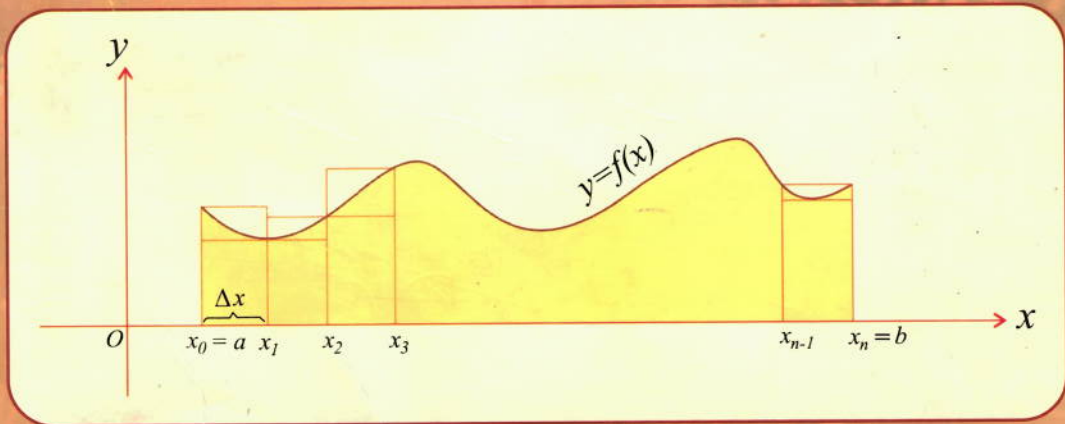


(نوی نصاب)

عمومي رياضي

له اووم ټولگې څخه تر دولسم ټولگې پورې



ارشمیدس اریستو محمد بن موسی اسحاق بن ایزک کیشی

مؤلف: استاد سردار محمد (خوریانی)

عمومي رياضي

(نوی نصاب)

استاد سردار محمد (خوږيانی)



کتاب پښندنه

د کتاب نوم /

عمومي رياضي (نوی نصاب)

مؤلف /

سردار محمد (خوږياني)

ډيزاين /

الله يار تسلي

خپرنډوی /

ميهن خپرنډويه ټولنه

چاپکال /

۱۳۹۵ ال

چاپشمبر /

۱۰۰۰ ټوکه

آدرس

ميهن خپرنډويه ټولنه پېښور - جلال آباد

جلال آباد: اسحاقزی مارکیټ لاندې پور، لومړی دوکان

Email: Khorshidhimat@yahoo.com

Abdurashid.himat@gmail.com

Cell: ۰۳۰۰-۵۹۸۱۴۲۵- ۰۳۲۱۹۸۹۵۶۲۱

۰۷۸-۸۵۲۹۱۹۴ ۰۷۷۳۵۳۵۴۲۰

د چاپ حقوق له ميهن خپرنډويې ټولنې سره خوندي دي.

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

مقدمه

الحمد لله الذي فهمنا بعلوم الاشياء والحوادث و علمنا بزيادات هم و التواقص و الصلوة و سلام على رسوله بفهم الانسان يشرع في الاعمال و المباحث.

اما بعد:

خوشحاله یم چې د نوي نصاب د ریاضي په لیکلو باندې د خدای (جل جلاله) په فضل او مهربانی باندې قادر شوم. د نصاب د اول څخه بشوونکو او زده کوونکو د ریاضي په لنډیز او وضاحت باندې اسرار کولو. دا دی دغه کتاب په د 1394 لمریز کال د سرطان په 23 نېټه بشپړ او چاپ ته چمتو شو. پدې کتاب کې د حساب څخه تر انتیگرالونو پورې ټول مباحث په جلا جلا توگه لیکل شوي او مثالونه یې حل شوي دي. که په غور سره ولوستل شي او مثالونه یې چې حل شويدي څو څو واره وکتل شي انشا الله د ریاضي په باب مو به ستونزې حل شي.

د کتاب تصحیح او سمون دوام او غور غواړي که څه هم مونږ دا کتاب څو څو واره په غور سره کتلي او کمی او نواقص مو د امکان تر حده سم کړي، که بیا هم په کتاب کې کوم نقص موجود و، د کتاب سمون لپاره د سپین غر تعلیمي مرکز سره په لاندې پته تماس ونیسئ.

جلال اباد ښار تالاشۍ چوک د حاجي زر خان پلازه

سردار محمد خوریانی

د نصرت عالي لېسې د ریاضاتو استاد

لیک لږ

حساب

اول فصل

1	حساب
1	د حساب د علم موضوع
1	د مکمل اعدادو سیټ
2	د طبیعي اعدادو سیټ
2	د حساب د علم د زده کړې غرض
2	د حساب اصطلاحات
2	واحد
2	عدد
4	ارقام
5	طبعي
6	د صحيح عددونو څلور ګوني عمليې
6	1- د صحيح عددونو جمع
8	2- د صحيح عددونو تفریق
10	3- د صحيح عددونو ضرب
12	اضافي معلومات
16	4- د صحيح عددونو تقسیم

دویم فصل

21	کسر
21	اعشار کسر
21	د اعشار کسر څلور ګوني عمليې
24	عام کسر
26	د کسرونو مقایسه
26	تجنیس
27	د کسرونو اختصار
33	د عام کسر څلور ګوني عمليې

37	کسر الکسر
39	د کسرونو تبادله
	دریم فصل
42	طاقت لرونکی عددونه
44	تجزیه
49	جذر
59	د اعدادو سیستمونه
60	د 2 په قاعده د اعدادو سیستم
61	د 5 په قاعده د اعدادو سیستم
	څلورم فصل
63	نسبت
83	تناسب
	پنځم فصل
72	فیصد
73	تخفیف
75	احدیت
76	ریحه
79	تنزیل
80	مشارکت
	شپږم فصل
84	سیت
84	د سیت د لیکلو طریقی
86	د سیت اقسام
86	د روابطو له مخې د سیتونو اقسام
89	د سیتونو عمليې
	الجبر
	اول فصل
93	الجبر
94	د الجبر اصطلاحات

95	پولينوم.....
97	د الجبري عددونو څلور گوني عمليې.....
100	د پولينومونو څلور گوني عمليې.....
102	د باقي مانده دعوه.....
104	ترکيبي تقسيم.....
	دويم فصل
106	مساوات.....
106	مطابقت.....
110	تجزيه.....
116	الجبري کسرونه.....
116	د الجبري کسرو خواص.....
117	د الجبري کسرونو جمع.....
117	د الجبري کسرونو تفريق.....
118	د الجبري کسرونو اختصار.....
118	د الجبري کسرونو تقسيم.....
119	د کسرونو گويا کول.....
122	قسمي کسرونه.....
	درېم فصل
127	معادله يا شرطيه مساوات.....
127	د معادلې اقسام.....
127	يو مجهوله اوله درجه معادله.....
128	د معادلې خواص.....
129	جذري معادلی.....
	څلورم فصل
133	دوه مجهوله معادلی.....
133	د اوله درجه دوه مجهوله معادلو حل.....
138	متریکس.....
139	د متریکس ډولونه.....
141	د متریکسونو جمع.....

141	د متريکس تفريق
143	د دوه متريکسونو ضرب
144	د يوه متريکس ترانسپوز متريکس
145	ديترمینانت
145	د ديترمینانت د حل طريقه
147	د ديترمینانت خواص
148	الحاقی متريکس

پنځم فصل

151	دويمه درجه يو مجهوله معادلی
152	د دويمه درجه يو مجهوله معادلې د عمومي شکل د حل طريقې
161	د جذرو له مخې د يو مجهوله دويمه درجه معادلې جوړول
162	د دويمه درجه يو مجهوله معادلې د جذرو مطالعه کول
163	د دیکارت قاعده

شپږم فصل

173	غیر مساوات
173	د غیر مساوات خواص
175	د غیر مساوات اقسام
177	مطلقه قيمت
177	د بېنوم د اشارې خپل
183	د يو مجهوله غیر مساوات سیستم
184	د دوه مجهوله غیر مساوات
185	د دوه مجهوله غیر مساوات سیستم
185	د دوه مجهوله غیر مساوات د سیستم د حل طريقه
186	يو مجهوله دويمه درجه غیر مساوات
187	د دويمه درجه غیر مساوات د حل طريقه

اووم فصل

190	پارامتریک معادلې
-----	------------------

اتم فصل

199	اکسپوننشل (نمائي) معادلې
-----	--------------------------

فصل نهم

203	لوگاریتمی معادلی
206	د قاعدی د بدلولو فارمول
207	د لوگاریتم اقسام
208	د یوه عدد د لوگاریتم پیدا کول
209	د یوه او صفر تر منځ د کسرونو لوگاریتم
210	انتی لوگاریتم
211	انترپولیشن
212	کولوگاریتم
213	د لوگاریتمی معادلو د حل طریقه

لسم فصل

220	توابع
221	د تابع اقسام
221	ناطقه تابع
221	خطی تابع
222	د خطی تابع د تعریف ناحیه
224	د مستقیمې کرښې مېل
225	د مېل معادله
227	محوري معادله
231	پولینومی تابعګانې

یوولسم فصل

233	دویمه درجه تابع
233	د دویمه درجه تابع ګراف
233	د دویمه درجه تابع د ګراف ترسیم
235	د ګراف انتقال
248	هوموګرافیک تابع
248	متجانب
250	د هوموګرافیک تابع د ګراف ترسیم
253	اکسپوننشل تابع
255	لوگاریتمی تابع

دو لسم فصل

257	ردیف یا تصاعد
257	حسابي ردیف
257	د حسابي ردیف فارمول
259	حسابي ردیف ته د حدونو داخلول
260	هندسي ردیف
260	د هندسي ردیف فارمول
262	د هندسي ردیف خصوصیات
263	هارمونيکي ردیف
265	سلسلی
265	حسابي سلسله
265	د حسابي سلسلی فارمول
266	د مسلسلو عددونو فارمول
267	د جفتو عددو فارمول
267	د طاق عددونو فارمول
269	هندسي سلسله
269	د هندسي سلسلی فارمول

د یار لسم فصل

274	د ریاضي استقراء
-----	-----------------

خوار لسم فصل

277	فکتوریل
279	د بېنوم قضیه

پنځلسم فصل

281	لیمیت
281	اتېروال
288	د لیمیت تعریف
284	د لیمیت د استعمال ځایونه
285	د لیمیت پیدا کول
287	په (∞) کې د یوې تابع لیمیت

288	د لیمیت قضیې
295	ابهام
295	د ابهام رفع کول
302	د مثلثاتي تابعگانو لیمیت
305	د تابعگانو متمادیت (اتصال)
305	متمادي تابع
305	غیر متمادي تابعگانې
306	د متمادیت شرطونه
307	د ښي لاس لیمیت
307	د چپ لاس لیمیت
309	د متمادي تابعگانو خواص
	شپاړلسم فصل
311	مشتق
312	منځنۍ یا وسطي تعبیر
313	د یوې تابع مشتق
314	د مشتق تعریف
315	د مشتق هندسي تعبیر
318	د مشتق قوانین
318	د یوې طاقت لرونکې تابع مشتق
319	د دوه تابعگانو د حاصل جمع مشتق
320	د دوه تابعگانو د تفاضل مشتق
321	د دوه تابعگانو د حاصل ضرب مشتق
322	د دوه تابعگانو د حاصل تقسیم مشتق
324	د جذري تابع مشتق
326	د مرکبې تابع مشتق
329	د مثلثاتي تابعگانو مشتق
333	ضمني مشتقات
334	د تابع دویم ضمنی مشتق
336	متوالي مشتقات

337	د مشتق د استعمال ځايونه
339	د يوې تابع بحراني ټکي
340	د انعطاف نقطه
343	د تابع د گراف د ترسيم طريقه
344	د انعطاف د نقطې پيدا کول
345	د دويمه درجه تابع گراف
348	هوموگرافیک تابع
351	د مجانب د ټاکلو عمومي لار
352	د دريمه درجه يو مجهوله تابع گراف
355	د رول قضيه
357	د متوسط قيمت قضيه
358	د لوهپيټال قاعده
359	د بحراني ټکو تطبيق
	اولسم فصل
363	انتیگرال
363	د زيمان مجموعه
368	د انتیگرال مفهوم
368	د انتیگرال اقسام
368	غیر معین انتیگرال
369	د غیر معین انتیگرال خواص
373	معین انتیگرال
375	د معین انتیگرال خواص
382	د انتیگرال او مشتق اساسي قضیې
385	په تعویضي طریقی سره د انتیگرال نیول
386	قسمي انتیگرالونه
387	د لوگاریتمي او اکسپوننشل تابعگانو مشتق
388	د اعشاري لوگاریتم مشتق
392	د معکوسو تابعگانو مشتق
392	د معکوسو مثلثاتي تابعگانو مشتق

394	قسمي کسرونه
396	د اکسپوننشل تابعگانو انتيگرا لونه
397	د لوگاريتمي تابعگانو انتيگرا ل
401	د منحنی سطحی د مساحت پیدا کول
410	د کروي اجسامو د حجمو محاسبه
411	د انتيگرا ل پواسطه د گری د حجم پیدا کول
411	د انتيگرا ل پواسطه د مخروط د حجم پیدا کول
412	د انتيگرا ل پواسطه د بیضوي د حجم پیدا کول
416	د قوس د اوږدوالي محاسبه
419	تفاضلي معادلې
420	د ديفرينشيال ترتيب
420	د ديفرينشيال معادلې درجه
421	خطي ديفرينشيال معادلې
	احصائيه
	اتلسم فصل
425	احصائيه
425	د اطلاعاتو د راټولو طريقه
426	ټولنه او جامعه
426	تصادفي نمونه
426	تصادفي متحول او د ولونه يي
427	د فريکونسي جدول
427	انځوريز گراف يا تصويري گراف
428	مود
428	اوسط
429	د ميخزا داتا گانو د کثرت جدول
429	د کثرت د جدول د اجزاو خاصيتونه
430	ډله ايز (تجمعي) کثرت
430	نسبي کثرت
431	ميله اي گراف

431	دمنکسري کرښي گراف
432	د گسسته يا غېر متصلو داتاگانو اوسط
433	د جدول په مرسته د نښتو داتاگانو اوسط
434	د داتاگانو د گډې کولو طريقه
434	وسعت
434	د گډې اوږدوالي
434	ميله ټي گراف
434	د متصلو داتاگانو دسته بندي
435	وزني اوسط يا منځنۍ قيمت
436	مستطيلي گراف
437	د ايروي گراف
438	ميانه
438	د تحول ساحه
439	د انحراف اوسط
440	د څو ضلعي فريکونسي گراف
441	د ساقۍ او پانۍ گراف
442	ربغۍ
443	صند وچه يي گراف
446	ربغي انحراف
446	وار يانس
448	معياري انحراف (مطلق تیتوالی)
450	د بدلون ضريب يا نسبي پراگنده گي
451	په نور مال منځني کي تیتوالی
452	د نور مال توزیع مشخصات
453	څو متحول له ټولنې
454	د پراگنده گي گراف
454	پېوستون او د پېوستون ضريب
456	د خطي مېلان معادله
459	د احتمال د تابع توزیع

461	د دوه جمله يي توزيع او د برنولي آزمایښت
462	د پواسن د احتمال توزیع
463	د نورمال توزیع
467	نمونه اخیستل
468	د نمونې د اوسط توزیع
	احتمالات
	نوولسم فصل
471	احتمالات
471	چانس
471	تصادفي پېښه
471	تجربوي احتمال
471	نظري احتمال
472	نسبي کثرت او احتمال
472	په نمونه يي فضا کې برابر او نابرابر چانس
472	د یوې نمونه یې فضا ناڅاپي پېښه
474	د احتمال قاعدې
475	ونه ایز دیاگرام
475	د ضرب د حاصل لومړۍ قاعده
476	د ناڅاپي پېښو اتحاد
477	د ناڅاپي پېښو تقاطع
478	د سیتونو او مدیل جوړونه
479	د شمېرنې اصل
480	ترتیب (پرموتېشن)
480	ترکیب
481	وریشن (تبدیل)
483	د بینوم قضیه
484	د دوه جمله يي احتمال
486	متمادي او غیر متمادي فضاګانې
487	هم چانسې پېښې

488	د متمدني فضاگانو احتمال
488	مشروط احتمال
493	د ناڅاپه پېښو استقلاليت
	شلم فصل
495	موهومي عددونه
496	د اعدادو سيټونه
497	د موهومي عددونو څلورگوني عمليي
498	صفرې مختلط عدد
498	د مختلطو عددونو څلورگوني عمليي
500	د مختلط عدد مزدوج
500	د مختلط عدد ضري معکوس
501	د يوه مختلط عدد د مزدوج خاصيت
505	د مختلطو عددونو دويم جذر پيدا کول
	يوويشتم فصل
507	د رياضي منطق
507	د رياضي استدلال
507	تمثيلي استدلال
507	استقرائي استدلال
509	استنتاجي استدلال
509	د حکم د نفی کولو استدلال
510	د رياضي منطق او د بيان استنتاج
510	د بيانونو ترکیب

حساب

بسم الله الرحمن الرحيم

اول فصل

رياضي

رياضي د رياض څخه اخیستل شویده په رياضي کی تر (ض) وروسته (ی) نسبتی ده ریاض د روضه مجموعه ده نو د رياضي لغوي معنی باغونه یا باغچې دي.

او په اصطلاح کې رياضي هغه علم دی چې د اجسامود کیفیتو ، کمیتو ، تغیراتو ، ارتباطاتو او تاثیراتو څخه بحث کوي.

رياضي ډېرې څانگې لري لکه :

- | | | |
|----------|-----------|-------------|
| 1- حساب | 2- الجبر | 3- نجوم |
| 4- هندسه | 5- مثلثات | 6- علم هیئت |

او داسې نور.

څرنگه چې زموږ د وطن په تعلیمي نصاب کې حساب ، الجبر ، هندسه او مثلثات ټول لیکل شوي دي نو موږ هم د نصاب مطابق همدغه څلور شیان په دی کتاب کې لیکو.

1- حساب :

حساب په لغت کې شمېرلو ته وایي او په اصطلاح کې حساب هغه علم دی چې په معلومو عددونو باندې یوه عملیه اجراء کوي او مجهول عدد پیدا کوي.

د حساب د علم موضوع:

د حساب د علم موضوع د مکمل اعدادو سیټ دی .

د مکمل اعدادو سیټ:

د صفر څخه تر (∞) پورې د اعدادو سیټ ته د مکمل اعدادو سیټ وایي.



د طبيعي اعدادو سيټ:

د (1) څخه تر (∞) پورې د اعدادو سيټ ته د طبيعي اعدادو سيټ وايي.



د حساب د علم د زده کړې غرض:

د حساب د علم زده کړه په ورځنيو معاملاتو کې انسان د غلطۍ څخه ساتي، لکه اخیستل، خرڅول، په صحيح ډول د دواگانو ترکیب، حتی چې د حساب د زده کړې څخه په غیر په فزیک، کیمیا، هندسه او داسې نورو علومو کې پر مخ تګ نا ممکن دی.

د حساب اصطلاحات:

واحد:

د هر شي یوې دانې ته واحد وايي. لکه یو موټر، یوه طیاره یوه کبستی او داسې نور.

عدد:

واحد یا د واحدونو مجموعې ته عدد وايي. لکه (1)، 13، 159 او داسې نور.

عدد ډېر قسمونه لري.

1- مشخص عدد: که د یوه عدد سره د کوم شي نوم ذکر وي دغسې عدد ته مشخص عدد وايي 12 کتابونه، 107 شاگردان او داسې نور.

2- مجرد عدد: که د عدد سره د کوم شي نوم ذکر نه وي دغه ډول عدد ته مجرد عدد وايي. لکه 180، 240 او داسې نور،

3- جفت عدد: هغه عددونه چې په (2) باندې پوره تقسیمېږي جفت عددونه دي لکه 170، 532، 714، 326، 748 او داسې نور،

4- طاق عدد: هغه عدد دی چې په (2) باندې پوره نه ویشل کېږي لکه: 3، 41، 587 او داسې نور.

5- لمړنې عدد: هغه عدد دی چې په ځان او په (1) پوره ویشل کېږي په نورو عددو پوره نه ویشل کېږي. لکه 2، 3، 5، 7 او داسې نور.

د (1) او 100 تر منځ لمړني عددونه 25 دي. دا عددونه یو یوناني عالم چې Eratosthenes نومېده په (273-192) ق م کې یې یونان کې ژوند کاوه په یوه جدول کې پیدا کړی و.

د (1) څخه تر 100 پورې عددونه یې په یوه مربعي جدول کې ولیکل بیا یې (2) پرېښودل او هغه عددونه چې په (2) ویشل کیدل حذف کړل. بیا یې (3) پرېښودل او هغه عددونه چې په (3) ویشل کیدل حذف کړل په همدې ترتیب په (5) او (7) باندې چه کوم عددونه ویشل کیدل حذف یې کړل په اخر کې یې په جدول کې پاتې شوي عددونه چې 25 عددونه وه په یوه پاڼه کې ولیکل او لمړني عددونه یې وبلل. عددونه دا دي.

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97

6- مرکب عددونه: هغه عددونه چې له ځان او یوه څخه په غیر په نورو عددو هم ویشل کېږي مرکب عددونه بلل کېږي. لکه 4, 6, 8, 9, 10 او داسې نور.

د (1) او 100 تر منځ مرکب عددونه 74 دي.

(1) نه لمړني عدد دی او نه مرکب عدد دی.

7- تام عدد: که د یوه عدد ټول واحدات پوره وي دغه عدد ته تام عدد وایې لکه 12 هنداونې 15، روپی.

8- کسري عدد: هغه عدد دي چې یو واحد یې نیم گړې وي.

لکه $13\frac{1}{4}$ هنداونې، $17\frac{1}{2}$ ډالر

کسري عددونه په درې قسمه دي.

a- مختوم کسر: که د کسر صورت په مخرج ویشل شي او باقي ونکړي دی کسر ته مختوم کسر وایې لکه $\frac{2}{5}$ ، $\frac{3}{4}$ ، چې $\frac{3}{4} = 0.75$ او $\frac{2}{5} = 0.4$ کیږي.

b- غیر مختوم متوالي کسر: هغه کسردی چې صورت په مخرج پوره تقسیم نه شي مگر د خارج قسمت رقمونه یې تکراري وي. لکه $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{6}$ او داسې نور.

چې $\frac{1}{3} = 0.33\bar{3}$ کیږي او $\frac{1}{6} = 0.16\bar{6}$ کیږي.

c- غیر مختوم غیر متوالي کسر: که د یوه کسر صورت په مخرغ پوره تقسیم نه شي او د خارج قسمت رقمونه یې هم تکراري نه وي دی کسر ته غیر مختوم غیر متوالي کسر وایي لکه $\frac{13}{47}$ چې $0.276595744680851 \dots = \frac{13}{47}$ کیږي.

9- ناطق عدد: صحیح عدد، متوالي کسر او مختوم کسر ناطق عددونه دي. لکه $\frac{2}{3}$ ، $\frac{1}{2}$ ، $\frac{4}{5}$ ، $\frac{5}{6}$ ، او داسې نور.

10- غیر ناطق عدد: غیر مختوم غیر متوالي کسر او هغه جذري عددونه چې پوره جذر نلري غیر ناطق عددونه دي لکه $\frac{11}{47}$ ، $\frac{13}{49}$ ، $\sqrt{2}$ او $\sqrt{3}$ او داسې نور.

ارقام:

د اعدادو د لیکنې سمبول ته رقم وایي.

په ډېرو ممالکو کې د اعدادو د لیکنې لپاره سمبولونه ټاکل شوي دي چې په هغه ممالکو کې استعمالیږي. مگر هغه رقمونه چې د نړۍ په زیاتو ممالکو کې استعمالیږي دري دي.

1- رومي رقمونه 2- هندو عربي رقمونه 3- اریک رقمونه.

1- رومي رقمونه:

د هندو عربيک رقمو تر لیکنې د مخه رومي رقمونه زیات استعمالیدل. اوس رومي رقمونه په کتابونو کې د مختلفو مقاصدو لپاره استعمالیږي. خو په حسابي او الجبري عملیو کې نه استعمالیږي. I د یو لپاره V د 5 لپاره X د 10 لپاره L د 50 لپاره C د 100 لپاره D د 500 لپاره او M د 1000 لپاره په سمبولیک ډول استعمالیږي.

که یو رقم دري واړه څنګ په څنګ ولیکل شي جمع کیږي لکه II دوه دي III دري دي که X درې واړه ولیکل شي (30) کیږي که L درې واړه ولیکل شي 150 کیږي که دوه مختلف عددونه څنګ په څنګ ولیکل شي که د بني خوا عدد زیات و د چېې خوا عدد ور څخه منفي کیږي IV چې څلور دي IX نه دی XL = 40 دي XC = 90 دي او که د چېې خوا عدد زیات و د بني خوا عدد ور سره جمع کیږي.

VI = 6 ، VII = 7 او VIII = 8 دی XIX = 19 او CX = 110 ، LX = 60 دي CXXX = 130 او MDCXIX = 1619 دي.

2- اریک رقمونه :

هغه رقمونه دي چې اریائیانو لیکلي دي. دې رقمونه شرقي رقمونه هم وایي. اریک رقمونه په لاتنډي ډول دي ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹. ټول لس رقمونه دي.

3- هندو عربيک رقمونه :

هغه رقمونه چې مصريانو لیکلي دي او یوازې د صفر سمبول هنډیانو لیکل دي دغه رقمونه غربي رقمونه هم وایي. دا رقمونه 10 دي او عبارت دي له 0، 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9 دا رقمونه په دوه برخو ویشل شوي دي.

1- معنی دار رقمونه 2- بی معنی رقم

1- معنی دار رقمونه : د 1 څخه تر 9 پورې رقمونه معنی دار رقمونه وایي.

2- بی معنی رقم : صفر بی معنی رقم دی ځکه که یوازې هر څومره صفرونه ولیکو په کوم شي دلالت نه کوي لکه 0000000

او که د عدد چې خواته ولیکل شي هغه عدد نه ډیرېږي او نه کمیږي. لکه 0000013 چې 13 دي.

طبقي : د عددو د لیکلو او لوستلو لپاره ریاضي دانانو طبقې لیکلې دي چې هر طبقه درې مرتبې ده هر طبقه خپل نوم لري تر اوسه پورې په ریاضي کې 22 طبقې لیکل شوي دي.

1- احدات طبقه	9- کوادريليون	17- اوکتيليون
2- زرو طبقه	10- کوادريليارد	18- اوکتيليارد
3- ميليون طبقه	11- کوينتيليون	19- نونيليون
4- ميليار دو طبقه	12- کوينتيليارد	20- نونيليارد
5- بيليون طبقه	13- سکستيليون	21- د سيليون
6- بيلياردو طبقه	14- سکستيليارد	22- د سيليارد
7- تريلون طبقه	15- سپتيليون	
8- تريليارد طبقه	16- سپتيليارد	

چې تر اوسه پورې په نړۍ کې د دغه طبقو څخه اته طبقې استعمال شويدي يعنې تر تريليارد پورې طبقې استعمال شويدي.

د عدد لوستل : عدد د بڼې خوا څخه په طبقو ويشو او د چېې خوا څخه يې لولو اول د طبقې عدد لولو بيا د طبقې نوم اخلو. که طبقه يا مرتبه صفر وه نوم يې نه اخيستل کيږي. لکه:

450,347,825,601,234,004,000,801

او داسې ويل کيږي څلورسوه اوينځوس تريليارد درې سوه او اوه څلوېښت تريلونه اته سوه او پنځه ويشت بيليارد شپږسوه او يوبيلونه دوه سوه او څلوردرېش ميليارده څلور ميلونه او اته سوه اويو.

د عددو ليکل : عدد د چېې خوا څخه ليکل کيږي هر عدد په خپله طبقه او مرتبه کې ليکل کيږي که د کومې طبقې يا مرتبې نوم وانه خيستل شي پر ځای صفرونه ليکل کيږي لکه.

درې سوه څوارلس تريليارد اوه تريلونه نه ويشت بيلونه يو سل او دولس ميليارده نه څلوېښت زره او اته

314,007,000,029,112,000,049,008

د صحيح عددونو څلورگونې عمليې:

1- د صحيح عددونو جمع:

جمع په لغت کې يو ځای کولو ته وايي.

او په اصطلاح کې د هم جنسو شيانو يو ځای کولو ته جمع وايي.

هغه عددونه چې جمع کيږي د جمع عوامل ورته وايي او هر عدد ته عامل وايي او هغه عدد چې د عواملو د جمع کېدو په نتيجه کې لاس ته راځي د جمع حاصل ورته وايي.

د جمع د عمليې طريقه :

د جمع عوامل داسې يو تر بل لاندې ليکو چې هر طبقه د خپلې طبقې لاندې او هره مرتبه د خپلې مرتبې لاندې راشي. بيا د يوز مرتبو رقمونه جمع کوو که د جمع حاصل يې دوه رقمي شو لمړی رقم يې ليکو او دويم رقم يې دلسم مرتبې د رقمو سره جمع کوو په همدې ترتيب تر اخره اجرائت کوو د جمع حاصل لاس ته راځي.

$$\begin{array}{r}
 +456783456 \\
 789432187 \\
 \hline
 1246215643
 \end{array}$$

د جمع د عمليې میزان:

1- د جمع میزان په جمع:

عوامل د لاتدي خوا څخه پورته خواته جمع کوو که د جمع نوی حاصل د جمع د پخواني حاصل سره مساوي شو سوال صحیح حل شويدي.

$$\begin{array}{r}
 12349391 \\
 +7894321 \\
 2578092 \\
 1876978 \\
 \hline
 12349391
 \end{array}$$

2- د جمع میزان په تفریق:

که د جمع عوامل دوه وه د جمع د حاصل څخه یو عامل منفي کوو که بل عامل لاس ته راشي سوال صحیح حل شويدي.

$$\begin{array}{r}
 -1165759 \\
 675974 \\
 \hline
 489785
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 + 489785 \\
 675974 \\
 \hline
 1165759
 \end{array}$$

3- د جمع میزان په طرح نه:

د جمع عوامل طرح نه کوو د طرح نه حاصل یې د طرح نه د علامې په یوه طرف کې لیکو. بیا د جمع حاصل طرح نه کوو د طرح نه حاصل یې د عواملو د طرح نه د حاصل په مقابل کې لیکو. که دغه دوه عددونه مساوي شول سوال صحیح حل شويدي.

$$\begin{array}{r}
 + 5689247 \\
 7563785 \\
 \hline
 13253032
 \end{array}$$

$$\frac{41}{41} = 1$$

$$\begin{array}{c}
 1 \quad 1 \\
 \diagdown \quad \diagup \\
 \times
 \end{array}$$

د جمع د عمليې اساسي اصول:

1- د جمع عمليه د جمعې د تبديلي د قانون پيروي کوي يعنې که د جمع د عواملو ځايونه تغير شي د جمع په حاصل کې تغير نه راځي.
لکه:

$$\begin{array}{r} +451 \\ 238 \\ \hline 689 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +238 \\ 451 \\ \hline 689 \end{array}$$

2- د جمع عمليه د اتحادي قانون پيروي کوي.

يعنې که د جمع عوامل زيات وي په يوه وار يې جمع کول مشکل وي نو دا عددونه په گروپو ويشو د هر گروپ د جمع حاصل پيدا کوو او بيا دا جمع حاصلونه جمع کوو د راکړ شوو عددونو د جمع حاصل لاس ته راځي.

3- د اعدادو سيټ د جمع د عمليې لاندې يو تړلی سيټ دی.

4- د جمع د عمليې خنثی عنصر صفر دی.

2- د صحيح عددونو تفريق:

تفريق په لغت بيلولو ته وايي.

او په اصطلاح کې د دوه هم جنسو عددو د فرق د معلومولو طريقې ته تفريق وايي. لوی عدد ته مفروق منه وايي کوچني عدد ته مفروق وايي. د مفروق منه څخه د مفروق د کميدو په نتيجه کې چې کوم عدد لاس ته راځي د تفريق حاصل ورته وايي.
د تفريق د عمليې طريقه:

مفروق د مفروق منه لاندې داسې لیکو چې هره طبقه د خپلې طبقې لاندې او هره مرتبه د خپلې مرتبې لاندې راشي. بيا د مفروق منه د يويز مرتبې د رقم څخه د مفروق د يويز مرتبې رقم منفي کوو د لسيز مرتبې د رقم څخه يې د لسيز مرتبې رقم منفي کوو په همدې ترتيب تر اخره اجرائت کوو د تفريق حاصل لاس ته راځي.

$$\begin{array}{r} -78402138 \\ 14987675 \\ \hline 63414463 \end{array}$$

د تفریق د عملیې میزان:

1- د تفریق میزان په جمع:

د تفریق حاصل د مفروق سره جمع کوو که مفروق منه پلاس راغی سوال صحیح حل شوی دی.

$$\begin{array}{r} +30368784 \\ 17987998 \\ \hline 48356782 \end{array} \quad \begin{array}{r} -48356782 \\ 17987998 \\ \hline 30368784 \end{array}$$

2- د تفریق میزان په تفریق:

د مفروق منه څخه د تفریق حاصل منفي کوو که مفروق لاس ته راغی سوال صحیح حل شوی دی.

$$\begin{array}{r} -7854321546 \\ 1789756798 \\ \hline 6064564748 \end{array}$$

میزان

$$\begin{array}{r} -7854321546 \\ 6064564748 \\ \hline 1789756798 \end{array}$$

3- د تفریق میزان په طرح نه:

مفروق منه طرح نه کوو د طرح نه حاصل یې د طرح نه د علامې په یوه طرف کې لیکو بیا مفروق طرح نه کوو د طرح نه حاصل یې مفروق منه د طرح نه د حاصل په مقابل کې لیکو. او منفي کوو یې او په دریم طرف کې یې لیکو بیا د تفریق حاصل طرح نه کوو په څلورم طرف کې یې لیکو د دریم او څلورم عددونه مساوي وه سوال صحیح حل شوی دی.

$$\begin{array}{r} -43756832109 \\ 12898098734 \\ \hline 30858733375 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 7 \\ 5 \quad \times \quad 3+9=12 \\ 7 \end{array}$$

که د مفروق منډه د طرح نه حاصل د مفروق د طرح نه د حاصل څخه کم و د مفروق منډه د طرح نه د حاصل سره 9 جمع کوو بیا د مفروق د طرح نه حاصل ور څخه منفي کوو.
د تفریق اساسي اصول:

1- که مفروق منډه ثابت وي او مفروق زیات شي د تفریق حاصل کمیږي.

$$\begin{array}{r} -450 \\ 250 \\ \hline 200 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -450 \\ 200 \\ \hline 250 \end{array}$$

2- که مفروق منډه ثابت وي مفروق کم شي د تفریق حاصل زیاتیږي.

$$\begin{array}{r} -450 \\ 150 \\ \hline 300 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -450 \\ 200 \\ \hline 250 \end{array}$$

3- که مفروق ثابت وي او مفروق منډه زیات شي د تفریق حاصل ډیريږي.

$$\begin{array}{r} -500 \\ 200 \\ \hline 300 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -450 \\ 200 \\ \hline 250 \end{array}$$

4- که مفروق ثابت وي او مفروق منډه کم شي د تفریق حاصل کمیږي.

$$\begin{array}{r} -400 \\ 200 \\ \hline 200 \end{array}$$

5- که مفروق او مفروق منډه په یوه اندازه زیات یا کم شي د تفریق په حاصل کې تغیر نه راځي.

$$\begin{array}{r} -400 \\ 200 \\ \hline 200 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -500 \\ 250 \\ \hline 250 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -450 \\ 200 \\ \hline 250 \end{array}$$

3- د صحیح عددونو ضرب:

ضرب په لغت کې وهلو ته وايي.

او په اصطلاح کې د مساوی عددونو د جمع لنډې طريقې ته ضرب وايي. د ضرب په عملیه کې اول عدد ته مضروب فيّه او د دویم عدد ته مضروب وايي. په مضروب فيّه کې د مضروب د ضرب په نتیجه کې چې کوم عدد لاس ته راځي د ضرب حاصل ورته وايي.

د ضرب د عمليې طريقه:

مضروب د مضروب فيه لاندې ليکو د مضروب لمړی رقم د مضروب فيه په ټولو رقمو کې په نوبت سره ضربوو. بیا د مضروب دویم رقم د مضروب فيه په ټولو رقمو کې په نوبت سره ضربوو په اخر کې دغه عددونه جمع کوو د راکړ شوو عددو د ضرب حاصل لاس ته راځي

$$\begin{array}{r} \times 4587 \\ 896 \\ \hline 27522 \\ 41283 \\ 36696 \\ \hline 4109952 \end{array}$$

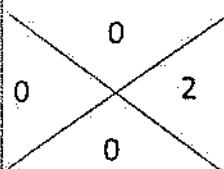
د ضرب د عمليې میزان:

1- د ضرب میزان په تقسیم:

د ضرب حاصل په مضروب فيه ویشو که مضروب لاس ته راځي سوال صحیح حل شوی دی او یا د ضرب حاصل په مضروب ویشو که مضروب فيه لاس ته راځي سوال حل شوی دی.

2- د ضرب میزان په طرح نه:

مضروب فيه طرح نه کوو د طرح نه حاصل یې د طرح نه د علامې په یوه طرف کې لیکو بیا مضروب طرح نه کوو د طرح نه حاصل یې د مضروب فيه د طرح نه د حاصل په مقابل کې لیکو او ضربوو یې که د ضرب حاصل یې تر (9) پورې طرح نه کوو یې په دریم طرف کې یې لیکو بیا د راکړ شوو عددو د ضرب حاصل طرح نه کوو په څلورم طرف کې یې لیکو که د دریم او څلورم طرفو عددونه مساوي شول د سوال حل صحیح دی.



$$\begin{array}{r} \times 56783 \\ 5238 \\ \hline 454264 \\ 170349 \\ 113566 \\ 283915 \\ \hline 297429354 \end{array}$$

د ضرب د عمليې اساسي اصول:

- 1- د اعدادو سميت د ضرب د عمليې لاندې يو ترلی سميت دی.
- 2- د ضرب عمليه د تبديلي د قانون پيروي کوي.
- 3- د ضرب عمليه د اتحادي قانون پيروي کوي.
- 4- د ضرب عمليه د توزيعي خاصيت پيروي کوي.
- 5- د ضرب د عمليې ځنثی عنصر (1) دی.

اضافي معلومات:

العاملي د بعضی عددونو د ضربولو په باره کې څو قاعدې په خلاصه الحساب کې ليکلي دي. مونږ د شاگردان د ذهن د انکشاف لپاره د دغه قاعدو څخه څو قاعدې رانقلوو.

بهاؤ الدين محمد بن الحسين چې مشهور په العاملي دی په 953 هـ ش کال په بعلبک کې زيږيدلی دی او په 1035 هـ ش په اصفهان کې وفات شويدي اصلاً د لبنان و عامل په لبنان کې يو غړی د بعلبک کلی پدې غره کې دی.

اوله قاعده:

د 5 او 10 تر منځ د عددونو د ضرب حاصل:

يو عدد په 10 کې ضربوو بل عدد د 10 څخه منفي کوو د تفريق حاصل په لمړني عدد کې ضربوو د ضرب حاصل يې د همدغه عدد د 10 چنده څخه منفي کوو مطلوب عدد لاس ته راځي.

1- مثال: د 7 او 9 د ضرب حاصل پيدا کړئ؟

حل:

$$10 \times 7 = 70$$

$$10 - 9 = 1$$

$$1 \times 7 = 7$$

$$70 - 7 = 63$$

2- مثال: د 6 او 8 د ضرب حاصل پيدا کړئ؟

$$10 \times 6 = 60$$

$$10 - 8 = 2$$

$$2 \times 6 = 12$$

$$60 - 12 = 48$$

دویمه قاعده:

عددونه جمع کوو د 10 څخه پورته برخه یې په 10 کې ضربوو د 10 څخه د عددو د تفاضل د ضرب حاصل ورسره جمع کوو مطلوب عدد لاس ته راځي.

حل:

$$6 + 8 = 14$$

$$10 \times 4 = 40$$

$$10 - 6 = 4$$

$$10 - 8 = 2$$

$$2 \times 4 = 8$$

$$40 + 8 = 48$$

دریمه قاعده:

دیو رقمی او د 10 او 20 تر منځ دوه رقمي عددو ضرب حاصل:

عددونه جمع کوو د 10 څخه پورته برخه یې په 10 کې ضربوو یو رقمي عدد د 10 څخه منفي کوو او د دوه رقمي عدد په لمړي رقم کې یې ضربوو او د اولني حاصل ضرب څخه یې منفي کوو مطلوب عدد لاس ته راځي.

مثال: د 7 او 19 د ضرب حاصل پیدا کړئ؟

$$19 + 7 = 26$$

$$16 \times 10 = 160$$

$$10 - 7 = 3$$

$$3 \times 9 = 27$$

$$160 - 27 = 133$$

مثال: د 8 او 17 د ضرب حاصل پیدا کړئ؟

$$8 + 17 = 25$$

$$15 \times 10 = 150$$

$$10 - 8 = 2$$

$$2 \times 7 = 14$$

$$150 - 14 = 136$$

څلورمه قاعده:

د 10 او 20 ترمنځ د دوه رقمي عددو د ضرب حاصل:

د يوه عدد د يويز رقم د بل عدد سره جمع کوو د جمع حاصل په 10 کې ضربوو او د دواړو عدد د يويز مرتبو د رقمو د ضرب حاصل ورسره جمع کوو مطلوب عدد لاس ته راځي.

مثال: د 13 او 18 د ضرب حاصل پيدا کړئ؟

$$\begin{aligned} 18 \times 3 &= 21 \\ 21 \times 10 &= 210 \\ 3 \times 8 &= 24 \\ 210 + 24 &= 234 \end{aligned}$$

پنځمه قاعده:

په 5، 50 او 500 کې د يوه عدد ضربول:

د عدد نيمايي په 10 کې ضربوو په 5 کې د هغه عدد د ضرب حاصل لاس ته راځي د عدد نيمايي په 100 کې ضربوو په 50 کې د هغه عدد د ضرب حاصل لاس ته راځي.

د عدد نيمايي په 1000 کې ضربوو په 500 کې د هغه عدد د ضرب حاصل لاس ته راځي.

مثالونه:

$$\begin{aligned} 5 \times 28 &= 10 \times 14 = 140 \\ 50 \times 36 &= 100 \times 18 = 1800 \\ 500 \times 32 &= 1000 \times 16 = 16000 \end{aligned}$$

شپږمه قاعده:

د دوه رقمي عددو د ضرب د حاصل پيدا کول چې يو يې د 10 او 20 ترمنځ وي.

د کوچني عدد يويز د لوي عدد په لسيز کې ضربوو او د لوي عدد سره جمع کوو او 10 چنده کوو يې او د يويز مرتبو د رقمو د ضرب حاصل ورسره جمع کوو.

حل: د 17 او 59 د ضرب حاصل پيدا کړئ؟

$$\begin{aligned} 7 \times 5 &= 35 \\ 35 + 59 &= 94 \\ 94 \times 10 &= 940 \\ 7 \times 9 &= 63 \\ 940 + 63 &= 1003 \end{aligned}$$

اومه قاعده:

د 20 او 100 تر منځ د هغه عددو د ضرب حاصل چې لسيز يې مساوي وي
د يوه عدد يويز د بل عدد سره جمع کوو او په لسيز رقم کې يې ضربوو او 10 چنده کوو يې او د
يويز رقمو د ضرب حاصل ورسره جمع کوو مطلوب عدد لاس ته راځي.
مثال: د 63 او 68 د ضرب حاصل پيدا کړئ؟

$$\begin{aligned}68 + 3 &= 71 \\71 \times 6 &= 426 \\426 \times 10 &= 4260 \\4260 + 24 &= 4284\end{aligned}$$

اتمه قاعده:

د 20 او 100 تر منځ د هغه عددو د ضرب حاصل چې د لسيز مرتبې يې مختلفي وي.
د کوچني عدد لسيز په لوی عدد کې ضربوو د کوچني عدد د يويز مرتبې او د لوی عدد د لسيز
مرتبې د ضرب حاصل ورسره جمع کوو او 10 چنده کوو يې او د يويز مرتبو د ضرب حاصل
ورسره جمع کوو. مطلوب عدد لاس ته راځي.
مثال: د 27 او 69 د ضرب حاصل پيدا کړئ؟

$$\begin{aligned}69 \times 2 &= 138 \\7 \times 6 &= 42 \\138 + 42 &= 180 \\180 \times 10 &= 1800 \\7 \times 9 &= 63 \\1800 + 63 &= 1863\end{aligned}$$

مثال: د 35 او 87 د ضرب حاصل پيدا کړئ؟

$$\begin{aligned}87 \times 3 &= 261 \\5 \times 8 &= 40 \\261 + 40 &= 301 \\301 \times 10 &= 3010 \\5 \times 7 &= 35 \\3010 + 35 &= 3045\end{aligned}$$

مثال: 47 او 95 د ضرب حاصل پيدا کړئ؟

$$95 \times 4 = 380$$

$$7 \times 9 = 63$$

$$380 + 63 = 443$$

$$443 \times 10 = 4430$$

$$7 \times 5 = 35$$

$$4430 + 35 = 4465$$

4- د صحيح عددونو تقسيم:

تقسيم په لغت کې ویشلو ته وايي.

او په اصطلاح کې د يوه عدد څخه د مساوي عددونو د تفریقولو لنډې طريقې ته تقسيم وايي. هغه عدد چه ویشل کېږي مقسوم بلل کېږي هغه عدد چې مقسوم پرې ویشل کېږي مقسوم عليه بلل کېږي په مقسوم عليه باندې د مقسوم د تقسيميدو په نتيجه کې چې کوم عدد لاس ته راځي خارج قسمت بلل کېږي د مقسوم هغه برخه چې د مقسوم عليه څخه کمه شي او په مقسوم عليه نه ویشل کېږي باقي بلل کېږي.

د تقسيم د عمليې طريقه:

د مقسوم عليه مرتبې شمېرو د مقسوم د چېپې خوا څخه همغومره مرتبې را بېلوؤ د مقسوم عليه سره يې مقایسه کوو که تر مقسوم عليه زيات و پرې ویشو يې حاصل يې په خارج قسمت کې لیکو په مقسوم عليه کې يې ضریو د ضرب حاصل د مقسوم لاندې لیکو او منفي کوو يې. د تفریق د حاصل مخې ته د مقسوم يو رقم را کښته کوو نوی مقسوم جوړ وو که تر مقسوم عليه زيات و پرې ویشو يې او که کم و خارج قسمت ته صفر پورته کوو او د مقسوم څخه يو بل رقم را کښته کوو په همدې ترتيب تر اخره اجرائت کوو تر څو چې مقسوم ختم شي او يا د مقسوم عليه څخه کم شي دغې کمې شوی برخې ته باقي وايي.

$$\begin{array}{r|l} 456340189 & 56342 \\ 450736 & 8099 \\ \hline 560418 & \\ 507078 & \\ \hline 533409 & \\ 507078 & \\ \hline 26331 & \end{array}$$

د تقسیم د عملیې میزان:

1- د تقسیم د عملیې میزان په ضرب:

خارج قسمت په مقسوم علیه کې ضربوو باقي ور سره جمع کوو که مقسوم لاس ته راغي سوال صحیح دی.

$$\begin{array}{r} \times 56342 \\ 8099 \\ \hline 507078 \\ 507078 \\ 00000 \\ \hline 450736 \\ \hline 456313858 \end{array}$$
$$\begin{array}{r} +456313858 \\ 26331 \\ \hline 456340189 \end{array}$$

2- د تقسیم د عملیې میزان په طرح نه:

مقسوم علیه طرح نه کوو د طرح حاصل یې د طرح نه د علامې په یوه طرف کې لیکو بیا خارج قسمت طرح نه کوو د طرح نه حاصل یې د مقسوم علیه د طرح نه د حاصل په مقابل کې لیکو او ضربوو یې. که د ضرب حاصل یې تر (9) ډېر شو طرح نه کوو یې د باقي د طرح نه حاصل ور سره جمع کوو که د جمع حاصل یې تر (9) ډېر شو طرح نه کوو یې په دریم طرف کې یې لیکو بیا مقسوم طرح نه کوو په څلورم طرف کې یې لیکو که د دریم څلورم طرفو عددونه مساوي شول سوال صحیح حل شوی دی.

$$\begin{array}{r} 7+6=13 \\ \quad 4 \\ 8 \quad \times \quad 2 \\ \quad 4 \end{array}$$

نوټ: که د تقسیم عملیې باقی نه لرل او یا یې باقی تر مقسوم علیه کم وه نو د تقسیم میزان په تقسیم هم کولای شو.

مقسوم په خارج قسمت ویشو که مقسوم علیه لاس ته راغی سوال صحیح دی.

$ \begin{array}{r} 893001 \quad \quad 4532 \\ \underline{4532} \\ 44980 \\ \underline{40788} \\ 39214 \\ \underline{31724} \\ 197 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 893001 \quad \quad 197 \\ \underline{788} \\ 1050 \\ \underline{985} \\ 650 \\ \underline{591} \\ 591 \\ \underline{394} \\ 197 \end{array} $
--	---

د تقسیم د عملیې اساسي اصول:

1- که مقسوم او مقسوم دواړه په یوه عدد کې ضرب شي په خارج قسمت کې تغیر نه راځي یوازې باقی په هغه عدد کې ضربیږي. لکه:

$ \begin{array}{r} 300 \quad \quad 50 \\ \underline{280} \\ 20 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 60 \quad \quad 8 \\ \underline{56} \\ 4 \end{array} $
---	---

2- که مقسوم او مقسوم علیه په یوه عدد تقسیم شي په خارج قسمت کې تغیر نه راځي یوازې باقی په هغه عدد تقسیميږي. مثال:

$ \begin{array}{r} 250 \quad \quad 20 \\ \underline{20} \\ 50 \\ \underline{40} \\ 10 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 25 \quad \quad 2 \\ \underline{2} \\ 5 \\ \underline{4} \\ 1 \end{array} $
--	--

3- که د دوه عددو څخه هر یو په یو دریم عدد ویشل کیږي مجموعه یې هم په هغه عدد ویشل کیږي خارج قسمت یې د دواړو خارج قسمتو مجموعه ده.
مثال:

$$\begin{array}{r|l} 3280 & 80 \\ \hline 320 & 41 \\ \hline 80 & \\ 80 & \\ \hline & xxx \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 2000 & 80 \\ \hline 160 & 25 \\ \hline 400 & \\ 400 & \\ \hline & xxx \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 1280 & 80 \\ \hline 80 & 16 \\ \hline 480 & \\ 480 & \\ \hline & xxx \end{array}$$

$$\begin{array}{r} +1280 \\ 2000 \\ \hline 3280 \end{array}$$

4- که د دوه عددو څخه هر یو په یو دریم عدد ویشل کیږي نو د هغوي تفاضل هم په هغه ویشل کیږي خارج قسمت یې د دواړو خارج قسمتو تفاضل دی.

$$\begin{array}{r} -2000 \\ 1280 \\ \hline 720 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 720 & 80 \\ \hline 720 & 9 \\ \hline & xxx \end{array}$$

5- که د دوه عددو څخه یو په دریم عدد ویشل کیدلو د ضرب حاصل یې هم په هغه دریم عدد ویشل کیږي.

لکه 48 په 6 ویشل کیږي مگر 50 په 6 نه ویشل کیږي مگر $50 \times 48 = 2400$ په 6 ویشل کیږي.

$$\begin{array}{r|l} 2400 & 6 \\ \hline 24 & 400 \\ \hline & 00 \end{array}$$

تمرین:

- 1- د دري عددو مجموعه 180 ده د اول او دویم مجموعه 105 ده د دویم او دریم مجموعه 135 ده عددونه پیدا کړئ؟
- 2- کوم عدد د 35817 څخه منفي شي چې 18465 لاس ته راشي.
- 3- د دوه ښارو تر منځ فاصله 900km ده یو موټر د یو ښار څخه د 85km په سرعت د بل موټر خواته په 7 بجې روانیږي او دویم موټر د دویم ښار څخه د 95km په سرعت اول ښار ته روانیږي وواياست چې پس له څه وخته به سره مخ شي.
- 4- عبدالوهاب دوه تانه رخت له یوه جنسه یو په 9000Rs او بل په 10500Rs واخیستل د تانویو فرق 5 متره دی وواياست چې هر تان څو متره دی.
- 5- یو سړي دوه بوجی ممریز له یوه جنسه یو په 37800 روپۍ او بل بوجی یې په 31500Rs واخیستل که د بوجیو فرق (9) منه وي د هرې بوجۍ اندازه پیدا کړئ؟
- 6- دوه طیاري له یوه میدان څخه په یوه وخت کې پرواز کوي د یوې سرعت 500km/h او د بلې سرعت 750km/h دی یوه د شرق او بله د غرب خواته چې پس له 2 ساعتو به یې په منځ کې فاصله څومره شي؟
- 7- یو موټر په سهار په 7 بجې د کابل څخه حرکت کوي یو د شمال خواته او بل جنوب خواته ځي د یوه سرعت 70km/h او د بلې سرعت 90km/h دی پس له څو ساعتو به د دوي په منځ فاصله 960km شي.

دویم فصل

کسر:

کسر په لغت کې ماتولو ته وايي. او په اصطلاح کې که واحد په څو مساوي برخو وویشل شي دې عمليې ته کسر وايي.

کسر په دوه قسمه دی.

1- اعشار کسر 2- عام کسر

1- اعشار کسر:

که واحد په 10 يا د 10 په طاقت وویشل شي دې کسر ته اعشار کسر وايي. لکه 0.3 واحد په 10 برخو ویشل شوی دی او 3 برخې ور څخه اخیستل شوی دی.

0.13 واحد په 100 برخو ویشل شوی دی او 13 برخې ترې اخیستل شوی دی. 0.007 واحد په 1000 برخو ویشل شوی دی او 7 برخې ور څخه اخیستل شوی دی.

د اعشار کسر څلور ګوني عمليې:

1- د اعشار کسر جمع:

عددونه داسې یو تر بل لاندې لیکو چې صحیح عدد د صحیح عدد لاندې او اعشاري رقمونه د اعشاري رقمو لاندې راشي. بیا یې د صحیح عددونو د جمع په شان جمع کوو.

$$\begin{array}{r} +7678.3 \\ 32887.45 \\ \hline 120852.83 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +87965.38 \\ 32887.45 \\ \hline 120852.83 \end{array}$$

میزان یې د صحیح عددونو د جمع د میزان غونډې دي.

2- د اعشار کسر تفریق:

مفروق د مفروق منه لاندې داسې لیکو چې صحیح عدد د صحیح عدد لاندې او اعشاري رقمونه د اعشاري رقمو لاندې راشي بیا یې د صحیح عددو د تفریق په شان تفریقوو.

$$\begin{array}{r} -5345.870 \\ 2758.985 \\ \hline 2586.885 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -5345.87 \\ 2758.985 \\ \hline 2586.885 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -1467.23 \\ 894.85 \\ \hline 572.38 \end{array}$$

میزان یې د صحیح عددونو د تفریق د میزان غونډې دي.

3- د اعشار کسر ضرب:

مضروب د مضروب فیه لاندې لیکو. د صحیح عددونو د ضرب په شان یې ضربوو د کسر د ضرب د حاصل څخه د مضروب او مضروب فیه د اعشاري رقمو د شمېر په اندازه اعشاري رقمونه را بیلوو د را کي شوو اعشاري کسرو د ضرب حاصل لاس ته راځي.

$$\begin{array}{r}
 4563.85 \\
 \times 3278.3 \\
 \hline
 1369155 \\
 3651080 \\
 3194695 \\
 912770 \\
 1369155 \\
 \hline
 14961669.455
 \end{array}$$

میزان یې د صحیح عددونو د ضرب د میزان غوندې دی.

4- د اعشار کسر تقسیم:

د اعشار کسر تقسیم په درې حالتو کې مطالعه کوو.

1- چې په مقسوم کې اعشاریه وي او په مقسوم علیه که نه وي.

لکه

$$\begin{array}{r}
 4587.5 \quad | \quad 345 \\
 \hline
 \end{array}$$

د صحیح عددونو د تقسیم په شان یې تقسیموو کله چې اعشاریې ته ورسیږو اعشاریه خارج قسمت ته وږو او اعشاري رقم را کښته کوو عملیې ته تر درې اعشاري رقمو پوري ادامه ورکوو.

$$\begin{array}{r}
 4587.5 \\
 \underline{345} \\
 1137 \\
 \underline{1035} \\
 1025 \\
 \underline{690} \\
 3350 \\
 \underline{3105} \\
 2450 \\
 \underline{2415} \\
 35
 \end{array}$$

2- حالت: چې په مقسوم عليه کي اعشاريه وي په مقسوم کې نه وي لکه:

$$7562 \overline{) 34.2}$$

د مقسوم عليه څخه اعشاريه حذفوو او د مقسوم عليه د اعشاري رقمو د شمېر په اندازه د مقسوم مخې ته صفرونه ېږدو او د صحيح عدد د تقسيم په شان يې تقسيموو که باقي وکړل باقي ته صفر ېږدو او خارج قسمت کې اعشاريه ېږدو تر درې اعشاري رقمو پورې يې تقسيموو.

$$756920 \overline{) 347}$$

3- چې په مقسوم او مقسوم عليه دواړو کې اعشاري رقمونه وي دلته درې حالتونه موجود دي. الف: چې د مقسوم او مقسوم عليه د اعشاري رقمو شمېر مساوي وي لکه:

$$7843.82 \overline{) 9.23}$$

د مقسوم او مقسوم عليه دواړو څخه اعشاريه حذفوو د صحيح عددونو د تقسيم په شان يې تقسيموو که عمليې باقي وکړل د باقي مخې ته صفر ېږدو او په خارج قسمت کې اعشاريه ليکو تر درې اعشاري رقمو پورې يې تقسيموو.

$$784382 \overline{) 923}$$

ب: چې د مقسوم د اعشاري رقمو شمېر زيات او د مقسوم عليه د اعشاري رقمو شمېر کم وي لکه:

$$845.234 \overline{) 85.7}$$

د مقسوم عليه څخه اعشاريه حذفوو او د مقسوم عليه د اعشاري رقمو د شمېر په اندازه اعشاريه مخ ته وړو بيا يې د اعشار کسر د تقسيم د اول حالت په څير تقسيموو.

$$\begin{array}{r} 857 \\ 8452.34 \overline{) } \end{array}$$

ج. چې د مقسوم عليه د اعشاري رقمو شمېر د مقسوم د اعشاري رقمو د شمېر څخه زيات وي لکه.

$$\begin{array}{r} 0.456 \\ 87635.3 \overline{) } \end{array}$$

د مقسوم او مقسوم عليه څخه اعشاريه حذفوو او د مقسوم عليه د اضافه اعشاري رقمو په اندازه د مقسوم مخې ته صفرونه ږدو.

$$\begin{array}{r} 456 \\ 87635300 \overline{) } \end{array}$$

د صحيح عددونو د تقسيم په شان يې تقسيموو.

ميزان يې د صحيح عددونو د تقسيم د ميزان غوندي دی.

2- عام کسر:

که واحد د 10 او 10 د طاقت څخه په غېر په نورو عددو وويشل شي دی کسر ته عام کسر وايي لکه $\frac{2}{3}$ ، $\frac{5}{11}$ ، $\frac{7}{99}$ ، $\frac{4}{101}$ ، $\frac{17}{300}$ او داسې نور.

عام کسر په څلور قسمه دی.

1- اصل کسر يا واقعي کسر

2- واحد کسر

3- غېر واجب کسر

4- واجب کسر يا کسري عدد يا مخلوط کسر

1- واقعي کسر: هغه کسر دی چې صورت يې له مخرغ يې ډېر وي.

لکه $\frac{5}{13}$ ، $\frac{7}{19}$ ، $\frac{13}{29}$ او داسې نور.

2- واحد کسر: هغه کسر دی چې صورت او مخرغ يې مساوي وي لکه $\frac{8}{8}$ ، $\frac{9}{9}$ او داسې نور.

3- غیر واجب کسر: هغه کسر دی چې صورت یې دېر او مخرچ یې کم وي. لکه $\frac{7}{2}$ ، $\frac{9}{4}$ ، $\frac{13}{5}$ او داسې نور.

4- واجب کسر: هغه کسر دی چې د یوه صحیح عدد او یوه اصل کسر څخه جوړ شوی وي لکه $3\frac{1}{4}$ ، $7\frac{2}{3}$ ، $8\frac{4}{5}$ او داسې نور.
غیر واجبول:

په غیر واجب کسر باندې د واجب کسر بدلولو ته غیر واجبول وايي.
طریقه یې داسې ده چې مخرچ په صحیح عدد کې ضربوو صورت ورسره جمع کوو او پر مخرچ یې لیکو.

مثال: $9\frac{1}{7}$ واجب کسر غیر واجب کړئ؟

$$9\frac{1}{7} = \frac{7 \times 9 + 1}{7} = \frac{63 + 1}{7} = \frac{64}{7}$$

مثال: $8\frac{3}{5}$ غیر واجب یې کړئ؟

$$8\frac{3}{5} = \frac{5 \times 8 + 3}{5} = \frac{40 + 3}{5} = \frac{43}{5}$$

تصحیح:

په واجب کسر باندې د غیر واجب کسر بدلولو ته تصحیح وايي.
طریقه یې داسې ده چې صورت په مخرچ ویشو.

مثال: $\frac{27}{5}$ غیر واجب کسر دی واجب یې کړئ؟

$$\begin{array}{r|l} 27 & 5 \\ \hline 25 & 5 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \quad \frac{27}{5} = 5\frac{2}{5}$$

تمرین:

1- غیر واجب یې کړئ؟

1- $5\frac{3}{4}$

2- $11\frac{6}{7}$

3- $8\frac{2}{5}$

4- $9\frac{1}{8}$

2- تصحیح یې کړئ؟

1- $\frac{19}{3}$

2- $\frac{48}{5}$

3- $\frac{77}{8}$

4- $\frac{46}{11}$

5- $\frac{117}{11}$

د کسرونو مقایسه:

1- که د څو کسرو صورتونه مساوي او مخرونه یې مختلف وي لکه $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{3}$ او $\frac{1}{4}$ پدې کسرو کې هغه کسر لوی دی چې مخرګ یې کوچنی وي.

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4}$$

2- که د څو کسرو صورتونه مختلف او مخرونه یې مساوي وي لکه:

$$\frac{4}{7}, \frac{3}{7}, \frac{2}{7}, \frac{1}{7}$$

پدې کسرو کې هغه کسر لوی دی چې صورت یې ډېر وي.

$$\frac{4}{7} > \frac{3}{7} > \frac{2}{7} > \frac{1}{7}$$

3- که د څو کسرو صورتونه او مخرونه مختلف وي د دې کسرو د مقایسې لپاره کسرونه تجنیسوؤ.

تجنیس:

تجنیس په لغت کې هم جنس کولو ته وايي.

او په اصطلاح کې که د یوه کسر صورت او مخرګ د بل کسر په مخرګ کې ضرب شي دې عمليې ته تجنیس وايي.

مثال: $\frac{4}{7}$ او $\frac{5}{9}$ کسرونه مقایسه کړئ؟

$$\frac{4}{7} = \frac{4 \times 9}{7 \times 9} = \frac{36}{63}$$

$$\frac{5}{9} = \frac{5 \times 7}{9 \times 7} = \frac{35}{63}$$

$$\frac{36}{63} > \frac{35}{63}$$

$$\frac{4}{7} > \frac{5}{9}$$

تمرین:

لاندې کسرونه مقایسه کړئ؟

$$1 - \frac{6}{11} \text{ او } \frac{9}{16} \quad 2 - \frac{7}{9} \text{ او } \frac{8}{11} \quad 3 - \frac{2}{5} \text{ او } \frac{3}{7} \quad 4 - \frac{5}{7} \text{ او } \frac{7}{9} \text{ او } \frac{9}{11}$$

د کسرونو اختصار:

اختصار په لغت کې لنډولو ته وايي.

او په اصطلاح کې د یوه کسر صورت او مخرچ په یوه عدد ویشلو ته اختصار وايي.

مثال: $\frac{12}{15}$ کسر اختصار کړئ؟

صورت او مخرچ په (3) ویشو.

$$\frac{\frac{4}{12}}{\frac{15}{15}} = \frac{4}{5}$$

صورت او مخرچ په 7 ویشو.

$$\frac{\frac{5}{35}}{\frac{63}{63}} = \frac{5}{9}$$

صورت او مخرچ په 6 بیا په 4 ویشو.

$$\frac{\frac{5}{20}}{\frac{120}{144} \div \frac{24}{6}} = \frac{5}{6}$$

صورت او مخرج په 12 ویشو او بیا یې په (2) ویشو.

$$\frac{\frac{10}{120}}{\frac{144}{12}} = \frac{\frac{5}{10}}{\frac{12}{6}} = \frac{5}{6}$$

د کسر د اختصار لپاره د تقسیم د قابلیتونو زده کړه ضرور ده.

1- په (2) باندې د ویش قابلیت: که د یوه عدد لمری رقم صفر یا جفت وي په (2) ویشل کیږي لکه 150، 158، 214، 102 او داسې نور.

2- په (3) باندې د ویش قابلیت: که د یوه عدد رقمو مجموعه په 3 ویشل کیدله دا عدد په (3) ویشل کیږي.

لکه 11124، 1032، 11508 او داسې نور.

3- په (4) باندې د ویش قابلیت: که د یوه عدد لمری رقمونه صفرونه وه یا داسې دوه عددونه وي چې په څلورو ویشل کیږي نو دا ټول په څلور ویشل کیږي. لکه 300، 712، 520، 316، 728 او داسې نور.

4- په 5 باندې د ویش قابلیت: که د یوه عدد لمری رقم صفر یا 5 وي دا عدد په 5 ویشل کیږي لکه 310، 715 او داسې نور.

5- په (6) باندې د ویش قابلیت: که یو عدد په 2 او 3 ویشل کیدلو دا عدد په (6) هم ویشل کیږي لکه 312، 414، 276، 1308 او داسې نور.

6- په (7) باندې د ویش قابلیت: لمری رقم حذفوو د حذف شوی دوه چنده د متبقي عدد څخه منفي کوو په همدې ترتیب عمليې ته ادامه ورکوو که په اخر کې صفر یا داسې عدد پلاس راغی چې په (7) ویشل کیدلو نو دا ټول عدد په (7) ویشل کیږي.

لکه: 359156 په 7 ویشل کیږي او که نه:

$$\begin{array}{r} 359156 \\ 12 \\ \hline 35903 \\ 6 \\ \hline 3584 \\ 8 \\ \hline 350 \end{array}$$

- څرنگه چې 350 په 7 ویشل کېږي نو راکړ شوی عدد هم په 7 ویشل کېږي.
- 7- په (8) باندې د ویش قابلیت : که د یوه عدد درې لمړي رقمونه صفرونه وه یا داسې درې عددونه وه چې په 8 ویشل کېدل نو دا ټول عدد په (8) ویشل کېږي.
لکه 11000 ، 13832 ، 15168 او داسې نور.
- 8- په (9) باندې د ویش قابلیت : که د یوه عدد د رقمو مجموعه په (9) ویشل کېدله نو دا عدد په 9 ویشل کېږي.
لکه 1115 ، 11385 ، 591102 او داسې نور.
- 9- په 10 باندې د ویش قابلیت : که د یوه عدد لمړی صفر وي په (10) ویشل کېږي لکه 1150 ، 210 او داسې نور.
- 10- په 11 باندې د ویش قابلیت : د طاق مرتبو رقمونه بیل جمع کوو او د جفت مرتبو رقمونه بیل جمع کوو یو د بل څخه یې منفي کوو که د تفریق حاصل صفر یا داسې عدد شو چې په 11 ویشل کېدلو نو دا ټول عدد په 11 ویشل کېږي.
لکه : 558998
- 11- په 12 باندې د ویش قابلیت : که یو عدد په 3 او 4 ویش کېدلو دا عدد په 12 هم ویشل کېږي لکه 8016
- 12- په 13 باندې د ویش قابلیت : د عدد لمړی رقم حذفوو څلور چنده یې د متبقي عدد سره جمع کوو په همدې ترتیب عمليې ته ادامه ورکوو که اخرنی عدد په 13 ویشل کېدلو نو راکړ شوي عدد هم په 13 ویشل کېږي.
لکه 593814 ، 739622 او داسې نور.
- 13- په 17 د ویش قابلیت : د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شو 5 چنده د متبقي عدد څخه منفي کوو په همدې ترتیب تر اخره عمليې ته ادامه ورکوو که په اخر کې صفر یا داسې یو عدد لاس ته راغی چې په 17 ویشل کېدلو نو دا ټول عدد په 17 ویشل کېږي.
لکه 77673 ، 96713 او داسې نور.

14- په 19 د ویش قابلیت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي دوه چنده د متبقي عدد سره جمع کوو په همدې ترتیب عمليې ته ادامه ورکوو که په اخر کې صفر یا داسې عدد په لاس راغی چې په 19 ویشل کیدلو نو دا ټول عدد په 19 ویشل کیږي لکه (871701) او داسې نور.

15- په 23 د ویش قابلیت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي اوه چنده د متبقي سره جمع کوو عمليې ته په همدې ډول ادامه ورکوو که اخرنی عدد په 23 ویشل کیدلو نو دا ټول عدد هم په 23 ویشل کیږي.

لکه 10510701 ، 1308562 او داسې نور.

16- په 29 باندې د ویش قابلیت: لمړی رقم حذفوو د حذف شوي درې چنده د متبقي عدد سره جمع کوو په همدې ډول عمليې ته ادامه ورکوو که اخري عدد په 29 ویشل کیدلو نو راکړ شوی عدد هم په 29 ویشل کیږي.

لکه 1324923 ، 13249288 او داسې نور.

17- په 31 د ویش قابلیت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 3 چنده د متبقي عدد څخه منفي کوو په همدې ډول عمليې ته ادامه ورکوو که اخري عدد په 31 ویشل کیدلو نو دا ټول عدد هم په 31 ویشل کیږي لکه 1416297 ، 141422 او داسې نور.

18- په 37 باندې د ویش قابلیت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي عدد 11 چنده د متبقي عدد څخه منفي کوو په همدې ډول عمليې ته ادامه ورکوو که په اخر کې صفر یا داسې عدد په په لاس راغی په 37 ویشل کیدلو نو دا ټول عدد په 37 ویشل کیږي لکه 1690419 ، 210308 او داسې نور.

19- په 41 باندې د ویش قابلیت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي څلور چنده د متبقي عدد څخه منفي کوو عمليې ته تر اخره ادامه ورکوو که اخرنی عدد په 41 ویشل کیدلو نو دا ټول عدد په 41 باندې ویشل کیږي.

لکه 1855988 ، 23160039 او داسې نور.

20- په 43 باندې د ویش قابلیت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 13 چنده د متبقي عدد سره جمع کوو په همدې ترتیب عمليې ته ادامه ورکوو که په اخر کې په لاس راغلي عدد په 43 ویشل کیدلو نو ټول عدد په 43 ویشل کېږي.

لکه 2526078 ، 2531109 او داسې نور.

21- په 47 باندې د ویش قابلیت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 14 چنده د متبقي عدد څخه منفي کوو په همدې ټول عمليې ته ادامه ورکوو که اخري عدد صفر یا داسې یو عدد شو چې په 47 ویشل کیدلو نو دا ټول عدد په 47 ویشل کېږي.

لکه 2462048 ، 3766628 او داسې نور.

22- په 53 د ویش قابلیت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 16 د متبقي عدد سره جمع کوو په همدې ترتیب عمليې ته ادامه ورکوو که په اخر کې صفر یا داسې عدد لاس ته راغی چې په 53 ویشل کیدلو نو دا ټول عدد په 53 ویشل کېږي لکه 13383825 ، 24220311 او داسې نور.

23- په 59 د ویش قابلیت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 6 چنده د پاتي عدد سره جمع کوو که اخري عدد په 59 ویشل کېدلو نو راکړ شوی عدد په 59 ویشل کېږي لکه 26962233 ، 5166158 او داسې نور.

24- په 61 باندې د ویش قابلیت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 6 چنده د متبقي عدد څخه منفي کوو که په اخر کې صفر یا داسې عدد پلاس راغی چې په 61 ویشل کیدلو نو دا ټول عدد هم په 61 ویشل کېږي.

لکه 397964 ، 3347192 او داسې نور.

25- په 67 باندې د ویش قابلیت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 20 چنده د پاتي عدد څخه منفي کوو که په اخر کې داسې عدد لاس ته راغلي چې په 67 ویشل کیدلو او یا صفر و نو دا عدد په 67 ویشل کېږي.

لکه 30618129 ، 36648129 او داسې نور.

26- په 71 باندې د ویش قابلیت: د عدد لمړی رقم حذفو د حذف شوي اوه چنده د متبقي عدد څخه منفي کوو که د عمليې په اخر کې که صفر یا داسې عدد لاس ته راغی چې په 71 ویشل کېږي نو دا ټول په 71 ویشل کېږي.
لکه 3243919 ، 3719477 او داسې نور.

27- په 73 د ویش قابلیت: د عدد لمړی رقم حذفو د حذف شوي عدد 22 چنده د متبقي عدد سره جمع کوو په همدې ترتیب عمليې ته ادامه ورکوو که د عمليې په اخر کې صفر یا داسې عدد لاس ته راغی چې په 73 ویشل کېدلو نو راکړ شوي عدد په 73 ویشل کېږي.
لکه 333537 ، 42921372 او داسې نور.

28- په 79 باندې د ویش قابلیت: د عدد لمړی رقم حذفو د حذف شوي 8 چنده د متبقي عدد سره جمع کوو که د عمليې په اخر کې صفر یا داسې عدد لاس ته راغی چې په 79 ویشل کېدلو نو دا ټول عدد په 79 ویشل کېږي.
20066 ، 67828215 او داسې نور.

29- په 83 باندې د ویش قابلیت: د عدد لمړی رقم حذفو د حذف شوي 25 چنده د متبقي عدد سره جمع کوو عملیه تر اخره اجراء کوو که اخري عدد په 83 ویشل کېدلو نو دا ټول عدد په 83 ویشل کېږي.
لکه 629638 ، 379144 او داسې نور.

30- په 89 باندې د ویش قابلیت: لمړی رقم حذفو د حذف شوي (9) چنده د متبقي عدد سره جمع کوو که اخري عدد په 89 ویشل کېدلو نو راکړ شوي عدد هم په 89 ویشل کېږي.
لکه 406107 ، 6990594 او داسې نور.

31- په 97 باندې د تقسیم قابلیت: لمړی رقم حذفو د حذف شوي عدد 29 چنده د متبقي عدد څخه منفي کوو عملیه تر اخره اجراء کوو که اخري عدد صفر شو او یا داسې یو عدد شو چې په 97 ویشل کېدلو نو دا ټول عدد بعضي راکړ شوي عدد په 97 ویشل کېږي.
لکه 530396 ، 5127808 او داسې نور.

د عام کسر څلور گوني عمليې

1- د عام کسر جمع او تفریق:

د څو کسرو د جمع کولو او تفریقولو لپاره لمړی مخرچ مشترک پیدا کوو. مخرچ مشترک د هر کسر په مخرچ ویشو. د هغه کسر په صورت کې یې ضربوو. د مخرچ مشترک پر سر یې لیکو. د جمع په سوال کې د جمع علامه لیکو. او د تفریق په سوال کې د تفریق علامه لیکو. په همدې ترتیب عمليې ته ادامه ورکوو. بالاخره د کسرونو د جمع حاصل یا د تفریق حاصل لاس ته راځي. خود مخرچ مشترک د پیدا کولو لپاره د مخرجو پېژندل ضرور دي. مخرجونه په څلور قسمه دي.

1- متماثل مخرجونه: مساوي مخرجو ته متماثل مخرجونه وايي.

$$4\frac{5}{9} + 3\frac{7}{9} + 8\frac{8}{9}$$

$$\frac{41}{9} + \frac{34}{9} + \frac{80}{9} = \frac{41 + 34 + 80}{9} = \frac{155}{9} = 17\frac{2}{9}$$

$$\begin{array}{r} 155 \quad | \quad 9 \\ \underline{9} \quad | \quad 17 \\ 65 \\ \underline{63} \\ 2 \end{array}$$

$$19\frac{3}{5} - 8\frac{4}{5}$$

$$\frac{98}{5} - \frac{44}{5} = \frac{98 - 44}{5} = \frac{54}{5} = 10\frac{4}{5}$$

$$\begin{array}{r} 54 \quad | \quad 5 \\ \underline{5} \quad | \quad 10 \\ 4 \end{array}$$

2- متداخل مخرجونه: هغه مخرجونه دي چې لوي مخرچ په کوچني مخرچ پوره تقسيم شي لکه:

$$5\frac{7}{12} + 8\frac{3}{4} + 7\frac{5}{6} + 8\frac{1}{2}$$

مخرج مشترک یې لوی مخرج دی.

$$\frac{67}{12} + \frac{35}{4} + \frac{47}{6} + \frac{17}{2} = \frac{67 + 105 + 94 + 102}{12} = \frac{368}{12}$$

$$30\frac{8}{12} = 30\frac{2}{3}$$

$$\begin{array}{r|l} 368 & 12 \\ \hline 36 & 30 \\ \hline 8 & \end{array}$$

$$11\frac{5}{8} - 4\frac{3}{4}$$

$$\frac{93}{8} - \frac{19}{4} = \frac{93 - 38}{8} = \frac{55}{8} = 6\frac{7}{8}$$

$$\begin{array}{r|l} 55 & 8 \\ \hline 48 & 6 \\ \hline 7 & \end{array}$$

3- متوافق مخرجونه : هغه مخرجونه دي چې ټول په يوه عدد ويشل کېږي لکه $8\frac{5}{9} + 7\frac{5}{6}$

مخرج مشترک یې په ذواضعاف اقل پيدا کېږي.

$$15\frac{5}{6} - 7\frac{3}{4}$$

$$\begin{array}{r|l} 97 & 12 \\ \hline 96 & 8 \\ \hline 1 & \end{array}$$

$$2 \left\{ \frac{95}{6} + \frac{31}{4} = \frac{190 - 93}{12} = \frac{97}{12} = 8\frac{1}{12} \right.$$

4- متباين مخرجونه : هغه مخرجونه دي چې نه متماثل وي نه متداخل وي او نه متوافق وي لکه

$$9\frac{2}{3} + 7\frac{3}{4} + 7\frac{2}{5}$$

مخرج مشترک یې په حاصل ضرب پيدا کېږي.

$$\frac{29}{3} + \frac{31}{4} + \frac{37}{5} = \frac{580 + 456 + 444}{60} = \frac{1480}{60} = 24\frac{40}{60} = 24\frac{2}{3}$$

$$\begin{array}{r} 1480 \\ 120 \\ \hline 280 \\ 240 \\ \hline 40 \end{array} \quad \begin{array}{r} 60 \\ 24 \\ \hline \end{array}$$

$$19\frac{1}{2} - 8\frac{2}{3}$$

$$\frac{39}{2} - \frac{26}{3} = \frac{117 - 52}{6} = \frac{65}{6} = 10\frac{5}{6}$$

$$\begin{array}{r} 65 \\ 6 \\ \hline 5 \end{array} \quad \begin{array}{r} 6 \\ 10 \\ \hline \end{array}$$

تمرین :

لاندي سوالونه حل کړئ

$$9\frac{4}{11} + 8\frac{5}{11} + 4\frac{7}{11} .1$$

$$12\frac{1}{3} - 4\frac{2}{3} .2$$

$$9\frac{5}{6} + 4\frac{1}{2} + 3\frac{2}{3} .3$$

$$14\frac{5}{8} - 7\frac{1}{2} .4$$

$$6\frac{2}{9} + 4\frac{1}{2} + 3\frac{2}{3} .5$$

$$8\frac{1}{4} - 3\frac{5}{6} .6$$

2- د عام کسر ضرب :

که کسرونه واجب وه غیر واجبوو یې بیا صورت په صورت کې او مخرغ په مخرغ کې ضربوو.

$$-9\frac{2}{3} \times 5\frac{1}{4}$$

$$\frac{29}{3} \times \frac{21}{4} = \frac{29 \times 21}{3 \times 4} = \frac{609}{12} = 50 \frac{9}{12} = 50 \frac{3}{4}$$

$$\begin{array}{r} 609 \\ 60 \\ \hline 9 \end{array} \quad \begin{array}{r} 12 \\ 50 \\ \hline \end{array}$$

تمرین:

لاندې سوالونه حل کړئ؟

$$12 \frac{3}{4} \times 8 \frac{7}{9} - 1$$

$$6 \frac{1}{8} \times \frac{11}{13} - 2$$

$$2 \times 4 \frac{3}{4} - 3$$

$$6 \frac{1}{8} \times 7 - 4$$

3- د عام کسرتقسیم:

که کسرونه واجب وه غیر واجبوو یې بیا د تقسیم علامه په ضرب بدلوو او مقسوم علیه سرچپه کوو.

$$19 \frac{1}{2} \div 3 \frac{1}{8} - 1$$

$$\frac{39}{2} \div \frac{25}{8} = \frac{39}{2} \times \frac{8}{25} = \frac{312}{50} = 6 \frac{12}{50} = 6 \frac{6}{25}$$

$$\begin{array}{r} 312 \\ 300 \\ \hline 12 \end{array} \quad \begin{array}{r} 50 \\ 6 \\ \hline \end{array}$$

$$8 \frac{1}{4} \div \frac{2}{3} - 2$$

$$\frac{33}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{99}{8} = 12 \frac{3}{8}$$

$$\begin{array}{r} 99 \\ 8 \\ \hline 19 \end{array} \quad \begin{array}{r} 8 \\ 12 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ 3 \\ \hline \end{array}$$

$$15\frac{4}{9} \div 3 = 5\frac{4}{27}$$

$$\frac{139}{9} \times \frac{1}{3} = \frac{139}{27} = 5\frac{4}{27}$$

139	27
135	5
4	

$$8 \div \frac{1}{2} = 8 \times \frac{2}{1} = 16$$

تمرین:

$$20\frac{2}{3} \div 8\frac{5}{6} = 1$$

$$41\frac{2}{5} \div 3\frac{1}{5} = 2$$

$$16\frac{1}{2} \div \frac{3}{4} = 3$$

$$111 \div 1\frac{1}{2} = 4$$

$$14\frac{1}{5} \div \frac{2}{3} = 5$$

کسر الکسری یا مرکب کسر:

هغه کسر دی چې په صورت یا مخرج او یا په دواړو کې یې کسر وي.
لکه:

$$\frac{7}{8}, \frac{5}{3}, \frac{2}{4}, \frac{11}{13}$$

که د یوه کسر په صورت یا مخرج کې کسر نه وي نو مخرج یې یو دی.

$$\frac{2}{3} = \frac{2}{3 \times 1}$$

$$\frac{5}{3} = \frac{5}{3 \times 4}$$

د کسر الکسر د ساده کولو لپاره د طرفینو حاصل ضرب په صورت کې او د وسطینو حاصل ضرب په مخرج کې لیکو.

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{7}{1}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{7}{1}} = \frac{1 \times 2}{3 \times 7} = \frac{2}{21}$$

$$\frac{\frac{5}{3}}{\frac{4}{4}} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{4}{4}} = \frac{4 \times 5}{3 \times 1} = \frac{20}{3}$$

$$\frac{\frac{7}{11}}{\frac{8}{13}} = \frac{7 \times 13}{8 \times 11} = \frac{91}{88}$$

هغه کسرچه صورت او مخرج لري ساده کسرونه وایي.

لکه: $\frac{2}{3}$

تمرین: لاندې کسرونه ساده کړئ؟

$$-1 \quad \frac{\frac{6}{11}}{\frac{9}{22}}$$

$$-2 \quad \frac{9\frac{1}{8} + 5\frac{1}{3}}{7\frac{1}{2}}$$

$$-3 \quad \frac{11\frac{1}{4} - 2\frac{1}{3}}{4\frac{1}{5}}$$

$$-4 \quad \frac{4\frac{1}{2} \times 6\frac{1}{2}}{9\frac{1}{4} \div 2\frac{1}{3}}$$

$$-5 \quad \frac{6 + 7\frac{1}{2}}{9 - 3\frac{1}{4}}$$

$$-6 \quad \frac{\frac{2}{3} \div \frac{1}{2}}{\frac{3}{2} \div \frac{1}{4}}$$

د کسرونو تبادله :

1- د عام کسر بدلول په اعشار کسر:

صورت په مخرج ویشو.

مثال: $\frac{4}{5}$ عام کسر اعشار کسر ته واړوي؟

$$\frac{4}{5} = 0.8$$

40	5
40	0.8
4	

مثال: $\frac{1}{6}$ اعشار کسر ته واړوي؟

$$\frac{1}{6} = 0.1\bar{6}$$

10	6
6	0.16
40	
36	
4	

مثال: $\frac{3}{8}$ کسر اعشار کسر ته واړوي؟

$$\frac{3}{8} = 0.375$$

30	8
24	0.375
60	
56	
40	
40	
xx	

2- د اعشار کسر بدلول په عام کسر:

د اعشاري رقمو لاندې خط کشو بیا د اعشاري رقمو په عوض خط لاندې صفرونه ږدو او د اعشاري د علامې په عوض یو لیکو او اختصار وؤ یې.

1- مثال: 0.375 په عام کسر بدل کړئ.

$$\begin{array}{r} 3 \\ \cancel{15} \\ \cancel{75} \\ 0.375 = \frac{\cancel{375}}{\cancel{1000}} = \frac{3}{8} \\ \cancel{200} \\ \cancel{40} \\ 8 \end{array}$$

2- مثال: $0.\bar{3}$ په عام کسر بدل کړئ؟

حل: پوهیږو چې دا اعشار د $\frac{1}{3}$ عام کسر څخه جوړ شوی دی د 0.3 لاندې خط کښوو بیا صورت او مخرج د $\frac{1}{3}$ د کسر په مخرج کې ضربوو او د صورت سره باقي جمع کوو.

$$\frac{0.3}{10} = \frac{3 \times 3 + 1}{10 \times 3} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$$

یا دا چه د متوالي عدد لاندې 9 لیکو

$$\frac{0.3}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

مثال: 0.16 عام کسر ته واړوئ؟

$$\frac{0.16}{100} = \frac{16 \times 6 + 4}{100 \times 6} = \frac{96 + 4}{600} = \frac{100}{600} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{0.16}{90} = \frac{16 - 1}{90} = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}$$

تمرین:

1- اعشار کسر ته یې واړوئ؟

1- $\frac{4}{7}$

2- $\frac{3}{5}$

3- $\frac{7}{8}$

4- $\frac{5}{6}$

5- $\frac{11}{15}$

2- عام کسر ته یې واړوئ؟

1- $0.\overline{27}$

2- $0.\overline{73}$

3- $0.95\overline{45}$

4- $0.4\overline{6}$

5- $0.3\overline{8}$

6- $0.4\overline{16}$

7- $0.9\overline{1}$

8- $0.8\overline{14}$

عبارتي سوالونه:

- 1- احمد د یوې هنداونۍ $\frac{3}{7}$ برخه واخیسته پاتې شوي برخه یې پیدا کړئ؟
- 2- د تیلو د ټانک $\frac{7}{9}$ برخه ډکه ده که د 200li گنجایش ولري وواياست په ټانک کې به ټول تیل څومره وي؟
- 3- د غوړیو د بیلر $\frac{2}{5}$ برخه د غوړیو څخه ډکه ده د ډکې برخې دریمه برخه یې 30kg ده د بیلر گنجایش څو دی؟
- 4- احمد د $200\frac{1}{2}$ روپو بوره د $300\frac{1}{4}$ روپۍ یې چای د $700\frac{3}{4}$ روپۍ غوښه $30\frac{1}{2}$ روپۍ یې مالګه او اورلګیت واخیست که د نوموړي تنخوا 2000 روپۍ وي وواياست چې څو روپۍ ور پاته دي؟
- 5- امین $10\frac{1}{2}\text{kg}$ غوښه واخیسته که غوښه کیلو ګرام په $300\frac{1}{4}$ روپۍ وي وواياست چې قصاب څو روپۍ ور څخه اخیستي دي؟
- 6- چای خرڅوونکي د چایو یو پیټي چې 50kg چای پکې دی خلاصه کړه احمد ته $2\frac{3}{4}\text{kg}$ چای عمود ته یې $3\frac{1}{4}\text{kg}$ چای او یو دکاندار ورڅخه $20\frac{1}{4}$ کیلو ګرام چای واخیستی ووست چې په پیټي کې څومره چای پاتې دی؟

دويم فصل

طاقت، تجزيه او جذر

طاقت لرونکي عددونه:

هغه عددونه دي چې څو وار په خپل ځان کې ضرب شوي وي لکه:

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$$

هغه عدد چې په خپل ځان کې ضربېږي د طاقت لرونکي عدد قاعده ورته وايي او د ضربېدو کړتو ته توان وايي.

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5$$

د طاقت قوانین:

1- که څو طاقت لرونکي عددونه د ضرب په حال کې وي قاعدې يې مساوي او توانونه يې مختلف وي. د قاعدو څخه يوه قاعده لیکو او توانونه يې جمع کوو.

$$2^3 \times 2^5 \times 2^7 \times 2 = 2^{3+5+7+1} = 2^{16}$$

2- که څو طاقت لرونکي عددونه د ضرب په حال کې وي قاعدې يې مختلفې او توانونه يې مساوي وي قاعدې سره ضربو او د توانو څخه يو توان راځلو.

$$2^7 \times 3^7 \times 5^7 = (2 \times 3 \times 5)^7 = 30^7$$

3- که دوه طاقت لرونکي عددونه د تقسيم په حال کې وي قاعدې يې مساوي او توانونه يې مختلف وي د قاعدو څخه يوه قاعده لیکو او توانونه يې منفي کوو.

$$\frac{7^{11}}{7^5} = 7^{11-5} = 7^6$$

4- که دوه طاقت لرونکي عددونه د تقسيم په حال کې وي قاعدې يې مختلفې او توانونه يې مساوي وي قاعدې يې يو پر بل لیکو او د توانو څخه يو توان راځلو.

$$1 - \frac{6^5}{3^5} = \left(\frac{6}{3}\right)^5 = 2^5$$

$$2- \frac{16^7}{12^7} = \left(\frac{16}{12}\right)^7 = \left(\frac{4}{3}\right)^7$$

$$3- \frac{5^8}{3^8} = \left(\frac{5}{3}\right)^8$$

5- که یو طاقت لرونکی عدد په بل توان رفع شي توانونه یې ضربیږي.

$$(2^3)^4 = 2^{3 \times 4} = 2^{12}$$

6- هر عدد په توان د صفر یو کیږي.

$$\{(5^3)^7\}^0 = 5^0 = 1$$

$$5^0 = 1$$

$$5^3$$

$$\frac{5^3}{5^3} = 1 \dots \dots \dots I$$

$$5^3$$

$$\frac{5^3}{5^3} = 5^{3-3} = 5^0 \dots \dots \dots II$$

د I او II رابطو چپ طرفونه مساوي دی نو ښي طرفونه یې هم مساوي دي. یعنې د $5^0 = 1$ کیږي.

2- که یو طاقت لرونکی عدد د صورت څخه مخرګ ته یاد مخرګ صورت ته ویول شي د

توان علامه یې تغیر خوري.

$$2^5 = \frac{1}{2^{-5}}$$

$$3^{-7} = \frac{1}{3^7}$$

$$\frac{1}{2^3} = 2^{-3}$$

$$\frac{1}{4^{-6}} = 4^6$$

د $2^5 = \frac{1}{2^{-5}}$ ثبوت:

$$2^5 = \frac{2^5 \times 2^{-5}}{2^{-5}} = \frac{2^0}{2^{-5}} = \frac{1}{2^{-5}}$$

د $\frac{1}{4^{-6}} = 4^6$ ثبوت:

$$\frac{1}{4^{-6}} = \frac{1 \times 4^6}{4^{-6} \times 4^6} = \frac{4^6}{4^0} = \frac{4^6}{1} = 4^6$$

تجزیه :

تجزیه په لغت کې ټوټه ټوټه کولو ته وايي.

او په اصطلاح کې د یوه مرکب عدد د ضربی عواملو د پیدا کولو طریقې ته تجزیه وايي.

د تجزیې طریقه:

عدد لیکو خط یې لاندې کښوو چېپې خواته یې عمودي خط رسموو د عمودي خط چېپې خواته هغه لمړنی عدد لیکو چې د راکړ شوي عدد په ضربی عواملو کې د ټولو څخه کوچنی وي. راکړ شوی پدې لمړني عدد ویشو حاصل یې د خط لاندې لیکو په همدې ترتیب عملیې ته تر هغه وخته پورې ادامه ورکوو ترڅو چې د عدد په ستون کې یو لاس ته راشي. د عمودي خط د چېپې خوا عددونه د راکړ شوي عدد ضربی عوامل دي.

2	450
3	225
3	75
5	25
5	5
	1

$$450 = 2 \times 3^2 \times 5^2$$

د 55125 تجزیه کړئ؟

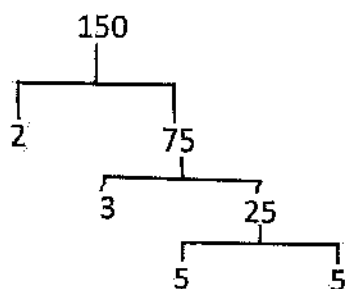
3	55125
3	18375
5	6125
5	1225
5	245
7	49
7	7
	1

$$55125 = 3^2 \times 5^3 \times 7^2$$

د دیاگرام په طریقه د یوه عدد تجزیه کول:

عدد لیکو په دوه برخو یې داسی ویشو چه یو یې لمړنی عدد او بل یې مرکب عدد وي مرکب عدد بیا په دوه برخو ویشو په همدې ډول د مرکب عدد ضربی عوامل لاس ته راځي.

مثال: 150 د دیاگرام په طریقه تجزیه کړئ؟



$$150 = 2 \times 3 \times 5^2$$

د تجزیې د استعمال ځایونه:

تجزیه د څو عددو د لوی مشترک قاسم او کوچنی مشترک مضرب د پیدا کولو لپاره استعمالیږي.

لوی مشترک قاسم: د څو عددو لوی مشترک قاسم هغه عدد دی چې تر هغه په بل لوی عدد باندي دا عددونه تقسیم نه شي.

لکه د 150 او 210 لوی مشترک قاسم 30 دی ځکه چې 150 او 210 تر 30 په بل غټ عدد نه ویشل کیږي.

کوچنی مشترک مضرب: د څو عددو کوچنی مشترک مضرب هغه عدد دی چې تر هغه بل کوچنی عدد په دې عددو باندي تقسیم نه شي.

لکه 150 او 210 کوچنی مشترک مضرب 1050 دی. ځکه چې تر 1050 بل کوچنی عدد نشته چې په 150 او 210 باندي ویشل شي.

د لوی مشترک قاسم او کوچنی مشترک مضرب پیدا کول: عددونه تجزیه کوو په ضربی عواملو کې یې مشترک او غیر مشترک پیدا کوو په مشترکو ضربی عواملو کې د کوچنی توان والا ضربی عوامل رااخلو ضربوویی لوی مشترک قاسم لاس ته راځي.

او که په مشترکو ضربی عواملو کې د لوی توان والا ضربی او غیر مشترک ضربی عوامل سره ضرب کړو کوچنی مشترک مضرب لاس ته راځي.

مثال: 150 او 210 لوی مشترک قاسم او کوچنی مشترک مضرب پیدا کړئ؟

2	150
3	75
5	25
5	5
	1

2	210
3	105
5	35
7	7
	1

$$150 = 2 \times 3 \times 5^2$$

$$210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$$

$$G.C.D = 2 \times 3 \times 5 = 30$$

$$L.C.M = 2 \times 3 \times 5^2 \times 7 = 1050$$

2- د 660 او 840 لوی مشترک قاسم (G.C.D) او کوچنی مشترک مضرب (L.C.M) پیدا کړئ؟

2	660
2	330
3	165
5	55
11	11
	1

2	840
2	420
2	210
3	105
5	35
7	7
	1

$$660 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 11$$

$$840 = 2^3 \times 3 \times 5 \times 7$$

$$G.C.D = 2^2 \times 3 \times 5 = 60$$

$$L.C.M = 2^3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 = 9240$$

تمرین :

د لاندې عددونو ل مشترک قاسم او کوچنی مشترک مضرب پیدا کړئ؟

1- 450 او 630

2- 540 او 780

3- 660 او 960

5- 1260 او 1440

د اقلیدس په طریقه د لوی مشترک قاسم او کوچنی مشترک مضرب پیدا کول:

لوی عدد په کوچنی عدد ویشو که د تقسیم عملیه باقی وکړي مقسوم علیه په باقی ویشو په همدې ترتیب عملیې ته ادامه ورکوو کله چې باقی صفر شي اخرنی مقسوم علیه لوی مشترک قاسم دي

مثال: د 1080 او 780 لوی مشترک قاسم او کوچنی مشترک مضرب د اقلیدس په طریقه پیدا کړئ؟

$$\begin{array}{r|l}
 1080 & 780 \\
 780 & 1 \\
 \hline
 300 &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r|l}
 780 & 300 \\
 600 & 2 \\
 \hline
 180 &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r|l}
 300 & 180 \\
 180 & 1 \\
 \hline
 120 &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
 180 & 120 \\
 120 & 1 \\
 \hline
 60 &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r|l}
 120 & 60 \\
 120 & 2 \\
 \hline
 &
 \end{array}$$

$$G.C.D = 60$$

عددونه سره ضربوو په لوی مشترک قاسم یې ویشو $L.C.M$ لاس ته راځي.

$$L.C.M = \frac{\text{د عددونو حاصل ضرب}}{G.C.D}$$

$$G.C.D = \frac{\text{د عددونو حاصل ضرب}}{L.C.M}$$

د راځي شوي سوال $L.C.M$ په لاندې ډول پيدا کوو.

$$L.C.M = \frac{780 \times 1080}{60} = 13 \times 1080 = 14040$$

$$L.C.M = 1404$$

په يوه جدول کې د لوی مشترک قاسم او کوچنی مشترک مضرب پيدا کول:

عددونه په يوه کرښه کې لیکو خط ور لاندې کښوو چېپې خواته يې عمودي خط رسموو د عمودي خط چېپې خواته هغه لمړنی عدد لیکو چې د دوي په ضربې عواملو کې د ټولو څخه کوچنی وي راځي شوي عددونه په دغه لمړني عدد ويشو حاصل يې د خط لاندې لیکو تر هغو پورې عمليې ته ادامه ورکوو تر څو چې ټول په يوه عدد ويشل کېږي د عمليې په اخر کې که د عمودي خط د چېپې خوا عددونه ضرب کړو لوی مشترک قاسم لاس ته راځي. او که د افقي خط لاندې عددونه هم پکې ضرب کړو کوچنی مشترک مضرب لاس ته راځي.

مثال: د 780 او 1080 لوی مشترک قاسم او کوچنی مشترک مضرب پيدا کړئ؟

2	780	1080
2	390	540
3	195	270
5	65	90
	13	18

$$G.C.D = 2^2 \times 3 \times 5 = 60$$

$$L.C.M = 60 \times 13 \times 18 = 14040$$

تمرین:

د لاندې عددونه لوی مشترک قاسم او کوچنی مشترک مضرب د اقليدس په طريقه پيدا کړئ؟

1- 1350 او 750

2- 930 او 870

3- 540 او 420

4- 900 او 720

د لاندې عددونو کوچني مضرب او لوی مشترک قاسم په یوه جدول کې پیدا کړئ؟

1- 1530 او 960

2- 210 او 180 او 150

3- 225 او 135 او 120

4- 240 او 330 او 90

جذر:

جذر په لغت کې ولی، رېښه یا جرړې ته وايي.

او په اصطلاح کې د یوه عدد جذر هغه عدد دی چې د جذر په درجه رفع شي او د جذر لاندې عدد پلاس راشي لکه که $\sqrt[n]{a} = b$ وي

نو $b^n = a$ کیږي.

د یو عدد دویم جذر: هغه عدد دی چې د (2) په توان رفع شي او د جذر لاندې عدد پلاس راشي. لکه:

$$1 - \sqrt{64} = 8$$

$$8^2 = 64$$

$$2 - \sqrt{169} = 13$$

$$13^2 = 169$$

د یو عدد دریم جذر:

هغه عدد دی چې د درې په توان رفع شي او د جذر لاندې عدد په لاس راشي لکه که

$$\sqrt[3]{64} = 4$$

نو $4^3 = 64$ کیږي.

د دویم جذر پیدا کول:

دیوه عدد دویم جذر په دوه طریقو پیدا کیږي.

1- د تجزیې پواسطه 2- په عمومي طریقه

1- د تجزيې پواسطه د یوه عدد د دویم جذر پیدا کول:

عدد تجزیه کوو په مساوي ضربي عواملو کې دوه ، دوه جوړه کوو د هری جوړې څخه یو عدد راځلو او ضربوو یې د هغه عدد دویم جذر لاس ته راځي.

1- مثال: د (324) دویم جذر پیدا کړئ؟

$$\begin{array}{r}
 2 \left(\begin{array}{r|l} 2 & 324 \\ 2 & 162 \\ 3 & 81 \\ 3 & 27 \\ 3 & 9 \\ 3 & 3 \\ & 1 \end{array} \right.
 \end{array}$$

$$324 = 2 \times 3^2$$

دیوه عدد د دریم جذر پیدا کول په

عدد تجزیه کوو مساوي ضربي عوامل ټي درې، درې جوړه کوو د هری جوړې څخه یو عدد راځلو ضربوو یې د هغه عدد دریم جذر لاس ته راځي.

مثال: د (1000) دریم جذر پیدا کړئ؟

$$\begin{array}{r}
 2 \left(\begin{array}{r|l} 2 & 1000 \\ 2 & 500 \\ 2 & 250 \\ 5 & 125 \\ 5 & 25 \\ 5 & 5 \\ & 1 \end{array} \right.
 \end{array}$$

$$\sqrt[3]{1000} = 2 \times 5 = 10$$

د یو عدد څلورم جذر:

عدد تجزیه کوو مساوي ضربي عوامل څلور څلور جوړه کوو، د هرې جوړې څخه یو عدد رااخلو او ضربوو د هغه عدد څلورم جذر لاس ته راځي.

مثال: 1296 څلورم جذر پیدا کړئ؟

$$\begin{array}{r}
 2 \left(\begin{array}{r|l} 2 & 1296 \\ 2 & 648 \\ 2 & 324 \\ 2 & 162 \\ 2 & 81 \\ 3 & 27 \\ 3 & 9 \\ 3 & 3 \\ 3 & 1 \end{array} \right.
 \end{array}$$

$$\sqrt[4]{1296} = 2 \times 3 = 6$$

نوټ: په همدغه ډول د تجزيې پواسطه، پنځم، شپږم او نور جذرونه پیدا کولای شو.

2- په عمومي ډول د یوه عدد د دویم جذر پیدا کول:

عدد لیکو بنسټ خواته یې د تقسیم علامه او چېې خواته یې یو عمودي خط رسموو بیا د عدد د بنسټ خوا څخه دوه، دوه مرتبې جوړه کوو اخر ته به هم یادوه مرتبې جوړه شي او یا به یوه مرتبه یواځې پاتي شي په دواړه حالتو کې یو داسې عدد پیدا کوو چې په خپل ځان کې ضرب شي او دغه عدد پوره کړي او یا لږ کم شي دا عدد د تقسیم د علامې په سر او د عمودي خط چېې خواته لیکو او سره ضربوو یې د ضرب حاصل د راکړ شوي عدد د اخري جوړې یا اخري عدد لاندې لیکو منفي کوو یې د تفریق د حاصل مخې ته دوه رقمونه کښته او د مقسوم په څیر یې استعمالوو د عمودي خط د چېې خوا عدد دوه چنده کوو او د مقسوم علیه کار ور څخه اخلو مقسوم په مقسوم علیه ویشو حاصل یې د خارج قسمت د مخکیني عدد مخې ته او د عمودي خط د چېې خوا د عدد مخې ته لیکو. په خارج قسمت کې دغه نوی عدد د عمودي خط د چېې خوا ته په ټول عدد کې ضربوو د ضرب حاصل یې د مقسوم لاندې لیکو او منفي کوو د

تفریق د حاصل مخې دوه نور رقمونه راکیښته کوو د عمودي خط د چپې نوي رقم دوه چند کوو په همدې ترتیب تر اخره اجرائت کوو که عمليې باقي ونکړل د تقسیم د عمليې پر سر عدد د راکړ شوي عدد دویم جذر دی. که عمليې باقي وکړل د تفریق د حاصل مخې ته دوه صفرونه ږدو او خارج قسمت ته اعشاریه پورته کوو.

$$\sqrt{209764} = 458$$

$$\begin{array}{r|l} 4 & \overline{20\ 97\ 64} \\ 85 & \underline{16} \\ 805 & \underline{497} \\ & \underline{425} \\ & \underline{7264} \\ & \underline{7264} \\ & \text{XXXX} \end{array}$$

$$\sqrt{502681} = 709$$

$$\begin{array}{r|l} 7 & \overline{50\ 26\ 81} \\ 1409 & \underline{49} \\ & \underline{12681} \\ & \underline{12681} \\ & \text{XXXX} \end{array}$$

تمرین:

د لاندې عددونو دویم جذر په عمومي طریقه پیدا کړئ؟

1- $\sqrt{298116} = ?$

2- $\sqrt{318096} = ?$

3- $\sqrt{734449} = ?$

4- $\sqrt{2047.5625} = ?$

5- $\sqrt{5484.8836} = ?$

تقریبي جذر:

که د یوه عدد جذر په خپل ځان کې ضرب شي د ضرب حاصل یې هغه عدد پوره نکړي چې جذر یې نیول شوی دی نو دغه جذر ته تقریبي جذر وایي د یوه عدد تقریبي جذر په دوه طریقو پیدا کیږي.

1- په عمومي طریقه 2- د اوسط په طریقه

1- په عمومي طريقه :

د عدد جذر په عمومي طريقه پيدا کوو که باقي يې وکړل د باقي مخې ته دوه صفرونه ږدو او خارج قسمت ته اعشاريه پورته کوو او د جذر عمليې ته ادامه ورکوو پلاس راغلي جذر ته تقريبي جذر وايي.

مثال: د 128968 جذر پيدا کړئ؟

3	128968	359.1
65	9	
709	389	
7169	325	
	6468	
	6381	
	8600	
	7169	
	1431 باقي	

359.1 د 128968 تقريبي جذر دی.

2- د اوسط په طريقه :

د کوچنیو عددونو تقريبي جذر د اوسط په طريقه پيدا کيږي طريقه يې داسې ده د راځي شوي عدد څخه لاندې باندې دوه داسې عددونه پيدا کوو چې پوره جذر ولري جذرونه يې جمع کوو او اوسط يې پيدا کوو اوسط يې مربع کوو که مربع يې کوچنی عدد ته نژدې و نو جذر يې د کوچنی عدد د جذر سره جمع کوو او اوسط يې پيدا کوو اوسط يې د راځي شوي عدد تقريبي جذر دی.

مثال: د 5 تقريبي جذر پيدا کړئ؟

حل: د 5 څخه لاندې هغه عدد چې پوره جذر لري 4 دی چې جذر يې 2 دی د 5 څخه پورته عدد چې پوره جذر لري 9 دی او جذر يې دري (3) دی 2 او 3 جمع کوو او اوسط يې پيدا کوو $\frac{2+3}{2} = \frac{5}{2} = 2.5$ اوسط يې 2.5 دی 2.5 مربع کوو مربع يې 6.25 ده 6.25 د 9 څخه 4 ته نژدې ده نو د 6.25 جذر د 4 د جذر سره جمع کوو او اوسط يې پيدا کوو.

$$\frac{2.5 + 2}{2} = \frac{4.5}{2} = 2.25$$

2.25 د 5 تقریبي جذر دی.

نوټ: د 5 او 6 تقریبي 2.25 جذر دی د 7 او 8 تقریبي جذر 2.75 دی.

د اعشاري عدد دویم جذر پیدا کول:

صحيح عدد یې د نسی خوا څخه دوه دوه مرتبې جوړه کوو او اعشاري رقمونه یې د چپي خوا څخه دوه دوه جوړه کوو که اعشاري رقمونه یې طاق وي مخې ته یو صفر ږدو. کله چې د اعشاري یې د علامې څخه اوږو اعشاریه خارج قسمت ته وږو.

مثال: 903.6036 دویم جذر پیدا کړئ؟

3	9 03.6036	30,06
6006	9	
	036036	
	36036	
	XXXXX	

تمرین:

لاندې عددو تقریبي جذر په عمومي طریقه پیدا کړئ؟

4716 -1 35811 -2 7504 -3 9814 -4 6763 -5

2- د لاندې عددو تقریبي جذر د اوسط په طریقه پیدا کړئ؟

11 -1 13 -2 19 -3 29 -4 34 -5

3- د لاندې اعشاري عدد دویم جذر پیدا کړئ؟

457.96 -1 1229.9049 -2 337444.81 -3 48830.25 -4

2605.0816 -5 64.048009 -6 2711.2849 -7

د جذر قوانین:

1- که څو جذري عددونه د ضرب په حال کې وي د جذر لاندې عددونه یې مساوي او د جذر درجې یې مختلفې وي. که وغواړو چې تر یوه جذر یې لاندې کړو په طاقت لرونکو عددو یې بدلېدو طاقت قوانین پرې تطبیقوو اخري عدد بیرته تر جذر لاندې کوو.

$$\sqrt{2} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[5]{2} = \sqrt[30]{2^{31}}$$

$$2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}} = 2^{\frac{15+10+6}{30}} = 2^{\frac{31}{30}} = \sqrt[30]{2^{31}}$$

2- که څو جذري عددونه د ضرب په حال کې وي د جذر لاندې عددونه یې مختلف او د جذر درجې یې مساوي وي. د طاقت د قوانینو سره سم کولای شو چې تر یوه جذر یې لاندې کړو.

$$\sqrt[7]{2} \times \sqrt[7]{3} \times \sqrt[7]{5} = \sqrt[7]{2 \times 3 \times 5} = \sqrt[7]{30}$$

$$2^{\frac{1}{7}} \times 3^{\frac{1}{7}} \times 5^{\frac{1}{7}} = (2 \times 3 \times 5)^{\frac{1}{7}} = 30^{\frac{1}{7}} = \sqrt[7]{30}$$

3- که دوه جذري عددونه د تقسیم په حال کې وي د جذر لاندې عددونه یې مساوي او د جذر درجې یې مختلفې وي د طاقت د قوانینو په اساس کولای شو چې تر یوه جذر یې لاندې کړو.

$$\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[7]{5}} = \sqrt[35]{5^4}$$

$$\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[7]{5}} = \frac{5^{\frac{1}{3}}}{5^{\frac{1}{7}}} = 5^{\frac{1}{3} - \frac{1}{7}} = 5^{\frac{7-3}{21}} = 5^{\frac{4}{21}} = \sqrt[21]{5^4}$$

4- که دوه جذري عددونه تقسیم په حال کې وي د جذر لاندې عددونه یې مختلف او د جذر درجې یې مساوي وي د طاقت د قوانینو سر سم یې تر یوه جذر لاندې لیکو.

$$\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{6}} = \sqrt[3]{\frac{5}{6}}$$

$$\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{6}} = \frac{5^{\frac{1}{3}}}{6^{\frac{1}{3}}} = \left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{5}{6}}$$

5- که جذري عدد د جذر په درجه رفع شي د جذر لاندې عدد لاس ته راځي.

$$(\sqrt[7]{5})^7 = 5$$

$$(\sqrt[7]{5})^7 = \left(5^{\frac{1}{7}}\right)^7 = 5^{\frac{1}{7} \times 7} = 5^1 = 5$$

6- که یو عدد تر مختلفو جذرو لاندې وي د طاقت د قوانینو سره سم یې تر یوه جذر لاندې کوو.

$$\sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt{2}}} = \sqrt[30]{2}$$

$$\sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt{2}}} = \left\{ \left(2^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{3}} \right\}^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{5}} = 2^{\frac{1}{30}} = \sqrt[30]{2}$$

تمرین:

تر یوه جذر یې لاندې کړئ؟

$$\sqrt[3]{2} - 3$$

$$\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{5} - 2$$

$$\sqrt{3} \times \sqrt[3]{3} \times \sqrt[5]{3} - 1$$

$$\sqrt[6]{\sqrt[5]{\sqrt{3}}} - 5$$

$$\sqrt[9]{5} - 4$$

د حسابي افادو د قیمت پیدا کول:

حسابي افاده: که په یوه حسابي جمله کې څو عمليې (جمع، تفریق، ضرب، تقسیم) او قوسونه طاقت او جذر موجود وي د دغسې افادې د قیمت د پیدا کولو لپاره لمرې طاقت او جذر د منځه وړو بیا قوسونه خلاصوو دریم قدم کې د ضرب او تقسیم عمليې او په اخر د جمع او تفریق عمليې اجراء کوو.

قوس: یو سمبول دی چې څو عددونه تر یوه حکم لاندې کوي قوسونه په درې قسمه دي:

1- کوچنې قوسونه چې شکل یې () دی.

2- منځنۍ قوسونه چې شکل یې { } دی.

3- لوی قوسونه چې شکل یې [] دی.

مثال:

$$(8 - 11)(4 - 5) + 8 - 2 \div 2 - 11$$

$$-3(-1) + 8 - 1 - 11$$

$$3 + 8 - 12$$

$$11 - 12 = -1$$

هم درجه کول:

که خو جذري عددونه د ضرب یا تقسیم په حال کی وي د جذر لاندې عددونه مختلفې او درجې يې هم مختلفې وي که وغواړو چې تر یوه جذر يې لاندې کړو لمړی يې هم درجه کوو. طریقه يې دا ده چې د ټولو جذرو درجې سره ضربوو چې د جذر عمومي درجه لاس ته راشي دا عمومي درجه د هر جذر په درجه تقسیموو د هماغه جذري عدد توان لاس ته راځي.

1- مثال: $\sqrt{2} \times \sqrt[5]{3}$ تر یوه جذر لاندې کړئ؟

حل: لمړی يې هم درجه کوو.

$$\sqrt[10]{2^5} \times \sqrt[10]{3^2} = \sqrt[10]{2^5 \times 3^2} = \sqrt[10]{32 \times 9} = \sqrt[10]{288}$$

2- $\sqrt[7]{2}$ هم درجه يې کړئ؟

$$\frac{\sqrt[14]{2^2}}{\sqrt[14]{3^7}} = \sqrt[14]{\frac{2^2}{3^7}}$$

تمرین: هم درجه يې کړئ؟

$$\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}} - 4$$

$$\sqrt[3]{4} \times \sqrt[4]{5} - 3$$

$$\sqrt{3} \times \sqrt[3]{2} - 2$$

$$\sqrt[3]{3} \times \sqrt{2} - 1$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}} - 7$$

$$\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{6}} - 6$$

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt[3]{5}} - 5$$

د جذري عددونو جمع کول او تفریقول:

هغه جذري عددونه جمع کولای او تفریقولای شو چې د جذر لاندې عددونه مساوی وي او د جذر درجې يې هم مساوي وي.

مثال:

$$7\sqrt{2} + 11\sqrt{2} + 6\sqrt{2} - 15\sqrt{2}$$

$$(7 + 11 + 6)\sqrt[3]{2} - 15\sqrt[3]{2}$$

$$24\sqrt[3]{2} - 15\sqrt[3]{2}$$

$$(24 - 15)\sqrt[3]{2} = 9\sqrt[3]{2}$$

$$2- 20\sqrt{2} + 5\sqrt{8} + 7\sqrt{128} + 5\sqrt{32} \text{ لازمي عمليې پرې اجراء کړئ؟}$$

$$5\sqrt{16 \times 2} + 7\sqrt{64 \times 2} + 5\sqrt{4 \times 2} - 20\sqrt{2}$$

$$5 \times 4\sqrt{2} + 7 \times 8\sqrt{2} + 5 \times 2\sqrt{2} - 20\sqrt{2}$$

$$(20 + 56 + 10 - 20)\sqrt{2} = 66\sqrt{2}$$

تمرین:

لاندې جذري عددونه جمع او تفریق کړئ؟

$$1- 11\sqrt{5} + 19\sqrt{5} + 8\sqrt{5} - 25\sqrt{5}$$

$$2- \sqrt{128} + 3\sqrt{8} - 5\sqrt{32}$$

$$3- 13\sqrt{27} + 5\sqrt{243} - 20\sqrt{3}$$

ګویا کول:

که د یوه کسر په صورت یا مخرج کې جذري حد یا عدد موجود وي کولای شو چې ګویا یې کړو. مګر مشهور په ریاضي کې د مخرج ګویا کول دي د کسر د مخرج ګویا کول په حساب کې دوه حالتونه لري.

1- چې د کسر په مخرج کې یو جذري عدد موجود وي او د جذر درجه یې 2 وي لکه $\frac{5}{\sqrt{15}}$.

صورت او مخرج د مخرج په جذري عدد کې ضربوؤ.

$$\frac{5}{\sqrt{15}} = \frac{5\sqrt{15}}{\sqrt{15} \times \sqrt{15}} = \frac{5\sqrt{15}}{\sqrt{15^2}} = \frac{5\sqrt{15}}{15} = \frac{\sqrt{15}}{3}$$

2- چې د کسر په مخرج کې یو جذري عدد موجود وي او د جذر درجه یې د (2) څخه ډېره وي

لکه $\frac{3}{\sqrt[3]{12}}$ د دغه ډول کسرو د مخرجو د ګویا کول لپاره صورت او مخرج د مخرج په جذري عدد کې ضربوو د جذر درجه یې او جذري عدد د توان د تفاضل په اندازه توان ورکوؤ.

$$\frac{2}{\sqrt[5]{12}} = \frac{2}{\sqrt[5]{12} \times \sqrt[5]{12^4}} = \frac{2\sqrt[5]{12^4}}{\sqrt[5]{12 \times 12^4}} = \frac{2\sqrt[5]{12^4}}{\sqrt[5]{12^5}} = \frac{2\sqrt[5]{12^4}}{12}$$

$$\frac{2}{\sqrt[5]{12}} = \frac{\sqrt[5]{12^4}}{6}$$

تمرین: گویا یې کړی؟

$$\begin{array}{ccccc} \frac{2}{\sqrt{2}} - 5 & \frac{15}{\sqrt{5}} - 4 & \frac{14}{\sqrt{7}} - 3 & \frac{3}{\sqrt{12}} - 2 & \frac{2}{\sqrt{6}} - 1 \\ \frac{2}{\sqrt[3]{2}} - 10 & \frac{14}{\sqrt[5]{7}} - 9 & \frac{12}{\sqrt[5]{3}} - 8 & \frac{\sqrt{15}}{\sqrt[4]{5}} - 7 & \frac{2}{\sqrt[3]{6}} - 6 \end{array}$$

د اعدادو سیستمونه:

څرنګه چې په حساب کې 10 رقمونه لیکل شويدي نو له همدې کبله هغه عددونه چې په روزمره ژوند کې استعمالیږي د 10 په قاعده د اعدادو سیستم او یا اعشاري سیستم بلل کېږي.

مثلاً 5918 یو عدد راکړ شويدي د دې د پاره چې معلوم کړو چې د دغه عدد قاعده معلومه کړو څرنګه چې رقمونه یې څلور دي نو راکړ شوي عدد څلور ځایه کوو او هر رقم په خپله مرتبه کې لیکو.

$$5918 + 5000 + 900 + 10 + 8$$

$$= 5 \times 10^3 + 9 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 8 \times 10^0$$

که ضربونه څنګ په څنګ په ترتیب سره ولیکل شي نو بیرته لمړنی عدد لاس ته راځي. همدغه ډول که راکړ شوی عدد په مسلسل توګه په 10 وویشو او باقیات د تقسیم په مقابل کې د پاس څخه کښته ځواته ولیکو. او بیا د باقیاتو د ستون رقمونه په اټقي کرښه کې داسې ولیکو چې د ستون د سر رقم یې په سر کې راشي. او نور رقمونه یې په ترتیب سره ورپسې ولیکل شي بیرته راکړ شوی عدد لاس ته راځي.

10	5918	
10	591	8
10	59	1
10	5	9
	0	5

$$5918_{10} = 5918$$

نو معلومه شوه چې په روزمره ژوند کې د مستعمل عددونو قاعده 10 ده په کمپيوټري معایناتو کې د امراضو د تشخیص لپاره دوه نور سیستمونه هم لیکل شوي دي چې د 2 په قاعده د اعدادو سیستم او بل د 5 په قاعده د اعدادو سیستم دی

1- د 2 په قاعده د اعدادو سیستم:

که وغواړو چې یو عدد د 2 په قاعده د اعدادو سیستم ته واړوو عدد په مسلسل ډول په (2) ویشو باقیات یې د تقسیم د عمليې په مقابل کې د پاس څخه کښته خواته لیکو که د باقیاتو د ستون رقمونه په افقي ډول ولیکل شي د (2) په قاعده د اعدادو سیستم لاس ته راځي.

مثال:- 31 د 2 په قاعده د اعدادو سیستم ته واړوی؟

2	31	
2	15	1
2	7	1
2	3	1
2	1	1
	0	1

$$31_{10} = 11111_2$$

یا دا چې د طاقت د قوانینو څخه استفاده کوو.

$$31 = 16 + 8 + 4 + 2 + 1$$

$$31 = 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1$$

$$31 = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1 \times 2^0$$

$$31_{10} = 11111_2$$

د 2 د قاعدې اساسي رقمونه (2) دي چې عبارت له (0,1) څخه دی.

2- د 5 په قاعده د اعدادو سیستم:

عدد په مسلسل ډول په 5 ویشو د باقیاتو د ستون رقمونه په ترتیب سره په افقي کرښه کې لیکو د 5 په قاعده د اعدادو سیستم لاس ته راځي.

مثال: 251 د 5 قاعدې ته واړوی؟

حل:

5	251	
5	50	1
5	10	0
5	2	0
	0	2

$$251_{10} = 2001_5$$

$$251 = 2 \times 125 + 1$$

$$251 = 2 \times 5^3 + 0 \times 5^2 + 0 \times 5^1 + 1 \times 5^0$$

$$251 = 2001_5$$

د 5 د قاعدې اساسي رقمونه 5 دي چې عبارت دي له 0، 1، 2، 3، 4 څخه

تمرین:

لاندې عددونه د 2 په قاعده باندې د اعدادو سیستم ته واړوی؟

65 -3

47 -2

33 -1

97 -6

71 -5

77 -4

لاندې عددونه د 5 په قاعده باندې د اعدادو سیستم ته واړوی؟

97 -3

314 -2

211 -1

101 -6

98 -5

86 -4

د 2 د قاعدې څخه د 10 قاعدې ته د یوه عدد اړول:

د 2 د قاعدې د عدد ټول رقمونه په ترتیب سره د 2 په مختلفو رقمو کې ضربوو د 10 په قاعده مربوطه عدد لاس ته راځي.

مثال: 111011_2 د 10 قاعدې ته واړوي.

$$1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$$

$$32 + 16 + 8 + 0 + 2 + 1 = 59$$

$$59_{10} = 111011_2$$

د 5 د قاعدې څخه د 10 قاعدې ته د يوه عدد اړول:

د 5 د قاعدې د عدد ټول رقمونه په ترتيب سره د 5 په مختلفو طاقتو کې داسې ضربوو چې لمری رقم په 5^0 کې دریم رقم 5^1 کې په همدې ترتيب تر اخره ضربوو د ضرب حاصلونه يې جمع کوو د 10 د قاعدې مربوطه عدد لاس ته راځي.

مثال: 32104_5 د 10 قاعدې ته واړو.

$$3 \times 5^4 + 2 \times 5^3 + 1 \times 5^2 + 0 \times 5^1 + 4 \times 5^0$$

$$3 \times 625 + 2 \times 125 + 1 \times 25 + 0 \times 5 + 4 \times 1$$

$$1875 + 250 + 25 + 0 + 4 = 2154$$

تمرین:

لاندې عددونه د 2 د قاعدې څخه د 10 قاعدې ته واړوي؟

$$111111_2 - 3$$

$$111011_2 - 2$$

$$101111_2 - 1$$

$$100011_2 - 5$$

$$1010001_2 - 4$$

لاندې عددونه د 5 د قاعدې څخه د 10 قاعدې ته واړوي؟

$$234_5 - 5$$

$$143_5 - 4$$

$$423_5 - 3$$

$$341_5 - 2$$

$$231_5 - 1$$

څلورم فصل

نسبت او تناسب

نسبت:

نسبت په لغت کې رابطې ته وايي.

او په اصطلاح کې د دوه هم جنسو عددونو تر منځ رابطې ته نسبت وايي. لکه:

$$\frac{a}{b}$$

a ته اول حد يا صورت يا مقدم وايي b ته دويم حد يا مخرج يا مؤخر وايي.

نسبت مجرد عدد دی واحد نلري.

نسبت د فیصد په شکل اود اعشار کسر په شکل هم لیکلای شو.

اوله قاعده - د نسبت پیدا کول: که دوه عددونه راځي شوي وي او وغواړو چې نسبت یې پیدا کړو یو پر بل یې لیکو او اختصار وکړو یې.

$$\text{نسبت} = \frac{\text{اول حد}}{\text{دویم حد}}$$

مثال: احمد 210 روپۍ او محمد 270 روپۍ لري نسبت یې پیدا کړئ؟

$$\text{نسبت} = \frac{\text{د احمد روپۍ}}{\text{د محمد روپۍ}} = \frac{210}{270} = \frac{7}{9}$$

دویمه قاعده: چې د دوه کمیتو نسبت او اول حد معلوم وي دویم حد معلوم نه وي دویم حد په لاندې ډول پیدا کوو.

$$\text{نسبت} \div \text{اول حد} = \text{دویم حد}$$

مثال: د احمد او محمود د پیسو نسبت $\frac{5}{8}$ دی که د احمد روپۍ 430 وي د محمود روپۍ څو دي؟

$$\text{نسبت} = \frac{5}{8} \quad \text{د محمود روپۍ} = 430 \div \frac{5}{8} = 430 \times \frac{8}{5} = \frac{3440}{5} = 688$$

$$\text{د احمد روپۍ} = 430 \quad \text{د محمود روپۍ} = 688Rs$$

$$=? \text{ د محمود روپۍ}$$

دریمه قاده: چې د دوه کمیتو نسبت او دویم حد معلوم وي او اول حد معلوم نه وي.

$$\text{نسبت} \times \text{دویم حد} = \text{اول حد}$$

مثال: د احمد او محمود پیسو نسبت $\frac{5}{8}$ دی د محمود روپۍ 688 دي د احمد روپۍ څو دي؟

$$\text{نسبت} = \frac{5}{8} \quad \text{احمد روپۍ} = 688 \times \frac{5}{8} = \frac{3440}{8} = 430Rs$$

$$\text{د محمود روپۍ} = 688 \quad \text{د احمد روپۍ} = 430Rs$$

$$=? \text{ د احمد روپۍ}$$

خلورمه قاعده: چې د دوه کمیتو نسبت او مجموعه معلوم وي او کمیتونه معلوم نه وي د کمیتو د لاس ته راوړلو لپاره د کمیتو مجموعه د صورت او مخرج په مجموعه ویشو که خارج قسمت په صورت کې ضرب کړو اول حد لاس ته راځي او که په مخرج کې یې ضرب کړو دویم حد لاس ته راځي.

مثال: د اکرم او انور د پیسو نسبت $\frac{3}{5}$ دی او د پیسو مجموعه 4080 ده د هر یوه روپۍ څو دي؟

$$\text{نسبت} = \frac{\text{د اکرم روپۍ}}{\text{د انور روپۍ}} = \frac{3}{5}$$

$$\text{مجموعه} = 4080 \quad \text{اکرم روپۍ} = \frac{3 \times 4080}{3+5} = \frac{12240}{8} = 1530$$

$$=? \text{ د اکرم روپۍ} \quad \text{انور روپۍ} = \frac{5 \times 4080Rs}{3+5} = \frac{20400}{8} = 2550$$

$$=? \text{ د انور روپۍ}$$

پنځمه قاعده: چې د دوه کمیتو نسبت او تفاضل معلوم وي کمیتونه معلوم نه وي د کمیتو د لاس ته راوړلو لپاره د کمیتو تفاضل د صورت او مخرج په تفاضل ویشو که خارج قسمت په صورت کې ضرب شي اول حد لاس ته راځي او که په مخرج کې ضرب شي دویم حد لاس ته راځي.

مثال: د عبدالهادي او عبدالباري د پیسو نسبت $\frac{6}{11}$ دی او د پیسو فرق یې 750 دی د هر یوه پیسې څو دي؟

$$\begin{aligned} \text{نسبت} &= \frac{6}{11} & \text{عبدالهادي روپۍ} &= \frac{6 \times 750}{11 - 6} = \frac{4500}{5} = 900 \\ \text{تفاضل} &= 750 & \text{عبدالباري روپۍ} &= \frac{11 \times 750}{11 - 6} = \frac{8250}{5} = 1650 \end{aligned}$$

=؟ عبدالهادي روپۍ

=؟ عبدالباري

شپږمه قاعده: چې د دوه کمیتو نسبت او د ضرب حاصل معلوم وي کمیتونه معلوم نه وي د کمیتو د ضرب حاصل د صورت او مخرج په حاصل ضرب ویشو که د خارج قسمت جذر په صورت کې ضرب شي اول حد لاس ته راځي او که په مخرج کې ضرب شي دویم حد لاس ته راځي.

مثال: د احمد او محمود د نسبت $\frac{5}{7}$ دی او د ضرب حاصل یې 2240 دی د هر یوه روپۍ پیدا کړئ؟

$$\begin{aligned} \text{نسبت} &= \frac{5}{7} & \text{د احمد روپۍ} &= 5 \sqrt{\frac{2240}{5 \times 7}} = 5\sqrt{64} = 5 \times 8 = 40 \\ & & \text{د محمد روپۍ} &= 7 \sqrt{\frac{2240}{5 \times 7}} = 7\sqrt{64} = 7 \times 8 = 56 \end{aligned}$$

د ضرب حاصل = 2240

اوومه قاعده - معکوس نسبتونه:

که دوه يا څو کسرونه ولرو چې د اول کسر مخرځ د دويم کسر صورت په همدې ترتيب اخړه وي دى کسرونه معکوس نسبت وايي لکه $\frac{a}{b}$ او $\frac{b}{c}$ د معکوس نسبتود ضرب حاصل څخه د اول او اخر حد نسبت لاس ته راځي.

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{a}{c}$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{b}{c} \times \frac{c}{d} \times \frac{d}{e} = \frac{a}{e}$$

مثال: که د احمد محمود د پیسو نسبت $\frac{3}{4}$ دى د محمود او حامد د پیسو نسبت $\frac{5}{7}$ دى که د احمد روپۍ 300 وي د حامد روپۍ څو دى؟

$$\frac{\text{د احمد روپۍ}}{\text{د محمود روپۍ}} = \frac{3}{4} = \text{نسبت}$$

$$\frac{\text{محمود روپۍ}}{\text{حامد روپۍ}} = \frac{5}{7} = \text{نسبت}$$

$$\frac{\text{احمد}}{\text{محمود}} \times \frac{\text{محمود}}{\text{حامد}} = \frac{\text{احمد}}{\text{حامد}} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{7}$$

$$\frac{\text{احمد}}{\text{حامد}} = \frac{15}{28}$$

$$\text{احمد روپۍ} = 300Rs \quad \text{نسبت} = \frac{\text{احمد}}{\text{حامد}} = \frac{15}{28} \quad 300 \div \frac{15}{28} = \text{د حامد روپۍ}$$

$$=? \text{ د حامد روپۍ}$$

$$\text{د حامد روپۍ} = 300 \times \frac{28}{15} = 20 \times 28 = 560$$

تمرین:

- 1- یو سړي 42 منه ممیز د 70 منه نخودو سره گډوي نسبت یې پیدا کړی؟
- 2- د جوار او غنمو نسبت $\frac{3}{7}$ دی که مجموعاً 600 منه وي جوار څومره دي او غنم څومره دي؟
- 3- یو دکاندار دوه قسمه چای سره گډوي چې نسبت $\frac{3}{8}$ دی که د گډ شوي چای تفاضل 50 منه وي د چای د هر قسم مقدار پیدا کړی؟
- 4- د میو او وریجو نسبت $\frac{1}{5}$ دی که وریجې 50 منه وي می به څومره وي او څومره می زیاتې شي چې نسبت یې $\frac{3}{8}$ شي؟
- 5- د احمد او محمود پیسو نسبت $\frac{5}{8}$ دی او د ضرب حاصل یې 36000 دي د هر یو روپی څو دي؟
- 6- د بادامو او پستې د قیمتو نسبت $\frac{2}{3}$ دی د پیستې دیومن قیمت 12800 دی د بادامو من په څو دی؟
- 7- د احمد او اکرم د پیسو نسبت $\frac{3}{5}$ د اکرم او انور د پیسو نسبت $\frac{7}{8}$ دی که د احمد روپی 3000 وي د انور روپی به څو وي؟

تناسب :

د دوه نسبتو مساوات ته تناسب وايي.

$$\text{لکه } a:b::c:d \text{ يا } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

اول او اخر حدو ته طرفين وايي دويم او دريم حدو ته وسطين وايي.

a او d طرفين دي b او c وسطين دي.

د تناسب خواص:

1- په تناسب کې د طرفينو د ضرب حاصل د وسطينو د ضرب د حاصل سره مساوي وي.

لکه:

$$\frac{2}{3} = \frac{16}{24}$$

$$2 \times 24 = 3 \times 16$$

$$48 = 48$$

2- که په تناسب کې د طرفينو ځايونه تغير شي په تناسب کې تغير نه راځي.

3- که په تناسب کې د وسطينو ځايونه تغير شي په تناسب کې تغير نه راځي.

4- که په تناسب کې د صورت او مخرج ځايونه تغير شي په تناسب کې تغير نه راځي.

5- که په تناسب کې د صورتو مجموعه د مخرجو پر مجموعه وليکل شي نوې نسبت د تناسب د هر نسبت سره تناسب جوړوي.

6- که د صورت او مخرج مجموعه پر مخرج وليکل شي د تناسب خواص تغير نه خوري.

7- که د صورت او مخرج تفاضل پر مخرج وليکل د تناسب خواص تغير نه خوري.

د تناسب اقسام:

د تناسب اقسام په درې حالتو کې مطالعه کوو.

1- د نسبتو د شمېر په لحاظ د تناسب اقسام:

د نسبتو د شمېر په لحاظ تناسب په دوه قسمه دي.

a- بسیط یا ساده تناسب b- مرکب تناسب

a- بسیط تناسب: هغه تناسب دی چې د نسبتونو شمېر یې دوه وي لکه $\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$

b- مرکب تناسب: که د تناسب د نسبتونو شمېر تر دوو زیات وي دې تناسب ته مرکب تناسب وایي.

$$\text{لکه } \frac{5}{8} = \frac{35}{56} = \frac{45}{72} \dots \dots \dots$$

2- د حدود ارتباط له کبله د تناسب اقسام:

د حدود ارتباط له کبله تناسب په دوه قسمه دی.

a- مستقیم تناسب b- معکوس تناسب

a- مستقیم تناسب: که په یوه تناسب کې د یوه نسبت د یوه حد په پېریدو د بل نسبت مربوطه حد پېریدلو او په کمیدلو سره یې کمیدلو دې تناسب ته مستقیم تناسب وایي.

لکه 8 گزه رخت په 1600 روپۍ دی او 12 گزه رخت په 2400 روپۍ دي.

$$\frac{8}{12} = \frac{1600}{2400}$$

b- معکوس تناسب: که په یوه تناسب کې د یوه نسبت د یوه حد په کمیدو سره د بل نسبت مربوطه حد پېریدلو او په پېریدو سره یې کمیدلو دې تناسب ته معکوس تناسب وایي.

لکه 12 کسه یو کار په 18 ورځو کې کوي 6 کسه دا کار به 36 ورځو کې کوي.

$$\frac{12}{6} = \frac{18}{36}$$

3- د حدود ورکیدو له کبله د تناسب اقسام:

د حدود ورکیدو له کبله تناسب په درې قسمه دی.

الف- څلورم تناسب: که په یوه تناسب کې یوه خد وړک و دی تناسب ته څلورم تناسب وایي لکه:

$$\frac{5}{8} = \frac{45}{x}$$

د مجهول د لاس ته راوړلو لپاره د تناسب د اول خاصیت څخه استفاده کوو.

$$5x = 8 \times 45$$

$$5x = 360$$

$$\frac{5x}{5} = \frac{360}{5}$$

$$x = 72$$

ب- دریم تناسب: که په یوه تناسب کې وسطین مساوي وي دی تناسب ته دریم تناسب وایي. مثال: د 5 او 30 دریم تناسب پیدا کړئ؟

$$\frac{5}{30} = \frac{30}{x}$$

$$x = \frac{30 \times 30}{5} = \frac{900}{5} = 180$$

$$x = 180$$

ج- هندسي وسط: که په یو تناسب کې طرفین معلوم او وسطین معلوم نه وي دی تناسب ته هندسي وسط وایي.

مثال: د 5 او 180 هندسي وسط پیدا کړئ؟

$$\frac{5}{x} = \frac{x}{180}$$

$$x^2 = 5 \times 180$$

$$x^2 = 900$$

$$x = 30$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{900}$$

تمرین:

- 1- د $10kg$ غوښې قیمت $3500Rs$ دی وواياست $16kg$ غوښه به په څو روپۍ وشي؟
- 2- اته کسه یو کار په 20 ورځو کوي وواياست چې 12 کسه به دا کار په څو ورځو کې وکړي؟
- 3- احمد یو کار په 4 ورځو او حامد یې په 12 ورځو کې کوي وواياست چې دواړه به یې په شریکه په څو ورځو کې وکړي؟
- 4- احمد او محمود په شریکه یو کار په 3 ورځو کې کوي که احمد یې یوازې په 12 ورځو کې وکړي محمود به یې په څو ورځو کې وکړي؟
- 5- احمد یو کار په 6 ورځو کې محمود یې په 9 ورځو کې او حامد یې په 12 ورځو کې کوي وواياست چې ټول به یې په څو ورځو کې سرته ورسوي؟
- 6- 8 کسه د ورځې 6 ساعته کار کوي او یو کار په 15 ورځو کې خلاصوي ووايه چه 10 کسه د ورځې څو ساعته کار وکړي چې همدغه کار په 15 ورځو کې خلاص کړي؟
- 7- د 8 او 12 دریم تناسب پیدا کړئ؟
- 8- د 8 او 18 هندسې وسط څو دي؟
- 9- د 20 او 80 هندسې وسط پیدا کړئ؟
- 10- 12 کسه د ورځې 4 ساعته کار کوي او یوه ځمکه چې $200m$ طول او $150m$ سور لري په 10 ورځو کې اړوي وواياست چې که 16 کسه د ورځو 3 ساعته کار وکړي او یوه ځمکه چې 180 متره طول او $120m$ سور لري په څو ورځو کې واړوي؟

پنځم فصل

فيصد:

د 100 له قراره د يوې تجارتي معاملې د گټې يا تاوان معلومولو ته فيصد وايي.
يا داچه په يوه مركبه ماده، مخلوط يا محلول كې د 100 له قراره د هغوی د اجزاؤ د مقدار معلومولو ته فيصد وايي.
د فيصد فارمولونه دا دي.

$$\text{گټه} = \frac{\text{سرمایه} \times \text{نرخ}}{100}$$

په مركبه ماده يا مخلوط يا محلول كې د هغوي مقدار د سرمايي حيثيت لري د اجزاو فيصدي نرخ دی او په ټوله ماده كې د هغه جز مقدار د گټې حيثيت لري.

$$\text{نرخ} = \frac{\text{گټه} \times 100}{\text{سرمایه}}$$

$$\text{نرخ} = \frac{\text{گټه} \times 100}{\text{سرمایه}}$$

مثال: 8000 روپۍ گټه د 3 فيصد په نرخ پيدا كړي؟

$$\text{گټه} = \frac{3 \times 8000}{100} = 240$$

2- مثال: يو سړي په 12000 روپيو كې 960 روپۍ وگټلې نرخ كې خودی؟

$$\text{سرمایه} = 12000Rs \quad \text{نرخ} = \frac{100 \times 960Rs}{12000Rs} = 8$$

$$\text{گټه} = 960Rs$$

$$\text{نرخ} = ?$$

3- مثال: یو سړي 15000 روپۍ د 10% په نرخ کې یې سرمایه یې پیدا کړې؟

$$\text{سرمایه} = \frac{100 \times 15000}{6} = 250000$$

$$\text{گټه} = 15000$$

$$\text{نرخ} = 6 \quad \text{سرمایه} = 250000$$

$$\text{سرمایه} = ?$$

4- د یوه سړي د گټې او سرمایې مجموعه 28000Rs ده که نرخ یې 12% وي سرمایه او گټه یې معلومه کړئ؟

حل:

$$\text{سرمایه او سرمایه} = 28000Rs \quad 100 + 12 = 112$$

$$\text{نرخ} = 12 \quad \frac{100}{x} = \frac{112}{28000}$$

$$\text{سرمایه} = ? \quad x = \frac{28000 \times 100}{112} = \frac{2800000}{112} = 25000$$

$$\text{گټه} = ? \quad \text{سرمایه} = x = 25000Rs$$

$$\text{گټه} = 28000 - 25000 = 3000$$

$$\text{گټه} = 3000$$

پوښتنه: په 40kg مخلوط کې 8% ممیز او نور نخود دي د ممیزو او نخودو مقدار پیدا کړئ؟

تخفیف:

تخفیف په لغت کې سپکولو ته وايي.

او په اصطلاح کې هغه پیسې چې خرڅوونکي یې د جنس د اصلي قیمت څخه د معلوم نرخ له مخې اخیستونکي ته پرېږدي. تخفیف بلل کېږي.

د تخفیف فارمولونه عیناً د فیصد د فارمولو غوندې دي خو د جنس اصلي قیمت د سرمایې په عوض او د گټې یا تاوان په عوض تخفیف لیکل کېږي.

$$\text{اصلي قيمت} \times \text{نرخ} = \frac{\text{تخفيف}}{100}$$

$$\text{نرخ} = \frac{100 \times \text{تخفيف}}{\text{اصلي قيمت}}$$

$$\text{اصلي قيمت} = \frac{100 \times \text{تخفيف}}{\text{نرخ}}$$

اصلي قيمت -

تخفيف

فعلي قيمت

مثال: د يوه موټر اصلي قيمت $300000Rs$ دی. خرڅوونکی اخیستونکی ته په 100 کې 8% روپۍ پرېښودې تخفيف او اصلي قيمت يې پيدا کړی؟

$$\text{اصلي قيمت} = 300000 \quad \text{تخفيف} = \frac{8 \times 300000}{100} = 24000$$

$$\text{نرخ} = 8\% \quad \text{تخفيف} = 24000$$

$$\text{تخفيف} = ? \quad \text{فعلي قيمت} = 300000 - 24000 = 276000Rs$$

$$\text{فعلي قيمت} = ?$$

2- د يوه اس اصلي قيمت $240000Rs$ دي که تخفيف يې $16800Rs$ وي نرخ يې پيدا کړی؟

$$\text{نرخ} = \frac{100 \times 16800}{240000} = 7 \quad \text{نرخ} = 7$$

3- د يوه موټر تخفيف $80000Rs$ دی نرخ يې 8% دی اصلي قيمت يې څو دی؟

$$\text{تخفيف} = 80000Rs$$

$$\text{نرخ} = 8 \quad \text{اصلي قيمت} = \frac{\text{تخفيف} \times 100}{8} = \frac{80000 \times 100}{8} = 1000000Rs$$

$$\text{اصلي قيمت} = ?$$

احديت:

په لغت کې تنهائي او يوازي والي ته وايي.

او په اصطلاح کې د ډېرو هم جنسو شيانو د مجموعې قيمت څخه د يوه شي د قيمت پيدا کولو ته احديت وايي.

طريقه يې داسې ده چې مجموعي قيمت د شيانو په شمېر ويشو.

$$\text{احديت} = \frac{\text{مجموعي قيمت}}{\text{د شيانو شمېر}}$$

مثال: يو خباط په څلور ورځو کې 28 کميسونه وگنډل وواياست چې په يوه ورځ کې به يې څو کميسونه گنډلي وي؟

کميسونه ورځي

$$\frac{4}{1} = \frac{28}{x}$$

$$x = \frac{1 \times 28}{4} = 7$$

په يوه ورځ کې يې 7 کميسونه گنډلي دي.

2- يو درجن قلمونه چې (12) دانې دي په 240Rs کيږي 7 دانې به په څو روپۍ وشي.

حل: که څه دغه رنگه سوالونه په تناسب کې ډېر اسنه حل کيږي خو د احديت په طريقه داسې حل کيږي اول د يو پنسل قيمت پيدا کوو بيا يې په 7 کې ضربوو.

$$\text{د پنسل قيمت} = \frac{240}{12} = 20$$

$$7 \text{ د پنسلو قيمت} = 7 \times 20 = 140$$

مثال: که 3 متره رخت قيمت 360 روپۍ وي د يو متر رخت قيمت څو دی او بيا د 5 مترو قيمت يې پيدا کړئ؟

$$\text{د يوه متر قيمت} = \frac{360}{3} = 120$$

$$5 \text{ مترو قيمت} = 5 \times 120Rs = 600$$

ريځه يا ريځ

ريځ په لغت کې سود يا گټې ته وايي.

او په اصطلاح کې په يوه ټاکلې موده کې د معلوم نرخ له مخې د يوې سرمايي د گټې د پيدا کولو طريقې ته ريځ وايي. ريځ په دوه ډوله ده.

1- ساده ريځ 2- مرکبه ريځه

1- ساده ريځه:

هغه ريځه ده چې د مودې تر رسيدلو وروسته گټه اخيستل کېږي او سرمايه بيا په ريځه اچول کېږي.

د ساده ريځې فارمولونه څلور دي.

$$\text{ريځ} = \frac{\text{سرمايه} \times \text{موده} \times \text{نرخ}}{12 \times 100}$$

$$\text{نرخ} = \frac{\text{ريځ} \times 1200}{\text{موده} \times \text{سرمايه}}$$

$$\text{موده} = \frac{\text{ريځ} \times 1200}{\text{سرمايه} \times \text{نرخ}}$$

$$\text{سرمايه} = \frac{\text{ريځ} \times 1200}{\text{موده} \times \text{نرخ}}$$

مثال: د 20000 روپيو ريځه د 15% په نرخ په 8 مياشتو کې پيدا کړي؟

$$\text{ريځ} = 2000Rs \quad \text{ريځ} = \frac{8 \times 15 \times 20000}{1200} = 2000$$

مثال: يو سړی د 8 مياشتو لپاره 20000Rs په مړايځه واچوي پس له 8 مياشتو يې ريځه 2000Rs شوه نرخ يې پيدا کړي؟

$$\text{نرخ} = 15\% \quad \text{نرخ} = \frac{1200 \times 2000}{8 \times 20000} = \frac{120}{8} = 15$$

مثال: د 20000 روپیو ربحه د 15% په نرخ 2000 روپی. ده موده یې پیدا کړئ؟

$$8 \text{ میاشتې} = \text{موده} = \frac{1200 \times 2000}{15 \times 20000} = \frac{120}{15} = 8$$

مثال: یو سړي یوه سرمایه په مراجعه وچوله پس له 8 میاشتو یې د 15% په نرخ 2000 روپی. ربحه واخیسته سرمایه یې پیدا کړئ؟

$$\text{سرمایه} = \frac{1200 \times 2000}{5 \times 15} = \frac{50 \times 2000}{5} = 20000Rs$$

$$\text{سرمایه} = 20000Rs$$

2- مرکبه ربحه :

که د مراتبې د وخت تر را رسیدلو وروسته ربحه او سرمایه بیا په ربحه وچول شي دې ربحې ته مرکبه ربحه وایي.

د مرکبې ربحې فارمول دی.

$$A = C(1 + r)^n$$

A د سرمایې او ربحې مجموعه ده C اولنۍ سرمایه ده r نرخ دی او n د کلونو شمېر دی.

C سرمایه او Cr گټه او A د دواړو مجموعه ده.

$$A_1 = C + Cr$$

$$A_1 = C(1 + r)$$

$$A_2 = C(1 + r) + C(1 + r)r$$

$$A_2 = C(1 + r)(1 + r) = C(1 + r)^2$$

$$A_3 = C(1 + r)^2 + C(1 + r)^2 r$$

$$A_3 = C(1 + r)^2(1 + r) = C(1 + r)^3$$

په همدې ډول کولای شو چې د n کلو د سرمایې او ربحې مجموعه پیدا کړو.

په عمومي صورت لیکو چې:

$$A = C(1 + r)^n$$

مثال: یو سړي 50000Rs د 5% په نرخ د 3 کلو لپاره په ریحه واچولی گټه او سرمایه یې پیدا کړی؟

$$A = 50000 \left(1 + \frac{5}{100}\right)^3$$

$$A = 50000 \left(\frac{100 + 5}{100}\right)^3$$

$$A = 50000 \left(\frac{105}{100}\right)^3 = 50000 \left(\frac{121550625}{1000000}\right)$$

$$A = \frac{5 \times 1157625}{100} = \frac{1157625}{20} = \frac{231525}{4}$$

$$A = 57881.25$$

تمرین:

- 1- د 10000 روپیو ریحه 8% په نرخ په 9 میاشتو کې څو ده؟
- 2- د 50000 روپیو گټه په 6 میاشتو کې 5250 روپی شوه نرخ یې پیدا کړی؟
- 3- د 20000 روپیو گټه د اوه میاشتو په موده کې 1750 روپی ده نرخ یې څو دی؟
- 4- د 18000 او گټه د 18% په نرخ 1750 روپی ده موده یې پیدا کړی؟
- 5- لوی سرمایې په 8 میاشتو کې د 15% په نرخ 3000 گټې سرمایه څو ده؟
- 6- احمد 5000 روپی د 20% په نرخ د 4 کلو لپاره په مرکبه ریحه واچولی گټه او سرمایه یې څو ده؟

تنزیل:

تنزیل په لغت کې کښته کولو ته وایي.

او په اصطلاح کې هغه پیسې چې سند خرڅوونکي یې سند اخیستونکي ته په یوه ټاکلي موده کې د معلوم نرخ له مخې پرېږدي تنزیل بلل کېږي.

د تنزیل فارمولونه دا دي.

$$\text{اصلي قیمت} \times \text{موده} \times \text{نرخ} = \text{تنزیل}$$

$$12 \times 100$$

$$\text{نرخ} = \frac{1200 \times \text{تنزیل}}{\text{موده} \times \text{اصلي قیمت}}$$

$$\text{موده} = \frac{1200 \times \text{تنزیل}}{\text{اصلي قیمت} \times \text{نرخ}}$$

$$\text{اصلي قیمت} = \frac{1200 \times \text{تنزیل}}{\text{موده} \times \text{نرخ}}$$

$$\text{تنزیل} - \text{اصلي قیمت} = \text{فعلي قیمت}$$

مثال: د سند اصلي قیمت $300000Rs$ دی مودې ته یې 9 میاشتې دي نرخ یې 15% دی تنزیل یې څو دی؟

$$\text{تنزیل} = \frac{15 \times 9 \times 300000}{12 \times 100} = 33750$$

2- د سند اصلي قیمت 50000 دی په 9 میاشتو کې یې تنزیل $3000Rs$ دی نرخ یې څو دی؟

$$\text{نرخ} = 8 \quad \text{نرخ} = \frac{1200 \times 3000}{9 \times 50000} = \frac{40}{5} = 8$$

3- د 20000 د تنزیل د 15% په نرخ 1500 روپۍ وي موده یې پیدا کړي؟

$$\text{شپږ میاشتې} = \text{موده} \quad \text{موده} = \frac{1200 \times 1500}{15 \times 20000} = 6$$

4- د يوه سند تنزېل د 15% په نرخ چې مودې ته يې 6 مياشتې پاتې دي 3375 روپۍ شو د سند اصلي قيمت څو دی؟

$$\text{اصلي قيمت} = \frac{1200 \times 3375}{6 \times 15} = 45000$$

$$\text{اصلي قيمت} = 45000Rs$$

تمرین:

1- د يوه سند اصلي قيمت 450000Rs مودې ته يې 6 مياشتې پاتې دي د 15% په نرخ يې تنزېل څو دی؟

2- د يوه سند اصلي قيمت 75000Rs دی د 4% په نرخ يې تنزېل 2250Rs شو مودې ته يې څومره وخت پاتې دی.

3- د يو سند اصلي قيمت 90000Rs دی مودې ته يې 8 مياشتې دي که تنزېل 3000Rs وي نرخ يې پيدا کړئ؟

4- د يوه سند تنزېل په 8 مياشتو کې د 7% په نرخ 5600Rs شوي اصلي قيمت يې څو دي.
مشارکت:

که څو کسه په يوه تجارتي معامله لاس پورې کړي گټه او تاوان يې سره شريک وي دې تجارتي معاملې ته مشارکت وايي.
د شراکت د گټې تقسيم په څلور حالتو کې مطالعه کوو.

اول حالت:

چې سرمايي او مودې يې مساوي وي. گټه په نفرو ويشل کېږي.

مثال: احمد، محمود او حامد هر يوه 500000Rs لري د حمل په اول يې په تجارت پيل وکړ د کال تر اخره پورې 900000Rs روپۍ وگټلې د هر يوه گټه څو ده.

حل:

$$\text{د هر يوه گټه} = \frac{900000}{3} = 300000Rs$$

دویم حالت:

چې مودې یې مساوي او سرمایې یې مختلفې وي گټه د سرمایو په مجموعه ویشل کېږي بیا چه خارج قسمت د هر چا په سرمایه کې ضرب شي د هغه گټه لاس ته راځي.

مثال: احمد 40000 محمود 50000 او حامد 60000Rs لري په اول د حمل یې په تجارت پیل وکړ د کال تر اخره یې 300000Rs روپۍ وگټلې د هر یوه گټه پیدا کړئ.

1/حمل $40000Rs =$ د احمد سرمایه

1/حمل $50000Rs =$ د محمود سرمایه

1/حمل $60000Rs =$ د حامد سرمایه

$300000Rs =$ گټه

$4 + 5 + 6 = 15$ د هر یوه گټه

$$\frac{300000}{15} = 20000$$

$4 \times 20000Rs = 80000Rs$ د احمد گټه

$5 \times 20000Rs = 100000Rs$ د محمود گټه

$6 \times 20000Rs = 120000Rs$ د حامد گټه

دریم حالت:

چې سرمایې یې مساوي او مودې یې مختلفې وي گټه د مودو په مجموعه ویشل کېږي بیا چه خارج قسمت د هر چا په موده کې ضرب شي د هغه گټه لاس ته راځي.

مثال: احمد 150000Rs لري د حمل په اول یې په تجارت شروع وکړه محمود د 150000Rs په سرمایه د اسد په اول ور سره شریک شو حامد د 150000Rs په سرمایه د عقرب په اول ور سره شریک شود کال تر اخره یې 500000 روپۍ وگټلې د هر یوه گټه پیدا کړئ؟

حل:

احمد	150000	1/ حمل	12
محمود	150000	1/ اسد	8
حامد	150000	1/ عقرب	$\frac{5}{25}$

$$500000 = \text{گټه}$$

$$=? \text{ د هر يوه گټه}$$

$$\frac{500000}{25} = 20000$$

$$12 \times 20000 = 240000 = \text{د احمد گټه}$$

$$8 \times 20000 = 16000 = \text{د محمود گټه}$$

$$5 \times 20000 = 100000 = \text{د حامد گټه}$$

خلورم حالت:

چې مودې او سرمايي مختلفې وي.

د هر سړي موده د هغه په سرمايه کې ضربېږي د ضرب حاصلونه يې جمع کيږي گټه په دغه مجموعه ويشل کيږي. خارج قسمت چې د هر چا د مودې او سرمايي په حاصل ضرب کې ضرب شي د هغه گټه لاس ته راځي.

مثال: احمد 50000 افغانۍ لږلې د حمل په اول يې په تجارت شروع وکړه محمود د 80000 افغانيو په سرمايه د ميزان په اول ور سره شريک شو د کال تر اخره يې 216000 افغانۍ وگټلې د هر يوه گټه څو ده؟

$$\text{احمد} = 50000 \quad 1/\text{حمل}$$

$$\text{محمود} = 80000 \quad 1/\text{ميزان}$$

$$\text{گټه} = 216000$$

$$=? \text{ د هر يوه گټه}$$

$$5 \times 12 + 8 \times 6 = 60 + 48 = 108$$

$$\text{د قسط اندازه} = \frac{216000}{108} = 2000$$

$$\text{د احمد گټه} = 2000 \times 60 = 120000$$

$$\text{د محمود گټه} = 2000 \times 48 = 96000$$

تمرین:

1- څلور کسان هر یو 200000 روپۍ لرلې. په اول د حمل یې تجارت شروع کړ د کال تر اخره یې 600000 روپۍ وگټلې د هر یوه گټه شوه؟

2- احمد 20000 روپۍ لرلې د حمل په اول یې تجارت شروع کړ محمود 20000 روپیو په سرمایه په اول د سنبله ور سره شریک شو د کال تر اخره یې 120000 روپۍ وگټلې د هر یوه گټه پیدا کړئ؟

3- احمد 12000 روپۍ محمود 18000 روپۍ لرلې په اول د شور یې تجارت شروع کړ د کال تر اخره یې 150000 روپۍ وگټلې د هر یوه گټه پیدا کړئ؟

4- احمد 8000 روپۍ لرلې په اول د جوزا یې تجارت شروع کړ ، محمود د 10000 روپیو په سرمایه په اول د میزان ور سره شریک شو د کال تر اخره یې 112000 روپۍ وگټلې د هر یوه گټه پیدا کړئ؟

شپږم فصل

سټ (Set):

سټ يو انگليسي لفظ دی چې مفهوم يې د ټولګې ، صنف ، لښکر ، ګلې او رمې سره برابر دی.

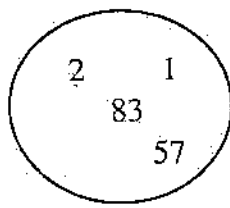
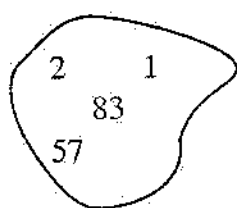
په اصطلاح کې سټ د هغو شیانو مجموعه يا ټولګه ده چې په کافي ډول د تشخيص وړ وي. سټ د الفباء د غټو تورو پواسطه ښودل کېږي لکه $A, B, C, \dots$ او د ځايي نورو د سټ نظريه د Gorge cantor (1845 – 1919) م پواسطه په رياضي کې داخل او معرفي شوه.

د سټ عناصر Element of set:

په سټ کې شاملو شیانو ته د سټ عناصر وايي. مثلاً $A = \{2, 3, a, b\}$ چې 2، 3، a او b د سټ عناصر دي.

د سټ نمایش:

Venn برطانوي عالم سټ د هندسي او غیر هندسي شکلو پواسطه رواج کړ چې د سټ دغه نمایش Venn diagram وايي.



5	8	9
6	11	4

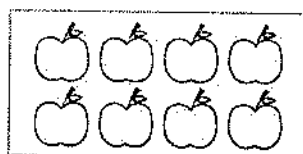
د سټ د لیکلو طریقي:

د سټ د لیکلو طریقي څلور دی.

Picture Method - 1

پدې میتود کې د سټ د عناصرو شکلونه رسموي دا میتود په کښته ټولګیو کې استعمالیږي.

لکه:



2- Descriptive Method:

که د سیټ د عناصرو په منځ کې یو صفت موجود وي نو د دغه سیټ د توصیفی میتود پواسطه لیکل کېږي یعنې د سیټ د عناصرو مشترک صفت د یوې جملې پواسطه لیکل کېږي. د E ژبې د بې اوازې تورو سیټ په A ښیو.

$$A = \{ \text{د } E \text{ بې اوازې توري} \}$$

$$B = \{ \text{حسابي ارقام} \}$$

3- Listing Method پواسطه:

که د سیټ عناصر محدود وي نو د قوس په داخل کې د عناصرو نومونه یا سمبولونه لیکي. لکه:

$$A = \{a, e, i, o, u\}$$

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

4- Set Builder Notation په طریقه:

په دې طریقه کې د سیټ عناصر په یو سمبول یا حرف مثلاً په (x) ښیي فرضاً د A د سیټ عناصر د 15 او 120 تر منځ واقع دي نو x د 15 او 120 تر منځ لیکي او د $(<)$ او $(>)$ د علامو پواسطه یې سره بیلوي.

$$A = \{x / 15 < x < 120\}$$

او داسې ویل کېږي چې د A د سیټ عناصر x دي داسې چې د 120 څخه کم او د 15 څخه زیات دي.

د سټ اقسام:

سټ په څلور قسمه دی.

- 1- خالي سټ
- 2- يو عنصره سټ
- 3- معين سټ
- 4- غير معين سټ

1- خالي سټ: هغه سټ چه عناصر نلري د خالي سټ په نوم ياديږي لکه $A = \{ \}$ خالي سټ د ϕ د علامې پواسطه ښودل کيږي.

2- يو عنصره سټ: که کوم سټ يو عنصر ولري دې سټ ته يو عنصره سټ وايي لکه $B = \{3\}$ يا $A = \{\text{لمړ}\}$

3- معين سټ: هغه سټ چې عناصر يې د شمېرلو وړ وي لکه: د حسابي ارقامو سټ.

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$B = \{a, e, i, o, u\}$$

غير معين سټ:

هغه سټ چې عناصر يې د شمېرلو وړ نه وي لکه: د طبيعي اعدادو سټ.

$$A = \{\text{د طبيعي اعدادو سټ } IN\}$$

$$B = \{IR\}$$

د روابطو له مخې د سټونو اقسام:

د ارتباطاتو له مخې سټونه په 8 اته قسمه دي.

- 1- فرعي سټ
- 2- کلي سټ
- 3- مکمله سټ
- 4- طاقت لرونکي سټ
- 5- مساوی سټونه
- 6- معادل سټونه
- 7- منفصل سټونه
- 8- غير منفصل سټونه

1- فرعي سيٽ: که د A او B دوه داسې سيټونه ولرو چې د B د سيټ هر عنصر د A په سيټ کې شامل وي نو د B سيټ د A د سيټ فرعي سيټ بلل کېږي لکه

$$B = \{4, 6, 8, 10\} \text{ او } A = \{x \in \mathbb{R} / 1 < x < 12\}$$

څرنگه چې د B د سيټ هر عنصر په A کې شامل دی نو د B سيټ د A د سيټ فرعي سيټ دی او داسې ليکل کېږي $B \subset A$.

فرعي سيټ په دوه قسمه دی.

a- واقعي فرعي سيټ b- غير واقعي فرعي سيټ

a- واقعي فرعي سيټ: که د يوه سيټ ټول عناصر په بل سيټ کې شامل وي او په دويم سيټ کې داسې عناصر وي چې په لمړي سيټ کې نه وي لکه:

$$B \subset A \text{ نو } B = \{3, 4, 5, 6\} \text{ او } A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

b- غير واقعي فرعي سيټ: که دوه داسې سيټونه ولرو چې د اول سيټ ټول عناصر په دويم سيټ کې او د دويم سيټ هر عنصر په اول سيټ کې شامل وي دغه سيټونه يو د بل غير واقعي فرعي سيټونه دي. لکه:

$$B \subseteq A \text{ او } A \subseteq B \text{ نو } B = \{10, 8, 2, 6, 4\} \text{ او } A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

2- کلي سيټ: که يو سيټ څو فرعي سيټونه ولري دې سيټ ته کلي سيټ وايي لکه $A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ چې $B = \{3, 4\}$ او $C = \{5, 6, 7\}$ او $D = \{8, 9, 10\}$ فرعي سيټونه دي نو د A سيټ کلي سيټ وي.

3- مکمله سيټ: که يو کلي سيټ يو واقعي سيټ ولري نو د کلي سيټ د پاتې عناصرو سيټ د فرعي سيټ مکمله سيټ دی.

مثلاً $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ او $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ دوه سيټونه لرو چې $B \subset A$ دی نو د B د سيټ مکمله سيټ چې په B' ښودل کېږي عبارت $B' = \{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ دی.

4- طاقت لرونکی سيټونه: هر کلي سيټ د خپلو فرعي سيټونو طاقت لرونکی سيټ يا Power Set دی لکه $A = \{\Delta, \odot, \square\}$ او $A_1 = \{\Delta\}$

$$A_6 = \{\odot, \square\}, A_5 = \{\Delta, \square\}, A_4 = \{\Delta, \odot\}, A_3 = \{\square\}, A_2 = \{\odot\}, \\ A_8 = \{\} \text{ او } A_7 = \{\Delta, \odot, \square\}$$

ستونډه لرو چې A سيټ ئې کلي سيټ او نور يې فرعي سيټونه دي.

$$P(A) = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8\} \text{ يعني}$$

د يوه سيټ د فرعي سيټونو شمېر د 2^n پواسطه پيدا کېږي n د سيټ د عناصرو شمېر دی.

مثال: د B د سيټ عناصر څلور دي د فرعي سيټونو شمېر يې پيدا کړئ؟

$$\begin{aligned} n &= 4 & P(B) &= 2^n \\ P(B) &=? & P(B) &= 2^4 = 16 \\ & & P(B) &= 16 \end{aligned}$$

5- مساوي سيټونه: که د A او B دوه داسې سيټونه ولرو چې د A د سيټ هر عنصر د B په سيټ کې او د B د سيټ هر عنصر د A په سيټ کې شامل وي. نو دې سيټونو ته مساوي سيټونه وايي.

يعنې که $A \subseteq B$ او $B \subseteq A$ نو $A = B$ دی.

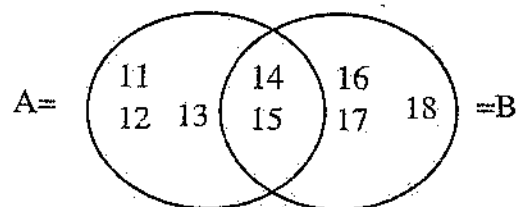
6- معادل سيټونه: هغه سيټونه دي چې د عناصرو شمېر يې مساوي او مختلف وي لکه $A = \{4, 5, 8\}$ او $B = \{E, F, G\}$

7- منفصل سيټونه: هغه سيټونه دي چې د هر سيټ هيڅ عنصر په بل سيټ کې نه وي.

$$\text{لکه } A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\} \text{ او } B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$$

8- غير منفصل سيټونه: که د دوه يا څو سيټونو يو يا څو عناصر سره شريک وي دې سيټونو ته غير منفصل سيټونه وايي.

لکه $A = \{11, 12, 13, 14, 15\}$ او $B = \{14, 15, 16, 17, 18\}$ چې $\{14, 15\}$ په دواړه کې شامل وي نو د A او B سيټونه غير منفصل دي.



د سیتونو عملیې:

په حساب کې د سیتونو عملیې درې دي.

1- د سیتونو اتحاد 2- د سیتونو تقاطع 3- د سیتونو تفاضل

1- د سیتونو اتحاد:

د دوه یا ډېرو سیتونو اتحاد د هغه عناصرو سیت دی چې اقلأ هغه عناصر په دغه سیتونو کې یو وار شامل وي یعنې که بعضي په دوه یا درې سیتونو کې شامل وي د اتحاد په وخت کې یو وار لیکل کیږي. لکه:

$$B = \{8, 9, 10, 11, 12, 13\} \text{ او } A = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$A \cup B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\} \cup \{8, 9, 10, 11, 12, 13\} = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$$

$$A \cup B = \{x/x \in A \vee x \in B\}$$

2- د سیتونو تقاطع:

د هغه عناصرو سیت دی چې په دوه یا څو سیتونو کې شامل وي. لکه $A = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ او $B = \{6, 7, 8, 9, 10\}$

$$A \cap B = \{6, 7\}$$

$$A \cap B = \{x/x \in A \wedge x \in B\}$$

3- د سیتونو تفاضل:

د هغه عناصرو سیت دی چې په مفروق منه کې وي او په مفروق کې نه وي.

$$B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\} \text{ او } A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$A - B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} - \{4, 5, 6, 7, 8, 9\} = \{1, 2, 3\}$$

$$A - B = \{1, 2, 3\}$$

الجبر



اول فصل

الجبر

الجبر د جبر څخه اخیستل شوی دی چې جبر د مات هډوکي تر لوسته وایي.
او په اصطلاح کې الجبر هغه علم دی چې د حساب د ناحله مسایلو د حل لپاره معادلې او فارمولونه جوړوي.

د الجبر د علم موضوع:

د الجبر د علم موضوع د حقیقي اعدادو سیټ دی چې په IR سره ښودل کېږي.

د حقیقي اعدادو سیټ IR :

د $(-\infty)$ څخه تر $(+\infty)$ پورې د اعدادو سیټ ته د حقیقي اعدادو سیټ وایي.

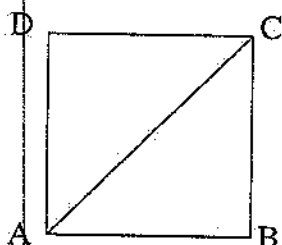
$$IR = (-\infty, +\infty)$$

یا دا چې د ناطق او غیر ناطق عددونو سیټ ته د حقیقي عددونو سیټ وایي که ناطق عدد په

$$Q \text{ او غیر ناطق په } Q' \text{ وښیو نو } IR = [Q \cup Q']$$

صحيح عددونه او کسري عددونه د عددو په کرښه کې په یوه نقطه کې مطابقت کوي.

مګر د غیر ناطقو عددونه لپاره نقطې د عدد په محور ندی پیدا شوي. مثلاً د $\sqrt{2}$ لپاره د عددو په کرښه کومه نقطه نده ټاکل شوی چه د $\sqrt{2}$ د نقطې د پیدا کولو لپاره د هندسي طریقي څخه استفاده کوو. $ABCD$ یوه مربع چې هره ضلع یې یو واحد ده داسې رسموو چې یو راس یې په مبدا واقع وي د دې مربع مساحت 1cm^2 دي که د A نقطه د C سره وصل کړو نو AC د مربع وتر لاس ته راځي چې



$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2$$

$$\overline{AC}^2 = 1^2 + 1^2$$

$$\overline{AC}^2 = 1 + 1$$

$$\overline{AC}^2 = 2 \quad \overline{AC} = \sqrt{2}$$

د $\sqrt{2}$ د پاره د عددو په کرښه د نقطې پیدا کولو لپاره د A نقطه مرکز نیسو او د $\overline{AC} = \sqrt{2}$ په اندازه د پرکار خوله خلاصوو او یوه دایره رسموو چه د عددو کرښه قطع کړي دغه د تقاطع نقطه د $\sqrt{2}$ مربوطه نقطه ده په همدې ترتیب کولای شو چې دغیر ناطقو عددو د نقطې د عددو په کرښه پیدا کړو.

مثلاً د $\sqrt{3}$ غیر ناطق عدد نقطې د پیدا کولو لپاره د $\sqrt{2}$ په نقطه کې د واحد په اندازه عمود رسموو د عمود انجام د مبداء سره وصلوؤد پرکار خوله په همدغه شعاع خلاصوو او قوس وهو د XX' د محور سره یې د تقاطع نقطه د $\sqrt{3}$ مربوطه نقطه ده.

د $\sqrt{5}$ د نقطې د پیدا کولو لپاره د $\sqrt{3}$ په نقطه کې د $\sqrt{2}$ په اندازه عمود رسموو د عمود انجام د مبداء سره وصلوو او د پرکار خوله په همدغه اندازه خلاصوو او قوس وهو د XX' د محور سره د قوس د تقاطع نقطه د $\sqrt{5}$ مربوطه نقطه ده.

د الجبر د زده کړې غرض:

1- په حساب کې د عدد سره علامه نه لیکل کېږي مگر په الجبر کې عدد او علامه دواړه یو الجبري عدد دی.

مثلاً 19 حسابي عدد دی مگر -19 او $+19$ الجبري عددونه دي.

2- په حساب کې حروف نه استعمالېږي مگر الجبري معادلې او فارمولونه د حروفو څخه جوړېږي.

لکه $4x - 5$ ، $7x^2 + 6x + 7 = 0$ ، $y = 3x - 4$ او داسې نور.

3- د حساب قوانین بشپړ شويدي زیادت نه قبلوي مگر الجبر د تمدن تابع دي د تخنیک او تکنالوژۍ د پرمختګ سره سم یې قوانین او فارمولونه ډیرېږي او انکشاف کوي.

د الجبر اصطلاحات:

حد Term: الجبري عدد، حرف او د حرف او عدد د ضرب، تقسیم، جذر او طاقت حالتو ته حد وايي.

لکه: -3 ، x ، $4x$ ، $\frac{6}{x}$ ، $\frac{x}{2}$ ، x^3 ، $\sqrt[3]{x}$ او $\frac{2\sqrt[3]{x^2}}{5\sqrt{x^3}}$ او داسې نور.

مشابه حدونه: هغه حدونه دي چې د عين حروفو توانونه يې مساوي وي. لکه $7xy^2$ او $-15xy^2$ يا $7x^2y^2$ او $11x^2y^2$ يا $7x$ او $20x$ او داسې نور.

افاده: د حدونو د جمع او تفریق حالتو ته افاده وايي لکه $11x - 8$

يو حده افادې ته مونوم وايي لکه $20x$

دوه حده افادې ته بينوم وايي. لکه $19x - 20$

درې حده افادې ته ترينوم وايي. لکه $9x^2 - 10x + 7$

هغه افاده چې تر دريو زيات حدونه ولري کثير الحده افاده ورته وايي. لکه

$$7x^4 - 10x^3 + 7x^2 - 8x + 7$$

په عمومي صورت دغه ټولو افادو ته پولينوم وايي.

پولينوم:

هغه افاده ده چې د حروفو توانونه يې تام عددونه وي کسري عددونه نه وي.

عمومي شکل يې دادي.

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_0$$

د پولينوم د هر حد ضريب د همغه پولينوم د توان په نوم ياديږي.

لکه:

$$7x^5 - 12x^4 + 13x^3 - 2x + 15$$

$$a_5 = 7, a_4 = -12, a_3 = 13, a_2 = 0, a_1 = -2, a_0 = 15$$

پولينوم په اته قسمه دي.

1- کامل پولينوم: هغه پولينوم دی چې د کوچني توان څخه تر لوړ توان پورې ټول توانونه پکې

موجود وي لکه $7x - 20x^3 + 8x^2 - 8x^4 + 7$ پدې پولينوم کې کوچني توان صفر دی او

لوړ توان يې (4) دی د صفر او (4) تر منځ عددونه 1، 2، 3 دي چې درې واړه پکې موجود

دي نو پورتنې پولينوم کامل پولينوم دي.

2- ناقص پولینوم: هغه پولینوم دی چې د کوچني توان او لوړ توان تر منځ ټولو توانونه پکې موجود نه وي لکه.

$$7x^3 - 4x + 9$$

3- تام پولینوم: هغه پولینوم دی چې په مخرج کې یې حرف موجود نه وي. لکه:

$$\frac{7x^3 + 4x^2 + 11x + 8}{3x^2 + 11x^2 - 20x + 17}$$

5

4- کسري پولینوم: هغه پولینوم دی چې په مخرج کې حرف موجود وي لکه:

$$\frac{8}{x^2 + 3x - 1}, \frac{2x^2 + 41x + 1}{x + 3}, \frac{4x - 1}{x}$$

5- منظم پولینوم: هغه پولینوم دی چې حروف یې د توانونو په اساس په صعودي یا نزولي ډول ترتیب شوي وي.

لکه $2 - 4x + 11x^2 + 8x^3 + 8x^4$ په صعودي ډول منظم دي.

$7x^4 - 16x^3 + 8x^2 - 12x + 5$ په نزولي ډول منظم شوي دي.

6- غیر منظم پولینوم: هغه پولینوم دی چې حروف یې د توانونو په اساس ترتیب شوي نه وي.

لکه: $3x - 8x^3 + 7 + 3x^2$

7- ناطق پولینوم: هغه پولینوم دی چې حروف یې تر جذر لاندې نه وي لکه $7x^2 + 8x - 5$ او $7x^2 - 31x + \sqrt{2}$.

8- غیر ناطق پولینوم: هغه پولینوم دی چې کوم حرف یې تر جذر لاندې وي. لکه:

$$7\sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt[3]{x}$$

که په طاقت لرونکو عدد بدل شي توانونه یې کسري کیږي.

$$7x^{\frac{2}{3}} + 3x^{\frac{1}{3}} - 6$$

غیر ناطق پولینوم ته ملتي نوم هم وايي.

ملتي نوم: ملتي نوم هغه افاده ده چې کوم حرف يې ترجذر لاندې وي که د طاقت په شکل وليکل شي توانونه يې کسري کيږي.

د مونوم درجه: د يو مجهوله مونوم درجه د مجهول درجه ده لکه د $7x^3$ دريمه درجه مونوم دی.

د دوه مجهوله يا څو مجهوله مونوم درجه د حروفو د توانونو مجموعه ده.

لکه: $5x^3y^2$ يو $5 + 2 = 7$ درجه مونوم دی.

د پولينوم درجه: Degree of a Polynome د پولينوم درجه د هغه مونوم درجه ده چې هغه مونوم د پولينوم په ټولو حدو کې لوړه درجه ولري لکه $3xy^2 + 5x^2y^3 + 8x^3y^4$ چې اومه درجه پولينوم دی. $8x^3 + 5x^2 - 4x + 2$ يو دريمه درجه پولينوم دی.

هوموجن: هغه افاده ده چې د ټولو حدونو درجې يې مساوي وي. لکه $x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4$

که په يوه هوموجن د کوم حد توان مجهول وي د مجهول قيمت د هغه حد د توان څخه پيدا کوو چې توان يې معلوم وي.

لکه $x^3 + x^m y + x^n y^2 + y^3$

حل:

$$m + 1 = 3$$

$$m = 3 - 1$$

$$m = 2$$

$$n + 2 = 3$$

$$n = 3 - 2$$

$$n = 1$$

د الجبري عددونو څلور گوني عمليات

د الجبري عددونو جمع:

الجبري عددونه په افقي ډول او هم په عمودي ډول جمع کولای شو. هم علامه عددونه جمع کيږي او علامه يې شريکه علامه ليکل کيږي.

$$-435$$

$$+215$$

$$\underline{-387}$$

$$\underline{+416}$$

$$-822$$

$$+631$$

مختلف علامه عددونه یو د بل څخه منفي کيږي او علامه د لوی عدد لیکل کيږي.

$$\begin{array}{r} +235 \\ -416 \\ \hline -181 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +436 \\ -168 \\ \hline +268 \end{array}$$

د الجبري عددونو تفریق:

مفروق د مفروق منځ لاندې داسې لیکو چې هره طبقه د خپلې طبقې لاندې او هره مرتبه د خپلې مرتبې لاندې راشي بیا د مفروق علامو ته تغیر ورکوو او د جمعې عملیه پرې اجرا کوو.

$$\begin{array}{r} +731 \\ \pm 263 \\ \hline +468 \end{array} \quad \begin{array}{r} -216 \\ \mp 418 \\ \hline +202 \end{array} \quad \begin{array}{r} -485 \\ \pm 316 \\ \hline -801 \end{array} \quad \begin{array}{r} +465 \\ \mp 317 \\ \hline +782 \end{array}$$

د الجبري عددونو ضرب:

د الجبري عددونو د ضربولو په وخت کې علامه په علامه کې او عدد په عدد کې ضربوو. د علامو ضربول په یوه جدول کې مطالعه کوو.

$\begin{array}{l} + \times + = + \\ - \times - = + \end{array}$	د عین علامو د ضرب حاصل مثبت دی.
$\begin{array}{l} + \times - = - \\ - \times + = - \end{array}$	او د مختلفو علامو د ضرب حاصل منفي دی.

د $- \times - = +$ ثبوت:

اول د $- \times - = +$ ثبوت په عدد:

$$5 \times 8 = 40$$

$$(6 - 1)(9 - 1) = 40$$

$$54 - 6 - 9 \square 1 = 40$$

$$54 - 15 \square 1 = 40$$

$$39 \square 1 = 40$$

که په خالي ځانه کې + علامه ولیکل شي د مساوات دواړه خواوي مساوي کيږي نو معلومه شوه چې:

$$(-1)(-1) = +1$$

دویم د $+$ $-$ $\times$ $-$ ثبوت په حروف:

$$(-a)(-b) = ab$$

$$(-a)(-b) = x \dots \dots \dots I$$

$$(-a)(-b) - ab = x - ab$$

$$-a(-b + b) = x - ab$$

$$-a(0) = x - ab$$

$$0 = x - ab$$

$$ab = x$$

په I رابطه کې د x په عوض ab وضع کوو:

$$(-a)(-b) = ab$$

ثابته شوه چې $+$ $-$ $\times$ $-$ کیږي.

د $+$ $\times$ $-$ $-$ ثبوت:

$$(+3)(+4) = 12$$

$$(+3)(+3) = 9$$

$$(+3)(+2) = 6$$

$$(+3)(+1) = 3$$

$$(+3)(0) = 0$$

$$(+3)(-1) = -3$$

$$(+3)(-2) = -6$$

ثابته شوه چې $+$ $\times$ $-$ $-$

مثال:

$$(+5)(+6) = 30$$

$$(-8)(-9) = 72$$

$$(-5)(+3) = -5$$

$$(+4)(-7) = -28$$

-13	+3	-9	+8
<u>- 5</u>	<u>-4</u>	<u>+3</u>	<u>+7</u>
+65	-12	-27	+56

د الجبري عددونو تقسيم:

علامه په علامه او عدد په عدد ويشو لمړی د علامو خارج قسمت په يوه جدول کې مطالعه کوو.

$$\begin{array}{l} \frac{+}{+} = + \\ \frac{+18}{+3} = +6 \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{-}{-} = + \\ \frac{-15}{-5} = +3 \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{+}{-} = - \\ \frac{+12}{-6} = -2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{-}{+} = - \\ \frac{-10}{+2} = -5 \end{array}$$

د پولینومونو څلور ګوني عمليې

1- د پولینومونو جمع:

د جمع عوامل داسې یو تر بل لاندې لیکو چې مشابه حدونه یو تر بل لاندې راشي بیا هم علامه مشابه حدونه جمع کوو او علامه یې شریکه علامه لیکو او مختلف علامه مشابه حدونه یو د بل څخه منفي کوو علامه د لوی عدد لیکو.

$$\begin{array}{r} 7x^3 + 8x^2 - 11x + 8 \\ 11x^3 + 9x^2 + 15x - 3 \\ \hline 18x^3 + 17x^2 + 4x + 5 \end{array}$$

2- د پولینومونو تفریق:

مفروق د مفروق منه لاندې داسې لیکو چې مشابه حدونه یو د بل لاندې راشي بیا د مفروق علامو ته تغیر ور کوو او د جمع عملیه پرې تطبیقوو.

مثال:

$$\begin{array}{r} 13x^4 - 15x^3 + 8x^2 - 20x + 8 \\ \pm 35x^4 \pm 9x^3 \pm 11x^2 \pm 9x \mp 16 \\ \hline -22x^4 - 24x^3 - 3x^2 - 29x + 24 \end{array}$$

3- د پولینومونو ضرب:

مضروب د مضروب فیه لاندې لیکو بیا علامه په علامه کې او عدد په عدد کې او حرف په حرف کې ضربوو په اخر کې مشابه حدونه جمع کوو د پولینومونو د ضرب حاصل لاس ته راځي.

مثال:

$$\begin{array}{r}
 3x^3 - 5x^2 + 7x - 7 \\
 \underline{7x^2 - 8x + 9} \\
 21x^5 - 35x^4 + 49x^3 - 49x^2 \\
 - 24x^4 + 40x^3 - 56x^2 + 56x \\
 \underline{27x^3 - 45x^2 + 63x - 63} \\
 21x^5 - 59x^4 + 116x^3 - 150x^2 + 119x - 63
 \end{array}$$

4- د پولینومو تقسیم:

د مقسوم اول حد د مقسوم علیه په اول حد ویشو حاصل یې په خارج قسمت کې لیکو په مقسوم علیه کې یې ضربوو د ضرب حاصل د مقسوم لاندې لیکو او منفي کووښي د تفریق د حاصل مخې ته د مقسوم یو حد را کېښته کوو نوی مقسوم جوړوو په همدې ترتیب تر آخره اجرائت کوو تر څو چې مقسوم ختم شي او یا یې درجه د مقسوم علیه د درجې څخه کمه شي دغې پاتې شوي برخې ته باقي وايي.

مثال:

$ \begin{array}{r} 72x^5 + 95x^4 - 39x^3 + 9x^2 + 64x - 21 \\ \pm 72x^5 \pm 63x^4 \mp 27x^3 \\ \hline 32x^4 - 12x^3 + 9x^2 \\ \pm 32x^4 \pm 28x^3 \mp 12x^2 \\ \hline -40x^3 + 21x^2 + 64x \\ \mp 40x^3 \mp 35x^2 \pm 15x \\ \hline 56x^2 + 49x - 21 \\ \pm 56x^2 \pm 49x \mp 21 \\ \hline \end{array} $	$ \begin{array}{r} 8x^2 + 7x - 3 \\ \hline 9x^3 + 4x^2 - 5x + 7 \end{array} $
---	---

د باقي مانده دعوه :

د صحيح عددونو د تقسيم ميزان په لاندې ډول دی

باقي + خارج قسمت $\times$ مقسوم عليه = مقسوم.

که مقسوم په $P(x)$ او مقسوم عليه په $(x - a)$ او خارج قسمت په $Q(x)$ او باقي په R ونيو نو لیکو چې:

$$P(x) = (x - a)Q(x) + R$$

که $x = a$ وي نو د x په عوض a وضع کوو نو:

$$P(a) = (a - a)Q(a) + R$$

$$Q(a) = R$$

دی دعوې ته د باقيمانده دعوه يا *Remainder's Theorem* وائي.

مثال: ونياست چه $x + 2$ د $P(x) = 3x^2 + 5x^2 - 4x - 4$ د پولینوم جذر دی او که نه دی؟

حل: د $x + 2$ جذر پیدا کوو.

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

د $P(x)$ په پولینوم کې د x په عوض (-2) وضع کوو که $f(x) = 0$ شونو (-2) د پولینوم جذر دی او $x + 2$ د پولینوم فکتور دی.

$$P(-2) = 3(-2)^3 + 5(-2)^2 - 4(-2) - 4$$

$$P(-2) = 3(-8) + 5(4) + 8 - 4$$

$$P(-2) = -24 + 20 + 8 - 4$$

$$P(-2) = -28 + 28$$

$$P(-2) = 0$$

$$R = 0$$

$x + 2$ د $P(x)$ د پولینوم فکتور دی او (-2) ئي جذر دی.

مثال: هغه افاده پيدا کړئ چه په $x - 1$ باندې ووېشل شي باقي ئې (-3) شي او که په $x + 2$ باندې ووېشل شي باقي ئې -9 شي.

$$p(x) = ax + b$$

$$p(1) = a \cdot 1 + b = -3$$

$$p(-2) = a(-2) + b = -9$$

$$a + b = -3$$

$$\mp 2a = \mp 9$$

$$3a = 6$$

$$3a = 6 \Rightarrow a = 2$$

$$a + b = -3 \Rightarrow 2 + b = -3 \Rightarrow b = -3 - 2 = -5$$

$$b = -5$$

مطلوبه افاده $(2x - 5)$ ده.

تمرین:

1- جمع یې کړئ؟

$$3x^2 - 4x + 16$$

$$7x^2 - 20x + 8 \quad -b$$

$$5x^2 + 3x - 11$$

$$11x^3 - 11x^2 + 7x - 9$$

$$8x^3 + 16x^2 - 11x + 13 \quad -a$$

$$9x^3 - 4x^2 + x - 2$$

2- تفریق کړئ؟

$$11x^3 - 13x^2 + 20x - 8$$

$$5x^3 + 15x^2 + 8x + 11 \quad -b$$

$$8x^4 - 12x^3 + 7x^2 - 3x + 15$$

$$7x^4 - 20x^3 - 8x^2 + 9x - 20 \quad -a$$

3- ضرب یې کړئ؟

$$2x^2 - 4x + 7$$

$$3x^2 + 7x - 8 \quad -b$$

$$4x^3 - 8x^2 + 5x - 2$$

$$7x^2 - 8x + 6 \quad -a$$

$$6x^3 + 2x^2 - 4x + 7$$

$$3x^3 - 8x^2 + 6x - 8 \quad -c$$

4- تقسيم يې کړئ؟

$$\frac{15x^5 + 16x^4 - 73x^3 + 101x^2 - 5x + 6}{3x^2 + 8x - 6} - a$$

$$\frac{21x^4 + 67x^3 - 58x^2 - 119x + 77}{7x^2 + 6x - 11} - b$$

$$\frac{35x^6 - 59x^5 + 36x^4 + 35x^3 - 74x^2 + 60x - 24}{5x^3 - 7x^2 + 6x - 3} - c$$

$$\frac{16x^4 + 96x^3y + 216x^2y^2 + 216xy^3 + 81y^4}{2x + 37} - d$$

ترکيبي تقسيم Synthetic Division

هغه تقسيم دی چه د خارج قسمت د ضربو د پیدا کولو لپاره د مقسوم ضریبونه ټول په یوه وار استعمالیږي.

طریقه یې داسی ده چه د مقسوم ضریبونه په یوه افقي کرښه کې لیکود کړنښی په اخر کې په یوه کنج کې د قیمت لیکونیا یوی کرښی ته ځای پرېږدو او یو خط کشوو د مقسوم د پولینوم د اول حد ضرب یی له کوم تغیره راکښته کوو. د x په قیمت کې یې ضربوو د دویم حد د ضرب لاندی یې لیکو او ورسره جمع کوو یې د جمع حاصل د x په قیمت کې ضربوو. په همدی ترتیب تراخه اجرات کوو. د خط لاندی اخرنی عدد د R قیمت دی. او نور عددونه د خارج قسمت ضریبونه دي د خارج قسمت درجه د مقسوم د درجی څخه یوه کمه ده.

که $R=0$ وي نو $x-a$ د مقسوم د پولینوم فکتور دی. او د قیمت د پولینوم جذر دي.

مثال: د ترکیبي تقسیم پواسطه وښیاست چه $(x-2)$ د $P(x) = x^4 + 6x^3 - 8x^2 - 12x - 8$ د پولینوم فکتور دي.

1	+6	-8	-12	-8	2
	2	16	16	8	
1	8	8	4	0	

$R=0$ نو $(x-2)$ د $P(x)$ د پولینوم فکتور دی او (2) د پولینوم جذر دی او $q(x) = x^3 + 8x^2 + 8x + 4$ د خارج قسمت پولینوم دي.

که بینوم د $(x - a)$ شکل لرلو و نو په زاویه کې $(+a)$ لیکل کیږي او که بینوم د $(x + a)$ شکل لرلو نو په زاویه کې $(-a)$ لیکل کیږي او که بینوم د $(ax \pm b)$ شکل لرلو نو په زاویه کې $(\pm \frac{b}{a})$ لیکل کیږي. نوره طریقه کې کوم فرق نه لري.

تمرین

1: د باقیمانده دعوی پواسطه یې حل کړئ؟

کومه افاده ده چه که په $(x + 3)$ ویشل شي باقي یې (-24) شي او که په $(2x - 3)$ ویشل شي باقي یې (-6) شي.

2: د ترکیبي تقسیم پواسطه یې حل کړئ؟

$$a: \frac{x^4 - 6x^3 + 15x^2 - 6x - 40}{x - 3}$$

$$b: \frac{2x^4 - 13x^3 + 4x^2 + 24x - 28}{2x + 3}$$

$$c: \frac{6x^3 + 4x^2 - 84x - 9}{x + 4}$$

$$d: \frac{12x^4 - x^3 - 20x^2 + 8}{3x - 2}$$

دويم فصل

مساوات

د دوه افادو د عددي قيمتو برابري ته مساوات وايي.

مساوات په دوه قسمة دي.

1- مطابقت 2- شرطيه مساوات يا معادله

1- مطابقت:

مطابقت هغه مساوات دی چې د مجهول په ټولو قيمتو باندې يې دواړه خواوې مساوي وي.

د اسانتيا لپاره مطابقتونه په شپږو گروپو کې مطالعه کوو.

1 گروپ: هغه مطابقتونه چې د $(a + b)^n$ شکل ولري.

د دې گروپ ټول مطابقتونه په انکشاف $n + 1$ حدونه لري د ټولو حدونو علامې يې مثبت دي په اول حد کې د a توان n د b توان صفر دی په نورو حدو کې د a د توان څخه يو کميږي b ته ورکول کيږي تر څو چې د a توان صفر او د b توان n شي د اول حد ضريب يو دی د دويم حد ضريب n دی د نورو حدو د ضريبو د لاس ته راوړلو لپاره د مخکيني حد ضريب د a په توان کې ضربوو د مخکينو حدو په شمېر يې ویشو.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

$$(a + b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

$$(a + b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$$

$$(a + b)^8 = a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8ab^7 + b^8$$

$$(a + b)^9 = ?$$

$$(a + b)^{10} = ?$$

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + n(n-1)a^{n-2}b^2 + \dots + nab^{n-1} + b^n$$

2- گروپ: هغه مطابقتونه چې د $(a - b)^n$ شکل ولري:

د دې گروپ ټول مطابقتونه په انکشاف کې د اول گروپ د مطابقتو په څیر دي. صرف داوول گروپ د ټول حدو علامې مثبت دي او د دویم گروپ د هر مطابقت د اول حد علامه مثبت د دویم حد علامه منفي ده د دریم علامه مثبت د څلورم حد علامه منفي ده په همدې ترتیب د طاق حدو علامې مثبت او د جفت حدو علامې منفي دي.

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(a - b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$$

$$(a - b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$$

$$(a - b)^6 = a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6$$

$$(a - b)^7 = a^7 - 7a^6b + 21a^5b^2 - 35a^4b^3 + 35a^3b^4 - 21a^2b^5 + 7ab^6 - b^7$$

$$(a - b)^8 = a^8 - 8a^7b + 28a^6b^2 - 56a^5b^3 + 70a^4b^4 - 56a^3b^5 + 28a^2b^6 - 8ab^7 + b^8$$

$$(a - b)^9 = ?$$

$$(a - b)^{10} = ?$$

$$(a - b)^n = a^n - na^{n-1}b + n(n-1)a^{n-2}b^2 - \dots + nab^{n-1} - b^n$$

3- دریم گروپ: هغه مطابقتونه چې د $a^n - b^n$ شکل لري:

د دې گروپ ټول مطابقتونه د دوه قوسو په حاصل ضرب تجزیه کېږي اول قوس د دواړو حدو د قاعدو تفاضل دی دویم قوس n حدونه لري د ټول حدو علامې مثبت دي په اول حد کې د a توان $n - 1$ دی د b توان صفر دی په نورو حدو کې د a د توان څخه یو کمیږي b ته ورکول کېږي ترڅو چې د a توان صفر او د b توان $(n - 1)$ شي.

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$$

$$a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$$

$$a^6 - b^6 = (a - b)(a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5)$$

$$a^7 - b^7 = (a - b)(a^6 + a^5b + a^4b^2 + a^3b^3 + a^2b^4 + ab^5 + b^6)$$

|
|
|

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

4- گروپ: هغه مطابقتونه چې د $a^n + b^n$ شکل ولري او n طاق وي د دې گروپ ټول مطابقتونه د دوه قوسو په حاصل ضرب تجزیه کېږي اول قوس د دواړو حدو د قاعدو مجموعه ده دویم قوس n حدونه لري د اول حد علامه مثبت د دویم حد علامه منفي ده د دریم حد علامه مثبت د څلورم حد علامه منفي ده د طاق حدو علامه مثبت او د جفت حدو علامه منفي دي په اول حد کې د a توان $n - 1$ دی د b توان صفر دی په نورو حدو کې د a د توان څخه یو کمېږي b ته ورکول کېږي تر څو چې د a توان صفر شي او د b توان $n - 1$ شي.

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^4 + b^4 = (a + b)(a^3 - a^2b + ab^2 - b^3)$$

$$a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$$

$$a^6 + b^6 = (a + b)(a^5 - a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 + ab^4 - b^5)$$

$$a^7 + b^7 = (a + b)(a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6)$$

$$a^9 + b^9 = ?$$

$$a^{11} + b^{11} = ?$$

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots + a^2b^{n-3} - ab^{n-2} + b^{n-1})$$

5- گروپ: هغه مطابقتونه چې د $a^n + b^n$ شکل ولري او n جفت وي د دې گروپ ټول مطابقتونه د دوه مزدوجو قوسو په حاصل ضرب تجزیه کېږي د هر قوس اول حد د دواړو حدود قاعدو مجموعه ده او دویم حد یې د دواړو حدود د قاعدو د حاصل ضرب د دوه چندان جذر دی.

$$a^2 + b^2 = (a + b - \sqrt{2ab})(a + b + \sqrt{2ab})$$

$$a^4 + b^4 = (a^2)^2 + (b^2)^2 = (a^2 + b^2 - \sqrt{2a^2b^2})(a^2 + b^2 + \sqrt{2a^2b^2})$$

$$= (a^2 + b^2 - \sqrt{2}ab)(a^2 + b^2 + \sqrt{2}ab)$$

$$a^6 + b^6 = (a^3)^2 + (b^3)^2 = (a^3 + b^3 - \sqrt{2a^3b^3})(a^3 + b^3 + \sqrt{2a^3b^3})$$

شپږم گروپ: هغه مطابقتونه چې د $(a + b + c)^2$ شکل ولري د دې گروپ ټول مطابقتونه په انکشاف کې شپږ حدونه لري درې لمړي حدونه يې مربعگانې دي درې وروستي حدونه يې د دوه حدود حاصل ضرب دوه چنده دي.

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

$$(a + b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$$

$$(a - b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc$$

مثال: انکشاف ورکړئ؟

$$\begin{aligned} 1: (2x + 3y)^2 &= (2x)^2 + 3(2x)^2 3y + 3(2x)(3y)^2 + (3y)^2 \\ &= 8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2: (4x - 5y)^4 &= (4x)^4 - 4(4x)^3(5y) + 6(4x)^2(5y)^2 - 4(4x)(5y)^3 + (5y)^4 \\ &= 256x^4 - 1280x^3y + 2400x^2y^2 - 2000xy^3 + 625y^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3: (2x + 3y + 5z)^2 &= (2x)^2 + (3y)^2 + (5z)^2 + 2 \times 2x \times 3y \\ &\quad + 2 \times 2x \times 5z + 2 \times 3y \times 5z \\ &= 4x^2 + 9y^2 + 25z^2 + 12xy + 20xz + 30yz \end{aligned}$$

2- مثال: تجزیه يې کړئ؟

$$1: 4x^2 - 9y^2 = (2x)^2 - (3y)^2 = (2x - 3y)(2x + 3y)$$

$$\begin{aligned} 5: 9x^4 + 36y^4 &= (3x^2)^2 + (6y^2)^2 = (3x^2 + 6y^2 - \sqrt{2 \times 3x^2 \times 6y^2}) \\ &\quad (3x^2 + 6y^2 + \sqrt{2 \times 3x^2 \times 6y^2}) \\ &= (3x^2 + 6y^2 - 6xy)(3x^2 + 6y^2 + 6xy) \end{aligned}$$

تمرین:

انکشاف ورکړئ

$$(4x + 5y)^4 - 3 \quad (2x + 7y)^3 - 2 \quad (3x + 5y)^2 - 1$$

$$(2x - 3y)^6 - 6 \quad (3x - 7y)^4 - 5 \quad (4x - 5y)^5 - 4$$

$$\begin{aligned} & \frac{8}{125}x^3 - \frac{216}{1331}y^3 - 9 \quad 8m^3 - 125n^3 - 8 \quad 7x^2 - 9y^2 - 7 \\ & \frac{125}{216}x^3 + \frac{729}{1728}y^3 - 12 \quad 64m^3 + 1000n^3 - 11 \quad 8x^3 + 27y^3 - 10 \\ & \frac{81}{625}m^4 + \frac{1296}{2401}n^4 - 15 \quad 16x^4 + 256y^4 - 14 \quad 4x^2 + y^2 - 13 \\ & \left(\frac{2}{8}x - \frac{4}{5}y - \frac{7}{8}z\right)^2 - 18 \quad (3x + 2y - 5z)^2 - 17 \quad (2x + 3y + 5z)^2 - 16 \end{aligned}$$

تجزیه:

تجزیه په لغت کې توتیه ، توتیه کولو ته وايي.

او په اصطلاح کې د یوې افادې د ضربې عواملو د پیدا کولو طریقې ته تجزیه وايي.

1- د مشترک نیولو پواسطه د یوې افادې تجزیه کول:

که د یوې افادې په ټولو حدو کې کوم عدد یا حرف شامل وي دا شامل مشترک نيسود قوس د باندې یې لیکو بیا د افادې هر حد په دې مشترک ویشود قوس په داخل کې یې لیکو افاده تجزیه کېږي.

1: $3x^2 - 15 = 3(x^2 - 5)$

2: $5x^2 - 15x + 10 = 5(x^2 - 3x + 2)$

3: $4x^3 + 24x^2 - 36x = 4x(x^2 + 6x - 9)$

4: $\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x = \frac{1}{4}x(x - 3)$

2- د $a^2 - b^2$ د مطابقت پواسطه د یوې افادې تجزیه کول:

1: $4x^2 - 25y^2 = (2x)^2 - (5y)^2 = (2x - 5y)(2x + 5y)$

2: $\frac{4}{25}m^2 - \frac{9}{49}n^2 = \left(\frac{2}{5}m\right)^2 - \left(\frac{3}{7}n\right)^2 = \left(\frac{2}{5}m - \frac{3}{7}n\right)\left(\frac{2}{5}m + \frac{3}{7}n\right)$

3: $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{49} = \left(\frac{x}{6}\right)^2 - \left(\frac{y}{7}\right)^2 = \left(\frac{x}{6} - \frac{y}{7}\right)\left(\frac{x}{6} + \frac{y}{7}\right)$

3- د $a^3 - b^3$ د مطابقت پواسطه د یوې افادې تجزیه کول:

1: $8x^3 - 27y^3 = (2x)^3 - (3y)^3 = (2x - 3y)(4x^2 + 6xy + 9y^2)$

2: $64x^3 - 125y^3 = (4x)^3 - (5y)^3 = (4x - 5y)(16x^2 + 20xy + 25y^2)$

3: $216m^3 - 343n^3 = (6m)^3 - (7n)^3 = (6m - 7n)(36m^2 + 42mn + 49n^2)$

4- د $a^3 + b^3$ د مطابقت پواسطه د یوې افادې تجزیه کول:

$$1: 8x^3 + 27y^3 = (2x)^3 + (3y)^3 = (2x + 3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2)$$

$$2: 216m^3 + 343y^3 = (6m)^3 + (7y)^3 \\ = (6m + 7y)(36m^2 - 42my + 49y^2)$$

$$3: \frac{8}{27}x^3 + \frac{125}{216}y^3 = \left(\frac{2}{3}x\right)^3 + \left(\frac{5}{6}y\right)^3 = \left(\frac{2}{3}x + \frac{5}{6}y\right)\left(\frac{4}{9}x^2 - \frac{5}{9}xy + \frac{25}{36}y^2\right)$$

ترینوم:

دري حده افادې ته ترینوم وايي.

عمومي شکل يې $ax^2 + bx + c$ دی.

د ترینوم تجزیه:

د ترینوم تجزیه په دوه حالته کې مطالعه کوو.

1- چې $a = 1$ وي.

2- $a \neq 1$ وي.

1- چې $a = 1$ وي ترینوم د $x^2 - bx + c$ شکل غوره کوي د ترینوم د دغه شکل د تجزیه

لپاره داسې دوه عدده پیدا کوو چې د ضرب حاصل يې c او د جمع حاصل يې b شي. فرضاً m

او n داسې دوه عددونه دي.

يعنې $b = m + n$ او $c = mn$ دی نو:

$$x^2 + (m + n)x + mn$$

قوس خلاصوو

$$x^2 + mx + nx + mn$$

گروپ بندي کوو يې:

$$x(x + m) + n(x + n)$$

$$(x + m)(x + n)$$

1- مثال:

$$x^2 + 11x + 30$$

$$x^2 + 5x + 6x + 30$$

$$x(x + 5) + 6(x + 5)$$

$$(x + 5)(x + 6)$$

2- مثال:

$$x^2 - 11x + 30$$

$$x^2 - 5x + 6x + 30$$

$$x(x - 5) - 6(x - 5)$$

$$(x - 5)(x - 6)$$

نوټ: که په ترينوم کې د (c) علامه $(+)$ وه هغه عددونه چې د ترينوم د تجزيې لپاره استعمالېږي هم علامه دي. بيا د b علامې ته گورو که د b علامه $(+)$ وه عددونه دواړه مثبت دي او که د b علامه منفي وه عددونه دواړه منفي دي.

$$1: x^2 + 15x + 36$$

$$x^2 + 12x + 3x + 36$$

$$x(x + 12) + 3(x + 12)$$

$$(x + 12)(x + 3)$$

$$2: x^2 - 13x + 40$$

$$x^2 - 8x - 5x + 40$$

$$x(x - 8) - 5(x - 8)$$

$$(x - 8)(x - 5)$$

2- که په ترينوم کې د c علامه منفي وه نو عددونه چې د ترينوم د تجزيې لپاره استعمالېږي مختلف علامه دي بيا د b علامې ته گورو که د b علامه $(+)$ وه لوی عدد مثبت دی او که د b علامه منفي وه لوی عدد منفي وي.

$$1: x^2 + 5x - 66$$

$$x^2 - 6x + 11x - 66$$

$$x(x - 6) + 11(x - 6)$$

$$(x - 6)(x + 11)$$

$$2: x^2 - 5x - 66$$

$$x^2 - 11x + 6x - 66$$

$$x(x - 11) + 6(x - 11)$$

$$(x - 11)(x + 6)$$

تمرین:

$$x^2 + 29x + 180 - 3$$

$$x^2 + 19x + 70 - 2$$

$$x^2 + 15x + 44 - 1$$

$$x^2 - 13x + 36 - 6$$

$$x^2 - 21x + 90 - 5$$

$$x^2 - 16x + 55 - 4$$

$$x^2 + 31x - 630 - 9$$

$$x^2 + 11x - 210 - 8$$

$$x^2 + 6x - 135 - 7$$

$$x^2 - 25x - 186 - 12$$

$$x^2 - 9x - 400 - 11$$

$$x^2 - 7x - 170 - 10$$

2- حالت چي $a \neq 1$ وي.

د ترينوم د دغه حالت د تجزيې لپاره داسې دوه عددونه پيدا کوو چي د ضرب حاصل يې ac او

د جمع حاصل يې b شي؟

$$1. 3x^2 + 11x + 10$$

$$ac = 3(10) = 30$$

$$b = 11$$

$$3x^2 + 6x + 5x + 10$$

$$3x(x + 2) + 5(x + 2)$$

$$(x + 2)(3x + 5)$$

$$2. 5x^2 - 19x + 12$$

$$ac = 5(12) = 60$$

$$b = -19$$

$$5x^2 - 15x - 4x + 12$$

$$5x(x - 3) - 4(x - 3)$$

$$(x - 3)(5x - 4)$$

$$3. 7x^2 + 3x - 34$$

$$ac = 7(-34) = -238$$

$$7x^2 - 14x \quad x - 34$$

$$7x(x - 2) + 17(x - 2)$$

$$(x - 2)(7x + 17)$$

$$\begin{aligned}
 4. \quad & 11x^2 - 23x - 30 \\
 & ac = 11(-30) = -330 \\
 & b = -23 \\
 & 11x^2 - 33x + 10x - 3 \\
 & 11x(x - 3) + 10(x - 3) \\
 & (x - 3)(10x + 10)
 \end{aligned}$$

تمرین:

لاندې ترینومونه حل کړئ؟

$$\begin{array}{lll}
 3x^2 + 31x + 80 - 3 & 7x^2 + 24x + 9 - 2 & 5x^2 + 11x + 2 - 1 \\
 2x^2 - 17x + 35 - 6 & 5x^2 - 22x + 21 - 5 & 7x^2 - 19x + 10 - 4 \\
 7x^2 + 3x - 34 - 9 & 4x^2 + 7x - 57 - 8 & 3x^2 + 2x - 33 - 7 \\
 8x^2 - 23x - 85 - 12 & 7x^2 - 11x - 30 - 11 & 5x^2 - 10x - 54 - 10
 \end{array}$$

د گروپ بندۍ پواسطه د یوې افادې تجزیه کول:

که د یوې افادې حدونه تر درې حدو زیات وه او په ټولو حدو کې یو کوم حرف یا عدد شامل نه و مګر په بعضو حدو کې شامل و دغسې افاده په گروپو ویشو په هر گروپ کې شامل مشترک نیسو تر مشترک نیولو وروسته باید قوسونه مساوي وي قوسونه مشترک نیسو افاده په قوسو تجزیه کیږي.

$$\begin{aligned}
 & x^3 + 5x^2 + 3x + 15 \\
 & x^2(x + 5) + 3(x + 5) \\
 & (x + 5)(x^2 + 3)
 \end{aligned}$$

د تجزیې د استعمال ځایونه:

تجزیه د څو افاده د لوی مشترک قاسم او کوچني مشترک د پیدا کولو لپاره استعمالیږي.

لوی مشترک قاسم G.C.D:

د څو افادو لوی مشترک قاسم هغه افاده ده چې تر هغې په بله غټه افاده باندې راځي شوي افادې تقسیم نشي لکه $x^2 + 7x + 12$ او $x^2 + 10x + 21$ چې په $x + 3$ باندې ویشل کیږي نو $x + 3$ د پورته افادو لوی مشترک قاسم وي.

کوچنی مشترک مضرب L.C.M

د څو افادو کوچنی مشترک مضرب هغه افاده ده چې تر هغې بله کوچنی افاده په راکړ شو افادو باندې تقسیم نه شي. لکه $x^3 + 14x^2 + 61x + 84$ چې په $x^2 + 7x + 12$ او $x^2 + 10x + 21$ باندې تقسیمېږي او تر دې بله کوچنی افاده په راکړ شوو افادو باندې نه تقسیمېږي دې افادې ته د راکړ شوو افادو کوچنی مشترک مضرب دی.

د لوی مشترک قاسم او کوچنی مشترک مضرب پیدا کول:

افادې تجزیه کوو په ضربي عواملو کې یې مشترک او غیر مشترک پیدا کوو که په مشترکو ضربي عواملو کې د (کوچني) توان والا ضربي عوامل ضرب کړو لوی مشترک قاسم لاس ته راځي او که د لوړ توان والا ضربي او غیر مشترک ضربي عوامل سره ضرب کړو کوچنی مشترک مضرب لاس ته راځي.

مثال: د لاندې افادو لوی مشترک قاسم او کوچنی مشترک مضرب پیدا کړئ؟

- 1: $(x^2 + 2x)^2$
- 2: $2x^4 + 3x^3 - 2x^2$
- 3: $2x^3 - 3x^2 - 14x$

حل:

$$\begin{aligned}
 1: & (x^2 + 2x)^2 = \{x(x + 2)\}^2 = x^2(x + 2)^2 \\
 2: & 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 = x^2(2x^2 + 3x - 2) = x^2(x + 2)(2x - 1) \\
 3: & 2x^3 - 3x^2 - 14x = x(2x^2 - 3x - 14) = x(x + 2)(2x - 7) \\
 G.C.D &= x(x + 2) = x^2 + 2x \\
 L.C.M &= x^2(x + 2)^2(2x - 1)(2x - 7)
 \end{aligned}$$

تمرین:

لوی مشترک قاسم او کوچنی مشترک مضرب یې پیدا کړئ؟

$$2ax^3 - 4a^3x - 6a^3 - 1$$

$$ax^2 + 2a^2x + a^3 - 2$$

$$3a^2(x + a)^2 - 3$$

الجبري کسرونه

الجبري کسرهغه افاده ده چې په مخرج کې يې حرف موجود وي لکه:

$$\frac{x^2 + 3x - 2}{x}, \quad \frac{3}{x+1}$$

الجبري کسرونه په دوه قسمه دي.

1- ناطق الجبري کسرونه 2- غير ناطق الجبري کسرونه

2- ناطق الجبري کسرونه:

هغه الجبري کسرونه دي چې کوم حرف يې تر جذر لاندې نه وي.

ناطق الجبري کسرونه په دوه قسمه دي.

a- واقعي ناطق الجبري کسرونه b- غير واقعي ناطق الجبري کسرونه

a- واقعي ناطق الجبري کسرونه: هغه کسرونه دي چې د صورت درجه يې د مخرج د درجې څخه کوچنۍ وي لکه $\frac{x}{x^2+5x+1}$ يا $\frac{2}{x+3}$

b- غير واقعي ناطق الجبري کسرونه: هغه کسرونه دي چې د صورت درجه يې د مخرج د درجې څخه زياته يا ورسره مساوي وي لکه:

$$\frac{4x^2 + 5x - 1}{x^2 + 3x - 4}, \quad \frac{3x^2 + 5x + 3}{x + 5}$$

2- غير ناطق الجبري کسرونه:

هغه کسرونه دي چې کوم حرف يې تر جذر لاندې وي.

$$\frac{x+5}{\sqrt{x+3}}, \quad \frac{3\sqrt{x+1}}{x+2}$$

د الجبري کسرو خواص:

1- که د يوه کسر صورت او مخرج په يوه افاده کې ضرب شي په کسر کې تغير نه راځي.

$$\frac{x+3}{x+7} = \frac{(x+3)(x-1)}{(x+7)(x-1)} = \frac{x^2+2x-3}{x^2+6x-7}$$

2- که د یوه کسر صورت او مخرګ په یوه افاده تقسیم شي په کسر کې تغیر نه راځي.

$$\frac{x^2 + 11x + 24}{x^2 + 5x + 6} = \frac{\frac{x^2 + 11x + 24}{x+3}}{\frac{x^2 + 5x + 6}{x+3}} = \frac{\frac{(x+3)(x+8)}{x+3}}{\frac{(x+3)(x+2)}{x+3}} = \frac{x+8}{x+2}$$

3- هر کسر درې علامې لري یوه د صورت علامه ده دویم د مخرګ علامه ده او درېم د ټول کسر علامه ده که په دې درې علامو کې دوه علامو ته تغیر ورکړو په کسر کې تغیر نه راځي.

$$-\frac{-x}{-y} = -\frac{x}{y} = +\frac{x}{-y} = +\frac{-x}{y} = -\frac{x}{y}$$

د الجبري کسرونو جمع:

د کسرونو مخرګ مشترک پیدا کوو او د حسابي کسرونو په څیر عملیه پرې اجراء کوو.

$$1: \frac{x}{x+5} + \frac{3x-1}{x+5} - \frac{x+3}{x+5} = \frac{x+3x-1-x-3}{x+5} = \frac{3x-4}{x+5}$$

$$2: \frac{x+3}{x^2-4} + \frac{x-1}{x-2} + \frac{x+7}{x+2} = \frac{x+3+x^2+x-2+x^2+5x-14}{(x-2)(x+2)} = \frac{2x^2+7x-13+1}{x^2-4}$$

$$3: \frac{x}{x+1} + \frac{x+3}{x+2} = \frac{x(x+2) + (x+3)(x+1)}{(x+1)(x+2)} = \frac{x^2+2x+x^2+4x+3}{x^2+3x+2} = \frac{2x^2+6x+3}{x^2+3x+2}$$

د الجبري کسرونو تفریق:

که وغواړو چې د یوه الجبري کسر څخه بل الجبري کسر تفریق کړ د مفروق علامو ته تغیر ورکوو او د جمع عملیه پرې تطبیقوو.

د الجبري کسرونو ضرب:

صورت په صورت کې او مخرګ په مخرګ کې ضربوو.

که د یوه کسر صورت د بل کسر د مخرګ سره اختصاریدلو اختصاروو یې بیا یې ضربوو.

$$1: \frac{x+3}{x+1} \times \frac{x-3}{x+5} = \frac{(x+3)(x-3)}{(x+1)(x+5)} = \frac{x^2-9}{x^2+6x+5}$$

$$2: \frac{x^2 - 2x}{x + 2} \times \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 3x - 10} = \frac{x(x-2)}{x+2} \times \frac{(x+2)(x+1)}{(x-2)(x+5)} = \frac{x(x+1)}{x+5}$$

$$= \frac{x^2 + x}{x + 5}$$

د الجبري کسرونو اختصار:

صورت او مخرغ تجزیه کوو مساوي ضربي عوامل د صورت او مخرغ څخه حذفوو.

$$1: \frac{x^2 + 3x - 28}{x^2 + 9x + 14} = \frac{(x+7)(x-4)}{(x+7)(x+2)} = \frac{x-4}{x+2}$$

$$2: \frac{x^2 + 3x}{x^2 + 11x + 24} = \frac{x(x+3)}{(x+3)(x+8)} = \frac{x}{x+8}$$

د الجبري کسرونو تقسیم:

د تقسیم علامه په ضرب بدلوو او مقسوم علیه سرچپه کوو.

$$1: \frac{x^2 + 13x + 30}{x + 5} \div \frac{x^2 + 8x + 15}{x^2 + 6x + 5}$$

$$\frac{x^2 + 13x + 30}{x + 5} \times \frac{x^2 + 6x + 5}{x^2 + 8x + 15}$$

$$\frac{(x+3)(x+10)}{x+5} \times \frac{(x+1)(x+5)}{(x+3)(x+5)} = \frac{(x+10)(x+1)}{x+5} = \frac{x^2 + 11x + 10}{x+5}$$

$$2: \frac{x^2 - 11x + 18}{x - 3} \div \frac{x^2 + 7x - 18}{x^2 - 9}$$

$$\frac{x^2 - 11x + 18}{x - 3} \times \frac{x^2 - 9}{x^2 + 7x - 18}$$

$$\frac{(x-2)(x-9)}{x-3} \times \frac{(x-3)(x+3)}{(x+9)(x-2)} = \frac{(x-9)(x+3)}{x+9} = \frac{x^2 - 6x - 27}{x+9}$$

تمرین:

1- لاندې کسرونه جمع کړئ؟

$$\frac{x+5}{x^2} + \frac{x-3}{x} - \frac{x+7}{x^3} - 2$$

$$\frac{2x-3y}{6y^2} + \frac{18xy-9y^2}{9y^2} - 1$$

$$\frac{2x+1}{x^2-16} + \frac{x+3}{x-4} + \frac{x-1}{x+4} - 4$$

$$\frac{x+11}{x+3} + \frac{x-1}{x+2} - 3$$

$$\frac{2}{x+7} + \frac{3}{x-7} - 6$$

$$\frac{x}{x+5} + \frac{3x+1}{x+5} - \frac{x-2}{x+5} - 5$$

2- لاندې کسرونه اختصار کړئ؟

$$\frac{x^2-7x-44}{x^2-9x-22} - 3$$

$$\frac{x^2+5x-24}{x+8} - 2$$

$$\frac{x^2-3x}{x^2-9} - 1$$

3- لاندې کسرونه ضرب کړئ؟

$$\frac{x^2+x}{x-1} \times \frac{x^2-1}{x^2+5x+4} - 2$$

$$\frac{x^2+5x+6}{x+5} \times \frac{x^2+7x+6}{x^2+x-6} - 1$$

$$\frac{x^2+3x-40}{x+8} \times \frac{x-3}{x+5} - 4$$

$$\frac{x^2-3x-28}{x-7} \times \frac{x+5}{x+4} - 3$$

4- لاندې کسرونه تقسیم کړئ؟

$$\frac{x}{x+1} \div \frac{x+1}{x} - 2$$

$$\frac{x^2+13x+6}{x+5} \div \frac{x^2+11x+28}{x^2+12x+35} - 1$$

$$\frac{x}{x+3} \div \frac{x^2}{x^2-9} - 4$$

$$\frac{x^2}{x-1} \div \frac{x}{x^2-1} - 3$$

$$\frac{x+5}{x} \div \frac{x+5}{x} - 5$$

د کسرونو گویا کول:

د یوه کسر د صورت یا مخرغ څخه د جذر د منځه وړلو ته د کسر گویا کول وایي. معمول په ریاضي کې د مخرغ گویا کول دي.

د کسر د مخرغ گویا کول څلور حالتونه لري.

1- چې د کسر په مخرغ کې یو جذري حد وي او د جذر درجه یې (2) وي. لکه $\frac{3}{\sqrt{x^3}}$, $\frac{2}{\sqrt{2x}}$, $\frac{3x}{\sqrt{x}}$ او داسې نور.

د داسې کسرو د مخرغو گویا کولو لپاره صورت او مخرغ د مخرغ په جذري حد کې ضربوو.

$$\frac{3x}{\sqrt{x}} = \frac{3x\sqrt{x}}{\sqrt{x} \times \sqrt{x}} = \frac{3x \times \sqrt{x}}{\sqrt{x^2}} = \frac{3x \times \sqrt{x}}{x} = 3\sqrt{x}$$

$$\frac{2}{\sqrt{2x}} = \frac{2 \times \sqrt{2x}}{\sqrt{2x} \times \sqrt{2x}} = \frac{2\sqrt{2x}}{\sqrt{2x^2}} = \frac{2\sqrt{2x}}{2x} = \frac{\sqrt{2x}}{x}$$

$$\frac{3}{\sqrt{x^3}} = \frac{3\sqrt{x^3}}{\sqrt{x^3} \times \sqrt{x^3}} = \frac{3\sqrt{x^3}}{\sqrt{x^3}^2} = \frac{3\sqrt{x^3}}{x^3}$$

2- چې د کسر په مخخروج کې یو جذري حل موجود وي او د جذر درجه یې د (2) څخه پوره وي لکه $\frac{2x^2}{\sqrt{x}}$ ، $\frac{3}{\sqrt{x}}$ ، $\frac{x}{\sqrt{3}}$ او داسې نور.

د داسې کسرو د مخخروج د گویا کولو لپاره صورت او مخخروج د مخخروج په جذري حد کې ضربوو. او د جذر د درجې او د توان د تفاضل په اندازه توان ورکوو.

$$1 - \frac{x}{\sqrt[3]{x}} = \frac{x^3 \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x} \times \sqrt[3]{x^2}} = \frac{x^3 \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x \times x^2}} = \frac{x^3 \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^3}} = \frac{x^3 \sqrt[3]{x^2}}{x} = \sqrt[3]{x^2}$$

$$2 - \frac{3}{\sqrt[5]{x}} = \frac{3^5 \sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[5]{x} \times \sqrt[5]{x^4}} = \frac{3^5 \sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[5]{x \times x^4}} = \frac{3^5 \sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[5]{x^5}} = \frac{3^5 \sqrt[5]{x^4}}{x}$$

$$3 - \frac{2x^2}{\sqrt[7]{x}} = \frac{2x^2 \times \sqrt[7]{x^6}}{\sqrt[7]{x} \times \sqrt[7]{x^6}} = \frac{2x^2 \times \sqrt[7]{x^6}}{\sqrt[7]{x \times x^6}} = \frac{2x^2 \sqrt[7]{x^6}}{\sqrt[7]{x^7}} = \frac{2x^2 \sqrt[7]{x^6}}{x} = 2x \sqrt[7]{x^6}$$

3- چې د کسر مخخروج کې دوه جذري حدونه موجود وي او د جذر درجه یې (2) وي.

لکه $\frac{x^3-x}{\sqrt{x^3}-\sqrt{x}}$ ، $\frac{x-11}{\sqrt{x}-\sqrt{11}}$ ، $\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ او داسې نور.

صورت او مخخروج د مخخروج په مزدوج کې ضربوو.

$$1: \frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{(x-y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})} = \frac{(x-y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{\sqrt{x}^2 - \sqrt{y}^2} \\ = \frac{(x-y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{x-y} = \sqrt{x}-\sqrt{y}$$

$$2: \frac{x-11}{\sqrt{x}-\sqrt{11}} = \frac{(x-11)(\sqrt{x}+\sqrt{11})}{(\sqrt{x}-\sqrt{11})(\sqrt{x}+\sqrt{11})} = \frac{(x-11)(\sqrt{x}+\sqrt{11})}{\sqrt{x}^2 - \sqrt{11}^2} \\ = \frac{(x-11)(\sqrt{x}+\sqrt{11})}{x-11} = \sqrt{x}+\sqrt{11}$$

$$3: \frac{x^3-x}{\sqrt{x^3}-\sqrt{x}} = \frac{(x^3-x)(\sqrt{x^3}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x^3}-\sqrt{x})(\sqrt{x^3}+\sqrt{x})} = \frac{(x^3-x)(\sqrt{x^3}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x^3})^2 - (\sqrt{x})^2} \\ = \frac{(x^3-x)(\sqrt{x^3}+\sqrt{x})}{x^3-x} = \sqrt{x^3}+\sqrt{x}$$

4- چې د کسریه مخرګ کې دوه حدونه موجود وي او د جذر درجې یې د (2) څخه زیاتې وي

$$\text{لکه: } \frac{x-3}{\sqrt[5]{x}+\sqrt[5]{3}}, \frac{1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{5}}$$

که د جذري حدو تر منځ علامه منفي وه د $a^n - b^n$ د مطابقت د تجزیې دویم قوس کې صورت او مخرګ ضربوو او که د منځ علامه یې مثبت وه نو د $a^n + b^n$ د مطابقت د تجزیې دویم قوس کې صورت او مخرګ ضربوو.

$$\begin{aligned} 1: \quad \frac{1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{5}} &= \frac{1(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{5x} + \sqrt[3]{5^2})}{(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{5})(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{5x} + \sqrt[3]{5^2})} \\ &= \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{5x} + \sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{x^3} + \sqrt[3]{5x^2} + \sqrt[3]{25x} - \sqrt[3]{5x^2} - \sqrt[3]{25x} - \sqrt[3]{5^3}} \\ &= \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{5x} + \sqrt[3]{25}}{x-5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2: \quad \frac{x-3}{\sqrt[5]{x}+\sqrt[5]{3}} &= \frac{(x-3)(\sqrt[5]{x^4} - \sqrt[5]{3x^3} + \sqrt[5]{9x^2} - \sqrt[5]{27x} + \sqrt[5]{81})}{(\sqrt[5]{x}+\sqrt[5]{3})(\sqrt[5]{x^4} - \sqrt[5]{3x^3} + \sqrt[5]{9x^2} - \sqrt[5]{27x} + \sqrt[5]{81})} \\ &= \frac{(x-3)(\sqrt[5]{x^4} - \sqrt[5]{3x^3} + \sqrt[5]{9x^2} - \sqrt[5]{27x} + \sqrt[5]{81})}{\sqrt[5]{x^5} - \sqrt[5]{3x^4} + \sqrt[5]{9x^3} - \sqrt[5]{27x^2} + \sqrt[5]{81x} + \sqrt[5]{3x^4} - \sqrt[5]{9x^3} + \sqrt[5]{27x^2} - \sqrt[5]{81x} + \sqrt[5]{243}} \\ &= \frac{(x-3)(\sqrt[5]{x^4} - \sqrt[5]{3x^3} + \sqrt[5]{9x^2} - \sqrt[5]{27x} + \sqrt[5]{81})}{x+3} \\ &= \sqrt[5]{x^4} - \sqrt[5]{3x^3} + \sqrt[5]{9x^2} - \sqrt[5]{27x} + \sqrt[5]{81} \end{aligned}$$

تمرین:

د لاندې کسرو مخرونه ګویا کړئ؟

$\frac{3}{\sqrt[3]{x}} - 5$	$\frac{3x}{\sqrt{x}} - 4$	$\frac{x-1}{\sqrt{x}} - 3$	$\frac{x}{\sqrt{x}} - 2$	$\frac{2}{\sqrt{x}} - 1$
$\frac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}} - 10$	$\frac{x-1}{\sqrt{x}+1} - 9$	$\frac{x-1}{\sqrt[5]{x}} - 8$	$\frac{x+1}{\sqrt[5]{x}} - 7$	$\frac{2x}{\sqrt[4]{x}} - 6$
$\frac{x}{\sqrt{x^3}-\sqrt{x}} - 15$	$\frac{m-n}{\sqrt[3]{m}-\sqrt[3]{n}} - 14$	$\frac{x+2}{\sqrt[5]{x}+\sqrt[5]{2}} - 13$	$\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1} - 12$	$\frac{x}{\sqrt{x^3}+\sqrt{x}} - 11$

قسمي کسرونه:

که د دوه کسرونو د مجموعې څخه یو واقعي کسر جوړ شي، دغه کسرونه د واقعي کسر قسمي کسرونه دي.

$$\frac{2}{x+1} + \frac{3}{x+5} = \frac{2(x+5) + 3(x+1)}{(x+1)(x+5)} = \frac{2x+10+3x+3}{x^2+6x+5} = \frac{5x+13}{x^2+6x+5}$$

یو واقعي کسر دی د $\frac{2}{x+1} + \frac{3}{x+5}$ څخه لاس ته راغلی دی نو $\frac{2}{x+1}$ او $\frac{3}{x+5}$ کسرونه یې قسمي کسرونه دي.

د یوه واقعي کسر د قسمي کسرو پیدا کول:

د قسمي کسرو د پیدا کولو لپاره د واقعي کسر مخرګ تجزیه کوو د مخرګ د ضربې عواملو شمېر د قسمي کسرونو شمېر ښیي. د مخرګ د ضربې عواملو په لحاظ د واقعي کسر د قسمي کسرو پیدا کول په څلورو حالتونو کې مطالعه کوو.

1- چې د کسر د مخرګ ضربې عوامل غیر تکراري ښوونه وي هر ښووم د یوه کسر مخرګ دی صورت یې د الفباء په غټو حروفو ښیو عملیې پرې اجراء کوو د حروفو قیمتونه پیدا کوو د هغوي په عوض یې وضع کوو د واقعي کسر قسمي کسرونه لاس ته راځي. قسمي کسرونه پیدا کړئ؟

$$\frac{8x+51}{x^2+13x+42} = \frac{8x+51}{(x+6)(x+7)} = \frac{A}{x+6} + \frac{B}{x+7} = \frac{A(x+7) + B(x+6)}{(x+6)(x+7)}$$

$$\frac{8x+51}{x^2+13x+42} = \frac{A(x+7) + B(x+6)}{x^2+13x+42}$$

مخرجونه یې مساوي دی نو $8x+51 = A(x+7) + B(x+6)$

د A او B د قیمتو د پیدا کولو لپاره دوه حالتونه موجود دي.

الف: د جذر پواسطه د A او د B قیمتونه پیدا کوو نو د هر قوس جذر پیدا کوو.

$$x+7=0$$

$$x=-7$$

-7 د x په عوض وضع کوو.

$$8(-7) + 51 = A(-7 + 7) + B(-7 + 6)$$

$$-56 + 51 = A(0) + B(-1)$$

$$-5 = 0 - B$$

$$-B = -5$$

$$B = 5$$

$$x + 6 = 0$$

$$x = -6$$

6- په معادله کې د x په عوض وضع کوو.

$$8(-6) + 51 = A(-6 + 7) + B(-6 + 6)$$

$$-48 + 51 = A(1) + B(0)$$

$$3 = A$$

$$A = 3$$

د A په عوض 3 او د B په عوض 5 وضع کوو.

$$\frac{3}{x+6} + \frac{5}{x+7}$$

پورتنی کسرونه د $\frac{8x+51}{x^2+13x+42}$ قسمي کسرونه دي.

ب: د عینیت پواسطه:

$$8x + 51 = A(x + 7) + B(x + 6)$$

$$8x + 51 = Ax + 7A + Bx + 6B$$

$$8x + 51 = Ax + Bx + 7A + 6B$$

$$8x + 51 = (A + B)x + 7A + 6B$$

په عینیت کې د مشابه حدو ضریبونه مساوي وي.

$$A + B = 8$$

$$7A + 6B = 51$$

$$7A + 7B = 56$$

$$-7A + 6B = \pm 51$$

$$B = 5$$

$$A + B = 8 \rightarrow A = 8 - 5 = 3$$

$$A = 3$$

2- چې د کسر د مخرج ضربي عوامل تکراري بینومونه وي.

مثال: $\frac{5x^2+12x+2}{x^3+2x^2+x}$ قسمي کسرونه پيدا کړئ؟

$$\frac{5x^2 + 12x + 2}{x^3 + 2x^2 + x} = \frac{5x^2 + 12x + 2}{x(x^2 + 2x + 1)} = \frac{5x^2 + 12x + 2}{x(x+1)^2}$$

$$\frac{5x^2 + 12x + 2}{x^3 + 2x^2 + x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

$$\frac{5x^2 + 12x + 2}{x(x+1)^2} = \frac{A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx}{x(x+1)^2}$$

مخرجونه يې مساوي دي نو صورتونه يې هم مساوي دي.

$$5x^2 + 12x + 2 = A(x^2 + 2x + 1) + Bx^2 + Bx + Cx$$

$$= Ax^2 + 2Ax + A + Bx^2 + Bx + Cx$$

$$= Ax^2 + Bx^2 + 2Ax + Bx + Cx + A$$

$$5x^2 + 12x + 2 = (A+B)x^2 + (2A+B+C)x + A$$

$$A + B = 5$$

$$2A + B + C = 12$$

$$A = 2$$

$$A + B = 5 \rightarrow 2 + B = 5 \quad B = 5 - 2 = 3$$

$$B = 3$$

$$2A + B + C = 12$$

$$2 \times 2 + 3 + C = 12$$

$$4 + 3 + C = 12$$

$$7 + C = 12$$

$$C = 12 - 7$$

$$C = 5$$

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{x+1} + \frac{5}{(x+1)^2}$$

3- چې د کسر د مخرج ضربي عوامل غېر تکراري ترينومونه وي، او د تجزيې وړ هم نه وي هغه کسر چې مخرج يې ترينوم وي په صورت کې يې بينوم لیکو.

مثال: $\frac{5x^2+20x+21}{x(x^2+5x+7)}$ قسمي کسرونه پيدا کړي؟

$$\frac{5x^2+20x+21}{x(x^2+5x+7)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+5x+7} = \frac{A(x^2+5x+7) + x(Bx+C)}{x(x^2+5x+7)}$$

$$\frac{5x^2+20x+21}{x(x^2+5x+7)} = \frac{A(x^2+5x+7) + x(Bx+C)}{x(x^2+5x+7)}$$

مخرجونه يې مساوي دی نو.

$$5x^2+20x+21 = A(x^2+5x+7) + x(Bx+C)$$

$$5x^2+20x+21 = Ax^2+5Ax+7A+Bx^2+Cx$$

$$5x^2+20x+21 = Ax^2+5Ax+7A+Bx^2+Cx$$

$$5x^2+20x+21 = (A+B)x^2 + (5A+C)x + 7A$$

$$A+B=5$$

$$5A+C=20$$

$$7A=21$$

$$A=3$$

$$A+B=5 \Rightarrow 3+B=5 \Rightarrow B=5-3=2$$

$$B=2$$

$$5A+C=20$$

$$5 \times 3 + C = 20$$

$$15 + C = 20$$

$$C = 20 - 15$$

$$C = 5$$

$$\frac{3}{x} + \frac{2x+5}{x^2+5x+7}$$

پورتني کسرونه د راځي شوي واقعي کسر قسمي کسرونه دي.

4- چې د کسر د مخرج ضربي عوامل تکراري ترينومونه وي. لکه:

$$\frac{2x^3+7x^2+14x+5}{(x^2+3x+5)^2}$$

قسمي کسرونه يې داسې پيدا کوو.

$$\frac{2x^3 + 7x^2 + 14x + 5}{(x^2 + 3x + 5)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 3x + 5} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 3x + 5)^2}$$

$$= \frac{(Ax + B)(x^2 + 3x + 5) + Cx + D}{(x^2 + 3x + 5)^2}$$

$$\frac{2x^3 + 7x^2 + 14x + 5}{(x^2 + 3x + 5)^2} = \frac{Ax^3 + 3Ax^2 + 5Ax + Bx^2 + 3Bx + 5B + Cx + D}{(x^2 + 3x + 5)^2}$$

مخرجونه يې مساوي دي نو:

$$2x^3 + 7x^2 + 14x + 5 = Ax^3 + 3Ax^2 + Bx^2 + 5Ax + 3Bx + Cx + D + 5B$$

$$2x^3 + 7x^2 + 14x + 5 = Ax^3 + (3A + B)x^2 + (5A + 3B + C)x + D + 5B$$

$$A = 2$$

$$3A + B = 7$$

$$3 \times 2 + B = 7 \Rightarrow 6 + B = 7 \Rightarrow B = 7 - 6$$

$$B = 1$$

$$5A + 3B + C = 14$$

$$5 \times 2 + 3 \times 1 + C = 14$$

$$10 + 3 + C = 14$$

$$3 + C = 14$$

$$C = 14 - 13$$

$$C = 1$$

$$5B + D = 5$$

$$5 \times 1 + D = 5$$

$$5 + D = 5$$

$$D = 5 - 5$$

$$D = 0$$

$$\frac{2x + 1}{x^2 + 3x + 5} + \frac{x}{(x^2 + 3x + 5)^2}$$

دریم فصل

معادله یا شرطیه مساوات

معادله هغه مساوات دی چې د مجهول په بعضو قیمتو یې دواړه خواوې مساوي وي.

لکه $5x + 3 = 13$ چې د $x = 2$ لپاره یې دواړه خواوې مساوي دي.

دغسې مساوات ته شرطیه مساوات وايي.

د معادلې اقسام:

معادله دېر قسمونه لري.

- 1- یو مجهوله اوله درجه معادله
- 2- دوه مجهوله اوله درجه معادله
- 3- درې مجهوله اوله درجه معادله
- 4- څلور مجهوله اوله درجه معادله
- 5- یو مجهوله دویمه درجه معادله
- 6- یو مجهوله دریمه درجه معادله
- 7- یو مجهوله څلورمه درجه معادله
- 8- جذري معادلي
- 9- اکسپوننیشل معادلي
- 10- لوگاریتمي معادلي
- 11- مثلثاتي معادلي

اول: یو مجهوله اوله درجه معادله:

هغه معادله ده چې مجهول یې یو او د مجهول درجه یې هم یوه وي.

عمومي شکل یې دا دی $ax + b$ چې a او b ثابت عددونه دي او x مجهول دی څرنگه چې د x توان یو دی نو ځکه ورته یو مجهوله اوله درجه معادله وايي.

د معادلې خواص

- 1- که د معادلې د دواړو خواوو سره عین عدد جمع شي په معادله کې تغیر نه راځي.
- 2- که د معادلې د دواړو خواوو څخه عین عدد منفي شي په معادله کې تغیر نه راځي.
- 3- که د معادلې دواړه خواوې په عین عدد کې ضرب شي په معادله کې تغیر نه راځي.
- 4- که د معادلې دواړه خواوې په عین عدد تقسیم شي په معادله کې تغیر نه راځي.
- 5- که د معادلې دواړه خواوې په عین توان رفع شي په معادلې کې تغیر نه راځي.
- 6- که د معادلې دواړه خواوې تر عین جذر لاندې شي په معادله کې تغیر نه راځي.

د یو مجهوله اوله درجه معادلې د حل طریقې:

که د معادلې دواړه خواوې ته حدونه موجود وي نو معلوم عددونه د مساوات ښی خواته او مجهول حدونه د مساوات پېښې خواته وړو.

هر حد چې د مساوات د یوې خوا څخه بلې خوا ته وړل کیږي که مثبت وي منفي کیږي که منفي وي مثبت کیږي که د ضرب په حالت کې وي په بل طرف کې مخرج ته ځي او که په مخرج کې وي په بل طرف کې ضربیږي.

مثال:

1: $x + 5 = 8$	$x = 8 - 5$	$x = 3$	
2: $x - 7 = 11$	$x = 11 + 7$	$x = 18$	
3: $3x = 36$	$\frac{3x}{3} = \frac{36}{3}$	$x = 12$	
4: $\frac{x}{5} = 4$	$5 \times \frac{x}{5} = 4 \times 5$	$x = 20$	
5: $\frac{5}{x} - 3 = -2$	$\frac{5}{x} = -2 + 3$	$\frac{5}{x} = \frac{1}{1}$	$x = 5$
6: $\frac{3}{x} + \frac{7}{x} + \frac{2}{x} = 36$			
$\frac{3 + 7 + 2}{x} = 36$			

$$\frac{12}{x} = 36$$

$$\frac{36x}{36} = \frac{12}{36}$$

$$\frac{12}{x} = \frac{36}{1}$$

$$x = \frac{1}{3}$$

$$36x = 12$$

جذري معادلی

هغه معادلی دي چې مجهول يې تر جذر لاندې وي

$$\sqrt{3x+30} + 11 = 17 \quad \text{لکه}$$

د جذري معادلو د حل طريقه:

يو جذري حد د مساوات يوی خواته پرېږدو نور جذري او غېر جذري حدونه د مساوات بلې خواته وړو. بيا د مساوات دواړه خواوې د جذريه درجه رفع کوو جذر د منځه ځي. که بيا هم په معادله کې جذر موجود و عملیه تکراروو.

1- مثال:

$$\sqrt{5x-4} + 8 = 14$$

$$\sqrt{5x-4} = 14 - 8 = 6$$

$$\sqrt{5x-4} = 6$$

$$(\sqrt{5x-4})^2 = 6^2$$

$$5x - 4 = 36$$

$$5x = 36 + 4 = 40 \Rightarrow 5x = 40 \Rightarrow \frac{5x}{5} = \frac{40}{5} \Rightarrow x = 8$$

$$x = 8$$

2- مثال:

$$\sqrt{3x-2} + \sqrt{5x+6} = 10$$

$$\sqrt{3x-2} = 10 - \sqrt{5x+6}$$

$$(\sqrt{3x-2})^2 = (10 - \sqrt{5x+6})^2$$

$$3x - 2 = 100 - 20\sqrt{5x+6} + 5x + 6$$

$$2x + 108 = -20\sqrt{5x + 6}$$

$$\frac{2x + 108}{2} = \frac{-20\sqrt{5x + 6}}{2}$$

$$x + 54 = -10\sqrt{5x + 6}$$

$$(x + 54)^2 = (-10\sqrt{5x + 6})^2$$

$$x^2 + 108x + 2916 = 100(5x + 6)$$

$$x^2 + 108x + 2916 = 500x + 600$$

$$x^2 + 108x - 500x + 2916 - 600 = 0$$

$$x^2 - 392x + 2316 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 196^2 - 1 \times (2316)$$

$$\Delta = 38416 - 2316 = 36100$$

$$\Delta = 36100$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-196) \pm \sqrt{36100}}{2 \times 1} = \frac{196 \pm 190}{2}$$

$$x_1 = \frac{386}{2} = 193$$

$$x_2 = \frac{196 - 190}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

3- مثال:

$$\sqrt{3x - 1} - \sqrt{3x + 4} = -1 \Rightarrow \sqrt{3x - 1} = \sqrt{3x + 4} - 1$$

$$(\sqrt{3x - 1})^2 = (\sqrt{3x + 4} - 1)^2$$

$$3x - 1 = 3x + 4 - 2\sqrt{3x + 4} + 1$$

$$2\sqrt{3x + 4} = 6$$

$$(2\sqrt{3x + 4})^2 = 6^2$$

$$4(3x + 4) = 36$$

$$12x + 16 = 36 \Rightarrow 12x = 36 - 16 \Rightarrow 12x = 20 \Rightarrow \frac{12x}{4} = \frac{20}{4}$$

$$3x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$$

$$\sqrt{x} + \sqrt{x-7} = \frac{21}{\sqrt{x-7}}$$

$$\sqrt{x} = \frac{21}{\sqrt{x-7}} - \sqrt{x-7}$$

$$(\sqrt{x})^2 = \left(\frac{21}{\sqrt{x-7}} - \sqrt{x-7} \right)^2$$

$$x = \frac{441}{x-7} - 2 \left(\frac{21}{\sqrt{x-7}} \times \sqrt{x-7} \right) + x - 7$$

$$\frac{441}{x-7} - 49 = 0 \Rightarrow 49x - 343 = 441 \Rightarrow 49x = 441 + 343 = 784$$

$$49x = 784$$

$$\frac{49x}{49} = \frac{784}{49} \Rightarrow x = 16$$

$$x = 16$$

تمرین

لاندی جذری معادلی حل کریں

$$1. \sqrt{x^2 + 7x} - \sqrt{x+9} = 0 \quad x = 1$$

$$2. \frac{2x^2 - 128}{\sqrt{3+x^2}} = 0 \quad x = 8$$

$$3. \sqrt{x} + \sqrt{x+3} = \frac{91}{\sqrt{x+13}} \quad x = 36$$

$$4. \frac{ax-1}{\sqrt{ax+1}} = 4 + \frac{\sqrt{ax}-1}{2} \quad x = \frac{81}{a}$$

$$5. \sqrt[5]{x+8} = \sqrt[10]{x^2 + 64x + 36} \quad x = \frac{7}{12}$$

$$6. \frac{x-1}{\sqrt{x+1}} = 4 + \frac{\sqrt{x}-1}{2} \quad x = 81$$

$$7. \sqrt{x+13} - \sqrt{2x+1} = 0 \quad x = 12$$

$$8. \sqrt{x} + \sqrt{x - \sqrt{1-x}} = 1 \quad x = \frac{16}{25}$$

$$9. \sqrt{x} + 5 = 6 - \sqrt{x+7}$$

$$x = 9$$

$$10. 2(x+2) = 1 + \sqrt{4x^2 + 9x + 14}$$

$$x = \frac{5}{3}$$

تمرین:

$$1. \frac{5-x}{4} + \frac{x}{8} = 1$$

$$2. \frac{2}{x} - 3 = \frac{3}{x} - 8$$

$$3. \frac{4}{x-3} + \frac{5}{x-3} + \frac{7}{x-3} = 6$$

$$4. \frac{x}{2} - \frac{2x-8}{5} + \frac{4}{5} = 3$$

$$5. \frac{x-1}{4} + \frac{x-2}{3} + \frac{x-3}{2} + x - 4 = 4$$

$$6. \frac{2}{x} + \frac{3}{x+1} = 2$$

څلورم فصل

دوه مجهوله معادلې

هغه معادلې دي چې دوه مجهوله ولري او د هر مجهول توان يې يو وي عمومي شکل يې دا دی.

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

$a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ ثابت عددونه دي x او y مجهولونه دي څرنگه چې د هر مجهول توان يو دی نو ځکه ورته اوله درجه دوه مجهوله معادلې وايي.

مناقشه:

1- که $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ وي سيستم زيات حلونه لري.

2- که $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ وي سيستم حل نلري.

3- که $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ وي سيستم يو حل لري.

د اوله درجه دوه مجهوله معادلو حل:

اوله درجه دوه مجهوله معادلې په (6) طريقو حلېږي.

1- د جمع يا افناء په طريقه:

په دواړو معادلو کې د يوه مجهول ضريبونه مساوي کوو. که هم علامه وه معادلې يو د بل څخه منفي کوو او که مختلف علامه وه معادلې جمع کوو پدې ترتيب د دوه مجهوله معادلو سيستم په يو مجهوله معادله بدلېږي يو مجهوله معادله حلوو او د مجهول قيمت يې پيدا کوو بيا دا جذر د سيستم په يوه معادله کې وضع کوو د دويم مجهول قيمت لاس ته راځي.

مثال: لاندې سيستم حل کړئ؟

$$7x + 8y = 38$$

$$5x + 3y = 19$$

$$\begin{aligned}
 5(7x + 8y) &= 38 \\
 7(5x + 3y) &= 19 \\
 \hline
 35x + 40y &= 190 \\
 \pm 35x \pm 21y &= \pm 133 \\
 \hline
 19y &= 57 \\
 y &= 3 \\
 7x + 8y &= 38 \\
 7x + 8 \times 3 &= 38 \\
 7x + 24 &= 38 \\
 7x &= 38 - 24 \\
 7x &= 14 \\
 x &= 2
 \end{aligned}$$

2- مثال:

$$\begin{aligned}
 3x - 5y &= 2 \\
 4x + 2y &= 20 \\
 \hline
 2(3x - 5y) &= 2 \\
 5(4x + 2y) &= 20 \\
 \hline
 6x - 10y &= 4 \\
 20x + 10y &= 100 \\
 \hline
 26x &= 104 \\
 x &= 4 \\
 4(4) + 2y &= 20 \\
 16 + 2y &= 20 \\
 2y &= 20 - 16 \\
 2y &= 4 \\
 y &= 2
 \end{aligned}$$

تمرین:

لاندې سیستمونه د افناء په طریقہ حل کړئ؟

$$\begin{array}{r} 6x - 8y = 4 \\ 7x - 2y = 12 \end{array}^{-2}$$

$$\begin{array}{r} 5x + 4y = 32 \\ 8x - y = 29 \end{array}^{-1}$$

$$\begin{array}{r} 9x - 2y = -3 \\ 4x + 3y = 57 \end{array}^{-4}$$

$$\begin{array}{r} 6x + 3y = 21 \\ 5x + 7y = 26 \end{array}^{-3}$$

2- په تعویضي طریقہ د دوه مجهوله معادلو حل:

د یوې معادلې څخه د یو مجهول قیمت د بل له جنسه پیدا کوو او په بله معادله کې یې د همغه مجهول په عوض وضع کوو د دوه مجهوله معادلو سیستم په یو مجهوله معادله بدلېږي یو مجهوله معادله حلوو د مجهول قیمت یې پیدا کوو د مجهول دا قیمت د سیستم په یوه معادله کې وضع کوو د بل مجهول قیمت په لاس راځي.

مثال:

$$3x - 11y = 10$$

$$4x + 2y = 30$$

$$x = \frac{11y + 10}{3}$$

$$4\left(\frac{11y + 10}{3}\right) + 2y = 30$$

$$44y + 40 + 6y = 90$$

$$50y = 50$$

$$y = 1$$

$$3x - 11y = 10$$

$$3x - 11 \times 1 = 10$$

$$3x - 11 = 10$$

$$3x = 10 + 11$$

$$3x = 21$$

$$x = 7$$

تمرین:

لاندې سیستمونه په تعویضي طریقې حل کړئ؟

$$\begin{array}{l} 6x - 5y = 20 \\ 7x + 3y = 41 \end{array} \quad \begin{array}{l} 3x + 13y = 25 \\ 2x + 2y = 10 \end{array} \quad \begin{array}{l} -1 \\ -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x - 2y = 1 \\ 2x + y = 12 \end{array} \quad \begin{array}{l} 11x + 5y = 53 \\ 8x - 9y = -12 \end{array} \quad \begin{array}{l} -4 \\ -3 \end{array}$$

3- د مساوات په طریقې د اوله درجه دوه مجهوله معادلو حل:

د دواړو معادلو څخه د یو مجهول قیمت د بل مجهول له جنسه پیدا کوو او سره مساوي کوو. یې د دوه مجهوله معادلو سیستم په اوله درجه یو مجهوله معادله بدلیږي یو مجهوله معادله حلوو د مجهول قیمت یې پیدا کوو د مجهول دغه قیمت د سیستم په یوه معادله کې وضع کوو د بل مجهول قیمت لاس ته راځي.

مثال: لاندې سیستم حل کړئ؟

$$3x + 7y = 19$$

$$5x - 2y = 18$$

$$3x + 7y = 19$$

$$5x - 2y = 18$$

$$3x = 19 - 7y$$

$$5x = 18 + 2y$$

$$x = \frac{19 - 7y}{3} \dots \dots \dots I$$

$$x = \frac{18 + 2y}{5} \dots \dots \dots II$$

څرنګه چې په I او II نمبر مساواتو کې چپ طرفونه مساوي دي نو ښي طرفونه یې هم مساوي دي نولیکو.

$$\frac{19 - 7y}{3} = \frac{18 + 2y}{5}$$

$$3(18 + 2y) = 5(19 - 7y)$$

$$54 + 6y = 95 - 35y$$

$$6y + 35y = -54 + 95$$

$$41y = 41$$

$$\frac{41y}{41} = \frac{41}{41}$$

$$y = 1$$

$$3x + 7y = 19$$

$$3x + 7 \times 1 = 19$$

$$3x + 7 = 19$$

$$3x = 19 - 7$$

$$3x = 12$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{12}{3}, \quad x = 4$$

تمرین:

$$7x - 3y = 5$$

$$8x - 4y = 0 \quad -2$$

$$9x - 3y = 21$$

$$8x + 7y = 38 \quad -4$$

$$4x + 2y = 14$$

$$15x - y = 10 \quad -1$$

$$11x + 6y = 40$$

$$2x + 9y = 31 \quad -3$$

4- د دیترمینانت په طریقه د دوه مجهوله اوله درجه معادلو حل:

دیترمینانت په لغت کې (معین یا ثابت) ته وایي او په اصطلاح کې د اعدادو مربعي ترتیب

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \text{ لکه د دیترمینانت وایي لکه}$$

د دیترمینانت پواسطه د دوه مجهوله معادلو حل:

د x او y د ضربود دیترمینانت په D ښو او قیمت یې پیدا کوو. د x د ضربیو په عوض ثابت

عددونه لیکو په D_x یې ښو قیمت یې پیدا کوو بیا د D په دیترمینانت د y د ضربیو په

عوض ثابت عددونه لیکو په D_y یې ښو او قیمت یې پیدا کوو د $\frac{D_x}{D}$ څخه د x قیمت لاس ته

راځي د $\frac{D_y}{D}$ څخه د y قیمت لاس ته راځي.

مثال: $\begin{cases} 3x - 5y = 2 \\ 5x + y = 22 \end{cases}$ د دیترمینانت پواسطه حل کړئ؟

$$D = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

$$D = a_1 b_2 - a_2 b_1 = 3 \times 1 - 5(-5) = 3 + 25 = 28 \Rightarrow D = 28$$

$$D_x = \begin{pmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{pmatrix} = c_1 b_2 - c_2 b_1$$

$$D_x = 2 \times 1 - 22(-5) = 2 + 110 = 112 \quad D_x = 112$$

$$D_y = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{pmatrix} = a_1 c_2 - a_2 c_1$$

$$D_y = 3 \times 22 - 5(2) = 66 - 10 = 56 \quad D_y = 56$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{112}{28} = 4 \quad x = 4$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{56}{28} = 2 \quad y = 2$$

5- د گراف پواسطه د اوله درجه دوه مجهوله معادلو حل:

په () صفحه د تابع په بحث کې وگورئ.

6- د متریکس پواسطه د اوله درجه دوه مجهوله معادلو حل:

متریکس (Matrixes):

او په اصطلاح کې د اعدادو مستطيلي ته وايي ترتيب ته متریکس وايي. لکه:

$$A = \begin{Bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{Bmatrix}$$

د متریکس په غټو خروغو بنودل کېږي او هغه اعداد يا حروف چې په متریکس کې ليکل کېږي د متریکس د عناصرو په نوم ياديږي.

هغه عناصر چې په افقي ډول ليکل شوي وي د متریکس د سطري په نوم ياديږي او هغه عددونه چې په عمودي ډول ليکل شوي وي د متریکس د ستون په نوم ياديږي د سطرونو شمېر په i او د ستونونو شمېر په j نيسي چې i او j طبيعي عددونه دي. لکه:

$$A = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{mn} \end{Bmatrix}$$

د مټریکس مرتبه:

که د مټریکس د سطرونو شمېر m او د ستونو شمېر یې n وي دغه مټریکس ته $m \times n$ مرتبه مټریکس وايي.

او داسې لیکل کېږي $A = \{a_{ij}\}_{m \times n}$

مثال: لاندې مټریکسونه حل کړئ؟

$$(a_{ij})_{3 \times 2} = (i + j)_{3 \times 2} - 2$$

$$(a_{ij})_{2 \times 2} = (i + j)_{2 \times 2} - 1$$

حل:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$a_{ij} = i + j$$

$$a_{12} = 1 + 2 = 3$$

$$a_{21} = 2 + 1 = 3$$

$$a_{11} = 1 + 1 = 2$$

$$a_{22} = 2 + 2 = 4$$

په نتیجه کې لاندې مټریکس لاس ته راځي.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

د مټریکس ډولونه:

مټریکس په اوه ډوله دی.

1- سطري مټریکس: هغه مټریکس چې یوازې یو سطر ولري لکه $A = [4 \ 5 \ 9]_{1 \times 3}$

2- ستوني مټریکس: هغه مټریکس دی چې یو ستون ولري لکه $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$

3- صفري مټریکس: هغه مټریکس دی چې ټول عناصر یې صفر وي.

$$0_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 0_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4- مربعي مټریکس: هغه مټریکس دی چې د سطرونو شمېر یې د ستونو د شمېر سره مساوي وي.

لکه:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 9 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

مربعي يا مستطيلي متریکسونه دوه قطرونه لري چې يوه ته اصلي قطر يا (Main diagonal) او بل ته (Minor diagonal) فرعي قطر وايي.

$a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ اصلي قطر دی او $a_{21}, a_{12}, \dots, a_{nn}$ فرعي قطر دی.

لاندي متریکسونه څه ډول متریکسونه دي: 1×3 او 4×1

5- قطري متریکس: هغه متریکس دی چې د اصلي قطر څخه په غیر نور عناصري صفر ونه وي.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

6- سکالر متریکس: که د قطري متریکس د اصلي قطر عناصر مساوي وي دې متریکس ته سکالر متریکس وايي.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

7- واحد متریکس: که د قطري متریکس داسې قطر عناصر یو (1) وي نو دې متریکس ته واحد متریکس وايي.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مثلي متریکس: که د یوه متریکس د اصلي قطر لاندي او یا پورته عناصر صفر ونه وي دې متریکس ته مثلي متریکس وايي لکه.
پورتنی مثلي متریکس په لاندي ډول دی.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 8 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

لاندې مثلثي مټریکس دی:

په انګلیسي کې ورته *Upper Tringolar matrix* او *Lower Tringolar matrix* وایي.

متقابل یا متضاد مټریکس:

هغه مټریکسونه چې عناصر یې یو د بل متضاد وي لکه: $A(a_{ij})_{m \times n} = A(-a_{ij})_{m \times n}$

$$-A = \begin{bmatrix} -2 & -4 & +4 \\ -3 & -5 & 2 \\ 1 & -6 & -7 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 3 & 5 & -2 \\ -1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

د مټریکسونو جمع:

د مټریکسونو په جمع کې د مټریکسو د مرتبې مساوات ضرور دي یعنې که a_{ij} او b_{ij} دوه مټریکسونه ولرو کولای شو چې دغه ډول مټریکسونه جمع کړو $a_{ij} + b_{ij} = c_{ij}$

مثال: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$ او $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ مټریکسونه جمع کړئ؟

حل:

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+3 & 2+2 \\ -2+1 & 0+2 \\ 1+0 & 7-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

د مټریکس تفریق:

په تفریق کې هم د مټریکس د تفریقولو لپاره د مټریکس د مرتبو مساوات ضرور دي. که a_{ij} او b_{ij} وي نو

$$a_{ij} - b_{ij} = c_{ij}$$

مثال: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ او $B = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 04 \end{bmatrix}$ دوه متریکسونه راځي شويدي $A - B$ متریکس پیدا کړي؟

$$A - B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 2 - (-2) & -1 - (-1) \\ 3 - 3 & 1 - (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + 2 & -1 + 1 \\ 3 - 3 & +1 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

د متریکسونو د جمع او تفریق خاصیتونه:

1- د متریکسونو جمع د تبدیلی د قانون پیروي کوي مگر د متریکسونو تفریق د تبدیلی د قانون پیروي نه کوي لکه

$$A + B = B + A$$

$$A - B \neq B - A$$

2- د متریکسونو جمع او تفریق د تبدیلی د خاصیت پیروي کوي.

$$(A \pm B) \pm C = A \pm (B \pm C)$$

3- د عینیت عنصر *Identity element*: په جمع کې صدق کوي مگر د متریکسونو په تفریق کې یې نه کوي.

$$A + 0 = 0 + A = A$$

په متریکسونو کې د سکالر ضرب:

په یوه متریکس کې کولای شو چې حقیقي عدد ضرب کړو یعنی که $A = a_{ij}$ او $k \in \mathbb{R}$ وي نو kA د C سره مساوي دی.

مثال: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ او $k = 2$ وي kA پیدا کړي؟

$$kA = 2 \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 1 & 2 \times 3 & 2 \times 6 \\ 2 \times 2 & 2 \times 1 & 2 \times 0 \\ 2 \times 1 & 2 \times 0 & 2(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 12 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

د دوه متريکسونو ضرب:

د متريکس د ضرب لپاره بايد د يوه متريکس د سطرونو شمېر د بل متريکس د ستونو د شمېر سره مساوي وي يعنې که $A = (a_{ij})_{m \times n}$ او $B = (b_{ij})_{n \times p}$ وي کولای شو چې ضرب يې کړو.

$$A_{m \times n} \times B_{n \times p} = C_{m \times p}$$

طريقه يې داسې ده چې د يوه متريکس لمړی سطر د دويم متريکس په ټولو ستونو کې په نوبت سره ضربوو او په اول سطر کې يې ليکو او په همدې ترتيب تر اخره اجرائت کوو د متريکسونو د ضرب حاصل لاس ته راځي.

مثال: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ او $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ وي $A \times B$ پيدا کړئ؟

حل:

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 1 + 2 \times 0 + 0(-1) \\ -1 \times 1 + 0 \times 0 + 0(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 0 + 0 \\ -1 + 0 + 0 \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

مثال: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ او $B = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$ وي $A \times B$ پيدا کړئ؟

$$A \times B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(-3) + (-1)(-4) & 2 \times 4 + (-1)(-3) \\ 1(-3) + 2(-4) & 1 \times 4 + 2(-3) \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} -6 + 4 & 8 + 3 \\ -3 - 8 & 4 - 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 11 \\ -11 & -2 \end{bmatrix}$$

د متريکس د ضرب خواص:

1- د متريکس ضرب عميله د تبديلی د قانون پيروي نه کوي يعنې:

$$A \times B \neq B \times A$$

2- د متريکسونو ضرب د اتحادي خاصيت پيروي کوي.

$$(A \times B)C = A(B \times C)$$

3- د متريکسونو ضرب د توزيعی خاصیت پيروي کوي:

$$A(B + C) = AB + AC$$

د يوه متريکس ترانسپوز متريکس:

که د يوه متريکس سطر په ستون او ستون يې په سطر بدل شي نو متريکس ته ترانسپوز متريکس وايي.

که $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ وي نو $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ته ترانسپوز متريکس وايي په A^T کېږي.

که $A = A^T$ وي نو پدې صورت کې A ته متناظر متريکس وايي.

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{لکه}$$

د ترانسپوز متريکس خواص:

1- ترانسپوز متريکس د خپل لمړني متريکس سره مساوی وي.

$$(A^T)^T = A = [(a_{ij})^T]^T = (a_{ij})A$$

2- د دوه يا څو ترانسپوز متريکسو د جمع او تفریق حاصلونه د لمړنيو متريکسو د جمع د حاصلو او تفریق د حاصلو د ترانسپوز سره مساوي دي.

$$(A \pm B \pm C \pm \dots)^T = A^T + B^T + C^T \dots$$

$$(AB)^T = A^T \times B^T \quad 3$$

$$(\alpha A)^T = \alpha \times A^T \quad 4$$

$$(-A)^T = -A^T \quad 5$$

د ډیترمینانت

مربعی مټریکس ته ډیترمینانت وایي.

لکه که $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ مټریکس ولرو نو $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ یو ډیترمینانت دی او په $[A]$ سره ښودل کیږي.

$a_{11}a_{22}$ اصلي قطار او $a_{12}a_{21}$ ته فرعي قطار وایي.

د ډیترمینانت محاسبه

د اصلي قطار څخه فرعي قطار منفي کړو $[A] = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$

مثال: $[A] = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}$ قیمت پیدا کړئ

$$[A] = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 3 \times 2 - 7 \times 4 = 6 - 28 = -22$$

د ډیترمینانت د حل طریقه

ډیترمینانت په دوه طریقو حلېږي.

1- د ساروس په طریقه 2- د کرامر په طریقه

1- د ساروس د ډیترمینانت په طریقه لول

اول ستون او دریم سطر د منځه وړو او پاتې 2×2 مرتبې ډیترمینانت محاسبه کوو او د تقاطع عدد کې یې ضربوو.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})a_{31}$$

دویم ستون او دریم سطر د منځه وړو او د تقاطع عدد کې یې ضربوو.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21})a_{32}$$

دریم ستون او دریم سطر د منځه وړو او د تقاطع په عدد کې یې ضربوو.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})a_{33}$$

په لاس راغلي عددونه جمع کوو د دیترمینانت قیمت لاس ته راځي

$$|A| = (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})a_{31} + (a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21})a_{32} + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})a_{33}$$

$$|A| = a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{21}a_{32} + a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

مثال: د $|B| = \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & +2 \\ 4 & -1 & +7 \end{vmatrix}$ دیترمینانت حل کړئ

$$1) \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix} = 4(6 \times 2 - (-3 \times 1)) = 4(12 + 3) = 4 \times 15 = 60$$

$$2) \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix} = -1\{2 \times 2 - 5(-3)\} = -1(4 + 15) = -1(19) = -19$$

$$3) \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix} = 7(2 \times 1 - 6 \times 5) = 7(2 - 30) = 7(-28) = -196$$

$$|A| = 60 - 19 - 196 = 60 - 215 = -155$$

دویم- د کرامر په طریقه:

د دیترمینانت دوه لمړي ستونونه د دیترمینانت د باندې لیکو د اصلي قطرو د مجموعې څخه د فرعي قطرو مجموعه منفي کوو د دیترمینانت قیمت لاس ته راځي.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$|A| = \{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}\} - \{a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}\}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{مثال:}$$

$$|B| = \{2 \times 1 \times 7 + 6 \times 2 \times 4 + (-3) \times 5 \times (-1)\}$$

$$- \{6 \times 5 \times 7 + 2 \times 2 \times (-1) + (-3) \times 1 \times 4\}$$

$$|B| = (14 + 48 + 15) - (210 - 4 - 12) = 77 - (210 - 16) = 77 - 194$$

$$= -117$$

$$|B| = -117$$

د دیترمینانت خواص

1- که د $A_{n \times n}$ د ماتریکس د یوه سطر یا یوه ستون ټول عناصر صفروي نو د دیترمینانت د صفرو سره مساوي دی.

$$|B| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0 \quad \text{او} \quad |A| = \begin{vmatrix} 0 & a & d \\ 0 & b & e \\ 0 & c & f \end{vmatrix} = 0$$

1- که د $A_{n \times n}$ ماتریکس دوه سطرونه یا دوه ستونونه سره مساوي وي نو اړوند دیترمینانت يې صفري دي.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = |A| = \begin{vmatrix} a & a & d \\ b & b & e \\ c & c & f \end{vmatrix} = 0$$

2- که د $A_{n \times n}$ د ماتریکس د یوه ستون یا یوه سطر عناصر د بل ستون یا سطر د عناصرو سره ګډ فکتور ولري نو $|A| = 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ \lambda a & \lambda b & \lambda c \\ d & e & f \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = \lambda(0) = 0$$

3- د A د ماتریکس دیترمینانت د A^T د ماتریکس د دیترمینانت سره مساوي دی.
د 2×2 مرتبي ماتریکس ضربي معکوس د معکوس ماتریکس سره د مربعي ماتریکس د ضرب حاصل (1) کیږي.

$$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = 1$$

که د متریکس قیمت $|A| = 0$ وي نو دی متریکس ته *Singular Matrix* وائي او که $|A| \neq 0$ وي نو دی متریکس ته *Non singular Matrix* وايي. هغه متریکسونه چې معکوس لري.

1- چې متریکسونه مربعي وي يعنی د $A_{n \times n}$ شکل ولري.

2- چې $|A| \neq 0$ وي.

مثال: $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$ او $B = \begin{bmatrix} -7 & -3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ متریکسونه یو د بل معکوس دي. حل:-

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & -3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (-1)(-7) + 3(-2) & (-1)(-3) + 3(-1) \\ 2(-7) + (-7)(-2) & 2(-3) + (-7)(-1) \end{bmatrix} \\ AB &= \begin{bmatrix} 7-6 & 3-3 \\ -14+14 & -6+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$BA = \begin{bmatrix} -7 & -3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7-6 & -21+21 \\ 2-2 & -6+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ليدل کيږي چې $AB = BA = 1$ دي نو A او B یو د بل معکوس دي.

الحاقي متریکس *Adjoin of Matrix*

که د یوه متریکس د اصلي قطر د عناصرو ځایونه بدل شي او د فرعي قطر د عناصرو علامی تغیر شي دغه متریکس ته الحاقي متریکس وايي.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Adj}A = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Adj}A = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

الحاقي متریکس د یوه متریکس د معکوس متریکس د لاس ته راوړلو لپاره استعمالیږي. طریقه یې داسې ده چې د الحاقي متریکس د دیترمینانت د قیمت په معکوس کې ضربوو د راکړ شوي متریکس معکوس متریکس لاس ته راځي.

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}A}{|A|}$$

مثال :- د $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ معکوس متریکس پیدا کړئ؟

حل :- $|A| = -3(6) - (-2)(5) = -18 + 10 = -8$

$$A^{-1} = -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{8} & -\frac{2}{8} \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{9}{4} - \frac{5}{4} & \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \\ -\frac{15}{4} + \frac{15}{4} & -\frac{5}{4} + \frac{9}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

په عمومي ډول ویلای شو چې که د $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ په متریکس کې $|A| \neq 0$ وي نو دغه متریکس معکوس لري او د لاندې فارمول پواسطه پیدا کیږي.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

تمرین

د لاندې متریکسو معکوس متریکس پیدا کړئ

a: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -10 & -2 \end{pmatrix}$

b: $B = \begin{pmatrix} 5 & 19 \\ 4 & 15 \end{pmatrix}$

د متریکس پواسطه د دوه مجهوله معادلو حل

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

په پورته ډول د دوه مجهوله معادلو یو سیستم راکړ شوی دی غواړو چې د متریکس پواسطه یې حل کړو د x او y د ضریبو متریکس په $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ د ثابت عددو متریکس په B ښی. او د x او y متریکس په X ښیو.

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ او } B = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

نوليکو چې:

$$AX = B \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B = (A^{-1}A)X = A^{-1}B \Rightarrow 1X = A^{-1}B$$

$$X = A^{-1}B \quad \text{يا}$$

مثال: لاندې دوه مجهوله معادلو سيستم د متريکس په طريقه حل کړئ؟

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$$

حل:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0$$

$$\text{Adj } A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 5 & -2 \times 7 \\ -1 \times 5 & 1 \times 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -14 \\ -5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$x = 1 \quad \& \quad y = 2$$

تمرین

لاندې د دوه مجهوله معادلو سيستمونه د متريکس په طريقه حل کړئ:

$$\begin{cases} 5x - 2y = 2 \\ 3x - y = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 4x - 6y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 3p - 5q = 7 \\ 2p - 4q = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 5x - 2y = 2 \end{cases}$$

د گوس Goose طريقه د افنا طريقه ده.

په همدې ترتيب کولای شو چې څلور مجهوله، پنځه مجهوله او نورې څو مجهوله معادلې په مختلفو طريقو حل کړو.

پنجم فصل

دویمه درجه یو مجهوله معادلی

هغه معادلی دي چې یو مجهول ولري او د مجهول توان یې دوه وي. عمومي شکل یې دادي:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

په دغه عمومي شکل کې a, b, c ثابت عددونه دي (x) مجهول دې څرنگه چې د مجهول توان دوه دی نو ځکه ورته دویمه درجه یو مجهوله معادله وایي.

خصوصي حالتونه

1- که $b=c=0$ وي معادله لاندې شکل غوره کوي $ax^2 = 0$ ددغې معادلې دواړه جذرونه صفر دي. یعنې :

$$x_1 = 0 \quad \& \quad x_2 = 0$$

2- که $c = 0$ وي نو معادله لاندې شکل غوره کوي:

$$ax^2 + bx = 0$$

(x) مشترک نيسو او معادله د دوه قوسو په حاصل ضرب بدلوو بیا هر قوس په نښت سره د صفر سره مساوي کوو او د معادلې جذرونه پیدا کوو.

$$ax^2 + bx = x(ax + b) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$ax + b = 0$$

$$ax = -b$$

$$\frac{ax}{a} = \frac{-b}{a}$$

$$x_2 = -\frac{b}{a}$$

مثال: $5x^2 + 11x = 0$ معادله حل کړئ.

حل:

$$5x^2 + 11x = x(5x + 11) = 0$$

$$cx_1 = 0$$

$$5x + 11 = 0$$

$$5x = -11$$

$$\frac{5x}{5} = \frac{-11}{5}$$

$$x_2 = -\frac{11}{5}$$

3- که $b = 0$ وي نو معادله لاندې شکل غوره کوي $ax^2 + c = 0$

د دغسې معادلو د حل کافي او لازمي شرط دادې چې a او c بايد مختلف علامه وي. او که نه نو د حقيقي اعدادو په سيټ کې حل نلري. د مختلطو اعدادو په سيټ کې حل لري.

مثال: $3x^2 - 12 = 0$ معادله حل کړئ

حل:

$$3x^2 - 12 = 0$$

$$3x^2 = 12$$

$$\frac{3x^2}{3} = \frac{12}{3}$$

$$x^2 = 4$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{4}$$

$$x_1 = 2 \quad \& \quad x_2 = -2$$

تمرین

لاندې معادلې حل کړئ؟

$$1: 5x^2 + 21x = 0 \quad 2: 11x^2 - 22x = 0 \quad 3: 2x^2 + 28x = 0$$

$$4: 7x^2 - 63 = 0 \quad 5: 4x^2 + 16 = 0 \quad 6: -7x^2 + 28 = 0$$

د دویمه درجه یو مجهوله معادلو د عمومي شکل د حل طریقې

دویمه درجه یو مجهوله معادلې په څلورو طریقو حلېږي.

1- د تجزیې پواسطه د دویمه درجه یو مجهوله معادلو حلول

2- د تکمیل مربع پواسطه د دویمه درجه یو مجهوله معادلو حلول

3- د محمد بن موسی د فارمول پواسطه د دویمه درجه یو مجهوله معادلو حلول

4- د گراف پواسطه د دویمه درجه یو مجهوله معادلو حلول

1- د تجزیې پواسطه د یو مجهوله دویمه درجه معادلو حل:

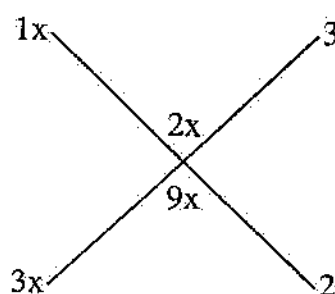
(a) او (c) تجزیه کوو د ضربی عواملو څخه یې داسې یوه یوه جوړه ضربی عوامل راڅلو چې د ضرب حاصلونو مجموعه یې (b) شی بیا دغه ضربی عوامل په چارت کې لیکو او د چارت له مخې قوسونه جوړوو او د هر قوس جذر پیدا کوو د معادلې جذرونه لاس ته راځي.

مثال: $3x^2 + 11x + 6 = 0$ معادله د تجزیې پواسطه حل کړئ:

$$a = 3 = 1 \cdot 3 = -1(-3)$$

$$c = 6 = 2 \cdot 3 = 1 \cdot 6 = -2(-3) = -1(-6)$$

$$b = 11$$



$$(x + 3)(3x + 2) = 0$$

$$x + 3 = 0$$

$$x_1 = -3$$

$$3x + 2 = 0$$

$$3x = -2$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{-2}{3}$$

$$x_2 = -\frac{2}{3}$$

2- د تکمیل مربع پواسطه د دویمه درجه یو مجهوله معادلو حل:

فرضاً د $5x^2 - 17x + 6 = 0$ معادله راګرځوی ده غواړو چې د تکمیل مربع پواسطه یې حل کړو ټول حدونه د x^2 په ضریب ویشو.

$$\frac{5x^2}{5} - \frac{17x}{5} + \frac{6}{5} = 0$$

$$x^2 - \frac{17}{5}x + \frac{6}{5} = 0$$

$$x^2 - \frac{17}{5}x = -\frac{6}{5}$$

$$x^2 - \frac{17}{5}x + \left(\frac{17}{10}\right)^2 = \left(\frac{17}{10}\right)^2 - \frac{6}{5}$$

$$\left(x - \frac{17}{10}\right)^2 = \frac{289}{100} - \frac{6}{5} = \frac{289 - 120}{100} = \frac{169}{100}$$

$$\sqrt{\left(x - \frac{17}{10}\right)^2} = \sqrt{\frac{169}{100}}$$

$$x - \frac{17}{10} = \pm \frac{13}{10}$$

$$x = \frac{17}{10} \pm \frac{13}{10} = \frac{17 \pm 13}{10}$$

$$x_1 = 3 \quad x_2 = \frac{2}{5} = 0.4$$

3- د محمد بن موسی د فارمول پواسطه د دویمه درجه یو مجهوله معادلو حل:

لمړې د محمد بن موسی فارمول ثبوتوو.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = \frac{0}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

داساتيا لپاره $b^2 - 4ac$ په Δ نښو:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

نو:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

د (Δ) په باب درې حالتونه موجود دي.

1- چې $\Delta > 0$ وي معادله دوه جذرونه لري او جذرونه يې:

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

په واسطه پيدا كيږي.

2- چې $\Delta = 0$ وي معادله يو جذر لري او جذر يې د $x = \frac{-b}{2a}$ په واسطه پيدا كيږي.

3- چې $\Delta < 0$ وي معادله د حقيقي اعدادو په سيټ کې جذرونه لري.

مثال: لاندې معادله حل کړئ؟

$$7x^2 - 13x - 24 = 0$$

حل:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-13)^2 - 4 \times 7 \times (-24)$$

$$\Delta = 169 + 672 = 841$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-13) + \sqrt{841}}{2 \times 7} = \frac{13 + 29}{14} = \frac{42}{14} = 3$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-13) - \sqrt{841}}{2 \times 7} = \frac{13 - 29}{14} = \frac{-16}{14} = -\frac{8}{7}$$

$$x_1 = 3 \quad x_2 = -\frac{8}{7}$$

مثال: لاندې معادله حل کړئ؟

$$9x^2 + 30x + 25 = 0$$

حل:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 30^2 - 4 \times 9 \times 25 = 900 - 900 = 0$$

$$\Delta = 0$$

معادله یو جذر لري.

$$x = \frac{-b}{2a} = -\frac{30}{2 \times 9} = -\frac{5}{3}$$

مثال: $2x^2 + 3x + 10 = 0$ معادله حل کړئ؟

حل:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 2 \times 10 = 9 - 80 = -71$$

څرنگه چې $\Delta < 0$ دې نوم معادله جذر نه لري.

تمرین

لاندې معادلې د تجزیې پواسطه حل کړئ.

$$1: 3x^2 + 5x - 42 = 0 \quad 2: 7x^2 - 29x + 4 = 0 \quad 3: 2x^2 + 3x - 14 = 0$$

لاندې معادلې د تکمیل مربع پواسطه حل کړئ.

$$1: 11x^2 - 17x - 48 = 0 \quad 2: 13x^2 + 7x - 360 = 0 \quad 3: 8x^2 - 65x + 102 = 0$$

لاندې معادلې د محمد بن موسی د فارمول پواسطه حل کړئ.

$$1: 2x^2 + 3x - 65 = 0 \quad 2: 9x^2 - 43x + 48 = 0$$

$$3: 25x^2 - 11x - 192 = 0$$

د محمد بن موسی په فارمول کې اختصار

که b جفت وي د b نیمایي په $\frac{b}{2} = \bar{b}$ او $b = 2\bar{b}$ کېږي نو د محمد بن موسی په فارمول کې د b په عوض $(2\bar{b})$ لیکو:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(2\bar{b}) \pm \sqrt{(2\bar{b})^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2\bar{b} \pm \sqrt{4\bar{b}^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-2\bar{b} \pm \sqrt{4(\bar{b}^2 - ac)}}{2a} = \frac{-2\bar{b} \pm 2\sqrt{\bar{b}^2 - ac}}{2a} = \frac{2(-\bar{b} \pm \sqrt{\bar{b}^2 - ac})}{2a}$$

$$= \frac{-\bar{b} \pm \sqrt{\bar{b}^2 - ac}}{a}$$

$$x = \frac{-\bar{b} \pm \sqrt{\bar{b}^2 - ac}}{a}$$

داسانتیا لپاره $\bar{b}^2 - ac$ په Δ ښیو یعنې:

$$\Delta = \bar{b}^2 - ac$$

د Δ په باب هم درې حالتونه موجود دي.

1- که $\Delta > 0$ وي معادله دوه جذرونه لري او جذرونه یې د $x = \frac{-\bar{b} \pm \sqrt{\Delta}}{a}$ پواسطه پیدا کېږي.

2- که $\Delta = 0$ وي معادله یو جذر لري، او جذر یې د $x = \frac{-\bar{b}}{a}$ پواسطه پیدا کېږي.

3- که $\Delta < 0$ وي معادله جذرونه لري.

$$\text{مثال: } 3x^2 + 14x - 40 = 0$$

$$\Delta = \bar{b}^2 - ac = 7^2 - 3(-40) = 49 + 120 = 169$$

$$x = \frac{-\bar{b} \pm \sqrt{\Delta}}{a} = \frac{-14 \pm 13}{3}$$

$$x_1 = -\frac{1}{3} \quad x_2 = -9$$

مثال: $4x^2 + 12x + 9 = 0$ معادله حل کړئ.

$$\Delta = b^2 - ac = 6^2 - 4 \times 9 = 36 - 36 = 0$$

$$\Delta = 0$$

معادله یو جذر لري.

$$x = -\frac{b}{a} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \quad \text{so} \quad x = \frac{3}{2}$$

مثال:- لاندې معادله حل کړئ؟

$$5x^2 - 2x + 4 = 0$$

$$\Delta = b^2 - ac = (-1)^2 - 5 \times 4 = 1 - 20 = -19$$

$$\Delta = -19$$

$$\Delta < 0$$

معادله جذر نه لري.

تمرین

1: $3x^2 + 8x - 28 = 0$

2: $11x^2 - 12x - 63 = 0$

3: $7x^2 + 14x - 56 = 0$

د یو مجهوله دویمه درجه معادلې د جذرو او ضریبونو تر منځ ارتباط:

1: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

2: $x_1 x_2 = \frac{b}{a}$

3: $x_1^2 + x_2^2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2} = s^2 - 2p$

4: $x_1^3 + x_2^3 = s^3 - 3sp = \frac{3abc - b^3}{a^3}$

5: $x_1^4 + x_2^4 = s^4 - 4s^2p + 2p^2 = \frac{b^4 - 4ab^2c + 2a^2c^2}{a^4}$

1- د $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ثبوت

د محمد بن موسی فارمولونه لیکو

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

فارمولونه طرف په طرف جمع کوو:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta} - b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} \quad \text{ثبوت 2}$$

د د محمد بن موسی فارمولونه لیکو:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

فارمولونه طرف په طرف ضربوو:

$$x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right)$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{b^2 - \sqrt{\Delta}^2}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4aa} = \frac{c}{a}$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2} \quad \text{ثبوت 3}$$

$$x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2$$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$$

$$x_1^2 + x_2^2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{c}{a}\right) = \frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$$

$$\text{ثبوت } x_1^3 + x_2^3 = s^3 - 3sp = \frac{3abc - b^3}{a^3} \quad \text{د : 4}$$

$$x_1^3 + 3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3$$

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1^2x_2 - 3x_1x_2^2$$

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2)$$

$$x_1^3 + x_2^3 = \left(-\frac{b}{a}\right)^3 - 3\left(\frac{c}{a}\right)\left(-\frac{b}{a}\right)$$

$$x_1^3 + x_2^3 = -\frac{b^3}{a^3} + \frac{3bc}{a^2} = \frac{-b^3 + 3abc}{a^3} = \frac{3abc - b^3}{a^3}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{3abc}{a^3}$$

$$\text{ثبوت } x_1^4 + x_2^4 = s^4 - 4s^2p + 2p^2 = \frac{b^4 - 4ab^2c + 2a^2c^2}{a^4} \quad \text{د : 5}$$

$$x_1^4 + 2x_1^2x_2^2 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2$$

$$x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2$$

$$x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2(x_1x_2)^2$$

$$x_1^4 + x_2^4 = \left(\frac{b^2 - 2ac}{a^2}\right)^2 - 2\left(\frac{c}{a}\right)^2$$

$$x_1^4 + x_2^4 = \frac{b^4 - 4ab^2c + 4a^2c^2}{a^4} - \frac{2c^2}{a^2}$$

$$x_1^4 + x_2^4 = \frac{b^4 - 4ab^2c + 4a^2c^2 - 2a^2c^2}{a^4}$$

$$x_1^4 + x_2^4 = \frac{b^4 - 4ab^2c + 2a^2c^2}{a^4}$$

مثال: د لاندې معادلې د جذرونو مجموعه، د جذرونو د ضرب حاصل، د جذرو د مربعگانو مجموعه پیدا کړئ.

$$5x^2 + 7x - 34 = 0$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = -\frac{7}{5}$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-34}{5}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2} = \frac{7^2 - 2 \times 5 \times (-34)}{5^2} = \frac{49 + 340}{25} = \frac{389}{25}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{389}{25}$$

$$x_1^3 + x_2^3 = \frac{3abc - b^3}{a^3} = \frac{3 \times 5 \times 7 \times (-34) - 7^3}{5^3} = \frac{-3570 - 343}{125} = \frac{3913}{125}$$

د جذرونه له مخې د یو مجهوله دویمه درجه معادلې جوړول

که د یوې معادلې جذرونه راکړ شوي وي او وغواړو چې معادله یې پیدا کړو نو جذرونه د معادلې د جوړولو په فارمول کې وضع کوو د راکړ شویو جذرونو مربوطه معادله لاس ته راځي. د معادلې د جوړولو فارمولونه دوه دي:

$$x^2 + (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0 \quad 1$$

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0 \quad 2$$

$$x^2 + (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0 \text{ ثبوت}$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = \frac{0}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0$$

مثال: د یوې معادلې جذرونه په ترتیب سره $x_1 = 5$ او $x_2 = -7$ دي معادله یې پیدا کړئ

حل:

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0$$

$$x^2 - (5 - 7)x + (5)(-7) = 0$$

$$x^2 - (-2)x - 35 = 0$$

$$x^2 + 2x - 35 = 0$$

تمرین

په لاندې ډول د معادلو جذرونه راکړ شوي دي معادلی حل معادلې په لاس راوړئ؟

1: $x_1 = 3$ & $x_2 = \frac{3}{5}$

2: $x_1 = \frac{7}{3}$ & $x_2 = 5$

3: $x_1 = \sqrt{3}$ & $x_2 = 2$

د دویمه درجه یو مجهوله معادلو د جذرو مطالعه کول

د جذرو علامې په یوه جدول مطالعه کوو

که $\Delta > 0$ وي معادله دوه جذره لري	که $P > 0$ وي جذرونه هم علامه دي	که $S > 0$ وي دواړه جذرونه مثبت دي
که $\Delta > 0$ وي معادله دوه جذره لري	که $P > 0$ وي جذرونه هم علامه دي	که $S < 0$ وي دواړه جذرونه منفي دي
که $\Delta > 0$ وي معادله دوه جذره لري	که $P < 0$ وي جذرونه مختلف علامه دي	که $S > 0$ وي لوی جذر مثبت دي
که $\Delta > 0$ وي معادله دوه جذره لري	که $P < 0$ وي جذرونه مختلف علامه دي	که $S < 0$ وي لوی جذر منفي دي
که $\Delta = 0$ وي معادله یو جذر لري	X	
که $\Delta = 0$ وي معادله یو جذر لري		
که $\Delta < 0$ وي معادله جذر نه لري		

مثال: د $3x^2 + 5x - 22 = 0$ د جذرو علامې مطالعه کړئ؟

$$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \times 3 \times (-22) = 25 + 264 = 289$$

$$\Delta = 289$$

$\Delta > 0$ معادله دوه جذره لري.

$$p = \frac{c}{a} = \frac{-22}{3}$$

$p < 0$ جذرونه مختلف علامه دي.

$$s = \frac{-b}{a} = \frac{-5}{3}$$

$s < 0$ لوی جذري منفي دي.

د دیکارت قاعده

دیکارت د دویمه درجه معادلو د علامو تغیر ته تحول وایي.

دیکارت وایي:

1- که دویمه درجه معادلو د علامو دوه تحول لرل د معادلې دواړه جذرونه مثبت دي.

2- که د علامو تحول یو د معادلې یو جذر مثبت دي.

3- که په معادله د علامو تحول نه و نو معادله مثبت جذر نه لري دواړه جذرونه یې منفي دي.

لکه:

$$5x^2 - 17x + 6 = 0 \text{ دواړه جذرونه یې مثبت دي.}$$

$$3x^2 + 7x - 26 = 0 \text{ یو جذري مثبت دي.}$$

$$x^2 + 169x + 4 = 0 \text{ دواړه جذرونه یې منفي دي.}$$

دهغه معادلو حلول چې په دویمه درجه یو مجهوله معادلو بدلیږي:

شپږ قسمه معادلې په دویمه درجه یو مجهوله معادلو بدلیږي.

1- دريمه درجه معادلي:

هغه دريمه درجه معادلي چې د $ax^3 + bx^2 + cx = 0$ شکل ولري دداسې معادلود حل لپاره x مشترک نيسو او معادله د دوه فکتورونو په حاصل ضرب بدلوو هر فکتور د صفر سره مساوي کوو د معادلي جذرونه لاس ته راځي.

$$\text{مثال: } 5x^3 + 3x^2 - 14x = 0$$

$$x(5x^2 + 3x - 14) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$5x^2 + 3x - 14 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 5 \times (-14) = 9 + 280 = 289$$

$$\Delta = 289$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{289}}{2 \times 5} = \frac{-3 \pm 17}{10}$$

$$x_2 = \frac{7}{5} \quad x_3 = -2$$

2- څلورمه درجه معادلي:

هغه څلورمه درجه معادلي چې $ax^4 + bx^2 + c = 0$ شکل ولري په دويمه درجه معادله بدليږي. طريقه يې داسې ده چې x^2 په y نيسو څلورمه درجه معادله په دويمه درجه معادله بدليږي. دلته څلور حالتونه موجود دي.

1- که دويمه درجه معادلي دوه مثبت جذرونه لرل نو څلورمه درجه معادله څلور جذرونه لري چې دوه به يې مثبت او دوه به يې منفي وي.

2- که د دويمه درجه معادلي يو جذر مثبت و نو څلورمه درجه معادله دوه جذرونه لري چې يو به يې مثبت او بل به يې منفي وي.

3- که دويمه درجه معادلي مثبت جذر نه لرلو نو څلورمه درجه معادله جذر نلري.

4- که دويمه درجه معادلي جذر نه لرلو نو څلورمه درجه هم جذر نه لري.

مثال: لاندې څلورمه درجه معادله حل کړئ؟

$$3x^4 - 7x^2 - 20 = 0$$

حل: x^2 په y ښیونو $x^4 = y^2$ کيږي

$$3y^2 - 7y - 20 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 3 \times (-20) = 49 + 240 = 289$$

$$\Delta = 289$$

$$\Delta > 0$$

معادله دوه جذره لري یو جذر یې مثبت او بل یې منفي دی نو څلورمه درجه معادله دوه جذرونه لري.

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{49}}{2 \times 3} = \frac{7 \pm 17}{6}$$

$$y_1 = 4 \quad y_2 = -\frac{5}{3}$$

$$x^2 = y = y_1 = 4$$

$$x^2 = 4 \quad \sqrt{x^2} = \sqrt{4} \quad x_1 = 2 \quad x_2 = -2$$

تمرین

لاندې معادلې حل کړئ:

$$1- 4x^2 + 3x - 45 = 0$$

$$2- 7x^2 - 11x - 6 = 0$$

$$3- 5x^2 + 13x + 6 = 0$$

$$4- 13x^2 + x - 14 = 0$$

$$5- x^4 - 8x^2 + 16 = 0$$

$$6- 7x^4 + 3x^2 - 594 = 0$$

3- جذري معادلې:

هغه جذري معادلې چې د $ax + b\sqrt{x} + c = 0$ شکل ولري په دویمه درجه معادلې بدلیدلای شي. طریقه یې داسې ده چې $\sqrt{x}$ په y ښیو بیا دواړه خواوې مربع کوو چې $x = y^2$ کيږي او دویمه درجه معادله لاس ته راځي.

مثال: $7x - 8\sqrt{x} - 12 = 0$ جذري معادله په دویمه درجه معادله بدله کړئ او حل یې کړئ؟

حل: $\sqrt{x} = y$ ښیونو $x = y^2$ کيږي د (x) په عوض (y^2) او د $(\sqrt{x})$ په عوض (y) وضع کوو.

$$7y^2 - 8y - 12 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-4)^2 - 7(-12) = 16 + 84 = 100$$

$$\Delta = 100$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{100}}{7} = \frac{4 \pm 10}{7}$$

$$x_1 = 2 \quad \& \quad x_2 = -\frac{6}{7}$$

۴- هغه معادلی چې توانونه یې کسري وي اود یو مجهول توان د بل مجهول د توان دوه چنده وي لکه:

$$5x^{\frac{2}{3}} + 3x^{\frac{1}{3}} - 26 = 0$$

$x^{\frac{1}{3}}$ په (y) ښویو بیا دواړه خواوې مربع کوو نو $(x^{\frac{2}{3}} = y^2)$ کیږي.

$$5y^2 + 3y - 26 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 5 \times (-26) = 9 + 520 = 529$$

$$\Delta = 529$$

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{529}}{2 \times 5} = \frac{-3 \pm 23}{10}$$

$$y_1 = \frac{-3 + 23}{10} = \frac{20}{10} = 2 \quad \therefore y_1 = 2$$

$$y_2 = \frac{-3 - 23}{10} = \frac{-26}{10} = -2\frac{3}{5} \quad \therefore y_2 = -2\frac{3}{5}$$

$$x^{\frac{1}{3}} = y = y_1 = 2 \quad x^{\frac{1}{3}} = 2 \quad \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 2^3$$

$$x_1 = 8$$

تمرین:

لاندې معادلی حل کړئ:

$$1- x^{\frac{2}{3}} + 3x^{\frac{1}{3}} - 10 = 0$$

$$2- 4x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}} - 27 = 0$$

$$3- 4x^{\frac{2}{3}} - 7x^{\frac{1}{3}} - 2 = 0$$

۵- هغه معادلی چې توانونه یې کسري وي:

هغه معادلی چې د $ax^{\frac{m}{n}} + bx^{\frac{m}{2n}} + c = 0$ شکل ولري په دویمه درجه معادله بدلیږي.

په $x^{\frac{m}{n}}$ او y په $x^{\frac{m}{2n}}$ بنیو پورتنۍ معادله لاندې شکل غوره کوي $ay^2 + by + c = 0$
دغه معادله د محمد بن موسی په فارمول یا په کومه بله طریقه حلوو قیمتونه یې پیدا کوو د y د قیمت له مخې د $x^{\frac{m}{2n}}$ قیمت پیدا کوو د معادلی جذرونه لاس ته راځي.

مثال: د $2x^{\frac{2}{3}} + 5x^{\frac{1}{3}} - 33 = 0$ معادلی جذرونه پیدا کړئ؟

$$x^{\frac{1}{3}} = y \quad \text{بنیو نو} \quad x^{\frac{2}{3}} = y^2 \quad \text{کیري}$$

$$2x^{\frac{2}{3}} + 5x^{\frac{1}{3}} - 33 = 0$$

$$2y^2 + 5y - 33 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (5)^2 - 4 \times 2 \times (-33) = 25 + 264 = 289$$

$$\Delta = 289$$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{289}}{2 \times 2} = \frac{-5 \pm 17}{4}$$

$$y_1 = 3 \quad y_2 = -\frac{11}{2}$$

$$\because x^{\frac{1}{3}} = y = y_1 = 3 \quad \therefore x^{\frac{1}{3}} = 3 \Rightarrow \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 3^3 \quad \& \quad x_1 = 27$$

$$\because x^{\frac{1}{3}} = y = y_2 = -\frac{11}{2} \quad \therefore x^{\frac{1}{3}} = -\frac{11}{2}$$

$$\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 = \left(-\frac{11}{2}\right)^3 = -\frac{1331}{8}$$

$$x_2 = -\frac{1331}{8}$$

تمرین:

لاندې معادلی دویمه درجه معادلو ته واړوئ؟

$$1: 5x^{\frac{2}{5}} - 3x^{\frac{1}{5}} - 14 = 0 \quad 2: 4x^{\frac{2}{7}} + 3x^{\frac{1}{7}} - 22 = 0$$

عبارتي سوالونه

1: د (A) او (B) ددوه ښارو ترمنځ فاصله (450) کيلومتره ده يو موټر سهار په اووه بجې په يو سرعت د (A) د ښار څخه د (B) ښار ته حرکت وکړ او بل موټر سهار په اته بجې د (x + 15) کيلو مترو په سرعت حرکت وکړ دواړه په يو وخت کې د (B) ښار ته ورسيدل د هر يوه سرعت څو دي؟

حل:

$$\frac{450}{x} - \frac{450}{x+15} = 1$$

$$\frac{450(x+15) - 450x}{x(x+15)} = 1$$

$$\frac{450x + 6750 - 450x}{x(x+15)} = 1$$

$$\frac{6750}{x(x+15)} = 1$$

$$x^2 + 15x = 6750$$

$$x^2 + 15x - 6750 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (15)^2 - 4 \times 1 \times (-6750) = 225 + 27000 = 27225$$

$$\Delta = 27225$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-15 \pm \sqrt{27225}}{2 \times 1} = \frac{-15 \pm 165}{2}$$

$$x_1 = \frac{-15 + 165}{2} = \frac{150}{2} = 75$$

$$x_2 = \frac{-15 - 165}{2} = \frac{-180}{2} = -90$$

2- د يوه قايم الزاويه مثلث ضلعي په ترتيب سره (x + 1) ، (x + 2) او (x + 3) دي د مثلث ضلعي پيدا کړئ؟

حل:

$$(x+1)^2 + (x+2)^2 = (x+3)^2$$

$$x^2 + 2x + 1 + x^2 + 4x + 4 = x^2 + 6x + 9$$

$$x^2 = 4$$

$$x_1 = 2 \quad \& \quad x_2 = -2$$

۳- د دوه مثلثو قاعدې مساوي دي د يوه ارتفاع د قاعدې څخه يو متر او د بل ارتفاع د قاعدې څخه درې متره زياته ده او د مساحتو تفاضل يې اوه متر مربع دی د هر يوه مساحت قاعده او ارتفاع پيدا کړئ.

حل:

$$\frac{x(x+3)}{2} - \frac{x(x+1)}{2} = 7$$

$$\frac{x^2 + 3x - x^2 - x}{2} = 7 \Rightarrow \frac{2x}{2} = 7 \Rightarrow x = 7$$

قاعده $x = 7$

$x + 1 = 8$ د کوچني مثلث ارتفاع

$x + 3 = 10$ د لوی مثلث ارتفاع

۴- د يوه عدد د طرفينو د ضرب حاصل (323) عدد پيدا کړئ؟

حل:

$$(x-1)(x+1) = 323$$

$$x^2 - 1 = 323$$

$$x^2 = 323 + 1 = 324$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{324}$$

$$x = 18$$

۵- د يوه مستطيل اوږدوالی تر سور درې متره زيات دی که مساحت يې (88) ساتي متر مربع وي سور او اوږدوالی يې پيدا کړئ؟

حل:

$$x(x+3) = 88$$

$$x^2 + 3x - 88 = 0$$

$$\Delta = x^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 1 \times (-88) =$$

$$9 + 352 = 361$$

$$\Delta = 361$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = -3 \pm \frac{\sqrt{361}}{2 \times 1} = \frac{-3 \pm 19}{2} \Rightarrow x_1 = 8 \Rightarrow x_2 = -11$$

6- یو سړی د (A) د ښار څخه د (B) ښار ته په یوه سرعت روان شوېله وړځ یې په خپل سرعت کی دوه متره زیادت راوست نیم ساعت مخکی ورسېدو که د ښارو تر منځ فاصله (20) کیلومتره وي د نوموړي اولنی او اخرنی سرعت پیدا کړئ؟

حل:

$$\frac{20}{x} - \frac{20}{x+2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{20(x+2) - 20x}{x(x+2)} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{20x + 40 - 20x}{x(x+2)} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{40}{x^2 + 2x} = \frac{1}{2}$$

$$x^2 + 2x = 80$$

$$x^2 + 2x - 80 = 0$$

$$\Delta = b^2 - ac = 1^2 - 1(-80) = 1 + 80 = 81$$

$$\Delta = 81$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{a} = \frac{-1 \pm \sqrt{81}}{1} = -1 \pm 9 = 8$$

$x = 8$ اولنی سرعت

$x + 2 = 10$ اخرنی سرعت

7- د یوې دایرې مساحت (154) سانتی متر مربع دې شعاع یې شوده؟

حل:

$$\pi r^2 = 154$$

$$\frac{22}{7} r^2 = 154$$

$$\frac{7}{22} \times \frac{22}{7} r^2 = 154 \times \frac{7}{22}$$

$$r^2 = 49$$

$$\sqrt{r^2} = \sqrt{49}$$

$$r = 7$$

عبارتي سوالونه

- 1- د يوه مثلث ارتفاع د هغه د قاعدې څخه (3cm) زياته ده مساحت يې 27cm^2 ده قاعده او ارتفاع يې پيدا کړئ؟
- 2- د يوه مستطيل طول د هغه د سور څخه (5cm) زيات دی مساحت يې (24cm^2) دی سور او طول يې پيدا کړئ؟
- 3- د يوه دایري مساحت (616) ساتي متر مربع ده شعاع يې څو ده؟
- 4- د A او B د ښارو تر منځ فاصله 800m ده يو موټروان په يوه سرعت سره دا فاصله طی کوي د بېرته راتگ په وخت کې 5m په خپل سرعت کې تغير راوړي يو ساعت مخکې رارسېږي د تگ او راتگ سرعت يې پيدا کړئ؟
- 5- احمد د محمود څخه يوه روپۍ زياته لري که د پيسو د ضرب حاصل يې (840) وي د هر يوه روپۍ پيدا کړئ؟
- 6- يو سړی په خپله ځمکه باندې دېوال تاووي د دېوال سور نیم متر دې که د دېوال تر تاوولو وروسته يې ځمکه (29cm^2) کمه شي تر دېوال د مخه او وروسته به د ځمکې مساحت څو وي؟
- 7- د يوې دایري مساحت د هغې تر محيط (5) واړه زيات دې ضلعه يې پيدا کړئ؟
- 8- د يوه عدد او د هغه د معکوس مجموعه $(\frac{82}{9})$ ده عدد پيدا کړئ؟
- 9- د کوم عدد مربع د هغه عدد (19) چنده ده؟
- 10- د دوه مثلثو قاعدې مساوي دي د يوه ارتفاع د قاعدې څخه د واحد په اندازه او د بل ارتفاع د قاعدې څخه د دوه واحدو په اندازه زياته ده که مساحتونه يې جمع شي (76cm^2) کيږي د مثلثو قاعدې او ارتفاعگانې پيدا کړئ؟
- 11- احمد د محمود درې چنده کار کوي که دواړه په شريکه يو کار په (3) ورځو کې وکړي وواياست چه هر يو به دا کار په څو ورځو کې وکړي؟
- 12- که د يوه عدد سره دهغه د معکوس دوه چنده جمع شي (3) کيږي عدد پيدا کړئ؟

13- که د یوه سپري اجوره دهغه تر ورځو (5) ډېره وي که (50) روپۍ يې گټلې وي وواياست چه څو ورځي کار يې کړي دي؟

14- د يوه عدد څلورمه برخه د هغه عدد د معکوس سره مساوي ده عدد پيدا کړي؟

15- د احمد او محمود د پيسو مجموعه (50) ده او د ضرب حاصل يې (609) ده د هر يوه پيسي څو دي؟

16- د احمد او محمود اجوره مساوي ده که د احمد اجوره (5) روپۍ زياتي او د محمود روپۍ (5) کمي شي د يوې ورځي د اجوري د ضرب حاصل يې (2475) روپۍ کيږي د هر يوه اجوره څو ده؟

17- احمد او محمود په دوه مساوي کارونو لگيا دي احمد خپل کار تر محمود درې ورځي د مخه خلاصوي که په شريکه يې په دوه ورځو کي وکړي وواياست چه هر يو به دا کار په څو ورځو کي وکړي؟

18- د مربع مساحت (125316cm^2) دی ضلعه يې پيدا کړي؟

19- د يوه مثلث قاعده تر ارتفاع (15) سانتي متره زياته ده که مساحت يې (675cm^2) وي قاعده او ارتفاع به يې څو وي؟

20- يو موټر سهار په اته بجي حرکت کوي بل موټر يوساعت وروسته (10) کيلو متر سرعت په زيادت وزيږي روان شو که دواړه په يوه وخت کي مطلوب ته رسيږي که وهل شوي فاصله (900) کيلو متره وي د هريوه سرعت پيدا کړي.

شپږم فصل

غېرمساوات

د دوه افادو د عددي قيمتونه برابري ته غېرمساوات وايي.

د غېرمساوات علامه دا ($<$) يا دا ($>$) ده هره افاده چې ددې علامې مخې ته ليکل شوی وي لويه ده تر هغه افادې چې د علامې شاته ليکل شوی وي. لکه:

$$3x^2 + 12x > x^2 - 4x$$

يا لکه $45 > 18$ او داسې نور.

د غېرمساوات خواص:

1- که د غېرمساوات د دواړو خواو سره عين عدد جمع شي دغېرمساوات علامه تغير نه خوري. لکه:

$$\begin{aligned} 11 &< 19 \\ 11 + 8 &< 19 + 8 \\ 19 &< 27 \end{aligned}$$

2- که د غېرمساوات د دواړو خواو څخه عين عدد منفي شي د غېرمساوات علامه تغير نه خوري. لکه:

$$\begin{aligned} 13 &> 9 \\ 13 - 10 &> 9 - 10 \\ 3 &> -1 \end{aligned}$$

3- که دغېرمساوات دواړه خواوې په مثبت عدد کې ضرب شي دغېرمساوات علامه تغير نه خوري. لکه:

$$\begin{aligned} 12 &> 4 \\ +2(12) &> +2(4) \\ 24 &> 8 \end{aligned}$$

4- که د غېرمساوات دواړه خواوې په منفي عدد کې ضرب شي دغېرمساوات علامه تغير خوري. لکه:

$$15 < 21$$

$$15(-2) > 21(-2)$$

$$-30 > -42$$

5- که د غیر مساوات دواړه خواوې په مثبت عدد تقسیم شي د غیر مساوات علامه تغیر نه خوري. لکه:

$$9 < 15$$

$$\frac{9}{3} < \frac{15}{3}$$

$$\frac{3}{3} < \frac{5}{3}$$

که د غیر مساوات دواړه خواوې په منفي عدد تقسیم شي د غیر مساوات علامه تغیر خوري. لکه:

$$30 > 24$$

$$\frac{30}{-2} < \frac{24}{-2}$$

$$-15 < -12$$

7- که د غیر مساوات دواړه خواوې معکوس شي د غیر مساوات علامه تغیر خوري. لکه:

$$5 < 7$$

$$\frac{1}{5} > \frac{1}{7}$$

$$\frac{1}{5} > \frac{1}{7}$$

8- که د غیر مساوات دواړه خواوې د طاق عدد په توان رفع شي د غیر مساوات علامه تغیر نه خوري. لکه:

$$2 > -9$$

$$(2)^3 > (-9)^3$$

$$8 > -729$$

9- که د غیر مساوات دواړه خواوې د جفت عدد په توان رفع شي دلته درې حالتونه موجود دي.

الف: که د غیر مساوات دواړه خواوې مثبت وي د غیر مساوات علامه تغیر نه خوري. لکه:

$$5 > 3$$

$$5^2 > 3^2$$

$$25 > 9$$

ب: که د غیر مساوات دواړه خواوې منفي وي د غیر مساوات علامه تغیر خوري. لکه:

$$\begin{aligned}-2 &> -5 \\ (-2)^2 &< (-5)^2 \\ 4 &< 25\end{aligned}$$

ج: که د غېرمساوات د یوې خوا عدد مثبت او د بلې خوا عدد منفي وي دلته درې حالتونه موجود دي.

a- که د مثبت عدد مطلقه قیمت د منفي عدد د مطلقه قیمت څخه زیات وي د غېرمساوات علامه تغیر نه خوري. لکه:

$$\begin{aligned}7 &> -5 \\ (7)^2 &> (-5)^2 \\ 49 &> 25\end{aligned}$$

b- که د منفي عدد مطلقه قیمت د مثبت عدد د مطلقه څخه زیات وي د غېرمساوات علامه تغیر خوري. لکه:

$$\begin{aligned}4 &> -7 \\ (4)^2 &< (-7)^2 \\ 16 &< 49\end{aligned}$$

c- که د مثبت مطلقه قیمت د منفي عدد د مطلقه سره مساوي وي غېرمساوات په مساوات بدلیږي. لکه:

$$\begin{aligned}6 &> -6 \\ (6)^2 &= (-6)^2\end{aligned}$$

د غېرمساوات د حل سیت:

د حقيقي اعدادو هغه سیت چې په راکړ شوي غېرمساوات کې صدق کوي د غېرمساوات د حل سیت بلل کیږي.

د غېرمساوات اقسام

په دې کتاب کې مونږ درې قسمه غېرمساواتونه مطالعه کوو.

- 1- یو مجهوله اوله درجه غېرمساوات
- 2- دوه مجهوله اوله درجه غېرمساوات
- 3- یو مجهوله دویمه درجه غېرمساوات

1- یو مجهوله اوله درجه غیر مساوات:

هغه غیر مساوات دي چې مجهول يې یو او د مجهول درجه يې یوه وي عمومي شکل يې دا
 $ax + b \geq 0$ یا $ax + b \leq 0$ دی.

د یو مجهوله غیر مساوات د حل طریقه:

معلوم د غیر مساوات بنی خواته او مجهول د غیر مساوات چې خواته وړولارمی عملیې پری
 اجراء کوو په اخر کی د غیر مساوات دواړه خواوی د x په ضریب ویشود غیر مساوات دحل
 سیټ لاس ته راځي.

مثال: لاندې غیر مساوات حل کړئ:

$$3(4x + 11) - 2x + 6 \leq 15x + 44$$

$$12x + 33 - 2x + 6 \leq 15x + 44$$

$$10x + 39 \leq 15x + 44$$

$$10x - 15x \leq 44 - 39$$

$$-5x \leq 5$$

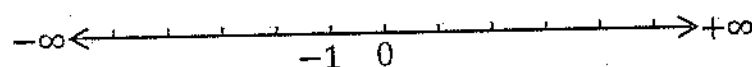
$$\frac{-5x}{-5} \geq \frac{5}{-5}$$

$$x \geq -1$$

د حل سیټ يې عبارت دی له:

$$A = \{x / -1 \leq x \leq \infty\}$$

د عددوپه کرښه داسې ښودل کیږي:



تمرین:

لاندې غیر مساواتونه حل کړئ:

1: $8(3x - 4) + 7x - 11 \geq 9x + 23$

2: $6x + 14 < 8x - 4$ 3: $x + 5 \geq 3x - 1$

مطلقة قیمت:

د یوه الجبري عدد حسابي برخی ته دهغه الجبري عدد مطلقة قیمت وایي. د مطلقة قیمت علامه دوه عمود خطونه دي هغه عدد چې مطلقة قیمت یې مطلوب وي د عمود خطونو تر منځ لیکل کیږي. لکه $|-15|$ یا $|+15|$ چې دغه دواړه د مطلقة قیمت معنی ورکوي او داسې لیکل کیږي.

$$|\pm 15| = 15$$

مثال: لاندې غبرمساوات حل کړئ؟

$$|3x - 11| > 19$$

حل: یو وار افاده د راکړ شوي عدد څخه لویه او یو بیا یې د عدد د متناظر څخه کوچنۍ فرضوو.

$$3x - 11 > 19$$

$$3x > 19 + 11$$

$$3x > 30$$

$$\frac{3x}{3} > \frac{30}{3}$$

$$x > 10$$

$$A = \{x/x > 10\}$$

$$3x - 11 < -19 \Rightarrow 3x < -19 + 11 \Rightarrow 3x < -8$$

$$\frac{3x}{3} < \frac{-8}{3} \Rightarrow x < -\frac{8}{3}$$

$$B = \left\{x/x < -\frac{8}{3}\right\}$$

$$C = A \cup B \left\{x/x > 10 \vee x < -\frac{8}{3}\right\}$$

د بېنوم داشارۍ څېړل

د بېنوم عمومي شکل $(ax + b)$ دې د بېنوم داشارۍ د څېړلو لپاره (a) مشترک نيسو د قوس د باندې یې لیکو د بېنوم هر حد په دی مشترک وېشو او د قوس په داځن کی یې لیکو. د قوس جذر پیدا کوو.

$$ax + b = a \left(x + \frac{b}{a} \right)$$

دلته د (a) په باب دوه حالتونه موجود دي.

1- چې $a > 0$ وي

$$x + \frac{b}{a} = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

$$a > 0$$

	$-\frac{b}{a}$		
x	$-\infty$		$+\infty$
$x + \frac{b}{a}$	-	0	+
$a \left(x + \frac{b}{a} \right)$	-	0	+

د بېنوم اشاره د جذر څخه کښته منفي او پورته مثبت ده.

2- چې $a < 0$ وي

$$x + \frac{b}{a} = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

$$a < 0$$

	$-\frac{b}{a}$		
x	$-\infty$		$+\infty$
$x + \frac{b}{a}$	-	0	+
$a \left(x + \frac{b}{a} \right)$	+	0	-

د بېنوم اشاره د جذر څخه کښته مثبت او پورته منفي ده.

مثال: د $(3x - 6)$ اشاره وڅېړئ؟

حل: $3x - 6 = 0 \Rightarrow 3(x - 2) \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

2			
x	$-\infty$		$+\infty$
$x - 2$	-	0	+
$3(x - 2)$	-	0	+

د جذر څخه کښته د بینوم اشاره منفي او پورته مثبت ده.

مثال: د $-5x + 15$ اشاره وڅېړئ؟

حل:

$$-5x + 15 = -5(x - 3)$$

$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

3			
x	$-\infty$		$+\infty$
$x - 3$	-	0	+
$-5(x - 3)$	+	0	-

د جذر څخه کښته د بینوم اشاره مثبت او پورته منفي ده.

تمرین:

د لاندې بینومونو اشارې وڅېړئ؟

1- $2x - 12$

2- $3 - x$

3- $-4x + 12$

4- $4x - 20$

5- $-6x - 18$

د هغه افادو د اشارو څېړل چې د څو بینومو د ضرب په شکل وي:

د هرې افادې اشاره پیدا کوو او ضربوونکي د حاصل ضرب اشاره لاس ته راځي.

مثال: د $(4 - x)(x + 4)$ اشاره وڅېړئ؟

حل:

$$\begin{aligned} 4 - x = 0 & \Rightarrow -x = -4 & \Rightarrow x = 4 \\ x + 4 = 0 & \Rightarrow x = -4 \end{aligned}$$

		-4		+4	
x	$-\infty$				$+\infty$
$4 - x$	+		+	0	-
$x + 4$	-	0	+		+
$(4 - x)(x + 4)$	-	0	+	0	-

د جذرو منځ کی د حاصل ضرب اشاره مثبت او په خارج کی منفي ده.

تمرین:

د لاندې بېنومونه د حاصل ضرب په شکل را کړ شوي دي اشاره يې وڅېړئ؟

- 1- $(2x - 12)(3 - x)$ 2- $(3 - x)(x + 7)$
 3- $(-4x + 12)(x + 8)$ 3- $(-6x - 18)(x + 5)$

د کسري افادو د اشارو څېړل:

د صورت او مخبرج اشارې پیدا کوو او یو پر بل يې ویشو د کسر اشاره لاس ته راځي.

مثال: د $\frac{x+4}{2x-6}$ اشاره وڅېړئ؟

$$\begin{aligned} x + 4 = 0 & \Rightarrow x = -4 \\ 2x - 6 = 0 \\ 2x = 6 & \Rightarrow \frac{2x}{2} = \frac{6}{2} \Rightarrow x = 3 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	-4	3	$+\infty$	
$x + 4$	$-$	0	$+$	$+$	
$2x - 6$	$-$	$-$	0	$+$	
$\frac{x + 4}{2x - 6}$	$+$	0	$-$	0	$+$

د جذرو منځ کی د کسر اشاره منفي او په خارج کی مثبت ده.

تمرین:

د لاتدی کسره اشاری وڅیړئ:

1: $\frac{2x+6}{x-1}$

2: $\frac{3x+4}{2-x}$

3: $\frac{x+2}{12x-18}$

4: $\frac{-x-1}{1-2x} + 3$

دهغه غېرمساوات دحل دسیټ پیدا کول چې د بېنومو د حاصل ضرب په شکل وي:

د بېنومو اشاری پیدا کوو او سره ضربوو یې د حاصل ضرب اشاری لاس ته راځي. دهغه اشاری د غېرمساوات د علامی سره مقایسه کوو هر ه اشاره چې د غېرمساوات د علامی سره موافق وه همغه یې د حل سیټ دي.

مثال:

$$(x+3)(x-4) > 0$$

$$x+3=0 \Rightarrow x=-3$$

$$x-4=0 \Rightarrow x=4$$

x	$-\infty$	-3	4	$+\infty$
$x+3$	-	0	+	+
$x-4$	-	-	0	+
$(x+3)(x-4)$	+	0	-	+
$(x+3)(x-4) > 0$	د حل سیټ	د حل سیټ نه وي		د حل سیټ

تمرین:

د لاتدی غېرمساواتونو د حل سیټ پیدا کړئ:

1: $(x-8)(2-x) < 0$

2: $(3x-6)(12-x)$

3: $(x-1)(1-x) \leq 0$

دهغه غېرمساوات دحل د سيټ پيدا کول چې د کسر په شکل وي.

د صورت او مخرج اشارې پيدا کوو د صورت اشاره د مخرج په اشاره ويشود کسر اشارې لاس ته راځي. دغه اشارې د غېرمساوات د علامې سره مقايسه کوو د غېرمساوات د حل سيټ لاس ته راځي.

مثال: د لاندې کسري غېرمساوات د حل سيټ پيدا کړئ

$$\frac{x+4}{x-2} + 1 < 0$$

$$\frac{x+4+x-2}{x-2} < 0$$

$$\frac{2x+2}{x-2} < 0$$

$$2x+2=0 \Rightarrow 2x=-2 \Rightarrow \frac{2x}{2} = \frac{-2}{2} \Rightarrow x=-1$$

$$x-2=0 \Rightarrow x=2$$

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$2x+2$	$-$	0	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{2x+2}{x-2}$	$+$	0	$-$	$+$
$\frac{2x+2}{x-2} < 0$	د حل سيټ نه دی	د حل سيټ نه دی	د حل سيټ نه دی	د حل سيټ نه دی

تمرین:

د لاندې کسري غېرمساواتو دحل سيټ پيدا کړئ:

1: $\frac{2x+1}{x-1} + 2 > 0$

2: $\frac{4x+7}{2x-3} - 1 < 0$

3: $\frac{x-6}{x+2} - 2 \geq 0$

د یو مجهوله غیر مساوات سیستم:

دوه یو مجهوله غیر مساواتو ته د یو مجهوله غیر مساوات سیستم وایي.

د هر غیر مساوات د حل سیت پیدا کولو هغه سیت چې په دواړو غیر مساواتو صدق کوي، د

سیستم د حل سیت دی.

مثال: د لاندې غیر مساوات سیستم حل کړئ.

$$3x - 6 < 0$$

$$5x + 8 < 0$$

حل:-

$$3x - 6 = 0 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2$$

$$5x + 20 = 0 \Rightarrow 5x = -20 \Rightarrow x = -4$$

x	$-\infty$	-4	2	$+\infty$
$3x - 6 < 0$	-	-	0	+
$5x + 20 < 0$	-	0	+	+
د حل سیت				

تمرین:

په لاندې ډول د یو مجهوله غیر مساوات سیستمونه راکړئ شوي دي حل یې کړئ.

1- $7x - 11 > 0$ & $4x + 13 > 0$

2- $13x + 2 > 0$ & $5x - 8 < 0$

دوه مجهوله غیر مساوات

هغه غیر مساوات دی چې مجهولونه یې دوه او د هر مجهول درجه یې یوه وي عمومي شکل یې دا $ax + by \geq c$ یا $ax + by \leq c$ دي

د دغه رنگه غیر مساوات د حل د سیمې د لاس ته راوړلو لپاره د غیر مساوات گراف رسموو. گراف مستوي په دوه برخو ویشي یوه برخه یې په غیر مساوات کې صدق کوي او بله برخه یې نه کوي دغه برخه یې کرښې، کرښې کوو بله برخه یې د غیر مساوات د حل سیمې دی.

مثال: $2y + 3x < 6$ دوه مجهوله غیر مساوات حل کړئ.

حل: غیر مساوات په مساوات بدلوو او گراف یې رسموو.

$$2y + 3x = 6$$

$$-1 \text{ نو } x = 0$$

$$2y = 6 \Rightarrow y = \frac{6}{2} = 3$$

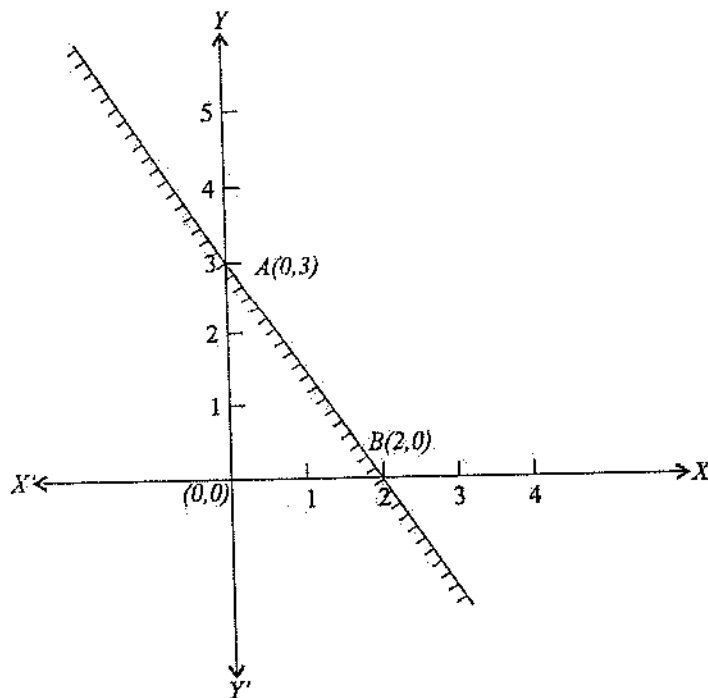
$$A(0,3)$$

$$-2 \text{ فرضوو نو } y = 0$$

$$3x = 6$$

$$x = \frac{6}{3} = 2$$

$$B(2,0)$$



د دوه مجهوله غیر مساوات سیستم:

په یوه کارتیزني مستوي کې دوه غیر مساواتونه د غیر مساوات سیستم وایي.

$$\text{لکه: } 3x + 5y < 15 \text{ او } 2x - 3y > 6$$

دغه دوه غیر مساواتونه د غیر مساوات سیستم وایي.

د دوه مجهوله غیر مساوات د سیستم د حل طریقه:

غیر مساواتونه په مساواتو بدلولو او د هر مساوات کرښه یعنې گراف رسمولو هر گراف مستوي په دوه برخو ویشي چې یوه برخه یې په مربوطه غیر مساوات کې صدق کوي. د هر غیر مساوات د حل سیت پیدا کولو څرنگه چې د غیر مساواتو گرافونه مستوي په څلورو برخو ویشي چې یوه برخه یې په دواړو غیر مساواتو کې صدق کوي چې همدغه برخه د سیستم د حل سیت دی.

-1

$$3x + 5y < 15 \quad \Rightarrow \quad 3x + 5y = 15$$

$x = 0$ فرضو نو:

$$5y = 15 \quad y = \frac{15}{5} = 3$$

$$A(0,3)$$

$$y = 0$$

$$3x = 15 \quad x = \frac{15}{3} = 5$$

$$B(5,0)$$

-2

$$2x - 3y > 6 \quad 2x - 3y = 6$$

$$x = 0$$

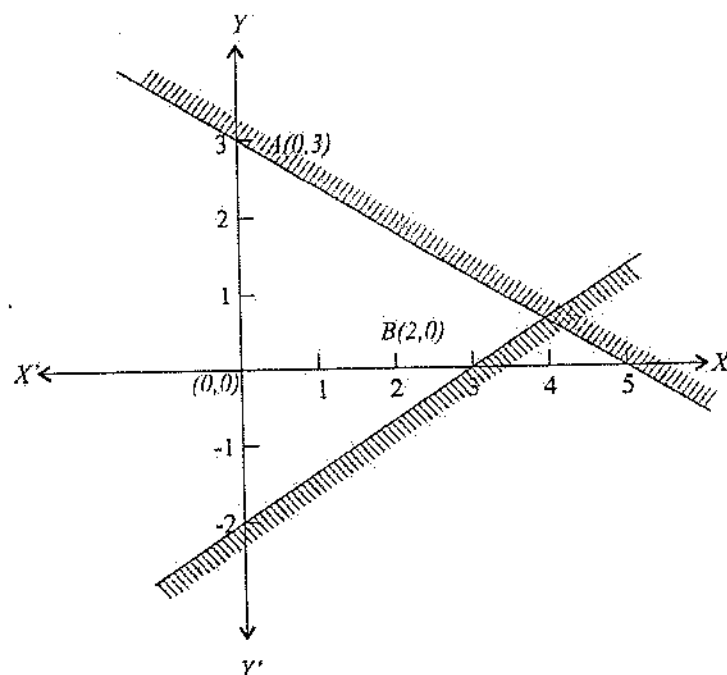
$$-3y = 6 \quad y = \frac{6}{-3} = -2$$

$$C(0,-2)$$

$$y = 0$$

$$2x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{2} = 3$$

$$D(3,0)$$



که دری دوه مجهوله غیر مساواتونه راځي شوي وي د گراف د ترسیم په وخت کی مثلث لاس ته راځي د څلور غیر مساواتونو څخه څلور ضلعي په همدی ترتیب د دوه مجهوله غیر مساواتونو شمېر د مضلعگانو د ضلعو شمېر راښيي.

یو مجهوله دویمه درجه غیر مساوات

هغه غیر مساوات دي چې مجهول یې یو او د مجهول درجه یې دوه وي عمومي شکل یې دا $ax^2 + bx + c \geq 0$ یا $ax^2 + bx + c \leq 0$ دي

د غیر مساوات د حل څخه مطلب د هغه سیت پیدا کول دي چې په غیر مساوات کی وضع شي او په غیر مساوات کی صدق وکړي.

د دویمه درجه غیر مساوات د حل طریقه

که د غیر مساوات دواړو خواو ته حدونه موجود وي ټول د غیر مساوات چپي خوا ته وړو او لږمې عملیې پری اجراء کوو او د ترینوم شکل ته یې رااوړو او تجزیه کوو یې. د هر قوس جذر پیدا کوو د حل سیت یې په دوه طریقو پیدا کړو یې.

1- د جدول په طریقه 2- د سیت بلډر په طریقه

1- د جدول په طریقه:

جدول جوړوو کوچنی جذر چپي خوا ته او لوی جذر ښی خوا ته لیکو که د (a) علامه مثبت وه د جذر څخه کښته د قوس علامه منفي او پورته مثبت ده او که د (a) علامه منفي وه نو د جذر څخه کښته د قوس علامه مثبت او پورته منفي ده.

مثال: د لاندې دویمه درجه غیر مساوات د حل سیت پیدا کړئ:

$$3x^2 + 13x - 38 < 0$$

$$3x^2 - 6x + 19x - 38 < 0$$

$$3x(x - 2) + 19(x - 2) < 0$$

$$(x - 2)(3x + 19) < 0$$

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$3x + 19 = 0 \Rightarrow 3x = -19 \Rightarrow \frac{3x}{3} = \frac{-19}{3} \Rightarrow x = -\frac{19}{3}$$

x	$-\infty$	$-\frac{19}{3}$	2	$+\infty$
$x - 2$	-	-	0	+
$3x + 19$	-	0	+	+
$(x - 2)(3x + 19)$	+	0	-	+
$(x - 2)(3x + 19) < 0$	د حل سیت نه دی	د حل سیت نه دی	د حل سیت نه دی	د حل سیت نه دی

2- د سیتې بلډر په طریقه د دویمه درجه غېرمساوات حلول:

تر تجزیه کولو وروسته د غېرمساوات علامې ته ګورو که د غېرمساوات علامه مثبت وه نو قوسونه هم علامه دي یو وار دواړه مثبت او بل وار دواړه منفي فرضوو او که د غېرمساوات علامه منفي وه نو قوسونه مختلف علامه دي په نوبت سره یو مثبت او بل منفي فرضوو.

$$\text{مثال: } 5x^2 + 3x - 54 < 0$$

حل:

$$5x^2 - 15x + 18x - 54 < 0$$

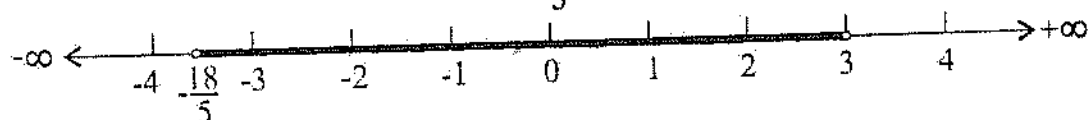
$$5x(x - 3) + 18(x - 3) < 0$$

$$(x - 3)(5x + 18) < 0$$

$$x - 3 < 0 \Rightarrow x < 3$$

$$5x + 18 > 0 \Rightarrow 5x > -18 \Rightarrow \frac{5x}{5} > \frac{-18}{5} \Rightarrow x > -\frac{18}{5}$$

$$A = \{x / -\frac{18}{5} < x < 3\}$$



مثال:

$$3x^2 - 13x + 12 > 0$$

$$3x^2 - 9x - 4x + 12 > 0$$

$$3x(x - 3) - 4(x - 3) > 0$$

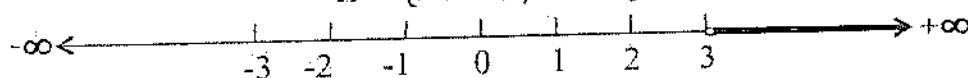
$$(x - 3)(3x - 4) > 0$$

$$x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3$$

$$3x - 4 > 0 \Rightarrow 3x > 4$$

$$\frac{3x}{3} > \frac{4}{3} \Rightarrow x > \frac{4}{3}$$

$$A = \{x \in \mathbb{R} / x > 3\}$$



تمرین

لاندې دویمه درجه غبرمساواتونه حل کړئ؟

1. $3x^2 - 11x + 1 > x^2 - 12$

2. $4x^2 + 3x - 22 \geq 0$

3. $\frac{3x-1}{x+2} \leq 2x + 3$

4. $7x^2 + \frac{x+5}{2} - 10 \leq 0$

5. $3x^2 - 17x + 13 > 3x - 15$

6. $\frac{x+1}{x} > 2$

7. $3x^2 + 7x - 48 \geq 0$

8. $11x - 4x^2 - 20 < 8 < x^2 + 3x + 12$

9. $13x - x^2 - 30 \geq 0$

10. $5(x^2 - 13x) \leq 6$

11. $9x + 5x^2 - 38 \leq 0$

12. $13x^2 + 5\left(\frac{2x+3}{3}\right) - 14 \geq 0$

13. $15x^2 + x - 12 \geq 4x^2 + 13x + 8$

14. $7x^2 + 3x \geq 0$

15. $9x^2 + x - 20 \leq 3x^2 + 3x + 2$

اووم فصل

پارامتریک معادلی

پارامتر په لغت کی معین غیر مشخص مقدار ته وایي
او په اصطلاح کی که په یوه معادله کی د اصلي متحول څخه په غیر یو بل داسی حرف موجود وي چه د هغه حرف د قیمت په تغیر سره د معادلی په جذرو کی تغیر راشي دغه حرف ته پارامتر او دغې معادلی ته پارامتریک معادله وایي لکه:

$$(m + 3)x^2 + 3(m - 3)x - 19m - 6 = 0$$

د پارامتریک معادلی حلول:

پارامتریک معادلی په دوه طریقو حلېږي:

1- د پارامتر له جنسه د معادلی حلول
2- د پارامتر د قیمت له جنسه د معادلی حلول

1- د پارامتر له جنسه د معادلی حلول:

که پارامتریک معادله د دویمه درجه معادلی د حلولو په هره طریقه حلیدله حلوو یي.

مگر ښه او آسانه طریقه یې د محمد بن موسی فارمول دی.

مثال: لاندې پارامتریک معادله حل کړئ؟

$$x^2 + mx - (6m^2 + 10m + 4) = 0$$

حل:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = m^2 - 4\{-(6m^2 + 10m + 4)\}$$

$$\Delta = m^2 + 24m^2 + 40m + 16$$

$$\Delta = 25m^2 + 40m + 16$$

$$\Delta = (5m + 4)^2$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-m \pm \sqrt{(5m + 4)^2}}{2 \times 1} = \frac{-m \pm (5m + 4)}{2}$$

$$x_1 = \frac{-m + 5m + 4}{2} = \frac{4m + 4}{2} = \frac{4(m + 1)}{2} = 2(m + 1) = 2m + 2$$

$$x_1 = 2m + 2$$

$$x_2 = \frac{-m - 5m - 4}{2} = \frac{-6m - 4}{2} = \frac{2(-3m - 2)}{2} = -3m - 2$$

$$x_2 = -3m - 2 = -(3m + 2)$$

تمرین:

لاندې پارامتریک معادلو جذرونه د m له جنسه پیدا کړئ؟

$$1: (2m + 1)x^2 + 2mx - (4m + 1) = 0$$

$$2: (m + 4)x^2 + 6mx - (7m + 4) = 0$$

$$3: (2m + 4)x^2 + 4mx - (2m + 4) = 0$$

$$4: x^2 + (2m + 5)x + m^2 + 5m + 6 = 0$$

$$5: x^2 - 5mx + 6m^2 = 0$$

2- د پارامتر د قیمت له مخې د مجهول د قیمت پیدا کول:

د یوه شرط له مخې د پارامتر قیمت پیدا کوو او په معادله کې یې وضع کوي یو مجهول د دویمه درجه معادله لاس ته راځي. دغه معادله حلوو د معادلې د اصلي مجهول قیمت لاس ته راځي.

1- مثال: د $(m - 1)x^2 + (2m + 1)x - 5m = 0$ په معادله کې د جذرو مجموعه $(-\frac{7}{2})$ ده په معادله د (m) کړئ؟

حل:

$$x_1 + x_2 = -\frac{7}{2}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{2m + 1}{m - 1}$$

$$-\frac{2m + 1}{m - 1} = -\frac{7}{2}$$

$$7m - 7 = 4m + 2$$

$$7m - 4m = 2 + 7$$

$$3m = 9 \Rightarrow \frac{3m}{3} = \frac{9}{3} \Rightarrow m = 3$$

$$\begin{aligned}
 (m-1)x^2 + (2m+1)x - 5m &= 0 \\
 (3-1)x^2 + (2 \times 3 + 1)x - 5 \times 3 &= 0 \\
 2x^2 + 7x - 15 &= 0 \\
 \Delta = b^2 - 4ac &= 7^2 - 4 \times 2 \times (-15) \\
 \Delta &= 49 + 120 = 169 \\
 \Delta &= 169
 \end{aligned}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-7 \pm \sqrt{169}}{2 \times 2} = \frac{-7 \pm 13}{4}$$

$$x_1 = \frac{-7 + 13}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$x_2 = \frac{-7 - 13}{4} = \frac{-20}{4} = -5$$

2- مثال: د $(m-2)x^2 - (m-1)x - 4m - 3 = 0$ معادلی د جذرو د ضرب حاصل

(-15) معادلہ حل کریں؟

حل:

$$x_1 x_2 = -15$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} = -15$$

$$\frac{c}{a} = \frac{-4m-3}{m-2} = -15 \Rightarrow -15m + 30 = -4m - 3$$

$$-15m + 4m = -3 - 30$$

$$-11m = -33$$

$$\frac{-11m}{-11} = \frac{-33}{-11}$$

$$m = 3$$

$$(m-2)x^2 - (m-1)x - 4m - 3 = 0$$

$$(3-2)x^2 - (3-1)x - 4 \times 3 - 3 = 0$$

$$x^2 - 2x - 15 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 1(-15) = 1 + 15 = 16$$

$$\Delta = 16$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{16}}{1} = \frac{1 \pm 4}{1}$$

$$x_1 = \frac{1+4}{1} = \frac{5}{1} = 5 \Rightarrow x_1 = 5$$

$$x_2 = \frac{1-4}{1} = \frac{-3}{1} = -3 \Rightarrow x_2 = -3$$

3- مثال: د $(m-3)x^2 - 3mx + 9m - 1 = 0$ په معادله کی رابطه کی

معادله حل کړئ؟

حل:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{12}{35}$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 x_2} = \frac{12}{35}$$

$$\frac{-\frac{b}{a}}{+\frac{c}{a}} = \frac{-b}{+c} = \frac{-(-3m)}{9m-1} = \frac{+3m}{9m-1} = \frac{12}{35}$$

$$108m - 12 = 105m$$

$$108m - 105m = 12$$

$$3m = 12$$

$$\frac{3m}{3} = \frac{12}{3} \Rightarrow m = 4$$

$$(m-3)x^2 - 3mx + 9m - 1 = 0$$

$$(4-3)x^2 - 3 \times 4x + 9 \times 4 - 1 = 0$$

$$x^2 - 12x + 35 = 0$$

$$\Delta = b^2 - ac = (-6)^2 - 1(35) = 36 - 35 = 1$$

$$\Delta = 1$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{1}}{1} = 6 \pm 1$$

$$x_1 = 6 + 1 = 7 \Rightarrow x_1 = 7$$

$$x_2 = 6 - 1 = 5 \Rightarrow x_2 = 5$$

4- مثال: $(m-1)x^2 - (3m+1)x + 5m = 0$ معادلی جذرونہ د $(3x_1 - 1)(3x_2 - 1) = 70$ پہ رابطہ کی صدق کوی د معادلی جذرونہ پیدا کری؟

حل:

$$(3x_1 - 1)(3x_2 - 1) = 70$$

$$9x_1x_2 - 3x_1 - 3x_2 + 1 = 70$$

$$9x_1x_2 - 3(x_1 + x_2) + 1 = 70$$

$$9\left(\frac{c}{a}\right) - 3\left(\frac{-b}{a}\right) = 70 - 1$$

$$9\left(\frac{5m}{m-1}\right) - 3\left(\frac{-\{-(3m+1)\}}{m-1}\right) = 69$$

$$\frac{45m}{m-1} - \frac{9m+3}{m-1} = 69$$

$$\frac{45m - 9m - 3}{m-1} = 69$$

$$\frac{36m - 3}{m-1} = \frac{69}{1}$$

$$69m - 69 = 36m - 3$$

$$69m - 36m = -3 + 69$$

$$33m = 66 \Rightarrow m = 2$$

$$(m-1)x^2 - (3m+1)x + 5m = 0$$

$$(2-1)x^2 - (3 \times 2 + 1)x + 5 \times 2 = 0$$

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 10 = 49 - 40 = 9$$

$$\Delta = 9$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-7 \pm \sqrt{9})}{2 \times 1} = \frac{7 \pm 3}{2}$$

$$x_1 = \frac{10}{2} = 5 \Rightarrow x_1 = 5$$

$$x_2 = \frac{7-3}{2} = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow x_2 = 2$$

5- مثال: د $(m-4)x^2 - mx - 5m + 1 = 0$ په معادله کې د معادلې یو جذر (8) دی. د m قیمت پیدا کړئ؟

حل:

$$\begin{aligned}(m-4)8^2 - m \times 8 - 5m + 1 \\(m-4)64 - 8m - 5m + 1 = 0 \\64m - 256 - 13m + 1 = 0 \\51m - 255 = 0 \\51m = 255 \Rightarrow m = 5\end{aligned}$$

7- مثال: د m په کوم قیمت باندې $(m-2)x^2 - (m-3)x - 8m - 1 = 0$ معادله دوه مساوي مختلف علامه جذرونه لري؟

حل:

$$\begin{aligned}-\{-(m-3)\} = 0 \\m - 3 = 0 \Rightarrow m = 3\end{aligned}$$

7- مثال: د (m) قیمت د $(2m-1)x^2 - (2m+1)x + 2m - 4 = 0$ څخه داسې پیدا کړئ چې د معادلې یو جذر صفروي؟

حل: هغه وخت د معادلې یو جذر صفر کېږي چې $c = 0$ شي

$$\begin{aligned}-(2m+1) = 0 \\2m - 4 = 0 \Rightarrow 2m = 4 \Rightarrow \frac{2m}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\m = 2\end{aligned}$$

8- مثال: د (m) په کوم قیمت $(2m+1)x^2 - (7m+2)x + 6m + 1 = 0$ معادله یو جذر لري؟

حل: کله چې $\Delta = 0$ شي.

$$\begin{aligned}\Delta = b^2 - 4ac \\ \Delta = \{-(7m+2)\}^2 - 4(2m+1)(6m+1) \\ \Delta = 49m^2 + 28m + 4 - 48m^2 - 32m - 4 \\ \Delta = m^2 - 4m \\ \Delta = 0 \therefore m^2 - 4m = 0 \Rightarrow m(m-4) = 0 \\ m_1 = 0 \\ m - 4 = 0 \Rightarrow m = 4\end{aligned}$$

9- مثال: د په (m) کومو قیمتونو باندې $(m-1)x^2 - (2m+2)x + 2m-5 = 0$ معادله دوه معکوس جذرونه لري؟

حل: کله چې $a = c$ شي

$$m-1 = 2m-5$$

$$m-2m = -5+1$$

$$-m = -4 \Rightarrow m = 4$$

10- مثال: د (m) په کومو قیمتونو باندې $(m+1)x^2 - mx - 4m = 0$ معادله دوه مختلف اشاره جذرونه لري؟

حل: کله چې $p < 0$ وي

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-4m}{m+1} < 0$$

$$(m+1)^2 \left(\frac{-4m}{m+1} \right) < 0 \times (m+1)^2$$

$$-4m(m+1) < 0$$

$$-4m < 0$$

$$\frac{-4m}{-4} > \frac{0}{-4}$$

$$m > 0$$

$$m+1 > 0 \Rightarrow m > -1$$

$$A = \{m \in \mathbb{R} / m > -1\}$$

11- مثال: د (m) په کومو قیمتونو باندې $(m-3)x^2 - (m-2)x - 2m+8 = 0$ معادله دوه حقيقي جذرونه لري؟

حل: کله چې $(\Delta > 0)$ تر صفروي

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = \{-(m-2)\}^2 - 4(m-3)(-2m+8)$$

$$\Delta = m^2 - 4m + 4 + 8m^2 - 32m - 24m + 96$$

$$\Delta = 9m^2 - 60m + 100 = (3m-10)^2$$

$$\Delta > 0$$

$$(3m - 10)^2 > 0$$

$$3m - 10 > 0$$

$$3m > 10 \Rightarrow m > \frac{10}{3}$$

$$A = \{m \in \mathbb{R} / m > \frac{10}{3}\}$$

12- مثال: د (m) په کوم قیمت د $(m-2)x^2 - (m-1)x - 5m = 0$ معادلې لوی جذر مثبت دي؟

حل: کله چې $(b \text{ \& } c)$ دواړه منفي وي.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = \{-(m-5)\}^2 - 4(m-2)(-6m)$$

$$\Delta = m^2 - 10m + 25 + 24m^2 - 40m$$

$$\Delta = 25m^2 - 50m + 25 = (5m - 5)^2$$

$$\Delta = (5m - 5)^2 \Rightarrow \Delta = 5m - 5 \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow 5m - 5 > 0 \Rightarrow 5m > +5 \Rightarrow m > 1$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\{-(m-5)\} \pm \sqrt{(5m-5)^2}}{2(m-2)} = \frac{m-5 \pm (5m-5)}{2(m-2)}$$

$$x_1 = \frac{m-5+5m-5}{2(m-2)} = \frac{6m-10}{2m-4}$$

$$x_2 = \frac{m-5-5m+5}{2m-4} = \frac{-4m}{2m-4}$$

تمرین:

لاندې پارامتریک معادلو کې د (m) قیمت داسې تعین چې معادله دوه مختلف اشاره جذرونه ولري.

1: $x^2 - 5x - 3m + 1 = 0$

2: $(2+3)x^2 - mx - 25m + 4 = 0$

3: $mx^2 - 2(m+1)x + m + 15 = 0$

4: $mx^2 - (2m+1)x + m = 0$

د لاندې معادلو څخه د (m) قیمت داسې پیدا کړئ چې معادله دوه حقیقي جذرونه ولري.

5: $x^2 - 2(m-3)x + m + 9 = 0$

6: $(m+1)x^2 - 2(m+2)x + m + 3 = 0$

7: $3x^2 - 10x - 3m + 2 = 0$

8: $mx^2 - 2(m+1)x + m + 3 = 0$

9: $(2m+1)x^2 - 4mx + 2m - 3 = 0$

10: $2x^2 - mx + 1 = 0$

د لاندې معادلو څخه د (m) قیمت داسې پیدا کړئ چې معادله دوه موخومي جذرونه ولري.

11: $mx^2 - (2m+1)x + 2m = 0$

12: $4x^2 + 4mx - 3m^2 = 0$

اتم فصل

اکسپوننشل (نمائي) معادلی

اکسپوننشل معادلی هغه معادلی دي چه توان يې مجهول وي عمومي شکل يې دا دی:

$$a^x = y$$

د اکسپوننشل معادلو قاعده خلاف د (1) وي يعنی $(a \neq 1)$ وي که $(a > 1)$ وي معادله متزايدة ده او که $(a < 1)$ وي معادله متناقصه ده.

د اکسپوننشل معادلو د حلولو لپاره مجهول حدونه د مساوات چپي خواته وړو او معلوم د مساوات بڼي خواته وړو. لازمی عملیې پری اجراء کوو په د مساوات د دواړو خواو عددونه په داسی طاقت لرونکو عددو بدلوو چه قاعدی يې سره مساوي وي. نو توانونه يې هم مساوي دي دلته څو حالتونه موجود دي

1- چه د مساوات په چپ طرف کی توان مونوم يا بينوم وي نو يو مجهوله اوله درجه معادله لاس ته راځي دغه معادله حلوو او جذرونه يې پیدا کوو

1- مثال: لاندی معادله حل کړئ؟

$$5 \times 3^x + 11 \times 3^x - 14 \times 3^x = 18$$

$$(5 + 11 - 14)3^x = 18$$

$$2 \times 3^x = 18 \Rightarrow \frac{2 \times 3^x}{2} = \frac{18}{2} \Rightarrow 3^x = 9 \Rightarrow 3^x = 3^2$$

قاعدی يې مساوي دي نو توانونه يې هم مساوي دي.

$$x = 2$$

2- مثال: لاندی معادله حل کړئ؟

$$3^{x+1} - 4 \cdot 3^{x-1} = 45$$

$$3^x \cdot 3 - 4 \cdot 3^x \cdot 3^{-1} = 45$$

$$3^x(3 - 4 \cdot 3^{-1}) = 45$$

$$3^x \left(3 - \frac{4}{3}\right) = 45 \Rightarrow 3^x \left(\frac{9-4}{3}\right) = 45 \Rightarrow 3^x \left(\frac{5}{3}\right) = 45$$

د مساوات دواړه خواوې په $\frac{3}{5}$ کې ضربوو.

$$\frac{3}{5} \left\{ 3^x \left(\frac{5}{3} \right) \right\} = 45 \times \frac{3}{5}$$

$$3^x = 27 = 3^3$$

$$3^x = 3^3$$

$$x = 3$$

2- چه د مساوات په چپ طرف کی دوه یا څو حده وي قاعدی یې مساوي اود یوه توان د بل د توان دوه چنده وي دغه ډول معادلې په دویمه درجه معادلو بدلولو دغه معادلې حلوو اود جذرونه مخی یې د اکسپوننتشل معادلې جذرونه پیدا کوو.

مثال:

$$3^{2x} - 3^x = 702$$

$$(3^x)^2 - 3^x = 702$$

$$3^x = y \text{ وضع کوو.}$$

$$y^2 - y - 702 = 0$$

$$(y - 27)(y + 26) = 0$$

$$y_1 = 27$$

$$y_2 = -26$$

$$y_1 = 3^x = 27 = 3^3$$

$$3^x = 3^3$$

$$x = 3$$

$$y_2 = 3^x = -26$$

د اکسپوننتشل معادلې دویمېن همېشه مثبت وي نوډ (y_2) د قیمت څخه د معادلې جذرونه پیدا کیږي.

3- چه د مساوات په چپ طرف کی دوه یا څو حدونه موجود وي او توانونه یې جذري حدونه وي دغه ډول معادلې هم په دویمه درجه یو مجهوله معادله بدلولی شو.

مثال:

$$27^{2\sqrt{x}} = 4 \cdot 3^{\sqrt{9x}} - 3$$

$$27^{2\sqrt{x}} - 4 \cdot 3^{3\sqrt{x}} + 3 = 0$$

$$27^{2\sqrt{x}} - 4 \cdot 27^{\sqrt{x}} + 3 = 0$$

$$(27^{\sqrt{x}})^2 - 4 \cdot 27^{\sqrt{x}} + 3 = 0$$

$$27^{\sqrt{x}} = y \text{ وضع کوو.}$$

$$y^2 - 4y + 3 = 0$$

$$(y - 1)(y - 3) = 0$$

$$y_1 = 1 \quad \& \quad y_2 = 3$$

$$27^{\sqrt{x}} = 1 = 27^0$$

$$\sqrt{x} = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$27^{\sqrt{x}} = 3 \Rightarrow 3^{3\sqrt{x}} = 3^1$$

$$3\sqrt{x} = 1 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{3}$$

$$x = \frac{1}{9}$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} / x = 0 \vee x = \frac{1}{9} \right\}$$

4- چه دوه داسی اکسپوننشیل معادلی را کپ شویوي چه چپ طرف یی د دوه داسی طاقت لرونکو عددو د ضرب حاصل وي چه قاعدی یی مساوي او توانونه یی مختلف وي دغسی معادلی په اوله درجه دوه مجهوله معادلو بدلوو.

مثال:

$$2^x \cdot 2^y = 16$$

$$2^{2x} \cdot 2^{3y} = 32768$$

$$2^{x+y} = 2^4$$

$$2^{x+y} = 2^4$$

$$\underline{2^{2x+3y} = 2^{15}}$$

$$x + y = 4$$

$$\underline{2x + 3y = 15}$$

$$2(x + y = 4)$$

$$2x + 2y = 8$$

$$\underline{\pm 2x \pm 3y = \pm 15}$$

$$-y = -7$$

$$y = 7$$

$$x + 7 = 4$$

$$x = 4 - 7 = -3$$

$$x = -3$$

تمرین

$$1. 2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} = 3^x - 3^{x-1} + 3^{x-2}$$

$$2. 9^x - 5 \cdot 3^x + 6 = 0$$

$$3. 9^{x+1} + 9^{2x-1} = 54 \cdot 27^{x-1}$$

$$4. 5^{2x-1} + 5^{x+1} = 250$$

$$5. \frac{1-2^x}{2^x} = 1$$

$$6. 4 \cdot 3^{2x} + 3^x = 2 \cdot 3^{2x} - 3 \cdot 3^x + 198$$

$$7. 5^{2y} - 5^y - 600 = 0$$

$$8. \begin{array}{l} 3^{2x} \cdot 3^{5y} = 19683 \\ 3^x \cdot 3^{3y} = 243 \end{array}$$

$$9. 9^x - 5 \cdot 3^x - 46 = 0$$

$$10. 2^{x+3} + 2^{x-1} = 17$$

$$11. \begin{array}{l} 2^{3x+1} \cdot 2^{y+1} = 128 \\ 2^{x+5} \cdot 2^{y+2} = 1024 \end{array}$$

$$12. \frac{3^{2x+3}}{3^x} \cdot \frac{3^{3y+1}}{3^y} = 2187$$

$$13. 2^{3x-2} \cdot 2^{y+5} = 128$$

نهم فصل

لوگاریتمی معادلی Logarithm's Equation:

لوگاریتم په لغت کی د متناسبو عددو شمېرلو ته وایي:

او په اصطلاح کی د اکسپوننشل معادلو معکوسی معادلی ته لوگاریتمی معادله وایي.

فرضاً $(b = a^x)$ یوه اکسپوننشل معادله لرو معکوسه معادله یې لوگاریتمی معادله ده.

چه داسی لیکل کیږي:

$$\log_a b = x$$

ته د $\log b$ قاعده وایي.

کولای شو چه اکسپوننشل تابع په لوگاریتمی تابع او لوگاریتمی تابع په اکسپوننشل تابع بدله

کړو. لکه $(x = 2^3)$ یوه اکسپوننشل تابع ده. لوگاریتمی تابع یې عبارت له

$$(\log_2 x = 3) \text{ څخه ده.}$$

اوهمدا ډول $(\log_2 8 = x)$ یوه لوگاریتمی تابع ده اکسپوننشل تابع یې عبارت له

$$(8 = 2^x) \text{ څخه ده.}$$

د لوگاریتم خواص:

1- د (1) لوگاریتم د هر مثبت عدد په قاعده باندی صفر (0) کیږي:

$$\left(\begin{array}{l} \log_b 1 = 0 \\ b \neq 1 \end{array} \right)$$

2- د هر مثبت لوگاریتم په خپله قاعده باندی (1) کیږي. $(\log_b b = 1)$ دا ځکه چه

$$(b = b^1) \text{ کیږي.}$$

مثال:

$$\log_8 8 = 1$$

$$\log_x x = 1$$

3- د یوه طاقت لرونکي عدد لوگاریتم په خپله قاعده باندی د توان څخه عبارت

$$\text{دی. } (\log_b b^r = r) \text{ ځکه چه } b \neq 1$$

$$b^x = b^r$$

4- د یوه حاصل ضرب لوگاریتم په یوه قاعده باندې د ضربی عواملو د لوگاریتمو د مجموعې سره مساوي دي په هماغه قاعده باندې:

$$\log_a(M \cdot N) = \log_a M + \log_a N.$$

$$\log_a M = x \quad M = a^x$$

$$\log_a N = y \quad N = a^y$$

اکسپوننشل معادلې طرف په طرف ضربوو.

$$M \cdot N = a^x \cdot a^y$$

$$M \cdot N = a^{x+y}$$

د چپ طرف لوگاریتم نیسو:

$$\log_a MN = x + y$$

$$\log_a MN = \log_a M + \log_a N$$

1- مثال: $\log_2(2x) = ?$ لوگاریتم پیدا کړئ

حل:

$$\log_2(2x) = \log_2 2 + \log_2 x = 1 + \log_2 x$$

2- مثال: لاندې لوگاریتم پیدا کړئ؟

$$\log_x(xy) = ?$$

$$\log_x(xy) = \log_x x + \log_x y = 1 + \log_x y$$

5- د یوه خارج قسمت لوگاریتم په یوه قاعده باندې د صورت او مخرغ د لوگاریتمو د تفاضل سره مساوي دي په هماغه قاعده باندې.

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

$$\log_a M = x \quad M = a^x$$

$$\log_a N = y \quad N = a^y$$

اکسپوننشل معادلې طرف په طرف یو پر بل ویشو.

$$\frac{M}{N} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

د چپ طرف لوگاریتم نیسو.

$$\log_a \frac{M}{N} = x - y = \log_a M - \log_a N$$

1- مثال: لاندې لوگاریتم حل کړئ؟

$$\log_2 \frac{x}{2} = ?$$

$$\log_2 \frac{x}{2} = \log_2 x - \log_2 2 = \log_2 x - 1$$

2- مثال:

$$\log_x \frac{5x}{y} = \log_x(5x) - \log_x y = \log_x x + \log_x 5 - \log_x y$$

$$\log_x \frac{5x}{y} = \log_x(5x) - \log_x y = 1 + \log_x 5 - \log_x y$$

6- که د یوه طاقت لرونکي عدد لوگاریتم په بله قاعده ونيول شي لوگاریتم یې عبارت دې توان ضرب یې دهغه لوگاریتم په همغه قاعده.

$$\log_b M^r = r \log_b M$$

$$\log_b M = x$$

$$M = b^x$$

$$M^r = (b^x)^r \Rightarrow M^r = b^{rx}$$

$$\log_b M^r = rx$$

$$\log_b M^r = r \log_b M$$

1- مثال:

$$\log_3 81^7 = ?$$

$$\log_3 81^7 = 7 \log_3 81 = 7 \log_3 3^4 = 4 \times 7 \log_3 3 = 28 \times 1 = 28$$

2- مثال:

$$\log_3 (3x)^5 = ?$$

$$\begin{aligned} \log_3 (3x)^5 &= 5 \log_3 (3x) = 5(\log_3 3 + \log_3 x) \\ &= 5(1 + \log_3 x) = 5 + 5 \log_3 x \end{aligned}$$

7- د یوه عدد لوگاریتم د یوه طاقت لرونکي عدد په قاعده باندې عبارت دې د قاعدې د توان معکوس ضرب یې دهغه عدد لوگاریتم د قاعدې د قاعدې په قاعده.

$$\begin{aligned} \log_{a^b} M &= \frac{1}{b} \log_a M \\ x &= \log_{a^b} M \\ (a^b)^x &= M \\ (a^x)^b &= M \Rightarrow \sqrt[b]{(a^x)^b} = \sqrt[b]{M} \Rightarrow a^x = \sqrt[b]{M} \\ x &= \log_a M^{\frac{1}{b}} = \frac{1}{b} \log_a M \\ \log_{a^b} M &= \frac{1}{b} \log_a M \end{aligned}$$

مثال:

$$\log_{16} 32 = ?$$

$$\log_{16} 32 = \log_{2^4} 32 = \frac{1}{4} \log_2 32$$

$$= \frac{1}{4} \log_2 2^5 = 5 \times \frac{1}{4} \log_2 2 = \frac{5}{4} \times 1 = \frac{5}{4}$$

$$\log_{16} 32 = \frac{5}{4}$$

د قاعدې د بدلولو فارمول:

که د یوه عدد لوگاریتم په یوه قاعده غوښتل شوی وي مګر په دغه قاعده باندې د راکړ شوي عدد د لوگاریتم پیدا کول مشکل وي نو د راکړ شوي عدد او د لوگاریتم د قاعدې لوگاریتم په یوه بله قاعده باندې پیدا کوو د عدد لوگاریتم د لوگاریتم د قاعدې په لوگاریتم ویشو د راکړ شوي عدد لوگاریتم په راکړ شوي قاعده باندې لاس ته راځي.

مثلاً $\log_b M$ غوښتل شوی دی لوگاریتم یې د لاندې فارمول پواسطه پیدا کېږي.

$$\log_b M = \frac{\log_a M}{\log_a b}$$

ثبوت: $\log_b M$ په x ښیو.

$$\log_b M = x \Rightarrow M = b^x$$

$$\log_a M = \log_a b^x = x \log_a b$$

$$\begin{aligned} \log_a M &= \log_b M \log_a b \\ \frac{\log_b M \log_a b}{\log_a b} &= \frac{\log_a M}{\log_a b} \\ \log_b M &= \frac{\log_a M}{\log_a b} \end{aligned}$$

1- مثال:

$$\begin{aligned} \log_{27} 81 &=? \\ \log_{27} 81 &= \frac{\log_3 81}{\log_3 27} = \frac{\log_3 3^4}{\log_3 3^3} = \frac{4 \log_3 3}{3 \log_3 3} = \frac{4 \times 1}{3 \times 1} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

2- مثال:

$$\begin{aligned} \log_{32} 128 &=? \\ \log_{32} 128 &= \frac{\log_2 128}{\log_2 32} = \frac{\log_2 2^7}{\log_2 2^5} = \frac{7 \log_2 2}{5 \log_2 2} = \frac{7 \times 1}{5 \times 1} = \frac{7}{5} \end{aligned}$$

د لوگاریتم اقسام

لوگاریتم د قاعدې له مخې په دوه قسمه دی:

1- اعشاري لوگاریتم یا معمولي لوگاریتم *Common logarithm*2- طبعي لوگاریتم *Natural logarithm*

1- اعشاري لوگاریتم:

که د لوگاریتم قاعده (10) وه دی لوگاریتم ته اعشاري لوگاریتم وایي.

$$\log x$$

2- طبعي لوگاریتم:

هغه لوگاریتم دی چې قاعده یې (e) وي.

څرنگه چې د دواړو قسمو قاعدې معلومی دي نو قاعده یې نه لیکل کیږي.

$$\ln x$$

د یوه عدد د لوگاریتم پیدا کول:

د طاقت لرونکو عددو څخه په غېر د نورو عددو لوگاریتم دوه برخې لري. یوه برخه یې صحیح او بله برخه یې اعشاري ده. صحیح برخه ته کرکترستیک (*Characteristic*) او اعشاري برخه ته یې مانتیس (*Mantisa*) وایي. کرکترستیک د محاسبې پواسطه او مانتیس د جدول او یا د حساب د ماشین پواسطه پیدا کېږي. که د طاقت لرونکي عدد قاعده لس وي یوازې کرکترستیک لري او مانتیس نه لري.

1- مثال: $\log(1000000) = ?$ څو دی؟

$$\log(1000000) = \log 10^6 = 6$$

کرکترستیک د ارقامو د شمېر څخه یو کم وي.

2- مثال: $\log(0.000000001) = ?$ څو دی؟

$$\log(0.000000001) = \log 10^{-9} = -9$$

کرکترستیک یې د اعشاريې د علامې د دواړو خواو د صفرو د شمېر سره مساوي دی او علامه یې منفي ده.

که عدد طاقت لرونکی نه و نو دغه عدد مانتیس او کرکترستیک دواړه لري. لکه $\log(4560000)$ د داسې عدد د لوگاریتم د پیدا کولو لپاره راکړشوی عدد په داسې اعشاري عدد بدلولو چه یو رقم یې صحیح او نور رقمونه یې اعشاري شي. د راکړشوي عدد د رقمونو شمېر ته گورو عدد اوه رقمي دي نو په $(10^6 = 1000000)$ کې یې ضربوو په دې ترتیب کولای شو چه کرکترستیک یې پیدا کړو.

$$\log(4560000) = \log(4.56 + 10^6) = \log 4.56 + \log 10^6 = \log 4.56 + 6$$

(6) د راکړشوي عدد کرکترستیک دي. مانتیس یې د $(\log 4.56)$ څخه لاس ته راوړو. طریقه یې داسې ده چه (6) د درې رقمي عددو د لوگاریتمي جدول په پورتنۍ کرښه کې پیدا کوو او (4.5) د جدول د چپ طرف په ستون کې پیدا کوو او د مخکیني لیکل شوي عدد شاته یې لیکو بیا کرکترستیک ته گورو که مثبت و نو د کرکترستیک په اندازه د جدول څخه د پیدا شوي عدد مخی ته صفرونه وږو. او که کرکترستیک منفي و د پیدا شوي عدد شاته د اعشاريې د علامې دواړو خواو ته صفرونه وږو.

$$\log(4560000) = \log 4.56 + 6 = 0.6590 + 6 = 6.6590$$

$$\log(4560000) = 6.6590$$

د یوه او صفر تر منځ د کسرونو لوگاریتم:

د صفر او یوه تر منځ د راکړشوي کسر کرکترستیک منفي او ماتیس یې مثبت دی. که راکړشوی کسر عام وي په اعشار کسري بدلوو او د مخکیني سوال په څېر یې حلوو

مثال: $\log(0.00567)$ پیدا کړئ؟

حل:

$$\begin{aligned}\log(0.00567) &= \log(5.67 \times 10^{-3}) = \log 5.67 + \log 10^{-3} \\ &= \log 5.67 - 3 = 0.3690 - 3\end{aligned}$$

د راکړشوي عدد لوگاریتم $(3 - 0.3690)$ دی مگر که وغواړو چه د کرکترستیک او ماتیس څخه یو عدد جوړ کړو نو د کرکترستیک پر سر منفي علامه لیکو چه علامه په دی دلالت کوي چه کرکترستیک منفي دی $(3^{-}.3690)$ او که وغواړو چه ماتیس او کرکترستیک تر یو علامه لاندی کړو نو د کرکترستیک سره (1) جمع کوو او د ماتیس څخه یې منفي کوو نو:

$$(-2.6310)$$

$$\log(0.00567) = 0.3690 - 3 = 3^{-}.3690 = -2.6310$$

تمرین

د لاندی صحیح عددونو لوگاریتم پیدا کړئ؟

1- 456000

2- $\log 5890000$

3- $\log 69200$

4- $\log 73400$

د لاندی اعشاري عددونو لوگاریتم پیدا کړئ؟

1- $\log 0.00234$

2- $\log 0.0598$

3- $\log 0.000568$

4- $\log 0.008$

د صفر لوگاریتم:

$$\begin{aligned}0 &= \frac{1}{10^{\infty}} = 10^{-\infty} \\ \log_{10} 0 &= -\infty\end{aligned}$$

انتي لوگاریتم:

هر عدد د خپل لوگاریتم انتي لوگاریتم دي.

مثلاً $(\log 1000 = 3)$ دی او $\text{anti log } 3 = 1000$ دی.

انتي لوگاریتم پیدا کول:

مانتیس په جدول کی پیدا کوو هغه عدد چه د مانتیس په ستون کی لیکل شوی دي لیکو بیا هغه عدد د مانتیس په کرښه کی دی په لسیز او سلیز مرتبو کی لیکو کرکترستیک ته گورو که مثبت و کرکترستیک د عدد د ارقامو د شمېر څخه یو کم دی یعنی تر کرکترستیک یو صفر اضافه ورکوو. او که کرکترستیک منفي و نو د عدد شاته د کرکترستیک په اندازه د اعشاریې دواړو خواو ته صفرونه ږدو.

مثال:

$$\text{antilog}(2.3690) = ?$$

$$\text{anti log}(0.3690) = 2.338837239$$

$$\text{anti log}(2.3690) = 233.8837239$$

مثال:

$$\text{anti log } 6^{-}.3710 = ?$$

$$\text{anti log } 0.3710 = 2.35$$

$$\text{anti log}(6^{-}.3710) = 0.00000235$$

تمرین:

$$2- \text{anti log}(2^{-}.6589)$$

$$1- \text{anti log}(3.4581)$$

$$3- \text{anti log}(-4.2907)$$

$$4- \text{anti log}(0.7551 - 4)$$

د لوگ (log) اولن (ln) پیدا کول یو د بل له جنسه:

د قاعدی د بدلولو فارمول لیکو:

$$\log_b M = \frac{\log_a M}{\log_a b}$$

$$\log_b M \cdot \log_a b = \log_a M$$

د (a) په عوض (10) اود (b) په عوض (e) لیکو.

$$\log_e M \cdot \log_{10} e = \log_{10} M$$

$$\ln M \cdot \log 2.72 = \log M$$

$$\ln M \cdot 0.4343 = \log M$$

مثال: $(\ln 6.73 = 1.9066)$ دی پیدا کړئ؟

حل:

$$\log M = \ln M \cdot 0.4343$$

$$\log 6.73 = \ln 6.73 \cdot 0.4343$$

$$\log 6.73 = 1.9066 \cdot 0.4343$$

$$\log 6.73 = 0.8280$$

د $\log$ څخه د $\ln$ د پیدا کولو لپاره د مساوات دواړه خواوې په (0.4343) ویشو.

$$\frac{\ln M \cdot 0.4343}{0.4343} = \frac{\log M}{0.4343} = \frac{1}{0.4343} \log M$$

$$\frac{1}{0.4343} = 2.3026$$

$$\ln M = 2.3026 \cdot \log M$$

مثال:

$$\ln 563 = ?$$

$$\ln 563 = \log 563 \cdot 2.3026$$

$$\ln 563 = 2.7505 \cdot 2.3026 = 6.3$$

انټرپولېشن Interpolation

انټرپولېشن په نوي عبارت باندې د یوې موضوع بیانولو ته وايي.

او په اصطلاح کې انټرپولېشن هغه عملیه ده چې د هغه عددو لوگاریتم پیدا کوي چې لوگاریتمي جدول یې ترتیب شوی نه وي. طریقه یې داسې ده چې عدد لیکو مانتیس یې په یوه حرف بنسټ د راکړ شوي عدد څخه لاندې باندې عددونه په درې رقمي عدد کې پیدا کړو او لیکو یې او مانتیس یې د جدول څخه لیکو په دې ترتیب شپې عددونه لاس ته راځي چې یوه یې مجهول وي بیا د دوه هم جنسو عددو تفاضل پیدا کړو په نتیجه کې څلور عددونه لاس ته راځي چې یوه یې مجهول وي دغه مجهول عدد د تناسب په واسطه پیدا کړو او د کوچني عدد د مانتیس سره یې جمع کړو د راکړ شوي عدد مانتیس لاس ته راځي.

مثال:- پيدا کړئ؟ $\log 4567$

$$0.01 \left[0.007 \begin{pmatrix} \log 4.57 & 0.6599 \\ \log 4.567 & m \\ \log 4.56 & 0.6589 \end{pmatrix} d \right] 0.0010$$

$$\frac{0.01}{0.007} = \frac{d}{0.0010} \Rightarrow d = \frac{0.01 \cdot 0.0010}{0.007} = \frac{10}{7000} = \frac{1}{700} = 0.00143$$

$$d = 0.00143$$

$$m - 0.6589 = 0.00143$$

$$m = 0.00143 + 0.6589 = 0.6603$$

$$\log 4567 = 3.6603$$

د انټر پولېشن پواسطه د انټي لوگاريتم پيدا کول:

د انټي لوگاريتم د پيدا کولو لپاره مانتيس په جدول کې لټوو که په جدول کې نه و نو د دغه مانتيس انټي لوگاريتم په يوه حرف ښو د مانتيس څخه لاندې باندې مانتيسونه په جدول کې پيدا کوو په نتيجه کې شپږ عددونه لاس ته راځي چه يو به يې مجهول وي بيا د دوه، دوه هم جنسو عددو تفاضل پيدا کوو شپږ عددونه په څلورو عددو بدليږي. چه يو به يې مجهول وي دغه مجهول عدد د تناسب پواسطه پيدا کوو اود کوچني عدد د انټي لوگاريتم سره يې جمع کوو د راکړشوي لوگاريتم انټي لوگ لاس ته راځي.

مثال:- د يوه عدد لوگاريتم (3.7351) دې انټي لوگ يې پيدا کړئ؟

$$0.01 \left[d \begin{pmatrix} 5.44 & 0.735 \\ m & 0.7352 \\ 5.43 & 0.7348 \end{pmatrix} 0.0004 \right] 0.0008$$

$$\frac{0.01}{0.0008} = \frac{d}{0.0004}$$

$$d = \frac{0.0004 \cdot 0.01}{0.0008} = \frac{4}{800} = \frac{1}{200} = 0.005$$

$$m - 5.43 = d$$

$$m = d + 5.43$$

$$m = 0.005 + 5.43$$

$$m = 5.435$$

کولوگاريتم Cologarithm :

د يوه عدد د معکوس لوگاريتم ته د هغه عدد کولوگاريتم وايي.

مثلاً (a) او $(\frac{1}{a})$ عددونه یو د بل معکوس دي نو د $(\frac{1}{a})$ لوگاریتم د (a) د کولوگاریتم په نوم نوم یادېږي.

$$\operatorname{co} \log a = \log \frac{1}{a} = \log 1 - \log a = 0 - \log a = -\log a$$

$$\operatorname{co} \log a = -\log a$$

نو معلومه شوه چه د یوه عدد کولوگاریتم دهغه عدد منفي لوگاریتم دي.

د لوگاریتمي معادلې د حل طریقه:

د لوگاریتمي معادلې په حلولو کې د لوگاریتم څخه استفاده کوو.

1- مثال:

$$\log_a(x+6) - \log_a(x+2) = \log_a x$$

$$\log_a \frac{x+6}{x+2} = \log_a x$$

$$\frac{x+6}{x+2} = x$$

$$x^2 + 2x = x + 6$$

$$x^2 + 2x - x - 6 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 1 + 24 = 25$$

$$\Delta = 25$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2 \times 1} = \frac{-1 \pm 5}{2}$$

$$x_1 = \frac{-1 + 5}{2} = \frac{4}{2} = 2 \quad x_1 = 2$$

$$x_2 = \frac{-1 - 5}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

2- مثال:

$$x^{2 \log x} = 10x$$

$$\log x^{2 \log x} = \log 10x$$

$$2 \log x \times \log x = \log 10x \Rightarrow 2 \log^2 x = \log 10 + \log x$$

$$2 \log^2 x - \log x - 1 = 0$$

$$2y^2 - y - 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(2)(-1) = 1 + 8 = 9$$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2 \times 2} = \frac{1 \pm 3}{4}$$

$$y_1 = \frac{1+3}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$y_2 = \frac{1-3}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\log x = y = y_1 = 1$$

$$\log_{10} x = 1$$

$$x = 10^1 = 10 \quad x_1 = 10$$

$$\log_{10} x = y = y_2 = -\frac{1}{2}$$

$$\log_{10} x = -\frac{1}{2}$$

$$x_2 = 10^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{10^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

3- مثال:

$$\frac{\log(35 - x^3)}{\log(5 - x)} = 3$$

$$3 \log(5 - x) = \log(35 - x^3)$$

$$\log(5 - x)^3 = \log(35 - x^3)$$

$$(5 - x)^3 = 35 - x^3$$

$$125 - 75x + 15x^2 - x^3 = 35 - x^3$$

$$15x^2 - 75x + 90 = 0$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$(x - 2)(x - 3) = 0$$

$$x_1 = 2 \quad x_2 = 3$$

4- مثال:

$$\log_5 (\log_{10} \sqrt{x^2 + 19}) = 0$$

$$\log_{10} \sqrt{x^2 + 19} = 5^0 = 1$$

$$\sqrt{x^2 + 19} = 10^1 = 10$$

$$(\sqrt{x^2 + 19})^2 = 10^2$$

$$x^2 + 19 = 100$$

$$x^2 = 100 - 19 = 81$$

$$x^2 = 81$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{81}$$

$$x = \pm 9$$

5- مثال:

$$\log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x = 5.5$$

$$\log_3 x + \log_{3^2} x + \log_{3^3} x = 5.5$$

$$\log_3 x + \frac{1}{2} \log_3 x + \frac{1}{3} \log_3 x = 5.5$$

$$\log_3 x \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = 5.5$$

$$\log_3 x \left(\frac{6 + 3 + 2}{6}\right) = \frac{11}{2}$$

$$\log_3 x \left(\frac{11}{6}\right) = \frac{11}{2} \Rightarrow \frac{11}{6} \log_3 x = \frac{11}{2}$$

$$\log_3 x = \frac{\frac{11}{2}}{\frac{11}{6}} = \frac{6 \times 11}{2 \times 11} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\log_3 x = 3$$

$$x = 3^3 = 27$$

6- مثال:

$$\log_2(11x - 1) = 5$$

$$11x - 1 = 2^5$$

$$11x = 32 + 1 = 33$$

$$\frac{11x}{11} = \frac{33}{11}$$

$$x = 11$$

7- مثال:

$$\log_3(2^x - 7) = 2$$

$$2^x - 7 = 2$$

$$2^x = 2 + 7 = 9 = 3^2$$

$$x = 3$$

مثال-8

$$\log_{\sqrt[3]{x}} 25 = 18$$

$$25 = \sqrt[3]{x}^{18} = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{18} = x^6$$

$$5^2 = (x^3)^2$$

$$x^3 = 5$$

$$\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{5} \Rightarrow x = \sqrt[3]{5}$$

مثال-9

$$\log_{10} \sqrt{x+1} + \log_{10} \sqrt{x-1} - \log_{10} 5 = 0$$

$$\log_{10} \frac{\sqrt{(x+1)(x-1)}}{5} = 0$$

$$\frac{\sqrt{(x+1)(x-1)}}{5} = 10^0 = 1$$

$$\sqrt{(x+1)(x-1)} = 5$$

$$\left(\sqrt{(x+1)(x-1)}\right)^2 = 5^2$$

$$x^2 - 1 = 25 \Rightarrow x^2 = 25 + 1 = 26$$

$$x^2 = 26 \Rightarrow x = \pm\sqrt{26}$$

مثال-10

$$\log(x^2 - 1) - \log(x + 1) = \log 2$$

$$\log \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \log 2$$

$$\frac{x^2 - 1}{x + 1} = 2 \Rightarrow \frac{(x - 1)(x + 1)}{x + 1} = 2 \Rightarrow x - 1 = 2, x = 3$$

مثال-11

$$x^{\log_{10} x} = 10$$

$$\log x^{\log_{10} x} = \log 10$$

$$\log_{10} x \log_{10} x = 1 \Rightarrow \log_{10}^2 x = 1 \Rightarrow x = 10$$

مثال-12

$$\begin{aligned} \log_3(x+1) - \log_3(x-1) &= 1 \\ \frac{x+1}{x-1} &= 3^1 \Rightarrow x+1 = 3(x-1) \Rightarrow x+1 = 3x-3 \\ x-3x &= -3-1 \Rightarrow -2x = -4 \Rightarrow \frac{-2x}{-2} = \frac{-4}{-2} \Rightarrow x = 2 \end{aligned}$$

مثال-13

$$\begin{aligned} \log_4(3x-3) &= \log_2 3 \\ \log_{2^2}(3x-3) &= \log_2 3 \\ \frac{1}{2} \log_2(3x-3) &= \log_2 3 \\ \log_2(3x-3)^{\frac{1}{2}} &= \log_2 3 \\ \sqrt{3x-3} &= 3 \Rightarrow \sqrt{(3x-3)^2} = 3^2 \\ 3x-3 &= 9 \Rightarrow 3x = 9+3 = 12 \Rightarrow \frac{3x}{3} = \frac{12}{3} \Rightarrow x = 4 \end{aligned}$$

مثال-14

$$\begin{aligned} \log_3\left(2 + \frac{1}{x}\right) &= \log_2 4 \\ \log_3\left(2 + \frac{1}{x}\right) &= \log_2 2^2 \Rightarrow \log_3\left(2 + \frac{1}{x}\right) = 2 \log_2 2 = 2 \times 1 = 2 \\ \log_3\left(2 + \frac{1}{x}\right) &= 2 \Rightarrow 2 + \frac{1}{x} = 3^2 = 9 \Rightarrow \frac{1}{x} = 9 - 2 = 7 \\ \frac{1}{x} &= 7 \Rightarrow 7x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{7} \end{aligned}$$

مثال-15

$$\begin{aligned} \log \sqrt{x} + \log x^{\frac{3}{2}} &= \log 100 \\ \log \sqrt{x} \cdot \sqrt{x^3} &= \log 100 \Rightarrow \log \sqrt{x \cdot x^3} = \log 100 \\ x^2 &= 10^2 \Rightarrow x = 10 \end{aligned}$$

مثال-16

$$\begin{aligned} \log_{(x^2-x+4)}(x^2+5x-1) &= 1 \\ x^2+5x-1 &= x^2-x+4 \Rightarrow 5x-1 = -x+4 \\ \Rightarrow 6x &= 5 \Rightarrow x = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

مثال-17:

$$\log_9 3 \cdot \log_2 x = 1$$

$$\log_{3^2} 3 \cdot \log_2 x = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \log_3 3 \cdot \log_2 x = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \log_2 x$$

$$= \log_2 x^{\frac{1}{2}} = 1 \Rightarrow x^{\frac{1}{2}} = 2^1 = 2 = \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4$$

$$x^{(1/2)} = 2^1 \Rightarrow x^{(1/2)} = 2 \Rightarrow (x^{(1/2)})^2 = 2^2 \Rightarrow x = 4$$

مثال-18:

$$\log_3 \log_2 (x - 1) = 2$$

$$\log_2 (x - 1) = 3^2 \Rightarrow x - 1 = 2^9 \Rightarrow x = 2^9 + 1$$

$$= 513 \Rightarrow x = 513$$

مثال-19:

$$\log_{10} x = \frac{\log_3 12}{\log_3 10}$$

$$\log_{10} x = \log_{10} 12$$

$$x = 12$$

مثال-20:

$$3^{\log_4 16} = 27^x$$

$$3^{\log_4 16} = 3^{3x}$$

$$\log_4 16 = 3x \Rightarrow 16 = 4^{3x} \Rightarrow 2^4 = 2^{6x} \Rightarrow 6x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{6}$$

$$x = \frac{2}{3}$$

تمرین:

لاندی معادلی حل کریں؟

$$1) x \log 3 - 1 = 2 \log 3 - \log \left(\frac{x}{3} + 1 \right)$$

$$2) \log \sqrt{2x^2} - 1 = \frac{1}{2}$$

$$3) \log(x - 3) = 1 - \log x$$

$$4) \ln(y + 1) = \ln(y - 7) + \ln 4$$

$$5) \log_2 x + \log_x 2 = 2$$

6) $\log_2 x + \log_3 x = 1$

7) $\log_3 x + \log_5 x = \log_{10} 15$

8) $\log_2^2(x-1)^2 - \log_{\frac{1}{2}}(x-1) = 5$

9) $\begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = -3 \\ \log_{10} x^3 - \log_{10} y^2 = 7 \end{cases}$

10) $\begin{cases} x^y + 5x = -4 \\ \log_x 16 = y \end{cases}$

11) $\begin{cases} \log_4 x - \log_2 y = 0 \\ x^2 - 4y^2 + 4 = 0 \end{cases}$

لسم فصل

توابع

تابع په لغت کې پیرو ته وايي.

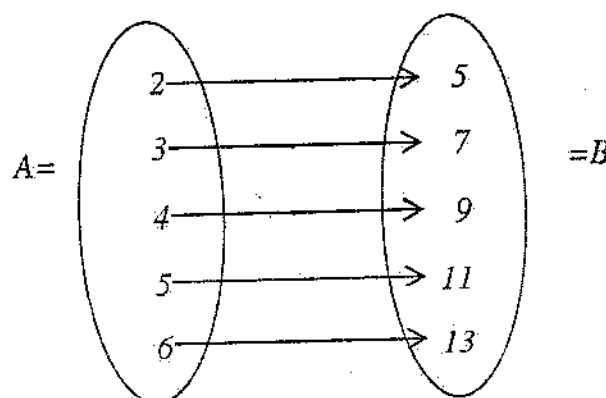
او په اصطلاح کې که د (A) او (B) دوه داسې سیټونه ولروچه د (A) د سیټ هر عنصر د (B) د سیټ د یوه عنصر سره تعلق ولري. دغسې تعلق یا رابطې ته تابع وايي.

لکه: $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ او $B = \{5, 7, 9, 11, 13\}$

سیټونه د لاندې رابطې پیروي کوي.

$$y = 2x + 1$$

نو دغه ډول رابطې ته تابع وايي.



په تابع کې اول سیټ ته د تعریف ناحیه، د قیمتونو سیټ او یا ډومین ($Domain$) وايي.

دویم سیټ ته د تصویرونو سیټ، رنج ($Range$) او کوډومین ($Codomain$) وايي.

رنج: د تعریف د ناحیې د عناصرو د تصویرونو سیټ ته رنج وايي.

کوډومین: د دویم سیټ د ټولو عناصرو سیټ ته کوډومین وايي.

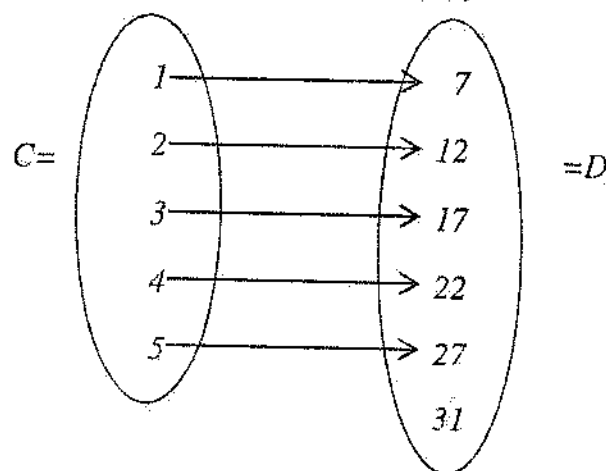
کله کله د ډومین ټول عناصر د کوډومین د ټولو عناصرو سره رابطه لري په دې صورت کې دویم سیټ هم رنج دی او هم کوډومین دی. لکه پورتنۍ سیټونه.

او که د دویم سیټ ټول عناصر د اول سیټ د عناصرو سره تعلق ونلري پدې صورت کې د دویم

سیت هغه عناصر چه د اول سیت د عناصرو سره تعلق لري د تصویرونو سیت یا رنج بلل کیږي. او د دویم سیت ټول عناصر د کوډومین په نوم یادېږي.

$$C = (1, 2, 3, 4, 5)$$

$$D = (7, 12, 17, 22, 27, 31)$$



په دغه حالت کې د رنج او کوډومین تر منځ لاندې رابطه موجود ده.

$$\text{Range} \subseteq \text{Codomain}$$

د تابع اقسام:

تابع په دوه قسمه ده.

1- ناطقه تابع 2- ترانسندنتل تابع

1- ناطقه تابع:

خطي تابع، دویمه درجه تابع او هوموگرافیک تابعگانې ناطقې تابعگانې دي.

a- خطي تابع:

هغه تابع ده چه گراف یې مستقیم خط وي. عمومي شکل یې دا دی.

$$y = ax + b$$

$$y = mx + b$$

(a) او (b) ثابت عددونه دي (x) متحول دی (y) د (x) تابع دی. a او m دواړه یوځای دي.

د خطي تابع د تعريف ناحیه:

د خطي تابع د تعريف ناحیه د حقيقي اعدادو سيټ دی په (IR) سره يې نښي يعنې:

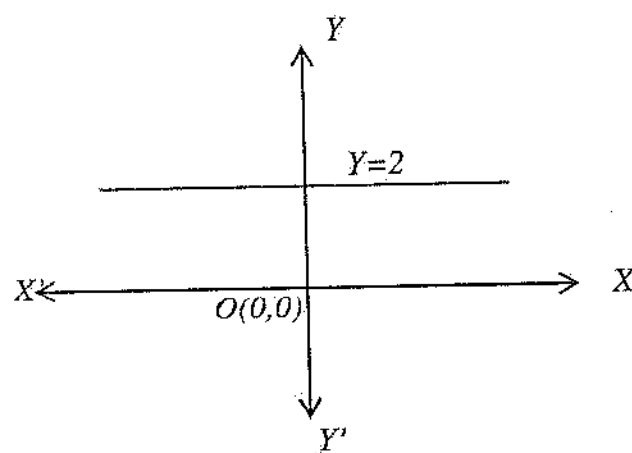
$$IR = (-\infty, +\infty)$$

د خطي تابع مهل د (x) ضريب يعنې (m) دی.

خصوصي حالتونه:

1- که په يوه تابع کې $m = 0$ تابع لاندې شکل غوره کوي $(y = b)$ دی تابع ته ثابت تابع وايي. گراف يې د XX د محور سره موازي دی.

مثال: $y = 2$ گراف رسم کړئ؟



2- چه $m = 1$ او $b = 0$ وي تابع لاندې شکل غوره کوي.

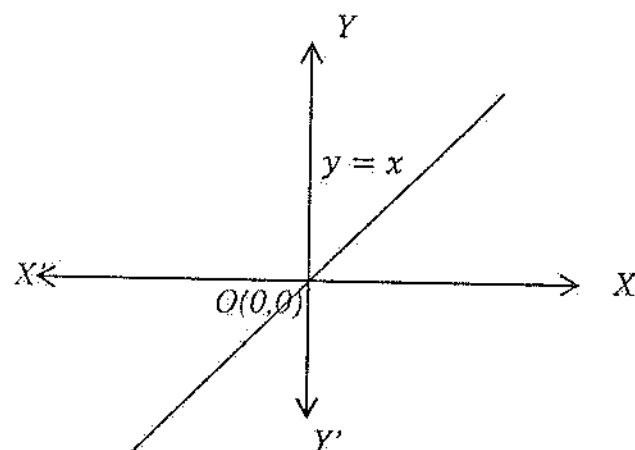
$$y = mx + b \Rightarrow 1 \cdot x + 0 = x$$

$$y = x$$

دغې تابع ته د عينيت تابع وايي گراف يې اوله او دريمه ربعه نيمايي کوي.

مثال: $y = x$ د تابع گراف رسم کړئ؟

x	-1	0	+1
y	-1	0	+1



د خطي تابع د عمومي شکل د گراف ترسیم:

1- د XX' محور سره د تابع د گراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $y = 0$ فرضوو.

2- د YY' محور سره د تابع د گراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $x = 0$ فرضوو.

پیدا شوي نقطې وصلوو د راځپښتۍ تابع گراف لاس ته راځي.

مثال: د $y = 3x + 6$ د تابع گراف رسم کړئ

حل:

1- $x = 0$ فرضوو نو $y = 6$ کيږي نو د (YY') د محور سره د تابع د تقاطع نقطه عبارت له $A(0,6)$ څخه ده.

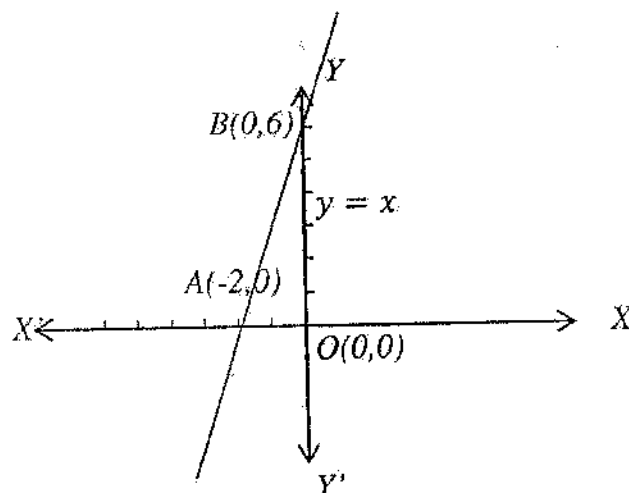
2- $y = 0$ فرضوو نو:

$$3x + 6 = 0$$

$$3x = -6 \Rightarrow \frac{3x}{3} = \frac{-6}{3} \Rightarrow x = -2$$

$$B(-2,0)$$

دا نقطه د (XX') د محور سره د گراف د تقاطع نقطه ده د وضعیه کمیټونو د محورونو په مستوي کې یې د وضعیه کمیټونو د محورونو پر مخ یې پیدا کوو او وصلوو یې غوښتل شوی گراف لاس ته راځي.

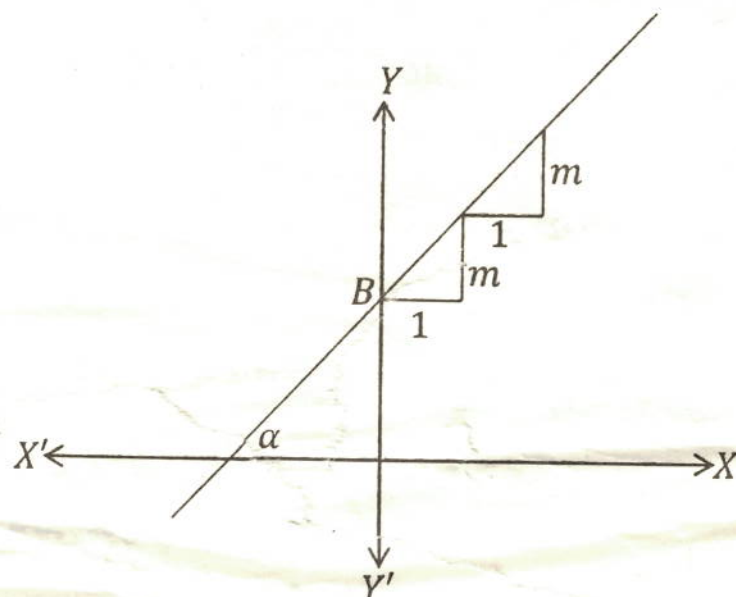


د مستقيمي کرښې مېل:

د مستقيمي کرښې مېل د هغه زاويې تانجانت دی چه مستقیمه کرښه يې د XX' د محور سره جوړوي.

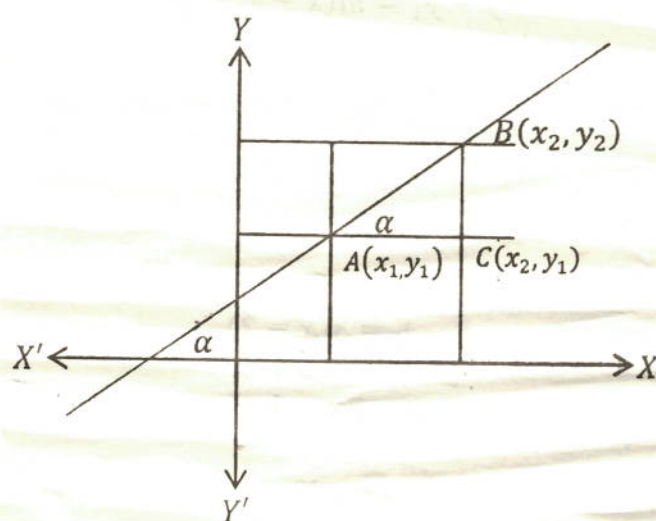
په عمومي صورت د متحول ضریب د مستقيمي کرښې مېل دی. ددی خبری دثبوت لپاره د وضعیه کمیتونو په مستوي کې د وضعیه کمیتونو محورونه د (Δ) د مستقیم پواسطه قطع کوو چه د YY' محور د B په نقطه کې قطع کړي او XX' د محور سره د (α) په اندازه زاویه جوړه کړي بیا د XX' او YY' د محورونو سره موازي خطونه رسموو په افقي خطو باندی د واحد په اندازه او په عمودي محورو باندی د (m) په اندازه ټوټې را بېلو α او د (α) د زاويې تانجانت پیدا کوو چه همدغه تانجانت د مستقيمي کرښې مېل دی.

$$\tan \alpha = \frac{m}{1} = m$$



دمبل معادله

فرضاً د $A(x_1, y_1)$ او $B(x_2, y_2)$ نقطې د مستقیمې دوه نقطې دي
 د A او B د نقطو څخه د $X\bar{X}$ او $Y\bar{Y}$ د محورو سره موازي خطونه رسمو چه یو
 او $B(x_2, y_2)$ بل د $C(x_1, y_2)$ په نقطه کې قطع کړي د ABC
 په مثلث کې د α د زاويې تانجانت پیدا کوو.



$$\tan \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\tan \alpha = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

مثال: $A(5,9)$ او $B(-2,-5)$ د یوې مستقیمې کرښې دوه نقطې دي مېل یې پیدا کړئ؟
حل:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-5 - 9}{-2 - 5} = \frac{-14}{-7} = 2 \Rightarrow m = 2$$

د هغه مستقیمې کرښې معادله چه مېل او یوه نقطه یې معلومه وي:
د مستقیمې کرښې عمومي معادله لیکو.

$$y = mx + b \dots 1$$

فرضاً $A(x_1, y_1)$ د یوې مستقیمې کرښې یوه نقطه ده په عمومي معادله کې یې وضع کوو.

$$y_1 = mx_1 + b \dots 2$$

(2) رابطه د (1) رابطې څخه منفي کوو.

$$\begin{aligned} y &= mx + b \\ \pm y_1 &= \pm mx_1 \pm b \\ \hline y - y_1 &= mx - mx_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - y_1 &= m(x - x_1) \end{aligned}$$

مثال: د هغه مستقیمې کرښې معادله پیدا کړئ چه $m = 3$ وي او د $A(2,5)$ د نقطې څخه تېره شي؟

حل:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - 5 &= 3(x - 2) \\ y &= 3x - 6 + 5 \\ y &= 3x - 1 \end{aligned}$$

د هغه مستقیمې کرښې د معادلې پیدا کول چه دوه نقطې یې معلومی وي:

د هغه مستقیمې کرښې معادله لیکو چه مېل او یوه نقطه یې معلومه وي

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

د (m) په عوض یې قیمت لیکو:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

مثال: د هغه مستقیمې کرښې معادله پیدا کړئ چه دوه نقطې یې $A(-4, 14)$ او $B(4, 8)$

وي

حل:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

$$y - 14 = \frac{8 - 14}{4 - (-4)} \{x - (-4)\}$$

$$y = \frac{-6}{4 + 4} (x + 4) + 14$$

$$y = \frac{-6}{8} (x + 4) + 14$$

$$y = -\frac{3}{4} (x + 4) + 14 = -\frac{3}{4}x - \frac{3}{4} \cdot 4 + 14 = -\frac{3}{4}x - 3 + 14$$

$$= -\frac{3}{4}x + 8$$

محوري معادله

محوري معادله هغه معادله ده چه د محورونو سره یې د تقاطع نقطې معلومی وي

معادله یې په لاندې ډول ده.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

ثبوت: فرضاً د XX د محور سره یې د تقاطع نقطه $A(a, 0)$ ده او د YY سره یې د تقاطع

نقطه $B(0, b)$ ده دا نقطې په هغه معادله کې وضع کوو چه دوه نقطې یې معلومی وي.

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y - 0 = \frac{b - 0}{0 - a}(x - a)$$

$$y = \frac{b}{-a}(x - a)$$

$$-ay = bx - ab$$

$$-bx - ay = -ab$$

$$\frac{-bx}{-ab} - \frac{ay}{-ab} = \frac{-ab}{-ab}$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

مثال: د یوې مستقیمې کرښې دوه نقطې $A(5,0)$ او $B(0,10)$ دي معادله یې پیدا کړئ؟

حل:

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{10} = 1$$

$$\frac{2x + y}{10} = 1$$

$$y = -2x + 10$$

تمرین:

1- په لاندې ډول د کرښو نقطې راڅپړئ؟

1- $A(3,5), B(4, -11)$

2- $C(9,3), D(2,7)$

3- $E(9,3), F(3, -5)$

2- په لاندې ډول د مستقیمې کرښې یوه نقطه او مېل راڅپړئ؟

1- $A(5,4), m = 4$

2- $B(5,8), m = 2$

3- $C(-3,7), m = \frac{1}{2}$

3- په لاندې ډول د مستقیمې کرښې دوه نقطې راڅپړئ؟

1: $A(3,4), B(6,2)$

2: $C(8,12), D(4, -7)$

3: $E(2, -1), F(3, -4)$

4- په لاندې ډول د محورونو سره د مستقیمې کرښې د تقاطع نقطې راکړئ او د محوري معادلې یې پیدا کړئ؟

$$2- C(3,0), D(0,12)$$

$$1- A(4,0), B(0,8)$$

$$3- E(8,0), F(0,24)$$

جفته تابع:

که یوه تابع د او لپاره یو شان وي دی تابع ته جفته تابع وایي. لکه $y = x^2$ چې:

$$f(x) = x^2$$

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2$$

یعنې:

$$f(x) = f(-x)$$

طاقه تابع:

هغه تابع ده چې او لپاره یو شان نه وي. لکه $y = x^2 + 5x$ چې د (x) او لپاره یو شان نه ده

یعنې د (x) لپاره $f(x) = x^2 + 5x$ او د $(-x)$ لپاره $f(-x) = x^2 - 5x$ ده نو

$$f(x) \neq f(-x) \text{ نو دغه تابع طاق تابع ده.}$$

معکوسه تابع:

دوه تابعګانې هغه وخت یو د بل معکوسې دي چې د یوې دوهمې د بلې کوډومېن وي او

کوډومېن د بلې تابع دوهمې وي.

د معکوسې تابع جوړول:

د تابع څخه د (x) قیمت د (y) له جنسه پیدا کوو او بیا د (x) او (y) ځایونه بدلوو معکوسه

تابع لاس ته راځي.

مثال: د $y = 3x - 7$ معکوسه تابع پیدا کړئ.

حل:

$$3x - 7 = y$$

$$3x = y + 7$$

$$x = \frac{y + 7}{3}$$

$$y = \frac{x + 7}{3}$$

مرکبه تابع

هغه تابع ده چه متحول يې د بل متحول تابع وي يا دا چه د تابع، تابع ته مرکبه تابع وايي.
که وغواړو چه د دوه تابعگانو څخه مرکبه تابع جوړه کړو نو يوه تابع په بله تابع کې د متحول په عوض وضع کوو. مرکبه تابع لاس ته راځي اوداسی ليکل کيږي.

$$fog$$

مثال: $f(x) = 3x - 5$ او $g(x) = 3x^2 - 1$ دوه تابعگانې راکړشويدي fog او gof پيدا کړئ؟

$$fog = f\{g(x)\} = f(3x^2 - 1) = 3(3x^2 - 1) - 5 = 9x^2 - 3 - 5 = 9x^2 - 8$$

$$fog = 9x^2 - 8$$

$$gof = g\{f(x)\} = g(3x - 5) = 3(3x - 5)^2 - 1 = 3(9x^2 - 30x + 25) - 1 = 27x^2 - 90x + 75 - 1 = 27x^2 - 90x + 74$$

$$gof = 27x^2 - 90x + 74$$

د مرکبې تابع د تعريف ناحیه

د مرکبې تابع د تعريف ناحیه د اولی تابع د تعريف د ناحیې د هغه عناصرو سیټ دی چه په مرکبه تابع کې تصویر ولري.

مثال: $f(x) = \sqrt{4x - 1}$ او $h(x) = x^2 + \frac{1}{4}$ دوه تابعگانې لرو چې
 $domf(x) = \left[\frac{1}{4}, \infty\right]$ او $domh(x) = IR$ دی، hof او foh او ډومېنونه یې پيدا کړئ؟

حل:

$$hof = h\{f(x)\} = h(\sqrt{4x - 1}) = (\sqrt{4x - 1})^2 + \frac{1}{4} = 4x - 1 + \frac{1}{4} = 4x - \frac{3}{4}$$

$$hof = 4x - \frac{3}{4} \quad ; \quad domh\{f(x)\} = \left[\frac{1}{3}, \infty\right]$$

$$f \circ h = f\{h(x)\} = f\left(x^2 + \frac{1}{4}\right) = \sqrt{4\left(x^2 + \frac{1}{4}\right) - 1} = \sqrt{4x^2 + 4 \times \frac{1}{4} - 1}$$

$$f \circ h = 2x \quad ; \quad \text{dom } f\{h(x)\} = \mathbb{R}$$

تمرین:

د لاندې تابعگانو معکوسی تابعگانی پیدا کړئ؟

$$1- y = 4x - 3$$

$$2- y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{12}$$

$$3- y = x - \frac{1}{2}$$

$$4- y = 5x - 8$$

د لاندې تابعگانو ترکیب او دوهمېونه پیدا کړئ؟

$$1- f(x) = 3x - 4, \quad g(x) = \sqrt{3x^2 + 4}$$

$$2- f(x) = x^2 + 1, \quad h(x) = \sqrt{x}$$

پولینومي تابعگانی

خو شاخه اي تابعگانو ته پولینومي تابع وايي لکه

$$y = \begin{cases} x + 1 & : x < -2 \\ x + 3 & : x > 2 \\ x - 1 & : x < 1 \end{cases}$$

حل:

$$y = x + 3 \quad : x > 2$$

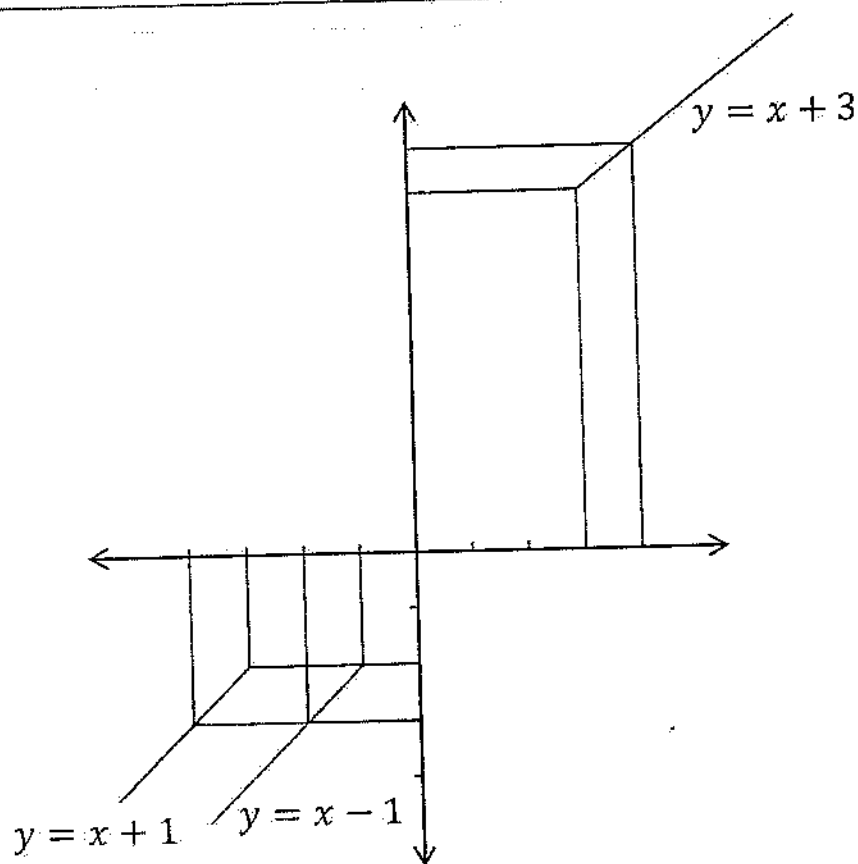
$$\begin{array}{c|cc} x & 3 & 4 \\ \hline y & 6 & 7 \end{array}$$

$$y = x + 1 \quad : x < -2$$

$$\begin{array}{c|cc} x & -4 & -3 \\ \hline y & -3 & -2 \end{array}$$

$$y = x - 1 \quad : x < 1$$

$$\begin{array}{c|cc} x & -2 & -1 \\ \hline y & -3 & -2 \end{array}$$



تمرین

د لاندې تابعگانو گرافونه رسم کړئ؟

$$1-y = \begin{cases} x+2 & : x > 3 \\ x-2 & : x < 3 \end{cases}$$

$$2-y = \begin{cases} x-1 & : x > 2 \\ x+1 & : x < 2 \\ x+2 & : x > 5 \end{cases}$$

$$3-y = \begin{cases} x+4 & : x < 2 \\ x-1 & : x > 0 \end{cases}$$

$$4-y = \begin{cases} \frac{x+2}{3} & : x < 6 \\ \frac{x-2}{4} & : x > 6 \end{cases}$$

$$5-y = \begin{cases} x+4 & " & x < 3 \\ x-4 & " & x > 3 \end{cases}$$

یوولسم فصل

دویمه درجه تابع

دویمه درجه تابع هغه تابع ده چه د متحول درجه یې دوه وي.

عمومي شکل یې دا دی:

$$\begin{pmatrix} y = ax^2 + bx + c \\ a \neq 0 \end{pmatrix}$$

a ، b او c ثابت عددونه دي او (x) متحول دی او (y) د (x) تابع دی.

د دویمه درجه تابع د تعریف ناحیه:

د دویمه درجه تابع د تعریف ناحیه د حقیقي اعدادو سیټ دی او په IR سره یې نښي. د تعریف

ناحيې ته د قیمتونو سیټ او ډومین ($Domain$) هم وایي.

د دویمه درجه تابع گراف:

د دویمه درجه تابع گراف ته پارابول وایي.

که په دویمه درجه تابع کې $a > 0$ وي تابع گراف اصغري نقطه لري او د پارابول خوله پورته خواته خلاصیږي. او که $a < 0$ وي نو پارابول اعظمي نقطه لري او د پارابول خوله ګڼسته خواته خلاصیږي.

اعظمي او اصغري نقطو ته د پارابول راس ($Vertex$) وایي.

د دویمه درجه تابع د گراف ترسیم:

د دویمه درجه تابع د گراف ترسیم په درې حالتو کې مطالعه کوو.

1- د $y = ax^2$ د تابع د گراف ترسیم

2- د $y = ax^2 + c$ د تابع د گراف ترسیم

3- د $\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = ax^2 + bx \end{cases}$ د تابع گراف رسم کړئ

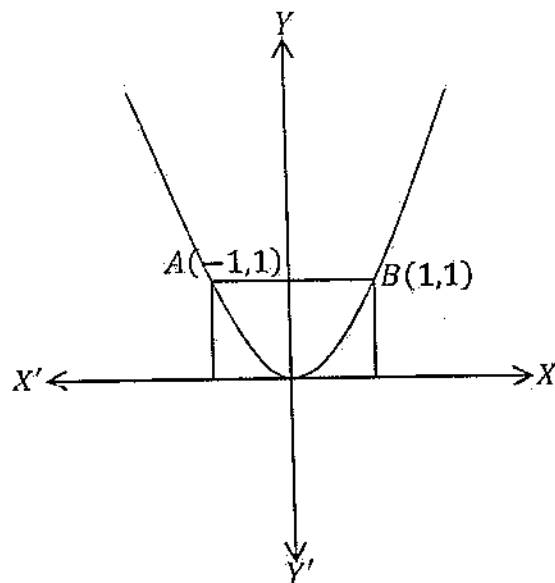
1- د $y = ax^2$ د تابع د گراف ترسیم:

x ته څو قیمتونه ورکوو او د (y) قیمتونه پیدا کوو. بیا د تابع د گراف وضعیت په یوه جدول کې مطالعه کوو.

مثال: د $y = x^2$ گراف رسم کړئ؟

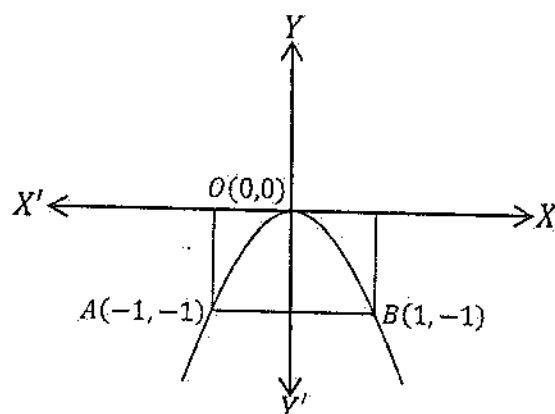
x ته څو قیمتونه ورکوو او د y قیمتونه پیدا کوو. او د تابع وضعیت په یوه جدول کې مطالعه کوو:

x	-1	0	1
y	-1	0	+1



مثال: د $y = -x^2$ تابع گراف رسم کړئ؟

x	-1	0	+1
y	-1	0	+1



نوټ:

که $(a < 1)$ وي نو د تابع گراف پلن او سورور وي او که $(a > 1)$ وي نو د تابع گراف نرې او کم سوری وي.

تمرین:

لاندې گرافونه رسم کړئ؟

1- $y = 3x^2$

2- $y = 2x^2$

3- $y = -4x^2$

4- $y = \frac{1}{2}x^2$

5- $-\frac{2}{3}x^2$

د گراف انتقال:

د (XX') او (YY') په محورو باندې د تابع د گراف حرکت ته د تابع د گراف انتقال وايي.

1- د (XX') پر محور باندې د تابع د گراف انتقال:

که وغواړو چه د (XX') پر محور باندې د تابع گراف ته انتقال ورکړو نو مطلوب عدد د تابع سره جمع يا تفریقوو او گراف یې رسموو.

مثال: د $y = x^2$ د تابع گراف ته د (3) په اندازه چپې او بښې خواته انتقال ورکړئ؟

حل: چيې خواته د 3 په اندازه انتقال ورکړو نو 3 ورسره جمع کوو:

$$y = (x + 3)^2$$

$$x + 3 = 0$$

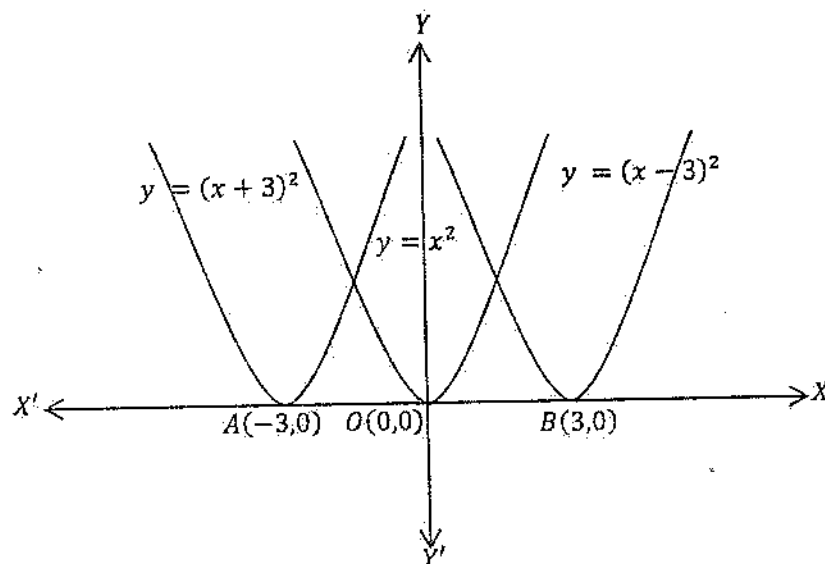
$$x = -3$$

$$A(-3, 0)$$

ښي خواته د انتقال لپاره (3) د متحول څخه منفي کوو:

$$y = (x - 3)^2$$

$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$



2- د YY' په محور باندې د تابع د گراف انتقال:

که وغواړو چه د $y = x^2$ د تابع گراف ته د (yY') په محور باندې انتقال ورکړو نو مطلوب عدد د تابع سره جمع يا تفریقوو.

مثال: د $y = x^2$ د تابع گراف ته د (2) په اندازه پورته او کښته خواته انتقال ورکړئ؟

حل:

که وغواړو چه (2) په اندازه گراف ته پورته خواته انتقال ورکړو نو (2) د تابع سره جمع کوو.

$$y = x^2 + 2$$

د څرنگه چې منفي عدد جذرونه لري نو د تابع گراف د (XX) محور نه قطع کوي.

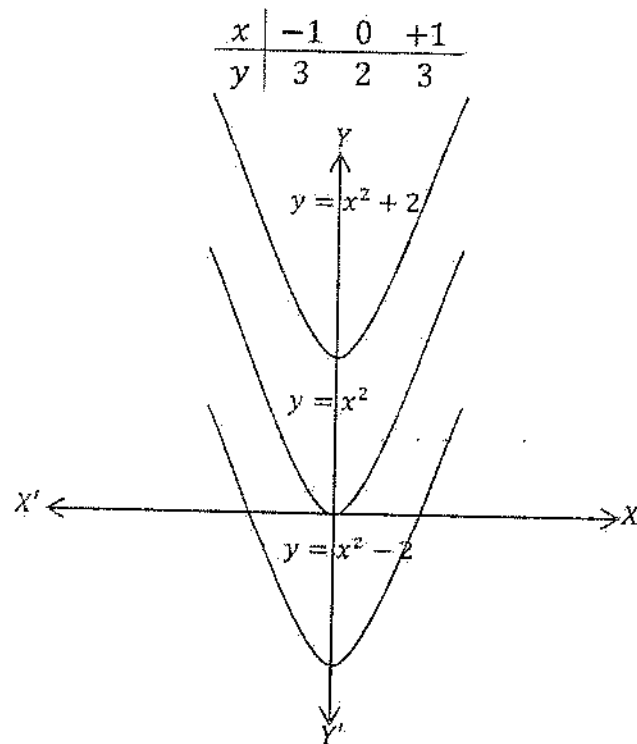
$$x^2 + 2 = 0$$

$$x^2 = -2$$

د گراف د ښه ترسیم لپاره (x) ته څو قیمتونه ورکوو او د (y) قیمتونه پیدا کوو.

د -2 د (YY) د محور سره د تابع د گراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $x = 0$ فرضوو په نتیجه

کې $y = 2$ کیږي چه د YY د محور سره د گراف د تقاطع نقطه $A(0,2)$ ده.



تمرین:

لاندې تابعگانې رسم کړئ؟

1- د $y = 2x^2$ تابع گراف ته د (3) په اندازه ښی او چپي خواته انتقال ورکړئ؟

2- د $y = 3x^2$ تابع گراف ته د $(\frac{3}{2})$ په اندازه کښته او پورته خواته انتقال ورکړئ؟

-2 د $y = ax^2 + c$ د تابع د گراف ترسیم:

1- د (XX') د محور سره د تابع د گراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $y = 0$ فرضوو د تقاطع نقطې یې عبارت دي:

$$A\left(+\sqrt{\frac{-c}{a}}, 0\right)$$

$$B\left(-\sqrt{\frac{-c}{a}}, 0\right)$$

2- د (YY') د محور سره د تابع د گراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $x = 0$ فرضوو د تقاطع نقطه یې عبارت ده له $M(0, c)$ دغه نقطه د تابع د گراف راس هم دی.

د (A) نقطه د (C) سره او د (C) نقطه د (B) سره وصلوو د تابع گراف لاس ته راځي.

مثال: د $y = x^2 - 1$ د تابع گراف رسم کړئ؟

1- د (XX') د محور سره د تابع د گراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $y = 0$ فرضوو.

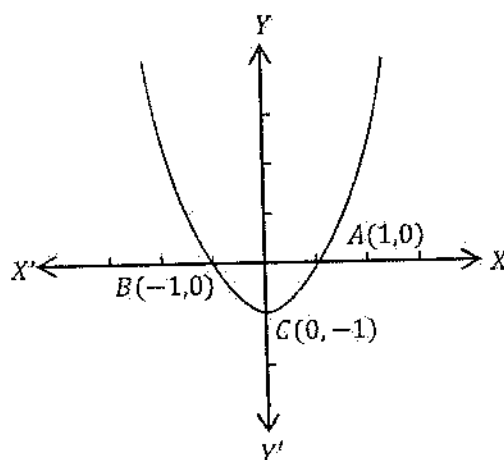
$$x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{1}$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = -1$$



د xx' د محور سره د تابع د گراف د تقاطع نقطه عبارت دي:

$$A(1,0) \quad B(-1,0)$$

2- د (YY') د محور سره د تابع د گراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $x = 0$ فرضوو چې $y = -1$ کیږي. نو د (YY') سره د تابع د گراف د تقاطع نقطه عبارت ده له $C(0, -1)$ څخه

مثال: د $y = x^2 + 1$ د تابع گراف رسم کړئ؟

حل: د (XX') د محور سره د تابع د گراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $y = 0$ فرضوو

$$x^2 + 1 = 0$$

$$x^2 = -1$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{-1}$$

څرنگه چې منفي عدد جذر نه لري نو د تابع گراف د xx' د محور سره د تقاطع نقطه نلري.

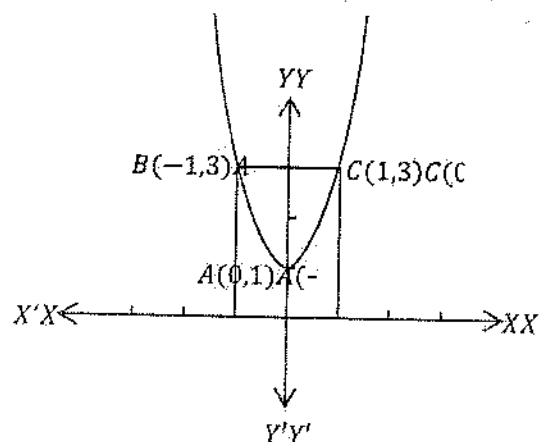
د (YY') د محور سره د تابع د گراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $x = 0$ فرضوو نو د (YY') د محور سره د تابع د گراف د تقاطع نقطه عبارت ده.

$$A(0,1)$$

د گراف د دقیق ترسیم لپاره (x) ته څو قیمتونه ورکوو او د (y) قیمت پیدا کوو.

x	-1	0	+1
y	2	0	2

$$B(-1,2) \quad O(0,1) \quad C(1,2)$$



مثال: د $y = -x^2 + 1$ د تابع گراف رسم کړئ؟

حل:

1- د (XX') د محور سره د تابع د گراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $y = 0$ فرضوو.

$$-x^2 + 1 = 0$$

$$-x^2 = -1$$

$$x^2 = 1$$

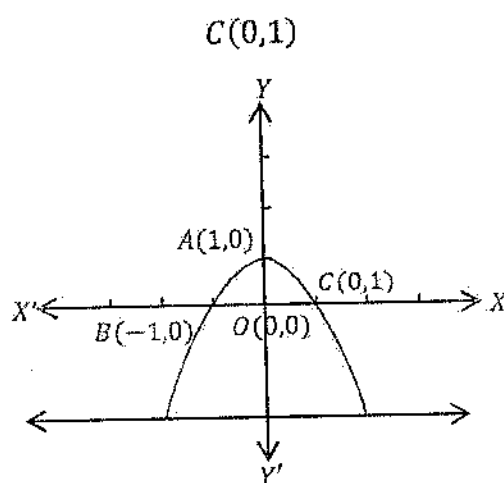
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{1}$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = -1$$

$$A(1,0) \quad B(-1,0)$$

2- د (YY') د محور سره د تابع د گراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $x = 0$ فرضوو. نو $y = 1$ کېږي د تقاطع نقطه يې عبارت ده.



مثال: د $y = -x^2 - 1$ د تابع گراف رسم کړئ؟

حل:

1- د (XX') د محور سره د تابع د گراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $y = 0$ فرضوو.

$$-x^2 - 1 = 0$$

$$-x^2 = 1$$

$$x^2 = -1$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{-1}$$

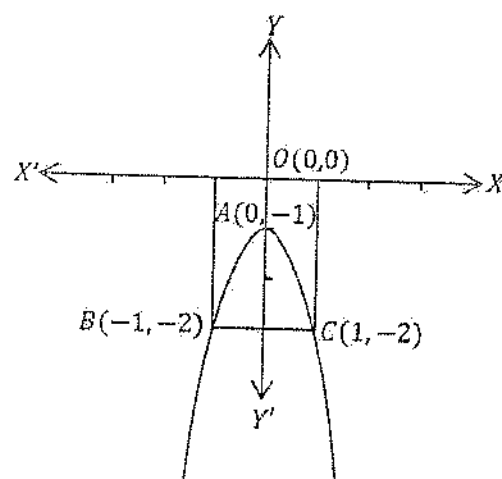
څرنگه چه منفي عدد جذر لري نو د تابع گراف د (XX) محور نه قطع کوي.
 2- د YY د محور سره د تابع د گراف د تقاطع نقطه پيدا کوو نو $x = 0$ فرضوو نو $y = -1$ شي د X د محور سره د تقاطع نقطه عبارت ده.

$$A(0, -1)$$

د گراف د دقيق ترسيم لپاره (x) ته څو قيمتونه ورکوو او د (y) قيمت پيدا کوو.

x	-1	0	1
y	-2	-1	-2

$$B(-1, -2) \quad O(0, 0) \quad C(1, -2)$$



$$\begin{cases} y = ax^2 + bx \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases} \quad \text{د 3- د تابعگانو د ترسيم طريقه:}$$

1- د (XX) د محور سره د تابع د گراف د تقاطع نقطه پيدا کوو نو $(y = 0)$ فرضوو په نتيجه کې $ax^2 + bx + c = 0$ دويمه درجه معادله لاس ته راځي. د دغه معادلې د حل لپاره د (Δ) قيمت پيدا کوو د (Δ) په باب درې حالتونه موجود دي.

a- که $\Delta > 0$ وي نو معادله دوه جذره لري او جذرونه يې د $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ پواسطه پيدا کېږي او د تقاطع نقطې يې عبارت دي له: $A(X_1, 0)$ او $B(X_2, 0)$

b- که $\Delta = 0$ وي معادله يو جذر لري او د لاندې فارمول پواسطه پيدا کېږي $x = -\frac{b}{a}$ نو د تقاطع نقطه يې عبارت ده له: $A(x, 0)$

c- که $(\Delta = 0)$ وي معادله جذر نه لري نو د تابع گراف د (XX) محور نه قطع کوي. په دغه حالت کې د پاره ددی چه د (YY) د محور یوی او بلې خواته دگراف خط السیر تعیین شي نو (x) ته یو منفي او یو مثبت قیمت ورکړو اود (y) قیمتونه پیدا کوو د (YY) د محور یوی او بلې خواته دوه نقطې لاس ته راځي چه د تابع د گراف خط السیر تعیینوي.

2- د (YY) دمحور سره دتابع د گراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $x = 0$ فرضوود (YY) د محور سره دتابع دگراف دتقاطع نقطه عبارت ده له: $M(0, c)$

3- د تابع د گراف د راس نقطه

$$y = ax^2 + bx + c \Rightarrow a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right)$$

$$y = a \left\{ x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} \right\}$$

$$y = a \left\{ \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right\}$$

$$y = a \left\{ \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right\}$$

$$y = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

که $a > 0$ وي

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 > 0 \quad \therefore \quad a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 > 0$$

$$a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} > - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$y > - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

که $x + \frac{b}{2a} = 0$ شي نو $x = -\frac{b}{2a}$ کېږي. نو د راس نقطه عبارت ده.

$$V \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a} \right)$$

که $a < 0$ وي بيا هم $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 > 0$ کيږي مگر $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 < 0$ کيږي. دواړه خواوې
خځه $\frac{4ac-b^2}{4a}$ منفي کوو:

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{4ac-b^2}{4a} < -\frac{4ac-b^2}{4a}$$

$$y < -\frac{4ac-b^2}{4a}$$

که $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$ او $x = -\frac{b}{2a}$ شي نو $y = \frac{4ac-b^2}{4a}$ کيږي. نو د راس نقطه عبارت ده.

$$V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$$

مثال: د $y = 2x^2 - 3x - 2$ تابع گراف رسم کړئ؟

حل: د (XX) د محور سره د تابع د گراف د د قاطع نقطه پيدا کوو نو $y = 0$ فرضوو.

$$2x^2 - 3x - 2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 9 + 16 = 25$$

$$\Delta = 1$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) \pm 5}{2 \times 2} = \frac{3 \pm 5}{4}$$

$$x_1 = \frac{3+5}{4} = \frac{8}{4} = 2 \quad \therefore x_1 = 2$$

$$x_2 = \frac{3-5}{4} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2} \quad \therefore x_2 = \frac{-1}{2}$$

نو د د محور سره د گراف د د تقاطع نقطې عبارت دي:

$$A(2,0) \quad B\left(\frac{-1}{2}, 0\right)$$

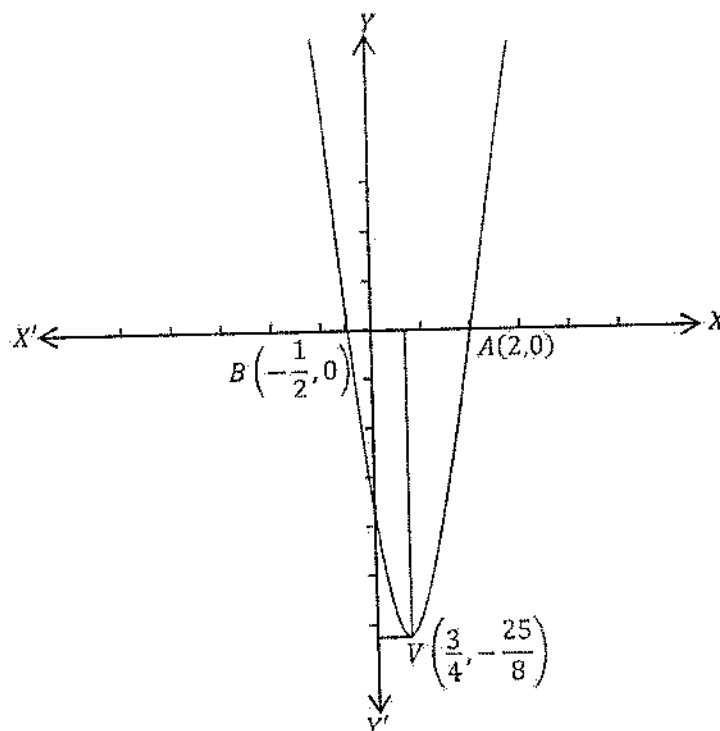
د (XX) د محور سره د گراف د تقاطع نقطه پيدا کوو نو $y = 0$ فرضوو. نو $y = 6$ کيږي نو

د (YY) د محور سره د گراف د تقاطع نقطه عبارت ده. $C(0, -2)$

د تابع د گراف د راس نقطه پيدا کوو.

$$V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right) = \left(\frac{3}{4}, \frac{4 \times 2 \times (-2) - (-3)^2}{4 \times 2}\right) = \frac{-16 - 9}{8} = -\frac{25}{8}$$

$$V\left(\frac{3}{4}, -\frac{25}{8}\right)$$



مثال: $y = x^2 + 3x$ گراف رسم کریں؟

حل:

$$y = 0$$

$$x^2 + 3x = 0$$

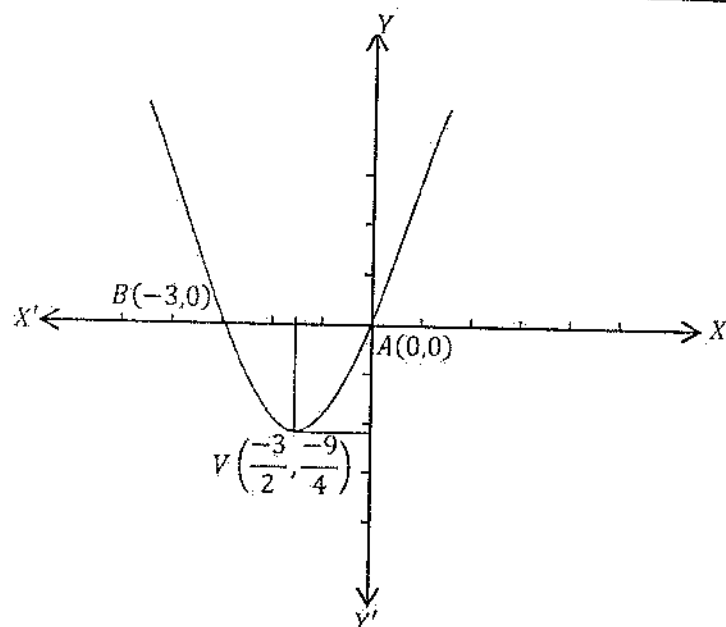
$$x(x + 3) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = -3$$

$$A(0,0) \quad B(-3,0)$$

$$V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right) = \left(\frac{-3}{2}, \frac{4 \times 1 \times 0 - 3^2}{4 \times 1}\right) = \left(\frac{-3}{2}, -\frac{9}{4}\right)$$



مثال: $y = -x^2 + 4x - 3$ گراف رسم کریں؟

حل:

$y = 0$ -1 فرضو نو:

$$-x^2 + 4x - 3 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times (-1) \times (-3) = 16 - 12 = 4$$

$$\Delta = 4$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 \pm 2}{-2 \times 1}$$

$$x_1 = \frac{-4 + 2}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1 \quad ; \quad x_1 = 1 \quad A(1,0)$$

$$x_2 = \frac{-4 - 2}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3 \quad ; \quad x_2 = 3 \quad B(3,0)$$

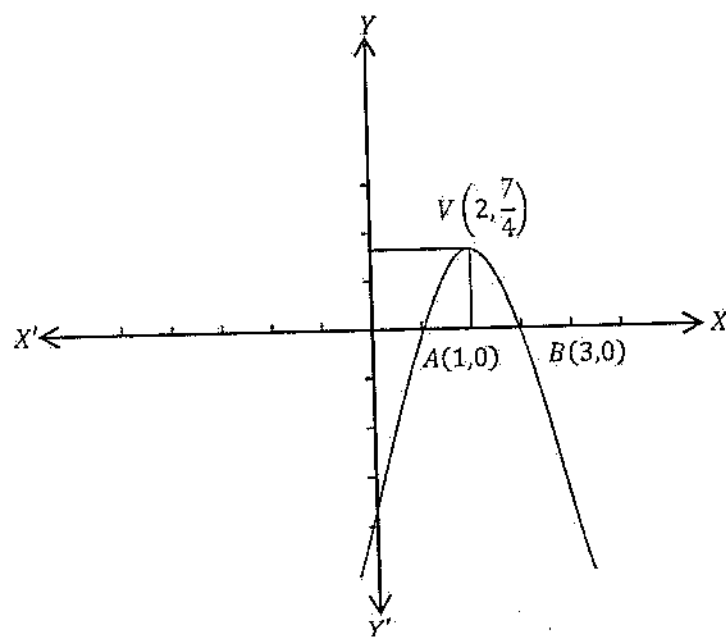
$x = 0$ -2 فرضو نو:

$$y = -3 \quad C(0, -3)$$

اصغري او اعظمي ټکي يې پيدا کوؤ:

$$V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right) = \left(\frac{-4}{-2}, \frac{4(-1)(-3)}{4(-1)}\right) = \left(2, \frac{7}{4}\right)$$

$$V\left(2, \frac{7}{4}\right)$$



مثال: $y = x^2 + 2x + 1$ د تابع گراف رسم کړئ؟

حل:

$y = 0$ -1 فرضو نو:

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 1 \times 1 = 4 - 4 = 0$$

$$\Delta = 0$$

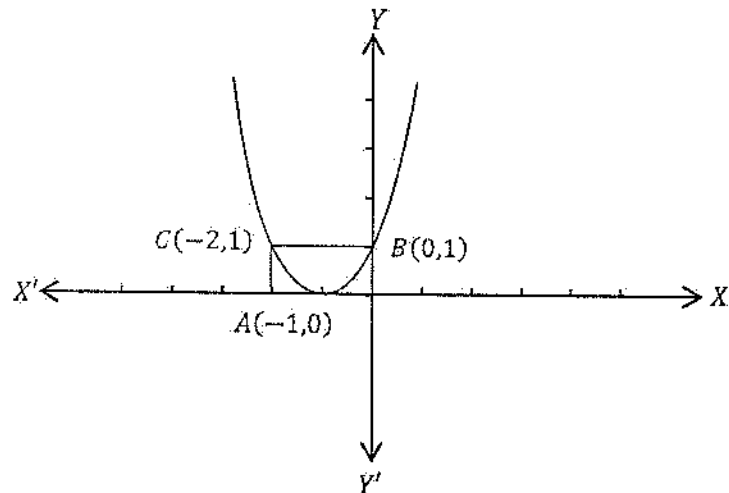
معادله يو جذر لري.

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2 \times 1} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$A(-1, 0)$$

2- $x = 0$ فرضو نو:

$$\begin{array}{l} y = 1 \\ B(0,1) \\ \begin{array}{c|c} x & -2 \\ \hline y & 4 \end{array} \\ C(-2,1) \end{array}$$



تمرین:

دلاندې تابعگانو گراف رسم کړئ؟

1- $y = 3x^2 + 6x$

2- $5x^2 - 13x + 6$

3- $4x^2 - 4x + 1$

4- $-x^2 + 5x - 6$

5- $-2x^2 - 3x + 14$

6- $3x^2$

7- $4x^2 + 8x$

8- $6x^2 + x - 57$

9- $11x^2 - 13x - 18$

10- $2x^2 - 6x$

11- $2x^2 + x - 21$

12- $-x^2 + 4$

13- $11x^2 - 13x - 18$

14- $3x^2 - x - 10$

15- $5x^2 + 2x - 51$

16- $-9x^2 + 17x + 2$

هوموگرافیک تابع

هغه تابع ده چه د بېنومو د نسبت څخه جوړه شوې وي. عمومي شکل یې دا دی:

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \quad \text{زور نصاب}$$

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \quad \text{نوی نصاب}$$

a, b, c او d ثابت عددونه دي (x) متحول دی او (y) د (x) تابع دی.

مجانِب Asymptotes:

که د یو مستقیم او یوه منحنی ترمنځ فاصله په لایتناهي (∞) کې صفر شي دا مستقیم ددی منحنی مجانب دی.



مجانِب په دری قسمه دی:

1- عمودي مجانب Vertical Asymptotes

2- افقي مجانب Horizntil Asymptotes

3- مایل مجانب Slant or oblique Asymptotes

1- عمودي مجانب:

هغه خط چه د (x) په فاصله باندی د (YY) د محور سره موازي رسمیري د تابع د گراف عمودي مجانب بلل میږي.

د عمودي مجانب فارمول:

مخرج د صفر سره مساوي کوو د عمودي مجانب لاس ته راځي.

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

$$cx + d = 0$$

$$cx = -d$$

$$x = \frac{-d}{c}$$

د عمودي مجانب فارمول دا دي:

$$x = \frac{-d}{c}$$

مثال: د $g(x) = \frac{2x+3}{3x-6}$ د تابع عمودي مجانب پیدا کړئ؟

حل:

$$x = -\frac{d}{c} = -\frac{-6}{3} = 2 \Rightarrow x = 2$$

2- افقي مجانب:

هغه خط چه د (y) په ترتیب د (YY) د محور سره موازي رسمېږي د تابع د گراف افقي مجانب دي.

د افقي مجانب فارمول:

د $F(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ په تابع کې صورت په مخرغ ویشو خارج قسمت يې په (m) بنسټ او باقي په (p) بنسټ ولیکو چه:

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = m + \frac{p}{cx+d} = \frac{mcx+md+p}{cx+d}$$

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{mcx+md+p}{cx+d}$$

مخرجونه يې مساوي دي نو صورتونه يې هم مساوي دي.

$$ax+b = mcx+md+p$$

$$a = mc \Rightarrow m = \frac{a}{c}$$

د باقي د پیدا کولو لپاره ثابت عدد د ثابت عدد سره مساوي کوو.

$$md+p=b \Rightarrow p=b-md=b-\frac{ad}{c}=\frac{bc-ad}{c}$$

$$p=\frac{bc-ad}{c}$$

مثال: د $h(x) = \frac{8x-3}{4x-9}$ تابع افقي مجانب او باقي مانه پيدا کړئ؟

حل:

$$m = \frac{a}{c} = \frac{8}{4} = 2$$

$$m = 2$$

$$p = \frac{bc - ad}{c} = \frac{-3 \times 4 - 8(-9)}{4} = \frac{-12 + 72}{4} = \frac{60}{4} = 15$$

3- مایل مجانب *Slant or Oblique Asymptotes*:

که د یوې تابع د صورت درجه د مخرج د درجې څخه د واحد په اندازه زیاته وي دغه ډول تابعگانی مایل مجانب لري او د مجانب د معادلې د لاس ته راوړلو لپاره صورت په مخرج ویشو.

مثال: د $g(x) = \frac{6x^2-24}{x+2}$ تابع عمودي مجانب، افقي مجانب، مایل مجانب یې پيدا کړئ؟

حل: عمودي مجانب:

$$x = \frac{-d}{c} = \frac{-2}{1} = -2$$

افقي مجانب نلري، مایل مجانب معادله یې دا ده.

$$\frac{6x^2 - 24}{x + 2} = 6x - 12$$

د هوموگرافیک تابع د گراف ترسیم:

1- عمودي مجانب پيدا کوو او رسموويي.

2- افقي مجانب پيدا کوو او رسموويي.

3- د (XX) د محور سره د گراف د تقاطع نقطه پيدا کوو.

4- د (YY) د محور سره د تابع د گراف د تقاطع نقطه پيدا کوو.

5- د گراف د ښه دقیق ترسیم لپاره (x) ته څو قیمتونه ورکوو او د (y) قیمتونه پيدا کوو.

6- پيدا شوی نقطی د وضعیه کمیټونود. محورونو په مستوي کې پيدا کوو او وصلوويي. د راکړ شوی تابع گراف لاس ته راځي.

مثال: د $f(x) = \frac{2x+4}{x-2}$ تابع گراف رسم کړئ؟

حل: عمودي مجانب:

$$x = -\frac{d}{c} = -\left(\frac{-2}{1}\right) = \frac{2}{1} = 2$$

افقي مجانب:

$$m = \frac{a}{c} = \frac{2}{1} = 2$$

د (XX) سره تقاطع پیدا کوونو $(y = 0)$ فرضوو:

$$\frac{2x+4}{x-2} = 0$$

$$(x-2) \left(\frac{2x+4}{x-2} \right) = 0(x-2)$$

$$2x+4 = 0$$

$$2x = -4$$

$$2x = -4$$

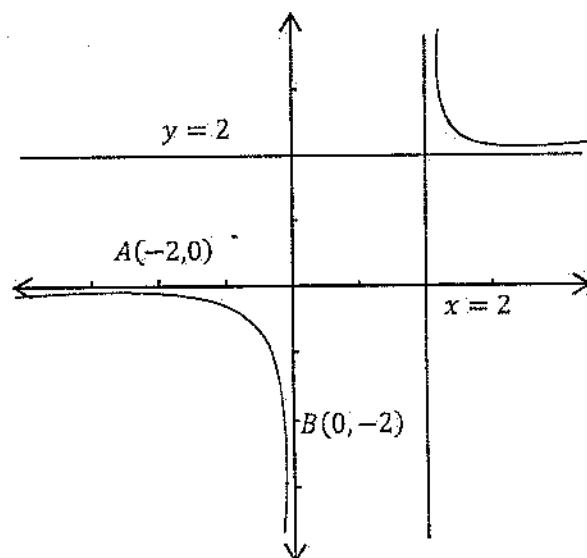
$$\frac{2x}{2} = \frac{-4}{2}$$

$$x = -2$$

$$\therefore A(-2, 0)$$

د (YY) سره د تابع د گراف د تقاطع نقطه پیدا کوونو $x = 0$ فرضوو.

نو $y = -2$ کیږي او د تقاطع نقطه یې: $B(0, -2)$



تمرین:

دلاندي تابعگانو گراف رسم کړئ

1: $G(x) = \frac{4x - 3}{2x + 1}$

2: $F(x) = \frac{2x - 6}{3x + 6}$

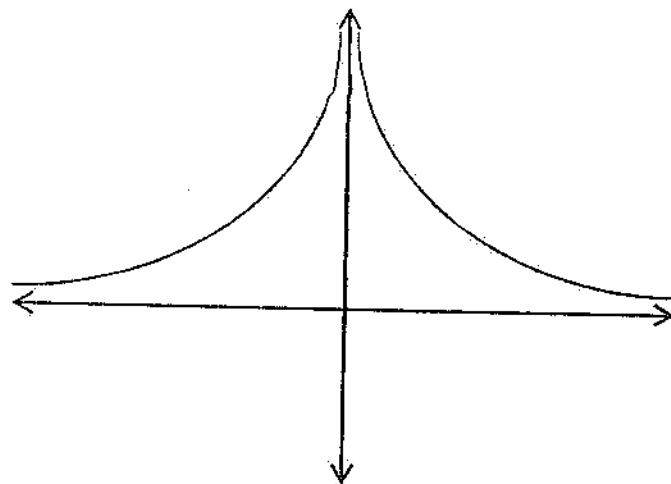
3: $h(x) = \frac{3x + 9}{x - 6}$

مثال: د $y = \frac{1}{x^2}$ تابع گراف رسم کړئ؟

حل:

x	-2	-1	1	2
y	$\frac{1}{4}$	1	1	$\frac{1}{4}$

$$A\left(-2, \frac{1}{4}\right) \quad B(-1, 1) \quad C(1, 1) \quad D\left(2, \frac{1}{4}\right)$$



تمرین:

د لاندې تابعگانو گراف رسم کړئ

1) $F(x) = 3x^2 + 7x - 10$

2) $g(x) = \frac{2x-3}{x+2}$

3) $h(x) = x^2 - 9$

4) $y = 6^x$

5) $y = \left(\frac{5}{3}\right)^x$

اکسپوننشل تابع *Exponential function*:

اکسپوننشل تابع هغه تابع ده چه مجهول یې په توان کې وي. عمومي شکل یې دا دی:

$$y = a^x$$

a ثابت عدد دی (x) متحول دی او (y) د (x) تابع دی.

که ($a > 1$) وي تابع متزايدة ده او که ($a < 1$) وي نو تابع متناقصه ده.

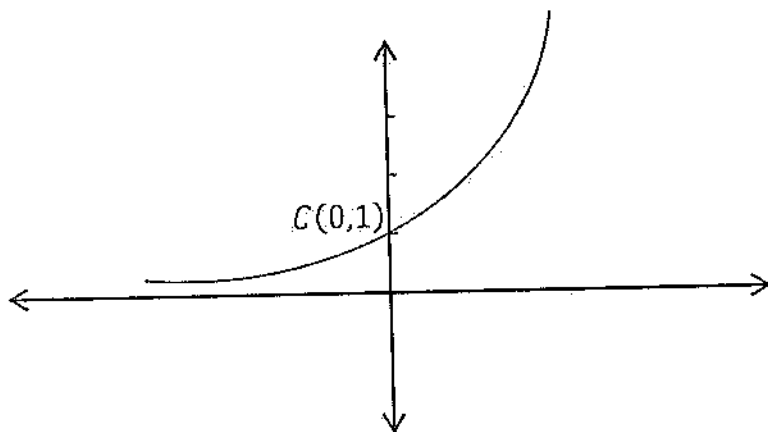
د تعریف ناحیه یې د حقیقي اعدادو سیټ دی او رنج یې د مثبت اعدادو سیټ دی. د گراف د ترسیم لپاره یې (x) ته څو قیمتونه ورکوو او د (y) قیمتونه پیدا کوو. د او یوه جوړه قیمتونه د وضعیه کمیټونو په مستوي کې یوه نقطه تعینوي دا نقطې پیدا کوو او وصلوو یې. د راګرځوی تابع گراف لاس ته راځي.

مثال: $y = 2^x$ د تابع گراف رسم کړئ؟

حل:

x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4

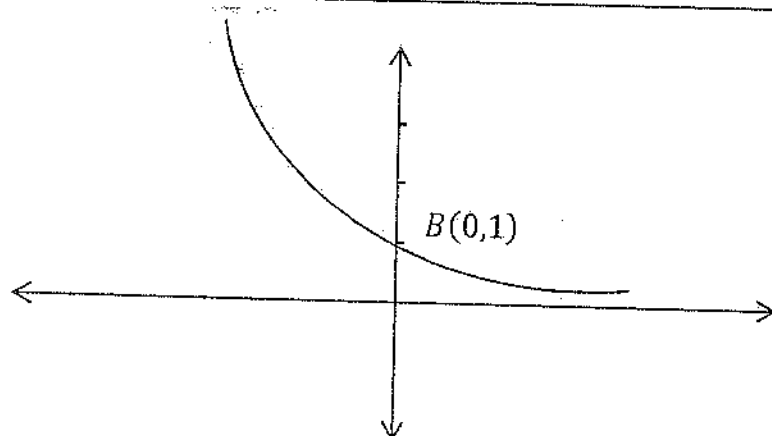
$$A\left(-2, \frac{1}{4}\right) \quad B\left(-1, \frac{1}{2}\right) \quad C(0, 1) \quad D(1, 2) \quad E(2, 4)$$

مثال: $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ د گراف رسم کړئ؟

حل:

x	-1	0	1	2
y	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$$A(-1, 2) \quad B(0, 1) \quad C\left(1, \frac{1}{2}\right) \quad D\left(2, \frac{1}{4}\right) \quad E\left(3, \frac{1}{8}\right)$$



تمرین:

د لاندې تابعگانو ګراف رسم کړئ؟

$$3- y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$$

$$2- y = 5^x$$

$$1- y = 3^x$$

$$4- \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

$$7- y = 5^x$$

$$6- y = \left(\frac{3}{4}\right)^x$$

$$5- y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$$

$$8- y = \left(\frac{3}{5}\right)^x$$

لوګاریتمي تابع *Logarithmical functions*

لوګاریتمي تابع د اکسپوننشل تابع معکوسه تابع ده.

د تعریف ناحیه یې د مکمل اعدادو سیټ دي او د تصویرونو سیټ یې د حقیقي اعدادو سیټ دی. ګراف یې په اوله او څلورمه ربعه کې رسمېږي.

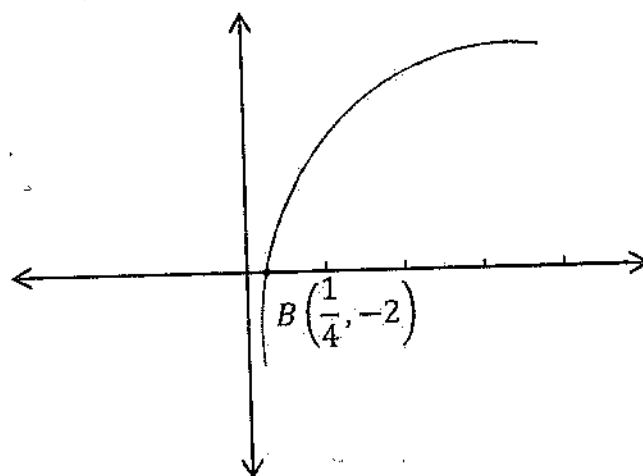
د ګراف د ترسیم لپاره x ته څو قیمتونه ورکوو او د y قیمت پیدا کوو.

مثال:- $\log_2 x = y$ ګراف رسم کړئ؟

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	-3	-2	-1	0	1	2

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	-3	-2	-1	0	1	2

$$A\left(\frac{1}{8}, -3\right) \quad B\left(\frac{1}{4}, -2\right) \quad C\left(\frac{1}{2}, -1\right) \quad D(1,0) \quad E(2,1) \quad F(4,2)$$



تمرین

دلاندې تابعگانو گرافونه رسم کړئ؟

$$3- \log_4 x = \quad \quad 2- \log_2 x = y$$

$$1- \log_3 x = y$$

$$6- \log_8 x = \quad \quad 5- \log_2 x = y$$

$$4- \log_5 x = y$$

$$9- y = \left(\frac{2}{3}\right)^x \quad \quad 8- y = 3^{2x}$$

$$7- y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$$

دوئسم فصل

ردیف یا تصاعد

ردیف په لغت کې په اس یا موټر سایکل باندې یو په بل پسې سپرېدلو ته وايي.

او په اصطلاح کې د یوې قاعدې لاندې د اعدادو ترتیب ته ردیف وايي.

لکه: 2, 7, 12, 17, 22

یا لکه: 5, 15, 75, 375, 1875

که دردیف حدونه معلوم وي معین ردیف ورته وائي. لکه:

7, 21, 63, 189, 567

او که دردیف حدونه معلوم نه وي غیر معین ردیف ورته وائي. لکه:

1, 5, 9, 13, 17 ...

د غیر معین ردیف په آخر کې درې نقطې لیکي.

ردیف په درې قسمه دی.

1- حسابي ردیف *Arithmetic Sequences*

2- هندسي ردیف *Geometrical Sequences*

3- هارمونيکي ردیف *Harmonical Sequences*

1- حسابي ردیف:

هغه ردیف دی چې هر وروستني حد یې د مخکیني حد سره د یوه ثابت د جمع کېدلو په نتیجه

کې لاس ته راځي. او یا دا چې د دوه عددو تفاضل یې ثابت وي. لکه:

7, 15, 23, 31, 39

د حسابي ردیف فارمول:

اول حد په (a_1) او مشترک تفاضل په (d) او د حدونو شمېر په (n) بنیو نو فارمول یې په

لاندې ډول پیدا کوو.

$$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, a_1 + 4d$$

که د ضریب ته متوجه شوی (d) ضریب د حدونو شمېر یو کم دي نو که د حدونو شمېر (n) وي نو د (d) ضریب به $(n-1)$ وي فارمول یې په لاندې ډول دی.

$$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, a_1 + 4d, \dots + (n-1)d$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

مثال: د یوه حسابي ردیف اول حد (30) دي مشترک تفاضل یې (17) دی (51) حد یې څو دی؟

$$a_1 = 30$$

$$d = 17$$

$$n = 51$$

$$a_{51} = ?$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_{51} = 30 + (51-1)17 = 30 + 50 \times 17$$

$$a_{51} = 30 + 850 = 880$$

$$a_{51} = 880$$

د (d) ، (a_1) او (n) فارمولونه په لاندې ډول دي.

$$d = \frac{a_n - a_1}{n-1}$$

$$a_1 = a_n - (n-1)d$$

$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$$

مثال: د یوه حسابي ردیف اول حد (15) دي (31) حد یې (585) دي مشترک تفاضل یې پیدا کړئ؟

$$d = \frac{585 - 15}{31 - 1} = \frac{570}{30} = 19$$

تبصره: د حسابي ردیف منځني حد د طرفینو اوسط دي.

مثال: د یوه حسابي ردیف (50) ام حد (1973) دی مشترک تفاضل یې (40) دی اول حد یې څو دي؟

حل:

$$a_1 = a_n - (n-1)d$$

$$a_1 = 1973 - (50-1)40 = 1973 - (49)40 = 1973 - 1960 = 13$$

$$a_1 = 13$$

مثال: د یوه حسابي ردیف اول حد (17) او آخري حد یې (2117) دی او مشترک تفاضل یې (21) دی د حدونو شمېر یې پیدا کړئ؟

حل:

$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$$

$$n = \frac{2117 - 17}{21} + 1 = \frac{2100}{21} + 1 = 100 + 1 = 101$$

$$n = 101$$

حسابي ردیف ته د حدونو داخلول

د حدونو د داخلولو لپاره مشترک تفاضل پیدا کوو یعنې په $d = \frac{a_n - a_1}{n - 1}$ کې د داخل شوي حدونه په (m) بنیو او دوه زاړه حدونه ورسره جمع کوو او د په عوض یې لیکو د (d) قیمت لاس ته راځي.

$$d = \frac{a_n - a_1}{m + 1}$$

$$d = \frac{a_n - a_1}{n - 1} = \frac{a_n - a_1}{m + 2 - 1} \Rightarrow d = \frac{a_n - a_1}{m + 1}$$

مثال: د یوه حسابي ردیف دوه حدونه عبارت له (3) او (35) څخه دي څلور نور حدونه یې منځ ته ور داخل کړئ.

حل:

$$d = \frac{a_n - a_1}{m + 1} = \frac{35 - 3}{4 + 1} = \frac{32}{5} = 6.4$$

$$d = 6.4$$

$$3, 9.4, 15.8, 22.2, 28.4, 35$$

تمرین:

لاندې عبارتې سوالونه حل کړئ؟

1- د یوه حسابي ردیف دوه حدونه عبارت له (4) او (324) دي (3) حدونه یې منځ ته ور داخل کړئ؟

2- د يوه حسابي ردیف دوه حدونه عبارت له (5) او (675) څخه دي شپږ نور حدونه يې منځ ته ورداخل کړئ؟
لاندې سوالونه حل کړئ؟

- 1) $a_1 = 9, d = 13, n = 65, a_n = ?$
- 2) $d = 5, n = 11, a_{11} = 53, a_1 = ?$
- 3) $a_1 = 27, n = 31, a_{31} = 267, d = ?$
- 4) $a_1 = 7, a_{91} = 727, d = 8, n = ?$
- 5) $a_1 = 5, a_3 = 19, a_n = 110, n = ?$

2- هندسي ردیف:

هغه ردیف دی چه هر وروستنی حد يې د مخکیني حد سره د یوه ثابت عدد د ضربیدو په نتیجه کې په لاس راغلی وي یا دا چه د دوه مسلسلو حدو تفاضل يې ثابت وي. لکه:

2, 8, 32, 128, 512 ...

د هندسي ردیف اول حد (a_1) په مشترک نسبت يې په (r) ښيي:

د هندسي ردیف فارمول:

هغه ردیف دی چه هر وروستنی حد يې د مخکیني حد سره د یوه ثابت عدد د ضربیدو په نتیجه کې لاس ته راغلی وي او یا دا چه د دوه حدو تفاضل يې ثابت وي. لکه:

3, 12, 48, 192, 768

5, 10, 20, 40, 80, 160 ...

د هندسي ردیف فارمول:

اول حد يې په (a_1) او مشترک فصل په (r) او وروستنی حد په (a_n) ښیو نو:

$$a_1, a_1 r, a_1 r^2, a_1 r^3, a_1 r^4$$

که د (r) توان ته څیر شو د (r) توان د حدو د شمېر څخه یو کم دي نو که د حدونو شمېر (n) وي نو د (r) توان به ($n - 1$) وي نو:

$$a_1, a_1 r, a_1 r^2, a_1 r^3, a_1 r^4, \dots, a_1 r^{n-1}$$

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

مثال: د یوه هندسي ردیف اول حد $a_1 = 2$ او مشترک نسبت یې $r = 3$ دې اوم حد (a_7) یې څو دی؟

$$a_7 = a_1 r^{7-1} = 2 \times 3^6 = 2 \times 729 = 1458$$

د (a_1) او (r) قیمتونه د لاندې فارمولو پواسطه پیدا کیږي.

$$a_1 = \frac{a_n}{r^{n-1}}$$

$$r = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}}$$

مثال: د یوه هندسي ردیف اتم حد $(a_8 = 384)$ دې مشترک نسبت یې $(r = 2)$ دی اول حد یې څو دی؟

حل:

$$a_1 = \frac{a_n}{r^{n-1}} = \frac{384}{2^{8-1}} = \frac{384}{128} = 3$$

$$a_1 = 3$$

مثال: د یوه هندسي ردیف اول حد $(a_1 = 8)$ دې اوم حد یې (5832) دې مشترک نسبت یې پیدا کړئ؟

حل:

$$r = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}} = \sqrt[6]{\frac{5832}{8}} = \sqrt[6]{729} = 3$$

مثال: د یوه هندسي ردیف اول حد $(a_1 = 10)$ دې (n) ام حد یې $a_n = 1280$ دی مشترک نسبت یې (2) دې د حدونو شمېر یې څو دی؟

حل:

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$1280 = 10 \times 2^{n-1}$$

$$\frac{1280}{10} = \frac{10 \times 2^{n-1}}{10} \Rightarrow 128 = 2^{n-1} \Rightarrow 2^7 = 2^{n-1}$$

$$n - 1 = 7 \Rightarrow n = 7 + 1 = 8 \Rightarrow n = 8$$

1- د يوه هندسي ردیف دوه لمړي حدونه (2) او (1) دي څویم حد یې $\frac{1}{16}$ دي؟

$$a_1 = 2$$

$$a_1 r^{n-1} = a_n$$

$$a_2 = 1$$

$$2 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{16} \Rightarrow \frac{2 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{2}$$

$$r = \frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{32} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^5} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$$a_n = \frac{1}{16}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$$n = ?$$

$$n - 1 = 5 \Rightarrow n = 5 + 1 = 6 \Rightarrow n = 6$$

د هندسي ردیف خصوصیات:

1- په هندسي ردیف کې هر حد د طرفینو د حاصل ضرب جذر دی.

مثال: (3, 6, 12, 24, 24) د یوه هندسي ردیف حدونه دي نو لیکو چه:

$$\sqrt{3(12)} = 6 \quad \text{and} \quad \sqrt{6(24)} = 12$$

2- که په یوه هندسي ردیف کې اول او اخر حدونه ضرب شي او د حدود شمېر په توان رفع شي او دویم جذر یې ونیول شي د ردیف د ټولو حدودو د ضرب حاصل لاس ته راځي.

مثال: لکه (2, 6, 18, 54) یو هندسي ردیف دی نو د دویم خاصیت سره سم لیکو چه:

$$(2)(6)(18)(54) = \sqrt{\{2(54)\}^4}$$

$$11664 = 11664$$

3- که یو هندسي ردیف طاق حدونه ولري نو د منځني جذمربع یې د اول او اخر حدود حاصل ضرب سره مساوي ده. لکه: (5, 10, 20, 40, 80) یو هندسي ردیف دی نو د دریم خاصیت سره سم لیکو:

$$(20)^2 = 5(80)$$

$$400 = 400$$

په هندسي ردیف کی د حدو داخلول:

که د یوه هندسي ردیف حدونه دوه وي او وغواړو چه څو حدونه یې منځ ته ورداخل کړو نو د هندسي ردیف د فارمول څخه د (r) قیمت پیدا کوو. د حدو تر دخول د مخه د حدونو شمېر (n) او تر دخول وروسته د حدو شمېر $(m+2)$ دی نو د (n) په عوض په فارمول کی $(m+2)$ لیکو. نو $r = \sqrt[m+2-1]{\frac{a_n}{a_1}} = \sqrt[m+1]{\frac{a_n}{a_1}}$ لاس ته راځي.

مثال: د یوه هندسي ردیف دوه حدونه (3) او (96) دي څلور نور حدونه یې منځ ته ورداخل کړئ؟

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_2 = 96 \\ m = 4 \\ r = ? \end{cases} \quad r = \sqrt[m+1]{\frac{a_n}{a_1}} = \sqrt[4+1]{\frac{96}{3}} = \sqrt[5]{32} = 2$$

3, 6, 12, 24, 48, 96

مثال: دزی داسی عددونه پیدا کړئ چه دویم حد یې د اول حد څخه د (3) په اندازه او دریم حد یې د دویم حد څخه د (6) په اندازه زیات وي او یو هندسي تصاعد جوړ کړي؟

حل:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} x \\ x+3 \\ x+9 \end{cases} \\ &\frac{x}{x+3} = \frac{x+9}{x+3} \Rightarrow x(x+9) = x^2 + 6x + 9 \\ &x^2 + 9x = x^2 + 6x + 9 \\ &9x = 6x + 9 \Rightarrow 9x - 6x = 9 \Rightarrow 3x = 9 \\ &\frac{3x}{3} = \frac{9}{3} \Rightarrow x = 3 \\ &x = 3 \quad x+3 = 6 \quad x+6 = 9 \end{aligned}$$

3- هارمونیکي ردیف:

د حسابي ردیف معکوس ته هارمونیکي ردیف وايي. مثلاً لاندی ردیف یو حسابي ردیف دی لکه:

(2, 4, 6, 8, 10)

د دغه ردیف معکوس عبارت له $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}$ څخه دی دغه ردیف ته هارمونيکي ردیف وايي.

مثال: په يوه هارمونيکي ردیف کې $a_1 = \frac{1}{4}$ دی او مشترک تفاضل يې $d = -3$ دی ترادف يې چوپړ کړئ؟
حل:

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{4} - 3, \frac{1}{4} - 6, \frac{1}{4} - 9, \frac{1}{4} - 12, \dots$$

$$\frac{1}{4}, \frac{1-12}{4}, \frac{1-24}{4}, \frac{1-36}{4}, \dots$$

$$\frac{1}{4}, \frac{-11}{4}, \frac{-23}{4}, \frac{-35}{4}, \dots$$

د هارمونيکي ردیف حسابي اوسط:

د هارمونيکي ردیف درې حدونه دي د منځني حد د لاس ته راوړلو لپاره اول او دريم حدونو اوسط پيدا کوو.

$$\frac{1}{a_n} = \frac{\frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_{n-1}}}{2} = \frac{\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{(a_{n+1})(a_{n-1})}}{2} = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2a_{n+1}a_{n-1}}$$

$$a_n = \frac{2(a_{n+1})(a_{n-1})}{a_{n-1} + a_{n+1}}$$

مثال: د (2) او (8) هارمونيکي اوسط پيدا کړئ

$$a_n = \frac{2(2 \times 8)}{2+8} = \frac{32}{10} = 3.2 \quad \text{حل:}$$

سلسلی Series:

د ردیف د حدونو مجموعی ته سلسله وایي.

سلسلی په دوه ډوله دي.

1- حسابي سلسله *Arithmetc Series*

2- هندسي سلسله *Geometric Series*

1- حسابي سلسله:

د حسابي ردیف د حدونو مجموعی ته حسابي سلسله وایي.

د حسابي سلسلی فارمول:

د سلسلو مجموعه په S_n نښي، او داسې یې پیدا کوي.

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots + \{a_1 + (n-1)d\}$$

د عددونو مجموعه په منظم ډول داسې لیکو چه اخر حد یې په سر کی راشي بیا یې د اولنۍ مجموعی سره جمع کوو.

$$\begin{aligned} S_n &= \{a_1 + (n-1)d\} + \{a_1 + (n-2)d\} + \{a_1 + (n-3)d\} + \dots + a_1 \\ S_n &= a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots + \{a_1 + (n-1)d\} \\ 2S_n &= \{2a_1 + (n-1)d\} + \{2a_1 + (n-1)d\} + \{2a_1 + (n-1)d\} + \dots + \{2a_1 + (n-1)d\} \\ 2S_n &= n\{2a_1 + (n-1)d\} \\ \frac{2S_n}{2} &= \frac{n}{2}\{2a_1 + (n-1)d\} \Rightarrow S_n = \frac{n}{2}\{2a_1 + (n-1)d\} \end{aligned}$$

دغه فارمول د حسابي سلسلی عمومي فارمول دی.

که $(2a_1)$ بېل، بېل ولیکو نو لاندی فارمول لاس ته راځي.

$$S_n = \frac{n}{2}\{a_1 + a_1 + (n-1)d\} \Rightarrow S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

مثال: د یوه هندسي ردیف $(a_1 = 7)$ او $(d = 6)$ دی د (20) حدو مجموعه یې پیدا کړئ؟

حل:

$$S_n = \frac{n}{2} \{2a_1 + (n-1)d\}$$

$$S_{20} = \frac{20}{2} \{2 \times 7 + (20-1)6\} = 10\{14 + (19)6\} = 10(14 + 114)$$

$$S_{20} = 10(128) = 1280$$

$$S_{20} = 1280$$

مثال: د يوه حسابي ردیف اول حد $(a_1 = 11)$ او يو پنځوسم حد يې $(a_{51} = 10761)$ دی د (51) حدو مجموعه يې پيدا کړئ؟

حل:

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$$

$$S_{51} = \frac{51}{2} (11 + 311) = \frac{51}{2} (11 + 411) = \frac{51}{2} (422) = 51 \times 261 = 10761$$

$$S_{51} = 10761$$

د مسلسلو عددونو فارمول:

په مسلسلو عددونو کې $a_1 = 1$ او $(d = 1)$ دی دغه قيمتونه د حسابي په عمومي فارمول کې وضع کوو

$$S_n = \frac{n}{2} \{2a_1 + (n-1)d\}$$

$$S_n = \frac{n}{2} \{2 \cdot 1 + (n-1)1\} = \frac{n}{2} (2 + n - 1) = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

مثال: په يوه ټولګي کې 50 کسه شاګردان دي د اول شاګرد سره يوه دويم شاګرد سره دوه په همدې ترتيب تر اخره روپۍ دي وواپاست چه د ټولو سره خوروږۍ دي؟

حل:

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$S_{50} = \frac{50(50+1)}{2} = 25 \cdot 51 = 1275$$

د جفتو عددو فارمول:

په جفتو عددو کې $a_1 = 2$ او $d = 2$ دی دغه عددونه د حسابي سلسلې په عمومي فارمول کې وضع کوو.

$$S_n = \frac{n}{2} \{2a_1 + (n-1)d\}$$

$$S_n = \frac{n}{2} \{2 \cdot 2 + (n-1)2\} = \frac{n}{2} (4 + 2n - 2) = \frac{n}{2} (2n + 2) = \frac{n}{2} \times 2(n+1)$$

$$S_n = n(n+1)$$

مثال: سل کسانو یوه مسجد ته اعانه ورکړه که اول سړي 2 روپۍ دویم سړي 4 روپۍ په همدې ترتیب تر اخره مرسته کړی وي وواياست چه ټولو به څو روپۍ ورکړی وي؟

حل:

$$S_n = n(n+1)$$

$$S_{100} = 100(100+1) = 100 \times 101 = 10100$$

د طاق عددونو فارمول:

په طاق عددو کې اول حد (1) او مشترک تفاضل يې (2) دی دغه عددونه د حسابي سلسلې په عمومي فارمول کې وضع کوو د طاق عددو فارمول لاس ته راځي.

$$S_n = \frac{n}{2} \{2a_1 + (n-1)d\}$$

$$S_n = \frac{n}{2} \{2 \cdot 1 + (n-1)2\} = \frac{n}{2} (2 + 2n - 2) = \frac{n}{2} \cdot 2n = n^2$$

$$S_n = n^2$$

مثال: د (30) طاقو عددو مجموعه څو ده

حل:

$$S_n = n^2$$

$$S_{30} = 30^2 = 900$$

تبصره:

که د یوه حسابي ردیف حدونه طاق وي که منځني حد يې د حدونو په شمېر کې ضرب شي د حدونو مجموعه لاس ته راځي.

مثال: د يوه حسابي ردیف د حدونو شمېر 41 او منځنې حد يې 145 دې د حدونو مجموعه يې پيدا کړئ؟

حل:

$$S_n = n \left(\frac{a_{n-1} + 1}{2} \right)$$

$$S_{41} = 41(145) = 5945$$

دويمه تبصره:

همدا ډول د اول او آخر حدو مجموعه د منځنې حد د دوه چندان سره مساوي دي.

$$a_1 + a_n = 2 \left(\frac{a_{n-1} + 1}{2} \right)$$

مثال: د يوه حسابي ردیف $a_1 = 7$ او $a_9 = 47$ دی او منځنې حد يې $a_5 = 27$ دی د اول او آخر مجموعه يې پيدا کړئ؟

حل:

$$a_1 + a_n = 2 \left(\frac{a_{n-1} + 1}{2} \right)$$

$$a_1 + a_9 = 2(a_5) = 2(27) = 54$$

درېمه تبصره:

کله، کله د څو اولو حدو او په هماغه شمېر د اخرو حدو مجموعه معلومه وي اول او آخر حد معلوم نه وي. د اول او آخر حدو مجموعه د لاندې فارمول پواسطه پيدا کېږي.

$$a_1 + a_n = \frac{S_{m_1} + S_{m_2}}{m}$$

m_1 د شپږو اولو حدو مجموعه او m_2 د شپږو اخرو حدو مجموعه ده او (m) د حدو شمېر دی.

مثال: يو حسابي ردیف n حدونه لري د 4 لمړيو حدو مجموعه يې 62 او د 4 وروستيو حدو مجموعه يې 482 ده د ټولو حدو مجموعه يې څو ده؟

حل:

$$S_{m_1} = 62$$

$$S_{m_2} = 482$$

$$m = 19$$

$$S_{19} = ?$$

$$a_1 + a_{19} = \frac{S_{m_1} + S_{m_2}}{m} = \frac{62 + 482}{4} = \frac{544}{4} = 136$$

$$S_{19} = \frac{19}{2} (136) = 1292$$

$$S_{19} = 1292$$

2- هندسي سلسله Geometric Series

د هندسي ردیف د حدونو مجموعی هندسي سلسله وايي.

د هندسي سلسلې فارمول:

$$S_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \dots + a_1 r^{n-1} \dots \dots \dots I$$

دواړه خواوې په (r) کې ضربوو او بيا (I) رابطه ورڅخه منفي کوو.

$$rS_n = a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + a_1 r^4 + \dots + a_1 r^n \dots \dots \dots II$$

$$\pm S_n = \pm a_1 \pm a_1 r \pm a_1 r^2 \pm a_1 r^3 \pm \dots \pm a_1 r^{n-1} \dots \dots \dots I$$

$$rS_n - S_n = a_1 r^n - a_1$$

$$\begin{aligned} S_n(r-1) &= a_1(r^n - 1) \\ \frac{S_n(r-1)}{r-1} &= \frac{a_1(r^n - 1)}{r-1} \Rightarrow S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r-1} \\ S_n &= \frac{a_1(r^2 - 1)}{r-1} \end{aligned}$$

دغه سلسلې ته متزايد سلسله وايي.

مثال: د يوې هندسي سلسلې $a_1 = 5$ او مشترک نسبت يې $r = 3$ دې د $n = 7$ حدو مجموعه يې پيدا کړئ؟

حل:

$$S_7 = \frac{5(3^7 - 1)}{3 - 1} = \frac{5(2187 - 1)}{2} = \frac{5 \times 2186}{2} = 5 \times 1093 = 5465$$

$$S_7 = 5465$$

او که د I رابطې څخه II رابطه منفي کړه:

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

سلسله لاس ته راځي. دغه سلسله ته متناقصه سلسله وايي.

مثال: د يوه هندسي ردیف اول حد $a_1 = 8$ دی مشترک نسبت يې $r = \frac{1}{2}$ دی د (5) حدو مجموعه يې پيدا کړئ؟

حل:

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

$$S_5 = \frac{8 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^5 \right\}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{8 \left(1 - \frac{1}{32} \right)}{\frac{1}{2}} = \frac{8 \left(\frac{32-1}{32} \right)}{\frac{1}{2}} = \frac{8 \left(\frac{31}{32} \right)}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{248}{32}}{\frac{1}{2}} = \frac{496}{32}$$

$$S_5 = 15.5$$

مثال: د يوې هندسي سلسلې د څلورو حدو مجموعه 120 ده او اول حد يې 5 دی مشترک نسبت يې څو دی؟

حل:

$$a_1 = 8$$

$$120 = \frac{(r-1)(r^3+r^2+r+1)}{r-1} = 15$$

$$S_8 = 120$$

$$r^3 + r^2 + r + 1 = 15$$

$$n = 4$$

$$r^3 + r^2 + r + 1 - 15 = 0 \Rightarrow r^3 + r^2 + r - 14 = 0$$

$$r = ?$$

1	1	1	-14	2
	2	6	14	
1	3	7	0	

$$r = 2$$

د هندسي سلسلې پواسطه په عام کسر باندې د اعشار کسر بدلول:

د متناقصې هندسي سلسلې فارمول لیکو:

$$S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$$

په دغه فارمول کې $(r^n \rightarrow 0)$ صفر کېږي. نو $S_n = \frac{a_1}{1-r}$ کېږي د دغه فارمول پواسطه کولای شو چې اعشار کسر په عام کسر بدل کړو.

مثال: $0.\bar{3}$ اعشار کسر دی. په عام کسري بدل کړئ؟

حل:

$$a_1 = 0.\bar{3} = \frac{3}{10}$$

$$r = \frac{1}{10}$$

$$n = \infty \quad S_n = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{3}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{10-1}{10}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{10 \times 3}{10 \times 9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$S_n = ? \quad S_n = \frac{1}{3}$$

مثال: $0.8\bar{3}$ اعشار کسر دی په عام کسري بدل کړئ؟

حل:

$$a = \frac{8}{10}$$

$$a_1 = \frac{3}{100} \quad S_\infty = \frac{8}{10} + \frac{\frac{3}{100}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{8}{10} + \frac{\frac{3}{100}}{\frac{10-1}{10}}$$

$$r = \frac{1}{10} \quad = \frac{8}{10} + \frac{\frac{3}{100}}{\frac{9}{10}} = \frac{8}{10} + \frac{10 \times 3}{100 \times 9} = \frac{8}{10} + \frac{1}{30}$$

$$S_n = ? \quad S_\infty = \frac{24+1}{30} = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}$$

تمرین

- 1- د (20) او (800) تر منځ د هغه عددو مجموعه پیدا کړئ چه لمړی رقم يې (3) وي؟
- 2- یو دیوالي ساعت د ساعتو په شمېر زنگونه وهي وویاست چه په شواروز کی څو زنگونه وهي؟
- 3- د یوه حسابي ردیف ددری حدو مجموعه (33) او د ضرب حاصل يې (1287) دی عددونه يې پیدا کړئ؟
- 4- د یوه حسابي ردیف د څلورو حدو مجموعه (26) او د مربعاتو مجموعه يې (214) ده عددونه پیدا کړئ؟
- 5- د یوه حسابي ردیف څلورو حدو د ضرب حاصل (945) او مشترک تفاضل يې (2) دی عددونه پیدا کړئ؟
- 6- (3003) کسان په یوه ځای کی د مثلث په ډول ولاړ دي د مثلث په راس کی یو نفر بیا دوه بیا درې په همدی ترتیب تر اخره ولاړ دي وویاست چه څو قطارونه جوړوي؟
- 7- د جفت عددو مجموعه د (40) څخه تر (540) پوری څو ده؟
- 8- د طاق عددونو مجموعه د (31) څخه تر (451) پوری څو ده؟
- 9- a, b, c په کوم شرط په یوه حسابي ردیف کی شامل دي؟
- 10- د یوه ردیف د اول اخر حدو د ضرب حاصل (253) او د منځنیو حدو د ضرب حاصل يې (285) دی عددونه پیدا کړئ؟
- 11- (3) او (243) د یوه هندسي تصاعد دوه جملی دي دری حدونه پکی داخل کړئ؟
- 12- (221) په دری برخو داسی ووېشئ چه د دریم او اول حد تفاضل يې (136) وي؟
- 13- د یوه متوازي السطوح حجم (3375) دی اودابعادو مجموعه يې (65) ده ابعاد يې پیدا کړئ؟

14- دوه کسه دیوه سړي سره مزدوران شول یو سړی د ورځی (20) اجوره لري او بل سړی اول ورځ یوه روپی په دویمه ورځ دوه روپی په همدی ترتیب تراخړه زویځ اخلی وواياست چه په څویمه ورځ به ددوی پیسی مساوي شي ؟

15- یو هندسي تصاعد اوه حدونه لري د شپږو اخرنیو حدو مجموعه یی د شپږو اولنیو حدو د مجموعی دوچنده دی که د اخرنیو شپږو حدو مجموعه یی (126) وي تصاعد معین کړئ؟

16- $0.2\overline{7}$ ، $0.9\overline{25}$ ، $0.1\overline{23}$ کسرونه په عام کسرو بدل کړئ؟

17- $0.6\overline{36}$ ، $0.4\overline{16}$ ، $0.1\overline{36}$ اعشار کسرونه په عام کسرو بدل کړئ؟

18- د یوه قائم الزاویه مثلث زاویي د هندسي تصاعد حدونه دي تصاعد پیدا کړئ؟

19- د یوې څلور ضلعي زاویي هندسي تصاعد دی که څلورمه زاویه د دویمی زاویي (9) برابره وي د هری زاویي پراخوالی پیدا کړئ؟

د يارلسم فصل

د رياضي استقراء Induction of Math

د ټولو طبيعي عددو لپاره د يوه فارمول ثبوتولو ته د رياضي استقراء وايي. څرنگه چه د ټولو عددو لپاره د يوه فارمول ثبوتول ډېر مشکل دي نو د يوه فارمول د ثبوتولو لپاره په لاندې ډول اجرائت کوو.

1- د يو لپاره فارمول ثبوتوو.

2- د (n) لپاره فارمول صحيح فرضوو.

3- د $(n + 1)$ لپاره فارمول ثبوتوو.

مثال: ثبوت کړئ چه $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ د ټولو طبيعي عددو لپاره صحيح دی
حل: د (1) لپاره يي ثبوتوو:

$$1 = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{1 \times 2}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

د (1) لپاره صحيح دی. د (n) لپاره يي صحيح فرضوو.

د $(n + 1)$ لپاره يي ثبوتوو.

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n + (n+1) = \frac{1}{2}n(n+1) + (n+1)$$

$$= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2}$$

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)\{(n+1)+1\}}{2}$$

$$S_{n+1} = \frac{1}{2}(n+1)\{(n+1)+1\}$$

مثال: ثبوت کړئ چه $1 + 4 + 7 + \dots + (3n-2) = \frac{n(3n-1)}{2}$ د ټولو طبيعي عددو لپاره صحيح دی.

حل: د (1) لپاره یې ثبوتوو.

$$1 = \frac{1(3 \times 1 - 1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

د (n) لپاره یې صحیح فرضوو، د (n+1) لپاره یې ثبوتوو:

$$\begin{aligned} 1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 2) + \{3(n+1) - 2\} &= \frac{n(3n-1)}{2} + \{3(n+1) - 2\} \\ S_n &= \frac{3n^2 - n + 6n + 2}{2} = \frac{3n^2 + 5n + 2}{2} = \frac{3n^2 + 3n + 2n + 2}{2} \\ S_n &= \frac{3n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(3n+2)}{2} = \frac{(n+1)\{3(n+1) - 1\}}{2} \\ S_n &= \frac{(n+1)\{3(n+1) - 1\}}{2} \end{aligned}$$

مثال: ثابت کړئ چې لاندې مساوات د هر طبعي (n) لپاره صحیح دی.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

حل: د (1) لپاره پورتنۍ رابطه صحیح ده ځکه چې:

$$1^2 = \frac{1}{6} \times 1(1+1)(2 \times 1 + 1) = \frac{1}{6}(2)(3) = \frac{1}{6} \times 6 = \frac{6}{6} = 1$$

د (n) لپاره یې صحیح فرضوو. او د (n+1) لپاره یې ثبوتوو

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 \\ S_{n+1} &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} = \frac{2n^3 + n^2 + 2n^2 + n + 6(n+1)^2}{6} \\ S_{n+1} &= \frac{2n^3 + 9n^2 + 13n + 6}{6} = \frac{2n^3 + 4n^2 + 5n^2 + 10n + 3n + 6}{6} \\ S_{n+1} &= \frac{2n^2(n+2) + 5n(n+2) + 3(n+2)}{6} = \frac{(n+2)(2n^2 + 5n + 3)}{6} \\ S_{n+1} &= \frac{(n+2)(2n^2 + 2n + 3n + 3)}{6} = \frac{(n+2)\{2n(n+1) + 3(n+1)\}}{6} \\ S_{n+1} &= \frac{(n+2)(n+1)(2n+3)}{6} = \frac{1}{6}(n+1)\{(n+1) + 1\}\{2(n+1) + 1\} \end{aligned}$$

ثابته شوه چې پورتنۍ مساوات د ټولو طبعي عددو لپاره صحیح دي.

مثال: ثبوت کړئ چې لاندې فارمول د ټولو طبيعي عددو لپاره صحيح دی.

$$a + a^2 + a^3 + \dots + a^n = \frac{a}{a-1}(a^n - 1), \quad a \neq 1$$

حل: د اول حد لپاره يې ثبوتوو.

$$a = \frac{a}{a-1}(a^1 - 1) = \frac{a(a-1)}{a-1} = a$$

د لپاره يې صحيح فرضوو.

د لپاره يې ثبوتوو.

$$\begin{aligned} a + a^2 + a^3 + \dots + a^n + a^{n+1} &= \frac{a}{a-1}(a^n - 1) + a^{n+1} \\ S_{n+1} &= \frac{a(a^n - 1) + a^{n+1}(a-1)}{a-1} = \frac{a^{n+1} - a + a^{n+2} - a^{n+1}}{a-1} = \frac{a^{n+2} - a}{a-1} \\ S_{n+1} &= \frac{a(a^{n+1} - 1)}{a-1} = \frac{a}{a-1}(a^{n+1} - 1) \end{aligned}$$

تمرین

لاندې فارمولونه د رياضي د استقراء پواسطه ثبوت کړئ

- 1) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$
- 2) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4} \cdot n^2(n+1)^2 = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2$
- 3) $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n^2 + n$
- 4) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (n)^2 = \frac{1}{3} + n(2n-1)(2n+1)$
- 5) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$
- 6) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$
- 7) $4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^n = \frac{4}{3}(4^n - 1)$
- 8) $1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^{n-1} = \frac{1}{4}(5^n - 1)$
- 9) $2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = 2(2^n - 1)$
- 10) $1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 6 + \dots + n(n+2) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+7)$
- 11) $2 + 5 + 10 + \dots + (n^2 + 1) = \frac{n(2n^2 + 3n + 7)}{6}$
- 12) $a + (a+d) + (a+2d) + \dots + \{a + (n-1)d\} = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$

خوارسم فصل

فکتوریل Factorial

د طبعي مسلسلو عددو د ضرب حاصل ته فکتوریل وايي.

د فکتوریل علامه دا ($n!$) ده.

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \dots \times n$$

قضيه: $0! = 1$ کيږي.

ثبوت: پوهیږو چه که یو فکتوریل په خپل اخري عدد تقسیم شي تر هغه د مخه فکتوریل لاس

ته راځي لکه:

$$\frac{5!}{5} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{5} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1} = 4!$$

$$\frac{n!}{n} = (n-1)!$$

$$\frac{1!}{1} = \frac{1}{1} \Rightarrow 0! = 1$$

قضيه:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

په دغه قضیه کې باید د $k < n$ څخه کوچنی وي.

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 35$$

$$\binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{n}{n} = 1$$

د $\binom{n}{0} = 1$ ثبوت:

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{1 \cdot n!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

د $\binom{n}{n} = 1$ ثبوت:

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = \frac{n!}{n! \cdot 1} = \frac{n!}{n!} = 1$$

ثبوت کړئ چه $\binom{n}{n-1} = n$ کېږي؟

$$\binom{n}{n-1} = \frac{n!}{(n-1)! \{n - (n-1)\}!} = \frac{n!}{(n-1)! (n-n+1)!}$$

$$\binom{n}{n-1} = \frac{n!}{(n-1)! \cdot 1!} = \frac{(n-1)! \cdot n}{(n-1)! \cdot 1} = n$$

ثبوت کړئ چه $\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0}$ کېږي؟

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0! (n-0)!} = \frac{n!}{1 \cdot n!} = \frac{n!}{n!} = \frac{(n+1)!}{(n+1)!} = \frac{(n+1)!}{0! (n+1-0)!}$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0}$$

ثبوت کړئ چه $\binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1}$ کېږي؟

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n! (n-n)!} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = \frac{n!}{n!} = \frac{(n+1)!}{(n+1)!} = \frac{(n+1)!}{(n+1)! \cdot 0!}$$

$$\binom{n}{n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)! \{(n+1) - (n+1)\}!} = \binom{n+1}{n+1}$$

ثبوت کړئ چه $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ کېږي؟

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)! \{n - (k-1)\}!} + \frac{n!}{k! (n-k)!}$$

$$= \frac{(k-1)! \cdot k(k+1)! \cdots n}{(k-1)! (n-k+1)!} + \frac{(n-k)! (n-k+1) \cdots n}{k! (n-k)!}$$

$$= \frac{k(k+1) \cdots n}{(n-k+1)!} + \frac{(n-k+1) \cdots n}{k!}$$

$$= \frac{k! \{k \cdot (k+1) \cdots n\} + (n-k+1)! \cdot (n-k+1) \cdots n}{(n-k+1)! \cdot k!}$$

$$= \frac{k! \cdot \{k(k+1) \cdots n\} + (n-k+1)! \cdot \{(n-k+2) \cdots n\}}{(n-k+1)! \cdot k!}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{k \cdot n! + (n - k + 1) \cdot n!}{k! (n - k + 1)!} = \frac{n! (k + n - k + 1)}{k! (n - k + 1)!} = \frac{n! (n + 1)}{k! (n - k + 1)!} \\
 &= \frac{(n + 1)!}{k! (n + 1 - k)!} = \binom{n + 1}{k} \\
 \binom{n}{k - 1} + \binom{n}{k} &= \binom{n + 1}{k}
 \end{aligned}$$

د بېنوم قضيه *Binomial Theorem*:

که چېرته (a) او b حقيقي عددونه او (n) يو طبيعي عدد وي نو

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \dots + \binom{n}{n} b^n \dots 1$$

د رياضي د استقراء پواسطه د پورتنۍ قضیې ثبوت پورتنۍ قضیه د (1) لپاره ثبوتوو.

$$(a + b)^1 = a^1 + b^1 = 1 \cdot a^1 + 1 \cdot b^1 = \binom{1}{0} a^1 + \binom{1}{1} b^1$$

د (n) لپاره يې صحيح فرضوو او د $(n + 1)$ لپاره يې ثبوتوو.

د (1) مساوات دواړه خواوې په $(a + b)$ کې ضربوو.

$$\begin{aligned}
 (a + b)^n (a + b) &= (a + b) \left\{ \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \dots + \binom{n}{n} b^n \right\} \\
 &= \binom{n}{0} (a^{n+1} + a^n b) + \binom{n}{1} (a^n b + a^{n-1} b^2) + \dots \\
 &\quad + \binom{n}{k} (a^{n-k+1} b^k + a^{n-k} b^{k+1}) + \binom{n}{n} (a b^n + b^{n+1}) \\
 &= \binom{n}{0} a^{n+1} + \left\{ \binom{n}{0} + \binom{n}{1} \right\} a^n b + \left\{ \binom{n}{1} + \binom{n}{2} \right\} a^{n-1} b^2 + \dots + \left\{ \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right\} a^{n+1-k} b^k \\
 &\quad + \dots + \binom{n}{n} b^{n+1} \\
 &= \binom{n+1}{0} a^{n+1} + \binom{n+1}{1} a^n b + \dots + \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k + \dots + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1}
 \end{aligned}$$

که دغه مجموعه په Σ وښیونو لیکو چه

$$(a + b)^n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

مثال: د دوه جمله يي د دعوی په اساس انکشاف ورکړئ.

$$(x + y)^5$$

$$(x + y)^5 = \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} x^{5-k} y^k$$

$$(x + y)^5 = \binom{5}{0} x^5 + \binom{5}{1} x^4 y + \binom{5}{2} x^3 y^2 + \binom{5}{3} x^2 y^3 + \binom{5}{4} x y^4 + \binom{5}{5} y^5$$

$$(x + y)^5 = x^5 + 5x^4 y + 10x^3 y^2 + 10x^2 y^3 + 5x y^4 + y^5$$

ثبوت کړئ چې $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ کېږي؟

پنجم فصل

ليميټ *limit*انټروال *Interval*:

د دوو مختلفو نقطو تر منځ فاصلي ته انټروال وايي.

انټروال په درې قسمه دي.

1- ترلي انټروال *Closed Interval*:

هغه انټروال دی چې د دواړو انجامو نقطې پکې شاملې وي.

اوپه غټو قوسو ښودل کيږي. لکه:

$$A = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,]$$

او د سيټ په شکل داسې ليکل کيږي.

$$A = [x \in \mathbb{R} / 1 < x < 10]$$

2- نيم کښ انټروال *Half Open Interval*:

هغه انټروال دی چې د يوه انجام نقطه پکې شامله او د بل انجام نقطه پکې شامله نه وي. لکه:

$$A = [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14)$$

اوه سيټ په شکل داسې ليکل کيږي: $A = [x \in \mathbb{R} / 4 \leq x < 14]$

3- خلاص انټروال *Open Interval*:

هغه انټروال دی چې د دواړو انجامو نقطې پکې شاملې نه وي. لکه:

$$A = (4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16)$$

او د سيټ په شکل داسې ليکل کيږي.

$$A = (x \in \mathbb{R} / 4 < x < 16)$$

مجاورت *Vicinity*:

هر خلاص انټروال د خپلو ټولو شاملو عناصرو مجاورت دی. که يوه نقطه د يوه انټروال په وسطي نقطه کې واقع وي نو دا انټروال د دې نقطې متناظر مجاورت دی.

لکه (1) د (5) او (3) متناظر مجاورت دی. په یوه مجاورت کې هره نقطه زیات متناظر مجاورتونه لري.

د لیمیت تعریف:

Kart weierstras کارت وېرس ترېس انگلیسي ریاضیدان چه په (1897 - 1815) م سنه کې اوسېده د لیمیت تعریف داسې کړېدې.

دیوی تابع لیمیت په یوه نقطه کې هغه عدد دی چه د دغه عدد د هر مجاورت لپاره د تابع د تعریف په ناحیه یو داسې مجاورت موجود وي چه د دغه مجاورت د هر عنصر تصویر د تابع د لیمیت په مجاورت کې شامل وي.

یعنی د $F(x)$ د تابع لیمیت د (a) په نقطه کې (b) دي په دې شرط چه د (b) د هر مجاورت (N) لپاره د تابع د تعریف په ناحیه کې د (D) یو داسې مجاورت موجود وي چه د (D) د هر عنصر تصویر په (N) کې شامل وي. او داسې لیکل کېږي:

$$\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = b$$

مثال: د $F(x) = 5x + 3$ تابع لیمیت د $x \rightarrow 1$ په نقطه کې پیدا کړئ؟

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (5x + 3) = 5 \cdot 1 + 3 = 5 + 3 = 8$$

دپورته تابع د لیمیت ثبوت په دوه طریقو کېږي.

1- د جدول پواسطه 2- د مجاورت په طریقه

1- د جدول په طریقه د تابع د لیمیت ثبوت:

(x) ته د دواړه خواوڅخه قیمتونه ورکوو او د (y) قیمتونه پیدا کوو.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	-12	-7	-2	3	8	13	16	23	28

دپورته جدول څخه معلومیږي چه (x) ته په هره اندازه چه (1) ته نژدې قیمت ورکړشي په هماغه اندازه د (y) قیمت (8) ته نژدې کیږي.

1- د مجاورت په طریقه د تابع د لیمیت ثبوت:

د تابع لیمیت (8) ته د (ε) په اندازه مجاورت ورکوو.

$$N = (8 - \varepsilon, 8 + \varepsilon)$$

د (D) د مجاورت د پیدا کولو لپاره تابع د (8) د مجاورت په منځ کی لیکو

$$8 - \varepsilon < 5x + 3 < 8 + \varepsilon$$

$$8 - \varepsilon - 3 < 5x < 8 + \varepsilon - 3$$

$$5 - \varepsilon < 5x < 5 + \varepsilon$$

$$\frac{5 - \varepsilon}{5} < \frac{5x}{5} < \frac{5 + \varepsilon}{5}$$

$$1 - \frac{\varepsilon}{5} < x < 1 + \frac{\varepsilon}{5}$$

$$D = \left(1 - \frac{\varepsilon}{5}, 1 + \frac{\varepsilon}{5}\right)$$

(ε) ته $\left(0.5 = \frac{1}{2}\right)$ قیمت ورکوو.

$$N = (8 - 0.5, 8 + 0.5)$$

$$N = (7.5, 8.5)$$

$$D = \left(1 - \frac{\frac{1}{2}}{5}, 1 + \frac{\frac{1}{2}}{5}\right) = \left(1 - \frac{1}{10}, 1 + \frac{1}{10}\right) = (0.9, 1.1)$$

$$D = (0.9, 1.1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0.9} (5x + 3) = 5 \times 0.9 + 3 = 7.5$$

$$\lim_{x \rightarrow 1.1} (5x + 3) = 5.5 + 3 = 8.5$$

ثابت شوه چه (8) د (1) په نقطه کی د تابع لیمیت دی.

مثال: ثبوت کړئ چه $\lim_{x \rightarrow 1} \left(3 - \frac{1}{x}\right) = 2$ کېږي؟

$$N = (2 - \varepsilon, 2 + \varepsilon)$$

$$2 - \varepsilon < 3 - \frac{1}{x} < 2 + \varepsilon$$

$$2 - 3 - \varepsilon < -\frac{1}{x} < 2 - 3 + \varepsilon$$

$$-1 - \varepsilon < -\frac{1}{x} < -1 + \varepsilon$$

$$\frac{1}{-(1+\varepsilon)} > -x > \frac{1}{-(1-\varepsilon)}$$

$$\frac{1}{1+\varepsilon} < x < \frac{1}{1-\varepsilon}$$

$$D = \left(\frac{1}{1+\varepsilon}, \frac{1}{1-\varepsilon} \right)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{4}$$

$$N = (2 - \varepsilon, 2 + \varepsilon) = \left(2 - \frac{1}{4}, 2 + \frac{1}{4} \right) = \left(\frac{7}{4}, \frac{9}{4} \right)$$

$$D = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{4}}, \frac{1}{1-\frac{1}{4}} \right) = \left(\frac{1}{\frac{5}{4}}, \frac{1}{\frac{3}{4}} \right) = \left(\frac{4}{5}, \frac{4}{3} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{4}{5}} \left(3 - \frac{1}{x} \right) = 3 - \frac{1}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{1} - \frac{5}{4} = \frac{12-5}{4} = \frac{7}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{4}{3}} \left(3 - \frac{1}{x} \right) = 3 - \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{1} - \frac{3}{4} = \frac{12-3}{4} = \frac{9}{4}$$

د لیمیت د استعمال ځایونه *Utilization of limit*

اسحق نیوټن (Isaac Newton) (1642 – 1727) م او لایبنز (Leibniz) په (1646 - 1716) م کالونو کې د لیمیت پواسطه د انتیګرال او دیفرینسیال مسایل حلول یعنی د لیمیت د استعمال ډېر مهم ځایونه د دیفرینسیال او انتیګرال د مسایلو حلول دي. او هم د مشتق تعریف د لیمیت څخه په غیر ناممکن دی.

ارشمیدس د دایرې د محیط د اندازه کولو لپاره داسې محاطي مضلعګانې په دایره کې رسمولې چې ضلعي یې بی اندازه کوچنۍ وي په دې ترتیب یې د (2π) تقریبي قیمت پیدا کړ. نوموړي هم د لیمیت د استعمال څخه استفاده کړې وه.

د لیمیت پیدا کول:

که وغواړو چه په یوه نقطه کی د یوی تابع لیمیت پیدا کړو. نقطه په تابع کی د متحول په عوض وضع کوو.

مثال: د $f(x) = 5x - 8$ د تابع لیمیت د $(x \rightarrow 3)$ په نقطه کی پیدا کړئ؟

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (5x - 8) = 5 \times 3 - 8 = 15 - 8 = 7$$

1- مثال: $g(x) = x$ د تابع لیمیت $(x \rightarrow -3)$ په نقطه کی پیدا کړئ؟

$$\lim_{x \rightarrow -3} g(x) = \lim_{x \rightarrow -3} x = -3$$

2- مثال: د $h(x) = 4 - \frac{5}{x+2}$ تابع لیمیت په $x \rightarrow 3$ کی پیدا کړئ؟

حل:

$$\lim_{x \rightarrow 3} h(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \left(4 - \frac{5}{x+2} \right) = 4 - \frac{5}{3+2} = 4 - \frac{5}{5} = 3$$

د صفر په نقطه کی د یوی تابع د لیمیت پیدا کول

1- د صفر په نقطه کې د تامې تابع د لیمیت پیدا کول:

که په تابع کی ثابت عدد موجود ؤ نو په صفر کی یی لیمیت همدغه ثابت عدد دی.

$$\text{مثال: } \lim_{x \rightarrow 0} (7x^3 - 3x^2 + 2x - 5) = -5$$

که په تابع کی ثابت عدد نه ؤ لیمیت یی په صفر کی صفر دی.

$$\text{مثال: } \lim_{x \rightarrow 0} (3x^3 + 11x^2 - 8x) = 0$$

2- د صفر په نقطه کې د کسري تابع لیمیت:

دلته څو حالتونه موجود دي.

الف: چه په صورت او مخرج دواړو کی ثابت عددونه موجود وي لیمیت یی په صفر کی د همدغه ثابت عدد و نسبت دی.

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^3 + 7x^2 - 20x - 12}{2x^2 + 5x - 3} = \frac{-12}{-3} = 4$$

ب: چه په صورت کې ثابت عدد وي او په مخرج کې نه وي ليميت يې په صفر کې لايتناهي دي.
مثال:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2 - 4x + 7}{2x^2 - 3x} = \frac{7}{0} = \infty$$

ج: چه په صورت کې ثابت عدد نه وي او په مخرج کې وي ليميت يې په صفر کې صفر دی.
مثال:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2 + 7x}{2x^2 + 7x - 11} = \frac{0}{-11} = 0$$

د: چه په صورت او مخرج دواړو کې ثابت عدد نه وي دلته بيا څو حالتونه موجود دي.

a- چه د صورت او مخرج د تيت حد درجې مساوي وي ليميت يې په صفر کې د کوچني توان حد و
د ضرب بنسبت دي.

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x^3 - 6x^2 + 12x}{5x^3 + 3x^2 - 6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(7x^2 - 6x + 12)}{x(5x^2 + 3x - 6)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x^2 - 6x + 12}{5x^2 + 3x - 6} = \frac{12}{-6} = -2$$

b- چه د کسر د صورت د تيت حد درجه د مخرج د تيت حد د درجې څخه ډېره وي ليميت يې
په صفر کې صفر دی.

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{11x^4 + 5x^3 - 4x^2}{8x^3 - 4x^2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(11x^3 + 5x^2 - 4x)}{x(8x^2 - 4x - 3)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{11x^3 + 5x^2 - 4x}{8x^2 - 4x - 3} = \frac{0}{-3} = 0$$

چه د کسر د صورت د تيت حد درجه د مخرج د تيت حد د درجې څخه کمه وي ليميت يې په
صفر کې (∞) دی.

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x^3 + 5x^2 - 4x}{2x^4 + 2x^3 + 5x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(7x^2 + 5x - 4)}{x(2x^3 + 2x^2 + 5x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x^2 + 5x - 4}{2x^3 + 2x^2 + 5x}$$

$$= \frac{-4}{0} = -\infty$$

په (∞) کې د یوې تابع لیمیت:په (∞) د یوې تابع لیمیت په دوه حالته کې مطالعه کوو.الف: په (∞) کې د تامې تابع لیمیت: د تامې تابع لیمیت په (∞) کې (∞) دی.

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (3x^3 - 7x^2 + 7x - 17) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \left(3 - \frac{7}{x} + \frac{7}{x^2} - \frac{17}{x^3} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \left(3 - \frac{7}{\infty} + \frac{7}{\infty^2} - \frac{17}{\infty^3} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} 3x^3 = 3 \cdot \infty^3 = \infty$$

ب: په (∞) کې د کسري تابع لیمیت: د کسري تابع لیمیت په (∞) کې په درې حالته کې مطالعه کوو.a- که د کسر د صورت درجه د مخراج د درجې څخه ډېره وه لیمیت یې په (∞) کې (∞) دي.

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - 8x^2 + 6x - 30}{2x^2 + 5x - 21}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7 - \frac{8}{x} + \frac{6}{x^2} - \frac{30}{x^3}}{\frac{2}{x} + \frac{5}{x^2} - \frac{21}{x^3}} = \frac{7 - \frac{8}{\infty} + \frac{6}{\infty^2} - \frac{30}{\infty^3}}{\frac{2}{\infty} + \frac{5}{\infty^2} - \frac{21}{\infty^3}} = \frac{7}{0} = \infty$$

b- که د کسر د صورت درجه د مخراج د درجې سره مساوي وي لیمیت یې په (∞) کې د لورې توان والا حدود ضریب نسبت دی.

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^3 - 8x^2 + 6x - 30}{2x^3 + 5x^2 - 21x + 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8 - \frac{8}{x} + \frac{6}{x^2} - \frac{30}{x^3}}{2 + \frac{5}{x} - \frac{21}{x^2} + \frac{3}{x^3}} = \frac{8 - \frac{8}{\infty} + \frac{6}{\infty^2} - \frac{30}{\infty^3}}{2 + \frac{5}{\infty} - \frac{21}{\infty^2} + \frac{3}{\infty^3}} = \frac{8}{2} = 4$$

c- که د کسر د صورت درجه د منخرج د درجې څخه کمه وي لیمیت یې په (∞) کې صفر دي.

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - 8}{x^3 + 2x^2 - 3x + 7} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{x^2} - \frac{8}{x^3}}{1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{7}{x^3}} = \frac{0}{1} = 0$$

د لیمیت قضیې *Theorms of limit*

اوله قضیه:

د ثابتې تابع لیمیت په یوه نقطه کې په خپله همغه عدد دی.

مثال:

$$\lim_3 12 = 12$$

دویمه قضیه:

د یوه عدد او یو تابع د حاصل ضرب لیمیت د تابع د لیمیت او ثابت عدد د حاصل ضرب سره مساوي دی.

$$\lim_{x \rightarrow a} kf(x) = k \lim_{x \rightarrow a} f(x) = kb$$

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} 6x^2 = 6 \lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 6 \times 2^2 = 24$$

دریمه قضیه:

دو تابعگانه د مجموعی لیمیت په یوه نقطه کی د تابعگانو د لیمیتو د مجموعی سره مساوي دی په همغه نقطه کې.

$$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) + g(x)\} = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b + c$$

مثال:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} (5x^2 + 7x^3) &= \lim_{x \rightarrow 2} 5x^2 + \lim_{x \rightarrow 2} 7x^3 \\ (5 \cdot 2^2 + 7 \cdot 2^3) &= 5 \cdot 2^2 + 7 \cdot 2^3 \\ (5 \cdot 4 + 7 \cdot 8) &= 5 \cdot 4 + 7 \cdot 8 \\ (20 + 56) &= 20 + 56 \\ (76) &= 76 \end{aligned}$$

خلورمه قضیه:

دوه تابعگانو د حاصل ضرب لیمیت په یوه نقطه کی د تابعگانو د لیمیتو د حاصل ضرب سره مساوي دی په همغه نقطه کې.

$$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) \cdot h(x)\} = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} h(x) = b \cdot c$$

مثال:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} (x - 1)^2 &= \lim_{x \rightarrow -1} (x - 1) \cdot \lim_{x \rightarrow -1} (x - 1) \\ &= (-1 - 1)^2 = (-1 - 1) \cdot (-1 - 1) \\ (-2)^2 &= (-2)(-2) \Rightarrow 4 = 4 \end{aligned}$$

پنځمه قضیه:

د دوه تابعگانو د خارج قسمت لیمیت په یوه نقطه کی د تابعگانو د لیمیتو د خارج قسمت سره مساوي دی په همغه نقطه کې.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \right\} &= \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{b}{c} \\ &\left(\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c \neq 0 \right) \end{aligned}$$

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x - 3}{x + 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} 4x - \lim_{x \rightarrow 0} 3}{\lim_{x \rightarrow 0} x + \lim_{x \rightarrow 0} 1} = \frac{0 - 3}{0 + 1} = -3$$

شپږمه قضيه:

د يوى جذري تابع ليميټ په يوه نقطه كې د تابع د ليميټ د جذر سره مساوي دى په همغه نقطه كې.

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \sqrt[n]{b}$$

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{8x^6} = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow 2} 8x^6} = \sqrt[3]{8 \cdot 2^6} = 2 \cdot 2^3 = 16$$

بې نهايت كوچنۍ تابع: كه د يوى تابع ليميټ په يوه نقطه كې صفر شي دى تابع ته بې نهايت كوچنۍ تابع وايي. لكه:

$$\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$$

تبصره:

a- د بې نهايت كوچنۍ تابع گانو مجموعه يوه بې نهايت كوچنۍ تابع ده.

b- د بې نهايت كوچنۍ تابعگانو د ضرب حاصل هم يوه بې نهايت كوچنۍ تابع ده.

c- كه $\varepsilon(x)$ تابع د $x \rightarrow a$ په صورت كې يوه بې نهايت كوچنۍ تابع وي نو:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\varepsilon(x)} = \infty$$

d- كه چېرى $\varepsilon(x)$ يوه بې نهايت كوچنۍ تابع وي او $u(x) \neq 0$ وي نو $v(x) = \frac{\varepsilon(x)}{u(x)}$ يوه بې نهايت كوچنۍ تابع ده.

مثال: د (3) په نقطه كې د $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 9)$ تابع ليميټ پيدا كړئ؟

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 9) = 3^2 - 9 = 9 - 9 = 0$$

مثال: د $\varepsilon(x) = \frac{1}{2x}$ تابع لیمیت په $x \rightarrow \infty$ کی پیدا کړئ؟

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \varepsilon(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x} = \frac{1}{2 \cdot \infty} = \frac{1}{\infty} = 0$$

1- د $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ ثبوت:

$\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$ فرضوو او دا چه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b + \varepsilon(x)$ دی نو:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

2- د $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x_1) + f(x_2)\} = \lim_{x \rightarrow a} f(x_1) + \lim_{x \rightarrow a} f(x_2)$ ثبوت:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x_1) = b_1 + \varepsilon_1$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x_2) = b_2 + \varepsilon_2$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x_1) + f(x_2)\} = \lim_{x \rightarrow a} f(x_1) + \lim_{x \rightarrow a} f(x_2) = \{b_1 + \varepsilon_1\} + \{b_2 + \varepsilon_2\}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x_1) + f(x_2)\} = b_1 + b_2 + \{\varepsilon_1 + \varepsilon_2\}$$

$$\{\varepsilon_1 + \varepsilon_2\} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x_1) + f(x_2)\} = b_1 + b_2$$

3- د دوه تابعگانو د حاصل ضرب لیمیت په یوه نقطه کی د تابعگانو د لیمیتو د حاصل ضرب

سره مساوي دی په همغه نقطه کی.

ثبوت:

$$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) \cdot g(x)\} = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b_1 + \varepsilon_1$$

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b_2 + \varepsilon_2$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) \cdot g(x)\} = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \lim_{x \rightarrow a} g(x) = (b_1 + \varepsilon_1)(b_2 + \varepsilon_2)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) \cdot g(x)\} = b_1 b_2 + b_1 \varepsilon_2 + b_2 \varepsilon_1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2$$

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 = 0 \quad \& \quad b_1 \cdot \varepsilon_2 = 0 \quad \& \quad b_2 \varepsilon_1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) \cdot g(x)\} = b_1 b_2$$

4- د دوه تابعگانو د نسبت لیمیت په یوه نقطه کی د تابعگانو د لیمیتو د نسبت سره مساوي

دی په همغه نقطه کی.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{b_1}{b_2}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$$

ثبوت:

$$f(x) = b_1 + \varepsilon_1$$

$$g(x) = b_2 + \varepsilon_2$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b_1 + \varepsilon_1}{b_2 + \varepsilon_2}$$

د مساوات د دواړو خواؤ څخه $\frac{b_1}{b_2}$ منفي کوو.

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{b_1}{b_2} = \frac{b_1 + \varepsilon_1}{b_2 + \varepsilon_2} - \frac{b_1}{b_2} = \frac{b_2(b_1 + \varepsilon_1) - b_1(b_2 + \varepsilon_2)}{b_2(b_2 + \varepsilon_2)}$$

$$= \frac{b_1 b_2 + b_2 \varepsilon_1 - b_1 b_2 - b_1 \varepsilon_2}{b_2(b_2 + \varepsilon_2)} = \frac{b_2 \varepsilon_1 - b_1 \varepsilon_2}{b_2(b_2 + \varepsilon_2)}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b_2 \varepsilon_1 - b_1 \varepsilon_2}{b_2(b_2 + \varepsilon_2)} + \frac{b_1}{b_2} = \frac{b_2 \varepsilon_1 - b_1 \varepsilon_2 + b_1 b_2 + b_1 \varepsilon_2}{b_2(b_2 + \varepsilon_2)} = \frac{b_2 \varepsilon_1 + b_1 b_2}{b_2(b_2 + \varepsilon_2)}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b_2(b_1 + \varepsilon_1)}{b_2(b_2 + \varepsilon_2)} = \frac{b_1 + \varepsilon_1}{b_2 + \varepsilon_2}$$

څرنگه چې ε_1 او ε_2 ډېر کوچني مثبت عددونه دي نو صفر کېږي. نو ثابت شوه چې:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{b_1}{b_2}$$

اومه قضيه يا د سانډويچ قضيه:

که $f(x)$, $g(x)$ او $h(x)$ درې تابعگانې ولرو چې $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ وي که:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b = \lim_{x \rightarrow a} h(x)$$

نو $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ کېږي.مثال: که $\left(1 - \frac{x^2}{4}\right) \leq u(x) \leq \left(1 + \frac{x^2}{4}\right)$ وي نو $\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = ?$ دی.

$u(x)$ وي نودسانډوويچ د قضيي سره سم د $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) = 1 = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x^2}{4}\right)$ قيمت پيدا کړی؟

حل:

$$\lim_{x \rightarrow a} u(x) = 1$$

تمرین:

لاندی لیمیتونه حل کړی؟

1- $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 2x^2 + 5x + 3)$

2- $\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - 2x - 5)$

3- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(9x+2)^2 - 4}{x}$

4- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^3 - 4x^2 + 7x - 14}{2x^2 - 11x + 7}$

5- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2 - 21x}{3x^3 + 5x^2 + 7x}$

6- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^3 - 4x^2}{7x^2 - 3x}$

7- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 7x - 3}{2x^2 - 3x + 1}$

8- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 4x + 5}{3x - 1}$

9- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 6x - 11}{2x^3 + 3x^2 - 4x + 7}$

10- $\lim_{x \rightarrow \infty} (4x^3 - 3x^2 + 4x - 12)$

11- $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 3x + 7}{1 + \frac{2-x}{x}}$

12- $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{x-3}{x-5} + \frac{x}{x+5} + \frac{x+4}{x} \right)$

آتمه قضیه:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}$$

په داسې حال کې چې (n) یو طبعي عدد او (a) یو حقيقي عدد دې.

ثبوت:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-1})}{x - a}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-1})$$

$$\lim_{x \rightarrow a} x^{n-1} + a \lim_{x \rightarrow a} x^{n-2} + a^2 \lim_{x \rightarrow a} x^{n-3} + \dots + a^{n-2} \lim_{x \rightarrow a} x + \lim_{x \rightarrow a} a^{n-1}$$

$$= a^{n-1} + a \cdot a^{n-2} + \dots + a^{n-2} \cdot a + a^{n-1}$$

$$= a^{n-1} + a^{n-1} + a^{n-1} + \dots + a^{n-1} + a^{n-1} = na^{n-1}$$

دغه قضيه د ټولو جذري افادو د ليميت د پيدا کولو لپاره استعمالولای شو.

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}}{x - a} = \frac{1}{n \sqrt[n]{a^{n-1}}}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^{\frac{1}{n}} - a^{\frac{1}{n}}}{x - a} = \frac{1}{n} a^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n} a^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n} a^{\frac{-(n-1)}{n}} = \frac{1}{n \sqrt[n]{a^{n-1}}}$$

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[5]{x} - \sqrt[5]{3}}{x - 3} = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[5]{x} - \sqrt[5]{3}}{x - 3} = \frac{1}{5} \cdot 3^{\frac{1}{5}-1} = \frac{1}{5} \cdot 3^{\frac{1-5}{5}} = \frac{1}{5} \cdot 3^{\frac{-4}{5}} = \frac{1}{5 \cdot \sqrt[5]{3^4}}$$

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}} = ?$$

د دغه سوال د حل لپاره $(x = y^6)$ او $a = b^6$ بڼيو:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}} = \lim_{y \rightarrow b} \frac{\sqrt[3]{y^6} - \sqrt[3]{b^6}}{\sqrt{y^6} - \sqrt{b^6}} = \lim_{y \rightarrow b} \frac{y^2 - b^2}{y^3 - b^3}$$

$$= \lim_{y \rightarrow b} \frac{(y - b)(y + b)}{(y - b)(y^2 + by + b^2)}$$

$$\lim_{y \rightarrow b} \frac{y + b}{y^2 + by + b^2} = \frac{b + b}{b^2 + b^2 + b^2} = \frac{2b}{3b^2} = \frac{2}{3b}$$

$$\therefore b^6 = a \quad \therefore b = \sqrt[6]{a}$$

$$= \frac{2}{3 \sqrt[6]{a}}$$

ابهام *Uncertainty*:

په اعدادو يا (∞) باندې د عملیود نتایجو عدم قاطعیت یا نامعلومی ته ابهام وائي.
مبهم اشکال په لاندې ډول دي.

$$\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0^0, \infty^0, 1^0$$

د ابهام رفع کول:

د څلورو لمړیو شکلو یعنی ($\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty$) ابهام په څلورو طریقو رفع کیږي.

1- د تقسیم پواسطه

2- د مزدوج د ضربېدو پواسطه

3- د تجزئي پواسطه

4- د لو هسپیتال په طریقه

1- د تقسیم پواسطه د ابهام رفع کول:

که په یوه کسري تابع کې د لیمیت د پیدا کولو په وخت کې ابهام منع ته راشي صورت او
مخرج په هغه متحول ویشو چه درجه یی لوړه وي.

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{3x^2 - 2} = \frac{\infty - 1}{\infty - 2} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{3x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{3 - \frac{1}{x^2}} = \frac{1 - \frac{1}{\infty}}{3 - \frac{1}{\infty}} = \frac{1}{3}$$

2- د تجزئي پواسطه د ابهام رفع کول:

که یوه کسري تابع د لیمیت د پیدا کولو په وخت کې مبهم شکل غوره کړي او د تجزئي وړ وي
تجزیه کوو یی.

مثال:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} &= \frac{(-2)^2 - 4}{-2 + 2} = \frac{4 - 4}{-2 + 2} = \frac{0}{0} \\ \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 2^2}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x + 2} \\ \lim_{x \rightarrow -2} (x - 2) &= -2 - 2 = -4\end{aligned}$$

مثال:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 2} &= \frac{2^2 - 6 \cdot 2 + 8}{2 - 2} = \frac{0}{0} \\ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x - 4x + 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x - 2) - 4(x - 2)}{x - 2} \\ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x - 4)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} (x - 4) = 2 - 4 = -2\end{aligned}$$

3- د مزدوج د ضربولو پواسطه د ابهام رفع کول:

که د یو تابع ابهام د تقسیم او تجزیې پواسطه نه رفع کېدلو په مزدوج کی یې ضربوو.

مثال:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x} - 4}{x - 16} &= \frac{\sqrt{16} - 4}{16 - 16} = \frac{0}{0} \\ \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x} - 4}{x - 16} &= \lim_{x \rightarrow 16} \frac{(\sqrt{x} - 4)(\sqrt{x} + 4)}{(x - 16)(\sqrt{x} + 4)} = \lim_{x \rightarrow 16} \frac{(\sqrt{x} - 4)(\sqrt{x} + 4)}{(x - 16)(\sqrt{x} + 4)} \\ \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x}^2 - 16}{(x - 16)(\sqrt{x} + 4)} &= \lim_{x \rightarrow 16} \frac{x - 16}{(x - 16)(\sqrt{x} + 4)} \\ \lim_{x \rightarrow 16} \frac{1}{\sqrt{x} + 4} &= \frac{1}{\sqrt{16} + 4} = \frac{1}{8}\end{aligned}$$

مثال:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x + 1} - \sqrt{x}) &= \infty - \infty \\ \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x + 1} - \sqrt{x}) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x + 1} - \sqrt{x})(\sqrt{x + 1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x + 1} + \sqrt{x}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+1}^2 - \sqrt{x}^2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \\
 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\infty} = 0
 \end{aligned}$$

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{\sqrt{x+1}^2 - 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} (\sqrt{x+1}+2)$$

$$= \sqrt{3+1}+2$$

$$\sqrt{4}+2 = 2+2 = 4$$

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{2x}{x^2+1} - \frac{4}{5}}{x-2} = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{2x}{x^2+1} - \frac{4}{5}}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{10x - 4x^2 - 4}{5(x^2+1)}}{x-2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(-4x^2 + 10x - 4)}{5(x^2+1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(-4x^2 + 2x + 8x - 4)}{5(x^2+1)(x-2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\{-2x(2x-1) + 4(2x-1)\}}{5(x^2+1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2(x-2)(2x-1)}{5(x^2+1)(x-2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2(2x-1)}{5(x^2+1)} = \frac{-2(2 \cdot 2 - 1)}{5(2^2+1)} = \frac{-6}{25}$$

د $(1^\infty, \infty^0, 0^0)$ اشکالو د ابهام رفع کول:

ددغه اشکالو د رفع کولو لپاره د $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ کار اخیستل کیږي. چه:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

د $e = 2.718281828$ عدد د یوه جرمني عالم ایولر Euler پواسطه کشف شوېدی.

مثال: ثبوت کړئ چې:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$$

د پاره د دې چې پوښتنه د ایولر د فارمول شکل ته ور واړوؤ نو $\frac{1}{\alpha}$ په x بشیو:

$$x = \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \alpha \rightarrow 0 \quad \therefore \quad x \rightarrow \infty$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

مثال: ثبوت کړئ چې:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^{\beta x} = e^{\alpha\beta}$$

حل:

$$u = \frac{\alpha}{x} \Rightarrow \therefore x \rightarrow \infty \quad \therefore \quad u \rightarrow 0 \Rightarrow x = \frac{\alpha}{u}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^{\beta x} = \lim_{u \rightarrow 0} (1 + u)^{\beta \frac{\alpha}{u}} = \lim_{u \rightarrow 0} \left\{ (1 + u)^{\frac{1}{u}} \right\}^{\alpha\beta}$$

$$\frac{1}{u} = x \Rightarrow u = \frac{1}{x} \quad \therefore \quad u \rightarrow 0 \quad \therefore \quad x \rightarrow \infty$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \left\{ (1 + u)^{\frac{1}{u}} \right\}^{\alpha\beta} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right\}^{\alpha\beta} = e^{\alpha\beta}$$

مثال: ثبوت کړئ چې:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

حل:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{x} \ln(1+x) \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} \right\} = \ln \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \right\}$$

$$\frac{1}{x} = u \Rightarrow x = \frac{1}{u} \quad \therefore x \rightarrow 0 \quad \because u \rightarrow \infty$$

$$= \ln \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \right\} = \ln \left\{ \lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{u} \right)^u \right\} = \ln e = 1$$

مثال: ثبوت کړئ چې:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

د سوال د حل لپاره $(e^x - 1)$ په (y) نښو:

$$e^x - 1 = y \Rightarrow e^x = 1 + y \Rightarrow \ln e^x = \ln(1+y) = x \ln e = \ln(1+y)$$

$$x = \ln(1+y)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(1+y)} = \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y} \ln(1+y)} = \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \ln(1+y)^{\frac{1}{y}}}$$

$$\frac{1}{y} = x \Rightarrow y = \frac{1}{x}$$

$$\therefore y \rightarrow 0 \quad \because x \rightarrow \infty$$

$$= \frac{1}{\ln \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x} = \frac{1}{\ln e} = \frac{1}{1} = 1$$

تبصره:

که یوه تابع د $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)}$ شکل ولري د لیمیت د لاس ته راوړلو لپاره یې طبعي لوگاریتم نیسو او د پورتنیو مبهمو شکلو څخه چې که هر شکل یې لرلو د $(0 \cdot \infty)$ شکل ته یې را اړوو او د مخکینیو څلورو حالتو څخه چې په هر حالت یې ابهام د منځه تللو ابهام یې د منځه وړو.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = \ln \lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \ln f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \{g(x) \ln f(x)\}$$

د مبهم شکل عمومي حالت: که $\lim_{x \rightarrow a} \{u(x)\}^{v(x)} = 1^\infty$ وي په دی حالت کی (α) په $(u-1)$ بشیو:

$$(\alpha = u - 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} u^v = \lim_{x \rightarrow a} (1 + u - 1)^{\frac{v}{u-1} \cdot u-1} = \lim_{x \rightarrow a} \left\{ (1 + \alpha)^{\frac{v}{\alpha} \alpha} \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \left\{ (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \right\}^{\lim_{x \rightarrow a} (v\alpha)}$$

څرنگه چه $(\alpha = u - 1)$ دی نو که $(u \rightarrow 1)$ وکړي په نتیجه کی $(\alpha \rightarrow 0)$ کوي په نتیجه کی لیکو چې:

$$\lim_{x \rightarrow a} \{u(x)\}^{v(x)} = \left\{ \lim_{x \rightarrow a} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \right\}^{\lim_{x \rightarrow a} v(u-1)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} v(u-1)} = e^p$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \{u(x)\}^{v(x)} = e^p, \quad p = \lim_{x \rightarrow a} \{v(u-1)\}$$

1- مثال: د $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$ پیدا کړئ؟

حل:

$$u = 1 + \frac{2}{x}, \quad v = x$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = e^p, \quad p = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ x \left(1 + \frac{2}{x} - 1\right) \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{2}{x}\right) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = e^p = e^2$$

2- مثال: د $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x-5}{2}}$ قیمت محاسبه کړئ؟

حل: لمړی د لیمیت بڼه لیکو:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x-5}{2}} = 1^\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x-5}{2}} = e^p$$

$$p = \lim_{x \rightarrow \infty} v(u-1) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-5}{2} \left(1 + \frac{1}{x} - 1\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-5}{2} \left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-5}{2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{x} - \frac{5}{x}}{\frac{2x}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{5}{x}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x-5}{2}} = e^p = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

3- مثال: $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}} = ?$

حل:

$$u = \cos x, \quad v = \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}} = e^p$$

$$p = \lim_{x \rightarrow 0} \{v(u-1)\} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{x} (\cos x - 1) \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{x(\cos x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x(\cos x + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 x}{x(\cos x + 1)} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x + 1} = 1 \cdot \frac{0}{1} = 1 \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + 1)^{\frac{1}{x}} = e^p = e^0 = 1$$

مثال: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+2} = ?$

حل:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} (x+2) \left(1 + \frac{1}{x} - 1\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+2}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{x} + \frac{2}{x}}{\frac{x}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right) = 1 + \frac{2}{\infty} = 1 + 0 = 1$$

مثال: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+2} = ?$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} (x+2) \left(\frac{x+3}{x-1} - 1\right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} (x+2) \left(\frac{x+3-x+1}{x-1}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x+2) \left(\frac{4}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4(x+2)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x+8}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4x}{x} + \frac{8}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{8}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{4 + \frac{8}{\infty}}{1 - \frac{1}{\infty}} = \frac{4}{1} = 4$$

مثال: $\lim_{x \rightarrow \infty} (\cos 2x)^{\frac{1}{x}} = ?$

حل:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} (\cos 2x - 1) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 2 \sin^2 x - 1}{x} = -2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \sin x \\ &= -2 \cdot 1 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

مثال: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln x} = ?$

حل:

$$x-1=y \Rightarrow x=1+y$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(1+y)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\ln(1+y)}{y}} = \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y} \ln(1+y)} = \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \ln(1+y)^{\frac{1}{y}}}$$

$$\frac{1}{y} = u \Rightarrow y = \frac{1}{u} \quad \therefore y \rightarrow 0 \quad \therefore u \rightarrow \infty$$

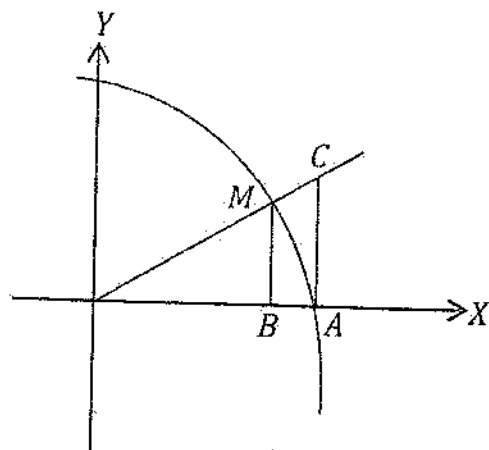
$$\frac{1}{\ln \lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u} = e$$

د مثلثاتي تابعگانو لیمیت *limit of Trigonometrical Functions*

د یوې زاوېي د ساين او هغه زاوېي د نسبت لیمیت په صفر کی (1) دې، یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

ثبوت: په یوه دایره کې یو داخلي او یو خارجي مثلثونه رسمو او هم ددی مثلثو تر منځ یوه قطاع په نظر کې نیسو. مساحتونه یې پیدا کوو او مقایسه کوو یې.



$$A_{OBM} < A_{OAM} < A_{OAC}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \overline{OB} \cdot \overline{MB} < \frac{1}{2} \cdot \overline{OA} \cdot \widehat{AM} < \frac{1}{2} \cdot \overline{OA} \cdot \overline{AC}$$

$$\overline{OB} = \cos x, \quad \overline{MB} = \sin x, \quad \overline{OA} = 1, \quad \widehat{AM} = x$$

$$\sin x \cos x < x < \tan x$$

$$\frac{\sin x \cos x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x}$$

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$\frac{1}{\cos x} > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} > \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} > \lim_{x \rightarrow 0} \cos x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1 = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x$$

د سانډويچ د قضیې سره سم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = ? \text{ مثال: 1-}$$

حل:

$$2x = \alpha \Rightarrow x = \frac{\alpha}{2} \quad \therefore x \rightarrow 0 \quad \therefore \alpha \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\frac{\alpha}{2}} = 2 \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 2 \cdot 1 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \tan 2x}{7x} = ? \text{ مثال: 2-}$$

حل:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \tan 2x}{7x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \frac{\sin 2x}{\cos 2x}}{7x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \sin 2x}{7x \cos 2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \cdot 2x \cdot \frac{\sin 2x}{2x}}{7x \cos 2x} = \frac{10 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x}}{7 \lim_{x \rightarrow 0} \cos 2x} = \frac{10}{7}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x} = ? \text{ مثال: 3-}$$

حل:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - 2\sin^2 x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 1 + 2\sin^2 x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 x}{x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 2 \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\sin 5x} = ? \text{ حلورم مثال: 4-}$$

حل:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3x \cdot \frac{\sin 3x}{3x}}{\cos 3x}}{5x \cdot \frac{\sin 5x}{5x}} = \frac{\frac{3x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x}}{\lim_{x \rightarrow 0} \cos 3x}}{5x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x}} = \frac{3 \cdot 1}{5 \cdot 1} = \frac{3}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos 6x}{x^2} = ? \text{ مثال: 5-}$$

حل:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \frac{4x+6x}{2} \sin \frac{4x-6x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin 5x \sin(-x)}{x^2}$$

$$2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \sin 5x}{5x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 10 \cdot 1 \cdot 1 = 10$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\cos 2x - \cos x + 1} = ? \text{ مثال: 6-}$$

حل:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{2\cos^2 x - 1 - \cos x + 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{2\cos^2 x - \cos x}$$

$$= \sqrt{2(1^2) - 1} = \sqrt{2 \cdot 1 - 1} = \sqrt{2 - 1} = 1$$

د تابعگانو متماديټ (اتصال):

د اتصال له مخی تابع په دوه ډوله ده.

1- متمادي تابع 2- غیر متمادي تابع

1- متمادي تابع:

هغه تابع ده چه دگراف د ترسیم په وخت کی یی د پنسل څوکه د کاغذ څخه نه پورته کیږي یعنی گراف یی پریکړون نه لري په عمومي ډول خطي تابع، دویمه درجه تابع، اکسپوننتشل تابع، لوگاریتمي تابع، د ساین او کوساین تابعگانې متمادي تابعگانې دي په دی شرط چه کومه نقطه ورڅخه وتلی نه وي.

2- غیر متمادي تابعگانې:

هغه تابعگانې دي چه گراف یی څو ټوټی وي. لکه هوموگرافیک تابع، د تانجانت، کوتانجانت، سیکننټ او کوسیکننټ تابعگانې.

کولای شو چې متمادي تابعگانې په غیر متمادي تابعگانو بدلی کړو مگر نشو کولای چې غیر متمادي تابعگانې په متمادي تابعگانو بدلی کړو.

د متمادیت شرطونه:

د متمادیت شرطونه درې دي.

1- د (a) نقطه باید په $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ کې شامل وي.

2- $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ باید موجود وي.

3- د تابع لیمیت په یوه نقطه کې باید د تابع د قیمت سره مساوي وي په همغه نقطه کې.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

که پورتنی درې واړه شرطونه په یوه تابع کې موجود وه تابع متمادی ده او که د دغه درې شرطو څخه یو پکې موجود نه و تابع متمادی نه ده غیر متمادی ده.

1- مثال: وینایست چه $f(x) = x^2 + 2x - 1$ تابع د $x \rightarrow 2$ په نقطه کې متمادی ده.

حل:

$$2 \in \text{dom} f(x) \because 2 \in \mathbb{R} \quad -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x - 1) = 2^2 + 2 \cdot 2 - 1 = 7 \quad -2$$

$$f(2) = 2^2 + 2 \cdot 2 - 1 = 7 \quad -3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$$

نو تابع متمادی ده.

2- مثال: د $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ د تابع متمادیت د $(x = -1)$ په ټکي کې وڅېړئ؟

حل: څرنګه چه د تابع مخرج په (-1) کې صفر کېږي او هر هغه عدد چه د تابع مخرج صفرګوي د تابع د تعریف په ناحیه کې شامل نه دی $(-1 \notin \text{dom} f(x))$ نو تابع متمادی نه ده.

د تابع د لیمیت شرطونه: که دیوی تابع د ښي لاس لیمیت د تابع د چپ لاس د لیمیت سره مساوي وي نو تابع لیمیت لري. او که د ښي لاس لیمیت د چپ لاس د لیمیت سره مساوي نه و لیمیت نه لري.

دېني لاس ليميت:

د (b) عدد د (a) په نقطه کې د $f(x)$ د تابع د بني لاس ليميت دې په دی شرط چه د (b) د هر مجاورت (N) لپاره د تابع د تعريف په ناحیه کې د $(a, a + \delta)$ یو خلاص انټروال موجود وي چه ددی انټروال د هر عنصر تصویر د (N) په مجاورت شامل وي او داسی ليکل کېږي:

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$$

د چپ لاس ليميت:

د (b) عدد د (a) په نقطه کې د $f(x)$ د تابع د چپ لاس ليميت دې پدی شرط چه د (b) د هر مجاورت (N) لپاره د تابع د تعريف په ناحیه کې د $(-\infty, a)$ یو انټروال موجود وي چه ددی مجاورت د هر عنصر تصویر د (N) په مجاورت کې شامل وي او داسی ليکل کېږي:

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x)$$

مثال:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & ; x < 2 \\ x^2 - 3 & ; x \geq 2 \end{cases}$$

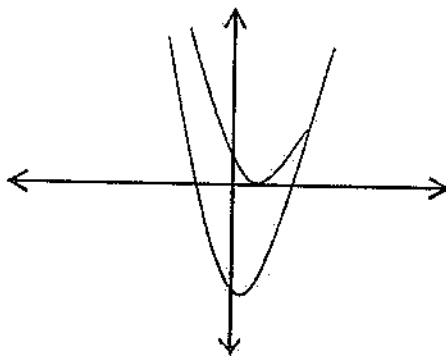
حل:

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} (x^2 - 2x + 1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} (x^2 - 3) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \exists$$



4- مثال: $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & ; x \geq 1 \\ 1 - x & ; x < 1 \end{cases}$ تابع په راکړ شوو ټکو کې یې متعادیت وڅېړئ؟

حل:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1+} (2x + 1) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 1-} (1 - x) = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)$$

نو $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \nexists$ تابع لیمیت نه لري.

نو تابع د $(x = 1)$ په نقطه کې غیرمتما دی ده.

تبصره:

1- که $g(x)$ تابع د $(x = a)$ په نقطه کې متما دی وي او $f(x)$ په $(x = g(a))$ کې متما دی وي نو $f(g(x))$ هم په $(x = a)$ کې متما دی ده.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} g(x)\right) = f(g(a))$$

2- د یوې طاقت لرونکې تابع د لیمیت د پیدا کولو لپاره لمړی د تابع لیمیت پیدا کوو او بیا یې په هماغه توان رفع کوو.

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^a = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x)\right)^a$$

3- د اکسپوننشل تابع د لیمیت د پیدا کولو لپاره قاعده د تابع د توان د لیمیت په توان لیکو.

$$\lim_{x \rightarrow a} (b)^{f(x)} = b^{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$$

4- د لوگاریتمي تابع لیمیت په یوه نقطه کې د تابع د لیمیت د لوگاریتم سره مساوي دی په هماغه نقطه کې.

$$\lim_{x \rightarrow a} \log_b f(x) = \log_b \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

5- د یوې مثلثاتي تابع لیمیت په یوه نقطه کې د هغه تابع د لیمیت د مثلثاتي نسبت سره مساوي دی په هماغه نقطه کې.

$$\lim_{x \rightarrow a} \sin f(x) = \sin \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

د متماډي تابعگانو خواص:

که د دوه تابعگانو څخه هره یوه په یوه نقطه کې متماډي وي نو د دوی مجموعه، تفاضل، حاصل ضرب او خارج قسمت هم په همغه نقطه کې متماډي دي.

مثال: که $f(x) = x^2 + 3$ او $g(x) = x^2 + 3x - 2$ دوه تابعگانې متماډي وي نو ثبوت کړئ چې $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$; $g(x) \neq 0$ هم متماډي دي.

دې

حل:

$$1: Df(x) = IR$$

$$2: \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 3) = 1^2 + 3 = 4$$

$$3: f(1) = (1^2 + 3) = 4$$

نو د $f(x)$ تابع د $x = 1$ په نقطه کې متماډي ده.

$$1: Dg(x) = IR$$

$$2: \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 3x - 2) = 1^2 + 3 \cdot 1 - 2 = 2$$

$$3: g(1) = (1^2 + 3 \cdot 1 - 2) = 2$$

نو د $g(x)$ تابع د $x = 1$ په نقطه کې متماډي ده.

اوس د تابعگانو د مجموعې او حاصل ضرب متماډیت وڅېړو.

الف:

$$f(x) + g(x) = x^2 + 3 + x^2 + 3x - 2 = 2x^2 + 3x + 1$$

$$1: D\{f(x) + g(x)\} = IR$$

$$2: \lim_{x \rightarrow 1} \{f(x) + g(x)\} = \lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 + 3x + 1) = 6$$

$$3: f(1) + g(1) = (2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1) = 2 + 3 + 1 = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) + g(x)) = f(1) + g(1) = 6$$

ب: د او تابعگانو د حاصل ضرب متماډیت وڅېړئ؟

$$1: Df(x) \cdot g(x) = IR$$

$$2: \lim_{x \rightarrow 1} \{f(x) \cdot g(x)\} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 3x - 2)(x^2 + 3) = 2 \cdot 4 = 8$$

$$3: f(1) \cdot g(1) = 2 \cdot 4 = 8$$

د تابعگانو حاصل ضرب هم متماډي دی.

تمرین

د لاندی تابعگانو لیمیټ پیدا کړئ؟

1: $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - 2x + 17)$

2: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 6x + 3}{x + 1}$

3: $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + 5x^2 - 11x + 1)$

4: $\lim_{x \rightarrow 1} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$

شپاړلسم فصل

مشتق

مشتق مفعوله صيغه ده د اشتقاق څخه اخیستل شوی ده.

او په اصطلاح کې په عربي ژبه کې د مصدر څخه د نورو افعالو او اسماءو اخیستلو ته اشتقاق وایي. د مشتق څخه مقصد د دوه یمې درجې، دریمې درجې او داسې نورو تابعگانو د مېل پیدا کول دي.

د خطي تابع مېل:

په خطي تابع کې د مستقیم خط مېل د $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ پواسطه پیدا کیږي.

مثال: $A(3, 7)$ او $B(5, 9)$ د مستقیمې کرښې دوه نقطې دي مېل یې پیدا کړئ؟

حل:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{9 - 7}{5 - 3} = \frac{2}{2} = 1$$

خو څرنگه چې په منحنی خطو کې دوه نقطې په یوه استقامت واقع نه وي نو له همدې امله دمنحنی خطو د مېل د پیدا کولو لپاره د مستقیم خط د مېل څخه استفاده کوي. نو ځکه د منحنی مېل ته مشتق وایي.

مثلاً $f(x) = x^2$ یوه تابع راگرشوی ده د مېل ددغه تابع د گراف دوه نقطې په یوه استقامت وجود نلري نو په تقریبي ډول دوه نقطې پیدا کړو او مېل یې لاسته راوړو فرضاً $A(x, f(x))$ او $B(x+h, f(x+h))$ دمنحنی خط دوه نقطې دي نو د مستقیم خط د مېل څخه استفاده کوو نو لیکو چې:

$$m_{AB} = \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

د منحنی خط دهرې اختیاري نقطې مېل عبارت $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ دی.

1- مثال: د $f(x) = 2x - x^2$ تابع د گراف مېل د $P(3, -3)$ په نقطه کې پیدا کړئ؟

حل: څرنگه چې د $P(3, -3)$ په نقطه کې $x = 3$ دی نو کولای شو چې د مېل په فارمول کې د (x) په عوض (3) وضع کړو.

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ m &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(3+h) - (3+h)^2 - (2 \cdot 3 - 3^2)}{h} \\ m &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6 + 2h - (9 + 6h + h^2) - 6 + 9}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h - 9 - 6h - h^2 + 9}{h} \\ m &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(-4 - h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (-4 - h) = -4 \Rightarrow m = -4 \end{aligned}$$

2- مثال: د $f(x) = x^3 - 1$ د تابع مېل د $(x = -3)$ په نقطه کې پیدا کړئ؟

حل:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{f(-3+h) - f(-3)}{h} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\{(-3+h)^3 - 1\} - \{(-3)^3 - 1\}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-27 + 27h - 9h^2 + h^3 - 1 + 27 + 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 - 9h^2 + 27h}{h} \\ m &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h^2 - 9h + 27)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h^2 - 9h + 27) = 27 \end{aligned}$$

منځنۍ یا وسطي تعبیر:

د متحرک پواسطه وهل شوی فاصله د وخت تابع ده. یعنې:

$$S = f(t)$$

د t_1 او t_2 په وختونو کې د وهل شوو فاصلو د تفاضل او وختو د تفاضل نسبت ته د متحرک وسطي سرعت یا متوسط سرعت وايي. یاد اړه د تابع او متحول د زیادت نسبت ته متوسط سرعت وايي.

$$v = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$$

د متوسط سرعت لیمیت ته لحظوي سرعت وايي

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{S - S_0}{t - t_0} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

1- مثال: د $y = f(x) = x^2$ په تابع کی متوسط تغیرات د $[2, 5]$ په انټروال کی پیدا کړئ؟

حل:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{25 - 4}{3} = \frac{21}{3} = 7$$

2- مثال: د $f(t) = 5t^2 - 3t + 1$ د تابع متوسط سرعت د $[2, 4]$ په انټروال کی پیدا

کړئ؟

حل:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{(5 \cdot 4^2 - 3 \cdot 4 + 1) - (5 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 1)}{4 - 2} = \frac{69 - 15}{2} = 27$$

د یوې تابع مشتق:

که $y = f(x)$ یوه تابع ولرو نو که x د (Δx) په اندازه زیادت وکړي نو y د (Δy) په اندازه زیادت کوي.

$$y = f(x)$$

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - y$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

دغه لیمیت ته مشتق وایي.

د مشتق په باب لمړنۍ تصور پیري فرمات (Pierre fermat) فرانسوي عالم په (1601 - 1665) م کې کړی و نوموړي خپلې لیکنې د نړۍ ریاضیدانانو ته پیشنهاد کړلې. وروسته بیا اسحق نیوټن (1642 - 1727) م او جورج ویلیم لایبنز (1664 - 1715) م د مشتق د موجودیت ضرورت په ریاضي کې ثابت او د ساینسدانانو کمیسیون ته یې پیشنهاد کړ او د مشتق د تعریف وضاحت یې په ډېر ښه ډول وکړ.

د مشتق تعريف:

د صفر په نقطه کې د تابع اومتحول د زیادتو نسبت لیمیت ته مشتق وايي. لکه $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ او په $f(x)$ یا y ، $\frac{dy}{dx}$ ، $\frac{df}{dx}$ ښودل کېږي.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = \dot{y} = f'(x)$$

1- مثال: د $f(x) = 2x$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2(x + \Delta x) - 2x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x + 2\Delta x - 2x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x} = 2 \end{aligned}$$

2- مثال: د $f(x) = x^3$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2) = 3x^2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 \end{aligned}$$

3- مثال: د $f(x) = \sqrt{x}$; $x \geq 0$ مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} \end{aligned}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

4- مثال: د $f(x) = 2x^2 + x$ د تابع مشتق د تعریف په مرسته وڅېړئ؟

حل:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{2(x + \Delta x)^2 + (x + \Delta x)\} - (2x^2 + x)}{\Delta x}$$

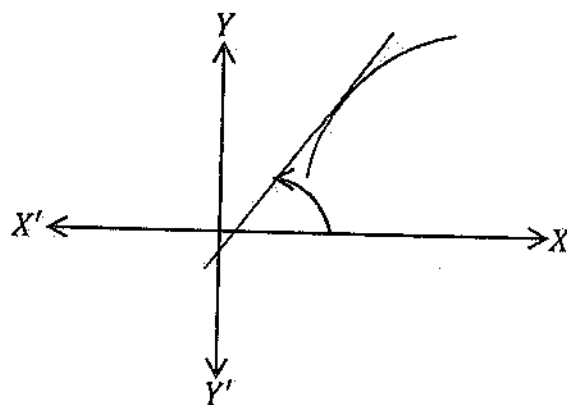
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 + x + \Delta x - 2x^2 - x}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 + \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(4x + 2\Delta x + 1)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (4x + 2\Delta x + 1) = 4x + 1 \Rightarrow f'(x) = 4x + 1$$

د مشتق هندسي تعبیر

په یوه نقطه کې د یوه منحنی خط ممېل دهغه زاويي تانجانت دی چه مستقیمه کړنې یې د (XX') د محور د مثبت جهت سره جوړوي.



1- مثال: د هغه مماس ممېل او معادله پیدا کړئ چې د $f(x) = 2x^3 - 1$ په منحنی باندې د $A(1,1)$ په نقطه کې رسمېږي.

حل:

$$\begin{aligned}
 m = f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{2(x + \Delta x)^3 - 1\} - \{2x^3 - 1\}}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x^3 + 6x^2\Delta x + 6x(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3 - 1 - (2x^3 - 1)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x^3 + 6x^2\Delta x + 6x(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3 - 1 - 2x^3 + 1}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{6x^2\Delta x + 6x(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(6x^2 + 6x\Delta x + 2(\Delta x)^2)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (6x^2 + 6x\Delta x + 2(\Delta x)^2) = 6x^2
 \end{aligned}$$

د $A(1,1)$ په ټکي کې د مماس مېل $m = f'(x) = f'(1) = 6(1)^2 = 6 \cdot 1 = 6$ دی او معادله یې په لاندې ډول ده.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = 6(x - 1) \Rightarrow y = 6x - 6 + 1 = 6x - 5 \Rightarrow y = 6x - 5$$

2- مثال: د $y = x^2 + 1$ د تابع د مماس مېل د $x_0 = 2$ په نقطه کې پیدا کړئ؟

$$\begin{aligned}
 y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 + 1 - (x_0^2 + 1)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 + 1 - x_0^2 - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(2x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0 = 2 \cdot 2 = 4
 \end{aligned}$$

3- مثال: د $y = f(x) = x^2$ تابع راکړشوی ده د $x = x_0$ په نقطه کې او خصوصاً د $x_0 = 2$ په نقطه کې یې مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$\begin{aligned}
 \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} \\
 &= \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} \\
 \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x \\
 \frac{\Delta y}{\Delta x} &= 2x_0 + \Delta x \\
 f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0 = 2 \cdot 2 = 4
 \end{aligned}$$

4- مثال: د $f(x) = \frac{1}{x}$ د تابع مشتق د (x_0) پہ نقطہ کی پیدا کریں؟

حل:

$$y = f(x_0)$$

$$y + \Delta y = f(x_0 + \Delta x) = \frac{1}{x_0 + \Delta x}$$

$$\Delta y = \frac{1}{x_0 + \Delta x} - \frac{1}{x_0} = \frac{x_0 - x_0 - \Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)} = \frac{-\Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)} = \frac{-1}{x_0(x_0 + \Delta x)}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-1}{x_0(x_0 + \Delta x)} = -\frac{1}{x_0^2} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

5- مثال: د $f(x) = 4x^2 - 3$ تابع مشتق پیدا کریں؟

حل:

$$y = f(x)$$

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - y$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\{4(x + \Delta x)^2 - 3\} - (4x^2 - 3)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{4(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2) - 3\} - (4x^2 - 3)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{4x^2 + 8x\Delta x + 4(\Delta x)^2 - 3 - 4x^2 + 3}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{8x\Delta x + 4(\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(8x + 4\Delta x)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (8x + 4\Delta x) = 8x$$

تمرین:

د لاندی تابعگانو مشتق پیدا کریں؟

1- $f(x) = \sqrt{x+1}$

2- $f(x) = \frac{x^2-5}{x}$

$$3- f(x) = 1 - \frac{3}{x}$$

$$5- f(x) = x - \frac{1}{x}$$

$$4- f(x) = \frac{2}{x^2 + 5x - 7}$$

$$6- f(x) = 5x - 1$$

د مشتق قوانین:

اوله قضیه:

د ثابت عدد مشتق صفر دی.

مفروض: $y = c$ یوه تابع لرو.

مطلوب: ثبوتوو چه $y' = 0$

ثبوت:

$$y + \Delta y = c \Rightarrow \Delta y = c - y = c - c$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{c - c}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c - c}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0$$

د یوې طاقت لرونکې تابع مشتق:

مفروض: $y = f(x) = x^n$ یوه طاقت لرونکې تابع ده.

مطلوب: ثبوتوو چه $y' = f'(x) = nx^{n-1}$

ثبوت:

$$y = x^n$$

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^n \Rightarrow \Delta y = (x + \Delta x)^n - y = (x + \Delta x)^n - x^n$$

$$\Delta y = (x + \Delta x - x) \{ (x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2} \cdot x + (x + \Delta x)^{n-3} \cdot x^2 + \dots + x^{n-1} \}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x \{ (x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2} \cdot x + (x + \Delta x)^{n-3} \cdot x^2 + \dots + x^{n-1} \}}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \{ (x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2} \cdot x + (x + \Delta x)^{n-3} \cdot x^2 + \dots + x^{n-1} \}$$

$$y' = x^{n-1} + x^{n-1} + x^{n-1} + \dots + x^{n-1} = nx^{n-1}$$

1- مثال: د $f(x) = x^5$ تابع مشتق $x = \frac{1}{2}$ په ټکي کې پیدا کړئ؟

$$f(x) = x^5$$

$$f'(x) = 5x^{5-1} = 5x^4$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 5\left(\frac{1}{2}\right)^4 = 5\left(\frac{1}{16}\right) = \frac{5}{16}$$

2- مثال: د $f(x) = x^{-2}$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

$$f'(x) = -2x^{-2-1} = -2x^{-3}$$

3- مثال: د $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

$$f'(x) = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{2-3}{3}} = \frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3 \cdot x^{\frac{1}{3}}} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

د دوه تابعگانو د حاصل جمع مشتق:

د دوه تابعگانو د مجموعی مشتق د تابعگانو د مشتقو د مجموعی سره مساوي دی.

مفروض: u او v دوه تابعگانې لرو.

مطلوب: ثبوت وچه $y = u + v$

ثبوت: د تابعگانو د جمع حاصل په y ښیو:

$$y = u + v$$

$$y + \Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v$$

$$\Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v - y$$

$$\Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v - u - v$$

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$y' = u' + v'$$

د دوه تابعگانو د تفاضل مشتق

د دوه تابعگانو د تفاضل مشتق د تابعگانو د مشتقو د تفاضل سره مساوي دی.

مفروض: (u) او (v) دوه تابعگانې لرو.

مطلوب: ثبوتوو چه: $y' = u' - v'$

ثبوت: د (u) او (v) تابعگانو تفاضل په (y) ښیو.

$$y = u - v$$

$$y + \Delta y = (u + \Delta u) - (v + \Delta v)$$

$$\Delta y = (u + \Delta u) - (v + \Delta v) - u + v$$

$$\Delta y = u + \Delta u - v - \Delta v - u + v$$

$$\Delta y = \Delta u - \Delta v$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u - \Delta v}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} - \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$y' = u' - v'$$

1- مثال: د $y = 2x + 1$ د تابع مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$u = 2x \quad \& \quad v = 1$$

$$u' = 1 \cdot 2x^{1-1} = 2x^0 = 2$$

$$v' = 0 \quad \therefore y' = 2$$

2- مثال: د $f(x) = 4x^2 - 3x + 5$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$u = 4x^2, \quad v = -3x, \quad w = 5$$

$$y' = u' + v' + w'$$

$$y' = (4x^2)' - (-3x)' + 5'$$

$$y' = 8x - 3$$

د حاصل ضرب مشتق:

د دوه تابعگانو د حاصل ضرب مشتق مساوي دي د اولي تابع مشتق ضرب دويمه تابع جمع د دويمې تابع مشتق ضرب اوله تابع.

مفروض: د (u) او (v) دوه تابعگانې لرو. او د حاصل ضرب تابع يې په (y) ښيو.

$$y = u \cdot v$$

مطلوب: ثبوت وچه: $\dot{y} = \dot{u}v + v\dot{u}$

ثبوت:

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v)$$

$$\Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - u \cdot v$$

$$\Delta y = u \cdot v + u \cdot \Delta v + v \Delta u + \Delta u \cdot \Delta v - u \cdot v$$

$$\Delta y = u \Delta v + v \Delta u + \Delta u \Delta v$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u \Delta v + v \Delta u + \Delta u \Delta v}{\Delta x} = u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = v \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + u \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \Delta u \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$\dot{y} = v\dot{u} + \dot{v}u + 0 \cdot \dot{v}$$

$$\dot{y} = \dot{u}v + \dot{v}u$$

1- مثال: د $y = x^3(x^2 - 3)$ تابع مشتق پيدا کړئ؟

حل:

$$u = x^3 \Rightarrow \dot{u} = 3x^2$$

$$v = x^2 - 3 \Rightarrow \dot{v} = 2x$$

$$\dot{y} = \dot{u}v + \dot{v}u$$

$$\dot{y} = 3x^2(x^2 - 3) + 2x(x^3)$$

$$\dot{y} = 3x^4 - 9x^2 + 2x^4 = 5x^4 - 9x^2$$

2- مثال: د $f(x) = (2x^2 - 5x + 7)(3x - 15)$ تابع مشتق پيدا کړئ؟

حل:

$$u = 2x^2 - 5x + 7 \Rightarrow \dot{u} = 4x - 5$$

$$v = 3x - 15 \Rightarrow \dot{v} = 3$$

$$\dot{f}(x) = (4x - 5)(3x - 15) + 3(2x^2 - 5x + 7)$$

$$\dot{f}(x) = 12x^2 - 60x - 15x + 75 + 6x^2 - 15x + 21$$

$$\dot{f}(x) = 18x^2 - 90x + 96$$

د حاصل تقسيم مشتق:

د دوه تابعگانو د خارج قسمت مشتق عبارت دی د صورت مشتق ضرب مخرج منفي د مخرج مشتق ضرب صورت پر مخرج مربع باندې.

مفروض: د (u) او (v) دوه تابعگانې لرو د خارج قسمت تابع يې په (y) ښو. نو:

$$y = \frac{u}{v}$$

مطلوب: ثبوتو چې:

$$\dot{y} = \frac{\dot{u}v - v\dot{u}}{v^2}$$

ثبوت:

$$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v}$$

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - y$$

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{uv + v\Delta u - uv - u\Delta v}{v(v + \Delta v)} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)}}{\Delta x} = \frac{v \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)} = \frac{v \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (v + \Delta v)}$$

$$\dot{y} = \frac{\dot{u}v - v\dot{u}}{v^2}$$

1- مثال: د $y = \frac{2+3x}{1-2x}$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$u = 2 + 3x \Rightarrow \dot{u} = 3$$

$$v = 1 - 2x \Rightarrow \dot{v} = -2$$

$$y = \frac{u}{v} \Rightarrow \dot{y} = \frac{\dot{u}v - v\dot{u}}{v^2}$$

$$\dot{y} = \frac{3(1-2x) - \{-2(2+3x)\}}{(1-2x)^2} = \frac{3-6x+4+6x}{(1-2x)^2} = \frac{7}{(1-2x)^2}$$

2- مثال: د $f(x) = \frac{7x-15}{2x^2+3x}$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$u = 7x - 15 \Rightarrow \dot{u} = 7$$

$$v = 2x^2 + 3x \Rightarrow \dot{v} = 4x + 3$$

$$\dot{f}(x) = \frac{7(2x^2 + 3x) - (4x + 3)(7x - 15)}{(2x^2 + 3x)^2}$$

$$\dot{f}(x) = \frac{14x^2 + 21x - 28x^2 + 60x - 21x + 45}{(2x^2 + 3x)^2}$$

$$\dot{f}(x) = \frac{-14x^2 + 60x + 45}{(2x^2 + 3x)^2}$$

3- مثال: د $y = \frac{x^2}{3x+1}$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$u = x^2 \Rightarrow \dot{u} = 2x$$

$$v = x + 1 \Rightarrow \dot{v} = 3$$

$$\dot{y} = \frac{2x(3x+1) - 3 \cdot x^2}{(3x+1)^2} = \frac{6x^2 + 2x - 3x^2}{(3x+1)^2}$$

$$u = x^2 \Rightarrow \dot{u} = 2x$$

$$v = x + 1 \Rightarrow \dot{v} = 3$$

$$\dot{y} = \frac{2x(3x+1) - 3 \cdot x^2}{(3x+1)^2} = \frac{6x^2 + 2x - 3x^2}{(3x+1)^2} = \frac{3x^2 + 2x}{(3x+1)^2}$$

$$\dot{y} = \frac{3x^2 + 2x}{(3x+1)^2}$$

د جذري تابع مشتق:

1- د هغه جذري تابع مشتق چې د جذر درجه يې دوه وي، لکه:

$$y = \sqrt{x}$$

مشتق يې عبارت دی د جذر د داخل مشتق پر دوه ضرب تابع.

فارمول يې په لاندې ډول دی.

$$y' = \frac{\dot{u}}{2\sqrt{u}}$$

مفروض: $y = \sqrt{u}$ يوه تابع راځي شوی ده.

مطلوب: ثبوتو چې:

$$y' = \frac{\dot{u}}{2\sqrt{u}}$$

ثبوت:

$$y + \Delta y = \sqrt{u + \Delta u}$$

$$\Delta y = \sqrt{u + \Delta u} - y = \sqrt{u + \Delta u} - \sqrt{u}$$

$$\Delta y = \frac{(\sqrt{u + \Delta u} - \sqrt{u})(\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u})}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}} = \frac{u + \Delta u - u}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}} = \frac{\Delta u}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta u}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}}}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x}}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x}}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}} = \frac{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u})} = \frac{\dot{u}}{\sqrt{u} + \sqrt{u}} = \frac{\dot{u}}{2\sqrt{u}}$$

$$y' = \frac{\dot{u}}{2\sqrt{u}}$$

مثال: د $y = \sqrt{x}$ مشتق پیدا کړئ؟

د پورته تابع مشتق عبارت دی.

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

ثبوت:

$$y + \Delta y = \sqrt{x + \Delta x}$$

$$\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - y$$

$$\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{\Delta x}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta x}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

مثال: $y = \sqrt{x^2 + 1}$ مشتق پیدا کریں؟

حل:

$$y + \Delta y = \sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}}$$

$$\Delta y = \sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} - y$$

$$\Delta y = \sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} - \sqrt{x^2 + 1}$$

$$= \frac{[\sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} - \sqrt{x^2 + 1}][\sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} + \sqrt{x^2 + 1}]}{\sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} + \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\Delta y = \frac{(x + \Delta x)^2 + 1 - x^2 - 1}{\sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} + \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\Delta y = \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 1 - x^2 - 1}{\sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} + \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} + \sqrt{x^2 + 1}}}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}}{\sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} + \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x)}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\sqrt{(x + \Delta x)^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 1})} = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 1}} \\ &= \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}}\end{aligned}$$

مثال: د $f(x) = \sqrt{2x^3 - 3x^2 + 4x - 11}$ مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$f(x) = \frac{6x^2 - 6x + 4}{2\sqrt{2x^3 - 3x^2 + 4x - 11}}$$

د مرکبې تابع مشتق:

مرکبه تابع هغه تابع ده چه متحول يې د بل متحول تابع وي يا دا چه دتابع ، تابع ته مرکبه تابع وايي. لکه که د f تابع د $g(x)$ تابع وي او g د x تابع وي نو دغه تابع ته مرکبه تابع وايي.

د مرکبې تابع د مشتق د فارمول د پیدا کولو لپاره په لاندې ډول اجرائت کوو.

$$\Delta y = \Delta y \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x) \Rightarrow \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = y'(u) \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'(x)$$

$$y'(x) = y'(u) \cdot u'(x)$$

نوپه دې اساس که $y = u^n$ وي مشتق يې $y' = nu^{n-1} \cdot u'$ دی.

او که $y = \sqrt[n]{u}$ وي نو:

$$y' = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$$

-1 مثال:

$$\begin{aligned}
 y &= (2x^2 - 1)^3 \\
 \dot{y} &= 3(2x^2 - 1)^{3-1} \cdot 4x = 3(2x^2 - 1)^2 \cdot 4x = 3(4x^4 - 4x^2 + 1) \cdot 4x \\
 &= (12x^4 - 12x^2 + 3) \cdot 4x \\
 \dot{y} &= 48x^5 - 48x^3 + 12x
 \end{aligned}$$

-2 مثال:

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

حل:

$$\dot{y} = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

-3 مثال:

$$y = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2}$$

حل:

$$\dot{y} = \frac{\dot{u}}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}} \quad , \quad \dot{y} = \frac{3x^2 - 4x}{3\sqrt[3]{x^3 - 2x^2}}$$

خلورم مثال:

$$y = (x^2 - 2)^{-3}$$

حل:

$$\begin{aligned}
 \dot{y} &= -3(x^2 - 2)^{-3-1} \cdot 2x = -3(x^2 - 2)^{-4} \cdot 2x \\
 &= \frac{-6x}{(x^2 - 2)^4}
 \end{aligned}$$

نوٹ:

کہ د (f) تابع د (x₀) پہ نقطہ کی مشتق ولری نو f'(x) دہفہ مماس مہل دی چہ د [x₀, f(x₀)] پہ نقطہ پہ منحنی بانندی مماس وی.

مثال: د f(x) = x³ د تابع مہل د x₀ = 1 پہ نقطہ کی پیدا کری؟

حل: څرنگه چه $x_0 = 1$ دی نو $f(x_0) = 1$ کپړي نو $P(1,1)$ د تماس ټکی دی نو مهل يې عبارت دی.

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1) = 1^2 + 1 + 1 = 3$$

که یوه تابع د $x = x_0$ په نقطه کې د مشتق وړ وي نو دا تابع په دی نقطه کې متمادي ده مگر ممکن یوه تابع په یوه نقطه کې متمادي وي مگر مشتق دی ونلري.

مثال: د $f(x) = |x|$ د تابع مشتق د $x = 0$ په نقطه کې پیدا کړئ

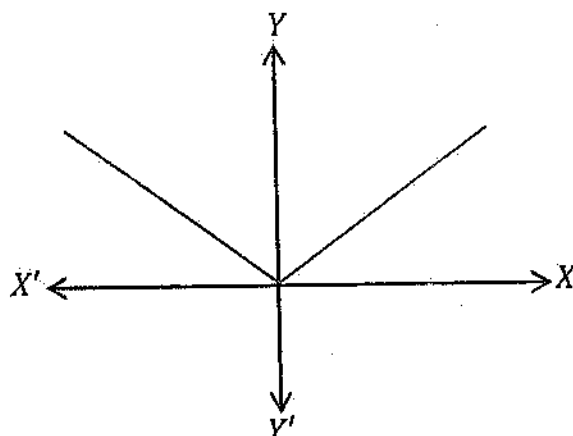
$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{|x|}{x} = 1$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{|x|}{x} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0-} f(x)$$

لیمیت نلري نو مشتق هم نلري.

$$f(x) = |x|$$



د مثلثاتی تابعگانو مشتق:

د $y = \sin x$ تابع مشتق:

د $y = \sin x$ مشتق عبارت دی له $y' = \cos x$ څخه

ثبوت:

$$y = \sin x$$

$$y + \Delta y = \sin(x + \Delta x)$$

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - y$$

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x$$

$$= 2 \cos \frac{x + \Delta x + x}{2} \cdot \sin \frac{x + \Delta x - x}{2} = 2 \cos \frac{2x + \Delta x}{2} \sin \frac{\Delta x}{2}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \cdot 2 \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \cdot \sin \frac{\Delta x}{2} = 2 \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \frac{1}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x \cdot 1 = \cos x$$

$$y' = \cos x$$

که $f(x) = \sin u$ وي او u د x تابع وي نو مشتق يې عبارت دی له:

$$f'(x) = u' \cos u$$

1- مثال: د $f(x) = \sin 4x$ مشتق پیدا کړئ؟

$$\left[\begin{array}{l} f(x) = \sin 4x \\ u = 4x \Rightarrow u' = 4 \\ f'(x) = u' \cos u \end{array} \right]$$

$$f'(x) = 4 \cos 4x$$

2- مثال: د $f(x) = x^3 \csc x$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

$$f(x) = x^3 \cdot \csc x = x^3 \cdot \frac{1}{\sin x}$$

$$g(x) = x^3 \Rightarrow g'(x) = 3x^2$$

$$h(x) = \csc x = \frac{1}{\sin x} \Rightarrow h'(x) = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} = -\cot x \csc x$$

$$f'(x) = 3x^2 \cdot \csc x + x^3 \cdot (-\cot x \csc x)$$

$$f'(x) = 3x^2 \cdot \csc x - x^3 \cot x \csc x$$

3- مثال: د $y = \frac{\sin x}{1+x}$ مشتق پیدا کړئ؟

$$u = \sin x \Rightarrow u' = \cos x$$

$$v = 1+x \Rightarrow v' = 1$$

$$y' = \frac{\cos x(1+x) - 1 \cdot \sin x}{(1+x)^2}$$

د $y = \cos x$ تابع مشتق:

د $y = \cos x$ تابع مشتق $y' = -\sin x$ دی.

ثبوت:

$$y = \cos x$$

$$y + \Delta y = \cos(x + \Delta x)$$

$$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - y = \cos(x + \Delta x) - \cos x$$

$$\Delta y = -2 \sin \frac{x + \Delta x + x}{2} \sin \frac{x + \Delta x - x}{2} = -2 \sin \frac{2x + \Delta x}{2} \sin \frac{\Delta x}{2}$$

$$\Delta y = -2 \sin \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \sin \frac{\Delta x}{2}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin \frac{\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = -\sin x \cdot 1 = -\sin x$$

$$y = \cos x \Rightarrow y' = -$$

پورتنی مشتق په لاندې ډول هم ثبوتولای شو.

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = (1 - \sin^2 x)^{\frac{1}{2}}$$

$$(\cos x)' = \frac{1}{2} (1 - \sin^2 x)^{-\frac{1}{2}} (-2 \sin x \cos x) = \frac{-2 \sin x \cos x}{2(1 - \sin^2 x)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{\sin x \cos x}{\sqrt{\cos^2 x}}$$

$$= -\frac{\sin x \cos x}{\cos x} = -\sin x$$

1- مثال: $f(x) = \sin 2x$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

$$f(x) = \sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$u = \sin x \Rightarrow \dot{u} = \cos x$$

$$v = \cos x \Rightarrow \dot{v} = -\sin x$$

$$f(x) = \dot{u}v + \dot{v}u$$

$$f(x) = 2[\cos x \cos x + \sin x(-\sin x)]$$

$$f(x) = 2(\cos^2 x - \sin^2 x) = 2 \cos 2x$$

2- مثال: د $f(x) = x - \sin x \cos x$ تابع مشتق پیدا کری؟

$$y = x \Rightarrow \dot{y} = 1$$

$$u = \sin x \Rightarrow \dot{u} = \cos x$$

$$v = \cos x \Rightarrow \dot{v} = -\sin x$$

$$f(x) = 1 - \{\cos x \cos x + \sin x(-\sin x)\}$$

$$f(x) = 1 - (\cos^2 x - \sin^2 x) = 1 - \cos 2x$$

3- مثال: $f(x) = (\sec 2x + \tan 2x)^2 = ?$

$$f(x) = 2(2 \sec 2x \tan 2x + 2 \sec^2 2x) = 4 \sec 2x(\tan 2x + \sec 2x)$$

د $y = \tan x$ تابع مشتق

$$y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$u = \sin x \Rightarrow \dot{u} = \cos x$$

$$v = \cos x \Rightarrow \dot{v} = -\sin x$$

$$\dot{y} = \frac{\cos x \cos x - (-\sin x) \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$\dot{y} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

خلورم د $y = \cot x$ تابع مشتق

ثبوت:

$$y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$u = \cos x \Rightarrow \dot{u} = -\sin x$$

$$v = \sin x \Rightarrow \dot{v} = \cos x$$

$$\dot{y} = ?$$

$$\dot{y} = \frac{\dot{u}v - \dot{v}u}{v^2} = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x}$$

$$\dot{y} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x \quad \therefore \cot gx = -\csc^2 x$$

د $y = \sec x$ تابع مشتق:

ثبوت:

$$y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$u = 1 \Rightarrow \dot{u} = 0$$

$$v = \cos x \Rightarrow \dot{v} = -\sin x$$

$$\dot{y} = ?$$

$$\dot{y} = \frac{\dot{u}v - \dot{v}u}{v^2} = \frac{0 \cdot \cos x - (-\sin x) \cdot 1}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

$$\dot{y} = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \tan x \sec x$$

د $y = \csc x$ تابع مشتق:

ثبوت:

$$y = \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

$$u = 1 \Rightarrow \dot{u} = 0$$

$$v = \sin x \Rightarrow \dot{v} = \cos x$$

$$\dot{y} = ?$$

$$\dot{y} = \frac{\dot{u}v - \dot{v}u}{v^2} = \frac{0 \cdot \sin x - \cos x \cdot 1}{\sin^2 x} = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} = -\frac{\cos x}{\sin x} \frac{1}{\sin x}$$

$$\dot{y} = -\cot x \csc x$$

که په یوه تابع کی څو متحوله موجود وي او د ضرب یا تقسیم په حال کی وي نو کله چه د دغه ډول تابعگانو مشتق پیدا کوو نو په ثبوت سره دیوی تابع مشتق نظر یوه متحول ته نیول کیږي بل متحول ثابت فرض کیږي دغه ډول مشتقاتو ته ضمني مشتقات وایي او مشتق یې د لاتډی فارمول پواسطه پیدا کیږي.

$$y'(x) = -\frac{f'(x)}{f'(y)}$$

لمړی مثال: د $y = \sin \frac{x}{y} + 1$ تابع ضمني مشتق د $(\pi, 1)$ په ټکي کی پیدا کړئ؟

حل: د $y = \sin \frac{x}{y} + 1$ تابع مشتق د $y'(x) = \frac{f'(x)}{f'(y)}$ رابطی څخه پیدا کوو.

$$y - \sin \frac{x}{y} - 1 = 0$$

$$f'(x) = y'(x) - \left(\sin \frac{x}{y} \right)'_x - (1)'_x = 0 - \frac{1}{y} \cos \frac{x}{y} - 0 = -\frac{1}{y} \cos \frac{x}{y}$$

$$f'(y) = y'_y - \left(\sin \frac{x}{y} \right)'_y - (1)'_y = 1 - \frac{x}{1} \cos \frac{x}{y} - 0 = 1 - x \cdot \cos \frac{x}{y}$$

$$y'(x) = -\frac{f'(x)}{f'(y)} = -\frac{-\frac{1}{y} \cos \frac{x}{y}}{1 - x \cdot \cos \frac{x}{y}} = \frac{\frac{1}{y} \cos \frac{x}{y}}{1 - x \cdot \cos \frac{x}{y}}$$

اوس په $y'(x)$ رابطه کی د (x) او (y) قیمتونه وضع کوو چه $y'(\pi, 1)$ په لاس راشي

$$y'_{(\pi,1)} = \frac{\frac{1}{1} \cos \frac{\pi}{1}}{1 + \pi \cos \frac{\pi}{1}} = \frac{\cos \pi}{1 + \pi \cos \pi} = \frac{-1}{1 - \pi} = \frac{1}{\pi - 1}$$

دویم مثال: د $x^2y + 2y^3 = 3x + 2$ رابطی ضمني مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$x^2y + 2y^3 - 3x - 2 = 0$$

$$f'(x) = 2xy + 0 - 3 - 0 = 2xy - 3$$

$$\hat{f}_{(y)} = x^2 + 6y^2 - 0 = x^2 + 6y^2$$

$$\hat{f}_{(x)} = -\frac{\hat{f}_{(x)}}{\hat{f}_{(y)}} = -\frac{2xy - 3}{x^2 + 6y^2} = \frac{3 - 2xy}{x^2 + 6y^2}$$

درېم مثال: د $y^6 - y - x^2 = 0$ ضمني مشتق پيدا کړئ؟

حل:

$$\hat{f}_{(x)} = -2x$$

$$\hat{f}_{(y)} = 6y^5 - 1$$

$$\hat{y}_{(x)} = -\frac{\hat{f}_{(x)}}{\hat{f}_{(y)}} = -\frac{-2x}{6y^5 - 1} = \frac{2x}{6y^5 - 1}$$

د پورتنۍ تابع ضمني مشتق په لاندې ډول هم لاس ته راوړلای شو.

$$y^6 - y - x^2 = 0$$

$$6y^5 \hat{y} - \hat{y} - 2x = 0$$

$$\hat{y}(6y^5 - 1) = 2x$$

$$\hat{y} = \frac{2x}{6y^5 - 1}$$

د تابع دویم ضمني مشتق:

که یوه دویمه درجه دوه مجهوله تابع راکړشوی وي او وغواړو چه دویم ضمني مشتق یې پيدا کړو نو اول ضمني مشتق یې د فارمول پواسطه پيدا کوو او بیا د مشتق د فارمولو پواسطه دویم ضمني مشتق پيدا کوو.

مثال: د $x^2 - y^2 = 1$ تابع دویم ضمني مشتق پيدا کړئ

حل:

$$x^2 - y^2 = 1$$

$$x^2 - y^2 - 1 = 0$$

$$\hat{f}_{(x)} = 2x$$

$$\hat{f}_{(y)} = -2y$$

$$\dot{y}(x) = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{2x}{-2y} = \frac{x}{y}$$

اوس د $\dot{y}(x)$ د رابطی $y''(x)$ پیدا کوو

$$y''(x) = \frac{\dot{x}y - \dot{y}x}{y^2} = \frac{y - \dot{y}x}{y^2} = \frac{y - \frac{x}{y} \cdot x}{y^2} = \frac{y^2 - x^2}{y^3} = \frac{-1}{y^3} \Rightarrow y''(x) = -\frac{1}{y^3}$$

دویم مثال: د $x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$ په معادله کې د (y) مشتق نظر (x) ته د $(1,1)$ په ټکي کې پیدا کړئ او د منحنی د مماس معادله پیدا کړئ؟

حل:

$$f_x = 2x + y$$

$$f_y = x + 2y$$

$$\dot{y}(x) = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{2x + y}{x + 2y} \Rightarrow x + 2y \neq 0$$

$$\dot{y} = -\frac{2x + y}{x + 2y} = -\frac{2 \cdot 1 + 1}{1 + 2 \cdot 1} = -\frac{2 + 1}{1 + 2} = -\frac{3}{3} = -1$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 1 = -1 \cdot (x - 1) \Rightarrow y = -x + 2$$

د پورته معادلې ضمني مشتق په لاندې ډول هم پیدا کولای شو.

$$x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$$

$$2x + y + x\dot{y} + 2y\dot{y} = 0 \Rightarrow 2x + y + (x + 2y)\dot{y} = 0$$

$$\dot{y} = \frac{-2x - y}{x + 2y} = -\frac{2x + y}{x + 2y}$$

دریم مثال: د $x^2y^3 = 5y^3 + x$ ضمني مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$x^2y^3 - 5y^3 - x = 0$$

$$f_x = 2xy^3 - 0 - 1 = 2xy^3 - 1$$

$$f_y = 3x^2y^2 - 15y^2 - 0 = 3x^2y^2 - 15y^2$$

$$\dot{y}(x) = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{2xy^3 - 1}{3x^2y^2 - 15y^2}$$

متوالي مشتقات:

د مشتق مشتق ته متوالي مشتقات وايي کولای شو چه د یوې تابع دویم، دریم، څلورم ... او نور مشتقات ونیسو ترڅو چه مشتق یې صفر شي.

لمړی مثال: د $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ تابع دریم مشتق ونیسئ؟

حل:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 4$$

$$f''(x) = 6x - 6$$

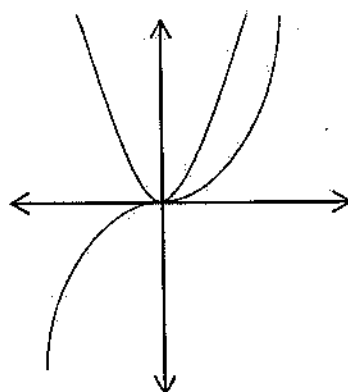
$$f'''(x) = 6$$

دویم مثال: د $y = \frac{1}{3}x^3$ تابع گراف اود هغې دلمړې مرتبې مشتق پیدا کړئ؟ او گراف یې رسم کړئ؟

حل:

$$y' = x^2 \quad y = \frac{1}{3}x^3$$

$$y' = 3 \cdot \frac{1}{3}x^2 = x^2$$



دویم مثال: که $y = \sin x + \cos x$ وي نو د $(y^{(9)})^2 + y^2$ قیمت پیدا کړئ؟

حل:

$$y = \sin x + \cos x$$

$$y'(x) = \cos x + (-\sin x) = \cos x - \sin x$$

$$y''(x) = -\sin x - \cos x$$

$$y'''(x) = -\cos x - (-\sin x) = -\cos x + \sin x = \sin x - \cos x$$

⋮

$$y^{(9)}(x) = \cos x - \sin x$$

$$(y^{(9)})^2(x) + y^2 = (\cos x - \sin x)^2 + (\sin x + \cos x)^2$$

$$= \cos^2 x - 2 \sin x \cos x + \sin^2 x + \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x$$

$$= 2 \sin^2 x + 2 \cos^2 x = 2(\sin^2 x + \cos^2 x) = 2 \cdot 1 = 2$$

د مشتق د استعمال ځایونه:

د مشتق د استعمال موارد په لاندې ډول دي:

1- د توابعو د تزايد او تناقص لپاره.

2- د اعظمي نقطو، اصغري نقطو، اعظمي حجم، د لنډې فاصلې، اعظمي مساحت اوداسې نورو شیانو د پیدا کولو لپاره.

3- د لوړې درجې تابعگانو د گراف د ترسیم لپاره.

4- د مهمو اشکالو د لیمیت د پیدا کولو لپاره.

لنډه دا چې د مشتق استعمال په فزیک، کیمیا، هندسه او نورو علومو کې زیات گټور دی.

1- د توابعو د تزايد او تناقص لپاره د مشتق استعمال:

که د $f(x)$ یوه تابع د $[a, b]$ په تړلي انټروال کې متمادي وي او په (a, b) انټروال کې مشتق ولري نو که $f'(x) > 0$ وي نو تابع په دغه انټروال متزایده ده. او که $f'(x) < 0$ وي تابع متناقصه ده.

اول مثال: وینئ چې د $f(x) = x^3 + 3x + 1$ تابع گراف متزاید دي؟حل: څرنګه چې تابع تامه ده نو $\text{dom} f(x) = \mathbb{R}$ دي مشتق یې په لاندې ډول دي:

$$f(x) = x^3 + 3x + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 + 3$$

که په مشتق کې د (x) په عوض هر ډول عدد وضع کړو مثبت کېږي نو $f(x) > 0$ دی په نتیجه کې تابع متزایده ده.

دویم مثال: د $f(x) = x^3 - 3x + 5$ تابع په کوم انتروال کې متناقضه ده؟

حل: د $f(x)$ تابع متمادي ده او مشتق لري د تناقض د انتروال د معلومولو لپاره $f(x) < 0$ پیدا کوو.

$$f(x) = 3x^2 - 3 < 0$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow \frac{3x^2}{3} = \frac{3}{3} \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

د تابع مشتق د $-1 < x < 1$ په انتروال کې منفي دی نو تابع په همدې انتروال $(-1, 1)$ کې متناقضه ده.

درېم مثال: د $f(x) = 5x - 4$ تابع تحولات وڅېړئ؟

حل:

$$D_{f(x)} = IR$$

$$f(x) = 5x - 4$$

$$f'(x) = 5 > 0$$

تابع متزایده ده.

څلورم مثال: د $y = x^2$ تابع په کوم انتروال کې متزایده او په کوم انتروال کې متناقضه ده.

حل: که < 0 وي تابع متناقضه ده او که > 0 وي تابع متزایده ده.

$$y = x^2$$

$$y' = 2x$$

$$y' < 0 \Rightarrow 2x < 0 \Rightarrow x < 0$$
 د تناقض شرط

$$y' > 0 \Rightarrow 2x > 0 \Rightarrow x > 0$$
 د تزاید شرط

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	$+2$	$+\infty$
y'	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y	$+\infty$	4	1	0	1	4	$+\infty$
							

د یوې تابع بحراني ټکي

د یوې تابع اعظمي او اصغري ټکو ته بحراني ټکي وايي.

اعظمي نقطه Maximum point :

د تابع د گراف تر ټولو جگي نقطې ته اعظمي نقطه وايي.

اصغري نقطه Minimum point :

د تابع د گراف تر ټولو ټيټې نقطې ته اصغري نقطه وايي.



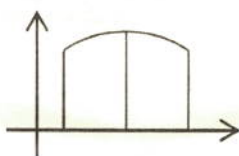
ثابته تابع :

هغه تابع ده چې مشتق يې صفروي.

$$y' > 0 \quad y' < 0$$

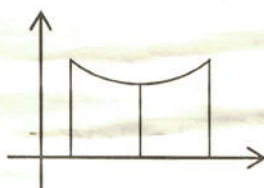
متزايدة تابع :

که د (a, b) په فاصله کې $y' > 0$ وي، تابع متزايدة ده.



متناقصه تابع :- که د (a, b) په فاصله کې $y' < 0$ وي، تابع متناقصه ده.

$$y' < 0 \quad y' > 0$$



د انعطاف نقطه:

هغه نقطه ده چه په دې نقطه کې د تابع گراف خپل جهت ته تغير ورکوي.

لمړې مثال: د $f(x) = x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 2x$ يوه تابع راکړ شوی ده ووايست چه ددې تابع گراف خو بحراني ټکي لري.

حل: د تابع لمړی مشتق پيدا کوو اود (x) قيمتونه پيدا کوو.

$$\dot{f}(x) = 3x^2 - 7x + 2$$

$$\dot{f}(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 7x + 2 = (x-2)(3x-1)$$

$$x-2=0 \Rightarrow x=2 \quad \therefore A(2, -2) \text{ اصغري نقطه ده}$$

$$3x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{3} \quad \therefore B\left(\frac{1}{3}, \frac{17}{54}\right) \text{ اعظمي نقطه ده}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	1	2	$+\infty$
$\dot{f}(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{17}{54}$	-2	-2	$+\infty$

دویم مثال: د $f(x) = \frac{x+1}{x^2-2x}$ تابع بحراني نقطه يا نسبتي نقطه پيدا کړئ؟

حل: د تابع مشتق پيدا او علامې يې مطالعه کوو.

$$y = \frac{u}{v}$$

$$\dot{y} = \frac{\dot{u}v - v\dot{u}}{v^2}$$

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-2x}$$

$$\dot{f}(x) = \frac{1 \cdot (x^2-2x) - (2x-2)(x+1)}{(x^2-2x)^2} = \frac{(x^2-2x) - 2(x^2-1)}{(x^2-2x)^2}$$

$$\dot{f}(x) = \frac{x^2-2x-2x^2+2}{(x^2-2x)^2} = \frac{-x^2-2x+2}{(x^2-2x)^2}$$

په اعظمي او اصغري نقطو کې د تابع مشتق صفر وي.

$$-x^2 - 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 2 = 4 + 8 = 12$$

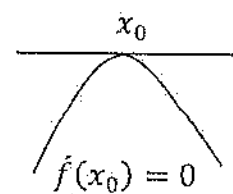
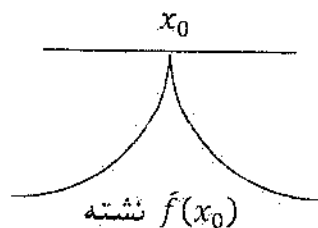
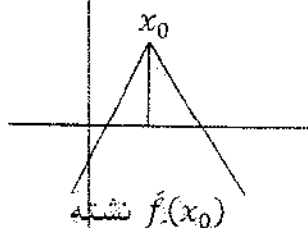
$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 + \sqrt{12}}{2(-1)} = \frac{2 + \sqrt{3.4}}{-2} = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{-2} = \frac{2(1 + \sqrt{3})}{-2} = -2.73$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 - \sqrt{12}}{2(-1)} = \frac{2 - \sqrt{3.4}}{-2} = \frac{2 - 2\sqrt{3}}{-2} = \frac{2(1 - \sqrt{3})}{-2} = 0.73$$

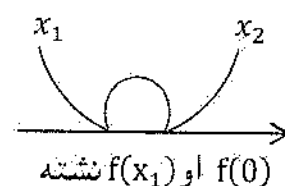
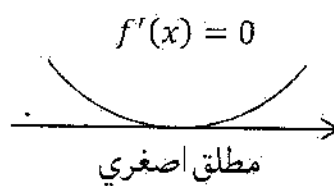
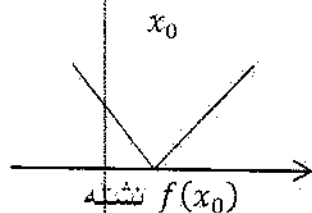
		-3	-2.73	-1	0.73		
x							
$f(x)$	-	-	0	+	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	
		$\frac{2}{15}$	min	0	max	-2	

د کسر اشاره د جذرو منع کی مثبت او په خارج منفي ده.

مطلق اعظمي Maximum د $f(x)$ په تابع کی که د هر (x) لپاره $f(x) \leq f(x_0)$ وي نو $(x_0, f(x_0))$ ټکی ته مطلق اعظمي وايي.



مطلق اصغري Minimum که د $f(x)$ د تابع د تعريف د ناحیې د هر (x) لپاره $f(x) \geq f(x_0)$ وي نو $(x_0, f(x_0))$ نقطې ته مطلق اصغري وايي.



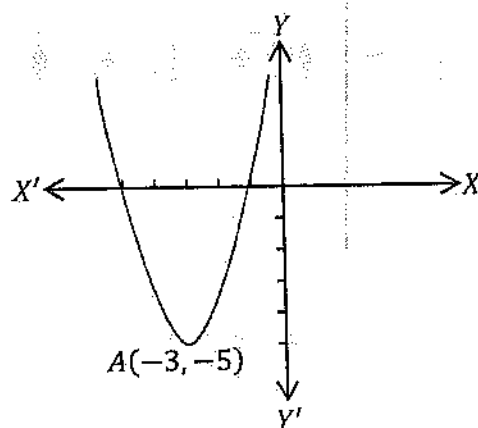
لېمړې مثال: د $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{2}$ تابع مطلق اصغري پیدا کړئ؟

حل:

$$f'(x) = x + 3 \quad \because f'(x) = 0 \quad \therefore x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$$

$$f(-3) = \frac{1}{2}(-3)^2 + 3(-3) - \frac{1}{2} = \frac{9}{2} - 9 - \frac{1}{2} = \frac{9 - 18 - 1}{2} = -5$$

$$A(-3, -5)$$



دویم مثال: د $f(x) = x^3 - 3x + 2$ تابع اعظمي او اصغري نقطې پیدا کړئ؟

حل:

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

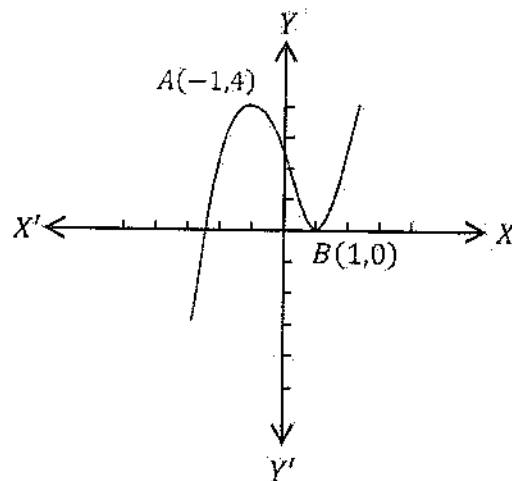
په اعظمي او اصغري نقطو کې د تابع مشتق صفر وي.

$$f'(x) = 0$$

$$3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow \frac{3x^2}{3} = \frac{3}{3} \Rightarrow x^2 = 1$$

$$x_1 = 1 \Rightarrow A(1, 0) \quad \text{اصغري ده}$$

$$x_2 = -1 \Rightarrow B(-1, 4) \quad \text{اعظمي ده}$$



د تابع د گراف د ترسیم طریقه:

- 1- د تابع اتصال مطالعه کوو.
- 2- د محور بنوسره د گراف د تقاطع نقطې پیدا کوو.
- 3- د ترزاید او تناقص د انتروال د معلومولو لپاره د مشتق اشاری مطالعه کوو.
- 4- د گراف مجانبونه معلوموو.
- 5- د دقیق ترسیم لپاره (x) ته څو قیمتونه ورکوو او د (y) قیمتونه پیدا کوو.
- 6- په جدول کې د تابع د گراف وضعیت مطالعه کوو.
- 7- پیدا شوی نقطې د وضعیه کمیټونو په مستوي کې پیدا کوو او وصلوو یې.

دریم مثال: د $y = 2 + x - x^2$ د تابع گراف رسم کړئ؟

1- د (XX) د محور سره د تابع د گراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $y = 0$ فرضوو.

$$2 + x - x^2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4(-1)(2) = 1 + 8 = 9 \Rightarrow \Delta = 9$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2(-1)} = \frac{-1 \pm 3}{-2}$$

$$x_1 = \frac{-1 + 3}{-2} = \frac{2}{-2} = -1 \text{ \& } x_2 = \frac{-1 - 3}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2$$

د (XX) د محور سره د تابع د گراف د تقاطع نقطې $A(-1, 0)$ او $B(2, 0)$ دي.

د $Y\dot{Y}$ د محور سره د گراف د تقاطع نقطه پيدا کړو. نو $x = 0$ فرضوو.

$$y = 2 + x - x^2 = 2 + 0 + 0^2 = 2$$

د $Y\dot{Y}$ د محور سره د تابع د گراف د تقاطع نقطه $C(0,2)$ ده.

3- د تابع د گراف اعظمي يا اصغري نقطې د پيدا کولو لپاره د تابع مشتق نيسو.

$$\dot{y} = 1 - 2x$$

$$\dot{y} = 0 \quad \therefore \quad 1 - 2x = 0 \Rightarrow -2x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

د (x) دغه قيمت په تابع کې وضع کوو. د (y) قيمت لاس ته راوړو.

$$y = 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{8 + 2 - 1}{4} = 2\frac{1}{4}$$

نو د $D\left(\frac{1}{2}, 2\frac{1}{4}\right)$ نقطه يا اعظمي ده يا اصغري ده. د تابع دويم مشتق پيدا کوو که $y'' > 0$ و اصغري نقطه ده او که $y'' < 0$ و نو اعظمي نقطه ده.

$y'' = -2$ څرنگه چه همېشه منفي دي نو د $D\left(\frac{1}{2}, 2\frac{1}{4}\right)$ نقطه اعظمي نقطه ده.

$$D\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right) \quad D\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$$

د انعطاف د نقطې پيدا کول:

د تابع دويم مشتق نيسو او قيمت يې پيدا کوو بيا يې په معادله کې وضع کوو د انعطاف د نقطې وضعيه کميات لاس ته راځي.

مثال: د $y = x^3 + 9x^2 - 6x + 1$ تابع د انعطاف نقطه يې پيدا کړئ؟

حل:

$$\dot{y} = 3x^2 + 18x - 6$$

$$y'' = 6x + 18$$

$$y'' = 0 \Rightarrow 6x + 18 = 0 \Rightarrow 6x = -18 \Rightarrow \frac{6x}{6} = \frac{-18}{6} \Rightarrow x = -3$$

$$f(-3) = (-3)^3 + 9(-3)^2 - 6(-3) + 1 = -27 + 81 + 18 + 1 = 73$$

$A(-3, 73)$ انعطاف نقطه ده.

د دویمه درجه تابع گراف:

د دویمه درجه تابع عمومي شکل $ax^2 + bx + c = 0$ دی.

دومین یې د حقیقي اعدادو سیټ دی. $D_f = (-\infty, +\infty)$ چه په دغه ساحه کی تابع متمادي ده. د تناظر محور یې د اول مشتق پواسطه پیدا کیږي:

$$f'(x) = 2ax + b$$

$$f'(x) = 0$$

$$2ax + b = 0 \Rightarrow 2ax = -b$$

$$x = -\frac{b}{2a}$$

د تناظر محور دی.

د راس د نقطې د پیدا کولو لپاره د تناظر په محور کی د x قیمت په تابع کی وضع کوو دراس د نقطې وضعیه کمیتونه لاس ته راځي.

$$f(x) = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = a\left(\frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c$$

$$f(x) = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

د راس نقطه یې $V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ ده.

که $a > 0$ وډ تابع گراف مقعر دی یعنی گراف اصغري نقطه لري. که $a < 0$ وډ تابع گراف محدب دی یعنی گراف اعظمي نقطه لري.

لمړی مثال: د $f(x) = x^2 - 4x + 3$ د تابع تحولات مطالعه کړئ او گراف یې رسم کړئ؟

حل:

$$D_f = (-\infty, +\infty) \quad 1-$$

2- د XX د محور سره د تقاطع نقطه پیدا کوو:

$$y = 0$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x - 1)(x - 3) = 0$$

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$A(1,0), \quad B(3,0)$$

3- د $(Y\hat{Y})$ د محور سره د تابع د تقاطع نقطه پیدا کوو.

$$x = 0$$

$$y = 0 - 4 \cdot 0 + 3$$

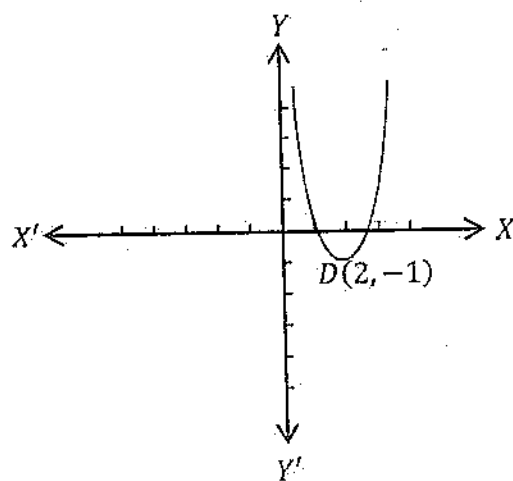
$$y = 3$$

$$C(0,3)$$

4- د بحراني نقطې د پیدا کولو لپاره د تابع مشتق نیسو او د (x) قیمت پیدا کوو دا قیمت په تابع کې وضع کوو د (y) قیمت لاس ته راځي د (x) او (y) یوه جوړه قیمتونه بحراني نقطه تعینوي بیا یې دویم مشتق پیدا کوو که $y'' > 0$ و بحراني نقطه اصغري ده او که $y'' < 0$ و بحراني نقطه اعظمي ده.

$$f'(x) = 2x - 4 \Rightarrow x = 2$$

$$f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = 4 - 8 + 3 = -1 \Rightarrow D(2, -1)$$



دویم مثال: $f(x) = -x^2 + 2x + 2$ د تابع تحولات مطالعه او گراف یې رسم کړئ؟

حل:

$$D_f = (-\infty, +\infty) - 1$$

2- د XX سره تقاطع:

$$f(x) = 0$$

$$-x^2 + 2x = 0$$

$$x(-x + 2) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$-x + 2 = 0$$

$$-x = -2 \Rightarrow x = 2$$

$$A(0,0) \text{ \& \; } B(2,0)$$

3- د YY' سره تقاطع:

$$x = 0$$

$$f(x) = 0 + 2 \cdot 0 = 0$$

$$C(0,0)$$

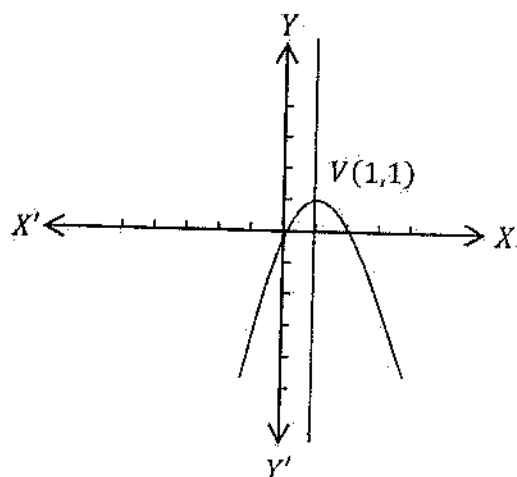
4- بحراني نقطه يې پيدا کوو. نومشتق يې نيسو.

$$f(x) = -2x + 2$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 2 = 0 \Rightarrow -2x = -2 \Rightarrow x = 1$$

$$f(1) = -(1)^2 + 2 \cdot 1 = -1 + 2 = 1$$

$$V(1,1)$$



هوموگرافیک تابع

هغه تابع ده چه د دوه بېنومو د نسبت څخه جوړه شوی وي. عمومي شکل يې دادی

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{ax+b}{cx+d}$$

مجانِب: - *Asymptote*: که د یوه مستقیم او یوه منحنی تر منځ فاصله په لایتناهي کي صفر شي دا مستقیم ددی منحنی مجانب دي.

مجانِب د منحنی لپاره لازېږد دي.

مجانِب په درې قسمه دي.

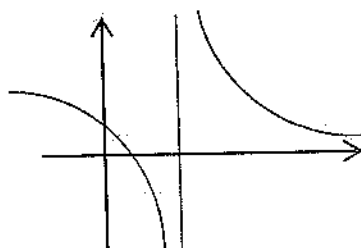
1- عمودي مجانب (*Vertical Asymptote*)

2- افقي مجانب (*Horizontal asymptote*)

3- مایل مجانب (*Slant Asymptote*)

1- عمودي مجانب:

که په یوه ثابت عدد کي د تابع لیمیت (∞) شي هغه خط چه د دغه ثابت عدد په فاصله باندی د YY محور سره موازي رسمېږي د تابع دگراف عمودي مجانب دی. یعنې که $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ وي نو $x = a$ عمودي مجانب دی.

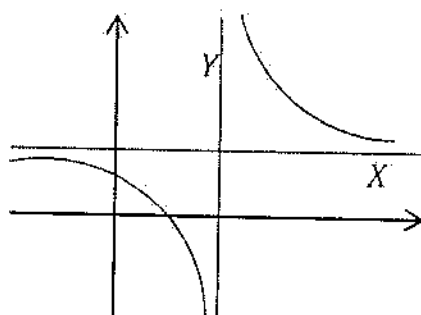


2- افقي مجانب:

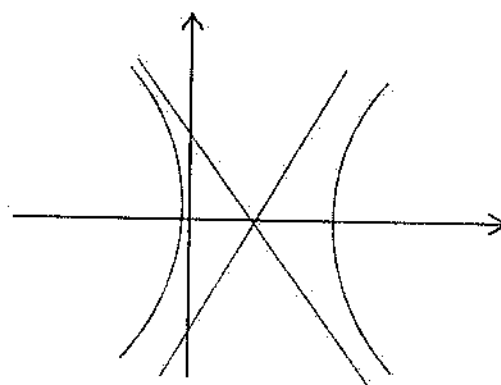
که په لایتناهي کې دیوی تابع لیمیت یو ثابت عدد و نو هغه خط چه ددی ثابت عدد په ترتیب د $Y\bar{Y}$ دمحور سره موازي رسمیري د راکړشوي تابع افقي مجانب دی. یعنی که:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$$

نو $y = b$ د تابع د گراف افقي مجانب دي.

3- مایل مجانب *Slant Asymptote*

په کسري تابعگانو کې که د صورت درجه د مخرج د درجې څخه د واحد په اندازه ډیره وه نو دغه ډول تابعگانی مایل مجانب لري د مایل مجانب د ترسیم لپاره صورت په مخرج ویشو خارج قسمت د مایل مجانب معادله ده.



لمړي مثال: $f(x) = \frac{x+1}{2x-4}$ د تابع عمودي مجانب پیدا کړي؟

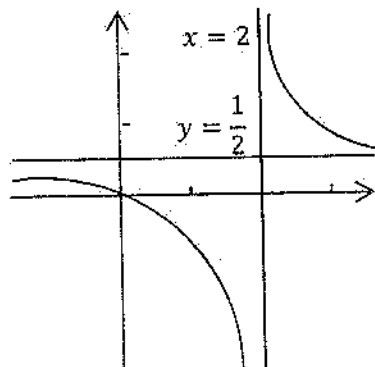
حل:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{2x-4} = \frac{2+1}{2 \cdot 2 - 4} = \frac{3}{0} = \infty$$

 $x = 2$ عمودي مجانب دی.

مايل مجانب يې پيدا کوو.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{2x-4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{x} + \frac{1}{x}}{\frac{2x}{x} - \frac{4}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{2 - \frac{4}{x}} = \frac{1 + \frac{1}{\infty}}{2 - \frac{4}{\infty}} = \frac{1 + 0}{2 - 0} = \frac{1}{2}$$

 $y = \frac{1}{2}$ افقي مجانب دی.دویم مثال: د $y = \frac{x^2+2x-1}{x}$ تابع د منحنی مجانبونه وټاکئ؟

حل: مايل مجانب:

$$y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x} = x + 2 - \frac{1}{x} \Rightarrow y = x + 2$$

عمودي مجانب:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x - 1}{x} = \infty$$

نو $x = 0$ عمودي مجانب دی.

افقي مجانب نلري. ځکه د هرې تابع گراف چه مايل مجانب و لري افقي مجانب نلري.

درېم مثال: د $f(x) = \frac{(x-3)(x+2)}{(x+1)(x-2)}$ تابع مجانبونه پيدا کړئ؟

حل:

عمودي بجانب

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-3)(x+2)}{(x+1)(x-2)} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-3)(x+2)}{(x+1)(x-2)} = \infty$$

بالاخره $x = -1$ او $x = 2$ عمودي بجانبونه دي.

مايل بجانب نلري.

د بجانب د ټاڪلو عمومي لار:

1- که د $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ په هوموگرافیک تابع کی (m) د صورت درجه او (n) د مخرج درجه وي نو

الف: که $m < n$ وي نو د (x) محورا فقي بجانب دی.

ب: که $m = n$ وي نو $y = b$ افقي بجانب دی (b) د صورت او مخرج د مساوي درجو والا حدود ضربونو نسبت دي.

ج: که $m > n$ وي افقي بجانب نلري د مايل بجانب احتمال شته.

د: که د صورت درجه د مخرج د درجی څخه د واحد په اندازه ډېره وي مايل بجانب لري او افقي بجانب نلري.

مثال: $f(x) = \frac{2x-5}{x}$ د تابع د تزايد او تناقص په باب خپل نظر وليکئ؟

حل:

$$f'(x) = \frac{2 \cdot x - 1(2x-5)}{x^2} = \frac{2x - 2x + 5}{x^2} = \frac{5}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{5}{x^2} > 0$$

تابع متزايدة ده.

انعطاف نقطہ یہی داسی پیدا کیجی

$$f'(x) = 0$$

$$3ax^2 + 2bx + c = 0$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

$$f''(x) = 0$$

$$6ax + 2b = 0 \Rightarrow 6ax = -2b \Rightarrow x = \frac{-2b}{6a} = -\frac{b}{3a}$$

$$y = a\left(-\frac{b}{3a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{3a}\right) + c = a\left(\frac{b^2}{9a^2}\right) - \frac{b^2}{3a} + c$$

$$y = \frac{ab^2}{9a^2} - \frac{b^2}{3a} + c = \frac{b^2}{9a} - \frac{b^2}{3a} + c = \frac{b^2 - 3b^2 + 9ac}{9a} = \frac{9ac - 2b^2}{9a}$$

$$M\left(-\frac{b}{3a}, \frac{9ac - 2b^2}{9a}\right)$$

1- مثال: د $f(x) = (x-1)(x+2)^2$ تابع تحولات و خہری او گراف یی رسم کری؟

حل:

$$f(x) = (x-1)(x+2)^2 = (x-1)(x^2 + 4x + 4)$$

$$= x^3 + 4x^2 + 4x - x^2 - 4x - 4$$

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$$

$$f'(x) = 3x^2 + 6x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow 3x(x+2) = 0 \Rightarrow 3x = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$x+2 = 0 \Rightarrow x_2 = -2$$

$$f(0) = 0^3 + 3 \cdot 0^2 - 4 = -4 \Rightarrow y_1 = -4$$

$A(0, -4)$ اصغری نقطہ ده.

$$f(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 - 4 = -8 + 12 - 4 = 0$$

$$y_2 = 0$$

$B(-2, 0)$ اعظمی نقطہ ده.

انعطاف نقطہ پیدا کوو.

$$f''(x) = 6x + 6$$

$$f''(x) = 0$$

$$6x + 6 = 0$$

$$x = -1$$

$$f(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 - 4 = -1 + 3 - 4 = -2$$

د $C(-1, -2)$ انعطاف نقطه ده.

د XX' سره تقاطع: $y = 0$ فرضوو.

$$y = 0$$

$$(x-1)(x+2)^2 = 0$$

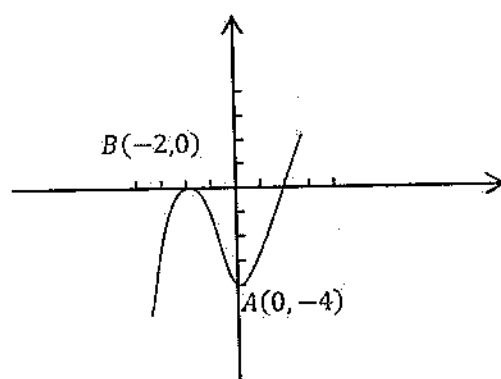
$$\left. \begin{array}{l} x-1=0 \\ x=1 \\ C(1,0) \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} (x+2)^2=0 \\ x+2=0 \\ x=-2 \\ D(-2,0) \end{array} \right\}$$

د YY' سره د تابع د گراف د تقاطع نقطه پيدا کړو $x = 0$ فرضوو.

$$y = 0^3 + 3 \cdot 0^2 - 4 = -4$$

$$E(0, -4)$$



دويم مثال: د $f(x) = -x^3 + 3x^2$ تابع تحولات وڅېړئ او گراف يې رسم کړئ؟

حل:

$$f(x) = -x^3 + 3x^2$$

$$f'(x) = -3x^2 + 6x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow -3x(x - 2)$$

$$-3x = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$A(2,4)$ اعظمي نقطه ده او $O(0,0)$ اصغري نقطه ده.

د XX' سره تقاطع پيدا کړو $y = 0$ فرضوو.

$$f(x) = 0$$

$$-x^3 + 3x^2 = 0 \Rightarrow -x^2(x - 3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$O(0,0) \Rightarrow B(3,0)$$

د (YY') د محور سره د تابع د گراف د تقاطع نقطه $(x = 0)$ فرضوو.

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 = -0^3 + 3 \cdot 0^2 = 0 \Rightarrow (0,0)$$

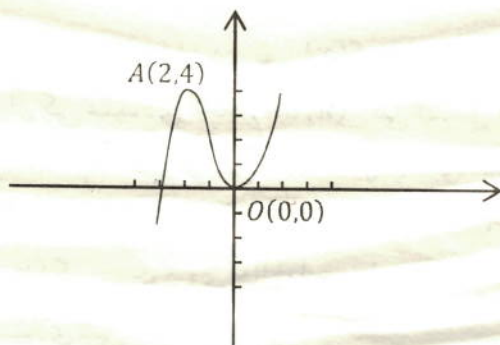
انعطاف نقطه پيدا کړو دويم جذري پيدا کړو.

$$f''(x) = -6x + 6$$

$$x = 1$$

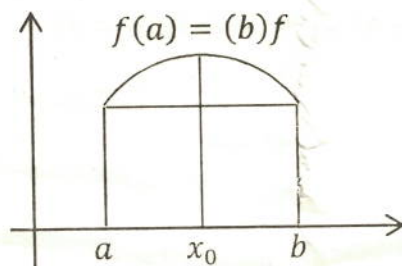
$$f(1) = 2$$

$$C(1,2)$$



د رول قضيه: Theorem of Rolle:

که چېرې د $f(x)$ تابع د $a \leq x \leq b$ انټروال کې متمادي وي او د $a < x < b$ په انټروال کې د مشتق وړ وي او $f(a) = f(b)$ وي نو د $a < x < b$ په انټروال کې یو ټکی شته چې $f'(x) = 0$ وي $(x_0, f(x_0))$



ثبوت: هره تابع چه متمادي وي او د مشتق وړ وي. نودغه تابع بحراني نقطه لري.

1- که تابع ثابت وي نو $f'(x) = 0$ دی.

2- که $f(x)$ تابع ثابت نه وي او $x_2, x_1 \in (a, b)$ او $f(x_1) > 0$ وي نو تابع په $x_0 \in [a, b]$ نقطه کی Maximum لري چه $f(x_0) \geq f(x_1) \geq 0$ وي او $f(x_2) < 0$ وي نو تابع یوه اصغري نقطه لري په اعظمي او اصغري نقطو کی $f'(x_0) = 0$ وي.

لمړی مثال: د $f(x) = \cos x$ تابع راکړشوی ده د $[a, b] = [\pi, 5\pi]$ په انټروال کی د Rolle قضیه پری تطبیق کړی؟

حل: پوهیږو چه $f(\pi) = f(5\pi) = -1$ دی نو $f(x)$ د هر (x) لپاره د مشتق وړ ده نو دا تابع د $[\pi, 5\pi]$ په انټروال کی متمادي او په $(\pi, 5\pi)$ کی مشتق منونکی ده نو د Rolle قضیې سره سم د $(\pi, 5\pi)$ په انټروال کی اقلأ د (x_0) یوه نقطه باید موجود وي چه $(\cos x)' = -\sin x$ شي څرنگه چه $-\sin x = 0$ دی نو د $f(x) = \cos x$ د معادلې اقلأ یو حل باید په $(\pi, 5\pi)$ کی موجود وي حال دا چه دا معادله په $(\pi, 5\pi)$ انټروال کی درې ځله دا قیمتونه اخیستلای شي.

دویم مثال: د $[a, b] = [-1, 1]$ په انټروال کی د $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ په تابع باندی د Rolle قضیه تطبیق کړی؟

حل: د انټروال د پیل او انجام په نقطو کی تابع مشتق پذیره نده مگر د رول قضیه پری د تطبیق وړ ده ځکه چه $f(-1) = f(1) = 0$ او $f(0)$ تابع په $[-1, 1]$ متمادي ده او د $[-1, 1]$ په انټروال کی د (x_0) یو عدد شته چه $f'(x_0) = 0$ شي او هغه $x_0 = 0$ دی.

$$y'(x) = \frac{u(x)}{2\sqrt{u}} \text{ خخه استفاده کوو.}$$

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow f'(0) = \frac{0}{\sqrt{1-0^2}} = 0$$

د متوسط قیمت قضیه:

که چېرې د $f(x)$ تابع د $[a, b]$ په انټروال کې متمدی وي او د (a, b) په انټروال کې د مشتق وړ وي نو د (a, b) په انټروال کې د (c) یو عدد شته چه لاندې رابطه تحقیق کړي.

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \text{ یعنی } f(b) - f(a) = f'(c)(b-a) \text{ دی.}$$

ثبوت: $f(x) - f'(x) \cdot x$ په $g(x)$ ښیو.

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \cdot x$$

$$g(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \cdot a = \frac{f(a)b - f(a)a - f(b)a + f(a)a}{b-a}$$

$$g(a) = \frac{f(a)b - f(b)a}{b-a} \dots \dots \dots I$$

$$g(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \cdot b = \frac{f(b)b - f(b)a - f(b)b + f(a)b}{b-a}$$

$$g(b) = \frac{f(a)b - f(b)a}{b-a} \dots \dots \dots II$$

د (I) او (II) رابطې د مقایسې خخه څرگندېږي چه $g(a) = g(b)$ دی نو درول د قضیې سره سم د $[a, b]$ په انټروال کې د (c) یو داسې عدد شته چه $g'(c) = 0$ دی نو لیکو چه

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \Rightarrow g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

$$g'(c) = 0$$

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} = 0 \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

مثال: د $f(x) = 2x^3 - 8x + 1$ په تابع کې د متوسط قیمت قضیه د $[a, b] = [1, 3]$ په انټروال کې وڅېړئ؟

حل: د $f(x)$ تابع د $[1,3]$ په انټروال کې متمادی ده اود $(1,3)$ په انټروال کې د مشتق وړ ده نو د متوسط قیمت د قضیې سره سم د $(1,3)$ په انټروال کې یو (x_0) شته چه

$$f(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{36}{2} = 18$$

د (c) د پیداکولو لپاره د تابع مشتق نیسو.

$$f(x_0) = 6x^2 - 8 = 18 \Rightarrow 6x^2 = 18 + 8 = 26 \Rightarrow x^2 = \frac{26}{6}$$

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{26}{6}} = \pm \sqrt{\frac{13}{3}}$$

$x = +\sqrt{\frac{13}{3}}$ عدد د $(1,3)$ په انټروال کې شامل دی نو $x_0 = \sqrt{\frac{13}{3}}$ ده مگر $x = -\sqrt{\frac{13}{3}}$ عدد د $(1,3)$ په انټروال کې شامل نه دی نو د سوال حل نه بلل کېږي.

د لوهیټال قاعده:

که د کسري تابعگانو لیمیت د $\left(\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}\right)$ مبهم شکل غوره کړي. نو د لوهیټال په طریقه کولای شو چه لیمیت یې پیدا کړو.

دیوی تابع لیمیت په یوه نقطه کې د تابع د مشتق د لیمیت سره مساوي دی په همغه نقطه کې. که تر اول مشتق وروسته بیا هم ابهام موجود و دویم مشتق یې نیسو په همدې ترتیب عملیه تر هغه وخته اجراء کوو تر څو چه ابهام رفع شي.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \dots\dots$$

مثال:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + x - 10}{x^2 - 4} &= \frac{2 \cdot 2^2 + 2 - 10}{2^2 - 4} = \frac{8 + 2 - 10}{4 - 4} = \frac{0}{0} \\ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + x - 10}{x^2 - 4} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 4x + 5x - 10}{x^2 - 2^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x(x - 2) + 5(x - 2)}{(x - 2)(x + 2)} \\ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(2x + 5)}{(x - 2)(x + 2)} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x + 5}{x + 2} = \frac{2 \cdot 2 + 5}{2 + 2} = \frac{9}{4} \end{aligned}$$

لمری مثال:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin 2x}{x - \sin 2x} = \frac{0 + \sin 2 \cdot 0}{0 - \sin 2 \cdot 0} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x + \sin 2x)'}{(x - \sin 2x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + 2 \cos 2x}{1 - 2 \cos 2x} = \frac{1 + 2}{1 - 2} = \frac{3}{-1} = -3$$

دویم مثال:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 - 81}{x - 3} = \frac{3^4 - 81}{3 - 3} = \frac{81 - 81}{3 - 3} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 - 81}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^4 - 81)'}{(x - 3)'} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x^3}{1} = 4 \cdot 3^3 = 4 \cdot 27 = 108$$

دریم مثال:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4x + 6}{7x^2 - 2x + 1} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4x + 6}{7x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x^2 - 4x + 6)'}{(7x^2 - 2x + 1)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(6x - 4)'}{(14x - 2)'} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}$$

دبحرانی تګو تطبیق:

1- داسی دوه عددونه پیدا کړئ چه د جمع حاصل یی (20) اود ضرب حاصل یی اعظمی

وی؟

حل:

اول عدد = x دویم عدد = $20 - x$ د ضرب حاصل = $f(x) = x(20 - x) = 20x - x^2$ $f'(x) = 20 - 2x$ $f'(x) = 0$ $20 - 2x = 0 \Rightarrow -2x = -20 \Rightarrow x = 10$ $f(10) = 20 \cdot 10 - 10^2 = 200 - 100 = 100$ $f(0) = 20 \cdot 0 - 0^2 = 0$ $f(20) = 20 \cdot 20 - 20^2 = 400 - 400 = 0$

اعظمي نقطه $[10, 100]$ ده او مطلوب عددونه $x_1 = 10$ او $x_2 = 10$ دي چه د ضرب حاصل يې (100) دي.

2- د يوه متحرک معادله $x = (t - 2)(t - 3)$ ده متوسط سرعت يې د $t_1 = 3$ او $t_2 = 4$ د وخت په واټنو کې پيدا کړي؟

حل: د منځني سرعت د فارمول څخه استفاده کوو.

$$\text{منځنی سرعت} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{x(4) - x(3)}{4 - 3} = \frac{2 - 0}{4 - 3} = 2$$

3- د کرې د حجم او سطحې تر منځ نسبت پيدا کړي؟

حل:

$$د کرې حجم = v(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$د کرې مساحت = \left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)' = 4\pi r^2$$

$$\frac{v_{\text{sphere}}}{A_{\text{sphere}}} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{4\pi r^2} = \frac{1}{3}r$$

4- د ساتي گيرېد او فارنهایت تر منځ $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ رابطه موجود ده د ساتي گيرېد او فارنهایت تر منځ منځني نسبت پيدا کړي؟

حل: د منځني سرعت د تعريف $V_m = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ سره سم لیکو چه:

$$\frac{\Delta C}{\Delta F} = \frac{C(F + \Delta F) - CF}{\Delta F} = \frac{\frac{5}{9}(F + \Delta F - 32) - \frac{5}{9}(F - 32)}{\Delta F} = \frac{5}{9}$$

5- د یوې مستطیلې څمکې محیط (200) دی اعظمي مساحت یې پيدا کړي؟

حل:

$$x = \text{د مستطیل طول}$$

$$y = \text{د مستطیل عرض}$$

$$S = \text{د مستطیل مساحت}$$

$$\text{محيط} = 2x + 2y = 200$$

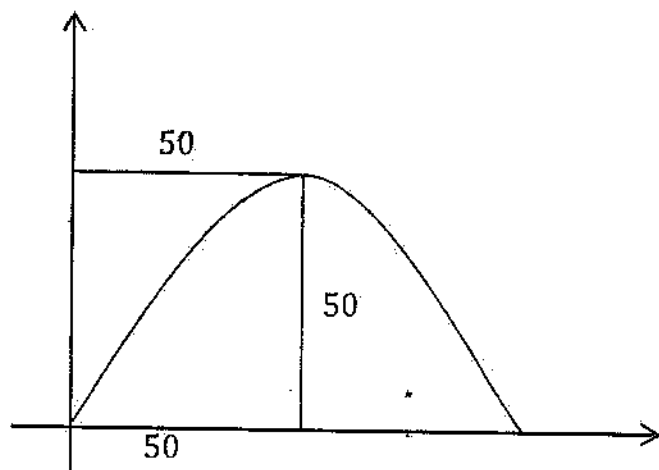
$$\text{محيط} = x + y = 100 \Rightarrow y = 100 - x$$

$$S = x \cdot y \Rightarrow x(100 - x) = 100x - x^2, D_f = IR$$

د. $[0, 100]$ په انټروال کې دتابع اعظمي مساحت پيدا کوو.

$$S' = 100 - 2x$$

$$S' = 0 \Rightarrow 100 - 2x \Rightarrow -2x = -100 \Rightarrow x = 50 \Rightarrow S_{(50)} = 2500$$



6- د (A) ټکی د $y = \frac{2}{x}$ دمنحنی دپاسه حرکت کوي وواياست چه څه وخت به د (A) او مبداء ترمنځ فاصله اصغري شي؟

حل:

$$A\left(x, \frac{2}{x}\right)$$

$$\overline{OA} = \sqrt{x^2_{(A)} + y^2_{(A)}} = \sqrt{x^2 + \frac{4}{x^2}} \Rightarrow \overline{OA}^2 = x^2 + \frac{4}{x^2} = d^2$$

$$d'_{(x)} = (x^2)' + \left(\frac{4}{x^2}\right)' = 2x - \frac{8x}{x^4} = 2x - \frac{8}{x^3} = \frac{2x^4 - 8}{x^3}$$

$$d'_{(x)} = 0 \Rightarrow \frac{2x^4 - 8}{x^3} = 0 \Rightarrow 2x^4 - 8 = 0 \Rightarrow 2x^4 = 8$$

$$= \frac{2x^4}{2} = \frac{8}{2} \Rightarrow x^4 = 4 \Rightarrow \sqrt[4]{x^4} = \sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{2^2}$$

$$x_1 = \sqrt{2} \quad \& \quad x_2 = -\sqrt{2}$$

$$d_{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 + \frac{4}{(\sqrt{2})^2} = 2 + \frac{4}{2} = 4$$

$$d_{-\sqrt{2}} = 4$$

يو مربع القاعده مكعب مستطيل لروچه د درې واړه بعدونو مجموعه يي (24) ده اعظمي حجم يي پيدا كړئ؟

حل: د قاعدې اوږدوالی په (x) او ارتفاع په (y) ښیو.

$$x + x + y = 24 \Rightarrow y = 24 - 2x$$

$$y \geq 0 \quad \& \quad 0 \leq x \leq 12$$

$$V = x^2 \cdot y = x^2(24 - 2x) = 24x^2 - 2x^3$$

$$V'(x) = 48x - 6x^2 \quad \therefore V'(x) = 0 \quad \therefore 48x - 6x^2 = 0$$

$$x(48 - 6x) = 0 \quad , \quad x_1 = 0 \quad \& \quad x_2 = 8$$

$$V(0) = 24 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0^3 = 0$$

$$V(8) = 24 \cdot 8^2 - 2 \cdot 8^3 = 1536 - 1024 = 512$$

$$V(12) = 24 \cdot 12^2 - 2 \cdot 12^3 = 3456 - 3456 = 0$$

د مكعب مستطيل اعظمي حجم $(512cm^3)$ او هره ضلعه يي $(8cm)$ ده.

اولسم فصل

انتیگرال *Integral*

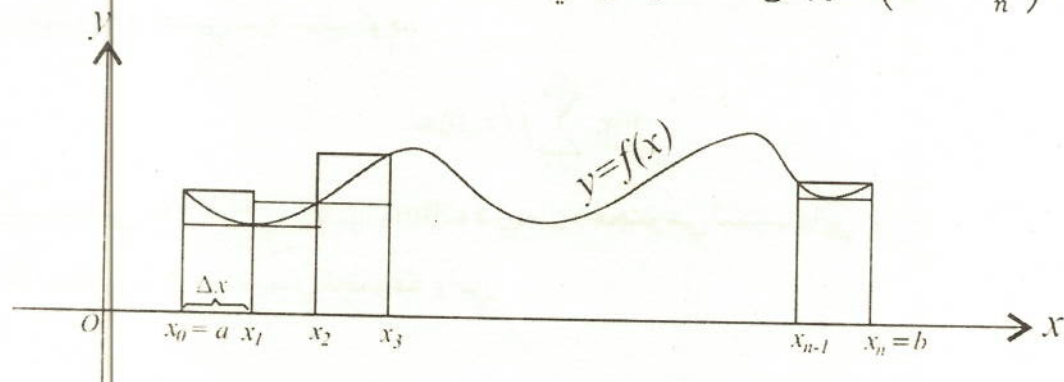
انتیگرال په لغت کی جامع ، مکمل او بشپړوونکي ته وائي. اوپه اصطلاح کی د مشتق د عملیې معکوسی عملیې ته انتیگرال وائي. یعنی د اولنی تابع د پیدا کولو طریقې ته انتیگرال وایي.

ارشیمیدس چه په (287 - 212) ق م کی یې ژوند کاوه د سطحو ، ناحیو او د جامداتو د حجمو د محاسبی لپاره فارمولونه ترتیب کړل دنوموړي انتیگرال نیونه استثنائي او فوق العاده وه. ریمان (1866 - 1826) اولاینز (1941 - 1875) معین انتیگرال کشف کړ.

د انتیگرال علامه لاینز ($\int$) لیکلی ده. چه د ریمان د مجموعی (sum) د لمړي توري غزېدلی شکل دی. غیر معین انتیگرال لیوویل (1882 - 1809) کشف کړی دی. گانوس (1855 - 1777) د انتیگرال اولین جدول ترتیب کړی دی. د کمپیوټر د منځ ته راتلو سره سم د انتیگرال په باب زیات پرمختګ وشو.

د ریمان مجموع *Riemann's sum*:

فرضاً $y = f(x)$ تابع د $[a, b]$ په اتروال کی متمادي او تعریف شوی تابع ده. دهغه سطحی د مساحت د پیدا کولو لپاره چه د X د محور او $y = f(x)$ تابع د گراف تر منځ واقع دی که منظم هندسي شکل یې لرلو نو هندسي فارمولو پواسطه یې مساحت پیدا کیري. او هندسي شکل یې نه لرلو نو د $[a, b]$ ترلی اتروال په مستطیلو ویشو د هر مستطیل عرض د $(\Delta x = \frac{b-a}{n})$ رابطی څخه لاس ته راځي.



د هر مستطیل د هر انتروال اوږدوالی د $i = 1, 2, 3, 4, \dots, n$ لپاره په لاندې ډول دی.

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + \Delta x, \quad x_2 = a + 2\Delta x, \quad x_i = a + i\Delta x, \dots, x_n = b$$

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \dots, [x_{i-1}, x_i], \dots, [x_{n-1}, x_n]$$

په شکل کې د لاندینيو مستطیلونو مساحت په $f(x_{i-1})\Delta x$ او د پورتنیو مستطیلونو مساحت په $f(x_i)\Delta x$ ښیونو لیکو چې:

$$\text{د لاندینيو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه} = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \dots + f(x_{n-1})\Delta x$$

$$= \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\Delta x$$

$$\text{د پورتنیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه} = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \dots + f(x_n)\Delta x$$

$$= \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x$$

که محصور شوي مساحتونه په A وښیونو:

$$\sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\Delta x < A < \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x$$

د رابطې د اطراف لیمیت نيسو.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\Delta x \leq \lim_{N \rightarrow \infty} A \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x$$

د سانډویچ د قضیې سره سم لیکو چې:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x$$

لیمیت یعنې $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x$ ته د ریمان د مجموعې لیمیت وایي.

$\sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x$ ته د ریمان مجموعه وایي.

لومړۍ مثال: د $[0, 2]$ انتروال په څلورو مساوي برخو وویشئ د $y = x^2 + 1$ د منحنی او (x, x^2) د محور ترمنځ د سطحې مساحت پیدا کړئ؟

حل: د $[0, 2]$ انتروال په څلورو برابرو برخو ویشو.

$$\Delta x = \frac{b - a}{n} = \frac{2 - 0}{4} = \frac{1}{2}$$

د مستطیل د هر انتروال اوږدوالی عبارت دی له:

$$x_0 = a = 0, \quad x_1 = a + \Delta x = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = a + 2\Delta x = 0 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$x_3 = a + 3\Delta x = 0 + 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$x_4 = a + 4\Delta x = 0 + 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

$$[x_0, x_1], \quad [x_1, x_2], \quad [x_2, x_3], \quad [x_3, x_4]$$

$$\left[0, \frac{1}{2}\right], \quad \left[\frac{1}{2}, 1\right], \quad \left[1, \frac{3}{2}\right], \quad \left[\frac{3}{2}, 2\right]$$

د گراف د ترسیم لپاره د (x) قیمتونه په تابع کې وضع کوو او د (y) قیمتونه پیدا کوو.

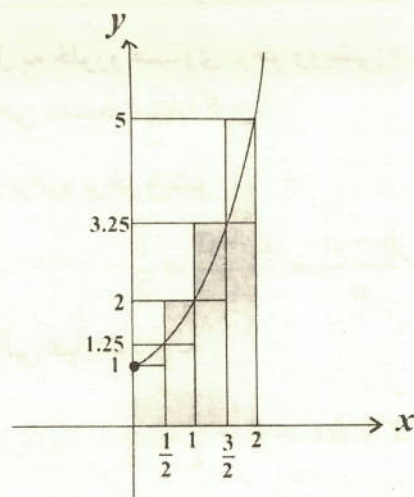
$$f(x) = x^2 + 1 = 0^2 + 1 = 1, \quad A(0, 1)$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \frac{1}{4} + 1 = 1\frac{1}{4} = 1.25, \quad B\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right) = (0.5, 1.25)$$

$$f(1) = 1^2 + 1 = 1 + 1 = 2, \quad C(1, 2)$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1 = \frac{9}{4} + 1 = \frac{9+4}{4} = \frac{13}{4} = 3.25, \quad D\left(\frac{3}{2}, \frac{13}{4}\right) = (1.5, 3.25)$$

$$f(2) = 2^2 + 1 = 4 + 1 = 5, \quad E(2, 5)$$



$$د لاندینو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه = 1 \cdot \frac{1}{2} + 1.25 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3.25 \cdot \frac{1}{2} = 3.75$$

$$د پورتنیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه = 1.25 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} + 3.25 \times \frac{1}{2} + 5 \times \frac{1}{2} = 5.75$$

$$3.75 < A < 5.75$$

دویم مثال: د $f(x) = 1 + x$ تابع د ریمان د مجموعی لیمیت د $[1, 10]$ په اتیروال کی پیدا کړئ؟

حل: پوهیږو چه:

$$\sum_{i=1}^n c = nc$$

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{10-1}{n} = \frac{9}{n}$$

$$x_i = a + \Delta x_i = 1 + \left[\frac{9}{n}\right] \quad , \quad i = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \dots$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{i=1}^n (1 + x_i) \Delta x \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\Delta x \sum_{i=1}^n (1 + x_i) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\Delta x \sum_{i=1}^n 1 + \Delta x \sum_{i=1}^n x_i \right] \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{9}{n} \sum_{i=1}^n 1 + \frac{9}{n} \sum_{i=1}^n (a + x_i) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{9}{n} \sum_{i=1}^n 1 + \frac{9}{n} \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{9}{n} i \right) \right]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{9}{n} \sum_{i=1}^n 1 + \frac{9}{n} \left(\sum_{i=1}^n 1 + \sum_{i=1}^n i \right) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{9}{n} \cdot n + \frac{9}{n} \left(n + \frac{9}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \right) \right]$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[9 + \frac{9}{n} \left(n + \frac{9n^2 + 9n}{2n} \right) \right] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[9 + \frac{9}{n} \left(\frac{2n^2 + 9n^2 + 9n}{2n} \right) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[9 + \frac{9}{n} \left(\frac{11n^2 + 9n}{2n} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[9 + \frac{99n^2 + 81n}{2n^2} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[9 + \frac{99n^2}{2n^2} + \frac{81n}{2n^2} \right] = 9 + \frac{99}{2} + \frac{81}{2n} = 58.5$$

دویم مثال: د $[0, 3]$ انتروال په شپږو مساوي برخو ووېشئ او $y = 3x$ د مستقیم خط او د (XX) د محور تر منځ مساحت محاسبه کړئ؟

حل:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-0}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$x_0 = 0, \quad x_1 = a + 2\Delta x = 0 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow x_1 = 1, \quad x_2 = 3\Delta x = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$x_2 = \frac{3}{2}$$

$$x_3 = 0 + 4 \cdot \frac{1}{2} = 2 \Rightarrow x_3 = 2, \quad x_4 = 0 + 5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow x_4 = \frac{5}{2}$$

$$x_5 = 0 + 6 \cdot \frac{1}{2} = 3 \Rightarrow x_5 = 3, \quad x_6 = 0 + 7 \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{2} \Rightarrow x_6 = \frac{7}{2}$$

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], [x_3, x_4], [x_4, x_5], [x_5, x_6]$$

$$[0, 1], \quad \left[1, \frac{3}{2}\right], \quad \left[\frac{3}{2}, 2\right], \quad \left[2, \frac{5}{2}\right], \quad \left[\frac{5}{2}, 3\right], \quad \left[3, \frac{7}{2}\right]$$

$$\begin{aligned}
 f(0) &= 0, & A(0,0), & & f(1) &= 3(1) = 3 & B(1,3) \\
 f\left(\frac{3}{2}\right) &= 3 \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{2} \Rightarrow C\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right), & & & f(2) &= 3 \cdot 2 = 6 \Rightarrow D(2,6) \\
 f\left(\frac{5}{2}\right) &= 3 \cdot \frac{5}{2} = \frac{15}{2} \Rightarrow E\left(\frac{5}{2}, \frac{15}{2}\right), & & & f(3) &= 3 \cdot 3 = 9 \Rightarrow F(3,9)
 \end{aligned}$$

د انتیگرال مفهوم *Concept of Integral*:

انتیگرال دهغه تابع پیدا کول دي چه مشتق يي موجود وي يا د ریمان د مجموعی لیمیت ته انتیگرال وایي د انتیگرال علامه دا ($\int$) ده چه د ریمان د مجموعی *Sum* د لمړي توري غزبدلی شکل دی. لکه:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = \int f(x) dx$$

چه دلته $f(x)$ د انتیگرال تابع ده او dx نظر (x) ته د $f(x)$ د تابع د انتیگرال متحول دي.

د انتیگرال اقسام:

انتیگرال په دوه قسمه دی.

1- غیرمعین انتیگرال

2- معین انتیگرال

1- غیرمعین انتیگرال *Indefinite Integral*:

که د $f(x)$ تابع د $[a, b]$ په انټروال کی تعریف او $F(x)$ د $f(x)$ د تابع یوه لمړنۍ تابع وي نو د $F(x) + c$ د تابعگانو سیټ د $f(x)$ د تابع غیرمعین انتیگرال دی. اوداسی لیکل کیږي.

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

لمړی مثال: $\int x dx$ پیدا کړی؟

حل:

$$\int x dx = \frac{x^{1+1}}{1+1} + c = \frac{x^2}{2} + c$$

دویم مثال: $\int \frac{1}{\sqrt[7]{x^3}} dx$ حساب کړئ؟

حل:

$$\int \frac{1}{\sqrt[7]{x^3}} dx = \int x^{-\frac{3}{7}} dx = \frac{x^{-\frac{3}{7}+1}}{-\frac{3}{7}+1} + c = \frac{x^{\frac{4}{7}}}{\frac{4}{7}} + c = \frac{7}{4} \sqrt[7]{x^4} + c$$

دریم مثال:

$$\int \sqrt[8]{x^4} \cdot x dx = \int \sqrt[8]{x^6} dx = \frac{x^{\frac{6}{8}+1}}{\frac{6}{8}+1} + c = \frac{x^{\frac{7}{4}}}{\frac{7}{4}} + c = \frac{4}{7} \sqrt[7]{x^4} + c$$

دریم مثال:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt[6]{x^2}}{\sqrt[3]{x}} dx &= \int x^{\frac{2}{6}} \cdot x^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{x^{\frac{2}{6}+1}}{\frac{2}{6}+1} \cdot \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + c = \frac{x^{\frac{8}{6}}}{\frac{8}{6}} \cdot \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + c \\ &= \frac{3}{4} \sqrt[3]{x^4} \cdot \frac{3}{4} \sqrt[3]{x^4} + c = \frac{9}{16} \sqrt[3]{x^4 \cdot x^4} + c \\ &= \frac{9}{16} \sqrt[3]{x^8} + c \end{aligned}$$

د غیر معین انتیگرال خواص:

لکه څرنگه چې د تابعگانو مشتق د خاصو قوانینو پواسطه نیول کېدلو په همدغه ډول غیر معین انتیگرال هم ځانگړي خواص لري چې به یې د ثبوت په منځ کې وینو.

1- که (k) یو ثابت عدد وي نو غیر معین انتیگرال یې داسی پیدا کېږي:

$$\int k dx = k \int dx = kx + c$$

مثال: د $\int 5 dx$ انتیگرال پیدا کړئ؟

حل:

$$\int 5 dx = 5 \int dx = 5x + c$$

2- که چېرې $n \neq -1$ وي نو:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

مثال: د $\int x^4 dx$ انتیګرال پیدا کړئ؟

حل:

$$\int x^4 dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} + c = \frac{1}{5}x^5 + c$$

3- که a یو ثابت عدد او $f(x)$ یوه تابع وي نو:

$$\int af(x) dx = a \int f(x) dx$$

مثال: د $\int 2x^2 dx$ انتیګرال محاسبه کړئ؟

حل:

$$\int 2x^2 dx = 2 \int x^2 dx = 2 \cdot \frac{x^3}{3} + c = \frac{2}{3}x^3 + c$$

4- که $f(x)$ او $g(x)$ دوه تابعګانې وي د تابعګانو د مجموعې او تفاضل انتیګرال د تابعګانو د انتیګرالو د مجموعې او تفاضل سره مساوي دی.

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

مثال:

$$\int (2x^2 + 3) dx = \int 2x^2 dx + \int 3 dx = \frac{2x^3}{3} + 3x + c$$

مثال:

$$\int (8 - 2x) dx = 8 \int dx - 2 \int x dx = 8x - x^2 + c$$

5- که چېرې د تابعګانو ترادف تر انتیګرال لاندې وي نو انتیګرال یې د ټولو حدونو د انتیګرالونو مجموعه ده.

$$\int [f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)] dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx + \dots + \int f_n(x) dx$$

مثال:

$$\begin{aligned} \int (x^3 - 6x^2 + 9x + 1) dx &= \int x^3 dx - \int 6x^2 dx + \int 9x dx + \int dx \\ &= \frac{x^4}{4} - \frac{6x^3}{3} + \frac{9x^2}{2} + x + c \end{aligned}$$

6- د دوه تابعگانو د حاصل ضرب انتیگرال د تابعگانو د انتیگرالو د حاصل ضرب سره مساوي نه دي

$$\int [f(x) \cdot g(x)] dx \neq \int f(x) dx \cdot \int g(x) dx$$

مثال: که چیرې $f(x) = x + 1$ او $g(x) = x - 2$ وي.

الف: لمړی یې ضربوو بیا یې انتیگرال نیسو.

$$\begin{aligned} \int [f(x) \cdot g(x)] dx &= \int [(x + 1)(x - 2)] dx \\ &= \int (x^2 - x - 2) dx = \int x^2 dx - \int x dx - 2 \int dx \\ &= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + c \end{aligned}$$

ب: د هرې تابع انتیگرال پیدا او بیا یې ضربوو.

$$\begin{aligned} \int f(x) dx \cdot \int g(x) dx &= \int (x + 1) dx \cdot \int (x - 2) dx \\ &= \left[\int x dx + \int dx \right] \left[\int x dx - 2 \int dx \right] \\ &= \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \left(\frac{x^2}{2} - 2x \right) + c = \left(\frac{x^2 + 2x}{2} \right) \left(\frac{x^2 - 4x}{2} \right) + c \\ \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + c &\neq \left(\frac{x^2 + 2x}{2} \right) \left(\frac{x^2 - 4x}{2} \right) + c \end{aligned}$$

7- د تابعگانو د خارج قسمت انتیگرال د تابعگانو د انتیگرالو د خارج قسمت سره مساوي نه دی.

مثال: $f(x) = x^2 + 2x + 1$ او $g(x) = x + 1$ تابعگانې راکړشوي دي.
ثبوتوو چې د تابعگانو د خارج قسمت انتیګرال د تابعگانو د انتیګرالو د خارج قسمت سره مساوي نه دی.

$$\int (x^2 + 2x + 1) dx = \int x^2 dx + \int 2x dx + \int dx$$

$$= \int x^2 dx + 2 \int x dx + \int dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + x$$

$$\int (1+x) dx = \int dx + \int x dx = x + \frac{x^2}{2}$$

$$\frac{\int (x+1)^2}{\int (x+1)} = \frac{\frac{x^3}{3} + x^2 + x}{x + \frac{x^2}{2}}$$

$$\int \frac{(x+1)^2}{x+1} = \int (x+1) = \int x dx + \int dx = \frac{x^2}{2} + x$$

$$\frac{\int (x+1)^2}{\int (x+1)} \neq \int \frac{(x+1)^2}{x+1}$$

8- د $\int (ax+b)^{m+1} dx = \frac{(ax+b)^{m+1}}{a(m+1)} + c$ پواسطه د تابعگانو د انتیګرال پیدا کول.

مثال: د $\int (2x-1)^5 dx$ انتیګرال پیدا کړئ؟

حل:

$$\int (2x-1)^5 dx = \frac{(2x-1)^{5+1}}{2(5+1)} + c = \frac{(2x-1)^6}{12} + c$$

مثال: $\int \frac{2dx}{\sqrt[5]{1-2x}}$ انتیګرال پیدا کړئ؟

$$\int \frac{2dx}{\sqrt[5]{1-2x}} = 2 \int (1-2x)^{-\frac{1}{5}} dx = 2 \cdot \frac{(1-2x)^{-\frac{1}{5}+1}}{-2(-\frac{1}{5}+1)} + c = -\frac{(1-2x)^{\frac{4}{5}}}{\frac{4}{5}} + c$$

9- د $\int e^x dx = e^x + c$ پواسطه د انتیګرال پیدا کول:

مثال: $\int 4e^x dx = 4e^x + c$

د $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$ پواسطه د انتیګرال پیدا کول:

مثال:

$$\int 7^{4x-3} dx = ?$$

$$\int 7^{4x-3} dx = \int \frac{(7^4)^x}{7^3} dx = \frac{(7^4)^x}{7^3 \cdot \ln 7^4} + c = \frac{7^{4x-3}}{\ln 7^4} + c$$

معین انتیگرال Definite Integral

که چری د $f(x)$ تابع د $[a, b]$ په انټروال کی متمادی وي او د $f(x)$ تابع ریمان د مجموعی لیمیټ ته کله چه $n \rightarrow \infty$ او د فرعی انټروالونو اوږدوالی $\Delta x \rightarrow 0$ ته وکړي نو $x = a$ څخه تر $x = b$ پوری انتیگرال ته معین انتیگرال وایي.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = \int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

(a) ته د انتیگرال لاندیني سرحد او (b) ته د انتیگرال پورتنی سرحد وایي.

لومړی مثال: د $\int_1^3 x^2 dx$ معین انتیگرال پیدا کړئ؟

$$\int_1^3 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{27-1}{3} = \frac{26}{3}$$

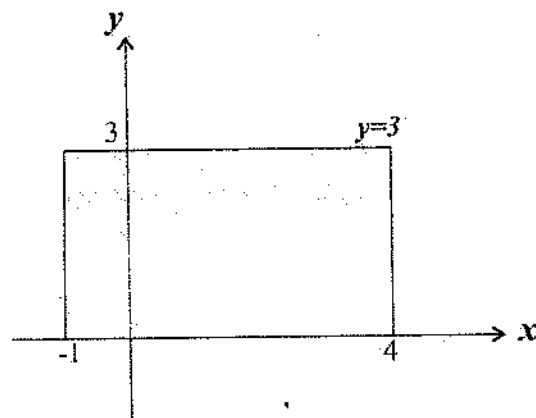
دویم مثال: د $y = 3$ مستقیم او د (XX) د محور تر منځ د مضلع مساحت د $[-1, 4]$ په انټروال کی پیدا کړئ؟

$$\int_{-1}^3 3 dx$$

$$\text{د مستطیل مساحت} = 3[4 - (-1)] = 3 \cdot 5 = 15$$

د انتیگرال پواسطه یی مساحت په لاندی ډول پیدا کوو.

$$\int_{-1}^3 3 dx = [3x]_{-1}^4 = 3[4 - (-1)] = 15$$



درېم مثال: هغه سطحه چه د $y = x - 1$ مستقيم او (XX) د محور ترمنځ په $[0, 3]$ انتروال کې جوړېږي محاسبه کړئ.

$$A_1 = \frac{1}{2}(2 \cdot 2) = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$$

$$A_2 = \frac{1}{2}[1(-1)] = -\frac{1}{2}$$

$$A_1 + A_2 = 2 - \frac{1}{2} = 1.5$$

$$\int_0^3 (x-1)dx = \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_0^3 = \left[\frac{3^2}{2} - 3 \right] - 0 = \frac{9-6}{2} = \frac{3}{2} = 1.5$$

څلورم مثال: د هغه سطحې مساحت پيدا کړئ چه د $y = -2x + 1$ او (XX) د محور تر منځ د $[1, 2]$ په انتروال کې محصور وي؟

$$A_1 = \frac{2(-1-3)}{2} = -4$$

$$A_2 = 1(-1) = -1$$

$$A = A_1 - A_2 = -4 - (-1) = -4 + 1 = -3$$

$$\begin{aligned} \int_1^2 (-2x+1)dx &= \left[-2 \cdot \frac{x^2}{2} + x \right]_1^2 = [-x^2 + x]_1^2 \\ &= (-2^2 + 2) + (-2 \cdot 1^2 + 1) = -2 - 1 = -3 \end{aligned}$$

د معین انتیگرال خواص Properties of definite integral

1- د $[a, b]$ په انټروال کې د ثابتې تابع انتیگرال یعنې $\int_a^b c dx$ عبارت دی.

$$\int_a^b C dx = C \int_a^b dx = c[x]_a^b = c(b-a)$$

ثبوت: د $[a, b]$ انټروال په (n) مساوي برخو ویشو یعنې $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$ بیا د هر (x_i) لپاره د i -ام انټروال څخه لرو.

$$f(x_i) = c, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n C \Delta x_i = C(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$$

$$= C \left(\frac{b-a}{n} + \frac{b-a}{n} + \dots + \frac{b-a}{n} \right)$$

$$C(b-a) \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n} \right) = C(b-a) \frac{n}{n} = C(b-a)$$

مثال: $\int_3^4 dx$ انتیگرال حساب کړئ؟

$$\int_3^4 dx = [x]_3^4 = 4 - 3 = 1$$

2- د یوه ثابت عدد او یوې تابع د حاصل ضرب انتیگرال د ثابت عدد او هغه تابع د انتیگرال د حاصل ضرب سره مساوي دي.

$$\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

ثبوت: که د $[a, b]$ انټروال د x_i چه $i = 1, 2, 3, 4, \dots, n$ وي په (n) مساوي برخو ویشونو د ریښمان د مجموعې او انتیگرال د تعریف سره سم لیکو چه:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n kf(x_i) \Delta x = \lim_{n \rightarrow \infty} k \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$$

$$= k \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = k \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

مثال: د $\int_{-2}^2 4dx$ انټیګرال محاسبه کړئ؟

$$\int_{-2}^2 4dx = 4 \int_{-2}^2 dx = 4[2 - (-2)] = 4 \cdot 4 = 16$$

3- که د $F(x)$ تابع د $f(x)$ تابع یوه لمرنۍ تابع او په $[a, b]$ کې متمادی وي نو:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

ثبوت:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = -\{-F(b) + F(a)\}$$

$$= -\{F(a) - F(b)\} = - \int_b^a f(x) dx \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

مثال: د $\int_2^3 2x dx = - \int_3^2 2x dx$ انټیګرالونو مساوات پیدا کړئ؟

$$\int_2^3 2x dx = \left[\frac{2x^2}{2} \right]_2^3 = \frac{2(3)^2}{2} - \frac{2(2)^2}{2} = \frac{2(9)}{2} - \frac{2(4)}{2}$$

$$= \frac{18}{2} - \frac{8}{2} = \frac{18-8}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$\int_3^2 2x dx = \left[\frac{2x^2}{2} \right]_3^2 = \frac{2(2)^2}{2} - \frac{2(3)^2}{2}$$

$$= \frac{2(4)}{2} - \frac{2(9)}{2} = \frac{8}{2} - \frac{18}{2} = \frac{8-18}{2} = -\frac{10}{2} = -5$$

$$\int_2^3 2x dx = - \int_3^2 2x dx$$

4- که د $f(x)$ تابع د $[a, b]$ په انتروال کې متمادی وي او $a = b$ وي نو انتیگرال یې صفر دی.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^a f(x) dx = F(a) - F(a) = 0$$

مثال د $\int_3^3 3x^2 dx$ انتیگرال محاسبه کړئ؟

$$\int_3^3 3x^2 dx = \left[\frac{3x^3}{3} \right]_3^3 = [3^3 - 3^3] = 27 - 27 = 0$$

5- د دوه تابعگانو د مجموعی او تفاضل انتیگرال په یوه انتروال کې د تابعگانو د انتیگرالو د مجموعی او تفاضل د انتیگرالو سره مساوي دی په همغه انتروال کې.

مثلاً د $f(x)$ او $g(x)$ تابعگانو انتیگرال د $[a, b]$ په انتروال کې نیول شوی دی نو:

$$\int_a^b \{f(x) \pm g(x)\} dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

ثبوت:

$$\begin{aligned} \int_a^b \{f(x) \pm g(x)\} dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \{f(x_i) \pm g(x_i)\} \Delta x \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{i=1}^n f(x_i) \pm \sum_{i=1}^n g(x_i) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x \pm \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n g(x_i) \Delta x = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx \end{aligned}$$

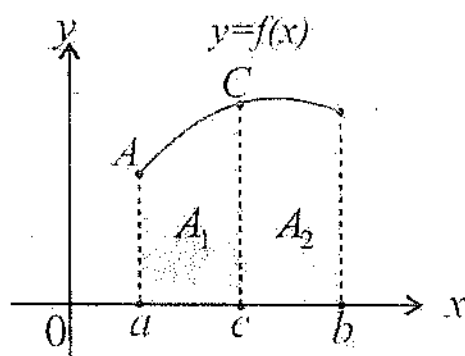
مثالونه:

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 (4 + 3x^2) dx &= \int_0^1 4 dx + \int_0^1 3x^2 dx \\
 &= 4 \int_0^1 dx + 3 \int_0^1 x^2 dx = 4[x]_0^1 + 3 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = 4 + 1 = 5 \\
 \int_0^3 (x^2 - 1) dx &= \int_0^3 x^2 dx - \int_0^3 dx \\
 &= \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^3 - [x]_0^3 = \frac{27}{3} - 3 = \frac{27 - 9}{3} = \frac{18}{3} = 6
 \end{aligned}$$

6- که چېرته د $f(x)$ یوه تابع چه په یوه ترلي انتروال چه د a , b او (c) ټکي پکې شامل وي او انتیگرال منونکي وي. نو د ټول انتروال انتیگرال د انتروال د ټوټو د انتیگرالو د مجموعی سره مساوي دی.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

ثبوت: د $[a, b]$ انتروال د $[a, c]$ او $[b, c]$ په دوه انتروالو ویشو.



$A = \int_a^b f(x) dx$ د هغې سطحی مساحت دی چه د $f(x)$ د تابع د گراف او (XX) د محور ترمنځ د $[a, b]$ په انتروال کې واقع دي.

$$A_1 = \int_a^c f(x) dx \quad \text{او} \quad A_2 = \int_c^b f(x) dx$$

د تابع د گراف د ټوټو مساحت دی. نو لیکو چه:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

مثال: که $\int_0^{10} f(x) dx = 17$ او $\int_0^8 f(x) dx = 12$ وي نو $\int_8^{10} f(x) dx = ?$ محاسبه کړئ؟

$$\int_8^{10} f(x) dx = \int_0^{10} f(x) dx - \int_0^8 f(x) dx = 17 - 12 = 5$$

7- که $f(x) \leq g(x)$ تابعگانی په $[a, b]$ کی انتیگرال منونکي وي او $g(x) \geq f(x)$ او $\Delta x \geq 0$ وي نو د سلسلی هر حد مثبت دی پس لیمیت یې هم مثبت وي.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [g(x_i) - f(x_i)] \Delta x \geq 0 \Rightarrow \int_a^b [g(x) - f(x)] dx \geq 0$$

$$\int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx \geq 0 \Rightarrow \int_a^b g(x) dx \geq \int_a^b f(x) dx$$

مثال: که $f(x) = 1 - \frac{x^2}{4}$ او $g(x) = 1 + \frac{x^2}{2}$ وي د $x > 1$ لپاره وښیاست چه

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

$$\int_a^b \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) dx \leq \int_a^b \left(1 + \frac{x^2}{2}\right) dx \Rightarrow \int_a^b dx - \int_a^b \frac{x^2}{4} dx \leq \int_a^b dx + \int_a^b \frac{x^2}{2} dx$$

$$[x]_a^b - \frac{1}{12} [x^3]_a^b \leq [x]_a^b + \frac{1}{6} [x^3]_a^b$$

$$(b-a) - \frac{1}{12} (b^3 - a^3) \leq (b-a) + \frac{1}{6} (b^3 - a^3)$$

اطراف په $(b - a)$ ویشو.

$$1 - \frac{1}{12}(b^2 - a^2) \leq 1 + \frac{1}{6}(b^2 - a^2)$$

$$-\frac{1}{12}(b^2 - a^2) \leq \frac{1}{6}(b^2 - a^2)$$

$$-\frac{1}{12} < \frac{1}{6} \Rightarrow -1 < 2$$

8- که $f(x)$ تابع د $[a, b]$ په انټروال کې متمادی وي او m اصغري نقطه او M اعظمي نقطه وي نو

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a)$$

ثبوت:

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx$$

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a)$$

دغه قضیه د انتیگرال د تخمینې قضیې په نوم یادېږي.

مثال: $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ انتیگرال په تخمینې توګه حساب کړئ؟

څرنگه چې د $f(x) = e^{-x^2}$ تابع په $[0, 1]$ انټروال کې متمادی ده او $M = f(0) = e^0 = 1$ مطلق اعظمي او $m = f(1) = e^{-1}$ مطلق اصغري ده نو لیکو چې:

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a)$$

$$e^{-1}(1 - 0) \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx \leq 1(1 - 0)$$

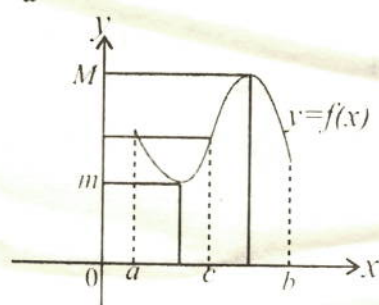
$$e^{-1} \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{e} \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx \leq 1$$

$$\frac{1}{e} = 0.3679$$

$$0.3679 \leq \int_0^1 f(x) dx \leq 1$$

9- که $f(x)$ تابع په $[a, b]$ کی متمادی وي نو د (c) یو عدد موجود دی چه $a < c < b$ دی نو:

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a)$$



ثبوت: د $a < b$ لپاره د (m) او (M) قیمتونه په ترتیب سره د $[a, b]$ په انټروال کی د تابع اصغري او اعظمي نقطې دي او $c \in [a, b]$ دی

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a) \Rightarrow m \leq \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx \leq M$$

فرضوو چه $k = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx$ دی نو $m \leq k \leq M$ دی او د هر (c) حقیقي عدد لپاره $a \leq c \leq b$ دی نو لرو چه $k = f(c)$ دی نو:

$$f(c) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a)$$

پورته رابطه د متوسط قیمت درابطی په نوم یادېږي. $f(c)$ طول او $(b-a)$ عرض دي او حاصل ضرب يې د مستطیل مساحت دی. یعنې:

$$A = f(c)(b-a)$$

مثال: د $[1, 4]$ په انټروال کې د $f(x) = x^2$ تابع اولاندی رابطه راکړ شوی ده د (c) قیمت په لاس راوړئ؟

$$\int_1^4 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^4 = \left[\frac{64}{3} - \frac{1}{3} \right] = \left[\frac{64-1}{3} \right] = \frac{63}{3} = 21$$

د (x) په عوض (c) وضع کوو او د متوسط قیمت د قضیې څخه استفاده کوو.

$$\int_a^b x^2 dx = c^2(4-1) \Rightarrow 3c^2 = 21 \Rightarrow c^2 = 7 \Rightarrow c = \sqrt{7}$$

$$a < c < b = 1 < \sqrt{7} < 4$$

$$f(c) = c^2 = \sqrt{7}^2 = 7$$

$$A = f(c)(b-a) = 7 \cdot \sqrt{7} = 7\sqrt{7}$$

د انتیګرال او مشتق اساسي قضیې:

اوله قضیه:

که $f(x)$ تابع د $[a, b]$ په انټروال کې متمادي وي او (x) په دې انټروال شامل وي که $x \in [a, b]$ نولیکلای شو چه:

$$\dot{F}(x) = f(x)$$

$$\dot{F}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(a) + F(a) - F(x)}{h}$$

$$\dot{F}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(a) - F(x) + F(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x)|_a^{x+h} - F(x)|_a^x}{h}$$

د $F(x)$ په $F(t)$ بڼیو:

$$\dot{F}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(t)|_a^{x+h} - F(t)|_a^x}{h}$$

$$\hat{F}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt}{h}$$

$$\hat{F}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t) dt}{h}$$

د متوسط قیمت د قضیې څخه لیکو چه

$$f(c) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt$$

نو معلومه شوه چه $x < c < x + h$

$$\hat{F}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt = \lim_{c \rightarrow x} f(c) = f(x)$$

مثال: د $f(x) = \int_2^{x^2+1} \frac{1}{x^2+1}$ مشتق پیدا کړئ؟

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt = F(x) = \int_a^{g(x)} f(t) dt$$

$$u = g(x) = x^2 + 1$$

$$f(t) = \frac{1}{t^2 + 1}$$

$$\hat{F}(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$\hat{F}(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)^2 + 1} \cdot (x^2 + 1)' = \frac{1}{(x^2 + 1)^2 + 1} \cdot 2x$$

$$\hat{F}(x) = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2 + 1}$$

دویمه قضیه:

که $F(x)$ تابع د $f(x)$ دتابع اولنۍ تابع اود $[a, b]$ په انټروال کې متمادي وي پدې صورت کې لیکلای شو چه:

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

ثبوت: که $F(x) = \int_a^b f(t)dt$ وي نو د هر $x \in [a, b]$ لپاره $\hat{F}(x) = f(x)$ دی د تابعگانو تفاضل په (k) نښو:

$$f(x) - F(x) = k \Rightarrow f(x) = F(x) + k$$

$$\hat{F}(x) = \int_a^b f(t)dt = f(x) = F(x) + k$$

$$\int_a^b f(t)dt - F(x) = k \dots 1$$

د (x) په عوض (a) وضع کوو:

$$\int_a^b f(t)dt - F(a) = k \Rightarrow 0 - F(a) = k \Rightarrow k = -F(a)$$

د k قیمت په (1) رابطه کی وضع کوو.

$$\int_a^b f(t)dt - F(x) = -F(a)$$

د (x) په عوض (b) وضع کوو:

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

اخری رابطه د $\int_a^b f(t)dt = [F(x)]_a^b$ شکل ښودل کیږي. دغه رابطه د اولنۍ تابع او $\int_a^b f(t)dt$ انتیگرال ترمنځ رابطه ښیي. چه د نیوټن «لایبنز» په نوم یادېږي.

مثال: $\int_0^1 x^2 dx$ انتیگرال لاس ته راوړئ؟

$$\int_0^1 x^2 dx = F(1) - F(0) = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3} \cdot 1^3 - \frac{1}{3} \cdot 0^3 = \frac{1}{3}$$

یہ تعویضی طریقہ سرہد انتیگرال نیول:

انتیگرال دلاس ته راوړلو لپاره یی

$$u = g(x) \text{ او } F(x) = f(x) \text{ بنیو } \frac{du}{dx} = g'(x) \text{ او } du = g'(x)dx$$

$$\int_a^b f\{g(x)\} g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du$$

لمړی مثال: $\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2}$ انتیگرال پیدا کړئ؟

$$u = 3 - 5x, \quad \frac{du}{dx} = -5 \Rightarrow dx = -\frac{du}{5}$$

$$\begin{cases} x=1 \\ u=3-5x \Rightarrow 3-5 \cdot 1 = -2 \Rightarrow u = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2 \\ u=3-5x \Rightarrow u = 3-5 \cdot 2 = -7 \Rightarrow u = -7 \end{cases}$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2} = \int_{-2}^{-7} \frac{1}{u^2} \left(-\frac{1}{5}\right) du = -\frac{1}{5} \int_{-2}^{-7} \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{5} \left[\frac{1}{u} \right]_{-2}^{-7} = -\frac{1}{5} \left[\frac{1}{-7} - \frac{1}{-2} \right]$$

$$= -\frac{1}{5} \left[\frac{2-7}{14} \right] = -\frac{1}{5} \left[\frac{-5}{14} \right] = \frac{1}{14}$$

دویم مثال: د $\int_0^1 x^3 (1+2x^3)^5 dx$ انتیگرال حساب کړئ؟

$$u = 1 + 2x^3, \quad \frac{du}{dx} = 6x^2, \quad x^2 dx = \frac{1}{6} du$$

$$\begin{cases} x=0 \\ u=1+2x^3 \Rightarrow 1+2 \cdot 0 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=1 \\ u=1+2x^3 \Rightarrow u = 1+2 \cdot 1 = 3 \Rightarrow u = 3 \end{cases}$$

$$\int_0^1 x^2 (1+2x^3)^5 dx = \int_1^3 u^5 \cdot \frac{1}{6} du = \frac{1}{6} \int_1^3 u^5 du = \frac{1}{6} \left[\frac{u^6}{6} \right]_1^3 = \frac{1}{6} \left[\frac{3^6}{6} - \frac{1}{6} \right]$$

$$= \frac{1}{6} \left[\frac{729-1}{6} \right] = \frac{728}{36} = \frac{182}{9} = 20.\bar{2}$$

پورته فارمول په غیر معین انتیگرال کی هم د تطبیق وړ دي.

مثال: $\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}} dx$ انتیگرال حساب کړئ؟

$$\begin{aligned}
 u &= 1 - 4x^2, \quad \frac{du}{dx} = -8x, \quad x dx = -\frac{1}{8} du \\
 \int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} \cdot x dx = \int \frac{1}{\sqrt{u}} \left(-\frac{1}{8} du\right) \\
 &= -\frac{1}{8} \int \frac{1}{\sqrt{u}} du = -\frac{1}{8} \int u^{-\frac{1}{2}} du \\
 &= -\frac{1}{8} \left(\frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} \right) + C = -\frac{1}{8} \left(\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right) + C = -\frac{1}{8} \left(\frac{\sqrt{u}}{\frac{1}{2}} \right) + C = -\frac{1}{8} (2\sqrt{u}) + C \\
 &= -\frac{1}{4} \sqrt{1-4x^2} + C
 \end{aligned}$$

دویم مثال: $\int x^3 \cos(x^4 + 2) dx$ انتیگرال حساب کری؟

$$\begin{aligned}
 u &= x^4 + 2, \quad \frac{du}{dx} = 4x^3, \quad x^3 dx = \frac{1}{4} du \\
 \int x^3 \cos(x^4 + 2) dx &= \int \cos u x^3 dx = \int \cos u \cdot \frac{1}{4} du \\
 &= \frac{1}{4} \int \cos u du = \frac{1}{4} \sin u + C \\
 \int x^3 \cos(x^4 + 2) dx &= \frac{1}{4} \sin(x^4 + 2) + C
 \end{aligned}$$

قسمی انتیگرالونه:

د $\int f(x)g(x)dx$ په انتیگرال کی $f(x) = u$ او $g(x) = v$ بنیو او د حاصل ضرب مشتق یی پیدا کوو.

$$\begin{aligned}
 (u \cdot v)' &= u'v + v'u \Rightarrow v'u = (u \cdot v)' - u'v \\
 \int v' u dx &= u \cdot v - \int u' v dx \\
 \int u dv &= u \cdot v - \int v du
 \end{aligned}$$

پورته رابطه په قسمی طریقہ د غیر معین انتیگرال فارمول دی.

که (u) او (v) تابعگانې د $[a, b]$ په انټروال کی تعریف شوی وي نو د معین انتیگرال فارمول په قسمی طریقہ په لاندی ډول دی.

$$\int_a^b v \, u \, dx = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v \, u' \, dx \quad \vee \quad \int_a^b u \, dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v \, du$$

لمری مثال: د $\int x \sin x \, dx$ انتیگرال پیدا کړئ؟

$$u = x, \quad du = dx$$

$$v = -\cos x, \quad \frac{dv}{dx} = \sin x \Rightarrow dv = \sin x \, dx$$

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

$$\int x \sin x \, dx = x(-\cos x) - \int -\cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + C$$

دویم مثال: د $\int_0^1 -x e^x \, dx$ انتیگرال حساب کړئ؟

$$u = -x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -1 \Rightarrow du = -dx$$

$$v = e^x \Rightarrow \frac{dv}{dx} = e^x \Rightarrow dv = e^x \, dx$$

$$\int_a^b v \, u \, dx = uv \Big|_a^b - \int_a^b v \, u' \, dx$$

$$\int_0^1 -x e^x \, dx = [-x e^x]_0^1 + \int_0^1 e^x \, dx$$

$$= -e^1 + 0 \cdot e^0 + [e^x]_0^1 = -e^1 + e^1 - e^0 = -e^0 = -1$$

دلوگاریتمي او اکسپوننشیل تابعگانو مشتق:

1- که $f(x) = \ln x$ وي نو $f'(x) = \frac{1}{x}$ کیږي.

ثبوت:

$$f'(x) = (\ln x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{x+h}{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \ln \left(\frac{x+h}{x} \right)$$

$$\frac{1}{x} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x}{h} \ln \left(\frac{x}{x} + \frac{h}{x} \right) = \frac{1}{x} \lim_{h \rightarrow 0} \ln \left(1 + \frac{h}{x} \right)^{\frac{x}{h}}$$

که $u = \frac{x}{h}$ وضع شي نو $\frac{h}{x} = \frac{1}{u}$ کيږي او څرنگه چه $h \rightarrow 0$ تقرب وکړي نو $u \rightarrow \infty$ ته تقرب کوي

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \lim_{u \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u = \frac{1}{x} \ln \lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u = \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x} \cdot 1 = \frac{1}{x}$$

2- که $g(x) = a^x$ وي نومشتق يې دلاندي فارمول پواسطه پيدا کيږي.

$$\dot{g}(x) = a^x \ln a$$

$$\ln y = \ln a^x = x \ln a$$

$$(\ln y)' = (x \ln a)'$$

$$\frac{\dot{y}}{y} = 1 \cdot \ln a + x \cdot 0 = \ln a$$

$$\dot{y} = y \ln a = a^x \ln a$$

د اعشاري لوگاريتم مشتق:

د $f(x) = \log_a x$ تابع مشتق عبارت دی له:

$$f'(x) = \frac{1}{x} \log_a e$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \log_a \left(\frac{x+h}{x}\right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right) = \lim_{h \rightarrow 0} \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}$$

که $u = \frac{x}{h}$ وضع شي نو $\frac{h}{x} = \frac{1}{u}$ کيږي او کله چه $h \rightarrow 0$ تقرب وکړي نو $u \rightarrow \infty$ ته تقرب کوي.

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a \lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u = \frac{1}{x} \log_a e$$

غواړو چه ثبوت کړو چه:

$$\{\log_a g(x)\}' = \frac{\dot{g}(x)}{g(x)} \log_a e$$

$$f(x) = \{\log_a g(x)\}' = \{\log_a g(x)\}' \cdot \dot{g}(x)$$

$$= \frac{1}{g(x)} \log_a e \cdot \dot{g}(x) = \frac{\dot{g}(x)}{g(x)} \log_a e$$

که $a = e$ وضع شي نو:

$$\{\log_e g(x)\}' = \{\ln g(x)\}' = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

1- د $y = e^x$ مشتق

$$\ln y = \ln e^x = x \ln e = x$$

$$(\ln y)' = \dot{x} \Rightarrow \frac{\dot{y}}{y} = 1 \Rightarrow \dot{y} = y \cdot 1 = y \Rightarrow \dot{y} = e^x$$

2- که $y = a^u$ وي کله چه $a > 0$ او $a \neq 1$ وي نو:

$$\dot{y} = \dot{u} \cdot a^u \ln a$$

3- که په لوگاریتمي تابعگانو کی د لوگاریتم قاعده د طبعي لوگاریتم څخه اعشاري لوگاریتم ته بدله شي ټول لوگاریتمي عددونه د صورت څخه مخرج ته او یا د مخرج څخه صورت ته ځي لکه:

$$y = \log_a u$$

$$\dot{y} = \frac{\dot{u}}{u} \log_a e = \frac{\dot{u}}{u \log_e a} = \frac{\dot{u}}{u \ln a}$$

لمړی مثال: د $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$g(x) = x^2 + 1 \Rightarrow \dot{g}(x) = 2x$$

$$\{\ln g(x)\}' = \frac{\dot{g}(x)}{g(x)}$$

$$\{\ln(x^2 + 1)\}' = \frac{(x^2 + 1)'}{x^2 + 1} = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

دویم مثال:

$$f(x) = \ln(x^2 - 5x + 4) \Rightarrow \dot{f}(x) = \frac{(x^2 - 5x + 4)'}{x^2 - 5x + 4} = \frac{2x - 5}{x^2 - 5x + 4}$$

دریم مثال:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \log_a \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}} = \log_a \left(\frac{x^2+1}{x^2-1} \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{1}{2} \log_a \frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{1}{2} \{ \log_a(x^2+1) - \log_a(x^2-1) \} \\
 f'(x) &= \left(\log_a \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}} \right)' = \frac{1}{2} \{ \log_a(x^2+1) - \log_a(x^2-1) \}' \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} \log_a e - \frac{(x^2-1)'}{x^2-1} \log_a e \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{2x}{x^2+1} \log_a e - \frac{2x}{x^2-1} \log_a e \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot 2x \log_a e \left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2-1} \right) \\
 &= x \log_a e \left(\frac{x^2-1 - x^2-1}{x^4-1} \right) = \frac{-2x}{x^4-1} \log_a e
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \ln \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}} = \ln \left(\frac{x^2+1}{x^2-1} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \{ \ln(x^2+1) - \ln(x^2-1) \} \\
 f'(x) &= \left(\ln \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}} \right)' = \frac{1}{2} \{ \ln(x^2+1) - \ln(x^2-1) \}' \\
 &= \frac{1}{2} [\{ \ln(x^2+1) \}' - \{ \ln(x^2-1) \}'] \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{2x}{x^2+1} - \frac{2x}{x^2-1} \right) = \frac{-2x}{x^4-1}
 \end{aligned}$$

خلورم مثال: د $y = e^{x^2+1}$ مشتق پیدا کری؟

$$y' = (x^2+1)' \cdot e^{x^2+1} = 2x \cdot e^{x^2+1}$$

پنجم مثال: د $y = \sqrt[3]{2}$ مشتق پیدا کری؟

$$\begin{aligned}
 y &= \sqrt[3]{2} \\
 \ln y &= \ln \sqrt[3]{2} = \ln 2^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \ln 2
 \end{aligned}$$

$$(\ln y)' = \left(\frac{1}{x} \ln 2\right)'$$

$$\frac{y'}{y} = \left(\frac{1}{x}\right)' \cdot \ln 2 + \frac{1}{x} \cdot (\ln 2)' = \frac{0 \cdot x - 1 \cdot 1}{x^2} \cdot \ln 2 + \frac{1}{x} \cdot 0 = -\frac{1}{x^2} \cdot \ln 2 + 0$$

$$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{x^2} \ln 2 \Rightarrow y' = -\frac{1}{x^2} \cdot \ln 2 \cdot y = -\frac{1}{x^2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \ln 2$$

شیپرم مثال: د $y = x^{2x}$ مشتق پیدا کړئ؟

$$y = x^{2x}$$

$$\ln y = \ln x^{2x} = 2x \ln x$$

$$(\ln y)' = (2x \cdot \ln x)' \Rightarrow \frac{y'}{y} = 2 \cdot \ln x + 2x \cdot \frac{1}{x} = 2 \ln x + 2 = 2(\ln x + 1)$$

$$\frac{y'}{y} = 2(\ln x + 1) \Rightarrow y' = 2(\ln x + 1) \cdot y \Rightarrow y' = 2(\ln x + 1) \cdot x^{2x}$$

اوم مثال:

$$y = \log_{10}(x^4 + 1)$$

$$y' = ?$$

$$x^4 + 1 = u$$

$$y' = \frac{u'}{u} \log_{10} e = \frac{4x^3}{x^4 + 1} \log_{10} e = \frac{4x^3}{(x^4 + 1) \ln 10}$$

اتم مثال:

$$y = \log_3(\log_2 x)$$

$$y' = ?$$

$$\log_2 x = u$$

$$y' = \frac{u'}{u} \log_a e = \frac{\frac{1}{x} \log_2 e}{\log_2 x} \log_3 e = \frac{1}{x \log_2 x \ln 2 \ln 3} = \frac{1}{x \frac{\log_e x}{\log_e 2} \cdot \ln 2 \ln 3}$$

$$y' = \frac{1}{x \frac{\ln x}{\ln 2} \ln 2 \ln 3} = \frac{1}{x \ln x \ln 3}$$

نهم مثال:

$$y = \log_{(x^2-1)}(x^2 + 1)$$

$$\dot{y} = ?$$

$$x^2 + 1 = u$$

$$\dot{y} = \frac{\dot{u}}{u} \log_a e = \frac{2x}{x^2 + 1} \log_{(x^2+1)} e$$

د معکوسو تابعگانو مشتق:

که دوه تابعگانې یو د بل معکوس وي نو مشتقونه یې هم یو د بل معکوس دي.

مثلاً که $y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$ وي نو:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

یا:

$$\dot{y}_{(x)} = \frac{1}{\dot{x}_{(y)}}$$

نود ضمني تابعگانو د مشتق له مخې لیکو.

$$\left. \begin{array}{l} y = f(x) \\ x = g(y) \end{array} \right\} \Rightarrow \dot{y}_x \cdot \dot{x}_y = \dot{y}_y \Rightarrow \dot{y}_x \cdot \dot{x}_y = 1 \Rightarrow \dot{y}_x = \frac{1}{\dot{x}_y}$$

مثال: د $y = a^x$ د تابع مشتق د هغې د معکوسې تابع له مخې پیدا کړئ؟

$$y = a^x \Rightarrow x = \log_a y$$

$$\dot{y}_x = \frac{1}{\dot{x}_y} = \frac{1}{(\log_a y)'} = \frac{1}{\frac{1}{y} \log_a e} = \frac{1}{\frac{1}{y}} \log_e a = y \ln a = a^x \ln a$$

د معکوسو مثلثاتي تابعگانو مشتق:

د معکوسو مثلثاتي تابعگانو مشتق دلاندې رابطو پواسطه پیدا کېږي.

$$1- (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$2- (\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$3- (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$4- (\operatorname{arccot} x)' = \frac{-1}{1+x^2}$$

-1

$$y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y$$

$$(\arcsin x)' = ?$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \Rightarrow y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y$$

$$(\arccos x)' = ?$$

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\cos y)'} = \frac{1}{-\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} \Rightarrow (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

-3

$$y = \arctan x \Leftrightarrow x = \tan y \Rightarrow (\arctan x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}}$$

$$= \cos^2 y = \frac{\cos^2 y}{1} = \frac{\cos^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y}$$

$$= \frac{\frac{\cos^2 y}{\cos^2 y}}{\frac{\sin^2 y}{\cos^2 y} + \frac{\cos^2 y}{\cos^2 y}} = \frac{1}{\tan^2 y + 1} = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1 + x^2}$$

-4

$$y = \operatorname{arccot} x \Leftrightarrow x = \cot y$$

$$(\operatorname{arccot} x)' = ?$$

$$(\operatorname{arccot} x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\cot y)'} = \frac{1}{\frac{-1}{\sin^2 y}}$$

$$= -\sin^2 y = \frac{-\sin^2 y}{1} = \frac{-\sin^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y}$$

$$= \frac{\frac{-\sin^2 y}{\sin^2 y}}{\frac{\sin^2 y}{\sin^2 y} + \frac{\cos^2 y}{\sin^2 y}} = \frac{-1}{1 + \cot^2 y} = -\frac{1}{1 + x^2}$$

لمری مثال: د $y = (\arctan x)^5$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

$$\dot{y} = 5(\arctan x)^4 \frac{1}{1 + x^2}$$

دویم مثال: د $y = \log_5(\arctan x)$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

$$\dot{y} = \{\log_5(\arctan x)\}' = \log_5 u = \frac{\dot{u}}{u \ln a}$$

$$= \frac{\frac{1}{1 + x^2}}{\arctan x \ln 5} = \frac{1}{(1 + x^2)(\arctan x \ln 5)}$$

دریم مثال: د $y = \arctan e^x$ تابع مشتق د $x = 0$ په نقطه کی پیدا کړئ؟

$$\dot{y} = (\arctan e^x)' = (\arctan u)' = \frac{\dot{u}}{1 + u^2} = \frac{e^x}{1 + e^{2x}}$$

$$\dot{y}(0) = \frac{e^0}{1 + e^{2 \cdot 0}} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

قسمي کسرونه:

د یوه واقعي کسر قسمي کسرونه هغه کسرونه دي چه د هغوی د مجموعی څخه دغه واقعي کسر جوړشوی وي. دواقعي کسر د قسمي کسرو پیدا کول دری حالته لري.

اول حالت:

چه د واقعي کسر د مخرج ضربي عوامل غیر تکراري بېنومونه وي. لکه

$$\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} = \frac{A}{x - 5} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{x + 2}$$

$$= \frac{A(x^2 + x - 2) + B(x^2 - 3x - 10) + C(x^2 - 6x + 5)}{(x - 5)(x - 1)(x + 2)}$$

$$\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} = \frac{Ax^2 + Ax - 2A + Bx^2 - 3Bx - 10B + Cx^2 - 6Cx + 5C}{(x - 5)(x - 1)(x + 2)}$$

$$\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} = \frac{(A + B + C)x^2 + (A - 3B - 6C)x - 2A - 10B + 5C}{(x - 5)(x - 1)(x + 2)}$$

$$4x^2 - x - 39 = (A + B + C)x^2 + (A - 3B - 6C)x - 2A - 10B + 5C$$

$$A + B + C = 4$$

$$A - 3B - 6C = -1$$

$$-2A - 10B + 5C = -39$$

$$\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} = \frac{2}{x - 5} + \frac{3}{x - 1} - \frac{1}{x + 2}$$

دویم حالت:

چه د کسرد مخرجه ضربی عواملو کی تکراری بېنومونه وي.

$$\frac{3x^2 - 6x + 2}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{(x - 1)^2}$$

$$\frac{3x^2 - 6x + 2}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} = \frac{A(x - 1)^2 + B(x - 2)(x - 1) + C(x - 2)}{(x - 2)(x - 1)^2}$$

$$3x^2 - 6x + 2 = A(x^2 - 2x + 1) + B(x^2 - 3x + 2) + C(x - 2)$$

$$3x^2 - 6x + 2 = Ax^2 - 2Ax + A + Bx^2 - 3Bx + 2B + Cx - 2C$$

$$3x^2 - 6x + 2 = (A + B)x^2 - (2A + 3B - C)x + A + 2B - 2C$$

$$A + B = 3$$

$$-2A - 3B$$

$$+ C = -6$$

$$A + 2B - 2C = 2$$

$$\frac{3x^2 - 6x + 2}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} = \frac{2}{x - 2} + \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{(x - 1)^2}$$

دریم حالت:

چه د کسرد مخرجه ضربی عوامل غیر تکراری ترینومونه وي په صورت کی یې بېنوم لیکل کیږي.

$$\frac{5x^2 + 8x + 9}{x^3 + 3x^2 + 6x + 4} = \frac{Ax + B}{x^2 + 2x + 4} + \frac{C}{x + 1}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(Ax + B)(x + 1) + C(x^2 + 2x + 4)}{(x^2 + 2x + 4)(x + 1)} \\
 &= \frac{5x^2 + 8x + 9}{x^3 + 3x^2 + 6x + 4} = \frac{(A + C)x^2 + (A + B + 2C)x + B + 4C}{(x^2 + 2x + 4)(x + 1)} \\
 &= 5x^2 + 8x + 9 = (A + C)x^2 + (A + B + 2C)x + B + 4C \\
 &A + C = 5 \\
 &A + B + 2C = 8 \\
 &B + 4C = 9 \\
 &A = 3, \quad B = 1, \quad C = 1 \\
 &\frac{5x^2 + 8x + 9}{x^3 + 3x^2 + 6x + 4} = \frac{3x + 1}{x^2 + 2x + 4} + \frac{2}{x + 1}
 \end{aligned}$$

د اکسپوننشل تابعگانو انتیگرالونه:

د $f(x) = e^x$ طبعي اکسپوننشل تابع لپاره لرو چه

$$\int e^x dx = e^x + c$$

په عمومي ډول:

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}, \quad a \neq 1 \text{ \& } a \in \mathbb{R}$$

ثبوت:

$$\begin{aligned}
 &\int a^x dx \\
 &u = 1, \quad \frac{du}{dx} = 0, \quad du = 0 \cdot dx \\
 &v = a^x, \quad \frac{dv}{dx} = \frac{a^x}{\ln a}, \quad dv = \frac{a^x}{\ln a} dx \\
 &\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} - \int \frac{a^x}{\ln a} \cdot 0 \cdot dx = \frac{a^x}{\ln a} + C
 \end{aligned}$$

لمری مثال: د $f(x) = 2^{x-3}$ اکسپوننشل تابع انتیگرال پیدا کړئ؟

$$2^{x-3} = \frac{2^x}{2^3} = \frac{2^x}{8} = \frac{1}{8} \cdot 2^x$$

$$\int 2^{x-3} dx = \int \frac{1}{8} \cdot 2^x dx = \frac{1}{8} \int 2^x dx = \frac{1}{8} \cdot \frac{2^x}{\ln 2} + C$$

دویم مثال:

$$\int 3^{x+1} dx = ?$$

$$\int 3^{x+1} dx = \int 3^x \cdot 3 dx = 3 \int 3^x dx = 3 \cdot \frac{3^x}{\ln 3} + C$$

د لوگاریتمی تابعگانواتیگرال:

که $f(x) = \ln x$ ($x \in \mathbb{R}^+$) وي نواتیگرال یې په لاندې ډول دی:

$$\int \ln x dx = x \ln x - x + C$$

که $f(x) = \log_a x$ ($x, a \in \mathbb{R}^+$) وي نواتیگرال یې داسې پیدا کوو:

$$\int \log_a x dx = x \log_a \frac{x}{e}$$

ثبوت:

1- که $a = e$ وضع شي

$$\int \log_a x dx = x \log_a \frac{x}{e} + C$$

$$\int \log_e x dx = \int \ln x dx = x \log_e \frac{x}{e} = x(\log_e x - \log_e e) = x(\ln x - 1) + C$$

2- حالت:

$$\int \log_a x dx = x \log_a \frac{x}{e} + C$$

$$u = \log_a x, \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \log_a e, \quad du = \frac{1}{x} \log_a e dx$$

$$v = x, \quad \frac{dv}{dx} = 1 \Rightarrow dv = dx$$

$$\int \log_a x dx = x \log_a x - \int x \cdot \frac{1}{x} \log_a e dx = x \log_a x - \log_a e \int dx$$

$$= x \log_a x - x \log_a e = x(\log_a x - \log_a e) = x \log_a \frac{x}{e} + C$$

$$\int \log_a x dx = x \log_a \frac{x}{e}$$

مثال: $\int \ln 3x dx$ غبرمعیں انتیگرال پیدا کریں؟

حل:

$$\int \ln 3x dx = \int (\ln 3 + \ln x) dx = \int \ln 3 dx + \int \ln x dx$$

$$= x \ln 3 + x \ln x - x = x(\ln 3 + \ln x) - x = x(\ln 3x - 1)$$

یہ تعویضی طریقہ ہم کو لای شوجہ د غبرمعیں انتیگرال قیمت پیدا کرو۔

لمری مثال:

$$\int \frac{1}{2} e^{-2x-3} dx = ?$$

$$u = -2x - 3, \quad \frac{du}{dx} = -2, \quad dx = -\frac{1}{2} du$$

$$\int \frac{1}{2} e^u \left(-\frac{1}{2}\right) du = -\frac{1}{4} \int e^u du = -\frac{1}{4} e^u + C$$

دویم مثال:

$$\int \frac{2dx}{x+2} = ?$$

$$x+2 = u, \quad \frac{du}{dx} = 1, \quad du = dx$$

$$\int \frac{2du}{u} = 2 \int \frac{du}{u} = 2 \ln|u| + C = 2 \ln|x+2| + C$$

دریم مثال: $f(x) = e^{2x}$ تابع انتیگرال پیدا کریں؟

$$\int f(x) dx = \int e^{2x} dx = ?$$

$$2x = u, \quad \frac{du}{dx} = 2, \quad dx = \frac{du}{2}$$

$$\int f(x) dx = \int e^u \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{e^u}{2} + C = \frac{1}{2} \cdot e^{2x} + C$$

خلورم مثال: $f(x) = x \cdot \ln x^2$ انتیگرال حساب کریں؟

$$\int f(x) dx = \int (x \ln x^2) dx = ?$$

$$x^2 = u, \quad \frac{du}{dx} = 2x, \quad dx = \frac{1}{2x} du$$

$$\int f(x) dx = \int x \ln u \cdot \frac{1}{2x} du = \frac{1}{2} \int \ln u du = \frac{1}{2} [u \cdot \ln u - u + C]$$

$$= \frac{1}{2} u \cdot \ln u - \frac{1}{2} u + C = \frac{1}{2} x^2 \ln x^2 - \frac{1}{2} x^2 + C$$

معین انتیگرالونه هم په تعویضي طریقہ حلولای شو.

$$\int_{-1}^1 e^{2x} dx = ?$$

$$u = 2x, \quad \frac{du}{dx} = 2, \quad dx = \frac{1}{2} du$$

$$\begin{cases} x = -1, & u = 2x = 2(-1) = -2 \\ x = 1, & u = 2x = 2(1) = 2 \end{cases}$$

$$\int_{-1}^1 e^{2x} dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 e^u du = \frac{1}{2} [e^u]_{-2}^2 = 3.627$$

دویم مثال:

$$\int_1^2 2x \cdot \ln x^2 dx = ?$$

$$x^2 = u, \quad \frac{du}{dx} = 2x, \quad dx = \frac{1}{2x} du$$

$$x = 1, \quad u = x^2 = 1$$

$$x = 2, \quad u = x^2 = 4$$

$$\int_1^2 2x \ln x^2 dx = \int_1^4 2x \cdot \ln u \cdot \frac{1}{2x} du = \int_1^4 \ln u du$$

$$= [u \cdot \ln u - u]_1^4 = [4 \cdot \ln 4 - 4] - [1 \cdot \ln 1 - 1] = 2.545$$

د قسمي کسرو پواسطه د واقعي کسر د انتیگرال لاس ته راوړل که وغواړو چه د یوه واقعي کسر انتیگرال پیدا کړو نو لمری یې قسمي کسرونه پیدا کوو بیا د قسمي کسرو انتیگرالونه پیدا کوو او جمع کوو یې.

لمری مثال: $\int \frac{7x-12}{x^2-6x+8} dx$ محاسبه کړئ؟

$$\frac{7x-12}{x^2-6x+8} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-4} = \frac{A(x-4) + B(x-2)}{(x-2)(x-4)}$$

$$= \frac{Ax - 4A + Bx - 2B}{(x-2)(x-4)}$$

$$\frac{7x-12}{x^2-6x+8} = \frac{(A+B)x - 4A - 2B}{(x-2)(x-4)}$$

$$7x-12 = (A+B)x - 4A - 2B$$

$$A+B=7$$

$$-4A-2B=-12 \Rightarrow 4A+2B=12 \dots\dots\dots 1$$

$$A=7-B \Rightarrow 4(7-B)+2B=12$$

$$28-4B+2B=12$$

$$-2B=12-28=-16 \Rightarrow B=8$$

$$A=7-B=7-8=-1 \Rightarrow A=-1$$

$$\frac{7x-12}{x^2-6x+8} = -\frac{1}{x-2} + \frac{8}{x-4}$$

$$\int \frac{7x-12}{x^2-6x+8} dx = \int \frac{-1}{x-2} dx + \int \frac{8}{x-4} dx$$

$$\int \frac{7x-12}{x^2-6x+8} dx = -\int \frac{1}{x-2} dx + 8 \int \frac{1}{x-4} dx$$

$$= -\ln|x-2| + 8\ln|x-4| + C = \ln(x-2)^{-1} + \ln(x-4)^8 + C$$

$$= \ln\{(x-2)^{-1} \cdot (x-4)^8\} = \ln\left\{\frac{(x-4)^8}{x-2}\right\} + C$$

د منحنی سطحی د مساحت پیدا کول

Accounting area of curve plane

هغه مستوي چه د (XX) د محور او د $Y = F(x)$ د تابع د گراف او $x = a$ و $x = b$ د کرښو تر منځ محصور وي مساحت يې د لاندې فارمول پواسطه پیدا کيږي.

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

که $y = f(x) \geq 0$ يعني $y = f(x)$ د $[a, b]$ په انټروال کې مثبت او متماذي وي پدې صورت کې د $f(x)$ د تابع گراف د (XX) د محور په پورتنۍ طرف کې پروت دی او که $y = f(x) \leq 0$ وي پدې صورت کې د $f(x)$ د تابع گراف د (XX) د محور په کښتني طرف کې پروت دی.

لمړۍ مثال: د $x = 4 - y^2$ د تابع د گراف او د (YY) د محور تر منځ د سطحی مساحت پیدا کړئ؟

د تابع د گراف بحراني ټکي او د (YY) د محور سره د تابع د گراف د تقاطع ټکي پیدا کوو.

$$x = 4 - y^2$$

$$\dot{x} = 0 - 2y = -2y$$

په بحراني نقطه د تابع مشتق صفر وي نو $\dot{x} = 0$ نو:

$$-2y = 0 \Rightarrow y = 0$$

د (y) قیمت په اوله معادله کې وضع کوو د (x) قیمت لاس ته راځي

$$x = 4 - y^2 = 4 - (0)^2 = 4 - 0 = 4$$

$$x = 4$$

$A(4, 0)$ نقطه بحراني نقطه ده. د YY د محور سره د تابع د گراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو

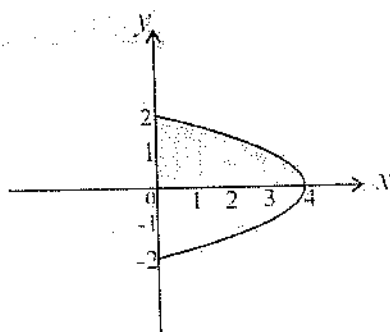
$x = 0$ فرضوو او د y قیمت لاس ته راځي.

$$x = 0$$

$$4 - y^2 = 0 \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2$$

$$B(0, 2)$$

$$C(0, -2)$$



$$A = \int_{-2}^2 (4 - y^2) dy = 2 \int_0^2 (4 - y^2) dy = 2 \left[4y - \frac{y^3}{3} \right]_0^2$$

$$A = 2 \left[\left(4 \cdot 2 - \frac{2^3}{3} \right) - 0 \right] = 2 \left(8 - \frac{8}{3} \right) = 2 \left(\frac{24 - 8}{3} \right) = 2 \left(\frac{16}{3} \right) = \frac{32}{3}$$

دویم مثال: د (XX) د محور او $y = 1 - \frac{1}{2}x^2$ د تابع د گراف پواسطه د محصورې سطحې مساحت محاسبه کړئ؟

$$y = 1 - \frac{1}{2}x^2$$

$$y' = -x$$

$$y' = 0 \quad x = 0$$

$$y = 1 - \frac{1}{2}(0)^2 = 1$$

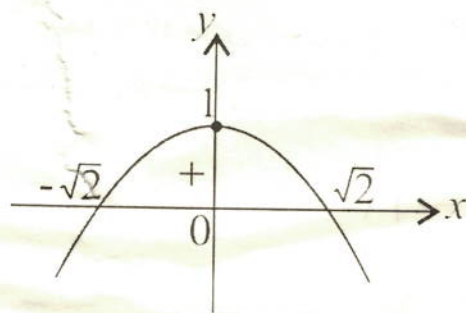
$A(0,1)$ بحراني نقطه ده. اوس د (XX) د محور سره د تابع د گراف د تقاطع نقطه پیدا کړو. $y = 0$ فرضوو.

$$y = 0$$

$$1 - \frac{1}{2}x^2 = 0 \quad \Rightarrow -\frac{1}{2}x^2 = -1 \quad \Rightarrow x^2 = 2$$

$$x = \pm\sqrt{2}$$

$$(\sqrt{2}, 0) \quad C(-\sqrt{2}, 0)$$



$$A = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{2}x^2\right) dx = 2 \int_0^{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{2}x^2\right) dx = 2 \left(\left[x - \frac{1}{6}x^3 \right]_0^{\sqrt{2}} \right)$$

$$A = 2 \left(\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}^3}{6} - 0 \right) = 2 \left(\frac{6\sqrt{2} - (\sqrt{2})^3}{6} \right) = 2 \left(\frac{6\sqrt{2} - 2\sqrt{2}}{6} \right) = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

دریم مثال: د هغه سطحی مساحت پیدا کړئ، چه د $y = x^2 - 3$ د تابع د گراف او (XX) د محور تر منځ محصوروي.

حل:

$$y = x^2 - 3, \quad y' = 2x$$

$$y' = 0 \quad \therefore x = 0$$

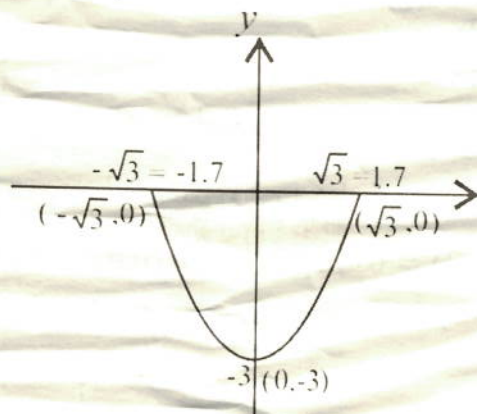
$$y = 0^2 - 3 = -3, \quad A(0, -3)$$

$$y = 0$$

$$x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

$$B(\sqrt{3}, 0)$$

$$C(-\sqrt{3}, 0)$$



څرنگه چې گراف يې د $y = x^2 - 3$ د محور لاندې واقع دی نو انتیگرال يې منفي دی. او څرنگه چې $\sqrt{3}$ او $-\sqrt{3}$ متناظر دي نو مساحت يې د سر حداتو د نیمایي څخه پیدا کوو.

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (x^2 - 3) dx = -2 \int_0^{\sqrt{3}} (x^2 - 3) \\
 &= -2 \left(\int_0^{\sqrt{3}} x^2 dx - 3 \int_0^{\sqrt{3}} dx \right) = -2 \left(\left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\sqrt{3}} - [3x]_0^{\sqrt{3}} \right) \\
 &= -2 \left(\frac{1}{3} [\sqrt{3}^3 - 0] - 3[\sqrt{3} - 0] \right) = -2 \left(\frac{1}{3} (\sqrt{3})^3 - 3\sqrt{3} \right) \\
 &= -\frac{2}{3} (\sqrt{3})^3 + 6\sqrt{3} = \frac{2}{3} (1.7)^3 + 6(1.7) \\
 &= -\frac{2}{3} (4.913) + 10.2 = \frac{9.826}{3} + 10.2 = -3.2753 + 10.2 = 6.9247
 \end{aligned}$$

څلورم مثال: د $y = x^2 - 3x$ د تابع گراف رسم کړئ او د منحنی او (XX) د محور ترمنځ فاصله پیدا کړئ؟

$$\begin{aligned}
 y &= x^2 - 3x \\
 y' &= 2x - 3 \Rightarrow y' = 0 \\
 2x - 3 &= 0 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \\
 y &= x^2 - 3x = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} = \frac{9 - 18}{4} = \frac{-9}{4} \\
 \text{بحراني نقطه } A &\left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{4}\right)
 \end{aligned}$$

څرنگه چې $y'' = 2 > 0$ دی نو بحراني نقطه اصغري نقطه ده.

د (XX) د محور سره د گراف د تقاطع د نقطې د پیدا کولو لپاره $y = 0$ فرضوو.

$$x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x - 3) = 0, x_1 = 0, O(0,0)$$

$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3, B(3,0)$$

$$A = A_1 - A_2 + A_3 = \int_{-1}^0 (x^2 - 3x) dx - \int_0^3 (x^2 - 3x) dx + \int_3^4 (x^2 - 3x) dx$$

$$A = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 \right]_{-1}^0 - \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 \right]_0^3 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 \right]_3^4$$

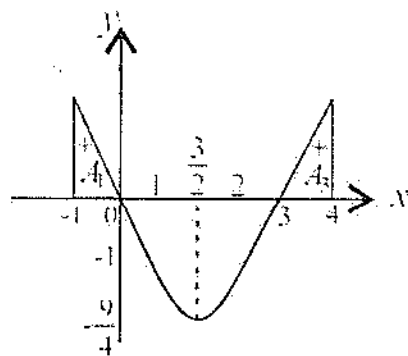
$$A = \left[\left(\frac{1}{3} \cdot 0 - \frac{3}{2} \cdot 0 \right) - \left(\frac{1}{3} \cdot (-1)^3 - \frac{3}{2} \cdot (-1)^2 \right) \right] - \left[\left(\frac{1}{3} \cdot 3^3 - \frac{3}{2} \cdot 3^2 \right) - \left(\frac{1}{3} \cdot 0 - \frac{3}{2} \cdot 0 \right) \right] + \left[\frac{1}{3} \cdot (4)^3 - \frac{3}{2} \cdot 4^2 - \left(\frac{1}{3} \cdot (3)^3 - \frac{3}{2} \cdot 3^2 \right) \right]$$

$$= - \left(-\frac{1}{3} - \frac{3}{2} \right) - \left(\frac{1}{3} \cdot 27 - \frac{3}{2} \cdot 9 \right) + \left\{ \left(\frac{1}{3} \cdot 64 - \frac{3}{2} \cdot 16 \right) - \left(\frac{1}{3} \cdot 27 - \frac{3}{2} \cdot 9 \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{3}{2} - \frac{27}{3} + \frac{27}{2} + \frac{64}{3} - \frac{48}{2} - \frac{27}{3} + \frac{27}{2}$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{27}{3} + \frac{64}{3} - \frac{27}{3} + \frac{3}{2} + \frac{27}{2} - \frac{48}{2} + \frac{27}{2}$$

$$= \frac{1 - 27 + 64 - 27}{3} + \frac{3 + 27 - 48 + 27}{2} = \frac{11}{3} + \frac{9}{2} = \frac{22 + 27}{6} = \frac{49}{6}$$



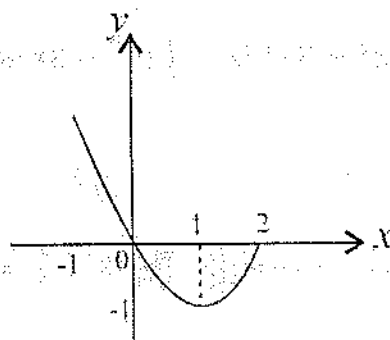
پنجم مثال: د $y = x^2 - 2x$ د منحنی او (XX) د محور تر منځ مساحت په داسې حال کې پیدا کړئ چه د $x = -1$ او $x = 2$ تر منځ واقع وي.

$$y' = (x^2 - 2x)' = 2x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

$$y = x^2 - 2x = 1^2 - 2 \cdot 1 = 1 - 2 = -1$$

بحراني نقطه $A(-1, 1)$

د (XX) د محور سره د گراف د تقاطع نقطې پیدا کوو $y = 0$ فرضوو.



$$x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x - 2) = 0$$

$$x_1 = 0, \quad O(0,0)$$

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2, \quad B(2,0)$$

منحنی د $[-1, 2]$ په انټروال کې د مبداء څخه تیرېږي یوه برخه یې د $[-1, 0]$ په انټروال کې د (XX) د محور په پورتنۍ برخه کې پرته ده او انټروال یې مثبت دی. بله برخه یې د $[0, 2]$ په انټروال کې د (XX) د محور په لاندینۍ برخه کې واقع دی او انټروال یې منفي دی.

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^0 (x^2 - 2x) dx - \int_0^2 (x^2 - 2x) dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 \right]_{-1}^0 - \left[\frac{x^3}{3} - x^2 \right]_0^2 \\ &= \left\{ 0 - \left(-\frac{1}{3} - 1 \right) \right\} - \left\{ \left(\frac{8}{3} - 4 \right) - 0 \right\} = -\left(-\frac{1}{3} - 1 \right) - \left(\frac{8}{3} - 4 \right) \\ &= -\left(\frac{-1-3}{3} \right) - \left(\frac{8-12}{3} \right) \\ &= -\left(\frac{-4}{3} \right) - \left(\frac{-4}{3} \right) = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

د هغه سطحو د مساحت محاسبه چه د منحنی خطو پواسطه محاصره وي.

Accounting of area bounded by tow curves

د $y_1 = f(x)$ او $y_2 = g(x)$ دوه منحنیگانو پواسطه د محصور شوي سطحی د محاسبی لپاره که $f(x) > g(x)$ وي یعنی که $f(x)$ تابع د $g(x)$ د تابع د پاسه واقع وي د پاسنی تابع د انتیگرال څخه د لاندینۍ تابع انتیگرال منفي کوو د محصور شوي سطحی مساحت لاندته راځي.

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

که د $G(x)$ تابع گراف د $f(x)$ تابع د گراف د پاسه واقع وي نود محصورشوی سطحی مساحت په لاندی ډول پیدا کیږي.

$$A = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx = \int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx$$

لومړی مثال: د $f(x) = 2x - x^2$ او $g(x) = x^2$ منحنیگانو د گرافونو ترمنځ د سطحی مساحت پیدا کړئ؟

حل: - اول د منحنیگانو د تقاطع ټکی پیدا کوو.

$$f(x) = 2x - x^2$$

$$g(x) = x^2$$

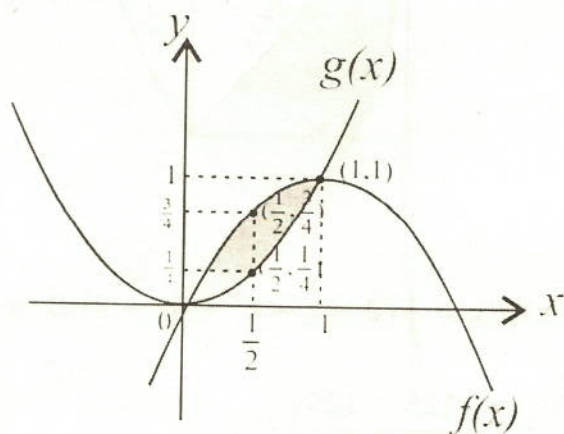
$$f(x) = g(x) \Rightarrow 2x - x^2 = x^2 \Rightarrow$$

$$2x - x^2 - x^2 = 0 \Rightarrow 2x - 2x^2 = 0$$

$$2x(1 - x) = 0$$

$$2x = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$1 - x = 0 \Rightarrow 1 = x \Rightarrow x = 1$$



د منحنیگانو د تقاطع نقطې عبارت دي $A(1,1)$ او $O(0,0)$ دي.

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_0^1 (2x - x^2 - x^2) dx = \int_0^1 (2x - 2x^2) dx =$$

$$\left[x^2 - \frac{2x^3}{3} \right]_0^1 = \left(1 - \frac{2}{3} \right) - 0 = \frac{3-2}{3} = \frac{1}{3}$$

دويم مثال: د $f(x) = x^2 - 6x + 2$ او $g(x) = 2 - x$ تابعگانو د گرافونو تر منځ د سطحې مساحت پيدا کړئ؟

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^2 - 6x + 2 \\ g(x) = 2 - x \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) = g(x)$$

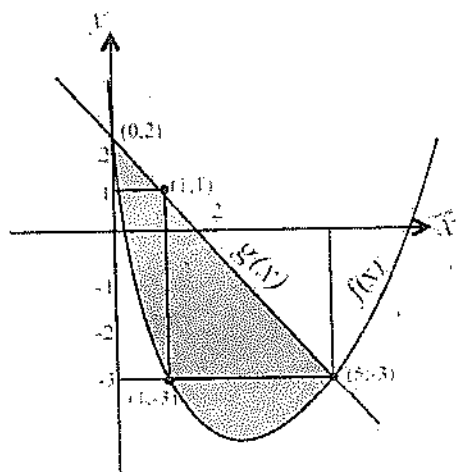
$$x^2 - 6x + 2 = 2 - x \Rightarrow x^2 - 6x + 2 - 2 + x = 0 \Rightarrow x^2 - 5x = 0$$

$$x(x - 5) = 0, \quad x_1 = 0$$

$$x - 5 = 0 \Rightarrow x_2 = 5$$

$$y_1 = 2, \quad O(0, 2)$$

$$y_2 = -3 \quad A(5, -3)$$



$$\begin{aligned} A &= \int_a^b \{g(x) - f(x)\} dx = \int_0^5 (2 - x - x^2 + 6x - 2) dx = \int_0^5 (-x^2 + 5x) dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + 5 \cdot \frac{x^2}{2} \right]_0^5 = \left(-\frac{125}{3} + \frac{125}{2} \right) - 0 \\ &= -\frac{125}{3} + \frac{125}{2} = \frac{-250 + 375}{6} = \frac{125}{6} \end{aligned}$$

دريم مثال: د $f(x) = -x^2 + 4x + 2$ او $g(x) = x^2 - 2x + 2$ تابعگانو د گرافونو تر منځ د سطحې مساحت محاسبه کړئ؟

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = -x^2 + 4x + 2 \\ g(x) = x^2 - 2x + 2 \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) = g(x)$$

$$-x^2 + 4x + 2 = x^2 - 2x + 2$$

$$-x^2 + 4x + 2 - x^2 + 2x - 2 = 0$$

$$-2x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x(-2x + 6) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0, \quad -2x + 6 = 0 \Rightarrow -2x = -6 \Rightarrow x = 3$$

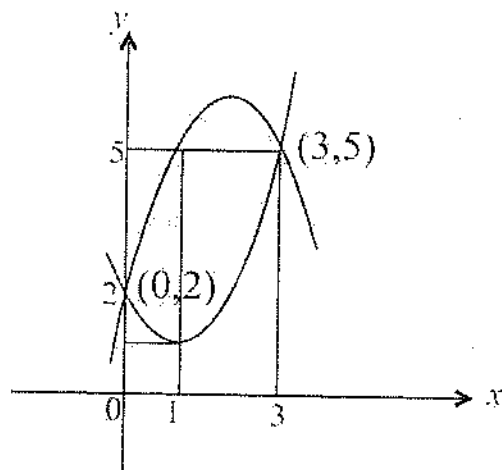
د منحنیګانود تقاطع نقطې عبارت دي $A(0,2)$, $B(3,5)$

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

$$= \int_0^3 (-x^2 + 4x + 2) dx - \int_0^3 (x^2 - 2x + 2) dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + 4 \cdot \frac{x^2}{2} + 2x \right]_0^3 - \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + 2x \right]_0^3$$

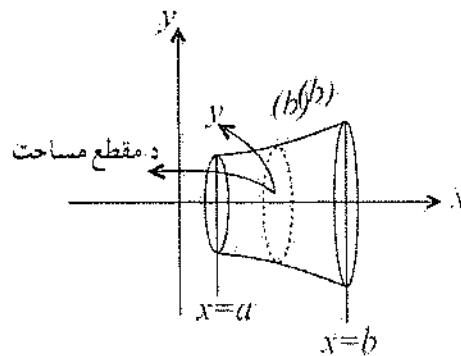
$$= -\frac{27}{3} + 18 + 6 - 0 - \frac{27}{3} + 9 - 6 + 0 = 9$$



د کروي اجسامو د حجمو محاسبه

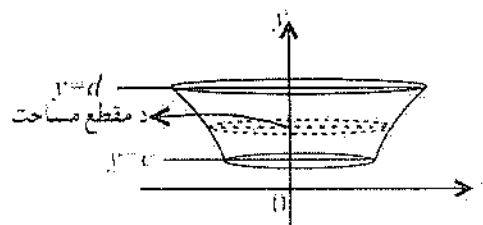
Accounting volume of Spherical things

که د $y = f(x)$ د تابع گراف منحنی وي او د $x = a$ او $x = b$ د خطو منځ کی محصور وي د منحنی خط د دوران په نتیجه کی استوانه لاس ته راځي چه ارتفاع يې $\Delta x = b - a$ ده د استوانی مقاطع دایروي سطحی دي چه مساحتونه يې $A(x) = \pi r^2$ دي او د (YY) د محور سره موازي دي شعاع يې $r = y$ ده د حجم فارمول يې د ريمان د مجموعی سره سم په لاندی ډول دی.



$$v = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A(x_i) \Delta x = \int_a^b \pi r^2 dx = \int_a^b \pi r^2 dy = \int_a^b \pi \{f(x)\}^2$$

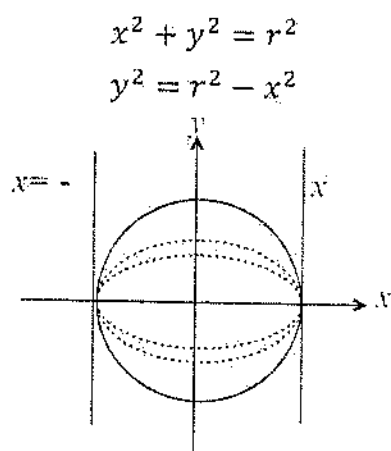
که $x = f(y)$ تابع د منحنی گراف د $y = c$ او $y = d$ کرښو ترمنځ محصور وي مساحت يې نظر د (YY) محور ته د $A(y) = \pi r^2$ فارمول دی ارتفاع يې $\Delta y = d - c$ ده او شعاع يې $r = y$ ده حجم يې د لاندی فارمول پواسطه پیدا کيږي.



$$v = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A(y_i) \Delta y = \int_c^d \pi r^2 dy = \int_c^d \pi y^2 dy = \int_c^d \pi \{f(y)\}^2 dy$$

د انتیگرال پواسطه د کری د حجم پیدا کول

که نیمه دایره د قطر په اطراف وڅرخېږي کره لاس ته راځي. د دایرې معادله دا $x^2 + y^2 = r^2$ ده د نیمې کری حجم د دایرې د معادلې څخه پیدا کوو او دوه چنده کوو یې د کری حجم لاس ته راځي.

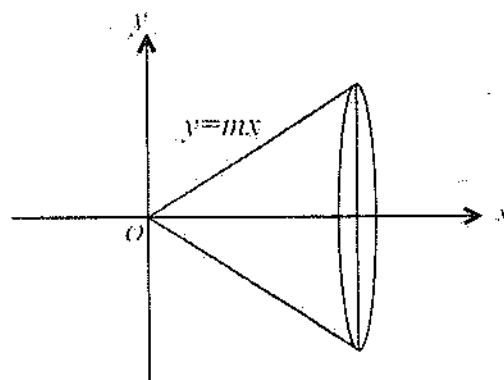


$$\begin{aligned}
 V &= \int_{-r}^r \pi y^2 dx = \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx = 2\pi \int_0^r (r^2 - x^2) dx = 2\pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^r \\
 &= 2\pi \left[r^3 - \frac{r^3}{3} \right] - 0 = 2\pi \left(\frac{3r^3 - r^3}{3} \right) = 2\pi \left(\frac{2r^3}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi r^3 \\
 V &= \frac{4}{3} \pi r^3
 \end{aligned}$$

د انتیگرال پواسطه د مخروط د حجم پیدا کول

که د مستقیم دیوانجام نقطه ثابته وي او مستقیم خط د همدغه ثابتې نقطې په شاوخوا دوران وکړي مخروط لاس ته راځي نو

$$V = \int_a^b \pi y^2 dx$$



$$V = \int_a^b \pi m^2 x^2 dx = \pi m^2 \int_a^b x^2 dx$$

$$y = mx$$

$$= \pi m^2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^h = \pi m^2 \left(\frac{h^3}{3} \right) = \frac{\pi h}{3} (mh)^2$$

$$د مخروط حجم = V = \frac{\pi h}{3} (mh)^2$$

د پورته شکل څخه معلومېږي چې د مخروط قاعده دایروي ده او شعاع یې د $(Y\hat{Y})$ د محور سره موازي ده یعنې y/r اود مخروط ارتفاع (h) ده چې د (x) په محور باندې منطبق ده یعنې $(x = h)$ نود $y = mx$ په رابطه کې یې قیمت لیکو:

$$y = mx \Rightarrow r = mh$$

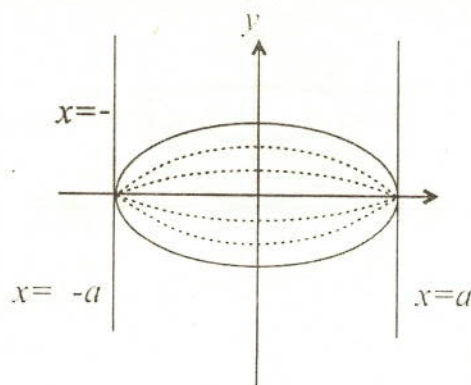
$$V = \frac{\pi h}{3} r^2 = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

د انتیګرال پواسطه د بیضوي د حجم پیدا کول:

هغه بیضوي چې مرکز یې د وضعیه کمیټونو په میداء واقع وي معادله یې عبارت ده له:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

د نیمې بیضوي حجم پیدا کوو او دوه چنده کوو یې د ټولې بیضوي حجم لاس ته راځي:



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \Rightarrow y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2$$

$$V = \int_{-a}^a \pi y^2 dx = \pi \int_{-a}^a \left[b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2 \right] dx$$

$$= 2\pi \int_0^a \left[b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2 \right] dx = 2\pi \left[b^2x - \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x^3}{3} \right]_0^a$$

$$= 2\pi \left[\left(b^2a - \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{a^3}{3} \right) - 0 \right] = 2\pi \left[b^2a - \frac{b^2a}{3} \right]$$

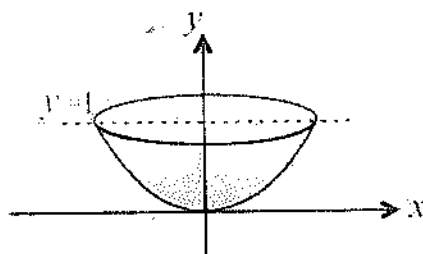
$$= 2\pi \left[\frac{3ab^2 - ab^2}{3} \right] = 2\pi \left[\frac{2ab^2}{3} \right]$$

$$V = \frac{4}{3}\pi ab^2$$

که چیرته د الپس محراقونه د $(Y\check{Y})$ د محور پر منځ پراته وي حجم یې د لاندې فارمول پواسطه پیدا کیږي.

$$V = \frac{4}{3}\pi a^2b$$

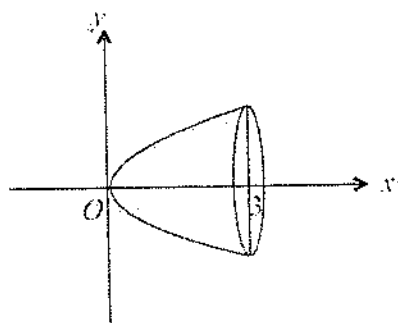
لمړی مثال: د جسم حجم چه د $y = x^2$ او $y = 1$ کرني تر منځ پروت وي او د $(Y\check{Y})$ د محور په شاوخوا دوران کوي پیدا کړئ؟



$$V = \int_a^b \pi x^2 dy = \pi \int_0^1 y dy$$

$$= \frac{1}{2} \pi y^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \pi = \frac{\pi}{2}$$

دويم مثال: د $y = \sqrt{2x}$ او $y = 3$ تر منځ د څرخول شوي جسم مساحت پيدا کړئ؟



$$V = \int_a^b \pi y^2 dx = \int_0^3 \pi (\sqrt{2x})^2 dx = \pi \int_0^3 [\sqrt{2x}]^2 dx = \pi \int_0^3 2x dx$$

$$V = 2\pi \int_0^3 x dx = 2\pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^3 = 9\pi$$

تبصره:

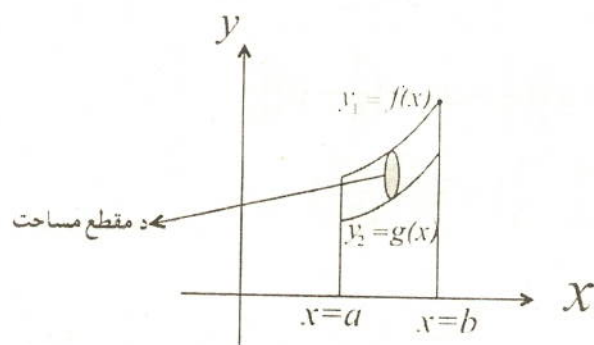
که $y_1 = f(x)$ او $y_2 = g(x)$ تابعګانې $[a, b]$ په انټروال کې ممتادي وي دهغه جسم حجم چه د $f(x)$ او $g(x)$ منحنیګانو او د $x = a$ او $x = b$ کرښو تر منځ دوران کوي د لاندې فارمول پواسطه لاس ته راځي.

د استوانې ارتفاع Δx

$$A(x) = (\text{استوانې د مقطع مساحت}) = \pi y_1^2 - \pi y_2^2 = \pi (y_1^2 - y_2^2)$$

د هغه استوانی د حجم د فارمول پیدا کول چه د $f(x)$ د تابع گراف د $g(x)$ د تابع د گراف

څخه پورته پورته رڼي

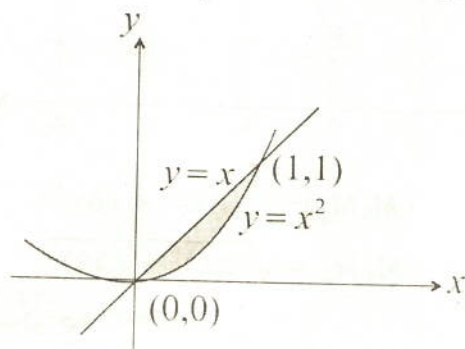


$$V = \int_a^b \pi(y_1^2 - y_2^2) dx = \pi \int_a^b (y_1^2 - y_2^2) dx$$

د هغه استوانی د حجم د فارمول پیدا کول چه د $g(x)$ د تابع گراف د $f(x)$ د تابع د گراف څخه پورته واقع وي.

$$V = \int_a^b \pi(y_2^2 - y_1^2) dx = \pi \int_a^b (y_2^2 - y_1^2) dx$$

مثال: د هغه جسم حجم پیدا کړئ چه د $y = x^2$ د منحنی او $y = x$ د کرښی تر منځ د (x) د محوری په شاوخوا تر منځ د دوران څخه لاس ته راځي.

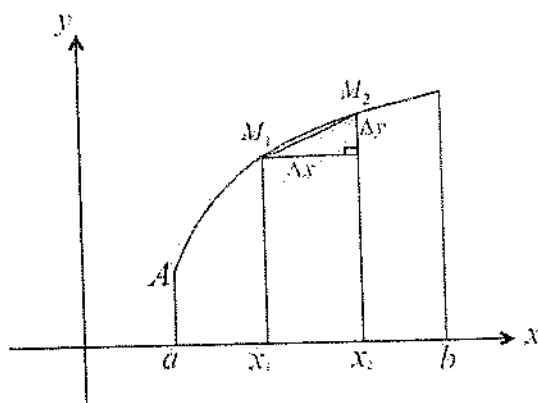


$$\left. \begin{array}{l} y_1 = f(x) = x^2 \\ y_2 = g(x) = x \end{array} \right\} \Rightarrow y_2 > y_1, \quad g(x) > f(x)$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_a^b \pi(y_2^2 - y_1^2) dx = \int_0^1 \pi(x^2 - (-x^2)^2) dx = \pi \int_0^1 (x^2 - x^4) dx \\
 &= \pi \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \pi \left[\left(\frac{1}{3} - 0 \right) - \left(\frac{1}{5} - 0 \right) \right] \\
 &= \pi \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right] = \pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = \pi \left(\frac{5-3}{15} \right) \\
 &V = \pi \left(\frac{2}{15} \right) = \frac{2\pi}{15}
 \end{aligned}$$

د قوس د اوږدوالي محاسبه:

د قوس د AM_1 او M_1M_2 او M_2B په درې ټوټو ویشود A, M_1, M_2 او د B د نقطو څخه په (XX) عمودونه رسموو بیا M_2 د M_1 سره په یوه روښانه خط نښلوود M_1 څخه په M_2X_2 عمود رسموو او د تقاطع نقطه په H نښوو او $\Delta x = M_1H$ او $M_2H = \Delta y$ وضع کوو د فیثاغورث د قضیې سره لیکو



$$(M_1M_2)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

$$M_1M_2 = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

د مشتق د فارمول سره سم لیکو چه:

$$\dot{f}(x) = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \dot{g}(x) = \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$$\Delta x = \dot{f}(x) \Delta t$$

$$\Delta y = \dot{g}(x) \Delta t$$

$$M_1 M_2 = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(\dot{f}(t)\Delta t)^2 + (\dot{g}(t)\Delta t)^2}$$

$$M_1 M_2 = \sqrt{[\dot{f}(t)]^2 + [\dot{g}(t)]^2} \cdot \Delta t$$

د ریمان د مجموعی څخه لیکو چه:

$$L = \int_a^b \sqrt{(\dot{f}(t))^2 + (\dot{g}(t))^2} \cdot \Delta t$$

لومړی مثال: د $x^2 + y^2 = r^2$ دایری محیط محاسبه کړئ؟

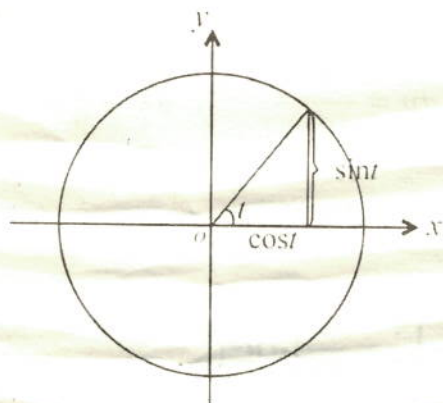
د دایرې پارامتریک معادله په لاندې ډول ده.

$$x = r \cos t$$

$$y = r \sin t$$

که $0 \leq t \leq \pi$ نو د دایرې نیمایي محیط پیدا کړئ؟

$$P = \int_0^\pi \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \cdot dt$$



$$P = \int_0^\pi \sqrt{(-r \sin t)^2 + (r \cos t)^2} \cdot dt$$

$$P = \int_0^\pi \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t} \cdot dt = \int_0^\pi \sqrt{r^2 (\sin^2 t + \cos^2 t)} \cdot dt = \int_0^\pi \sqrt{r^2} \cdot dt$$

$$P = [rt]_0^{\pi} = (r \cdot \pi - r \cdot 0) = \pi r \quad \text{د دایرې نیمایي محیط}$$

$$\text{د دایرې مکمل محیط} = 2\pi r$$

تبصره :

1- د $y = f(x)$ منحنی معادله په $a \leq x \leq b$ انتروال کی راکړشوی ده د (x) د پارامتر په پام کی نیولو سره د منحنی د قوس اوږدوالی داسی محاسبه کوو.

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} \cdot dx$$

مثال: د $y = f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ د منحنی د قوس اوږدوالی په $0 \leq x \leq 4$ انتروال کی پیدا کړئ؟

$$f(x) = x^{\frac{3}{2}}, \quad f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} \cdot dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2} \cdot dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} \cdot dx$$

$$u = 1 + \frac{9}{4}x, \quad du = \frac{9}{4}dx, \quad dx = \frac{4}{9}du$$

$$= \int_0^4 \sqrt{u} \frac{4}{9} du \Rightarrow$$

$$= \frac{4}{9} \int_0^4 u^{\frac{1}{2}} du = \frac{4}{9} \left[\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \right]_0^4 = \frac{8}{27} \left[\sqrt{u^3} \right]_0^4$$

$$= \frac{8}{27} \left[\sqrt{\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^3} \right]_0^4 = \frac{8}{27} \left[\sqrt{\left(1 + \frac{9}{4} \cdot 4\right)^3} - 1 \right]$$

$$L = \frac{8}{27} (\sqrt{10^3} - 1) = \frac{8}{27} (10\sqrt{10} - 1)$$

2- د $x = f(y)$ منحنی په $a \leq y \leq b$ انتروال کی راکړ شوی دې د (y) د پارامتر په پام کی نیولو سره لیکو:

$$L = \int_a^b \sqrt{f'^2(y) + 1} \cdot dy$$

مثال: د $x = f(y) = y^{\frac{3}{2}}$ د منحنی د قوس اوږدوالی د $[1, 4]$ په انتروال کی حساب کړئ؟

$$f(y) = y^{\frac{3}{2}}, \quad f'(y) = \frac{3}{2} y^{\frac{1}{2}}$$

$$L = \int_a^b \sqrt{f'^2(y) + 1} \cdot dy = \int_1^4 \sqrt{\left(\frac{3}{2} \cdot y^{\frac{1}{2}}\right)^2 + 1} \cdot dy$$

$$L = \int_1^4 \sqrt{\frac{9}{4}y + 1} \cdot dy = \int_1^4 \sqrt{u} \cdot \frac{4}{9} du, \quad u = \frac{9}{4}y + 1 \Rightarrow du = \frac{9}{4} dy$$

$$L = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} \left[u^{\frac{3}{2}} \right]_1^4 = \frac{8}{27} \left[\left(\frac{9}{4}y + 1 \right)^{\frac{3}{2}} \right]_1^4, \quad dy = \frac{4}{9} du$$

$$L = \frac{8}{27} \left[\sqrt{1000} - \sqrt{\left(\frac{13}{4} \right)^3} \right] = \frac{8}{27} \left[10\sqrt{10} - \sqrt{\frac{2197}{64}} \right]$$

تفاضلي معادلې (Differential Equations):

هر هغه مساوات چه د یوې تابع مشتق او یو یا څو مستقل او غېر مستقل متحوله پکې موجود وي تفاضلي معادلی بلل کیږي لکه

$$\frac{dy}{dx} = 3x$$

$$(4x + y)dx + xdy = 0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dv}{dx} = e^x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 9y = 0$$

دغه تفاضلي معادلې ته معمولي تفاضلي معادلې هم وايي.
 که په يوه تفاضلي معادله کې د يوه غېرمستقل متحول معمولي مشتق نظر مستقل متحول ته
 ونيول شي دغسې تفاضلي معادلې ته معمولي تفاضلي معادله وايي.

$$\frac{dy}{dx} = 3xy, \quad (4x + y)dx + xdy = 0, \quad \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{du}{dx} = e^x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 9x = 0$$

که د مستقل متحول مشتق نظر زياتو مستقلو متحولو ته ونيول شي دغسې ډيفرينشيال
 معادلې ته جزئي يا يوطرفه ډيفرينشيال معادلې وايي. لکه:

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 8u$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 5 \frac{\partial u}{\partial y}$$

د ډيفرينشيال ترتيب:

د يوي افادې د مشتق نيولو شمېرې ته د ډيفرينشيال معادلې ترتيب وايي.

$$\frac{d^4 y}{dx^4} - 2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^5 + 3y = 4x$$

څرنګه چې د افادې څلورم مشتق نيول شوی دی نو د ډيفرينشيال ترتيب (4) ده مشتق نيول د
 (d) د توان څخه معلومېږي

د ډيفرينشيال معادلې درجه:

د مشتق د لوړ ترتيب توان ته د ډيفرينشيال معادلې درجه وايي.
 که د ډيفرينشيال معادلې توان کسري وي، توان يې بايد په صحيح عدد بدل شي.

$$(y''')^{\frac{2}{3}} = 4 + y'$$

$$\left\{ (y''')^{\frac{2}{3}} \right\}^3 = (4 + y')^2 \Rightarrow (y''')^2 = (4 + y')^2$$

د پورتنۍ معادلې درجه (2) ده:

$$y''' = \sqrt{4+y'} \quad \text{یا} \quad y'''' = \sqrt{5x+3y} \quad \text{معادلو درجه یوه ده.}$$

کله کله یوه ډیفرینشیال معادله درجه نلري. لکه:

$$6x^2 \frac{d^3y}{dx^3} + (\sin x) \frac{d^2y}{dx^2} - \cos xy = 0$$

دپورته معادلې درجه معلومه نه ده. ځکه چې د (y) نامعلومه تابع د $\cos xy$ ترانسندنتل تابع په مناقشه کې ده نو نه شو کولای چې د پولینوم په شکل یې ولیکواو نه یې مشتق پیدا کړي.

خطي ډیفرینشیال معادلې *Linear Differential equation*

هغه ډیفرینشیال معادله ده چې د (y) اول مشتق یې موجود وي او د (y) او (y') د ضرب حاصل یې معدوم وي. لکه:

$$2 \frac{d^2y}{dx^2} + 5 \frac{dy}{dx} + 3y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} - x^2y = 3x$$

هغه ډیفرینشیال معادلې چې خطي نه وي د غیرخطي معادلو یا $(non - linear equation)$ په نوم یادېږي. لکه:

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 4y^2 = 0 \quad (y \neq 1 \text{ د } y \text{ توان})$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 7x \cdot \frac{dy}{dx} + 12y = 0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \sin xy = 0$$

$$5 \left(\frac{dy}{dx} \right)^3 + 2 \frac{d^2y}{dx^2} + 3y = 0$$

څرنگه چې د دغه معادلو پروگرام د لېسې د ښوونې څخه لوړ دی د عالي ریاضیاتو په مستقل کتاب کې د ډیفرینشیال معادلو د تفصیل تصمیم شته د پاک الله جل جلاله څخه توفیق غواړو.

احصائيه

اتلسم فصل

احصائيه

احصائيه په لغت كې سرشماری ته وايي.

او په اصطلاح احصائيه هغه علم دی چه د اجتماعي ژوند واقعات بررسي كوي.
قاعده يي داده چه نفوس، حاصلات، او نور شيان محاسبه كوي او بيا يي د عددو په شكل ليكي.

احصائيه ډېر قسمونه لري لكه اقتصادي احصائيه، اخلاقي احصائيه، سياسي احصائيه، د نفوسو احصائيه او داسې نور.

داتا Data:

راتول شوو معلوماتو ته داتا وايي.

د اطلاعاتو د راتولو طريقه:

اطلاعات معمولاً په څلورو طريقو راتولېږي

1- د پوښتنو پواسطه

2- د ليكنو پواسطه

3- د ليدنې پواسطه

4- د تجربې پواسطه

1- د پوښتنو پواسطه د اطلاعاتو راغونډول:

كه وغواړو چه د يوې كورنۍ د عايداتو اطلاعات لاس ته راوړو نو كه عايدات لږ وي كولاى شو چه د شفاهي پوښتنو پواسطه اطلاعات لاس ته راوړو.

2- د ليكنې پواسطه د اطلاعاتو لاس ته راوړل:

كه د يوې كورنۍ عايدات زيات وي په ذهن كې يي حفظ مشكل وي نو د ليك پواسطه يي د عايداتو اطلاعات راتولوو او په راجستير كې يي ليكو چه د عايداتو اطلاعات وساتل شي او د منځه لاړ نه شي.

3- د ليدنې پواسطه د اطلاعاتو لاس ته راوړل:

که وغواړو چه د يوه شاگرد نمره په هکله اطلاعات لاس ته راوړو. نو ښه طريقه داده چه نتايج يا اطلاعاتمه وکتل شي او دنوموړي د نمره په باب ښه معلومات حاصل شي.

4- د تجربې پواسطه د اطلاعاتو لاس ته راوړل:

مثلاً د يوه مرکب جسم د اجزاؤ د ښه معلومات لپاره تجربه ضرور ده.

ټولنه او جامعه *Population and sample*:

هغه خلک چه د اړتيا وړ اطلاعات ترې لاس ته راځي. جامعه بلل کيږي.

پوښتنه: د جامعې د هر تن څخه د اطلاعاتو لاس ته راوړلو ته پوښتنه وايي.

نمونه: د جامعې هغه برخه ده چه د جامعې د اطلاعاتو د لاس ته راوړلو لپاره ترې پوښتنې کيږي او د جامعې خواص پکې موجود وي. لکه يو موټی وريجي د يو گدام وريجو نمونه ده.

تصادفي نمونه:

د په يوه صفت موصوف شيانو څخه د يوې برخې ټاکل تصادفي نمونه ده.

دغه برخه بايد لاندې درې صفات ولري.

1- د نمونې د غړي په توگه د يوه شي يا يوه کس ټاکل بايد امکان ولري.

2- تر ټاکنې د مخه بايد د نمونې د غړو په هکله قضاوت ناممکن وي.

3- د نمونې ټول غړي بايد په نمونه کې برابره برخه ولري که نمونه تصادفي وي او که نه. مثلاً که د دولت په مامورينو کې د ښوونکو معاش دوه چنده شي نو دا پېښه يوه تصادفي پېښه ده.

تصادفي متحول او ډولونه يې:

که په يوه ټولنه کې د يوې موضوع په باب راټول شوي معلومات يا اطلاعات د يوه غړي څخه بل غړي ته د انتقال وړ نه وي دغه موضوع يوه تصادفي اطلاع ده.

تصادفي متحول په دوه ډوله دی.

1- کيفي تصادفي متحول

2- مقداري تصادفي متحول

1- کيفي تصادفي متحول:

چه معلومات يې په توصيفي ډول بيانېږي عدد ته ضرورت نه لري. لکه د کارگرانو د سواد اندازه، يا د يوه کلي دینداره خلک

2- مقداري تصادفي متحول:

هغه متحول دی چه د اطلاعاتو معلومات يې په شمېر سره کېږي، او په دوه ډوله دی:

الف- متصل مقداري تصادفي متحول ب- منفصل مقداري تصادفي متحول

الف- متصل مقداري تصادفي متحول: چه معلومات يې په عدد سره کېږي او د پرلپسې عددو تر منځ يې عدد پيدا نه شي.

ب- منفصل مقداري تصادفي متحول: چه د پرلپسې عددو تر منځ يې عدد موجود وي.

د فریکونسي جدول *Table of frequency*

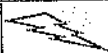
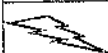
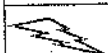
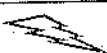
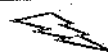
هغه جدول دی چه د داتاگانو معلومات پکې ترتيب شوی وي. که جدول په عمودي ډول ترتيب شوی وي د جدول د چپ طرف ستون داتاگانې يا معلومات ښيي او دښي طرف ستون يې د داتاگانو فریکونسي ښيي. لکه درنگونو جدول چه چپ طرف رنگونه يا داتا ښيي اوښي طرف فریکونسي ښيي. او که جدول په افقي ډول ترتيب شوی وي اول سطر د داتاگانو نمايندگي کوي او دويم سطر د هرې داتا فریکونسي ښيي.

مجموعه	1	2	3	4	5	6	7	8	دکورنۍ غړي
40	4	7	9	8	6	2	3	1	دکورنۍ شمېر

انځوريز گراف يا تصويري گراف

که په راکړ شوو معلوماتو باندې دښې پېژندگلۍ لپاره شکلونه يا سمبولونه په يوه جدول کې استعمال شي دغه گراف د انځوريز گراف په نوم ياديږي.

د شکل څخه معلوم کړئ چه دکاندار په کومه ورځ زياتې اړي خرڅې کړي دي.

							
							
							
							
اوله ورځ	دويمه ورځ	درېمه ورځ	څلورمه ورځ	پنځمه ورځ	شپږمه ورځ	اوومه ورځ	اتمه ورځ

مود *Mode*:

د راټول شوو معلوماتو زياتي فريکونسي ته مود وايي.

مود د مالونو په خرڅولو کې، د رايو په اچولو کې، د امتحان په نمره او داسې نورو شيانو کې استعمالېږي.

اوسط *Mean*:

د اعدادو د مجموعې او شمېر نسبت ته اوسط وايي.

$$x = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

مثال: يو دکاندار په اوله ورځ څلور کټونه په دويمه ورځ پنځه کټونه په درېمه ورځ شپږ کټونه خرڅ کړي دي ووايست چه په اوسط ډول يې د ورځې څو کټونه خرڅ کړيدي؟

$$x = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{4 + 5 + 6}{3} = \frac{15}{3} = 5$$

د مجزا داتاگانو د کثرت جدول

هغه جدول دي چه په هره طبقه کی د داتاگانو شمېر راښيي

مثلاً دیوه ټولگي د شاگردانو د ریاضي د مضمون نمرې په یوه جدول کی لیکل شوی دي دا نمرې په گروپو ویشو او په هرگروپ کی د شاملو نمرو شمېر لیکو په دغه شمېر کی زیات عدد ته د داتا کثرت وایي . اودی جدول ته د داتاگانو د کثرت جدول وایي که په جدول کی د داتاگانو د کثرت عدد کوچنی یا صفر وي . د جدول جوړول فایده نه کوي

42	25	30	35	48	67	59	51	58	78
62	77	48	56	75	78	72	71	56	43
54	53	57	63	72	70	42	55	47	20
59	40	62	12	75	26	76	72	63	56

جدول یی داسی جوړیږي

شمېر	نمرې
0	0 - 9
1	10 - 19
3	20 - 29
2	30 - 39
7	40 - 49
11	50 - 59
5	60 - 69
11	70 - 79

د کثرت د جدول د اجزاؤ خاصیتونه:

په یوه طبقه کی کوچني عدد ته ټیټ سرحد او غټ عدد ته لوړ سرحد وایي هغه داتاگانې چه په یوه طبقه کی راځي د طبقی د وسعت په نوم یادېږي . دیوی طبقی د وسعت د پیدا کولو د طبقی سرحدات یو دبل څخه منفي کوو .

د لمړۍ طبقې وسعت	$50 - 0 = 50$
د دويمې طبقې وسعت	$60 - 50 = 10$

ډله ايز (تجمعي) کثرت:

د ټولو طبقود کثرتو مجموعی ته تجموعي کثرت وايي.

مثلاً که د کال د هرې مياشتې د رخصتۍ ورځو ته کثرت ووايو نو د ټول کال د رخصتيو مجموعه ډله ايز کثرت يا تجموعي کثرت دی.

نسبي کثرت:

د دوه ډلو د مطلق کثرت او تجموعي کثرت نسبت ته نسبي کثرت وايي.

$$\text{نسبي کثرت} = \frac{\text{مطلق کثرت}}{\text{د ټولو ډاتاگانو کثرت}}$$

مثال: په يوه ازموینه کې د دوه ټولگيو نمرې په لاندې جدول کې راوړل شوي دي دا ټولگي د نمرې په لحاظ پرتله کړئ؟

د الف ټولگي	مطلق کثرت
10-30 ضعیف	6
30-50 متوسط	10
50-70 ښه	4

د ب ټولگي	مطلق کثرت
10-30 ضعیف	19
30-50 متوسط	25
50-70 ښه	16

حل: د دواړو ټولگيو نسبي کثرت پيدا کوو

د نسبي کثرت فیصدي	نسبي کثرت	مطلق کثرت	د الف ټولگی
30%	$\frac{6}{20}$	6	10-30
50%	$\frac{10}{20}$	10	30-50
20%	$\frac{4}{20}$	4	50-70

د نسبي کثرت فیصدي	نسبي کثرت	مطلق کثرت	د ب ټولگی
31.6%	$\frac{19}{60}$	19	10-30
41.6%	$\frac{25}{60}$	25	30-50
26.6%	$\frac{16}{60}$	16	50-70

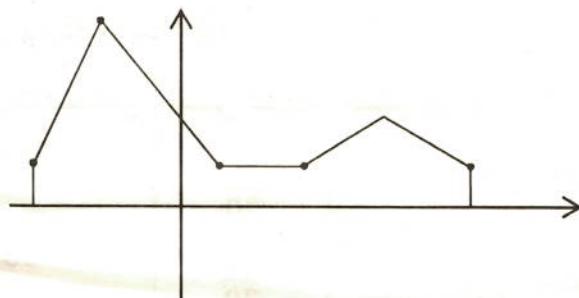
میله اي گراف

که د هری طبقی گراف داسې رسم شي چه هر واحد يي یوه مربع ونښودل شي اومربعگانی یو پر بل کېښودل شي دغه گراف ته میله يي گراف وايي .

مثلاً دخو کلونو دینبی د حاصلاتو گراف یا درنگونو گراف چه هره مربع په یوه رنگ خوښوونکي دلالت وکړي .

دمنکسری کرښی گراف:

داتا گانی د ټکو پواسطه د وضعیه کمیټونو پر مخ وښیو که دغه نقطی په یوه استقامت نه وی او وصل يي کړو منکسر خط لاس ته راځي چه دغه گراف ته د منکسری کرښی گراف وايي



د گسسته يا غېر متصلو داتا گانو اوسط:

داتاگانې جمع کوو او د داتاگانو په شمېر يې ویشود داتاگانو اوسط په لاس راځي. د داتاگانو د تکرار په صورت کې د مکرري داتاگانې په فریکونسي کې ضربوو او جمع کوو يې د داتاگانو په شمېر يې ویشود داتاگانو اوسط په لاس راځي. که د داتاگانو لمرې گروپ په x_1 او فریکونسي يې په f_1 وېښو او اوسط په $\bar{x}$ وېښو نو د اوسط فارمول په لاندې ډول دی

$$\bar{x} = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + \dots + f_n x_n}{f_1 + f_2 + \dots + f_n} = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + \dots + f_n x_n}{n}$$

مثال: د یوه شرکت د عایداتو اندازه په لاندې ډول ده.

دنده	د افغانیو په حساب میاشتنی عاید
رئیس	50000
دوه مرستیالان	40000
منشي	20000
دری متخصصان	30000
پنځه مامورین	25000
دوه خانه سامانه	10000

د شرکت مدیر وایي چه باید اوسط عاید باید 30000 وي ووايست چه دا د عا درسته ده

job	f	x	f × x
رئیس	1	50000	1 × 50000 = 50000
مرستیال	2	40000	2 × 40000 = 80000

منشی	1	20000	$1 \times 20000 = 20000$
متخصصین	3	30000	$3 \times 30000 = 90000$
مأمورین	5	25000	$5 \times 25000 = 125000$
خانه سامان	2	10000	$2 \times 10000 = 20000$

د کارکوونکو شمېر $n = 1 + 2 + 1 + 3 + 5 + 2 = 14$

$$\bar{x} = \frac{50000 + 80000 + 20000 + 90000 + 125000 + 20000}{14}$$

$$= \frac{385000}{14} = 27500$$

د مدیر ادعا سمه نه ده.

د جدول په مرسته د نښتو داتاگانو اوسط:

د هم جنسه شیانو داتاگانو ته نښتې داتاگانې وایي که د دغه داتاگانو فریکونسیانې مختلفې وي هغه داتاگانې چه فریکونسیانې یې نژدې وي په یوه ګروپ کې لیکواو د ګسسته داتاگانو د فارمول په څېر یې اوسط پیدا کوو.

مثال: یوه بزګر الوګانو په بورېو کې واچول او یې وېل چه د بورېو وزن په اوسط ډول اوه منه دي. د ښاروالۍ له خوا بورې بیا وتلل شولې چه نتیجه یې په لاندې جدول کې درج ده.

د بورېو شمېر	د هرې بورې وزن
11	6.5 - 6
14	6.5 - 7
12	7 - 7.5
8	7.5 - 8

د هر ګروپ اوسط د بورېو په شمېر کې ضربوو. اوسط یې پیدا کوو.

د بورېو شمېر	د بورېو وزن
11	6.25

6.75	14
7.25	12
7.75	8

د بوريو وزن $x = 6.25 \times 11 + 6.75 \times 14 + 7.25 \times 12 + 7.75 \times 8$

$$x = 68.75 + 94.5 + 87 + 62 = 312.25$$

$$n = 11 + 14 + 12 + 8 = 45 \text{ شمېر د بوريو}$$

$$\bar{x} = \frac{312.25}{45} = 6.938 \text{ په اوسط ډول د بوريو وزن}$$

د داتاگانو د گېډۍ کولو طريقه

که د داتاگانو د اعضاؤ شمېر سره نژدې و کولای شو چه د داتاگانو څخه گېډۍ جوړه کړو.
لکه:

115	140	118	120	128	143	117	127
115	—	120					
120	—	128					
128	—	143					

وسعت:

د لويي داتا او کوچني داتا تر منځ فاصلي ته وسعت وايي.

د گېډۍ اوږدوالی:

که د داتاگانو وسعت د گېډيو په شمېر وېشل شي د گېډۍ طول يا اوږدوالی لاس ته راځي.

ميله ئي گراف:

که مربعگانی يا مستطيلونه سر په سر کېښودل شي. ميله ئي گراف لاس ته راځي.

د متصلو داتاگانو دسته بندي:

هم جنسه داتاگانو ته متصلی داتاگانى وايي. د دسته بندي لپاره يي هغه داتاگانى چه د واحداتو اندازه يي نژدې وي په يوه گېډۍ کې ليکو.

د (15) ذده کوونکو اوږدوالی په لاندې ډول ليکل شوی دې

153	148	151	138	136
142	131	141	141	139
152	159	139	132	146

پورته داتاگانو څخه گډېدې جوړې کړئ.

د دده کوونکو شمېر	د دده کوونکو دونی اوږدوالی
6	130 - 140
5	140 - 150
4	150 - 160

وزني اوسط یا منځنی قیمت:

هره داتا په مربوطه ضریب کی ضربوو او د داتاگانو په مجموعه یې ویشو.

$$\bar{x} = \frac{w_1x_1 + w_2x_2 + \dots + w_nx_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n}$$

مثال: د ځینو پوهنتونونو نمرې د تورو په اساس ورکول کېږي. لکه A, B, C, D, F چې $A = 4$ او $B = 3$ او $C = 2$ او $D = 1$ او $F = 0$ ارزښت لري یو محصل لاندې لمبرې اخیستې دي.

مضمون	نمری	د کړیدیتونو شمېر
ریاضیات	B	3
فزیک	A	3
کیمیا	C	2
بیولوژي	D	3
ژبه	F	1

د محصل د نمرو اوسط څو دی؟

حل:

مضمون	حرفي نمری	د کړیدیتو شمېر x	عددي لمبری w	$w \cdot x$
ریاضیات	B	3	3	$3 \times 3 = 9$
فزیک	A	3	4	$4 \times 3 = 12$

کيميا	C	2	2	$2 \times 2 = 4$
بيولوژي	D	3	3	$3 \times 3 = 9$
ژبه	F	1	4	$4 \times 1 = 4$

$n = 12$ د کريدیتونو شمېر

$$\bar{x} = \frac{9 + 12 + 4 + 9 + 4}{12} = \frac{38}{12} = 3.16$$

مستطيلي گراف

په مستطيلي گراف کې د مستطيل قاعده د داتاگانو اتصال يا پيوستون راښيي. مساحت د گېډې کثرت راښيي که د گېډيو اوږدوالي مساوي وي نو د مساحتو په عوض کثرت لیکو په دې حالت کې اوږدوالي د کثرت عمودي محور دی.

مثال: په يوه ټولگي کې د دده کوونکو وزن په لاندې ډول دی.

د دده کوونکو وزن په کيلوگرام	40 - 45	45 - 50	50 - 60	60 - 70	70 - 90
د دده کوونکو شمېر	4	6	12	8	8

وزن د (XX) په محور بڼيو او څرنگه چې $5kg$ د ټولو منځ کې مشترک دي نو د (XX) په محور ټول وزنونه په يوه واحد اندازه کوو. (40 - 45) په يو واحد بڼيو. مستطيلو د ارتفاعگانود پيدا کولو لپاره کثرت په اوږدوالي وېشو.

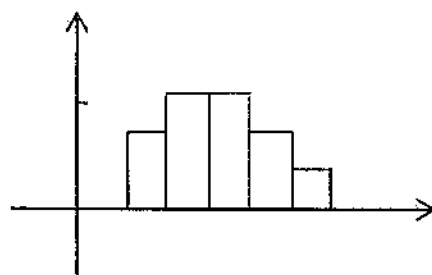
$$40 - 50 \rightarrow \frac{4}{1} = 4 \rightarrow \frac{4}{5} = 0.8$$

$$45 - 50 \rightarrow \frac{6}{1} = 6 \rightarrow \frac{6}{5} = 1.2$$

$$50 - 60 \rightarrow \frac{12}{2} = 6 \rightarrow \frac{12}{10} = 1.2$$

$$60 \rightarrow 70 \Rightarrow \frac{8}{2} = 4 \Rightarrow \frac{4}{10} = 0.4$$

$$70 \rightarrow 80 \Rightarrow \frac{8}{4} = 2 \Rightarrow \frac{2}{20} = 0.1$$



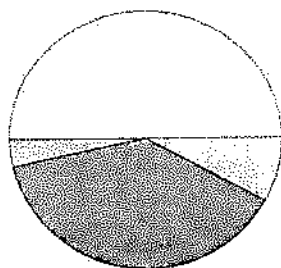
دایروي گراف:

د دایري په مرسته د ناڅاپي متحول د داتاگانو بنودلو ته دایروي گراف وايي. د کثرت د درجي د لاس ته راوړلو لپاره د داتاگانو کثرت د ټولو داتاگانو په شمېر لېکواو په (360°) کې يې ضربوو دهرې گڼه ی مرکزې زاویه لاس ته راځي.

$$\text{د داتاگانو کثرت} \times 360^\circ = \frac{\text{کثرت د درجي له جنسه}}{\text{د ټولو داتاگانو شمېر}}$$

مثال: د یوې مؤسسي د کارکوونکو شمېر (200) کسه دې وظیفې يې د تحصیل د درجې له جنسه وېشلی دي.

مرکزي زاویه د درجي له جنسه	کثرت	د تحصیل درجه
$\frac{5}{200} \times 360^\circ = 9$	5	ډاکټر
$\frac{10}{200} \times 360^\circ = 18$	10	ماستر
$\frac{100}{200} \times 360^\circ = 180$	100	لیسانس
$\frac{45}{200} \times 360^\circ = 81$	45	څوارلسم پاس
$\frac{40}{200} \times 360^\circ = 72$	40	دولسم پاس



ميانه Median

د داتاگانو د تحول وسطي عدد ته ميانه وايي.

لکه: (4 1 5 3 2) د اعدادو د سټ په څير يې ترتيبوو.

(5 4 3 2 1) وسطي عدد يې (3) دې. که د داتاگانو شمېر جفت وي د منځنيو دوه داتاگانو اوسط د داتاگانو ميانه ده. لکه (10 4 3 9 6 2) چه ميانه يې داسې پيدا کيږي. (10 9 4 6 3 2) چه $\frac{4+6}{2} = 5$ يعنې ميانه يې (5) ده.

د تحول ساحه Evolution of field

که د متحول د اوږدوالي تغير په يوه ساحه کې ممکن وي دغه ساحې ته د تحول ساحه وايي.

په ټولنه کې د ساحې وسعت د ټولنې پراگنده گي نيسي. په هره اندازه چه دا توپير کم وي پراگنده گي کمه ده او د ټولنې د وگړو تر منځ نژدېکت زيات دې. که د تحول ساحه صفر وه نو د ټولنې د څېړنې ځانگړتياوې برابري دي او ټولنه متجانسه ده.

مثال: په څلور مياشتنۍ ازموينه کې د دوه دده کوونکو لمبرې په لاندې ډول دي.

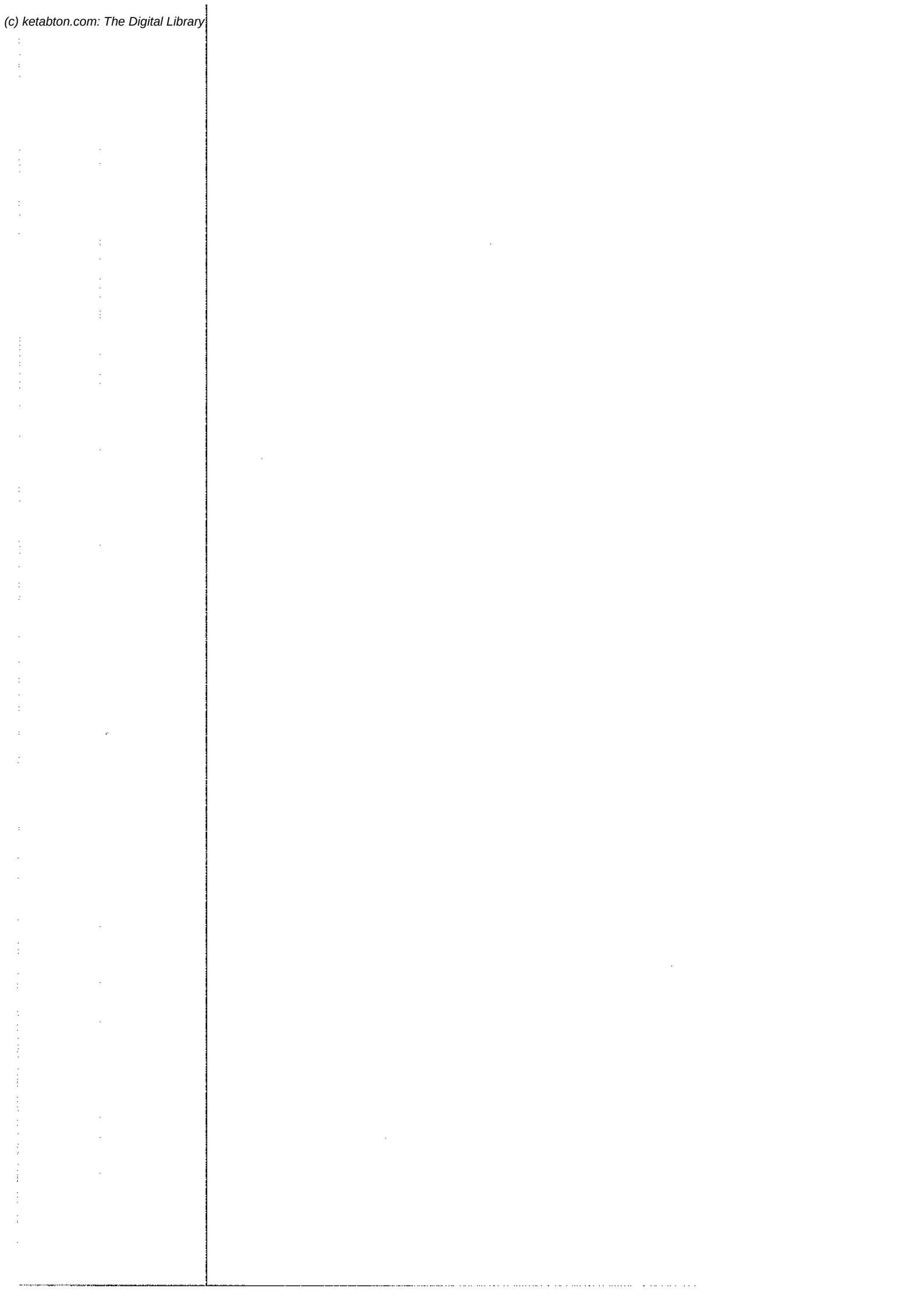
20 21 25 32 33 35 36 37 38 39
20 33 34 35 35 35 34 34 35 39

د دواړو سټونو د تحول ساحه پيدا کړئ او ووايست چه په کومه گډې کې پراگنده گي زياته ده؟

حل: د لوړو سرحدو څخه تپت سرحدونه منفي کوو.

$$39 - 20 = 19$$

د دواړو د تحول ساحه مساوي ده مگر په اول گروپ کې پراگنده گي زياته ده.



د انحراف اوسط Average deviation

د داتاگانو او اوسط د تفاضل اوسط ته د انحراف اوسط وايي.

د داتاگانو د اوسط انحرافونو مجموعه صفر وي نو له همدې امله د اوسط انحرافونو د جمع کولو په وخت کې د هغوی مطلقه قيمتونه جمع کوي او په لاندې ډول جمع کيږي.

$$\text{د انحراف اوسط} = \frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + \dots + |x_n - \bar{x}|}{n}$$

مثال: د (40) تنو شاگردانو لمبرې په لاندې جدول کې راکړشوي دي.

نمرې	کثرت
0 - 10	2
10 - 20	7
20 - 30	4
30 - 40	5
40 - 50	10
50 - 60	12

د انحراف اوسط يې پيدا کړئ؟

$$\bar{x} = \frac{10 + 105 + 100 + 175 + 450 + 660}{40} = \frac{1500}{40} = 37.5$$

f = کثرت	د داتاگانو اوسط	$f \cdot x$	$x - \bar{x}$	$f(x - \bar{x})$
2	5	10	$5 - 37.5 = -32.5$	$2 \times (-32.5) = -65$
7	15	105	$15 - 37.5 = -22.5$	$7(-22.5) = -157.5$
4	25	100	$25 - 37.5 = -12.5$	$4 \times (-12.5) = -50$
5	35	175	$35 - 37.5 = -2.5$	$5 \times (-2.5) = -12.5$
10	45	450	$45 - 37.5 = 7.5$	$10 \times 7.5 = 75$
12	55	660	$55 - 37.5 = 17.5$	$12 \times 17.5 = 210$
$\frac{1}{n} = 40$		1500		

$$f(x - \bar{x}) = -65 - 157.5 - 50 - 12.5 + 75 + 210 = 0$$

ليدل کيږي چه د جمع حاصل يي صفر دې نود انحرافونو د اوسطونو مطلقه قيمت په نظر کې نيسو.

$$\text{د انحرافونو اوسط} = \frac{|-65| + |-157.5| + |-50| + |-12.5| + |75| + |210|}{40}$$

$$\text{د انحرافونو اوسط} = \frac{65 + 157.5 + 50 + 12.5 + 75 + 210}{40} = \frac{570}{40} = 14.25$$

د خوشلعي فريکونسي گراف

د خوشلعي فريکونسي گراف د متصلو داتاگانو د پاره استعمالیږي.

مثلاً که څو کلاسونه ولرو چه سرحدات يي معلوم وي او وغواړو چه گراف يي رسم کړو د هر کلاس مرکز (منځنۍ نقطه) په افقي محور او فريکونسي يي په عمودي محور ښیو.

د کلاس مرکز او فريکونسي د وضعيه کميتونو په مستوي کې يوه نقطه تعينوي دغه نقطې وصلوو منکسر خط لاس ته راځي که د کلاسونو په اول کې $(x_1 - c, 0)$ نقطه او کلاسونو په اخر کې $(x_n + c, 0)$ نقطه اضافه کړو نو د خوشلعي فريکونسي گراف لاس ته راځي.

مثال: په لاندې جدول کې د داتا خوشلعي او مستطيلي گراف رسم کړئ.

$cl =$ د کلاسونو حدود	11 - 16	16 - 21	21 - 26	26 - 31	31 - 36
$f_i =$ مطلقه فريکونسي	3	5	8	7	2
$x_i =$ د کلاسونو مرکز	13.5	18.5	23.5	28.5	33.5

$c = 5$ دی نو د دوه اختياري نقطو د پيدا کولو لپاره په لاندې ډول اجرائت کوو.

$$(x_1 - 5, 0) = (13.5 - 5, 0) = (8.5, 0)$$

$$(x_2 + 5, 0) = (33.5 + 5, 0) = (38.5, 0)$$

داتا په صعودي ډول ترتیبوو. او د یو څخه تر (n) پوری کود ورکود د $(p = 1, 2, 3)$ موقعیت دلاندی رابطی پواسطه پیدا کیږي.

$$C_{QP} = \frac{P \cdot n}{4} + \frac{1}{2}$$

مثال: په (140 100 120 80 85 90) دیتا کی داوولی ربعی او دریمی ربعو مقادیر پیدا کړئ؟

حل:

د دیتا شمېره

80 85 90 100 120 140

د لمړی او دریمی ربعو ځایونه عبارت دي.

$$C_{q_1} = \frac{1 \cdot 6}{4} + \frac{1}{2} = 2$$

$$C_{q_3} = \frac{3 \cdot 6}{4} + \frac{1}{2} = 5$$

$$q_1 = 85 \quad \& \quad q_2 = 120$$

صندوقچه یی گراف:

صندوقچه یی گراف هغه گراف دی چه د نورو گرافونو په نسبت د دېتا تیت والی زیات روښانه کوي د دېتا گراف د لاندی اندازو په بنیاد روښانه کوي.

الف- تر ټولو کوچنی دېتا

ب- لمړی څلورمه

ج- میانه

د- دریمه څلورمه

ج- لویه دېتا

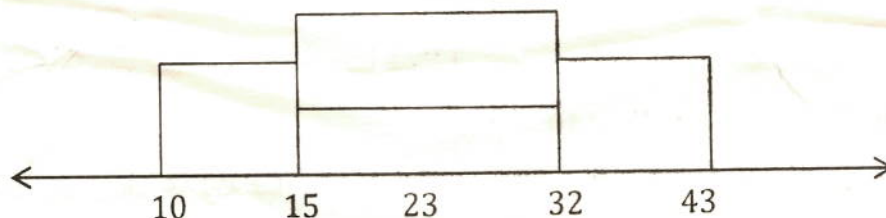
مثال: په یوه ښار کی په (15) ورځو کی د ترافیکي پېښو شمېر په لاندی ډول دې صندوقچه یی گراف ئی رسم کړئ:

12	10	15	23	14	27	16
34	41	43	32	18	25	31

پورتنی داتا په ترتیب لیکو .

10	12	14	15	16	18	23
25	27	31	32	34	41	43

تر ټولو کوچنۍ داتا ($q_1 = 10$) ده او تر ټولو لویه داتا ($q_n = 43$) ده میانه ($med = 23$) ده
لمړۍ ربعه $q_1 = 15$

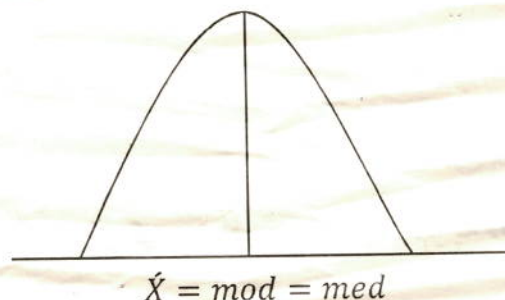


پورتنی گراف صندوقچه یی گراف دی چه 50% داتا د صندوق په داخل کی ده دلمړۍ او
خلورمۍ ربعو په منځ کی ده 25% د 10 او 15 تر منځ ده او 75% د 32 او 43 تر منځ ده.

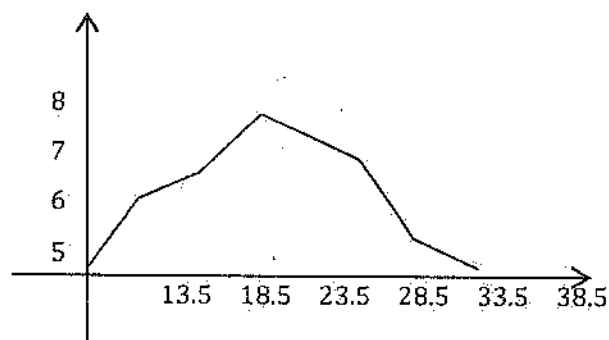
د نارمل منحني د مرکزي ټاکونکو پرتله کول:

نارمل منحني یو متناظر منحني دې چه دیوه زنګ په ډول شکل لري او زیاتی طبعي پېښی د
همدغه منحني په واسطه بنسودل کیږي. اوسط ، میانه او موډ یی په مرکزي برخه کی قرار لري
نوځکه ورته د نارمل منحني ټاکونکي وايي.

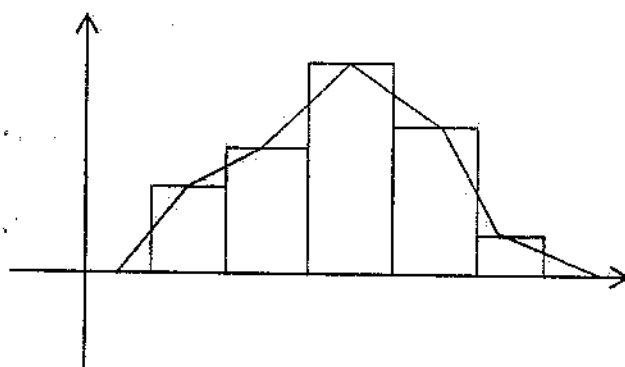
که منحني متناظر وي نو اوسط په میانه منطبق دی او څرنگه چه یوه اعظمي نقطه لري نو ځکه
یی موډ هم د اوسط او میانې سره مساوي دی.



$$\bar{X} = mod = med$$



مستطيلي گراف اود فريکونسي څو ضلعي گراف:



د فريکونسي څو ضلعي دگراف راسونه د فريکونسي داړونده جدول د مستطيلو د پورتنۍ ضلعي په نيمايي منطق دي د فريکونسي څو ضلعي مساحت د مستطيلو د مساحت سره مساوي دي.

د ساقۍ او پاڼې گراف *Grph of stem and wrench*

په دوه رقمي عدد کې د لسيز رقم ساقه او د يويز رقم پاڼه ده.

مثال: د سانتي متر په حساب د شل نوو پيدا شوو ماشومانو د تنۍ اوږدوال په لاندې ډول انتخاب شوی دي.

45	46	47	43	49	40	42	46	45	43
43	43	48	49	47	49	48	49	47	45

پورتنۍ داتاگانۍ په صعودي ډول ترتيب کړئ او څرنگه چه د (4) رقم يعني د لسيز رقم پکې مشترک دی نو داتاگانۍ په لاندې ډول ترتيبوو.

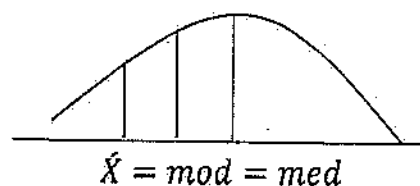
د صفر څخه تر (9) پورې د رقمو تکرار د پانوس شمېر بڼې پورتنی رقمونه په لاندې ډول هم لیکلای شو.

0			
2			
3	3	3	3
5	5	5	
6	6		
8	8		9
9	9	9	

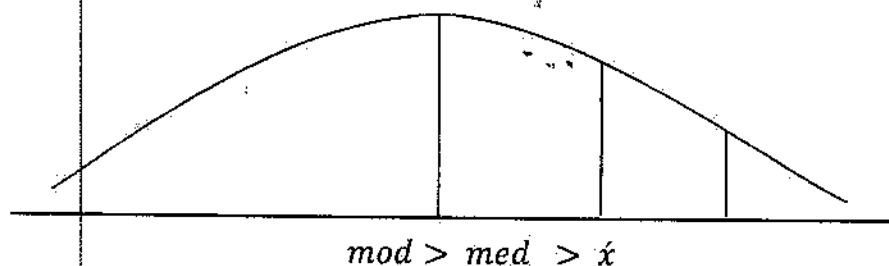
3						9	
3	5		7			9	
3	5	6	7	8		9	
0	2	3	5	6	7	8	9

اوله ربعه د شي 25% دويمه ربعه د شي 50% او دريمه ربعه د شي 75% وي. که داتا په صعودي ډول ترتيب شي د داتا ميانه د (Q_2) سره مساوي ده د داتا داوولۍ نيمايي ميانه (Q_1) ده او د دويمۍ نيمايي ميانه (Q_3) ده.

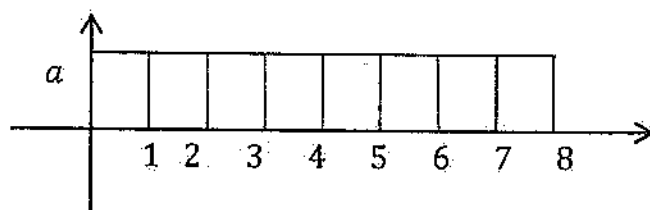
که اوسط اوميانه مساوي وي نو تر اوسط او ميانى د مخه داتاگانى اوداوسط او ميانى د وروسته دېتاگانو سره مساوي دي. او که اوسط د ميانى کيڼى خواته پروت وي نو دهغه داتاگانو شمېر چه د اوسط ښى خواته پرته دي زيات دى تر هغه دېتاگانو دشمېر څخه چه د اوسط چپى خواته پرته دي.



او که اوسط دميانى ښى خواته پروت وي نو دهغه داتاگانو شمېر چه د اوسط چپى خواته پرته دي زيات دېد هغه داتاگانو تر شمېر چه د اوسط ښى خواته پرته دي.



مثال: په لاندې گراف کې اوسط او ميانه پيدا کړئ؟



$$\text{med} = \frac{4 + 5}{2} = \frac{9}{2} = 4.5$$

$$\bar{x} = \frac{a \cdot 1 + a \cdot 2 + a \cdot 3 + a \cdot 4 + a \cdot 5 + a \cdot 6 + a \cdot 7 + a \cdot 8}{a + a + a + a + a + a + a + a} = \frac{36a}{8a}$$

$$\bar{x} = \frac{9}{2} = 4.5$$

رېجي انحراف

رېجي انحراف يوله هغه ټاكونكو څخه دی چه د دېټا ټيټ والی بشکاره کوي.
مثلاً 50% ټولنه د $Q_3 - Q_1$ په منځ کی پرته ده په هره اندازه چه دا فاصله لري په همغه اندازه دېټا نژدی وي یعنی ټيټوالی يې کم وي.
کله کله دڅلورمو انحراف په $Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$ شکل ښيي چه دی ته د څلورمی د نيمايي لمن وايي.

مثال: د لاندی عددونو د څلورمو انحراف پيدا کړئ.

20	22	22	23	24	25	29	30	31	35	36
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

$$C_{Q_n} = \frac{P \cdot n}{4} + \frac{1}{2}$$

$$C_{Q_3} = \frac{3 \cdot 11}{4} + \frac{1}{2} = \frac{33 + 2}{4} = \frac{35}{4} = 8.75$$

$$Q_3 = 30.75$$

$$C_{Q_1} = \frac{1 \cdot 11}{4} + \frac{1}{2} = \frac{11 + 2}{4} = \frac{13}{4} = 3.25$$

$$Q_1 = 22.25$$

$$Q = Q_3 - Q_1 = 30.75 - 22.25 = 8.5$$

واریانس (Variance):

واریانس په لغت کی اختلاف ته وايي.

اوپه اصطلاح کی که څو داتاگانې ولرو دهری داتا اوسط پيدا کړود داتاگانواو دهغوی د اوسطونود تفاضل د مربعگانود مجموعی اوسط ته واریانس وايي.
د انحرافونو د مربعگانو مجموعه عبارت ده:

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2$$

پورتني مجموعه په (n) ويشواو په (s^2) يي بنيو. واريانس لاس ته راځي.

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

د واريانس د پيدا کولو لپاره د لاندي فارمول څخه هم گټه اخلي.

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \bar{x}^2$$

ثبوت:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i = n\bar{x}$$

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2)}{n} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \frac{\sum_{i=1}^n 2x_i\bar{x}}{n} + \frac{\sum_{i=1}^n \bar{x}^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - 2\bar{x} \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} + \frac{n\bar{x}^2}{n} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - 2\bar{x} \cdot \bar{x} + \bar{x}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \bar{x}^2 \end{aligned}$$

مثال: د لاندي د پټا واريانس د دواړو فارمولو په مرسته پيدا کړئ

1 5 6 7 9

الف: د $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}$ د فارمول پواسطه:

$$\bar{x}' = \frac{1 + 5 + 6 + 7 + 9}{5} = \frac{28}{5} = 5.6$$

$$s^2 = \frac{(1 - 5.6)^2 + (5 - 5.6)^2 + (6 - 5.6)^2 + (7 - 5.6)^2 + (9 - 5.6)^2}{5}$$

$$s^2 = \frac{(-4.6)^2 + (-0.6)^2 + (1.6)^2 + (2.6)^2 + (4.6)^2}{5}$$

$$s^2 = \frac{21.16 + 0.36 + 2.56 + 6.76 + 21.16}{5} = \frac{52}{5} = 10.4$$

ب: د $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \bar{x}^2$ فارمول څخه استفاده کول:

$$s^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2}{5} - \bar{x}^2$$

$$s^2 = \frac{1 + 25 + 36 + 49 + 91}{5} - (5.6)^2 = \frac{192}{5} - 31.36 = 38.4 - 31.36$$

$$s^2 = 7.04$$

يادونه:

که دڅو کلاسو د پټاګانې $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ وي او فریکونسي ګانې يې په لاندې ډول وي. $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$ واريانس يې د لاندې فارمول پواسطه پيدا کيږي.

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n f_i} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i (x_i - \bar{x})^2}{N}$$

$$N = \sum_{i=1}^n f_i$$

د متحول د مربع واحد د واريانس واحد دی.

معياري انحراف (مطلق تیتوالی):

د واريانس مربع جذر ته معياري انحراف وايي په (s) سره يې نښي او د لاندې فارمول پواسطه پيدا کيږي.

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}\right)^2}$$

واحد يې د متحول واحد دی.

ثبوت:

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2\bar{x}x_i + \bar{x}^2) = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x} \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n \bar{x}^2 \right) \\ &= \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - 2n\bar{x}^2 + n\bar{x}^2 \right) = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2 \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{n} \left\{ \sum_{i=1}^n x_i^2 - n \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \right)^2 \right\} = \frac{1}{n} \left\{ \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n x_i)^2}{n} \right\}$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \right)^2 \Rightarrow s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \right)^2}$$

مثال: د (5) ناروغانو د بدن د حرارت درجه په لاندې ډول راکړشوی ده.

38 39 39 40 41

د حرارت د درجې معیاري انحراف یې پیدا کړئ.

حل:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{38 + 39 + 39 + 40 + 41}{5} = \frac{197}{5} = 39.4$$

$$s^2 = \frac{(38 - 39.4)^2 + (39 - 39.4)^2 + (39 - 39.4)^2 + (40 - 39.4)^2 + (41 - 39.4)^2}{5}$$

$$s^2 = \frac{(-1.4)^2 + (-0.4)^2 + (-0.4)^2 + (0.6)^2 + (1.6)^2}{5}$$

$$s^2 = \frac{1.96 + 0.16 + 0.16 + 0.36 + 2.56}{5} = \frac{5.2}{5} = 1.04$$

$$s^2 = 1.04 \Rightarrow s = \sqrt{1.04} = 1.0198$$

$$s = 1.0198$$

پاملرنه:

د فریکونسیو د جدول څخه معیاري انحراف په تقریبي ډول په لاندې ډول هم لاس ته راځي.

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n f_i}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n f_i x_i^2}{\sum_{i=1}^n f_i} - \bar{x}^2}$$

چه $\bar{x}$ د دېټا اوسط، x_i د کلاس مرکز او f_i د کلاس فریکونسي ده.

د بدلون ضریب یا نسبي پراگنده ګي:

د بدلون یا تغیر ضریب د معیاري انحراف او مطلق اوسط نسبت دی
مطلق اوسط واحد نلري.

$$\text{معیاري انحراف} \\ \text{اوسط} = \text{د بدلونونو یا تغیراتو ضریب}$$

$$C \cdot V = \frac{S}{\bar{x}}$$

که د تغیراتو ضریب په 100 کې ضرب کړو د تحول ضریب لاس ته راځي.

$$C \cdot V = 100 \cdot \frac{S}{\bar{x}}$$

د بدلون ضریب د مثبتو دېټاګانو لپاره دی. که دېټاګانې مساوي وي د بدلون ضریب صفر دی. که ټولې دېټاګانې په یوه مثبت عدد کې ضرب شي د بدلون ضریب تغیر نه کوي.

که دهرې دېټاسره یو مثبت عدد ورزیات شي د بدلون ضریب کوچنی کیږي.

مثال: د (1, 3, 5) دېټا د بدلون ضریب محاسبه کړئ؟

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{1+3+5}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

$$s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{(1-3)^2 + (3-3)^2 + (5-3)^2}{3} = \frac{(-2)^2 + 0^2 + 2^2}{3}$$

$$s^2 = \frac{4+4}{3} = \frac{8}{3} = 2.67$$

$$\sqrt{s^2} = \sqrt{2.67} \Rightarrow s = 1.6$$

$$c \cdot v = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{1.634013464}{3} = 0.545$$

دویم مثال: د تلویزون د تصویري لامپونو تولیدوونکې د (A) او (B) دوه ډوله لامپونه تولیدوي د (A) متوسط عمر (1495) ساعته او د (B) متوسط عمر (1875) ساعته دي. معیاري انحرافونه یې په ترتیب سره (280) او (310) دي. د کوم لامپ د ضریب بدلون زیات دی.

حل:

$$C \cdot V_A = \frac{S_A}{\bar{x}_A} = \frac{280}{1495} \cdot 100 = 18.7\%$$

$$C \cdot V_B = \frac{310}{1875} \cdot 100 = 16.5\%$$

څرنگه چې $C \cdot V_A > C \cdot V_B$ دی نو لامل پ ډېره پراکنده کي نري ولی ټينگښت يي کم دي.

په نورمال منحني کې ټيټوالی:

د نورمال منحني په دواړو خواو کې د $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$ او يا د $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s)$ پواسطه پراکنده کي يا ټيټوالی پيدا کيږي.

مثال: د يوې موسسې د معاش اوسط (12500) او معياري انحراف يي (700) دی.

الف: په نورماله توزيع کې د فيصدي په نظر کې نيولو سره د معاش توزيع تشرېح کړئ؟

ب: ايا وېلاى شى چې (14000) افغانى معاش غېر عادي معاش دی؟

حل: لمړې $\bar{x} \pm s$ او $\bar{x} \pm 2s$ او $\bar{x} \pm 3s$ قيمتونه په لاس راوړو.

فيصدي	فاصله د افغانيو له مخى	فاصله د (s) له مخى
68%	11800 - 13200	$\bar{x} \pm s$
96%	11100 - 13900	$\bar{x} \pm 2s$
99.6%	10400 - 14600	$\bar{x} \pm 3s$

$$\bar{x} = \frac{11800 + 11100 + 10400 + 13200 + 13900 + 14600}{6}$$

$$= \frac{75000}{6} = 12500$$

$$14000 - \bar{x} = 14000 - 12500 = 1500$$

$$\frac{1500}{700} = 2.14$$

نو (14000) افغانى معاش غېر عادي معاش دی ځکه چې د (2s) داندازى څخه زيات او هم د ($\bar{x}$) داندازى څخه ډېر دي.

د نورماله توزیع مشخصات:

د نورمال په دواړو خواو کې د نورمال په نسبت د منحني د ټیټوالي، جگوالي او نژدېکت عامل ته شاخص وايي. شاخص په دوه ډوله دي.

1- د خلمېدلو شاخص *Skewness*:

هغه توزیع چه د اوسط په دواړو خواو کې متناظره نه وي خلمېدل نومیږي. د لاندې دوو ضریبونو پواسطه ښودل کیږي.

الف- د خلمېدلو ضریب: د خلمېدلو ضریب هغه شاخص دی چه د خلمېدلو د میزان د ټاکلو لپاره استعمالیږي. فارمول یې په لاندې ډول دی.

$$\alpha_3 = \frac{\frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^3}{s^3}$$

که $\alpha_3 = 0$ وي نو توزیع متناظره ده.

که $\alpha_3 > 0$ وي د منحنی د توزیع خلمېدل مثبت دي *Positive Skewness* یعنی خلمېدل یې ښی خواته دي.

او که $\alpha_3 < 0$ وي د منحنی د توزیع خلمېدل منفي *Negative Skewness* دي یعنی چپي خواته خلمیږي. که چېرته د کثرت جدول موجود وي خلمېدلو (عدم تناظر) یې د $\alpha_3 = \frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^3}{\sum s^3}$ فارمول پواسطه پیدا کیږي.

ب- د پیرسون د خلمیدو ضریب: د پیرسون د خلمېده گي ضریب په لاندې ډول دی.

$$sk(p) = \frac{3(\bar{x} - med)}{s}$$

2- د پرسوب *kurtosis* شاخص:

دا شاخص ښیي چه څه وخت منحنی جگوالی او څه وخت ټیټوالی لري فارمول یې په لاندې ډول دی:

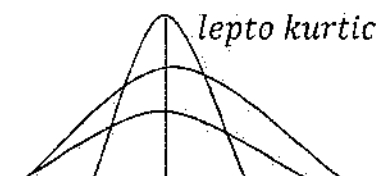
$$\alpha_4 = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4}{s^4}$$

که د کثرت جدول موجود وي نو د پرسوب فارمول په لاندې ډول دی:

$$\alpha_4 = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_i (x_i - \bar{x})^4}{s^4}$$

په دی فارمول کې (s) معیاري انحراف دی. دغه شاخص د پرتله کېدلو لپاره استعمالیږي. د توزیع په ځای او پراگنده کې پوری اړه نلري.

مثال: لاندې شکل په پام کې ونیسئ: د ضریب درې ډوله خلمېدل او پرسوب بڼې:



حل: په نورمالي توزیع کې $\alpha_4 = 3$ دی ځکه که $\alpha_4 > 3$ شي نو پرسوب یې د نورمال منحني څخه ډېرېږي او که $\alpha_4 < 3$ وي نو پرسوب یې کم دی.

خو متحول ته ټولنې:

که په یوه کلاس کې یوازې د شاگردانو دوئې په باب خبرې کېږي نو په دغه ځای کې متحول یو دی او که د شاگردانو د چاغښت په باب هم خبرې وشي نو په دې صورت کې متحولونه دوه کېږي. د دغسې متحولونو تر منځ ریاضیکي اړیکې د قایمو مختصاتو په سیستم کې جوړېږي. لمړی د متحولونو معادلی جوړوو بیا د متحولونو په باب معلومات په مستوي کې په نڅېنه کوو او وصلوو یې.

مثال: یو متخصص د غذایي موادو تاثیر په یو شمېر موږکانو باندې وڅېړل. دغذا تر تطبیق دمخه یې د هر موږک وزن اندازه کړ او بیا یې د عملیې تر تطبیق وروسته د هر موږک وزن اندازه کړ او لاندې دېټا گانې یې په لاس راوړلې:

(1.8), (2.3), (1.7), (3.5), (2.4)

په هره جوړه کې لمړۍ مختصه د موږکانو د غذا تر تطبیق دمخه وزن او دویمه مختصه د غذایي موادو تر تطبیق وروسته وزن دی.

د موږگانو شمېر	1	2	3	4	5
د موږگانو لمړنۍ وزن	1	2	1	3	2
د غذائي موادو تر تطبيق وروسته د موږگانو وزن	8	3	7	5	4

پورتنۍ جدول په ستوني ډول جوړ کړئ:

د غذائي رژيم تر تطبيق وروسته د موږگانو وزن	د موږگانو لمړنۍ وزن	د موږگانو شمېر
8	1	1
3	2	2
7	1	3
5	3	4
4	2	5

پورتنۍ دېټاگانۍ دوه متحوله ټولنه معرفي کوي.

د پراگنده گۍ گراف *Scatter Diagram*:

د دېټا د اندازه کولو لپاره په يوه مستوي کې پاشل شوي نقطې د پراگنده گراف په نوم ياديږي.

لاندې مرتبې جوړې راڅرگندي دي:

$$(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)$$

پورته دېټا د شېر او خط دېټا ده. که سکه پورته خواته وغورزول شي او د شېر مخ کېښته خواته وي نوډ (y) په محور يو ډېرېږي.

د موږگانو د غذائي رژيم دېټا په لاندې ډول ده:

$$(2, 4), (1, 8), (2, 3), (3, 5), (1, 7)$$

په دغه دېټا کې د هرې نقطې تابع بېله ده. نوله همدغه جهتته څو متحوله ټولنه ورته وائي.

پېوستون او د پېوستون ضريب:

د يوه مستقيم او نقطو تر منځ د فاصلې د پيدا کولو فارمول ته د پېوستون ضريب وائي او په (r) سره يې نيسي. او د لاندې فارمول پواسطه پيدا کېږي.

$$r = \frac{\frac{\sum xy}{n} - \bar{x}\bar{y}}{s_x s_y}$$

لاندی دیتا دمورگانو دغذائی رژیم دیتا ده.

دمورگانو شمېر	لمړنی وزن (x)	وروستنی وزن (y)	xy
1	1	8	8
2	2	3	6
3	1	7	7
4	3	5	15
5	2	4	8
	$\sum 9$	$\sum 27$	$\sum 44$

دمورگانو دغذائی رژیم د وزنونو ترمنځ دپیوستون ضریب محاسبه کړئ؟

لمړي وزنونه په (x) او وروستني وزنونه په (y) ښیو دمورگانو شمېر $n = 5$ دی.

$$\bar{x} = \frac{9}{5} = 1.8, \quad \bar{y} = \frac{27}{5} = 5.4$$

$$s_x^2 = \frac{(1-1.8)^2 + (2-1.8)^2 + (1-1.8)^2 + (3-1.8)^2 + (2-1.8)^2}{5} = \frac{0.64 + 0.04 + 0.64 + 1.44 + 0.04}{5} = \frac{2.8}{5} = 0.56$$

$$s_y^2 = \frac{(8-5.4)^2 + (3-5.4)^2 + (7-5.4)^2 + (5-5.4)^2 + (4-5.4)^2}{5} = \frac{6.76 + 5.76 + 2.56 + 0.16 + 1.96}{5} = \frac{17.2}{5} = 3.44$$

$$\begin{aligned} \bar{xy} &= \frac{\sum x + \sum y}{n} \\ &= \frac{(1 \cdot 8) + (2 \cdot 3) + (1 \cdot 7) + (3 \cdot 5) + (2 \cdot 4)}{5} \\ &= \frac{8 + 6 + 7 + 15 + 8}{5} = \frac{44}{5} = 8.8 \end{aligned}$$

د پیوستون ضریب په لاندی ډول لاس ته راځي.

$$r = \frac{8.8 - (1.8)(5.4)}{\sqrt{0.56}\sqrt{3.44}} = \frac{8.8 - 9.72}{1.36} = \frac{-0.92}{1.36} = -0.67$$

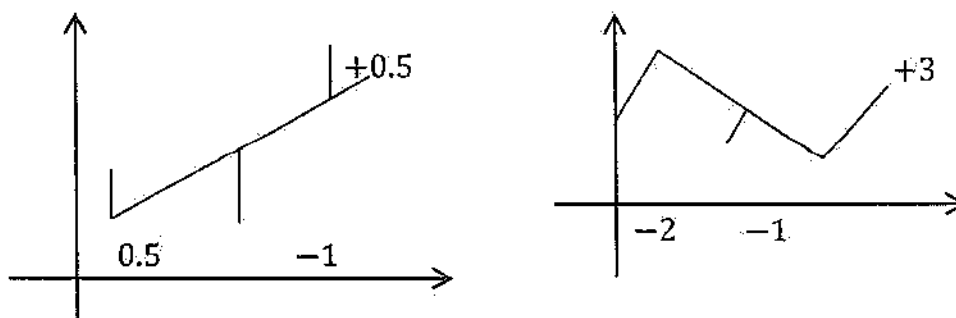
د خطي مېلان معادله:

$y = ax + b$ د مستقيم خط معادله ده. چه د مستقيم خط مېلان دی که $a > 0$ وي کرښه متزايدة ده. او که $a < 0$ وي نو کرښه متناقصه ده که (x, y) جوړه د $y = ax + b$ په معادله کې صدق وکړي.

نویځه په خط پرته ده. که د نقطې په مستوي داسې پاشلی وي چه کرښی ته نژدی وي نو د پیوستون ضریب به (-1) او $(+1)$ ته نژدی وي که یوه داسې کرښه چه معادله یې $y = ax + b$ وي د ټکوله منځه داسې تېره کړو چه ټولو ټکو ته نژدی وي نو د دغه کرښی د ترسیم لپاره باید یوه داسې معادله جوړه کړو د فارمول تر جوړولو دمخه لاندې مثال په نظر کې نیسو.

x	1	5	9
y	6	5	7

د دغه دېټا لپاره لاندې شکلونه رسموو اود کرښو خطاوی یې د مشاهدې څخه معلوموو.



په پورته دواړو حالتونو کې د کرښو د خطاگانو الجبري مجموعه صفرده.

د الف حالت: $(-2) + (-1) + 3 = 0$ د کرښی د خطاگانو الجبري مجموعه

د ب حالت: $(0.5) + (-1) + 0.5 = 0$ د کرښی د خطاگانو الجبري مجموعه

څرنگه چه په دواړو حالتو د جمعې حاصل صفر دی نو مناسبه کرښه نه معلومېږي. نو دپاره ددی چه مثبت او منفي علامی یو اوبل دمنځه یونسي نو وروسته تر مربع کولو یې جمع کوو.

$$(-2)^2 + (-1)^2 + (3)^2 = 14$$

$$\text{د خطاگانو د دویم توان جمع} = (0.5)^2 + (-1)^2 + (0.5)^2 = 1.5$$

هغه کرښه چه د مربعگانو مجموعه يي (1.5) مناسبه کرښه ده دغسی کرښو ته ریگریشن کرښی وایی. د رگریشن او مشاهداتو توپیر په وښو نو د دویم توانونو د لا کوچني والي په خاطر لیکو.

$$\text{د خطاگانو د دویمو توانونو مجموعه} = \sum (y - \bar{y})^2 = \sum \{y - (ax + b)\}^2$$

$$= \sum (y - b - ax)^2$$

$$= (ax_1 + b - y_1)^2 + (ax_2 + b - y_2)^2$$

په دې حالت کی (x) او (y) ثابت عددونه دي (a) او (b) متحولین دي

$$b = \frac{\text{د } y \text{ معیاري انحراف}}{\text{د } x \text{ معیاري انحراف}} \times \text{د پیوستون ضریب}$$

د (a) او (b) د محاسبی دغه لار د لږکیو مربعگانو د تگلاری په نوم یادېږي.

نتیجه: د ریگریشن کرښه هغه کرښه ده چه دیوه متحول د مقدار د معلومولو دبل

متحول د مقدار څخه استفاده کېږي.

مثال: لاندی دېتاپه نظر کی ونیسئ.

x	1	2	3	4	5
y	4	3	2	1	0

د ریگریشن کرښه نظر ته پیدا کړئ؟

حل: څرنگه چه

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{4 + 3 + 2 + 1 + 0}{5} = \frac{10}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

$$s_x^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{(1 - 3)^2 + (2 - 3)^2 + (3 - 3)^2 + (4 - 3)^2 + (5 - 3)^2}{5}$$

$$= \frac{(-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2}{5} = \frac{4 + 1 + 0 + 1 + 4}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

$$\sqrt{s_x^2} = \sqrt{2} \Rightarrow s_x = \sqrt{2}$$

$$s_y^2 = \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n} = \frac{(4-2)^2 + (3-2)^2 + (2-2)^2 + (1-2)^2 + (0-2)^2}{5}$$

$$= \frac{4 + 1 + 0 + 1 + 4}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

$$s_y^2 = 2 \Rightarrow \sqrt{s_y^2} = \sqrt{2} \Rightarrow s_y = \sqrt{2}$$

$$\frac{\sum xy}{n} = \frac{(1 \cdot 4) + (2 \cdot 3) + (3 \cdot 2) + (4 \cdot 1) + (5 \cdot 0)}{5}$$

$$\frac{\sum xy}{n} = \frac{4 + 6 + 6 + 4 + 0}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

$$r = \frac{\frac{1}{n} \sum xy - \bar{x}\bar{y}}{s_x \cdot s_y} = \frac{4 - 3 \cdot 2}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$b = \bar{y} - b\bar{x} = 2 - b \cdot 3 \Rightarrow 4b = 2 \Rightarrow b = 0.5$$

$$a = r \frac{s_y}{s_x} = -1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -1$$

$$y = ax + b = -x + 0.5$$

د احتمال د تابع توزیع

هغه تصادفي متحول چه په احصائیه او احتمالاتو کی څېړل کیږي. عبارت د هغه تابع څخه دی چه د تعریف ناحیه یې نمونه یې فضاء او د قیمتونو سیټ یې د حقیقي اعدادو سیټ وي.

که $\{x_n, f(x_n)\}_{n=1,2,3,4,\dots}$ ولرو نو لیکو چه

$$(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)) \dots (x_n, f(x_n))$$

دغه مرتبو جوړو ته مجزا (گسسته) احتمال تابع وایي.

د تجمعي او پیوسته احتمال تابع د $F(x) = P(X \leq x)$ په شکل لیکل کیږي.

که چېرې $f(x)$ د احتمال تابع او (x) تصادفي متحول وي په دی صورت کی ددی احتمال چه (x) د (k_1) او (k_2) په منځ کی وي دلندی رابطی سره برابر دی.

$$P(k_1 \leq x \leq k_2) = \int_{k_1}^{k_2} f(x) dx$$

که چېرې (x) پیوسته ناڅاپي متحول وي او $(k_1 < k_2)$ وي په دی صورت کی لیکو چه

$$P(k_1 \leq x \leq k_2) = F(k_2) - F(k_1)$$

که چېرې ناڅاپه مجزا (گسسته) متحول وي په دی حالت اوسط (Expected Value) د تصادفي مجزا متحول چه د $E(x)$ په شکل ښودل کیږي. دلندی رابطی سره برابر دی

$$E(x) = x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + \dots + x_n f(x_n) = \sum_{i=1}^n x_i f(x_i)$$

$E(x)$ د (x) اوسط دی په $(\bar{x})$ سره هم ښودل کیږي که (x) تصادفي گسسته متحول وي په دی صورت کی د (x) وریانس چه د (s^2) په شکل ښودل کیږي دلندی رابطی سره برابر دی

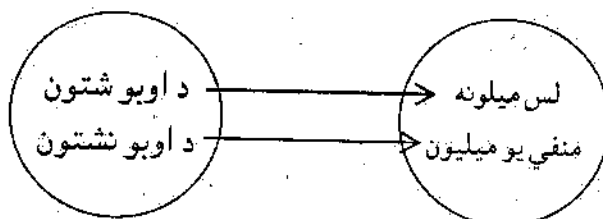
$$s^2 = \sum_{i=1}^n [x_i - E(x_i)]^2 f(x_i)$$

مثال: یو شخصي شرکت غواړي د یو غونډۍ په سر یوه څاه وکني د اوبو څاه په یو میلیون افغانۍ تماميږي. که څاه اوبه وکړي د شرکت مالک لس میلیون افغانۍ اخلي او که اوبه ونه کړي یو میلیون تاوان ورکوي.

الف: دا موضوع د یو تابع په شکل وښیئ.

ب: که د اوبو احتمال (0.2) وي او د اوبو د نه ورکولو احتمال (0.8) وي په دې صورت کې د احتمال تابع، اوسط (Expected Value)، وریانس او د تصادفي متحول معیاري انحراف پیدا کړئ؟

د الف حل:



د ب حل: تصادفي متحول، د احتمال تابع، اوسط، وریانس، او معیاري انحراف په لاندې جدول کې ښودل شوي دي.

تصادفي متحول	د تابع احتمال	اوسط	د تصادفي متحول د مربعاتو انحراف د تصادفي متحول له اوسط څخه	واریانس	معیاري انحراف
x_i	$f(x_i)$	$E(x) = \sum x_i f(x_i)$	$[x_i - E(x)]^2$	$s^2 = [x_i - E(x)]^2 f(x_i)$	s
-1 10	0.8 0.2	$-1 \cdot 0.8 = -0.8$ $10 \cdot 0.2 = 2$	$(-1 - 1.2)^2 = 4.84$ $(10 - 1.2)^2 = 77.44$	$4.84 \cdot 0.8 = 3.872$ $77.44 \cdot 0.2 = 15.488$	4.4
	0.1	1.2		$\sum s^2 = 19.360$	

د دوه جمله يي توزيع او د برنولي آزماینښت:

د احتمال دوه جمله يي توزيع يوه مجزا (گسسته) توزيع ده چه د مختلفو پېښود توصیف لپاره استعمالېږي.

د برنولي ناڅاپي آزماینښت په برياليتوب او نابرياليتوب په دوه دستودسته بندي کېږي.

د برنولي توزيع کولای شوچه په $P(x = m) = P^m(1 - P)^{1-m} = P^m \cdot q^{1-m}$ ښو وښيو. (P) د برياليتوب او $q = 1 - P$ د نابرياليتوب احتمال دی.

که يو آزماینښت (n) ځله تکرار شي ترادف لاس ته راځي. چه دهر آزماینښت د برياليتوب احتمال په (P) او د نابرياليتوب احتمال په (q) ښو (n) ځله آزماینښت څخه د (m) ځلي برياليتوب احتمال عبارت دی له:

$$P(x \leq m) = \binom{n}{m} P^m q^{n-m}, 0 \leq m \leq n$$

د دوه جمله يي دتوزيع اوسط په $\bar{x} = np$ او معياري انحراف يي په $s = \sqrt{npq}$ ښودل کېږي.

مثال: د شکرې د مرض څخه د يوه مريض د جوړېدلو احتمال (0.4) دی که چېرته د ناروغانو شمېر (15) وي څومره احتمال شته چه پنځه تنه ښه شي او يا د (3) څخه تر (4) تنو پورې جوړ شي.

حل:

$$n = 15, \quad m = 5, \quad P = 0.4, \quad q = 0.6$$

$$P(m = 5) = \binom{n}{m} P^m \cdot q^{n-m} = \binom{15}{5} (0.4)^5 \cdot (0.6)^{15-5}$$

$$= \frac{15!}{5!(15-5)!} \times 0.01024 \cdot 0.00604661760 = \frac{360360}{120} \cdot 0.00006191$$

$$= \frac{22.3098876}{120} = 0.1859$$

$$P(3 \leq m \leq 4) = \sum_{i=3}^4 \binom{15}{i} (0.4)^i (0.6)^{15-i}$$

$$= (3^{15})(0.4)^3(0.6)^{15-3} + (4)^{15}(0.4)^4(0.6)^{15-4}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{15!}{3!(15-3)!} \cdot (0.064)(0.6)^{12} + \frac{15!}{4!(15-4)!} \cdot (0.0256)(0.6)^{11} \\
&= \frac{2730}{6} (0.000139264) + \frac{3270}{24} (0.0000928512) = \frac{0.38019072}{6} + \frac{0.3036}{24} \\
&= 0.063365 + 0.012650 = 0.07601
\end{aligned}$$

د پواسن د احتمال توزیع:

د پواسن د احتمال د توزیع فارمول دا $P(x = m) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^m}{m!}$ دی $\lambda = n$ او $e = 2.718281 \dots$ دی.

مثال: (200) کسانو د طیارې تېکټ اخيستی دی که د مسافرینود نه راتگ احتمال (0.01) وي ددی احتمال چه (3) کسه رانشي څو دي؟
حل:

$$\begin{aligned}
n &= 200, \quad P = 0.01 \\
P(x = m) &= \frac{e^{-\lambda} \lambda^m}{m!}, \quad \lambda = np = 200 \cdot 0.01 = 2 \\
P(3) &= \frac{(2.71828)^{-2} \cdot 2^3}{3!} = \frac{1}{(2.71828)^2} \cdot 8 = \frac{8}{7.389046158} \\
&= \frac{8}{44.33427695} = 0.180447287
\end{aligned}$$

دا احتمال د دوه جمله يي په فارمول محاسبه کوو.

$$\begin{aligned}
P(x = m) &= \binom{n}{m} P^m q^{n-m} \\
\left. \begin{array}{l} n = 200 \\ P = 0.01 \end{array} \right\} &\Rightarrow q = 0.09 \\
P(x = m) = P(3) &= \binom{200}{3} (0.01)^3 (0.09)^{200-3} \\
&= \frac{200!}{3!(200-3)!} (0.01)^3 (0.09)^{197} = 0.1814
\end{aligned}$$

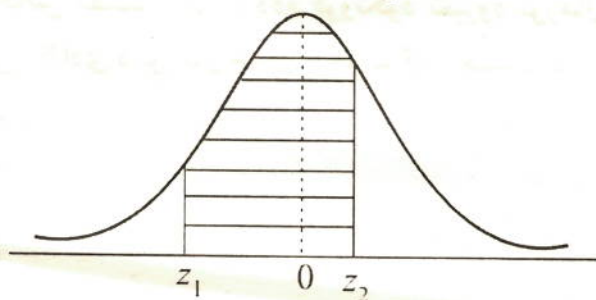
د دواړو فارمولو جوابونه معادل دي.

د جدول د جوړولو شکل د احصائیوي دېټا د سټنډرډ کولو پواسطه حل کړو.

د $z = \frac{x - \bar{x}}{s}$ چه (z) د سټنډرډ نورمال متحول او منحني ته د سټنډرډ نورمال منحني يا د نورمال احتمال منحني په نوم ياديږي. د نورمال منحني او افقي محور تر منځ فاصله د واحد سره برابره وي.

لاندې مساحت د منحني د يوې برخې مساحت دی او $z = \frac{x - \bar{x}}{s}$ سره يې تړ بدلولو وروسته په لاندې ډول وښیو.

$$f(z_1 < z < z_2) = \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} dx = \int_{z_1}^{z_2} N(z, 0, 1) dz$$



د سټنډرډ نورمال د توزیع احتمال د جدول د استعمال له لارې کولای شو. د جدول په عمودي ستون د (z) د مقدار دوه لمړي رقمونه د اعشاریي د علامې دواړو خواو ته رقمونه د منحني ارتفاع رابښي او پورتنی سطر د اعشاریي د علامې سلیز رقم د منحني دواحد قاعده رابښي.

مثال: که $(z = 1.56)$ وي د منحني مساحت پیدا کړئ؟

حل: د (z) په ستون کې (1.5) او په سطر کې (0.06) پیدا کوو. گورو چه د (1.5) د عدد په کرښه او د (0.06) د عدد په ستون کې واقع دی (0.9406) دی چه همدغه د منحني مساحت دی.

لمړی مثال: د جوسو د بوتلونو دستگاه داسې تنظیم شوی ده چه که (952) ملي لېتره مایع په بوتل کې واچوي معیاري انحراف يې (4) ملي لېتره کیږي که مایع د (952) او (956) ملي بټرو تر منځ وي معیاري انحراف يې څو دی؟

حل: لمړې د له جنسه پیدا کوو.

یادداشت:

که د پواسن په فارمول کې د (λ) سره (t) ضرب شي په یوه ټاکلي وخت کې د ورتللو شمېر احتمال رانېسي.

$$P(x = m) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^m}{m!}$$

مثال: که په یوه ساعت کې د یوه بانک د مراجعینو په متوسط ډول وي ددی احتمال چه څلور تنه به په لمړیو دریو دقیقو کې راغلي وي څومره وي؟

حل:

$$\lambda = 60, \quad t = \frac{3}{60} = \frac{1}{20}$$

$$m = 4, \quad \lambda t = 60 \cdot \frac{1}{20} = 3$$

$$\begin{aligned} P(m = 4) &= \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^m}{m!} = \frac{e^{-3} \cdot 3^4}{4!} = \frac{(2.71828)^{-3} \cdot 3^4}{4!} \\ &= \frac{1}{(2.71828)^3 \cdot 81} = \frac{81}{20.0854} = \frac{1 \cdot 81}{24 \cdot 20.0854} = \frac{27}{8 \cdot 20.0854} \\ &= \frac{27}{160.6832} = 0.168032 \end{aligned}$$

د نورمال توزیع:

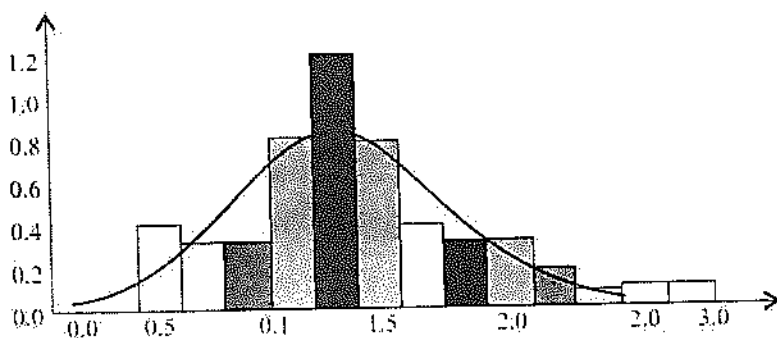
د نورمال د توزیع ریاضیکي معادله چه د $f(x)$ احتمال توزیع تابع ښودونکې ده په لاندې ډول ده.

$$f(x) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{s}\right)^2}$$

x پیوسته تصادفي مقدار (s) معیاري انحراف او $f(x)$ د منحنی جگوالی دي.

د نورمال توزیع د پیوسته توزیعگانو څخه ده.

مثال: د موټر ماشین د تېلو د سوځولو په وخت کې یوه اندازه ییزه لویګی خارجوي د هغه مضر لویګی مقدارچه د (46) موټرانو څخه تولیدیږي. په (1980) میلادي کې دیوه فزیکدان پواسطه چه لوړترن نومېده وڅېړل شو. لویګی یوه اندازه N_2 او O_2 لري لاندې مستطیلي ګراف د N_2 او O_2 اندازه چه واحد یې gr/mil دي او په (46) موټرانو کې د تېلو د سوځېدو څخه تولیدیږي ددغه موټرانو نورمال احتمال توزیع، اوسط او وریانس راښيي د هر مستطیل مساحت د مستطیل د قاعدې او ارتفاع د حاصل ضرب څخه لاس ته راځي. مثلاً په څلورم ستون کې چه د (1) څخه شروع او تر (1.2) پورې یې د قاعدې طول دی مساحت یې په لاندې ډول لاس ته راځي. $\frac{4}{46} \times 0.2 = 0.01739 \approx 0.0174$

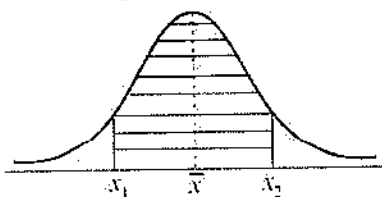


د نورمال توزیع منحنی لاندې مساحت اود هغه سټېنډرډ کول:

کله چه (x) پیوسته تصادفي متحول د x_1 او x_2 تر منځ قیمت واخلي نو باید د (x) د احتمال د توزیع له تابع څخه انټیګرال ونیول شي.

$$f(x_1 < x < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{s}\right)^2} dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} N(x, \bar{x}, s) dx$$



$$z_1 = \frac{x - \bar{x}}{s} = \frac{952 - 952}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

$$z_2 = \frac{956 - 952}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

نوپه دی اساس د دتعریف ناحیه د څخه تر پوری ده اود دتعریف ناحیه د صفر څخه تر (1)

پوری ده. د جدول څخه معلومیږي چه $P(0 \leq z \leq 1) = 0.8413$

معلومه شوه چه هغه بوتلونه چه (84.13%) ډک شوي وي د (952) څخه تر (956) پوری مایع لري.

دویم مثال: په یوه خاص مضمون کی د دده کوونکود نمبرود نورمال توزیع اوسط (70)

اومعیاري انحراف يي (8) دی د نورمال جدول څخه په گټه اخیستوسره د (54) څخه تر (84) پوری فیصدي پیدا کړی؟

حل:

$$z_1 = \frac{54 - 70}{8} = \frac{-16}{8} = -2$$

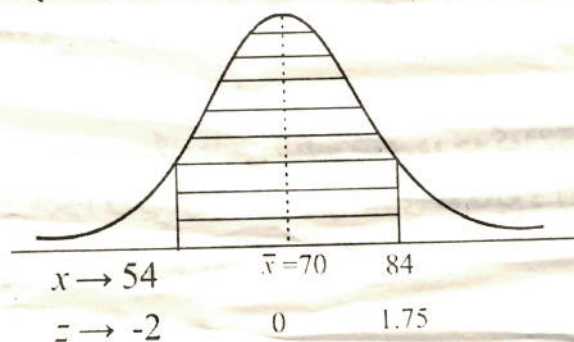
$$z_2 = \frac{84 - 70}{8} = \frac{14}{8} = 1.75$$

$$P(-2 \leq z \leq 0) = P(0 \leq z \leq 2) = 0.9772$$

$$P(0 \leq z \leq 1.75) = 0.9599$$

پورته مساحتونه جمع کوو.

$$P(-2 \leq z \leq 0) + P(0 \leq z \leq 1.75) = 0.9772 + 0.9599 = 1.9371$$



نمونه اخیستل

ناڅاپه نمونه اخیستنه:

که د ټولنې ټول عناصر په ټاکل کېدلو کې هم چانسې وي.

سیستماتیک نمونه اخیستنه:

د ټولنې په ټولو عناصر باندې یو ډول کود وهل کېږي.

طبقه یي نمونه اخیستنه:

په دې نمونه اخیستنه کې ټولنه په بېلابېلو متجانسو ډلو وېشل شوی وي.

خوشه یي نمونه اخیستنه: - که ټولنه ډېره لویه وي هغه په بېلابېلو څانگو ویشل او له هرې څانګې څخه یوه نمونه اخلو.

تبصره:

د هرې ټولنې عددی خصوصیاتو (اوسط، معیاري انحراف) ته د ټولنې پارامتر وایي.

د هرې ټولنې د عددی نمونه گیری خصوصیاتو (اوسط معیار انحراف) ته آماره وایي.

د $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ ناڅاپه متحولونو ته د (x) یوه ناڅاپي نمونه وایي. که چېرته یي تابع په دې ډول تعریف شوی وي.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1) \cdot f(x_2) \cdots f(x_n)$$

مثال: فرضوو چې په یوه قطی (5) سپینې او (7) توری گلولې شته د قطی د منځ څخه (5) گلولې یوه یوه ځای په ځای کوو دیوه عنصر دویم ځل ټاکل مجاز دي. د ټاکل شوو ناڅاپه نمونو د تصادفي متحولینو په ژبه بیان کړئ.

حل: د (0) عدد د توری گلولې لپاره اود (1) عدد د سپینې گلولې لپاره انتخابوو.

(x_1, x_2, x_3) ناڅاپه متحولونه د برنولي ناڅاپه متحولین دي. د $P = \frac{5}{12}$ او د $i = 1, 2, 3$ مقدارونو لپاره لروچې:

$$f(x_i) = \left(\frac{5}{12}\right)^{x_i} \left(1 - \frac{5}{12}\right)^{1-x_i}$$

$$f(0) = \left(\frac{5}{12}\right)^0 \left(1 - \frac{5}{12}\right)^{1-0} = 1 \cdot \frac{7}{12} = \frac{7}{12}$$

$$f(1) = \left(\frac{5}{12}\right)^1 \left(1 - \frac{5}{12}\right)^{1-1} = \frac{5}{12} \cdot \frac{7}{12} = \frac{35}{144}$$

$$f(2) = \left(\frac{5}{12}\right)^2 \left(1 - \frac{5}{12}\right)^{1-2} = \frac{25}{144} \cdot \left(\frac{7}{12}\right)^{-1} = \frac{25}{144} \cdot \frac{12}{7} = \frac{25}{84}$$

$$f(3) = \left(\frac{5}{12}\right)^3 \left(1 - \frac{5}{12}\right)^{-2} = \frac{125}{1728} \cdot \frac{144}{\left(\frac{7}{12}\right)^2} = \frac{144 \cdot 125}{1728 \cdot 49} = \frac{125}{12 \cdot 49} = \frac{125}{588}$$

$$f(4) = \left(\frac{5}{12}\right)^4 \left(1 - \frac{5}{12}\right)^{1-4} = \frac{5^4}{12^4} = \frac{12^3 \cdot 5^4}{12^4 \cdot 7^3} = \frac{5^4}{12 \cdot 343}$$

$$f(5) = ?$$

د نمونې د اوسط توزیع:

$f(x)$ د احتمال تابع او $x_1, x_2, \dots, x_n$ ناڅاپي نمونې وي په دې صورت کې د ناڅاپه نمونې د احتمال توزیع عبارت ده.

x	x_1	x_2	$\dots x_n$
(x)	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\dots \frac{1}{n}$

$$E(\bar{x}_n) = \mu \text{ د متحول اوسط}$$

$$U(\bar{x}_n) = \frac{1}{n} \delta \text{ د متحول وریانس}$$

$$s_n^2 = s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \text{ د نمونه یي وریانس}$$

$$E(S^2) = \delta^2 \text{ د وریانس اوسط}$$

په داسې حال کې چې $\bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ نمونه یي اوسط μ د ټولنې اوسط δ^2 د ټولنې وریانس وي او s^2 د نمونې وریانس وي.

احتمالات

نولسم فصل

احتمالات Probability

که د یوې پېښې وړاندیز د عددونو یا رقمونو پواسطه د اټکل وړ وي د ناڅاپي پېښې یا احتمال په نوم یادېږي. د ناممکنې پېښې احتمال صفر دی. او د ممکنې پېښې احتمال یو دی. مثلاً د معارف رئیس بی سواده دې نو احتمال یې صفر دی. لمر د ختیځ له خوا راڅیږي احتمال یې یو دی. چانس:

که دیوې پېښې دوو راندیز لپاره اعداد یا ارقام نه استعمالېدل دغې پېښې ته چانس وایي. په چانس کې د ممکن، ناممکن، خامخا او داسې نورې کلیمې استعمالېږي. تصادفي پېښه:

هغه پېښه چې نتیجه یې معلومه وي تصادفي پېښه، ناڅاپي آزمایش یا تصادفي تجربه ورته وایي. لکه احمد د بامه راوړلو پېښه یې ماته شوله. تجربوي احتمال:

هغه احتمال چې د یوې تجربې په سرته رسولو کې په عملي ډول ولیدل شي تجربوي احتمال ورته وایي.

لکه د (Cl_2) او $(2Na)$ څخه مالګه لاس ته راځي.

نظري احتمال:

د تصادفي پېښو د شمېر او د تجربو د نتیجو د شمېر نسبت ته نظري احتمال وایي.

$$\text{د تصادفي پېښو د حالتونو شمېر} \\ \text{د تجربې د ټولو حالتونو شمېر} = \text{تصادفي پېښې احتمال}$$

نسبي کثرت او احتمال:

احتمال د پېښې تر پېښېدلو دمخه وړاندیز ته ویل کیږي. مگر نسبي کثرت د آزمایشات تر نتیجه وروسته د ارقامو په اساس حسابیږي په ناڅاپي پېښو کې د تجربې احتمال د پېښې د نسبي کثرت سره مساوي وي د نسبي کثرت مجموعه (1) ده.

مثال: تېر کال د لیندۍ (10) ورځې په پرلپسې ډول باران اوريدلو.

الف: اورښت او د ورځو دورځو نسبي کثرت د لیندۍ په میاشت کې پیدا کړئ؟

ب: دراتلونکي لیندۍ په باب خپل وړاندیز ولیکئ.

ج: ایا دا قطعي ده چه هر کال به دلیندۍ په دغه لسو ورځو کې باران اوري؟

حل:

$$\text{الف: } \frac{10}{33} = \frac{1}{3} = 30\% \text{ نسبي کثرت}$$

ب: په راتلونکي کال کې به هم ممکن د تېر کال په څېر نسبي کثرت (30%) وي.

ج: د هر کال لپاره وړاندیز قطعي نه دی.

په نمونه يي فضا کې برابر او نابرابر چانس:

د ناڅاپي پېښې په درشل کې ددی امکان شته چه هر ممکن حالت منع ته راشي دغه پېښې ته ناڅاپي يا اتفاقي پېښه وايي.

احتمال په (P) او $P(A)$ د (A) د ناڅاپي پېښې احتمال دی که یوه نمونه يي فضا (n) غږي ولري په دی صورت کې دهرې لمړنۍ پېښې احتمال مساوي $P(E) = \frac{1}{n}$ سره دی.

لمړی مثال: یوه داسی سکه په نظر کې نیسو چه دواړه مخونه يي شپږ وي. لاندې سوالونو ته جوابونه ووايي.

الف: چه پېسه شپږ راشي.

ب: چه پېسه خط راشي.

ج: ایا د شپږ او خط د اتفاقي پېښو احتمال برابر دي؟

حل

$$P(\text{شهر}) = \frac{1}{1} = 1 \text{ الف}$$

$$P(\text{خط}) = \frac{0}{1} = 0 \text{ ب}$$

$$0 \neq 1 \text{ ج}$$

مثال: د یوه نورمال رمل اچول په نظر کې نیسو څرنگه چه د نمونې فضا $S = (1,2,3,4,5,6)$ ده نو له همدې کیله:

$$P(E) = P(6) = P(5) = P(4) = P(3) = P(2) = P(1) = \frac{1}{6} = 0.17 = 17\%$$

د یوې نمونه یي فضا ناڅاپي پېښه:

د (S) د نمونه یي فضا هر قرعي سیټ یوه اتفاقي پېښه ده چه په (E) سره بنودل کیږي. که د غرو شمېر یي (n) وي د اتفاقي پېښو ټول شمېر (2^n) دی.

د ښار په ګڼه ګوڼه کې د ورځې د (10) او (12) بجو په شاوخوا کې د احمد د چپ بټوه غلا شوی ده د پولیسو تر پلټنې وروسته معلومه شوله چه درې ګڼکپان په دغه سیمه کې لیدل شوي دي د پېښې نمونه یي فضا ده د احتمالاتو له مخې د غلو په باب خپل معلومات ولیکي؟

مثال: د اتفاقي پېښو نمونه یي فضا $S = (x, y, z)$ ده. کلي سیټ یي پیدا کړئ؟

$$E_1 = (x) \text{ یوازی غل دی.}$$

$$E_2 = (y) \text{ یوازی غل دی.}$$

$$E_3 = (z) \text{ یوازی غل دی.}$$

$$E_4 = (x, y) \text{ دواړه غله دي.}$$

$$E_5 = (x, z) \text{ دواړه غله دي.}$$

$$E_6 = (y, z) \text{ دواړه غله دي.}$$

$$E_7 = (x, y, z) \text{ درې واړه غله دي.}$$

$$E_8 = \{\} = \phi \text{ یو هم غل نه دی.}$$

د احتمال قاعدې:

1- د یوې اتفاقي پېښې احتمال تل د (0) او (1) تر منځ وي که اتفاقي پېښه (E) وي نو:

$$0 \leq P(E) \leq 1$$

2- که چېرې (S) د یوه آزمایشت نمونه یي فضا وي نو $P(S) = 1$ د (S) ناڅاپي پېښه د ډاډمنۍ پېښې په نوم یادېږي.

3- د ناشونۍ پېښې لپاره لرو:

$$P(\phi) = 0$$

مثال: د دوه سکو ډ اچولو نمونه یي فضا $S = (TT, TH, HT, HH)$ ده خط $T =$ او شپږ $S =$ دی لاندیني احتمالات پیدا کړئ؟

الف: دواړه سکی شپږ دي.

ب: لږ تر لږه یوه سکه شپږ ده.

ج: دواړه سکی یو شان دي.

د: دواړه سکی یو شان نه دي.

ها: د سکو یوه هم خط نه دی.

حل:

$$E_1 = \{H, H\} \Rightarrow P(E_1) = \frac{1}{4} = 0.25 = 25\%$$

$$P(E_2) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0.5 = 50\%$$

$$P(E_3) = \frac{1}{4} = 0.25 = 25\%$$

$$P(E_4) = \frac{1}{4} = 0.25 = 25\%$$

$$P(E_5) = \frac{2}{4} = 0.5 = 50\%$$

ونه ایز دیاگرام

کولای شو چه هر ناڅاپي آزمایش د و نه ایز دیاگرام پواسطه رسم کړو طریقه یی داسی ده چه د آزمایش د پیل څخه دیاگرام پیل کوو بیا د هری نتیجی څخه ځانگی شروع کوو په هره ځانگی کی نتیجی د پاڼو په شکل لیکو دغه ډول گراف ته و نه ایز دیاگرام وایی. د احتمالاتو د جمع حاصل د هری ځانگی د نشرېدو په ټکي کی د (1) سره مساوي دي همدا ډول دټولو پېښو د احتمالاتو د جمع حاصل هم د (1) سره مساوي دي.

مثال: په یوه کڅوړه کی څلور توپونه پراته دي دوه توپونه په سره رنگ (r) دری توپونه په شنه رنگ (g) او یو توپ په تور رنگ (b) رنگ شوي دي توپونه د لیدو لپاره را ایستل کیږي او بیا بهرته ایښودل کیږي مربوطه احتمالات یی پیدا کړی؟

حل:-

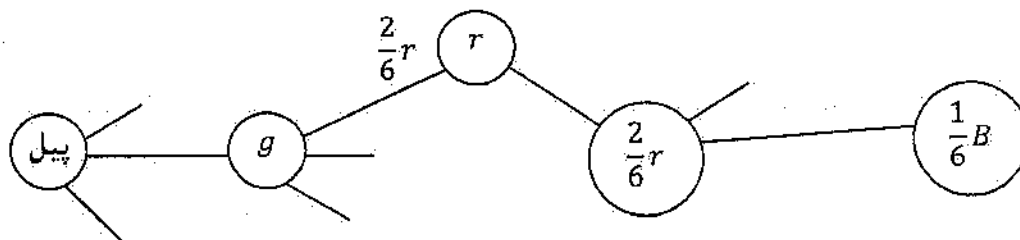
w	rr	rg	rb	gr	gg	gb	br	bg	bb
P(w)	$\frac{4}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$

په پورته جدول کی ټول کسرونه متماثل دي د پېښو احتمالات د صورتو څخه څرگند کیږي

د ضرب د حاصل لومړی قاعده:

د یوې لومړنۍ پېښی احتمالات عبارت دي د پېښی د پیل څخه د پېښی تراخه پوری د احتمالاتو د ضرب د حاصل څخه په دغه موضوع باندی د ښه پوهېدلو لپاره د یوې کورنۍ شجره لیکو هر شاخ بیل بیل ضربوو او جمع کوو یی د ټولی کورنۍ د غړو شمېر لاس ته راځي. مثال:- په یوه کڅوړه کی سری مری دری شنی مری او یوه توره مری ایښودل شوي دي مری د کڅوړی څخه داسی راویاسو چه ترکتلو وروسته بیا کڅوړی ته اچول کیږي او پیل (شنې، سري، توري) څخه وي.

حل:



$$P(w) = P(grrb) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{12}{1296} = 0.0092 = 0.92\%$$

$$P(w) = 0.0092 = 0.92\%$$

یعنی د (شني، سري، توري) مړيو د وتلو احتمال 0.92% دی

د ناڅاپي پېښو اتحاد

1- که د (S) په نمونه يي فضا کې د (A) او (B) دوه داسې ناڅاپي پېښې وي چې $A \subseteq B$ وي نو: $A \cup B = B$

2- که د (S) په نمونه يي فضا کې د (A) او (B) دوه ناڅاپي پېښې يود بل سره فرق ونه لري نو:

$$A \cup B = B \cup A$$

3: که د (S) په نمونه يي فضا کې د (A) يا (B) يوه پېښه رامنځ ته شي نو د $(A \cup B)$ پېښه هم را منځ ته شوی ده چې:

$$A \subseteq A \cup B \text{ او } B \subseteq A \cup B$$

4- که د (A) پېښه د (S) په نمونه يي فضا کې پېښه شوی وي او بله پېښه نه وي نو:

$$A \cup \phi = A$$

5- د $A \cup B$ پېښه په دې معنی ده چې اقلأ د (A) يا (B) پېښه، پېښه شوی ده.

مثال: که د (C) پېښه د (A) او (B) دوه بېلابېلې پېښې په ځان کې ولري نو په دې صورت کې د $A \cup B$ ناڅاپي پېښه هم په ځان کې لري.

حل: فرضاً $A = \{1, 2\}$ او $B = \{2, 3\}$ وي او $C = \{1, 2, 3, 4\}$ وي لیدل کېږي چې $A \subseteq C$ او $B \subseteq C$ دي ځکه چې:

$$A \cup B = B \cup A = \{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3, 4\} \Rightarrow A \cup B \subseteq C$$

د ناڅاپي پېښو تقاطع

- 1- په یوه نمونه یي فضا کې د دوه یا څو ناڅاپي پېښو تقاطع د تبدیلی د قانون پیروي کوي. فرضاً د (A) او (B) او (C) ناڅاپي پېښې دي نو $A \cap B = B \cap A$ رابطه صحیح ده.
- 2- که په یوه نمونه یي فضا کې دوه ناڅاپي پېښې واقع شي نو د دوی تقاطع د هرې ناڅاپي پېښې فرعي سیټ دی.

فرضاً د (A) او (B) دوه ناڅاپي پېښې دي نو $A \cap B \subseteq B$ او $A \cap B \subseteq A$

- 3- که د (S) په یوه نمونه یي فضا کې د (A) ناڅاپي پېښه وي او بله پېښه نه وي نو

$$A \cap S = A, A \cap \phi = \phi$$

- 4- که A او B دوه ناڅاپي پېښې وي او $A \subseteq B$ وي نو دواړو پېښو تقاطع کوچنی پېښه ده

$$A \cap B = A$$

مثال: دیوه ښوونځي د فوټبال د تېم څخه درې تنه د والیبال په تېم کې هم شامل دي که د فوټبال د تېم غړي په (A) اود والیبال د تېم غړي په (B) وښو او د دواړو تېمونو گډ غړي په (C) وښو نو د تېمونو تر منځ اړیکه د سیټ تیوري په شکل ولیکئ

حل:

$$A \cap B = C \Rightarrow A \cap B \subseteq A \text{ \& } A \cap B \subseteq B$$

کلي او مکمله سیټ

د څو فرعي سیټونو مجموعي سیټ ته کلی سیټ وایي. که په یوه کلی سیټ کې دوه سیټونه موجود وي نو دا سیټونه یو د بل مکمله سیټونه دي.

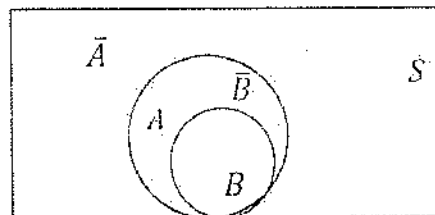
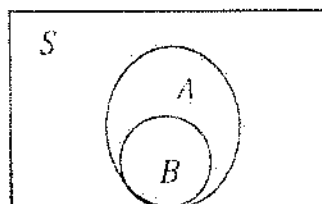
که (S) یوه نمونه یي فضا وي او (A) یوه ناڅاپي پېښه وي او $(\bar{A})$ یوه بله ناڅاپي پېښه وي چه د (A) سره په یوه وخت کې پېښه شوی نه وي. (S) د دغه دواړه سیټونو کلی سیټ دي او $(\bar{A})$ د (A) مکمله سیټ دی.

$$A \cup \bar{A} = S \text{ الف}$$

$$P(A \cup \bar{A}) = P(S) = 1 \text{ ب}$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) \quad \text{ج}$$

که د (S) په یوه نمونه یي فضا کې د (A) ناڅاپي پېښه د (B) ناڅاپي پېښه په برکې ولري. په ګرافیکي ډول ونښي چې د $(\bar{A})$ ناڅاپي د $(\bar{B})$ یوه ناڅاپي پېښه په برکې لري. حل: څرنگه چې $B \subseteq A$ ده نو د شکل څخه معلومیږي چې:



د سیټونو او میل جوړونه:

د سیټ تیوري په واسطه د احتمالاتو مسایل حلېږي یعنې د ناڅاپي پېښو د پېښېدو مسایلو حل اوس د سیټ تیوري په واسطه حلېږي چې په دې اساس د سیټ تیوري د فعالیت ساحه نوره هم پراخه شوه.

مثال د په نمونه یي فضا کې د او ناڅاپي پېښې په لاندې ډیاګرام کې راګرځوي دي د پېښېدو احتمال مطلوب دی.

a: د دې احتمال چې د (A) یا (B) حادثه ناڅاپي پېښه شي.

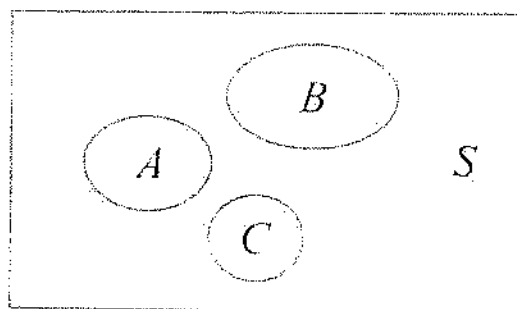
b: د دې احتمال چې د (A) پېښه، پېښه شي.

c: د دې احتمال چې د (C) پېښه پېښه نه شي.

حل:

a: د (A) یا (B) احتمال په حقیقت کې د $A \cup B$ احتمال دی څرنگه چې دا پېښې یو د بل څخه بېلې دي نو یعنې $A \cap B = \phi$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$



b. د دې احتمال چه د (A) پېښه ناڅاپه پېښه شي د $(\bar{A})$ د پېښې څخه عبارت دی چه د $(\bar{A})$ پېښه نه ده پېښه شوی د $(\bar{A})$ پېښه د (B) او (C) د پېښو اتحاد دي يعنی دغه دواړه پېښې نه دي پېښې شوي نو $P(\bar{A}) = P(C \cup B)$ څرنگه $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ نو

$$P(A) = 1 - P(C \cup B) = 1 - P(C) - P(B)$$

c. د پاره د دې چه د (C) پېښه ناڅاپه پېښه نه شي هغه پېښې د پېښېدلو د احتمال سره برابره ده چه د (A) او (B) پېښې. پېښې شي يعنی $(A \cup B)$ د پېښې د پېښېدلو څخه عبارت دی نو

$$P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

د شمېرنې اصل:

د دوه سیتونو د شمېرنې اصل په ترکیب او ترتیب پورې اړه لري

- 1- د دوه سیتونو د عناصرو د شمېرنې لپاره عناصر سره ضربو مجموعه يي د سیتونو د عناصرو د حاصل ضرب مجموعه ده
- 2- که د یوه سیت عناصر (m) او د بل سیت عناصر (n) وي نو $(m \times n)$ يي د حاصل ضرب مجموعه ده

مثال د $(0, 1, 2, 3, 4)$ رقمونو څخه څو دوه رقمي عددونه جوړېږي او څو عددونه په (2) پوره وېشل کېږي

حل $(4 \times 5 = 20)$ دوه رقمي عددونه وړ څخه جوړېږي او $(3 \times 4 = 12)$ عددونه په (2) پوره وېشل کېږي

پرموتېشن (ترتيب) Permutation

که څو شيان ولرو او ددی شيانو څخه جوړې جوړې کړو په دغه جوړو کې د شيانو بدلولو ته ترتيب وايي.

(a, b, c, d) څلور حروف راگرشوي دي غواړو څه دوه، دوه يې جوړه کړو نو په لاندې ډول يې جوړه کوو.

(ab, ac, ad, bc, bd, cd) نو که څلور شيان دوه، دوه جوړه کړو نو شپږ جوړې ورڅخه جوړېږي.

فکتوريل:

د مثبتو مسلسلو عددونو ضربولو ته فکتوريل وايي. او په (1) سره بنودل کېږي.

$0! = 1$ او همدا ډول $1! = 1$ دی. ثبوت يې په (277) صفحه کې وگورئ.

(n) مسلسل عددونه په (P_n) بڼې $(P_n = n!)$ دی.

ترکيب (Combinatuin):

هغه روش څه د هغه پواسطه د بينوم ضربونه پيدا کېږي د ترکيب په نوم ياديږي. او په لاندې ډول ليکل کېږي.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$0 \leq k \leq n$ او $\binom{n}{k}$ داسی ويل کېږي. (k) د پاسه (n)

$$\binom{n}{0} = 1, \binom{n}{n} = 1, \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

د کمبېنېشن علامه او فارمول دادی.

$$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

مثال: $\binom{7}{4}$ قيمت پيدا کړئ؟

$$C_4^7 = \frac{7!}{4!(7-4)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 (1 \cdot 2 \cdot 3)} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{6} = 35$$

وریشن (تبدیل) Variation

په تبدیل او ترتیب کی د جوړو شمېر ته تبدیل وایي.

وریشن یا تبدیل په (V_k^n) نښي د لاندی فارمول پواسطه لاس ته راځي.

$$V_k^n = k! C_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

مثال: په (30) کسانو کی (4) کسه یو ځان د ریاست لپاره دویم ځان داوول معاونیت لپاره دریم ځان د دویم معاونیت لپاره او څلورم د منشي په توگه ځان کاندیدوي. د امکاناتو شمېر یی پیدا کړئ؟

حل:

$$V_4^{30} = \frac{30!}{(30-4)!} = \frac{26! \cdot 27 \cdot 28 \cdot 29 \cdot 30}{26!}$$

$$= 27 \cdot 28 \cdot 29 \cdot 30 = 657520$$

پورتني معومات په لاندی جدول کی خلاصه کوو.

دامکاناتو شمېر		د ټاکنو ډول k غړي د n غړو څخه	
سره له تکراره	$k \leq n$	پرته له تکرار څخه	$k \leq n$
$P(n, k) = \frac{n!}{k!}$	$P(n, k) = n! , n = k$	ترتیب یا پرموتیشن	
$C_k^n = \binom{n+k-1}{k}$	$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	ترکیب یا کمبېمیشن	
$V_k^n = n^k$	$V_k^n = k! \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!}$	تبدیل یا وریشن	

مثال: د یوی سکي په اچولو کی چه د راتگ امکان یی په یا خط کی ممکن دی او د هری خوا دراتگ احتمال یی د $\frac{1}{2}$ سره مساوي دي که سکه (2) ځلي، (3) ځلي، (6) ځلي، (8) ځلي، (16) ځليو غورځول شي د هم چانسو لمړنیو پېښو په نمونه یی فضا کی یو ونه ایزگراف لاس ته راځي.

$$S = \text{شېر} \quad \text{او} \quad T = \text{خط}$$

په پورتنی مثال کې د شپږ او خط دراتګ احتمال په یو، دوه، درې، څلور ځلي غورځولو کې په لاندې جدول کې را ټول شوي دي

څلور ځله		درې ځله		دوه ځله		یو ځل		هیڅ ځل		دسکې غورځول	
خط	احتمال	خط	احتمال	خط	احتمال	خط	احتمال	خط	احتمال	خط	احتمال
0	$\frac{1}{16}$	0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	0	1	0	1
1	$\frac{4}{16}$	1	$\frac{3}{8}$	1	$\frac{2}{4}$	1	$\frac{1}{2}$	1	1	0	1
2	$\frac{6}{16}$	2	$\frac{3}{8}$	2	$\frac{1}{4}$	2					
3	$\frac{4}{16}$	3	$\frac{1}{8}$	3							
4	$\frac{1}{16}$	4									

که جدول ته ښه په غور سره وګورو نو د هر وار د احتمال د کسرونو په صورت کې یو نظم موجود دی چه د بینوم په انکشاف کې د حدونو ضریبونه دي. دغه عددونه اول وار د پاسکال فرانسوي په واسطه په یوه جدول کې ترتیب شوي وه کولای شو چه د بینوم په انکشاف کې ترې استفاده وکړو

					1
				1	1
			1	2	1
		1	3	3	1
	1	4	6	4	1

$$(a+b)^0 = \textcircled{1}$$

$$(a+b)^1 = \textcircled{1}a + \textcircled{1}b$$

$$(a+b)^2 = \textcircled{1}a^2 + \textcircled{2}ab + \textcircled{1}b^2$$

$$(a+b)^3 = \textcircled{1}a^3 + \textcircled{3}a^2b + \textcircled{3}ab^2 + \textcircled{1}b^3$$

$$(a+b)^4 = \textcircled{1}a^4 + \textcircled{4}a^3b + \textcircled{6}a^2b^2 + \textcircled{4}ab^3 + \textcircled{1}b^4$$

$$(a+b)^5 = \textcircled{1}a^5 + \textcircled{5}a^4b + \textcircled{10}a^3b^2 + \textcircled{10}a^2b^3 + \textcircled{5}ab^4 + \textcircled{1}b^5$$

$$(a+b)^6 = \textcircled{1}a^6 + \textcircled{6}a^5b + \textcircled{15}a^4b^2 + \textcircled{20}a^3b^3 + \textcircled{15}a^2b^4 + \textcircled{6}ab^5 + \textcircled{1}b^6$$

عمومي شکل يې دا دی:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

د خطراتو احتمال په مرتبه کې عبارت دی

$$P(\text{د خطراتک}) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

د بېنوم قضيه:

د بېنوم قضيه محکمې ويل شوی ده تکرار ته ضرورت نشته

تبصره:

که د یوې ناڅاپي پېښې پېښېدلو ته (1) او نه پېښېدلو ته يې (0) ووايو لاندې جدول د $n = 2$ لپاره بشپړ کړئ

k	ممکنی پایلی	احتمال	د بینوم د ضریبونو ارایه
0		$(1 - P)^2$	$\binom{2}{0} p^0 (1 - p)^2$
1	10	$2P(1 - P)$	
2	11		$\binom{2}{2} p^2 (1 - p)^2$
		$\{P + (1 - P)\}^2$	$\sum \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} = ?$

که یوه تجربه په مساوي احتمالاتو تکرار شي په (n) ځله تکرار کی د بینوم دانکشاف (k) . ام حد لاندی احتمال لري.

$$\binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

پورتنی بینوم په $B(n, p, k)$ ښودل کیږي او د پرتولې د پرابلم د احتمال په نوم یادېږي. اوداسی لیکل کیږي.

$$B(n, p, k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

د دوه جمله یي احتمال:

که یوه نمونه یي فضا دوه غړي ولري نو که د یوه غړي احتمال یي (P) وي نو دبل حالت احتمال یي $(1 - P)$ دی چه بایلل ورته وایي که دا ډول تجربه ځلي تکرار شي نو ام ځلي وړل په ځلي تکرار کی او د بایللو احتمال په ښودل کیږي.

$$n - k = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

مثال: که په یوه تجربه کی د وړلو احتمال $\left(\frac{1}{2}\right)$ او د بایللو احتمال هم $\left(\frac{1}{2}\right)$ وي محاسبه یي په لاندی ډول کیږي.

$$\binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

$$\binom{n}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-k} = \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{2^n}$$

$$= \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

دویم مثال: په یوه پنځه اولاده فامیل کې د دې احتمال چه دوه تنه هلکان او پاتې انجونې دي خو دې؟

حل:

$$P = \frac{1}{2}$$

نو

$$q = 1 - \frac{1}{2} = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\binom{5}{2}}{2^5} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{10}{32} = 0.3125 = 31.25\%$$

دریم مثال: درمل یوه دانه (6) واره غورځوود دې احتمال پیدا کړئ چه په (4) واره غورځولو کې راغلي خالونه د (3) څخه لږ وي؟

حل: د (3) څخه لږ راتلل وړل وګڼو نو

$$P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0.3333 = 33.33\%$$

$$Q = 1 - P = 1 - \frac{1}{3} = \frac{3-1}{3} = \frac{2}{3} = 0.6666 = 66.66\%$$

$$= \binom{6}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{6!}{4!(6-4)!} \cdot \frac{1}{81} \cdot \frac{4}{9} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2} \cdot \frac{4}{729} = \frac{60}{729} = 0.0823 = 8.23\%$$

څلورم مثال: د یوې سکې د خط د راتلو احتمال $\frac{1}{3}$ دې که څلور واره وغورځول شي د دې احتمال چه شپږ (3) واره راشي مطلوب دی؟

حل:

$$1 - P = \frac{1}{3} P$$

$$P = \frac{3}{4}, \quad Q = \frac{1}{4}$$

$$= \binom{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right) + \binom{4}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{3}{64} + \frac{1}{256} = \frac{13}{256} = 0.05078 = 5.08\%$$

پنځم مثال: یوه نورماله سکه څو واره وغورځول شي چه لږ تر لږه د خط دراتلو احتمال 0.99 څخه زیات شي

حل: سکه واره غورځوو.

$$\begin{aligned} T &= 1 - S \\ &= 1 - \binom{n}{n} \cdot \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

په دی ډول د دې شرط:

$$1 - \frac{1}{2^n} > 0.99 \quad \text{or} \quad \frac{1}{2^n} < 0.01 \quad \text{so} \quad 2^n > 100 \Rightarrow n \geq 7$$

متمادي او غیر متمادي فضاگانې:

د یوې ناڅاپه تجربې نمونه یي فضا یو معین یا غیر معین سیټ دی یعنې که د فضا عناصر معین (Countable) وي نمونه یي فضا معینه ده. چه پرېکړې فضا هم ورته وایي او که د فضا عناصر معین نه وي نو فضا غیر معینه ده چه نښتې یا متمادي فضا هم ورته وایي مثال: د لاندې فضاگانو څخه کومه یوه متصّله او کوم یوه پرېکړې ده؟

الف: د دوو رمل دانو اچول

ب: د (8) او (12) ترمنځ د یوه حقیقي عدد ټاکل

ج: د (30) دده کوونکو څخه د (3) تنو ټاکل

د: د یوې د کړۍ د حرارت د درجې لوړېدل د (100) درجو د ساتنې گېرېد څخه تر (1000) درجو د ساتنې گېرېد پورې

ه: د (30) او (45) درجو ترمنځ د یوې زاوېي ټاکل

حل څرنگه چه د (الف اوج) نمونه يي فضاگانې د محدودو عناصرو د شمېر شخړه جوړې شوي دي نو پرېکړې فضاگانې دي او (ب، د اوها) فضاگانې د نامحدودو عددونو شخړه جوړې شوي دي نو نېټې يا امتدادي فضاگانې ورته وايي.

دويم مثال عبدالله د خپل کور د گلانو د اوبولو لپاره يو واټر پمپ واخيستلو د واټر پمپ عمر د ساعت له مخې پيدا کړی؟
حل: { } خالي نېټ د واټر پمپ د وړاندو وخت دی او $S = \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}$ د واټر پمپ د عمر اوږد والې دی.
هم چانسې پېښې

هغه ساده پېښې چه د هغوی د پېښېدلو چانس په يوه تجربه کې برابر وي د هم چانسې پېښو په نوم يادېږي.

که چېرې $S = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ يوه نمونه يي فضا وي نو (e_i) د هر $i = 1, 2, 3, \dots, n$ لپاره يوه ناڅاپه لومړنۍ پېښه ده په دې شرط چه $0 \leq P(e_i) \leq 1$ وي
د لومړنيو پېښو د احتمالاتو مجموعه د يوه سره مساوي ده

$$P(e_1) + P(e_2) + \dots + P(e_n) = \sum_{i=1}^n P(e_i) = 1$$

مثال څلور کسه په يوه لوبه کې اشتراک کوي د هر يوه نمونه يي فضا هم چانسې ده د هر يوه د کتلو احتمال پيدا کړی؟

حل که چېرې $S = (a, b, c, d)$ نمونه يي فضا وي نو د هرې ناڅاپه لومړنۍ پېښې احتمال $\left(\frac{1}{4}\right)$ دی نو لیکو چه

$$P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = \frac{1}{4}$$

لومړنۍ پېښې هم چانسې دي

د متما دي فضاگانو احتمال:

پېښته نمونه يي فضا گانې د لايتناهي ټکو مجموعه ده چه شکل يي د اعدادو په محور ،
سطحه او د اجسامو په حجمونو کې ليدل کيږي. د دغه ډول ټکو ښودنه ممکنه نه ده مگر د
احتمال د نسبت لپاره يي خطونه ، سطحې او حجمونه په ټوټو وېشو. د اعدادو د محور څخه د
يوه حرف لکه (x) او په سطحو کې دوه تورو لکه (x, y) څخه او په اجسامو کې د درې
تورو څخه لکه (x, y, z) څخه استفاده کوو.

لومړی مثال: د اعدادو په محور د $(0, 3)$ په انټروال کې د يو ټکي وټاکي چه:

$$1 < x < 2.5$$

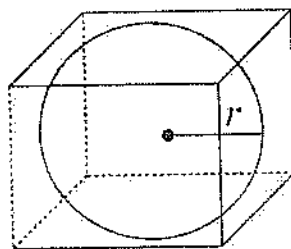
$$P(A) = \frac{\bar{A}}{B} = \frac{2.5 - 1}{3 - 0} = \frac{1.5}{3} = \frac{1}{2}$$

دويم مثال: يوه کره په يوه مکعب کې محاط ده د مکعب ضلعه (2) واحده ده په مکعب کې
يوه نقطه ټاکو ايا ددی احتمال شته چه دا نقطه د کرې پر مخ پرته وي؟

$$r = \frac{a}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

د کرې شعاع

$$P(A) = \frac{A_{globe}}{A_{CUB}} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{a^3} = \frac{\frac{4}{3}\pi (1)^3}{2^3} = \frac{\frac{4}{3}\pi}{8} = \frac{\pi}{6}$$



مشروط احتمال:

که S نمونه يي فضا او (A) او (B) په دغه نمونه يي فضا کې دوه ناڅاپي پېښې وي په
داسې حال کې چه $P(B) \neq 0$ وي نو مشروط احتمال د لاندې فارمول پواسطه پيدا کيږي:

$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ يعنی د (A) د پېښې احتمال نظر د (B) ناڅاپي پېښې ته مشروط
احتمال بلل کيږي.

د پورته فارمول څخه لیکو چې:

-1

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A)$$

$$P(A \cap \bar{B}) = P(\bar{B}) \cdot P_{\bar{B}}(A)$$

$$P(A) = P(B) \cdot P_B(A) + P(\bar{B}) \cdot P_{\bar{B}}(A)$$

-2

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

له لومړي پایلې څخه په لاس راځي چې:

$$P_A(B) = \frac{P_B(A) \cdot P(B)}{P(B) \cdot P_B(A) + P(\bar{B}) \cdot P_{\bar{B}}(A)}$$

3- که پورته فارمول ته عموميټ ورکړو نو لیکو چې:

$$P_A(B_i) = \frac{P_{B_i}(A) \cdot P(B_i)}{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + \dots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A)} = \frac{P(A \cap B)}{\sum_{k=1}^n P(B_k) \cdot P_{B_k}(A)}$$

لومړۍ مثال: یو شاگرد ښوونځي د تللو لپاره (50%) هره ورځ د گاډۍ څخه ګټه اخلي چې (70%) په ټاکلیوخت ښوونځي ته رسیږي په منځني ډول نوموړی (60%) په ټاکلي وخت ښوونځي ته حاضرېږي که چېرې پېښې:

1- د گاډۍ پواسطه راتلل.

2- په ټاکلي وخت رسیدل او په دې صورت کې د (A) مشروط احتمال نظر (B) ته $P_B(A)$ مطلوب دي؟

حل:

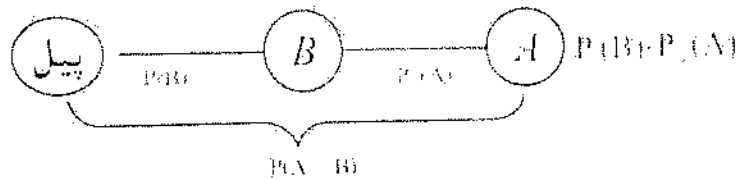
$$P_B(A) = \frac{P(A) \cdot P_B(A)}{P(B)} = \frac{0.5 \cdot 0.7}{0.6} = \frac{3.5}{6} = 0.58\bar{3} = 58.33\%$$

د حاصل ضرب اصل

د په نمونه یي فضا کې د او د دوه ناڅاپي پېښو لپاره د مشروط احتمال د تعریف سره سم لیکو چه:

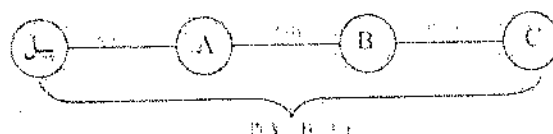
$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A)$$

دا مسئله د ونه ایز دیاگرام پواسطه هم لاس ته راوړلای شو.



$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A)$$

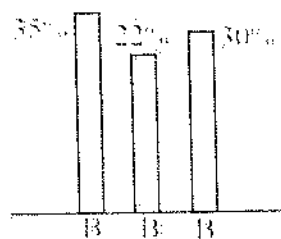
دا مطلب د او او درې پېښو لپاره هم د تطبیق وړ دی



$$\Rightarrow P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{A \cap B}(C)$$

مثال - د B_1 , B_2 او B_3 په درې ولایتونو کې په پارلماني ټاکنو کې د ګډون کوونکو فیصدي او د جمهوري ګوند فیصدي برخه ورکړشوی ده.

په کوم احتمال د ټاکنو ګډون کوونکو او یا رائي اچوونکو جمهوري ګوند ګټلی شي. ناڅاپي په لاندې ډول تعریفوو



✓: هغه رايي ورکوونکي چه جمهوري ګوند يې ټاکلی وي.

B_i د ولایت رايي ورکوونکي

ولایت	د رایو ورکوونکو فیصدي	جمهوري گوند ته رای ورکوونکي
B_1	33.2%	35
B_2	46.5%	22
B_3	20.3%	30

1- B_i دوه په دوه یو دېل څخه مستقل عناصر نه لري.

2- د (S) نمونه یي فضا لپاره $S = B_1 \cap B_2 \cup B_3 = \bigcup_{i=1}^3 B_i$ دی نو:

$B_i \cap V (i = 1, 2, 3)$ یو له بل سره مستقل صورت نیسي.

$$V = \bigcup_{i=1}^3 (B_i \cap V)$$

د دواړو خواوو د احتمال لپاره لیکو.

$$\begin{aligned} P(V) &= P\left\{\bigcup_{i=1}^3 (B_i \cap V)\right\} = \sum_{i=1}^3 P(B_i \cap V) = \sum_{i=1}^3 P(B_i) \cdot P_{B_i}(V) \\ &= P(B_1) \cdot P_{B_1}(V) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(V) + P(B_3) \cdot P_{B_3}(V) \\ &= 0.332 \cdot 0.35 + 0.465 \cdot 0.22 + 0.203 \cdot 0.3 \\ &= 0.1162 + 0.1023 + 0.0609 = 0.2794 \\ P(V) &= 27.94\% \end{aligned}$$

تعریف

که چېرې د $B_1, B_2, \dots, B_n$ رای ورکوونکي وي او $P(B_i) \neq 0$ وي $i = 1 \dots n$ پېښو عمومي حالت د (S) په نمونه یي فضا کې یوه پېښه وي نو $P(A)$ د کامل احتمال په نوم یادېږي او د (A) اختیاري ناڅاپي پېښې لپاره لرو.

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)$$

د B_i چې $i = 1 \dots n$ د (S) نمونه یي فضا د یوې پېښې لپاره چې $P(B_i) \neq 0$ د (A) ناڅاپي پېښې احتمال چې $P(A) \neq 0$ وی د $(Bayes)$ بایزفارمول پواسطه لاس ته راځي.

$$P_A(B_i) = \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)} = \frac{P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}{\sum_{i=1}^n P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}$$

د بایز فارمول زیات استعمال لري لکه $n=2$ لپاره $B_1 = \bar{B}$, $B_2 = \bar{B}$ په پام کې ونیسو په حقیقت کې B_1 او B_2 د (S) د نمونه یي فضا پېښې دي.

$$P_A(B) = \frac{P(B \cdot P_B(A))}{P(B) \cdot P_B(A) + P(\bar{B}) \cdot P_{\bar{B}}(A)}$$

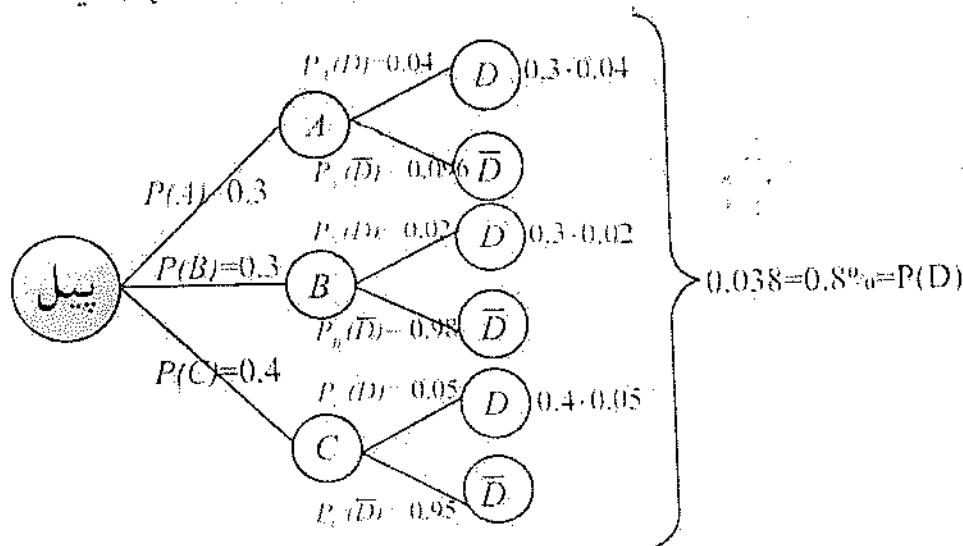
پورتنی فارمول د لپاره د بایز له فارمول څخه عبارت دی.

مثال په یوه فابریکه کې د A , B , او C ذری ماشینونه په ترتیب سره 30% , 30% او 40% د برق گروپونه تولیدوي که چترته په ماشینونو کې دگروپونو د خرابېدو کچه په ترتیب سره 2% , 4% او 5% ویاو نوموړي گروپونه په گډه سره خرڅ شي مطلوب دی

a: ددی احتمال چه یو اخیستل شوی گروپ وړان دی.

b: په کوم احتمال خراب شوی گروپ د C په ماشین پوری اړه لري.

c: یو نوی تولید شوی گروپ لرو په کوم احتمال سره به د په ماشین پوری اړه ولري.



د b جز حل

$$P_D(C) = \frac{P(D \cap C)}{P(D)} = \frac{P(C) \cdot P_C(D)}{P(D)} = \frac{0.4 \cdot 0.05}{0.038} = \frac{0.02}{0.038} = 0.526 = 52.6\%$$

$$P_D(B) = \frac{P(\bar{D} \cap B)}{P(\bar{D})} = \frac{P(B) \cdot P_B(\bar{D})}{P(\bar{D})}$$

$$= \frac{0.3 \cdot 0.98}{0.3 \cdot 0.96 + 0.3 \cdot 0.98 + 0.4 \cdot 0.95} = \frac{0.294}{0.962} = 0.3056 = 30.56\%$$

د ناڅاپه پېښو استقلاليت:

د ناڅاپي پېښو استقلاليت لاندې خواص لري:

1- که د دوه ناڅاپي پېښو د ضرب حاصل د هغوی د تقاطع د سیت سره مساوي وي نو دغه ډول ناڅاپي پېښو ته مستقلى پېښى وايي يعنې پېښى استقلاليت لري.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

2- که د A او B پېښى گډه ټکي ونه لري نو:

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = 0$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

مثال: که چېرې د يوه ښوونځي دده کوونکي د سترگو رنگ او ذکاوت د اغېزې پرته فرض شوي وي لاندې پېښو ته ځواب ورکړئ:

الف: ټاکل شوی دده کوونکی يو هوښيار دده کوونکی دی

ب: ټاکل شوی دده کوونکی توري سترگی لري.

حل: څرنگه چې $P_B(H) = P(H)$ اوسرېره پردې نو $P_B(H) = \frac{P(B \cap H)}{P(B)}$

$$P(B \cap H) = P(H) \cdot P(B)$$

عمومي حالت $A_1, A_2, \dots, A_n$ ناڅاپي پېښى احتمالاً يوله بلې څخه مستقلى بلل کېږي که چېرې د هرو دوو پېښو په ترکيب کې د ضرب د حاصل قاعده صدق وکړي پرته له هغې پېښې يوله له بلې سره تړلى دي.

نتيجه:

1- $\bar{B} \cap A, \bar{B} \cap \bar{A}, A \cap \bar{B}, A \cap B$ د پېښو دغه تقاطع په جدول کې هم پيدا کولای شو.

	B	$\bar{B}$	
A	$P(A \cap B) = a \cdot b$	$P(A \cap \bar{B}) = a(1 - b)$	a
$\bar{A}$	$P(\bar{A} \cap B) = b(1 - a)$	$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = (1 - a)(1 - b)$	$1 - a$
	b	$1 - b$	1

2- د A ، B او C درې ناڅاپه پېښې چې یو د بل څخه مستقلي دي نولرو چې:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$$

$$P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

دویم مثال: د لاندې متقاطع جدول خالي ځایونه ډک کړئ؟

	B	$\bar{B}$	
A	0.12	$P(A \cap \bar{B}) = ?$	$?$
$\bar{A}$	$P(\bar{A} \cap B) = ?$	$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = ?$	$?$
	$?$	0.6	

حل: څرنگه چې $P(\bar{B}) = 0.6$ نو $P(B)$ داسې پیدا کوو

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - 0.6 = 0.4$$

$$P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.12}{0.4} = 0.30$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.3 = 0.7$$

نو د پېښو د تقاطع څخه لرو چې:

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A)P(\bar{B}) = 0.3 \cdot 0.6 = 0.18$$

$$P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \cdot P(B) = 0.7 \cdot 0.4 = 0.28$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = 0.7 \cdot 0.6 = 0.42$$

که پیدا شوي عددونه په جدول کې په خپلو ځایونو کې ولیکو جدول تکمیلېږي.

شلم فصل

موهومي عددونه *Imaginary Numbers*

منفي عددونه جفت جذر نه لري نو له همدې کبله کله چه په دويمه درجه معادلو کې $\Delta < 0$ شي نو معادله جذر نه لري ترڅو چه په (1795) ميلادي کال يو جرمني ساينسدان چه Friedrich Gauss نومېدلو ($-1 = i^2$) وضع کړ چه د نوموړي په دغه ابتکار سره دهغه معادلو د حل لپاره لاره خلاصه شوه چه ($\Delta < 0$) وه.

موهومي عدد (*Imaginary Numbers*) يو عدد دی چه په روزمره ژوند کې په راکړه ورکړه کې نه استعمالېږي. مگر د علمي مسايلو د حل لپاره د زيات اهميت وړ دی لمړی حرف يې د ايوتا (*iota*) يوناني کلمې څخه اخيستل شوی دی.

مثال: $\sqrt{-36}$ جذر پيدا کړئ؟

حل:

$$\sqrt{-36} = \sqrt{36(-1)} = \sqrt{36i^2} = \pm 6i$$

دويم مثال: دا $x^2 + y^2 = 0$ معادله حل کړئ؟

$$x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow x^2 = -y^2 \Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{-y^2}$$

$$x = \sqrt{(-1)y^2} = \sqrt{i^2 y^2} = \pm iy$$

د موهومي عددونو طاقت:

څرنگه چه $i = \sqrt{-1}$ او $i^2 = -1$ کيږي نو کولای شو چه د دغه ابتکار په واسطه د موهومي عددونه ساده کړو. مگر د موهومي عددونو مربع منفي ده.

$$\begin{array}{llll} 1: i = \sqrt{-1} & 2: i^2 = -1 & 3: i^3 = -i & 4: i^4 = 1 \\ 5: i^5 = i & 6: i^6 = -1 & & \end{array}$$

په عمومي صورت د موهومي عددونو طاقت په لاندې جدول کې خلاصه کوو.

$$i^{4n} = 1, i^{4n+1} = i, i^{4n+2} = -1, i^{4n+3} = -i$$

هغه موهومي عددونه چه توانونه يې منفي وي د پورته جدول پواسطه حلېږي.

$$i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{1 \cdot i}{i \cdot i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i$$

$$i^{-2} = \frac{1}{i^2} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$i^{-3} = i^{-2} \cdot i^{-1} = (-1)(-i) = i$$

$$i^{-4} = i^{-3} \cdot i^{-1} = i(-i) = -i^2 = -(-1) = 1$$

$$i^{-5} = i^{-4} \cdot i^{-1} = 1(-i) = -i$$

لاندې موهومي عددونه د طاقت څخه وباسئ:

$$i^{54} = i^{52} \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$$

$$i^{89} = i^{88} \cdot i = 1 \cdot i = i$$

د اعدادو سټونه:

1- د طبيعي اعدادو سټ *Set of Natural Numbers*

د (1) څخه تر لايتناهي (∞) پورې د اعدادو سټ ته د طبيعي اعدادو سټ وايي په (IN) سره يې نښي.

$$IN = (1, 2, 3, 4, 5 \dots \infty)$$

2- د مکمل اعدادو سټ *Set of Whole Numbers*

د (0) څخه تر (∞) پورې د اعدادو سټ ته د مکمل اعدادو سټ وايي په (W) سره يې نښي.

$$W = (0, 1, 2, 3, 4, \dots \infty)$$

3- د تام اعدادو سټ *Set of Integer Numbers*

د ($-\infty$) څخه تر ($+\infty$) پورې د اعدادو سټ ته د تام اعدادو سټ وايي او په (I) سره يې نښي.

$$I = (-\infty, \dots, -3, 2, 1, 0, 1, 2, 3 \dots \infty)$$

4- د دناتق اعدادو سټ *Set Of Rational Numbers*

صحيح عدد، مختوم کسر، غير مختوم متوالي کسر ته ناطق عدد وايي او په (Q) سره يې نښي.

$$Q = \left(1, 2, 15, 109, \frac{4}{5}, \frac{2}{3}, \dots\right)$$

5- د غیرناتق اعدادو سیټ *Set Of Irrational Numbers*

غیرمختوم غیر متوالي کسر او هغه جذري عددونه چه پوره جذر نه لري غیرناتق عدد بلل کیږي. او په ($\bar{Q}$) سره ښودل کیږي.

$$\bar{Q} = \left(\frac{11}{47}, \frac{13}{49}, \sqrt[3]{2}, \sqrt{3}\right)$$

په حقيقي اعدادو د سیټ په نوم یادېږي. او په (IR) سره یې ښیي.

$$IR = (Q + \bar{Q}) = \left(-\infty, -3, +6, \sqrt{2}, \frac{2}{5}, \frac{5}{6}, \frac{13}{49}, \dots, \infty\right)$$

6- موهومي عددونه *Set Of Imaginary Numbers*

هغه عددونه چه یوازې د (i) حرف پکې موجود وي او د حقيقي عددو سره د جمع یا تفریق په حال کې نه وي موهومي عددونه بلل کیږي. لکه ($-i, 11i, \frac{2}{3}i, \sqrt{5}i^3$) د موهومي عددونو څلورگوني عمليي.

1- د موهومي عددونو جمع او تفریق:

هم علامه عددونه جمع کوو علامه یې شریکه علامه لیکو او مختلف علامه عددونه یو دبل څخه منفي کوو علامه د لوی عدد لیکو

$$1: 15i - 31i = 16i$$

$$2: 14i - i = 13i$$

2- د موهومي عددونو ضرب:

علامه په علامه کې، عدد په عدد کې ضربوو. توانونه یې جمع کوو.

اول مثال:

$$(7i)(-5i) = -35i^2 = -35(-1) = 35$$

دویم مثال:

$$(11i)(-3i^2) = -33i^3 = -33 \cdot i^2 \cdot i = -33(-1)i = 33i$$

3- د موهومي عددونو تقسيم:

علامه په علامه عدد په عدد ويشو او توانونه يو د بل څخه منفي کوو.

مثال:

$$\frac{12i^3}{2i} = 6i^2 = 6(-1) = -6$$

7- مختلط عددونه Complex Numbers

هغه عددونه دي چه د حقيقي عدد او موهومي عدد د مجموعي يا تفاضل څخه لاس ته راغلي وي لکه $(5 + 11i, 8 - 20i)$ او داسي نور. مختلط عدد په (z) سره نښي $z = 3 \pm 21i$ او داسي نور.

صفرې مختلط عدد:

هغه عدد دی چه حقيقي او موهومي دواړه برخي يي صفر وي.

مثال: که په $z = a + bi$ کې $a = 0$ او $b = 0$ وي نو $z = a + bi = 0 + 0i = 0$ کيږي دغه عدد ته صفرې مختلط عدد وايي.

مثال: لاندې $(i - 3, 4, 2i, 2i - 3)$ عددونه په معياري شکل وليکي؟

مختلط عددونه	معياري شکل $(z = a + bi)$
$i - 3$	$-3 + i$
4	$4 + 0i$
$2i$	$0 + 2i$
$2i - 3$	$-3 + 2i$

د مختلطو عددونو څلور گوني عمليي:

د مختلطو عددونو جمع:

حقيقي عدد د حقيقي عدد سره او موهومي عدد د موهومي عدد سره جمع کوو. د موهومي عددونو د جمع حاصل بيا هم يو موهومي عدد دی.

$$\begin{array}{r} 17 + 45i \\ 28 - 106i \\ \hline 45 - 61i \end{array}$$

که $z_1 = a + bi$ او $z_2 = c + di$ وي نو $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$ کيږي.

$z_1 = 2 - 3i$ او $z_2 = 3 + 4i$ وي نو $z_1 + z_2$ پيدا کړئ

$$Z_1 + Z_2 = (2 - 3i) + (3 + 4i) = (2 + 3) + (-3i + 4i) = 5 + i$$

د مختلط عددونو د جمعې د عمليې خنثی عنصر (0) دی. همدا ډول د $a + bi$ د عدد جمعي معکوس $-a - bi$ دی.

$$(a + bi) + (-a - bi) = (a - a) + (b - b)i = 0 + 0i$$

د مختلطو عددونو تفریق:

حقيقي عدد د حقيقي عدد څخه او موهومي عدد د موهومي عدد څخه منفي کوو.

$$\begin{array}{r} 29 - 18i \\ \pm 35 \pm 67i \\ \hline 64 + 49i \end{array}$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

د مختلط عددونو ضرب

علامه په علامه کې عدد په عدد کې ضربوو او توانونه يې سره جمع کوو.

مثال: $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ دوه مختلط عددونه راکړ شوي دي د ضرب حاصل يې پيدا کړئ؟

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 \\ &= ac + (ad + bc)i + bd(-1) \\ &= ac + (ad + bc)i - bd = (ac - bd) + (ad + bc)i \end{aligned}$$

اول مثال: $z_1 = 3 - 5i$, $z_2 = 8 + 5i$ دوه مختلط عددونه راکړ شوي دي $z_1 \cdot z_2$ پيدا کړئ؟

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (3 - 5i)(8 + 5i) = 24 + 15i - 40i - 25i^2 \\ &= 24 - 25i - 25(-1) = 24 - 25i + 25 \\ z_1 \cdot z_2 &= 49 - 25i \end{aligned}$$

د مختلط عدد مزدوج (Conjugate of Complex Number):

د یوه مختلط عدد مزدوج د بینوم د مزدوج په څېر دی. او په $\bar{z}$ سره یې ښيي. مثلاً که z یو مختلط عدد وي نو مزدوج یې $(\bar{z})$ دی. فرضاً $z = x + yi$ یو مختلط عدد دې او مزدوج یې $\bar{z} = x - yi$ دې.

$$z \cdot \bar{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 - (yi)^2 = x^2 - y^2 \cdot i^2$$

$$= x^2 - y^2(-1) = x^2 + y^2$$

$z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$ چه دغه قاعدی ته نورم، $Norm$ (میزان، ماخذ، هنجار، نمونه) وایي.

$$z + \bar{z} = (x + yi) + (x - yi) = 2x \quad , 2x\text{Rel}(z)$$

$$z - \bar{z} = (x + yi) - (x - yi) = x - x + yi + yi = 2yi \quad , \quad 2yi\text{Im}(z)$$

د مختلط عدد ضربي معکوس:

فرضاً $a + bi$ یو مختلط عدد راکړ شوی دې د ضربي معکوس دلاس ته راوړلو لپاره یې د صورت او مخرج د مخرج په مزدوج کی ضربووک

$$\frac{1}{a + bi} = \frac{1 \cdot (a - bi)}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$$

$$\frac{1}{a + bi} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$$

$$\frac{1}{a^2 + b^2} \text{ د } \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i \text{ ضربي معکوس دې.}$$

مثال: د $2 - 3i$ ضربي معکوس پیدا کړئ؟

$$\frac{1}{2 - 3i} = \frac{2}{2^2 + 3^2} + \frac{3}{2^2 + 3^2}i = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i$$

مثال: $x^2 + 4$ افاده تجزیه کړئ؟

$$x^2 - (-1)4 = x^2 - 4i^2 = x^2 - (2i)^2 = (x - 2i)(x + 2i)$$

د دوو مختلطو عددونو وېش:

په یوه مختلط عدد باندی د بل مختلط عدد د وېشلو لپاره مقسوم او مقسوم علیه دواړه د مقسوم علیه په مزدوج کی ضربوو.

مثال: د $\frac{4+3i}{2+5i}$ خارج قسمت لاس ته راوړئ؟

$$\begin{aligned}\frac{4+3i}{2+5i} &= \frac{4+3i}{2+5i} \cdot \frac{2-5i}{2-5i} = \frac{8-20i+6i-15i^2}{4-25i^2} \\ &= \frac{8-14i-15(-1)}{4-25(-1)} = \frac{8-14i+15}{4+25} \\ &= \frac{23-14i}{29} = \frac{23}{29} - \frac{14}{29}i\end{aligned}$$

د یوه مختلط عدد د مزدوج خاصیت:

1- د دوه مختلطو عددو د مجموعی مزدوج د مختلطو عددو د مزدوجو د مجموعی سره مساوي دي.

2- د دوه مزدوجو عددو د تفاضل مزدوج د مختلطو عددو د مزدوجو د تفاضل سره مساوي دي.

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

3- د دوه مزدوجو عددو د حاصل ضرب مزدوج د مختلطو عددو د مزدوجو د تفاضل سره مساوي دي او هم د تبدیلی د قانون پیروي کوي.

$$\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$$

4- د دوه مزدوجو عددو د خارج قسمت مزدوج د مختلطو عددو د مزدوجو د خارج قسمت سره مساوي دي.

5- د یوه مختلط عدد او دهغه د مزدوج مجموعه د حقیقي برخی دوه چند دی.

$$z + \bar{z} = 2x$$

6- د یوه مختلط عدد او دهغه د مزدوج تفاضل د موهومي برخی دوه چند دی.

$$z - \bar{z} = 2yi$$

7- د یوه مختلط عدد د مزدوج د مختلط عدد سره مساوي دی.

$$\bar{\bar{z}} = z$$

مثال: که $z_1 = 4 + 5i$ او $z_2 = -3 + 2i$ وي ثبوت کړئ چه $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ او $z_1 \cdot z_2 = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ کیږي؟

حل:

$$z_1 + z_2 = (4 + 5i) + (-3 + 2i) = 1 + 7i \Rightarrow \overline{z_1 + z_2} = 1 - 7i$$

$$z_1 + z_2 = (4 - 5i) + (-3 - 2i) = 1 - 7i$$

ثابت شوه چه:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$z_1 \cdot z_2 = (4 + 5i)(-3 + 2i) = -12 + 8i - 15i + 10i^2$$

$$= -12 - 7i + 10(-1)$$

$$z_1 \cdot z_2 = -12 - 7i - 10 = -22 - 7i$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = -22 + 7i$$

$$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (4 - 5i)(-3 - 2i) = -12 - 8i + 15i + 10i^2$$

$$= -12 + 7i + 10(-1)$$

$$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = -22 + 7i$$

په نتیجه کې:

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = -22 + 7i$$

د مختلطو عددونو په ساحه کې د دویمې درجې یو مجهوله معادلې حل:

د دویمې درجې معادلې عمومي شکل $ax^2 + bx + c = 0$ دی او $\Delta = b^2 - 4ac$ ده که $\Delta > 0$ وي معادله دوه جذره لري. که $\Delta = 0$ وي معادله یو جذر لري او که $\Delta < 0$ وي دغه

ډول معادلې د حقیقي اعدادو په سیټ کې حل نلري مګر په موهومي اعدادو کې حل لري.

مثال: $x^2 - 10x + 26 = 0$ معادله حل کړئ

حل:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 26 = 100 - 104 = -4$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-10) \pm \sqrt{-4}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm \sqrt{4(-1)}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{4i^2}}{2} = \frac{10 \pm 2i}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{2(5 \pm i)}{2} = 5 \pm i$$

$$x_1 = 5 + i, x_2 = 5 - i$$

مثال: $4x^2 + 4ix + 15 = 0$ معادله حل کړئ؟

حل:

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac = (4i)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 15 = 16i^2 - 240 \\ &= 16(-1) - 240 = -16 - 240 = \\ \Delta &= -256\end{aligned}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4i \pm \sqrt{-256}}{2 \cdot 4} = \frac{-4i \pm \sqrt{256(-1)}}{8} = \frac{-4i \pm \sqrt{256i^2}}{8}$$

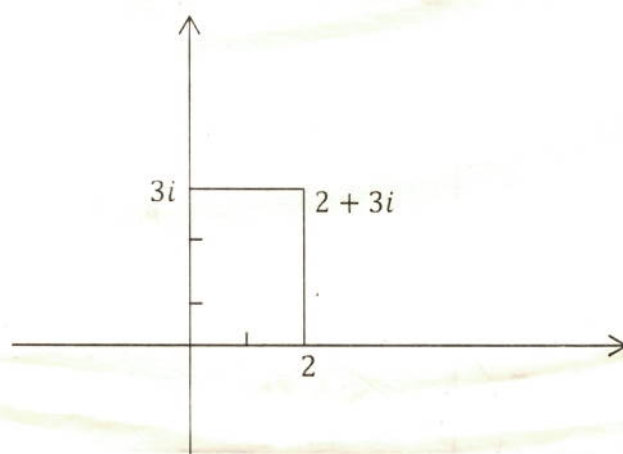
$$x_{1,2} = \frac{-4i \pm 16i}{8}$$

$$x_1 = \frac{-4i + 16i}{8} = \frac{12i}{8} = \frac{3}{2}i$$

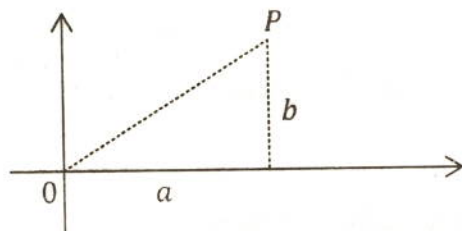
$$x_2 = \frac{-4i - 16i}{8} = \frac{-20i}{8} = -\frac{5}{2}i$$

په مختلط عددونو کی حقیقي برخه په افقي محور او موهومي برخه په عمودي محور پیدا کيږي. په دې ترتیب کولای شو چه دگوس داعدادو په مستوي کی مطلوب نقاط پیدا کړو. د نقطو دوصلېدو څخه خط لاس ته راځي او د خطودترسیم په نتیجه کی مختلف اشکال رسمولای شو.

مثال: د $(2 + 3i)$ نقطه پیدا کړئ



که یوه نقطه چه وضعیه کمیتونه یې مختلط اعداد وي او وغواړو چه د محورونو د مبداء څخه یې فاصله کړو نو نقطه د مبداء سره وصلو. مطلقه قیمت یې د مبداء څخه فاصله ده. چه د فیثاغورث د قضیې سره سم یې هم فاصله پیدا کيږي.



مثال: د (P) د نقطې وضعیه کمیت $(4 + 3i)$ دی مطلقه قیمت یې د مبدا څخه څو دی؟

$$4 + 3i = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

دمزدوجو مختلطو عددونو مطلقه قیمتونه مساوي وي او فاصله یې د محورونو د مبدا څخه مساوي ده.

$$-5 + 12i$$

$$= \sqrt{(-5)^2 + 12^2}$$

$$= \sqrt{169}$$

$$= 13$$

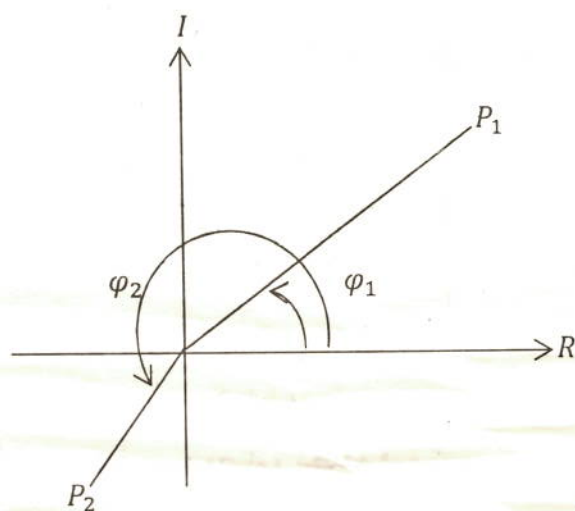
$$-5 - 12i$$

$$= \sqrt{(-5)^2 + (-12)^2}$$

$$= \sqrt{169}$$

$$= 13$$

د (φ) هغه زاویه چه د $(\overline{OP})$ خط یې د افقي سره جوړوي د مختلطو اعدادو د $(Argument)$ په نوم یادېږي حرکت یې د ساعت د عقربې خلاف وي یعنی دا زاویه همېشه مثبت وي.



یو ویشتم فصل

د ریاضي منطق

د ریاضي استدلال:

د ریاضي بیان د سمون لپاره چه کومی علامي او طریقي استعمالیږي د ریاضي د استدلال په نوم یادیږي.

شهودي درک یا مشاهدات: هغه مفاهیم چه د حواسو پواسطه درک شي اوقبلېدل یي استدلال ته ضرورت و نه لري. مشاهدات یا شهودي درک ورته وایي.

لکه موازي خطونه، نه قطع کوي. متقابل براس زاويي مساوي وي. او داسی نور.

تمثيلي استدلال:

هغه استدلال دې چه د یو ریاضيکي بیان د وضاحت لپاره مثالونه وویل شي او د هغوی د ورته والي له کبله نتایج لاس ته راوړل شي.

لکه په عامیانه ډول [مار خورلی د پړي نه ډاریږي] دا یو قیاسي استدلال دی.

استقرائي استدلال:

استقراء کلي په کلي ګرځېدلو ته وائي.

او په اصطلاح کی د ټولو طبعي عددونو، ټولو جفتو عددونو یا ټولو طاقو عددونو لپاره د یوه فارمول ثبوتولو ته استقراء یا استقرائي استدلال وایي.

د ټولو طاقو عددونو مجموعه د $S_n = n^2$ فارمول پواسطه پیدا کیږي.

د ټولو جفتو عددونو مجموعه د $S_n = n(n+1)$ فارمول پواسطه پیدا کیږي.

د ټولو مسلسلو عددونو مجموعه د $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ فارمول پواسطه پیدا کیږي.

د استقرائي استدلال ثبوت

دغه ثبوتونه د ریاضي په استقراء کی ثبوت شوي دي.

لاندی جدول کی خالي ځایونه ډک کړئ

د متوالي عددونو شمېر	د متوالي طبيعي عددونو مکعبونه	د مکعبونو مجموعه	د مجموعې فارمول
1	1^3		1^2
2	$1^3 + 2^3$		
3	$1^3 + 2^3 + 3^3$	36	
4	$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3$		10^2
n	$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$		$\left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2$

مثال: ثبوت کړئ چې $P(n) = 4^{2n} - 1$ په (5) باندې د وېش وړ دي؟

حل: د (1) لپاره يې ثبوتوو.

$$P(1) = 4^{2 \cdot 1} - 1 = 16 - 1 = 15$$

(15) په (5) باندې وېشل کېږي.

په (n) باندې يې د وېش وړ فرضوو.

ثبوتوو چې په (n + 1) باندې هم د وېش وړ دي.

ثبوت:

$$P(n) = 4^{2n} - 1 = 5r$$

$$4^2 \cdot (4^{2n} - 1) = 5r \cdot 4^2 \Rightarrow 4^{2n+2} - 4^2 = 5r \cdot 16$$

$$4^{2(n+1)} - 1 = 15 + 16 \cdot 5r = 5(3 + 16r)$$

د مساوات ښی خوا په (5) وېشل کېږي. نو چپ طرف يې هم وېشل کېږي. نو اخرنی مساوات عبارت دی:

$$P(n+1) = 4^{2(n+1)} - 1$$

ثابته شوه چې که په راکړ شوي فارمول کې د (n) په عوض هر طبيعي عدد وضع شي په (5) وېشل کېږي.

استنتاجي استدلال

که د یوې عملیې نتیجه همېشه ثابتې وي او ښه په ډاډ سره یې په صحت حکم وشي دغه استدلال ته استنتاجي استدلال وايي. لاندې جدول ته وگورئ

8	12	19	23
15	19	26	30
30	38	52	60
18	26	40	48
9	13	20	24
1	1	1	1

په پورته جدول کې د عدد سره (7) جمع شوي دي. د جمع حاصل یې دوه چند شوی دي. بیا بېرته (12) ورڅخه منفي شوي دي د تفریق حاصل یې نیمایي شوی دي په دغه عددو کې هر عدد د اولني عدد څخه د (1) په اندازه زیات شوی دي. چه دغسې عمل ته استنتاجي استدلال وايي.

د حکم د نفی کولو استدلال:

د غیر ناطقو عددونو د جمع حاصل یو غیر ناطق عدد وي.

د دغه حکم د معلومات لپاره چه دا حکم همېشه صحیح دی. نو (x) او (y) دوه مجهول عددونه په نظر کې نیسو چه د جمع حاصل یې $(x + y)$ دی بیا دغه عددونو ته قیمتونه ورکوو. مثلاً $x = 1 + \sqrt{2}$ او $y = 1 - \sqrt{2}$ دي دواړه عددونه طرف په طرف جمع کوو.

$$x + y = 1 + \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} = 2$$

گورو چه $(x + y = 2)$ یو ناطق عدد دي. غیر ناطق عدد نه دي. نو ثابتې شوه چه د دوه غیر ناطقو عددو د جمع حاصل همېشه غیر ناطق عدد نه وي.

د خلف برهان یا غیر مستقیم ثبوت:

د قضیې د عکس ثبوت ته غیر مستقیم ثبوت وايي.

قضیه: که د یوه عدد مربع جفت وي نو عدد هم جفت دی.

مفروض: که n^2 جفت وي.

مطلوب: ثبوتوو چه (n) هم جفت دي.

ثبوت: $n = 2k + 1$ فرضوو نو لیکو چه:

$$n^2 = 4(k^2 + k) + 1$$

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1$$

د پورته رابطی څخه څرگنده شوه چه (n^2) طاق دی او دا د فرضیې خلاف ده نو دا چه (n) یو جفت عدد دی صحیح نه دی.

د ریاضي منطق او د بیان استنتاج:

بیان یوه خبري جمله ده چه د (هو) او (نه) دواړو احتمال ولري.

که بیان په (P) او د بیان صحت په (T) او غلطی یې په (F) وښیو او $(\sim P)$ د (P) د بیان نفی وي نو د صحت جدول یې په لاندی ډول جوړیږي.

P	$\sim P$
T	F
F	T

د بیانونو ترکیب:

1- $P \wedge Q$ کی ($\wedge$) د (او) معنی ورکوي.

2- $P \vee Q$ کی ($\vee$) د (یا) معنی ورکوي.

3- $P \Rightarrow Q$ کی ($\Rightarrow$) د (په نتیجه کې) معنی ورکوي.

4- $P \Leftrightarrow Q$ کې ($\Leftrightarrow$) د دوه ارتباط معنی ورکوي.

مثال: د تحت په جدول کی وښیاست چه $p \vee (p \Rightarrow q)$ بیان په کوم وخت کی صحیح دی.

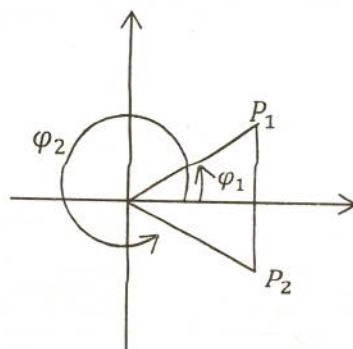
p	q	$p \Rightarrow q$	$p \vee (p \Rightarrow q)$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	T	T
F	F	T	T

تمت بالخیر

په 1394/4/23 نیټه چه د روژی د مبارکی میاشتی د اوه ویشتم سره سمون خوري د جلال اباد په ښار کی د تلاشی چوک د حاجي زر خان په پلازه کی پای ته ورسېدلو.

سردار محمد (خوږیانی)

د دوه مزدوجو مختلطو عددونو د اړگو مینټیونو د جمع حاصل مکمل دوران (360°) وي.



د مختلطو عددونو د دویم جذر پیدا کول:

د مختلط عدد دویم جذر د لاندې فارمول په واسطه پیدا کیږي.

$$\sqrt{a \pm bi} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} \pm i \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}$$

ثبوت:

$$(\sqrt{a + bi} + \sqrt{a - bi})^2 = a + bi + 2\sqrt{a + bi} \cdot \sqrt{a - bi} + a - bi \dots\dots 1$$

$$= 2\sqrt{a^2 + b^2} + 2a$$

$$\sqrt{(\sqrt{a + bi} + \sqrt{a - bi})^2} = \sqrt{2(\sqrt{a^2 + b^2} + a)} \dots\dots 2$$

$$\sqrt{a + bi} + \sqrt{a - bi} = \sqrt{2(\sqrt{a^2 + b^2} + a)} \dots\dots 3$$

$$\sqrt{a + bi} - \sqrt{a - bi} = \sqrt{2(-\sqrt{a^2 + b^2} + a)} = i\sqrt{2(\sqrt{a^2 + b^2} - a)} \dots\dots 4$$

دریمه او څلورمه معادله طرف په طرف جمع کوو.

$$\frac{2\sqrt{a + bi}}{2} = \frac{\sqrt{2(\sqrt{a^2 + b^2} + a)} + i\sqrt{2(\sqrt{a^2 + b^2} - a)}}{2} \dots\dots 5$$

$$\sqrt{a+bi} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \dots\dots\dots 6$$

$$\sqrt{a-bi} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \dots\dots\dots 7$$

اول مثال د $\sqrt{-5+12i}$ دويم جذر پيدا کړئ؟

$$\sqrt{-5+12i} = \sqrt{\frac{\sqrt{25+144}+5}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{25+144}-5}{2}} = 3+2i$$

دویم مثال:

$$\sqrt{-2i} = \sqrt{\frac{\sqrt{0+4}+0}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{0+4}-0}{2}} = 1$$

د ځينو کاشفينو انځورونه



کارل فریدرېچ



بېنارډ ريمان



جورج کانتور



اريتوستنس



ارشمیدس



اسحاق نیوتن



پیرک اندرویس



محمد بن موسی



وین ستیپاریو



کووشی



هرمت



فارما



لایبیز



وایرس ترس

چاپ شوي کتابونه

- * عمومي رياضي (نوی نصاب)
- * عمومي فزیک (نوی نصاب)
- * ابتدائیه رياضي او هندسه (نوی نصاب)

تر چاپ لاندې کتابونه

- * د فزیک د تمریناتو حل (نوی نصاب)
- * د رياضي د تمریناتو حل (نوی نصاب)
- * د عمومي رياضي (فارسي ترجمه)
- * عمومي هندسه
- * د عمومي هندسې (فارسي ترجمه)
- * عمومي مثلثات
- * عمومي رياضي (فارسي ژباړه)
- * عمومي فزیک (فارسي ژباړه)

سپين غر تعليمي مرکز

مکھن خبرنیز ټولن

پېښور، پاکستان

د وېب سايټ لپاره: 0321-9895621-03005981425

0788529194 - 0773535420



Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library