x+1}=2$ l) $3^{x}+3^{x+1}+3^{x+2}=5^{x}$

2.7. a) $5^{x-3}+2\cdot5^{x-2}=5{,}08$ b) $5^{\sqrt{x}}-5^{3-\sqrt{x}}=20$

c) $9^{\sqrt{x^2+3x}}+0{,}5+9=28\cdot3^{\sqrt{x^2+3x}}$ d) $2^{-2x}-17\cdot2^{-(x+2)}+1=0$

e) $2^{x^2}+2^{1-x^2}=\frac{9}{2}$ f) $12\sqrt[2x]{3}-\sqrt[x]{3}=27$

g) $4^{\sqrt{3x^2-2x}+1}+2=9\cdot2^{\sqrt{3x^2-2x}}$ h) $\sqrt{3^{x-56}}-7\cdot\sqrt{3^{x-60}}=162$

i) $9^{x^2-1}-36\cdot3^{x^2-3}+3=0$

2.8. a) $\frac{3^{x}+3^{-x}}{3^{x+1}-1}=\frac{5}{12}$ b) $\frac{2^{x}+1}{2^{x}-4^{x}}=6$

c) $4+\frac{2}{3^{x}-1}=\frac{5}{3^{x-1}}$ d) $\frac{2^{x}+10}{4}=\frac{9}{2^{x-2}}$

e) $x^{x}=x$

۳ – گونومتریکي – یا کونجکچیز مساوات

3.1. a) $\tan x=\frac{1}{2}$ b) $\sin x=\frac{1}{2}\sqrt{2}$ c) $\cot x=\frac{2}{5}$ d) $\tan x=-1$

3.2. a) $\sin(2x-\frac{\pi}{2})=0{,}309$ b) $\cos(2x-\frac{\pi}{3})=0{,}342$

c) $\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{10})=0{,}809$ d) $\cos(x+\frac{\pi}{3})=0{,}471$

(c) ketabton.com: The Digital Library

3.3. a) $5\sin^2 x - 10\cos^2 x - 1 = 0$ b) $\cos^2 x + \frac{1}{3}\sin x\cos x + \frac{2}{3}\sin^2 x = 1$

c) $\cos^2 x + 2\cos x - \sin^2 x + 1 = 0$ d) $2\cos^2 x + \sin x - 1 = 0$

e) $\sin^2 x + 5\sin x\cos x + 8\cos^2 x = 0$ f) $\sin^2 x - \cos^2 x - 3\sin x + 2 = 0$

g) $\sin^2 x - 2\cos x + 2 = 0$ h) $\sqrt{1+\cos x} = \sin x$

i) $\sqrt{1+\sin x} + \cos x = 0$ j) $\sin^4 x = 2\cos^2 x - 1$

k) $\sqrt{\cos x} + \sqrt[4]{2}\sin x = 0$ l) $1 - \cos x = \sin x$

3.4. a) $\sin 2x = \sqrt{3}\sin x$ b) $\cos 2x = \cos x$

c) $\sin 2x \cdot \tan x = 1$ d) $\cos 2x + 3\cos x = 1$

e) $\cos\frac{x}{2} - \cos x = 1$ f) $2\sin\frac{x}{2} - \cos x + 1 = 0$

g) $\cos x + \cos 2x = \sin x + \sin 2x$

h) $2\sin x\cos 2x - 1 + 2\cos 2x - \sin x = 0$

i) $3(1 - \sin x) = 1 + \cos 2x$ j) $\sin 2x + 2\cot x = 0$

k) $3\cos 2x - 20\sin x = 9$ l) $\cos 2x + 2\cos x + 1 = 0$

3.5. a) $2\sin^2\frac{x}{2} + \cos 2x = 0$ b) $2\cos^2\frac{x}{2} + \cos 2x = 1$

c) $\tan x - \sin x = 2\sin^2\frac{x}{2}$ d) $\sin^2 x - \cos^2 x = \cos\frac{x}{2}$

e) $2\sin^2 x + \sin^2 2x = 2$ f) $3 - 2\sin^2 2x = 2\sin^2 x$

g) $5\cos 2x + 16\sin x + 14\sin^2 x + 7 = 0$

h) $3\cos 2x - 6\cos x + 4\sin^2 x = -3$

i) $2\cos x + 3 = 4\cos\frac{x}{2}$ j) $2\sin^2 x + \sin^2 2x = 0$

k) $\tan x + \tan 2x - \tan 3x = 0$

3.6. a) $\cos x\cos 2x = \cos 3x$ b) $\sin 5x\cos 3x = \frac{1}{2}\sin 8x - 0{,}5$

c) $\sin^2 x + \cos^2 2x = \sin^2 3x + \cos^2 4x$ d) $(\cos 8x)^2 \cdot 2 + \sin 16x = 1$

e) $2\cos^2 4x + \sin 10x = 1$ f) $2 - 6\sin x\cos x = \cos 4x$

g) $\cos 4x + 2\cos^2 x = 1$ h) $\sin x\cos 5x = \sin 9x\cos 3x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

i) $\sin\frac{7x}{2}\cos\frac{3x}{2} = \sin\frac{9x}{2}\cos\frac{x}{2}$ j) $\cos\frac{7x}{2}\cos\frac{x}{2} = \cos\frac{9x}{2}\cos\frac{3x}{2}$

k) $\sin x - \sin 3x + \sin 5x - \sin 7x = 0$ l) $\cos x + \cos 3x = \cos 5x + \cos 7x$

3.7. a) $2\sin^3 x - 3\sin x\cos x = 0$ b) $4\sin^3 x - 8\sin^2 x - \sin x + 2 = 0$

c) $\tan^3 x + \tan^2 x\ \ 3\tan x - 3 = 0$ d) $\tan^3 x - \tan^2 x + \tan x = 1$

3.8. a) $\sqrt{3}\sin x + 3\cos x = 0$ b) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = \sqrt{3}$

c) $\sqrt{3}\sin 3x + \cos 3x = 1$ d) $\sqrt{2\sin 2x} + 2\sin x = 0$

e) $1 - \sin x = \sin^2(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})$ f) $2\sin^2\frac{x}{2} = \cos(\frac{3\pi}{2} + \frac{x}{2})$

g) $1 - \cos 2x + \cos 6x - \cos 8x = 0$ h) $\cos x - 2\cos 3x + \cos 5x = 0$

i) $\cos 4x + 2\cos^2 x = 0$ j) $1 - \sin x\cos x + \sin x - \cos x = 0$

k) $\cos 3x + \sin 3x = \cos x + \sin x$ l) $\sin x\cos x - \sin^2 x - \cos x + \sin x = 0$

m) $\sin x + \cos x = \frac{1}{\cos x}$ n) $(\cos x)^{\sin x} = 1$

o) $\frac{1+\cos 2x}{2\cos x} = \frac{\sin 2x}{1-\cos 2x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۴. د نامساواتو یا نابرابرونونو او مطلقه ارزښتونو سره شمیرنه

۱۴ . ۱:نابرابرون(نامساوات)

۱۴ . ۱ . ۱ بنسټیزې کلیمی او شمیرقوانین

یو نابرابرون لاس ته راځي، که دوه ترمونه T1 او T2 د یوې اړیکنخښنی<, ≥,> او ≤ له لارې یو د بل سره تړلي وي.
په لاندې کی به نابرابرونونه تر څیړنی لاندې ونیول شي، چی یوه یا دوه ریيلی واریابلی یا اوښتونی ولري . یو نابرابرون د دوه واریابلو(اووښتونو) سره د وینامنطق په بنسټ یو د وینا شکل ښايي، د هغو سره چی واریابلی هر ارزښت غوره کولی شي، د کومو لپاره چی ترمونه T1 او T2 څرګنددي . یو اوبی یا حل هر هغه ارزښت دی ، په همدې توګه هغه ارزښت جوړه ده، چی واریابل یا اووښتونې یی غوره کولی شي او په ترم کی د هغي ځاي په ځاي کیدو سره نابرابرون یوه ریښتونی وینا وي . د ټولو اوبیونو یا ځوابونو ټولګه په حلډیري L کی سره راټولیګي.
په لاندې برخه کی به ډیر د وینامنطق(ویناسم اندیز) سومبولونه چی په برخه ۱ ۰ ۲ (او د ډیري عملیو سومبولونه) چی په برخه ۲ . ۳ راغلي په کار واچول شي. د دې سومبولونو د اهمیت یا غوره والي سره دې سړی بیا هم ځان اشنا کړي.
د نابرابرونونو سره شمیرنه کی دې لاندې قاعدې په پام کي ونیول شي(مقایسه برخه ۳)، دلته دې a , b , c او dریيل ګڼونه وي. لاندې باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a<b \Leftrightarrow a \pm c<b \pm c,$ (14,1)

$a<b \wedge c>0 \Rightarrow a.c<b.c$ (14,2)

$a:b<b:c$ (14,2)

$a<b \wedge c<0 \Rightarrow a.c>a.c$ (14,3)

$a:c>b:c$ (14,3)

$a<b \wedge c=0 \Rightarrow a.c=b.c$ (14,4)

د برابرونونو شميرنى سره انډول کى دې دلته (۱۴ . ۳) قاعده ځانګړې تر پام لاندې وي.د منفى يا کميز ګڼ سره ځل يا ويش عمليه کى دا د نابرابرون نخښه راکرځي يا را په ښت کيږي يا که غواړئ برعکس کيږي. د بيلګي په توګه $3<4$ مګر که داوړه خواوې د 1 - سره ځل شي نو لاس ته راځي $-3>-4$ -
ټول د شميرلو لپاره ورکړ شوي قواعد د نابرابرون لپاره په ورته ډول د اړيکنخښنو > سره باور لري دا په دې مانا چیb $a \le$ دا چی په څرګند ډول د دوه ګڼونو ځل او ويش هلته زياتيز (مثبت)دی چی دواړه ګڼونه همغه مخنخښه ولري او کميز (منفي) که چيری مخنخښي يی توپير ولري، او لاندې اړيکی باور لري:

$a.b>0 \Leftrightarrow$ (14,5)

$\Leftrightarrow a:b>0\ (a>0 \wedge b>0) \vee (a<0 \wedge b<0),$ (14,5)

$a.b<0 \Leftrightarrow$ (14,6)

$\Leftrightarrow (a>0 \wedge b<0) \vee (a<0 \wedge b>0).$ (14,6)

دبرابرونونو شريکولو کی، په ځانګړي ډول د ويش لپاره، بايد ونيول شي چی $b \ne 0$ يعني د ځل او ويش لپاره دې توپيريدونکو قاعدو ته پام وي . د بيلګي په توګه دي:

$a.b \ge 0 \Leftrightarrow (a \ge \wedge (a \ge 0) \vee (a<0 \wedge b<0)$ (14,7)

$a:b \ge 0 \Leftrightarrow (a \ge 0 \wedge b>0) \vee (a \le 0 \wedge b<0)$ (14,8)

۱۴ . ۱ ۱الف اينتروال

د واريابلو د څيړنو لپاره بايد ټول معتبر ډيري ورکړل شي، د بيلګي په توګه د يوه فنکشن يا بلواك تعريف - او ارزښت ډيري.

پيژند ۴ . ۱ الف :
يو اينتروال يو د يوبل سره اړوند د رييلګڼونوR برخه ډير) ده٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

یو اینتروال له دې امله، بې له تشوالي یا تشي ، د ګڼکرښی یوه ټاکلی برخه ده، چی له دوه ګڼونو a او b رابندیږي. که د غاړې ټکي په اینتروال کی دننه وي یا خونديې وي نو د بند اینتروال څخه غږیږو او که اینتروال پورې اړه ونه لرې، واز اینتروال دی، او په همدې ډول نیمبند او نیم واز اینتروالونه.

د اوبیډیری په ورکولو سره په ګڼکرښی باندې، لاندې د انیتروال انځورونه په کار اچول کیږي.

لاندې ۱۱ د اینتروال مختلف تیپونه دي یا نې ، چې a او b له R دي او $a < b$ ده.

1. $(a,b) = \{x \mid a < x < b\}$ واز اینتروا ، اخر تخري په اینترول اړه نه لیر
2. $[a,b] = \{x \mid a \le x \le b\}$ بند اینتروال ، اخر توري په اینتروال ئوريې اړه لري
3. $[a,b) = \{x \mid a \le x < b\}$ ښی واز اینتروال
4. $(a,b] = \{x \mid a < x \le b\}$ کيڼ واز اینتروال
5. $(a,\infty) = \{x \mid x > a\}$ ښي لورته ناپاي او کيڼ لور ته واز اینتروال
6. $[a,\infty) = \{x \mid x \ge a\}$ ښي لور ته ناپای او کيڼ لور ته بند اینترال
7. $(-\infty,b) = \{x \mid x < b\}$ ښي لور ته واز او کيڼ ورته ناپاي اینتروال
8. $(-\infty,b] = \{x \mid x \le b\}$ ښي لور ته بند او کيڼ لورت ناپاي اینتروال
9. $(-\infty,\infty) = \mathbb{R}$ ناپای اینتروال ، ټول ریيلګڼونه
10. $\{a\}$ د دې یوه توري ډیری
11. $\varnothing$ تشډیری

لاندې اینتروالونه د ناپای په لور هم رابند دي یانې په دې مانا، چې د ناپای ډیری هم په اینتروال پورې اړه لري، یانې ناپای ډیری ټولنه ورسره جوړوي.

1. $[-\infty,b] = \{x \mid x \le b\} \bigcup \{-\infty\}$
2. $[-\infty,b) = \{x \mid x < b\} \bigcup \{-\infty\}$
3. $[a,\infty] = \{x \mid x \ge a\} \bigcup \{\infty\}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(a, \infty] = \{x \mid x > a\} \bigcup \{\infty\}$$

.4 $[-\infty, \infty] = \mathbb{R}^{+}$

Alternative notationپورته ته الترناتیو یا بدیلي لیکنبڼه

په نړیواله توګه یو بل ډول لیکنبڼهٔ په لاندې ډول ورکو لکیږي

$]a,b[= \{ x \mid a < x < b \}$

$[a,b] = \{ x \mid a \le x \le b \}$

$[a,b[= \{ x \mid a \le x < b \}$

$]a,b] = \{ x \mid a < x \le b \}$

یادونه : داپورته د اینتروال ډولونه د نړیوال جال څخه راکښته شوي، دا می هم وغوښتل ګرانو لوستونکو ته وړاندی کړم

بند انیتروال : ۰۰۰۰ $[a,b]=\{x|a\le x\le b\}$

نیم و از اینتروال :۰۰۰۰۰ $(a,b]=\{x|a<x\le b\}$

نیم واز اینتروال :۰۰۰۰۰۰ $[a,b)=\{x|a\le x<b\}$

واز اینتروال : ۰۰۰۰۰ $(a,b)=\{x|a<x<b\}$

ښی بند ناپای اینتروال : $(-oe,b]=\{x|x\le b\}$

کښ بند ناپای اینتروال : $[a,oe)=\{x|x\ge a\}$

ښی واز ناپای اینتروال :۰ $(-oe,b)=\{x|x<b\}$

کیڼ واز ناپای اینتروال :۰ $(a,oe)=\{x|x<b\}$

ناپای اینتروال : {x د ګښکرښی تکی دیٔ|x}=(oe ،oe-)

بیلګه ۱۴ . ۱الف:

په بنستیزه ډیری Rکی د لاندې برابرون پیژندډیری غوښتنه منځ ته راچوو.

$x - 2 = 1 + 7 - x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل : د دې ترم T1(x) = x - 2 پیژندډیری ده:

D1 = [2 , oe)

په همدې توګه د ترم T2(x)=1+7-x پیژندډیری ی ده: D2 =(-oe,7)

د برابرون دپیژندډیری لپاره لاس ته راوړو:

$$D = D_1 \bigcap D_2 = [2,\infty) \bigcap (-\infty, 7] = [2,7]$$

لاندې څیره وګورې(متاسفانه، چې ښه څېره نه شم کښلی)

D2=(-∞;7]

D1=[2;∞]

۱۴ . ۱ ۲ .نابرابرون د یوې مجهولی سره

د شمیرقاعد ې لومړی د هغونابرابرونونو لپاره په کار اچول کیږي چې یوه اوښتوني یا مجهوله ولري، او اوبیونې یی په ټولیزه توګه د اینتروالونو له لارې انځوریږي.
(۱۴ . ۱) قاعده د په خوښه ترمونو د زیاتون او کمون داسی اجازه راکوي، لکه په برابرونونو کی.

بیلګه ۱۴ . ۱:

لرو 5x-6<4+9x دواړو لورو ته 6 + 9x- ورزیاتوو، نو لرو 10 > 4x- دواړه خواوې په 4 - ویشو.

د (۱۴ . ۳) له مخې لاس ته راځي x > -5/2
د اوبیونې ډیر یا اوبیډیری : L=(-5/2,oe)
که په یوه غوښتونکی ځل یا ویش کی ځله وونی، همداسي پرویشونی یو واریابل یا اووښتونی ترم وي، نو باید د (۱۴ . ۲) تر (۱۴ . ۴) سره سم ددې ترم د مخنخښي په واك والي کی د حالت توپیرونه(ښه یې : توپیره ونه) تر پام لاندې ونیول شي .

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوګونو اوبیډیریو پیداکولوپه هکله، په هر ډول چی وي، باید په پام کی ولرل شي، چی یواځي هغه د نابرابرون شمیرل شوي د x - ارزښتونه اوبیونې دي، چي ټول ىی سملاسي (په همدې وخت کی) هغه نیول شوی (فرض شوی) شرایط پوره کړي.

هر برخ اوبیډېړی یا برخحلډیری کیدی شي چی د غوځډیری په څیر له همغه هرپورتني نماینده برخساحویا-ورشو(یا نوره هم ښه : -برخچاپیریالونو) واریابلی (اووښتونی) او د نابرابرون ډیری شمیرل شوو واریابلو یا اووښتونکو ارزښتونو جوړ شي. د غوځډیری جوړښت، کیدی شي چی د یوګونو ډیریو د ګرافیکی انځورونو په څیر په ګڼوړانګه ساده شي. د نامساوتو ټولې اوبیډیری د برخ اوبیډیري یوه د یوګونو حالتونو ټولنډیری ده .

بیلګه ۱۴ . ۲:

$$(3x-5)(x-2)<4(x-2)$$

که په (x-2) باندې وویشل شي، نو باید د شرایطو په پام کی لرلو سره سم

د $x > 2$ لپاره $(x-2)>0$

د $x = 2$ لپاره $(x-2)=0$

د $x < 2$ لپاره $(x-2)<0$

نابرابرن دې په درې برخه ساحو کی یو له بل بیل وڅیړل شي.

لومړی حالت:

$$x > 2 <=> x \in (2,\infty)$$

دلته د مخ ته پراته نامساوت لاندې ورته بڼه بدلون څخه لاس ته راځي

$$3x-5 \leq 4 <=> 3x \leq 9 \Leftrightarrow x \leq 3 \Leftrightarrow x \in (-\infty,3]$$

له دې x - ارزښتونو څخه یواځي هغه د مخه ورکړ شوي نابرابرون ، چي په لومړي حالت کی راوړل شوي اوبیونې دي ، یواځي هغه x د

$$x \in (2,\infty)$$

سره د اوبیو یا اوبیونو په څیر نیسو. له دې امله د لومړي حالت اوبیډیري لرو:

$$L_1 = (2,\infty) \bigcap (-\infty,3] = (2,3]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دوم حالت:

$x = 2 \Leftrightarrow x \in \{2\}$

د لته په (x -2) باندې ویشل کیدی نه شي.

د x = 2 ارزښت لیکلو ربښتیا وینا 0 $\geq$ 0 لاس ته راځي او له دې امله

L2 = {2 }

دریم حالت:

$x < 2 \Leftrightarrow x \in \{-\infty, 2\}$

د 0 > 2 - x له امله د (۱۴ . ۳) له مخې پخپله د مخه ورکړ شوي نابرابرون لاندې ورته فورمونه ورکوي

$3x - 5 \geq 4 \Leftrightarrow 3x \geq 9 \Leftrightarrow x \geq 3 \Leftrightarrow x \in [3, \infty)$

له دې x - ارزښتونو کوم یو نه شي کیدی چې په دریم حالت کې راوړل شي:

$L_3 = (-\infty, 2) \cap [3, \infty) = \varnothing$

د برخه اوبیډیریو ټولنی څخه ټول اوبیډیر) لاس ته راځي:

$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = (2,3] \cup \{2\} \cup \varnothing = [2,3]$

نو ټولې اوبیونې هغه x د ي د کومو لپاره چې لرو: 3 > x >2

په لاندې بیلګو کې نور دومره زیات توضیحات نه ورکول کیږي.

بیلګه ۱۴ . ۳ :

(3x-1)/(2x+4)<2

د شرایطو 0=|2x+4له مخې، دا په دې مانا چې 2=| x د مات لاندې سره ځله ونې له امله

د x>-2 لپاره 0<(2x+4)

د x<-2 لپاره 2<(2x+4)

سره سم یواځې دوه حالتونه توپیروو:

لومړی حالت:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x > -2 \Leftrightarrow x \in (-2, \infty)$$
$$3x - 1 < 4x + 8 \Leftrightarrow x > -9 \Leftrightarrow x \in (-9, \infty)$$
$$L_1 = (-2, \infty) \cap (-9, \infty) = (-2, \infty)$$

ځیره ۱۴ ۱ الف: دا ځېره لاندې کښل شوی، په هغې کې چې بیا دا اوبیډیری روښانه شو۰

دوم حالت:

$$x < -2 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -9)$$
$$3x - 1 > 4x + 8 \Leftrightarrow x < -9 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -9)$$
$$L_2 = (-\infty, -2) \cap (-\infty, -9) = (-\infty, -9)$$
$$L = L_1 \cup L_2 = (-\infty, -9)$$

پورته اخر د نابرابرون یا نامساوات حل یا اوبی دی۰

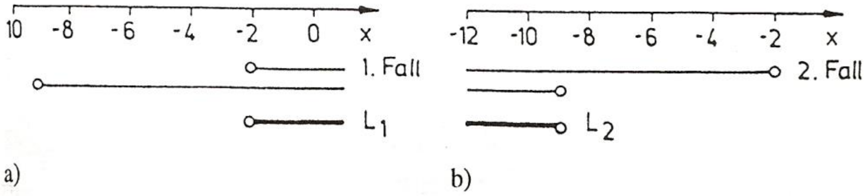


Bild 14 1

ځیره ۱۴ ا ب : دلته هم ګښونوکرښې شته، چۀ په هغې کې دا اوبیډیری روښانه کاږل شوي دي۰ ، که ځیره مې ونه کاږله، نو داکار بچ ګران لوستونکی هم وکولای شي۰

د مخنخښی راوړلو په بنسټ د نابرابرن یوه ځانګړي بڼه یا فورم، چی په (۵.۱۴) تر (۱۴ . ۸) اړیکو کی استعمال شوي، اوبیونه ګټوره وښايي.

نابرابرونونه

دلته هم څو بیلګې راوړل کیږي، چې نابرابرونونه په کې اوبی شوي دي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا برخه د نړیوالجال څخه راکښنته شوي، له دې امله یې لیکښه د مخکنۍ لیکښې سره توپیر لري. دا لاندې لرو .

$$ax + b > 0, \qquad a \neq 0$$;

$$x^2 - 5 < 0$$;

$$|2x - 5| \leq x + 10$$;

دلته اوبیونې اینتروالونه دي. ښول کیږي، چې اوبیډیرۍ څنګه پیداکیږي او د دې لپاره

اړیین شرایط کوم دي.

- په دواړو لورو همغه ګڼ زیاتیدلی یا کمیدلی شي
- که دواړه خواې د کمیز ګڼ سره ځل شي یا په کمیز ګڼ وویشل شي، نو مخنخښه تغیر خوري. که زیاتیز وي، نو دواړه خوا په توان کیدی شي او ریښج یې وستل کیدی شي، پام دې وي، چې برابرون بیا زیاتیزه او که کمیزه مخ نخښه غوره کوي او یا دواړه
- موږ 1.9:1(اوبی کوو

د $a > 0$ سره لورو

$$ax + b > 0 \iff ax > -b \iff x > -\frac{b}{a}$$

د لاندې حلسټ یا اوبیډیرۍ

$$\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{b}{a}\} = (-\frac{b}{a}, \infty).$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $a < 0$ سره لرو

$$ax + b > 0 \Longleftrightarrow ax > -b \Longleftrightarrow x < -\frac{b}{a}$$

د لاندې اوبیډیرۍ سره

$$\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{b}{a}\} = (-\infty, -\frac{b}{a}).$$

موږ 1.9:2(اوبی کوو :

$$x^2 - 5 < 0 \Longleftrightarrow x^2 < 5 \Longleftrightarrow |x| < \sqrt{5}$$

په اخرنې پل کې دې دې ته پام وي $\sqrt{x^2} = |x|.)$ د روانه تشیرح لپاره یا شننې لپاره یو د حالت توپیر رامنځ ته کوو :

په حالته $x \geq 0$ کې $|x| = x,$ او $|x| < \sqrt{5}$ په ساده ډول $x < \sqrt{5}.$ مانا لري

په حالت ist $x < 0$ کې $|x| = -x,$ او $|x| < \sqrt{5}$ د , $-x < \sqrt{5}$ په مانا یا ورته $x > -\sqrt{5}.$ نو لرو

$$|x| < \sqrt{5} \Longleftrightarrow -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$$

او اوبیډیرۍ

$$\mathcal{L} = (-\sqrt{5}, 0) \cup [0, \sqrt{5}) = (-\sqrt{5}, \sqrt{5}).$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

موږ 1.9:3 اوبی کوو د یوه حالت تو[پر سره

$$2x-5 \le x+10 \quad x \le 15, \quad \Longleftrightarrow$$

$$2x-5 \ge 0 \quad x \ge \frac{5}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad 2x \ge 5 \quad \Longleftrightarrow$$

(i) که وي $2x-5 \ge 0;$ نو دی $|2x-5| = 2x-5,$ او موږ لرو

له دې لاس ته راځي

$$\frac{5}{2} \le x \le 15.$$

(ii) $2x-5 < 0.$ نو دی $|2x-5| = -(2x-5)$ او لرو

$$-2x+5 \le x+10, \quad \ge -\frac{5}{3} \quad x \Longleftrightarrow \quad -3x \le 5 \quad \Longleftrightarrow$$

$$2x-5 < 0 \quad x < \frac{5}{2}. \quad \Longleftrightarrow \quad 2x < 5 \quad \Longleftrightarrow$$

له دې لاس ته راځي:

$$-\frac{5}{3} \le x < \frac{5}{2}.$$

د نابرابرون اوبیونډیری له دې امله ده

$$\mathcal{L} = [-\frac{5}{3}, \frac{5}{2}) \cup [\frac{5}{2}, 15] = (-\frac{5}{3}, 15].$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې کې یو څو تمرینونه ورکړ شوي، کۀ ګران مینه وال یې غواړې تمرین کړي۰

لاندې نابراارونونه اوبی کړی

(i) , $\frac{3}{x+5} < 2$

(ii) , $\sqrt{x^2+x+2} > x$

(iii) . $|x+5| > |x-2|$

بیلګه ۱۴ . ۴:

$1/(3-x)>2/(x+6)$, $x|=-6$; $x |= 3$

د اصلي ماتلاندې $(3-x)(x+6)$ سره د حُل له امله باید بیا هم د هغه مخنخبنه په پام کی ونیول شي. شرایط، د کومولۀ مخی چی مات لاندې مثبت د ی، کیدی شي د (۱۴ . ۵) له لارې ومیندل شي:

$(3-x)(x+6)>0 \Leftrightarrow (3-x)>0 \wedge x+6>\vee\ (3-x)<0\ \wedge\ x+6<0$

$\Leftrightarrow (x<3 \wedge x>-6) \vee (x>3 \wedge x<-6) \Leftrightarrow -6<x<3$

نو (۱۴ . ۶) شوونې کوي یا ممکنه وي، چی هغه ورشو(ساحه یا ډیری یا نه هم شهچاپیریال) پیدا کړو چیرته چی اصلي مات لاندې کمیز یا نفي دی:

$(3-x)(x+6)<0 \Leftrightarrow (3-x) >0 \wedge x+6><0 \vee (3-x)<0 \wedge x+6>0$

$\Leftrightarrow (x<3 \wedge x<-6) \vee (x>3 \wedge x>-6) \Leftrightarrow x < -6 \vee x>3$

له دې امله د (۱۴ . ۲) او (۱۴ . ۳) په پام کي لرلو سره شمیرنه لاس ته راځي:

لمړی حالت :

$-6 < x < 3 \Leftrightarrow x \in (-6 , 3)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د زیاتیز ځله ووني یا مثبت فاکتور $(3-x)(x+6)$ سره ځلولو له امله د اړیکو نخښه ساتلی پاتیږي:

$$x+6 \geq 6-2x \Leftrightarrow x \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0,\infty),$$

$$L_2 = (-6,3) \cap [0,\infty) = [0,3)....(mape(zirah)14.2a)$$

دوم حالت : $x < -6 \vee x > 3) \Leftrightarrow x \in (-\infty,-6) \cup (3,\infty)$

دا چی د لته اصلي مات لاندې منفی دی، نو ځل د اړیکو نخښه باندې راګرځیدونی یا په څټ (چپه یا برعکس(تاسیر لري:

$$x+6 \leq 6-2x \Leftrightarrow x \leq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty,0)$$

$$L_2 = [(-\infty,-6) \cup (3,\infty)] \cap (-\infty,0) = (-\infty,-6)....(mape(zirah)14.2b)$$

اوبیډیری $: L = L_1 \cup L_2 = [0,3) \cup (-\infty,-6) = (-\infty,-6) \cup [0,3)$

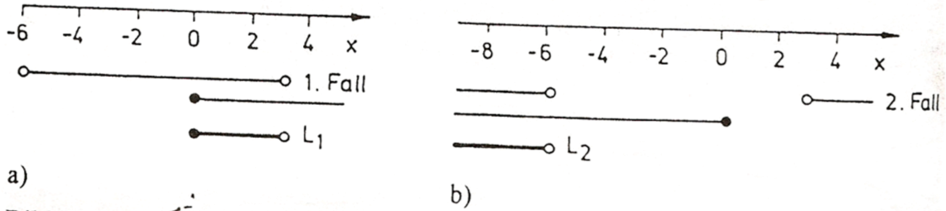


Bild 14.2 خاکره

د ځلوری برابرون یا مربع نامساوات حل لپاره کیدی شي د ځلوری ترم ځل انځورونی څخه کار واخستل شي.

بیلګه ۱۴ . ۵ : $-x^2+9x<0$

لومړی د (۱۴ . ۳) په پام کي نیولو سره دx^2 د مخ (کیڼ لور) کمیز- یا منفي ځلو,وونوباندې ویشل کیږي:

$$x^2 - (9/2)x + 2 > 0$$

ددې لپاره چی دا نامساوات د ځل په څیر ولیکلی شو، د مربع مساواتو حل شمیرو، کومه چی د اړیکنخښي په ځاي د مساواتنخښی ځاي په ځاي کولووروسته منځ ته راځي.

$$x^2-(9/2)x+2=0 \Rightarrow x_1=4 , x_2=1/2$$

$$x^2 - \frac{9}{2}x + 2 > 0 \Leftrightarrow (x-4)(x-\frac{1}{2}) > 0 \Leftrightarrow (x > 4 \wedge x > \frac{1}{2}) \vee (x<4 \wedge x<\frac{1}{2})$$

$$\Leftrightarrow x>4 \vee x<\frac{1}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې سره د (۱۴ . ۵) په کارولو د نابرابرون حل لاس ته راځي:

حلډېری : $L=(-\infty;\frac{1}{2})\cup(4;\infty)=R\setminus\{\frac{1}{2};4\}$

په دې برسیره دې په یاد وي چې داډول نامساوات د مشهور مربع فنکشن د کرېږ کښلو له مخې هم حل کیدی شي، په ځانګړي ډول هلته، چې اړوند مربع شکل رییل حل نه لري۰ بالاخره پهپای کې د وېش د مخنښې راوړلو یوه بیلګه ښایو.

بیلګه ۱۴ . ۶ : $\frac{x+5}{3x-2} \le 0,\ x \ne \frac{2}{3}$.

حل (۱۴,۸) ته ورته دی

$$\frac{x+5}{3x-2} \le 0 \Leftrightarrow (x \ge -5 \ \wedge \ x < \frac{2}{3}) \vee (x \le -5 \ \wedge \ x > \frac{2}{3}) \Leftrightarrow -5 \le x < \frac{2}{3}.$$

د سیستم حل ډېری یا حل سټ: $L = [-5, \frac{2}{3})$.

۱۴ . ۱ . ۳ د نابرابرونسیستم د یوې ناپیژندونکی یا مجهولی یا اوښتونې سره

د یوه نابرابرون سیستم اوبیډیری L د یوګونو نابرابرونونو اوبیډیریو غوڅډیری ده . ګټور یا موخه وربه وي (دا هدفمند دی)، که نابرابرون لکه په یوه برابرونسیستم کی په نمره کړی شي ، ددې لپاره چی دا یوګوني (دا په دې مانا چی یو یو) اوبی کړی شو.

بیلګه ۱۴ . ۷

$$5-2x \ge 3-x$$
$$x^2-5x-6<0$$
$$I.5-2x \ge 3-x \Leftrightarrow x \le 2 \Rightarrow L_I=(-\infty,2]$$
$$II.x^2-5x<0 \Leftrightarrow (+1)(x-6)<0 \Leftrightarrow -1<x<6 \Rightarrow L_{II}=(-1,6)$$
$$\Rightarrow L=L_I \cap L_{II}=(-\infty,2]\cap(-1,6)=(-1,2]$$

د سیستم اوبیډیری: Lدی

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۴ . ۸

$$-2 < \frac{4x-10}{x-1} < 3, x \neq 1$$

د داسی نابرابرون ځنځیرونه یا یو بل سره تړنه د دواړو نابرابرونونو د سیستم سره په یوه مانا دئ:

$$I. -2 < \frac{4x-10}{x-1}$$

$$II. \frac{4x-10}{x-1} < 3$$

د همغه فاکتور(x-1) سره د ځل اړیین یا ضروری حالت توپیریدنه کیدی شي د دواړو نابرابرونونو لپاره غبرګ د لیدوړ بڼی سره وڅیړل شي (مخ په وړاندې یووړ شي) :
(یادونه: په لاندې کې دې Fall(1) لومړې حالت او Fall(2) دویم حالت وي)

....I..II

1. $Fall^{(1)}$, $x \in (1,\infty)$

	I	II
	$-2x+2 < 4x-10$	$4x-10 < 3x-3$
	$\Leftrightarrow x > 2 \Leftrightarrow x \in (2,\infty).$	$\Leftrightarrow x < 7 \Leftrightarrow x \in (-\infty,7).$
	$L_{I_1} = (1,\infty) \cap (2,\infty) = (2,\infty)$	$L_{II_1} = (1,\infty) \cap (-\infty,7) = (1,7)$

2. $Fall^{(2)}$, $x \in (-\infty,1)$

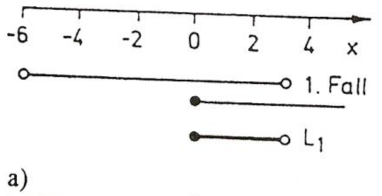
	I	II
	$-2x+2 > 4x-10$	$4x-10 > 3x-3$
	$\Leftrightarrow x < 2 \Leftrightarrow x \in (-\infty,2).$	$\Leftrightarrow x > 7 \Leftrightarrow x \in (7,\infty).$
	$L_{I_2} = (-\infty,1) \cap (-\infty,2) = (-\infty,1)$	$L_{II_2} = (-\infty,1) \cap (7,\infty) = \varnothing$

$$L_I = L_{I_1} \cup L_{I_2} = (-\infty,1) \cup (2,\infty) \qquad L_{II} = L_{II_1} \cup L_{II_2} = (1,7)$$

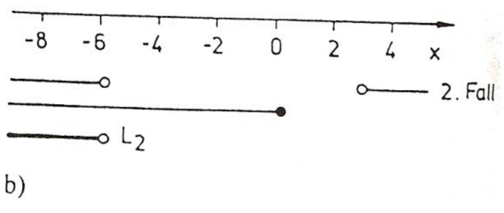
د LI او LII غوڅېدیزی جوړول بیرته کیدی شي چي د یوګونو اوبیدیریوګنوړانګه باندې د لیدنی شي)(څیره ۱۴ . ۳

د سیستم اوبیدیری:

$$L = L_I \cap L_{II} = (2,7)$$



a)



b)

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱۴ . ۱ . ۴ نابرابرون د دوه اووښتونو یا مجهولو(ناپیژندونکو) سره

د دوه نابرابرون - یا نابرابرونسیستمونو اوبیدیری د یوه اوبیډیری $R^2 = R\times R$ برخډیری ده، چی د هوارۍ په څیر د لیدنی کیدی شي. له دې امله ګرافیکي ښوونه د ټکو ډیري په څیر په یوه کواوردینات سیستم کی مساعد دی. په دې برخه کی به موږ یواځي د لاندې ډول لاینیزنابرابرون::

$$ax + by + c > 0 \ (\geq 0 \ , <0, \leq 0 \ ) \qquad (14.9)$$

واریابلو یا اوښتونو x , y او ثابتو ځله وونو(ضریبونو)
$a,b,c \in R$

سره د شرایطو $a|=0 \ v \ b \ |=0$ سره سم تر څیړنی لاندې ونیسو.
که ددې اړیکو نخښه د برابرون سره بدله کړو نو د یوې کرښي برابرون $ax+by+c=0$ لاس ته راځي، کومه چی د پروتولاړ - یا کواوردینات سیستم په دوه نیمو هوارویا ستحو ویشي. د نابرابرونسیستم (۱۴ . ۹) ، چی ټیك په یوه له دې دوه هوارو کی باور لري، په راتلونکي بیلګه ۱۴ . ۹ کی ښوول کیږي. د اوبیډیری په هواره کی د کرښونو یا کرښو کرښو کولو(د ډیرو کرښو کښلو) له لارې په نخښه کیدی شي. که په نابرابرون کي برابرون نه وي پرېښوول شوي یعني برابرون په کی نه وي ځاي شوي، نو راتلونکی کرښه د اوبیډیری پورې اړه نه لري او کیدی شي یواځي ټوټه ټوټه کرښی (پرې لاین یا غوڅکرښو) په څیر په نخښه شي، لکه څنګه چی د ډیری ګرافیکي ښوونه ورځنی یا بلده یا معمول ده. که برابرون ورپورې اړه ولري، نو کرښه د اوبیډیری پورې اړه لرونکی برخی په څیر په نخښه کیږي.

بیلګه ۱۴ . ۹ :

$$2x+5y-10>0$$

که نابرابرون د y په لور اوبی شي، نو دې ته ورته نابرابرون $y>-(2/5).x+2$ لاس ته راځي، کوم چی په یوه کره نیولي x په روښانه توګه د لویو y - ارزښتونو لپاره پوره دی نسبت ورته برابرون ته . له دې امله دهوارۍ چی د کرښې $y=-(2/5).x+2$ څخه پورتنی نیمی هوارۍ ټول ټکی اوبیډیری L جوړوي ش که څیره ون کښل شوه، نو پل په پل داکار ګران د شمیرپوهنې مینه وال کولی شوي ۱۴ . ۴)

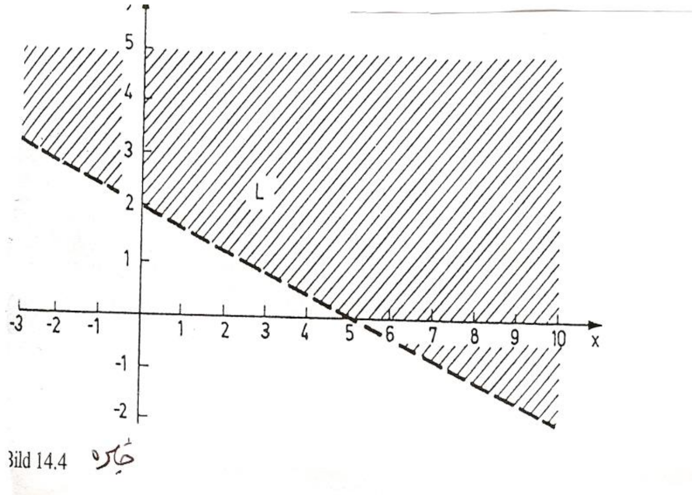
دا په بیلګه ۱۴ . ۹ کی تشریح تګلار په نابرابرون (۱۴ . ۹) کی د مخه نیسي چي $b|=0$ دی. په ټولیزه توګه یا عمومي ډول دا متود د استعمال وړ دی، چی د کواوردینات سیستم

(c) ketabton.com: The Digital Library

یوه په خوښه ټاکلي ټکی ځای په ځاي کولو کی ، چی په کرښه ax+bx+c=0 نه وي پروت۰

ازمایو چي ایا دا نابرابرون په اړونده نیمه هواره کی باور لري او یا نه.که ممکن وي نو د شمیرنی د ساده والي له امله ځانګړی ټکی(0.0) ټاکو. دا په بیلګه ۱۴ . ۹ کی ددې ټکی بدلون وروسته نا ریښتیا وینا 10 - > 0 لاس ته راکوي او په دې ډول د اوبیډیری پیداشوی ځاي (ښه به پروتځاي وي خو د لنډونی له امله ځاي بسیا کوي) تصدیقوي.
دلته یوه ځیره کښل کیږي دلته د اوښتونو پرځاي ګڼونه ږدو او بیا کرښه باسو۰ په کواوردینات کې د هوارې هغه برخه، چې اوبیډیری ده کرښ کرښه کوو، دا په دې مانا، چې د کرښی هغه دکرښونو لور ته ابیډیری ده۰

د یوه نابرابرونسیستم چی دوه مجهولی ولري، نو هر نابرابرون ځانله ځانله اوبی کیږی او بالاخر ه بي د یوګونو اوبیډیریو غوځډیری نیول کیږي یا جوړیږي.



بیلګه ۱۴ . ۱۰:
I . $2x+y<6$
II. $4x-y>0$

(0,0) نابرابرون I پوره کوي او له دې امله په اړونده اوبیډیري LI کی پروت دی. دا چی په نابرابرون II کی د (0 , 0) سیده برابرون باوري دي، نو دلته باید یو بل ټکی د بیلګي په توګه (1 , 0) کیښنول شي، کوم چی د په ځنوالي یا تضاد په لور ځي، او له

(c) ketabton.com: The Digital Library

دې امله اوبيډيرۍ LII کی نه دی پروت. (؟؟؟ش ۱۴ . ۵ الف(. ش ۱۴ . ۵ ب دسیستم حلډیری L ښايي چي له دوه نیمکرښو بندیږي یا له دوه نیم کرښومحدودیږي.
د وړاندیزارزښت لري چی د تمرینونو په خپلواك كار كولو کی د غوښتونکو اوبيډيريو L د یوګونو نیمهوارو غوځډیری حتي تر غاړې پورې رنګینه یا کرښی کرښی راوکښل شي، چی په دې ډول یی یو کواوردیناتسیستم د انځورولو لپاره بسیا وکړي .ش ۱۴ . ۵

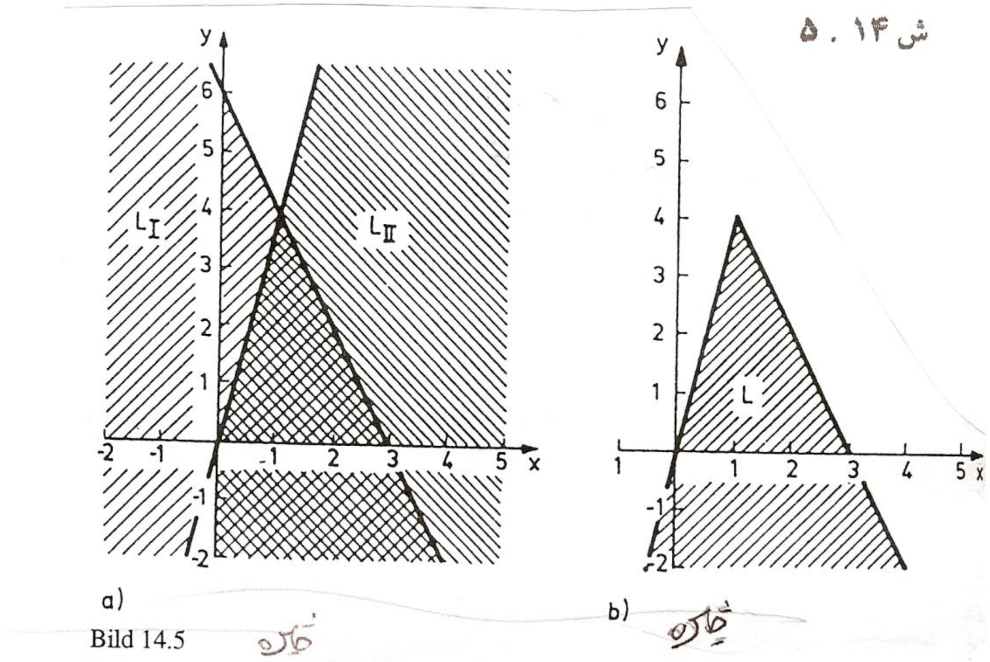


Bild 14.5

بیلګه ۱۴ . ۱۱:

I . x-3y-6<0 II. -x+y+1<0
III. x-6<0

دا اوبيډيری په ش ۱۴ . ۶ کی انځور ۱۲ کرښي
د پورته نابرابرونسیستم له مخۀ د هر نابرابرون لپاره کرښه کشل کیږي، په یوه کواوردینات سیستم کې او بیا د هوارې هغه برخه، چې دریواړه کرو کې رابنده منهواره وي، هغه یې اوبی دی۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

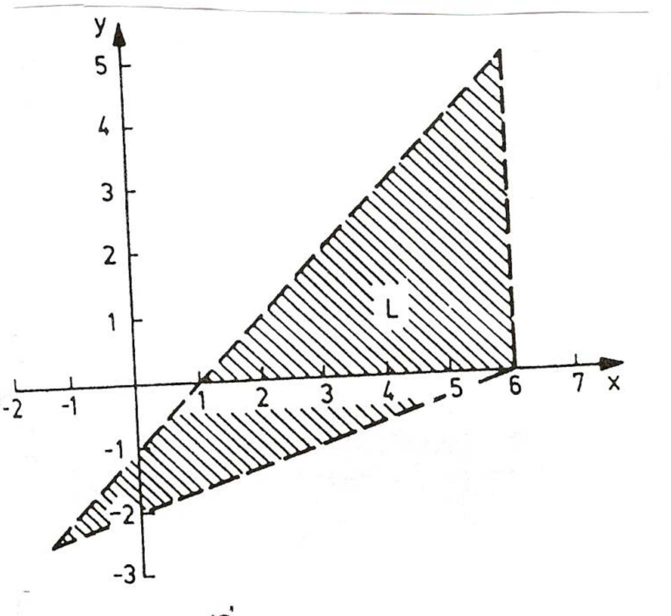


Bild 14.6 خاکه

۱۴ . ۲ برابرون او نابرابرون د مطلقه ارزښتونو سره

۱۴ . ۲ ۱ د مطلقه ارزښتونو سره شمیرنه

که په یوه براورن یا نابرابرون کی د ترمونو مطلقه ارزښتونه د مجهولی په څیر رییلي واریابلي یا اووښتونی وي، نو د مجهول په لور له ابیولو د مخه باید یو د مطلقه ارزښت خپلواك فورم پیداشي. داچي له برخی ۳ څخه څرگنده ده چی د یوه رییل گڼ مطلقه ارښت د

مخنخښی په واك په توپیري ډول جوړیږي نو د یوه ترم لیکل بي له مطلقه ارزښت، په پرینځیپ کی دوه حالتونه توپیریږي٠
داسی دئ:

$$T(x) = T(x) \quad \text{لپاره} \quad T(x) \geq 0 \quad \text{د} \qquad (14,10)$$

$$T(x) = -T(x) \quad \text{لپاره} \quad T(x) < 0 \quad \text{د} \qquad (14,10)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که مطلقه ارزښت د صفر لوي یا په صفر برابر وي، نو کیدی شي چی د مطلقه ارزښت لرې پرېښول شي، یا د نورو ترمونو سره په ترلو په نوکانو بدل شي. که مطلقه ارزښت متن منفي وي یعني د مطلقه ارزښت دننه، نو د مطلقه ارزښت نخښو په ځاي نوکان لیکل کیږي او دا نوکان بیا په (۱ -) ځلیږي. هغه ټکي چي په (۱۴ ، ۱۰) کی ورکړ شوي شرایط پوره کوي، نو پرېښول کیږي چی ځانونه په قاعده کي په اینتروال وښایي، کوم چی دیسیونکت(پردي) برخه ډیرۍ د اوښتونوچاپیریالونه دي، د کوم لپاره چی T(x) ښوول شوی دۍ. د دواړو برخه چاپیریالونو ټولنډیري، باید بیرته د ټول هغه واریابلچاپیریال ورکړي، کوم چی د کنترول لپاره باید و ازمایل شي. په دې ځاي کی دې د ځله وونی او ویش مطلقه ارزښتونو لپاره قواعد ورکړ شي، چی د بدلون لپاره د ارزښت وړ دي.

که a اوb رییل ګڼونه وي ، نو لاندې باور لري کیږي٠

$$|a\,.\,b| = |a|\,.\,|b|$$

$$|a : b| = |a| : |b|$$ د $b \neq 0$ لپاره

۱۴ . ۲ . ۲ برابرون د مطلقه ارزښت سره

د یوه مطلقه ارزښت مساوات حل لکه چی د حالت توپیرولوکی توضیح شوی ، باید په هر حالت کی وازمایل شي چی ایا دا اوبیونې په نیول شوي یا فرض شوي اینتروال کي پراته دی او که یوائي د اوبې په ځیر ښکاریدونکي رامنځ ته کیږي . یوګوني اوبیونې اوبیډیري L کی رایوځاي کیږي. د مقایسي یا انډول یا پرتلی لپاره د برابرونونو هغه کرافیکي اوبیونې شونی یا ممکن دی، په کوم کی چی هره لور یا اړخ د یو فنکشن تنظیم عملیي راوړل کیږي یا رانیول کیږي او په x , y - پروت ولاړ – یا کواوردینات سیستم
کی انځوریږي .
د دواړو فنکشنونو غوڅټکي x - کواوردیناتونه په همدې وخت کی د برابرونونو اوبیونې دي.

بیلګه ۱۴ . ۱۲:

$$|x+1|=(x/2)+2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

باور لري:

$(x+1) \geq 0$ د $x > -1$ لپاره

$(x+1) < 0$ د $x < -1$ لپاره

(14,11) د $x \geq -1$ لپاره $|x+1| = x+1$

(14,11) د $x < -1$ لپاره $|x+1| = -x-1$

لومړی حالت

$$x \in [-1, \infty)$$

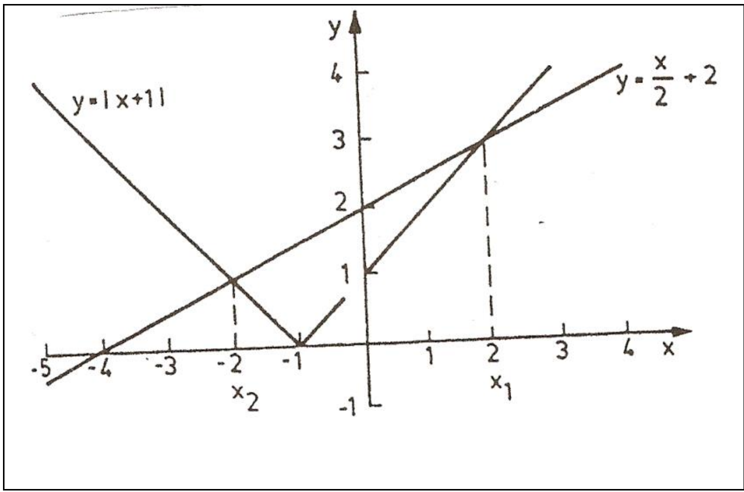
$$|x+1| = x/2+2 \Leftrightarrow x+1 = x/2+2 \Leftrightarrow x = 2 \in [-1, \infty] \Rightarrow x_1 = 2$$

دوم حالت:

$$x \in [-1, \infty)$$

$$|x+1| = x/2+2 \Leftrightarrow -x-1 = x/2+2 \Leftrightarrow x = -2 \in [-\infty, -1] \Rightarrow x_2 = -2$$

د برابرون یا مساوات اوبیډیری $L = \{-2, 2\}$



په داسی حال کی چی د ښی اړخ د ورکړشوي برابرون، $y = x/2 + 2$, ګرافیکی انځورونه، په څرګند ډول یوه کرښه ده، کیڼ اړخ، $y = |x+1|$ د (۱۴ . ۱۱) سره د دوه نیموکرښو په څیر منځ ته راځي.
اوبی : کیدی شي په ځ. ۱۴ . ۷ کی ولوستل شي

که یو برانرون د لاینیزو ترمونو زیات مطلقه ارزښتونه ولري، نو شوونې یا مساعد ده چی لومړی د هغه ګنوړانګه په هغه ځاي کی وویشل شي، چیرته چی د ترمونو مخنخښنه د مطلقه ارزښت په دننه کی تغیر خوري او د هر یوه مطلقه ارزښت څرګندونه په داسی لاس ته راغلو برخه اینټروالونو کی د لیدلو وړ یوځاي راټول کړي.

بیلګه ۱۴ . ۱۳ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$|1- x|-|2x+3|=1$

د (۱۴ . ۱۰) پسی لرو:

د $x<1$ لپاره $|1-x|=1-x$

د $x>1$ لپاره $=-1+x$

او(لاندې او پورته هم لومړی له کیڼ وښی لو رته لوستل کیږي

د $x>-3/2$ لپاره $|2x+3|=2x+3$

د $x<-3/2$ لپاره $=-1x-3$

یوځاي راټول یا د ګډ فرمولولو لاندې تر پام یا تر تظر

	$x<-3/2$	$-3/2<x<1$	$x>1$
$\lvert -1+x\rvert$	$1-x$	$1-x$	$-1+x$
$\lvert 2x+3\rvert$	$2x+3$	$-2x-3$	$\lvert 2x+3\rvert$

له دې امله د برابرون اوبي کی درې حالتونه توپیرووو. برسره پر دې باید کمیزه – یا منفي نخښه د دویم مطلقه ارزښت د مخه په پام کی ونیول شي:

لمړی حالت:

$$x \in (-\infty, -3/2)$$

$$1-x-(-2x-3)=1 \Leftrightarrow x+4=1 \Leftrightarrow x=-3 \in (-\infty.-3/2) \Rightarrow x_1=-3$$

دم حالت:

$$x \in [-3/2, 1]$$

$$1-x-(2x+3)=1 \Leftrightarrow -3x-2=1 \Leftrightarrow x=-1 \in (-\infty.-3/2) \Rightarrow x_2=-1$$

دریم حالت:

$$x \in (1, \infty)$$

$$-1+x-(2x+3)=1 \Leftrightarrow -x-4=1 \Leftrightarrow x=-5 \notin (1, \infty)$$

په وروستی حالت کی شمیرل شوی ارزښت د نیونی سره په ځټ یا تضادکی دی، چی $x3 = -5$

یواځي ښکارندډوله اوبی دی(دا په دې مانا چی یواځی د اوبي په ځیر یا - غوندې ښکاریږي) .

اوبډیری : $L = \{-3,-1\}$

د ښکارندډوله اوبي منځ ته راتګ کیدی شي، چی د ګراف اوبي – یا حللارې له لارې ځرګند

(c) ketabton.com: The Digital Library

شي. د کيڼ اړخ یا لور مطلقه ارزښت خپلواك یا ازاد ښودل کیدی شی چی ټوټه ټوټه د مخه تیرشوي شمیرنو په ډوگونوحالتونو کی لاس ته راځی. له دې امله تعقیبیږي:

د $x > -3/2$ لپاره $=x+4$

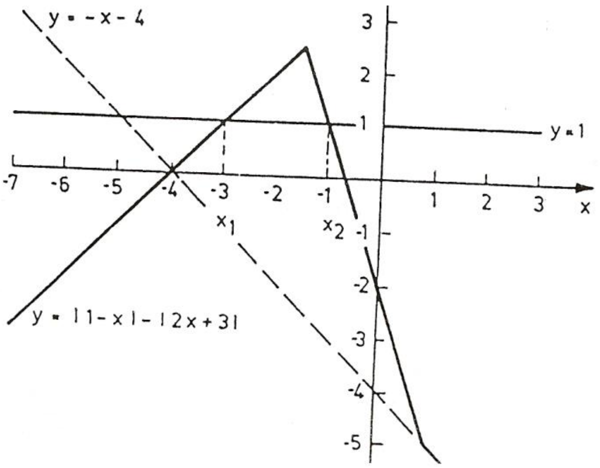
د $-2/3< x < 1$ لپاره $|1-x|-|2x+3|=-3x-2$

د $x > 1$ لپاره $=-x-4$

ښی لور همغه - یا ثابت فنکشن $y = 1$ دی . د مخه شمیرل شوو اوبیونو پرتلې له پرتلې مقایسي ځیره شته، خو زما په ستونځو گرانلوستونکی اوس بلد دي ۱۴ . ۸ ښایي، چی دواړه کرږي ریښتیا د $x < -3/2$

او $-3/2< x < 1$-لپاره رښتیا هره یوه بله یوځل پرې کوي، مگر د $x > 1$ لپاره یو بل نه پریکوي. په دریم حالت کی د اړوند کرښی ټوټی $y = -x-4$ د اوږدوالی پرتټکی راکوي، د کرښي $y = 1$ د حل په ځیر حل د نیول شوي اینتراوال د باندې دئ ځیره (شاید داځیره هم ځیره نه شي، کهٔ کرانو مینه والو داکار پخپله وکړ ، نو نور به هم گټور به وي)ش . ۱۴ . ۸

دلته هغه ځیره باید ریښی او یا راغلی وي، یا راغلې وی۰



که د مطلقه ازښت نخښنی په یوه ځلوري - یا مربع ترم کی له منځه وړل کیږي، نو کیدی شي چی د مخنخښي غوښتل شوي ځیرنی چي په برخه ۱۴. ۱ . ۲ کی تر ځیرني نیول شوې د مربع نامساوات د حل متود گټه ترې واخستل شي.) بیلگه ۱۴ . ۵ دې مقایسه شي)

بیلگه ۱۴ . ۱۴:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$|x^2 -6x + 5 | = 3$

د $x^2-6x+5>0 \Leftrightarrow (x-1)(x-5)>0 \Leftrightarrow x<1 \vee x>5$

او $x^2-6x+5<0 \Leftrightarrow (x-1)(x-5)<0 \Leftrightarrow 1<x<5$

سره لاس ته راځي

(14,12) د $x<1 \vee x>5$ لپاره $|x^2-6x+5|=x^2-6x+5$

(14,12) د $1<x<5$ لپاره $|x^2-6x+5|=-x^2+6x-5$

لومړی حالت: $x \in (-\infty,-1] \cup [5,\infty)$

$x^2-6x+5=3 \Leftrightarrow x^2-6x+2 = 0,$

$L \Rightarrow x_1=3+\sqrt{7}=5,65 \in [5, \infty)$, $x_2= 3 - \sqrt{7} = 0,35 \in (-oe , 1]$

دوم حالت $x \in (1,5)$:

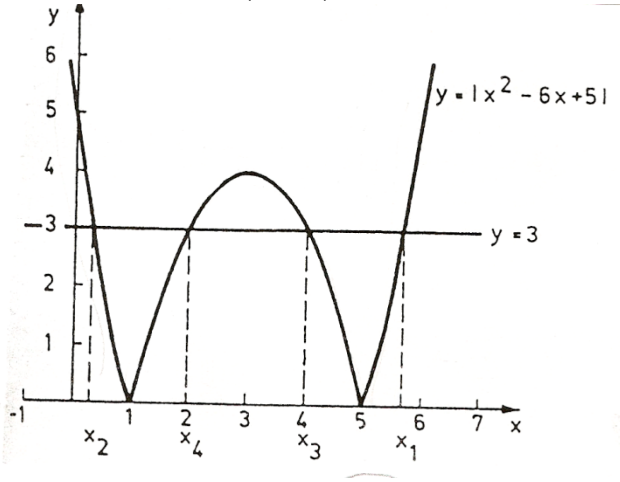
$-x^2+6x-5=3 \Leftrightarrow x^2-6x+8=0,$

$L \Rightarrow x_3=4 \in (1 , 5)$, $x_4= 2 \in (1 , 5)$

پام : که چیرې حل یا اوبی مو نه وو لیکلی او L مو لیکلی وو ، نو دا د اوبی په مانا دی المانی Lösung ورته وایي چی لند په L لیکل کیږي .

اوبیدیری: $L = \{3 - \sqrt{7}); 2;4;3;3+\sqrt{7}\}$

خیره ۱۴ . ۹ د گراف له لاری اوبی بنایي. کیڼ لور $y=|x^2-6x+5|$ د (۱۴ . ۱۲) له امله د پارابوللیندو څخه یوځای کیږي. خیره ۱۴ . ۹



څیره ۱۴.۹

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ټولیزه توګه د یوه برابرون اوبي کی ، په کوم کی چی n مختلف ارزښتوییني یا - افادې یعني $|T_i(x)|$, $i = 1,2,...n$ منځ ته راځي، 2^n حالتونه یو له بل توپیر کیږي. دا د هغه کیدونکو کیدنو یا ممکن امکاناتو ګڼون یا تعداد دئ ، کوم چی موجود دی ، چی د ترم $T_i(x)$ د تیپ یا بڼی وي چی یا
$T_i(x)$ >0 او یا $T_i(x)$ 0> راکوي، یعنی د دوه توکو د وارییشن امکاناتو ټولګي ته (پرتله ۱۰ . ۴ . ۲ برخه) د ارزښت نخښی د له منځه وړلو له امله د (۱۴ ، ۱۰)
قاعدې سره سم 2^n برابرونونه منځ ته راځي، چي په ټولیزه یا عمومي توګه دې اوبیونې x_1,x_2,x_3,...... ولرودئ شي. یواځی دا باید وازمایل شي ، چی ایا دا اوبي xi پیلبرابرون پوره کوي که نه.
د دې ټولیزې تګلار پسی موږ په بیلګي ۱۴ . ۱۳ کی د
T1(x)=1-x, T2=(2x+1)
سره، په لاندې $2^2 = 4$ حالتونو باندې کار کوو:

$$1.\ T_1(x) \geq 0 \wedge T_2(x) \geq 0: \quad (1-x)-(2x+3)=1 \Rightarrow x_1=-1.$$

$$2.\ T_1(x) \geq 0 \wedge T_2(x) < 0: \quad (1-x)+(2x+3)=1 \Rightarrow x_2=-3.$$

$$3.\ T_1(x) < 0 \wedge T_2(x) \geq 0: -(1-x)-(2x+3)=1 \Rightarrow x_3=-5.$$

$$4.\ T_1(x) < 0 \wedge T_2(x) < 0: -(1-x)+(2x+3)=1 \Rightarrow x_4=-\frac{1}{3}.$$

پیلبرابرون د3- = x1=1, x2 لپاره پوره دي مګر د x3 او x4 لپاره پوره نه دي.

۱۴ . ۲ . ۳ نابرابرون دمطلقه ارزښت سره

که په نابرابرونو کی مطلقه ارزښتونه منځ ته راشی، نو داسی دي لکه په برخه. ۱۴ .۲ ۲ کی د حالتونو توپیر سره ونیسی یعني د کارپیل په وکړي، کوم چی بي له مطلقه ارزښتنخښو د انځوروني لپاره ضرر یا غوښتونکي دي. د واریابلو یا اووښتونکو اړونده برخه چاپیریال په دننه بیا مختلف نابرابرون ۱۴ .۱ سره سم حل کوو، د کوم سره چي بیرته د حالت توپیر اړیین دئ

بیلګه ۱۴ . ۱۵ : |7-3x|>2

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی حالت:

$$7-3x\geq 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,7/3]$$

$$7-3x\geq 2 \Leftrightarrow x\in(-\infty;5/3]$$

$$L_1=(-\infty,7/3]\cap(-\infty,5/3)=(-\infty,5/3]$$

دويم حالت:

$$7-3x<0 \Leftrightarrow x\in(7/3,\infty)$$

$$-7+3x\geq 2 \Leftrightarrow x\in[,\infty)$$

$$L_2=(7/3,\infty)\cap[3,\infty)=[3,\infty)$$

$$\Rightarrow$$

$$L=L_1\cup L_2=(-\infty,5/3]\cup[3,\infty)=R\setminus(5/3,3)$$

په پورته کې دې د غشي څوکه له پامه کې نه راړل کيږي:

بيلګه ۱۴ . ۱۶: |x-5|<|x+1|

د يوګونو ترمونو انځورونه بي له ارزښتنخښی:

د 5 < x لپاره |x-5|= x–5

د 5 > x لپاره |x-5|=-x+5

او

د 1 ≥ x لپاره |x+1|=x+1

د 1- ≤ x لپاره |x + 1| = -x - 1

په يوه ليد وړ توګه په لاندې توګه راټوليګي رايوځاي کيږي يا راغونديږي :

	X > -1	-1≤ x<5	x≥ 5
|x-5| =	-x+5	-x+5	x-5
|x+1|=	-x-1	x+1	x+1

لومړی حالت: $x\in(-\infty,-1)$

|x-5|<|x+1|<=>-x+5<-x-1 <=> 0<-6

د هر x<-1 نابرابرون يوې ناريښتيا وينا ته لاربنودوي، چې په دې حالت کی کوم اوبه وي ، دا په دې مانا چي: L1 = Ø

دوم حلات $x\in[-1,5)$:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$|x-5|<|x+1| \iff -x+5<-x-1 \iff x>2 \iff$

$x \in [2,\infty]$

$L_2 = [-1,5) \cap (2,5) = (2,5)$

دریم حالت: $x \in [5,\infty)$

$|x-5| < |x+1| \iff x-5 < x+1 \iff 0<6$

هر $x \geq 5$ نابرابرون پوره کوي، دا په دې مانا چې: L3 = [5 , oe)

حلدیری: $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = (2,5) \cup ([5,\infty) = (2,\infty)$

بیلگه ۱۴ . ۱۷: $|x^2-4x-21|<24$

د $x^2-4x-21 \geq 0 \iff x<-3 \vee x \geq 7$

او $x^2-4x-21<0 \iff -3<x<7$

څخه لاس ته راځي:

د $x<-3 \vee x \geq 7$ لپاره $|x^2-4x-21| = x^2-4x-21$

د $-3<x<7$ لپاره $= -x^2+4x+21$

لومړی حالت: $x \in (-\infty,-3] \cup [7,\infty)$

$|x^2-4x-21|<24 \iff x^2-4x-21<24 \iff x^2-4x-45<0$

$\iff -5 < x < 9 \iff$

$x \in (-5,9)$

$L_1 = [(-\infty,-3] \cup [7,\infty)] \cap (-5,9) = (-5,-3] \cup [7,9)$

دویم حالت: $x \in (-3,7)$

$|x^2-4x-21|<24 \iff -x^2+4x+21<24 \iff x^2-4x+3>0$

$\iff x<1 \vee x>3 \iff$

$x \in (-\infty,1) \cup (3,\infty),$

$L_2 = (-3,7) \cap [(-\infty,1)] \cup (3,\infty) = (-3,1) \cup (3,7)$

اوبیډیری:

$L = L_1 \cup L_2 = (-5,1) \cup (3,9)$

دا بیلګې د دې درس لپاره بسیا کوي، دا بیا دلته هم تکرار لیکم، که په کومه موضوع کې ګرانو لوستونکو څه زیات غوښتل هغه هم په پام کې نیول کیږي او کړی شو، چې په ګډه هره موضوع وغزوو ۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې کی به په یوه بیلګه کی داسی نامساوات وڅیړو، په کومه کی چی مجهوله په مطلقه ارزښت افاده شوي وي او هم مات لاندې کی منځ ته راشی.

بیلګه ۱۴ . ۱۸: $|1+2x| / (1-x) < 1 , x \neq 1$

د (۱۴ ، ۱۰) له مخی د مطلقه ارزښت له منځه وړلاو د مات لاندې سره د نابرابرون ځله ونه د (۱۴ . ۲) او (۱۴ . ۳) له مخی په هر وخت کی د همغه ترم مخنخښه باید په پام کی ونیول شي. باور لري یا صدق کوي:

د $x \geq -1/2$ لپاره $|1+2x| = 1+2x$

د $x < -1/2$ لپاره $|1+2x| = -1-2x$

او

د $x < 1$ لپاره $(1-x) > 0$

د $x > 1$ لپاره $(1-x) < 0$

دلته هم په همغه دوه تیریدونکو ځایونو کی ګنوړانګه سره بیله یا توته کیږي، داسی چي په راتلونکو ګڼلو کی یا ځانیزه توګه درې حالتونه یو له بل توپیریږي.

	$X<-1/2$	$-1\leq x<1$	$x>1$
$\|1+2x\|$	$-1-2x>$	$1+2x$	$1+2x$
$=1-x$	>0	>0	<0

لومړی حالت: $x \in (-oe, -1/2)$

$$-1-2x \leq 1-x \iff x \geq -2 \iff$$

$$x \in [-2 , oe)$$

$$L_1 = (-oe, -1/2) \cap [-2 , oe) = [-2 , -1/2)$$

دویم حالت $x \in [- 1/2,1)$:

$$1+2x < 1- x \iff x<o \iff x \in (-oe,0]$$

$$L_2 = [-1/2 ,1] \cap (-oe,0] = [-1/2, 0)$$

دریم حالت:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$x \in (1, oe)$

$1+2x \geq 1-x \iff x \geq 0 \iff x \in [0, oe)$

$L_3 = (1, oe) \cap [0, oe) = (1, oe)$

د حلونو سټ(اوبیډیری):

$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = [-2;0] \cup (1,oe)$

د دوه ناپیژندونکو سره د یوه نامساوات ارزښت حلډیري پیدا کولو لپاره هم باید لمړی ارزښت له منځه ولاړ شي. مساوات (۱۴ . ۱۰) ته ورته د واریابلو یا اوښتونکو x او y سره، د یوه لاینی ترم ارزښت سره، باور لري:

(14,13) د $ax+by+c \geq 0$ لپاره $= ax+by+c$

(۱۴ ، ۱۳) د $ax+by+c < 0$ لپاره $|ax+by+c| = -(ax+by+c$

د نیونو یا فرضیو سره $a \neq 0 \ v \ b \neq 0$

دواړه ښي لیکل شوي شرطونه په برخه ۱۴ . ۱ . ۴ کی د کارول شوې بڼی(۱۴ . ۹) نابرابرون
هم کارول شوي . له دې امله باید یو نامساوات د ارزښت افادي (۱۴ . ۹) سره، د کرښی $ax + by + c = 0$ له لارې ورکړ شوې، یو له بل بیلی یا جدا، د x,y-هوارې نیمه هوارې یو له بل بیلی اوبی کړی شي.

بیلګه ۱۴ . ۱۹:

$|x-y+1| > x-2x-4$

د (۱۴ . ۱۳) اړیکو باور لري :

د $-x-y+1 \geq 0$ لپاره $|-x-y+1| = -x-y+1$

د $x-y+1 < 0$ لپاره $= x + y - 1$

لومړی حالت: $-x -y +1 > 0$

$|-x-y+1| > x-2y-4 \iff -x-y+1 > x-2y-4 \iff -2x+y+5 > 0$

$L1 = \{(x,y) | -x-y+1 \geq 0, -2x+y+5 > 0\}$

دوم حالت: $x-y+1 < 0$

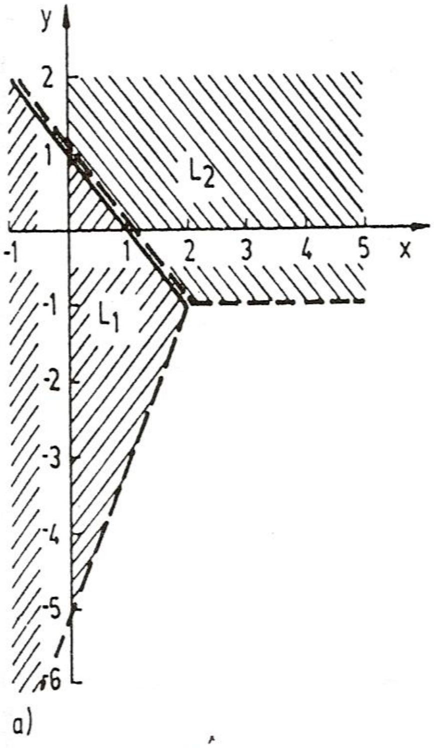
$|-x-y+1| > x-2y-4 \iff x+y-1 > x-2y-4 \iff 3y+3 > 0 \iff y < -1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$L2=\{(x;y)|-x-y+1<0 ,y>-1\}$

له دې سره L1 او L2 د اوبیدیرۍ دوه نابرابرونونو غوڅدیرۍ ده او کیدی شي، لکه څنګه یو نابرابرون د یوه ګراف سره انځور شي (ځیره دلته هم په پوښتنه کې ده ۱۴ . ۱۰ الف) اوبیدیرۍ بیرته د ورکړ شوو نابرابرونونو برخ اوبیدیریو تولندیرۍ ده۰ (ځیره ۱۴ . ۱۰ ب) دلته هم همغه د مخه پام لرنه)۰

که په یوه نابرابرون کی دوه ارزښت افادې یا – وییني د (۱۴ . ۱۳) بڼی رامنځ ته شي، نو د ارزښت ترپام نیولو سره څلور حالتونه یو له بل توپیر کیدی شي.



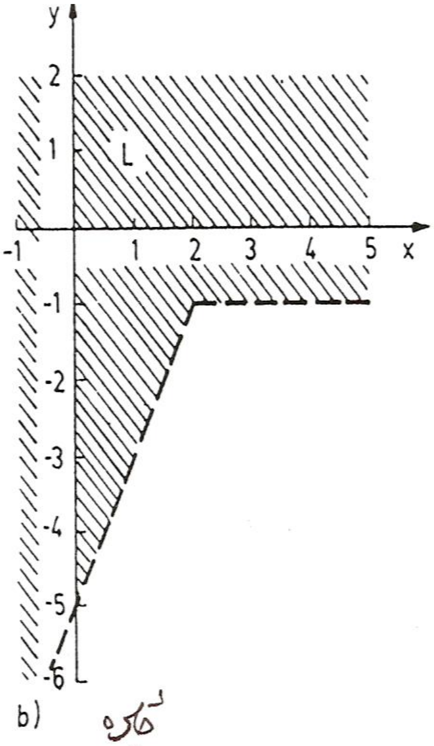


Bild 14.10 ځاره

تمرینونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې نامساواتو حلډېرۍ پیدا کړی

1. a) $8x-3<2x+9$ b) $5-7x\le 3x-10$

c) $\frac{x}{2}-\frac{2}{3}>\frac{1}{2}+\frac{x}{9}$ d) $3(3x-2)\ge 4(3-2x)$

e) $\frac{8x-5}{5}\le\frac{2x+5}{3}$ f) $\frac{3}{4}-\frac{2}{3}x>\frac{5}{4}x+\frac{1}{6}$

g) $\frac{8}{9}+6x\ge 2(\frac{5}{6}+3x)$ h) $\frac{1}{3}(\frac{x}{8}-6)<\frac{x}{6}-\frac{x}{8}+1$

2. a) $(3x+1)(2x-1)<(5x-3)(2x-1)$

b) $(8x-9)(3x+2)\ge(2+7x)(2+3x)$

c) $(7x-3)(5-7x)>(3-7x)(5x+3)$

d) $(5+2x)(7-5x)\le(10+4x)(2-3x)$

e) $x^2-x-6\le 2x+4$ f) $x^2+5x-6>3-3x$

g) $x^2+3x\ge -2x-6$ h) $x^2-4x+4<4x-8$

3. a) $\frac{3}{2x-4}\le 2$ b) $\frac{3x-4}{2-3x}\ge 4$

c) $\frac{2x-2}{2x+2}<2$ d) $\frac{5x+3}{x}<-2$

e) $\frac{4x+1}{3x-2}>5$ f) $\frac{9-3x}{x-3}>-3$

g) $\frac{4x+6}{2x+3}<3$ h) $\frac{3(4x-1)}{x-1}\ge 12-\frac{2(4x-5)}{x-1}$

4. a) $\frac{3}{4x-4}\le\frac{2}{x-6}$ b) $\frac{1}{5-3x}>\frac{1}{5x+4}$

c) $\frac{x+1}{x-3}<\frac{x-1}{x+2}$ d) $\frac{4x-3}{2x+1}\le\frac{2x+3}{x+2}$

e) $\frac{2x-1}{2x+1}+\frac{3x+1}{x-2}>4$ f) $\frac{x-3}{1-6x}-\frac{2x+1}{4x+3}\ge-\frac{2}{3}$

g) $\frac{2x+1}{2x-2}+\frac{2x-3}{3x-3}\ge 1$ h) $\frac{2-5x}{3-x}-\frac{2-6x}{1-3x}<\frac{3}{8}\cdot 27^{\log_3 2}$

5. a) $(2x-3)(3x-2)<0$ b) $(x+3)(7-x)\le 0$

c) $x^2+4x+3\ge 0$ d) $x^2-8x+7\le 0$

e) $x^2+4x+5<0$ f) $x^2-6x+10>0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

g) $x^2 - 2x + 1 > \frac{5}{2}x - 1$ h) $2x^2 - 3x - 3 < 3(x-1)$

6. a) $(x^2 - 6x + 5)(x^2 + 1) < 0$ b) $(x^2 - 4x + 5)(x^2 + 1) \le 0$

c) $(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 4) > 0$ d) $(9 - x^2)(x^2 + 3x + 2) \ge 0$

e) $(x^2 + 4x - 5)(x^2 - 4) > 0$ f) $2x^4 - x^3 + 10x^2 - 5x > 0$

g) $-x^3 - 3x^2 + 16x + 48 \le 0$ h) $\frac{x^3}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}\,x^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}x + \sqrt{2} < 0$

7. a) $\frac{x+4}{x+3} > 0$ b) $\frac{x+3}{x-7} < 0$

c) $\frac{2x+3}{3x-4} \le 0$ d) $\frac{x-2}{5x+1} \ge 0$

e) $\frac{6+9x}{4+6x} < 0$ f) $\frac{2x-1}{8x-4} > 0$

g) $\frac{3x-12}{x^2-4x} \ge 0$ h) $\frac{x^2-25}{2x+10} \le 0$

8. a) $x - 8 + \frac{7}{x} < 0$ b) $x + 3 - \frac{4}{x+3} > 0$

c) $8(x-2) \ge \frac{20}{x+1} + 3(x-7)$ d) $\frac{3x-24}{4} - (2x-6) > -\frac{5}{x}$

د لاندې نامساواتسیستمونو حل ډېرې وټاکئ

9. a) $2 + x \ge 2x - 7$, $5(x-3) \ge 2(x-3)$ b) $x + 6 < 14 - 3x$, $6 + 7x \ge 3x + 5$

c) $\frac{2}{3} - \frac{x}{2} > \frac{x}{3} + \frac{1}{6}$, $\frac{1}{2} + \frac{3}{4}x < \frac{8-x}{3}$ d) $x + \frac{1}{3} \le 2x - \frac{7}{6}$, $5(x - \frac{3}{2}) \le 2x - 3$

10. a) $x^2 - 3x < 0$, $2(x+2) < 4x - 1$ b) $x^2 + 6x + 8 < 0$, $2(x+2) > x + 3$

c) $x^2 - 9 < 0$, $x + 2 > 2(x-1)$ d) $x^2 - 3x + 3 > 0$, $4(x-1) < 2(x+1)$

11. a) $x^2 - 4x - 5 \le 0$, $x^2 + 6x - 16 < 0$ b) $x^2 + 2x - 8 < 0$, $x^2 - 3x - 4 > 0$

c) $x^2 - 5x > 0$, $x^2 - 9 > 0$ d) $x^2 - 6x + 5 < 0$, $x^2 + 8x + 15 < 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

12. a) $3x + 2 > 2x + 1 > 3(x - 4)$ b) $-1 < \frac{7x-3}{8x-5} < 1$

c) $2 < \frac{5x+1}{2x-1} < 5$ d) $1 < \frac{x^2+4x+5}{x+1} < 4$

13. a) $3 - x < 2 - 4x$
$x + 3 < \frac{1}{2}(x+1)$
$\frac{x}{2} > x + \frac{1}{2}$

b) $x + 5 > \frac{7}{2}x + \frac{3}{2}$
$4(x-1) < 13 - \frac{1}{4}x$
$2x - 1 > x + 6$

د لاندې نامساواتو او همداسې د نامساواتسیستمونو حاډېرۍ په کارتیزي کواوردینات – یاپروتولاړ سیستم کې ګرافیکي انځور کړۍ.

14. a) $y \geq -\frac{3}{2}x + 3$ b) $y < -\frac{2}{3}x + 2$

c) $x < 2y + 2$ d) $x > -y + 3$

e) $4x - 5y > 12$ f) $-3x - 8y \leq 24$

g) $2(y - 3) \leq 6(x - 1)$ h) $5x - y + 2 > 3y - 3x - 10$

15. a) $2x + 3y > -6$
$x - y < 2$

b) $3x - y > 3$
$x + y > 4$

c) $x > 1$
$x + 2y < 4$
$y + 3 > x$

d) $x - 4y - 6 \leq 0$
$2x + y - 3 \leq 0$
$y - 5 \leq 0$

16. a) $-2 < x + y < 2$
$-2 < x - y < 2$

b) $x > 2$
$-3 < y < 2 + x$
$x + y < 5$

c) $x^2 - y^2 \leq 0$ d) $(2x + y + 1)(3y - x - 1) > 0$

د لاندې نامساواتو حاډېرۍ د شمیرلو او همداسې ګرافیکي لارې پیداکړۍ.

17. a) $|x - 3| = 5$ b) $|x + 2| = 7$

c) $|1 - \frac{x}{2}| = x + \frac{5}{2}$ d) $|x + 3| = |3x - 4|$

e) $|x - 4| = |2x + 3|$ f) $|9 - 3x| - |2x - 1| = 4 - 2x$

g) $|2 - 3x| - |x + 1| + |2x + 2| = 3$ h) $|x - 3| - |3x - 4| + |2x + 1| = 6$

18. a) $|x^2 - 2x - 8| = 7$ b) $|8 - 2x^2| = 6$

(c) ketabton.com: The Digital Library

c) $|2x - x^2| = 8$ d) $|x^2 + 6x + 5| = 5$

e) $|x^2 - 4x + 3| = 1$ f) $|x^2 - 2x - 3| = 1$

g) $|4x^2 + 4x + 4| = 3$ h) $|x^2 - 3x + 7| = 4$

19. a) $\left|\frac{2x+4}{x-3}\right| = 1$ b) $\left|\frac{2x-4}{x+3}\right| = 2$

د لاندې نامساتو حلږرى پيدا كړى

20. a) $|x - 2| < 3$ b) $|2 - 4x| \geq 1$

c) $2 - |1 - x| \geq 1 + x$ d) $|2x - 3| < x + 3$

e) $|3x - 5| > 2|x + 2|$ f) $|3x + 3| \geq \left|\frac{1}{2}x - 1\right|$

g) $|x - 4| + |2 - x| \leq 2$ h) $|3 - x| < 2 - |x - 5|$

21. a) $|x^2 + 2x - 3| \leq 12$ b) $|x^2 - 6x + 8| \geq 3$

c) $|x^2 + 4x - 5| > 2$ d) $|15 + 2x - x^2| < 7$

e) $|x^2 - 6x + 11| < 1$ f) $|x^2 + 4x + 7| > 2$

g) $|3 + 6x + 3x^2| > 0$ h) $|x^2 + 4x| < 4$

22. a) $\left|\frac{x+3}{1-x}\right| > 3$ b) $\left|\frac{1-4x}{2-x}\right| > 4$

c) $\frac{2x+3}{|x+4|} \leq 1$ d) $\frac{\frac{2}{3}x - \frac{3}{2}}{\left|\frac{3}{4} + \frac{x}{2}\right|} \leq \frac{5}{6}$

e) $\frac{|3x-2|}{x+2} \geq 2$ f) $\frac{|x-1|}{2x+2} \geq 1$

د

لاندې نامساواتو حلږرى په يوه په يوه كواوردیناتسیستم كې انځور كړئ او ا نځور يې وكاږئ

23. a) $x + y < |3x + 2|$ b) $y + |x + 2| \leq 4$

c) $x + |y - 2| < 3$ d) $|2x + y - 3| \geq 2y - 3x + 4$

e) $|x + 3| + |y - 5| \leq 3$ f) $|x + y - 2| > |y - x + 1|$

g) $|x + y + 1| \leq |x - y - 1|$ h) $|x - y| > |x - 2y - 2|$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۵ فنکشنونه(بلواك يا تابع)

۱۵ . ۱ د فنکشن کليمه او د فنکشن انځورونه:

غواړم چی ددې برخی په پيل کی دی کليمي ته د لوستونکو پام راوګرځوم: د فنکشن کليمه کله د يواځنی څيرونی، چی په هندسه کی خورا ډيره کارول کيږي يا استعماليږي ، کله د تابع(بلواك) او بيا زياته د فنکشن په نامه ځموږ په دې کار کی بلل شوې چی موږ ورسره تراوسه د تابع تر نامه لاندې هم بلد يو، ځما په اند يا فکر که دا موږ بلواك وبولو، نو هدفمند به مو نومولی وي. په لاندې کي به وګور چی خپلواکی او بلواکی ناپيوندونکی ځموږ د څيړلو متن جوړوی

پيژند ۱۵ . ۱:

د يوې ريیلی واريابلی ريیل ارزښته فنکشن(لنډ: فنکشن) د ريیلو ګڼونو ډيری باندې ، د يوې ډيری $D \subseteq R$ يوه يواځنی څيرونه ده. D دپيژند ډيری نوميږي .

د ټولو ارزښتونو ډيری چي y يی د ځان لپاره غوره کولی شي، که x د پيژندډيری يا تعريف ډيري په دننه کی وځغلي، د ارزښت ډيری W بلل کيږي .

د ي وې قانونمندی f له مخی هر $x \in M$ يواځني يوه $y \in W$ باندې تنظيميږي:

$$y = f(x)$$

اوس نو x خپلواك واريابل يا اووښتونی يا مجهوله بلل کيږي يا نوميږي او y بلواك واريابل يا اووښتونی بلل کيږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

د فنکشن مختلف انځورډولونو ترمنځ سړی توپیروي. د فنکشن »کلیمه انځورونه« یوه په خوله ویونکی یا یو اعلانونکی ، له ماتماتیکي یا شمیریز سومبولیك څخه تیریدونکی یا په شمیریز سومبولیك صرف نظر کوونکی، مګر ددې لپاره یو پیچلی، د تشریح شکل دی، چی په لاندې کي به ورسره بلد شو.

بیلګه ۱۵ . ۱ : هر رییل ګڼ د همغه رییلګڼ په نیم ور زیات ۱ باندې تنظیمیدل.

بیلګه ۱۵ . ۲ : هر یو منفي ګڼ به د هغه په مطلقه ارزښت او هر یو مثبت ګن او صفر به د هغه په مربع تنظیم شي.

د شمیرپوهی سومبولونو تر استعمال لاندې، تحلیلي (شننیزه) انځورونه د بلواک یا فنکشن تشریح ده. دلته x او y د نورو رییلو ګڼونو سره د بنسټیزو کارونو یا عملیو ، زیاتون، کمون ، ځل ، ویش ، او د بنسټیزو فنکشنونو له لارې تړل دي (پرتله برخه ۱۵ . ۴)

بیلګی ۱۵ . ۱ ته: $y=(x/2)+1, D=R , W=R$

بیلګی ۱۵ . ۲ ته : د $x<0$ لپاره $y=|x|$
دلته $D=R,W = [0,\infty)$ د $x>0$ لپاره $y=x^2$
پام دې وي چی په داسی حالت کي له کیڼ و ښې لور ته یا ګډوډلوستل کیږی یعنی داسی لولو: y د x مطلقه ارزښت سره مساوي دی ، که چیرې x له 0 کوچنی وي. داسی لیکنو ته دې ګران لوستونکی پوره پام ولري او فکر کوم چی له اشتباه سره به نه مخامخ کیږو) . تحلیلي(شننیزه) انځورونه اکسپلیڅیت(واضح)روښانه و ځرګند) explizitنومیږي، که د فنکشن برابرون ، لکه په بیلګو ۱۵ ، ۱ او ۱۵ . ۲ چی په یوه د yپه لور حلکیدونکي فورم مخ ته پروت وي: $y =f(x)$ که چیرې داسي نه وي نو د تحلیلي - یا شننیزې انځوروني شکل $F(x,y)=0$ دی او فنکشن ایمپلیڅیت (ورسره ځای شوي یا وراسره تړلی implizit) بلل کیږي یا نومیږي . د بیلګی په توګه به $2y-x-1=0$ $D=R,W=R$,فنکشن د بیلګي ۱۵ . ۱ یو ایمپلیڅیت انځورونه وی. دیوه فنکشن نه هره ایمپلیڅیت شنینیزه بڼه (ایمپلیڅیت تحلیلي فورم) کیدی شي په

اکسپلیڅیت شننیزه یا سپړنیزه بڼه (تحلیلي فورم) واړول شي. د بیلګی په توګه :
که $x+y+y^5-1=0$ وي، نو دا د y په لور اکسپلیڅیت حل کیدونکی نه دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یو فنکشن تحلیلي یا شننیزې انځورونی ځانګړې بڼه پارامتری څرګندونه ده. دلته تنظیم د یوه مرستندوي اووښتوني یا واریابلی t ، دا په نامه پارامتر، له لاري لارښودیږي. هر پارامتر (له یوه پارامتر ساحی څخه)

$x = \varphi(t)\ ,\ y = \Psi(t)$

په یو ارزښتجوړې x,y تنظیمیږي.

بیلګه ۱۵ . ۱ ته: x=2t ,y=t+1; -oe< t <oe به یوه پارامتري انځورونه وی او x = t , y = t/2 + 1 به یوه بله پارامتري انځورونه وي.

زیات وخت فنکشنونه د جدول په څیر ورکول کیږي

بیلګي ۱۵ . ۱ته:

X ....-2	-1	0	1	2	
Y 2	0,5	1	1,5	2	

بیلګي ۱۵ ، ۲ ته:

X....-3	2	-1	0	1	2	3 ...
Y....3	2	1	0	1	4	9 ...

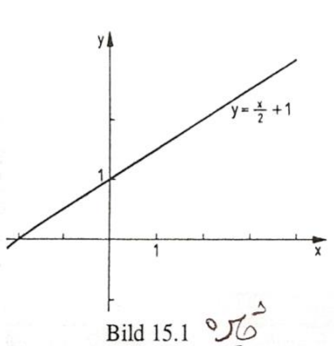


Bild 15.1 ځاره

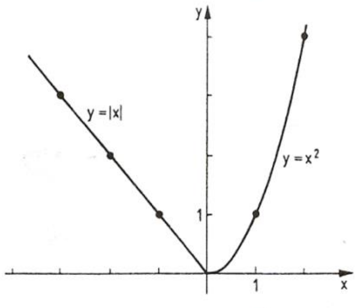


Bild 15.2 ځاره

د فنکشن ګرافیکی انځورونه (د یوې ټوټي) په x,y- کواوردینات سیستم کی د یوې کږې له لارې، د هغه فنکشن انځورونی څخه عبارت ده ، چی د واریابلو

یا اووښتونوجوړې د x,y - هواره یا سطحه کی یوائخني او بوائخني ټکي باندې تنظیمیږي .

څیره ۱۵ . ۱ . او ۱۵ . ۲) بیلګي ۱۵ . ۲ته بیلګي ۱۵ . ۱ته

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱۵ . ۲ د فنکشنونو- یا بلواکو خویونه

پیژند ۱۵ . ۲: $y = f(x)$
په ایتروال] a,b[کی هلته او هلته یا ټیك هلته مونوتون جګیدونکی
(مونوتون لویدونکی) دی، چیرته چی ددوه په زړه پورې ارزښتونو
$x \in [a,b] \wedge y \in [a,b]$ لپاره د$x1<x2$ سره باور ولري:
$$f(x1) \leq f(x2) \quad (f(x1)>f(x2))$$
که د برابرونښه باور ونه لري نو له کره یا کلکی مونوتوني غږیږو.

وبیلګي ۱۵ . ۱ ته: $y=(1/2)x+1$ په $D = R$ کی کلك مونوتون دئ

و بیلګي ۱۵ . ۲ ته: $y=|x|$ د $x<0$ لپاره
او $y= x^2$ د $x>0$ لپاره
په اینتروال) [oe,0] کي مونوتون ټیټېدونکی یا -لویدونکی
او په اینتروال [oe,0) کی مونوتون جګیدونکی دی

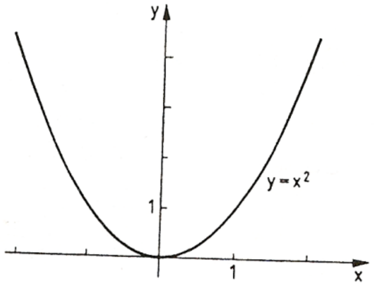
پیژند یا تعریف ۱۵ . ۳ :

په یوه اینتروال] a,a-[کی یو تعریف شوی فنکشن $y = f(x)$ هلته او هلته جوړه (جفت) یا سیومتریك symetrisch,(ناجوړه (طاق) یا نا- یا انتیسیومتریكantisymetrisch بلل کیږي چی باوري وي
$$f(-x) = f(x) \quad (f(-x) = -f(x))$$
د جوړه فنکشنونو ځیرې اکسیال یا محوري سیومتریك و y - محور ته ځغلي) دلته هم ځیره شته ، نو تل به همغه څه لیکم؟ ۱۵ . ۳ (، طاق فنکشنونه و سرچینی ته منځني یا مرکزي سیومتریك ځغلي) بیا هم ځیره او ۰۰۰۰ش ۱۵ . ۴)

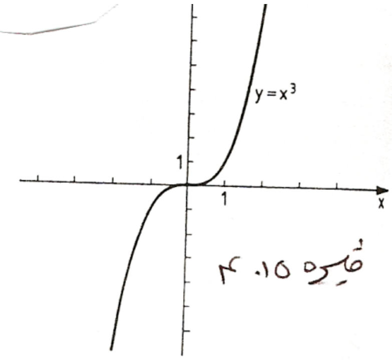
بیلګه ۱۵ . ۴
فنکشن $y= x^3 ,D= R$
یو ناجوړه یا طاق فنکشن دئ :
$$(-x^3) = -x^3$$

بیلګه ۱۵ . ۳ :
فنکشن $y=x^2,D=R$
یو جوړه یا جفت فنکشن دئ:
$$(-x)^2 = x^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



ځېره ۱۵.۳



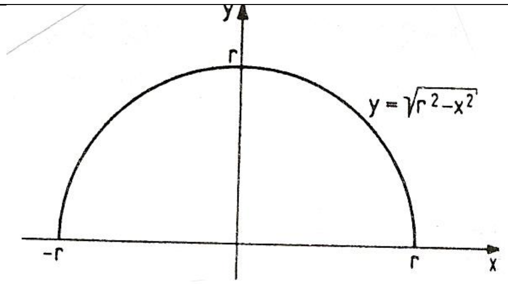
ځېره ۱۵.۴

د بیلګي ۱۵ . ۱ او ، ۱۵ . ۲ فنکشنونه نه جوړه یا جفت او نه ناجوړه یا طاق دي

پیژند ۱۵ . ۴:

$y = f(x)$ تیك هلته په D (پیژندډیری ده) بند یا رابند(محدود)بلل کیږي که
یو $k > 0$ داسی شته وي چي دا باور ولري :
$|f(x)| < k \quad \forall x \in D$

بیلګه ۱۵ . ۵:

فنکشن $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $D = [-r, r]$ بند یا راګیر(محدود)(زه به دا له دې وروسته بند وبولم) دی، ځکه چی لرو:نیم یوونګردی ځیره ده ش . ۱۵ . ۵ $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \leq r$	

پیژند ۱۵ . ۵:
$y = f(x)$ پریودیکي(دوراني یا بیرته- یا تل بیرته راګرځیدونکی periodical بلل
کیږي د دوران یا راګرځیدونی p سره ، که باور ولري:
$f(x + p) = f(x)$
د دورانی یا تل راکځیدونکو (پریودیکي) فنکشنونو تیوپیکي بیلګي تریګونومتریکي
فنکشنونه دي (پرتله برخه ۱۵ . ۳)

(c) ketabton.com: The Digital Library

پېژند ۱۵ . ۶ :

ټول $x \in D$ د $f(x)=0$ سره، د فنکشن $f(x)$ صفر ځایونه بلل کیږي.

د فنکشن صفرځایونه د مساوات $f(x) = 0$ د حل له لارې پیدا کیږي. داحلونه د x- محور سره د فنکشن کرښې د غوڅټکو x - ارزښتونه دي.

بیلګی ۱۵ . ۱ته:

د فنکشن $y = 1/2\, x + 1$ صفرځایونه د مساوات $x/2 + 1 = 0$ اوبی $x = -2$ دی (ځیره ۱۵ . ۱)

بیلګه. ۱۵ . ۶:

فنکشن $y = x^2 - 4$ دوه صفرځایونه لري:

$$x^2 - 4 = 0 \iff x1 = 2 , \quad x2 = -2$$

فنکشن $y = x^2 + 4$ صفرځایونه نه لري.) بیا هم ځیر ۱۵ . ۶)

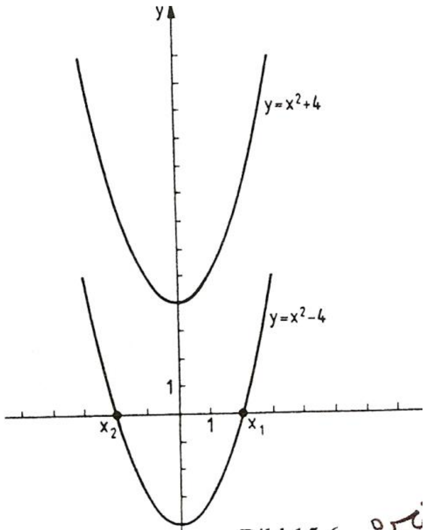


Bild 15.6 ځیره

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند ۱۵ . ۷:

$x \in D$, $y \in W$ y =f(x),

یویواځنی« یا یواځنی او یواځنی بلل کیږي، که هریو $y \in W$ د یوه $x \in D$ په واك کی وي یا هر یو $y \in W$ ته یوه $x \in D$ ځیره شوی وي، د کوم لپاره چی باور ولري: (y = f(x)یو یویواځنی یایواځنی او یواځنی فنکشن په ښکیدونکی دی ، دا په دې مانا چي دا یو فنکشن (x = g(y تعریفوي، یعني په ښت یا چپه فنکشن. که دلته د اووښتونو یا واریابلو د نخښی(نخونی) سره بدلی شي، نو د په ښت فنکشن په توګه لرو y=g(x) دا د فنکشن روڼنی یا وسره بده یا که غواړی مروجه ځیره ده، چی x خپلواك اوyبلواك ، دلته د x په واك کی واریابل یامجهولی یا ناپیژندونکی دي د y=f(x) په ښت یا برعکس فنکشن لپاره داسی هم لیکلی شو: $y = f^{-1}(x)$

فنکشن y = x د خپل په ښت فنکشن سره کټمټ(- ورته) identic دی۰ د په ښت یا برعکس فنکشن $y = f^{-1}(x)$
کرافیکی ځیره y = x په کرښه د y =f(x)(هندارونه) یعنی په هنداره کی ځیرونه او لنډ یی: هندارونه) ده۰

بیلګي ۱۵ ، ۱ ته :

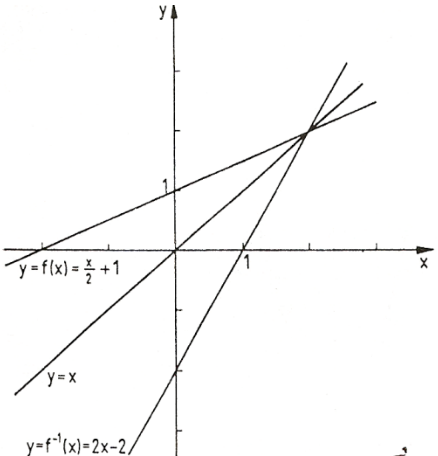


Bild 15.7a ځیره

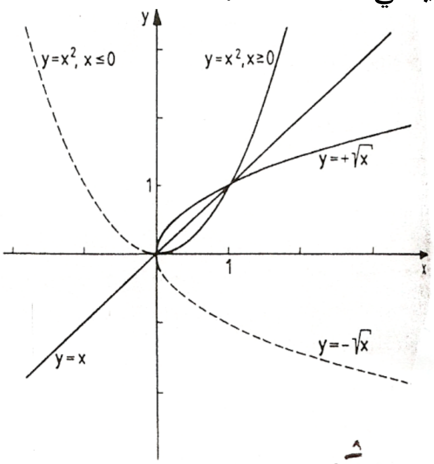


Bild 15.7b ځیره

د فنکشن y = f(x)= x/2 +1 چپه یا په ښت فنکشن داسی دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$y = f^{-1}(x) = 2x - 2$

سرېږي $y = x/2 + 1$ د x په لور اوبی کوي: $x=2y-2$ او بالاخره x او y سره بدلوي .
(ښیره. ۱۵ ۷ الف)

بیلګي ۱۵ . ۳ ته : فنکشن
$y = x^2 , \; x \in D$
ښیرره ش ۱۵ . ۳) په ښتکیدونکی دي یا په ښتکیدونکی نه دی.
هر $y \in W$ =[0,oe] پوربې دوه[-oe,oe] = $x \in D$ اړه لري، یعنی x=+yاو x=-y
مګر $y= x^2$کلك مونوتون جګیدونګی دی (او په دې ډول یواځنی او یواځنی).

د $0 \geq x$ لپاره او کلك مونوتون لویدونکی د $0 < x$ لپاره. $y=x^2, x\geq 0$
ته چپه- یا په ښټ فنکشن $y=+ x$ دی، او $y = x^2 , x < 0$ ته چپه- یا په ښټ فنکشن $y = -x$ دی. (ښیره ۱۵ . ۷ ب) .
په ټولیزه (عمومي) توګه لاندې جمله باور لري

جمله ۱۵ . ۱ :

که $y = f(x)$کلك مونوتون جګیدونکی) لویدونکی (وي ،نو په ښټ فنکشن $y = f^{-1}(x)$ موجود دی او دا هم کلك مونوتون جګیدونکی (لویدونکی) دی.

۱۵ . ۳ . بنسټیز فنکشنونه

په دې برخه کي بنسټیز فنکشنونه تعریفیږي. دا ټول راشنل فنکشنونه، مات راشنل فنکشنونه، پوتنځ یا په توان فنکشنونه، ایکسپوننشل فنکشنونه او لوګاریتم فنکشنونه، تریګونومتري فنکشنونه او ښیکلومتري فنکشنونه دي. دا بنسټیز فنکشنونه به د ځپلوځانګړدوله خویونو له مخی وښیرل شي. په برخه ۱۵ . ۴ که به دفنکشن فنکشنونه (ځنځیری - یا تړلي فنکشنونه) وښیرل شي. د فنکشنونو ښیرل به د هغو ځانګړدوله یا کرکټریستیکي خویونو له مخی هلته هم دوام وموميِ، که د دیفرنشل شمیرنی کومکي مواد مو مخ ته پراته وي (برخه ۲۰ . ۴)

پیژند ۱۵ . ۸ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

فنکشن

$$y=a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a^2 x^2 + a_1 x + a_0, n \in N; a_i \in R, a_n \neq 0 \quad (15.1)$$

د ټولو $x \in R$ لپاره تعریف دی او n - مه درجه ټولریشنلفنکشن نومیږي.دې ډول فنکشنونو ته پولینوم فنکشنونه(یا لنډ : پولینوم) هم ویل کیږي

یو ساده ټول ریشنل - ۱ - امه درجه (n = 1) یالاینې فنکشن په لاندې ډول دی:

$$y = mx + n \qquad (15.2)$$

دلته m او n په (۱۵ . ۱) کی پارامترونو a1 او a0 په مانا دي. د لاینې فنکشنونو ځیره(ګراف) یوه کرښه ده چې په y = n کی دy - محور غوځوي (x = 0) او جګوالی $m = \tan\alpha$

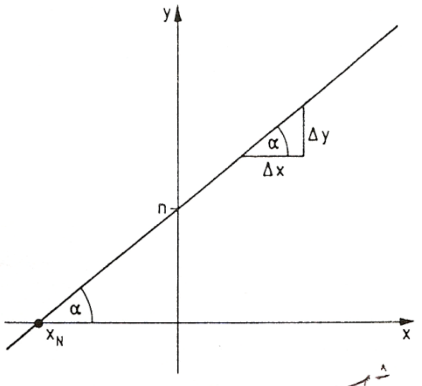


Bild 15.8

لري (ځېره پورته . ۱۵ . ۸) جګوالی د y - ارزښت د تغیر د x - ارزښت تغیر سره متناسب دی: $m = \Delta y / \Delta x = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

کرښه جګیږي که $m > 0$ او لویږي یا ټیټیږي که $m < 0$ وي اوکه $m = 0$ وي، دx - محور سره غبرګه ځغلي . کرښه ،که $|m| = 0$ نیول شوی وي، ټیك یو صفرځاي (y = 0) لري: $x_N = - n/m$

که را په غاړه شي چې د یوې کرښې برابرون، چې له دوه ټکو (x1,y1) او (x2,y2) تیریږي، پیدا کړو چې یو په بل نیغې نه وي ولاړې ، نو د هغو جګوالی m او د هغو پرتټکی

(c) ketabton.com: The Digital Library

یا نوره ښه غړخښکی n په y - محور د برابرونسیستم

$y1 = x1m + n , y2 = x2m + n$

له مخی پیدا کوو او په دې توګه لاس ته راوړو

$(y-y1)/(x-x1)=(y2-y1)/(x2-x1)$

په بل پل)قدم(کی موږ ۲ -امه درجه ټولریشنل فنکشنونه یا مربع فنکشنونه رامنځ ته کوو لکه په (۱۵ . ۱) کي $a_2 = a, a_1 = b, a_0 = c$

$y=ax^2+bx+c , a \;|= 0$ (15 .3)

د مربع فنکشنونو څیره) ګراف (پارابول دی چی د هغي سیومتري محور و y - محور ته غبرګ ځغلي. کوایفیڅینت) ځله ووني یا ځلیدونکی (a,b,c) د پارابول د ککرې ځاي او بنه)فورم(ټاکی.

موږ د مربع فنکشن یو څو ځانګړي حالتونه تر څیرني لاندې نیسو.

1. $y=x^2(a=1 ,b=0,c=0)$ (15 . 4)

نورمال پارابول، د ککرې کواوردینات: $x_s = 0 , y_s = 0$

(ځ . ۱۵ . ۹)

2. $y=x^2+px+q$ (a=1 , b=p , c=q) (15 . 5)

او $x^2 + px$ ته د څلوری - یا مربع تکمیلولو ورزیاتونی څخه لاس ته راځي:

$y=x^2+px (p/2)^2+q-(p/2)^2=(x+p/2)^2+q-p^2/2$ (15,5)

یو و (نسبت) (۱۵ . ۴) ته (مخامخ) د x - لور په p/2 - اودy - لور په

$q - p^2 /4$ راکښل (راښکل-یا راکش -) شوی نورمال پارابول د ی ، دا په دې مانا چی په (۱۵ . ۵) راکښل شوی پارابول دا ککره لرې:

$x_s = -p/2 , y_s =q - p^2/4$

بیلګه ۱۵ . ۷:

$y=x^2+6x+10, xs=-6/2=-3,ys=10-6^2/2=1$

(ځ،۱۵ . ۹)

(c) ketabton.com: The Digital Library

3. $y = ax^2$ (a|=0,b=0, c = 0)

د ککرۍ (سر یا رآس) کواوردینات . $x_s = 0$, $y_s = 0$

پارابول د 1 < |a|لپاره خور، د |a|<1 لپاره پرسیدلی،د a > 0 لپاره پورته لور ته او د a < 0لپاره کښته لورته واز دی (خلاص دی)

بیلگه ۱۵ . ۸:

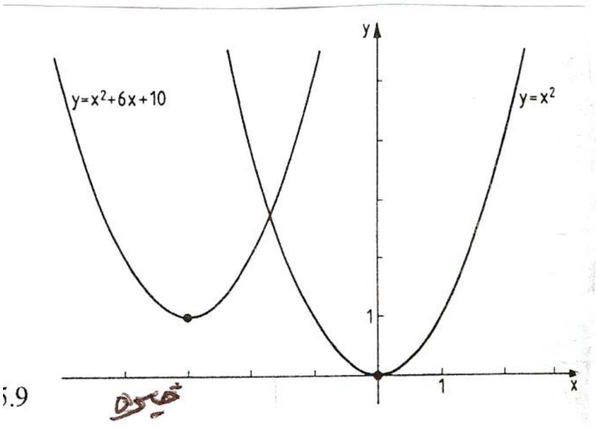
$y = 2x^2$, $y = (1/2)x^2$, $y = -2x^2$

(ځ . ۱۵ . ۱۰)

4. $y=ax^2+bx+c=a[x^2+(b/a)x+c/a]$

د ککرۍ (رأس) کواوردینات داسی دی (لکه په ۱۵ . ۵ کی یی چی مخ ته تللي یو)

$x_s = -b/2a; y_s = a[(c/a)-(b^2/4a^2)] = c - b^2/4a^2$



.9 شکل

بیلگه ۱۵ . ۹:

$y=-(1/2)x^2+x+4$,(a=-1/2, b=1, c=4)

دککرۍ کواوردینات:

$x_s = -1/(2.(1/2)) = 1, y_s = 4-12/(4.(-1/2)) = 9/2$

دا چي a = -1/2 دی، نو پارابول پرسیدلی او لاندې لور ته واز دی (ش ۱۵ . ۱۱)

(c) ketabton.com: The Digital Library

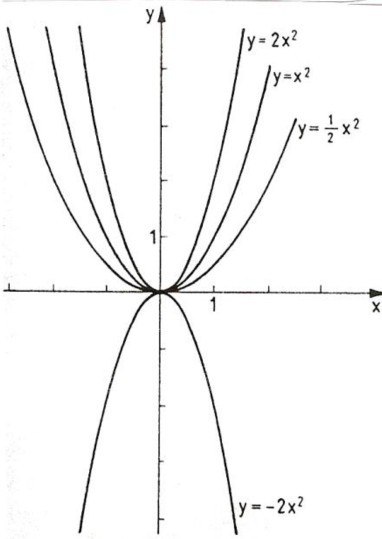


Bild 15.10

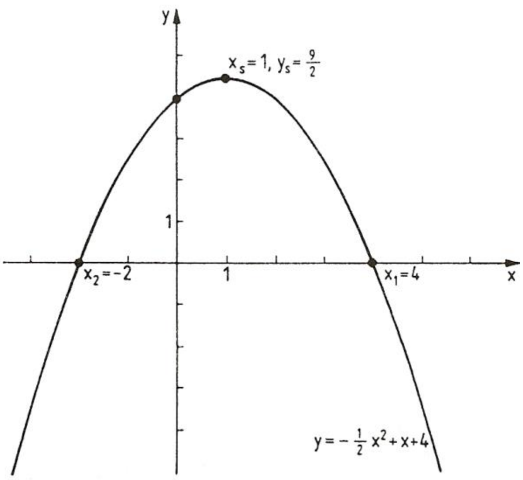


Bild 15.11

د فنکشن $y=ax^2+bx+c$ د صفرځایونه د برابرون $ax^2+bx+c=0$ اوبیونې دي.
وبیلګي ۱۵ . ۹ ته (څ. ۱۵ . ۱) :
صفر ځایونه له دې لاس ته راځي : $-(1/2)x^2+x+4=0$ ، چې دلته $x_1 = 4, x_2 = -2$ دي .

و بیلګي ۱۵ . ۷ (څیره ۱۵ . ۹) ته :
د $x^2+6x+10=0$ یاني $x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9-10} = -3 \pm \sqrt{-1} = -3 \pm i$ څخه لاس ته راځي چې برابرون رییل صفرځایونه نه لري .

فنکشن $y = x^2$ غبرګ یا جوړه(ډبل) صفرځایونه لري یاني $x_{1,2} = 0$ دي
د ټولریشنل فنکشن دریمو او لوړو درجو لپاره به د بیلګي په توګه دټولریشنلفنکشنونو بیلګي له مخې، دریمه درجه ټولریشنل فنکشن راوړو
چې د فنکشن ارزښت شمیرلو یو ځانګړی لیدوړ فورم دی، د هورنرشیما(بنه) Horne rschema، معرفي شي. ددې لپاره به د(۱۵ . ۶) فورم بدل شي.

$$x_{4,5} = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm 2i$$

$$y = [a_3x^2 + a_2x + a_1]x + a_0 = [(a_3x + a_2)x + a_1)x + a_0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

هغه ورکړ شوي خپلواك x_1 پورې اړوند فنکشن ارزښت $y_1 = f(x_1)$ کيدی شي له دې بڼی سره په لاندې ډول وشميرل شي:
a3 له x1 سره ځل کيږي، دې سره a2 زياتيږي، زياتون يی له x1 سره ځل، او a1 ور زياتوو، زياتون د x1 سره ځل او a0 ور زياتوو. دا د عمليوپرلپسی په لاندې ډول د لاندې شيما (د هورنرشيما) له لارې په ليدوړ ډول مخ ته بيايو (څرکندوو)

	a_2	a_1	a_0	خلونه يا ضريبونه
	a_3x_1	$(a_3x_1+a_2)x_1$	$[(a_3x_1+a_2)x_1+a_1]x_1$	منځنی خلونه
a_3	$a_3x_1+a_2$	$(a_3x_1+a_2)x_1+a_1$	$[(a_3x_1+a_2)x_1+a_1]x_1+a_0 = f(x_1)$	منځنی زياتون

ددې شيما پوهيدل لږ نابلد دی او څه فکر غواړي، خو پرې پوهيدل له نورو مساواتو څخه روښان دی.

بيلګه ۱۵ . ۱۰ : د فنکشن $y=x^3-3x^2-14x-5$ لپاره دفنکشن ارزښتونه له لاندې خپلواکو $x_1 = -2$ او $x_2 = 5$ څخه شميرل کيږي.
يادونه: دا د هورنر شيمت زما په دې اوسنی د برينکمن ژباړه کې مفصل شته(ژباړی). اوبيونه) :

	1	-2	-14	-5
$x_1 = -2$		-2	8	12
	1	-4	-6	$7 = f(-2)$
$x_2 = 5$		5	15	5
	1	3	1	$0=f(5)$

لرو $f(-2) = 7$ او $f(5) = 0$ (صفرځايونه)

(c) ketabton.com: The Digital Library

که چرې ددریمې درجې ریشنلفنکشن یو صفرځاي ولري، نو کړی شو چی د پولینوم ویش له لارې دا لاینی فاکتور بیل کړو(پرتله ۱۲ - امه برخه، جمله ۱۲ . ۴)

بیلګي ۱۵ . ۱۰ ته: $(x^3-2x-14x-5):(x-5)=x^2+3x+1$ له دې امله لرو:

$$y = x^3-2x^2-5 = (x^2+3x+1)(x-5)$$

د ویش پولینومونو ځلووني ، یعنی 1 د(x^2) سره ، 3 د (x) سره او 1 د هورنرشیما په اخره لیکه کی ولاړ دی. د هورنرشیما له لارې د صفرځاي شمیرلو سره په همغه وخت یا دمګړۍ کی د پولینوم ویش صورت نیسي. لرو:

$$[a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0):(x-x_1)=a_3x^2+(a_3x_1+a_2)x+[(a_2x_1+a_1)x_1+a_1]$$

او $0 = f(x1)$ چی د $(x-x_1)$ سره د ځلونې له لارې دا تصدیقیدلی شي. پاتی صفر ځایونه د څلورۍ – یا مربع برابرنی د اوبیونې له لارې لاس ته راځي

$$x^2+3x+1=0; x_{2,3}=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-1}=-(3\pm\sqrt{5})/2$$

په دې ډول د دریمې درجي فنکشن د درې لاینی فنکشنونو د ځلونې په څیر لیکل کیدی شي (پرتله: برخه ۱۲ جمله ۱۲ . ۵)

$$y=x^3-2x^2-14x-5=(x-5)[x-\frac{-3+\sqrt{5}}{2}][x-\frac{-3-\sqrt{5}}{2}]$$

د جملی۱۲ . ۵ وینا په عمومي توګه د ټولو n- م درجو ریشنل فنکشنونولپاره لاندېجمله باور ي کوي

جمله ۱۵ . ۲ :

هر n - م درجه ټول ریشنلفنکشن n صفرځایونه لري . کیدي شي دا ټول یو له بل توپیر ولري او یادا صفرځایونه څوځله هم رامنځ ته شي، رییل او یا جوړه کونجوګیري کملکس کیدی شي.

که $x_1, x_2, ..., x_n$ دلاندې فنکشن n صفر ځایونه وي

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو دا د لاینیز فاکتورونو د ځلونې په څیر په لاندې ډول لیکل کیدی شي:

$$y = (x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)a_n$$

د هورنرشیما په استعمال کی دې لاندې په پام کی ونیول شي:
که په یوه n - م درجه پولینوم کی یو x - پوتنځ نه وي ، نو د هغه د کوایفیځینت یا ځله ووني لپاره دې صفر ولیکل شي .

بیلګه ۱۵ . ۱۱ :
5 - مه درجه ټول ریشنلفنکشن $y = 2x^5 - 6x^3 - 20x^2 - 8x + 80$ درې صفرځایونه $x_1 = x_2 = 2, x_3 = -2$
لري. نور صفرځایونه دې پیداکړی شي او فنکشن دې د لاینیزو فاکتورونو د ځلونې په څیر ولیکل شي.

ځواب : د هورن جملی له لارې یو په بل پسی د پولینوم ویش یو پاتی 2 - مه درجه پولینوم لاس ته راکوي:

	2	0	-6	-20	-8	80
$x_1 = 2$		4	8	4	-32	-80
	2	4	5	-1	-40	0 = f(0
$x_2 = 2$		4	16	36	40	....
	2	8	18	20	0=f(2)	
$x_3 = -2$		-4	-8	-20		
	2	4	10	0=f(-2)		

دا پاتی پولینوم $2x^2+4x+10 = 2(x^2+2x+5)$ د $x^2+2x+5 = 0$ له امله
د $x_{4,5} = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm 2i$
لپاره لاندې د ځل فورم لري $2x^2+4x+10 = 2(x+1-2i)(x+1+2i)$

په دې ډول ورکړشوی پولینوم په لاندې ډول لیکل کیږي

$$y=2(x-2)^2(x+2)(x+1-2i)(x+1+2i)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ددې لپاره چی د دریمي او جګو درجو د ټول ریشنلفنکشنونو یوه ځیره یا تصویر ولرودی شو، نور کرکتریستیکی یا د خویونو ټکی یی د دیفرنځیالشمیرني له لارې لاسته راوستی شو(برخه ۲۰ . ۴)

بي له دې چی د دفیرنځیالشمیر له مرستي کار واخلو ، کیدی شي چی د هغه د ناپای په هکله وینا وي وکړی شو. موږ په لیدیدونکی ډول د فنکشن د پولی کلیمه په کار اچوو، کومه به چی په برخه ۱۹ کی ټیك تعریف شي. دا د بیلګي په توګه دا مانا لري چی $\lim_{x\to\infty} f(x) = g$ سره (f(x تل ارزښت g ته نزدې کیږي، که x د oe یانې ناپای په لور لاړشي. د

(۱۵ . ۱) لپاره باورلري:

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty} x^n . \lim_{x\to\pm\infty}[a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + ... + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}] = a_n \lim_{x\to\pm\infty} x^n$$

دا چی

xn -> oe

د x -> ± oe لپاره که n جوړه (جفت) وي

او xn ->±oe د x ->±oe لپاره که n ناجوړه (طاق) وي، او له دې لاس ته راځي

که n جوړه او a_n زیاتیز یا مثبت وي، نو لرو $\lim_{x\to\infty} y = \infty; \lim_{x\to-\infty} y = \infty$

(کږه له oe - څخه د oe په لور ځي) .

که n جوړه او a_n کمیز یا منفي وي، نو لرو: $\lim_{x\to\infty} y = -\infty; \lim_{x\to-\infty} y = \infty -$

کږه د oe - څخه د oe - په لور ځي) .

که n ناجوړه او a_n کمیز یا مثبت وي ، نو لرو: $\lim_{x\to\infty} y = \infty; \lim_{x\to-\infty} y = -\infty$

کږه له oe - څخه د oe په لور ځي)

کهن n ناجوړه او a_n کمیز وي ، نو لرو: $\lim_{x\to\infty} y = -\infty; \lim_{x\to-\infty} y = \infty$

کږه له oe څخه د oe - په لور ځي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

پيژند ۱۵ . ۹ :
فنکشن

$$y = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0}; ....(15,7)$$

$$n, m \in N_0; a_k, b_i \in R; Q_m \neq 0$$

مات ريشنلفنکشن بلل کيږي او د ټولو x د $Q_m(x) \neq 0$ لپاره تعريف دی.

فنکشن (۱۵ . ۷) اصلي مات نوميږي، که n<m وي او نااصلي مات دی که $n \geq m$ ۰ نااصل مات فنکشن کيدی شي چي د پولينوم ويش له لارې تجزيه (ټوټه) شي او د يوه ټول ريشنلفنکشن او يوه ريښتونی ماتی برخی د زياتون په څير وليکل شي.

بيلګه ۱۵ . ۱۲:

فنکشن $y = \frac{2x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 13x - 6}{x^3 - 4x}$ اصل مات نه دی(n =4,m=3) په ماتلاندې
فنکشن باندې دماتباندې فنکشن ويش څخه لاس ته راځي:

$$(2x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 13x - 6) : (x^3 - 4x) = 2x - 3$$

د $2x^2+x-6$ پاتی (باقي) سره. پس لرو:

$$y=2x-3+(2x^2+x-6)/(x^3-4x).$$

فنکشن (۱۵ . ۷) د x = x0 لپاره يو صفرځاي لري، که x = x0 وي نو باور لري:
$P_n(x_0) = 0$ مګر $Q_m(x) \neq 0$

دا د $x = x_L$ لپاره تشځاي (Lücke) لري،که وي: $P_n(x_0) = 0$ او $Q_m(x)=0$
د $x = x_P$ لپاره يو قطب pol لري که وي: $P_n(x_P) \neq 0$ مګر $Q_m(x_P)=0$

بيلګه ۱۵ . ۱۳ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

فنکشن ($y=(2x^2+x-6)/(x^3-4x)$ د ماتباندې- او ماتلاندې فکشنونو ټوټې کولو وروسته په لاندې فورم د لاینې فاکتورونوپه توګه لیکل کیږي.

$$y = \frac{2(x-\frac{3}{2})(x+2)}{x(x+2)(x-2)}$$

د $x = x_0 = 3/2$ لپاره ماتباندې صفر دی، مګر مات لاندې صفر نه دی (صفرځای)مات لاندې- او مات باندې فنکشنونه د $x = xL = -2$ لپاره صفر دې (تشځای)
د $x = x_{P1} = 0$ او $x = x_{P2} = 0$ لپاره ماتلاندې صفر او مات باندې صفر نه دی (قطب)
که x سره د قطب ځای ته نزدې شي، نو y د ناپای په لور ځي چې د قطبځای (ټيك ناپای ځای بللکیږي) xpکی کرږه داسیمپټوتي کرښې $x = xP$ ته نزدې کیږي .د یوه تشځای xL په حالت کی ماتفنکشن د نامعلومی افادې $0 / 0$ شکل غوره کوي، له دې
امله د $x = xL$ لپاره تعریف نه دی.

په ناپای کی د فنکشن ځان نیونی ته:

د اصل ماتفنکشن ($n<m$) د x په جګ پوتنځ یعنی x^m د ماتباندې او ماتلاندې د ویش ښخه لاس ته راځی:

$$y = \frac{\frac{a_n}{x^{-n+m}} + \frac{a_{n-1}}{x^{-n+1+m}} + \ldots + \frac{a_1}{x^{-1+m}} + \frac{a_0}{x^m}}{b_m + \frac{b_{m-1}}{x} + \ldots + \frac{b_1}{x^{m-1}} + \frac{b_0}{x^m}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{0}{b_m} = 0$$

داچی د x ټول اکسپوننتونه مثبت دي، او د x ټول پوتنځونه د ناپای په لور ځي ، نو د آصل مات فنکشن ځیره د x->±oe لپاره د x - محور ته نزدې کیږي. فنکشنونه

چی آصل مات نه وي نو د x->±oe لپاره داسی ځانونه نیسي، چی اصل د ماتفنکشن برخه یی د صفر په لور ځي، لکه ټولریشنل برخه .
د نااصل مات فنکشن ځیره د x -> ±oe سره ، ځان خپل ټولریشنلبرخی ته نزدې کوي.

بیلګه ۱۵ . ۱۴:

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف: (y = x /(x²+1 د 0 = x0 په ځاي کی صفرځای لري. تشځاي او پول
یا قطب نه لري ربیل اوبیونه نه لري) او دx -> ± oe لپاره دx- محور (y = 0)
د اسیمپتوتی په څیر لري (څیره. ۱۵ . ۱۲)

ب: (y=(x²+2x-3)/(x+2)=x- 3/(x+2 صفرځایونه(x²+2x-3 =0) په 3-= x1
او x1=1 کی لري . تشځای نه لري او په 2- = x3 کی قطب لري دا په دې مانا چی x =
2-اسیمپتوتی دی، او د x →±oe لپاره فنکشن y = x اسیمپتوتي کيږي)دا سیمپتوتی
کلیمه دې په برخه ۱۶ . ۴ کی هم وکتل شي)

موږ په دې پسی ځانله شوي ځانګړي ټول - یا مات ریشنلفنکشنونه راوړو:
فنکشن

$$y = x^n ; n \in Z \setminus \{0,1\} .... (15,8_a)$$

یو ځانګړی پوتنځفنکشن دی(د پوتنځ پیژند 6 ۰ ۱)

(15.8)د زیاتیززیاتیز یا مثبت ټولګڼ n لپاره یو ټولرشنل فنکشن دی. د جوړه ټولګڼ
nلپاره ټولریشنل فنکشن دی. د ټولګڼ n لپاره ټولی کرې د تعریف ډیری(-) = D
oe,oe، د ارزښت ډیری(W=(0,oe او ګډ ټکی (1,1)، (0,0),(1,1) لري. (څیره
۱٤ الف ۱۵) د ناجوړه ګڼ د n لپاره(D = (-oe,oe
او(W = (-oe,oe دي او (-1,-1) , (0,0). (1,1) ګډ ټکي دي (څیره ۱۵ . ۱۴
ب)۰

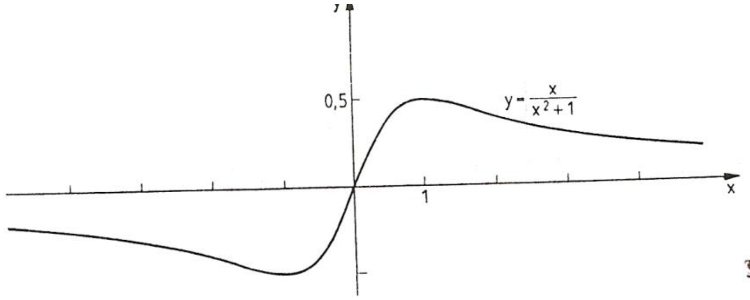


Bild 15.12

(c) ketabton.com: The Digital Library

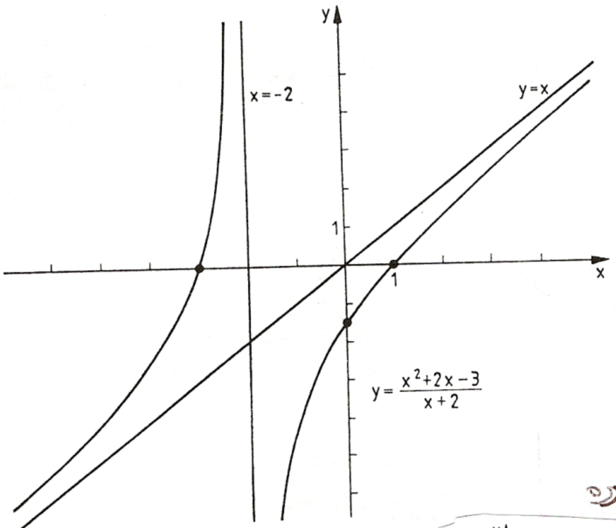


Bild 15.13

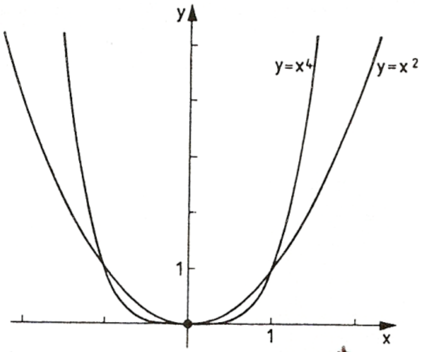


Bild 15.14a

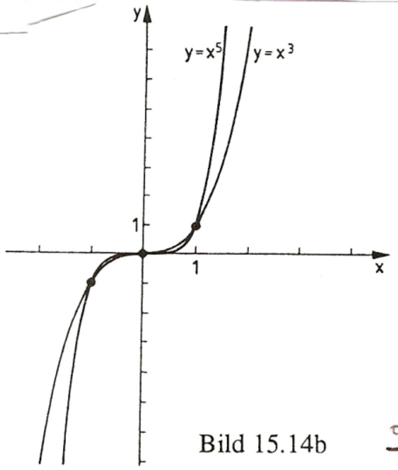


Bild 15.14b

(۱۵ ، ۸ الف) د ټول کمیز یا منفي ګڼ nلپاره یو مات ریشنل فنکشن دی په $x = 0$ کی
د یوه قطب او $y = 0$ کی یوې اسیمپتوتی په څیر. د جوړه ګڼون یا تعداد (کمیز n
لپاره ټولی کړۍ د پیژند ډیري
$D = (-oe,oe)\setminus\{0\}$ د ارزښت ډیري($W = (0,oe)$ لري اوګډټکي $(1,1), (-1,1)$
؟؟؟ څیره ش. ۱۵,۱۵الف) .
د ناجوړه ګڼون (کمیز n)لپاره{ $D = (-oe,oe)\setminus\{0\}$ او($W=(-oe,oe$ او(1-،1-) (
1,1) ګډ ټکی دی (څیره »۱۵ . ۱۵ ب) .
دوه څیرې دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

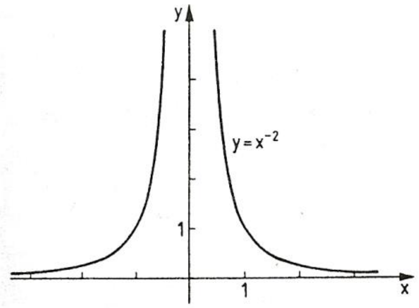


Bild 15.15a

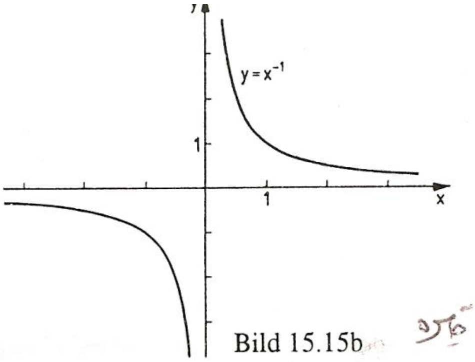


Bild 15.15b

د پوتنځ فنکشن پر ختښ بلواک لپاره دې د مونوتوني اینتروال په پام کی ونیول شي.(پرتله بیلګه(بیلګه ۱۵ .۳)
د فنکشن) لوستل له کینې وښي لور ته

$$y = x^n; n \in N^*\{1\}, D = [0,\infty), W = [0,\infty)$$

چپه- یا پر ختښ فنکشن په لاندې ډول دی.

$$y = \sqrt[n]{x}\ ,\ n \in N \setminus \{1\}\ ,\ D = [0,\infty), W = [0,\infty) ....(15,8_b)$$

او رینښه فنکشن نومیږي (پیژند ۶ . ۲ دې وکتل شي) پوتنځ فنکشن کیدی شي و
ریشنل ایکسپوننت ته پراخه شي) دلته لرو $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} (\sqrt[n]{x})^m = x^{\frac{n}{m}}$ (پرتله برخه ۴)

که پوتنځ فنکشنونه د ریشنل فنکشنونو لپاره راوړل شي:

$$y = x^n\ ,\ a \in Q\ ,\ x > 0 \qquad (15.8c)$$

نو د رینښي فنکشن (۱۵ . ۸ ب) دې د پوتنځ فنکشن په څیر وپوهیدی شي.

د پوتنځ فنکشن (۱۵ . ۸ ث) پرخښ بیرته پوتنځ فنکشن دی.
ټولیز پوتنځ فنکشن پیژند د رییل ایکسپوننت لپاره ورکړ شوی(د رییلګڼونو کلیمه دې وکتل شي برخه ۳ ۰ ۱ . ۴ کی)

پیژند ۱۵ . ۱۰ : فنکشن

$$y = x^{\alpha}\quad ,\quad \alpha \in R\ ,\ x > 0 \qquad (15.8d)$$

پوتنځ فنکشن نومیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۵ . ۱۵ : فنکشن

$$y = x^{\frac{3}{2}} = \sqrt{x^3}\ , x \geq 0$$

لاندې چپه - یا پر ښۍ فنکشن لرو

$$y = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}\ , x \geq 0$$

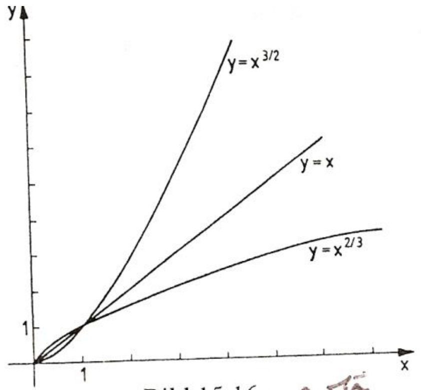


Bild 15.16a ځیره ب)

(ځیره ۱۵ . ۱۶ الف)

فنکشن لاندې چپه فنکشن لري: $y = x^{-1/2} = 1/\sqrt{x}, x > 0$

ځیره ۱۵ . ۱۶ ب)

$$y = x^{-2} = 1/x^2\ , x > 0$$

یادونه : په پیژند ٤ . ۲ کی مو وویل چی یوائې د ناکمیز رادیکاندو ریښه ویستل کیدو اجازه لرو. دا کړنلار دې د پرښۍ فنکشن جوړولو برسیره د مونوتوني غوښتلو لپاره هم په

پام کی وي. د بیلګي په توګه فنکشن

$y=x^3$ په ټول تعریفدیري کي مونوتون پورته کیدونکی وی او له دې امله ټول په ښۍ کیدونکی وی، $y = \sqrt[3]{x}$ د فنکشن $y = x^3$ په پیژنددیری($D = [0,oe$ کی پر ښۍ فنکشن دی، په داسی حال کی، چی د$y= x^3$ پرښۍ فنکشن د] $D= (-oe,0$

سره په $y = -\sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{|x|}$ فنکشن کی ورکړ شوی دی(ش. ۱۵ . ۱۷) ۰

پیژند ۱۵ . ۱۱: فنکشن

$$y=a^x, a > 0, a \neq 1 ....(15,9)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ايکسپوننشلفنکشن يا په جګ(لنډ »جګ«) بلواك بلل کيږي۰
(د ايکسپوننت يا »جګ« کليمی لپاره دی پيژند ۴ . ۱ وکتل شي)

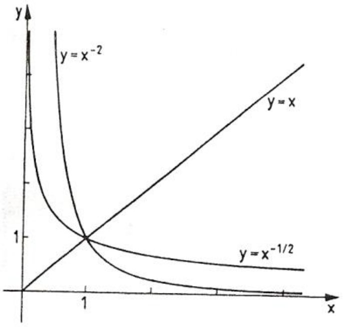


Bild 15.16b

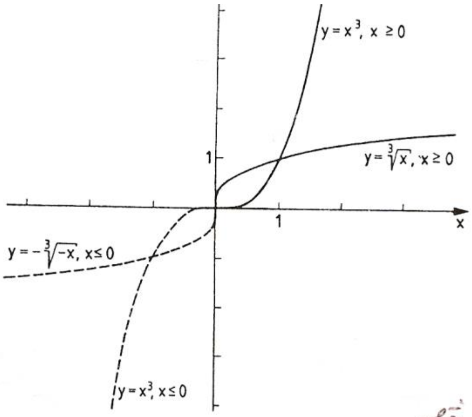


Bild 15.17

پورته دوه څيرې دې پام کې ونيول شي

فنکشن (۱۵ . ۹) لاندې پيژندډيری(D=(-oe,oe او ارزښتډيری(W=(o,oe
لري. د $a^0 = 1$ له امله ټکی(0,1 () د ټولو کږو ګډ ټکی دی

د a>0 لپاره (۱۵ . ۹)
په کلکه يو غږيز- يا مونوتونجګيدونکی
دئ اود x->oe سره د x - محور ته
اسيمپوتيك ورنزدې کيږي .د 0<a<1
لپاره) ۱۵ . ۹ (په کلکه مونوتون لويږي
او ځان د oe -> x سره د x -محور ته
اسيمپتوتيك نزدې کوي .

د اکسپوننشل فنکشنونو يو څو بيلګې
(a=2; e ; 10 ; 1 /2 ; 1/e ; 1/10)
په څيره ۱۵ . ۱۸ کی انځور شوي

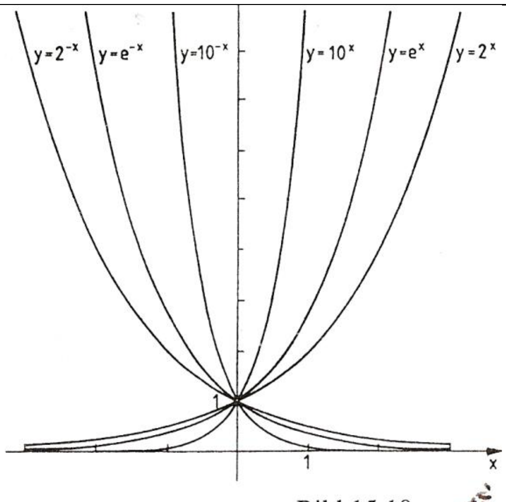


Bild 15.18

پيژند ۱۵ . ۱۲ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې فنکشن د ایکسپوننشل فنکشن په څېر فنکشن دئ

$y = \log_a x\ ,\ a > 0\ ,\ a \mid= 1$ (15.10)

او لوګاریتم فنکشن بلل کیږي

د لوګاریتم کلیمي لپاره پیژند ۵ . ۱ وګورئ) فنکشن (۱۵ . ۱۰) پیژنددیرئ $D = (0.oe)$ او د ارزښتدیرئ($W=(-oe,oe)$ لري.

د $y = \log_a x$ کرښې د ګراو $y=a^x$ هندارونه ده، په کرښه $y=x$ ۰ ټکئ(1,0) د ټولو ګراو ګډ ټکی دئ (څیره شته دئ)

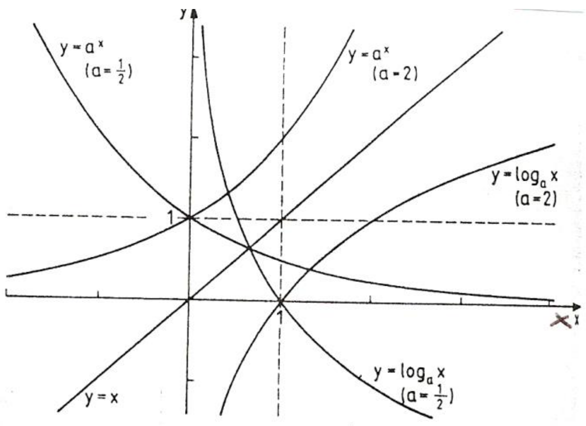


Bild 15.19 څېره

د $a>1$لپاره(۱۵ . ۱۰) کلك مونوتونجګیدونکی اود $x->0$لپاره اسیومپتوتیك د کمیز y - محور ته نزدې کیږي. د $0<a<1$لپاره (۱۵ . ۱۰) کلك مونوتون لویدونکی دی او د $x>0$لپاره اسیمپتوتیك د زیاتیز y - محور ته نزې کیږي. په شکل ۱۵ . ۱۹ کی $y=a^x$ او په څېر یی یعني $y = \log_a x$

د $a= 2$ او $a=1/2$ لپاره انځوریږي .

په ځانګړې توګه لیکل کیږي $y = \log_{10}x = \lg x\ ,\ y = \log_e x = \ln x$ ۰

پیژند ۱۵ . ۱۳:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تریگونومتري فنکشنونو یا د کونجفنکشنونو لاندې(پرتله برخه ۶ . ۳) دا لاندني فنکشنونه په نخښه کیږي یا راوړل کیږي.

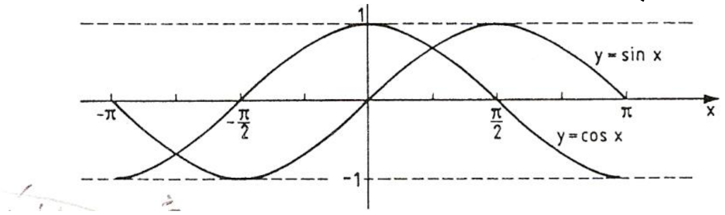
$y=\sin x ;D=R,W=[1,1]$..$(15,11_a)$

$y=\cos x; D=R, W=[-1,1]$..$(15,11_b)$

$y=\tan x=\sin x/\cos x; D=R\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi\}, W=R, k\in Z$....$(15,11_c)$

$y=\cot x=\cos x/\sin x; D=R\setminus\{k\pi\}, W=R, k\in Z$..........$(15,11_d)$

د دې کرووتگلار په ش. ۱۵ .۲۰الف او ۱۵ . ۲۰ ب کی انځور شوی.



تریگونومتریکی فنکشنونه $y = \sin x, y = \tan x , y = \cot x$ ناجوړه فنکشنونه، او $y = \cos x$ یو جوړه فنکشن یا – بلواک دی.

تریگونومتریکي فنکشنونه پریودیکي فنکشنونه دي(مقایسه ۱۵ . ۵)
فنکشنونه $y=\sin x , y= \cos x$ پریودې 2π لري، دا په دې مانا چی لرو:

$\sin (x+2k\pi) = \sin x ; \cos(x+2k\pi)= \cos x , k\in Z$

لاندې فنکشنونه پریود π لري
$y=\tan x , y=\cot x$.دا په دې مانا چي

$\tan (x + k\pi) = \tan x, \cot (x + k\pi) = \cot x , k\in Z$

د تریگونومتریکي فنکشنونو صفرځایونه دي $x_k= k\pi,k\in Z$

د $y=\tan x$, $k\in Z$ $x_k=\frac{\pi}{2}+k\pi$ $y=\sin x$ لپاره او د $y = \cos x , y = \cot x$
لپاره تانجنت ـ او کوتنجنت فنکشنونه قطب ځایونه(ناپاځایونه) لري یعني $y = \tan x$
په $, k\in Z$ $x_k=\frac{\pi}{2}+k\pi$ او $y = \cot x$ په $, k\in Z$ $x_k= k\pi$ کی.

د تریگونومتریکی فنکشنونو لپاره دې د هغو مونوتوني خویونه په پام کی ونیول شي. د بیلگي په توگه

(c) ketabton.com: The Digital Library

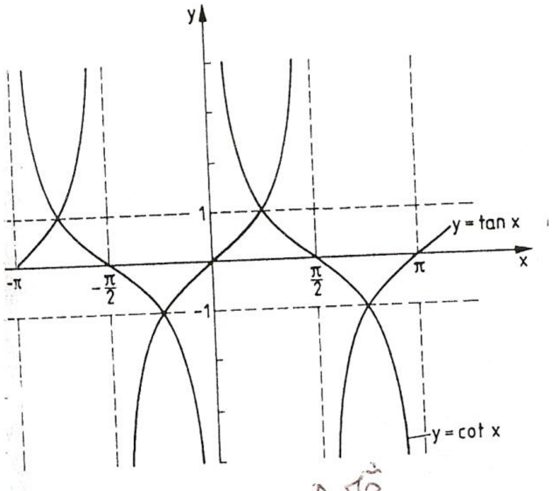


Bild 15.20b

فنکشن y = sin x په ایتروال $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ کي مونوتون جګیدونکی دئ او په انتروال $[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$ کی مونوتون لویدونکی، او دا مونوتوني خویونه په یوه پوره پریودې کی تکراریږي. پس ویلی شو:

د $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ لپاره y = sin x جګیدونکی یا پورته کیدونکی دئ

د $\frac{\pi}{2}+2k\pi \le x \le \frac{3\pi}{2}+2k\pi$ لپاره لویدونکی دئ، او په ورته توګه

د $-\pi+2k\pi \le x \le 0+2k\pi$ لپاره y = cos x پورته کیدونکی دی.

د $0+2k\pi \le x \le \pi+2k\pi$ لپاره لویدونکی دئ

د $-\frac{\pi}{2}+2k\pi \le x \le \frac{\pi}{2}+2k\pi$ لپاره y = tan x جګیدونګی دئ

د $0+k\pi < x < \pi+k\pi; k \in Z$ لپاره y =cot x جګیدونکی دی ،

په تنجنت - او کوتنجنت فنکشنونو کی د قطب ځایونه د مونوتوني اینتروالونو ترمنځ پراته دي، له دې امله دا مونوتوني ایتروالونه واز اینتروالونه دي.د ساین فنکشنونه د بیلګي په توګه د وخت په پریودیکي انځور کی خپل استعمال مومي Schwingung (شوینګونګ: رپیدنه=. په عمومي ډول دلته خپلواك واریابل په t نخښه کیږي .فنکشن

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = a \sin (\omega t + \varphi) \qquad (15 . 11e)$$

هارموني فنکشن بلل کيږي.

يادونه: فنکشن (۱۵ . ۱۱ت) د پيژند (۱۵ . ۱۵) له مخې تړلی يا ځنځيري فنکشن دی. موږ ترڅيرني لاندې نيسو چې د سا ين فنکشن د مخه فاکتور a فاکتور د خپلواك واريابل t او زياتوونکی د ساين فنکشن په خپلواك)Argoment(د کرښځيره باندې څه تاسير اچوي.

۱ - د فاکتور a تاثير په فنکشن y = a . sin t د y = sin t فنکشن ارزښت باندې غزول يا راکشول دی که (|a| > 1)او يا پړسول دي که
(|a| < 1 وي y= a.sin x فنکشن ارزښت a - ځله د فنکشن ارزښت
y = sin t دی، چيرته چې برسيره پردې د 0 > a لپاره په t - محور يوه
اينه څيرونه هم منځ ته راولي (څره ش. ۱۵ ۲۱ الف .) (a = 2 , a = 1 / 2
په فنکشن کی a امپليتودې Amplitude(جګوالی(نوميږي او د
شوينګنګ Schwingungرپيدنی پراخوالی يا ښه : سور باندې تاثير اچوي.
څيره شته

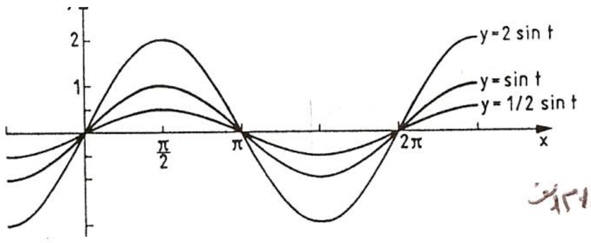
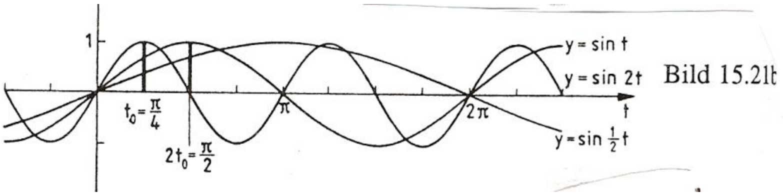


Bild 15.21a

۲ - په فنکشن $y = \sin\omega t$ کی فاکتور ω په فنکشن y = sin t باندې يو وختني غزول که $|\omega|<1$ يا پړسول که $|\omega|>1$ وي تاثير اچوي.چيرته چی د $\omega < 0$ لپاره برسيره پردې يو په y- محور اينونه هم ده.
د يوه ټاکلي خپلواك $t = t_0$ لپاره په فنکشن $y = \sin\omega t$ يوه فنکشن ارزښت، د y = sin t خپلواك ω -ځله ، يعني $t = \omega t_0$ لپاره غوره کوي (څيره ؟؟ ش . ۱۵ . ۲۱ ب).
ګردی فرکونڅ (Kreisfrequenz) بلل کيږي، دا په پريودې تاثير اچوي او $y = \omega t$
پريودې $P = \dfrac{2\pi}{\omega}$ لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library



۳ – زیاتیدونکی φ په فنکشن $y = \sin(t+\varphi)$ کی د $y = \sin t$ باندې دیوې راکښنې تاثیر په $|\varphi|$ له کینې لور $\varphi > 0$ او یا له ښي لور $\varphi < 0$ اچوي .

د یوه ټاکلي خپلواك $t = t0$ لپاره د فنکشن $y = \sin(t+\varphi)$ سره یو فنکشن ارزښت، چې د $y=\sin t$ لپاره ۰

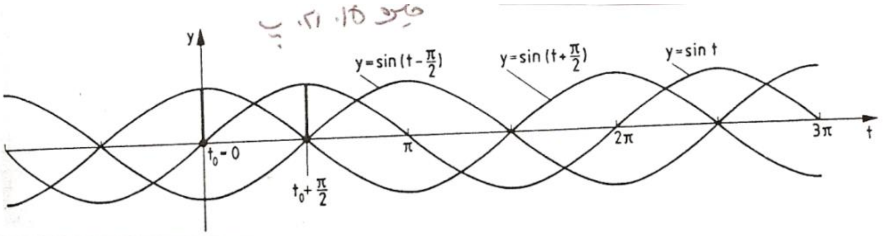
د φ په کچه راکښل شوی (یعنی د یوه ځاي ځخه بل ځای ته وړل شوی) وي، یعني د $t = t_0+\varphi$ لپاره، غوره کوي.(ځیره ، ۱۵ . ۲۱ پ)

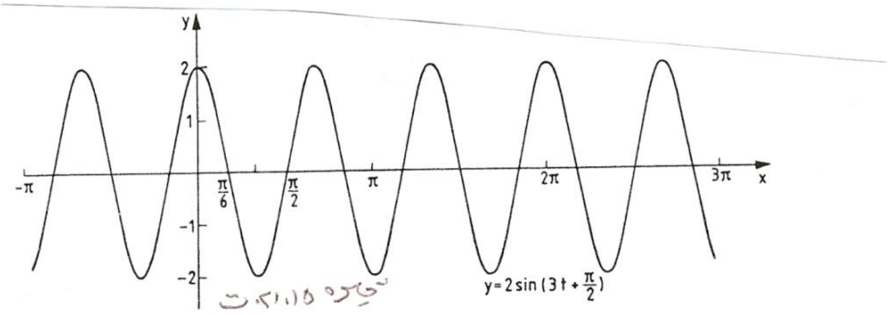
$(\varphi = \frac{\pi}{2}, \varphi = -\frac{\pi}{2})$

په فنکشن

$$y = a.\sin(\omega t + \varphi) = a.\sin\omega(t + \frac{\varphi}{\omega})$$

کی φ چې فازې نومیږي یو د راکښلو تاثیر په کره $y = a.\sin\omega t$ د $\frac{\varphi}{\omega}$ په اندازه اچوي.





(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورته شکل ۱۵ .۲۱ ت کی هارموني فنکشن $y = 2 . \sin (3t+\frac{\pi}{2})$ انځوردی. هغه امپلیتود a = 2 لري، پریودې یی $P=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2}{3}\pi$ او په $\frac{\varphi}{\omega}=\frac{\pi}{6}$ کې د sint و کیڼ لورته راکښل شوی دی.

ځېره ۱۵ . ۲ پ $\varphi=\frac{\pi}{2},\varphi=-\frac{\pi}{2}$

د تریګونومتري فنکشنونو(یواځني) په معکوسوالي یا په څتوالي کی موږ په ځانګړو یوغږیزو یا مونوتوني اینتروالونو تکیه کوو، د لاندې تعریف سره مناسب

پیژند .۱۵ ۰ ۱۴ :
(پام: ځیرې له تشریح د مخه راغلې، بله لار نه وه)

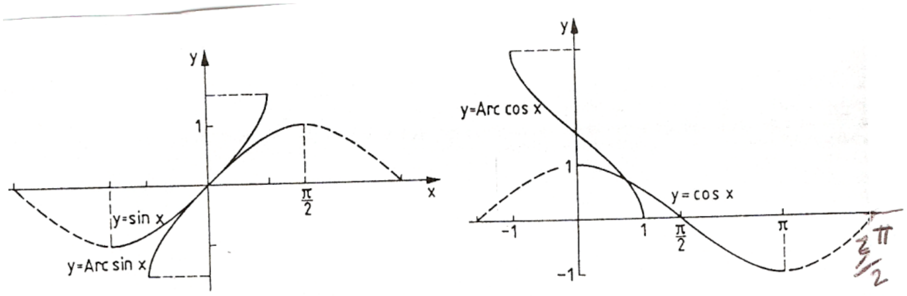


Bild 15.22 Bild 15.23

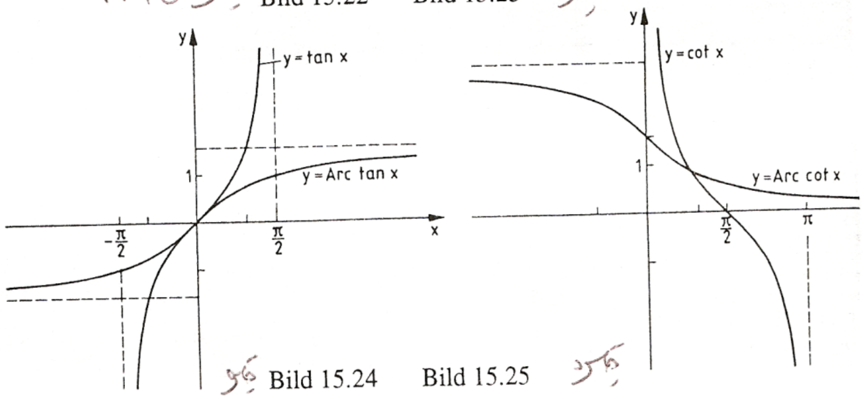


Bild 15.24 Bild 15.25

د لاندې فنکشنونو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$1.\ y=\sin x,\qquad D=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right],\ W=[-1,1] \qquad (15.12a)$$

$$2.\ y=\cos x,\qquad D=[0,\pi],\quad W=[-1,1] \qquad (15.12b)$$

$$3.\ y=\tan x,\qquad D=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),\ W=\mathbf{R} \qquad (15.12c)$$

$$4.\ y=\cot x,\qquad D=(0,\pi),\quad W=\mathbf{R} \qquad (15.12d)$$

پرخښ یا چپه فنکشنونه لاندې څیکلومتریکي فنکشنونه (ارکوس فنکشنونه) دي:

$$1.\ y=\operatorname{Arc}\sin x,\qquad D=[-1,1],\quad W=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \qquad (15.13a)$$

$$2.\ y=\operatorname{Arc}\cos x,\qquad D=[-1,1],\quad W=[0,\pi] \qquad (15.13b)$$

$$3.\ y=\operatorname{Arc}\tan x,\qquad D=\mathbf{R},\qquad W=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \qquad (15.13c)$$

$$4.\ y=\operatorname{Arc}\cot x,\qquad D=\mathbf{R},\qquad W=(0,\pi) \qquad (15.13d)$$

د تریګونومتري فنکشنونو برخی په مونوتوني ایترووالونو) ۱۵ .۱۲ الف(تر) ۱۵ . ۱۲ ت (او د هغوي چپه) ۱۵ . ۱۳ الف (تر) ۱۵ . ۱۳ ت (په څیرو ۱۵ . ۲۲ تر ۱۵ ۲۵ پورې انځور دي.

۱۵ . ۴ ځنځیري (ترلي) فنکشنونه

پیژند ۱۵ . ۱۵ :

د $x \in D$لپاره یو فنکشن $z = g(x)$ د ارزښتدیري W سره ورکړ شوی او برسیره پر دې د $z \in W$لپاره یو فنکشن $y= f(z)$ورکړشوی، نو

$$y = f(g(x)) \qquad (15.14)$$

د x ترلی (ځنځیري) فنکشن بلل کیږي٠

یادونه : یو ترلی فنکشن کیدی شي چی زیاتو ځنځیرونو سره هم رامنځ ته شي: د بیلګي په توګه $z = f(x)$

د$x\in D, z\in W$لپاره او $w=h(z)$ د$z\in W, w\in W^*$لپاره

او$y=f(w)$ د $W^*\in W$ لپاره لرو،

نو $y=f[h(g(x))]$ هم د x یو ترلی فنکشن دی

بیلګه ۱۵ . ۱۶ :

الف : د $z = 2x + 4$ او $y=e^z$ سره ترلی فنکشن $y=e^{2x+4}$ لاس ته راځي .

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب : په تړلي فنکشن $y = \sin x^2$ کی $z = x^2$ دنننی - او $y = \sin z$ د باندنی فنکشن دی.
په تړلي فنکشن $y = \sin^2 x = (\sin x)^2$ کي $z = \sin x$ د ننني - او $y = z^2$ دباندنی فنکشن دی
پ : د
$, y = \cos w \;\; w = \sqrt{z} \;\; , \;\; z = 2x + 4,$
سره تړلي فنکشن $y = \cos\sqrt{2x + 4}$ لاس ته راځي
ت : په تړلي فنکشن $y=\text{Arctan}1/(x-1)$ کی $z=x-1$ دنننی، $w=1/z$ منځنی او $y=\text{Arctan } w$ دباندنی فنکشن دی .

یادونه : د یوه ورکړشوي x - ارزښت لپاره د ځنځیري فنکشنونو د فنکشن ارزښت شمیرنی

له » دننه « پیل کیږي .

بیلګي ۱۵ . ۱۶ ته :
ب) د $x = 0.5$ لپاره دی

$$z=x^2=0,5^2=0,25;y=\sin x^2=\sin z=\sin 0,25=0,24740$$

او

$$z=\sin x=\sin 0,5=0,47942;y=\sin^2 x=z^2=0,47942^2=0,22984$$

پ) د $x = 2$ لپاره دی $z=x-1=2-1=1 \; ; \; w=1/z=1/1=1$

$$y=\text{Arctan}w=\text{Arctan}1=\frac{\pi}{4}$$

روښانونه، تشریح:

$y=f(x)$ تحلیلي(شننیزه) وینا بلل کیږي، که $f(x)$ له رییل ګڼونواو بسټیزو فنکشنونوڅخه د زیاتون، کمون،ځل، ویش، له لارو تړلی یا ناتړلي(ځنځیري یا نا ځنځیري) جوړیږي

د بیلګي په توګه دې په پام کی وي، چي ماتلاندې فنکشن دې صفر نه وي د پوتنځ بنسټ او همداډول رادیکاند منفی نه شي کیدلی، او یا باید مثبت وي، چی د لوګاریتم نومروس باید

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثبت وي او(Arc sin f(x همداډول(Arc cosf(x ټيك د $x \in [-1,1]$ لپاره پېژند لري يا تعريف دي

بيلګه ۱۵ . ۱۷ :

د لاندې تحليلي ويناو لپاره دې تعريفډيري پيداکړی شي.

الف $y = \sqrt{x^2 - 3}$

راديکاند بايد کميز يا منفي نه وي، چی دا مان لري:

$x^2-3 \geq 0 <=> x^2 \geq 3 <=> |x| \geq 3$ ($x \geq \sqrt{3}$ v $x \leq -\sqrt{3}$)

نو لرو $D = (-oe , - 3] \cup [3 ,oe]$

ب)($y=lg(x+2)+1/(3+2x-x^2$ له لمړي زياتونی کی بايد $Numerus > 0$ نومروس وي دا په دې مانا چی : $x +2 >0 <=> x >-2$ ،

پس($D1=(-2,oe$

په دوم زياتوني کی بايد مات لاندې په صفر برابر نه وي (=| 0) وي . د مات لاندې صفرځايونه

له $3-2 x-x^2 = 0$ څخه لاس ته راځي او دي $x1=2,x2=-1$.

نو $D2=R\backslash(2;-1)$ دی

د فنکشن تعريفډيری بايد دا اول زياتونی او همداسی د دوم زياتونی تعريفډيري وي يعنی د D1 او D2

غوځډيری: $D=D_1 \cap D_2 = (2 ,oe) \setminus \{2; -1\}$

پ) $y = Arc sin (x-1)/5$ د ارکوس ساين-فنکشن د تعريفډيري په پام کی نيولو سره بايد باور ولري-

$-1 \leq (x-1)/5 \leq 1 <=> -5 \leq x-1 \leq 5 <=> -4 \leq x \leq 6 => D=[-4,6]$

ت $(y = 1 / \sqrt{(x^2 - 4)}$

راديکاند بايد له صفر لوي وي او مات لاندې دصفرسره نامساوي، دا په دې مانا چی

$x^2-4>0 <=> x^2<4 <=> x>2$ يا $x<-2$

نو دی $D=(-\infty,-2) \cup (2,\infty)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱۵ . ۵ تمرینونه

۱ – د ایمپلیڅیت توابعو ایکسپلیڅیت انځورونه ورکړئ

الف - $6x-10y=15$ ب - $x+y/3 = 5$

پ - $2x^2 -3y +3 = 0$ ت – $x^2 -4x + 2y - 8 = 0$

۲ - لاندې فنکشنونه په پارامترانځوروني ورکړ شوي

a) $x = 2t \quad y = -t^2 + 3t$ b) $x = \sqrt{t} \quad y = 2t+1$

c) $x = 1/t \quad y = 2(t-3)$ d) $x (/2)t -1 \quad y = t^2$

پارامتر له منځه يوسئ او په دې سره ورکړئ $y = f(x)$

۳ - لاندې فنکشنونه په مونوتوني وڅېړئ، او که ممکن وي نو مونوتونی اینټروالونه په تعریفدیریو بیل (تجزیه) کړئ، یا لوټه کړئ.

a) $y = 2x -3$ b) $y = -2x +3$ c) $y = x^2$

d) $y = -2x^2$ c) $y = 2x^2 + 1$ f) $y = |x|$

۴ – پریکړه وکړئ چې لاندې فنکشنونه جفت، ناجفت او یا له دې دووکوم نه دي:

a) $y = x$ b) $y = x + 1$ c) $y = x - 1$

d) $y = 2x^2$ e) $y = 2x^2 + 1$ f) $y = (x-1)^2$

g) $y = x^2 /2$ h) $y = x^5$ i) $y = |x|$

۵ – د لاندې فنکشنونو د صفر ځایونه پیدا کړئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

a) $y = -2x + 3$ b) $y = (x-1)(x+2)$ c) $y = x^2 - x - 2$

d) $y = 2x^2 - 12x + 18$ e) $y = x^2 + 1$ f) $y = x^3$

۶ – لاندېفنکشنونو ته په ځت فنکشونونه پیدا کړی

a) $y = -2x + 3$ b) $y = x^2 + 1$, $D = [0, \infty)$, $W = [0, \infty)$

c) $y = (x+1)^2$, $D = [-1, \infty)$, $W = [0, \infty)$, d) $y = x^3 /2$, $D = [0, \infty)$, $W = [0, \infty)$

۷ – لاندې لاینې فنکشنونه ورکړ شوې دي

a) $y = 0,4x - 1,6$ b) $y = -x + 1$ c) $y = (1/5)(3x + 1,5)$

d) $y = 2$ e) $3x - 3y - 7 = 0$ f) $4y + x = -1$

کرښې دې وکښل شي، جګوالي کونج α دې پیدا شي، او صفرځایونه x_N و ګنی!

۸ – کومه کرښه له لاندې ټکو تیریږي

a) (2,3) (5,5) b) (1 ,1) او (3,7) c) (-1,0) او (-2,-3) ?

۹ – لاندې مربع بلواك یا فنکشنونه ورکړ شوې

a) $y = x^2 - 4x + 3$ b) $y = x^2 - 8x + 16$ c) $y = x^2 - 6x + 10$

d) $y = (x-5x)(x-1)$ e) $2x^2 - 10x + 12$ f) $y = 3x^2 + 6x$

g) $y = -\frac{x^2}{2} + x + 4$ h) $y = x^2 / 4 + x + 2$ i) $y = 5x^2 + 45$

د ککرې کواوردینات دې پیداشي، صفرځایونه دې وګښل شي او پارابول دې انځور شي

۱۰ – د لاندې تولریشنل فنکشنونه دې دورکړشوو x ارزښتونو سره د هورنرشیما د استعمال له لارې وګښل شي. فنکشنونه دګی د خلفورم باندګی انځور شي

a) $y = f(x) = x^3 - 6x + 5$; $x_1 = 1$, $x_2 = -1$

b) $y = f(x) = (1/2)x^3 - x^2 - (13/2)x - 5$; $x_1 = 1/5$ $x_2 = 5$

c) $y = f(x) = x^3 + 2x + 2x$; $x_1 = -2$ $x_2 = 0,2$

d) $y = f(x) = x^4 - x^3 - 28x^2\ 32x + 40$; $x_1 = 2$ $x_2 = 5$

e) $y = f(x) = 2x^4 - 3x^2 - 6x^2 + 5x + 6$; $x_1 = 1,5$ $x_2 = 2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱۱ – مات ریشنل فنکشنونه ورکړ شي :

a) $y = \frac{x^2+x-2}{x^2+2x-3}$　　b) $y = \frac{x^4-3x^3-4x^2}{x^2+5x+6}$

c) $y = \frac{x^3+2x^2+x}{x^4-13x^2+36}$　　d) $y = \frac{x}{(x^3+6x^2+9x)(x^2-4x+4)}$

e) $y = \frac{2x^3-x^2+6x-3}{x^2+3}$.

صفرځایونه دې وګټل شي، پول. تشځایونه او د $x \to \pm\infty$ لپاره ځان نیونه!

۱۲ – لاندېفنکشنونو ته په څټ فنکشنونه جوړ کړی

a) $y = 2^{x-1}$, $D = R$, $W=(0,\infty)$　b) $y = 2^x - 1$, $D = R$, $W=(-1,\infty)$

c) $y = \log_3 x$, $D = (0,\infty)$, $W = R$　d) $y = \ln(x-1)$, $D =(1,\infty)$, $W = R$

۱۳ – لاندې فنکشنونو ته مونوتوني اینتروالونه ورکړی او برخه په څپ فنکشنونه:

a) $y=(x-1)^2$　b) $y = x^2 - 1$　c) $y=(x+1)^2 + 1$

d) $y= x^2 - 4x + 5$　e) $y = 4x^2$　f) $y = (1/4)x^2 + x/2 + 1$

۱۴ – ترلي فنکشنونه $y = f[h(g(x))]$ په دننه او دباندې فنکشنونو

$y = f(w)$, $w = h(z)$, $z = g(x)$

بیل (تجزیه) کړی(د تعریف–او ارزښتدیریوورکولو څخه کیدی شي تیرشو)

a) $y = e^{(x+1)^2}$　b) $y = \left(e^{x+1}\right)^2$　c) $y = \lg\sqrt{2x-3}$

d) $y = \sqrt{\lg(2x-3)}$　e) $y = \tan\sqrt{x-3}$　f) $y = \sqrt{\tan(x-3)}$

g) $y = \sqrt{\tan x - 3}$　h) $y = \tan\sqrt{x} - 3$　i) $y = \operatorname{Arc}\sin x^2 +$

j) $y = [\operatorname{Arc}\cos(3x-2)]^{\frac{1}{2}}$　k) $y = \ln\sin\frac{x}{3}$　l) $y = \sin\ln(x+\frac{1}{3}$

m) $y = \sqrt{\frac{1}{\sin x}}$　n) $y = \frac{1}{\sqrt{\sin x}}$　o) $y = \frac{1}{\sin\sqrt{x}}$

p) $y = \operatorname{Arc}\cot e^{2x+1}$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۵ - ترلي فنکشنونه $y = f[h\{g(k(x))\}]$ په دباندې او دننه فنکشنونو

$$y = f(v),\ v = h(w), w = (g(z)),\ z = k(x)$$

بیل کړی (د تعریف- او ارزښتدیري باندې تیرونه کیدی شي)

a) $y = \left[\operatorname{Arc}\cot\left(e^x + 1\right)\right]^{\frac{1}{2}}$ b) $y = e^{\operatorname{Arccot}(2x+1)^{\frac{1}{2}}}$ c) $y = \sin\left[\cos\frac{x-4}{3}\right]^2$

d) $y = \sqrt{5 - \tan\sqrt{x}}$ e) $y = \cos\left[\ln\left(x^2 - 1\right) + 1\right]$ f) $y = \log_3\left[\sqrt{2^x + 1}\right]$

g) $y = e^{\tan\sqrt{7x-1}}$ h) $y = \tan e^{\sqrt{7x-1}}$.

۱۶ - د لاندې شننیزویا سپړنیز (تحلیلي) افادو لپاره تعریفدیري پیدا کړی.

a) $y = \sqrt{x-3}$ b) $y = \sqrt{3 - x^2}$ c) $y = \sqrt{x^2 - 9}$

d) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 9}}$ e) $y = \dfrac{1}{x^2 + x - 6}$ f) $y = \ln(2x + 5)$

g) $y = \operatorname{Arc}\cos(2x - 4)$ h) $y = \sqrt{x} + \dfrac{1}{x}$ i) $y = \ln x + \dfrac{1}{x-1}$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوې لیکنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړی:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

1987 Vienna (Austria):

دویم:

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, at the University of Vienna/Austria

لاندې د شمیرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې لیکنه به یې څنو ځایونو غزېدلې او څنې ځایونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو زرو کې شمیرنه، د ګڼې – او کڼې د کڼې شمیرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځې ټولې اړتیاوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني ـ پښتو ـ او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنشیال برابرون (دا کتاب په دې څانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپینې خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلي.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې چې همدا اوس چاپ شوې دي:

: Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)

لاندې د برینککن لیکنې چې له پرینمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دویم ټوک

۳ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصایه یا ستاتیستیک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي، را ژباړل شوي دي.

۶ – انالیزی ۱

۷ – انالیزې ۲

۸ – کرښیز الجبر

۹ - د شمیرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ – فنکشنل انالیز

۱۲ – وکتور شمیرنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

نوري ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښيز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner گڼونپوهنه يا د اعدادو تيوري

زما ليکنې : همدا اوس ځنې چاپ شوي او ځنې چاپ ته چمتو دي.

Bonn (Germany):

۱۵ - د شميرپوهنې ستر کتاب دويم چاپ د پوره تغيراتو سره :

دا کتاب د شميرپوهنې برخې برسيره د انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره گټور دی. په کتاب کې د اړتيا سره زياتونه او کونه راغلې

کتب په دوه برخو کې چاپ شوی دی

الف . لومړۍ برخه

ب . دويمه برخه

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دويم چاپ د پوره تغيراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دويم چاپ له تغيراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه يا سټ تيوري

۱۹ – د شميرپوهنې سم اند (منطق رياضي)

۲۰ - د يو څو شميرپوهانو ژوندليک

۲۱ – د شمير پوهنې گډې وډې ليکنې

-۲۲ داهم ژباړه ده، خو ليکونکی يې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتيگرال شميرنو ته تمرينونه او اوبيونې يا حلونه يې

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزي پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو ویيونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې وبه غزیږي.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپریږي:

د ګروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اومم ټولګي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیوني سره په کې راغلي او ماته زیات ګټور برېښي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لیکوال ژوند ته لنډه کتنه

ماخان په اولني نوم میرې شینواری د اروابنادې پستو او اروابناد نوررحمان زوي په ۱۳۲۰ ؟ ه لمریز کې د شینوارو هسکه مینه کې دې نړۍ ته سترګې راغړولي.

د هسکې مینې د لومړنې ښوونځي (د لومړنيو زده کوونکو څخه) څخه وروسته د رحمان بابا لیسه له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پورې(ښوونځي له لومړي ټولګې پيل او د دويم ټولګې څخه ګام او پای).

د ۱۹۶۶ تر سپتبر د کابل طب پوهنځی. له ۱۹۶۶ سپتمبر څخه د اتریش برس، چې هلته یې د شمیرپوهنې ډاکټري په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

د۱۹۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فبروري تر پای د دباندنيو چارو وزارت کې مامور. د ۱۹۸۸ مارچ څخه تر ۱۹۹۲ جون پورې په بن کې د افغانستان جمهوریت سفارت شارژد افیر(صفر نه وو). له هغې وروسته په جرمنې کې سیاسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ څخه د ۲۰۰۹ دسمبر پورې د د ریاضي څانګه کې د پوهنې وزارت درسي نساب کې دنده.

ماخان میرې په ۱۹۷۲ کې له لرې د میرمن ښاپیرۍ سره واده شوی، چې د واده خبر ورته اتریش ته راغی. ده له میرمن ښاپیری سره په ۱۹۶۳ ز ک کې کوزده کړې وه.

دوي ته لوي څښتن په اتریش ویانا کې د مای په شلم ۱۹۷۹ ز ک دوه بچیان وبخښل، چې څانګه او اباسین نومیږي. څانګه په المان کې د پوهنتون علمې همکاره وه او د حقوقو ډاکتره ده او اباسین ملي اقتصاد او ټولنیزه سایکولوژي لوستلې.

ماخان شینواري بې کاره نه دی او لږ تر لږه له ۹۷ ۱۹ څخه همدا د کتابونو لیکلو اوو د ژباړې دنده یې په غاړه اخستې، چې خپل فکر د شونې پولې تازه وساتي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library