

شمير پوهنه (رياضي)

ددولسم ټولگي لپاره

ډاکټر ماخان (ميري) شينواري

ليکونکي

2016

Ketabton.com

نیولیک

- ۱ پوله ارزښت
- ۱۰ د پوله ارزښت خویونه.....
- ۱۶ د کسري یا ماتو توابعو پوله.....
- ۲۱ د کلاسیک له لارې د کسري اعدادو
- ۲۳ د مثلثاتي توابعو پوله
- ۲۹ د $\pm\infty \rightarrow x$ لپاره پوله ارزښت یا لیمیت
- ۳۱ ټولیز خویونه:
- ۳۴ ناپربکینه
- ۴۰ د متمادي یا.....
- ۴۷ د لومړي څپرکي ټولګه
- ۵۰ د څپرکي تمرینونه
- ۵۷ د تابع منح ارزښت تغیر
- ۶۰ کمښت ویش یا د تفاضل ویش.....
- ۶۳ رابیله یا مشتقشمیرنه
- ۶۸ د x_0 په ځای کې د تابع مشتق او د مشتق تابع
- ۷۳ د تانجنت او عمود تعریفونه او خویونه
- ۷۸ د مشتق شمیرني یا رابیله قواین
- ۸۱ د د الجبري توابعو مشتق
- ۸۶ د زنځیري(مرکب) توابعو مشتق

۹۰	د مثلثاتي توابعو مشتق
۹۵	د مشتق استعمال په طبيعي علومو
۹۹	د جگو درجو مشتق
۱۰۳	د اکسپوننشل توابعو مشتق
۱۰۷	د لوگارېتم مشتق
۱۱۷	د ايمپليځيټ Implicit تابعو مشتق
۱۲۰	د فصل ټولگه
۱۲۲	د څپرکي تمرينونه
۱۲۸	درول قضيه
۱۳۲	همغريزي توابع
۱۳۷	ځای اړونده افراطي ټکي
۱۴۳	وړنټکي
۱۵۳	د کرې يا منځني خبرې
۱۵۷	د ناکلو افدو پولې
۱۶۰	د ناکلو افدو پولې
۱۶۶	د تانجنت له پاره.....
۱۶۷	د سترو گټو
۱۷۱	په توليد کې
۱۷۳	ټولگه
۱۷۶	زينټکي(د اس زين)
۱۷۷	د څپرکي تمرينونه:
۱۸۷	په ټوټه کسرونو ټوټه کونه
۱۹۷	انتگرالشميرنې ته پيل راورنه

انتیگرالشمیرنه ۲۰۰

بنسټیز یا لومړنۍ تابع ۲۰۴

ناتاکلی انتیگرال ۲۱۰

د ټاکلی انتیگرال..... ۲۱۲

د ټاکلی انتیگرال څخه نا..... ۲۱۶

د انتیگرالونېا..... ۲۱۹

د لوګاریتمي..... ۲۲۲

د بدلون قانون ۲۲۴

ټوټه انتیگرالونه ۲۳۱

نږدې انتیگرال ۲۴۰

ټولګه ۲۴۴

د څپرکي تمرینونه ۲۴۷

د اینټیگرال شمیرنې استعمال ۲۵۳

د دوه کرښو څخه رابنده ۲۵۶

څرخېدونکي تنونه: ۲۶۴

ټولګه ۲۷۷

تمرینونه: ۲۷۹

د لیکونکي ژند ته کتنه
د نصاب د دولسم ټولګي ناسمونونه

سريزه

گرانو هيوادوالو!

ما په کلونو کې د نصاب لېسې دا د دولسم ټولګي د پښتو او دري کتابونه ليکلي وو، خو په هغه وخت کې دا کتابونه د پوهنې وزارت له خوا چاپ نه شو او په ډېره خواشينۍ سره بايد ووايم، چې په ځای يې کتابونه چاپ کړل، خو ناسم، چې نه يې ژبه سمه وه او نه يې شميرپو هڼيزه خوندويونه.

دا زما له خوا ليکل شوي کتابونه د معيار (د نړۍ د معيار) سره سم ليکل شوي او د لته يې گرانو زده کوونکو ته وړاندې کوم، هيله ده، چې گټه به ترې واخلي.

د نصاب له پاره د چاپ شوي کتاب د بوي برخې ناسمون به د کتاب په اخر کې ځای په ځای کړم.

ما څو واره د افغانستان د پهنې وزارت څخه هيله کړې، چې اجازه راکړي، ټول د بنوونځي کتابونه، چې ما ليکلي، دوی ته وړاندې او د سره سم ولیم، خو د کتابونو د ناسمون مسئولیت او يا هيڅ څوک د څه مسئولیت په غاړه نه لري.

زه دا ټول د بنوونځي کتابونه گرانو لوستونکو ته وړاندې کوم، خو ځنو کتابونو کې به داسې راغلي وي، چې زما د ناتوانۍ له امله به مې د يوه کتاب ځنې برخې بل کتاب کې ځای په ځای کړې وي، چې له دې امله د گرانو لوستونکو څخه هيله، چې د هر څه له مخه دي، د کتاب سريزه وگوري.

ما چې ليکنې جمهوررئيس او د پوهنې وزارت ته ليکلي، هم مل دي.

گرانو هيوادوالو!

ماته به بخښنه کړی، زه له دې نور زيات زور نه لرم، چې ښه سريزه او نور اړين څه وليکم. دا زما ليکنې نورې همداسې ومنی، چې څنگه درته وړاندې کيږي. په ليکنو کې به زما د ليکنيزو ناسمونو نور ناسمونونه نه وي. هيله ده، چې گټه به ترې پورته کړي.

۱. پوله ارزښت

۱. لیمیت یا حد (پوله ارزښت) "The Limit"

موږ لاندې د

اعدادو ترادف لرو:

$$(I) \quad \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}$$

$$(II) \quad \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \dots, \frac{n+1}{n}$$

$$(III) \quad 2, 4, 6, \dots, 2n$$

که n د ناپای په لور لار شي، نو د پورته ترادفونو څخه (I) د صفر په لور، (II) د یو په لور او (III) د ناپای په لور ځي.

د Limit (لاتین) معنا پوله یا حد دی. په پخواني روم کې د یوه ښار د کلا نوم هم Limit وو، چې په ریاضیاتو کې، د پولې مفهوم لري. د حد د کارونې مفهوم په دې کې پروت دی، چې د یوې تابع سلوک داسې وڅیړو لکه په افقي محور (د x محور یعنې "abscissa") باندې، چې د تابع د x قیمتونه یوه حد (پولې) ته ورنږدې کېږي. وږه گورو، چې لیمیت په ریاضیاتو کې د مشتق د پیژندلو لپاره کارول کیږي.

فعالیتونه:

- ایا تاسو په ورځني ژوند کې د لیمیت یا پولې له کلمې سره بلد یاست؟
- ایا تاسو په ورځني ژوند کې یوه بیلگه راوړی شئ، چې یوه لیمیت ته له دواړو لورو، یعنې له بنی لوري څخه و کینې لوري ته او همدارول له کینې لوري څخه و بنی لوري ته نږدې شئ؟
- ایا د حیرتان او ترمز ترمخ پول د افغانستان او ازبکستان ترمخ له دواړو لورو پوله یا حد دی، که څنگه؟
- ایا دا په ټاکلي ځای کې پوله یا حد دی، که څنگه؟

د پورته فعالیتونو څخه دا لاندې د لاسه کوو:

پورته راوړل شوي د لیمیت بیلگې په یوه ټاکلي ځای کې د توابعو یا د ځنو عملي بیلگو لیمیتونه یا حدونه دي، چې موږ یې په ریاضیاتو کې هم په یوه ټاکلي ځای کې لیمیت، پوله یا حد بولو.

موږ اوس لاندې بیلگه د پایلیزې روښانه ونې لپاره راوړو:

بیلگه ۱:

یوه د $f(x)=2x$ تابع او د P_0 یوټکی دې ورکړ شوی وي، چې د P_0 ټکی د وضعیه کمیاتو په سیستم کې (3,6) وضعیه قیمتونه لري نو:

1- دتابع جدول وکارئ.

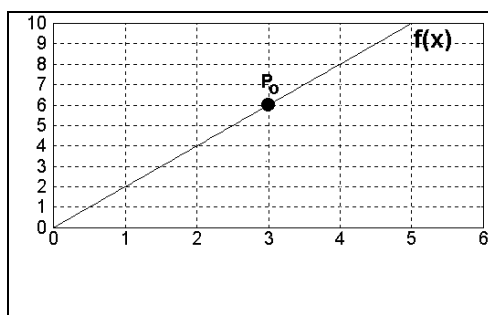
2- د تابع گراف یا څیره انځور کړئ.

3- د $f(3)$ قیمت پیدا کړئ او د $f(x)$ پر حرکت باندې بحث وکړئ که x و 3 ته نږدې شي.

4- په شکل کې د $f(x)$ حد ته تلنه روښانه کړئ.

ښوونه:

1- د تابع جدول



2- د تابع شکل

3 - موږ $f(3) = 6$ لرو او غواړو د درې قیمتونو څخه چې له ښی او کیڼې لوري 3 ته ورنږدې کیږي، وگورو، چې په دې درې ارزښتونو کې تابع چیرته ځي.

ولار جدول:

x_k	$f(x_k)$	x_k	$f(x_k)$
2,98	5,96	3,001	6,002
2,99	5,98	3,01	6,02
2,999	5,998	3,02	6,04

په پورته جدول کې گورو، چې د f ارزښتونو سره له کیڼې لوري له پورته څخه وکښته لوري ته 6 ته نږدې کیږو او همداسې له ښی لوري له کښته څخه و پورته لوري ته هم 6 ته نږدې کیږو.

پروت جدول روړو:

له ښی لوري څخه کیني لوري ته له کیني لوري څخه ښی لوري ته

→ 3 ←

x	2.98	2.99	2.999		3.001	3.01	3.02
f(x)	5.96	5.98	5.998		6.002	6.02	6.04

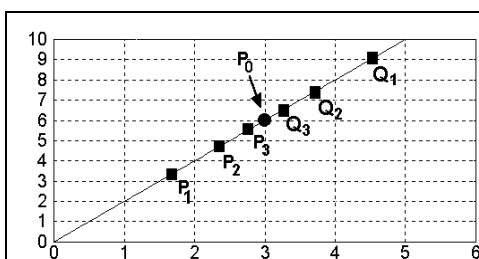
→ 6 ←

په درې پلونو یا قدمونو کې د $f(3)$ قیمت د $f(x)$ له قیمتونو سره پرتله کوو، که x و 3 ته ورنږدې شي.

دا حالت موږ ته په گوته کوي چې: که x و 3 ته ورنږدې شي، نو د $f(x)$ لیمیت به په 6 برابر شي او داسې یې لیکو: $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 6$

او داسې یې لولو: د $f(x)$ لیمیت یا پوله که x د درې په لور لاړ شي.

4- اوس گراف په لاندې توگه رسموو او کیني لوري ته هدفمند ټکي - لکه په پورته جدول کې- په نڅینه کوو.



د مخامخ شکل له مخې... $P_1, P_2, P_3, \dots$ ټکي په پام کې نیسو، چې د P_0 ټکي ته تل له کیني لوري نږدې کیږي.

او همداسې $Q_1, Q_2, Q_3, \dots$ ټکي چې له ښی لوري P_0 ټکي ته نږدې کیږي

کتل کيږي: هرڅومره، چې پورته ټکي و P_0 ټکي ته نږدې کيږي په همغه کچه د تابع قېمتونه و 6 ته نږدې کيږي (د $P_0(3,6)$ ټکي قېمت له امله). که په گراف کې $x=3$ ځای ته نږدې شو، نو د تابع قېمت و 6 قېمت ته نږدې کيږي.

وايو: 6 د $f(x)$ تابع ليميټ دی، د $x \rightarrow 3$ (لوستل: $x=3$ درې) په لوري ځي يا درې ته نږدې کيږي (لپاره).

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 6 \text{ د ليميټ لپاره ليکېنه په دې ډول تعريف شوی:}$$

د پورته فعاليتونو او بيلگو څخه دا تعريف لاس ته راوړو:

پېژند (تعريف): د $f(x)$ تابع يو ليميټ (حد) L لري، د x لپاره که x د يوه حقيقي عدد c په لوري تړلی لار شي او داسې يې ليکو: $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ لوستل: د $f(x)$ ليميټ برابر په L دی، د $x \rightarrow c$ لپاره.

په ځنو توابعو کې ليميټ، لکه چې وليدل شو، په داسې سادګۍ لاس ته نه شو راوړي.

يوه بيلگه راوړو، چې دا لاندې پوښتنې په کې ځواب شوې وي:

- ايا يوه تابع په خپل ورکړ شوي ځای کې ليميټ درلودی شي، چې هلته تعريف نه وي؟

- اودا کار که کدونکی وي، څنگه کیدی شي؟

بيلگه ۲: تابع $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}; x \neq 1$ راکړ شوی.

د تابع جدول او گراف وکارئ.

x له بنۍ لوري څخه 1 ته نږدې کيږي x له کينې لوري 1 ته نږدې کيږي

————→ 1 ←————

x	0.98	0.99	0.999		1.001	1.01	1.02
f(x)	1.98	1.99	1.999		2.001	2.01	2.02

————→ 2 ←————

خبره کښل کيږي	د $f(x)$ تابع حرکت تر بحث لاندې ونیسئ که x و 1 ته نږدې شي یعنې $x \rightarrow 1$. له دواړو یعنې له گراف او جدول څخه دا پایله لرو، چې $f(x)$ د حقيقي عدد 2 په لور هڅيږي، یعنې: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$
----------------------	--

له پورته شکل څرگنديږي: تابع په هغه ټکي کې چې لیمیت یې شمیرل شوی، تعریف نه ده.

شمیرنیزه بنوونه: که یوه تابع په صورت او مخرج کې دارونده قیمت لپاره صفر ولري او دا صفر ځایونه له منځه تللی شي- لکه زموږ په بیلگه کې- نو د لیمیت یا بولي پیدا کولو لپاره داسې مخ ته ځو:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} x + 1 = 2$$

او وایو چې دا ډول تابع په صفر ځای کې تشیا (خالیگاه) لري یعنې په دې ځای کې تعریف نه ده.

	فعالیت: د سرک بنی لوري ته دا مخامخ تخته لرو: - ووايي، چي دا تخته څه مفهوم لري؟ په همدې توگه د سرک په سر کيڼي لوري ته هم همداسي يوه تخته خړول شوي. دا هم په همغه مفهوم.
---	--

دا پوښتنه مو دې لاندې روښانه ونې ته لابښودوي:

بيلگه ۳: د $x \neq 0$ ، $f(x) = \frac{|x|}{x}$ تابع راکړ شوي.

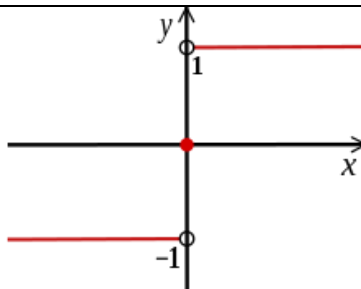
1- تابع وليکئ، بې له دې، چي د مطلقه قيمت نښه || استعمال کړئ.

2- د تابع گراف وکارئ.

3- که x له بنی لوري 1 ته نږدې شي، نو د $f(x)$ قيمت پيدا کړئ.

4- که x له کيڼي لوري 1- ته نږدې شي، نو د $f(x)$ قيمت پيدا کړئ.

5- وښايست چي پورته تابع يعني $f(x)$ څو حدونه لري.

	ښوونه: 1-تابع بې له سمبول ،،،، په لاندې ډول ليکو $f(x) = \begin{cases} 1; x > 0 \\ -1; x < 0 \end{cases}$ 2- د تابع گراف انځوروو: مخامخ
---	--

3- که x له بني لور 1 ته نږدې شي، نود لرو:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -1$$

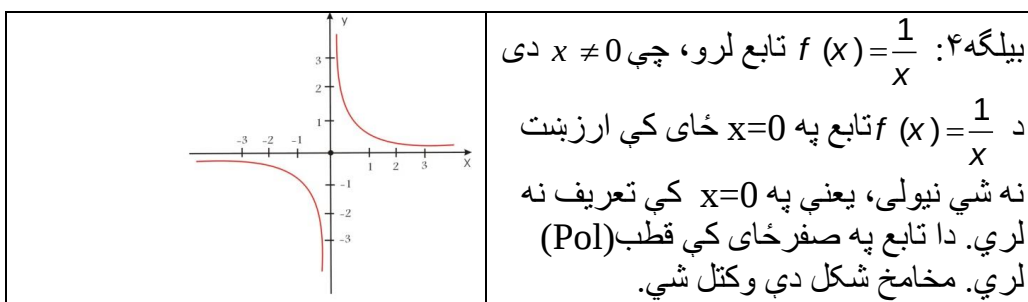
4- که x له کيني لور 1- ته نږدې شي، نو د $f(x)$ ليميټ دی: $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -1$

5- گورو چې که x دوه قيمتونو 1 او 1- ته نږدې شي، نو $f(x)$ دوه د ليميټ قيمتونه لري يعني $\lim_{x \rightarrow \pm 1} f(x) = \pm 1$ ، نو له دې امله $f(x)$ ليميټ نه لري.

له پورته بيلگې پايله:

په پورته بيلگه کې د $x \rightarrow -1$ لپاره تابع بني ليميټ لري او د $x \rightarrow 1$ لپاره کيني ليميټ لري.

د دې لپاره دې د گراف پورته کښل شوی شکل هم وکتل شي.



يادونه: هغه تابع، چې مخرج يې صفر وي او صورت يې صفر نه وي، وايو چې تابع په دې د مخرج په صفرځای کې قطب Pol لري.

$x=0$ ته د نږدې کېدو لپاره ترادف $(x_n) = \frac{1}{n}$ ، ټاکو.

د اړوندې تابع د قيمتونو ترادف $n = \left(\frac{1}{\frac{1}{n}} \right)$ دی.

دا د $n > 0$ لپاره یو نامحدود صعودي (جگېدونکی) ترادف دی.
 او د $n < 0$ لپاره نزولي- یا متناقص (ټیټېدونکی) ترادف دی.
 دا په دې معنا، چې د $f(x)$ تابع په صفرخای کې لیمیت نه لري. دا هلته یو قطب لري.

د توابعو د لیمیت لپاره دا لاندې پایله لرو:
 د $f(x), x \in D_f$ تابع د x_0 په ځای کې یو کین اړخیز لیمیت $a_l = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x)$ لري، که د هر ترادف (x_n) لپاره، چې n غړي یې د x_0 کین لور ته پراته وي او د توابعو ارزښتونه $f(x_n)$ د a_l په لور هڅیږي.

په ورته توګه بنی اړخیزه لیمیت: د $f(x), x \in D_f$ تابع د x_0 په ځای کې یو بنی اړخیز لیمیت $a_r = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x)$ لري، که د هر ترادف (x_n) لپاره، چې n غړي یې د x_0 بنی لور ته پراته وي او د توابعو ارزښتونه $f(x_n)$ د a_r په لور هڅیږي..

که تابع $f(x)$ همغه لیمیت L ولري که x له بنی او یا کینې لورې و C ته نږدې شي، نو لیمیت شته دی او د L سره برابر دی.

دا داسې لیکو: $\lim_{x \rightarrow C} f(x) = L$

تمرینونه :

د دې لاندې هرې تابع (پیژند ورشو (د تعریف ناحیه) domain او ارزښت ورشو (د قیمتونو ناحیه) range یا codomain پیدا کړئ. د توابعو ګراف وکارئ او حدونه (پولې) یې پیدا کړئ.

$$\begin{aligned} & 1) \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + x) , \quad 2) \lim_{x \rightarrow 4} (x^2 + x) , \quad 3) \lim_{x \rightarrow 0} |x| , \quad 4) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x} \\ & 5) \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{x^2}{x}} , \quad 6) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} , \quad 7) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{x^9 - 9} \end{aligned}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2+x; & x < 1 \\ x^2 & ; x \geq 1 \end{cases} \quad \text{10- که وي:}$$

الف) د تابع گراف وکارئ.

ب) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ پیدا کړئ.

۱. ۲ د لیمیتونو یا پوله ارزښت خویونه:

" Properties of Limits "

پوهیږو: په ریاضیاتو کې ټول توابع چې لرو، د ساده توابعو ترکیب combination دی، لکه دتوابعو جمع، تفریق، ضرب، وېش (چې مخرج یې صفر نه وي) او زنځیرونه composition. موږ دوه غوره او ساده توابع $f(x) = c$ او $g(x) = x$ لرو. که دواړه توابع سره یوځای کړو، نو لاس ته ترې راځي:

$L(x) = cx$ یا $m(x) = x \cdot x = x^2$ او داسې نور.

وېه گورو، چې دلته هم ټولې څلور عمليې همداسې اجراکيږي، لکه د اعدادو په ترادفونو کې.

فعالیت:

په دې برخه کې د په خویونه د ثابتو توابعو او کټمټ یا ایډنټیک توابعو Identity function لیمیتونه د جمعې، تفریق، ضرب او همداسې د وېش (چې مخرج یې صفر نه وي) له لارې وشمیرئ (وروسته به وگورو، چې دا د لیمیت خویونو تر نامه څیرل کیږي).

- د په خویونه یوه پولینوم تابعو لیمیت پیدا کړئ.

- د $f(x) = x$ او $g(x) = x - 2$ توابعوڅخه کار واخلئ، چې درې نورې په خوبښه توابع ترې لاس ته راوړئ. د دې توابعو لیمیتونه پیدا کړئ. دا لیمیتونه جمع، تفریق، ضرب او تقسیم (چې مخرج صفر نه وي) کړئ.

- که شونې شي، چې د یوې تابع لیمیت د تابع له حل څخه لاس ته راوړلای شو، یعنې که د بیلگې په توګه ولرو: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} 3 = 3$ نو دا تابع به څنګه لیکو؟

- ایا د پورته عمليې په څیر دا عمليې د هرې ثابتې او کټمت تابع لپاره ریښتوني ده؟

موږ له پورته څخه دا لاندې پایله لرو:

که $f(x) = x$ او $g(x) = 2$ ولرو، نو لرو: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 2$

2- که $h(x) = f(x) + g(x)$ وي، نو لرو: $h(x) = x + 2$

3- د $h(x)$ ګراف وکارئ.

4- د تابع لیمیت د جدول له لارې

—————>1<—————

0	.5	.8		1.2	1.5	2
2	2.5	2.8		3.2	3.5	4

—————> 3 <—————

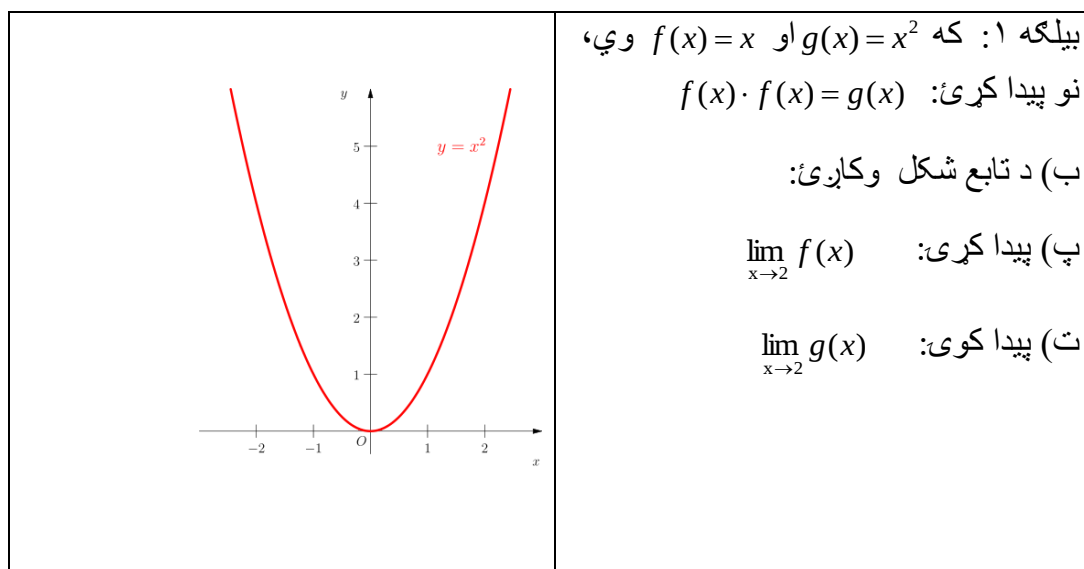
په یاد ولرئ: $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ او $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 2) = 3$

له پورته څخه د لیمیت لومړی خوي لاس ته راځي:

لومړۍ: د لیمیت د جمعې خوي: د دوه یا څو توابعو د جمعې لیمیت د همغو اعدادو د

$$\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1} g(x) \quad \text{لیمیت د جمعې سره برابر دی:}$$

دویم: د لیمیت د تفریق خوي: دا د پورته سره ورته حل لري. دا کار دې گران زده کوونکي سرته ورسوي.



حل: الف) $f(x) \cdot f(x) = x \cdot x = x^2 = g(x)$

(ب)

x	-2	-1	0	1	2
f(x)	4	1	0	1	4

(پ) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} x = 2$

ت) له گراف څخه لاس ته راځي: $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$

له دې امله لرو: $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = \lim_{x \rightarrow 2} (x \cdot x) = \lim_{x \rightarrow 2} x \cdot \lim_{x \rightarrow 2} x = 2 \cdot 2 = 4$

له پورته بیلگې څخه دا پایله لرو:

دریم: د لیمیت د ضرب خوي:

د دوه یا ډیرو توابع د ضرب لیمیت د هغو توابعو د لیمیتونو د ضرب سره برابر دی.

$$\lim_{x \rightarrow a} x^2 = \lim_{x \rightarrow a} (x \cdot x) = \lim_{x \rightarrow a} x \cdot \lim_{x \rightarrow a} x = a \cdot a = a^2$$

بیلگه:

که $f(x) = x$, $g(x) = x^2$ وي، دا لاندې لیمیتونه پیدا کړئ:

a) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -1} g(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow -1} g(x)$

c) $h(x) = g(x) \cdot f(x)$

d) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (x) = -1$

پیدا کړئ: $\lim_{x \rightarrow -1} h(x)$

حل a: $f(x) \cdot f(x) = x \cdot x = x^2 = g(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} x^2 = 1$

x	-2	-1	0	1	2
f(x)	4	1	0	1	4

$$b) \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow -1} g(x) = -1 \cdot 1 = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} x^2 = 1$$

$$c) h(x) = x^2 \cdot x = x^3, \quad d) \lim_{x \rightarrow -1} h(x) = \lim_{x \rightarrow -1} x^3 = -1$$

بیلگه:

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{2x^2 + 1} \text{ تابع لرو، } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \text{ پیدا کړی.}$$

حل: $f(x)$ د دوه توابعو $g(x) = x^2 - 2x + 5$ او $L(x) = 2x^2 + 1$ وېش دی.

که x و 3 ته نږدې شي کیدای شي لیمیت د تابع د حل له لارې په $x = 3$ کې پیدا شي:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x + 5}{2x^2 + 1} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 2x + 5)}{\lim_{x \rightarrow 3} (2x^2 + 1)} \\ &= \frac{3^2 - 2 \cdot 3 + 5}{2 \cdot 3^2 + 1} = \frac{8}{19} \end{aligned}$$

له پورته بیلگې څخه لاندې لاس ته راځي:

څلورم: د لیمیت د ویش خوي (مخرج د صفر سره برابر نه دی):

دیوي کسري تابع لیمیت (یعني یوه تابع، چې د دوه توابعو له وېش (مخرج له صفر سره برابر نه

دی) څخه لاس ته راغلي وي) د تابع د صورت لیمیت او د مخرج لیمیت (مخرج له صفر سره

نابرابر دی) د وېش سره برابر دی.

بیلگه:

د $g(x) = \sqrt{3-x}$ ګراف وکارئ او پیدا کړئ.

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} g(x) \quad , \quad b) \lim_{x \rightarrow -1} g(x) \quad , \quad c) \lim_{x \rightarrow 3} g(x)$$

حل: په لاندې توګه مخ ته ځو:

(الف)

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{3-x} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 2} (3-x)} = \sqrt{1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = 2 \text{ له ګراف څخه: } 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{3-x} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow -1} (3-x)} = 2\sqrt{4} \text{ یادونه:}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \sqrt{3-x} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 3^-} (3-x)} = \sqrt{0} = 0$$

(د $f(x) \geq 0$ لپاره او د ټولو x قیمتونو لپاره، چې c ته نږدې کیږي).

له پورته څخه لاس ته راوړنه:

پنځم: د لیمیت د جذر (ریښې) خوي: د یوې تابع چې د جذر (ریښې) لاندې وي لیمیت برابر دی، که چیرې تابع او لیمیت دواړه د جذر لاندې ونیول شي.

پوښتنه: که $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 3$ وي، نو $\lim_{x \rightarrow -2} (f(x))^n$ پیدا کړئ.

یادونه: د یوه پولینوم حد ټیک داسې شمیرل کیږي، لکه د یوې تابع حد. د مخه مو وویل، چې یو پولینوم د ساده توابعو د مختلفو نښلونو څخه لاس ته راځي.

تمرینونه.

که $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 5$ او $\lim_{x \rightarrow 4} g(x) = 0$ ، $\lim_{x \rightarrow 4} h(x) = -2$ نو پیدا کړئ:

$$1) \lim_{x \rightarrow 4} (f + g)(x) \quad , \quad 2) \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{g}{f} \right)(x) \quad , \quad 3) \lim_{x \rightarrow 4} (fg)(x)$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 4} (h(x)) \quad , \quad 5) \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{g}{f} \right)(x) \quad , \quad 6) \lim_{x \rightarrow 4} (2h - 3g)(x)$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 4} (f \cdot h)(x) \quad , \quad 8) \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{2h}{3f - g} \right)(x) \quad , \quad 9) \lim_{x \rightarrow 4} (h(x) + f^2(x))$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 2} (6x^3 - 2x + 5x - 3) \quad , \quad 11) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x - 2}{x^2 + 1}$$

د کسري - یا ماتو توابعو لیمیت "Limit of Rational functions"

موږ د پولینومونو دا لاندې ویش لرو:

$$R(x) = \frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0}; P_m \neq 0$$

او د لیمیت په هکله یې فکر کوو، چې د $b_0 \neq 0$ سره $\frac{a_0}{b_0}$ ترې لاس ته راځي.

فعالیت:

موږ پوړلینوم $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ لرو. ددې پوړلینوم لیمیت د x د مختلفو قیمتونو لپاره څنگه پیدا کولای شو؟

- که $x \rightarrow 0$ د صفر په لوري لار شي یا صفر ته ورنږدې شي.

- که $x \rightarrow 1$ یوه ټاکلي عدد ته ور نږدې شي.

- که $x \rightarrow \infty$ د ناپای په لوري لار شي.

- که د دریمې درجې پوړلینوم $P(x) = 5x^3 + 3x^2 + 3$ ولرو، نو ددې پوړلینوم لیمیت دڅلورو په خوښه قیمتونو لپاره پیدا کړئ.

پوهیږو، چې د پوړلینومي توابعو لیمیت د ورکړل شوو x قیمتونو لپاره، لکه د نورو ساده توابعو په څېر، چې د جمعې، تفریق، ضرب او وېش (چې مخرج صفر نه وي) په څیر ورکړل شوي دي، شمېرلای شو. غواړو د ناطقو توابعو یا کسري توابعو لیمیت پیدا کړو.

د ناطقو توابعو د لیمیتونو شمیرلو لپاره، که شته وي، له مختلفو لارو څخه کار اخلو:

که ولرو: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$ ، نو د تابع خپونه د $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$ لپاره ساده کوو او د

پورته پوړلینوم وېش، چې کسري تابع ده، لیمیت شمېرو.

فعالیت: که $\frac{x^2 - 4}{x + 2}$ ولرو د $x \neq -2$ سره.

- ددې تابع حد د $x > -2$ لپاره پیدا کړئ.

- ددې تابع حد د $x \rightarrow 1$ لپاره پیدا کړئ.

- ددې تابع حد د $x \rightarrow -1$ لپاره پيدا کړئ

- د تابع پيژندور شو وليکئ!

- دا تابع څنگه ساده کولی شئ، چې پوله يې د $x \rightarrow -2$ لپاره وشميرلی شو؟

د پورته فعاليت په بنسټ کولای شو، چې د کسري توابعو حدونه د مختلفو اعدادو لپاره پيدا کړو او همداسې يوه کسري تابع که شوني وي، هغه ځايونو ته ورنږدې هم پيدا کړو، په کومو کې چې تابع تعريف نه وي.

ددې موضوع د روښانولو لپاره د مختلفو کسري توابعو څو بيلگي راوړو:

بيلگه ۱:

پيدا کړئ: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x}{x + 2}$ که $x = 1$ وي. دا تابع تعريف ده او لرو:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x}{x + 2} = \frac{(1)^2 + 1}{1 + 2} = \frac{2}{3}$$

که $x = 1$ ځای په ځای کړو (Substitue) نو لاس ته راځي: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$

بيلگه ۲: پيدا کړئ: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{x + 3}$

حل: دا چې تابع په $x = 0$ کې تعريف ده، نو لرو: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{x + 3} = \frac{0 - 1}{0 + 3} = -\frac{1}{3}$

بيلگه ۳: پيدا کړئ: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x + 1}$

حل: دا چې تابع په $x=1$ کې تعریف ده، نو لرو:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x + 1} = \frac{1^2 + 1 - 2}{1 + 1} = \frac{0}{2} = 0$$

که په یوه ځای یا عدد کې تابع تعریف نه لري، نو د مختلفو لارو یا متودونو څخه کار اخلو، چې لیمیت یې پیدا کړو، که شته وي.

بیلگه ۴: پیدا کړئ: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 2}$

حل: دا چې $f(x)$ تابع په $x=2$ چې تعریف نه لري، نو حد د تابع د حل له لارې نه شي پیدا کیدای. ډاکیدای شي داسې پیدا کړو، چې د تابع صورت په ضریبونو تجزیه کړو.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 4)(x - 2)}{(x - 2)}$$

د تابع لیمیت که x و ۲ ته نږدې شي، دا مانا لري، چې $x \neq 2$ دی.

دا کسري تابع و $\lim_{x \rightarrow 2} (x - 4)$ رالندېږي او لاندې لیمیت لري:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x - 4) = 2 - 4 = -2$$

بیلگه ۵: پیدا کړئ: $\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x} - 4}{x - 16}$

گورو، چې تابع په $x=16$ کې تعریف نه لري یعنې باید $x \neq 16$ وي.

په یاد ولرئ چې: $\sqrt{b} - \sqrt{a}$ او $\sqrt{b} + \sqrt{a}$ یو د بل مزدوج دي.

حل: د پورته تابع صورت او مخرج د $\sqrt{x} - 4$ له مزدوج $\sqrt{x} + 4$ سره ضرب کړئ.

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x} - 4}{x - 16} &= \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x} - 4}{x - 16} \cdot \frac{\sqrt{x} + 4}{\sqrt{x} + 4} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 16} \frac{(x - 16)}{(x - 16)(\sqrt{x} + 4)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 16} \frac{1}{\sqrt{x} + 4} = \frac{1}{\sqrt{16} + 4} = \frac{1}{8}
 \end{aligned}$$

بیلگه ۶: پيدا کړئ: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}$

حل: تابع په $x=3$ کې تعريف نه لري، نو مخرج او صورت د مخرج په مزدوج ضربوو اولرو:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2} \cdot \frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(3-x)(\sqrt{x+1}+2)}{(x+1-4)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3} -1(\sqrt{x+1}+2) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3} -(\sqrt{3+1}+2) = -4
 \end{aligned}$$

بیلگه ۷:

پيدا کړئ: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{5}{2x-3} + 5}{x^2 - 1}$

حل: تابع په $x=1$ کې تعريف نه لري، نو په لاندې توگه مخ ته ځو:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{5}{2x-3} + 5}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{5 + 10x - 15}{2x-3}}{x^2 - 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{10x - 10}{(2x-3)(x^2 - 1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{10(x-1)}{(2x-3)(x-1)(x+1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{10}{(2x-3)(x+1)} = \frac{10}{(2(1)-3)(1+1)} \\
 &= \frac{10}{-2} = -5
 \end{aligned}$$

د کلاسیک لارې د کسري اعدادو لیمیت:

اوس یوه بله تابع د څیړنې لاندې نیسو، چې $g(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$ یې بولو:

دلته هم دا پوښتنه کوو، چې که $x = 1$ ځای ته نږدې شي، نو د $g(x)$ تابع د تابع کوم قېمتونه غوره کوي:

بیا هغه ځای په پام کې نیسو، چې $x = 1$ د مخ لوري (کینې لوري) ته خورا نږدې پروت وي او هغه ځای، چې د $x = 1$ وروسته یا ښی لوري ته خورا نږدې پروت وي:

$$\begin{aligned}
 g(1-h) &= \frac{(1-h)^2 + (1-h) - 2}{(1-h) - 1} \\
 &= \frac{(1-2h+h)^2 + (1-h) - 2}{-h} = \frac{-3h + h^2}{-h} = 3 - h \\
 g(1+h) &= \frac{(1+h)^2 + (1+h) - 2}{(1+h) - 1} \\
 &= \frac{(1+2h+h)^2 + (1+h) - 2}{h} = \frac{-3h + h^2}{h} = 3 + h
 \end{aligned}$$

۲۲ د کلاسیک لارې د کسري اعدادو لیمیت

دا دواړه لاس ته راوړنې یا پایلې اوس داسې تشریح کوو:

که h ناپای کوچنی وټاکو، یعنې هغه ځایونه راوښسو چې $x=1$ ځای ته ناپای نږدې پراته وي، نو د تابع ارزښتونه به هم و 3 ته ناپای نږدې پراته وي. عدد 3 د $x=1$ ځای لپاره د $g(x)$ تابع د حد قیمت دی. ددې لپاره لیکو: $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 3$

تمرینونه:

د لاندې معادلو حدونه پیدا کړئ، که شته وي.

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} (6x^3 - 2x^2 + 5x + 3)$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -1} (x^7 + 2x - 5)$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+2)^2 - 4}{x}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2 + 7x}{(2x-3)^2 - 9}$$

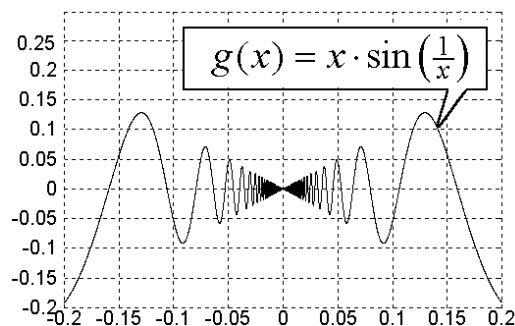
$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+3} - \frac{1}{3}}{x}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{4} \right) \left(\frac{1}{x-4} \right)$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{2x}{x^2+1} - \frac{4}{5}}{x-2}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$$

د مثلثاتي توابعو حدونه Limit of trigometric function



فعالیت:

دساین پوله یعنی $\lim_{x \rightarrow a} \sin x$ د x د مختلفو قیمتونو لپاره پیدا کړئ، که $x \in [0; 2\pi]$

وي:

___ که $x \rightarrow 0$ وي. ___ که $x \rightarrow 30$ وي. ___ که $x \rightarrow 45$ وي. ___ که $x \rightarrow 60$ وي.

___ که $x \rightarrow 90$ وي. ___ که $x \rightarrow 135$ وي. ___ که $x \rightarrow 270$ وي. ___ که $x > 2\pi$ وي.

- د پورته ورکړشو قیمتونو لپاره د کوساین $\cos x$ لیمیت پیدا کړئ.

قضیه: که x په رادیان ورکړ شوی وي، نو $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ دی.

بڼوونه: د $x=0$ لپاره تابع $\frac{\sin x}{x}$ تعریف نه لري او ناتاکلې بڼه $\frac{0}{0}$ لري.

موږ غواړو، د $x \rightarrow 0$ او $\frac{\sin x}{x}$ لپاره په لاندې ډول یو جدول ولیکو (په پورته مساوات

کې x په رادیان اندازه کیږي):

$\frac{\sin x}{x}$	$\sin x$	x	
		په راديان	په درجه
0.9948	0.1736	0.1745	10°
0.9988	0.0872	0.0873	5°
0.9996	0.05233	0.05235	3°
0.9995	0.0174524	0.0174532	1°
0.99999	0.00872653	0.00872664	$30'$
≈ 1	0.00174532	0.00174532	$6'$
≈ 1	0.00087266	0.00087266	$3'$
≈ 1	0.000291	0.000291	$1'$
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.

په پورته جدول کې گورو، چه د x لپاره $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ قيمت غوره کوي.

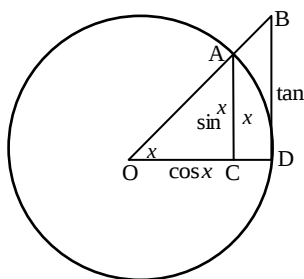
په شميرنيزه توگه د $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ بنسونه په لاندې ډول مخ ته بيايو:

يوه دايره په پام کې نيسو چې د هغې مرکز (0) اوشعاع يې OD او $\overline{OA} = \overline{OD} = 1$ ده (لاندې شکل وگورئ). د A له ټکي څخه پر $\overline{OD}$ يو عمود رسموو، چې دا وړانگه په C ټکي کې غوڅوي.

د D په ټکي باندې پر دایرې یو مماس رسمو، دامماس له OA څخه غځېدلی کړ بڼه د B په ټکي کې غوڅوي.

اوس A د D سره تړو:

موږ لرو:



$$\sin x = \frac{\overline{AC}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{AC}}{1} = \overline{AC}$$

$$\cos x = \frac{\overline{OC}}{\overline{OA}} = \overline{OC}$$

$$\tan x = \frac{\overline{DB}}{\overline{OD}} = \overline{DB}$$

دا چې x په رادینان اندازه کیږي، نو لرو: $\widehat{AD} = x$

له پورته شکل څخه لاندې نامساوات لرو: $\angle OBD > \angle AOD > \angle AOC$

همداسې لرو:

$$\frac{1}{2} \cos x \cdot \sin x < \frac{1}{2} \overline{OD}^2 \cdot x < \frac{1}{2} \overline{OD} \cdot \tan x$$

په پورته نامساواتو کې $\overline{OD} = 1$ ږدو او د نامساواتو ټولې خواوې په دوو کې ضربوو، نو

$$\cos x \cdot \sin x < x < \tan x \quad \text{لرو:}$$

یا په همدې ډول لیکلای شو: $\cos x \cdot \sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}$

که د پورته نامساواتو ټولې خواوې پر $\sin x$ ویشو، نو لرو:

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$\frac{1}{\cos x} > \frac{\sin x}{x} > \cos x \quad \text{یا:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} > \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} > \lim_{x \rightarrow 0} \cos x$$

دا چې د $x \rightarrow 0^+$ لپاره $\cos x \rightarrow 1$ دی، نو لرو:

$$\frac{1}{1} > \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} > 1$$

$$1 > \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} > 1$$

گورو چې په عین وخت کې $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ له 1 لوی او هم له یو 1 کوچنی دی، نو له دې

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{نامساواتو څخه دا لاندې مساوات لرو:}$$

پام: که $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ او $x = -\alpha$ و لیکو، نو دا لاندې تړې لاس ته راځي:

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin(-\alpha)}{-\alpha} = \frac{-\sin \alpha}{-\alpha} = \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin \alpha}{\alpha}}$$

له پورته دواړو مساواتو څخه غوښتنه لاس ته راځي:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

بیلگه ۱: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$ پیدا کړئ.

حل: که $2x = \alpha$ او که $x \rightarrow 0$ وي، نو $\alpha \rightarrow 0$ او $\frac{\sin \alpha}{\alpha} = \frac{\sin 2x}{2x}$ لرو.

له پورته مساواتو څخه لاس ته راځي:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1 \Rightarrow 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} = 2 \cdot 1 = 2$$

بیلگه ۲:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{2x} \text{ وښایاست}$$

که $y = 5x$ وي او $x \rightarrow 0$ ، نو $y \rightarrow 0$ هم لرو:

$$\begin{aligned} \frac{\sin 5x}{5x} \cdot \frac{5}{2} &= \frac{\sin 5x}{\frac{5}{2}(2x)} \quad \frac{5}{2} = \frac{\sin 5x}{2x} \\ &= \frac{5 \sin y}{2y} \end{aligned}$$

له دې امله لرو:

$$\begin{aligned}\frac{5}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} \frac{5}{2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{2x} \\ &= \frac{5}{2} \cdot 1 = \frac{5}{2}\end{aligned}$$

تمرینونه: دا لاندې غوره قضیه وښایاست.

که x په رادیان ورکړ شوی وي، نو لرو $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$ او لاندې اجرات وکړئ:

الف) تانجنت $\tan x$ د $\sin x$ او $\cos x$ په ترمونو ولیکئ.

ب) $\frac{\tan x}{x}$ د $\sin x$ او $\cos x$ په ترمونو ولیکئ.

پ) دپورته قضیې لیمیت پیدا کړئ.

ت) ایا قضیه رښتیا ده؟

لاندې لیمیتونه (حدونه) وشمېرئ.

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \frac{\pi}{6})}{x + \frac{\pi}{6}}$, 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x}$, 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \tan^2 x}$,
- 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x}$, 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sin 3x}$, 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin 5x \cos 3x$
- 7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(2x-1)}{4x^2-1}$, 8) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\cos 2x - \cos x + 1} + \sin^2 x$

د $x \rightarrow \pm\infty$ لپاره پوله ارزښت یا لیمیت

د $\frac{Q(x)}{P(x)}$ کسري توابعو لپاره مو لیمیتونه وشمیرل، چې x په خوښه وو.

اوس $\frac{Q(x)}{P(x)}$ لپاره لیمیتونه غواړو و شمیرو، که $x \rightarrow \pm\infty$ وي.

فعالیت:

زده کوونکي دې د هرې لاندې تابع د حد له شمېرلو د مخه، د توابعو گرافونه انځور کړي او په گرافونو کې دې یې دې ته پام وي، چې دا څنگه په تعریف شوي ورشوي کې ځغلي.

لومړی: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5}{x-2}$ پیدا کړئ.

د 5 وېشنه په یوه ډېر لوی مثبت (ناپای) مثبت (منفي) عدد باندې یو ډېر کوچنی مثبت (منفي)

عدد ورکوي یعنې $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5}{x-2} = \frac{5}{\pm\infty} = 0^\pm$.

گراف G_f یو پروت اسیمپتوت $y = 0$ لري، چې له پورته او کښته گراف ته ور نږدې کیږي.

دویم: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-3}{x+1}$ پیدا کړئ.

د -3 وېشنه په یوه ډېر لوی مثبت (منفي) عدد باندې یو ډېر کوچنی مثبت (منفي) عدد

ورکوي یانې $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-3}{x+1} = \frac{-3}{\pm\infty} = 0^\pm$.

گراف G_f یو پروت اسیمپتوت $y = 0$ لري، چې له پورته او کښته گراف ته ور نږدې کیږي.

دریم: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5}{x^2 - 2x}$ پیدا کړئ.

په مخرج کې یوازې x^2 ستر رول لوبوي. د مربع کونې له لاري هر عدد مثبت

کیري. که 5 په یوه ډېر لوی مثبت عدد ووېشل شي، نو یو خورا کوچنی مثبت عدد ترې

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5}{x^2 - 2x} = \frac{5}{+\infty} = 0^+ \text{ یعنی } 0^+$$

گراف G_f یو پروت اسیمپتوت $y = 0$ لري، یوازې له پورته لور ور نږدې کېږي سره.

$$\text{څلورم: } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-3}{x^2 - 2} \text{ پیدا کړئ.}$$

د مخرج مربع کوني سره منفي عددونه هم مثبت کیري. د -3 وېشنه په یوه ډېر لوی

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-3}{x^2 - 2} = \frac{-3}{+\infty} = 0^- \text{ مثبت عدد باندې یو ډېر کوچنی منفي عدد ورکوي یانې } 0^-$$

گراف G_f یو پروت اسیمپتوت $y = 0$ لري، یوازې له کښته گراف ته ور نږدې کیري.

د پرېښودنې- یا ترې صرفنظر کوني یا له ترې تیرېدنې اصول:

$$\text{لومړی: } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-1}{x^2-2} \text{ پیدا کړئ.}$$

په صورت کې د x جگعدد (توان؟)، په مخرج کې د x^2 توان په پام کې نیسو او همداسې له ټولو ثابتو تېرېږو (ټولې ثابتې پرېښول کیري، صرف نظر ترې کیري) او بیا x لنډیري. که 1 په ډېر لوی مثبت (منفي) عدد ووېشل شي، نو

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-1}{x^2-2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0^\pm \text{ ترې لاس ته راځي.}$$

(خیره G_f پروت گاوند (مجانې) $y = 0$ لري، چی له پورته او کښته ورنږدې کیري.

$$\text{دویم: غواړو د } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2-2}{x+2} \text{ تابع حل پیدا کړو.}$$

حل: په صورت کې د x^2 او په مخرج کې د x له ټولو توانونو په پام کې نیولو او له ټولو ثابتو تېرېږو (صرفنظر ترې کوو) او بیا یې د x سره لنډوو. په روښانه توګه ټول حدونه $\pm\infty$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2-2}{x+2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x = \pm\infty \text{ لاس ته راځي یعنی } \pm\infty$$

شکل G_f مائله اسیمپتوت راکوي، ځکه چې د صورت درجه له مخرج څخه د 1 په اندازه

ستره ده.

دریم: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x^2 - 2}{3x^2 + 2x}$ پیدا کړئ.

په صورت او مخرج کې د x^2 ټول توانونه په پام کې نیسو او له ټولو ثابتو تیرېزو او بیایي د x^2 سره لنډوو.

ټولې پولې په روښانه توګه $-\frac{2}{3}$ راګوي

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x^2 - 2}{3x^2 + 2x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x^2}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}$$

یعنې شکل G_f پرته اسیمتوت راګوي، چې $y = -2/3$ ده.

څلورم: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x^2 + 2x - 1}{3x^3 + 2x^2 - 3x + 2}$ پیدا کړئ

په صورت کې له x^2 څخه کوچنیو ټولو توانونو او په مخرج کې د x^3 له ټولو کوچنیو توانونو او همداسې له ثابتو تیرېزو. که -2 په $\pm\infty$ وېشل شي، نو یو کوچنی مثبت یا

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x^2 + 2x - 1}{3x^3 + 2x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x^2}{3x^3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2}{3x} = \frac{-2}{\pm\infty} = 0^\pm$$

منفي عدد یعنې $0^\pm$ لاس ته راځي.

شکل (څیره) G_f یو پروت اسیمتوت $y = 0$ لري، چې له پورته او کښته لور ورنږدې

کيږي.

شمیرنیز حلونه (د شمیرنې له لارې حل):

اول: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x - 1}{x^2 - 2}$ وشمیرئ.

په صورت او مخرج x^2 له نوکانو (لینده کیو یا قوسونو) راوستنې او بیا د x^2 سره لنډونې وروسته مخرج د 1 په لور ځي او صورت د صفر په لور، یعنې صورت ترمونه صفر ته نږدې کیږي.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x - 1}{x^2 - 2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right)}{x^2 \left(1 - \frac{2}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{2}{x^2}} = \frac{0^\pm}{1} = 0^\pm$$

شکل G_f یوه مایله اسیومپټوت (مجانِب) لري، ځکه چې د صورت درجه د مخرج له درجې څخه په 1 کوچنۍ ده.

دویم: وشمیرئ: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x^2 + 1}{x^4 - 2x^2 + 2}$

په صورت او مخرج کې هغه د لوی توان x یعنې x^4 له نوکانو یا لیندکیوبهر نیسو او بیا په ترتیب شمیرنیزه عملیه مخ ته بیاو، نو لاس ته ترې راځي:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^4 \left(\frac{-2}{x^2} + \frac{1}{x^4} \right)}{x^4 \left(1 - \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^4} \right)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{-2}{x^2} + \frac{1}{x^4}}{1 - \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^4}} = \frac{0^-}{1} = 0^-$$

ټوليز خويونه:

بیلگه ۱: پیدا کړئ: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2 - 2}{x + 1}$

په پورته بیلگه کې داسې مخ ته تللي یو، چې په صورت کې له ټولو عددونو څخه تیرېږو، چې د خپلواکي متحولې توان له 1 کوچنۍ یعنې صفر وي او په صورت کې له ټولو هغو خپلواک متحولو تیرېږو، چې توان یې له 2 څخه کوچنۍ وي. گورو، چې په صورت کې x له کوم ضریب سره پاتې کیږي، له دې امله پورته تابع د مثبت-منفي ناپای په لور ځي.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2 - 2}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x \left(3x - \frac{2}{x} \right)}{x \left(1 + \frac{1}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x - \frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{+\infty}{1} = +\infty$$

بیلگه ۲: پیدا کړئ: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2}$

په پورته بیلگه کې په صورت کې له 1 او مخرج کې له 2 څخه تیرېږو او بیا صورت او مخرج په x ویشو. لاس ته راوړنه یې د x په یوه ثابت عدد وېشل دي. چې د $x \rightarrow \infty$

سره تابع $0 \pm$ ته ځي، یعنې: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2} = 0 \pm$

بيلگه ۳: پيدا کړی: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x^2 - 2}{3x^2 + 2x}$

په صورت کې له 2 او مخرج کې له $2x$ څخه تيرېږو او د x^2 سره يې لنډوو او په دې

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x^2 - 2}{3x^2 + 2x} = -\frac{2}{3} \quad \text{ډول لاندې پايله لرو:}$$

تمرينونه:

د لاندې تمرينونو حدونه د پورته ورکړشو مختلفو لارو له لارې وشميرئ:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{6}{x^2 - x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + x^2 + x + 6}{x^3 - 3x + 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5 + x^2 - x + 9}{x^4 + x^2 - x - 5}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x^2 - x + 7}{x^3 - x + 5}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 2}{x + 1}$$

متماډيت (ناپړېکيدنه) “Continuity”

د درس په دې برخه کې لولو ، چې يوه تابع په يوه ټکي يا يوه اېنټروال کې کوم حالت غوره کوي. ايا دا تابع په کوم ځای کې توپ وځي، يا پرې کيږي او که يا په متماډي يعنې نه پرېکيدنې ډول د اېنټروال په دننه کې ځلي.

موږ په دې موضوع د تابع متماديت څيړو او متماديت تعريفوو

فعاليت:

لاندې توابع لرو:

$$f(x) = x^2 - 1, \quad f(x) = \frac{1}{x}, \quad f(x) = \left| \frac{x}{x} \right|$$

- د دې درې توابعو شکلونه وکارئ.

- وگورئ، چې د توابعو گرافونه څنگه ځلي. په کومه تابع کې گراف ترلی ځلي او چرته ماتيري، توپ وهي او ...

له پورته فعاليتونو څخه لاندې پايله لرو:

د توابعو متماديت Continuous functions

په دې موضوع کې موږ د يوې تابع د متماديت په هکله څيړنه کوو او د متماديت پيژند(تعريف) ورکوو.

پيژند:

که b د f تابع تعريفوړشو (- ساحه) کې يو حقيقي عدد وي. د f تابع په b متمادي بلل کيږي، که د ټکي $(b, f(b))$ نږدې د f گراف داسې وکښلی شو، بې له دې چې د پنسل څوکه له کاغذ څخه پورته کړو.

له دې امله $f(x) = x^2 - 1$ تابع او $f(x) = \frac{1}{x}$ تابع د $x = b$ په ټکي کې متمادی ده.

$f(x) = \left| \frac{x}{x} \right|$ تابع په $x = 0$ متمادی نه ده يانې توپ وهي کيږي. (څيره په ۵ - م مخ کې)

تابع په $x = a$ کې غیر متمادي ده، که پرې شي (تشيا ولري)، توپ ووهې او يا ماته شي.

لرو: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$ او $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = -1$ نو له دې امله $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x}$ په $x = 0$ کې نشته يعنې تابع د $x = 0$ په ټکي کې متمادي نه ده.

بيلگه ۱:

$$\text{که } f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & ; x \geq 1 \\ 1 - x & ; x < 1 \end{cases} \text{ وي، نو:}$$

الف) د تابع گراف وکړئ.

ب) پيدا کړئ $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

پ) پيدا کړئ: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

که تابع په $x = 3$ او $x = 1$ کې متمادي وي.

حل:

الف) گراف دې د گرانو لوستونک دنده وي.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} f(x) &= (2x + 1) = 7 \\ f(3) &= 7 \end{aligned} \quad (\text{ب})$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x + 1) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (1 - x) = 0 \end{aligned} \quad (\text{پ})$$

د ب) او پ) له مخې لرو:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$$

له دې امله تابع په $x=3$ ناپربکيدونې او $x=1$ کې پرېکيدونکې ده.

بيلگه ۲:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3+x}{x} & ; x \neq 0 \\ 3 & ; x = 0 \end{cases} \text{ وي.}$$

الف) فنکشن رسم کړی

ب) وڅیړئ، چې تابع په $x=2$ او $x=0$ کې متمادي ده او که نه؟

حل: الف) د تابع گراف لپاره

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	5	2	3	2	5

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3+x}{x} = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2+1) = 2^2+1 = 5 \quad \text{ب)}$$

$$f(2) = \frac{2^3+2}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

له دې امله د f لیمیت شته او $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ دی، نو تابع متمادي دی که $x=2$ وي.

وي دې $x=0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3+x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3+x}{x} = 1$$

د دې معنا دا ده، چې $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ او په دې معنا دی، چې $f(0) = 3$

دا دا معنا لري، چې $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0)$

تابع په $x = 0$ کې غیرمتمادي ده.

بیلگه ۳: که $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$ ، $x \neq -3$ وي.

ایا $f(x)$ تابع په $x = -3$ کې متمادي ده؟

حل: تابع $f(-3)$ تعریف نه لري، نو له دې

امله تابع په $x = -3$ کې متمادي نه ده.

له دې بیلگې او د تیرو درسونو څخه لرو:

تعریف (پیژند):

که f یوه تابع وي، چې د ټولو x لپاره په همغه واز اینتروال کې چې $x = c$ لري تعریف وي، نو د f تابع په $x = c$ کې متمادي بلل کېږي، که دا لاندې شرایط پوره وي:

1- که $f(x)$ تعریف وي.

2- که $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ شته وي (موجود وي).

3- که $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ رښتیا وي.

که تابع د ټولو $x \in (a, b)$ لپاره متمادي وي، نو تابع په واز اینتروال (a, b) کې هم متمادي ده.

بيلگه ۴:

$$\text{که } f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 1 & ; x \leq 1 \\ 4 + x & ; x > 1 \end{cases} \text{ وي.}$$

وگورئ، چې تابع چيرته متمادي او چيرته غيرمتمادي ده.

حل: په $x=1$ کې f تعريف لري

$$f(x) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (2x^2 + 1) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (4 + x) = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1} f(x)$$

له دې امله تابع په $x=1$ کې غيرمتمادي ده

بيلگه ۵:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 1 & ; x < 2 \\ 3 & ; x = 2 \\ x + 3 & ; x > 2 \end{cases} \text{ وي، نود } f(x) \text{ تابع متماديت په } x=2 \text{ کې وڅيړئ.}$$

حل: تابع $f(x)$ په $x=2$ کې تعريف لري او لرو $f(2) = 3$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x + 3) = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 + 1) = 5 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$$

دا چې $f(x) = 3$ دی، نو له دې امله $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2)$.

دا په دې معنا دی، چې تابع په $x = 2$ کې غیرامتمادي ده.

بیلگه ۶:

$$\text{که } f(x) = \begin{cases} 2 \sin x & ; \quad x \leq \frac{\pi}{2} \\ ax^2 + \pi^2 & ; \quad x > \frac{\pi}{2} \end{cases} \text{ وي، نو:}$$

a داسې پیدا کړئ، چې f په $x = \frac{\pi}{2}$ کې متمادي وي.

$$\text{حل: } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) = a \frac{\pi^4}{4} + \pi^2 ; \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = 2$$

$f(x)$ متمادي ده، نو له دې څخه لاس ته راځي:

$$a \frac{\pi^2}{4} + \pi^2 = 2$$

و

$$= \frac{a}{4} \pi^2 = 2 - \pi^2$$

$$a \pi^2 = 8 - 4 \pi^2 \Rightarrow a = \frac{8}{\pi^2} - 4$$

تمرینونه:

- 1- یوه په خوبه تابع ولیکئ او د تابع گراف وکارئ او وگورئ، چې تابع چیرته تعریف ده او متمادیت یې وښایاست.

په لاندې پوښتنو کې وڅیړئ، چې تابع په ورکړ شوي ټکي کې متمدی یا غیر متمدی دي.

$$2) f(x) = x^2 + 5(x-2)^7 ; x = 3 \qquad 3) f(x) = \frac{x+3}{(x^2+2x-5)} ; x = -1$$

$$4) f(x) = \frac{\sqrt{8-x^2}}{2x^2-5} ; x = -2 \qquad 5) f(x) = \frac{1}{(x-3^3)} ; x = 3$$

$$6) f(x) = |x-3| ; x = 3 \qquad 7) g(x) = \frac{|x|}{x} ; x = 0$$

د متمدی یا ناپرېکړدونکو توابعو څیونه

دلته دا څیونه همغه د لیمیت څیونه دي.

فعالیت:

1- د f او g توابعو جمع پیداکړئ:

$$(f+g)(x) = \dots\dots\dots$$

2- د f او g توابع په $x=2$ کې متمدی دي، نو:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \dots\dots\dots \& \lim_{x \rightarrow a} g(x) =$$

3- د لیمیت قیمتونه استعمال کړئ:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) &= \lim_{x \rightarrow a} (f+g)(x) \\ &= \dots\dots\dots : \dots \\ &= \dots\dots\dots : \dots = (f+g)(a) \end{aligned}$$

له دې امله $(f + g)$ په $x = a$ کې متمادي ده.

که f او g توابع په $x = c$ کې متمادي وي، نو د لاندې توابعو څخه يې هره يوه په $x = c$ کې متمادي ده.

1- د توابعو جمع $f + g$

2- د توابعو تفریق $f - g$

3- د توابعو ضرب $f \cdot g$

د توابعو وېش $\frac{f}{g}$; $g \neq 0$

بېلگه ۱:

که $f(x) = \sin x + 1$ او $g(x) = x^2 + 3x - 2$ وي، نو:

1- f او g په $x = 1$ کې متمادي دي.

2- وڅیړئ، چې ایا

(الف) $f(x) + g(x) = \sin x + x^2 + 3x - 1$ او

(ب) $(\sin x + 1)(x^2 + x^2 + 3x - 1)$ په $x = 1$ کې متمادي او که غیر متمادي دي.

حل: 1) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = \sin 1 + 1$

نو f په $x = 1$ کې متمادي دی.

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = g(1) = 2$$

نو g په $x = 1$ کې متمادي ده.

2- الف):

$$\begin{aligned} a) \sin x + x^2 + 3x - 1 &= (\sin x + 1) + (x^2 + 3x - 2) \\ &= f(x) + g(x) = (f + g)(x) \end{aligned}$$

د متمادي توابعو جمع په $x=1$ کې متمادي ده.

$$\begin{aligned} (\sin x + 1)(x^2 + 3x - 2) &= f(x) \cdot g(x) \\ &= (f \cdot g)(x) \end{aligned} \quad \text{ب):}$$

نو د متمادي توابعو ضرب په $x=1$ کې متمادي دی.

بیلگه ۲:

که $f(x) = x + 1$ ، $g(x) = 3x - 2$ وي، وڅیړئ، چې ایا $f(x) \cdot g(x)$ په $x = 2$ کې متمادي ده.

حل:

له پورته څخه لاس ته راځئ، چې $f(x) \cdot g(x)$ متمادي

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 4 = g(2)$$

$$f(x) \cdot g(x) = 3x^2 + x - 2 \quad \text{ده.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \cdot g(x) = 3(4) + 2 - 2 = 12$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = f(2) \cdot g(2) = 3 \cdot 4 = 12$$

دکینې لوري بند انټروال په $[a, b]$ کې گراف متمادي تابع په گوته کوي یا ښايي، هلته چې $f(a) \neq f(b)$ دی.

که ولرو $f(a) < k < f(b)$ گراف له $(b, f(b))$

ټکي څخه نشي انځورېدلی تر څو افقي کرښه

$y = k$ د ثابتې k سره غوڅه نه کړي.

له پورته څخه دا لاندې غوره جمله لیکلی شو:

که تابع f په بند اینتروال $[a, b]$ کې متمادي او k د a او b ترمنځ پروت وي، نو هلته لږ تر لږه یو عدد c د $f(a)$ او $f(b)$ ترمنځ شته، داسې چې $f(c) = k$ دی.

بیلگه ۳: که $f(x) = x^3 + 4x$, $x \in [1, 2]$ وي، نو وښایئ، چې یو $c \in (1, 2)$ شته، داسې چې $f(c) = 11$ وي.

حل: $f(x)$ یو پولینوم دی نو f په بند اینتروال $[1, 2]$ کې متمادي دی.

لاندې لرو:

$$f(1) = 1^3 + 4(1) = 5 ; \quad f(2) = 8 + 4(2) = 16$$

$$5 < 11 < 16 , \quad f(1) \neq f(2)$$

له دې امله یو عدد $c \in (1, 2)$ شته، داسې چې $f(c) = 11$ دی.

بیلگه ۴:

$$\text{که } f(x) = \begin{cases} 2x + 4 & ; -1 \leq x < 2 \\ |x - 10| & ; 2 \leq x \leq 20 \end{cases} \text{ وي، نو:}$$

(الف) و آزمایئ، چې تابع متمادي ده.

(ب) و آزمایئ، چې یو $c \in (-1, 20)$ شته داسې چې $f(c) = 6$ دی او د c ارزښت پیدا کړئ.

حل:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2x + 4 = 8$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 10 - 2 = 8$$

له دې امله لرو:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 8$$

$$f(x) = 10 - 2 = 8$$

گورو چې تابع په $[-1, 20]$ کې متمادي ده.

$$b) f(-1) = 2(-1) + 4 = 2$$

$$f(20) = 10 - 20 = -10 \Rightarrow f(-1) \neq f(20)$$

په دې اساس لرو: $2 < 6 < 10$

له دې امله لرو: $c \in (-1, 20) : f(c) = 6$

$$2x + 4 = 6 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1 \in (-1, 2)$$

$$|x - 10| = 6$$

$$x - 10 = 6 \Rightarrow x = 16 \in (-2, 20)$$

$$10 - x = 6 \Rightarrow x = 4 \in (-2, 20)$$

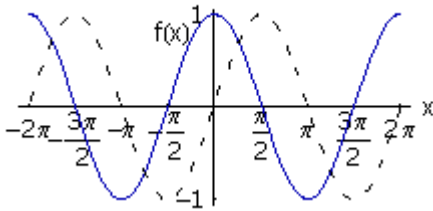
$$= 6 \Rightarrow |x - 10|$$

د c ارزښتونه 1, 4, 16 دي.

بیلگه ۵ :

که وي: $f(x) = 2 \sin x + 3; x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ، نو وښايي چې

نشاد دهيد که $c \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ شته دی د کوم لپاره چې $f(c)=4$ او c پيدا کړی.

 ټکي ټکي د ساين گراف دی. دا گراف که په ۳ کې ضرب کړی او ۳ ورزيات کړي د بيلگي گراف راکوي.	حل : تابع f د ساين تابع ددی ، نو له دې امله f متمدادي دی. $f(-\frac{\pi}{2}) = 2 \sin -\frac{\pi}{2} + 3 = 2 (-1) + 3 = 1$ $f(\frac{\pi}{2}) = 2 \sin \frac{\pi}{2} + 3 = 2 (1) + 3 = 5$ $f(-\frac{\pi}{2}) \neq f(\frac{\pi}{2})$ مو، لرو : تابع f متمدادي دی او لرو : $1 < 4 < 5$
--	---

دا په دې معنا چې، که $c \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ موجود وي، د هغه لپاره $f(c) = 4$ صدق کوي.

که د دې لپاره c پيدا کړو ، نو په لاس راځي:

$$f(c) = 2 \sin c + 3 = 4$$

$$2 \sin c = 1 \Rightarrow \sin c = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow c = \frac{\pi}{6}$$

له گراف څخه واضح ايدل کيږي، چې f په انټروال $[a,b]$ کې متمدادي دی، $f(a)$ او $f(b)$ متضادي علامې لري، نو c د منځنۍ ارزښت قضیې په بنسټ د $f(a)$ او $f(b)$ په

منځ کې و $K=0$ ته لږ تر لږه يو C د a او b په منځ کې داسې شتون لري، چې له هغې نتيجه $f(c) = 0$ لاس ته راځي.

دا په دې معنا، چې $x=c$ د برابرېون يا مساوات $f(x) = 0$ يو حل دی.

بيلگه ۶ :

که $f(x) = x^3 + 5x - 23$ وي، نو وښايئ، چې د f تابع د x محور په اينټروال $(2,3)$ کې غوڅوي.

حل: f پولينوم تابع ده، نو f په اينټروال $[2,3]$ کې متمدادي دی.

$$f(2) = 2^3 + 5(2) - 23 = -5$$

$$f(3) = 3^3 + 5(3) - 23 = 19$$

$f(2) \neq f(3)$ او د متضادو مخنځېنو(علامو) سره.

له دې امله د $c \in (2,3)$ لپاره لرو چې $f(c) = 0$ دی.

لنډ: غیر متمدادي توابع هغه دي، چې په يو کوم ځاي کې تعريف نه وي

تمرینونه:

وښايئ چې تابع په ورکړ شوي ټکي کې متمدادي ده.

$$1) f(x) = x^3 - 2(x+1)^5 \quad ; \quad x = 2$$

$$2) g(x) = \frac{x^2 + 3}{(x^2 - x + 5)(x^2 + 2x)} \quad ; \quad x = -1$$

$$3) h(x) = \frac{x\sqrt{x} + 1}{(x+2)^3} \quad ; \quad x = 4$$

4- تشریح کړئ، چې ولې تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{2}}{x}$ په $x=0$ کې غیرمتمادي ده؟

5- که $x \in [2, 3]$ ، $f(x) = \frac{18}{x} + 2$ وي، و ښایئ چې $c \in (2, 3)$ شته داسې چې $f(c) = 10$ وي او c پیدا کړئ.

6- وښایئ چې د لاندې مساوات لپاره یو حل شته:

$$x^3 - 4x + 1 = 0 \quad ; \quad x \in [1, 2]$$

7- وي دې: $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ ؛ $f(x) = \sin x + \cos x$ وښایئ، چې مساوات $\sin x + \cos x = 0$

په اینټروال $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ کې یو حل لري.

8- وي دې:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & ; \quad -1 \leq x \leq 3 \\ 13 - 2x & ; \quad 3 < x \leq 7 \end{cases}$$

(الف) ایا f په $x=0$ کې یو متمادي تابع دی؟

(ب) $c \in (-1, 7)$ داسې پیدا کړئ، چې $f(c) = 0$ وي.

د لومړي څپرکي ټولګه "Chapter Summary"

پېژند:

د $f(x)$ تابع یو لیمیټ L لري، که x ترلی یو حقیقي عدد c ته لار شي. په دې معنا چې $f(x)$ لپاره، چې ترلی L ته ځي دا دی، چې x ترلی c ته لار شي او داسې یې لیکو:

د $f(x), x \in D_f$ تابع د x_0 په ځای کې یو کین اړخیز لیمیت $a_l = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x)$ لري،

که د هر ترادف (x_n) لپاره، چې n غړي یې د x_0 کین لور ته پراته وي او د توابعو ارزښتونه $f(x_n)$ د a_l په لور هڅیږي.

په ورته توگه بنی اړخیزه لیمیت:

د $f(x), x \in D_f$ تابع د x_0 په ځای کې یو بنی اړخیز لیمیت $a_r = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x)$ لري،

که د هر ترادف (x_n) لپاره، چې n غړي یې د x_0 بنی لور ته پراته وي او د توابعو ارزښتونه $f(x_n)$ د a_r په لور وهڅیږي..

که تابع $f(x)$ همغه لیمیت L ولري که x له بنی او یا کینې لوري و c ته نږدې شي، نو لیمیت شته دی او د L سره برابر دی.

دا داسې لیکو: $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$

د پولې یا حد خوښه (خواص):

که f او g توابع وي، $L, c; M$ حقیقي اعداد وي داسې چې $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ او

$\lim_{x \rightarrow c} g(x) = M$ ، نو دا په لاندې توگه لیکلی شو:

$$1) \lim_{x \rightarrow c} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) + \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L + M$$

$$2) \lim_{x \rightarrow c} (f - g)(x) = \lim_{x \rightarrow c} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) - \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L - M$$

$$3) \lim_{x \rightarrow c} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L \cdot M$$

$$4) \lim_{x \rightarrow c} \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}; (M \neq 0)$$

$$5) \lim_{x \rightarrow c} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$$

د) $f(x) \geq 0$ او x د ټولو قیمتونو لپاره، چې c ته ور نږدې کیږي.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1: \text{نولرو: په رادیان ورکړ شوی وي، نو لرو:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1: \text{نولرو: په رادیان ورکړ شوی وي، نو لرو:}$$

پېژند: f د یوه تابع وي او د ټولو x لپاره په یوه واز انټروال کې چې $x = c$ وي تعریف وي، نو وایو: f په $x = c$ کې متمادي دی، د لاندې شرایطو سره:

$$2) \lim_{x \rightarrow c} f(x) \text{ تعریف لري } f(x) \text{ شته دی}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$$

که تابع د ټولو $x \in (a, b)$ لپاره متمادي وي، نو تابع په ټول انټروال (a, b) کې متمادي ده.

تعریف یا پېژند: وایو چې یو تابع په یوه بند انټروال $[a, b]$ کې متمادي ده، که تابع له $x = a$ لوري په $x = a$ کې متمادي وي او له کیني لوري په $x = b$ کې او د واز انټروال (a, b) په هر قیمت کې متمادي وي.

د متمادي توابعو خویونه(خواص): که f او g په $x = c$ کې متمادي وي، نو دا لاندې هره یوه تابع په $x = c$ کې متمادي ده.

لومړی) د توابعو جمع یعنې $f+g$ تابع

دویم) د توابع تفریق یعنی $f-g$ تابع

دریم) د توابعو ضرب یعنی $f.g$

څلورم) د توابعو ویش یعنی $\frac{f(x)}{g(x)}$; $g(x) \neq 0$

د منځني قیمت قضیه:

که تابع f په بند انتروال $[a, b]$ کې متمادي وي او k د $f(a)$ او $f(b)$ ترمنځ یو عدد وي، نو لږ تر لږه د a او b ترمنځ یو عدد c شته، د کوم لپاره چې $f(c)=k$ باور لري.

د څپرکي تمرینونه:

سم ځواب وټاکئ:

که $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$ وي، نو $\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 20)(x + 1)$ څه دی:

- a) 5 b) -5 c) 4 d) 3

ب) پیدا کړئ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 1}{x^2 + 3x - 2}$

- a) 1 b) 2 c) 1 d) $\frac{1}{2}$

۱- لیمیټ پیدا کړئ $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{|x + 5|}{x^2 + 3x - 2}$

d) -5 c) -1 b) 5 a) 1

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} \text{ دی.} -2$$

d) 2 c) 1 b) -1 a) -2

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - \sin x}{x} \text{ دی.} -3$$

d) 3 c) 1 b) -2 a) 2

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 + x - 2} \text{ دی.} -4$$

a) $-\frac{5}{3}$ b) $\frac{5}{3}$ c) 0 d) 1

$$\lim_{x \rightarrow 1.4} [2x + 0.3] \text{ دی.} -5$$

d) نښته c) 0 b) 3 a) 1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 2x} \text{ دی.} -6$$

a) 1 b) 0 c) $\frac{3}{2}$ d) $\frac{2}{3}$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2} \text{ دی.} -7$$

a) $2 + \sqrt{2}$ b) 2 c) $\sqrt{2}$ d) 4

$$-8 \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{1 + \cos 2x} \text{ دی.}$$

- a) 1 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{4}$ d) 4

9- لاندې توابع سره جمع کړئ.

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 5 \quad \& \quad \lim_{x \rightarrow 3} (x) = -2$$

10- که $f(x) = x^2 + 1$ وي، پیدا کړئ:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

11- تابع $f(x) = \begin{cases} 3x - b & ; \quad x \leq 3 \\ 10 - x & ; \quad x > 3 \end{cases}$ په $x = 3$ کې متماذي دی، b پیدا کړئ.

12- وښایئ، چې تابع $f(x) = 3x^2 - x - 5$ په اینتروال $(1, 2)$ کې حل لري.

۱۳ - د لاندې ۱ - ۹ توابعو لیمیتونه وشمېرئ.

$$1) \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + x) \quad 2) \lim_{x \rightarrow 4} (x^2 + x) \quad 3) \lim_{x \rightarrow -2} 2x + 3$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} |x| \quad 5) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x} \quad 6) \lim_{x \rightarrow 1} 7$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{x^2}{x}} \quad 8) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} \quad 9) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{x^9 - 9}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2+x; & x < 1 \\ x^2 & ; x \geq 1 \end{cases} \quad \text{۱۴ -- که وي:}$$

الف) د تابع گراف وکارئ.

ب) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ پیدا کړئ.

15: هغه توابع چې په یوه عدد د بېلگې په توګه صفر کې تعریف نه لري، څه بلل کېږي

$$16 \text{ پیدا کړئ: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{5}{2x-3} + 5}{x^2 - 1}$$

$$17 \text{ -- } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x^2 + 1}{x^4 - 2x^2 + 2} \text{ وشمېرئ.}$$

18 --

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 1 & ; x < 2 \\ 3 & ; x = 2 \\ x + 3 & ; x > 2 \end{cases} \quad \text{که وي، نود } f(x) \text{ تابع متمادیت په } x = 2 \text{ کې وڅېرئ.}$$

۱۹ - یوه په خوښه تابع ولیکئ او د تابع گراف وکارئ او وګورئ، چې تابع چېرته تعریف ده او متمادیت یې وښایاست.

۲۰ - په لاندې له ۲ - ۷ پوښتنو کې څېرو، چې ایا تابع په ورکړ شوي ټکي کې متمادی یا غیرمتمادی دي.

$$2) f(x) = x^2 + 5(x-2)^7 ; x = 3$$

$$3) f(x) = \frac{x+3}{x^2 + 2x - 5} ; x = -1$$

$$4) f(x) = \frac{\sqrt{8-x^2}}{2x^2-5} ; x = -2$$

$$5) f(x) = \frac{1}{(x-3^3)} ; x = 3$$

$$6) f(x) = |x-3| ; x = 3$$

$$7) g(x) = \frac{|x|}{x} ; x = 0$$

۲۱- تشریح کړئ، چې ولې تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{2}}{x}$ په $x=0$ کې غیر متمادی ده؟

۲۲- که $x \in [2, 3]$ ، $f(x) = \frac{18}{x} + 2$ وي، وښایئ چې $c \in (2, 3)$ شته داسې چې

$$f(c) = 10 \text{ وي او } c \text{ پیدا کړئ.}$$

۲۳- وښایئ چې د لاندې مساوات لپاره یو حل شته:

$$x^3 - 4x + 1 = 0 ; \quad x \in [1, 2]$$

۲۴- وي دې: $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ ؛ $f(x) = \sin x + \cos x$ وښایئ، چې

مساوات $\sin x + \cos x = 0$ په اینټروال $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ کې یو حل لري.

۲۵ الف: وڅیړئ، چې ایا لاندې تابع د x_0 په ځای کې متمادی ده.

a) $f(x) = \begin{cases} -2x \\ \sqrt{x} \end{cases}$ c) $f(x) = \begin{cases} \sin x \\ e^x \end{cases}$	$x \leq 0$ د $x_0 = 0$ لپاره $x > 0$ د $x_0 = 0$ لپاره $x \leq 0$ د $x_0 = 0$ لپاره $x > 0$ د $x_0 = 0$ لپاره	b) $f(x) = \begin{cases} 2 \\ x^2 + 1 \end{cases}$ d) $f(x) = \begin{cases} -x + 1 \\ \ln x \end{cases}$	$x \leq 1$ د $x_0 = 1$ لپاره $x > 1$ د $x_0 = 1$ لپاره $x \leq 1$ د $x_0 = 1$ لپاره $x > 1$ د $x_0 = 1$ لپاره
---	---	--	---

۲۶- که $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ، $f(x) = 2\sin x + 3$ وي، نو وښایئ چې $c \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ شته،

د هغه لپاره چې رښتیا وي $f(c) = 4$ او c پیدا کړئ.

۲۷: لاندې لیمیتونه وشمېرئ.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \frac{\pi}{6})}{x + \frac{\pi}{6}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \tan^2 x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sin 3x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin 5x \cot 3x$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\tan(2x - 1)}{4x^2 - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \sqrt{\cos 2x - \cos x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (\cos^2 x + \sin^2 x)$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta}{\sin \frac{1}{2} \theta}$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin 2\theta}{\sin 3\theta}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \frac{\pi}{2} x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x - 1)}{\sqrt{x} - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\sqrt{x} - 1)}{x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - 2x}{x}$$

$$20) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan 2x}{\sin^2 x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1-x} \cos \frac{\pi x}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^3 + 2x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

$$25) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos 7x}{x^2}$$

$$26) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x + \frac{\pi}{4})}{x + \frac{\pi}{4}}$$

$$27) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{4})}{x(x - \frac{\pi}{4})}$$

$$28) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - x \cos 3x}{x}$$

$$29) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\sin 3x - \sin 5x}$$

$$30) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\sin x|}{x}$$

$$31) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\sin^2 x - 1}}{x}$$

$$32) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2x - \pi}$$

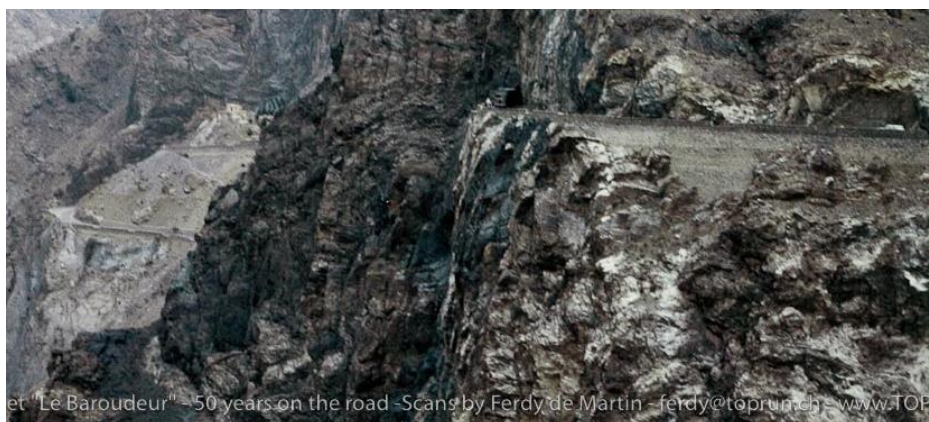
$$33) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(3x - 3)}{1 - x^3}$$

$$34) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 5x}{\sin 2x}$$

دویمه برخه: مشتق یا رابیلیدنه

په تیره برخه کې مو د پولې څیرنه وکړه. وېه گورو، چې دا د پولې درس د مشتق یا رابیلیدنې لپاره اړین دی.

د تابع منځ ارزښت تغیر Average rate of change
دلته دې د سالنګ یا ماهیپر د سرک څیره راښيي. (دلته څېره راځي)



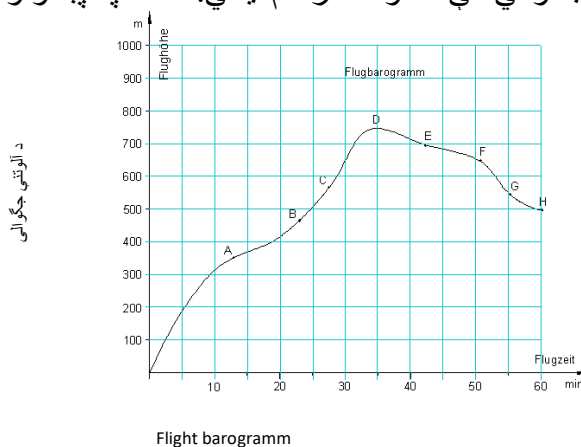
د کتاب په دې برخه کې مو د ریاضیاتو یوه غوره برخه، چې د ریاضیاتو زړی ورته ویلی شو، تر څیرنې لاندې نیسو، نو له دې امله لازم ګڼم، چې په دې هکله داسې مهم څه

د یوه یادښت په څیر راورم: که له یوه ځای څخه بل ځای ته د تابع د تغیر منح ارزښت $Average\ of\ change$ څخه غږیږو، نو موخه ترې په یوه ټکي یا دوه ټکو کې د تابع جگوالی، میل او یا تانجنت دی او دا دریو اړه کلمې د ریاضیاتو له مخې په همغه یوه معنا دي او وېه گورو، چې همداسې کمښتوېش یا د تفاضل وېش (Difference quotient) هم.

دې کلمو ته په انگرېزي کې **slop** وايي، چې زموږ ادبیتو د میل په نامه بلل کيږي.

په یوه ټکي کې د تابع د گراف میل (جگینه)

الوتکوکي د الوتنې دلیک (الوتنلیک) الی (Flight barogramm) جوړې دي، چې تل الوتنې جگوالی د الوتنې د وخت په واک کې یا د وخت تابعیت کې رسمي او په هر جگوالي کې د هوا فشار هم لیکي. که دا په پښتو وروو، نو د لیک بکس به ورته ووايو.



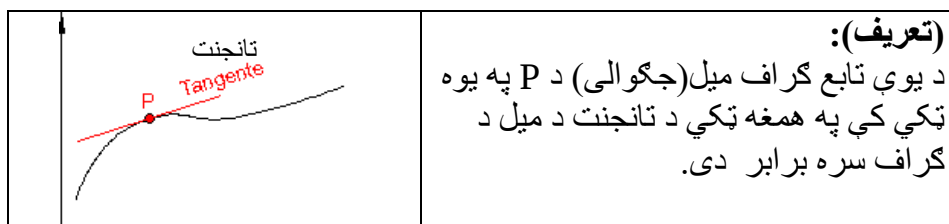
په پورته گراف کې د یوې الوتنې د الوتنې د بیلا بیلو وختونو جگوالی ښوول شوی. فعالیتونه:

- __ په پورته څیره کې د گراف جگوالی د A په ټکي کې د B ټکي سره پرتله کړئ. په ورته توګه د گراف میل د E په ټکي کې د G ټکي سره پرتله کړئ.
- __ روښانه کړئ، چې ولې په یوه ټکي کې باید له جگوالي، میل یا تانجنت څخه غږیږو؟
- __ وهڅیږئ، چې په یوه ټکي کې د گراف جگوالي لپاره یو متود تعریف کړئ او له انځور څخه د A او B په ټکو کې جگوالی وټاکئ.
- __ ایا فکر کوئ، چې په B ټکي کې نسبت و A ټکي ته جگوالی زیات دی؟
- __ ایا فکر کوئ، چې د E او G په ټکو کې جگوالی منفي دی؟ دلته د E په ټکي کې د ارزښت له مخې جگوالی زیات دی نسبت د G ټکي ته؟

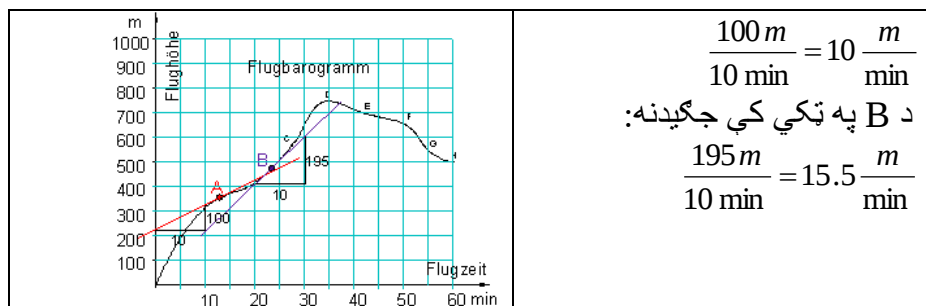
ایا د یوې کرښې جگوالی او په همدې ترتیب د یوې منحنی هر چیرته توپیر لري او که نه؟

لاس ته راوړنه:

گورو، چې په یوه منحنی کې د گراف جگوالی هر چیرته برابر نه دی، نو له دې امله باید ټکي په گوته کړو، چې هلته میل څیرل کیږي. په لاندې بیلگه کې به روښانه کړو، چې تنها د یوې (سیده) کرښې میل هر چیرته برابر دی، نو له دې امله دلته د یوې کرښې د میل یا جگوالي څخه غږیږو. بریښي چې لاندې پیژند یا تعریف عاقلانه دی.



لیدل کیږي چې دلته یو تانجنت د کرښې تعریف لري، چې د لمستکي (مماس) په چاپیریال کې د امکاناتو سره سم لمستکي (مماس) ته ښه وړ نږدې کیږي. ددې پیژند یا تعریف له مخې په یوه ټکي کې د یوه گراف میل د یوې کرښې میل دی. د گراف د جگپښې ټاکلو لپاره د A او B په ټکو هر یوه کې یوه کرښه (تانجنت) انځوروو، چې گراف ته خورا زیاته نږدې کیږي. د میل یا جگپښې مثلث په مرسته جگپښه په شل یا ساده ډول شمیرل کیدی شي: A په ټکي کې جگپښه:



زموږ د بیلگې لپاره میل یا جگپښه په یوه ټاکلي ټکي کې د لحظوي (سملاسي) میل سرعت په معنا دی.

د A په ټکي کې: د الوتنې وخت نږدې 12.5 min ، د میل یا جگیدني چټکتیا (سرعت) نږدې $10 \frac{\text{m}}{\text{min}}$ ده.

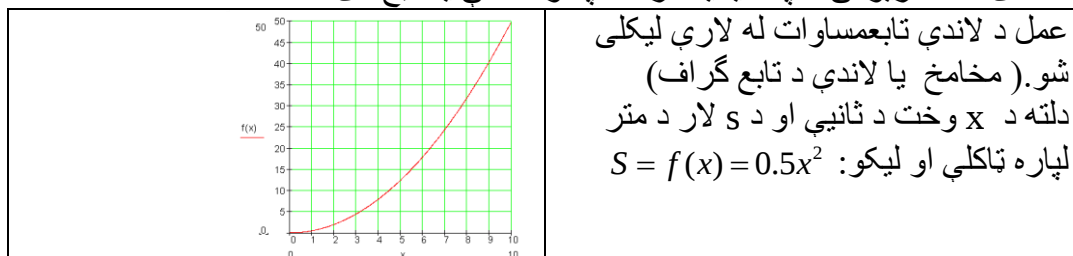
د B په ټکي کې: د الوتنې وخت نږدې 23.0 min ، د جگیدني سرعت نږدې $19.5 \frac{\text{m}}{\text{min}}$

دی.

تانجنت تر اوسه فقط د لیدني له مخې تعریف شوی، چې د لمستکي چاپیریال ته خورا ډېر نږدې کیږي. له دې امله ممکن وه، چې د گراف میل د A او B په ټکو کې هم یواځې په نږدې ډول وټاکل شي، دا په عمل کې د قناعت وړ نه دی.

په یوه ټکي کې د تابع د گراف میل (جگیدنه):

معلومه ده، چې یو ریلگادی د تمخای څخه له خوزېدو (حرکت) وروسته خپله چټکتیا (سرعت) په کراره کراره زیاتوي. وهلی لار (د تمخای څخه لږوالی) تل زیاتېږي. د تمخای څخه لږوالی د چټکتیا یا سرعت په واک کې یا تابع دی.



فعالیت:

- 1- اوس دې منځنۍ تغیر ارزښت **Averagerat of change** (منځنۍ میل ارزښت) د 3- می او 7- می ثانیې ترمنځ وشمېرل شي.
- 2- ددې لپاره دې اړونده قاطع یا سیکانټ انځور شي او د هغې جگوالی دې وشمیرل شي.
- 3- اوس دې د تغیر ارزښت (منځنۍ جگوالی) د 3- می او 7- می ثانیو ترمنځ وشمیرل شي.
- 4- وښایاست، چې په دریمه ثانیه کې د ارزښت تغیر یا جگوالی څومره دی؟

کمښت ویش یا د تفاضل ویش Difference quotient

د یوې کرښې میل یا جگیدنه بې له مشتق نیونې ټاکل کېدی شي. کرښه $y = f(x) = mx + a$ لرو.

د دې کرښې د جگړدنې فرمول په لاندې ډول دی:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

قاطع (غوڅی seconce):

قاطع هغه کرښه ده، چې منحنې د P_0 او P_1 په دوه ټکو کې غوڅوي.

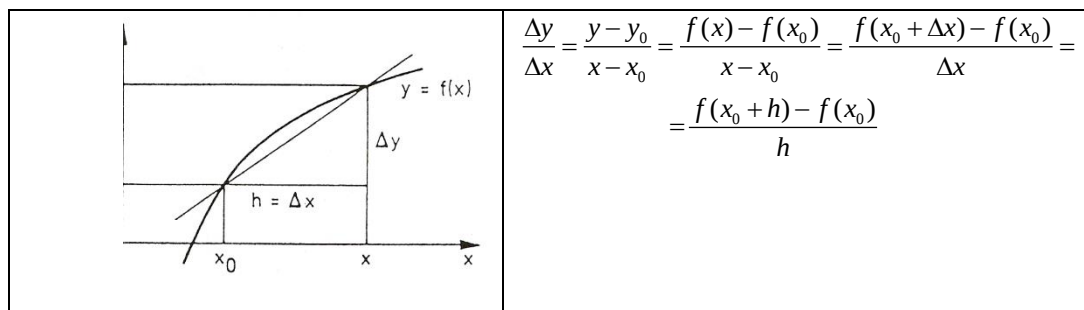
د قاطع ميل يا جگړدنه (جگوالی secant):

دا چې قاطع هم يوه کرښه ده نو ميل (جگوالی) يې هم د يوې کرښې ميل په ډول شميرل کيږي.

په لاندې کې m_s د جگوالي لپاره ليکل کيږي.

$$m_s = m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

(تعريف): د $y = f(x)$ تابع دې د x_0 په يوه چاپيريال او په x_0 کې پخپله تعريف شوي تابع وي، x د x_0 څخه بيل خو د چاپيريال په يوه خوښه يا په زړه پورې ځای دی (مخامخ څيره دې وکتل شي). نو د تفاضل يا کمښتوېش Difference quotient د قاطع ميل شته دی، چې په لاندې ډول يې ليکو:



د f تابع لپاره فرمول: $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

دا فرمول د f په گراف باندې د دوه ټکو ترمنځ د قاطع د ميل شميرنه ده. د اټکي د x - محور باندې د x او $x+h$ ټکي دي.

د کمښت وېش يا د تفاضلونو وېش د مشتق د تعريف لپاره په کار راځي.

بیلگه:

د $y = f(x) = 3x^2 - 5x + 4$ تابع دې ورکړ شوی وي. د دې تابع کمښت ویش (د تفاضل ویش) پیدا کړئ.

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{3(x+h)^2 - 5(x+h) + 4 - (3x^2 - 5x + 4)}{h} \\ &= \frac{3x^2 + 6xh + 3h^2 - 5x - 5h + 4 - 3x^2 + 5x - 4}{h} \\ &= \frac{6xh + 3h^2 - 5h}{h} \\ &= 6x + 3h - 5\end{aligned}$$

تمرینونه:

1 - کمښت ویش (د تفاضل ویش) ارزښت د P او Q په ټکو کې وټاکئ.
a) P(3,2) , Q(5,4) b) P(2,4) , Q(3,1)

2- د $x = x_0$ په ځای کې د f تابع د تانجنت جگوالی وټاکئ.

$$a) f(x) = x^2, \quad x_0 = 2 \qquad b) f(x) = 0.5x^2, \quad x_0 = 3$$

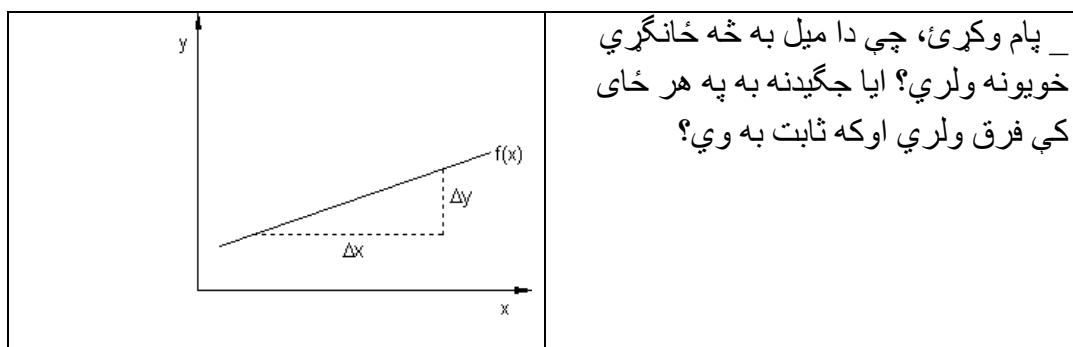
د کمښت ویش (د تفاضل ویش) او مشتق لاندې څه پوهیږو او د دوي ترمنځ توپیر څه دی؟

4 - د یوې تابع د سکانت (قاطع) لاندې څه پوهیږو او د تانجنت جگوالی لاندې څه پوهیږو؟ او د دوي ترمنځ کومې اړیکې پرتې دي؟

ر ا ب ی ل د ن ه یا مشتق شمیر نه Differentialcalculation

فعالیت:

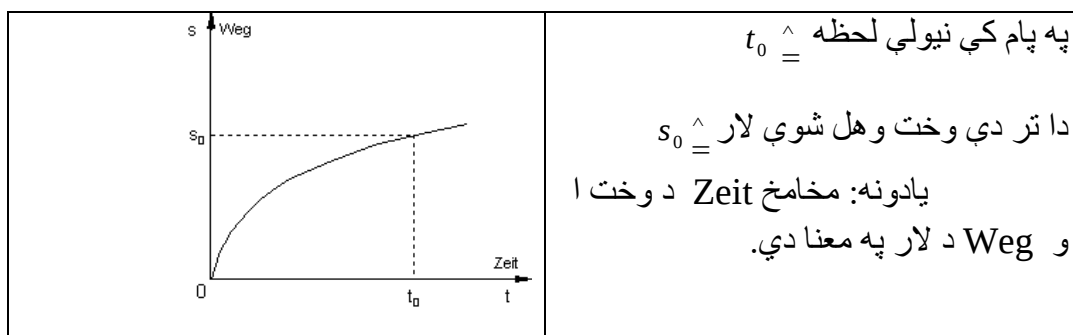
پام وکړئ، لکه په یوه ثابت میل $a_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{constant}$ کې، د بیلگې په توګه په خطي یا لاینیز تابع کې د $f(x) = a_1 x + a_0$ سره میل شته او که نه؟

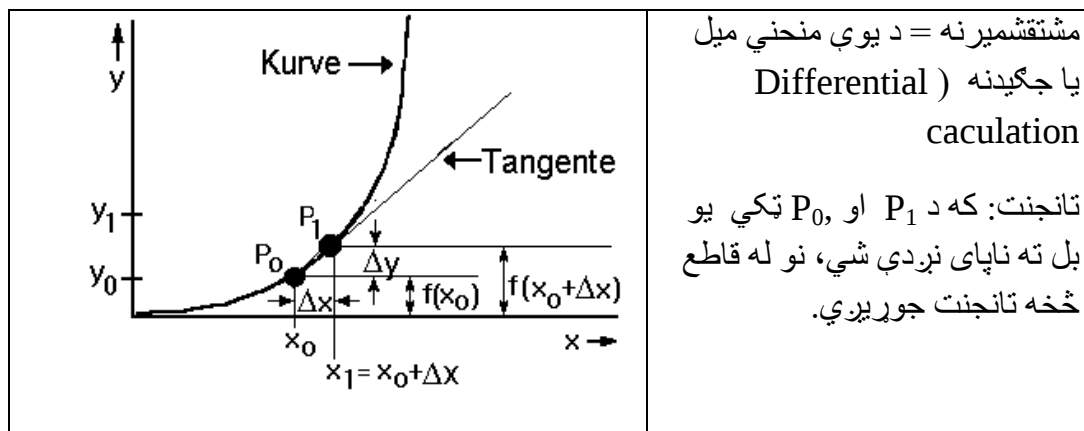


ایا په مختلفو وختونو کې اړین بولی، چې د تغیر حالت (د میل حالت) کې د تابع د تلنې حالت و څیړئ؟

__ او یا له دې امله لحظوی چټکتیا (سرعت) $v(t_0)$ په لار- وخت- دیاګرام کې وڅیړئ؟

__ ایا د مشتق شمیرنې په مرسته دا پرابلم حل کیدی شي؟





د تانجنت جگیدنه: د تانجنت جگیدنه د قاطع د جگیدني، لیمټ، Limit، یا حد دی.

$$m_t = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

فعالیت:

1- له پورته څیرې او اړونده شننې څخه د مشتق لپاره څه فکر کوی؟

2- د derivative (مشتق) کلمې لاندې څه پوهیږو؟

او دا په ساده پښتو څه معنی ورکوي؟

3- له کمښت وېش (د تفاضلونو ویش) څخه څنگه و مشتق ته راځو؟ په دې هکله د پورته څېرې څخه په ګټه اخسلوڅپل نظر ووايست.

4- له 2-م فعالیت څخه ووايست، چې ولې دا شمېرنه رابېلېدنه یا مشتق بلل کېږي؟
پام: لکه د مخه مو چې ګوته ورته ونيوله، د derivative کلمه نوې ده، نو له دې امله دا څو ټکي په پام کې نیسو: derivative د رابیلیدني په معنا دی، چې موږ یې تراوسه مشتق بولو.

: که د تابع دا کمښتویش (د تفاضل وېش) $x > x_0$ او (همداسې) $x > 0$ او یا په

(همدې ډول) $h > 0 \Leftrightarrow$ لپاره یو حد ولري، نو د $y = f(x)$ تابع د $x = x_0$ په ځای کې د

مشتق قابلیت لري او ددې لپاره لیکو:

رابیلدنه یا مشتقشمیرنه

۶۵

$$\begin{aligned} \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} &= f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}; \dots \\ \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} &= f'(x) \quad \text{دا لیمیت داسې ښایو:} \end{aligned}$$

د x_0 ځای کې د $y = f(x)$ له مشتق (Derivativ) یا رابیلدني) څخه یوه بله سیده یا بل ډول کره لار رابیله وو.

د مشتق ساده شمیرني لپاره یوه بیلگه:

د $f(x) = x^2 - 3x + 2$ مشتق غواړو پیدا کړو.

ددې کمښتوېش په لاندې ډول دی:

$$\begin{aligned} \frac{y - y_0}{x - x_0} &= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\ &= \frac{((x_0 + \Delta x)^2 - 3(x_0 + \Delta x) + 2) - (x_0^2 - 3x_0 + 2)}{\Delta x} \\ &= \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - 3x_0 - 3\Delta x + 2 - x_0^2 + 3x_0 - 2}{\Delta x} \\ &= \frac{2x_0\Delta x + \Delta x^2 - 3\Delta x}{\Delta x} \\ &= 2x_0 + \Delta x - 3 \end{aligned}$$

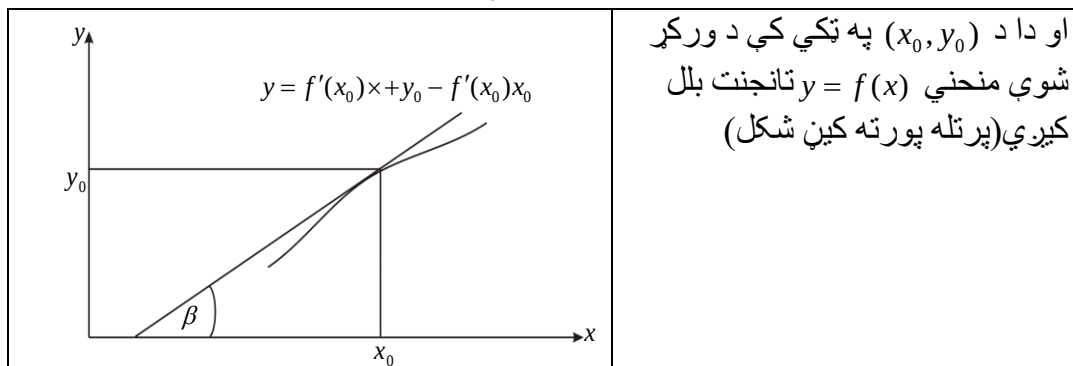
او د لیمیت $\Delta x \rightarrow 0$ سره یې مشتق لاس ته راځي:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0 + \Delta x - 3) = 2x_0 - 3.$$

د دې لپاره دا لاندې تعریف (پیژند) ورکوو:

که یو د $y = f(x)$ تابع د x_0 په ځای کې مشتق وړ وي، نو هغه لاندنی کرښه چې د (x_0, y_0) کې څخه تېرېږي او میل یا جگوالی یې $f'(x) = \tan \beta$ دی او په لاندې ډول لیکو:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = f'(x) \Leftrightarrow y = f'(x_0)x + y_0 - f'(x_0)x_0$$



موږ اوس د څو بنسټيزو توابعو مشتق شمیرنه تر څیرني لاندې نيسو.

بیلگه ۱:

د یوې ثابتې مشتق:

موږ دالاندې تابع لرو، چي ارزښت یې یو ثابت دی.

ثابت $y = f(x) = c = \text{Cons}$ ، نو د هر x_0 ځای لپاره لرو:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{c - c}{h} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} = f'(x_0) = 0$$

بیلگه ۲:

یوه $f(x) = x$ خطي (کرنښیزه) تابع لرو، د x_0 په ځای کې غواړو د دې تابع مشتق پیدا

کړو او د مشتق تابع هم:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} & \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\Delta x}{\Delta x} \\ \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{(x_0 + \Delta x) - x_0}{\Delta x} & \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{x_0 + \Delta x - x_0}{\Delta x} & \Leftrightarrow f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 = 1 \end{aligned}$$

نو $f'(x_0)=1$ د x_0 په ځای کې د تابع مشتق دی او $f'(x_0)=1$ د مشتق تابع ده یعنې یوه ثابتنه ده.

بیلگه ۳ :

د $y = f(x) = c \cdot u(x)$ ډوله تابع مشتق د $c =$ ثابتې سره.

د ثابتې قانون:

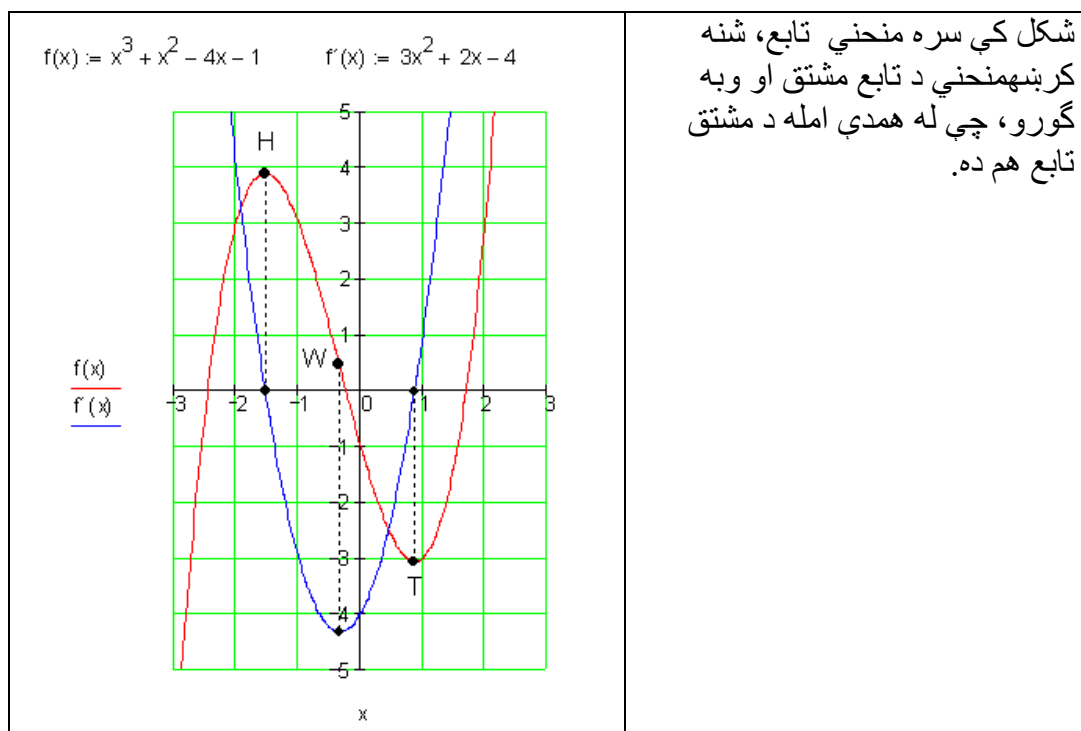
د یوې تابع مشتق، چې له یوې ساده تابع او یوې ثابتې سره د ضرب له لارې منځ ته راغلی وي، برابر دی د ساده تابع د مشتق سره، چې د (ثابتې c) سره ضرب شوی وي. یعنې له $y = f(x) = c \cdot u(x)$ څخه لرو: $f'(x) = c \cdot u'(x) \Rightarrow$

ثبوت:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \underbrace{c}_{c} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)}{\Delta x}}_{u'(x_0)} \quad \left| \begin{array}{l} \Rightarrow f(x_0) = c \cdot u(x_0) \\ f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c \cdot u(x_0 + \Delta x) - c \cdot u(x_0)}{\Delta x} \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow f'(x_0) &= \underline{\underline{c \cdot u'(x_0)}} \quad \Leftrightarrow f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} c \cdot \frac{u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)}{\Delta x} \end{aligned}$$

تمرینونه:

- 1- د تفاضل وېش او د مشتق لاندې څه پوهېږو؟
- 2- د دوی ترمنځ څه اړیکې (پرتې) دي؟
- 3- د قاطع (سکانټ) او تانجنټ جگېدنې لاندې څه پوهېږو؟

د x_0 په ځای کې د تابع مشتق او د مشتق تابع

فعالیت:

- 1- د x_0 په ځای کې د تابع مشتق یعنې څه؟
 - 2- د یوې تابع له مشتق نیونې وروسته دې مشتق ته څه ووايو؟
 - 3- که د تابع مشتق د مشتق تابع ونوموو، روښانه کړئ، چې ولې تابع ده او ددې تابع درجه، د لومړۍ تابع سره پرتله کړئ؟
 - ایا له دې توپیر څخه د مشتق کلمه روښانه کولی شئ؟
- ددې د روښانه ونې لپاره د لاندې بیلگې څخه کار اخلو

بیلگه ۱: تابع $y = f(x) = x^2$ دې ورکړ شوې وي. غواړو د $x = x_0$ په ځای کې او په ځانگړې توگه د $x_0 = 2$ په ځای کې د هر څه لومړۍ کمښتویش (د تفاضل وېش) پیداوو.

د x_0 په ځای کې د تابع مشتق او د مشتق تابع ۶۹

$$\begin{aligned}
 x &= x_0 : \\
 \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\
 \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} \\
 \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}
 \end{aligned}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$$

اوس د لیمیت د لاس ته راوړلو له لارې د مشتق ضریب ته راځو:

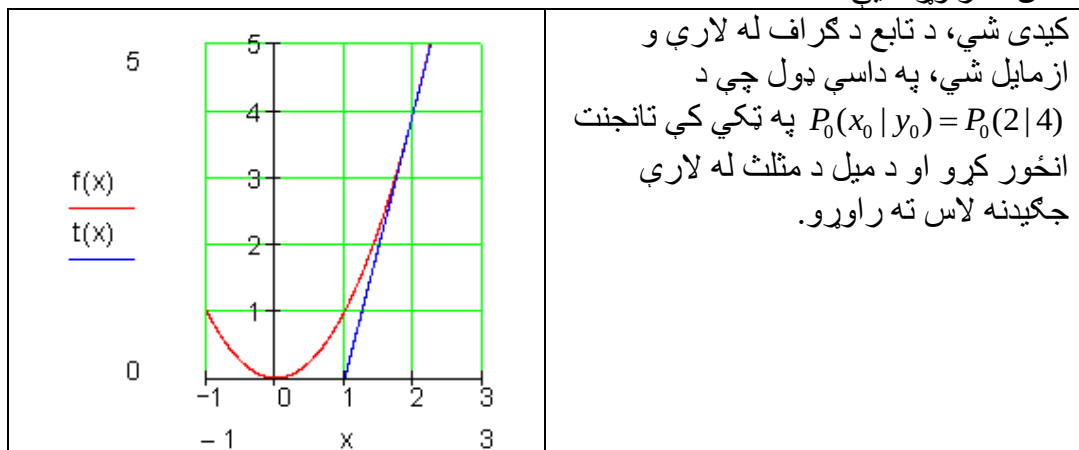
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0$$

نو $f'(x_0) = 2x_0$ لرو او د $x_0 = 2$ لپاره $f'(2) = 2 \cdot 2 = 4$ باور لري.

د $x_0 = 2$ په ځای کې د تابع $y = f(x) = x^2$ لومړی مشتق په 4 برابر دی، دا په دې معنی

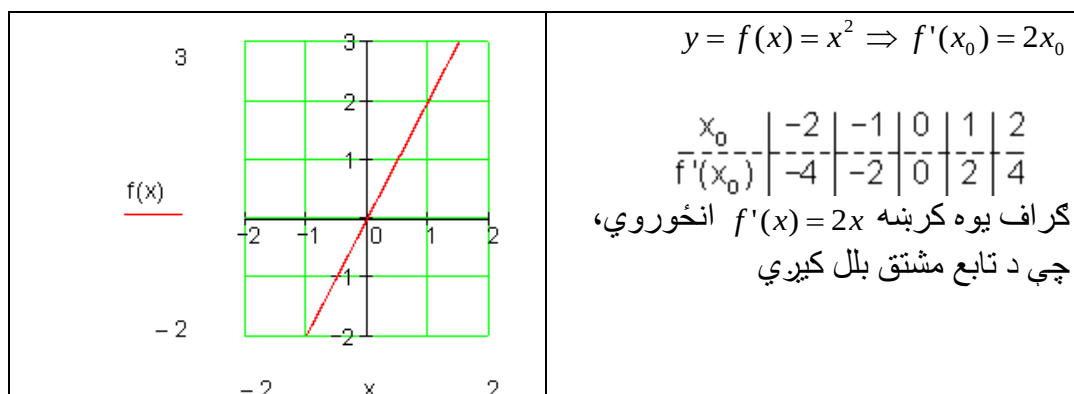
چې تابع د $x_0 = 2$ په ځای کې میل یاجگوالی 4 لري.

لاس ته راوړنه یې:



پورته بیلگه کې: $y = f(x) = x^2$ په هر خوښه ځای x_0 کې تابع پیداوو:

۷۰

د x_0 په ځای کې د تابع مشتق او د مشتق تابع

پام: که د یوې تابع مشتق ونیول شي، نو بیرته هم یوه تابع ترې لاس ته راځي، چې دا د مشتق تابع بللکيږي.

د مشتق تابع: د تابع ارزښتونه په هر ټکي کې بنسټ تابع انځوروي، له دې امله دا د میل تابع هم بلل کيږي.

بیلګه ۲:

د $f(x) = x^3$ تابع دې ورکړ شوی وي.

فعالیت: گران لوستونکي دې د $f(x) = x^3$ تابع او د تابع د مشتق گراف وروسته له حله رسم کړي.

موږ غواړو په x_0 ټکي کې مشتق پیدا کړو او همداسې د مشتق تابع.

$$\begin{aligned}
 \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\
 \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{(x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3}{\Delta x} \\
 \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{x_0^3 + 3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x_0^3}{\Delta x} \\
 f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2) = 3x_0^2
 \end{aligned}
 \quad \left| \begin{aligned}
 \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} \\
 \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\Delta x(3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2)}{\Delta x} \\
 \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= 3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2
 \end{aligned} \right.$$

نو $f'(x_0) = 3x_0^2$ د تابع $f(x) = x^3$ مشتق دی په ځای یا ټکي x_0 کې.

د مشتق تابع داسې ده: $f'(x_0) = 3x_0^2$

د x_0 په ځای کې د تابع مشتق او د مشتق تابع ۷۱

بیلگه ۳: یوه د $f(x) = \frac{1}{x}$ تابع ورکړ شوې. غوښتنې یا ثبوت:

الف: د تابع گراف په یاد راوړئ.

ب: په x_0 ټکي کې د تابع مشتق پیدا کړئ.

پ: په x_0 ټکي کې د مشتق تابع هم پیدا کړئ.

$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_0 - x_0 - \Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)}$ $\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)}$ $\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{\Delta x \cdot x_0(x_0 + \Delta x)}$ $\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{x_0(x_0 + \Delta x)}$ $\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{x_0^2 + x_0 \cdot \Delta x}$	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ $\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{x_0 + \Delta x} - \frac{1}{x_0}}{\Delta x}$ $\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{x_0 - (x_0 + \Delta x)}{x_0(x_0 + \Delta x)}}{\Delta x}$ $\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{x_0 - (x_0 + \Delta x)}{x_0(x_0 + \Delta x)}}{\Delta x}$
--	---

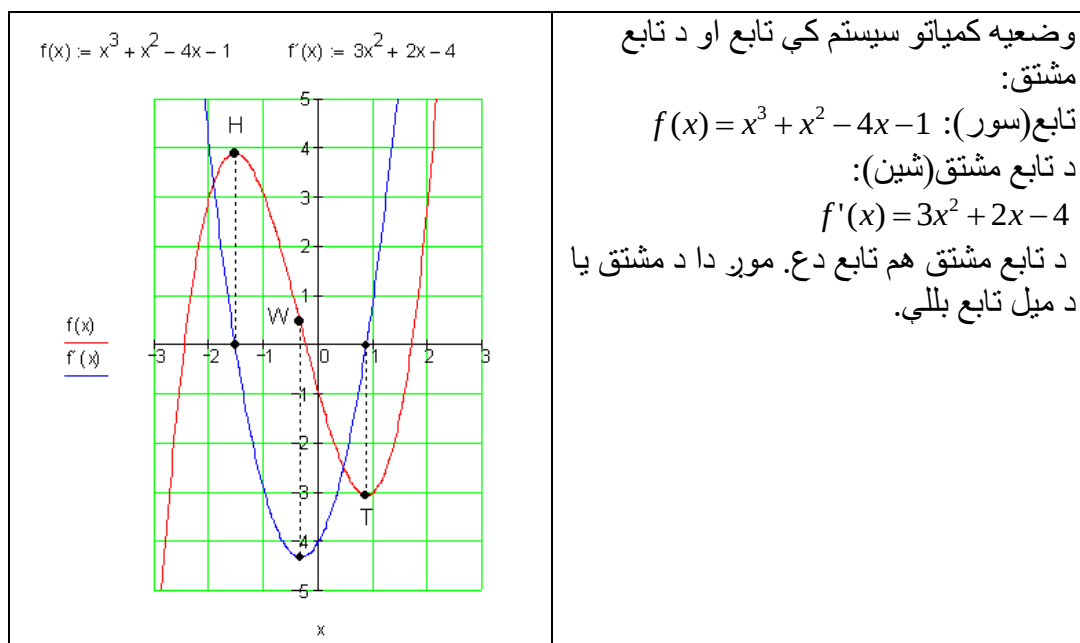
د پورته اخري مساوات لیمیت د $\Delta x \rightarrow 0$ لپاره نیسو:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x_0^2 + x_0 \cdot \Delta x} \right) = -\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{x_0^2 + x_0 \cdot \Delta x}$$

نو لرو: $f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$ دا د x_0 په ځای کې د f مشتق دی.

د مشتق تابع هم دی: $\underline{\underline{f'(x) = -\frac{1}{x^2}}}$

د x_0 په ځای کې د تابع مشتق او د مشتق تابع



تمرینونه:

په لاندې مساواتو کې د f تابع مشتق او د مشتق تابع وښایئ

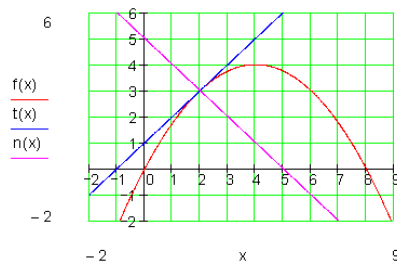
a) $f(x) = 4x^4 - 3x^3 + x^2 - x - 1$

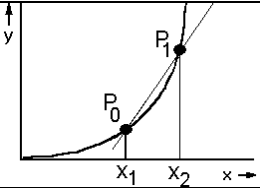
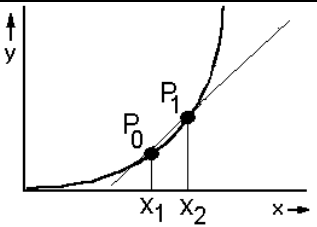
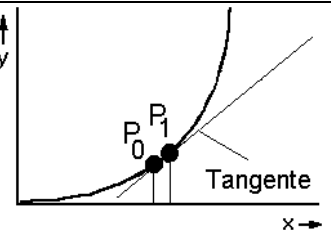
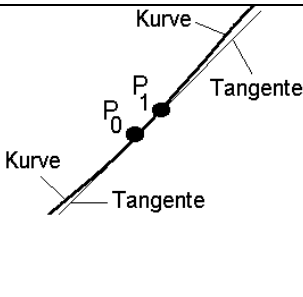
b) $f(x) = x - \sqrt{x}$

c) $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{x^3}$

d) $f(x) = 3x^2 + 0.4x - 5$

د تانجنت او عمود تعریفونه او څیونه



	لاندي يا مخاڅڅ څيره يو منځني او يوه قاطع(غوڅي) په ټكو P_0 او P_1 كې ښايي.
	اوس غواړو، چې ټكي P_0 د ټكي P_1 په لور و خوځيږي. پام: ددې سره قاطع خپل ميل تغيروي
	بالاخره غواړو، چې P_1 ټكي و P_0 ټكي ته ناپاي ډېر نږدې شي. په دې حالت كې قاطع داسې په نامه تانجنت ته ورنږدې كيږي.
	كه پوره وپيژندلې شو، چې د ټكو P_1 او P_0 په شاوخوا غزوو يا لويوو: كه د P_1 ټكي و P_0 ټكي ته ناپاي نږدې شي، نو كتل كيږي، چې تانجنت په ټكي P_0 كې همداسې حالت غوره كوي، لكه منځني په P_0 ټكي كې.

د دې خويونو غوره غوره والي يا پايله:

ومو ليدل، چې د تانجنت ميل په P_0 ټكي كې په همدې ټكي كې د منځني ميل هم دی. له دې دا پايله لرو، چې كه څوك غواړي د منځني ميل په P_0 ټكي كې پيدا كړو، بسيا كوي، چې د تانجنت جگوالی يا ميل په P_0 ټكي كې پيدا كړي.

فعاليتونه:

1- پورته شكلونه بيا سره پرتله كړئ. د ميل په هكله يې فكر وكړئ، چې كوم ميل زيات دی؟

2- تانجنت تعريف كړئ او په شكل كې يې وښايست.

3- قاطع (سيكانت) تعريف كړئ او په څېره كې يې وښايست.

په لاندې کې د تانجنت او عمود عمومي فرمول راباسو:
 پیل: تانجنت دې د $f(x)$ گراف د $P(x_0, f(x_0))$ په ټکي کې لمس کړي. عمود (نورمال)
 دې د $f(x)$ گراف د په $P(x_0, f(x_0))$ ټکي کې عمود یا ولاړ غوڅ کړي.
 د تانجنت مساوات: $t(x) = m_t \cdot x + b_t$

$$d \text{ } m_t = f'(x_0) \text{ سره لیکو: } t(x) = f'(x_0) \cdot x + b_t \quad (1)$$

دا چې $P(x_0, f(x_0))$ تانجنت یو ټکی دی، نو لاس ته راځي:

$$t(x_0) = f(x_0) \Leftrightarrow f'(x_0) \cdot x + b_t = f(x_0)$$

$$\Leftrightarrow b_t = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$$

په (1) کې ږدو، نو لږ:

$$\begin{aligned} t(x) &= f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0 = f'(x_0) \cdot x_0 + f(x_0) \\ &= f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0) \end{aligned}$$

عمود (نورمال): د منحنی سره په همغه ټکي کې چې تانجنت په پروت دی، عمود ځغلي.
 د عمود میل:

$$\begin{aligned} m_n &= -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{f'(x_0)} \\ \Rightarrow n(x) &= \underline{\underline{-\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) + f(x_0)}} \end{aligned}$$

بیلگه:

$$d \text{ } f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \text{ تابع لرو.}$$

د تابع تانجنت او عمود (نورمال) پیدا کړئ:

حل: په لاندې توگه د تابع مشتق نیسو او گراف یې (خیره لاندې کښل شوي) کارو:

$$f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x \quad \text{نو لرو:}$$

د تانجنت میل په ټکي x_0 کې د میل ارزښت 3 لري.

$$f'(x_0) = 3 \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{2}x_0 = 3 \Leftrightarrow x_0 = -2$$

$$f(x) = f(-2) = 2 \cdot (-2) - \frac{1}{4}(-2)^2 = -5$$

د $P(-2, -5)$ په ټکي کې تانجنت په $f(x)$ باندې ارزښت 3 لري.

$$f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x, P(2, f(2))$$

$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

د $x_0 = 2$ په ځای کې لرو:

$$t(x) = f'(2)(x - 2) + f(2)$$

$$f(2) = 2 \cdot 2 - \frac{1}{4} \cdot (2)^2 = 4 - 1 = 3 \quad f'(2) - \frac{1}{2} \cdot 2 = 2 - 1 = 1$$

$$\Rightarrow t(x) = 1(x - 2) + 3 = x - 2 + 3 = \underline{\underline{x + 1}}$$

د نورمال یا عمود پیدا کونه:

$$f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x, P(2 | f(2))$$

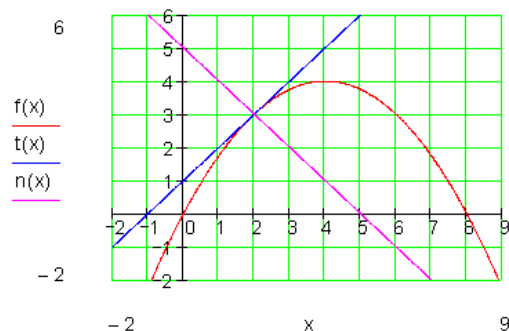
$$n(x) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$$

د $x_0 = 2$ سره لاندې راکوي:

$$n(x) = \frac{1}{f'(2)}(x - 2) + f(2)$$

$$f(2) = 2 \cdot 2 - \frac{1}{4} \cdot (2)^2 = 4 - 1 = 3 \quad f'(2) - \frac{1}{2} \cdot 2 = 2 - 1 = 1$$

$$\Rightarrow n(x) = -\frac{1}{1}(x - 2) + 3 = -x + 2 + 3 = \underline{\underline{-x + 5}}$$



د تانجنت او ولاړ يا عمود عمومي مساوات

بیلگه: تابع $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$ لرو.

د تانجنت میل:

د یوه تابع د گراف میل په ټکي $P(x_0 | f(x_0))$ کې همغه معنی لري، لکه په دې ټکي د تانجنت میل.

موږ $f(x)$ تابع او د تابع مشتق ټیک په پام کې نیسو.

موږ $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$ مربع تابع لرو

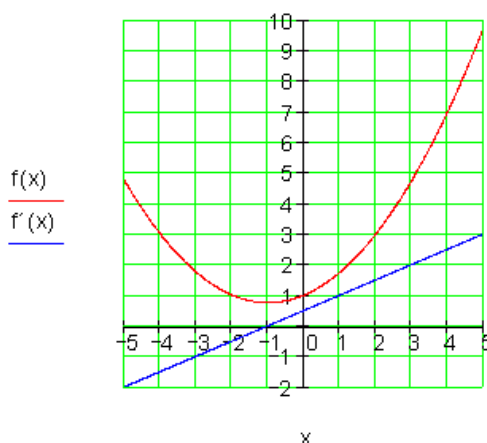
د تابع مشتق $f'(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

ارزښتجدول:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
f(x)	4,75	3	1,75	1	0,75	1	1,75	3	4,75	7	9,75
f'(x)	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3

$$f(x) := \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$$

$$f'(x) := \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$



د $f(x)$ ارزښتجدول څخه لوستلی شو

چې د پورته مربع تابع ککرټکی دی:

ارزښت لپاره $x = -1$ د $S(-1, 0.75)$

د $f'(-1) = 0$ د میل تابع ارزښت دی:

دا دا معنی لري، چې په ککرټکي(د

رأس ټکی) کې د $f'(x)$ میل صفر دی.

تانجنت په S کې هم دا معنی لري، چې

صفر دی، دا هلته پروت(افقي) ځغلي؛

یعنې د $-x$ محور سره غبرگ ځغلي.

گرافونه:

بیلگه:

$$f(x) = 2x^3 + 7x^2 + x - 7 \text{ تابع لرو:}$$

تانجنت دې پیدا کړی شي، چې د $f(x)$ گراف د $P(-2, f(-2))$ په ټکي کې لمسوي،

$$f(x) = 2x^3 + 7x^2 + x - 7 \Rightarrow f'(x) = 6x^2 + 14x + 1 \quad P(-2 | f(2)) \Rightarrow x_0 = -2$$

$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$f'(x_0) f'(-2) = 24 - 28 + 1 = -3$$

$$f(x_0) = f(-2) = -16 + 28 - 2 - 7 = 3$$

$$\Rightarrow t(x) = -3(x + 2) + 3 = -3x - 6 + 3 = \underline{\underline{-3x - 3}}$$

پایله:

د $f(x)$ تابع گراف کې تانجنت او عمود په $P(x_0, f(x_0))$ ټکي کې لاندې بڼه لري.

د تانجنت مساوات

د عمود مساوات

$$t(x) = \underbrace{f'(x_0)}_{\text{جگېډنه}}(x - x_0) + f(x_0)$$

$$n(x) = -\frac{1}{\underbrace{f'(x_0)}_{\text{جگېډنه}}}(x - x_0) + f(x_0); \quad f'(x_0) \neq 0$$

تمرینونه: د لاندې توابعو گرافونه وکارئ، د تانجنت او د عمود مساوات ولیکئ.

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \quad x_0 = 2$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{x} + 3 \quad x_0 = 1$$

$$f(x) = x^3 - x^2 - 5x - 2 \quad x_0 = -\frac{3}{2}$$

د مشتق شمیرني قوانین

د مشتق شمیرني شمیر قوانین، لک څنګه په اعدادو، ترادفونو او حدونو (پوله ارزښتونو) کې اجرا کيږي، په همدې ډول مشتق شمېرنه کې هم دا قوانین باوري دي.

وبه ښايو، چې د جمعې، ضرب او ... مشتقونه د مشتقونو جمع، ضرب او ... ده. (په وېش کې بايد مخرج صفر نه وي).

فعالیت:

که $f(x) = x^2 + x$ او $g(x) = x^3 + 2$ ولرو، $(f(x) + g(x))'$ د $(f(x) - g(x))'$ ، $(f(x) \cdot g(x))'$ او $(\frac{f(x)}{g(x)})'$ د پيدا کولو په هکله فکر وکړئ.

قضيه (د جمعې قاعده):

که يو تابع $f(x)$ د دوه توابعو $u(x)$ او $v(x)$ د جمعې څخه جوړ وي، نو مشتق يې هم د هر تابع د مشتق د جمعې څخه جوړ دی، يعنې:

$$f(x) = u(x) + v(x) \\ \Rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

ښوونه:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= u(x_0) + v(x_0) \\ f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)] + [v(x_0 + \Delta x) - v(x_0)]}{\Delta x} \\ \Leftrightarrow f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)]}{\Delta x} + \frac{[v(x_0 + \Delta x) - v(x_0)]}{\Delta x} \\ \Leftrightarrow f'(x_0) &= \underbrace{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)}{\Delta x}}_{u'(x_0)} + \underbrace{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x_0 + \Delta x) - v(x_0)}{\Delta x}}_{v'(x_0)} \\ \Leftrightarrow f'(x) &= \underline{\underline{u'(x) + v'(x)}} \end{aligned}$$

بیلگه:

که توابعو $f(x) = 5x^2 + 3x$, $u(x) = 5x^2$, $v(x) = 3x$ ولرو شتق وشمري.

بنوونه:

$$\begin{aligned} f(x) &= 5x^2 + 3x & u(x) &= 5x^2 & v(x) &= 3x \\ \Rightarrow u'(x) &= 10x & v'(x) &= 3 \\ f'(x) &= u'(x) + v'(x) = \underline{\underline{10x + 3}} \end{aligned}$$

فعاليت: که چيري $f_1, f_2, \dots, f_n$ توابع او $k_1, k_2, \dots, k_n$ ثابت عددونه وي نو لرو(پي له بنووني):

$$\begin{aligned} &[k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + \dots + k_n f_n(x)]' \\ &= k_1 f_1'(x) + k_2 f_2'(x) + \dots + k_n f_n'(x) \end{aligned}$$

قضيه (د ضرب قاعده): که $f(x)$ او $g(x)$ دوه توابع وي، نو بنايو:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \quad \text{بنوونه:}$$

د مناسب فورم- يا بڼه بدلون يعني په صورت کې د $-f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x)$ ورزياتولو څخه دا لاندې لرو:

$$\begin{aligned} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{(f(x) - f(x_0))g(x) + f(x_0)(g(x) - g(x_0))}{x - x_0} \end{aligned}$$

$$= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot g(x) + f(x_0) \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

له پورته څخه لاس راځي يعني د دواړو لورو ليميټ نيسو:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) + f(x_0) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \end{aligned}$$

بیلگه:

که $g(x) = x^2 - 1$ او $h(x) = \sqrt{x}$ ولرو، نو د $f(x) = g(x)h(x)$ مشتق غواړو پیدا کړو.

ښوونه:

په لاندې توگه مخ ته ځو:

$$f(x) = (x^2 - 1)\sqrt{x}, f'(x) = 2x\sqrt{x} + (x^2 - 1)\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{5}{2}x\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

قضیه (د وېش قانون): f او g دې دوه توابع وي. غواړو وښايو:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

ثبوت: کولای شو، چې دا قضیه له دوه لارو یا طریقو وښايو (ثبوت کړو).
لومړۍ لار یا طریقه یې په لاندې کې ښايو او دویمه لار دې گران زده کوونکي وښايي:

$$\begin{aligned} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h}, \quad g(x) \neq 0 \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{1}{g(x+h)g(x)} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{h} \right] \end{aligned}$$

غواړو $f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x)$ صورت ته ور زیات کړو، نو لرو:.

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{g(x+h)g(x)} \cdot \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+h)}{h} \\ &= \frac{1}{g(x)g(x)} \left[\lim_{h \rightarrow 0} g(x) \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] \\ &= \frac{1}{[g(x)]^2} \left[g(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] \\ &= \frac{1}{[g(x)]^2} [g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} \end{aligned}$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} \quad \text{يعني لرو:}$$

بيلگه:

د $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$ تابع (د $x^2 - 4 \neq 0$ سره) مشتق غواړو پيدا کړو.

حل: که چېرې $g(x) = x^2$ او $h(x) = x^2 - 4$

$$g'(x) = 2x$$

وضع شي نو لرو:

$$h'(x) = 2x$$

او د ویش قانون له مخې لرو:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[\frac{g(x)}{h(x)} \right]' = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{[h(x)]^2} \\ &= \frac{2x(x^2 - 4) - x^2 \cdot 2x}{[x^2 - 4]^2} \\ &= \frac{-8x}{[x^2 - 4]^2} \end{aligned}$$

پوښتنې:

که $f(x) = 3x^2 + 5x - 8$ او $g(x) = 5x^3 - 3x + 4$ ولرو، نو :

- د توابعو د توابعو د جمعي مشتق، د ضرب مشتق د توابعو د وېش ($f(x) \neq 0$) مشتق پيدا کړئ، که شونې وي له مختلفو لارو.

د الجبري توابعو مشتق

الجبري او نورو توابعو بیژندونه (تعریفونه):

1- یو بنسټیز تابع الجبري بلل کېږي، که د ترتیب قانون یې د مساواتو له لارې ورکړ شوی وي، په هغو کې چې په ترمونو کې د مساواتو د متحولو سره فقط الجبري

عملی (جمع، تفريق، ضرب، تقسيم) چې مخرج يې صفر نه وي (توانکونه او جذرنیونه) د توان-اوریني اکسپوننتونه مثبت او تام عددي دي (کارول شوي وي).

2- نالجبري توابع ترانسځندن بلل کيږي، لکه اکسپوننشل-ولوگاري می- او د زاویو توابع.

3- یو الجبري تابع راشنل بلل کيږي، که د ترتیب قانون يې د یو مساوات سره ورکړ شوی وي، په کوم کي چې ناپای پیري راشنل د شمیر عملی ((جمع، تفريق، ضرب، تقسيم) چې مخرج يې صفر نه وي (توانکونه او جذرنیونه) د توان-اوریني اکسپوننتونه مثبت او تام عددي دي) کارول شوي وي.

فعالیت:

په څېر د $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ یوه تابع د $f(x)$ که د

سره لیکل شوې وي، څه بلل کيږي؟ $n \in \mathbb{N} \wedge a_1 \in \mathbb{R}$

په د ویش v او u د دوه توابعو تابع f د $v(x) = 3x + 6$ او $u(x) = x^2 + 4x + 4$ لرو:

سره ولیکئ $v(x) \neq 0$ د $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ څېر لکه

تابع مشتق ونیسئ. پسې د $v; u$ د تابع تعریف ساحه وښایاست او بیا د هرې یوې

مشتقونو وېش په نښه کولو پسې د مشتقونو وېش (چې مخرج صفر نه وي)، د

مشتق سره پرتله کړئ.

بیلگه:

د $f(x) = \sqrt{x}$ تابع ورکړ شوې په x_0 کي د تابع مشتق پیدا کړئ او د مشتق تابع په گوته کړئ.

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} & \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{x_0 + \Delta x - x_0}{\Delta x(\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0})} \\ \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0}}{\Delta x} & \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0})} \\ \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{(\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0})}{\Delta x(\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0})} & \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{1}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} \end{aligned}$$

$$f'(x_0) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} \right) = \frac{1}{\sqrt{x_0} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

نو د x_0 په ځای کې $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ د تابع $f(x) = \sqrt{x}$ مشتق دی.

د تېرو درسونو پر بنسټ $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ د مشتق تابع ده.

د $f(x) = x^q$; $q \in Q$ ډوله توابعو مشتق:

د شمیرنې له مخې لاندې لاس ته را وړنې لرو:

تابع	د مشتق تابع	
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$f'(x) = 1 \cdot x^0$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2 \cdot x$	$f'(x) = 2 \cdot x^1$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3 \cdot x^2$	$f'(x) = 3 \cdot x^2$
$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$f'(x) = -1 \cdot x^{-2}$
$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$

که دا پورته پنځه مشتقونه یو د بل سره پرتله کړو، نو اټکل کيږي، چې لاندې جوړښتقانون باور لري:

د توان قانون (بي له بنوني)

(پونټخ) قانون:

1- مختني اکسپوننت د متحولي x د مخ د فاکتور په څیر لیکل کيږي.

2- نوی اکسپوننت همغه پخوانی اکسپوننت دی، چې په یو کم شوی.

$$f(x) = x^q \Rightarrow f'(x) = q \cdot x^{q-1} \quad \text{د } q \in Q \text{ سره}$$

بیلگه:

د $f(x) = \frac{1}{x^2}$ مشتق پیدا کړئ.

ښوونه:

$$f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2} \Rightarrow f'(x) = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$

بیلگه:

د $f(x) = 3x^4$ تابع مشتق پیدا کړئ.

ښوونه:

$$f(x) = 3x^4 \quad c = 3 \quad u(x) = x^4 \Rightarrow u'(x) = 4x^3$$

$$f'(x) = c \cdot u'(x) = 3 \cdot 4x^3 = \underline{\underline{12x^3}}$$

بیلگه:

غواړو د $f(x)$ تابع مشتق د $x = 2$ په ځای کې ونیسو:

$$f(x) = x^2 + 3$$

$$x = 2 : \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} = 4 + \Delta x$$

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (4 + \Delta x) = \underline{\underline{4}}$$

$$x = u : \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u + \Delta x) - f(u)}{\Delta x} = 2u + \Delta x$$

$$f'(u) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2u + \Delta x) = \underline{\underline{2u}}$$

بیلگه:

د تابع $f(x) = \frac{1}{x+1}$ مشتق د $x = 2$ په ځای کې پیدا کړئ.

ښوونه:

$$f(x) = \frac{1}{x+1}$$

$$x=2: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \frac{1}{3(3+\Delta x)}$$

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{-1}{3(3+\Delta x)} \right) = \underline{\underline{-\frac{1}{9}}}$$

$$x=u: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \frac{-1}{(u+\Delta x+1)(u+1)}$$

$$f'(u) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} = \frac{-1}{(u+\Delta x+1)(u+1)} = \underline{\underline{-\frac{1}{(u+1)^2}}}$$

بیلگه:

(توان) (Potence) مشتق، چی طبیعي جگ عدد یا اکسپوننت لري: $y(f(x) = x^n$ ، $1, 2, 3, \dots$ موړ د y تابع لرو او غواړو مشتق یې پیداکړو: بنوونه: موړ په لاندې توگه مخ ته خو. د بینوم جملی په بنسټ په هر x_0 ځای کې دا لاندې باورلري.

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{(x_0+h)^n - x_0^n}{h} \\ &= \frac{\binom{n}{0}x_0^n + \binom{n}{1}x_0^{n-1}h + \binom{n}{2}x_0^{n-2}h^2 + \dots + \binom{n}{n}h^n - x_0^n}{h} \\ &= \frac{1}{h} \left(x_0^n + nx_0^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x_0^{n-2}h^2 + \dots + h^n - x_0^n \right) \\ &= nx_0^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x_0^{n-2}h + \dots + h^{n-1} \end{aligned}$$

د $h \rightarrow 0$ لپاره تابع $y = x^n$ د x_0 په هرځای کې، د لاندې مشتق سره، د مشتق قابلیت لري:

$$(dy/dx)_{x=x_0} = f'(x) = nx^{n-1}$$

ددې پورته بیلگې بل ډول بنوونه دې د پوښتنې په څېر وي.

تمرینونه: _ که یو پولینوم $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ د $n \in \mathbb{N} \wedge a_1 \in \mathbb{R}$ سره ورکړ شوی وي، مشتق یې پیدا کړئ.
 - د توابع مشتق د توان قانون له مخې پیدا کړئ.

$$a) f(x) = x^5$$

$$b) f(x) = x^6$$

$$c) f(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$d) f(x) = \frac{1}{x^5}$$

$$e) f(x) = \sqrt{x}$$

$$f(x) = \sqrt[4]{x^3}$$

$$g) f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$h) f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

د زنجيري(مرکب) توابعو مشتق

تابع کیدی شي د v تابع سره وتړل شي، که د د باندني تابع (خنځیروني قاعده)، پیژند ورشو (دتعریف ساحه) $D(u)$ د دنني تابع د $W(v)$ سره گډ توکي یا عناصر ولري.

ددې لپاره لیکو: $u \circ v(x) = u(v(x))$ ، که د f تابع د $y = f(x) = u(z)$ سره او $Z = v(x)$ وي.

فعالیت:

_ په زنجيري تابع کې د $f(g(x))$ پیژند ورشو او همداسې د تابع ورشو په هکله خپل نظر څرگند کړئ.

په ځای کې څه دی او $x=3$ تابع ارزښت د $f(g(x)) = (x^2 + 2x + 1)^2$ _ وویاست، چې د د تابع ساحې کومې دي او په مشتق نیولو کې یې فکر وکړئ.

_ که یوه په خوښه زنجيري تابع ولرو، نو د تابع ورشو په گوته کړئ او وهڅیږئ، چې مشتق یې پیدا کړئ.

اوس نو د $x = x_0$ ځای کې د $y = f(g(x))$ تړلي یا خنځيري تابع مشتق وروالی څیړو:

$$f(x) = f[g(x)] \\ \Rightarrow f'(x) = f'(g) \cdot g'(x)$$

دنننی مشتق د باندنۍ مشتق (دادې ورپورته شي)
ددې لپاره نیسو چی:

1- د $g(x)$ دنننی تابع د $x = x_0$ په ځای کې مشتق ور ده. دانو بیا باید د x_0 په یوه معلوم تعریف شوي چاپیریال کې متمادی (نه پریکیدونکی) وي.

موږ لرو: $g(x+h) \rightarrow g(x_0)$ د $h \rightarrow 0$ لپاره.

همداسې $g(x_0 + h) = g(x_0) + k$ داسې، چې $k \rightarrow 0$ د $h \rightarrow 0$ لپاره.

2- که د $y = f(z)$ د باندنۍ تابع په $z = z_0 = g(x_0)$ کې د مشتق قابلیت ولري.

د $y = f(g(x))$ کمېنتویش کیدی شي په لاندې ډول ورکړ شي او بڼه (فورم) یې هم بدله شي

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(g(x_0 + h)) - f(g(x_0))}{h} = \frac{f(g(x_0 + h)) - f(g(x_0))}{g(x_0 + h) - g(x_0)} \\ &= \frac{f(z_0 + k) - f(z_0)}{k} \cdot \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} \end{aligned}$$

که $h \rightarrow 0$ لاره شي (همداسې $k \rightarrow 0$ خواته ځي) نو دا اړیکې مشتق ته ځي:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} = \left(\frac{d(g(x))}{dx}\right)_{x=x_0} = \left(\frac{df(z)}{dz}\right)_{z=z_0=g(x_0)} \cdot \left(\frac{dg(x)}{dx}\right)_{x=x_0}; \dots\dots (*)$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} = \left(\frac{d(g(x))}{dx}\right)_{x=x_0} = \left(\frac{df(z)}{dz}\right)_{z=z_0=g(x_0)} \cdot \left(\frac{dg(x)}{dx}\right)_{x=x_0}$$

که چیرې د ځای په ځای (فیکس) ځای $x = x_0$ لپار بیرته x نیسو، نو کیدی شي چې (*)
فرمول په لاندې لنډ ډول ورکړ شي او د $z = g(x)$ ، $y = (z)$ لپاره باور ولري:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dz}}{\frac{dx}{dz}} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}; \dots\dots\dots (**)$$

په پام کې دې وي، چې $\frac{dy}{dx}$ د $z = g(x)$ په ځای کې باید ترتیب (تنظیم) شي. $\frac{dy}{dx}$

دا (*) فرمول ځنځيري قاعده (لار، قانون) بلل کېږي او د پورته نیونو یا فرضیو سره باوري دی. دا په ساده ډول په یاد لرلی شو، ځکه چې ښی خوا د کیني خوا سره د فورمال dz زیاتیدلو له لارې منځ ته راغلي.

د پورته ښوونې لاس ته راوړنه دا لاندې جمله ده:

زنځيري یا مرکبه قاعده

لرو: $f(z) = f(g(x))$ ، نو د $z = g(x)$ تابع په x او د $y = f(z)$ تابع په $z = g(x)$ کې د مشتق قابلیت لري یا مشتق ورکړلی، نو ترلی ورکړ شوی د $y = f(g(x))$ تابع هم په x کې د مشتق قابلیت لري او دا باوري کېږي.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dz}}{\frac{dx}{dz}} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

لنډ:

بیلګه:

د $f(x) = (x^2 + 2)^2$ مشتق ونیسئ.

$$f(x) = (x^2 + 2)^2$$

$$\text{بدلون} \quad \text{چون: } z(x) = x^2 + 2 \quad f(z) = z^2 \Rightarrow f'(z) = 2z \quad z'(x) = 2x$$

$$f'(x) = f'(z) \cdot z'(x) = 2z \cdot 2x = 2(x^2 + 2) \cdot 2x = \underline{\underline{4x^3 + 8x}}$$

بیلگه:

د $y = \sin x^2$ تابع یوه په لاندې توگه ورکړ شوی خنځیري تابع ده:

$$y = \sin z, \quad z = x^2$$

دا دواړه توابع په هرځای کې مشتق وړدي. له دې امله هر چیرته باور لري:

$$\frac{d \sin x^2}{dx} = \frac{d \sin z}{dz} \cdot \frac{dx^2}{dx} = \cos z \cdot 2x = 2x \cdot \cos x^2$$

بیلگه:

د $y = \sin^2 x$ تابع په لاندې ډول تړلی ورکړ شوی.

$$y = z^2, \quad z = \sin x$$

دلته هم دواړه توابع هر چیرته مشتق وړ دي. نو له دې امله هر چیرته باور لري:

$$\frac{d \sin^2 x}{dx} = \frac{dz^2}{dz} \cdot \frac{d \sin x}{dx} = 2z \cdot \cos x = 2 \sin x \cdot \cos x = \sin 2x$$

بیلگه:

د $f(x) = (x^5 + 4)^8$ تابع مشتق وشمېرئ!حل: هرکله چې $g(x) = x^8$ او $h(x) = x^5 + 4$ وضع کوو نو لرو:

$$f(x) = g(h(x))$$

$$f'(x) = (g(h(x)))' = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

$$h'(x) = 5x^4, \quad g'(x) = 8x^7$$

$$f(x) = 8(h(x))^7 5x^4 = 40(x^5 + 4)^7 \cdot x^4$$

تمرینونه:

$$h(x) = \frac{1}{(x^3 - 4x^2 + 1)^2} \quad - ۱$$

$$۲ - \text{که چیرې } f(x) = (3 - 2x + x^2)^4 \text{ وي، نو } f' \text{ پیدا کړئ.}$$

د لاندې تابعو مشتقونه هم ونیسئ

$$f(x) = (1 - 2x^3)^4 \quad :1$$

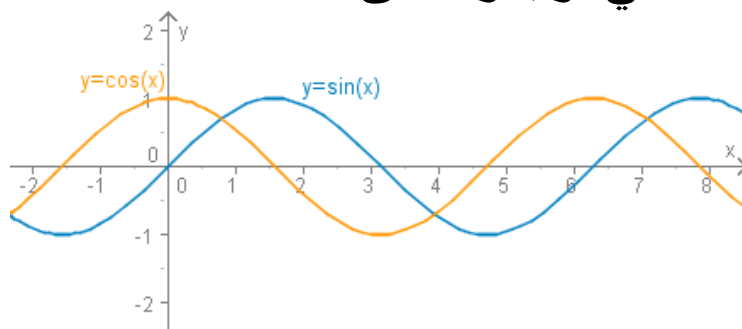
$$f(x) = (2x^2 + 1)^{-2} \quad :2$$

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{2 + x^2 + x^3}} \quad :3$$

$$h(z) = \sqrt{\frac{1-z}{1+z}} \quad :4$$

$$f(t) = \sqrt[3]{3t + 1} \quad :5$$

د مثلثاتي توابعو مشتق



$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \quad \dots I$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \quad \dots II$$

فعاليت:

د لاندې توابعو مشتقونه وشميرئ:

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \quad :a$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x \quad :b$$

$$f'(x) = \frac{d \tan x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} \quad c$$

موږ په لاندې کې پورتنۍ درې حالتونه ښايو او د نورو درې حالتونو ښوونه گرانو زده کوونکو ته پرېږدو.

قضيه:

د ساين تابع مشتق غواړو وښايو چې $f'(x) = (\sin x)' = \cos x$ دی: ددې قضیې د ښوولو لپاره پورتنۍ په ننوتنه کې دوه لومړني فرمولونه په کار راځي. د $y = f(x) = \sin x$ ساين تابع د هر x لپاره تعريف ده، نو د x_0 په خوښه ټاکلوڅخه لاس ته راځي:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{\sin(x_0 + h) - \sin x_0}{h} \\ &= \frac{2}{h} \cos \frac{2x_0 + h}{2} \cdot \sin \frac{h}{2} = \cos \left(x_0 + \frac{h}{2} \right) \cdot \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}. \end{aligned}$$

د لیمیت د برخې په پام کې لرلو سره لرو:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\cos \left(x_0 + \frac{h}{2} \right) \cdot \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \right) = \cos x_0.$$

د ساين تابع په هر ځای کې، د لاندې مشتق سره، د مشتق قابلیت لري يا مشتقور ده:

$$\left(\frac{d \sin x}{dx} \right)_{x=x_0} = f'(x_0) = \cos x_0, \quad (X \text{ په لينده کچ يا راديان})$$

قضيه:

همداسې ښوول کيږي چې کوساين تابع هم په هر ځای کې مشتقور ده، دلاندې مشتق سره:

$$\left(\frac{d \cos x}{dx}\right)_{x=x_0} = f'(x_0) = -\sin x_0, \quad \text{په لینده کچ یا رادیان}$$

۹۲ د مثلثاتي توابعو مشتق

ثبوت:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x_0)}{h} = \frac{\cos(x+h) - \cos x_0}{h} \quad \text{لرو:}$$

په پورته ننوتنه کې د دویم فرمول له مخې لرو:

$$= \frac{-2 \sin \frac{x+h+x}{2} \cdot \sin \frac{x+h-x}{2}}{h}$$

$$= \frac{-2 \sin(x + \frac{h}{2}) \cdot \sin \frac{h}{2}}{h}$$

$$= -[\sin(x + \frac{h}{2}) \cdot \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}]$$

د لیمیت او د لیمیت د ضرب قاعدې له مخې لاس ته راځي:

$$= -\lim_{h \rightarrow 0} \sin(x + \frac{h}{2}) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = -\sin x \cdot 1 = -\sin x$$

له پورته مساواتو څخه په لنډه توګه لیکو:

$$\frac{d \cos x}{dx} = -\sin x$$

قضیه:

غواړو وښايو چې د تانجنت تابع $f(x) = \tan x$ مشتق ورته او د مشتق تابع يې ده. $f'(x) = \frac{d \tan x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$

۹۳

د مثلثاتي توابعو مشتق

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\tan x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) \\ &= \frac{\cos x \frac{d}{dx}(\sin x) - \sin x \frac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

$$= 1 + \tan^2 x, x \neq (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}$$

فعاليت: گرا زده کوونکي دې د $f(x) = x^2 \sin x$ تابع مشتق پيدا کړي.
يادونه: $g(x) = x^2$ او $h(x) = \sin x$ دې څا په ځای کړي.
بيلگه:

غواړو د $y = \cos \frac{\pi x}{180}$ تابع مشتق پيدا کړو.

حل:

ردو: $f(x) = \cos x$ او $g(x) = \frac{\pi x}{180}$ ، نو y په لاندي توگه ليکلی شو:

$y = f(g(x))$. د زنځيري قاعدې په بنسټ لرو:

$$\begin{aligned}
 y' &= f'(g(x)) \cdot g'(x) \\
 &= \cos'(g(x)) \cdot \left(\frac{\pi}{180} \cdot x\right)' \\
 &= -\sin(g(x)) \cdot \frac{\pi}{180} = -\frac{\pi}{180} \cdot \sin \frac{\pi x}{180}
 \end{aligned}$$

د مثلثاتي توابعو مشتق ۹۴

د لاندې توابعو مشتق پیدا کړی

$\tan^4 x$	: b	$\cos^2 2x$	: a
$\sin(3x-1)$	: d	$\sec x \cdot \cot x$	: c
$\sec(\sec(x))$	: f	$\sin^2 x - \cos x$	: e

حل a: د ځنځيري قاعدې په بنسټ او د توان يا طاقت يو فرمول په بنسټ لرو:

$$\begin{aligned}
 (\cos^2 2x)' &= 2 \cos(2x) \cdot \cos'(2x) \\
 &= 2 \cos(2x)(-\sin(2x)) \cdot 2 \\
 &= -4 \cos 2x \cdot \sin 2x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\tan^4 x)' &= 4 \tan^3 x \cdot (\tan x)' & : b \\
 &= 4 \tan^3 x \cdot \sec^2 x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\sec x \cdot \cot x)' &= (\sec x)' \cot x + (\cot x)' \sec x & : c \\
 &= (\sec x \cdot \tan x) \cot x + (-\csc^2 x) \sec x \\
 &= \sec x - \csc^2 x \cdot \sec x \\
 &= \sec x(1 - \csc^2 x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [\sin(3x-1)]' &= \cos(3x-1) \cdot (3x-1)' & : d \\
 &= \cos(3x-1) \cdot 3 = 3 \cos(3x-1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [\sin^2 x - \cos x]' &= (\sin^2 x)' - (\cos x)' & : e \\
 &= 2 \sin x (\sin x)' - (-\sin x) \\
 &= 2 \sin x \cdot \cos x + \sin x \\
 &= \sin x (2 \cos x + 1)
 \end{aligned}$$

بیلگی:

-1 د $f(x) = \sin x$ تابع لومړي څلور مشتقونه دې پیدا شي.

۹۵

د مثلثاتي توابعو مشتق

$$f''(x) = \cos x ; f'''(x) = -\sin x ; f^{(4)}(x) = -(-\sin x) = \sin x$$

-2 د $(x) = x \cdot \sin x$ تابع مشتق پیدا کړئ.

د ضرب قانون څخه کار واخلئ.

$$f'(x) = 1 \cdot \sin x + x \cos x = \sin x + x \cdot \cos x$$

-3 د $f(x) = \sin \frac{1}{x}; x \neq 0$ تابع مشتق پیدا کولو له پاره د حنځیر قانون څخه نار اخلو.

$$f'(x) = -\frac{2}{x^3} \cos \frac{1}{x^2} \quad \text{پرو } u(z) = \sin z \text{ او } z = \frac{1}{x^2} \text{ ته رايي:}$$

تمرینونه:

-- د لاندې توابعو لومړی مشتق و ټاکئ.

$$a) f(x) = \sin 3x \quad b) f(x) = \sin x \cdot \cos x \quad c) f(x) = \sin^2 x$$

$$d) f(x) = \tan x + 2 \sin 2x \quad e) f(x) = \sin x^2 \quad f) f(x) = \sin \frac{x-1}{x+1}$$

-- د $f(x) = \sin^n x (n \in \mathbb{N})$ تابع د لومړي مشتق لپاره فرمول وښایاست یا وټاکئ.

-- د تانجنت تابع لپاره د ساین او کوساین قانون په مرسته د مشتق قانون و ښایاست.

-- وښایاست چې د $f(x) = \tan x$ لپاره $f'(x) = 1 + \tan^2(x)$ هم باور لري.

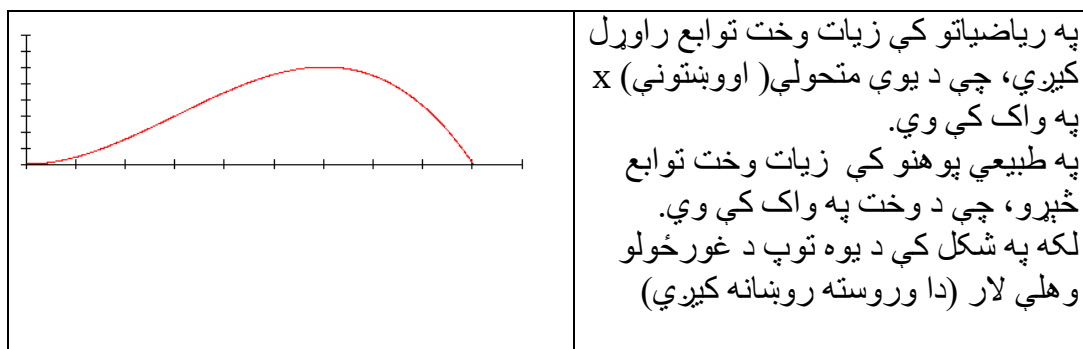
-- د ویش قانون له مخې د کوتانجنت قانون پیدا کړئ او هم د تانجنت قانون له مخې.

--- ولې د ساین تابع او د کوساین تابع په خوښه زیات مشتقور دي.

د مشتق استعمال په پېداېښتي یا طبیعي علومو کې

د مشتق استعمال په طبیعي علومو

۹۶



فعالیت:

گران زده کوونکي دې د فزیک د درسونو له مخې د چټکتیا او بیړې تعریفونه ور کړي او د لار، وخت، چټکتیا او بیړې فرمولونه دې ولیکي.

بیلگه:

د یوه په برابر ډوله بیړه (تعییل) غورځول شوي شي لپاره د پیل چټکتیا (لومړنۍ سرعت) $v_0 = 4 \frac{m}{s}$ او $a = 1,8 \frac{m}{s^2}$ بیړې (تعییل) سره د لار-وخت- قانون په لاندې

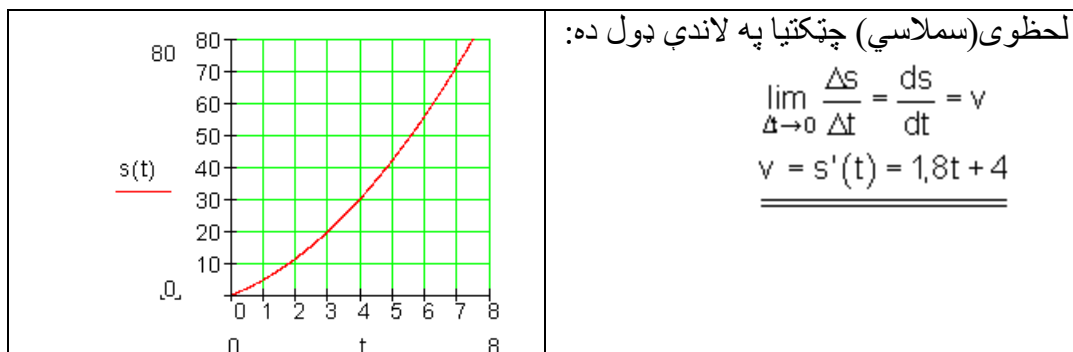
ډول دی:

$$s(t) = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t$$

پورته ورکړ شوي د v_0 ارزښت لپاره باور لري: $S(t) = 0,9t^2 + 4t$

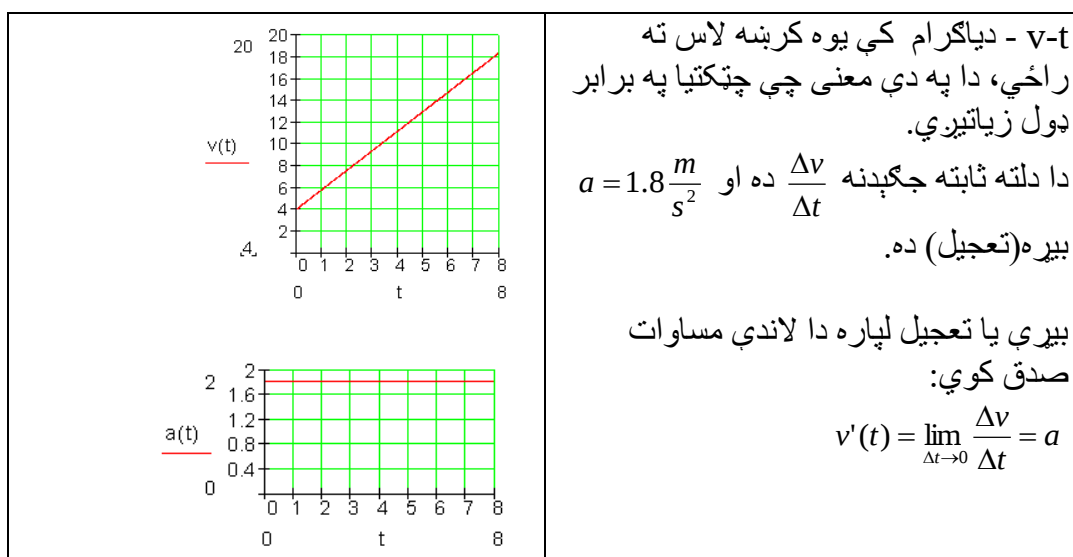
(s په (ثانیه) ، $s(t)$ په m (متر))

منځنۍ چټکتیا (سرعت) $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ (ده)



۹۷

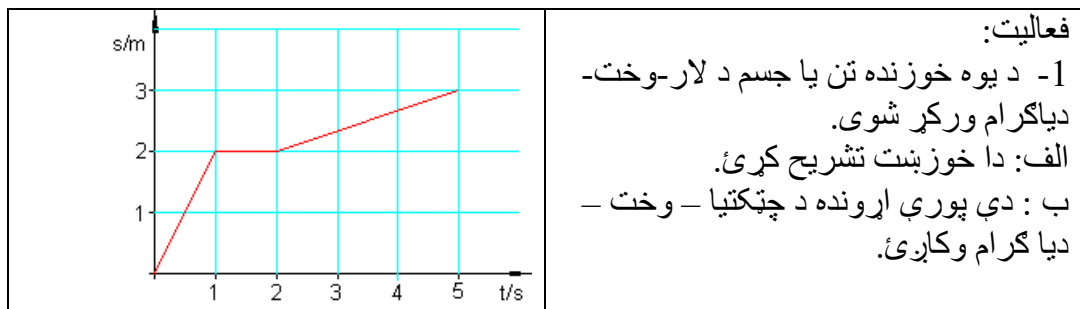
د مشتق استعمال په طبيعي علومو



پام : د يوه برابر ډوله په بېره (تعجيلي) خوزښت لپاره لاندې باور لري:

$$| s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t | \quad v(t) = s'(t) = at + v_0 \quad a(t) = v'(t) = a$$

د يوې چټکتيا (سرعت) v لپاره د وخت پسې د لار مشتق لپاره $v(t) = s'(t)$ لرو. د $s'(t)$ لپاره داسې $v(t) = s'(t)$ هم ليکو.



2- یوه تیرره د پیل چټکتیا $v_0 = 7 \frac{m}{s}$ سره عمودي (ولاره) پورته غورځول کېږي.

د لار-وخت-قانون دی: $s(t) = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$ د $g = 10 \frac{m}{s^2}$ (را ټولې؟؟) گړدې شوي

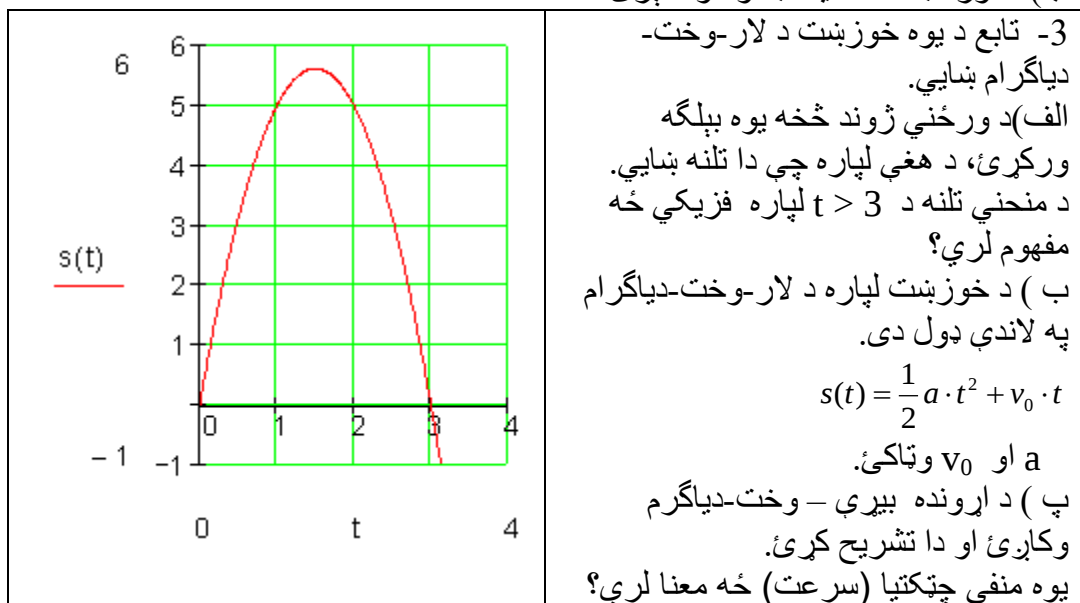
(سره.

د مشتق استعمال په طبیعي علومو

۹۸

الف) د کوم وخت وروسته د تیرې چټکتیا (سرعت) صفر دی؟

ب) خورا جگ د میل جگوالو شمېرئ



4- یو تن (جسم) په پورته ازاده غورځونه کې داسې حرکت کوي، چې د t وخت کې

$$s(t) = 5 \cdot t^2$$

لار وهي.

په وختونو $t = 1, 2, 3$ کې لحظوي چټکتیا (سرعت) وښایی.
حل: لحظوي چټکتیا د سملاسي تغیر ارزښت سره په دې لاندې معنا دی:

$$t = 1: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{s(1 + \Delta x) - s(1)}{\Delta x} = 10 + 5\Delta x$$

د $\Delta x \rightarrow 0$ لپاره باور لري: $10 + 5\Delta x \rightarrow 10$

$$t = 2: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{s(2 + \Delta x) - s(2)}{\Delta x} = 20 + \Delta x \Rightarrow 1$$

د $\Delta x \rightarrow 0$ لپاره باور لري: $20 + 5\Delta x \rightarrow 20$

$$t = 3: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{s(3 + \Delta x) - s(3)}{\Delta x} = 30 + 5\Delta x \Rightarrow 1$$

د $\Delta x \rightarrow 0$ لپاره باور لري $20 + 5\Delta x \rightarrow 30$

د جگو درجو مشتق

۹۹

	تمرین: $f(x) = -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2 ; x > 0$ د لاندې تابع گراف او په ورنزدې توگه د فوټبال میدان کې د توپ الوتنې منحنی ښایی، چې لاندې خبره لري.
--	---

لاندې پوښتنې ځواب کړئ:

الف: توپ کوم خورا جگ (ماکسیمال) جگوالی لري او د وهلیکي (شوت شوي ټکي) څخه کوم واټن لري؟

ب: د توپ وهلیکي (شوت شوي ټکي) څخه توپ څومره لرې بېرته ځمکې ته راځي؟

پ: د لوبې د دفاع دېوال د توپ وهنې ځای څخه ۹ متره لرې او ۲ متره جگ دی. ایا توپ له دې څخه جگ الوزي؟

ت: توپ د تور (گول) لاین (د x محور) څخه په ۲ متره جگوالي الوزي. له گول څخه په کوم لږوالي دا ازاده شوت وهل شوی دی؟

د جگو درجو مشتق

د لومړي مشتق پرته د لوړو درجو مشتق کونه هم شته، چې د ورپسې مشتق له لارې لاس ته راځي. د $f'(x)$ بيا مشتق نيونې سره د $f''(x)$ مشتق تابع لاس ته راځي، چې د دويم مشتق تابع په نامه يادېږي.

بېلگه:

$$f(x) = x^3 + x^2 + x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 \Rightarrow \underline{f''(x) = 6x + 2}$$

د $f''(x)$ بيا مشتق نيونه و دريم مشتق ته اوداسې نور.

$$f(x) = x^3 + x^2 + x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 \Rightarrow f''(x) = 6x + 2 \Rightarrow \underline{\underline{f'''(x) = 6}}$$

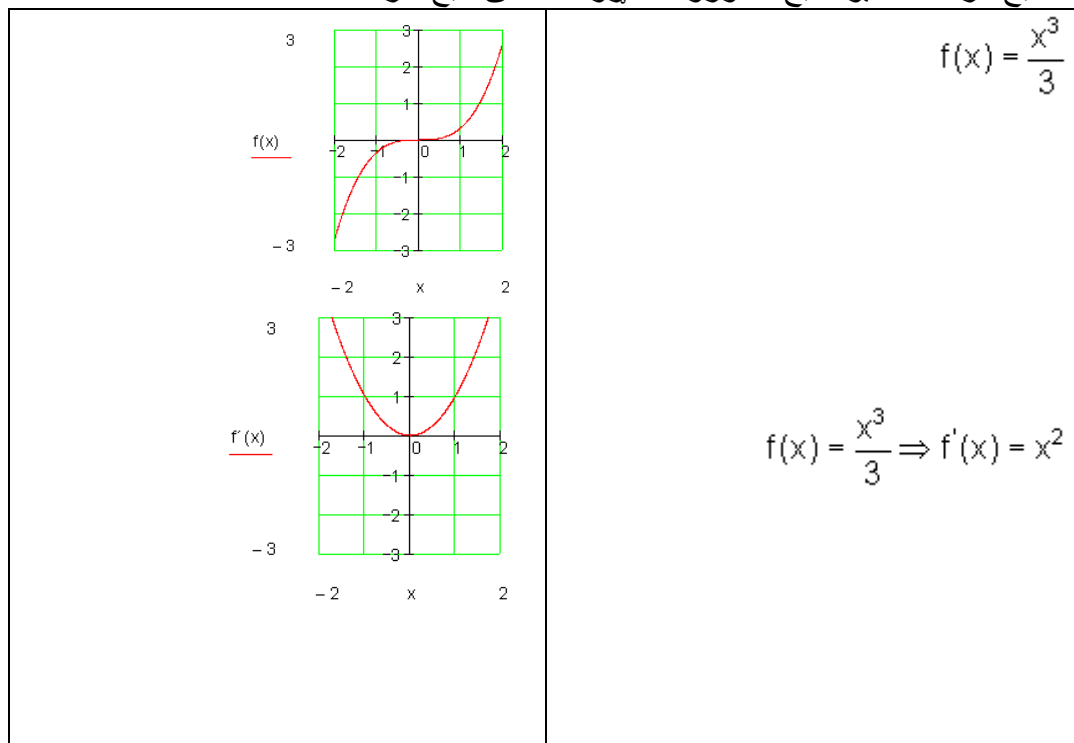
د $f(x) = \frac{x^3}{3}$ تابع دې 4 واره مشتق ونيول شي:

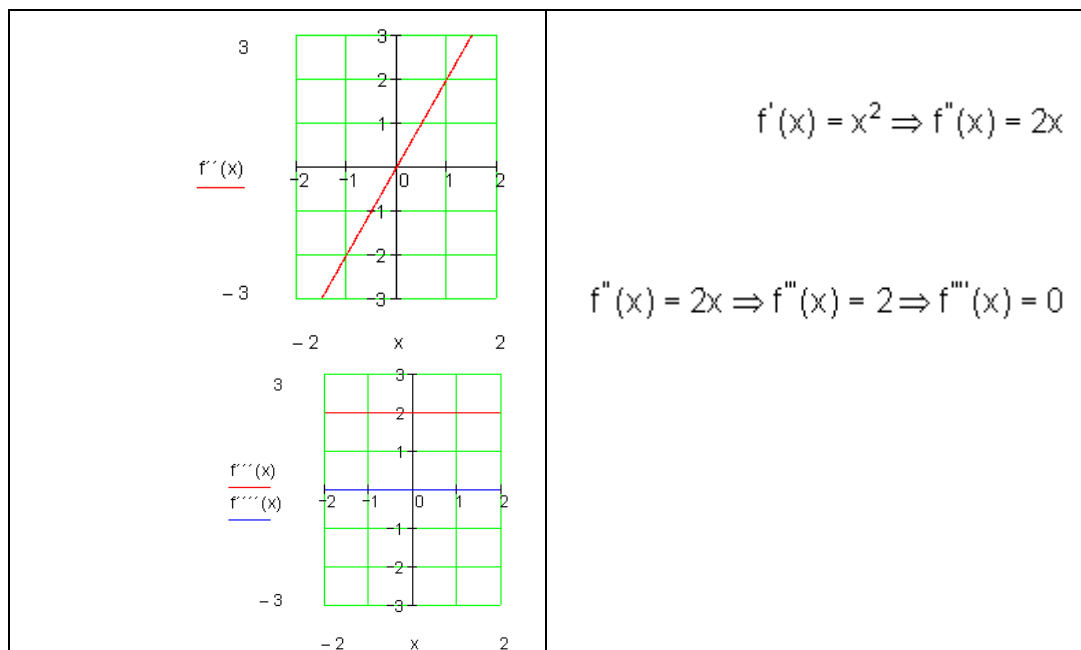
د جگو درجو مشتق

۱۰۰

$$f(x) = \frac{x^3}{3} \Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2}{3} = x^2 \Rightarrow f''(x) = 2x \Rightarrow f'''(x) = 2 \Rightarrow f^{(4)}(x) = 0$$

د تابع گراف: د يوه تابع انځورونه د اړونده مشتق تابع سره

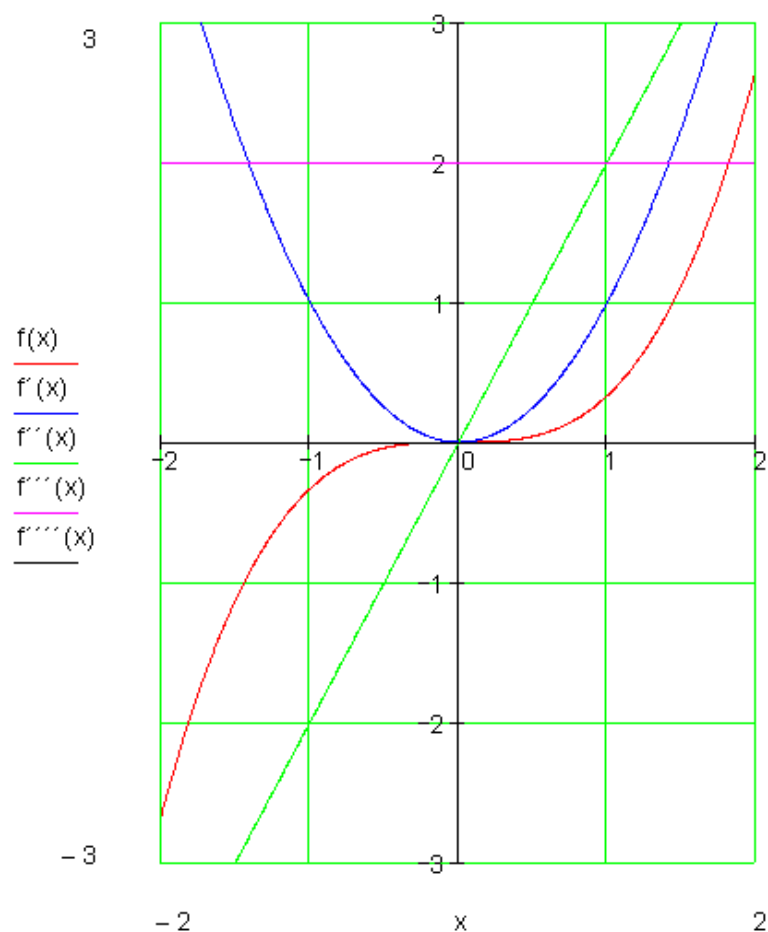




۱۰۱

د جگو درجو مشتق

پورته ټولو توابعو گراف په يوه پروت ولاړ سيستم کې



بیلگی:

اول: د تابع $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + x - 2$ مشت درپواره پیدا کړی

$$f(x) = 4x^3 - 2x^2 + x - 2$$

$$f'(x) = 12x^2 - 4x + 1$$

$$f''(x) = 24x - 4$$

$$f'''(x) = 24$$

د جگو درجو مشتق ۳-۱

دویم: د تابع $f(x) = \frac{3}{4}x^3 - 12x^2 + \frac{1}{4}x$ مشتق درپواره پیدا کړی

$$f(x) = \frac{3}{4}x^3 - 12x^2 + \frac{1}{4}x$$

$$f'(x) = \frac{9}{4}x^2 - 24x + \frac{1}{4}$$

$$f''(x) = \frac{9}{2}x - 24$$

$$f'''(x) = \frac{9}{2}$$

ټولګه:

د $f(x)$ لومړی مشتق د $f(x)$ مشتق تابع $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$ ده :

د $f(x)$ دویم مشتق د $f'(x)$ مشتق تابع $f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$ دی:

د $f(x)$ دریم مشتق د $f''(x)$ مشتق تابع $f'''(x) = \frac{d^3 f(x)}{dx^3}$ دی:

په ځانګړي ډول: یو په خوښه کسری ي تابع $f(x)$ په خوښه د مشتق قابلیت لري.

تمرینونه:

د لاندې توابعو دريواره مشتق ونیسئ.

$$f(x) = 3x + 4 \quad -1$$

$$f(x) = 2x - 4 + x^3 - 5x + 4x^3 \quad -2$$

$$f(x) = 3x^3 + 2x^2 + x + 1 \quad -3$$

$$f(x) = (2x + 1)^3 \quad -4$$

$$f(x) = x - x^4 + 3 + x \quad -5$$

$$f(x) = 1 - 2x - 3x - 4x + x^4 \quad -6$$

$$f(x) = a + b + c^2 - x - ax - bx - cx^3 - c^3x \quad -7$$

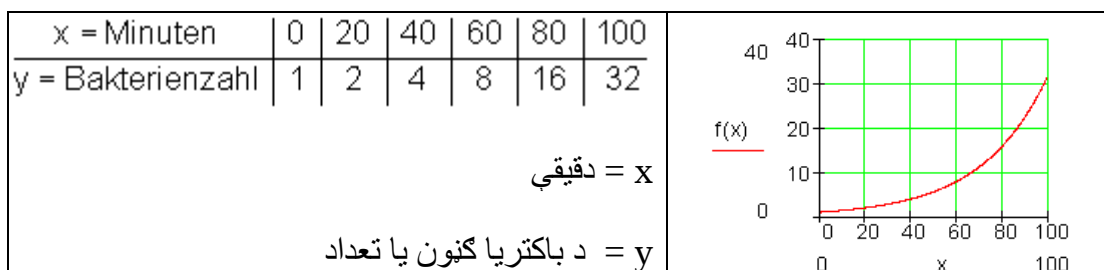
$$f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 5x - 2 \quad -8$$

د اکپوننشل توابعو مشتق

د تابع مساواتو جوړښت

کولي باکتریا Coli - Bakterien د انسان په کلمو کې کاره سرته رسوي. دوي د کوتې ویش (حجره وېش) له لارې زیاتیري. و مساعدو شرایطو لاندې دوي په هرو ۲۰ دقیقو کې ځان تجزیه کوي. د غه عملیې لپاره یو ارزښت جدول: اړ، او گراف یې کارو. دلته د x اووښتوني (متغیره) په دقیقو د وخت لپاره ده.

د y متغیره د باکتریا گانو د تعداد لپاره ده.



فعالیت: د دې لپراه تابع ولیکئ

قضیه: هر اکسپوننشل تابع د $y = b^x, (b > 0)$ د ټولو ریلو اعدادو لپاره مشتقور دی او

صدق کوي: $f' = b^x \ln b$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{y - y_0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad f(x) = b^x$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{b^x - b^{x_0}}{x - x_0} \quad \text{حل:}$$

$$= b^{x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{b^{x-x_0} - 1}{x - x_0}, \quad x - x_0 = h$$

د اکپوننشل توابعو مشتق

۱۰۴

$$= b^{x_0} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{b^h - 1}{h}$$

له پورته لرو $\begin{cases} b^h - 1 = k \\ h = \log_b(1+k) \end{cases}$ او لاس ته تري راځي

$$\begin{aligned} &= b^{x_0} \cdot \lim_{k \rightarrow 0} \frac{k}{\log_b(1+k)} \\ &= b^{x_0} \cdot \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{k} \cdot \log_b(1+k)} \end{aligned}$$

د لوگاريتم قانون څخه لرو: $n \cdot \log x = \log x^n$ او لاس ته راځي

$$\begin{aligned} &= b^{x_0} \cdot \lim_{k \rightarrow 0} \frac{k}{\log_b(1+k)} \\ &= b^{x_0} \cdot \frac{1}{\log_b[\lim_{k \rightarrow 0} (1+k)^{\frac{1}{k}}]} , \lim_{k \rightarrow 0} (1+k)^{\frac{1}{k}} = e \end{aligned}$$

له پورته لاس ته راځي

$$\begin{aligned} &= b^{x_0} \cdot \frac{1}{\log_b e} , \log_b e = \frac{1}{\ln b} \\ &= b^{x_0} \cdot \ln b ; \quad x_0 \in \mathbb{R} ; b \in \mathbb{R}^{>0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow f' : f'(x) = b^x \cdot \ln b ; D'(f) = \mathbb{R} ; b \in \mathbb{R}^{>0} \\ &f'(x) = b^x \cdot \ln b \end{aligned}$$

ضيه :

د $y = f(x) = e^x$ مشتق پيدا کړئ.

حل:

$$y = f(x) = e^x$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{x_0 + \Delta x} - e^{x_0}}{\Delta x}$$

مور دا لرلي په پام کې نيسو: $e^{x_0 + \Delta x} = e^{x_0} \cdot e^{\Delta x}$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{x_0} \cdot e^{\Delta x} - e^{x_0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{x_0} (e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} e^{x_0} \cdot \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^{x_0} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

مور د تل کوچنيکيدونکي Δx ارزښت لپاره څيرو $\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$

	Δx				
Δx	1	0,1	0,01	0,001	0,0001
$\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$	1,718...	1,051...	1,00501...	1,0005...	1,00005...

د دې په بنسټ مور لاس ته راوړو:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1$$

زموږ د شمېرنې په بنسټ دا دا معنا لري:

$$f'(x_0) = e^{x_0} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}}_1 = e^{x_0} \cdot 1 = \underline{\underline{e^{x_0}}}$$

که د x_0 په ځای x ځای په ځای کړو، نو لرو:

$$f'(x) = e^x \quad \text{او} \quad f(x) = e^x$$

اکسپوننشل فنکشن $y = f(x) = e^x$ ټیک $y' = f'(x) = e^x$ مشتق لري
يعني د e^x تابع د مشتق څخه بېرته د e^x تابع لاس ته لاس ته راځي.

بیلگه:

$$f(x) = b^{3x^2 - 10}; D(f) = IR; b \in IR^{>0} \quad \text{لرو:}$$

د پورته تابع مشتق ونیسئ.

$$D'(f) = D(f) = IR \Rightarrow D(f') = IR$$

$$f(x) = b^{3x^2 - 10} = g[h(x)]$$

$$g(z) = b^z \Rightarrow f'(z) = \underline{b^z \cdot \ln b}; z \in IR$$

$$h(z) = 3x^2 - 10 \Rightarrow h'(x) = \underline{6x}; x \in IR$$

$$f'(x) = g'(x) \cdot h'(x)$$

$$= b^z \cdot \ln b \cdot 6x \Rightarrow z = 3x^2 - 10$$

$$= b^{3x^2 - 10} \cdot \ln b \cdot 6x; x \in IR$$

$$= \underline{\underline{\ln b \cdot 6x \cdot b^{3x^2}}}; D(f) = IR; b \in IR^{>0}$$

تمرینونه:

د لاندې توابعو لومړی مشتق وټاکئ.

$$a) f(x) = 3 \cdot e^{-2x+1}$$

$$b) f(x) = e^{x^2+2x-1}$$

$$c) f(x) = (x-1) \cdot e^x$$

$$d) f(x) = \sqrt{e^x}$$

$$e) f(x) = x^n \cdot e^e$$

$$f) f(x) = e^{kx}$$

$$g) f(x) = 2^{\frac{1}{2x}}$$

$$h) f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{3x}$$

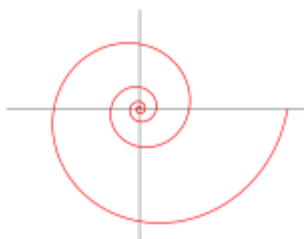
$$i) f(x) = x \cdot a^{\sqrt{x}}$$

$$k) f(x) = \sqrt{e^x + 1}$$

$$l) f(x) = \frac{e^x}{1-e^x}$$

$$m) f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

د لوگاریتم مشتق



قعالیت:

- لوگاریتم تعریف

- اکسپوننت یا توان تعریف کړئ.

- د لوگاریتم او توان ترمنځ اړیکې وښایاست.

قضیه:

د لوگاریتم تابع مشتق:

۱۰۸

د لوگاریتم مشتق

قضیه: هر د لوگاریتم تابع $y=f(x)=\log_b x$ د $b>0, b \neq 0, x>0$ سره، مشتقوری

$$f'(x) = \frac{1}{x} \log_e e = \frac{1}{x \cdot \ln b}$$

ثبوت: دا چې تابع $y=f(x)=\log_b x$ یواځې د $x>0$ لپاره پیژندلري یا تعریف دی. په هر ځای کې چې $x>0$ وي، نو دا لاندې باوري دی:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{\log_b(x_0+h) - \log_b x_0}{h} = \frac{1}{h} \log_b \frac{x_0+h}{x_0} = \log_b \left(1 + \frac{h}{x_0}\right)^{\frac{1}{h}}$$

د (لومړۍ برخې) له مخې دا لاس ته راځي:

$$\log_b \left(1 + \frac{h}{x_0}\right)^{\frac{1}{h}} = \left[\left(1 + \frac{h}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{h}} \right]^{\frac{1}{x_0}} \rightarrow e^{\frac{1}{x_0}}$$

او له دې امله

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=x_0} = f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \log_b \left(1 + \frac{h}{x_0}\right)^{\frac{1}{h}} = \log_b e^{\frac{1}{x_0}} = \frac{1}{x_0} \log_b e$$

د لوگاریتم تابع په ورکړشوي مشتق سره د خپل ټول پیژند سټ کې د مشتق قابلیت لري.

$$f'(x) = \frac{1}{x} \log_b e \quad \text{همداسې} \quad f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{\ln e}{\ln b}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln b} \quad \text{خه چې د بنوولو وو.}$$

په ځانګړي ډول دا لاندې باور لري:

$$\left(\frac{d(\ln x)}{dx} \right)_{x=x_0} = \frac{1}{x_0}$$

بیلګه:

$$f(x) = \log \sqrt{x^3} \quad \text{د مشتق وشمېرئ.}$$

بنوونه: په لاندې توګه مخ ته خو:

$$\begin{aligned}f(x) &= \log \sqrt{x^3} = \log_{10} x^{3/2} = \frac{3}{2} \log_{10} x \\ \Rightarrow f'(x) &= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x \cdot \ln 10} \\ &= 0.6514 \cdot \frac{1}{x}; \underline{\underline{D(f') = \mathbb{R}^{>0}}}\end{aligned}$$

بیلگه:

$$\text{د } y = \ln \frac{x-2}{x+2} \text{ تابع مشتق پیدا کړئ}$$

حل:

موږ لیکلای شو :

$$\begin{aligned}y &= \ln \frac{x-2}{x+2} \\ &= \ln(x-2) - \ln(x+2)\end{aligned}$$

$$\text{دا چې } (\ln(x-2))' = \frac{1}{x-2} \text{ او } (\ln(x+2))' = \frac{1}{x+2} \text{ دی، نو لرو:}$$

$$\begin{aligned}y' &= (\ln(x-2))' - (\ln(x+2))' \\ &= \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} = \frac{x+2-x-2}{(x-2)(x+2)} \\ &= \frac{4}{x^2-4}\end{aligned}$$

بیلگه:

$$\text{لرو: } f(x) = \log_2(x)$$

د لوگاریتم مشتق

غواړو پيدا کړو: ۱. مشتق $f'(x)$

مشتق د $x_0=16$ په ځای کې

حل: د حل لپاره د پورته فرمول څخه کار اخلو: $f'(x) = 1/(x \cdot \ln 2)$

اوس د $x_0=16$ په ځای کې مشتق ټاکو:

$$f'(x_0) = 1/(16 \cdot \ln 2) = 1/(16 \cdot 0.69) = \underline{0.09}$$

تمرینونه:

د لاندې توابعو لومړی مشتق وټاکئ یا پيدا کړئ.

$$a) f(x) = \ln \sqrt{x}$$

$$b) f(x) = \ln(x^2 - 4)$$

$$c) f(x) = \ln \frac{2}{x^3}$$

$$d) f(x) = \ln \frac{x+1}{x}$$

$$e) f(x) = x \cdot \log_2 x^2$$

$$f) f(x) = (x^4 - 1) \cdot \log$$

$$g) f(x) = \frac{\ln}{x+2}$$

$$h) f(x) = \frac{x^4}{\ln x}$$

د یوې تابع مشتقوالی یا - قابلیت

موږ ولیدل، چې یوه تابع په هر ځای کې تعریف نه ده، په هر ځای کې حد نه لري او همداسې په هر ځای کې متمادي نه ده. په همدې توګه یوه تابع هر چیرته د مشتق قابلیت هم نه لري.

تابع $f(x) = |x|$ په ۰ ځای کې تعریف نه ده:

د ټولو $x > 0$ له پاره باور لري $f(x) = x$

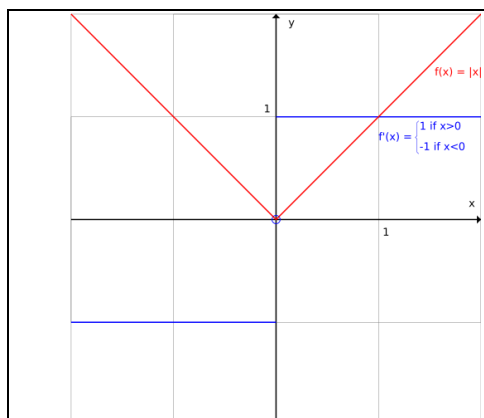
د لوګاریتم مشتق

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 0}{x - 0} = 1 \text{ او له دې سره } 1$$

د ټولو $x < 0$ لپاره د پورته په برعکس $f(x) = -x$ باور لري او له دې سره:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x - 0}{x - 0} = -1$$

دا چې کين- او بنی اړخیز حد یو له بل سره سر نه خوري، حد (پوله) نه شته. تابع په دې راورل شوي ځای کې مشتقور نه ده.



د تابع مشتق کېدنه په نورو ټولو ځایونو کې تر اوسه تل ورکړ شوې.

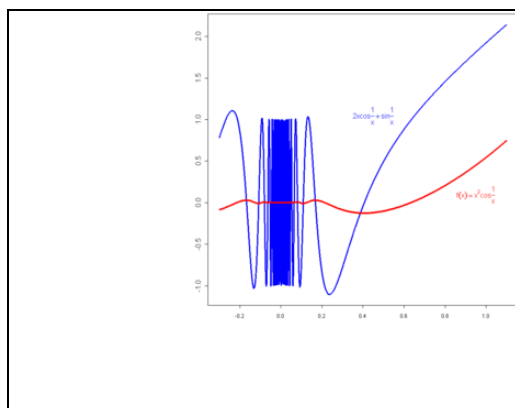
په صفر ځای کې سره له دې یو بنی اړخیز مشتق ورکړ شوی، یعنې لرو:

$$f'_{+}(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x - 0}{x - 0} = 1$$

او یو کين اړخیز مشتق هم:

$$f'_{-}(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x - 0}{x - 0} = -1$$

که پورته گراف ته وگورو، نو وبه پوهیږو، چې یوه مشتقور تابع باید گوډه نه وي یا په کوم ځای کې ماته نه وي یا په بل عبارت کونج جوړ نه کړي.



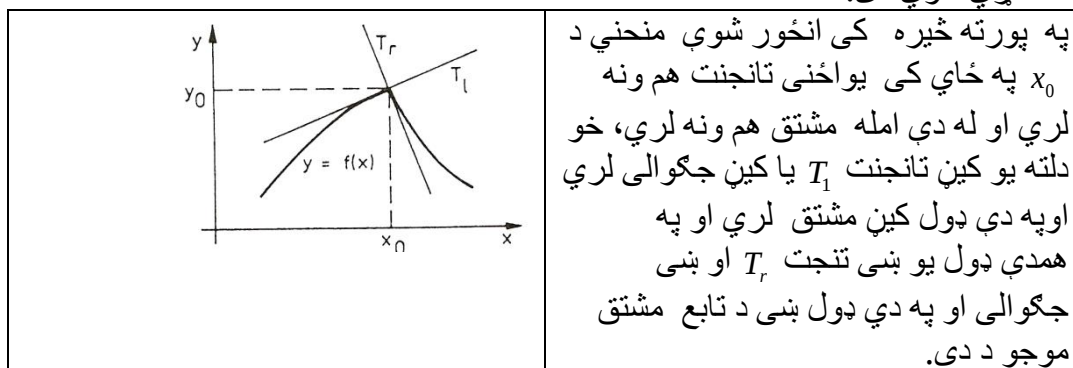
د یوه نه متمادي مشتقور تابع لپاره بېلگه: یو تابع متمادي مشتقور بلل کېږي، که د هغې مشتق متمادي وي. که یوه تابع هر چیرته مشتقور وي، باید نه دی چې مشتق دې یې هم متمادي وي. د بېلگې په توګه:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

تابع په هر ټکي کې حتی د $x = 0$ سره مشتقور دی. مشتق د لوګاریتم مشتق

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

يې ددې په خلاف په 0 ځای کې متمدادي نه دی
 مشتق د ټاکلو نيوټونيا فرضيو لاندې ممکن او له دې امله هلته هدفمند دی، چېرته چې
 ليميت (پولي) ته تګ ممکن وي يعني چيرته چې د تفاضل ویش يو ليميت د $x \rightarrow 0$ لپاره
 ولري. $\left[\begin{smallmatrix} P & T & P \\ SEP & SEP & SEP \end{smallmatrix} \right]$
 که کومه منحنی چيرته راماته وي (څېره 4)، گورو چې هلته تانجنت نه شته او همدارنگه
 جگيدل او هم د تفاضل ویش نه شته. پس د مشتق قابليت د متمداديت په څير د يوې تابع
 ځانگړي خوي دی.



په يوه نامتمدادي تابع کې د تانجنت يا مشتق پوښتنه بی معناده.
 دا دلته انځور شوی پرابلم يا مسأله اوس د شميرني د ټيک فرمول لاندې راوړو.
 وليدل شو چې په يوه ځای x_0 کې چې تابع متمدادي نه وي د مشتق پوښتنه بی مانا ده. نيسو
 چې دا دې ښوول شوی وی. دا څرگنده ده چې هره متمدادي تابع بايد ضرور مشتقورنه
 وي. د بيلگي په توگه که تابع زاويه يا کونج ولري.
 دې ته اړتيا ده چې وښايو، چې يواځي متمدادي توابع د مشتق قابليت لري، دا بيا دا معنا
 لري چې هره تابع چې د مشتقور وي بايد لږ تر لږه متمدادي وي او په دې ډول مشتق
 متمداديت په بر کې لري يا خوندي لري، په دې معنا چې متمداديت د مشتقوروالی لپاره
 اړين يا ضروري شرطونه دي

جمله:

که د $y = f(x)$ تابع د x_0 په ځای کې مشتق وړ وي، نو هلته ضرور متمادي ده. ښوونه: د مشتق د تعریف څخه لاس ته راځي، چې حد شته دی.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

لیمیت یوځای هلته کیدی شي چې موجود وي، چې د $x \rightarrow x_0$ لپاره د مخرج سره صورت هم صفر ته ولاړ شي یانې $f(x) - f(x_0) > 0$ لاړ شي. نو باور لري: $f(x) > f(x_0)$ د $x \rightarrow x_0$ لپاره. دا د متمادیت پیژند دی.

دا تفاضل وېش په یوه بله بڼه هم انځوریدلی شي که $x = x_0 + \Delta x$ وکاروو: دلته مشتق $f'(x)$ په لاندې توګه ورکړ شوي دی:

د یوه تابع د مشتق قابلیت د لومړي ځل لپاره یوځای په ځای (lokal) پورې اړخوي دی یعنې په یو ځای $x = x_0$ کې تعریف دی. لکه څنګه چې په متمادیت کې (لومړي څپرکي دي وکتل شي) کیدی شي چې د مشتق قابلیت او مشتق یوه واز یابند اینټروال ته وغزول شي.

تعریف:

د $y = f(x)$ یوه تابع په واز اینټروال (a, b) کې، د اشتقاق قابل (مشتق وړ) بلل کېږي، د لاندې مشتق سره.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = f'(x) ; a < x < b$$

که دا د $x = x_0 \in (a, b)$ په هر ځای کې د مشتق قابلیت ولري د مشتق $f'(x_0)$ سره. دا په بند اینټروال $[a, b]$ کې مشتق وړ بلل کېږي، که دا سربېره پر دې د a په ځای کې ښی اړخیز اود b په ځای کې کین اړخیز مشتق وړ هم وي.

بیلګه ۲، ۶:

د توان تابع $y = x^n$, $n = 1, 2, 3, \dots$ په هر ځای کې د مشتق قابلیت لري د لاندې مشتق سره

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$$

د ساین تابع $y = \sin x$ او کوساین تابع $y = \cos x$ په هرځای کې مشتق ورده، د لاندې مشتق سره

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\sin x}{dx} = \cos x, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d\cos x}{dx} = -\sin x$$

په یوه واز اینتروال کې $y = f(x)$ مشتق ور تابع مشتق بیرته $y' = f'(x)$ تابع ده، نو په دې ډول یې د مشتق قابلیت اود متمادیت قابلیت پوښتنه کیدی شي.

تعریف (پیژند) ۲.۴:

په یو د $x = x_0$ چاپیریال کې د مشتق قابل تابع (رابیلیدور بلواک) $y = f(x)$ په $x = x_0$ کې دوه واره د مشتق قابلیت لري (رابیلیدور دی)، که د هغې اشتقاق (رابیلیدنه) $y' = f'(x)$ هلته د مشتق قابلیت لري (رابیلیدور وي). سړی د $f'(x)$ مشتق د تابع (رابیلیدنه د بلواک) $y = f(x)$ دویمه رابیلیدنه بولي او لیکي:

$$\left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)_{x=x_0} = f''(x_0) = \left(\frac{df'(x)}{dx} \right)_{x=x_0}$$

یو په یوه واز اینتروال کې مشتق کېدونکې تابع $y = f(x)$ هلته دوه واره مشتق ور بلل کېږي، که د هغه مشتق $y' = f'(x)$ په دې اینتروال کې مشتق ور وي. $\left[\begin{smallmatrix} P \\ SEP \end{smallmatrix} \right]$ ددې لپاره لیکل کېږي:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f''(x) = \frac{df'(x)}{dx}$$

تمرین:

وښایی چې ایا دا توابع $y = c$; $y = x^n$; $y = \cos x$ هر چیرته دوه واره مشتق ور دي؟

د معکوس تابع مشتق

فعالیتونه:

د یوې تابع معکوس تابع تعریف کړئ.

د $f(x) = \frac{x^2+5x}{x^3-8}$ تابع د تعریف ساحه وښایاست.

د پورته تابع د مشتق مشتق وشمیرئ.

اوس دې معکوسه تابع تر څیرني لاندې ونيول شي . دلته دې ونيول شي، چې $y = f(x)$ په $x = x_0$ کې د $f(x) = 0$ سره او په یوه د x_0 چاپیریال کې جگیدونکی دی $f'(x_0) > 0$ او یا په کلکه لوېدونکی $f'(x_0) < 0$ او له دې امله معکوس کیدونکی هم دی، یعنې $x = f^{-1}(y)$ ، نود کمښتویش لپاره معکوسه تابع لاس ته راځي:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

او دا چې $x > x_0$ او $f(x)$ د متماډیت له امله هم $y > y_0$ او باورلري.

$$\left(\frac{dx}{dy} \right)_{y=y_0=f(x_0)} = \left(\frac{df^{-1}(y)}{dy} \right)_{y=y_0=f(x_0)} = \frac{1}{\left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=x_0}} = \frac{1}{\left(\frac{df(x)}{dx} \right)_{x=x_0}}$$

که د لاندې ټکي ځای $x = x_0$ لپاره ساده بیرته x ولیکو نو دا لاندې لنډ فورم لیکلی شي:

د $y = f(x)$ لپاره باور لري.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

د پورته ورکړ شوو نېونوسره سړی بیرته یو د تفاضل ویش لاس ته راوړي چی د هغه سره د مروج ویش په څیر شمیرنه کیدی شي، لکه

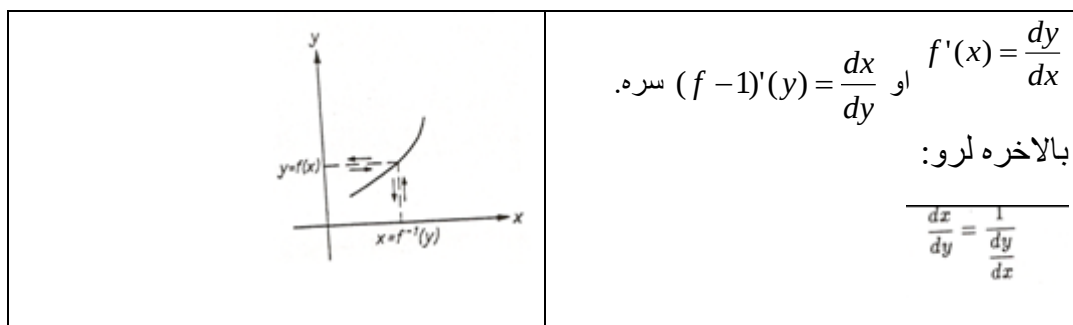
$$(f^{-1})'(y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x)}$$

جمله ۲. ۷: د معکوس تابع مشتق: که $y = f(x)$ په یوه چاپیریال کی د $x = f^{-1}(y)$ سره معکوس او هملته د $|f'(x)| = 0$ سره مشتق وړ وي، نو معکوس تابع د

$$(y = f(x)) \text{ سره مشتق وړی او باوري } \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

حل: کیدی چی د f تابع د مشتق څخه د f^{-1} معکوس تابع مشتق لاس ته راوړو. له دې امله له $x > 0$ او هم $y > 0$ او معکوس څخه، د $y = f(x)$ سره، لاس ته راځي:

$$(f^{-1})'(y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x)}$$



تمرینونه: د $y = f(x) = x^n; n = 1, 2, 3, 4, \dots$ تابع لپاره که $x \geq 0$ وټاکل شي او په دې $x = \sqrt[n]{y} = y^{\frac{1}{n}}; y \geq 0$ توگه یې معکوس تابع وي، نو د معکوس تابع مشتق یې ونیسئ.

-- د $y = x^{\frac{m}{n}}, m, n \in N$ تابع د معکوس تابع مشتق ونیسئ.

د ایمپلیسیت Implicit تابعو مشتق

د یوې تابع هغه زیات د استعمال وړ انځورونه د تابع د مساوات له مخې او د $f(x)$ تابع د ورشو ورکولو سره په اکسپلیسیت Explicit ډول، که تابع متحوله د برابرې په یوه اړخ ځانله شوې وي:

$$Y = 3x^2 + 7x \quad \text{د بیلګې په توګه}$$

د یوې تابع هغه زیات د استعمال وړ انځورونه د تابع د مساوات له مخې دي، د تابع د ورشو ورکولو سره په ایمپلیسیت Implicit ډول د بیلګې په توګه $Ex^2 + 7x + y = 0$ فعالیت:

که $Ex^2 + 7x + y = 0$ ولرو، څنګه کولی شو، چې ددې تابع مشتق پیدا کړو؟
قضیه:

یوه تابع په ایمپلیسیته بڼه $x^2 + xy - y^2 = 1$ لرو، غواړو $\frac{dy}{dx}$ پیدا کړو.
بڼوونه:

$$\frac{d}{dx}(x^2 + xy - y^2) = \frac{d}{dx}(1) \quad (1)$$

$$2x + (1 \cdot y + x \frac{dy}{dx}) - 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$2x + y = \frac{dy}{dx} - x \frac{dy}{dx}$$

$$2x + y = \frac{dy}{dx}(2y - x)$$

$$\frac{2x + y}{2y - x} = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + y}{-x + 2y} \quad \vee \quad \frac{2x + y}{2y - x}$$

ایمپلیسیت مشتق د یوې تابع مشتق نیولو لپاره یو امکان دی، چې نه ایمپلیسیت یعنې د یوه ترم سره ورکړ شوی وي، بلکې د ایمپلیسیت یعنې د یوه مساوات له مخې ورکړ شوی وي. دا قاعده د دې لپاره هم کارول کیږي، چې تابع په اکسپلیسیت ډول ورکړ شوی وي، خو د دې مشتق نیول ستونځمن وي.

بیلگه :

د $f(x) = x^x$ تابع مشتق په ورسره بلډو مشتقوونینو نه شي نیول کیدی، ځکه چی په بنسټ او جگ اکسپوننت کي یې متحولې پرتې دي. د لوگاریتم له لارې د اکسپوننت متحوله له منځه وړل کیدی شي:

$$\ln f(x) = x \ln x$$

اوس ایمپلیسیت دا حل کوو، داسې چې دواړو لورو ته یې د x پسې مشتق نیسو:

$$\frac{d(\ln f(x))}{dx} = \frac{d(x \ln x)}{dx}$$

د دې مساوات مشتق د ځنځیرقانون له لارې صورت نیسي:

$$\frac{d(\ln y)}{dy} f'(x) = \frac{d(x \ln x)}{dx}$$

دلته $y = f(x)$ دی. د لوگاریتم او ضرب د مشتق قانون لاس ته راځي:

$$\frac{1}{y} f'(x) = \ln x + x \frac{1}{x}$$

که په $f(x)$ پسې حل شي او د y له پاره بېرته $f(x) = x^x$ ځا په ځای کړو، نو دا حل لاس ته راځي:

$$f'(x) = y (\ln x + 1) = x^x (\ln x + 1)$$

تمرینونه:

- د r وړانګې سره د د ایري مساوات $x^2 + y^2 = r^2$ سره. دایمپلیسیت مشتق له لارې یې مشتق ونیسئ.

$$E : x^2 + 3y^2 = 7$$

-- د سره ورگر شوې الیپسی مشتق دې و نیول شي.

د بنسټیزو مشتقونو جدول

Nr.	$f(x)$	$f'(x)$	نیونه یا فرضیه
1	$c = konst$	0	
2	X^n	$n \cdot X^{n-1}$	$n = 1, 2, 3, \dots$
3	X^n	$n \cdot X^{n-1}$	X ټول عدد او $X \neq 0$
4	X^r	$r \cdot X^{r-1}$	r rational, $X > 0$
5	$\sqrt[n]{X} = X^{\frac{1}{n}}$	$\frac{1}{n} \cdot X^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{nX} \sqrt[n]{X}$	$n = 1, 2, 3, \dots, X > 0$
6	X^a	$a \cdot X^{a-1}$	$X > 0$, a reell
7	a^x	$a^x \ln a = \frac{a^x}{\log_a e}$	$X > 0$, $a \neq 1$
8	e^x	e^x	
9	$\log_a X$	$\frac{1}{X} \log_a e = \frac{1}{X \ln a}$	$a > 0$, $a \neq 1$, $X > 0$
10	$\ln X$	$\frac{1}{X}$	$X > 0$
11	$\sin X$	$\cos X$	
12	$\cos X$	$-\sin X$	

$$13 \quad \tan x \quad \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \quad x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$14 \quad \cot x \quad -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x) \quad x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} (Z)$$

د پورته جدول په مرسته کیدی شي چی کم له کمه په فورمال ډول ، په خوښه د هرې شننيزي يا سپرنيزې(تحليلي) ويښي يا افادي مشتق په شننيزه توگه لاس ته راوړی شي، سره له دې هم باید سړی همغه نیونی په نظر کي ونیسي.

د فصل ټولگه

کښتویش **Differenzenquotient** (د سیکانت جگینه) یا منحنی تغیر ارزښت

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

مشتق **Differetialquotient** (د تانجنت چگوالی یا لحضوي تغیر ارزښت)

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

د ثابتی قانون

$$f(x) = c \cdot u(x) \text{ mit } c = \text{constant}$$

$$\Rightarrow f'(x) = c \cdot u'(x)$$

$$\boxed{f' = c \cdot u'}$$

د جمعې قانون

$$f(x) = u(x) + v(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

$$\boxed{f' = u' + v'}$$

د ضرب قانون

$$f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

$$f' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

د وېش قانون

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

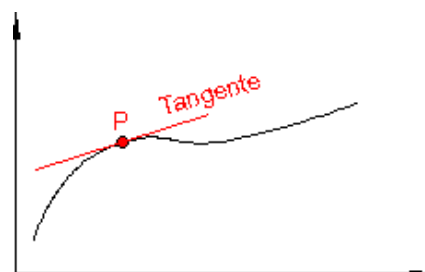
$$f' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

د ځنځير قانون

$$f(x) = f[z(x)]$$

$$\Rightarrow f'(x) = f'(z) \cdot z'(x)$$

(تعريف): د يوه تابع گراف ميل (جگوالي) په يوه ټکي P کې په همغه ټکي کې د تانجنت د ميل يا جگوالي گراف سره برابر دی



د کمښت ویش يا د تفاضل ویش Difference quotient

د يوې کرښې جگېدنه بې له مشتق نيونې ټاکل کېدای شي:

کرښه $y = f(x) = mx + a$ لرو

د دې کرښې د جگېدنې فرمول په لاندې ډول دی:

د څپرکي تمرینونه ۱۲۲

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

د څپرکي تمرینونه:

(۱) کمښتویش (د تفاضل وېش) ارزښت د P او Q په ټکو کې وټاکئ.

a) $P(3,2)$, $Q(5,4)$ b) $P(2,4)$, $Q(3,1)$

(۲) د $x = x_0$ په ځای کې د f تابع د تانجنت جگوالی وټاکئ.

a) $f(x) = x^2$, $x_0 = 2$ b) $f(x) = 0.5x^2$, $x_0 = 3$

(۳) د کمښتویش (د تفاضل وېش) او مشتق لاندې څه پوهیږو او د دوي ترمنځ فوېپر څه دی؟

(۴) د یوه تابع د سکانت () لاندې څه پوهیږو او د تانجنت جگېدو لاندې څه پوهیږو؟ او دوي ترمنځ کومې اړیکې پرته دي؟

(۵) د تابع مشتق د توان قانون له مخې پیدا کړئ.

a) $f(x) = x^5$ b) $f(x) = x^6$

c) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ d) $f(x) = \frac{1}{x^5}$

e) $f(x) = \sqrt{x}$ f) $f(x) = \sqrt[4]{x^3}$

g) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ h) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

(٦) د تابع مشتق د ثابت د قانون له مخې پيدا كړئ.

$$a) f(x) = 0.2x^5 - 3$$

$$b) f(x) = 2x^4 + 1$$

$$c) f(x) = \frac{4}{x^2}$$

$$d) f(x) = \frac{3}{x^3} + 2$$

$$e) f(x) = 6\sqrt{x}$$

$$f) f(x) = \frac{8}{\sqrt{x}} - 5$$

(٧) د تابع د گراف په مرسته وښايئ، چې ټول $g(x) + c$ ترمونه همغه مشتق لري.

ياودونه: پابت عدد كه هر كوم ارزښت ونيسي.

(٨) وښايئ، چې د $a.g(x)$ د مشتق سره د a ضريب (خه وونی) ساتلی پاتي کيږي.

(٩) د f تابع مشتق د جمعي قانون سره وښايئ

$$a) f(x) = 4x^4 - 3x^3 + x^2 - x - 1$$

$$b) f(x) = x - \sqrt{x}$$

$$c) f(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{x^3}$$

$$d) f(x) = 3x^2 + 0.4x - 5$$

(١٠) د f تابع مشتق د ضرب قانون سره وټاکئ.

$$a) f(x) = x^3(x^2 - 2x + 1)$$

$$b) f(x) = (2x^2 + 1)(x - 1)$$

$$c) f(x) = (x^2 - 5)(2x^3 + x^2 + x)$$

$$d) f(x) = (4x^2 - x + 4)(3x + 2)$$

(١١) د f تابع مشتق د ویش قانون له مخې وټاکئ.

$$a) f(x) = \frac{x^3 - 1}{4 - x^2}$$

$$b) f(x) = \frac{2x^2 + x + 3}{x + 1}$$

$$c) f(x) = \frac{4 - x - x^3}{2x^2 + 3}$$

$$d) f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^3 - 2x^2 + x}$$

(١٢) د ویش قانون له مخې په خټ ارزښت (پر عکس ارزښت) وټاکئ.

د څپرکي تمرینونه

۱۲۴

(۱۲ الف) د لاندې تابع مشتق وشمېرئ.

$$f(x) = \frac{1}{g(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{-g'(x)}{g(x) \cdot g(x)}$$

د $g(x) \neq 0$ سره

(۱۳) د f تابع ارزښت د زنځير قانون له مخې وټاکئ.

$$\begin{array}{ll} a) f(x) = (4x^4 - x)^2 & b) f(x) = (3x^2 + 4x - 5)^2 \\ c) f(x) = (2x - 7)^3 & d) f(x) = (5 - 3x^3)^4 \end{array}$$

(۱۴) د لاندې توابعو مشتق وټاکئ.

$$\begin{array}{ll} a) f(x) = \frac{1}{(2x^2 + x)^3} & b) f(x) = \frac{1}{(x - 5)^4} \\ c) f(x) = (1 + \sqrt{x})^2 & d) f(x) = \sqrt{1 - x^3} \end{array}$$

(۱۵) د لاندې توابعو درې واړه مشتق ونیسئ.

$$\begin{array}{ll} a) f(x) = x^3 - 2x^2 + 1 & b) f(x) = 2x^4 + 3x^3 - x^2 + x - 5 \\ c) f(x) = \frac{3x - 4}{x} & d) f(x) = \frac{x^2 - 1}{2 - x} \end{array}$$

(۱۶) د يو n -م درجې تابع بايد څو واړه مشتق ونيول شي چې يوه ثابته ترې لاس ته راشي.

(۱۷) د لاندې توابعو لومړی مشتق وټاکئ.

$$\begin{array}{lll} a) f(x) = \sin 3x & b) f(x) = \sin x \cdot \cos x & c) f(x) = \sin^2 x \\ d) f(x) = \tan x + 2 \sin 2x & e) f(x) = \sin x^2 & f) f(x) = \sin \frac{x-1}{x+1} \end{array}$$

(۱۸) د $f(x) = \sin^n x (n \in \mathbb{N})$ تابع د لومړي مشتق لپاره فرمول وښایاست یا وټاکئ.

(۱۹) د تانجنت تابع لپاره د ساین او کوساین قانون په مرسته د مشتق قانون و ښایاست.

(۲۰) وښایاست چې د $f(x) = \tan x$ لپاره $f'(x) = 1 + \tan^2(x)$ هم باور لري.

(۲۱) د ویش قانون له مخې د کوتانجنت قانون پیدا کړئ او هم د تانجنت قانون له مخې.

(۲۲) ولې د ساین تابع او د کوساین تابع په خوښه زیات مشتقور دي.

(۲۳) د لاندې توابعو لومړی مشتق وټاکئ.

$$a) f(x) = 3 \cdot e^{-2x+1}$$

$$b) f(x) = e^{x^2+2x-1}$$

$$c) f(x) = (x-1) \cdot e^x$$

$$d) f(x) = \sqrt{e^x}$$

$$e) f(x) = x^n \cdot e^e$$

$$f) f(x) = e^{kx}$$

$$g) f(x) = 2^{\frac{1}{2x}}$$

$$h) f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{3x}$$

$$i) f(x) = x \cdot a^{\sqrt{x}}$$

$$k) f(x) = \sqrt{e^x + 1}$$

$$l) f(x) = \frac{e^x}{1-e^x}$$

$$m) f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

(۲۴) د $f(x) = (x^2 + 2) \cdot \lg x \quad (x > 0)$ مشتق دې پیدا شي.

مشتق یې وټاکئ یا پیدا کړئ.

$$a) f(x) = \ln \sqrt{x}$$

$$b) f(x) = \ln(x^2 - 4)$$

$$c) f(x) = \ln \frac{2}{x^3}$$

$$d) f(x) = \ln \frac{x+1}{x}$$

$$e) f(x) = x \cdot \log_2 x^2$$

$$f) f(x) = (x^4 - 1) \cdot \log$$

$$g) f(x) = \frac{\ln}{x+2}$$

$$h) f(x) = \frac{x^4}{\ln x}$$

(۳۵) د لاندې توابعو لپاره خورا لویه تعریف ورشو (ساحه) ورکړئ او لومړی مشتق یې وټاکئ.

د تعريف سټ (ډېرې) هغه ورشو (ساحه) وركړئ، په كومه كې چې توابع مشتقور دي.

$$a) f(x) = \sqrt{x+3}$$

$$b) f(x) = \sqrt{(x-2)(x-4)}$$

$$c) f(x) = x\sqrt{x}$$

$$d) f(x) = \sqrt{x^2+2}$$

(۳۶) ولې بايد د ټيک شمېرنې لپاره لوگاريتمي توابعو ته همداسې سوچ وشي، لکه ريښه توابعو ته ؟

(۳۷) ۹۰ — مه پوښتنه د لوگاريتمي توابعو لپاره ځواب کړئ.

$$a) f(x) = \ln(x^4 - 1)$$

$$b) f(x) = \ln(2x + 4)$$

(۳۸) — د لاندې توابعو لومړی مشتق پيدا کړئ.

$$a) f(x) = \frac{2}{5}x^{10} - \frac{1}{5}x^5$$

$$b) f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 7x + 8$$

$$c) f(x) = 5x^8 - 3x^6 + \frac{10}{x^3} - \frac{8}{x^7}$$

$$d) f(x) = (2x-5)(x^2+11x-3)$$

$$e) f(x) = \cos x - 2x \sin x$$

$$f) f(x) = \sin^3 x$$

$$g) f(x) = e^x + \frac{1}{e^x}$$

$$h) f(x) = (x^2 - 2x + 2) \cdot e^x$$

$$i) f(x) = \frac{3e^x + 1}{2e^x - 1}$$

$$j) f(x) = \frac{2e^x(x^2 - 3)}{x}$$

$$k) f(x) = \frac{1}{x^2} \ln x^2$$

$$l) f(x) = \frac{x \cdot \ln x}{1-x}$$

$$m) f(x) = \frac{\sin x}{\ln x}$$

$$n) f(x) = 3x^2 \cdot \lg x$$

$$o) f(x) = \ln(\sin x)$$

$$p) f(x) = \sqrt{4x^2 + x + 1}$$

$$q) f(x) = \sqrt[n]{ax+b}$$

$$r) f(x) = (x^2 + 3)e^{-2x}$$

(۳۹) - لومړی مشتق وټاکئ

a) $f(x) = \sin^n$

b) $f(x) = (\ln x)^n$

c) $f(x) = s + \frac{1}{x}$

d) $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^n$

(۴۰) - د هرې تابع لومړي درې مشتقونه وټاکئ

a) $f(x) = e^{x^2}$

b) $f(x) = \sin x \cdot \cos x$

c) $f(x) = x + \frac{1}{x}$

d) $f(x) = x^2 \cdot e^x$

(۴۱) - په کوم تابع کې لومړی مشتق f د f سره برابر دی.

-(۴۲)

الف: د کوم f تابع لپاره $f'(x) = 2f(x)$ دی؟

ب: د کوم f تابع لپاره $f'(x) = -f(x)$ دی؟

(۴۳) - د $f(x) = \sin x$ څوم مشتق د f سره سر خوري یا برابر دی؟

(۴۴) - د لاندې توابعو لپاره -م مشتق ته وده ورکړئ.

a) $f(x) = e^{ax}$

b) $f(x) = \ln(x+1)$

د رول قضیه (Theorem of Rolle)

که د f یوه تابع په بند اینتروال $[a, b]$ کې متمادی وي او k د a او b ترمنځ پروت وي، نو هلته لږ تر لږه یو عدد c د $f(a)$ او $f(b)$ ترمنځ شته، داسې چې $f(c) = k$ دی.

فعالیت:

__ که f تابع په یوه بند اینتروال $[1, 3]$ کې ثابت وي، دا به د یوې تابع لپاره څه معنا ولري، چې تابع څنگه ځلي. ایا دا تابع به جگ ټکي یا ټیټ ټکي ولري او که څنگه؟ دا روښانه کړئ او د اینتروال په خوبه درې منځ ټکو کې ارزښتونه یو له بل سره پرتله کړئ.

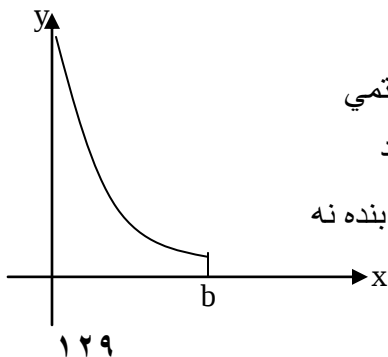
__ وښایست، چې د $f(x) = -x$ تابع په $[-1, 1]$ انټرول کې جگ او ټیټ ټکي چیرته لري او د یو او منفي یو تر منځ د درې x ارزښتونو لپاره په گراف د f ارزښتونه وښایست او وښایست، چې یو له بل توپیر لري او که نه؟

__ د رسم له لارې وښایست، چې x^2 کوم جگ یا ټیټ ټکي لري او که څنگه او که لري یې چیرته؟

د وایر شتراس قضیه Theorem of Weierstrass

که د f یوه تابع په بند اینتروال $[a, b]$ کې متمادی وي، نو f په دې اینتروال کې لږ تر لږه یو جگ ارزښت (اعظمي قیمت) او یو ټیټ ارزښت (اصغري قیمت) نیسي دلته شننیز یا تحلیلي ځواب نه ورکول کيږي، دا وینا د لیدلو له مخې معقوله برېښي.

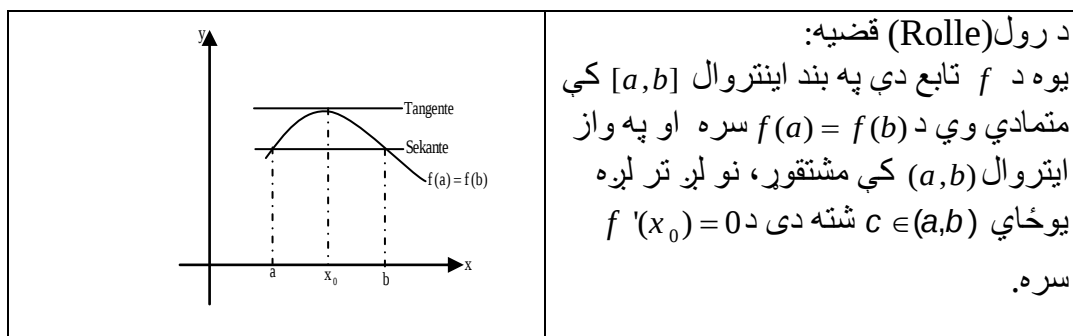
کیدي شي چې یو همغریز (monoton) مونوتون یا جگټیټ ارزښت د اینتروال په غاړه هم پروت وي. د اینتروال محدودوالی (بندوالی) بی قید او شرطه حتمي دی. د بیلگې په توگه د $y = f(x) = \frac{1}{x}$ تابع په نیم بند اینتروال $(0, b]$ کې متمادی ده، مگر پورته لور ته بنده نه ده، چې په دې توگه خورا جگ ټکي نه لري



د رول قضیه

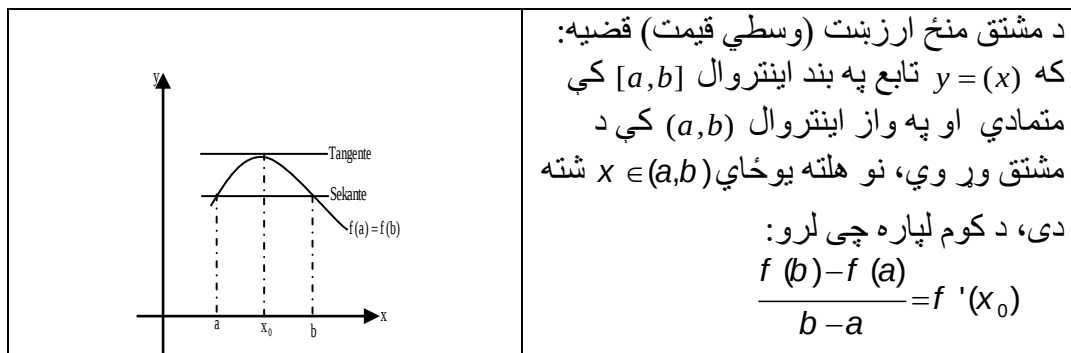
د مشتق منځ ارزښت قضیې

د تانجنت او قاطع ترمنځ او په همدې ډول د مشتق – او تفاضل ویش ترمنځ داسې نږدې اړیکې شتون لري، هغه چې د انالیزې په منځ ارزښت قضیو کې تشریح کېږي. د تابع او انحرافي ارزښتونو څخه لومړۍ پسې تړلې لاندې د رول قضیه لاس ته راځي



حل:

1. که f ثابت وي نو سملاسي لاس ته راځي: $f'(x_0) = 0$
 2. که f ثابت نه وي، نو د وایر شتراس د قضی له مخې لږ تر لږه د تابع یوخورا لوي او یوخورا کوچنی ارزښت موجود دی. دا ارزښتونه توپیر لري، ځکه چې f ثابت نه دی. نو له دې کبله لږ تر لږه له دې ارزښتونو څخه د $f(a) = f(b)$ سره نامساوي دی. په دې اساس د اینټروال په دننه کې یو مونوټون (جگتیت) ځای x_0 موجود دی. د مشتقور توابعو مونوټوني (جگتیت ارزښت) شتون د اړین یا ضروري شرطونو قضی له مخې لاس ته راځي: $f'(x_0) = 0$
- تر اوسه مو وښوول، چې د لازمو شرایطو لاندې یوې افقي قاطع ته یو افقي تانجنت هم شته دی.
- دا هندسي پرابلم کیدی شي چې عمومي شي.
- پوښتنه رامنځ ته کېږي، چې ایا یوې مایټلې قاطع ته په هغه ډول تانجنت د هغه میل (جگوالي) سره جوړېدلی شي؟
- ځواب یی لاندې قضیه راځوي.



حل: دا پرابلم په یوه مرستندوي تابع داسې تعریفیږي، چې د رول قضیه وکارول شي. د

دې لپاره د قاطع مساوات رامنځ ته کوو:

$$y = g(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$$

د مرستندوي تابع په څیر د مشتق تابع جوړیږي:

$$h: h(x) = f(x) - g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a),$$

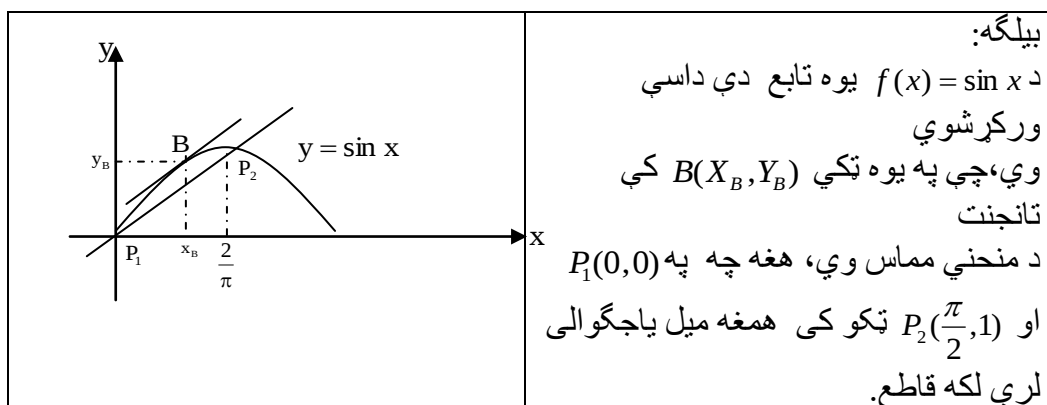
نو باور لري: $h(a) = h(b) = 0$ برسیره پر دې h په (a, b) کې د مشتق وړوالی لري او په

$[a, b]$ کې متمادی دی. له دې سره د رول د قضیې وړاند نیونه (فرضیه) ورکړ شوي، دا

په دې معنا چې یوځای $x \in (a, b)$ شته دی د $h'(x) = 0$ سره، چې له هغې لرو:

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{ یعنی } h'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

پورته لاسته راوړنه به دا لاندې بیلگې نوره هم روښانه کيږي.



$$m = \frac{\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0}{\frac{\pi}{2} - 0} = \frac{2}{\pi} \text{ ميل ياجگوالی: } \frac{2}{\pi}$$

$$f'(x_B) = \cos x_B = \frac{2}{\pi} \text{ په ټکی کې } B(x_B : y_B) \text{ د منحنی ميل}$$

$$f(x_B) = f(0,88) = 0,77 \text{ او } x_B = \arccos \frac{2}{\pi} = 0,88 \text{ له دې څخه لاس ته راځي:}$$

$$B(0,88 : 0,77) \text{ لمس ټکی:}$$

$$y = \frac{2}{\pi}(x - 0,88) + 0,77 \text{ د تانجنت مساوات:}$$

د منځ قضی د عمومیت څخه لاس ته راځي:

پراخه شوې د منځ ارزښت قضیه:

که $u = f(x)$ او $v = g(f)$ په بند اینټروال $[a, b]$ کې متمادي توابع وي او په واز اینټروال (a, b) کې مشتقور او $g'(x) \neq 0$ باور ولري، نو د ټولو $x \in (a, b)$ لپاره، کم له کمه یوځای $x_0 \in (a, b)$ وجودلري چی لاس ته تري راځي:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

حل: د $g'(x) \neq 0$ له امله g معکوس کېدونکی ده او $v = g(x)$ مساوات د x په لور

معکوس کېدنه ورکوي، یعنې: $x = g^{-1}(v)$

که د f په تابع کی هم نوې متحوله ځاي پر ځاي شي، نو یوه زنځيري تابع لاس ته تري راځي:

$$u = f(x) = f(g^{-1}(v)) = h(v)$$

د زنځيري قاعدې له مخې یی دا مشتق لاس ته راځي:

$$v_2 = g(b) \text{ او } v_1 = g(a) \text{ د } u = h(x) \text{ تابع د}$$

سره د وسطي قیمت قضیه استعمال شي، نو د $v_0 \in (v_1, v_2)$ ځای په لاندې ډول موجود دی:

$$\frac{h(v_2) - h(v_1)}{v_2 - v_1} = h'(v_0)$$

له دې څخه د $h(v)=f(x), v=g(x)$ او $x_0 = g^{-1}(v_0)$ سره لاس ته راځي:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

تمرینونه:

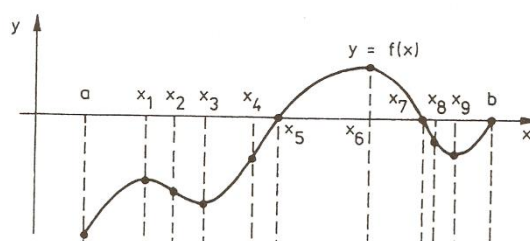
لاندې توابع دوه صفر ځایونه لري. هغه بحراني ارزښتونه پیدا کړئ، چې د دواړو صفر ځایونو تر منځ پراته وي.

$$a) f(x) = x^4 - 5x^3 + 7x - 5x + 6$$

$$b) f(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + 2x$$

همغریزې توابع (Monotony) (یوناني: یو غریز، برابر ډوله)

جگېدونکې (متزايد)، ټیټېدونکې (متناقص) توابع (جگ-ټیټېدونکې توابع)



فعالیتونه

- په پورته څېره کې ټول هغه ځایونه وښایاست، چې هلته تابع جگېږي.
- په پورته څېره کې ټول ځایونه وښایاست، چې هلته تابع ټیټیږي.
- په پورته څېره کې ټول هغه ځایونه په نڅېه کړئ، چې هلته د تانجنت میل افقي وي.

که د ټولو $x_1 < x_2$ لپاره د f یوه تابع په یوه اینتروال کې
 $(f(x_1) \geq f(x_2)) f(x_1) \leq f(x_2)$ وي، نو تابع په دې اینتروال کې مونوټون جگیدونکې
 (- تیتیدونکې) بلل کېږي، که $f(x_1) = f(x_2)$ په کې اجازه ونه لري، نو دا
 $(f(x_1) > f(x_2)) f(x_1) < f(x_2)$ کره یا په زغرده همغریز جگیدونکې (همغریز
 تیتیدونکې) بلل کېږي.
 لاندې قواعد، چې له همغریزووالي څخه په لاس راځي، د همغریزووالي حالت لپاره ګټور
 دي.
 د f یوه تابع ټیک هلته د تعریف په ورشو (ساحه) D کې همغریز جگیدونکې ده، که د
 خوښې x_1 او x_2 لپاره، چې په D کې پراته دي، باور ولري:

$$x_1, x_2 \in D \wedge x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$$

د f یو تابع ټیک هلته په D کې همغریز تیتیدونکې ده، که د خوښې x_1 او x_2 لپاره،
 چې په D کې پراته دي، باور ولري:

$$x_1, x_2 \in D \wedge x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$$

یو غریزووالی (یونواخت والی) Monotony جگیتووالی، د جگیتووالی جملې

دا $f(x) = a_1x + a_0$ کرښیز (خطي) تابع

خوړا ساده تابع ده، چې انحنانه لري. ددې

لپاره مسؤل یې ثابته جگېدنه یا ثابت میل

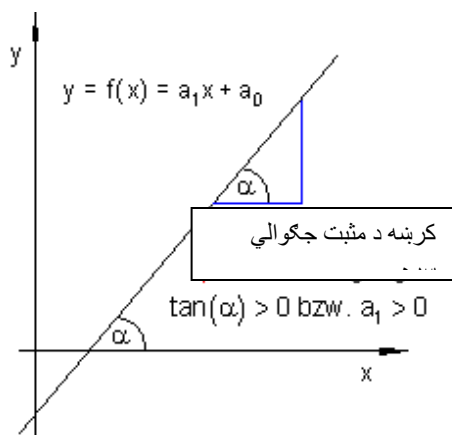
$a_1 = \tan(\alpha)$ ی، چېرته چې α د کرښې او

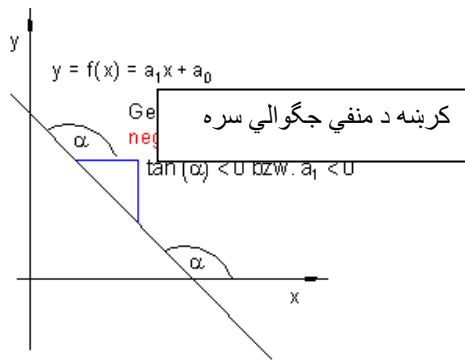
مثبت لوریز د x -محور ترمنځ

زاویه (کونج) ده.

په مخامخ شکل کې: کرښه د مثبت میل سره

$$a_1 > 0 \Leftrightarrow \tan \alpha > 0$$



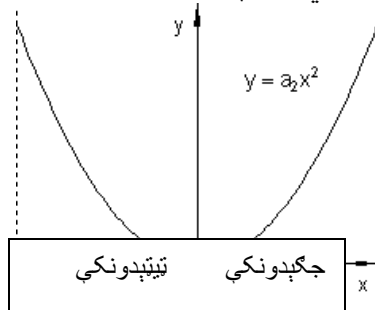


داپورته داسې دی: $\tan \alpha < 0$ همداسې
 $a_1 < 0$

که $0 < \alpha < 90^\circ$ يا $0 < a_1 < \infty$ وي، دا په دې مانا چې $a_1 > 0 \vee \alpha > 0$ همداسې ($\Leftrightarrow$)، نو کرنه جگپړي. دا معنی لري، چې د جگپړونکي x سره د تابع $f(x)$ ارزښت هم جگپړي. په مخامخ شکل کې: کرنه د منفي جگپړني سره: $\tan \alpha < 0$ همداسې ($\Leftrightarrow$) $a_1 < 0$

که $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ يا $-\infty < a_1 < 0$ وي، دا په دې معنی، چې $\alpha < 0$ همداسې $a_1 < 0$ ، نو کرنه ټيټپړي يا لويږي. دا په دې معنی، چې د جگپړونکي x سره د تابع $f(x)$ ارزښت کوچنی کيږي. په پورته دواړو حالتونو کې د همغږيزې تابع (يا د جگ-ټيټپړونکي تابع) غږيږو او له يوه همغږيز جگپړونکي تابع څخه، که $a_1 > 0$ وي. له يوې مونوټون ټيټپړونکي تابع څخه، که $a_1 < 0$ وي.

دا د مونوټوني کلمه په هغو توابعو هم کارول کيږي، چې د منحنيو تله راکوي، که فکر وشي، چې په ټوليزه توګه د منحنی د گراف په هر ټکي باندې تانجنت ايښول کیدی شي.



له دې امله د تابع $f(x) = a_2x^2$ لپاره

باور لري:

په انټروال $I_1 = \{x | -\infty < x < 0\}_R$ کې تابع

$f(x)$ مونوټون ټيټپړي. او $f(x)$ په

اينټروال

$I_2 = \{x | 0 < x < \infty\}_R$ کې مونوټون

جگپړي.

لکه د کرنې په گراف کې، چې جگپړنه ثابته وه. اوس دا حالت مخ ته نه لرو، يعنې جگپړنه ثابته نه ده، بلکې دا د منحنی له يوه ټکي څخه بل ټکي ته تغير خوري. د تانجنت جگپړنه < 0 منحنی مونوټون جگپړي. د تانجنت جگپړنه > 0 منحنی مونوټون ټيټپړي. د تانجنت جگپړنه، که صفر وي، ثابت پاتې کيږي.

روښانه ده چې د $f(x)$ تابع لومړی مشتق $f'(x)$ د تابع میل (جگوالی) ورکوي. ددې سره د مونوټوني قضیه په لاندې ډول فرمولوو.

قضیه:

د $f(x)$ تابع دې په اینټروال I کې مشتق ورکوي.

1. که د $f(x)$ تابع په اینټروال I کې مونوټون جگېدونکې وي، نو باور لري: $f'(x) \geq 0$ د ټولو $x \in I$ لپاره.

- که $f(x)$ په اینټروال کې همغریز ټیټېدونکې وي، نو باور لري: $f'(x) \leq 0$ د ټولو $x \in I$ لپاره.

- که $f'(x) \geq 0$ وي، د ټولو $x \in I$ لپاره، نو $f(x)$ په اینټروال I کې همغریز جگېدونکې ده.

- که $f'(x) \leq 0$ وي د ټولو $x \in I$ لپاره، نو $f(x)$ په اینټروال I کې همغریز ټیټېدونکې ده.

- که $f'(x) > 0$ وي، د ټولو $x \in I$ لپاره، نو $f(x)$ په اینټروال I کې په کلکه همغریز جگېدونکې ده.

- که $f'(x) < 0$ وي د ټولو $x \in I$ لپاره، نو $f(x)$ په اینټروال I کې په کلکه مونوټون ټیټېدونکې ده.

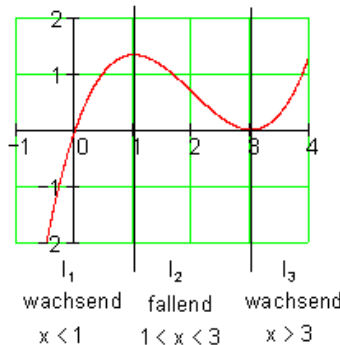
د مونوټوني پیژند ورشو (تعریف ساحه) ټاکنه

بیلگه: د تابع گراف څخه زیات وخت

کیدی شي د مونوټوني ساحې لږ یا زیات

ټیک و لوستل شي.

$$f(x) := \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$$



د $f(x)$ لپاره $I_1 = \{-\infty < x < 1\}_R$ په

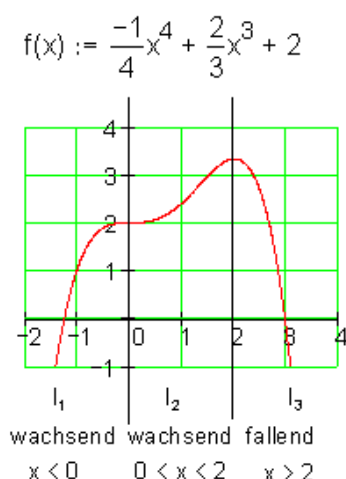
کلکه مونوټون جگېدونکې دی.

د $f(x)$ لپاره $I_2 = \{1 < x < 3\}_R$ یو غریز

ټیټېدونکې ده.

د $f(x)$ لپاره $I_3 = \{3 < x < \infty\}_R$ په کلکه

یو غریز جگېدونکې ده.



له گراف څخه لاندې مونوتوني ساحې لوستل کيږي.

د $I_1 = \{-\infty < x < 0\}_R$ لپاره $f(x)$ په کلکه مونوتونج گڼونکې ده.
 د $I_2 = \{0 < x < 2\}_R$ لپاره $f(x)$ په کلکه مونوتونج گڼونکې ده.
 د $I_3 = \{2 < x < \infty\}_R$ لپاره $f(x)$ په کلکه مونوتون ټيټېدونکې ده.

تمرینونه:

--- لاندې تام راشنل توابع په همغږیزوالي خویونو وڅیړئ.

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 3$

b) $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 12x$

c) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 1$

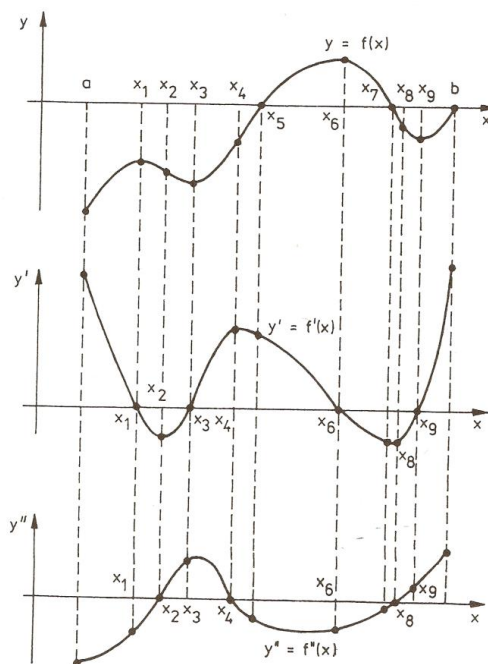
d) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 2x + 2$

--- د لاندې ماتراشنل توابعو د مونوتوني حالت د a په واکوالي کې وړکړئ.

a) $f(x) = \frac{1}{ax+2}$

b) $f(x) = \frac{1}{ax^2+1}$

حای اړونده افراطي ټکي (local extrema)



يادونه: په ليکلو مي کله کله د افراطي لپاره بحراني ليکلي، پام دې ورته وي.

فعاليتونه:

د مختلفو توابعو گرافونه او په هغې خبرې، چې چيرته افراطي ټکي پراته دي.

- په پورته څېره کې د تابع لپاره نسبي جگ ټکي او خورا جگ ټکي وېښايست.

- په پورته څېره کې نسبي ټيټ او خورا ټيټ ټکي وېښايست.

- په پورته څېره کې وېښايست، چې د نسبي جگو ټکو همداسې خورا جگو ټکو، نسبي ټيټو ټکو همداسې د خورا ټيټو ټکو دواړو لورو ته تابع څنگه ځغلي؟

- په پورته شکل کې هغو ټکو ته، چې بحراني ټکي دي ځير شئ، چې تابع هلته څه خوي لري؟

- د تابع همدې ټکي کې وگورئ، چې لومړی مشتق یې کوم ارزښت لري؟

موږ ددې پورته فعالیتونوڅخه لاسته راوړو:

که د $f(x)$ لپاره د x_0 په خای کې $f'(x) = 0$ ولرو نو یو نسبي ټیټ ټکی مو مخ ته پروت دی.

که د $f(x)$ لپاره د x_0 په خای کې $f'(x) = 0$ او $f''(x) > 0$ ولرو نو یو نسبي ټکی مو مخ ته پروت دی.

که ددې برعکس ولرو: $f'(x) = 0$ او $f''(x) < 0$ ، نو یو نسبي ماکسیموم مو مخ ته پروت دی.

د بحراني ټکي (ټیټ ټکي یا جگ ټکي) لپاره خوي ټاکونکی دی، چې $f'(x) = 0$ وي او د $f''(x)$ مخ نښه (+ ، -)، په دې پریکړه کوي چې ایا یو اصغري ټکی او که اعظمي ټکی مو مخ ته پروت دی.

د پورته اړیکو لپاره لاندې یادوني ضرور دي:

1. دا اړیکي یواځې د x_0 لپاره ارزښت لري چې د تعریف سټ په دننه کې پروت وي او هلته د $y = f(x)$ تابع پوره څو ځلې مشتق وړ وي، د غاړو (څنډو) او د هغوځایونو لپاره چې هلته $f(x)$ تابع کم یا هیڅ مشتق وړ نه وي، ځانگړو څیړنو ته اړتیا ده.
2. شرایط چې $f'(x) = 0$ وي (مشتق تابع) یواځې د یوه انحرافي ارزښت لپاره ضرور دی (ضروري یا اړین شرایط).
3. شرایط $f'(x) = 0$ او $f''(x) \neq 0$ د بحراني ټکي لپاره یواځې پوره کېدونکی دی او نه ضروري). بیلگه:

د $f(x) = x^2 + 2$ تابع گراف وکارئ او که بحراني ارزښتونه لري، هغه د گراف او

مشتق له لارې وټاکئ

حل: د بیلگې له گراف څخه روښانه ده، چې تابع د $x = 0$ په ځای کې خورا ټیټ ټکي (اصغري-) لري.

د ابحراني ټکي لپاره اړین شرطونه:

- د تابع لومړي مشتق دی: $f'(x) = 2x$ په دې مساوات کې د تابع مشتق د x_0 لپاره صفر ځای لري، یعنې دلته یو بحراني ټکی پروت دی.
د-تابع دویم مشتق: $f''(x) = 2$ دا چې $f''(x) > 0$ دی، نو یو نسبي ټیټ ټکی مخ ته لرو. بیلگه:

د $y = x^4$ تابع د $x = x_0 = 0$ لپاره نسبي ټیټ ټکي لري او باوري دي:

$$f'(x) = 4x^3 \Rightarrow f'(0) = 0$$

$$f''(x) = 2x^2 \Rightarrow f''(0) = 0$$

گورو چې دوهم مشتق د صفر څخه نه کوچنی او نه لوی دی.

د پورته شننې څخه لاندې پیژند ته راځو

تعرف یا پیژند:

د $x = x_0$ په چاپیریال کې د $y = f(x)$ تعریف شوې تابع یو نسبي جگ ټکی په همدې ډول نسبي ټیټ ټکی لري، که ټولو x_0 ته پوره نږدې x لپاره باور ولري:

$$f(x) > f(x_0) \text{ په همدې ډول } (\Leftrightarrow) f(x) \leq f(x_0)$$

جمله:

(د یوه نسبي بحراني ټکي لپاره ضروري شرایط):

که په x_0 کې مشتق وړ تابع $y = f(x)$ انحرافي ټکی لري نو لرو: $f'(x) = 0$

همغريزي توابع

دا جمله مور ته وايي: چيرته چې $f'(x) \neq 0$ وي نو هلته اکستريموم نه شته، د اکستريموم لپاره يواځې د x_0 ځای په پوښتنه کې راځي، چې د هغې لپاره لرو $f'(x) = 0$ ، خو حتمي نه ده چې $y = f(x)$ دې يواکستريموم ولري.

جمله ۱۳۲: (د يوه بافراطي ټکي لپاره پوره کيدونکي شرايط):

که په $x = x_0$ کې دوه واره مشتقور $y = f(x)$ تابع لپاره ولرو:

$$f'(x) = 0, \quad f''(x) \neq 0$$

نو تابع $y = f(x)$ هلته يو بحراني ټکی لري.

خورا ټيټ ټکی مخ ته لرو، که وي: $f''(x) > 0$

خورا جگ ټکی مخ ته پروت دی، که وي: $f''(x) < 0$

پوښتنې:

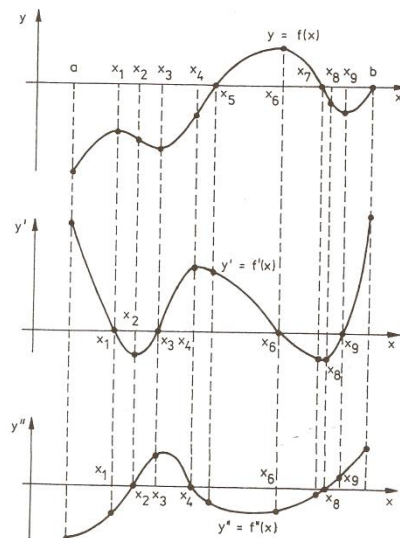
د لاندې توابعو انحرافي ټکي پيدا کړئ.

1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

2) $f(x) = x^4 - 3x^3 + x + 1$

3) $f(x) = 7x^7 - 6x^6 + 4x^4 + 2x + 1$

له بنی لور انحنا اوله کین لور انحنا(مقعر او محدب)



فعالیت:

- په پورته شکل کې مقعریت(ننوتوال) او محدبیت(وتنوالی) وښایاست.
 - په پورته شکل کې د مشتقونو له مخې مقعریت او محدبیت په گوته کړی.
- که په یوه اینتروال کې د مشتقو تابع f دویم مشتق $f'' > 0$ وي، نو په دې اینتروال کې گراف کین کور شوی یا کینه انحنا لري او که دویم مشتق $f'' < 0$ وي، نو د تابع گراف بنی کور یا بنی انحنا لري.

بیلگه:

ټول گونگ تابع(راشنل تابع) f د $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 1$ سره په کومه ورشو(ساحه) کې کین کور دی (کینه انحنا لري (ننوتی یا مقعر دی)) او په کومه ورشو کې بنی کور دی (بنی انحنا لري(محدب یا وتلی دی)؟

دویم مشتق: (له لومړی مشتق څخه):

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 4$$

$$f''(x) = 6x - 4$$

د $6x - 4 > 0 \Rightarrow x > \frac{2}{3}$ لپاره کین گوروال (کینه انحنا (ننوتی یامقعر)

د $6x - 4 < 0 \Rightarrow x < \frac{2}{3}$ لپاره بنی کوروالی (بنی انحنا (وتلی یامحدب))

بیلگه:

د مات راشنل تابع $f(x) = \frac{1}{x+2}$ گراف یو های پارابول دی. د های پارابول کومه ځانگه کینه کړه ده یا کینه انحنا لري (مقعر)، او کومه یوه یې بنی کوروالی - یا بنی انحنا لري (محدب)؟

دویم مشتق: $f'(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$; $f''(x) = \frac{2}{(x+2)^3}$ صورت تل مثبت دی.

د $x < -2$ لپاره د مخرج او همداسې د کسر ارزښت منفي دی. د های پارابول ځانگه بنی کوروالی یا انحنا لري (وتلی یا محدب).

د لپاره $x > -2$ د مخرج او همداسې ټول کسر (مات) مثبت دی.

های بارابول کینکور دی یا کینه انحنا لري (ننوتی یامقعر).

بیلگه: د دواړو تابعو $f(x) = \sqrt{x}$ او $g(x) = \sqrt{x^3}$ کوروالی (انحنا) دې له دواړو لورو یو د بل سره پرتله شي. دواړه توابع د $x > 0$ لپاره تعریف دي.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad g'(x) = \frac{3\sqrt{x}}{2}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}} \quad g''(x) = \frac{3}{4\sqrt{x}}$$

دویم مشتقونه د $x \in R^+$ لپاره تعریف دي.

په دې ساحه کې $f''(x) < 0$ دی. اړونده گراف بنی کوروالی یا انحنای لري، دا یو بنی لور ته واز پارابول ښایي.

په همدې ساحه کې $g''(x) > 0$ دی. اړونده گراف کین کور دی یا کینه انحنای لري. اړونده گراف یو کین کوروالی یا کینه انحنای لري، دا پورته لور ته واز پارابول دی.

تمرینونه:

۱ -- و ښایاست، چې د لاندې توابعو مقعریت او محدبیت کوم دي؟

$$a) \quad f(x) = x^3 + 4x^2 + x$$

$$b) \quad g(x) = 2x^3 + 3x - 2$$

۲ -- په کومه ورشو کې لاندې تام راشنل توابع یو کین کوروالی لري او په کوم کې بنی کوروالی لري.

$$a) \quad f(x) = x^3 - 6x^2 + 5x + 2$$

$$b) \quad -2x^3 + 3x^2 - x - 4$$

۳ -- د لاندې مات توابعو گرافونه هاپاربول دي. د هاپاربول څانگې کوم کوروالی لري؟

$$a) \quad f(x) = \frac{1}{4x+1}$$

$$b) \quad f(x) = 3 - \frac{3}{x^2}$$

۴ -- په کومه ساحه کې لاندې ناراشنل توابع یو کین او په کوم کې یو بنی کوروالی لري؟

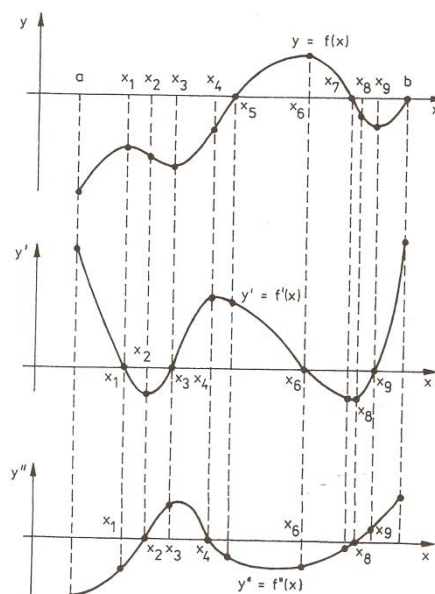
$$a) \quad f(x) = x \cdot e^{2-x}$$

$$b) \quad f(x) = \ln x^2$$

۵ -- ولې د یوه دریمې درجې تام راشنل تابع گراف په تل تلنه کې یوه بنی انحنای (کوروالی) نه لري.

۶ -- ولې یو څلورمه درجه تام راشنل تابع د $f(x) = ax^4 + dx + e$ سره یو تلتلونی کینه انحنای (کوروالی) او بنی انحنای لري؟

د انعطاف ټکي (اورنټکي) Inflection Points



فعالیتونه:

- پورته څیره په څیر وگورئ او وښایاست، چې چیرته یا په کوم ټکي کې منحنی (له کین و ښي لور ته) خوزښت - یا خپله د حرکت لور بدلوي؟

- د انعطاف ټکو شاوخوا هم فکر وکړئ، چې کوم ټکي غوره ټکي دي او د هغو له خویونو هم د

انعطاف ټکو خویونه وټاکئ.

- په شکل کې فکر وکړئ چې د انعطاف ټکي شاوخوا منحنی څنگه ځلي.

- د شکل په هکله په خپل فکر څه ووايي او د خپل فکر په بنسټ خپل دلایل روښانه کړئ. موږ له پورته څیرې اټکل کولی شو چې: که د x_0 ځای کې ولرو: $f''(x) = 0$ او $f'''(x) > 0$ ، نو یو ښی-کین- انعطاف ټکی (اورنټکی) مو مخ ته پروت دی.

برعکس(په خټ): که وي: $f''(x) = 0$ او $f'''(x) < 0$ نو یو کین - بنی - د انعطاف ټکی مو مخ ته پروت دی.

دا نعطافټکي لپاره خوی ټاکونکی دی، چې $f''(x) = 0$ وي، دا چې دا بنی - کین - او که کین - بنی - انعطاف ټکی (اورنټیکي) دی، د $f'''(x)$ مخ نښه یی ټاکي.

- شرایط $f''(x) = 0$ د انعطاف ټکي لپاره یواځی اړین یا ضروري دي.

د $y = x^4$ لپاره $f''(0) = 0$ دی، مگر اورنټیکي مو مخ ته نه دی پروت.

- شرایط $f''(x_0) = 0$ او $f'''(x_0) \neq 0$ د انعطافټکي لپاره پوره کیدونکي دي.

گورو چی $y = f(x) = x^5$ تابع د $x = x_0 = 0$ ځای کی یو انعطافټکی لري او باوري دي:

$$f'(x) = 5x^4, \quad f'(0) = 0$$

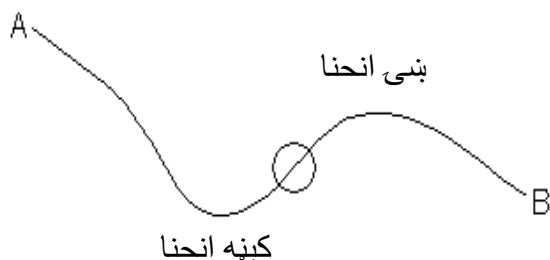
$$f''(x) = 20x^3, \quad f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = 60x^2, \quad f'''(x) = 0$$

گورو چې دریم مشتق $f'''(x)$ نه له صفر څخه کوچنی او نه لوی دی.

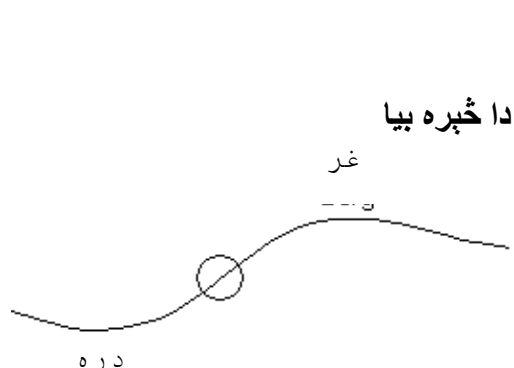
ترمخ راوړنې او د کلمې روښانه ونې:

د دې کلمې د لا نورې روښانه کولو لپاره په لاندې توگه مخ ته ځو:



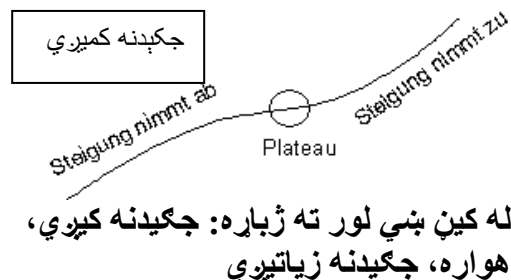
د بایسکل ځغاستي چې له A څخه ځغلي د منحنی څخه تېرېږي او B ته رسیږي. د همغه وخت د بایسکل ځغاستي د انډل حالت د ځغاستي په وخت کې په پام کې ولري. د کینې منحنی (د کین لوري د انډل حالت) څخه وروسته د بنی لوري منحنی کې ځغلي.

د کينې- او بنۍ منحنۍ (کزي) ترمنځ بايد د بايسکل انډل نېغ ولاړ وي (عمود وي)، چي دا د انډل بدلون دی له کينې لوري و بنۍ لوري ته. دا د کينې او بنۍ منحنۍ ترمنځ اوړيدنه ياد **انعطاف ټکی** بلل کېږي.



تاسو له بايسکل سره په يوه غونډۍ ځغلی. وروسته له هغې، چي له تالي څخه تېرېږي، نو لار په جگېدو پيل کوي. په لومړي سر کي نرم او بيا په نيغه جگيږي، بيا په دې پسې جگوالی بېرته کميږي، چي پاس د غونډۍ په څوکه صفر ارزښت غوره کړي. يو چېرته په غونډۍ پورته صفر ارزښت ته رسيږي. يو چېرته په لار جگېدنه خورا لويه وه. هلته د انعطاف ټکی پروت دی.

دا څيره د پښتو نومونو سره بيا کښل...



د بايکل ځغلونکي بل حالت، چي له څنگ دياگرام څخه يي رانيسو: په غره د بايسکل ځغاستمیل يا جگېدنه لومړی کميږي، چي له سره بېرته جگه شي. ددې ترمنځ يوه ساحه شته، د کم جگوالي سره (يوه نسبتاً هواره). دې نسبتاً هوار ځای کي د ټوټه کرښې جگېدنه نسبت بل ځای ته کمه ده. هلته اوړونټکی (د انعطاف ټکی) پروت دی.

پوهيږو، چي د يوې تابع لومړی مشتق د تابع د جگوالي تابع دی، چي له گراف څخه يي جگوالی لوستل کيږي. دا چي د انعطاف ټکی خورا لوي يا خورا کوچنی ټکی کېدی شي، داسي پيدا کيږي، چي د مشتق تابع انحرافي ارزښتونه پيدا کړو.

دا تلنار همغسې ده، لکه د پيل تابع $f(x)$ لپاره مو ټاکلي. اوس د مشتق تابع $f'(x)$ باندې دا کار يا عمل اجرا کيږي.

مخکي له دې چي يو لړ جملې د پحراني ارزښتونو او د انعطاف ټکو په هکله څيرو، غواړو چي دا کليمی تعريف کړو.

دواړه کلمي به د نسبي افراطي ټکي په بڼه کي سره را غونډي شي.

پېژند:

په يوه چاپيريال $x = x_0$ کې مشتق وړ تابع $y = f(x)$ يو کين-بنی-انعطافکي په همدې ډول بنی-کين-انعطافکي لري، که د هغه مشتق هلته يو نسبي جگټکي (عظمي نقطه) په همدې توگه يو نسبي ټيټ ټکی ولري.

جمله: (د يوه نسبي بحراني ټکي لپاره ضروري شرايط):

که په x_0 کې مشتق وړ تابع $y = f(x)$ اکستريموم لري نو لرو: $f'(x) = 0$

دا جمله موږ ته وايي: چيرته چې $f'(x) \neq 0$ وي نو هلته بحراني ټکی نه شته، د بحراني ټکو لپاره يواځې د x_0 ځای په پوښتنه کې راځي، چې د هغې لپاره $f'(x) = 0$ وي، خو حتمي نه ده چې $y = f(x)$ دې يو بحراني ټکی ولري.

د پورته جملې استعمال په $y' = f'(x)$ څخه لاندې جمله لاس ته راځي:

جمله: (د اوږونټکي (انعطاف ټکي) لپاره اړين شرايط):

که په $x = x_0$ کې دوه واره مشتق وړ تابع $y = f(x)$ هلته يو انعطاف ټکی ولري، نو لاس ته ترې راځي: $f''(x) = 0$

دلته هم باور لري (يادونه ۴ دې پءتله شي): چيرته چې $f''(x) \neq 0$ وي، نو هلته نه

شي کيدی چې د انعطاف ټکي موجود وي. مگر چيرته چې $f''(x) = 0$ وي، د انعطاف ټکی شته کيدلی شي، خو اړين يا ضرور نه ده چې هلته انعطاف ټکی شته وي.

له پورته څخه لاندې جمله لاس ته راځي.

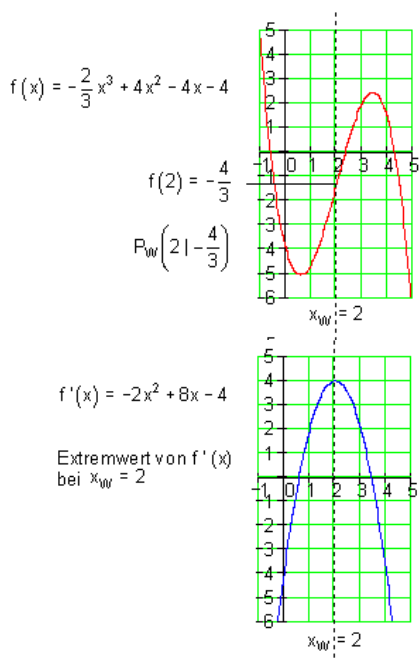
جمله: (د انعطاف‌تکی لپاره پوره کیدونکی شرطونه)

که په $x = x_0$ کی د دریو اړه مشتقور تابع $y = f(x)$ لپاره وي: $f''(x) = 0$ او $f'''(x) \neq 0$

نو هلته یو انعطاف‌تکی مخ ته لرو. که $f'''(x) < 0$ وي، نو یو کین-بني - انعطاف‌تکی مخ ته پروت دی او د $f'''(x) > 0$ لپاره یو بنی-کین-انعطاف‌تکی مخ ته لرو.

شننیزه یا تحلیلي بیلگه:

یادونه: موږ د x_E سره افراطي‌تکی په نښه کوو او د x_W سره د انعطاف‌تکی په نښه کوو.



1- تابع مساوات د مشتق سره

$$f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 4x^2 - 4x - 4$$

$$f'(x) = -2x^2 + 8x - 4$$

$$f''(x) = -4x + 8$$

$$f'''(x) = -4$$

2- دویم مشتق صفر کړئ.

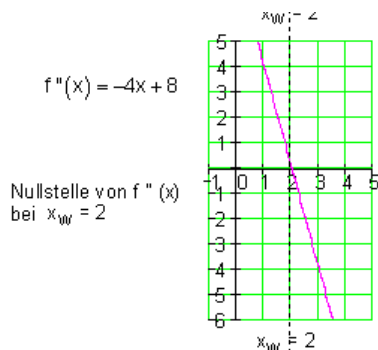
$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -4x + 8 = 0$$

$$\Rightarrow x_W = 2$$

3- د انعطاف‌تکی له مخي بنوونه، چي ایا د انعطاف‌تکی شته دی؟

$$f'''(x_W) = f'''(2) = -4$$

4- په $f(x)$ د انعطاف‌تکیونه خای په خای کولو له لاري د انعطاف‌تکی ټاکنه

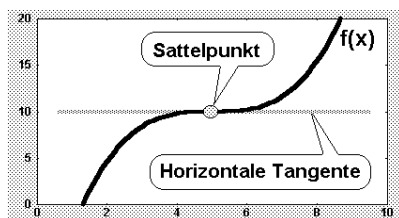


$$f(x_W) = f(2) = -\frac{2}{3}(2)^3 + 4(2)^2 - 4(2) - 4 = -\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow P_{W\left(2 \mid -\frac{4}{3}\right)}$$

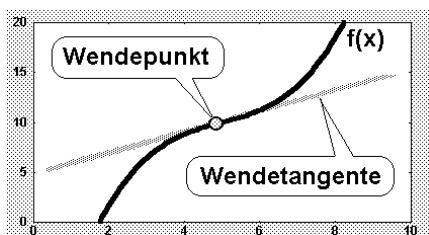
$$\underline{\underline{P_W(21-1.33)}}$$

پام: په انعطاف ځای x_W کې د $f(x)$ گراف کېږي.
 په یوه په خوښه ټکي x_0 کې د کړونې (انحنا) لپاره باور لري:
 $f''(x) > 0$ په دې معنی دی، چې $f(x)$ کین لور ته کېږي (انحنا لري) دی.
 $f''(x) < 0$ په دې معنی، چې تابع $f(x)$ گراف ښی لور ته کېږي (انحنا کوي)
 یو زینټکی Der Sattelpunkt څه شی دی؟

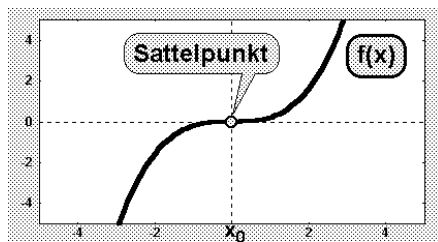


پېژند:

د زینټکي (کله کله برنډې ټکی هم بلل کېږي) لاندې د انعطافکي ځانگړی حالت پوهیږو، داسې انعطافکي چې تانجنت یې افقي (پروت) وي:



د پرتلي لپاره دې بیا یو ،،عادي،، انعطافکي ورکړ شوی وي. دا یو مائل (نه افقي) تانجنت لري

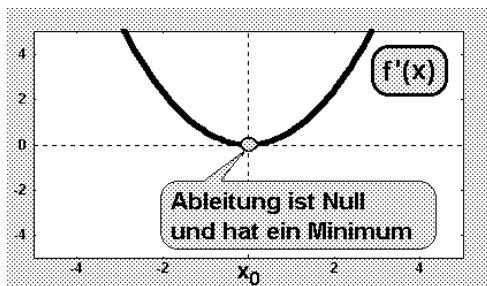


توضیح:

اوس فکر کوو، چي یو زینتکی څنگه د شمېرلو له مخې پېژندل کېدی شي. په دې برخه کې په ځانگړي توگه دا مخ ته لرو، چي یو زینتکی له بني – و کینه انحناء و شمېرو.

د دې لپاره د $f(x)$ تابع جگوالی په پام کې نیسو، یعنی لومړی مشتق: د زینتکي د مخه د $f(x)$ جگوالي کمیري، په زینتکي کې صفر ارزښت لري، او له زینتکي څخه وروسته بېرته جگیري.

یو زینتکی (د بني – کین – بدلون سره) په دې پېژندل کېږي، چي لومړی مشتق $f'(x)$ یې هلته صفر شي او سربېره پر دې هلته یو نسبي ټیټکی (مینیموم) ولري.



د لومړي مشتق $f'(x)$ شکل داسي برېښي:

لومړی شرط دی، چي مشتق یعنی $f'(x)$ په زینتکي کې د صفر سره مساوي دی.

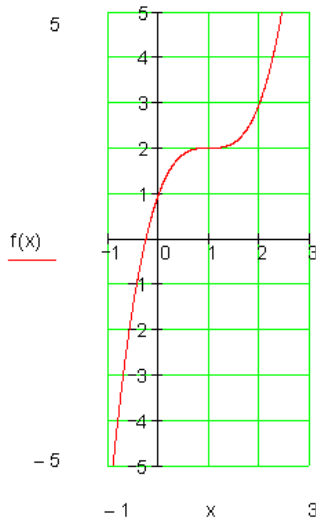
زینتکی (بني-کین-بدلون) $f'(x_0) = 0$ دوم شرط دی، چي مشتق $f'(x)$ هلته یو نسبي مینیموم لري.

دا په دې معنای، چي بل جگ مشتق $f''(x)$ باید په صفر مساوي وي او مخنښه له منفي و مثبت ته بدلېږي.

له دې سره سم د زینتکي لپاره پوره کېدونکي قضیه ومیندل شوه: د زینتکي لپاره جمله (خوي ټاکنه) (د بني – کین – انعطاف سره)

الف: د x_0 ځا کې لومړی مشتق $f'(x)$ صفر دی: $f'(x_0) = 0$
 ب: د x_0 په ځا کې لومړی مشتق $f'(x_0)$ یو مینیموم لري، دا په دې معنا، چې دوم
 مشتق صفر دی، یعنې $f''(x) = 0$ دوم مشتق مخنځینه له منفي څخه و مثبت ته بدلوي.
 بل بدیل (د گرانو دوستانو وړاندیز)

زینټیکي Der Sattelpunkt



د انعطاف ټکي یو ځانگړی حالت زینټیکي دی. دا د
 انعطاف ټکي دی د صفر جگپښي سره. که د کین لور
 ورتزدي شو فکر کېږي، چې، نسبي جگټکی مو مخ ته
 پروت دی
 که څوک د بني لور ورتزدي شي فکر کوي، چې یو
 نسبي ټیټکی مخ ته لرو.
 اوس دا حالت د ریاضیاتو له لوري څېړو:
 مشتق:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$$

$$f''(x) = 6x - 6$$

$$f'''(x) = 6$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 3 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 1$$

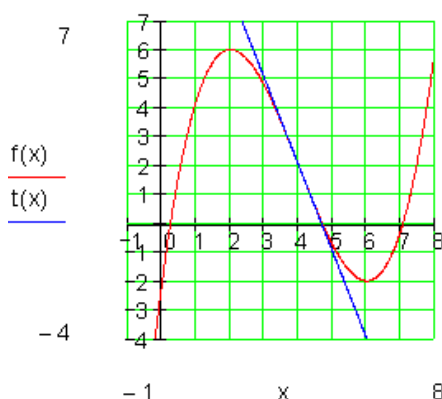
د $x=1$ سره زینټیکي	د $x=1$ سره د انعطاف ټکی	$f''(1) = 6 \cdot 1 - 6 = 0$ $f'''(1) = 6$
------------------------	-----------------------------	---

د انعطاف ټکي لپاره شرایط پوره دي.
 دا چې د $f''(1) = 0$ له امله د انعطاف ټکی مخ ته لرو، نو دا د انعطاف ټکی همغه زینټیکي
 دی.

د انعطاف ټکي پیداکونه:

د تابع گراف باندې انعطاف ټکي کې تانجنت د انعطاف تانجنت بلل کېږي. د انعطاف
 تانجنت هم

همداسې پیدا کېږي لکه د تابع دگراف په یوه ټکي کې تانجنت، چې تانجنت مساوات ټاکل
 کېږي.



د انعطاف تانجنت د $f(x)$ گراف د انعطاف په
ټکي $P_w(4, 2)$ کې غوڅوي او دا لاندې مساوات
لري:
 $t(x) = -3x + 14$

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + 9x - 2$$

$$f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 6x + 9$$

$$f''(x) = \frac{3}{2}x - 6 \quad f'''(x) = \frac{3}{2}$$

$$f''(x_w) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x - 6 = 0$$

$$f'''(x_w) = \frac{3}{2} \neq 0 \quad \text{د } x_w = 4 \text{ او } f'''(x_w) = \frac{3}{2} \neq 0$$

$$\text{تانجنت } f(x_w) = f(4) = 2 \Rightarrow P_w(4|2)$$

مساوات لپاره باور لري.

د x_w لپاره د تانجنت مساوات

$$t(x) = f'(x_w)(x - x_w) + f(x_w)$$

$$\text{د } f'(x_w) = f'(4) = -3 \text{ سره په لاندې ډول}$$

$$t(x) = -x(x + 4) + 2 = \underline{\underline{-3x + 14}} \text{ دي}$$

د انعطاف ټکي تانجنت پيداکونه:

په انعطاف ټکي کې د تابع د گراف تانجنت د انعطاف تانجنت بلل کېږي.
د انعطاف تانجنت مساوات همداسې ټاکل کېږي، لکه د تانجنت مساوات د گراف په خوښه
ټکي باندې.

داسي حالتونه، لکه $f'(x) = f''(x) = f'''(x) = 0$ دلته تر څيرنې لاندې نه نيول کېږي.

پوښتنې

$$1 \text{ -- د } f(x) \text{ تابع د } f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{(x - 1)^2}, x \neq 1 \text{ سره د انعطاف ټکي پيداکونه}$$

۲ -- د لاندې توابعو د انعطاف ټکي پيدا کړئ.

$$a) f(x) = \frac{2x-2}{x^2}$$

$$b) f(x) = \frac{x}{x^2+3}$$

$$c) f(x) = \frac{x^3}{3(x-1)^2}$$

$$d) f(x) = \frac{x^3-8}{4x}$$

۳ -- و بنایئ، چې د $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}e$ تابع د انعطاف ټکی زینټکی دی.

۴ -- د لاندې توابعو د انعطاف ټکي (اورونټکي) پیدا کړئ.

$$a) f(x) = x \cdot e^{-x^2}$$

$$b) f(x) = \ln \frac{1}{x^2+1}$$

د منحنی بحث (Kurven Diskusion) :

یوه تابع $y = x^3 + x^2 - 3$ لرو. د دې تابع شکل رسم کړئ او بیا په دې رسم کې د تابع انحرافي ټکي او د انعطاف ټکي په نڅېنه کړئ، رېښانه کړئ، چې انحنای چیرته له کینې لور و بنی لوري ته او له بنی لوري و کینې لوري ته ده.

فعالیت:

- تناظر تعریف کړئ.

- لاندې توابع رسم کړئ، جگ ټکي، ټیټ ټکي او د انعطاف ټکي یې پیدا کړئ.

$$x^3 + x$$

$$3x^3 + x + 2$$

ددې لپاره چې یوه تابع رسم کړای شو، ساده ده که د تابع غوره ټکی و پیژنو. موږ دې بحث ته د منحنی بحث وایو. موږ په دا ډول خبرو اترو کې باید سیستماتیک مخ ته لاړ شو.

په لاندې ډول تلنه گټوره بلل شوې.

دتعریف ساحه: د تابع څیرنه یواځې په همدې ورشو کې موخه وره ده. تناظر **Symetry** : باید وټاکل شي، چې تابع محوري متناظر او که مرکزي متناظر ده.

د محوري تناظر لپاره باور لري: $f(-x) = f(x)$

د مرکزي تناظر لپاره باور لري. $f(-x) = -f(x)$.
 په پورته دواړو حالتونو کې دې فقط $x \geq 0$ وڅیړل شي.
 په ټولیزه توګه که ټول ریل تابع په پام کې ونیسو، نو ګورو چې که توان (د پولینوم درجه) یې جفت (جوړه) وي، نو پولینوم محوري متناظر دی او که توان (د پولینوم درجه) طاق (ناجوړه) وي، نو پولینوم مرکزي متناظر دی.

انحرافي ټکي **Extrema** : د نسبي بحراني ټکو ټاکل (جګټکی، ټیټټکی)
 د جګټکی یا نسبي جګ ټکي پوره کېدونکي شرطونه:

$$f'(x_1) = 0 \wedge f''(x_1) < 0$$

انعطافټکی Inflection Point :

د انعطافټکو او همداسې زینټکي ټاکلو له پاره پوره کېدونکي شرطونه:

$$f''(x_w) = 0 \wedge f'''(x_w) \neq 0$$

 زینټکی انعطافټکی دی د افقي تانجنت سره.
 د تابع تقاطع د x او y محورونو سره (د محورونو غوڅټکی):

$$P_{xi}(x_i | 0) \Rightarrow (x) = 0$$

 د y محور سره غوڅټکی (صفرخای) ټاکي $f(0)$

$$P_y(0 | y_s) \Rightarrow f(0)$$

 د ګراف انځورونه: د ټولو تراوسه راټولو شوو معلوماتو سره کړی شو، چې ګراف انځور کړو. ددې لپاره لومړی یو ارزښت جدول انځور یږي. دا راته په ګوته کوي، چې نور کوم ارزښتونه شمیرل کیږي.

د انحنای حالت او یو غبریزوالی:
 د انعطاف په ټکي x_w کې د $f(x)$ ګراف تغیر خوري.
 په خوښه یوه ټکي x_0 کې د انحنای لپاره باور لري:

$$f''(x_0) > 0$$
 په دې معنا، چې د $f(x)$ تابع ګراف کینه انحنای لري (کونوکس)

$$f''(x_0) < 0$$
 په دې معنا، چې د $f(x)$ تابع ګراف بنی انحنای لري (کونکاو)

یو غبریزوالی

1- که د ټولو $x \in I$ لپاره وي $f'(x) \geq 0$ ، نو $f(x)$ په انتروال I کې مونوټون جګیږي.
 که د ټولو $x \in I$ لپاره $f'(x) \leq 0$ وي، نو $f(x)$ په انتروال I کې مونوټون ټیټېدونکی دی.

2- که د ټولو $x \in I$ لپاره $f'(x) > 0$ وي، نو $f(x)$ تابع په انټروال I کې کره غښتلي مونوتون جگېدونکی ده.

که د ټولو $x \in I$ لپاره $f'(x) < 0$ وي، نو $f(x)$ تابع په انټروال I کې غښتلي مونوتون جگېدونکی ده.

د پېژند ورشو ژی ټکي:

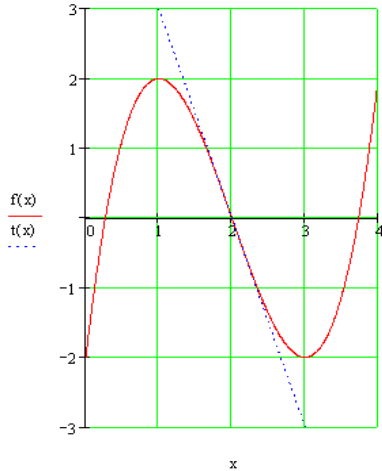
د تابع ژی ټکي کتنه په پېژند ورشو کې. که پېژند ورشو نامحدوده وي، نو لیمیت $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ او $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ټاکو.

بیلگه :

د $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ تابع رسم کړئ.

مشتق کونه:

$$f(x) := x^3 - 6x^2 + 9x - 2 \quad t(x) := -3x + 6$$



$$y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$$

$$y' = f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

$$y'' = f''(x) = 6x - 12$$

$$y''' = f'''(x) = 6 \quad D = \mathbb{R}$$

نسبي انحرافي ټکي

$$P_{\min}(3|-2) \quad P_{\max}(1|2)$$

انعطاف ټکی او تانجنت

$$P_w(2|0) \quad y = f_t(x) = -3x + 6$$

صفر خایونه:

$$P_{x1}(2|0) \quad P_{x2}(3.7|0) \quad P_{x3}(0.3|0)$$

د $-y$ محور سره غوڅټکی (دقاطع): $P_y(0|-2)$

یو غریزوالی (مونوتوني یاجگ - ټیټوالی) د تابع حالت په $x \rightarrow -\infty$ او $x \rightarrow \infty$ کې

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} - \frac{2}{x^3} \right) = -\infty$$

$$I_1 = \{x \mid -\infty < x \leq 1\}_{\mathbb{R}} \quad \text{په}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \left(1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} - \frac{2}{x^3} \right) = \infty$$

کې یو غریز جگړي.

$$I_3 = \{x \mid 3 \leq x < \infty\}_{\mathbb{R}} \quad \text{په}$$

سیومتري: نه لري

کې یو غریز جگړي.

د انحناء حالت:

$$I_4 = \{x \mid -\infty < x < 2\}_{\mathbb{R}} : \text{بنی انحناء (محدب)}$$

$$I_5 = \{x \mid 2 < x < \infty\}_{\mathbb{R}} : \text{کینه انحناء (مقعر)}$$

تمرینونه:

په لاندې توابعو بحث وکړئ او غوره نقطې یې پیدا کړئ:

(اول) د شمېرنې له لارې وښایاست.

(دویم) په شکل کې په نڅېنه کړئ.

$$a) \quad 2x^3 + x^2 + 1$$

$$b) \quad x^3 + x^2 + 3x$$

$$c) \quad x^3 + 2x^2 + x + 3$$

د ناکلو افادو یا وینو=گ\پولې

$$0.\infty, \frac{0}{0}, 0^\infty, \frac{\infty}{\infty}, \dots$$

که ولرو $x \neq 5$ ، $\frac{x^2 + 3x + 2}{x + 5}$ ، ومو لیدل، چې د داسې توابعو لیمیت په پیدا کولی شو. دا ډول تابع ته ټاکلې افادې وایي، ځکه چې مشتق یې نیول کېدی شي، یعنې د کمښتونو ویش (د تفاضلونو ویش) حد یې ټاکل کېدی شي.

که $\frac{\sin 2x}{5x}$ توابع ولرو، نو د $x = 0$ لپاره د دې تابع مشتق په ورسره بلده توگه نه شو نیولی، چې له دې امله ناکلې افادې ورته وایو.

فعالیت:

- که تابع $f(x) = \frac{\sin x}{x^2 + x}$ ورکړ شوی وي.

اول - د تابع $f(x) = \frac{\sin x}{x^2 + x}$ پوله یعنې $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^2 + x}$ د پولې له درسه، چې په لومړۍ بره کې لوستل شوي، پیدا کړی.

- پورته په ننوتنه کې و هڅېږئ، چې د توابعو مشتقونه پیدا کړئ.

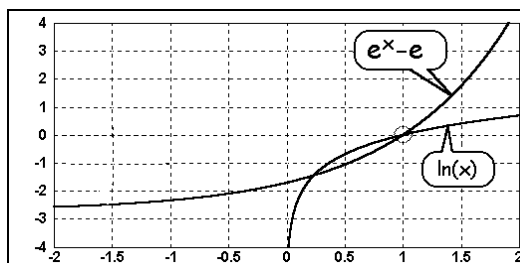
- که ولرو $\frac{x^2 - 4x - 5}{x - 5}$ ، نو د تابع مشتق د چېرته نیول کېږي، که د $x = 5$ شونی وي، نو مشتق یې ونیسئ.

پیل څیرنه: د $\frac{0}{0}$ حالت که پوله ارزښت جوړېدو کې یو کسر پیدا شي، چې صورت او

مخرج یې دواړه د صفر په لور لار شي یا صفر شي، نو دا پوله ارزښت، ناکلې افاده، بولو.

بیلگه:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{\ln x} = \frac{\text{Zähler} \rightarrow 0}{\text{Nenner} \rightarrow 0}$$



په څېره کې برخه توابع رسم شوي دي،
يعنې د صورت او همداسې د مخرج
گرافونه.

گورو: د صورت او مخرج د توابعو
ارزښتونه دواړه و صفر ته ځي. (که د ۱
په لور لارشي)

ليکندود (ليکنډول): د افادي

$$\frac{\text{Zähler} \rightarrow 0}{\text{Nenner} \rightarrow 0}$$

$$\frac{0}{0}$$

لپاره په حدشمېرنه کې لنډ لیکو:

دا په حقيقت کې دقيق نه دی، مگر په ټولېزه توگه داسې معمول دی

روښانه ونه :

ناټاکلي افاده څه شی دی؟

دا پوښتنه رامنځ ته کيږي، چې دا ناټاکلي افاده خپل نوم له کومه ځايه اخلي. دا ،، ناټاکلی،،
بلل کيږي، ځکه چې حديي د عادي طريقو له لارې نه شي شمېرل کېدی. دا کار د لوړې
رياضي سره دا شمېرنه شونې شوه (د بېلگې په توگه د لو پېتال قانون له مخې، چې پسبه
وڅېرل شي).

روښانه ونو ته تشریح:

اوس ښایو، چې د داسې توابعو شمېرل ولې ناشوني دي.

موږ بیا دا د تېر مخ بیلگه رانیسو:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{\ln x} = \frac{\rightarrow 0}{\rightarrow 0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{\ln x} = \frac{\text{Zähler} \rightarrow 0}{\text{Nenner} \rightarrow 0}$$

1- که هڅه وشي، چې حد پیدا کړو، داسې چې د $x=1$ په کسر کې ځای په ځای کړو، نو افاده $0:0$ به ترې لاس ته راشي. دا تعریف نه لري، $u = f\left(\frac{1}{z}\right)$ ځکه په صفرویش اجازه نه شته.

2- ترمخه مو د ناپاکلو افادو د شمېرلو لپاره یعنې د ناطق کسري توابعو پوله شمېر نه کي د چل یا د طریقې څخه کار واخسته. اوس دا چل نه شو کارلی، لکه په پورته بیلگه کې.

3- د حد اټکل هم ناشونی دی: په لومړي لید کېدی شي په فکر راشو، چې که صورت او مخرج د صفر په لور لاړ شي، نو کسر به د 1 په لور وخوزیږي:

$$\frac{0.000000001}{0.000000001} = 1$$

که صورت او مخرج و صفر ته نږدې شي، دا به فقط دا معني ولري، چې دواړه به د ارزښت له مخې نږدې برابر شي. دا دا معني نه لري، چې د صورت او مخرج نسبت سره مساوي شي:

$$\frac{0.0000000010 \ 0}{0.0000000010 \ 0} = 100$$

لکه چې گورو صورت او مخرج د ارزښت له مخې خورا نژدې برابر دي (دا په دې معنی، چې دواړه صفر په لور ځي)، مگر د دوی ترمنځ نسبت خورا لوی دی یعنې (100) دی،

د برنولي او د ډې لو، پیتالقاعده Brnoully and de L'Hospital

$$\frac{\sin 2x}{5x} \quad \text{او} \quad \frac{x^2 + 3x - 10}{x - 5}$$

د برنولي او د ډو لو پیتال قاعدې د $\frac{f(x)}{g(x)}$ ډوله توابعو حد شمېرلو کې ځانگړی رول

لوبوي. دا حالت په ځانگړي ډول هلته رامنځ ته کیږي، چې مخرج او صورت همغه

$$\frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \frac{0}{0}$$

صفر ځای x_0 ولري. دا ناکلو افاده

هدفمنده نه ده. کیدی شي چې د ویش حد $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ وڅیړل شي، په کومو کې چې

صورت او مخرج د صفر لور ته ځي. ددې لپاره عمومي مناسب د توابعو ترمونه د

$$f: y = f(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{x + 2}$$

غوښتلو دي. د بیلگې په توگه تابع

صورت او مخرج همغه صفر ځای $x_0 = -2$ ولري، سره له دې هم لیمیت شته دی.

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 4x + 4}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x + 2)^2}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} (x + 2) = 0$$

دا ډول حدونه د مشتق په مرسته شمیرل کیدی شي، چې د صورت او مخرج توابعو له نتيجې څخه لاس ته راځي. دا ډول قاعده د پراخ شوې منځ ارزښتقضيي استعمال هم بلل کیږي.

د برنولي او د ډو لو، پیتال قاعده:

Bernoulli and de l'Hospital

که توابع $u = f(x)$ او $v = g(x)$ د یوه $U(x_0)$ چاپیریال د x_0 په ځای کې مشتق وړ وي د

$g'(x) \neq 0$ سره او د ټولو $x \in U(x)$ لپاره او f او g یو صفر ځای وي،

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \quad \text{د } f(x_0) = g(x_0) = 0 \text{ سره، نو باور لري:}$$

ترڅو په بني لور حد شته وي.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{په ورته توگه لاس ته راځي:}$$

حل: تابع د پراخه شوي منځ ارزښت قضي نیونی پوره کوي. د هر $x \in U(x_0)$ لپاره

یو $x_m \in (x_0, x)$ سره موجود دی، په داسی ډول چې لرو:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(x_m)}{g'(x_m)}$$

د $g(x_0) = 0 \wedge f(x_0) = 0$ له امله لرو:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

دا چې د $x \rightarrow x_0$ سره $x_m \rightarrow x_0$ هم هڅه کوي.

د $x \rightarrow \infty$ په حالت کې $x = 1/z$ ځای په ځای کوو. د زنجیري قضي په مرسته لاس ته راځي:

$$u = f(1/z)$$

د مشتق $du/dz = f(1/z)(-1-z^2)$ او مشتق $dv/dz = g'(1/z)(-1/z^2)$ سره، داسی چې لرو:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{g\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'\left(\frac{1}{z}\right) \cdot \left(-\frac{1}{z^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{z}\right) \cdot \left(-\frac{1}{z^2}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{g'\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \end{aligned}$$

یادونه: که په پورته حالت کې $f'(x_0) = g'(x_0) = 0$ هم وي، نو په ویش بیا له سره دا قاعده استعمالیږي. که سړي د n - پلونو (قدماتو) وروسته بریالی وي نو دا قاعده لرو:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$$

چیرته چې $f^{(n)}$ او $g^{(n)}$ د تابع n -م مستقیم په معنی دی.
ډول یا تیپ: $0/0$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - 4}{1} = \frac{0}{1} = 0 \quad \text{بیلگه:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{1}{1} = 1 \quad \text{بیلگه:}$$

بیلگه:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1} = \frac{0}{1} = 0$$

تیپ یا ډول: $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0 \quad \alpha > 0.$$

د یوه مثبت حقیقي توان (جگعدد) α لپاره یو په خوبه توان x^α د $x \rightarrow \infty$ لپاره په غښتلي توگه جگپړي، نسبت لوگاریتم تابع $\ln x$ ته $\alpha > 0$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$

له دې $f(x) = \frac{x^n}{e^x}$ تابع د لویپیتال د قاعدې د ډیر ځله استعمال څخه لاس ته راځي:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} = \dots = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n!}{e^x} = 0$$

اکسپوننشل تابع e^x د x په هرتوان تابع څخه په غښتلي جگپړي:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0 \quad n \in \mathbb{N}$$

نور حالتونه کیدی شي په بڼه یا تیپ $\frac{0}{0}$ او یا $\frac{\infty}{\infty}$ بیرته وارول شي

له تیپ یا بڼې $\infty - \infty$ څخه و بڼې یا تیپ $\frac{0}{0}$ ته ددې لپاره لاندې تابع بیلگه کیدی شي:

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}$$

د $x \rightarrow 0$ لپاره

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x \cos x + \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2 \cos x - x \sin x} = \frac{0}{2} = 0 \end{aligned}$$

داچې دلته مشتق بیرته د بڼې تیپ $\frac{0}{0}$ ده، نو د لویپیتال قاعده استعمالیدی شي.

له تیپ یا بڼې $(\pm\infty) \cdot 0$ څخه بڼې $\frac{\pm\infty}{\infty}$ ته:

د تیپ $(-\infty) \cdot 0$ حالت د بیلگې په توگه تابع $f(x) = x \cdot \ln x$ د $x > 0$ لپاره ښایي. په کوم کی چي ضرب د ویش په څیر انځور کړي، نو د لویپیتال د قاعدې په استعمال دا لاندې لاس ته راځي:

$$\lim_{x \rightarrow +0} (x \cdot \ln x) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +0} (-x) = 0$$

له بڼې 0^0 څخه و بڼې e^0 ته:

دلته د بیلگې په توگه تابع $f(x) = x^x$ د $x > 0$ لپاره تر څېړنې لاندې نیول کېږي. د بڼې بدلون یا فورم بدلون و بنسټ e ته د یوې انځورونې په مرسته په بریالۍ توگه لاس ته راځي:

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^x = \lim_{x \rightarrow +0} e^{\ln(x^x)} = \lim_{x \rightarrow +0} e^{x \cdot \ln x} = e^0 = 1$$

له 1^∞ بڼې څخه و $e^{0 \cdot \infty}$ بڼې ته

د ښوونې، د بیلگې په توگه د تابع $f(x) = (1 + \frac{\mu}{x})^x$ پوله ده د $\mu \in R^+$ لپاره او $x \rightarrow \infty$ د

$x \in R^+$ سره:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\mu}{x}\right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \cdot \ln\left(1 + \frac{\mu}{x}\right)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} (x \cdot \ln(1 + \frac{\mu}{x}))} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{\mu}{x}\right)}{\frac{1}{x}}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1 + \frac{\mu}{x}} \cdot \left(-\frac{\mu}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\mu}{1 + \frac{\mu}{x}}} = e^{-\mu}\end{aligned}$$

د $\mu = 1$ لپاره لاس ته راځي:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

له بني ∞^0 و بني $0^{(\pm\infty)}$ ته دا کارونه په يوې بيلگې روښانه کوو:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} &= \lim_{x \rightarrow +0} e^{\sin x \cdot \ln \frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +0} (\sin x \cdot \ln \frac{1}{x})} \\ \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln \frac{1}{x}}{\sin x} &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\cos x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin^2 x}{x \cdot \cos x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{2 \sin x \cos x}{\cos x - x \cdot \sin x} = 0\end{aligned}$$

$$\text{د سره } \lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} = 1$$

بايد لاندې جدول کې پام وشي.

لاندې جدول د پورته ښوول شوو بنويو ډولونو د بني بدلون ټوليزه کتنه ممکنوي

بڼه بدلون يا لنډ: بدلون	$g(x) \rightarrow$	$f(x) \rightarrow$	ټيپ (ډول)
$\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{g(x)} = \frac{g(x) - f(x)}{f(x) \cdot g(x)} \rightarrow \frac{0}{0}$	0	0	$-\infty$

∞	0		$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \rightarrow \frac{0}{0}$ $\wedge (Or)$ $f(x) \cdot g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} \rightarrow \frac{\infty}{\infty}$
∞	$\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}$	$(f(x))^{g(x)} = e^{\ln(f(x))^{g(x)}} = e^{g(x) \cdot \ln f(x)} \rightarrow e^{0 \cdot \infty}$ د $f(x) > 0$ سره.

تمرینونه:

پورته کي ډبرې بیلگې حل شوي. له هغوباید څه تمرینونه راوړل شي.

(۱) لاندې پوله ارزښتونه وشمیرئ.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2^x}$	b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$
c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[x]{x}$	d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x$
e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x}}{e^x}$	f) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{\sin x}{x^2}\right)$

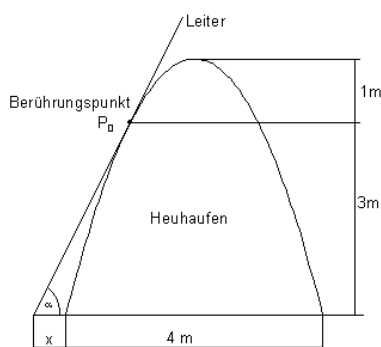
د $x \rightarrow \infty$ لپاره د لاندې راشنل توابعو لیمیتونه د دې لو پیتال قاعدې له مخې وشمیرئ.

a) $f(x) = \frac{2x^3 - x + 4}{3x^3 + 1}$

b) $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{4x^3 + 3x^2 - 2x + 5}$

د تانجنت لپاره د یوې تابع د استعمال بیلگې

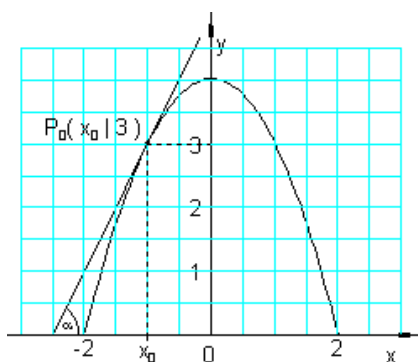
له ځمکې څخه د وښو په توپۍ یوه زینه ایښول کیږي. دا زینه په درې متره جگوالی توپۍ لمسوي.



د وښو توپۍ دې د یوه کینځکودي پارابول څېره ولري، چې بنسټ یې 4 متره سرور دی او 4 متره جگوالی لري. غواړو په دې یوه زینه کړدو، چې د وښو توپۍ سره تانجنت جوړ کړي.

په کومه زاویه (کونج) باید دا زینه کښول شي؟

د وښو توپۍ له بیخ څخه دې په کوم لږوالي په ځمکه دا زینه کښول شي؟



موږ د y محور داسې کاروو، چې د پارابول له ککړې (څوکې) څخه تېرېږي. پارابول دا لاندې د تابع مساوات لري:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_2 x^2 + 4 \\ f(2) &= 0 \Leftrightarrow 4a_2 + 4 = 0 \Leftrightarrow a_2 = -1 \\ \Rightarrow f(x) &= -x^2 + 4 \end{aligned}$$

موږ د x_0 لپاره ارزښت ټاکو:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 3 \Leftrightarrow -x_0^2 + 4 = 3 \\ \Leftrightarrow x_0^2 &= 1 \Leftrightarrow x_{01/2} = \pm 1 \end{aligned}$$

شمېرنه:

د نورو شمېرنو لپاره ارزښت $x_0 = -1$ کاروو. زینه توپۍ په $P_0(-1, 3)$ ټکي کې لمسوي. موږ په $P_0(-1, 3)$ ټکي کې د تانجنت مساوات ټاکو:

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2 + 4 \quad P_0(-1 | 3) \Rightarrow x_0 = -1; f(x) = 3 \\ t(x) &= f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \end{aligned}$$

د $f'(x) = -2x$ سره لاس ته راځي:

$$f'(x_0) = f'(-1) = -2 \cdot (-1) = 2$$

$$\Rightarrow t(x) = 2[x - (-1)] + 3 = \underline{\underline{2x + 5}}$$

جوړه زاویه: $\tan \alpha = 2 \Leftrightarrow \alpha \approx 62.4^\circ$

د زینې او د وینو ټوپۍ تر منځ واټن د $f(x)$ د صفر ځای او د تانجنت $t(x)$ د صفر ځای ترمنځ واټن دی.

صفر ځایونه:

لرو:

$$f(x) = -x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_{1/2} = \pm 2$$

$$t(x) = 2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -2.5$$

د x ارزښتونو -2.5 او -2 ترمنځ واټن 0.5 دی.
زینه د وینو د ټوپۍ له پښو څخه باید نیم متر لرې کېښول شي.
ددې پوښتنې څخه مو زده کړل، چې د تانجنت مساوات څنگه ټاکل کېږي، چې یو گراف په تعریف شوي ځای کې لمسوي.

د سترې گټې (غټو گټو) مسئله یا قضیه

دا د سترې گټې مسئله خورا ستره عملي مانا لري، چې په لاندې ډول به د یو څو بیلگو له لارې وڅیړل شي.

نزدې ټولو پروسو کې، چې په عمل کې کارول کېږي یا صورت نیسي، له تاثیر وونکو یا په همدې ډول د هغو ټاکلو لویو استعمال ته اړ دی، کوم چې موږ په ځانگړو یا مخصوصو پولو کې په اختیار کې لرو دی شو.

موږ یواځې هغه پروسې تر څیړنې لاندې نیسو چې د یوې واریابې یا اووښتونې x په واک کې وي. دا د بل په واک کې د یوې تابع $y = f(x)$ ، $x \in D$ له لارې څرگندولی شو.

که y ټول لگښتونه یا مصارف په کوټه کړي، نو x باید داسې وټاکل شي چې $f(x)$ مینیمال یا خورا کم شي.

که په څټ يا برعکس y گټه وي يا گټور تاثیر وي، نو x بايد داسې لاس ته راوړل شي، چې $f(x)$ ماکسیمال يا خورا لوی شي. په قاعده کې اغزمنه يا مؤثره لويه يا په بل عبارت، خپلواک وار يا بل يا اووښتونى x د $-\infty$ او ∞ پولو ترمنځ ازاده ټاکونکى نه ده، بلکه د تخنيک يا تخنيک پوهنې له امله، يواځې په ټاکلو پولو کې:

$$a \leq x \leq b \quad (*)$$

له دې امله عملي په زړه پورې د گټې مسئلې، په دې پورې اړه لري، چې آیا دا گټه ده او که لگښت.

$$y = f(x) = \max! \quad (a \leq x \leq b) \quad ($$

$$y = f(x) = \min! \quad (a \leq x \leq b) \quad ($$

دا د افراطي ارزښتونو برخې پر اېلمونو سره خورا نژدې يا ټينگ تړلى دی. دلته زموږ علاقه په ځانگړې توگه د لاندې پر اېلم د کار کولو سره ده:

1- د بلواکيزو $y = f(x)$ گڼو اړيکو راپيدا کول، د دندې يا وظيفې ورکولو سره سم (موداليتي پر اېلم).

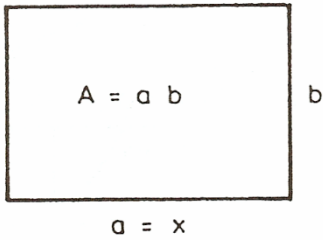
2- د تخنيک پوهنې پولو په پام کې لرل (*) دادې د دوه بيلگو له لارې وښول شي

بيلگه: يو د منډو (پټي ته په کلوکي د اغزو منډو کېښول کېږي، چې مالونه ور وا نه وړي) سيم لرو چې ټول اوږدوالى يې L دی. له دې سيم سره بايد يوه مربع سطحه (څلورگوديزه هواره)، چې د امکان تر حده بايد لويه وي، منډو شي. دا وظيفه شوه يا په بل عبارت غوښتنه.

اوس د موداليتي Art und Weise پر اېلم: غوښتنه مو د يوې څلور ضلعي (څلورگودى) پيدا کول دي. لکه چې معمول دي، ددې څلور ضلعي (څلور گودى) يو اړخ په a ښايو او بل اړخ يې په b ښايو، د څيرې 14.20 له مخې).

دا په سر کې دوه اغيزې لرونکي يا تاثير اچونکي لويې a او b دی.

$$L = 2a + 2b, \quad b = (L/2) - a$$

	له امله يواځې يوې اغيزمنې (تاثير اچوونکي) لويې ته اړيو د بيلگي په توگه $a = x$، دا گټه (سته A) داسې ده $A = ab = x((L/2) - x)$ دا روښانه ده چې صدق کوي $0 \leq x \leq L/2$ له دې امله د ستري گټې پراېلم داسې دی.
---	--

$$y = f(x) = x((L/2) - x) = \text{Max!} \quad (0 < x < L/2)$$

د $f(0) = f(L/2) = 0$ له امله بايد ماکس د 0 او $L/2$ ترمنځ پروت وي.

د ماکس لپاره ضرور دي

$$y' = f'(x) = L/2 - 2x = 0$$

د ماکس لپاره يواځې $x = L/4$ په پوښتنه کې راځي.

د دې لپاره $y'' = f''(x) = -2 < 0$ دی.

په ريښتيا چې يو ماکس مو مخ ته پروت دی. دلته تخنيکپوهنيزې پولې 0 او $L/2$ رول نه

لوبوي. نو صدق کوي. $a = b = L/4$

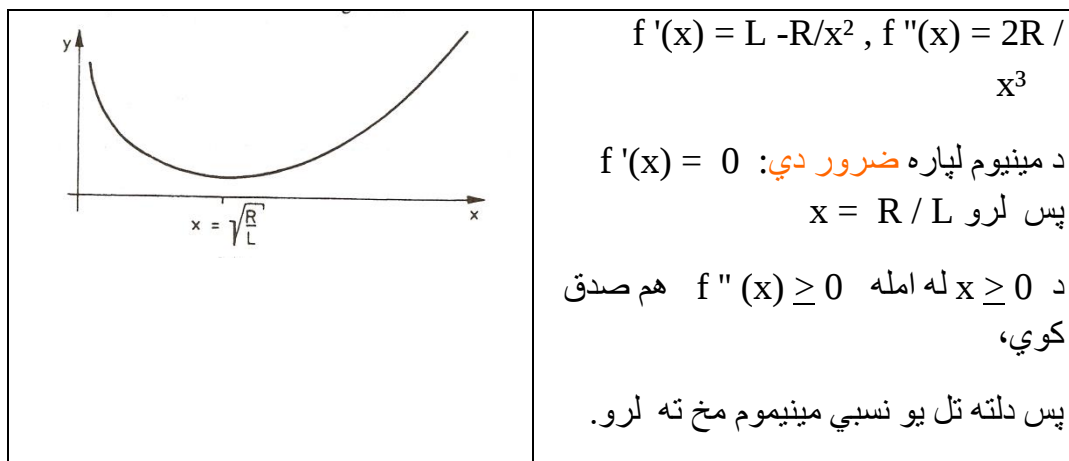
بيلگه: يوه بډای چې په يوه ټاکلي وخت کې تولست (تولديري) M توليد کړي او دا تل اخستونکو ته ورسوي، نو له دې سره فيکس يا کره ټاکلی لگښتونه F ترلي دي. کيدې شي چې سملاسي د دې توليد په تولست (تولديري) M کې توليد کړي، په يوه زخيره ځاي (زېرمتون؟) کې ځاي په ځاي کړي او اخستونکو ته يې سملاسي ورسوي. دلته

د زېمتون (زخیره کونې) لگښتونه راپید کیري (ددې د زخیرې لپاره ځای او هلته بیا اچول او وړل). یا هم کیدی شي چې تولید په لږه کچه یا اندازه تولید شي او سملاسی اختونکو ته وروړل شي. دلته نو د زخیره کولو لگښتونه منځ ته نه راځي. مگر تل تولید په دې ډول تولید باندې درول، لگښتونه منځ ته راولي، چې د چمتووالی لگښتونه یی بولو. کومه ډیری x (ازاده لویه) باید تولید شي، چې د امکان تر ټولو کم لگښتونه پرې وشي؟ د زخیرې لگښت د چمتووالی لگښت سره متناسب دی، د خرابیدو ارزښت د چمتووالي یا تولید ارزښت سره یعنی چي خرڅلاو ته چمتو کیري، په څې متناسب دی. که x لوی وي نو چمتووالی ته کم اړتیا شته او که x کم وي نو چمتووالی بدلون تل باید تغیر وځوري یعنی. ټول لگښتونه

$y = f(x) = F + Lx + R/x$ دي، چیرته چې F ثابت (همغه) یا په کلکه اینول شوي لگښتونه دي، L د زخیرې لگښتونه او R د چمتووالی لگښتونه دي. دا ازاده لویه x د تولید ډیری M څخه نه شي سترېدلی، لویدلی یا غټیدلی. له دې امله صدق کوي $0 \leq x \leq M$. مخ ته پروت د ستریدلو مسئله له دې امله په لاندې ډول ده:

$$y = f(x) = F + Lx + R/x = \text{Min!} \quad (0 \leq x \leq M)$$

لومړی $f(x)$ دوه واړه دیفرنځیال کیري یا یی دوه واړه رابیلیدنه نیول کیري:



د کبري (منحني) تگلار په شکل کې انځور شوې. څرگنده ده: که $x = R/L < M$ صدق ولري، نو مینیموم مو مخته پروت دی. که $x = R/L > M$ وي، نو یو مینیموم په څنډه $x = M$ لرو. نامساوت $x = R/L < M$ دا مانا لري $R/L < M^2$ په همدې ډول $R^2 < M^2 L$ پس مخ ته لرو: $x = R/L$ د $R < M^2 L$ لپاره او $x = M$ د $R > M^2 L$ لپاره؛ نو: که د چمتوالي لگښتونه R ، زخیرې لگښتونه L څخه زیات لوي شي، نو سملاسی دې ټول تولید $x = M$ صورت ونیس. که د زخیرې لگښتونه د چمتووالي لگښت څخه کم وي، کیدی شي کوچنی ازاد x تولید شي.

ټاکلی بیلگه: د $M = 10000, R = 1000, L = 10$ لپاره صدق کوي،
 $R = 1000 < M^2 L = 108 \cdot 10 = 109$ ستر یا غټ ازاد لگښت دی
 $x = R/L = 1000/10 = 100 = 10$ ازاد a دلته 10 یوونه باید ورزیات شي، چی
 10000 یوونه تولید کړي د $M = 10, R = 1000, L = 1$ لپاره صدق کوي
 $R = 1000 > M^2 L = 100$ غټ ازاده لویه له دې امله $x = M = 10$ ده، یواځې یوه ازاده لویه دې تر تولید لاندې ونیوله شي.

په تولید کې د مشتق استعمال

فعالیت:

یوه فابریکه x تولید کوي. په دې تولید لگښت کېږي، چې دا د تولید په واک کې دی، چې موږ ورته د لگښت تابع وایو او په $K(x)$ سره یې ښایو. څنگه کولی شو، چې د زیات تولید لپاره لگښت را ټیټ کړو؟ د لگښت تابع $K(x)$ د تولید سټ (ډېری) او ټول لگښت تر منځ تړاو انځوروي. که تولید د Δx شاوخوا کې زیات شي، نو لگښت هم د ΔK په شاوخوا کې زیاتېږي. کمښتویش (تقسیم تفاضل) $\frac{\Delta K}{\Delta x}$ د منځني لگښت زیاتوالي ښايي، د یوه Δx تولید تغیر سره (منځنی تغیر ارزښت)

د x_0 ځای کې لحضوي تغیر ارزښت د مشتق لگښت بلل کېږي. دا د پوله ارزښت

سره ټاکل کېږي، داپه دې معني، چې د لگښت د تابع K مشتق.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta K}{\Delta x}$$

پېژند: د لگښت تابع $K(x)$ مشتق د مشتقارزښت $K(x)$ په نامه یادوو یا یې پوله لگشت $K'(x)$ هم بولو.

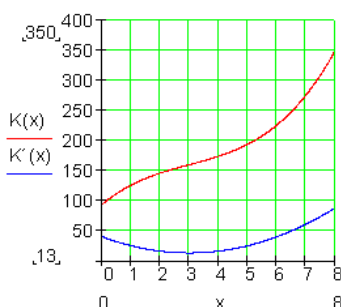
بېلگه: د لگښت تابع $K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94$ دې ورکړ شوې وي.

الف: مشتق ارزښت وټاکي، یو ارزښت جدول د $K(x)$ او $K'(x)$ لپاره وکارې او په پروتولار سیستم یا کوارډیناتسیستم کې یې گراف وکاري.

پوله ارزښت د $[0; 6]$ لپاره په ۱ پل(قدو) پراخوالي سره.

ب: د ډېر کم لگښت زیاتوالی و ټاکي:

لاندې تابع



$$K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94$$

لرو

مشتق ارزښت

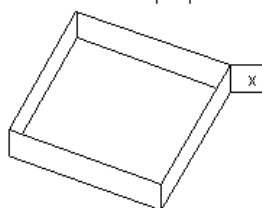
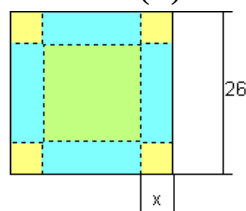
$$K'(x) = 3x^2 - 18x + 40$$

ارزښت جدول

x	0	1	2	3	4	5	6
K(x)	94	126	146	160	174	194	226
K'(x)	40	25	16	13	16	25	40

خوړا کم د لگښت زیاتوالی (لگښت جگپښه) د پارابول $K'(x)$ په ککره (خوکه) کې پروت دی، یعنې هلته چې تانجنت $K'(x)$ پروت یا افقي دی

$$K'(x) = 3x^2 - 18x + 40 \Rightarrow K''(x) = 6x - 18$$



دد تانجنت د پروتوالي یا افقیت لپاره:

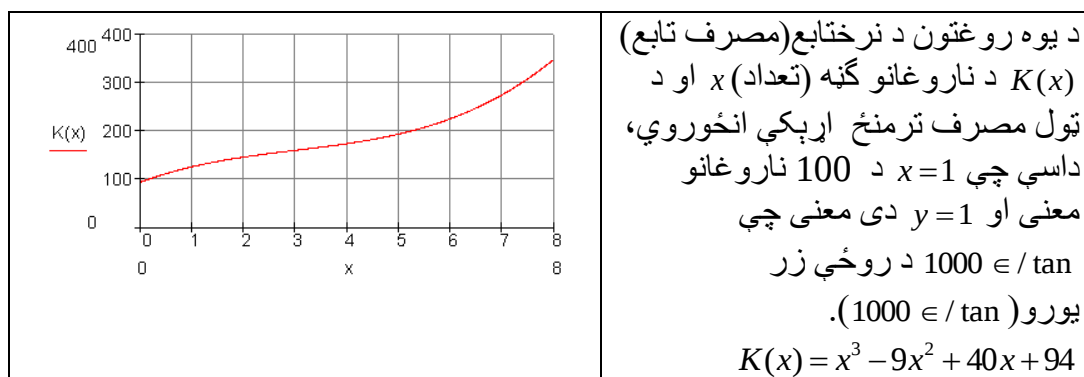
$$K''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 18 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x = 3}}$$

پوښتنې: دي، مربع کارتون (د کلک کاغذ څخه جوړ) څخه، چې 26 سانتي متره د اړخ اوږدوالی لري یو بکس جوړوو بې له سرپوښ، چې د x جگوالی لري.

الف: د یوه تابع ترم وټاکي، چې د بگس حجم (ډکي) V د x په واکوالي یا تابعیت کې

ښايي.

ب: گراف وکارئ او په نږدې توگه يې
ماگسيما(خورا جگ) حجم و ټاکي.



الف: د مصرف تابع په خپله کتابچه کې وليکئ.

ب: د لگښت تابع مشتق د مشتق لگښت (-مصرف) يا دحدمصرف په نامه ياديږي. تاسو د
 لگښت زياتېدنه د ناروغانو په واکوالي يا تابعيت کې تشرېح کړئ. (د $K(x)$ جگېدونه).
 $K'(x)$ وټاکئ او گراف يې په وضعيه سيستم (پروت- ولاړ-سيستم) کې انځور کړئ
 پ: د ناروغانو د کوم تعداد سره د لگښت زياتوالی خورا کم دی؟ دا قېمتونه وشمېرئ.

ټولگه:

د رول (Rolle) قضيه:

يوه د f تابع دې په بند اينتروال $[a, b]$ کې متمادي وي د $f(a) = f(b)$ سره او په واز
 اينتروال (a, b) کې مشتقور، نو لږ تر لږه يوځاي $c \in (a, b)$ شته دی د $f'(x_0) = 0$ سره.

د مشتق د منځني ارزښت (وسطي قيمت) قضيه: $\left[\begin{smallmatrix} P \\ SEP \end{smallmatrix} \right]$
 که $y = (x)$ تابع په بند اينتروال $[a, b]$ کې متمادي

څيره په نوبت کې ده،

او په واز اينتروال (a, b) کې د مشتق وړ وي، نو هلته يوځای $x \in (a, b)$ شته دی، د کوم لپاره چې

$$\text{لرو: } \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0)$$

پراخه شوي منځنۍ:

که $u = f(x)$ او $v = g(x)$ په بند اينتروال $[a, b]$ کې متمادي توابع وي او په واز اينتروال (a, b) کې مشتق وړ او $g'(x) \neq 0$ باور ولري، نو د ټولو $x \in (a, b)$ لپاره، کم له کمه يوځای $x_0 \in (a, b)$ وجود لري چې لاس ته ترې راځي:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

قضيه:

- د $f(x)$ تابع دي په انتروال I کې مشتق وړ وي.
2. که د $f(x)$ تابع په اينتروال I کې مونوټون جگېدونکي وي، نو باور لري: $f'(x) \geq 0$ د ټولو $x \in I$ لپاره
- که $f(x)$ په اينتروال کې همغريز ټيټېدونکي وي، نو باور لري: $f'(x) \leq 0$ د ټولو $x \in I$ لپاره.
 - که $f'(x) \geq 0$ وي، د ټولو $x \in I$ لپاره، نو $f(x)$ په اينتروال I کې همغريز جگېدونکي ده.
 - که $f'(x) \leq 0$ وي د ټولو $x \in I$ لپاره، نو $f(x)$ په ايتروال I کې همغريز ټيټېدونکي ده.
 - که $f'(x) > 0$ وي، د ټولو $x \in I$ لپاره، نو $f(x)$ په اينتروال I کې په کلکه همغريز جگېدونکي ده.
 - که $f'(x) < 0$ وي د ټولو $x \in I$ لپاره، نو $f(x)$ په اينتروال I کې په کلکه مونوټون ټيټېدونکي ده.

که د $f(x)$ لپاره د x_0 په ځای کې $f'(x) = 0$ ولرو نو يو نسبي ټيټ ټکی مو مخ ته پروت دی.

که د $f(x)$ لپاره د x_0 په ځای کې $f'(x) = 0$ او $f''(x) > 0$ ولرو نو يو نسبي ټکی مو مخ ته پروت دی.

که ددې برعکس ولرو: $f'(x) = 0$ او $f'(x) < 0$ ، نو یو نسبي ماکسیموم مو مخ ته پروت دی.

د بحراني ټکي (ټيټ ټکي يا جگ ټکي) لپاره خوي ټاکونکی دی، چې $f'(x) = 0$ وي، او د $f''(x)$ مخ نښه (+ ، -)، په دې پریکړه کوي چې ایا یو اصغري ټکی او که اعظمي ټکی مو مخ ته پروت دی.

پېژند: د $x = x_0$ په چاپیریال کې د $y = f(x)$ تعریف شوې تابع یو نسبي جگ ټکی په همدې ډول نسبي ټيټ ټکی لري، که ټولو x_0 ته پوره نږدې x لپاره باور ولري:

$$f(x) > f(x_0) \text{ په همدې ډول } f(x) \leq f(x_0)$$

جمله: (د یوه نسبي بحراني ټکي لپاره ضروري شرایط):

که په x_0 کې مشتق وړ تابع $y = f(x)$ انحرافي ټکی لري نو لرو: $f'(x) = 0$

دا جمله موږ ته وایي: چیرته چې $f'(x) \neq 0$ وي نو هلته اکستريموم نه شته، د اکستريموم لپاره یواځې د x_0 ځای په پوښتنه کې راځي، چې د هغې لپاره لرو $f'(x) = 0$ ، خو حتمي نه ده چې $y = f(x)$ دې یواکستريموم ولري.

جمله: (د یوه بحراني ټکي لپاره پوره کیدونکی شرایط):

که په $x = x_0$ کې دوه واره مشتق وړ $y = f(x)$ تابع لپاره ولرو: $f'(x) = 0$ ، $f''(x) \neq 0$ ، نو تابع $y = f(x)$ هلته یو بحراني ټکی لري.

خوږا ټيټ ټکی مخ ته لرو، که وي: $f''(x) > 0$

خوږا جگ ټکی مخ ته پروت دی ، که وي: $f''(x) < 0$

پېژند: په يوه چاپيريال $x = x_0$ کې مشتق وړ تابع $y = f(x)$ يو کين-بنی-انعطافټکی په همدې ډول بنی-کين-انعطافټکی لري، که د هغه مشتق هلته يو نسبي جگټکی(عظمي نقطه) په همدې توگه يو نسبي ټيټ ټکی ولري.

جمله: (د يوه نسبي بحراني ټکي لپاره ضروري شرايط):

که په x_0 کې مشتق وړ تابع $y = f(x)$ اکستريموم لري نو لرو: $f'(x) = 0$

دا جمله موږ ته وايي: چيرته چې $f'(x) \neq 0$ وي نو هلته بحراني ټکی نه شته، د بحراني ټکو لپاره يواځې د x_0 ځای په پوښتنه کې راځي، چې د هغې لپاره $f'(x) = 0$ وي، خو حتمي نه ده چې $y = f(x)$ دې يو بحراني ټکی ولري.

د پورته جملې استعمال

پېژند: د زينټکي(کله کله برنډې ټکی هم بلل کيږي)لاندې د انعطافټکي ځانگړی حالت پوهيږو، داسې انعطافټکی چې تانجنت يې افقي (پروت) وي:

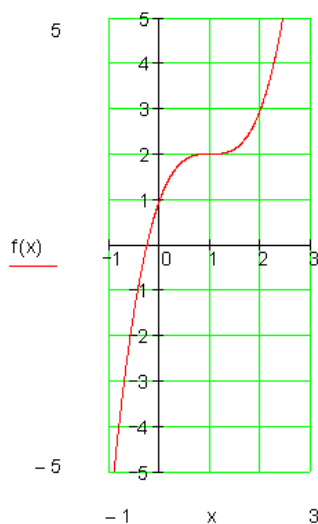
د پرتلي لپاره دې بيا يو،،عادي،، انعطافټکی ورکړ شوی وي.دا يو مائل(نه افقي) تانجنت لري

په $y' = f'(x)$ څخه لاندې جمله لاس ته راځي:

جمله: (د اوږونټکي(انعطاف ټکي) لپاره اړين شرايط):

که په $x = x_0$ کې دوه واره مشتق وړ تابع $y = f(x)$ هلته يو انعطاف ټکی ولري، نو لاس ته ترې راځي: $f''(x) = 0$

Der Sattelpunkt (د اس زين) زينټکی



د انعطاف ټکي یو ځانگړی حالت زینټکی دی. دا د انعطاف ټکی دی د صفر جگپښي سره که د کین لور ورتزدي شو فکر کېږي، چې، نسبي جگټکی مو مخ ته پروت دی که څوک د بنې لور ورتزدي شي فکر کوي، چې یو نسبي ټیټکی مخ ته لرو. اوس دا حالت د ریاضیاتو له لوري څېړو: مشتق:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$$

$$f''(x) = 6x - 6$$

$$f'''(x) = 6$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 3 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 1$$

د برنولي او د ډي لو، پینال قاعده: که توابع $u = f(x)$ او $v = g(x)$ د یوه $U(x_0)$ چاپیریال د x_0 په ځای کې مشتق وړ وي د $g'(x) \neq 0$ سره او د $\vec{SEP}$ ټولو $x \in U(x)$ لپاره او f او g یوصفرځای وي،

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \text{ نو باور لري: } f(x_0) = g(x_0) = 0$$

ترڅو په بنې لور حد شته وي.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ په ورته توگه لاس ته راځي:}$$

د څېړکي تمرینونه:

۱ -- د لاندې ماتراشنل توابعو د مونوټوني حالت د a په واکوالي کې ورکړئ.

$$a) f(x) = \frac{1}{ax + 2}$$

$$b) f(x) = \frac{1}{ax^2 + 1}$$

۲ -- و څېړئ، چې ایا لاندې توابع په خپله پېژند وړشو مونو ون او که په کلکه مونوټون دي.

$$a) f(x) = \frac{e^x}{2 + e^x}$$

$$b) f(x) = 2x^5 - 7$$

۳ -- لاندې ناراشنل توابع په یو غریزوالي خوښوونو وڅیړ.

$$a) f(x) = e^{x^2}$$

$$b) f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1}$$

۴ -- د لاندې توابعو ټول لوکال افراطي ټکي پیدا کړئ.

$$a) f(x) = e^{-4x^2}$$

$$b) f(x) = (x^2 - 3) \cdot e^x$$

$$c) f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$d) f(x) = \ln(x^2 + 1)$$

۵ -- د تابع ټول لوکال افراطي ارزښتونه دې په دې په لاندې انتروال کې ولټول شي.

$$-2\pi \leq 2\pi.$$

$$a) f(x) = \sin^2 x$$

$$b) f(x) = \sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2}\right)$$

۶ -- لاندې توابعو ټول لوکال او گلوبال افراطي ځایونه پیدا کړئ.

$$a) f(x) = \sqrt{x^2 + x}$$

$$b) f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$$

$$c) f(x) = x - \sqrt{x}$$

$$d) f(x) = 3 + \sqrt[3]{x^2}$$

۷ -- لومړی دمطلق ارزښت وشمېرئ او پسي ټول افراطي ارزښتونه وټاکئ.

$$a) f(x) = |x| + x^2$$

$$b) f(x) = |x^2 + 2x - 8|$$

۸ -- د تابع $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{(x - 1)^2}$, $x \neq 1$ سره د انعطاف ټکي پیدا کونه

۹ -- د $x_1 = 1$ او $x_2 = 2$ لپاره تابع ارزښتونه وشمېرئ او هم د f تابع جگپښه د

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - x + 1.$$

سره.

۱۰ -- په صفرځاي کې $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$ ۱ تابع کومه جگېښه لري.

۱۱ -- د $f(x) = 0,5x^4 - x^3 + 0,5x^2 + x - 4$ ګراف په کومو ټکو کې جگېښه لري؟

۱۲ ---- د $x_0 = -1$ ځاي کې د $f(x) = \frac{x^4 - 8x^2 + 16}{x - 1}$, ($x \neq 1$) تابع ارزښت اود ګراف جگېښه غواړو پياکړو

۱۳ -- د لويپټال قاعدې په مرسته د $x \rightarrow \infty$ لپاره د لاندې مات ريښتوني توابعو پوله ارزښتونه وشمړئ.

$$a) f(x) = \frac{2x^3 - x + 4}{3x^3 + 1}$$

$$b) f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{4x^3 + 3x^2 - 2x + 5}$$

۱۴ -- د لاندې توابعو لپاره د منحنیو شننيز بحث وکړئ او ګرافونه يې وکارئ.

$$a) f(x) = -x^3 + x^2 + 4$$

$$b) f(x) = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}x^2$$

$$c) f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 2$$

$$d) f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$$

۱۵ -- د لاندې توابعو لپاره د پوره منحنیو مطالعه وکړئ او ګرافونه يې وکارئ.

$$a) f(x) = \frac{x}{4} - \frac{2}{x^2}$$

$$b) f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 3}$$

$$c) f(x) = \frac{3x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

$$d) f(x) = \frac{9}{x^2 + 3}$$

۱۶ -- د لاندې توابعو صفرځايونه وشمېرئ.

$$a) f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{11}{2}x - 3$$

$$b) f(x) = x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24$$

$$c) f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$$

$$d) f(x) = x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{12}$$

$$e) f(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$$

$$f) f(x) = x^4 + 6x^3 - 11x^2 - 60x + 100$$

۱۷ -- د دریمې درجې تام راشنل ګراف د x -محور د $x_1 = -2$, $x_2 = 0$ او $x_3 = 4$ په ټکو کې غوڅوي.

د تابع مساوات کوم دي، که سربېره پر دې ګراف د $P(2, -8)$ ټکي څخه هم تېر شي؟

۱۸ -- د یوه څلورمې درجې تام راشنل تابع د x -محور د $x_1 = 0,5$ او $x_2 = 3$ په ټکو کې غوڅوي. د تابع برابرې څنګه دی، که پرسېره پردې ګراف د y -محور د $P(0,9)$ په ټکي کې هم لمس کړي.

۱۹ -- د څلورمې درجې د یو تام راشنل تابع ګراف د وضعیه قیمت سیستم پیل او له

$P(\frac{1}{2} / -\frac{15}{8})$ ټکي تېرېږي. د تابع مساوات څنګه دي، که ګراف د x -محور هم د

$x_1 = -1$ سره لمس کړي او په $x_2 = 2$ کې غوڅ کړي.

۲۰ -- د لاندې توابعو صفر ځایونه پیدا کړئ.

$$a) f(x) = \frac{x^2 + 2x - 15}{x + 4}$$

$$b) f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}{x}$$

$$c) f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 5x - 3}{x - 0.5}$$

$$d) f(x) = \frac{x^4 - x^3 + 4x^2 - 4x}{x + 5}$$

۲۱ -- د یوه مات راشنل f تابع د $f(x) = \frac{x^3 + ax^2 + bx + c}{x + d}$ سره ثابتې a, b, c

او d پیدا کړئ، که د $x_1 = -2, x_2 = -(1:2)$ او سره صفر ځایونه پراته وي او تابع په $x = 0$ کې یو تشای ولري.

$$\text{it } f(x) = \frac{(x-1)^3}{x}, \quad (x \neq 0) \mid$$

۲۳ -- مات یا کسري راشنل f تابع په $x=1$ کې د سره درې ځله صفرځاي لري.

د یوې ساحې د ویش په مرسته وڅېړئ چې په همدې څلورمه (ربع) کې صفرځاي کې ځغلي او که صفرځاي څلورمه بدلوي.

۲۴ -- دا سې یو ترم وټاکئ، کوم چې د لاندې پریودی کې یا تل بېرته راگرځېدونې توابعو صفر ځایونه ورکوي.

$$-2\pi \leq x \leq 2\pi \mid$$

د شمېرنې له لارې صفر ځایونه ونوموئ، چې په انټروال کې پراته وي.

$$a) f(x) = \frac{1}{2} \sin 3x$$

$$b) f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$c) f(x) = 1 - \sin^2 x$$

$$d) f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$$

۲۶ -- ولې لاندې توابع صفر ځایونه نه لري؟

$$a) f(x) = \ln(x^2 + 3)$$

$$b) f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$$

$$c) f(x) = \frac{e^x}{x+1}$$

$$d) f(x) = 1 + \sin^2 x$$

۲۷ -- ولې کېدې شي چې یو تابع ډېر صفر ځایونه ولري، مگر د y - محور سره یواځې یو صفر ځاي ولري؟

۲۸ -- د صفر ځایونو د تعداد په هکله څه ویلای شئ، که د یو f تابع لپاره په تعریف سټ (- ډېری) کې یو f^{-1} معکوس تابع هم شته وي؟

۲۹-- د y - محور سره د لاندې توابعو غوڅنکي وشمېری.

$$a) f(x) = x^3 + 2x - 1$$

$$b) f(x) = (x+1) \cdot \ln(x+1)$$

$$c) f(x) = \frac{x^4 - 3x^2 + x}{x+2}$$

$$d) f(x) = \frac{4}{\sqrt{x^2 + 9}}$$

$$e) f(x) = (x-2) \cdot e^{x-1}$$

$$f) f(x) = e^{\frac{2}{1-x}}$$

۳۰-- د یوه تام راشنل تابع $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

د $a_0 \neq 0$ سره کېدی شي د y -محور غوڅنکي د ساده لوستلو له لارې و ټاکل شي.

په دې هکله دلایل راوړی.

۳۱-- د $x_1=1$ او $x_2=2$ لپاره تابع ارزښتونه وشمېری او هم د f تابع جگېدنه د

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - x + 1.$$

سره.

۳۲-- په صفر ځای کې $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$ تابع کومه جگېدنه لري.

۳۹-- په کومو ځایونو کې لاندې توابع پروت تانجنت لري؟

$$a) f(x) = x^2 e^{-x}$$

$$b) f(x) = \ln(x^2 + 1)$$

۴۰-- د a د کومو ارزښتونو لپاره د $f(x) = (x+a) \cdot e^x$ د گراف د $x_0=0$

په ځای کې ۲ جگوالی لري؟

۴۱ د لاندې توابعو ټول ځایزې (لوکال) خوراجگ ټکي وښایاست.

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$

b) $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 1$

c) $f(x) = 4x^3 - 18x^2 + 15x + 7$

d) $f(x) = x^4 - 4x^2 + 5$

e) $f(x) = x^5 - 5x^3 - 20x$

f) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{10}{3}x^3 + 6x^2 - 2$

۴۳ -- د n -مې درجې یو تام راشنل تابع خورا زیات څومره لوکال (خایز) افراطي ځایونه لروډی شي؟

۴۴ -- ولې د جگټکي لپاره شرایط $f''(x) < 0$ اړین نه دي؟

۴۵ -- د لاندې توابعو لوکال (خایز) انحرافي (افراطي) ځایونه وټاکئ.

a) $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + 4x^2 + 8x - 1$

b) $f(x) = \frac{1}{3}x^4 + 1$

c) $f(x) = \frac{1}{3}x^4 - 2x^2 + \frac{8}{3}x$

d) $f(x) = x^4 - 4$

۴۷ -- د f تابع ټول لوکال افراطي ارزښتونه دې په دې په لاندې انټروال کې ولټول شي.

$$-2\pi \leq 2\pi.$$

a) $f(x) = \sin^2 x$

b) $f(x) = \sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2}\right)$

۴۸ -- لاندې توابعو ټول لوکال او گلوبال افراطي ځایونه پیدا کړئ.

a) $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$

b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$

c) $f(x) = x - \sqrt{x}$

d) $f(x) = 3 + \sqrt[3]{x^2}$

--- د f تابع د $x \neq 1$ سره $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{(x - 1)^2}$ د انعطاف ټکي پیدا کړئ.

۵۳-- په انټروال $0 \leq x \leq 2\pi$ کې د انعطاف ځایونه پیدا کړئ.

a) $f(x) = x + \sin x$ b) $f(x) = 2(1 - \sin 2x)$

۵۴-- لاندې توابع په x_0 کې په مشتقوړتیا باندې وڅېړئ.

a) $f(x) = \begin{cases} \cos x & x \leq 0 \\ x^2 + 1 & x > 0 \end{cases}, \quad x_0 = 0$

b) $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x < 1 \\ x^2 & x \geq 1 \end{cases}, \quad x_0 = 1$

c) $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x < 1 \\ e^{x-1} & x \geq 1 \end{cases}, \quad x_0 = 1$

d) $f(x) = \begin{cases} \ln x & x \leq 1 \\ x - 1 & x > 1 \end{cases}, \quad x_0 = 1$

۵۵-- ولې متمادیت د مشتقوړتیا لپاره اړین شرط، مگر مشتقوړوالی د متمادیت لپاره پوره کېدونکی شرط دی؟

۵۶-- په کوم دلیل تام راشنل توابع د $x \in R$ لپاره مشتقوړ دي؟

۵۹-- و څېړئ، چې ایا لاندې توابع په خپله پېژند وړشو مونو ون او که په کلکه مونوټون دي.

a) $f(x) = \frac{e^x}{2 + e^x}$

b) $f(x) = 2x^5 - 7$

۶۱-- په کومه وړشو کې لاندې تام راشنل توابع یو کین کړوالی لري او په کون کې بنی کړوالی لري.

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5x + 2$

b) $f(x) = -2x^3 + 3x^2 - x - 4$

۶۲-- لاندې مات توابعو گرافونه هاپاربول دي. د هاپاربول څانگې کوم کړوالی لري؟

$$a) f(x) = \frac{1}{4x+1}$$

$$b) f(x) = 3 - \frac{3}{x^2}$$

۶۴ -- ولي د يوه دريمې درجې تام راشنل تابع گراف په تل تلنه کې يوه ښې انځنا (کېوالی) نه لري.

۶۵ ولي يو څلورمه درجه تامراشنل تابع د $f(x) = ax^4 + dx + e$ سره يو تلتلونی کينه انځنا (کېوالی) او ښې انځنا لري؟

۱۵۸ (۱۰۳): څنگه کېدی شي، چې د يوې f تابع د ۱. درجې مشتق څخه د د گراف په انځنا قضاوت وکړو؟

۱۶۰ (۱۰۵): د لاندې توابعو حالت وڅېړئ، که $|x| \rightarrow \infty$ په لور لاړ شي.

$$a) f(x) = x^3 - 4x^2 - 4x - 5$$

$$b) f(x) = -3x^4 + x^3 - 2x^2 + x$$

$$c) f(x) = \frac{1}{3}x^5 - x + 6$$

$$d) f(x) = -\frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{5}x + \frac{4}{5}$$

$$e) f(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}$$

$$f) f(x) = -x^3 - x^2 - x - \frac{1}{3}$$

۱۶۳ (۱۰۸): ولي د $x \rightarrow +\infty$ لپاره په ساده ډول د پولې په هکله وړاند وینه نه شي کېدای:

$$a) f(x) = x^3 \cdot \frac{1}{\ln x}$$

$$b) f(x) = x \cdot e^{-x}$$

۱۶۷ (۱۱۲): د جوړه (جفت) جگدند (اکسپوننت) سره تام ريښتونی تابع کوم ډول سيومتري لري؟

۱۶۸ (۱۱۳): د نا جوړه (طاق) جگدند (اکسپوننت) سره يو تام ريښتونی تابع ټيک هلته د سر چيني سره ټکی سيومتري دی، چې مطلق ارزښت صفر شي؟

۱۷۱ (۱۱۶): لاندې توابع په بنسټ کې لوستل شوي سيومتري خوبونه نه لري. وښايئ چې

دا سره له دې هم سیومتريک دي.

$$a) f(x) = (x+2)^2$$

$$b) f(x) = 1 + \frac{1}{x}$$

$$c) f(x) = -(x+1)^2 + 3$$

$$d) f(x) = 2 + \frac{1}{x-4}$$

(۱۷۲۱۷): لاندې تام ريښتوني اعداد په محدوديت وڅېړئ.

$$a) f(x) = x^2 - 2x + 4$$

$$b) f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x$$

$$c) f(x) = -(x+3)^2 + 1$$

$$d) f(x) = x^3 - 2x + 1$$

(۱۷۶)(۱۲۱): د لويېتال قاعدې په مرسته د $x \rightarrow \infty$ لپاره د لاندې مات ريښتوني توابعو پوله ارزښتونه وشمړئ.

$$a) f(x) = \frac{2x^3 - x + 4}{3x^3 + 1}$$

$$b) f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{4x^3 + 3x^2 - 2x + 5}$$

(۱۷۸)(۱۲۳): د لاندې توابعو لپاره د $x=x_0$ په ځاي کې د تانجنت مساوات وټاکئ

(۱۷۹)(۱۲۴): په کومو ټکو کې د لاندې مساواتو لپاره د تانجنت مساوات د ورکړ شوي کرښې سره غبرگ دي؟

(۱۸۸)(۱۳۳): د لاندې تام ريښتوني توابعو د انعطاف ټکي (اوړونټکي) او د نورمالي مساوات وليکئ.

$$a) f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3} \quad b) f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 2x + 10$$

(۱۸۹)(۱۳۴): د f_t تابع د انعطاف ټکي مساوات وليکئ.

$$f_t(x) = \frac{4}{3}t^2x^3 + 3tx^2 + 3x \quad (t \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

۱۹۲ (۱۳۷): د لاندې توابعو لپاره د منحنيو شننيز بحث وکړئ او گرافونه يې وکارئ.

$$a) f(x) = -x^3 + x^2 + 4$$

$$b) f(x) = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}x^2$$

$$c) f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 2$$

$$d) f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$$

په ټوټه ماتونو يا کسرونو ټوټه کونه

الف) اصلي کسرونه، چې مخرچ يې مختلف لاینيز ضریبونه لري.

بنسټ: که د یوه اصلي پولینوموېش $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ مخرجپولینوم $P_n(x)$ په مختلفو

کرنیزو (لایني) ضریبونو $P_n(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$ ټوټه کېدونکی وي،

نو پولینوم $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ په لاندې بڼه بدلېدی شي.

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2} + \frac{C}{x - x_3} \dots \frac{N}{x - x_n}$$

داسې یوه بڼه په ټوټه کسرونو ټوټه کونه، بلل کیږي، چې $A, B, C, \dots, N$ حقیقي عددونه دي.

فعالیت: په پورته ننوتنه کې و ښایاست، چې دا ټوټه کسرونه چېرته تعریف لري؟

-- د یوه په خوبه پولینوم کسر ټوټه ونه او د تعریف ساحې ورکړئ.

بیلگه: اصلي پولینوم کسر $\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10}$ په ټوټه کسر ټوټه کړئ.

حل: د مساوات $x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = 0$ لومړی حل $x_1 = 1$ د آزمایش له لارې څیرو .

د پولینوم ویش (لنډ: پولینومویش) $(x - 1) = x^2 - 3x - 10$: $(x^3 - 4x^2 - 7x + 10)$ مو ټوټه ونې ته بیایي $x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = (x^2 - 3x - 10)(x - 1)$ مساوات $x^2 - 3x - 10$ اوس $x_2 = -2$ او $x_3 = 5$ حلونه لري.

له دې امله $x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = (x - 5)(x - 1)(x + 2)$ دی.

د اصلي کسر $\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10}$ په ټوټه کسرونو ټوټه کونه:

د کسرونو شمیرنو قاعدې له مخې کیدی شي ورکړ شوی پولینوم په درې جمعې برخو ټوټه شي، چې مخرجونه یې لاینیز (کرښیز -) ضریبونه دي:

$$\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} = \frac{A}{x - 5} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{x + 2}$$

د غزېدنې سره د ټوټه کسر جمعه:

اصلي مخرج د ټوټه کسر د پولینوم مخرج دی.

$$\begin{aligned} \frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} &= \frac{A(x - 1)(x + 2) + B(x - 5)(x + 2) + C(x - 5)(x - 1)}{(x - 1)(x - 5)(x + 2)} \\ \frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} &= \frac{Ax^2 + Ax - 2A + Bx^2 - 3Bx - 10B + Cx^2 - 6Cx + 5C}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} \\ \frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} &= \frac{(A + B + C)x^2 + (A - 3B - 6C)x + (-2A - 10B + 5C)}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} \end{aligned}$$

د صورتونو ارزښت A, B او C ټاکنه د ضریبونو د پرتلې له لارې:

د مساوي مخرجونو کسر کې بسيا کوي، چې صورتونه سره پرتله کړو. دلته باید د مساوي توانونو ضریبونه، دا په دې مانا چې د x, x^2 او x_0 باید مساوي وي.

$$A + B + C = 4 \quad \text{I}$$

$$A - 3B - 6C = -1 \quad \text{II}$$

$$-2A - 10B + 5C = 39 \quad \text{III}$$

د فاکټور ۲ سره د I او II مساوات ضربونه او د هر یوه جمع د III سره پورته درې مساوات سیستم و دوه مساوات سیستم ته د دوه متحولو سره را لنډوي.

$$-8B = -72 \quad \text{V}$$

$$-16B - 7C = -41 \quad \text{IV}$$

د مساوات IV.V څخه لرو: $B = 3 \Rightarrow -24B = -72$

د $B = 3$ په V کې ایښوونه: $C = -1 \Rightarrow -16.3 - 7C = -41$

د $B = 3$ او $C = -1$ په I کې ایښوونه: $A = 2 \Rightarrow A + 3 - 1 = 4$

په ټوټه کوني فرمول کې ایښوونې سره غوښتونکي ټوټه کسر لاسته راځي:

$$\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} = \frac{2}{x-5} + \frac{3}{x-1} - \frac{1}{x+2}$$

ازمایښت:

$$\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} =$$

$$= \frac{(x-1)(x+2) + 3(x-5)(x+2) - 1(x-5)(x-1)}{(x-5)(x+2)(x+2)} = \frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10}$$

تمرینونه:

د لاندې اصلي پولینوم کسرونو په ټوټه کسرونو ټوټه کړئ.

$$a) \frac{2x^2 + 20x + 12}{x^3 + 2x^2 - 5x + 6}, \quad b) \frac{x^2 + 1}{x^3 - x}, \quad c) \frac{4x + 10 + 12}{x^2 + 6x + 8}$$

ب) اصلي پولینوم کسرونه، چې مخرج یې مساوي لاینیز (کرنیز) فاکتورونه لري.

که د یوه اصلي پولینوم $P_n(x)$ مخرج $\frac{P(x)}{P_n(x)}$ د کرنیز فاکتور $x - x_0$ توان $\frac{A}{(x - x_0)} + \frac{B}{(x - x_0)^n} + \dots + \frac{N}{(x - x_0)^n}$ وي، نو ددې کرنیزو فاکتورونو له پاره پولینوم لاندې بڼه لري:

$$\frac{3x^2 - 6x + 2}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}$$

د نورو ټولو ساده منځ ته راغلو کرنیزو فاکتورونو ټوټه کسرونو په بلده بڼه ورکول کیږي.

بیلگه:

د اصلي پولینوم کسر $\frac{3x^2 - 6x + 2}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}$ لپاره په ټوټه کسر ټوټه کونه ورکړئ.

د مخرج ټوټه ونه په کرنیزو فاکتورونو:

د پولینوم $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$ لومړی حل $x_1 = 1$ د ازمايښت له لارې پیدا کیږي.

پولینوم ویش $(x-1) : (x^3 - 4x^2 + 4x - 2) = x^2 + 3x + 2$ مو لاندې ټوټه کونې ته لارښودوي:

$$x^3 - 4x^2 + 4x - 2 = (x^2 + 5x - 2)(x - 1)$$

مساوات $x^2 - 3x + 2 = 0$ دا $x_2 = 1$ او $x_3 = 2$ حلونه لري. نو له دې سره د مخرج لپاره ډبل حل دی:

$$x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x - 2)(x - 1)^2$$

د ټوټه کسر پیل:

$$\frac{3x^2 - 6x + 2}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{(x - 1)} + \frac{C}{(x - 1)^2}$$

د ټوټه کسر جمع د غزونې له لارې:

$$\begin{aligned} \frac{3x^2 - 6x + 2}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} &= \frac{A(x - 1)^2 + B(x - 2)(x - 1) + C(x - 2)}{(x - 2)(x - 1)^2} \\ \frac{3x^2 - 6x + 2}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} &= \frac{(A + B)x^2 + (-2A - 3B + C)x + (A + 2B - 2C)}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} \end{aligned}$$

د A, B او C صورتونو ارزښت د ضریبونو پرتله کونې له لارې.

$$\begin{array}{ll} A + B = 3 & \text{I} \\ -2A - 3B + C = -6 & \text{II} \\ A + 2B - 2C = 2 & \text{III} \end{array}$$

د مساوات II د 2 سره ضرب او د III سره جمعه د I سره گډ د دوه مساوات د دوه متحولو سره.

$$\begin{array}{ll} A + B = 3 & \text{I} \\ -3A - 4B = -10 & \text{II} \end{array}$$

د I ضرب له 4 سره او جمعه يې له IV سره : $A = 2$

د $A = 2$ اېښوونه په I کې: $2 + B = 3 \Rightarrow B = 1$

د $A = 2$ او $B = 1$ اېښوونه په III کې: $2 + 2.2 - 2C = 2 \Rightarrow C = 1$

د ټوټه کونې فرمول له لارې ټوټه مسر ټوټه ونه لاس ته راځي:

$$\frac{3x^2 - 6x + 2}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} = \frac{2}{x-2} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

تمرینونه:

د لاندې اصلي پولینوم کسرونو په ټوټه کسرونو ټوټه کونه ورکړئ.

$$a) \frac{3x^2 + 5x + 10}{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}$$

$$b) \frac{3x^2 - 18x + 36}{x^3 - 6x^2 + 9x}$$

$$c) \frac{x^2 + 3x + 4}{x^4 - 2x^2 + 1}$$

$$d) -\frac{x^2 + 13x + 10}{x^3 - 5x^2}$$

پ (اصلي پولینوم کسرونه، چې مخرج يې پوره په کرښيزو فاکتورونو نه ټوټه کېږي.

بنسټ:

که د یوه اصلي پولینوم کسر $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ مخرچپولینوم $P_n(x)$ نور په یوه حقیقی ضریب

نه ټوټه کېدونکي ضریب $ax^2 + bx + c$ مخ ته پروت وي، نو په ټوټه کېدو کې دې د یو

ټوټه کسر $\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$ په بڼه کې کینول شي یا راوړل شي

بیلګه:

د پولینوم کسر $\frac{5x^2 + 8x + 9}{x^3 + 3x^2 + 6x + 4}$ له پاره دې په ټوټه کسر ټوټه ونه ورکړ شي.

د مخرج ټوټه کونه په کرښیزو ضربونو:

لومړی حل دې $x_1 = -1$ وي مساوات $x^3 + 3x^2 + 6x + 4 = 0$ د ازماښت له لارې پیدا کړي.

بولینوم وېش $(x+1) = x^2 + 2x + 4$: $(x^3 + 3x^2 + 6x + 4)$ مو لاندې ټوټه کونې ته بیایي:

$$x^3 + 3x^2 + 6x + 4 = (x+1)(x^2 + 2x + 4)$$

دا چې مساوات $x^2 + 2x + 4$ حقیقي حل نه لري، نو د حقیقي اعدادو په ورشو کې نوره ټوټه کونه ناشونې ده.

نو له دې امله پولینوم کسر لاندې ښه لري:

$$\frac{Ax}{x^2 + 2x + 4}$$

د $\frac{c}{x+1}$ ښې کسر سره یوځای مو لاندې ټوټه کسر ټوټه کونې ته بیایي:

$$\frac{5x^2 + 8x + 9}{x^3 + 3x^2 + 6x + 4} = \frac{Ax + B}{x^2 + 2x + 4} + \frac{C}{x+1}$$

د غزونې له لارې د ټوټه کسرونو جمع

$$\begin{aligned} \frac{5x^2 + 8x + 9}{x^3 + 3x^2 + 6x + 4} &= \frac{(Ax + B)(x+1) + C(x^2 + 2x + 4)}{x^3 + 3x^2 + 6x + 4} \\ \frac{5x^2 + 8x + 9}{x^3 + 3x^2 + 6x + 4} &= \frac{(A+C)x^2 + (A+B+2C)x + (B+4C)}{x^3 + 3x^2 + 6x + 4} \end{aligned}$$

د ضریبونو A, B, C ټاکنه د پرتله کولو له لارې:

$$A + C = 5 \quad \text{I}$$

$$A + B + 2C = 8 \quad \text{II}$$

$$B + 4C = 9 \quad \text{III}$$

د III کمښت (تفریق) له مساوات II څخه د I سره یې گډولو څخه مساوات لاس ته راځي، چې دوه اووښتونې یا متحولې لري:

$$A - 2C = 5 \quad \text{IV}$$

$$A + C = 5 \quad \text{I}$$

مساوات III منفي مساوات II :

$$C = 2 \quad \text{د I اښوولو سره:}$$

$$C = 2 \quad \text{د III اښوولو سره:}$$

که دا د توتیه کونې فرمول کې کېږدو نو د توتیه کسرونو توتیه کونه لاس ته راځي

$$\frac{5x^2 + 8x + 9}{x^3 + 3x^2 + 6x + 4} = \frac{3x + 1}{x^2 + 2x + 4} + \frac{2}{x + 1}$$

تمرینونه:

د لاندې اصلي کسري پولینومونو په توتیه کسرونو توتیه کونه ورکړی:

$$a) \frac{-x^2 + 2x - 12}{x^3 + 2x^2 + 6x + 5}$$

$$b) \frac{4x^2 - 3x + 8}{x^3 - 2x + 4}$$

$$c) \frac{8x^2 - 16x + 10}{x^3 - 4x^2 + 5x}$$

$$d) \frac{x}{x^3 + 2x^2 + 2x + 1}$$

ج (نا اصلي پولینوم کسرونه:

که د یوه پولینوم $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ د صورت درجه د پولینوم د مخرج له درجې څخه لویه وي، نو دا د پولینومویش له لارې په ټولناتق کسر او یوه اصلي کسر ټوټه کېدی شي.

بیلگه:

کسري پولینوم $\frac{3x^3 - 6x^2 - 20x - 1}{x^2 - 2x - 8}$ په ټوټه کسري پولینومونو ټوټه کړئ .

د پولینوم د صورت درجه درې ده او د مخرج دوه . نو له دې امله مو یو نا اصلي پولینومکسر مخ ته پروت دی.

پولینوم وېش:

$$(3x^3 - 6x^2 - 20x - 1) : (x^2 - 2x - 8) = 3x + \frac{4x - 1}{x^2 - 2x - 8} - \frac{(3x^3 - 6x^2 - 24x)}{4x - 1}$$

د پاتې کسر $\frac{4x - 1}{x^2 - 2x - 8}$ له پاره د ټوټه کسر ټوټه کونې کارونه (عملیه) مخ ته بیا یو. مخرج په کرښیزو ضریبونو ټوټه کړی:

د مساوات $x^2 - 2x - 8 = 0$ له پاره حل $x_1 = -2$ او $x_2 = 4$ لرو.

نو $x^2 - 2x - 8 = (x - 4)(x + 2)$ دی.

په ټوټه کسرونو ټوټه کونه

$$\frac{4x-1}{x^2-2x-8} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+2} \quad \text{د ټوټه کسر ټوټه کونې لپاره ځای په ځای کوو:}$$

د غزونې له لارې د ټوټه کسرونو جمعه کول:

$$\begin{aligned} \frac{4x-1}{x^2-2x-8} &= \frac{A(x+2) + B(x-4)}{(x-4)(x+2)} \\ \frac{4x-1}{x^2-2x-8} &= \frac{(A+B)x + (2A-4B)}{x^2-2x-8} \end{aligned}$$

د ضریبونو د پرتله کوونې په مرسته د A او B ټاکل:

$$\begin{aligned} A+B &= 4 & \text{I} \\ 2A-4B &= 4 & \text{II} \end{aligned}$$

$$\text{د I ضرب له 2 سره او له II څخه یې تفریق یا کول } 6B = 9 \Rightarrow B = \frac{3}{2}$$

$$\text{په II کې ایښوول: } 2A - 4\frac{3}{2} = -1 \Rightarrow A = \frac{5}{2}$$

$$\frac{4x-1}{x^2-2x-8} = \frac{5}{2(x-4)} + \frac{3}{2(x+2)} \quad \text{منځنۍ لاس ته راوړنه}$$

متحول (بستونکی) په ټوټه کسر ټوټه کونه لاندې بڼه غوره کوي:

$$\frac{3x^3-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8} = 3x + \frac{5}{2(x-4)} + \frac{3}{2(x+2)}$$

پوښتنې د لاندې پولینومکسرونو په ټوټه کسر ټوټه کونه ورکړئ.

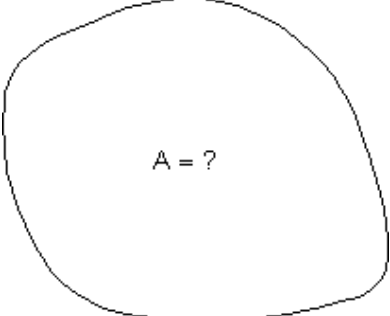
$$a) \frac{3x^2+7x^2+17x+17}{x^2+6x+8}$$

$$b) \frac{2x^4-8x^3+7x^2-3x+4}{x^2-4x+3}$$

$$c) \frac{2x^3+x^2}{x^3-1}$$

$$d) \frac{4x^3+16x^2-7x-49}{x^3+4x^2+x-6}$$

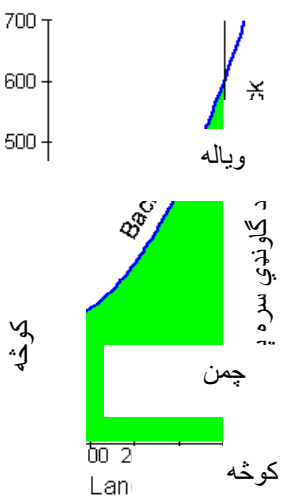
د انتیگرال شمیرنې لپاره پیل راوړنې

	پخوانیو یونانیانو ته دا د منحنی څخه رابندې سطحې شمېرلو اصول معلوم وو. دا د مشتق شمېرنه، چې موږ ورسره اوس سر او کار لرو، ډېر وروسته (د اوه لسمې پېړۍ پاي کې) د طبیعي علومو پوهانو د لایبنیټز او نیوتون له خوا رامنځ ته (اختراع) شو.
---	---

فعالیت:

- د پورته رابندې څېرې د سطحې د شمېرلو له پاره وړاندیزونه وکړئ.
- ایا تاسو د داسې سطحې شمېرلو سره بلد یاست؟
- ایا تاسو دې ته ورنږدې سطحې مساحت شمېرلی دی؟ او که هونو هغه ولیکئ.
- داپورته سطحه د وضعیه قیمت سیستم له لارې په څلورو نږدې برابرې برخو ووېشئ او د انتیگرالونې په هکله یې فکر وکړئ.

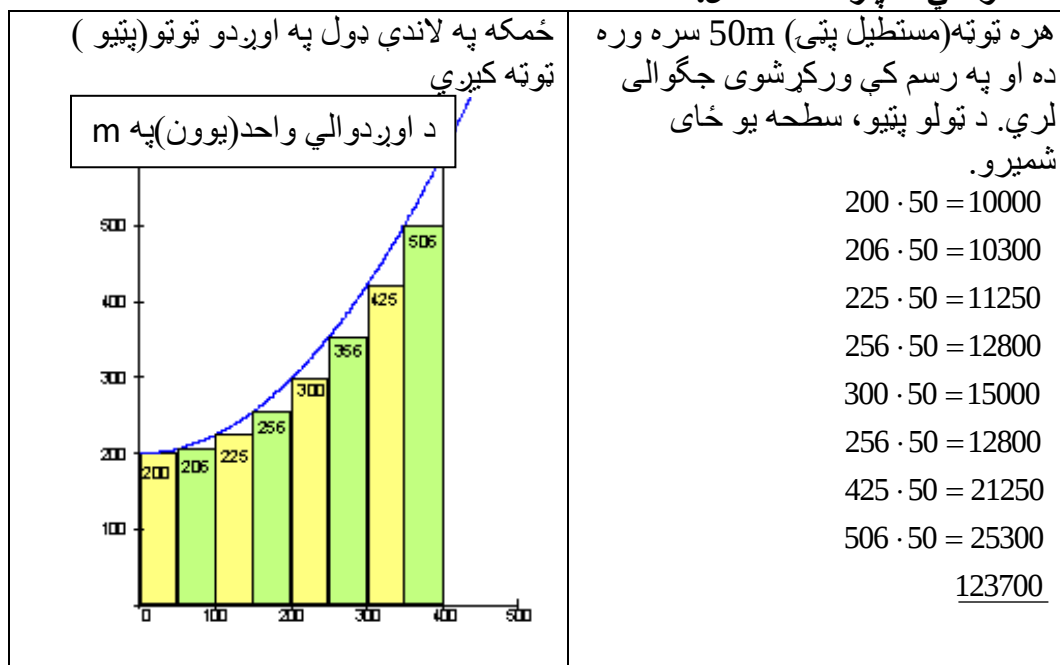
بیلگه

	دا څیره شوی چمن خرڅیږي. له پورته لور د ویالې را بند دی او له بني لور د گاونډي ځمکه ده او کین لور ته کوڅه او له کښته لور هم د یوې کوڅې را بند دی. ددې لپاره چې چمن وپلورل شي، باید سطحه وپیژندل شي. د پلورونکې لپاره سطحه باید نږدې پوره مگر هیڅکله کمه ونه شمیرل شي. اخستونکې هم د ځان لپاره فکر کوي، چې پیسې باید ورکړي، خو هیڅکله ځمکه د اصل څخه زیات ونه شمېل شو.
---	--

وروسته له دې چې رانیوونکي او پلورونکي د چمن سطحه معلومه کړه، دواړه د پیسو په تادیه سره یوځای کیږي او په دې هکله موافقه کوي.

ویاله $f(x) = \frac{1}{400}x^2 + 200$ د تابع مساوات لري.

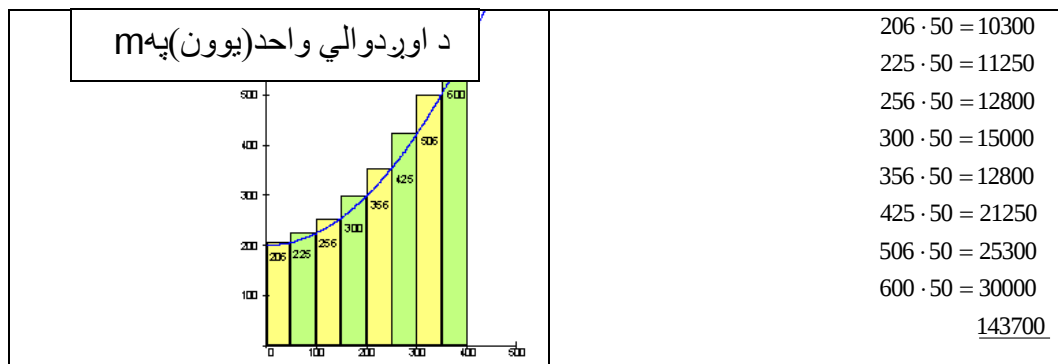
د اخستونکي له پاره ممکنه حل.



د اخستونکي لپاره ټوله سطحه نژدې 123700 m^2 ده.

د پلورونکي له پاره ممکنه حل:

	هره توتو (پټی) 50m سورلري او په رسم کې ورکړ شوی جگوالی لري. د ټولو پټیو سطحه یوځای شمیرو.
--	--



د د پلورونکي له پاره د ټولې سطحې مساحت نږدې $143700 m^2$ دی. اخستونکی او پلورونکی باید د دواړو قیمتونو،،منځ،، ته راشي، دا په دې معنا چې دواړه د قیمتونو منځ ارزښت یو بل سره ومني. یعنې د سطحې منځ ارزښت، چې دی:

$$\frac{123700 + 143700}{2} = 133700 \text{ unt}^2$$

دا به وروسته د ټاکلي انټیګرال برخه (په مخ) کې وشمېرو، چې ریښتونی ارزښت یې $133333.3m^2$ دی.

د اخستونکي په بېلګه کې دا ډول شمیرنه لاندنۍ،،**جمعي جوړول**،، بلل کېږي. د پلورونکي په بېلګه کې دا ډول شمیرنه،،**پورتنۍ جمعي**،، جوړول بلل کېږي. دا د سطحې ریښتونی ارزښت یو چیرته په دا منځ کې پروت دی. باید ددې له پاره یوه لار پیدا کړو، چې ریښتونی ارزښت ترې لاس ته راشي. ددې کار لپاره لږ نوره د چمتووالي لار شته.

پوښتنې

د $3x^2+1$ تابع ګراف وکارئ.

د انټروال $[1,3]$ ترمنځ د تابع سطحه به نڅښه کړئ.

د دې ورکړ شوي سطحې پورته جمعه جوړه کړئ

د دې ورکړ شوي سطحې کښته جمعه جوړه کړئ

انتیگرال شمیرنه Integral calculation

د سطحې تابع له پاره تر مخ راوړنه:
دا دانتیگرال هندسي مفهوم هم دی.
په کارتیزي وضعیه قیمت سیستم کې د گراف په سرچینه کې یوه کرښه
رسموو. غواړو سطحه پیدا کړو، چې د تابع دگراف او x - محور ترمنځ د x په واکوالي
کې پرته وي.

د ریمین (ټاکلی) انتگرال

دلته دې یوه څېره راوړل (د یوه ډنډ او یا.....)

فعالیت:

- یوه په خوښه هندسي څیره وکارئ، چې په ترتیب له درې، پنځو او اوو کرښو رابنده وي. د دې څیرو سطحه په ورسره ډول وشمیرئ.
- په یوه د وضعیه قیمت سیستم کې یوه کره (منحنی) وکارئ او وڅیړئ، چې سطحه یې په ورنژدې ډول پیدا کړی چې د x محور او منحنی ترمنځ پرته وي.

یادونه: انتیگرال څه شی دی؟

انتیگرال کونه Integration د ورگډېدلو په معنی دی، لکه چې یو څوک یوې پردې ټولنې ته ورگډیږي یعنې ددې پردې ټولنې خویونه خپلوي، یعنې دی په دې ټولنه ورزیاتیږي. دا هم په همدې موخه دلته دا موضوع څیړلو ته وړاندې کیږي، چې څنگه د یوې کوچنۍ درجې تابع و یوه جگ درجې تابع ته ځي.

د انتیگرال هندسي تعريف:

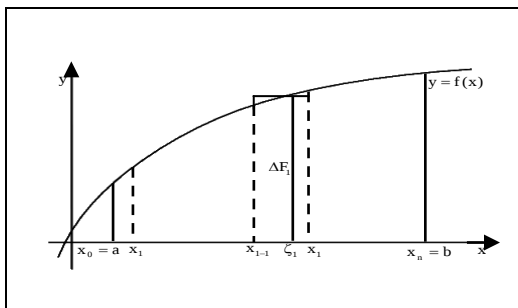
لوریزه سطحه-د انتیگرال تعريف:

که یوه f تابع ولرو، نو د x محور او تابع ترمنځ سطحې شمیرل د انتیگرال له لارې کیږي. په دې سطحه کې د x محور پورته لوري ته سطحه مثبتې مخښېنه لري او د x محور کښته لوري ته سطحه منفي مخښېنه لري.

تحليلي تعريف:

تعريف: د f یوه تابع ورکړ شوې، چې په یوه انتروال $[a, b]$ باندې تعريف دی، نو د a څخه تر b پورې د تابع د انتیگرال څخه د x په محور د f د گراف او د کرني $x=a$ او $x=b$ تر منځ یوه یوه لوریزه سطحه پوهیږو.

په دې برخه کې غواړو، چې د انتگرال کلیمې ته وده ورکړو. د سطحې کوچني یا اندازه کوونې څخه کړی شو د انتگرال شمېرنې ته راشو، له دې امله انتگرال نیول د مشتق په څېټ یا برعکس کارونه یا عملیه ده.



یو تابع $y = f(x)$ لرو. غواړو ددې تابع د گراف او د x - محور باندې پرتو ټکو او ترمنځ هواره (سطحه) وشمیرو داسې چې $f(x) > 0$ وي. (څیره ۱.۱)

ددې دندې د حل لپاره د $[a, b]$ اینتروال په n (نه اړیښ) برابر و برخو انتروالونو $[x_{i-1}, x_i]$ ټوټه کوو.

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$$

$$x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$$

په اینتروال $[x_{i-1}, x_i]$ کې په خوښه $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ټاکو.

د $x = x_{i-1}, x = x_i, y = f(x)$ تر منځ سطحه (هواره) دا لاندې د مستطیل سطحه (و لار کونجیزه هواره) ده:

$$\Delta F_i(x) = f(\xi_i) \cdot \Delta x_i; \dots \dots \dots (4,1)$$

د ټولو پورته مستطیل ډوله کوچنیو سطحو د جمعې (زیاتون) له لارې غوښتونکي، نږدې ټوله سطحه لاس ته راځي:

$$F_n = \sum_{i=1}^n \Delta F_i = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i; \dots \dots \dots (4,2)$$

دا نږدېوالی تر هغې ښه کیږي څومره چې د اینتروال $[a, b]$ ویش نری شي یعنې $\max \Delta x \rightarrow 0$ ، هر څومره چې د زیاتیدونکو شمیر $n \rightarrow \infty$ (شي).

که (۲. ۴) تل همغه ډوله ارزښت F ولري، په دې اړه نه چې اینتروال $[a, b]$ څنګه ویشل شوی او $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ څنګه ټاکل شوي، نو $f(x)$ په اینتروال $[a, b]$ کې اینتېګرال وړ دی. دا د بیلګې په توګه د ټولو ټوټه، متمادی او محدودو توابعو $y = f(x)$ حالت دی.

پېژند (تعریف) ۴. ۱: که لیمیت

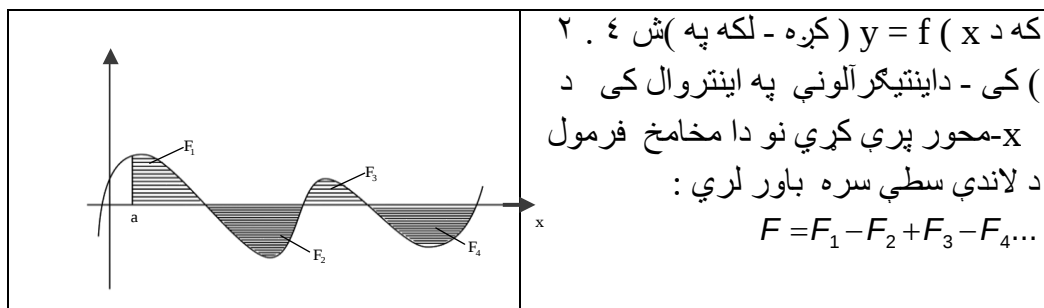
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx = F; (\max \Delta x \rightarrow 0), \dots \dots \dots (4,3)$$

په اینتروال $[a, b]$ کې موجود وي، نو دا د $f(x)$ ټاکلی اینتیګرال بولو، یا د ریمان سطحه F - Riemann. دلته a د اینتیګرال کېدونکې لاندې (کښته) پوله او b د اینتیګرال کېدونکې پورته پوله بلل کېږي او $[a, b]$ د اینتیګرال کېدونکې اینتروال او $f(x)$ (اینتیګرالیدونکی) او x د اینتیګرال کېدونکې متحول (Integrationsvariable) بلل کېږي.

یادونه ۱: د اینتیګریشن واریابلې یا اووښتونې کیدې شي په خپله خوښه په نڅېنه شي (مځېنه یا علامه یې په خوښه وټاکل شي).

$$\text{موږ لرو: } \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du$$

یادونه ۲: دا پورته تعریف ۴. ۱ کېدې شي هغه حالت ته پراخه شي، چېرته چې $f(x) > 0$ باوري نه وي. که $f(x) < 0$ وي نو دا ټاکلی اینتیګرال بیا د x -محور تر لاندې منفي هواره لري.



د تعریف ۴. ۱ پسي ترلې دا لاندې جمله لرو:

جمله ۴. ۱: که $f(x)$ په $[a, b]$ کې اینتیګرالور وي او $c \in [a, b]$ وي، نو باور لري:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

ددې لپاره چې دا پورته مساوات د c ارزښتونو ته پراخه کړی شو، باید له اینتروال $[a, b]$ د باندې نه وي پروت، یعنې ټکي a, b او c په یوه اینتروال کې باید پراته وي، په هغه کې چې تابع $f(x)$ اینتیګرال ور دی.

موږ دا لاندې تعریف (پیژند) لرو :

پیژند یا تعریف ۴. ۲: $f(x)$ په یوه بند انټروال $[a, b]$ کې اینتیګرال ور دی، نو باور لري:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

د پیژند تعریف ۴. ۱ له مخې تل باور لري: $\int_a^a f(x) dx = 0$

تمرینونه:

د لاندې توابعو ګراف و کارئ او د ګراف او x محور ترمنځ د سطحې مثبتې او منفي لور په نڅه کړئ.

الف: $4x^3 + 5x^2 + x + 6$ ،

ب: $x^2 - 4x + 16$ ،

پ: $x^4 + 5x^2 - 2x - 7$

بنسټیز - یا لومړنۍ تابع

$$F'(x) = f(x)$$

فعاليت

- په پورته مساوات کې به $F(x)$ څنگه وليکلای شو؟

- $F(x)$ نسبت و $f(x)$ ته څه بلل کيږي او په څټ، $f(x)$ د $F(x)$ څه بلل کيږي؟

په پورته دواړو پوښتنو کې فکر وکړي، چې پايلې يې دا لاندې دي:

ددې لپاره چې د مشتقيولو او اينټيگراټل نيولو ترمنځ اړيکې لاس ته راوړو، د لومړنۍ تابع کلمه په لاندې توگه تعريفوو:

پيژند (تعريف):

تابع $y = f(x)$ دې په يوه واز اينټروال I کې تعريف وي. هر يوه هلته موجوده مشتقور $F(x)$ تابع چې $F'(x) = f(x)$ شرايط پوره کړي، د $f(x)$ بنسټيز - ساده - يا لومړنۍ تابع بلل کيږي

په ساده توگه ليدل کيږي چې د يوې $f(x)$ تابع لپاره نه يواځې يو بنسټيز تابع $F(x)$ موجود دی، د بيلگې په توگه $F_0(x) = x^2$, $F_1(x) = x^2 + 1$, $F_2(x) = x^2 + 2$ تابع، بلکې په عمومي ډول

$$F(x) = x^2 + C, \text{ چې دا ټول مساوي مشتقونه } f(x) = 2x \text{ لري.}$$

د پورته ښوونو پايله، چې څنگه سړی د يوه متمادي تابع $f(x)$ لومړنۍ تابع پيدا کوي، په لاندې ډول ده:

جمله:

$y = f(x)$ دې په اينټروال I کې متمادي تابع وي، نو د $a \in I$ لپاره

$$f(x) \text{ د } F_a(x) = \int_a^x f(t) dt \text{ يوه لومړنۍ تابع ده، دټولو } c \in I \text{ لپاره.}$$

د $f(x)$ هره بله لومړنۍ (بنسټيزه) تابع لاندې بڼه لري:

$$F(x) = F_a(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

ځواب: ښايو چې $F_a(x)$ د $f(x)$ بنسټيز تابع ده. ددې د ښوولو لپاره ښايو چې د $F_a(x)$ لپاره د پورته پېژند شرايط باور لري. د $F_a(x)$ مشتق د $x \in I$ او $x \neq a$ لپاره په لاندې ډول ده.

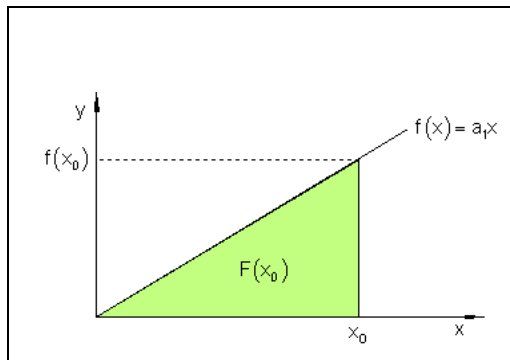
$$\begin{aligned} F_a'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \left[\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \int_a^{x+h} f(t) dt \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot h \cdot f(\xi), \quad \xi \in [x, x+h] \end{aligned}$$

د ليميت منځ ارزښت جملې له مخې داسې يوه ξ شته دی (د متماديت له امله $f(\xi) \rightarrow f(x)$)

$$= f(x)$$

سطحه او لومړنۍ تابع:

سطحي تابع ته ترمخ راوړنه:

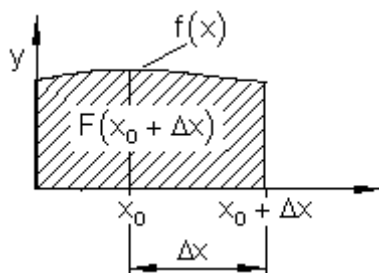
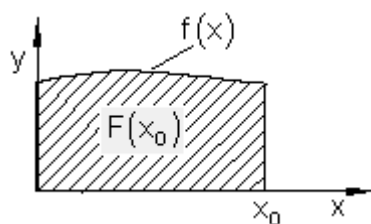
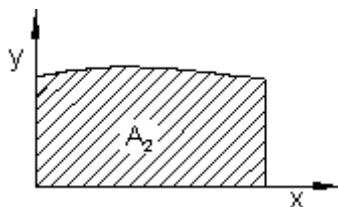
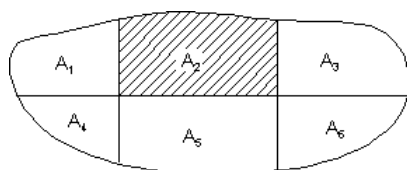


د تابع $f(x) = a_1x$ گراف په کار تېزي وضعيه سيستم (پروت ولاړ سيستم) په سرچينه کې يوه کرښه انځوروي. يو تابع غواړو پيدا کړو، چې د گراف او x -محور ترمخ، د x_0 په واکوالي يا تابعيت کې سطحه په گوته کوي. دا چې دا جوړه شوې سطحه يو مثلث دی، نو حل يې د مثلث د سطحي فرمول په مرسته

$F(x_0) = \frac{x_0 \cdot f(x_0)}{2}$ د $f(x_0) = a_1 x_0$ سره په لاندې ډول دی: $F(x_0) = \frac{x_0 \cdot a_1 x_0}{2} = \frac{a_1}{2} x_0^2$	ساده پیدا کړي: $A = \frac{g \cdot h}{2}$ زموږ د مسالې لپاره متحوله داسې تغیروو: $A \rightarrow F(x_0); g \rightarrow x_0; h \rightarrow f(x_0) = a_1 x_0$
--	--

تابع $F(x_0)$ د گراف او د x - محور ترمنځ سطحه د x_0 په واکوالي (تابعیت) کې تشریح کوي یا ښايي. موږ دا تابع د **سطحي تابع** بولو.

د سطحي پرابلم:

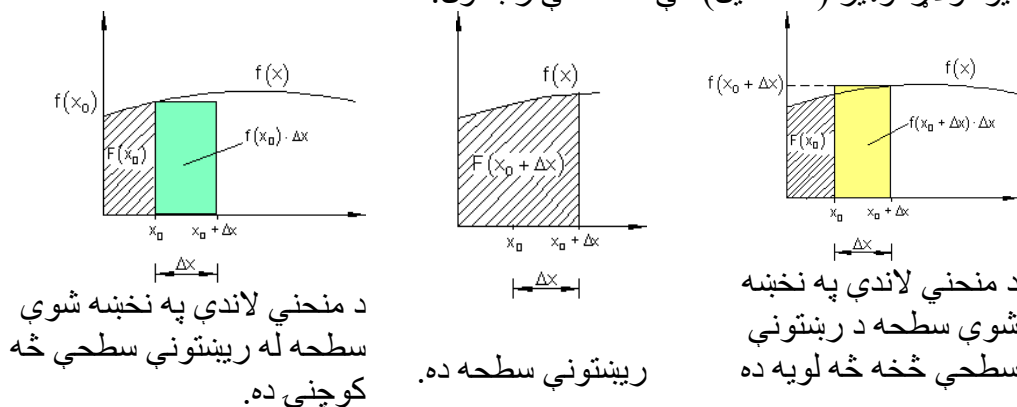


هره له کروکړښو رابنده سطحه په پای ډېرو پلونو (قدمونو)، چې په هغې کې فقط یوه یوه کره کرښه رامنځ ته کړي. نورې ټولې رابندونې سیده کرښیزې دي. هره یوه د سطحي برخه (د بیلگې په توګه دلته A_2) کېدای شي د وضعیه قیمتونو سیستم کې د یوې سطحې په څېر انځور شي، چې د کرښې کرښې او پروت محور ترمنځ پرته وي.

که له کروکړښو رابند گراف $f(x)$ متمادي تابع وي، نو پوښتنه رامنځ ته کړي، چې ایا یو تابع شته چې د افقي (پروت) محور ارزښت x_0 په سطحه $F(x_0)$ تنظیم کړي، لکه په پیلېلګه کې؟

که داسې یو تابع F شتون ولري، او سطحه $F(x_0)$ چې د x_0 افقي محور ارزښت تنظیم وي، نو باید د افقي (پروت) محور ارزښت $(x_0 + \Delta x)$ په سطحه باندې تنظیم کړای شي.

په یوه ولاړگودیز (مستطیل) کې د سطحې رابندول:



که د سطحې پټي (یا کوچني مستطیلونه) هر څومره کوچني شي، په هماغه اندازه د اصلي سطحې د مساحت څخه یې توپیر کمیري. دا اړودوالی د ریاضیاتو له مخې په لاندې توګه فرمول بندي کېدی شي:

$F(x_0) + f(x_0 + \Delta x) \cdot \Delta x$	$F(x_0 + \Delta x)$	$F(x_0) + f(x_0) \cdot \Delta x$
---	---------------------	----------------------------------

دا مو دې لاندې نابرابرونو یا نامساواتو ته راڅڅوي

$$\begin{aligned}
 F(x_0) + f(x_0) \cdot \Delta x &\leq F(x_0 + \Delta x) \leq F(x_0) + f(x_0 + \Delta x) \cdot \Delta x \quad | F(x_0) \\
 \Leftrightarrow f(x_0) \cdot \Delta x &\leq F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) \leq f(x_0 + \Delta x) \cdot \Delta x \quad | : \Delta x \\
 \Leftrightarrow f(x_0) &\leq \frac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} \leq f(x_0 + \Delta x)
 \end{aligned}$$

لیمیت یې نیسو:

$$\begin{aligned}
 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0) &\leq \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) \\
 f(x_0) &\leq f'(x_0) \leq f(x_0) \\
 f(x_0) &= f'(x_0) = f(x_0) \\
 \underline{\underline{F'(x_0) = f(x_0)}} & \text{ نو لرو:}
 \end{aligned}$$

دا په دې معنا، چې د سطحې $F(x)$ مشتق د کړې کړنې د تابع ارزښت $f(x_0)$ سره په x_0 ځای کې برابر دی.

$$\boxed{F'(x) = \frac{dF(x)}{dx} = f(x)} \quad \text{یا} \quad F'(x_0) = \frac{dF(x_0)}{dx} = f(x_0) \quad \text{مور لیکو:}$$

که موږ بریالي شو، داسې یو تابع $F(x)$ پیدا کړو چې مشتق یې د رابندې کړې $f(x)$ تابع وي، نو $F(x)$ د سطحې تابع دی. که موږ یو تابع د لومړني تابع څخه رابیل کړو، نو دا مشتق کول بولو. د یوې سطحې تابع پیدا کول په روښانه توګه ددې کړنلارې برعکس دی. سړی کړی شي فورمال ووايي: د یوې سطحې مساحت تابع، چې پیدا کړو، دا معنا لري چې ورګډول یا انټېګرالول یې شمېرو. د یوه ساده توان تابع په بېلګه د احساس له مخې یوه لار پیدا کېدی شي، چې دا څنګه انټېګرالوي.

توانتابع: $f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3 \cdot x^{3-1} = 3x^2$ مشتق په دې معنا چې: اکسپوننت په یو کمیري او پوتنختابع د زاړه پوتنخ سره ضربیږي. انټېګرالونه (زیاتونه یا ورګډونه) په دې معنا چې: اکسپوننت په یو جګیري او پوتنختابع په نوي اکسپوننت وېشل کیږي. دا همدا اوس ازمايو:

$$f(x) = 3x^2 \Rightarrow F(x) = \frac{3}{2+1} x^{2+1} = x^3 \quad \text{توانتابع:}$$

تابع $F(x)$ د $f(x)$ بنسټابع (لومړنۍ تابع یا ساده تابع) بلل کیږي، ځکه چې $f(x)$ له $F(x)$ څخه لاس ته راځي یا را پیدا کیږي یا راځيږي.

تمرینونه:

— و ښایئ، چې د F او د G توابع د f تابع لومړنۍ تابع وي ده.

$$\begin{array}{ll} a) F(x) = x^3 + x + 4, & G(x) = x^3 + x + 1 \\ b) F(x) = (x-3)^2, & G(x) = x^2 - 6x + 4 \\ c) F(x) = \frac{x+1}{x+2}, & G(x) = \frac{3x+5}{x+2} \\ d) F(x) = 1 + \sin x, & G(x) = \sin x \end{array}$$

ناتاکلی انتیگرال

$$\int f(x) dx$$

فعالیتونه:

-- په پورته څیره کې $\int$ په څه مفهوم دی
 -- په تیره برخه کې مو $F(x)$ د $f(x)$ څه بللی وو او اوس به $F(x) = \int f(x) dx$ د لومړنۍ تابع سره څه توپیر ولري؟

و به گورو، چې نا تاکلی انتیگرال د لومړنۍ تابع لپاره بل نوم دی.

که دیوې ورکړ شوې $f(x)$ تابع $F(x)$ لومړنۍ تابع، یعنې $F(x)$ وپېژنو، نو دیوې ثابتې C د ور جمع کولو سره د $f(x)$ د ټولو لومړنیو توابعو ست G لاسته راوړو (په C خوښه یو حقیقي عدد دی).

موږ د $f(x)$ تابع د $F(x)$ لومړنۍ تابع ټاکنه یا اینتگرالونه هم بولو او ددې له پاره لیکو:

$$\frac{dF}{dx} = f(x) \Leftrightarrow dF(x) = f(x)dx \Leftrightarrow F(x) = \int dF(x) = \int f(x)dx$$

نو لرو: $F(x) = \int f(x) dx$

دا تراوسه فورمال لیکندود وو. اوس دا ژوند ته رابولو.

موږ لومړنۍ توابع پلټو

بیلگه:

لومړنۍ تابع $F(x)$ دې پیدا شي، چې مشتق یې $f(x) = 2x$ دی.

$$F(x) = \int f(x) dx = \int 2x dx$$

موږ ازمايو: $F(x) = x^2$ ځکه چې $F'(x) = 2x = f(x)$

$F(x) = x^2 + 2$ ځکه چې $F'(x) = 2x = f(x)$. په ټولیزه توګه باور لري:

$$F(x) = x^2 + C \quad \text{ځکه چې په هر حالت کې لرو: } F'(x) = 2x = f(x)$$

دواړه توابع په ثابت غړي کې یو له بل توپیر لري. دوی همغه مشتق لري، ځکه چې د مشتق سره هغه ثابت عدد له منځه ځي. له دې امله باید دې خپلې لار ته تغیر ورکړو.

$$\boxed{\int f(x) dx = F(x) + C} \quad \text{قاعده (لار): باور لري:}$$

د لومړنیو توابعو سټ (ډېری): بیلگه بنایي، چې د تابع $f(x)$ لپاره نه یواځې یو لومړنی تابع بلکې ناپای ډېر توابع شته، چې یواځې ثابت عدد کې یو له بل سره توپیر لري، چې دا د $f(x)$ د لومړنیو توابعو سټ بولو.

بیلگه: یو لومړنی تابع $F(x)$ دې پیدا شي، چې د هغه مشتق $f(x) = 3x^2 + 2$ وي.

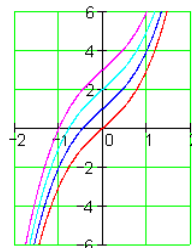
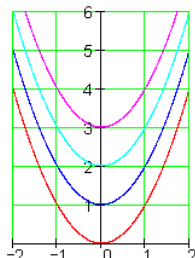
$$F'(x) = 3x^2 + 2 = f(x) \quad \text{، ځکه چې} \quad F(x) = x^3 + 2x + C$$

د ټولو لومړنیو توابعو ډېری دې د منحنيو ډلې په څېر انځور شي، چې فقط ثابتو عددونو کې یو له بل توپیر لري.

ددې لپاره دې د گرافونو لاندې دوه بېلگې وکتل شي.

$$F(x) = x^2 + C$$

$$F(x) = x^3 + 2x + C$$



تمرینونه:

د لاندې توابعو له پاره لومړني توابع پیدا کړئ او لاس ته راوړنې یې د مشتق له لارې و آزمایئ.

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = 2x^2$

c) $f(x) = x$

d) $f(x) = -2x$

e) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$

f) $f(x) = -\frac{1}{4}x$

g) $f(x) = x^3$

h) $f(x) = 4x^3$

i) $f(x) = 2$

j) $f(x) = x + 1$

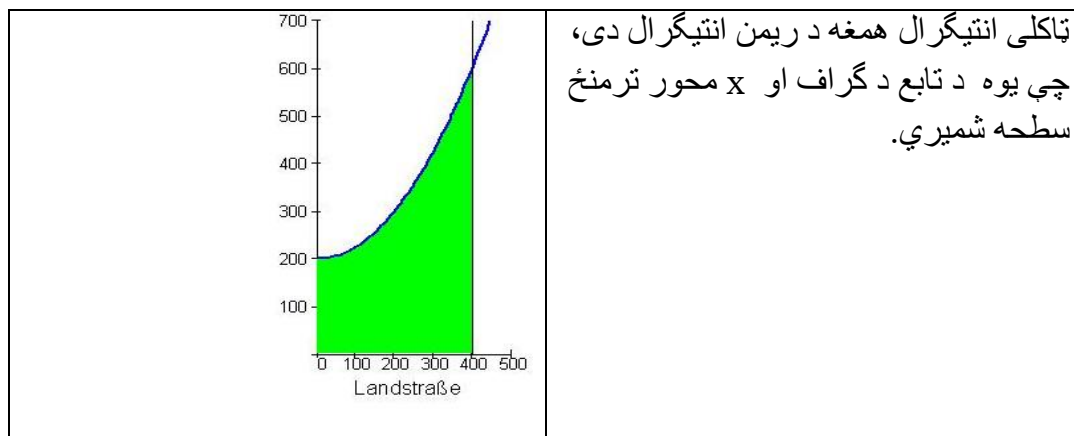
k) $f(x) = x^2 + x - 3$

l) $f(x) = x^n; n \in \mathbb{N}$

m) $f(x) = x^2$

n) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$

د ټاکلي انتیګرال شمیرنه



ټاکلي انتیګرال:

که f یو حقیقي تابع وي، نو د ټاکل انتیګرال $\int_a^b f(x) dx$ (لوستل: د $f(x)$ انتیګرال د پولې (حد) a تر پولې (حد) b پا د a او b حدونو ترمنځ یا انتیګرال په $f(x)$ باندې له a تر b) لاندې یوه لوریزه سطحه پوهیږو د f ګراف لاندې د a او b تر منځ.

فعالیت:

اول: ووايي چې په پورته انتیګرال کې $f(x)$ څه نومیري؟

G دې په بند انټروال $a \leq x \leq b$ کې د $g(x)$ لومړنی انتیګرال وي، د

$$g(x) = \int_a^x f(t) dt \text{ سره، نو}$$

$$\int_a^b f(t) dt = G(b) \text{ باور لري:}$$

دا چې د دوه لومړنیو توابعو F او G تر منځ یو ثابت C توپیر شته، نو $G(x) = F(x) + C$ باور لري. د $x=b$ لپاره لاسته راوړو: $G(b) = F(b) + C$

دا چې $G(x) = \int_a^x f(t)dt = 0$ دی او $G(a) = F(a) + C$ دی، نو $C = -F(a)$ ده.

دا په دې معنا، چې $G(b) = F(b) - F(a)$ همداسې $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$.

د متحولې د نوم بدلون څخه وروسته لاس ته راوړو $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

له دې سره مو د مشتق او انتیګرال جمله لاس ته راوړه

یا دا وینا د مشتق - او انتیګرال شمېرنې بنسټیزه جمله بلل کيږي:

تعریف:

f په انټروال $a \leq x \leq b$ کې متمادي تابع ده او F د f لومړنی تابع ده، نو ټاکلی

انتیګرال دی: $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

د $F(b) - F(a)$ لپاره زیات وخت $[F(x)]_a^b$ لیکو. په دې توګه دی

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$$

له دې سره مو د ټاکي انتیګرال شمېرنه په لومړني انتیګرال بېرته واپوله او د مشتق او انتیګرال تر منځ مو اړیکې رامنځ ته کړې.

بیلګې:

$$a) \int_1^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

$$b) \int_2^4 \frac{1}{x^2} dx = \int_2^4 x^{-2} dx = \left[\frac{x^{-1}}{-1} \right]_2^4 = \left[-\frac{1}{x} \right]_2^4 = \frac{1}{4}$$

$$c) \int_1^3 \sqrt{x} dx = \int_1^3 x^{\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_1^3 = \frac{2}{3} [\sqrt{x^3}]_1^3 (\sqrt{3^3} - \sqrt{1^3})$$

$$= \frac{2}{3} (3\sqrt{3} - 1) = 2(\sqrt{3} - \frac{1}{3})$$

د ټاکلو انتیګرالونو لپاره لاندې جملې رښتیا دي:

$$\int_a^b k \cdot f(x) dx = k \cdot \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx +$$

تکمیلیدونکي بنسټونه:

د $F(b) - F(a)$ له امله د انتګرالونې ثابته c له منځه ځي. له دې امله کولی شو د انتیګرال ثابتې ټاکلو لپاره $c=0$ ولیکو.

بیلګه :

د ټاکلي انتیګرال $\int_1^3 x^2 dx$ ارزښت و ټاکي. د توان قانون له مخې لومړنی تابع

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + C \text{ پيدا کړی}$$

ښوونه: موږ په دا لاندې ډول ښایو:

$$\int_1^3 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} + C \right]_1^3 = F(3) - F(1) = \frac{3^3}{3} + C - \left(\frac{1^3}{3} + C \right) = \frac{27}{3} + C - \frac{1}{3} - C$$

$$\int_1^3 x^2 dx = \frac{26}{3}$$

اساسات تکمیل کړنده:

از د لیل $F(b) - F(a)$ ثابت C انتګرال گرفتن از بین می‌رود. ازین بابت میتوانیم برای تعیین ثابت انتیګرال بنویسیم $C = 0$.

مثال :

قیمت انتیګرال معین $\int_{-\pi}^{+0.5\pi} \cos x dx$ را تعیین نمایید.

ثبوت: ما قرار زیل ثبوت می‌کنیم:

$$\int_{-\pi}^{+0.5\pi} \cos x dx = [\sin x]_{-\pi}^{+0.5\pi} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin(-\pi) = 1 - 0 = 1$$

یادونه : دا چې په دې برخه کې یواځې د ټاکلي انتیګرال ارزښت غوښتل شوي دي او نه د یوې منحنی لاندې سطحه، نو باید نه دی چې صفر ځایونه په پام کې ونیول شي.

عوره یادونه: دادي په یاد وي، چې ناټاکلی انتیګرال تابع ده او ټاکلی انتیګرال یو عدد.

تمرینونه:

د لاندې ټاکلو انتیګرالونو ارزښتونه وشمیرئ

a) $\int_0^3 4dx$

b) $\int_{-3}^{-1} xdx$

c) $\int_1^e \frac{1}{x} dx$

d) $\int_1^e (2 + \frac{1}{x}) dx$

e) $\int_{-1}^0 e^x dx$

f) $\int_0^\pi \sin x dx$

i) $\int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} \frac{1}{\cos^2 x} dx$

j) $\int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} \frac{1}{\sin^2 x} dx$

k) $\int_{-2}^2 x^3 dx$

l) $\int_2^6 (1+x) dx$

m) $\int_1^2 (x^2 - x^5) dx$

n) $\int_{-2}^0 \left(\frac{x^3}{4} + \frac{x^2}{3} \right) dx$

د ناکلي انتیګرال څخه و ټاکلي انتیګرال ته

تر مخ راوړنه یا وړاندر اوړنه

موږ ولیدل، چې څنگه یو تابع $f(x)$ ته لومړنۍ تابع $F(x)$ منځ ته راوړی شو، نو ناپای ډېر لومړني توابع شته دی، چې فقط د یوې ورجع کوونکې ثابتې کې یو له بل توپیر لري.

فعالیت :

-- د $\int_a^b f(x) dx$ او $\int_a^b f(x) dx$ تر منځ توپیر باندې فکر وکړئ؟

-- د $\int_a^b f(x) dx$ او $\int_a^b f(x) dx$ پایله څه ده ؟

- دا توپیر یې د یوې بیلګې په بنسټ روښانه کړئ.

بیلګه:

لرو: تابع $f(x) = 3x^2 + 2$ او د دې د لومړنیو توابعو سټ $f(x) = x^3 + 2x + C$

پیژند: د ټولو لومړنیو توابعو سټ و یوې تابع $f(x)$ ته ،،ناټاکلی انتیګرال ،، بلل

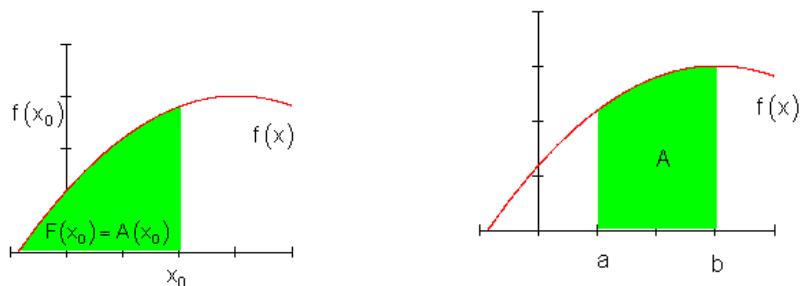
$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad \text{کیري او ددې له پاره لیکو:}$$

د مشتق- او انتیګرال شمېرنې ترمنځ اړیکې کېدې شي د لاندې جملې له لارې لاس ته راشي.

جمله(قضیه): د ناټاکلی انتیګرال شمېرنه د مشتق شمېرنې برعکس انځوروي

$$\frac{d[f(x)] + C}{dx} = [F(x) + C]' = f(x)$$

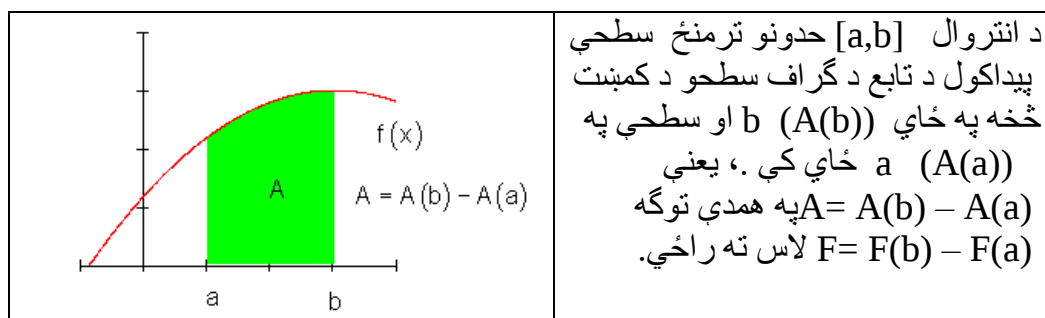
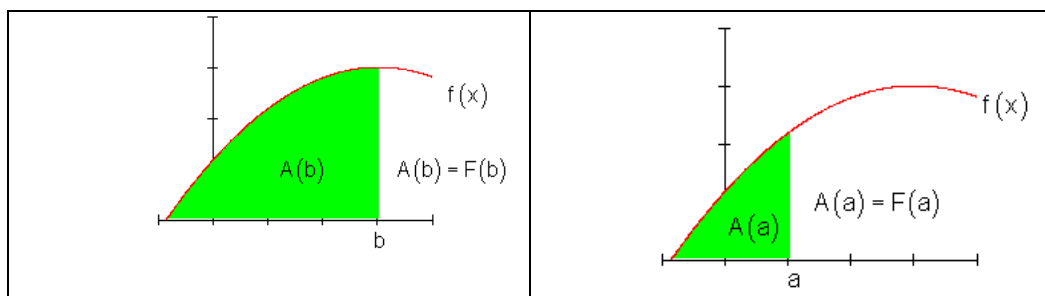
د تابع د ګراف لاندې او د انټروال $[a; b]$ تر منځ سطحه دې و ټاکل شي. زموږ په دې پرابلم موږ تر اوسه لاس ته راوړې زده کړې کاروو.



د یوې سطحې تابع شتون مو فکر دې لاندې پوهنې (زده کړې) ته لارښوده وي: د یوې سطحې، چې د یوې په پام کې نیولې $f(x)$ تابع ګراف لاندې ده تر x_0 ځای پورې

د ټاکلی انتیګرال څخه نا.....

او یوې $F'(x)$ تابع، چې د $F(x)$ تابع مشتق د x_0 ځای د f تابع د تابع ارزښت سره د x_0 په ځای کې برابر وي، ترمنځ اړیکې شته دی، یعنې



په انټروال $[a, b]$ کې د تابعګراف لاندې سطحه د لومړنیو توابعو تفریق دی:

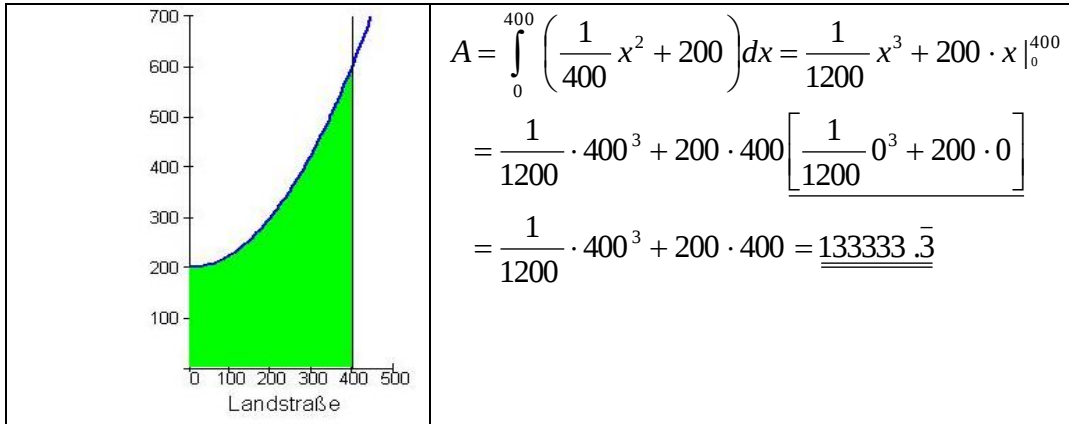
$$A = F(b) - F(a) := \int_a^b f(x) dx$$

دا انتیګرال ټاکلی انتیګرال هم بلل کیږي.

جمله :

دا تر اوسه لاس ته راوړو معلوماتو په بنسټ کړی شو، چې په پیل بېلګه کې راوړې د چمن سطحه وشمېرو.

ثابته له تفریق سره لرې کیږي. په عمل کې د دې مسألې د حل لپاره یوه بله لار ګټوره راوستلې یا ګټوره ښوولې:



تمرینونه: لاندې ټاکلي انتیګرالونه وشمېږئ.

$$\int_1^3 x \, dx, \int_1^3 (x^2 - 1) \, dx, \int_{-2}^2 4 \, dx, \int_3^4 dx, \\
 \int_0^4 (2x - 5) \, dx, \int_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}} \left(\frac{1}{2} x^2 - 4 \right) dx$$

د انتیګرالونې قاعدې

د ناټاکلي انتیګرال انتیګرالونې قاعدې: په لاندې اینټیګریشن قاعدو کې د اینټیګریشن ثابت باندې صرف نظر کړئ دلته مساوات تر یوې ورجم شوي ثابتې C پورې مساوات دی ، په دې معنا چې د مساواتو تر منځ یواځې یوه ثابت کیدی شي زیاته یا کمه وي. دا قاعده کیدی شي چې په ټاکلي انتیګرال کې بنوولي جملې سره سم ټاکلي انتیګرال ته نقل شي یعنې په ټاکلي انتیګرال استعمال شي . دا قاعدې کیدی شي چې د تیرو درسونو سره سم د دواړو خواوو د مشتق نیولو سره وپنول شي.

جمله :

د یوې ثابتې سره ضرب : که تابع $f(x)$ په یوه اینتروال کې متمادی وي ، نو لاندې باور لري:

$$\int a \cdot f(x) dx = a \int f(x) dx, \quad a \in \mathbb{R}$$

جمله: د جمعې (تفریق) قاعده که $f_1(x)$ او $f_2(x)$ په یوه ایتروال کې نه پرېکېدونکي وي ، نو باور لري

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x)) dx = \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx$$

بیلگې:

لاندې انتیگرالونه کیدی شي چې د مخ ته تېرو جملو په استعمالیدو او ساده څیره بدلون بیرته په بنسټیزو انتیگرالونو بدلکړای شي

$$a) \quad \int \frac{dx}{3x^4} = \frac{1}{3} \int x^{-4} dx = \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{3} \right) x^{-3} + C = -\frac{1}{9x^3} + C,$$

$$b) \quad \int (3x^2 + 4x - 1) dx = 3 \int x^2 dx + 4 \int x dx - \int dx = 3 \cdot \frac{1}{3} x^3 + 4 \cdot \frac{1}{2} x^2 - x + C \\ = x^3 + 2x^2 - x + C,$$

$$c) \quad \int \frac{2x^3 - 3x}{\sqrt{x}} dx = 2 \int \frac{x^3}{\sqrt{x}} dx - 3 \int \frac{x}{\sqrt{x}} dx = 2 \int x^{\frac{5}{2}} dx - 3 \int x^{\frac{1}{2}} dx \\ = 2 \cdot \frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} - 3 \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{4}{7} x^3 \cdot \sqrt{x} - 2x \cdot \sqrt{x} + C$$

تمرینونه: د لاندې توابعو انتیگرال ونیسئ:

$$a) \int \frac{2x^3 - 3x}{\sqrt{x}} dx, \quad b) \int_1^2 \frac{\sqrt{x} - 1}{x} dx$$

۲۲۱

د اکسپوننشل توابعو.....

د اکسپوننشل توابعو انټیګرالونه

بنسټ:

د طبیعي اکسپوننشل تابع $f(x) = e^x$ لپاره لرو:د ټولیز اکسپوننشل تابع $\int e^x dx = e^x + C$ ($a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1$) لپاره لرو:

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

بیلګه: دا ناټاکلی اکسپوننشل تابع $\int 2^{x-3} dx$ غواړو پیدا کړو

$$2^{x-3} = \frac{2^x}{2^3} = \frac{1}{8} 2^x \quad \text{بڼه بدون: د توان قانون سره سم لرو}$$

$$\int \frac{1}{8} 2^x dx = \frac{1}{8} \int 2^x dx \quad \text{د فاکتوروني قانون سره سم لرو:}$$

$$\frac{1}{8} \int 2^x dx = \frac{1}{8} \cdot \frac{2^x}{\ln 2} + c = \frac{2^x}{8 \cdot \ln 2} + c = \frac{2^{x-3}}{\ln 2} + c \quad \text{انټیګرال یې ونیسئ:}$$

تمرینونه:

لاندې انټیګرالونه وشمیرئ

a) $\int 3^{x+1} dx$

b) $\int 2^{-x} dx$

c) $\int a^{x+b} dx$

d) $\int \frac{1}{a^x} dx$

e) $\int 2^x \cdot 3^x dx$

f) $\int \frac{2^x}{3^x} dx$

i) $\int \frac{4^{x+3}}{2^x} dx$

j) $\int \frac{5^x + 3^x}{2^x} dx$

k) $\int (1 + 2^x) dx$

د لوگاریتمی.....

۲۲۲

د لوگاریتمی توابعو انتیگرالونه

بنسټ: د طبیعي لوگاریتم تابع $f(x) = \ln x (x \in \mathbb{R}^+)$ لپاره $\int \ln x dx = x \cdot \ln x - x + c$ دی.

د تولید لوگاریتم تابع $f(x) = \log_a x, a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1$

لپاره $\int \log_a x dx = \frac{x \cdot \ln x - x}{\ln a} + c$ دی.

بیلگه:

ناتکلی انتیگرال $\int \ln 3x dx$ غواړو پیدا کړو:

بڼه بدلون او د فاکتور قاعدې استعمال:

$$\int \ln 3x dx = \int (\ln 3 + \ln x) dx = \int \ln 3 dx + \int \ln x dx = x \cdot \ln 3 + x \cdot \ln x - x + c$$

$$\int \ln 3x dx = x \cdot (\ln 3 + \ln x - 1) + c$$

تمرینونه:

دا لاندې ناکلي انتېگرالونه پيداکړی

$$a) \int \ln 2x^3 dx$$

$$b) \int \ln \sqrt{x} dx$$

$$c) \int \log \frac{x}{2} dx$$

$$d) \int 3 \log \frac{1}{x} dx$$

۲۲۳

بنسټيز اينټيگرالونه

بنسټيز اينټيگرالونه په يوه جدول کې

د اينټيگرالولو او مشتق نيول د اړيکو په بنسټ کيدی شي چې د بنسټيزو اينټيگرالونو يو جدول ترتيب شي. دا په مشتق جدول کې راوړل شوو بنسټيزو توابعو برعکس څرگندېږي.

Nr.	$f(x)$	$f(x) = \int f(x) dx$	نېونه يا فرضيه
1	x^n	$\frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$	$n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$
2	$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$	$x \neq 0$
3	x^a	$\frac{1}{a+1} x^{a+1} + C$	$a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, x > 0$
4	a^x	$\frac{1}{\ln a} a^x + C$	$a > 0, a \neq 1$
5	e^x	$e^x + C$	
6	$\sin x$	$-\cos x + C$	

7	$\cos x$	$\sin x + C$	
8	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x + C$	$x \neq n \cdot \pi, \quad n \in \mathbb{Z}$

بنسټيز اېنټيگرالونه

۲۲۴

بېلگې:

د جدول او تيرو جملو څخه په گټه لاندې اېنټيگرالونه په لاندې ساده ډول په بنسټيز توابعو بدليدلی شي .

$$a) \int \frac{1}{x^5} dx = \int x^{-5} dx = -\frac{1}{4} x^{-4} + C, \dots\dots\dots 1,$$

$$b) \int \frac{\sqrt{x}}{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = 2x^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C \quad (x > 0), \dots\dots\dots 3,$$

$$c) \int \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt{x} dx = \int \left(x \cdot x^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{3}} dx = \int x^{\frac{3 \cdot 1}{2 \cdot 3}} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C \quad (x > 0), \dots\dots\dots 3,$$

$$d) \int \frac{\sin 2x}{2 \sin x} dx = \int \frac{2 \sin x \cos x}{2 \sin x} dx = \int \cos x dx = \sin x + C, \dots\dots\dots (4,21) \quad 6,$$

$$e) \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi \right), \quad (4,11) \quad 9,$$

$$f) \int (1 + \cot^2 x) dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\int \cot x + C \quad (x \neq n\pi) \quad (4,12) \quad 8,$$

$$g) \int \frac{(1+x)(1-x)}{x-x^3} dx = \int \frac{1-x^2}{x(1-x^2)} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad (x \neq \pm 1, x \neq 0), \quad Nr.2,$$

$$h) \int_{-1}^0 e^x dx = e^x \Big|_{-1}^0 = e^0 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e}, \dots\dots\dots 5$$

د بدلون قانون Substitutionlaw

د ناټاکلي انتیګرال حل د بدلون له لارې (ننوتنه راځي)

$$\int f(x) dx = \int (x^2 + 4x - 5)^n dx$$

۲۲۵

د بدلون قانون

فعالیت:

- د $\int (x^2 - x) dx$ انتیګرال ونیسی

- د $\int (x^2 + 5x)^3 dx$ انتیګرال نیولو کې فکر وکړئ او که وتونډی انتیګرال یې ونیسی.

تراوسه پورې مو فقط انتیګرالونه او جملې حل کړې، چې د لومړنیو تابعو په انتیګرال اړول کېدل. له دې لاس ته راغلو لومړنیو انتیګرالونو د نورو انتیګرالو حل جملې لاس ته راځي. د لومړنی انتیګرالونې سیده استعمال تل ساده نه دی، لکه چې په لاندې کې به ولیدل شي.

جمله:

د ،، بدلون (قاعده) ،، (Substitution لاتین د: یوه ارزښت په ځای د

همغه ارزښت بله لویه ایښوول (لنډ: بدلون) د فرضیو لاندې چې $u = g(x)$

متمادي او مشتقوردی او $y = f(u)$ متمادي، نو باور لري:

$$\int f[g(x)]g'(x)dx = \int f(u)du$$

حل: د بني اړخ مشتق د تیرو درسونو په بنسټ په لاندې ډول دی:

$$\frac{d}{dx} \int f(u) du = \frac{d}{du} \int f(u) du \cdot \frac{du}{dx} = f(u) \cdot u' = f[g(x)] \cdot g'(x),$$

دا د کین اړخ د مشتق سره سر خوري. قاعده د ضرب انتیګرالیدو لپاره مساعده ده، په کوم کې چې یو فاکتور زنځیري تابع $f[g(x)]$ وي او دا بل فاکتور (ضریب) یی د دننه تابع مشتق $g'(x)$ وي. سړی د دننه تابع لپاره په دې توګه متحولي بدلوي یا

خاي په خاي کويک: $u = g(x)$ مشتق جوړوي په

$$du = g'(x) dx$$

د بدلون قانون ۲۲۶

د بريالي انتيگرياليدو وروسته بدلون بيرته راگرځول کيږي.

بيلگه a:

$$I = \int 2 \cos(2x-1) dx \text{ . د دې انتيگريال وشمېږئ.}$$

بدلون يا په خاي کونه: $2x-1=u$

$$\text{مشتق } 2 = du/dx \text{ همداسې } 2dx = du$$

$$I = \int \cos u du = \sin u + C = \sin(2x-1) + C$$

$$\text{بيلگه b: } I = \int 3 \cos(2x+1) dx$$

$$\text{بدلوو: } 2x = u-1, \text{ مشتق } 2 = du/dx \text{ همداسې } dx = (1/2) du$$

$$I = \int 3 \cos u \cdot \frac{1}{2} du = \frac{3}{2} \int \cos u du = \frac{3}{2} \sin(2x-1) + C$$

وموليدل چي ځنځيري تابع د لايڼي دننه تابع سره د بدلونو قاعدې سره تل اينتيگريال کيډي شي، ځکه چي د لايڼي تابع مشتق ثابت ده او ثابت فاکتور د تيري جملې سره سم د اينتيگريال تر مخ (موخه کيڼ لور ده) ليکل کيږي.

بيلگه:

$$\text{لرو } I = \int \sqrt{-3x+5} dx$$

$$\text{بدلون: } -3x+5 = u$$

را بیلیدنه: $-3 = du/dx \Leftrightarrow dx = -1/3 \cdot du$

۲۲۷

د بدلون قانون

$$I = \int \sqrt{u} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) du = -\frac{1}{3} \int u^{\frac{1}{2}} du = -\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot u^{\frac{3}{2}} + C = -\frac{2}{9} \cdot \sqrt{(-3x+5)^3} + C.$$

$$b) \quad I = \int \frac{1}{2} e^{-2x-3} dx.$$

$$-2x-3=u, \quad -2 = \frac{du}{dx} \quad dx = -\frac{1}{2} du,$$

$$I = \int \frac{1}{2} e^u \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) du = -\frac{1}{4} \int e^u du = -\frac{1}{4} e^u + C = -\frac{1}{4} e^{-2x-3} + C.$$

$$c) \quad I = \int \frac{2dx}{x+2}.$$

$$x+2=u, \quad 1 = \frac{du}{dx} \quad dx = du$$

$$I = \int \frac{2du}{u} = 2 \int \frac{du}{u} = 2 \ln|u| + C = 2 \ln|x+2| + C.$$

توابع، چې بې د بدلون له لارې حل کيږي لکه لاندې بلگه:
 بیلگه: عوارو د $f(x) = e^x$ مشتق پیدا کړو. دا مشتق په ساده ډول پیدا کولی شو، یعنې لرو:

$$f(x) = e^x \Rightarrow F(x) = \int f(x) dx = \int e^x dx = e^x + C$$

گورو، چې $F'(x) = e^x = f(x)$ دی.

که ولرو: $f(x) = e^{2x}$ او د پورته په څېر لار شو، نو لاس ته به ترې راشي:

$$f(x) = e^{2x} \Rightarrow F(x) = \int f(x) dx = \int e^{2x} dx \neq e^{2x} + C$$

$$F(x) = e^{2x} + C \quad \text{که دی،} \quad F'(x) = 2e^{2x} \neq f(x)$$

په داسې حالتونو کې د بدلون قاعده مرسته کوي:

بیلگه:

د $f(x) = e^{2x}$ تابع انتیگرال ونیسی

د بدلون قانون

۲۲۸

$$f(x) = e^{2x} \Rightarrow F(x) = \int f(x) dx = \int e^{2x} dx = ?$$

بدلون: $u(x) = 2x = u$

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{du}{2}$$

$$\int f(x) dx = \int e^u \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2} e^u + C$$

$$\frac{1}{2} e^u + C = \frac{1}{2} e^{2x} + C \quad \text{د بدلون برعکس:}$$

$$F(x) = \int f(x) dx = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} + C \quad \text{نولرو:}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} e^{2x} + C \Rightarrow F'(x) = \frac{1}{2} e^{2x} \cdot 2 = e^{2x} = f(x) \quad \text{ازمایینت:}$$

بیلگه:

$$f(x) = (x+1)^2 \Rightarrow F(x) = \int f(x) dx = \int (x+1)^2 dx \quad \text{وښایی چې باور لري.}$$

بدلون $u(x) = x+1 = u$

جوړ کړی

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow dx = \frac{du}{1}$$

$$\int f(x) dx = \int u^2 \frac{du}{1} = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C$$

$$\frac{u^3}{3} + C = \frac{(x+1)^3}{3} + C \quad \text{بیرته بدلون:}$$

$$\int f(x) dx = \int (x+1)^2 dx = \frac{(x+1)^3}{3} + C \quad \text{نو:}$$

بیلگه:

و بنایي چې باور لري: $f(x) = (3x + 6)^3 \Rightarrow F(x) = \int f(x) dx = \int (3x + 6)^3 dx$

بدلون: $u(x) = 3x + 6 = u$

جوړوو: $u'(x) = \frac{du}{dx} = 3 \Rightarrow dx = \frac{du}{3}$

$$\int f(x) dx = \int u^3 \frac{du}{3} = \frac{1}{3} \int u^3 du = \frac{u^4}{12} + C$$

بېرته بدلون: $\frac{u^4}{12} (3x + 6)^4 + C$

$$\int f(x) dx = \int (3x + 6)^3 dx = \frac{1}{12} (3x + 6)^4 + C$$

تمرینونه: د $f(x) = x \cdot \ln(x^2)$ تابع انټیګرال وشمیرئ.

د ټاکلو انټیګرالونو حل د بدلون له لارې

$$\int_3^8 (x^2 + 4x - 5)^n dx$$

فعالیت:

- د $\int_a^b (x^2 - x) dx$ انټیګرال ونیسئ

- د $\int_1^5 (x^2 + 5x)^3 dx$ انټیګرال نیولو کې فکر وکړئ او که وتوانېدئ انټیګرال یې ونیسئ.

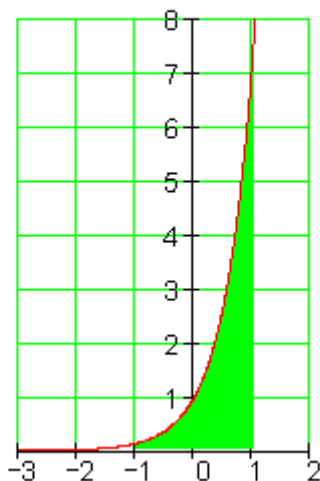
ټاکلي انټیګرالونه هم د بدلون له لارې حل کړي.

بیلګه:

و بنایست: $f(x) = e^{2x} \Rightarrow F(x) = \int_{-1}^1 e^{2x} dx$

د انټیګرال حل د بدلون له لارې:

$$f(x) := e^{2 \cdot x}$$



۱ - بدلون $u(x) = 2x$

۲ - د dx په ځای کېږدی

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{1}{2} du$$

۳ - د پولو بدلون

- لاندې پوله $u(-1) = -2$

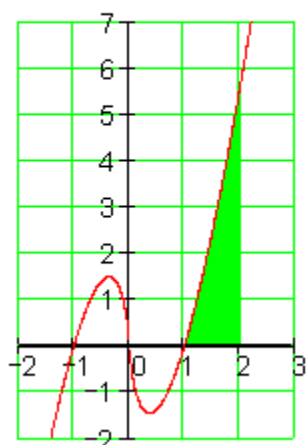
- پورته پوله

۴ - په انټیګرال کې څا په ځای کړی

$$\frac{1}{2} \int_{-2}^2 e^u du = \frac{1}{2} [e^u]_{-2}^2 = \frac{1}{2} [e^2 - e^{-2}] = \underline{\underline{3.627}}$$

بیلګه :

$$f(x) := 2x \cdot \ln(x^2)$$



$$f(x) = 2x \cdot \ln(x^2) \Rightarrow F(x) = \int_1^2 2x \cdot \ln(x^2) dx$$

د انټیګرال حل د بدلون له لارې

۱ - بدلون $u(x) = x^2$

۲ - د ځای په ځای کونه

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2x} du$$

۳ - د پولې بدلون

- لاندې پوله $u(1) = 1$

- پورته پوله $u(2) = 4$

۴ - په انټیګرال کې ځای په ځای کړی

$$\int_1^4 2x \cdot \ln(u) \cdot \frac{1}{2x} du = \int_1^4 \ln(u) du = [u \cdot \ln(u) - u]_1^4$$

$$= [4 \cdot \ln(4) - 4] - [1 \cdot \ln(1) - 1] \approx \underline{\underline{2.545}}$$

تمرین: لاندې انټیګرالونه وشمیری یا حل کړی

$$\begin{array}{ll}
\int_0^2 \frac{4}{4-x} dx & - ۲ \quad \int \frac{3}{4x+1} dx & - ۱ \\
\int \frac{6}{(2x-1)^3} dx & - ۴ \quad \int \frac{2}{(1-x)^2} dx & - ۳ \\
\int_{-2}^2 e^{1-x} dx & - ۶ \quad \int_{-2}^2 \frac{10}{(x-4)^5} dx & - ۵ \\
\int_1^2 e^{4-2x} dx & - ۸ \quad \int_0^4 e^{\frac{1}{2}x} dx & - ۷ \\
\int_0^2 \left(x - 1 - e^{-\frac{1}{2}x} \right) dx & - ۱۰ \quad \int_1^2 \frac{4}{e^{2x-4}} dx & - ۹
\end{array}$$

تۆتە انتیگرالونه

$$f(x) \cdot g(x) = x \cdot \ln(x^2)$$

تۆتە انتیگرالونه، چې ضرب انتیگرالونه هم بلل کیږي، په انتیگرالشمیرنه کې د لومړنیو توابعو ټاکلو یا شمیرلو لپاره امکان دی. دا کیدی شي د مشتقشمیرني د برعکسکونی په څیر وگڼل شي.

فعالیت:

- څه باید وشي، چې دا پورته په ننوتنه کې تابع انتیگرال نیونه شوني شي؟
 ایا دا پورته ننوتنه کې راغلي بوبښته دا تر اوسه ورسره بلدي لاري یعنی د (بني) بدلون له لاري حل دی؟

د تۆتە انتیگرالوني له پاره لاندې قانون کاروي، چې د متمادي (نه پرېکیدونکي) توابعو f او g له پاره باور لري:

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx.$$

دا قانون ټیک هلته گټور دی، که f مشتق کونی سره یو ساده تابع منح ته راځي. پیل

د ضرب قانون (د ضرب مشتق نیونی) څخه لرو:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$u' \cdot v = (u \cdot v)' - u \cdot v'$$

له دې څخه لاس ته راځي:

$$\int u' \cdot v = \int (u \cdot v)' - \int u \cdot v'$$

$$\int u' \cdot v = u \cdot v - \int u \cdot v'$$

په دې پسې د ټاکلي انتیگرال لپاره باور لري:

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx = f(b) \cdot g(b) - f(a) \cdot g(a) - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx$$

یا همدغسې، لکه په زیاتو ریاضي کتابونو کې چې پیدا کیري.

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx.$$

د دې مخ ته حدونو لپاره گټور دی، چې لومړی ځان په ناټاکلي انتیگرال محدود کړو، چې دا نا اړینو حدونو څخه چې لید مو رابندوي، ازاد یو.

بیلگه:

د بیلگې په توگه لاندی انتیگرال شمیرو.

$$\int x \cdot \ln(x) dx$$

یو ساده انتیگرال لپاره تابع $g'(x)$ او همداسې یو ساده مشتقور تابع $f(x)$ لټوو. نیسو چې

$f(x) = \ln(x)$ او $g'(x) = x$ ، ځکه چې د $\ln(x)$ انتیگرالونه نوې $\ln(x)$

راکوي. اوس د $f(x)$ مشتق نیسو او انتیگرالوو، نو لرو:

$$g(x) = \frac{x^2}{2} \text{ او } f'(x) = \frac{1}{x}$$

له دې څخه اوس دالاندې فرمول لاس ته راځي:

$$\int x \cdot \ln(x) dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x) - \frac{x^2}{4}$$

بدیل لیکینه:

اوس دی u او v په خوښه توابع وي. U او V دې د u او V لومړني توابع وي، او همداسې دې u' او v' د u او v مشتقونه وي. u تابع ده، چې د مشتق نیولو له پاره لومړیتوب لري، v تابع ده چې د انتیگرالونې له پاره لومړیتوب لري. نو باورلري:

$$\begin{aligned} \int_a^b u(x) \cdot v(x) dx &= u(b) \cdot V(b) - u(a) \cdot V(a) - \int_a^b u'(x) \cdot V(x) dx \\ &= [u(x) \cdot V(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot V(x) dx \end{aligned}$$

د تۆتە انتیگرالونې لار (طریقه)
د تۆتە انتیگرالونې گټور استعمال له پاره مختلف معیاري چلول شته.

بیلگه :

کله کله کبیدی شي گټور وي، چې د مساوات ښی لور ته تۆتە انتیگرال د څو واره انتیگرالونې وروسته بیرته راوگرځي، چې د په ورته ښه د اصلي یا پخواني کین لور انتیگرال سره یوځای کولی شي.

$$\int \sin(x) \cdot \cos(x) dx$$

که کیردو $f(x) = \cos(x)$ او $g'(x) = \sin(x)$ ، نو ترې لرو:

$$f'(x) = -\sin(x) \text{ او } g(x) = -\cos(x)$$

او لاس ته ترې راځي

$$\int \sin(x) \cdot \cos(x) dx = [-\cos^2(x)] - \int \sin(x) \cdot \cos(x) dx.$$

که دواړو لورو ته وتون انتیگرال ورزیات کړو، نو راکوي:

$$2 \int \sin(x) \cdot \cos(x) dx = -\cos^2(x)$$

که دواړه لوري په 2 ووپشل شي، نو بالاخره لاس ته ترې راځي:

$$\int \sin(x) \cdot \cos(x) dx = -\frac{1}{2} \cos^2(x) + C$$

بیلگه ۲:

د ځنو انتیگرالونو سره داسې لاس ته راوړنه لرو، چې: که د $g'(x)$ له پاره یو ترم وټاکو چې په انتیگرالونې کې هیڅ یا کو تغیر خوري، لکه د بیلگې په توگه اکسپوننشل تابع او یا مثلثاتي توابع. نو کیدای شي دا بل ترم، له منځه یووړل شي،.

$$\int e^x \cdot (2 - x^2) dx$$

که هر ځل $g'(x) = e^x$ کیردو او د $f(x)$ له پاره، د انتیگرال لاندې ترم، نو ترې لاس ته راځي:

$$\begin{aligned} \int e^x \cdot (2 - x^2) dx &= [e^x \cdot (2 - x^2)] - \int e^x \cdot (-2x) dx \\ &= [e^x \cdot (2 - x^2)] + [e^x \cdot 2x] - \int 2 \cdot e^x dx \\ &= [e^x \cdot (2 - x^2)] + [e^x \cdot 2x] - [2 \cdot e^x] \\ &= [e^x \cdot (2 - x^2 + 2x - 2)] \\ &= [e^x \cdot (2x - x^2)] + C \end{aligned}$$

بیلگه ۳:

که تر انتیگرال لاندې فقط یو ترم ولرو، چې د هغه لومړنۍ تابع بې له جدول ارزښت څخه پاي ته نه رسیږي (نه پایول کیږي) (نه ختمیږي) کېدای شي کله کله د ورزیاتونې له لارې (ناڅرگند شته) ضرب "1" تۆتھ انتیگرال شي.

$$\int \ln(x) dx = \int 1 \cdot \ln(x) dx = \int g'(x) \cdot \ln(x) dx$$

که $f(x) = \ln(x)$ او $g'(x) = 1$ کيږدو، نو لاس ته ترې راوړی شو

$$\begin{aligned}\int 1 \cdot \ln(x) dx &= x \cdot \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= x \cdot \ln(x) - \int 1 dx \\ &= x \cdot \ln(x) - x + C.\end{aligned}$$

جمله :

موږ د دې لاندې انټيگرال نيسو:

$$\int x \cos(x) dx$$

ږدو $u = x$ ، نو لرو: $du = dx$

ږدو $dv = \cos(x) dx$ ، نو $v = \sin(x)$ لرو
په لاندې توگه مخ ته څو:

$$\begin{aligned}\int x \cos(x) dx &= \int u dv \\ &= uv - \int v du \\ &= x \sin(x) - \int \sin(x) dx \\ &= x \sin(x) + \cos(x) + C.\end{aligned}$$

C د انټيگرالونې يوه په خوښه ثابته ده

د ټوټه انټيگرالونې د استعمال سره د انټيگرالونو لکه $\int x^3 \sin(x) dx$

او $\int x^2 e^x dx$ کيده شي په همدې لار حل شي:

يوه په زړه پورې بيلگه دا لاندې ده :

$$\int e^x \cos(x) dx$$

که په پوره سختوالي ونيسو، نو په ورسره بلده لار اړين نه دی، چې دا دې حل ولري.

دا بیلگه د دوه واره توتیه انتیگرالونې استعمال له لارې حل کولی شو.

لومړی : $u = \cos(x)$ داسې چې $du = -\sin(x) dx$

$dv = e^x dx$ داسې چې $v = e^x$ نو لرو :

$$\int e^x \cos(x) dx = e^x \cos(x) + \int e^x \sin(x) dx.$$

اوس ، ددې له پاره چې پاتې انتیگرال حل شي، نو د توتیه انتیگرالونې قاعده بیا استعمالوو ، د دې لاندې سره :

$$u = \sin(x); du = \cos(x) dx$$

$$v = e^x; dv = e^x dx$$

نو لرو :

$$\int e^x \sin(x) dx = e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x) dx$$

که دا سره یوځای کړو، نو لاس ته راځي:

$$\int e^x \cos(x) dx = e^x \cos(x) + e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x) dx.$$

که فکر وکړو، نو پورته مساوات دواړو لورو ته همغه انتیگرال لرو (بې له مخ نڅېږي)، نو د ښې لور انتیگرال که کینې لور ته یوسو ، لاس ته ترې راځي:

$$2 \int e^x \cos(x) dx = e^x (\sin(x) + \cos(x)) + C$$

$$\int e^x \cos(x) dx = \frac{e^x (\sin(x) + \cos(x))}{2} + C'$$

C د انتیگرالونې یوه په خوښه ثابته ده

تەمىنلەنە: دا لاندې انتیگرالونە وشمىرئ.

$$\text{اول: } I = \int x \cos x \, dx \quad , \quad \text{دویم: } I = \int x^2 \cdot e^x \, dx$$

$$\text{دریم: } I = \int \ln x \, dx \quad , \quad \text{خلورم } I = \int e^x \cdot \cos x \, dx :$$

د تۆتۈمە - ، یاراشنل كسرونو انتیگرال

$$\text{د } f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x^3 + 4x^2 + 4x} \quad \text{تابع انتیگرال نیول}$$

فعالیت:

$$\text{-- د } f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x^3 + 4x^2 + 4x} \quad \text{انتیگرال نیول یعنی خە ؟}$$

- د پورته تابع تعریف ورشو به نخبه كړئ.

د دې انتیگرال نیول ترواسه په ورسره بلده لار شونی دی، كه څنگه؟

بیلگه :

$$\int \left[\frac{(7x-12)}{(x^2-6x+8)} \right] dx$$

په مخرج كې مربع تابع د خپل صفرځایونو $x_1 = -2$ او $x_2 = -4$ سره د كرنیزو توابعو په ضریبونو تجزیه كیږي:

$$x^2 - 6x + 8 = (x-2)(x-4)$$

د تۆتۈمە كسرونو تۆتۈمە ونې له پاره لاندې توگه پیل كوو:

$$\int \left[\frac{(7x-12)}{(x^2-6x+8)} \right] dx = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x-4)}$$

د جمعی له پاره په اصلي مخرج ورغزیري او لاس ته ترې راځي:

$$\frac{[(A+B)x - 4A - 2B]}{[(x-2)(x-4)]} = \frac{[A(x-4) + B(x-2)]}{[(x-2)(x-4)]} = \frac{[Ax - 4A + Bx - 2B]}{[(x-2)(x-4)]}$$

د ضربونو د پرتلي څخه لاس ته راځي، چې د x له مخه يعنې کين لور ته $(A+B)$ افاده بايد پرته وي

$$\text{او } (-4A-2B) \text{ ، چې } ۱۲ - \text{ ورکوي (وتون مساوات وگوري) : } 7x-12 = (A+B)x$$

$$(-4A-2B)$$

له دې څخه لاندې مساوات سيستم لاس ته راځي:

$$7 = A + B$$

$$-12 = -4A - 2B$$

بدلون يې د A او B پسې : $A = (7-B)$

$$-12 = -4(7-B) - 2B$$

$$-12 = -28 + 4B - 2B + 28$$

$$+16 = 2B$$

$$B = 8$$

$$A = (7-8) = -1$$

ليکلی شو :

$$\int \left[\frac{(7x-12)}{(x^2-6x+8)} \right] dx = \int \left[\frac{-1}{(x-2)} \right] dx + \int \left[\frac{8}{(x-4)} \right] dx$$

لومړني تابع جوړه کړی: $F(x) = \ln x \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$. دا چې طبيعي لوگایتم فقط له مثبت اعدادو شميرل کيږي، نو يواځې ارزښتونه نيسو.

$$= -1 \ln |x-2| + 8 \ln |x-4| + c \quad \int \left[\frac{(7x-12)}{(x^2-6x+8)} \right] dx$$

نا اصلي ماتراشنل توابع بايد لومړی په تول راشنل تابع او اصلي مات راشنل تابع توټه شي. دا د توټه کسرونو توټه کوونې له لارې کيږي يا صورت نيسي.

بيلگه :

$$\int \left[\frac{(-5x+9)}{(x^2+x-6)} \right] dx$$

په مخرجکې مربع تابع په صفرځایونو $x_1 = -2$ او $x_2 = +3$ کې په کښیزو فاکتورونو تجزیه کړي:

$$x^2+x-6 = (x-2)(x+3)$$

د توټه کسرونو توټه کونې له پاره اصلي مخرج غزوو او بیا یې ضربوو:

$$\int \left[\frac{(-5x+9)}{(x^2+x-6)} \right] dx = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+3)}$$

د جمعې له پاره په اصلي مخرج غزیري او بیا سره ضربیري:

$$\frac{[A(x+3) + B(x-2)]}{[(x-2)(x+3)]} = \frac{[Ax+3A + Bx-2B]}{[(x-2)(x+3)]} = \frac{[(A+B)x + 3A-2B]}{[(x-2)(x+3)]}$$

د ضریبونو پرتلې کونې له امله، چې د x ترمخه یعنې کین لور ته له $(A+B)$ افادې څخه باید اوه لاس ته راشي او $(+3A-2B)$ او یا ورته ۱۲ (وټونمساوات وگورئ):

$$-5x+9 = (A+B)x + (3A-2B)$$

لاندې مساواتسیستم لاس ته راځي:

$$-5 = A + B$$

$$9 = 3A - 2B$$

د A او B پسی یې حل کړئ:

$$9 = 3(-5-B) - 2B$$

$$9 = -15 - 3B - 2B + 15$$

$$24 = -5B \quad | :(-5)$$

$$B = -4.8$$

$$A = (-5 + 4.8) = -0.2$$

نو لیکلی شو:

$$\int \left[\frac{(-5x+9)}{(x^2+x-6)} \right] dx = \int \left[\frac{-0.2}{(x-2)} \right] dx + \int \left[\frac{-4.8}{(x+6)} \right] dx$$

لومړی تابع جوړ کړئ:

$$F(x) = \ln x \rightarrow f(x) = \frac{1}{x}$$

دا چې طبیعي لوگاریتم فقط د طبیعي اعدادو شمیرل کیدی شي، نو فقط مطلقه ارزښتونه نیسو.

$$\int \left[\frac{-5x+9}{(x^2+x-6)} \right] dx = -0.2 \ln |x-2| - 4.8 \ln |x+3| + C$$

تمرینونه :

لاندې انتیگرالونه د توتیه کسرونو توتیه کونې له طریقې وشمېری

$$a) \int \frac{x+2}{x^3-3x^2-x+3}$$

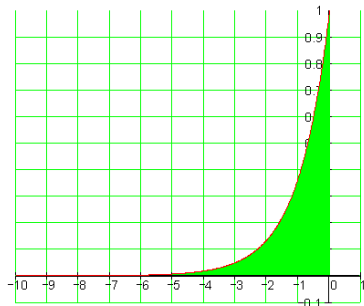
$$b) \int \frac{x-2}{x^2-6x+13}$$

$$c) \int \frac{x^6}{x^4+3x^2+2}$$

ناپای انتیگرال

تعریف : که په یوه ټاکلي انتیگرال کې لږ تر لږه یو حد د مثبت یا منفي ناپای لور ته لاړشي یا د انتیگرال ساحه ناپای ځای ته و غزول شو، نو دلته د ناپای انتیگرال څخه غږیږو. په یوه مناسب ډول ناپای انتیگرال د عادي انتیگرال د حد په څېر تعریفیږي. په دې توګه په زړه پورې پوهیدنې لاس ته راځي د بیلګې په توګه، چې څنګه د منفي توان د پوټنڅ د ګراف لاندې ناپای ته رسیدونکي په زړه پورې سطحې. نو باور لري

$$\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}} dx = 2 \quad \text{او} \quad \int_1^{\infty} x^{-2} dx = 1$$



هم او د دې معکوس انتیګرالونه

$$\int_1^{\infty} x^{-1} dx$$

$$\int_0^1 x^{-1} dx$$

ناپای ته ځي یا له ټولو حدونو

اوري

یعنې د ناپای په لور ځي..

د $f(x) = e^x$ گراف او x -محور ترمنځ دې په انټروال $(-\infty; 0]$ کې ټوله سطحه و شمیرل شي، یعنې

$$A = \int_{-\infty}^0 f(x) dx = \int_{-\infty}^0 e^x dx$$

تراوسه د یوه ټاکلي انتیگرال د پورته همداسې کښته (لاندې) پولي عددونه وو. د انتیگرالونې ورشو یا ساحه محدود وه. په دې حالت کې یا اوس د انتیگرالولو ورشو محدوده نه ده، داسې انتیگرال یو نامحدود انتیگرال بولو، د انتیگرالونې نامحدودې ورشو سره. انتیگرالونه د دې لاندې څخه په یوې ښې منځ ته راځي

$$\int_a^{\infty} f(x) dx \quad \int_{-\infty}^b f(x) dx \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

د دې انتیگرال شمیرنې له پاره په لاندې توګه مخ ته ځو:

لومړی د یوه پای انټروال $[a; b]$ له پاره انتیگرال $\int_a^b f(x) dx$ شمېرو، بیا پسي د ورته افادو $a \rightarrow -\infty$ یا $a \rightarrow \infty$ همداسې، $b \rightarrow -\infty$ یا $b \rightarrow \infty$ له پاره پولي جوړوو.

فورمال دا په لاندې ډول برېښي:

$$\begin{aligned} \int_a^{\infty} f(x) dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx \\ \int_{-\infty}^b f(x) dx &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_c^b f(x) dx \end{aligned}$$

زموږ د سطحې شمیرلو له پاره دا په لاندې ډول برېښي:

$$f(x) = e^x$$

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\infty}^0 e^x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 e^x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} [e^x]_a^0 \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} [e^0 - e^a] = \lim_{a \rightarrow -\infty} e^0 - \lim_{a \rightarrow -\infty} e^a = 1 - 0 = 1 \end{aligned}$$

بیلگه:

داد y په محور هنداره شوي د e تابع دي د $f(x) = e^{-x}$ سره په انټروال $[0, \infty)$ کې د پورته سره برابره سطحه ولري.

$$A = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-x} dx$$

بدلون:

$$u(x) = -x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -1 \Rightarrow dx = \frac{du}{-1}$$

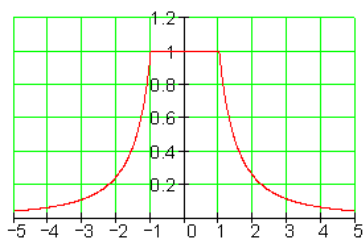
$$u(0) = 0; u(b) = -b$$

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^u \frac{du}{-1} &= - \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^{-b} e^u du = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{-b}^0 e^u du \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} [e^u]_{-b}^0 = \lim_{b \rightarrow \infty} [e^0 - e^{-b}] \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} e^0 - \lim_{b \rightarrow \infty} e^{-b} = 1 - 0 = 1 \end{aligned}$$

بیلگه:

د یوه یوځای ایښول شوي یا یو ځای شوي تابع بیلگه لرو:

$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & x < -1 \\ 1 & -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{x^2} & x > 1 \end{cases}$ $A = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$	د $x < -1$ لپاره د $-1 \leq x \leq 1$ لپاره د $x > 1$ لپاره
--	---



د انتیگرال په برخو وېشنه یا توتېه کونه:
لاندې د انتیگرالونو تمعه دې و شمیرل شي.

$$A = \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2} dx + \int_{-1}^1 dx + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

لومړنۍ اند یا تر مخه فکرکونه:
د تناظر دلایلو له مخې لرو :

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2} dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

داسې، چې دا انتیگرال باید فقط یوځل و شمیرل شي.

$$\int_{-1}^1 dx = [x]_{-1}^1 = [1] - [-1] = 1 + 1 = 2$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{b} \right] - \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{1} \right] = 0 - (-1) = 1$$

$$A = \underbrace{\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2} dx}_1 + \underbrace{\int_{-1}^1 dx}_2 + \underbrace{\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx}_1 = 1 + 2 + 1 = 4$$

تمرېنونه:

۱ -- د $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ تابع انتیگرال و شمیرئ، که د ناپايي په لور لاړ شي.

۲ - و څېړئ چې ایا لاندې ناکلي انتیگرالونه پوله ارزښت لري؟

a) $\int_{-\infty}^0 e^x dx$	b) $\int_0^{\infty} \frac{x}{x^2 + 1} dx$
c) $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$	d) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4x}{(x^2 + 2)^3} dx$

۳ - د کومو توانونو p لپاره دا ناکلی انتیگرال $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$ پوله ارزښت لري.

۴ - لاندې انتیگرالونه د یوه انتیگرال پولې لپاره تعریف نه دي، و څېړئ، چې ایا دا

ټاکلی انتیگرال په دې انتروال کې پوله ارزښت لري.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f(x) = \frac{x^3 + 1}{x}, \quad I = [0; 1] & \text{b) } f(x) = \ln x, \quad I = [0; 1] \\ \text{c) } f(x) = \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}, \quad I = [1; 2] & \text{d) } f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad I = [-1; 1] \\ \text{e) } f(x) = \frac{x^2}{x^3 - 8}, \quad I = [0; 2] & \text{f) } f(x) = \frac{e^x}{1 - e^x}, \quad I = [0; 1] \end{array}$$

ټولګه

د انتیگرال هندسي تعريف

لوريزه سطحه-د انتیگرال تعريف: که يوه f تابع ولرو، نو د x محور او تابع ترمنځ سطحې شمېرل د انتیگرال له لارې کيږي. په دې سطحه کې د x محور پورته لوري ته سطحه مثبتې مخښېنه لري او د x محور کښته لوري ته سطحه منفي مخښېنه لري.

تحليلي تعريف:

تعريف: د f يوه تابع ورکړ شوې، چې په يوه انتروال $[a, b]$ باندې تعريف دی، نو د a څخه تر b پورې د تابع د انتیگرال څخه د x په محور د f د گراف او د کرښې $x=a$ او $x=b$ تر منځ يوه يوه لوريزه سطحه پوهيږو.

پېژند (تعريف) ۴. ۱: ليميت

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx = F; (\max \Delta x \rightarrow 0), \dots \dots (4, 3)$$

که په اينتروال $[a, b]$ کې موجود وي، نو دا د $f(x)$ ټاکلی اينتیگرال بولو، يا F - Riemann (د ريمن سطحه). دلته a د اينتیگراله ونې لاندې (کښته) پوله او b د

اینتیگرالونې پورته پوله بلل کیږي او $[a, b]$ د اینتیگرالونې اینتروال او (Integrand) $f(x)$ اینتیگرالېدونکی او x د اینتیگرالونې (Integrationsvariable) متحول بلل کیږي

جمله ۴. ۱: که $f(x)$ په $[a, b]$ کې اینتیگرالور وي او $c \in [a, b]$ وي، نو باور لري:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

پېژند یا تعریف ۴. ۲: $f(x)$ په یوه بند انتروال $[a, b]$ کې اینتیگرالور دی، نو باور لري:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

پېژند تعریف 3.2: تابع $y = f(x)$ دې په یوه واز اینتروال I کې تعریف وي. هر یوه هلته موجوده مشتقور $F(x)$ تابع چې $F'(x) = f(x)$ شرایط پوره کړي، د $f(x)$ (بنسټیز - ، ساده - یا لومړنی تابع بلل کیږي)

ټاکلی انتیگرال:

که f یو حقیقي تابع وي، نو د ټاکل انتیگرال $\int_a^b f(x) dx$ (لوستل: د $f(x)$ انتیگرال د a تر b او په پولو یا حدونو یا انتیگرال په $f(x)$ باندې له a تر b) لاندې یوه لوریزه سطحه پوهیږو د a او b تر منځ او د f ګراف لاندې.

تعریف:

f په انټروال $a \leq x \leq b$ کې متمددي تابع ده او F د f لومړنۍ تابع ده، نو ټاکلۍ

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a). \quad \text{انتیگرال دی :}$$

د $F(b) - F(a)$ لپاره زیات وخت $[F(x)]_a^b$ لیکو. په دې توګه دی

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b$$

جمله:

د یوې ثابتې سره ضرب : که تابع $f(x)$ په یوه اینټروال کې متمددي وي ، نو لاندې باور لري:

$$\int a \cdot f(x) dx = a \int f(x) dx, \quad a \in \mathbb{R}$$

جمله :

د جمعي (تفریق) قاعده که $f_1(x)$ او $f_2(x)$ په یوه اینټروال کې نه پریکیدونکي وي ، نو باور لري

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x)) dx = \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx$$

جمله :

د ،، بدلون (قاعده) ،، (Substitution لاتین د: یوه ارزښت په ځای د همغه ارزښت بله لویه ایښوول ، لنډ: بدلون) د نیونو لاندې چې $u = g(x)$ متمددي اوو مشتقوردي او $y = f(u)$ متمددي، نو باور لري:

$$\int f[g(x)]g'(x) dx = \int f[f(u)] du$$

د ضربونو انتیگرالونه

که د دوه توابعو د ضرب انتیگرال د ورسره بلدو متودونو یا لارو شمیرو، نو زیات وخت دا ناشوني وي.

$$f(x) = x \cdot \ln(x^2) \Rightarrow F(x) = \int f(x) dx = \int (x \cdot \ln(x^2)) dx = ?$$

د څپرکي تمرینونه:

۱ - لاندې نااصلي پولینومونه دې د یوه ټول گویا عدد پولینومونو او یوه اصلي پولینوم د جمعې په څېر ولیکل شي.

$$a) \frac{x^3 + 7x^2 + 9x - 5}{x + 5}$$

$$b) \frac{x^4 - 3x^2 + 1}{x^2 - 2}$$

$$c) \frac{x^3 - 2x^2 + x - 5}{x^3 + 1}$$

$$d) \frac{x^4 - 1}{x^3 + x^2 + x + 1}$$

$$e) \frac{x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 5x + 3}{x - 2}$$

$$f) \frac{x^5 - x^4 + 1}{x^2 + 2}$$

۲ - لاندې پولینومونه د جمعې په څېر ولیکئ

$$a) \frac{2x^2 + 20x + 12}{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}$$

$$b) \frac{x^2 + 1}{x^3 - x}$$

$$c) \frac{4x + 10}{x^2 + 6x + 8}$$

$$d) \frac{-3x^2 + 19x - 10}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}$$

$$e) \frac{4x^2 + 6x - 20}{x^3 - 4x}$$

$$f) \frac{14}{x^2 + 20x + 51}$$

۳ - د لاندې اصلي پولینومونو په ټوټه کسرونو ټوټه ونه وکاروئ.

$$\begin{array}{ll} a) \frac{3x^2 + 5x + 10}{x^3 + 2x^2 - 4x - 8} & b) \frac{3x^2 - 18x + 36}{x^3 - 6x^2 + 9x} \\ c) \frac{x^2 + 3x + 4}{x^4 - 2x^2 + 1} & d) -\frac{x^2 + 13x + 10}{x^3 - 5x^2} \end{array}$$

۴ - د لاندې اصلي پولینومونو په ټوټه کسرونو ټوټه ګونه ورکړئ.

$$\begin{array}{ll} a) \frac{x^2 + 2x - 12}{x^3 + 2x^2 + 6x + 5} & b) \frac{4x^2 - 3x + 8}{x^3 - 2x + 4} \\ c) \frac{8x^2 - 16x + 10}{x^3 - 4x^2 + 5x} & d) \frac{x}{x^3 + 2x^2 + 2x + 1} \end{array}$$

۵ - د لاندې پولینوم کسرونو په ټوټه کسرونو ټوټه کونه پرکړئ.

$$\begin{array}{ll} a) \frac{x^3 + 7x^2 + 17x + 17}{x^2 + 6x + 8} & b) \frac{2x^4 - 8x^3 + 7x^2 - 3x + 4}{x^2 - 4x + 3} \\ c) \frac{2x^3 + x^2}{x^3 - 1} & d) \frac{4x^3 + 16x^2 - 7x - 49}{x^3 + 4x^2 + x - 6} \end{array}$$

۶ - وښایئ، چې د F تابع د f تابع لومړنۍ تابع ده.

$$\begin{array}{ll} a) f(x) = 2x^2 + 4x - 7, & f(x) = 4x + 4 \\ b) F(x) = (x^2 - x)^3, & f(x) = 3 \cdot (2x - 1) \cdot (x^2 - x)^2 \\ c) F(x) = \sqrt{2x + 1}, & f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x + 1}} \\ d) F(x) = 1 + \sin x, & f(x) = 3x \cdot \cos 3x \\ e) F(x) = \frac{1}{3}x^3 \cdot \ln x - \frac{4}{9}x^3, & f(x) = x^2 \cdot (\ln x - 1) \end{array}$$

۷ - وښايي، چې د F او G توابع د هماغه f تابع لومړني توابع دي.

۲۴۹

ناپای انټیګرال

$$a) F(x) = x^3 + x + 4, \quad G(x) = x^3 + x + 1$$

$$b) F(x) = (x-3)^2, \quad G(x) = x^2 - 6x + 4$$

$$c) F(x) = \frac{x+1}{x+2}, \quad G(x) = \frac{3x+5}{x+2}$$

$$d) F(x) = 1 + \sin x, \quad G(x) = \sin x$$

۱۳ - لاندې ناپاکلي انټیګرالونه پیدا کړئ او ټیکوالی یې و ازمایئ.

$$a) \int x^3 dx \quad b) \int 7 dx \quad c) \int x dx \quad d) \int (1-x^2) dx$$

$$e) \int (x + \frac{1}{x}) dx \quad f) \int (e^x + \cos x) dx \quad g) \int \frac{1}{\sin^2 x} dx \quad h) \int \frac{5}{\cos^2 x} dx$$

$$i) \int u dx \quad k) \int (2 + e^x) dx \quad l) \int (1 + \ln x) dx \quad m) \int (\sqrt{x} + \sin) dx$$

۱۴ - د لاندې ټاکلو انټیګرالونو ارزښت وشمېرئ

$$a) \int_0^3 4 dx$$

$$b) \int_{-3}^{-1} x dx$$

$$c) \int_1^e \frac{1}{x} dx$$

$$d) \int_1^e (2 + \frac{1}{x}) dx$$

$$e) \int_{-1}^0 e^x dx$$

$$f) \int_0^\pi \sin x dx$$

$$g) \int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} 4 dx$$

$$h) \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} \frac{1}{\sin^2 x} dx$$

$$i) \int_{-2}^2 x^3 dx$$

$$j) \int_2^6 (1+x) dx$$

$$k) \int_1^2 (x^2 - x^5) dx$$

$$l) 0 \int_{-2}^2 (\frac{x^3}{4} + \frac{x^2}{3}) dx$$

۱۶ = د لاندې ټاکلو انټیګرالونو ارزښت وشمیرئ او ارزښتونه پرته کړئ.

$$\begin{array}{ll}
 a) \int_{-3}^1 3dx \text{ und } - \int_{-3}^1 3dx & b) \int_0^1 (1+e^x)dx \quad \wedge \quad - \int_0^1 (1+e^x)dx \\
 c) \int_{-\pi}^0 \sin x dx \quad \wedge \quad - \int_{-\pi}^0 \sin x dx &
 \end{array}$$

ناپای انتیگرال

۲۵۰

۱۷ - هر دوه انتیگرالونه د یوه انتیگرال سره انځور کړئ.

$$\begin{array}{ll}
 a) \int_0^{0.5\pi} \cos x dx + \int_{0.5\pi}^{\pi} \cos x dx & b) \int_{-1}^0 (x+e^x)dx + \int_0^1 (x+e^x)dx \\
 c) \int_2^3 3x^2 dx + \int_5^3 3x^2 dx & d) \int_{-2}^1 (2+x)dx - \int_4^1 (2+x)dx
 \end{array}$$

- د لاندې ټاکلو انتیگرالونو لپاره ارزښت تخمین کړئ.

$$\begin{array}{ll}
 a) \int_{-4}^{-2} e^{x+3} & b) \int_0^8 \sqrt{1+x} dx \\
 c) \int_3^5 2^{4-x} dx & d) \int_0^{0.5\pi} \sin^2 x dx
 \end{array}$$

۱۹ - د کومو x ارزښتونو لپاره لاندې انتیگرالونه ورکړ شوي ارزښتونه لري؟

$$\begin{array}{ll}
 a) \int_1^x 5t^4 dt, \quad la(x) = 31 & b) \int_0^x e^t dt, \quad la(x) = e - 1
 \end{array}$$

۲۰ - لاندې انتیگرانده توابع ته د انتیگرال توابع وټاکئ.

$$\begin{array}{ll}
 a) f(x) = x^2, \quad a = 3 & b) f(x) = 2 + e^x, \quad a = 0 \\
 c) f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad a = 0 & d) f(x) = 2, \quad a \in \mathbb{R}
 \end{array}$$

۲۱ - د لومړني انتیگرال په استعمال سره لاندې انتیگرالونه وشمېرئ.

$$\begin{aligned}
 d) \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} dx, \quad e) \int \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x} dx, \quad f) \int (\sqrt[3]{x^4} + 1) dx, \\
 g) \int \sqrt[3]{x^{-3}} dx, \quad h) \int \frac{ax^2 + bx + cx^{-1}}{x^4} dx, \quad i) \int 3 \cdot 2^x dx, \\
 j) \int \frac{1}{2 \sin^2 x} dx, \quad k) \int \frac{1}{3 + 3x^2} dx, \quad l) \int \cos \varphi \cdot s \, ds,
 \end{aligned}$$

۲۵۱

نایای انتیگرال

$$m) \int \frac{dt}{(2t-3)^{-2}}, \quad n) \int \sqrt{t} \cdot \sqrt{t} \cdot \sqrt{t} dt, \quad o) \int (1-u^2)^{\frac{1}{2}} du.$$

۲۲ - د بیرته په بنسټیز اینتیگرال بدلون وروسته یې اینتیگرال ونیسی:

$$\begin{aligned}
 a) \int \frac{x^3 + 2x^2 + x}{x^2(1+x)^2} dx, \quad b) \int \frac{2 \sin 2x}{3 \cos x} dx, \quad c) \int \frac{7 \cos 2x}{\cos^2 x - \sin^2 x} dx, \\
 d) \int \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos^2 x} dx, \quad e) \int (-2 - 2 \tan^2 x) dx, \quad f) \int \frac{2t^3 - 8t}{(t-2)(t+2)} dt.
 \end{aligned}$$

۲۳ -- لاندې ټاکلی اینتیگرالونه وشمیری:

$$\begin{aligned}
 a) \int_0^1 \frac{1}{2} e^x dx, \quad b) \int_{\pi}^{2\pi} \cos x \, dx, \quad c) 2 \int_2^3 dt, \\
 d) \int_0^{\pi} \cos \pi \sin x \, dx, \quad e) \int_0^1 \frac{4du}{1+u^2}, \quad f) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x + 1}{\sin^2 x} dx, \\
 g) \int_{x_1}^{x_2} (2x - 1) dx, \quad h) \int_0^8 \left(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt{x} \right) dx, \quad i) \int_{\ln 2}^{\ln 3} e \cdot e^t dt, \\
 j) \int \frac{(u+1)^2}{\sqrt{u}} du, \quad k) \int_0^1 \frac{x^n}{x^{1-n}} dx, \quad l) \int_a^b a^x dx.
 \end{aligned}$$

۲۴- د بدلون یا سیتیچوشن قاعدې استعمال له لارې یې اینتیګرال وشمیري:

$$\begin{aligned} \text{a) } & \int \sqrt[3]{2x-7} \, dx, & \text{b) } & \int \frac{dx}{-x+1}, & \text{c) } & \int 2^{3x+6} \, dx, \\ \text{d) } & \int \sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}\right) dx, & \text{e) } & \int \frac{dx}{1+(x+1)^2}, & \text{f) } & \int \frac{4}{\cos^2(4t-5)} dt, \\ \text{g) } & \int x \cdot \sqrt[3]{x^2-7} \, dx, & \text{h) } & \int \frac{3x dx}{-x^2+1}, & \text{i) } & \int x \cdot e^{2x^2+3} \, dx, \end{aligned}$$

ناپای اینتیګرال

۲۵۲

$$\begin{aligned} \text{a) } & \int \frac{dx}{1+4x^2}, & \text{b) } & \int \frac{dx}{2+4x^2}, & \text{c) } & \int \frac{dx}{3+5x^2}, \\ \text{d) } & \int \frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}}, & \text{e) } & \int \frac{dx}{\sqrt{36-9x^2}}, & \text{f) } & \int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}, \\ \text{g) } & \int \frac{dx}{x^2-10x+34}, & \text{h) } & \int \frac{dx}{3x^2-6x+30}, & \text{i) } & \int \frac{dx}{\sqrt{-3+4x-x^2}}. \end{aligned}$$

۲۵- د تر زیرنوني فورم بدلون وروسته او په بنسټیز اینتیګرال 10 او 11 د بدلون له لارې یې اینتیګرال وشمیری

۲۶- لاندې ټاکلی اینتیګرالونه وشمیري:

$$\begin{aligned} \text{a) } & \int_{-1}^1 \frac{dx}{(4x-1)^3}, & \text{b) } & \int_{-1}^0 e^{3x} dx, & \text{c) } & \int_0^2 2^{2x+1} dx, \\ \text{d) } & \int_{-1}^1 \frac{4x^2}{(3+2x^3)^5}, & \text{e) } & \int_e^{e^x} \frac{1}{x} \ln x \, dx, & \text{f) } & \int_2^4 \frac{e^t}{1+e^t} dt, \\ \text{g) } & \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{\sin x} \cos x \, dx, & \text{h) } & \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{2+8x^2}, & \text{i) } & \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \cdot \cos x \, dx. \end{aligned}$$

۲۷- لاندې ټوټه اینتیګرالونه وشمیري:

$$\begin{array}{lll}
 a) \int 0,2x \cdot \sin x \, dx, & b) \int 4x^3 \cdot \ln x \, dx, & c) \int \cos^2 x \, dx \\
 d) \int \cos x \cdot \sin x \, dx & e) \int x^2 \cdot \sin x \, dx & f) \int x \cdot (\cos x + 1) \, dx \\
 g) \int x^3 \cdot e^x \, dx, & h) \int x^{\frac{1}{2}} \cdot \ln x \, dx, &
 \end{array}$$

۲۵۳

د اینتیګرال شمیرنی استعمال

د اینتیګرال شمیرنی استعمال

د سطحو مساحت، چې د $f(x)$ د ګراف او x محور ترمنځ پرتي وي.

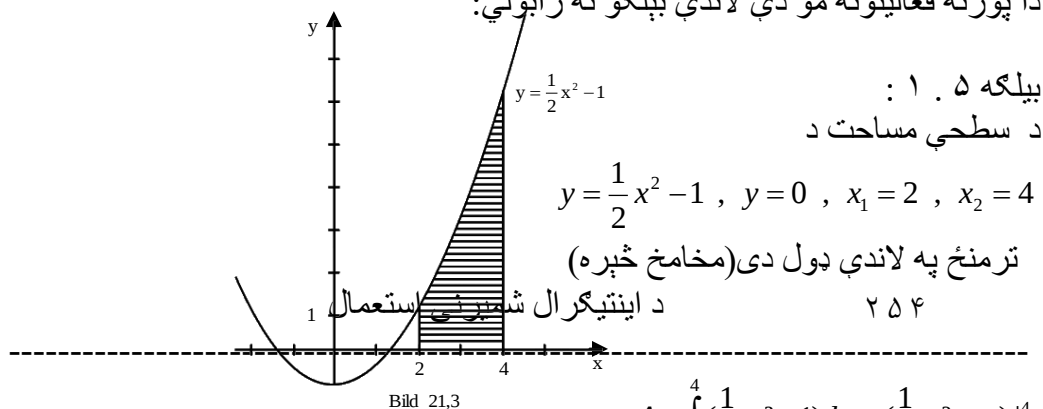
$$\int_a^b f(x) dx = f(b) - f(a) \quad \text{په څلورم څپرکي کې وویل شو چې ټاکلی اینتیګرال د}$$

سطحي مساحت A بنایي، چې له منحنی $y=f(x)$ ، د x -محور $y=(0)$ او د کرښی $x=a$ او $x=b$ له خوا رابند وي. موږ له دې څخه مخ ته تللي یو چې $y=f(x)$ د اینتیګرال اینټروال په دننه کې د x -محور پورته لور ته ځي، خو دا کېدی شي د محور کېننه لور ته هم لاړ شي..

فعالیت:

- د یوې په خوښه تابع د منحنی یا کرښی او د x محور ترمنځ او یا د دوه توابعو د سطحې شمیرلو لپاره وړاندیزونه وکړئ.
- دا هم په پام کې د شمیرلو لپاره په پام کې ونیسئ، که منحنی یا د تابه کرښه د x د محور لاندې لور ته پراته وي.
- یوه په خوښه تابع ورکړئ، د تابع رسم وکارئ او د تابع اینتیګرال د x محور په ټاکلو پولو کې وشمېرئ.
- یوه په خوښه تابع ولیکئ، چې د انټروال په دننه کې د x محور کېننه لور ته ځي. د تابع رسم وکارئ او دا تابع به کومه محنځېنه ولري؟ دا چې سطحه تل مثبت ده، نو د تابع د محنځې په ورکولو کې دا بیا وڅېړئ، چې ولې؟

يادونه: که موږ د سطحې مساحت شمېرلو کې هغه عدد وليکو، نو د هغې سره دې دا په پام کې ونیول شي، چې د سطحې واحد (یون) ور سره شته دی. که دا ورسره لیکل شوی نه وي، خو باید تل په پام کې وي. دا پورته فعالیتونه مو دې لاندې بېلگو ته رابولي:

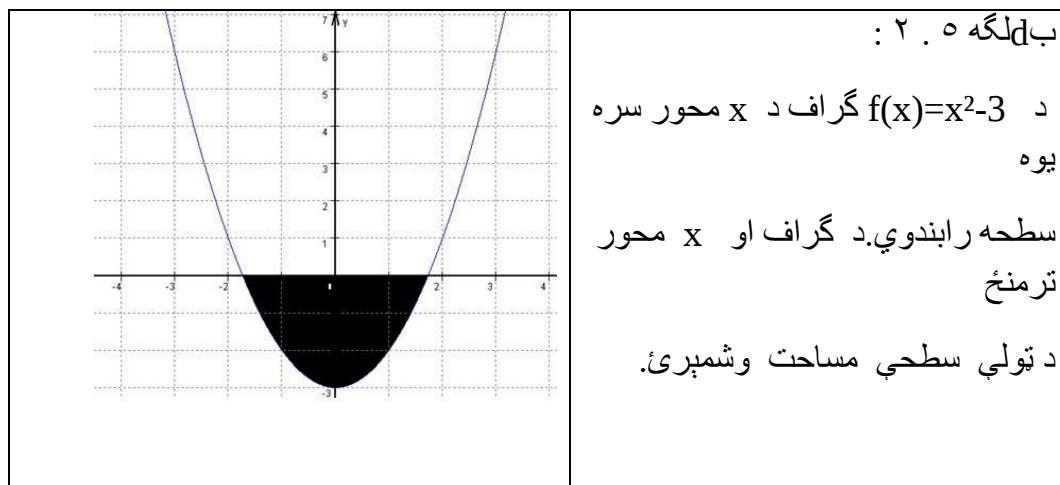


$$A = \int_2^4 \left(\frac{1}{2}x^2 - 1 \right) dx = \left(\frac{1}{6}x^3 - x \right) \Big|_2^4$$

$$= \frac{1}{6} \cdot 64 - 4 - \frac{1}{6} \cdot 8 + 2$$

$$= \frac{22}{3}$$

که د تابع $y=f(x)$ سطحې د منحنی تلنه د $-x$ محور لاندې لور ته وي، نو دا ټاکلی اینتېگرال به منفي وي. ددې لپاره چې د سطحې تل مثبت مساحت لاس ته راوړو، نو د اینتېگرال مطلقه ارزښت نیسو یعنې منفي اینتېگرال.



تگلار:

۱ - د دې لپاره چې دا مسئله راته ښه روښانه شوي وي، نو دا پورته رسم کارو.

۲ - د دې لپاره چې د انټیګرال حدونه لاس ته اړورئ شو، باید صفرخایونه وشمېرو.

$$0 = x^2 - 3$$

$$x = \pm\sqrt{3}$$

۲۵۵

د اینټیګرال شمیرنی استعمال

۳ - اوس د سطحې د مساحت شمېرلو لپاره اړونده انټیګرال لیکو.

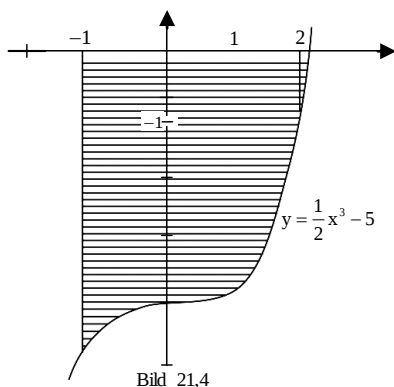
د تناظر پر بنسټ لومړی له ۰ څخه تر $\sqrt{3}$ پورې انټیګرال شمېرو او نتیجه یې له ۲ سره ضربوو، نو لرو:

$$\int_0^{\sqrt{3}} (x^2 - 3)dx = \int_0^{\sqrt{3}} (x^2)dx - 3 \cdot \int_0^{\sqrt{3}} 1dx = \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^{\sqrt{3}} - 3x \Big|_0^{\sqrt{3}} = \sqrt{3} - 3 \cdot \sqrt{3} = -2 \cdot \sqrt{3}$$

$$A = 2 \cdot \sqrt{3} + 2 \cdot \sqrt{3} = 4 \cdot \sqrt{3}$$

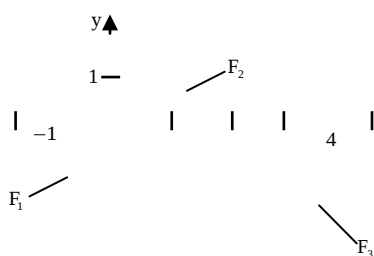
بیلګه ۵، ۲:

د سطحې مساحت د $y = \frac{1}{2}x^3 - 5$ ، $y = 0$ ، $x_1 = -1$ ، $x_2 = 2$ ترمنځ دی: (لاندې څېره)



$$\begin{aligned} A &= \left| \int_{-1}^2 \left(\frac{1}{2}x^3 - 5 \right) dx \right| \\ &= - \int_{-1}^2 \left(\frac{1}{2}x^3 - 5 \right) dx \\ &= \left(-\frac{1}{8}x^4 + 5x \right) \Big|_{-1}^2 \\ &= (-2 + 10 + 1/8 + 5) = \frac{105}{8} \end{aligned}$$

بیلګه ۵، ۳:



د لاندې پولو $x_1 = -1$

$x_2 = 4$ او د منحنی $y = -x^2 + 2x$ او $y = 0$

ترمنځ د x -محور پورته او کښته پرته سطحه (په مخامخ څېره کې نښانه شوې ده) دې وشمیرل شي

$$y = -x^2 + 2x$$

حل : د تابع $y = -x^2 + 2x$ د $x_1 = 0$ د

صفر ځایونو $x_1 = 0$ او $x_2 = 2$ تر منځ پرته

د اینتېګرال شمیرنی استعمال

۲۵۶

غوښتونکي سطحه د x -محور پورته، نوره

کښته پرته ده. له دې امله لرو

$$A = -F_1 + F_2 - F_3$$

$$= \int_{-1}^0 (-x^2 + 2x) dx + \int_0^2 (-x^2 + 2x) dx - \int_2^4 (-x^2 + 2x) dx$$

$$= -\left(-\frac{1}{3}x^3 + x^2\right) \Big|_{-1}^0 - \left(-\frac{1}{3}x^3 + x^2\right) \Big|_0^2 - \left(-\frac{1}{3}x^3 + x^2\right) \Big|_2^4 = \frac{28}{3}$$

د لاندې پولو $x = -1$ تر $x = 4$ او د کرښې $y = -x^2 + 2x$

او $y = 0$ ترمنځ (د $-x$ محور پورته او کښته)

تمرینونه

: په ورګر شوي انټروال کې د ګراف او x محور ترمنځ سطحه وشمیرئ.

$$a) f(x) = x - 2, \quad x \in [-2; 3]$$

$$b) f(x) = x^2 - x - x, \quad x \in [1; 5]$$

$$c) f(x) = x^2 - 8x + 12, \quad x \in [0; 8]$$

له دوه ګرافونو څخه رابندې سطحې د مساحت شمیرنه



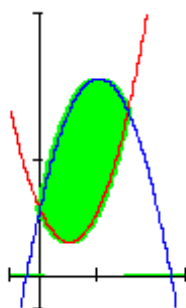
۲۵۷

د دوه کرښو څخه رابنده

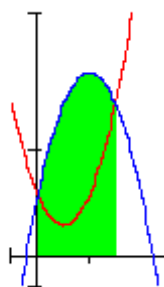
فعالیت:

- که داسې یو ډنډ ولرو، نو فکر وکړئ، چې د دې ډنډ مساحت څنګه وشمیرو؟

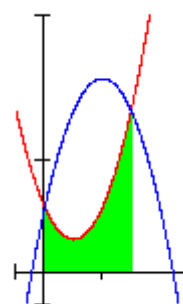
په ځنو پوښتنو کې د سطحې مساحت شمیرل کیږي، چې د دوه توابعو گرافونو ترمنځ پرته ده. دا ډول د سطحې مساحت کېدې شي د ټاکلو اینټګرالونو د کمښت له لارې و شمېرل شي. که دواړه گرافونه د x -محور پورته لور ته پراته وي، نو د لاندې شیمای څخه مخ ته ځو :



A

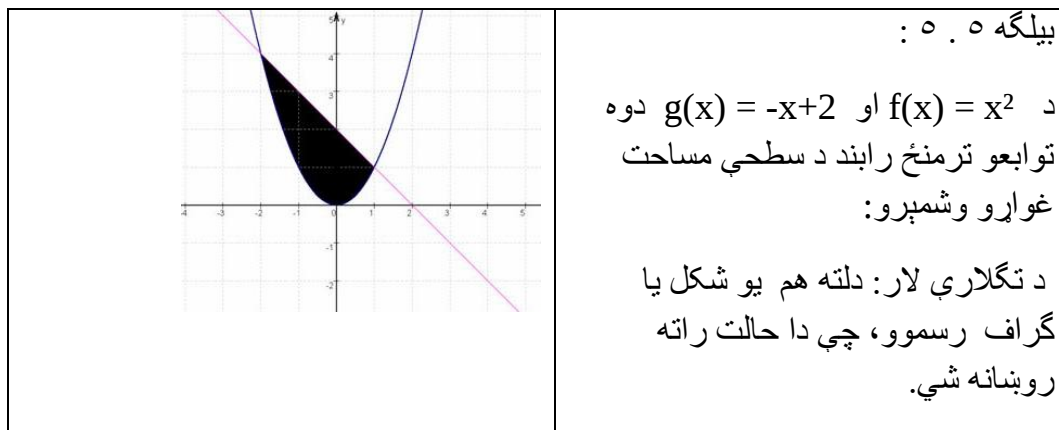


A_1



A_2

$$A = A_1 - A_2$$



د دوه کرښو څخه رابنده

۲ ۵ ۸

۲ - د دې لپاره چې انتیګرال وشمېرو، د گرافونو دقاطع ټکي ټاکو.

$$x^2 = -x+2$$

$$x^2+x-2=0$$

$$x_{(1,2)} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$$

$$x_1 = 1 \quad \text{P;q - فرمول}$$

$$x_2 = -2$$

$$۳ - \text{په ساده توګه لیدل کیږي.} \int_{x_1}^{x_2} g(x) dx - \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$$

پس باور لري

$$\begin{aligned}
 A &= \int_1^{-2} (-x+2)dx - \int_1^{-2} x^2 dx = \\
 &= -1 \cdot \left(\frac{2^2}{2} - \frac{1}{2} \right) - 6 - \left(\frac{(-2)^3}{3} \right) - \frac{1}{3} \\
 &= -1,5 - 6 + + = -4,5 \\
 A &= 4,5
 \end{aligned}$$

جمله :

که د ټولو x لپاره ، د $a < x < b$ سره $f(x) > g(x)$ وي، دا په دې معنا چې د f گراف د a او b تر منځ د g پورته لور ته ځغلي، نو د دواړو گرافونو په انټروال کې رابندي سطحې مساحت لپاره بارور لري.

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

۲۵۹

د دوه کرښو څخه رابنده

بیلگه ۶.۵ :

د توابعو $f(x) = x^2 - 2x + 2$ او $g(x) = -x^2 + 4x + 2$ گرافونو ترمنځ سطحې مساحت غواړو پیدا کړو.

د دواړو گرافونو د x -ارزښتونو غوڅنکي (د تقاطع ټکي) د اینټیگرال حدونه جوړوي.

د غوڅنکو د x - کواردیناتو ټاکل:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 = -x^2 + 4x + 2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow$$

$$x_1 = 0 \text{ او } x_2 = 3 \text{ د اینټیگرال لیمیتونه یا پولې دي.}$$

د اینټیگرال جوړونه:

$$\int_0^3 f(x) dx = \int_0^3 (x^2 - 2x + 2) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x \right]_0^3 = \frac{1}{3} \cdot 27 - 9 + 2 \cdot 3 = 9 - 9 + 6 = \underline{\underline{6}}$$

$$\int_0^3 g(x) dx = \int_0^3 (-x^2 + 4x + 2) dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 2x \right]_0^3 = -\frac{1}{3} \cdot 27 + 2 \cdot 9 + 2 \cdot 3 =$$

$$= -9 + 18 + 6 = \underline{\underline{15}}$$

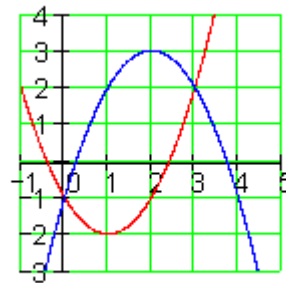
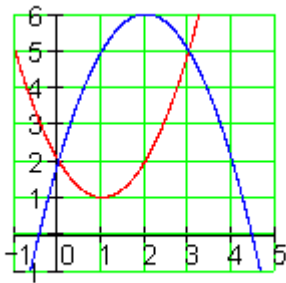
دا چې د دوه گرافونو ترمنځ سطحه بايد تل مثبت وي، نو له لوي ارزښت څخه کوچنی ارزښت بايد کم شي.

$$A = \int_0^3 g(x) dx - \int_0^3 f(x) dx = 15 - 6 = \underline{\underline{9}}$$

لکه چې پوهیږو، د یوې سطحې مخنښه ددې په واک کې ده، چې ایا سطحه د x -محور پورته لور ته پرته ده او که کښته لور ته. موږ څېړو، چې ایا دا تاثيرات په پورتنۍ بیلگه کې پراته دي او که نه. موږ سطحه د y -محور په درې واحدونو (یوونونو) کښته لور ته بیا یو او سطحې نوې شمېرو.

د دوه کرښو څخه رابنده

۲۶۰



که د لید له مخې قضاوت وکړو، نو د ټولو لاس ته راوړنه به برابره وي.

د x -ارزښت غوڅتکي هم او له دې سره د انټيکراډ حدونه بې تغیره پاتېږي.

$$g(x) = -x^2 + 4x - 1 \quad \text{و} \quad f(x) = x^2 - 2x - 1$$

خای په خای کونه:

$$A = \int_0^3 f(x) dx - \int_0^3 g(x) dx = \int_0^3 (f(x) - g(x)) dx$$

د $f(x) - g(x) = 2x^2 - 6x$ سره کیري:

$$A = \int_0^3 (2x^2 - 6x) dx = \left[\frac{2}{3} x^3 - 3x^2 \right]_0^3 = \frac{2}{3} \cdot 27 - 3 \cdot 9 = 18 - 27 = \underline{\underline{-9}}$$

دا چې د دوه منحنیو ترمنځ سطحه فزیکي سطحه ښایي، باید لاس ته راوړنه یو مثبت عدد وي.

دا د مطلق ارزښت له لارې ترلاسه کوو.

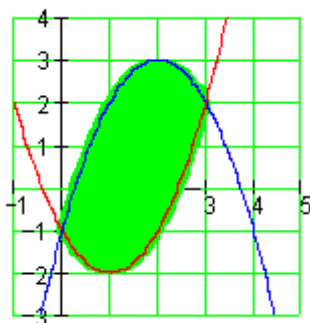
$$A = \left| \int_0^3 (2x^2 - 6x) dx \right| = \left| \left[\frac{2}{3} x^3 - 3x^2 \right]_0^3 \right| = \left| \frac{2}{3} \cdot 27 - 3 \cdot 9 \right| = |18 - 27| = |-9| = \underline{\underline{9}}$$

۲۶۱

د دوه کرښو څخه رابنده

د دې متود ټولیزه ونه (عمومیت):

د دوه گرافونو ترمنځ سطحه:



که یوه سطحه د یوې پورته او یوې کښته منحنی څخه رابنده وي، چې تابع $f(x)$ او تابع $g(x)$ پورې اړه ولري، نو دا له دې رابنده سطحه په لاندې ډول شمېرل کیري.

$$A = \left| \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \right|$$

د انتیگرالوني حدونه a او b د x - محور د

دواړو گرافونو د وضعيه قېمتونو غوڅتکي دي،

$$y=f_2(x) \text{ او } y=f_1(x) \text{ د منحنيو}$$

تر منځ پرته سطحې مساحت په لاندې پولو کې

$$\text{له } x=a \text{ تر } x=b \text{ پورې او } y=f_1(x) \text{ او } y=f_2(x)$$

y↑

A

$$f_1(x) < f_2(x) \text{ اړيک}$$

په $[a, b]$ اينټروال کې (ش ۱ . ۶) داسې لاس $y=f_1(x)$

ته راوړل کيږي چې دتابع $y=f_2(x)$ لاندې سطحې

مساحت څخه د $y=f_1(x)$ تابع لاندې سطحې مساحت

کم کړی.

$$A = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx$$

a

b

x→

Bild 21,6

سړی په ساده ډول خپل باور په دې راوستی شي چې ش ۲ . ۶ له دې خپلواک

چې $f_1(x)$ او $f_2(x)$ په اينټروال $[a, b]$ کومه يوه مخنښه ځان ته غوره کوي باوري دی.

د دوه کرښو څخه رابنده

۲۶۲

بيلگه ۵ . ۷: د لاندې پارابولونو ترمنځ سطحه غواړو وشميرو او $y=-x^2+1$

$$x^2+1$$

حل: د اينټيگرال پولې (حدونه) د افقي (پراته) محور غوڅتکي (د تقاطع ټکي) دي

$$x^2-1 = -x^2+1$$

$$2x^2=2$$

$$x^2=1$$

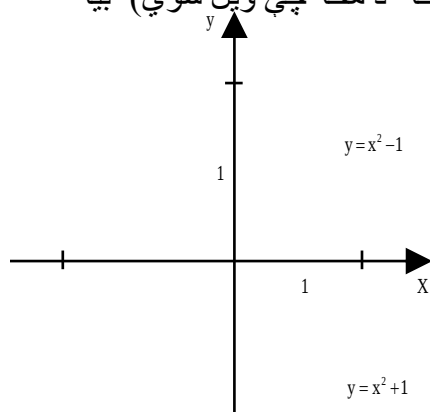
$$x_1 - a = 1, x_2 = b = -1$$

د اينټيگلولو په اينټروال $[-1, 1]$ کې لرو $-x^2+1 > x^2-1$

(که چيرې په اينټروال $[a, b]$ او په (۲ . ۱) کې $f_2(x) > f_1(x)$ په نظر کې ونه نيول

شي، نو د څرگند اينټيگرال به منفي شي او سړی (لکه د مخه چې وېل شوي) بيا

داينټيگرال مطلقه ارزښت نيسي. له دې امله لرو:

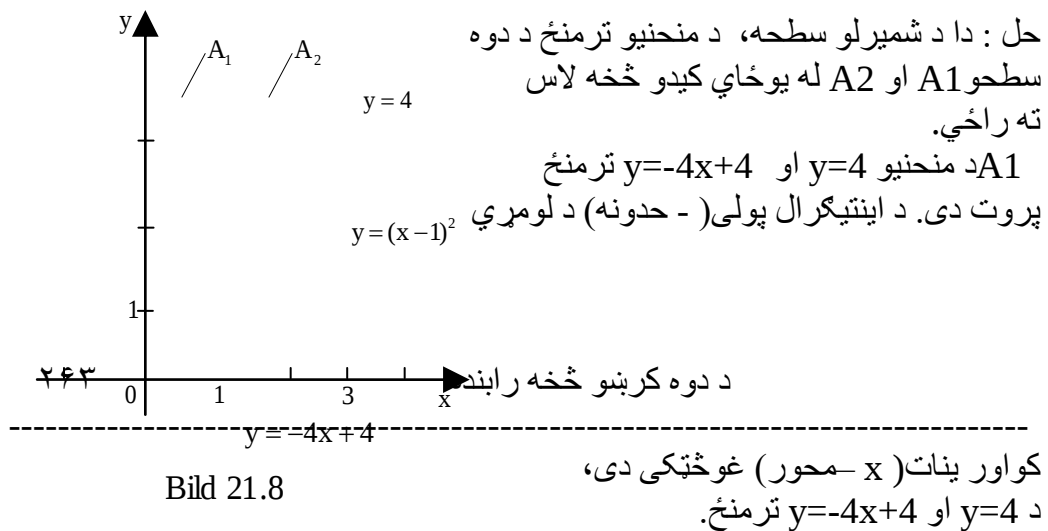


$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^1 [-x^2 + 1 - (x^2 - 1)] dx \\ &= \int_{-1}^1 (-2x^2 + 2) dx \\ &= \left(-\frac{2}{3}x^3 + 2x \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

بیلگه ۵ . ۸ :

د (ش. ۲ . ۸) سره سم د لاندې توابعو ترمنځ
سطحه شمیرل کیږي.

$$y=(x-1)^2, y=-4x+4, y=4$$



لرو $4 = -4x + 4, x_1 = 0$ په همدې ډول د

بني غوڅکي لومړۍ وضعیه ارزښت (کو او رینات)

د $y = (x-1)^2$ او $y = -4x + 4$ ترمنځ

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x + 1} = \frac{1^2 + 1 - 2}{1 + 1} = \frac{0}{2} = 0$$

$$x_{2,3} = -1 \pm 2, \quad x_3 = 1.$$

گورو چی A_2 د $y = -4$ او $y = (x-1)^2$ تر منځ پرته ده ، د اینټیگرال حیونه (پولی) $x_1 = 1$ او د لومړي وضعیه قېمت د بني غوڅټکي د $y = 4$ او $y = (x-1)^2$.

غوښتوني سطحه داسې ده:

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 = \int_0^1 [4 - (-4x + 4)] dx + \int_0^1 [4 - (x-1)^2] dx \\ &= \int_0^1 4x dx + \int_0^1 (-x^2 + 2x + 3) dx = 2x^2 \Big|_0^1 + (1/3x^3 + x + 3x) \Big|_0^1 = 7 \frac{1}{3} \end{aligned}$$

تمرینونه:

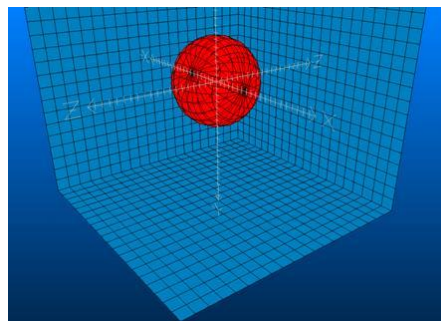
د لاندې توابعو ترمنځ سطحې و شمېرئ

د دوه کرښو څخه رابنده

۲۶۴

- | | |
|--|--|
| 1) $f(x) = x^2 - x - 6$; $g(x) = 4x - 10$ | 2) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 3$; $g(x) = 3x$ |
| 3) $f(x) = 0.75(x^2 - 5x + 4)$; $g(x) = 0.75x + 3$, | 4) $f(x) = x^2 + 5x + \frac{9}{4}$; $g(x) = -\frac{3}{2}x - \frac{21}{4}$ |
| 5) $f(x) = (x-2)^2 - 4$; $g(x) = x - 1$ | 6) $f(x) = x^2 - 4x + 1$; $g(x) = -x^2 + 2x + 1$ |
| 7) $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + 3$; $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x$ | 8) $f(x) = x^2 + 3x$; $g(x) = 0.5x^2$ |
| 9) $f(x) = 0.5x^2 - 2x - 1$; $g(x) = 2x^2 + 2x + 1$ | 10) $f(x) = -0.5x^2 + 2$; $g(x) = -\frac{1}{9}(x-1)^2 + 1$ |

د څرخیدونکو بدنونو (جسمونو) ډکي (حجم)



فعالیت:

- په ورسره بلده توگه د مستطیل حجم ولیکئ.

- د کرې، استوانې او د مخروط حجمونه، چې تراوسه مو لوستلي و لیکئ.

یادونه: دا دې تل په پام کې ونیول شي: که د انټیګرال شمېرنې له لارې کوم عدد لاس ته راځي، نو هغه عدد د یوه جسم حجم ښايي. موږ ددې لپاره لیکو، چې د حجم مطلوبه واحد.

۲۶۵

څرخېدونکي تنونه:

څرخېدونکي تنونه:

څرخېدونکي تنونه په هندسه کې هغه تنونه دي، چې په یوه څرخېدونکي محور باندې د یوې کرښې یا منحنې څرخېدنې له لارې منځ ته راځي. کرښه یا منحنې په یوه سطحه پرته ده او محور هم په همدې سطحه پروت دی. منحنې محور نه غوڅوي، او یا زیات له زیاته یې ممکن لمس کړي. چې غوره بېلګې به یې په لاندې کې و څېړل شي.

د x په محور څرخېدنه (څرخون)

لکه د مخه مو چې وویل، حجم هم یو انتیګرال دی. دا داسې منځ ته راځي، چې که یوه تابع د X په محور و څرخول شي.

د یوه څرخېدونکي جسم (بدن یا تن) حجم (ډکۍ)

د یوه څرخېدونکي جسم لپاره، چې د سطحې په څرخېدنه د x په محور په انټروال $[a, b]$ کې د f تابع له ګراف، د x له محور او له دواړو کرښو $x = a$ او $x = b$ ترمنځ جوړېږي، رابنده وي.

د حجم شمېرل په لاندې ډول دی:

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 dx$$

د y په محور څرخېدنه

د یوې سطحې په څرخېدنې (د y په محور)، چې په $[a, b]$ انټروال د f تابع ګراف د y محور او د دواړو کرښو $y = f(a)$ او $y = f(b)$ له خوا رابند وي باید د $y = f(x)$ بڼه بدله شي و $x = f^{-1}(y)$ معکوس تابع ته. دا شتون لري، که f متمدني او غښتلي یو غږیز وي. که نه (لکه په پورته شي شکل کې) نو شاید ممکن وي، چې f په ټوټو ټوټه شي، په هغو کې چې متمدني او غښتلي یو غږیز وي. دا دلته منځ ته راغلي حجمونه بیا ځانله شمېرل کېږي او سره جمعه کېږي.

څرخېدونکي تنونه:

۲۶۶

$$V = \pi \cdot \int_{\min(f(a), f(b))}^{\max(f(a), f(b))} (f^{-1}(y))^2 dy$$

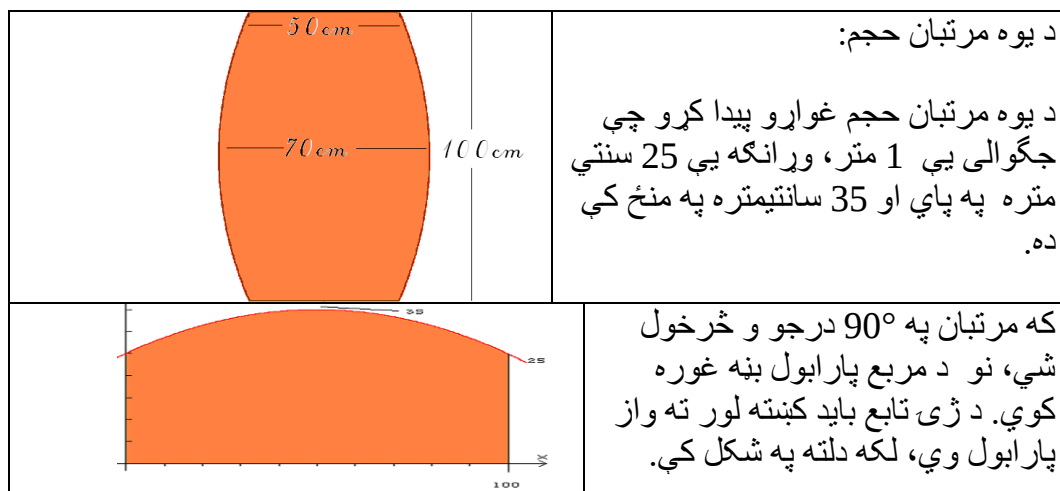
که دلته $x = f^{-1}(y)$ بدل کړو، نو د x په محور په لاندې توګه حجم لاس ته راوړو:

$$V = \pi \cdot \int_{\min(f(a), f(b))}^{\max(f(a), f(b))} x^2 dy = \pi \cdot \int_a^b x^2 \cdot |f'(x)| dx$$

د f' مطلق ارزښت او د انتیګرال په حدونو کې خورا جګ – ټیټ (min/max) (توابع یو مثبت انتیګرال تضمینوي).

د سطحې په څرخولو (د y په محور)، چې د f تابع له گراف او دواړو کرښو $x = a$ او $x = b$ څخه رابنده وي، لاندې فرمول باور لري.

$$V = \pi \cdot \int_a^b (x \cdot f)^2 dx$$



حل: د پارابول د تابع لیکښه کېدې شي ساده په ککرتکي یا راس باندې ولیکل شي.

۲۶۷

څرخېدونکي تنونه:

ټوليز باور لري:

$$f(x) = -a \cdot (x-5)^2 + 3.5 \text{ (dm)}$$

په څرګند دول 5- د راس راکښنه د x په لور ورکوي او 3,5 د y په لور. د غزوني ضریب a په لور اړین دی، چې کښته لور واز پارابول لاس ته راوړو. اوس فقط ضریب a نه شته. که په فرمول کې یو معلوم ټکی کیږدو، کېدې شي a وشمېرل شي. دا ټکی $(0/2,5)$ دی.

$$f(x) = -a \cdot (x-5)^2 + 3.5$$

د x ارزښت x ا په x اي کوونو لرو $-a \cdot (0-5)^2 + 3.5$

$$\frac{2.5-3.5}{25} = -0.04 \quad \text{له دې امله } a \text{ دی:}$$

او مساوات پوره بلل کيږي. $f(x) = -0.04 \cdot (x-5)^2 + 3.5$

د ساده والي لپاره د راس ټکي فرمول په نورمال يا عمودي فورم بدلوو:

$$f(x) = -0.04x^2 + 0.4x + 2.5$$

تابع مربع کړئ $f(x) = (-0.04x^2 + 0.4x + 2.5)^2$

$$f(x) = 0.0016x^4 - 0.032x^3 - 0.04x^2 + 2x + 6.25 \quad \text{نو دی}$$

$$f(x) = \frac{0.0016x^4}{5} \cdot x^5 - \frac{0.032x^3}{4} \cdot \frac{-0.04x^2}{3} \cdot x^3 + x^2 + 6.25x \quad \text{لومړنی تابع}$$

د حجم شمیرلو لپاره ټاکلی انټیګرال دی؛

خرخېدونکي ټټونه:

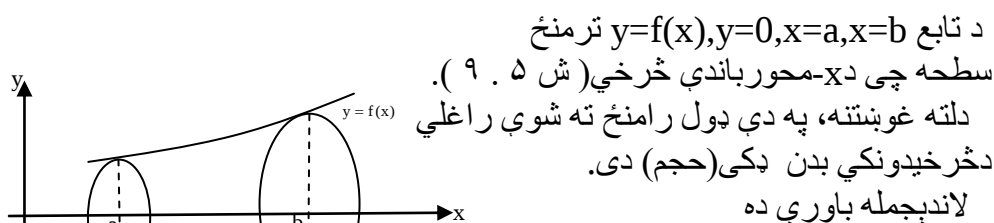
۲۶۸

$$\begin{aligned} \pi \cdot \int_0^{10} (-0.04x^2 + 0.4x + 2.5)^2 dx &= \pi \cdot \int_0^{10} (-0.0016x^4 - 0.032x^3 - 2x + 6.25) dx \\ &= \pi \left[\frac{0.0016}{5} \cdot 10^5 - \frac{0.032}{4} \cdot x^4 - \frac{0.04}{3} \cdot x^3 + x^2 + 6.25x \right]_0^{10} \\ &= \pi \left[32 - 80 - 13\frac{1}{3} + 100 + 62.5 \right]_0^{10} \\ &= \pi \cdot 101.167 \end{aligned}$$

د حجم واحدونه (یوونونه يا یووالي)

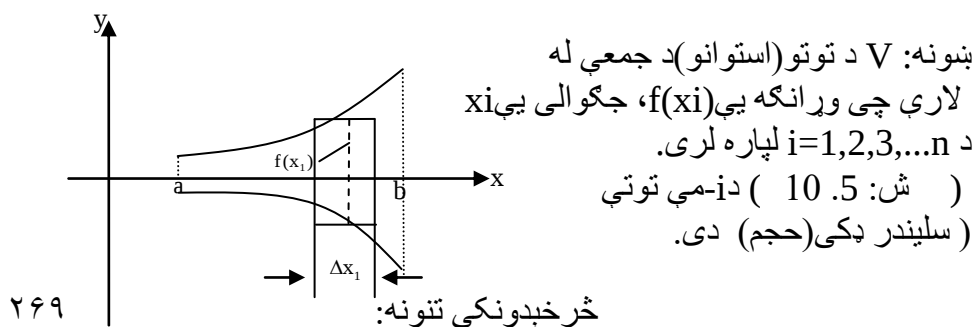
دا چې موږ له پیل په دیخیمتر شمېرنه کړې، نو طبعاً دا په لیتر شمېرل کيږي.

$$= 317.824 \text{ liter}$$



جمله ۵ . ۸) د څرخيدونکي بدن ډکي (حجم):
په اینټروال $[a, b]$ کې د $y=f(x)$ متمايي وي، د څرخيدونکي بدن حجم چې د سطحو
 $y=f(x), y=0, x=a, x=b$ ترمنځ، راپیدا کيږي داسې دی:

$$V = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 dx$$



۲۶۹

$$\Delta_i V = \pi \cdot [f(x_i)]^2 \cdot \Delta x_i$$

د ټولو n سلیندرونو یا توتو زیاتون

$$V_n = \sum_{i=1}^n \Delta V_i = \sum_{i=1}^n \pi [f(x_i)]^2 \cdot \Delta x_i$$

د پولی ارزښت جوړونه ($n \rightarrow \infty, x_i \rightarrow 0$) د بنسټ اینټیګرال د تعریف سره سم

$$V = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 dx \text{ حجم (ډکي) راکوي.}$$

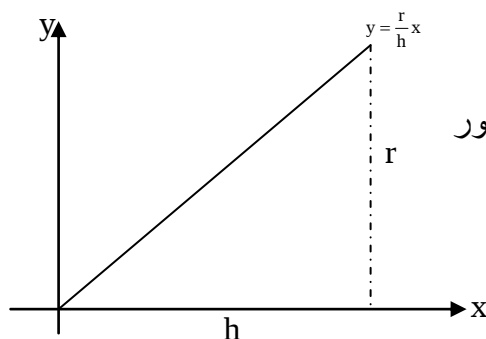
بیلگه ۵. ۹ :) دمخروط یا کیکل ډکی

(حجم) د $y = \frac{r}{h}x$ کرښې (د سرچینې

تیره کرښه د $\frac{r}{h}$ جگوالي سره) او د x -محور

($y=0$) د حدونو $x=0$ تر $x=h$

پورې (ش. ۱۱)



$$V = \pi \cdot \int_0^h \left[\frac{r}{h} x \right]^2 dx = \pi \cdot \frac{r^2}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^h = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

دا له بنسټيزې شمېرنې (د اساساتو) څخه معلومه نتیجه ده.

بیلگه ۵. ۱۰ :

$$y = \sqrt{2x}, y = 0, x = 0, x = 3$$

څرخېدونکي تنونه:

۲۷۰

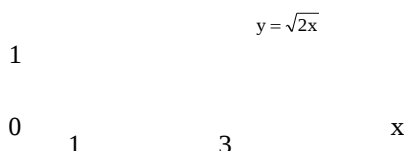
ترمنځ د x -محور باندې څرخېدلو جوړ (تولید) شوی جسم څرخېدلی پارابولویډ دی (څ

۵ پر ۱۲)

$$V = \pi \cdot \int_0^3 \left[\sqrt{2x} \right]^2 dx$$

$$= 2\pi \cdot \int_0^3 x dx$$

$$= 2\pi \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^3 = 9\pi.$$



د اربنیمدس جمله Archimedischer Satz

د توتې، غونډاري (کري) او مخروط د حجمونو ترمنځ تناسب:

$$V_{\text{توتې (استوتنه)}} : V_{\text{غونډارۍ (کره)}} : V_{\text{مخروط}} = 3 : 2 : 1$$

د 1886 زک يوه درسي کتاب څخه



د پورته الماني پښتو: ارښمېډس لومړی کس وو، چې دا پورته تناسب يې ومونده، له دې امله دا دلته راغلي جمله د ارښمېډس جلي په نامه نومول شوي.

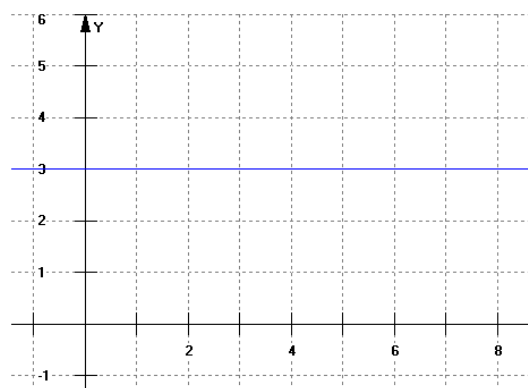
د څرخېدونکي بدن (حسم) حجم.

بيلگه ۵. ۱۱:

۲۷۱

څرخېدونکي تنونه:

استوانه (توته):



استوانه د x په محور د $f(x) = c$ یوې ثابتې تابع (په دې حالت کې $f(x) = 3$ دی) د څرخېدو څخه لاس ته راځي.

د یوې استوانې حجم (پکې) شمېرنه:

اوس دې په $[0;5]$ انټروال کې د توتې حجم وشمېرل شي. د استوانې د حجم د شمېرلو لپاره $V = \pi r^2 \cdot h$ عمومي فرمول دی. په دې حالت کې $r=3$ او $h=5$ دی. د هر ارزښت لپاره د تابع ارزښته هم دی.

لومړی له هرڅه غواړو $V = \pi r^2 \cdot h$ څخه فقط $r^2 \cdot h$ تر څېړنې لاندې ونیسو او غواړو یوه لار پیدا کړو، چې د هغې لارې د انټیګرال په مرسته حجم وشمېرلای شو. د سطحې مساحت د لاندې انټیګرال په مرسته وشمېرل شو:

$$\int_0^5 r dx = \int_0^5 f(x) dx$$

که د دې ناپايي ډېرو مستطیلونو (د $f(x)$ د مربع مساحت او د صفر په لور ځغېلېدونکې پنډوالې dx سره) انټیګرال جوړ کړو، نو لاس ته ترې راځي:

$$\int_0^5 r dx = \int_0^5 [f(x)]^2 dx$$

څرخېدونکي تنونه:

۲۷۲

دا په دې معنا چې دا انټیګرال بل څه نه دی پرته له څخه، چې زموږ د پورتنۍ فرمول څخه د یوې توتې د حجم شمېرل دي. ز که دا له سره ضرب کړو، نو راکوي:

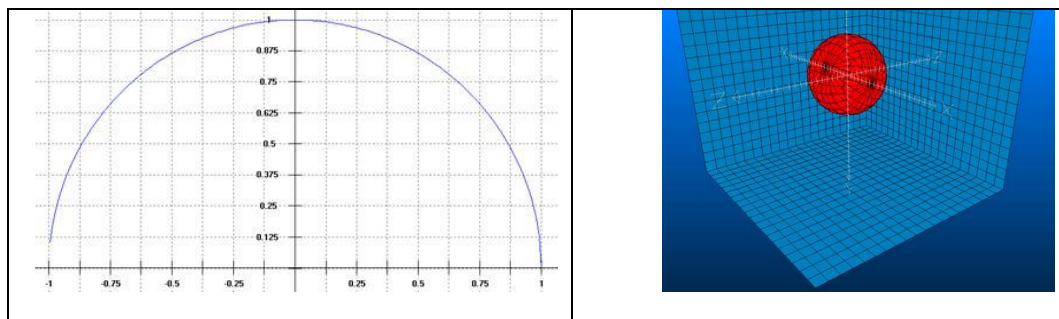
$$\pi r^2 h = \pi \int_0^5 [f(x)]^2 dx$$

د دې ورکړ شوي استوانې د حجم شمېرنه:

$$\pi \int_0^5 [f(x)]^2 dx = \pi \int_0^5 [9(x)]^2 dx = \pi \int_0^5 [45 - 0] dx = 45\pi$$

د پرتلې لپاره: $\pi r^2 h = 45\pi$

کره (غونډاری یا غونډوسکه):



فعالیت:

- د کري حجم يې له انتیگراله وليکۍ.

- د توتې حجم وليکۍ

- د مخروط حجم وليکۍ.

۲۷۳

خرخېدونکي تنونه:

-دا درېواړه سره پرتله کړۍ.

د x په محور د $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ تابع خرخېدني څخه کره منځ ته راځي(پورته د ننوتني شکل.

دا تابع هم کېدی شي په گردو توتو توتو ته شي، پرته غوڅوونکي تابع يې $q(x) = \pi[f(x)]^2$ ده. د دې توتو د انتیگرالولو له لارې دې بيا حجم وشمېرل شي.

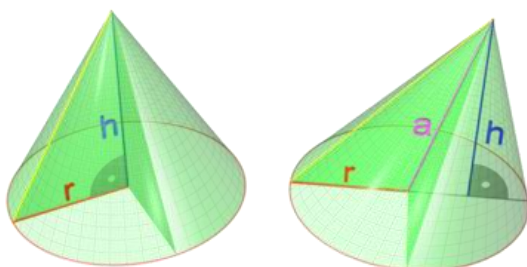
په دې بېلگه کې دې حجم وشمېرل شي، چې له صفر ځاي څخه و صفر ځاي ته د x په محور باندې

د $f(x) = \sqrt{1^2 - x^2}$ تابع څرخېدونو له لارې منځ ته راځي، يعنې په انټروال $[-1;1]$ کې .

$$\pi \int_{-1}^1 [f(x)]^2 dx = \pi \left[x - \frac{1}{3} x^3 \right] = \pi \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi$$

Kegel (Geometrie) مخروط

دا هم ممکن ده، چې یو مخروط د یوه منظم n زاویو (ارخیزې) (کونجیز) څخه رابندې بنسټیزې سطحې (د n لپاره چې ناپاي ته ځي) اهرام ته ور نژدې کړو.



د مخروط حجم:

د انټیګرال په مرسته د یوه مستقیم مخروط د حجم د شمېرلو یوه بله

۲۷۴

څرخېدونکي تنونه:

مرستندویه لار. یو د کارتیزې وضعیه ارزښت (قیمت) سیستم په کار اچول کيږي، د هغه سره چې د مخروط څوکه په سرچینه $(0|0)$ او منځ ټکی په ټکي $(h|0)$ کې پروت دی. اوس کېدی شي، چې مخروط ناپاي کوچنیو توتو (استوانو) رایوځاي شوی په پام کې ونیسو، چې جگوالی (پنډوالی) یې dx دی. داچې د داسې یوې توتې یا استوانې گردې توتې (کترې) واټن د مخروط له څوکي د وضعیه قیمت سیستم په x سره ور کړ شوی دی، د وړانګې جملې له مخې (دلته په افغانستان کې دا د ... جملې په نامه بلل شوې) باور لري.

د یوه ناپاي کوچنی توتې (استوانې) وړانګه:

$$r_z(h) = \frac{r}{h} \cdot x$$

د یوې ناپاي کوچنی توتې (استوتني) حجم:

$$\left(\frac{r}{h} \cdot x\right)^2 \cdot \pi \cdot dx = \frac{r^2}{h^2} \cdot \pi \cdot x^2 dx$$

د ټول څرخېدونې مخروط د ټولو داسې کوچنیو توتو حجم دی. د شمېرلو لپاره یې ټاکلی انټیګرال جوړوو، د انټیګرال حدونو 0 او h سره:

$$V = \int_0^h \frac{r^2}{h^2} \cdot \pi \cdot x^2 dx = \frac{r^2 \cdot \pi}{h^2} \int_0^h x^2 dx$$

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi}{h^2} \cdot \pi \cdot \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^h$$

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi}{h^2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{h^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right)$$

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3}$$

له دې سره هغه مشهور فرمول ته (چې لروده مو) راځو:

۲۷۵

څرخېدونکي تنونه:

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot h}{3} = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$$

یو مخروط د x په محور د $f(x) = mx$ یوې کرښیزې (خطي) تابع (د بېلګې په توګه $f(x) = 0,5x$) څرخېدنه (څرخون) ده.

د یوه مخروط شمېرنه

دلته نه شو کولای چې لومړی د کوارډ حجم وشمېرو. دلته د دې ګراف لاندې په ډېرو کترو کترو کول دي د dx پندوالې سره. د دې کترو د سطحو مساحت وشمېرئ، چې

وړانګه $f(x)$ لري داسې په نامه د پروت تقاطع تابع او بيا يې انټيګرال په ورکړ شوي
[0;5] انټروال کې ونیسئ.

$$\pi \int_0^5 [f(x)]^2 dx = \pi \left[\frac{1}{12} x^3 \right]_0^5 = 32.72$$

د پرتلي لپاره دی د یوه مخروط د حجم معیاري (ستاندارد) بڼه وکتل شي.

$$\frac{1}{3} \pi r^2 h = 32.72$$

لنډ :

که یوه منحنی د x یا y په محور وڅرخول شي، یو جسم چې لاس ته راځي، چې موږ
دا جسم په نریو کټرو یا زونونو ټوټه کوو، د پندوالي x همداسې y سره او دا
په ورته نژدې توګه په استوانو بدلوو، نو په نژدې توګه لکه د مخه د حجمونو لپاره
لاندې بڼه لاس ته راځي:

$$V_x = \pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} y^2 dx \quad \text{د } x \text{ په محور څرخونه:}$$

$$V_y = \pi \cdot \int_{y_1}^{y_2} x^2 dx \quad \text{د } y \text{ په محور څرخونه:}$$

څرخېدونکي تنونه:

۲۷۶

بېلګه ۵ . ۱۲:

د $y = x^2/4$ تابع ګراف په $[0, 2]$ انټروال کې د وضعیه قیمتونو په محورونو
څرخي. دا د منځ ته راغلي څرخېدلي جسم حجم څومره دی؟

د x په محور څرخېدنه: $y^2 = x^4/16, x_1 = 0, x_2 = 2$

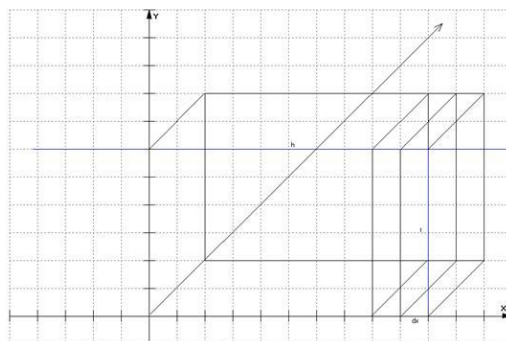
$$V_x = \pi \cdot \int_0^2 \frac{x^4}{16} dx = 0.4\pi$$

د y په محور څرخېدنه: $x^2 = 4y, y_1 = 0, y_2 = 1$

$$V_y = \pi \cdot \int_0^1 4y \, dy = 2\pi$$

د ناڅرخېدونکي جسم ډکي يا حجم.

مستطیل يا مربع المكعب (شپږ اړخیز جسم) Quader



دا لید شکل د استوانې څخه راته معلوم دی، فقط دا ځل نه څرخي. حجم یې کېدی شي د عادي کوارډ په څېر وشمېرل شي ($V = r^2h$) او یا د صفر په لور تلونکي dx سرورې مربع وي ټوټه شي. د دې لپاره دې د پروت غوڅي (قاطع) سطحه وشمېرل څرخېدونکي تنونه: ۲۷۷

شي، یعنې $q(x)$ د پروت قاطع تابع دې جوړه شي د دې بیا باید انټیګرال ونیول شي. په

$$V = \int_a^b q(x) dx \text{ دا معنا لري:}$$

په دې بېلګه کې تصادفي د پروتقاطع تابع د ژی تابع مربع ده: $q(x) = [f(x)]^2$

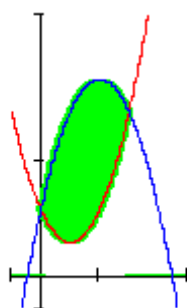
که موږ $f(x) = 3$ تابع له 0 تر 5 انټروال کې د پروتقاطع تابع سره انټیګرال کړو،

$$\text{نو باید } V = r^2h = 45 \text{ لاس ته راشي. } \int_0^5 q(x) dx = [9x]_0^5 = 45$$

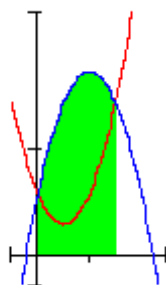
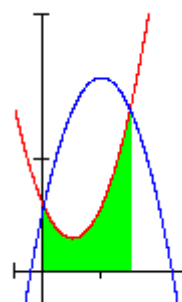
ټولګه

که د تابع $y=f(x)$ سطحې د منحنی تلنه د x -محور لاندې لور ته وي، نو دا ټاکلی اینټیګرال به منفي وي. ددې لپاره چې د سطحې تل مثبت مساحت لاس ته راوړو، نو د اینټیګرال مطلقه ارزښت نیسو یعنې منفي اینټیګرال.

په ځنو پوښتنو کې د سطحې مساحت شمېرل کيږي، چې د دوه توابعو ګرافونو ترمنځ پرته ده. دا ډول د سطحې مساحت کېدې شي د ټاکلو اینټیګرالونو د کمښت له لارې و شمېرل شي. که دواړه ګرافونه د x -محور پورته لور ته پراته وي، نو د لاندې شیمای څخه مخ ته ځو:



A

 A_1  A_2

$$A = A_1 - A_2$$

څرخېدونکي تنونه:

۲۷۸

د منحنیو $y=f_1(x)$ او $y=f_2(x)$ [SEP]

تر منځ پرته سطحې مساحت په لاندې پولو کې

له $x=a$ تر $x=b$ پورې او $y=f_1(x)$ او $y=f_2(x)$.

د یوه څرخېدونکي جسم لپاره، چې د سطحې په څرخېدنه د x په محور په انټروال $[a, b]$ کې د f تابع له ګراف، د x له محور او له دواړو کرښو $x=a$ او $x=b$ ترمنځ جوړیږي، رابنده وي.

د حجم شمیرل په لاندې ډول دی:

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 dx$$

د y په محور څرخیدنه

د یوې سطحې په څرخېدنې (د y په محور)، چې په $[a, b]$ انټروال f تابع گراف د y محور او د دواړو کرښو $y = f(a)$ او $y = f(b)$ له خوا رابند وي باید د $y = f(x)$ بڼه بدله شي و $x = f^{-1}(y)$ معکوس تابع ته. دا شتون لري، که f متمدني او غښتلي یو غریز وي. که نه (لکه په پورته شي شکل کې) نو شاید ممکن وي، چې f په ټوټو ټوټه شي، په هغو کې چې متمدني او غښتلي یو غریز وي. دا دلته منځ ته راغلي حجمونه بیا ځانله شمېرل کيږي او سره جمعه کيږي.

$$V = \pi \cdot \int_{\min(f(a), f(b))}^{\max(f(a), f(b))} (f^{-1}(y))^2 dy$$

جمله ۵. ۸) د څرخېدونکي بدن ډکۍ (حجم):

په اینټروال $[a, b]$ کې د $y = f(x)$ متمدني وي، د څرخېدونکي بدن حجم چې د سطحو $y = f(x)$ ، $y = 0$ ، $x = a$ ، $x = b$ ترمنځ، راپیدا کيږي داسې دی:

$$V = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

د ټوټې، غونډارې (کرې) او مخروط د حجمونو ترمنځ تناسب:

$$V_{\text{ټوټه (استوتنه)}} : V_{\text{غونډارې (کره)}} : V_{\text{مخروط}} = 3 : 2 : 1$$

یو مخروط د x په محور د $f(x) = mx$ یوې کرښې (خطي) تابع (د بیلگې په توګه $f(x) = 0,5x$) څرخېدنه (څرخون) ده.

که یوه منحنی د x یا y په محور وڅرخول شي، یو جسم چې لاس ته راځي، چې موږ دا جسم په نریو کټرو یا زونونو ټوټه کوو، د پنډوالي $\square x$ همداسې $\square y$ سره او دا

په ورته نژدې توگه په استوانو بدلوو، نو په نژدې توگه لکه د مخه د حجمونو لپاره لاندې بڼه لاس ته راځي:

$$V_x = \pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} y^2 dx \quad \text{د } x \text{ په محور څرخونه:}$$

$$V_y = \pi \cdot \int_{y_1}^{y_2} x^2 dy \quad \text{د } y \text{ په محور څرخونه:}$$

د x په محور د $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ تابع څرخیدنې څخه کره منځ ته راځي (پورته د ننوتنې شکل).

دا تابع هم کیدی شي په گردو ټوټو ټوټه شي، پرته غوڅوونکې تابع یې $q(x) = \pi[f(x)]^2$ ده. د دې ټوټو د انټیگرلولو له لارې دې بیا حجم وشمیرل شي.

تمرینونه:

۱ - د $y = f(x) = x^2$ او د دې د معکوس تابع تر منځ سطحه وشمیرئ.

۲ - د گراف او X محور تر منځ سطحه وشمیرئ.

څرخېدونکي تنونه:

۲۸۰

$$a) f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{13}{4}x + 3$$

$$b) f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x$$

$$c) f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$$

$$d) f(x) = -x^2 + 6x - 5$$

۳- د هغې سطحې مساحت وشمیرئ، چې د وکر شوو مساواتو منحنیو څخه را بنده شوي وي:

$$a) y = e^{0,5x}, \quad y = 0, \quad x = -2, \quad x = 2:$$

$$b) y = \frac{1}{2}x^3, \quad y = 0, \quad x = -2, \quad x = 2:]$$

$$c) y = \frac{1}{x^2}, \quad y = 0 \quad x = 9, \quad x = -3, \quad x = 3:$$

$$d) y = \cos x, \quad y = 0$$

$$e) y = \cos x, \quad y = 0, \quad x = \frac{\pi}{2}, \quad x = \frac{5\pi}{6}:$$

$$f) y = \frac{1}{x}, \quad y = 0, \quad x = 2, \quad x = 4:$$

$$g) y = \left(\frac{x^2}{4} - 1 \right)^2, \quad y = 0, \quad x = -2, \quad x = 2:$$

$$h) y = x^3 + 7, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 2:$$

$$i) y = x^3 + 7, \quad y = x^3 - x^2 + 3x + 5:$$

$$j) y = 3 - \frac{1}{2}x^4, \quad y = 3 - 4x:$$

$$k) y = \frac{1}{x}, \quad 3y + 3x = 10:$$

$$l) y = \cos x, \quad y = \sin x$$

$$m) y = \sqrt{3x+1}, \quad y = 1, \quad x = 8:$$

$$n) y = \frac{x^2}{4}, \quad y = \frac{8}{4+x^2}:$$

۲۸۱

خرخېدونکي تنونه:

$$o) y = x^2, \quad x = y^2:$$

$$p) y = \frac{1}{6} \cdot \sqrt{x^3}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 3:$$

۴- د ساين د منحنی گراف او د کوساين د منحنی گراف يو بل په انټروال $0 \leq x \leq 2\pi$ کې غوڅوي.

د دواړو غوڅتکو تر منځ له دواړو منحنيو را بندي سطحې مساحت وشمېرئ.

۵- د اکسپوننشل منحنی $g = e^x$ سره او په انټروال $[0,1]$ د پارابول p سره $y = -x^2 - 1$ سره را بنده سطحه وشمېرئ.

۶- د کرښې g د $y = 2x^2 + 1$ سره او په اینټروال $[0, 2\pi]$ د ساین منحنی $y = \sin x$ سره څخه را بنده سطحه وشمېرئ.

۷- پارابول p_1 د $y = x^2 - 3$ سره او p_2 د $y = 2x^2 + 1$ سره د $[-1, 2]$ په اینټروال یوه سطحه را بنده وي. د ا بنده سحه و شمېرئ.

۸- د پارابول P د $y = \sqrt{x}$ سره او کرښه g یې د $y = -x - 1$ سره په اینټروال را بنده سطحه لرو. دا را بنده سطحه وشمېرئ.

۹- په اینټروال $[-2, 1]$ د g_1 کرښې د $y = x + 3$ سره او g_2 د $2x + 1$ سره څخه را بنده سطحه وشمېرئ.

۱۰- پارابول $y = x^2 - 6x + 5$ د p سره او کرښه g د $y = -x + 1$ سره را بنده سطحه.

د دې سطحې مساحت وشمېرئ.

څرخېدونکي تنونه:

۲۸۲

۱۱- د g یوه کرښه یو پارابول p د $y = x^2 + 2$ سره په $x_1 = -1$ او $x_2 = 2$ کې غوڅوي.

د کرښې او پارابول څخه را بندي سطحې مساحت وشمېرئ.

۱۲ - د g یوه کرښه یو پارابول p د $y + 0,5x^2 + x + 4$ سره په $x_1 = -2$ او $x_2 = 4$ ټکو کې غوڅوي.

د دې کرښې او پارابول څخه رابندې سطحې مساحت وشمېرئ.

۱۳ - د $\sin x$ د منحنی گراف او د $\cos x$ د منحنی گراف یو بل په انټروال $0 \leq x \leq 2\pi$ کې غوڅوي.

د دواړو غوڅتکو تر منځ له واړو منحنیو را بندې سطحې مساحت وشمېرئ.

۱۴ - د f تابع گراف د $y = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}x^2$ سره د x محور سره سطحه پوره رابندوي.

د دې مساحت وشمېرئ.

۱۴ - د f تابع گراف د $y = a \cdot (1 - \sin 2x)$, ($a > 0$) سره او د وضعیه قیمت په I (اوله) مربع کې (قیمتونو څخه را بنده سطحه) پوره رابنده سطحه لرو.

د کومو ارزښتونو لپاره د سطحې مساحت $(x-2)$ سطحې یوونونه (واحدونه) دی.

۱۵ - د لاندې توابعو گرافونه هر یو د x په محور څرخي. د منځ ته راغلو څرخېدونکو جسمونو حجم وشمېرئ.

$$a) f(x) = 2 + \sqrt{x}, \quad x \in [0; 4] \quad b) f(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2 + 1, \quad x \in [2; 4]$$

۱۶ - د لاندې توابعو گرافونه هر یو د x په محور څرخي. د منځ ته راغلو څرخېدونکو جسمونو حجم وشمېرئ او د ساده شمېرنو سره یې وازمایئ.

$$a) f(x) = -x + 5, \quad x \in [0; 3]$$

$$b) f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}, \quad x \in [1; 5]$$

۱۷- د لاندې توابعو گرافونه هر یو د y په محور څرخي. د منځ ته راغلو څرخېدونکو جسمونو حجم وشمېرئ.

$$a) f(x) = \sqrt{x}, \quad x \in [0; 4]$$

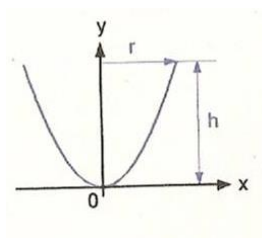
$$b) f(x) = (x-2)^2, \quad x \in [1; 3]$$

۱۸- د لاندې توابعو گرافونه هر یو د y په محور څرخي. د منځ ته راغلو څرخېدونکو جسمونو حجم وشمېرئ او د ساده شمېرنو سره یې وازمایئ.

$$a) f(x) = x + 1, \quad x \in [1; 4]$$

$$b) f(x) = -\frac{1}{2}x + 2, \quad x \in [0; 4]$$

۱۹ د پارابول په سیومتری محور y د پارابول د څرخیدو سره یو لوبنی منځ ته راځي. وښایئ، چې دا $v = \frac{\pi}{2} \cdot r^2 \cdot h$ حجم لري.



$$v = \frac{\pi}{2} \cdot r^2 \cdot h$$

۲۰- د ساین د منحنی گراف او د کوساین د منحنی گراف یو بل په انټروال $0 \leq x \leq 2\pi$ کې غوڅوي.

څرخېدونکي تنونه:

۲۸۴

د دواړو غوڅتکو تر منځ له واړو منحنیو را بندي سطحې مساحت وشمېرئ.

$$y = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}x^2$$

سره د x محور سره سطحه پوره

۲۱- د f تابع گراف د رابندوي.

د دې مساحت وشمېرئ.

۲۲ - د f تابع گراف د $y=a.(1-\sin 2x)$, ($a>0$) سره او د وضعيه قيمت په I (اوله) مربع کي (قيمتونو څخه را بنده سطحه) پوره رابنده سطحه لرو.

د کومو ارزښتونو لپاره د سطحې مساحت $(x-2)$ سطحې يونونه (واحدونه) دی.

۲۳ ---- لاندې د څرخېدونکي بدنونو گراف په x محور څرخي. د داسې منځ ته راغلو څرخېدونو تنونو حجمونه(ډکي) وشمېرئ.

$$a) f(x) = 2 + \sqrt{x}, \quad I = [0; 4] \quad b) f(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2, \quad I = [2; 4]$$

۲۴ ---- د لاندې څرخېدونکو بدنونو گرافونه د x محور باندې څرخي داسې منځ ته راغلي حجمونه(ډکي) وشمېرئ او په ساده حساب سره يې وشمېرئ.

$$a) f(x) = -x + 5, \quad I = [0; 3] \quad b) f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}, \quad I = [1; 5]$$

۲۵ ---- د لاندې توابعو د څرخون له لارې منځ ته راغلو تنونو حجم وشمېرئ.

$$a) f(x) = \sqrt{x}, \quad I = [0; 4] \quad b) f(x) = (x-2)^2, \quad I = [1; 3]$$

۲۸۵

څرخېدونکي تنونه:

۲۶ ---- د لاندې توابعو گراف د y په محور څرخي. داسې منځ ته راغلي تنونه وشمېرئ او په ساده شمېرنه سره يې هم وشمېرئ.

$$a) f(x) = x + 1, \quad I = [1; 4] \quad b) f(x) = -\frac{1}{2}x + 2, \quad I = [0; 4]$$

۲۷--- د لاندې توابعو گراف د y په محور څرخي. داسې منځ ته راغلي تنونه و شمېرئ او د ساده شمېرنې سره يې هم و شمېرئ

$$a) f(x) = \sqrt{x} \quad , \quad |=[0;4] \qquad b) f(x) = (x-2)^2 \quad , \quad |=[1;3]$$

$$a) f(x) = x+1 \quad , \quad |=[1;4] \qquad b) f(x) = -\frac{1}{2}x+2 \quad , \quad |=[0;4]$$

هغه ناتيکاوې، چې د نصاب په کتاب کې شته، داسې لږڅه به يې زه دلته له تاسو سره شريک کړم

د ډاکټر ماخان (ميري) شينواري چاپ او ناچاپي ليکنې:

په ډېره مننه، چې زما کتابونه به ټول www.ketabto.com ته پورته شي.

1988 Vienna (Austria):

لومړی:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra :
general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

1987 Vienna (Austria):

دویم:

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren .
Uni. Wien

*Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras,
at the University of Vienna/Austria*

لاندې د شميرپوهنې پښتونول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه، له خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دریم: د شميرپوهنې ستر کتاب : د شميرپوهنې برسيره د انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوي ليکنه به يې ځنو ځايونو غزېدلې او ځنې ځايونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمکچپوهنه (هندسه) ، په سلو، زرو کې شميرنه، د گټې – او کټې د کټې شميرنه ، د احتمالي شميرنه کتاب د ښوونځي ټولي اړتياوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شميرپوهنې انگرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شميرپوهنې الماني - پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځيال برابرېون (دا کتاب په دې څانگه کې يو پيل دی، ساده ليکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمير پوهنې فرمولونو ټولگه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شميرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

يوولسم: د افغانستان په هکله سپينې خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغي او بيا ابادولو ټولنه،، له خو

يادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکټر ماخان شينواري د ،،د افغانستان روغي او بيا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلي.

د ډاکټر ماخان ،،ميري،، شينواري ليکنې او ژباړې چې په چاپيدو يې پيل کيږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)

لاندې د برينکمن ليکنې چې له پرينکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شميرپوهنه د بنوونځي لپاره لومړۍ ټوک

۲ - شميرپوهنه د بنوونځي لپاره دويم ټوک

۳ - شميرپوهنه د بنوونځي لپاره دريم ټوک

۴ - د احتمالي شميرنه د بنوونځي لپاره

۵ - احصایه یا ستاتیستیک دینوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتگارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتگارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ - انالیزی ۱

۷ - انالیزی ۲

۸ - کرینیز الجبر

۹ - د شمیرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ - فنکشنل انالیز

۱۲ - وکتور شمیرنه

نورې ژباړې

۱۳ - له www.grundstudium.info/linearealgebra څخه: کرینیز الجبر

۱۴ - Georg Guttenbrunner گڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده‌کوونکو لپاره پوره
گټور دی. په

کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلي

۱۶ - ځمکچپونه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ - الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېری پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ - د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ - د شمیر پوهنې گډې ودې لیکنې

۲۲ - داهم ژباړه ده، خو لیکونکي یې متأسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیگرال
شمیرنو ته تمرینونه او اوبیوني یا حلونه یې

۲۳ - د شمیرپوهنې انگریزي پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ - د شمیرپوهنې پښتو انگرېزي ډکشنري

۲۵ - د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې (دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي
دي.)

۲۷ - د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې و به غزیري.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

- د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتکارت پوهنتون ن ج څخه
خپریږي:

د گروپونو تیوري

- د بنوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیوني سره په کې راغلي او ماته زیات ګټور برېښي)

د بنوودځي کتابونه له ۷-م لګي څخه تر ۱۲-م ټولګي پورې.

۱ - د دولسم ټولګي شمیرپ، هغه

زما لیکونه:

ډاکټر ماخان شینواری

Dr. Makhan Shinwari

Smakhan1946@gmail.com

د افغانستان اسلامي جمهوریت جمهور ریس جلاتمآب

ډاکټر محمد اشرف غني ته په ډېر درنښت.

له هر څه د مخه دې بڅېښه وي، چې ستاسو ډېر د ارزښت ډک وخت نیسم، خو دا راته ډېر اړین بریښي او پرته له تاسو به یې څوک دومره جدي هم ونه نیسي.

پوهنیزو، چې د پوهنې وزارت د ولس د پوهنې مغذ جوړوي، پوهه له همدې ځایه پیلېږي، چې بنسټ یې باید سم وي. همداسې نصاب د یوه هیواد د پوهنې مغذ دی، نو باید همداسې ورته د هره اړخه په درنه سترګه او غور وکتل شي.

زه خبره را لنډوم او د افغانستان د نصاب ستونځو ته په لنډ ډول ګوته نیسم او په همدې ډول ستونځو یو یا د ستونځو حل ته یې.

ما د ۱۲ -م ټولګي د پښتو او دري کتابونه ولیکل او زه ترې المان ته لارم، قرارداد پای ته ورسید. زما د کتابونو په ځای نور کتابونه چاپ شول، چې ناسم وو. په دې هکله د پوهنې وزارت ته زما لیکنه مل ده. دا کتابونه ما بیا له سره ترتیب کړل (لیکنې مې یې

درلودلې) او چاپ ته مې چمتو کړل، خو دا مې باور نه کیده، چې دا به بیا بې زما له شتون چاپ شي.

ما د کتابونو د لیکلو لپاره پیسې اخستي او دا لیکنې هم دا دی لرم، چې چاپ ته چمتو دي

ما چې دا نور کتابونه وکتل، نو دا مې لازم وگڼله، چې دا کتابونه هم زه له سره ولیکم، مواد یې لرم، ځکه چې ما ډېر د شمیرپوهنې یا ریاضي کتابونه لیکلي او ژباړلي (نږدې تر ۴۰ کتابونو پورې). د کتابونو منځپانګه د ښوونځي کتابونو لپاره هم پوره ده، تخنیکي کارونه یې باید له یوه مسلکي کس سره سرته ورسول شي.

اوس مې یې په لیکلو او د ښوونځي لپاره په سمون پیل کړي دی.

زما لیکنې مسلکي ناسمون نه لري، معیاري او د وخت د غوښتنو سره سمې دي، چې دا زما د اخیښتو او ولس کالو د هڅو په اساس باوري ده.

زه څه کولی شم؟

دا چې په دې هکله بل کوم هیوادوال څه نه دي ویلي یا لیکلي، نو باور لرم، چې زه یواځنی کس یم چې دې ته مې فکر را اوښتی. زه دا څه چې لیکم دا په پوره مسئولیت لیکم.

ما چې دا څومره لیکنې کړي، دا زما د ارمان د پوره کولو لپاره دي او په دې هکله ځان د ولس پوروی بولم.

که د دې کتابونو د لیکنې دنده راته وسپارل شوه، نو د کار میوه به مې وي او دا کار به په نړیوال معیار او ښه توګه سرته ورسوم.

دا اخر یونیم کال مې یواځې د ښوونځي له کتابونو سره سر خورولی، چې د هر ځل لوستنې سره یې پوره زوریزم او د هر ځل لوستلو سره یې په ناسمون سر خوروم.

زه هیله لرم، چې دا وخت راته راګرئ، چې د افغانستان ریاضي معیاري کولو کې مرسته وکړم او نه دا چې مرسته وکړم بلکه معیاري یې کړم. دا کار مې لکه د مخه مې چې ګوته ورته ونیوله هم کړی.

زه کړی شم، چې دا کار د المان څخه هم سرته ورسوم. که ماته دا وخت راګر شو، نو زه به له حکومت څخه د معاش غوښتنه هم ونه کړم او دا کار زما له خوا ساده کیدونکی دی.

د ښوونځي د رياضي لپاره به يو بنسټ کينسول شي، چې په هغې د راتلونکي وخت شميرپوهنه يا رياضي ابادېدې شي. دا بنسټيز مسلک به په نړيواله کچه سم شي.

زما مسئوليت مې په دې ليکنه سرته ورساوه.

له هر څه د مخه ستاسو له ستونځو مننه

ستاسو ډاکټر ماخان شينواري

د نصاب د کتابونو د ناسمون په ځنو برخو د نموني لپاره لنډه څيړنه شوې، چې د دې ليک سره مل ده.

د پوهني محترم وزارت ته زما ليکنه هم مل ده.

د ۲۰۱۳ زک لومړۍ نيمايي

ډاکټر ماخان شينواري

Dr. Makhan Shinwari

Lansbergerstr.3

5311- Bonn

Germany

smakhan1946@gmail.com

د افغانستان اسلامي جمهوريت د پوهني محترم وزير صاحب ته په ډېر درنښت!

ډېرو درنو!

غواړم دا لاندې دوه ټکي د تاسو محترم سره شریک کړم:

لومړۍ: ما له مارچ ۲۰۰۸ ز کال څخه تر دسمبر ۲۰۰۹ ز کال پورې د درسي کتابونو لیکنه کې ونډه لرله او د ۱۲-م ټولگي د شمیر پوهنې یا ریاضي کتابونه مې په پښتو او درې ولیکل.

ما دا څه موده د مخه د پوهنې وزارت په ن ج پاڼه کې د ۱۲-م ټولگي د شمیرپوهنې (ریاضي) کتاب ولوسته، چې گورم هلته په کې زما د نوم درک هم نه شته.

دویم: د کتاب خوندونې یا متن ته چې ننوتم، گورم، چې هغه څه چې ما لیکلي وو هغه یا نه شته او یا تخریب شوي دي.

ما په ډېر زور او د زړه خوراک سره د کتاب لومړۍ برخه یعنې د ،، ټولې ارزښت،، یا لیمیت برخه وکتله، چې گورم، نو دا مې ترې لاس ته راوړه، چې دا نه ریاضي ده او نه پښتو او هغه چا چې دا لیکلي نه دا چې په ریاضي نه پوهیږي په پښتو هم نه پوهیږي.

زما په لیکنو کې نوښت:

دا باید په گوته کړم، چې زما لیکنه په نړیوال معیار وه، چې منځپانګه یا متن یې طبعاً زه لرم.

لومړي: دا لومړي ځل دی، چې کتاب مې لومړی په پښتو او بیا په درې ولیکه.

دویم: دا لومړۍ لیکنه وه، چې په لیکنه کې له ایراني کتابونو ګټه نه وه اخستل شوې او لیکنه له الماني ادبیاتو او داسې څه له انګریزي ادبیاتو را نیول شوې وه.

دریم: زما کتاب معیاري لیکل شوی وو او ترې ښه لیکنې یې شونتیا نه لرله.

په لاندې توگه مې غوښتنه او هيله :

اول - زه بايد پوه شم چې ولې داسې شوي، چې زما نوم له کتاب څخه وتلي؟

که يواځې يوه ليکنه هم په کې زما پاتې وي، نو بايد زما نوم په کې وي. دا ماته له ما سره او زما د دوه کاله په دې لار کې د ستونځو گاللو له امله او نه اخر زما د علمي کار سره هم تيری برېښي؟

تاسو پوهيږئ، چې د ۱۲ -م ټولگي کتاب ليکلو لپاره ماډېرې پېښې اخستي او لپاره مې يې ښه کار کړی وو، چې لاس ته راوړنه يې بايد داسې نه وي.

دويم- د کتاب دا ليکلې لومړۍ او هم داسې سرسري دويمه برخه، چې ما لوستلې، د ښوونځيو لپاره د زغم نه دي.

زما وړانديز: دا کتابونه بايد راټول شي او بيا وليکل شي، ځکه چې په دې خو ليکونکي نه پوهيږي، نو له دې امله نه ښوونکي پرې پوهيدی شي او نه زده کوونکي او د پوهيدلو معقول څه هم نه لري. دې ته گوته نيسم، چې په دې نورو کتابونو کې به هم ورته ستونځې وي، خو زما يې کتنه اوس د لاسه نه کيږي، ځکه چې

د داسې کتابونو ليکل او ښوونځيو ته وېشل د پوهنې وزارت لپاره توهين دی.

زه له دې امله د کوچني اختر وروسته کابل ته درځم او هيله لرم، چې د هرچا لومړی له تاسو سره وگورم. زه به د اگست په ۱۷ يو ځل وزارت ته درشم.

يادونه: ما په دې اخرو څو ورځو کې د کتاب ډېر ځايونه داسې ځغلند وکتل، باور وکړی، چې د هرې موضوع د لوستلو سره زورېدلی يم.

زه به په دې هکله — که لوي څښتن کول- له تاسو سره په کابل کې وغږېږم.

له هر څه د مخه له تاسو ستاسو له ستونځو مننه

ستاسو ډاکټر ماخان شينواری

يوه هيله

زه د افغانستان د ټولن ج ، نورو پاڼو او راډيو ټلويزيونو څخه هيله لرم، چې دا زما ليکنه گرانو لوستونکو ته وړاندې او په نورو اړونده ليکنو هم همدا مرسته وکړي.

د رياضي کتابونو د چاپ مخه ونيول شي

ولي؟

په دې نږدې څو مياشتو کې د نصاب کتابونه بيا چاپ ته وړاندې کيږي او گومان مې دی، چې داسې د معيار سره سم سمون به په کې نه وي راغلی، نو له دې امله يې د چاپ مخنيوی اړيږي او په همدې ډول يې سمون هم اړين دی، چې په لاندې کې يې ستونځو او ستونځوبيو (د ستونځو حل) ته هم گوته نيسم.

زه د شميرپوهنې ټول د نصاب پوهانو ته درناوی لرم او هيله ده، چې دا ليکنه شخصي وه نه نيسي.

-- ما له نږدې ۱۹۹۸ ز ک وروسته د شميرپوهنې په کتابونو پيل وکړ، چې تراوسه مې نږدې څه کم څلوېښت کتابونه ليکلي، چې له جملې يې له شلو ډېر چاپ او نور ناچاپ دي. د دې کتابونو ۱۴ غوره يې په www.kitabtoon.com (دې پاڼه کې داسې نه شته) کې خپاره شوي او همداسې له ما څخه شميرپوهنې ته ځانگړې شوې پاڼه کې تر

۲۵ کتابونو ن ج ته پورته شوي او دا نور به هم په خپل وار ن ج ته پورته شي. زما
پاڼه smakhan.wordpress.com

دا زما ن ج پاڼه په نا ښکلي ډول يواځې زما د شميرپوهنې کتابونو ته ځانگړې شوې،
چې زما زيات کتابونه په کې خپاره شوي او نور به هم په کې خواره شي. پاڼه ښکلي نه،
خو خپله موخه پوره کولی شي او موږ ټولو سره مرسته کولی شي، چې شميرپوهنه په
گډه سمه او معياري کړو.

گرانو هيوادوالو!

افغانستان دې اوږدې جگړې په هر اړخ کې بې ساری زيانمن کړی او همداسې په
پوهنيز اړخ کې هم. د افغانستان نصاب هم له دې ناخوالو بې برخې نه دی پاتې شوی.
لکه څنگه چې پوهنه د هيواد مغذ جوړوي، همداسې نصاب د پوهنې مغذ دی، نو له دې
امله زياته پامرنه هم غواړي.

ما په نصاب کې د دولسم ټولگي پښتو او درې کتابونه وليکل، د قرارداد وخت پوره شو،
پيسې مې واخستلې او زه ترې لارم، چې متأسفانه له ما ليکلي کتابونه چاپ نه شول –
علت يې دا وو، چې گران ليکونکي يا ليکونکي وښايي، چې دوي دا کار ښه کوي، نو
ولې دا د هيواد دباندي افغانان دې دې کار ته راوبلل شي- او په ځای يې متأسفانه ناسم
کتابونه چاپ شول. په دې هکله مې په ۲۰۱۲ ز ک کې پوهنې وزارت ته يو ليک هم
ليږلی وو، چې

ما متأسفانه چې پوره ناوخته دا نور د ښوونځي چاپ کتابونه وکتل او دې نتيجې ته
ورسېدم، چې د رياضي کتابونه بايد سم او معياري چاپ شي او نه دا ناسم بيا چاپ شي.

دا وړانديز ولې ما په نصاب کې نه دی کړي؟

په خواشینی سره به ووايم، چې د کار په سر کې مسئلو چې په کار پوه نه وو، بل څوک هم کار ته نه پرېږدي او د چا خبره د چا غور ته هم نه رسيږي. ما په همغه وخت کې هم د ټولو لیکنو لپاره وړاندیزونه لروده او هلته مې ورته چاپ او په میز ایښودلي وو، خو چا نه غوښتل گټه ترې واخلي او یا یې ترې د گټې اخستلو توان نه لاره.

ما ته د هغو د لیکنې متود ښه ونه برېښیده، ځکه چې استادان د دارنگه لیکنو سره بلد نه دي، نو له دې امله د پوهنې متن سره له هغې څو واره زیاتې ځنګیزې لیکنې کوي، چې موخه ور نه دي.

ما چې پتیل، چې د کتابونو د چاپ مخه باید ونیول شي، نو دې ته مې هم چمتووالی باید ښوولی وي، چې د کتابونو معیاري او سم لیکلو امکان هم باید شته وي.

دا امکان شته. ما دا کار سرته رسولی، کتابونه مې ټول داسې خام پوره کړي، چې زیاتو برخو ته یې، څو واره وړاندیزون هم شته.

که د کتابونو د چاپ کار باید ډېر په بیرته وشي، نو دا کار هم کیدونکی دی، خو باید څو تخنیکي کسان د مرستې لپاره چمتو وي.

د چاپ کتابونو په ناسمون مې لیکنه کړې، چې گران لوستونکي یې په smakhan.wordpress.com کې لوستلی شي او که ن ج ته پورته نه شو، نو مینه وال او په دې هکله لیوال یې د برېښنا پټي له لارې لاس ته راوړی شي..
ما د هر کتاب څخه لږ تر لږه یوه برخه داسې د نمونې په څیر څیرلې.

د دې لپاره چې د شمیرپوهنې مینه وال گران لوستونکي په ستونځو وپوهیږي، نو اړین بولم، چې د ښوونځي کتابونه هم وگوري او اړونده موضوعگانې زما د چاپ او ناچاپه لیکنو سره پرتله کړي (کتابونه په پورته ن ج کې شته دی، چې ځنې یې راکښته کیدی شي او هم یې هلته گران لوستونکي لوستلی شي).

زه په دولت کې او له دولت دباندې د ټولو اغیزمنو هیوادوالو څخه هیله کوم، چې په دې لار کې له ما او له دې لارې زموږ د ځوان راتلونکي سره مرسته وکړي او د شمیرپوهنې معیاري کولو او سمون امکانات راته چمتو شي.

زما د کار دوه امکانات شته:
لمړی: دا کار زه کړی شم، چې له امان څخه هم سرته ورسوم او په ښه توګه، په دې حالت کې به زه د زحمت په مقابل کې له اجورې - د ځوانانو سره د مرستې له امله - تیر شم.

دویم: په افغانستان کې که دا کار سرته ورسیري، دا به ګټور وي، ځکه چې په افغانستان کې به په ټولو خواوو کاروشي.

داڅه وروستی خبرې ما هم رامنځ ته کړې.

په لاندې کې زما لیکنې د افغانستان اسلامي جمهوریت جمهورر ریس جلالتماب اشرف غني او د پوهنې محترم وزارت ته لیک کې هم لوستلی شی او هیله مې ده، چې ویی لولی.

ستاسو له ګڼو مشورو به ډېر منندوی یم.

زما د برېښنا لیک پته: smakhan1946@gmail.com

ستاسو ماخان

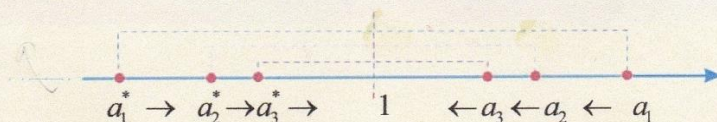
د نصاب د دولسم ټولګي کتاب ناسمونونو ته کتنه:

لومړي: په دولسم ټولګې کې پیل له ترادفونو شوی او په سر کې یې دوه ترادفونه راوړي او دا یې بیا په یوه ګراف یا کرښه د ښی او کیڼې لورې یوې پولې ته ځغولي.

د کتاب ۳ - م مخ

پایله: لیدل کېږي، چې د a_n ترادف له ښي لوري څخه د 1 او د a_n^* ترادف له کیڼ لوري څخه د 1 عدد ته د n په زیاتېدو سره نږدې کېږي، یعنې:

- د a_n ترادف کله چې n بې نهایت ته تقرب وکړي، مساوي په (1) سره کېږي او همدارنګه د a_n^* ترادف n - ام حد که n بې نهایت ته نږدې شي هم مساوي له (1) سره کېږي.



ددې لپاره چې د لمبیت مفهوم مو ښه څرګند کړی وي، په لومړۍ پړاو کې هغه په څو ترادفونو کې د ګراف په پام کې نیولو سره تر څیړنې لاندې نیسو.

زه پوهیږم، چې دا کار دې درنو لیکوالانو ولې کړی؟

له همدې پیله روښانیږي، چې محترم لیکونکي د درس سره کومه بلدتیا نه لري.

په پورته کې دا دوه پرلپسې هیڅکله له (۱) « سره نه برابرېږي، لکه ښاغلی لیکوال چې لیکي.

پسې یې بیا د پرلپسې یا ردیفونو لپاره بیل بیل ګرافونه کښلي.

په پرلپسېو یا ردیفونو کې چې موږ لیمټ راوړو، نو موخه ترې د پرلپسې کونورګنت او دیورګنت دي. په پرلپسې کې اړین نه ده، چې د کونورګنت حالت کې دې پرلپسې له دواړو لورو پولې ته لاړ شي، خو داسې پرلپسې شته او هغه یو ترادف دی نه دوه.

دویم: دا لاندې څه چې راغلي، هم کوم درس پورې اړوندوالی نه لري، همداسې څه یې لیکلي. دی د ناسم د ترادف درس څخه سملاسي داسې یوې موضوع ته راغلی او بیا د

بښي او کين لوري ليميت ته راځي او که وکتل شي، نو په ليکنو کې کوم توپير نه شته. دلته د زده کړې څه نه ليدل کيږي او دا اخره کرښه يې داسې ده، چې په دې موضوع کې کومه پوهه هم نه لري.

که چيرې دا ټيک هم وي، نو ځای يې بې ځايه ځکه راوړي، چې د ښی او کينې لور ليمتونه، چې هلته هم ناسم دي، په اووم مخ کې څيرل (که چيرې څيرنه يې وبولو)

په لاندې کې ،، د متحول تقرب،، يعنې څه؟ دا هيڅ مفهوم يا ترې پوهيدنه نه لري. که ... ترادف وي هم بايد د ترادف په ډول وليکل شي او که تابع وي هم بايد د تابع په ډول وليکل شي.

د متحول تقرب: ويل کېږي چې د x متحول د a عدد ته تقرب کوي، په داسې حال کې چې x په اختياري ډول د a عدد ته نږدې کېږي، يعنې د x او a ترمنځ تفاوت له هر کوچني عدد ($\delta > 0$) څخه کوچني دی يا په لاندې ډول:

$$\forall \delta > 0: |x - a| < \delta \quad \text{يا} \quad \lim_{x \rightarrow a} x = a \quad \text{يا} \quad x \rightarrow a \quad \text{يا} \quad |x - a| \rightarrow 0$$

له ښي لوري د متحول تقرب: ($x \rightarrow a^+$) که چيرې د x د قيمتونو يو متناقص ترادف موجود وي په داسې حال کې چې په تدريجي ډول د a اختياري عدد ته نږدې شي.

$$x: a + 0.1, a + 0.01, a + 0.001, a + 0.0001, \dots \rightarrow a^+$$

له کينې لوري د متحول تقرب: ($x \rightarrow a^-$) که چيرې د x د قيمتونو يو متزايد ترادف موجود وي په داسې حال کې چې x په تدريجي ډول د a اختياري عدد ته نږدې شي.

$$x: a - 0.1, a - 0.01, a - 0.001, a - 0.0001, \dots \rightarrow a^-$$

نو د x د متحول تقرب د a عدد ته معادل دی د x د متحول تقرب له ښي لوري او د x د متحول تقرب له چپ لوري؛ يعنې:

$$x \rightarrow a \Leftrightarrow (x \rightarrow a^+, x \rightarrow a^-)$$

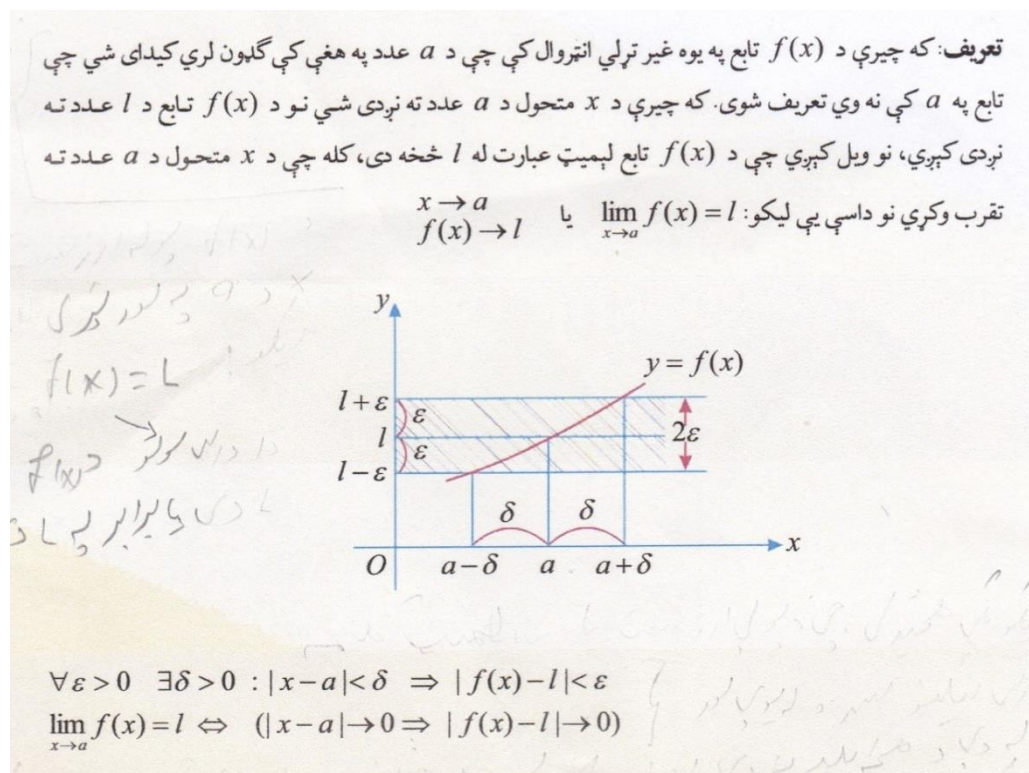
$$\forall \delta > 0: |x-a| < \delta \quad \text{يا} \quad \lim_{x \rightarrow a} x = a \quad \text{يا} \quad x \rightarrow a \quad \text{يا} \quad |x-a| \rightarrow 0$$

ډول لیکنو سره گران لیکونکي بلدتیا نه لري او نه داسې څه د مخه راغلي، چې روښانه شوي وي

داسې لیکنې د بنوونځیو لپاره ستونځمنې دي. له دې امله ما هم په خپلو لیکنو کې نه وې راوړې. گورو چې د کتاب ناسموونکې هم دا څه ناسم یا بې له تشریح کارولي.

په دې هکله زما لیکنه په لاندې کې شته.

دریم: په لاندې تعریف کې د پوهیدلو څه نه شته او په دې ریاضیکي تعریف خو نه پوهیږي، ځکه چې په لاندې یې د پوښتنې د حل نتیجه راوستلې او دا بحث له دې سره په رښتیا کې هیڅ سر او کار نه لري.



دا سومبولونه $\forall$ او $\exists$ نه دې بنوول شوي، چې څه شی دی او څه بلل کيږي.

بناغلي لیکونکی په اووم مخ کې بیلگه راوړي او بیا دا بنایي، بني او کینې لوري لیمیت یې شمیري.

باید د $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$ لپاره $x \neq 3$ ولیکي، چې هلته فنکشن تعریف نه دی. دی بیا په ناسمه توګه په جدول کې لیکي. دا چې دا باید څنګه ولیکل شي، زما په لیکنو کې شته.

دویمه بیلگه: و ښیئ چې $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$ سره دی.

حل: د بني او کینې خوا لېمیتونه تر څېړنې لاندې نیسو:

x	3.5	3.1	3.01	3.001	...	3^+
$f(x)$	6.5	6.1	6.01	6.001	...	6

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$

x	2.5	2.9	2.99	2.999	...	3^-
$f(x)$	5.5	5.9	5.99	5.999	...	6

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$

لیدل کېږي چې د بني خوا او کینې خوا لېمیتونه سره مساوي دي، نو $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$ دي.

په پورته کې x د 3 قیمت نه شي اخستلی، هلته فنکشن تعریف نه دی، نو له دې امله په جدول کې، نه د بني لوري او نه د کینې لوري دا ارزښت 3 اخستلی شي، هلته 3 ته ور نږدې کيږي.

د بیلګې حل یې هم بیا سم نه دی کړي، په هغه ورسره بلده لار.

دا هغه د کاغي او د زرګې خبره ده.....

دویمه طریقه: د لېمیت د تعریف په پام کې نیولو سره فرضوو چې د هر اختیاري کوچني عدد ε لپاره یو δ شتون لري داسې چې:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

$$|x - 3| < \delta \Rightarrow \left| \frac{x^2 - 9}{x - 3} - 6 \right| = \left| \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3} - 6 \right| = |x + 3 - 6| = |x - 3| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \varepsilon = \delta$$

د بیلګې د حل نتیجه

$$\varepsilon = \delta$$

دا د دی بحث سره سر او کار نه لري یعنې دا مو موخه نه ده، نو باید ووايم، چې دروند لیکونکي د موضوع څخه بوي هم نه وړي. (بخښنه دې وي، که زما لیکنې داسې لږ توندې برېښي)

او بې ځایه مخ ته ځي، چې څه ترې پوهیدل کیږي هم نه.

له پورتنۍ اړیکې څخه دا معلومېږي چې ε له δ سره اړیکه لري، که δ ته قیمت ورکړو ε قیمت اخلي او که ε ته قیمت ورکړو δ قیمت اخلي، بنا پر دې هغه تعریف چې د لمبېټ لپاره موجود دی سم دی او تابع لمبېټ

$$\text{لري، یعنې: } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$$

دې پورته ته په لنډه توګه زما نوره لیکنه او ټیکاوې:

د کتاب په پیل کې راوړل شوي د مترادف یا پرلپسې موضوع باید د یوولسم ټولګي کتاب کې پوره څیړل شوي وي، مګر هلته یې یواځې دا نومونه راوړل شوي او نور لیکونکي — بې له دې، چې د موضوع اړین څه راوړي — له موضوع څخه تیر شوي.

د دې موضوع څخه موخه د مترادف پولې ته تلنه یا کونورګنت او له پولې اووښتنه یا ناپای ته تلنه یا ډیورګنت او... دي، چې بې له دې په رښتیا کې د مترادف یا پرلپسې څیړنه کوم غوره والی یا اهمیت نه لري، یعنې خپله موخه له لاسه ورکوي. دا د یوولسم ټوګي د مترادف درس، نو په رښتیا کې خپل غوره والی او اړینوالی له لاسه ورکوي. نور سموالي او ناسموالي ته یې ګوته نه نسیم، همدا بسیا کوي، چې څه په کې نه دي ویل شوي یا لیکل شوي.

د ۱۲ — ټولګي کتاب ته:

يادونه: دا چې گومان کيږي د داسې ليکنو سره به بلدتيا لږ وي، نو تشرېح به راڅخه لږ ډېره شي.

د ،، پوله ارزښت،، په څيره کې ښوونه



که $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ د حقيقي اعدادو (گڼونو) ترادف يا پرلپسې وي، نو عدد $a \in \mathbb{R}$ د دې ترادف يا پرلپسې پوله ارزښت بلل کيږي او پرلپسې a ته کونورگير کيږي يا a ته هڅيږي يا نږدې کيږي، که د هر $\varepsilon > 0$ لپاره په انټروال $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ کې له يوه اندکس يا پيژند نڅښې اخوا يا وروسته يا پسې د پرلپسې يا ترادف ټول غړي (دوي يې حدونه يا جملې بولي، نه پوهيږم ولې؟) د انټروال په دننه کې او فقط پای ډېر غړي له انټروال څخه دباندې پراته وي.

(دنورې اوږدې روښانه ونکې شننې څخه تيريږم)

لنډ پيژند يې:

عدد $a \in \mathbb{R}$ د ترادف $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ پوله بلل کيږي، که د ټولو $\varepsilon > 0$ لپاره يو طبيعي يا پيدايښتي عدد N شتون ولري، داسې چې $|a_n - a| < \varepsilon$ يا ور ولري، که $n \geq N$ وي.

دا پيژند راکوي، چې: د هر $\varepsilon > 0$ لپاره يو ايندکس N شته، داسې چې له دې ايندکس يا پيژندنڅښې وروسته د پرلپسې (ترادف) ټول غړي د ε څخه په کم واټن له a لري پراته دي يعنې له ε څخه چې a ته څومره نږدې دی دا نور هم a ته نږدې دي.

د $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ د پولې ارزښت ليکلو لپاره خپل ځانله سومبول لرو: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

د دې ليکنود سره سم د يوې پرلپسې پوله ارزښت تعريف داسې رالښوولی شو:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon$$

د داسې لیکنو لپاره د ε (لوسټل: ایپسیلون) توری ورځنی یا مروج شوی.

بیلگه:

په یوه بیلگه کې یې روښانه کوو:

د دې لپاره چې د $\frac{1}{n}$ پرلپسې یا ردیف و 0 ته کونورگنت وښایو، یو د مخه ورکړ شوي ε ته یوه په خوښه طبیعي عدد یا گڼ N ټاکو، چې له $\frac{1}{\varepsilon}$ لوی وی، نو د ټولو $n > N$ لپاره باور لري:

$$|a_n - 0| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$$

موضوع اوږدولی نه شم، ځکه چې دا یو درس نه دی، دا فقط په موضوع داسې لږ رڼا اچونه ده.

د فنکشن پوله ارزښت:

یادونه: د دې ۱۲ – م ټولګي د درس دا هغه اصلي موضوع ده.

د فنکشن پوله ارزښت په لاندې توګه پیژنو یا تعریفوو:

پیژند: د فنکشن f پوله ارزښت، د x لپاره چې p ته نږدې کیږي، L دی او داسې یې

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$$

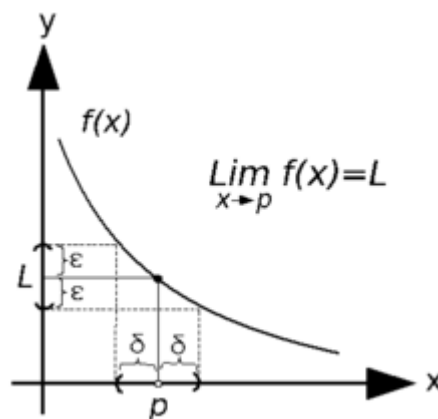
لیکو:

لوسټل یې هم همداسې دي لکه پورته تعریف

داسې یې شمیرپوهنیز لیک دود باندې تعریفوو:

فونکشن f پوله ارزښت L لري، که د هر $\varepsilon > 0$ لپاره یو $\delta > 0$ شتون ولري، داسې چې د هر x لپاره د $0 < |x-p| < \delta$ سره $|f(x)-L| < \varepsilon$ هم باور ولري.

د پورته شمیرپوهنیز یا ریاضیکي فونکشن پوله ارزښت لپاره لاندې څیره



پورته دوه تعریفونه برابر ارزښته دي یعنې له یوه څخه بل لاس ته راځي او په څټ یا برعکس یعنې لیکو:

تعریف: د فونکشن f پوله ارزښت، چې x و p ته نږدې کیږي، L دی، ټیک هلته یا هلته او هلته یا هلته او په څټ، یا له دې لاس ته راځي او په څټ یا برعکس چې د هر $\varepsilon > 0$ لپاره یو $\delta > 0$ شتون ولري، داسې چې د هر x لپاره د $0 < |x-p| < \delta$ سره $|f(x)-L| < \varepsilon$ هم باور ولري.

دلته هم په همدومره بسيا کوو، که څه هم روښانه کیدل نورې شننې ته هم اړتیا لري.

دې ته دلته په اخر کې بیا گوته نیسم، چې دا شمیرپوهنیز یا ریاضیکي ډول لیکنې ستونځمنې دي او باید ترې تیر شو، د ترادفونو او فونکشنونو لپاره.

دا نور پاتې درس هم په همدې ترتیب گران لیکونکي لیکلی چې زه نور پرې نه غږیږم.

دا بسيا کوي، چې کتاب د ښوونځیو څخه راټول شي او له سره ولیکل شي.

ستاسو له سړې سينې څخه – که ومو لوسته- ډېره مننه.

ستاسو ډاکټر ماخان شينواری.

د ډاکټر ماخان شينواري ليکنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړۍ:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : contributions to
general algebra 6 ; Page 117 – 122

1987 Vienna (Austria):

دویم:

Diss . Uni. Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren .
Wien

*Dissertation at the Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras,
University of Vienna/Austria*

لاندې د شميرپوهنې پښتوتول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،له
خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسيره د انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د بنوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې لیکنه به یې ځنو ځایونو غزېدلې او ځنې ځایونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمکچپوهنه (هندسه) ، په سلو، زرو کې شمیرنه، د گټې – او کټې د کټې شمیرنه ، د احتمالي شمېرنه کتاب د بنوونځي ټولې اړتیاوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انگرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني - پښتو - او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځيال برابر وړ (دا کتاب په دې څانگه کې يو پيل دی، ساده ليکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولگه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شميرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

يوولسم: د افغانستان په هکله سپينې خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغي او بيا ابادولو ټولنه،، له خو

يادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شينواري د ،،د افغانستان روغي او بيا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلي.

د ډاکتر ماخان ،،ميري،، شينواري ليکنې او ژباړې چې په چاپيدو يې پيل کيږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)

لاندې د برينکمن ليکنې چې له پرينکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شميرپوهنه د بنوونځي لپاره لومړۍ ټوک

۲ - شميرپوهنه د بنوونځي لپاره دويم ټوک

۳ - شميرپوهنه د بنوونځي لپاره دريم ټوک

۴ - د احتمالي شميرنه د بنوونځي لپاره

۵ - احصايه يا ستاتيستيک د بنوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتگارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتگارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ - انالیزی ۱

۷ - انالیزی ۲

۸ - کر بنیز الجبر

۹ - د شمیر پوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ - فنکشنل انالیز

۱۲ - وکتور شمیرنه

نورې ژباړې

۱۳ - له www.grundstudium.info/linearealgebra څخه: کر بنیز الجبر

۱۴ - Georg Gutenberg گڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیر پوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیر پوهنې برخې برسیره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده‌کوونکو لپاره پوره ګټور دی. په کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلي

۱۶ - ځمک‌چپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ - الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېری پوهنه یا ست تیوري

۱۹ - د شمیر پوهنې سم اند (منطق ریاضي)

۲۰ - د یو څو شمیر پوهانو ژوندلیک

۲۱ - د شمیر پوهنې گډې وډې لیکنې

۲۲ - داهم ژباړه ده، خو لیکونکي یې متأسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیگرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیوني یا حلونه یې

۲۳ - د شمیر پوهنې انگریزي پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ - د شمیر پوهنې پښتو انگریزي ډکشنري

۲۵ - د شمیر پوهنې پښتو ډکشنري د شمیر پوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې (دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي).

۲۷ - د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې وبه غزیږي.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

- د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوتونو څخه، چې د شتوتکارت پوهنتون ن ج څخه خپریږي:

د گروپونو تیوري

- د بنوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولگي څخه تر اووم ټولگي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره بڼه لیکنه ده، چې -د شمیر پوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیوني سره په کې راغلي او ماته زیات گټور برېښي)

دا لاندې د بنوونځي کتابونه دا اوس پای ته ورسیدل:

شمیر پوهنه د اوم ټولگي له پاره

شمیر پوهنه د اتم ټولگي له پاره

شميرپوهنه د نهم ټولگي له پاره
شميرپوهنه د لسم ټولگي له پاره
شميرپوهنه د يولسم ټولگي له پاره
شميرپوهنه د دولسم ټولگي له پاره
رياضي برای صنف دوازده

د ليکوال ژوند ته لنډه کتنه

ماخان په اولني نوم ميږي شينواری د ارواښادې پستو او ارواښاد نوررحمان زوي په ۱۳۲۰ هـ لمریز کي د شينواریو هسکه مینه کي دې نړۍ ته سترگي راغړولي.

د هسکي ميني د لومړني ښوونځي (د لومړنيو زده کوونکو څخه) څخه وروسته د رحمان بابا لیسې له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پوري (ښوونځي له لومړي ټولگي پیل او د دویم ټولگي څخه گام او پای).



د ۱۹۶۶ تر سپټمبر د کابل طب پوهنځۍ. له ۱۹۶۶ سپټمبر څخه د اتریش برس، چې هلته یې د شميرپوهنې ډاکټري په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

د ۱۹۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فبروري تر پای د دباندنيو چارو وزارت کي مامور.

د ۱۹۸۸ مارچ څخه تر ۱۹۹۲ جون پوري په بن کي د افغانستان جمهوریت سفارت شارژد افیر (صفر نه وو).

له هغې وروسته په جرمني کي سیاسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ څخه د ۲۰۰۹ دسمبر پوري د د ریاضي څانگه کي د پوهنې وزارت درسي نساب کي دنده.

ماخان ميري په ۱۹۷۲ کې له لري د ميرمن بناپيري سره واده شوی، چې د واده خبر ورته اتریش ته راغی.

ده د ميرمن بناپيري سره په ۱۹۶۳ ز ک کې کوزده کړې وه.

دوي ته لوي څښتن په اتریش ويانا کې د مای په شلم ۱۹۷۹ ز ک دوه بچيان وبخښل، چې څانگه او اباسين نوميري. څانگه په المان کې د پوهنتون علمي همکاره وه او د حقوقو ډاکتره ده او اباسين ملي اقتصاد او ټولنيزه ساينکولوژي لوستلې.

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library