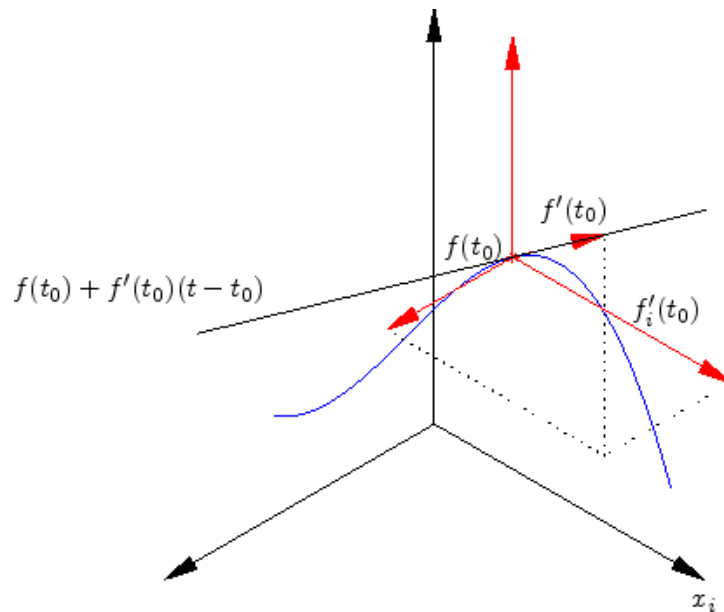


د پوهنتون لپاره لکچرنوټونه

د ډېرو متحولو يا اووېستونو انالیز

يا انالیز دوه



لیکونکي: د شتوتگارت پوهنتون د شمیرپوهنې یا ریاضې څانګه

د مات انالیز څخه یا د شتوتگارت پوهنتون ن ج څخه

ژباړی: د اکر ساحل (میری) شینواری

Ketabton.com

سرلیک

د لوی څښتن په نامه

په دې هیله، چې په دې لیکنو او ژباړو به مې زموږ د بې وزلي او له پوهې پاتې ملت
- په ما د پوهنې په لار د لگښت - لپاره د پوهنې په لور داسې لږ ونډه اخستې وي.

د کتاب نوم: د ډېرو متحولو یا اووښتونو انالیزې

ډاکټر ماخان میري شینواری

Smakhan1946@gmail.com

د چاپ لري:

د ژباړې مننه

د دې لیکنې مل نورې خپرونې د شتوتگارت د پوهنتون د شمیرپوهنې د خانګې د لکچرونو لړۍ چاپ باندې پیل کېږي

د هر څه له مخه د هغو لیکونکو پروفیسرانو څخه زیاته مننه، چې د لیکنو څخه یې زما د ژباړې لپاره تفاهم لري. ماته د دوي د لیکنو د ژباړې په هیڅ ډول مادي ګټه نه شته او دا کار مې یوازې په یوه د پوهنې توانمندی، مګر وروسته پاتې ژبې ویونکي ولس ته وړاندې دی، دا دې د دې پروفیسرانو له خوا په پوهنیزه اړخ کې- زموږ په دې اړخ کې هم مرستې ته اړ ولس- سره مرسته وي.

	د ژباړې سریزه
	ټول...
۱	اساسي کليمې
۱	ډېرۍ يا سټ او پولې ته تلنه
۱	چاپيريال
۱	د وکتورونو پولې ته تلنه
۲	د وکتورونو لپار د کوشي پولې ته تلنه
۳	وازه ډېرې يا سټ
۴	رابنده ډېرۍ (سټ)
۴	د يوې ډېرۍ ژۍ يا غاړه
۵	کومپاکته ډېرۍ
	--- تابع
۵	د ډېرو متحولو توابع
۶	ډېر متحولي پولينومونه
۱۰	د ډېر متحولو توابعو ناپرېکيدنه
۱۲	په کومپاکتو ډېريو د ناپرېکيدونکو توابعو افراطي ارزښتونه
۱۳	د وکتور نورمونو برابرازښتوالی
۱۴	د لېپشيتز Lipschitz ناپرېکيدنه
۱۶	کونتراهيري کيدونکې څيرونې يا توابع
۱۷	د باناچ Banach ځای په په ځای ټکي جمله
	---- مشتق يا رابيليدنه
۲۰	--- ټوټه يا پارشل مشتق
	ټوټه مشتق
۲۲	ډيرواره ټوټه مشتقونه
۲۴	د ډېرو متحولو پولينومونو ټوټه مشتق
	د يوې تابع ټوټه مشتق بد ليدنوالی
۳۰	توتال يا تمام مشتق
۳۶	کربنيز اپروکسيميشن
۳۷	د مولتيواريت توابعو د غلطيو وده يا تکثير
	د ډېر متحولو توابعو د ناټيکاوې زېږنده يا وده
۳۸	تانجنت
۴۱	تانجنټي سطحه
	--- د مشتق قوانين
۴۵	د ډېرو متحولو زنځيري قانون

- ۵۳ د یوې تابع لوریز مشتق
- ۵۵ د خورا زوړندې کیوتنې متودونه
- ۵۹ په څټ – یا معکوس توابع
- ۶۷ ایمپلیڅیت توابع
- ۶۹ د ویوانې ګډه
- ۷۵ د نه کرښیزو توابعو د مخته بیونې
===== مساوات سیستمونه
- ۶۷ --- د تیلور Taylor وده
- ۸۱ د هېسی Hesse ماتریکس
- ۸۵ د نیوتون Newton تلنلار
- ۸۸ --- افراطي ارزښتونه
- ۹۴ **کریتیکال** ټکی
د ډېرمتحولو توابعو افراطیت
- ۱۰۲ د لاګرانژ ضریبونه [Lagrange-Multiplikatoren](#)
- ۱۱۰ د کرښیز مساوات شرایطو سره مربعیز مینیمالونه (را کمونه)
- ۱۱۶ د کون-تکر Kuhn-Tucker شرایط
- دېر بعدیز یا پراخیدنی اینتګرال
- دېر بعدیز - یا پراخیدونی اینتګرال
- ۱۲۵ سیمپلکس [Simplex](#)
- ۱۲۶ غبرګ ایپیپید [Parallelepiped](#)
- ۱۲۶ د اینتګرال ورشو
- ۱۲۸ د هاوزدورف Hausdorff واټن
- ۱۲۹ دېر بعدیز یا پراخیدنی اینتګرال
- ۱۳۲ د فوبیني Fubini جمله
- ۱۳۸ د بعدی یا پراخیدونی واحدګرې (یوونګونډوسګې) ډکی یا حجم

--- د ډېربعدیزو اینتگرالونو ترانسفورمیشن ۱۴۱

د ډېربعدیزو اینتگرالونو ترانسفورمیشن

په توتنه ییز (استونه ډوله) کواور دینات کې د حجم توکي (ډکي) ۱۵۰

په گري (غوندوسکي) کواور دینات کې د حجم (ډکي) توکي. ۱۵۲

کتله او دروندتکي (د سقل مرکز) ۱۵۷

د (بار) ورنې مومنت [Trägheitsmoment](#) [moment of inertia](#) عزم العطالة

--- د منحنیو (کرو) او سطحو اینتگرال

د منحنیو اینتگرال ۱۶۱

د منحنیو اینتگرال خویونه ۱۶۶

د لیندې اوږدوالی ۱۶۶

د سطحې یوې توتې منظم بارامتریکی کونه. ۱۶۸

د سطحې اینتگرال ۱۶۹

په توتنه کواور دینات کې د سطحې توکي ۱۷۴

په غوندوسکي یا کري کواور دینات کې د سطحې توکي ۱۷۶

--- د ډېرواره اینتگرالونې بنسټجمله یا اصلي جمله ۱۷۸

د ډېرواره اینتگرالونې بنسټجمله یا اصلي جمله

توتنه اینتگرال ۱۸۳

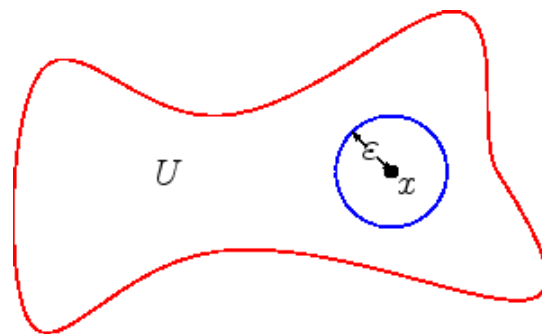
د گرین Greensche فرمولونه ۱۸۴

بنسټيزې يا اساسي کليمې
ډېرۍ يا سټ او پولې ته تلنه

چاپيريال

دا د يوه ټکي $x \in \mathbb{R}^n$ د ε -چاپيريال په حيث دا لاندي غونډوسکه (غونډارۍ، توپ که غواړئ: کره) نوموو

$$B_\varepsilon(x) = \{y : |y - x| < \varepsilon\}.$$



په ټوليزه توگه د x چاپيريال U يوه ډېرۍ ده، چې يو چاپيريال ε خوندي لري.

ليکونکي: هوليگ او پفايل

د وکتورونو کونورگنت يا پولې ته تلنه

د وکتورونو $x_k \in \mathbb{R}^n$ يوه پرلپسې د يوه وکتور x خواته کنورگ کيږي يا ځي،
 $\lim x_k = x$ همداسې، $x_k \rightarrow x$

که د ټولو $\varepsilon > 0$ لپاره يو ايندکس k_ε شتون ولري

د $|x_k - x| < \varepsilon$ سره د $k > k_\varepsilon$ لپاره.

په بل ډول هر ε -چاپیریال $B_\varepsilon(x) = \{y : |y - x| < \varepsilon\}$

ټولې ترپاي ډېرو پرلپسې (ترادف) توکو پورې خوندي لري.

د (x_k) کونورگنځ ته ورته د ټولو کمپوننتونو کونوی رگنځ دی، د اړه دې معنا چې کیدی شي یو پراخیدونې یا یو بعدې کونورگنځ کریتیریوم ورته راکنبل - یا راو نیول شي.

(لیکونکي : بوسلر، هولیک، شترایت)

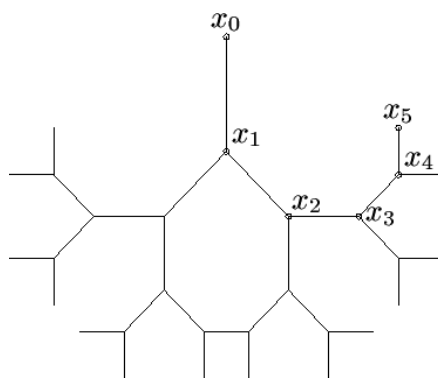
د وکتورونو لپاره د کوشي Cauchy کریتیریوم یا قضیه

یوه د وکتورونو پرلپسې $x_k \in \mathbb{R}^n$ ټیک هلته پولي ته ځي (کونورگنت ده)، که دا کوشي پرلپسې وي.

د اړه دې معنا چې د ټولو $\varepsilon > 0$ لپاره یو k_ε شتون لري د $|x_\ell - x_k| < \varepsilon$ سره د $k, \ell > k_\varepsilon$ لپاره .

د ا له دې سره په برابره یا همغه معنادی، داسې چې د (x_k) د کمپوننتونو هر یو یې یوه کوشي پرلپسې ده. (لیکونکي: هیولیک، شترایت)

د کوشي کریتیریوم د روښانه ونې لپاره یوه بینار (دوه گونې) ونه راوړو.



په یوه ټوټه (کرښه) هره یوه په ضریب λ ($0 < \lambda < 1$) سره لنډیږي او په -45° کونج ایښول شوی بله ټوټه باندې ورزیاتیږي. په داسې یوه جوړه شوې دوه یزه ونه د

داسې سوکڅیسیو په ښاخونو بیل شوي ټکو هره پرلپسې پولې x_k ته ځي یا کونورگیر کیږي. د تعریف سره سم باور لري د دوه یوپه بل پسې پرلپسېو (تصادونو) (x_k) لپاره

$$|x_{k+1} - x_k| = c\lambda^k.$$

دا راکوي، چې داپرلپسې د کوشي پرلپسې ده، ځکه چې:

$$|x_\ell - x_k| = |x_\ell - x_{\ell-1} + x_{\ell-1} - \dots + \dots - x_{k+1} + x_{k+1} - x_k|$$

$$|x_\ell - x_{\ell-1}| + |x_{\ell-1} - x_{\ell-2}| + \dots + |x_{k+2} - x_{k+1}| + |x_{k+1} - x_k|$$

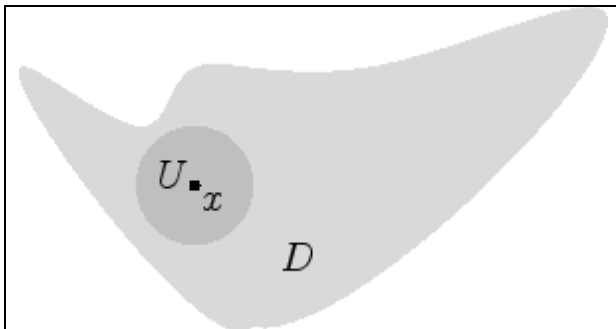
$$\leq c\lambda^{\ell-1} + c\lambda^{\ell-2} + \dots + c\lambda^k$$

$$= c\lambda^k \frac{1 - \lambda^{\ell-k}}{1 - \lambda} \leq c' \lambda^k$$

$$\leq \varepsilon$$

د $\ell > k > k_\varepsilon$ لپاره
(لیکونکي: هیولیک، شترایت)

وازه ډیری یا -سټ Offene Menge

	یوه ډبرې $D \subseteq \mathbb{R}^n$ وازه بلل کیږي، که چېرې د ډبرې هر ټکی $x \in D$ یو چاپیریال ولري، چې دا ټول په D کې پروت وي، په ځانګړې توګه $\mathbb{R}^n$ او تشډیری $\emptyset$ وازې دي.
---	--

سرلیک

د یوې په خوښه ډېرې D لپاره $\overset{\circ}{D} \subseteq D$ د D دننه ښايي، دا په دې معنا چې د ټول ټکو ډېرې د یوه چاپیریال سره په D کې پرته ده.

(لیکونکي: هیولیک، پفایف)

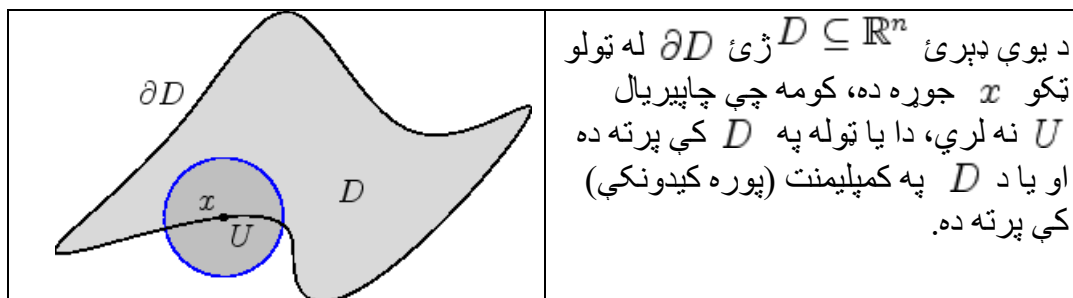
رابطه ډېرې $\text{Abgeschlossene Mengen}$

یوه ډېرې $D \subseteq \mathbb{R}^n$ رابطې یا بنده بلل کیږي، که دیوې د ټکو $x_k \in D$ پولې ته تلونې پرلپسې په D کې پرته وي. په ځانګړې توګه $\mathbb{R}^n$ او تشډېرې $\emptyset$ بندې دي.

د په خوښه ډېرې D لپاره دا $\overline{D} \supseteq D$ د D رابندونه بولو، دا په دې معنا چې د پرلپسېو د ټولو پوله ارزښتونه په D کې.

(لیکونکي: هیولیک، پفایف)

د یوې ډېرې ژې یا غاړه



د بدیل په توګه کید شي چې ژې د رابند کمون یا تفریق او دننه،

$$\partial D = \overline{D} \setminus \overset{\circ}{D}$$

په حیث تعریف شي.

(لیکونکي هیولیک او پفايف)

پوره کیدونکي ډېرئ $Kompakte Menge$

یوه تړلي او محدوده ډېرئ $D \subseteq \mathbb{R}^n$ کمپلیمنت یا پوره کیدونکي بلل کیږي. لاندې کرکتریسټیکا دي ته ورته یا اکویوالنځ دي:

- هره پرلپسې په D کې یوه کونورگنځ برخه ډېرئ لري د پولې سره په D کې.
- د D هر د وازې ډېرئ د سره پټونې یا پوښونې سره یوه پای پوښونه یا پټونه لري.

(لیکونکي: هیولیک او پفايف)

مولتیواریانت – یا د ډېرو توابع $Multivariate Funktionen$

یو ریل یا حقیقي مولتی واریانت (د ډېرو متحولو - یا اوبستونو توابع هم بلل کیږي)

$$f : \mathbb{R}^n \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad x \mapsto f(x),$$

د تعریف ډېرئ D یو وکتور $x = (x_1, \dots, x_n)^t$ په یوه وکتور

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x), \dots, f_m(x))^t$$

ریل حقیقي متحولو $x_1, \dots, x_n$ په واک کې دی.

د تابعورشو یا خیره ورشو د m بعد یا پراخیدونې له مخې سری د سکالارو

($m = 1$) او وکتور ارزښتیزو ($m > 1$) توابعو ترمنځ توپیر کوي. که $n = 1$

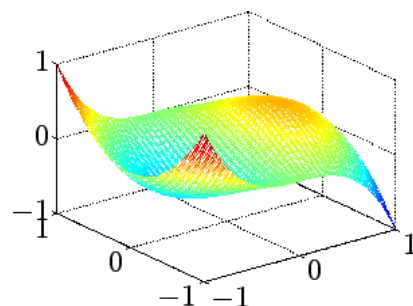
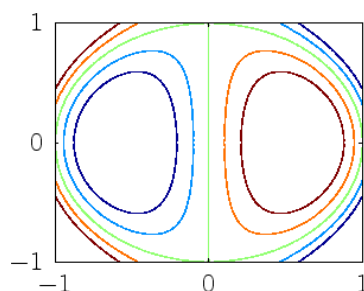
(او f ناپریکیدونکي وي)، نو f یوه پارامترې شوې کړه یا منحنی بلل کیږي.

د $m, n \leq 3$ لپاره زیات وخت ایندکسونه نه کارول کیږي او واریابلي له x, y او z سره په نڅښه کوو.

سرلیک

د بیلګې په توګه

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix}.$$

د $m = n = 2$ په حالت کې

لکه دا شکل چې روښانه کوي، Visualisierung ته دګراف سکالار توابع

$$\{(x, f(x)) : x \in D\}$$

او د نیوټن سطحې

$$\{x \in D : f(x) = c\}$$

وکارول شي.

پولینومونه د ډېرو متحولو سره :

یو پولینوم p په n اوبستونو $x_1, \dots, x_n$ کې د مونومونو کرښیز کمبینیشن دی

$$p(x) = \sum_{\alpha} a_{\alpha} x^{\alpha}, \quad x^{\alpha} = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n},$$

د $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$ سره، هریو د جمعې ورشو له مخې د لاندو ترمنځ توپیر کوي:

$$\sum \alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \leq m: \leq m \text{ د ټولو درجو}$$

$$\max \alpha = \max_i \alpha_i \leq m: \leq m \text{ د ماکسیمالو درجو}$$

یو د k -درجي پولینوم هوموجین بلل کیږي، که کرښیز ترکیب فقط مونوم د $\sum \alpha = k$ سره خوندي ولري. د داسې هوموجینو مونومونو ګڼون یا تعداد $\binom{k+n-1}{n-1}$ په دی.

تعقیب یې د پولینوم پراخیدونې یا بعد د ټوټال درجي $\leq k$ سره برابر

$$\binom{k+n}{n} = \sum_{k=0}^m \binom{k+n-1}{n-1}.$$

دی

د n -متحولو پولینومونو بعد د $\leq m$ ماکسیمال درجي $(m+1)^n$ دی.

د بیواریات یا دوه اووښتونو یا متحولو پولینومونو $(n=2)$ لپاره د هوموجینن مونومونو له لیست څخه

$$k=0: \quad 1$$

$$k=1: \quad x, y$$

$$k=2: \quad x^2, xy, y^2$$

$$k=3: \quad x^3, x^2y, y^2x, y^3$$

$\dots,$

کټل کیږي چې د k درجي لپاره د دوی تعداد

سرلیک

$$k + 1 = \binom{k + 2 - 1}{2 - 1}$$

دی

د دوه متحولو پولینومونو د توتال درجې $\leq m$ د بعد لپاره لرو

$$1 + 2 + \cdots + (m + 1) = \frac{(m + 2)(m + 1)}{2} = \binom{m + 2}{2}.$$

په څرگنده توګه $(k + 1)^2$ مونومونه شتون لري

$$x^i y^j, \quad i, j \leq m,$$

د $\leq k$ ماکسیمال درجې

په ټولیزه توګه (د n -متحولو پولینومونو) لپاره کیدی شي یو اکسپوننت

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad \sum \alpha = m$$

د یوه کره مونوتوني پرلپسې یا ترادف سره

$$\beta_1 = \alpha_1 + 1$$

$$\beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2 + 2$$

...

$$\beta_{n-1} = \alpha_1 + \cdots + \alpha_{n-1} + (n - 1)$$

له $\{1, \dots, m + n - 1\}$ څخه وپیژندل شي:

$$\alpha_i = \beta_i - \beta_{i-1} - 1$$

د $\beta_0 = 0, \beta_n = m + n$ سره. نو $\binom{m+n-1}{n-1}$ امکانات شتون لري

د ټول $\leq k$ درجو n -واريت مونومونه د $(n+1)$ -متحولو درجو k هوموجين مونومونه پ هگوته کوي:

$$x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \leftrightarrow x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} x_{n+1}^{k-\sum \alpha_i}$$

(اخرنی اکسپوننت ټینگ ځای په ځای دی). نو بعد دی

$$\binom{k + (n+1) - 1}{(n+1) - 1}.$$

د مکسیمال $\leq k$ درجو د پولینوم بعد په ورته توګه بیواریات حالت ته شمیري.

یو د ټوتال درجو ≤ 3 پولینوم په 2 متحولو کی لاندې ټولیزه بڼه لري

$$p(x, y) =$$

$$a_{3,0}x^3 + a_{2,1}x^2y + a_{1,2}xy^2 + a_{0,3}y^3$$

$$+ a_{2,0}x^2 + a_{1,1}xy + a_{0,2}y^2$$

$$+ a_{1,0}x + a_{0,1}y + a_{0,0},$$

او

$$4x^3 - 2xy^2 + 5y^3$$

د 3 درجو هوموجين بیواریات پولینوم لپار یوه بیلګه ده.

دیوه ≤ 2 درجو پولینوم ټولیزه بڼه په درې متحولو کی ده:

سرلیک

$$p(x, y, z) =$$

$$a_{2,0,0}x^2 + a_{0,2,0}y^2 + a_{0,0,2}z^2$$

$$+ a_{1,1,0}xy + a_{1,0,1}xz + a_{0,1,1}yz$$

$$+ a_{1,0,0}x + a_{0,1,0}y + a_{0,0,1}z + a_{0,0,0}.$$

د ډېرو اووښتونو يا متحولو توابعو و ناپريکيدنه يا متماديت

يو تابع f د تعريف ورشو D په يوه ټکي x کې ناپريکيدونکي دي، که

$$D \ni x_k \rightarrow x_{k \rightarrow \inf} \implies \lim_{k \rightarrow \inf} f(x_k) = f(x).$$

که دا د ټولو $x \in D$ لپاره باور ولري، نو f په ټول D باندې ناپوښت دی

که د تعريف ورشو په ژي ∂D د ټکي x لپاره پوله ارزښت شتون ولري، نو کيدی شي f ناپريکيدونکی مخ ته يو ول شي.

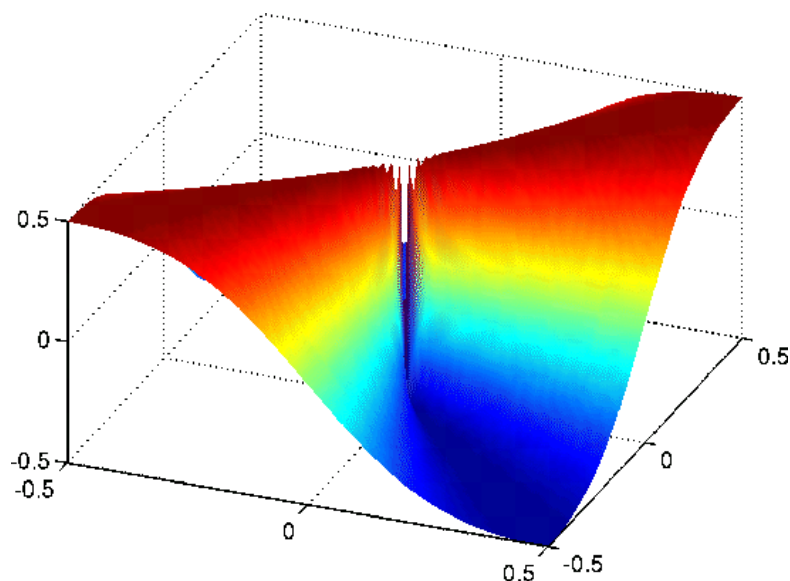
د ډېرو متحولو د ټرنو لپاره همغه قوانين باور لري، لکه د يوې متحولې تابع لپاره.

(ليکونکي: هيوليگ او شترایت)

يو نا ثابت بيواريات تابع $f(\varphi)$ ، چې فقط له کونج او نه د وړانگې $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ په واک کې يا تابع ده، په صفر ټکي کې پريکيدونکي ده. د دې لپاره ټيپيکي بيلگه

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} = \cos \varphi \sin \varphi$$

راړل کيږي.



که په صفر ټکي کې یوه کرښه وټاکو،

$$g : \varphi = c, \text{ همداسې } g : y = mx$$

نو په کرښه تابع- یا خطي تابع ارزښت ثابت دی،

$$f(x, mx) = \frac{mx^2}{x^2 + (mx)^2} = \frac{m}{1 + m^2} = c_m$$

همداسې

$$f(\varphi) = \cos \varphi \sin \varphi = c_\varphi ,$$

$$f(x, mx) = \frac{mx^2}{x^2 + (mx)^2} = \frac{m}{1 + m^2} = c_m$$

$$f(\varphi) = \cos \varphi \sin \varphi = c_\varphi ,$$

bzw.

سرلیک

پرتله له صفر ټکي چې هلته تابع ارزښت نه دی تعریف.
پرتله له صفر ټکي د ټول ټکو لپاره باور لري

$$D \ni (x_k, y_k) \rightarrow (x, y) \implies \\ \implies f(x_k, y_k) = \frac{x_k y_k}{x_k^2 + y_k^2} \rightarrow \frac{xy}{x^2 + y^2} = f(x, y) .$$

په صفر ټکي کې تابع بریکیدونکي مخ ته وړلور ده. که د $x \rightarrow 0$ لپاره په مختلفو کرښو باندې پوله ارزښت په پام کې ونیسو، نو لاس ته راول کيږي

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m}{1 + m^2} = \frac{m}{1 + m^2} ,$$

دا په دې معنا چې پوله ارزښت په هر سرچینه یزې کرښې مختلف دی. له دې سره یوله ارزښت

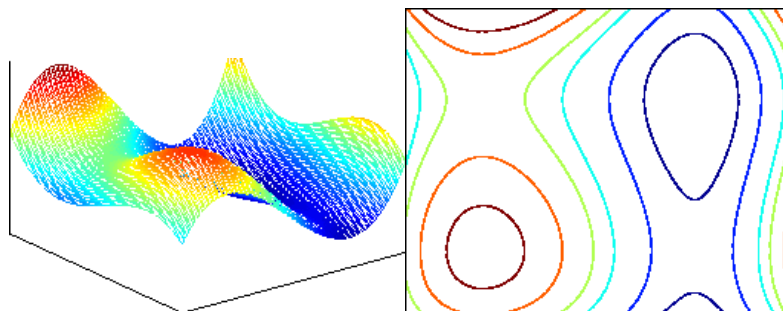
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$$

شتون نه لري.

(لیکونکي: بوسلر، هیولیگ، شترایت)

په کومپاکت ډېریو د ناپریکیدونکو-یا متمادي توابعو افراطي
ارزښتونه

یو ناپریکیدونکی تابع په یوه کومپاکته ډېرۍ یو مینیموم او هم یو ماکسیموم لري.
په کینه خیره شوي تابع باندې مینیموم او ماکسیموم په نڅښه شوي دي. په نیو وکرښه ا
فراطي ځایونه د رابندو منحیو له لارې پیژندلکيږي، هغه چې دا ټکي رابندوي یا (په بر
کې) رانیسي.



لیکونکي: هیولیک، شترایت

وکتور نورمونو برابر والی

هر وکتور نورم $\| \cdot \|$ په $\mathbb{R}^n$ کې دا وکلیدنورم $\| \cdot \|$ ته اکویالنت یا برابر ارزښته دی، دا په دې معنا چې ثابتې c_i شتون لري د

$$c_1 \|x\| \leq |x| \leq c_2 \|x\|$$

سره

د ټولو $x \in \mathbb{R}^n$ لپاره.

(لیکونکی: هیولیک، پفایف)

نابرابرونه یا نا مساوات سکالارانوارینت دي، دا په دې معنا چې د بدلون $x \mapsto \lambda x$ سره تغیر نه خوري. دا بسیا کي، چې وکتورونه x په یوون- یا واحدسفری یا فضا

$$S : |x| = 1$$

کې تر څڅیرني لاندې ونیسو. په S باندې هر نورم د 0 سره نا برابر دی، لهدې امله تابع

$$x \mapsto \frac{\|x\|}{|x|}$$

ناپریکیدونکي دی، ځکه چې S کومپک دی، نو یو مینیموم c_1 شتون لري او یو ماکسیموم c_2 .

(لیکونکي: هیولیک او پفایف)

لیپشیتز-ناپریکیدنه *Lipschitz-Stetigkeit*

یو تابع c_2 په یوې ډیرې D لیپشیتز-ناپریکیدونکې Lipschitz-stetig بللکیري، که یوه لیپشیتز-ثابته c شتون ولري، داسې چې

$$||f(x) - f(y)|| \leq c ||x - y||$$

د ټولو $x, y \in D$ لپاره.

که f ناپریکیدونکې او مشتقور او D کونکاو یا وتلی یا محدب؟؟ وي، نو د لیپشیتز-ثابته د جاکوبي-ماکسیموم Jacobi-Matrix سره اټکل کیدی شي:

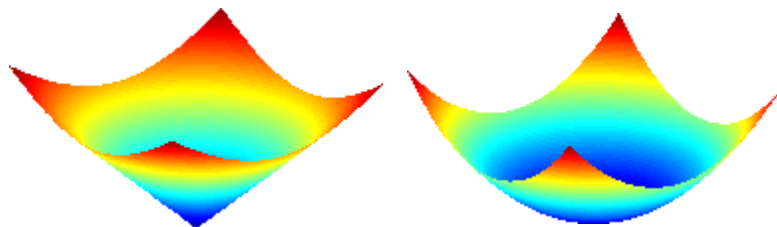
$$c \leq \sup_{x \in D} |f'(x)|.$$

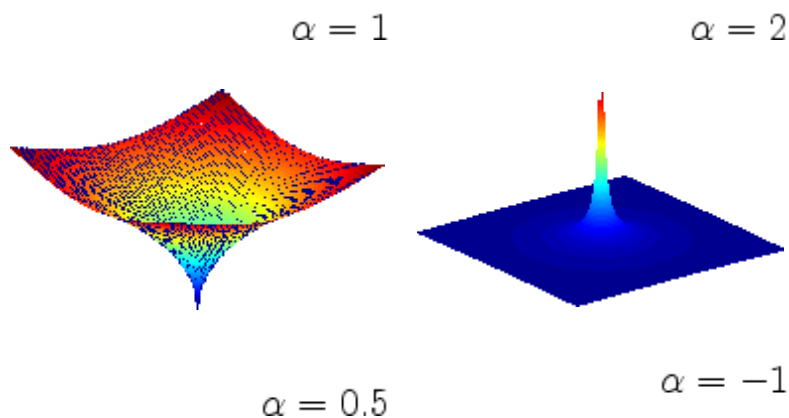
(لیکوني: ایپ، هیولیک)

د تابع

$$f(x) = r^\alpha, \quad r = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2},$$

لپاره ډیر حالتونه سره توپیر کیري.





(i) د $\alpha = 1$ لپاره f گلوبال لیپشیتز ناپریکیدونکی دی. د درېګوډییا مثلث د نامساوات څخه لاس ته راځي

$$|r - r'| = ||x| - |x'|| \leq |x - x'|,$$

دا په دې معنا چې $c = 1$ د $D = \mathbb{R}^n$ لپاره لیپشیتز-ثابته ده.

(ii) د $\alpha > 1$ لپاره f په محدوده ډېرې D باندې لیپشیتز-ناپریکیدونکی دی. د منځ ارزښت جملې بنسټ

$$|r^\alpha - (r')^\alpha| = \alpha s^{\alpha-1} |r - r'|$$

د r سره د r' ترمنځ، پهنه‌عقب یې

$$c = \max_{x \in D} \alpha |x|^{\alpha-1}$$

ټاکل کیدی شي.

(iii) د $0 < \alpha < 1$ لپاره f ناپریکیدونکی دی مګر نه لیپشیتز-ناپریکیدونکی د 0 په یوه چاپیریال کې. شرایط

سرلیک

$$|r^\alpha - 0^\alpha| \leq c|r - 0|$$

د $r \rightarrow 0$ لپاره پوره نه دي

(iv) د $\alpha < 0$ لپاره f په 0 کې پریکړدونکې، ځکه چې د $r \rightarrow 0$ لپاره r^α د ∞ په لور هڅیږي.

(لیکونکي: بوسلر، هیولیگ، شترایت)

کونترا هیري فنکشن یا -- تابع Kontrahierende Abbildung

یو تابع

$$g : D \rightarrow D$$

کونترا هیر کیدونکې (کیکارل کیدونکې) دی، که په یوه مناسب نورم

$$\|g(x) - g(y)\| \leq c \|x - y\|, \quad x, y \in D,$$

کې د $c < 1$ سره باور ولري. د دېسره c داسپیه نامه د g کونتراکشن ثابت ده، دا کړی شید یوې کونوکسډیرئ لپاره د جاکوبي ماتریکس په مرسته د

$$\sup_{x \in D} \|g(x)\|$$

اټکل کولای شي.

(لیکونکي: بوسلر، هیولیر)

د یوه مثبت دیفینیت ماتریکس A لپاره

$$g(x) = x - \omega(Ax - b)$$

کونتر اهری دی،، که پارامتر ω پوره کوچنی وټاکل شي. باور لري

$$g(x) - g(y) = Q(x - y), \quad Q = E - \omega A,$$

دکوم سره چې د Q ایگن ارزښت Q_i د A له ایگن ارزښت λ_i څخه شمیرل کیدی شي:

$$Q_i = 1 - \omega \lambda_i.$$

که څا په ځای کړو $\omega = 1 / \max_i \lambda_i$ ، نوټول ایگن ارزښتونه په $[0, 1)$ کې پراته دي، او د اویکلیدینورم استعمال سره

$$c = \|Q\| = 1 - (\min_i \lambda_i) / (\max_i \lambda_i) < 1$$

دی.

د بانډس ځای په ځای ټکیجمله **Banachscher Fixpunktsatz**

که g یو کونتر اهری تابع یا څیرونه وي، چې دا یوه ناتشه، رابنده ډیری $D \subset \mathbb{R}^n$ په خپل ځان څیره کړي یعنې د ځان تابع وي دا په دې معنا چې باور لري:

$$\begin{aligned} D &= \overline{D} \\ x \in D &\Rightarrow g(x) \in D \\ \|g(x) - g(y)\| &\leq c \|x - y\| \quad \forall x, y \in D \end{aligned}$$

د $c < 1$ سره، نو g یوه یواځنی ټاکلي ځای په ځای ټکی $x_* = g(x_*) \in D$ لري، له

$x_0 \in D$ څخه په وتنه یا تلنه کیدی شي x_* دایتراشن پرلپسې

$$x_0, x_1 = g(x_0), x_2 = g(x_1), \dots$$

اپروکسیمیرشي. د ناتیكاوي لپاره باور لري

سرلیک

$$\|x_* - x_k\| \leq \frac{c^k}{1-c} \|x_1 - x_0\|$$

دا په دې معنا چې ایتراشن پرلپسې د هر پیلارزښت لپاره کرښیز پولې ته ځي.

د ځای په ځای ټکوچمل په پوره متریکي فضاو کې ټولیز باور لري. دا چې د نورمترانسلیشن اینواریانځ او هوموجینیټی ته اړتیا نه شته، سری کری شي $\|x - y\|$ د یوه ټولیز واټن تابع $d(x, y)$ سره بدل کړي.

(لیکونکي: اپپ، بوسلر، هیولیک)

دا چې $g(D) \subseteq D$ ، د ټولو $\ell > 0$ لپاره $x_\ell \in D$ باور لري، او د کونټراکشن شرطو څخه لاس ته راځي

$$\|x_{\ell+1} - x_\ell\| = \|g(x_\ell) - g(x_{\ell-1})\| \leq c \|x_\ell - x_{\ell-1}\|.$$

ددې نامساوات ایترایشن څخه لاس ته راځي

$$\|x_{\ell+1} - x_\ell\| \leq c^\ell \|x_1 - x_0\|.$$

د $j > \ell$ لپاره د دریګوډي نامساوات څخه لاسته راځي

$$\begin{aligned} \|x_j - x_\ell\| &\leq \|x_j - x_{j-1}\| + \|x_{j-1} - x_{j-2}\| + \cdots + \|x_{\ell+1} - x_\ell\| \\ &\leq (c^{j-1} + \cdots + c^\ell) \|x_1 - x_0\| = \frac{c^j - c^\ell}{c-1} \|x_1 - x_0\| \\ &\leq \frac{c^\ell}{1-c} \|x_1 - x_0\|, \end{aligned}$$

او له دې سره د کوشي-کونورګنت پرلپسې x_ℓ یوه پوله ارزښت x_* ته. که له نامساوات

$$\begin{aligned}\|g(x_*) - x_*\| &\leq \|g(x_*) - g(x_j)\| + \|g(x_j) - x_*\| \leq \\ &\leq c \|x_* - x_j\| + \|x_{j+1} - x_*\|\end{aligned}$$

څخه پوله ارزښت $j \rightarrow \infty$ ته سړی لار شي، نو گوري، چې x_* د g یو ځای په ځای تکی دی. دا هم یواځنی بیکس تکیدي. که ونیسو، چې یوو بل تکی $\tilde{x}_* \neq x_*$ هم شتون لري، نو د کونترادیکشن شرلیطو څخه برعکس راکوي.

$$\|\tilde{x}_* - x_*\| = \|g(\tilde{x}_*) - g(x_*)\| \leq c \|\tilde{x}_* - x_*\|.$$

د ناتیکلوي لپاره اټکل د $\|x_j - x_\ell\|$ لپاره د نامساوات څخه لاس ته راځي دا هم وپولي $j \rightarrow \infty$ ته د تګ له لارې.

(لیکونکي: بوسلي، هیولیګ)

د نمونې یا تېپیکي استعمال لپاره یولر متظرر کرښیز سیستم تر څیرني لاندې نیسو:

$$Ax + \varepsilon f(x) = b$$

د یوه مربع ماتریکس A سره. د پوره کوچني ε د کرښیزې برخې تعریفور شو لپاره، او سړی کړی شي دا سیستم د ایترايشن

$$x \leftarrow g(x) = A^{-1}(b - \varepsilon f(x))$$

سره حل کړي. دلته نیول کيږي، چې A انور تیرکیدونکیدی او تابع f لپېشېڅ – ناپریکیدونکېده د ثابتې c_f سره.

د بانېش فیکسټکي چملي Banachschen Fixpunktsatzes د نیوني یا فرضيې د ازماینټ لپاره سړی ټاکي

$$D = \{y : \|y - p\| \leq r\}, \quad p = A^{-1}b.$$

د په خوښه $x \in D$ لپاره دی

$$\|g(x) - p\| = \varepsilon \|A^{-1}f(x)\| \leq \varepsilon \|A^{-1}\| \max_{y \in D} \|f(y)\|.$$

ټاکو

$$\varepsilon \leq \frac{r}{\|A^{-1}\| \max_{y \in D} \|f(y)\|},$$

نو $g(x) \in D$ دی، دا په د معنا چې g په D څېره کوي یا مپېنگ کوي

د کنټرکشن ثابتې Kontraktionskonstante c لپاره اټکلونه

$$\|g(x) - g(y)\| = \varepsilon \|A^{-1}(f(x) - f(y))\| \leq \underbrace{\varepsilon \|A^{-1}\| c_f}_c \|x - y\|$$

له f څخه د لیبیشیخ-ثابتې c_f سره

$$\varepsilon < \frac{1}{\|A^{-1}\| c_f} \quad \text{لاس ته راځي } 1 < c, \text{ که}$$

که و غوښتل شي. دواړه شرایط به روښانه توګه د پوره کوچنۍ ε لپاره پوره ردي

(لیکونکي: بوسلي، هیلېک)

توټه مشتق Partielle Ableitungen

د یو تابع f مشتق $\partial_i f$ په i -مه واریابلې متحولې پسې یونیوارینټي ابع

تابع $x_i \mapsto f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$ مشتق دید هغه سره چې واریابلې x_i ،

$j \neq i$ د ثابتول ې په څېر ترڅېړنې کېږي.

داسې هم لیکو

$$\partial_i f = f_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

د یونیواریات مشتق د تعریف سره سم باور لري

$$\partial_i f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\dots, x_i + h, \dots) - f(\dots, x_i, \dots)}{h}.$$

پارشل مشتعونه د سکالارو او همد وکتور ارزښتیزر حقیقی توابعو لپاره تعریف دي. په پارشل مشتعونیونه کې په دواړو حالتونو کې د تابع تیوپ یا ډول ساتلی پاتې کیږي. د تعریف سره سم باور لري

$$\partial_i \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_i f_1 \\ \vdots \\ \partial_i f_n \end{pmatrix}.$$

پارشل مشتق د کمپوننتونو سره سیمولتان یل همغږختیز جوړیږي

د توتال یا بیخي انتیگرال همداسې کرښیز اېرو کسسیماشن لپاره د وکتورښه یا تیوپ د معنا ډډکدی. دا ورسره بلد کنونشن یا قرار و وکتورونو داد د متحولې x او هم تابع

f لپاره کارول کیږي

(لیکونکي: هیلېگ، شترایت)

د سکالار تابع لپاره ټوټه مشفق هم سکالار دی.

د بیلگې په توګه د

سرلیک

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 + 5x_2 x_3$$

لپاره مشتق لاسته راځي

$$\partial_1 f = 2x_1 x_2,$$

$$\partial_2 f = x_1^2 + 5x_3,$$

$$\partial_3 f = 5x_2.$$

د یوه وکتور ارزښتیز تابع لپاره، لکه د بیلګې په توګه

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, x_3) \\ f_2(x_1, x_2, x_3) \\ f_3(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2^3 x_3 \\ x_1 x_2 x_3 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix}$$

د کمپوننتونو تعداد پارشل- یا ټوټه مشتق سره ساتلی پاتې کیږي:

$$\partial_1 f = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 \\ \partial_1 f_2 \\ \partial_1 f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 x_3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\partial_2 f = \begin{pmatrix} \partial_2 f_1 \\ \partial_2 f_2 \\ \partial_2 f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_2^2 x_3 \\ x_1 x_3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\partial_3 f = \begin{pmatrix} \partial_3 f_1 \\ \partial_3 f_2 \\ \partial_3 f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2^3 \\ x_1 x_2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(لیکونکي: بوسلي، شترایت)

ډېرواره ټوټه مشتق

دوه واره (یو په بل پسې نیول شوی) ټوټه مشتقونه د

$$\partial_i \partial_j f = f_{x_j x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

سره په نخه کیري،

په ورته د توگه د جگو مشتقونو لپاره تگه لیکو

$$\partial_i \partial_j \partial_k \dots f$$

په بدیلی توگه کیدی شي مولتی ایندکس نوټیشن

$$\partial^\alpha f = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n} f, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n),$$

سرليک

وکارول شي، چېرته چې ایندکس $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$ د ټوټه مشتقونو د ټوټه مشتقونو تعداد په i - مه متحولی پسې په نڅه کيږي

زیاتون یا جمعه $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ ټوټه مشتق بلل کيږي
(لیکونکي: هیولیگ، شترایت)

تابع

$$f(x) = \exp(ix^t y) = \exp(i(x_1 y_1 + \dots + x_n y_n))$$

مسطحه څپه بلل کيږي اود نورو تر څنگ د فوري-اناليوزي Fourier-Analysis کې رول یو غوره رول لوبوي

مشتقونه ساده شمیرل کیدی شي. دځنځيري قانون سره لاس ته راځي

$$= \partial_k f(x) \quad i y_k \exp(ix^t y)$$

$$\partial_\ell \partial_k f(x) = (i y_\ell)(i y_k) \exp(ix^t y)$$

او له دې سره

$$\partial^\alpha f(x) = (i y)^\alpha \exp(ix^t y) = i^{|\alpha|} y^\alpha \exp(ix^t y)$$

د $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ او $y^\alpha = y_1^{\alpha_1} \dots y_n^{\alpha_n}$ سره .

د بیلګیې توګه د $n = 2$ لپاره دی

$$\partial^{(3,4)} f = \underbrace{i^7}_{-i} y_1^3 y_2^4 \exp(i(x_1 y_1 + x_2 y_2)) .$$

(لیکونکي: بوسلي، هیولیگ، شترایت)

د مولتیواریانتو (ډېرواره اووښتونو) پولینومونو ټوټه مشتق

د یوه مونوم ټوټه مشتق

$$\partial^\alpha x^\beta = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n} (x_1^{\beta_1} \dots x_n^{\beta_n})$$

تیک هلته له صفر سره نابرابر دی، چې

ويي او په دې حالت کې دی

$$cx^{\beta-\alpha}, \quad c = \prod_i \beta_i(\beta_i - 1) \dots (\beta_i - \alpha_i + 1).$$

په توګه

$$\alpha! = \prod_k \alpha_k! \quad \partial^\alpha x^\beta|_{x=0} = \alpha! \delta_{\alpha\beta}$$

د سره. دی

$$p(x) = \sum_\beta x^\beta$$

د ټولو پولینومونو لپاره باور لري

$$\partial^\alpha p = 0, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n = k,$$

نو ټوټالدرجه $p < k$ لري.

(لیکونکي: هیولیک، شترایت)

سرلیک

د بنوونې فکرېبېه دې ځانگړي حالت $n = 2$ او $|\alpha| = 3$ وېنول شي. پسي د د مشتق له ورکېدو لاسته اړخي

$$p_{xxx}, p_{xxy}, p_{xyy}, p_{yyy}, \quad p(x, y) = \sum_{j,k} c_{j,k} x^j y^k,$$

دا چې p یو د توتال درجي ≤ 2 پولینوم دی، دا په دې معنا چې ټول ضریبونه $c_{j,k}$ ، $j + k > 2$ ، ورکړي.

$$c_{j,k}, \quad j + k > 2,$$

که یو اړونده ترم (د بېلگې په توګه $c_{2,1}x^2y$) صفر نه وي، نو لږ تر لږه یو د دریمې درجې یو ټوټه مشتق شته (د بېلگې په توګه p_{xxy})، کوم چې دا ترم نه انولې annulliert کوي.

په ټولیزه توګه هم همداسې دلایل راوړل کېږي.

د هر مولتي ایندکس $|\beta| \geq k$ لپاره γ شتون لري $|\gamma| = k, \quad \partial^\gamma x^\beta \neq 0.$ سره.

د بېلگې په توګه سړی کړی شي $n = 3$ ، $k = 4$ اود $\beta = (1, 2, 3)$ لپاره

$$\gamma = (1, 2, 1), (1, 1, 2), (1, 0, 3), (0, 2, 2), (0, 1, 3)$$

وټاکي.

(لیکونکي: هیولیک، شترایت)

د یوه تابع د ټوټه مشتق بدلوروالی

که د یوه تابع f لومړی اودویم ټوټه مشتق ناپېرېدونکي وي، نو باور لري

$$\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f.$$

د پوره کېدونکي خویتاب لپاره د ټوټه توابعو مشتق لړۍ پرلپسې بدلور دي.

په ځانگړې توگه دا د مولتی ایندکس-لیکنډول ته ټیکاوې ورکوي.

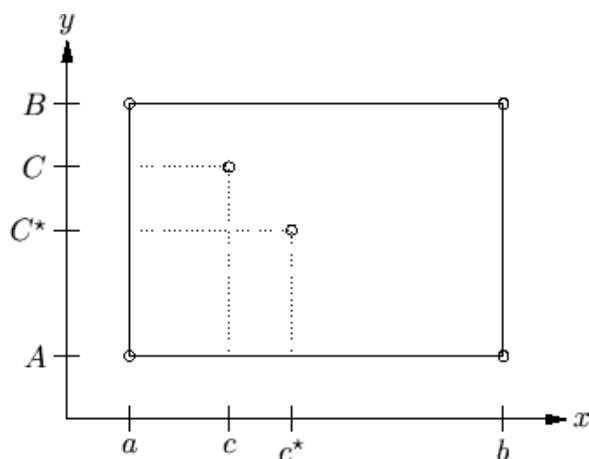
دا چې ټوټه مشتق سره متحولي $x_k, k \neq i, j$ ځای په ځای پاتې کیږي، بسیا کوي،

چې یو بیواریات تابع $f(x, y)$ په بکاور واچوو یا تر څېړنې لاندې ونیسو.

په یوه واړه ولاړکودې د (x, y) لپاره د

$$g(x) = f(x, B) - f(x, A), \quad h(y) = f(b, y) - f(a, y),$$

سره مشفقونه په y - همداسې x - لورو په نڅېنه کړو.



په کونجونو کې دفرنځ

سرلیک

$$Q = f(b, B) - f(b, A) - f(a, B) + f(a, A)$$

په دوه مختلف ډولونو د منځملي په مرسته شمیرل کیري:

$$Q = [f(b, B) - f(b, A)] - [f(a, B) - f(a, A)]$$

$$= g(b) - g(a)$$

$$= (b - a)g_x(c)$$

$$(b - a)[f_x(c, B) - f_x(c, A)]$$

$$= (b - a)(B - A)f_{xy}(c, C)$$

د $a \leq c \leq b$ او $A \leq C \leq B$ لاندې سره

Q=	$[f(b, B) - f(a, B)] - [f(b, A) - f(a, A)]$
Q=	$h(B) - h(A)$
Q=	$(B - A)h_y(C^*)$
Q=	$(B - A)[f_y(b, C^*) - f_y(a, C^*)]$
Q=	$(B - A)(b - a)f_{yx}(c^*, C^*)$

د $a \leq c^* \leq b$ او $A \leq C^* \leq B$ سره له دې سره لاسته راځي

$$f_{xy}(c, C) = f_{yx}(c^*, C^*),$$

او ولاړکودیز په واړه کونه سره ($b \rightarrow a, B \rightarrow A$) ، د دویم ګډوله کشتق د ناپرېکیدني په بنسټ لرو

$$f_{xy}(a, A) = f_{yx}(a, A) .$$

او د لاړګودي په کوچنیوالي، ($b \rightarrow a, B \rightarrow A$) د دویم ګډوله مشتق د ناپرېکیدني په بنسټ لاسته راځي

$$f_{xy}(a, A) = f_{yx}(a, A) .$$

لیکونکي: بوسلي، هیولیک، شترایت

فنکشن یا تابع یا بلواک

$$f(x, y) = \frac{x^3 y - x y^3}{x^2 + y^2}$$

د $(x, y) \neq (0, 0)$ لپاره په خوښه ناپرېکیدونکي او مشتقور دی

لومړ دوه مشقونه

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \frac{3x^2 y - y^3}{x^2 + y^2} - 2x \frac{x^3 y - x y^3}{(x^2 + y^2)^2}, \\ f_y(x, y) &= \frac{x^3 - 3x y^2}{x^2 + y^2} - 2y \frac{x^3 y - x y^3}{(x^2 + y^2)^2}, \end{aligned}$$

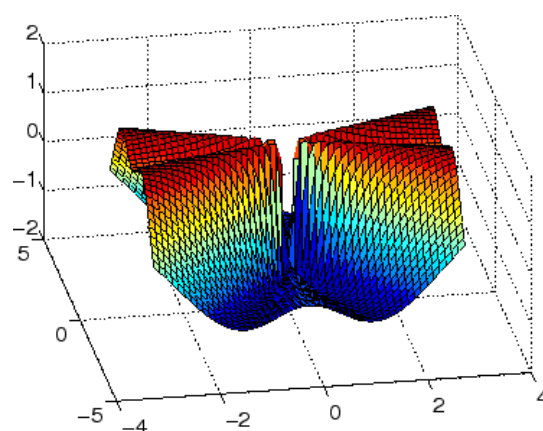
په ټول $\mathbb{R}^2$ ناپرېکیدونکي دي، ځکه چې د

سرلیک

$$|f_x(x, y)|, |f_y(x, y)| \leq (3 + 1 + 2(1 + 1))\sqrt{x^2 + y^2}$$

له امله f_x او f_y په ټول په پیل کې د 0 ارزښتونو سره ناپریکیدونکي مخ ته وړلوردي

ګډوله مشتق $f_{xy} = f_{yx}$ په $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$ دی مګر په صفر کې کټ پریکیدونکې، کوم چې له مشتق څخه لیدل کېږي



بدلون ناشونی دی:

$$\begin{aligned} f_{xy}(0, 0) &= \frac{d}{dy} (f_x(0, y))|_{y=0} = \frac{d}{dy} \left(\frac{-y^3}{y^2} - 0 \right)|_{y=0} = -1, \\ f_{yx}(0, 0) &= \frac{d}{dx} (f_y(x, 0))|_{x=0} = \frac{d}{dx} \left(\frac{x^3}{x^2} - 0 \right)|_{x=0} = 1. \end{aligned}$$

مختلف ټوله ارزښتونه لاسته راځي، په دې اړوند چې په کومه لړۍ پرلپسې ټوټه مشتقونه نیول شوي دي

لیکونکي: هیولیک، شترایت

توتال مشتقونه *Totale Ableitung*

يو حقيقي تابع $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ په يوه ټکي x کې مشتقور دی، که د $|h| \rightarrow 0$ لپاره توتال مشتق د ټوټه مشتق جاکوبي-ماتریکس دی:

$$f' = Jf = \frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} = (\partial_1 f, \dots, \partial_n f) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \dots & \partial_n f_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_m & \dots & \partial_n f_m \end{pmatrix}.$$

$$f' = (\text{grad } f)^t,$$

د يوه سکالار تابع ($m = 1$) لپاره مشتق گراډینټ بللکيږي او د یوې کرې ($n = 1$) پارامترې کولو لپاره هډتانجنت وکتور.

توتال مشتق $f'(x)$ شتون لپاره پوره کیدونکي شرطونه د یوه په x چاپیریال کې د ټوټه مشتقونو نه پرېکښه ده.

د توتال مشتق $f'(x)$ د شتون لپاره پوره کیدونکي شرطونه په یوه چاپیریال کې د ټوټه مشتق ناپرېکښه ده.

د توتال مشتق سره کیدی شي د یوه تابع په ارگومنټو یا تعریفور شوکې $(x \rightarrow x + \Delta x)$ د کوچنیو ترمونو تغیراتو سره اړیکسیمه $(x \rightarrow x + \Delta x)$ شي. د نظم $o(|\Delta x|)$ سره ترمونو څخه صرف نظر کیدنه په نږدې توګه باور لري

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x) \Delta x.$$

د دې دلپاره چې د پولط پرسه $|\Delta x| \rightarrow 0$ رامنځ ته کړو، لیکو

سرلیک

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

داسې په نامه دفرنشال df او dx_i ، کوم چې د کرښیزو اډروکسیمیشن تڅیرات تشریح کوي

dx_i چې وښایو چې توتالمشتق ټوټه مشتق خوندي لري، د ساده کونښپه بنسټ یو تابع د

دوه متحولو $f(x, y)$ سره روارو. په دې حالت کې $h = (s, t)^t$ یووکتور دی د دوه

کمپوننتونو سره. په د حالت کې $h = (s, t)^t$ یووکتور دی د وه کمپوننتونو سره. که بیلګې په توګه $t = 0$ ځای په ځای کړو نو لرو

$$\begin{aligned} f(x + s, y) &= f(x, y) + f'(x, y) (s, 0)^t + o(|(s, 0)|) \\ &= f(x, y) + (Jf)_1 s + o(|s|), \end{aligned}$$

چیرته چې $(Jf)_1$ د Jf لومړۍ درځیا مټه ښایي له s او پوله ارزښت $0 \rightarrow s$ د جوړېدوسره، د $f(x, y)$ ټوټه مشتق راکوۍ دپسې x :

$$(Jf)_1 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(x + s, y) - f(x, y)}{s} = \partial_1 f(x, y).$$

د ټوټه مشتق نا پریکښنه مقشتوروالی ایمپلیڅي کوي، دا په دې معنا چې د توتالمشتق شتونوال.

$$f' = (\partial_1 f, \dots, \partial_n f).$$

د دې لپاره چې د ټوټه مشتق د ناپېرېکيدنې څخه د ټوټال مشتق شتون لاس ته راوړو

لومړی یو سکالار تابع $f(x, y)$ تر څیرنې نيسو. د منځ ارزښت جملې له مخې د $h = (s, t)$ لپاره باور لري

$$\begin{aligned} f(x + s, y + t) &= f(x + s, y) - f(x, y) + f(x + s, y + t) \\ &\quad - f(x + s, y) + f(x, y) \\ &= s f_x(\xi, y) + t f_y(x + s, \eta) + f(x, y), \end{aligned}$$

د $\eta \in (y, y + t)$ ، $\xi \in (x, x + s)$ سره. د وړاندنۍ (فرضيې) په بنسټ ټوټه

مشتقونه f_y او f_x ناپېرېکيدونکي دي، دا په دې معنا چې

$$f_x(\xi, y) \rightarrow f_x(x, y), \quad f_y(x + s, \eta) \rightarrow f_y(x, y)$$

د $|h| \rightarrow 0$ لپاره. له دې سره د تابع f ټوټال مشتق وړالۍ لاسته راوړل کيږي:

$$f(x + s, y + t) = f(x, y) + s f_x(x, y) + t f_y(x, y) + o(|h|).$$

په ورته توګه د n متحولو سکالار تابع لپاره دلایل راوړل کيږي. ټولیز حالت یې په ځانله توګه د کمپوننتو له لارې څخه لاسته راځي.

لیکونکي: بوسلې، هیولیګ، شترایت

سرلیک

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

په صفرځای کې پرکیدونکې ده. دا کتل کیدی شي که د بېلگې په توګه سړی په دوه مختلفو سرچینه کړښو پوله ارزښت $x \rightarrow 0$ ونیسی یا راوړي:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) = \frac{x^2}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2} \neq -\frac{1}{2} = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, -x).$$

په تعقیب یې f په صفرځای کې مشتقور نه دی، ځکه چې له مشتقوروالي څخه ناپربکېدنه منځ ته راځي.

په صفر ټکي کې مګر دواړه ټوټه مشتقونه شتون لري. له

$$f(x, 0) = f(0, y) = 0$$

لاس ته راځي

$$f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0.$$

دواړه ټوټه مشتقونه مګر په صفر ټکي کې پرکیدونکي دي.

که په مختلفو کړو باندې د مشتق

$$f_x(x, y) = \frac{y^3 - x^2y}{(x^2 + y^2)^2}$$

که پوله ارزښت $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ تر څېړنې لاندې ونیسو، نو د بېلگې په توګه د

$$y = x$$

لپاره لرو

$$\lim_{x \rightarrow 0} f_x(x, x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{(x^2 + y^2)^2} = 0$$

$$y = x^2$$

لپاره او د

$$\lim_{x \rightarrow 0} f_x(x, x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{(1 + x^2)^2} = -1.$$

په اړونده توگه په صفرخای کې د ټوټه مشتق f_y پرې کېدنه شمیرل کېږي. دا ښایي، چې د مشتقووالي لپاره د ټوټه مشتقونې شتونوالی پوره کېدونکي نه دی، بلکه برسیره پردې ناپرېکېدنه هم غوښتل کېږي.

لیکونکي: بوسلې، هیولیگ، شترایت

تابع

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} x + 2y \\ xy \\ 3x^2 + y^2 \end{pmatrix}$$

$$h = (s, t)^t$$

دي او

$$f'(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ y & x \\ 6x & 2y \end{pmatrix}$$

او

سرلیک

$$f(x+s, y+t) = \begin{pmatrix} (x+s) + 2(y+t) \\ (x+s)(y+t) \\ 3(x+s)^2 + (y+t)^2 \end{pmatrix}.$$

له دې سره یو تابع

$$g(s, t) = f(x+s, y+t) - f(x, y) - f'(x, y)(s, t)^t = (0, st, 3s^2 + t^2)^t,$$

لاس ته راځي، د کوم سره چې د $(s, t) \rightarrow (0, 0)$ لپاره هر کمپوننت گړندی صفر ته
 $g(s, t) = o(|(s, t)|)$ $|h| = |(s, t)|$ ته، دا په دې معنا چې
 ځي نسبت و

لیکونکي: هیولیک، شترایت

د سکالار تابع $f(x, y) = r = \sqrt{x^2 + y^2}$
 لپاره د گرادینت په حیث ورکوي

$$\text{grad } f(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_1 f \\ \partial_2 f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/r \\ y/r \end{pmatrix}.$$

د یوې گړي $f(t) = (\cos t, \sin t, t)^t$ پارامتریک کولو له لارې د مشتق په حیث یو د
 تانجنټ وکتور راکوي

$$f'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)^t.$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin \vartheta \cos \varphi \\ r \sin \vartheta \sin \varphi \\ r \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

له لارې تعريف شوي غونډاري کواواردینات لاندې د جاکوب-ماتریکس دی

$$f'(r, \vartheta, \varphi) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \vartheta, \varphi)} = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi & r \cos \vartheta \cos \varphi & -r \sin \vartheta \sin \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi & r \cos \vartheta \sin \varphi & r \sin \vartheta \cos \varphi \\ \cos \vartheta & -r \sin \vartheta & 0 \end{pmatrix}$$

لیکونکي: بوسلې، هیولیگ، شترایت

کرنیزا پروکسیمیشن *Linear Approximation*

په لومړۍ نږدېونه کې د ناپریکیدونکي مشتقور تابع لپاره باور لري، دا په دې معنا چې د

نظم ترمونو $o(|\Delta x|)$ باندې صرف نظر کونې یا پرېښونې له لارې

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x) \Delta x.$$

لیکونکي، هیولیگ، شترایت

د مولتیواریت توابعو د غلطیو وده یا تکثیر

Fehlerfortpflanzung multivariater Funktionen

د یوه نا پرېکیدونکي مشتقور تابع $x \mapsto y = f(x)$ لپاره کیدی شي داینکور اتو

X inakuraten-ارزښتونو $x + \Delta x \approx x$ د f ټوټه مشتق په مرسته تشریح کړای

شي. د مطلق ناتیکایي لپاره د $o(|\Delta x|)$ نظم د ترمونوڅخه په صرف نظر باور لري

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \approx f_{x_1}(x) \Delta x_1 + \cdots + f_{x_n}(x) \Delta x_n.$$

سرلیک

که $|x_i|, |y| \neq 0$ وي، نو د نسبي ناتيکاوې لپاره لاس ته راځي

$$\frac{\Delta y}{|y|} \approx c_1 \frac{\Delta x_1}{|x_1|} + \dots + c_n \frac{\Delta x_n}{|x_n|}$$

د لاندي کندنېش عدد Konditionszahlen سره

$$c_i = \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{|x_i|}{|y|}.$$

يادونه (ژباړی): د کندنېش سره سړی پېشميرپوهنه کې هغه شی تشرېح کوي، چې يوه پرابلم حل د هغه د وتون داتا د مضاحمت په واک کې وي. د کندنېش عدد د دې په واکوالي کچه انځوروي، چې په هغه وتن ناتيکاوې په نا مساعد حالت کې زواکمنه کيږي. دا د تکللو حل تلنلارو څخه خپلواکه دی. پای.

د کارتيزي کواورديناټ څخه د قطبي کواورديناټ د φ کونج شميرني له امله

د مطلق ناتيکاوې لپاره لاس ته راځي

$$\Delta \varphi \approx f_x(x, y) \Delta x + f_y(x, y) \Delta y = -\frac{y \Delta x}{x^2 + y^2} + \frac{x \Delta y}{x^2 + y^2}.$$

د نسبي ناتيکاوې لپاره لاس ته راځي

$$\frac{\Delta \varphi}{|\varphi|} \approx -\frac{y|x|}{(x^2 + y^2)|\varphi|} \frac{\Delta x}{|x|} + \frac{x|y|}{(x^2 + y^2)|\varphi|} \frac{\Delta y}{|y|}.$$

د $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$ سره د $|\sin \varphi / \varphi| \leq 1$ له امله لاس ته راځي،

چې د بني اړخ ارزښت له

$$\left| \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{\varphi} \right| \left(\frac{|\Delta x|}{|x|} + \frac{|\Delta y|}{|y|} \right) \leq 2 \max \left(\frac{|\Delta x|}{|x|}, \frac{|\Delta y|}{|y|} \right)$$

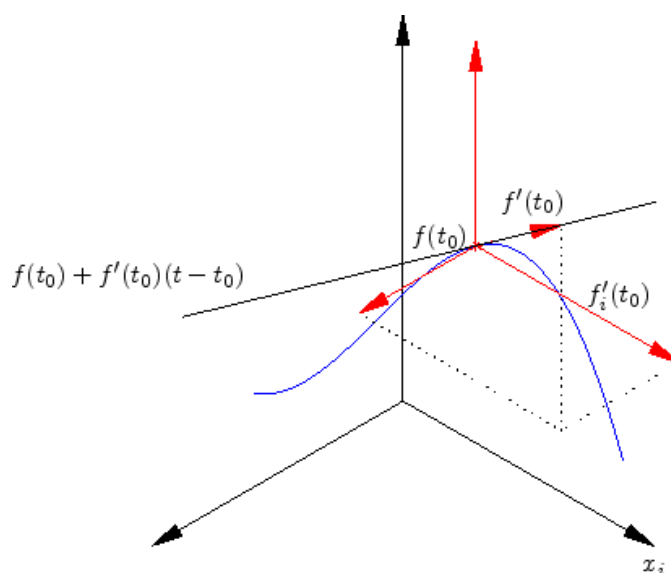
لاري اټکل کيدی شي. نسبي ناټيکاوۍ زيات له زيا ته د يوه ضريب 2 قوي کيدی شي.

مطلق ناټيکاوۍ کيدی شي د يوه ضريب سره چې $1/r$ ته متناسب وي لوی شي. د

انتظار سره سم په x او y کې د کونج اندازه کونه د برابر زغم له امله د کوچنۍ وړانگې لپاره ناټيک دی.

ليکونکي: بوسلې، هيوليگ، شترایت

Tangente تانجنت



په ټکي $f(t_0)$ کې د مشتقو پارامتریکي کړي (منحنی) $t \mapsto (f_1(t), \dots, f_n(t))^t$

تانجنت یوه کرښه

سرلیک

$$f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0), \quad t \in \mathbb{R}$$

ده داسې چې لږ تر لږه د تانجنت وکتور یو کمپوننت $f'_i(t_0)$ له صفر سره توپیر ولري.

لیکونکي: بوسلي، هیولیگ، شترایت

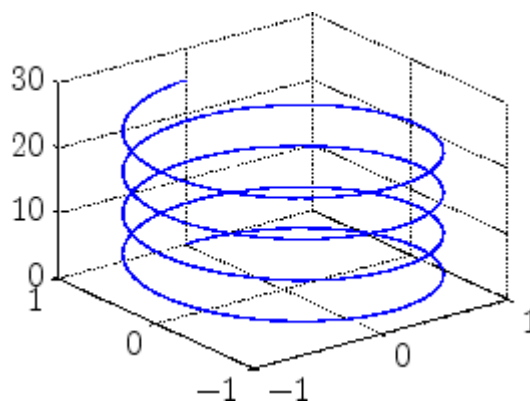
د

$$t \mapsto f(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ t \end{pmatrix}$$

له لارې پارامتریکي پیچمیخ کرښه باندې تانجنت دی

$$f'(t) = (\cos t, -\sin t, 1)^t$$

.



د بیلگې په توګه په ټکي $f(3\pi) = (0, -1, 3\pi)$ کې د تانجنت لپاره پارامتریکي کیدنه لاس ته راوړو:

$$t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3\pi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (t - 3\pi).$$

لیکونکي: هیولیک، پفایفر

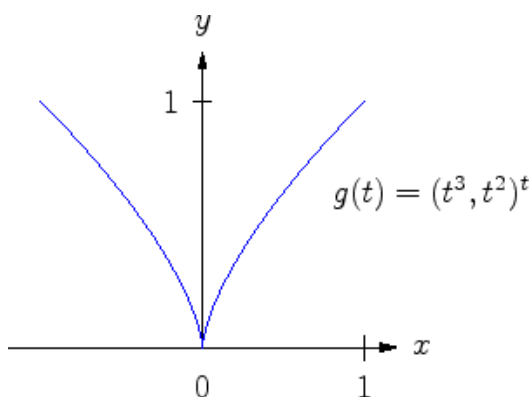
$$t \mapsto g(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \end{pmatrix} \quad t_0 = 0 \quad \text{لپاره له}$$

لارې د پارامتریکي کبرې لپاره د دواړو

کمپوننتونو مشتق ورکیري. د کبرې لور سملاسي له $(0, -1)^t$ څخه و $(0, 1)^t$ ته
تغیر خوري.

که $g(t)$ د وخت په واک کې ځایزوکتور په حیث تعبیر کړو، نو د $t_0 = 0$ لپاره
چټکتیا صفرده. له دې سره، سره له دې چېناپریکیدونکي مشتقور کواوردینات، یو
پریکیدونکی لور تغیر ممکن

دی.

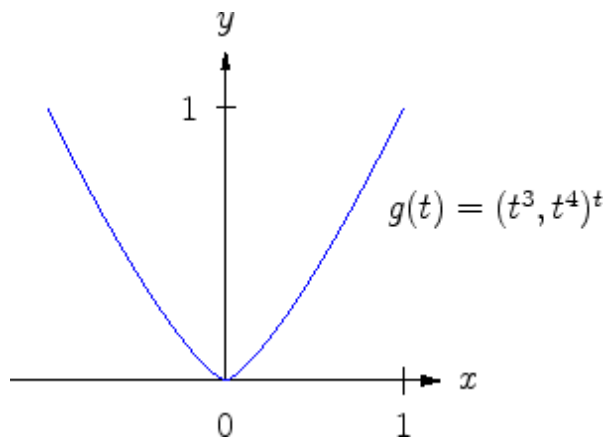


د $g(t) = (t^3, t^4)^t$ لپاره همداسې $g'(0) = (0, 0)$ دی. د پارامتر اړونه یا بدلون

سرلیک

$$s = t^3, \quad g(t) = q(s) = \begin{pmatrix} s \\ s^{4/3} \end{pmatrix}$$

ښایي، چې له $s = 0$ سره د تانجنتتغیر ناپریکیدونکي دي.



لیکونکي: بوسلي، هیولیگ، شترایت

Tangentialebene تانجنټي سطحه

f د یو ناپریکیدونکي مشتقور تابع او $(p_1, \dots, p_n)$ د یو ټکي وي په له

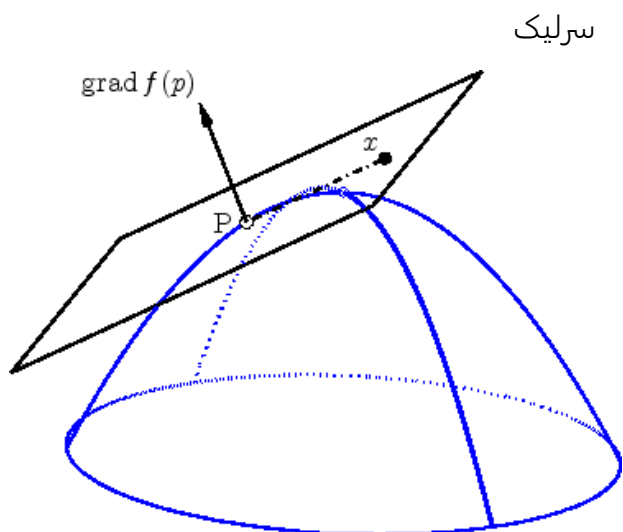
$f(x_1, \dots, x_n) = c$ لارې ایمپلیحیت تعریف شوي سطحه باندې. که

$\text{grad } f(p) \neq 0$ وي نو تانجنټي سطحه په ټکي P کې مساوات

$$E: (\text{grad } f(p))^t (x - p) = 0.$$

لري.

نور مالوکتور و $\text{grad } f$ ته غبرگ دی.



د یوه تابع $y = g(x_1, \dots, x_{n-1})$ د گراف لپاره په ځانګړې توګه

$$E: y - g(q) = \sum_{i=1}^{n-1} \partial_i g(q) (x_i - q_i)$$

د تانجنټي سطحې مساوات دی په لاندې ټکي کې:

$$(q_i, \dots, q_{n-1}, g(q))^t$$

ټوټه مشتق $\partial_i g$ له دې امله د تانجنټي سطحې جغوالی بڼایي د i -م کواوردینات محور په لور

لیکونکي: ب، هیولیګ، کیمرلی، شترایت

د ټوټال مشتق $\text{grad } f' = (f)^t$ تعریف دی

$$f(x) = f(p) + (\text{grad } f)^t (x - p) + o(|x - p|).$$

سرلیک

که له ترم $o(|x - p|)$ څخه صرفنظروشي، نو د $f(x) = f(p) = c$ له امله د تانجنټي سطحي مساوات لاس ته راځي.

په ورته توګه د یوه د $y = g(x_1, \dots, x_{n-1})$ له لارې تعریف شوي تابع ګراف لپاره باور لري

$$\Delta y = \sum_{i=1}^{n-1} \partial_i g(q)(\Delta x_i)$$

د $\Delta y = y - g(q)$ او $\Delta x = x - q$ سره. د باقي غړي څخه صرف نظر له امله بیرته د تانجنټ سطحي ښوول شوي انځور ته ورځو.

لیکونکي: بوسلي، هیولیک، شترایت

د کگل

$$K : f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

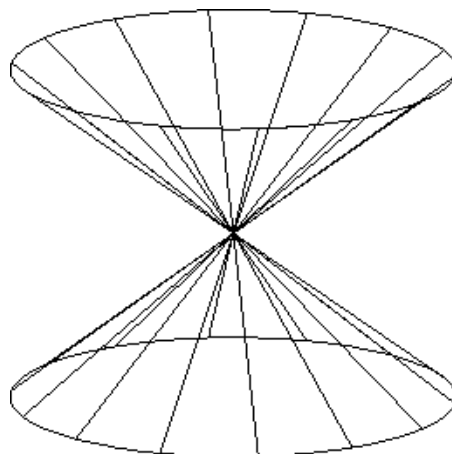
لپاره $\text{grad } f(x, y, z) = (2x, 2y, -2z)^t$ دی. له دې سره سرې د تانجنټي سطحي په حیث لاس ته راوړي.

$$E : -2z_0(z - z_0) + 2y(y - y_0) + 2x(x - x_0) = 0.$$

د بیلګې په توګه تنجنټي سطحه په ټکي $P = (3, 4, 5)$ کې لاندې مساوات لري

$$E : -10z + 8y + 6x = 0.$$

په ټکي $Q = (0, 0, 0)$ کې ګرادیټ ورکړي، د مخروط په ککره یا څوکه کې تانجنټي سطحه شتون نه لري.



لیکونکي: بوسلی، هیولیگ، شترایت

د یوه دپیول (دوه قطبي) پوتنشل

$$f(x) = |x - p|^{-1} - |x + p|^{-1}, \quad x = (x_1, x_2),$$

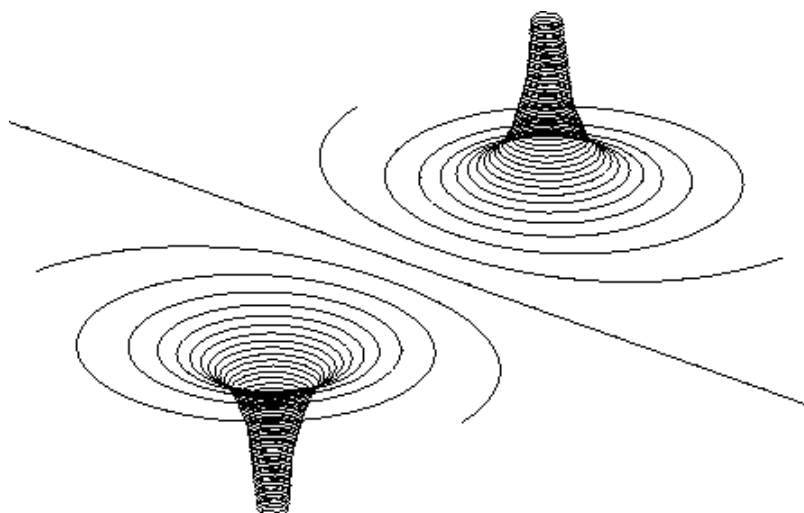
لپاره، په کوم کې چې برق (Ladungen) د لته باید موخه هغه بار وي، چې د لته شتون لري) په ټکو $-P$ او P کې شتون لري د کراډینت په څېر لاس ته راځي

$$\text{grad } f(x) = \frac{(x + p)}{|x + p|^3} - \frac{(x - p)}{|x - p|^3}$$

او له دې سره په یوه ټکي $A = (a_1, a_2)$ کې تنجنتي سطحه

$$x_3 = f(a) + (\text{grad } f(a))^t (x - a).$$

سرلیک



د بیلګې په توګه د $A = (0, 0)$ لپاره دی

$$x_3 = 0 + (2p^t/|p|^3)(x_1, x_2)^t,$$

دا په دې معنا چې تانجنټي سطحه په سرچینه کې خُغلي او و P ته ولاړه یا عمود کرښه خوندی لري.

په سیګولاریټیو P او $-P$ کې تانجنټي سطحه شتون نه لري.

لیکونکي: بوسلي، هیولیک، شترایت

مولتیواریات خُنخیري قاعده یا لار

Multivariate Kettenregel

د ناپریکیدونکو مشتقوړ توابعو $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ او یو بل پسې تړلو $g : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$h = g \circ f : x \mapsto y = f(x) \mapsto z = g(y),$$

له امله باور لري

$$h'(x) = g'(y)f'(x),$$

دا په دې معنا چې د جاکوبي-ماتریکس h د جاکوبي-ماتریکسونو f او g ضرب دی. د یوگوني لاس ته راوړنې یا لرنو د ماتریکس ضرب له لارې لاس ته راځي

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_k} = \sum_j \frac{\partial g_i}{\partial y_j} \frac{\partial f_j}{\partial x_k}.$$

په ځانگړې توگه ځنځیري قانون د ځانگړي حالت $m = n = 1$ لپاره (دا په دېمعنا چې f یوه پارامتریک شوې کړه او g د متحولي یو سکالار تابع) لاندې څېره یا شکل لري:

$$\frac{dh}{dx} = (\text{grad } g)^t f'(x).$$

د یوه تابع د توتالمشتق لپاره باور لري

$$\varphi(x+h) = \varphi(x) + \varphi'(x)h + o(|h|).$$

له دې سره د مشتقونو $f'(x)$ او $g'(y)$ د شتون څخه لس ته راځي

$$\begin{aligned} g(f(x+h)) &= g(f(x) + \underbrace{f'(x)h + o(|h|)}_{\tilde{h}}) = \\ &= g(f(x)) + [g'(y)\tilde{h}] + o(|\tilde{h}|). \end{aligned}$$

$$[g'(y)\tilde{h}] = g'(y)f'(x)h + o(|h|)$$

او $|\tilde{h}| = O(|h|)$ لرو د $g \circ f$ د جاکوبي - ماتریکس لپاره غوښتلی فرمول ورکوي.

لیکونکي: هیولیگ، کنش

د ځنځیري قانون د تشکیل یا روښانه ونې لپاره لاندې تابع راوړو

$$y = f(x) = \begin{pmatrix} x_3 \sin(x_1) \\ e^{x_2}/x_3 \end{pmatrix}, \quad g(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1 + \ln(y_2) \\ 0 \\ y_2 \cos(y_1) \end{pmatrix}$$

د دې لپاره چې د $h = g \circ f$ د جاکوبي-ماتریکس په $p = (\pi, 0, 1)^t$ کې وشمیرلی شو، تشکیلوو

$$\begin{aligned} f'(x)|_{x=p} &= \begin{pmatrix} \cos(x_1)x_3 & 0 & \sin(x_1) \\ 0 & e^{x_2}/x_3 & -e^{x_2}/x_3^2 \end{pmatrix}|_{x=p} = \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$g'(y)|_{y=f(p)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1/y_2 \\ 0 & 0 \\ -y_2 \sin(y_1) & \cos(y_1) \end{pmatrix} \Big|_{y=(0,1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

او لاس ته راوړو

$$h'(\pi, 0, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

لیکونکي: هیولیک، کنش

د یوه سکالار تابع $f(x, y)$ لپاره د کړي $t \mapsto (x(t), y(t))^t$ په اوږدو د خنځیر یقانو له مخې باور لري

$$\frac{d}{dt}f = f_x x' + f_y y'.$$

د بیلگې په توګه د

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x = \sin t, \quad y = \cos t$$

لپاره لاندې مشتق لاس ته راځي

$$\frac{d}{dt}f(x(t), y(t)) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos(t) + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} (-\sin(t))$$

سرلیک

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sin(t) \cos(t) - \cos(t) \sin(t)}{1} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

دا یوځای ایښوول شوي تابع

$$f(x(t), y(t)) = \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t)} = 1$$

د سیده مشتق سره خوري یا برابر دی.

لیکونکي: هیولیک، کنش

د یوه پارامتریکې سطحې $(x(s, t), y(s, t), z(s, t))^t$ له لارې د وکتور ارزښتیز تابع

$$(u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z))^t$$
د جاکوب-ماتریکس نسبت واریا بلو (s, t) ته دی:

$$\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(s, t)} = \begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_s & x_t \\ y_s & y_t \\ z_s & z_t \end{pmatrix}$$

د بیلگې په توګه د یوه رادیال تابع

$$(u, v, w) = (x, y, z)/r, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

لپاره د

$$(x, y, z) = (\cos \varphi, \sin \varphi, z), \quad \varphi \in (-\pi, \pi], \quad z \in \mathbb{R}$$

له لارې پارامتریک شوي مخروط پوښ دی

$$\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = r^{-3} \begin{pmatrix} r^2 - x^2 & -xy & -xz \\ -xy & r^2 - y^2 & -yz \\ -xz & -yz & r^2 - z^2 \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\varphi, z)} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi & 0 \\ \cos \varphi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

د $s = \sin \varphi$ او $c = \cos \varphi$ سره په دې اساس لاسته راځي

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(\varphi, z)} &= \\ r^{-3} \begin{pmatrix} r^2 - c^2 & -cs & -cz \\ -cs & r^2 - s^2 & -sz \\ -cz & -sz & r^2 - z^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -s & 0 \\ c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \\ r^{-3} \begin{pmatrix} -sr^2 & -cz \\ cr^2 & -sz \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, &= \end{aligned}$$

د کوم سره چې دی

$$r = \sqrt{1 + z^2}.$$

لیکونکي: بوسلې، هیولیک، کنش

سرلیک

د دې لپاره چې د دواړو توابعو

$$f(u, v) = \begin{pmatrix} u + v \\ u - v \\ u^2 + v^2 - 1 \end{pmatrix}, \quad g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

د $h = g \circ f$ گرادینټ شمېرل کيږي سړی د f د جاکوب-ماتریکس جوړوي

$$f' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2u & 2v \end{pmatrix}$$

په همدې تګه د g گرادینټ

$$\text{grad } g = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} u + v \\ u - v \\ u^2 + v^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

له دې سره د ځنځیري قانون سره لاس ته راځي

$$(\text{grad } h)^t = (\text{grad } g)^t f'$$

$$= 2 \begin{pmatrix} u + v + u - v + 2u(u^2 + v^2 - 1) \\ u + v - u + v + 2v(u^2 + v^2 - 1) \end{pmatrix}^t$$

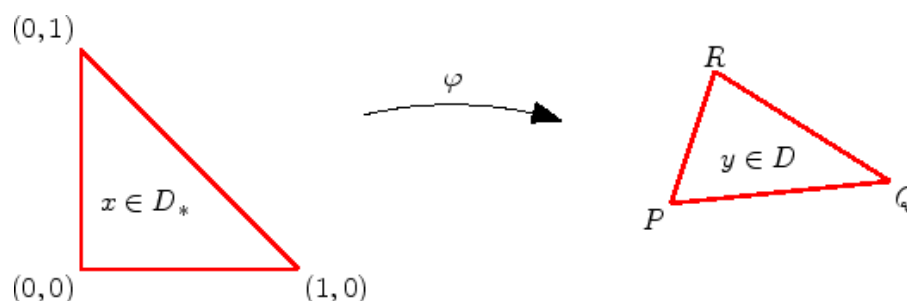
او د ساده کونې وروسته

$$\text{grad } h = 4(u^2 + v^2) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

لیکونکي: بوسلې، هیولیک،

په یوه د رېښوونې D باندې د د یوه رفرنډرېښوونې افین تابع
 $D_* : x_1 + x_2 \leq 1, \quad x_i \geq 0,$
 د ګوډټکو Q , P , او R سره کیدی شي په
 لاندې بڼه ولیکل شي

$$y = \varphi(x) = p + (q - p)x_1 + (r - p)x_2$$



افین تبع د جاکوب-ماتریکس لري

$$\frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x_1, x_2)} = (q - p, r - p).$$

له دې سره د یوه سکالار تابع $h(x) = g(\varphi(x))$ څخه لاسته راځي

$$(\text{grad } h(x))^t = (\text{grad } g(y))^t \begin{pmatrix} q_1 - p_1 & r_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 & r_2 - p_2 \end{pmatrix}.$$

دا تر اسفورمیشن د نورو ترڅنګ د سټیفیګکایتماتریکسونو Steifigkeitsmatrizen په
 لیکنوکې د فینیت-توکو-تګلار Finite-Elemente-Verfahren ته اړینه ده.

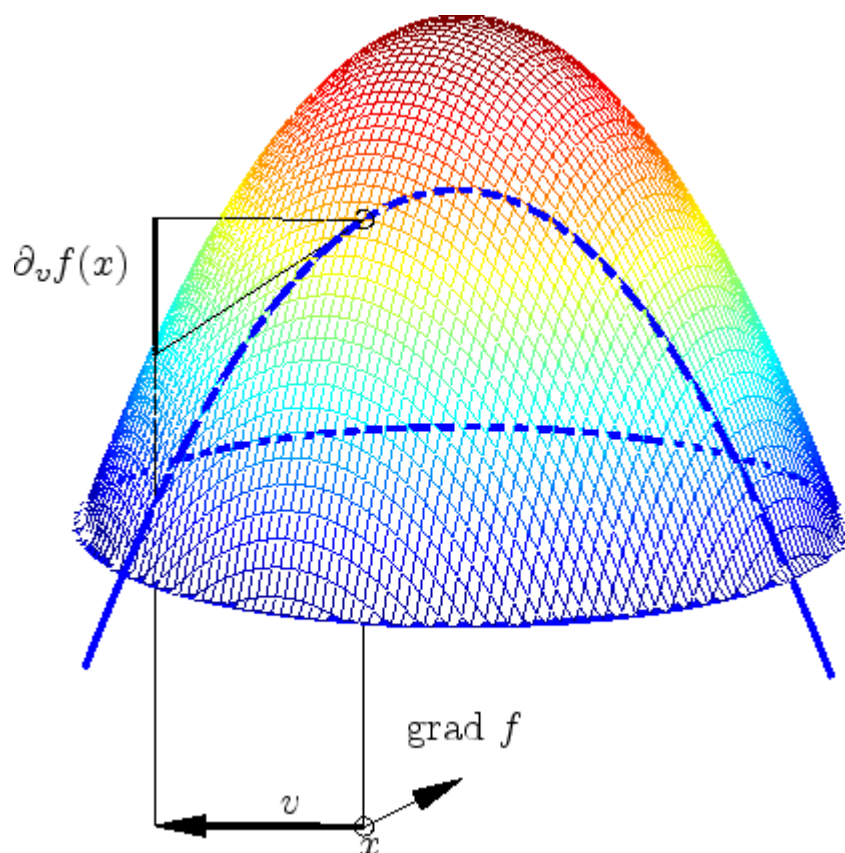
لیکونکي: بوسلی، هیولیک، کنیش

سرلیک

د یوه تابع لوریز مشتق

د یوه فنکشن یا تابع f مشتق د یوه وکتور v په لړۍ

$$\partial_v f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + hv) - f(x)}{h}.$$



دا کیدی شي د جاکوب-ماتریکس f' په مرسته د ځنځیر یقانون په بنسټ د

$$\left(\frac{d}{dt} f(x + tv) \right)_{t=0} = f'(x)v$$

له لارې وشمیرل شي. په ځانګړې توګه $\partial_{e_\nu} f$ د e_ν سره د ν — یوونوکتور (واحدوکتور) ټوټه مشتق دی نسبت و ν — م کواوردینات ته.

د سکار تابع تابع لپاره دی

$$\partial_\nu f = (\text{grad } f(x))^t.$$

لکه څنګه چې په مشتق کې متشکلی، لوریز مشتق شتون لري په دې حالت کې له f د $v \parallel \text{grad } f(x)$ په لور. لوکال تغیر د لپاره ما کسیمال دی.

(Autoren: Höllig/Knesch)

د تابع

$$f(x, y) = x^2 y^3$$

لوریز مشتق په ټکي $(x, y) = (2, -1)$ کې شمیرل کېږي. د دې لپاره لومړی

$$\text{grad } f(x, y) = \begin{pmatrix} 2xy^3 \\ 3x^2y^2 \end{pmatrix}.$$

ټاکو.

د معلوم کواوردینات د ځای په ځای کولو وروسته د یوه لور $v = (a, b)^t$ لپاره لاسته راځي

$$\partial_\nu f(2, -1) = (-4, 12) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -4a + 12b.$$

لوریزوکتور د

سرلیک

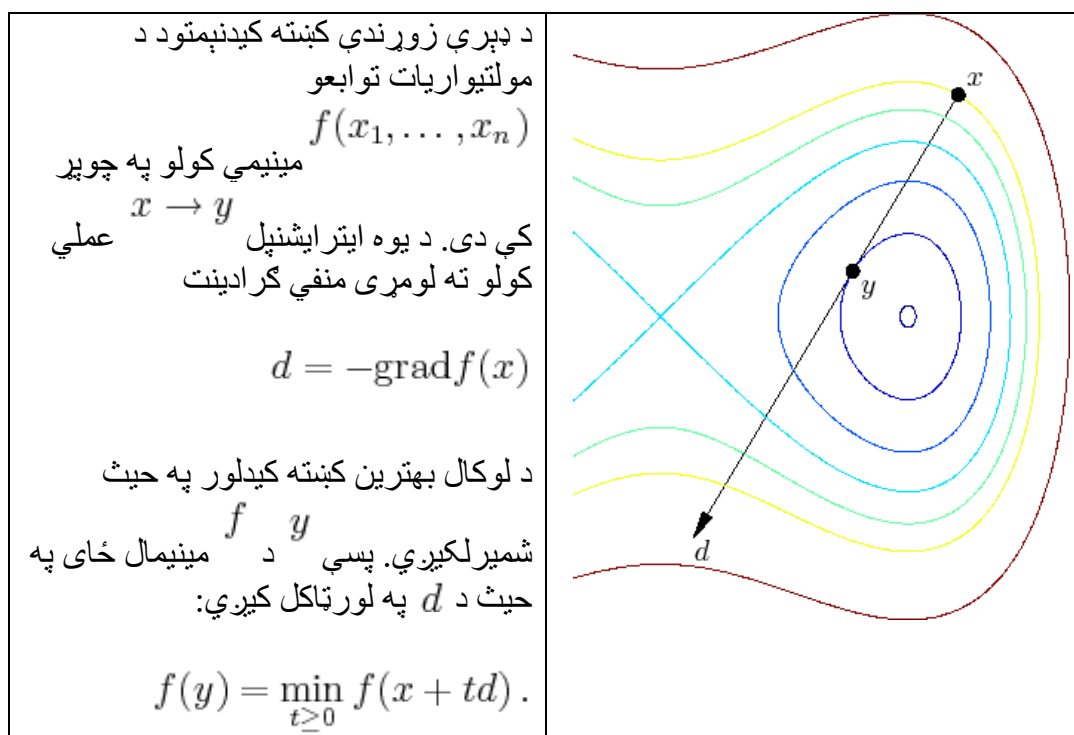
$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \end{pmatrix}$$

لپاره ماکسیمال کیري، نو د بیلگي په توگه $v = (-1, 3)$ په لومړۍ نږدېونه کې له دې سره

$$f(2 - t, -1 + 3t) \approx f(2, -1) + t \partial_v f(2, -1) = -4 + 40t$$

د f خورا لویه ځایزه یا لوکال جگینه په گوته کوي یا تشریح کوي

د ډېرې زوړندې یا کښته کیدنې متود



لکه په تابع یا څیره کې چې انځور دی، لټونلور و نیوو ډېرې **Niveaumenge** ته د x له لارې اور توگونال ده او تابع د نیوو ډېرې په y کې یوه کوچني ارزښت ته لمسوي

یادونه : د نیو **Niveaumenge** یا روښانه ونه (ژباړی): پېشمیرنه کې د یوه سکالار پټي یا ورشو ټولو ډېریو یا ستونو ټکي، چې هغه همغه ارزښت سره ترتیب یا تنظیم وي. پای.

د خورا زوړندکېښته کیدني متود له لارې تولید شوي پرلپسې $x_0, x_1, \dots$ کونورگنت کیدی شي د ډېرې ټولیزې نیوني سره وښوول شي. پوره کیدونکی دی، که f د کښته لور ته محدود وي او $\text{grad } f$ په یوه د ډېرې په یوه چاپیریال U کې لېږښت-ناپریکیدونکي وي، دا په دې معنا چې

$$\|\text{grad } f(x) - \text{grad } f(\tilde{x})\| \leq L\|x - \tilde{x}\|, \quad x, \tilde{x} \in U.$$

باور لري

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \|\text{grad } f(x_\ell)\|^2 < \infty.$$

دا په ځانګړې توګه دې کې خوندي ده، چې د پرلپسې $x_0, x_1, \dots$ هر پدغالي ټکی د f یو انحرافي یا بهتره افراطي ټکي دی. دا چې دا یو ځاییز یا لوکال مینیموم دی ستاتیسټیکي په اطمینان، مګر نه جبراً ترې لاسته راځي.

په الګوریتم کې یو بعدي یا یو پراخېدونکی مینیموم اړتیا ده چې فقط په نږدې توګه وګرځي شي. لټونلور d باید نه دي چې د کمیز یا منفي ګرادیېنټ په څیرو ټاکلی شي او یوه ځیزه مینیموم ځای y و نه ټاکلشي. د کونورگنت لپاره په ساده توګه پریکړېدې، چې هر ایتراشنل سره د تابع ارزښت یو ریکشن و $\|\text{grad } f(x)\|^2$ ته متناسب ورسیدای شي.

(Autoren: Höllig/Hörner/Pfeil)

د یوه مربع تابع

سرلیک

$$f(x) = \frac{1}{2}x^tAx - b^tx$$

لپاره د یوه سیومتريک زیاتیز یا مثبت دیفینیت ماتریکس A سره یوایتریشنیل لري د ډېر زور نندجگیدني بني متود سره

$$y = x + td, \quad d = -\text{grad}f(x) = b - Ax, \quad t = \frac{d^td}{d^tAd}.$$

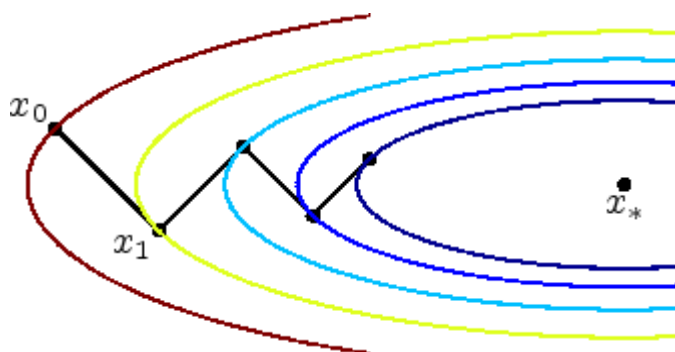
د

$$\begin{aligned} f(x + td) &= \frac{1}{2}(x + td)^tA(x + td) - b^t(x + td) \\ &= \frac{1}{2}d^tAdt^2 + (x^tAd - b^td)t + c \end{aligned}$$

مینیموم کیدی شي په دې حالت کې ا کسپلیخیت یا روښانه توگه ورکړ شي. د t پسې مشتق صفر ځایونوله لاري لسته راځي

$$0 = d^tAdt - \underbrace{(b - Ax)^td}_d$$

اوله دې سره د نیمکر بنیز پارامتر t لپاره فرمول.



تابع چې بنایي، کیدی شي ناغوبنډلو ریډنډو یا Oszillationen ته راښي، که A اېکنارزېست قوي توپیر کیدونکی د لوي نظم لري. یوه افراطي پیلگه د

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 100 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

لپاره لاسته راځي.

$$x = \begin{pmatrix} c & 1 \end{pmatrix}^t \quad \text{د لپاره دی}$$

$$d = - \begin{pmatrix} c \\ 100 \end{pmatrix}, \quad Ad = - \begin{pmatrix} c \\ 10^4 \end{pmatrix}$$

او

$$d^t d = c^2 + 10^4, \quad d^t Ad = c^2 + 10^6, \quad t = \frac{c^2 + 10^4}{c^2 + 10^6}.$$

له دې سره لرو

$$y = \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{c^2 + 10^4}{c^2 + 10^6} \begin{pmatrix} c \\ 100 \end{pmatrix} = \frac{99c^2}{c^2 + 10^6} \begin{pmatrix} 10^4/c \\ -1 \end{pmatrix}.$$

په رښتیا د $c = 100$ لپاره لرو

$$y = \frac{99}{101} \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}.$$

1%

سری پیژني، چې مینیموم ته د واټنونو په هر ایترایشنپل کې په سرجینه کې فقط له په کچه کمیږي.

په ځټ- يا برعکس تابع Umkehrfunktion

دې د يوه ټکي x_* په چاپيريال کې ناپريکيدونکی مشتقور تابع وي
 $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$
 د انورتيري جاکوبي-ماتريکس $f'(x_*)$ سره.

نو f د x_* په يوه چاپيريال U کې بيجکتيو دی، دا په دې معنا چې يو ناپريکيدونکی
 $g = f^{-1}$
 مشتقور برعکستابع شتون لري د

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y), \quad x \in U.$$

سره.

له دې برسیره د جاکوبي-ماتريکس

$$g'(y) = f'(x)^{-1}$$

لپاره باور لري، د ټولو $x \in U$ لپاره.

(Autoren: Höllig/Streit)

مسوات $f(x) = y$ کړی شي د يوه ټکي (x_*, y_*) په چاپيريال

$$U \times V = \{x : |x - x_*| \leq \delta\} \times \{y : |y - y_*| \leq \varepsilon\}$$

کې د لیترايشن

$$x \leftarrow \varphi(x) = x - f'(x_*)^{-1}(f(x) - y)$$

سره د بانخ Banach ځاي په ځاي يا فيکس ټکي جملې سره حل شي.

دې ته بنوول کيږي، چې φ د کره لپاره یو را ټول شوی kontrahierende ځانیزه تابع ده په U .

د کنوتراکشن ثابته کیدی شي د $\sup_{x \in U} \|\varphi'(x)\|$ له لارې تخمین شي، داسې چې د اویکلید یا اقلیدس نورم $\|\cdot\|$ باندې تنظیم ماتریکس نورم وکارول شي. د

$$\begin{aligned} \|\varphi'(x)\| &= \|E - f'(x_*)^{-1}f'(x)\| \\ &= \|E - f'(x_*)^{-1}[f'(x_*) + f'(x) - f'(x_*)]\| \\ &= \|f'(x_*)^{-1}(f'(x) - f'(x_*))\| \end{aligned}$$

له امله دیوون – یا وادماټریکس E سره $\leq c < 1$ سوپریمومو دی د پوره کوچني δ لپاره، ځکه چې $f'(x) \rightarrow f'(x_*)$ د $x \rightarrow x_*$ لپاره.

خوندي لرنه يا Die Inklusion $\varphi(U) \subseteq U$ د

$$\varphi(x) - x_* = x - x_* - f'(x_*)^{-1}(f(x) - f(x_*) + y_* - y).$$

نورم د تخمین له لارې لاسته راځي.

سرلیک

د f د ناپریکیدني او مشتقووالي په بنسټ باور لري

$$f(x) - f(x_*) = f'(x_*)(x - x_*) + R, \quad |R| = o(|x - x_*|).$$

د دې په تعقیب دی

$$|\varphi(x) - x_*| \leq \|f'(x_*)^{-1}\|(o(\delta) + \varepsilon) \leq \delta$$

د پوره کوچني δ ($o(\delta)/\delta \rightarrow 0$) او ε لپاره

$y \in V$

له دې سره د باناخ ځایي ځای ټکي جملې نیونې یا فرضیپوره دي، او د ټولو لپاره د لاندې سره x شتون لري د لاندې سره

$$x = x - f'(x_*)^{-1}(f(x) - y) \Leftrightarrow f(x) - y = 0,$$

دا په دې معنا چې سری کړی شي مساوات د x پسې حل کړي:

$$g(y) = f^{-1}(y) = x$$

.

فورمال د $x = g(f(x))$ مشتق له لارې د ځنځیري قانون سره سم لاس ته راځي

$$E = g'(y)f'(x).$$

د g د جاکوبي-ماتریکس د f د جاکوبي-ماتریکس معکوس دی. د دې لپاره چې دې فرمولتیکلوی د ازمايو، د

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$

لپاره د $x, x + \Delta x \in U$ سره لیکو

$$g(y + \Delta y) - g(y) - f'(x)^{-1}(\Delta y) = \Delta x - f'(x)^{-1}[f(x + \Delta x) - f(x) + |\Delta x|/2] = f'(x)^{-1}R$$

د $R = o(|\Delta x|)$ سره د f مشتق‌وړوالي په بنسټ. دا پاتې دي چې وښوولشي، چې

$$|\Delta y| \quad |\Delta x|$$

له لارېکیدی شي تخمین یا اټکل شي.

دا له

$$\Delta x = f'(x)^{-1}(\Delta y - R)$$

لاس ته راځي

د $\|f'(x)^{-1}\|$ په U محدودیت له امله:

$$|\Delta x| \leq c^* (|\Delta y| + o(|\Delta x|)) \leq \tilde{c} |\Delta y|$$

د پوره کوچني $|\Delta x|$ لپاره د ثابتو c^* او $\tilde{c}$ سره.

(Autoren: Höllig/Streit)

و دې څیرل شي، چې ایا تابع

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \\ x/y \end{pmatrix}$$

سرلیک

په ټکي $(x, y) = (2, 1)$ کې لوکال معکوسوړ ده. د دې لپاره لومړی د جا کوبي – ماتریکس

$$f'(x, y) = \begin{pmatrix} y & x \\ 1/y & -x/y^2 \end{pmatrix}.$$

جوړیږي.

تر څیړنې لاندې ټکي کې دی

$$Jf = f'(2, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\det J = -4 \neq 0$$

د له امله د

$$\begin{pmatrix} u_* \\ v_* \end{pmatrix} = f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

په چاپیریال کې یو معکوس تابع g شتون لري

د دهجاکو بیماټریکس په ټکي (u_*, v_*) کې دی

$$g'(2, 2) = J^{-1} f = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

په دې ساده بیلگه کې کیدی شي g د افادود حلولنو له لارې د u او v لپاره د x او y پسي ایکسپلیسیټ explizit ورکړي:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = g(u, v) = \begin{pmatrix} \sqrt{uv} \\ \sqrt{u/v} \end{pmatrix}.$$

له دې سره سری کړی شي چې فرمول د $g'(2, 2)$ لپاره په سیده لاره و ازمایي.

(Autor: Höllig)

کومپلکس اکسپوننشل تابع

$$z = x + iy \mapsto \exp(z) = u + iv$$

کیدۍ شي ریل یا حقیقي د

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(x) \cos y \\ \exp(x) \sin y \end{pmatrix}$$

په څیر ولیکي او دجاکوبي-ما تریکس

$$f'(x, y) = \exp(x) \begin{pmatrix} \cos y & -\sin y \\ \sin y & \cos y \end{pmatrix}.$$

د $\det f'(x, y) = \exp(2x) > 0$ له امله د هر ټکي $(u, v)^t$ په چاپیریال یو

برعکستابع g (د کمپلکس لوگاریتم) شتون لري د لاند/ط مشتق سره

$$g'(u, v) = (f'(x, y))^{-1} = \exp(-x) \begin{pmatrix} \cos y & \sin y \\ -\sin y & \cos y \end{pmatrix}.$$

یو گلوبال برعکس تابع د

سرلیک

$$f(x, y + 2\pi k) = f(x, y), \quad k \in \mathbb{Z},$$

له امله شتون نه لري. د پریودیوالي یا تل بېرته را ګرځیدني له امله هر ټکي $(u, v) \neq (0, 0)$ ناپای ډیر ترمخ عکسونه لري.

(Autoren: Boßle/Höllig/Streit)

په پولار کوارډیناتو باندې اړولو سره،

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

د کوارډینات x پسې د وړانګې ټوټه مشتق لپاره باور لري

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r} = \cos \varphi.$$

له بله پلوه له $r = x / \cos(\varphi)$ لاسته راځي

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{\cos(\varphi)}.$$

د دې برېښنده تضاد لپاره دلیل دا دی، چې د ټوټه مشتق شمېرنې له لارې همغه اووښتوني

ثابتي نه شي ساتل کیدی. په لومړي مساوات کې ثابت دی او په دویمې کې φ . په دواړو

حالتونو کې تغیر وخور او اغیزه یې په r کې وکتل شوه. دلته ټکی (x, y) هر ځل په

پرته لور یا همداسې د کونج φ سره مایل کربنه حرکت کوي. په ورته توګه ځاییز یا لوکال توګه د r تغیر مختلف دی.

سرلیک

د سکالار مشتق قانون

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dx}{dy} \right)^{-1}$$

طبعاً د هر ټوټه مشتق لپاره باورنه لري. د يوه بيجکټيو تابع

$$(x, y) \leftrightarrow (u, v)$$

لپاره په ټوليزه توگه

$$x_u \neq (u_x)^{-1}.$$

دی، له دې ورزیات باید د تابع

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix},$$

جاکوبي-ماتریکس رامنځ ته شي:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}^{-1}.$$

په دې راوړې بیلگه کې

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

دی.

سرلیک

معکوس مشتق د x او y پسې لاندې توه مشتق لري:

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\frac{1}{r} \sin \varphi & \frac{1}{r} \cos \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_x & r_y \\ \varphi_x & \varphi_y \end{pmatrix}.$$

$r_x = \cos \varphi$ په ځانگړې توگه لرو، چې

(Autoren: Boßle/Höllig/Knesch)

ایمپلیخیت توابع

که د یوه ناپریکیدونکیمشتقور تابع

$$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

لپاره وي

$$f(x_*, y_*) = 0, \quad \det f_x(x_*, y_*) \neq 0,$$

نودا مساوات سیستم

$$f_\nu(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0, \quad \nu = 1, \dots, n,$$

د y_* په یوه چاپیریال کې د x پسې حل کړئ:

$$x = \varphi(y).$$

ایمپلیخیت تعریف شوی تابع φ د x_* په یوه چاپیریال کې ناپریکیدونکی مشتقور دی او دا لاندې جاکوبي-ماتریکس لري

$$\varphi' = -(f_x)^{-1} f_y.$$

په ورته توگه د توابعو

$$f_j(x_1, x_2, \dots, x_{n+m}), j = 1, \dots, n,$$

لپاره باور لري د اووبنتونو يا متحولو د پرموتيشن پسې، دا په دې معنا چې سړی کړی شي په $x_{j_1}, \dots, x_{j_n}$ پسې يې حل کړي، که د جاکوبي-ماتريکس f' درخ يا مټه $j_1, \dots, j_n$ کرښيز خپلواکه وي.

(Autoren: Höllig/Streit)

توابع

$$(x, y) \mapsto u(x, y) = (f(x, y), y)$$

په ټکي (x_*, y_*) کې د په خټ تابع جملې وړاندنيونې پوره کوي. په ځانگړې توگه د x اووبنتونو گڼون يا تعداد د f د کمپوننتونو تعداد په گوته کوي، او

$$u'(x_*, y_*) = \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ 0 & E \end{pmatrix}_{|(x_*, y_*)},$$

د E سره يوونماتريکس، په خټ-يا برعکس کيدونکيدی. له دې امله سړی کړی شي

$$(\varphi(y), y) = u^{-1}(0, y)$$

کيږدي، د u^{-1} سره د u ناپريکيدونکی مشتقور برعکس تابع.

سرلیک

د جاکوبي-ماتریک ساکسیلیت فرمول له

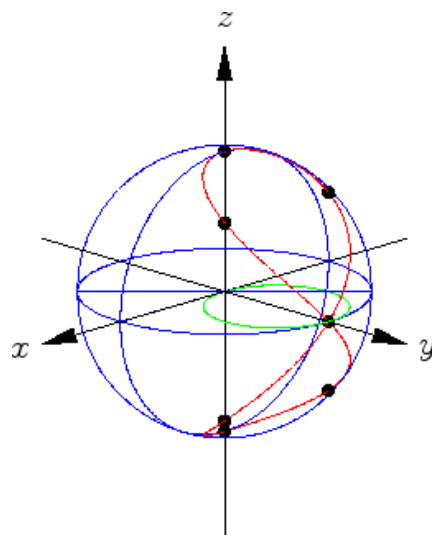
$$0 = (f(\varphi(y), y))_y = f_x \varphi' + f_y.$$

لاسته راځي.

د ویوانی Vivianische کره یا منحنی

$$C: t \mapsto \begin{pmatrix} \sin t \cos t \\ \sin(2t) \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi),$$

د توتی یا استوانی سره د یوونفضا د غوڅي له لارې لاسته راځي.



په ایمپلیسیت بڼې کره د

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \\ g(x, y, z) &= x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0 \end{aligned}$$

له لارې انځور ور ده. د ایمپلیڅیتتابع جملېسره سری کری شي د جاکوبي-ماتریکس

$$\begin{pmatrix} f_x & f_y & f_z \\ g_x & g_y & g_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2x & 2y - 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

لرلو سره پریکړه وکړي، چې ایا کړه ځان لوکال یا ځاییزد کواوردینات x, y, z څخه د یوې له لارې پارامتریک کیدی شي.

نسبت x ته پارامتریکولو لپاره، دا په دې معنا چې د y او z پسې حلونه پوره کیدونکېده، داسې چې

$$\frac{\partial(f, g)}{\partial(y, z)} = \begin{pmatrix} 2y & 2z \\ 2y - 1 & 0 \end{pmatrix}$$

برعکس ور ده. دا د $z \neq 0$ او $y \neq 1/2$ لپاره حالت دی. سری لاسته راوړي

$$y(x) = \frac{1}{2} + \delta \sqrt{\frac{1}{4} - x^2}, \quad z(x) = \delta' \sqrt{\frac{1}{2} - \delta \sqrt{\frac{1}{4} - x^2}}.$$

چیرته چې په اړونده توگه د یوگونو بڼاخونو مخنځینه $\delta, \delta' \in \{-1, 1\}$ باید و ټاکل شي.

په ریښتوني دا پارامتریک کونه په ټکو $(0, 1, 0)^t$ ،
 $(\pm 1/2, 1/2, \mp \sqrt{2}/2)^t$ $(\pm 1/2, 1/2, \pm \sqrt{2}/2)^t$
 او سینګرلارده. د x پسې

سرلیک

پارمټریک کوني لپاره هندسي اړین دی، چې د تانجنت لور و $(1, 0, 0)^t$ ته ارتوگونال نه ده، دا په دې معنا چې یو ناساده کمپوننت د x په لور لري.

په ورته توګه نسبت y او z ته د پارامټریکوروالي لپاره پوره کیدونکی شرطونه لاس ته راځي.

په ټکي $(0, 1, 0)^t$ کې لوکال پارمټریک کیدنه شتون نه لري. کړه دلته ډبل ټکی لري. د جاکوبي-ماتریکس

$$\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y, z)} \Big|_{(0, 1, 0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

فقط رانګ 1 لري.

د n متحولې یا اووښتونې یوه سکالار تابع f لپاره دا جمله د ایمپلیټ توابعوپه هکله وایي، چې مساوات

$$f(x_1, \dots, x_n) = 0$$

د $x \approx x_*$ لپاره د x_k پسي حلکیدۍ شي، که $\partial_k f(x_*) \neq 0$.

د روښانه بیلګې په توګه مساوات

$$f(x, y, z) = xe^y - yz = 0$$

راوړو. ګرادیېنت دی

$$(f_x, f_y, f_z)^t = (e^y, xe^y - z, -y)^t.$$

د $f_x > 0$ له امله $f = 0$ د ټولو (x, y, z) لپاره د x پسې حل ور دی. دا د مساوات

$$x = yze^{-y}$$

پسې تړلي هم لیدل کیدی

په ورته توګه کتل کیري، چې د z پسې حل د $y \neq 0$ لپاره هم ممکن دي.

په y پسې مسات ساده نه شي حل کیدی. د ایمپلیسیت توابعو په هکله جمله د (x_*, y_*, z_*) په یوه چاپیریال کې تضمینوي که

$$f_y(x_*, y_*, z_*) = x_* e^{y_*} - z_* \neq 0.$$

دا د بیلګې په توګه د مساوات د حل $(0, 0, 1)$ لپاره پوره دی:

$$f_y(0, 0, 1) = -1.$$

په تعقیب یی یو تابع φ شتون لري د

$$f(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x, z), \quad (x, z) \approx (0, 1).$$

سره.

سره له دې چې φ اکسپلیسیت د ورکړي وړ نه دی، کیدی شي ګرادیېنت و ټاکل شي:

$$0 = f(x, \varphi(x, z), z) \implies 0 = f_x + f_y \varphi_x, \quad 0 = f_z + f_y \varphi_z.$$

سرلیک

د راوړل شوي ټکي (x_*, y_*, z_*) کې باور لري

$$\begin{aligned}\varphi_x(0,1) &= -f_x(0,0,1)/f_y(0,0,1) \\ &= 1/(-1) = -1\end{aligned}$$

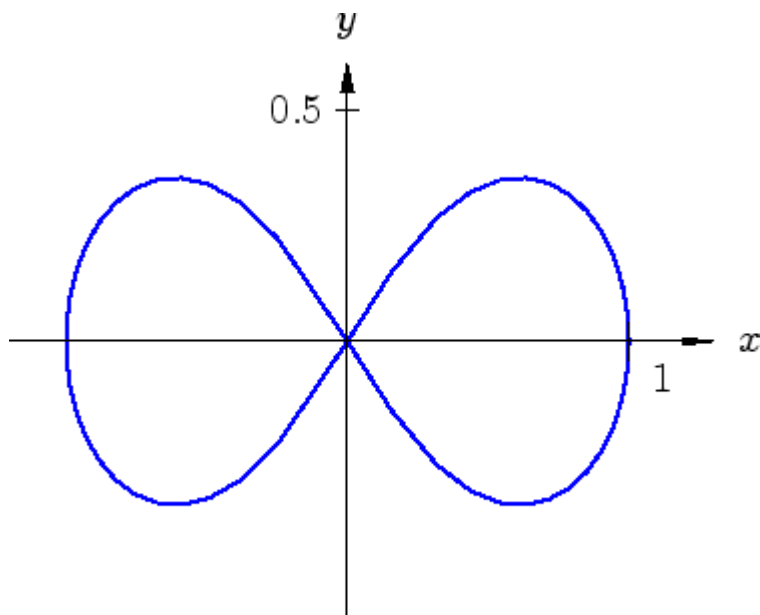
$$\begin{aligned}\varphi_z(0,1) &= -f_z(0,0,1)/f_y(0,0,1) \\ &= 0/(-1) = 0.\end{aligned}$$

(Autor: Höllig)

د بیواریاتت پولینوم p لپاره د

$$p(x, y) = 0$$

له لارښووه الجبري کړه تعریفیږي. که درجه $p \neq 0$ وي، نو یا x لوکال یو د y تابع دی او یا په خټ. په ټکو کې چې درجه یې ورکیدونکې وي کیدی شي کړه یو سینګولاریټي ولري



د $p(x, y) = y^2 - x^2 + x^4 = 0$ له لارې تعریف شوي لیمنیسکاتي ګرادینټ

$$\text{grad } p(x, y) = (-2x + 4x^3, 2y)^t$$

فقط په $(0, 0)$ کې په ورکيږي. لکه په څیره کې چې کنټل کيږي، نه شي کیدی چې
کږه یواځنئ په x پسې یا په y پسې حل شي.

په دې $(1, 0)$ ټکي او $(-1, 0)$ کې تانجنټ و x -محور ته ولاړ یا عمود دی. کږه
کری شي لوکال فقط په x پسې حل شي:

$$x = \sigma \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - y^2}}$$

سرلیک

د $x = \sigma \in \{-1, 1\}$ په چاپیریال کې. برعکس کیدی شي کړه په ټکو
 $\pm(1/\sqrt{2}, 1/2)$ کې لوکال فقطد x تابع په څیر نه د y په څیر ورکړ شي:
 $y = \pm\sqrt{x^2 - x^4}.$

په نورو ټول ټکو (x_0, y_0) کې کیدی شي چې سری یې هم د x او یا y پسې حل کړي.

بیلگه

$$\frac{dy}{dx} = -p_y^{-1} p_x = \frac{4x^3 - 2x}{2y}$$

ده او

$$y - y_0 = \frac{4x_0^3 - 2x_0}{2y_0} (x - x_0)$$

په ټکی (x_0, y_0) کې د تانجنت مساوات دي.

(Autoren: Höllig/Streit)

په ناکرېټیز مساواتسیستم کې د مخ ته بیوني متود

په یوه د پارامتر تابع مساواتسیستم کې

$$f(x, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R},$$

د ناپریکيدونکیمشتقور f ټوټه جاکوبي-ماتریکس f_x سره ناسینګولار دی، نو حلونه

ناپریکیدونکی مشتقور د t په واک کې دي. په ځانګړې توګه کیدی شي کرېنیز تیلور-ودیزونه

$$x(t+h) \approx x(t) - f_x(x,t)^{-1} f_t(x,t)h$$

د ګاونډیو اپروکسیمیشن لپاره وکارول شي.

دا متود زیات وخت د نیوټن-تګلار د پیل ارزښت د Generierung ته کارول کيږي لیکوال: هیولیګ، سترایت

د تیلور اپروکسیمیشن Taylor-Approximation

Approximation (لاتین: هغه بل، شمیرپوهنیزه تری پوهیدنه(مفهوم) نږدېوالی)

د یوه ټکي په چاپیریال کې یو $(a_1, \dots, a_m)(n+1)$ -خړه ناپریکیدونکی مشتقور د m متحولو x_i سکالار تابع f کیدی شي د یوه تیلور-پولینوم له لارې د ټوټال درجې له لارې اپروکسیمیشي:

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \leq n} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(a) (x-a)^\alpha + R, \quad |x-a| < r,$$

$$\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_m! \quad \text{د سره.}$$

پاتې غړی لاندې بڼه لري

$$R = \sum_{|\alpha|=n+1} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(u) (x-a)^\alpha, \quad u = a + \theta(x-a),$$

$$\theta \in [0, 1] \quad \text{د یوه لپاره.}$$

سرليک

د بنوونې لپاره د m متحولو د يوه تابع د تیلور وده په یونیواریات حالت بیرته اړولکیري. سری بي د تولیزو بندیزونو $a = 0$ راوړي او داسې یې ځای پ ځای کوي

$$f(x_1, \dots, x_m) = f(tx_1, \dots, tx_m)|_{t=1} = g(t)|_{t=1}.$$

د یونیواریات تابع $g(t)$ لپاره د تیلور وده په صفر ټکي کې ده

$$g(t) = g(0) + g'(0)t + \dots + \frac{1}{n!}g^{(n)}(0)t^n + R$$

د

$$R = \frac{1}{(n+1)!}g^{(n+1)}(\theta t)t^{n+1}, \quad \theta \in [0, 1].$$

سره.

د ځنځیري قانو پسې لرو

$$\begin{aligned} g(0) &= f(0) \\ g'(0) &= \sum_j (\partial_j f(0))x_j \\ g''(0) &= \sum_i \sum_j (\partial_i \partial_j f(0))x_i x_j \\ &\vdots \end{aligned}$$

دا په دې معنا چې k -م مشتق m^k ترمونه لري. له دوي څخه هغه راټولیري، په کومو کې چې د یوگونو متحولو پسې برابرزیات واره مشتق ونیول شي.

$$m = 2, \quad k = 5$$

د بیلگې په توګه د ټولو مشتقونو لپاره، کوم چې درې واره د لومړي کمپوننت او دوه واره د دویم کمپوننت پسې مشتق شوی دی، سری

$$\partial_1 \partial_1 \partial_1 \partial_2 \partial_2, \partial_1 \partial_2 \partial_1 \partial_2 \partial_1, \partial_1 \partial_2 \partial_2 \partial_1 \partial_1, \dots$$

$$\partial^\alpha, \alpha = (3, 2)$$

یوځایر اوري. په ټولیزه توګه په دې کنکریټ حالت کې ټوټه مشتق

$$\binom{5}{3} = 5! / (3! 2!)$$

ترمونه دي. په ټولیزه توګه

$$\binom{k}{\alpha_1} \cdot \binom{k - \alpha_1}{\alpha_2} \dots \binom{k - \alpha_1 - \dots - \alpha_{m-1}}{\alpha_m} = k! / (\alpha_1! \dots \alpha_m!)$$

ترمونه دي، که د ν -م کمپوننت پسې یې α_ν -خله مشتق ونيول شي.

که د تابع $g(t)$ دا پورته شمیرل شوي مشتقونه د ټیلور-وډیزینه کې کېږدو، ضریب یا

ځلونی $k!$ لندیري او سری لاسته د f غوښتونېوډیزینه راورې.

لیکونکي: بوسلي، هیولیک، شترایت

د یوه دوه متحولو تابع لپاره ټیلور-وډیزینه دا لاندې بڼه لري

$$f(x, y) = f + f_x (x - x_0) + f_y (y - y_0) =$$

$$+ \frac{f_{xx}}{2} (x - x_0)^2 + f_{xy} (x - x_0) (y - y_0) + \frac{f_{yy}}{2} (y - y_0)^2$$

$$+ \frac{f_{xxx}}{6} (x - x_0)^3 + \frac{f_{xxy}}{2} (x - x_0)^2 (y - y_0)$$

$$+ \frac{f_{xyy}}{2} (x - x_0) (y - y_0)^2 + \frac{f_{yyy}}{6} (y - y_0)^3 + R,$$

سرلیک

چې مشتق یې تل په ټکي (x_0, y_0) کې ارزښتول کېږي.
د بیلګې په توګه د

$$f(x, y) = \sin(x - \omega y)$$

او د $(x_0, y_0) = (0, 0)$ لپاره د

$$\partial_x^\alpha \partial_y^\beta f(0, 0) = \sin^{(\alpha+\beta)}(0) (-\omega)^\beta$$

له امله اېروکسیمیشن

$$\sin(x - \omega y) =$$

$$= x - \omega y - \frac{1}{3!} \underbrace{(x^3 - 3\omega x^2 y + 3\omega^2 x y^2 - \omega^3 y^3)}_{(x - \omega y)^3} + R$$

د

$$R = \frac{1}{4!} (f_{x^4} + 4f_{x^3 y} + 6f_{x^2 y^2} + 4f_{x y^3} + f_{y^4})(\theta(x, y))$$

$$= \frac{1}{4!} (x - \omega y)^4 \sin(\theta(x - \omega y)),$$

سره د یوه $\theta \in [0, 1]$ لپاره لاسته راوړي.

په بدیل ډول سړی د تیلور-پولینوم د $t = x - \omega y$ ځای په ځای کولو له لارې لاسته راوړي د ساین تابع په یوه بعدیز لړۍ انځورونه کي:

$$\sin(t) = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots$$

د $t = x - \omega y$ سره لاس ته راځي

$$f(x, y) = (x - \omega y) - \frac{1}{3!}(x - \omega y)^3 + \frac{1}{5!} \cos(\theta)(x - \omega y)^5,$$

چېرته چې د یونیوارینت پاتې غړي انځورونه کا رول کيږي لیکونکي: بوسلی، هیولیگ، شترایت

د بیلگې په توګه پولینوم

$$f(x, y, z) = z^2 - xy$$

د $(0, -2, 1)$ په ځای کې وډیز کيږي یا تکامل ورکول کيږي. دا له صفر سره نابرابر مشتقونه دي

$$f_x = -y, f_y = -x, f_z = 2z, f_{xy} = -1, f_{zz} = 2.$$

په وډیزونټیکي ارزونې د تیلور-انځورونې

$$1 + 2x + (-0)(y + 2) + 2(z - 1) + (-1)x(y + 2) + \frac{1}{2}2(z - 1)^2,$$

سرلیک

لاس ته راځي، کوم چې طبعاً د f سره همغږیز دی.

په بدیل ډول کیدی شي وديزینه د بنهېدلون له لارې هم وکتلی شول

$$y + 2 = \eta, \quad z - 1 = \zeta$$

او لاس ته راشي

$$f(x, y, z) = (\zeta + 1)^2 - x(\eta - 2) = \zeta^2 + 2\zeta + 1 - x\eta + 2x.$$

د هسي ماتریکس Hesse-Matrix

په ټکي $(a_1, \dots, a_n)$ کې د یوه سکالار تابع f مربعیز تیلور-اپروکسیمیشن کیدی شي په بڼه

$$f(x) = f(a) + (\text{grad } f(a))^t (x - a) + \frac{1}{2}(x - a)^t H f(a)(x - a) + O(|(x - a)|^3)$$

ولیکل شي، د کوم سره چې د سیمتریک هسي-ماتریکس

$$H f(a) = \begin{pmatrix} \partial_1 \partial_1 f(a) & \cdots & \partial_1 \partial_n f(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_n \partial_1 f(a) & \cdots & \partial_n \partial_n f(a) \end{pmatrix}$$

دویم مشتق خوندي لري.

لیکونکي: بوسلي، هیولیگ، شترایت

کټمټوالی د تیلور-وډیزیني د مربع ترمونو د Umschreiben له لارې منځ ته راځي. په بیواریات حالت کې ($n = 2$)

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= f + f_x(x - x_0) + f_y(y - y_0) \\
 &+ \frac{1}{2!} (f_{xx}(x - x_0)^2 + 2f_{xy}(x - x_0)(y - y_0) + f_{yy}(y - y_0)^2) + R \\
 &= f + f_x(x - x_0) + f_y(y - y_0) \\
 &+ \frac{1}{2!} ((x - x_0), (y - y_0)) \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (x - x_0) \\ (y - y_0) \end{pmatrix} + R,
 \end{aligned}$$

دی، د کوم سره چې په بنی اړخ د تابع تعریفیږي (x_0, y_0) پریښوول شي یا ونه لیکل شي. باقي یا پاتېغري

$$R = \sum_{|\alpha|=3} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(u, v) (x - x_0)^{\alpha_1} (y - y_0)^{\alpha_2},$$

د

$$(u, v) = (1 - \theta)(x_0, y_0) + \theta(x, y)$$

سر د $\theta \in [0, 1]$ لپاره د لوي نظم $O(|(x, y)|^3)$ دی.

په ټوليز حالت کې شوونه په ورته تګه ده.

لیکونکي: هیولیګ، شترایت

د تابع

سرلیک

$$f(x, y) = \ln(x + 1/y)$$

لپاره

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{1}{x + 1/y}, & f_y &= -\frac{1}{xy^2 + y}, \\ f_{xx} &= -\frac{1}{(x + 1/y)^2}, & f_{xy} &= \frac{1}{(xy + 1)^2}, & f_{yy} &= \frac{2xy + 1}{(xy^2 + y)^2}. \end{aligned}$$

دی.

په ځانګړې توګه په ټکي $(0, 1)$ کې د ګرادیینټ او د هسې-ماتریکس لپاره لرو

$$\text{grad } f(0, 1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad H f(0, 1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

او له دې سره مربعیز ټیلور-ودیزینه

$$f(x, y) = (1, -1) \begin{pmatrix} x \\ y - 1 \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{1}{2}(x, y - 1) \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y - 1 \end{pmatrix} + O(|(x, y)|^3)$$

$$= x - y + 1 + \frac{1}{2}(-x^2 + 2xy - 2x + 1 + y^2 - 2y)$$

$$+ O(|(x, y)|^3).$$

د دې لپاره چې په ټکي $(1, 1, 1)$ کې د

$$f(x, y, z) = (xy)^z$$

ټیلور-وډیزینه وټاکو، شمیرولومړی

$$\begin{aligned} f_x &= yz(xy)^{z-1}, & f_z &= \ln(xy)(xy)^z, \\ f_{xx} &= y^2z(z-1)(xy)^{z-2}, & f_{zz} &= (\ln(xy))^2(xy)^z, \\ f_{xy} &= z(xy)^{z-1} + xyz(z-1)(xy)^{z-2}, & f_{xz} &= y(xy)^{z-1} + yz \ln(xy)(xy)^{z-1}, \end{aligned}$$

(f_y, f_{yy}, f_{yz}) د متحولې د بدلیدو له لارې لاسته راځي.

له دې سره لاسته راځي

$$\text{grad } f(1, 1, 1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Hf(1, 1, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

او له دې سره سړی لاس ته راوړي

$$f(x, y, z) = 1 + (1, 1, 0) \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{1}{2} (x-1, y-1, z-1) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix}$$

سرلیک

$$\begin{aligned}
& + O(|(x, y, z)|^3) \\
= & 1 + (x - 1) + (y - 1) + (x - 1)(y - 1) \\
& + (x - 1)(z - 1) + (y - 1)(z - 1) \\
& + O(|(x, y, z)|^3).
\end{aligned}$$

لیکونکي: بوسلې، هیولیک، شترایت

د نیوټن تنلار *Newton-Verfahren*

د یوه نه کرښیز مساواتسیستم

$$f_1(x_*) = \dots = f_n(x_*) = 0$$

حل $x_* \in \mathbb{R}^n$ کیدی شي د

$$\begin{aligned}
f'(x)\Delta x &= f(x) \\
x &\leftarrow x - \Delta x
\end{aligned}$$

له لارې تعریف شوی د نیوټن ایتریشن و ټاکل شي.

که f دوه واره ناپریکیدونکی ټوټه دفررنخیالور او د جاکوبي-ماتریکس

$f'(x_*)$ برعکسور وي، نو د x_* په یوه چاپیریال U کې د پیل ارزښت لپاره دا تنلار مربعیز کونورگ یا پولې ته تلونکې ده

$$|x_{\text{neu}} - x_*| \leq c |x_{\text{alt}} - x_*|^2$$

په ځانګړې توګه د $x \in U$ لپاره $\det f'(x) \neq 0$ دی، داسې چې د Δx لپاره دا کرښیز سیستم یو اځنی حل کیدونکی دی.

لیکونکي: هیولیک، شترایت

د یوه حل x_* لپاره د نږدېوالي x_{alt} څخه په مخ ته تلنه کیدی شي د f کرښیز

اپروکسیمیشن له لارې یو ښه شوی نږدېوالی x_{neu} د ټاکل شي، دا په دې معنا چې له

$$0 = f(x_*) = f(x_{\text{alt}}) + f'(x_{\text{alt}})(x_* - x_{\text{alt}}) + R, \quad R = O(|x_* - x_{\text{alt}}|^2)$$

څخه سړی د x_* پسې حل له لارې او باتې غږې پاتې یا لرې کیدو سره د ایتريشن قانون

$$x_{\text{neu}} = x_{\text{alt}} - (f'(x_{\text{alt}}))^{-1} f(x_{\text{alt}}).$$

ګټلی شي.

که لومړی مساوات د $f(x_{\text{alt}})$ پسې حل شي،

$$f(x_{\text{alt}}) = -f'(x_{\text{alt}})(x_* - x_{\text{alt}}) - R,$$

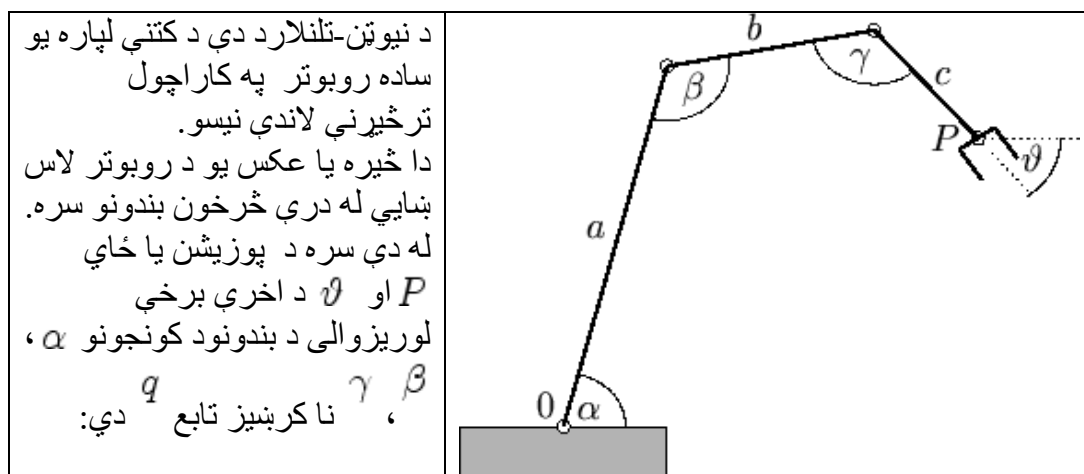
او دا د ایتريشن قانون کې ځا په ځای کړي، نو لاس ته ترې راځي

$$x_{\text{neu}} = x_* + (f'(x_{\text{alt}}))^{-1} R.$$

د $f(x)$ د ناپریکیندي او مشتق‌ووالي په بنسټ $|f'(x)|^{-1}$ په یوه د x_* چاپیریال U کې محدود یا رابند دی او له دې سره

$$|x_{\text{neu}} - x_*| = \left| (f'(x_{\text{alt}}))^{-1} R \right| \leq c |x_{\text{alt}} - x_*|^2.$$

لیکونکي: بوسلي، هیولیک، شترایت



$$\begin{aligned} q_1(\alpha, \beta, \gamma) &= a \cos(\alpha) + b \cos(\alpha + \beta - \pi) + c \cos(\alpha + \beta + \gamma - 2\pi) \\ q_2(\alpha, \beta, \gamma) &= a \sin(\alpha) + b \sin(\alpha + \beta - \pi) + c \sin(\alpha + \beta + \gamma - 2\pi) \\ q_3(\alpha, \beta, \gamma) &= \alpha + \beta + \gamma - 2\pi. \end{aligned}$$

د څرگندو ارزښتونو $a = 3$, $b = 2$, $c = 1$ لپاره د

$$\beta' = \alpha + \beta, \quad \vartheta = q_3 = \alpha + \beta + \gamma - 2\pi$$

بدلون یا سبستیچیون له لارې سړی دا ناکرښیز سیستم لاس ته راوړي

$$\begin{aligned} 0 &= f_1(\alpha, \beta') = p_1 - 3 \cos \alpha + 2 \cos \beta' - \cos \vartheta \\ 0 &= f_2(\alpha, \beta') = p_2 - 3 \sin \alpha + 2 \sin \beta' - \sin \vartheta. \end{aligned}$$

$$\alpha_0 = \pi/2, \quad \vartheta = -\pi/2, \quad \tilde{p} = (2, 2)^t$$

د روباتر لاس ارام حالت، حل،

په گوته کوي د جاکوبي-ماتریکس $\beta'_0 = \pi$

$$f'(\alpha_0, \beta'_0) = \begin{bmatrix} 3 \sin \alpha_0 & -2 \sin \beta'_0 \\ -3 \cos \alpha_0 & 2 \cos \beta'_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

سره.

و ګاونډي ځاي $\vartheta = -\pi/4, p = (2, 3)^t$ ته رسیدني ته د نیوټن-ټنلارد لومړي پل لپاره دې کرښیز مساوات سیستم

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\alpha \\ \Delta\beta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix},$$

حل شي. له دې سره لاس ته راځي $\Delta\alpha = -\sqrt{2}/6, \Delta\beta' = -\sqrt{2}/4$ او سړی لاس ته راوړي

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Delta\alpha \\ \Delta\beta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi/2 + \sqrt{2}/6 \\ \pi + \sqrt{2}/4 \end{pmatrix}.$$

په پوزیشن p کې ناتیګاوی له دې سره همدا اوس په

$$f(\alpha_1, \beta'_1) \approx (0.1172, 0.0976)$$

راکم شو.

بویلې، هیولیک، شترایت

کرییکال ټکي یا افراطي(که انحرافي) ټکی Kritischer Punkt

د یوه سکالار تابع f لپاره سری x افراطي ټکی بولي، که گراد یا درجه $f(x) = 0$

grad وي. که دوه واره ناپریکیدونکی مشتقور وي، نو د افراطي ټکي تیپ یا ډول، دا په دې معنا چې د تابعگراف د x په یوه چاپیریال کې د هسې-ماتریکس له لارې ټاکل کیږي. د $H f(x)$ د ایگن ارزښتونو λ_i د مخنځېني له امله د لاندې ترمنځ توپیر کوي:

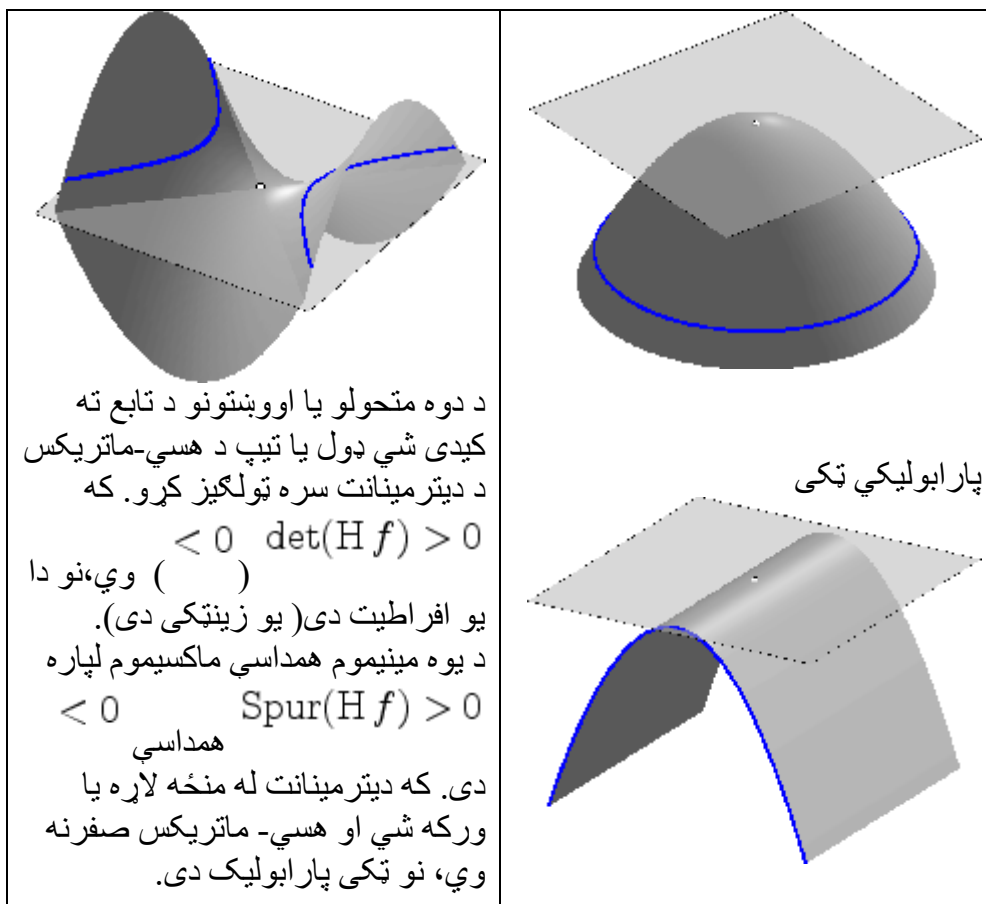
- هواره ټکی (یعنې په یوه سطحه پروت-) : ټول ایگن ارزښتونه λ_i صفر دي.
- هڅېډوله یا بیضوي ټکی: ټول ایگن ارزښتونه λ_i د صفر سره نامساوي دي او برابرپا همغه مخ نځېني لري. تابع f په دې حالت کې په x کې یو ځایز (لوکال) افرا تیت لري

- هایبراپارابولیک ټکی : ایگن ارزښتونه λ_i شته د مختلفو مخنځېنو سره. سری x زینټکی هم بولي.

- پارابولیک ټکی: لږ تر لږه یو ایگن ارزښت λ_i صفر دی اونور ټول ایگن ارزښتونه برابره مخنځېنه لري.

په نځېهوني یا نوموني د جگړېني له لارې په بی واریات حالت کې پامور یا جالبې دي، لکه دا چې په څیره کې کښل شوې دي.

بیضوي ټکی	های پارابولیکي ټکی
-----------	--------------------



لیکونکي: هیولیک، وایس

د تابع

$$f(x, y) = y(1 - x^2 - y^2)$$

افراطي (کریټیکي kritischen) ټکي همداسې تیپ وټاکل شي. د دې لپاره سړی لومړی گرادینت جوړوي او بیا د هسي – ماتریکس:

$$\text{grad } f = \begin{pmatrix} -2xy \\ 1 - x^2 - 3y^2 \end{pmatrix}, \quad H f = \begin{pmatrix} -2y & -2x \\ -2x & -6y \end{pmatrix}.$$

له

سرلیک

$$\text{grad } f = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad xy = 0 \quad \wedge \quad x^2 = 1 - 3y^2$$

څخه د انحرافي ټکي په څیر

$$(0, \pm 1/\sqrt{3}), \quad (\pm 1, 0),$$

لاسته راځي. د هسي ماتریکس هر ځل دلاندې سره برابر دی

$$\begin{pmatrix} \mp 2/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & \mp 6/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \mp 2 \\ \mp 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(H f) > 0 \quad \text{د } (x, y) = (0, \pm 1/\sqrt{3}) \quad \text{لپاره دی}$$

$$\text{Spur}(H f) = \mp 8/\sqrt{3}.$$

له دې سره په $(0, -1/\sqrt{3})$ کې یو مینیموم او په $(0, 1/\sqrt{3})$ کې یو ماکسیموم شتون لري.

$$\text{د } (x, y) = (\pm 1, 0) \quad \text{لپاره باور لري}$$

$$\det(H f) = -4 < 0,$$

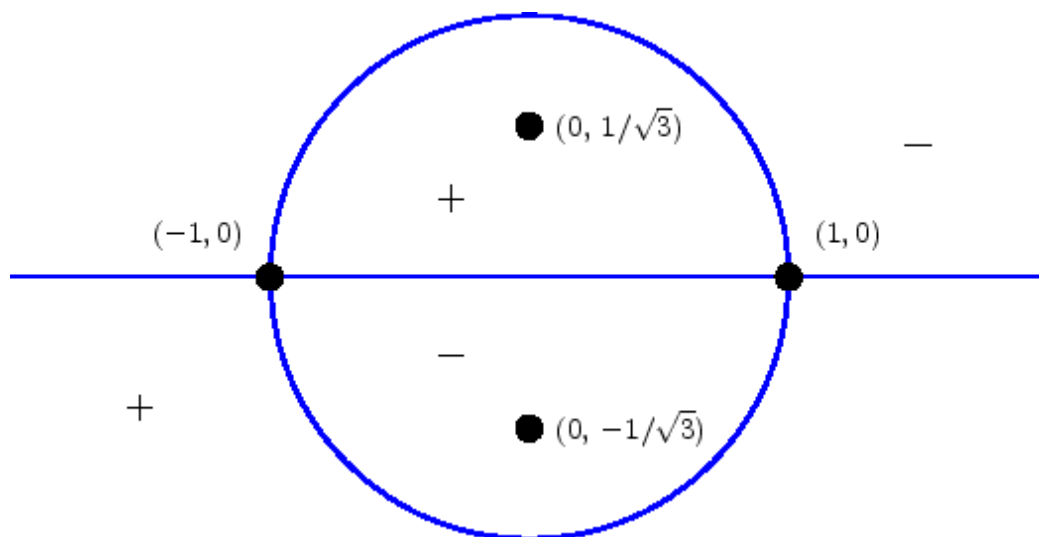
نو دلته یو زینټکی شته.

د کریمیکیتکو تیپ کیدی شي د صفر ځایټوکواو د f له دې څخه ورکړ شوو مخنځینو وېشنو له لارې وپېژندل شي. د f ضرب بڼې لاس ته راځي

$$f(x, y) = 0 \iff y = 0 \vee x^2 + y^2 = 1,$$

داا په دې معنا چې د صفر ځایډیرئ د x -محور G او یونگرډئ C څخه جوړ دی. د

$\text{grad } f$ یا G پل اړولو سره مخنځینه بدلیري. په غوڅتکو کې ورکیري، ځکه لورمشتقونه د G او C په اوږدوالي کې صفر دي. د مخ نځینې بدلیدني په بنسټ دا یو زینتکی دي. د یوون(واحد) گردئ تیکلي په نیمایي، چې د صفر تکیډیرئ څخه یې ژئ جوړیږیو باید هر ځل یو افرطیت شتون ولري، ځکه چې ډیرئ کریمپکت ده او f په ژئ صفر دی. د مثبت تابع ارز/شت سره دا یو ماکسیموم دی او د منفي سره یو مینیموم.



لیکونکي: بوسلي، هیولیک

د تابع

$$f(x, y) = (y - x + x^2)y$$

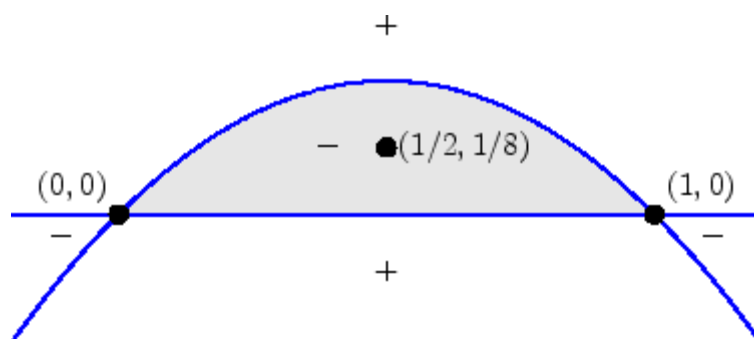
لپاره

سرلیک

$$\text{grad } f = \begin{pmatrix} (-1 + 2x)y \\ 2y - x + x^2 \end{pmatrix}$$

دی.

دا انحرافي ټکي critical point له دې امله $(0, 0), (1, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{8})$ دي. ټیپ یا ډول کیدی شي د f د مخنځینې ویش څخه وټاکل شي.



د x -محور سره د پارابولونو غوڅتکي (د تقاطع نقطې) زین ټکي دي، ځکه چې په f چاپیریال کې زیایز (مثبت) ۹ او کمیز (منفي) ارزښتونه شتون لري. په څره روشو؟؟ کې صفر په ژئ یا غاړه دی او کمیز ارزښت په دننه کې، باید هلته لږترلږه یو ځایز یا لوکال مینیموم شتون ولري.

شمیرپوهنیزدا تبویپا ډول د هسي-ماتریکس په مرسته فصدیقیدي شي.

$$Hf = \begin{pmatrix} 2y & 2x - 1 \\ 2x - 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

د انتقادي یا انحرافي ټکیلپاره لاس ته راوړو

$$H f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$H f(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$H f(1/2, 1/8) = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

په لومړيو داوړو ټكو كې د هسې-ماتريكس ديتريمينانت كميز دى، ټكي لكه انتظار چې كېده
 $(1/2, 1/8)$ زينتكي دي. په كې ديتريمينانت او شپور Spur زياتيز يا مثبت دي، پس
 دلته يو ځاييز يا لوكال مينيموم لرو

(Autoren: Höllig/Reble)

د ډېرو متحولو - يا مولتيواريات توابعو افراطيت

xtrema multivariater Funktionen

که x_* د $f(x_*)$ په يوه چاپيريال د يوه ناپريکيدونکي مشتقوړ سکالار تابع
 f مينيموم (ماکسيموم) وي، نو باور لري

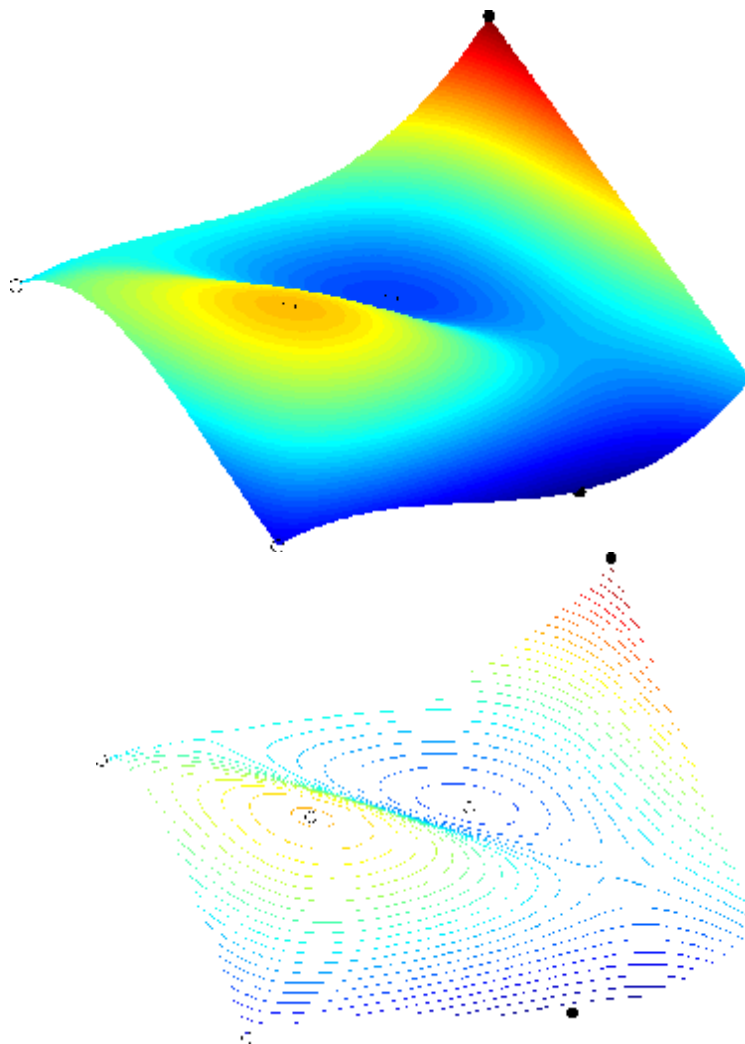
$$\text{grad } f(x_*) = 0.$$

يو پور هکيد ونکيشرط دى، چې برسیره پردې د هسې-ماتريکس ټول ا یگن ارزښتونه په
 انحرافټکي x_* زياتيز يا مثبت (کميز يا منفي) وي.

سرلیک

که ایکن ارزښتونه د مختلفو منځښو سره شتون لري، نو دا یو زینتکی دی، یعنې ځایز یل لوکال افراطیتکی نه دی. که د صفر سره نابرابرو ایکن ارزښتونو د برابر منځښو سره لږ تر لږه یو ایکن ارزښت صفر وي، نو د احراقي یا انتقادي x_* تیوپ یا ډول د دویم مشتق له لارې نه شي ټولگیز (صنفي) کیدی یعنې چې په کومه ډله یا ټولگي کې دی. ځایز مینیموم (ماکسیموم) کیدی شي د تعریف ورشو D د ژئ ټکو په څیر هم رامنځ ته شي. په دې حالت کې باید لوریز مشتق $\partial_v f(x_*)$ د D په منفي ښودونکي لپاره لور v مثبت (منفي) وي.

د یوه سکالار تابع f یو ځایز افراطي ټکی په یوه ډیري D یا انحراقي ټکی دی (دا په $\text{grad } f = 0$ دې معنا چې)، یو ژئ ټکی یا د ټوټه – پارشل مشتق پریکړدونکی ځای دی. کیدی شي په دې ځایونو کې مینیموم او ماکسیموم په دې ټکو کې د تابع ارزښتونو د پرتلي له لارې وشمیرل شي.



خپرونه يا تابع مختلف امکانات ښايي. دلته ځاييز افراطي ټکي په گردئ او گلوبال يا ټوليز افراطي ټکي په ټکو سره په نڅښه شوي دي.

ليکونکي: بوسلي، هيوليگ، وایس

د کرښو په اوږدو تابع f راوړو او د په خوښه لور v لپاره تعریفوو

$$g(t) = f(x_* + tv), \quad t \in \mathbb{R}.$$

سرلیک

که f په x_* کې یو ځاییز افراطیت ولري، نو g په $t = 0$ کې یو افراطیت لري.

پایله یې ده

$$0 = g'(0) = (\text{grad } f(x_*))^t v = \partial_v f(x_*).$$

دا چې v په خوښه ټاکلی وو، باید گرادینټ په x_* کې ورکشي.

د مینیموم لپاره د f تعریفوړشو تنها په ژئ لاس ته راځي، چې د D په دننه لور
ښودونکي وکتور v لپاره لوریز مشتق ورکيږي. تنها په داسې لورو g د $t = 0$ په یوه
چاپیریال کې په یوه ښي اړخیز چاپیریال کې یو غریز جگیدونکی دی. د یوه ما کسیموم
لپاره په ورته توګه د لایل راورل کيږي

که $H f(x_*)$ فقط مثبت ایګن ارزښتونه ولري، نو د وکتور v لپاره د $|v| = 1$ سره
باور لري

$$v^t H f(x_*) v \geq c > 0.$$

د دویم مشتق د ناپریکیدني له امله دا چاپیریال د c په ځای کې د یوې ثابتې $c/2$ سره
همداسې د x_* په یوه چاپیریال U کې ټیک پاتې کيږي. د g د تیلور-وډیزیني سره
لاس ته راځي

$$g(t) = g(0) + \underbrace{g'(0)}_{=0} t + \frac{1}{2} g''(\theta t) t^2$$

د $\theta \in [0, 1]$ سره.

$$g''(\theta t) = v^t H f(x_* + \theta t v) v^t$$

له امله د 0 په نږدې کې د t لپاره هلاس ته راځي

$$g(t) \geq g(0) + (c/2)t^2,$$

دا په دې معنا چې f په هره لور په x_* کې یو ځاییز مینیموم لري. د ماکسیموم د پوره کیدونکو شرایطو د لاس ته راوړلو لپاره په ورته توګه مخ ته تلل کیږي.

لیکونکي: هیولیګ، وایس

د مربع تابع

$$f(x) = \frac{1}{2}x^t Ax - x^t b + c$$

ګرادیېنټ د سیومتري ماتریکس A سره دی

$$\text{grad } f = Ax - b$$

او A د هسې-ماتریکس دی. ځاییز یا لوکال افراطي ځایونه د کرښیز مساوات سیستم $Ax = b$ حلونه دي.

که د A ایګن ارزښتونه مثبت یا منفي وي، نو $\det A \neq 0$ دی او د مساوات

$Ax = b$ یواځنی حل د f یواځنی ځاییز او همداسې ټولیز افراطیت دی.

د څرګندې بیلګې لپاره

$$f(x, y) = \frac{3}{2}x^2 + 2xy + \frac{3}{2}y^2 + x + 4y - 3$$

دی

سرلیک

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

د

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

حل $(x, y) = (1, -2)$ دی. دا چې $\det A = 5$ او $\text{Spur } A = 6$ مثبت دي،

نو A مثبت ایگنارزېنت لري، او (x, y) د f ټولیز مینیموم دی

لیکونکي: هیولیگ، وایس

غواړو د تابع

$$f(x, y) = \cos x + \cos y + \cos(x + y).$$

خاییز اکسترما پیدا کړو، چې f نسبت x او y ته 2π -پریوډیک دی او پسي هم

$$f(y, x) = f(x, y) = f(-x, -y) \quad \text{بسیا کوي، چې د } f \text{ په } [-\pi, \pi] \times [0, \pi]$$

په ورشوکی وڅیړو. د ټوټه مشتق ژئ ټکي او پریکړندځایونه په پام کې نه نیول کیږي. نو باید انحرافي ټکي پیدا شي.

له

$$\text{grad } f = \begin{pmatrix} -\sin x - \sin(x + y) \\ -\sin y - \sin(x + y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

لاس ته راځي $\sin x = -\sin(x + y) = \sin y$ ، نو د $y \in [0, \pi]$ لپاره په

ځانگړې توگه $y = \pi - x$ یا $x = y$. دواړه امکانات یو له بل بیل څیرل کیږي.

سرلیک

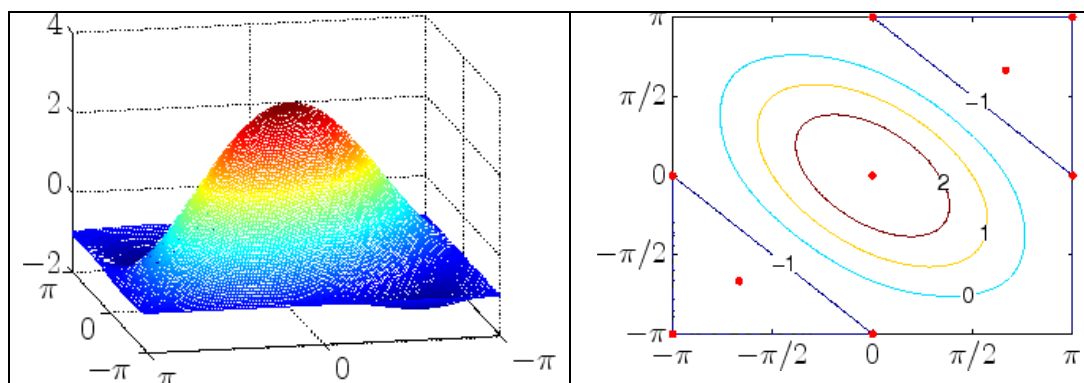
$$(i) \quad x = y : \\ \text{له}$$

$$\sin x = -\sin(2x) = -2 \sin x \cos x$$

په اړونده ورشو کې انحرافي ټکي $(0,0)$ ، (π, π) او $(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$ لاس ته راځي.

$$(ii) \quad y = \pi - x :$$

له $\sin(x) = -\sin(\pi) = 0$ انحرافي ټکي $(0, \pi)$ او $(\pi, 0)$ لاس ته راځي.



د تابع ارزښتونو د پرتلي څخه، چې د مشتق څخه رانيول کیدی شي، پیژندل کيږي، چې

$$(0,0) \quad f(0,0) = 3 \quad \text{يو ځاييز ماکسيموم د ارزښت}$$

$$(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}) \quad \text{سره دی او} \quad \text{يو}$$

$$f(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}) = -\frac{3}{2} \quad \text{ټوليز مينيموم د ارزښت سره دي.}$$

د بل انحرافي ټکي ډول يا ټيپ کیدی شي د هسي ماتریکس Hesse Matrix

$$Hf = \begin{pmatrix} -\cos x - \cos(x+y) & -\cos(x+y) \\ -\cos(x+y) & -\cos y - \cos(x+y) \end{pmatrix}$$

سرلیک

سره وټاکل شي. په ټکي (π, π) کې

$$Hf = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

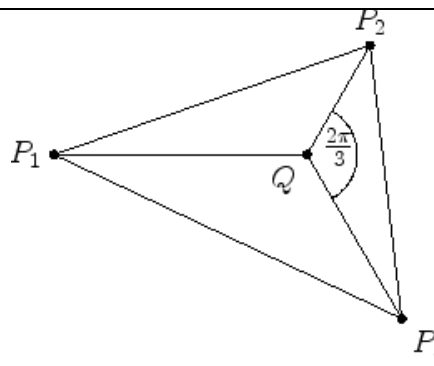
دی.

دا چې دېترمینانت منفي دی، نو دا یو زینټکی دی. ټکي $(\pi, 0)$ او $(0, \pi)$ د سیومتری له امله یو بل سره enstsprechen ورکوي. د هسې-ماتریکس

$$Hf = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Hf = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

هم منفي دېترمینانت لري. له دې امله هم دا یو زینټکی دی.

نو په ټولیزه توګه ټکي $(2k\pi, 2l\pi)$ ($k, l \in \mathbb{Z}$) د ټولیز ماکسیموم او ټکي $(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2l\pi)$ ($-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, -\frac{2\pi}{3} + 2l\pi$) د ټولیز مینیموم همداښه په حیث لاس ته راځي لیکونکي: هیولیک، وایس

د شټاینر Steiner's پرابلم په دې کې پروت دی، چې یو ټکی $Q \in \mathbb{R}^2$ وټاکي، د کوم لپاره چې ورکړ شوو ټکو P_i د واټنونو زیاتون یا جمعه مینیمال شي. دا ساده ځانګړی حالت یې په څیره کې ورکړ شوی دی. د درې ټکو P_1, P_2, P_3 لپاره، یا د یوه ټکي سره سره	
---	--

خوري يا د ټول ټکو جوړو لپاره دی	
$\angle(P_i, Q, P_j) = 2\pi/3$	

د دې لپاره چې غوښتل شوی خویونه (خوي) وښايو، d_i دي د $Q = (x, y)$ او

$$P_i = (x_i, y_i)$$

ترمنځ واټن وښايي، دا په دې معنا چې

$$d_i^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2.$$

د ځنډيريقانون له مخې لاسته راځ

$$2d_i \frac{\partial d_i}{\partial x} = 2(x - x_i)$$

لاسته راځي. همداسې

$$\frac{\partial d_i}{\partial x} = \frac{x - x_i}{d_i}$$

او په اړونده ډول $\frac{\partial d_i}{\partial y} = \frac{y - y_i}{d_i}$. د واټن تابع گراډینټ ،

$$\text{grad } d_i = \frac{1}{d_i} \begin{pmatrix} x - x_i \\ y - y_i \end{pmatrix},$$

له دې امله یو یوون یا واحد وکتور دی، کوم چې له P_i د ټکي Q په لور ښايي.

د

$$f = d_1 + d_2 + d_3$$

مينيموم به شي

ماکسيموم د له P_i څخه په يوه کې و نه نيول شي، په کومو کې چې $\text{grad } d_i$ پريکيدونکيدی، نو بايد په مينيموم کې

$$\text{grad } f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

باورولري. د وکتورگرادینت د برابر اوږدوالي په بنسټ له دې لاسته راځي، چې که دا یو په بل کینول شي یو برابر اړخیز درېږدې جوړوي. د دوي ترمنځ کونج له دې امله برابر د دی په $2\pi/3$.

لیکونکي: بوسلي، هیولیگ، وایس

د لانگرانژ ضریبونه (څلوونې) Lagrange-Multiplikatoren

که د څنګیزو شرایطو $g_i(x) = 0$ لاندې x_* د سکالار تابع f یوځاییز افراطي ځای وي، نو د لاگرانژ ضریب λ_i شتون لري، داسې چې

$$f'(x_*) = \lambda^t g'(x_*).$$

دلته وړاند نیونه کيږي، چې f او g د x_* په یوه چاپیریال کې ناپریکيدونکي مشتقور دي او د جاکوبي-ماتریکس $g'(x_*)$ پوره رانګ لري.

د فقط یوه فر عینژ — شرایط ساده بڼه

$$\text{grad } f(x_*) \parallel \text{grad } g(x_*),$$

لري که $\text{grad } g(x_*) \neq 0$ وي، دا په دې معنا و چې د f او g نیوو سطحې یو بل په افراطي ځای کې لمسوي.

د لاگرانژ شرطونه پوره کیدونکینه دي، چې پریکړه وکړي، چې یو لوکال افراطیت مو مخ ته پروت دی او یا مینومو یا ماکسیموم دی. دا د نورو معلوماتو په مرسته کره کیدی شي.

ټولیزه افراطیت د توابعو د پرتلي په اساس په ټکو کې کیدی شي، کوم چې د لاگرانژ شرطونه پوره کړي، کوم چې په ورکړ شوي حالت کې هغه د ورکړ شوي ډیري په ژي او یا د g' په رانگ ضایع سره.

لیکونکي: بوسلي، هیولیگ، وایس

n دې د اووښتونو گڼونن یا تعداد وي او m دې فرعي یا څنګیز شرایط وي.

د $m \geq n$ لپاره نه ښوول کیږي، ځکه چې یو په خوښه n وکتور د n د کرښیز کمیشن په حیث د g' د کرښیزو خپلواکو لیکو په څیرانځور دی.

د $m < n$ لپاره دې $x = (u, v) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ یو د اووښتونو یا واریبلو ټوټه ونه وي، د کوم سره چې د ممکنه پرموتیشن د $g_u(u_*, v_*)$ په څټوروالی یا برعکس وړوالی له وړاندې نیول شوی وي. نو د ایمپلیڅیت تابع جملې د فرعي شرایطو له مخې ځاییز حل دی:

$$g(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = \varphi(v), \quad v \approx v_*.$$

په تعقیب په یو افراطي ټکي د تابع $v \mapsto f(\varphi(v), v)$ گراډینټ ورکیري:

$$f_u(u_*, v_*)\varphi'(v_*) + f_v(u_*, v_*) = 0.$$

سرليک

د څنگيز يا فرعي شرايطو $g(\varphi(v), v) = 0$ مشتقيدو له لارې پسې لاسته راځي

$$\varphi'(v) = -g_u(u, v)^{-1} g_v(u, v).$$

په گراډينټ کې د φ' اېښوولو پسې کتل کيږي، چې د

$$\lambda = f_u(u_*, v_*) g_u(u_*, v_*)^{-1}$$

سره مساوات

$$f_u = \lambda g_u, \quad f_v = \lambda g_v,$$

کوم چې د $f' = \lambda g'$ شرايطو u - او v - کمپوننتونه په گوته کوي، په ټکي (u_*, v_*) کې پوره دي.

ليکونکي: هيوليگ، وایس

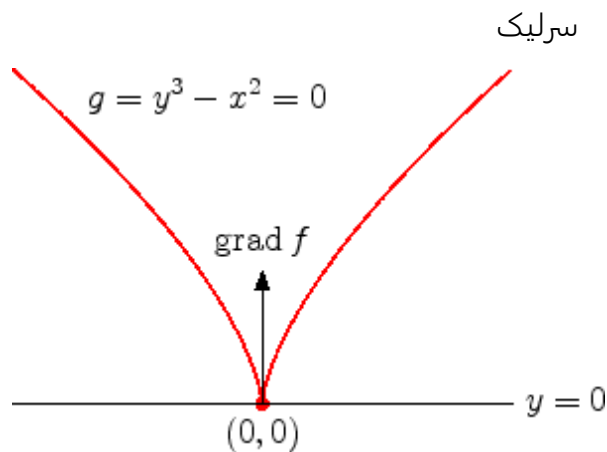
تابع

$$f(x, y) = y$$

لاندې فرعي شرطونه لري

$$g(x, y) = y^3 - x^2 = 0$$

په څرگند ډول په $(0, 0)$ کې یو ځاییز یا لوکال مینیموم.



په هر حالت د لاگرانژ-شرطونه $(f_x, f_y) + \lambda(g_x, g_y) = 0$ نه دي پوره:

$$(0, 1) + \lambda(-2x_*, 3y_*^2) \neq (0, 0).$$

دا له دې امله چېد جاکوبي-ماتریکس $g'(x_*, y_*) = (0, 0)$ پوره رانگ نه لري. د g ځاییز حالت د جگ نظم ترمونو له لارې تشریح دي. د لاگرانژ-شرطوه په داسې یوه سینګولار ټکي کې استعمالور نه دي.

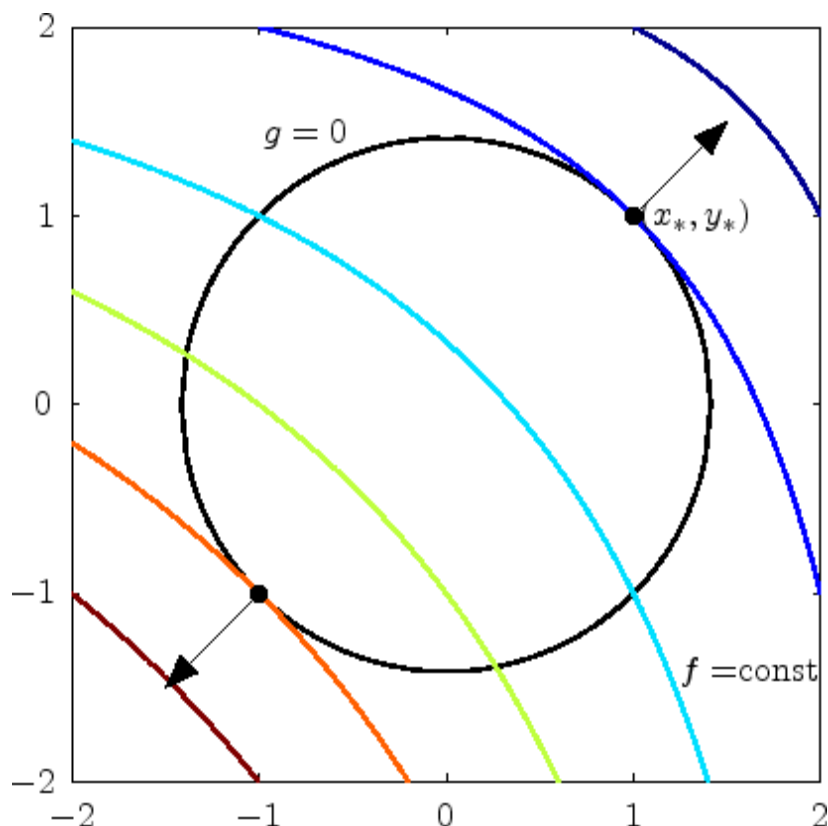
لیکونکي: هیولیګ، وایس

د یوه بیواریات تابع $f(x, y)$ د افراطي ځای لپاره د فرعي یا ځنګیزو شرایطو $g(x, y) = 0$ لاندې باور لري

$$(f_x, f_y) = \lambda(g_x, g_y),$$

دا په دې معنا چې گراد g وگراد f ته غبرګ دی. د نورو کلمو سره د f د نیو سطحې په ټکي (x_*, y_*) کې د g له لارې تعریف شوي کړي سره تانجنتي ده یا تانجنت جوړوي.

سرلیک



په څیره کې په روښانه توګه ښوول شوي بیلګه کې

$$f(x, y) = (x - 3)(y - 3) \rightarrow \min, \quad g(x, y) = x^2 + y^2 - 2 = 0$$

د لاګرانژ-شرایط په لاندې توګه دي

$$(y - 3, x - 3) = \lambda(2x, 2y).$$

د λ له منځه وړنه راکوي

$$y(y - 3) - x(x - 3) = 0 \Leftrightarrow (y - x)(x + y - 3) = 0.$$

د فرعي شرایطو $x^2 + y^2 - 2 = 0$ سره په تړاو ممکنه افراطي ځایونه $(1, 1)$ او

$(-1, -1)$ لاس ته راځي. دا چې یونایریکیدونکی تابع په یوه کومپکته ډیرئ هم

مینیموم او هم ماکسیموم لري، د تابع ارزښتونو پرتله یې ښايي، چې f په $(1, 1)$ کې مینیمال او په $(-1, -1)$ کې ماکسیمال کيږي.

لیکونکي: هیولیک، وایس

د

$$f(x, y, z) = x + 2y - z$$

افراطیت غاړو پیدا کړو د لاندې فرعي شریطو لاندې

$$x^2 + y^2 - 8 = 0, \quad x + z - 4 = 0,$$

کوم چې د توتې (استوانې) غوڅې (تقاطع) د یوې سطحې سره یوه هڅې تشریح کوي یا ورکوي.

د فرعي طریقو لاندې د جاکوبې-ماتریکس دی

$$\begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

دا فقط د $x = y = 0$ لپاره پوره رانگ نه لري. دا حالت د فرعي سړایطو په اساس نه

شیرامنځ ته کیدی. یوه افراطیت (x, y, z) ته پسي هر حل د لاگرانژ-ضریبونه λ_1, λ_2 داسې شتون لري، چې

$$(1, 2, -1) = (\lambda_1, \lambda_2) \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

همداسې

سرلیک

$$\begin{aligned}
 1 &= 2\lambda_1 x + \lambda_2 \\
 2 &= 2\lambda_1 y \\
 -1 &= \lambda_2 .
 \end{aligned}$$

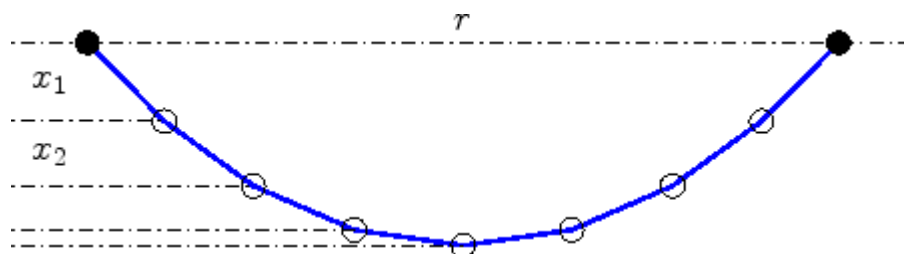
که $\lambda_2 = -1$ او $\lambda_1 = 1/y$ په لومړي برابرۍ يا مساوات کې ځای په ځای شي، نو $x = y$ ترې لاسته راځي. د فرعي شرایطو څخه ممکنه افرطیت $(2, 2, 2)$ او $(-2, -2, 6)$ لاس ته راوړل کېږي. دا چې په هغې باندې مینیموم او هم ماکسیموم باید شتون ولري، د تابع ارزښت

$$f(-2, -2, 6) = -12 < 4 = f(2, 2, 2),$$

پرتله کونه یې ښايي، داسې چې په f کې مینیمال او په $(2, 2, 2)$ کې ماکسیمال کېږي.

(Autoren: Höllig/Weiß)

اوس دې په دوه ټکو ځوړند شوي ځنډیر د ځنډیر غړي $2n$ سره برابر وزنځای د 1 ا وړدوالي سره وټاکي شي.



د څیرې څخه په نڅېښه کې سره مو د پوتنشل انرګي مینیمي کونې یا کمونې ته بیايي

$$-\left(\frac{x_1}{2}\right) - \left(x_1 + \frac{x_2}{2}\right) - \cdots - \left(x_1 + \cdots + x_{n-1} + \frac{x_n}{2}\right)$$

په دې پر اېلم د سیومتري په استعمال

$$f(x) = -a_1 x_1 - \cdots - a_n x_n \rightarrow \min ,$$

$$g(x) = r/2 - \sum_{i=1}^n \sqrt{1 - x_i^2} = 0 ,$$

$$a_i = n - i + 1/2 \quad \text{د سره.}$$

د لاکرانژ-شرطونه په لاندې توګه دي

$$a_i = \lambda \frac{x_i}{\sqrt{1 - x_i^2}}, \quad i = 1, \dots, n .$$

دا کیدی شي د x_i پسې مربع (څلورئ-) کونې سره حل شي:

$$x_i^2 = \frac{a_i^2}{a_i^2 + \lambda^2} .$$

په فرعي شریطو کې د ایښوولو سره لاندې برابرې راکوي

$$\frac{r}{2} = \sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{\lambda^2}{a_i^2 + \lambda^2}} ,$$

له هغه چې λ او له دې سره x_i نومریکټاکل کیدی شي.

مربعیزه (خلورئ بیزه) مینیمال کونه د کرښیز برابر ونشر لیطو سره

Quadratische Minimierung mit linearen Gleichungsbedingungen

مربعیزه اوپتیمي کونې پر اېلم Optimierungsproblem

$$\frac{1}{2}x^t G x - c^t x \rightarrow \min, \quad Ax = b,$$

تیک هلته حل کیدونکي دی، که وکتور b د ماتریکس A په څېره- ورشو کې پروت وي او سیومتريک ماتریکس G د A په زړي مثبت سیمیدیفینیت وي.

ټول حلونه x_* د لاگرانژ-شرطونه

$$\begin{pmatrix} G & A^t \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_* \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ b \end{pmatrix}$$

د یوه لاگرانژ-ضریب λ سره پوره کوي. حل یواځنی دی، که $\text{Kern } A \cap \text{Kern } G = 0$ وي.

که G برعکس کیدونکی وي، ن و کیدی شي بلاکسیستم په ګډه یا په دله حل شي.

سړی لومړی د لاگرانژ-ضریب ټاکي

$$AG^{-1}A^t\lambda = AG^{-1}c - b$$

$$Gx_* = c - A^t \lambda.$$

اوپتیمال وکتور لاسته راوړي.

دا داسې په نامه د شور-کمپلیمنت-متود Schur-Komplement-Methode په ځانگړې توگه هلته موخه وړ دی، که G^{-1} ساده وټاکل شي او یا فقط فرعي شرایط شتون ولري.

لیکونمکي: هیولیک، هیورنر، پفایل

دې یو ماتریکس وي، چې مټه یا درز یې د A د زړې لپاره یو بنسټ جوړوي، او y یو وکتور چې اجازه ولري، دا په دې معنا چې $Ay = b$. یو اجازه وکتور x کیدی شي چې په لاندې بڼه ولیکل شي

$$x = y + Qz$$

که په موخه تابع کې ولیکل شي نو لاس ته ترې راځي

$$(Qz)^t G y = y^t G Q z$$

$$\frac{1}{2} z^t Q^t G Q z - (Q^t c - Q^t G y)^t z + \frac{1}{2} y^t G y - c^t y.$$

د دې مربع تابع یو مینیموم z_* ټیک هلته شتون لري، که $Q^t G Q$ مثبت دیفینیت وي، او په دې حالت کې پوره کړي

$$Q^t G Q z_* = Q^t (c - G y).$$

دا چې دی

سرلیک

$$Q^t u = 0 \Leftrightarrow u \in (\text{Kern } A)^\perp \Leftrightarrow u \in \text{Bild } A^t,$$

نو ورته کرکتریسک کیدنه لاس ته راځي

$$G(y + Qz_*) - c = A^t(-\lambda),$$

يعني د لاگرانژ-شرایط.

حل z_* یواځنی دی، که G د A په زړي مثبت ديفینیت وي، يعني که $\text{Kern } A \cap \text{Kern } G = 0$ وي.

د ډلې يا بلوک سیستم لاندې باندې gestaffelte اینښول شوی حل لاس ته راځي، په کوم کې چې لومړی حل

$$Gx_* + A^t\lambda = c$$

د کین لورد AG^{-1} سره ضرب کړي او بدل یا سبستیتوه $b = Ax_*$ یې کړي.

لیکونمکي: هیولیگ، هیورنر، پفایل

د اوپتیمي کوني پرابلم حل غواړو پیدا کړو

$$x^2 + 2xy + 2y^2 + 4x \rightarrow \min$$

د لاندې فرعیشرایطو لاندې

$$x - 2y = 1.$$

دا پرابلم $\frac{1}{2}x^t Qx - c^t x \rightarrow \min$ ، $Ax = b$ د

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A = (1, -2), \quad b = 1.$$

سره په گوته کوي

په ساده توګه اجازه لرونکي ټکي شتون لري او دا چې مثبت ديفينيت دی، یو یواځنی حل (x_*, y_*) شتون لري، کوم چېډ لاکرانز –شرایطو

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_* \\ y_* \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ټاکل کیدی شي. لاسته راځي

$$x_* = -\frac{2}{5}, \quad y_* = -\frac{7}{10}, \quad \lambda = -\frac{9}{5}.$$

لیکونکي : هیولېګ، وایس

د بیلګې په توګه مربع تابع

$$\frac{3}{2}x_1^2 + 4x_1x_2 - \frac{3}{2}x_2^2 + x_3^2 - 5x_1 + 4x_3$$

د فرعي شرایطو

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = -2$$

لاندې مینیمي کیري

سرلیک

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = -2$$

د

$$G = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = -2$$

دا پرابلم لاندې ستاندارد بڼه لري

$$\frac{1}{2}x^t G x - c^t x \rightarrow \min, \quad Ax = b.$$

د دې پرابلم حل باندې چې پریکړه کوو، نو لومړی د A د زړي لپاره یو بنسټ یا باسیس $\{q_1, q_2\}$ ټاکو:

$$(q_1, q_2) = Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

بیا جوړوو

$$S = Q^t G Q = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

دا چې د S دایترمینانټ او شپور مثبت دی، نو S مثبت دیفینیت دی، او له دې سره د اوپټیمیزیکولو پرابلم یو یواځنی حل لري. دا کیدی شي د کون-ټکر-شرطونو Kuhn-Tucker-Bedingungen سره و ټاکل شي:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ \hline 1 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} x_{*,1} \\ x_{*,2} \\ x_{*,3} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

سری $x_* = (1, 0, -3)^t$ او $\lambda = 2$ لاس ته راوړي.

په بديله توگه سری کړی شي د شور-کمپلمنت-متودوکاروي.

سری لومړی ماتریکس G برعکس کوي:

$$G^{-1} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 25/2 \end{pmatrix}.$$

بیا د برابرې $AG^{-1}A^t\lambda = AG^{-1}c - b$ څخه سری λ ټاکي:

$$-\frac{1}{2}\lambda = -3 + 2 \implies \lambda = 2.$$

د کون-ټرکر-شرایط مو لومړی برابرې ونډله یا-گروپ

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{*,1} \\ x_{*,2} \\ x_{*,3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \lambda = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix},$$

مو بیرته حل $x_* = (1, 0, -3)^t$ ته بیایي.

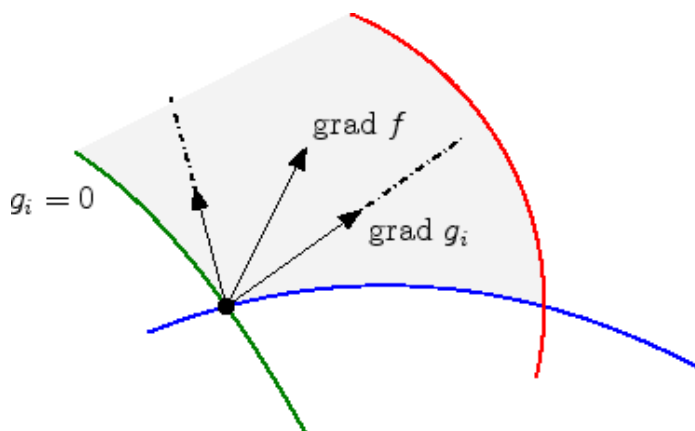
لیکونمکي: هیولیک، هیورنر، پفایل

د کون-تکر-شرطونه (Kuhn-Tucker-Bedingungen)

که x_* د فرعي شرایطو $g_i(x) \geq 0$ لاندې د سکالار تابع f یو مینیموم وي او د فعال برابرانو $i \in I$ ، $g_i(x_*) = 0$ ، گراډینټ کرنیز خپلواک وي، نو د لاگرانژ-ضریبونه $\lambda_i \geq 0$ شتون لري، داسې چې ترې لرو

$$\text{grad } f(x_*) = \sum_{i \in I} \lambda_i \text{grad } g_i(x_*).$$

د لوکال ماکسیموم لپاره په ورته توګه $\lambda_i \leq 0$ دی.



د مینیموم لپاره د کون-تکر شرطونه ځمککچیز یا هنسي په دې معنا دي، چې د موخه تابع گراډینټ چې د فعال فرعي شرایطو څخه خور شوی مخروط (کرنه ، کرنه) کې پروت دی.

پیژندډیری یا ایندکسډیری I کیدی شي ایمپلیثیت د شرایطو

$$\lambda^t g(x_*) = 0, \quad \lambda \geq 0,$$

لاندې کره شي. که $g_k(x_*) > 0$ وي، نو لرو $\lambda_k = 0$ ، دا په دې معنا چې ناساده یا ناترېویال ضربونه فعال شرایط په گوته کوي.

لیکونکي: هیولیک، وایس

سری باید د x_* په چاپیریال کې فعال شرایط په پام کې ونیسي، ځکه چې نابرابرونه $j \notin I$ $g_j(x) > 0$ په یوه د x_* چاپیریال کې ټیک پاتیري. تابع f په روښانه توګه په یوه وره ډیرئ هم مینمال پاتیري، چې د برابرې شریطو $g_i(x) = 0$ له لارې ورکول کیږي. له دې امله د لاګرانژ-ضربونو جملې څخه غوښتل شوی کټمټوالی لاس ته راځي. اوس فقط باید وښوول شي، چې

$$\lambda_i \geq 0$$

کیدي شي د یوه $k \in I$ لپاره (وراند) نښه $\lambda_k < 0$ مو تضاد یا مخامخوالي ته بوږي. د ګرادینټ د کرښیز خپلواکوالي یو وکتور v شتون لري د

$$(\text{grad } g_k(x_*))^t v = 1, \quad (\text{grad } g_i(x_*))^t v = 0, \quad i \in I \setminus k,$$

سره، چې د $i \neq k$ g_i له لارې تعریف شوې سطحې تنجنتي هواری (سطحې) باندې پروت دی. دې په سطحه یوه کره (منحنی) وي د پیل ټکي $x(0) = x_*$ او پیل لور $x'(0) = v$ سره. د $t \rightarrow 0$ لپاره دی

$$g_k(x(t)) = g_k(x_*) + ((\text{grad } g_k(x_*))^t v) t + O(t^2) = 0 + t + O(t^2).$$

په کره باندې ټکي د پوره کیدونکي کوچني $t > 0$ لپاره پریښودونکي (یعنې اجازه لرونکي) دي:

سرلیک

$$g_k(x(t)) \geq 0, \quad g_i(x(t)) = 0, \quad i \in I \setminus k.$$

د v جوړښت له مخې او f کټمتوالي لپاره دی

$$\frac{d}{dt}f(x(t))|_{t=0} = (\text{grad } f(x_*))^t v = \lambda_k (\text{grad } g_k(x_*))^t v = \lambda_k < 0.$$

تابع f د کرښې په اوږدوالي کميږي، د $f(x_*)$ د مینیمالوالي سره په تضاد یا مخامخ. لیکونکي: هیولیک، وایس

$$f(x, y) = y^2 - x$$

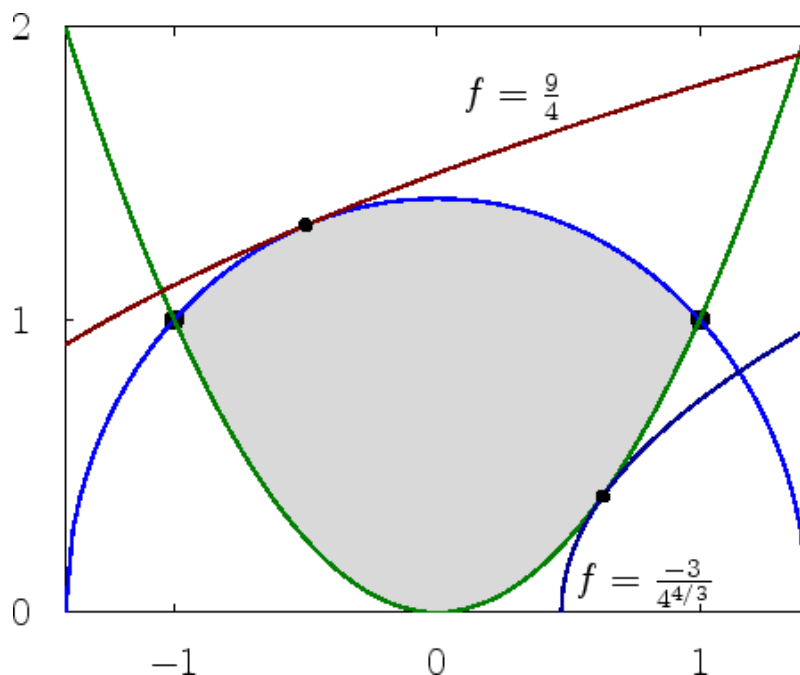
د کون-ترکر-شرایطو بنوولو ته د تابع
افراطیت د

$$y - x^2 \geq 0, \quad 2 - x^2 - y^2 \geq 0$$

له لارې په تعریف شوي روښځې ډیرې D باندې ټاکو. د کون-تکر-شرطونه دي

$$(-1, 2y) = \lambda(-2x, 1) + \mu(-2x, -2y)$$

$$\lambda(y - x^2) + \mu(2 - x^2 - y^2) = 0,$$



چیرته چې د لاگرانژ- ضریبونه λ او μ برابري یا همغه مخنښي لري. د څېري څخه پیژندل کیږي، چې د معال ځن ایز شرایطو د ټولو اجازه لرونکو ټکو لپاره کرښیز خپواک دي)) دا صفر نه دي او د ژیکړي په غوڅتکو غبرگ نه دي). له دط امله د کون-تکر شرایط د ټولو اکستریم ارزښتونو لپاره اړیندي. په دې توگه یا داسې چې کوم څنګیز شرطونه فعال دي، باید لاندې حالتونه وپیژندل شي:

$$(i) \quad \lambda = 0, \quad \mu = 0 \quad \text{(کوم څنګیز شرط فعال نه دی):} \quad \text{grad } f \quad \text{لپاره مساوات}$$

$$(-1, 2y) = (0, 0)$$

د پوره کېدوړ نه دی. په دې لاس ته راړنه د D په دننه کې اکستریما نه لري.

$$(ii) \quad \lambda = 0, \quad \mu \neq 0 \quad \text{(فعال):} \quad 2 - x^2 - y^2 \geq 0$$

سرلیک

$$(-1, 2y) = \mu(-2x, -2y)$$

$$2 - x^2 - y^2 = 0$$

په تعقیب $(\pm\sqrt{2}, 0) \notin D$ د $y = 0$ له امله ناشونی دی، $\mu = -1 < 0$

پوره دي. $y = \sqrt{7}/2$ او $x = -1/2$. د یوه لوکال اکتریموم لپاره د کون-تکر-شرطونه

$$y - x^2 \geq 0 \quad \lambda \neq 0, \quad \mu = 0$$

(iii) فعال: له

$$(-1, 2y) = \lambda(-2x, 1)$$

$$y - x^2 = 0$$

لاس ته راځي

$$\lambda = 2y = 2x^2 \geq 0, \quad -1 = (2x^2)(-2x) \Leftrightarrow x = 4^{-1/3}$$

$$y = 4^{-2/3}.$$

او

د کون-تکر-شرطونه د یوه لوکال اکستریموم لپاره پوره دي.

$$2 - x^2 - y^2 \geq 0 \quad y - x^2 \geq 0 \quad \lambda \neq 0, \quad \mu \neq 0$$

(iv) فعال: له

$$y = x^2 \quad \wedge \quad x^2 + y^2 = 2$$

لاس ته $(x, y) = (1, 1)$ راځي يا $(x, y) = (-1, 1)$ د $\text{grad } f$ لپاره په مساوات کي ځای په ځای کوو نو راکوي

$$(-1, 2) = \lambda(-2, 1) + \mu(-2, -2) \Rightarrow \lambda = 1, \quad \mu = -\frac{1}{2}$$

همداسې

$$(-1, 2) = \lambda(2, 1) + \mu(2, -2) \Rightarrow \lambda = 1/3, \quad \mu = -\frac{5}{6}$$

د لاگرانژ ضرب د مختلفو مخنځېنو له امله يا په بنسټ دواړه ټکي اکسترېم ځایونه نه دي.

دا چې f په کومپاڪټ ډېرې D هم ماکسیموم او هم مینیموم لري، کېدی شي په ډول يې د لاگرانژ مخنځېني په لاس پرېکړه وشي يا هم د تابع ارزښتونو د پرتلي په اساس. په تعقيب f په $(-1/2, \sqrt{7}/2)$ کي یو ماکسیموم او په $(4^{-1/3}, 4^{-2/3})$ کي یو مینیموم لري.

لیکونکي: هیلېک، پفایل

د مینیمي پر اېلم لپاره

$$f(x) \rightarrow \min, \quad a_i \leq x_i \leq b_i$$

د کون-تکر-شرطونه د لوکالمینیموم لپاره

$$\text{grad } f(x_*) = \sum_i (\lambda_i - \mu_i) e_i$$

$$\lambda_i, \mu_i \geq 0$$

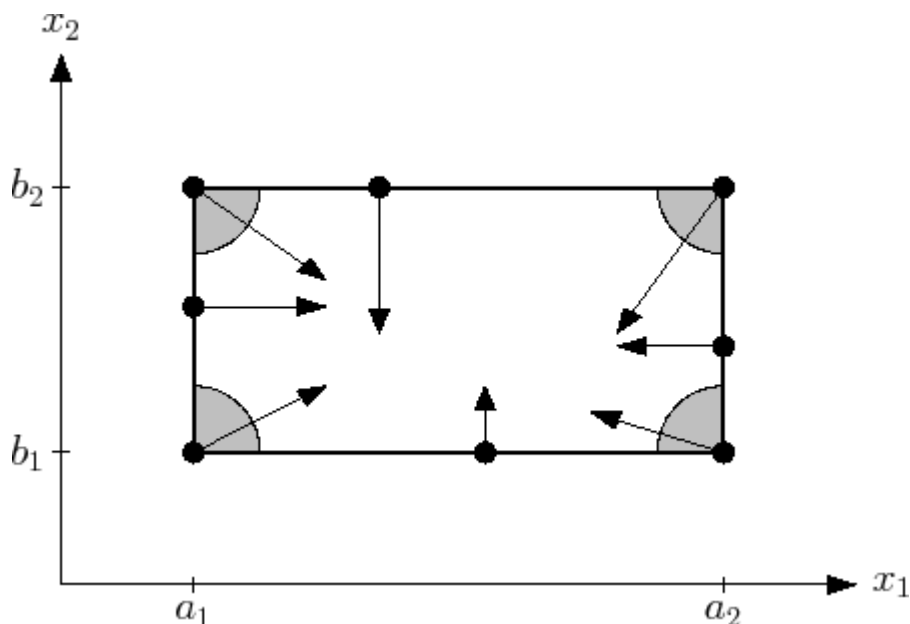
$$\lambda^t (x_* - a) + \mu^t (b - x_*) = 0$$

دې د e_i د i -م یوون-یا واحدوکتور سره. له دې سره ارزښتونه $\pm\infty$ د انټروال د پولې په توګه پریښوول شوی یعنې نجازه لري، داسې چې ټولې متحولې یا اوښتونې د همغه ډول نامساوات پوره کوي.

که $a_i < x_{*,i} < b_i$ وي، نو نودواړه د لاګرانژ-ضریبونه λ_i او μ_i صفر دي او له دې سره د $\text{grad } f(x_*)$ i -م کمپوننت g_i برعکس که یو له دې نامساواتو د x_i

لپاره فعال وي، په اړونده توګه د لاګرانژ-ضریب د g_i مخخښه کړه کوي:

$$x_{*,i} = a_i \rightarrow g_i \geq 0 ; \quad x_{*,i} = b_i \rightarrow g_i \leq 0 .$$



تابع د بیواریات موخه فنکشن لپاره د $\text{grad } f(x_*)$ ممکنه لوري بنایي د مینیموم لپاره
 په اړخونو د $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ په ګوډونو یا کونجونو. د مینیموم لپاره د ولاړګوډیز
 $\text{grad } f(x_*) = 0$ یا مستطیل په دننه کې باور لري.
 لیونکي: هیولیګ، پفایل

د یوه کرښیز تابع

$$(c_1, \dots, c_n)x \rightarrow \min$$

مینیموم د کرښیزو فرعي شرطونو لاندې

$$Ax \geq b$$

د یوه $m \times n$ -ماتریکس A سره سری مرښیز پروګرام بنایي.

یو حل $x_* \in \mathbb{R}^n$ د کون-تکر-شرطونه پوره کوي

$$c^t = \lambda^t A, \quad \lambda^t (Ax_* - b) = 0$$

د $\lambda_i \geq 0$ سره په ورته توګه د ماکسیموم لپاره $\lambda_i \leq 0$ باور لري.

د روښانه بیلګې

$$x + y \rightarrow \min, \quad x \geq 2, \quad y \geq 1, \quad x + 2y \geq 8$$

لپاره دی

سرلیک

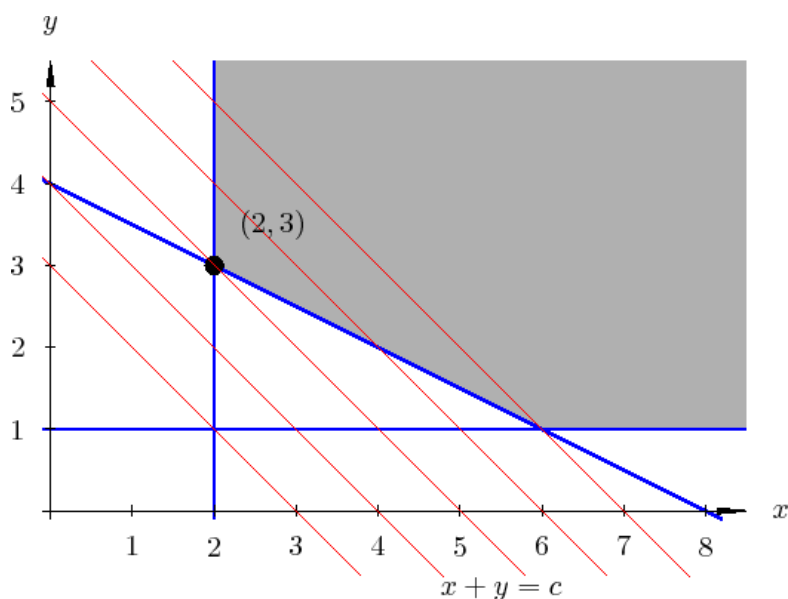
$$c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

او سړی د کون-تکر-شرایط لاس ته راوړي

$$1 = \lambda_1 + \lambda_3, \quad 1 = \lambda_2 + 2\lambda_3, \quad \lambda_1[x - 2] + \lambda_2[y - 1] + \lambda_3[x + 2y - 8] = 0$$

د $\lambda_i, [\dots] \geq 0$ سره. سړی زر پیژندلی شي، چې ټیک یو د لاگرانژ-ضریب باید صفر وي، چط په بل ډول په شرایطو کې یو تضاد باید رامنځ ته شي. په دې درې حالتونو

کې دوه فرعي شرایط فعال دي. دا (x, y) یواځنی کره کوي:



$$\lambda_1 = 0 \longrightarrow (6, 1) \quad \lambda_2 = 0 \longrightarrow (2, 3) \quad \lambda_3 = 0 \longrightarrow (2, 1)$$

له دې سره $\lambda_3 = 1$ فرعي شرطونه پوره کوي او د $(2, 1)$ لپاره $\lambda_1 = 0$ او

راکوي، دلته د لاگرانژ د ضرب د همغږۍ یا برابري مخنځېنې اړین شرطونه

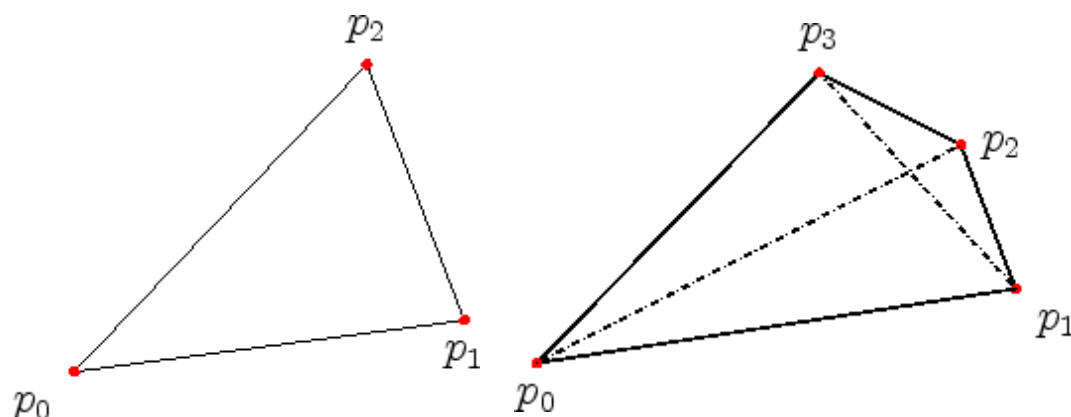
نه دې پوره د تابع مینیموم په $(2, 3)$ نیول یا فرض کيږي. په دط حالت کې د لاگرانژ –
 $\lambda = (1/2, 0, 1/2)^t$
 ضریبونه داسې دي .

یوځمکچیز یا هډسي جوړښت په څیره کط ښوول شوی دی. حل ټکی $(2, 3)$ دی، په کوم کې چې د موخه تابع سطحیزې کرښې معتبره ورشو لمس کړي. دا روښانه ده چې موخه تابع جگړي (ټیټیري)، که سطحیزه کرښه دا معتبره ساحه غوڅه (غوڅه نه) کړي. لیکونکي: بوسلي، هیولیگ

Simplex سیمپلکس

یو n -بعدیز (پراخېدونکی) سیمپلکس S د $n+1$ ټکو $p_0, \dots, p_n$ یو konvexe Hülle ده، چې دا ټول په یوه $(n-1)$ -بعدیز لاندې فضا کې نه دي پراته:

$$S = \left\{ x = \sum_j \alpha_j p_j : \sum_j \alpha_j = 1, \alpha_j \geq 0 \right\}$$



سرلیک

n=2

n=3

دوه- او درېبعديز سیمابمکسونه د درې ګوډي همداسې تیترايدر بلل کېږي.

د یوه سیمپلکس ډکۍ یا حجم د وکتورونو $p_i - p_0, i = 1, \dots, n$ د دیترمینانت په مرسته افاده کېدی شي:

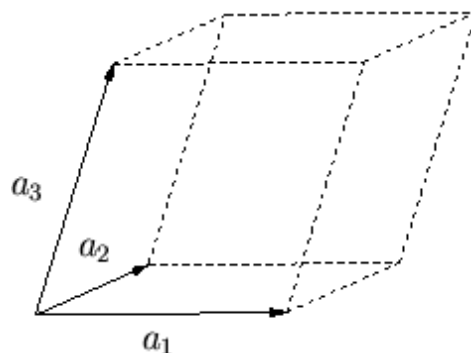
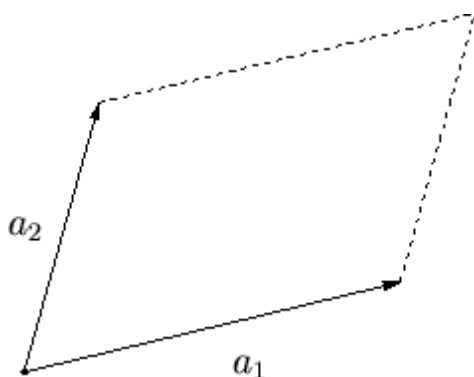
$$\text{vol } S = \frac{1}{n!} |\det(p_1 - p_0, \dots, p_n - p_0)|.$$

(Autoren: Boßle/Höllig/Streit)

غبرګ اېپیډ (غبرګ اړخیز یا مکعب) Parallelepiped

یو n -بعديز (یا پراخیدونی) غبرګ اېپیډ P د n کرښیزو وکتورونو a_i څخه غزیري:

$$P = \{x = \sum_i \alpha_i a_i : 0 \leq \alpha_i \leq 1\}.$$



n=2

n=3

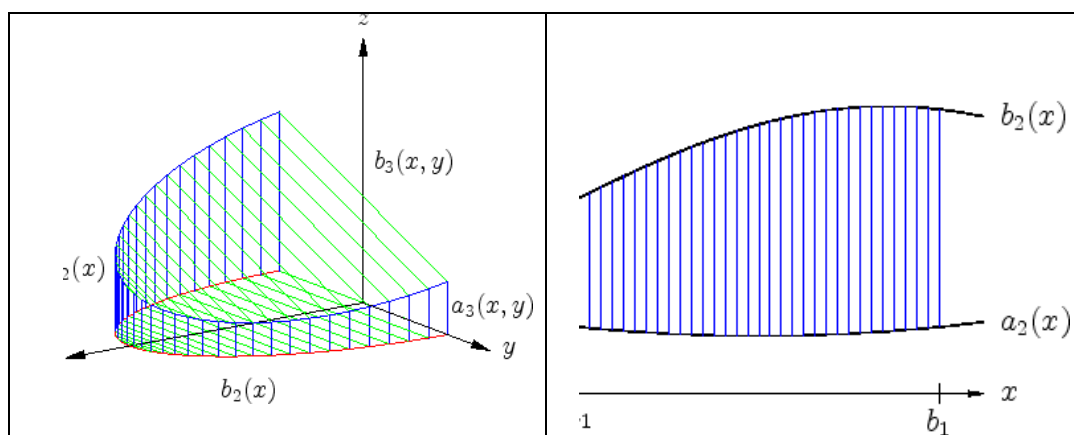
دوه – او درې بعدیز غبرګ خواييز غبرګ اړخيز همداسې شپاټ بلل کيږي.

د غبرګ خواييزو ډکۍ (حجم) د ترې غزیدلو وکتورونو د ډیټرمینانت مطلق ارزښت دی:

$$\text{vol } P = |\det(a_1, \dots, a_n)|.$$

لیکونکي: هیولیک، شترایت

د انتیګریشن ورشو



یوه بنسټیزه ورشو د یوه مناسب کواورډینات سیستم ترانسفورمیشن $x \rightarrow x'$

پسې د د ناپریکډونکو توابعو a_i او b_i ګراف له لارې رابند دي:

$$\begin{aligned} a_1 &\leq x'_1 \leq b_1 \\ a_2(x'_1) &\leq x'_2 \leq b_2(x'_1) \\ &\vdots \\ a_n(x'_1, \dots, x'_{n-1}) &\leq x'_n \leq b_n(x'_1, \dots, x'_{n-1}) \end{aligned}$$

سرلیک

د بنسټیز ورشوگانو یو تر زئکرو یا منحنيو پای ټولنه رگولار ورشو بلل کيږي. د دې لپاره یو ځاګړی حالت یو سیمپلکس دی چې پولیوګونالور شو څخه جوړ وي:

لیکونکي: بوسلی، هیولیګ، شترایت

د هوزدورف واټن Hausdorff-Abstand

په یوه متریک فضا M کې د یوې ډیرې U لپاره د متریک d سره کیدی شي د

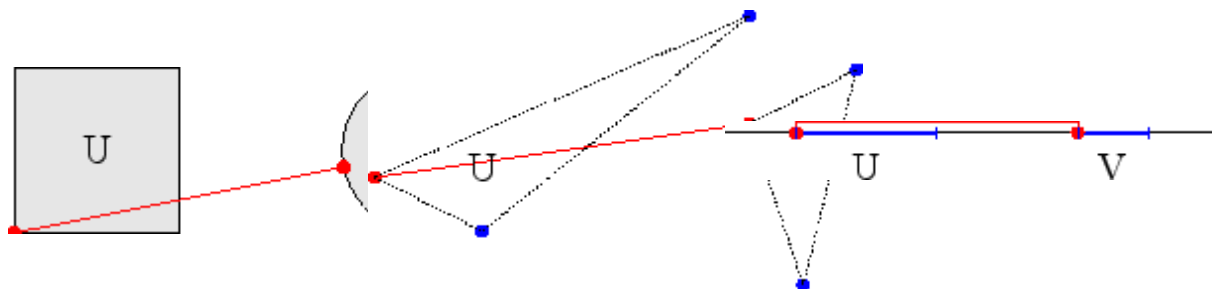
$$\text{dist}(x, U) = \inf_{u \in U} d(x, u)$$

سره د واټن و ته بلل کيږي. په ټولیزه توګه د دوه ډیریو هوزدورف-واټن په لاندې توګه تعریفیږي

$$\text{dist}_H(U, V) = \max \left(\sup_{u \in U} \text{dist}(u, V), \sup_{v \in V} \text{dist}(v, U) \right).$$

(لیکونکي: هیولیګ، شترایت

په لاندې څېره کې د ډیریو U او V لپاره یوڅو جوړې په هرکې ټکي په نڅېنه شوي، د هوزدورف-واټن همدایې داویکلید متریک نیول کيږي.



لکه د بیلگو څخه چې لیدل کیږي، $\text{dist}_H(U, V)$ د دوه ټکو U او V لنډ واټن نه دی

لیکونکي: هیولیک، شترایت

Mehrdimensionales Integral

ډېر بعدیز (ډېر پراخیدونکی) انتیگرال

په یوه رګولار ورشو د یوه ناپریکیدونکي تابع f انتیگرال کیدی شي د ریمن جمعې د پولې په څیر تعریف شي:

$$\int_V f dV = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_i f(P_i) \Delta V_i, \quad \Delta V_i = \text{vol}(V_i).$$

له دې سره د (توکي) پرديو ساده ورشوگانو V_i (په ټولیزه توګه سیمپلیګسونو یا غبرګ ایپیپیدونو) ټولنې یا اتحاد له لارې V اپروکسمې کیږي، دا په دې معنا چې د V او

$\bigcup_i V_i$ د هوزدورف – واټن د صفر په لور هڅیږي. د $|\Delta|$ سره کیدی شي د V_i ماکسیمال کچونه په نڅېنه شي، P_i په خوښه ټکي په V_i کې دي.

د لیکنې ډول $\Delta V_i \rightarrow dV$ د پولې پروسې سومبولي کول دي، او dV سړی ډکی یا

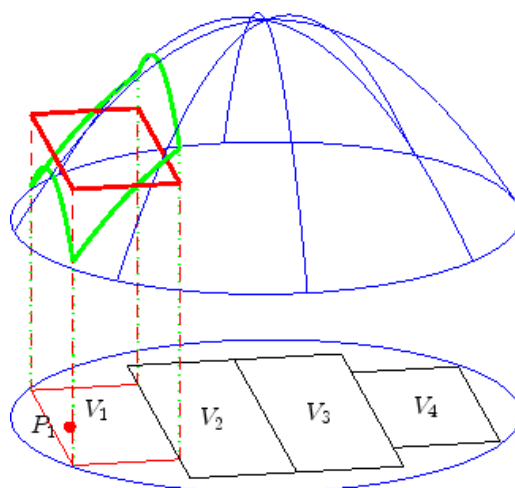
حجم بولي. په لنډ ډول $\int_V f$ هم لیکو یا په مفصل ډول

سرلیک

$$\int_V f dV = \int_V f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n,$$

که څوک د انټیګریشن متحولې راباسي.

د f ناپېرېدونې په اساس د ریمن انټیګرال تعریف هم د توکو ورشوگانو V_i او هم له ټکي P_i خپلواک دی.



د یوه زاتیز یا مثبت تابع لپاره انټیګرال د ډېرې ټکي یا حجم دی.

$$\{(x_1, \dots, x_n, h) : 0 \leq h \leq f(x), x \in V\}.$$

په ځانګړې توګه $\int_V 1$ د امتیګریتي ورشو V حجم دی.

په f او V د د هواروالي وړاندنیونه (فرضیه) کېدې شي ضعیفه شي، داسې چې ا نټیګرال په یوه مناسب پوله پروسه باندې تعریف وي.

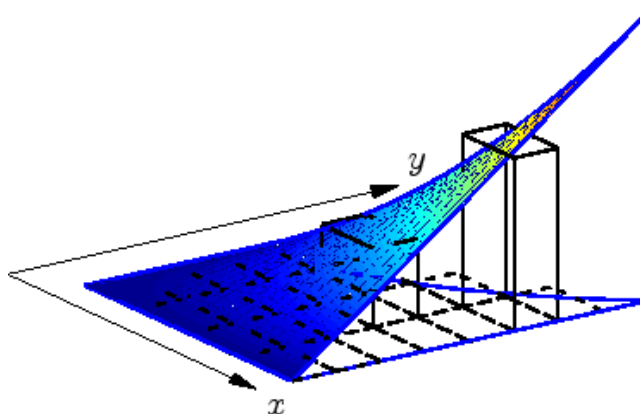
لیکونکي: بوسلي، هیولیک، شترایت

$$f(x, y) = xy$$

دې په ورشو

$$V: \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 + x^2$$

کې انټیګرال ونيول شي.



څیره د انټیګریشن ورشو په یوه شډل مربع ګیټر یا -منډو؟؟؟ باندې وېشنه یا ټوټه کېدنه

$$h = 1/n$$

بڼایي. د منډو پراختیا لپاره دا اپرکسیمیشن لاس ته راوړو

$$h^2 \sum_{0 \leq j < n} \sum_{0 \leq kh < 1 + (jh)^2} (jh)(kh) = h^4 \sum_{0 \leq j < n} j \sum_{0 \leq k < n + j^2/n} k.$$

د جګو درجو درجو ترمونو تېرېدنې سره دا د دې ډېلې جمعې سره برابر دی

$$h^4 \sum_{0 \leq j < n} j \left((n + j^2/n)^2 / 2 + C h^4 \sum_{0 \leq j < n} j n^2 / 2 + j^3 + j^5 / (2n^2) + O(n^2) \right)$$

سرلیک

$$= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} \right) + O(h),$$

اوله دې سره انتیگرال ارزښت $\frac{7}{12}$ لري.

لیکونکي: بوسلي، هیولیگ. شترایت

د فابینی جمله *Satz von Fubini*

په یوه بنسټیزه ورشو د یوه ناپرېکېدونکي تابع انتیگرال

$$V : a_j(x_1, \dots, x_{j-1}) \leq x_j \leq b_j(x_1, \dots, x_{j-1})$$

کېدی شي د یوې یوې یا یوې پراخېدونکي انتیگرالونو د یوې پسي شمېرنې له لارې لاس ته راشي:

$$\int_V f dV = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2(x_1)}^{b_2(x_1)} \cdots \int_{a_n(x_1, \dots, x_{n-1})}^{b_n(x_1, \dots, x_{n-1})} f(x_1, \dots, x_n) dx_n \cdots dx_2 dx_1.$$

له دې سره د بنسټیزو ورشوگانو د لړۍ پر لپسې رول نه لوبوي. په ځانګړې توګه د ډېل انتیگرال لپاره د ثابتې انتیګرېشن پولې سره

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy.$$

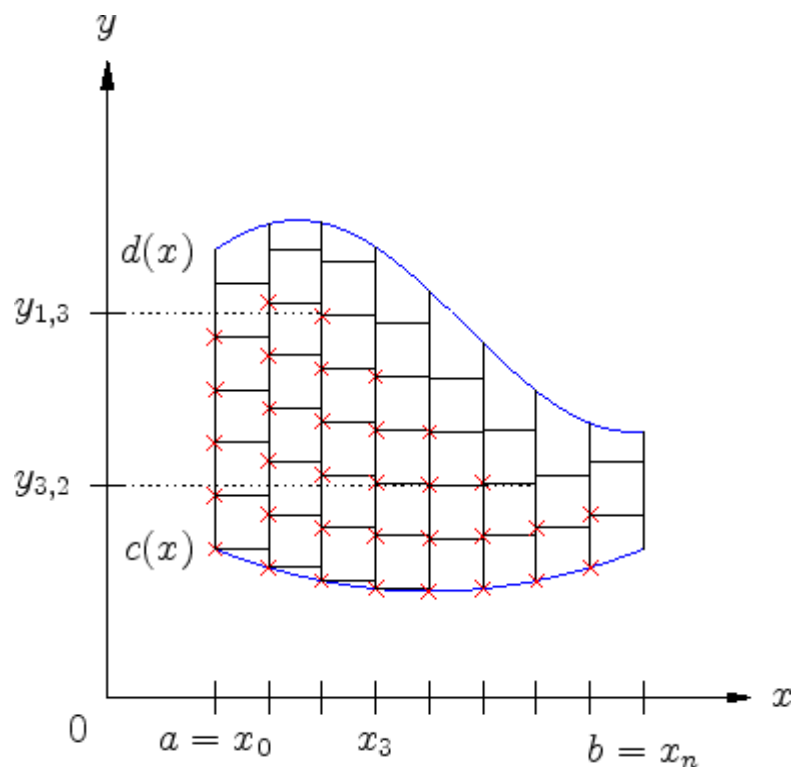
تولیزه تلنلار کېدی شي په دوهمې ځانګړې حالت

$$V: a \leq x \leq b, \quad c(x) \leq y \leq d(x)$$

لیدور وگرځي. د تعریف سره سم سری $\int_V f$ د ریمن جمعې له لارې اپروکسیمیکوي

$$s_n = h^2 \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m_j-1} f(x_j, y_{j,k})$$

د $y_{j,k} = c(x_j) + kh$ او $x_j = a + jh$ ، $h = (b-a)/n$ سره.



د f په کومپکت انټیگریشن ورشو V باندې برابر ډوله ناپربکیدنې په بنسټ دی

سرلیک

$$|f(x_j, y) - f(x_j, y_{j,k})| \leq \varepsilon, \quad y_{j,k-1} \leq y \leq y_{j,k},$$

د $h < h_\varepsilon$ لپاره. د دې په تعقیب کېدی شي دننۍ جمعه د یوه بعدي یا یو پراخیدوني انتیګرال سره پرتله شي:

$$s_n = h \sum_{j=1}^n \left(\int_{c(x_j)}^{d(x_j)} f(x_j, y) dy + r_{n,j} \right)$$

د $|r_{n,j}| \leq m_j h \varepsilon$ سره. همدا دلیل کېدی شي په ناپریکیدونکو توابعو

$$g(x) = \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy$$

وکارول شي، او سری لاس ته راوړي

$$s_n = \int_a^b g(x) dx + \left[r_n + h \sum_j r_{n,j} \right]$$

د $|r_n| \leq n h \varepsilon$ سره د $h < h'_\varepsilon$ لپاره. دا چې

$$|[\dots]| \leq \left((b-a) + \max_x (d(x) - c(x)) \right) \varepsilon$$

او $\varepsilon > 0$ په خوښه ټاکل کېدی شي، نو پوله $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ د ایتیر شوي iterierten یو بعدي انتیګرال سره سر خوري.

لیکونکي : هیولیګ، شترایت

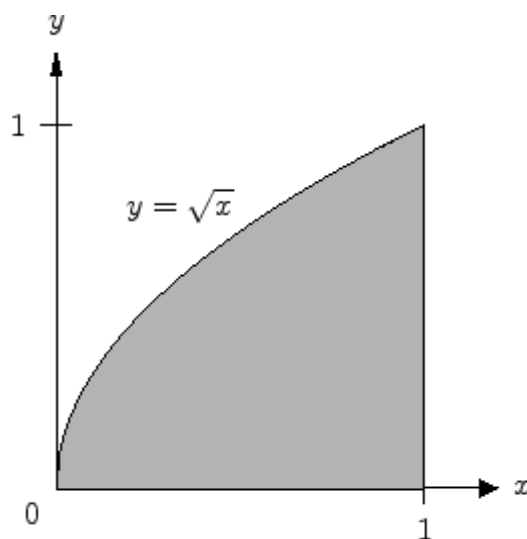
د تابع

$$f(x, y) = y \cos(x^2)$$

دې داپه څېره کې انځور شوې ورشو

$$V: \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq \sqrt{x}$$

کې انتیګرال ونيول شي.



د فوبینېجملې سره کیدی شي انتیګرال د دوه بعدی انتیګریشن له لارې وشمیرل شي:

$$\int_V f = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{x}} y \cos(x^2) dy \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2} \cos(x^2) \right]_{y=0}^{y=\sqrt{x}} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2} x \cos(x^2) dx = \left[\frac{1}{4} \sin(x^2) \right]_0^1 = \frac{1}{4} \sin 1.$$

که انتیگریشن لړۍ پرلپسې سره بدل شي، نو لاس ته راځي

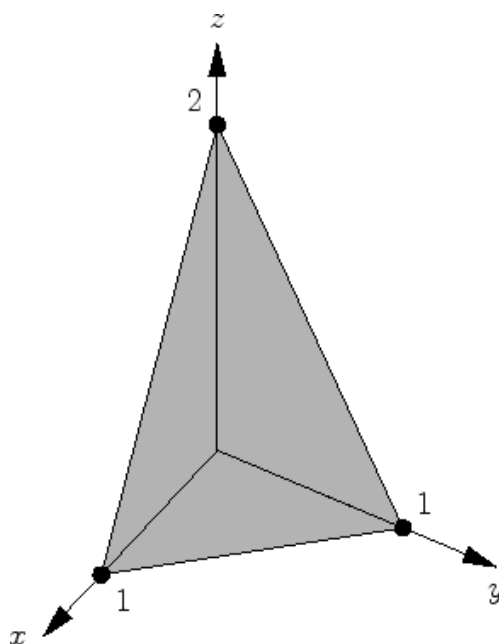
$$\int_V f = \int_0^1 \left(\int_{y^2}^1 y \cos(x^2) dx \right) dy.$$

په دې حالت کې دننۍ انتیگرال اکسپلیځیت شمیرور نه دی. د ایتزیر شوي انتیگرال د عملي شمیرنې لپاره کیدی شي د انتیگریشن لړۍ پرلپسې غوره وي.

لیکونکي: بوسلي، هیولیگ، شترایت

د دې لپاره چې تابع

$$f(x, y, z) = x$$



$$T : \quad x, y, z \geq 0, \quad x + y + \frac{z}{2} \leq 1$$

باندې وشميرل شي، نو لومړی به T د بنسټيزې ورشو په توگه ورکړل:

$$T : \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 - x, \quad 0 \leq z \leq 2(1 - x - y).$$

نو بيا دا انتيگرال د فوېبني د جملې په بنسټ شميرل کېدی شي:

$$\begin{aligned} \int_T f &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{2(1-x-y)} x \, dz \right) dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} 2x(1-x-y) \, dy \right) dx \\ &= \int_0^1 (x - 2x^2 + x^3) \, dx = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

ليکونکي: بوسلي، هيوليگ، شترایت

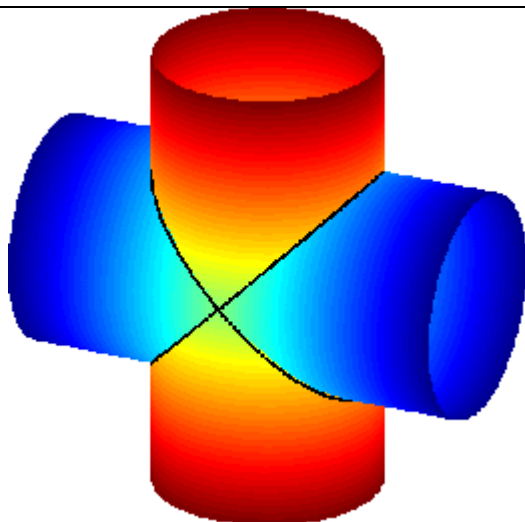
ډکی يا حجم شميرل کېږي، چې د دواړو توتو له (گډ) غوڅي

$$Z_1 : x^2 + y^2 \leq r^2, \quad Z_2 : x^2 + z^2 \leq r^2$$

له لارې منځ ته راځي.

سرلیک

د سیومتر ی په بنسټ لومړی د اوکتانتونو
ډکي یا حجمونه شمیرل کیږي. په لومړي
اوکتانت کې د انټیگریشن ورشو د گردۍ یا
دایرې څلورمه ده



$$K : 0 \leq x \leq r, \quad 0 \leq y \leq \sqrt{r^2 - x^2}.$$

په K باندې د (ګډ) غوڅي بدن جگوالی
ورکړ شوی دی. د ډکي یا حجم په حیث لرو

$$\int_K h = \int_0^r \left(\int_0^{\sqrt{r^2 - x^2}} \sqrt{r^2 - x^2} dy \right) dx = \int_0^r (r^2 - x^2) dx = r^3 - \frac{1}{3}r^3 = 2r^3/3,$$

$$16r^3/3$$

اوله دې سره ډټول بدن لپاره حجم .

لیکونکي: بیوسلر، هیولیک، شترایت

د n - بعدیز یونگونډاري (چې وړانګه یې یو واحد دی) ډکۍ (حجم)

د n - بعدی یونگونډاري ډکۍ یا حجم V_n دی

$$B_n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$$

$$V_n = \frac{2\sqrt{\pi^n}}{n\Gamma(\frac{n}{2})},$$

د گاما تابع Γ سره د $n \leq 6$ لپاره ارزښتونه په لاندې جدول کې ورکړ شوي دي:

n	1	2	3	4	5	6
V_n	2	π	$4\pi/3$	$\pi^2/2$	$8\pi^2/15$	$\pi^3/6$

لیکونکي: بیوسلر، هیولیک، شترایت

د گاما تابع د تعریف له مخې د $B_1 = [-1, 1]$ لپاره دی

$$\text{vol } B_1 = 2 = \frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{1}{2})}.$$

د ایندکشن پل (قدم) $(n-1) \rightarrow n$ لپاره لومړی په پام کې نیسو، چې B_n د هیوپر سطحې $x_n = 1$ او $x_n = -1$ ترمنځ پروت دی او د هیوپر سطحې سره غوڅی (قطاع) $x_n = \xi, (-1 \leq \xi \leq 1)$ یو - بعدیز غونډاری دی د $\sqrt{1-\xi^2}$ وړانګې سره. د حجم له دې امله کیدی شي د فوبینوسجملې سره په لاندې توګه وشمیرل شي:

سرلیک

$$\text{vol } B_n = \int_{-1}^1 (1 - \xi^2)^{\frac{n-1}{2}} \text{vol } B_{n-1} d\xi.$$

د اینکشن وړاندنیونی

$$\text{vol } B_{n-1} = \frac{2\sqrt{\pi^{n-1}}}{(n-1)\Gamma(\frac{n-1}{2})}$$

سره او د گاما- تابع د تابعمسالت،

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x),$$

لاس ته راځي

$$\begin{aligned} \text{vol } B_n &= \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} \frac{2\sqrt{\pi^{n-1}}}{(n-1)\Gamma(\frac{n-1}{2})} \\ &= \frac{2\sqrt{\pi^n} \frac{n-1}{2} \Gamma(\frac{n-1}{2})}{(n-1)\Gamma(\frac{n-1}{2}) \frac{n}{2} \Gamma(\frac{n}{2})} = \frac{2\sqrt{\pi^n}}{n\Gamma(\frac{n}{2})}. \end{aligned}$$

$$\int_{-1}^1 (1 - \xi^2)^{\frac{n-1}{2}} d\xi$$

له دې سره کېدی شي انتیګرال

له لارې وشمېرل شي: $d\xi = \cos t dt$ $\xi = \sin t$ ، سبستیچیوشن

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \sin^2 t)^{\frac{n-1}{2}} \cos t dt = \int_{-1}^1 (1 - \xi^2)^{\frac{n-1}{2}} d\xi$$

$$2 \int_0^{\pi/2} (\cos t)^{n-1} \cos t \, dt = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} . =$$

لیکونکي: بیوسل، هیولیک، شترایت

د ډېر بعدیز انټیګرال ترانسفورمیشن

د یوه رګولار ورشو $U \subseteq \mathbb{R}^n$ د د یوه په (بیجکټیو)، ناپرېکیدونکي، مشتقور ترانسفورمیشن g لپاره د

$$\det g'(x) \neq 0, \quad x \in U,$$

سره د ناپرېکیدونکو توابعو f لپاره باور لري:

$$\int_U f \circ g |\det g'| \, dU = \int_V f \, dV, \quad V = g(U),$$

له کوم سره چې $\det g'$ د ترانسفورمیشن د تابع دیترمینانت بلل کیږي. دا ډکي- یا حجم توکیځای اړونده یا ځاییز تغیر تشریح کوي.

$$dV = |\det g'| \, dU .$$

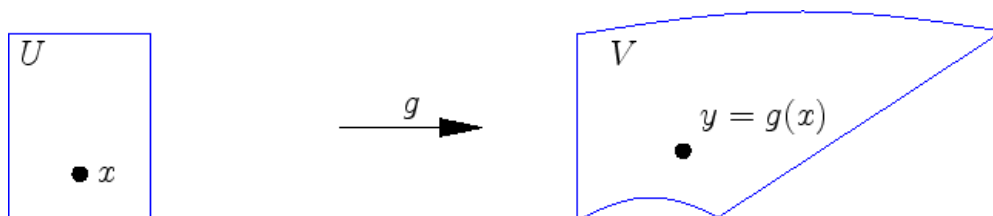
د یوه لو کال اور توګونال یا عمود کواوردیناتو ترانسفورمیشن ، دا په دې معنا چې د

عمودي متي g'

سرلیک

$$|\det g'| = \prod_{i=1}^n \left| \frac{\partial g}{\partial x_i} \right| ,$$

دي، دا په دې معنا چې د حجمونو سكالير ضريب د يوگونو متحولو سكاليري ضريبونو ضرب دی.



د يوه افين ترانسفورميشن $y = Ax + b$ سره حجمونکي د

$$dy = |\det A| dx .$$

سره تغير خوري.

په ځانگړې توگه د متحولې د سکالي کولو لپاره باور لري، $y_i = \lambda_i x_i$

$$dy_i = \lambda_i dx_i .$$

وړاندنيونې يا فرضيې کيدی شي لږ ضعيفې شي.

په ځانگړې توگه بايد د g بيجکټيويتي او د g' برعکسوالي فقط د U په دننه کې و غوښتل شي. د f پريکيدنه او ټاکلې زينگولاريتي هم ممکن دي، که ددواړو انټيگرالونو شتون تضمين وي.

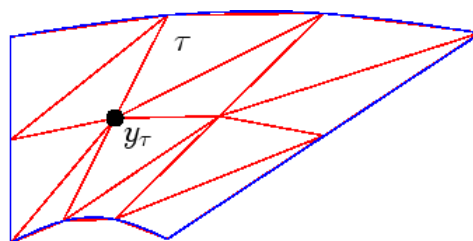
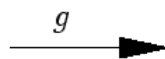
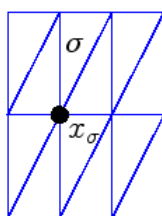
ليکونکي: هيوليگ، موبن

د بنوونې یا ثبوت فکر کیدی شي د دوه بعدي انتیگرال لپاره وینوول شي. د ساده والي

لپاره نیول کیږي، چې g دوه ځله ناپېرېدونکې مشتقور دی. دا را کوي، چې د

$$x \in U$$

$$|\det g'(x)| \geq 1/c > 0, \\ g(x + \Delta x) - g(x) = g'(x)\Delta x + r, \quad |r| \leq c|\Delta x|^2.$$



لپاره لکه په څیره کېږوښانه شوي، یو اېروکسیمیشن **ارگومنت کارول کیږي**. د دې لپاره د ورشو U د یوه تریانګولیرکوني (مثلي کوني) څخه مخ ته ځو، او کین انتیگرال د ریمین جمعي

$$S_U = \sum_{\sigma} f(g(x_{\sigma})) |\det g'(x_{\sigma})| \text{vol } \sigma, \quad x_{\sigma} \in \sigma$$

له لارې نږدې کوو. درېګوډي (مثلونو) σ دې ډیر زیات خواره *verzerrt* نه شي، دا په دې معنا چې

$$h/c' \leq a \leq c'h$$

د ټولو درېګوډیو سیکانتواوږدوالي a لپاره. دا په ځانګې توګه راکوي، چې لوی کونج برابرډوله په h کې کښته لور ته بنده یا محدود ده. دزئ اېروکسیمیشن پوره ښه دی، داسې چې د ریمین/جمعه یا – زیاتون د $h \rightarrow 0$ لپاره د $\int_U (f \circ g) |\det g'|$ په لور هڅیږي.

سرلیک

د کونجټکو د تابع له لارې $x_\sigma \mapsto y_\tau = g(x_\sigma)$ د څیره - یا ارزښت ورشو
 $V = g(U)$ یو درېګوډیزوالی یا مثلث کیدنه منځ ته راځي. کطدی شي د درېګوډي
 خورېدنه زیاته شي، مګر د نه پرېکړېدني او له دې سره د g د جاکوبي-ماتریکس د
 محدودیت اود برعکس تابع g^{-1} اړخونه د اپروکسیمیشن پارامتر h سره پرتله
 کیدونکي پاتیري. برسیره پردې د $\det g' > 0$ په حالت کې د درېګوډي لوریزوالی
 ساتلی پاتیري (په همدې ډول د دیترمینانت د مخنځې بدلون سره برعکس یا په څټ
 کیري)، داسې چې یوه بل پریوتل منځ ته نه راځي.

د منځ ته راغلي څیره - یا ارزښت ورشو منځ ته را ته راغلي درېګوډیزوالي ریمن-

د $S_V = \sum_{\tau} f(y_\tau) \text{vol } \tau$, $y_\tau = g(x_\sigma) \in \tau$,
 $\int_V f$ د f په لور جمع،
 ځي. دا باید وینول شي، چې د دواړو ریمن - جمعو کمښت د صفر په لور ځي په هڅیري.
 دا د τ درېګوډي د ښه اپروکیمیشن څخه لاسته راځي د σ د افیني څیرې $\tilde{\tau}$ له لارې:

$$\text{dist}_H(\tilde{\tau}, \tau) = O(h^2), \quad \tilde{\tau} = y_\tau + g'(x_\sigma)(\sigma - x_\sigma).$$

دا $\text{vol } \tilde{\tau} = |\det g'(x_\sigma)| \text{vol } \sigma$,
 $O(h^3)$ د دواړو ریمن - جمعود
 جمعې غړیا
 $O(h^{-2})$ زیاتونونو اود دوی د تعداد
 دیسکریپشن دی. له دې سره لاس ته راځي

$$|S_U - S_V| = O(h) \rightarrow 0.$$

د هوزدورف-واتن د تخمین د ښوونې لپاره سړی درېګوډي (مثل ټونه) سره پرتله کوي

$$\tau = \Delta(y_\tau, y_1, y_2), \quad \tilde{\tau} = y_\tau + g'(x_\sigma)\Delta(0, x_1 - x_\sigma, x_2 - x_\sigma)$$

د $y_i = g(x_i)$
 سره ګاونډي ټکي

$$y_\tau + \alpha'(y_1 - y_\tau) + \alpha''(y_2 - y_\tau),$$

$$y_\tau + \alpha'g'(x_\sigma)(x_1 - x_\sigma) + \alpha''g'(x_\sigma)(x_2 - x_\sigma)$$

د $0 \leq \alpha', \alpha'' \leq 1$ سره. د دویمشتق د ناپربکېدنې د نیونې په بنسټ لاس ته راځي، چې کمښت برابر ډوله د

$$O(\max(|x_1 - x_\sigma|^2, |x_2 - x_\sigma|^2))$$

له لارې اټکل کېدی شي، څه مو چې ښوول.

لیکونکۍ هیولیګ، موبن

د ترانسفورمېشن ښوولو ته کېدی شي یوه ورشو V تر څېړنې ونيول شي، هغه د دوه کرښیز سره تړلو پارابولسگمنت له لارې

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ u^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ u^2 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq u \leq 1$$

راندېږي. که د پارابولسگمنتونه وخوړول شي یعنې تل بل ځای ته یو ورل شي، نو سړی یو پیچکتیو تابع په یوون – یا واحد مربع U لاس ته راوړي.

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v + u \\ v + u^2 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq u, v \leq 1.$$

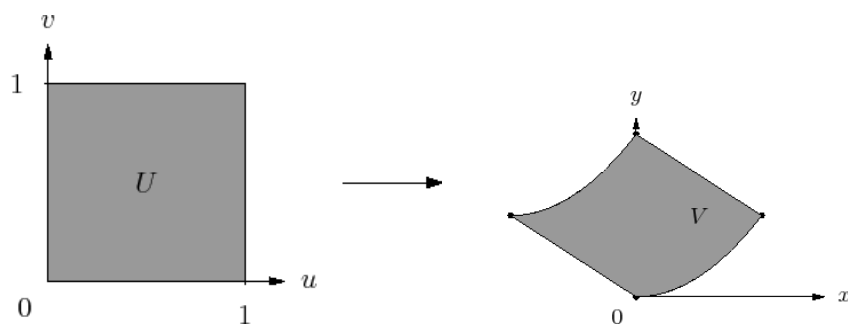
د تابع جاکوبي ماتریکس دی

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2u & 1 \end{pmatrix},$$

او سړی د تابع دیترمینانت په څېر لاسته راوړي

سرلیک

$$\det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = 2u + 1 > 0.$$



له دې سره د ډکي توکي د لاندې سره تغیر پري

$$dV = dx dy = (2u + 1) du dv = (2u + 1) dU.$$

په V باندې د $f(x, y) = x + y$ د انتگرال لپاره د ترانسفورمیشن قانون سره لاس ته راځي

$$\int_V (x + y) dx dy$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{2}{4} + 1 + \frac{1}{2} \right) dv = 2.$$

لیکونکي: هیولیک، موش

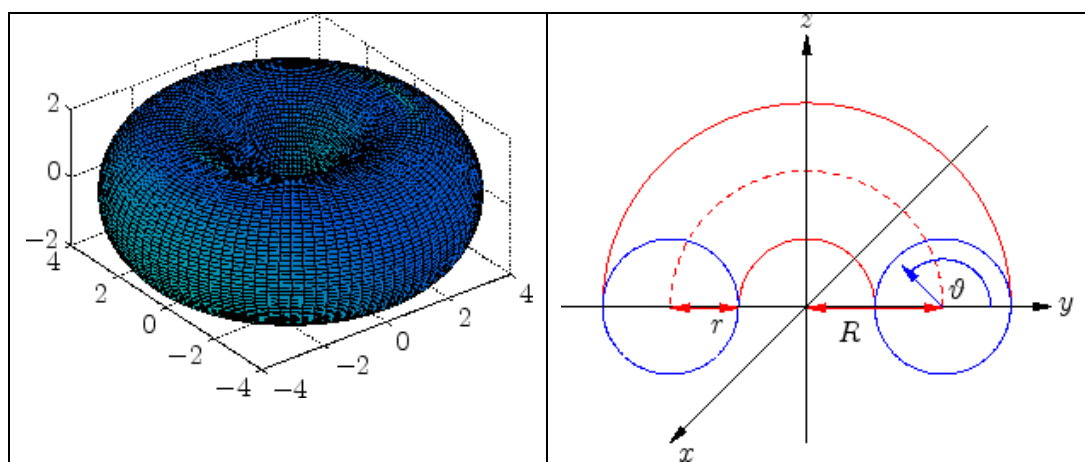
یوتوروس یا کړی د بېلگې په توګه د گردۍ - داېرې ټیکلي د څرخونن رامنځ ته کیري

$$\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R + rs \cos \vartheta \\ rs \sin \vartheta \end{pmatrix}, \quad 0 \leq s \leq 1, \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi$$

د z - په محور د $r < R$ سره، دا په دې معنا چې

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = p(s, \vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} (R + rs \cos \vartheta) \cos \varphi \\ (R + rs \cos \vartheta) \sin \varphi \\ rs \sin \vartheta \end{pmatrix}$$

يو ممکنه پارامترې کېښه ده د $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ سره.



$$p: \begin{pmatrix} s \\ \vartheta \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

جاکوبي ماتریکس دی

د ترانسفورمیشن

$$p' = (p_s, p_\vartheta, p_\varphi) =$$

$$\begin{pmatrix} r \cos \vartheta \cos \varphi & -rs \sin \vartheta \cos \varphi & -(R + rs \cos \vartheta) \sin \varphi \\ r \cos \vartheta \sin \varphi & -rs \sin \vartheta \sin \varphi & (R + rs \cos \vartheta) \cos \varphi \\ r \sin \vartheta & rs \cos \vartheta & 0 \end{pmatrix}$$

سرلیک

داچې متې يا سنتې يو بل ته اور توگونال دي، د تابع دېترميانانو لپاره باور لري

$$\begin{aligned} |\det p'| &= |p_s| |p_\vartheta| |p_\varphi| = |r| |rs| |R + rs \cos \vartheta| = : \\ &= r^2 s (R + rs \cos \vartheta). \end{aligned}$$

له دې سره د ډکي يا حجم لپاره لاس ته راوړو

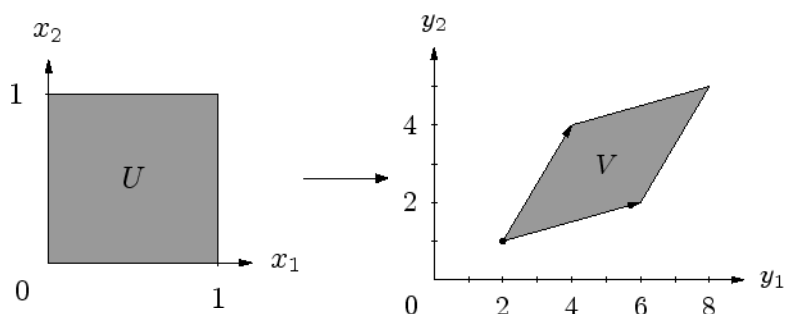
$$\begin{aligned} &\int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} r^2 s (R + rs \cos \vartheta) d\varphi d\vartheta ds \\ &= 2\pi r^2 \left(\int_0^1 \int_0^{2\pi} s R d\vartheta ds + \int_0^1 \int_0^{2\pi} r s^2 \cos \vartheta d\vartheta ds \right) \\ &= 2\pi r^2 \left(\int_0^1 2\pi s R ds + 0 \right) = 2\pi^2 R r^2. \end{aligned}$$

يو غبرگ اړخيز Parallelogramm يا موازي الاضلاع V کېدی شي د يوون گردی U يوه افین ترانسفورمېشن د څېرې په حيث انځور شي:

$$U \ni x \mapsto y = Ax + b \in V.$$

له دې سره b يو ګوډ ټکی دی او د A متې وکتورونه دي، چې دا غبرگ اړخيز غزوي. د دې څېره شوې بېلګې لپاره دی

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



د ترانسفورمیشن تابع دیترمینانت دی

$$\det \frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x_1, x_2)} = \det A = 10.$$

له دې سره د بېلګې په توګه د انټیګرال لپاره په V یو کرښیز تابع لاس ته راځي

$$f(y) = 3y_1 - 4y_2$$

$$\int_V f = \int_U f(Ax + b) 10 dV$$

په ټولیزه توګه معکوسکیدونکی تابع

$$(x_1, \dots, x_n)^t \mapsto Ax + b$$

یوونمکعب $U = [0, 1]^n$ په غبرګ اړخیز (-اږیږد) جوړوي، چې د ماتریکس مټې یا ستن څخه غزیږي. په ورته توګه دې روښانه بېلګې د $n = 2$ لپاره انټیګرال په V یو

$$f(y) = c^t y$$

کرښیز تابع دی.

سرلیک

$$\int_V f = \int_U c^t(Ax + b) |\det A| dx = c^t(Ae/2 + b) |\det A|$$

$$e = (1, \dots, 1)^t \quad \text{د سره.}$$

(لیکونکي: هیولیک، موبش

په توتو کواو دینات کې ډکیتوکې یا حجم توكي

Volumenelement in Zylinderkoordinaten

د کواو دینات ترانسفورمیشن لپاره

$$x = \varrho \cos \varphi, \quad y = \varrho \sin \varphi, \quad z = z$$

دی

$$dx dy dz = \varrho d\varrho d\varphi dz.$$

له دې سره په ځانګې توګه د یوه تابع f د انټیګرال لپاره په یوه توتو یا استوانه باور لري

$$Z: \quad 0 \leq \varrho \leq \varrho_0, \quad 0 \leq z \leq z_0$$

$$\int_Z f = \int_0^{z_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\varrho_0} f(\varrho, \varphi, z) \varrho d\varrho d\varphi dz.$$

په ځانګړې توګه د یوه اکسیاسیمتریک یا محور سیمتریک تابع $f(\varrho)$ لپاره دی

$$\int_Z f = 2\pi z_0 \int_0^{\varrho_0} f(\varrho) \varrho d\varrho.$$

د سطحې قطبي کوارډینات لپاره د سطحې توکي په ورته توګه ترانسفورمي کيږي.

(Autoren: Höllig/Much)

د کوارډینات ترانسفورمیشن

$$(x, y, z) = g(\varrho, \varphi, z)$$

لوکال یا ځای اړونده اورتوګونال دی، دا په دې معنا چې د جاکوبي ماتریکس

$$g' = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\varrho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \varrho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

اورتوګونال مټي یا ستنت لري. په تعقیب د تابع دیترمینانت یا فنکشنل دیترمینانت لپاره باور لري

$$|\det g'| = |g_\varrho| |g_\varphi| |g_z| = 1 \cdot \varrho \cdot 1 = \varrho.$$

(لیکونکی: هولیک، موبن)

د ګاوس تابع د انتیګرال ټاکنې ته،

سرلیک

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx = \sqrt{\pi},$$

سری لاندې مرستندوی جوړښت کاروي. سری د انتیگرال مربع شمېري:

$$\begin{aligned} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx \right)^2 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-y^2) dy \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2 - y^2) dx dy. \end{aligned}$$

دا انتیگرال کېدېشي د قطبي کوارډینات په مرسته ساده وټاکل شي:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \exp(-r^2) r dr d\varphi = 2\pi \left[-\frac{1}{2} \exp(-r^2) \right]_0^{\infty} = \pi.$$

((لیکونکی: هولیک، موبن

په غونډوسکي یا غونډاري (کورې-) کوارډینات کې د ډکي یا حجم توکي

د کوارډینات د ترانسفورمیشن لپاره

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = r \cos \vartheta$$

دی

$$dx dy dz = r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi .$$

په ځانګړې توګه په یوه غوږوسکي یا کوري $K : 0 \leq r \leq R$ باندې د یوه تابع f انتیګرال لپاره باور لري

$$\int_K f = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R f(r, \vartheta, \varphi) r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi .$$

په ځانګړي ډول د **رادیال** سیمتریک تابع $f(r)$ لپاره دی

$$\int_K f = 4\pi \int_0^R f(r) r^2 dr .$$

(لیکونکی: هولیک، موبن)

د کوارډینات ترانسفورمیشن

$$(x, y, z) = g(r, \vartheta, \varphi)$$

لوکال اور توګونال دی، دا په دې معنا چې د جاکوبي – ماتریکس

$$g' = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi & r \cos \vartheta \cos \varphi & -r \sin \vartheta \sin \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi & r \cos \vartheta \sin \varphi & r \sin \vartheta \cos \varphi \\ \cos \vartheta & -r \sin \vartheta & 0 \end{pmatrix}$$

سرلیک

اورتوگونال متي لري. په دې پسي د فنکشنلديترمينانت لپاره باور لري

$$|\det g'| = |g_r| |g_\vartheta| |g_\varphi| = 1 \cdot r \cdot r \sin \vartheta = r^2 \sin \vartheta.$$

د يوه راديالسيمتریک تابع f لپاره انتیگرال په ϑ او φ راځوي

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = 2\pi [-\cos \vartheta]_0^\pi = 4\pi.$$

دا تر مخضریب د $\int_K f$ شمېرنې له امله د یوونغونډاري پورته هواري سطحه ده.

(لیکونکی: هولیک، موبس)

په غونډوسکي (کري) $K : r \leq 1$ د r^α انتیگرال دی

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^1 r^2 r^\alpha \sin \vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi = 4\pi \int_0^1 r^{\alpha+2} \, dr.$$

فقط د $\alpha > -3$ لپاره شتون لري او په دې حالت کي مساوي دی لاندې سره

$$4\pi \left[\frac{r^{\alpha+3}}{\alpha+3} \right]_0^1 = \frac{4\pi}{\alpha+3}.$$

انتیگرال په $\mathbb{R}^3 \setminus K$ دی

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_1^{\infty} r^{\alpha} r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi = 4\pi \int_1^{\infty} r^{\alpha+2} dr$$

دا انټیګرال فقط د $\alpha < -3$ لپاره شتون لري او په دې حالت کې د لاندې سره مساويدي

$$4\pi \left[\frac{r^{\alpha+3}}{\alpha+3} \right]_1^{\infty} = \frac{-4\pi}{\alpha+3}.$$

(لیکونکی: هولیک، موبن)

د صفر نیو باندې د h په جگوالي فشار د بارومتري جگوالیفرمول له لارې ټاکل کيږي:

$$p(h) = p_0 e^{-\frac{\rho_0 g h}{p_0}}.$$

له دې سره نورمال فشار $p_0 = 101300 \frac{N}{m^2}$ دی، $\rho_0 = 0.150 \frac{kg}{m^3}$ د اکسیجن د ټینګوالي (غلظت) په صفر نیو (21% هوا اکسیجن دی) او $g = 9.80 \frac{m}{s^2}$ د ځمکې بیړه یا تعجیل دی.

ټینګوالی د فشار سره د ایډیال غاز مساوات سره تړلی:

$$\rho = \frac{p}{R_s T}$$

د $R_s = \frac{k_B}{m_{\text{Molekül}}} = 519 \frac{Nm}{Kkg}$ spezifischen د غاز ثابت د اکسیجن لپاره او

T په کالوین کې شوی تودوخي. د ساده ونې له امله دا د ثابتې $-3^\circ C$ په حیث، یعنې $T = 270 \text{ K}$ ، نیول- یا کيږي.

سرلیک

له دواړو مساواتو څخه کیدی شي په اتموسفیر کې په نږدې توګه د اکسیجن ټوله کتله وشمېرل شي:

$$M = \int_V \rho dV = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_{r_0}^\infty \frac{1}{R_s T} p_0 e^{-\frac{\rho_0 g h}{p_0}} r^2 \sin \vartheta dr d\varphi d\vartheta,$$

له کوم سره چې $r_0 = 6.37 \cdot 10^6$ m د ځمکې وړانګه ده. د

سبسټیچیشن پسي او په ϑ او φ باندې انټیګرال سره لاس ته راځي $h = r - r_0$

$$M = 4\pi \frac{p_0}{R_s \cdot T} e^{\frac{\rho_0 g}{p_0} r_0} \int_{r_0}^\infty e^{-\frac{\rho_0 g}{p_0} r} r^2 dr,$$

او د دوه واړه ټوټه – یا پارشل انټیګرال سره د انټیګرال لپاره لاس ته راځي

$$\int_{r_0}^\infty e^{-cr} r^2 dr = \left[-\frac{r^2}{c} e^{-cr} \right]_{r_0}^\infty + \left[-\frac{2r}{c^2} e^{-cr} \right]_{r_0}^\infty + \left[-\frac{2}{c^3} e^{-cr} \right]_{r_0}^\infty$$

$(c = \frac{\rho_0 g}{p_0})$. په ټولیزه توګه لاس ته راځي

$$M = \frac{4\pi p_0}{R_s T} (c^{-1} r_0^2 + 2c^{-2} r_0 + 2c^{-3}) = 2.59 \cdot 10^{19} \text{ kg}.$$

د پرتلي لپاره :

$$(2.3 \cdot 10^5 M)$$

$$6 \cdot 10^{24} \text{ kg} - \text{ځمککته}$$

$$(2.9 \cdot 10^3 M)$$

$$7.4 \cdot 10^{22} \text{ kg} - \text{سپوږمۍ کتله}$$

کټله او دروندتکی (نقطه ثقل؟)

د یوه بدن K کټله د تیځوالي $\varrho(x)$, $x \in K$, سره د

$$m = \int_K \varrho(x) dK$$

له لارې ورکړ شوی ده. په ځانګړې توګه د $\varrho(x) = 1$ لپاره د K ډکی (حجم) V لاس ته راوړو.

د کټلي دروندتکي s_ν — م کواور دینات د لاندې سره سم شمیرل کیږي

$$s_\nu = m^{-1} \int_K x_\nu \varrho(x) dK.$$

د $\varrho(x) = 1$ لپاره لرو

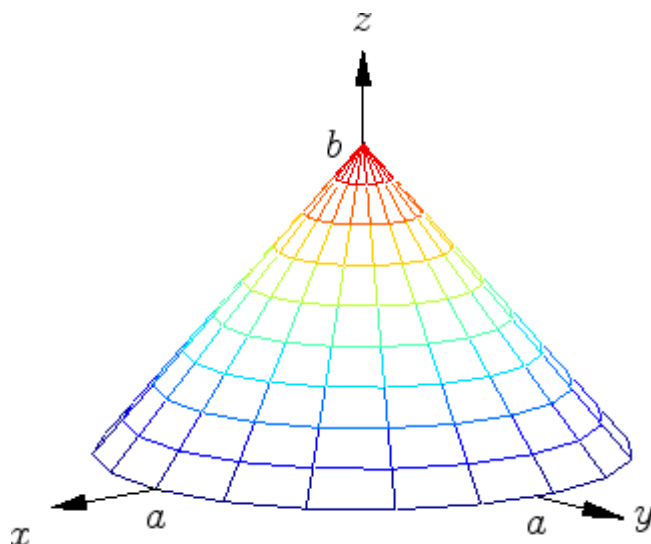
$$s_\nu = V^{-1} \int_K x_\nu dK,$$

او S هندسي دروندتکی او یا هم په ساده توګه دروندتکی بلل کیږي.

لیکونکي: هیولیګ، کیمرلې، ترايت

یو غونډاری (کره) K د بنسټورانګې a او جګوالي b سره ډکی (حجم) $V = \frac{\pi}{3} a^2 b$ لري او په توته کواور دینات کېلاندې انځورونه لري

$$K : \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \varrho \leq \frac{a}{b}(b-z), \quad 0 \leq z \leq b.$$



د سیمټري له امله د دروندټکي د $x - y$ -کواردیناتونه صفر دي. د z -کواردینات داسې شمیرل کیږي

$$s_z = \frac{1}{V} \int_K z$$

اوپه توتۀ کواردینات باندې د ټرانسفورمیشن وروسته لاس ته راوړو

$$\begin{aligned}
 V s_z &= \int_0^b \int_0^{a(b-z)/b} \int_0^{2\pi} \rho z d\varphi d\rho dz \\
 &= 2\pi \int_0^b \int_0^{a(b-z)/b} \rho z d\rho dz \\
 &=
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \pi \int_0^b z \left(\frac{a}{b}(b-z) \right)^2 dz \\
 &= \\
 &= \frac{\pi}{12} a^2 b^2 .
 \end{aligned}$$

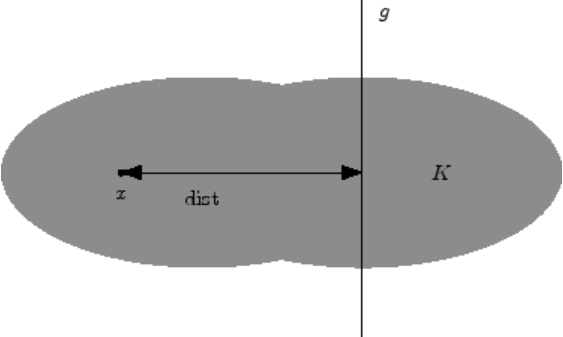
$$\begin{aligned}
 V_{S_z} &= \int_0^b \int_0^{a(b-z)/b} \int_0^{2\pi} \varrho \, z \, d\varphi d\varrho dz \\
 &= 2\pi \int_0^b \int_0^{a(b-z)/b} \varrho \, z \, d\varrho dz \\
 &= \pi \int_0^b z \left(\frac{a}{b}(b-z) \right)^2 dz \\
 &= \frac{\pi}{12} a^2 b^2 .
 \end{aligned}$$

له دې سره $S = (0, 0, b/4)$.
درونډتکی دی.

لیکونکي: هیولیک، شترایت

سرلیک

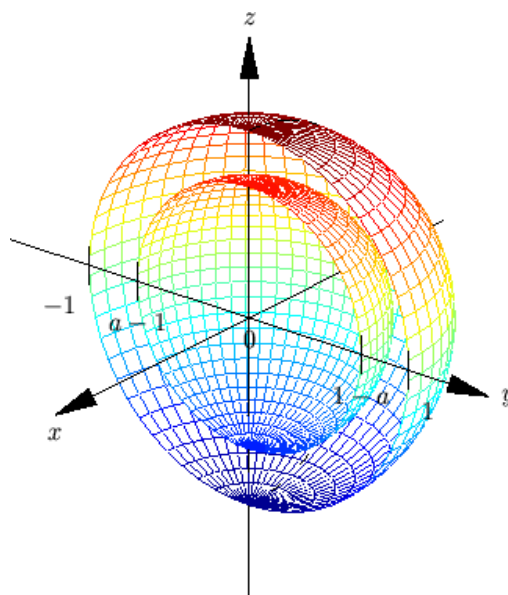
ترايگهايتسمومنت Trägheitsmoment (د کتلي څرکون اړونده لويه)

په يوه محور g د يوه تن K د تینګوالي $\varrho(x), x \in K$ سره دی Trägheitsmoment $I = \int_K \text{dist}(x, g)^2 \varrho(x) dK,$ د کومسره چې dist د واټن تابع ښايي	
---	--

لیکونکي: هیولیک، شترایت

تشکیل-یا جوړه شوي تشه غونډوسکه یا کره په کواور دینات سیستم کې لاندې انځورونه لري

$$K : 1 - a \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$



د يوه ثابت تینګوالي ϱ لپاره په z -محور د Trägheitsmoment دی g

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_{1-a}^1 \varrho \underbrace{(r \sin \vartheta)^2}_{\text{dist}((x,y,z),g)} \underbrace{(r^2 \sin \vartheta)}_{dK} dr d\vartheta d\varphi = \\
 &= \frac{2\pi\varrho}{5} (1 - (1-a)^5) \int_0^\pi \sin^3 \vartheta d\vartheta \\
 &= \frac{2\pi\varrho}{5} (1 - (1-a)^5) \left[-\cos \vartheta + \frac{1}{3} \cos^3 \vartheta \right]_0^\pi = \frac{8\pi\varrho}{15} (1 - (1-a)^5)
 \end{aligned}$$

که ټینګوالي ϱ له شرایطو، چې تشغوندوسکي کتله دي یو وي، سری غواري وټاکي،

$$1 = \int_K \varrho = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_{1-a}^1 \varrho r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi = \frac{4\pi\varrho}{3} (1 - (1-a)^3),$$

نو لاس ته راځي

$$I(a) = \frac{2}{5} \frac{(1 - (1-a)^5)}{(1 - (1-a)^3)}.$$

په ځانګړي توګه د ټولي غوندوسکي د Trägheitsmoment لپاره $I(1) = 2/5$ راګوي او د $a = 0$ لپاره د پولې ته تلني له لارې د لوپیتال قانون سره $I(0) = 2/3$ لیکونکي: هیولیګ، شترایت

د کږې (منحني) انټیګرال

سرلیک

د یوه ناپرېکيدونکې تابع f انټیګرال د یوې کړې (منحنې) C په اوډوالي د ریډولار ناپرېکيدونکې مشتقور پارامتریک کونې

$$t \rightarrow p(t) \in \mathbb{R}^n, \quad p'(t) \neq 0, \quad t \in [a, b],$$

سره

$$\int_C f = \int_a^b f(p(t)) |p'(t)| dt$$

تعریف دی اود ټاکل شوي پارامتریک کونې څخه خپلواک دی.

په ځانګې توګه د $f = 1$ لپاره سړی د کړې اوږدوالی لاس ته راوړي.

په f او p هوارتیا نیونه کیدي شي ضعیفه شي، داسې چې سړی انټیګرال په یوه مناسب ټولي پروسه باندې تشریح کړي.

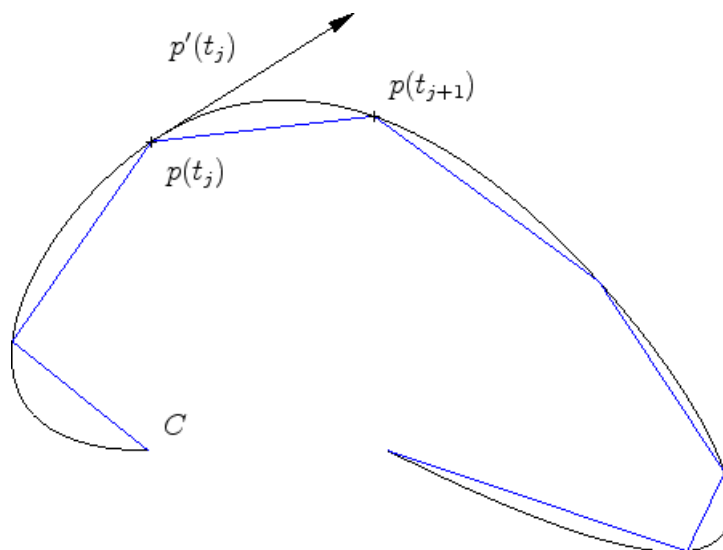
لیکونکي: ایپ، هیولیک

د ریمن زیاتون یا جمعي په مرسته کېدی شي تعریف مدلل شي. په کړي د د ټکو پرلپسې

$$p(t_j), \quad t_{j+1} - t_j = \Delta t_j,$$

دا لاندې دی

$$\int_C f \approx \sum_j f(p_j) |p(t_{j+1}) - p(t_j)|.$$



د منځ ارزښت جملې په بنسټ باور لري

$$p(t_{j+1}) - p(t_j) = \begin{pmatrix} p'_1(\tau_{1,j}) \\ \vdots \\ p'_n(\tau_{n,j}) \end{pmatrix} \Delta t_j$$

د $\tau_{\nu,j} \in [t_j, t_{j+1}]$ سره د p' د برابر ډوله ناپېرېکېدنې له امله په $[a, b]$ لرو

$$|p(t_{j+1}) - p(t_j)| = |p'(t_j)| + r_j |\Delta t_j|$$

د $|r_j| < \varepsilon$ سره د $|\Delta t_j| < \delta$ لپاره د توتې ونې د نړيوالې له امله بنې اړخ د

$$\int_a^b f(p(t)) |p'(t)| dt$$

په لور هڅېږي.

سرليک

پورته دليل هم د پارانتی کونط خپلواوالی بنایي، ځکه چې دا د ریکمزاتون کپمنځ ته نه راځي.

په بدیلی توگه کیدی شي مختلف پارامتریککونه د یوې متحولې سبستیچیوشن له لارې یو په وړوي.

لیکونکي: اپې، هیولیگ

د تابع

$$f(x, y, z) = \exp(-z)$$

انتیگرال به د C پیچي میخ د n اړونو یا څرخونو په اوږدوالي د پارانتريک کوني

$$C : \quad p(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}, \quad p'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi n],$$

سره وټاکلشي.

سری لاس ته راوړي

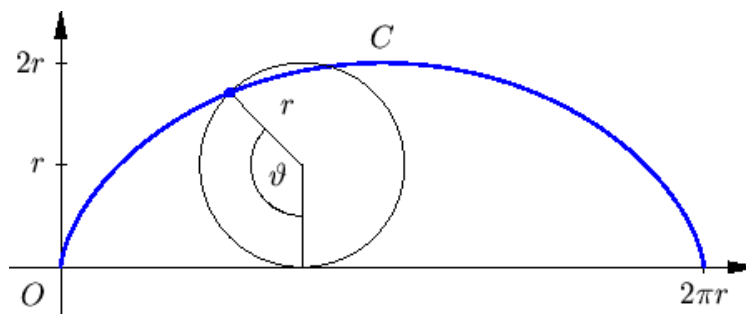
$$|p'(t)| = \sqrt{2}$$

او له دې سره

$$= \int_0^{2\pi n} \exp(-t) \sqrt{2} dt \int_C f$$

لیکونکي: اپې، هیولیگ

د څیڅکلویډ C اوږدوالی L ټاکل کیږي، هغه چې یو ټکي د یوې داېرې په چاپېریال د وړانګې سره تشریح کوي، چې په یوه کرښه ګرځي یا څرخي $r > 0$



د پارامترې کونډلپاره

$$C : \quad p(\vartheta) = r \begin{pmatrix} \vartheta - \sin \vartheta \\ 1 - \cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad \vartheta \in [0, 2\pi],$$

دی

$$p'(\vartheta) = r \begin{pmatrix} 1 - \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \end{pmatrix}, \quad |p'(t)| = r \sqrt{(1 - \cos \vartheta)^2 + \sin^2 \vartheta} = r \sqrt{2(1 - \cos \vartheta)}.$$

له دې سره د څیڅکلویډ د اوږدوالي لپاره لاس ته راځي

$$L = \int_0^{2\pi} r \sqrt{2(1 - \cos \vartheta)} \, d\vartheta$$

$$= 2r \int_0^{2\pi} \sin(\vartheta/2) \, d\vartheta = 2r [-2 \cos(\vartheta/2)]_0^{2\pi} = 8r,$$

سرلیک

د کوم سره چې کټوتوالی
لیکونکي اېپ، هیولیگ

$$1 - \cos \vartheta = 2 \sin^2(\vartheta/2)$$

کارول شوی.

د کږې (منحني) انټیگرالځویونه

د کږې انټیگرال $\int_C f$ په f کې کرښیز دی او نسبت و C ته زیا تیزیا د جمعې په ډول:

$$\int_C \alpha f + \beta g = \alpha \int_C f + \beta \int_C g$$

$$\int_C f dC = \int_{C_1} f + \int_{C_2} f$$

که $C = C_1 \cup C_2$ او C_1 او C_2 د ځانله ټکي پورې ټکي پردي وي،

دا له پارامترې کونې څخه خپلواک دی او په ځانگړې توگه د کږې د لوریزوالي څخه هم خپواک دی.

لیکونکي: اېپ، هیولیگ

د لیندې اوږدوالی

د یوې د

$$t \mapsto p(t), \quad a \leq t \leq b,$$

له لارې پارامترې شوې کړه (منحنې) C د $p(a)$ او $p(t)$ ترمنځ د کړې اوږدوالی

$$s(t) = \int_a^t |p'(\tau)| d\tau,$$

کیدۍ شي د کانوني کړې پارمتر په حیث وکارول شي. سړی دااسې په نا مه د لیندې پسي پارامترې کیدنه لاس ته اړوي:

$$q(s) = p(t), \quad |q'| = 1.$$

د کاندید تانجنټوکتور له مخې یا پر بنسټ د دې کانوني پارامترې کونې لپاره باور لري

$$\int_C f = \int_0^L f(q(s)) ds$$

د C د اوږدوالي L سره.

لیکونکي: اېپ، هیولیک

د بېلگې په توګه د لیندې $q(s)$ پسي د شپیرالې

$$C: \quad p(t) = \exp(t) \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad p'(t) = \exp(t) \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix}$$

پاراه متری کونه له $t = 0$ ټاکل کیږي. سړی لاس ته راوړي

سرلیک

$$s(t) = \int_0^t |p'(\tau)| d\tau = \int_0^t \sqrt{2} \exp(\tau) d\tau = \sqrt{2}(\exp(t) - 1)$$

همداسې

$$t(s) = \ln(s/\sqrt{2} + 1).$$

له دې سره لاس ته راځي

$$q(s) = (s/\sqrt{2} + 1) \begin{pmatrix} \cos(\ln(s/\sqrt{2} + 1)) \\ \sin(\ln(s/\sqrt{2} + 1)) \end{pmatrix}.$$

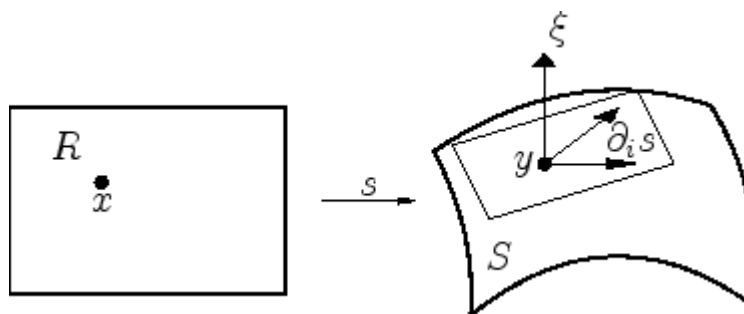
ليکونکي: اېپ، هيوليک

د يوې ټوټې سطحې رگولار پارامتریکونه

يو ناپېرېکېدونکی مشتقموږ پارامتریکونه

$$R \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \mapsto s(x) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

په يوه رگولار ورشو R باندې يو رگولار د سطحې ټوټه $S = s(R)$ تشرېح کوي، که s د R په دننه کې اینجکټيو (په باندې) وي او وکتورونه $\partial_1 s(x), \dots, \partial_{n-1} s(x)$ ټولو $x \in \overset{\circ}{R}$ لپاره کرښيز خپلواک وي.



دا تر مخښې پورې یواځنی ټاکلی یوونوکتور (واحدوکتور) ξ ، چې د $\partial_1 s(x), \dots, \partial_{n-1} s(x)$ څخه یا له لارې غزېدلی تانجنت سطحې ته اور توگونال $\partial_i s(x)$ دی، سطحې نورمال بلل کیږي. دا ووکتورونو سره یوځای د $\mathbb{R}^n$ یوه بنسټ جوړوي

لیونکي: هیولیک، موبش

د سطحې انتیگرال *Flächenintegral*

د یوه ناپېرېکیدونکي تابع f انتیگرال په یوه رګولار سطحې توتې د پارمټري کونې سره

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \mapsto s(x) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad x \in R,$$

او سطحې نورمالې ξ سره د

$$\int_S f dS = \int_R (f \circ s) |\det(\partial_1 s, \dots, \partial_{n-1} s, \xi)| dR$$

په حیث تعریف دی او د ټاکل شوي پارمټري کوني څخه خپلواک دی.

د دیترمینانت ارزښت د سطحېتوکي د سکالي شوی ضریب دی:

$$dS = |\det(\partial_1 s, \dots, \partial_{n-1} s, \xi)| dR.$$

د $f = 1$ لپاره د ځانگړي حالت په حیث سری د S سطحې مساحت لاس ته راوړي.

د f او S مساواتورانديونې کیدی شي ضعیفې شي، داسې چې انټیگرال په یوه مناسب پوله پروسه باندې تعریف شي. برسېره پردې کېدی شي یوه سطحه د ډېرو سطحې ټوټو یوځای شوې یا جوړه شوې وي. د سطحې انټیگرال نو په دې حالت کې د یوگونو ټوټه سطحو باندې د انټیگرالونو زیاتون یا جمعه ده.

لیونکي: هیولیگ، موبش

د ساده ونې له امله دوه پراخیدونې یا دوه دیمزنال حالت ترڅیرني لاندې نیسو.

کېدی شي تعریف د ریمن-زیاتون یا —جمعي په مرسته مدلل کړی شي. لکه په څېره کې چې بنوول شوي، سری د تریانگولي کولو له لارې R اپروکسيمي کوي د درېگودي σ د کانتې **اورډوالي سره متناسب و** h ته. د گودتکو د ټوابو له لارې دا د S یوتریانگل تولیدوي د درېگوديو τ سره:

$$\tau \ni (x_\tau, y_\tau, z_\tau) = s(u_\sigma, v_\sigma).$$

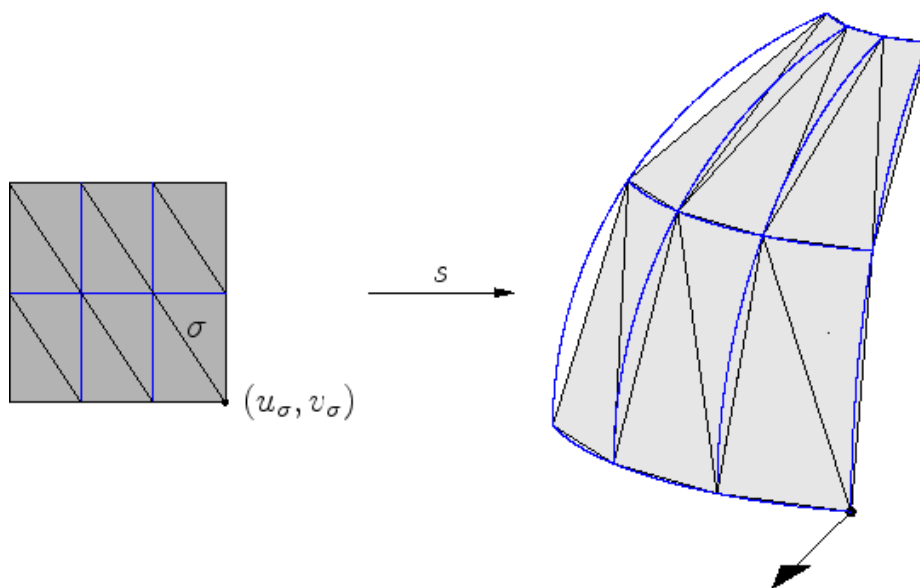
د سکالي کولو ضریب د درېگودي د سطحې تغیر اپروکسيمي کوي

$$\text{area}(\tau) = |\det(s_u(u_\sigma, v_\sigma), s_v(u_\sigma, v_\sigma), \xi)| \text{area}(\sigma) + O(h^3).$$

په تعقیب انتیگرال د $h \rightarrow 0$ لپاره د ریمنن – زیاتون له لارې

$$\sum_{\sigma} f(x_{\tau}, y_{\tau}, z_{\tau}) |\det(s_u(u_{\sigma}, v_{\sigma}), s_v(u_{\sigma}, v_{\sigma}), \xi)| \text{area}(\sigma)$$

نږدې کيږي، هغه چې د $h \rightarrow 0$ لپاره د انتیگرال په لور هڅيږي



لیونکي: هیولیگ، موبن

$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$	
------------------------------	---

$$(r, \varphi) \mapsto s(r, \varphi) = \begin{pmatrix} (1+r) \cos \varphi \\ (1+r) \sin \varphi \\ \varphi \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad -\frac{1}{2} \leq r \leq \frac{1}{2}$$

له لارې پارامترې شوې د راتاو پورظ یا زینې Wendeltreppe S برخه توتو

سرلیک

انټیگرال و نیول شي.

د سطحې توکو د سکالي کولو فاکتور د ټاکلو لپاره لومړی شمیر و (خیره پورته مخ کې):

$$s_r = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s_\varphi = \begin{pmatrix} -(1+r) \sin \varphi \\ (1+r) \cos \varphi \\ 1 \end{pmatrix}.$$

دا چې ټوټه مشتقونه اور توگونال دي، دی

$$|\det(s_r, s_\varphi, \xi)| = |s_r| |s_\varphi| = \sqrt{(1+r)^2 + 1}.$$

له دې سره لاس ته راځي

$$\int_S f d\omega = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (1+r) \sqrt{(1+r)^2 + 1} dr d\varphi = 2\pi \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (1+r) \sqrt{(1+r)^2 + 1} dr$$

$$= \frac{2\pi}{3} \left[((1+r)^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{2\pi}{3} \left(\left(\frac{13}{4} \right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{5}{4} \right)^{\frac{3}{2}} \right).$$

لیونکي: هیولیگ، موبن

د یوه تابع $z(x, y)$ د گراف S د سطحې توکی دی

$$dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy.$$

دا د پارمټیکولو لپاره د ټولیز تعریف څخه ترلې لاس ته راځي

$$(x, y) \mapsto s(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z(x, y) \end{pmatrix},$$

څکه چې د سطحې نورمال ξ غبرګ دی و

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ z_x \end{pmatrix}}_{s_x} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ z_y \end{pmatrix}}_{s_y} = \begin{pmatrix} -z_x \\ -z_y \\ 1 \end{pmatrix}$$

ته او د $|\xi| = 1$ له امله دی

$$|\det(s_x, s_y, \xi)| = |s_x \times s_y| = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}.$$

د بیلګې په توګه د کونکرت یا روښانه تابع $z(x, y) = x^2 + \frac{1}{2}y^2$ د ګراف لپاره دی

$$dS = \sqrt{1 + 4x^2 + y^2},$$

او سړی د $f(x, y) = xy$ لپاره لاس ته راوړي او دا په ولاړګودیز

$[0, 1] \times [0, 2]$ پرتې سطحې ټوټې

$$= \int_0^1 \int_0^2 xy \sqrt{1 + 4x^2 + y^2} dy dx \int_S f dS$$

سرلیک

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{3} \int_0^1 \left[x(1 + 4x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^2 dx = \frac{1}{3} \int_0^1 \left(x(5 + 4x^2)^{\frac{3}{2}} - x(1 + 4x^2)^{\frac{3}{2}} \right) dx \\
 &= \frac{1}{3} \left[\left(\frac{1}{20}(5 + 4x^2)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{20}(1 + 4x^2)^{\frac{5}{2}} \right) \right]_0^1 = \frac{61}{15} - \frac{625}{6}\sqrt{5}.
 \end{aligned}$$

ليونكي: هيوليگ، موبن

د سطحې توکي په توتۀ کواوردینات کې

د سطحې توکي د یوه د

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \varrho \cos \varphi \\ \varrho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}$$

له لارې پارامترې شوی د یوې توتې پورته پوښ S د وړانګې ϱ سره دی

$$dS = \varrho d\varphi dz.$$

له دې سره په توتۀ کواوردینات کې د یوه تابع f د انتیګرال لپاره باور لري

$$\int_S f dS = \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \int_0^{2\pi} f(\varrho, \varphi, z) \varrho d\varphi dz.$$

ليونكي: هيوليگ، موبن

د تانجنت وکتور د اور توگوناليتي له امله

$$s_\varphi = \begin{pmatrix} -\varrho \sin \varphi \\ \varrho \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

د سکالا کولو کتور د سطحې توکو لپاره دی

$$|\det(s_\varphi, s_z, \xi)| = |s_\varphi| |s_z| = \varrho,$$

لکه چې غوښتل مو.

ليونکي: هيوليگ، موبس

$$V = [0, 1]^2$$

د څلورۍ يا مربع لپاره اصلي جمله داسې ده

$$\int_0^1 \int_0^1 \text{grad } f(x, y) dx dy = \begin{pmatrix} \int_0^1 f(1, y) - f(0, y) dy \\ \int_0^1 f(x, 1) - f(x, 0) dx \end{pmatrix}.$$

دا له تابع څخه ترلي ليدل کيږي:

$$n = (\pm 1, 0), (0, \pm 1)$$

د کټمټوالي کمپوننتونه د اونيواريانت (يومتحولي يا اووښوتوني) اصلي جمله په گوته کوي. د بيلگي په توگه لومړی کمپوننت و لاندې ورته يا يو ارزښته يا اکويوالننډی

سرلیک

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f_x(x, y) dx - [f(x, y)]_{x=0}^{x=1} \right) dy = 0.$$

(Aus: Mathematik-Online)

په غونډاري کواوردینات کې د سطحو توکي

د سطحې د توکي د یوه د

$$\begin{pmatrix} \vartheta \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} R \sin \vartheta \cos \varphi \\ R \sin \vartheta \sin \varphi \\ R \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

له لارې لپاره پارمټري شوی فضا Sphäre د وړانګې R سره دی

$$dS = R^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi.$$

له دېسره په غونډاري کواوردینات کې د یوه تابع f د انټیګرال لپاره باور لري

$$\int_S f dS = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(R, \vartheta, \varphi) R^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi.$$

لیونکي: هیولیک، موبس

د تانجنت وکتور د اور توګونالیتی له امله

$$s_{\vartheta} = \begin{pmatrix} R \cos \vartheta \cos \varphi \\ R \cos \vartheta \sin \varphi \\ -R \sin \vartheta \end{pmatrix}, \quad s_{\varphi} = \begin{pmatrix} -R \sin \vartheta \sin \varphi \\ R \sin \vartheta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

د سکالیکولو وکتور د سطحې توکو لپاره دی

$$|\det(s_{\vartheta}, s_{\varphi}, \xi)| = |s_{\vartheta}| |s_{\varphi}| = R^2 \sin \vartheta,$$

لکه چې غوښتل مو.

لیکونکي: هیولیک، موبس

د نیمغونډاري (-پیالي یا پوښ) دروندتکی S دی $H : x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad z \geq 0,$ د ثابت ټیګوالي سره وټاکل شي	
--	--

د سیومتری په اساس د درونټکي د x -او y - کواوردیناتونه صفر دي. د z - کواوردینات لپاره د غونډاري کواوردینات د کارولوله امله سړی لاس ته راوړي

$$s_z \text{ area}(H) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \vartheta) \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = \pi,$$

$$s_z = \frac{1}{2}.$$

او د $\text{area}(H) = 2\pi$ سره لاسته راځي.

لیکونکي: هیولیک، موبس

سرلیک

د ډیرواره انتیگرال لپاره اصلي جمله

که n د یوه رګولار ورشو $V \subset \mathbb{R}^m$ د باندې لور ته لوریزه یوونورم یا واحدنورم وېنایید رګولار $(m-1)$ -- بعد یا پراخېدونې ژئ ∂V سره، نو د یوه ناپېرېکېدونکي مشتقور تابع f لپاره باور لري

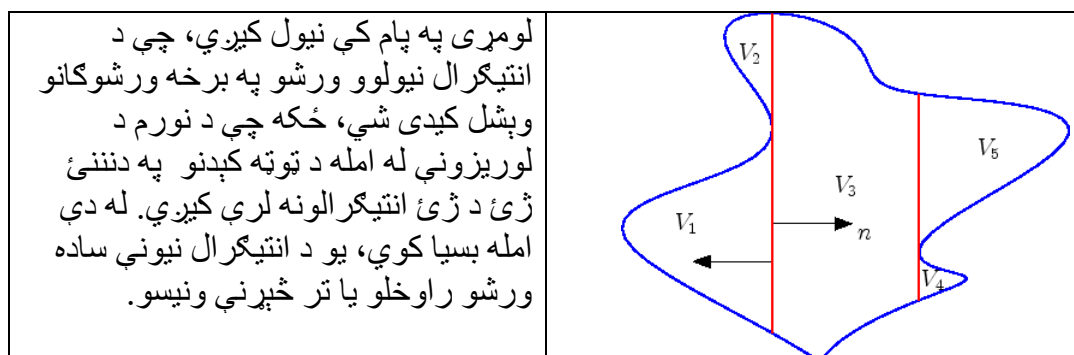
$$\int_V \partial_\nu f = \int_{\partial V} f n_\nu, \quad \nu = 1, \dots, m.$$

که سړی دا مساوات سره یوځای کړي، نو سړی وکتوري کټمټوالی لاس ته راوړي.

$$\int_V \text{grad } f = \int_{\partial V} f n.$$

(لیکونکي: هولیک، هورنر)

د ښوونې فکر د $m = 2$ لپاره ښوول کېږي.



د $m = 2$ لپاره سړی V په ساده ورشوگانو ټوټه کوي په لاندې بڼه

$$V : a \leq x \leq b, \quad c(x) \leq y \leq d(x).$$

بیا د ډبل انتیگرال لپاره باور لري

$$\int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f_y(x, y) dy dx = \int_a^b (f(x, d(x)) - f(x, c(x))) dx.$$

په ولاړو یا عمودو *vertikalen* ژبو د y – کمپوننت د صفر عمود دی له دې امله باید د ژئ انتیگرال لپاره پورته اوکښته ژئ په پام کې ونیول شي یا وکتل شي. لاندې ژئ کیدی شي په لاندې بڼه

$$C : x \mapsto (x, c(x)), \quad a \leq x \leq b$$

پارامتریک شي او

$$n = \frac{1}{\sqrt{1 + c'(x)^2}} \begin{pmatrix} c'(x) \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$dC = \sqrt{1 + c'(x)^2} dx$$

ډا چې دی، نو باور لري

$$\int_C f n_2 = \int_a^b f(x, c(x))(-1) dx.$$

په ورته توګه لاندې ژئ انتیگرال شمېرل کيږي، او د ارزښتونو زیاتون یا جمعه د ډبل انتیگرال سره سر خوري یا همغږیز کيږي.

(لیکونکي: هولیک، هورنر)

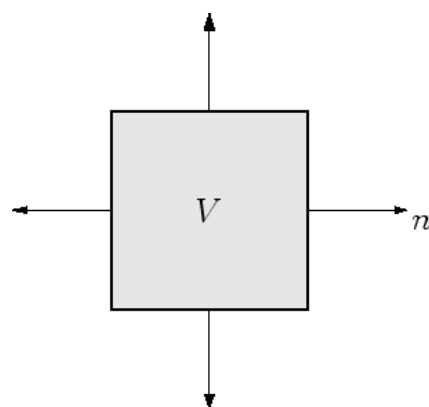
د مربع $V = [0, 1]^2$ لپاره اصلي جمله ده

سرلیک

$$\int_0^1 \int_0^1 \text{grad } f(x, y) \, dx \, dy = \begin{pmatrix} \int_0^1 f(1, y) - f(0, y) \, dy \\ \int_0^1 f(x, 1) - f(x, 0) \, dx \end{pmatrix}.$$

دا له تابع څخه ترلی لیدل کیږي:

$$n = (\pm 1, 0), (0, \pm 1)$$

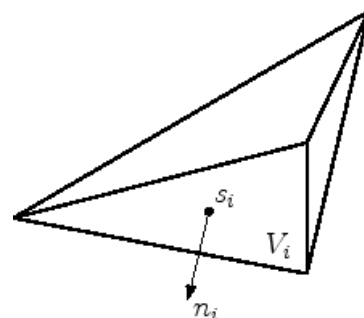


د کټمټوالي کمپوننتونه د یو متحول والي اصلي جمله ده. د بیلګې په توګه لومړی کټپوننت و لاندې ته ورته یا اکویوالنټ دی

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f_x(x, y) \, dx - [f(x, y)]_{x=0}^{x=1} \right) dy = 0.$$

(Aus: Mathematik-Online)

$V \subseteq \mathbb{R}^m$ دې یو سیمپلکس وي، چې د $(m-1)$ -بعدي سیمپلکسونو
 $V_i, i = 1, \dots, m+1$ له لارې را بنډیږي او n_i د باندې لور ته لوریز
 یووننورمال یا واحدنورمال نومول کیږي او s_i د V_i درونټکی وي.



د یوه ثابت تابع $f(x) = b$ لپاره د اصلي جملېلاسته راځي

$$0 = \sum_i \text{vol}_{m-1}(V_i) n_i.$$

د یوه کرښیز تابع $f(x) = a^t x$ لپاره باور لري

$$\text{vol}_m(V) a = \sum_i \text{vol}_{m-1}(V_i) (a^t s_i) n_i.$$

دلته وکارول شوی، چې د یوه سیمپلکس S لپاره د دروندټکي s سره مربعیز فرمول

Quadraturformel د کرښیز تابع f لپاره ټیک ده

(Aus: Mathematik-Online)

سرلیک

د یوه غونډاري لپاره په یوه غونډاريکواوردینات کې د وړانګې R اوپاس —یا پورته یا پوښ سطحې یا هوارې سره باور لري

$$dV = r^2 \sin \vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi, \quad dS = R^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$$

او $n = (x, y, z)^t / R$ یووننورمال دی. د دې پسي یا دبلاسته راوړنې پسي اصلي جمله ده

$$\begin{aligned} \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \text{grad } f(r, \vartheta, \varphi) r^2 \sin \vartheta \, d\varphi \, d\vartheta \, dr &= \\ &= R^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(R, \vartheta, \varphi) \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} \sin \vartheta \, d\varphi \, d\vartheta. \end{aligned}$$

د بېلګې په د روښانه تابع لپاره سړی لاس ته راوړي

$$f(x, y, z) = xz^2 = R^3 \sin \vartheta \cos \varphi \cos^2 \vartheta$$

د ګرادینټ او $f n$ لپاره

$$\text{grad } f(x, y, z) = \begin{pmatrix} z^2 \\ 0 \\ 2xz \end{pmatrix},$$

$$f(x, y, z)n = \frac{1}{R} \begin{pmatrix} x^2 z^2 \\ xy z^2 \\ x z^3 \end{pmatrix}.$$

د سیومتری په بنسټ اخرو دواړو لیکوباندې انتیگرال صفر راځي. د لومړۍ لیکې لپاره په غونډاري کواور دینات کې صفر لاس ته راځي

$$\begin{aligned} \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^4 \cos^2 \vartheta \sin \vartheta \, d\varphi \, d\vartheta \, dr &= \\ R^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} R^3 \sin^3 \vartheta \cos^2 \vartheta \cos^2 \varphi \, d\varphi \, d\vartheta &= \\ = \frac{4}{15} \pi R^5. \end{aligned}$$

(Aus: Mathematik-Online)

نوتیه انتیگرال *Partielle Integration*

د ځوی توابعو f او g لپاره د کومپاکت وړونکي سره باور لري

$$\int_{\mathbb{R}^m} g \partial^\alpha f = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^m} f \partial^\alpha g.$$

(لیکونکي: هولیک، هورنر)

سرلیک

دا چې f او g کومپاکت وړونکي لري، یوه کوارډ V شتون لري، داسې چې د V په ژئ او هم د باندې له V دواړه توابع ورک شي.

د اصلي جملې له مخې د ډېرواره انټیګرالونې لپاره با وړ لري

$$\int_{\mathbb{R}^m} \partial_\nu(fg) = \int_V \partial_\nu(fg) = \int_{\partial V} (fg)n_\nu = 0$$

د یوه په خوښه ټوټه مشتق ∂_ν لپاره له بلي خوا د ضرب قانون له مخې دی

$$\partial_\nu(fg) = g\partial_\nu f + f\partial_\nu g$$

او له دې سره

$$\int_{\mathbb{R}^m} g\partial_\nu f + \int_{\mathbb{R}^m} f\partial_\nu g = 0, \quad \text{bzw.} \quad \int_{\mathbb{R}^m} g\partial_\nu f = - \int_{\mathbb{R}^m} f\partial_\nu g.$$

د ∂^α په تجزیه په یوگونو ټوټه مشتقونو له لارې او پرلپسې د مساواتو استعمال سره سړی دا ورکړ شوی فرمول لاس ته راوړي، ځکه چې په هوارو یا خویو توابعو کې د ټوټه مشتق سره بدلېدلی شي.

(لیکونکي: هولیک، هورنر)

د گرین فرمولونه **Greensche Formeln**

که n د باندې لور ته لوریز د یوه رګولار ورشو $V \subseteq \mathbb{R}^m$ یوونورمال یا واحد نورمال وښايي د رګولار ژئ سطحې $S = \partial V$ سره، نود دوه ناپربکېدونکي مشتقور توابعو f او g لپاره باور لري

$$\int_S f \frac{\partial g}{\partial n} = \int_V (\text{grad } f)^t \text{grad } g + f \Delta g.$$

چېرته چې $\frac{\partial g}{\partial n}$ د دباندي لورته مشتق بنایي نورمال دی.

په ځانگړي د $f = 1$ لپاره لرو

$$\int_S \frac{\partial g}{\partial n} = \int_V \Delta g.$$

یوسیومتری واریانت په گرین نومول شوي کټمټوالی دی

$$\int_S f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} = \int_V f \Delta g - g \Delta f.$$

د دواړو گرین فرمولونو نه کېدی شي دخوی والي وړاندنیونه ضعیفه شي، داسي چې په مناسب پوله ارزښت تعریف شي.

(لیکونکي: هولیک، هورنر)

د ډېرواره اینتگرال اصلي جملې پسې دی

$$\int_S f \partial_\nu g n_\nu = \int_V \partial_\nu (f \partial_\nu g), \quad \nu = 1, \dots, m.$$

د ضرب قانون سره په بني اړخ انتیگرال لپاره لاس ته راځي

$$(\partial_\nu f)(\partial_\nu g) + f(\partial_\nu \partial_\nu g)$$

په $\nu = 1, \dots, n$ باندې زیاتون یا جمعي له دې سره د گرین لومړی فرمول راکوي.

سرلیک

دویم فرمول د f او g بدلون له لارې لاس ته راځي. سړی د

$$\int_S g \frac{\partial f}{\partial n} \quad \text{او} \quad \int_S f \frac{\partial g}{\partial n}$$

لپاره کټمټوالی کموي یا سره تفریقوي او په پام کې نیول کیږي، چې د ډکي- یا حجم اینتگرالونو د گراډینټ ضرب له منځه وړي یا پورته کوي؟

(لیکونکي: هولیک، هورنر)

د فبرورۍ ۲۴ د ۲۰۱۱ ز ک.

د لوی څښتن په برکت او مهربانۍ (ژباړی)

هر پیل شوی کار چې پای کیږي، نو ناروغه زړه ورسره، هغه د شاعرانو خبره، باغ باغ کیږي. (ژباړی)

د ډاکټر ماخان شینواري چاپ شوي لیکنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړی:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra :
general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

1987 Vienna (Austria):

دویم:

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren .
Uni. Wien

*Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras,
at the University of Vienna/Austria*

لاندې د شمیرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه، له
خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسيره د انجری، فزیک او اقتصاد
لپاره ، همداسې د بنوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ
او دا نوې لیکنه به یې ځنو ځایونو غزېدلې او ځنې ځایونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمکچپوهنه (هندسه) ، په سلو، زرو کې شمیرنه، د گټې – او کټې د کټې
شمیرنه ، د احتمالي شمېرنه کتاب د بنوونکي ټولې اړتیاوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انگرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني - پښتو - او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځيال برابر وړ (دا کتاب په دې څانگه کې يو پيل دی، ساده ليکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمير پوهنې فرمولونو ټولگه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شميرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

يوولسم: د افغانستان په هکله سپينې خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بيا ابادولو ټولنه،، له خو

يادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکټر ماخان شينواري د ،،د افغانستان روغې او بيا

ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکټر ماخان ،،ميري،، شينواري ليکنې او ژباړې چې په چاپيدو يې پيل کيږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

لاندې د برينکمن ليکنې چې له پرينکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

- ۱ - شمیرپوهنه د بنوونځي لپاره لومړی ټوک
- ۲ - شمیرپوهنه د بنوونځي لپاره دویم ټوک
- ۳ - شمیرپوهنه د بنوونځي لپاره دریم ټوک
- ۴ - د احتمالي شمیرنه د بنوونځي لپاره
- ۵ - احصایه یا ستاتیستیک د بنوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتگارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتگارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

- ۶ - انالیزی ۱
- ۷ - انالیزی ۲
- ۸ - کرینیز الجبر
- ۹ - د شمیرپوهنې بنسټونه
- ۱۰ - د فرمولونو ټولګه
- ۱۱ - فنکشنل انالیز
- ۱۲ - وکتور شمیرنه

نورې ژباړې

۱۳ - له www.grundstudium.info/linearealgebra څخه: کرینیز الجبر

۱۴ - Georg Guttenbrunner گڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

Bonn (Germany):

۱۵ - د شميرپوهنې ستر کتاب دويم چاپ د پوره تغيراتو سره : دا کتاب د شميرپوهنې برخې برسيره د

انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د بنوونکو او زدهکونکو لپاره پوره گټور دی. په

کتاب کې د اړتيا سره زياتونه او کونه راغلي

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دويم چاپ د پوره تغيراتو سره

۱۷ - الجبر بنسټونه دويم چاپ له تغيراتو سره

۱۸ - ډېرې پوهنه يا ست تيوري

۱۹ - د شميرپوهنې سم اند (منطق رياضي)

۲۰ - د يو څو شميرپوهانو ژوندليک

۲۱ - د شمير پوهنې گډې ودې ليکنې

۲۲ - داهم ژباړه ده، خو ليکونکي يې متأسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتيگرال شميرنو ته تمرينونه او اوبيوني يا حلونه يې

۲۳ - د شميرپوهنې انگريزي پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ - د شميرپوهنې پښتو انگرېزي ډکشنري

۲۵ - د شميرپوهنې پښتو ډکشنري د شميرپوهنيزو ويونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې (دا هغه ليکنې دي، چې ځنې يې په نړيوالو جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ - د افغانستان په هکله سپينې خبرې، چې وبه غزيرې.

نوري ليکنې، چې په ژباړه يې پيل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتگارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتگارت پوهنتون ن ج څخه خپرېږي:

د گروپونو تيوري

- د بسوونځي لپاره فزيک د برينکمن ليکنه

له پنځم ټولگي څخه تر اووم ټولگي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دويم مسلک فزيک دی، دا ليکنې ژباړم. دا هم د دې ليکوال يوه ډېره ښه ليکنه ده، چې -د شميرپوهنې په څير- دلته هم زيات تمرينونه د حل يا اوبيوني سره په کې راغلي او ماته زيات گټور برېښي)

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library