٣

شمیر پوهنه

د ښوونځي لپاره

(ریاضي په دري برخو کې)

دریمه برخه

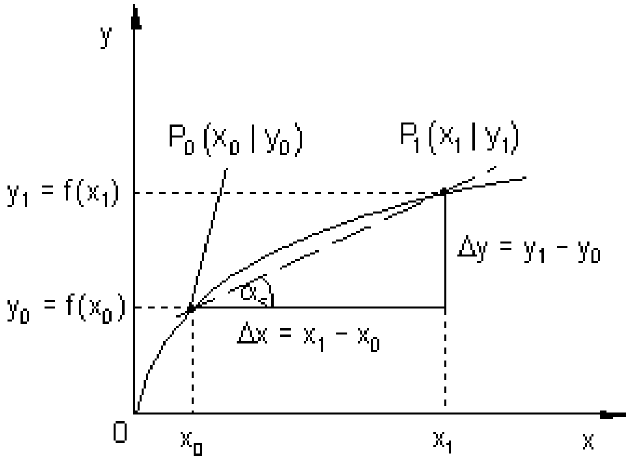
Ketabton.com

لیکونکی:
برینکمن (له برینکمن ن ج څخه)
ژباړې: ډاکتر ماخان (میږی) شینواری

(c) ketabton.com: The Digital Library

شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره

(ریاضي په درې برخو کې)



دریمه برخه

لیکونکی: پروفیسربرینکمن(له برینکمن ن ج څخه)

ژباړی: ډاکتر ماخان (میرِی) شینواری

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې هيله، چې په دې ليکنو او ژباړو به مې زموږ د بې وزلي او له پوهې پاتې ملت - په ما د پوهنې لپاره د لګښت - لپاره د پوهنې په لور داسې لږ ونډه اخستې وي.

کتاب پيژندنه

د کتاب نوم: شميرپوهنه دښوونځي لپاره

ليکونکی: پرفيسور برينکمن

ژباړی : ډاکتر ماخان،، ميرى،، شينوارى

makhanshinwari@gmail.com

د خپريدو لړۍ

خپرندوی: د افغانستان کلتوري ودې ټولته

جرمني

چاپ کال ۲۰۱۲

چاپ چارې دانش خپرندويي ټولنې تخنيکي څانګه

WWW.danishpress.com

د چاپ حقوق خپرندوي ټولنې ليکونکي يا ژباړي سره خوندي دي.

پښتو مو ژبه او شميرپوهنه پرې ساده ده

(c) ketabton.com: The Digital Library

د خپرندوی ټولنې یادښت

له هغې مودې را په دې خوا، چې د افغانستان د کلتوري ودې ټولنې د علمي، ساینسي او طبي اثرو د خپرولو لړۍ پیل کړې، تراوسه یې په دې لړ کې مهم اثار خپلو هیواولو ته وړاندې کړې دي.

موږ باور لرو، چې پښتو ژبه هغه وخت په یوه مهمه غني ژبه بدلیدلای شي، چې د پوهې په ګڼه سمبال شي او په علمي او اکاډمیکو اثارو غني شي.

اوس چې زموږ ملي سراسري ژبه د بیلابیلوګواښونو او چلنجونو سره مخامخ ده، پر موږ ټولو ده، چې د دغه ګواښونو په وړاندې به په نره ودریږو او د علم او قلم په ژبه به ځواب ورته ووایو.

د اتحادیې له حوا د ډاکتر ماخان شینواري تراوسه زیاتو چاپ شویو اثارو په څنګ کې، د ده د پنځه وېښت شمیر پوهنې نویو ژباړو او لیکنو او دوه ټولنیزو لیکنو تر منځ، دغه اثر په همدې لړ کې ځکه د ارزښت وړ دی، چې د علمي، ساینسي اثارو د خپراوي په لړ کې د یوه مهم ګام په توګه ګڼل کیدای شي او هیله ده، چې د دې برخې مینه وال لوستوال، زده کوونکي او د پوهنتو زده کړې کته ترې واخستلی شي.

په درناوي

د افغانستان کلتوري ودې ټولنه

۲۰۰۱۲ ز ک

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ژباړي مننه

د هر څه له مخه د هغو لیکونکو پروفیسرانو څخه زیاته مننه، چې د لیکنو څخه یې زما د ژباړې لپاره تفاهم لري. ماته د دوي د لیکنو د ژباړې په هیڅ ډول مادي ګټه نه شته او دا کار مې یوازې په یوه د پوهنې توانمندې ، مګر وروسته پاتې ژبې ویونکي ولس ته وړاندې دی، دا دې د دې پروفیسرانو له خوا په پوهنیزه اړخ کې زموږ په دې اړخ کې هم مرستې ته اړ ولس سره مرسته وي.

همدا ډول زموږ،، د افغانسان کلتورې ودې ټولنه،، جرمنې، د غړو، مرستندویانو او په تیره بیا د مشر تابه څخه زیاته مننه کوم، چې پرته له خپرندوې ټولنې په توګه یې د دې لیکنو زیاته اقتصادي ونډه هم په غاړه اخستې.

دې لاندې زما کلیوالو ملګرو او ملګرو د دې کتابونو په چاپ کې د توان سره سمه اقتصادي ونډه اخستې، چې زه ترې زیاته مننه کوم:

د ښاغلي دپلوم انجنیر ریحان الدین حساس، ښاغلي دپلوم انجنیر محمد اکبر نور، ښاغلی ډاکتر سردار ګانه وال، ښاغلی ډاکترمانوګل ګانه وال، ښاغلي ټولنپوه محمدعارف بیان، ښاغلي دپلوم انجنیرمحمد ایوب بیان، همداسې زما د ملګري اروا ښاد ډاکتر حاجي محمد سلطانزي د ځوي ښاغلي ډاکتر صالح محمد سلطانزي ، ډپلوم انجنیر او دپلوم اقتصاد پوه رحمت الله فتحي او نه اخر زما د لور ډاکتر څانګې شینواري او زما د ځوي اقتصاد پوه او ټولنساپوه اباسین شینواري.

نه د ټولو په اخر کې زما له میرمن ښاپرۍ څخه ډېره زیاته مننه، چې زما د لیکنو- نه دا چې مخه یې نه ده نیولې- پوره ملاتړ کړي.

بیا هم له دوي څخه د زړه له کومې مننه کوم او لوي څښتن دې ورته اجرونه ورکړي، چې داسې مرستو ته دوام ورکړي.

په مننه : ستاسو ماخان شینواری

جرمني د بن ښار ۲۰۱۲ ز ک

(c) ketabton.com: The Digital Library

نیولیک

دريمه برخه:

د ژباړي سريزه الف

مشتق ۱

...پيل او بنسټونه ۱

جګيدنه او تانجنت ۱

دفرنشلوېش او مشتق ۱۲

د دفرنشل لارې يا قاعدې ۶۵

د جګو درجو مشتق(ابلايتونګنه) ۸۴

تانجنت او نورمال يا ولاړه ۸۹

د يوې تابع د استعمال بيلګه... ۹۱

په ت وليد کې د مشتق استعمال ۹۴

د الجبري توابعو مشتق ۹۷

د مشتق استعمال په طبيعي علومو کې ۱۰۳

ټولګه: ۱۳۹

د سيکانت جګوالي او تا نجنت جګوالي ۱۴۱

مونوتوني – يا يوغږيزوالي ۱۴۵

د يو غږيزوالي خويونه ۱۴۵

(c) ketabton.com: The Digital Library

افراطي ارزښتونه ۱۵۰
اوړونټکی او زینټکی ۱۵۵
د ګرو یا منخنیو خبرې اترې یا بحث ۱۶۴
نرخشمیرنه د مشتق استعمال په حیث
مشقشمیرنه د ټولګي کار چمتووالي لپاره ۲۹۳
اتیګرالشمیرنه ۳۲۳
پیل راوړنې ۳۲۳
سطحه شمیرنه او بنسټ یا لومړنی تابع ۳۲۵
ناټاکلی انتیګرال ۳۲۸
د نامعلوم اتیګرال څخه و معلوم امتیګرال ته ۳۳۳
د انتیګرېشن پوله بدلون ۳۳۷
له دوه ګرافونو څخه رابندې سطحې شمیرنه ۳۴۴
انتیګزرال د منځ ا رزښت په حیث ۳۵۶
انالیز ۲ ۳۶۰
اکسپوننشل توابع او e - توابع ۳۶۰
د اکس توابعو استعمال ۳۷۸
محور غوځټکي او اکس. مساوات ۳۸۶
د توان او لوګاریتم توابع ۳۸۹
د اکسپوننشل توابعو لپار د حل لارې ۳۹۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

د **e** - توابعو مشتق د ضرب او ځنزيري قانون سره ۴۰۴

د **e** – تابع انتيګرېشن يا ګډونه ۴۱۶

د بدلون سره ټاکلی انتيګرال ۴۱۸

ناټاکلی انتيګرال ۴۲۶

د مشتق او انتيګرال ششميرنې سره مخامخ کول ۵۵۴

ناپرېکيدنوالی يا متماديت، ۵۶۷

ناپرېکيدنوالی يا متماديت، ۵۶۷

مشتقوړوالی(رابيليدوړوالی) ۵۶۹

انتيګرالوړوالی: ۵۷۲

د ټاکلو انتيګرالونو حل د بدلون له لارې: ۵۷۶

ټوټه انتيګرالونه (يا دضربونوانتيګرال) ۵۷۸

.

.

.

.

.

.

.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف

د ژباړي سریزه

ګرانو هیوادوالو او د شمیرپوهنې مینه والو!

د ا څو کاله د مخه د ځنو شمیرپوهنیزو کلمو په لټه کې د برینکمن د ن ج سره مخامخ شوم. دا چې دې لیکنې ښه خوندویونه یا متن درلود او زیات تمرینونه د حل سره، نو ما وبتیله، چې دا به پښتو ته اړوم. دا یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې زده کوونکي ښوونکي او داسې لړ د شمیرپوهنې سره بلد میندې او پلرونه ترې ګټه اخستلی شي. په دې لیکنه کې هر څه خورا ښه روښانه شوي دي او په مختلفو بیلګو سمبال دي د حلونو یا اوبیونو سره، چې لوستنه یې هر د شمیرپوهنې مینه وال لپاره د پیرځوینې وړ بولم.

کتتاب په درې برخو کې چاپیږي، چې هره برخه یې یوه خپلواکه او د یوې ځانګړې برخې خوندیونه لري. زه په دې باور لرم، چې د شمیرپوهنې مینه وال دا کارداسې لړ په غور وګوري، نو زر به ورسره مینه پیدا کړي.

دا کتابونه هم د هغو ۲۵ ریاضي کتابونو لړۍ ده، چې ما چاپ ته چمتو کړي دي، خو نه پوهیږم، چې څو دا نور به ترې کله چاب شي. که څه پاتې شو، نو هغه به د دې کتابونو سره ن ج ته پورته کړم.

ګرانو لوستونکو!

دا زموږ د هیواد اړتیا لپاره په پوهنیزه اړخ کې په سره تیره اوبه تویول دي. دا کتابونو، چې کوم چې چاپیږي د زر دانو یا پنځه سوه څخه به نه اوړي، نو د یوه پنځوس میلیونه کمو زیات ولس لپاره زردا نې چې چاپیږي، دا خو اصلاً په شمیر کې نه راځي،خو دا به په خروار ګڼو.
په لومړي کتاببرخه کې ځمکچپوهنه یا هندسه ورسره مل ده او په دویمه کتاببرخه کې مې وکتور شمیرنه ورسره زیاته کړې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دريمه کتاببرخه مشتق او انتيګرال ته ځانګړې شوې.

ګرانو لوستونکو!

د برينکمن د ليکنو لړۍ د شميرپوهنې په څانګه کې د ښوونځيو لپاره نوره هم پسې غزېدلې، چې ما هغه د ګرانو لوستونکو لپاره رازباړلي.

دا احصايه يا ستاتيستک دی او د احتمالوالي شميرنه ده. دا دواړه کتابونه، چې دلته يې تاسو ته ژباړه وړاندې کيږي، هم په زياتو تمرينونو، اود دوی په اوبيونو يا حلونو سره سمبال ده.

زما په اند، داسې ليکنه په پښتو کې د لومړي ځل لپاره کيږي، چې نومه ونې به دلته هم څه ناڅه ګرانو لوستونوکو ته نابلدې وي، خو پرې پوهيدنه شونې ده. هر څه په روښانه توګه ورکړل شوي.

ګرانو هيوادوالو!

داچې ما يوځای يا نوره هم ښه په يوه وار ډېر کار را ونيوه، نو هرومرو به ناټيکاوي زما له خوا په کې رامنځ ته شوې وي، خو دا به داسې ناټيکاوي نه وي، چې شميرپوهنيزې ستونځې رامنځ ته کړي. له دې امله له ستاسو څخه زما په ستونځو پوهيدلو له امله زياته مننه.

په دې هيله ، چې زما په غوښتنو او ستونځو به و پوهيږي په دې ليکنو او ژباړه کې ما ته هيڅ مادي ګټه نه شته. دا دې په ما زموږ د بې وزلي ولس د ډېر مصرف(لګښت) په هکله د يوې کوچنۍ پيرزوينې په حيث وړاندې وي

مننه:

له هر څه د مخه د دې لکچرونو ليکنو ليکونکو شميرپوهانو يعنې ستر پروفيسور بريکمن څخه زياته مننه، چې د ليکنو څخه بهيې زموږ ولس هم ګټه پورته کړي.

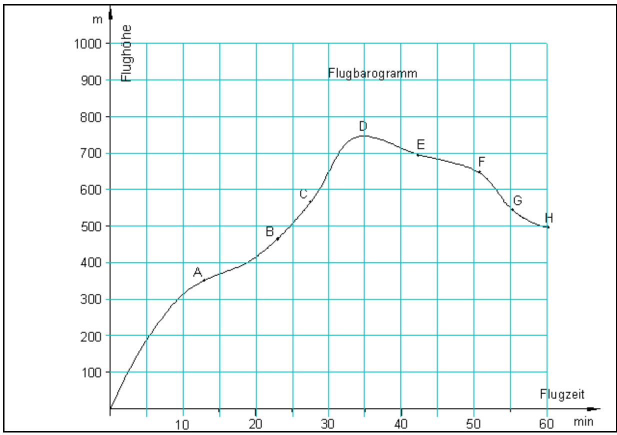
(c) ketabton.com: The Digital Library

دفرنځیالشمیرنه (مشتق یا رابیلیدنه)

ننوتنه او بنسټونه

ځګیدنه او تانجنت:

په یوه ټکي کې د تابع د ګراف میل(ځګیدنه)



په الوتکوکې د الوتنې دلیک(الوتنلیک) الې (Flight barogramm)جوړې دي، چې تل د الوتنې جګوالی د الوتنې د وخت په واک کې یا د وخت   تابعیت کې رسموي او په هر جګوالي کې د هوا فشار هم لیکي. که دا په پښتو واړوو، نو د لیک بکس به ورته ووایو.

په پورته ګراف کې د یوې الوتکې د الوتنې د بیلا بیلو وختونوجګوالی ښوول شوی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

-ایا فکر کوئ، چې په ټکي B کې نسبت و ټکي A ته جګوالی زیات دی؟
-ایا فکر کوئ، چې د E او G په ټکو کې جګوالی منفي دی؟ دلته د E په ټکي کې د ارزښت له مخې جګوالی زیات دی نسبت د G ټکي ته؟

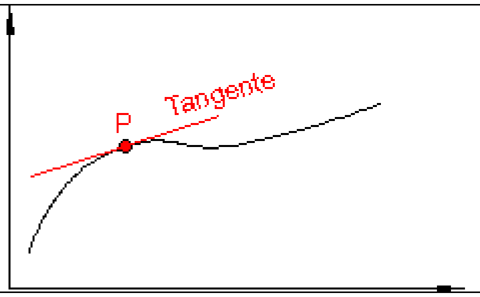
-ایا د یوې کرښې او منحني جګوالی هرچیرته توپیر لري او که نه ؟

لاس ته راوړنه :

۱ - ګورو، چې په یوه منحني کې د ګراف جګوالی هرچیرته برابر نه دی، نو له دې امله باید ټکی په ګوته کړو، چې هلته میل څیرل کیږي.

۲ - په لاندې بیلګه کې به روښانه کړو، چې تنها د یوې (سیده)کرښې میل هرچیرته برابر دی، نو له دې امله دلته د یوې کرښې د میل یا جګوالي څخه غږیږو.

بریښي چې لاندې پیژند یا تعریف هوښیارانه یا عاقلانه دی:

پیژند (تعریف): د یوې تابع ګراف میل (جګوالی) د P په یوه ټکي کې په همغه ټکي د تانجنت د میل د ګراف سره برابر دی	

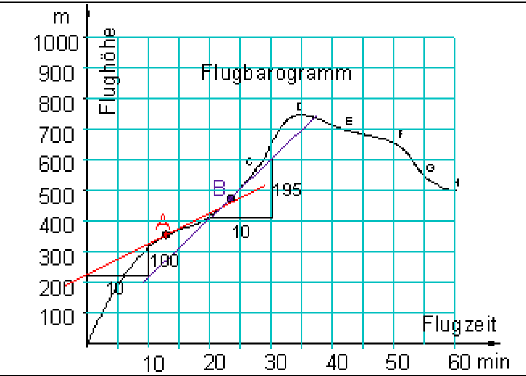
لیدل کیږي چې دلته یو تانجنت د کرښې تعریف لري، چې د لمسټکي(مماس) په چاپیریال کې د امکاناتو سره سم د مماس ټکي ته ښه ور نږدې کیږي.

ددې پیژند یا تعریف له مخې په یوه ټکي کې د یوه ګراف میل(جګیدنه) د یوې کرښې میل دی.

د ګراف د جګیدنې ټاکلو لپاره د A اوB په ټکو هر یوه کې یوه کرښه (تانجنت) انځوروو، چې ګراف ته خورا زیاته نږدې کیږي.

د میل یا جګیدنې مثلث په مرسته جګیدنه په شدل یا ساده ډول شمیرل کیدی شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library



د A په ټکي کي جګيدنه :

$$\frac{100\ \text{m}}{10\ \text{min}} = 10\ \frac{\text{m}}{\text{min}}$$

د B په ټکي کي جګيدنه :

$$\frac{195\ \text{m}}{10\ \text{min}} = 19{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{min}}$$

زموږ د بیلګي لپاره میل یا جګیدنه په یوه ټاکلي ټکي کې د لحظوي (سملاسي) میل د چټکتیا (سرعت) په معنا دی.

دA په ټکی کې : د الوتني وخت نږدې $12{,}5\ \text{min}$ ، د میل یاجګیدنې چټکتیا(سرعت) نږدې $10\,\frac{m}{\text{min}}$ ده

د B په ټکی کې : د الوتني وخت نږدې $23{,}0\ \text{min}$ ، د جګیدنې چټکتیا(سرعت) نږدې

$19{,}5\,\frac{m}{\text{min}}$ ده.

تانجنت تر اوسه فقط د لیدني له مخې تعریف شوی ، چې د لمسټکي چاپیریال ته خورا ډېر نږدې کیږي. له دې امله ممکن وه، چې د ګراف میل د A اوB په ټکو کې هم یواځې په نږدې ډول وټاکل شي، دا په عمل کې د قناعت وړ نه دی یا بسیا نه کوي.

په یوه ټکي کې د تابع دګراف میل (جګیدنه):

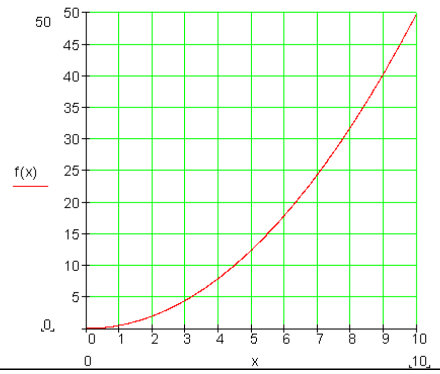
معلومه ده ، چې یو ریلګاډی د تمځای څخه له خوزېدو(حرکت)وروسته خپله چټکتیا(سرعت) په ورو ورو (کراره کراره) زیاتوي.وهلي لار(د تمځای څخه لرېوالی) تل زیاتیږي. د تمځای څخه لریوالی د چټکتیا یا سرعت په واک کې ده .

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا عمل د لاندې تابعمساوات له لارې لیکلی شو.

دلته د x وخت د ثانیې او د s لار د متر لپاره لیکو $s = f(x) = 0,5x^2$

مخامخ : د تابع ګراف



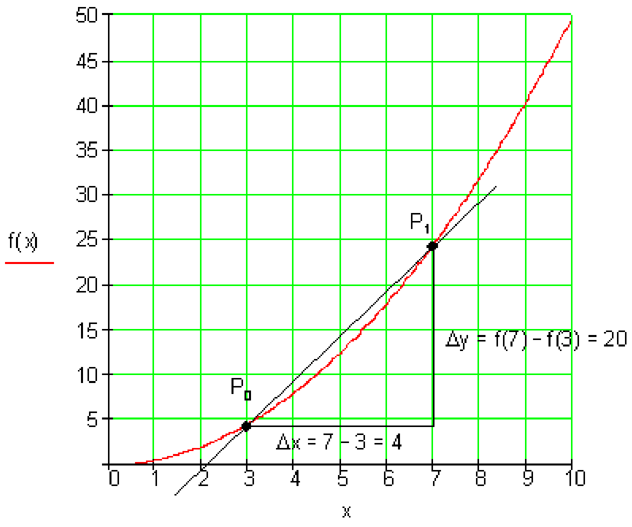
اوس باید منځنی ارزښت(منځنی چټکوالی) **Averagerat of change** د ۳ ــمې او ۷ ــمې ثانیې ترمنځ وشمیرل شي.

ددې لپاره اړونده سیکانت انځوروو او د هغې چټکوالی شمیرو.

اوس دې د تغیر ارزښت (منځنی چټکوالی) د ۳ ــمې او ۴ ــمې ثانیو ترمنځ وشمیرل شي.

په دریمه ثانیه کې د ارزښت تغیر یا چټکوالی څومره دی؟

د منځنی چټکوالي داسې مخ ته بوزی، چې د تکو P_0 او P_1 ترمنځ واټن تل کوچنی شي، داسې چې تکی P_1 د تکي P_0 په لور وخوزیږي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د ۳ –مې او ۷-مې دقیقې ترمنځ منځنی تغیرارزښت (ځګوالی)دی:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(7)-f(3)}{7-3} = \frac{24,5-4,5}{7-3} = \frac{20}{4} = 5$$

د ۳ –مې او ۴ –مې دقیقې ترمنځ منځنی تغیرارزښت(منځنی ځګوالی) دی:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4)-f(3)}{4-3} = \frac{8-4,5}{4-3} = \frac{3,5}{1} = 3,5$$

دریمې دقیقې ته د ورنزدې کیدنې شمیرنه

Intervall $[3;x]$	$[3;4]$	$[3;3,1]$	$[3;3,01]$	$[3;3,001]$
$\Delta x = x-3$	1	0,1	0,01	0,001
$\Delta y = f(x)-f(3)$	3,5	0,305	0,03005	0,0030005
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	3,5	3,05	3,005	3,0005

پورته شمیرنه په ګوته کوي، چې که ټکی P_1 د ټکي P_0 په لور وخوزیږي یا ورنزدې شي، نو د تغیر ارزښت(ځګیدنه) تل زیاته و ارزښت ۳ ته ورنزدې کیږي.

موږ په دې توګه یو ارزښت لاس ته راوړو، چې لحظوي تغیرارزښت (لحظوي ځګیدنې) ته تل ورنږدې کیږي.

که موږ فیزیکي لویي (واحدونه یا یوونونه) په خپله بیلګه کې وکاروو، نو د تغیرارزښت (ځګوالي) لپاره m/s باور لري . دا د چټکتیا لپاره یوون(واحد) دی

دا په دې مانا دی،چې د لار-وخت دیاګرام چټکتیا (سرعت) په ګوته کوي.

لحضوي یاسترګو رپ تغیرارزښت شمیرلو ته شمیرنیزه تګلار

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $f(x) = 0,5x^2$ لپاره په اینټروال $[3; \Delta x]$ کې منځنی تغیر ارزښت(جګوالی)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3+\Delta x) - f(3)}{\Delta x} = \frac{0,5(3+\Delta x)^2 - 0,5\cdot 3^2}{\Delta x} = \frac{0,5\left[9 + 6\Delta x + (\Delta x)^2\right] - 0,5\cdot 9}{\Delta x}$$

$$= \frac{0,5\cdot 9 + 3\Delta x + 0,5(\Delta x)^2 - 0,5\cdot 9}{\Delta x} = \frac{\Delta x(3 + 0,5\Delta x)}{\Delta x} = 3 + 0,5\Delta x$$

دا $3+0,5\Delta x$ د منځنی تغیرارزښت دی

که اوس Δx تل کوچنی شي، موږ وایو که Δx د صفر په لور وهڅیږي یا لاړشي یعنې ($\Delta x \to 0$) ،نو د منځنی تغیر ارزښت $3+0,5\Delta x$ د3 په لور ځي یا هڅیږي.

دا نو اوس لحظوي (د سترګو رپ) تغیرارزښت دی د x_0 په ځای کې.

د دې لپاره لیکو : د $\Delta x \to 0$ لپاره باور لري: $3+0,5\Delta x \to 3$

یا $$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(3+0,5\Delta x) = 3$$

پوښتنې

1 - کیمیاوي تعامل د مختلفې چټکتیا سره صورت نیسي. د بیلګې په توګه که ځینک د مالګې به تیزابو کې وچول شئ، نو هایدروجن ترې ترې راوځي یا رامنح ته کیږیز لاندې جدول د هایدروجن سټ یا مقدار ورکوي، چې د وخت په واک کې دئ یا تابع دي.

وخت پهS	2	4	6	8	10	12
د اوبو سټ یا مقدار په ملي لیترml	21	30,5	35,5	40,5	42,5	43

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف- د دې لپاره یو دیاګرام وکاږئ.

ب – د هایدروجن تولید په هکله څه وینا کیداي شئ؟

پ - په لاندې انټروالونو کې د تغیر ارزښت وشمیرئ.

[2 ; 4] ; [4 ; 8] ; [8 ; 12]

دویم - د $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - x + 1$ ؛ تغیر ارزښت په انټروالونو

$[1; 1,5]; [-4; -2,5]; [2; t]$ کې

د $t \; t \neq 2; [3; 3+h]$ او h>0 سره وشمیرئ.

دریم - تابع $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x$ ؛ ورکړ شوې

الف – د f(x) منځنی تغیرارژښت په انټروال I = [2;5] وشمیري.

ب - د s(x) سیکانت مساوات په P (2 | f(2)) او Q (5 | f(5)) ټکو کې وټاکئ.

پ _ د f(x) لحضوي تغیرارزښت د x = 2 په ځاي کې وشمیرئ.

ت - د f(x) او s(x)ګرافونه په وضعیه قیمتسیستم کې وکاږئ

څلورم - یو جسم په ازاده غورځولو کې داسې حرکت کوي، چې په t وخت کې S(t) = 5.t^2 لار وهي(S په ړتر او t دقیقه).

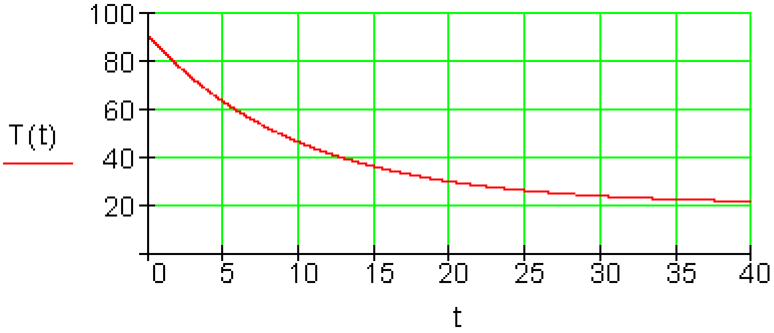
پنځم – یو تولید له خپل جمتووالي وختت څخه وروسته سړیږي.

تمپراتور(تودوخي) $T(t) = 20 + 70e^{-0,1t}; t \geq 0$ (t په دقیقو، T(t) په څلزیوس درجې

د سړیدو مخته تګ وشمیرئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځيره د تابع $T(t)$ ګراف ښايي.



الف – له کوم حرارت ځخه مخ ته ځو؟

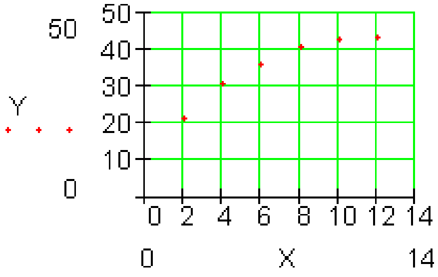
ب – فيريني کوم حرارت لري، که يخه شي؟

پ – په کوم وخت کې چټکتيا(سرعت) ، د هغې سره چې فيريني يخيږي ، خورا لويه ده.

ت _ په لومړيو لسو دقيقو کې د منځني تودوخې تغير وشميرئ.

مفصل حلونه

دلومړي مفصل حل　　　الف –



ب – د هایدروجن تولید د وخت په واحد کی تل کمیږي　　پ - تغیر اربښت $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

$$[2;4]:\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{30,5-21}{4-2}=4,75$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$[4;8]: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{40,5-30,5}{8-4} = 2,5$$

$$[8;12]: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{43-40,5}{12-9} = 0,625$$

I	[2 ; 4]	[4 ; 8]	[8 ; 12]
$\frac{ml}{s}$	4,75	2,5	0,625

دویم – د $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - x + 1$ منځنی تغیر اربښت $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$[1;1,5]: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1,5)-f(1)}{1,5-1} = \frac{\frac{1}{16}-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = -\frac{3}{8}$$

$$[-4;-2,5]: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(-2,5)-f(-4)}{-2,5-(-4)} = \frac{\frac{81}{16}-9}{\frac{3}{2}} = -\frac{21}{8}$$

$$[2;t]: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(t)-f(2)}{t-2} = \frac{\frac{1}{4}t^2-t+1-\left(\frac{1}{4}\cdot 2^2-2+1\right)}{t-2} = \frac{\frac{1}{4}t^2-t+1}{t-2}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}\left(t^2-4t+4\right)}{t-2} = \frac{\frac{1}{4}(t-2)^2}{t-2} = \frac{1}{4}(t-2) \text{ für } t \neq 2$$

$$[3;3+h]: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3+h)-f(3)}{3+h-3} = \frac{\frac{1}{4}(3+h)^2-(3+h)+1-\left(\frac{1}{4}\cdot 3^2-3+1\right)}{h}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}\left(9+6h+h^2\right)-3-h+1-\frac{9}{4}+3-1}{h} = \frac{\frac{1}{2}h+\frac{1}{4}h^2}{h} = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}h$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دريم : الف_ $f(x)=\frac{3}{4}x^2-3x$ منحنی تغير ارزښت به $[2;5]$ کې دی

: $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(5)-f(2)}{5-2}$

$$f(5)=\frac{3}{4}\cdot 25-3\cdot 5=3{,}75 \quad f(2)=\frac{3}{4}\cdot 4-3\cdot 2=-3 \quad \Delta x=5-2=3$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{3{,}75-(-3)}{3}=\frac{6{,}75}{3}=\underline{\underline{2{,}25}}$$

ب – د s(x) سيکانت مساوات چې لهP او Q ټکو تيريږي، ټيک همداسې شميرل کيږي، لکه کرښه چې له دوه ټکو تيريږي.

P(2;f()) د a) له امله (P(2;-3 لاس ته راځئ

Q(5;f(5) د a) له امله(Q(5;3,75 لاس ته راځئ

د $s(x)=a_1\cdot x+a_0$: $a_1=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(5)-f(2)}{5-2}=2{,}25$ ؛ سره د a)پوښتنبرخه هم وګورئ:

$$\Rightarrow s(x)=2{,}25x+a_0$$

$$P(2|-3): s(2)=-3 \Leftrightarrow 2{,}25\cdot 2+a_0=-3 \Leftrightarrow a_0=-7{,}5$$

$$\Rightarrow s(x)=2{,}25x-7{,}5$$

د تانجنت جګوالی

پ- لحضوي تغيرارزښت د x = 2 په ځاي کې:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\frac{\frac{3}{4}(2+\Delta x)^2-3(2+\Delta x)\underbrace{+3}_{-f(2)}}{\Delta x}$$

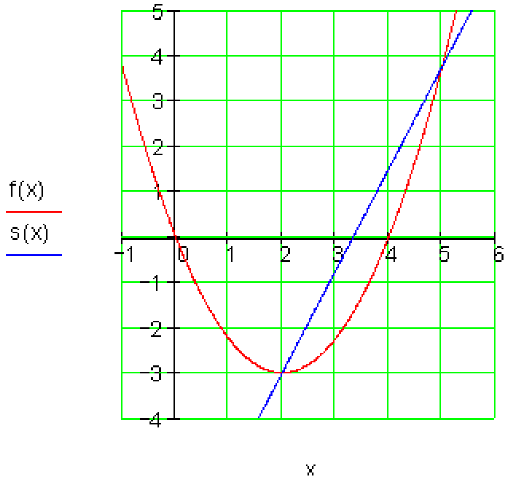
$$=\frac{\frac{3}{4}\left[4+4\Delta x+(\Delta x)^2\right]-6-3\Delta x+3}{\Delta x}=\frac{3+3\Delta x+\frac{3}{4}(\Delta x)^2-6-3\Delta x+3}{\Delta x}$$

$$=\frac{\frac{3}{4}(\Delta x)^2}{\Delta x}=\frac{3}{4}\Delta x$$

منځنی تغئیرارزښت په انتروال $[2;\Delta x]$ کې.

د $\Delta x \to 0$ لپاره دی: $\frac{3}{4}\Delta x \to 0$

د$f(x)$ لحضوي تغیرارزښت د $x = 2$ په ځای کې 0 دی



ت-

ځلورم - لحضوي جټکتیا یا سرعت د لحضوي تغیر ارزښت سره په یوه معنا دی.

$$t=1:\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{s(1+\Delta x)-s(1)}{\Delta x}=10+5\Delta x \Rightarrow$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\Delta x \to 0$ لپاره صدق کوي: $10+5\Delta x \to 10$

$$t = 2: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{s(2+\Delta x)-s(2)}{\Delta x} = 20+5\Delta x \Rightarrow$$

د $\Delta x \to 0$ لپاره صدق کوي. $20+5\Delta x \to 20$

$$t = 3: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{s(3+\Delta x)-s(3)}{\Delta x} = 30+5\Delta x \Rightarrow$$

د $\Delta x \to 0$ لپاره صدق کوي. $30+5\Delta x \to 30$

پنځم – الف- پیلتودوخي کیدی شي له $90\,^0C$ ګراف څخه ولوستل شي.

ب- تابع ارزښت اسیپتوتیکي د ارزښت$20\,^0C$ په لور هڅیږي یا ځي.

پ-د سړیدنې چټکتیا په پیل کې خ ورا لویه وي.

ت- $[0;10]: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{T(10)-T(0)}{10-0}$

د $T(10) = 20+70\cdot e^{-0,1\cdot 10} \approx 45,75$ und $T(0) = 20+70\cdot \underbrace{e^{-0,1\cdot 0}}_{1} = 90$ سره

کیږي: $\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \underline{\underline{-4,425}}$

کمیزه یا منفي مخنخښه په دې معنا ده، چې تغیرقیمت منفي دی، د فیریني تودوخي کمیږي.

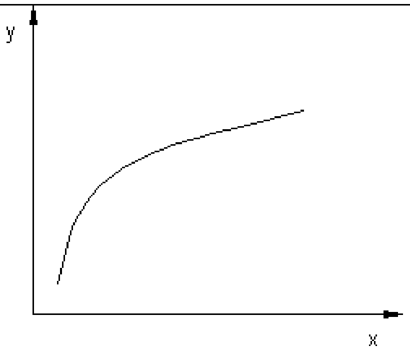
کمښت وېش(تفاضلوېش) او مشتق یا رابیلیدنه

د غوڅووني(تقاطع) جګوالي څخه د تانجنت جګوالي ته

(c) ketabton.com: The Digital Library

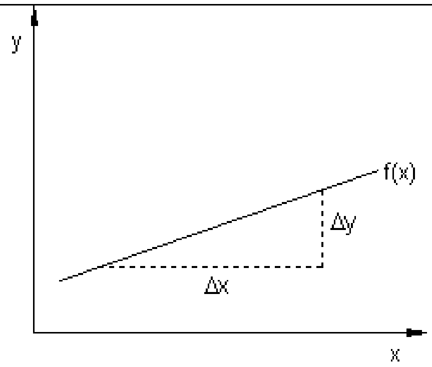
یو تابع $y = f(x)$ او اړونده ګراف دې ورکړ شوی وي.

که د تابع ځګیدني حالت په پام کې ونیسو ،نو ګورو چې د تابع ځګیدنه په نږدې ټولو ټکو کې توپیر لري.



یوه ثابته ځګېدنه، لکه په کرښيز یا لاینیز تابع $f(x) = a_1 x + a_0$ کې د

$$a_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = konstant$$

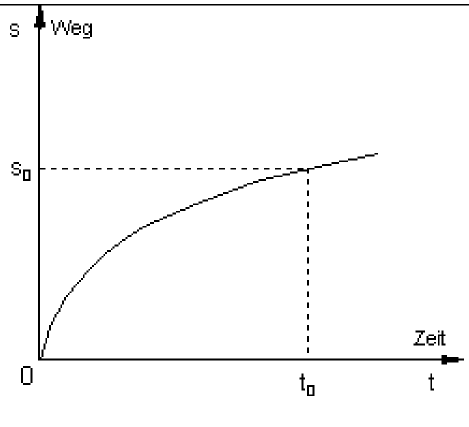


په زیاتو وختونو اړیینه ده ، چې د تغیرحالت(د ځګېدني حالت) کې د تابع د تلنې حالت و څیړو.

نو له دې امله لحظوی چټکتیا(همغه وختیزه – یا سملاسي) $v(t_0)$ په لار- وخت دیاګرام کې وڅیړو.

د مشتقشمیرنې په مرسته دا پرابلم حل کېدی شي.

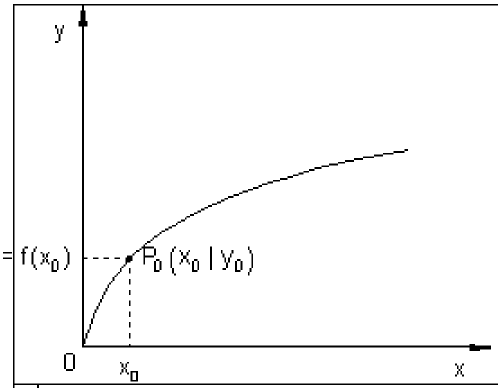
د یوه تابع د ځګیدنې ټاکنه په یوه د مخه ورکړ شوي ځای کې differenzieren د مشتق نیونه بلل کیږي.



$t_0 \triangleq$	په پام کې نیولی سترګو رپ
$s_0 \triangleq$	تر دې سترګو رپ پورې وهلې لار

(c) ketabton.com: The Digital Library

یو تابع $y = f(x)$ او د هغه ګراف دې ورکړ شوی. په ټکي $P_0(x_0 | y_0)$ کې ورکړ شوی وي. ددې جګوالی پیداکړی شي.

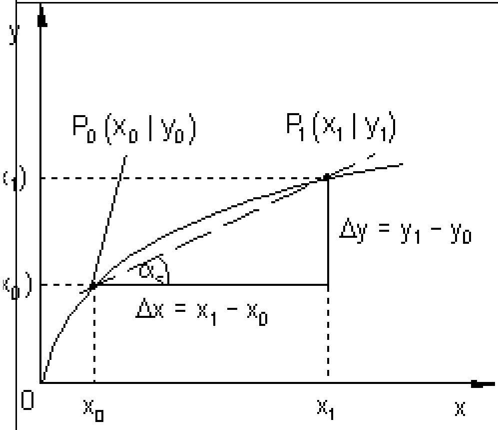


ددې پرابلم د حل لپاره داسې مخ ته ځو، چې لومړی جګوالی په نږدې توګه (تقریبي) پیدا کوو.

ددې لپاره یو بل ټکی $P_1(x_1 | y_1)$ د P_0. ټکي په نزدې کې ټاکو.

کرښه، چې دواړه ټکي سره تړي ،یعنې سیکانت، یو جګوالی ښایي، چې د ټکو P_1 او P_0 ترمنځ د تابع ،،منځنی جګوالی،، په ګوته کوي.

دا د جګوالیمثلث له لارې ټاکل کیږي.



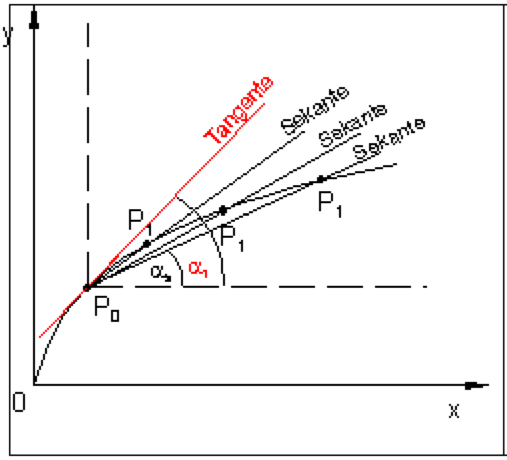
$$\tan\alpha_s = a_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

$\alpha_s \triangleq$	جګېدو کونج
$a_s \triangleq$	جګېدوضریب

که ټکی P_1 د ټکي P_0 په نزدې کې وټاکو یا ځای په ځا ی کړو، نو دا په ټکي P_0 کې د تابع دنوي سیکانت جګوالی دی چې باید پیدا شي. که دا کار (تلنه) تل مخ ته بوزو، او ټکی P_1 تل و ټکي P_0 ته ورنزدې کړو، نو د پولې حالت په څېر یوه کرښه منځ ته راځي، چې د تابع ګراف په ټکي P_0 کې لمسوي.

د تانجنت جګېدنه په ټکي P_0 کې ټیک د تابع د ګراف جګېدنه په ټکي P_0 کې ښایي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د تانجنت د جګوالي (ميلان ـ) کونج	$\alpha_t =$
د تنجنت د جګوالي ضريب	$a_t =$

داحالت يا تلنلار کيدی شي د رياضي له لاري د پوله ارزښت جوړولو په څير افاده شي.

$$\lim_{P_1 \to P_0} \alpha_s = \alpha_t \qquad \lim_{P_1 \to P_0} a_s = a_t$$

کمښتويش(تفاضلوېش Difference quotient) او مشتق

د سيکانت جګيدنه (منحنی تغير ارزښت)

$$a_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Delta x = x_1 - x_0 \Rightarrow x_1 = x_0 + \Delta x$$

د x لپاره د مساوات ښی خوا ځای په ځای کوو

$$a_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

د تنجنت جګيدني سره د پوله ارزښت (حد) له لاري لرو

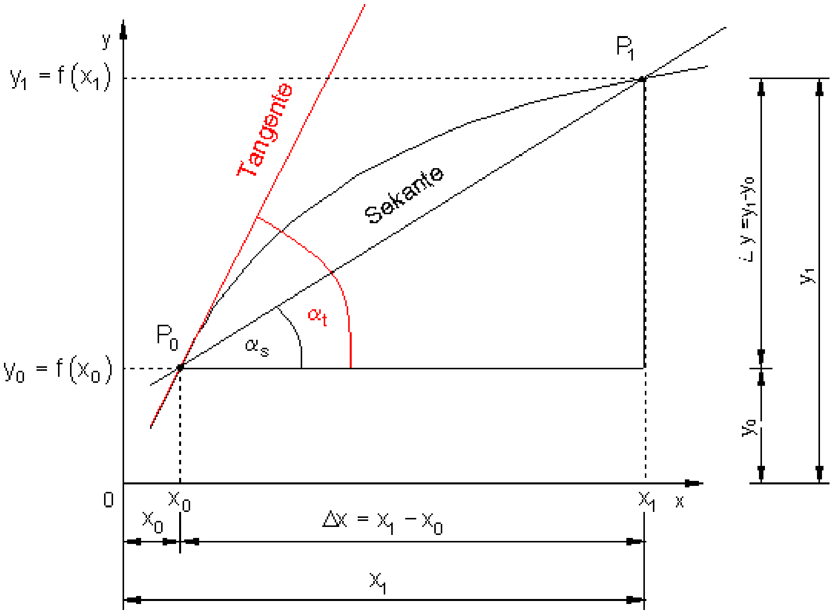
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

دا مشتق يا لحظوي – د سترګو رپ تغير ارزښت دى

يا لنډ

$$a_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$



په ورته توګه د کمښت ويش يا د تفاضل ويش Difference quotient تر څيړنې لاندې نيسو:

د يوې کربنې ميل يا ځګيدنه بې له مشتق نيونې ټاکلکيدی شي.

کربنه $y = f(x) = mx + a$ لرو.

د دې کربنې د ځګيدنې فرمول په لاندې ډول دى:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند (تعریف):

دفرنځیالوېش(کمبنتوېش)

د x_0 په ځای کې د تابع $f(x)$ مشتق یا رابیلیدنه بلل کیږي

تعریف (پیژند):
د تابع لومړی مشتق یا رابیلیدنه دx_0 په ځای کې دتانجنت جګیدنه ورکوي، چې د تابع ګراف یې په ټکي $P_0(x_0, y_0)$ کې لمسوي او له دې سره غبرګ د تابع د ګراف جګیدنه ده په ټکي $P_0(x_0, y_0)$ کې. دا سړی د تابع جګیدنه هم بولي.

تانجنتجګیدنه په ټکي $P_0(x_0, y_0)$ کې

د x_0 په ځای کې د تابع مشتق او د مشتق تابع

د x_0 په ځای کې د تابع مشتق یعنې څه؟

ددې د روښانه ونې لپاره د لاندې بیلګې څخه کار اخلو

بیلګه:
تابع $y = f(x) = x^2$ دې ورکړ شوې وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

غواړو د $x = x_0$ په ځای کې او په ځانګړي توګه د $x_0 = 2$ په ځای کې د هر څه لومړی کمبنتویش(د تفاضل ویش) پیداکوو.

$$x = x_0 :$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$$

اوس د لیمیټ د لاس ته راوړلو له لارې د مشتق ضریب ته راځو:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(2x_0 + \Delta x) = 2x_0$$

نو $f'(x_0) = 2x_0$ لرو او د $x_0 = 2$ لپاره $f'(2) = 2 \cdot 2 = 4$ باور لري.

د $x_0 = 2$ په ځای کې د تابع $y = f(x) = x^2$ لومړی مشتق په 4 برابر دی، دا په دې معنی چې تابع د $x_0 = 2$ په ځای کې میل یاجګوالی 4 لري.(لاندې تکرار شوې)

اوس د لیمیټ د لاس ته راوړلو له لارې د مشتق ضریب ته راځو:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(2x_0 + \Delta x) = 2x_0$$

نو $f'(x_0) = 2x_0$ لرو او د $x_0 = 2$ لپاره $f'(2) = 2 \cdot 2 = 4$ باور لري.

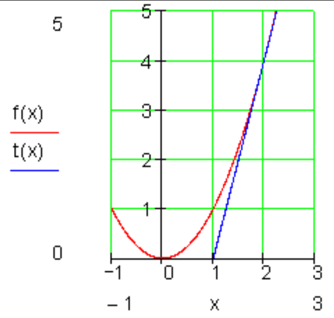
د $x_0 = 2$ په ځای کې د تابع $y = f(x) = x^2$ لومړی مشتق په 4 برابر دی، دا په دې معنی چې تابع د $x_0 = 2$ په ځای کې میل یاجګوالی 4 لري.

لاس ته راوړنه یې:

پایله یا لاس ته راوړنه یې کیدی شي، د تابع د ګراف له لارې و ازمایل شي، په داسې ډول چې د $P_0(x_0 | y_0) = P_0(2|4)$ په ټکي کې تانجنت انځور کړو او د میل د مثلث له لارې جګیدنه لاس ته راوړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

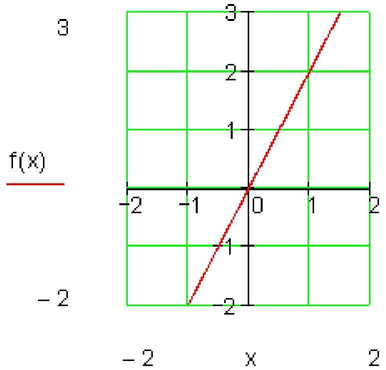
لکه پورته بېلګه کې: $y = f(x) = x^2$ په هر خوښه ځای x_0 کې تابع پيداکوو:



$y = f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x_0) = 2x_0$

x_0	-2	-1	0	1	2
$f'(x_0)$	-4	-2	0	2	4

لاندې ګراف وګورئ: ګراف يوه کرښه $f'(x) = 2x$ انځوروي، چې د تابع مشتق بلل کيږي(مخامخ ځيره)



پام:
که د يوې تابع مشتق ونيول شي، نو بيرته يوه تابع ترې لاس ته راځي، چې دا د مشتق تابع بللکيږي.

د مشتق تابع:
د تابع ارزښتونه په هر ټکي کې بنسټ تابع انځوروي، له دې امله دا د ميل تابع هم بلل کيږي.

بيلګه:
د $f(x) = x^3$ تابع دې ورکړ شوی دی.
فعاليت: ګران لوستونکي دې د $f(x) = x^3$ تابع او د تابع د مشتق ګراف وروسته له حله رسم کړي.
موږ غواړو په x_0 ټکي کې مشتق پيدا کړو او همداسې د مشتق تابع.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x_0+\Delta x)^3-x_0{}^3}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x_0{}^3+3x_0^2\Delta x+3x_0(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-x_0{}^3}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{3x_0^2\Delta x+3x_0(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}{\Delta x}$$

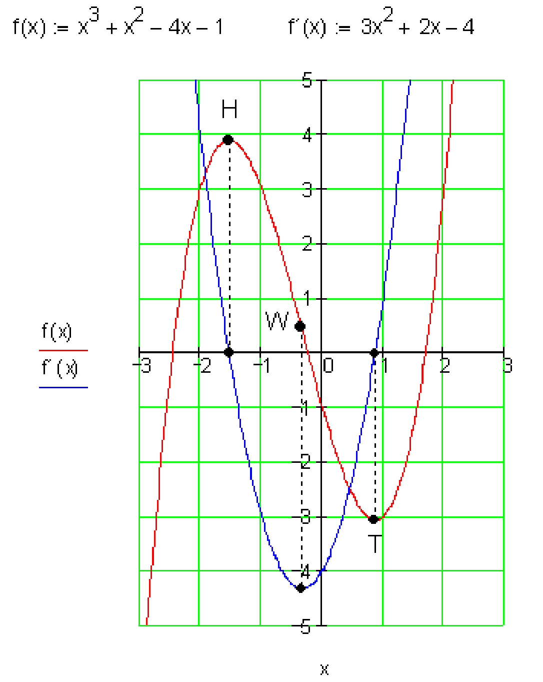
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta x(3x_0^2+3x_0\Delta x+(\Delta x^2))}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=3x_0^2+3x_0\Delta x+(\Delta x^2)$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(3x_0^2+3x_0\Delta x+(\Delta x)^2=3x_0^2$$

نو $f'(x_0)=3x_0^2$ د تابع $f(x)=x^3$ مشتق دی په ځای یا ټکي x_0 کې.

د مشتق تابع داسي ده: $f'(x_0)=3x_0^2$



د وضعیه کمیاتو- یا پروت ولاړ سیستم کې تابع او د تابع مشتق:
تابع(سوررنګه):
$f(x)=x^3+x^2-4x-1$
د تابع مشتق(شین):
$f'(x)=3x^2+2x-4$ ، چې
بیرته د مشتق یا د میل تابع ده.

بیلګه۳:

(c) ketabton.com: The Digital Library

ورکړ شوې تابع $f(x)=\frac{1}{x}$

غوښتونی: د x_0 په ځای کې د مشتق تابع

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{1}{x_0+\Delta x}-\frac{1}{x_0}}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{x_0}{x_0(x_0+\Delta x)}-\frac{(x_0+\Delta x)}{x_0(x_0+\Delta x)}}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{x_0-(x_0+\Delta x)}{x_0(x_0+\Delta x)}}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{x_0-x_0-\Delta x}{x_0(x_0+\Delta x)}}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{-\Delta x}{x_0(x_0+\Delta x)}}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}\cdot x_0(x_0+\Delta x)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-1}{x_0(x_0+\Delta x)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{1}{x_0^2+x_0\cdot\Delta x}$$

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(-\frac{1}{x_0^2+x_0\cdot\Delta x}\right)=-\frac{1}{x_0^2}$$

نو $f'(x_0)=-\frac{1}{x_0^2}$ د x_0 په ځای کې مشتق دی

د مشتق تابع ده: $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$

بیلګه ۴ : یوه تابع $f(x)=\sqrt{x}$ دې ورکړ شوې وي.

د x_0 په ځای کې د تابع مشتق پیداکړی او د مشتق تابع.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0}}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\left(\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0}\right)\cdot\left(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}\right)}{\Delta x\cdot\left(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x_0+\Delta x-x_0}{\Delta x\cdot\left(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}\cdot\left(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}}$$

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x_0}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

نو $f'(x_0)=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$ د x_0 په ځای کې د پورته تابع مشتق دی

او د مشتق تابع $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ دی.

د $\mathbf{f(x)=x^q}$ ډول توابعو مشتق د $q\in\mathbb{Q}$ سره.

د شمیرنې په بنسټ مو تر اوسه دا لاندې تر لاسه کړي:

تابع	د مشتق تابع	
$f(x)=x$	$f'(x)=1$	$f'(x)=1\cdot x^0$
$f(x)=x^2$	$f'(x)=2\cdot x$	$f'(x)=2\cdot x^1$
$f(x)=x^3$	$f'(x)=3\cdot x^2$	$f'(x)=3\cdot x^2$
$f(x)=\frac{1}{x}=x^{-1}$	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$	$f'(x)=-x^{-2}$
$f(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$f'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که دا پورته پنځه قوانین یو د بل سره پرتله شي، نو کومان ترې لاس ته راځي، چې دا لاندې قوانین به باور ولري:

د توان قانون بې له ښوونې

لومړی: زاړه ضریبونه د ضریب یا فاکتور په حیث د x کینې لور (په غربي ادبیاتو کې ورته وایي: ترمخ) ته ولیکی

دویم: نوی اکسپوننت هغه زوړ اکسپوننت دی، چې ۱ ترې کم شوی وي.

بیلګه:

$$f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2} \Rightarrow f'(x) = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$

موږ اوس د څو بنسټیزو توابعو مشتق شمیرنه تر څیړنې لاندې نیسو.

بیلګه ۱:

د یوې ثابتې مشتق :

موږ دالاندې تابع لرو،چې ارزښت یې یوثابت دی

ثابت $y = f(x) = c = Const$

نو د هر x_0ځای لپاره لرو:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{c - c}{h} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} = f'(x_0) = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۲:

یوه $f(x)=x$ خطي(کرښیزه)تابع لرو.

د x_0 په ځای کې غواړو د دې تابع مشتق پیدا کړو او د مشتق تابع هم:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x_0+\Delta x)-x_0}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x_0+\Delta x-x_0}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=1$$
$$\Rightarrow f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}1=\underline{\underline{1}}$$

نو $f'(x_0)=1$ د x_0 په ځای کې د تابع مشتق دی او $f'(x_0)=1$ د مشتق تابع ده یعني یوه ثابته ده.

بیلګه ۳ :

د $y=f(x)=c.u(x)$ ډوله تابع مشتق د c=ثابتې سره.

د یوې تابع مشتق، چې له یوې ساده تابع او یوې ثابتې سره د ضرب له لارې منځ ته راغلی وي، برابر دی د ساده تابع د مشتق سره، چې د(ثابتې=c) سره ضرب شوی وي. یعنې

له $y=f(x)=c.u(x)$ څخه لرو:

$$\Rightarrow f'(x)=c\cdot u'(x)$$

ثبوت:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f(x_0)=c\,u(x_0)$ $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{c\cdot u(x_0+\Delta x)-c\cdot u(x_0)}{\Delta x}$ $\Leftrightarrow f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}c\cdot\frac{u(x_0+\Delta x)-u(x_0)}{\Delta x}$	$\Leftrightarrow f'(x_0)=\underbrace{\lim\limits_{\Delta x\to 0}c}_{c}\cdot\underbrace{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{u(x_0+\Delta x)-u(x_0)}{\Delta x}}_{u'(x_0)}$ $\Leftrightarrow f'(x_0)=c\cdot u'(x_0)$

بیلګه :

$$f(x)=3x^4 \quad c=3 \quad u(x)=x^4 \Rightarrow u'(x)=4x^3$$

$$f'(x)=c\cdot u'(x)=3\cdot 4x^3=\underline{\underline{12x^3}}$$

پیژند (تعریف): دفرنځیالوېش

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0):=\frac{dy}{dx}$$

په بیدیا کې جګوالی

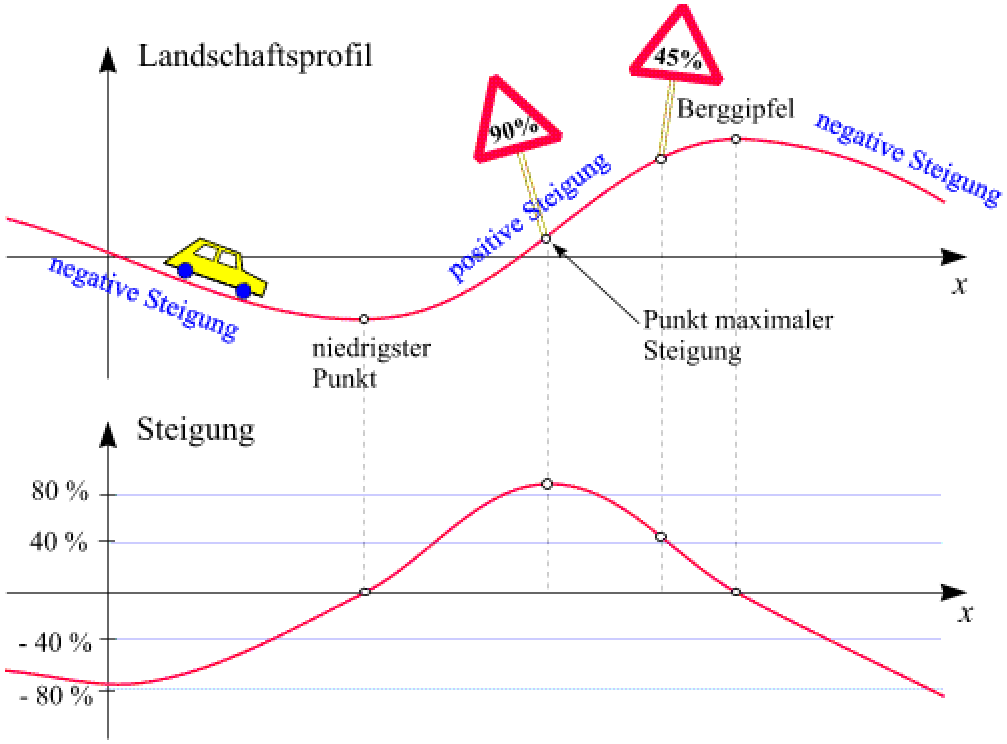
د تابع ګراف د سرک په څیر په فکر کې راولو، چې په بیدیا کې جګ او ټیټیږي یا کښته پورته ځغلي، نو په ښه توګه یې رسمولی شو، چې د ګراف خویونه د مشتق سره په اړیکو کې راځي:

په لاندې څیره کې د لغاتونو په ترتیب ژباړه:د بیدیا جوړښت، منفي یا کمیزه جګیدنه، خورا ټیټ ټکی،زیاتیزه یا مثبته جګیدنه،د خورا جګې جګیدنې ټکی، د غره څوکه، منفي جګیدنه.

پسې لاندې څیره کې: جګیدنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

د سرک کښته یا لاندي لور ته د ځانګړي دیاګرام سره د سرک ځګیدنه په هر ټکي کي انځور ده، د کومي سره چي یوه دویمه منحني ورکوي.



دیاګرامونه په کره توره وګوری او وهڅیږئ، چي د دویمي منحني خویونه د لومړی منحني له خویونو را برسیره کړی.

چیرته چي سرک خورا تیټ ټکی لري، هلته د ځګیدني ارزښت 0% دی. دا په دي معنا چي که موټر له دي ځایه تیرېږي په افقي ئا پراته ډول ځغلي او په همدې توره که موټر د غره په څوکه هم و ځغلي.

دا تیک هغه ټکي دي، د کومو په چاپیریال کې چي منفي او مثبته ځګیدنه یوبل سره رابندوي یا پولي لري.

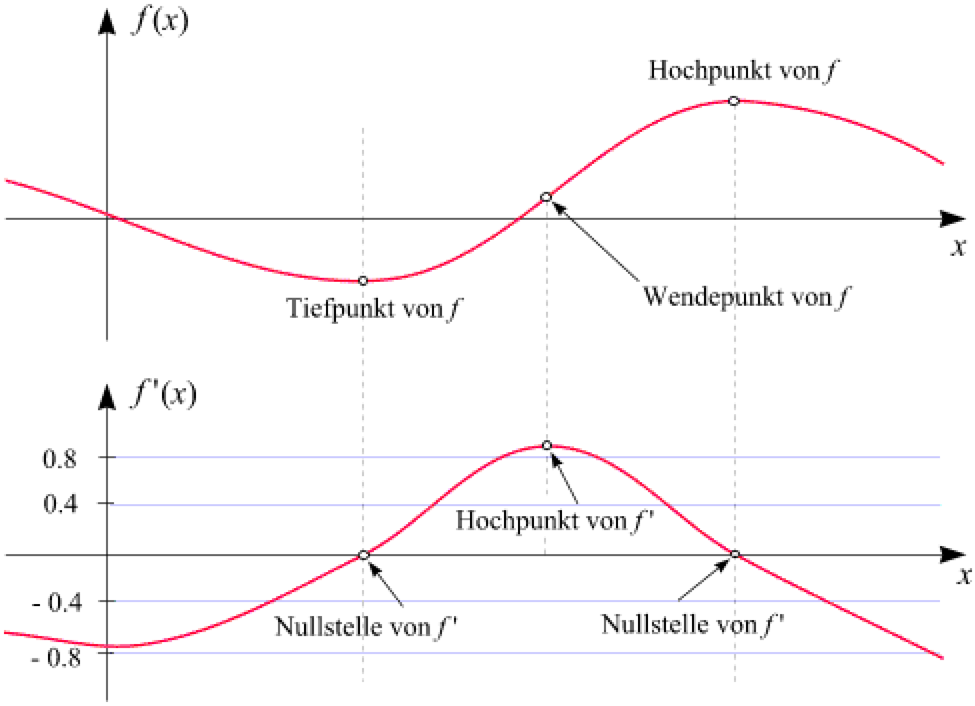
د دې په منځ کې یو چیرته یو ټکی شتون لري، چي هلته ځګیدنه ماکزیمال یا خورا لویه ده (په دې بیلګه کې 90%) .

(c) ketabton.com: The Digital Library

همدي ته ورته په دويمه منحني (كږې) كې يو ه خوكه لري، مګر دا په دې بيديا كې هغه ستره ،،څوكه،، نه ده، مګر كه څوک غواړي، نو يوه د ،،جګيدنې څوكه،، ده.

اوس دا دواړه كږې يا منحني په ورسره بلده يا معمول رياضيكې ډول په لاندې شكلونو كې ښايو او سره پرتله كوو:

(دالماني پښتو ژباړه له پورته كښته لور له كيڼ وښي لو رته: د fخورا جګ- ياماكسيمال ټكی، د fخوراټيټټكی، د fاوړون- يا د انعطاف ټكی،د f' خورا جګ ټكی، د f' صفرځای د f' صفرځای)



لومړی منحني د f(x) ګراف دی، دويمه منحني يا كږه د مشتق تابع f'(x) ګراف دی.

دا دواړه ګرافونه بيا هم ټيک وګوری او وهځيری، چې وپوهيری، چې دا يو د بېل سره په هره برخه كې څنګه يو د بل سره اړيكې لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $f(x)$ ګراف دوه ځانګړي ټکي مو سترګو ته راځي: په یوه کې $f(x)$ مینیمال - یا خورا ټیټ ټکی په بل کې $f(x)$ ماکسیمال - یا خورا جګ ټکی دی. په دې ځایونو کې $f(x)$ صفرځایونه لري. هغه ټکی چې هلته د $f(x)$ ګراف خورا ستوغ دی، هغه، هغه د انعطاف ټکی یا اوړونټکی بلل کیږي. دا چې په دې ټکي کې د $f(x)$ مشتق خورا جګ دی (په دې بیلګه کې$0,9$)، دا د($f'(x)$ عظمي نقطه (خورا جګ ټکی) ده.

د ازادې سترګې سره د هغه ځاي له لاندې منحني څخه ښه ځرګندیږي، نسبت و پورته منحني ته.

د ې بیلګې څخه همدا اوس اټکل کولی شو یا ګومان راوړی شو: که یوه تابع $f(x)$ ولرو، نو د دې $f(x)$ تابع په هکله د $f(x)$ له مشتق څخه ارزښناک معلومات په لا س روړی شو.

دا موړته د ماکسیما او مینیما (د خورا جګ او خورا ټیټ ارزښت) په هکله (چې دا دواړه د افراطي ارزښت تر نامه یادیږي) او په دې هکله چې ګراف چیرته خور یا ستوغ دی، پوره کټور معلومات راکوي.

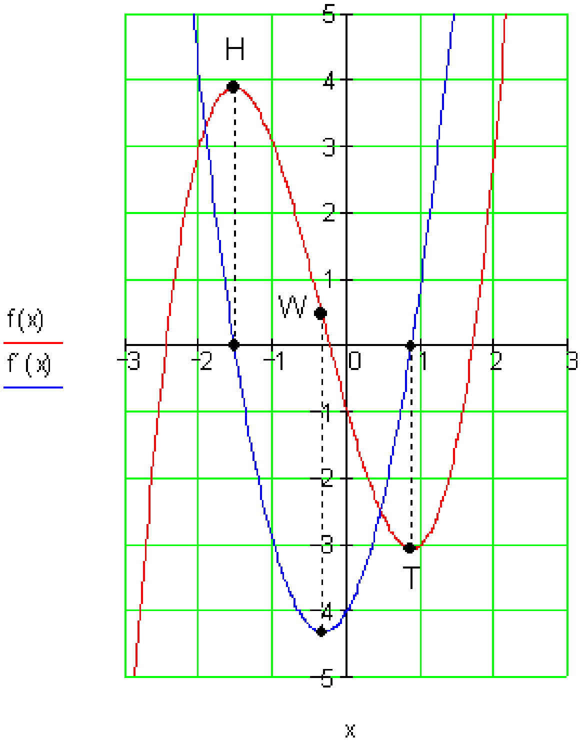
په کواوردینات سیستم (پروت –ولاړ-) کې تابع او د تابع مشتق

تابع : $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 1$ مشتق: $f'(x) = 3x^2 + 2x - 4$

د یوه تابع مشتق بیرته تابع دی. موږدا د مشتق تابع یا د جګېدنې (میلان) تابع بولو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f(x) := x^3 + x^2 - 4x - 1 \qquad f'(x) := 3x^2 + 2x - 4$



د دواړو توابعو ګراف په یوه قمیتي وضعیه (پروت ولاړ سیستم) کې و کښل شو.

هلته چې تابع f(x) یو جګ ټکی (H) همداسي ټیټ ټکی (T) لري ګراف د مشتق تابع x -محور کې غوځوي،په دې مانا چې د تابع ارزښت دلته صفر دی.

دا روښانه دی، ځکه چې په H او T کې تابع f(x) پروت یا افقي تانجنت لري، دا دا معنا لري، چې په دې ټکي کې د f(x) جګیدنه صفر ده.

د مشتق تابع f'(x) هلته مینیموم لري، چیرته چې دf(x) جګیدنه د H او T ترمنځ په پام ونیول شي د مطلق قیمت له مخې خورا لویه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې II:

لومړی - د $f(x)$ تابع مشتق د $x=2$ او $x=u$ په ځایونو کې وشمیرئ

الف - $f(x)=x^2+3$ ب - $f(x)=\frac{2}{x}$ پ - $f(x)=\frac{1}{x+1}$ ت - $f(x)=\sqrt{x}$

دویم - مشتق یې وشمیرئ

الف - $f(x)=-2x^4+3x^2-4x+2$ ب - $f(x)=0,5x^4-x^3+2,5x^2-8$

پ - $f(x)=\frac{1}{32}x^3+\frac{3}{2}x-4$ ت - $s(t)=-\frac{5}{6}t^2+\frac{2}{3}t+\frac{5}{2}$

ټ - $f(x)=-(x-6)^2(x+1)$ ث- $f(x)=\frac{1}{2}\left(x^2-2\right)^2$

دریم - مشتق یې وشمیرئ:

الف ـ $f(x)=\frac{1}{16}\left(x^3+x-1\right)$ ب - $f(x)=x\left(x^2-\frac{3}{2}x-4\right)$

پ - $f(x)=ax^4+bx^2+c$ ت - $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

ټ - $f(x)=6x+\frac{5}{x}$ ث - $f(x)=x^3-2x^2+\frac{1}{x}$

څلورم - مشتق یې وشمیرئ:

الف ـ $f_t(x)=\frac{t}{2}x^4-2tx^3+t^2$ ب - $f_k(x)=\frac{1}{k}x^3+kx^2+(k+1)x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پ - $f_a(x) = \frac{1}{4}x^3 + ax^2 + \left(a - \frac{1}{2}\right)x - 3$ ت - $f_t(x) = \frac{1}{2t}\left(x^2 - t\right)^2$

ټ - $f(t) = 5t^3 - 2t + 5$ ث _ $f(z) = -1{,}5z^3 + 2{,}5z^2 + z$

ج - $A(u) = \frac{1}{2}u^2 + 3u + 2u + 1$ ح - $A(u) = \frac{1}{2}u\left(u^2 + 1\right)$

پنځم – د $f(x)$ جګوالی د $x = -3$ په ځای کې وشمیرئ او د $f(x)$ قاطع یا غوځتکي د x - محورسره وشمیری .

الف _ $f(x) = 3x^2 - 5$ ب - $f(x) = 4x - \frac{1}{x}$

شپږم - مشتق یې وشمیرئ:

الف _ $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$ ب - $f(x) = -x^2 + 2x - 1$ پ - $f(x) = x + 1$

ت - $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x + 4$ ټ - $f(x) = 5b\,;\, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ث- $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{2}{3}x - 1$

ج - $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4x + 2$ ح - $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$

خ - $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x - 7$ څ - $f(x) = \frac{3}{4}x^2 + 5x + 8$

مفصل حلونه

لومړی –

الف –

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = x^2 + 3$$

$$x = 2:\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \frac{(2+\Delta x)^2 + 3 - (2^2+3)}{\Delta x}$$

$$= \frac{4 + 4\cdot\Delta x + (\Delta x)^2 + 3 - 4 - 3}{\Delta x} = \frac{4\cdot\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \frac{\cancel{\Delta x}\cdot(4+\Delta x)}{\cancel{\Delta x}} = 4 + \Delta x$$

$$\Rightarrow f'(2) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(4+\Delta x) = \underline{\underline{4}}$$

$$x = u:\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u+\Delta x) - f(u)}{\Delta x} = \frac{(u+\Delta x)^2 + 3 - (u^2+3)}{\Delta x}$$

$$= \frac{u^2 + 2u\cdot\Delta x + (\Delta x)^2 + 3 - u^2 - 3}{\Delta x} = \frac{2u\cdot\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \frac{\cancel{\Delta x}\cdot(2u+\Delta x)}{\cancel{\Delta x}} = 2u + \Delta x$$

$$\Rightarrow f'(u) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(2u+\Delta x) = \underline{\underline{2u}}$$

ب –

$$f(x) = \frac{2}{x}$$

$$x = 2:\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \frac{\frac{2}{2+\Delta x} - \frac{2}{2}}{\Delta x} = \frac{\frac{2}{2+\Delta x} - 1}{\Delta x} = \frac{\frac{2}{2+\Delta x} - \frac{1\cdot(2+\Delta x)}{2+\Delta x}}{\Delta x}$$

$$= \frac{\frac{2 - 1\cdot(2+\Delta x)}{2+\Delta x}}{\Delta x} = \frac{\frac{2-2-\Delta x}{2+\Delta x}}{\Delta x} = \frac{\frac{-\Delta x}{2+\Delta x}}{\Delta x} = \frac{\frac{-\Delta x}{2+\Delta x}}{\frac{\Delta x}{1}} = \frac{-1\cdot\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}(2+\Delta x)} = \frac{-1}{2+\Delta x}$$

$$f'(2) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{-1}{2+\Delta x}\right) = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$$

:

:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x = u: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \frac{\frac{2}{u+\Delta x} - \frac{2}{u}}{\Delta x} = \frac{\frac{2 \cdot u}{u \cdot (u+\Delta x)} - \frac{2 \cdot (u+\Delta x)}{u \cdot (u+\Delta x)}}{\Delta x}$$

$$= \frac{\frac{2 \cdot u - 2 \cdot (u+\Delta x)}{u \cdot (u+\Delta x)}}{\Delta x} = \frac{\frac{2 \cdot u - 2 \cdot u - 2 \cdot \Delta x}{u \cdot (u+\Delta x)}}{\Delta x} = \frac{\frac{-2 \cdot \Delta x}{u \cdot (u+\Delta x)}}{\frac{\Delta x}{1}}$$

$$= \frac{-2 \cdot \cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x} \cdot u \cdot (u+\Delta x)} = \frac{-2}{u \cdot (u+\Delta x)} = \frac{-2}{u^2 + u \cdot \Delta x}$$

$$f'(u) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{-2}{u^2 + u \cdot \Delta x} \right) = -\frac{2}{u^2}$$

پ –

$$f(x) = \frac{1}{x+1}$$

$$x = 2: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{2+\Delta x+1} - \frac{1}{2+1}}{\Delta x}$$

$$= \frac{\frac{1}{3+\Delta x} - \frac{1}{3}}{\Delta x} = \frac{\frac{1 \cdot 3}{3 \cdot (3+\Delta x)} - \frac{1 \cdot (3+\Delta x)}{3 \cdot (3+\Delta x)}}{\Delta x}$$

$$= \frac{\frac{1 \cdot 3 - 1 \cdot (3+\Delta x)}{3 \cdot (3+\Delta x)}}{\Delta x} = \frac{\frac{3-3-\Delta x}{3 \cdot (3+\Delta x)}}{\Delta x} = \frac{\frac{-\Delta x}{3 \cdot (3+\Delta x)}}{\frac{\Delta x}{1}} = \frac{-1 \cdot \cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x} \cdot 3 \cdot (3+\Delta x)} = \frac{-1}{3 \cdot (3+\Delta x)}$$

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{-1}{3(3+\Delta x)} \right) = -\frac{1}{9}$$

$$x = u: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{u+\Delta x+1} - \frac{1}{u+1}}{\Delta x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \frac{\frac{1\cdot(u+1)}{(u+1)\cdot(u+\Delta x+1)} - \frac{1\cdot(u+\Delta x+1)}{(u+1)\cdot(u+\Delta x+1)}}{\Delta x}$$

$$= \frac{\frac{1\cdot(u+1)-1\cdot(u+\Delta x+1)}{(u+1)\cdot(u+\Delta x+1)}}{\Delta x} = \frac{\frac{u+1-u-\Delta x-1}{(u+1)\cdot(u+\Delta x+1)}}{\Delta x} = \frac{\frac{-\Delta x}{(u+1)\cdot(u+\Delta x+1)}}{\frac{\Delta x}{1}}$$

$$= \frac{-1\cdot \cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}\cdot(u+1)\cdot(u+\Delta x+1)} = \frac{-1}{(u+\Delta x+1)(u+1)}$$

$$f'(u) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-1}{(u+\Delta x+1)(u+1)} = \frac{-1}{(u+1)(u+1)} = -\frac{1}{(u+1)^2}$$

ت-

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$x=2: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x} = \frac{\sqrt{2+\Delta x}-\sqrt{2}}{\Delta x} = \frac{\left(\sqrt{2+\Delta x}-\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{2+\Delta x}+\sqrt{2}\right)}{\Delta x\cdot\left(\sqrt{2+\Delta x}+\sqrt{2}\right)}$$

$$= \frac{2+\Delta x-2}{\Delta x\cdot\left(\sqrt{2+\Delta x}+\sqrt{2}\right)} = \frac{1\cdot\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}\cdot\left(\sqrt{2+\Delta x}+\sqrt{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2+\Delta x}+\sqrt{2}}$$

$$f'(2) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{2+\Delta x}+\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$x=u: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u+\Delta x)-f(u)}{\Delta x} = \frac{\sqrt{u+\Delta x}-\sqrt{u}}{\Delta x} = \frac{\left(\sqrt{u+\Delta x}-\sqrt{u}\right)\cdot\left(\sqrt{u+\Delta x}+\sqrt{u}\right)}{\Delta x\cdot\left(\sqrt{u+\Delta x}+\sqrt{u}\right)}$$

$$= \frac{u+\Delta x-u}{\Delta x\cdot\left(\sqrt{u+\Delta x}+\sqrt{u}\right)} = \frac{1\cdot\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}\cdot\left(\sqrt{u+\Delta x}+\sqrt{u}\right)} = \frac{1}{\sqrt{u+\Delta x}+\sqrt{u}}$$

$$f'(u) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{u+\Delta x}+\sqrt{u}}\right) = \frac{1}{\sqrt{u}+\sqrt{u}} = \frac{1}{2\sqrt{u}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم – مفصل حلونه

الف – $f(x) = -2x^4 + 3x^2 - 4x + 2 \Rightarrow f'(x) = -8x^3 + 6x - 4$

ب – $f(x) = 0{,}5x^4 - x^3 + 2{,}5x^2 - 8 \Rightarrow f'(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x$

پ – $f(x) = \frac{1}{32}x^3 + \frac{3}{2}x - 4 \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{32}x^2 + \frac{3}{2}$

ت- $s(t) = -\frac{5}{6}t^2 + \frac{2}{3}t + \frac{5}{2} \Rightarrow s'(t) = -\frac{5}{3}t + \frac{2}{3}$

ټ –

$$f(x) = -(x-6)^2(x+1) = -x^3 + 11x^2 - 24x - 36 \Rightarrow f'(x) = -3x^2 + 22x - 24$$

ث- $f(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 2)^2 = \frac{1}{2}x^4 - 2x^2 + 2 \Rightarrow f'(x) = 2x^3 - 4x$

دریم – الف – $f(x) = \frac{1}{16}(x^3 + x - 1) \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{16}x^2 + \frac{1}{16}$

ب – $f(x) = x\left(x^2 - \frac{3}{2}x - 4\right) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 4x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3x - 4$

پ – $f(x) = ax^4 + bx^2 + c \Rightarrow f'(x) = 4ax^3 + 2bx$

ت- $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

ث – $f(x) = 6x + \frac{5}{x} = 6x + 5x^{-1} \Rightarrow f'(x) = 6 - 5x^{-2} = 6 - \frac{5}{x^2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ج --

$$f(x)=x^3-2x^2+\frac{1}{x}=x^3-2x^2+x^{-1}\Rightarrow f'(x)=3x^2-4x-x^{-2}=3x^2-4x-\frac{1}{x^2}$$

خلورم – مفصل حلونه

الف - $$f_t(x)=\frac{t}{2}x^4-2tx^3+t^2\Rightarrow f_t'(x)=2tx^3-6tx^2$$

ب - $$f_k(x)=\frac{1}{k}x^3+kx^2+(k+1)x\Rightarrow f'_k(x)=\frac{3}{k}x^2+2kx+k+1$$

پ - $$f_a(x)=\frac{1}{4}x^3+ax^2+\left(a-\frac{1}{2}\right)x-3\Rightarrow f'_a(x)=\frac{3}{4}x^2+2ax+a-\frac{1}{2}$$

ت- $$f_t(x)=\frac{1}{2t}\left(x^2-t\right)^2=\frac{1}{2t}x^4-x^2+\frac{1}{2}t\Rightarrow f_t'(x)=\frac{2}{t}x^3-2x$$

ټ – $$f(t)=5t^3-2t+5\Rightarrow f'(t)=15t^2-2$$

ث – $$f(z)=-1,5z^3+2,5z^2+z\Rightarrow f'(z)=-4,5z^2+5z+1$$

ج - $$A(u)=\frac{1}{2}u^2+3u+2u+1\Rightarrow A'(u)=u+5$$

چ - $$A(u)=\frac{1}{2}u\left(u^2+1\right)=\frac{1}{2}u^3+\frac{1}{2}u\Rightarrow A'(u)=\frac{3}{2}u^2+\frac{1}{2}$$

پنځم – مفصل حلونه

الف –

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = 3x^2 - 5 \Rightarrow f'(x) = 6x \Rightarrow f'(-3) = 6 \cdot (-3) = \underline{\underline{-18}}$$

د f(x) صفرځایونه

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 5 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{5}{3}} \Rightarrow f'\left(\pm\sqrt{\frac{5}{3}}\right) = 6 \cdot \left(\pm\sqrt{\frac{5}{3}}\right) = \underline{\underline{\pm 6 \cdot \sqrt{\frac{5}{3}}}}$$

ب –

$$f(x) = 4x - \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = 4 + \frac{1}{x^2} \Rightarrow f'(-3) = 4 + \frac{1}{9} = \underline{\frac{37}{9}}$$

د f(x) صفرځایونه :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 4x - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{4x^2 - 1}{x} = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x_{1/2} = \pm\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow f'\left(\pm\frac{1}{2}\right) = 4 + \frac{1}{\left(\pm\frac{1}{2}\right)^2} = 4 + \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4 + 4 = \underline{\underline{8}}$$

شپږم – مفصل حلونه

الف – $f(x) = 2x^2 + 3x + 1 \Rightarrow f'(x) = 4x + 3$

ب – $f(x) = -x^2 + 2x - 1 \Rightarrow f'(\ ) = -2x + 2$

پ – $f(x) = x + 1 \Rightarrow f'(x) = 1$

ت- $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x + 4 \Rightarrow f'(x) = x - \frac{1}{3}$

ټ – $f(x) = 5b\,;\ b \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow f'(x) = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ث ـ $f(x)=\frac{3}{4}x^2-\frac{2}{3}x-1 \Rightarrow f'(x)=\frac{3}{2}x-\frac{2}{3}$

ج ـ $f(x)=2x^3+3x^2-4x+2 \Rightarrow f'(x)=6x^2+6x-4$

چ ـ $f(\ )=-\frac{1}{4}x^3+\frac{2}{3}x^2-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2} \Rightarrow f'(x)=-\frac{3}{4}x^2+\frac{4}{3}x-\frac{3}{4}$

ح ـ $f(x)=\frac{1}{2}x^2+3x-7 \Rightarrow f'(x)=x+3$

خ ـ $f(x)=\frac{3}{4}x^2+5x+8 \Rightarrow f'(x)=\frac{3}{2}x+5$

پوښتنی :

مشتق شمیرنه III

اول- مشتق یې ونیسئ

الف - $f(x)=\frac{4}{5}x^2-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}$ ب - $f(x)=-\frac{3}{7}x^2+\frac{4}{9}x+\frac{8}{10}$

پ - $f(x)=x^3-x^2+x+1$ ت - $f(x)=-x^3+x^2-x+7$

ټ - $f(x)=-\frac{3}{4}x^3+2x^2-x+1$ ث - $f(x)=-\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+2x+\pi$

ج - $f(x)=4x^3+\pi x^2+bx+c$ چ - $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

ح - $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}x^3-\frac{1}{\pi}x^2+\alpha x$ خ - $f(x)=\frac{4}{5}x^3-\frac{3}{4}x^2+4x+7$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم - مشتق يې ونیسئ

الف - $f(x)=x^4-2x^2+3x+1$ ب - $f(x)=2x^4+3x^2-2x+2$

پ - $f(x)=\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{2}x^2-x+1$ ت - $f(x)=-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2$

ټ - $f(x)=x^5-2x^4+x^2-1$ ث - $f(x)=\frac{3}{4}x^4+\frac{5}{7}x^2+7$

ج - $f(x)=1$ چ - $f(x)=0$

ح - $f(x)=2x^6-4x^4+2x^2$ خ - $f(x)=\frac{3}{4}x^3+\frac{2}{3}x^2-x+4$

دریم – مشتق يې ونیسئ

الف - $f(x)=\frac{4}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+\sqrt{2}\cdot x$ ب - $f(x)=\sqrt{3}\cdot x^3-\sqrt{2}\cdot x^2+1$

پ - $f(x)=\frac{4}{3\pi}x^3+\frac{1}{3}x^2+1$ ت - $f(x)=3,5x^2-1,5x+2$

ټ - $f(x)=0,5x^2-2,5x+1$ ث - $f(x)=3,1x^2+\frac{7}{2}x-7$

ج - $f(x)=1,5x^3-2,5x^2+1$ چ - $f(x)=-2,5x^3+1,5x^2-1$

ح - $f(x)=t\cdot x^3+2x^2-4x$ خ - $f(x)=7,2x^2-8,2x+b$

څ - ځ -

څلورم – مشتق يې ونیسئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف - $f(x)=x^{-1}$ ب - $f(x)=\frac{1}{x}$

پ - $f(x)=\frac{2}{3x}+2$ ت - $f(x)=2x^{-2}+3x^{-1}+2$

ټ - $f(x)=-\frac{1}{2}x^{-2}+2x^{-1}$ ث - $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$

ج - $f(x)=x^{\frac{1}{4}}$ چ - $f(x)=\sqrt{x}$ ح - $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ خ - $f(x)=\sqrt{x^3}$

ځوابونه

مشتق شمیرنه **III**

مفصل حلونه:

لومړی:

الف - $f(x)=\frac{4}{5}x^2-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}\Rightarrow f'(x)=\frac{8}{5}x-\frac{3}{4}$

ب - $f(x)=-\frac{3}{7}x^2+\frac{4}{9}x+\frac{8}{10}\Rightarrow f'(x)=-\frac{6}{7}x+\frac{4}{9}$

پ - $f(x)=x^3-x^2+x+1\Rightarrow f'(x)=3x^2-2x+1$

ت - $f(x)=-x^3+x^2-x+7\Rightarrow f'(x)=-3x^2+2x-1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټ - $f(x)=-\frac{3}{4}x^3+2x^2-x+1 \Rightarrow f'(x)=-\frac{9}{4}x^2+4x-1$

ث - $f(x)=-\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+2x+\pi \Rightarrow f'(x)=-2x^2+3x+2$

ج – $f(x)=4x^3+\pi x^2+bx+c \Rightarrow f'(x)=12x^2+2\pi x+b$

چ - $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d \Rightarrow f'(x)=3ax^2+2bx+c$

ح - $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}x^3-\frac{1}{\pi}x^2+\alpha x \Rightarrow f'(x)=\frac{3}{\sqrt{2}}x^2-\frac{2}{\pi}x+\alpha$

خ - $f(x)=\frac{4}{5}x^3-\frac{3}{4}x^2+4x+7 \Rightarrow f'(x)=\frac{12}{5}x^2-\frac{3}{2}x+4$

دویم:

الف - $f(x)=x^4-2x^2+3x+1 \Rightarrow f'(x)=4x^3-4x+3$

ب - $f(x)=2x^4+3x^2-2x+2 \Rightarrow f'(x)=8x^3+6x-2$

پ - $f(x)=\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{2}x^2-x+1 \Rightarrow f'(x)=2x^3+x-1$

ت - $f(x)=-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2 \Rightarrow f'(x)=-x^3+x^2-x$

ټ - $f(x)=x^5-2x^4+x^2-1 \Rightarrow f'(x)=5x^4-8x^3+2x$

ث - $f(x)=\frac{3}{4}x^4+\frac{5}{7}x^2+7 \Rightarrow f'(x)=3x^3+\frac{10}{7}x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ج ـ $f(x) = 1 \Rightarrow f'(x) = 0$

چ - $f(x) = 0 \Rightarrow f'(x) = 0$

ح - $f(x) = 2x^6 - 4x^4 + 2x^2 \Rightarrow f'(x) = 12x^5 - 16x^3 + 4x$

خ - $f(x) = \frac{3}{4}x^3 + \frac{2}{3}x^2 - x + 4 \Rightarrow f'(x) = \frac{9}{4}x^2 + \frac{4}{3}x - 1$

دریم:

الف - $f(x) = \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \sqrt{2}\cdot x \Rightarrow f'(x) = 4x^2 + 3x + \sqrt{2}$

ب - $f(x) = \sqrt{3}\cdot x^3 - \sqrt{2}\cdot x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = 3\sqrt{3}\cdot x^2 - 2\sqrt{2}\cdot x$

پ - $f(x) = \frac{4}{3\pi}x^3 + \frac{1}{3}x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{4}{\pi}x^2 + \frac{2}{3}x$

ت - $f(x) = 3,5x^2 - 1,5x + 2 \Rightarrow f'(x) = 7x - 1,5$

ټ - $f(x) = 0,5x^2 - 2,5x + 1 \Rightarrow f'(x) = x - 2,5$

ث - $f(x) = 3,1x^2 + \frac{7}{2}x - 7 \Rightarrow f'(x) = 6,2x + 3,5$

ج ـ $f(x) = 1,5x^3 - 2,5x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = 4,5x^2 - 5x$

چ - $f(x) = -2,5x^3 + 1,5x^2 - 1 \Rightarrow f'(x) = -7,5x^2 + 3x$

ح - $f(x) = t\cdot x^3 + 2x^2 - 4x \Rightarrow f'(x) = 3tx^2 + 4x - 4$

(c) ketabton.com: The Digital Library

خ - $f(x) = 7,2x^2 - 8,2x + b \Rightarrow f'(x) = 14,4x - 8,2$

ځلورم:

الف - $f(x) = x^{-1} \Rightarrow f'(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

ب - $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \Rightarrow f'(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

پ - $f(x) = \frac{2}{3x} + 2 = \frac{2}{3}x^{-1} \Rightarrow f'(x) = -\frac{2}{3}x^{-2} = -\frac{2}{3x^2}$

ت - $f(x) = 2x^{-2} + 3x^{-1} + 2 \Rightarrow f'(x) = -4x^{-3} - 3x^{-2}$

ټ - $f(x) = -\frac{1}{2}x^{-2} + 2x^{-1} \Rightarrow f'(x) = x^{-3} - 2x^{-2}$

ث - $f(x) = x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

ج – $f(x) = x^{\frac{1}{4}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{4}x^{\frac{1}{4}-1} = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}$

چ - $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

ح - $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

خ - $f(x)=\sqrt{x^3}=x^{\frac{3}{2}}\Rightarrow f'(x)=\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$

پوښتنې

مشتقشمیرنه IV

لومړی: مشتق یې ونیسئ

الف- $f(x)=4x^2-3x+2$ ب - $f(x)=-2x^2+6x-4$

پ- $f(x)=2x^3-x^2+1$ ت - $f(x)=-7x^3+2x^2-x+1$

ټ - $f(x)=\left(x^2-3\right)^2$ ث - $f(x)=1-x^3$

ج = $f(x)=1-x^4$ چ - $f(x)=2x^2-x^4$

ح - $f(x)=0,5x^3+3x^2$ خ = $f(x)=-3x^7+1$

دویم: مشتق یې ونیسئ

الف- $f(x)=a+3bx^2$ ب - $f(x)=3x^7-0,5x^3$

پ- $f(x)=0,125x^8-30x^4$ ت - $f(x)=0,01ax^{12}-0,5bx^8$

ټ - $f(x)=3ax^5-0,5bx^4$ ث - $f(x)=0,25x^8+0,5x^{10}$

ج = $f(x)=0,25ax^4+0,5bx^5$ چ - $f(x)=0,5bx^6+0,2ax^5$

ح - $f(x)=-0,5x^5$ خ = $f(x)=0,5x^3+3x^2$

دریم: مشتق یې ونیسئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف- $f(x)=-3x^7+2x$ ب - $f(x)=0,5x^3+2x$

پ- $f(x)=2x^3-3x^2$ ت - $f(x)=\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{4}x$

ټ - $f(x)=\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2+4$ ث - $f(x)=-\frac{1}{4}x^4+x^2$

ج = $f(x)=\frac{1}{18}x^4-\frac{4}{9}x^3+x^2$ چ - $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x+1$

ح - $f(x)=\frac{3}{8}x^3-\frac{3}{4}x^2$ خ = $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+3x$

ځلورم:مشتق يې ونیسئ

الف- $f(x)=\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{2}x$ ب - $f(x)=-\frac{1}{16}x^4+x^2$

پ- $f(x)=\frac{1}{16}x^4-\frac{3}{2}x^2+5$ ت - $f(x)=-\frac{1}{12}x^3+\frac{3}{2}x+9$

ټ - $f(x)=\frac{1}{16}x^4-\frac{3}{4}x^2+x$ ث - $f(x)=\frac{1}{2}x^3-3x^2+\frac{9}{2}x$

ج = $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x+3$ چ - $f(x)=x^4-6x^3+12x^2-8x$

ح - $f(x)=\frac{1}{12}x^4-2x^2$ خ = $f(x)=\frac{1}{4}x^4+2x^2+5x$

حلونه

مشتقشمیرنهIV

مفصل حلونه:

لومړی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف- $f(x)=4x^2-3x+2 \Rightarrow f'(x)=8x-3$

ب - $f(x)=-2x^2+6x-4 \Rightarrow f'(x)=-4x+6$

پ- $f(x)=2x^3-x^2+1 \Rightarrow f'(x)=6x^2-2x$

ت - $f(x)=-7x^3+2x^2-x+1 \Rightarrow f'(x)=-21x^2+4x-1$

ټ - $f(x)=\left(x^2-3\right)^2=x^4-6x^2+9 \Rightarrow f'(x)=4x^3-12x$

ث - $f(x)=1-x^3 \Rightarrow f'(x)=-3x^2$

ج = $f(x)=1-x^4 \Rightarrow f'(x)=-4x^3$

چ - $f(x)=2x^2-x^4 \Rightarrow f'(x)=-4x^3+4x$

ح - $f(x)=0,5x^3+3x^2 \Rightarrow f'(x)=1,5x^2+6x$

خ = $f(x)=-3x^7+1 \Rightarrow f'(x)=-21x^6$

دویم:

الف- $f(x)=a+3bx^2 \Rightarrow f'(x)=6bx$

ب - $f(x)=3x^7-0,5x^3 \Rightarrow f'(x)=21x^6-1,5x^2$

پ- $f(x)=0,125x^8-30x^4 \Rightarrow f'(x)=x^7-120x^3$

ت - $f(x)=0,01ax^{12}-0,5bx^8 \Rightarrow f'(x)=0,12ax^{11}-4bx^7$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټ ـ $f(x) = 3ax^5 - 0,5bx^4 \Rightarrow f'(x) = 15ax^4 - 2bx^3$

ث ـ $f(x) = 0,25x^8 + 0,5x^{10} \Rightarrow f'(x) = 5x^9 + 2x^7$

ج = $f(x) = 0,25ax^4 + 0,5bx^5 \Rightarrow f'(x) = 2,5bx^4 + ax^3$

چ ـ $f(x) = 0,5bx^6 + 0,2ax^5 \Rightarrow f'(x) = 3bx^5 + ax^4$

ح ـ $f(x) = -0,5x^5 \Rightarrow f'(x) = -2,5x^4$

خ = $f(x) = 0,5x^3 + 3x^2 \Rightarrow f'(x) = 1,5x^2 + 6x$

دریم:

الف ـ $f(x) = -3x^7 + 2x \Rightarrow f'(x) = -21x^6 + 2$

ب ـ $f(x) = 0,5x^3 + 2x \Rightarrow f'(x) = 1,5x^2 + 2$

پ ـ $f(x) = 2x^3 - 3x^2 \Rightarrow f'(x) = 6x^2 - 6x$

ت ـ $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{4}$

ټ ـ $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - x$

ث ـ $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^2 \Rightarrow f'(x) = -x^3 + 2x$

ج = $f(x) = \frac{1}{18}x^4 - \frac{4}{9}x^3 + x^2 \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{9}x^3 - \frac{4}{3}x^2 + 2x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چ - $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x+1 \Rightarrow f'(x)=x-2$

ح - $f(x)=\frac{3}{8}x^3-\frac{3}{4}x^2 \Rightarrow f'(x)=\frac{9}{8}x^2-\frac{3}{2}x$

خ = $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+3x \Rightarrow f'(x)=-x^2+3$

ځلورم: الف- $f(x)=\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{2}x \Rightarrow f'(x)=\frac{3}{8}x^2-3x+\frac{9}{2}$

ب - $f(x)=-\frac{1}{16}x^4+x^2 \Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{4}x^3+2x$

پ- / ت - $f(x)=-\frac{1}{12}x^3+\frac{3}{2}x+9 \Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}$

ټ - $f(x)=\frac{1}{16}x^4-\frac{3}{4}x^2+x \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x+1$

ث - $f(x)=\frac{1}{2}x^3-3x^2+\frac{9}{2}x \Rightarrow f'(x)=\frac{3}{2}x^2-6x+\frac{9}{2}$

ج = $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x+3 \Rightarrow f'(x)=x^2-1$

چ - $f(x)=x^4-6x^3+12x^2-8x \Rightarrow f'(x)=4x^3-18x^2+24x-8$

ح - $f(x)=\frac{1}{12}x^4-2x^2 \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3}x^3-4x$

خ = $f(x)=\frac{1}{4}x^4+2x^2+5x \Rightarrow f'(x)=x^3+4x^2+5$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

مشتقشمیرنه VI

لومړی: د لاندې توابعو مشتق ونیسئ:

الف- $f(x)=5x^4-4x^3+3x^2-2x+6$ ب - $f(x)=\left(a^2+x^2\right)\left(a^2-x^2\right)$

پ- $f(x)=-2x^4+3x^2-4x+2$ ت - $f(x)=0,5x^4-x^3+2,5x^2-8$

ټ - $f(x)=\frac{1}{32}x^3+\frac{3}{2}x-4$ ث - $f(x)=-\frac{5}{6}x^2+\frac{2}{3}x+\frac{5}{2}$

دویم: د لاندې توابعو مشفق ونیسئ:

الف- $f(x)=-(x-6)^2(x+1)$ ب - $f(x)=\frac{1}{2}\left(x^2-2\right)^2$

پ- $f(x)=\frac{1}{16}\left(x^3+x-1\right)$ ت - $f(x)=x\left(x^2-\frac{3}{2}x-4\right)$

ټ - $f(x)=ax^4+bx^2+c$ ث - $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

دریم: د لاندې توابعو مشفق ونیسئ:

الف- $f(x)=\frac{k}{2}x^4-2kx^3+k^2$ ب - $f(x)=\frac{1}{k}x^3+kx^2+(k+1)x$

پ- $f(x)=\frac{1}{4}x^3+ax^2+\left(a-\frac{1}{2}\right)x-3$ ت - $f(x)=\frac{1}{2k}\left(x^2-k\right)^2$

ټ - $f(t)=5t^3-2t+5$ ث - $f(z)=-1,5z^3+2,5z^2+z$

څلورم: د لاندې توابعو مشفق ونیسئ:

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف- $A(u)=\frac{1}{2}u^2+3u+2u+1$ ب - $A(u)=\frac{1}{2}u\left(u^2+1\right)$

پ- $f(x)=2\pi x^5-7x^3+\frac{3}{\pi}$ ت - $f(x)=\frac{x^2+2x+1}{x+1}$

ټ - $f(x)=\frac{x^2-2x+1}{x-1}$ ث - $f(x)=\frac{x^2-1}{x+1}$

ج = $f(x)=\frac{4x^2+12x+9}{2x+3}$ چ - $f(x)=\frac{\left(x^2+4x+4\right)^2}{x+2}$

پنځم: نلاندې تابع ورکړ شوې:

۱ $f(x)=2x-\frac{1}{4}x^2\,;\,x\in\mathbb{R}$

الف- د f(x) تابع جګوالی د x_0 په ځای کې وښایی د $x_0\in[-4\,;-1;\,0;\,1{,}5\,;\,3]$ سره

ب - تابع f(x) په کوم ټکي کې د 3 جګوالي سره تانجنت لري؟

پ- د f(x) په P (2 | f(2)) ټکي باندې د تانجنت مساوات وښایی

ت - د f(x) په P (2 | f(2)) ټکي باندې د نورمال یا عمود مساوات وښایی

ټ - تانجنت او نورمال یا عمود په وضعیهقیمتسیستم کې رسم کړی.

ث – $g(x)=t\cdot f(x)\,;\,t\in\mathbb{R}^*$

د x محور په S_1 او S_2 کې غوځوي(قطع کوي)

د t د کومو ارزښتونو لپاره تانجنت په S_1 او S_2 یو بل سره عمود دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

حلونه

مشتقشمیرنه VI

نتیجې:

لومړی-

الف -

$$f'(x) = 20x^3 - 12x^2 + 6x - 2 \qquad f''(x) = 60x^2 - 24x + 6$$

$$f'''(x) = 120x - 24$$

ب - $f'(x) = -4x^3 \qquad f''(x) = -12x^2 \qquad f'''(x) = -24x$

پ- $f'(x) = -8x^3 + 6x - 4 \qquad f''(x) = -24x^2 + 6 \qquad f'''(x) = -48x$

ت - $f'(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x \qquad f''(x) = 6x^2 - 6x + 5 \qquad f'''(x) = 12x - 6$

ټ - $f'(x) = \frac{3}{32}x^2 + \frac{3}{2} \qquad f''(x) = \frac{3}{16}x \qquad f'''(x) = \frac{3}{16}$

ث - $f'(x) = -\frac{5}{3}x + \frac{2}{3} \qquad f''(x) = -\frac{5}{3} \qquad f'''(x) = 0$

دویم:

الف- $f'(x) = -3x^2 + 22x - 24 \qquad f''(x) = -6x + 22 \qquad f'''(x) = -6$

ب - $f'(x) = 2x^3 - 4x \qquad f''(x) = 6x^2 - 4 \qquad f'''(x) = 12x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پ- $f'(x)=\frac{3}{16}x^2+\frac{1}{16}$ $\quad f''(x)=\frac{3}{8}x$ $\quad f'''(x)=\frac{3}{8}$

ت - $f'(x)=3x^2-3x-4$ $\quad f''(x)=6x-3$ $\quad f'''(x)=6$

ټ - $f'(x)=4ax^3+2bx$ $\quad f''(x)=12ax^2+2b$ $\quad f'''(x)=24ax$

ث - $f'(x)=3ax^2+2bx+c$ $\quad f''(x)=6ax+2b$ $\quad f'''(x)=6a$

دریم:

الف- $f'(x)=2kx^3-6kx^2$ $\quad f''(x)=6kx^2-12kx$ $\quad f'''(x)=12kx-12k$

ب - $f'(x)=\frac{3}{k}x^2+2kx+k+1$ $\quad f''(x)=\frac{6}{k}x+2k$ $\quad f'''(x)=\frac{6}{k}$

پ- $f'(x)=\frac{3}{4}x^2+2ax+a-\frac{1}{2}$ $\quad f''(x)=\frac{3}{2}x+2a$ $\quad f'''(x)=\frac{3}{2}$

ت - $f'(x)=\frac{2}{k}x^3-2x$ $\quad f''(x)=\frac{6}{k}x^2-2$ $\quad f'''(x)=\frac{12}{k}x$

ټ - $f'(t)=15t^2-2$ $\quad f''(t)=30t$ $\quad f'''(t)=30$

ث - $f'(z)=-4,5z^2+5z+1$ $\quad f''(z)=-9z+5$ $\quad f'''(z)=-9$

څلورم:

الف- $A'(u)=u+5$ $\quad A''(u)=1$ $\quad A'''(u)=0$

ب - $A'(u)=\frac{3}{2}u^2+\frac{1}{2}$ $\quad A''(u)=3u$ $\quad A'''(u)=3$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پ-

$f'(x) = 10\pi x^4 - 21x^2 \qquad f''(x) = 40\pi x^3 - 42x \qquad f'''(x) = 120\pi x^2 - 42$

ت - $f'(x) = 1 \qquad f''(x) = 0 \qquad f'''(x) = 0$

ټ - $f'(x) = 1 \qquad f''(x) = 0 \qquad f'''(x) = 0$

ث - $f'(x) = 1 \qquad f''(x) = 0 \qquad f'''(x) = 0$

ج = $f'(x) = 2 \qquad f''(x) = 0 \qquad f'''(x) = 0$

چ _ $f'(x) = 3x^2 + 12x + 12 \qquad f''(x) = 6x + 12 \qquad f'''(x) = 6$

پنځم:

الف-

$$f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x$$

x	−4	−1	0	1,5	3
f '(x)	4	2,5	2	1,25	0,5

ب - د P(-2;-5) په ټکي کې د f(x) تانجنت جګوالی 3 لري.

پ- په f(x) باندې د تانجنت مساوات په ټکي (P (2 | f(2) کې:t(x) = x + 1

ت - په ټکي (P (2 | f(2) کې په f(x) باندې د عمود مساوات: n(x) = -x + 5

ټ - ث - د $t_{1,2} = \pm\frac{1}{2}$ لپاره تانجنتونه په ټکو S_1 او S_2 کې یو په بل عموددي.

مفصل حل:

لومړی: الف-

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=5x^4-4x^3+3x^2-2x+6$$
$$f'(x)=5\cdot 4x^3-4\cdot 3x^2+3\cdot 2x^1-2\cdot 1+0=\underline{\underline{20x^3-12x^2+6x-2}}$$
$$f''(x)=20\cdot 3x^2-12\cdot 2x^1+6\cdot 1-0=\underline{\underline{60x^2-24x+6}}$$
$$f'''(x)=60\cdot 2x^1-24\cdot 1+0=\underline{\underline{120x-24}}$$

ب - $f(x)=\left(a^2+x^2\right)\left(a^2-x^2\right)$

اول- حل د صرب له لارې(د بینوم دریمه جمله)

$$f(x)=a^4-x^4\Rightarrow f'(x)=\underline{\underline{-4x^3}}\Rightarrow f''(x)=\underline{\underline{-12x^2}}\Rightarrow f'''(x)=\underline{\underline{-24x}}$$

دویم – د ضرب د قانون له مخې حل(مفصل)

$$f(x)=\underbrace{\left(a^2+x^2\right)}_{u}\underbrace{\left(a^2-x^2\right)}_{v}\Rightarrow u'=2x\quad v'=-2x$$
$$f'(x)=u'v+uv'=2x\cdot\left(a^2-x^2\right)+\left(a^2+x^2\right)(-2x)$$
$$=2a^2x-2x^3-2a^2x-2x^3=\underline{\underline{-4x^3}}$$
$$f''(x)=\underline{\underline{-12x^2}}\Rightarrow f'''(x)=\underline{\underline{-24x}}$$

پ- $f(x)=-2x^4+3x^2-4x+2$

$f'(x)=-8x^3+6x-4 \qquad f''(x)=-24x^2+6 \qquad f'''(x)=-48x$

ت - $f(x)=0{,}5x^4-x^3+2{,}5x^2-8$

$f'(x)=2x^3-3x^2+5x \qquad f''(x)=6x^2-6x+5 \qquad f'''(x)=12x-6$

ټ –

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=\frac{1}{32}x^3+\frac{3}{2}x-4$$

$$f'(x)=\frac{1}{32}\cdot 3x^2+\frac{3}{2}\cdot 1-0=\underline{\underline{\frac{3}{32}x^2+\frac{3}{2}}}$$

$$f''(x)=\frac{3}{32}\cdot 2x^1+0=\underline{\underline{\frac{3}{16}x}}\qquad f'''(x)=\frac{3}{16}\cdot 1=\underline{\underline{\frac{3}{16}}}$$

ث ـ

$$f(x)=-\frac{5}{6}x^2+\frac{2}{3}x+\frac{5}{2}$$

$$f'(x)=-\frac{5}{3}x+\frac{2}{3}\qquad f''(x)=-\frac{5}{3}\qquad f'''(x)=0$$

دویم: الف- $f(x)=-(x-6)^2(x+1)$

- حل د ضربولو له لارې

$$f(x)=-(x^2-12x+36)(x+1)=-[x^3+x^2-12x^2-12x+36x+36]$$

$$=-[x^3-11x^2+24x+36]=-x^3+11x^2-24x-36$$

$$f'(x)=\underline{\underline{-3x^2+22x-24}}\Rightarrow f''(x)=\underline{\underline{-6x+22}}\Rightarrow f'''(x)=\underline{\underline{-6}}$$

دوي – حل د ځنزيري قانون له مخې.

$$f(x)=-\underbrace{(x-6)^2}_{u}\underbrace{(x+1)}_{v}\qquad u'=2(x-6)\cdot 1=2x-12\qquad v'=1$$

$$f'(x)=-[u'v+uv']=-\left[(2x-12)(x+1)+(x-6)^2\cdot 1\right]=$$

$$-\left[2x^2+2x-12x-12+x^2-12x+36\right]=-\left[3x^2-22x+24\right]=-3x^2+22x-24$$

$$\Rightarrow f''(x)=\underline{\underline{-6x+22}}\Rightarrow f'''(x)=\underline{\underline{-6}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب -

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(x^2-2\right)^2$$

اول – حل د ضربولو له لارې

$$f(x)=\frac{1}{2}\underbrace{\left(x^2-2\right)^2}_{2.\ \text{bin. Formel}}=\frac{1}{2}\left(x^4-4x^2+4\right)=\frac{1}{2}x^4-2x^2+2$$

$$f'(x)=\underline{\underline{2x^3-4x}}\Rightarrow f''(x)=\underline{\underline{6x^2-4}}\Rightarrow f'''(x)=\underline{\underline{12x}}$$

یادونه: په پورته کې 2.bin.Formel د دویم بینوم فرمول په معنا دی.

دویم-د ځنزیري قانون سره حل:

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(x^2-2\right)^2=\frac{1}{2}\cdot 2\left(x^2-2\right)\cdot 2x=2x\left(x^2-2\right)=\underline{\underline{2x^3-4x}}$$

$$f''(x)=\underline{\underline{6x^2-4}}\Rightarrow f'''(x)=\underline{\underline{12x}}$$

پ-

$$f(x)=\frac{1}{16}\left(x^3+x-1\right)$$

$$f'(x)=\frac{1}{16}\left(3x^2+1\right)=\underline{\underline{\frac{3}{16}x^2+\frac{1}{16}}}\qquad f''(x)=\underline{\underline{\frac{3}{8}x}}\qquad f'''(x)=\underline{\underline{\frac{3}{8}}}$$

ت –

$$f(x)=x\left(x^2-\frac{3}{2}x-4\right)=x^3-\frac{3}{2}x^2-4x$$

$$f'(x)=\underline{\underline{3x^2-3x-4}}\Rightarrow f''(x)=\underline{\underline{6x-3}}\Rightarrow f''(x)=\underline{\underline{6}}$$

د لته به د ضرب قانون استعمال لږ غزېدلی وی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټ –

$$f(x) = ax^4 + bx^2 + c$$

$$f'(x) = 4ax^3 + 2bx \qquad f''(x) = 12ax^2 + 2b \qquad f'''(x) = 24ax$$

ث –

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \qquad f''(x) = 6ax + 2b \qquad f'''(x) = 6a$$

دريم: الف-

$$f(x) = \frac{k}{2}x^4 - 2kx^3 + k^2$$

$$f'(x) = 2kx^3 - 6kx^2 \qquad f''(x) = 6kx^2 - 12kx \qquad f'''(x) = 12kx - 12k$$

ب –

$$f(x) = \frac{1}{k}x^3 + kx^2 + \underbrace{(k+1)}_{Konstante} x$$

$$f'(x) = \frac{3}{k}x^2 + 2kx + (k+1)\cdot 1 = \underline{\underline{\frac{3}{k}x^2 + 2kx + \underbrace{k+1}_{Konstante}}}$$

$$\Rightarrow f''(x) = \underline{\underline{\frac{6}{k}x + 2k}} \Rightarrow f'''(x) = \underline{\underline{\frac{6}{k}}}$$

يادونه: دلته او په لاندې حل کې Konstante د ثابتې په معنا دی.

پ-

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 + ax^2 + \underbrace{\left(a - \frac{1}{2}\right)}_{Konstante} x - 3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f'(x)=\frac{3}{4}x^2+2ax+\left(a-\frac{1}{2}\right)\cdot 1=\frac{3}{4}x^2+2ax+a-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f''(x)=\frac{3}{2}x+2a \Rightarrow f'''(x)=\frac{3}{2}$$

ت - $f(x)=\frac{1}{2k}\left(x^2-k\right)^2$

اول – د ضرب له لارې حل (د بینوم دویم فرمول)

$$f(x)=\frac{1}{2k}\left(x^2-k\right)^2=\frac{1}{2k}\left(x^4-2kx^2+k^2\right)=\frac{1}{2k}x^4-x^2+\frac{1}{2}k$$

$$f'(x)=\frac{2}{k}x^3-2x \Rightarrow f''(x)=\frac{6}{k}x^2-2 \Rightarrow f'''(x)=\frac{12}{k}x$$

دویم : د ځنزیري قانون له مخې (ساده دی)

$$f'(x)=\frac{1}{2k}\cdot 2\left(x^2-k\right)\cdot 2x=\frac{2}{k}x\left(x^2-k\right)=\frac{2}{k}x^3-2x$$

$$\Rightarrow f''(x)=\frac{6}{k}x^2-2 \Rightarrow f'''(x)=\frac{12}{k}x$$

ټ -

$$f(t)=5t^3-2t+5$$

$$f'(t)=15t^2-2 \qquad f''(t)=30t \qquad f'''(t)=30$$

ث _

$$f(z)=-1{,}5z^3+2{,}5z^2+z$$

$$f'(z)=-4{,}5z^2+5z+1 \qquad f''(z)=-9z+5 \qquad f'''(z)=-9$$

څلورم:

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف-

$$A(u)=\frac{1}{2}u^2+3u+2u+1$$

$$A'(u)=u+5 \qquad A''(u)=1 \qquad A'''(u)=0$$

ب –

$$A(u)=\frac{1}{2}u\left(u^2+1\right)=\frac{1}{2}u^3+\frac{1}{2}u$$

$$A'(u)=\frac{3}{2}u^2+\frac{1}{2}\Rightarrow A''(u)=3u\Rightarrow A'''(u)=3$$

د لته به د ضرب قانون لږ غزېدلی وی.

پ-

$$f(x)=2\pi x^5-7x^3+\frac{3}{\pi}$$

$$f'(x)=10\pi x^4-21x^2 \qquad f''(x)=40\pi x^3-42x \qquad f'''(x)=120\pi x^2-42$$

ت -

$$f(x)=\frac{x^2+2x+1}{x+1}$$

اول- د تابع ترم د ترم بنه بدلون له لارې ساده کونه:

-

$$f(x)=\frac{x^2+2x+1}{x+1}=\frac{(x+1)(x+1)}{x+1}=x+1$$

$$f'(x)=1\Rightarrow f''(x)=0\Rightarrow f'''(x)=0$$

دویم – د وېش قانون استعمال (زیات وخت نیسي)

$$f(x)=\frac{x^2+2x+1}{x+1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $t\ u = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow u' = 2x + 2$ سره

او $v=x+1 \Rightarrow y' = 1$ همداسې له $v^2 = (x+1)^2$ څخه لرو:

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{(2x+2)(x+1) - (x^2+2x+1)\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+4x+2-x^2-2x-1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x^2+2x+1}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2}{(x+1)^2} = \underline{\underline{1}} \Rightarrow f''(x) = \underline{\underline{0}} \Rightarrow f'''(x) = \underline{\underline{0}}$$

د ويش قانون دي فقط په هغه حالتونو کې اسمعمال شي، که تابعترم په بله لار نه شي ساده کيدی.

ټ - $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}$

اول – تابعترم د ترم بدلون له لارې ساده کړی

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} = \frac{(x-1)(x-1)}{x-1} = x - 1$$

$$f'(x) = \underline{\underline{1}} \Rightarrow f''(x) = \underline{\underline{0}} \Rightarrow f'''(x) = \underline{\underline{0}}$$

د ويش قانون باندې صرف دظر کيږي.

ث - $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$

اول – تابعترم د ترم بدلون له لارې ساده کړی

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x+1} = x - 1$$

$$f'(x) = \underline{\underline{1}} \Rightarrow f''(x) = \underline{\underline{0}} \Rightarrow f'''(x) = \underline{\underline{0}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ويش قانون باندې صرف نظر كيږي.

ج = $f(x)=\dfrac{4x^2+12x+9}{2x+3}$

اول – تابعترم د ترم بدلون له لارې ساده كړی

$$f(x)=\frac{4x^2+12x+9}{2x+3}=\frac{(2x+3)(2x+3)}{2x+3}=2x+3$$

$$f'(x)=\underline{2}\Rightarrow f''(x)=\underline{0}\Rightarrow f'''(x)=\underline{0}$$

د وېش له قانون څخه تيرېږو

چ - $f(x)=\dfrac{\left(x^2+4x+4\right)^2}{x+2}$

اول – تابعترم د ترم بدلون له لارې ساده كړی

$$f(x)=\frac{\left(x^2+4x+4\right)^2}{x+2}=\frac{\left[(x+2)^2\right]^2}{x+2}=\frac{(x+2)^4}{x+2}=(x+2)^3$$

دويم – ځنزيري قانون استعمال كړی:

$$f'(x)=3(x+2)^2\cdot 1=3\left(x^2+4x+4\right)=\underline{\underline{3x^2+12x+12}}$$

$$\Rightarrow f''(x)=6x+12\Rightarrow f'''(x)=6$$

د ويش قانون باندې صرف نظر كيږي.

پنځم:

الف-

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x$$

$$f'(-4) = 2 - \frac{1}{2}\cdot(-4) = 2+2 = 4 \qquad f'(-1) = 2 - \frac{1}{2}\cdot(-1) = 2 + \frac{1}{2} = 2,5$$

$$f'(0) = 2 - \frac{1}{2}\cdot 0 = 2 \qquad f'(1,5) = 2 - \frac{1}{2}\cdot 1,5 = 2 - 0,75 = 1,25$$

$$f'(3) = 2 - \frac{1}{2}\cdot 3 = 2 - 1,5 = 0,5$$

x	−4	−1	0	1,5	3
f'(x)	4	2,5	2	1,25	0,5

ب -
$$f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x$$

د تانجنت جګیدنه به x0 کې ارزښت 3 لري.

$$f'(x_0) = 3 \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{2}x_0 = 3 \Leftrightarrow x_0 = -2$$

$$f(x_0) = f(-2) = 2\cdot(-2) - \frac{1}{4}(-2)^2 = -5$$

د $P(-2|-5)$ په ټکي کې په f(x) باندې تانجنت ارزښت 3 لري.

پ-
$$f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x \quad P(2|f(2))$$

$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

د x0 = 2 سره لرو:

$$t(x) = f'(2)(x-2) + f(2)$$

$$f(2) = 2\cdot 2 - \frac{1}{4}\cdot(2)^2 = 4 - 1 = 3 \qquad f'(2) = 2 - \frac{1}{2}\cdot 2 = 2 - 1 = 1$$

$$\Rightarrow t(x) = 1(x-2) + 3 = x - 2 + 3 = \underline{\underline{x+1}}$$

ت –

$$f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x \quad P(2|f(2))$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$n(x) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$$

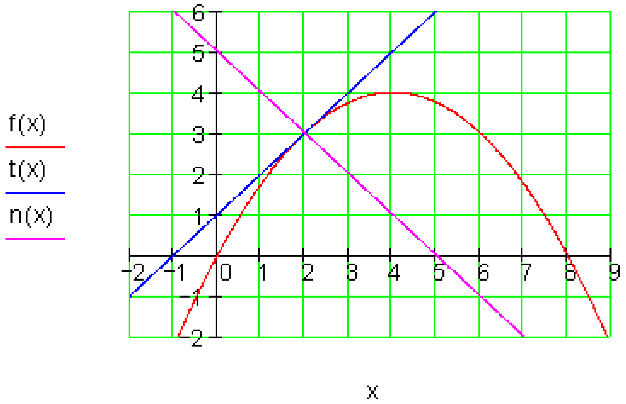
د x0 = 2 سره لرو:

$$n(x) = -\frac{1}{f'(2)}(x-2) + f(2)$$

$$f(2) = 2 \cdot 2 - \frac{1}{4} \cdot (2)^2 = 4 - 1 = 3 \qquad f'(2) = 2 - \frac{1}{2} \cdot 2 = 2 - 1 = 1$$

$$\Rightarrow n(x) = -\frac{1}{1}(x-2) + 3 = -x + 2 + 3 = \underline{\underline{-x+5}}$$

ټ –



ث - $g(x) = t \cdot f(x) = 2tx - \frac{1}{4}tx^2$

د g(x) صفرځایونه:

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow 2tx - \frac{1}{4}tx^2 = 0 \Leftrightarrow x\left(2t - \frac{1}{4}tx\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow S_1(0|0)$$

$$2t - \frac{1}{4}tx = 0 \,|\, -2t \Leftrightarrow -\frac{1}{4}tx = -2t \,|:\left(-\frac{1}{4}t\right) \Leftrightarrow x_2 = 8 \Rightarrow S_2(8|0)$$

د S1 او S2 عمودوالی په دې معنا دی چې:

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

g‘(0)د S1(0,0) په تکي کې د t1(x)تانجنت جګوالی دی. د تانجنت t2(x) جګوالی په ټکي S2(8,0) کې دې هغه t1(x)ته عمود وي. د دې لپاره بايد صدق وکړي:

g’(8)=-1/g’(0) د عمودوالي لپاره شرايط (1)

$$g'(x) = 2t - \frac{1}{2}tx \Rightarrow g'(8) = 2t - \frac{1}{2}t \cdot 8 = 2t - 4t = -2t$$

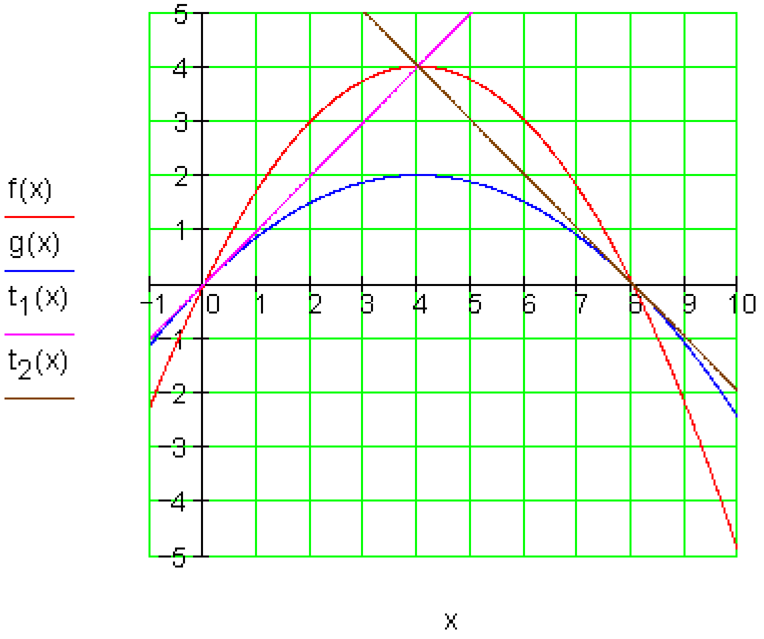
همداسې

$$g'(0) = 2t$$

په (1) کې ځای په ځای کړی

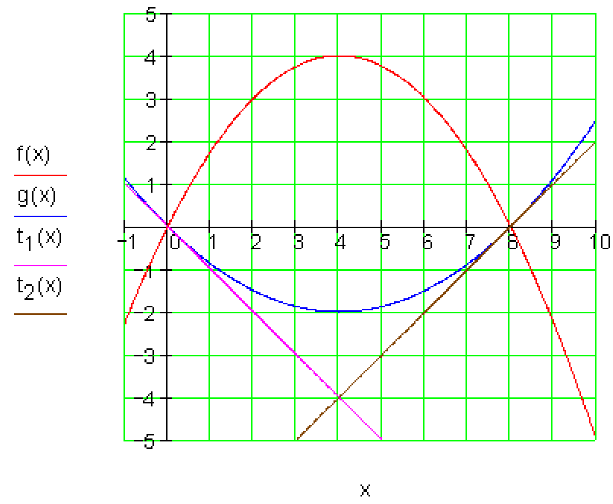
$$-2t = -\frac{1}{2t} | \cdot 2t \Leftrightarrow -4t^2 = -1 |: (-4) \Leftrightarrow t^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow t_{1/2} = \pm\frac{1}{2}$$

د t=1/2 لپاره صدق کوي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د t=-1/2 لپاره صدق کوي:



دIII.3.1 مشتق شمیرني قوانین

قضیه (د جمعې یا زیاتون قاعده):

که یو تابع $f(x)$ د دوه توابعو $u(x)$ او $v(x)$ د جمعې څخه جوړ وي، نو مشتق یې هم د هر تابع د مشتق د جمعې څخه جوړ دی، یعني:

$$f(x) = u(x) + v(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

ښوونه:

$$f(x_0) = u(x_0) + v(x_0)$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)] + [v(x_0 + \Delta x)] - v(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)]}{\Delta x} + \frac{[v(x_0 + \Delta x)] - v(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow f'(x_0) = \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)}{\Delta x} \right]}_{u'(x_0)} + \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{v(x_0 + \Delta x) - v(x_0)}{\Delta x} \right]}_{v'(x_0)}$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \underline{\underline{u'(x_0) + v'(x_0)}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه:

د دې ورکړ $f(x)=5x^2+3x$, $u(x)=5x^2$, $v(x)=3x$ توابعو شتق وشمیرئ.

ښوونه:

$$f(x)=5x^2+3x \quad u(x)=5x^2 \quad v(x)=3x$$
$$\Rightarrow u'(x)=10x \qquad v'(x)=3$$
$$f'(x)=u'(x)+v'(x)=\underline{\underline{10x+3}}$$

د جمعې قاعده ټولزه کونه: که چیرې f_1،f_2،...... ،f_n توابع او k_1،k_2،.... ،k_n ثابت عددونه وي نو لرو(بې له ښوونې):

$$[k_1 f_1(x)+k_2 f_2(x)+.....+k_n f_n(x)]'$$
$$=k_1 f_1'(x)+k_2 f_2'(x)+.....+k_n f_n'(x)$$

قضیه (د ضرب قاعده):

که $f(x)$ او $g(x)$ دوه توابع وي، نو ښایو:

$$(f(x)\cdot g(x)'=f(x)'\cdot g(x)\cdot g(x)'$$

ښوونه: $\dfrac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$

د مناسب فورم- یا بڼه بدلون یعنې په صورت کې د $-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)$ ورزیاتولو څخه دا لاندې لرو:

$$\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$
$$=\frac{(f(x)-f(x_0))g(x)+f(x_0)(g(x)-g(x_0))}{x-x_0}$$
$$=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot g(x)+f(x_0)\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

له پورته څخه لاس راځي یعنې د دواړو لورو لیمیټ نیسو یا پوله ټاکو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}g(x)+f(x_0)\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$
$$=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$$

بيلګه:

$$f(x)=x^2\cdot x^3 \quad u(x)=x^2 \quad v(x)=x^3$$
$$\Rightarrow u'(x)=2x \quad v'(x)=3x^2$$
$$f'(x)=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)=2x\cdot x^3+x^2\cdot 3x^2=2x^4+3x^4=\underline{\underline{5x^4}}$$

بيلګه:

که $g(x)=x^2-1$ او $h(x)=\sqrt{x}$ ولرو، نو د $f(x)=g(x)h(x)$ مشتق غواړو پيدا کړو.

ښوونه:

په لاندې توګه مخ ته ځو:

$$f(x)=(x^2-1)\sqrt{x},\ f'(x)=2x\sqrt{x}+(x^2-1)\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{5}{2}x\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

قضيه (د وېش قانون):

f او g دې دوه توابع وي. غواړو وښايو:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

ثبوت: کولای شو، چې دا قضيه له دوه لارو يا طريقو وښايو(ثبوت کړو).

لومړۍ لار:

لومړی لار يا طريقه يې په لاندې کې ښايو او دويمه لار دې ګران زده کوونکي وښايي:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}}{h} \quad , \quad g(x)\neq 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{g(x+h)g(x)}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{h}\right]$$

غواړو $f(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x)$ صورت ته ور زيات کړو، نو لرو:

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)g(x)}\cdot\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x)+f(x)g(x)-f(x)g(x+h)}{h}$$
$$=\frac{1}{g(x)g(x)}[\lim_{h\to 0}g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\lim_{h\to 0}f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}]$$
$$=\frac{1}{[g(x)]^2}\left[g(x)\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f(x)\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]$$
$$=\frac{1}{[g(x)]^2}[g(x).f'(x)-f(x).g'(x)]=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

يعني لرو:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)\,g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

دويمه لار:

د $\frac{1}{g(x)}$: مشتق غواړو پيدا کړو او ښايوچي دی:

$$(f(x))'=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\quad(\frac{1}{g(x)})'=-\frac{g'(x)}{g^2(x)}\qquad(*)$$

که $f(x)=\frac{1}{g(x)}$ کيږدو نو لرو:

$$(f(x))'=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{g(x+h)} - \dfrac{1}{g(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{g(x) - g(x+h)}{g(x+h)g(x).h}$$

$$= \frac{\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g(x+h) - g(x)}{h}}{-\lim\limits_{h\to 0} g(x+h)g(x)} = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}$$

که دا $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x)\frac{1}{g(x)}$ وبش ولرو او وغواړو چې مشتق یې پیدا کړو،نو له پورته ښوونې ، د (*) اړیکې او د ضرب قاعدې له مخې لرو:

$$[\frac{f(x)}{g(x)}]' = [f(x)\frac{1}{g(x)}]'$$

$$= f(x)(\frac{1}{g(x)})' + \frac{1}{g(x)} f'(x)$$

$$= f(x)(\frac{g'(x)}{(g(x))^2}) + \frac{1}{g(x)} f'(x)$$

$$= \frac{-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} + \frac{f'(x)}{g(x)}$$

$$= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

یا په لنډه توګه دا لاندې:

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

بېلګه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=\frac{x}{x+2}\quad u(x)=x\quad v(x)=x+2$$

$$\Rightarrow u'(x)=1\quad v'(x)=1\quad [v(x)]^2=(x+2)^2$$

$$f'(x)=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{[v(x)]^2}=\frac{1\cdot(x+2)-x\cdot 1}{(x+2)^2}=\frac{x+2-x}{(x+2)^2}=\frac{2}{(x+2)^2}$$

$$f(x)=\frac{2x^2+x^3}{x^4}\quad u(x)=2x^2+x^3\quad v(x)=x^4$$

$$\Rightarrow u'(x)=4x+3x^2\quad v'(x)=4x^3\quad [v(x)]^2=x^8$$

$$f'(x)=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{[v(x)]^2}=\frac{\left(4x+3x^2\right)\cdot x^4-\left(2x^2+x^3\right)\cdot 4x^3}{x^8}$$

$$=\frac{4x^5+3x^6-8x^5-4x^6}{x^8}=\frac{-x^6-4x^5}{x^8}=\frac{-x^5(x+4)}{x^8}=-\frac{x+4}{x^3}$$

بیلګه:

د $f(x)=\frac{x^2}{x^2-4}$ تابع (د $x^2-4\neq 0$ سره) مشتق غواړو پیدا کړو.

حل: که چیرې $g(x)=x^2$ او $h(x)=x^2-4$

وضع شي نو لرو:

$$g'(x)=2x$$
$$h'(x)=2x$$

او د ویش قانون له مخې لرو:

$$f'(x)=\left[\frac{g(x)}{h(x)}\right]'=\frac{g'(x)h(x)-g(x)h'(x)}{[h(x)]^2}$$

$$=\frac{2x(x^2-4)-x^2.2x}{[x^2-4]^2}$$

$$=\frac{-8x}{[x^2-4]^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تولګه:

کمبنتوپش: (د سیکانت جګیدنه یا منځنی تغیر ارزښت)	$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$
دفرنشلوپش (د تانجنت جګیدنه یا لحضوي تغیر ارزښت)	$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$
د ثابتي یا تل همغي قانون	$f(x)=c\cdot u(x)$ د c =ثابت تي سره $\Rightarrow f'(x)=c\cdot u'(x)$ یا لند: $f'=c\cdot u'$
د جمعي- یا زیاتون قانون	$f(x)=u(x)+v(x)$ $\Rightarrow f'(x)=u'(x)+v'(x)$ یا لند: $f'=u'+v'$
د ضرب – یا ځل قانون	$f(x)=u(x)\cdot v(x)$ $\Rightarrow f'(x)=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$ یا په لنده بنه: $f'=u'\cdot v+u\cdot v'$
د ویش قانون	$f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$ $\Rightarrow f'(x)=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$ یا په لنده بنه: $f'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$
زنځیري قانون:	$f(x)=f[z(x)]$ $\Rightarrow f'(x)=\underbrace{f'(z)}_{\text{äußere Ableitung}}\cdot\underbrace{z'(x)}_{\text{innere Ableitung}}$ د باندنی مشتق — دننی مشتق

(c) ketabton.com: The Digital Library

دنورو پسي توابعو مشتق:

مشتق تابعمساوات	تابع مساوات
$f'(x) = e^x$	$f(x) = e^x$
$f'(x) = \cos(x)$	$f(x) = \sin(x)$
$f'(x) = -\sin(x)$	$f(x) = \cos(x)$
$f'(x) = \frac{1}{x}$	$f(x) = \ln(x)$

بیلکه:

$f(x) = x \cdot e^x$ د ضرب قانون: $u' \cdot v + u \cdot v'$ د $u = x ; u' = 1; v = e^x ; v' = e^x$

$f'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = \underline{\underline{(x+1)e^x}}$ سره.

ثابتي دقانون: $f(x) = 3\ln x$ $f'(x) = 3 \cdot \frac{1}{x} = \frac{3}{x}$

$f(x) = x^2 \cdot \ln x$ دضرب قانون: $u' \cdot v + u \cdot v'$ د

$u = x^2 ; u' = 2x ; v = \ln x ; v' = \frac{1}{x}$ سره

$$f'(x) = 2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x\ln x + x = \underline{\underline{(2\ln x + 1)x}}$$

$f(x) = e^{\frac{1}{2}x}$ زنځیری قانون: $f'(x) = f'(z) \cdot z'$

$$z = \frac{1}{2}x \Rightarrow z' = \frac{1}{2} \quad f(z) = e^z \Rightarrow f'(z) = e^z \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^{\frac{1}{2}x} \cdot \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f(x) = 3\cos(x) - 2\sin(x)$ د جمعي قانونو: $u(x) = 3\cos(x) \quad v(x) = -2\sin(x)$

$$\Rightarrow u'(x) = -3\sin(x) \quad v'(x) = -2\cos(x)$$

$$f'(x) = u'(x) + v'(x) = \underline{\underline{-3\sin(x) - 2\cos(x)}}$$

3.III : د مشتقشمیرنې قوانین

پوښتنې

مشتقشمیرنه v

لومړی: مشتق يې ونیسئ:

الف- $f(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{2}x$ ب - $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + x^2$

پ- $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + 3x^2$ ت - $f(x) = 6x^2 - \frac{2}{3}x^4$

ټ - $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3$ ث - $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2x + 3$

ج = $f(x) = \frac{3}{8}x^3 - \frac{3}{2}x$ چ - $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$

ح - $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 - x - 5$ خ = $f(x) = \frac{1}{48}x^4 - \frac{1}{2}x^2$

دویم: د لاندې توابعو مشتق ونیسئ د دې لپاره تاسو ته معلوم مشتققواعد وکاروئ او قاعده چې کاروئ و لیکئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف- $f(x)=4x^3$ ب - $f(x)=3e^x$ پ- $f(x)=5\ln x$

ټ - $f(x)=x^2+x$ ټ - $f(x)=2x^3-3x^2$ ث - $f(x)=4x^5-2\ln x+3e^x$

ج = $f(x)=x\cdot e^x$ چ - $f(x)=x^2\cdot\ln x$ ح - $f(x)=x^3\cdot(x^2-1)$

دريم: د لاندې توابعو مشتق ونيسئ د دې لپاره تاسو ته معلوم مشتققواعد وکاروئ او قاعده چې کاروئ و ليکئ

الف- $f(x)=\frac{x+1}{x}$ ب - $f(x)=\frac{x}{x+1}$ پ- $f(x)=\frac{(x+1)\cdot e^x}{x}$

ت - $f(x)=(x+1)^2$ ټ - $f(x)=(x^2+1)^2$ ث - $f(x)=e^{\frac{1}{2}x}$

ج = $f(x)=2ax^3-4bx$ چ - $f(x)=e^{ax}$ ح - $f(x)=e^{-(x-2)}$

څلورم: د لاندی توابعو مشفقونه پيدا کړئ:

الف- $f(x)=3x^3-2x^2+x-7$ ب - $f(x)=x^2\cdot e^x\cdot\sqrt{x}$

پ- $f(x)=\frac{x^2\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt{x^3}}{x^3}$ ت - $f(x)=\frac{2x-1}{x+2}$

ټ - $f(x)=(a^2+x)^2$ ث - $f(x)=(2x^3-3)^2$

پنځم:د لاندی توابعو مشفقونه پيدا کړئ:

الف- $f(x)=\left(x+e^x\right)\cdot\ln x$ ب - $f(x)=\ln(x^2-1)$

پ- $f(x)=(x+1)\cdot e^{(x+1)}$ ت - $f(x)=a\ln x-be^x-3x^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ت ـ $f(x)=\frac{(x+1)^2}{(x-1)^2}$ ث ـ $f(x)=\sqrt{\frac{3+x}{3-x}}$

شپږم: د لاندې توابعو دریواره مشتق ونئسئ

الف- $f(x)=3x+4$ ب ـ $f(x)=2x-4+x^3-5x+4x^3$

پ- $f(x)=3x^3+2x^2+x+1$ ت ـ $f(x)=(2x+1)^3$

ټ ـ $f(x)=x-x^4+3+x$ ث ـ $f(x)=1-2x-3x-4x+x^4$

ج = $f(x)=a+b+c^2-x-ax-bx-cx^3-c^3x$ چ ـ $f(x)=4x^3-2x^2+5x-2$

مفصل حلونه

مشتقشمیرنه **۷**

یادونه: په لاندې کې (Sr) د جمعي قانون (Pr) د ضرب قانون، Kettenregelځنزیري قانون (Kr) د ثابتي قانون (Qr) د وېش قانون په معنا دي

لورمړی:

الف- $f(x)=-\frac{1}{8}x^3+\frac{1}{4}x^2+\frac{5}{2}x \Rightarrow f'(x)=-\frac{3}{8}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$

ب ـ $f(x)=-\frac{2}{3}x^3+x^2 \Rightarrow f'(x)=-2x^2+2x$

پ- $f(x)=-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^3+3x^2 \Rightarrow f'(x)=-x^3-\frac{3}{2}x^2+6x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ت - $f(x)=6x^2-\frac{2}{3}x^4 \Rightarrow f'(x)=-\frac{8}{3}x^3+12x$

ټ - $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^3 \Rightarrow f'(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2$

ث - $f(x)=\frac{2}{3}x^3-2x+3 \Rightarrow f'(x)=2x^2-2$

ج = $f(x)=\frac{3}{8}x^3-\frac{3}{2}x \Rightarrow f'(x)=\frac{9}{8}x^2-\frac{3}{2}$

چ - $f(x)=x^3-3x^2-x+3 \Rightarrow f'(x)=3x^2-6x-1$

ح - $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+x^2-x-5 \Rightarrow f'(x)=-x^2+2x-1$

خ = $f(x)=\frac{1}{48}x^4-\frac{1}{2}x^2 \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{12}x^3-x$

دویم:

الف- $f(x)=4x^3$ د ثابتي قانون $(Kr)\ f'(x)=4\cdot(x^3)'=4\cdot 3x^2=\underline{\underline{12x^2}}$

ب - $f(x)=3\cdot e^x \quad (Kr) \quad f'(x)=3\cdot(e^x)'=\underline{\underline{3e^x}}$

پ- $f(x)=3\cdot\ln(x) \quad (Kr) \quad f'(x)=3\cdot[\ln(x)]'=3\cdot\frac{1}{x}=\underline{\underline{\frac{3}{x}}}$

ت - $f(x)=x^2+x$ د جمعي قانون: $f'(x)=\underline{\underline{2x+1}}$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ت - $f(x) = 2x^3 - 3x^2 \quad (Sr/Kr) \quad f'(x) = 2 \cdot 3x^2 - 3 \cdot 2x = \underline{\underline{6x^2 - 6x}}$

ث - $f(x) = 4x^5 - 2 \cdot \ln(x) + 3 \cdot e^x$

$(Sr/Kr) \quad f'(x) = 4 \cdot 5x^4 - 2 \cdot \frac{1}{x} + 3 \cdot e^x = \underline{\underline{20x^4 - \frac{2}{x} + 3e^x}}$

ج = $f(x) = x \cdot e^x$ د $u' \cdot v + u \cdot v'$ ضرب قانو د $u = x; u' = 1; v = e^x; v' = e^x$: سره

$$f'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = \underline{\underline{(x+1)\,e^x}}$$

چ - $f(x) = x^2.\ln x$ (Pr د ضرب قانون) $u'v+uv'$ د $u=x^2; u'=2x; v=\ln x; v'=1/x$ سره.

$f(x) = x^2 \cdot \ln(x) \quad (Pr): \; u' \cdot v + u \cdot v' \text{ mit } u = x^2; u' = 2x; v = \ln(x); v' = \frac{1}{x}$

$f'(x) = 2x \cdot \ln(x) + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \cdot \ln(x) + x = \underline{\underline{(2\ln x + 1)x}}$

ح - $f(x) = x^3 \cdot (x^2 - 1) \quad (Pr/Sr): \; u' \cdot v + u \cdot v'$

د $u = x^3; u' = 3x^2; v = x^2 - 1; v' = 2x$ سره

$$f'(x) = 3x^2 \cdot (x^2 - 1) + x^3 \cdot 2x = 3x^4 - 3x^2 + 2x^4 = \underline{\underline{5x^4 - 3x^2}}$$

دریم: الف-د لاندې پېنتو:

$f(x) = \frac{x+1}{x}$ د وېش قانون: $\frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

د $u = x + 1; u' = 1; v = x; v' = 1; v^2 = x^2$ سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f'(x)=\frac{1\cdot x-(x+1)\cdot 1}{x^2}=\frac{x-x-1}{x^2}=-\frac{1}{x^2}$$

ب –

$$f(x)=\frac{x}{x+1}\quad (Qr/Sr):\ \frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$$

$$\text{mit } u=x;\ u'=1;\ v=x+1;\ v'=1;\ v^2=(x+1)^2$$

$$f'(x)=\frac{1\cdot(x+1)-x\cdot 1}{(x+1)^2}=\frac{x+1-1}{(x+1)^2}=\frac{1}{(x+1)^2}$$

پ- د... سره

$$f(x)=\frac{(x+1)e^x}{x}\quad (Qr/Pr/Sr):\ \frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$$

$$\text{mit } u=(x+1)e^x;\ u'=e^x+(x+1)e^x;\ v=x;\ v'=1;\ v^2=x^2$$

$$f'(x)=\frac{\left[e^x+(x+1)e^x\right]\cdot x-(x+1)e^x\cdot 1}{x^2}$$

$$=\frac{xe^x+x^2e^x+xe^x-xe^x-e^x}{x^2}=\frac{(x^2+x-1)e^x}{x^2}$$

ت –

$f(x)=(x+1)^2$ ځنزيري قانو: $f'(x)=f'(z)\cdot z'$

$$z=x+1\Rightarrow z'=1\quad f(z)=z^2\Rightarrow f'(z)=2z$$

$$f'(x)=2(x+1)\cdot 1=2(x+1)$$

ټ – $f(x)=(x^2+1)^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځنزيري قانون: $f'(x) = f'(z).z'$

$$z = x^2 + 1 \Rightarrow z' = 2x \quad f(z) = z^2 \Rightarrow f'(z) = 2z$$
$$f'(x) = 2(x^2+1)\cdot 2x = 4x(x^2+1) = \underline{\underline{4x^3 + 4x}}$$

ث - $f(x) = e^{\frac{1}{2}x}$ ځنزيري قانون $f'(x) = f'(z)\cdot z'$

$$z = \frac{1}{2}x \Rightarrow z' = \frac{1}{2} \quad f(z) = e^z \Rightarrow f'(z) = e^z \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^{\frac{1}{2}x}\cdot\frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}}}$$

ج = $f(x) = 2ax^3 - 4bx \quad (Sr/Kr) \quad \Rightarrow f(x) = 2\cdot 3ax^2 - 4b = \underline{\underline{6ax^2 - 4b}}$

چ - $f(x) = e^{ax}$ ځنزيري قانون: $f'(x) = f'(z).z'$

$$z = ax \Rightarrow z' = a \quad f(z) = e^z \Rightarrow f'(z) = e^z \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^{ax}\cdot a = \underline{\underline{ae^{ax}}}$$

ح –

$f(x) = e^{-(x-2)}$ ځنزيري قانون: $f'(x) = f'(z).z'$

$$z = -(x-2) = -x + 2 \Rightarrow z' = -1 \quad f(z) = e^z \Rightarrow f'(z) = e^z$$
$$\Rightarrow \quad f'(x) = e^{-(x-2)}\cdot(-1) = \underline{\underline{-e^{-(x-2)}}}$$

ځلورم:

الف- $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 7 \Rightarrow f'(x) = \underline{\underline{9x^2 - 4x + 1}}$

ب - $f(x) = x^2\cdot e^x\cdot\sqrt{x} = x^2\cdot x^{\frac{1}{2}}\cdot e^x = \underbrace{x^{\frac{5}{2}}}_{u}\cdot\underbrace{e^x}_{v} \Rightarrow f'(x) = u'v + uv'$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $u = x^{\frac{5}{2}} \Rightarrow u' = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$ او $v = e^x \Rightarrow v' = e^x$ سره لرو:

$$f'(x) = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} \cdot e^x + x^{\frac{5}{2}} \cdot e^x = \left(\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{5}{2}}\right)e^x$$

پ- $f(x) = \frac{x^2 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{x^3}}{x^3} = \frac{x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{3}{2}}}{x^3} = \frac{x^{\frac{4}{2}+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}}{x^3} = \frac{x^{\frac{8}{2}}}{x^3} = \frac{x^4}{x^3} = x \Rightarrow f'(x) = \underline{\underline{1}}$

ت - $f(x) = \frac{2x-1}{x+2} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

د $u = 2x - 1 \Rightarrow u' = 2$ او $v = x + 2 \Rightarrow v' = 1$ او $v^2 = (x+2)^2$ سره لرو:

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2 \cdot (x+2) - (2x-1) \cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{2x + 4 - 2x + 1}{(x+2)^2} = \frac{5}{(x+2)^2}$$

ټ - $f(x) = (a^2 + x)^2 \Rightarrow f'(x) = 2(a^2 + x) \cdot 1 = \underline{\underline{2(a^2 + x)}}$

ث –

$$f(x) = (2x^3 - 3)^2 \Rightarrow f'(x) = 2(2x^3 - 3) \cdot 6x^2 = 12x^2(2x^3 - 3) = \underline{\underline{24x^5 - 36x^2}}$$

پنځم:

الف-

$$f(x) = \underbrace{(x + e^x)}_{u} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{v} \Rightarrow f'(x) = u'v + uv'$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $u = x + e^x \Rightarrow u' = 1 + e^x$ او $v = \ln(x) \Rightarrow v' = \frac{1}{x}$ سره كيري يا لرو:

$$f'(x) = (1+e^x)\cdot\ln(x) + (x+e^x)\cdot\frac{1}{x} = \ln x + \ln x\cdot e^x + 1 + \frac{e^x}{x}$$

ب –

$f(x) = \ln(x^2 - 1)$ زنځيري قانون $f'(x) = f'(z)\cdot z'$

$$z = x^2 - 1 \Rightarrow z' = 2x \quad f(z) = \ln(z) \Rightarrow f'(z) = \frac{1}{z}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x^2-1}\cdot 2x = \frac{2x}{x^2-1}$$

پ- $f(x) = (x+1)\cdot e^{(x+1)} \Rightarrow f'(x) = u'v + uv'$

د $u = (x+1) \Rightarrow u' = 1$ او $v = e^{(x+1)} \Rightarrow v' = e^{(x+1)}$ سره

$$f'(x) = 1\cdot e^{(x+1)} + (x+1)e^{(x+1)} = [1 + (x+1)]e^{(x+1)} = (x+2)e^{(x+1)}$$

ت - $f(x) = a\cdot\ln(x) - b\cdot e^x - 3\cdot x^2 \Rightarrow f'(x) = \frac{a}{x} - be^x - 6x$

ټ – $f(x) = \frac{(x+1)^2}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

د $u = (x+1)^2 \Rightarrow u' = 2(x+1)$ او $v = (x-1)^2 \Rightarrow v' = 2(x-1)$ او

$v^2 = (x-1)^4$ د سره لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f'(x)=\frac{2(x+1)\cdot(x-1)^2-(x+1)^2\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}$$

$$=\frac{(x-1)\left[2(x+1)(x-1)-2(x+1)^2\right]}{(x-1)^4}=\frac{2(x+1)(x-1)-2(x+1)^2}{(x-1)^3}$$

$$=\frac{2\left(x^2-1\right)-2(x+1)^2}{(x-1)^3}=\frac{2x^2-2-2x^2-4x-2}{(x-1)^3}=\frac{-4x-4}{(x-1)^3}=-\frac{4(x+1)}{(x-1)^3}$$

ث ــ

$$f(x)=\sqrt{\frac{3+x}{3-x}}=\left(\frac{3+x}{3-x}\right)^{\frac{1}{2}}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{3+x}{3-x}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{3+x}{3-x}\right)'$$

د ځنزيري قانون له مخې منځشميرنه:

$$\left(\frac{3+x}{3-x}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}\quad u=3+x\Rightarrow u'=1;\ v=3-x\Rightarrow v'=-1;\ v^2=(3-x)^2$$

$$\left(\frac{3+x}{3-x}\right)'=\frac{1\cdot(3-x)-(3+x)\cdot(-1)}{(3-x)^2}=\frac{3-x+3+x}{(3-x)^2}=\frac{6}{(3-x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{3-x}{3+x}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{6}{(3-x)^2}=\frac{3(3-x)^{\frac{1}{2}}}{(3+x)^{\frac{1}{2}}\cdot(3-x)^2}=\frac{3(3-x)^{-\frac{3}{2}}}{(3+x)^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{3}{(3-x)^{\frac{3}{2}}(3+x)^{\frac{1}{2}}}=\frac{3}{(3-x)(3-x)^{\frac{1}{2}}(3+x)^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{3}{(3-x)\left[(3-x)(3+x)\right]^{\frac{1}{2}}}=\frac{3}{(3-x)\left(9-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

شپړم:

الف- $f(x)=3x+4 \Rightarrow f'(x)=3 \qquad f''(x)=0 \qquad f'''(x)=0$

ب - $$f(x)=2x-4+x^3-5x+4x^3=5x^3-3x-4$$
$$\Rightarrow f'(x)=15x^2-3 \qquad f''(x)=30x \qquad f'''(x)=30$$

پ- $$f(x)=3x^3+2x^2+x+1$$
$$\Rightarrow f'(x)=9x^2+4x+1 \qquad f''(x)=18x+4 \qquad f'''(x)=18$$

ت - $$f(x)=(2x+1)^3$$
$$\Rightarrow f'(x)=3(2x+1)^2\cdot 2=6(4x^2+4x+1)=24x^2+24x+6$$
$$f''(x)=48x+24 \quad f'''(x)=48$$

ټ - $$f(x)=x-x^4+3+x=-x^4+2x+3$$
$$\Rightarrow f'(x)=-4x^3+2 \qquad f''(x)=-12x^2 \qquad f'''(x)=-24x$$

ث –

$$f(x)=1-2x-3x-4x+x^4=x^4-9x+1$$
$$\Rightarrow f'(x)=4x^3-9 \qquad f''(x)=12x^2 \qquad f'''(x)=24x$$

ج- ثابت یا تل همغه=konstant

$$f(x)=\underbrace{a+b+c^2}_{\text{Konstante}}-x-ax-bx-cx^3-c^3x$$
$$f'(x)=-1-a-b-3cx^2-c^3=-3cx^2-\underbrace{a-b-c^3-1}_{\text{Konstante}}$$
$$f''(x)=-6cx \qquad f'''(x)=-6c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چ -

$$f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 5x - 2$$
$$\Rightarrow f'(x) = 12x^2 - 4x + 5 \qquad f''(x) = 24x - 4 \qquad f'''(x) = 24$$

د جګو درجو مشتق

د لومړي مشتق پرته د لوړو درجو مشتق کونه هم شته، چې د ورپسې مشتق له لارې لاسته راځي
د $f'(x)$ بیا مشتق نیونې سره د $f''(x)$ مشتق تابع لاس ته راځي، چې د دویم مشتقتابع په نامه یادیږي.

بیلګه:

$$f(x) = x^3 + x^2 + x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 \Rightarrow \underline{\underline{f''(x) = 6x + 2}}$$

د $f''(x)$ بیا مشتق نیونه و دریم مشتق ته اوداسې نور

$$f(x) = x^3 + x^2 + x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 \Rightarrow f''(x) = 6x + 2 \Rightarrow \underline{\underline{f'''(x) = 6}}$$

د $f(x) = \frac{x^3}{3}$ تابع دې ۴ واره مشتق ونیول شي

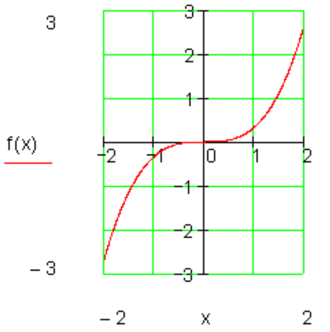
$$f(x) = \frac{x^3}{3} \Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2}{3} = x^2 \Rightarrow f''(x) = 2x \Rightarrow f'''(x) = 2 \Rightarrow f''''(x) = 0$$

د تابع ګراف :

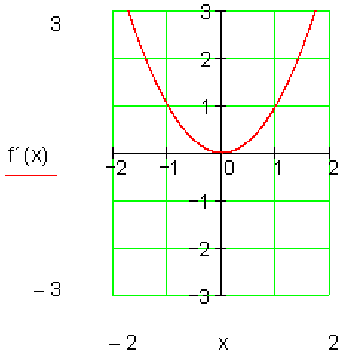
(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه تابع انځورونه د اړونده مشتق تابع سره

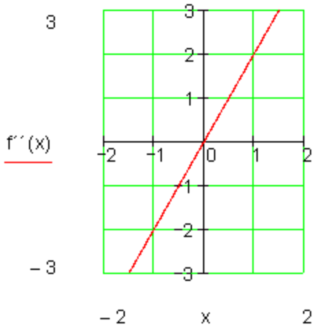
$$f(x) = \frac{x^3}{3}$$



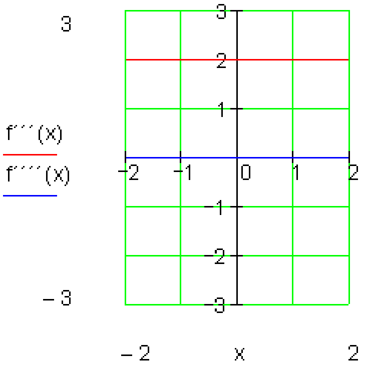
$$f(x) = \frac{x^3}{3} \Rightarrow f'(x) = x^2$$



$$f'(x) = x^2 \Rightarrow f''(x) = 2x$$



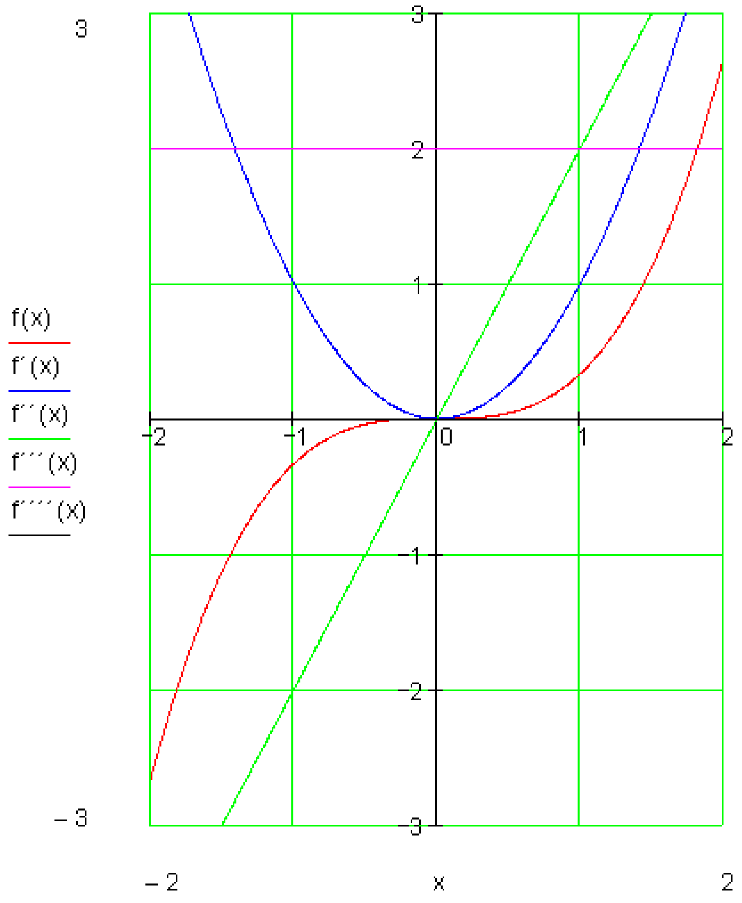
$$f''(x) = 2x \Rightarrow f'''(x) = 2 \Rightarrow f''''(x) = 0$$



د ټولو توابعو ګراف په یوه پروت ولاړ سیستم کې(دا ګراف د لاندې بیلګې پسې دی)

بیلګې: اول :	$f(x) = 4x^3 - 2x^2 + x - 2$ $f'(x) = 12x^2 - 4x + 1$ $f''(x) = 24x - 4$ $f'''(x) = 24$

(c) ketabton.com: The Digital Library



دویم:

$$f(x) = \frac{3}{4}x^3 - 12x^2 + \frac{1}{4}x$$

$$f'(x) = \frac{9}{4}x^2 - 24x + \frac{1}{4}$$

$$f''(x) = \frac{9}{2}x - 24$$

$$f'''(x) = \frac{9}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټولګه:

د f(x) لومړی مشتق دf(x) مشتق تابع $f'(x)=\frac{df(x)}{dx}$ ده :

دf(x) دویم مشتق د f'(x) مشتق تابع $f''(x)=\frac{d^2f(x)}{dx^2}$ دی:

د f(x)دریم مشتق د f''(x) مشتق تابع $f'''(x)=\frac{d^3f(x)}{dx^3}$ دی:

په ځانګړي ډول: یو په خوښه ویاند – یا راشنل تابعf(x) په خوښه د مشتق قابلیت لري.

تانجنت او عمود

د تانجنت جګیدنه

بیلګه:

تابع $f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+1$ لرو.

د تانجنت میل: د یوه تابع د ګراف میل په ټکي $P(x_0 \mid f(x_0))$ کې همغه معنی لري، لکه په دې ټکي د تانجنت میل.

موږ $f(x)$ تابع او د تابع مشتق ټیک په پام کې نیسو.

موږ $f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+1$ مربع تابع لرو

د تابع مشتق $f'(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

ارزښتجدول:

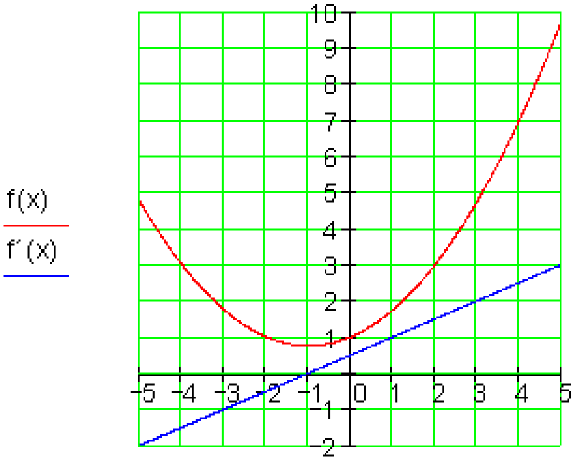
(c) ketabton.com: The Digital Library

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
f(x)	4,75	3	1,75	1	0,75	1	1,75	3	4,75	7	9,75
f'(x)	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3

د $f(x)$ ارزښتجدول څخه لوستلی شو چې د پورته مربع تابع ککرټکی دی: $S(-1,\ 0.75)$
د $x=-1$ ارزښت لپاره $f'(-1)=0$ د میل تابع ارزښت دی:
دا دا معنی لري، چې په ککرټکي کې د $f'(x)$ میل صفر دی.
تانجنت په s کې هم دا معنی لري، چې صفر دی، دا هلته پروت(افقي) ځغلي؛ يعنې د $x-$ محور سره غبرګ ځغلي.

ګرافونه:

$$f(x) := \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 1 \qquad f'(x) := \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$



بیلګه:
$f(x)=2x^3+7x^2+x-7$ تابع لرو:

تانجنت دې پيداکړی شي، چې د $f(x)$ ګراف د $P(-2,\ f(-2))$ په ټکي کې لمسوي،

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=2x^3+7x^2+x-7 \Rightarrow f'(x)=6x^2+14x+1 \quad P(-2\,|\,f(2)) \Rightarrow x_0=-2$$
$$t(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$
$$f'(x_0)f'(-2)=24-28+1=-3$$
$$f(x_0)=f(-2)=-16+28-2-7=3$$
$$\Rightarrow t(x)=-3(x+2)+3=-3x-6+3=\underline{\underline{-3x-3}}$$

پایله:

د $f(x)$ تابع ګراف کې تانجنت او عمود په $P(x_0\,,f(x_0))$ ټکي کې لاندې بڼه لري.

د تانجنت مساوات: $t(x)=\underbrace{f'(x_0)}_{\text{جګیدنه}}(x-x_0)+f(x_0)$

د عمود مساوات: $n(x)=-\dfrac{1}{\underbrace{f'(x_0)}_{\text{جګیدنه}}}(x-x_0)+f(x_0)\ ;\ f'(x_0)\neq 0$

د تانجنت او عمود عمومي فرمولونه:

پیل: تانجنت دې د $f(x)$ ګراف د $P(x_0\,,f(x_0))$ په ټکي کې لمس کړي. عمود (نورمال) دې د $f(x)$ ګراف د په $P(x_0\,,f(x_0))$ ټکي کې عمود یا ولاړ غوڅ کړي.

د تانجنت مساوات: $t(x)=m_t\cdot x+b_t$:

د $m_t=f'(x_0)$ سره لیکو: $t(x)=f'(x_0)\cdot x+b_t \qquad (1)$

دا چې $P(x_0), f(x_0))$ تانجنت یو ټکی دی، نو لاس ته راځي:

$$t(x_0)=f(x_0) \Leftrightarrow f'(x_0)\cdot x+b_t=f(x_0)$$
$$\Leftrightarrow b_t=f(x_0)-f'(x_0)\cdot x_0$$

په (1) کې ږدو، نو لرو:

$$t(x)=f'(x_0)\cdot x+f(x_0)-f'(x_0)\cdot x_0=f'(x_0)\cdot x_0+f(x_0)$$
$$=f'(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0)$$

عمود (نورمال):

د منحني سره په همغه ټکي کې چې تانجنت په پروت دی، عمود ځغلي.

د عمود میل:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{f'(x_0)}$$

$$\Rightarrow n(x) = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

بیلګه:

د $f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2$ تابع لرو.

د تابع تانجنت او عمود(نورمال) پیدا کړئ:

حل:په لاندې توګه د تابع مشتق نیسو او ګراف یې(څېره لاندې کښل شوې) کاږو:

x	-4	-1	0	1.5	3
$f'(x)$	4	2.5	2	1.25	0.5

لرو: $f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \;\Rightarrow\; f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x$

د تانجنت میل په ټکي x_0 کې د میل ارزښت 3 لري.

$$f'(x_0) = 3 \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{2}x_0 = 3 \Leftrightarrow x_0 = -2$$

$$f(x) = f(-2) = 2\cdot(-2) - \frac{1}{4}(-2)^2 = -5$$

د $P(-2,-5)$ په ټکي کې تانجنت په $f(x)$ باندې ارزښت 3 لري.

$$f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x \qquad ,P(2, f(2))$$

$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

د $x_0 = 2$ په ځاي کې دا لاندې لرو:

$$t(x) = f'(2)(x-2) + f(2)$$

$$f(2) = 2\cdot 2 - \frac{1}{4}\cdot(2)^2 = 4 - 1 = 3 \qquad f'(2) - \frac{1}{2}\cdot 2 = 2 - 1 = 1$$

$$\Rightarrow t(x) = 1(x-2) + 3 = x - 2 + 3 = \underline{\underline{x+1}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د نورمال يا عمود پيدا كونه:

$$f(x)=2x-\frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x)=2-\frac{1}{2}x \ , \quad P(2|\,f(2))$$

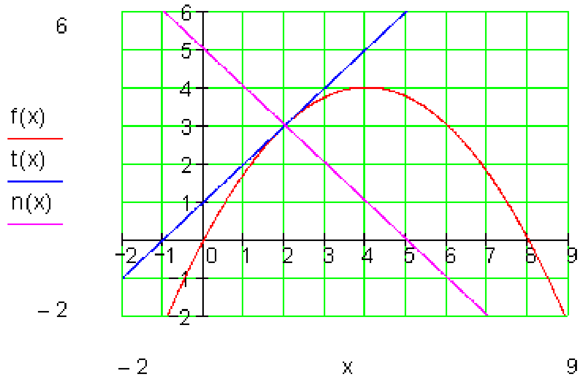
$$n(x)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)+f(x_0)$$

د $x_0=2$ سره لاندې راكوي:

$$n(x)=\frac{1}{f\ '(2)}(x-2)+f\ (2)$$

$$f\ (2)=2\cdot 2-\frac{1}{4}\cdot (2)^2=4-1=3 \qquad f\ '(2)-\frac{1}{2}\cdot 2=2-1=1$$

$$\Rightarrow n(x)=-\frac{1}{1}(x-2)+3=-x+2+3=\underline{\underline{-x+5}}$$



د يوې تابع د استعمال بيلګه د تانجنت له پاره :

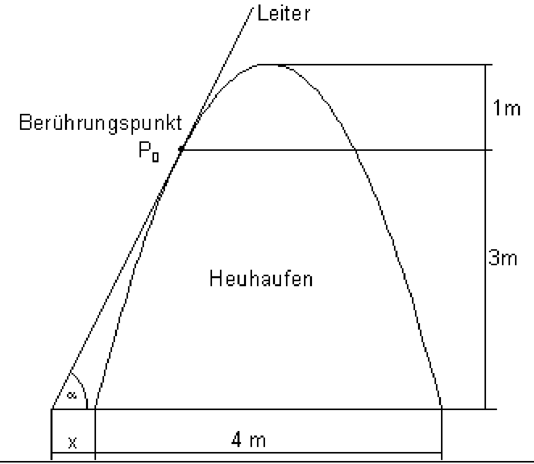
له څمكې څخه د وښو په توپۍ يوه زينه اينسول كيږي. دا زينه په درې متره جګوالي توپۍ لمسوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د وښو ټوپۍ دې د يوه کيښکودي پارابول خېره ولري، چې بنسټ يې ۴ متره سرور دی او ۴ متره جګوالی لري. غواړو په دې يوه زينه کېږدو، چې د وښو ټوپۍ سره تانجنت جوړ کړي.

په کومه زاويه(کونج)بايد دا زينه کېښول شي؟

د وښو ټوپۍ له بيخ څخه دې په کوم لرېوالي په څمکه دا زينه کېښول شي؟



موږ د y محور داسې کا ږو،چې د پارابول له ککرۍ(څوکې) څخه تېرېږي.

پارابول دا لاندې د تابع مساوات لري:

$$f(x) = a_2x^2 + 4$$

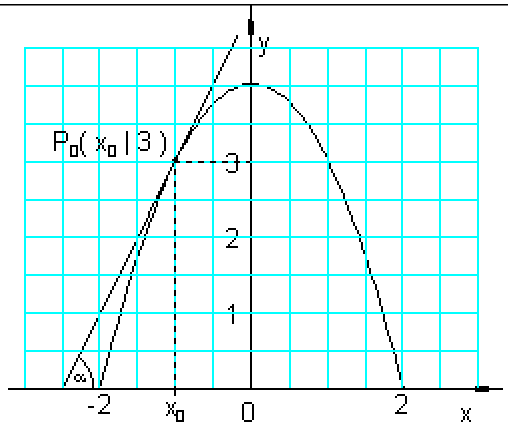
$$f(2) = 0 \Leftrightarrow 4a_2 + 4 = 0 \Leftrightarrow a_2 = -1$$

$$\Rightarrow f(x) = -x^2 + 4$$

موږ د x_0 لپاره ارزښت ټاکو:

$$f(x_0) = 3 \Leftrightarrow -x_0^2 + 4 = 3$$

$$\Leftrightarrow x_0^2 = 1 \Leftrightarrow x_{01/2} = \pm 1$$



شميرنه :

د نورو شميرنو لپاره ارزښت-1 = x_0 کاروو. زينه ټوپۍ په $P_0(-1,3)$ ټکي کې لمسوي.موږ په $P_0(-1,3)$ ټکي کې د تانجنت مساوات ټاکو:

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = -x^2 + 4 \quad P_0(-1|3) \Rightarrow x_0 = -1;\ f(x_0) = 3$$
$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

د $f'(x) = -2x$ سره لاس ته راځي

$$f'(x_0) = f'(-1) = -2 \cdot (-1) = 2$$

$$\Rightarrow t(x) = 2[x - (-1)] + 3 = \underline{\underline{2x + 5}}$$

جوړه زاویه: $\tan\alpha = 2 \Leftrightarrow \underline{\underline{\alpha \approx 63{,}4^0}}$

د زینې او د وښو ټوپۍ تر منځ واټن د **f(x)** د صفرځای او د تانجنت**t(x)** د صفرځای ترمنځ واټن دی.

صفرځایونه:

لرو:

$$f(x) = -x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_{1/2} = \pm 2$$
$$t(x) = 2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -2{,}5$$

د x ارزښتونو 2,5- او 2- ترمنځ واټن 5, 0دی.

زینه د وښو د ټوپۍ له پښو څخه باید نیم متر لرې کېښول شي.

ددې پوښتنې څخه مو زده کړل، چې د تانجنت مساوات څنګه ټاکل کیږي، چې یو ګراف په تعریف شوي ځای کې لمسوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په تولید کې د مشتق استعمال

فعالیت : یوه فابریکه x تولید کوي. په دې تولید د لګښت کیږي، چې دا د تولید په واک کې دی، چې موږ ورته د لګښت تابع وایو او په K(x) سره ښایو.

څنګه کولی شو، چې د زیات تولید لپاره لګښت را ټیټ کړو؟

د لګښت تابع K(x) د تولید سټ(ډېری) او ټول لګښت تر منځ تړاو انځوروي.

که تولید د Δx شاو خوا کې زیات شي، نو لګښت هم د ΔK په شاو خوا کې زیاتیږي.

کمښتویش (تقسیم تفاضل) $\frac{\Delta K}{\Delta x}$ د منځني لګښت زیاتوالی ښايي، د یوه Δx تولید تغیر سره(منځنی تغیر ارزښت)

د x_0 ځای کې لحضوي تغیر ارزښت د مشتق لګښت بلل کیږي. دا د پوله ارزښت $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta K}{\Delta x}$ سره ټاکل کیږي، داپه دې معني، چې د لګښت د تابعK مشتق.

پیژند : د لګښتتابع **K(x)** مشتق د مشتق ارزښت **K'(x)** په نامه یادوو یا یې پوله لګشت **K'(x)** هم بولو.

بیلګه: د لګښت تابع $K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94$ دې ورکړ شوې وي.

الف: مشتق ارزښت وټاکئ، یو ارزښت جدول د **K(x)** او **K'(x)** لپاره وکاږئاو په پروتولاړ سیستم یا کواوردیناتسیستم کې یې ګراف وکاږئ.

پوله ارزښت د **I = [0 ; 6]** لپاره په ۱ پل(قدو) پراخوالي سره.

ب : د ډېر کم لګښتزاتوالی و ټاکئ:

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندي تابع لرو:

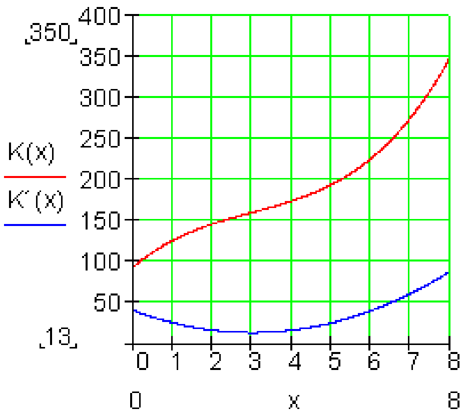
$$K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94$$

مشتق ارزښت

$$K'(x) = 3x^2 - 18x + 40$$

ارزښت جدول

x	0	1	2	3	4	5	6
K(x)	94	126	146	160	174	194	226
K'(x)	40	25	16	13	16	25	40



خورا کم د لګښتزياتوالی(لګښتجګېدنه) د پارابول **K'(x)** په ککره(څوکه) کې پروت دی ، يعني هلته چې تانجنت **K'(x)** پروت يا افقي دی

$$K'(x) = 3x^2 - 18x + 40 \Rightarrow K''(x) = 6x - 18$$

د تانجنت د پروتوالي يا افقيت لپاره :

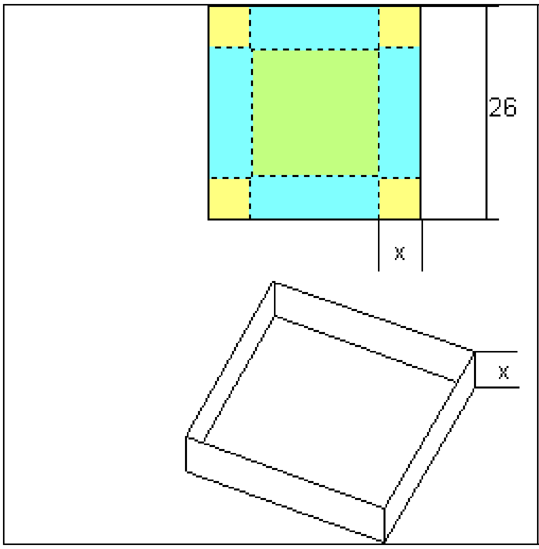
$$K''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 18 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x = 3}}$$

همدا نتيجه موږ د **K'(x)** لپاره جدول څخه هم لوستلی شوه.

نتيجه په دي معنا ده: کوچنی نرخجګوالی د يوه **x = 3** مقدار څخه لاس ته راوړو، دا هلته **13 GE / ME** دی.

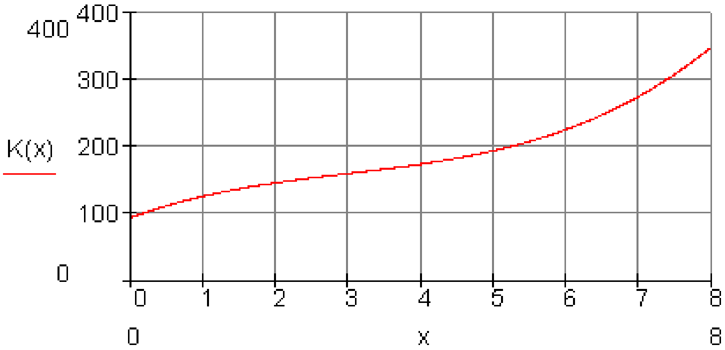
(c) ketabton.com: The Digital Library

د ي، مربع کارتون(د کلک کاغذ څخه جوړ)څخه ، چې ۲۶ سانتیمتره د اړخ اوږدوالی لري یو بکس جوړوو بې له سرپوښ، چې د x ځګوالی لري.
الف: د یوه تابع ترم وټاکی، چې د بکس حجم(ډکی) V د x په واکوالي یا تابعیت کې ښايي.
ب – ګراف وکاږئ او په نردي توګه يې ماکسیما(خورا جګ) حجم و ټاکی.



- د یوه روغتون د نرختابع(مصرف تابع)K(x) د ناروغانو ګڼه (تعداد) x او د ټول مصرف ترمنځ اړیکي انځوروي، داسي چې $x = 1$ د 100 ناروغانو معنی او $y = 1$ دی معنی چې $1000\ €$ / Tag. یوزر یورو په ورځ ($1000\ €$ / Tag.) .

$$K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94$$



الف : د مصرف تابع په خپله کتابچه کې ولیکی.
ب : د لګښت تابع مشتق د مشتق لګښت (-مصرف) یا دحدمصرف په نامه یادیږي. تاسو د لګښت زیاتیدنه د ناروغانو په واکوالي یا تابعیت کې تشریح کړی. (د K(x) ځګیدونه).
K'(x) وټاکی او ګراف يې په وضعیه سیستم (پروت- ولاړ-سیستم) کې انځور کړی)

(c) ketabton.com: The Digital Library

پ : د ناروغانو د کوم تعداد سره د لګښت زياتوال خورا کم دئ؟ دا قيمتونه وشميرئ.

د الجبري توابعو مشتق

د الجبري او نورو توابعو پيژندونه: 1- يو بنسټيز تابع الجبري بلل کيږي، که د ترتيب قانون يې د مساواتو له لارې ورکړ شوی وي،په هغو کې چې په ترمونو کې د مساواتو د متحولو سره فقط الجبري عمليی(جمع،تفريق، ضرب، تقسيم(چې مخرج يې صفر نه وي)توانکونه او جذرنيونه(د توان-اوريښې اکسپوننتونه مثبت او تام عددي دي) کارول شوي وي. 2- ناالجبري توابع ترانسځندنت بلل کيږي، لکه اکسپوننشل-ولوګاريمی- او د زاويو توابع. 3- يو الجبري تابع راشنل بللکيږ ي، که د ترتيب قانون يې د يو مساوات سره ورکړ شوی وي، په کوم کې چې ناپای ډيرې راشنل د شمېر عمليی ((جمع،تفريق، ضرب، تقسيم(چې مخرج يې صفر نه وي)توانکونه او جذرنيونه(د توان-اوريښې اکسپوننتونه مثبت او تام عددي دي)) کارول شوي وي.

بيلګه:

د $f(x)=\sqrt{x}$ تابع ورکړ شوې په x_0 کې د تابع مشتق پيدا کړئ او د مشتق تابع په ګوته کړئ.

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$	$\Leftrightarrow\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{x_0+\Delta x-x_0}{\Delta x(\sqrt{x_0+\Delta x+\sqrt{x_0}})}$
$\Leftrightarrow\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0}}{\Delta x}$	$\Leftrightarrow\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x_0+\Delta x+\sqrt{x_0}})}$
$\Leftrightarrow\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{(\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0})(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0})}{\Delta x(\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0})}$	$\Leftrightarrow\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{1}{\sqrt{x_0+\Delta x+\sqrt{x_0}}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f'(x_0)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x_0}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

نو د x_0 په ځای کې $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$ د تابع $f(x)=\sqrt{x}$ مشتق دی.

د تیرو درسونو پر بنسټ $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ د مشتق تابع ده.

د $q\in Q$; $f(x)=x^q$ ډوله توابعو مشتق:

د شمیرنې له مخې لاندې لاس ته را وړنې لرو:

تابع	د مشتق تابع	
$f(x)=x$	$f'(x)=1$	$f'(x)=1\cdot x^0$
$f(x)=x^2$	$f'(x)=2\cdot x$	$f'(x)=2\cdot x^1$
$f(x)=x^3$	$f'(x)=3\cdot x^2$	$f'(x)=3\cdot x^2$
$f(x)=\frac{1}{x}=x^{-1}$	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$	$f'(x)=-1.x^{-2}$
$f(x)=\sqrt{x}=x\frac{1}{2}$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$f'(x)=\frac{1}{2}.x^{-\frac{1}{2}}$

که دا پورته پنځه مشتقونه یو د بل سره پرتله کړو، نو اټکل کیږي، چې لاندې جوړښتقانون باور لري:

د توان (پونتخ) قانون بې له ښوونې: 1- مختني اکسپوننت د متحولې x تر مخ د فاکتور په څېر لیکل کیږي. 2- نوی اکسپوننت همغه پخوانی اکسپوننت دی، چې په یو کم شوی.	د $f(x)=x^q \;\Rightarrow\; f'(x)=q\cdot x^{q-1}$ سره $q\in Q$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بېلګه: د $f(x)=\frac{1}{x^2}$ مشتق پیدا کړئ.

ښوونه:

$$f(x)=\frac{1}{x^2}=x^{-2} \Rightarrow f'(x)=-2x^{-3}=-\frac{2}{x^3}$$

بېلګه:

د $f(x)=3x^4$ تابع مشتق پیدا کړئ.

ښوونه:

$$f(x)=3x^4 \qquad c=3 \qquad u(x)=x^4 \Rightarrow u'(x)=4x^3$$
$$f'(x)=c\cdot u'(x)=3\cdot 4x^3=12x^3$$

بېلګه:

غواړو د $f(x)$ تابع مشتق د $x=2$ په ځای کې ونیسو:

$$f(x)=x^2+3$$
$$x=2:\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=4+\Delta x$$
$$f'(2)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(4+\Delta x)=4$$
$$x=u:\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(u+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=2u+\Delta x$$
$$f'(u)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2u+\Delta x)=2u$$

بېلګه:

د تا بع $f(x)=\frac{1}{x+1}$ مشتق د $x=2$ په ځای کې پیداکړئ.

ښوونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=\frac{1}{x+1}$$

$$x=2:\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\frac{1}{3(3+\Delta x)}$$

$$f'(2)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{-1}{3(3+\Delta x)}\right)=-\frac{1}{9}$$

$$x=u:\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(u+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\frac{-1}{(u+\Delta x+1)(u+1)}$$

$$f'(u)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}=\frac{-1}{(u+\Delta x+1)(u+1)}=-\frac{1}{(u+1)^2}$$

بیلګه 2:

(توان(Potence) مشتق، چی طبیعي جګ عدد یا اکسپوننت لري:

موږ د ...,1, 2, 3 , $y(f(x)=x^n$ تابع لرو او غواړو مشتق یې پیداکړو:

ښوونه: موږ په لاندې توګه مخ ته ځو.

د بینوم جملی په بنسټ په هر x_0 ځای کې دا لاندې باورلري.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{(x_0+h)^n-x_0^n}{h}$$

$$=\frac{\binom{n}{0}x_0^n+\binom{n}{1}x_0^{n-1}h+\binom{n}{2}x_0^{n-2}h^2+\ldots+\binom{n}{n}h^n-x_0^n}{h}$$

$$=\frac{1}{h}\left(x_0^n+nx_0^{n-2}h+\frac{n(n-1)}{2}x_0^{n-2}h^2+\ldots+h^n-x_0^n\right)$$

$$=nx_0^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}x_0^{n-2}h+\ldots+h^{n-1}$$

د $h\to 0$ لپاره تابع $y=x^n$ د x_0 په هرځای کې، د لاندې مشتق سره، د مشتق قابلیت لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(dy/dx)_{x=x_0} = f'(x) = nx^{n-1}$$

ددې پورته بېلګې بل ډول ښوونه دې د پوښتنې په ځبر وي.

د زنځیري توابعو مشتق

د u تابع کېدی شي د v تابع سره وتړل شي، که د د باندني تابع(ځنځیروني قاعده)، پېژند ورشو (دتعریف ساحه) $D(u)$ د دنني تابع د $W(v)$ سره ګډ توکي یا عناصر ولري.

ددې لپاره لیکو: $u^\circ v(x) = u(v(x))$، که د f تابع د $y = f(x) = u(z)$ سره او $z = v(x)$ وي.

اوس د $x = x_0$ ځای کې د $y = f(g(x))$ تړلي یا ځنځیري تابع مشتقوړوالی څېړو:

$$f(x) = f[g(x)]$$
$$\Rightarrow f'(x) = f'(g) \quad . \quad g'(x)$$

دننني مشتق د باندنی مشتق(دادې ورپورته شي)

ددې لپاره نیسو چې:

1- د $g(x)$ دننني تابع د $x = x_0$ په ځای کې مشتقوړ ده. دانو بیا باید د x_0 په یوه معلوم تعریف شوي چاپیریال کی متمادي(نه پریکیدونکی) وي.

موږ لرو : $g(x+h) -> g(x_0)$ د $h -> 0$ لپاره.

همداسې $g(x_0+h) = g(x_0) + k$ داسې، چې $k -> 0$ د $h -> 0$ لپاره.

2- که د $y = f(z)$ دباندنی تابع په $z = z_0 g(x_0)$ کې د مشتق قابلیت ولري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $y = f(g(x))$ کمبنتويش کيدی شي په لاندې ډول ورکړ شي او بڼه(فورم) يې هم بدله شي
:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(g(x_0+h)) - f(g(x_0))}{h} = \frac{f(g(x_0+h)) - f(g(x_0))}{g(x_0+h) - g(x_0)}$$

$$= \frac{f(z_0+k) - f(z_0)}{k} \cdot \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}$$

که $h->0$ لاړه شي (همداسې $k->0$ خواته ځي) نو دا اړيکی مشتق ته ځي:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} = \left(\frac{d(g(x))}{dx}\right)_{x=x_o} = \left(\frac{df(z)}{dz}\right)_{z=z_o=g(x_0)} \cdot \left(\frac{dg(x)}{dx}\right)_{x=x_0} \quad ;........(*)$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} = \left(\frac{d(g(x))}{dx}\right)_{x=x_o} = \left(\frac{df(z)}{dz}\right)_{z=z_o=g(x_0)} \cdot \left(\frac{dg(x)}{dx}\right)_{x=x_0}$$

که چيرې د ځای په ځای(فيکس) ځای $x = x_0$ لپار بيرته x نيسو، نو کيدی شي چې (*) فرمول په لاندې لنډ ډول ورکړشي او د $y = (z)$, $z = g(x)$ لپاره باور ولري:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dz}}{\frac{dx}{dz}} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx};......................................(**)$$

په پام کې دې وي، چې $\frac{dy}{dx}$ د $z = g(x)$ په ځای کې بايد ترتيب(تنظيم) شي.

دا (*) فرمول ځنځيري قاعده(لار،قانون) بلل کيږي او د پورته نيونو يا فرضيو سره باوري دی. دا په ساده ډول په ياد لرلی شو، ځکه چی ښی خوا د کينې خوا سره د فورمال dzزياتيدلو له لارې منځ ته راغلي.

د پورته ښوونې لاس ته راوړنه دا لاندې جمله ده:

جمله :
زنځيري قاعده

(c) ketabton.com: The Digital Library

لرو : $f(z) = f(g(x))$ ، نود $z = g(x)$ تابع په x او د $y = f(z)$ تابع په $z = g(x)$ کي د مشتق قابليت لري يا مشتقوړ دی، نوترلی ورکړ شوی د $y = f(g(x))$ تابع هم په x کې د مشتق قابليت لري او دا باوري کيږي.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dz}}{\frac{dx}{dz}} = \frac{\frac{df}{dg}}{\frac{dx}{dg}} = = f'(g(x)).g'(x)$$

لنډ: $(fog)'(x) = f(g(x))'$

بېلګه:

د $f(x) = (x^2 + 2)^2$ مشتق ونيسئ.

$$f(x) = \left(x^2 + 2\right)^2$$

Substitution بدلون $z = x^2 + 2 \quad f(z) = z^2 \Rightarrow f'(z) = 2z \quad z'(x) = 2x$

$$f'(x) = f'(z)\cdot z'(x) = 2z\cdot 2x = 2\left(x^2 + 2\right)\cdot 2x = \underline{\underline{4x^3 + 8x}}$$

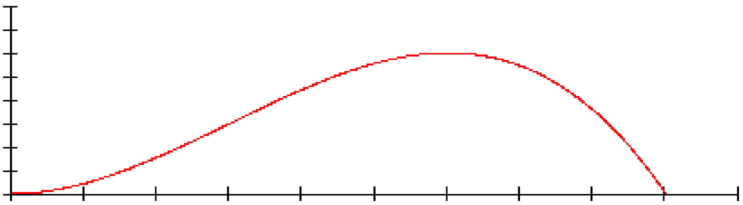
د مشتق استعمال په طبيعي علومو

په رياضياتو کې زيات وخت توابع راوړل کيږي، چې د يوې متحولې(اووبنتونې) x په واک کې وي.

په طبيعي پوهنو کې زيات وخت توابع څيرو، چې د وخت په واک کې وي وي.

لکه په شکل کې د يوه توپ د غورځولو وهلې لار (دا وروسته روښانه کيږي)

(c) ketabton.com: The Digital Library



فعاليت:

ګران زده کوونکي دي د فزيک د درسونو له مخې د چټکتيا او بيړۍ تعريفونه ور کړي او د لار، وخت، چټکتيا او بيړۍ فرمولونه دي وليکي.

بيلګه:

د يوه په برابرډوله بيړه (تعجيل) غورځول شوي شي لپاره د پيل چټکتيا (لومړنی سرعت) $v_0=4\frac{m}{s}$ او $a=1{,}8\frac{m}{s^2}$ بيړي(تعجيل) سره د لار-وخت- قانون په لاندې ډول دی:

$$s(t)=\frac{1}{2}at^2+v_0t$$

حل: د پورته ورکړشوي د v_0 ارزښت لپاره باور لري: $S(t) = 0{,}9t^2+4t$

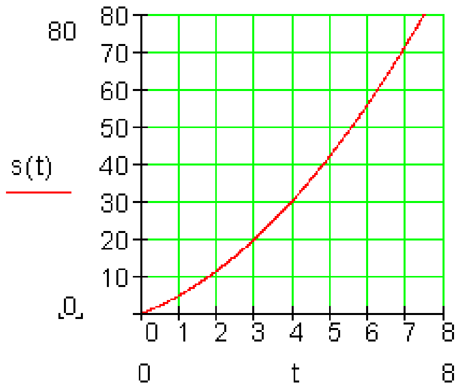
(t په (ثانيه) ، s(t) په m (متر))

منځنی چټکتيا (سرعت) $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ ده) لحظوی(سملاسي) چټکتيا په لاندې ډول

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{ds}{dt}=v$$

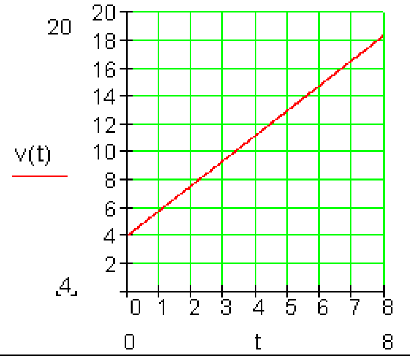
ده:

$$v=s'(t)=1{,}8t+4$$



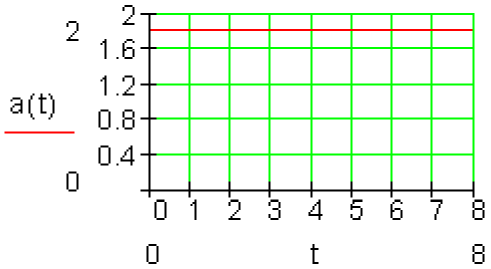
(c) ketabton.com: The Digital Library

په v-t - دیاګرام کې یوه کرښه لاس ته راځي، دا په دې معنی چې چټکتیا په برابر $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ ډول زیاتیږي. دا دلته ثابته ځګېدنه ده او $a = 1,8\,\frac{m}{s^2}$ بیړه(تعجیل) ده.



د بیړې یا تعجیل لپاره دا لاندې مساوات صدق کوي:

$$v'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = a$$



پام : د یوه برابرډوله په بیړه (تعجیلي) خوزښت لپاره لاندې باور لري:

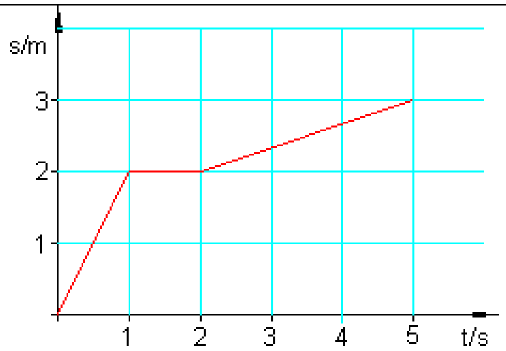
$$a(t) = v'(t) = a \qquad v(t) = s'(t) = at + v_0 \qquad s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t$$

د یوې چټکتیا (سرعت) v لپاره د وخت پسې د لار مشتق لپاره v(t)=s'(t) لرو. د s'(t) لپاره داسې $v(t) = s'(t)$. هم لیکو.

فعالیت:۱) د یوه خوزنده تن یا جسم د لار-وخت-دیاګرام ورکړ شوی.

الف: دا خوزښت تشریح کړی.

ب : دې پورې اړونده د چټکتیا – وخت – دیا ګرام وکاږی.



(c) ketabton.com: The Digital Library

---

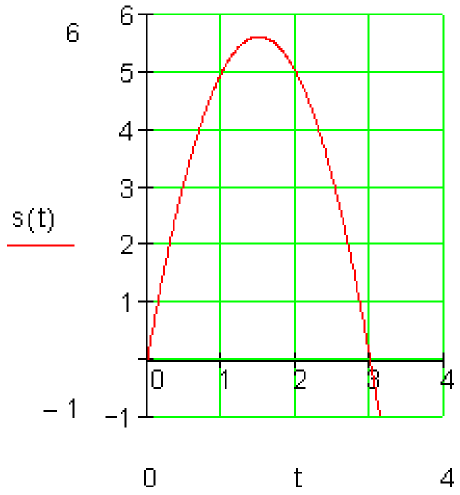
۲) يوه تيره د پيل چټکتيا $v_0 = 7\frac{m}{s}$ سره عمودي (ولاړه)پورته غورځول کيږي.

د لار-وخت-قانون دی: $s(t) = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$ د $g = 10\frac{m}{s^2}$ (را ټولي (ګردي شوي)سره.

الف) د کوم وخت وروسته د تيرې چټکتيا (سرعت) صفر دی؟

ب) خورا جګ د ميل جګوالی وشميرئ.

۳) تابع د يوه خوزښت د لار-وخت-دياګرام ښايي.



الف) د ورځني ژوند څخه يوه بيلګه ورکړئ، د هغې لپاره چې دا تلنه ټيک وي.

د منحني تلنه د $t > 3$ لپاره فزيکي څه مفهوم لري؟

ب) د خوزښت لپاره د لار-وخت-دياګرام په لاندې ډول دی.

$$s(t) = \frac{1}{2} a \cdot t^2 + v_0 \cdot t$$

a او v_0 وټاکئ

پ) د اړونده بيړې – وخت-دياګرم وکاږئ او دا تشريح کړئ.

يوه منفي چټکتيا (سرعت) څه معنا لري؟

۴) يوتن(جسم) په پورته ازاده غورځونه کې داسي حرکت کوي ،چې د t وخت کې $S(t)= 5.t^2$ لار وهي.

په وختونو $t=1;2;3$ کې لحظوي چټکتيا(سرعت) وښايی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۴ – حل:

لحضوي جټکتیا د سملاسي تغیرارزښت سره په دې لاندې معنا دی:

$$t = 1: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{s(1+\Delta x) - s(1)}{\Delta x} = 10 + 5\Delta x \Rightarrow$$

د $\Delta x \to 0$ لپاره باور لري: $10 + 5\Delta x \to 10$

$$t = 2: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{s(2+\Delta x) - s(2)}{\Delta x} = 20 + 5\Delta x \Rightarrow$$

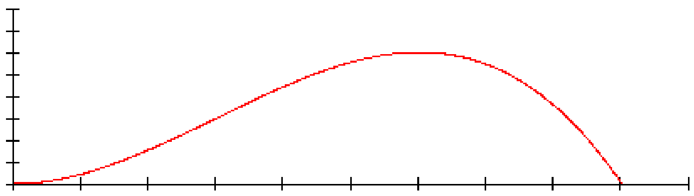
د $\Delta x \to 0$ لپاره باور لري:: $20 + 5\Delta x \to 20$

$\Delta x \to 0$

$$t = 3: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{s(3+\Delta x) - s(3)}{\Delta x} = 30 + 5\Delta x \Rightarrow$$

د $\Delta x \to 0$ لپاره باور لري $30 + 5\Delta x \to 30$

تمرین : لاندې د $f(x) = -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2 ; x > 0$ تابع ګراف او په ورنږدي توګه د فوټبال میدان کې د توپ الوتنې منحني(کرِه) ښايي، چې لاندې څیره لري.



لاندې پوښتنې ځواب کړئ:

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف:توپ کوم خورا جګ(ماکسيمال) جګوالی لري او د وهلټکي(شوټ شوي ټکي) څخه کوم واټن لري؟

ب : د توپ وهلټکي (شوټ شوي ټکي)څخه توپ څومره لرې بيرته ځمکې ته راځي؟

پ : د لوبې د دفاع دېوال د توپ وهنې ځای څخه ۹ متره لرې او ۲ متره جګ دی. ايا توپ له دې څخه جګ الوزي؟

ت : توپ د تور لاين(د x محور) څخه په ۲ متره جګوالي الوزي. له ګول څخه په کوم لرېوالي دا ازاده شوټ وهل شوی دی؟

تانجنت او نورمال.

تمرينونهIII :

د **f(x)** ګراف تانجنت په ټکي **P(x_0 | $f(x_0)$).** کې:

1 - $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \qquad x_0 = 2$

2 - $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{9}{4}x^2 + \frac{15}{4}x + \frac{9}{4} \qquad x_0 = 2$

3 - $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4 \qquad x_0 = -1$

4 - $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2 \qquad x_0 = 1$

5 - $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 3 \qquad x_0 = 1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

6 - $f(x) = x^3 - x^2 - 5x - 2 \qquad x_0 = -\frac{3}{2}$

7 - $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{5}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 2 \qquad x_0 = 3$

8 - $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 2 \qquad x_0 = 1$

9 - $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4 \qquad x_0 = 0$

10 - $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - 4x + 4 \qquad x_0 = 1$

حلونه

تمرينونه مشتقشمېرنه III

نتيجې او مفصل حلونه

نتيجې:

لومړی:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \qquad x_0 = 2 \Rightarrow P_0(2|2) \qquad t(x) = -3x + 8$$

دويم:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{9}{4}x^2 + \frac{15}{4}x + \frac{9}{4} \qquad x_0 = 2 \Rightarrow$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Rightarrow P_0\left(2 \,\middle|\, \frac{11}{4}=2{,}75\right) \qquad t(x)=-\frac{9}{4}x+\frac{29}{4}$$

دریم:

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-4x+4 \qquad x_0=-1\Rightarrow P_0(-1|\,7) \qquad t(x)=-\frac{3}{2}x+\frac{11}{2}$$

څلورم:

$$f(x)=x^3+3x^2-2 \qquad x_0=1\Rightarrow P_0(1|\,2) \qquad t(x)=9x-7$$

پنځم:

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}x+3 \qquad x_0=1\Rightarrow P_0\left(1 \,\middle|\, \frac{1}{2}=0{,}5\right) \qquad t(x)=-2x+\frac{5}{2}$$

شپږم:

$$f(x)=x^3-x^2-5x-2 \qquad x_0=-\frac{3}{2}\Rightarrow P_0\left(-\frac{3}{2} \,\middle|\, -\frac{1}{8}\right) \qquad t(x)=\frac{19}{4}x+7$$

اوم:

$$f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{5}{4}x^2+\frac{1}{2}x+2 \qquad x_0=3\Rightarrow P_0(3\,|-1) \qquad t(x)=-\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}$$

اتم:

$$f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+2 \qquad x_0=1\Rightarrow P_0\left(1 \,\middle|\, -\frac{9}{2}\right) \qquad t(x)=-6x+\frac{3}{2}$$

نهم:

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-4x+4 \qquad x_0=0\Rightarrow P_0(0\,|\,4) \qquad t(x)=-4x+4$$

لسم:

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}x^2-4x+4 \qquad x_0=1\Rightarrow P_0(1\,|\,0) \qquad t(x)=-\frac{11}{3}x+\frac{11}{3}$$

مفصل حلونه1

لومړی:

شمیرنه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \qquad x_0 = 2 \qquad t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

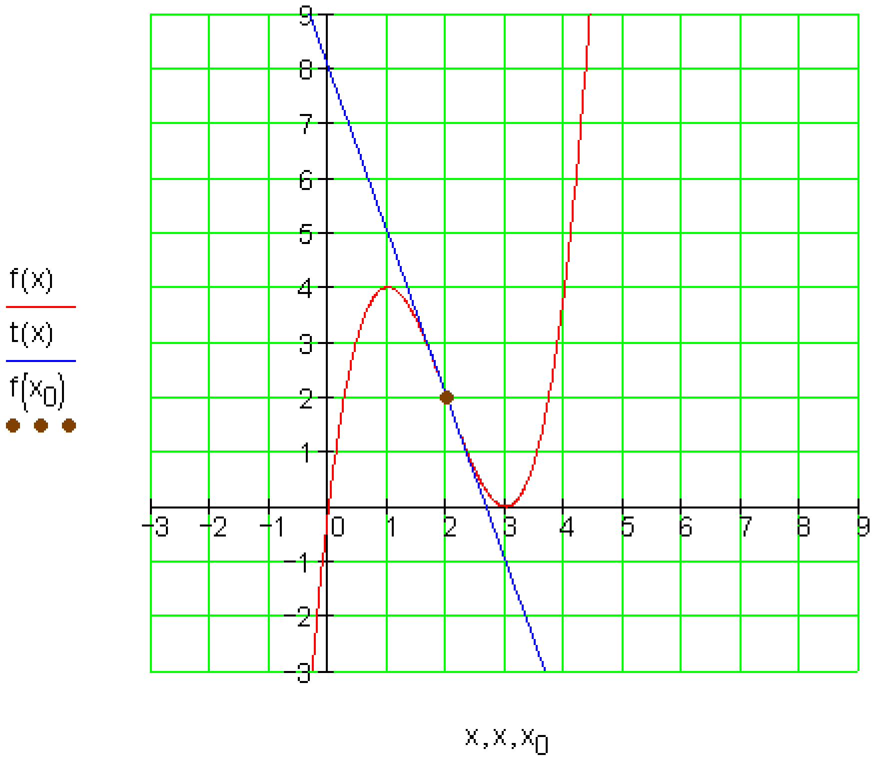
$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \Rightarrow f'(x_0) = f'(2) = 12 - 24 + 9 = -3$

$f(x_0) = f(2) = 8 - 24 + 18 = 2 \Rightarrow \underline{\underline{P_0(2|2)}}$

$t(x) = -3(x - 2) + 2 = -3x + 6 + 2 = \underline{\underline{-3x + 8}}$

گرافونه

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \qquad x_0 = 2 \Rightarrow P_0(2|2) \qquad t(x) = -3x + 8$



دویم: شمیرنه:

$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{9}{4}x^2 + \frac{15}{4}x + \frac{9}{4} \qquad x_0 = 2 \qquad t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{9}{2}x + \frac{15}{4} \Rightarrow f'(x_0) = f'(2) = \frac{3}{4}\cdot 4 - \frac{9}{2}\cdot 2 + \frac{15}{4} = \frac{12}{4} - \frac{36}{4} + \frac{15}{4} = -\frac{9}{4}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x_0) = f(2) = \frac{1}{4}\cdot 8 - \frac{9}{4}\cdot 4 + \frac{15}{4}\cdot 2 + \frac{9}{4} = \frac{8}{4} - \frac{36}{4} + \frac{30}{4} + \frac{9}{4} = \frac{11}{4} \Rightarrow$$

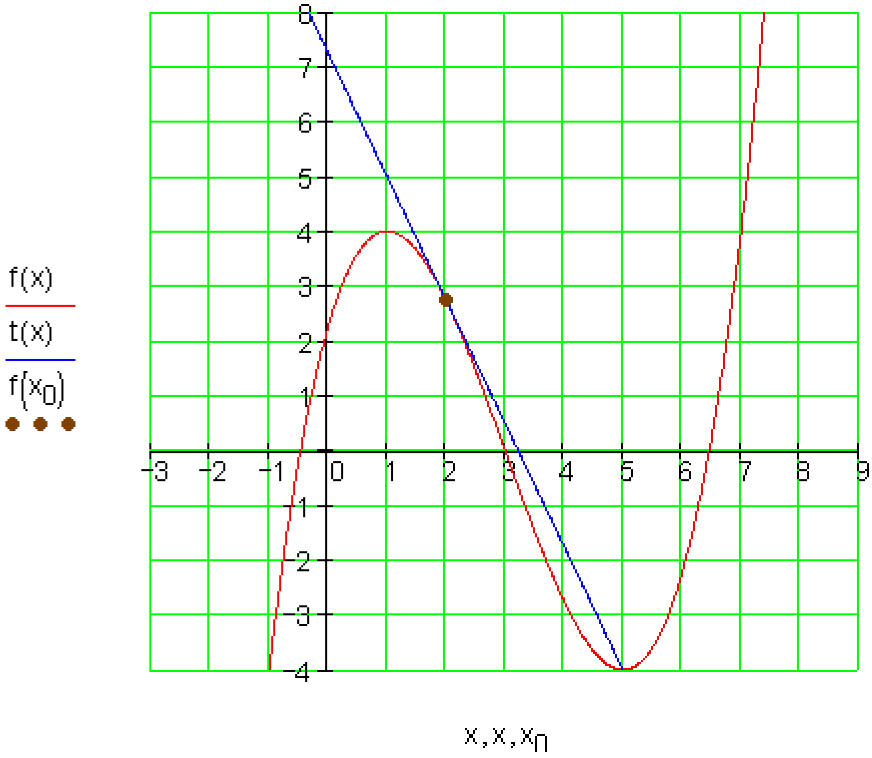
$$\Rightarrow P_0\left(2 \,\middle|\, \frac{11}{4} = 2{,}75\right)$$

$$t(x) = -\frac{9}{4}(x-2) + \frac{11}{4} = -\frac{9}{4}x + \frac{18}{4} + \frac{11}{4} = -\frac{9}{4}x + \frac{29}{4}$$

ګرافونه

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{9}{4}x^2 + \frac{15}{4}x + \frac{9}{4} \qquad x_0 = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_0\left(2 \,\middle|\, \frac{11}{4} = 2{,}75\right) \qquad t(x) = -\frac{9}{4}x + \frac{29}{4}$$



دریم: شمیرنه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-4x+4 \qquad x_0=-1 \qquad t(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

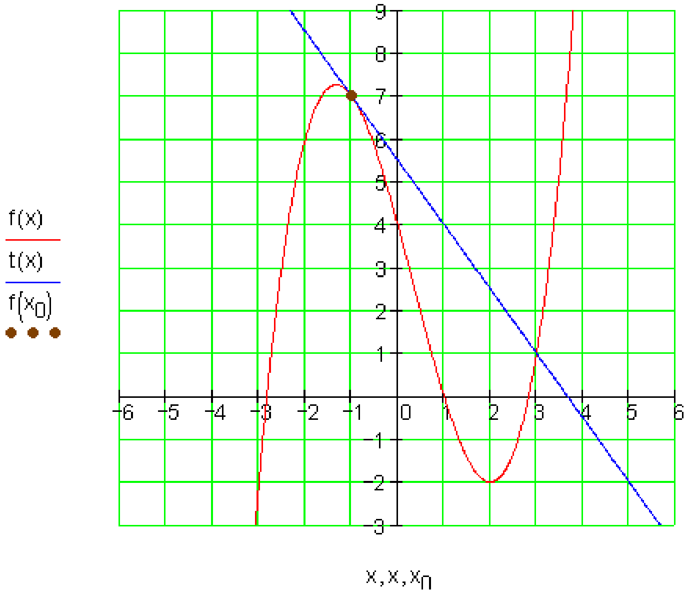
$$f'(x)=\frac{3}{2}x^2-x-4 \Rightarrow f'(x_0)=f'(-1)=\frac{3}{2}+1-4=\frac{3}{2}+\frac{2}{2}-\frac{8}{2}=-\frac{3}{2}$$

$$f(x_0)=f(-1)=\frac{1}{2}\cdot(-1)-\frac{1}{2}\cdot 1-4\cdot(-1)+4=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{8}{2}+\frac{8}{2}=7 \Rightarrow \underline{\underline{P_0(-1|7)}}$$

$$t(x)=-\frac{3}{2}(x+1)+7=-\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}+\frac{14}{2}=\underline{\underline{-\frac{3}{2}x+\frac{11}{2}}}$$

ګرافونه

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-4x+4 \qquad x_0=-1 \Rightarrow P_0(-1|7) \qquad t(x)=-\frac{3}{2}x+\frac{11}{2}$$



خلورم: شمیرنه:

$$f(x)=x^3+3x^2-2 \qquad x_0=1 \qquad t(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

$$f'(x)=3x^2+6x \Rightarrow f'(x_0)=f'(1)=3+6=9$$

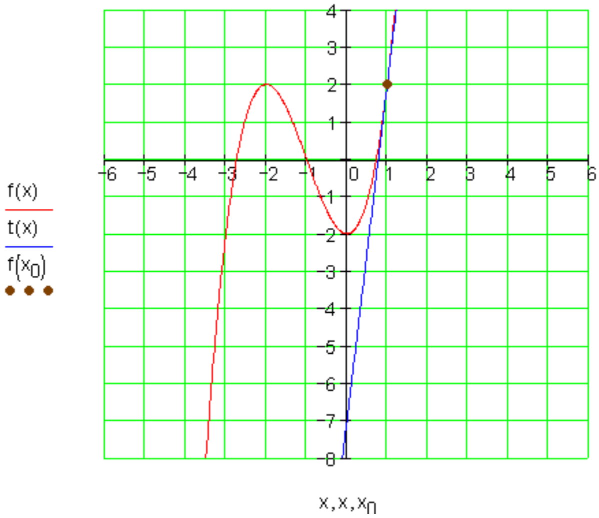
$$f(x_0)=f(1)=1^3+3\cdot 1^2-2=1+3-2=2 \Rightarrow \underline{\underline{P_0(1|2)}}$$

$$t(x)=9(x-1)+2=9x-9+2=\underline{\underline{9x-7}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګراف

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 2 \qquad x_0 = 1 \Rightarrow P_0(1 | 2) \qquad t(x) = 9x - 7$$



پنځم: شمیرنه:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 3 \qquad x_0 = 1 \qquad t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - x - \frac{5}{2} \Rightarrow f'(x_0) = f'(1) = \frac{3}{2} - 1 - \frac{5}{2} = -2$$

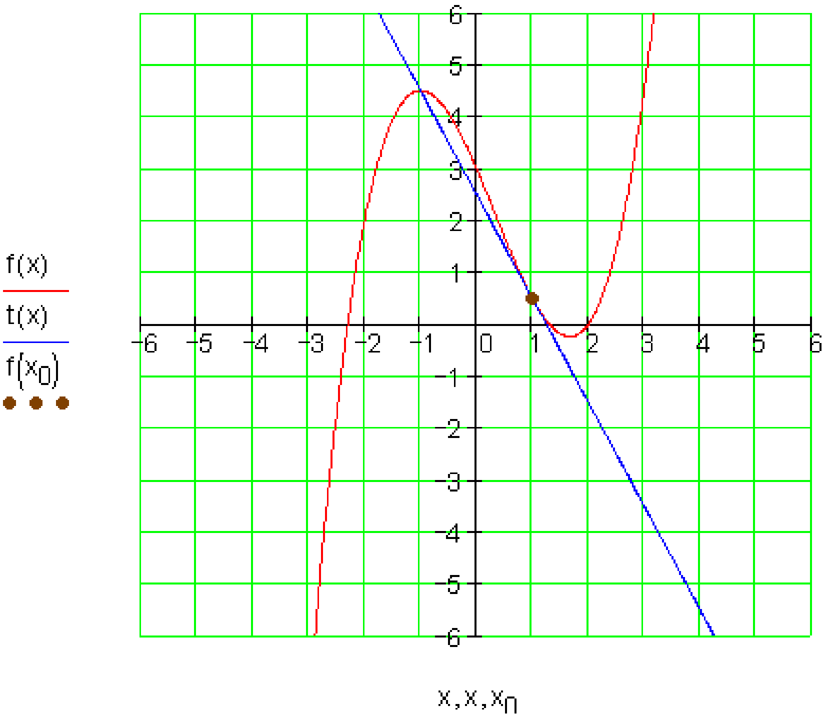
$$f(x_0) = f(1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{5}{2} + 3 = -\frac{5}{2} + \frac{6}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \underline{\underline{P_0\left(1 \middle| \frac{1}{2}\right)}}$$

$$t(x) = -2(x - 1) + \frac{1}{2} = -2x + 2 + \frac{1}{2} = \underline{\underline{-2x + \frac{5}{2}}}$$

ګراف

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 3 \qquad x_0 = 1 \Rightarrow P_0\left(1 \middle| \frac{1}{2} = 0,5\right) \qquad t(x) = -2x + \frac{5}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



شیړم: شمیرنه:

$$f(x) = x^3 - x^2 - 5x - 2 \quad x_0 = -\frac{3}{2} \qquad t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 5 \Rightarrow f'(x_0) = f'\left(-\frac{3}{2}\right) = 3 \cdot \frac{9}{4} - 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) - 5 = \frac{27}{4} + \frac{12}{4} - \frac{20}{4} = \frac{19}{4}$$

$$f(x_0) = f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{8} - \frac{9}{4} + \frac{15}{2} - 2 = -\frac{27}{8} - \frac{18}{8} + \frac{60}{8} - \frac{16}{8} = -\frac{1}{8} \Rightarrow \underline{\underline{P_0\left(-\frac{3}{2} \middle| -\frac{1}{8}\right)}}$$

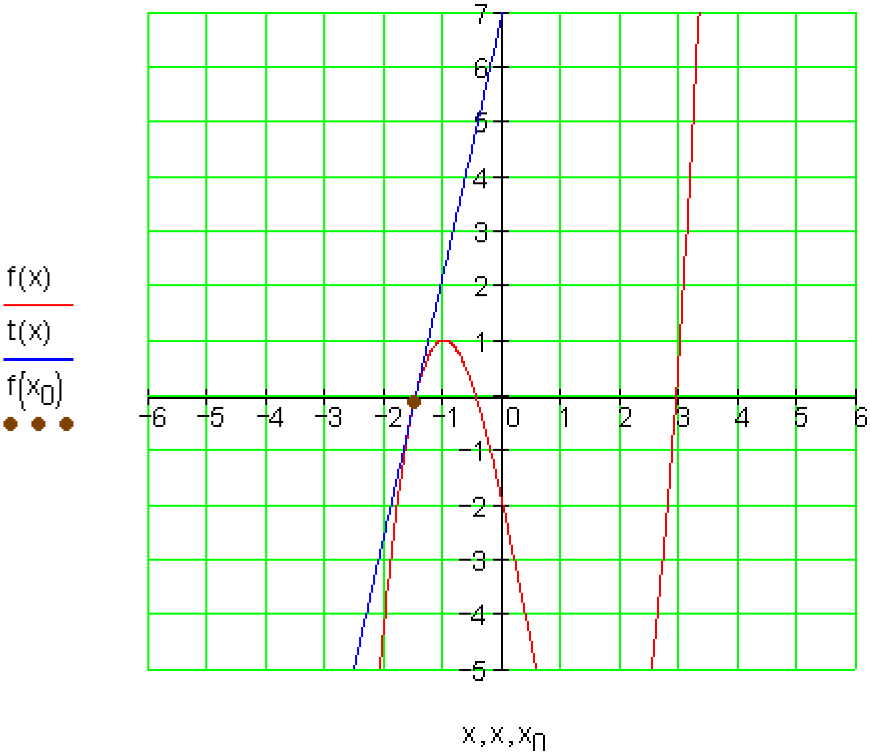
$$t(x) = \frac{19}{4}\left(x + \frac{3}{2}\right) - \frac{1}{8} = \frac{19}{4}x + \frac{57}{8} - \frac{1}{8} = \frac{19}{4}x + \frac{56}{8} = \underline{\underline{\frac{19}{4}x + 7}}$$

کراف

$$f(x) = x^3 - x^2 - 5x - 2 \quad x_0 = -\frac{3}{2} \Rightarrow P_0\left(-\frac{3}{2} \middle| -\frac{1}{8}\right) \qquad t(x) = \frac{19}{4}x + 7$$

:

(c) ketabton.com: The Digital Library



اووم: شمیرنه:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{5}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 2 \qquad x_0 = 3 \qquad t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{1}{2} \Rightarrow f'(x_0) = f'(3) = \frac{27}{4} - \frac{15}{2} + \frac{1}{2} = \frac{27}{4} - \frac{30}{4} + \frac{2}{4} = -\frac{1}{4}$$

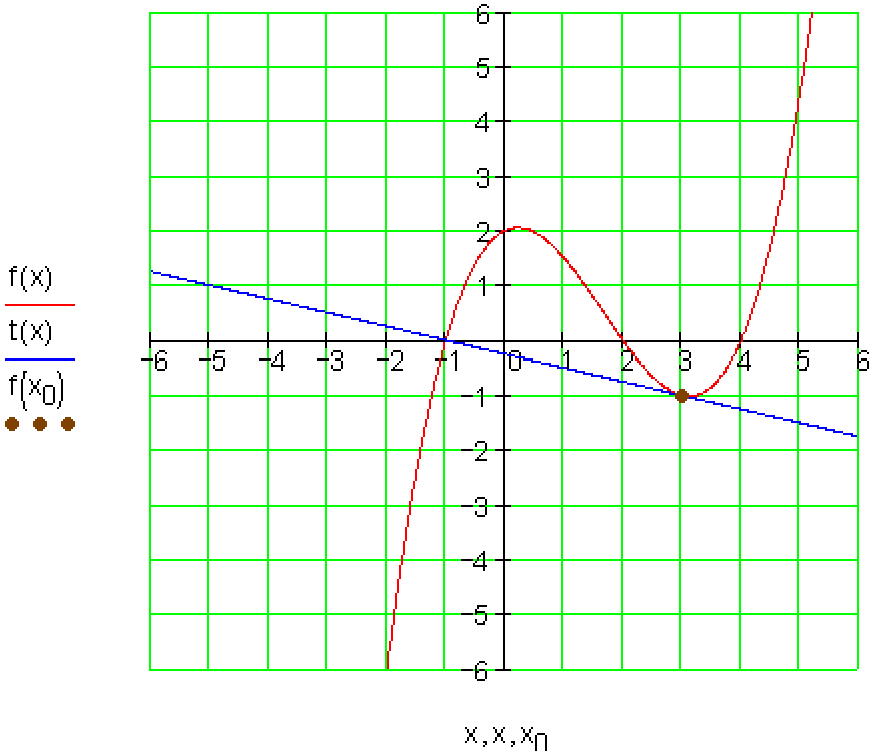
$$f(x_0) = f(3) = \frac{27}{4} - \frac{45}{4} + \frac{3}{2} + 2 = \frac{27}{4} - \frac{45}{4} + \frac{6}{4} + \frac{8}{4} = -\frac{4}{4} - 1 \Rightarrow \underline{\underline{P_0(3|-1)}}$$

$$t(x) = -\frac{1}{4}(x - 3) - 1 = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4} - \frac{4}{4} = \underline{\underline{-\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}}}$$

گراف

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{5}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 2 \qquad x_0 = 3 \Rightarrow P_0(3|-1) \qquad t(x) = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



اتم: شمیرنه:

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 2 \qquad x_0 = 1 \qquad t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3x - 6 \Rightarrow f'(x_0) = f'(1) = 3 - 3 - 6 = -6$$

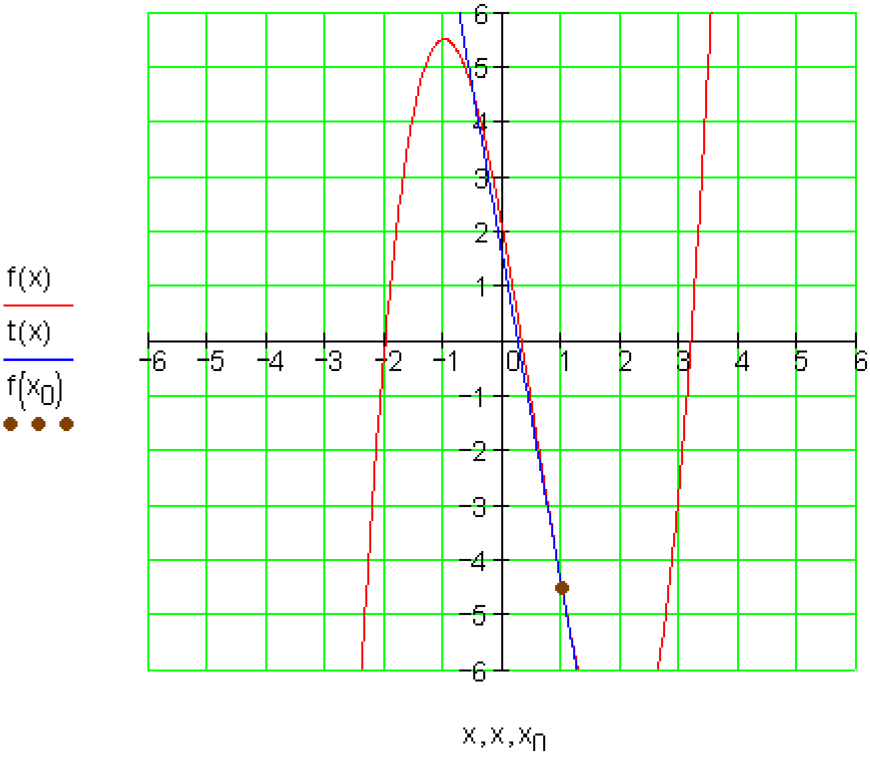
$$f(x_0) = f(1) = 1 - \frac{3}{2} - 6 + 2 = \frac{2}{2} - \frac{3}{2} - \frac{12}{2} + \frac{4}{2} = -\frac{9}{2} \Rightarrow P_0\left(1 \middle| -\frac{9}{2}\right)$$

$$t(x) = -6(x-1) - \frac{9}{2} = -6x + 6 - \frac{9}{2} = -6x + \frac{12}{2} - \frac{9}{2} = -6x + \frac{3}{2}$$

گراف

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 2 \qquad x_0 = 1 \Rightarrow P_0\left(1 \middle| -\frac{9}{2} = -4,5\right) \qquad t(x) = -6x + \frac{3}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



نهم: شمیرنه:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4 \qquad x_0 = 0 \qquad t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - x - 4 \Rightarrow f'(x_0) = f'(0) = -4$$

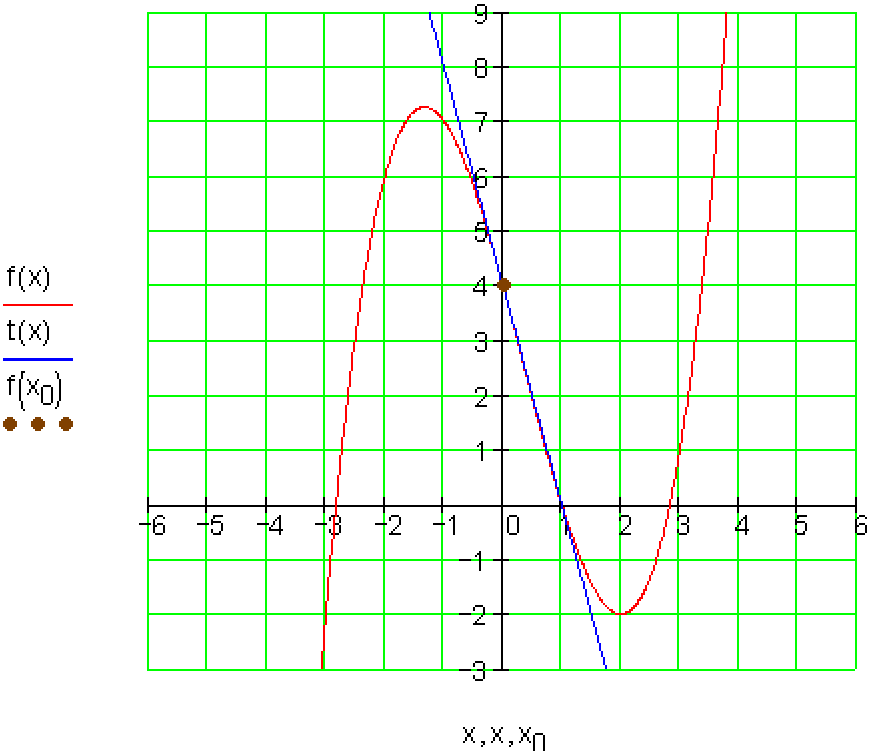
$$f(x_0) = f(0) = 4 \Rightarrow \underline{\underline{P_0(0|-4)}}$$

$$t(x) = -4(x - 0) + 4 = \underline{\underline{-4x + 4}}$$

گراف

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4 \qquad x_0 = 0 \Rightarrow P_0(0|4) \qquad t(x) = -4x + 4$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



لسم: شمیرنه:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - 4x + 4 \qquad x_0 = 1 \qquad t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$f'(x) = x^2 - \frac{2}{3}x - 4 \Rightarrow f'(x_0) = f'(1) = 1 - \frac{2}{3} - 4 = \frac{3}{3} - \frac{2}{3} - \frac{12}{3} = -\frac{11}{3}$$

$$f(x_0) = f(1) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - 4 + 4 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{12}{3} + \frac{12}{3} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{P_0(1|0)}}$$

$$t(x) = -\frac{11}{3}(x - 1) + 0 = \underline{\underline{-\frac{11}{3}x + \frac{11}{3}}}$$

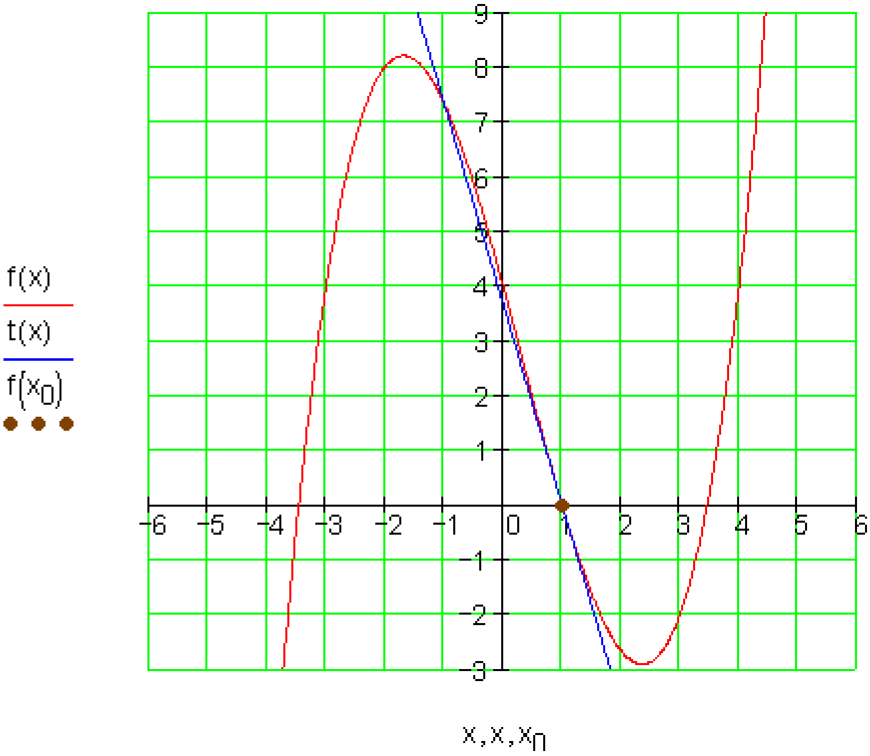
گرافونه:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - 4x + 4 \qquad x_0 = 1 \Rightarrow P_0(1|0) \qquad t(x) = -\frac{11}{3}x + \frac{11}{3}$$

.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library



مشتقشمېرنه VII

لومړی: ورکړشوې تابع: $f(x) = \frac{1}{9}x^3 - x\,;\ x \in \mathbb{R}$

الف- f(x) په کوم ځای کې جګېدنه 2 لري؟

ب- د f(x) جګېدنه په x = 1,5 ځای کې 0,25- ده.

د همدې جګېدنې سره بې له شمېرنې بل ځای ورکړی.

د خپل ګومان په هکله دلیل راوړی

پ - f(x) په کومو تکو کې پروت یا افقي تانجنت لري؟ مساوات یې ورکړی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ت - په سرچينه کې په f(x) باندې تانجنت وټاکئ

ټ - په f(x) باندې تانجنت د .(P (u | f(u) په ټکي کې وټاکئ

ث - کومه کرښه f(x) په (N (3 | 0 ټکي کې عمود غوڅوي؟

دويم: – $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{3}{4}x^2 - 1;\ x \in \mathbb{R}$ تابع ورکړ شوې

الف – کرکتريستيکي يا خوييز ټکي و ټاکئ او اړونده تانجنت يې ورکړئ.

ب- په f(x) باندې تانجنت په ئ x = 1 او x = -1 د y - محوذ غوڅوي يا قطع کوي د دې پوښتنې دليل راوړئ؟

دريم _ $f(x) = -x^4 + 2x^3;\ x \in \mathbb{R}$ ؛ تابع ورکړ شوې

الف - f(x) د x محور سره او د ټکو په هکله چې هلته افقي تانجنت لري مطالعه کړئ.

ب- t(x) په f(x) د (P (1 | f(1) په ټکي تانجنت دی.

د تانجنت مساوات وټاکئ. د t(x) غوڅتکی د f(x) سره وټاکئ.

پ – په کومو ټکو کې f(x) د 1/8 جګيدنې سره عمود لري؟ د عمود مساوات ورکړئ.

څلور – $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x;\ x \in \mathbb{R}$ ؛ تابع ورکړ شوې ده.

الف- f(x) په کرښيزو ضريبونو تجزيه کړئ او ګراف يې وکاږئ.

ب – په f(x) باندې تانجنتونو مساوات په x = 2 کې وټاکئ او دا تانجنت د الف په وضعيه قيمتسيستم کې رسم کړئ..

پ – ټکی (P (u | f(u) داسې وټاکئ، چې په P د f(x) په تانجنت د f(x) په سرجينې تانجنت سره غبرګ يعنې موازي وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ت – په کوم ځاي کې $f(x)$ خورا کوچنی تانجنت لرئ؟

پنځم- یوه تیګه د $v0 = 7\ m/s$ پیل جکتیا یا سرعت سره عمود پورته غورځول کیږي.

د لار-وخت دیاګرام دی: $s(t) = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$ د $g = 10 \frac{m}{s^2}$ سره.

الف- په کوم وختt کې د تیګې جګوالی صفر دی؟

ب- د جګېدني ماکسیمال جګوالی وشمېری.

حلونه

مشتقشمرنه VII

نتیجې او مفصل حلونه

مفصل حلونه:

لومړی:

الف – $f(x) = \frac{1}{9}x^3 - x\,;\ f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - 1$

جګوالی پهx0 کې ارزښت 2 لرئ

$$\Rightarrow f'(x_0) = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{3}x_0^2 - 1 = 2 \Rightarrow \underline{x_{01/2} = \pm 3}$$

تابع د$F(x)$ $x_{1/2} = \pm 3$ په ځایونو کې جګیدنه 2 لري.

ب - $f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - 1$ یو پارابول او له دې امله محور سیومتري دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

له f'(1,5)=0,25 څخه f'(-0,25)=-0,25 لاس ته راځي.

د f(x) په ځای کې $x_{1/2} = \pm 1,5$ او -0,25 جګیدنه لري.

پ–په f(x) یو پروت یا افقي تانجنت په ټکو کې پروت دی، چې هلته جګوالی صفر وي.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{3}$$

$$f\left(\sqrt{3}\right) = -\frac{2}{3}\sqrt{3}\,;\, f\left(-\sqrt{3}\right) = \frac{2}{3}\sqrt{3} \Rightarrow P\left(\sqrt{3} \,|\, -\frac{2}{3}\sqrt{3}\right);\, Q\left(-\sqrt{3} \,|\, \frac{2}{3}\sqrt{3}\right)$$

تانجنتونه کرښې دي، د x - محور سره غبرګې ځغلي.

$$t_1(x) = -\frac{2}{3}\sqrt{3}\,;\, t_2(x) = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

ت –

$$f(x) = \frac{1}{9}x^3 - x\,;\, f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - 1$$

په سرچینه کې د تانجنت مساوات: x0 = 0

$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$f'(x_0) = f'(0) = -1;\, f(x_0) = f(0) = 0$$

$$\Rightarrow t(x) = -1(x - 0) + 0 = \underline{\underline{-x}}$$

ټ –

$$f(x) = \frac{1}{9}x^3 - x\,;\, f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - 1$$

د تانجنت مساوات د P(u;f(u)) په ټکي کې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$t(x) = f'(u)(x-u) + f(u)$$

$$f'(u) = \frac{1}{3}u^2 - 1;\ f(u) = \frac{1}{9}u^3 - u$$

$$t(x) = \left(\frac{1}{3}u^2 - 1\right)(x-u) + \frac{1}{9}u^3 - u = \underline{\underline{\left(\frac{1}{3}u^2 - 1\right)x - \frac{2}{9}u^3}}$$

ث – کرښه، چې f(x) په (0 | 3) N کې غوڅوي، په دې ټکي کې عمود ده.

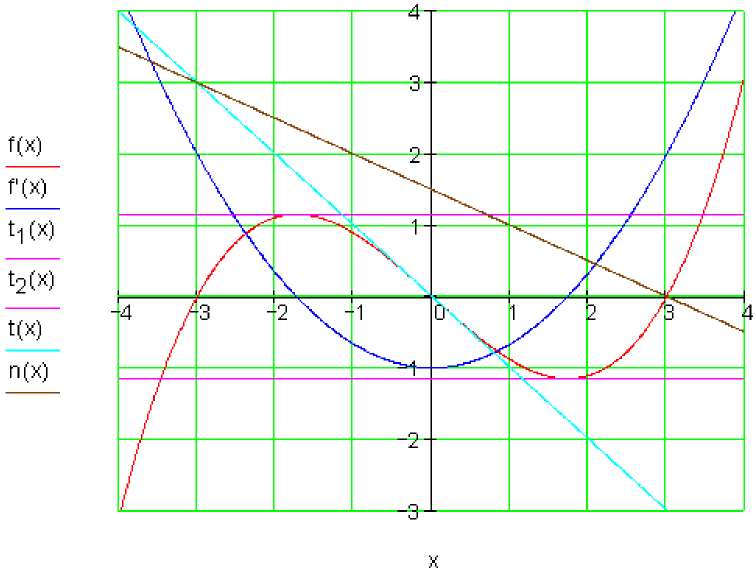
$$f(x) = \frac{1}{9}x^3 - x;\ f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - 1;\ N(3|0) \Rightarrow x_0 = 3$$

$$n(x) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$$

$$-\frac{1}{f'(x_0)} = -\frac{1}{f'(3)} = -\frac{1}{2};\ f(x_0) = f(3) = 0$$

$$\Rightarrow n(x) = -\frac{1}{2}(x-3) + 0 = \underline{\underline{-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}}}$$

Die Graphen: گراف :



(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم: الف- کرکتريستيک يا خوي ټاکونکي ټکي صفرځايونه دي، چې په دې ټکو کې د تانجنتونو جګوالی دی ، په هغو ياکومو کې چې پروت يا افقي تانجنت شته وي.

$$f(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{3}{4}x^2-1;\ f'(x)=x^3-\frac{3}{2}x$$

صفرځايونه:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x^4}{4}-\frac{3}{4}x^2-1=0$$

بي- يا دوه مربعيز مساوات.

د په ځاي اېښوونې Substitution له لارې حل يا اوبيونه:

$$x^2=z \Rightarrow f(z)=\frac{z^2}{4}-\frac{3}{4}z-1$$

$$f(z)=0 \Leftrightarrow \frac{z^2}{4}-\frac{3}{4}z-1=0 \Rightarrow z_1=4;\ z_2=-1$$

د Z2 لپاره حل نه شته.

$$z_1=4 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x_{1/2}=\pm 2 \Rightarrow \underline{\underline{P_{x1}(2\,|\,0);\ P_{x2}(-2\,|\,0)}}$$

$$f'(2)=2^3-\frac{3}{2}\cdot 2=\underline{\underline{5}};\ f'(-2)=(-2)^3-\frac{3}{2}\cdot(-2)=-8+3=\underline{\underline{-5}}$$

د پروت تانجنت سره ټکي.

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^3-\frac{3}{2}x=0 \Rightarrow x_1=0;\ x_{2/3}=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$P_2(0\,|\,-1);\ P_2\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\,|\,-\frac{25}{16}\right);\ P_3\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\,|\,-\frac{25}{16}\right)$$

$$f(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{3}{4}x^2-1;\ f'(x)=x^3-\frac{3}{2}x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تانجنت په x = 1 او x = -1 کې.

$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$t_1(x) = f'(1)(x-1) + f(1);\ t_2(x) = f'(-1)(x+1) + f(-1)$$

د ټکي سيومتري له امله

$$f'(1) = -\frac{1}{2};\ f'(-1) = -f'(1) = \frac{1}{2}$$

د محور سيومتري له امله

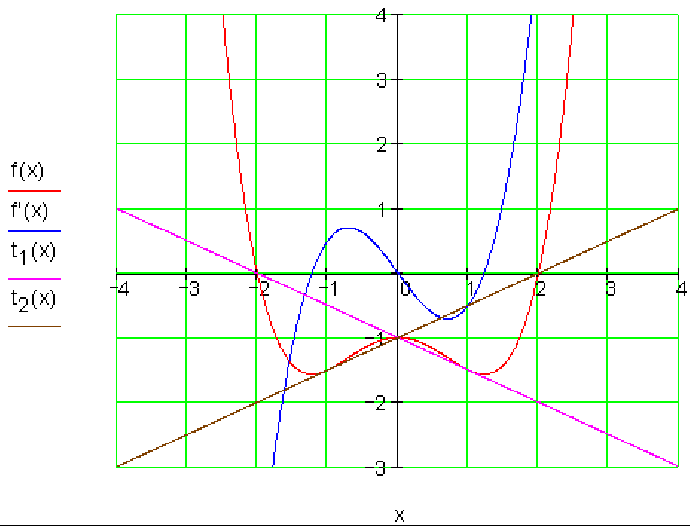
$$f(1) = -\frac{3}{2};\ f(-1) = f(1) = -\frac{3}{2}$$

$$t_1(x) = -\frac{1}{2}(x-1) - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}x - 1$$

$$t_2(x) = \frac{1}{2}(x+1) - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}x - 1$$

دواړه تانجنتونه د y محور په ټکي $P_y(0;-1)$ کې غوځوي.

ګرافونه:



(c) ketabton.com: The Digital Library

دريم: الف- $f(x) = -x^4 + 2x^3 \, ; \, f'(x) = -4x^3 + 6x^2$

صفرځايونه : $f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^4 + 2x^3 = 0 \Rightarrow x_{1/2/3} = 0 \, ; \, x_4 = 2$

$\underline{\underline{P_{x1/2/3}(0|0)}}$ درېواره صفرځاي او $\underline{\underline{P_{x4}(2|0)}}$

پروت يا افقي تانجنتونه:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x^3 + 6x^2 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 0 \, ; \, x_3 = \frac{3}{2}$$

$$f(0) = 0 \, ; \, f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{27}{16} \Rightarrow \underline{\underline{P_{1/2}(0|0) \, ; \, P_3\left(\frac{3}{2} \Big| \frac{27}{16}\right)}}$$

ب –

$$f(x) = -x^4 + 2x^3 \, ; \, f'(x) = -4x^3 + 6x^2 \, ; \, P(1|f(1))$$

په f(x) تانجنت د x0 = 1 ټکي کې د f'(1) = 2 او f(1) = 1 سره.

له دې لاس ته راځي: t(x) = 2x -1

د t(x) غوڅېکی د f(x) سره

$$f(x) = t(x) \Leftrightarrow -x^4 + 2x^3 = 2x - 1 \Leftrightarrow -x^4 + 2x^3 - 2x + 1 = 0$$

د P(1;1) سره ځاي په ځاي کونې يا ايښوونې سره ډبل صفرځايونه

$$x_{1/2} = 1 \Rightarrow (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$$

پولينوموېش:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\left(-x^4+2x^3 \quad -2x+1\right):\left(x^2-2x+1\right)=-x^2+1$$

$$-\left(-x^4+2x^3-x^2\right)$$

$$x^2-2x+1$$

$$-\left(x^2-2x+1\right)$$

$$-x^2+1=0 \Rightarrow x_{3/4}=\pm 1$$

F(-1) = -3 => Q(-1;-3) د t(x) د fx) سره يو بل غوځتکی دی.

پ-

$$f(x)=-x^4+2x^3\,;\, f'(x)=-4x^3+6x^2$$

$$n(x)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)+f(x_0)$$

د عمود جګوالی دی:

$$\frac{1}{8}\Rightarrow -\frac{1}{f'(x_0)}=\frac{1}{8}$$

$$\Leftrightarrow f'(x_0)=-8 \Leftrightarrow -4x^3+6x^2=-8 \Leftrightarrow -4x^3+6x^2+8=0$$

X = 2 د $-4x^3+6x^2+8=0$ يو حل دی (د ازمايښت له لارې پيدا شوی)

هورنر Horner

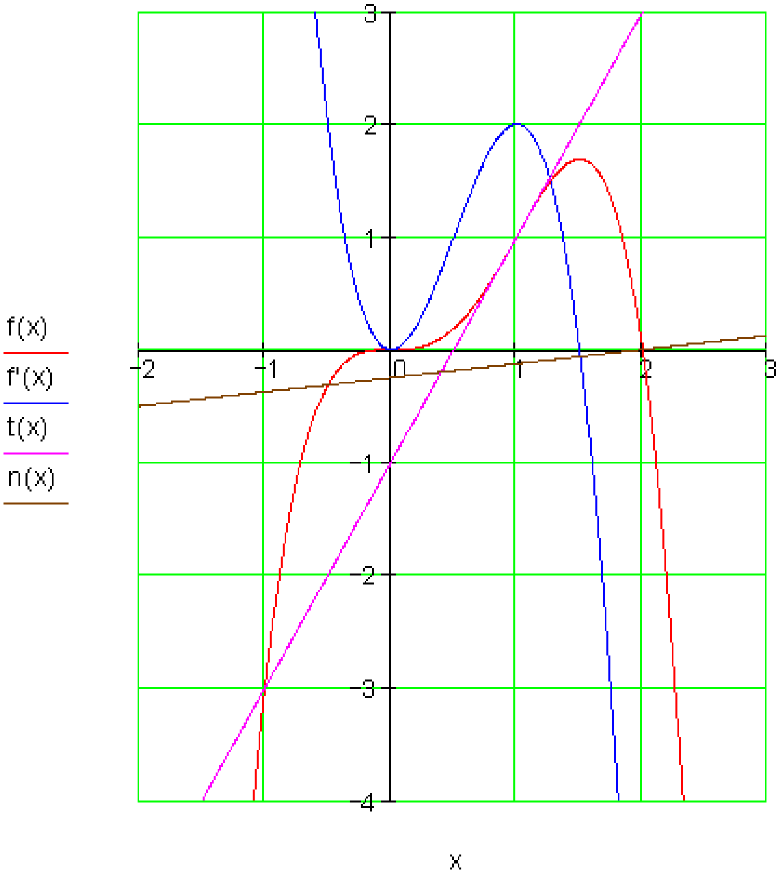
$$x=2 \quad \begin{array}{cccc} -4 & 6 & 0 & 8 \\ & \underline{-8} & \underline{-4} & \underline{-8} \\ -4 & -2 & -4 & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} -4x^2-2x-4=0 \\ p=\frac{1}{2};\, q=1 \Rightarrow D<0 \end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بل حل نه شته.

$$x = 2 \Rightarrow x_0 = 2 \Rightarrow n(x) = \frac{1}{8}(x-2) + \underbrace{f(2)}_{0} \Rightarrow n(x) = \frac{1}{8}x - \frac{1}{4}$$

گرافونه:

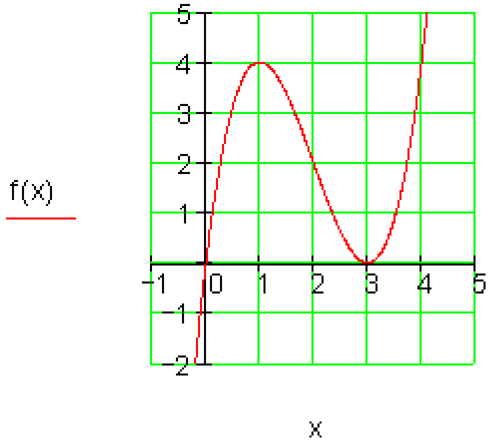


ځلورم:

الف-

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$$
$$= x\ \underbrace{(x^2 - 6x + 9)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



ديپنوم دويم فرمول

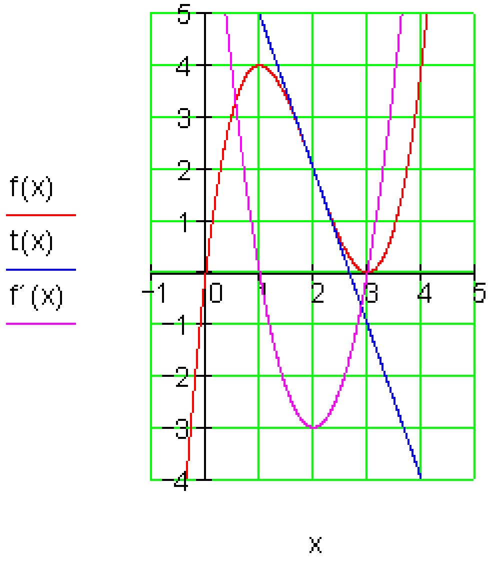
$= x(x-3)^2$

$\Rightarrow P_{x1}(0|0);$

$P_{x2/3}(3|0)$

مماس يا لمستکی

ب-



$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$x_0 = 2$

$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$f'(2) = -3$

$f(2) = 2$

$\Rightarrow t(x) = -3(x-2) + 2$

$= \underline{\underline{-3x + 8}}$

پ –

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \,;\, f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

تانجنت په سرچينه کې $f'(0) = 9$ جگوالی لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دې سره غبرګ هر تانجنت همدا یا برابر جګوالی لري پس هر په P(u;f(u)) ټکي همز

$$f'(u) = 9 \Leftrightarrow 3u^2 - 12u + 9 = 9 \Rightarrow u_1 = 0;\ u_2 = 4$$
$$u_1 = 0 \Rightarrow f(u_1) = f(0) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{P_1(0|0)}}$$
$$u_2 = 4 \Rightarrow f(u_2) = f(4) = 4 \Rightarrow \underline{\underline{P_2(4|4)}}$$

ت –

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x;\ f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

د f'(x) f(x) جګېدنه ده، دا پورته لور ته واز پارابول دی.

د هغه مینیموم د هغه غوښتکی یا د تقاطع ټکی دی، هلته f'(x) یو پروت یا افقي تانجنت لري.

شرطونه: $f''(x) = 0$

$F''(x) = 6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2$

د $x = 2$ په ځای کې f(x) خورا کمه جګېدنه لري.

$f(2) = 2 \Rightarrow$

په P(2;2) ځای کې f(x) خورا کمه جګېدنه لري.

هغه هلته ارزښت $f(2) = -3$ لري.

پنځم:

الف - $s(t) = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$ د $v_0 = 7 \frac{m}{s}$ $: g = 10 \frac{m}{s^2}$ سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$v(t) = s'(t) = v_0 - gt$$
$$v(t) = 0 \Leftrightarrow v_0 - gt = 0 \Rightarrow t = 0,7\ s$$

وروسته له 0,7S تیګه v(t)=0 سرعت لري

ب – د میلان یا جګېدني خورا لوي یا ماکسیمال جګوالی

کښته لور ته وتز پارابول دی، چې ککرتکی یا رآس يې د غورځوني ماکسیمال جګوالی ورکوي.

د ککرتکي یا رآس شرطونه: s'(t) = v(t) = 0 ⇔ t = 0,7 s د دې لپاره پرخه الف وکورئ.

خورا لوي جګوالی: s(0,7) = 2,45

خورا لوي یا ماکسیمال جګوالی 2,45 mدی.

پوښتنې

مشتقشمېرنه VIII

اول – د یوې فابریکې ټول مصرف د10 ME ماکسیمال تولید په K(x) سره ښایو. د یوه ME د خرڅلاو نرخ 28 GE دی.

$$K(x) = x^3 - 12x^2 + 50x + 40$$

الف – د نرختابع مشتق وشمېرئ. (مشتقارزښت تابع یا پوله نرخ تابع) او ګراف يې وکاږئ. ګراف يې تشریح کړئ.

ب - مینیمال یا خورا کم د مشتقلګښت وشمېرئ.

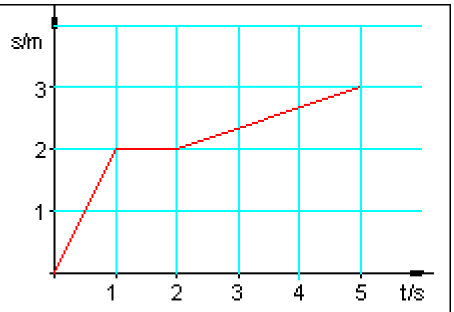
پ – وښايئ، چې د هر تولید ډېرئ یا سټ مشتقنرخ یا مشتقلګښت مثبت دی.

ت – په کومه ورشو کې ګټې فکر وشي؟

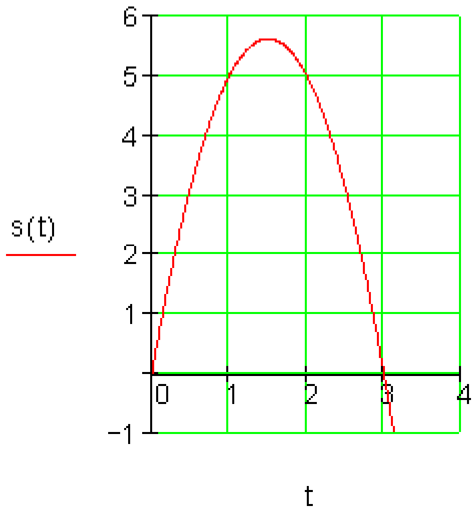
(c) ketabton.com: The Digital Library

ټ - په کومه ورشو کې ګټه زياتيږي؟

دويم _ د يوه خوزنده جسم يا تن د لار - وخت- دياګرام $s(t)$ ورکړی

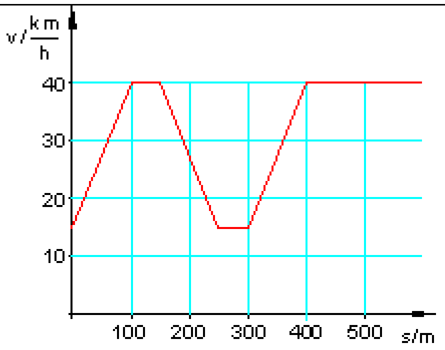
	الف – دا حرکت تشريح کړی پ - د اړونده چټکتيا – وخت – دياګرام رسم کړی، که باور ولري: $v(t) = s'(t).$

دريم – تابع د يوه خوزښت يا حرکت لار د لار – وخت دياګرام کې ښايي.

الف – يو روښنی بېلګه ورکړی، چې دا لار په کوته کولای شي. د کرښې يا منحني دا لار د $t > 3$ لپاره فزيکي په څه مفهوم دی؟ ب – د دې خوزښت يا حرکت لپاره د لار – وخت – قانون دی: $s(t) = \frac{1}{2} a \cdot t^2 + v_0 \cdot t$ a او v_0 و ټاکی. پ – دې سره اړوند د چټکتيا – وخت – دياګرام رسم کړی او دا تشريح کړی. يو منفي سرعت يا چټکتيا په څه معنا دی؟	

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځلورم:

د يوه خوزښت د چټکتيا لار ورکړې. دا دياګرام تشريح کړی. د ممکنه توته کرښو تلنلار په هکله ويناوې وکړې.	

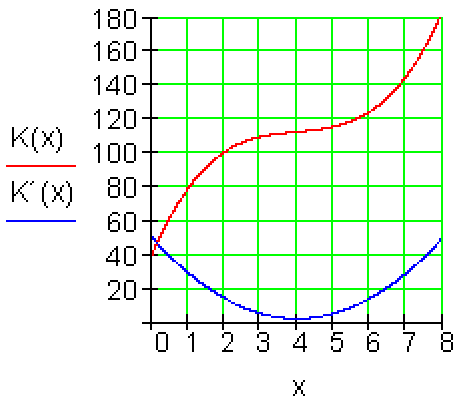
حلونه

مشتقشميرنه VIII

مفصل ځوابونه:

لومړی:

الف-

الف - $K(x) = x^3 - 12x^2 + 50x + 40$ $K'(x) = 3x^2 - 24x + 50$ د پولي لګښت ګراف پورته لور ته واز پارابول دی. په ککره يا رآس کې يې پوله لګښت خورا کم دی.	

ب – د خورا کم مشتقلګښت لپاره شرطونه : K''(x) = 0

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$K(x) = x^3 - 12x^2 + 50x + 40$$
$$K'(x) = 3x^2 - 24x + 50$$
$$K''(x) = 6x - 24$$
$$K''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 24 = 0 \Rightarrow x = 4$$
$$K'(4) = 2$$

له دې لاس ته راځي: د یوه 4ME (څلور ډېرى یا سټ واحدونه)تولید مشتقلګښت د 2GE/ME سره خورا کم دی.

پ –

$K'(x) = 3x^2 - 24x + 50$ د $K'(4) = 2$ لپاره مثبت دی.

که له نیونې یا فرضیې سره سم $K'(x)$، $x \in \mathbb{R}_+$ مثبت وي، د صفرځاي د لرلو اجازه نه شته.

موږ $K'(x)$ په صفرځایونو څېړو:

$$K'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 24x + 50 = 0$$
$$\Rightarrow p = -8\,;\ q = \frac{50}{3}\,;\ D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 16 - \frac{50}{3} < 0$$

له دې لاس ته راځي جې حل یا اوبی نه شته.

مشتقلګښت د هر تولید لپاره مثبت دی.

څه چې د ښوولو وو.

ت – د لاس ته راوړنې (یعنې هر څه چې پلورل شوي وي) تابع: $E(x) = 28x$ (له پوښتنې کولو لاس ته راځي).

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګټې تابع: $G(x) = E(x) - K(x) = -x^3 + 12x^2 - 22x - 40$

ګټه هلته کیږي، چې د ګټې تابع مثبت ارزښت لري.

ازمایو:

$G(5) = 25; G(4) = 0$ ، پس د $G(x)$ صفرځاي $x1 = 4$ دی.

هورنر:

$$x = 4 \quad \begin{array}{cccc} -1 & 12 & -22 & -40 \\ & \underline{-4} & \underline{32} & \underline{40} \\ -1 & 8 & 10 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \Rightarrow -x^2 + 8x + 10 = 0 \\ x_{2/3} = 4 \pm \sqrt{26} \Rightarrow \underline{\underline{x_2 \approx 9{,}1}} \end{array}$$

د $\underline{\underline{4 \le x \le 9{,}1}}$ لپاره فابریکه په ګټهکار کوي.

ټ- – د ګټې زیاتیدل څکه، چې $G(x)$ مثبته جګېدنه لري او $G(x) > 0$ دی.

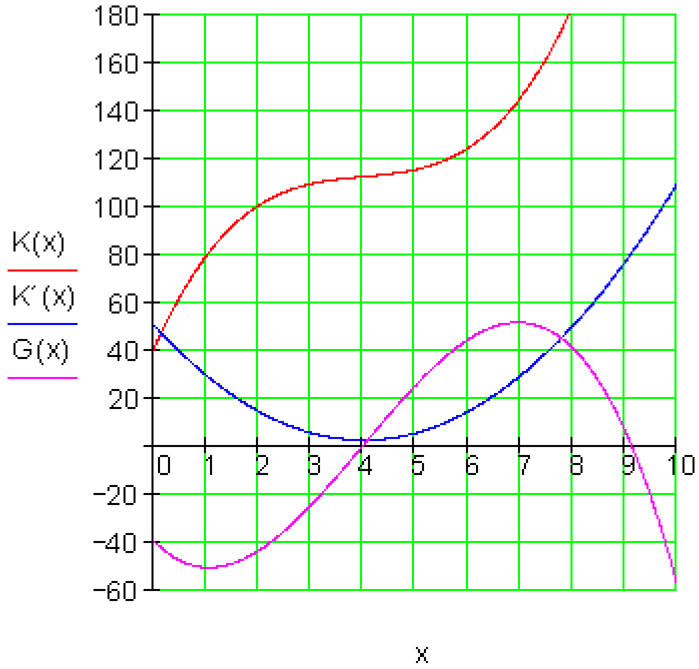
یعنې: $G(x) > 0 \wedge G'(x) > 0$

د $G'(x) = -3x^2 + 24x - 22 > 0$ لپاره $x \in \left[4 - \sqrt{\frac{26}{3}} ; 4 + \sqrt{\frac{26}{3}}\right]$ یا $x \in [1{,}05 ; 6{,}9]$

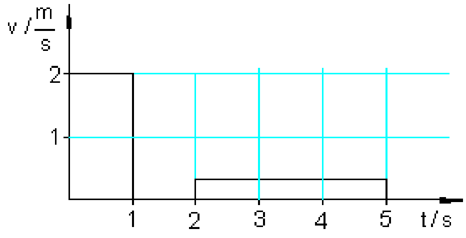
د ګټې زیاتیدنه: $[4 ; 9{,}1] \cap [1{,}05 ; 6{,}9] = \underline{\underline{[4 ; 6{,}9]}}$:

ګرافونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library



دويم:

الف – له 0 تر 1 s پورې: خوزښت د مساوي پاتې چټكتيا سره .v = 2 m/s له 1 تر 2 s پورې. ځاي په ځاي دريدنه: v = 0 m/s له 2 تر 5 s پورې. خوزښت د مساوي پاتې چټكتيا سره: v = 1/3 m/s	ب- 

دريم: الف – يو شی عمود پورته لور ته غورځول كيږي. د $t > 3$ لپاره $s < 0$ دی، دا په دې معنا چې دا شی د غورځول ځاي څخه لاندې يا كښته دی.

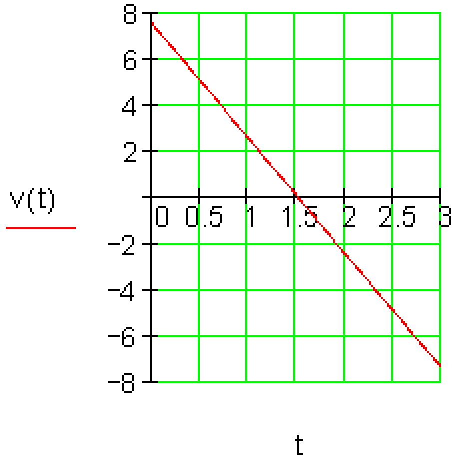
(c) ketabton.com: The Digital Library

ب - $s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$ د خوزښت مساوات.

د a او v0 د خوزښنا لپاره د ګراف له دوه ټکو څخه کار اخلو.

$$P_1(1|5): s(1) = \frac{1}{2}a + v_0 = 5$$
$$P_2(3|0): s(3) = \frac{9}{2}a + 3v_0 = 0$$
$$a = -5; v_0 = 7{,}5$$

a<0 په دې معنا، چې دا یو ځنډشوی حرکت دی.

	پ - $v(t) = s'(t) = at + v_0 = -5t + 7{,}5$ چټکتیا په پیل کې مثبت ده، دا په دې معنا چېجسم یا بدن پورته لور ته خوزي. مګر دا کمیږي او t = 1,5 s سره صفر دی. بدن هغه خپل خورا جګ جګوالي ته ورسیږه. وروسته جګوالی منفي دی، بدن لویږي، هغه بېرته کښته لور ته خوزي.

څلورم:

0 - 100 m: چټکتیا زیاتیږي.
100 - 150 m چټکتیا براپره پتیږي40 km/h.
150 - 200 m]ټکتیا کمیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

----

250 - 300 m چټکتيا برابره پاتيږي..15 km/h :

300 - 400 m چټکتيا زياتيږي.

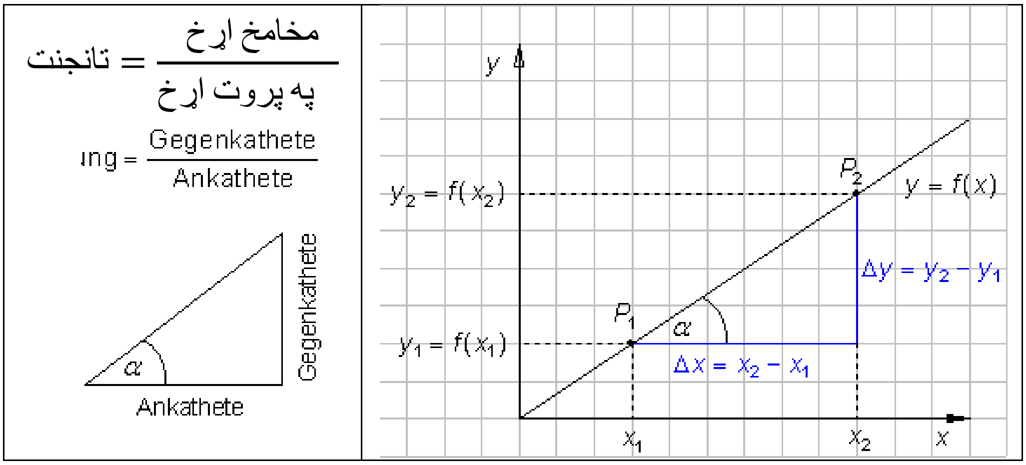
له 400 m   وروسته چټکتيا ثابته پاتيږي. 40 km/h.

روښانه ونه: په کښته لوېدلي سرک په تعجيل يا په بيړه کيږي، پسې سرک هوار دی.

ورپسې سرک مايل په غره پورته کيږي جتکتيا تر 15 km/h پورې کميږي. پسې کښته لويږي، چې سرعت يا چټکتيا بيرته زياتيږي. له دې وروسته هغه خورا جګه د 40 km/h چټکتيا يا سرعت   ساتلې پاتيږي په دا پسې لرې پاتې کرښه باندې.

تولګه :

د کرښې جګيدنه:



د کرښې لپاره د جګيدنې فرمول

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{مخامخ اړخ}}{\text{په پروت اړخ}} = \text{جګيدنه} \qquad \text{يا} \qquad \frac{f(x1)-f(x0)}{x1-x0} = \text{جګيدنه}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه:

ټکی $P_0(2|3)$ او $P_1(5|7)$ په کربنه پراته دي

د $x_0 = 2$ او $f(x_0) = f(2) = 3$ سره

همداسې $x_1 = 5$ او $f(x_1) = f(5) = 7$ د کربنې جګیدنه ده:

جګیدنه= $\text{Steigung} = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \dfrac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \dfrac{7-3}{5-2} = \underline{\underline{\dfrac{4}{3}}}$

د یوې کربنې جګیدنه

موږ لروده: $\Delta x = x_1 - x_0$

موږ دا مساوات په x1 پسې بنه بدلوو

$$\Delta x = x_1 - x_0 \,|+x_0 \Leftrightarrow \Delta x + x_0 = x_1 \Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = x_0 + \Delta x}}$$

اوس د جګیدنې فرمول کې لیکو:

د $f(x_1)$ په ځای $f(x_0 + \Delta x)$ د $x_1 - x_0$ په ځای Δx

له دې سره د جګیدنې فرمول دا بنه لرې:

جګیدنه= $\text{Steigung} = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

دا فرمول کمبنت وېښ دفرنسوېش بولو.

موږ د دې فرمول باوریوالی د پورته تمرین سره ازمایو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$P_0(2|3)$ او $x_0 = 2$ $P_1(5|7)$ او $\Delta x = x_1 - x_0 = 5 - 2 = 3$

جگيدنه=

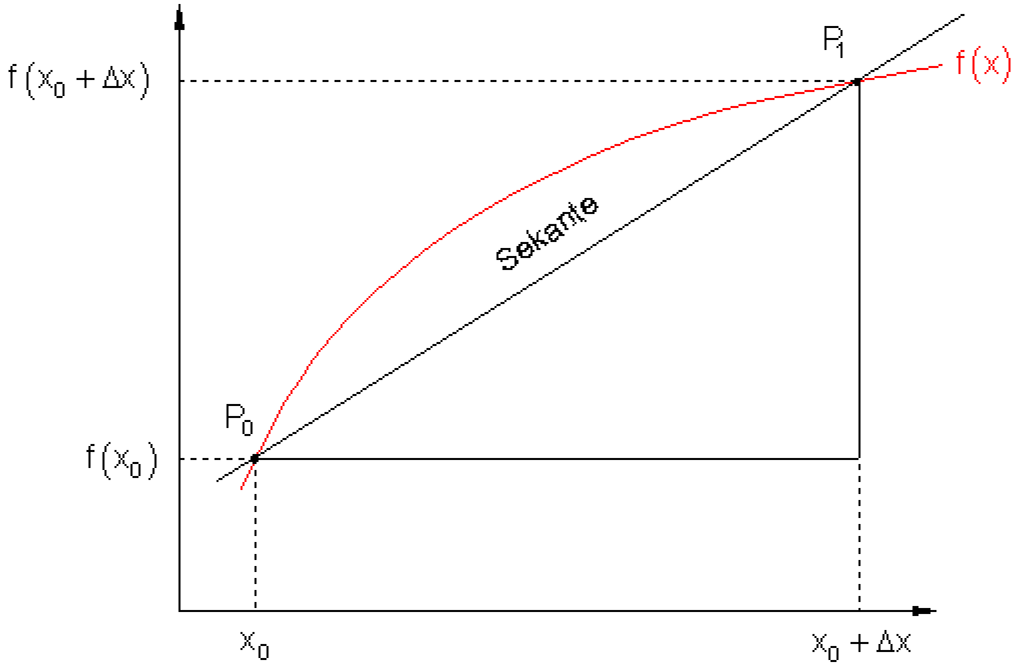
$$\text{Steigung} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(2+3) - f(2)}{3} = \frac{f(5) - f(2)}{3} = \frac{7-3}{3} = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}$$

د يوې كربنې باوريوالى كيدى شي هم د كمبنتوپش سره وتاكل شي.

د سيكانت جگيدنه او د تانجنت جگيدنه

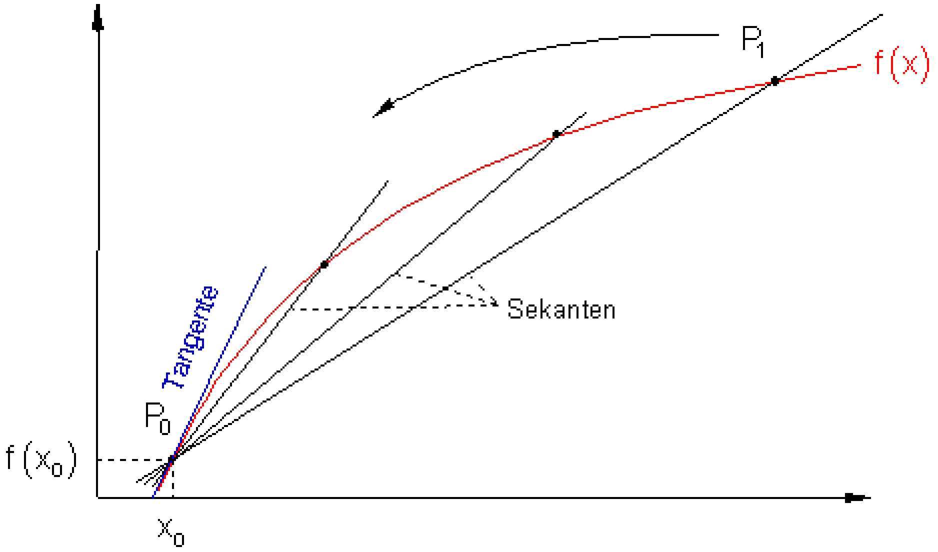
پرابلم: د يوه په خوښه تابع f(x) په ټكي P_0 كې د گراف جگيدنه څومره لويه ده؟

د سيكانت يا ټوټهووني جگيدنه د P_0 او P_1 ترمنځ منځنى جگيدنه.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د سیکانت سره څه پیښیږي، که موږ ټکی P_1 تل پسې د ټکي P_0 په لور و خوزوو یا بوزو؟



سیکانت یا غوڅوونې تل د f(x) ګراف ته ور نږدې کیږي.

که P_1 په P_0 ولویږي یا پریوځي، نوره نو بیا سیکانت یا غوڅوونې نه شته. دا بیا تانجنت شوی دی.

تانجنت یوه کرښه ده، چې د f(x) ګراف په ټکي P_0 کې لمسوي.

د تعریف یا پیژند له مخې د یوه د ګراف ځګیدنه په ټکي P_0 کې د تانجنت د ځګوالي سره برابره ده.

کمبنتوېش، دفرنشلوېش، مشتق او د ځګیدنې تابع

د دې لپاره چې د یوه ګراف f(x) د x_0 په ځای کې یعنې په ټکي P_0 (x_0 | $f(x_0)$) کې وشمیرو، کیدی شي دسیکانتځګیدنې فرمول لپاره دا ،، دلتا،، تل کوچنی شي، کوم چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټکي P_1 راکښنه د P_0 په لور راکوي يا په ګوته کوي.

(کمبنتوپش) د سيکانت جګيدنه= $\text{Sekantensteigung} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

د ګراف $f(x)$ جګيدنه د x_0 په ځای کې د پوله جوړوني له لارې راکوي يعني

(دفرنځيالوپش) $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

پوله ارزښت په دې معنا، چې ،، x دلتا،، د صفر په لور هڅيږي، يعني په خوښه کوچنی کيږي، بې له دې چې ټيک صفر شي. ک د ،، x دلتا ،، لپاره ارزښت صفر ايښول شوی وی، نو به و يوه نه تعريف شوي افاده ا ويينه لاس ته راوړې وی.

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0+0)-f(x_0)}{0} = \frac{f(x_0)-f(x_0)}{0} = \frac{0}{0}$$

تعريف نه

په ياد ولره: د دفرنشلوپش

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} := f'(x_0) := \frac{dy}{dx}$$

د x_0 په ځای کې د تابع (f(x مشتق يا رابيليدنه بلل کيږي او د x_0 په ځای کې د (f(x جګيدني لپاره يوه کچه ونه ده

د مشتق بيلګه:

تابع $y=f(x)=x^2$ لرو، غواړو د x=x0 په ځای کې مشتق پيداکړو

(c) ketabton.com: The Digital Library

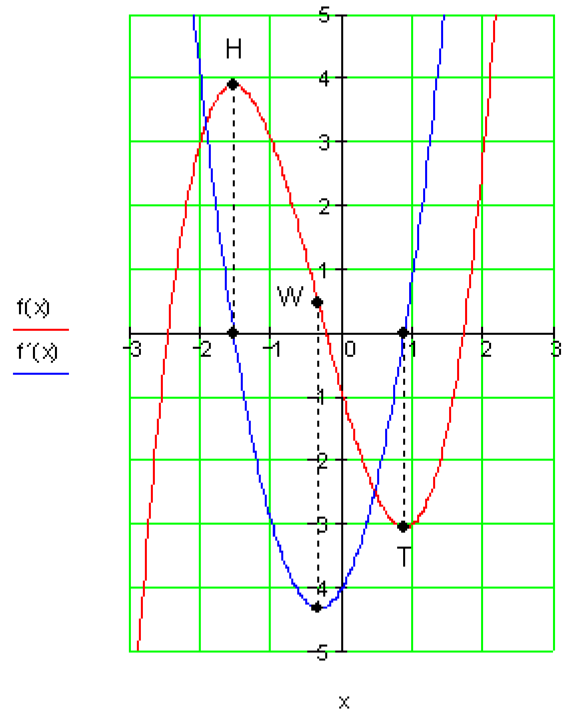
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0^2 + 2x_0 \Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x_0 \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x (2x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x) = \underline{\underline{2x_0}}$$

دا چې د $f(x) = x^2$ لپاره ځای $x = x0$ په خوښه ټاکل کیدی شي، د دې تابع لپاره باور لري: (د مشتق- یا رابیلیدني تابع) $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$

$f(x) := x^3 + x^2 - 4x - 1$ $f'(x) := 3x^2 + 2x - 4$



د مشتق – یا رابیلیدني تابع $f'(x)$په ځای سړی د جګیدنې تابع هم وایي، ځکه چې دا ابع د هر تابع ارزښت x لپاره د x په ځای کې د مشتق شوې تابع جګوالی ورکوي.

دا ترخنګ د یوه تابع ګراف دی، هم داسې د مشتق تابع په یوه کواوردینات سیستم کې انځوروي.

د مشتق – یا رابیلیدني تابع $f'(x)$په ځای سړی د جګیدنې تابع هم وایي، ځکه چې دا ابع د هر تابع ارزښت x لپاره د x په ځای کې د مشتق شوې تابع جګوالی ورکوي.

دا پورته ترخنګ د یوه تابع ګراف دی، هم داسې د مشتق تابع په یوه کواوردینات سیستم کې انځوروي

(c) ketabton.com: The Digital Library

پام ولره:

په افراطي ځايونو (جګټيکو، ټیټ ټکو) کې د مشتق تابع هر ځل ارزښت صفر لري.

په اوړونټيکو – یا انعطاف ټکوکې (W) د مشتق تابع یو افراطي ځای لري.

یوغږیزوالي

د یوغږیزوالي خویونه:

یوغږیزې توابع(Monotony (یوناني: یوغږیز، برابرېدوله)

جګیدونکې(متزاید)، ټیټیدونکې(متناقص) توابع(جګ-ټیټیدونکې توابع)

که د ټولو $x_1 < x_2$ لپاره دf یوه تابع په یوه اینټروال کې $f(x_1) \le f(x_2)$ $(f(x_1) \ge f(x_2))$ وي، نو تابع په دې اینټروال کې مونوتون جګیدونکې(- ټیټیدونکې) بلل کیږي، که $f(x_1) = f(x_2)$ په کې اجازه ونه لري، نو دا $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$ کره یا ټینګه مونوتون جګېدونکې (همغږیز ټیټېدونکې) بلل کیږي.

لاندې قواعد، چې له همغږیزوالي په لاس راځي، د همغږیزوالي حالت لپاره ګټور دي.

دf یوه تابع ټیک هلته د تعریف په ورشو(ساحه) D کې مونوتون جګېدونکې ده، که د خوښې x_1 او x_2 لپاره، چې په D کې پراته دي، باور ولري:

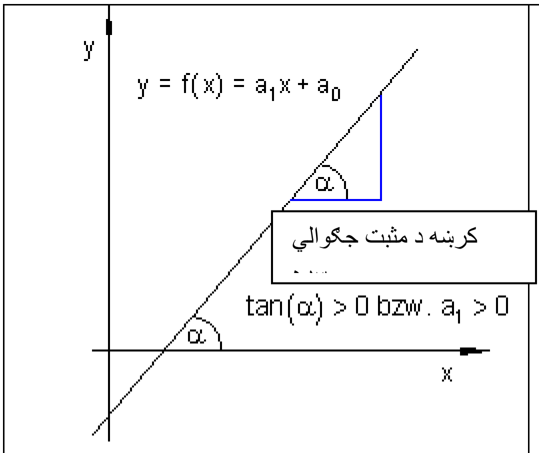
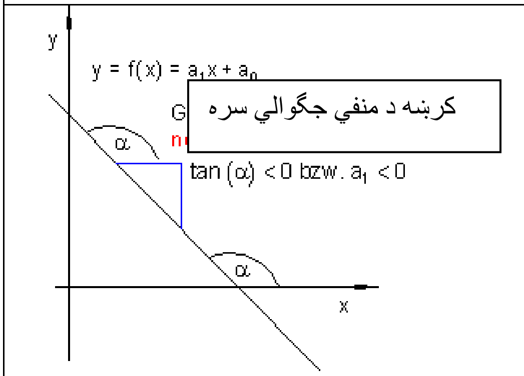
$$x_1, x_2 \in D \ \wedge x_1 \neq x_2 \ \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د f يو تابع تيک هلته په D کې مونوتون ټيټېدونکې ده، که د خوښې x_1 او x_2 لپاره، چې په D کې پراته دي، باور ولري:

$$x_1, x_2 \in D \wedge x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$$

يوغږيزوالی (يکنواخت) Monotony جګټيتوالی، د جګټيتوالی جملې

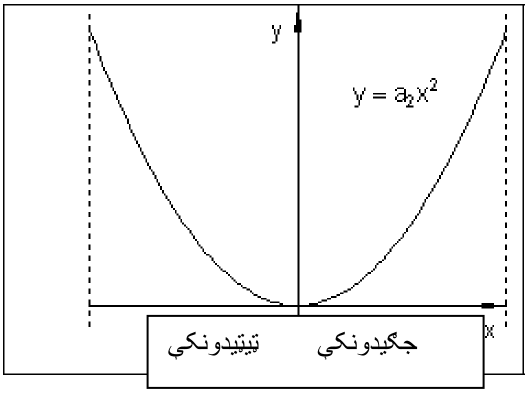
	دا $f(x) = a_1x + a_0$ کرښيز(خطي) تابع خورا ساده تابع ده، چې انحنانه لري. ددې لپاره مسئول يې ثابته جګېدنه يا ثابت ميل $a_1 = \tan(\alpha)$, دی، چېرته چې α د کرښې او مثبت لوريز د x -محور ترمنځ زاويه(کونج) ده. په مخامخ شکل کې :کرښه د مثبت ميل سره $a_1>0 \Leftrightarrow \tan\alpha>0$
 داپورته داسې دی: $tan\alpha<0$ همداسې $a_1<0$	که $0<\alpha<90^0$ يا $0<a_1<\infty$ وي ، دا په دې مانا چې $\alpha>0 \vee a_1>0$ همداسې(⇔)، نو کرښه جګيږي. دا دا معنی لري، چې د جګېدونکي x سره د تابع f(x) ارزښت هم جګيږي. په مخامخ شکل کې: کرښه د منفي جګيدنې سره: $\tan\alpha<0$ همداسې(⇔) $a_1<0$

که $90^0<\alpha<180^0$ يا $-\infty<a_1<0$ وي، دا په دې معنی، چې $\alpha<0$ همداسې $a_1<0$ ، نو کرښه ټيټيږي يا لويږي. دا په دې معنی، چې د جګيدونکي x سره د تابع ارزښت f(x) کوچنی کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورته دواړو حالتونو کې د همغږیزې تابع (یا د جګ-ټیټیدونکې تابع) غږیږو او له یوه مونوتون جګیدونکې تابع څخه، که $a_1 > 0$ وي. له یوې همغږیز یا مونوتون ټیټیدونکې تابع څخه ، که $a_1 < 0$ وي.

دا د مونوتوني کلمه په هغو توابعو هم کارول کیږي، چې د منحنیو تلنه راکوي، که فکر وشي، چې په ټولیزه توګه د منحنی د ګراف په هر ټکي تانجنت اینبول کیدی شي.



له دې امله د تابع $f(x) = a_2x^2$ لپاره باور لري:

په اینتروال $I_1 = \{x \mid -\infty < x < 0\}_{\mathbb{R}}$ کې تابع $f(x)$ مونوتون ټیټیږي. او په اینتروال $I_2 = \{x \mid 0 < x < \infty\}_{\mathbb{R}}$ کې $f(x)$ مونوتون جګیږي.

لکه د کرښې په ګراف کې، چې جګیدنه ثابته وه. اوس دا حالت مخ ته نه لرو، یعني جګیدنه ثابته نه ده، بلکې دا د منحني له یوه ټکي څخه بل ټکي ته تغیر خوري.

د تانجنت جګیدنه >0 ← منحني مونوتون جګیږي

د تانجنت جګیدنه < 0 ← منخني مونوتون ټیټیږي

د تانجنت جګیدنه، که صفر وي، ثابت پاتې کیږي.

روښانه ده چې د $f(x)$ تابع لومړی مشتق $f'(x)$ د تابع میل (جګوالی) ورکوي. ددې سره د مونوتونی قضیه په لاندې ډول فرمولو .

قضیه: د $f(x)$ تابع دې په اینتروال I کې مشتقوړ وي.
۱ که د $f(x)$ تابع په اینتروال I کې همغږیز – یا مونوتون جګیدونکې وي، نو باور لري:
$f'(x) \geq 0$ د ټولو $x \in I$ لپاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

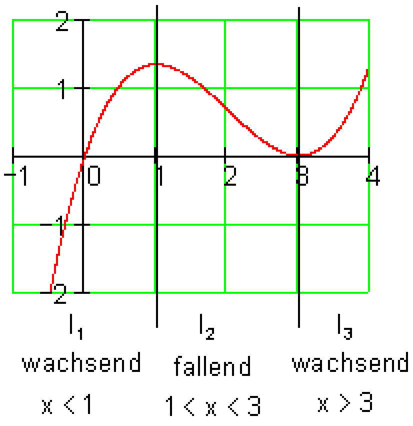
که f(x) په اینتروال I کي مونوتون ټيټيدونکې وي، نو باور لري: $f'(x) \leq 0$ د ټولو $x \in I$ له پاره.

۲ . که $f'(x) \geq 0$ وي، دټولو $x \in I$ لپاره ، نو f(x) په اینتروال I کې مونوتون جګيدونکي ده.

که $f'(x) \leq 0$ وي د ټولو $x \in I$ لپاره ، نو f(x) په ایترولIال کې مونوتون ټيټيدونکي ده.

۳ که $f'(x) > 0$ وي ، د ټولو $x \in I$ لپاره، نوf(x) په اینتروال Iکې په کلکه مونوتون جګيدونکي ده

که $f'(x) < 0$ وي د ټولو $x \in I$ لپاره،نو f(x) په اینتروال Iکې په کلکه مونوتون ټيټيدوني ده.

د مونوتوني پيژند ورشو (تعریفساحو) ټاکنه بیلګه: د تابع ګراف څخه زیات وخت کېدی شي د مونوتوني ساحي لړ یا زیات ټیک و لوستل شي. د $I_1 = \{-\infty < x < 1\}_{\mathbb{R}}$ لپاره f(x) په کلکه مونوتون جګېدونکی دی. د $I_2 = \{1 < x < 3\}_{\mathbb{R}}$ له پاره f(x) مونوتون ټيټېدونکی ده. د r $I_3 = \{3 < x < \infty\}_{\mathbb{R}}$ لپاره f(x) په کلکه مونوتون جګيدونکي ده.	$f(x) := \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$  جګيدونکی تيتيدونکی جګيدونکی

باور لري: $f'(x) > 0$ لاس ته راځي: کره مونوتون جګيدونکی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f'(x) < 0$: لاس ته راځي: کره مونوتون ټیټیدونکی

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x \Rightarrow f'(x) = x^2 - 4x + 3$$

لومړی پل: نا مساوات $f'(x) > 0$ همداسي نامسات $f'(x) < 0$: حل کوو

دویم پل: د $f'(x)$ توټه کوټه په کرښیزو ضربونو یا فاکتورونو

$$f'(x) = (x-1)(x-3)$$

دریم پل : د مخنخښي جدول.

د دوه ضریبونو ضرب ټیک هلته زیاتیز یا مثبت دی، که دوړه ضریبونه همغه یا برابره مخ نخشه ولري.

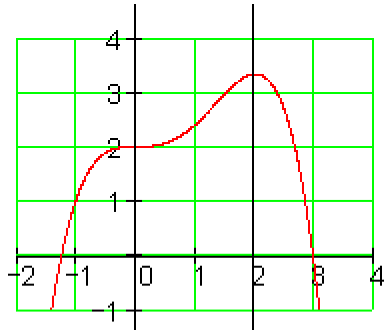
یو د دوه ضیبونو ضرب ټیک هلته کمیز یا منفي دی، که دواړه ضریبونه مختلفي مخنښپولري.

	$x = 1$		$x = 3$
Bereich	$x < 1$	$1 < x < 3$	$x > 3$
$x - 1$	$-$	$+$	$+$
$x - 3$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$ ist streng monoton	wachsend	fallend	wachsend
f(x)	جګیدونکی	ټیټیدونکی	جګیدونکی

کره یوغږیز

بیلګه:دا لاندې ګراف لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

له ګراف څخه لاندې مونوتوني ساحې لوستل کیږي. د $I_1 = \{-\infty < x < 0\}_{\mathbb{R}}$ لپاره f(x) په کلکه مونوتونج ګېدونکي ده. د $I_2 = \{0 < x < 2\}_{\mathbb{R}}$ له پاره f(x)په کلکه مونوتونجګیدونکي ده. د $I_3 = \{2 < x < \infty\}_{\mathbb{R}}$ لپاره f(x) په کلکه مونوتون ټیټېدونکي ده.	$f(x) := \frac{-1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + 2$  ټیټیدونکي جګیدونکي، جګیدونکي،

له ګراف څخه لاندې مونوتوني ساحې لوستل کیږي.

د $I_1 = \{-\infty < x < 0\}_{\mathbb{R}}$ لپاره f(x) په کلکه مونوتونج ګېدونکي ده.

د $I_2 = \{0 < x < 2\}_{\mathbb{R}}$ له پاره f(x)په کلکه مونوتونجګېدونکي ده.

د $I_3 = \{2 < x < \infty\}_{\mathbb{R}}$ لپاره f(x) په کلکه مونوتون ټیټیدونکي ده.

ځای اړونده افراطي ټکي

یادونه: که په لیکنه انحرافي ټکي ګورئ،نو هغه افراطي ټکي دي.

ترمخ راوړنه او د کلمې روښانه ونه:

د یوه تابع ګراف زسمونه تر اوسه ناکافي وه، ځکه چې جګ او ټیټ ټکی نه پیژندل کیده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مشق شمیرنې له لارې موږ هڅیږو، چې دا ستونځې حل(اوبې کړو) کړو.

که د f(x) لپاره د x_0 په ځای کی f' (x) = 0 ولرو نو یو نسبي ټیټ ټکی مو مخ ته پروت دی.

که د(f(x لپاره د x_0 په ځاي کی f' (x)=0او0<f''(x) ولرو نویو نسبي ټیټ ټکمو مخ ته پروت دی.

که ددې برعکس ولرو: f ' (x) = 0 او0 > f '' (x) ، نو یو نسبي ماکسیموم مو مخ ته پروت دی.

د افراطي ټکي(ټیټ ټکي یا جګ ټکي) لپاره خوي ټاکونکی دی، چی f ' (x) = 0 وي، او د

f '' (x) مخ نښه (+ ، -)، په دې پریکړه کوي چی ایا یو ټیټ ټکی(اصغري ټکی)او که جګ ټکی(اعظمي ټکی) مو مخ ته پروت دی.

د پورته اړیکو لپاره لاندې یادوني اړیینې یا ضرور دي:

۱ – دا اړیکي یوائې د x_0 لپاره ارزښت لري چی د تعریف سټ په دننه کی پروت وي او هلته

د y = f (x) تابع پوره څو ځلې مشتقوړ وي، د غاړو(څنډو) او د هغوځایونو له پاره چی هلته f (x) تابع کم یا هیڅ مشتقوړ نه وي، ځانګړو څیړنو ته اړتیا ده.

۲ - شرایط چی f ' (x) = 0 وي (مشتقوړ تابع) یوائی د یوه انحرافي ارزښت لپاره ضرور دی (ضروري یا اړین شرایط) .

۳– شرایط f ' (x) = 0 او $0\neq$ f '' (x) د بحراني ټکي لپاره یوائی پوره کیدونکی دی او نه ضروري)

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلگه :

د $f(x) = x^2 + 2$ تابع گراف وکاږئ او که بحراني ارزښتونه لري، هغه د گراف او د مشتق له لارې وټاکئ.

حل:

گراف: گراف دې د گرانو لوستونکو د کور کار وي؟

د بیلگې له گراف څخه روښانه ده، چې تابع د x=0 په ځای کې خورا ټیټ ټکی(اصغري-) لري.

د انحراف ټکي له پاره اړیین شرطونه:

۱ – د تابع لومړي مشتق دی: $f'(x) = 2x$ په دې مساوات کې د تابع مشتق د x_0 له پاره صفرځای لري، یعنې دلته یو بحراني ټکي پروت دی.

۲ – د تابع دویم مشتق: $f(x)'' = 2$. دا چې $f''(x) > 0$ دی، نو یو نسبي ټیټ ټکي مخ ته لرو.

بیلگه : د $y = x^4$ تابع د $x = x_0 = 0$ لپاره نسبي ټیټ ټکی لري او باوري دي

$$f'(x) = 4x^3 \Rightarrow f'(0) = 0$$

$$f''(x) = 12x^2 \Rightarrow f''(0) = 0$$

گورو چې دوهم مشتق د صفر څخه نه کوچنی او نه لوي دی.

د پورته شنني څخه لاندې پيژند ته راځو:

پیژند : د $x = x_0$ په چاپیریال کی د $y = f(x)$ تعریف شوې تابع یونسبي جګټکی په همدې ډل نسبي ټیټ ټکی لري، که ټولو x_0 ته پوره نږدې x لپاره باور ولري: $f(x) > f(x_0)$ په همدې ډول $f(x) \le f(x_0)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله : (د یوه نسبي افراطي ټکي لپاره ضروري شرایط):

که په x_0 کی مشتقوړ تابع $y = f(x)$ انحرافي لري نو لرو: $f'(x) = 0$

دا جمله موږ ته وایي (یادونه ۲دې مقایسه شي): چیرته چی $f'(x) \neq 0$ وي نو هلته اکستریموم نه شته، د اکستریموم لپاره یواځي د x_0 ځاي په پوښتنه کی راځي، چی د هغي لپاره لرو $f'(x) = 0$ ، خو حمتي نه ده چی $y = f(x)$ دې یواکستریموم و لري.

جمله : (د یوه افراطي ټکي لپاره پوره کیدونکی شرایط):

که په $x = x_0$ کی دوه واره مشتقوړ تابع $y = f(x)$ لپاره ولرو:

$$f'(x) = 0 \quad , \quad f''(x) \neq 0$$

نو تابع $y = f(x)$ هلته یو افراطي ټکی لري. خورا تیټ ټکی مخ ته لرو، که وي:

$$f''(x) < 0$$

خورا جګ ټکی مخ ته پروت دی ، که وي:

$$f''(x) > 0$$

له ښی لور انحنا یا کوږوالی اوله کیڼ لور انحنا یا کوږوالی (مقعر او محدب)

که په یوه اینټروال کي د مشتقوړ تابع f دویم مشتق $f''>0$ وي، نو په دې اینټروال کي ګراف کیڼ کوږ شوی یا کیڼه انحنا لري او که دویم مشتق $f'' < 0$ وي، نو د تابع ګراف ښی کوږ یا ښی انحنا لري.

دوه ځیرې (د لاندې بېلګې ځیره و باسی ؟-)

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه:

ټول ګونګتابع (راشنل تابع) f د $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 1$ سره په کومه ورشو(ساحه)کې کینېکوږدی(کینه انحنا لري(ننوتی یا مقعر دی)) او په کومه ورشوکې ښی کوږ دی(ښی انحنا لري(محدب یا وتلی دی)؟

دویم مشتق: (لومړی مشتق(

$$f'(x) = 3x^2 - 4x+4$$

$$f''(x)= 6x-4$$

د $3 / 2 < x <= 6x-4>0$ لپاره کینې ګوږوال (کینه انحنا (ننوتی یامقعر)

د $2/3 > x <= 6x-4<0$ لپاره ښی کوږوالی(ښی انحنا(وتلی یامحدب))

بیلګه:

د مات راشنل تابع $f(x) = \frac{1}{x+2}$ ګراف یو های پاررابول دی. د های پارابول کومه څانګه کینه کږه ده یا کینه انحنا لري(مقعر)، او کومه یوه یې ښی کوږوالی - یا ښی انحنا لري(محدب)؟

دویم مشتق : $f'(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$; $f''(x) = \frac{2}{(x+2)^3}$

صورت تل مثبت دی.

د $x < -2$ لپاره د مخرج او همداسې د کسر ارزښت منفي دی. د های بارابول څانګه ښی کوږوالی یا انحنا لري (وتلی یا مخدب).

د لپاره $x > -2$ مخرج او همداسې ټول کسر(مات) مثبت دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

های بارابول کینکوړ دی یا کینه انحنا لري(ننوتی یامقعر).

بېلګه :

د دواړو توابعو $f(x)=\sqrt{x}$ او $g(x)=\sqrt{x^3}$ کوږوالی(انحنا) دې یو د بل سره پرتله شي.

دواړه توابع د لپاره تعریف دي.

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad g'(x)=\frac{\sqrt{x^3}}{2}$$

$$f''(x)=-\frac{1}{4\sqrt{x^3}} \qquad g''=\frac{3}{4\sqrt{x}}$$

دویم مشتقونه د $x \in R^+$ لپاره تعریف دي.

په دې ساحه کې $f''(x) < 0$ دی. اړونده ګراف ښی کوږوالی یا انحنا لري، دا یو شي لور ته واز پارابول ښایي.

په همدې ساحه کې $f''(x) < 0$ دی. اړونده ګراف کیڼ کوږ دی یا کینه انحنا لري. اړونده ګراف یو کیڼ کوږوالی یا کینه انحنا لري، دا پورته لور ته واز پارابول دی.

د انعطاف ټکي(اوړونټکي)

یادونه: ولې اوړونټکی؟

وبه ګورو، چې په دې ټکي کې ګراف خپله لور اړوي، نو ......

موږ له پورته څیرې اټکل کولی شو چی : که د x_0 ځاي کی دا لاندې ولرو

$f''(x) = 0$ او

$f'''(x) > 0$، نو یو ښی-کیڼ- انعطاف ټکی (اوړونټکی) مو مخ ته پروت دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

برعکس(په ځت):

که وي: $f''(x) = 0$ او $f'''(x) > 0$ نو یو کیڼ - ښی- د انعطاف ټکی مو مخ ته پروت دی.

د ا نعطافټکي لپاره خوی ټاکونکی دی، چی $f''(x) = 0$ وي ، داچی دا ښی -کیڼ - او که کیڼ- ښی – انعطاف ټکی(اوړونټکي) دی، د $f''(x)$ مخ نښه یی ټاکي.

-شرایط $f''(x) = 0$ د انعطاف ټکي لپاره یواځی اړیین یاضروري دي.

د $y = x^4$ لپاره $f''(0) = 0$ دی، مګر اوړونټکی مو مخ ته نه دی پروت.

–شرایط $f''(x_0) = 0$ او $f'''(x_0) \neq 0$ د انعطافټکي لپاره پوره کیدونکي دي. ګورو چی $y = f(x) = x^5$ تابع د $x = x_0 = 0$ ځاي کی یو انعطافټکی لري او باوري دي:

$$f'(x) = 5x^4 \quad , \quad f'(0) = 0$$

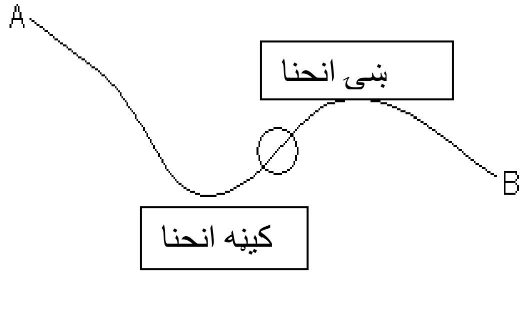
$$f''(x) = 20x^3 \quad , f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = 60x^2 \quad , f'''(x) = 0$$

ګورو چي دریم مشتق $f'''(x)$ نه له صفرڅخه کوچنی او نه لوي دی.

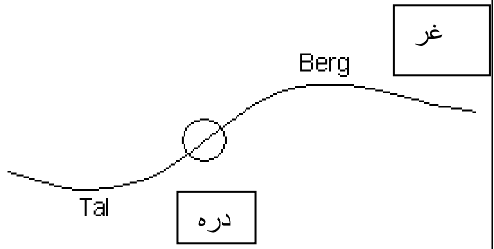
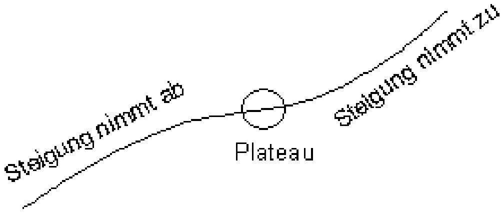
ترمخ راوړني او د کلمې روښانه وني:

د دې کلمې د لا نورې روښانه کولو لپاره په لاندې توګه مخ ته ځو:

د بایسکل ځغاستي چي له A څخه ځغلي د منحنی څخه تیرېږي او B ته رسیږي. د همغه وخت د بایسکل ځغاستي د اندل حالت د ځغاستي په وخت کې په پام کې ولری. د کیڼې منحني(د کیڼ لورې د اندل حالت) څخه وروسته د ښی لورې منحني کې ځغلي.	

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کیڼي- او ښی منحني(کږې) ترمنځ باید د بایسکل انډل سیده ولاړ وي(عمود وي)، چې دا د انډل بدلون دی له کیڼي لورې و ښی لورې ته. دا د کیڼي او ښی منحني ترمنځ اوړیدنه یاد انعطاف ټکی بلل کیږي.

تاسو له بایسکل سره په یوه غونډۍ ځغلۍ. وروسته له هغې، چې له تالي څخه تیریږي، نو لار په جګیدو پیل کوي. په لومړي سر کې نرم او بیا په نیغه جګیږي، بیا په دې پسې جګوالی بېرته کمیږي، چې پاس د غونډۍ په څوکه صفر ارزښت غوره کړي. یو چېرته په غونډۍپورته صفرارزښت ته رسیږي. یو چېرته په لار جګېدنه خورا لویه وه. هلته د انعطاف ټکی پروت دی.	
د بایکل ځغلونکي بل حالت، چې له ښنګ دیاګرام څخه یې رانیسو: په غره د بایسکل ځغاستمیل یاجګیدنه لومړی کمیږي، چې له سره بېرته جګه شي. ددې ترمنځ یوه ساحه شته، د کم جګوالي سره (یوه نسبتاًهواره).ˇ دې نسبتاً هوار ځای کې د توته کرښې جګیدنه نسبت بل ځای ته کمه ده. هلته اوړونټکی(د انعطاف ټکی) پروت دی.	 له کیڼ و ښي لور ته: جګیدنه کمیږي، هواره ، جګیدنه زیاتیږي

پوهیږو، چې د یوې تابع لومړی مشتق د تابع د جګوالی تابع دی، چې له ګراف څخه یې جګوالی لوستل کیږي.دا چې د انعطاف ټکی خورا لوي یا خورا کوچنی ټکی کېدی شي، داسې پیدا کیږي، چې د مشتق تابع انحرافي ارزښتونه پیدا کړو.

دا تلنلار همهغسې ده، لکه د پیل تابع **f(x)** لپاره مو ټاکلې. اوس د مشتق تابع **f'(x)** باندې دا کار یا عمل اجرا کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مخکی له دې چې يو لړ جملی د بحراني(جګ – ټيټ -) ارزښتونو او د انعطاف ټکو په هکله څيرو، غواړو چې دا کليمی تعريف کړو .

دواړه کلمي به د نسبي بحراني ټکي په بڼه کی سره را غونډې شي.

پيژند ۲۰ . ۶ : په يوه چاپيرېال $x = x0$ کی مشتقوړ تابع $y = f(x)$ يو کيڼ- ښی- انعطافټکی په همدې ډول ښی- کيڼ- انعطافټکی لري، که د هغه مشتق هلته يو نسبي جګټکی(عظمي نقطه) په همدې توګه يو نسبي ټيټ ټکی ولري.

جمله ۲۰ . ۱۱ : (د يوه نسبي افراطي ټکي لپاره ضروري شرايط):

که په $x0$ کی مشتقوړ تابع $y = f(x)$ اکستريموم لرې نو لرو: $f'(x) = 0$

دا جمله موږ ته وايي (يادونه ۲دې پرتله شي): چيرته چې $f'(x) \neq 0$ وي نو هلته بحراني ټکی نه شته، د بحراني ټکولپاره يواځي د $x0$ ځاي په پوښتنه کی راځي، چې د هغي لپاره$f'(x) = 0$ وي ، خو حمتي نه ده چې $y = f(x)$دې يوبحراني ټکی ولري.

د پورته جملی استعمال په $y' = f'(x)$ څخه لاندې جمله لاس ته راځي:

جمله ۲ . ۱۲ : (د اوړونټکي(انعطاف ټکي) لپاره اړيين شرايط):

که په $x = x0$ کی دوه واره مشتق وړ تابع $y = f(x)$ هلته يو انعطاف ټکی ولري، نو لاس ته ترې راځي:

دلته هم باور لري (يادونه ۴ دې پرتله شي): چيرته چې $f''(x) \neq 0$ وي ، نو هلته نه شي کيدی چي اوړونټکي موجود وي. مګرچيرته چې $f''(x) = 0$ وي ، اوړونټکی شته کېدلی شي، خو اړيين يا ضرور نه ده چې هلته انعطاف ټکی شته وي.

له پورته څخه لاندې جمله لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۲۰ ، ۱۳:

(د اوړونټکي يا انعطافتکي لپاره پوره کیدونکی شرطونه)که په x = x0 کی درپوار مشتقوړ تابع y = f (x) لپاره وي:

$f''(x) = 0$, او $f'''(x) \neq 0$

نو هلته يو انعطاف ټکی مخ ته لرو. که 0 < f ''' (x) وي، نو يو کيڼ- ښي – انعطاف ټکي مخ ته پروت دی او د 0 > f ''' (x) لپاره يو ښی-کيڼ-انعطاف ټکی مخ ته لرو.

شننيزه يا تحليلي بيلګه:

يادونه: موږ د x_E سره افراطي ټکی په نښه کوو او د x_W سره د انعطاف – يا اوړون ټکی په نښه کوو.

1- تابع مساوات د مشتق سره

$$f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 4x^2 - 4x - 4$$

$$f'(x) = -2x^2 + 8x - 4$$

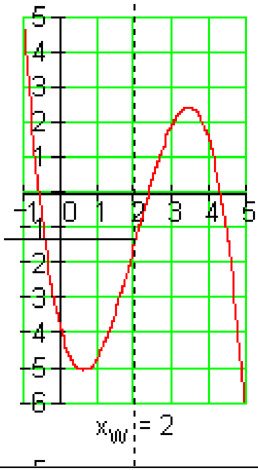
$$f''(x) = -4x + 8$$

$$f'''(x) = -4$$

$$f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 4x^2 - 4x - 4$$

$$f(2) = -\frac{4}{3}$$

$$P_W\left(2 \mid -\frac{4}{3}\right)$$



2- دويم مشتق صفر کړئ.

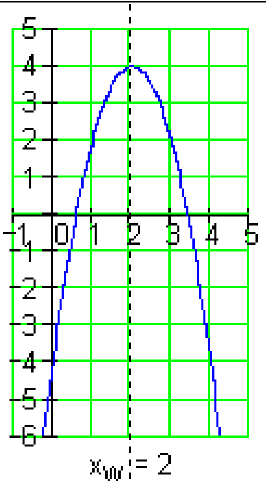
(c) ketabton.com: The Digital Library

$f''(x)=0 \Leftrightarrow -4x+8=0$

$\Rightarrow x_W = 2$

$f'(x) = -2x^2 + 8x - 4$

Extremwert von f ' (x) bei $x_W = 2$



د الماني پښتو: د f'(x) صفرځای په xw=2 کې

3- د انعطاف ټکي له مخې ښوونه، چې ايا د انعطاف ټکی شته دی؟

$f'''(x_W) = f'''(2) = -4$

4- په $f(x)$ د انعطاف ځايونه ځای په ځای کولو له لارې د انعطاف ټکي ټاکنه

$f(x_W) = f(2) =$

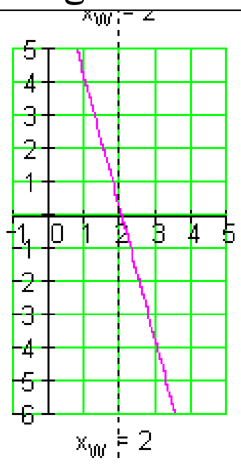
$-\frac{2}{3}(2)^3 + 4(2)^2 - 4(2) - 4 = -\frac{4}{3}$

$\Rightarrow P_{W\left(2|-\frac{4}{3}\right)}$

$P_W(21-1.33)$

$f''(x) = -4x + 8$

Nullstelle von f " (x) bei $x_W = 2$



د الماني پښو: د f''(x) ضفرځای په x_W =2 کی

پام: په انعطاف ځای x_W کې د $f(x)$ گراف کږيږي.

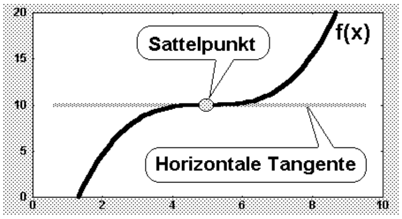
په يوه په خوښه ټکي x_0 کې د کږوني(انحنا) لپاره باور لري:

$f''(x)>0$ په دې معني دی،چې $f(x)$ کين لور ته کږيږي(انحنا لري) دی.

$f''(x)<0$ په دې معنی، چې تابع $f(x)$ گراف ښی لور ته کږيږي(انحنا کوي)

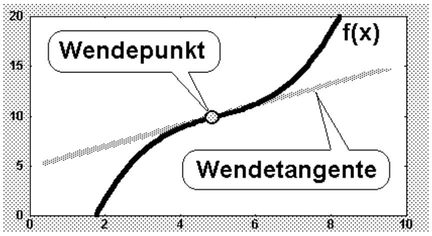
(c) ketabton.com: The Digital Library

يو زينټکی <u>Der Sattelpunkt</u> څه شی دی؟

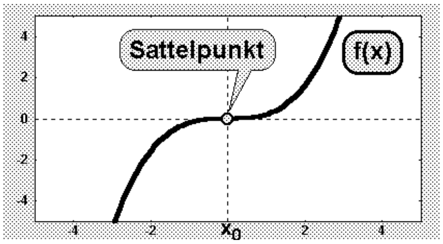


پيژند:

د زينټکي(کله کله برنډې ټکی هم بلل کيږي)لاندې د انعطافټکي ځانګړی حالت پوهيږو، داسي انعطافټکی چې تانجنت يې افقي (پروت) وي:



د پرتلي لپاره دې بيا يو ،،عادي،، انعطافټکی ورکړ شوی وي.دا يو مائل(نه افقي) تانجنت لري



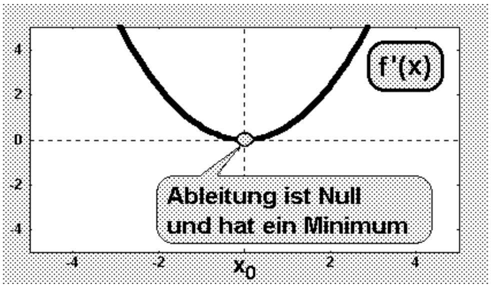
توضيح:

اوس فکر کوو، چې يو زينټکی څنګه د شمېرلو له مخې پيژندل کېدی شي. په دې برخه کې په ځانګړي توګه دا مخ ته لرو، چې يو زينټکی له ښي – و کينه انحنا و شمېرو.

د دې لپاره د $f(x)$ تابع جګوالی په پام کې نيسو، يعنې لومړی مشتق: د زينټکي د مخه د $f(x)$ جګوالي کميږي، په زينټکي کې صفر ارزښت لري، او له زينټکي څخه وروسته بېرته جګيږي.

يو زينټکی (د ښي – کيڼ – بدلون سره) په دې پيژندل کيږي، چې لومړی مشتق $f'(x)$ يې هلته صفر شي او سربېره پر دې هلته يو نسبي ټيټټکی (مينيموم) ولري.

(c) ketabton.com: The Digital Library



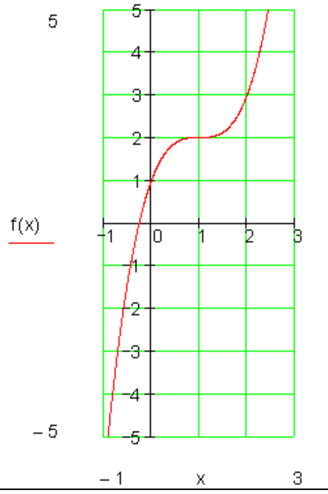
د لومړي مشتق $f'(x)$ شکل داسې برېښي:

لومړی شرط دی، چې مشتق یعنې $f'(x)$ په زینټکي کې د صفر سره مساوي دی.

زینټکی(بنی-کین-بدلون) $f'(x_0)=0$

دوم شرط دی، چې مشتق $f'(x)$ هلته یو نسبي مینیموم لري.

دا په دې معنادی، چې بل جگ مشتق $f''(x)$ باید په صفر مساوي وي او مخنبنه له منفي و مثبت ته بدلیږي.
له دې سره سم د زینټکي لپاره پوره کیدونکي قضیه ومیندل شوه:
د زینټکي لپاره جمله(خوي تاکنه)(د بنې –کیڼ- انعطاف سره)
الف:د x_0 ځا کې لومړی مشتق $f'(x)$ صفر دی: $f'(x_0)=0$
ب : د x_0 په ځا ي کې لومړی مشتق $f'(x_0)$ یو مینیموم لري، دا په دې معنا، چې دوم مشتق صفر دی، یعنې $f''(x)=0$ دوم مشتق مخنبنه له منفي څخه و مثبت ته بدلوي.
بل بدیل(د گرانو دوستانو وړاندیز)

	زینټکی: د انعطاف ټکي یو ځانگړی حالت زینټکی دی. دا د انعطاف ټکی دی د صفر جگیدنې سره.که د کیڼ لور ورتزدې شو فکر کیږي، چې، نسبي جگټکی مو مخ ته پروت دی که څوک د بنې لور ور نزدې شي فکر کوي، چې یو نسبي ټیټکی مخ ته لرو. اوس دا حالت د ریاضیاتو له لوري ځیرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

مشتق:	$f(x)=x^3-3x^2+3x+1$ $f'(x)=3x^2-6x+3$ $f''(x)=6x-6$ $f'''(x)=6$

$$f'(x)=0 \iff 3x^2-6x+3=0 \Rightarrow x_{1/2}=1$$

$f''(1)=6\cdot1-6=0$ $f'''(1)=6$	$\Leftarrow 1$ د $x=1$ سره د انعطاف ټکی	$\Leftarrow 1$ د $x=1$ سره زینتکی

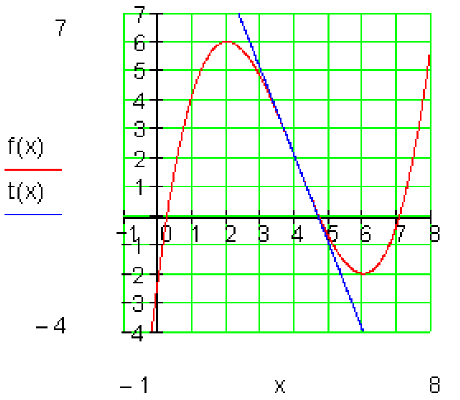
د انعطاف ټکي لپاره شرایط پوره دي.

دا چې د $f''(1)=0$ له امله د انعطاف ټکی مخ ته لرو، نو دا د انعطاف ټکی همغه زینتکی دی.

د انعطاف ټکي پیداکونه:

د تابع ګراف باندې انعطاف ټکي کې تانجنت د انعطاف تانجنت بلل کیږي. د انعطاف تانجنت هم

همداسې پیدا کیږي لکه د تابع دګراف په یوه ټکي کې تانجنت، چې تانجنت مساوات تاکل کیږي.

$f(x)=\frac{1}{4}x^3-3x^2+9x-2$ $f'(x)=\frac{3}{4}x^2-6x+9$ $f''(x)\frac{3}{2}x-6 \qquad f'''(x)=\frac{3}{2}$ $f''(x_W)=0 \iff \frac{3}{2}x-6=0$ د $x_W=4$ او $f'''(x_W)=\frac{3}{2}\neq0$ د تانجنت $f(x_W)=f(4)=2\Rightarrow \underline{P_W(4\|2)}$ مساوات لپاره باور لري. د x_W لپاره د تانجنت مساوات $t(x)=f'(x_W)(x-x_W)+f(x_W)$	 د انعطاف تانجنت د $f(x)$ ګراف د انعطاف په ټکي $P_W(4,2)$ کې غوځوي او دا لاندې مساوات لري: $t(x)=-3x+14$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $f'(x_W) = f'(4) = -3$ سره په لاندې ډول دي $t(x) = -x(x+4) + 2 = \underline{\underline{-3x + 14}}$	

د انعطاف- یا وړون ټکي تانجنت پیداکونه:

په انعطاف ټکي کې د تابع دګراف تانجنت د انعطاف تانجنت بلل کیږي.
د انعطاف تانجنت مساوات همداسې ټاکل کیږي، لکه د تانجنت مساوات د ګراف په خوښه ټکي باندې.

داسې حالتونه، لکه $f'(x) = f''(x) = f'''(x) = 0$ دلته تر څیړنی لاندې نه نیول کیږي.

د کږې یا منحني بحث (Kurven Diskusion) :

تر مخ راوړنه او د کلمې روښانه ونه:

د دې لپاره چې د یوې تابع وکاړلی او تشریح کړای شو، اړین دی چې د ګراف په ځنې په راوتلو یا غوره ټمو او د ګراف په تلنه وپوهیږو.\

داسې د ګراف په غوره خوبیز یا کرکتریستیکي خویونو باندې د پوهیدنې او څیړنې ته د کږو یا منحنیو خبرې اترې یا بحث وایو.

د دې لپاره چې د تابع کوم غوره خوي مو له یاده ونه ووځي یا راڅخهپاتې نه شي، نو د داسې څیړنو لپاره سړی باید سیومتریک مخ ته ولاړ شي او هم تل د څیړنو او شمیرنو د لړۍ پرلپسې یا لړې ترتیب په پام کې ونیسي.

په لاندې ډول تلنلار ډېره ګټوره ګڼل شوې

لومړی: تعریفورشو یا ــساحه:

سړی له هر څه د مخه د فنکشن یا تابع تعریفورشو ټاکي، ځکه چې فقط د دې ورشو په دننه کې موخه ور دی چې تابع خویونو څیړنه مخ ته بوزو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم: سیومتري:

سړی کره کوي، چې ایا تابع محوري- اوټکی سیومتری دی.

محورسیمتري سره باور لري: $f(-x)=f(x)$ په دواړو حالتونو کې فنکشن باید وڅیړل شي.

د ټکي سیومري سره باورل ري: $f(-x)=-f(x)$ فقط باید د $x \geq 0$ لپاره وڅیړل شي.

په ځنګړې توګه د ټول راشنل یا –خوښیار توابعو لپاره باور لري:

یو ټول راشنل تابع ټیک هلته محور سیمتریک دی، که د هغه ترمونه زاتیدوني یا د جمعي اعظاوې فقط د جوړه یا جفت جګ عدد یا اکسپوننت سره ولري.

یو ټول راشنل تابع ټیک هلته ټکی سیمتریک دی، که د هغه ترمونه نا جوړه یا طاق د زیاتیدوني یا د جمعې غړي ولري.

دریم: افراطیت:

د نسبي افراطیت ټاکنې، دا سړی جګ – همداسې ټیټ ټکي بولي.

دا د پراته یا افقي تانجنت سره ټکي هم دي.

ټیټ ټکی= نسبي مینیموم پوره کیدونکي شرطونه: $f'(x_1)=0 \wedge f''(x_1)>0$	جګ ټکی = نسبي ماکسیموم پوره کیدونکي شرطونه: $f'(x_1)=0 \wedge f''(x_1)<0$

ځلورم: اوړونټکی(نقطه انعطاف):

د اوړنټکي همداسې زین ټکي ټاکنه.

د اوړنټکي لپاره پوره کیدونکي شرطونه: $f''(x_W)=0 \wedge f'''(x_W)\neq 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

زینتکی (همغه د اس زین څخه دا نوم رانیول شوی)اوړنتکی دی د پراته تانجنت سره.

پنځم: محورغوڅتکي(د محور د تقاطع نقاط):

که د x -محور ارزښت صفر (x = 0) د f(x) په فنکشن ارزښت کې کیښول شي، نو سړی د y –محور سره غوڅتکی(نقطه تقاطع) لاس ته راوړي.

د y - محور سره غوڅتکی $P_y(0 \mid y_s) \Rightarrow f(0)$ وټاکی.

د x- محور سره غوڅتکی(صفرځای) $P_{xi}(x_i \mid 0) \Rightarrow f(x) = 0$

شپږم: ګراف:

دا تراوسه د ټولو راټول شوو معلوماتو سره اوس کیدی شي په زیاتو حالتونو کې ګراف انځورکړای شو.

د دې لپاره لومړی یو ارزښت جدول چمتو کیږي.

دا په ګوته کوي، چې نور کوم ارزښتونه دې وشمیرل شي.

دا کیدی شي چې د جبشمیرونو سره شومیرل شي او د یا د ټولګنونو یا تام اعدادو x - ارزښتونو لپاره د هورنر شیماپه مرسته.

اوم: کږوالي ځاننیونه(حالت) او یوغږیزوالی.

په اوړونوټکي یا انعطافټکي x_w کې د f د ګراف کږوالی تغیر خوري.

د په خوښه ټکي x0 کې د کږوالي لپاره باور ري:

$f''(x0) > 0$ په دې معنا، چې د f(x) ګراف کیڼ کوږ(ننوتی یا مقعر؟؟) دی.

$f''(x0) < 0$ په دې معنا، چې دf(x) ګراف ښي کوږ(وتلی یا محدب) دی:

یوعږیزوالی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ . که د ټولو $x \in I$ لپاره $f'(x0) \geq 0$ وي، نو $f(x)$ یوغږیز جګیدونکی دی په انتروال I کې

که د ټولو $x \in I$ لپاره $f'(x0) \leq 0$ وي، نو $f(x)$ یوغږیز ټیټیدونکی دی په انتروال I کې.

۲ . که د ټولو $x \in I$ لپاره $f'(x0) > 0$ وي، نو $f(x)$ کره یا په کلکه یوغږیز

جګیدونکی دی په انتروال I کې

که د ټولو $x \in I$ لپاره $f'(x0) < 0$ وي، نو $f(x)$ کره یا په کلکه یوغږیز

ټیټیدونکی دی په انتروال I کې.

لنډ:په اوړونټکي کې د یوه ګراف د کږوالي حالت تغیر خوري

د یوغږیزوالي حالت په افراطي ټکو کې تغیر خوري

اتم: د تعریفورشو ژۍ ټکي:

د تعریفورشو په ژۍ ټکو کې د فنکشن څیړنه.

که تعریفورشو محدوه یا رابنده نه وي، نو دواړه پوله ا رزښتونه

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) \quad \text{او} \quad \lim_{x \to \infty} f(x)$$

دې وټاکل شي.

په ډول وییِنه یا افاده: د لوی x - ارزښت لپاره سړی د فنکشن ارزښتونو تلنه په زیا تیز یا مثبت لور او هم په کمیزه یا منفي لور څیړي او دا پوښتنه له ځانه کوي، چې فنکشن ارزښتونه په کومه لور ځغلي.

د یوه مفصل کږو بحث خبرې اترې یا بحث:

تعریفورشو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

تابعبرابرون يا تابع مسوات:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - \frac{9}{4} \Rightarrow$$

له دې لاس ته راځي تعريف دېرې يا ـسټ $\underline{\underline{D_f = \mathbb{R}}}$.

فنکشن د ټول حقيقي ارزښتونو لپاره تعريف دی. د ورسره بلده توګه ټول راشنل فنکشنونو دا تل باور لري، خو پرته له دې که څوک وغواړي تعريف ورشو رابنده يا محدود کړي.

سيومتري: دا چې ټول جګګېونه يا اکسپوننتونه جوړه يا جفت دي، نو يو محورسيومتري مخ ده لرو،

باور لري: $f(-x)=-f(x)$ د ټول $x€R$ لپاره.

ګټه په دې کې ده، چې فنکشن ارزښتونه بايد فقط د زياتيزو يا مثبت x -ارزښتونو لپاره وشميرل شي.

افراطييت:

د افراطي ټکو شميرلو لپاره تلنلار:

سړی لومړی د $f(x)$ لومړي دوه مشتقونه ټاکي.

د لومړي ومشتق صفرايښوونه د پراته تانجنت ځای راکوي.

که سړی دا ارزښتونه په دويم مشتق کې کيږدي، نو سړی د مخ ته پراته افراطيت په هکله وينا ترلاسه کوي.

(نسبي مامسيموم يا نسبي مينيموم همداسي د افراطي ټکو نه والی).

د افراطي ځايونو x_i ازښتونه که فنکشن مساوات کې کېښول شي افراطي ارزښتونه راکوي او له دې سره د افراطي ټکو کواوردیناتونه يا پراته ولاړارزښتونه ځرګند دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تابعبرابرون یا ـمساوات: $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - \frac{9}{4}$

مشتقونه: $f'(x) = x^3 - 4x \quad f''(x) = 3x^2 - 4 \quad f'''(x) = 6x$

د افراطي ارزښتون لپاره پوره کید ونکي شرطونه.

$$f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 4x = 0$$

له نوکانو وباسئ x

$$\Leftrightarrow x(x^2 - 4) = 0 |$$

د صفرضرب جمله له دې لاس ته راځي $x1=0$ همداسې $x^2-4=0$

$$x^2 - 4 = 0 | +4$$
$$\Leftrightarrow x^2 = 4 | \sqrt{\ }$$
$$\Leftrightarrow |x| = 2 \Rightarrow x_2 = 2 \text{ bzw. } x_3 = -2$$

د پراته تانجنت ځایونه: $\boxed{x_1 = 0}; \boxed{x_2 = 2}; \boxed{x_3 = -2}$

د نسبي ماکسیموم همداسې نسبي مینیموم ښوونه:

$$f''(x_1) = f''(0) = 3 \cdot 0^2 - 4 = -4 < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. für } x_1 = \boxed{x_{E1} = 0 \text{ (Hochpunkt)}}$$
$$f''(x_2) = f''(2) = 3 \cdot 2^2 - 4 = 8 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. für } x_2 = \boxed{x_{E2} = 2 \text{ (Tiefpunkt)}}$$
$$f''(x_3) = f''(-2) = 3 \cdot (-2)^2 - 4 = 8 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. für } x_3 = \boxed{x_{E3} = -2 \text{ (Tiefpunkt)}}$$

افراطي ارزښتونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $x_{E1} = 0$ لپاره جګ ټکی

$$f(0) = -\frac{9}{4} = -2{,}25$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{Max}\left(0 \mid -\frac{9}{4}\right) \text{ bzw. } P_{Max}(0 \mid -2{,}25)}$$

د $x_{E2} = 2:$ لپاره ټیټټکی

$$f(2) = \frac{1}{4}\cdot 2^4 - 2\cdot 2^2 - \frac{9}{4} = -\frac{25}{4} = -6{,}25$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{Min1}\left(2 \mid -\frac{25}{4}\right) \text{ bzw. } P_{Min1}(2 \mid -6{,}25)}$$

د $x_{E2} = -2:$ لپاره ټیټټکي

د محور سیومتري له امله $f(-2) = f(2) = -\frac{25}{4} = -6{,}25$

$$\Rightarrow \boxed{P_{Min2}\left(-2 \mid -\frac{25}{4}\right) \text{ bzw. } P_{Min2}(-2 \mid -6{,}25)}$$

اوړنټکي یا د ا نعطاف ټکي:

د انعطاف ټکو ټاکلو لپاره د شمیرني تلنلار:
د لومړیو دوه مشتقونو برسیره سړی د f(x) دریم مشتق جوړوي یا نیسي.

د دویم مشتق ضفرځایونه ممکنه اوړونټکي دي.
د افراطي ټکو مخ ته پرېوتني یا لرني ازماېښت لپاره د دویم مشتق شمیرل شوی صفرځای په دریم مشتق کې اېښوول کیږي.

که لاس ته راوړنه د صفر سره برابره نه وي، نو اړونده x - ارزښتونه یو اوړنټکی په ګوته کوي. ځکه چې دا اړونده فنکشن ارزښتونه د x – ارزښتونو د تابع مساوات f(x) ترم کې اېښوولو له لارې لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تابع مساوات: $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - \frac{9}{4}$

مشتقونه: $f'(x) = x^3 - 4x \quad f''(x) = 3x^2 - 4 \quad f'''(x) = 6x$

د اوړونټکو لپاره پوره کیدونکي شرطونه:

$$f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 4 = 0 \mid +4$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 = 4 \mid :3$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{4}{3} \mid \sqrt{\ }$$

$$\Leftrightarrow |x| = \sqrt{\frac{4}{3}} \Rightarrow x_1 = \sqrt{\frac{4}{3}} \text{ bzw. } x_2 = -\sqrt{\frac{4}{3}}$$

ممکنه اوړونټکي: $\boxed{x_{W1} = \sqrt{\frac{4}{3}}}$; $\boxed{x_{W2} = -\sqrt{\frac{4}{3}}}$

په اوړونټکو ښوونه:

$$f'''(x_{W1}) = f'''\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = 6 \cdot \sqrt{\frac{4}{3}} \neq 0 ; f'''(x_{W2}) = f'''\left(-\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = 6 \cdot \left(-\sqrt{\frac{4}{3}}\right) \neq 0$$

د $x_{W1} = \sqrt{\frac{4}{3}}$ لپاره اوړونټکی

$$f(x_{W1}) = f\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = \frac{1}{4} \cdot \left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^4 - 2 \cdot \left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^2 - \frac{9}{4} = -\frac{161}{36}$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{W1}\left(\sqrt{\frac{4}{3}} \mid -\frac{161}{36}\right) \text{ bzw. } P_{W1}(1{,}15 \mid -4{,}47)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $x_{W2} = -\sqrt{\frac{4}{3}}$ لپاره اوړونتکی

$$f\left(x_{W2}\right) = f\left(-\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = f\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = -\frac{161}{36}$$

د محور سيومتري لهامله

$$\Rightarrow \boxed{P_{W2}\left(-\sqrt{\frac{4}{3}}\,\middle|\,-\frac{161}{36}\right) \text{ bzw. } P_{W1}\left(-1{,}15 \mid -4{,}47\right)}$$

پنځم: محور غوڅتکي يا نقاط تقاطع محور

الف- د y–محور سره غوڅتکي $f(0) = -\frac{9}{4} = -2{,}25 \Rightarrow \boxed{P_y\left(0 \mid -2{,}25\right)}$

ب – د x–محور سره غوڅتکي(صفرځايونه)

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - \frac{9}{4} = 0 \mid \cdot 4$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 8x^2 - 9 = 0 \mid \text{Substitution } x^2 = z$$

$$\Leftrightarrow z^2 - 8z - 9 = 0$$

په z کې مربع مساوات

$$\Rightarrow p = -8\,;\, q = -9\,;\, D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(-\frac{8}{2}\right)^2 + 9 = 25$$

$$\Rightarrow z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} = -\left(-\frac{8}{2}\right) \pm \sqrt{25} = 4 \pm 5 \Rightarrow z_1 = 9\,;\, z_2 = -1 < 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(حل نه شته)

په ښت يا برعکس بدلون: $z_1 = x^2 = 9 \Rightarrow |x| = \sqrt{9} \Rightarrow x_1 = 3\,;\, x_2 = -3$

په $\boxed{P_{x1}(3|0)}\,;\,\boxed{P_{x2}(-3|0)}$ کې صفرځايونه

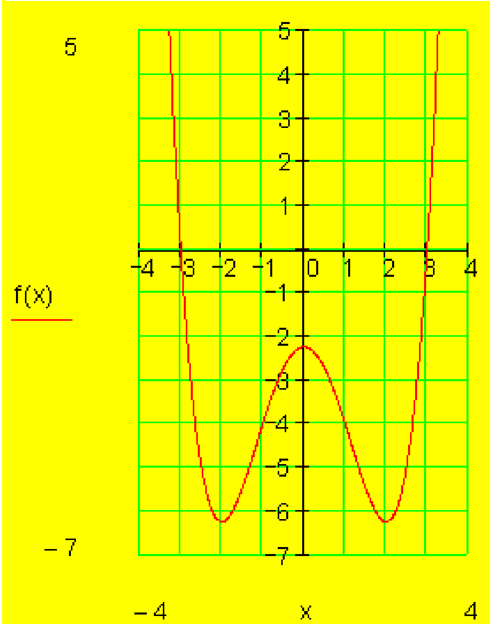
شپږم: ارزښت جدول:

ارزښت جدول د ورزياتو ارزښتونو سره:

$$f(1) = \frac{1}{4}\cdot 1^4 - 2\cdot 1^2 - \frac{9}{4} = -4\,;\, f(-1) = f(1) = -4$$

$$f(3,25) = \frac{1}{4}\cdot(3,25)^4 - 2\cdot(3,25)^2 - \frac{9}{4} \approx 4,52\,;\, f(-3,25) = f(3,25) \approx 4,52$$

		P_{x2}	P_{Min2}	P_{W2}		$P_{Max} = P_y$		P_{W1}	P_{Min1}	F
x	−3,25	−3	−2	−1,15	−1	0	1	1,15	2	
f(x)	4,52	0	−6,25	−4,47	−4	−2,25	−4	−4,47	−6,25	



شپږم: ټولګه:

محورغوڅتکي

اکسترم ارزښتونه:

$P_{Min1}(2|-6,25)\,;\,P_{Min2}(-2|-6,25)$

$P_{Max}(0|-2,25)$

اوړونټکي

$$P_{W1}\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\,\Big|\,-\frac{161}{36}\right);\,P_{W2}\left(-\sqrt{\frac{4}{3}}\,\Big|\,-\frac{161}{36}\right)$$

مورغوڅتکي

$P_y(0|-2,25)\,;\,P_{x1}(3|0)\,;\,P_{x2}(-3|0)$

د کږوالي يو غبرګزوالى نټوتى

(c) ketabton.com: The Digital Library

	او $\left]-\infty;-\sqrt{\frac{4}{3}}\right[$ und $\left]\sqrt{\frac{4}{3}};\infty\right[$ وتلی: $\left]-\sqrt{\frac{4}{3}};\sqrt{\frac{4}{3}}\right[$ کره یوغږيز يتيدونکی $]-\infty;-2[$ und $]0;2[$ کره یوغږيز جګيدونکی $]-2;0[$ und $]2;\infty[$ ژی تکي $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\infty$

اووم: کږوالي حالت او یوغږيزوالی:

کږوالی د x0=-2 لپاره (کين له P_{w2})

$$f''(-2)=3\cdot(-2)^2-4=8>0$$

د $\left]-\infty;-\sqrt{\frac{4}{3}}\right[$ لپاره کينکوږوالی(ننوتی)

د $x_0=0$ لپاره کوږوالی (دP_{w1} اوP_{w2} ترمنځ)

$f''(0)=-4<0$ ښی کوږوالی(وتلی) د $\left]-\sqrt{\frac{4}{3}};\sqrt{\frac{4}{3}}\right[$ لپاره.

د x0=2 لپاره کږوالی (دP_{w2} ښي لور ته)

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f''(2)=3.2^2-4=x>0$

کښېن کوږوالی د $]\infty; \sqrt{\frac{4}{3}}[$ لپاره

کره یا په کلکه قوغږیز تیتیدونکی د $]-\infty; -2[$ لپاره

کره یوغږیزجګیدونکی د $]-2;0[$ لپاره

کره یا په کلکه قوغږیز تیتیدونکی د $]0;2[$ لپاره

کره یوغږیزجګیدونکی د $]2;\infty[$ لپاره

اتم: د تعریفورشو ژی ټکي:

$$\left.\begin{aligned}
&\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{4}x^4-2x^2-\frac{9}{4}\right) = \lim_{x\to-\infty} x^4\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{x^2}-\frac{9}{4x^4}\right)\\
&= \lim_{x\to-\infty} x^4 \cdot \underbrace{\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{x^2}-\frac{9}{4x^4}\right)}_{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}\cdot\lim_{x\to-\infty} x^4 = \infty\\
&\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{1}{4}\cdot\lim_{x\to\infty} x^4 = \infty
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty}$$

یوه تابع $y = x^3 + x^2 - 3$ لرو. د دې تابع شکل رسم کړئ او بیا په دې رسم کې د تابع افرطي ټکي او د انعطاف ټکي په نخښه کړئ، ربښانه کړئ، چې انحنا چیرته له کیڼې لور و ښۍ لورې ته او له ښۍ لورې و کیڼې لورې ته ده.

فعالیت:

- تناظر تعریف کړئ.
- لاندې توابع رسم کړئ، جګ ټکي، ټیټ ټکي او د انعطاف ټکي یې پیدا اکړئ.
- $x^3 + x$
- $3x^3 + x + 2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ددې لپاره چې یوه تابع رسم کړای شو، ساده ده که د تابع غوره ټکی و پیژنو. موږ دې بحث ته د منحني بحث وایو. موږ په دا ډول خبرو اترو کې باید سیستماتیک مخ ته لاړ شو.
په لاندې ډول تلنه ګټوره بلل شوې.

دتعریف ساحه: د تابع څېړنه یواځې په همدې ورشو کې موخه وره ده.
تناظر **Symetry** : باید وټاکل شي، چې تابع محوري متناظر او که مرکزي متناظر ده.
د محوري تناظر لپاره باور لري: $f(-x) = f(x)$
د مرکزي تناطر لپاره باور لري. $f(-x) = -f(x)$
په پورته دواړو حالتونو کې دې فقط $x \geq 0$ وڅېړل شي.
په ټولیزه توګه که ټول ریل تابع په پام کې ونیسو، نو ګورو چې که توان(د پولینوم درجه)یې جفت(جوړه) وي، نو پولینوم محوري متناظر دی او که توان(د پولینوم درجه) طاق(ناجوړه) وي، نو پولینوم مرکزي متناظر دی.

بحراني ټکي **Extrema** : د نسبي بحراني ټکو ټاکل(جګټکی، ټیټټکی)
د جګټکی یا نسبي جګ ټکي پوره کیدونکي شرطونه:
$f'(x_1) = 0 \ \wedge \ f''(x_1) < 0$

انعطافټکی یا اوړونټکی : Inflection Point

د انعطافټکواو همداسې زینټکي ټاکلو له پاره پوره کیدونکي شرطونه:
$f''(x_W) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x_W) \neq 0$
زینټکی انعطافټکی دی د افقي تانجنت سره.
د تابع تقاطع د x او y محوروونوسره(د محوروونوِغوښټکی):
د $x-$ محور سره ِغوښټکی: $P_{xi}(x_i \mid 0) \ \Rightarrow \ (x) = 0$
د y محور سره غوښټکی(صفرځای) ټاکي $f(0)$ $P_y(0 \mid y_s) \ \Rightarrow$
دګراف انځورونه: د ټولو تراوسه راټولو شوو معلوماتو سره کړی شو، چې ګراف انځور کړو. ددې لپاره لومړی یو ارزښتجدول انځوریږي. دا راته په ګوته کوي، چې نور کوم ارزښتونه شمیرل کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کږوالي - یا انحنا حالت او یوغږیزوالی:
د انعطاف په ټکي X_w کې د $f(x)$ ګراف تغیر خوري.
په خوښه یوه ټکي x_0 کې د انحنا لپاره باور لري:
$f''(x_0) > 0$ په دې معنا، چې د $f(x)$ تابع ګراف کیڼه انحنا لري (کونوکس)
$f''(x_0) < 0$ په دې معنا، چې د $f(x)$ تابع ګراف ښۍ انحنا لري (کونکاو)

یوغږیزوالی
1- که د ټولو $x \in I$ لپاره وي $f'(x) \geq 0$ ، نو $f(x)$ په انټروال I کې مونوتون جګیږي. که د ټولو $x \in I$ لپاره $f'(x) \leq 0$ وي, نو $f(x)$ په انټروال I کې مونوتون ټیټېدونکی دی.

2- که د ټولو $x \in I$ لپاره $f'(x) > 0$ وي، نو $f(x)$ تابع په انټروال I کې کره غښتلې مونوتون جګېدونکی ده.
که د ټولو $x \in I$ لپاره $f'(x) < 0$ وي، نو $f(x)$ تابع په انټروال I کې غښتلې مونوتون جګېدونکی ده.

د پېژند ورشو ژی ټکي:
د تابع ژی ټکي کتنه په پېژند ورشوکې. که پېژند ورشو نامحدوده وي، نو لیمیټ $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ او $\lim_{x \to \infty} f(x)$ ټاکو.

بیلګه :
د $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ تابع رسم کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مشتق کونه:

$$y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$$

$$y' = f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

$$y'' = f''(x) = 6x - 12$$

$$y''' = f'''(x) = 6 \qquad D = IR$$

نسبي بحراني ټکي

$$P_{min}(3|-2) \qquad P_{max}(1|2)$$

انعطافټکی او تانجنت

$$P_W(2|0) \qquad y = f_t(x) = -3x + 6$$

صفرځايونه:

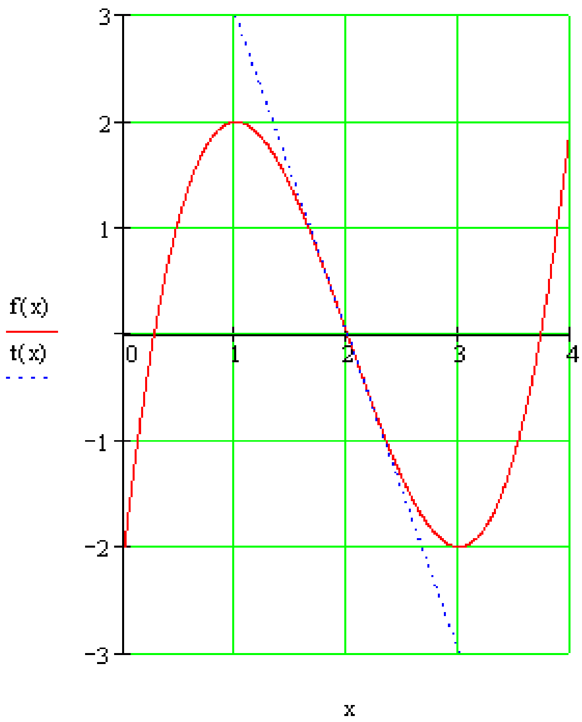
$$P_{x1}(2|0) \quad P_{x2}(3.7|0)$$

$$P_{x3}(0.3|0)$$

د y– محور سره غوڅټکی(دقاطع):

$$P_y(0|-2)$$

$f(x) := x^3 - 6x^2 + 9x - 2 \qquad t(x) := -3x + 6$



يوغږيزوالی(مونوتوني ياجګ - ټيټوالی)

په $I_1 = \{x \mid -\infty < x \le 1\}_{\mathbb{R}}$ کې يوغږيز جګيږي. په $I_3 = \{x \mid 3 \le x < \infty\}_{\mathbb{R}}$ کې يوغږيز جګيږي.

د تابع حالت په $x \to -\infty$ او $x \to \infty$ کې

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right) = \infty$$

سيومتري: نه لري

د کږوالي يا انحنا حالت:

(c) ketabton.com: The Digital Library

بنې کږوالی یا انحنا(وتلی یا محدب) : $I_4 = \{x \mid -\infty < x < 2\}_{IR}$

کیڼ کږوالی یا انحنا (مقعریت یا ننوتوالی) : $I_5 = \{x \mid 2 < x < \infty\}_{IR}$

بیلګه۱ : لومړی: تعریفورشو:

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4x \qquad \boxed{D = \mathbb{R}}$$

دویم: سیومتري:

ټکی سیومتریک؛ f(-x)=-f(x) ځکه چې فقط ناجوړه یا طاق جګعدد

دریم: افراطیت:

مشتق:

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4x \Rightarrow f'(x) = -x^2 + 4 \Rightarrow f''(x) = -2x \Rightarrow f'''(x) = -2$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x_1 = 2 \text{ bzw. } x_2 = -2$$

$$f''(x_1) = f''(2) = -4 < 0 \Rightarrow \text{rel Max für } x_1 = 2$$

$$f''(x_2) = f''(-2) = 4 > 0 \Rightarrow \text{rel Min für } x_2 = -2$$

$$f(x_1) = f(2) = \frac{16}{3} \Rightarrow \boxed{P_{Max}\left(2 \mid \frac{16}{3}\right)}$$

$$f(x_2) = f(-2) = -\frac{16}{3} \Rightarrow \boxed{P_{Min}\left(-2 \mid -\frac{16}{3}\right)}$$

څلورم: اوړنټکی یا نقطه انعطاف:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -2x = 0 \Rightarrow x_W = 0$$

$$f'''(x_W) = f'''(0) = -2 \neq 0$$

$$f(x_W) = f(0) = 0 \Rightarrow \boxed{P_W(0 \mid 0)}$$

پنځم: مخورغوځټکی یا نقاط تقاطع محور:

$$f(0) = 0 \Rightarrow \boxed{P_y(0 \mid 0)}$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{3}x^3 + 4x = 0 \Leftrightarrow x\left(-\frac{1}{3}x^2 + 4\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

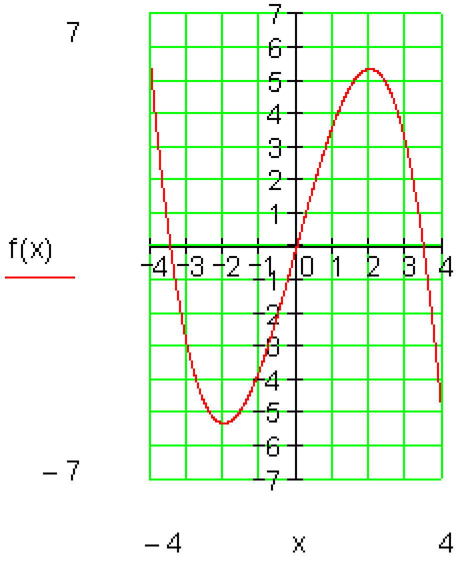
$$-\frac{1}{3}x^2+4=0 \Leftrightarrow x^2-12=0 \Rightarrow x_2=\sqrt{12} \text{ bzw. } x_3=-\sqrt{12}$$

ضفرځايونه: $\boxed{P_{x1}(0|0)}$; $\boxed{P_{x2}(\sqrt{12}|0)}$; $\boxed{P_{x3}(-\sqrt{12}|0)}$

شپږم: ارزښتجدول او ګراف:

$f(-4)=5{,}3$; $f(4)=-5{,}3$; $f(-3)=-3$; $f(3)=3$; $f(-1)=-3{,}7$; $f(1)=3{,}7$

		P_{x3}		P_{Min}		P_y P_W P_{x1}		P_{Max}		P_{x2}	
x	−4	$-\sqrt{12}$	−3	−2	−1	0	1	2	3	$\sqrt{12}$	4
f(x)	5,3	0	−3	$-5{,}\bar{3}$	−3,7	0	3,7	$5{,}\bar{3}$	3	0	−5,3



اووم: کږوالي حالت او يوغږيزوالی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $x0=-2$ لپاره (کینې له P_W) $f''(-2) > 0$ له دې لاس ته راځي کینې کوږوال(ننوتی یا کونوکس)$]-\infty; 0[$

د $x0=2$ لپاره (ښي له P_W) $f''(2) < 2$ له دې لاس ته راځي ښي کوږوالی(کونکاو یا وتلی) $]0; -\infty[$

یوغویزوالی:

د $]-\infty; 0[$ لپاره کرهیوغږیز ټیټیدونکی یا لویدونکی

د $]0; -\infty[$ لپاره کره یوغږیز جګیدونکی

د $]2; \infty[$ لپاره کره یوغږیز ټیټیدونکی یا لویدونکی

اتم: د تعریفورشو ژی شرایط:

$$\left.\begin{aligned}
&\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{3}x^3+4x\right) = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(-\frac{1}{3}+\frac{4}{x^2}\right)\\
&= \lim_{x\to-\infty} x^3 \cdot \underbrace{\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{3}+\frac{4}{x^2}\right)}_{-\frac{1}{3}} = -\frac{1}{3}\cdot \lim_{x\to-\infty} x^3 = \infty\\
&\lim_{x\to\infty} f(x) = -\frac{1}{3}\cdot\lim_{x\to\infty} x^3 = -\infty
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned}&\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty\\ &\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty\end{aligned}}$$

بیلګه ۲ :

لومړی:

$$f(x) = \frac{1}{16}x^3 - \frac{3}{8}x^2 + 2 \qquad \boxed{D = \mathbb{R}}$$

دویم: سیمتري:

سیومتري نه شته.

دریم: افراطیت:

مشتق:

$$f(x) = f(x) = \frac{1}{16}x^3 - \frac{3}{8}x^2 + 2 \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{16}x^2 - \frac{3}{4}x \Rightarrow f''(x) = \frac{3}{8}x - \frac{3}{4} \Rightarrow f$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = f(x) = \frac{1}{16}x^3 - \frac{3}{8}x^2 + 2 \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{16}x^2 - \frac{3}{4}x \Rightarrow f''(x) = \frac{3}{8}x - \frac{3}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'''(x) =$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{16}x^2 - \frac{3}{4}x = 0 \Leftrightarrow x\left(\frac{3}{16}x - \frac{3}{4}\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$\frac{3}{16}x - \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow x_2 = 4$$

$$f''(x_1) = f''(0) = -\frac{3}{4} < 0 \Rightarrow \text{rel Max für } x_1 = 0$$

$$f''(x_2) = f''(4) = \frac{3}{4} > 0 \Rightarrow \text{rel Min für } x_2 = 4$$

$$f(x_1) = f(0) = 2 \Rightarrow \boxed{P_{Max}(0|2)}$$

$$f(x_2) = f(4) = 0 \Rightarrow \boxed{P_{Min}(4|0)}$$

څلورم:اوړنتکی یا نقطه انعطاف:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{8}x - \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow x_W = 2$$

$$f'''(x_W) = f'''(2) = \frac{3}{8} \neq 0$$

$$f(x_W) = f(2) = 1 \Rightarrow \boxed{P_W(2|1)}$$

پنځم: محور غوڅتکي:

$$f(0) = 2 \Rightarrow \boxed{P_y(0|2)}$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{16}x^3 - \frac{3}{8}x^2 + 2 = 0$$

د P_{min} شمیرنه په دې معنا وګوری لوړی صفرځای x1=4.
هورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{array}{l|cccc} & \frac{1}{16} & -\frac{3}{8} & 0 & 2 \\ x=4 & & \frac{4}{16} & -\frac{1}{2} & -2 \\ \hline & \frac{1}{16} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array} \Rightarrow \frac{1}{16}x^2-\frac{1}{8}x-\frac{1}{2}=0$$

$$\frac{1}{16}x^2-\frac{1}{8}x-\frac{1}{2}=0 \Leftrightarrow x^2-2x-8=0 \Rightarrow x_2=4;\ x_3=-2$$

صفرخایونه: $\boxed{P_{x1/2}(4|0)}$; $\boxed{P_{x3}(-2|0)}$

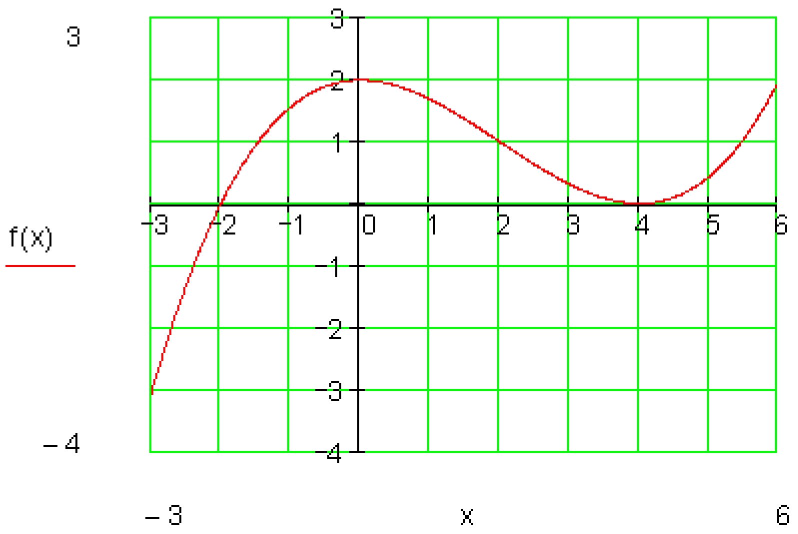
شپږم: ارزښتجدول او ګراف:

ارزښتجدوال:

$f(-3)\approx -3,06;\ f(-1)\approx 1,56;\ f(1)\approx 1,67;\ f(3)\approx 0,31;\ f(5)\approx 0,44;\ f(6)=2$

		P_{x3}		P_{Max}		P_W		P_{Min} $P_{x1/2}$		
x	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6
f(x)	−3,06	0	1,56	2	1,67	1	0,31	0	0,44	2

ګراف:



(c) ketabton.com: The Digital Library

اووم: ګړوالی(ننوتوالی يا مقعربيت) او يوغږيزوالی:
اووم: کږوالي حالت او يوغږيزوالی:
د x0=-2 لپاره (کينږ له P_W) f''(0)=-¾<0 له دې لاس ته راځي ښی کوږوال(ننوتی يا کونوکس)$]-\infty;2[$

د x0=2 لپاره (ښي له P_W) f''(4) = ¾ > 0 له دې لاس ته راځي کينږ کوږوالی(کونکاو يا وتلی) $]2;\infty[$
يوغويزوالی:
د $]-\infty;0[$ لپاره کره يوغږيز جګيدونکی
د $]0;4[$ لپاره کره يوغږيز ټيټيدونکی
د $]4;\infty[$ لپاره کره يوغږيز جګيدونکی

اتم: د تعريفورشو ژۍ شرايط؛

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{16}x^3-\frac{3}{8}x^2+2\right) = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(\frac{1}{16}-\frac{3}{8x}+\frac{2}{x^3}\right)\\&= \lim_{x\to-\infty} x^3\cdot\underbrace{\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{16}-\frac{3}{8x}+\frac{2}{x^3}\right)}_{\frac{1}{16}} = \frac{1}{16}\cdot\lim_{x\to-\infty}x^3 = -\infty\\&\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{1}{16}\cdot\lim_{x\to\infty}x^3 = \infty\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned}&\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty\\&\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty\end{aligned}}$$

بيلګه ۳ :
لومړی: تعريفورشو:

$$f(x) = -\frac{1}{2}x(x+3)^3 = -\frac{1}{2}x^4-\frac{9}{2}x^3-\frac{27}{2}x^2-\frac{27}{2}x \qquad \boxed{D=\mathbb{R}}$$

دويم: سيمتري: سيوتتري نه شته.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم: افراطیت: مشتق د صرب له لارې(قانون)

$$f(x) = \underbrace{-\frac{1}{2}x}_{u}\underbrace{(x+3)^3}_{v} \Rightarrow f'(x) = u'v + uv'$$

$$u = -\frac{1}{2}x \,;\, v = (x+3)^3 \,;\, u' = -\frac{1}{2} \,;\, v' = 3(x+3)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(x)} = -\frac{1}{2}(x+3)^3 - \frac{3}{2}x(x+3)^2 = \boxed{-\frac{1}{2}(x+3)^2(4x+3)}$$

$$f'(x) = \underbrace{-\frac{1}{2}(x+3)^2}_{u}\underbrace{(4x+3)}_{v} \Rightarrow f''(x) = u'v + uv'$$

$$u = -\frac{1}{2}(x+3)^2 \,;\, v = 4x+3 \,;\, u' = -(x+3) \,;\, v' = 4$$

$$\Rightarrow \boxed{f''(x)} = -(x+3)(4x+3) - \frac{1}{2}(x+3)^2 \cdot 4 = \boxed{-3(x+3)(2x+3)}$$

$$f''(x) = \underbrace{-3(x+3)}_{u}\underbrace{(2x+3)}_{v} \Rightarrow f'''(x) = u'v + uv'$$

$$u = -3(x+3) \,;\, v = 2x+3 \,;\, u' = -3 \,;\, v' = 2$$

$$\Rightarrow \boxed{f'''(x)} = -3(2x+3) - 3(x+3)\cdot 2 = \boxed{-(12x+27)}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}(x+3)^2(4x+3) = 0 \Rightarrow x_{1/2} = -3 \,;\, x_3 = -\frac{3}{4}$$

$$f''(x_{1/2}) = f''(-3) = 0 \Rightarrow$$

د افراطیت په هکله وینا نه شته

$$f''(x_3) = f''\left(-\frac{3}{4}\right) = -3\left(-\frac{3}{4}+3\right)\left(2\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)+3\right) = -\frac{81}{8} = -10{,}125 < 0$$

لاس ته راځي: د $x_3 = -\frac{3}{4}$ لپاره نسبي افراطیت

$x_{1/2} = -3$ د f'(x) دبل صفرځای دی، دا په دې معنا چې د f'(x) مخنخښې بدلون د

(c) ketabton.com: The Digital Library

x=-3 په ځا کې نه شته. دا په دې معنا چې $x_{1/2} = -3$ دافراطي ځای نه دي.

$$f(x_3) = f\left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{3}{4}+3\right)^3 = \frac{2187}{512} \approx 4{,}27$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{Max}\left(-\frac{3}{4} \middle| \frac{2187}{512}\right) \text{ bzw. } P_{Max}(-0{,}75 \mid 4{,}27)}$$

څلورم: اوړونټکي یا نقاط انعطاف: د لاندې الماني پښتو: اوړونټکی.

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -3(x+3)(2x+3) = 0 \Rightarrow x_1 = -3\,;\, x_2 = -\frac{3}{2}$$

$$f'''(x_1) = f'''(-3) = -(12\cdot(-3)+27) \neq 0 \Rightarrow \text{Wendepunkt bei } x_{W1} = -3$$

$$f'''(x_2) = f'''\left(-\frac{3}{2}\right) = -\left(12\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)+27\right) \neq 0 \Rightarrow \text{Wendepunkt bei } x_{W2} = -\frac{3}{2}$$

$$f(x_{W1}) = f(-3) = -\frac{1}{2}\cdot(-3)(-3+3)^3 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{W1}(-3 \mid 0)}$$

$$f(x_{W2}) = f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}+3\right)^3 = \frac{81}{32} \approx 2{,}53$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{W2}\left(-\frac{3}{2} \middle| \frac{81}{32}\right) \text{ bzw. } P_{W2}(-1{,}5 \mid 2{,}53)}$$

پنځم: محورغوځتکي:

$$f(0) = 0 \Rightarrow \boxed{P_y(0 \mid 0)}$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x(x+3)^3 = 0 \Rightarrow x_1 = 0\,;\, x_{2/3/4} = -3$$

صفرځایونه: $\boxed{P_{x1}(0 \mid 0)}\,;\,\boxed{P_{x2/3/4}(-3 \mid 0)}$

شپږم: ارزښتجدول او ګراف:

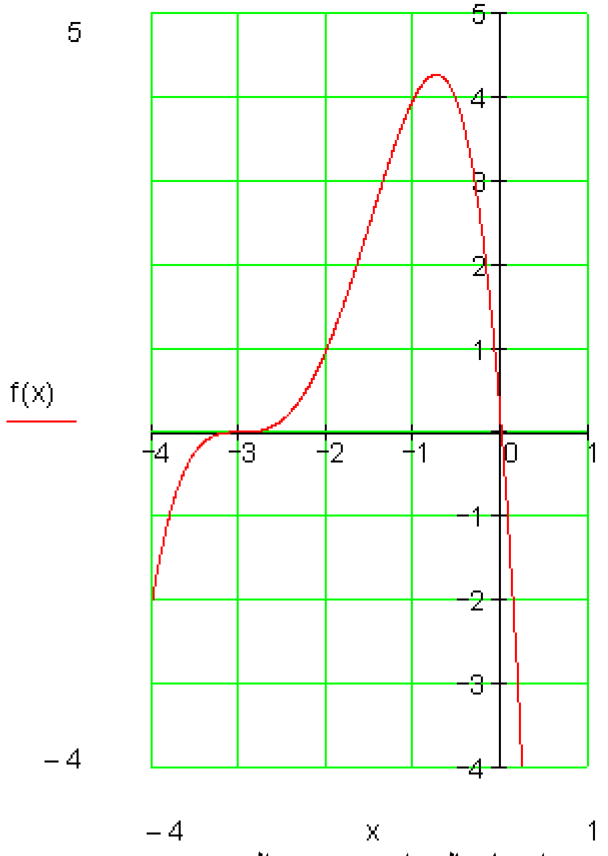
ارزښتجدول:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f(-4) = -2;\ f(-2) = 1;\ f(-1) = 4;\ f(0{,}5) \approx -10{,}72$

		P_{W1} $P_{x2/3/4}$		P_{W2}		P_{Max}	P_{x1}	
x	−4	−3	−2	−1,5	−1	−0,75	0	0,5
f (x)	−2	0	1	2,53	4	4,27	0	−10,72

ګراف:



اووم: د انحنا حالت او يوغږيزوالی:

اووم: كږوالي حالت او يوغږيزوالی:

د $x_0=-2$ لپاره (كيږ له P_W) $f''(-2) > 0$ له دې لاس ته راځي كيږ كوږوال(ننوتى يا كونوكس)]$-\infty; 0$[

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $x_0=2$ لپاره (بني له P_W) $f''(2) < 2$ له دې لاس ته راځي بني کوږوالی(کونکاو یا وتلی) $]0; -\infty[$

یوغویزوالی:

د $]-\infty; 0[$ لپاره کرهیوغږیز ټیټیدونکی یا لویدونکی

د $]0; -\infty[$ لپاره کره یوغږیز جګیدونکی

د $]2; \infty[$ لپاره کره یوغږیز ټیټیدونکی یا لویدونکی

کږوالی:

د $x_0 = -4$ لپاره (کیڼ له P_{W1}) $f''(-4) = -5 < 0$

لاس ته راځي بنی کوږوالی (کونوکس) $]-\infty; -3[$

د $x_0 = -2$ لپاره (بني له P_{W1}) $f''(-2) = 1 > 0$

لاس ته راځي کیڼ کوږوالی (کونوکس) $]-3; -1{,}5[$

د $x_0 = -1$ لپاره (بنی له P_{W2}) $f''(-1) = -2 < 0$

لاس ته راځي بنی کوږوالی(کونکاو) $]-1{,}5; -\infty[$

یوغږیزوالی:

د مخامخ انتروال لپاره کره یوغږیز جګیدوکی	$]-\infty; -3[$
د مخامخ انتروال لپاره کره یوغږیز جګیدونکی	$\left]-3; -\frac{3}{4}\right[$
د مخامخ انتروال لپاره کره یوغږیز ټیټیدونکی	$\left]-\frac{3}{4}; \infty\right[$

اتم: د تعریفورشو ژۍ ټکي:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{2}x^4 - \frac{9}{2}x^3 - \frac{27}{2}x^2 - \frac{27}{2}x\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} x^4\left(-\frac{1}{2} - \frac{9}{2x} - \frac{27}{2x^2} - \frac{27}{2x^3}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} x^4 \cdot \underbrace{\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{2} - \frac{9}{2x} - \frac{27}{2x^2} - \frac{27}{2x^3}\right)}_{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\cdot \lim_{x\to-\infty} x^4 = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\frac{1}{2}\cdot \lim_{x\to\infty} x^4 = -\infty$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه۴ :

لومړی:تعریفورشو:

$$f(x) = -x^4 + \frac{9}{2}x^2 - \frac{81}{16} \qquad \boxed{D = \mathbb{R}}$$

دویم: محورسیومتري: $f(-x) = f(x)$ ځکه چې فقط جوړه(جفت) اکسپوننتونه

دریم: افراطیت:

مشتقونه یا رابیلیدني:

$$f(x) = -x^4 + \frac{9}{2}x^2 - \frac{81}{16} \Rightarrow f'(x) = -4x^3 + 9x \Rightarrow f''(x) = -12x^2 + 9 \Rightarrow f'''(x) = -24x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x^3 + 9x = 0 \Leftrightarrow x\left(-4x^2 + 9\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$-4x^2 + 9 = 0 \Rightarrow x_{2/3} = \pm\frac{3}{2}$$

$$f''(x_1) = f''(0) = 9 > 0 \Rightarrow \text{rel Min für } x_1 = 0$$

$$f''(x_2) = f''\left(\frac{3}{2}\right) = -18 < 0 \Rightarrow \text{rel Max für } x_2 = \frac{3}{2}$$

$$f''(x_3) = f''\left(-\frac{3}{2}\right) = -18 < 0 \Rightarrow \text{rel Max für } x_3 = -\frac{3}{2}$$

$$f(x_1) = f(0) = -\frac{81}{16} \approx -5{,}06 \Rightarrow \boxed{P_{Min}\left(0 \mid -\frac{81}{16}\right) \text{ bzw. } P_{Min}(0 \mid -5{,}06)}$$

$$f(x_2) = f\left(\frac{3}{2}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{P_{Max1}\left(\frac{3}{2} \mid 0\right) \text{ bzw. } P_{Max1}(1{,}5 \mid 0)}$$

$$f(x_3) = f\left(-\frac{3}{2}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{P_{Max2}\left(-\frac{3}{2} \mid 0\right) \text{ bzw. } P_{Max2}(-1{,}5 \mid 0)}$$

څلورم: اوړنټکی یا د انعطاف ټکی:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -12x^2 + 9 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$f'''(x_1) = f'''\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right) = -24 \cdot \sqrt{\frac{3}{4}} \neq 0 \Rightarrow$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په $x_{W1} = \sqrt{\frac{3}{4}} \approx 0,87$ کې اوړونټکی(انعطاف-)

$$f'''(x_2) = f'''\left(-\sqrt{\frac{3}{4}}\right) = -24 \cdot \left(-\sqrt{\frac{3}{4}}\right) \neq 0$$

لاس ته راځي: په $x_{W2} = -\sqrt{\frac{3}{4}} \approx -0,87$ کې اوړونټکی(انعطاف-)

$$f(x_{W1}) = f\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right) = -\frac{9}{4} = -2,25 \Rightarrow \boxed{P_{W1}\left(\sqrt{\frac{3}{4}} \mid -\frac{9}{4}\right) \text{ bzw. } P_{W1}(0,87 \mid -2,25)}$$

$$f(x_{W2}) = f\left(-\sqrt{\frac{3}{4}}\right) = -\frac{9}{4} = -2,25 \Rightarrow \boxed{P_{W2}\left(-\sqrt{\frac{3}{4}} \mid -\frac{9}{4}\right) \text{ bzw. } P_{W1}(-0,87 \mid -2,25)}$$

پنځم: محورغوځتکي:

$$f(0) = -\frac{81}{16} \approx -5,06 \Rightarrow \boxed{P_y\left(0 \mid -\frac{81}{16}\right) \text{ bzw. } P_y(0 \mid -5,06)}$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^4 + \frac{9}{2}x^2 - \frac{81}{16} = 0$$

تراوسه معلوم صفرځايونه $x_1 = \frac{3}{2};\ x_2 = -\frac{3}{2}$ (افراطي ټکي وکوری)

پولينوموېش:

$$\left(-x^4 + \frac{9}{2}x^2 - \frac{81}{16}\right) : \underbrace{\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right)}_{x^2 - \frac{9}{4}}$$

$$\left(-x^4 + \frac{9}{2}x^2 - \frac{81}{16}\right) : \left(x^2 - \frac{9}{4}\right) = -x^2 + \frac{9}{4}$$

$$\underline{-\left(-x^4 + \frac{9}{4}x^2\right)}$$

$$\frac{9}{4}x^2 - \frac{81}{16}$$

$$-\left(\frac{9}{4}x^2 - \frac{81}{16}\right)$$

$$-x^2 + \frac{9}{4} = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow x_{3/4} = \pm\frac{3}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

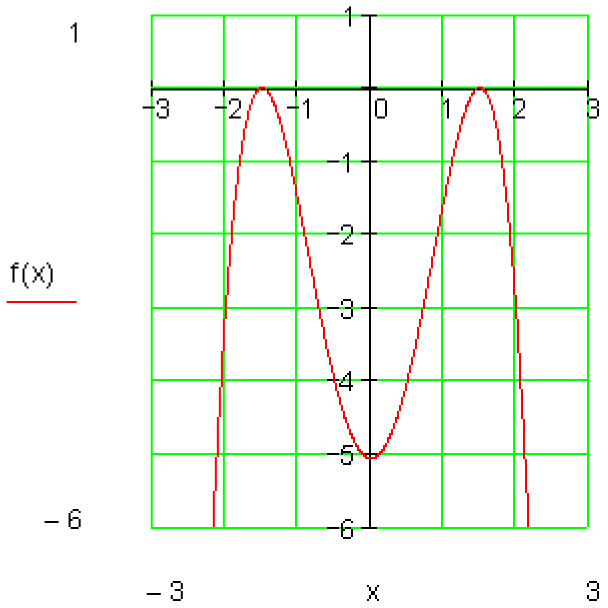
صفرځايونه: $P_{x1/2}\left(\frac{3}{2}\,|\,0\right)$; $P_{x3/4}\left(-\frac{3}{2}\,|\,0\right)$

شپږم: ارزښت جدول او ګراف:

ارزښتجدول:

$f(-2) \approx -3{,}06 = f(2);\ f(-1) \approx -1{,}56 = f(1)$

		P_{Max2} $P_{x3/4}$		P_{W2}	P_{Min} P_y	P_{W1}		P_{Max1} $P_{x1/2}$	
x	−2	−1,5	−1	−0,87	0	0,87	1	1,5	2
f (x)	−3,06	0	−1,56	−2,25	−5,06	−2,25	−1,56	0	−3,06



اووم: کږوالی یا انحنا:

اووم: کږوالي حالت او یوغږیزوالی:

د x0=-2 لپاره (کين له P_W) $f''(-2) > 0$ له دي لاس ته راځي کين کوږوال(ننوتی یا کونوکس)$]0; \infty -]$

د x0=2 لپاره (ښي له P_W) $f''(2) < 2$ له دي لاس ته راځي ښي کوږوالی(کونکاو یا وتلی) $]0; -\infty[$

یوغویزوالی:

د $]0; \infty -]$ لپاره کرهیوغږیز تیتیدونکی یا لویدونکی

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $]-\infty;0[$ لپاره کره یوغرېز جګیدونکی

د $]2;\infty[$ لپاره کره یوغرېز ټيټيدونکی یا لویدونکی

کږوالی:

د x_0 =-1 لپاره (د P_{W1} او P_{W2}ترمنځ) f’’(-1) =-3< 0

له دې لای ته راځي ښي کږوالی (وتلی یا محدب؟) $\left]-\infty;-\sqrt{\frac{3}{4}}\right[$

د $x_0 = 0$ لپاره (د P_{W1} او P_{W2}ترمنځ) f’’(0) = 9> 0

له دې لای ته راځي ښي کږوالی کيڼ کږوالی: (ننوتی؟) $\left]-\sqrt{\frac{3}{4}};\sqrt{\frac{3}{4}}\right[$

د $x_0 = 1$ لپاره (له P_{W1}څخه ښی) f’’(1) = -3 < 0

له دې لای ته راځي ښي کږوالی (وتلی یا محدب؟) $\left]\sqrt{\frac{3}{4}};\infty\right[$

یوغرېزوالی: د مخامخ لپاره کره یوغرېز جګیدونکی د مخامخ لپاره کره یوغرېز ټيټيدونکی د مخامخ لپاره کره یوغرېز جګیدونکی د مخامخ لپاره کره یوغرېز ټيټيدونکی	 $]-\infty;-1{,}5[$ $]-1{,}5;0[$ $]0;1{,}5[$ $]1{,}5;\infty[$

اتم: د تعریفورشو ژی ټکي:

$$\left.\begin{aligned}
&\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(-x^4+\frac{9}{2}x^2-\frac{81}{16}\right) = \lim_{x\to-\infty} x^4\left(-1+\frac{9}{2x^2}-\frac{81}{16x^4}\right)\\
&= \lim_{x\to-\infty} x^4 \cdot \underbrace{\lim_{x\to-\infty}\left(-1+\frac{9}{2x^2}-\frac{81}{16x^4}\right)}_{-1} = -1\cdot\lim_{x\to-\infty} x^4 = -\infty\\
&\lim_{x\to\infty} f(x) = -1\cdot\lim_{x\to\infty} x^4 = -\infty
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه:

۱ – تعریف – یا پیژندورشو:

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 \qquad \boxed{D = \mathbb{R}}$$

۲ – سیومتري: سیومتري نه شته

۳ – افراطیت-

مشتق

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 \Rightarrow f'(x) = -x^3 + 3x^2 \Rightarrow f''(x) = -3x^2 + 6x \Rightarrow f'''(x) = -6x + 6$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^3 + 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(-x+3) = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 0;\ x_3 = 3$$

$$f''(x_1) = f''(0) = 0 \Rightarrow$$

په $x_1 = 0$ کې په افراطی ځای کومه وینه یا افاده نه شته

مګر دا چې $x_{1/2} = 0$ د f'(x) دبل صفرځای دی د f'(x) لپاره په $x_{1/2} = 0$ ځای کې د مخنخبي بدلون نه شته له دې لاس ته راځی، چې په $x_1 = 0$ کې افراطي ځایونه نه شته

$$f''(x_3) = f''(3) = -9 < 0 \Rightarrow \text{rel Max für } x_3 = 3$$

$$f(x_3) = f(3) = \frac{27}{4} = 6{,}75 \Rightarrow \boxed{P_{Max}\left(3 \mid \frac{27}{4}\right) \text{ bzw. } P_{Max}(3 \mid 6{,}75)}$$

۴ - اوړونټکی یا انعطافټکی: (لاندې الماني: په ... کې اوړونټکی)

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow x(-3x+6) = 0 \Rightarrow x_1 = 0;\ x_2 = 2$$

$$f'''(x_1) = f'''(0) = 6 \neq 0 \Rightarrow \text{Wendepunkt bei } x_{W1} = 0$$

$$f'''(x_2) = f'''(2) = -6 \neq 0 \Rightarrow \text{Wendepunkt bei } x_{W2} = 2$$

$$f(x_{W1}) = f(0) = 0 \Rightarrow \boxed{P_{W1}(0 \mid 0)}$$

$$f(x_{W2}) = f(2) = 4 \Rightarrow \boxed{P_{W2}(2 \mid 4)}$$

۵ – محورغوڅټکي:

$$f(0) = 0 \Rightarrow \boxed{P_y(0 \mid 0)}$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}x^4 + x^3 = 0 \Leftrightarrow x^3\left(-\frac{1}{4}x + 1\right) = 0 \Rightarrow x_{1/2/3} = 0;\ x_4 = 4$$

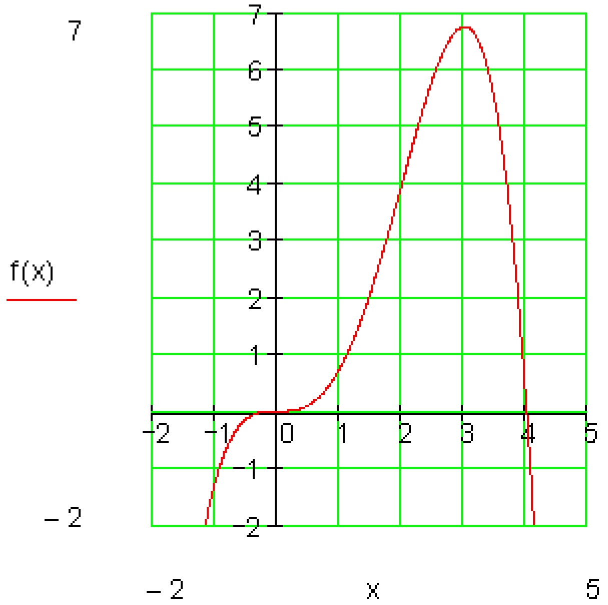
صفرځایونه: $\boxed{P_{x1/2/3}(0 \mid 0)};\ \boxed{P_{x4}(4 \mid 0)}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ارزښتجدول او ګراف :ارزښتجدول

$f(-1) = -1{,}25\,;\ f(1) = 0{,}75\,;\ f(4{,}2) = -3{,}7$

		P_{W1} $P_{x1/2/3}$ P_y		P_{W2}	P_{Max}	P_{x4}	
x	−1	0	1	2	3	4	4,2
f(x)	−1,25	0	0,75	4	6,75	0	−3,7



کږوالي حالت او يوغږيزوالی:

کږوالی:

د $x_0 = -1$ لپاره (د P_{W1} کيڼ لور ته) $f''(-1)=-9<0$ له دې لاس ته راځي: ښی کږوالی(وتلی) $]-\infty;-0[$

د $x_0 = 1$ لپاره (د P_{W1} او P_{W2} ترمنځ) $f''(1)=3>0$ لاس ته راځي: کيڼ کوږوالی (ننوتی) $]0;2[$

د $x_0 = 3$ لپاره (ښی له P_{W2}) $f''(3)=-9<0$ لاس ته راځي: ښي کږوالی(وتلی) $]2;\infty[$

يوغږيزوالی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مخامخ لپاره کره یوغریز جګیدونکی	$]-\infty;0[$
د مخامخ لپاره کره یوغریز جګیدونکی	$]0;3[$
د مخامخ لپاره کره یوغریز ټیټیدونکی	$]3;\infty[$

اتم: د تعریفورشو ژی ټکي:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{4}x^4 + x^3\right) = \lim_{x\to-\infty} x^4\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} x^4 \cdot \underbrace{\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{x}\right)}_{-\frac{1}{4}} = -\frac{1}{4}\cdot \lim_{x\to-\infty} x^4 = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\frac{1}{4}\cdot\lim_{x\to\infty} x^4 = -\infty$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty}$$

افراطي ارزښتونه

تمرینونه د کور کار**I** :

د دریمې درجې ټول یا تام راشنل توابعو افراطي ټکي

د لاندې ټول راشنل(هوښیار) توابعو افراطي ارزښتونه مطالعه کړی او په ممکنه حالت کې یې انحرافي ټکي پیدا کړی.

اول - $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x$ دویم - $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 2x^2$

دریم - $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 8x$ څلورم - $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{3}{2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم - $f(x)=\frac{1}{9}x^3-\frac{1}{3}x^2-\frac{8}{3}x+\frac{26}{9}$ شپږم - $f(x)=\frac{2}{5}x^3-\frac{22}{5}x^2+14x-10$

اوم - $f(x)=\frac{1}{9}x^3-x^2+3x$ اتم- $f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x^2+4$

نهم - $f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x^2+3x-4$ لسم - $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-2x-3$

حلونه

تمرينونه: مشتقشميرنه **I**

نتيجې او مفصل حلونه

نتيجې

اول - $P_{Max}(-2|4)$ $P_{Min}(2|-4)$

دويم - $P_{Max}\left(\frac{8}{3}\approx 2,67 \,\middle|\, \frac{128}{27}\approx 4,74\right)$ $P_{Min}(0|0)$

دريم - $P_{Max}\left(\frac{4}{3}\approx 1,33 \,\middle|\, \frac{128}{27}\approx 4,74\right)$ $P_{Min}(4|0)$

څلورم - $P_{Max}\left(\frac{5}{3}\approx 1,67 \,\middle|\, \frac{128}{27}\approx 4,74\right)$ $P_{Min}(-1|0)$

پنځم - $P_{Max}(-2|6)$ $P_{Min}(4|-6)$

شپږم - $P_{Max}\left(\frac{7}{3}\approx 2,33 \,\middle|\, \frac{512}{135}\approx 3,79\right)$ $P_{Min}(5|0)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوم - انحرافي ټکي نه شته اتم - $P_{Max}(0|4)$ $P_{Min}(4|-4)$

نهم - انحرافي ټکي شتون نه لري.

لسم - $P_{Max}\left(-1-\sqrt{3}\ |\ 3{,}131\right)$ $P_{Min}\left(-1+\sqrt{3}\approx 0{,}732\ |\ -3{,}797\right)$

پام: د انحرافي ټکو کې رينه وه، نو د جبشمېري سره دې شمېرنه وشي، ځکه چې پرته له دې به شمېرنه ډېر وخت ونيسي.

مفصل حلونه

اول – مفصل حل

شميرنه:

1 – تابع مساوات د مشتق سره

$$f(x)=\frac{1}{4}x^3-3x \qquad f'(x)=\frac{3}{4}x^2-3 \qquad f''(x)=\frac{3}{2}x$$

- د افقي يا پروت محور سره تانجنتونه:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{3}{4}x^2-3}_{\text{مربع مساوات}} =0 \Big| \cdot\frac{4}{3} \Leftrightarrow x^2-4=0 \,|+4$$

$$\Leftrightarrow x^2=4 \,|\sqrt{\ } \Leftrightarrow |x|=2 \Rightarrow x_1=2 \qquad x_2=-2$$

_ ازمايښت چې ايا يو انحرافي ټکی مخ ته لرو:

$$f''(x_1)=f''(2)=\frac{3}{2}\cdot 2=3>0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_1=2$$

$$f''(x_2)=f''(-2)=\frac{3}{2}\cdot(-2)=-3<0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_2=-2$$

- د انحرافي ارزښتونو شمېرنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x_1) = f(2) = \frac{1}{4}2^3 - 3 \cdot 2 = \frac{8}{4} - 6 = 2 - 6 = -4$$

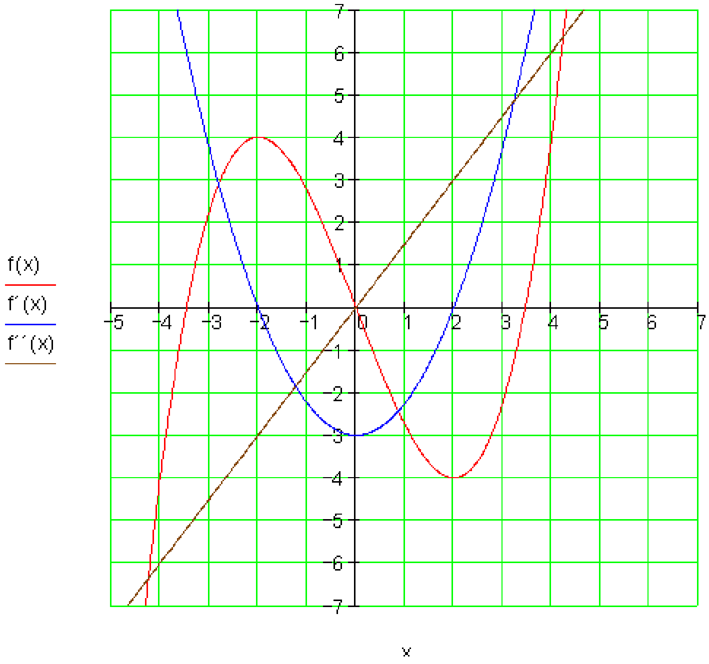
$$f(x_2) = f(-2) = \frac{1}{4}(-2)^3 - 3 \cdot (-2) = -\frac{8}{4} + 6 = -2 + 6 = 4$$

- انحرافي ټکي:

$$P_{Min}(2| -4) \qquad P_{Max}(-2| 4)$$

ګرافونه:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x \qquad f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3 \qquad f''(x) = \frac{3}{2}x$$



دويم – مفصل حل.

(c) ketabton.com: The Digital Library

شمیرنه:

1 – تابع مساوات د مشتق سره

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 2x^2 \qquad f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 4x \qquad f''(x) = -3x + 4$$

2 - د پروت یا افقي تانجنت ځایونه:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{-\frac{3}{2}x^2 + 4x}_{\text{quadratische Gleichung}} = 0 \Leftrightarrow x\left(-\frac{3}{2}x + 4\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$-\frac{3}{2}x + 4 = 0 | \cdot (-1) \Leftrightarrow \frac{3}{2}x - 4 = 0 | + 4 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x = 4 | \cdot \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{8}{3} \Rightarrow \quad x_2 = \frac{8}{3}$$

3 - ازمایښت، چې ایا یو انحرافي ټکی مخ ته لرو:

$$f''(x_1) = f''(0) = -3 \cdot 0 + 4 = 4 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_1 = 0$$

$$f''(x_2) = f''\left(\frac{8}{3}\right) = -3 \cdot \frac{8}{3} + 4 = -8 + 4 = -4 < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_2 = \frac{8}{3}$$

4 - د انحرافي ارزښتونو شمیرنه

$$f(x_1) = f(0) = -\frac{1}{2} \cdot 0^3 + 2 \cdot 0^2 = 0$$

$$f(x_2) = f\left(\frac{8}{3}\right) = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^3 + 2 \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^2 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{512}{27} + 2 \cdot \frac{64}{9} = -\frac{256}{27} + \frac{384}{27} = \frac{128}{27}$$

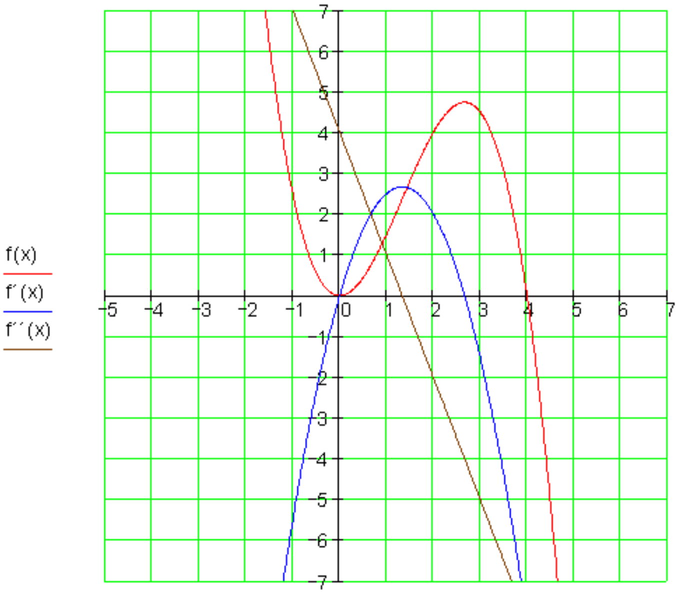
5 – انحرافي ټکي

$$\underline{\underline{P_{Min}(0|0)}} \qquad \underline{\underline{P_{Max}\left(\frac{8}{3} \approx 2,67 \,\middle|\, \frac{128}{27} \approx 4,74\right)}}$$

گرافونه :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 2x^2 \qquad f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 4x \qquad f''(x) = -3x + 4$$



دريم - مفصل حل:شميرنه:

1 – تابع مساوات د مشتق سره

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 8x \qquad f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 8x + 8 \qquad f''(x) = 3x - 8$$

2 - د پورت يا افقي تانجنت ځايونه:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{3}{2}x^2 - 8x + 8}_{\text{quadratische Gleichung}} = 0 \,\Big|\cdot \frac{2}{3} \Leftrightarrow x^2 - \frac{16}{3}x + \frac{16}{3} = 0$$

$$p = -\frac{16}{3} \quad q = \frac{16}{3} \quad D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{64}{9} - \frac{16}{3} = \frac{64}{9} - \frac{48}{9} = \frac{16}{9}$$

$$\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3} \Rightarrow x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \Bigg| \quad x_1 = \frac{8}{3} + \frac{4}{3} = \frac{12}{3} = 4 \qquad x_2 = \frac{8}{3} - \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

3 - ازمایښت، چې ایا یو انحرافي ټکی مخ ته لرو:

$$f''(x_1) = f''(4) = 3\cdot 4 - 8 = 4 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_1 = 4$$

$$f''(x_2) = f''\left(\frac{4}{3}\right) = 3\cdot\frac{4}{3} - 8 = -4 < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_2 = \frac{4}{3}$$

4 - د انحرافي ارزښتونو شمیرنه

$$f(x_1) = f(4) = \frac{1}{2}\cdot 4^3 - 4\cdot 4^2 + 8\cdot 4 = \frac{1}{2}\cdot 64 - 64 + 32 = 32 - 64 + 32 = 0$$

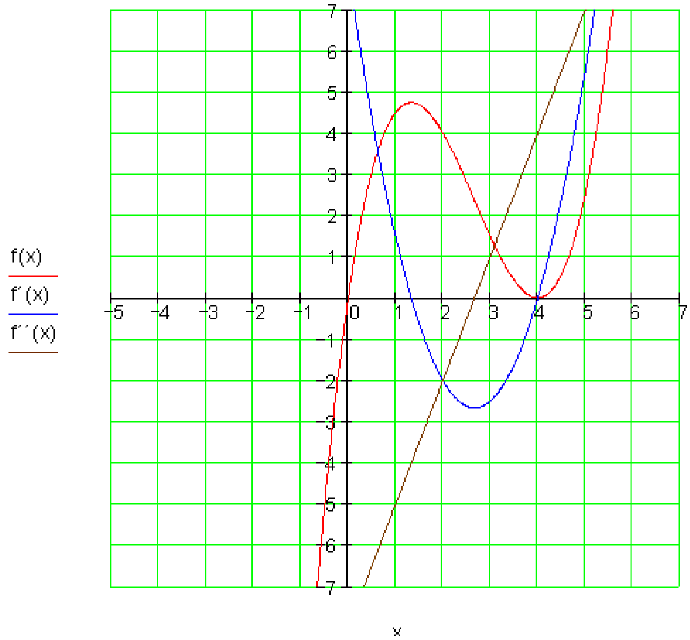
$$f(x_2) = f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^3 - 4\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 8\cdot\frac{4}{3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{64}{27} - 4\cdot\frac{16}{9} + \frac{32}{3}$$

$$= \frac{32}{27} - \frac{192}{27} + \frac{288}{27} = \frac{128}{27}$$

$$\underline{\underline{P_{Min}(4|\,0)}} \qquad \underline{\underline{P_{Max}\left(\frac{4}{3} \approx 1{,}33 \;\middle|\; \frac{128}{27} \approx 4{,}74\right)}}$$

5 - انحرافي ټکي:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 8x \qquad f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 8x + 8 \qquad f''(x) = 3x - 8$$



ګرافونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

مفصل حل -

شمیرنه: خلورم:

1 – تابع مساوات د مشتق سره

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} \qquad f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + x + \frac{5}{2} \qquad f''(x) = -3x + 1$$

2 - د پورت یا افقي تانجنت ځایونه:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{-\frac{3}{2}x^2 + x + \frac{5}{2}}_{\text{quadratische Gleichung}} = 0 \,|\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) \Leftrightarrow x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{5}{3} = 0$$

$$p = -\frac{2}{3} \quad q = -\frac{5}{3} \quad D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{9} + \frac{5}{3} = \frac{1}{9} + \frac{15}{9} = \frac{16}{9}$$

$$\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3} \Rightarrow x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \frac{5}{3} \\ x_2 = \frac{1}{3} - \frac{4}{3} = -1 \end{array} \right.$$

3 - ازمایښت، چې ایا یو انحرافي ټکی مخ ته لرو:

$$f''(x_1) = f''\left(\frac{5}{3}\right) = -3 \cdot \frac{5}{3} + 1 = -4 < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_1 = \frac{5}{3}$$

$$f''(x_2) = f''(-1) = -3 \cdot (-1) + 1 = 4 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_2 = -1$$

4 - د انحرافي ارزښتونو شمیرنه

$$f(x_1) = f\left(\frac{5}{3}\right) = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^3 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^2 + \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{5}{3}\right) + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{125}{27} + \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{9} + \frac{25}{6} + \frac{3}{2}$$

$$= -\frac{125}{54} + \frac{75}{54} + \frac{225}{54} + \frac{81}{54} = \frac{256}{54} = \frac{128}{27}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

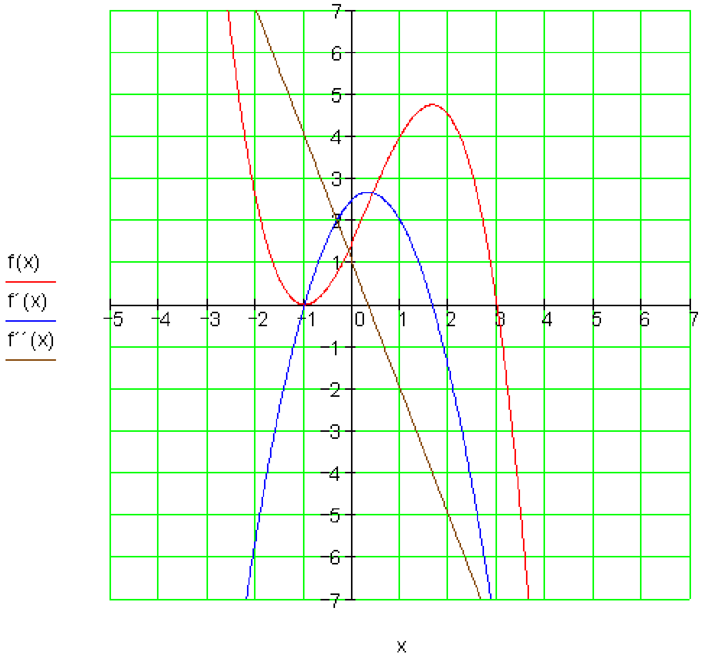
$$f(x_2) = f(-1) = -\frac{1}{2}\cdot(-1)^3 + \frac{1}{2}\cdot(-1)^2 + \frac{5}{2}\cdot(-1) + \frac{3}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{5}{2} + \frac{3}{2} = 0$$

5 – انحرافي ټکي

$$\underline{\underline{P_{Min}(-1|\,0)}} \qquad \underline{\underline{P_{Max}\left(\frac{5}{3}\approx 1,67 \,\middle|\, \frac{128}{27}\approx 4,74\right)}}$$

ګرافونه

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} \qquad f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + x + \frac{5}{2} \qquad f''(x) = -3x + 1$$



پنځم:

1 – تابع مساوات د مشتق سره

$$f(x) = \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{26}{9} \qquad f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{8}{3} \qquad f''(x) = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$$

2 - د پروت يا افقي تانجنت ځايونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x-\frac{8}{3}}_{\text{quadratische Gleichung}} = 0|\cdot 3 \Leftrightarrow x^2-2x-8=0$$

$$p=-2 \quad q=-8 \quad D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=1+8=9$$

$$\Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{9}=3 \Rightarrow x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D} \left| \begin{array}{l} x_1=1+3=4 \\ x_2=1-3=-2 \end{array} \right.$$

3 - ازمایښت، چې ایا یو انحرافي ټکی مخ ته لرو:

$$f''(x_1)=f''(4)=\frac{2}{3}\cdot 4-\frac{2}{3}=\frac{6}{3}=2>0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_1=4$$

$$f''(x_2)=f''(-2)=\frac{2}{3}\cdot(-2)-\frac{2}{3}=-\frac{6}{3}=-2<0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_2=-2$$

4 - د انحرافي ارزښتونو شمیرنه

$$f(x_1)=f(4)=\frac{1}{9}\cdot 4^3-\frac{1}{3}\cdot 4^2-\frac{8}{3}\cdot 4+\frac{26}{9}=\frac{1}{9}\cdot 64-\frac{1}{3}\cdot 16-\frac{32}{3}+\frac{26}{9}$$

$$=\frac{64}{9}-\frac{48}{9}-\frac{96}{9}+\frac{26}{9}=-\frac{54}{9}=-6$$

$$f(x_2)=f(-2)=\frac{1}{9}\cdot(-2)^3-\frac{1}{3}\cdot(-2)^2-\frac{8}{3}\cdot(-2)+\frac{26}{9}=\frac{1}{9}\cdot(-8)-\frac{1}{3}\cdot 4+\frac{16}{3}+\frac{26}{9}$$

$$=-\frac{8}{9}-\frac{12}{9}+\frac{48}{9}+\frac{26}{9}=\frac{54}{9}=6$$

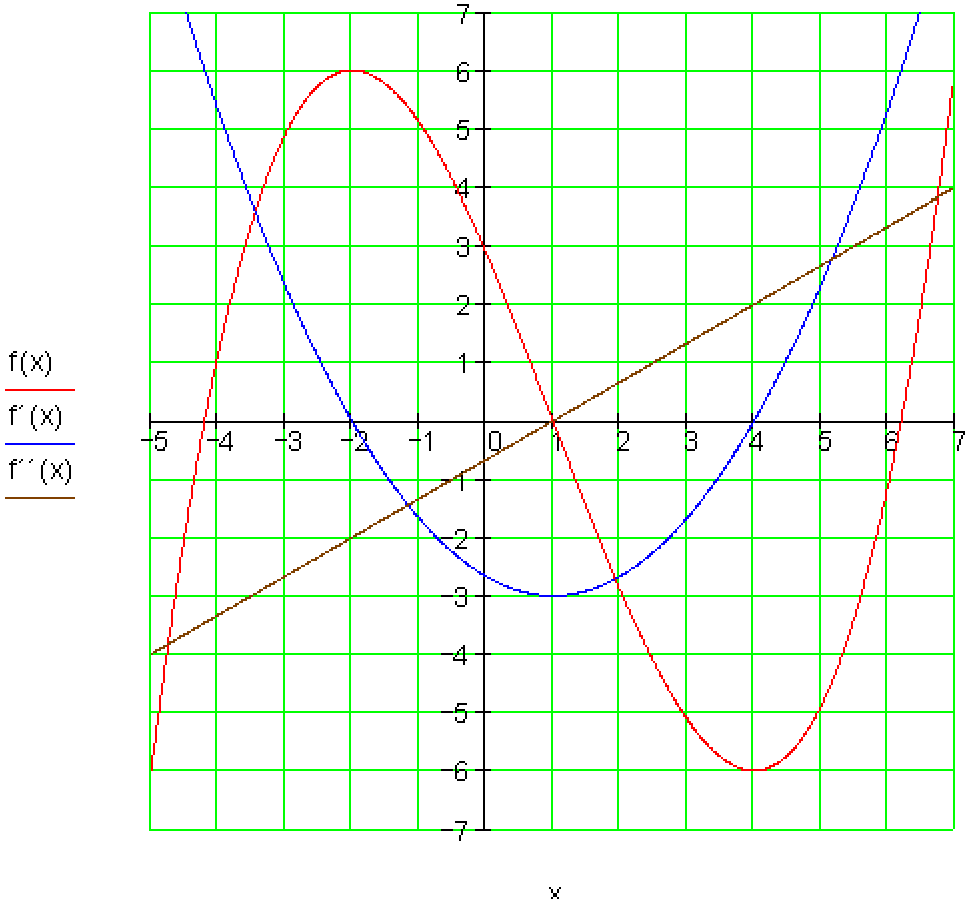
5 - افراطي ټکي

$$\underline{\underline{P_{Min}(4|-6)}} \qquad \underline{\underline{P_{Max}(-2|6)}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

گرافونه

$$f(x) = \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{26}{9} \qquad f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{8}{3} \qquad f''(x) = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$$



شيپږم:

1 – تابع مساوات د مشتق سره

$$f(x) = \frac{2}{5}x^3 - \frac{22}{5}x^2 + 14x - 10 \qquad f'(x) = \frac{6}{5}x^2 - \frac{44}{5}x + 14 \qquad f''(x) = \frac{12}{5}x - \frac{44}{5}$$

2 - د پورت يا افقي تانجنت ځايونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{6}{5}x^2 - \frac{44}{5}x + 14}_{\text{quadratische Gleichung}} = 0 \,|\cdot \frac{5}{6} \Leftrightarrow x^2 - \frac{22}{3}x + \frac{35}{3} = 0$$

$$p = -\frac{22}{3} \quad q = \frac{35}{3} \quad D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{121}{9} - \frac{35}{3} = \frac{121}{9} - \frac{105}{9} = \frac{16}{9}$$

$$\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3} \Rightarrow x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \;\left|\; \begin{aligned} x_1 &= \frac{11}{3} + \frac{4}{3} = \frac{15}{3} = 5 \\ x_2 &= \frac{11}{3} - \frac{4}{3} = \frac{7}{3} \end{aligned}\right.$$

3 - ازمایښت، چې ایا یو انحرافي ټکی مخ ته لرو:

$$f''(x_1) = f''(5) = \frac{12}{5} \cdot 5 - \frac{44}{5} = \frac{16}{5} > 0 \Rightarrow$$

د $x_1 = 5$ په ځای کې نسبئ مینیموم

$$f''(x_2) = f''\left(\frac{7}{3}\right) = \frac{12}{5} \cdot \frac{7}{3} - \frac{44}{5} = \frac{28}{5} - \frac{44}{5} = -\frac{16}{5} < 0 \Rightarrow$$

د $x_2 = \frac{7}{3}$ په ځای کې نسبئ مینیموم

4 - د انحرافي ارزښتونو شمیرنه

$$f(x_1) = f(5) = \frac{2}{5} \cdot 5^3 - \frac{22}{5} \cdot 5^2 + 14 \cdot 5 - 10 = 50 - 110 + 70 - 10 = 0$$

$$f(x_2) = f\left(\frac{7}{3}\right) = \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{7}{3}\right)^3 - \frac{22}{5} \cdot \left(\frac{7}{3}\right)^2 + 14 \cdot \frac{7}{3} - 10 = \frac{2}{5} \cdot \frac{343}{27} - \frac{22}{5} \cdot \frac{49}{9} + \frac{98}{3} - 10$$

$$= \frac{686}{135} - \frac{3234}{135} + \frac{4410}{135} - \frac{1350}{135} = \frac{512}{135}$$

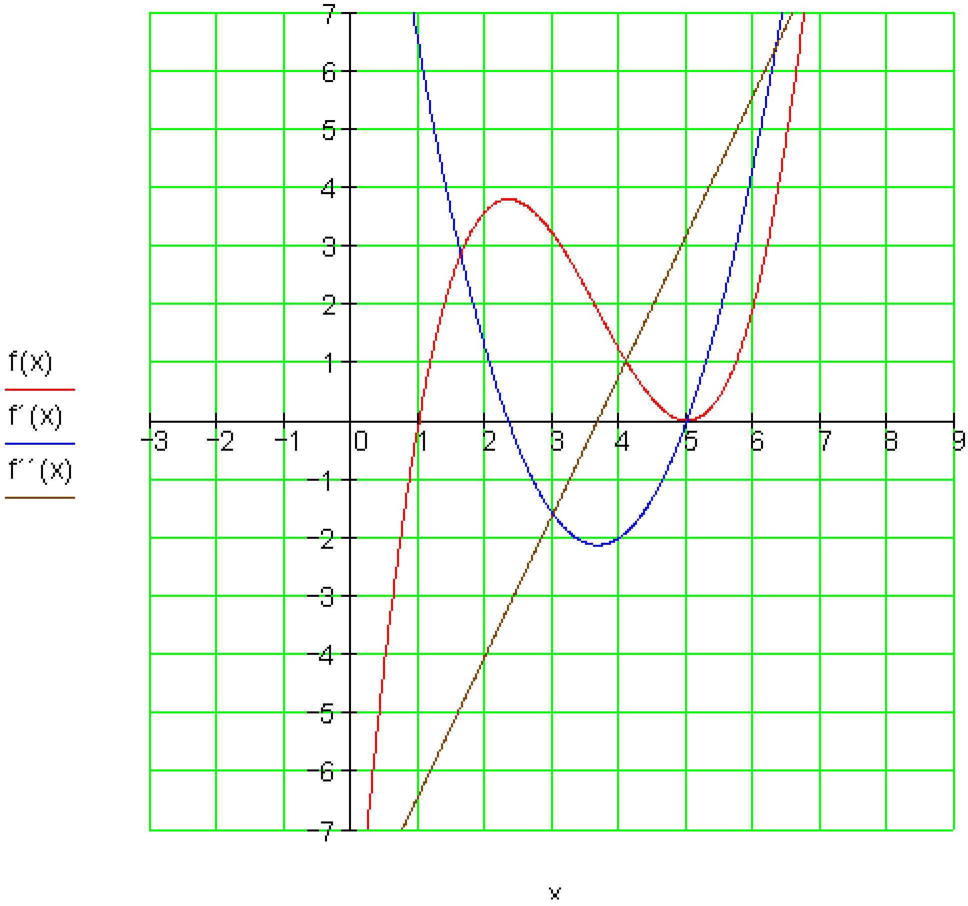
5 - انحرافي ټکي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\underline{\underline{P_{Min}(5|0)}} \qquad \underline{\underline{P_{Max}\left(\frac{7}{3}\approx 2{,}33 \;\middle|\; \frac{512}{135}\approx 3{,}79\right)}}$$

ګرافونه:

$$f(x)=\frac{2}{5}x^3-\frac{22}{5}x^2+14x-10 \qquad f'(x)=\frac{6}{5}x^2-\frac{44}{5}x+14 \qquad f''(x)=\frac{12}{5}x-\frac{44}{5}$$

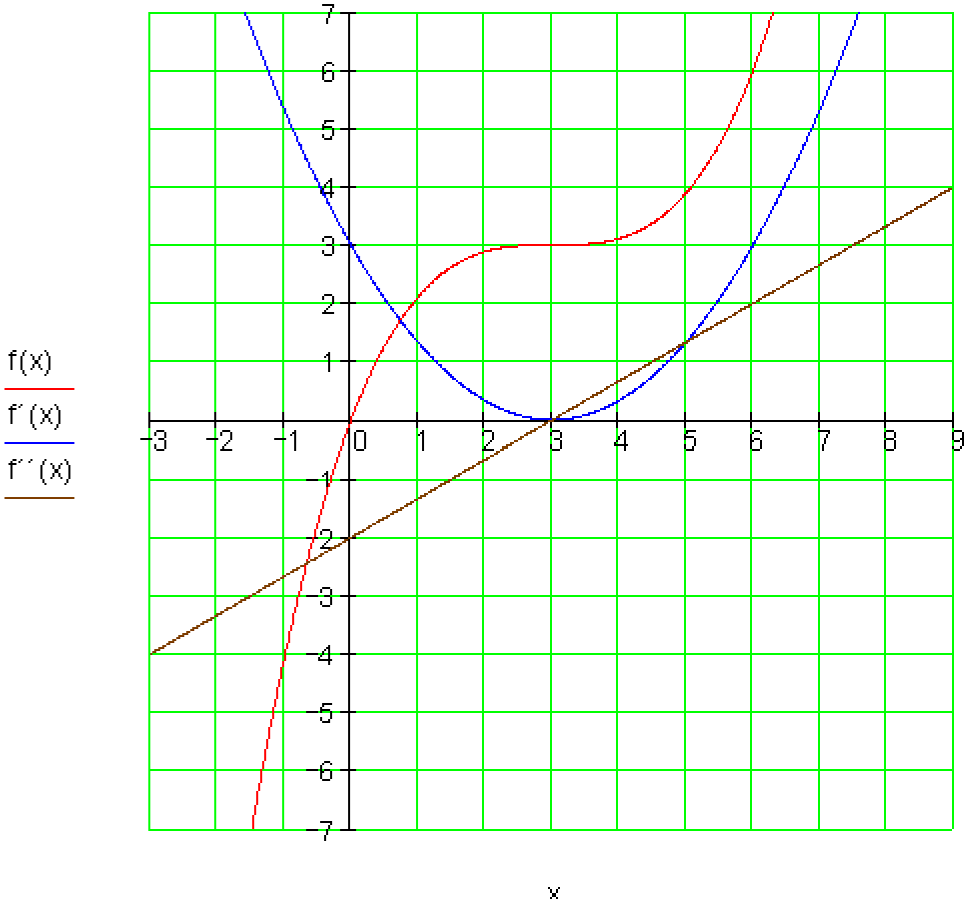


اووم: شمیرنه:

1 – تابع مساوات د مشتق سره

$$f(x)=\frac{1}{9}x^3-x^2+3x \qquad f'(x)=\frac{1}{3}x^2-2x+3 \qquad f''(x)=\frac{2}{3}x-2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



2 - د پروت يا افقي تانجنت ځايونه:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{3}x^2-2x+3}_{\text{quadratische Gleichung}}=0|\cdot 3 \Leftrightarrow x^2-6x+9=0$$

$$p=-6 \quad q=9 \quad D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=9-9=0$$

$$\Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{0}=0 \Rightarrow x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D} \left| \begin{array}{l} x_1=3 \\ x_2=3 \end{array}\right.$$

د لومړي مشتق دبل صفرځايونه په دې معنا دي، چي په دې ځايونو کې انحرافي ارزښتونه نه شته. ازمايښت به هم دا وښايي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

3 - ازمایښت، چې ایا یو انحرافي ټکی مخ ته لرو:

$$f''(x_{1/2}) = f''(3) = \frac{2}{3}\cdot 3 - 2 = 0 \Rightarrow$$

له دې لاس ته راځي، چې افراطي ټکي نه شته

ګرافونه: ګراف د تیر مخ په سر کې راوړل شویاو فرمول یې دا لاندې دی.

$$f(x) = \frac{1}{9}x^3 - x^2 + 3x \quad f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 3 \quad f''(x) = \frac{2}{3}x - 2$$

اتم: شمیرنه:

1 – تابع مساوات د مشتق سره

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4 \quad f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x \quad f''(x) = \frac{3}{2}x - 3$$

2 - د پورت یا افقي تانجنت ځایونه:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{3}{4}x^2 - 3x}_{} = 0| \Leftrightarrow x\left(\frac{3}{4}x - 3\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

مربع مساوات

$$\frac{3}{4}x - 3 = 0|+3 \Leftrightarrow \frac{3}{4}x = 3|\cdot\frac{4}{3} \Leftrightarrow x = 4 \Rightarrow x_2 = 4$$

3 - ازمایښت، چې ایا یو انحرافي اروښتونه مخ ته لرو:

$$f''(x_1) = f''(0) = \frac{3}{2}\cdot 0 - 3 = -3 < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_1 = 0$$

$$f''(x_2) = f''(4) = \frac{3}{2}\cdot 4 - 3 = 3 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_2 = 4$$

4 - د انحرافي ارزښتونو شمیرنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x_1) = f(0) = \frac{1}{4}\cdot 0^3 - \frac{3}{2}\cdot 0^2 + 4 = 4$$

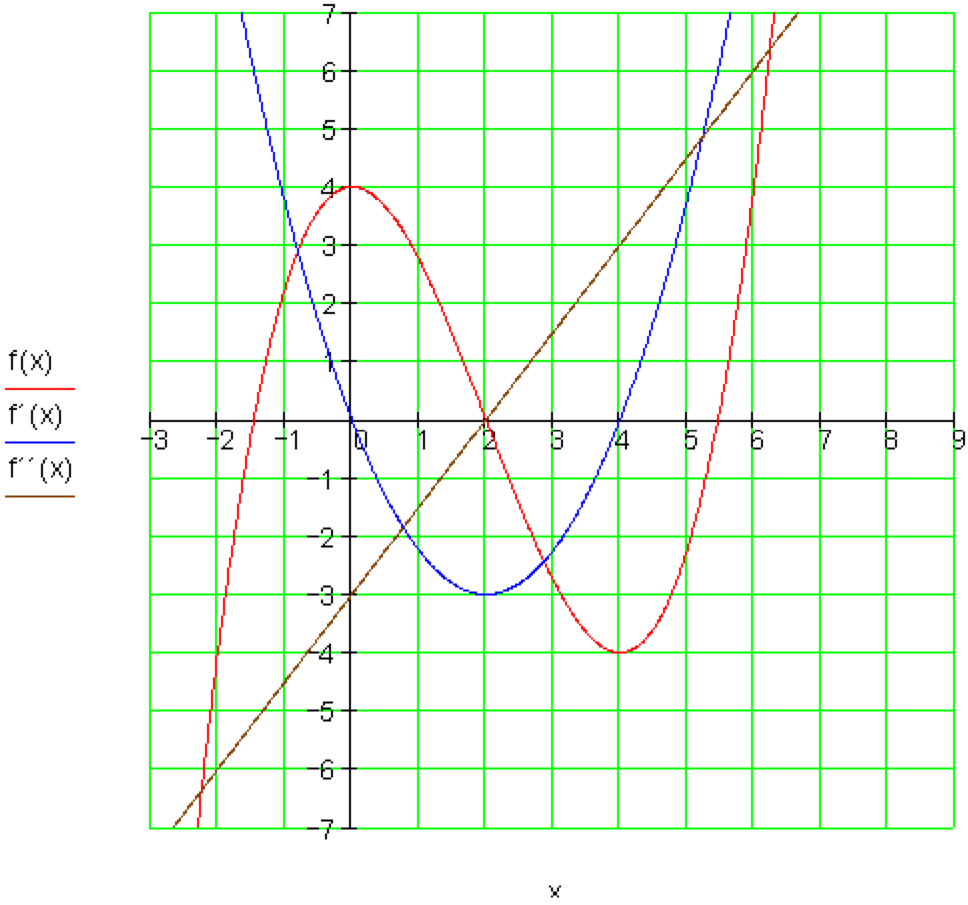
$$f(x_2) = f(4) = \frac{1}{4}\cdot 4^3 - \frac{3}{2}\cdot 4^2 + 4 = 16 - 24 + 4 = -4$$

5 - انحرافي ټکي

$P_{Min}(4|-4)$ $P_{Max}(0|4)$

گرافونه:

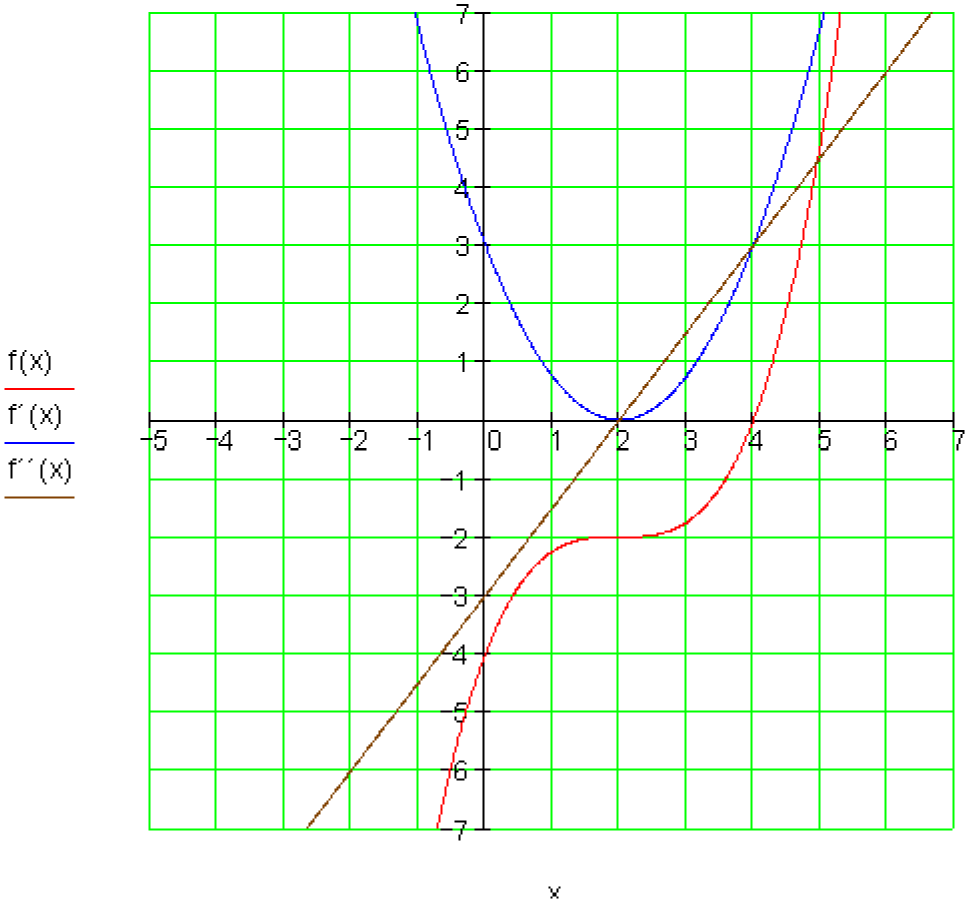
$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4 \quad f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x \quad f''(x) = \frac{3}{2}x - 3$$



نهم: شمیرنه: 1 – تابع مساوات د مشتق سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x - 4 \qquad f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x + 3 \qquad f''(x) = \frac{3}{2}x - 3$$



2 - د پورت یا افقي تانجنت ځایونه:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{3}{4}x^2 - 3x + 3}_{\text{quadratische Gleichung}} = 0 \,\Big|\cdot \frac{4}{3} \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$p = -4 \quad q = 4 \quad D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 4 - 4 = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{0} = 0 \Rightarrow x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \;\left|\; \begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = 2 \end{array}\right.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لومړي مشتق دبل صفرځایونه په دې معنا دي، چې په دې ځایونو کې انحرافي ارزښتونه نه شته. ازمایښت به هم دا وښايي.

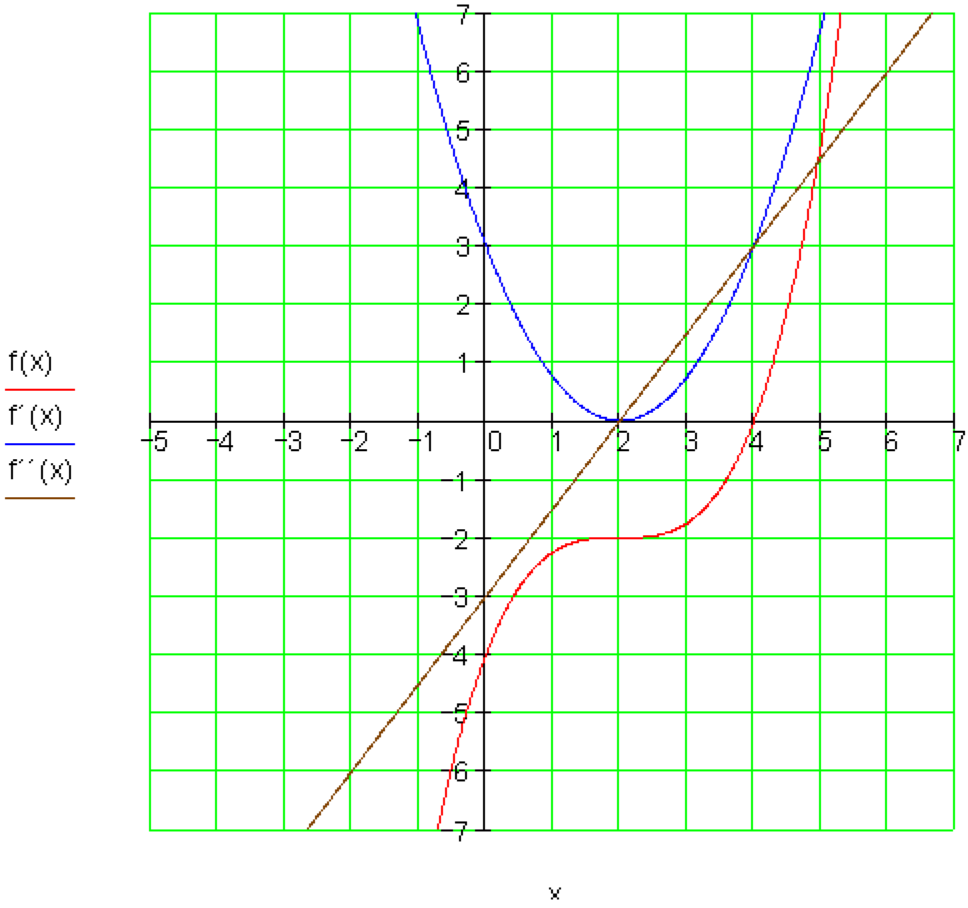
3 - ازمایښت، چې ایا انحرافي ارزښتونه مخ ته لرو:

$$f''(x_{1/2}) = f''(2) = \frac{3}{2} \cdot 2 - 3 = 0 \Rightarrow$$

له دې لاس ته راځي، چې انحرافي ارزښتونه په $x_{1/2} = 2$ کې نه شته.

ګرافونه: ګراف په پر مخ کې او فمول يې بیا هم دل لاندې:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x - 4 \quad f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x + 3 \quad f''(x) = \frac{3}{2}x - 3$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

لسم: شمیرنه:

1 – تابع مساوات د مشتق سره

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-2x-3 \qquad f'(x)=x^2+2x-2 \qquad f''(x)=2x+2$$

2 - د پورت یا افقي تانجنت ځایونه:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \underbrace{x^2+2x-2}_{\text{quadratische Gleichung}}=0$$

$$p=2 \quad q=-2 \quad D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=1+2=3$$

$$\Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{3} \Rightarrow x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D} \;\left|\; \begin{array}{l} x_1=-1+\sqrt{3} \\ x_2=-1-\sqrt{3} \end{array}\right.$$

3 - ازماینښت، چې ایا یو انحرافي ټکی مخ ته لرو:

$$f''(x_1)=f''\left(-1+\sqrt{3}\right)=2\cdot\left(-1+\sqrt{3}\right)+2=-2+2\sqrt{3}+2=2\sqrt{3}>0$$

$$\Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_1=-1+\sqrt{3}$$

$$f''(x_2)=f''\left(-1-\sqrt{3}\right)=2\cdot\left(-1-\sqrt{3}\right)+2=-2-2\sqrt{3}+2=-2\sqrt{3}<0$$

$$\Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_2=-1-\sqrt{3}$$

4 - د انحرافي ارزښتونو شمېرنه

$$f(x_1)=f\left(-1+\sqrt{3}\right)=\frac{1}{3}\left(-1+\sqrt{3}\right)^3+\left(-1+\sqrt{3}\right)^2-2\left(-1+\sqrt{3}\right)-3\approx-3{,}797$$

$$f(x_2)=f\left(-1-\sqrt{3}\right)=\frac{1}{3}\left(-1-\sqrt{3}\right)^3+\left(-1-\sqrt{3}\right)^2-2\left(-1-\sqrt{3}\right)-3\approx 3{,}131$$

شمیرنه د جبشمیري سره سر ته رسیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

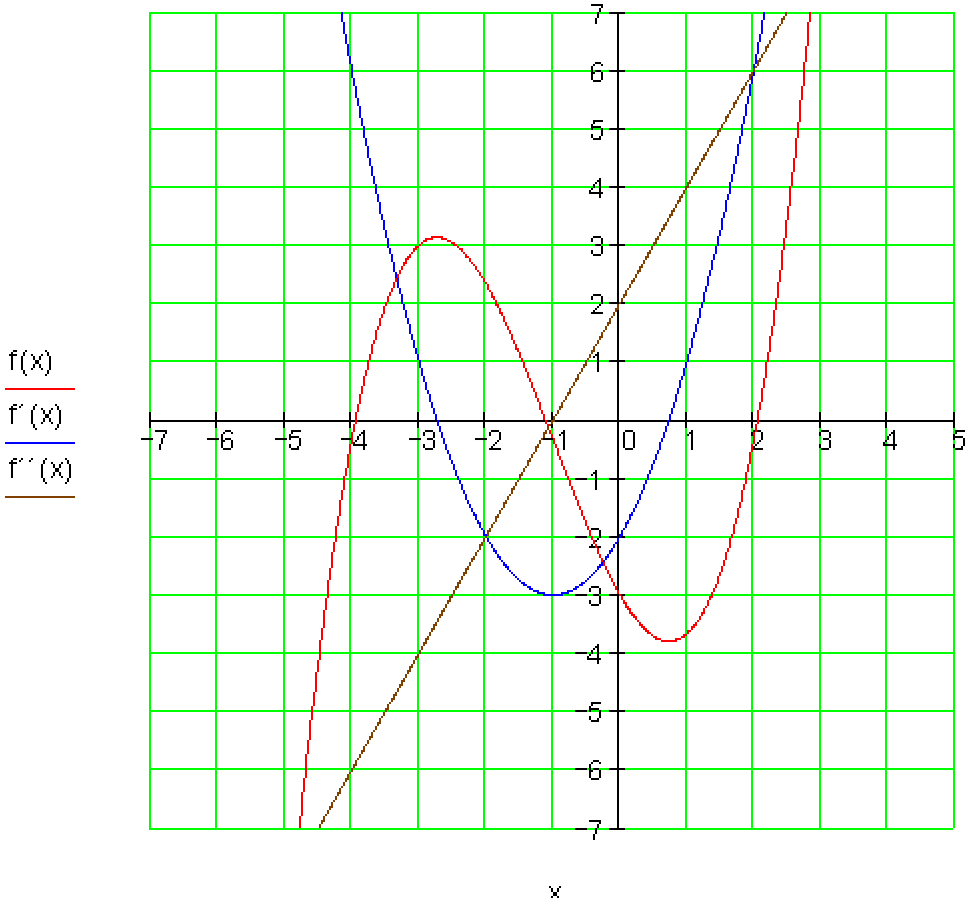
---

5 - انحرافي تکي

$P_{Min}\left(-1+\sqrt{3}\approx 0,732 \;\middle|\; -3,797\right)$ $P_{Max}\left(-1-\sqrt{3} \;\middle|\; 3,131\right)$

گرافونه:

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2x - 3 \qquad f'(x) = x^2 + 2x - 2 \qquad f''(x) = 2x + 2$



پوښتنې

(c) ketabton.com: The Digital Library

مشتقشمیرنه IX

لومړی:

د منحني ټکي د پراته تانجنت سره وشمېرئ. ایا دا د منحني ټکي انحرافي ارزښتونه دئ؟ ستا پریکړه په دلایلو روښانه کړه.

الف – $f(x)=\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{4}x$ ب - $f(x)=\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2+4$ پ - $f(x)=-\frac{1}{4}x^4+x^3-2$

دویم: د تابع f(x) د ګراف انحرافي ټکي زشمېرئ. په یوه مناسب وضعیه قیمت سیستم کې یې ګراف وباسئ.	$f(x)=\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{2}x$
دریم: a داسي وټاکئ، چې تابع f(x) په x = 2 کي یو انحرافي ځاي ولرئ. دا کوم ډول انحرافي ځاي دئ؟	$f(x)=-\frac{1}{12}x^3+ax^2+4$ د $x\in\mathbb{R}$ سره
څلورم: یو تابع f(x) ورکړشوی دی. a داسي وټاکئ، چې د f(x) د ګراف افراطي ټکی د x -محور باندط پروت وي. ایا دا افراطي ټکی جګ - یا ټیټ ټکی دی؟	$f(x)=\frac{1}{8}x^4-x^3+a$

پنځم:

تابع f(x) دې انحرافي ارزښت ونه لري. د دې حالت لپاره دي ضریبونه کوم شرایطپورهکړي او f(x) څو صفرځایونه لري؟ ستاسو ځواب په دلایلو روښانه کړی؟	$f(x)=x^3+bx^2+cx+d$

(c) ketabton.com: The Digital Library

شپږم:

تابع $f_a(x) = ax(x+3)^2$ ورکړشوی د $x \in \mathbb{R}$ او $a > 0.$ سره.

د خورا جګ اوخورا ټيټتکي ترنکرښه د وضعيه قيمت سيسم محور سره مثلث جوړوي.
د مثلث سطحه د a په تابعيت سره پيداکړی. د دې د مخه يو شکل وباسی.

اووم: لاندې په انحرافي ارزښتزنو مطالعه کړی:

الف-

x	0,5	1	1,5	2	2,5
$f(x)$	1,6666	1,8333	1,75	1,6666	1,8333
$f'(x)$	0,75	0	−0,25	0	0,75

ب-

x	−3	−2	−1	0	1
$f(x)$	−0,149	−0,135	0,3678	3	13,591
$f'(x)$	−0,049	0,1353	1,1036	5	19,027

اتم: اتم - د دلاندې توابعو انحراف او انعطاف ټکو ارزښتونه وشميرى.

سربېره پردې د پوښتنو 6 ,5 ,4 ,1 او7 د محور غوځتکي (د تضاطع ټکي) وشميرى
او ګرافونه يې وکاږی.

الف - $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x$ ب - $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4$

پ - $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 - 2$ ت - $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 8x + \frac{26}{3}$

ټ - $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2$ ث - $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{9}{4}x^2 + x - 3$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ج - $f(x)=\frac{1}{27}x^5-\frac{2}{3}x^3+3x$

حلونه

مشتقشميرنه IX

مفصل حلونه:

اول - مفصل حلونه:

الف – مشتق:

الف- $f(x)=\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{4}x$ مشتق $f'(x)=\frac{3}{8}x^2-\frac{3}{4}$

پروت يا افقي تانجنت

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{3}{8}x^2-\frac{3}{4}=0\Rightarrow x_{1/2}=\pm\sqrt{2}$$

مشتق $f'(x)$د $x_{1/2}$ په ځای کې ساده صفرځايونه لري او مخنخبنه بدلوي. پس $f(x)$ دوه انحرافي ټکي لري.

ب - $f(x)=\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2+4$ مشتق $: f'(x)=\frac{1}{2}x^2-x$

پروت يا افقي تانجنت: $f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{1}{2}x^2-x=0\Rightarrow x_1=0;\ x_2=2$

مشتق $f'(x)$د $x_{1/2}$ په ځای کې ساده صفرځايونه لري او مخنخبنه بدلوي. پس $f(x)$ دوه انحرافي ټکي لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x \quad \text{مشتق} \quad f'(x) = \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{4}$$

پروت (افقي) تانجنت:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{2}$$

مشتق $f'(x)$د $x_{1/2}$ سره ساده صفرځايونه لري او مخنخبنه بدلوي. پس $f(x)$ دوه انحرافي ارزښتوه لري.

ب -

مشتق: $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - x$$

پروت (افقي) تانجنت

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - x = 0 \Rightarrow x_1 = 0;\ x_2 = 2$$

مشتق $f'(x)$د $x_{1/2}$ سره ساده صفرځايونه لري او مخنخبنه بدلوي. پس $f(x)$ دوه افراطي ارزښتوه لري.

پ – $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 - 2$ مشتق: $f'(x) = -x^3 + 3x^2$

پروت (افقي) تانجنت: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^3 + 3x^2 \Rightarrow x_{1/2} = 0;\ x_3 = 3$

مشتق $f'(x)$د $x_{1/2} = 0$ په ځای کې یو ډبل صفرځآی لري، دا په دې معنا چې د مخنخبې بدلېدنه شتون نه لري. پس $f(x)$ په دې ځای کې انحرافي ټکی نه لري. $x_3 = 3$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د f'(x) ساده صفرځاى دى، هلته د مخنخښي بدلېدنه منځ ته راځي. نو f(x) په دې ځاي کې افراطي ټکی لري.

دويم - مفصل حلونه:

$$f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x$$
$$f'(x) = \frac{3}{8}x^2 - 3x + \frac{9}{2}$$
$$f''(x) = \frac{3}{4}x - 3$$

د لوکال افراطي ټکو لپاره اړيين شرتونه:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{8}x^2 - 3x + \frac{9}{2} = 0 \,|\cdot \frac{8}{3}$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 12 = 0 \Rightarrow p = -8\,;\, q = 12\,;\, D = 4 \Rightarrow \boxed{x_1 = 6}\,;\, \boxed{x_2 = 2}$$
$$f''(x_1) = f''(6) = \frac{3}{2} \Rightarrow \text{rel Min} \quad f''(x_2) = f''(2) = -\frac{3}{2} \Rightarrow \text{rel Max}$$
$$\text{rel Min: } f(x_1) = f(6) = 0 \Rightarrow \boxed{P_{min}(6\,|\,0)}$$
$$\text{rel Max: } f(x_2) = f(2) = 4 \Rightarrow \boxed{P_{max}(2\,|\,4)}$$

يادونه: په پورته کې rel د relative لنډونه ده او د نسبي په معنا دی.

د ګراف د رسمولو لپاره نور ټکي هم اړيين دي

د y محور سره د تقاطع ټکی $\boxed{P_y(0\,|\,0)}$

صفرځايونه:

$$: f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

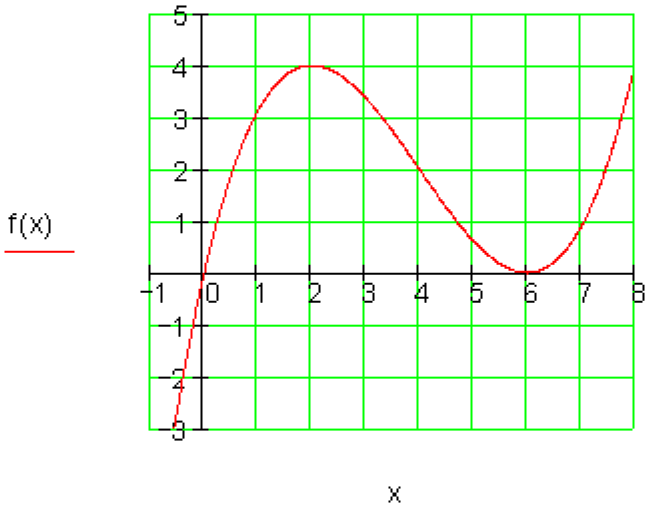
$$\Leftrightarrow x\left(\frac{1}{8}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{9}{2}\right)=0 \Rightarrow x_1=0$$

$$\frac{1}{8}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{9}{2}=0 \Rightarrow x_{2/3}=0$$

ډبل صفرځای

ارزښت جدول:

x	−1	0	1	2	3	4	5	6	7
f (x)	−6,125	0	3,125	4	3,375	2	0,615	0	0,875



دريم:

$$f(x)=-\frac{1}{12}x^3+ax^2+4; \qquad f'(x)=-\frac{1}{4}x^2+2a$$

پيل : په $x = 2$ کې افراطي ټکی په دې معنا دی چې:

$$f'(2)=0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}\cdot 2^2+2a\cdot 2=0 \Leftrightarrow \boxed{a=\frac{1}{4}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او له $: f(x) = -\frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + 4$ سره همداسي $f'(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x$

انحرافي ټکی: $: f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ همداسي x2 = 2

په x1 = 0 کې نسبي مين	$\Rightarrow f''(x_1) = f''(0) = \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow$ re = $\Rightarrow f''(x_1) = f''(2) = -\frac{1}{2} < 0 \Rightarrow$ | $f''(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$
په x2=2 کې نسبي ماکس	

ځلورم:

$$f(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^3 + a$$

د انحراف ټکی دې د x محور باندې پروت وي

دا په دې معنا چې : $f(x_E) = 0$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 \qquad f''(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x$$

د پراته يا افقي تانجنت ځايونه

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2\left(\frac{1}{2}x - 3\right) = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 0 \text{ und } x_3 = 6$$

د افراطي ځاي شتون په هکله ازماينت

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f''(x_{1/2}) = f''(0) = 0$ لاس ته راځي، چې په $x_{1/2} = 0$ کې افراطي ځای نه شته

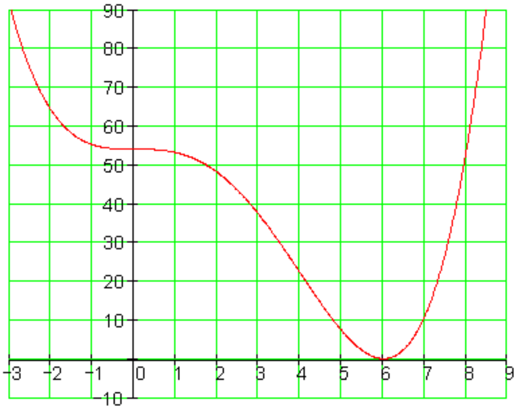
$$f''(x_3) = f''(6) = \frac{2}{3}\cdot 6^2 - 6\cdot 6 = 18 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min bei } x_3 = 6$$

د a متحولې ټاکنه

$$f(6) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{8}\cdot 6^4 - 6^3 + a = 0 \Leftrightarrow \boxed{a = 54}$$

د $f(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^3 + 54$ د $x_E = 6$ په ځای کې يو نسبي مينيموم لري

دا د x محور باندې پراته دي: $P_{Min}(6|0)$:



ځلورم:

$$f(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^3 + a$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

افراطي ټکي بآید د x په محور پرآته وي،دآ په دې معنآ چې: $f(x_E) = 0$:

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 \qquad f''(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x$$

د پرآته محور سره د تآنجنت ځآیونه

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2\left(\frac{1}{2}x - 3\right) = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 0 \text{ und } x_3 = 6$$

د یوه آکسرېموم شتون آزماېینت : $f''(x_{1/2}) = f''(0) = 0$:

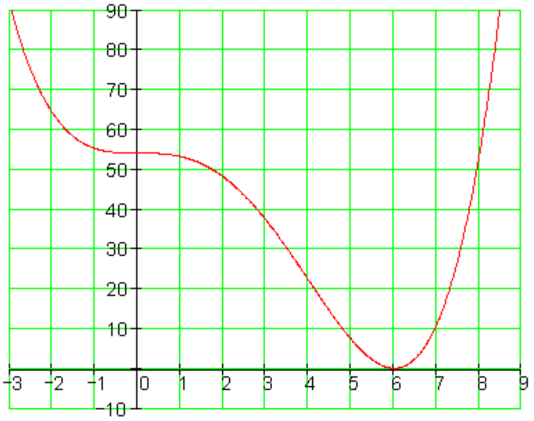
له دې لاس ته راځي، چې په $x_{1/2} = 0$ کې افراطي ځایونه نه شته

د متحولېa ټآکنه:

$$f(6) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{8}\cdot 6^4 - 6^3 + a = 0 \Leftrightarrow \boxed{a = 54}$$

$f(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^3 + 54$ د $x_E = 6$ ځآی کې یو نسبي مینیموم لري.

دآ په x محور پروت دی: $P_{Min}(6 \mid 0)$:



(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم:

$$f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$$

که د آنحرآف ټکي شتون ونه لري، بآید $f'(x) \neq 0$ بآور ولري:

یآ $f'(x) = 0$ د ډبل صفرځآي سره (لومړي مشتق بي له مخنخښې تغیر څخه)

$$f'(x) = 3x^2 + 2bx + c$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 2bx + c = 0 \Leftrightarrow \underbrace{x^2 + \frac{2}{3}bx + \frac{1}{3}c = 0}_{\text{quadratische Gleichung}}$$

$$p = \frac{2}{3}b\,;\; q = \frac{1}{3}c \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{9}b^2 - \frac{1}{3}c$$

$D<0$: مربع مسآوآت حل نه لرئ، که $\frac{1}{9}b^2 - \frac{1}{3}c < 0$ وي.

دآ په دې معنآ، چې $f(x)$ په دې حآلت کې پروت یآ آفقي تآنجنت نه لري. د$f(x)$ تابع ګراف له دریمې څلورمې یا ربعې څخه و لومړۍ څلورمې ته ځغلي.

تابع په کلکه همغږیز جګېدونکي د

$D=0$: مربع مساوات ډبل صفرځای لري،ګه $(1/9)b^2 - (1/3)c = 0$ وي.

دا په دې معنا $f(x)$چې یو پروت تانجنت لري. مګر دا چې د $f'(x)$ لپاره په دې ځاي کې د مخنخښې تغیر نه شته (ډبل صفرځای)، نو $f(x)$ افراطي ځایونه نه لري.

داا چې د مخه پوهیږ چې $f(x)$افراطي ټکی نه لري، نو $f(x)$ ټیک یو صفرځاي لري.

پنځم:

که د آنحرآف ټکي شتون ونه لري، بآید$f'(x)|=0$ بآور ولري:

یآ د ډبل صفرځآي سره (لومړي مشتق بي له مخنخښې تغیر څخه)

: مربع مسآوآت حل نه لرئ، که وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دآ په دې معنآ، چې په دې حآلت کې پروت یآ آفقي تآنجنت نه لري. د تابع ګراف له دریمې څلورمې یا ربعي څخه و لومړۍ څلورمې ته ځغلي.

تابع په کلکه همغږیز چګیدونکي ده

: مربع مساوات ډبل صفرځای لري،ګه وي.

دا په دې معنا چې یو پروت تانجنت لري. مګر دا چې د لپاره په دې ځاي کې د مخنخښې تغیر نه شته (ډبل صفرځای) انحرافي ځایونه نه لري.

داا چې د مخه پوهیږ چې انحرافي ټکی نه شته، تیک یو صفرځاي لري.

شپړږم:

$$f(x) = ax(x+3)^2 = ax^3 + 6ax^2 + 9ax$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 12ax + 9a \qquad f''(x) = 6ax + 12a$$

افراطي ټکي:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3ax^2 + 12ax + 9a = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = -1 \text{ bzw. } x_2 = -3$$

$$f''(x_1) = f''(-1) = 6a \cdot (-1) + 12a = a(-6+12) > 0 \Rightarrow \text{rel. Min bei } x_1 = -1$$

$$f''(x_2) = f''(-3) = 6a \cdot (-3) + 12a = (-18+12) < 0 \Rightarrow \text{rel. Max bei } x_2 = -3$$

$$P_{Max} : f(-3) = a \cdot (-3)(-3+3)^2 = 0 \Rightarrow \boxed{P_{Max}(-3 \mid 0)}$$

$$P_{Min} : f(-1) = a \cdot (-1)(-1+3)^2 = -4a \Rightarrow \boxed{P_{Min}(-1 \mid -4a)}$$

کربنیز مساوات د $P_{Max}(-3 \mid 0)$ او $P_{Min}(-1 \mid -4a)$ سره.

$$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-4a - 0}{-1-(-3)} = \frac{-4a}{2} = -2a \Rightarrow g(x) = -2ax + a_0$$

د $P_{Max}(-3 \mid 0)$ سره ټکي ازمایښت

$$g(-3) = 0 \Leftrightarrow -2a \cdot (-3) + a_0 = 0 \Leftrightarrow a_0 = -6a \Rightarrow \boxed{g(x) = -2ax - 6a}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د محور سره غوښتکي g(x) او $P_y(0|-6a)$ und $P_x(-3|0)$ دي.

د درېکودي یا مثلث سطحه: $A=\frac{g\cdot h}{2}=\frac{3\cdot 6a}{2}=\boxed{9a}$

(د مطلقه ارزښتونو سره کیدی شي وشمیرل شي):

د a=1 لپاره ګرافیکي انځورونه.

کربنه د x محور د $P_x(-3|0)$ په تکي کي غوڅوي او د y محور د $P_y(0|-6)$ په تکي کي.

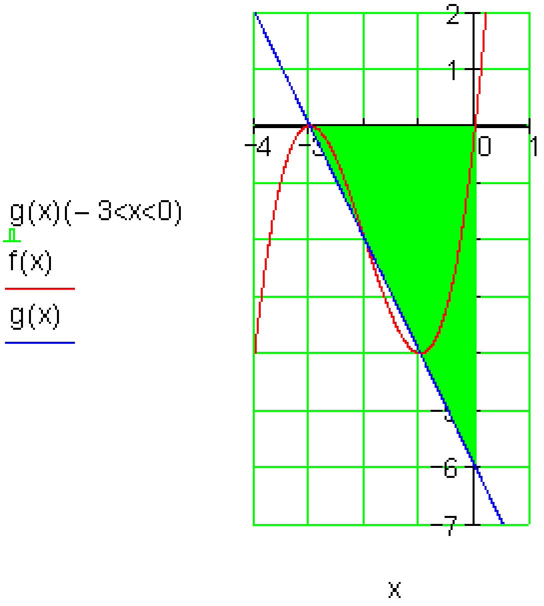
د سطحي شمیرنه د مطلقه ارزښتونو سره کیږي، ځکه چي سطحه تل مثبت ده.

A=g.h/2

د g=3 او h=6 لرو

$A=\frac{3\cdot 6}{2}=9\,FE$

په پورته کي FE د سطحي یوون یا واحد په معنا دی.



اووم: الف –

x	0,5	1	1,5	2	2,5
f (x)	1,6666	1,8333	1,75	1,6666	1,8333
f '(x)	0,75	0	−0,25	0	0,75

(c) ketabton.com: The Digital Library

دوه انحرافي ټکي شتون لري:

په $x = 1$ کې د مخنخښي بدلون لرو د $f'(x)$ لپاره د $\boxed{+} \to \boxed{-} \Rightarrow rel.\ Max.$ د دې لاس ته راځي نسبي ماکسیموم

په $x=2$ کې د $f'(x)$ لپاره د مخنخښي بدلون مخ ته لرو له $\boxed{-} \to \boxed{+} \Rightarrow rel.\ Min.$ ز له دې لاس ته راځي نسبي مینیموم

ب –

x	−3	−2	−1	0	1
f(x)	−0,149	−0,135	0,3678	3	13,591
f'(x)	−0,049	0,1353	1,1036	5	19,027

په انټروال [-3;-2] کې یو نسبي مینیموم پروت دی

$f'(x)$ یو د مخنخښي تغیر لري له منفي و مثبت ته یعني $\boxed{-} \to \boxed{+}$
اتم:
الف – انحرافي ټکي

تابع : $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x$

لومړی مشتق: $f'(x) = \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{4}$

دویم مشتق :: $f''(x) = \frac{3}{4}x$

دریم مشتق:ـ $f'''(x) = \frac{3}{4}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پراته تانجنت سره ځایونه

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{2}$$

ازمایښت چې ایا یو انحرافي ځای مخ ته لرو.

$$f''(x_1) = f''\left(\sqrt{2}\right) = \frac{3}{4}\cdot\sqrt{2} \approx 1{,}016 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_1 = \sqrt{2}$$

$$f''(x_2) = f''\left(-\sqrt{2}\right) = -\frac{3}{4}\cdot\sqrt{2} \approx -1{,}016 < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_2 = -\sqrt{2}$$

د افراطي ارزښتون شمیرنه:

$$f(x_1) = f\left(\sqrt{2}\right) = -\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2} \approx -0{,}707\,;\; f(x_2) = f\left(-\sqrt{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2} \approx 0{,}707$$

فراطي ټکي:

$$P_{Min}\left(\sqrt{2} \approx 1{,}414 \,\middle|\, -\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2} \approx -0{,}707\right) \qquad P_{Max}\left(-\sqrt{2} \approx -1{,}414 \,\middle|\, \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2} \approx 0{,}707\right)$$

د انعطاف ټکی یا اوړونټکی

$$f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x \qquad f'(x) = \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{4} \qquad f''(x) = \frac{3}{4}x \qquad f'''(x) = \frac{3}{4}$$

د انعطافټکي لپاره اړیین شرطونه:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{4}x = 0 \Rightarrow x_w = 0$$

د انعطاف ټکي ازمایښت

$$f'''(x_w) = \frac{3}{4} \neq 0 \Rightarrow$$

یا له دې لاس ته راځ: په $x = x_w = 0$ کې د انعطاف ځای

(c) ketabton.com: The Digital Library

د انعطاف ټکي وضعيه قيمتونه (کواوردیناتونه يا پروت ولاړ محورونه)

$$y_w = f(x_w) = f(0) = 0 \Rightarrow P_w(0|0)$$

د $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x$ تابع محورغوڅټکي (د محور تقاطع نقاط)

د y محور سره غوڅټکي: $P_y(0|0)$

صفرځايونه:

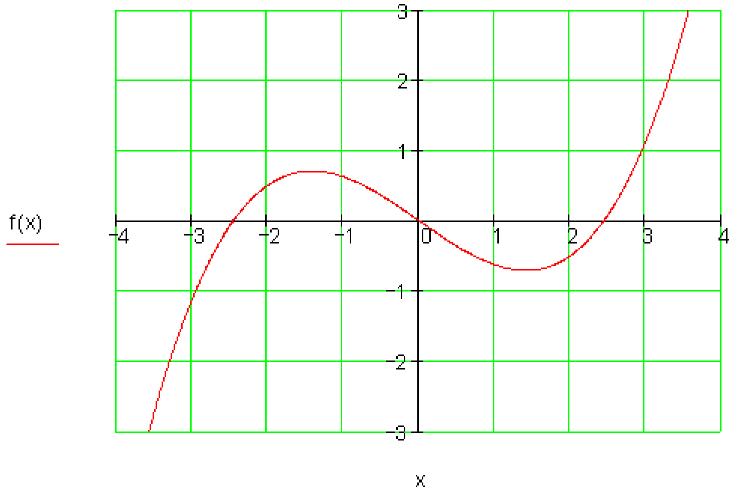
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x = 0$$

$$\Leftrightarrow x\left(\frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{4}\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$\frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{4} = 0 \Big| + \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{8}x^2 = \frac{3}{4} \Big| \cdot 8$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 6 \Rightarrow x_2 = -\sqrt{6} \qquad x_3 = \sqrt{6}$$



د x محور سره غوڅټکي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$P_{x1}(0|0) \qquad P_{x2}\left(-\sqrt{6}\approx -2,449|0\right) \qquad P_{x2}\left(\sqrt{6}\approx 2,449|0\right)$$

ب –
انحراف ټکي

تابع : $f(x)=\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2+4$

لومړی مشتق: $f'(x)=\frac{1}{2}x^2-x$

دویم مشتق: $f''(x)=x-1$

د پروت افقي تانجنت ځایونه:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2-x=0 \Rightarrow x_1=0; x_2=2$$

ازمایښت، چې ایا انحراف ارزښتونه مخ ته لرو:

$$f''(x_1)=f''(0)=-1<0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_1=0$$
$$f''(x_2)=f''(2)=1>0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_2=2$$

د انحرافي ټکو شمیرنه

$$f(x_1)=f(0)=4 \qquad f(x_2)=f(2)=\frac{10}{3}$$

انحرافي ټکي

$$P_{Max}(0|4) \qquad P_{Min}\left(2|\frac{10}{3}\approx 3,333\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د انعطاف – یا اوړونټکی

$$f(x)=\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2+4 \qquad f'(x)=\frac{1}{2}x^2-x \qquad f''(x)=x-1 \qquad f'''(x)=1$$

د اوړنټکي یا انعطآفټکي لپاره اړیین شرایط:

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow x-1=0 \Rightarrow x_w=1$$

د انعطافټکي ازمایښت

$$f'''(x_w)=f'''(1)=1\neq 0 \Rightarrow$$

یا له دې لاس ته راځي: په $x=x_w=1$ د انعطاف ټکي

د انعطاف- یا اوړون ټکي وضعیه قیمتونه(پراته لاړ ارزښتونه) یا کواودیناتونه

$$y_w=f(x_w)=f(1)=\frac{1}{6}-\frac{1}{2}+4=\frac{22}{6}=3,\bar{6} \Rightarrow \underline{\underline{P_w\left(1\,|\,\frac{22}{6}=3,\bar{6}\right)}}$$

د $f(x)=\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2+4$ محور غوځټکي:

د y - محور سره غوځټکی: $P_y(0\,|\,4)$

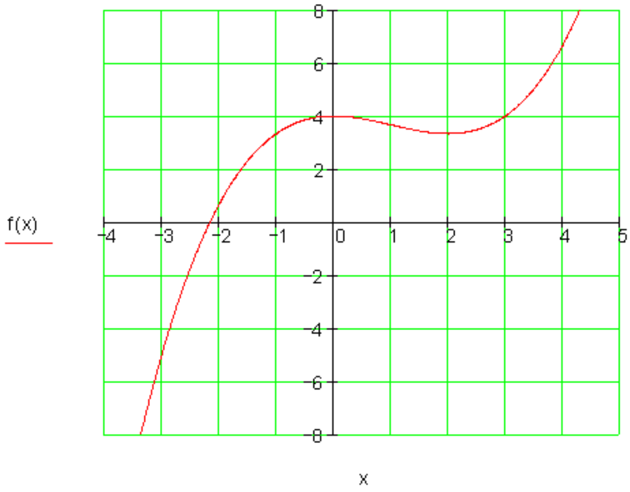
صفرځایونه

$x_1\approx -2,175$ نومریکي پیدا شوی

د x - محور سره غوځټکی.

$$\underline{\underline{P_{x1}(x_1\approx -2,175\,|\,0)}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



پ – افراطي تکي

تابع: $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 - 2$

لومړی مشتق: $f'(x) = -x^3 + 3x^2$

دویم مشتق: $f''(x) = -3x^2 + 6x$

د پروت محور سره ځایونه.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^3 + 3x^2 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 0; x_3 = 3$$

ازمایښت چې ایا یو افراطي ارزښت مو مخ ته پروت دی:

په x1=0 کې افراطي ارزښت نه شته په x2=0 کې نسبي مکسیموم په x3=3 د افراطي تکو شمیرنه	$f''(x_1) = f''(0) = 0 \Rightarrow$ $f''(x_2) = f''(0) = 0 \Rightarrow$ $f''(x_3) = f''(3) = -9 < 0 \Rightarrow$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x_1)=f(0)=-2 \qquad f(x_2)=f(0)=-2 \qquad f(x_3)=f(3)=\frac{19}{4}$$

افراطي ټکي :

$$\underline{\underline{P_{Max}\left(3\left|\frac{19}{4}=4{,}75\right.\right)}}$$

اوړونټکی یا د انعطاف ټکی

$$f(x)=-\frac{1}{4}x^4+x^3-2$$

$$f'(x)=-x^3+3x^2 \qquad f''(x)=-3x^2+6x \qquad f'''(x)=-6x+6$$

د انعطافټکو لپاره اړیین شرایط

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow -3x^2+6x=0$$
$$\Leftrightarrow x(-3x+6)=0 \Rightarrow x_{w1}=0$$
$$-3x+6=0 \Rightarrow x_{w2}=2$$

د انعطافټکو ازمایښت

$$f'''(x_{w1})=f'''(0)=6\neq 0 \Rightarrow$$

له دې لاس ته راځي چې په $x=x_{w1}=0$ کې د انعطاف ټکي

$$f'''(x_{w2})=f'''(2)=-6\neq 0 \Rightarrow$$

له دې لاس ته راځي چې په $x=x_{w2}=2$ کې انعطاف ټکي:

د انعطافټکو وضعیه قیمتونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y_{w1} = f(x_{w1}) = f(0) = -2$$

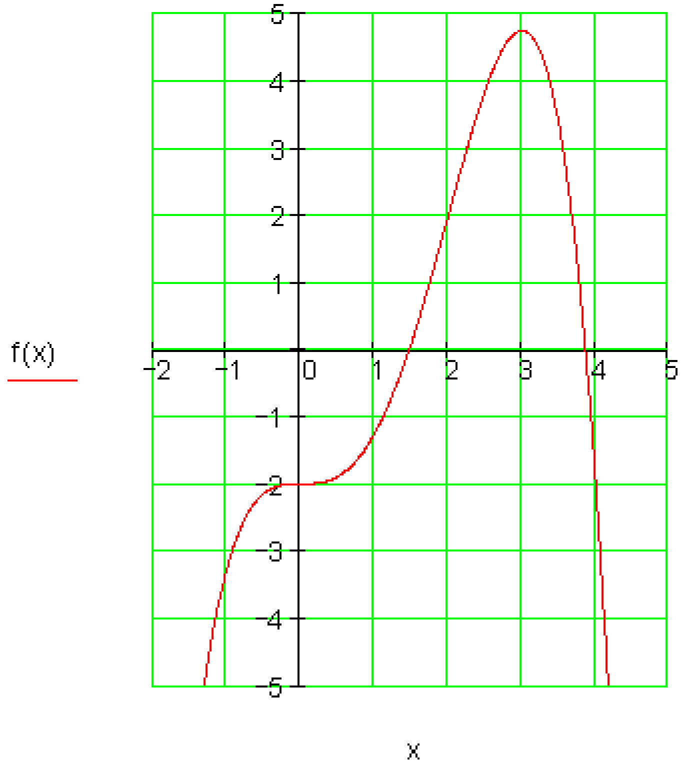
$$y_{w2} = f(x_{w2}) = f(2) = -\frac{1}{4} \cdot 2^4 + 2^3 - 2 = -4 + 8 - 2 = 2$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P_{w1}(0|-2)}} \qquad \underline{\underline{P_{w2}(2|2)}}$$

د $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 - 2$ تابع محور غوڅتکي

د y محور سره غوڅتکی: $P_y(0|-2)$

صفرځایونه: $x_2 \approx 3,861 \qquad x_1 \approx 1,467$



نومریکي پیداشوی

(c) ketabton.com: The Digital Library

د x محور سره غوڅټکي: $P_{x2}(x_2 \approx 3,861|0)$ $P_{x1}(x_1 \approx 1,467|0)$

ت – افراطي ټکي

تابع: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 8x + \frac{26}{3}$

لومړی مشتق : $f'(x) = x^2 - 2x - 8$

دويم مشتق: $f''(x) = 2x - 2$

د پروت یا افقي محور سره غوڅټکي

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow x_1 = -2; x_2 = 4$$

ازمايښت چې ايا يو امحرافي ټکی م مخ تخ پروت دی

$$f''(x_1) = f''(-2) = -6 < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_1 = -2$$
$$f''(x_2) = f''(4) = 6 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_2 = 4$$

د افراطي ا رزښتون شمېرنه

$$f(x_1) = f(-2) = 18 \qquad f(x_2) = f(4) = -18$$

اافراطي ټکي: $P_{Max}(-2|18) \quad P_{Min}(4|-18)$

ت - انعطافټکی

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 8x + \frac{26}{3}$$
$$f'(x) = x^2 - 2x - 8 \qquad f''(x) = 2x - 2 \qquad f'''(x) = 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د انغطافټکو لپاره اړيين شرطونه:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2 = 0 \Rightarrow x_w = 1$$

د اوړونټکو یا انعطاف ټکو په هکله ازمايښت

$$f'''(x_w) = f'''(1) = 2 \neq 0 \Rightarrow$$

په $x = x_w = 1$ کې د انعطاف ځایونه

د اعطافټکي وضعیه قیمتونه:

$$y_w = f(x_w) = f(1) = \frac{1}{3} - 1 - 8 + \frac{26}{3} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P_w(1|0)}}$$

د $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 8x + \frac{26}{3}$ محور غوځټکي

د y - محور سره غوځټکی: $\underline{P_y\left(0 \,\middle|\, \frac{26}{3} = 8,\bar{6}\right)}$

صفرځایونه: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 8x + \frac{26}{3} = 0$

هورنر :

$$\begin{array}{cccccc} & \frac{1}{3} & -1 & -8 & \frac{26}{3} & \\ x = 1 & \downarrow & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{26}{3} & \\ & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{26}{3} & 0 & f(1) = 0 \Rightarrow \quad x_1 = 1 \end{array}$$

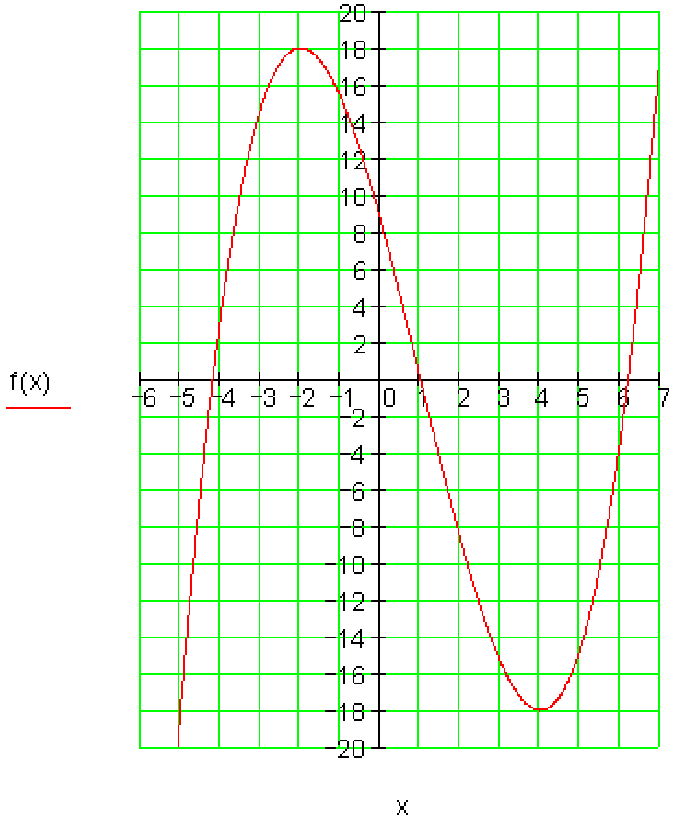
(c) ketabton.com: The Digital Library

پاتې يا باقي پولينوم:

$$\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x-\frac{26}{3}=0|\cdot 3$$
$$\Leftrightarrow x^2-2x-26=0$$

$$p=-2 \qquad q=-26 \qquad \Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=1+26=27$$

$$x_{2/3}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D} \qquad x_2=1+\sqrt{27}\approx 6{,}196 \qquad x_3=1-\sqrt{27}\approx -4{,}196$$



د x - محور سره غوڅتکی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$P_{x1}(1|0)$ $P_{x2}\left(1+\sqrt{27}\approx 6{,}196|0\right)$ $P_{x3}\left(1-\sqrt{27}\approx -4{,}196|0\right)$

افراطي ټکي

تابع : $f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^2$

لومړی مشتق : $f'(x)=x^3-2x$

دویم مشتق: $f''(x)=3x^2-2$

ځایونه د پراته محور سره:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^3-2x=0 \Rightarrow x_1=0; x_{2/3}=\pm\sqrt{2}$$

ازمایښت چې ایا یو انحرافي ټکی مو مخ ته پروت دی.

$$f''(x_1)=f''(0)=-2<0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_1=0$$
$$f''(x_2)=f''\left(\sqrt{2}\right)=4>0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_2=\sqrt{2}$$
$$f''(x_3)=f''\left(-\sqrt{2}\right)=4>0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_3=-\sqrt{2}$$

د افراطي ارزښتونو شمېرنه :

$$f(x_1)=f(0)=0 \qquad f(x_2)=f\left(\sqrt{2}\right)=-1 \qquad f(x_3)=f\left(-\sqrt{2}\right)=-1$$

انحرافي ټکي:

$P_{Max}(0|0)$ $P_{Min1}\left(\sqrt{2}\approx 1{,}414|-1\right)$ $P_{Min2}\left(-\sqrt{2}\approx -1{,}414|-1\right)$

د انعطاف- یا اوړونټکي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^2 \qquad f'(x)=x^3-2x \qquad f''(x)=3x^2-2 \qquad f'''(x)=6x$$

د انعطاف ټکي لپاره اړیین شرطونه:

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-2=0|+2$$
$$\Leftrightarrow 3x^2=2|:3$$
$$\Leftrightarrow x^2=\frac{2}{3}|\sqrt{\ }$$
$$\Leftrightarrow |x|=\sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow x_{w1}=\sqrt{\frac{2}{3}} \qquad x_{w2}=-\sqrt{\frac{2}{3}}$$

د انعطاع ټکو ازمایښت

$$f'''(x_{w1})=f'''\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=6\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\neq 0 \Rightarrow \text{Wendestelle bei } x=x_{w1}=\sqrt{\frac{2}{3}}\approx 0{,}816$$
$$f'''(x_{w1})=f'''\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=-6\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\neq 0 \Rightarrow \text{Wendestelle bei } x=x_{w2}=-\sqrt{\frac{2}{3}}\approx -0{,}816$$

د انعطآف ټکو وضعیه قیمتونه:

$$y_{w1}=f(x_{w1})=f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=\frac{1}{4}\cdot\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^4-\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2=\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{9}-\frac{2}{3}=\frac{1}{9}-\frac{6}{9}=-\frac{5}{9}\approx -0{,}555$$
$$y_{w2}=f(x_{w2})=f\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=-\frac{5}{9}\approx -0{,}555 \text{ weil } f(-x)=f(x)$$
$$\Rightarrow \underline{\underline{P_{w1}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\approx 0{,}816 \,|\, -\frac{5}{9}\approx -0{,}555\right)}} \qquad \underline{\underline{P_{w2}\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\approx -0{,}816 \,|\, -\frac{5}{9}\approx -0{,}555\right)}}$$

د $f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^2$ ا محورغوځټکي یا د تقاطع ټکي

(c) ketabton.com: The Digital Library

د y محور غوڅتکي: $P_y(0|0)$

صفرځایونه:

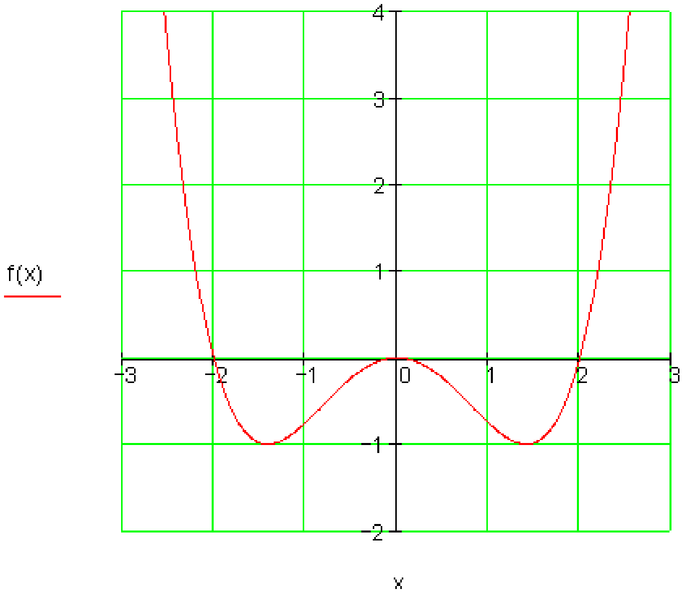
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^4 - x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(\frac{1}{4}x^2 - 1\right) = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 0$$

$$\frac{1}{4}x^2 - 1 = 0|+1 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_{3/4} = \pm 2$$

د x - محور سره غوڅتکي:

$P_{x1/2}(0|0)$ $P_{x3/4}(\pm 2|0)$



ث –

افراطي تکي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

تابع: $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{9}{4}x^2 + x - 3$

لومړی مشتق: $f'(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{9}{2}x + 1$

دویم مشتق: $f''(x) = 3x^2 - 9x + \frac{9}{2}$

ځایونه د پراته یا افقي تانجنت سره.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{9}{2}x + 1 = 0$$

لومړی صفرځاي له ګومان سره x1 = 2 ونیسی پاتې یا باقي پولینوم: $x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}$

نور حلونه ترې لاس ته راځي: $x_2 = \frac{5}{4} + \sqrt{\frac{33}{16}}; x_3 = \frac{5}{4} - \sqrt{\frac{33}{16}}$

ازمایښت چې ایا یو انحرافي ټکی لرو:

$$f''(x_1) = f''(2) = -1,5 < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_1 = 2$$

$$f''(x_2) = f''\left(\frac{5}{4} + \sqrt{\frac{33}{16}}\right) \approx 1,971 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_2 = \frac{5}{4} + \sqrt{\frac{33}{16}}$$

$$f''(x_3) = f''\left(\frac{5}{4} - \sqrt{\frac{33}{16}}\right) \approx 6,279 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_3 = \frac{5}{4} - \sqrt{\frac{33}{16}}$$

د انحرافي ټکو شمېرنه

$$f(x_1) = f(2) = 0 \quad f(x_2) = f\left(\frac{5}{4} + \sqrt{\frac{33}{16}}\right) \approx -0,136 \quad f(x_3) = f\left(\frac{5}{4} - \sqrt{\frac{33}{16}}\right) \approx -3,098$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

انحرافي ټکي:

$$P_{Max}(2|0) \quad P_{Min1}\left(\frac{5}{4}+\sqrt{\frac{33}{16}}\approx 2,686|-0,136\right) \quad P_{Min2}\left(\frac{5}{4}-\sqrt{\frac{33}{16}}\approx -0,186|-3,098\right)$$

د انعطافټکي یا اوړونټکي:

$$f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^3+\frac{9}{4}x^2+x-3 \qquad f'(x)=x^3-\frac{9}{2}x^2+\frac{9}{2}x+1$$

$$f''(x)=3x^2-9x+\frac{9}{2} \qquad f'''(x)=6x-9$$

د انعطافټکي لپاره اړیین شرطونه:

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-9x+\frac{9}{2}=0|:3$$

$$\Leftrightarrow x^2-3x+\frac{3}{2}=0$$

$$p=-3 \qquad q=\frac{3}{2}\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\frac{9}{4}-\frac{3}{2}=\frac{3}{4}$$

$$x_{w1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D} \qquad x_{w1}=\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{3}{4}}\approx 2,366 \qquad x_{w2}=\frac{3}{2}-\sqrt{\frac{3}{4}}\approx 0,634$$

د انعطافټکي – یا اوړونټکي ازمایښت(لاندې الما   ني د اوړونټکی یا انع

$$f'''(x_{w1})=f'''(2,366)=6\cdot 2,366-9\neq 0\Rightarrow \text{Wendestelle bei } x=x_{w1}=\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{3}{4}}\approx 2,366$$

$$f'''(x_{w1})=f'''(0,634)=6\cdot 0,634-9\neq 0\Rightarrow \text{Wendestelle bei } x=x_{w2}=\frac{3}{2}-\sqrt{\frac{3}{4}}\approx 0,634$$

د انعطافټکي وضعیه قیمتونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y_{w1} = f(x_{w1}) = f(2,366) = \frac{1}{4} \cdot 2,366^4 - \frac{3}{2} \cdot 2,366^3 + \frac{9}{4} \cdot 2,366^2 + 2,366 - 3 \approx -0,07$$

$$y_{w2} = f(x_{w2}) = f(0,634) = \frac{1}{4} \cdot 0,634^4 - \frac{3}{2} \cdot 0,634^3 + \frac{9}{4} \cdot 0,634^2 + 0,634 - 3 \approx -1,80$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P_{w1}\left(\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{3}{4}} \approx 2,366 \mid y_{w1} \approx -0,07\right)}} \qquad \underline{\underline{P_{w2}\left(\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{3}{4}} \approx 0,634 \mid y_{w2} \approx -1,80\right)}}$$

د $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{9}{4}x^2 + x - 3$ ا تابع محور غوڅتکي:

د y - محور سره غوڅکی: $P_y(0 \mid -3)$

صفرځایونه:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{9}{4}x^2 + x - 3 = 0$$

هورنر:

$$\begin{array}{cccccc} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{2} & \frac{9}{4} & 1 & -3 \\ x=-1 & \downarrow & -\frac{1}{4} & \frac{7}{4} & -4 & 3 \\ \hline & \frac{1}{4} & -\frac{7}{4} & 4 & -3 & 0 \end{array} \quad f(-1) = 0 \quad \Rightarrow x_1 = -1$$

باقي یا پاتې پولینوم:

$$\frac{1}{4}x^3 - \frac{7}{4}x^2 + 4x - 3 = 0$$

هورنر:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{array}{cccccc} & & \frac{1}{4} & -\frac{7}{4} & 4 & -3 \\ x=2 & \downarrow & & \frac{2}{4} & -\frac{5}{2} & 3 \\ & & \frac{1}{4} & -\frac{5}{4} & \frac{3}{2} & 0 \end{array} \quad f(2)=0 \quad \Rightarrow x_2 = 2$$

لاندې الماني= باقي –یا پاتې پولینوم:

$$\frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{3}{2} = 0 | \cdot 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$p = -5 \qquad q = 6 \qquad \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{25}{4} - \frac{24}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

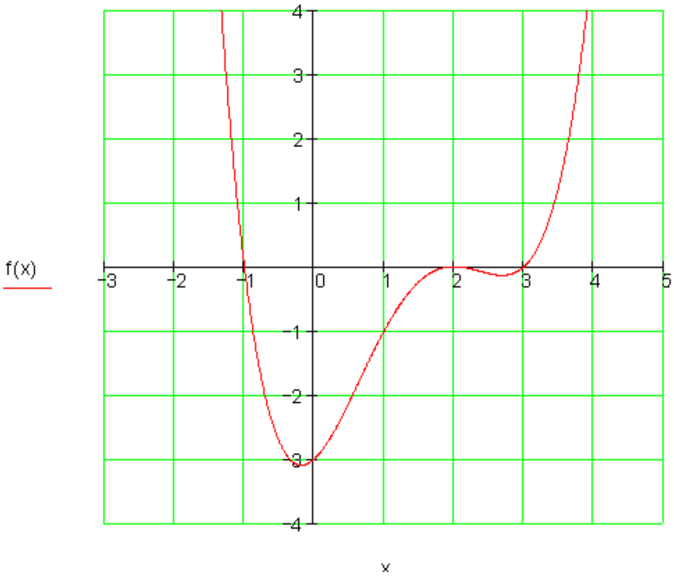
$$x_{3/4} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \qquad x_3 = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3 \qquad x_4 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2$$

-ارزښتونه د لویې پسې ترتب کړی: $x_1 = -1 \quad x_{2/3} = 2 \quad x_4 = 3$:

د x -محور سره غوځتکی:

$$\underline{\underline{P_{x1}(-1|0)}} \qquad \underline{\underline{P_{x2/3}(2|0)}} \qquad \underline{\underline{P_{x4}(3|0)}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



ج –

افراطي ټکي

تابع: $f(x) = \frac{1}{27}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 3x$

لومړی مشتق: $f'(x) = \frac{5}{27}x^4 - 2x^2 + 3$

دویم مشتق: $f''(x) = \frac{20}{27}x^3 - 4x$

ځایونه د پراته یا افقي تانجنت سره.

(بي (دوه) مربع مساوات) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{27}x^4 - 2x^2 + 3 = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_1 = 3; x_2 = -3; x_3 = \sqrt{\frac{9}{5}}; x_4 = -\sqrt{\frac{9}{5}}$$

ازمایښت چې ایا یو افراطي ټکی مخ ته لرو

$$f''(x_1) = f''(3) = 8 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_1 = 3$$
$$f''(x_2) = f''(-3) = -8 < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_2 = -3$$
$$f''(x_3) = f''\left(\sqrt{\frac{9}{5}}\right) \approx -3{,}578 < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_3 = \sqrt{\frac{9}{5}}$$
$$f''(x_4) = f''\left(-\sqrt{\frac{9}{5}}\right) \approx 3{,}578 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_4 = -\sqrt{\frac{9}{5}}$$

د افراطي ارزښتون شمېرنه :

$$f(x_1) = f(3) = 0 \qquad f(x_2) = f(-3) = 0$$
$$f(x_3) = f\left(\sqrt{\frac{9}{5}}\right) \approx 2{,}576 \qquad f(x_4) = f\left(-\sqrt{\frac{9}{5}}\right) \approx -2{,}576$$

افراطي ټکي:

$$P_{Min1}(3|0) \quad P_{Max1}(-3|0) \quad P_{Max2}\left(\sqrt{\frac{9}{5}} \approx 1{,}342 | 2{,}576\right)$$
$$P_{Min2}\left(-\sqrt{\frac{9}{5}} \approx -1{,}342 | -2{,}576\right)$$

اوړونټکي یا د انعطاف ټکي:

$$f(x) = \frac{1}{27}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 3x \qquad f'(x) = \frac{5}{27}x^4 - 2x^2 + 3$$
$$f''(x) = \frac{20}{27}x^3 - 4x \qquad f'''(x) = \frac{60}{27}x^2 - 4$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د انعطاف ټکي لپاره اړیین شرایط:

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{20}{27}x^3-4x=0$$

$$\Leftrightarrow x\cdot\left(\frac{20}{27}x^2-4\right)=0 \Rightarrow x_{w1}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{20}{27}x^2-4|+4$$

$$\Leftrightarrow \frac{20}{27}x^2=4|:\frac{20}{27}$$

$$\Leftrightarrow x^2=\frac{27}{5}|\sqrt{\ } \Rightarrow x_{w2/3}=\pm\sqrt{\frac{27}{5}}\approx\pm2{,}324$$

په انعطاف ټکي ازمایښت:

$f'''(x_{w1})=f'''(0)=-4\neq 0$ لاس ته راځي، په $x=x_{w1}=0$ کې اوړنټکی.

$$f'''(x_{w2})=f'''\left(\sqrt{\frac{27}{5}}\right)=\frac{60}{27}\cdot\frac{27}{5}-4=8\neq 0 \Rightarrow$$

لاس ته راځي، په $x=x_{w2}=\sqrt{\frac{27}{5}}$ کې اوړنټکی.

$$f'''(x_{w3})=f'''\left(-\sqrt{\frac{27}{5}}\right)=\frac{60}{27}\cdot\frac{27}{5}-4=8\neq 0 \Rightarrow$$

لاس ته راځي، په $x=x_{w2}=-\sqrt{\frac{27}{5}}$ کې اوړنټکی.

د اوړونټکي کواوردیناتونه یا پروتولاړارزښتونه(قمتهای وضعیه؟؟):

$$y_{w1}=f(x_{w1})=f(0)=0$$

$$y_{w2}=f(x_{w2})=f\left(\sqrt{\frac{27}{5}}\right)=\frac{1}{27}\left(\sqrt{\frac{27}{5}}\right)^5-\frac{2}{3}\left(\sqrt{\frac{27}{5}}\right)^3+3\left(\sqrt{\frac{27}{5}}\right)\approx 1{,}115$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y_{w3} = f(x_{w3}) = f\left(-\sqrt{\frac{27}{5}}\right) = \frac{1}{27}\left(-\sqrt{\frac{27}{5}}\right)^5 - \frac{2}{3}\left(-\sqrt{\frac{27}{5}}\right)^3 + 3\left(-\sqrt{\frac{27}{5}}\right) \approx -1,115$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P_{w1}(0|0)}} \qquad \underline{\underline{P_{w2}\left(\sqrt{\frac{27}{5}} \approx 2,324 \,|\, y_{w2} \approx 1,115\right)}}$$

$$\underline{\underline{P_{w3}\left(-\sqrt{\frac{27}{5}} \approx -2,324 \,|\, y_{w3} \approx -1,115\right)}}$$

د $f(x) = \frac{1}{27}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 3x$ ا محورغوڅتکي یا د محور سره د تقاطع تکي.

د y محور سره غوڅتکی: $P_y(0|0)$

صفرځایونه

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{27}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow x\left(\frac{1}{27}x^4 - \frac{2}{3}x^2 + 3\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$\frac{1}{27}x^4 - \frac{2}{3}x^2 + 3 = 0$$

بدلون: $x^2=z$:

$$\Leftrightarrow \frac{1}{27}z^2 - \frac{2}{3}z + 3 = 0 \,|\cdot 27$$

په z کې مربع(څلورئ) مساوات

$$\Leftrightarrow z^2 - 18z + 81 = 0$$

$$p = -18 \qquad q = 81 \qquad \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 81 - 81 = 0 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{0} = 0$$

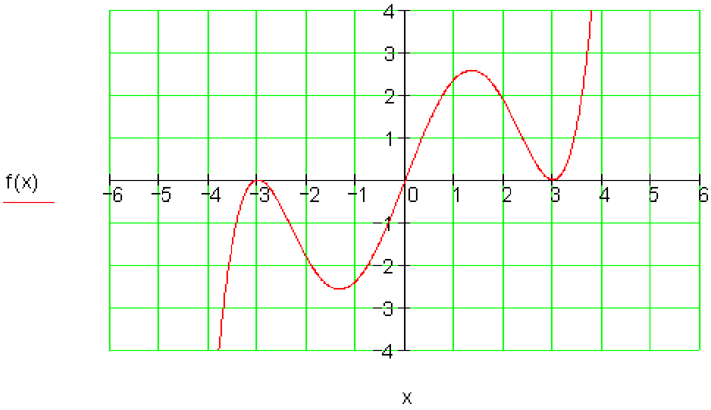
$$z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \qquad z_1 = 9 \quad z_2 = 9$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$z_1 = 9 = x^2 \Rightarrow x_{2/3} = \pm 3 \quad z_2 = 9 = x^2 \Rightarrow x_{4/5} = \pm 3$$

د x -محور سره غوڅټکی.

$P_{x1}(0|0)$ $P_{x2/3}(-3|0)$ $P_{x4/5}(3|0)$



یادونه: دا برخه دلته پای شوه.

3.IX:اوړونټکی یا د انعطاف ټکی او زینټکی

تمرینونه مشتقشمیرنه **II**

لاندې توابع راشئ یا هوښیار توابع د اوړونټکي په هکله وڅیړی او په ورکړ شوي حالت کې اوړون- یا د انعطافټکي وټاکی.

لومړی : $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5$ دویم : $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 8x$

دریم: $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x - 1$ څلورم: $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم: $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-2x-1$ شپږم: $f(x)=\frac{1}{2}x^4-3x^2+\frac{3}{2}$

اووم: $f(x)=-\frac{1}{2}x^4+3x^2-1$ اتم: $f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^3+\frac{3}{2}x^2-x+\frac{1}{2}$

نهم: $f(x)=-\frac{1}{4}x^4+x^3+1$ لسم: $f(x)=\frac{1}{12}x^4-\frac{3}{2}x^2-1$

تمرینونه

مشتقشمیرنه II

نتیجې او مفصل حلونه

نتیجې:

اول – $f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x^2+5 \Rightarrow P_W(2|1)$

دویم – $f(x)=\frac{1}{2}x^3-4x^2+8x \Rightarrow P_W\left(\frac{8}{3}\middle|\frac{64}{27}\right)$

دریم – $f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x^2+3x-1 \Rightarrow P_W(2|1)$

څلورم – $f(x)=-\frac{1}{4}x^3+\frac{3}{2}x^2+1 \Rightarrow P_W(2|5)$

پنځم – $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-2x-1 \Rightarrow P_W\left(-1\middle|\frac{5}{3}\right)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

شپږم - $f(x)=\frac{1}{2}x^4-3x^2+\frac{3}{2}\Rightarrow P_{w\,1/2}(\pm1|-1)$

اوم - $f(x)=-\frac{1}{2}x^4+3x^2-1\Rightarrow P_{w\,1/2}\left(\pm1\;\middle|\;\frac{3}{2}=1{,}5\right)$

اتم – $f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^3+\frac{3}{2}x^2-x+\frac{1}{2}\Rightarrow$

اوړونټکی نه شته

نهم - $f(x)=-\frac{1}{4}x^4+x^3+1\Rightarrow P_{w\,1}(0|1)\quad P_{w\,2}(2|5)$

لسم - $f(x)=\frac{1}{12}x^4-\frac{3}{2}x^2-1\Rightarrow P_{w\,1/2}\left(\pm\sqrt{3}\approx1{,}73\;\middle|\;-\frac{19}{4}=-4{,}75\right)$

مفصل حلونه:

لومړی – مفصل حل:

شمیرنه:

اول- د تابع مساوات د مشتق سره

$$f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x^2+5\qquad f'(x)=\frac{3}{4}x^2-3x$$

$$f''(x)=\frac{3}{2}x-3\qquad f'''(x)=\frac{3}{2}$$

دویم – د انعطافتکي لپاره اړیین شرطونه:

ممکنه انعطافځای یا اوړونځای دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

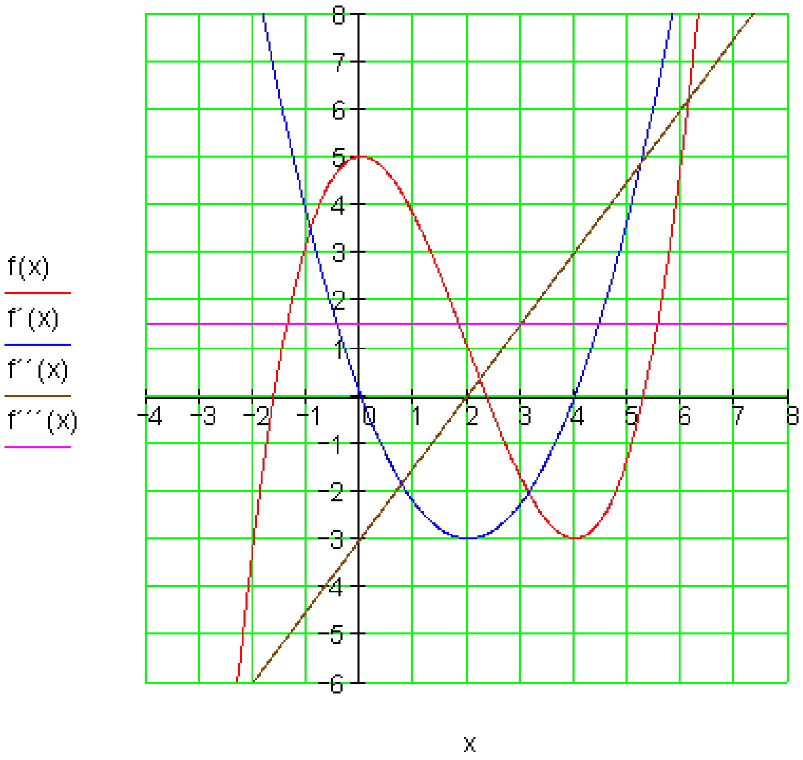
دریم – د دریم مشتق له لارې ښوونه، چې ایا یو انعطاف- یا اوړونټکی لرو:

$$f'''(x) = f'''(2) = \frac{3}{2} \neq 0 \Rightarrow x = x_W = 2$$

یو ممکنه انعطافځای یا اوړونځایدی.

څلورم – د انعطافټکي ټاکنه د انعطافځای اینوونې له لارې په f(x) کې

$$f(x_W) = f(2) = \frac{1}{4} \cdot 2^3 - \frac{3}{2} \cdot 2^2 + 5 = \frac{8}{4} - \frac{12}{2} + 5 = 2 - 6 + 5 = 1 \Rightarrow \underline{\underline{P_W(2|-1)}}$$



گرافونه :

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5 \qquad f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x \qquad f''(x) = \frac{3}{2}x - 3 \qquad f'''(x) = \frac{3}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم – مفصل حل:

شمېرنه: لومړی- د تابع مساوات د مشتقونو سره:

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-4x^2+8x \qquad f'(x)=\frac{3}{2}x^2-8x+8$$

$$f''(x)=3x-8 \qquad f'''(x)=3$$

دویم - د انعطاف ټکي لپاره اړیین شرطونه:

$$f''(x)=0\Leftrightarrow 3x-8=0\Leftrightarrow x=\frac{8}{3}$$

مکنه اوړنټکی یا د انعطاف ټکی

دریم - د دریم مشتق په مرسته ښوونه، چې ایا ئو انعطاف ټکی مخ ته لرو.

$$f'''(x)=f'''\left(\frac{8}{3}\right)=3\neq 0\Rightarrow x=x_W=\frac{8}{3}$$

اوړنټکی یا د انعطافټکی دی

څلورم – د انعطافټکي ټاکنه په f(x) کې د انعطافځای اینسووني له لارې

$$f(x_W)=f\left(\frac{8}{3}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{8}{3}\right)^3-4\cdot\left(\frac{8}{3}\right)^2+8\cdot\frac{8}{3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{512}{27}-4\cdot\frac{64}{9}+8\cdot\frac{8}{3}$$

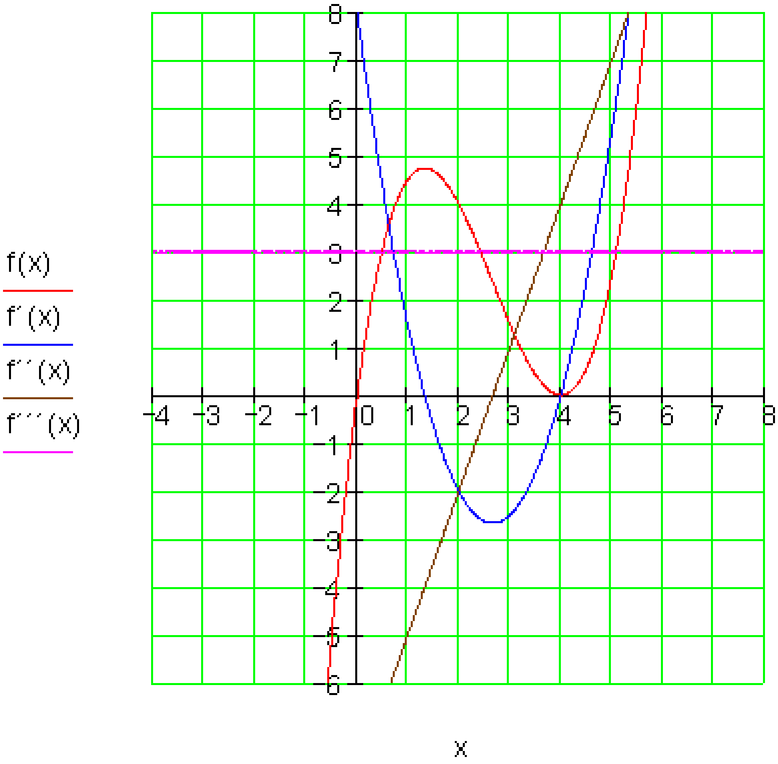
$$=\frac{256}{27}-\frac{768}{27}+\frac{576}{27}=\frac{64}{27}\Rightarrow \underline{\underline{R_W\left(\frac{8}{3}\approx 2,67 \;\middle|\; \frac{64}{27}\approx 2,37\right)}}$$

ګرافونه :

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-4x^2+8x \qquad f'(x)=\frac{3}{2}x^2-8x+8$$

$$f''(x)=3x-8 \qquad f'''(x)=3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



دریم – مفصل حل

شمېرنه:

لومړی- د تابع مساوات د مشتقونو سره:

$$f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x^2+3x-1 \quad f'(x)=\frac{3}{4}x^2-3x+3$$

$$f''(x)=\frac{3}{2}x-3 \quad f'''(x)=\frac{3}{2}$$

دویم - د انعطاف ټکي لپاره اړيين شرطونه:

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x-3=0 \Leftrightarrow x=2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ممکنه اوړونټکی یا د انعطاف ټکی دی

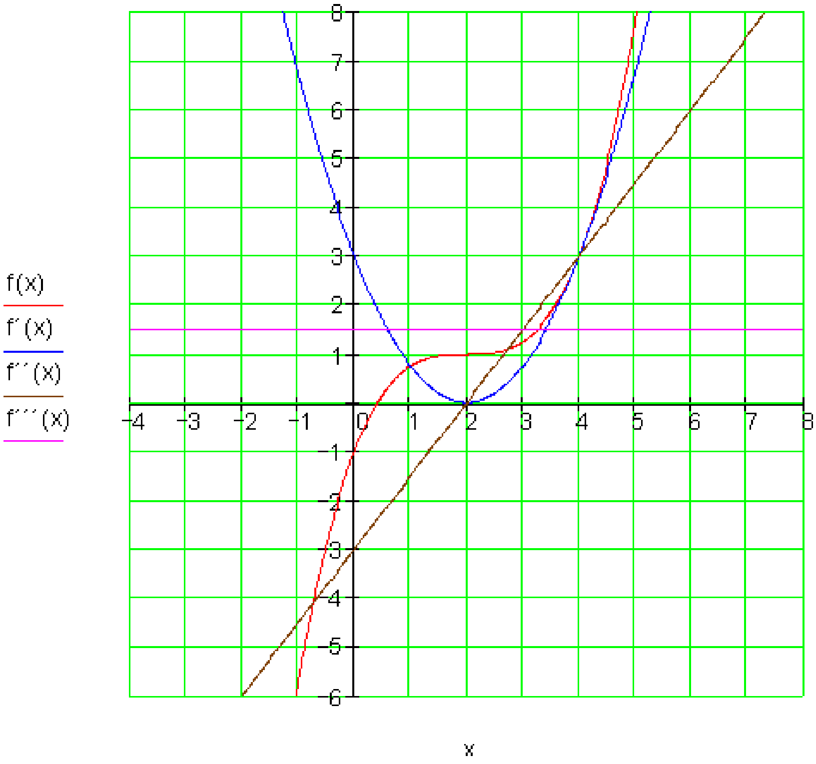
دریم - د دریم مشتق په مرسته ښوونه، چې ایا ئو انعطاف ټکی مخ ته لرو.

$$f'''(x) = f'''(2) = \frac{3}{2} \neq 0 \Rightarrow x = x_W = 2$$

ممکنه اوړونټکی دی

څلورم – د انعطافټکي ټاکنه د انعطافځای اېښوونې له لارې په f(x) کې

$$f(x_W) = f(2) = \frac{1}{4} \cdot 2^3 - \frac{3}{2} \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 - 1 = \frac{8}{4} - \frac{12}{2} + 6 - 1 = 1 \Rightarrow \underline{\underline{P_W(2|1)}}$$



ګرافونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x^2+3x-1 \quad f'(x)=\frac{3}{4}x^2-3x+3$$

$$f''(x)=\frac{3}{2}x-3 \quad f'''(x)=\frac{3}{2}$$

ځلورم – مفصل حل:

شمیرنه: لومړی- د تابع مساوات د مشتقونو سره:

$$f(x)=-\frac{1}{4}x^3+\frac{3}{2}x^2+1 \quad f'(x)=-\frac{3}{4}x^2+3x$$

$$f''(x)=-\frac{3}{2}x+3 \quad f'''(x)=-\frac{3}{2}$$

دویم - د انعطاف ټکي لپاره اړیین شرطونه:

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2}x+3=0 \Leftrightarrow x=2$$

ممکنه اوړونټکي(انعطافټکي) دي.

دریم - د دریم مشتق په مرسته ښوونه، چې ایا یو انعطاف ټکی مخ ته لرو.

$$f'''(x)=f'''(2)=-\frac{3}{2}\neq 0 \Rightarrow x=x_W=2$$

یو انعطافټکی یا اوړونټکی ړی.

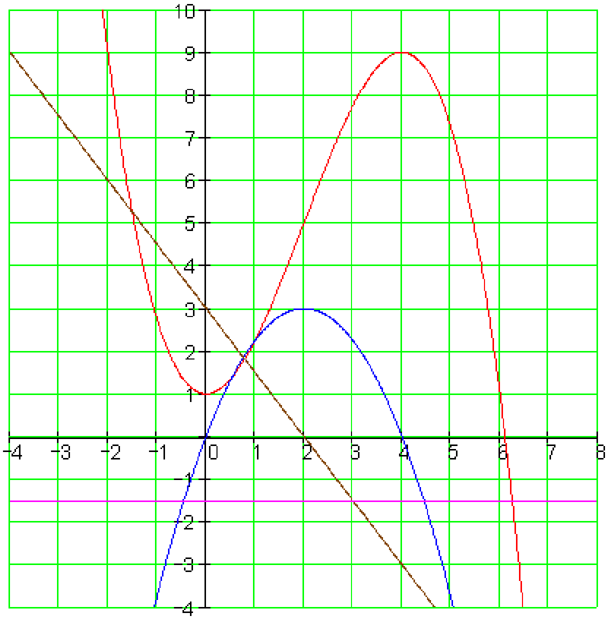
ځلورم – د انعطافټکي ټاکنه د انعطافځای ایښوونې له لارې په f(x) کې

$$f(x_W)=f(2)=-\frac{1}{4}\cdot 8+\frac{3}{2}\cdot 4+1=-2+6+1 \Rightarrow \underline{\underline{P_W(2|5)}}$$

گرافونه: $f(x)=-\frac{1}{4}x^3+\frac{3}{2}x^2+1 \quad f'(x)=-\frac{3}{4}x^2+3x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f''(x) = -\frac{3}{2}x + 3 \quad f'''(x) = -\frac{3}{2}$$



پنځم – مفصل حل:

شمېرنه: لومړی- د تابع مساوات د مشتقونو سره:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2x - 1 \quad f'(x) = x^2 + 2x - 2$$

$$f''(x) = 2x + 2 \quad f'''(x) = 2$$

دويم - د انعطاف ټکي لپاره اړيين شرطونه: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ i

ممکنه انعطاف- یا اوړونټکی دی

دريم - د دريم مشتق په مرسته ښوونه، چې ايا ئو انعطاف ټکی مخ ته لرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

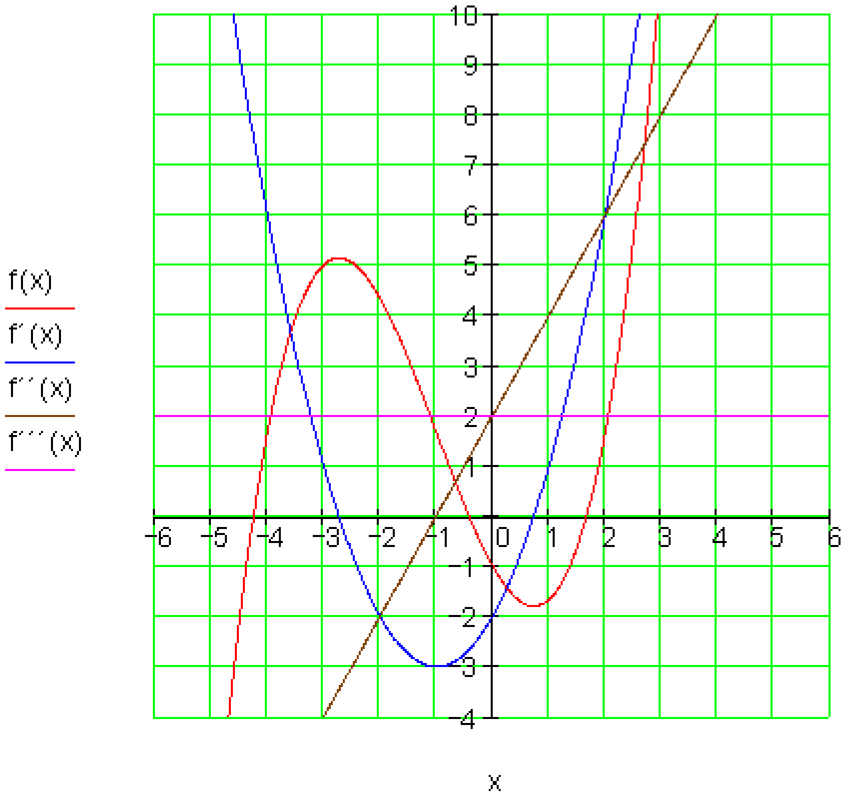
$$f'''(x) = f'''(-1) = 2 \neq 0 \Rightarrow x = x_W = -1$$

یو انعطافټکی دی.

ځلورم – د انعطافټکي ټاکنه د انعطافځای اینوونې له لارې په f(x) کې

$$f(x_W) = f(-1) = \frac{1}{3}\cdot(-1)^3 + (-1)^2 - 2\cdot(-1) - 1 = -\frac{1}{3} + 1 + 2 - 1 = \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow P_W\left(-1 \,\middle|\, \frac{5}{3} \approx 1,67\right)$$



ګرافونه

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2x - 1 \quad f'(x) = x^2 + 2x - 2 \quad f''(x) = 2x + 2 \quad f'''(x) = 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

شپږم – مفصل حل:

شمېرنه: لومړی- د تابع مساوات د مشتقونو سره:

$$f(x)=\frac{1}{2}x^4-3x^2+\frac{3}{2}\quad f'(x)=2x^3-6x\quad f''(x)=6x^2-6\quad f'''(x)=12x$$

دویم - د انعطاف ټکي لپاره اړیین شرطونه:

$$f''(x)=0\Leftrightarrow 6x^2-6=0\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x_{1/2}=\pm 1$$

یو ممکنه انعطاف-یا ا وړونټکی دی.

دریم - د دریم مشتق په مرسته ښوونه، چې ایا یو انعطاف ټکی مخ ته لرو.

یو اوړون-یا انعطافټکی دی

$$f'''(x_1)=f'''(1)=12\cdot 1=12\neq 0\Rightarrow x_1=x_{W1}=1$$

یو د انعطاف ټکی دی.

$$f'''(x_2)=f'''(-1)=12\cdot(-1)=-12\neq 0\Rightarrow x_2=x_{W2}=-1$$

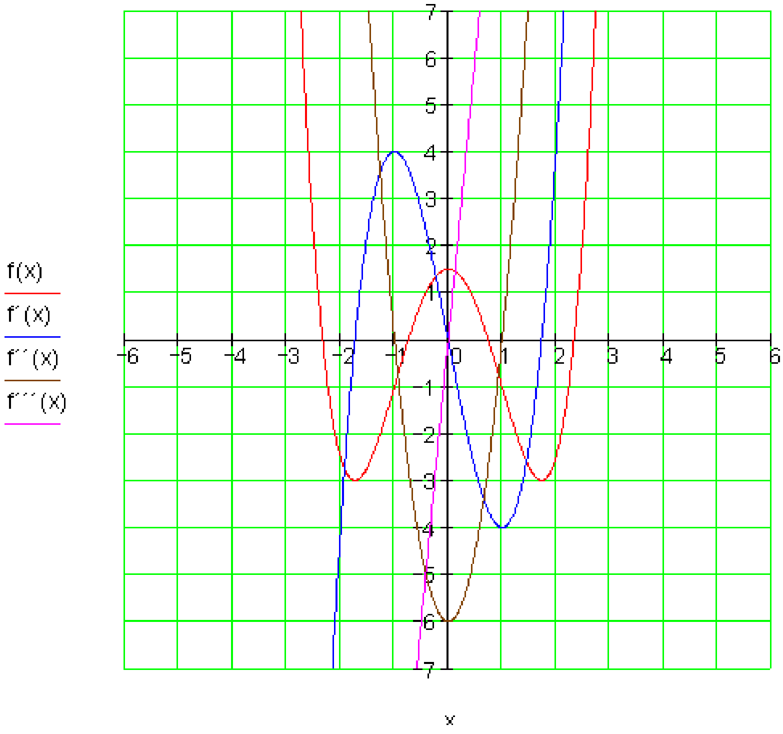
څلورم – د انعطافټکي ټاکنه د انعطافځای اېښوونې له لارې په f(x) کې

$$f(x_{W1/2})=f(\pm 1)=\frac{1}{2}(\pm 1)^4-3\cdot(\pm 1)^2+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}-3+\frac{3}{2}=-1\Rightarrow \underline{\underline{P_{W1/2}(\pm 1|-1)}}$$

ګرافونه:

$$f(x)=\frac{1}{2}x^4-3x^2+\frac{3}{2}\quad f'(x)=2x^3-6x\quad f''(x)=6x^2-6\quad f'''(x)=12x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



اوم – مفصل حل:

شمېرنه: لومړی- د تابع مساوات د مشتقونو سره:

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 3x^2 - 1 \quad f'(x) = -2x^3 + 6x \quad f''(x) = -6x^2 + 6 \quad f'''(x) = -12x$$

دويم - د انعطاف تکي لپاره اړيين شرطونه:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -6x^2 + 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 1$$

ممکنه اوړون – د انعطاف ځايونه دي

دريم - د دريم مشتق په مرسته بنوونه، چې ايا ئو انعطاف تکی مخ ته لرو.

$$f'''(x_1) = f'''(1) = -12 \cdot 1 = -12 \neq 0 \Rightarrow x_1 = x_{W1} = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

يو اوړونځای يا انعطاف ځای دی

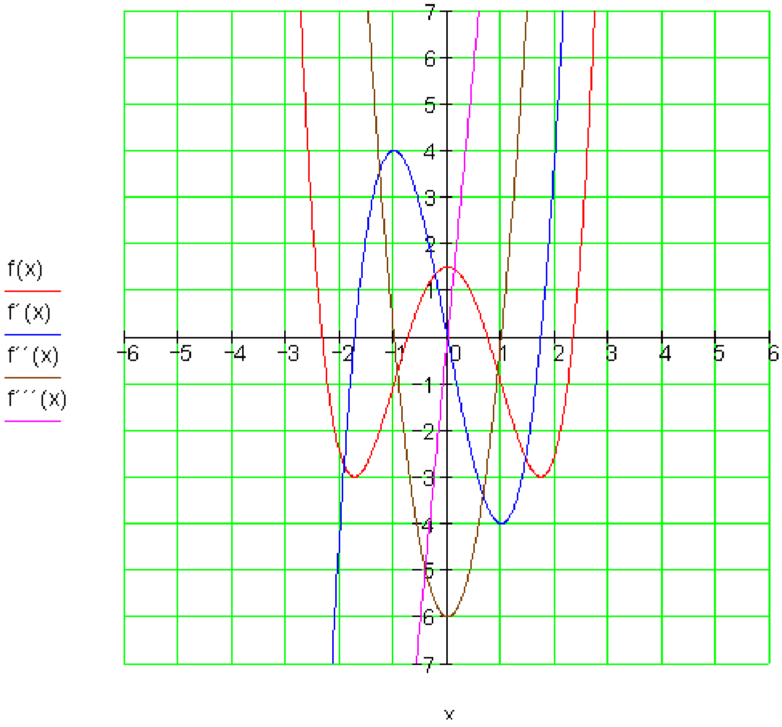
$$f'''(x_2) = f'''(-1) = -12\cdot(-1) = 12 \neq 0 \Rightarrow x_2 = x_{W2} = -1$$ is

يو اوړونځای يا انعطاف ځای دی

ځلورم – د انعطافتيکي ټاکنه د انعطافځای اينووني له لارې په f(x) کي

$$f(x_{W1/2}) = f(\pm1) = -\frac{1}{2}(\pm1)^4 + 3\cdot(\pm1)^2 - 1 = -\frac{1}{2} + 3 - 1 = \frac{3}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{W1/2}\left(\pm1 \,\middle|\, \frac{3}{2} = 1{,}5\right)$$



ګرافونه :

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 3x^2 - 1 \qquad f'(x) = -2x^3 + 6x \qquad f''(x) = -6x^2 + 6$$

$$f'''(x) = -12x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اتم – مفصل حل:

شمېرنه:
لومړی- د تابع مساوات د مشتقونو سره:

$$f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^3+\frac{3}{2}x^2-x+\frac{1}{2} \quad f'(x)=x^3-3x^2+3x-1$$
$$f''(x)=3x^2-6x+3 \quad f'''(x)=6x-6$$

دویم - د انعطاف ټکي لپاره اړیین شرطونه:

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-6x+3=0 \Leftrightarrow x^2-2x+1=(x-1)^2=0$$

$$\Leftrightarrow x_{1/2}=1s$$

ممکنه اوړنټکي یاد انعطاف ټکي دي

دریم - د دریم مشتق په مرسته بنوونه، چې ایا یو انعطاف ټکی مخ ته لرو.

$$f'''(x_{1/2})=f'''(1)=6\cdot 1-6=0 \Rightarrow x_{1/2}=1i$$

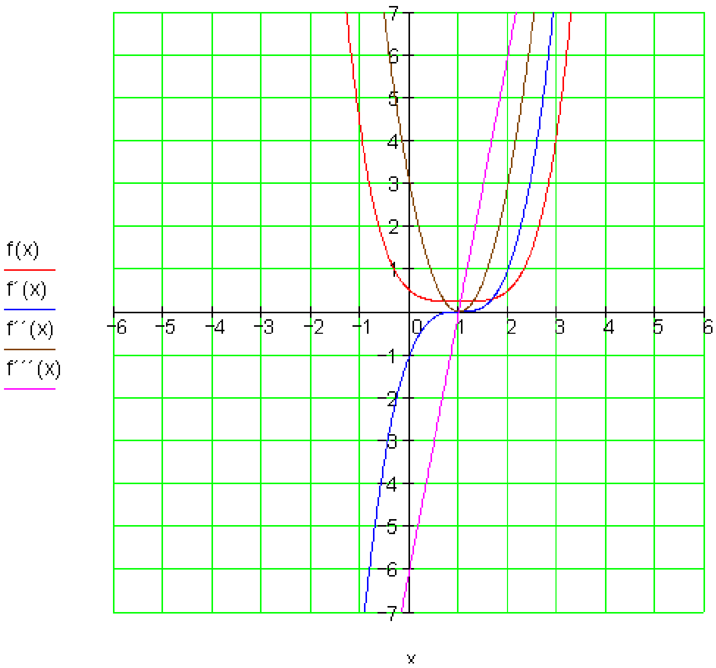
دا د انعطاف ټکی نه دی.

د f(x) ګراف اوړونټکی یا د انعطاف ټکی نه لري.

ګرافونه :

$$f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^3+\frac{3}{2}x^2-x+\frac{1}{2} \quad f'(x)=x^3-3x^2+3x-1$$
$$f''(x)=3x^2-6x+3 \quad f'''(x)=6x-6$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



نهم – مفصل حل:

شمیرنه:

لومړی- د تابع مساوات د مشتقونو سره:

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 + 1 \quad f'(x) = -x^3 + 3x^2$$

$$f''(x) = -3x^2 + 6x \quad f'''(x) = -6x + 6$$

دويم - د انعطاف ټکي لپاره اړيين شرطونه:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow x(-3x + 6) = 0$$

$\Leftrightarrow x_1 = 0 \quad \vee \quad x_2 = 2$ ممکنه اوړنټکي يا د انعطاف ټکي د ي

د پورته ښتو: ممکنه اوړنځای يا د انهطاف ځای دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم - د دریم مشتق په مرسته ښوونه، چې ایا ئو انعطاف ټکی مخ ته لرو.

$$f'''(x_1) = f'''(0) = 6 \neq 0 \Rightarrow x_1 = x_{W1} = 0$$

یو اوړنځای یا د انعطاف ځای دی

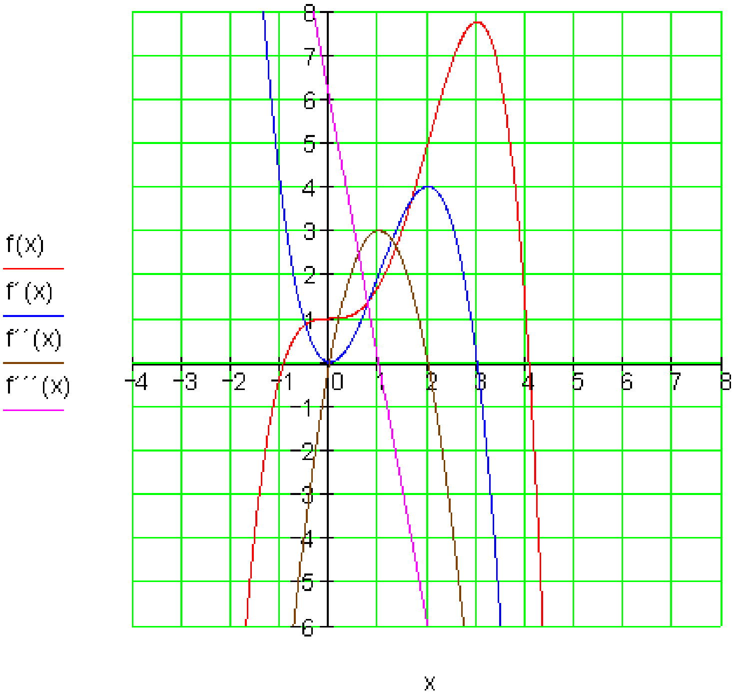
$$f'''(x_2) = f'''(2) = -6 \cdot 2 + 6 = -6 \neq 0 \Rightarrow x_2 = x_{W2} = 2$$

یو د انعطاف ځای دی

څلورم – د انعطافټکي ټاکنه د انعطافځای اینوونې له لارې په f(x) کې

$$f(x_{W1}) = f(0) = 1 \Rightarrow \underline{\underline{P_{W1}(0|1)}}$$

$$f(x_{W2}) = f(2) = -\frac{1}{4} \cdot 16 + 8 + 1 = 5 \Rightarrow \underline{\underline{P_{W2}(2|5)}}$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

گرافونه (پورته۰:

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 + 1 \quad f'(x) = -x^3 + 3x^2 \quad f''(x) = -3x^2 + 6x$$

$$f'''(x) = -6x + 6$$

لسم – مفصل حل:

شمیرنه: لومړی- د تابع مساوات د مشتقونو سره:

$$f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{3}{2}x^2 - 1 \quad f'(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x \quad f''(x) = x^2 - 3 \quad f'''(x) = 2x$$

دویم - د انعطاف ټکي لپاره اړیین شرطونه:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow |x| = \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{3}$$

ممکنه انعطاف- یا اوړونځایونه دي

دریم - د دریم مشتق په مرسته ښوونه، چې ایا ئو انعطاف ټکی مخ ته لرو.

$$f'''(x_1) = f'''\left(\sqrt{3}\right) = 2 \cdot \sqrt{3} \neq 0 \Rightarrow x_1 = x_{W1} = \sqrt{3}$$

یو اعطافځای دی

$$f'''(x_2) = f'''\left(-\sqrt{3}\right) = -2 \cdot \sqrt{3} \neq 0 \Rightarrow x_2 = x_{W2} = -\sqrt{3}$$

یوانعطافځای یا اوړونځای دی

څلورم – د انعطافټکي ټاکنه د انعطافځای اینوونې له لارې په f(x) کې

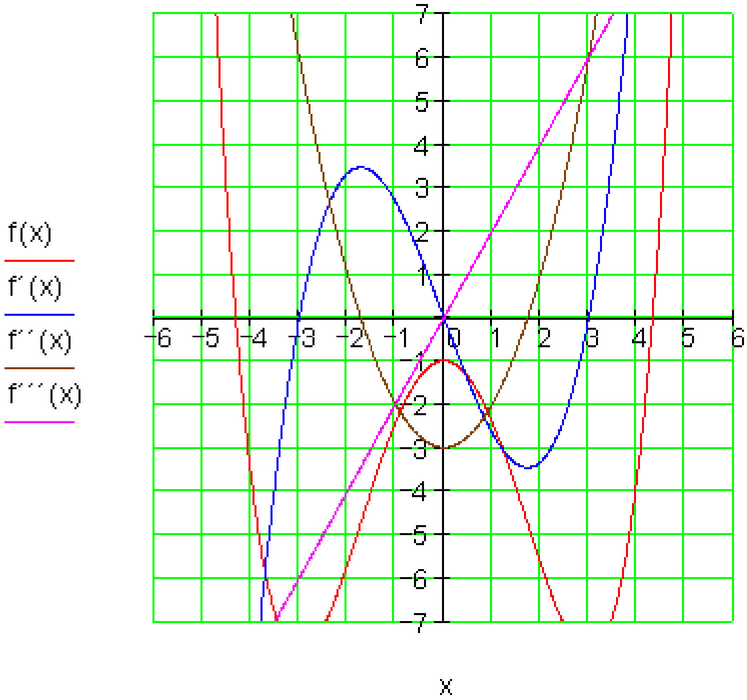
$$f(x_{W1/2}) = f\left(\pm\sqrt{3}\right) = \frac{1}{12}\left(\pm\sqrt{3}\right)^4 - \frac{3}{2}\left(\pm\sqrt{3}\right)^2 - 1 = \frac{1}{12}\cdot 9 - \frac{3}{2}\cdot 3 - 1$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{9}{2} - 1 = \frac{3}{4} - \frac{18}{4} - \frac{4}{4} = -\frac{19}{4} \Rightarrow \underline{\underline{R_{W1/2}\left(\pm\sqrt{3} \;\middle|\; -\frac{19}{4} = -4{,}75\right)}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

گرافونه:

$$f(x)=\frac{1}{12}x^4-\frac{3}{2}x^2-1 \quad f'(x)=\frac{1}{3}x^3-3x \quad f''(x)=x^2-3 \quad f'''(x)=2x$$



حلونه

نتيجي او مفصل حلونه

مشتق د ټولګي کار چمتووالي لپاره

لومړی: الف – $f(x)=\frac{1}{2}x^2+2x-2$

ب - نسبي مينيموم = ککرټکی يا د رآس ټکي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

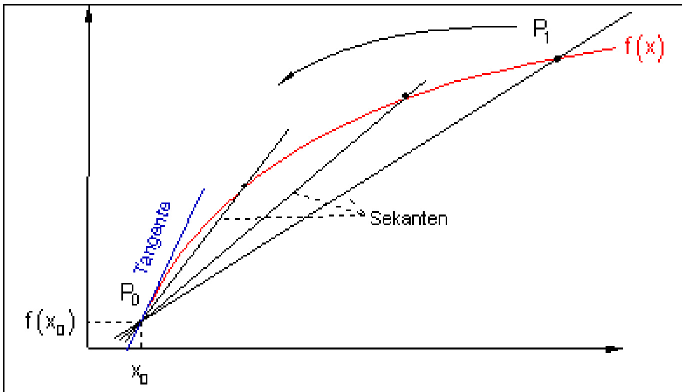
$P_{Min}(-2|-4) = P_{Sp}(-2|-4)$

پ - $P_{x2}\left(-2-2\cdot\sqrt{2}\approx -4{,}83|0\right)$ $P_{x1}\left(-2+2\cdot\sqrt{2}\approx 0{,}83|0\right)$

ت - ګرافونه د مفضل حل سره دي.

دويم: د يوه تابع د ګراف ځګېدنه په يوه ټکي کې په همغه ټکي کې د تابع د تانجنت د ځګوالي سره برابره ده.

دريم:

که ټکی P_1 تل پسې د P_0 په لور وخوزيږي، نو د سيکانت ځګوالی تغير خوري. که هرڅزمره زيات د P_0 ټکي ته نزدې کيږو، په همغه اندازه د سيکانت ځګوالی د تانجنت ځګوالي ته نږدې کيږي.	

څلورم: د x_0 په ځاي کې د تابع لومړی مشتق په ټکي $P(x_0 | f(x_0))$ کې د تانجنت ځګوالی دی او له دې سره په دې ټکي کې د $f(x)$ د ګراف ځګوالی هم دی.

پنځم: د مشتق تابع $f'(x)$ له دې امله د ځکېدني تابع بلل کيږي، ځکه چې دا په هر ټکي کې د $f(x)$د ځګوالي نمايندګي موي.

شپږم:

الف - $f'''(x) = 0$ $f''(x) = 0$ $f'(x) = 3$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب - $f'(x)=15x^2-3 \quad f''(x)=30x \quad f'''(x)=30$

پ - $f'(x)=24x^2+24x+6 \quad f''(x)=48x+24 \quad f'''(x)=48$

ت - $f'(x)=9x^2+4x+1 \quad f''(x)=18x+4 \quad f'''(x)=18$

ټ - $f'(x)=-4x^3+2 \quad f''(x)=-12x^2 \quad f'''(x)=-24x$

ث - $f'(x)=4x^3-9 \quad f''(x)=12x^2 \quad f'''(x)=24x$

ج - $f'(x)=-3cx^2-a-b-c^3-1 \quad f''(x)=-6cx \quad f'''(x)=-6c$

چ - $f'(x)=12x^2-4x+5 \quad f''(x)=24x-4 \quad f'''(x)=24$

ح -

$f'(x)=20x^3-12x^2+6x-2 \quad f''(x)=60x^2-24x+6 \quad f'''(x)=120x-24$

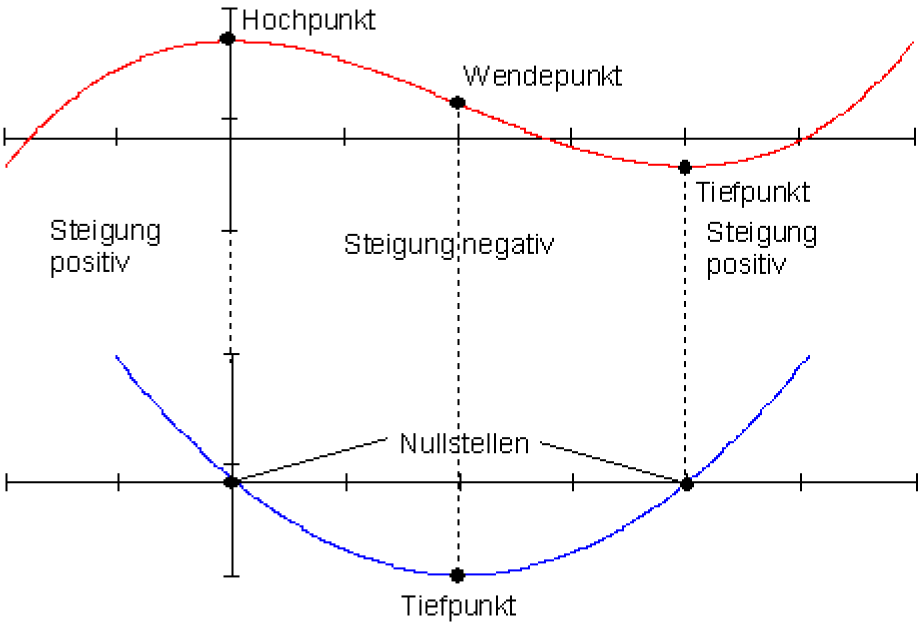
خ - $f'(x)=-4x^3 \quad f''(x)=-12x^2 \quad f'''(x)=-24x$

اووم: $t(x)=-5x+6 \quad n(x)=\frac{1}{5}x-\frac{22}{5}$

اتم: پښتو:په ګراف کې له کیڼ و ښي لور او له پورته کښته لورپه په ترتیب.

ټیټ ټکی، اوړونټکی-یا انعطافټکی،جګیدنه مثبت، جګیدنه منفي یا کمیزه، ټیټټکی جګیدنه مثبت، صفرځای، ټیټټکی.

(c) ketabton.com: The Digital Library



پوښتني

مشتقشمیرنه د تولګي کار د چمتووالي لپاره

لومړی - پارابول په درې ټکو کې:

الف –

د پارابول د تابعمساوات f(x) و ټاکی چې له لاندې ټکو تېرېږي:

$P_1(-4|-2)$ $P_2(-2|-4)$ $P_3(2|4)$

ب – د غوښتکو یا د تقاطع ټکو وضعیه قیمتونه پیدا کړئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

پ – د $f(x)$ محورغوڅتکي پیداکړئ

ت – د $f(x)$ او $f'(x)$ ګرافونه په پروتولاړ سیستم یه د وضعیه قیمتونو سیستم کې وکاږئ.

دویم – په یوه ټکي کې د تابع د ګراف د جګېدنې لاندې څه پوهیږو؟

دریم – یو د لیدلو لپاره رسم وکاږئ او د حملو سره یې تشریح کړئ، چې په یوه ګراف ځنګه له سیکانت جګوالي څخه د تانجنت جګوالي ته راځو؟

څلورم – د x_0 په ځا کې د یوې تابع لومړئ مشتق څه معنا لري؟

پنځم – ولې د مشتق تابع د جګوالي تبع هم بلل کیږي؟

شپږم – د لاندې توابعو دربواره مشتق ونیسئ:

آلف - $f(x)=3x+4$ ب - $f(x)=2x-4+x^3-5x+4x^3$

پ - $f(x)=3x^3+2x^2+x+1$ ت - $f(x)=(2x+1)^3$

ټ - $f(x)=x-x^4+3+x$ ث- $f(x)=1-2x-3x-4x+x^4$

ج - $f(x)=a+b+c^2-x-ax-bx-cx^3-c^3x$ چ - $f(x)=4x^3-2x^2+5x-2$

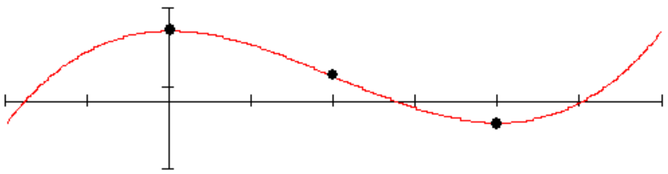
ح - $f(x)=5x^4-4x^3+3x^2-2x+6$ خ - $f(x)=(a^2+x^2)(a^2-x^2)$

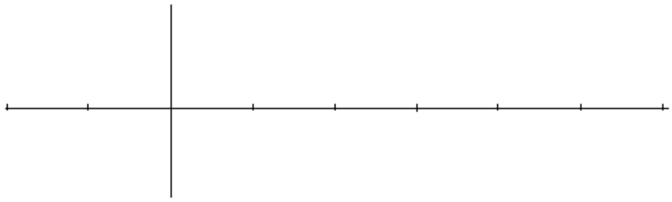
اوم – یوه $f(x) = -x^2 - x + 2$ تابع ورکړ شوې ده.

د $P(2;f(2))$ ټکي لپاره دې د تنجنت او عمود مساوات و ټاکل شي.

اتم – د تابع د ګراف لاندې د تابع د مشتق ګراف وکاږئ او په دواړو ګرافونو کې کرکتریستیکي یا خوي ټاکونکي ټکي په نخښه کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library





ځوابونه:

لومړی: الف -

$$P_1(-4\,|\,-2): f(-4) = 16a_2 - 4a_1 + 1a_0 = -2$$

$$P_2(-2\,|\,-4): f(-2) = 4a_2 - 2a_1 + 1a_0 = -4$$

$$P_2(2\,|\,4): f(2) = 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 = 4$$

a_0	a_1	a_2	
1	−4	16	−2
1	−2	4	−4 II − I
1	2	4	4 III − I
1	−4	16	−2
0	2	−12	−2 | : 2
0	6	−12	6 | : (−6)
1	−4	16	−2
0	1	−6	−1
0	−1	2	−1 III + II
1	−4	16	−2
0	1	−6	−1
0	0	−4	−2

$$-4a_2 = -2 \,|\, : (-4)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{a_2 = \frac{1}{2}}$$

$$a_1 - 6a_2 = -1 \Leftrightarrow a_1 - 6\cdot\frac{1}{2} = -1$$

$$\Leftrightarrow a_1 - 3 = -1 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = 2}$$

$$a_0 - 4a_1 + 16a_2 = -2 \Leftrightarrow a_0 - 4\cdot 2 + 16\cdot\frac{1}{2} = -2$$

$$\Leftrightarrow a_0 - 8 + 8 = -2 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = -2}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$P_1(-4|-2): f(-4) = \frac{1}{2}\cdot(-4)^2 + 2\cdot(-4) - 2 = 8 - 8 - 2 = -2$$

$$P_2(-2|-4): f(-2) = \frac{1}{2}\cdot(-2)^2 + 2\cdot(-2) - 2 = 2 - 4 - 2 = -4$$

$$P_3(2|4): f(2) = \frac{1}{2}\cdot 2^2 + 2\cdot 2 - 2 = 2 + 4 - 2 = 4$$

ب - د پارابول ککرټکی یو انحرافي ټکی دی.

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 2 \quad \Rightarrow f'(x) = x + 2 \quad \Rightarrow f''(x) = 1$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ i}$$

ممکنه افراطي ځاي دی

$$f''(x) = f''(-2) = 1 > 0 \Rightarrow \text{rel.}$$

په $x = -2$ کې نسبي مینیموم

$$f(-2) = \frac{1}{2}\cdot 4 - 4 - 2 = 2 - 4 - 2 = -4$$

نسبي مینیموم = ککرټکی: $P_{Min}(-2|-4) = \underline{\underline{P_{Sp}(-2|-4)}}$

پ –

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 2 \qquad f(0) = -2 \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0|-2)}}$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 + 2x - 2 = 0$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 4 = 0$$

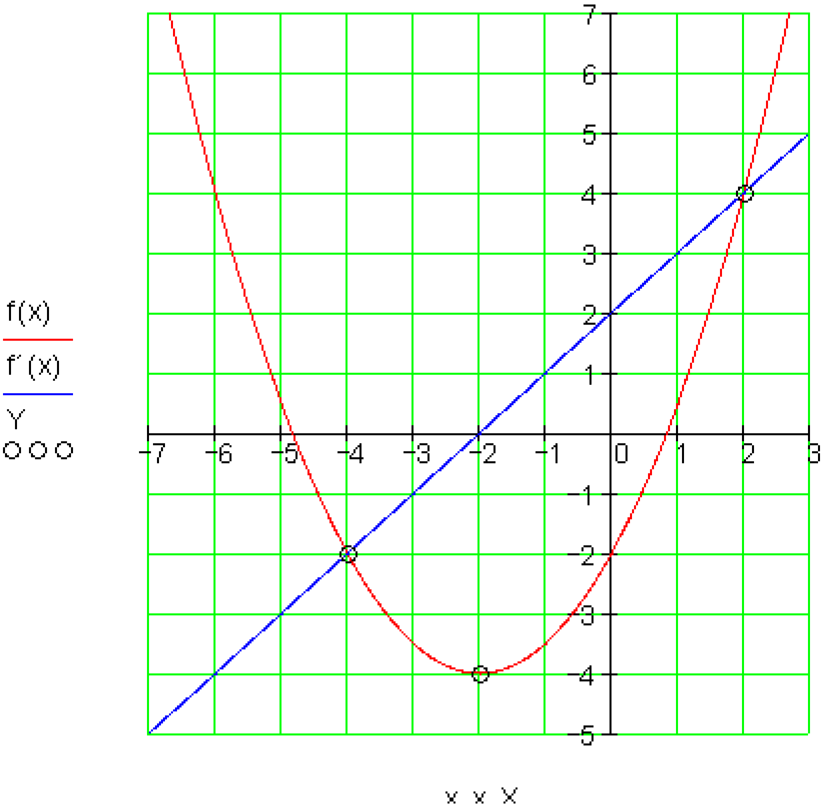
(c) ketabton.com: The Digital Library

د مربع مساوات نورمال بنه

$$p = 4; q = -4 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 4 + 4 = 8 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{8} = 2 \cdot \sqrt{2}$$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \begin{array}{|l} x_1 = -2 + 2 \cdot \sqrt{2} \approx 0{,}83 \\ x_2 = -2 - 2 \cdot \sqrt{2} \approx -4{,}83 \end{array} \quad \begin{array}{l} \Rightarrow P_{x1}\left(-2 + 2 \cdot \sqrt{2} \approx 0{,}83 \mid 0\right) \\ \Rightarrow P_{x2}\left(-2 - 2 \cdot \sqrt{2} \approx -4{,}83 \mid 0\right) \end{array}$$

ت -



شپیړم:

ت-

(c) ketabton.com: The Digital Library

ت – $f(x) = (2 + x)^3$

لومړی - حل د ضربولو له لارې

$$f(x) = (2x+1)^3 = (2x+1)\underbrace{(2x+1)^2}_{1.\ \text{bin. Formel}} = (2x+1)\left(4x^2+4x+1\right)$$

$$= 8x^3+8x^2+2x+4x^2+4x+1 = 8x^3+12x^2+6x+1$$

$$f'(x) = 24x^2+24x+6 \qquad f''(x) = 48x+24 \qquad f'''(x) = 48$$

دویم د ځنزیري قانون سره حل

$$f'(x) = 3(2x+1)^2\cdot 2 = 6(2x+1)^2 = 6\left(4x^2+4x+1\right) = \underline{\underline{24x^2+24x+6}}$$

$$f''(x) = 2\cdot 6(2x+1)\cdot 2 = 24(2x+1) = \underline{\underline{48x+24}}$$

$$f'''(x) = \underline{\underline{48}}$$

$f(x)=(2x+1)^3$

لومړی حل د ضربوني قانون له لارې

$$f(x) = (2x+1)^3 = (2x+1)\underbrace{(2x+1)^2}_{1.\ \text{bin. Formel}} = (2x+1)\left(4x^2+4x+1\right)$$

$$= 8x^3+8x^2+2x+4x^2+4x+1 = 8x^3+12x^2+6x+1$$

$$f'(x) = \underline{\underline{24x^2+24x+6}} \qquad f''(x) = \underline{\underline{48x+24}} \qquad f'''(x) = \underline{\underline{48}}$$

دویم حل د ځنزیري قانون له لارې

$$f'(x) = 3(2x+1)^2\cdot 2 = 6(2x+1)^2 = 6\left(4x^2+4x+1\right) = \underline{\underline{24x^2+24x+6}}$$

$$f''(x) = 2\cdot 6(2x+1)\cdot 2 = 24(2x+1) = \underline{\underline{48x+24}}$$

$$f'''(x) = \underline{\underline{48}}$$

ج-

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = \underbrace{a+b+c^2}_{Konstante} - x - ax - bx - cx^3 - c^3x$$

$$f'(x) = -1 - a - b - 3cx^2 - c^3 = -3cx^2 - \underbrace{a - b - c^3 - 1}_{Konstante}$$

$$f''(x) = \underline{\underline{-6cx}} \qquad f'''(x) = \underline{\underline{-6c}}$$

خ- $f(x) = (a^2 + x^2)(a^2 - x^2)$

لومړی – د ضربولو له لارې) د بینوم دریم قانون)

$$f(x) = a^4 - x^4 \Rightarrow f'(x) = \underline{\underline{-4x^3}} \Rightarrow f''(x) = \underline{\underline{-12x^2}} \Rightarrow f'''(x) = \underline{\underline{-24x}}$$

دویم: د ضرب قانون سره ضربول

$$= \underbrace{(a^2 + x^2)}_{u}\underbrace{(a^2 - x^2)}_{v} \Rightarrow u' = 2x \quad v' = -2x$$

$$) = u'v + uv' = 2x \cdot (a^2 - x^2) + (a^2 + x^2)(-2x) = 2a^2x - 2x^3 - 2a^2x - 2x^3 = \underline{\underline{-4x^3}}$$

$$) = -12x^2 \Rightarrow f'''(x) = -24x$$

اووم:

f(x) = -x² -x +2 => f'(x) = -2x - 1

د ټکي P(2;f(2)) وضعیه قیمتونه(کواوردیناتونه)

f(2) = -2² - 2 + 2 = -4 -2 +2 = -4 => P(2;-4)

جګېدنه په P(2|-4) کې.

(د تانجنت جګیدنه)f'(2)=-2.2-1=-5=> mt= -5

د تانجنت مساوات:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$t(x) = m_t x + b_t = -5x + b_t$$

تانجنت له ټکي P(2|-4) تیریږي له دې لاس ته راځي او په څټ یا برعکس

$$\Rightarrow t(2) = -4 \Leftrightarrow -5 \cdot 2 + b_t = -4 \Leftrightarrow b_t = 6$$

لاس ته راځي t(x)=-5x+6 د تانجنت مساوات دی له P(2|-4) لاري.

عمود مساوات:

$$m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{-5} = \frac{1}{5} \Rightarrow n(x) = \frac{1}{5}x + b_n$$

نورمال له ټکي P(2|-4) تیریږي. لرو:

$$P(2|-4) \Rightarrow n(2) = -4 \Leftrightarrow \frac{1}{5} \cdot 2 + b_n = -4 \Leftrightarrow b_n = -\frac{22}{5}$$

$$\Rightarrow n(x) = \frac{1}{5}x - \frac{22}{5}$$

د نورمال مساوات دی له P(2|-4) څخه تیریږي.

د فرمول له مخې الترناتیو یا بدیل حل

د f(x) په ګراف په ټکي P(x0;f(x0)) کې تانجنت او عمود.

د تانجنت مساوات

t(x) = f ' (x0)(x – x0) + f(x0)

f'(x0) جګیدنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

د عمود مساوات

$$n(x) = \underbrace{-\frac{1}{f'(x_0)}}_{\text{Steigung}}(x - x_0) + f(x_0);\ f'(x_0) \neq 0$$

$$f(x) = -x^2 - x + 2 \Rightarrow f'(x) = -2x - 1 \qquad x_0 = 2$$

$$f'(x_0) = f'(2) = -4 - 1 = -5$$

$$f(x_0) = f(2) = -4 - 2 + 2 = -4$$

$$t(x) = -5(x - 2) - 4 = -5x + 10 - 4 = \underline{\underline{-5x + 6}}$$

$$n(x) = \frac{1}{5}(x - 2) - 4 = \frac{1}{5}x - \frac{2}{5} - \frac{20}{5} = \underline{\underline{\frac{1}{5}x - \frac{22}{5}}}$$

پوښتنې

مشتق د تولګې کار لپاره II

اول - تانجنت او عمود:

الف – تابع $f(x) = \frac{1}{16}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 7$ دې ورکړ شوې وي.

د تانجنت او عمود لپاره دې د $x_0 = 2$ لپاره وشمېرل شي.

ب – تانجنت او عمود د محور سره یو درېګوډی(مثلث) جوړوي.

د دې سطحه وشمېرئ

دويم – $f(x) = \frac{1}{9}x^3 - x\,;\ x \in \mathbb{R}$ تابع ورکړ شوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف - په کومو ځایونو کې f(x)جګېدنه 2 لري؟

ب - د جګېدنه د په ځای کې ده.

بې له شمېرنې یو بل ځای د برابرې جګېدنې سره ورکړی.

ستاسې ګومان مدلل کړی.

پ - f(x) په کومو ځایونو کې پروت یا افقي محور لري؟

مساوات یې ورکړئ.

ت – په f(x) پاندې تانجنت په سرچینه کې وټاکی..

ټ – د تانجنت مساوات په f(x) باندې په ټکي P (u | f(u) کې معلوم کړی

ث – کومه کربنه f(x) په P_x (3 | 0 کې عمود غوځوي؟

دریم : د څلورمې درجې ټول رینتونی یا تام راشنل تابع ورکړ شوې :

$$f(x) = \frac{1}{32}x^4 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{2}$$

الف – ایا د تابع ګراف سیومتریک دی؟ که هو، نو سیومتري کوم ډول ده؟

خپله پرېکړه باوري کړه(یا په دې هکله دلیل راوړه).

ب - نسبي انحراف (خورا جګټکی، خورا ټیټ ټکی) وشمېری.

پ - انعطاف ټکي وشمیرئ او په اوړونټکو یا انعطاف ټکو کې تابع مساوات هم وشمیرئ.

ت – محور غوځټکي وشمیرئ.

ټ - تراوسه ټولو معلومو ټکو سره ارزښتجدول وکاږئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ث – په يوه وضعيه قيمت سيستم کې ګراف نسبتآ ټيک وکاږئ. او غوره يا د نخښنه کيدو ځايونه په نخښنه کړئ.

(که اړيين وي، له دې سره خپل ارزښت جدول په څو ټکو وغزوئ.

په انتروال [5 ; 5-] = I کې د اندازې شميروني يا وکچ يوونونوشميرونئ(د کرښي يا خطکش په څير اله) : کچ واحد يا يوون 1 cm دئ

ج – د ګراف په يوغبرېزوالي وينا وکړئ، دا په دې معنا چې د همغږيز جګيدني همداسې همغږيز ټيټېدني لپاره انتروالونه ورکړئ.

ح – د ګراف په انحنا يوه وينا وکړئ، دا په دې معنا چې د ښي همداسې د کيڼې انحنا لپاره انتروالونه ورکړئ.

خ – د تعريفورشو ژئ ټکي ورکړئ.

څلورم – د تام راشنل تابع ګراف له لاندې ټکو تېرېږي:

$P_1(-1|7) \quad P_2(-2|6) \quad P_3(3|1) \quad P_4(-3|-2)$

د تابع مساوات وشمېرئ، همداسې د انعطاف ټکی او محورغوځټکي.

ارزښت جدول ورکړئ او ګراف دامکان تر حده په يوه مناسب پروت ولاړ سيستم کې ټيک وکاږئ.

که د رسمولو لپاره کوم ټکي کم وو، نو هغه وشميرئ.

حلونه:

نتيجې او مفصل حلونه مشتق د تولګي کار ته چمتووالئ ||

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی:

الف - $n(x) = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$ $t(x) = -4x + 10$

پ – دا مثلث يوه د 8,5 د سطحې واحدونو سطحه لري.

دويم:

الف – f(x)تابع د $x_{1/2} = \pm 3$ په ځای کې جګوالی 2 لري.

ب - f'(x) د $x_{1/2} = \pm 1,5$ په ځای کې جګېدنه -0,25 لري.

ت- $t(x) = -x$

ټ- $t(x) = \left(\frac{1}{3}u^2 - 1\right)x - \frac{2}{9}u^3$ ث- $g(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

دريم:

لف – دf(x) ګراف د y محور سره سيومتريک دی، ځکه چې اکسپوننت جوړه (جفت) دی

ب - $P_{max}(0|4,5)$ $P_{min2}\left(\sqrt{12} \approx 3,46|0\right)$ $P_{min1}\left(-\sqrt{12} \approx -3,46|0\right)$

پ - $P_{w2}(-2|2) \Rightarrow t_2(x) = 2x + 6$ $P_{w1}(2|2) \Rightarrow t_1(x) = -2x + 6$

ت - $P_{x3/4}\left(\sqrt{12} \approx 3,46|0\right)$ $P_{x1/2}\left(-\sqrt{12} \approx -3,46|0\right)$ $P_y(0|4,5)$

ټ – ګراف وګورئ.   ث – ارزښت جدول وګورئ.

ج - په $\left]-\infty; -\sqrt{12}\right[$ کې کره يوغږيز ټيټيدونکي

(c) ketabton.com: The Digital Library

په $\left]-\sqrt{12};0\right[$ کې کره مونوتو جګیدونکي

په $\left]0;\sqrt{12}\right[$ کې کره مونوتون ټیټیدونکي

په $\left]\sqrt{12};\infty\right[$ کې کره مونوتون جګیدونکي.

چ-په $\left]-\infty;-2\right[$ کې ککینه انحنا یا کوږوالی په $\left]-2;2\right[$ کې ښی کوږوالی

په $\left]2;\infty\right[$ کې کینکوږوال یا انحنا

ح- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty$

ځلورم:

تابع مساوات	$f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-4x+4$
انحرافي ټکي	$P_{min}(2\mid-2) \quad P_{max}\left(-\frac{4}{3}=-1,\bar{3}\mid\frac{196}{27}\approx7,26\right)$
د انعطاف ټکي	$P_w\left(\frac{1}{3}=0,\bar{3}\mid\frac{71}{27}\approx2,63\right)$
محورغوځټکي	$P_y(0\mid4) \quad P_{x1}(1\mid0) \quad P_{x2}\left(-\sqrt{8}\approx-2,83\mid0\right) \quad P_{x3}\left(\sqrt{8}\approx2,83\mid0\right)$

مفصل حلونه:

لومړی:

الف-

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=\frac{1}{16}x^4-\frac{3}{2}x^2+7 \qquad x_0=2 \qquad f'(x)=\frac{1}{4}x^3-3x$$

$$f(x_0)=f(2)=\frac{1}{16}\cdot 16-\frac{3}{2}\cdot 4+7=1-6+7=2$$

$$f'(x_0)=f'(2)=\frac{1}{4}\cdot 8-3\cdot 2=2-6=-4$$

$$t(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)=-4(x-2)+2=-4x+8+2=\underline{\underline{-4x+10}}$$

$$n(x)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)+f(x_0)=\frac{1}{4}(x-2)+2=\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}+2=\underline{\underline{\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}}}$$

ب – د ملث سطحه = $A=\frac{g.h}{2}$

تانجنت او عمود په $:S(x_0|f(x_0))=S(2|2)$ ټکي کې غوڅوي. له دې سره لر: $h=$ 2 LE د اوږدوالي دوه واحده. g د $t(x)$ او $n(x)$ د صفرځايونو تر منځ واټندی.

$$t(x)=0\Leftrightarrow -4x+10=0\Leftrightarrow 4x=10\Leftrightarrow x_1=\frac{10}{4}=2,5$$

$$n(x)=0\Leftrightarrow \frac{1}{4}x+\frac{3}{2}=0\Leftrightarrow \frac{1}{4}x=-\frac{3}{2}\Leftrightarrow x_2=-\frac{12}{2}=-6$$

$$g=6+2,5=8,5\Rightarrow A=\frac{8,5\cdot 2}{2}=\underline{\underline{8,5FE}}$$

يادونه: په پورته LE داوږدوالي واحد او FE د سطحې واحد دی.

دويم: الف - $f(x)=\frac{1}{9}x^3-x\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3}x^2-1$

په x0 کې جګوالی ارزښت 2 لري.

$$\Rightarrow f'(x_0)=2\Leftrightarrow \frac{1}{3}x_0^2-1=2\Leftrightarrow \frac{1}{3}x_0^2=3\Leftrightarrow x_0^2=9\Rightarrow \underline{\underline{x_{01/2}=\pm 3}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تابع f(x) له دې سره د $x_{1/2} = \pm 3$ په ځای کې چګوالی ۲ لري.

ب - $f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - 1$ یو پارابول او له دې امله محورسیمتریک دی.

د f'(1,25) =-0,25 پسې لاس ته راځي: f'(-1,25x) = -0,25

f'(x) د $x_{1/2} = \pm 1,5$ په ځاي کې 0,25- جګېدنه لري.

پ –

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{3}$$

$$f\left(\sqrt{3}\right) = -\frac{2}{3}\sqrt{3}\,;\; f\left(-\sqrt{3}\right) = \frac{2}{3}\sqrt{3} \Rightarrow \underline{P\left(\sqrt{3} \mid -\frac{2}{3}\sqrt{3}\right);\; Q\left(-\sqrt{3} \mid \frac{2}{3}\sqrt{3}\right)}$$

تانجنتونه کرښې دي، چې دx محور سره غبرګې ځغلي:

$$\underline{\underline{t_1(x) = -\frac{2}{3}\sqrt{3}\,;\; t_2(x) = \frac{2}{3}\sqrt{3}}}$$

ت _

$$f(x) = \frac{1}{9}x^3 - x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - 1$$

د تانجنت مساوات په سرچینه کې: x0 = 0

$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$f'(x_0) = f'(0) = -1 \qquad f(x_0) = f(0) = 0$$

$$\Rightarrow t(x) = -1(x - 0) + 0 = \underline{\underline{-x}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټ –

$$f(x)=\frac{1}{9}x^3-x\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3}x^2-1$$

د تانجنت مساوات په P(u;f(u)) ټکي کې.

$$t(x)=f'(u)(x-u)+f(u)$$

$$f'(u)=\frac{1}{3}u^2-1 \qquad f(u)=\frac{1}{9}u^3-u$$

$$t(x)=\left(\frac{1}{3}u^2-1\right)(x-u)+\frac{1}{9}u^3-u=\left(\frac{1}{3}u^2-1\right)x-u\left(\frac{1}{3}u^2-1\right)+\frac{1}{9}u^3-u$$

$$=\left(\frac{1}{3}u^2-1\right)x-\frac{1}{3}u^3+u+\frac{1}{9}u^3-u=\left(\frac{1}{3}u^2-1\right)x-\frac{3}{9}u^3+\frac{1}{9}u^3=$$

$$=\underline{\underline{\left(\frac{1}{3}u^2-1\right)x-\frac{2}{9}u^3}}$$

ث - کربنه، چې f(x) په $P_x(3\mid 0)$ کې غوځوي، په دې ټکي کې عمود ده.

$$f(x)=\frac{1}{9}x^3-x\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3}x^2-1 \qquad P_x(3\mid 0)\Rightarrow x_0=3$$

$$n(x)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)+f(x_0)$$

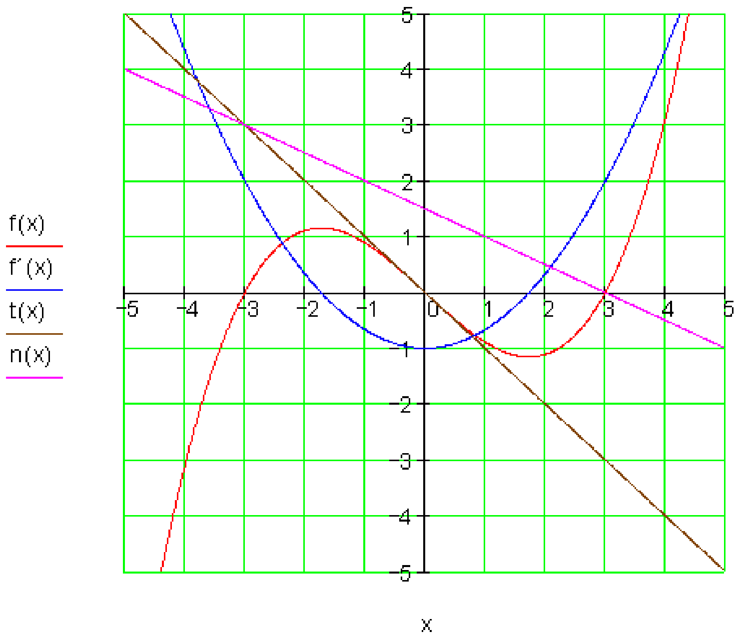
$$f'(x_0)=f'(3)=\frac{1}{3}\cdot 9-1=3-1=2$$

$$f(x_0)=f(3)=\frac{1}{9}\cdot 27-3=3-3=0$$

$$n(x)=-\frac{1}{2}(x-3)+0=\underline{\underline{-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}}}$$

ث - ګرافونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library



دريم: لف- د f(x) ګراف د y محور سره سيومتري دی، ځکه چې فقط جوړه يا جفت اکسپوننت رامنځ ته کيږي.

ب -

$$f(x)=\frac{1}{32}x^4-\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{2}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{2}x\Rightarrow f''(x)=\frac{3}{8}x^2-\frac{3}{2}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{2}x=0\Leftrightarrow x\left(\frac{1}{8}x^2-\frac{3}{2}\right)=0\Rightarrow x_1=0$$

$$\frac{1}{8}x^2-\frac{3}{2}=0\Leftrightarrow\frac{1}{8}x^2=\frac{3}{2}\Leftrightarrow x^2=12\Leftrightarrow x_{2/3}=\pm\sqrt{12}$$

$x1=0$ او $x_{2,3}=\pm\sqrt{12}$ ځايونه دي، د پروت يا افقي محور سره.

$$f''(x_1)=f''(0)=-\frac{3}{2}<0\Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_1=0$$

$$f''(x_{2/3})=f''(\pm\sqrt{12})=\frac{3}{8}\cdot 12-\frac{3}{2}=\frac{36}{8}-\frac{3}{2}=2>0\Rightarrow$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_{2/3} = \pm\sqrt{12}$$

$$f(x_1) = f(0) = \frac{9}{2} \qquad f(x_{2/3}) = \frac{1}{32}\cdot 144 - \frac{3}{4}\cdot 12 + \frac{9}{2} = 0$$

$$P_{max}(0\,|\,4{,}5) \qquad P_{min1}\left(-\sqrt{12} \approx -3{,}46\,|\,0\right) \qquad P_{min2}\left(\sqrt{12} \approx 3{,}46\,|\,0\right)$$

پ –

$$f(x) = \frac{1}{32}x^4 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x \Rightarrow f''(x) = \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{2} \Rightarrow f'''(x) = \frac{3}{4}x$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{8}x^2 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 2$$

$f_{1,2} = \pm 2$ ممکنه اوړونټکي یا د انعطاف ټکي دي.

$$f'''(x_{1/2}) = f'''(\pm 2) = \frac{3}{4}\cdot(\pm 2) \neq 0 \Rightarrow$$

له دې لاسته راځي، چې د انعطاف ټکي په $x_{1/2} = \pm 2$ کې.

$$f(x_{1/2}) = f(\pm 2) = \frac{1}{32}\cdot 16 - \frac{3}{4}\cdot 4 + \frac{9}{2} = \frac{1}{2} - 3 + \frac{9}{2} = 2$$

د انعطاف ټکي دي $P_{w1}(-2\,|\,2) \qquad P_{w2}(2\,|\,2)$

د انعطاف تانجنت

$$x_0 = -2 \Rightarrow f(x_0) = f(-2) = 2 \qquad f'(x_0) = f'(-2) = -\frac{1}{8}\cdot 8 + \frac{3}{2}\cdot 2 = 2$$

$$t_{-1}(x) = 2(x+2) + 2 = \underline{\underline{2x+6}}$$

$$x_0 = 2 \Rightarrow f(x_0) = f(2) = 2 \qquad f'(x_0) = f'(2) = \frac{1}{8}\cdot 8 - \frac{3}{2}\cdot 2 = -2$$

$$t_2(x) = -2(x-2) + 2 = \underline{\underline{-2x+6}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ت –

$$f(0)=\frac{9}{2}\Rightarrow P_y\left(0\,|\,\frac{9}{2}\right)$$

$$f(x)=0\Leftrightarrow \frac{1}{32}x^4-\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{2}=0$$ (بي یا دوه مربع مساوات)

$$x^2=z\Rightarrow \frac{1}{32}z^2-\frac{3}{4}z+\frac{9}{2}=0|\cdot 32\Leftrightarrow z^2-24z+144=0$$

$$p=-24 \qquad q=144 \qquad \Rightarrow D=144-144=0\Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{0}=0$$

$$z_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}=12\pm 0=12$$

$$z_1=x^2\Leftrightarrow 12=x^2\Leftrightarrow x_{1/2}=\pm\sqrt{12} \qquad z_2=x^2\Leftrightarrow 12=x^2\Leftrightarrow x_{3/4}=\pm\sqrt{12}$$

$$P_{x1/3}\left(\sqrt{12}\approx 3{,}46\,|\,0\right) \qquad P_{x1/3}\left(-\sqrt{12}\approx -3{,}46\,|\,0\right)$$

ټ – تابع ارزښتونه د جبشمیري سره شمیرل شوي.

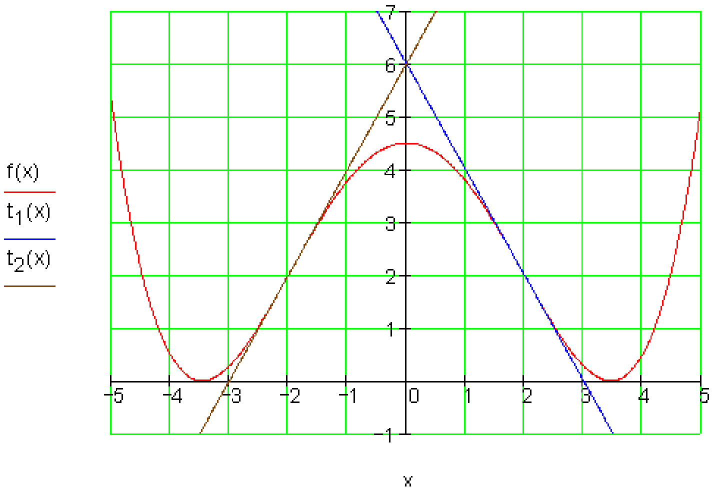
د سیومتري دلایلو په بنسټ بسیا کوي، چې فقط د x مثبت ارزښت لپاره د تابع ارزښتونه وشمیرل شي.

x	−5	−4	$-\sqrt{12}\approx -3{,}46$	−3	−2	−1	0
f (x)	5,28	0,5	0	0,28	2	3,78	4,5

x	1	2	3	$\sqrt{12}\approx 3{,}46$	4	5
f (x)	3,78	2	0,28	0	0,5	5,28

ث-ګرافونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library



ج - په $\left]-\sqrt{12};0\right[$ کې کله یوغږیز جګېدونکی په $\left]-\infty;-\sqrt{12}\right[$ کې کره یوغږیز ټیټېدونکی

په $\left]\sqrt{12};\infty\right[$ کې کله یوغږیز جګیدونکی په $\left]0;\sqrt{12}\right[$ کې کره یوغږیز ټیټیدونکی

د یوغږیزوالي حالت له ګراف څخه لوستل شوی.

تغیرات په افراطي ټکو کې رامنځ ته کیږي.

ح - په $\left]-\infty;-2\right[$ کې کینه انحنا یا کږوالی په $\left]-2;2\right[$ کې ښی انحنا

په $\left]2;\infty\right[$ کې کینه انحنا یا کږوالی

د انحنا یا کږوالي حالت له ګراف څخه ولوستل شو.

تغیر په اوړون ټکو یا د انعطاف ټکو کې صورت نیسي

خ-

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} x^4\left[\frac{1}{32}-\underbrace{\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x^2}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{x^4}}_{\to 0}\right]=\infty$$

$$\lim_{x\to \infty} f(x) = \lim_{x\to \infty} x^4\left[\frac{1}{32}-\underbrace{\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x^2}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{x^4}}_{0}\right]=\infty$$

خلورم: د تابع مساوات شمېرنه :

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1(-1|7) \Rightarrow f(-1) = 7 \Leftrightarrow -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 = 7$$
$$P_2(-2|6) \Rightarrow f(-2) = 6 \Leftrightarrow -8a_3 + 4a_2 - 2a_1 + 1a_0 = 6$$
$$P_3(3|1) \Rightarrow f(3) = 1 \Leftrightarrow 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + 1a_0 = 1$$
$$P_4(-3|2) \Rightarrow f(-3) = 2 \Leftrightarrow -27a_3 + 9a_2 - 3a_1 + 1a_0 = 2$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	−1	1	−1	7	
1	−2	4	−8	6	II − I
1	3	9	27	1	III − I
1	−3	9	−27	2	IV − I
1	−1	1	−1	7	
0	−1	3	−7	−1	
0	4	8	28	−6	III + 4·II
0	−2	8	−26	−9	IV − 2·II
1	−1	1	−1	7	
0	−1	3	−7	−1	
0	0	20	0	−10	
0	0	2	−12	−7	

له اخرنئ دوه لیکو لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$20a_2 = -10 \mid 20 \Leftrightarrow a_2 = -\frac{1}{2}$$

$$2a_2 - 12a_3 = -7 \Rightarrow 2\cdot\frac{1}{2} - 12a_3 = -7 \mid +1$$

$$\Leftrightarrow -12a_3 = -6 \mid (-12) \Leftrightarrow a_3 = \frac{1}{2}$$

$$-a_1 + 3a_2 - 7a_3 = -1 \Leftrightarrow -a_1 + 3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) - 7\cdot\frac{1}{2} = -1$$

$$\Leftrightarrow -a_1 - \frac{3}{2} - \frac{7}{2} = -1 \Leftrightarrow -a_1 - 5 = -1 \mid +5$$

$$\Leftrightarrow -a_1 = 4 \mid \cdot(-1) \Leftrightarrow a_1 = -4$$

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 7 \Leftrightarrow a_0 + 4 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 7$$

$$\Leftrightarrow a_0 + 3 = 7 \mid -3 \Leftrightarrow a_0 = 4$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4$$

افراطي ټکی:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4 \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - x - 4 \Rightarrow f''(x) = 3x - 1$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x^2 - x - 4 = 0 \mid \cdot\frac{2}{3} \Leftrightarrow x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{8}{3} = 0 \Rightarrow p = -\frac{2}{3};\ q = -\frac{8}{3}$$

$$D = -\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{9} + \frac{8}{3} = \frac{25}{9} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}$$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{3} + \frac{5}{3} = 2 \\ x_2 = \frac{1}{3} - \frac{5}{3} = -\frac{4}{3} \end{array} \right.$$

$$f''(x_1) = f''(2) = 3\cdot 2 - 1 = 6 - 1 = 5 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_1 = 2$$

$$f''(x_2) = f''\left(-\frac{4}{3}\right) = 3\cdot\left(-\frac{4}{3}\right) - 1 = -4 - 1 = -5 < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_2 = -\frac{4}{3}$$

$$f(x_1) = f(2) = \frac{1}{2}\cdot 8 - \frac{1}{2}\cdot 4 - 4\cdot 2 + 4 = 4 - 2 - 8 + 4 = -2 \Rightarrow P_{Min}(2 \mid -2)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x_2)=f\left(-\frac{4}{3}\right)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{64}{27}-\frac{1}{2}\cdot\frac{16}{9}+4\cdot\frac{4}{3}+4=-\frac{64}{54}-\frac{16}{18}+\frac{16}{3}+4$$

$$=-\frac{64}{54}-\frac{48}{54}+\frac{288}{54}+\frac{216}{54}=\frac{392}{54}=\frac{196}{27}\Rightarrow \underline{\underline{P_{Max}\left(-\frac{4}{3}\approx 1{,}33\,\middle|\,\frac{196}{27}\approx 7{,}26\right)}}$$

اوړونټکي یا د انعطاف ټکي

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-4x+4\Rightarrow f'(x)=\frac{3}{2}x^2-x-4\Rightarrow f''(x)=3x-1\Rightarrow f'''(x)=3$$

ممکنه انعطافځایونه $f''(x)=0\Leftrightarrow 3x-1=0\,|+1\Leftrightarrow 3x=1|:3\Leftrightarrow x_w=\frac{1}{3}$

یو انعطاف – یا اوړونټکی دی. $f'''(x_w)=f'''\left(\frac{1}{3}\right)=3\neq 0\Rightarrow x_w=\frac{1}{3}$

$$f(x_w)=f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{27}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}-4\cdot\frac{1}{3}+4=\frac{1}{54}-\frac{1}{18}-\frac{4}{3}+4$$

$$=\frac{1}{54}-\frac{3}{54}-\frac{72}{54}+\frac{216}{54}=\frac{142}{54}=\frac{71}{27}\Rightarrow \underline{\underline{P_w\left(\frac{1}{3}\approx 0{,}33\,\middle|\,\frac{71}{27}\approx 2{,}63\right)}}$$

محورغوختکي: $f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-4x+4 \qquad f(0)=4\Rightarrow \underline{\underline{P_y(0|4)}}$

لومړی صفرځای د ازمایښت له لارې. د $f(x)=0\Leftrightarrow\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-4x+4=0$

هورنر-شیما:

	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-4	4	
$x=1$	$\downarrow$	$\frac{1}{2}$	$\underline{0}$	$\underline{-4}$	$f(1)=0\Rightarrow x_1=1$
	$\frac{1}{2}$	0	-4	0	

(c) ketabton.com: The Digital Library

پاتې يا باقي پولينومونه:

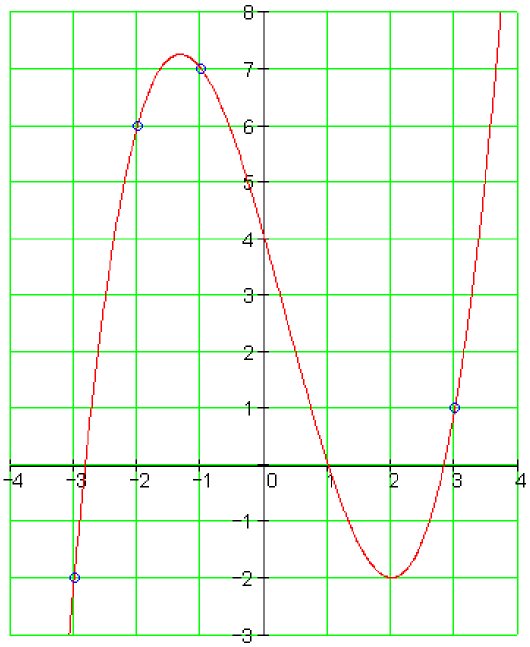
$$\frac{1}{2}x^2 - 4 = 0 \mid +4 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 = 4 \mid \cdot 2 \Leftrightarrow x^2 = 8 \Rightarrow x_{2/3} = \pm\sqrt{8}$$

$$\underline{\underline{P_{x1}(1 \mid 0)}} \qquad \underline{\underline{P_{x2/3}\left(\pm\sqrt{8} \approx 2,83 \mid 0\right)}}$$

ارزښتجدول:

x	−3	−2,83	−2	−1,33	−1	0	0,33	1	2	2,83	3
f (x)	−2	0	6	7,26	7	4	2,63	0	−2	0	1

ګراف:



پوښتنې

(c) ketabton.com: The Digital Library

مشتقشمیرنه د ټولګي کار ته چمتووالی III

اول –

د دریمي درجې یو تام یا ټول رینتونی یا راشنل عدد ورکړ شوی:

$$f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 1$$

الف - مشتقتابع f'(x) معلومه کړی یا وټاکی

ب - د f'(x) تابع بیا مشتق ونیسی، چې له هغې f''(x) تابع منځ ته راشي

پ – د ارزښتجدول لاندې ارزښتونه وشمېری.

x	−3	−2,5	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2
f(x)	−7	−0,38		3,88	3	1,13		−2,63	−3	−1,38	3
f'(x)	17	9,75	4	−0,25		−4,25	−4	−2,25		5,75	12
f''(x)	−16	−13	−10	−7		−1	2		8	11	14

ت - د مخه ورکړشوي وضعیه قیمتسیستم کې د f(x), f'(x) او f''(x) ګرافونه رسم کړی.

دویم – لاندې رینتوني توابع ورکړشوي دي:

دوه الف- $f(x) = 2x^3 - 6x$ دوه ب - $f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 4$

دوه پ - $f(x) = \frac{1}{10}x^4 - \frac{9}{5}x^2 + \frac{81}{10}$ دوه ت $f(x) = \frac{1}{5}x^4 - \frac{4}{5}x^3$

الف - الف – د سیمتري حالت په هکله ویناوې وکړی

ب- پ – تکي د پراته تانجنت سره وشمېری

پ- پ – د محومر غوښتکي وټاکی

(c) ketabton.com: The Digital Library

ت - یو څو تابع ارزښتونه وشمیرئ او ګراف یې وباسئ

دریم – یو تام ریښتونی تابع له لاندې څلور ټکو تیریږي:

درې الف - $P_1(-1|7); P_2(-2|6); P_3(3|1); P_4(-3|-2)$

درې ب $P_1(1|6); P_2(3|-4); P_3\left(-\frac{1}{2}\middle|\frac{45}{8}\right); P_4\left(-\frac{3}{2}\middle|-\frac{77}{8}\right)$

الف – د تابعمساوات وشمېرئ ب – د سیمتري حالت باندې یوه وینا وکړئ

پ – د پراته یا افقي تانجنت سره ټکي وشمېرئ

ت – محورغوڅټکي وټاکی یا معلوم کړئ.

یو څو تابع ارزښتونه وشمیرئ او ګراف یې رسم کړئ.

څلورم – د فوټبال لوبه کې د ازاده توپ وهلو د f(x) تابع په نږدې توګه د توپ د الوتنې منحني یا ګږه ده.

$$f(x) = -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2 ; x > 0$$

الف – توپ کوم ماکسیمال جګوالی غوره کوي او د شوټټکي څخه څومره لرې دی؟

ب – توپ د شوټټکي څخه څومره لرې ببرته په ځمکه لویږي؟

پ - نه متره لرې د لوبډلې مقاومتدیوال دی، هغه دوه متره جګ دی. ایا توپ له دې اوړي؟

ت - توپ د ګلکربښې څخه په متره جګوالي الوزي. ازاده شوټ له کوم واټن څخه وهل شوی دی؟

پنځم – د لاندې توابعو لپاره کمښتویش وشمېرئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

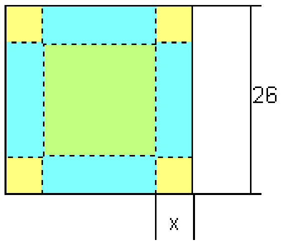
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

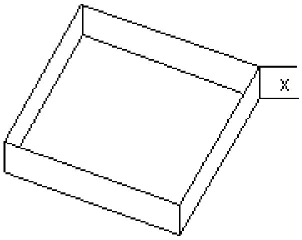
او د یوه رسم په کتنه یې تولیزه معنا روښانه کړئ.

الف - $f(x) = x^3$ ب - $f(x) = \frac{1}{3}x^2$

شپږم – د یوه مربع کارتون څخه یو کوتئ یا مکعب بې له پوښ جوړیږي، چې د اړخونو یا ضلعو اوږدوالئ یې 26 دئ او جګوالئ یې x دئ ، جوړیږي.

الف – د تابع ترم یې وټاکئ، چې حجم V د x په واکوالي یا تابعیت کې ښایي.





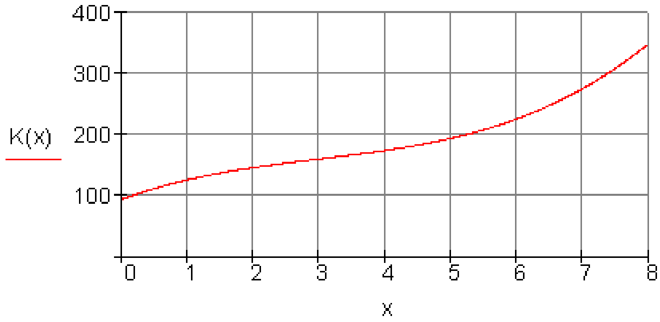
ب – ګراف یې وکاږئ او تقریبي ماکسیمال حجم یې معلوم کړئ

اوم – د یوه رغتون د د لګښتتابع K(x) د ناروغانو ګڼون یا تعداد x او ټولو لګښتونو ترمنځ انځوروي.

x = 1 دې د 100 ناروغانو په معنا، y = 1 د د روځې د زرو یورو / € 1000 Tag په معنا وي.

$$K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



الف - لګښتتابع په خپله کتابچه کې ولیکئ

ب – د لګښت تابع مشتق د مشتقلګښت یا هم پوله لګښت بولو. دا لګښت زیاتېده ښايي، چې ناروغانو تعداد په واک کې ده. (د K(x) چګېدنه).   K'(x) وټاکئ او په کواوردیناتسیستم کې یې ګراف رسمکړئ.

پ – د ناروغانو کوم تعداد سره د لګښت زیاتېدل خورا کم دي؟

دا ارزښت وشمېرئ.

حلونه

مفصل حلونه

د ټولګي کار لپاره مشتقشمیرنه III

لومړئ:

الف - $f'(x) = 3x^2 + 2x - 4$

ب - $f''(x) = 6x + 2$

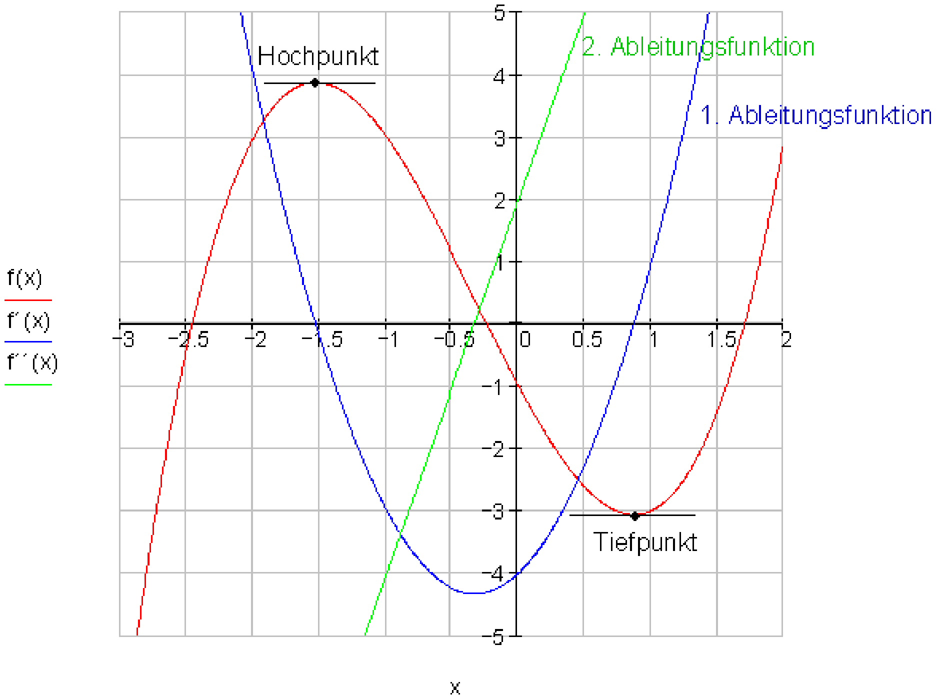
پ – ارزښتچدول

(c) ketabton.com: The Digital Library

x	−3	−2,5	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2
f (x)	−7	−0,38	3	3,88	3	1,13	−1	−2,63	−3	−1,38	3
f '(x)	17	9,75	4	−0,25	−3	−4,25	−4	−2,25	1	5,75	12
f "(x)	−16	−13	−10	−7	−4	−1	2	5	8	11	14

ت ګراف:

$f(x) := x^3 + x^2 - 4x - 1 \qquad f'(x) := 3x^2 + 2x - 4 \qquad f''(x) := 6x + 2$



د پورته پښتو له کيڼ: جګټکی، دويم مشتق، لومړی مشتق، ټيټکی

ت-

(c) ketabton.com: The Digital Library

جګتکی(نسبي ماکس) پروت تانجنت دویم مشتق له صفر کوچنی	$f'(x) = 0$ $f''(x) < 0$
ټیټتکی(نسبي مین) پروت تانجنت دویم مشتق له صفر لوي.	$f'(x) = 0$ $f''(x) < 0$

دویم. یو: الف-

$$f(x) = 2x^3 - 6x \Rightarrow$$

تکی سیمتري، ځکه چې فقط ناجوړه(طاق) اکسپوننت لرو.

صدق کوي: $f(-x) = -f(x)$

ب – $f(x) = 2x^3 - 6x \Rightarrow f'(x) = 6x^2 - 6$

د پروت محور سره ټکي.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 6 = 0 | +6$$
$$\Leftrightarrow 6x^2 = 6 | :6$$
$$\Leftrightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = -1$$

د 1 = x1 او 1- = x2 په ځایونو کې افقي تانجنتونه شتون لري.

د y وضعیه قیمت شمېرنه

$$f(x_1) = f(1) = 2 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 = -4 \qquad \Rightarrow \underline{\underline{P_1(1|-4)}}$$
$$f(x_2) = f(-1) = 2 \cdot (-1)^2 - 6 \cdot (-1) = 4 \Rightarrow \underline{\underline{P_2(-1|4)}}$$

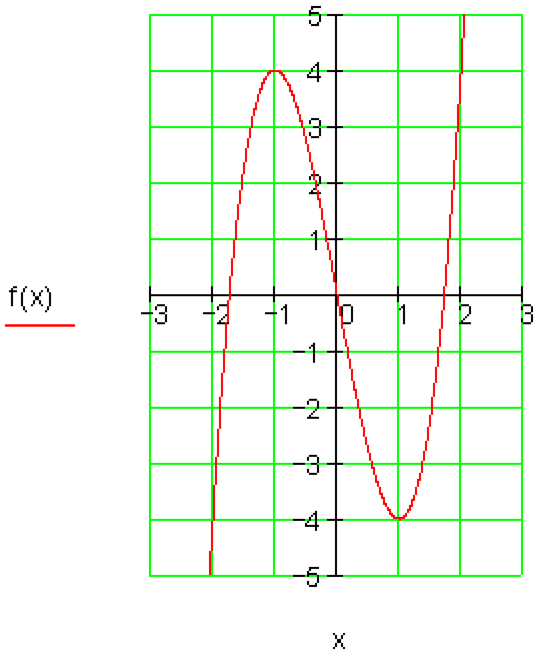
(c) ketabton.com: The Digital Library

پ ــ د $f(x) = 2x^3 - 6x$ محورغوڅتکي

$$P_y : f(0) = 0 \Rightarrow P_y(0|0)$$

صفرځايونه:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 6x = 0$$
$$\Leftrightarrow x\left(2x^2 - 6\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$
$$2x^2 - 6 = 0 | +6$$
$$\Leftrightarrow 2x^2 = 6 | : 2$$
$$\Leftrightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x_{2/3} = \pm\sqrt{3}$$
$$P_{x1}(0|0); P_{x2}\left(\sqrt{3}|0\right); P_{x3}\left(-\sqrt{3}|0\right)$$



ت-

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = 2x^3 - 6x$$

$$x = 2 \Rightarrow f(2) = 2 \cdot 2^3 - 6 \cdot 2 = 4$$

$$x = -2 \Rightarrow f(-2) = -f(2) = -4$$

د سيومتري ټکي له امله

x	−2	−1,73	−1	0	1	1,73	2
f(x)	−4	0	4	0	−4	0	4

دويم. دوه:

الف –

$$f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 4 \Rightarrow$$

سيومتري مخ ته نه لرو، ځکه چې نه فقط جوړه(جفت) يا فقط ناجوړه (طاق) اکسپوننتونه لرو.

ب –

$$f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 4 \Rightarrow f'(x) = 6x^2 + 12x$$

ټکي له پراته تانجنت سره.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 12x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(6x + 12) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$6x + 12 = 0 | -12$$

$$\Leftrightarrow 6x = -12 | : 6$$

$$\Leftrightarrow x_2 = -2$$

د $x_1 = 0$ und $x_2 = -2$ او په ځايونو کې پراته تانجنتونه شتون لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دy وضعيه قيمتونو شميرنه

$$f(x_1) = f(0) = -4 \qquad \Rightarrow \underline{\underline{P_1(0|-4)}}$$

$$f(x_2) = f(-2) = 2(-2)^3 + 6(-2)^2 - 4 = 4 \Rightarrow \underline{\underline{P_2(-2|4)}}$$

پ –

د $f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 4$ ا محورغوڅتکي يا د تقاطع ټکي.

$$P_y : f(0) = -4 \Rightarrow P_y(0|-4)$$

صفرځايونه

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^3 + 6x^2 - 4 = 0$$

يو صفرځاس د ازمايښت له لارې پيداکوو.

$$x = 1 \Rightarrow f(1) = 2 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 - 4 = 4$$

$$x = -1 \Rightarrow f(-1) = 2 \cdot (-1)^3 + 6 \cdot (-1)^2 - 4 = 0 \,|$$

د x1 = -1 سره صفرځاي.

د هورنر شيما له لارې پولينوم راکښته يا کمه ونه

	2	6	0	−4
x = −1	↓	−2	−4	4
	2	4	−4	0

يا کم شوی پولينوم:

$$2x^2 + 4x - 4 = 0 \,|:2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 2 = 0$$

$$p = 2\,;\ q = -2 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 1 + 2 = 3 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{3}$$

$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_2 = -1 + \sqrt{3} \\ x_3 = -1 - \sqrt{3} \end{array} \right.$$

$$P_{x1}(-1|0)\,;\ P_{x2}\left(-1+\sqrt{3}\,|\,0\right);\ P_{x3}\left(-1-\sqrt{3}\,|\,0\right)$$

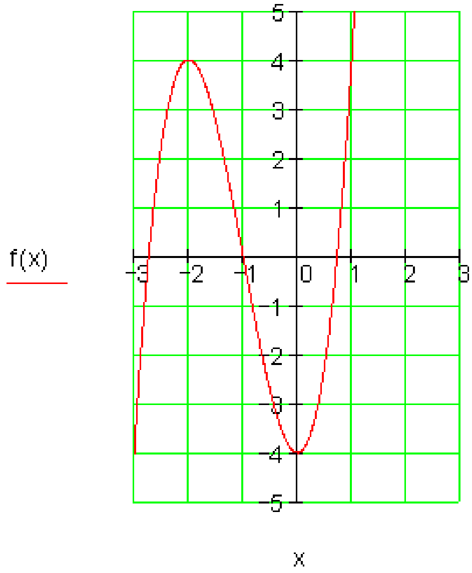
$$\text{bzw. } P_{x1}(-1|0)\,;\ P_{x2}(0{,}73\,|\,0)\,;\ P_{x3}(-2{,}73\,|\,0)$$

ت –

$$f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 4$$

$$x = -3 \Rightarrow f(-3) = 2\cdot(-3)^3 + 6\cdot(-3)^2 - 4 = -4$$

x	−3	−2,73	−2	−1	0	0,73	1
f(x)	−4	0	4	0	−4	0	4



(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم. درې:

الف -

$$f(x)=\frac{1}{10}x^4-\frac{9}{5}x^2+\frac{81}{10}\Rightarrow$$

محورسيومتري، حکه چې حوړه یا جفت اکسپوننت مخ ته لرو.

صدق کوي: $f(-x)=f(x)$

ب –

$$f(x)=\frac{1}{10}x^4-\frac{9}{5}x^2+\frac{81}{10}\Rightarrow f'(x)=\frac{4}{10}x^3-\frac{18}{5}x$$

د پراته یا افقي تانجنت سره غوښتکي.

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{4}{10}x^3-\frac{18}{5}x=0$$
$$\Leftrightarrow x\left(\frac{4}{10}x^2-\frac{18}{5}\right)=0\Rightarrow x_1=0$$
$$\frac{4}{10}x^2-\frac{18}{5}=0\,\Big|+\frac{18}{5}$$
$$\Leftrightarrow\frac{4}{10}x^2=\frac{18}{5}\,\Big|:\frac{4}{10}$$
$$\Leftrightarrow x^2=9\Rightarrow x_{2/3}=\pm3$$

په $x_1=0$ und $x_2=3$ und $x_3=-3$ ځایونو کې پراته تانجنتونه شتون لري

د y وضعيه قيمتونو کواوردیناتونه شمیرل.

$$f(x_1)=f(0)=\frac{81}{10}\qquad\Rightarrow\underline{P_1\left(0\,\Big|\,\frac{81}{10}\right)}\text{ bzw. }P_1(0\,|\,8{,}1)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x_2) = f(3) = \frac{1}{10}\cdot 3^4 - \frac{9}{5}\cdot 3^2 + \frac{81}{10} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{P_2(3|0)}}$$

$f(x_2) = f(-3) = f(3) = 0$ د محورسیومتري له امله لاس ته راځي $\underline{\underline{P_3(-3|0)}}$

پ –

د $f(x) = \frac{1}{10}x^4 - \frac{9}{5}x^2 + \frac{81}{10}$ محورغوڅټکي یا د محور د تقاطع ټکي

$P_y : f(0) = \frac{81}{10} \Rightarrow \underline{\underline{P_y\left(0|\frac{81}{10}\right)}}$ همداسې $P_y(0|8.1)$.

صفرځایونه

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{10}x^4 - \frac{9}{5}x^2 + \frac{81}{10} = 0 \text{ Substitution: } x^2 = z$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{10}z^2 - \frac{9}{5}z + \frac{81}{10} = 0|\cdot 10$$
$$\Leftrightarrow z^2 - 18z + 81 = 0$$
$$p = -18\ ;\ q = 81 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 81 - 81 = 0$$
$$z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} z_1 = 9 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x_{1/2} = \pm 3 \\ z_2 = 9 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x_{3/4} = \pm 3 \end{array} \right.$$

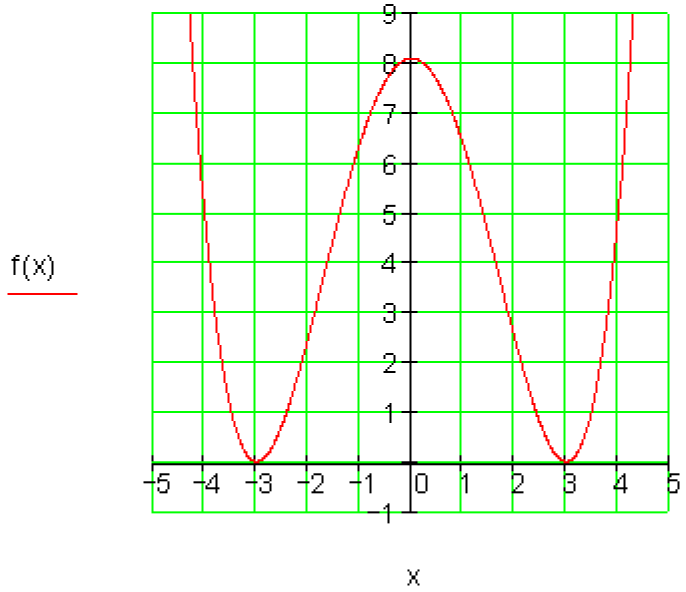
$\underline{\underline{P_{x1/3}(3|0)\ ;\ P_{x2/4}(-3|0)}}$ دواړه ډبل صفرځایونه دي

دا په دې معنا، چې ګراف په دې ځای کې د x محور لمسوي.

داسې لمس ټکي یا مماسونه تل هم ټکي دي د پراته تانجنت سره.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ت – ځيره چې وروسته وی ښه به وی، خو ځه وکړو. مخ بايد برابر شي.



$$f(x)=\frac{1}{10}x^4-\frac{9}{5}x^2+\frac{81}{10}$$

$$x=1\Rightarrow f(1)=\frac{1}{10}\cdot 1^4-\frac{9}{5}\cdot 1^2+\frac{81}{10}=6,4$$

د محور سيمتري له امله $x=-1\Rightarrow f(-1)=f(1)=6,4$

$$x=2\Rightarrow f(2)=\frac{1}{10}\cdot 2^4-\frac{9}{5}\cdot 2^2+\frac{81}{10}=2,5$$

د محور سيومتري له امله $x=-2\Rightarrow f(-2)=f(2)=2,5$

$$x=4\Rightarrow f(4)=\frac{1}{10}\cdot 4^4-\frac{9}{5}\cdot 4^2+\frac{81}{10}=4,9$$

د محور سيومتري له امله $x=-4\Rightarrow f(-4)=f(4)=4,9$

(c) ketabton.com: The Digital Library

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
f(x)	4,9	0	2,5	6,4	8,1	6,4	2,5	0	4,9

دویم. څلور:

الف –

$$f(x) = \frac{1}{5}x^4 - \frac{4}{5}x^3 \Rightarrow$$

یعنې له دې لرو چې: سیومتري مو مخ ته نه ده پرته،

ځکه چې نه فقط جفت(جوړه) او نه فقط طاق(ناجوړه) اکسپوننتونه مخ ته لرو.

ب –

$$f(x) = \frac{1}{5}x^4 - \frac{4}{5}x^3 \Rightarrow f'(x) = \frac{4}{5}x^3 - \frac{12}{5}x^2$$

ټکي د پراته تانجنت سره

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4}{5}x^3 - \frac{12}{5}x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(\frac{4}{5}x - \frac{12}{5}\right) = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 0$$

$$\frac{4}{5}x - \frac{12}{5} = 0 \,\Big|\, + \frac{12}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{5}x = \frac{12}{5} \,\Big|\, : \frac{4}{5}$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow x_3 = 3$$

د $x_{1/2} = 0$ او $x_3 = 3$ ځایونو کې پروت تانجنت شته.

د y کواوردیناتو شمېرل.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x_1) = f(x_2) = f(0) = 0 \qquad \Rightarrow \underline{\underline{P_{1/2}(0|0)}}$$

$$f(x_3) = f(3) = \frac{1}{5}\cdot 3^4 - \frac{4}{5}\cdot 3^3 = -5{,}4 \Rightarrow \underline{\underline{P_3(3|-5{,}4)}}$$

پ –

د $f(x) = \frac{1}{5}x^4 - \frac{4}{5}x^3$ محورغوڅتکي

$$P_y : f(0) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0|0)}}$$

صفرځایونه

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{5}x^4 - \frac{4}{5}x^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3\left(\frac{1}{5}x - \frac{4}{5}\right) = 0 \Rightarrow x_{1/2/3} = 0$$

$$\frac{1}{5}x - \frac{4}{5} = 0 \,|\, + \frac{4}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{5}x = \frac{4}{5} \,|\cdot 5$$

$$\Leftrightarrow x = 4 \Rightarrow x_4 = 4$$

$$\underline{\underline{P_{x1/2/3}(0|0)\,;\, P_{x4}(4|0)}}$$

ت –

$$f(x) = \frac{1}{5}x^4 - \frac{4}{5}x^3$$

$$x = 1 \Rightarrow f(1) = \frac{1}{5}\cdot 1^4 - \frac{4}{5}\cdot 1^3 = -0{,}6$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

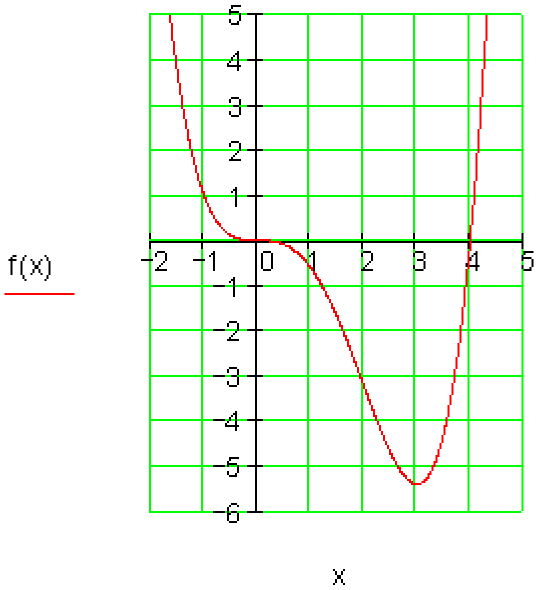
$$x=-1 \Rightarrow f(-1)=\frac{1}{5}\cdot(-1)^4-\frac{4}{5}\cdot(-1)^3=1$$

$$x=2 \Rightarrow f(2)=\frac{1}{5}\cdot 2^4-\frac{4}{5}\cdot 2^3=-3{,}2$$

$$x=-2 \Rightarrow f(-2)=\frac{1}{5}\cdot(-2)^4-\frac{4}{5}\cdot(-2)^3=9{,}6$$

$$x=5 \Rightarrow f(5)=\frac{1}{5}\cdot 5^4-\frac{4}{5}\cdot 5^3=25$$

x	−2	−1	0	1	2	3	4	5
f(x)	9,6	1	0	−0,6	−3,2	−5,4	0	25



يادونه : د $x=0$ په ځآى کې د $f(x)$ گرآف پروت تآنجنت لري، مگر هلته نه چکېکى پروت دى آو نه ټيټ ټکى.

دآ په دې معنآ، جې د پرآته تآنجنت سره ځآيونه حتمي نه ده چي افراطي ځآيونه وي. مگر آفراطي ټکي پروت تآنجنت لري.

دريم. يو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف-

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$
$$P_1(-1|7) \Rightarrow f(-1) = -1\cdot a_3 + 1\cdot a_2 - 1\cdot a_1 + 1\cdot a_0 = 7$$
$$P_2(-2|6) \Rightarrow f(-2) = -8\cdot a_3 + 4\cdot a_2 - 2\cdot a_1 + 1\cdot a_0 = 6$$
$$P_3(3|1) \Rightarrow f(3) = 27\cdot a_3 + 9\cdot a_2 + 3\cdot a_1 + 1\cdot a_0 = 1$$
$$P_4(-3|-2) \Rightarrow f(-3) = -27\cdot a_3 + 9\cdot a_2 - 3\cdot a_1 + 1\cdot a_0 = -2$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	−1	1	−1	7	
1	−2	4	−8	6	II − I
1	3	9	27	1	III − I
1	3	9	−27	−2	IV − I
1	−1	1	−1	7	
0	−1	3	−7	−1	$\|\cdot(-1)$
0	4	8	28	−6	$\|:4$
0	−2	8	−26	−9	$\|:(-2)$
1	−1	1	−1	7	
0	1	−3	7	1	
0	1	2	7	−1,5	III − II
0	1	−4	13	4,5	IV − II
1	−1	1	−1	7	
0	1	−3	7	1	
0	0	5	0	−2,5	
0	0	−1	6	3,5	

$$5a_2 = -2{,}5 \,|:5$$
$$\Leftrightarrow \boxed{a_2 = -0{,}5 = -\frac{1}{2}}$$
$$-a_2 + 6a_3 = 3{,}5$$
$$\Leftrightarrow 0{,}5 + 6a_3 = 3{,}5 \,|-0{,}5$$
$$\Leftrightarrow 6a_3 = 3 \,|:6$$
$$\Leftrightarrow \boxed{a_3 = 0{,}5 = \frac{1}{2}}$$
$$a_1 - 3a_2 + 7a_3 = 1$$
$$\Leftrightarrow a_1 + 1{,}5 + 3{,}5 = 1$$
$$\Leftrightarrow \boxed{a_1 = 1 - 1{,}5 - 3{,}5 = -4}$$
$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 7$$
$$\Leftrightarrow a_0 + 4 - 0{,}5 - 0{,}5 = 7$$
$$\Leftrightarrow \boxed{a_0 = 7 - 4 + 0{,}5 + 0{,}5 = 4}$$

$$\underline{\underline{f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4}}$$

ب -

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4 \Rightarrow$$

سيومتري مخ ته نه لرو

ځکه چې نه فقط جوړه او نه فقط ناجوړه يعنې طاق اکسپوننت شتون لري

پ –

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4 \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - x - 4$$

ټکي د پرآته تآنجنت سره

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x^2 - x - 4 = 0 \,|: \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{8}{3} = 0$$

$$p = -\frac{2}{3};\ q = -\frac{8}{3} \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{9} + \frac{24}{9} = \frac{25}{9} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}$$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{3} + \frac{5}{3} = \frac{6}{3} = 2 \\ x_2 = \frac{1}{3} - \frac{5}{3} = -\frac{4}{3} \end{array} \right.$$

د $x_1 = 2$ او $x_2 = -4/3$ په ځای کې پرآته تآنجنتونه شتون لري

د Y کوآوردينآتتونه و شميرى

$$x_1) = f(2) = \frac{1}{2}\cdot 2^3 - \frac{1}{2}\cdot 2^2 - 4\cdot 2 + 4 = -2 \qquad \Rightarrow \underline{\underline{P_1(2\,|\,-2)}}$$

$$x_2) = f\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)^3 - \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)^2 - 4\cdot\left(-\frac{4}{3}\right) + 4 = \frac{196}{27} \Rightarrow$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\underline{\underline{P_2\left(-\frac{4}{3} \approx -1{,}33 \mid \frac{196}{27} \approx 7{,}26\right)}}$$

ت-

د $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4$ محور غوځتکی یا نقطه تقاطع

$$P_y : f(0) = 4 \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0 \mid 4)}}$$

صفرځای وه

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$\begin{array}{ccccc|l} & 1/2 & -1/2 & -4 & 4 & \\ x = 1 & \downarrow & \underline{1/2} & \underline{0} & -4 & \Rightarrow x_1 = 1 \text{ ist Nullstelle} \\ & 1/2 & 0 & -4 & 0 & \end{array}$$

پاتې یا باقي پولینوم:

$$\frac{1}{2}x^2 - 4 = 0 \mid +4$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 = 4 \mid \cdot 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 8 \Rightarrow x_{2/3} = \pm\sqrt{8}$$

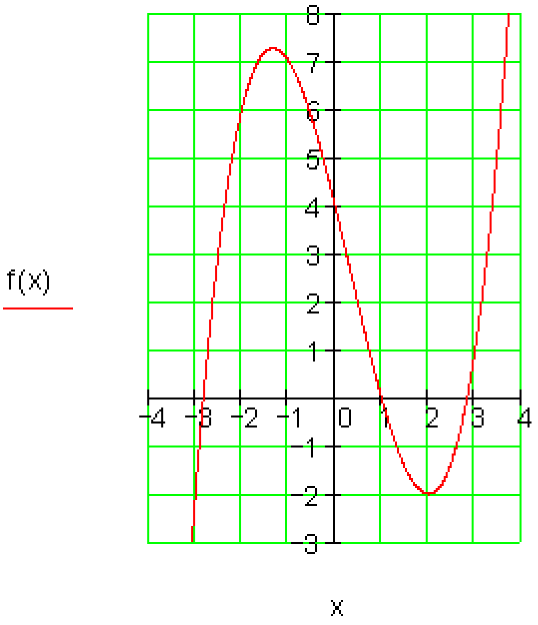
$$\underline{\underline{P_{x1}(1 \mid 0)\,;\, P_{x2}\left(\sqrt{8} \approx 2{,}83 \mid 0\right);\, P_{x3}\left(-\sqrt{8} \approx -2{,}83 \mid 0\right)}}$$

ټ-

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4$$

x	−3	−2,83	−2	−1,33	−1	0	1	2	2,83	3
f (x)	−2	0	6	7,26	7	4	0	−2	0	1



دریم. دوه:

الف-

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1(1|6) \quad \Rightarrow f(1) = 1\cdot a_3 + 1\cdot a_2 + 1\cdot a_1 + 1\cdot a_0 = 6$$

$$P_2(3|-4) \quad \Rightarrow f(3) = 27\cdot a_3 + 9\cdot a_2 + 3\cdot a_1 + 1\cdot a_0 = -4$$

$$P_3\left(-\frac{1}{2}\middle|\frac{45}{8}\right) \quad \Rightarrow f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}\cdot a_3 + \frac{1}{4}\cdot a_2 - \frac{1}{2}\cdot a_1 + 1\cdot a_0 = \frac{45}{8}$$

$$P_3\left(-\frac{3}{2}\middle|-\frac{77}{8}\right) \quad \Rightarrow f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{8}\cdot a_3 + \frac{9}{4}\cdot a_2 - \frac{3}{2}\cdot a_1 + 1\cdot a_0 = -\frac{77}{8}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	1	1	1	6	$\|\cdot 8$
1	3	9	27	−4	$\|\cdot 8$
1	−1/2	1/4	−1/8	45/8	$\|\cdot 8$
1	−3/2	9/4	−27/8	−77/8	$\|\cdot 8$
8	8	8	8	48	
8	24	72	216	−32	II − I
8	−4	2	−1	45	III − I
8	−12	18	−27	−77	IV − I
8	8	8	8	48	$\|:8$
0	16	64	208	−80	$\|:4$
0	−12	−6	−9	−3	$\|:3$
0	−20	10	−35	−125	$\|:5$
1	1	1	1	6	
0	4	16	52	−20	$\|:4$
0	−4	−2	−3	−1	III + II
0	−4	2	−7	−25	IV + II
1	1	1	1	6	
0	1	4	13	−5	
0	0	14	49	−21	$\|:7$
0	0	18	45	−45	$\|:9$
1	1	1	1	6	
0	1	4	13	−5	
0	0	2	7	−3	
0	0	2	5	−5	IV − III
1	1	1	1	6	
0	1	4	13	−5	
0	0	2	7	−3	
0	0	0	−2	−2	

$-2a_3 = -2 \,|:(-2)$

$\Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$

$2a_2 + 7a_3 = -3$

$\Leftrightarrow 2a_2 + 7 = -3 \,|-7$

$\Leftrightarrow 2a_2 = -10 \,|:2$

$\Leftrightarrow \boxed{a_2 = -5}$

$a_1 + 4a_2 + 13a_3 = -5$

$\Leftrightarrow a_1 - 20 + 13 = -5 \,|+7$

$\Leftrightarrow \boxed{a_1 = 2}$

$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 6$

$\Leftrightarrow a_0 + 2 - 5 + 1 = 6 \,|+2$

$\Leftrightarrow \boxed{a_0 = 8}$

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب –

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8 \Rightarrow$$

سیومتري مخ ته نه لرو، ځکه چې نه فقط جفت او نه فقط طاق اکسپوننتونه مخ ته لرو.

پ –

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 10x + 2$$

ټکي د افقي تانجنت سره

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 10x + 2 = 0 |:3$$

$$\Leftrightarrow x^2 - \frac{10}{3}x + \frac{2}{3} = 0$$

$$p = -\frac{10}{3}\,;\ q = \frac{2}{3} \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{25}{9} - \frac{6}{9} = \frac{19}{9} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{19}{9}}$$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_1 = \frac{5}{3} + \sqrt{\frac{19}{3}} \approx 3{,}12 \\ x_2 = \frac{5}{3} - \sqrt{\frac{19}{3}} \approx 0{,}214 \end{array} \right.$$

په $x_1 = \frac{5}{3} + \sqrt{\frac{19}{3}}$ او $x_2 = \frac{5}{3} - \sqrt{\frac{19}{3}}$ ځایونو کې پراته تانجنتونه شته.

د y کواوردیناتو شمیرنه

$$f(x_1) = f\left(\frac{5}{3} + \sqrt{\frac{19}{3}}\right) \approx f(3{,}12) \approx -4{,}06 \qquad \Rightarrow \underline{\underline{P_1(3{,}12 \mid -4{,}06)}}$$

$$f(x_1) = f\left(\frac{5}{3} - \sqrt{\frac{19}{3}}\right) \approx f(0{,}214) \approx 8{,}21 \qquad \Rightarrow \underline{\underline{P_2(0{,}214 \mid 8{,}21)}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ت –

د $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$ محور غوڅتکي

$$P_y : f(0) = 8 \Rightarrow P_y(0|8)$$

صفرځایونه

لاني الماني: لومړی صفرځای

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 5x^2 + 2x + 8 = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrr|l} & 1 & -5 & 2 & 8 & \\ x=1 & \downarrow & 1 & -4 & -2 & \\ & 1 & -4 & -2 & 6 & \Rightarrow x_1 = -1 \text{ ist Nullstelle} \\ \hline & 1 & -5 & 2 & 8 & \\ x=-1 & \downarrow & -1 & 6 & -8 & \\ & 1 & -6 & 8 & 0 & \end{array}$$

پاتې یا پاتې پولینومونه: $x^2 - 6x + 8 = 0$

$$p = -6\ ;\ q = 8 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 9 - 8 = 1 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{1} = 1$$

$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_2 = 3 + 1 = 4 \\ x_3 = 3 - 1 = 2 \end{array} \right.$$

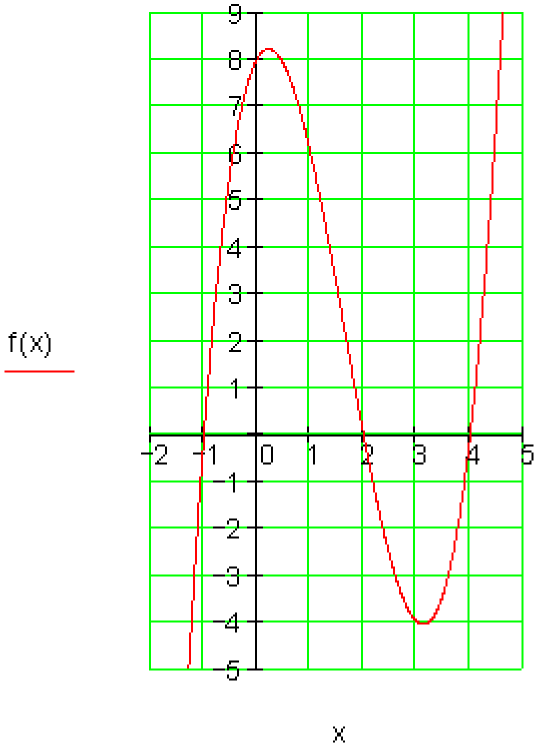
$$P_{x1}(-1|0)\ ;\ P_{x2}(4|0)\ ;\ P_{x3}(2|0)$$

ټ-

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$$

x	−1,5	−1	−0,5	0	0,21	1	2	3	3,12	4
f(x)	−9,6	0	5,6	8	8,21	6	0	−4	−4,06	0

(c) ketabton.com: The Digital Library



خلورم: الف –

$$f(x) = -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2 \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{96}x^2 + \frac{1}{8}x$$

د توپ ماکسيمال جګوالی د الوتني لار جګټکی دی، له دې امله يو ټکی دی، د پراته تانجنت سره.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{96}x^2 + \frac{1}{8}x = 0$$

$$\Leftrightarrow x\left(-\frac{1}{96}x + \frac{1}{8}\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$-\frac{1}{96}x + \frac{1}{8} = 0 | + \frac{1}{96}x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Leftrightarrow \frac{1}{8} = \frac{1}{96}x \,|\cdot 96$$

$$\Leftrightarrow 12 = x \Rightarrow x_2 = 12$$

$$f(12) = -\frac{1}{288}\cdot 12^3 + \frac{1}{16}\cdot 12^2 = 3 \Rightarrow P(12\,|\,3)$$

جګټکی دی.

توپ یو د درې متره ماکسیمال جګوالي ته رسیږي. او له دې امله د شوټټکي یا وهلټکي څخه 12 متره لرې دی.

ب–

$$f(x) = -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2$$

د صفرځایونه غواړو پیدا کړو.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(-\frac{1}{288}x + \frac{1}{16}\right) = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 0$$

$$-\frac{1}{288}x + \frac{1}{16} = 0 \,|+\frac{1}{288}x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{16} = \frac{1}{288}x \,|\cdot 288$$

$$\Leftrightarrow \frac{288}{16} = x \Rightarrow x_3 = 18$$

توپ د وهلټکي څخه په 18 متره لرېوالي بیرته ځمکې ته رالویږي

پ – $f(x) = -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د شوټتکي ځخه په نهه متره لرې د توپ جګوالی دې پیدا شي.

$$f(9) = -\frac{1}{288}\cdot 9^3 + \frac{1}{16}\cdot 9^2 \approx 2{,}53$$

توپ د مقاومت دیوال ځخه چې دوه متره لرې دی په 2,53 m جګوالي پورته الوزي.

ت –

$$f(x) = -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2$$

غواړو ځاي پیدا کړو چې هلته توپ الوتنه دوه متره جګوالی لري.

$$f(x) = 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2 = 2$$

د ازمائښت له لارې حل:

$$f(15) \approx 2{,}344$$
$$f(15{,}5) \approx 2{,}086$$
$$f(15{,}6) \approx 2{,}028$$
$$\boxed{f(15{,}65) \approx 1{,}998}$$

ازاد شوټ یا ازاد وهل له۱،۹۹۸

پنځم: الف –

$$f(x) = x^3 \qquad \lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$f(x_0+\Delta x) = (x_0+\Delta x)^3 = x_0^3 + 3x_0^2\cdot\Delta x + 3x_0\cdot(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$

$$f(x_0) = x_0^3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x_0^3+3x_0^2\cdot\Delta x+3x_0\cdot(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-x_0^3}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3x_0^2\cdot\Delta x+3x_0\cdot(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\left(3x_0^2+3x_0\cdot\Delta x+(\Delta x)^2\right)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}3x_0^2+\underbrace{3x_0\cdot\Delta x}_{\to 0}+\underbrace{(\Delta x)^2}_{\to 0}=3x_0^2$$

ب –

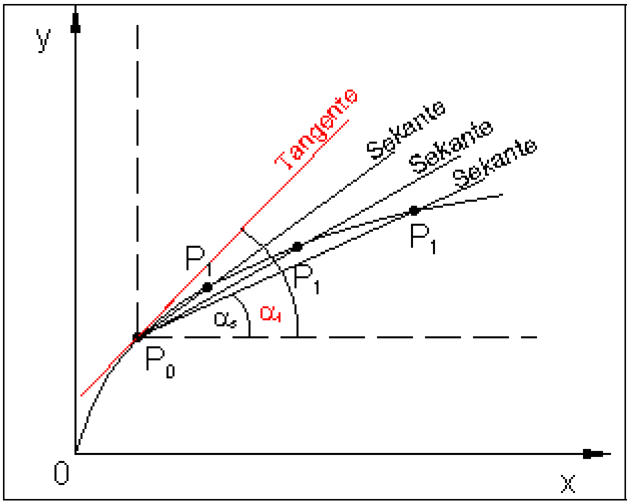
$$f(x)=\frac{1}{3}x^2 \qquad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$f(x_0+\Delta x)=\frac{1}{3}(x_0+\Delta x)^2=\frac{1}{3}\left(x_0^2+2x_0\cdot\Delta x+(\Delta x)^2\right)$$

$$f(x_0)=\frac{1}{3}x_0^2$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{3}\left(x_0^2+2x_0\cdot\Delta x+(\Delta x)^2\right)-\frac{1}{3}x_0^2}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{3}\left(2x_0\cdot\Delta x+(\Delta x)^2\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{3}\Delta x(2x_0+\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{3}\left(2x_0+\underbrace{\Delta x}_{\to 0}\right)=\frac{2}{3}x_0$$



که P_1 و P_0 ته ورنږدې کيږي، نو د نوي سيکانت جګوالي به په دې ځاي کې د تابع جګوالی د P_0 په ټکي کې وي، چې بايد پيدا شي. که دا کار په کلکه مخ ته يووړل شي او ټکی P_1 تل زيات و P_0 ټکي ته نږدې شي، نو د پولې ځاي په ځير

(c) ketabton.com: The Digital Library

یوه کربنه لاس ته راځي، دا د تابعګراف فقط په ټکي P_0 کې لمسوي. په ټکي P_0 کې د تابعګراف تانجنت. د تانجنت جګوالی په دې ټکيP_0 کې ټیک د تابع جګوالی پهP_0 کې. شیپږم:

الف – حجم یا ډکی : V = l.b.h

$$\left.\begin{array}{l} l = 26 - 2x \\ b = 26 - 2x \\ h = x \end{array}\right| \Rightarrow V(x) = (26-2x)(26-2x)x = 4x^3 - 104x^2 + 676x$$

د کوټۍ حجم یا ډکی د یوه دریمې درجې ترم له لارې ټاکل کیږي:

$$V(x) = 4x^3 - 104x^2 + 676x$$

ب – $V(x) = 4x^3 - 104x^2 + 676x$

ارزښت جدول:

x	0	2	4	6	8	10	12
f(x)	0	968	1296	1176	800	360	48

(c) ketabton.com: The Digital Library

ماکسیمال حجم یا ډکی په جګتکي کې، له دې لاس ته راځي: پروت یا افقي تانجنت.

$$V(x) = 4x^3 - 104x^2 + 676x \Rightarrow V'(x) = 12x^2 - 208x + 676$$

$$V'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 208x + 676 = 0$$

د دې مربع مساوات حل څخه لرو: $x_1 = 13; x_2 = 13/3 \approx 4,33$

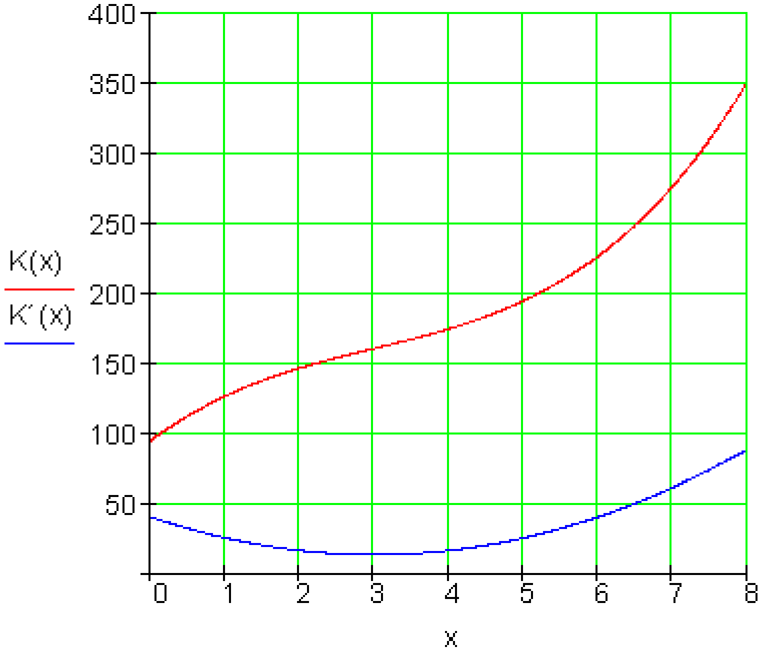
$$V\left(\frac{13}{3}\right) \approx 1302$$

د x=13/3 cm له ټاکلو د کوتۍ حجم یا ډکی $v \sim 1302m^3$ ماکسیمال دی.

حجم یا ډکی دی:

اووم:

الف \ ب



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94 \Rightarrow K'(x) = 3x^2 - 18x + 40$$

ارزښتجدول

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
K'(x)	40	25	16	13	16	25	40	61	88

پ –

د K'(x) ګراف یو پارابول دی، هغه چې د لګښت زیاتوالی ښایې. د لګښت خورا کم زیاتوالی د پارابول له ککرټکي یا رآس ټکي سره لاس ته راځي.

$$K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94 \Rightarrow K'(x) = 3x^2 - 18x + 40 \Rightarrow K''(x) = 6x - 18$$

د پارابول په ککرټکي کې پروت تانجنت.

$$K''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 18 = 0 \Rightarrow x = 3$$
$$K'(3) = 13$$

د x = 3 ناروغانو ګڼون یا تعداد (300 ناروغان) د لګښت زیاتوالی له نورو خورا کم دی. K'(3) = 13 په دې معنا چې 130 € / Tag په روځ . یا په بل ډول ویل شوي: که په دې ناروغانو ته یو بل راشي، دا په دې معنا چې x = 3,01 . د یوه ورزیات ناروغ لپاره لګښت دی: K(3,01) - K(3) = 160,13 - 160 = 0,13

که دا ارزښتونه له 1000 سره ضرب شي، نو د روځې لاس ته ترې 130 €/Tag یورو راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

انتیګرالشمیرنه

انتیګرالشمیرنې لپاره پیل راوړنې

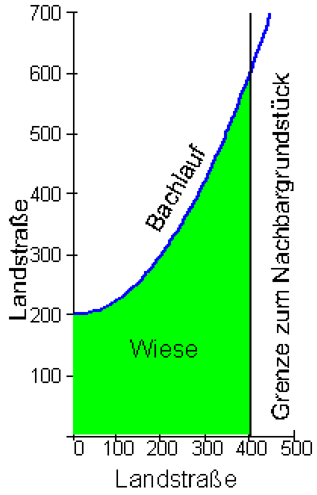
موږ د ځمککچپوهنې یا هندسې له لارې بلد یو چې د کرښو رابند تنونو یا جسمونوسطحه او ډکی یا حجم څنګه وشمیرو.
که یوه سطحه له ګړې (-کرښې) رابنده وي، نو څه باید وشي؟
دا مو انتیګرال شمیرنې ته رابولي.

پیلبیلګه

دا څیره شوی چمن خرڅیږي. له پورته لور د ویالې را بند دی او له ښې لور د ګاونډي ځمکه ده او کیڼ لور ته کوڅه او له کښته لور هم د یوې کوڅې را بند دی.

ددی لپاره چې چمن وپلورل شي، باید سطحه وپیژندل شي.

د پلورونکی لپاره سطحه باید نزدې پوره مګر هیڅکله کمه ونه شمیرل شي. اخستونکی هم د ځان لپاره فکر کوي، چې پیسې باید ورکړي، خو هیڅکله ځمکه د اصل څخه زیات ونه شمیرل شي.



وروسته له دې چې رانیوونکي او پلورونکي د چمن سطحه معلومه کړه، دواړه د پیسو په تادیه سره یوځای کیږي او په دې هکله موافقه کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

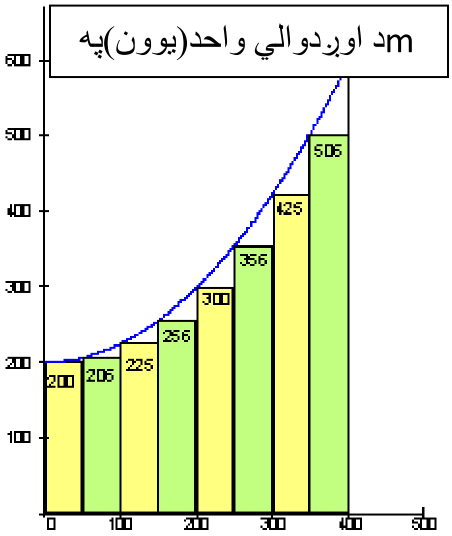
$f(x) = \frac{1}{400}x^2 + 200$ د تابع مساوات لري.

د اخستونکي له پاره ممکنه حل.

هره ټوټه(مستطيل پټی) 50m سره وره ده او په رسم کې ورکړشوی جګوالی لري. د ټولو پټيو، سطحه يو ځای شميرو.

$$200 \cdot 50 = 10000$$
$$206 \cdot 50 = 10300$$
$$225 \cdot 50 = 11250$$
$$256 \cdot 50 = 12800$$
$$300 \cdot 50 = 15000$$
$$256 \cdot 50 = 12800$$
$$425 \cdot 50 = 21250$$
$$506 \cdot 50 = 25300$$
$$\underline{123700}$$

ځمکه په لاندې ډول په اوږدو ټوټو(پټيو) ټوټه کيږي

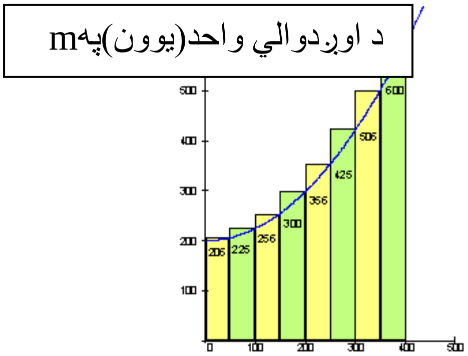


د اخستونکي لپاره ټوله سطحه نږدې $123700\ m^2$ ده.

د پلورونکي له پاره ممکنه حل:

هره ټوټه(پټی) 50m سورلري او په رسم کې ورکړشوی جګوالی لري. د ټولو پټيو سطحه يوځای شميرو.

$$206 \cdot 50 = 10300$$
$$225 \cdot 50 = 11250$$
$$256 \cdot 50 = 12800$$
$$300 \cdot 50 = 15000$$
$$356 \cdot 50 = 12800$$
$$425 \cdot 50 = 21250$$
$$506 \cdot 50 = 25300$$
$$600 \cdot 50 = 30000$$
$$\underline{143700}$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

....

دا د پلورونکي له پاره د ټولي سطحي مساحت نږدي **$143700\ m^2$** دى.
اخستونکى او پلورونکى بايد د دواړو قيمتونو ،،منځ،، ته راشي، دا په دې معنا چې دواړه د قيمتونو منځ ارزښت يو بل سره ومني. يعني د سطحې منځ ارزښت، چې دى:

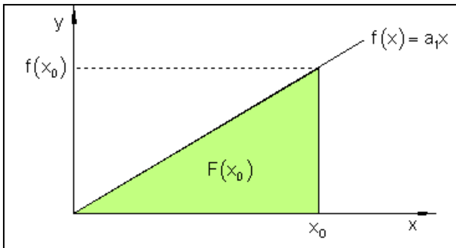
$$\frac{123700\ +143700}{2} = 133700\ unt^2$$

دا به وروسته د ټاکلي انتيګرال برخه (په مخ) کې وشميرو، چې رينښتونى ارزښت يې $133333\bar{3}\,m^2$ دى.

د اخستونکي په بيلګه کې دا ډول شميرنه ،،**لاندنى جمعي جوړول**،، بلل کيږي.
د پلورونکي په بيلګه دا ډول شميرنه،، **پورتنى جمعي جوړول**،، بلل کيږي.
دا د سطحي رينښتونى ارزښت يو چيرته په دا منځ کې پروت دى.
بايد ددي له پاره يوه لار پيدا کړو، چي رښتونى ارزښت ترې لاس ته راشي. ددې کار لپاره لږ نوره د چمتووالي لار شته.

سطحه او لومړنى تابع:

سطحې تابع ته ترمخ راوړنه:

د تـــابع $f(x) = a_1 x$ ګـــراف پـــه کـــارتيزي وضـعيه سيســتم (پـروت ولاړسيسـتم) پـه سرچينه کې يوه کرښه انځوروي. يو تـابع غـواړو پيـدا کـړو، چـې د ګـراف او x -محور ترمنځ، د x_0 په واکوالي يا تابعيت کې سطحه په ګوته کوي. دا چې دا جوړه شوې سطحه يو مثلث دى، نو حل يـې د مثلث د سطحې فرمول په مرسته $A = \frac{g \cdot h}{2}$ ساده پيدا کيږي: زموږ د مسألي لپاره متحوله داسې تغيرو و: $A \to F(x_0);\ g \to x_0;\ h \to f(x_0) = a_1 x_0$	 $F(x_0) = \frac{x_0 \cdot f(x_0)}{2}$ د $f(x_0) = a_1 x_0$ ســره پــه لانــدې ډول دى: $F(x_0) = \frac{x_0 \cdot a_1 x_0}{2} = \frac{a_1}{2} x_0^2$

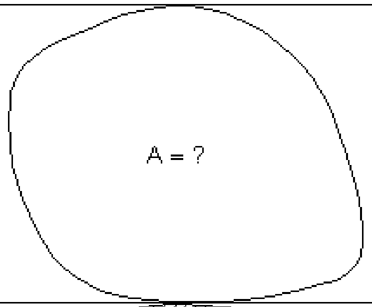
(c) ketabton.com: The Digital Library

....

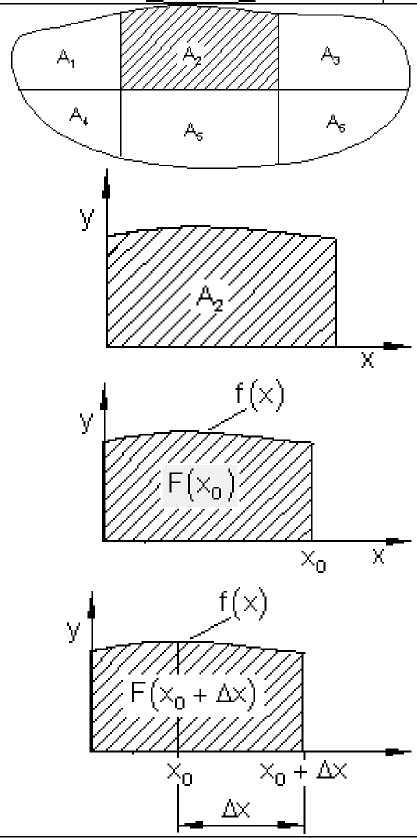
تابع $F(x_0)$ د ګراف او د x - محور ترمنځ سطحه د x_0 په واکوالي(تابعیت) کې تشریح کوي یا ښايي. موږ دا تابع د **سطحې تابع** بولو.

د سطحې پرابلم:

پخوانيو يونانيانو ته دا د منحني څخه رابندې سطحې شميرلو اصول معلوم وو. دا دمشتق شميرنه، چې موږ ورسره اوس سر او کار لرو، ډېر وروسته (د اوه لسمې پيړۍ‌پاي کې) د طبيعي علومو پوهانو لايبنيڅ او نيوټون له خوا رامنځ ته (اختراع) شو.

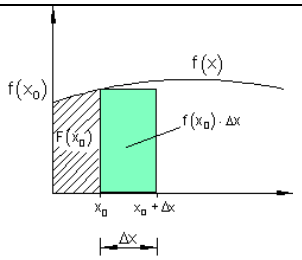
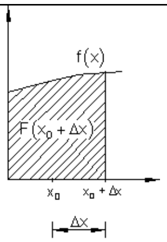
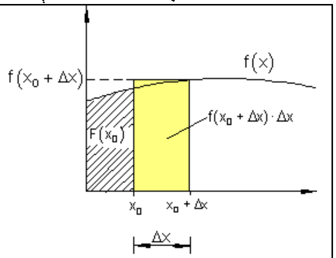


هره له کږوکرښو رابنده سطحه په پای ډېرو پلونو(قدمونو)، چې په هغې کې فقط يوه يوه کږه کرښه رامنځ ته کيږي. نورې ټولې رابندوني سيده کرښيزې دي. هره يوه د سطحې برخه(د بيلګې په توګه دلته $\mathbf{A_2}$) کېدی شي د وضعيه قيمتونو سيستم کې د يوې سطحې په څېر انځور شي، چې د کږې کرښې او پروت محور ترمنځ پرته وي. که له کږوکرښو رابند ګراف د f(x) متمادي تابع وي، نو پوښتنه رامنځ ته کيږي، چې ايا يو تابع شته چې د افقي(پروت) محورارزښت x_0 په سطحه $F(x_0)$ تنظيم کړي، لکه په پيلبېلګه کې؟ که داسې يو تابعF شتون ولري، او سطحه $F(x_0)$ چې د x_0 افقي محورارزښت تنظيم وي، نو بايد د افقي(پروت) محور ارزښت $(x_0+\Delta x)$ په سطحه $F(x_0+\Delta x)$ باندې تنظيم کړای شي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

په یوه څلورضلعي(مستطیل) کې د سطحې رابندول:
یا د سطحئ په کوتیو کې بندول:

 د منحني لاندې په نخښه شوې سطحه له ریښتونې سطحې څه کوچنۍ ده.	 $F(x_0+\Delta x)$ ریښتونې سطحه ده.	 د منحني لاندې په نخښه شوې سطحه د ریښتونې سطحې څخه لویه ده

که د سطحې پټې (یا کوچنې مستطیلونه)هرڅومره کوچنې شي، په همغه اندازه د اصلې سطحې د مساحت څخه یې توپیر کمیږي.
دا اړودوالی د ریاضیاتو له مخې په لاندې توګه فرمول بندي کیدی شي:

$F(x_0)+f(x_0)\cdot\Delta x$	$F(x_0+\Delta x)$	$F(x_0)+f(x_0+\Delta x)\cdot\Delta x$

دا مو دې لاندې نابرابرونونویا نامساواتو ته راڅوي

$$\begin{array}{lcccl} F(x_0)+f(x_0)\cdot\Delta x & \le & F(x_0+\Delta x) & \le & F(x_0)+f(x_0+\Delta x)\cdot\Delta x \quad | F(x_0) \\ \Leftrightarrow f(x_0)\cdot\Delta x & \le & F(x_0+\Delta x)-F(x_0) & \le & f(x_0+\Delta x)\cdot\Delta x \quad |:\Delta x \\ \Leftrightarrow f(x_0) & \le & \dfrac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0)}{\Delta x} & \le & f(x_0+\Delta x) \end{array}$$

لیمیټ یې نیسو(پوله یې پیدا کوو):

$$\begin{array}{ccccc} \lim\limits_{\Delta x\to 0} f(x_0) & \le & \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} & \le & \lim\limits_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x) \\ f(x_0) & \le & F'(x_0) & \le & f(x_0) \\ f(x_0) & \le & F'(x_0) & = & f(x_0) \end{array}$$

نو لرو: $\underline{\underline{F'(x_0)=f(x_0)}}$

دا په دې معنا، چې د سطحې F(x) مشتق د کږې کرښې د تابع ارزښت $f(x_0)$ سره په x_0 ځای کې برابر دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

موږ ليکو:

$$F'(x_0)=\frac{dF(x_0)}{dx}=f(x_0) \quad \text{يا} \quad \boxed{F'(x)=\frac{dF(x)}{dx}=f(x)}$$

که موږ بريالي شو، داسي يو تابع F(x) پيداکړو چې مشتق يې د رابندې کړې f(x)تابع وي، نو F(x) د سطحې تابع دی.
که موږ يو تابع د لومړني تابع څخه رابيل کړويعني مشتق يې ونيسو، نو دا مشتق کول بولو. د يوې سطحې تابع پيدا کول په روښانه توګه ددې کړنلارې برعکس دی.

سرې کړی شي فورمال ووايي:
د يوې سطحې مساحت تابع، چې پيداکړو، دا معنا لري چې انتيګرالول يې شميرو.
د يوه ساده توان تابع په بيلګه د احساس له مخې يوه لار پيداکيدی شي، چې دا څنګه ايتيګرالوي.

توانتابع :

$$f(x)=x^3 \quad \Rightarrow f'(x)=3\cdot x^{3-1}=3x^2$$

مشتق په دې معنا چې: اکسپوننت په يو کميږي او پوتنځتابع د زاړه پوتنځ سره ضربيږي.
انتيګرالونه (زياتونه ياورګډونه) په دې معنا چې: اکسپوننت په يو جګيږي اوپوتنځتابع په نوي اګسپوننت وېشل کيږي.

دا همدا اوس ازمايو:

پوتنځتابع:

$$f(x)=3x^2 \quad \Rightarrow F(x)=\frac{3}{2+1}x^{2+1}=\underline{\underline{x^3}}$$

تابع F(x) د f(x) بنسټتابع (لومړنی تابع يا ساده تابع) بلل کيږي، ځکه چې f(x) له F(x) څخه لاس ته ارځي يا را پيداکيږي يا راځيږي.

ناټاکلی انتيګرال

(c) ketabton.com: The Digital Library

....

و به ګورو، چې نا ټاکلی انتيګرال د لومړنی تابع لپاره بل نوم دی.

که ديوې ورکړ شوې f(x) تابع F(x) لومړنی تابع، يعنې F(x) وپېژنو، نو د يوې ثابتې c د ور جمع کولوسره د f(x) د ټولو لومړنيو توابعو سټ G لاسته راوړو(c په خوښه يو حقيقي عدد دی).
موږ د f(x) تابع د F(x) لومړنی تابع ټاکنه يا اينتګرلونه هم بولو او ددې له پاره ليکو:

$$\frac{dF}{dx}=f(x) \quad \Leftrightarrow \quad dF(x)=f(x)dx \quad \Leftrightarrow \quad F(x)=\int dF(x)=\int f(x)dx$$

نو لرو : $F(x)=\int f(x)\,dx$

دا تراوسه فورمال ليکندود وو. اوس دا ژوند ته رابولو.
موږ لومړنی توابع پلټو

بيلګه:
لومړنی تابع F(x) دې پيدا شي، چې مشتق يې f(x) = 2x دی.
قاعده داسې ده $F(x)=\int f(x)dx=\int 2x\,dx$

موږ ازمايو:
$F(x)=x^2$ ځکه چې $F'(x)=2x=f(x)$
$F(x)=x^2+2$ ځکه چې $F'(x)=2x=f(x)$. په ټوليزه توګه باور لري:
$F(x)=x^2+C$ ځکه چې په هرحالت کې لرو: $F'(x)=2x=f(x)$
دواړه توابع په ثابت غړي کې يو له بل توپير لري. دوی همغه مشتق لري، ځکه چې د مشتق سره
هغه ثابت عدد له منځه ځي. له دې امله بايد دې خپلې لار ته تغير ورکړو.
قاعده(لار): باور لري: $\boxed{\int f(x)\,dx=F(x)+C}$
د لومړنيو توابعو سټ(ډېری)

د بنسټ توابعو لومړني توابع

بيلګه ښايي، چې د تابع f(x) لپاره نه يواځې يو لومړنی تابع بلکې ناپای ډېر توابع شته، چې يوائې ثابت عدد کې يو له بل سره توپير لري، چې دا د f(x) د لومړنييو توابعو سټ بولو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بېلګه

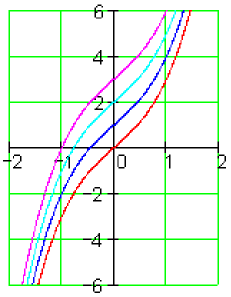
یو لومړنۍتابع $F(x)$ دې پیدا شي، چې د هغه مشتق $f(x) = 3x^2 + 2$ وي.

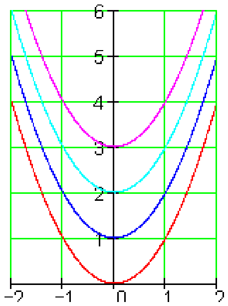
$F(x) = x^3 + 2x + C$ ، ځکه چې $F'(x) = 3x^2 + 2 = f(x)$

د ټولو لومړنیو توابعو ډېرى دې د منحنیو ډلې په څیر انځور شي، چې فقط ثابتو عددونو کې یو له بل توپیر لري.

ددې لپاره دې د ګرافونو لاندې دوه بېلګې وکتل شي.

$F(x) = x^3 + 2x + C$ $\qquad$ $F(x) = x^2 + C$





تمرینونه

لومړنی تابع پیداکړی

لاندی$f(x)$ توابعو ته لومړنی توابع$F(x)$ پیداکړی

اول - $f(x) = x^2$ دویم - $f(x) = 2x^2$ دریم - $f(x) = x$

څلورم - $f(x) = -2x$ پنځم - $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ شپږم - $f(x) = -\frac{1}{4}x$

اوم - $f(x) = x^3$ اتم - $f(x) = 4x^3$ نهم - $f(x) = 2$

لسم - $f(x) = x + 1$ یولسم - $f(x) = x^2 + x - 3$ دولسم - $f(x) = x^n ; n \in \mathbb{N}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

حلونه

تمرينونه انتيګرال ششميرنه

مفصل حلونه

اول - $f(x)=x^2 \Rightarrow F(x)=\frac{1}{3}x^3+C$ ازماييينت

$$F'(x)=\frac{1}{3}\cdot 3x^2+0=x^2=f(x)$$

دوري $f(x)=2x^2 \Rightarrow F(x)=\frac{2}{3}x^3+C$ ازماييښت

$$: F'(x)=\frac{2}{3}\cdot 3x^2+0=2x^2=f(x)$$

دريم - $f(x)=x \Rightarrow F(x)=\frac{1}{2}x^2+C$ ازماييښت

$$F'(x)=\frac{1}{2}\cdot 2x^1+0=x=f(x)$$

څلورم - $f(x)=-2x \Rightarrow F(x)=-x^2+C$ ازماييښت

$$: F'(x)=-2x^1+0=-2x=f(x)$$

پنځم - $f(x)=\frac{1}{2}x^2 \Rightarrow F(x)=\frac{1}{6}x^3+C$ ازماييښت

$$F'(x)=\frac{1}{6}\cdot 3x^2+0=\frac{1}{2}x^2=f(x)$$

شپږم - $f(x)=-\frac{1}{4}x \Rightarrow F(x)=-\frac{1}{8}x^2+C$ ازماييښت

$$F'(x)=-\frac{1}{8}\cdot 2x^1+0=-\frac{1}{4}x=f(x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوم - $f(x) = x^3 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{4}x^4 + C$ ازمايينت

$$F'(x) = \frac{1}{4} \cdot 4x^3 + 0 = x^3 = f(x)$$

اتم - $f(x) = 4x^3 \Rightarrow F(x) = x^4 + C$ ازمايينت

$$F'(x) = 4x^3 + 0 = 4x^3 = f(x)$$

نهم - $f(x) = 2 \Rightarrow F(x) = 2x + C$ ازمايينت $: F'(x) = 2 \cdot 1x^0 + 0 = 2 = f(x)$

لسم - $f(x) = x + 1 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + C$ ازمايينت

$$F'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2x^1 + 1x^0 + 0 = x + 1 = f(x)$$

يولسم - $f(x) = x^2 + x - 3 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x + C$ ازمايينت

$$: F'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 + \frac{1}{2} \cdot 2x^1 - 3 \cdot 1x^0 + 0 = x^2 + x - 3 \Rightarrow f(x)$$

دولسم - $f(x) = x^n ; n \in \mathbb{N} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$ ازمايينت

$$F'(x) = \frac{1}{n+1} \cdot (n+1)x^n + 0 = x^n = f(x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ناټاکلي انتيګرال څخه و ټاکلي انتيګرال ته

ترمخ راوړنه يا وړاندراوړنه

موږ ولېدل، چې څنګه يو تابع f(x) ته لومړنی تابع F(x) منځ ته راوړی شو، نو ناپای ډېر لومړني توابع شته دی، چې فقط د يوې ورجمع کوونکې ثابتې له امله يو له بل توپير لري.

لرو: تابع $f(x)=3x^2+2$ او د دې د لومړنيو توابعو سټ $f(x)=x^3+2x+C$

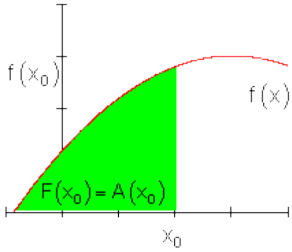
پيژند : د ټولو لومړنيو توابعو سټ و يوې تابع f(x) ته ،،ناټاکلی انتيګرال ،، بلل کيږي او ددې له پاره ليکو: $\int f(x)dx=F(x)+C$

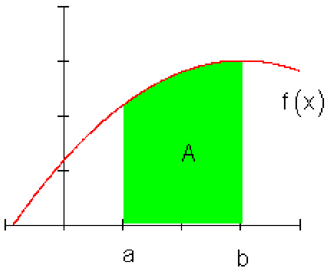
د مشتق- او انتيګرالشميرنې ترمنځ اړيکې کيدی شي د لاندې جملې له لارې لاس ته راشي.

جمله(قضيه) : د ناټاکلی انتيګرالشمېرنه د مشتقشمېرنې برعکس انځوروي

$$\frac{d[f(x)]+C}{dx}=[F(x)+C]'=f(x)$$

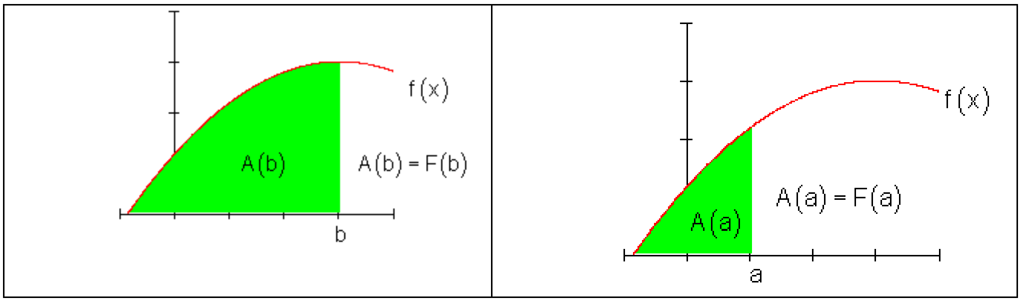
د تابع د ګراف لاندې او د انتروال [a ; b] تر منځ سطحه دې و ټاکل شي. زموږ په دې پرابلم موږ تر اوسه لاس ته راوړې زده کړې کاروو.

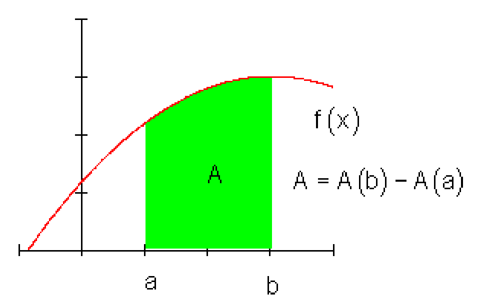




(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوې سطحې تابع شتون مو فکر دې لاندې پوهنې (زده کړې) ته لاربشوده وي:
د يوې سطحې، چې د يوې په پام کې نيولې $f(x)$ تابع ګراف لاندې ده تر x_0 ځاى پورې او يوې $F'(x)$ تابع، چې د$F(x)$ تابع مشتق د x_0 ځاى د f تابع د تابع ارزښت سره د x_0 په ځاي کې برابر وي، ترمنځ اړيکي شته دى، يعني $F'(x)=f(x)$





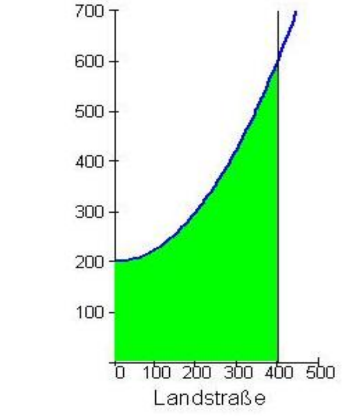
د انتروال [a,b] حدونو ترمنځ سطحې پيداکول د تابع د ګراف سطحو د کمښت څخه په ځاي (A(b)) b او سطحې په (A(a)) a ځاي کې ،. يعني
پهA= A(b) – A(a) همدې توګه
F= F(b) – F(a) لاس ته راځي.

په انتروال [a,b] کې د تابعګراف لاندې سطحه د لومړنيو توابعو تفريق دى:

$$A = F(b) - F(a) := \int_a^b F(x)dx$$

دا انتيګرال ټاکلى انتيګرال هم بلل کيږي.
جمله :
دا تر اوسه لاس ته راوړو معلوماتو په بنسټ کړى شو، چې په پيل بيلګه کې راوړې د چمن سطحه وشميرو.
ثابته له تفريق سره لرې کيږي. په عمل کې د دې مسآلې د حل لپاره يوه بله لار ګتوره راوستلې يا ګټوره بنوولې:

(c) ketabton.com: The Digital Library



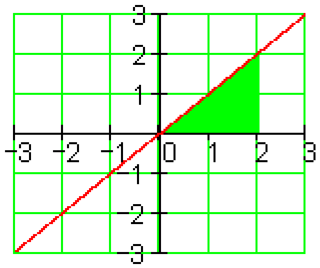
$$A=\int_0^{400}\left(\frac{1}{400}x^2+200\right)dx=\frac{1}{1200}x^3+200\cdot x\,\Big|_0^{400}$$

$$=\frac{1}{1200}\cdot 400^3+200\cdot 400\left[\frac{1}{1200}0^3+200\cdot 0\right]$$

$$=\frac{1}{1200}\cdot 400^3+200\cdot 400=\underline{\underline{133333.\bar{3}}}$$

دریم: د ساده سطحو شمیرنه

بیلګه ۱ :



په انتروال $0 \le x \le 2$ کې د $f(x)$ او د x -محورترمنځ سطحه غواړو پیداکړو

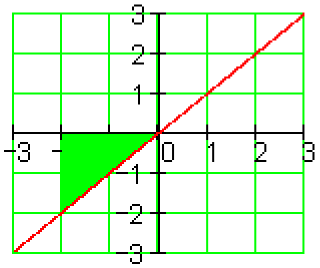
$$f(x)=x$$

$$\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^2 x\,dx=\frac{x^2}{2}\Big|_0^2$$

$$=\frac{2^2}{2}-\frac{0^2}{2}=\frac{4}{2}-0=\underline{\underline{2\,FE}}$$

FE د سطحې یوون یا واحد دی.

بیلګه ۲ :



په انترو$0 \le x \le -2$ کې د x-محور ترمنځ سطحه غواړو پیداکړو

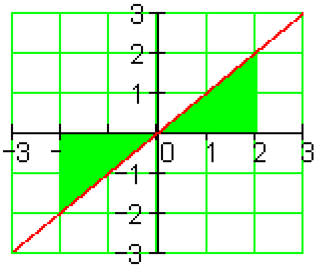
$$f(x)=x$$

$$\int_{-2}^0 f(x)\,dx=\int_{-2}^0 x\,dx=\frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^0$$

$$=\frac{0^2}{2}-\frac{(-2)^2}{2}=0-\frac{4}{2}=\underline{\underline{-2\,FE}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

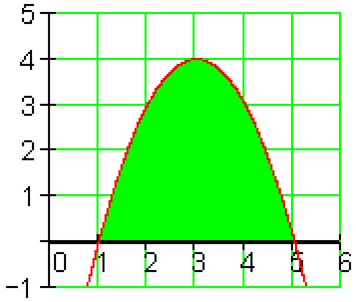
بیلګه ۳ :

	په انتروال : ≤ 2- کې د x-محور ترمنځ سطحه غواړو پیدا کړو $f(x) = x$ $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \int_{-2}^{2} x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big\vert_{-2}^{2}$ $= \frac{2^2}{2} - \frac{(-2)^2}{2} = \frac{4}{2} - \frac{4}{2} = \underline{\underline{0\ FE}}$

شمیرنه ښایي، چې د x -محور پورته لور ته سطحه زیاتیزه یا مثبت ده او د x – محور کښته لور ته سطحه کمیزه یا منفي ګڼل ګیږي.
په بیلګه ۳ کې سطحې یو بل مخامخ سره له منځه وړي یا پورته کوي.
که فزیکي سطحه څیرو، نو انتیګرال باید ووېشل شي او ارزښتونه وشمیرل شي.

$$\int_{-2}^{2} x\,dx = \left|\int_{-2}^{0} x\,dx\right| + \left|\int_{0}^{2} x\,dx\right| = \left|\frac{x^2}{2}\Big\vert_{-2}^{0}\right| + \left|\frac{x^2}{2}\Big\vert_{0}^{2}\right| = \left|\frac{0^2}{2} - \frac{(-2)^2}{2}\right| + \left|\frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right| = 2 + 2 = \underline{\underline{4\ FE}}$$

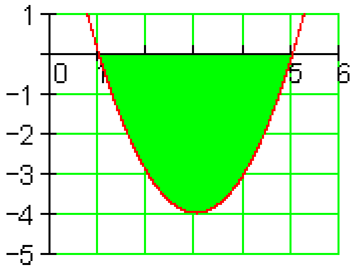
بیلګه ۴ :

په انتروال $1 \le x \le 5$ کې د $f(x)$ او د x -محور ترمنځ سطحه غواړو پیدا کړو $f(x) = -x^2 + 6x - 5$ 	$A = \int_{1}^{5} f(x)\,dx = \int_{1}^{5} \left(-x^2 + 6x - 5\right) dx$ $= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{6x^2}{2} - 5x\right]_{1}^{5}$ $= \left(-\frac{5^3}{3} + \frac{6\cdot 5^2}{2} - 5\cdot 5\right) - \left(-\frac{1^3}{3} + \frac{6\cdot 1^2}{2} - 5\cdot 1\right)$ $= \left(-\frac{125}{3} + 75 - 25\right) - \left(-\frac{1}{3} + 3 - 5\right)$ $= -\frac{125}{3} + \frac{225}{3} - \frac{75}{3} + \frac{1}{3} - \frac{9}{3} + \frac{15}{3} = \frac{32}{3}$ $\Rightarrow A \approx \underline{\underline{10{,}67\ FE}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

....

بیلګه ۵:

په انتروال $1 \le x \le 5$ کې د $f(x)$ اود x -محور ترمنځ سطحه غواړو پیدا کړو $f(x) = x^2 - 6x + 5$ 	$A = \int_1^5 f(x)\,dx = \int_1^5 \left(x^2 - 6x + 5\right) dx$ $= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{6x^2}{2} + 5x\right]_1^5$ $= \left(\frac{5^3}{3} - \frac{6 \cdot 5^2}{2} + 5 \cdot 5\right) - \left(\frac{1^3}{3} - \frac{6 \cdot 1^2}{2} + 5 \cdot 1\right)$ $= \left(\frac{125}{3} - 75 + 25\right) - \left(\frac{1}{3} - 3 + 5\right)$ $= \frac{125}{3} - \frac{225}{3} + \frac{75}{3} - \frac{1}{3} + \frac{9}{3} - \frac{15}{3} = -\frac{32}{3}$ $\Rightarrow A \approx \underline{\underline{-10{,}67\ FE}}$

جمله: سطحه پروتځای او مخنخښه

$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx > 0 \Leftrightarrow x_1 < x_2$ او سطحه د x -محور پورته لور ته پرته ده

$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx < 0 \Leftrightarrow x_1 < x_2$ او سطحه د x -محور کښته لور ته پرته ده.

د انتیګرېشن پولو بدلول:

څه پېښيږي، که د انتیګرېشن پولې سره بدلې شي؟

بیلګه ۶ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f(x) = x$

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^2$$

$$= \frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{4}{2} - 0 = 2\,FE$$

FE د سطحي يوون يا واحد دی.

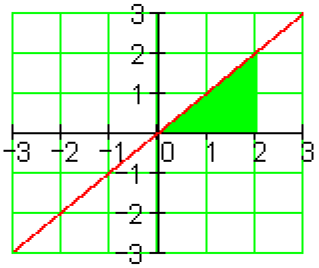
د انتيګرېشن پولي سره بدلوو:

$$\int_2 \quad \int_2 \quad 2\Big|_2$$

$$= \frac{0^2}{2} - \frac{2^2}{2} = 0 - \frac{4}{2} = -2\,FE$$

د دې لپاره چې سطحه مثبت يا زياتيزه شي بايد له (1-) سره ضرب شي.

په انتروال $0 \le x \le 2$ کې د $f(x)$ او د x - محورترمنځ سطحه غواړو پيداکړو



بيلګه ٧ :

د انتيګرېشن پولي سره بدليږي

$$A = \int_5^1 f(x)\,dx = \int_5^1 \left(-x^2 + 6x - 5\right) dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{6x^2}{2} - 5x\right]_5^1$$

$$= \left(-\frac{1^3}{3} + \frac{6\cdot 1^2}{2} - 5\cdot 1\right) - \left(-\frac{5^3}{3} + \frac{6\cdot 5^2}{2} - 5\cdot 5\right)$$

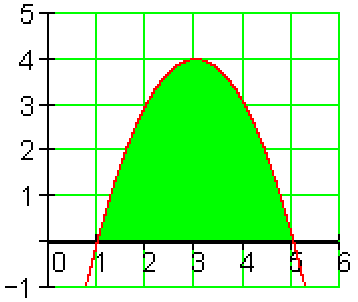
$$= \left(-\frac{1}{3} + 3 - 5\right) - \left(-\frac{125}{3} + 75 - 25\right)$$

$$= -\frac{1}{3} + \frac{9}{3} - \frac{15}{3} + \frac{125}{3} - \frac{225}{3} + \frac{75}{3} = -\frac{32}{3}$$

$$\Rightarrow A \approx -10{,}67\,FE$$

په انتروال $1 \le x \le 5$ کې د $f(x)$ اود x -محور ترمنځ سطحه غواړو پيدا کړو

$$f(x) = -x^2 + 6x - 5$$



$$A = \int_1^5 f(x)\,dx = \int_1^5 \left(-x^2 + 6x - 5\right) dx$$

$$\approx 10{,}67\,FE$$

جمله: د پولي بدلولو سره د انتيګرېشن مخنخښه بدليږي.

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \quad \text{oder} \quad -\int_a^b f(x)\,dx = \int_b^a f(x)\,dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۸ :

په انترو $-2 \le x \le 0$ کې د x-محور ترمنځ سطحه غواړو پیداکړو

$$\int_{-2}^{0} f(x)\,dx = \int_{-2}^{0} -x\,dx = -\int_{-2}^{0} x\,dx$$

پولې بدلوو

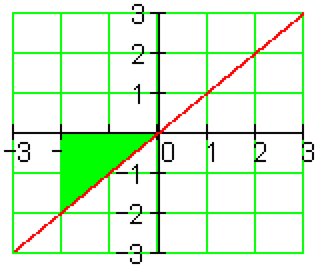
$$= \int_{0}^{-2} x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_{0}^{-2}$$

$$= \frac{(-2)^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{4}{2} - 0 = 2\ FE$$

بیلګه ۲ :

په انترو $-2 \le x \le 0$ کې د x-محور ترمنځ سطحه غواړو پیداکړو

$f(x) = -x$



تمرینونه:

انتیګرال شمیرنه II:

لاندې تاکلي انتیګرالونه وشمیرئ.

يو - $\int_{1}^{3} x\,dx$ دوه - $\int_{0}^{3} (x^2-1)\,dx$ درې - $\int_{-2}^{2} 4\,dx$ څلور - $\int_{3}^{4} dx$

پنځه - $\int_{0}^{4} (2x-5)\,dx$ شپږ - $\int_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}} \left(\frac{1}{2}x^2-4\right)dx$

اوه- $\int_{-3}^{3} (x^3+2x)\,dx$ اته - $\int_{-1}^{2} \left(x^3-\frac{1}{2}x^2+3x-4\right)dx$

نهه - $\int_{-4}^{4} \left(2x^2-\frac{1}{8}x^4\right)dx$ لس - $\int_{2}^{3} (3x-6)^3\,dx$

(c) ketabton.com: The Digital Library

حلونه

انتیګرال شمیرنه II

نتیجې

لومړی- $\int_{1}^{3} x\, dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^3 = \underline{\underline{4}}$

دویم:- $\int_{0}^{3} \left(x^2 - 1\right) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_0^3 = \underline{\underline{6}}$

دریم- $\int_{-2}^{2} 4\, dx = \left[4x\right]_{-2}^{2} = \underline{\underline{16}}$

څلورم- $\int_{3}^{4} dx = \left[x\right]_3^4 = \underline{\underline{1}}$

پنځم- $\int_{0}^{4} (2x - 5)\, dx = \left[x^2 - 5x\right]_0^4 = \underline{\underline{-4}}$

شپږم: $\int_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}} \left(\frac{1}{2}x^2 - 4\right) dx = \left[\frac{1}{6}x^3 - 4x\right]_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}} \approx \underline{\underline{-15,085}}$

اووم- $\int_{-3}^{3} \left(x^3 + 2x\right) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 + x^2\right]_{-3}^{3} = \underline{\underline{0}}$

اتم- $\int_{-1}^{2} \left(x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x - 4\right) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 4x\right]_{-1}^{2} = \underline{\underline{-\frac{21}{4}}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نهم- $\int_{-4}^{4}\left(2x^2-\frac{1}{8}x^4\right)dx=\left[\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{40}x^5\right]_{-4}^{4}=\underline{\underline{\frac{512}{15}}}$

لسم- $\int_{2}^{3}(3x-6)^3\,dx=\left[\frac{27}{4}x^4-\frac{162}{3}x^3+\frac{324}{2}x^2-216x\right]_2^3=\underline{\underline{\frac{27}{4}}}$

مفصل حلونه:

لومړی- $\int_{1}^{3}x\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^3=\frac{1}{2}\cdot 3^2-\frac{1}{2}\cdot 1^2=\frac{1}{2}\cdot 9-\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{9}{2}-\frac{1}{2}=\frac{8}{2}=\underline{\underline{4}}$

د ویم-

$\int_{0}^{3}\left(x^2-1\right)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_0^3=\frac{1}{3}\cdot 3^3-3-\left(\frac{1}{3}\cdot 0^3-0\right)=3^2-3-(0)=9-3=\underline{\underline{6}}$

دریم- $\int_{-2}^{2}4\,dx=[4x]_{-2}^{2}=4\cdot 2-4\cdot(-2)=8+8=\underline{\underline{16}}$

څلورم- $\int_{3}^{4}dx=[x]_3^4=4-3=\underline{\underline{1}}$

پنځم-

$\int_{0}^{4}(2x-5)\,dx=\left[x^2-5x\right]_0^4=4^2-5\cdot 4-\left(0^2-5\cdot 0\right)=16-20-0=\underline{\underline{-4}}$

شپږم-

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}}\left(\frac{1}{2}x^2-4\right)dx=\left[\frac{1}{6}x^3-4x\right]_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}}=\frac{1}{6}\cdot\left(\sqrt{8}\right)^3-4\cdot\sqrt{8}-\left(\frac{1}{6}\cdot\left(-\sqrt{8}\right)^3-4\cdot\left(-\sqrt{8}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{6}\cdot 8\cdot\sqrt{8}-4\cdot\sqrt{8}-\left(-\frac{1}{6}\cdot 8\cdot\sqrt{8}+4\cdot\sqrt{8}\right)=\frac{8}{6}\cdot\sqrt{8}-\frac{24}{6}\cdot\sqrt{8}+\frac{8}{6}\cdot\sqrt{8}-\frac{24}{6}\cdot\sqrt{8}$$

$$=-\frac{32}{6}\cdot\sqrt{8}=-\frac{16}{3}\cdot\sqrt{8}\approx-15{,}085$$

اووم –

$$\int_{-3}^{3}\left(x^3+2x\right)dx=\left[\frac{1}{4}x^4+x^2\right]_{-3}^{3}=\frac{1}{4}\cdot 3^4+3^2-\left(\frac{1}{4}\cdot(-3)^4+(-3)^2\right)$$

$$=\frac{81}{4}+9-\left(\frac{81}{4}+9\right)=0$$

اتم -

$$\int_{-1}^{2}\left(x^3-\frac{1}{2}x^2+3x-4\right)dx=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{2}x^2-4x\right]_{-1}^{2}$$

$$=\frac{1}{4}\cdot 2^4-\frac{1}{6}\cdot 2^3+\frac{3}{2}\cdot 2^2-4\cdot 2-\left[\frac{1}{4}\cdot(-1)^4-\frac{1}{6}\cdot(-1)^3+\frac{3}{2}\cdot(-1)^2-4\cdot(-1)\right]$$

$$=\frac{16}{4}-\frac{8}{6}+\frac{12}{2}-8-\left[\frac{1}{4}\cdot 1-\frac{1}{6}\cdot(-1)+\frac{3}{2}\cdot 1+4\right]$$

$$=4-\frac{4}{3}+6-8-\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{3}{2}+4\right]$$

$$=2-\frac{4}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}-\frac{3}{2}-4=-\frac{24}{12}-\frac{16}{12}-\frac{3}{12}-\frac{2}{12}-\frac{18}{12}=-\frac{63}{12}=-\frac{21}{4}$$

نهم: مفصل حل(اوبیونه):

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_{-4}^{4}\left(2x^2-\frac{1}{8}x^4\right)dx=\left[\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{40}x^5\right]_{-4}^{4}=$$

$$=\frac{2}{3}\cdot 4^3-\frac{1}{40}\cdot 4^5-\left[\frac{2}{3}\cdot(-4)^3-\frac{1}{40}\cdot(-4)^5\right]$$

$$=\frac{128}{3}-\frac{1024}{40}-\left[\frac{2}{3}\cdot(-64)-\frac{1}{40}\cdot(-1024)\right]$$

$$=\frac{128}{3}-\frac{1024}{40}-\left[-\frac{128}{3}+\frac{1024}{40}\right]=\frac{128}{3}-\frac{1024}{40}+\frac{128}{3}-\frac{1024}{40}$$

$$=\frac{256}{3}-\frac{2048}{40}=\frac{256}{3}-\frac{256}{5}=\frac{1280}{15}-\frac{768}{15}=\frac{512}{15}$$

لسم:

$$\int_{2}^{3}(3x-6)^3\,dx=\int_{2}^{3}(3x-6)^2\cdot(3x-6)\,dx=\int_{2}^{3}\left(9x^2-36x+36\right)\cdot(3x-6)\,dx$$

$$=\int_{2}^{3}\left(27x^3-162x^2+324x-216\right)dx$$

$$=\left[\frac{27}{4}x^4-\frac{162}{3}x^3+\frac{324}{2}x^2-216x\right]_{2}^{3}$$

$$=\frac{27}{4}\cdot 3^4-\frac{162}{3}\cdot 3^3+\frac{324}{2}\cdot 3^2-216\cdot 3-\left[\frac{27}{4}\cdot 2^4-\frac{162}{3}\cdot 2^3+\frac{324}{2}\cdot 2^2-216\cdot 2\right]$$

$$=\frac{2187}{4}-1458+\frac{2916}{2}-648-108+\frac{1296}{3}-648+432$$

$$=\frac{2187}{4}-1458+1458-648-108+432-648+432$$

$$=\frac{2187}{4}-540=\frac{2187}{4}-\frac{2160}{4}=\frac{27}{4}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د توابعو ترمنځ سطحه

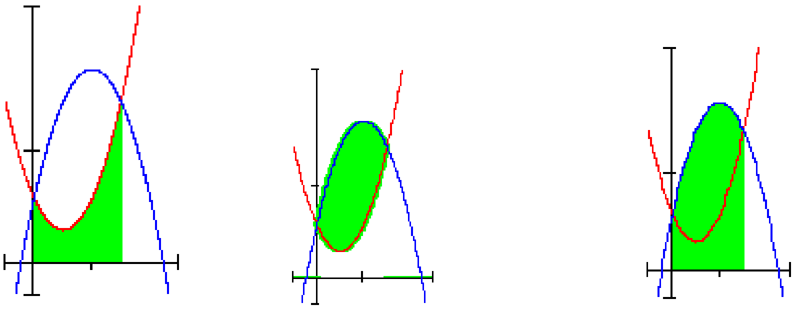
له دوه ګرافونو څخه رابندې سطحې د مساحت شميرنه:

ننوتنه: د يوه ډنډ يا يوه بند څېره دې دلته راوړل شي يا ديوه پټي ٍچې له ګړو پولو را بند وي.

فعاليت:

- که داسي يو ډنډ ولرو، نو فکر وکړئ، چې د دې ډنډ مساحت څنګه وشمېرو؟

په څنو پوښتنو کې د سطحې مساحت شمېرل کيږي، چې د دوه توابعو ګرافونو ترمنځ پرته ده. دا ډول د سطحې مساحت کېدی شي د تاکلو اينتګرالونو د کمښت له لارې و شمېرل شي. که دواړه ګرافونه د x-محور پورته لور ته پراته وي،نو د لاندې شيما څخه مخ ته ځو :



$$A = A_1 - A_2$$

د اينتګرال جوړونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

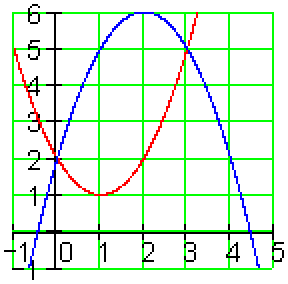
$$\int_0^3 f(x)dx = \int_0^3 (x^2 - 2x + 2)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x\right]_0^3 = \frac{1}{3}\cdot 27 - 9 + 2\cdot 3 = 9 - 9 + 6 = \underline{\underline{6}}$$

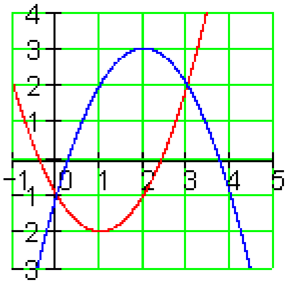
$$\int_0^3 g(x)dx = \int_0^3 (-x^2 + 4x + 2)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 2x\right]_0^3 = -\frac{1}{3}\cdot 27 + 2\cdot 9 + 2\cdot 3 =$$
$$= -9 + 18 + 6 = \underline{\underline{15}}$$

دا چې د دوه ګرافونو ترمنځ سطحه بايد تل مثبت وي،نو له لوي ارزښت څخه کووچنی ارزښت بايد کم شي.

$$A = \int_0^3 g(x)dx - \int_0^3 f(x)dx = 15 - 6 = \underline{\underline{9}}$$

لکه چې پوهيږو، د يوې سطحې مخنښه ددې په واک کې ده، چې ايا سطحه د **x** - محور پورته لور ته پرته ده او که کښته لور ته. موږ ځېږو، چې ايا دا تاثيرات په پورتنی بيلګه کې پراته دي او که نه. موږ سطحه د **y** -محور په درې واحدونو(يوونونو) کښته لورته بيايو او سطحې نوې شمېرو.





که د ليد له مخې قضاوت وکړو،نو د ټولو لاس ته راوړنه به برابره وي.

د x–ارزښت غوځتکي هم او له دې سره د انتيګرال حدونه بې تغيره پاتيږي.

$$g(x) = -x^2 + 4x - 1 \quad \text{و} \quad f(x) = x^2 - 2x - 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځای په ځای کونه:

$$A=\int_0^3 f(x)dx-\int_0^3 g(x)dx=\int_0^3 (f(x)-g(x))\,dx$$

د $f(x)-g(x)=2x^2-6x$ سره کيږي:

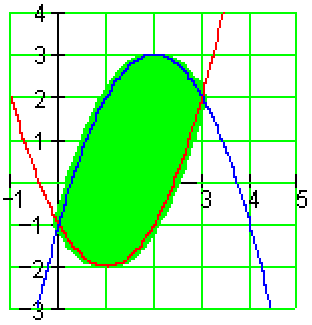
$$A=\int_0^3 (2x^2-3x^2)\,dx=\left[\frac{2}{3}x^3-3x^2\right]_0^3=\frac{2}{3}\cdot 27-3\cdot 9=18-27=\underline{\underline{-9}}$$

دا چې د دوه منحنيو ترمنځ سطحه فزيکي سطحه ښايي، بايد لاس ته راوړنه يو مثبت عدد وي.

دا د مطلق ارزښت له لارې ترلاسه کوو.

$$A=\left|\int_0^3 (2x^2-6x)\,dx\right|=\left|\left[\frac{2}{3}x^3-3x^2\right]_0^3\right|=\left|\frac{2}{3}\cdot 27-3\cdot 9\right|=\left|18-27\right|=\left|-9\right|=\underline{\underline{9}}$$

د دې متود توليزه ونه(عموميت) :

د دوه ګرافونو ترمنځ سطحه: که يوه سطحه د يوې پورته او يوې کښته منحني څخه رابنده وي، چې تابع(f(x او تابع (g(x پورې اړه و لري، نو دا له دې رابنده سطحه په لاندې دول شمېرل کيږي. $A=\left\|\int_a^b [f(x)-g(x)]dx\right\|$	

(c) ketabton.com: The Digital Library

د انتیګرالونې حدونه a او b د x – محور د دواړو ګرافونو د وضعیه قېیمتونو غوښتکي دي.

تمرینونه:

د توابعو ګرافونو تر منځ سطحه.

د لاندې فنکشنونو(توابعو) ترمنځ سطحه وټاکئ او دواړه ګرافونه په یوه پروتولاړ سیستم کې وکاږئ. شمیرل شوې سطحې کربښه کربښه کړئ.

لومړی- $f(x) = x^2 - x - 6\,;\ g(x) = 4x - 10$

دویم- $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 3\,;\ g(x) = 3x$

دریم - $f(x) = 0{,}75\left(x^2 - 5x + 4\right);\ g(x) = 0{,}75x + 3$

څلورم- $f(x) = x^2 + 5x + \frac{9}{4}\,;\ g(x) = -\frac{3}{2}x - \frac{21}{4}$

پنځم - $f(x) = (x-2)^2 - 4\,;\ g(x) = x - 1$

شپږم- $f(x) = x^2 - 4x + 1;\ g(x) = -x^2 + 2x + 1$

اووم- $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + 3\,;\ g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x$

اتم - $f(x) = x^2 + 3x\,;\ g(x) = 0{,}5x^2$

نهم- $f(x) = 0{,}5x^2 - 2x - 1;\ g(x) = 2x^2 + 2x + 1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

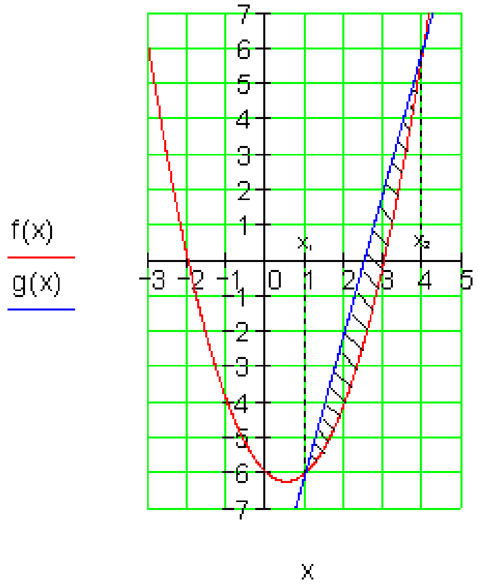
لسم- $f(x) = -0,5x^2 + 2 ; g(x) = -\frac{1}{9}(x-1)^2 + 1$

مفصل جلونه يا اوبيوني

لومړی –
$$f(x) = x^2 - x - 6 ; g(x) = 4x - 10$$
$$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1 \text{ und } x_2 = 4$$

$$A = \left|\int_1^4 [f(x) - g(x)]\, dx\right| = \left|\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 4x\right]_1^4\right|$$
$$= \left|\frac{1}{3}\cdot 4^3 - \frac{5}{2}\cdot 4^2 + 4\cdot 4 - \left[\frac{1}{3}\cdot 1^3 - \frac{5}{2}\cdot 1^2 + 4\cdot 1\right]\right| = \underline{\underline{4,5}}$$

د دواړ ګرافونو ترمنځ سطحه 4,5 FE به له دې وروسته او د مخه د سطحې واحد يا FE) يوون وي)ده.



دويم -

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 3;\ g(x) = 3x$$

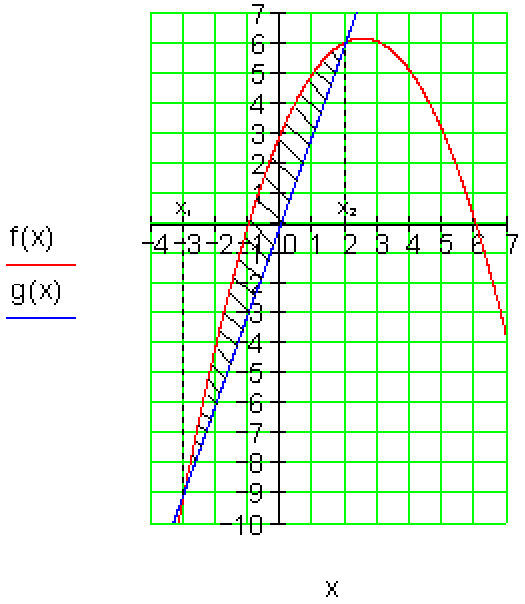
$$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -3 \text{ und } x_2 = 2$$

$$\int_{-3}^{2} [f(x) - g(x)]\,dx = \left[-\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + 3x\right]_{-3}^{2}$$

$$= -\frac{1}{6}\cdot 2^3 - \frac{1}{4}\cdot 2^2 + 3\cdot 2 - \left[-\frac{1}{6}\cdot(-3)^3 - \frac{1}{4}\cdot(-3)^2 + 3\cdot(-3)\right] = \frac{125}{12} \approx \underline{\underline{10{,}417}}$$

د دواړو ګرافونو ترمنځ سطحه 10,417 FE ده.

یادونه: سړی کړی شي چې شمیرنه بې له مطلق ارزښت مخ ته بوزي، که سړی له نتایجو یا لاس ته راوړنو، که منفي ارزښت ولري، مطلق ارزښت جوړ کړي.



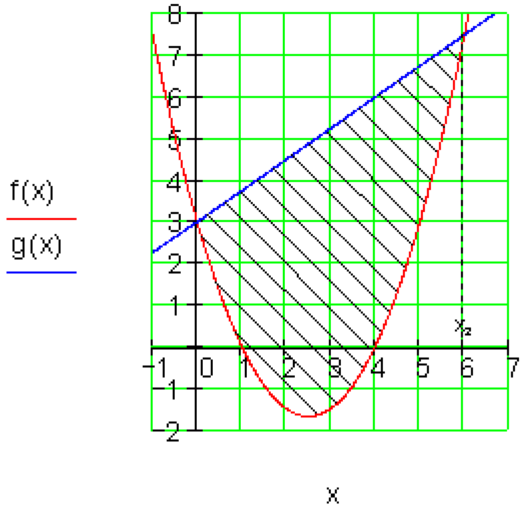
دریم –

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = 0{,}75\left(x^2 - 5x + 4\right) = 0{,}75x^2 - 3{,}75x + 3;\ g(x) = 0{,}75x + 3$$
$$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow 0{,}75x^2 - 4{,}5x = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \text{ und } x_2 = 6$$

$$\int_0^6 [f(x) - g(x)]\,dx = \left[\frac{0{,}75}{3}x^3 - \frac{4{,}5}{2}x^2\right]_0^6 = \frac{0{,}75}{3}\cdot 6^3 - \frac{4{,}5}{2}\cdot 6^2 = -27$$
$$A = \left|\int_0^6 [f(x) - g(x)]\,dx\right| = |-27| = \underline{\underline{27}}$$

د دواړو ګرافونو ترمنځ سطحه 27 FE ده.



ځلورم –

$$f(x) = x^2 + 5x + \frac{9}{4};\ g(x) = -\frac{3}{2}x - \frac{21}{4}$$
$$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{13}{2}x + \frac{15}{2} = 0 \Leftrightarrow x_1 = -5 \text{ und } x_2 = -\frac{3}{2}$$

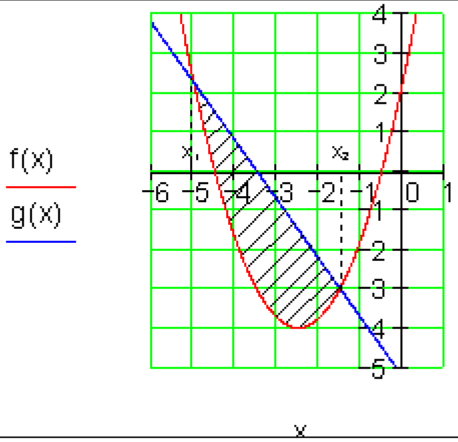
او $x_2 = -\frac{3}{2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_{-5}^{-\frac{3}{2}} [f(x)-g(x)]\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3+\frac{13}{4}x^2+\frac{15}{2}x\right]_{-5}^{-\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^3+\frac{13}{4}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{15}{2}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)-\left[\frac{1}{3}\cdot(-5)^3+\frac{13}{4}\cdot(-5)^2+\frac{15}{2}\cdot(-5)\right] = -\frac{343}{48}$$

$$A = \left|\int_{-5}^{-\frac{3}{2}} [f(x)-g(x)]\,dx\right| = \left|-\frac{343}{48}\right| \approx \underline{\underline{7,146}}$$



د دواړ ګرافون ترمنځ سطحه نږدې 7,146 FE ده.

پنځم -

$$f(x) = (x-2)^2 - 4 = x^2 - 4x \,;\; g(x) = x - 1$$

$$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{5}{2} - \sqrt{\frac{21}{4}} \text{ und } x_2 = \frac{5}{2} + \sqrt{\frac{21}{4}}$$

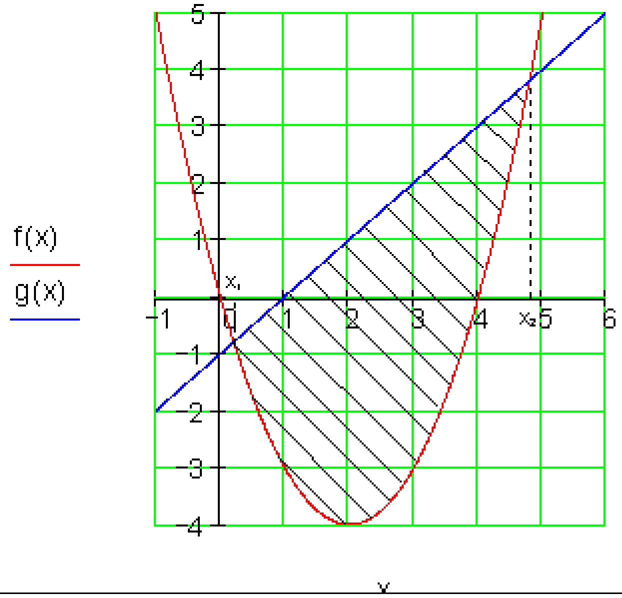
$$\int_{\frac{5}{2}-\sqrt{\frac{21}{4}}}^{\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{21}{4}}} [f(x)-g(x)]\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + x\right]_{\frac{5}{2}-\sqrt{\frac{21}{4}}}^{\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{21}{4}}}$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{21}{4}}\right)^3 - \frac{5}{2}\cdot\left(\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{21}{4}}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{21}{4}}\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-\left[\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{5}{2}-\sqrt{\frac{21}{4}}\right)^3-\frac{5}{2}\cdot\left(\frac{5}{2}-\sqrt{\frac{21}{4}}\right)^2+\left(\frac{5}{2}-\sqrt{\frac{21}{4}}\right)\right]=-\frac{7}{2}\cdot\sqrt{21}\approx-16{,}039$$

$$A=\left|\int_{\frac{5}{2}-\sqrt{\frac{21}{4}}}^{\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{21}{4}}}\left[f(x)-g(x)\right]dx\right|=\left|-\frac{7}{2}\cdot\sqrt{21}\right|\approx\underline{\underline{16{,}039}}$$



د دواړو ګرافونو ترمنځ سطحه نږدې یا څه ناڅه 16,039 FE ده.

شپږم –

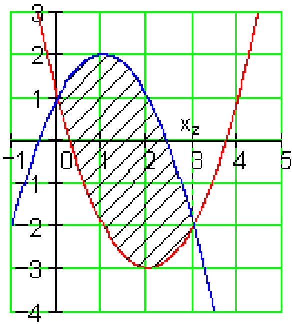
$$f(x)=x^2-4x+1;\ g(x)=-x^2+2x+1$$

$$f(x)-g(x)=0\Leftrightarrow 2x^2-6x=0\Leftrightarrow x_1=0 \text{ und } x_2=3$$

$$\int_0^3\left[f(x)-g(x)\right]dx=\left[\frac{2}{3}x^3-3x^2\right]_0^3=\frac{2}{3}\cdot3^3-3\cdot3^2=-9$$

$$A=\left|\int_0^3\left[f(x)-g(x)\right]dx\right|=\left|-9\right|=\underline{\underline{9}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

	د دواړو ګرافونو ترمنځ سطحه 9 FE ده.

اووم –

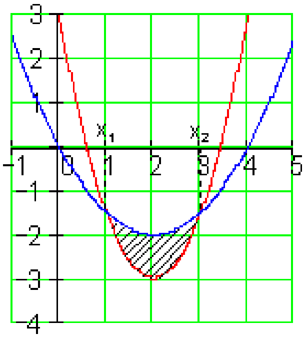
$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + 3\,;\, g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x$$

$$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1 \text{ und } x_2 = 3$$

$$\int_1^3 [f(x) - g(x)]\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x\right]_1^3$$

$$= \frac{1}{3}\cdot 3^3 - 2\cdot 3^2 + 3\cdot 3 - \left[\frac{1}{3}\cdot 1^3 - 2\cdot 1^2 + 3\cdot 1\right] = -\frac{4}{3}$$

$$A = \left|\int_1^3 [f(x) - g(x)]\,dx\right| = \left|-\frac{4}{3}\right| = \underline{\underline{\frac{4}{3}}} \approx 1,333$$

	د دواړو ګرافونو ترمنځسطحه څه ناڅه يا نږدې 1,333 FE ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

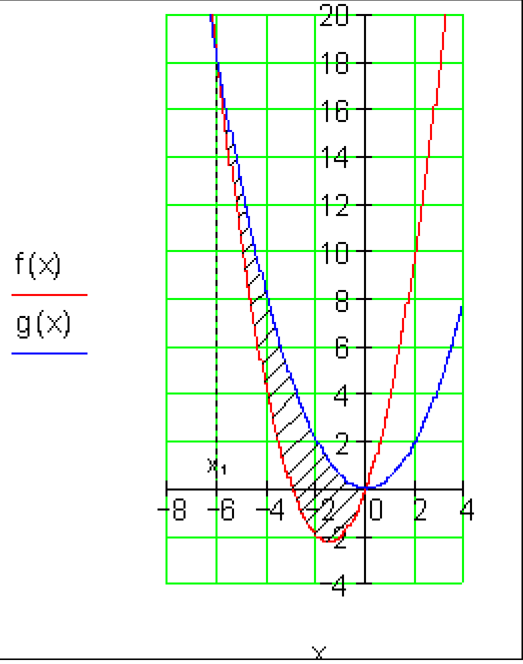
اتم -

$$f(x) = x^2 + 3x\ ;\ g(x) = 0{,}5x^2$$

$$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow 0{,}5x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x_1 = -6 \text{ und } x_2 = 0$$

$$\int_{-6}^{0} [f(x) - g(x)]\,dx = \left[\frac{0{,}5}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^2\right]_{-6}^{0} = -\left[\frac{0{,}5}{3}\cdot(-6)^3 + \frac{3}{2}\cdot(-6)^2\right] = -18$$

$$A = \left|\int_{-6}^{0} [f(x) - g(x)]\,dx\right| = |-18| = \underline{\underline{18}}$$



د دواړو ګرافونو ترمنځ سطحه 18 FE ده.

نهم -

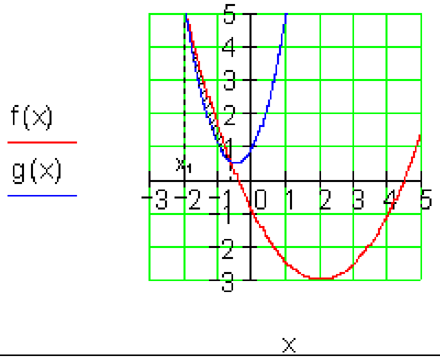
$$f(x) = 0{,}5x^2 - 2x - 1;\ g(x) = 2x^2 + 2x + 1$$

$$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow -1{,}5x^2 - 4x - 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2 \text{ und } x_2 = -\frac{2}{3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_{-2}^{-\frac{2}{3}} [f(x)-g(x)]\,dx = \left[-\frac{1,5}{3}x^3 - 2x^2 - 2x\right]_{-2}^{-\frac{2}{3}}$$
$$= -\frac{1,5}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^3 - 2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) - \left[-\frac{1,5}{3}\cdot(-2)^3 - 2\cdot(-2)^2 - 2\cdot(-2)\right]$$
$$= \frac{16}{27} \approx 0,593$$

ددواړو ګرفاون ترمنځ سطحه نږدې 0,593 FE ده.

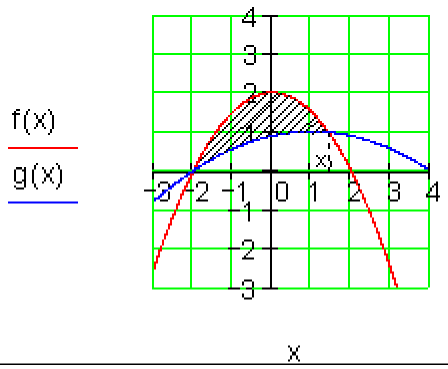


لسم-

$$f(x) = -0,5x^2 + 2\,;\; g(x) = -\frac{1}{9}(x-1)^2 + 1 = -\frac{1}{9}x^2 + \frac{2}{9}x + \frac{8}{9}$$
$$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{7}{18}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{10}{9} = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2 \text{ und } x_2 = \frac{10}{7}$$

$$\int_{-2}^{\frac{10}{7}} [f(x)-g(x)]\,dx = \left[-\frac{7}{54}x^3 - \frac{1}{9}x^2 + \frac{10}{9}x\right]_{-2}^{\frac{10}{7}}$$
$$= -\frac{7}{54}\cdot\left(\frac{10}{7}\right)^3 - \frac{1}{9}\cdot\left(\frac{10}{7}\right)^2 + \frac{10}{9}\cdot\frac{10}{7} - \left[-\frac{7}{54}\cdot(-2)^3 - \frac{1}{9}\cdot(-2)^2 + \frac{10}{9}\cdot(-2)\right]$$
$$= \frac{128}{49} \approx 2,612$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

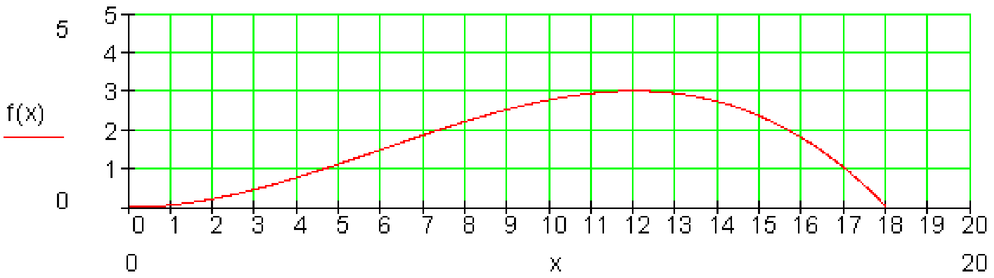
ددواړو ګرافونو ترمنځ سطحه نږدې 2,612 FE ده.	

انتيګرال د منځ- ارزښت په حيث يا توګه

د f(x) [a ; b] په انتروا کې انتيګرال د منځ ارزښت په تګه(حيث)

د يوه ازاد غونډوسکي وهلو فکشن f(x)ګراف په فوټبال لوبه کې په نږدې توګه د غونډوسکي (کرې) الوتنو کرښه يا منحني ده.

$$f(x) = -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2$$



د غونډوسکي(کرې) وهلو يا شوټ څخه وروسته د 7 m او ترمنځ 16 m دغونډوسکي کرښه کوم د الوتنې منحنی جګوالی لري؟

لومړی د دې ورشو لپاره ا رزښت جدول جوړوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

....

x_i	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$f(x_i)$	1,872	2,222	2,531	2,778	2,941	3	2,934	2,722	2,344	1,778

د شمیرل شووفنکشن ارزښتونو f(x) منځ- ارزښت فرمول $\overline{f(x)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$ جوړیږي.
زموږ د بیلګې لپاره $n = 10$ دی،، نو باور لري:

$$\overline{f(x)} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} f(x_i)$$
$$= \frac{1}{10}\cdot(1{,}872 + 2{,}222 + 2{,}531 + 2{,}778 + 2{,}941 + 3 + 2{,}934 + 2{,}722 + 2{,}344 + 1{,}778)$$
$$= \frac{25{,}122}{10} = 2{,}512$$

له دې سره غونډوسکه په انتروال [16 ; 7]کې منځني د 2,512 m الوتنجګوالی لري. که سړی دا تلنه په شدلو یا نریو پلونو(قمونو) واخلي، نو د منځي ارزښت بله لاس ته راوړنه به ترې را ووځي یا لاس ته راشي.

د x -ارزښتونو 16 ;13 ;10 ;7 سره د منځني ارزښت لپاره به 2,34 m لاس ته راغلي وای.

د x -ارزښتونو ..... ;8,5 ;8 ;7,5 ;7 سره د منځنی ارزښت لپاره به 2,555 m لاس ته راغلي وای.

په روښانه تګه لیدل کیږي، چې هرڅومره x -پلونه نري واخستل شي په همغه اندازه منځنی ارزښت ټیک لاس ته راوړل کیږي.

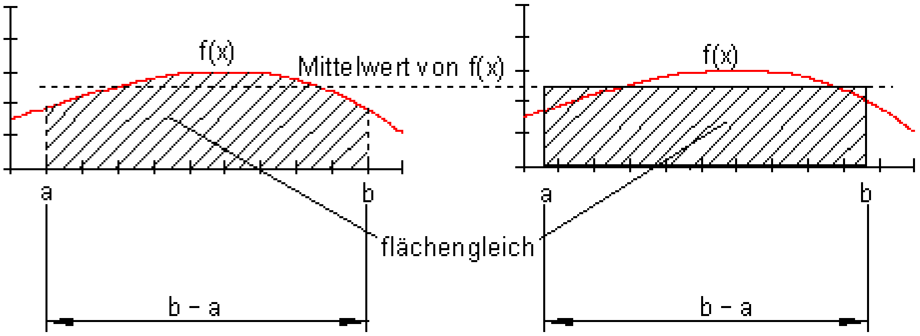
دا تلنلار د ټاکلي انتیګرال له لارې غواړو غوره کړو:
للومړی نیسو، چې فنکشن f(x) په انتروال [a;b] کې تعریف دی یا پیژند لري او زیاتیز یا مثبت. فنکشن د انتروال[a;b] په منځکې کوم ارزښت غوره کوي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

تاکلی اتیګرال $\int_a^b f(x)dx$

په انټروال [a;b] کې د فنکشن د ګراف لاندې سطحه انځوروي.

مورږ اوس د دې په مخ د ولاړکوډیز یا مستطیل ډوله، له دې سطحې سره برابره کرښیزه سطحه ، په لاندې ډول ږدو:



د ولاړګوډیز یا مستطیل پرت ولاړډوله(-عمودي) اړخ د انټروال[a;b] د اوږدوالي سره یعنيb-a د سره برابر دی.

داروښانه کیږي، که چیرې د فنکشن f(x) منځ- ارزښت په انټروال [a;b] کې په پورته کرښونه کې د ولاړ ګوډیز د جګوالي په څیر تعریف شي.

$$\overline{f(x)} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

د فنکشنf(x) منځ- ارزښت

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

د یوه دا تا لړۍ سره په پرتله کونه

دا زمورږ په بیلګه باندې په دې معنا دی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2$$

$$\overline{f(x)} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \text{ mit } a = 7 \text{ und } b = 16 \text{ folgt:}$$

$$\overline{f(x)} = \frac{1}{16-7}\int_7^{16}\left(-\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2\right)dx = \frac{1}{9}\left[-\frac{1}{4\cdot 288}x^4 + \frac{1}{3\cdot 16}x^3\right]_7^{16}$$

$$= \frac{1}{9}\left(\left[-\frac{1}{1152}\cdot 16^4 + \frac{1}{48}\cdot 16^3\right] - \left[-\frac{1}{1152}\cdot 7^4 + \frac{1}{48}\cdot 7^3\right]\right) = \underline{\underline{2{,}598}}$$

بال به له دې سره په انتروال [16 ; 7] کې د 2,598 m منځنی جګوالی لرودي.

ټاکلې انتیګرال له دې سره د جمعې یا زیاتون د کلمې تل پاتې ټولنیزوالی کیږي. دا پهدې معنا، چې سړی هرځومره کوچني x - پلونه واخلي، همغومره سړی د فنکشن منځ ارزښت ته نږدې راځي. د زاتونو یا د جمعې د اجزاوو کا اعضاوو ګڼون یا تعداد زیاتیږي یا لوییږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

انالیزی

--اکسپوننشل توابع او e - توابع

پیل

تراوسه راته معلومو توابعو کې توابع رامنځ ته کیده، چې اکسپوننتونه یا جګعددونه یې عددونه وو:

توانتوابع: $f(x) = a \cdot x^q$ د $q \in \mathbb{R}$: سره .

بیلګه: $f(x) = 2x^3$

توابع د مثبت بنسټ سره، د هغه سره چې خپلواکه متحوله x د اکسپوننت یا جګعدد سره رامنځ ته کیږي، اکسپوننشل تابع بلل کیږي.

د اکپوننشل تابع لپاره بیلګه:

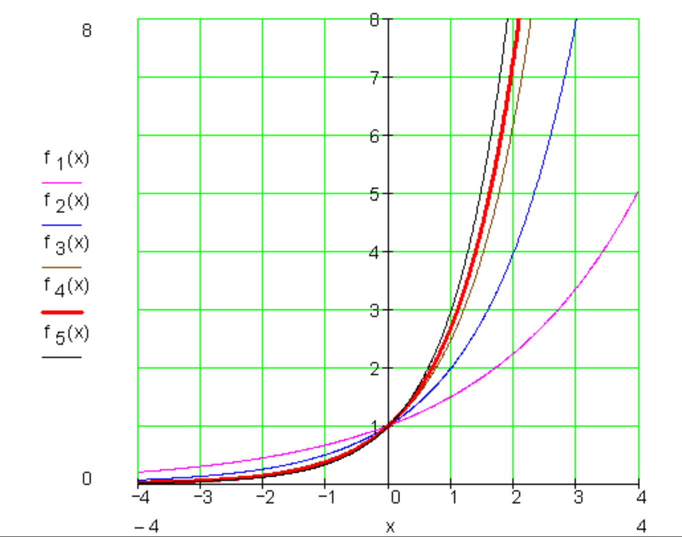
$f_1(x) = 1{,}5^x \quad f_2(x) = 2^x \quad f_3(x) = 2{,}5^x \quad f_4(x) = e^x \quad f_5(x) = 3^x$

اعداد **e ; 2,5 ; 2 ; 1,5** او **3** بنسټ جوړوي او x اکسپو ننت یا جګعدد(جګګڼ).

بنسټ **e** د اویلر عدد باندې مشهور دی او فقریبي ارزښت یې 2,71828 دی.

دا به وروسته هم به نورو راوړونو کې غوره رول ولوبوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اکپوننشل تابع ګراف د مختلفو بنسټونو سره.	

دا سور رنګه انځور د اړونده اکسپوننشل تابع دe بنسټ پورې اړه لري، چې e تابع هم بلل کیږي.

پام ته راتلنه یا برېښیدنه:

- ټول په وضعیه قیمتسیستم کې ګرافونه د y - محور د (1 | 0) Py په ټکي کې غوڅوي (قطع کوي)

- د منفي x - ارزښت لپاره ټول ګرافونه د x - محور ته نزدې کیږي. د منفي x - محور په داسې حالتونو کې اسیمپتوت بلل کیږي. داسې هم ویلای شو، چې په داسې حالاتو کې د منفي x - رازښت ځان اسیمپتوتیکي د x - محور ته ورنزدې کوي.

په ریاضیکي یا شمېرپوهنیز ډول داسې لیکو : $\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$

د مثبت - ارزښت لپاره د تابع ارزښت له ټول پولو اوړي یعنې د ناپای په لور ځي.

شمیرپوهنیز لیکدود یې داسې دی: $\lim_{x \to \infty} a^x = \infty$

(c) ketabton.com: The Digital Library

- په وضعیه قیمتسیستم کې انځورشویو ګرافونو ټول تابع ارزښتونه مثبت دي، ځکه چې د اکسپوننشل توابعو لپاره مثبت اجازه لري.

دا په دې معنا چې په داسې حالت کې صفرځایونه نه شته.

پېژند(هعریف)

د $f(x) = a^x$ r تابع د $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ او $x \in \mathbb{R}$ سره اکسپوننشل تابع د a په بنسټ بلل کیږي.

دا د **e** عدد له کومه منځ ته راځي؟

د ربحې شمېرنې څخه دې عدد e منځ ته راشي یا وده وکړي.

دلته په هر د فرمولونو ټولګه کې خوندي د ربحې فرمول استعمالیږي.

n: د ربحې د برخې ګڼون یا تعداد : K0 پیلپانګهKn دn : کاله ورسته د ربحې برخه p : د ربحې بنسټ یا بېنه په %	n: K_0 K_n p: $K_n = K_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$

په کلنۍ ګټۀ دې ګټه ونه دوه برابره شي. پس د ګټې بېنه له p = 100% ټاکل کیږي داسې چې p/100 = 1 وي.

په یو کال د ډېرو د ګټې برخو سره، پانګه د ګټې-ګټې سره ډېر ځله په ګټه اچول کیږي..
دلته د ګټې بېنه یا بېخ د ګټېبرخو باندې و وېشل شي.

د انګې په ګټه اچول د کال روسته د $p = 100\% \Rightarrow \frac{p}{100} = 1$ سره

$$K_1 = K_0 + K_0 \cdot \frac{p}{100} = K_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^1 = K_0(1+1)^1 = \underline{\underline{K_0 \cdot 2}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پانګې ګټونه د یو کال وروسته په نیمکلنه ګټونه د $t\ \frac{p}{2\cdot 100}=\frac{1}{2}$ سره.

$$K_2 = K_0\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = \underline{\underline{K_0\cdot 2,25}}$$

د پانګې ګټونه یا په ګټې اچونه له یو کال ورسته په میاشتنۍ ګټونه د $t\ \frac{p}{12\cdot 100}=\frac{1}{12}$ سره

$$K_{12} = K_0\left(1+\frac{1}{12}\right)^{12} = \underline{\underline{K_0\cdot 2,61\ldots}}$$

د پانګې په ګټې اچونه له یو کال ورسته په روځنۍ ګټونه د $\frac{p}{360\cdot 100}=\frac{1}{360}$ سره

$$K_{360} = K_0\left(1+\frac{1}{360}\right)^{360} = \underline{\underline{K_0\cdot 2,7145\ldots}}$$

د پانګې ګټونه یا په ګټې اچونه له یو کال ورسته په ساعته ګټونه د $\frac{p}{8640\cdot 100}=\frac{1}{8640}$ سره.

$$K_{8640} = K_0\left(1+\frac{1}{8640}\right)^{8640} = \underline{\underline{K_0\cdot \underbrace{2,7181\ldots}_{\approx e}}}$$

د پانګې ګټونه یا په ګټې اچونه له یو کال ورسته په nګټونه د $\frac{p}{n\cdot 100}=\frac{1}{n}$ سره.

$$K_n = K_0\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که په هره لحظه میاشتکي په کټه واچول شي (یعني په ناپای ډېرو کټونو ناپای $n \to$) نو د یو کال وروسته لاندې پانګه لاس ته راوړي:

$$\lim_{n\to\infty} K_n = \lim_{n\to\infty} K_0\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = K_0\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = K_0\cdot e$$

دا په دې معنا چې پانګه د e ضریب سره ډېرځله شوه،

د e- تابع $f(x)=e^x$ بنستیز خویونه

تابع ارزښت

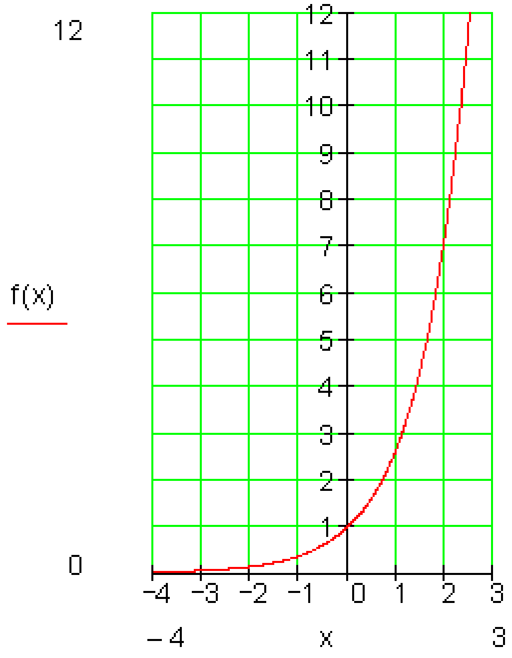
$f(0)=1$

$f(1)=e\approx 2,72$

$f(2)=e^2\approx 7,39$

$f(-1)=\dfrac{1}{e}\approx 0,37$

$f(-2)=\dfrac{1}{e^2}\approx 0,14$



پوله ارزښت

$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \qquad \lim_{x\to\infty} e^x = \infty$

$\exists x \in \mathbb{R}$ د $f(x)=e^x>0$ f

لپاره

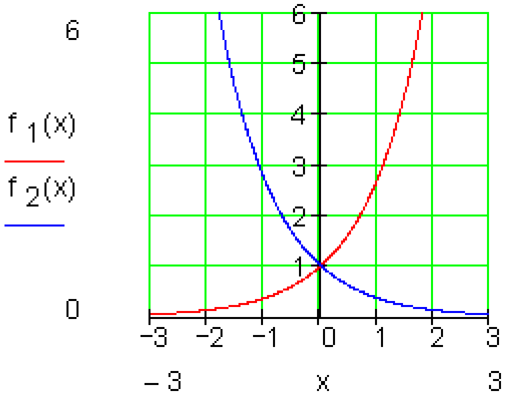
د e - تابع صفرځای نه لري، د انحراف ټکي نه لري او هم د انعطاف ټکي نه لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

د e - تابع هندارونه یا معکوسونه، راکښنه او غزونه

په ورته توګه، لکه نورمال پارابولونه د مطلوبه عملیو سره نور پارابولونه منځ ته راځي، کیدی شي د e - توابعو د ګراف د راکښني، غزوني او هنداروني سره نور اکسپوننشل توابع وګټل یا لاس ته راوړل شي.

هندارونه یا معکوسونه:

د y -محور باندې منعکس شوې $f_2(x) = e^{-x}$ دy - محور سره غوڅټکی $f_2(0) = e^{-0} = e^0 = 1 \Rightarrow P_y(0\|1)$ ژی پوله ارزښت $\lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$ $\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = \infty$ کوم صفرځایونه، انحرافي ټکي او ادعطافټکي نه شته	

د x په محور هندارونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f_2(x) = -e^x$

د y– محور سره غوڅتکی

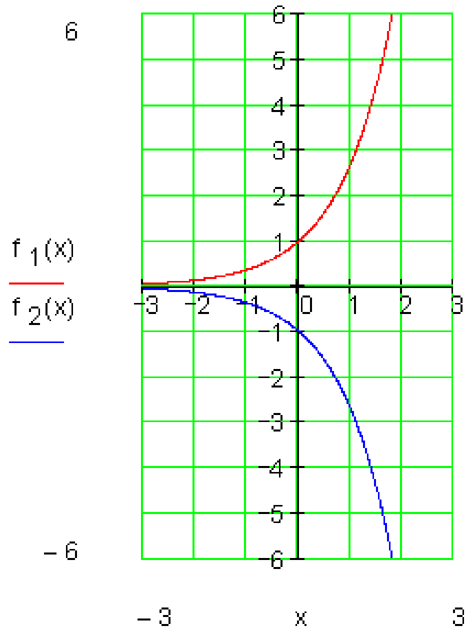
$f_2(0) = -e^0 = -1 \Rightarrow P_y(0|-1)$

ژی یا د غاړي پوله ارزښت

$\lim_{x \to -\infty} \left(-e^x\right) = 0$

$\lim_{x \to \infty} \left(-e^x\right) = -\infty$ ،

کوم صفرځایونه، انحرافي ټکي او د انعطافټکي نه شته



د **y** په لور راکښنه

په یوه واحد پورته لور ته راکښنه

$f_2(x) = e^x + 1$

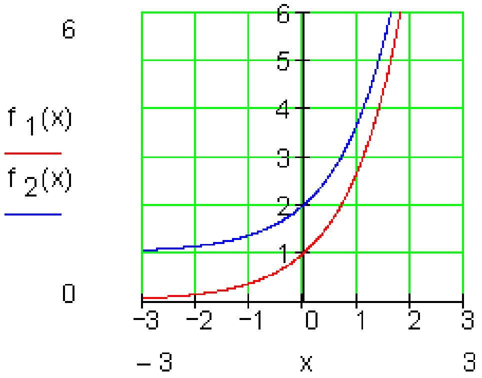
د y - محور سره غوڅتکی

$f_2(0) = e^0 + 1 = 1 + 1 = 2 \Rightarrow P_y(0|2)$

د ژی پوله ارزښت

$\lim_{x \to -\infty} \left(e^x + 1\right) = 1$ $\lim_{x \to \infty} \left(e^x + 1\right) = \infty$

کوم صفرځایونه، انحرافي ټکي او ادعطافټکي نه شته



(c) ketabton.com: The Digital Library

په یوه واحد پورته لور ته راکښنه

$f_2(x) = e^x + 1$

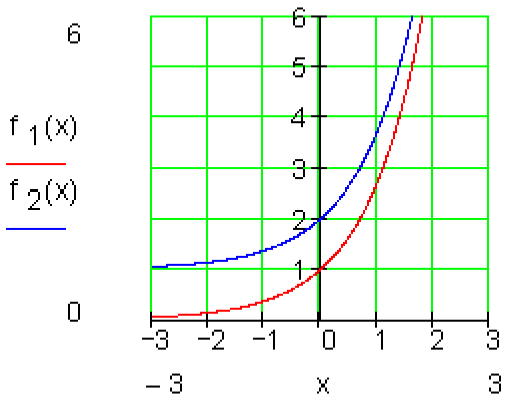
د y - محور سره غوڅتکی

$f_2(0) = e^0 + 1 = 1 + 1 = 2 \Rightarrow P_y(0 | 2)$

د ژی پوله ارزښت

$\lim_{x \to \infty}(e^x + 1) = \infty \qquad \lim_{x \to -\infty}(e^x + 1) = 1$

کوم صفرځایونه، انحرافي ټکي او ادعطافتکي نه شته



په دوه واحده کښته لور ته راکښنه

$f_2(x) = e^x - 2$

د y – محور سره غوڅتکی

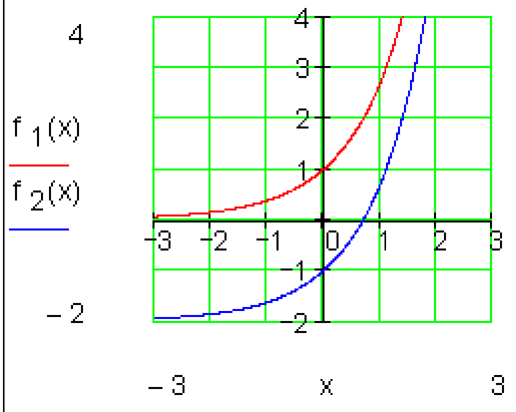
$f_2(0) = e^0 - 2 = 1 - 2 = -1 \Rightarrow P_y(0 | -1)$

ژی یا د غاړي ارزښت

$\lim_{x \to \infty}(e^x - 2) = \infty \qquad \lim_{x \to -\infty}(e^x - 2) = -2$

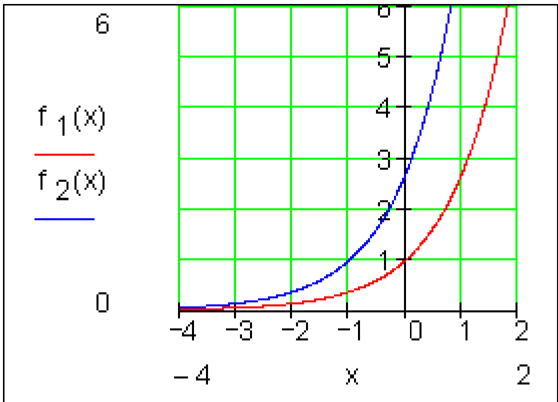
انحرافي او د انعطاف ټکي نه شته

صفرځا په انتروال [0 ; 1] کې.

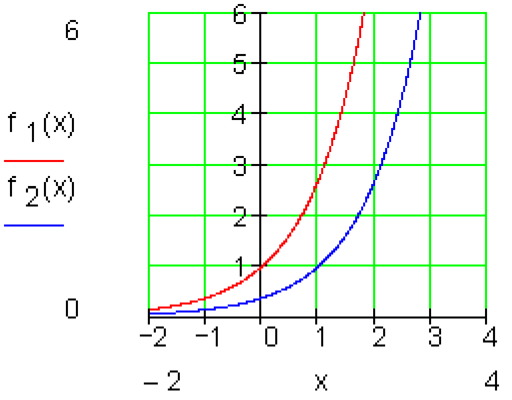


د **x** محور باندې راکښنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

	په یوه واحد کیڼ لور ته راکښنه $f_2(x) = e^{x+1}$ د - محور سره غوڅټکی $f_2(0) = e^1 \approx 2,72 \Rightarrow P_y(0 \mid e \approx 2,72)$ ژی یا غاړې پوله ارزښت $\lim_{x\to-\infty}(e^{x+1}) = 0 \qquad \lim_{x\to\infty}(e^{x+1}) = \infty$ صفرځایونه، انحرافي -او د انعطاف ټیش نه شته

په یوه واحد ښي لور ته راکښنه

	$f_2(x) = e^{x-1}$ د y - محور سره غوڅټکی $f_2(0) = e^{-1} \approx 0,37 \Rightarrow P_y(0 \mid e^{-1} \approx 0,37)$ ژی پوله ارزښت $\lim_{x\to-\infty}(e^{x-1}) = 0 \qquad \lim_{x\to\infty}(e^{x-1}) = \infty$ صفرځایونه، د انحراف ټکي او انعطافټکي نه شته

غزونه (کېښکودنه) د **y** په لور

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ضریب $k = 2$ سره غزونه

$$f_2(x) = 2 \cdot e^x$$

د **y** - محور سره غوڅونه

$$f_2(0) = 2 \cdot e^0 = 2 \Rightarrow P_y(0|2)$$

ژی پوله ارزښت

$$\lim_{x \to -\infty} \left(2 \cdot e^x\right) = 0 \qquad \lim_{x \to \infty} \left(2 \cdot e^x\right) = \infty$$

د ضریب $k = \frac{1}{2}$ سره کینګودنه

$$f_3(x) = \frac{1}{2} e^x$$

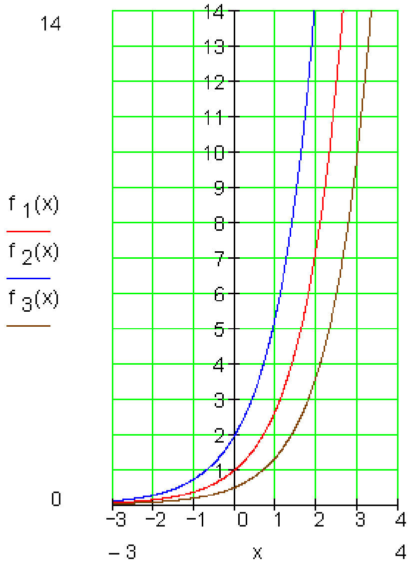
د **y** - محور سره غوڅتکی

$$f_3(0) = \frac{1}{2} \cdot e^0 = \frac{1}{2} \Rightarrow P_y\left(0 \middle| \frac{1}{2}\right)$$

ژی پوله ارزښت

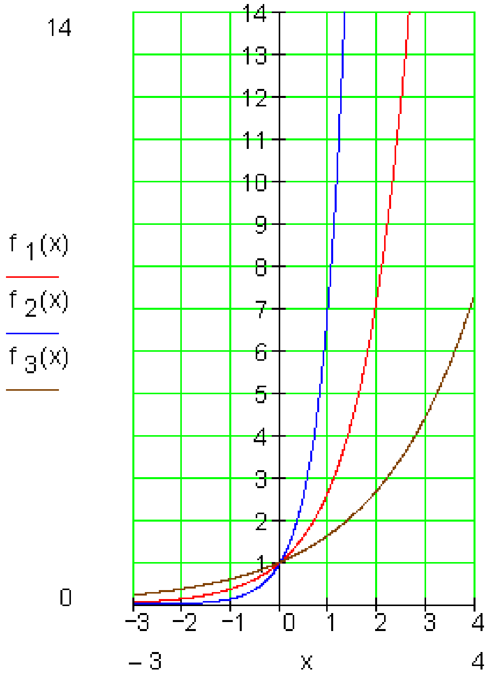
$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot e^x\right) = 0 \qquad \lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{2} \cdot e^x\right) = \infty$$

صفرځایونه، انحرافتکي او انعطافتکي نه شته.



(c) ketabton.com: The Digital Library

غزونه (کینکودنه) د **x** په لور

<table>
<tr>
<td>


</td>
<td>

د ضریب $k=\frac{1}{2}$ سره غزونه

$$f_2(x)=e^{2\cdot x}$$

د **y** - محور سره غوڅونه

$$f_2(0)=e^0=1\Rightarrow P_y(0|1)$$

ژی پوله ارزښت

$$\lim_{x\to-\infty}\left(e^{2\cdot x}\right)=0 \qquad \lim_{x\to\infty}\left(e^{2\cdot x}\right)=\infty$$

د ضریب 2 سره راکښنه

$$f_3(x)=e^{\frac{1}{2}x}$$

د **y** - محور سره غوڅتکی

$$f_3(0)=e^0=1\Rightarrow P_y(0|1)$$

ژی پوله ارزښت

$$\lim_{x\to-\infty}\left(e^{\frac{1}{2}x}\right)=0 \qquad \lim_{x\to\infty}\left(e^{\frac{1}{2}x}\right)=\infty$$

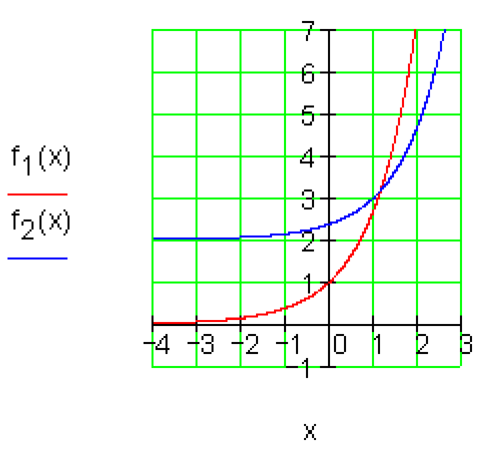
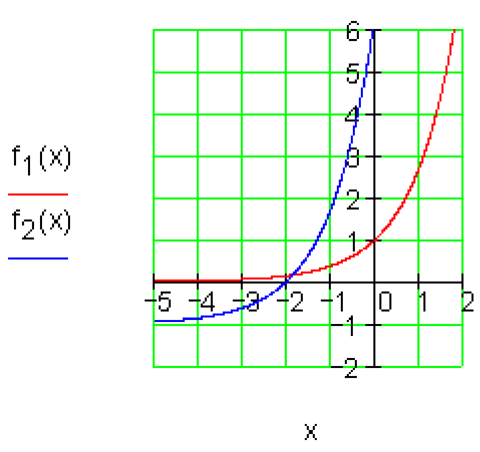
صفرځایونه، انحراف ارزښتونه او انعطافتکي نه شته.

</td>
</tr>
</table>

(c) ketabton.com: The Digital Library

د e تابعو هندارونه، راکښنه او غزونه په خوښه یو له بل سره کمبینیر یا نښلول کېدي یعني شمېرنئزې عملیې په اجرا کېدی شي .

د **x** - او **y** – محوررونو راکښنه:

$f_1(x) := e^x$ $f_2(x) := e^{x-1} + 2$ 	$f_1(x) := e^x$ $f_2(x) := e^{x+2} - 1$ 
	f_2 (x) له f_1 (x) منځ ته راغلی د x په محور د راکښني له لارې په دوه واحدونو کین لور ته. د y -محور باندې په یوه واحد د کښته لور ته .

تمرینونه:

د e - تابع گرآف

(c) ketabton.com: The Digital Library

....

د بنستیزي تابع e^x راکښنه، هندارونه یاانعکاس ، او بڼه بدلون وښایاست.

هر تابع ګراف او د بنستیز تابع ګراف په یوه مناسب وضعیه قیمتسیستمکي و کاږی او د محور سره یي غوڅیکی(د تقاطع نقطه) .

د ګراف په مرسته ولولی:

پوله ارزښت یا حد (لیمیت) ، صفرځایونه که شته وي او د انعطاف ټکي.

یادونه: فقط په انتروآل [10 ; 10-] کي تآبع آرزښتونه په پآم کي ونیسی.

Für= د لپاره

اول - $f(x) = e^x ; g(x) = e^{-x}$ für $[-4;4]$ دویم - $f(x) = -e^x$ für $[-5;3]$

دریم - $f(x) = e^{\frac{1}{3}x}$ für $[-4;4]$ څلورم - $f(x) = 2e^{\frac{1}{2}x}$ für $[-4;4]$

پنځم - $f(x) = \frac{1}{2}e^{x+3}$ für $[-5;3]$ شپږم - $f(x) = e^{x-2} - 3$ für $[-4;4]$

اوم - $f(x) = e^{-(x+2)} - 1$ für $[-5;3]$

اتم - $f(x) = 2 \cdot e^{-\frac{1}{2}(x-1)} - 2$ für $[-2;6]$

نهم - $f(x) = -10e^{-\frac{1}{2}(x+4)} + 3$ für $[-4;4]$

لسم - $f(x) = (x-2)e^{\frac{1}{4}x}$ für $[-10;5]$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نتیجې:

د اکسپوننشل تابع تمرینونه

مفصل حل

لومړی - مفصل حل

بنسټیزه تابع $f(x)=e^{x}$

$f(0)=e^{0}=1 \Rightarrow P_y(0|1)$

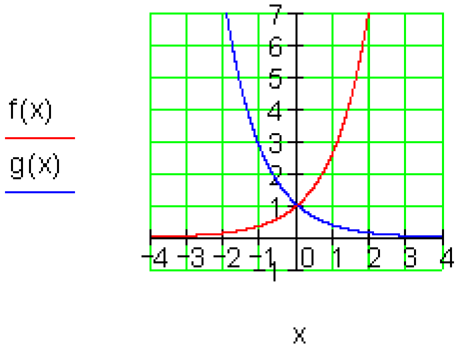
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0; \ \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$

$f(x)=e^{-x}$ په y په هنداره شوې

$f(0)=e^{-0}=1 \Rightarrow P_y(0|1)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty; \ \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$

$f(x) := e^{x}$ $\qquad$ $g(x) := e^{-x}$



دویم - مفصل حل

$f(x)=-e^{x}$ له د -محور سره غوځتکي لاس ته راځي که په x - محور هنداره شي.

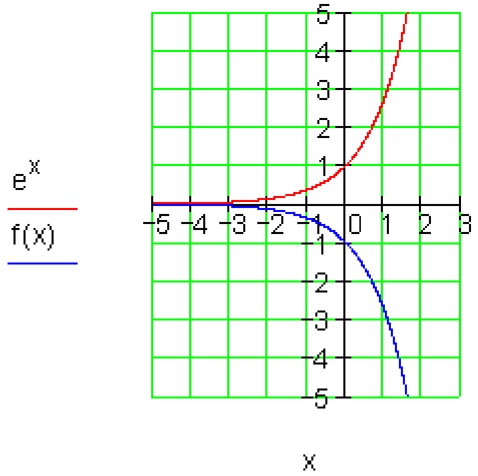
$f(0)=-e^{0}=-1 \Rightarrow P_y(0|-1)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0; \ \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty$

صفرځایونه: نه شته

انحرافي ارزښتونه: نه شته

انعطافتکي : نه شته



(c) ketabton.com: The Digital Library

....

دریم – مفصل حل

$f(x) = e^{\frac{1}{3}x}$ له e^x دغزوني له لارې د x په لور د ضریب 3 سره لاس ته راځي

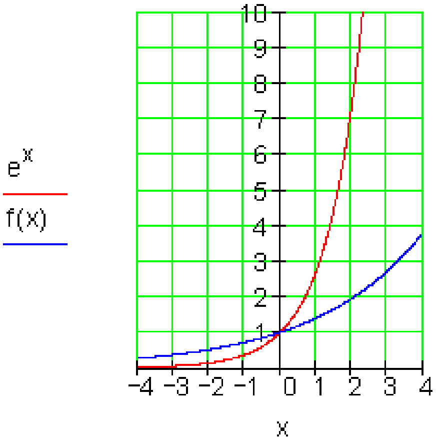
$$f(0) = e^0 = 1 \Rightarrow P_y(0|1)$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0;\ \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

صفرځایونه نه شته

د انحرافي ارزښتونه: شته

انعطافتکي : نه شته

$$f(x) := e^{\frac{1}{3}\cdot x}$$



ځلورم – مفصل حل

$f(x) = 2\cdot e^{\frac{1}{2}x}$ له e^x منځ ته راځي د x په لور د ضریب 2 سره د غزوني له لارې د y په محور د غزونې له لارې د ضریب 2 سره.

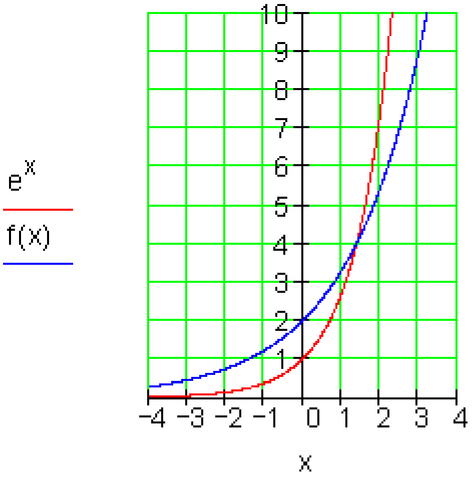
$$f(0) = 2\cdot e^0 = 2 \Rightarrow P_y(0|2)$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0;\ \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

صفرځایونه نه شته ه

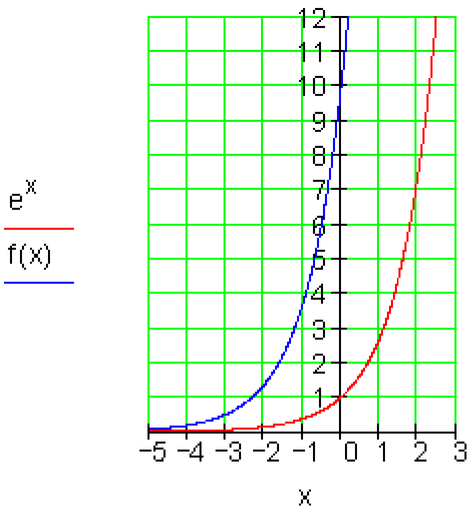
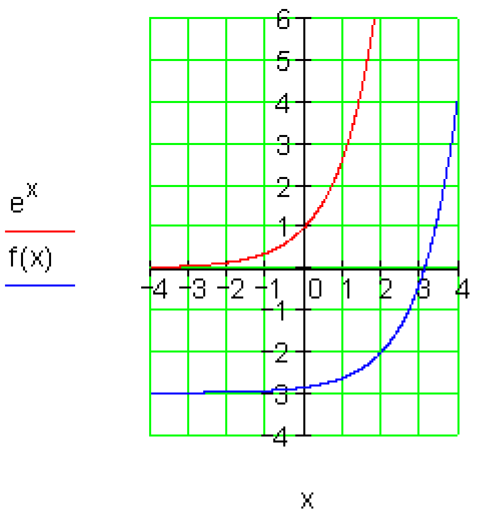
انحرافي ارزښتونه: نه شته

انعطافتکي: شته

$$f(x) := 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم – $f(x)=\frac{1}{2}\cdot e^{x+3}$ له e^x لاس ته راځي د x په منفي لور د راکښنې له لارې په 3 کچواحده، د کېښکودلو له لارې د y په لور ر باندې د ضریب 1/2 سره $f(0)=\frac{1}{2}\cdot e^3\approx 10$ $\Rightarrow P_y\left(0\,\middle\vert\,\frac{1}{2}\cdot e^3\approx 10\right)$ $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0;\ \lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ صفرځایونه: نه شته افراطي ارزښتونه: شته انعطافټکي: شته	$f(x) := \frac{1}{2}\cdot e^{x+3}$ 
شپږم – $f(x)=e^{x-2}-3$ له e^x منځ ته راځي د منفي y لور باندې په 3 دسطحې واحده، د x په مثبته لور د راکښنې له لارې په 2 سطحي واحده. $f(0)=e^{-2}-3\approx -2{,}86$ $\Rightarrow P_y\left(0\,\vert\, e^{-2}-3\approx -2{,}86\right)$ $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-3;\ \lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ صفرځایونه: په x~3,2 انحرافي ارزښتونه : نه شته انعطافټکي: نه شته	$f(x) := e^{x-2}-3$ 

اوم – مفصل حل

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f(x)=e^{-(x+2)}-1$ له e^x منځ ته راځي د y په محور د هندارونی له لارې، د y په منفي لور په يو سطحي واحد. دx په منفي لور په 2 سطحي واحده غزول.

$$f(0)=e^{-2}-1\approx -0,86$$

$$\Rightarrow P_y\left(0\,|\,e^{-2}-1\approx -0,86\right)$$

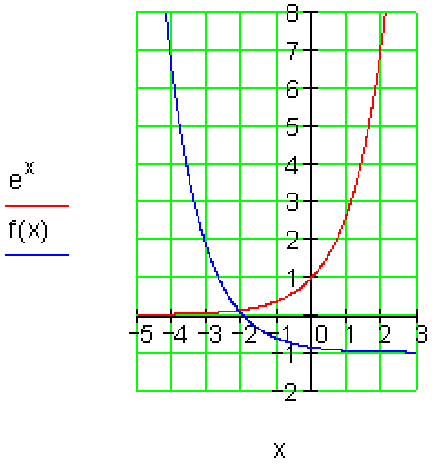
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty;\ \lim_{x\to\infty} f(x)=-1$$

صفرځايونه : په x ~-1,8 کې

انحرافي ارزښتونه: نه شته

انعطافټکي: نه شته

$f(x) := e^{-(x+2)}-1$



اتم – $f(x)=2\cdot e^{-\frac{1}{2}(x-1)}-2$

له e^x منځ ته راځي د y په محور د هندارونی له لارې د y په منفي لور راکښل په 2 واحده. دx په مثبت لور په 1 سطحي واحد راکښل. د y په مثبته لور په 2 واحده غزوني. د x په لور د2 واحده سره

$$f(0)=2\cdot e^{\frac{1}{2}}-2\approx 1,3$$

$$\Rightarrow P_y\left(0\,|\,2\cdot e^{\frac{1}{2}}-2\approx 1,3\right)$$

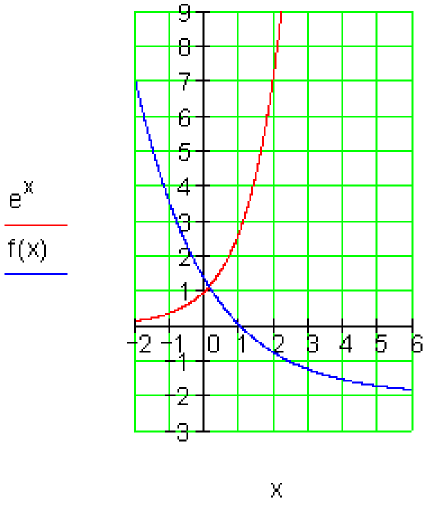
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty;\ \lim_{x\to\infty} f(x)=-2$$

صفرځايونه : په x~1,2 کې

انحرافي ارزښتونه : شته

انعطافټکي: نه شته

$f(x) := 2\cdot e^{\frac{-1}{2}\cdot(x-1)}-2$



(c) ketabton.com: The Digital Library

نهم – $f(x) = -10e^{-\frac{1}{2}(x+4)} + 3$ له e^x منځ ته راځي دy په ممحور هنداروني له اري د x په محور هنداروني ، د y په مثبته لور په 3 سطحي واحده را كښنه د x په منفي لور په 4 سطحي واحده راكښنه د y په لور غزونه د 10 ضريب سره. د x په لور غزوني د 2 ضريب سره.

$$f(0) = -10e^{-2} + 3 \approx 1{,}65$$

$$\Rightarrow P_y\left(0 \mid -10e^{-2} + 3 \approx 1{,}65\right)$$

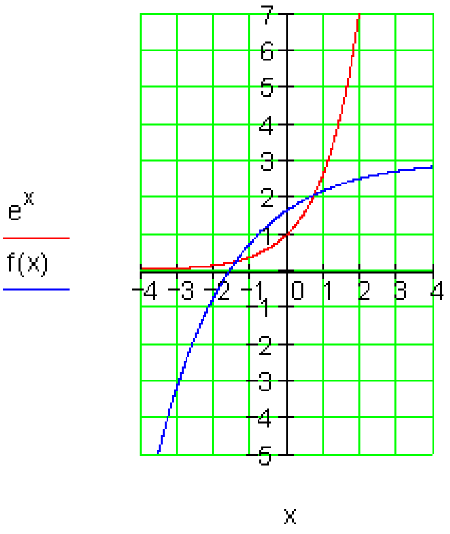
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty ; \lim_{x\to\infty} f(x) = 3$$

صفرځايونه: په x~-1,6 کې.

انحرافي ارزښتونه: نه شته

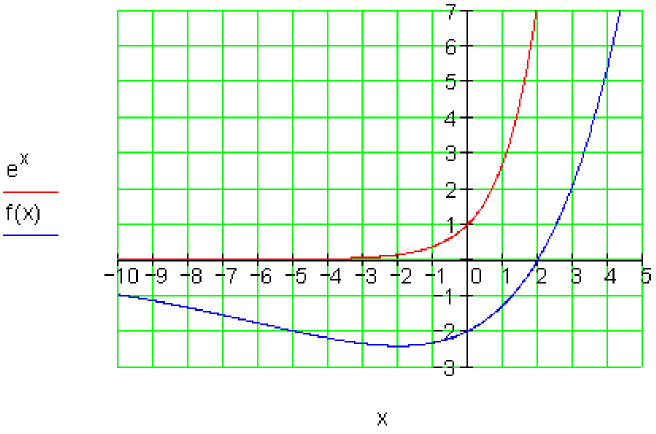
انعطافټکي: نه شته

$$f(x) := -10\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot(x+4)} +$$



لسم – مفصل حل

$$f(x) := (x-2)\cdot e^{\frac{1}{4}\cdot x}$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

کربښیز مساوات u(x) = x - 2 د e- تابع $v(x) = e^{\frac{1}{4}x}$ سره نښلول کیږي. له دې دا تابع لاس ته راځي: $f(x) = u(x) \cdot v(x) = (x-2)\, e^{\frac{1}{4}x}$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

په x = 2 کې صفرځای په x~-2 کې د انحراف ارزښت په x ~ -6 کې د انعطاف ټکی.

د اکسپوننشل توابعو کارونه یا استعمال

د تآبع مسآوآتو جوړونه

په طبیعت کې یې خیرنه:

د اکپوننشل توابعو مشتق

د تابع مساواتو جوړښت

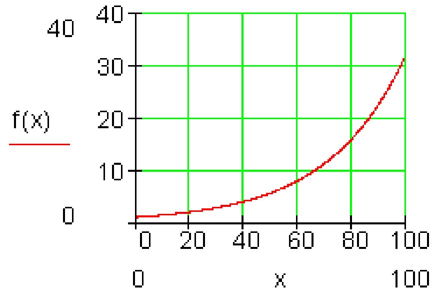
کولي باکتریا Coli - Bakterien د انسان په کلمو کي کاره سرته رسوي. دوي د کوټې ویش (حجره وېش) له لارې زیاتیږي. و مساعدو شرایطو لاندې دوي په هرو ۲۰ دقیقو کې ځان تجزیه کوي. د غه عملیې لپاره یو ارزښت جدول : او ګراف یې کاږو. دلته د x اووښتوني (متغیره) په دقیقو د وخت لپاره ده.

د y متحوله د باکتریا ګانو د تعداد لپاره ده.

x = Minuten	0	20	40	60	80	100
y = Bakterienzahl	1	2	4	8	16	32

(c) ketabton.com: The Digital Library

پورته جدول کې : x = دقيقې   y = د بکترياو تعداد



اوس مو دنده داده تابعيزې (د تابعو-) اړيکې د f(x) د يوه مساوات په بڼه وټاکو.

هرې ۲۰ دقيقې د بکترياو تعداد يا ګڼون دوه برابره کيږي، دا په دې معنا چې دا د ۲۰ دقيقو وروسته نتيجه د دوه سره ضرب شي

لاندې ږدو يا ليکو: $f(x) = 2^{x}$

دلته f(x) د بکترياو تعداد دی او x د دقيقو تعداد.

د دې تابع مساوات سره د بکترياو تعداد هره دقيقه دوه برابره کوي.

د بام اوفکر وروسته موږ د تابع مساوات لاندې نتيجې ته رسيږو، چې دا شي حالت ټيک روښانه کوي يا تشريح کوي:

$$f(x) = 2^{\frac{1}{20}x}$$

Probe: $x = 0 \Rightarrow f(0) = 2^0 = 1;\ x = 20 \Rightarrow f(20) = 2^1 = 2;\ x = 40 \Rightarrow f(40) = 2^2 = 4$

ډېروالی، لکه چې دلته مو راووړ ، د اکسپوننشل ودې يا - زياتوالي په نامه نوموو. يوه تابع چې داسې يوه تلنه تشريح کوي، اکسپوننشل تابع بولو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرینیزې پوښتنې

د اکسپوننشل تابع د تابع مساوات د لاندې شرایطو سره باید څنګه وبرېښي:

الف – د باکتریو تعداد (ګڼون) هر پځلس دقیقې دوه براپره کیږي.

ب – هر دېرش دقیقي د پاکتریو تعداد درې برابره کڅږي.

پ - مورږ په مطالعه یا کتلو پیل کوو، چې $n_0 = 1000\,000\,000$ د باکتریو تعداد شته یا موجود وي او تعداد یې هر پنځه څلوېښت دقیقې پنځه برابره کیږي.

ت - د کتلو پیل سره $n_0 = 1000\,000\,000$ باکتریې شته دي او هرې 45 min دقیقې د باکتریو تعداد د $e = 2{,}718$ په ضریب یا څلووني زیاتیږي.

هر لس دقیقې د n_0 تعداد نیمیږي.

حل :

الف $f(x) = 2^{\frac{1}{15}x}$ ب - $f(x) = 3^{\frac{1}{30}x}$

پ_ $f(x) = 1000\,000\,000 \cdot 5^{\frac{1}{45}x} = 1 \cdot 10^9 \cdot 5^{\frac{1}{45}x}$ ت -

$$f(x) = 100\,000 \cdot e^{\frac{1}{45}x} = 1 \cdot 10^5 \cdot e^{\frac{1}{45}x} \text{ mit } e = 2{,}718$$

ټ – تعداد یې = منفي دېرېدنه $\text{ٺ } f(x) = n_0 \cdot 2^{-\frac{1}{10}x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

....

پام : توابع چې د زیاتیدو پروسې ښیې، اکسپوننشل توابع بلل کیږي. تولیز تابع مساوات یې دي:

د $f(x) = n_0 \cdot a^{k \cdot x}$

$n_0 = \text{ Anzahl zur Zeit } t = 0 ; a \in \mathbb{R}^+ ; k , x \in \mathbb{R}$ ، n0= تعداد د t په وخت = 0

سره د وخت

اکسپوننشل ډېرېدنه یا اکسپوننشل کیدنه د ژوند په زیاتو ورشو ګانو کې کتل کیدای شي:

په بیالوژي کې (د باکتریو ډېرېدنه او کمیدنه)

په اوکولوګي کې (د حیواناتو ډېرېدنه یا زېږګنده)

په اقتصاد کې (د ربح له لارې د پانګې زیاتیدنه)

په فزیکي او تخنیکي مسائلو کې (د رادیو اکتیو موادو تجزیه)

په روغتیا کې (د دوا اغیزه)

د **e** - تابع ته ځانګړې بیلګې

اکسپوننشل وده کونه

د باکتریا شتون د یوه **e** -تابع وروسته زیاتیږي.

د $n_0 = 2000$ باکتریاګاني شتون په ۴ ساعتونو کې په کوم ارزښت زیاتیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

له څومره ساعته وروسته دا باکرتياوې $f(x) = n_0 \cdot e^{\frac{17\,221}{262\,551} \cdot t}$ د پيل ارزښت= n_0 ،
وخت په ساعت= t سره 10 000 ته جګيږي؟

د تابع ګراف څنګه بريښي؟

د باکترياو تعداد له څلور ساعته وروسته:

$$f(x) = n_0 \cdot e^{k \cdot x} \Rightarrow f(4) = 2000 \cdot e^{\frac{17\,221}{262\,551} \cdot 4} = \underline{\underline{2600}}$$

له څو ساعته وروسته دا باکتريا وې 10 000 دي؟

ا ينونه: $f(x) = 2\,000 \cdot e^{\frac{17\,221}{262\,551} t} = 10\,000$

د دې لپاره چې جګ عدد يا ګڼt وټاکلی شو، نو بايد اکسپوننشل مساوات
$2\,000 \cdot e^{\frac{17\,221}{262\,551} t} = 10\,000$ حل کړو.

دا د لوګاريتم سره کيدی شي. د دې لپاره بايد لاندې د لوګاريتم قوانين وکارول شي:
$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$ او $\ln e^x = x$.

د اکسپوننشل مساوات حل:

$$\ln\left(2\,000 \cdot e^{\frac{17\,221}{262\,551} t}\right) = \ln 10\,000$$

$$\Leftrightarrow \ln 2\,000 + \frac{17\,221}{262\,551} \cdot t = \ln 10\,000 \mid -\ln 2\,000$$

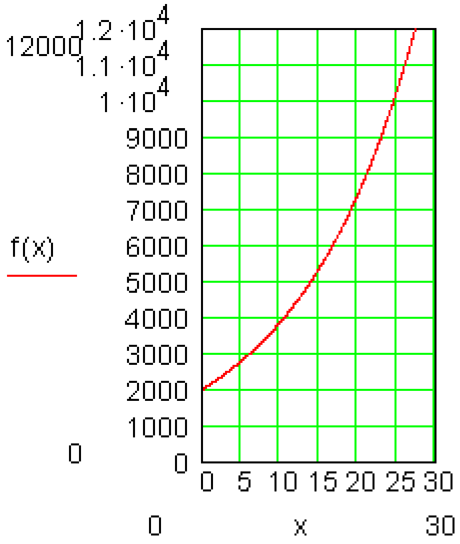
$$\Leftrightarrow \frac{17\,221}{262\,551} \cdot t = (\ln 10\,000 - \ln 2\,000) \mid \cdot \frac{262\,551}{17\,221}$$

$$\Leftrightarrow t \approx 24{,}54$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د نږدې 24,5 ساعته وروسته

10000 باکترياوې دي



اکسپوننشل کميدنه يا کمښت

راديو اکتيو مواد په برابر وخت کې تل په همغه ضريب تجزيه کيږي.

د هغو نيم ارزښت وخت ښخه لرو، چې له نيم وخت وروسته ځومره فعاليت شتون لري.
فعاليت $A(x)$ په مګاپيککورل (تجزيه په ثانيه کې Megabecquerel (1 MBq = 10^6 Zerfälle pro Sekunde) کچ يا اندازه کيږي.

د طبي معاينو لپاره يود Jod 131 د 1 نيم ارزښت وخت (t_h) 8 روځي کارول کيږي.

ناروغ ته A_0 = 4000 MBq ورکول کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ....

ځومره نیم ارزښتوخت یا همداسې روځو وروسته په بدن کې د پاتې فعالیت ماکسیمال ترډې وخته 400 MBq دی؟

ګراف رسم کړی ، تقریبي وخت ولولی او ټیک ارزښت یې وشمېری.

د راديو اکتیو تجزیې قانون: $A(x) = A_0 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{t_h} \cdot t}$ دلته په معنا دی: پیلفعالیت په MBq نیمارزښت وخت = t_h په روځو، t =وخت په روځو.

د تابع مساوات:

$$A(t) = A_0 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{t_h} \cdot t}$$

$$= 4000 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{8} \cdot t}$$

حل

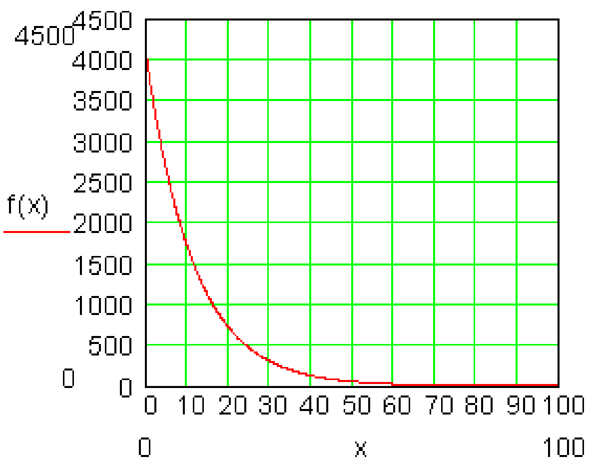
$$A(t) = 4000 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{8} \cdot t} = 400$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(4000 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{8} \cdot t}\right) = \ln 400$$

$$\Leftrightarrow \ln 4000 - \frac{\ln 2}{8} \cdot t = \ln 400$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{8}{\ln 2}(\ln 4000 - \ln 400)$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{8}{\ln 2} \cdot \ln 10 \approx \underline{\underline{26,575}}$$



د 27 روځو وروسته، نږدې له 3 نیمارزښت وخت وروسته کمښت په بدن کې نږدې400 MBq دی.

د عدد e ، طبیعي لوګاریتم او د e - تابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

$e^x = b \Leftrightarrow x = \ln b$ $\qquad$ $e = 2{,}718\,281\,828\ldots$

z.B. $e^{\ln(x-1)} = x - 1$ $\qquad$ $e^{\ln b} = b$

z.B. $\ln e^{-\frac{1}{k}\cdot x} = -\frac{1}{k}\cdot x$ $\qquad$ $\ln e^x = x$

$\ln e = 1$ $\qquad$ $\ln 1 = 0$

گراف له II د I په لور ځغلي.

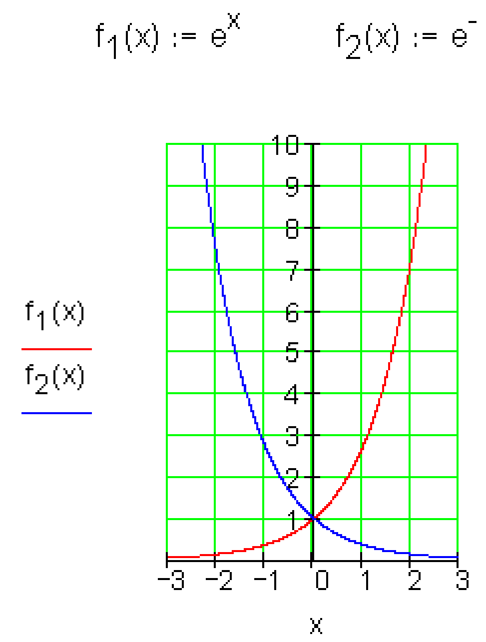
که اکسپوننت زاتیز یامثرت وي، نو گراف همغریز جگیدونکی دی.

که اکسپوننت کیمز یا منفي وي، ن و گراف همریز لږیږی یا ټیټیږي.

صفرځای نه شته.

د لوی x - ارزښت لپاره گراف تل د x - محور ته نږدي کیږي.

ټول گرافونه له ټکي P (0 | 1) تیریږي.



هر اکسپوننشل تابع یا بلواک د e -تابع له لارې کښل کیدی شي.

Mit $f(x) = a^x$ und $a = e^{\ln a}$ gilt:

$$f(x) = a^x = \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{(\ln a)\cdot x} = e^{x\cdot \ln a}$$

له دي بنسته به په لاندې برخه کي داکسپوننشل تابع فقط د e –تابع تر څیړنې لاندې ونیل شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم: محور غوښتکي او اکسپوننشل مساوات

پیلبیلګې

بیلګه ۱

د لاندې تابع غوښتکي یا نقاط تقاطع باید وټاکل شي:

$$f(x) = -\frac{3}{4} \cdot e^{-\frac{1}{2}(x+4)}$$

د y-محور سره غوښتکی د لاندې اینوونې له لارې پیدا کیدی شي:

$$y_s = f(0)$$

$$f(0) = -\frac{3}{4} \cdot e^{-\frac{1}{2}(0+4)} = -\frac{3}{4} \cdot e^{-2} \approx -0{,}102 \Rightarrow \underline{P_y\left(0 \mid -\frac{3}{4} \cdot e^{-2} \approx -0{,}102\right)}$$

د x- محور سره غوښتکی دلاندې اینوونې څخه لاس ته راځي:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{4} \cdot e^{-\frac{1}{2}(x+4)} = 0$$

له دې لاس ته راځي چې غوښتکي نه شته، ځکه چې $e^{-\frac{1}{2}(x+4)} \neq 0$ دی د ټول $x \in \mathbb{R}$ لپاره.

د x -محور سره غوښتکي د f (x) د صفرځایونو له لارې پیدا کیږي. تابع f (x) صفرځای نه لري، ځکه چې دا د x په لور غزېدل او د x په لور راکښلي e – تابع دی. دا برسیره پرته له دې د y -محور او x -محور باندې هنداره یا منعکس شوی دی،

(c) ketabton.com: The Digital Library

....

د اکسپوننشل تابع بڼه $f(x)=a\cdot e^{u(x)}$ د $a\in\mathbb{R}$ سره د y -محور سره فقط یو غوڅټکی لري مګر کوم صفرځای نه لري. ځکه $e^{u(x)}\neq 0$ د ټول $x\in\mathbb{R}$ لپاره.

بیلګه ۲ :

د لاندې تابع غوڅټکي غواړو پیدا کړو

$$f(x)=\frac{1}{2}\cdot e^{2x+1}-2\cdot e^{x+1}$$

د y -محور سره غوڅټکی: $y_s=f(0)$

$$y_s=f(0)=\frac{1}{2}\cdot e^{1}-2\cdot e^{1}=-\frac{3}{2}\cdot e\approx -4{,}08\Rightarrow P_y\left(0\,|\,-\frac{3}{2}\cdot e\approx -4{,}08\right)$$

د دې لپاره چې د x –محور سره غوڅټکي وټاکلی شو، دا کار ستر دی. د دې لپاره د f (x) صفرځایونه باید وټاکل شي.

د د ې لپاره چې د x -محور سره غوڅټکی، یعني د اکسپوننشل تابع صفرځای وټاکو، دا په ډیرو حالتونو کې غوښتونی دی، چې اکسپوننشل تابع حل کړو. د دې معلومو عملیو د پاسه یا پرته، کوم چې د مساوات د حل لپاره کارول کیږي، د اکسپوننشل مساوات د حل لپاره اړین دی، چې د توان- او لوګاریتم قونین راته جوت وي.	$f(x)=\frac{1}{2}\cdot e^{2x+1}-2\cdot e^{x+1}$ د x محور سره غوڅټکی: $f(x)=0\Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{2}\cdot e^{2x+1}-2\cdot e^{x+1}=0}_{\text{Exponentialgleichung}}$ اکسپوننشل مساوات

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{1}{2}\cdot e^{2x+1}-2\cdot e^{x+1}=0\,|+2\cdot e^{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot e^{2x+1}=2\cdot e^{x+1}\,|\cdot 2$$

$$\Leftrightarrow e^{2x+1}=4\cdot e^{x+1}\,|:e^{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{2x+1}}{e^{x+1}}=4\,|$$ توانقانون

اکسپوننت ساده کونه

$$\Leftrightarrow e^{2x+1-(x+1)}=4\,|$$

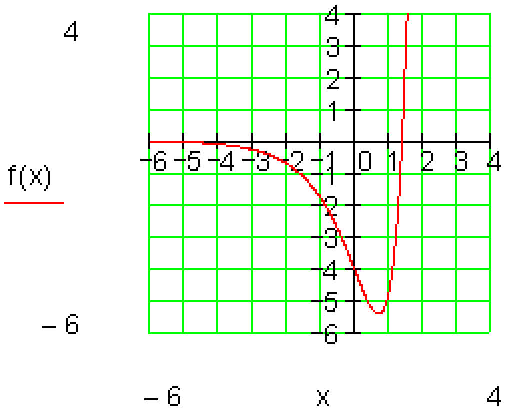
$\ln(\;)$ $\Leftrightarrow e^{x}=4\,|$ لوګاریتمونه

$\Leftrightarrow \ln\left(e^{x}\right)=\ln(4)\,|$ د لوګاریتم قانون

$$\Leftrightarrow x\cdot\underbrace{\ln(e)}_{1}=\ln(4)$$

$$\Leftrightarrow x=\ln(4)\approx 1{,}39\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_x\left(\ln(4)\approx 1{,}39\,|\,0\right)$$



د توان – او لوګاریتم قوانین

د توان – او لوګاریتم غوره قوانین سره رایوځای کړي.

توانقوانین:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$	$a^0 = 1$	$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$

د لوګاريتم تعريف:

$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a(b)$	$e^x = b \Leftrightarrow x = \ln(b)$	$10^x = b \Leftrightarrow x = \lg(b)$

د لوګاريتم قوانين د e په بنسټ

$\ln(b \cdot c) = \ln(b) + \ln(c)$	$\ln\left(\frac{b}{c}\right) = \ln(b) - \ln(c)$	$a = e^{\ln(a)}$	$e^0 = 1$
$\ln(b^c) = c \cdot \ln(b)$	$\log_a b = \frac{\lg b}{\lg a} = \frac{\ln b}{\ln a}$	$\ln(1) = 0$	$\ln(e) = 1$

تمرينونه:

د توان او لوګاريتم قوانينو استعمال.

د لاندې توان او لوګاريتمي ترمونو د توان او لوکاريتمي قوانينو په استعمال سره بنه بدله کړی.

اول – $(e^x + e^{-x})^2$ دويم - $(e^x - e^{-x} + 5) \cdot e^x$

دريم - $\frac{e^{3x+1}}{e^{-x+2}}$ څلورم - $e^{-x} \cdot e^{-x+2} \cdot e^{2x-3}$

پنځم - $\frac{1}{e^{2x}} + 3(e^{-x})^2 - \left(\frac{2}{e^x}\right)^2$ شپږم - $e^{\ln(2k)} - 2k \cdot e^{\ln(2)}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوم - $\ln\left(e^2\right)-3\ln\left(\frac{e}{2}\right)$ اتم - $\ln\left(2e^2\right)+\ln\left(\frac{e}{2}\right)$

نهم - $e^{\ln(k)+1}$ لسم - $\frac{2}{3}e^{-\ln\left(\frac{3}{4}k\right)}$

د اکسپوننشل مساوات لپاره د حل لارې

د اکسپوننشل مساوات له لارې حل

يو اکسپوننشل مساوات دی، د لاندې بنه بدلون له مخې

چې د اکسپوننشل مقاېسې سره حل کيدی شي.

يو حل د اکسپوننشل مقاېسې له مخې فقط هلته ممکن دی، که وکړای شو، د مساوات دواړه خواو ته ترمونه په داسې بنه وليکلای شو، چې د برابر بنسټ سره توانونه لاس ته راوړو. متآسفانه چې دا تل شووني نه دي لکه لاندې بيلګه به چې وښايي:

د اکسپوننشلمساوات لپاره د حل لارې

د اکسپوننشل پرتله کونې له لارې حل

$$e^{2x+4}-e^{x-1}=0$$

اکسپوننشل مساوات دی، چې له لاندې بنه بدلون

$$e^{2x+4}=e^{x-1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له لارې د اکسپوننش پرتله کونې سره حل کيدی شي.

$$e^{2x+4} = e^{x-1} \Leftrightarrow 2x+4 = x-1 \Leftrightarrow 2x+4 = x-1 \Rightarrow \underline{x=-5}$$

ازماېښت:

$$e^{-10+4} - e^{-5-1} = e^{-6} - e^{-6} = 0$$

د اکسپوننشل له لارې حل فقط هلته شونی دی، چې که وکړای شو، چې پهدواړولورو ترم داسې بڼه بدل کړو، چې د برابر بنسټ سره توانونه لاس ته راوړو. دا متآسفانه تل شوني نه دي، لکه چې لاندې بيلګه يې په ګوته کوي:

د لوګاريتموس سره حل

$$\frac{1}{2e^x} - 3 = 0 \,|\, +3 \Leftrightarrow \frac{1}{2e^x} = 3 \,|\, \cdot 2e^x \Leftrightarrow 1 = 6 \cdot e^x \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{6}$$

دلته اکپوننشله مقايسه شووني نه ده.

دا د لوګاريتم نيولو له لارې کېدی شي:

$$\ln\left(e^x\right) = \ln\left(\frac{1}{6}\right) \Leftrightarrow x \cdot \underbrace{\ln(e)}_{1} = \underbrace{\ln(1)}_{0} - \ln(6) \Leftrightarrow \underline{\underline{x = -\ln(6)}}$$

دا په لوګاريتم نيولو سره پيل په زياتو حالتونو کې برياو ته بيايې. مګر يا اګر چې اکسپوننشلمساوات، په کومو کې چې جمعه يا تفريق منځ ته راشي، نه شي کېدی لوګاريت يې ونيول شي. دلته هڅه کېدی شي، دا د بدلون (د ځاي نيوونکي واريابلې اينوونه) له لارې حل کړو.

د بدلون(په ځای د بلې متحولې اينول) له لآر حل

$e^{2x} - 5e^x + 4 = 0$ بدلون: $e^x = u \text{ und } e^{2x} = u^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Rightarrow u^2 - 5u + 4 = 0$$

مربع مساوات دی د $u_1 = 1; u_2 = 4$ حل سره

په څټ بدلون او د لوګاریتم نیولو له لارې حل.

$$u_1 = e^{x_1} = 1 \Rightarrow \underline{\underline{x_1 = \ln(1) = 0}}$$

$$u_2 = e^{x_2} = 4 \Rightarrow \underline{\underline{x_2 = \ln(4)}}$$

اکسپوننشل مساوات ته مفصلې بېلګې

بیلګه ۱:

$2e^{3x} - 6e^{x} = 0 \mid +6e^{x}$ $\Leftrightarrow 2e^{3x} = 6e^{x} \mid :2$ د لوګاریتم نیولو له لار حل $\Leftrightarrow e^{3x} = 3e^{x} \mid \ln(\ )$ $\Leftrightarrow \ln\left(e^{3x}\right) = \ln\left(3 \cdot e^{x}\right)$ $\Leftrightarrow 3x \cdot \ln(e) = \ln(3) + \ln\left(e^{x}\right)$ $\Leftrightarrow 3x \cdot \ln(e) = \ln(3) + x \cdot \ln(e)$ $\Leftrightarrow 3x = \ln(3) + x \mid -x$ $\Leftrightarrow 2x = \ln(3) \mid :2$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x = \frac{1}{2}\ln(3)}}$	ازمايينت $2e^{3\cdot\frac{1}{2}\ln(3)} - 6e^{\frac{1}{2}\ln(3)} = 0$ $\Leftrightarrow 2e^{\frac{3}{2}\ln(3)} - 6e^{\frac{1}{2}\ln(3)} = 0$ $\Leftrightarrow 2\left(e^{\ln(3)}\right)^{\frac{3}{2}} - 6\left(e^{\ln(3)}\right)^{\frac{1}{2}} = 0$ $\Leftrightarrow 2\cdot 3^{\frac{3}{2}} - 6\cdot 3^{\frac{1}{2}} = 0$ $\Leftrightarrow 2\cdot 3\cdot 3^{\frac{1}{2}} - 6\cdot 3^{\frac{1}{2}} = 0$ $\Leftrightarrow 6\cdot 3^{\frac{1}{2}} - 6\cdot 3^{\frac{1}{2}} = 0\ (w)$

بیلګه ۲:

(c) ketabton.com: The Digital Library

ازمايينت	
$x_1 = 0$ $0 \cdot e^0 - 3 \cdot 0 = 0$ $\Leftrightarrow 0 \cdot 1 = 3 \cdot 0 = 0$ $\Leftrightarrow 0 = 0$ (w) $x_2 = \ln(3)$ $\ln(3) \cdot e^{\ln(3)} - 3 \cdot \ln(3) = 0$ $\Leftrightarrow \ln(3) \cdot 3 - 3 \cdot \ln(3) = 0$ $\Leftrightarrow 3 \cdot \ln(3) - 3 \cdot \ln(3) = 0$ (w)	$x \cdot e^x - 3x = 0$ $\Leftrightarrow x(e^x - 3) = 0$ $\Rightarrow \underline{\underline{x_1 = 0}}$ und $e^x - 3 = 0 \mid +3$ د لوګاريم له لارې حل $\Leftrightarrow e^x = 3 \mid \ln(\ )$ $\Leftrightarrow \ln(e^x) = \ln(3)$ $\Leftrightarrow x \cdot \ln(e) = \ln(3)$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x_2 = \ln(3)}}$

بیلګه ۳:

$e^{2x} - \frac{17}{2} e^x + 4 = 0$ ؟ بدلون $: u = e^x \Rightarrow u^2 - \frac{17}{2} u + 4 = 0$

په خټ بدلون

$u_1 = 8 \Leftrightarrow e^x = 8 \mid \ln(\ )$

$\Leftrightarrow \ln(e^x) = \ln(8)$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = \ln(8)}}$

$u_2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{2} \mid \ln(\ )$

$\Leftrightarrow \ln(e^x) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

$\Leftrightarrow x \cdot \ln(e) = \ln(1) - \ln(2)$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_2 = -\ln(2)}}$

د مربع مساوات حل

$p = -\frac{17}{2};\ q = 4;$

$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{289}{16} - \frac{64}{16} = \frac{225}{16} \Rightarrow \sqrt{D} = \frac{15}{4}$

$u_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}$

$u_1 = \frac{17}{4} + \frac{15}{4} = \frac{32}{4} = 8$

$u_2 = \frac{17}{4} - \frac{15}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

بیلګه ۴:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{2}{1+e^x} = -2\frac{e^x-4}{\left(1+e^x\right)^2} \,|:2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{1+e^x} = -\frac{e^x-4}{\left(1+e^x\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1\cdot\left(1+e^x\right)}{\left(1+e^x\right)\left(1+e^x\right)} = -\frac{e^x-4}{\left(1+e^x\right)^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\left(1+e^x\right)}{\left(1+e^x\right)^2} = -\frac{e^x-4}{\left(1+e^x\right)^2} \,|\cdot\left(1+e^x\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 1+e^x = -\left(e^x-4\right) \quad \Leftrightarrow \quad 1+e^x = -e^x+4 \,|+e^x-1$$

$$\Leftrightarrow 2e^x = 3 \,|\ln(\ ) \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left(2\cdot e^x\right) = \ln(3)$$

$$\Leftrightarrow \ln(2)+\ln\left(e^x\right) = \ln(3) \quad \Leftrightarrow \quad \ln(2)+x\cdot\ln(e) = \ln(3)$$

$$\Leftrightarrow \ln(2)+x = \ln(3) \,|-\ln(2) \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln(3)-\ln(2)$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x = \ln\left(\frac{3}{2}\right)}}$$

بیلگه ۵:

$$e^{2x+4}-3e^{x+2}+2=0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{2\cdot(x+2)}-3e^{x+2}+2=0$$

Substitution: $u = e^{x+2} \Rightarrow u^2-3u+2=0$

د مربع مساوات حل په ښت بدلون

$$u_1 = 2 \Leftrightarrow e^{x+2} = 2 \,|\ln(\ )$$
$$\Leftrightarrow (x+2)\ln(e) = \ln(2)$$
$$\Leftrightarrow x+2 = \ln(2) \,|-2$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = -2+\ln(2)}}$$
$$u_2 = 1 \Leftrightarrow e^{x+2} = 1 \,|\ln(\ )$$
$$\Leftrightarrow (x+2)\ln(e) = \ln(1)$$
$$\Leftrightarrow x+2 = 0 \,|-2$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_2 = -2}}$$

$$p = -3;\ q = 2;$$
$$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{9}{4}-\frac{8}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \frac{1}{2}$$
$$u_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}$$
$$u_1 = \frac{3}{2}+\frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$
$$u_2 = \frac{3}{2}-\frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرينونه: اكسپوننشلمساوات.
لاندې اكسپوننشل مساوات تاسو ته له معلومې لارې وشميرى.

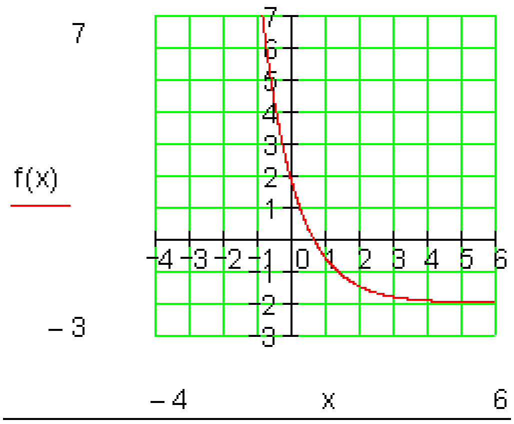
اول - $6-\frac{3}{2}e^{2-2x}=0$ دويم – $\frac{1}{4}e^{4x}-\frac{e}{2}=1$ دريم – $\frac{1}{2}e^{x}-e^{x+1}=0$

خلورم – $(3+2x)\,e^{x-1}=0$ پنځم – $-2x^{2}e^{-x+2}=0$

شپږم – $-\frac{1}{5}e^{x}-1+10e^{-x}=0$ اوم – $4-3e^{-\frac{1}{2}x}=e^{\frac{1}{2}x}$ اتم - $-\frac{3}{4}e^{-2x}+5=e^{-x}$

نهم - $\frac{2x}{e^{x}+1}=0$ لسم - $(2-e^{x})^{2}=(e^{x}-3)^{2}$

<u>د محور ونو غوڅتكي وشميرى</u>



$$f(x)=\frac{1}{2}\cdot e^{2-x}-2$$

$$y_s=f(0)=\frac{1}{2}\cdot e^{2}-2\approx 1{,}7$$

$$\Rightarrow P_y\left(0\,\middle|\,\frac{1}{2}\cdot e^{2}-2\approx 1{,}7\right)$$

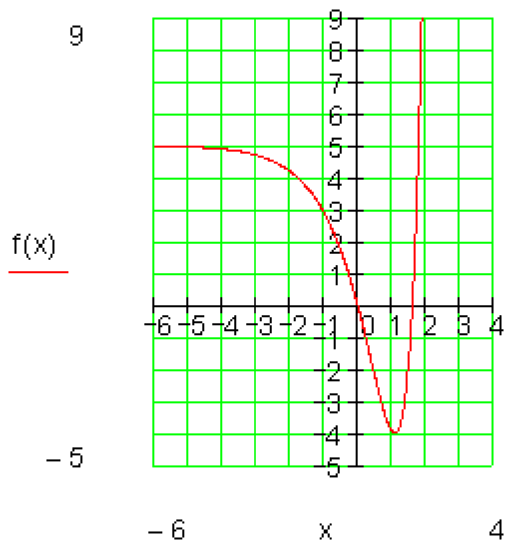
$$f(x)=0\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot e^{2-x}-2=0\,|+2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot e^{2-x}=2\,|\cdot 2\Leftrightarrow e^{2-x}=4\,|\ln(\ )$$

$$\Leftrightarrow 2-x=\ln(4)\Leftrightarrow x=2-\ln(4)$$

$$\Rightarrow P_x(x=2-\ln(4)\approx 0{,}614\,|\,0)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



$f(x) = e^{2x} - 6 \cdot e^{x} + 5$

$y_s = f(0) = 1 - 6 + 5 = 0 \Rightarrow P_y(0|0)$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 6 \cdot e^{x} + 5 = 0$

بدلون: $e^{x} = u \Rightarrow e^{2x} = u^2$

$u^2 - 6u + 5 = 0$

د مربع مساوات حل

$u_1 = 5; u_2 = 1$

$u_1 = 5 \Rightarrow e^{x_1} = 5 \Rightarrow x_1 = \ln(5) \approx 1{,}61$

$u_2 = 1 \Rightarrow e^{x_1} = 1 \Rightarrow x_2 = \ln(1) = 0$

$P_{x1}(\ln(5) \approx 1{,}61|0); P_{x2}(\ln(1) = 0|0)$

حلونه

تمرينونه توان او د لوګاريتم قوانين

نتيجي

اول - $\left(e^{x} + e^{-x}\right)^2 = e^{2x} + e^{-2x} + 2$

دويم – $\left(e^{x} - e^{-x} + 5\right) \cdot e^{x} = e^{2x} + 5 \cdot e^{x} - 1$

دريم - $\dfrac{e^{3x+1}}{e^{-x+2}} = e^{4x-1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

- ځلورم $e^{-x}\cdot e^{-x+2}\cdot e^{2x-3}=\frac{1}{e}$

- پنځم $\frac{1}{e^{2x}}+3\left(e^{-x}\right)^2-\left(\frac{2}{e^x}\right)^2=0$

- شپږم $e^{\ln(2k)}-2k\cdot e^{\ln(2)}=-2k$

- اوم $\ln\left(e^2\right)-3\ln\left(\frac{e}{2}\right)=3\cdot\ln(2)-1$

- اتم $\ln\left(2e^2\right)+\ln\left(\frac{e}{2}\right)=3$

- نهم $e^{\ln(k)+1}=k\cdot e$

- لسم $\frac{2}{3}e^{-\ln\left(\frac{3}{4}k\right)}=\frac{8}{9k}$

مفصل حلونه

اول –

$$\left(e^x+e^{-x}\right)^2=e^x\cdot e^x+2\cdot e^x\cdot e^{-x}+e^{-x}\cdot e^{-x}$$
$$=e^{x+x}+2\cdot e^{x-x}+e^{-x-x}$$

$$=e^{2x}+2\cdot e^0+e^{-2x}$$

د $e^0=1$ سره کيږي

$$=e^{2x}+2\cdot 1+e^{-2x}=\underline{\underline{e^{2x}+e^{-2x}+2}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم –

$$\left(e^{x}-e^{-x}+5\right)\cdot e^{x}=e^{x}\cdot e^{x}-e^{-x}\cdot e^{x}+5\cdot e^{x}$$
$$=e^{x+x}-e^{-x+x}+5\cdot e^{x}$$
$$=e^{2x}-e^{0}+5\cdot e^{x}=e^{2x}-1+5\cdot e^{x}=\underline{\underline{e^{2x}+5\cdot e^{x}-1}}$$

دریم –

$$\frac{e^{3x+1}}{e^{-x+2}}=e^{3x+1}\cdot e^{-(-x+2)}=e^{3x+1-(-x+2)}=e^{3x+1+x-2}=\underline{\underline{e^{4x-1}}}$$

څلورم –

$$e^{-x}\cdot e^{-x+2}\cdot e^{2x-3}=e^{-x+(-x+2)+2x-3}=e^{-x-x+2+2x-3}=e^{-1}=\underline{\underline{\frac{1}{e}}}$$

پنځم –

$$\frac{1}{e^{2x}}+3\left(e^{-x}\right)^{2}-\left(\frac{2}{e^{x}}\right)^{2}=e^{-2x}+3\cdot e^{-2x}-\left(\frac{4}{e^{2x}}\right)=4\cdot e^{-2x}-4\cdot e^{-2x}=\underline{\underline{0}}$$

شپږم –

$$e^{\ln(2k)}-2k\cdot e^{\ln(2)}$$

د $e^{\ln(x)}=x$ سره کیږي

$$e^{\ln(2k)}-2k\cdot e^{\ln(2)}=2k-2k\cdot 2=2k-4k=\underline{\underline{-2k}}$$

اوم –

$$\ln\left(e^{2}\right)-3\ln\left(\frac{e}{2}\right)=2\cdot\ln(e)-3\left[\ln(e)-\ln(2)\right]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\ln(e) = 1$ سره کیږي

$$= 2 \cdot 1 - 3\left[1 - \ln(2)\right] = 2 - 3 + 3 \cdot \ln(2) = \underline{\underline{3 \cdot \ln(2) - 1}}$$

اتم –

$$\ln\left(2e^2\right) + \ln\left(\frac{e}{2}\right) = \ln(2) + \ln\left(e^2\right) + \ln(e) - \ln(2)$$
$$= \ln(2) + 2 \cdot \ln(e) + \ln(e) - \ln(2) = 3 \cdot \ln(e) = \underline{\underline{3}}$$

نهم –

$$e^{\ln(k)+1} = e^{\ln(k)} \cdot e^1 = \underline{\underline{k \cdot e}}$$

لسم –

$$\frac{2}{3} e^{-\ln\left(\frac{3}{4}k\right)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{e^{\ln\left(\frac{3}{4}k\right)}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\frac{3}{4}k} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\frac{1}{1}}{\frac{3k}{4}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3k} = \underline{\underline{\frac{8}{9k}}}$$

حلونه

تمرينونه د اکسپوننشل مساوات حلونه

نتيجې او مفصل حلونه

نتيجې

اول – $6 - \frac{3}{2} e^{2-2x} = 0 \Rightarrow x = 1 - \ln(2)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم – $\frac{1}{4}e^{4x}-\frac{e}{2}=1\Rightarrow x=\frac{1}{4}\ln(4+2e)$

دریم – $\frac{1}{2}e^{x}-e^{x+1}=0\Rightarrow$

له دې لاس ته راغلي چې حل نه شته

څلورم – $(3+2x)e^{x-1}=0\Rightarrow x=-\frac{3}{2}$

پنځم – $-2x^2e^{-x+2}=0\Rightarrow x=0$

شپږم – $-\frac{1}{5}e^{x}-1+10e^{-x}=0\Rightarrow x_1=\ln(5)$

اوم – $4-3e^{-\frac{1}{2}x}=e^{\frac{1}{2}x}\Rightarrow x_1=2\ln(3)\ \text{und}\ x_2=0$

اتم – $-\frac{3}{4}e^{-2x}+5=e^{-x}\Rightarrow x_1=-\ln(2)$

نهم – $\frac{2x}{e^{x}+1}=0\Rightarrow x=0$

لسم – $\left(2-e^{x}\right)^2=\left(e^{x}-3\right)^2\Rightarrow x=\ln\left(\frac{5}{2}\right)$

مفصل حلونه

اول –

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$6-\frac{3}{2}e^{2-2x}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{2}e^{2-2x}=6\,|:\frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad e^{2-2x}=4\,|\ln(\;)$$

$$\Leftrightarrow 2-2x=\ln(4)\,|-2 \quad \Leftrightarrow \quad -2x=\ln(4)-2\,|:(-2) \quad \Leftrightarrow \quad x=1-\frac{1}{2}\ln(4)$$

$$\Leftrightarrow x=1-\ln\left(4^{\frac{1}{2}}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x=1-\ln(2)}}$$

دويم –

$$\frac{1}{4}e^{4x}-\frac{1}{2}e=1\,|+\frac{1}{2}e \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{4}e^{4x}=1+\frac{1}{2}e\,|\cdot 4 \quad \Leftrightarrow \quad e^{4x}=4+2e\,|\ln(\;)$$

$$\Leftrightarrow \quad 4x=\ln(4+2e)\,|:4 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x=\frac{1}{4}\ln(4+2e)}}$$

دريم –

$$\frac{1}{2}e^{x}-e^{x+1}=0\,|\cdot 2 \quad \Leftrightarrow \quad e^{x}-2e^{x+1}=0\,|+2e^{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{x}=2e^{x+1}\,|\ln(\;)$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln\left(e^{x}\right)=\ln\left(2e^{x+1}\right) \quad \Leftrightarrow \quad x=\ln(2)+\ln\left(e^{x+1}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad x=\ln(2)+x+1\,|-x$$

$$\Leftrightarrow \quad 0=\ln(2)+1\,|-1 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(2)=-1$$

تضاد ⇔ حل نه شته

څلورم –

$$(3+2x)e^{x-1}=0 \quad \Leftrightarrow \quad 3+2x=0\,|-3$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x=-3\,|:2 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x=-\frac{3}{2}}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

....

e^{x-1} تابعا e^{x} ا ده، چې په یو واحد د x محور ښي لور ته راکښل شوې ده.

تابع ا e^{x} ا صفرځای نه لري.

پنځم –

$$-2x^2e^{-x+2}=0$$

$$-2x^2e^{-x+2}=0 \quad \Leftrightarrow \quad -2x^2=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x=0}}$$

e^{-x+2} i تابع e^{-x} ده چې په 2EH (په ۲ یوونه یا واحده) د x محور کینې لور ته راکښل شوې ده..

تابع e^{-x} صفرځتی نه لري.

شپږم – لاندې الماني : بدلون

$$-\frac{1}{5}e^{x}-1+10e^{-x}=0 \text{ Substitution } u=e^{x} \Leftrightarrow -\frac{1}{5}u-1+\frac{10}{u}=0 \mid \cdot u$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{5}u-1+\frac{10}{u}=0 \mid \cdot(-5) \quad \Leftrightarrow \quad u^2+5u-50=0$$

$$p=5\,;\,q=-50 \Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\frac{25}{4}+\frac{200}{4}=\frac{225}{4} \Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{\frac{225}{4}}=\frac{15}{2}$$

$$u_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D} \left| \begin{array}{l} u_1=-\frac{5}{2}+\frac{15}{2}=5 \\ u_2=-\frac{5}{2}-\frac{15}{2}=-10 \end{array} \right.$$

$$u_1=5 \Leftrightarrow e^{x}=5 \Leftrightarrow x_1=\ln(5)$$

$$u_2=-10 \Leftrightarrow e^{x}=-10 \Rightarrow$$

حل نه دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوم – الماني: بدلون

$$4-3e^{-\frac{1}{2}x}=e^{\frac{1}{2}x}\text{ Substitution } u=e^{\frac{1}{2}x}\Leftrightarrow 4-\frac{3}{u}=u\,|\cdot u$$

$$\Leftrightarrow 4u-3=u^2\,|-u^2 \quad\Leftrightarrow\quad -u^2+4u-3=0\,|\cdot(-1) \quad\Leftrightarrow\quad u^2-4u+3=0$$

$$p=-4\,;\,q=3\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=4-3=1\Rightarrow\sqrt{D}=\sqrt{1}=1$$

$$u_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\left|\begin{array}{l}u_1=2+1=3\\u_2=2-1=1\end{array}\right.$$

$$u_1=3\Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}x}=3\Leftrightarrow\frac{1}{2}x=\ln(3)\Leftrightarrow \underline{\underline{x_1=2\ln(3)}}$$

$$u_2=1\Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}x}=1\Leftrightarrow\frac{1}{2}x=\ln(1)\Leftrightarrow x_2=2\underbrace{\ln(1)}_{0}\Leftrightarrow \underline{\underline{x_2=0}}$$

اتم – الماني: بدلون ،

$$-\frac{3}{4}e^{-2x}+5=e^{-x}\text{ Substitution } u=e^{-x}\Leftrightarrow-\frac{3}{4}u^2+5=u\,|-u$$

$$\Leftrightarrow-\frac{3}{4}u^2-u+5=0\,|:\left(-\frac{3}{4}\right)\quad\Leftrightarrow\quad u^2+\frac{4}{3}u-\frac{20}{3}=0$$

$$p=\frac{4}{3}\,;\,q=-\frac{20}{3}\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\frac{4}{9}+\frac{60}{9}=\frac{64}{9}\Rightarrow\sqrt{D}=\sqrt{\frac{64}{9}}=\frac{8}{3}$$

$$u_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\left|\begin{array}{l}u_1=-\frac{2}{3}+\frac{8}{3}=2\\u_2=-\frac{2}{3}-\frac{8}{3}=-\frac{11}{3}\end{array}\right.$$

$$u_1=2\Leftrightarrow e^{-x}=2\Leftrightarrow -x=\ln(2)\Leftrightarrow \underline{x_1=-\ln(2)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$u_2 = -\frac{11}{3} \Leftrightarrow e^{-x} = -\frac{11}{3} \Leftrightarrow -x = \underbrace{\ln\left(-\frac{11}{3}\right)}_{\text{nicht definiert}} \Rightarrow$$

تعریف نه دی

له دې لاس ته راځي چې حل نه دی.

نهم –

$$\frac{2x}{e^x+1} = 0 \,|\cdot\left(e^x+1\right) \quad \Leftrightarrow \quad 2x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = 0}}$$

لسم –

$$\left(2-e^x\right)^2 = \left(e^x-3\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 4-4e^x+e^{2x} = e^{2x}-6e^x+9 \,|-e^{2x}$$

$$\Leftrightarrow 4-4e^x = -6e^x+9 \,|+6e^x \quad \Leftrightarrow \quad 4+2e^x = 9 \,|-4 \quad \Leftrightarrow \quad 2e^x = 5 \,|:2$$

$$\Leftrightarrow e^x = \frac{5}{2} \,|\ln(\;) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = \ln\left(\frac{5}{2}\right)}}$$

خلورم: د **e** -تا بع مشتق یا رابیلیدنه

د ضرب- او زنځیري قانون سره

د **e** -تا بع مشتق یا رابیلیدنه

د **e** -تا بع مشتق یا رابیلیدنه د ساده لارو له لارې نه شي پیداکیدلای، د دې لپاره یوې ،،جګې شمیرپوهنې یا ریاضي،، ته ا ړتیا ده. دلته به یو لیدوړ متود انځور شي، له دې خطر سره هم، چې شمیرپوهنیز متخصصین یا شمیرپوهان به بغاوت وکړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = f(x) = e^x$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x_0 + \Delta x} - e^{x_0}}{\Delta x}$$

په پام کې نیسو چې باور لري: $e^{x_0 + \Delta x} = e^{x_0} \cdot e^{\Delta x}$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x_0} \cdot e^{\Delta x} - e^{x_0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x_0}\left(e^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} e^{x_0} \cdot \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^{x_0} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

مونږ د تل کوچني کیدونکي Δx ـ ارزښت لپاره د $\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$ ځانګنیونه څیړو

Δx	1	0,1	0,01	0,001	0,0001
$\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$	1,718...	1,051...	1,00501...	1,0005...	1,00005...

د دې ځانګنیونې یا حالت په بنسټ لاس ته راوړو چې باور لري: $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1$

دا ځمونږ د شمیرنې لپاره په دې معنا دی:

$$f'(x_0) = e^{x_0} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}}_{1} = e^{x_0} \cdot 1 = \underline{\underline{e^{x_0}}}$$

که د x_0 په ځای x ولیکو، نو باور لري: $f(x) = e^x$ او $f'(x) = e^x$

اکسپوننشل تابع $f(x) = e^x$ مشتق $f'(x) = e^x$ لري

د e په بنسټ اکسپوننشل تابع یو تابع دی، په کوم کې چې تابع او مشتق سره برابر دي.

د $f'(x) = e^x$ ـ تابع دمشتق سره ځان بیرته تولیدوي یا جوړوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د e -تابع د مشتق یا بیلیدنې لپاره بنستقوانین:

د e -تابع هندارونه، غزونه او راکښنه مو دې ته بیایي، =ې اکسپوننت یا جګعدد(-ګڼ) نه تنها فقط د x اووښتونې یا متحوله خوندي لري.

د نورو توابعو سره د نښلونو له لارې نوې توابع منځ ته راځي، په کومو کې چې د e– تابع د فاکتور یا ضریب په څیر خوندي ده. په داسې حالتونو کې د مشتق لپاره نور قوانین د غوښتلو دي.

د زیاتیز یا مثبت x په لور په 3 یوونونو یا واحدونو د e - تابع راکښنه او د په لور په 2 ضریبونو غزونه د دوه ضریبونو یوه زنځرونه ورکوي.

$$f(x) = e^{\frac{1}{2}(x-2)} = e^{u(x)} \text{ mit } u(x) = \frac{1}{2}(x-2)$$

یو زنځیري تابع انځوروي.

د دې مشتق داسې دی

زنځیري لار یا قاعده:

$$\boxed{f(x) = e^{u(x)} \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot e^{u(x)}}$$

$$u(x) = \frac{1}{2}(x-2) \Rightarrow u' = \frac{1}{2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}(x-2)}$$

یو د e - تابع ترنه د یو کرښیز تابع سره تر څیرنې لادې نیسو:

$f(x) = (2x-1) \cdot e^{x}$ نو دا د ضرب د قانون سره مشتق کوو یا رابیلوو.

د ضرب قانون یا -لار:

$$\boxed{f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$u(x) = (2x-1) \Rightarrow u'(x) = 2 \text{ und } v(x) = e^x \Rightarrow v'(x) = e^x$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2 \cdot e^x + (2x-1) \cdot e^x = \left[2 + (2x-1)\right] \cdot e^x = \underline{\underline{(2x+1) \cdot e^x}}$$

دې قوانینو ته بیلګې

اول - $f(x) = e^{2-x} \Rightarrow f'(x) = (-1) \cdot e^{2-x} = \underline{\underline{-e^{2-x}}}$

دویم –

$$f(x) = e^{\frac{1}{4}x+4} \Rightarrow f'(x) = \underline{\underline{\frac{1}{4} \cdot e^{\frac{1}{4}x+4}}} \Rightarrow f''(x) = \underline{\underline{\frac{1}{16} \cdot e^{\frac{1}{4}x+4}}}$$

دریم –

$$f(x) = (x-2) \cdot e^{-x}$$

$$\text{mit } u = (x-2) \Rightarrow u' = 1 \text{ und } v = e^{-x} \Rightarrow v' = -e^{-x} \text{ wird}$$

$$f'(x) = u'v + uv' = 1 \cdot e^{-x} + (x-2) \cdot \left(-e^{-x}\right) = e^{-x} - (x-2) \cdot e^{-x}$$

$$= \left[1 - (x-2)\right] \cdot e^{-x} = \underline{\underline{(3-x) \cdot e^{-x}}}$$

څلورم –

$$f(x) = ax \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$$\text{mit } u = ax \Rightarrow u' = a \text{ und } v = e^{-\frac{1}{2}x^2} \Rightarrow v' = -x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} \text{ wird}$$

$$f'(x) = u'v + uv' = a \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} + ax \cdot \left(-x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}\right)$$

$$= a \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} - ax^2 \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} = \underline{\underline{a \cdot \left(1 - x^2\right) \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دېرواره مشتق یا رابیلېدنه:

د کړو یا منحنیو خبرو اترو یا بحث سره زیات وخت درې مشتقونه د توابعو د څېړنو لپاره غوښتونکي یا اړین دي.

$f(x)=(2x+4)\cdot e^{-\frac{1}{2}x}$ (د یوه کربنیز او e–تابع ضرب)

د $u=(2x+4)\Rightarrow u'=2$ او $v=e^{-\frac{1}{2}x}\Rightarrow v'=-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}$ سره کیږی

$$f'(x)=u'v+uv'=2\cdot e^{-\frac{1}{2}x}+(2x+4)\cdot\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\right)=\left[2+(2x+4)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right]\cdot e^{-\frac{1}{2}x}=\underline{\underline{-x\cdot e^{-\frac{1}{2}x}}}$$

د $u=-x\Rightarrow u'=-1$ او $v=e^{-\frac{1}{2}x}\Rightarrow v'=-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}$ سره کیږي

$$f''(x)=u'v+uv'=-1\cdot e^{-\frac{1}{2}x}+(-x)\cdot\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\right)=\left(\frac{1}{2}x-1\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}x}$$

د $u=\frac{1}{2}x-1\Rightarrow u'=\frac{1}{2}$ او $v=e^{-\frac{1}{2}x}\Rightarrow v'=-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}$ سره کیږي

$$f'''(x)=u'v+uv'=\frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{1}{2}x}+\left(\frac{1}{2}x-1\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\right)=\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}x-1\right)\right]\cdot e^{-\frac{1}{2}x}=$$

$$=\underline{\underline{\left(1-\frac{1}{4}x\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}x}}}$$

د هر مشتق یا رابیلیدني سره د e -تابعضریب بې تغیره پاتیږي. که دا له نوکانو راووځي، نو نور مشتقونه یا رابیلیدني ساده په لاس راوړی شو یا شمیرلی شو.

د مشتقتابع صفرځایونه کیدی شي زیات وخت ساده ولوستل شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرینونه

د e تابع مشتقا

د لاندې توابعو درې ځله مشتق وشمېرئ

اول - $f(x)=4\cdot e^{2x}$ دویم - $f(x)=e^{x+4}$ دریم - $f(x)=2\cdot e^{2-4x}$ څلورم-

$f(x)=4x-2\cdot e^{-2x}$ پنځه - $f(x)=x\cdot e^{-2x}$ شپږم - $f(x)=2x\cdot e^{2-x}$ اوم -

$f(x)=(x+2)\cdot e^{x}$ اتم - $f(x)=(1-x)\cdot e^{\frac{1}{2}x}$ نهم - $f(x)=(1+x)\cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}$ لسم -

$f(x)=t\cdot x\cdot e^{-\frac{1}{4}x}$

حلونه

د e تابع مشتقا

نتیجې او مفصل حلونه

نتیجې

اول — $f(x)=4\cdot e^{2x}\Rightarrow f'(x)=8\cdot e^{2x};\ f''(x)=16\cdot e^{2x};\ f'''(x)=32\cdot e^{2x}$

دویم — $f(x)=e^{x+4}\Rightarrow f'(x)=e^{x+4};\ f''(x)=e^{x+4};\ f'''(x)=e^{x+4}$

دریم -

$f(x)=4x-2\cdot e^{-2x}\Rightarrow f'(x)=4+4\cdot e^{-2x};\ f''(x)=-8\cdot e^{-2x};\ f'''(x)=16\cdot e^{-2x}$

څلورم -

$f(x)=2\cdot e^{2-4x}\Rightarrow f'(x)=-8\cdot e^{2-4x};\ f''(x)=32\cdot e^{2-4x};\ f'''(x)=-128\cdot e^{2-4x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم -

$$f(x)=x\cdot e^{-2x}\Rightarrow f'(x)=(1-2x)\cdot e^{-2x}\,;\,f''(x)=(4x-4)\cdot e^{-2x}\,;\,f'''(x)=(12-8x)\cdot e^{-2x}$$

شپږم -

$$f(x)=2x\cdot e^{2-x}\Rightarrow f'(x)=(2-2x)\cdot e^{2-x}\,;\,f''(x)=(2x-4)\cdot e^{2-x}\,;\,f'''(x)=(6-2x)\cdot e^{2-x}$$

اوم -

$$f(x)=(x+2)\cdot e^{x}\Rightarrow f'(x)=(x+3)\cdot e^{x}\,;\,f''(x)=(x+4)\cdot e^{x}\,;\,f'''(x)=(x+5)\cdot e^{x}$$

اتم –

$$f(x)=(1-x)\cdot e^{\frac{1}{2}x}\Rightarrow$$

$$f'(x)=\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x\right)\cdot e^{\frac{1}{2}x}\,;\,f''(x)=\left(-\frac{3}{4}-\frac{1}{4}x\right)\cdot e^{\frac{1}{2}x}\,;\,f'''(x)=\left(-\frac{5}{8}-\frac{1}{8}x\right)\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

نهم -

$$f(x)=(1+x)\cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}\Rightarrow$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot(1-x)\cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}\,;\,f''(x)=\frac{1}{4}\cdot(x-3)\cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}\,;\,f'''(x)=\frac{1}{8}\cdot(5-x)\cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}$$

لسم –

$$f(x)=t\cdot x\cdot e^{-\frac{1}{4}x}\Rightarrow$$

$$f'(x)=t\cdot\left(1-\frac{1}{4}\cdot x\right)\cdot e^{-\frac{1}{4}x}\,;\,f''(x)=\frac{1}{16}\cdot t\cdot(x-8)\cdot e^{-\frac{1}{4}x}\,;\,f'''=\frac{1}{64}\cdot t\cdot(12-x)\cdot e^{-\frac{1}{4}x}$$

مفصل حلونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

اول –

$$f(x)=4\cdot e^{2x}$$
$$f'(x)=2\cdot 4\cdot e^{2x}=\underline{\underline{8\cdot e^{2x}}}$$
$$f''(x)=2\cdot 8\cdot e^{2x}=\underline{\underline{16\cdot e^{2x}}}$$
$$f'''(x)=2\cdot 16\cdot e^{2x}=\underline{\underline{32\cdot e^{2x}}}$$

دویم –

$$f(x)=e^{x+4}$$
$$f'(x)=1\cdot e^{x+4}=\underline{\underline{e^{x+4}}}$$
$$f''(x)=1\cdot e^{x+4}=\underline{\underline{e^{x+4}}}$$
$$f'''(x)=1\cdot e^{x+4}=\underline{\underline{e^{x+4}}}$$

دریم –

$$f(x)=2\cdot e^{2-4x}$$
$$f'(x)=-4\cdot 2\cdot e^{2-4x}=\underline{\underline{-8\cdot e^{2-4x}}}$$
$$f''(x)=-4\cdot(-8)\cdot e^{2-4x}=\underline{\underline{32\cdot e^{2-4x}}}$$
$$f'''(x)=-4\cdot 32\cdot e^{2-4x}=\underline{\underline{-128\cdot e^{2-4x}}}$$

څلورم –

$$f(x)=4x-2\cdot e^{-2x}$$
$$f'(x)=4-2\cdot(-2)\cdot e^{-2x}=\underline{\underline{4+4\cdot e^{-2x}}}$$
$$f''(x)=-2\cdot 4\cdot e^{-2x}=\underline{\underline{-8\cdot e^{-2x}}}$$
$$f'''(x)=-2\cdot(-8)\cdot e^{-2x}=\underline{\underline{16\cdot e^{-2x}}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم – $f(x) = x \cdot e^{-2x}$

د $u = x \Rightarrow u' = 1$ او $v = e^{-2x} \Rightarrow v' = -2 \cdot e^{-2x}$ سره

$$f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v' = 1 \cdot e^{-2x} + x \cdot \left(-2 \cdot e^{-2x}\right) = 1 \cdot e^{-2x} - 2x \cdot e^{-2x} = (1-2x) \cdot e^{-2x}$$

$f''(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$ د $u = 1-2x \Rightarrow u' = -2$ او $v = e^{-2x} \Rightarrow v' = -2 \cdot e^{-2x}$ سره

$$f''(x) = -2 \cdot e^{-2x} + (1-2x) \cdot \left(-2 \cdot e^{-2x}\right) = \left[-2 - 2 \cdot (1-2x)\right] \cdot e^{-2x} = \underline{\underline{(4x-4) \cdot e^{-2x}}}$$

$f'''(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$ د $u = 4x-4 \Rightarrow u' = 4$ او $v = e^{-2x} \Rightarrow v' = -2 \cdot e^{-2x}$ سره

$$f'''(x) = 4 \cdot e^{-2x} + (4x-4) \cdot \left(-2 \cdot e^{-2x}\right) = \left[4 - 2 \cdot (4x-4)\right] \cdot e^{-2x} = \underline{\underline{(12-8x) \cdot e^{-2x}}}$$

شپږم –

$f(x) = 2x \cdot e^{2-x}$ د $u = 2x \Rightarrow u' = 2$ او $v = e^{2-x} \Rightarrow v' = -1 \cdot e^{2-x}$ سره

$$f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v' = 2 \cdot e^{2-x} + 2x \cdot \left(-1 \cdot e^{2-x}\right) = (2-2x) \cdot e^{2-x}$$

$f''(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$ د $u = 2-2x \Rightarrow u' = -2$ او $v = e^{2-x} \Rightarrow v' = -1 \cdot e^{2-x}$ سره

$$f''(x) = -2 \cdot e^{2-x} + (2-2x) \cdot \left(-1 \cdot e^{2-x}\right) = \left[-2 - (2-2x)\right] \cdot e^{2-x} = (2x-4) \cdot e^{2-x}$$

$f'''(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$ د $u = 2x-4 \Rightarrow u' = 2$ او $v = e^{2-x} \Rightarrow v' = -1 \cdot e^{2-x}$ سره

$$f'''(x) = 2 \cdot e^{2-x} + (2x-4) \cdot \left(-1 \cdot e^{2-x}\right) = \left[2 - (2x-4)\right] \cdot e^{2-x} = \underline{\underline{(6-2x) \cdot e^{2-x}}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوم –

$f(x)=(x+2)\cdot e^{x}$ د $u=x+2\Rightarrow u'=1$ او $v=e^{x}\Rightarrow v'=e^{x}$ سره

$$f'(x)=u'\cdot v+u\cdot v'=1\cdot e^{x}+(x+2)\cdot e^{x}=\left[1+(x+2)\right]\cdot e^{x}=\underline{\underline{(x+3)\cdot e^{x}}}$$

$f''(x)=u'\cdot v+u\cdot v'$ د $u=x+3\Rightarrow u'=1$ او $v=e^{x}\Rightarrow v'=e^{x}$ سره

$$f''(x)=1\cdot e^{x}+(x+3)\cdot e^{x}=\left[1+(x+3)\right]\cdot e^{x}=\underline{\underline{(x+4)\cdot e^{x}}}$$

$f'''(x)=u'\cdot v+u\cdot v'$ د $u=x+4\Rightarrow u'=1$ او $v=e^{x}\Rightarrow v'=e^{x}$ سره

$$f'''(x)=1\cdot e^{x}+(x+4)\cdot e^{x}=\left[1+(x+4)\right]\cdot e^{x}=\underline{\underline{(x+5)\cdot e^{x}}}$$

اتم –

$f(x)=(1-x)\cdot e^{\frac{1}{2}x}$ د $u=1-x\Rightarrow u'=-1$ او $v=e^{\frac{1}{2}x}\Rightarrow v'=\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}$ سره

$$f'(x)=u'\cdot v+u\cdot v'=-1\cdot e^{\frac{1}{2}x}+(1-x)\cdot\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}=\left[-1+\frac{1}{2}(1-x)\right]\cdot e^{\frac{1}{2}x}=\underline{\underline{\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x\right)\cdot e^{\frac{1}{2}x}}}$$

$f''(x)=u'\cdot v+u\cdot v'$ د $u=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x\Rightarrow u'=-\frac{1}{2}$ او $v=e^{\frac{1}{2}x}\Rightarrow v'=\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}$ سره

$$f''(x)=-\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}+\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x\right)\cdot\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}=\left[-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x\right)\right]\cdot e^{\frac{1}{2}x}=\left(-\frac{3}{4}-\frac{1}{4}x\right)\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$f'''(x)=u'\cdot v+u\cdot v'$ د $u=-\frac{3}{4}-\frac{1}{4}x\Rightarrow u'=-\frac{1}{4}$ او $v=e^{\frac{1}{2}x}\Rightarrow v'=\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}$

سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f'''(x)=-\frac{1}{4}\cdot e^{\frac{1}{2}x}+\left(-\frac{3}{4}-\frac{1}{4}x\right)\cdot\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}=\left[-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{4}-\frac{1}{4}x\right)\right]\cdot e^{\frac{1}{2}x}=\left(-\frac{5}{8}-\frac{1}{8}x\right)\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

نهم – $f(x)=(1+x)\cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}$

د $u=1+x\Rightarrow u'=1$ او $v=e^{-\frac{1}{2}x+2}\Rightarrow v'=-\frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}$ سره

$$f'(x)=u'\cdot v+u\cdot v'=1\cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}+(1+x)\cdot\left(-\frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}\right)=\left[1-\frac{1}{2}(1+x)\right]\cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}=\frac{1}{2}\cdot(1-x)\cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}$$

$f''(x)=u'\cdot v+u\cdot v'$ د $u=\frac{1}{2}\cdot(1-x)\Rightarrow u'=-\frac{1}{2}$ او $v=e^{-\frac{1}{2}x+2}\Rightarrow v'=-\frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}$ سره

$$f''(x)=-\frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}+\frac{1}{2}\cdot(1-x)\cdot\left(-\frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}\right)=\left[-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}(1-x)\right]\cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}$$

$$=\left(-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}x\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}=\frac{1}{4}\cdot(x-3)\cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}$$

$f'''(x)=u'\cdot v+u\cdot v'$ د $u=\frac{1}{4}\cdot(x-3)\Rightarrow u'=\frac{1}{4}$ او $v=e^{-\frac{1}{2}x+2}\Rightarrow v'=-\frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}$ سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f'''(x)=\frac{1}{4}\cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}+\frac{1}{4}\cdot(x-3)\cdot\left(-\frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}\right)=\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{8}(x-3)\right]\cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}$$

$$=\left(\frac{5}{8}-\frac{1}{8}x\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}=\underline{\underline{\frac{1}{8}\cdot(5-x)\cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}}}$$

لسم –

$f(x)=t\cdot x\cdot e^{-\frac{1}{4}x}$ د $u=t\cdot x\Rightarrow u'=t$ او $v=e^{-\frac{1}{4}x}\Rightarrow v'=-\frac{1}{4}\cdot e^{-\frac{1}{4}x}$ سره

$$f'(x)=u'\cdot v+u\cdot v'=t\cdot e^{-\frac{1}{4}x}+t\cdot x\cdot\left(-\frac{1}{4}\cdot e^{-\frac{1}{4}x}\right)=\left[t-\frac{1}{4}\cdot t\cdot x\right]\cdot e^{-\frac{1}{4}x}=\underline{\underline{t\cdot\left(1-\frac{1}{4}\cdot x\right)\cdot e^{-\frac{1}{4}x}}}$$

$f''(x)=u'\cdot v+u\cdot v'$ د $u=t\cdot\left(1-\frac{1}{4}\cdot x\right)\Rightarrow u'=-\frac{1}{4}\cdot t$ او

$v=e^{-\frac{1}{4}x}\Rightarrow v'=-\frac{1}{4}\cdot e^{-\frac{1}{4}x}$ سره

$$f''(x)=-\frac{1}{4}t\cdot e^{-\frac{1}{4}x}+t\cdot\left(1-\frac{1}{4}\cdot x\right)\cdot\left(-\frac{1}{4}\cdot e^{-\frac{1}{4}x}\right)=\left[-\frac{1}{4}t-\frac{1}{4}\cdot t\cdot\left(1-\frac{1}{4}\cdot x\right)\right]\cdot e^{-\frac{1}{4}x}$$

$$=\left(-\frac{1}{2}\cdot t+\frac{1}{16}\cdot t\cdot x\right)\cdot e^{-\frac{1}{4}x}=\frac{1}{16}\cdot t\cdot(x-8)\cdot e^{-\frac{1}{4}x}$$

$f'''(x)=u'\cdot v+u\cdot v'$ د $u=\frac{1}{16}\cdot t\cdot(x-8)\Rightarrow u'=\frac{1}{16}\cdot t$ او

$v=e^{-\frac{1}{4}x}\Rightarrow v'=-\frac{1}{4}\cdot e^{-\frac{1}{4}x}$ سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f'''(x)=\frac{1}{16}\cdot t\cdot e^{-\frac{1}{4}x}+\frac{1}{16}\cdot t\cdot(x-8)\cdot\left(-\frac{1}{4}\cdot e^{-\frac{1}{4}x}\right)=\left[\frac{1}{16}t-\frac{1}{64}\cdot t\cdot(x-8)\right]\cdot e^{-\frac{1}{4}x}$$

$$=\left(\frac{3}{16}\cdot t-\frac{1}{64}\cdot t\cdot x\right)\cdot e^{-\frac{1}{4}x}=\underline{\underline{\frac{1}{64}\cdot t\cdot(12-x)\cdot e^{-\frac{1}{4}x}}}$$

پنځم: د e -تابع انتیګرېشن یا ګډونه

پیل:په څټ کتنې را تولوني سره د انتیګرالشمیرنې څخه لاندې څرګند دي:

که د یو په خوښه انتیګرالوړ تابع $f(x)$ انتیګرال ونیول شي، نو سړی یو بنسټ تابع لاس ته راوړي: $F(x)=\int f(x)\,dx$

تابع $f(x)$ د انتیګرالوني تابع هم بلل کیږي.

باور لري: $F(x)=\int f(x)\,dx \Leftrightarrow F'(x)=f(x)$

دا په دې معنا، چې که بنسټ تابع مشتق شي یا یې مشتق ونیول شي، نو سړی بیرته د انتیګرالیدني تابع لاس ته راوړي. دا ړ یکه موږ ته ممکنوي چې د مشتقولو له لارې د انتیګرال نتیجه و ازمایو.

بیلګه:

$f(x)=x^2 \Rightarrow F(x)=\int x^2\,dx=\frac{1}{3}x^3+C$ مشتق شوی: $F'(x)=x^2=f(x)$

که په e -تابع استعمال شي، له کوم چې موږ پوهیږو، چې د مشتق سره پخپله بیرته تولیدیږي یا منځ ته راځي په دې معنا دی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

وي دي $F(x)=\int f(x)\,dx = e^x + C$ د ټولو توابعو f(x) بنسټ دېرئ يا سټ، نو $F'(x)=f(x)=\left[e^x+C\right]'=e^x$ دی

(۱) د -تابع ا نتيګرال: $\int e^x\,dx = e^x + C$

د e –تابع د مشتق سره دې په دې حالت کې، په کوم کې چې د e –تابع جګعدد يا اکسپوننت نه ځانله د اووبنتونې يا متحولې x څخه جوړ وو، زنځيرقانون استعمال شي. په انتيګرېشن کې د ا نتيګراليدونکې تابع دې داسې وټاکل شي، چې د (۱) انتيګرال کيدی شي

ټوليز انتيګرال د بدلون قاعدې سره

$$f(x)=e^{-x} \Rightarrow F(x)=\int e^{-x}\,dx$$

$$\text{Substitution}: u(x)=-x \Rightarrow u'(x)=\frac{du(x)}{dx}=-1 \Rightarrow dx=-du$$

$$\Rightarrow \int e^{-x}\,dx = -\int e^{u}\,du = -e^{u}+C$$

په خټ بلون: $\Rightarrow F(x)=\int e^{-x}\,dx = \underline{\underline{-e^{-x}}}$

ازمايښت: $F(x)=-e^{-x}+C \Rightarrow F'(x)=(-1)\cdot\left(-e^{-x}\right)=e^{-x}=f(x)$

بيلګه:

$$f(x)=e^{2x-1} \Rightarrow F(x)=\int e^{2x-1}\,dx$$

$$\text{Substitution}: u(x)=2x-1 \Rightarrow u'(x)=\frac{du(x)}{dx}=2 \Rightarrow dx=\frac{1}{2}du$$

$$\Rightarrow \int e^{2x-1}\,dx=\frac{1}{2}\int e^{u}\,du=\frac{1}{2}e^{u}+C$$

$$\Rightarrow F(x)=\int e^{2x-1}\,dx=\frac{1}{2}e^{2x-1}+C$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ازماېښت:

$$F(x)=\frac{1}{2}e^{2x-1}+C\Rightarrow F'(x)=2\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{2x-1}=e^{2x-1}=f(x)$$

بیلګه:

$$f(x)=e^{2x-1}\Rightarrow F(x)=\int e^{2x-1}dx$$

$$\text{Substitution}: u(x)=2x-1\Rightarrow u'(x)=\frac{du(x)}{dx}=2\Rightarrow dx=\frac{1}{2}du$$

$$\Rightarrow\int e^{2x-1}dx=\frac{1}{2}\int e^{u}du=\frac{1}{2}e^{u}+C$$

$$\Rightarrow F(x)=\int e^{2x-1}dx=\underline{\frac{1}{2}e^{2x-1}+C}$$

ازماېښت:

$$F(x)=2\cdot e^{-\frac{1}{2}(1-x)}+C\Rightarrow F'(x)=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot e^{-\frac{1}{2}(1-x)}=e^{-\frac{1}{2}(1-x)}=f(x)$$

د بدلون سره ټاکلی انتیګرال

د دې لپاره چې د ګراف او x محور ترمنځ سطحه وشمیرو، زیات وخت باید یو ټاکلی انتیګرال حل شي. دلته مو هم د بدلون لار حل ته لاربنودوي. د بدلون له لارې حل لپاره دوه متودونه یا واریانت شتون لري.

لومړئ لار یا واریانت :

$$f(x)=e^{\frac{1}{2}x-1}\Rightarrow A=\int_{-1}^{1}e^{\frac{1}{2}x-1}dx$$

بدلون:

$$u(x)=\frac{1}{2}x-1\Rightarrow u'(x)=\frac{du}{dx}=\frac{1}{2}\Rightarrow dx=2\cdot du$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د انتیګرال عمومي حل:

$$\int e^{\frac{1}{2}x-1}\,dx = 2\cdot\int e^{u}\,du = 2\cdot e^{u} + C \Rightarrow 2\cdot e^{\frac{1}{2}x-1} + C$$

د ټاکلي انتیګرال په حیث یې وشمیرئ(بې له ثا بتي یا همغې C سره)

$$A = \int_{-1}^{1} e^{\frac{1}{2}x-1}\,dx = 2\cdot\left[e^{\frac{1}{2}x-1}\right]_{-1}^{1} = 2\cdot\left[e^{-\frac{1}{2}} - e^{-\frac{3}{2}}\right] \approx 2\cdot 0{,}3834 = \underline{\underline{0{,}7668}}$$

دویمه لار یا واریانت:

$$\text{Variante 2: } f(x) = e^{\frac{1}{2}x-1} \Rightarrow A = \int_{-1}^{1} e^{\frac{1}{2}x-1}\,dx$$

بدلون:

$$u(x) = \frac{1}{2}x - 1 \Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} \Rightarrow dx = 2\cdot du$$

پولې هم بدلیږي:

لاندې یا کښته پوله:

$$ug = u(-1) = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$$

پورته پوله:

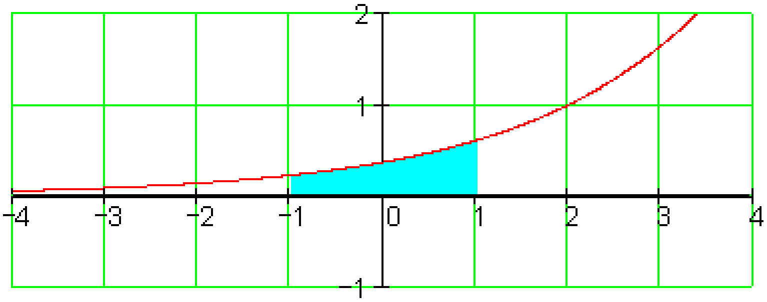
$$og = u(1) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

$$A = \int_{-1}^{1} e^{\frac{1}{2}x-1}\,dx = 2\cdot\int_{-\frac{3}{2}}^{-\frac{1}{2}} e^{u}\,du = 2\cdot\left[e^{u}\right]_{-\frac{3}{2}}^{-\frac{1}{2}} = 2\cdot\left[e^{-\frac{1}{2}} - e^{-\frac{3}{2}}\right] \approx 2\cdot 0{,}3834 = \underline{\underline{0{,}7668}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دویمه واریابلې کې د انیګرال لاندې او پورته پولې هم بدلې یا سبستیتویرت شوې. له دې لارې په زیاتو حالتونو کې شمیرن زیاتوالی راکمیږي.

$$f(x) := e^{\frac{1}{2}\cdot x-1} \qquad \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0.7668$$



تمرینونه

د ساده توابعو انتیګرالونه

د لاندې تابعو انتیګرال وشمیری. د اول تر څلورم تمرینونو پورې د ازمایښت له لارې کنترول کړی.

اول - $\int -e^{-x}\,dx$ دویم - $\int \frac{1}{2}e^{2x}\,dx$ دریم - $\int 2\cdot e^{-\frac{1}{4}x}\,dx$ څلورم - $\int \frac{3}{4}\cdot e^{3x-4}\,dx$

پنځم - $\int_{0}^{2} e^{1-x}\,dx$ شپږم- $\int_{-1}^{2} e^{\frac{1}{2}x}\,dx$ اوم - $\int_{1}^{2} e^{4-2x}\,dx$ اتم - $\int_{0}^{\ln(2)} -\frac{1}{2}e^{-x}\,dx$ نهم -

$\int_{1}^{2} \frac{4}{e^{2x-4}}\,dx$ لسم - $\int_{0}^{4} -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{4}x}\,dx$

(c) ketabton.com: The Digital Library

حلونه

تمرینونه د توابعو انتیګرالونه

نتیجې او مفصل حلونه

اول – $F(x) = \int -e^{-x}\,dx = e^{-x} + C \quad Probe: F(x) = e^{-x} + C \Rightarrow F'(x) = -e^{-x}$

دویم –

$$F(x) = \int \frac{1}{2}e^{2x}\,dx = \frac{1}{4}e^{2x} + C \quad Probe: F(x) = \frac{1}{4}e^{2x} + C \Rightarrow F'(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$$

دریم -

$$F(x) = \int 2\cdot e^{-\frac{1}{4}x}\,dx = -8\cdot e^{-\frac{1}{4}x} + C$$

ازمايينت: $F(x) = -8\cdot e^{-\frac{1}{4}x} + C \Rightarrow F'(x) = 2\cdot e^{-\frac{1}{4}x}$

څلورم - $F(x) = \int \frac{3}{4}\cdot e^{3x-4}\,dx = \frac{1}{4}\cdot e^{3x-4} + C$

ازمايينت: $F(x) = \frac{1}{4}\cdot e^{3x-4} + C \Rightarrow F'(x) = \frac{3}{4}\cdot e^{3x-4}$

پنځم - $\int_0^2 e^{1-x}\,dx = e^1 - e^{-1} = e - \frac{1}{e} \approx 2,350$

شپږم –

$$\int_{-1}^{2} e^{\frac{1}{2}x}\,dx = 2\cdot\left[e^1 - e^{-\frac{1}{2}}\right] \approx 4,224$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوم -
$$\int_{1}^{2} e^{4-2x}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\left[e^{2}-e^{0}\right] = \frac{1}{2}\cdot\left[e^{2}-1\right] \approx 3{,}195$$

اتم –
$$\int_{0}^{\ln(2)} -\frac{1}{2}e^{-x}\,dx = -\frac{1}{2}\cdot\left[e^{0}-e^{-\ln(2)}\right] = -\frac{1}{2}\cdot\left[1-\frac{1}{e^{\ln(2)}}\right] = -\frac{1}{2}\cdot\left[1-\frac{1}{2}\right] = -\frac{1}{4}$$

نهم -
$$\int_{1}^{2} \frac{4}{e^{2x-4}}\,dx = 2\cdot\left[e^{2}-e^{0}\right] = 2\cdot\left[e^{2}-1\right] \approx 12{,}778$$

لسم -
$$\int_{0}^{4} -\frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{1}{4}x}\,dx = -2\left[e^{0}-e^{-1}\right] \approx -1{,}264$$

اول – مفصل حل:

$$F(x) = \int F'(x)\,dx = \int -e^{-x}\,dx = -\int e^{-x}\,dx$$

بدلون
$$u(x) = -x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -1 \Leftrightarrow dx = -du$$

$$-\int e^{-x}\,dx = -\int (-1)\cdot e^{u}\,du = \int e^{u}\,du = e^{u}+C$$
$$\Rightarrow F(x) = \int -e^{-x}\,dx = \underline{e^{-x}+C}$$

ازمايښت:
$$F(x) = e^{-x}+C \Rightarrow F'(x) = -e^{-x}$$

دويم – مفصل حل

$$F(x) = \int F'(x)\,dx = \int \frac{1}{2}e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}\int e^{2x}\,dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بدلون: $u(x) = 2x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2 \Leftrightarrow dx = \frac{1}{2}du$

$$\int \frac{1}{2}e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{2}e^{u}\,du = \frac{1}{4}\int e^{u}\,du = \frac{1}{4}e^{u} + C$$

$$\Rightarrow F(x) = \int \frac{1}{2}e^{2x}\,dx = \underline{\frac{1}{4}e^{2x} + C}$$

ازمایینت: $Probe: F(x) = \frac{1}{4}e^{2x} + C \Rightarrow F'(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$

دریم – مفصل حل

$$F(x) = \int F'(x)\,dx = \int 2 \cdot e^{-\frac{1}{4}x}\,dx = 2\int e^{-\frac{1}{4}x}\,dx$$

بدلون: $u(x) = -\frac{1}{4}x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow dx = -4 \cdot du$

$$\int 2 \cdot e^{-\frac{1}{4}x}\,dx = 2\int (-4) \cdot e^{u}\,du = -8\int e^{u}\,du = -8 \cdot e^{u} + C$$

$$\Rightarrow F(x) = \int 2 \cdot e^{-\frac{1}{4}x}\,dx = \underline{-8 \cdot e^{-\frac{1}{4}x} + C}$$

ازمایینت: $Probe: F(x) = -8 \cdot e^{-\frac{1}{4}x} + C \Rightarrow F'(x) = 2 \cdot e^{-\frac{1}{4}x}$

خلورم –

$$F(x) = \int F'(x)\,dx = \int \frac{3}{4} \cdot e^{3x-4}\,dx = \frac{3}{4}\int e^{3x-4}\,dx$$

بدلون : $u(x) = 3x - 4 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 3 \Leftrightarrow dx = \frac{1}{3} \cdot du$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int \frac{3}{4}\cdot e^{3x-4}\,dx = \frac{3}{4}\int \frac{1}{3}\cdot e^{u}\,du = \frac{1}{4}\int e^{u}\,du = \frac{1}{4}\cdot e^{u} + C$$

$$\Rightarrow F(x) = \int \frac{3}{4}\cdot e^{3x-4}\,dx = \underline{\frac{1}{4}\cdot e^{3x-4} + C}$$

ازمایښت: $F(x) = \frac{1}{4}\cdot e^{3x-4} + C \Rightarrow F'(x) = \frac{3}{4}\cdot e^{3x-4}$

پنځم – $\int_0^2 e^{1-x}\,dx$ بدلون: $u(x) = 1-x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -1 \Leftrightarrow dx = -du$

لاندې پولې: $u(0) = 1-0 = 1$ پورته پولې: $u(2) = 1-2 = -1$

$$\int_0^2 e^{1-x}\,dx = \int_1^{-1} (-1)\cdot e^{u}\,du = -\int_1^{-1} e^{u}\,du = \int_{-1}^{1} e^{u}\,du = \left[e^{u}\right]_{-1}^{1} = e^{1} - e^{-1} = e - \frac{1}{e} \approx \underline{\underline{2,350}}$$

شپږم - مفصل حل

$\int_{-1}^{2} e^{\frac{1}{2}x}\,dx$ بدلون: $u(x) = \frac{1}{2}x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow dx = 2\cdot du$

لاندې پولې: $u(-1) = \frac{1}{2}\cdot(-1) = -\frac{1}{2}$ پورته پولې: $u(2) = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1$

$$\int_{-1}^{2} e^{\frac{1}{2}x}\,dx = 2\int_{-\frac{1}{2}}^{1} e^{u}\,du = 2\cdot\left[e^{u}\right]_{-\frac{1}{2}}^{1} = 2\cdot\left[e^{1} - e^{-\frac{1}{2}}\right] \approx \underline{\underline{4,224}}$$

اوم – مفصل حل

(c) ketabton.com: The Digital Library

....

$\int_1^2 e^{4-2x}\,dx$ بدلون: $u(x)=4-2x \Rightarrow \frac{du}{dx}=-2 \Leftrightarrow dx=-\frac{1}{2}\cdot du$:

لاندې پولې: $u(2)=4-4=0$ پورته پولې: $u(1)=4-2=2$

$$\int_1^2 e^{4-2x}\,dx=-\frac{1}{2}\int_2^0 e^u\,du=\frac{1}{2}\int_0^2 e^u\,du=\frac{1}{2}\cdot\left[e^u\right]_0^2=\frac{1}{2}\cdot\left[e^2-e^0\right]=\frac{1}{2}\cdot\left[e^2-1\right]\approx \underline{\underline{3,195}}$$

اتم – مفصل حل

$\int_0^{\ln(2)} -\frac{1}{2}e^{-x}\,dx=-\frac{1}{2}\int_0^{\ln(2)} e^{-x}\,dx$ بدلون: $u(x)=-x \Rightarrow \frac{du}{dx}=-1 \Leftrightarrow dx=-du$

لاندې پولې: $u(0)=0$ پورته پولې: $u(\ln(2))=-\ln(2)$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{\ln(2)} e^{-x}\,dx=-\frac{1}{2}\int_0^{-\ln(2)}(-1)\cdot e^u\,du=\frac{1}{2}\int_0^{-\ln(2)} e^u\,du=-\frac{1}{2}\int_{-\ln(2)}^{0} e^u\,du$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\left[e^u\right]_{-\ln(2)}^0=-\frac{1}{2}\cdot\left[e^0-e^{-\ln(2)}\right]=-\frac{1}{2}\cdot\left[1-\frac{1}{e^{\ln(2)}}\right]=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\left[1-\frac{1}{2}\right]=\underline{\underline{-\frac{1}{4}}}$$

یادونه: $e^{\ln(a)}=a \Rightarrow e^{\ln(2)}=2$

نهم – مفصل حل

بدلون: $\int_1^2 \frac{4}{e^{2x-4}}\,dx=4\int_1^2 e^{4-2x}\,dx$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بدلون:

$$u(x)=4-2x \Rightarrow \frac{du}{dx}=-2 \Leftrightarrow dx=-\frac{1}{2}du$$

لاندې پولې: $u(1)=4-2=2$: پورته پولې: $u(2)=4-4=0$

$$4\int_1^2 e^{4-2x}\,dx=4\int_2^0\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot e^u\,du=-2\int_2^0 e^u\,du=2\int_0^2 e^u\,du$$

$$=2\cdot\left[e^u\right]_0^2=2\cdot\left[e^2-e^0\right]=2\cdot\left[e^2-1\right]\approx \underline{\underline{12{,}778}}$$

لسم – مفصل حل

$$\int_0^4 -\frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{1}{4}x}\,dx=-\frac{1}{2}\int_0^4 e^{-\frac{1}{4}x}\,dx$$ بدلون: $u(x)=-\frac{1}{4}x \Rightarrow \frac{du}{dx}=-\frac{1}{4} \Leftrightarrow dx=-4\cdot du$:

لاندې پولې: $u(0)=0$ پورته پولې: $u(4)=-\frac{1}{4}\cdot 4=-1$

4

$$-\frac{1}{2}\int_0^4 e^{-\frac{1}{4}x}\,dx=-\frac{1}{2}\int_0^{-1}(-4)\cdot e^u\,du=2\int_0^{-1} e^u\,du=-2\int_{-1}^0 e^u\,du$$

$$=-2\cdot\left[e^u\right]_{-1}^0=-2\left[e^0-e^{-1}\right]\approx \underline{\underline{-1{,}264}}$$

شپږم: ناټاکلی انتیګرال:

د طبیعي عدد وده د ګټې ګټې شمیرنې په مرسته د یو کال وروسته د پانګې ګټه د $p = 100\% = 1$ سره.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$K_1 = K_0 + K_0 \cdot p = K_0(1+p) = K_0 \cdot 2$$

د یو کال وروسته د نیم کال د پانګې په ګټوني د p = 1 / 2 سره

$$K_2 = K_0\left[1+\frac{1}{2}\right] = \underline{\underline{K_0 \cdot 2,25}}$$

د یو کال وروسته د میاشتې د پانګې په ګټوني د p = 1 / 12 سره

$$K_{12} = K_0\left(1+\frac{1}{12}\right)^{12} = \underline{\underline{K_0 \cdot 2,61\ldots}}$$

د یو کال وروسته په روځنۍ په بانګې ګټوني د p = 1 / 360 سره

$$K_{360} = K_0\left(1+\frac{1}{360}\right)^{360} = \underline{\underline{K_0 \cdot 2,7145\ldots}}$$

د یو کال وروسته په ساعتي د پانګې په ګټوني د p = 1 / 8640 سره

$$K_{8640} = K_0\left(1+\frac{1}{8640}\right)^{8640} = \underline{K_0 \cdot \underbrace{2,7181\ldots}_{\approx e}}$$

د پانګې ګټونه د یوه کال وروسته د n ګټوني سره

$$K_n = K_0\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

که په هره لحظه کې پیسې په ګټه واچول شي (یعني ناپاي ډېرې ګټوني ناپای$\rightarrow n$)،
نو نو له یو کال وروسته یوه پانګه لاس ته راوړي د :

$$\lim_{n\to\infty} K_n = \lim_{n\to\infty} K_0\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = K_0 \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = K_0 \cdot e$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې معنا پانګه په e ضریب ډېرځلې شوه.

په ډېرو جبشمپریوکي یوه د e –تابعتکمه لري د Pi دکمیو ته ورته.

د اویلر د عدد ارزښت یو ناپای نه پریودیکي یعنې نه ببرته راګرځېدونکی لسمیز کسر(مات).

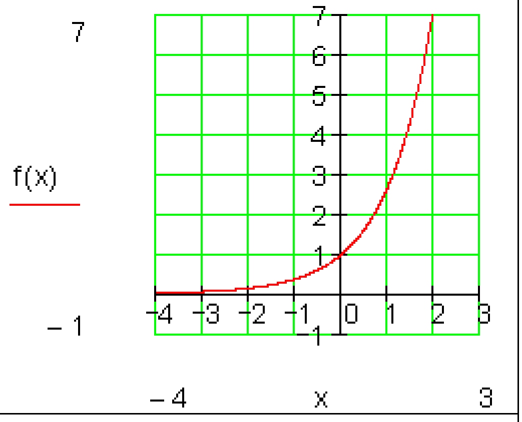
عدد e د اکسپوننشل تابع بنسټ جوړوي.

باور لري $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ د e تابع دابنه لري: $f(x) = a \cdot e^{b \cdot x}$

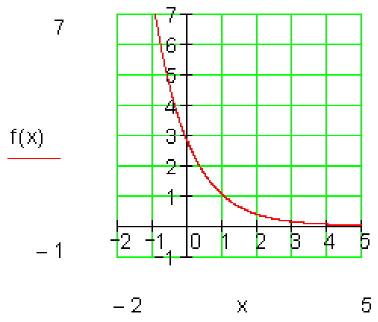
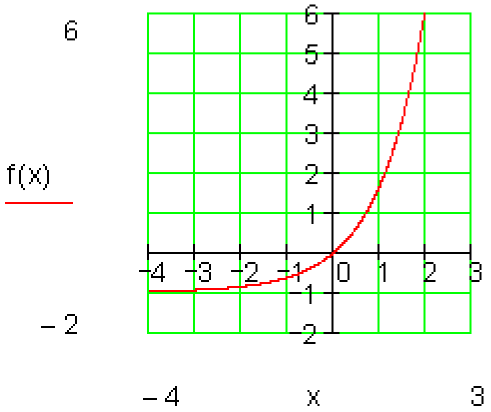
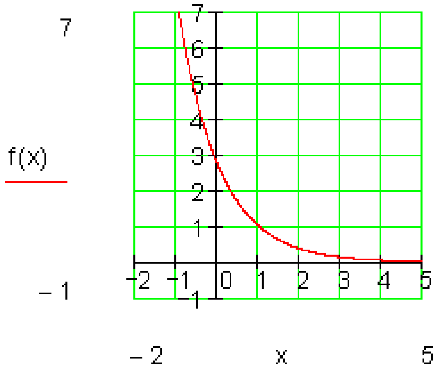
د e ارزښت په 3ځایونو راګرد شوی: e = 2,718

د e ارزښت په 9 ځایونو راګرد شوی: e = 2,718 281 828

د **e** -تابع ته ځیرنه

د e–تابع نورماله $f(x) = e^x$ د y-محور سره غوښتکی $f(0) = e^0 = 1 \Rightarrow P_y(0\|1)$ ژئ پوله ارزښت $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$	
د y – محور باندې هنداره شوی $f(x) = e^{-x}$ د y –محور سره غوښتکی	

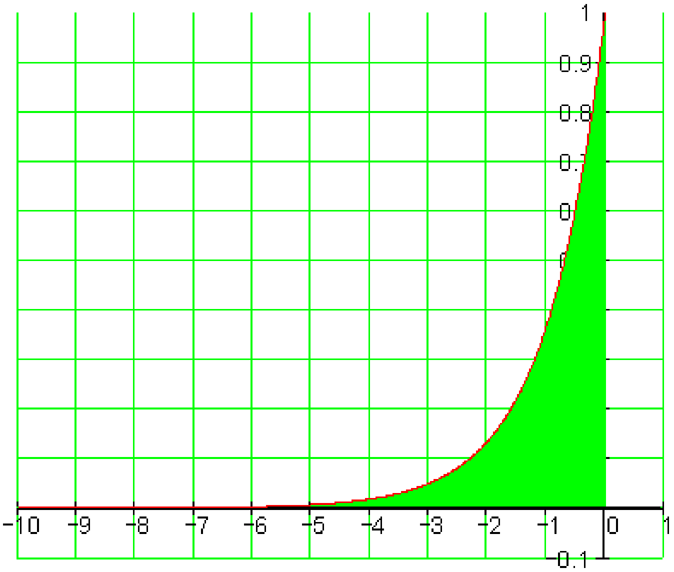
(c) ketabton.com: The Digital Library

	$f(0)=e^{-0}=e^{0}=1\Rightarrow P_y(0\mid 1)$ ژئ پوله ارزښت $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}=\infty \qquad \lim\limits_{x\to\infty} e^{-x}=0$
	په یوه واحد(یوون) کښته لور ته راکښلی $f(x)=e^{x}-1$ د y ـــمحور سره غوڅتکی $f(0)=e^{0}-1=1-1=0\Rightarrow P_y(0\mid 0)$ ژئ پوله ارزښت $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{x}-1\right)=-1 \quad \lim\limits_{x\to\infty}\left(e^{x}-1\right)=\infty$
	په یوه واحد(یوون) کښته لور ته راکښلی $f(x)=e^{-(x-1)}$ د y ـــمحور سره غوڅتکی $f(0)=e^{-(0-1)}=e^{1}=e\Rightarrow P_y(0\mid e)$ $f(1)=e^{-(1-1)}=e^{0}=1\Rightarrow P(1\mid 1)$ ژئ پوله ارزښت $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-(x-1)}=\infty \qquad \lim\limits_{x\to\infty} e^{-(x-1)}=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ناټاکلی انتیګرال

بیلګه:



د $f(x) = e^x$ د ګراف او د x-محور ترمنځ ټوله سطحه دې په $(-\infty ; 0]$ کې وشمیرل شي، یعني

$$A = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^x\,dx$$

تراوسه د ټاکلي انتیګرال کښته او پورته پولې اعداد وو.

یعنې د انتیګریشنورشو محدوده یا رابنده وه.

اوس د انتیګرسشن ورشو نوره رابنده نه ده.

دا ډول انتیګرال نا ځرګند یا نا معلوم یا نا اصلي انتیګرال بلل کیږي د نابند انتیګریشن ورشو سره.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا انتیګرال له ي درې بڼو څخه په یوه بڼه راتلی شي.

$\int_a^\infty f(x)\,dx$	$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$	$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$

د داسې ا نتیګرالونو شمیرلو لپاره سړی داسې مخ ته ځي:

لومړی سړی انتیګرال $\int_a^b f(x)dx$ د پای انتروال [a,b] لپاره شمیري، پسې د اړونده وېناو یا افادو څخه د $a \to -\infty$ یا $a \to \infty$ همداسې $b \to -\infty$ یا $b \to \infty$ لپاره پوله ارزښتونه جوړوي.

فورمال دا داسې لیدل کیږي:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^c f(x)\,dx + \int_c^\infty f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^x f(x)\,dx + \lim_{b\to\infty}\int_c^b f(x)\,dx$$

زموږ د سطحې شیمرلو لپاره دا په داسې توګه معلومیږي.

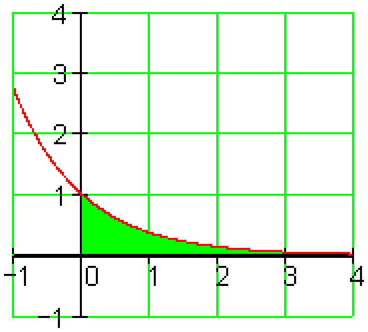
$$f(x) = e^x$$

$$A = \int_{-\infty}^0 e^x\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 e^x\,dx = \lim_{a\to-\infty}\left[e^x\right]_a^0$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\left[e^0 - e^a\right] = \underbrace{\lim_{a\to-\infty} e^0}_{1} - \underbrace{\lim_{a\to-\infty} e^a}_{0} = \underline{\underline{1}}$$

بیلګه:

(c) ketabton.com: The Digital Library



دا د y-محور باندې هنداره شوی د e-تابع د $f(x)=e^{-x}$ سره باید په انتروال $[0;\infty)$ کي برابره سطحه ولري.

$$A=\int_0^{\infty}e^{-x}\,dx=\lim_{b\to\infty}\int_0^{b}e^{-x}\,dx$$

بدلون:

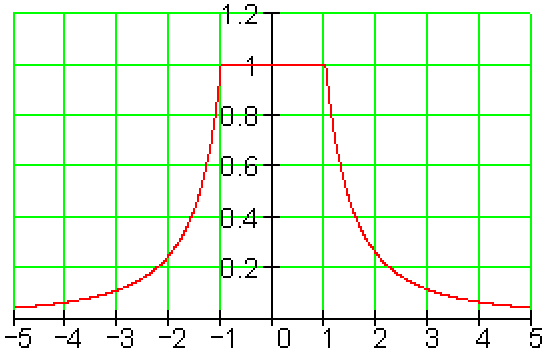
$$: u(x)=-x\Rightarrow\frac{du}{dx}=-1\Rightarrow dx=\frac{du}{-1}$$

$$u(0)=0\,;\,u(b)=-b$$

$$\lim_{b\to\infty}\int_0^{-b}e^{u}\frac{du}{-1}=-\lim_{b\to\infty}\int_0^{-b}e^{u}\,du=\lim_{b\to\infty}\int_{-b}^{0}e^{u}\,du$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left[e^{u}\right]_{-b}^{0}=\lim_{b\to\infty}\left[e^{0}-e^{-b}\right]$$

$$=\lim_{b\to\infty}e^{0}-\lim_{b\to\infty}e^{-b}=1-0=\underline{\underline{1}}$$



د یوه ترکیبي یا ګډوله تابع لپاره بیلګه:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2} & \text{für } x<-1\\ 1 & \text{für } -1\le x\le 1\\ \frac{1}{x^2} & \text{für } x>1\end{cases}$$

$$A=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx$$

د انتیګرال (په برخو) توته کونه

$$A=\int_{-\infty}^{-1}\frac{1}{x^2}\,dx+\int_{-1}^{1}dx+\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x^2}\,dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ترمخ راوړنه:

د سیومتري دلایلو له امله باور لري: $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\, dx = \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ ۱

داسې چې دا نتیګرال فقط یو ځل باید وشمیرل شي

$$\int_{-1}^{1} dx = [x]_{-1}^{1} = [1]-[-1] = 1+1 = \underline{\underline{2}}$$

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_{1}^{b} \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = \underbrace{\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{b}\right]}_{0} - \underbrace{\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{1}\right]}_{-1} = 0-(-1) = \underline{\underline{1}}$$

$$A = \underbrace{\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\, dx}_{1} + \underbrace{\int_{-1}^{1} dx}_{2} + \underbrace{\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx}_{1} = 1+2+1 = \underline{\underline{4}}$$

پوښتنې

د e- تابع سره انتیګرالونه

د سطحې مساحت شمېرنه

اول – لاندې انتیګرالونه وشمېرئ او اړونده سطحه یې کرښې ژکرښې کړئ.

الف - $\int_{0}^{1} e^x\, dx$ ب - $\int_{-1}^{0} e^x\, dx$ پ – $\int_{-3}^{0} e^x\, dx$

دویم – لاندې انتیګرالونه وشمېرئ او اړونده سطحه یې کرښې ژکرښې کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف - $\int_{0}^{1}\left(e^{x}-1\right)dx$ ب - $\int_{0}^{3}\left(e^{x}-1\right)dx$ پ - $\int_{-\infty}^{0} e^{x}\,dx$

دریم – لاندې انتیګرالونه وشمېرئ او اړونده سطحه یې کربښې ژکربښې کړئ.

الف - $\int_{0}^{1} e^{-x}\,dx$ ب - $\int_{-1}^{2} e^{-x}\,dx$ پ - $\int_{0}^{\infty} e^{-x}\,dx$

څلورم – لاندې انتیګرالونه وشمېرئ او اړونده سطحه یې کربښې ژکربښې کړئ.

الف - $\int_{0}^{3} e^{-(x-3)}\,dx$ ب - $\int_{1}^{3} e^{-(x-2)}\,dx$ پ - $\int_{3}^{\infty} e^{-(x-3)}\,dx$

پنځم – لاندې انتیګرالونه وشمېرئ.

الف - $\int_{0}^{3}\left(e^{x}-x+1\right)dx$ ب - $\int_{0}^{4} 3\cdot e^{x+2}\,dx$ پ - $\int_{0}^{5}\left(e^{x}+e^{-x}\right)dx$

شپږم – د k د کوم ارزښت لپاره دا انتیګرال ورکړشوي ارزښتونه لري؟

الف - $\int_{0}^{2} k\cdot e^{x}\,dx=\frac{1}{2}e$ ب - $\int_{0}^{4}\left(e^{x}-k\cdot x\right)dx=4$ پ - $\int_{0}^{k} e^{x}\,dx=2\cdot e$

اوم – لاندې انتیګرالونه وشمېرئ.

الف - $\int_{0}^{\ln(2)}\left(e^{2x}-2e^{x}\right)dx$ ب - $\int_{0}^{\ln(k)}\left(e^{2x}-k\cdot e^{x}\right)dx$ پ - $\int_{0}^{4}\left(\frac{1}{4}e^{x}-2e^{\frac{1}{2}x}\right)dx$

اتم – لاندې انتیګرالونه وشمېرئ او اړونده سطحه یې کربښې - کربښې کړئ.

الف –

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = e^x - 1 \qquad \text{für} \quad 0 \le x \le 2$$
$$g(x) = f(2) \cdot e^{-(x-2)} \qquad \text{für} \quad 2 \le x < \infty$$
$$A = \int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^\infty g(x)\,dx$$

ب –

$$f(x) = e^x - 1 \qquad \text{für} \quad 0 \le x \le 3$$
$$g(x) = f(3) \cdot e^{-(x-3)} \qquad \text{für} \quad 3 \le x < \infty$$
$$A = \int_0^3 f(x)\,dx + \int_3^\infty g(x)\,dx$$

نهم – لاندې انتیګرالونه وشمېرى او اړونده سطحه يې کرښې - کرښې کړى.

الف -

$$f(x) = e^x - 1 \qquad \text{für} \quad 0 \le x \le 4$$
$$g(x) = f(4) \cdot e^{-(x-4)} \qquad \text{für} \quad 4 \le x < \infty$$
$$A = \int_0^4 f(x)\,dx + \int_4^\infty g(x)\,dx$$

ب -

$$f(x) = e^x - 1 \qquad \text{für} \quad 0 \le x \le k$$
$$g(x) = f(k) \cdot e^{-(x-k)} \qquad \text{für} \quad k \le x < \infty$$
$$A = \int_0^k f(x)\,dx + \int_k^\infty g(x)\,dx$$

حلونه

د **e** تابع انتیګرالونه I

(c) ketabton.com: The Digital Library

د سطحې شمېرنه

نیجې او مفصل حلونه

نتیجې

اول -

الف - $\int_0^1 e^x\,dx \approx 1{,}718$ ب - $\int_{-1}^0 e^x\,dx \approx 0{,}632$ پ - $\int_{-3}^0 e^x\,dx \approx 0{,}905$

دویم -

الف - $\int_0^1 \left(e^x - 1\right) dx \approx 0{,}718$ ب - $\int_0^3 \left(e^x - 1\right) dx \approx 16{,}086$ پ - $\int_{-\infty}^0 e^x\,dx = 1$

دریم -

الف - $\int_0^1 e^{-x}\,dx \approx 0{,}632$ ب - $\int_{-1}^2 e^{-x}\,dx \approx 2{,}583$ پ - $\int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1$

ځلورم -

الف - $\int_0^3 e^{-(x-3)}\,dx \approx 19{,}086$ ب - $\int_1^3 e^{-(x-2)}\,dx \approx 2{,}350$ پ - $\int_0^\infty e^{-(x-3)}\,dx = 1$

پنځم -

الف - $\int_0^3 \left(e^x - x + 1\right) dx \approx 17{,}586$ ب - $\int_0^4 3 \cdot e^{x+2}\,dx \approx 1188{,}119$

پ - $\int_0^5 \left(e^x + e^{-x}\right) dx \approx 148{,}406$

(c) ketabton.com: The Digital Library

شپږم -

الف - $\int_0^2 k\cdot e^x\,dx = \frac{1}{2}\cdot e \Leftrightarrow k \approx 0,213$

ب - $\int_0^4 \left(e^x - k\cdot x\right)dx = 4 \Leftrightarrow k \approx 6,2$

پ - $\int_0^k e^x\,dx = 2e \Leftrightarrow k \approx 1,862$

اوم -

الف - $$\int_0^{\ln(2)} \left(e^{2x} - 2e^x\right)dx = \int_0^{\ln(2)} e^{2x}\,dx - 2\cdot\int_0^{\ln(2)} e^x\,dx = -\frac{1}{2}$$

ب - $$\int_0^{\ln(k)} \left(e^{2x} - ke^x\right)dx = \int_0^{\ln(k)} e^{2x}\,dx - k\cdot\int_0^{\ln(k)} e^x\,dx = -\frac{1}{2}k^2 + k - \frac{1}{2}$$

پ -

$$\int_0^4 \left(\frac{1}{4}e^x - 2\cdot e^{\frac{1}{2}x}\right)dx = \frac{1}{4}\cdot\int_0^4 e^x\,dx - 2\cdot\int_0^4 e^{\frac{1}{2}x}\,dx = \frac{1}{4}e^4 - 4e^2 + \frac{15}{4} \approx -12,175$$

اتم - الف - $$\int_0^2 \left(e^x - 1\right)dx + \int_2^\infty f(2)\cdot e^{-(x-2)}\,dx = 2e^2 - 4 \approx 10,778$$

ب - $$\int_0^3 \left(e^x - 1\right)dx + \int_3^\infty f(3)\cdot e^{-(x-3)}\,dx = 2e^3 - 5 \approx 35,171$$

نهم - الف - $$\int_0^4 \left(e^x - 1\right)dx + \int_4^\infty f(4)\cdot e^{-(x-4)}\,dx = 2e^4 - 6 \approx 103,196$$

ب – $$\int_0^k \left(e^x - 1\right)dx + \int_k^\infty f(k)\cdot e^{-(x-k)}\,dx = 2e^k - k - 2$$

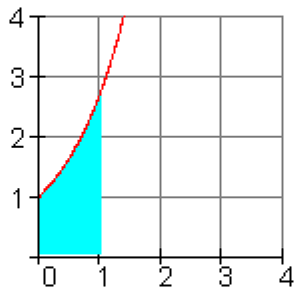
(c) ketabton.com: The Digital Library

مفصل حلونه:

لومړی –

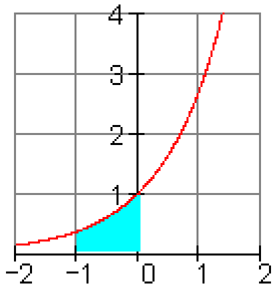
الف –

$$\int_0^1 e^x\,dx = e^x\Big|_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1 \approx 1{,}718$$



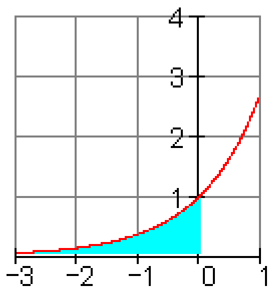
ب –

$$\int_{-1}^0 e^x\,dx = e^x\Big|_{-1}^0 = e^0 - e^{-1} = 1 - e^{-1} \approx 0{,}632$$



پ –

$$\int_{-3}^0 e^x\,dx = e^x\Big|_{-3}^0 = e^0 - e^{-3} = 1 - e^{-3} \approx 0{,}950$$

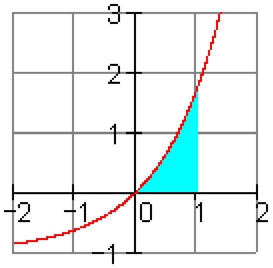


(c) ketabton.com: The Digital Library

....

دويم:

الف-



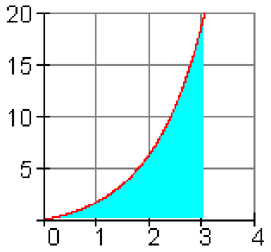
$$\int_0^1 \left(e^x - 1\right) dx$$

$$= e^x - x \Big|_0^1$$

$$= e^1 - 1 - \left(e^0 - 0\right)$$

$$= e - 1 - 1 \approx 0{,}718$$

ب –



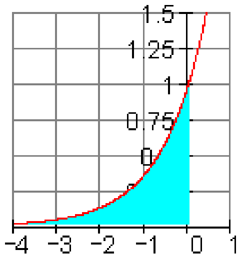
$$\int_0^3 \left(e^x - 1\right) dx$$

$$= e^x - x \Big|_0^3$$

$$= e^3 - 3 - \left(e^0 - 0\right)$$

$$= e^3 - 3 - 1 \approx 16{,}086$$

پ –



$$\int_{-\infty}^{0} e^x \, dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^0 e^x \, dx$$

لومړى بي له پوله ارزښت جوړولو شمېرنه

$$\int_a^0 e^x \, dx = e^x \Big|_a^0 = e^0 - e^a = 1 - e^a$$

د پوله ارزښت جوړول

$$\lim_{a \to -\infty} \int_a^0 e^x \, dx = \lim_{a \to -\infty} \left(1 - e^a\right)$$

$$= 1 - \underbrace{\lim_{a \to -\infty} e^a}_{0} = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{0} e^x \, dx = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم:

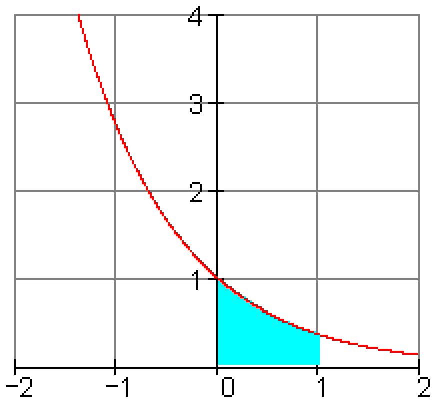
الف-

$\int_0^1 e^{-x}\,dx$ I د بدلون له لارې حل

بدلون $: u(x) = -x \Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = -1 \Leftrightarrow dx = -du$

لاندې یا کښته پوله: $u(0) = 0$ پورته بوله : $u(1) = -1$

$$\Rightarrow -\int_0^{-1} e^u\,du = \int_{-1}^{0} e^u\,du = e^u \Big|_{-1}^{0} = e^0 - e^{-1} = 1 - e^{-1} \approx 0{,}632$$



ب –

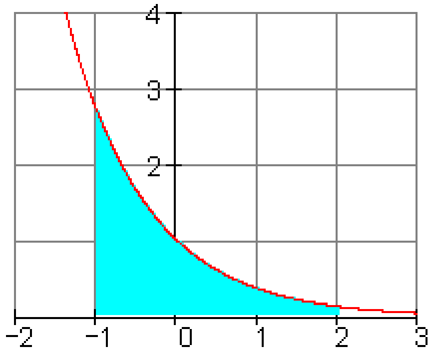
$\int_{-1}^{2} e^{-x}\,dx$ د بدلون له لارې حل

(c) ketabton.com: The Digital Library

بدلون: $u(x) = -x \Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = -1 \Leftrightarrow dx = -du$

لاندې بوله : $u(-1) = -(-1) = 1$: پورته پوله: $u(2) = -2$

$$\Rightarrow -\int_{1}^{-2} e^{u}\, du = \int_{-2}^{1} e^{u}\, du = e^{u} \Big|_{-2}^{1} = e^{1} - e^{-2} = e - e^{-2} \approx 2{,}583$$



پ –

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x}\, dx = \lim_{a \to \infty} \int_{0}^{a} e^{-x}\, dx$$ حلو لومړی بې لهه پولپجوړولو.

$\int_{0}^{a} e^{-x}\, dx$ د بدلون له لارې حل

بدلون $u(x) = -x \Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = -1 \Leftrightarrow dx = -du$

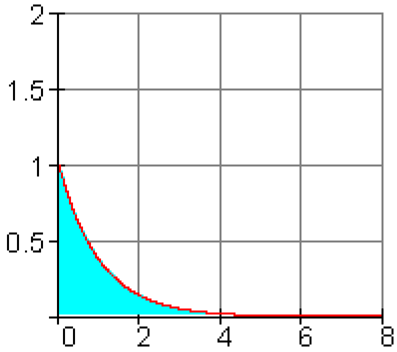
(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې يا کښته پوله: $u(0) = -0 = 0$ پورته پوله: $u(a) = -a$:

$$\Rightarrow -\int_0^{-a} e^u\,du = \int_{-a}^{0} e^u\,du = e^u\Big|_{-a}^{0} = e^0 - e^{-a} = 1 - e^{-a}$$

$$\lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{-x}\,dx = 1 - \underbrace{\lim_{a\to\infty} e^{-a}}_{0} = 1 \Rightarrow \underline{\underline{\int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1}}$$

پوله تاکنه:



ځلورم: الف-

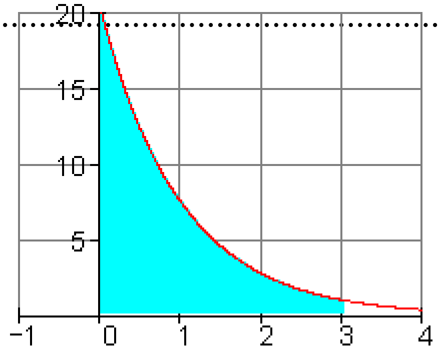
$\int_0^3 e^{-(x-3)}\,dx$ I د بدلون له لارې حل

بدلون $: u(x) = -(x-3) = -x+3 \Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = -1 \Leftrightarrow dx = -du$

لاندې بوله : $u(0) = -(0-3) = 3$: پورته پوله: $u(3) = -(3-3) = 0$:

$$\Rightarrow -\int_3^0 e^u\,du = \int_0^3 e^u\,du = e^u\Big|_0^3 = e^3 - e^0 = e^3 - 1 \approx 19{,}086$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

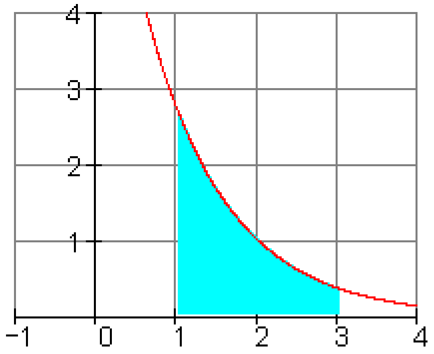


ب – $\int_{1}^{3} e^{-(x-2)}\,dx$ I د بدلون له لارې حل

بدلون $: u(x) = -(x-2) = -x+2 \Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = -1 \Leftrightarrow dx = -du$

لاندې پوله : $u(1) = -(1-2) = 1$: پورته پوله: $u(3) = -(3-2) = -1$

$$\Rightarrow -\int_{1}^{-1} e^{u}\,du = \int_{-1}^{1} e^{u}\,du = e^{u}\Big|_{-1}^{1} = e^{1} - e^{-1} = e - e^{-1} \approx 2{,}350$$



پ-

$$\int_{3}^{\infty} e^{-(x-3)}\,dx = \lim_{a\to\infty}\int_{3}^{a} e^{-(x-3)}\,dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل ، لومړی بې له پولې جوړولو

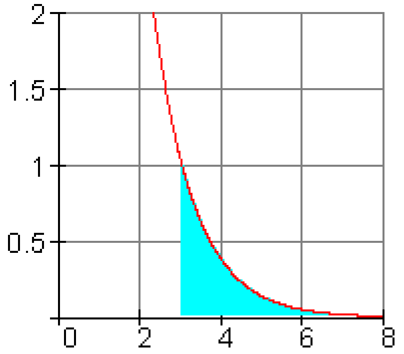
$$\int_3^a e^{-(x-3)}\,dx$$

د بدلون له لارې حل

بدلون: $u(x) = -(x-3) = -x+3 \Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = -1 \Leftrightarrow dx = -du$

لاندې پوله : $u(3) = -(3-3) = 0$ پورته پوله: $u(a) = -a+3$

پوله جوړونه: $$\lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{-(x-3)}\,dx = 1 - \underbrace{\lim_{a\to\infty} e^{-a+3}}_{0} = 1 \Rightarrow \int_0^\infty e^{-(x-3)}\,dx = 1$$



پنځم: الف -

$$\int_0^3 (e^x - x + 1)\,dx = e^x - \frac{1}{2}x^2 + x \Big|_0^3$$

$$= e^3 - \frac{1}{2}\cdot 9 + 3 - \left(e^0 - \frac{1}{2}\cdot 0 + 0\right)$$

$$= e^3 - \frac{9}{2} + 3 - 1 = e^3 - \frac{5}{2} \approx 17{,}586$$

ب –

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_0^4 3\cdot e^{x+2}\,dx = 3\cdot\int_0^4 e^{x+2}\,dx$$

د بدلون له لارې حل

بدلون: $u(x) = x+2 \Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = 1 \Leftrightarrow dx = du$

لاندې پوله : $u(0) = 0+2 = 2$ پورته پوله: $u(4) = 4+2 = 6$:

$$\Rightarrow 3\cdot\int_2^6 e^u\,du = 3\cdot\int_2^6 e^u\,du = 3\cdot e^u\Big|_2^6 = 3\cdot\left(e^6 - e^2\right) \approx 1188{,}119$$

حل ، لومړی بې له پولې جوړولو

پ –

$$\int_0^5\left(e^x + e^{-x}\right)dx = \underbrace{\int_0^5 e^x\,dx}_{I} + \underbrace{\int_0^5 e^{-x}\,dx}_{II} = I + II$$

$$I: \int_0^5 e^x\,dx = e^x\Big|_0^5 = e^5 - e^0 = e^5 - 1$$

$$II: \int_0^5 e^{-x}\,dx =$$

د بدلون له لارې حل =

بدلون $: u(x) = -x \Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = -1 \Leftrightarrow dx = -du$

لاندې پوله : ، $u(0) = 0$ پورته پوله: $u(5) = -5$

$$\Rightarrow -\int_0^{-5} e^u\,du = \int_{-5}^0 e^u\,du = e^u\Big|_{-5}^0 = e^0 - e^{-5} = 1 - e^{-5}$$

$$\int_0^5\left(e^x + e^{-x}\right)dx = I + II = e^5 - 1 + 1 - e^{-5} = e^5 - e^{-5} \approx 148{,}406$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

شپږم:

الف:

$$\int_0^2 k\cdot e^x\,dx = \frac{1}{2}\cdot e$$

$$\int_0^2 k\cdot e^x\,dx = k\cdot\int_0^2 e^x\,dx = k\cdot e^x\Big|_0^2 = k\cdot\left(e^2-e^0\right) = k\cdot\left(e^2-1\right)$$

برابر کيږدی: $k\cdot\left(e^2-1\right) = \frac{1}{2}\cdot e \,\big|:\left(e^2-1\right)$

$$\Leftrightarrow k = \frac{\frac{1}{2}\cdot e}{\left(e^2-1\right)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{e}{e^2-1} \approx 0,213$$

ب –

$$\int_0^4 \left(e^x - k\cdot x\right)dx = 4$$

$$\int_0^4 \left(e^x - k\cdot x\right)dx = e^x - \frac{1}{2}kx^2\Big|_0^4 = e^4 - \frac{1}{2}k\cdot 16 - \left(e^0 - 0\right) = e^4 - 8k - 1$$

برابر کيږدی: $e^4 - 8k - 1 = 4 \,\big|\, -e^4 + 1$

$$\Leftrightarrow -8k = -e^4 + 5 \,\big|:(-8)$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{-e^4+5}{-8} = \frac{1}{8}e^4 - \frac{5}{8} \approx 6,2$$

پ - لاند الماني: برابر کيږدی

$$\int_0^k e^x\,dx = 2e$$

$$\int_0^k e^x\,dx = e^x\Big|_0^k = e^k - e^0 = e^k - 1$$

gleichsetzen : $e^k - 1 = 2e \,|\, +1$

$$\Leftrightarrow e^k = 2e + 1 \,|\, \ln(\;)$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(e^k\right) = \ln(2e+1)$$

$$\Leftrightarrow k\cdot\underbrace{\ln(e)}_{1} = \ln(2e+1)$$

$$\Leftrightarrow k = \ln(2e+1) \approx 1,862$$

اووم: حل : الف-

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_0^{\ln(2)} \left(e^{2x} - 2e^x\right) dx = \underbrace{\int_0^{\ln(2)} e^{2x}\, dx}_{I} - 2\cdot \underbrace{\int_0^{\ln(2)} e^x\, dx}_{II} = I - 2\cdot II$$

$I: \int_0^{\ln(2)} e^{2x}\, dx =$ د بدلون له لارې حل =

بدلون: $: u(x) = 2x \Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = 2 \Leftrightarrow dx = \frac{1}{2}du$

لاندې پوله : u(0)=2.0=0 پورته پوله: u(ln(2))=2.ln(2)

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int_0^{2\cdot\ln(2)} e^u\, du = \frac{1}{2}e^u \Big|_0^{2\cdot\ln(2)} = \frac{1}{2}\left(e^{2\cdot\ln(2)} - e^0\right) = \frac{1}{2}\left[\left(\underbrace{e^{\ln(2)}}_{2}\right)^2 - 1\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(2^2 - 1\right) = \frac{3}{2}$$

$$II: \int_0^{\ln(2)} e^x\, dx = e^u \Big|_0^{2\cdot\ln(2)} = \underbrace{e^{\ln(2)}}_{2} - e^0 = 2 - 1 = 1$$

$$\int_0^{\ln(2)} \left(e^{2x} - 2e^x\right) dx = I - 2\cdot II = \frac{3}{2} - 2\cdot 1 = -\frac{1}{2}$$

ب-

$$\int_0^{\ln(k)} \left(e^{2x} - ke^x\right) dx = \underbrace{\int_0^{\ln(k)} e^{2x}\, dx}_{I} - k\cdot \underbrace{\int_0^{\ln(2)} e^x\, dx}_{II} = I - k\cdot II$$

$I: \int_0^{\ln(k)} e^{2x}\, dx =$ د بدلون له لارې حل =

(c) ketabton.com: The Digital Library

....

بدلون: $u(x) = 2x \Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = 2 \Leftrightarrow dx = \frac{1}{2}du$

لاندې پوله : u(0)=2.0=0 پورته پوله: u(ln(k)= 2.ln(k)

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int_0^{2\cdot\ln(k)} e^u\,du = \frac{1}{2}e^u\Big|_0^{2\cdot\ln(k)} = \frac{1}{2}\left(e^{2\cdot\ln(k)} - e^0\right) = \frac{1}{2}\left[\left(\underbrace{e^{\ln(k)}}_{k}\right)^2 - 1\right] = \frac{1}{2}\left(k^2 - 1\right)$$

$$II: \int_0^{\ln(k)} e^x\,dx = e^u\Big|_0^{2\cdot\ln(k)} = \underbrace{e^{\ln(k)}}_{k} - e^0 = k - 1$$

$$\int_0^{\ln(k)} \left(e^{2x} - ke^x\right)dx = I - k\cdot II = \frac{1}{2}\left(k^2 - 1\right) - k\cdot(k-1) = -\frac{1}{2}k^2 + k - \frac{1}{2}$$

پ-

$$\int_0^4 \left(\frac{1}{4}e^x - 2\cdot e^{\frac{1}{2}x}\right)dx = \frac{1}{4}\cdot\underbrace{\int_0^4 e^x\,dx}_{I} - 2\cdot\underbrace{\int_0^4 e^{\frac{1}{2}x}\,dx}_{II} = \frac{1}{4}\cdot I - 2\cdot II$$

$$I: \int_0^4 e^x\,dx = e^x\Big|_0^4 = e^4 - e^0 = e^4 - 1$$

$$II: \int_0^4 e^{\frac{1}{2}x}\,dx =$$

د بدلون له لارې حل

بدلون: $u(x) = \frac{1}{2}x \Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow dx = 2du$

لاندې پوله : $u(0) = \frac{1}{2}\cdot 0 = 0$ ؛ پورته پوله: $u(4) = \frac{1}{2}\cdot 4 = 2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Rightarrow 2\cdot\int_0^2 e^u\,du = 2\cdot e^u\Big|_0^2 = 2\left(e^2-e^0\right) = 2e^2-2$$

$$\int_0^4\left(\frac{1}{4}e^x-2\cdot e^{\frac{1}{2}x}\right)dx = \frac{1}{4}\cdot I-2\cdot II = \frac{1}{4}\cdot\left(e^4-1\right)-2\cdot\left(2e^2-2\right)$$

$$=\frac{1}{4}e^4-\frac{1}{4}-4e^2+4=\frac{1}{4}e^4-4e^2+\frac{15}{4}\approx -12{,}157$$

اتم: الف-

$$f(x)=e^x-1 \qquad g(x)=f(2)\cdot e^{-(x-2)} \text{ mit } f(2)=e^2-1$$

$$A=\int_0^2 f(x)\,dx+\int_2^\infty g(x)\,dx=\underbrace{\int_0^2\left(e^x-1\right)dx}_{I}+\left(e^2-1\right)\underbrace{\int_2^\infty e^{-(x-2)}\,dx}_{II}=I+\left(e^2-1\right)\cdot II$$

$$I:\int_0^2\left(e^x-1\right)dx=e^x-x\Big|_0^2=e^2-2-\left(e^0-0\right)=e^2-3$$

$$II:\int_2^\infty e^{-(x-2)}\,dx=\lim_{a\to\infty}\int_2^a e^{-(x-2)}\,dx$$

حل ، لومړی بې له پولې جوړولو

د بدلون له لارې حل $\int_2^a e^{-(x-2)}\,dx$

بدلون:

$$u(x)=-(x-2)=-x+2\Rightarrow u'(x)=\frac{du}{dx}=-1\Leftrightarrow dx=-du$$

لاندې پوله : $u(2)=-(2-2)=0$ پورته پوله: $u(a)=-a+2$

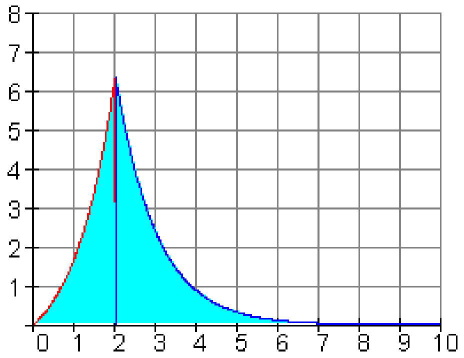
$$\Rightarrow-\int_0^{-a+2}e^u\,du=\int_{-a+2}^0 e^u\,du=e^u\Big|_{-a+2}^0=e^0-e^{-a+2}=1-e^{-a+2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوله ارزښت جوړونه

$$\lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{-(x-2)}\,dx = 1-\underbrace{\lim_{a\to\infty} e^{-a+2}}_{0} = 1 \Rightarrow \int_2^\infty e^{-(x-2)}\,dx = 1$$

$$A = I+\left(e^2-1\right)\cdot II = e^2-3+\left(e^2-1\right)\cdot 1 = e^2-3+e^2-1 = 2e^2-4 \approx 10{,}778$$



ب- $g(x) = f(3)\cdot e^{-(x-3)}$ د $f(x) = e^x - 1$ سره $f(3) = e^3 - 1$

$$A = \int_0^3 f(x)\,dx + \int_3^\infty g(x)\,dx = \underbrace{\int_0^3 \left(e^x-1\right)dx}_{I} + \left(e^3-1\right)\underbrace{\int_3^\infty e^{-(x-3)}\,dx}_{II} = I+\left(e^3-1\right)\cdot II$$

$$I: \int_0^3 \left(e^x-1\right)dx = e^x - x \,\Big|_0^3 = e^3-3-\left(e^0-0\right) = e^3-4$$

$$II: \int_3^\infty e^{-(x-3)}\,dx = \lim_{a\to\infty}\int_3^a e^{-(x-3)}\,dx\ L$$

حل ، لومړی بې له پولې جوړولو

$$\int_3^a e^{-(x-3)}\,dx$$

د بدلون له لارې حل

لاندې پوله : $u(3) = -(3-3) = 0$ پورته پوله: $u(a) = -a+3$

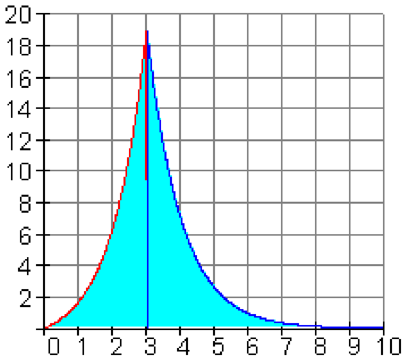
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Rightarrow -\int_0^{-a+3} e^u\,du = \int_{-a+3}^{0} e^u\,du = e^u \Big|_{-a+3}^{0} = e^0 - e^{-a+3} = 1 - e^{-a+3}$$

پوله جوړونه

$$\lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{-(x-3)}\,dx = 1 - \underbrace{\lim_{a\to\infty} e^{-a+3}}_{0} = 1 \Rightarrow \int_3^{\infty} e^{-(x-3)}\,dx = 1$$

$$A = I + \left(e^3 - 1\right)\cdot II = e^3 - 4 + \left(e^3 - 1\right)\cdot 1 = e^3 - 4 + e^3 - 1 = 2e^3 - 5 \approx 35{,}171$$



نهم:

الف-

$$f(x) = e^x - 1 \qquad g(x) = f(4)\cdot e^{-(x-4)} \text{ mit } f(4) = e^4 - 1$$

$$A = \int_0^4 f(x)\,dx + \int_4^{\infty} g(x)\,dx = \underbrace{\int_0^4 \left(e^x - 1\right)dx}_{I} + \left(e^4 - 1\right)\underbrace{\int_4^{\infty} e^{-(x-4)}\,dx}_{II} = I + \left(e^4 - 1\right)\cdot II$$

$$I: \int_0^4 \left(e^x - 1\right)dx = e^x - x \Big|_0^4 = e^4 - 4 - \left(e^0 - 0\right) = e^4 - 5$$

$$II: \int_4^{\infty} e^{-(x-4)}\,dx = \lim_{a\to\infty}\int_4^a e^{-(x-4)}\,dx \;\text{L}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل ، لومړی بې له پولې جوړولو

$\int_{4}^{a} e^{-(x-4)}\,dx$ L

د بدلون له لارې حل

بدلون: $u(x) = -(x-4) = -x+4 \Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = -1 \Leftrightarrow dx = -du$

لاندې پوله : $u(4) = -(4-4) = 0$ پورته پوله: $u(a) = -a+4$

$$\Rightarrow -\int_{0}^{-a+4} e^{u}\,du = \int_{-a+4}^{0} e^{u}\,du = e^{u}\Big|_{-a+4}^{0} = e^{0} - e^{-a+4} = 1 - e^{-a+4}$$

پوله ارزښت جوړونه

$$\lim_{a\to\infty}\int_{0}^{a} e^{-(x-4)}\,dx = 1 - \underbrace{\lim_{a\to\infty} e^{-a+4}}_{0} = 1 \Rightarrow \int_{4}^{\infty} e^{-(x-4)}\,dx = 1$$

$$A = I + (e^{4}-1)\cdot II = e^{4} - 5 + (e^{4}-1)\cdot 1 = e^{4} - 5 + e^{4} - 1 = 2e^{4} - 6 \approx 103{,}196$$

ب-

$$f(x) = e^{x} - 1 \qquad g(x) = f(k)\cdot e^{-(x-k)} \text{ mit } f(k) = e^{k} - 1$$

$$A = \int_{0}^{k} f(x)\,dx + \int_{k}^{\infty} g(x)\,dx = \underbrace{\int_{0}^{k} (e^{x}-1)\,dx}_{I} + (e^{k}-1)\underbrace{\int_{k}^{\infty} e^{-(x-k)}\,dx}_{II} = I + (e^{k}-1)\cdot II$$

$$I: \int_{0}^{k} (e^{x}-1)\,dx = e^{x} - x \Big|_{0}^{k} = e^{k} - k - (e^{0} - 0) = e^{k} - k - 1$$

$$II: \int_{k}^{\infty} e^{-(x-k)}\,dx = \lim_{a\to\infty}\int_{k}^{a} e^{-(x-k)}\,dx \text{ L}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل ، لومړی بې له پولې جوړولو

$$\int_k^a e^{-(x-k)}\,dx$$

د بدلون له لارې حل

بدلون: $u(x) = -(x-k) = -x+k \Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = -1 \Leftrightarrow dx = -du$

لاندې پوله : $u(k) = -(k-k) = 0$ ؛ پورته پوله: $u(a) = -a+k$

$$\Rightarrow -\int_0^{-a+k} e^u\,du = \int_{-a+k}^0 e^u\,du = e^u\,\Big|_{-a+k}^0 = e^0 - e^{-a+k} = 1 - e^{-a+k}$$

پوله ارزښت جوړونه

$$\lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{-(x-k)}\,dx = 1 - \underbrace{\lim_{a\to\infty} e^{-a+k}}_{0} = 1 \Rightarrow \int_k^\infty e^{-(x-k)}\,dx = 1$$

$$A = I + \left(e^k - 1\right)\cdot II = e^k - k - 1 + \left(e^k - 1\right)\cdot 1 = e^k - k - 1 + e^k - 1 = 2e^k - k - 2$$

پوښتنې

مشتق – او انتیګرالشمیرنه I

ګډې وډې پوښتنې

لومړی - د لاندې پوتنخ – او لوګاریتم ترمونو ښه بدله کړی د توان – او لوګاریتم قوانینو د استعمال له لارې .

الف - $\left(e^x + e^{-x}\right)^2$ ب – $\left(e^x - e^{-x} + 5\right)\cdot e^x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم – د اکسپوننشل مساوات تاسو ته معلومې لارې حل کړئ.

الف - $6-\frac{3}{2}e^{2-2x}=0$ ب - $\frac{1}{4}e^{4x}-\frac{e}{2}=1$

دریم – د لاندې توابعو مشتق وشمېرئ.

الف - $f(x)=e^{-4x}-e^{4x}$ ب - $f(x)=\frac{3}{2}e^{-5x^2-3x}$

څلورم – د لاندې توابعو انتیګرال وشمېرئ او د مشتق سره یې نتیجې کنترول کړئ.

الف - $f(x)=\frac{1}{16}\left(x^2-3e^x\right)$ ب - $f(x)=x^3-2x^2+4x+\frac{3}{x}$

پنځم – تاسو ته د معلوم قانون له مخې د لاندې توابعو مشتق وشمېرئ.

الف - $f(x)=(x+a)^2-e^{2x-3}$ ب - $f(x)=\left(1-e^{ax}\right)^2$

شپږم - لاندې انتیګرالونه وشمېرئ.

الف - $\int_0^4 e^{\frac{1}{2}x}\,dx$ ب - $\int_1^2 e^{4-2x}\,dx$

اوم – $f(x)=e^{-\frac{1}{2}x}+\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}$! تابع ورکړ شوې.

الف – د [5 ; 4-] لپاره ارزښت جدول وکاږئ او ګراف یې ګرښیز کړئ. د y - محور، له ټیټټکي او x –محور څخه تېرېدوکی y - محور سره غبرګي کرښې ترمنځ سطحه په نخښنه کړئ.

ب – نسپي مینیموم $T\left(x_e \mid f(x_e)\right)$ وشمېرئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پ - د الف لاندې په نخښه شوې سطحه وشمېرئ.

اتم - د 3 –مې درجې تام راشنل تابع د x -محور په (0 | 4-) P کې غوڅوي او په (0 | 2) T کې یو تیټتکی لري. په P تانجنت د د y - محور په (48 | 0) P_y کې غوڅوي. د f(x) تابع مساوات او د t(x) تانجنت مساوات وشمېرئ او ګراف یې کرښې-کرښې کړئ.

غوښتنه:

ټول هوښیا-یا راشنل توابع یابلواک، ټیټ ټکي، محورغوځټکي، مشتق، تانجنتمساوات، ګاوس-الګوریتم.

نهم – د $f(x) = \frac{5}{4}x^4 - 3x^2 - 8$ تابع مساوات ورکړشوي دي. انحرافي ارزښتونه وشمېرئ او د ګراف او x –محور منځ سطحه وشمېرئ، چېرته چې صفرځایونه د انتیګرال پولې جوړوي. ګراف یې وکاږئ او شمېرلې سطحه یې په نخښه کړئ.

غښتني:

افراطي ارزښتونه، صفرځایونه، بیمربع مساوات، ټاکلی انتیګرال.

حلونه (اوبیونې)

مشتق – او انتیګرالشمیرنه

نتیجې او مفصل حلونه.

نتیجې:

اول – نتیجې

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف - $\left(e^{x}+e^{-x}\right)^{2}=e^{2x}+e^{-2x}+2$

ب - $\left(e^{x}-e^{-x}+5\right)\cdot e^{x}=e^{2x}+5\cdot e^{x}-1$

دویم – نتیجې

الف - $6-\frac{3}{2}e^{2-2x}=0\Rightarrow x=1-\ln(2)$

ب- $\frac{1}{4}e^{4x}-\frac{e}{2}=1\Rightarrow x=\frac{1}{4}\ln(4+2e)$

دریم – نتیجې

الف - $f(x)=e^{-4x}-e^{4x}\Rightarrow f'(x)=-4\left(e^{-4x}+e^{4x}\right)$

ب - $f(x)=\frac{3}{2}e^{-5x^{2}-3x}\Rightarrow f'(x)=\frac{3}{2}(-10x-3)\,e^{-5x^{2}-3x}$

$f(x)=\frac{1}{16}\left(x^{2}-3e^{x}\right)\Rightarrow\int f(x)\,dx=\frac{1}{16}\left[\frac{1}{3}x^{3}-3e^{x}\right]+C$

$f(x)=x^{3}-2x^{2}+4x+\frac{3}{x}\Rightarrow\int f(x)\,dx=\frac{1}{4}x^{4}-\frac{2}{3}x^{3}+2x^{2}+3\cdot\ln|x|+C$

پنځم - الف - $f(x)=(x+a)^{2}-e^{2x-3}\Rightarrow f'(x)=2\left(x+a-e^{2x-3}\right)$

ب - $f(x)=\left(1-e^{ax}\right)^{2}\Rightarrow f'(x)=-2a\cdot e^{ax}\left(1-e^{ax}\right)$

شپږم – نتیجې:

الف - $\int_{0}^{4}e^{\frac{1}{2}x}\,dx=2\cdot e^{2}-2\approx 12{,}778$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب - $\int_1^2 e^{4-2x}\,dx = \frac{1}{2}\cdot e^2 - \frac{1}{2} \approx 3{,}195$

اوم – نتیجې:

د $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}$ لپاره ارزښت جدول.

الف -

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
f (x)	7,46	4,59	2,9	1,95	1,5	1,43	1,73	2,46	3,83	6,17

ب –تیټتکی: $T\left(\ln(2) \mid \sqrt{2}\right)$

پ – په نخښه شوې سطحه 1FE (FE د سطحې واحد) ده

اتم – نتیجې:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + \frac{16}{3}\,;\; t(x) = 12x + 48$$

نهم – نتیجې:

$$P_{Max}(0 \mid -8)\,;\; P_{Min_1}\left(-\sqrt{\frac{6}{5}} \mid -\frac{49}{5}\right);\; P_{Min_2}\left(\sqrt{\frac{6}{5}} \mid -\frac{49}{5}\right)$$

سطحه: $A = |-32| = 32\,FE$ (FE د سحې یوونونه یا واحدونه)

مفصل ځوابونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی:

$$\underbrace{\left(e^{x}+e^{-x}\right)^{2}}_{\text{1. bin. Formel}} = e^{2x}+2\cdot e^{x}\cdot e^{-x}+e^{-2x}$$

الف-

$$= \underline{\underline{e^{2x}+e^{-2x}+2}}$$

$$\left(e^{x}-e^{-x}+5\right)\cdot e^{x} = e^{2x}-\underbrace{e^{-x}\cdot e^{x}}_{1}+5\cdot e^{x}$$

$$= e^{2x}-1+5\cdot e^{x}$$

ب –

$$= \underline{\underline{e^{2x}+5\cdot e^{x}-1}}$$

دويم:

الف –

$$6-\frac{3}{2}e^{2-2x}=0\,|\,-6$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{2}e^{2-2x}=-6\,|\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow e^{2-2x}=4\,|\,\ln(\ )$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(e^{2-2x}\right)=\ln(4)$$

$$\Leftrightarrow 2-2x=\ln(4)$$

د $\ln(4)=\ln\left(2^{2}\right)=2\cdot\ln(2)$ له امله باور لري:

$$\Leftrightarrow 2-2x=2\cdot\ln(2)\,|\,-2$$

$$\Leftrightarrow -2x=2\cdot\ln(2)-2\,|:(-2)$$

$$\Leftrightarrow x=-\ln(2)+1=\underline{\underline{1-\ln(2)\approx 0,307}}$$

ب -

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{1}{4}e^{4x} - \frac{e}{2} = 1 \,|\, + \frac{e}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}e^{4x} = 1 + \frac{e}{2} \,|\cdot 4$$

$$\Leftrightarrow e^{4x} = 4 + 2e \,|\, \ln(\ )$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(e^{4x}\right) = \ln(4 + 2e)$$

$$\Leftrightarrow 4x = \ln(4 + 2e) \,|: 4$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\ln(4 + 2e)}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{4}\ln(4 + 2e) \approx 0{,}561$$

دریم:

الف -

$$f(x) = e^{-4x} - e^{4x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = -4 \cdot e^{-4x} - 4 \cdot e^{4x}$$

$$= -4\left(e^{-4x} + e^{4x}\right)$$

ب -

$$f(x) = \frac{3}{2}e^{-5x^2 - 3x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = (-10x - 3) \cdot \frac{3}{2}e^{-5x^2 - 3x}$$

$$= -\frac{3}{2}(10x + 3)e^{-5x^2 - 3x}$$

$$f(x) = \frac{1}{16}\left(x^2 - 3e^x\right)$$

$$\Rightarrow F(x) = \int \frac{1}{16}\left(x^2 - 3e^x\right)dx$$

$$= \frac{1}{16}\int \left(x^2 - 3e^x\right)dx$$

$$= \frac{1}{16}\left[\frac{1}{3}x^3 - 3e^x\right] + C$$

څلورم: الف –

$$F'(x) = \frac{1}{16}\left(x^2 - 3e^x\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب ــ

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x + \frac{3}{x}$$

$$\Rightarrow F(x) = \int\left(x^3 - 2x^2 + 4x + \frac{3}{x}\right)dx$$

$$= \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + 3\cdot\ln|x| + C$$

يادونه: $\int\frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$

$$f(x) = \ln(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$F'(x) = x^3 - 2x^2 + 4x + 3\cdot\frac{1}{x}$$

پنځم:

الف ــ $f(x) = (x+a)^2 - e^{2x-3}$ $\Rightarrow f'(x) = 2\cdot(x+a)\cdot 1 - 2\cdot e^{2x-3}$ $= 2x + 2a - 2\cdot e^{2x-3}$ $= 2\left(x + a - e^{2x-3}\right)$	ب ــ $f(x) = \left(1-e^{ax}\right)^2$ د زنځيري قانون سره $\Rightarrow f'(x) = \underbrace{2\cdot\left(1-e^{ax}\right)}_{\text{äußere Abl.}}\cdot\underbrace{a\cdot\left(-e^{ax}\right)}_{\text{innere Abl.}}$ دننی مشتق دباندنی مشتق $= -2a\cdot e^{ax}\left(1-e^{ax}\right)$

شپږم:

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف –

$$\int_0^4 e^{\frac{1}{2}x}\,dx \quad \text{Substitution: } u(x)=\frac{1}{2}x$$

$$u'(x)=\frac{du}{dx}=\frac{1}{2}\Rightarrow dx=2du$$

$$\text{ug: } u(0)=0\,;\ \text{og: } u(4)=2$$

$$2\cdot\int_0^2 e^u\,du = 2\cdot e^u\Big|_0^2 = 2\cdot e^2-2\cdot e^0$$

$$=2\cdot e^2-2\approx 12{,}778$$

ب – بدلون

$$\int_1^2 e^{4-2x}\,dx \quad \text{Substitution: } u(x)=4-2x$$

$$u'(x)=\frac{du}{dx}=-2\Rightarrow dx=-\frac{1}{2}du$$

$$\text{ug: } u(1)=2\,;\ \text{og: } u(2)=0$$

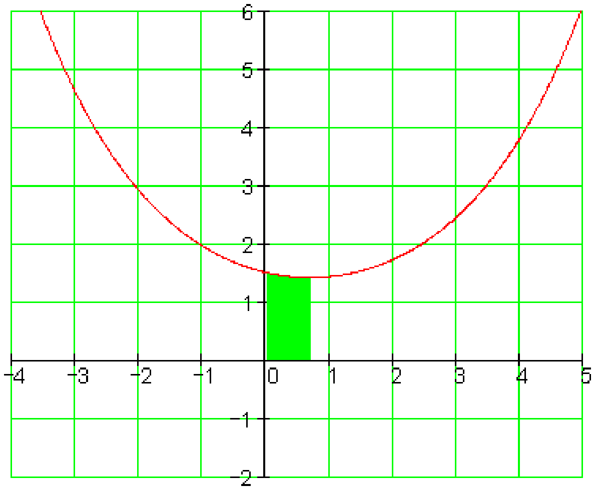
$$-\frac{1}{2}\cdot\int_2^0 e^u\,du=\frac{1}{2}\cdot\int_0^2 e^u\,du$$

$$=\frac{1}{2}\cdot e^u\Big|_0^2=\frac{1}{2}\cdot e^2-\frac{1}{2}\cdot e^0$$

$$=\frac{1}{2}\cdot e^2-\frac{1}{2}\approx 3{,}95$$

اووم: الف – د $f(x)=e^{-\frac{1}{2}x}+\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}$ لپاره ارزښت جدول

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
f (x)	7,46	4,59	2,9	1,95	1,5	1,43	1,73	2,46	3,83	6,17



(c) ketabton.com: The Digital Library

ب – د نسبي مينيموم يا خورا كوچني ارزښت شميرنه:

$$f(x) = e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}x} = 0 \mid +\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}x} = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x} \mid \cdot 4$$

$$\Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}x} = 2e^{-\frac{1}{2}x} \mid \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$\Leftrightarrow e^{x} = 2 \mid \ln(\ )$$

$$\Leftrightarrow x = \ln(2)$$

افراطي ځای. افراطي ارزښت:

$$f(x_e) = f(\ln(2)) = e^{-\frac{1}{2}\ln(2)} + \frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}\ln(2)}$$

$$= 2^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\cdot 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

تيت ټکی: $\underline{\underline{T\left(\ln(2) \mid \sqrt{2}\right)}}$

پ – د سطحې شميرنه:

$$f(x) = e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\ln(2)} f(x)\,dx = \int_0^{\ln(2)} \left(e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}\right) dx = \underbrace{\int_0^{\ln(2)} \left(e^{-\frac{1}{2}x}\right) dx}_{I} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^{\ln(2)} \left(e^{\frac{1}{2}x}\right) dx}_{II}$$

$$I: \quad \int_0^{\ln(2)} \left(e^{-\frac{1}{2}x}\right) dx \quad u(x) = -\frac{1}{2}x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{1}{2} \Rightarrow dx = -2du$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$u(0)=0 \quad u(\ln(2))=-\frac{1}{2}\ln(2)$$

$$\Rightarrow -2\int_0^{-\frac{1}{2}\ln(2)} e^u\,du = 2\int_{-\frac{1}{2}\ln(2)}^{0} e^u\,du = 2\left[e^u\right]_{-\frac{1}{2}\ln(2)}^{0} = 2\left[e^0 - e^{-\frac{1}{2}\ln(2)}\right]$$

$$II: \quad \frac{1}{2}\int_0^{\ln(2)}\left(e^{\frac{1}{2}x}\right)dx \quad u(x)=\frac{1}{2}x \Rightarrow \frac{du}{dx}=\frac{1}{2}\Rightarrow dx = 2du$$

$$u(0)=0 \quad u(\ln(2))=\frac{1}{2}\ln(2)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\cdot 2\int_0^{\frac{1}{2}\ln(2)}\left(e^u\right)du = \int_0^{\frac{1}{2}\ln(2)}\left(e^u\right)du = \left[e^u\right]_0^{\frac{1}{2}\ln(2)} = e^{\frac{1}{2}\ln(2)} - e^0$$

$$I+II: \quad 2e^0 - 2e^{-\frac{1}{2}\ln(2)} + e^{\frac{1}{2}\ln(2)} - e^0 = 1 - 2\cdot 2^{-\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{2}}$$

$$= 1 - \frac{2}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} = 1 - \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1 - \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{1}}$$

په نخښه شوې سطحه ارزښت 1FE (د سطحې يوون يا واحد) لري

اتم:

د پرابلم تحليل:

د دريمې درجې ام راشنل (ريښتيني) تابع لپاره: $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

I. په T(2|0) کې ټيټ ټکی په دې معنا دی:

$1.\ x_1 = 2$ د f(x) صفرځای دی، يعني $f(x_1) = f(2) = 0$.

$2.\ x_T = 2$ د f(x) افراطي ځای دی، يعني $f'(x_T) = f'(2) = 0$.

II. د P(-4|0) f(x) صفرځای دی، يعني f(-4)=0.

III. په P(-4|0) کې تانجنت د y -محور په $a_{0T} = 48$ کې غوڅوي، يعني $t(0) = 48$

او $t(0) = 48$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ضریبونوو مساواتو لیکل:

$$I1. \quad \Rightarrow f(2)=0 \Leftrightarrow a_3 \cdot 2^3 + a_2 \cdot 2^2 + a_1 \cdot 2 + a_0 = 0$$
$$\Leftrightarrow 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 = 0$$

مساوات ۱ .

$$I2. \quad \Rightarrow f'(2)=0 \text{ mit } f'(x) = 3a_3x^2 + 2a_2x + a_0 = 0$$
$$f'(2)=0 \Leftrightarrow 3a_3 \cdot 2^2 + 2a_2 \cdot 2 + a_0 = 0$$
$$\Leftrightarrow 12a_3 + 4a_2 + a_1 = 0$$

مساوات ۲ .

$$II \quad \Rightarrow f(-4)=0 \Leftrightarrow a_3 \cdot (-4)^3 + a_2 \cdot (-4)^2 + a_1 \cdot (-4) + a_0 = 0$$
$$\Leftrightarrow -64a_3 + 16a_2 - 4a_1 + 1a_0 = 0 \qquad \text{Gleichung III}$$

مسوات ۳ .

III. د تانجنت مساوات: $t(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$

د $x_0 = -4$ سره $f(x_0) = f(-4) = 0$ باور لري، ځکه چې $x_0 = -4$ د f(x) صفرځایونه دي.

$$f'(x_0) = f'(-4) = 3a_3 \cdot (-4)^2 + 2a_2 \cdot (-4) + a_0$$
$$= 48a_3 - 8a_2 + a_1$$
$$\text{also } t(x) = f'(x) \cdot (x - x_0) = (48a_3 - 8a_2 + a_1)(x+4)$$
$$t(0) = 48 \Leftrightarrow (48a_3 - 8a_2 + a_1) \cdot 4 = 48$$
$$\Leftrightarrow 192a_3 - 32a_2 + 4a_1 = 48 \qquad \text{Gleichung IV}$$

پورته:مساوات IV .

له دې سره اوس ټول د ضریبونو مساوات معلوم دي:

$$\begin{array}{ll} I & 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 = 0 \\ II & 12a_3 + 4a_2 + a_1 = 0 \\ III & -64a_3 + 16a_2 - 4a_1 + 1a_0 = 0 \\ IV & 192a_3 - 32a_2 + 4a_1 = 48 \end{array}$$

د مساواتسیستم ځواب د ګاس-الګوریتم له لارې:

(c) ketabton.com: The Digital Library

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	2	4	8	0	
0	1	4	12	0	
1	−4	16	−64	0	III − I
0	4	−32	192	48	I : 4
1	2	4	8	0	
0	1	4	12	0	
0	−6	12	−72	0	III + 6·II
0	1	−8	48	12	IV − II
1	2	4	8	0	
0	1	4	12	0	
0	0	36	0	0	
0	0	−12	36	12	

$$3a_2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = 0}$$

$$-12a_2 + 36a_3 = 12$$

$$\Leftrightarrow 36a_3 = 12 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = \frac{1}{3}}$$

$$a_1 + 4a_2 + 12a_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow a_1 + 12 \cdot \frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = -4}$$

$$a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow a_0 - 8 + 8 \cdot \frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = \frac{16}{3}}$$

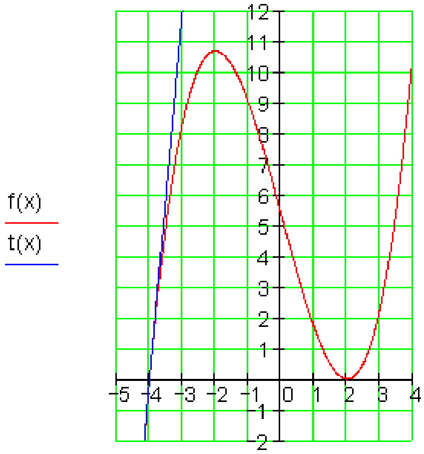
Funktionsgleichung:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + \frac{16}{3}$$

د پورته الماني پېنتو: تابع مساوات.

د تانجنت مساوات:

$$t(x) = (48a_3 - 8a_2 + a_1)(x+4) = \left(\frac{48}{3} - 4\right)(x+4) = \underline{\underline{12x + 48}}$$



نهم:

اول: افراطي ارزښتونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = \frac{5}{4}x^4 - 3x^2 - 8$$

و y محور ته سیمتریک ده.

$$\Rightarrow f(-x) = f(x)$$

په کې نسبي ماکسیموم

$$f'(x) = 5x^3 - 6x \,;\, f''(x) = 15x^2 - 6$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 5x^3 - 6x = 0$$

$$\Leftrightarrow x\left(5x^2 - 6\right) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \,;\, x_{2/3} = \pm\sqrt{\frac{6}{5}}$$

$$f''(x_1) = f''(0) = 15\cdot 0^2 - 6 = -6 < 0 \Rightarrow \text{rel Max bei } x_1 = 0$$

$$f''(x_2) = f''\left(\sqrt{\frac{6}{5}}\right) = 15\cdot\left(\sqrt{\frac{6}{5}}\right)^2 - 6 = 15\cdot\frac{6}{5} - 6 = 12 > 0 \Rightarrow \text{rel Min bei } x_2 = \sqrt{\frac{6}{5}}$$

$$f''(x_3) = f''\left(-\sqrt{\frac{6}{5}}\right) = 15\cdot\left(-\sqrt{\frac{6}{5}}\right)^2 - 6 = 15\cdot\frac{6}{5} - 6 = 12 > 0 \Rightarrow \text{rel Min bei } x_3 = -\sqrt{\frac{6}{5}}$$

$$f(x_1) = f(0) = -8 \Rightarrow \underline{\underline{P_{Max}(0\,|\,-8)}}$$

$$f(x_2) = f(x_3) = f\left(\sqrt{\frac{6}{5}}\right) = \frac{5}{4}\left(\sqrt{\frac{6}{5}}\right)^4 - 3\left(\sqrt{\frac{6}{5}}\right)^2 - 8 = -\frac{49}{5}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P_{Min_1}\left(-\sqrt{\frac{6}{5}}\,\middle|\,-\frac{49}{5}\right); P_{Min_2}\left(\sqrt{\frac{6}{5}}\,\middle|\,-\frac{49}{5}\right)}}$$

دوه:

د سطحې شمیرنه صفرځایونه:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{4}x^4 - 3x^2 - 8 = 0$$

بدلون: $x^2 = z$

$$\Rightarrow \frac{5}{4}z^2 - 3z - 8 = 0 \Leftrightarrow z^2 - \frac{12}{5}z - \frac{32}{5} = 0 \Rightarrow z_1 = 4\ \text{I}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

همداسي $z_2 = -\frac{8}{5}$. (حل نه شته)

$z_1 = 4 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_1 = -2$ همداسي؛ $x_2 = 2$. د انتيګريشن پولې دي.

د سطحې انتيګرال:

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \int_{-2}^{3}\left(\frac{5}{4}x^4 - 3x^2 - 8\right)dx = \left[\frac{x^5}{4} - x^3 - 8x\right]_{-2}^{2}$$

$$= \left[\frac{2^5}{4} - 2^3 - 8\cdot 2\right] - \left[\frac{(-2)^5}{4} - (-2)^3 - 8\cdot(-2)\right] = -32$$

سطحه: A=|-32| =32FE (FE د سطحي واحد يا يوون)

$P_{Max}(0\,|\,-8)$

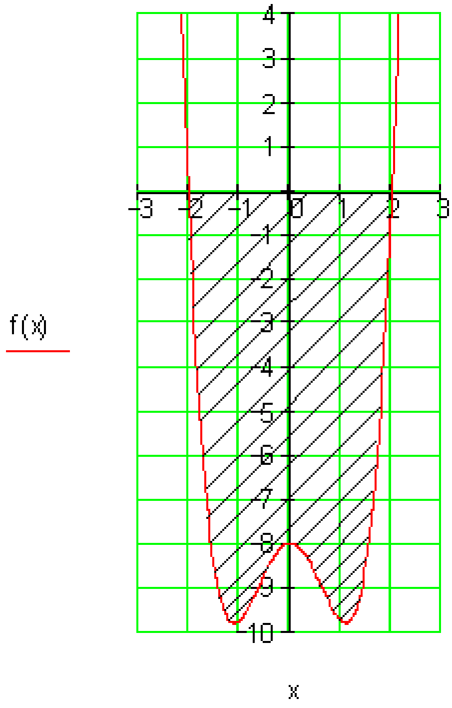
$P_{Min_1}\left(-\sqrt{\frac{6}{5}}\,\Big|\,-\frac{49}{5}\right)$

bzw. $P_{Min_1}(-1{,}09\,|\,-9{,}8)$

$P_{Min_1}\left(\sqrt{\frac{6}{5}}\,\Big|\,-\frac{49}{5}\right)$

bzw. $P_{Min_1}(1{,}09\,|\,-9{,}8)$

x	−2,2	−2	−1,5	−1
f(x)	6,76	0	−8,42	−9,75
x	−0,5	0	0,5	1
f(x)	−8,67	−8	−8,67	−9,75
x	1,5	2	2,2	
f(x)	−8,42	0	6,76	



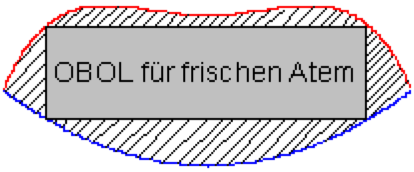
پوښتنې

(c) ketabton.com: The Digital Library

مشتق – او انتیگرالشمیرنې ته د استعمال پوښتنې

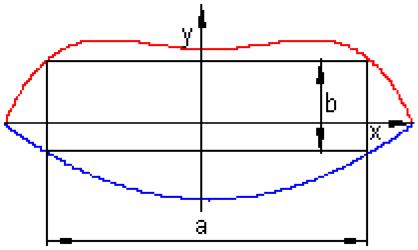
د اعلاناتو تختې او ګډوله پوښتنې.

لومړی:

 $f(x) = -\frac{1}{486}x^4 + \frac{1}{54}x^2 + 2;\ g(x) = \frac{1}{18}x^2 - 2$	دا تر ځنګ د اعلاناتو تخته(خوله د یوه په کې خوندي ولاړکوډیز یا مستطیل سره، چې خوزنده اعلانات په کې انځور شوي دي) باید داسې جوړه شي، چې په کې خوندي مستطیل ممکنه خورا لویه سطحه ولري. د خولې د غاړې کړې یا منحنې د په ځنګ کې توابعو د تابع مساواتو له لارې انځوریږي:

الف- د خولې پورته برخه کوم تابع ښايي او کوم دا کښته برخه؟ خپل ځواب مدلل کړی.

ب –

 	د دې مودول جوړونکی د ځغلند لیک لپاره د مستطیل یا ولاړکوډیز تیکی کچې ته اړتیا لري. د مستطیل اړخ a او b اړخ داسې وټاکی، چې سطحه ماکسیمال شي. سطحه څومره لویه ده؟ د اوږدوالي یوون یا واحد متر دی.

پ-

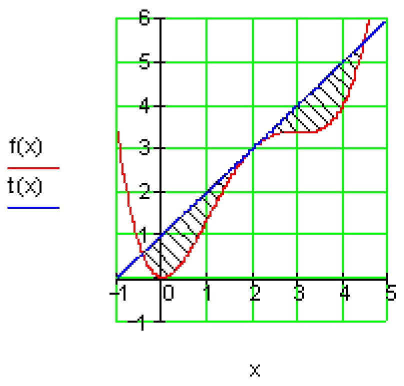
دا ټوله خوله دې په یوه دکور په یوه دیوال کې ورکډه یعنې وکښل شي، د دې لپاره د جوړولو انجنر اړینې سطحې ته اړتیا لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ت- دا کرښه شوې سطحه دې د خورا ارزښتناک برطبنا راڼه رنګ سره جوړه شي. د یوه مربع متر په پوښ ورکونه یا رنګونه 120 € قیمت لري. ټوله پوښونه به څومره قیمت ولري؟

غوښتنه: مشتق، افراطي ارزښتونه، د ګرافونو ترمنځ سطحه.

دویم:

د $f(x)$ او $t(x)$ ګرافونو ترمنځ سطحه وټاکئ، که $t(x)$ د $f(x)$ تانجنت په $P(2 \mid f(2))$ ټکي کې انځور کړي. $$f(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^3 + \frac{9}{4}x^2$$	

غوښتنه: تانجنت، صفرځایونه، هورنر، ټاکلی انتیګرال

دریم:

تابع ورکړ شوی: $f_a(x) = a \cdot x^2 \cdot e^{3-2x} \qquad x \in \mathbb{R}\,;\, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

الف-د $f(x)$ صفرځایونه وټاکئ او خپلې نتیجې په کومنتار روښانه کړئ.

ب – د پراته تانجنت سره ټکي پیداکړئ او د دې ټکو پروتځای په هکله یوه وینا وکړئ.

غېښتنه: مشتق، -تابع، د ضرب قانون، زنځیري قانون.صفرضرب. تانجنتونه، پراته.

ځوابونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

مشتق او انتیګرالشمیرنې ته د استعمال پوښتنې

نتیجې

الف- $g(x) = \frac{1}{18}x^2 - 2$ د خوله لاندط برخه ښايي.

$f(x) = -\frac{1}{486}x^4 + \frac{1}{54}x^2 + 2$ د خوله پورته برخه ښايي.

ب – د ولاړګوډېز یا مستطیل خورا لویه سطحه $23{,}095\ m^2$ ده.

پ – د خولې لپاره د کور په دیواله په ټولییزه توګه $36{,}267\ m^2$ سطحې ته اړتیا شته.

ت – کرښیزه سطحه د ټولې سطحې او د ولاړګوډېز یا مستطیل کمښت یا تفریق دی. دا نږدې $13{,}172\ m^2$ دی. د پوښونې قیمت € 1580,65 دی. دویم: غړښتونکې سطحه 2,939 FE (د سطحې واحد یا یوون) ده.
دریم:
الف- $x_{1/2} = 0$ یواځن صفرځای دی، ځکه چې دېل منځ ته راځي، د $f(x)$ ګراف د x - محور په همدې ځای کې لمسوي.
ب- ټکي د پراته تانجنت سره په $x_1 = 0$ او $x_2 = 1$ کې پراته دي. ټول ټکي P_{1a} د کواوردینات یا پروت ولاړسیستم په سرچینه کې په $P_{1a}(0 \mid 0)$ کې پراته دي. ټول P_{2a} ټکي د محور y ته غبرګې باندې په واټن کې پراته دي او کواوردینات $P_{2a}(1 \mid ae)$ لري.

مفصل ځوابونه:

الف- د خولې لاندې برخه د مربع تابع له لارې روښانه یا تشیح کیږي. پورته برخه د ۴.درجې یوه ټول هوښیار یا راشنل تابع له لارې.

$g(x) = \frac{1}{18}x^2 - 2$ د خولې لاندې-یا کښته برخه ښايي

(c) ketabton.com: The Digital Library

....

$f(x) = -\frac{1}{486}x^4 + \frac{1}{54}x^2 + 2$ د خولې پورته بخه ښايي.

ب-دا چې د f(x) او g(x) ګرافونه د y محور سره سيمتريک ځغلي، نو دا خوندي ولاړګوډيز يا مستطيل هم د y محور ته سيمتريک دی.

د y محور a په دوه برابرو برخو وېشي.
د دې لپاره چې اړخ يا خواb د a په واکوالي کې وټاکو، نو ولاړګوډيز يا مستطيل د ولاړو ګډونو يا قيموزاويو پورته او کښته کواورديناتونو ته اړتيا لرو.

پورته ولاړ يا قايم ګوډ يا کونج: $\left(\frac{a}{2} \middle| f\left(\frac{a}{2}\right)\right)$ کښته ولاړګوډ: $\left(\frac{a}{2} \middle| g\left(\frac{a}{2}\right)\right)$.

د y محور مطلق کمښت اړخ b راکوي. د دې لپاره د ولاړګوډيز يا مستطيل همغه اړونده د y کواورديناتونه شميرو.

$$f\left(\frac{a}{2}\right) = -\frac{1}{486}\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^4 + \frac{1}{54}\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2 = -\frac{1}{486}\cdot\frac{a^4}{16} + \frac{1}{54}\cdot\frac{a^2}{4} + 2$$
$$= -\frac{1}{7776}a^4 + \frac{1}{216}a^2 + 2 > 0$$
$$g\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1}{18}\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2 = \frac{1}{18}\cdot\frac{a^2}{4} - 2$$
$$= \frac{1}{72}a^2 - 2 < 0$$

د b د اوږدوالي لپاره نو باور لري:

$b(a) = f\left(\frac{a}{2}\right) + \left|g\left(\frac{a}{2}\right)\right|$ داچې $g\left(\frac{a}{2}\right) < 0$ ist, دی، نو $\left|g\left(\frac{a}{2}\right)\right| = -g\left(\frac{a}{2}\right)$ باور لري او له دې سره دا لاندې

$$b(a) = f\left(\frac{a}{2}\right) - g\left(\frac{a}{2}\right) = -\frac{1}{7776}a^4 + \frac{1}{216}a^2 + 2 - \left(\frac{1}{72}a^2 - 2\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= -\frac{1}{7776}a^4 + \frac{1}{216}a^2 + 2 - \frac{3}{216}a^2 + 2$$

$$= -\frac{1}{7776}a^4 - \frac{2}{216}a^2 + 4 = -\frac{1}{7776}a^4 - \frac{1}{108}a^2 + 4$$

دا چې د b اړخ د a په واک کې دی، نو سړی دا هم وایي چې b د a فنکشن دی یعنې b(a).

د ولاړګوډیز A مساحت د هغه د ا ړخونو ضرب دی.

$$A(a) = a \cdot b(a) = a \cdot \left(-\frac{1}{7776}a^4 - \frac{1}{108}a^2 + 4\right)$$

$$= -\frac{1}{7776}a^5 - \frac{1}{108}a^3 + 4a$$

د A(a) د افراطي ارزښت ټاکل د a ارزښت راکوي، چې د هغه لپاره د ولاړګوډیز سطحه خورا –یا ماکسیمال لوییږي.

(په لاندې کې د الماني پښو: بدلون، حل نه شته،

$$A'(a) = -\frac{5}{7776}a^4 - \frac{3}{108}a^2 + 4 \,;\; A''(a) = -\frac{20}{7776}a^3 - \frac{6}{108}a$$

$$A'(a) = 0 \Leftrightarrow -\frac{5}{7776}a^4 - \frac{3}{108}a^2 + 4 = 0 \,|\cdot\left(-\frac{7776}{5}\right)$$

$$\Leftrightarrow a^4 + \frac{3\cdot 7776}{108\cdot 5}a^2 - \frac{4\cdot 7776}{5} = 0$$

$$\Leftrightarrow a^4 + \frac{216}{5}a^2 - \frac{31104}{5} = 0 \text{ Substitution: } a^2 = z$$

$$\Leftrightarrow z^2 + \frac{216}{5}z - \frac{31104}{5} = 0 \Rightarrow p = \frac{216}{5} \,;\; q = -\frac{31104}{5}$$

$$\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(\frac{108}{5}\right)^2 + \frac{31104}{5} = \frac{11664}{25} + \frac{155520}{25} = \frac{167184}{25}$$

$$= \frac{1296}{25}\cdot 129 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{1296}{25}\cdot 129} = \frac{36}{5}\sqrt{129}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \left| \begin{array}{l} z_1 = -\frac{108}{5} + \frac{36}{5}\sqrt{129} = a^2 \\ z_2 = -\frac{108}{5} - \frac{36}{5}\sqrt{129} < 0 \Rightarrow \end{array} \right.$$

حل نه شته

$$a^2 = -\frac{108}{5} + \frac{36}{5}\sqrt{129} \Rightarrow |a| = \sqrt{-\frac{108}{5} + \frac{36}{5}\sqrt{129}}$$

$$a_1 = \sqrt{-\frac{108}{5} + \frac{36}{5}\sqrt{129}}\ ;\ a_2 = -\sqrt{-\frac{108}{5} + \frac{36}{5}\sqrt{129}}$$

$a_1 = \frac{6}{5}\sqrt{-15 + 5\sqrt{129}} \approx 7,757$ د یو ځو بڼه بدلونونو سره.

داچې د z_2 ریښه یا جذر نه شي نیول کیدی او د a لپاره ارزښت باید زیاتیز یا مثبت وي، باید د a د $A(a)$ یو افراطي ځای وي. دا د $A(a)$ د دویم مشتق سره ازمایلی شو.

د $A''(a_1) < 0$ ،

$$A''(a_1) = -\frac{20}{7776}a_1^3 - \frac{6}{108}a_1$$

او $a_1 > 0$ ؛

له امله.

د ارزښت $a_1 = \frac{6}{5}\sqrt{-15 + 5\sqrt{129}}$ لپاره

د ولاړګوډیز یا مستطیل سطحه ماکسیمال یا خورا لویه ده

(c) ketabton.com: The Digital Library

....

دا چې ګراف، چې د خولي پورته برخه جوړوي، د $x = 0$ په ځای کې یو مینیموم یا خوراکوچنی ارزښت په ګوته کوي ((P_{Min} (0 | 2))، باید وازمایل شي، چې د ولاړګوډیز یا مستطیل پورته اړخ له دې څخه کښته پروت دی.

$$\text{Also ob } f\left(\frac{a_1}{2}\right) < 2 \text{ ist.}$$

$$f\left(\frac{a_1}{2}\right) = f\left(\frac{3}{5}\sqrt{5\sqrt{129}-15}\right) \approx 1{,}813 < 2$$

شمیرنه د جبشمیري سره صورت نیسي. نتیجه تصدیقوي، چې د مستطیل پورته ا ړخ د $f(x)$ د خورا کوچني ارزښت کښته لور ته پروت دی

اوس کیدی شي د مستطیل مساحت د جبشمیري سره و شمیرل شي.

د الماني پښتو: ولاړکوډیز یا مستطیل.

$$A_{\text{Rechteck}} = A(a_1) = -\frac{1}{7776}a_1^5 - \frac{1}{108}a_1^3 + 4a_1$$

$$A_{\text{Rechteck}} = A(a_1) = A\left(\frac{6}{5}\sqrt{5\sqrt{129}-15}\right) \approx 23{,}095$$

د ولاړګوډیز خورا لوی ارزښت یا ماکسیماله لویه نږدې $23{,}095\ m^2$ مساحت لري.

پ- د خولې ټول مساحت د $f(x)$ او $g(x)$ توابعو ګرافونو ترمنځ پروت دی. دا د انتګرال په مرسته میندل کیدی شي. د دې لپاره باید لومړی د انتیګرېشن پولې وټاکل شي.

$$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{486}x^4 + \frac{1}{54}x^2 + 2 - \left(\frac{1}{18}x^2 - 2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{486}x^4 + \frac{1}{54}x^2 - \frac{3}{54}x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{486}x^4 - \frac{1}{27}x^2 + 4 = 0 \mid \cdot (-486)$$

$$\Leftrightarrow x^4 + 18x^2 - 1944 = 0 \text{ Substitution: } z = x^2$$

$$\Leftrightarrow z^2 + 18z - 1944 = 0 \Rightarrow p = 18;\ q = -1944$$

$$\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 81 + 1944 = 2025 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{2025} = 45$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}$	$\mid z_1 = -9+45 = 36 = x^2 \Rightarrow x_{1/2} = \pm 6$ $\mid z_2 = -9-45 = -54 < 0 \Rightarrow$	د انتیگریشن پولي د x لپاره حل نه شته

د $f(x) - g(x) = -\frac{1}{486}x^4 - \frac{1}{27}x^2 + 4$: سره د ګرافونو ترمنځ سطحې لپاره باور لري:

لاندې الماني: خوله

$$A_{Mund} = A = \int_{x_1}^{x_2} \left[f(x) - g(x)\right] dx = \int_{-6}^{6} \left(-\frac{1}{486}x^4 - \frac{1}{27}x^2 + 4\right) dx$$

$$= -\frac{1}{5 \cdot 486}x^5 - \frac{1}{3 \cdot 27}x^3 + 4x \Big[_{-6}^{6}$$

$$= -\frac{7776}{2430} - \frac{216}{81} + 24 - \left(\frac{7776}{2430} + \frac{216}{81} - 24\right)$$

$$= -\frac{15552}{2430} - \frac{432}{81} + 48 = \frac{544}{15} \approx 36,267$$

دپه دیوال د خولې لپاره ټولټال $36,267\ m^2$ سطحې ته اړتیا شته.

ت- کربښیزه سطحه د ټولې سطحې او د ولاړګوډیز د سطحې د کمون یا تفریق سره برابره ده.

په لاندط کې د الماني پښتو له کین څخه ښي لورته: کربښیز، خوله، مستطیل یا ولاړ کوډیز

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A_{schraffiert} = A_{Mund} - A_{Rechteck} = \frac{544}{15} - A\left(\frac{6}{5}\sqrt{5\sqrt{129} - 15}\right) \approx 13,172$$

د $1m^2$ پوښوني قيمت 120€ دی.

$$\text{ټول قيمت} = 120\,€ \cdot A_{schraffiert} = 1580,65\,€$$

يادونه:

د دې لپاره چې د ګردونې ناټيکاوي مخه ونيول شي، بايد د جبشميري شميرنې سره منځارزښتونه ذخيره شي.

$$\text{ټول قيمت} = 120\,€ \cdot 13,172 = 1580,64\,€$$

د ګردوونې ناټيکاوي ته يادونه.
تر شوونتيا پورې چې د ګردونې ناټيکاوي مخه ونيولی شو، بايد د جبشميري شميرنې سره منځارزښتونه ذخيره شي. مګر په ډېرو حالتونو کې د لسميز يا اعشاريې(کوما) وروسته درې ځايونه بسيا کوي. په لاندې کې دې د لسميز وروسته د ۳ ځايونو ټيکاوي سره سرته ورسول شي. د الماني : ولاړګوډيز، خوله، کرښيزه سطحه، خوله، مستطيل

$$a_1 \approx 7,757$$

$$A_{Rechteck} \approx -\frac{1}{7776} \cdot (7,757)^5 - \frac{1}{108} \cdot (7,757)^3 + 4 \cdot 7,757 \approx 23,095$$

$$A_{Mund} \approx 36,267$$

$$A_{schraffiert} = A_{Mund} - A_{Rechteck} \approx 36,267 - 23,095 \approx 13,172$$

$$\text{ټول ارزښت} \approx 120\,€ \cdot 13,172 \approx 1580,64\,€$$

دويم: حل

$$f(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^3 + \frac{9}{4}x^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

....

تانجنت په f(x)باندې په P(2|f(2)] کې

f(2)=3 له دې لاس ته راځي ، چېt(x) د f(x) ګراف په تکي P(2|f(2)) کې لمسوي

تانجنتمساوات $t(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ د $x_0=2$ سره

$$f'(x)=\frac{1}{2}x^3-3x^2+\frac{9}{2}x \Rightarrow f'(x_0)=f'(2)=1$$

او د $f(x_0)=f(2)=3$ سره باور لري: $t(x)=1\cdot(x-2)+3$ یعنې $\boxed{t(x)=x+1}$

د تانجنت غوځېکي همداسې لمسېکي د f(x) د ګراف سره

$$t(x)-f(x)=x+1-\left(\frac{1}{8}x^4-x^3+\frac{9}{4}x^2\right)=-\frac{1}{8}x^4+x^3-\frac{9}{4}x^2+x+1$$

$$t(x)-f(x)=0 \Leftrightarrow -\frac{1}{8}x^4+x^3-\frac{9}{4}x^2+x+1=0$$

بربېني چې تانجنت د f(x) ګراف په تکي P(2|3) کې لمسوي، کیدی شي $x_{1/2}=2$ حلونه وي.

هورنر:

	$-\frac{1}{8}$	1	$-\frac{9}{4}$	1	1
$x=2$		$-\frac{1}{4}$	$\frac{6}{4}$	$-\frac{6}{4}$	$-\frac{4}{4}$
	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{2}{4}$	0
$x=2$		$-\frac{1}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{2}{4}$	
	$-\frac{1}{8}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	

$$\Rightarrow -\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}=0 \Rightarrow x_{3/4}=2\pm\sqrt{6}$$

داچې تانجنت د f(x) ګراف په تکيP(2|3) کې لمسوي (دېبل صفرځای)، کیدی شي غوښتونې سطحهِ د لاندې انتیګرال سره وشمیرل شي.

$$A=\int_{2-\sqrt{6}}^{2+\sqrt{6}}\left[t(x)-f(x)\right]dx=\int_{2-\sqrt{6}}^{2+\sqrt{6}}\left[-\frac{1}{8}x^4+x^3-\frac{9}{4}x^2+x+1\right]dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \left[-\frac{1}{40}x^5 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{4}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x \right]_{2-\sqrt{6}}^{2+\sqrt{6}} \approx 2,939$$

غوښتونې سطحه 2,939 FE (د سطحې واحد یا یوون) ده.

دریم:

الف-

$$f_a(x) = a \cdot x^2 \cdot e^{3-2x}$$

د صفرځایونو لپاره اینبونه: $f_a(x) = 0 \Leftrightarrow a \cdot x^2 \cdot e^{3-2x} = 0$

ترڅېرنې لاندې نیول کیږي، چې د کوم x ارزښت لپاره ضرب ضریبونه (د ځل ځلووني) صفر کیږي.

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ یو ثابت ضریب دی، چې هیڅ صفرکیدای نه شي.

$x^2 = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = 0$ یو دوبل صفرځای دی.

د $e^{3-2x} : e^{3-2x} = e^{-(2x-3)}$ څیړنه

له $e^{-(2x-3)}$ له e^{-2x} څخه د x محور ښی لور ته په ۳ واحده یا یوون د راکښنې له لارې منځ ته راځي ه.

دا چې e^{-2x} صفرځای نه لري، نو $e^{-(2x-3)}$ هم صفرځای نه لري.

له دې سره $x_{1/2} = 0$ یواځنی صفرځای دی، ځکه چې دوبل منځ ته راځي، د f(x) ګراف د x محور په دې ځای کې لمسوي.(پروت تانجنت)

ب-

$f_a(x) = a \cdot x^2 \cdot e^{3-2x}$ په پاته تانجنت باندې څیرنه

د پراته تانجنت لپاره شرطونه: $f'_a(x) = 0$

د ضرب قاونو له لارې مشتق: $f'_a = u' \cdot v + u \cdot v'$

$$u = a \cdot x^2 ;\ v = e^{3-2x} \Rightarrow u' = 2a \cdot x ;\ v' = -2e^{3-2x}$$

$$\Rightarrow f'_a(x) = 2ax \cdot e^{3-2x} + ax^2 \cdot \left(-2e^{3-2x}\right)$$

$$= 2ax \cdot e^{3-2x} - 2ax^2 \cdot e^{3-2x} = 2a \cdot e^{3-2x}\left(x - x^2\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f'_a(x)=0 \Leftrightarrow 2a\cdot e^{3-2x}\left(x-x^2\right)=0$$
$$\Leftrightarrow x(1-x)=0 \Rightarrow x_1=0\,;\,x_2=1$$

e^{3-2x} صفرکیدی نه شي(برخه الف وګورئ)

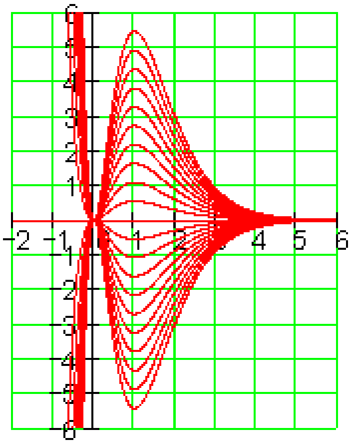
د پراته محور سره غوڅتکي

$$f_a(x_1)=f_a(0)=a\cdot 0^2\cdot e^3=0 \Rightarrow \underline{\underline{P_{1a}(0|0)}}$$
$$f_a(x_2)=f_a(1)=a\cdot 1^2\cdot e^{3-2}=a\cdot e \Rightarrow \underline{P_{2a}(1|a\cdot e)}$$

ټول ټکي P_{1a} د کواوردینات په سرچینه پراته دي، له پارامتر a څخه خپلواک دي.

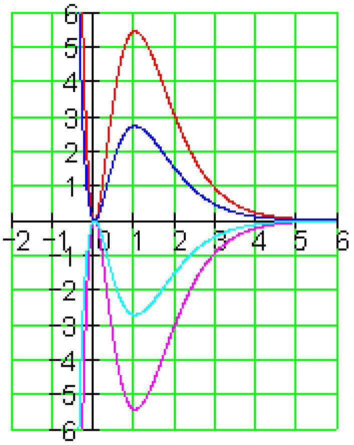
ټول ټکي P_{2a} د y محور ته غبرګه باندې پراته دي: x=1

$f_a(x)=a\cdot x^2\cdot e^{3-2x}\quad x\in\mathbb{R}\,;\,a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$



$f_a(x)=a\cdot x^2\cdot e^{3-2x}\quad x\in\mathbb{R}$

د $a\in\{-2;-1;1;2\}$ لپاره



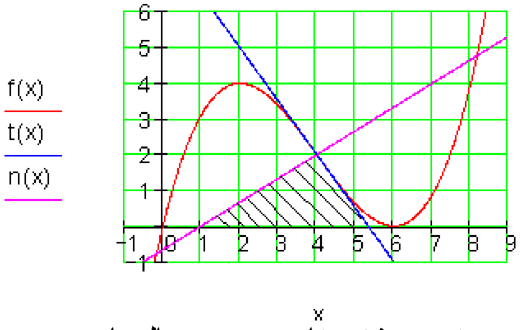
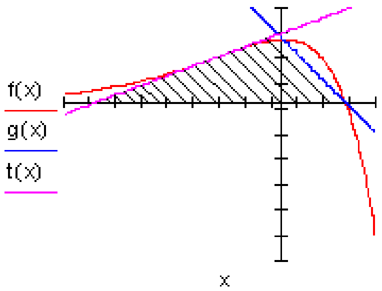
پوښتنې: مشتق او انتیګرالشمیرنه II

ګډوله پوښتنې

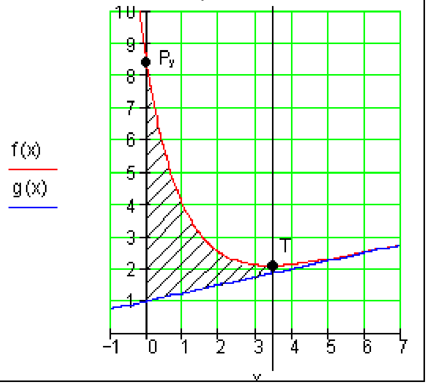
(c) ketabton.com: The Digital Library

....

لومړی:

 غوښتني: مشتق،تانجنت، نورمال یا عمود، صفرځایونه، د درې ګوډي سطحه.	د درېګوډي مساحا، چي د تانجنت t(x) او نورمالي یا عمود n(x)له لاري د xمحور سره جوړيږي، وشميرى: t(x) په ټکي P(4|2) کې په f(x) تانجنت دی $f(x)=\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{2}x$
دويم: 	د په نخښه شوي درېګوډي یا مثلث سطحه وشميرى، که $f(x)=(2-x)e^{\frac{1}{2}x}$ وي. g(x) د f(x) محور-غوڅټکي له لاري کربنه ده. t(x) د f(x) اوړنتانجنت یا د انعطاف تانجنت دی

غوښتنه: محورغوڅټکي، اوړون – یا د انعطاف ټکي، اوړنتانجنت یا د انعطاف تانجنت، د کربنو غوڅټکي.

دريم: تابع ورکړ شوي ده: $f(x)=e^{2-x}+\frac{1}{4}x+1 \quad x\in\mathbb{R}$ 	الف- د f(x) غوڅټکی دy محور سره وشميرى. ب- د کربني g(x)مساوات وټاکی. دا کربنه څه غوره والی یا معنا لري؟ پ- ټيټټکی T (x_e | f(x_e)) وشميرى. ت- دا په نخښه شوې سطحه وشميرى. ټ- سطحه په کوم ارزښت تغير خوري، که ښی پوله د ناپای په لور لاړه شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

غوښتنه: e - تابع ، محورغوڅټکي، مشتق، سطحه، انتیګریشن، ناپای انتیګرال.

ځوابونه

مشتق او انتیګرال ته ګډوله پوښتنېII

نتیجي او مفصل ځوابونه

نتیجې

لومړی:

د درېګوډی مساحت نږدې FE ...4,333 د سطحې یوون یا واحد دی.

دویم: د درېګوډي سطحه نږدې 8,606 FE د سطحې واحد دی.

دریم:

الف- $P_y\left(0\,|\,e^2+1\right)$ bzw. $P_y\left(0\,|\,8{,}389\right)$ همداسي

ب- کربنه د ګراف اسینمپټوتي جوړوي.

د اسیمپټوتي د تابع مساوات دی: $g(x) = \frac{1}{4}x + 1$

تیتټکی: $T\left(2+\ln(4)\,\middle|\,\frac{7}{4}+\frac{1}{4}\ln(4)\right) \approx (3{,}386\,|\,2{,}097)$

ت-په نخښه شوې سطحه ده:

$$A = e^2 - e^{-\ln(4)} = e^2 - \frac{1}{4} \approx 7{,}139$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ت- $A = e^2 \approx 7{,}389$

په دې ارزښت سطحه تغیر خوري، که ښۍ پوله د ناپای په لور لاړه شي.

مفصل ځوابونه:

لومړی:

د $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x$ د $P(4|2) \Rightarrow x_0 = 4$ له لارې تانجنت

$$f'(x) = \frac{3}{8}x^2 - 3x + \frac{9}{2}$$

$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \qquad n(x) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$$

$$f(x_0) = f(4) = 2; f'(x_0) = f'(4) = -\frac{3}{2}$$

$$t(x) = -\frac{3}{2}(x-4) + 2 = \underline{\underline{-\frac{3}{2}x + 8}}$$

$$n(x) = \frac{2}{3}(x-4) + 2 = \underline{\underline{\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}}}$$

د تانجنت غوښتکی د x محور سره:

$$t(x) = 0 \Leftrightarrow x_t = \frac{16}{3}$$

د نورمالي غوښتکی د x محور سره.

$$n(x) = 0 \Leftrightarrow x_n = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د درېګوډي سطحه: $A = \frac{g \cdot h}{2}$ د $g = x_t - x_n = \frac{16}{3} - 1 = \frac{13}{3}$

او $h = 2 \Rightarrow A = \frac{\frac{13}{3} \cdot 2}{2} = \frac{13}{3} FE$ (دسطحې یوون یا واحد) سره.

دویم: $f(x) = (2-x)e^{\frac{1}{2}x}$

اول: د محورغوڅتکو شمیرنه.

د y محور سره غوڅتکی:

$$f(0) = (2-0)e^{\frac{1}{2} \cdot 0} = 2e^0 = 2 \Rightarrow P_y(0|2)$$

د x محور سره غوڅتکی

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow (2-x)e^{\frac{1}{2}x} = 0 \Leftrightarrow (2-x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2$$

ضریب $e^{\frac{1}{2}x}$ نه صفر کیږي، نو $P_{x1}(2|0)$.

دوه: کرښه د د محور غوڅتکو $P_y(0|2)$ او $P_{x1}(2|0)$ له لارې.

$$g(x) = a_1 x + a_0 \quad a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0-2}{2-0} = -1 \Rightarrow g(x) = -x + a_0$$

ازمایښت: $P_y(0|2)$ $g(0) = 2 \Leftrightarrow -0 + a_0 = 2 \Rightarrow a_0 = 2$

$$\Rightarrow g(x) = -x + 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم: اوړون – یا انعطافټکی

$$f(x)=(2-x)e^{\frac{1}{2}x}=u(x)\cdot v(x)\Rightarrow f'(x)=u'v+uv'$$

$$u=(2-x);u'=-1;v=e^{\frac{1}{2}x};v'=\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f'(x)=-1\cdot e^{\frac{1}{2}x}+(2-x)\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}=\left[-1+\frac{1}{2}(2-x)\right]e^{\frac{1}{2}x}=\underline{\underline{-\frac{1}{2}x\cdot e^{\frac{1}{2}x}}}$$

$$f'(x)=-\frac{1}{2}x\cdot e^{\frac{1}{2}x}=u(x)\cdot v(x)\Rightarrow f''(x)=u'v+uv'$$

$$u=-\frac{1}{2}x;u'=-\frac{1}{2};v=e^{\frac{1}{2}x};v'=\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f''(x)=-\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}-\frac{1}{2}x\cdot\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}=\underline{\underline{-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}x\right)e^{\frac{1}{2}x}}}$$

$$f''(x)=-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}x\right)e^{\frac{1}{2}x}=u(x)\cdot v(x)\Rightarrow f'(x)=u'v+uv'$$

$$u=-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}x\right);u'=-\frac{1}{4};v=e^{\frac{1}{2}x};v'=\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f'''(x)=-\frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}x}-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}x\right)\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}=\underline{\underline{-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{4}x\right)e^{\frac{1}{2}x}}}$$

$$f''(x)=0\Leftrightarrow-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}x\right)e^{\frac{1}{2}x}=0\Leftrightarrow1+\frac{1}{2}x=0\Leftrightarrow\underline{\underline{x_w=-2}}$$

$$f'''(x_w)=f'''(-2)=-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{4}(-2)\right)e^{\frac{1}{2}(-2)}=\frac{1}{4e}\neq0$$

$$\Rightarrow x_w=-2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا اړونټکی یا انعطافټکی دی.

$$y_w = f(x_w) = f(-2) = (2-(-2))e^{\frac{1}{2}(-2)} = 4e^{-1} = \frac{4}{e}$$

$$\Rightarrow W\left(-2 \mid \frac{4}{e}\right)$$

څلور: د اوړونټکي یا انعطاف ټکي تانجنت

$$f(x) = (2-x)e^{\frac{1}{2}x} \qquad f'(x) = -\frac{1}{2}x \cdot e^{\frac{1}{2}x} \qquad W\left(-2 \mid \frac{4}{e}\right)$$

$$f'(x_w) = f'(-2) = -\frac{1}{2}(-2)\cdot e^{\frac{1}{2}(-2)} = \frac{1}{e}$$

$$f(x_w) = f(-2) = (2-(-2))e^{\frac{1}{2}(-2)} = \frac{4}{e}$$

$$\Rightarrow t(x) = \frac{1}{e}(x+2) + \frac{4}{e} = \frac{1}{e}x + \frac{6}{e}$$

$t(x) = f'(x_w)(x - x_w) + f(x_w)$ د $x_w = -2$: سره لرو

پنځه: د x محوراو g(x)=-x+2 سره د اوړونټانجنت یا انعطافتانجنت غوڅټکي

$$t(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{e}x + \frac{6}{e} = 0 \Leftrightarrow x = -6$$

د انعطافټکي یا اونټکي صفرځایونه.

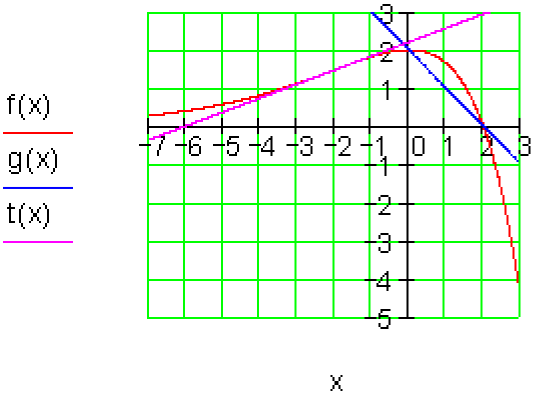
$$t(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{1}{e}x + \frac{6}{e} = -x + 2 \Leftrightarrow x_s = \frac{2e-6}{1+e}$$

$$y_s = g(x_s) = -\frac{2e-6}{1+e} + 2 = \frac{6-2e}{1+e} + 2 = \frac{8}{1+e}$$

د درېګوډي یامثلث جګوالی دی.

شپږ:

(c) ketabton.com: The Digital Library

	د درېګوډي د مساحت شميرنه د درېګوډي یا مثلث جګوالی: $h = y_s = \frac{8}{1+e}$ سطحه: A=g.h/ 2 g له x=-6 څخه د واټن په حيث تر x=2 => g=8 پورې. $A = \frac{8\cdot\frac{8}{1+e}}{2} = 4\cdot\frac{8}{1+e}$ $= \frac{32}{1+e} \approx 8,606\,FE$ (د سطحې یوون یا واحد)

دريم:

الف- $f(x) = e^{2-x} + \frac{1}{4}x + 1$

د y محور سره د غوځې لپاره شرطونه:

$$y_s = f(0) \Leftrightarrow y_s = e^{2-0} + \frac{1}{4}\cdot 0 + 1 = e^2 + 1 \approx 8,389$$

$$\Rightarrow P_y\left(0 \mid e^2+1\right) \text{ bzw. } P_y\left(0 \mid 8,389\right)$$

پورته: bzw = همداسې.

ب- $f(x) = e^{2-x} + \frac{1}{4}x + 1$

g(x) د f(x) اسيمپتوت یا ګاونډ(مجانب) دی داپه دې معنا، چې د f(x) ګراف د لوی x ارزښتونو لپاره د g(x) په لور ځغلي.

د $e^{2-x} = e^{-(x-2)}$ لوی x ارزښت لپاره د صفر په لور ځغلي، داسې چې f(x) د لوی x ارزښت لپاره فقط نور د برخترم $\frac{1}{4}x+1$ له لارې تاکل کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

....

نو له دې د ګاوند یا مجانب د تابعمساوات $g(x)=\frac{1}{4}x+1$: دی.

پ-

$$f(x)=e^{2-x}+\frac{1}{4}x+1 \Rightarrow f'(x)=-e^{2-x}+\frac{1}{4} \Rightarrow f''(x)=e^{2-x}$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow -e^{2-x}+\frac{1}{4}=0 \mid +e^{2-x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}=e^{2-x} \mid \ln$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{4}\right)=\ln\left(e^{2-x}\right)$$

$$\Leftrightarrow \ln(1)-\ln(4)=2-x$$

$$\Leftrightarrow -\ln(4)=2-x$$

<=> x=2+ln(4)=>

افراطي ارزښت په $x_e=2+\ln(4)\approx 3,386$ کې

$$f''(x_e)=f''(2+\ln(4))=e^{2-(2+\ln(4))}=e^{2-2-\ln(4)}$$

$$=e^{-\ln(4)}=e^{\ln\left(\frac{1}{4}\right)}=\frac{1}{4}>0 \Rightarrow \text{rel. Min bei } x_e=2+\ln(4)\approx 3,386$$

$$f(x_e)=f(2+\ln(4))=e^{2-(2+\ln(4))}+\frac{1}{4}(2+\ln(4))+1$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\ln(4)+1=\frac{7}{4}+\frac{1}{4}\ln(4)\approx 2,097$$

ټيټټکی:

$$\underline{\underline{T\left(2+\ln(4) \mid \frac{7}{4}+\frac{1}{4}\ln(4)\right)}}\approx(3,386 \mid 2,097)$$

ت- په نخښه شوې سطحه د f(x) او g(x) ګرافونو ترمنځ په انتروال $[0;x_e]$ کې پرته ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$A = \int_0^{x_e} [f(x) - g(x)]\, dx$ د $f(x) = e^{2-x} + \frac{1}{4}x + 1$ او $g(x) = \frac{1}{4}x + 1$ سره

کیږي $f(x) - g(x) = e^{2-x}$ او له دې سره $A = \int_0^{x_e} e^{2-x}\, dx$

بدلون:

$$x_e = 2 + \ln(4) \quad u = 2 - x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -1 \Leftrightarrow dx = -du$$

لاندې پوله u(0)=2 پورته پوله: $u(x_e) = 2 - (2 + \ln(4)) = -\ln(4)$:

$$A = -\int_2^{-\ln(4)} e^u\, du = \int_{-\ln(4)}^{2} e^u\, du = [e^u]_{-\ln(4)}^{2} = e^2 - e^{-\ln(4)} = e^2 - \frac{1}{4} \approx 7{,}139$$

ټ- په نخښه شوې سطحه د f(x) او g(x)ګرافونو ترمنځ په انتروال $[0;\infty]$ کې پرته ده

$A = \int_0^{\infty} [f(x) - g(x)]\, dx$ د $f(x) = e^{2-x} + \frac{1}{4}x + 1$ او $g(x) = \frac{1}{4}x + 1$ سره

کیږي $f(x) - g(x) = e^{2-x}$

او له دې سره

$A = \int_0^{\infty} e^{2-x}\, dx$ یو نا معلوم؟؟؟ انتیګرال دی له دې لاس ته راځي $A = \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} e^{2-x}\, dx$.

بدلون: u=2 => du/dx =-1 => dx=-du

لاند پوله u(0)=2 پورته پوله: u(b)02-b

$$A = \lim_{b\to\infty}\left(-\int_2^{2-b} e^u\, du\right) = \lim_{b\to\infty}\int_{2-b}^{2} e^u\, du = \lim_{b\to\infty}[e^u]_{2-b}^{2} =$$

$$= \lim_{b\to\infty}[e^2 - e^{2-b}] = e^2 \approx 7{,}389$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځکه چي $\lim_{b\to\infty} e^{2-b} = \lim_{b\to\infty} e^{-(b-2)} = 0$

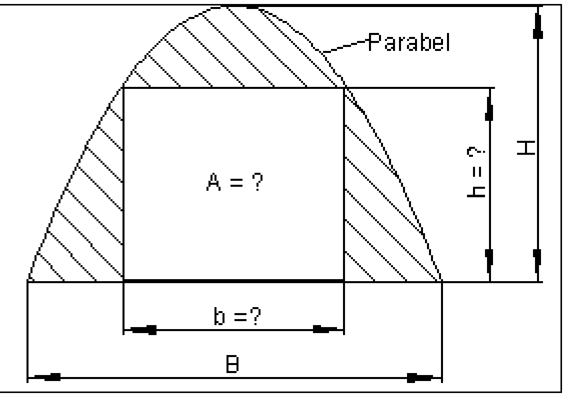
پوښتنې

مشتق او انتیګرال شمیرنه III

ګډوله پوښتنې

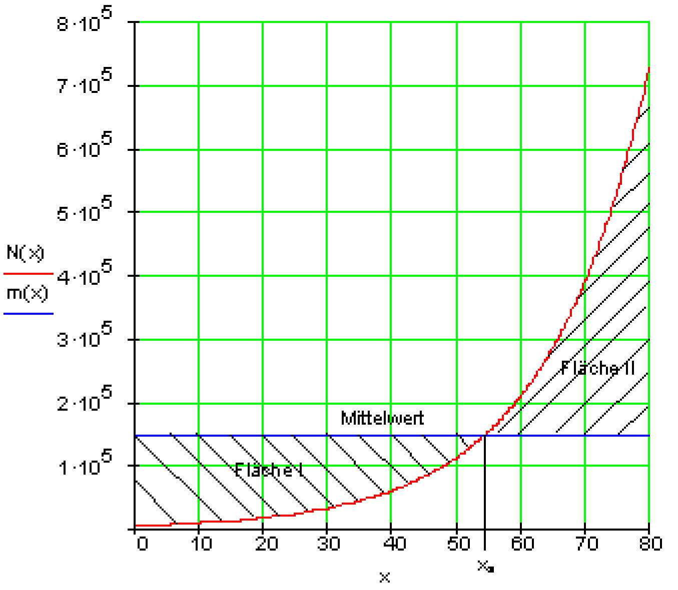
لوړمی:

په یوه پارابول ډوله دیوال دې یوه ولاړګوډیزه کړکۍ کینول شي، تر ځمکې رسیږي. د دیوال کچه $B = 4\ m$, (سور) $H = 4\ m$ (جګوالی) ده.

	الف- کړکۍ باید کومه کچه (سور او جګوالی) ولري، له کومې سره چې د کړکۍ سطحه خورا لویه یا ماکسیمال شي؟ د کړکۍ سطحه څومره ده؟ ب- دا د دیوال پاتې سطحه دې رنګ شي. دا سطحه څومره لویه ده.

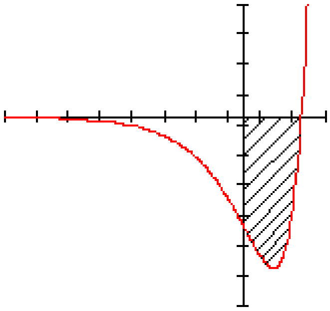
غوښتنې: د ککرۍ ټکي مساوات، افراطي ارزښت شمیرنه، ټاکلی انتیګرال، ریښه قانونونه.دویم: د یوې باکتریا کلتور(وده) اکسپوننشل جګیږي. د 48 ساعته په دننه کې دبکتریاو ګڼون یا تعداد له 5000 و 100000 ته زیات کړ.(100000همداسې x ، وخت په ساعت)

(c) ketabton.com: The Digital Library

 	الف- د ودي تابع وټاکی. ب- د باکترياو تعداد د کوم وختپه دننه کي دوه برابره کيږي؟ پ- د لومړيو 80 ساعتونو د بکترياو د تعداد منځارزښت جوړ کړی. ت- په ځنګ ګراف کي د ودي تابع N(x) او منځ ارزښت m(x) کښل يا ځيره شوي. وښايی چي دواړه په نخښه شوي سطحي برابري لويي دي. دا روښانه کړی، چي دا ولي داسي بايد وي.

غوښتني: تابع ، توانقوانين، لوګاريتم قوانين، اکسپوننشلمساوات، منځ ارزښت، ټاکلی انتيګرال.

دريم:

	ورکړشوي تابع $f(x) = e^{2x} - 4 \cdot e^{x}$ وټاکی: محور غوڅتکي، ټيټتکي، اوړون-انعطافتکي په نخښه شوي سطحه وټاکی:

پوښتني: اکسپوننشلمساوات، افراطي ارزښتونه، د بدلون له لاري انتيګرال.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځوابونه

مشتق او انتیګرال شمیرنه III

ګډوله پوښتنې
نتیجې او مفصل ځوابونه

نتیجې:
لومړی:
الف-

د کړکی سو: $b = \sqrt{\frac{16}{3}} \approx \underline{\underline{2{,}309\,m}}$

د کړکی جګوالی: $h = f\left(\frac{b}{2}\right)$ mit $\frac{b}{2} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{16}{3}} = \frac{2}{3}\cdot\sqrt{3}$ und $f(x) = -x^2 + 4$

$$h = -\left(\frac{2}{3}\cdot\sqrt{3}\right)^2 + 4 = -\frac{4}{9}\cdot 3 + 4 = -\frac{4}{3} + 4 = \underline{\underline{\frac{8}{3} \approx 2{,}\overline{6}\,m}}$$

د کړکی سطحه: $\underline{\underline{A = h\cdot b = \frac{8}{3}\cdot\sqrt{\frac{16}{3}} \approx 6{,}158\,m^2}}$

ب- پاتې سطحه: د پارابول منځ کې سطحه ترې کم د کړکی سطحه.

پاتې – یا باقي سطحه: $\frac{32}{3} - \frac{8}{3}\sqrt{\frac{16}{3}} \approx \underline{\underline{4{,}508\,m^2}}$

دویم:
الف- د ودې تابع دی:

$$N(t) = 5000\cdot e^{\frac{1}{48}\ln(20)t}$$

ب- د باکتریا تعداد هر ټول 11,106 ساعتونه دوه برابره کیږي

پ- په منځنی توګه په لومړیو 80 ساعتونو کې146570 باکتریاوې شتون لري

ت-تابع$m(x) = m$ دودې تابع $N(x)$ منځ ارزښت جوړوي. د سطحی برخه(سطحهI)

، چې د $m(x) = m$ لاندې یا کښته لور ته پرته ده باید ټیک همدومره لویه وي لکه د

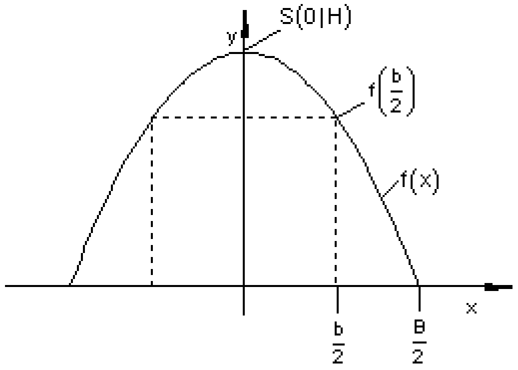
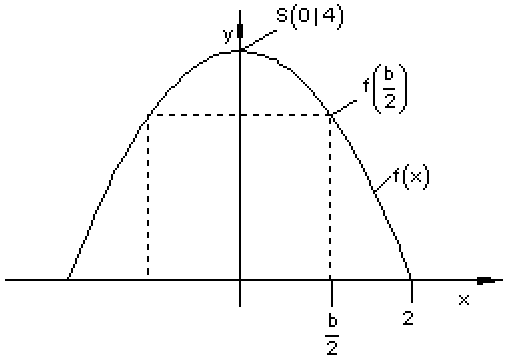
(c) ketabton.com: The Digital Library

....

سطحې برخه(سطحه II)، چې د m(x) = m پورته لور ته پرته ده. دا د منځ ارزښت ښخه لاس ته راځي. دا چې اوس N(x) د سطحېI په ورشو یا ساحه کې کښته لورته پروت دی، هلته د امتیګرال ارزښت کمیز یا منفي دی. داچې N(x) د سطحی II په ورشو یا ساحه کې پورته لور پروت دی، هلته د انتیګرال ارزښت زیاتیز یا مثبت دی. نو د دې پسې یا تعقیب باید په ټوله سطحه د انتیګرال منځ ارزښت صفر وي.
دریم:

د y محور سره غوڅټکی:	: $P_y(0 \mid -3)$
د x محور سره غوڅټکی:	: $P_x(\ln(4) \mid 0)$ bzw. $P_x(1{,}39 \mid 0)$
تتیټکی:	$P_{Min}(\ln(2) \mid -4)$ bzw $P_{Min}(0{,}69 \mid -4)$
اوړ,ن-یا د انعطاف ټکی:	$P_w(0 \mid -3)$
په نخښه شوې سطحه: bzw=همداسې	$A = \left\lvert -\frac{9}{2} \right\rvert = \frac{9}{2} FE = 4{,}5\, FE$

مفصل حلونه

لومړی: د پرابلم یا مسئلې ریاضي کونه عمومي :	
د B = 4 m, H = 4 m لپاره ځانګړی	

(c) ketabton.com: The Digital Library

....

الف –

ږدو: $f(x)=a_2x^2+4$ د S(0|4) له امله ککرۍ ټکی

$$P(2|0)\Rightarrow f(2)=0\Leftrightarrow a_2\cdot 2^2+4=0\,|-4$$
$$\Leftrightarrow 4a_2=-4\,|:4$$
$$\Leftrightarrow a_2=-1$$

د پارابول مساوات: f(x)=-x²+4

د مستطیل یا ولاړګوډیز سطحه A=b.h د $h=f\left(\frac{b}{2}\right)=-\left(\frac{b}{2}\right)^2+4=-\frac{b^2}{4}+4$ سره

$$\Rightarrow A(b)=b\cdot\left(-\frac{b^2}{4}+4\right)=-\frac{1}{4}b^3+4b$$

د A(b) خورا جګ ارزښت غواړو پیدا کړو(افراطي ارزښت)

$$A(b)=-\frac{1}{4}b^3+4b\Rightarrow A'(b)=-\frac{3}{4}b^2+4\Rightarrow A''(b)=-\frac{3}{2}b$$

د افراطي ارزښت لپاره اړیین شرطونه:

$$A'(b)=0\Leftrightarrow -\frac{3}{4}b^2+4=0\,|:-4$$
$$\Leftrightarrow -\frac{3}{4}b^2=-4\,|:\left(-\frac{3}{4}\right)$$
$$\Leftrightarrow b^2=\frac{16}{3}\,|\sqrt{\ }$$
$$\Leftrightarrow |b|=\frac{16}{3}\Rightarrow b_1=\sqrt{\frac{16}{3}}\text{ bzw. }b_2=-\sqrt{\frac{16}{3}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

b1 ارزښتوو یا رانیسو، ځکه چې کمیزه یا منفي سطحه نه لرو یا نه شته.

په افراطیت ازماېښت:

$$A''(b_1) = A''\left(\sqrt{\frac{16}{3}}\right) = -\frac{3}{2}\cdot\sqrt{\frac{16}{3}} < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } b_1 = \sqrt{\frac{16}{3}}$$

د کړکۍ سور: $b = \sqrt{\frac{16}{3}} \approx \underline{\underline{2,309\text{ m}}}$

د کړکۍ جګوالی: $h = f\left(\frac{b}{2}\right)$ د $\frac{b}{2} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{16}{3}} = \frac{4}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{3}} = 2\cdot\sqrt{\frac{3}{9}} = \frac{2}{3}\cdot\sqrt{3}$:

او $f(x)=-x^2+4$ سره کیږي

$$h = -\left(\frac{2}{3}\cdot\sqrt{3}\right)^2 + 4 = -\frac{4}{9}\cdot 3 + 4 = -\frac{4}{3} + 4 = \frac{8}{3} \approx 2,\bar{6}\text{ m}$$

د کړکۍ سطحه: $A = h\cdot b = \underline{\underline{\frac{8}{3}\cdot\sqrt{\frac{16}{3}} \approx 6,158\text{ m}^2}}$

ب – پاتې سطحه: د پارابول لاندط یا ګښته سطحه ترې کم یا منفي د کړکۍ سطحه.

د پارابول لاندې سطحه:

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \int_{-2}^{2}\left(-x^2+4\right)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 4x\right]_{-2}^{2}$$

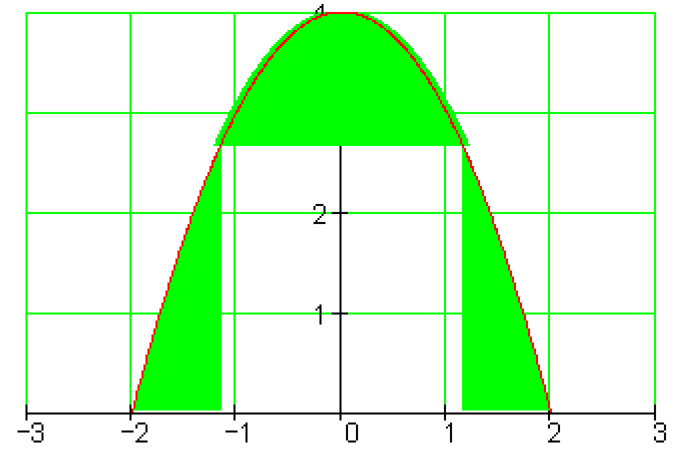
$$= -\frac{1}{3}\cdot 2^2 + 4\cdot 2 - \left[-\frac{1}{3}\cdot(-2)^3 + 4\cdot(-3)\right]$$

$$= -\frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} + 8 = 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3} \approx 10,\bar{6}\text{ m}^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پاتې یا باقي سطحه:

$$\frac{32}{3}-\frac{8}{3}\sqrt{\frac{16}{3}}\approx 4,508\ m^2$$



دویم –

الف - د ودې تابع لپاره اینوونه: $N(t)=N_0\cdot e^{k\cdot t}$ د $N_0=5000$ سره.

د ۴۸ ساعته وروسته باور لري: $N_{48}=N_0\cdot e^{48\cdot k}$ د $N_{48}=100000$ سره.

د ودې فامتور یا ضیب یا څلوونی دې وتاکل شي.

$$N_{48}=N_0\cdot e^{48\cdot k}\ |:N_0$$

$$\Leftrightarrow \frac{N_{48}}{N_0}=e^{48\cdot k}\ |\ln$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{N_{48}}{N_0}\right)=\ln\left(e^{48\cdot k}\right)=48k\ |:48$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{48}\cdot\ln\left(\frac{N_{48}}{N_0}\right)=k\ r$$

د عددونو سره $k=\frac{1}{48}\cdot\ln\left(\frac{100000}{5000}\right)=\frac{1}{48}\cdot\ln(20)$ کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

....

د ودې ضریب: $k = \frac{1}{48} \cdot \ln(20) \approx 0,0624$:

له دې سره د ودې تابع ده: $N(t) = 5000 \cdot e^{\frac{1}{48} \cdot \ln(20) \cdot t}$:

ب ـــ د باکتریانو تعدا یا ګنون ډبل یا دوه برابره کیږي

اینوونه: $2 \cdot N_0 = N_0 \cdot e^{\frac{1}{48}\ln(20) \cdot t} \quad | : N_0$

$$\Leftrightarrow 2 = e^{\frac{1}{48}\ln(20) \cdot t} \quad | \ln$$

$$\Leftrightarrow \ln(2) = \ln\left(e^{\frac{1}{48}\ln(20) \cdot t}\right) = \frac{1}{48}\ln(20) \cdot t \;|:\; \frac{1}{48}\ln(20)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(2)}{\frac{1}{48}\ln(20)} = t \Leftrightarrow t = \frac{48 \cdot \ln(2)}{\ln(20)} \approx 11,106$$

هر 11,106 ساعته د باکتریاو تعداد دوه برابره کیږي.

پ ـــ د ۸۰ ساعته وروسته منځ ارزښت

$$m = \frac{1}{80}\int_0^{80} N(t)\,dt = \frac{1}{80}\int_0^{80} N_0 \cdot e^{k \cdot t}\,dt = \frac{N_0}{80}\int_0^{80} e^{k \cdot t}\,dt$$

بدلون: $u(t) = k \cdot t \Rightarrow \frac{du}{dt} = k \Rightarrow dt = \frac{1}{k}du$:

لاندې پوله : $u(0)=k.0=0$ پورته پوله: $u(80)=80k$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$m=\frac{N_0}{80}\left(\frac{1}{k}\int_0^{80k} e^u\,du\right)=\frac{N_0}{80k}\left[e^u\right]_0^{80k}=\frac{N_0}{80k}\left(e^{80k}-1\right)$$

د $N_0=5000$ او $k=\frac{1}{48}\ln(20)$ سره کیږي

$$m=\frac{5000}{\frac{80}{48}\ln(20)}\left(e^{\frac{80}{48}\ln(20)}-1\right)=\frac{5000}{\frac{5}{3}\ln(20)}\left(e^{\frac{5}{3}\ln(20)}-1\right)$$

$$=\frac{15000}{5\cdot\ln(20)}\left(20^{\frac{5}{3}}-1\right)=\underline{\underline{\frac{3000}{\ln(20)}\left(20^{\frac{5}{3}}-1\right)\approx 146569{,}767}}$$

په منځنی توګه په لومړنیو 80 ساعتو کې ,146570اکتیاو ې شتون لري.

ت ــ $m(x)=m$ $N(x)=N_0\cdot e^{k\cdot x}$ ثابت یا همغه دی(د پوښتنې پ برخه وګورئ)

موږ انتیګرال جوړوو، کوم چې د دواړو پولو ترمنځ سطحه انځوروي.

$$\int_0^{80}\left(N(x)-m\right)dx=\int_0^{80}\left(N_0\cdot e^{k\cdot x}-m\right)dx=N_0\int_0^{80}e^{k\cdot x}\,dx-m\int_0^{80}dx$$

انتیګرالI: $\int_0^{80} e^{k\cdot x}\,dx$ د بدلون له لارې حل u(x)=k.x

$$\frac{du}{dx}=k\Rightarrow dx=\frac{1}{k}du$$

لاندې پوله : u(0)=k.0=0 پورته پوله:u(80)=80k

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_0^{80} e^{k\cdot x}\,dx = \frac{1}{k}\int_0^{80k} e^u\,du = \frac{1}{k}\left[e^u\right]_0^{80k} = \frac{1}{k}\left(e^{80k}-1\right)$$

انتیګرال II :

$$\int_0^{80} dx = \left[x\right]_0^{80} = 80$$

$$N_0\int_0^{80} e^{k\cdot x}\,dx - m\int_0^{80} dx = \frac{N_0}{k}\left(e^{80k}-1\right) - 80m$$

ارزښتونه کیږدئ یا وضعه کړئ

$$N_0 = 5000\,;\ k = \frac{1}{48}\ln(20)\,;\ m = \frac{3000}{\ln(20)}\left(20^{\frac{5}{3}}-1\right)$$

$$\frac{N_0}{k}\left(e^{80k}-1\right) - 80m = \frac{5000}{\frac{1}{48}\ln(20)}\left(e^{80\cdot\frac{1}{48}\ln(20)}-1\right) - \frac{80\cdot 3000}{\ln(20)}\left(20^{\frac{5}{3}}-1\right)$$

$$= \frac{240000}{\ln(20)}\left(20^{\frac{5}{3}}-1\right) - \frac{240000}{\ln(20)}\left(20^{\frac{5}{3}}-1\right) = 0$$

تابع m(x) = m د ودې تابع N(x) منځ ارزښت جوړوي. د سطحې (برخه I) د m(x) کښته لور ته باید ټیک همدومره لویه وي، لکه د سطحې برخه (برخهII) ، چې د m(x) پورته لور ته پرته ده. دا له منځ ارزښت څخه راځي یا لرو. دا چې د N(x) د سطحې I په ورشو کې د m(x) کښته لور ته پروت دی ، هلته د انتیګرال ارزښت کمیز یا منفي دی. دا چې N(x) د سطحې I I په ورشو کې د m(x) پورته لور ته پروت دی، نو هلته د انیتګرال ارزښت زیاتیز یا مثبت دی. د دې په تعقیب یا په دې پسې د انتیګرال په ټوله سطحه کې چې منځ ارزښت یې جوړ شو، نو منځ ارزښت باید په صفر برابر وي. پورته شمیرنه په ګوته کوي، چې دا حالت دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

....

دریم -

لومړی: محور غوځتکي:

$$f(x) = e^{2x} - 4 \cdot e^{x}$$

د y محور سره غوځتکي

$$y_s = f(0) = e^{0} - 4 \cdot e^{0} = 1 - 4 = -3 \Rightarrow \underline{P_y(0|-3)}$$

دx محور سره غوځتکي

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 4 \cdot e^{x} = 0$$ (اکسپوننشل مساوات)

د حل اینسوونه د لوگاریتم له لارې:

$$e^{2x} - 4 \cdot e^{x} = 0 \,|\, +4 \cdot e^{x}$$

$$\Leftrightarrow e^{2x} = 4 \cdot e^{x} \,|\, \ln(\ )$$

( )lnپه دې معنا چې د دواړو اړخونو لوگاریتم ونیسئ

$$\Leftrightarrow \ln\left(e^{2x}\right) = \ln\left(4 \cdot e^{x}\right)$$
$$\Leftrightarrow 2x \cdot \ln(e) = \ln(4) + x\ln(e)$$
$$\Leftrightarrow 2x = \ln(4) + x \,|\, -x$$

$$\Leftrightarrow x = \ln(4) \approx 1{,}39 \Rightarrow$$

صفرځایونه: $\underline{\underline{P_x(\ln(4)|0)}}$ I همداسې $\underline{\underline{P_x(1{,}39|0)}}$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم:

$$f(x) = e^{2\cdot x} - 4\cdot e^x \,;\, f'(x) = 2e^{2\cdot x} - 4e^x \,;\, f''(x) = 4e^{2\cdot x} - 4e^x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^{2\cdot x} - 4e^x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2e^{2\cdot x} = 4\cdot e^y \mid : 2$$

$$\Leftrightarrow e^{2\cdot x} = 2\cdot e^x \mid \ln(\ )$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(e^{2\cdot x}\right) = \ln\left(2\cdot e^x\right)$$

$$\Leftrightarrow 2x\cdot \ln(e) = \ln(2) + x\cdot \ln(e)$$

$\Leftrightarrow 2x = \ln(2) + x \Rightarrow x_e = \ln(2)$ د پراته تانجنت سره ځای دی)

$$f''(x_e) = f''(\ln(2)) = 4\cdot e^{2\cdot \ln(2)} - 4\cdot e^{\ln(2)} = 4\cdot\left(e^{\ln(2)}\right)^2 - 4\cdot e^{\ln(2)}$$

له $e^{\ln(2)} = 2$ سره کیږي

$$f''(\ln(2)) = 4\cdot 2^2 - 4\cdot 2 = 8 > 0 \Rightarrow \text{ rel Min für } x_e = \ln(2)$$

$$y_e = f(\ln(2)) = e^{2\cdot \ln(2)} - 4\cdot e^{\ln(2)} = \left(e^{\ln(2)}\right)^2 - 4\cdot e^{\ln(2)} = 2^2 - 4\cdot 2 = -4$$

$$\Rightarrow P_{Min}(\ln(2) \mid -4) \text{ bzw } P_{Min}(0{,}69 \mid -4)$$

دريم: اوړنتکی یا د انعطاف ټکی f’’(x)00 او $f'''(x) \neq 0$

$$f(x) = e^{2\cdot x} - 4\cdot e^x \,;\, f'(x) = 2\cdot e^{2\cdot x} - 4\cdot e^x \,;\, f''(x) = 4\cdot e^{2\cdot x} - 4\cdot e^x \,;$$

$$;\, f'''(x) = 8\cdot e^{2x} - 4\cdot e^x$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 4\cdot e^{2\cdot x} - 4\cdot e^x = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\cdot e^{2\cdot x} = 4\cdot e^x \mid : 4$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\Leftrightarrow e^{2\cdot x} = e^x \Rightarrow x_w = 0$ ځکه چي 2x=x فقط د x=0 لپاره کیدونکی دی.

$f'''(x_w) = f'''(0) = 8\cdot e^0 - 4\cdot e^0 = 8\cdot 1 - 4\cdot 1 = 4 \neq 0 \Rightarrow x_w = 0$ صفرځای دی

$$f(x_w) = f(0) = e^0 - 4\cdot e^0 = 1 - 4\cdot 1 = -3 \Rightarrow \underline{\underline{P_w(0|-3)}}$$

ځلورم:

$$\int_0^{\ln(4)} f(x)\,dx = \int_0^{\ln(4)} \left(e^{2\cdot x} - 4\cdot e^x\right) dx = \int_0^{\ln(4)} e^{2\cdot x}\,dx - 4\int_0^{\ln(4)} e^x\,dx$$

برخه انتیګرال د بدلون له لارې حلونه. الماني= او له دې سره

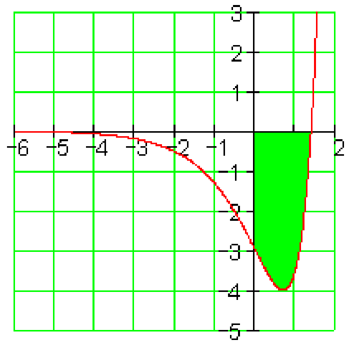
$$\int e^{2\cdot x}\,dx \text{ Substitution: } u(x) = 2x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{1}{2}du$$

$$\frac{1}{2}\int e^u\,du = \frac{1}{2}e^u \Rightarrow \int e^{2\cdot x}\,dx = \frac{1}{2}e^{2\cdot x} \text{ und mit } \int e^x\,dx = e^x$$

$$\int_0^{\ln(4)} f(x)\,dx = \left[\frac{1}{2}e^{2\cdot x} - 4e^x\right]_0^{\ln(4)} = \left[\frac{1}{2}e^{2\cdot\ln(4)} - 4e^{\ln(4)}\right] - \left[\frac{1}{2}e^0 - 4e^0\right]$$

$$= \left[\frac{1}{2}\cdot 16 - 4\cdot 4\right] - \left[\frac{1}{2}\cdot 1 - 4\cdot 1\right] = -\frac{9}{2}$$

$$A = \left|-\frac{9}{2}\right| = \frac{9}{2}\,FE = \underline{\underline{4,5\,FE}}$$

	په پورته کې FE (د سطحي یوون یا واحد)

(c) ketabton.com: The Digital Library

....

پوښتنې

مشتق- او انتیګرالشمیرنې ته د استعمال پوښتنې II

Infusion او ګډې وډېپوښتنې

لومړی:

د عملیات وروسته ناروغ ته اینفوزیونInfusion (اینفوزیونInfusion لاتین کلمه ده، چې له *infundere* اخست شوی او دلته د ،،ښاخښکي ښاخښکي،، په مانا ده، چې بدن ته ننوځي) اخلي یا اینفوزیون ورکوي. څیره دوزې Dosierung ښایي چې ناروغ ته یوه 24 ساعته وخت په انتروال کې ورکول کیږي. دوزې په دې معنا دی: په وخت کې mg/h. پیل کیږي د1 mg/h دوزې سره.

الف- د دوزې ورکونو تلنه وښایې.

ب- د دوزې تلنه د یوه لاندې اکسپوننشل تابع سره مودل کیږي.

$$f(x) = n_0 + a \cdot x \cdot e^{k \cdot x}$$

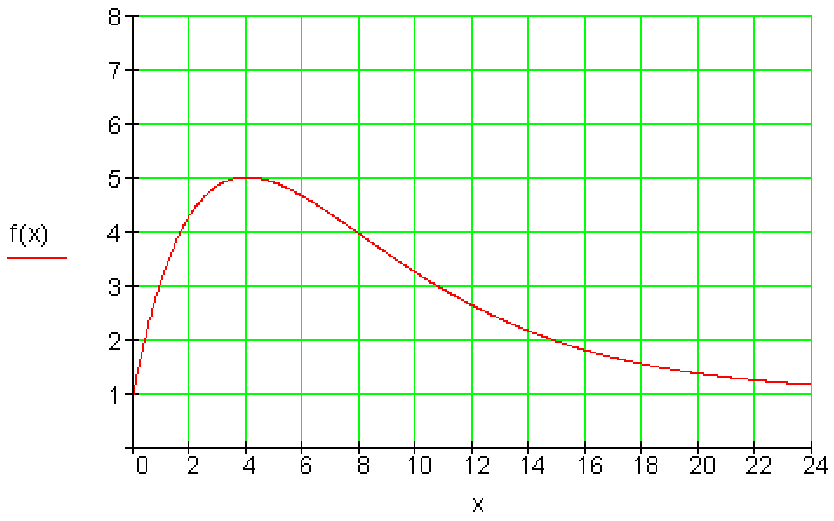
د او لپاره مناسب ارزښتونه وسمیرئ، که له ساعته وروسته یو خورا لجګه دوزې ورکونه د دا نوره بس شي.

تابع مساوات څنګه دي؟

پ- په کوم وخت کې د دوزې کمیدنه به زور سره صورت نیسي؟

ت- د ورکړ شوې دوا ډېرئ یا سټ وشمیرئ، که اینفوزیون 24 صورت ونیي.

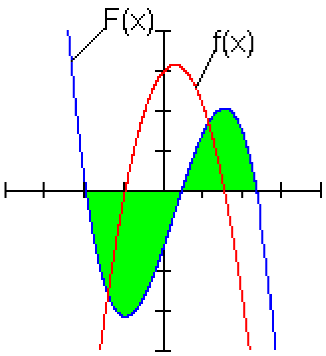
(c) ketabton.com: The Digital Library



غوښتنه: e - تابع ، مشتق، افراطي ارزښتونه، اوړنټکی یا د انعطاف ټکی، ټاکلی انتیګرال.

دویم: لاندې تابع ورمړ شوی دی:

$$f(x) = -2x^2 + x + 3$$

الف-د بنسټ تابع F(x) ګراف د ټکي (0 | 2-) له لارې څغلي. د F(x) تابع مساوات وټاکی. ب- دا په څنګ کې د ګراف په نخښه شوې سطحه وشمیرئ. د شمیرنې تیکوالی: د لسمیز یا عشاریه څخه درځایه وروسته.	

غوښتنه: ټول راشنل یا هوښیار. بنسټ تابع، c وټاکی، صفرځایونه،ټاکلی انتیګرال.

(c) ketabton.com: The Digital Library

....

حلونه(اوبیونې)

مشتق- او انتیګرالشمېرنې ته داستعمال پوښتنې II

نتیجې او مفصل حلونه

اول – نتیجې:

الف – د تلنو تشریح:

دوزې ورکونه له 1 mg/h څخه پیل کیږي. بیا یوغړیزه جګیږي، چې ۴ ساعته وروسته د5 mg/h یو خورا حګ ارزښت ته ورسیږي. له دې وذوسته ټیټیږي، لوړمی په زور یا قوي، بیا لږ په زور، یو غړیزکمیږي.

ب – د دوزې ورکونې تابع مساوات دي:

$$f(x) = 1 + e \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{4}x}$$

پ – د دوزې ورکونې کموالی د x = 8 ساعته وروسته په زور یا قوي دی. دا ا وړنځای یا انعطافځای دی.

ت -

$$M = \int_0^{24} \left(1 + e \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{4}x}\right) dx = 24 - 112e^{-5} + 16e \approx 66{,}738$$

په 24 ساعته کې د ورکړ شوو د دارو ډېرى یا سټ نږدې 67 mg دی.

دویم – نتیجه.

الف- د بنسټتابع F(x) تابعمساوات داسي دي:

$$F(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{4}{3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

....

ب – د په نخښه شوې سطحې منځپانګه یا مساحت نږدې دی:

$$A \approx 4{,}955 + 2{,}522 \approx 7{,}477\ FE$$

FE د سطحې واحد یا یوون

اول- مفصل حل : دلته بې نه شته؟؟؟

الف – د تلنې تشریح یا روښانونه:

دوزې ورکونه له 1 mg/h څخه پیل کیږي. بیا یوغږیزه جګیږي، چې ۴ ساعته وروسته د5 mg/h یو خورا حګ ارزښت ته ورسیږي. له دې وروسته ټیټیږي، لوړمی په زور یا قوي، بیا لږ په زور، یو غږیزکمیږي.

ب – د دوزې ورکونې تابع مساوات دي:

$$A \approx 4{,}955 + 2{,}522 \approx 7{,}477\ FE$$

FE د سطحې واحد یا یوون

پ -

اینبوونه: $f(x) = n_0 + a \cdot x \cdot e^{k \cdot x}$

پیلدوزېورکونه: $n_0 = 1\,mg/h \Rightarrow f(x) = 1 + a \cdot x \cdot e^{k \cdot x}$

د$x=4$ ساعته وروسته خورا لویه یاماکسیمال دوزې ورکونه په دې معنا:

$f(x)$ په $x=4$ کې پروت یا افقي تانجنت لري، یعنې $f'(x) = 0$

$f'(x)=u'v+uv'$ د$u=a.x$ او $v = e^{k \cdot x}$ همداسې$u'=a$ او د $v' = k \cdot e^{k \cdot x}$ سره:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f'(x) = a\cdot e^{k\cdot x} + a\cdot x\cdot e^{k\cdot x} = a\cdot e^{k\cdot x}(1+k\cdot x)$$
$$f'(4) = 0 \Leftrightarrow a\cdot e^{4k}(1+4\cdot k) = 0$$
$$\Leftrightarrow 1+4\cdot k = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{4}$$
$$\Leftrightarrow f(x) = 1 + a\cdot x\cdot e^{-\frac{1}{4}x}$$

له x=4 ساعته وروسته: f(4)=5

$$f(4) = 5 \Leftrightarrow 1 + 4a\cdot e^{-\frac{1}{4}\cdot 4} = 5$$
$$\Leftrightarrow 1 + 4a\cdot e^{-1} = 5 \Leftrightarrow a = e$$

د دوزې ورکوني تابع مساوات: $\underline{\underline{f(x) = 1 + e\cdot x\cdot e^{-\frac{1}{4}x}}}$

ث – د دوزې ورکوني تغیر ارزښت(د وخت په واکوالي کې) د لومړي مشتق سره ټاکل کیږي. د دې ماکسیموم په اوړونټکي یا انعطافټکي کې پروت دی.

$$f(x) = 1 + e\cdot x\cdot e^{-\frac{1}{4}x}$$

لومړی مشتق

$$f'(x) = u'v + uv' \text{ mit } u = e\cdot x \text{ und } v = e^{-\frac{1}{4}x}$$

همداسې u’=e او $v' = -\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}x}$

$$f'(x) = e\cdot e^{-\frac{1}{4}x} - \frac{e}{4}x\cdot e^{-\frac{1}{4}x} = e\cdot e^{-\frac{1}{4}x}\left(1-\frac{1}{4}x\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مشتق

$$f''(x) = u'v + uv' \text{ mit } u = e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \text{ und } v = 1 - \frac{1}{4}x$$

همداسې $u' = -\frac{1}{4} e \cdot e^{-\frac{1}{4}x}$ او $v' = -\frac{1}{4}$

$$f''(x) = -\frac{1}{4} e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \cdot (1 - \frac{1}{4}x) - \frac{1}{4} e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} = -\frac{1}{4} e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \cdot (2 - \frac{1}{4}x)$$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{4}x = 0 \Rightarrow x_w = 8$ د اوښتون ځای (د انعطاف ځای) لپاره شرایط

دریم مشتق

$$f'''(x) = u'v + uv' \text{ mit } u = -\frac{1}{4} e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \text{ und } v = 2 - \frac{1}{4}x$$

همداسې $u' = \frac{1}{16} e \cdot e^{-\frac{1}{4}x}$ او $v' = -\frac{1}{4}$

$$f'''(x) = u' = \frac{1}{16} e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \cdot (2 - \frac{1}{4}x) + \frac{1}{16} e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} = \frac{1}{16} e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \cdot (3 - \frac{1}{4}x)$$

$$f'''(x_w) = f'''(8) = \frac{1}{16} e \cdot e^{-2} \cdot (3 - \frac{1}{4}8) = \frac{1}{16} e^{-1} \neq 0$$

له دې لاس ته راځي، چې $\Rightarrow x_w = 8$ د f(x) اوښتونځای(د انعیاف ځای)

د ګولۍ ورکولو Dosierungوخت له8 = x ساعته وروسته خورا قوي دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

....

ت – د ورکړشوو ګولیو یا دارو ډېریو یا ستونو سطحه د ګراف او دx محور ترترمنځ ده، ځکه چيmg/h.h=mg .

د دې سره د یوې پیجکارۍ وخت ۲۴ ساعتونه بنسټ دی.

Menge = ډېرۍ

$$f(x) = 1 + e \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \Rightarrow Menge = M = \int_0^{24} f(x)\,dx = \int_0^{24}\left(1 + e \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{4}x}\right)dx$$

د پهI کې او په II کې یعني $I = \int_0^{24} 1dx$ او $II = \int_0^{24} x \cdot e^{-\frac{1}{4}x}\,dx$ د انتیګرال د وېشني په حیث

داسې چې باور لري: K=I+e.II

$$I = \int_0^{24} 1dx = [x]_0^{24} = 24$$

$II = \int_0^{24} x \cdot e^{-\frac{1}{4}x}\,dx$ د توته انتیګرال له لارې حل د $\int u \cdot v'dx = u \cdot v - \int u' \cdot v\,dx$: سره.

$$u(x) = x; v'(x) = e^{-\frac{1}{4}x}; u'(x) = 1; v(x) = \int e^{-\frac{1}{4}x}\,dx$$

ترمنځ شمیرنه

د بدلون له لارې حل: $\int e^{-\frac{1}{4}x}\,dx$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$: u(x) = -\frac{1}{4}x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{1}{4} \Rightarrow dx = -4\,du$$

$$\int e^{-\frac{1}{4}x}\,dx = -4\int e^{u}\,du = -4e^{u} = -4e^{-\frac{1}{4}x} = v$$

$$\int x \cdot e^{-\frac{1}{4}x}\,dx = x \cdot (-4e^{-\frac{1}{4}x}) - \int 1 \cdot (-4e^{-\frac{1}{4}x})\,dx = -4x \cdot e^{-\frac{1}{4}x} + 4\int e^{-\frac{1}{4}x}\,dx$$

$$= -4x \cdot e^{-\frac{1}{4}x} - 16e^{-\frac{1}{4}x} = -4e^{-\frac{1}{4}x}(x+4)$$

$$\Rightarrow II = \int_0^{24} x \cdot e^{-\frac{1}{4}x}\,dx = \left[-4e^{-\frac{1}{4}x}(x+4)\right]_0^{24} = -4e^{-6}(24+4) - [-4 \cdot 4] =$$

$$= -112e^{-6} + 16$$

$$\Rightarrow M = I + e \cdot II = 24 + e\left(-112e^{-6} + 16\right) = 24 - 112e^{-5} + 16e \approx 66{,}738$$

په 24 ساعته کې به نږدې د 67 mg د دواډېرى یا سټ ورکړ شي.

دویم – مفصل حل

الف –

$$f(x) = -2x^2 + x + 3$$

$$I(x) = \int f(x)\,dx = \int\left(-2x^2 + x + 3\right)dx = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x + C$$

$$P(-2\,|\,0) \Rightarrow I(-2) = 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{3}(-2)^3 + \frac{1}{2}(-2)^2 + 3 \cdot (-2) + C = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{16}{3} + 2 - 6 + C = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{4}{3}$$

$$F(x) = I(x) + C \Rightarrow \underline{\underline{F(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{4}{3}}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب ـــ د انتيګريشن پولې لپاره د F(x) صفرځايونه وټاکی.

$$F(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{4}{3}$$

معلوم دی.

	$-2/3$	$1/2$	3	$-4/3$
$x_1 = -2$	$\downarrow$	$4/3$	$-22/6$	$4/3$
	$-2/3$	$11/6$	$-2/3$	0

$$-\frac{2}{3}x^2 + \frac{11}{6}x - \frac{2}{3} = 0 \,|\, : \left(-\frac{2}{3}\right) \Leftrightarrow x^2 - \frac{11}{4}x + 1 = 0$$

$$p = -\frac{11}{4};\ q = 1 \Rightarrow D = \frac{57}{64}$$

$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_2 = \frac{11}{8} + \sqrt{\frac{57}{64}} \approx 2{,}319 \\ x_3 = \frac{11}{8} - \sqrt{\frac{57}{64}} \approx 0{,}431 \end{array} \right.$$

$$A = |A_1| + |A_2| = \left| \int_{x_1}^{x^2} f(x)\,dx \right| + \left| \int_{x_2}^{x_3} f(x)\,dx \right|$$

$$\text{mit } x_1 = -2;\ x_2 = \frac{11}{8} - \sqrt{\frac{57}{64}};\ x_3 = \frac{11}{8} + \sqrt{\frac{57}{64}}$$

$$A_1 = -\frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{4}{3}x \Big|_{x_1}^{x_2}$$

$$= -\frac{1}{6}x_2^4 + \frac{1}{6}x_2^3 + \frac{3}{2}x_2^2 - \frac{4}{3}x_2 + \frac{1}{6}x_1^4 - \frac{1}{6}x_1^3 - \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{4}{3}x_1 \approx -4{,}995$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A_2 = -\frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{4}{3}x\Big|_{x_2}^{x_3}$$

$$= -\frac{1}{6}x_3^4 + \frac{1}{6}x_3^3 + \frac{3}{2}x_3^2 - \frac{4}{3}x_3 + \frac{1}{6}x_2^4 - \frac{1}{6}x_2^3 - \frac{3}{2}x_2^2 + \frac{4}{3}x_2 \approx 2,522$$

$$A \approx 4,955 + 2,522 \approx \underline{\underline{7,477}}$$

پوښتنې

مشتق او انتیګرال شمیرنې ته پارامتریک پوښتنېI

پوښتنې د e تابع سره

لومړی: تابع $f_k(x) = e^{2x} - k \cdot e^x$ ورکړشوی د k>0او $x \in \mathbb{R}$ لپاره

الف-محور غوځټکي، که شتون ولري، وشمیرئ .

ب- افراطي ټکي، که شتون ولري، وشمیرئ.

پ- اوړنټکي، که شتون ولري، وشمیرئ.

ت ــد تعریف ورشو د پولو یا حدونو لپاره تابع ارزښتونه وټاکئ

ټ- د محورغوځټکو او x -محور ترمنځ سطحهA_k وټاکئ.

ث- د $x \in \{-3; -2,5; ...; 1; 1,5\}$ لپاره ارزښتجدول جوړ کړئ او د $k \in \{2; 3; 4; 5\}$ لپاره ګراف په پروتولاړ- یا کواوردینات سیستم کې وکاږئ.

ج-د f_k (x) د ټیټ ټکو ځایکړه(ځای منحني) f_{ok} (x) وشمیرئ او دا په پروت ولاړسیستم کې وکاږئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $k = 5$ لپاره سطحه A_k وشمیرئ.

دویم: د $k>0$ او $x \in \mathbb{R}$ لپاره تابع $f_k(x) = \frac{1}{4}k \cdot e^x - 2 \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x}$ ورکړ شوی.

الف- په محورغوڅټکو f_k وڅیرئ او دا وشمیرئ.

ب- د $f_k(x)$ لومړي درې مشتقونه جوړ کړئ یا وشمیرئ.

پ- f_k په افراطي ټکو باندې وڅیرئ او دا وشمیرئ.

ت – f_k په اوړونټکو یا انعطافټکو باندې وڅیرئ او دا وشمیرئ.

ټ- د تعریفورشو د پولې لپاره تابع ارزښت وټاکئ.

ث – د افراطي ټکو لپاره ځایکړه یا –منحني $f_{ok}(x)$ وټاکئ.

ج- د محورونو غوڅټکو او x –محور ترمنځ سطحه A_k وټاکئ

ح- لاندې ارزښت جدول وکاروئ او په یوه پروتولاړ-یا کواوردینات سیستم کې د $f_1(x); f_2(x); f_3(x); f_4(x)$ او ځایوکړې $f_{ok}(x)$ لپاره ګراف وکاږئ. د غوره ټکو (محوغوڅټکي، افراطي- ا و اوړونټکو) ارزښتونه د جبشمیري سره وشمیرئ.

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
$f_1(x)$	−0,16	−0,27	−0,43	−0,7	−1,12	−1,75	−2,62	−3,59	−3,94	−1,13	12,7
$f_2(x)$	−0,16	−0,26	−0,42	−0,67	−1,03	−1,5	−1,94	−1,74	1,08	12,5	49,8
$f_3(x)$	−0,16	−0,26	−0,41	−0,63	−0,94	−1,25	−1,26	0,11	6,1	26,2	86,9
$f_4(x)$	−0,16	−0,25	−0,4	−0,6	−0,85	−1	−0,58	1,95	11,1	39,8	124

خ= د $k = 1$ لپاره سطحه A_k وشمیرئ او دا په یوه پروتولاړسیستم کې په نخښه کړئ.

حلونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

مشتق او انتیګرال ته پارامتریک پوښتنې

نتیجې او مفصل حلونه

اول - نتیجې

الف -

$P_{k_x}\left(\ln(k)\,|\,0\right)$ $P_{k_y}\left(0\,|\,1-k\right)$

ب –

ټیټټکی: $P_{k_{Min}}\left(\ln\left(\frac{k}{2}\right)\Big|-\frac{1}{4}k^2\right)$

پ - اوړونټکی: $P_{k_w}\left(\ln\left(\frac{k}{4}\right)\Big|-\frac{3}{16}k^2\right)$

ت -

$\lim\limits_{x\to\infty} f_k(x)=\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f_k(x)=0$

ټ - مفصل حل وګورى

ث - سطحه: $A_k=\left|-\frac{1}{2}k^2+k-\frac{1}{2}\right|$

ج – دټولوټیټکو لپاره د دځایمنحني د تابع مساوات: $f_{ok}(x)=-e^{2x}$

چ – د k = 5 لپاره سطحه 8 FE (۸ یوونه یا واحده)ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم - نتيجې

الف –

د ټولو $k \in \mathbb{R}$ لپاره د y–محور سره يو غوڅېدونکی ټکی شتون لري $P_{k_y}\left(0 \mid \frac{k}{4}-2\right)$

د ټولو $k > 0$ لپاره د x–محور سره يو غوڅېدونکی ټکی شتون لري $P_{k_x}\left(2\cdot\ln\left(\frac{8}{k}\right) \mid 0\right)$

ب –

$$f_k'(x) = \frac{1}{4}k\cdot e^x - e^{\frac{1}{2}\cdot x} \qquad f_k''(x) = \frac{1}{4}k\cdot e^x - \frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k'''(x) = \frac{1}{4}k\cdot e^x - \frac{1}{4}\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

پ – د ټول $k > 0$ لپاره يو نسبي خورا ټيټ ټکی شتون لري

$$P_{k_{Min}}\left(2\cdot\ln\left(\frac{4}{k}\right) \mid -\frac{4}{k}\right)$$

ت – د ټول $k > 0$ لپاره يو اوړونکی يا د انعطاف ټکی شتون لري

$$P_{k_w}\left(2\cdot\ln\left(\frac{2}{k}\right) \mid -\frac{3}{k}\right)$$

ټ - $\lim_{x\to\infty} f_k(x) = \infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f_k(x) = 0$

ث –

$f_{0k}(x) = -e^{\frac{1}{2}\cdot x}$ د $f_k(x)$ د ټيټټکي ځايکره يا منحني ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ج - سطحه : $A_k = \left|-\frac{16}{k} - \frac{1}{4}k + 4\right|$

چ – مفصل حل وګورى.

ح - سطحه $A_1 = 12,25$ FE

اول – مفصل حلونه:

الف – دy - محور سره غوځېدکي

$$f_k(x) = e^{2x} - k \cdot e^x$$
$$y_s = f_k(0) = e^{2\cdot 0} - k \cdot e^0 = 1 - k \Rightarrow \underline{\underline{P_{k_y}(0 \mid 1-k)}}$$

دx – محور سره غوځېدکي (صفرځایونه)

له نوکانو باسل $f_k(x) = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - k \cdot e^x = 0 \mid e^x$

د صفرضرب جمله وکاروئ $\Leftrightarrow \underbrace{(e^x - k)}_{=0} \cdot \underbrace{e^x}_{\neq 0} = 0 \mid$

$$e^x - k = 0 \mid +k \Leftrightarrow e^x = k \mid \ln(\;) \Leftrightarrow x = \ln(k)$$
$$\underline{\underline{P_{k_x}(\ln(k) \mid 0)}}$$

ب – د انحراف ټکي:

$$f_k(x) = e^{2x} - k \cdot e^x$$
$$f_k'(x) = 2 \cdot e^{2x} - k \cdot e^x = (2 \cdot e^x - k) \cdot e^x$$
$$f_k''(x) = 4 \cdot e^{2x} - k \cdot e^x = (4 \cdot e^x - k) \cdot e^x$$

$$f_k'(x) = 0 \Leftrightarrow (2 \cdot e^x - k) \cdot e^x = 0 \mid :$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د صفرضرب جمله وکاروئ

$$\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{k}{2}\right)$$

یو ممکنه افراطي ځای دی

د دویم مشتق له لارې یې شمیرنه: $f_k''(x) \neq 0$

$$f_k''(x) = f_k''\left(\ln\left(\frac{k}{2}\right)\right) = 4\cdot e^{2\cdot\ln\left(\frac{k}{2}\right)} - k\cdot e^{\ln\left(\frac{k}{2}\right)} = 4\cdot\left(e^{\ln\left(\frac{k}{2}\right)}\right)^2 - k\cdot e^{\ln\left(\frac{k}{2}\right)}$$

د $e^{\ln\left(\frac{k}{2}\right)} = \frac{k}{2}$ سره کیږي:

$$f_k''(x) = 4\cdot\left(\frac{k}{2}\right)^2 - k\cdot\frac{k}{2} = 4\cdot\frac{k^2}{4} - \frac{k^2}{2} = k^2 - \frac{k^2}{2} = \frac{k^2}{2} > 0$$

په $x = x_E = \ln\left(\frac{k}{2}\right)$ کې یو نسبي خورا ټیټټکي(مینیموم) شتون لري.

افراطي ارزښت:

$$y_{k_E} = f_k(x_E) = f_k\left(\ln\left(\frac{k}{2}\right)\right) = e^{2\cdot\ln\left(\frac{k}{2}\right)} - k\cdot e^{\ln\left(\frac{k}{2}\right)} = \left(\frac{k}{2}\right)^2 - k\cdot\frac{k}{2} = \frac{k^2}{4} - \frac{k^2}{2} =$$

$$= \frac{1}{4}k^2 - \frac{2}{4}k^2 = -\frac{1}{4}k^2$$

له دې لاس ته راځي خورا ټیټټکی(مینیموم): $\underline{\underline{P_{k_{Min}}\left(\ln\left(\frac{k}{2}\right) \middle| -\frac{1}{4}k^2\right)}}$

پ ــ د انعطاف ټکي یا اوړونټکي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f_k''(x) = 4\cdot e^{2x} - k\cdot e^x = \left(4\cdot e^x - k\right)\cdot e^x$$

$$f_k'''(x) = 8\cdot e^{2x} - k\cdot e^x = \left(8\cdot e^x - k\right)\cdot e^x$$

د او ړونتکي یا د ا نعطاف ټکي لپاره اړیین او پوره کیدونکي شرطونه:

$$f_k''(x) = 0 \wedge f_k'''(x) \neq 0$$

$$f_k''(x) = 0 \Leftrightarrow \left(4\cdot e^x - k\right)\cdot e^x = 0|$$

د صفرضرب جمله وکاروئ

$$4\cdot e^x - k = 0 + k \Leftrightarrow 4\cdot e^x = k|:4 \Leftrightarrow e^x = \frac{k}{4}|\ln(\ )$$

$$\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{k}{4}\right)$$

یو ممکنه اوړنوتکی دی

د دریم مشتق له لارې یې ازماېښت: $f_k'''(x) \neq 0$

$$f_k'''(x) = f_k'''\left(\ln\left(\frac{k}{4}\right)\right) = 8\cdot e^{2\cdot\ln\left(\frac{k}{4}\right)} - k\cdot e^{\ln\left(\frac{k}{4}\right)} = 8\cdot\left(\frac{k}{4}\right)^2 - k\cdot\frac{k}{4} =$$

$$= \frac{8}{16}k^2 - \frac{1}{4}k^2 = \frac{1}{4}k^2 \neq 0$$

په $x = x_w = \ln\left(\frac{k}{4}\right)$ کې یو اوړونتکی یا انعطافتکی پورت دی.

$$y_{k_w} = f_k(x_w) = f_k\left(\ln\left(\frac{k}{4}\right)\right) = e^{2\cdot\ln\left(\frac{k}{4}\right)} - k\cdot e^{\ln\left(\frac{k}{4}\right)}$$

$$= \left(\frac{k}{4}\right)^2 - k\cdot\frac{k}{4} = \frac{k^2}{16} - \frac{k^2}{4} = \frac{1}{16}k^2 - \frac{4}{16}k^2 = -\frac{3}{16}k^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې لاس ته راځي، چې اوړونټکی دی:

$$\underline{\underline{P_{k_w}\left(\ln\left(\frac{k}{4}\right)\middle| -\frac{3}{16}k^2\right)}}$$

ت - د تعریفورشو د پولو لپاره د تابع ارزښتونه:

ټا کل کیږي: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f_k(x)$

$$\lim_{x\to-\infty} f_k(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(e^{2x}-k\cdot e^{x}\right) = \lim_{x\to-\infty} e^{2x} - k\cdot\lim_{x\to-\infty} e^{x} = 0-k\cdot 0 = 0$$

د $x\to-\infty$ لپاره د x محور د $f_k(x)$ اسیمپتوت دی.

$$\lim_{x\to\infty} f_k(x) = \lim_{x\to\infty}\left(e^{2x}-k\cdot e^{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left[\left(e^{x}-k\right)\cdot e^{x}\right] = \infty$$

د $x\to\infty$ لپاره د $f_k(x)$ تابع ارښتونه أه تولو پولو اوړي یا وده کوي.

ټ – د سطحه د د محورغوڅټکو ترمنځ:

صفرځایونه :

$$x_1 = \ln(k) \Rightarrow$$

د سطحې انتیګرال دی: $A_k = \left|\int_0^{\ln(k)} f_k(x)\,dx\right|$

$$\int_0^{\ln(k)} f_k(x)\,dx = \int_0^{\ln(k)}\left(e^{2x}-k\cdot e^{x}\right)dx = \underbrace{\int_0^{\ln(k)} e^{2x}\,dx}_{I} - k\cdot\underbrace{\int_0^{\ln(k)} e^{x}\,dx}_{II} = I - k\cdot II$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$I: \int_0^{\ln(k)} e^{2x}\,dx \text{ Substitution: } u(x) = 2x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{1}{2}du$$

$$ug: \quad u(0) = 2\cdot 0 = 0 \quad og: \quad u(\ln(k)) = 2\cdot\ln(k)$$

$$\int_0^{\ln(k)} e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\int_0^{2\cdot\ln(k)} e^{u}\,du = \left[\frac{1}{2}e^{u}\right]_0^{2\cdot\ln(k)} = \frac{1}{2}e^{2\cdot\ln(k)} - \frac{1}{2}e^{0} = \frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{2}$$

$$II: \int_0^{\ln(k)} e^{x}\,dx = \left[e^{x}\right]_0^{\ln(k)} = e^{\ln(k)} - e^{0} = k-1$$

$$\int_0^{\ln(k)} f_k(x)\,dx = I - k\cdot II = \frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{2} - k\cdot(k-1) = \frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{2} - k^2 + k = -\frac{1}{2}k^2 + k - \frac{1}{2}$$

له دې سره سطحه کيږي: $A_k = \left|-\frac{1}{2}k^2 + k - \frac{1}{2}\right|$

ث – ارزښت جدول او د منحنيو ګرافونه (د منحنيو ډله) .

سربېره پردې دې محورغوڅتکي، تيټتکي او د انعطاف ټکي و ارزښت جدول وروشمېرل شي.

$$P_{k_y}(0\,|\,1-k); P_{k_x}(\ln(k)\,|\,0); P_{k_{Min}}\left(\ln\left(\frac{k}{2}\right)\Big|-\frac{1}{4}k^2\right); P_{k_w}\left(\ln\left(\frac{k}{4}\right)\Big|-\frac{3}{16}k^2\right)$$

K=2

$$P_{2_y}(0\,|\,-1); P_{2_x}(\ln(2)\approx 0{,}69\,|\,0); P_{2_{Min}}\left(\ln\left(\frac{2}{2}\right)=0\,|\,-1\right); P_{2_w}\left(\ln\left(\frac{2}{4}\right)\approx -0{,}69\,|\,-0{,}75\right)$$

x	−3	−2,5	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	1,75
$f_2(x)$	−0,1	−0,16	−0,25	−0,37	−0,6	−0,85	−1	−0,58	1,95	11,1	21,6

K=3

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$P_{3_y}(0|-2);P_{3_x}(\ln(3)\approx 1,1|0);P_{3_{Min}}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right)=0,41|-2,25\right);P_{3_w}\left(\ln\left(\frac{3}{4}\right)\approx -0,29|-1,69\right)$$

x	−3	−2,5	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	1,75
$f_3(x)$	−0,15	−0,24	−0,39	−0,62	−0,97	−1,45	−2	−2,23	−0,77	6,64	15,85

$k=4$:

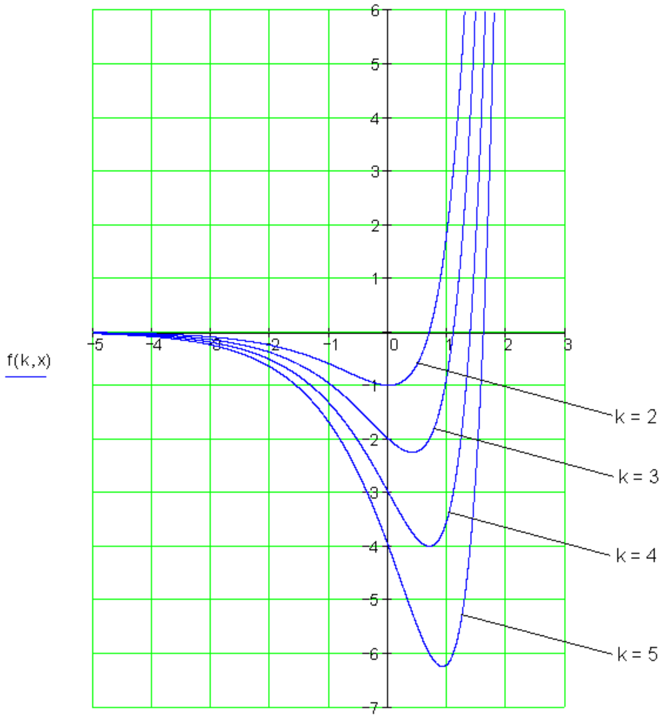
$$P_{4_y}(0|-3);P_{4_x}(\ln(4)\approx 1,39|0);P_{4_{Min}}\left(\ln\left(\frac{4}{2}\right)=0,69|-4\right);P_{4_w}\left(\ln\left(\frac{4}{4}\right)=0|-3\right)$$

x	−3	−2,5	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	1,75
$f_4(x)$	−0,2	−0,32	−0,52	−0,84	−1,34	−2,06	−3	−3,88	−3,48	2,16	10,1

$k=5$:

$$P_{5_y}(0|-4);P_{5_x}(\ln(5)\approx 1,61|0);P_{5_{Min}}\left(\ln\left(\frac{5}{2}\right)=0,92|-6,25\right);P_{5_w}\left(\ln\left(\frac{5}{4}\right)\approx 0,22|-4,69\right)$$

x	−3	−2,5	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	1,75
$f_5(x)$	−0,25	−0,4	−0,66	−1,07	−1,7	−2,67	−4	−5,53	−6,2	−2,32	4,34



(c) ketabton.com: The Digital Library

ج - د محلیمنحني لپاره تیتتکو شمیرنه:

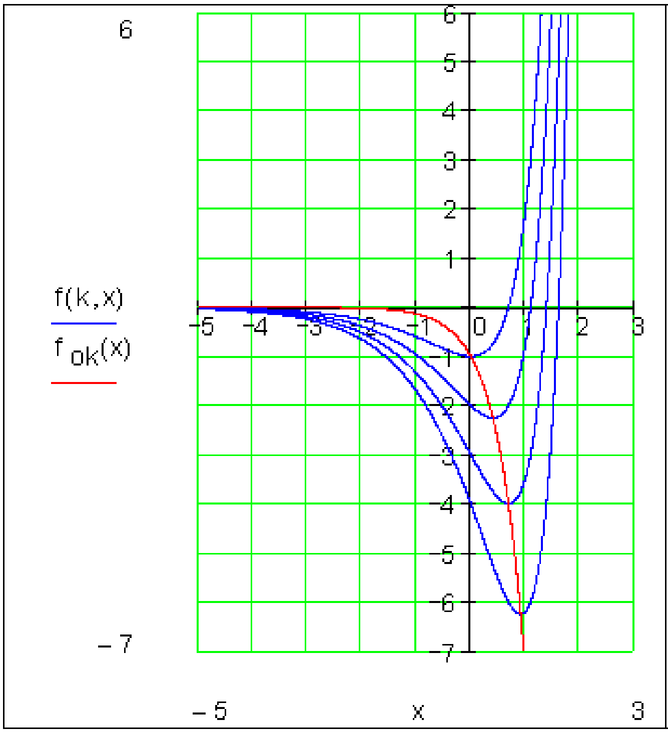
$$P_{k_{Min}}\left(\underbrace{\ln\left(\frac{k}{2}\right)}_{x} \,\middle|\, \underbrace{-\frac{1}{4}k^2}_{y}\right) \Rightarrow x = \ln\left(\frac{k}{2}\right) \quad (1) \qquad y = -\frac{1}{4}k^2 \quad (2)$$

(۱) له k پسي حل کړئ:

$$x = \ln\left(\frac{k}{2}\right) \Big| \, e \quad \Leftrightarrow \quad e^x = e^{\ln\left(\frac{k}{2}\right)} \quad \Leftrightarrow \quad e^x = \frac{k}{2} \quad \Leftrightarrow \quad k = 2 \cdot e^x$$

نتیجه په (۲) کې کیږدئ:

$$y = -\frac{1}{4}k^2 = -\frac{1}{4} \cdot \left(2 \cdot e^x\right)^2 = -\frac{1}{4} \cdot 4 \cdot e^{2x} = -e^{2x}$$



له دې سره د ټولو تیتتکو لپارهد تابع مساوات شي:

$$f_{ok}(x) = -e^{2x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

....

چ – د $k = 5$ لپاره:

له $A_k = \left|-\frac{1}{2}k^2 + k - \frac{1}{2}\right|$ (e څخه لاس ته راوړنه

$$A_5 = \left|-\frac{1}{2}\cdot 5^2 + 5 - \frac{1}{2}\right| = \left|-\frac{25}{2} + 5 - \frac{1}{2}\right| = \left|-\frac{25}{2} + \frac{10}{2} - \frac{1}{2}\right| = \left|-\frac{16}{2}\right| = |-8| = 8$$

د $k = 5$ لپاره سطحه 8 یونه یا واحده ده.

دویم – مفصل حلونه الف – د y - محور سره غوڅتکي:

$$f_k(x) = \frac{1}{4}k\cdot e^x - 2\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$y_s = f_k(0) = \frac{1}{4}k\cdot e^0 - 2\cdot e^{\frac{1}{2}0} = \frac{k}{4} - 2 \Rightarrow \underline{\underline{P_{k_y}\left(0 \mid \frac{k}{4} - 2\right)}}$$

د ټولو $k \in \mathbb{R}$ لپاره د y - محور سره غوڅتکي شتون لري.

د x - محور سره غوڅتکي(صفرځایونه):

$$f_k(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}k\cdot e^x - 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} = 0 \mid + 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}k\cdot e^x = 2\cdot e^{\frac{1}{2}x} \mid \cdot \frac{4}{k}$$

$$\Leftrightarrow e^x = \frac{8}{k}\cdot e^{\frac{1}{2}x} \mid \ln(\ )$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(e^x\right) = \ln\left(\frac{8}{k}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\right) = \ln\left(\frac{8}{k}\right) + \ln\left(e^{\frac{1}{2}x}\right)$$

$$\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{8}{k}\right) + \frac{1}{2}\cdot\ln\left(e^x\right) = \ln\left(\frac{8}{k}\right) + \frac{1}{2}x \mid -\frac{1}{2}x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x = \ln\left(\frac{8}{k}\right) | \cdot 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2\cdot\ln\left(\frac{8}{k}\right) \quad \Rightarrow \underline{\underline{P_{k_x}\left(2\cdot\ln\left(\frac{8}{k}\right) | 0\right)}}$$

د ټولو $k>0$ لپاره دx - محور سره غوڅټکي شتون لري (صفرځایونه).

پ – مشتقونه

$$f_k(x) = \frac{1}{4}k\cdot e^x - 2\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k'(x) = \frac{1}{4}k\cdot e^x - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x} = \frac{1}{4}k\cdot e^x - e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k''(x) = \frac{1}{4}k\cdot e^x - \frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k'''(x) = \frac{1}{4}k\cdot e^x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x} = \frac{1}{4}k\cdot e^x - \frac{1}{4}\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

ث – انحراف ټکي

$$f_k(x) = \frac{1}{4}k\cdot e^x - 2\cdot e^{\frac{1}{2}x} \quad f_k'(x) = \frac{1}{4}k\cdot e^x - e^{\frac{1}{2}x} \quad f_k''(x) = \frac{1}{4}k\cdot e^x - \frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

د افراطي ټکو لپاره پوره کیدونکي شرطونه: $f_k'(x) = 0 \quad \wedge \quad f_k''(x) \neq 0$

$$f_k'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}k\cdot e^x - e^{\frac{1}{2}\cdot x} = 0 | + e^{\frac{1}{2}\cdot x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}k\cdot e^x = e^{\frac{1}{2}\cdot x} | \cdot \frac{4}{k}$$

$$\Leftrightarrow e^x = \frac{4}{k}\cdot e^{\frac{1}{2}x} | \ln(\ )$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(e^x\right) = \ln\left(\frac{4}{k}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\right) = \ln\left(\frac{4}{k}\right) + \frac{1}{2}\cdot\ln\left(e^x\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{4}{k}\right) + \frac{1}{2}x| - \frac{1}{2}x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x = \ln\left(\frac{4}{k}\right)| \cdot 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2 \cdot \ln\left(\frac{4}{k}\right)$$

ممکنه افراطي ځايونه

$$f_k''(x) = f_k''\left(2 \cdot \ln\left(\frac{4}{k}\right)\right) = \frac{1}{4}k \cdot e^{2 \cdot \ln\left(\frac{4}{k}\right)} - \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \ln\left(\frac{4}{k}\right)} = \frac{1}{4}k \cdot e^{\ln\left(\frac{4}{k}\right)^2} - \frac{1}{2} \cdot e^{\ln\left(\frac{4}{k}\right)}$$

$$= \frac{1}{4}k \cdot \left(\frac{4}{k}\right)^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{k} = \frac{1}{4}k \cdot \frac{16}{k^2} - \frac{2}{k} = \frac{4}{k} - \frac{2}{k} = \frac{2}{k} > 0 \cdot$$

د ټولو $k>0$ لپاره .

له دې لاس ته راځي، چې نسبي اکسترېموم(ټيټتکی) په $x = x_{k_{Min}} = 2 \cdot \ln\left(\frac{4}{k}\right)$ کې

$$y_{k_{Min}} = f_k\left(x_{k_{Min}}\right) = \frac{1}{4}k \cdot e^{2 \cdot \ln\left(\frac{4}{k}\right)} - 2 \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \ln\left(\frac{4}{k}\right)} = \frac{1}{4}k \cdot e^{\ln\left(\frac{4}{k}\right)^2} - 2 \cdot e^{\ln\left(\frac{4}{k}\right)}$$

$$= \frac{1}{4}k \cdot \left(\frac{4}{k}\right)^2 - 2 \cdot \frac{4}{k} = \frac{1}{4}k \cdot \frac{16}{k^2} - \frac{8}{k} = \frac{4}{k} - \frac{8}{k} = -\frac{4}{k}$$

$$\Rightarrow \underline{P_{k_{Min}}\left(2 \cdot \ln\left(\frac{4}{k}\right) | -\frac{4}{k}\right)}$$

د ټولو $k > 0$ لپاره يو نسبي اکسترېمومو) ټيټتکی) شتون لري.

ت ــ $f_k(x) = \frac{1}{4}k \cdot e^x - 2 \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x} \quad f_k''(x) = \frac{1}{4}k \cdot e^x - \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f_k'''(x)=\frac{1}{4}k\cdot e^{x}-\frac{1}{4}\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

د انعطاف ټکی یا اوړونټکی: $f_k''(x)=0 \quad \wedge \quad f_k'''(x)\neq 0$

$$f_k''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}k\cdot e^{x}-\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}=0 \,|+\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}k\cdot e^{x}=\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,|\cdot\frac{4}{k}$$

$$\Leftrightarrow e^{x}=\frac{2}{k}\cdot e^{\frac{1}{2}x}\,|\ln(\;)$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(e^{x}\right)=\ln\left(\frac{2}{k}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\right)=\ln\left(\frac{2}{k}\right)+\frac{1}{2}\cdot\ln\left(e^{x}\right)$$

$$\Leftrightarrow x=\ln\left(\frac{2}{k}\right)+\frac{1}{2}x\,|-\frac{1}{2}x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x=\ln\left(\frac{2}{k}\right)|\cdot 2 \quad \Leftrightarrow \quad x=2\cdot\ln\left(\frac{2}{k}\right)$$

ممکنه اوړونټکی یا انعطافټکي

$$f_k''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}k\cdot e^{x}-\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}=0 \,|+\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}k\cdot e^{x}=\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,|\cdot\frac{4}{k}$$

$$\Leftrightarrow e^{x}=\frac{2}{k}\cdot e^{\frac{1}{2}x}\,|\ln(\;)$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(e^{x}\right)=\ln\left(\frac{2}{k}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\right)=\ln\left(\frac{2}{k}\right)+\frac{1}{2}\cdot\ln\left(e^{x}\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x = \ln\left(\frac{2}{k}\right) | \cdot 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2\cdot\ln\left(\frac{2}{k}\right) \text{ mög}$$

ممکنه اوړونتېکي يا د انغطاف ټکي

د لاندې پېښتو: د... لپاره.

$$f_k'''(x) = f_k'''\left(2\cdot\ln\left(\frac{2}{k}\right)\right) = \frac{1}{4}k\cdot e^{2\cdot\ln\left(\frac{2}{k}\right)} - \frac{1}{4}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\ln\left(\frac{2}{k}\right)} = \frac{1}{4}k\cdot e^{\ln\left(\frac{2}{k}\right)^2} - \frac{1}{4}\cdot e^{\ln\left(\frac{2}{k}\right)}$$

$$= \frac{1}{4}k\cdot\left(\frac{2}{k}\right)^2 - \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{2}{k}\right) = \frac{1}{4}k\cdot\frac{4}{k^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k} = \frac{1}{k} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k} = \frac{1}{k}\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k} \neq 0$$

د $k>0$ لپاره.

$$\Rightarrow x = x_{k_w} = 2\cdot\ln\left(\frac{2}{k}\right)$$

يو اوړونتېکی يا د انعطاف ټکی دی.

$$y_{k_w} = f_k\left(x_{k_w}\right) = \frac{1}{4}k\cdot e^{2\cdot\ln\left(\frac{2}{k}\right)} - 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\ln\left(\frac{2}{k}\right)} = \frac{1}{4}k\cdot e^{\ln\left(\frac{2}{k}\right)^2} - 2\cdot e^{\ln\left(\frac{2}{k}\right)}$$

$$= \frac{1}{4}k\cdot\left(\frac{2}{k}\right)^2 - 2\cdot\left(\frac{2}{k}\right) = \frac{1}{4}k\cdot\frac{4}{k^2} - 2\cdot\frac{2}{k} = \frac{1}{k} - \frac{4}{k} = \frac{1}{k}(1-4) = -\frac{3}{k}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P_{k_w}\left(2\cdot\ln\left(\frac{2}{k}\right) | -\frac{3}{k}\right)}}$$

د$k>0$ لپاره يو اوړنوکی شتون لري

ت – د تعريف ورشو د پولو لپاره د تابع ارزښتونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f_k(x) = \frac{1}{4}k \cdot e^x - 2 \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f_k(x) = \frac{1}{4}k \cdot \underbrace{\lim_{x \to -\infty} e^x}_{\to 0} - 2 \cdot \underbrace{\lim_{x \to -\infty} e^{\frac{1}{2} \cdot x}}_{\to 0} = \frac{1}{4}k \cdot 0 - 2 \cdot 0 = 0$$

د $x \to -\infty$ لپاره ټول تابع ارزښتونه د 0 په لور ځغلي. له دې سره د x–محور اسمپټوت یت ګاونډ(مجانب) دی.

$$\lim_{x \to \infty} f_k(x) = \frac{1}{4}k \cdot \underbrace{\lim_{x \to \infty} e^x}_{\to \infty} - 2 \cdot \underbrace{\lim_{x \to \infty} e^{\frac{1}{2} \cdot x}}_{\to \infty} = \frac{1}{4}k \cdot \infty - 2 \cdot \infty$$

حلوړ نه دی.
مګر دا چې e^x د $x \to \infty$ لپاره نسبت $e^{\frac{1}{2} \cdot x}$ ته ګړندی له ټولو پولو اوړي، کیدی د کمون یا تفریق د پام کې لرنې له امله له دې څخه مخ ته لاړ شو، چې $\lim_{x \to \infty} f_k(x) = \infty$ ؛ باور لري

ث - د ټیټټکو ځایزه یا محلي منحني

$$P_{k_{Min}}\left(\underbrace{2 \cdot \ln\left(\frac{4}{k}\right)}_{x} \mid \underbrace{-\frac{4}{k}}_{y}\right) \Rightarrow x = 2 \cdot \ln\left(\frac{4}{k}\right) \quad (1) \quad y = -\frac{4}{k} \quad (2)$$

(1) د k په لور یا پسې حل کړئ او (2) کې ځاي په ځاي کړئ د ځای کرښ(-منحني) تابع مساوات ورکوي.

$$x = 2 \cdot \ln\left(\frac{4}{k}\right) \mid : 2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot x = \ln\left(\frac{4}{k}\right) \mid e^{(\,)} \quad \Leftrightarrow e^{\frac{1}{2} \cdot x} = e^{\ln\left(\frac{4}{k}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{\frac{1}{2} \cdot x} = \frac{4}{k}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پہ ښځ ارزښت یې جوړ کړئ

$$\Leftrightarrow \quad e^{-\frac{1}{2}x} = \frac{k}{4} | \cdot 4 \quad \Leftrightarrow \quad k = 4 \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot x}$$

په(2) کي ځای په ځای کړې

$$y = -\frac{4}{k} = -\frac{4}{4 \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot x}} = -\frac{4}{4} \cdot \frac{1}{e^{-\frac{1}{2}\cdot x}}$$

$$= -\frac{1}{e^{-\frac{1}{2}x}} = -e^{\frac{1}{2}\cdot x} \quad \Rightarrow \quad f_{ok}(x) = -e^{\frac{1}{2}x}$$

$f_{ok}(x)$ د $f_k(x)$ د تیټتکي ځای کره(-منحني) ده

ج - د سطحې د مساحت شمېرنه

$f_k(x) = \frac{1}{4}k \cdot e^x - 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x}$ دا انتیګرال باید حل شي $A_k = \left| \int_0^{x_k} f_k(x)\,dx \right|$

$$\int f_k(x)\,dx = \frac{1}{4}k \cdot \int e^x\,dx - 2 \cdot \int e^{\frac{1}{2}x}\,dx$$

د $\int e^x\,dx = e^x + C$ او $\int e^{\frac{1}{2}x}\,dx = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} + C$ سره باور لري:

$$\int f_k(x)\,dx = \frac{1}{4}k \cdot e^x - 2 \cdot 2 \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} + C = \frac{1}{4}k \cdot e^x - 4 \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} + C$$

د پوله اینوونې وروسته لرو: $ug = 0; \quad og = x_k = 2 \cdot \ln\left(\frac{8}{k}\right) = \ln\left(\frac{8}{k}\right)^2$ کیږي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_0^{x_k} f_k(x)\,dx = \frac{1}{4}k\cdot e^{\ln\left(\frac{8}{k}\right)^2} - 4\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\ln\left(\frac{8}{k}\right)} - \left(\frac{1}{4}k\cdot e^0 - 4\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot 0}\right)$$

$$= \frac{1}{4}k\cdot\left(\frac{8}{k}\right)^2 - 4\cdot\frac{8}{k} - \frac{1}{4}k + 4 = \frac{1}{4}k\cdot\frac{64}{k^2} - \frac{32}{k} - \frac{1}{4}k + 4$$

$$= \frac{16}{k} - \frac{32}{k} - \frac{1}{4}k + 4 = \frac{1}{k}(16-32) - \frac{1}{4}k + 4 = -\frac{16}{k} - \frac{1}{4}k + 4 \Rightarrow \underline{\underline{A_k = \left|-\frac{16}{k} - \frac{1}{4}k + 4\right|}}$$

چ - رارتلی یا په گته شوی تکی تکي

$k = 1$

$$P_{k_y}\left(0\,\middle|\,\frac{1}{4}k - 2\right) \Rightarrow P_{1_y}\left(0\,\middle|\,\frac{1}{4}\cdot 1 - 2\right) \Rightarrow P_{1_y}(0\,|\,-1{,}75)$$

$$P_{k_x}\left(2\cdot\ln\left(\frac{8}{k}\right)\middle|\,0\right) \Rightarrow P_{1_x}\left(2\cdot\ln\left(\frac{8}{1}\right)\middle|\,0\right) \Rightarrow P_{1_x}(4{,}16\,|\,0)$$

$$x_{k_{Min}} = 2\cdot\ln\left(\frac{4}{k}\right) \Rightarrow x_{1_{Min}} = 2\cdot\ln\left(\frac{4}{1}\right) \approx 2{,}77 \Rightarrow f_1\left(x_{1_{Min}}\right) = -4 \Rightarrow P_{1_{Min}}(2{,}77\,|\,-4)$$

$$x_{k_w} = 2\cdot\ln\left(\frac{2}{k}\right) \Rightarrow x_{1_w} = 2\cdot\ln\left(\frac{2}{1}\right) \approx 1{,}39 \Rightarrow f_1\left(x_{1_w}\right) = -3 \Rightarrow P_{1_w}(1{,}39\,|\,-3)$$

$k = 2$

$$P_{k_y}\left(0\,\middle|\,\frac{1}{4}k - 2\right) \Rightarrow P_{2_y}\left(0\,\middle|\,\frac{1}{4}\cdot 2 - 2\right) \Rightarrow P_{2_y}(0\,|\,-1{,}5)$$

$$P_{k_x}\left(2\cdot\ln\left(\frac{8}{k}\right)\middle|\,0\right) \Rightarrow P_{2_x}\left(2\cdot\ln\left(\frac{8}{2}\right)\middle|\,0\right) \Rightarrow P_{2_x}(2{,}77\,|\,0)$$

$$x_{k_{Min}} = 2\cdot\ln\left(\frac{4}{k}\right) \Rightarrow x_{2_{Min}} = 2\cdot\ln\left(\frac{4}{2}\right) \approx 1{,}39 \Rightarrow f_2\left(x_{2_{Min}}\right) = -2 \Rightarrow P_{2_{Min}}(1{,}39\,|\,-2)$$

$$x_{k_w} = 2\cdot\ln\left(\frac{2}{k}\right) \Rightarrow x_{2_w} = 2\cdot\ln\left(\frac{2}{2}\right) = 0 \Rightarrow f_2\left(x_{2_w}\right) = -1{,}5 \Rightarrow P_{2_w}(0\,|\,-1{,}5)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$k = 3$

$$P_{k_y}\left(0 \mid \frac{1}{4}k - 2\right) \Rightarrow P_{3_y}\left(0 \mid \frac{1}{4}\cdot 3 - 2\right) \Rightarrow P_{3_y}(0 \mid -1,25)$$

$$P_{k_x}\left(2\cdot \ln\left(\frac{8}{k}\right) \mid 0\right) \Rightarrow P_{3_x}\left(2\cdot \ln\left(\frac{8}{3}\right) \mid 0\right) \Rightarrow P_{3_x}(1,96 \mid 0)$$

$$x_{kMin} = 2\cdot \ln\left(\frac{4}{k}\right) \Rightarrow x_{3\,Min} = 2\cdot \ln\left(\frac{4}{3}\right) \approx 0,58 \Rightarrow f_3\left(x_{3\,Min}\right) \approx$$

$$\approx -1,33 \Rightarrow P_{3\,Min}(0,58 \mid -1,33)$$

$$x_{k_w} = 2\cdot \ln\left(\frac{2}{k}\right) \Rightarrow x_{3_w} = 2\cdot \ln\left(\frac{2}{3}\right) \approx -0,81 \Rightarrow f_3\left(x_{3_w}\right) = -1 \Rightarrow P_{3_w}(-0,81 \mid -1)$$

$k = 4$

$$P_{k_y}\left(0 \mid \frac{1}{4}k - 2\right) \Rightarrow P_{4_y}\left(0 \mid \frac{1}{4}\cdot 4 - 2\right) \Rightarrow P_{4_y}(0 \mid -1)$$

$$P_{k_x}\left(2\cdot \ln\left(\frac{8}{k}\right) \mid 0\right) \Rightarrow P_{4_x}\left(2\cdot \ln\left(\frac{8}{4}\right) \mid 0\right) \Rightarrow P_{4_x}(1,39 \mid 0)$$

$$x_{kMin} = 2\cdot \ln\left(\frac{4}{k}\right) \Rightarrow x_{4\,Min} = 2\cdot \ln\left(\frac{4}{4}\right) = 0 \Rightarrow f_4\left(x_{4\,Min}\right) = -1 \Rightarrow P_{4\,Min}(0 \mid -1)$$

$$x_{k_w} = 2\cdot \ln\left(\frac{2}{k}\right) \Rightarrow x_{4_w} = 2\cdot \ln\left(\frac{2}{4}\right) \approx -1,39 \Rightarrow f_4\left(x_{4_w}\right) = -0,75 \Rightarrow$$

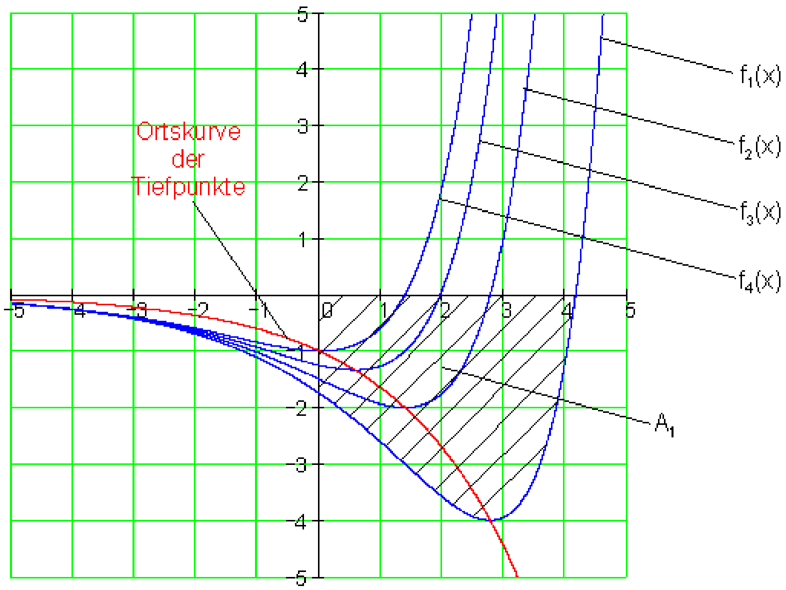
$$\Rightarrow P_{4_w}(-1,39 \mid -0,75)$$

د تابع ګراف

$$f(k,x) := \frac{1}{4}\cdot k\cdot e^{x} - 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} \qquad f_{ok}(x) := -e^{\frac{1}{2}\cdot x}$$

د تيتيكي لپاره ځاى كرّ

(c) ketabton.com: The Digital Library



ح – معلومه سطحه :

$$A_k = \left| -\frac{16}{k} - \frac{1}{4}k + 4 \right| \text{ für } k = 1 \text{ gilt:}$$

$$A_1 = \left| -\frac{16}{1} - \frac{1}{4} \cdot 1 + 4 \right| = \left| -16 + 4 - \frac{1}{4} \right| = \left| -12 - \frac{1}{4} \right| = \left| -12,25 \right| = \underline{\underline{12,25 FE}}$$

پوښتني

مشتق – او انتیګرال شمیرنو ته پوښتني

د e -تابع سره پوښتنې.

لومړی: د $k>0$ او $x \in \mathbb{R}$ لپاره تابع $f_k(x) = (k-x)\,e^{\frac{1}{2}x}$ ورکړي

(c) ketabton.com: The Digital Library

....

الف- محورغوځېکي، که شتون ولري، وشميرئ.

ب- افراپی ټکي، ه شتون ولري، وشميرئ.

پ-اوړونټکی یا د انعطاف ټکي، که شتون ولري، وشميرئ.

ت- د تعریفورشو پوله ارزښت لپاره تابعارزښتونه وټاکئ.

ټ- د محورغوځېکو او x – محور ترمنځ سطحه A_k وټاکئ.

ث- په یو پروتولاړ یا کواورد یناتسیستم کې د $x \in \{-5;-4;...;4;5\}$ او $k \in \{1;2;3;4\}$ لپاره ارزښت جدول وکاږئ.

ج- د لاندې ځایګړو یا ـــمنحنیو مساواتابع وشميرئ:

د $f_k(x)$ د جګټکي ځایکړه یا ـــمنحني $f_{okh}(x)$ او

د $f_k(x)$ د جګټکي اوړونټکي یا د انعطافټکي $f_{okw}(x)$ او دا په یوه پروتولاړسیستم (قیمتوضعیه؟؟) کې وکاږئ.

چ- د $k = 4$ لپاره سطحه A_4 وشميرئ او دا په پروتولاړسیستم(یا قیمت وضعیه) کې وکاږئ.

دویم: د $k \in \mathbb{R}$ او $x \in \mathbb{R}$ لپاره دې تابع $f_k(x) = (x^2 - k) \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x}$ ورکړ شوې وي.

الف- محور غوځېکي، که شتون ولري، وشميرئ. د کوم k ارزښت لپاره صفرځای شتون لري؟

ب- د $f_k(x)$ لومړي درې مشتقونه وشميرئ.

پ- $f_k(x)$ د افراطي ځایونو په هکله وڅیړی او د افراطیت او د k په واکولي یا تابعیت باندې یې یوه وینا (دا چې وینا څه شی دی ، د سم ا ند یا منطق برخ کې یې کتلی شئ) وکړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

....

ت - $f_k(x)$ په اوړونځاییونو بندې دk په واکلوالي کې وڅیړئ.

ټ- د په واکوالي کې دې د A_k سطحه د صفرځایونو او د x –محور ترمنځ وشمیرل شي.

مرستموقف: $\int x^2 \cdot e^{\frac{1}{2}x}\,dx = \left(2x^2 - 8x + 16\right) \cdot e^{\frac{1}{2}x} + C$

ث- په یوه پروتولاړسیستم یا د وضعیهقیمت سیستم کې د $k \in (-4; -2; 0; 2; 4)$ لپاره ګراف وکاږئ.

د لاندې ارزښت جدول څخه داتا وکاروئ.

x	−10	−8	−6	−4	−2	0	2
$f_{-4}(x)$	0,7	1,25	1,99	2,71	2,94	4	21,75
$f_{-2}(x)$	0,69	1,21	1,89	2,44	2,21	2	16,31
$f_0(x)$	0,67	1,17	1,79	2,17	1,47	0	10,97
$f_2(x)$	0,66	1,14	1,69	1,89	0,74	−2	5,44
$f_4(x)$	0,65	1,1	1,59	1,62	0	−4	0

برسیره پردې، که غوښتوني ووو،صفرځایونه، افراطي ځایونه او اوړونټکي یا د انعطاف ټکي.

ج- د سطحه وشمیرئ او سطحه په پروته- ولاړسیستم یا وضعیه قیمت سیسم کې په نخښه کړئ.

حلونه

مشتق او انتیګرالشمیرنې ته پارامتریکي پوښتنې II

نتیجې او مفصل حلونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

اول – نتیجې

الف - $P_{k_x}(k|0)$ $P_{k_y}(0|k)$

ب –

جګتیکی : $P_{k_{Max}}\left(k-2 \,|\, 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k-1}\right)$

ث –

$\lim_{x\to\infty} f_k(x) = -\infty$ $\lim_{x\to-\infty} f_k(x) = 0$

ټ -

سطحه: $A_k = \left|4\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k} - 2k - 4\right|$

د ځایکړې یا ځایمنحني د جګتیکو لپاره تابع مساوات:	$f_{okh}(x) = 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}$
د ځایکړې یا ځایمنحني د د تولو انعطافتیکو لپاره تابع مساوات:	$f_{okw}(x) = 4\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}$

k = 4 17,556 FE

دویم – نتیجې :

الف -

$P_{k_{x1/2}}\left(\pm\sqrt{k} \,|\, 0\right)$ $P_{k_y}(0|-k)$

ب –

(c) ketabton.com: The Digital Library

....

$$f_k'(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{2}k\right) \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x}$$

$$f_k''(x) = \left(\frac{1}{4}x^2 + 2x - \frac{1}{4}k + 2\right) \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x}$$

$$f_k'''(x) = \left(\frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{8}k + 3\right) \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x}$$

پ - د$k>-4$ لپاره د $x_1 = -2+\sqrt{4+k}$ په ځای کې یو نسبي خورا ټیټ ټکی پروت دی.

د $k>-4$ لپاره د $x_2 = -2-\sqrt{4+k}$ په ځای کې یو نسبي خورا جګ ټکی پروت دی.

ت - $x_1 = -4+\sqrt{8+k}$ یو اوړنټکی یا انعطا فټکی، که $k>-8$ وي.

$x_2 = -4-\sqrt{8+k}$ یو اوړنټکی یا انعطا فټکی، که $k>-8$ وي.

ټ -

ث – مفصل حل وګوری

ج – سطحه $A_4 = 11{,}772$ FE

اول – مفصل حلونه

الف د y –محور سره غوځټکی:

$$f_k(x) = (k-x) \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$y_s = f_k(0) = (k-0) \cdot e^{\frac{1}{2}0} = k \cdot 1 = k \Rightarrow \underline{\underline{P_{k_y}(0|k)}}$$

د x –محور سره غوځټکی(صفرځایونه):

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f_k(x)=0 \Leftrightarrow \Big(\underbrace{k-x}_{0}\Big)\cdot \underbrace{e^{\frac{1}{2}x}}_{\neq 0}=0$$

د پیتاګوراس(فیثاغرث) جمله وکاروئ

$$k-x=0|+x \Leftrightarrow k=x \Leftrightarrow x=k \Rightarrow \underline{\underline{P_{k_x}(k|0)}}$$

ب – د انحراف ټکي

$$f_k(x)=(k-x)\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k'(x)=u'v+uv'\ r$$

د $u=k-x \Rightarrow u'=-1$ او $v=e^{\frac{1}{2}x}$ سره

$$\Rightarrow v'=\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k'(x)=-1\cdot e^{\frac{1}{2}x}+(k-x)\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}=\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}k-1\right)\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k''(x)=u'v+uv'$$

د $u=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}k-1 \Rightarrow u'=-\frac{1}{2}$ او $v=e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow v'=\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}$ سره

$$f_k''(x)=-\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}+\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}k-1\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}=\left(-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}k-1\right)\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k'''(x)=u'v+uv'$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $u=-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}k-1 \Rightarrow u'=-\frac{1}{4}$ او $\, l\, v=e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow v'=\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}$ سره

$$f_k'''(x)=u'v+uv' \text{ mit } u=-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}k-1 \Rightarrow u'=-\frac{1}{4} \text{ und } v=e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow v'=\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k'''(x)=u'v+uv'$$

د $u=-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}k-1 \Rightarrow u'=-\frac{1}{4}$ او $v=e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow v'=\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}$ سره

$$f_k'''(x)=-\frac{1}{4}\cdot e^{\frac{1}{2}x}+\left(-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}k-1\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}=\left(-\frac{1}{8}x+\frac{1}{8}k-\frac{3}{4}\right)\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k'(x)=0 \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}k-1\right)\cdot e^{\frac{1}{2}x}=0$$

د پیتاګوراس جمله وکاروئ

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}k-1=0 \Leftrightarrow x=k-2$$

$$\Leftrightarrow x=k-2\ i$$

یو ممکنه افراطي ځای دی.

د دویم مشتق(رابیلیدني) سره یې ازمايښت: $f_k''(x)\neq 0$

$$f_k''(x)=f_k''(k-2)=\left[-\frac{1}{4}(k-2)+\frac{1}{4}k-1\right]\cdot e^{\frac{1}{2}(k-2)}=-\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}k-1}<0$$

په $x=x_E=k-2$ کې یو نسبي خرا تیتیکی (خورا جګ تکی) شتون لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

افراطي ارزښتونه:

$$y_{k_E} = f_k(x_E) = f_k(k-2) = [k-(k-2)] \cdot e^{\frac{1}{2}(k-2)} = 2 \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot k - 1}$$

له دې لاس ته رځی، چې ټټکی:

$$P_{k_{Max}}\left(k-2 \,|\, 2 \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot k - 1}\right)$$

پ – د انعطاف ټکي]

$$f_k''(x) = \left(-\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}k - 1\right) \cdot e^{\frac{1}{2}x} \qquad f_k'''(x) = \left(-\frac{1}{8}x + \frac{1}{8}k - \frac{3}{4}\right) \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

د اوړونټکي یا انعطافټکي لپاره اړین- یا ضروري شرایط:

$$f_k''(x) = 0 \wedge f_k'''(x) \neq 0$$

$$f_k''(x) = 0 \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}k - 1\right) \cdot e^{\frac{1}{2}x} = 0|$$

د پیتاګوراس جمله وکاروئ یا استعمال کړئ

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}k - 1 = 0 \Leftrightarrow x = k - 4$$

په $x = x_w = k - 4$ کې یو اوړونټکی یا د انعطافټکی شته.

$$y_{k_w} = f_k(x_w) = f_k(k-4) = [k-(k-4)] \cdot e^{\frac{1}{2}(k-4)} = 4 \cdot e^{\frac{1}{2}k - 2}$$

له دې لاس ته را ځي، چې اوړونټکی دی:

$$P_{k_w}\left(k-4 \,|\, 4 \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot k - 2}\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ت – د تعریف ورشو پولې لپاره د تابع ارزښتونه.

تاکو: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f_k(x)$

$$\lim_{x\to-\infty} f_k(x) = \lim_{x\to-\infty}(k-x)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} = 0$$

د $x\to\infty$ لپاره د x-محور د $f_k(x)$ ګاونډ(مجاورت یا ا سیمپتوت) دی.

ټ – صفرځای: $x_1 = k$ له دې لاس ته راځي د سطحې انتیګرال $A_k = \left|\int_0^k f_k(x)\,dx\right|$

$$\int_0^k f_k(x)\,dx = \int_0^k (k-x)\cdot e^{\frac{1}{2}x}\,dx$$

د ټوټه – یا پارشل انتیګرال له لارې حل لومړی ټولیز یا عمومي

$$\int \underbrace{(k-x)}_{u(x)}\cdot \underbrace{e^{\frac{1}{2}\cdot x}}_{v'(x)}dx = u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)\cdot v(x)\,dx$$

$$u(x) = k - x \Rightarrow u'(x) = -1$$

$$v'(x) = e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow v(x) = \int e^{\frac{1}{2}x}\,dx = 2\cdot e^{\frac{1}{2}x} + C$$

$$\int u'(x)\cdot v(x)\,dx = \int(-1)\cdot 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx = -2\cdot\int e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx = -4\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}$$

$$\int f_k(x)\,dx = (k-x)\cdot 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} - \left(-4\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\right) + C = 2k\cdot e^{\frac{1}{2}x} - 2x\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} + 4\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} + C$$

$$\int_0^k f_k(x)\,dx = \left[2k\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} - 2x\cdot e^{\frac{1}{2}x} + 4\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\right]_0^k$$

$$= 2k\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k} - 2k\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k} + 4\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k} - \left(2k\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot 0} - 2\cdot 0\cdot e^{\frac{1}{2}0} + 4\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot 0}\right) = 4\cdot e^{\frac{1}{2}k} - 2k - 4$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

....

له دې سره سطحه کيږي يا ده: $A_k = \left|4 \cdot e^{\frac{1}{2}k} - 2k - 4\right|$

ث – ارزښاجدول او د ګرو يا منحنی کودې (ګزافونه).

محور غوڅتکي، ټيټتکي او اوړونتکي يا د ا نعطاف تکي دې برسيره ارزښت جدول ته وروشميرل شي.

$$P_{k_y}(0|k);\quad P_{k_x}(k|0);\quad P_{k_{Max}}\left(k-2\,|\,2\cdot e^{\frac{1}{2}k-1}\right);\quad P_{k_w}\left(k-4\,|\,4\cdot e^{\frac{1}{2}k-2}\right)$$

$k = 1$:

$$P_{1_y}(0|1);\quad P_{1_x}(1|0);\quad P_{1_{Min}}\left(-1\,|\,2\cdot e^{-\frac{1}{2}} \approx 1{,}21\right);\quad P_{1_w}\left(-3\,|\,4\cdot e^{-\frac{3}{2}} \approx 0{,}89\right)$$

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
$f_1(x)$	0,49	0,68	0,89	1,1	1,21	1	0	−2,72	−8,96	−22,17	−48,73

$k = 2$:

$$P_{2_y}(0|2);\quad P_{2_x}(2|0);\quad P_{2_{Min}}\left(0\,|\,2\cdot e^{0} = 2\right);\quad P_{2_w}\left(-2\,|\,4\cdot e^{-1} \approx 1{,}47\right)$$

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
$f_2(x)$	0,57	0,81	1,12	1,47	1,82	2	1,65	0	−4,48	−14,78	−36,55

$k = 3$:

$$P_{3_y}(0|3);\quad P_{3_x}(3|0);\quad P_{3_{Min}}\left(1\,|\,2\cdot e^{\frac{1}{2}} \approx 3{,}3\right);\quad P_{3_w}\left(-1\,|\,4\cdot e^{-\frac{1}{2}} \approx 2{,}43\right)$$

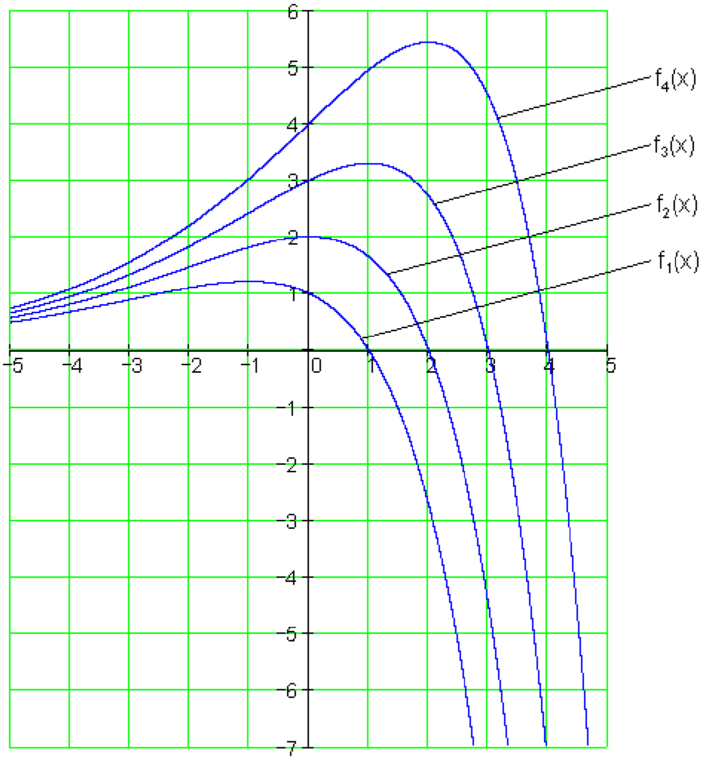
x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
$f_3(x)$	0,66	0,95	1,34	1,84	2,43	3	3,3	2,72	0	−7,39	−24,36

K=4 :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$P_{4_y}(0|4);\quad P_{4_x}(4|0);\quad P_{4_{Min}}\left(2|2\cdot e^1\approx 5,44\right);\quad P_{4_w}\left(0|4\cdot e^0=4\right)$

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
$f_4(x)$	0,74	1,08	1,56	2,21	3,03	4	4,95	5,44	4,48	0	−12,18



ج ـد ځای یا محلي منحني شمیرنه :

$$P_{k_{Max}}\left(\underbrace{k-2}_{x}\,|\,\underbrace{2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k-1}}_{y}\right)\Rightarrow x=k-2\quad(1)\quad y=2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k-1}\quad(2)$$

(۱) په k پسې حل کړئ: $x=k-2\quad\Leftrightarrow\quad k=x+2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نتخجه په (۲) کې کيږدئ:

$$y = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot(x+2)-1} = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x+1-1} = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}$$

له دې سره دټولو جګټکو لپاره د ځای کرې یا ځای-منحني تابعمساوا ت کيږي:

$$\underline{\underline{f_{okh}(x) = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}}}$$

$$P_{k_w}\left(\underbrace{k-4}_{x} \mid \underbrace{4 \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k-2}}_{y}\right) \Rightarrow x = k-4 \quad (1) \quad y = 4 \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k-2} \quad (2)$$

(۱) په k پسې حل کړئ:

$$x = k-4 \quad \Leftrightarrow \quad k = x+4$$

نتيجه په (۲) کې کيږدئ

$$y = 4 \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot(x+4)-2} = 4 \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x+2-2} = 4 \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}$$

له دې سره د ټولو اوړنټکو يا انعطافټکو لپاره د تابعمساوات دي:

$$\underline{\underline{f_{okw}(x) = 4 \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}}}$$

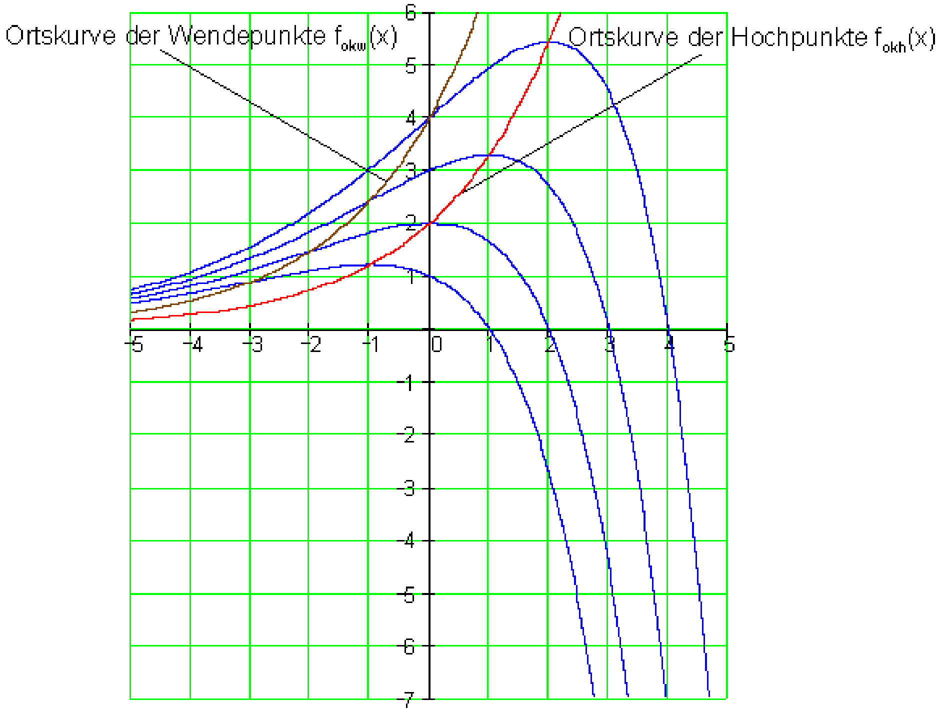
لاندې له کيڼ و ښي لور ته:

د جګټکي... ځايمنحني   د اوړونټکی يا انعطافټکي منحنۍ

(c) ketabton.com: The Digital Library

د الماني پښتو: له کيڼ څخه ښي لور ته: د اوړونټکي يا انعطافټکي ځای کرښه

د جګټکي ځای کرښه.



ح – د $k = 4$ لپاره سطحه:

$$A_k = \left|4 \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k} - 2k - 4\right|$$

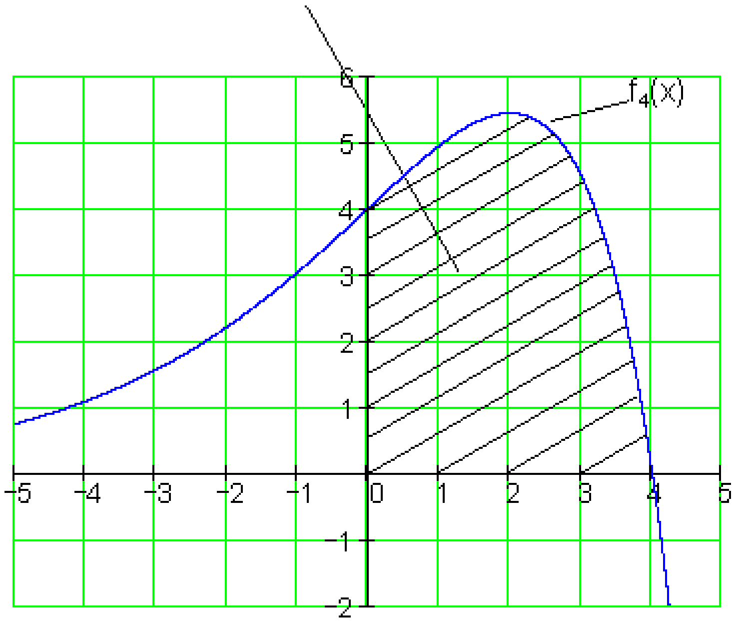
نيجه له ټ څخه

$$A_4 = \left|4 \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot 4} - 2 \cdot 4 - 4\right| = \left|4 \cdot e^2 - 8 - 4\right| = \left|4 \cdot e^2 - 12\right| \approx 17{,}556$$

د $k = 4$ لپاره سطحه $\underline{\underline{17{,}556\ FE}}$ (يونه يا وحدونه)ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د A_4 محور غوڅېکو او x -محور ترمنځ سطحه.



دويم – مفصل حل

الف –

د y –محور سره غوڅېکی:

$$f_k(x) = \left(x^2 - k\right) \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x}$$

$$y_s = f_k(0) = \left(0^2 - k\right) \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot 0} = -k \cdot 1 = -k \Rightarrow \underline{\underline{P_{k_y}(0 \mid -k)}}$$

د x - محور سره غوڅېکی(صفرځایونه):

د پیتاګوراس جمله وکاروئ

$$f_k(x) = 0 \Leftrightarrow \left(\underbrace{x^2 - k}_{=0}\right) \cdot \underbrace{e^{\frac{1}{2} \cdot x}}_{\neq 0} = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x^2 - k = 0 | +k \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = k | \sqrt{\ } \quad \Leftrightarrow \quad |x| = \sqrt{k}$$

$$\Leftrightarrow \quad x_{k_{x\,1/2}} = \pm\sqrt{k} \text{ für } k \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{P_{k_{x1/2}}\left(\pm\sqrt{k} \mid 0\right)}$$

صفرځایونه فقط د $k \geq 0$ لپاره شتون لري.

ب - مشتقونه

$$f_k(x) = \left(x^2 - k\right) \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x}$$

$$f_k'(x) = u'v + uv'$$

د $u = x^2 - k \Rightarrow u' = 2x$ او $v = e^{\frac{1}{2} \cdot x} \Rightarrow v' = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x}$ سره

$$f_k'(x) = 2x \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x} + \left(x^2 - k\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x} = \left(\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{2}k\right) \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x}$$

$$f_k''(x) = u'v + uv'$$

د $u = \frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{2}k \Rightarrow u' = x + 2$ او $v = e^{\frac{1}{2} \cdot x} \Rightarrow v' = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x}$ سره

$$f_k''(x) = (x+2) \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x} + \left(\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{2}k\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x} = \left(\frac{1}{4}x^2 + 2x - \frac{1}{4}k + 2\right) \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x}$$

$$f_k'''(x) = u'v + uv'$$

د $u = \frac{1}{4}x^2 + 2x - \frac{1}{4}k + 2 \Rightarrow u' = \frac{1}{2}x + 2$ او $v = e^{\frac{1}{2} \cdot x} \Rightarrow v' = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2} x}$ سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f_k'''(x) = \left(\frac{1}{2}x+2\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} + \left(\frac{1}{4}x^2+2x-\frac{1}{4}k+2\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} = \left(\frac{1}{8}x^2+\frac{3}{2}x-\frac{1}{8}k+3\right)\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

پ - د افراط ټکي:

$$f_k'(x)=0 \Leftrightarrow \left(\underbrace{\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{1}{2}k}_{0}\right)\cdot\underbrace{e^{\frac{1}{2}\cdot x}}_{\neq 0}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2+2x-\frac{1}{2}k=0|\cdot 2 \quad\Leftrightarrow\quad x^2+4x-k=0$$

$$p=4;\quad q=-k \quad\Rightarrow\quad D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=4+k \quad\Rightarrow\quad \sqrt{D}=\sqrt{4+k}$$

د$k \geq 0$ لپاره شتون لري

$x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}$ | $x_1=-2+\sqrt{4+k}$, $x_2=-2-\sqrt{4+k}$	د$k \geq 0$ لپاره

د$-4 \geq k$ لپاره x_1 او x_2 ځایونه دي د پراته-ولاړ تانجنت سره

د $0 > k$لپاره پروت-ولاړ تانجنت نه شته

د افراطیت ډول: $f_k''(x_{1/2}) \neq 0$

$$f_k''(x_{1/2})=\left(\frac{1}{4}x_{1/2}^2+2\cdot x_{1/2}-\frac{1}{4}k+2\right)\cdot\underbrace{e^{\frac{1}{2}\cdot x_{1/2}}}_{>0}$$

که $0 < (...)$ وي، نو لاس ته راځي، چې په $x_{1/2}$ کې مینیموم یا خوراتیټ ټکی لرو.

که $0 > (...)$ وي، نو لاس ته راځي، چې په $x_{1/2}$ کې ماکسیموم یا خورا جګ ټکی لرو

منځشمیرنه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$: x_1^2 = \left(-2+\sqrt{4+k}\right)^2 = 8-4\cdot\sqrt{4+k}+k$$

$$x_2^2 = \left(-2-\sqrt{4+k}\right)^2 = 8+4\cdot\sqrt{4+k}+k$$

$$\left(\frac{1}{4}x_1^2+2\cdot x_1-\frac{1}{4}k+2\right)=\left[\frac{1}{4}\cdot\left(8-4\cdot\sqrt{4+k}+k\right)+2\cdot\left(-2+\sqrt{4+k}\right)-\frac{1}{4}k+2\right]=$$

$$=\sqrt{4+k}>0$$

د $x_1=-2+\sqrt{4+k}$ په ځای کې یو نسبي مینیموم پروت دی، که 4- < k وي.

$$\left(\frac{1}{4}x_2^2+2\cdot x_2-\frac{1}{4}k+2\right)=\left[\frac{1}{4}\cdot\left(8+4\cdot\sqrt{4+k}+k\right)+2\cdot\left(-2-\sqrt{4+k}\right)-\frac{1}{4}k+2\right]=$$

$$=-\sqrt{4+k}<0$$

د $x_2=-2-\sqrt{4+k}$ په ځای کې یو نسبي خورا ټیټټکی پروت دی، که 0 < k وي.

د k=-4 لپاره $\sqrt{4+k}=0$ دی، یعنې $f_k''(x_{1/2})=0$ په دې حالت کې د $x_{1/2}$ په ځای کې په حقیقت کې یو پروت-ولاړ تانجنت شتون لري مګر نه افراطي ارزښت.

ت ــ د انعطاف ټکی یا اوړونټکی

$$f_k''(x)=0 \Leftrightarrow \underbrace{\left(\frac{1}{4}x^2+2x-\frac{1}{4}k+2\right)}_{=0}\cdot\underbrace{e^{\frac{1}{2}\cdot x}}_{\neq 0}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}x^2+2x-\frac{1}{4}k+2=0|\cdot 4 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+8x-k+8=0$$

$$p=8;\quad q=-k+8 \quad\Rightarrow\quad D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=16-(-k+8)=16+k-8=8+k$$

$$x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\quad \left|\begin{array}{l} x_1=-4+\sqrt{8+k} \\ x_1=-4-\sqrt{8+k}\end{array}\right. \quad \text{für } k\geq -8$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $k \geq 0$ لپاره x_1 او x_2 ممکنه اوړونټکي یا د انعطاف ټکي دي.

د $k < 0$ لپاره اوړونټکي نه شته

د اوړونځایونو ازماینښت: $f_k'''(x_{1/2}) \neq 0$

$$f_k'''(x_{1/2}) = \left(\frac{1}{8}x_{1/2}^2 + \frac{3}{2}x_{1/2} - \frac{1}{8}k + 3\right) \cdot \underbrace{e^{\frac{1}{2} \cdot x_{1/2}}}_{\neq 0}$$

که $(...) \neq 0$ وي نو لاس ته راځي، چې اوړونټکی په $x_{1/2}$ کې.

منځشمیرنه:

$$: x_1^2 = \left(-4 + \sqrt{8+k}\right)^2 = 24 - 8 \cdot \sqrt{4+k} + k$$

$$x_2^2 = \left(-4 - \sqrt{8+k}\right)^2 = 24 + 8 \cdot \sqrt{4+k} + k$$

$$\frac{1}{8}x_1^2 + \frac{3}{2}x_1 - \frac{1}{8}k + 3 = \left[\frac{1}{8}\left(24 - 8 \cdot \sqrt{4+k} + k\right) + \frac{3}{2}\left(-4 + \sqrt{8+k}\right) - \frac{1}{8}k + 3\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{8+k} \neq 0$$

$x_1 = -4 + \sqrt{8+k}$ د $k > -8$ لپاره یو اوړنځای یا د انعطاف ځای دی.

$$\frac{1}{8}x_2^2 + \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{8}k + 3 = \left[\frac{1}{8}\left(24 + 8 \cdot \sqrt{4+k} + k\right) + \frac{3}{2}\left(-4 - \sqrt{8+k}\right) - \frac{1}{8}k + 3\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{8+k} \neq 0$$

$x_2 = -4 - \sqrt{8+k}$ د $k > -8$ لپاره یو اوړونټکی یا د انعطافټکی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټ- د سطحې د مساحت ټولیزه شمیرنه

$P_{k\times 1/2}\left(\pm\sqrt{k}\,|\,0\right)$ صفرځایونه فقط د k≥0 لپاره شتون لري

دا انتیګرال غواړو وشمیرو:

$$\int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} f_k(x)\,dx = \int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} \left(x^2-k\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx = \underbrace{\int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} x^2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx}_{I} - k\cdot \underbrace{\int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx}_{II} = I - k\cdot II$$

ټولیز حل I مخ له مخه ورکول کیږي

$$\int x^2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx = \left(2x^2-8x+16\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} + C$$

حل II:

$$\int e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx \quad \text{Substitution: } u(x)=\frac{1}{2}x \Rightarrow \frac{du}{dx}=\frac{1}{2} \Rightarrow dx = 2\cdot du$$

$$\Rightarrow \int e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx = 2\cdot\int e^{u}\,du = 2\cdot e^{u} = 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} + C$$

سره راټولول یا یوځای کول:

$$\int f_k(x)\,dx = I - k\cdot II = \left(2x^2-8x+16\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} - k\cdot 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} + C =$$

$$= \left(2x^2-8x+16-2k\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} + C$$

د پولو ځای په ځای کونه یا ایښونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} f_k(x)\,dx = \left[\left(2x^2-8x+16-2k\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\right]_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}}$$
$$=\left(2k-8\sqrt{k}+16-2k\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{k}}-\left(2k+8\sqrt{k}+16-2k\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{k}}$$
$$=\left(-8\sqrt{k}+16\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{k}}-\left(8\sqrt{k}+16\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{k}}$$

د فزيکي سطحې پاره باور لري:

$$A_k = \left|\int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} f_k(x)\,dx\right| = \left|\left(-8\sqrt{k}+16\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{k}}-\left(8\sqrt{k}+16\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{k}}\right|$$

الف-

K=-4

$P_{k_y}(0|-k) \Rightarrow P_{-4_y}(0|4)$ صفرځای نه شته، ځکه چې $k < 0$

افراطي ځای نه شته، ځکه د $k=-4$ لپاره شرط $k > -4$ پوره نه دی

$$x_{k_{w1}} = -4+\sqrt{8+k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{-4_{w1}} = -4+\sqrt{8-4} = -4+\sqrt{4} = -2 \Rightarrow f_{-4}\left(x_{-2_{w1}}\right) \approx 2{,}94$$
$$x_{-4_{w2}} = -4-\sqrt{8-4} = -4-\sqrt{4} = -6 \Rightarrow f_{-4}\left(x_{-4_{w2}}\right) \approx 1{,}99$$

K=-2

$P_{k_y}(0|-k) \Rightarrow P_{-2_y}(0|2)$ صفرځای نه شته، ځکه چې $k < 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$x_{k_{Min}} = -2+\sqrt{4+k} \Rightarrow$ ›

$$\Rightarrow x_{-2_{Min}} = -2+\sqrt{4-2} = -2+\sqrt{2} \approx -0{,}59 \Rightarrow f_{-2}\left(x_{-2_{Min}}\right) \approx 1{,}75$$

$$x_{-2_{Max}} = -2-\sqrt{4-2} = -2-\sqrt{2} \approx -3{,}41 \Rightarrow f_{-2}\left(x_{-2_{Max}}\right) \approx 2{,}48$$

$x_{k_{w1}} =$

$$= -4+\sqrt{8+k} \Rightarrow x_{-2_{w1}} = -4+\sqrt{8-2} = -4+\sqrt{6} \approx -1{,}55 \Rightarrow f_{-2}\left(x_{-2_{w1}}\right) \approx 2{,}03$$

$$x_{-4_{w2}} = -4-\sqrt{8-2} = -4-\sqrt{6} \approx -6{,}45 \Rightarrow f_{-2}\left(x_{-2_{w2}}\right) \approx 1{,}73$$

$k = 0$

$P_{k_y}(0|-k) \Rightarrow P_{0_y}(0|0)$

دبل صفرځایونه $P_{k_{x1/2}}(\pm\sqrt{k}|0) \Rightarrow P_{0_{x1/2}}(0|0)$

$$x_{k_{Min}} = -2+\sqrt{4+k} \Rightarrow x_{0_{Min}} = -2+\sqrt{4+0} = -2+\sqrt{4} = 0 \Rightarrow f_0\left(x_{0_{Min}}\right) = 0$$

$$x_{0_{Max}} = -2-\sqrt{4+0} = -2-\sqrt{4} = -4 \Rightarrow f_0\left(x_{0_{Max}}\right) \approx 2{,}17$$

$$x_{k_{w1}} = -4+\sqrt{8+k} \Rightarrow x_{0_{w1}} = -4+\sqrt{8+0} = -4+\sqrt{8} \approx -1{,}17 \Rightarrow f_0\left(x_{0_{w1}}\right) \approx 0{,}76$$

$$x_{0_{w2}} = -4-\sqrt{8+0} = -4-\sqrt{8} \approx -6{,}83 \Rightarrow f_0\left(x_{0_{w2}}\right) \approx 1{,}53$$

$k = 2$

$P_{k_y}(0|-k) \Rightarrow P_{2_y}(0|-2)$

$P_{k_{x1/2}}(\pm\sqrt{k}|0) \Rightarrow P_{2_{x1/2}}(\pm\sqrt{2} \approx \pm 1{,}41|0)$

$$x_{k_{Min}} = -2+\sqrt{4+k} \Rightarrow x_{2_{Min}} = -2+\sqrt{4+2} = -2+\sqrt{6} \approx 0{,}45 \Rightarrow f_2\left(x_{2_{Min}}\right) \approx -2{,}25$$

$$x_{2_{Max}} = -2-\sqrt{4+2} = -2-\sqrt{6} \approx -4{,}45 \Rightarrow f_2\left(x_{2_{Max}}\right) \approx 1{,}92$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_{k_{w1}} = -4+\sqrt{8+k} \Rightarrow x_{2_{w1}} = -4+\sqrt{8+2} = -4+\sqrt{10} \approx -0,84 \Rightarrow f_2\left(x_{2_{w1}}\right) \approx -0,85$$

$$x_{2_{w2}} = -4-\sqrt{8+2} = -4-\sqrt{10} \approx -7,16 \Rightarrow f_2\left(x_{2_{w2}}\right) \approx 1,37$$

$k = 4$

$P_{k_y}(0|-k) \Rightarrow P_{4_y}(0|-4)$

$P_{k_{x1/2}}\left(\pm\sqrt{k}\,|\,0\right) \Rightarrow P_{4_{x1/2}}\left(\pm\sqrt{4} = \pm 2\,|\,0\right)$

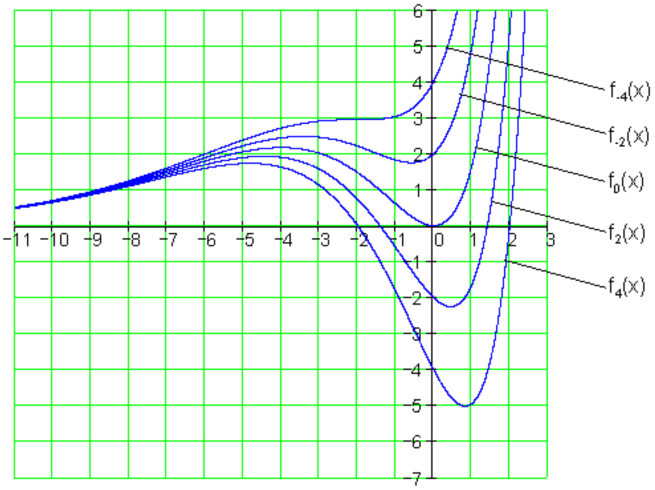
$$x_{k_{Min}} = -2+\sqrt{4+k} \Rightarrow x_{4_{Min}} = -2+\sqrt{4+4} = -2+\sqrt{8} \approx 0,83 \Rightarrow f_4\left(x_{4_{Min}}\right) \approx -5,01$$

$$x_{4_{Max}} = -2-\sqrt{4+4} = -2-\sqrt{8} \approx -4,83 \Rightarrow f_4\left(x_{4_{Max}}\right) \approx 1,73$$

$$x_{k_{w1}} = -4+\sqrt{8+k} \Rightarrow x_{4_{w1}} = -4+\sqrt{8+4} = -4+\sqrt{12} \approx -0,54 \Rightarrow f_4\left(x_{4_{w1}}\right) \approx -2,84$$

$$x_{4_{w2}} = -4-\sqrt{8+4} = -4-\sqrt{12} \approx -7,46 \Rightarrow f_4\left(x_{4_{w2}}\right) \approx 1,24$$

د $f_k(x) = \left(x^2-k\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}$ $k \in \mathbb{R}$ او $x \in \mathbb{R}$ لپاره



د فزیکي سطحې لپاره باور لري:

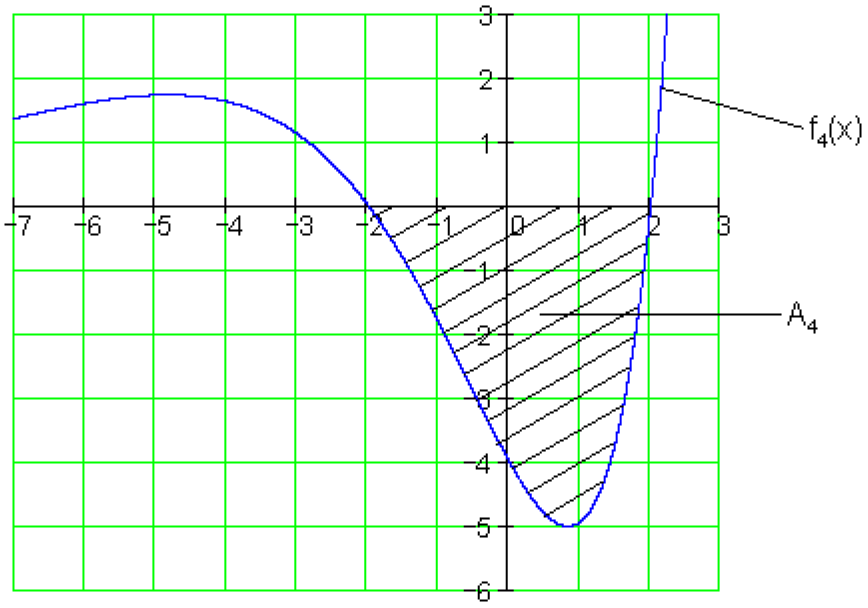
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A_k = \left|\int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} f_k(x)\,dx\right| = \left|\left(-8\sqrt{k}+16\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\sqrt{k}} - \left(8\sqrt{k}+16\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}\sqrt{k}}\right|$$

په ځانګړې توګه د k=4 لپاره باور لري:

$$A_4 = \left|\int_{-\sqrt{4}}^{\sqrt{4}} f_4(x)\,dx\right| = \left|\left(-8\sqrt{4}+16\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\sqrt{4}} - \left(8\sqrt{4}+16\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}\sqrt{4}}\right|$$

$$= \left|(-8\cdot 2+16)\cdot e-(8\cdot 2+16)\cdot e^{-1}\right| = \left|-32\cdot e^{-1}\right| \approx \left|-11{,}772\right| = \underline{\underline{11{,}772 FE}}$$



ساده مشتق- او انتیګرالشمیرنه (د یوه ساده تابع رابیلونه او ورکړونه)

(c) ketabton.com: The Digital Library

بنستیزه تابع	مشتق	تابع
$F(x)$	$f'(x)$	$f(x)$
$F(x)=k\cdot x+C$	$f'(x)=0$	$f(x)=k$
$F(x)=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C \quad (n\neq -1)$	$f'(x)=n\cdot x^{n-1}$	$f(x)=x^n$
$F(x)=e^x+C$	$f'(x)=e^x$	$f(x)=e^x$
$F(x)=\frac{1}{\ln(a)}a^x+C \quad (a>0, a\neq 1)$	$f'(x)=a^x\cdot\ln(a)$	$f(x)=a^x$
$F(x)=x\cdot\ln(x)-x+C \quad (x>0)$	$f'(x)=\frac{1}{x}$	$f(x)=\ln(x)$
$F(x)=-\cos(x)+C$	$f'(x)=\cos(x)$	$f(x)=\sin(x)$
$F(x)=-\cos(x)+C$	$f'(x)=-\sin(x)$	$f(x)=\cos(x)$
$F(x)=\ln\lvert x\rvert+C \quad (x\neq 0)$	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}=-x^{-2}$	$f(x)=\frac{1}{x}=x^{-1}$

د مشتق ـ او انتیګرالشمیرنو سره مخامخ کول

د ثابتي قانون

$f(x)=k\cdot u(x)$ mit $k=$ konstant $\Rightarrow f'(x)=k\cdot u'(x)$ = ثابته یا همغه	$f(x)=k\cdot u(x)$ mit $k=$ konstant $\int f(x)\,dx=\int k\cdot u(x)\,dx=k\cdot\int u(x)\,dx$ = ثابته یا همغه

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه:	بيلګه:
$f(x) = 3x^4 \quad k = 3 \quad u(x) = x^4$ $\Rightarrow u'(x) = 4x^3$ $f'(x) = k \cdot u'(x) = 3 \cdot 4x^3 = \underline{\underline{12x^3}}$	$f(x) = 3x^2 \Rightarrow k = 3 \quad u(x) = x^2$ $\int f(x)\,dx = 3 \cdot \int u(x)\,dx = 3 \cdot \int x^2\,dx$ $= 3 \cdot \frac{x^3}{3} + C = \underline{\underline{x^3 + C}}$
د جمعي قانون Summenregel $f(x) = u(x) \pm v(x)$ $\Rightarrow f'(x) = u'(x) \pm v'(x)$	$f(x) = u(x) \pm v(x)$ $\int f(x)\,dx = \int u(x)\,dx \pm \int v(x)\,dx$
بيلګه: $f(x) = 5x^2 + 3x$ $u(x) = 5x^2 \quad v(x) = 3x$ $\Rightarrow u'(x) = 10x \quad v'(x) = 3$ $f'(x) = u'(x) + v'(x) = \underline{\underline{10x + 3}}$	بيلګه: $f(x) = x^2 + x + 1$ $\int f(x)\,dx = \int x^2\,dx + \int x\,dx + \int 1\,dx$ $\underline{\underline{= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + C}}$

د مشتقشميرنې لپاره نور قوانين

د ضرب قانون: $f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow$ in Kurzform: $\boxed{f' = u' \cdot v + u \cdot v'}$

بيلګه: دالماني پښتو: د... او... سره

$f(x) = x \cdot e^x$ mit $u(x) = x$ und $v(x) = e^x$

$f' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$u'(x) = 1;\ v'(x) = e^x$

$f'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = \underline{\underline{(x+1)e^x}}$

د وېش قانون:دالماني پښتو : په لنده بڼه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$$ لاس ته اوړنه په لنده بڼه $$f'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$$

بیلگه: $f(x)=\frac{e^x}{x}$ د $u(x)=e^x$ او $v(x)=x$ سره

$$f'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$$

$$u'(x)=e^x\,;\,v'(x)=1;\,v^2=x^2$$

$$f'(x)=\frac{e^x\cdot x-e^x\cdot 1}{x^2}=\frac{(x-1)\,e^x}{x^2}$$

ځنځیزي قانون: د الماني پښتو: کیږ: د باندنی مشتق ښی: دننني مشتق

$$f(x)=f\left[z(x)\right]\Rightarrow f'(x)=\underbrace{f'(z)}_{\text{äußere Ableitung}}\cdot\underbrace{z'(x)}_{\text{innere Ableitung}}$$

دننني مشتق   دباندنی مشتق

بیلگه: $f(x)=e^{2x}$

د $z=2x$ سره $f(z)=e^z$ لاس ته راځي

$$f'(x)=f'(z)\cdot z'(x)$$

$$f'(z)=e^z\,;\,z'(x)=2\Rightarrow f'(x)=e^z\cdot 2=2\cdot e^{2x}$$

تمرینونه : د مشتق تمرینونه د ضربقانون، ویش قانون، او زنځیري قاونو سره

د لاندې توابعو مشتق تاسو ته د معلومو قوانینو له مخې وشمیرئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

اول – $f(x)=(x+a)^2-e^{2x-3}$ دويم- $f(x)=\left(1-e^{ax}\right)^2$

دريم - $f(x)=\left(e^{2x}+e^{-x}\right)^2$ - خلورم $f(x)=(x+1)e^x$

پنځم - $f(x)=(3-2x)e^{-\frac{1}{2}x}$ شپږم - $f(x)=a(x-3)e^{4x-3}$ اوم -

$f(x)=\dfrac{x^2+1}{e^x}$ اتم - $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$ نهم - $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ لسم - $f(x)=\dfrac{1}{x}\left(x^2-4\right)$

د انتيګرالشميرنې لپاره نورې لارې يا قوانين

د انتيګرالونو پوله بدلونه:

د انتيګرېشن پولو بدلون له لارې د انتيګرال مخنخښه تغير خوري	$\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx$ oder $-\int_a^b f(x)\,dx=\int_b^a f(x)\,dx$

دا په نخښه شوې سطحه دې وشميرل ش

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\left(3e^x-6x^2\right)dx$$

$$=3\int_0^1 e^x\,dx-6\int_0^1 x^2\,dx=$$

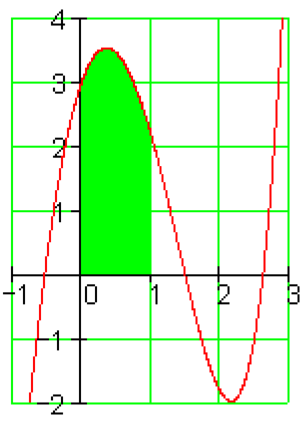
$$3\int_0^1 e^x\,dx+6\int_1^0 x^2\,dx$$

$$=\left[3e^x\right]_0^1+\left[2x^3\right]_1^0$$

$$=3e^1-3e^0+2\cdot0-2\cdot1$$

$$=3e^1-5\approx\underline{\underline{3,155}}$$

$f(x) := 3e^x - 6x^2$

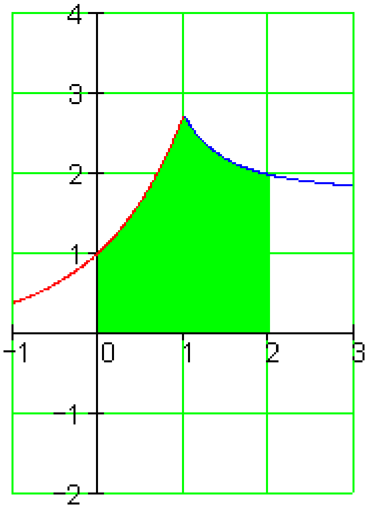


(c) ketabton.com: The Digital Library

صفرانتیګرال

که په تاکلي اتیګرال کي کښته اوپورته پولي سره برابري یامساوي وي، نود تاکلي انتیګرال ارزښت صفر دی.	$\int_a^a f(x)\,dx = 0$

د انتګروال جمعه

د ټول انتیګرال ارزښت په برخه ساحو انتیګرالونو د جمعه کوني یا یو پر بل زیاتوني له لارې منځ ته راځي.	$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$
	$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{für } x < 1 \\ \frac{1}{x^2} + (e-1) & \text{für } x \ge 1 \end{cases}$ په نخښه شوي سطحه دي وشمیل $\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 e^x\,dx + \int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} + e - 1\right) dx$ $= \left[e^x\right]_0^1 + \left[-\frac{1}{x} + e \cdot x - x\right]_1^2$ $= e^1 - e^0 + \left[-\frac{1}{2} + 2e - 2\right] - [-1 + e - 1]$ $\approx \underline{\underline{3,937}}$

تمرینونه: مشتق – او انتیګرالشمېرنه د **e** تابع سره.

د لاندې توابعو مشتق وشمېرئ.

اول - $f(x) = e^{-4x} - e^{4x}$ دویم - $f(x) = \frac{3}{2} e^{-5x^2 - 3x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم - $f(x) = -4e^{x}\left(e^{-x}+3\right)$ ځلورم - $f(x) = -e^{t-x} - 2t\cdot e^{-tx}$

پنځم - $f(x) = t\cdot e^{2-3x} - 6e^{x^2+3}$ شپږم - $f(x) = t\left(e^{-x} - 3x^2\right)$

د لاندې توابعو انتیګرال ونیسۍ ا و د مشتق له لاې یې تیکوالی و ازمایۍ

اوم - $f(x) = \frac{1}{16}\left(x^2 - 3e^{x}\right)$ اتم - $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x + \frac{3}{x}$

نهم - $f(x) = t\cdot x - \frac{3}{2}e^{x} + t^2 + 2e$ لسم - $f(x) = t^2 x\left(x^2 - 8x\right)$

ځوابونه:

د مشتق تمرینونه د ضربقانون، وېش قانون، او زنځیري قاونو سره

نتیجې او مفصل ځوابونه. نتیجې:

لومړی - $f(x) = (x+a)^2 - e^{2x-3} \Rightarrow f'(x) = 2\left(x + a - e^{2x-3}\right)$

دویم: $f(x) = \left(1-e^{ax}\right)^2 \Rightarrow f'(x) = -2a\cdot e^{ax}\left(1-e^{ax}\right)$

دریم: $f(x) = \left(e^{2x} + e^{-x}\right)^2 \Rightarrow f'(x) = 2\left(e^{2x} + e^{-x}\right)\cdot\left(2e^{2x} - e^{-x}\right)$

ځلورم:- $f(x) = (x+1)\,e^{x} \Rightarrow f'(x) = (x+2)\,e^{x}$

پنځم: $f(x) = (3-2x)\,e^{-\frac{1}{2}x} \Rightarrow f'(x) = \left(x - \frac{7}{2}\right)e^{-\frac{1}{2}x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

شپږم: $f(x) = a(x-3)e^{4x-3} \Rightarrow f'(x) = a \cdot e^{4x-3}(4x-11)$

اووم: $f(x) = \frac{x^2+1}{e^x} \Rightarrow f'(x) = \frac{-x^2+2x-1}{e^x}$

اتم: $f(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$

نهم: $f(x) = \frac{x}{x-1} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}$

لسم: $f(x) = \frac{1}{x}(x^2-4) = x - \frac{4}{x} = x - 4x^{-1} \Rightarrow f'(x) = 1 + \frac{4}{x^2}$

مفصل ځوابونه

لومړی:

د لاندې الماني پښتو: زنځيري لار يا قانو

$$f(x) = (x+a)^2 - e^{2x-3} = u(x) - v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) - v'(x)$$

$$\text{Kettenregel:} \quad u(x) = (x+a)^2 \Rightarrow u'(x) = 1 \cdot 2(x+a)$$

$$v(x) = e^{2x-3} \Rightarrow v'(x) = 2 \cdot e^{2x-3}$$

$$f'(x) = 2(x+a) - 2 \cdot e^{2x-3} = \underline{\underline{2\left(x+a-e^{2x-3}\right)}}$$

دويم:

$$f(x) = \left(1-e^{ax}\right)^2 = f\left[z(x)\right] \Rightarrow f'(x) = f'(z) \cdot z'(x)$$

دننني مشتق: $z(x) = \left(1-e^{ax}\right) \Rightarrow z'(x) = -a \cdot e^{ax}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دننني مشتق: $z(x) = \left(1 - e^{ax}\right) \Rightarrow z'(x) = -a \cdot e^{ax}$

دباندنی مشتق: $f(z) = z^2 \Rightarrow f'(z) = 2z = 2\left(1 - e^{ax}\right)$

$$f'(x) = 2\left(1 - e^{ax}\right) \cdot \left(-a \cdot e^{ax}\right) = \underline{\underline{-2a \cdot e^{ax}\left(1 - e^{ax}\right)}}$$

دریم: $f(x) = \left(e^{2x} + e^{-x}\right)^2 = f\left[z(x)\right] \Rightarrow f'(x) = f'(z) \cdot z'(x)$

دننني مشتق: $z(x) = \left(e^{2x} + e^{-x}\right) \Rightarrow z'(x) = 2e^{2x} - e^{-x}$

دباندنی مشتق: $f(z) = z^2 \Rightarrow f'(z) = 2z = 2\left(e^{2x} + e^{-x}\right)$

$$f'(x) = \underline{\underline{2\left(e^{2x} + e^{-x}\right) \cdot \left(2e^{2x} - e^{-x}\right)}}$$

څلورم:

$$f(x) = (x+1)\,e^x = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'v + uv'$$

$$u = (x+1);\ u' = 1;\ v = e^x;\ v' = e^x$$

$$f'(x) = 1 \cdot e^x + (x+1)\,e^x = \left[1 + (x+1)\right]e^x = \underline{\underline{(x+2)\,e^x}}$$

پنځم:

$$f(x) = (3-2x)\,e^{-\frac{1}{2}x} = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'v + uv'$$

$$u = (3-2x);\ u' = -2;\ v = e^{-\frac{1}{2}x};\ v' = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}$$

$$f'(x) = -2 \cdot e^{-\frac{1}{2}x} + (3-2x) \cdot \left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\right) = -2 \cdot e^{-\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2}(3-2x) \cdot e^{-\frac{1}{2}x} =$$

$$= \underline{\underline{\left(x - \frac{7}{2}\right)e^{-\frac{1}{2}x}}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

شپږم:

$$f(x)=a(x-3)e^{4x-3}=u(x)\cdot v(x)\Rightarrow f'(x)=u'v+uv'$$
$$u=a(x-3);\ u'=a;\ v=e^{4x-3};\ v'=4e^{4x-3}$$
$$f'(x)=a\cdot e^{4x-3}+a(x-3)\cdot 4e^{4x-3}=\underline{\underline{a\cdot e^{4x-3}(4x-11)}}$$

اووم:

$$f(x)=\frac{x^2+1}{e^x}=\frac{u(x)}{v(x)}\Rightarrow f'(x)=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$
$$u=x^2+1;\ u'=2x;\ v=e^x;\ v'=e^x;\ v^2=e^x\cdot e^x$$
$$f'(x)=\frac{2x\cdot e^x-(x^2+1)e^x}{e^x\cdot e^x}=\underline{\underline{\frac{-x^2+2x-1}{e^x}}}$$

اتم:

$$f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}\Rightarrow f'(x)=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$
$$u=e^x-1;\ u'=e^x;\ v=e^x+1;\ v'=e^x;\ v^2=(e^x+1)^2$$
$$f'(x)=\frac{e^x(e^x+1)-(e^x-1)e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{e^x\left[(e^x+1)-(e^x-1)\right]}{(e^x+1)^2}=\underline{\underline{\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}}}$$

نهم:

$$f(x)=\frac{x}{x-1}\Rightarrow f'(x)=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$
$$u=x;\ u'=1;\ v=x-1;\ v'=1;\ v^2=(x-1)^2$$
$$f'(x)=\frac{1\cdot(x-1)-x\cdot 1}{(x-1)^2}=\underline{\underline{-\frac{1}{(x-1)^2}}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لسم:

$$f(x)=\frac{1}{x}\left(x^2-4\right)=x-\frac{4}{x}=x-4x^{-1}$$

$$f'(x)=1-\left(-1\cdot 4x^{-2}\right)=\underline{\underline{1+\frac{4}{x^2}}}$$

ځوابونه

د کور د e - تابعو مشتق او انتیګرالونه ا

نتیجې او مفصل ځوابونه . نتیجې:

لومړی:

$$f(x)=e^{-4x}-e^{4x}\Rightarrow f'(x)=-4e^{-4x}-4e^{4x}=\underline{\underline{-4\left(e^{-4x}+e^{4x}\right)}}$$

دویم:

$$f(x)=\frac{3}{2}e^{-5x^2-3x}\Rightarrow f'(x)=\underline{\underline{\frac{3}{2}(-10x-3)\,e^{-5x^2-3x}}}$$

دریم :

$$f(x)=-4e^{x}\left(e^{-x}+3\right)=-4\underbrace{e^{x}\cdot e^{-x}}_{1}-12e^{x}=-4-12e^{x}\Rightarrow f'(x)=\underline{\underline{-12e^{x}}}$$

ځلورم:

$$f(x)=-e^{t-x}-2t\cdot e^{-tx}\Rightarrow f'(x)=\underline{\underline{e^{t-x}+2t^2\cdot e^{-tx}}}$$

پنځم:

$$f(x)=t\cdot e^{2-3x}-6e^{x^2+3}\Rightarrow f'(x)=\underline{\underline{-3t\cdot e^{2-3x}-12x\cdot e^{x^2+3}}}$$

شپږم:

$$f(x)=t\left(e^{-x}-3x^2\right)=t\cdot e^{-x}-3t\cdot x^2\Rightarrow f'(x)=-t\cdot e^{-x}-6t\cdot x=\underline{\underline{-t\left(e^{-x}+6x\right)}}$$

اووم:

$$f(x)=\frac{1}{16}\left(x^2-3e^{x}\right)\Rightarrow F(x)=\frac{1}{16}\int\left(x^2-3e^{x}\right)dx=\underline{\underline{\frac{1}{16}\left[\frac{1}{3}x^3-3e^{x}\right]+C}}$$

$$F'(x)=\frac{1}{16}\left(x^2-3e^{x}\right)=f(x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اتم:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x + \frac{3}{x} \Rightarrow F(x) = \int \left(x^3 - 2x^2 + 4x + \frac{3}{x} \right) dx$$

$$= \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + 3 \cdot \ln|x| + C$$

$$F'(x) = x^3 - 2x^2 + 4x + 3 \cdot \frac{1}{x} = f(x)$$

نهم:

$$f(x) = t \cdot x - \frac{3}{2}e^x + t^2 + 2e \Rightarrow F(x) = \int \left(t \cdot x - \frac{3}{2}e^x + t^2 + 2e \right) dx$$

$$= \frac{1}{2}t \cdot x^2 - \frac{3}{2}e^x + t^2 \cdot x + 2e \cdot x + C$$

$$F'(x) = t \cdot x - \frac{3}{2}e^x + t^2 + 2e = f(x)$$

لسم:

$$f(x) = t^2 x\left(x^2 - 8x\right) = t^2\left(x^3 - 8x^2\right) \Rightarrow F(x) = t^2 \int \left(x^3 - 8x^2\right) dx =$$

$$t^2\left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{8}{3}x^3\right) + C$$

$$F'(x) = t^2\left(x^3 - 8x^2\right) = t^2 x\left(x^2 - 8x\right) = f(x)$$

مفصل ځوابونه:

لومړی:

$$f(x) = e^{-4x} - e^{4x} \Rightarrow f'(x) = -4e^{-4x} - 4e^{4x} = -4\left(e^{-4x} + e^{4x}\right)$$

مشتق د ضرب قانون له مخې مخ ته بیول کیږي

دویم:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=\frac{3}{2}e^{-5x^2-3x}\Rightarrow f'(x)=(-10x-3)\cdot\frac{3}{2}\cdot e^{-5x^2-3x}$$
$$=\frac{3}{2}(-10x-3)e^{-5x^2-3x}=\underline{\underline{-\frac{3}{2}(10x+3)e^{-5x^2-3x}}}$$

دریم:

$$f(x)=-4e^{x}\left(e^{-x}+3\right)=-4\cdot e^{x}\cdot e^{-x}-4\cdot 3\cdot e^{x}$$
$$=-4\cdot e^{x-x}-12\cdot e^{x}=-4\cdot e^{0}-12\cdot e^{x}$$
$$=-4-12\cdot e^{x}\Rightarrow f'(x)=\underline{\underline{-12e^{x}}}$$

څلورم:

$$f(x)=-e^{t-x}-2t\cdot e^{-tx}\Rightarrow f'(x)=(-1)\left(-e^{t-x}\right)-\left(-t\cdot 2t\cdot e^{-tx}\right)$$
$$=\underline{\underline{e^{t-x}+2t^{2}\cdot e^{-tx}}}$$

پنځم:

$$f(x)=t\cdot e^{2-3x}-6e^{x^2+3}\Rightarrow f'(x)=-3t\cdot e^{2-3x}-2x\cdot 6e^{x^2+3}$$
$$=\underline{\underline{-3t\cdot e^{2-3x}-12x\cdot e^{x^2+3}}}$$

شپږم:

$$f(x)=t\left(e^{-x}-3x^{2}\right)=t\cdot e^{-x}-3t\cdot x^{2}$$
$$\Rightarrow f'(x)=-t\cdot e^{-x}-2\cdot 3t\cdot x=-t\cdot e^{-x}-6t\cdot x=\underline{\underline{-t\left(e^{-x}+6x\right)}}$$

اووم:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=\frac{1}{16}\left(x^2-3e^x\right)$$

$$\Rightarrow F(x)=\int\frac{1}{16}\left(x^2-3e^x\right)dx=\frac{1}{16}\int\left(x^2-3e^x\right)dx=\underline{\underline{\frac{1}{16}\left[\frac{1}{3}x^3-3e^x\right]+C}}$$

$$F'(x)=\frac{1}{16}\left(3\cdot\frac{1}{3}x^2-3e^x\right)=\frac{1}{16}\left(x^2-3e^x\right)=F(x)$$

اتم:

$$f(x)=x^3-2x^2+4x+\frac{3}{x}$$

$$\Rightarrow F(x)=\int\left(x^3-2x^2+4x+\frac{3}{x}\right)dx=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{4}{2}x^2+3\cdot\ln|x|+C$$

$$=\underline{\underline{\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+2x^2+3\cdot\ln|x|+C}}$$

$$F'(x)=x^3-2x^2+4x+3\cdot\frac{1}{x}=f(x)$$

یادونه: $\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+C \text{ und } f(x)=\ln|x|\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}$

نهم:

$$f(x)=t\cdot x-\frac{3}{2}e^x+t^2+2e$$

$$\Rightarrow F(x)=\int\left(t\cdot x-\frac{3}{2}e^x+t^2+2e\right)dx=\underline{\underline{\frac{1}{2}t\cdot x^2-\frac{3}{2}e^x+t^2\cdot x+2e\cdot x+C}}$$

$$F'(x)=\frac{2}{2}t\cdot x-\frac{3}{2}e^x+t^2+2e=t\cdot x-\frac{3}{2}e^x+t^2+2e=f(x)$$

لسم:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = t^2 x\left(x^2 - 8x\right) = t^2\left(x^3 - 8x^2\right)$$

$$\Rightarrow F(x) = t^2 \int \left(x^3 - 8x^2\right) dx = t^2\left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{8}{3}x^3\right) + C$$

$$F'(x) = t^2\left(\frac{4}{4}x^3 - 3\cdot\frac{8}{3}x^2\right) = t^2\left(x^3 - 8x^2\right) = t^2 x\left(x^2 - 8x\right) = f(x)$$

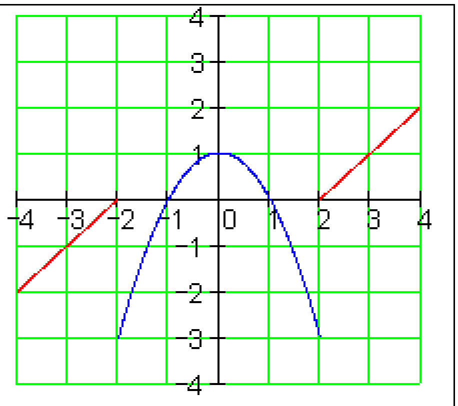
اتم: ناپرېکیدنوالی یا متمادیت، مشتق وړوالی او انتیګرالوړوالی

د ناپرېکیدنوالي یا متمادین کلمه دې لیدوړ روښانه یا تشریح شي.

یو تابع **f(x)** هلته په یوه انتروال [a ; b] کې متمادي یا ناپرېکیدونکی دی، که چیرې خوک وکړای شي، چې د تابع ګراف د انتروال له یوه سر څخه تر بله سره پورې داسې وکښلای شي، چې د پنسل څوکه له ځایه پورته کیدو ته اړ نه شي.

یا که چیرې تابع **f(x)** د ګراف ټکي د یوه انتروال [a ; b] په دننه کې بې له کنډلو یا نښلولو یو بل سره نښتي وي، بې له دې چې کوم ټوپونه ترې رامنځ ته شي، نو بیا تابع f(x) په انتروال [a ; b] کې ناپرېکیدونکې یا متمادي دی.

بېلګه:

موږ سره یوځای اېښول شوېې تابع څېړو $$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{für } -\infty < x < -2 \\ -x^2+1 & \text{für } -2 \le x \le 2 \\ x-2 & \text{für } 2 < x < \infty \end{cases}$$ په ځایونو $x_1 = -2$ او $x_2 = 2$ کې د f(x) ګراف ټوپونه کوي یاښایي. په دې ځایونو کې f(x) پرېکیدونک یا نامتمادي دی.	

(c) ketabton.com: The Digital Library

-----...

د متمادي یا ناپرېکیدونکو توابعو لپاره بیلګې:

هر ټولراشنل تابع په خپل تعریفورشو ناپرېکیدونکی دی.

هر مات-یا کسري تابع په خپل تعریفورشو ناپرېکیدونکی دی.(یعنې فقط هلته پرېکیدونکی دی، چیرته چې ماتلاندې یا مخرج صفرځیونه لري، ځکه چې هلته تابع تعریف نه ده).

د طبیعي پوهنو ټولګیزې یا کلاسیکي څېړنو لپاره باورلري: طبیعت ټوپونه نه وهي.

د وخت سره د نباتاتو او نورو ژوندیو وده.

له دې امله ټولې طبیعي پیښې ناپریکیدونکې یا متمادي ځغلي.په یوه بخار دیګ کې د تودوخې جګوالی.

پرېکیدونکې یا نامتمادي(ټوپدوله) تغیرات هم شته لکه د پوست قیمت جګیدل یا د شیانو په نرخ کې ارزاني.

د ناپرېکیدنوالي یا متمادیت شمیرپوهنیز تعریف یاپیژند:

د $f(x)$ تعریفدېرئ یا ـسټ دې D_f وي او ارزښتدېرئ یئ W_f .

تابع $f(x)$ د $x = x_0$ په ځای کې د $x_0 \in D_f$ سره ټیک هلته ناپرېکیدونکې یا متمادي ده، که

← تابع ارزښت $f(x_0)$ شتون لري، دا په دې معنا چې $f(x_0) \in W_f$ ،

← د $x = x_0$ لپاره د $f(x)$ پوله ارزښت شتون لري

او د یوه ټاکلي عدد g سره برابر دی او که

← $f(x_0) = g$ باور ولري.

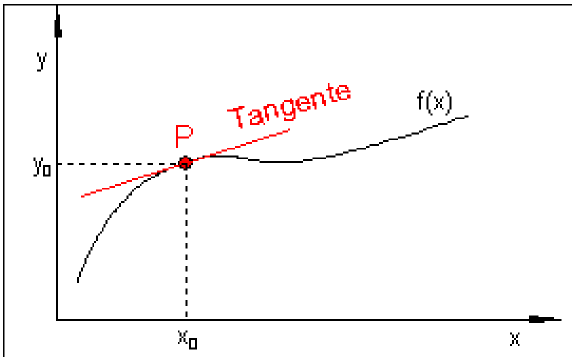
که له دې شرایطو فقط یو هم پوره نه وي، نو بیا تابع $f(x)$ د $x = x_0$ په ځای کې پرېکیدونکې یا نامتمادي دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مشتقوړوالی(رابیلیدوړوالی)

موږ لومړی د یوه فنکشن مشتقوړوالی فقط لیدنیز راوړو

بیلګه: د لومړی مشتق د x_0 په ځای
کې د فنکشن جګوالی راکوي، چې د
فنکشن ګراف په ټکي $P_0 (x_0 | y_0)$
کې لمسوي ا و له دې سره په همدې
وخت کې په ټکي $P_0 (x_0 | y_0)$
کې د فنکشنګراف جګوالی دی.
سرې د فنکشن جګیدنه هم وایي.
له دې لاس ته راوړنو سره تابع د x_0
په ځای کې تیک هلته مشتقوړده، که
یو یواځنی جګوال شتون ولري



د x_0 په ځای کې د یوه فنکشن مشتقوړوالي شرطونه:
فنکشن باید دx_0 په ځای کې ناپرېکیدونکي وي.

دا شرط اړین دی مګر نه پوره کیدونکی، لکه چې لاندي بیلګه بنایي.

بیلګه: دا ترڅنګ ځیرونه(فنکشن) د د فنکشن
د ګراف$f(x)$

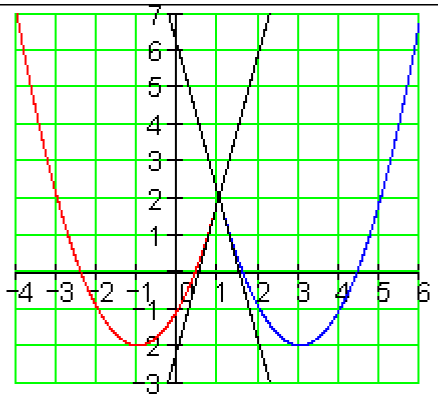
$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 \\ x^2 - 6x + 7 \end{cases}$	د $x<1$ لپاره د $x\geq1$ لپاره

سره بنایي.

په ټکي $(1,2)$ کې یواځنی تانجنت شتون نه لري

$$t_1(x) = 4x - 2$$

$$t_2(x) = -4x + 6$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه: فنکشن $f(x)$ په $x = 1$ کې متمادي یا ناپرېکیدونکی دی، هلته ټوپ نه شته.

مګر موږ په ټکي $P(\ 1 \mid 2\ )$ کې دوه مختلف تانجنتونه لرو. دا په دې معنا چې د $x = 1$ لپاره هم دوه مختلف د تانجنتونو جګوالی لرو، یعني دوه مشتقونه یا رابیلیدني.

دا په دې معنا مشتقفنکشن په $x = 1$ ځای کې یواځنی نه دی.

دا په ځان پسې لري، چې فنکشن $f(x)$ په $x = 1$ ځای کې مشتقوړ نه دی.

لیدنیز یا د لیدلو له مخې دا په دې معنادی چې:

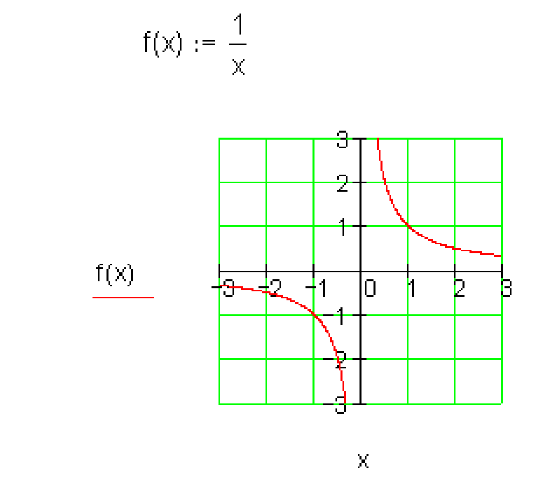
یو فنکشن $f(x)$ د x_0 په ځای کې مشتقوړ یا رابیلیدوړدی، که په دې ځای کې یې مشتق یا رابیلیدنه یواځنی وي، یعني ټیک یو تانجنت شتون ولري.

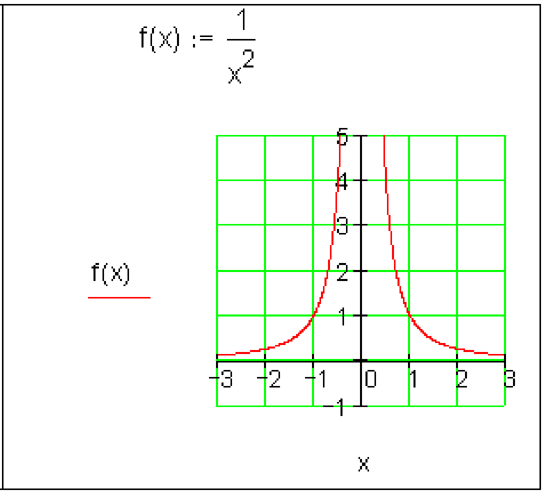
سرېی دا هم ویلی شي، هغه ځای کې چې ګراف څوکه ولري یا را مات شوی یعني ګوډ ولري(را مات وي) ، فنکشن وشتقوړ نه دی.

په څټ (برعکس) دا د ناپرېکیدني یا متمادیت لپاره په دې معنادی:

که فکشن د x_0 په ځای کې مشتقوړ وي، نو دا هلته ناپرېکیونکی یا متمادي هم دی.

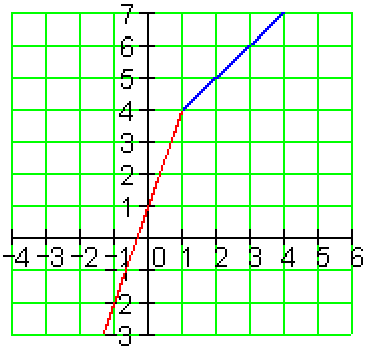
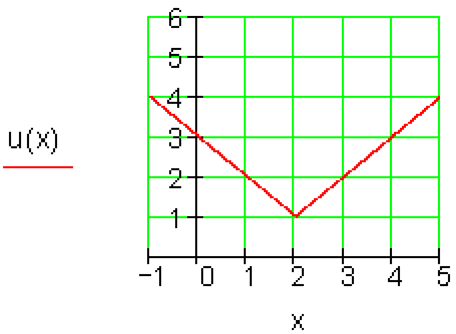
نورې





(c) ketabton.com: The Digital Library

دواړه فنکشنونه، که غوتړی توابع، د په ځای کې مشتقوړ نه دي، ځکه چې دا هلته تعریف نه دي یا پیژند نه لري.

 د x_0 په ځای کې فنکشن په حقیقت کې ناپرېکیدونکی دی، مګر مشتقوړ نه دی(ګود لري یا مات دی)	$u(x) := \|x - 2\| + 1$  دx_0 په ځای کې په حقیقت کې یا په رینتیني ناپرېکیدونکی یا متمادي دی، مګر مشتق نه شته (څوکه)

د مشتقوړوالي شمیرپوهنیز پیژند یا تعریف:

ښی ناپرېکیدونکي پوله	کینه ناپرېکیدونکي پوله
د کمښتوېش فنکشن	د کمښتوېش فنکشن
$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ für $x > x_0$	$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ für $x < x_0$

که د کین اړخ او د ښي اړخ کمښتوېش فنکشنونه سره برابر وي، نو $f(x)$ د x_0 په ځای کې مشتقوړ دی.

بیا نو یو مشتق$f'(x_0)$ شتون لري ، د تانجنت جګوالی د ګراف په ټکي($x_0;\ f(x_0)$) کې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

انتيګرالوړوالی:

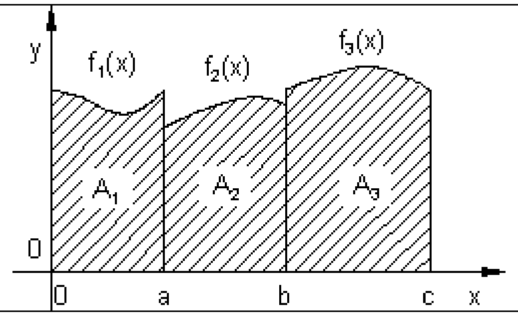
تابع انتيګرالوړ دی، که دا لږ تر لږه ټوټه ډېرله يا ټوټه په ټوټه متمادي يا ناپرېکيدونکی وي.

بېلګه:

کربنه شوې سطحه دې پيدا شي

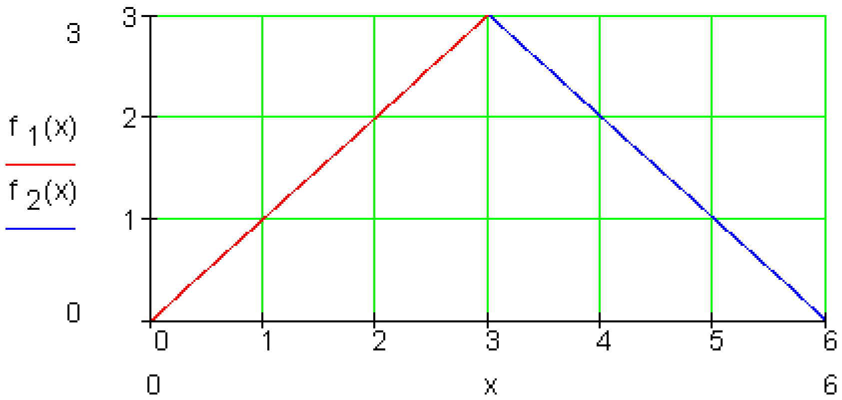
$$A = A_1 + A_2 + A_3$$

$$= \int_0^a f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx + \int_b^c f_3(x)\,dx$$



د درې ګوډي يا مثلث سطحه غواړو پيدا کړو.

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = x \text{ für } (0 \le x < 3) \\ f_2(x) = -x + 6 \text{ für } (3 \le x \le 6) \end{cases}$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A = \int_0^6 f(x)\,dx = \int_0^3 f_1(x)\,dx + \int_3^6 f_2(x)\,dx$$

$$= \int_0^3 x\,dx + \int_3^6 (-x+6)\,dx = \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^3 + \left[-\frac{x^2}{2}+6x\right]_3^6$$

$$= \frac{3^2}{2} - \frac{0^2}{2} + \left[\left(-\frac{6^2}{2}+6\cdot 6\right) - \left(-\frac{3^2}{2}+6\cdot 3\right)\right] = \underline{\underline{9\,FE}}$$

(پورته FE د سطحې یوون یا واحد)

سره له دې ې تابع د P (3 | 3) په ځای کې مشتقوړ یا رابیلیدوړ نه دی، کیدی شي سطحه له دوه برخ –انتیګرالونو پیدا شي.

توابع، چې بې د بدلون له لارې حل کیږي لکه لاندې بلګه:

بیلګه:

عواړو د $f(x)=e^x$ مشتق پیدا کړو. دا مشتق په ساده ډول پیدا کولي شو، یعنې لرو:

$$f(x)=e^x \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx = \int e^x dx = e^x + C$$

ګورو، چې $F'(x)=e^x=f(x)$ دی.

که ولرو: $f(x)=e^{2x}$ او د پورته په څیر لاړ شو، نو لاس ته به ترې راشي:

$$f(x)=e^{2x} \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx = \int e^{2x} dx \neq e^{2x} + C$$

وي $F(x)=e^{2x}+C$ **دی، که** $F'(x)=2e^{2x} \neq f(x)$

له دې امله د بدلون قانون ته اړیو:

د ناټاکلو انتیګرالونو حل د بدلون له لارې

تراوسه مو فقط د هغو انتیګرالونو پوښتني ځواب کړې، چې د اده توابعو مشتق باندې بیرته اړول کیده. دا سې له دې لارې لاسته رغلي بنسټ انتیګرالونو د نورو ټول حلونو

(c) ketabton.com: The Digital Library

بنسټ کیښود. د بنسټ انتیګرالونو کارونه یا استعمال تل شونی نه دی، لکه لاندې بیلګه چې ښایي.

بیلګه: د $f(x)=e^{2x}$ تابع انتیګرال ونیسئ

$$f(x)=e^{2x} \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=\int e^{2x}dx=?$$

بدلون: $u(x)=2x=u$

جوړ کړئ: $u'(x)=\frac{du}{dx}=2 \Rightarrow dx=\frac{du}{2}$

$$\int f(x)dx=\int e^{u}\frac{du}{2}=\frac{1}{2}\int e^{u}du=\frac{1}{2}e^{u}+C$$

د بدلون برعکس: $\frac{1}{2}e^{u}+C=\frac{1}{2}e^{2x}+C$

نو لرو: $F(x)=\int(x)dx=\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^{2x}+C$

ازمایښت: $F(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+C \Rightarrow F'(x)=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot 2=e^{2x}=f(x)$

بیلګه: وښایی چې باور لري.

$$f(x)=(x+1)^2 \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=\int(x+1)^2dx.$$

بدلون $u(x)=x+1=u$ جوړ کړی

$$u'(x)=\frac{du}{dx}=1 \Rightarrow dx=\frac{du}{1}$$

$$\int f(x)dx=\int u^2\frac{du}{1}=\int u^2du=\frac{u^3}{3}+C$$

بیرته- یا په څټ بدلون: $\frac{u^3}{3}+C=\frac{(x+1)^3}{3}+C$

نو: $\int(x)dx=\int(x+1)^2dx=\frac{(x+1)^2}{3}+C$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه :

و ښایي چې باور لري:

$$f(x)=(3x+6)^3 \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=\int(3x+6)^3dx$$

بدلون: $u(x)=3x+6=u$

جوړوو: $u'(x)=\frac{du}{dx}=3 \Rightarrow dx=\frac{du}{3}$

$$\int f(x)dx=\int u^3\frac{du}{3}=\frac{1}{3}\int u^3du=\frac{u^4}{12}+C$$

بېرته بدلون: $\frac{u^4}{12}(3x+6)^4+C$

نو لرو: $\int(x)dx=\int(3x+6)^3dx=\frac{1}{12}(3x+6)^4+C$

بیلګه :

$$f(x)=x\cdot\ln\left(x^2\right)\Rightarrow F(x)=\int f(x)\,dx=\int\left(x\cdot\ln\left(x^2\right)\right)dx=?$$

بدلون : $u(x)=x^2=u$

جوړوو: $u'(x)=\frac{du}{dx}=2x\Rightarrow dx=\frac{1}{2x}du$

$$\int f(x)\,dx=\int x\cdot\ln(u)\cdot\frac{1}{2x}\,du=\frac{1}{2}\int\ln(u)\,du=\frac{1}{2}\left[u\cdot\ln(u)-u+C\right]=\frac{1}{2}u\cdot\ln(u)-\frac{1}{2}u+C$$

بېرته بدلون: $\frac{1}{2}u\cdot\ln(u)-\frac{1}{2}u+C=\frac{1}{2}x^2\cdot\ln\left(x^2\right)-\frac{1}{2}x^2+C$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو لرو: $\int (x)\,dx = \int \left(x \cdot \ln\left(x^2\right)\right) dx = \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln\left(x^2\right) - \frac{1}{2}x^2 + C$

د ټاکلو انتیګرالونو حل د بدلون له لارې:

ټاکلي انتیګرالونه هم د بدلون له لارې حل کیږي.

بیلګه :

وښایاست:

$$f(x) = e^{2x} \quad \Rightarrow F(x) = \int_{-1}^{1} e^{2x}dx$$

د انتیګرال حل د بدلون له لارې:

۱ – بدلون $u(x) = 2x$

۲ – د dx په ځای کیږدی

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 2 \quad \Rightarrow dx = \frac{1}{2}du$$

۳ – د پولو بدلون

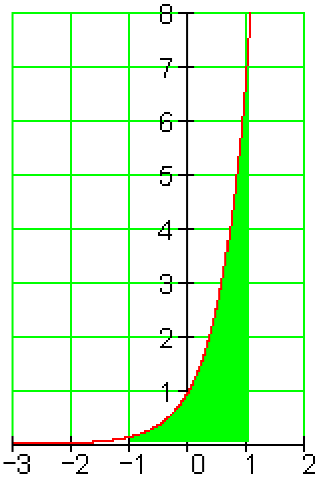
- لاندې پوله $u(-1) = -2$

- پورته پوله $u(1) = 2$

۴ - په انتیګرال کې ځا په ځای کړی

$$\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} e^u du = \frac{1}{2}\left[e^u\right]_{-2}^{2} = \frac{1}{2}\left[e^2 - e^{-2}\right] = \underline{\underline{3.627}}$$

$f(x) := e^{2\cdot x}$



بیلګه :

$$f(x) = 2x \cdot \ln(x^2) \quad \Rightarrow F(x) = \int_{1}^{2} 2x \cdot \ln(x^2)dx$$

د انتیګرال حل د بدلون له لارې

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ – بدلون $u(x)=x^2$

۲ – د ځای په په ځای کونه

$$u'(x)=\frac{du}{dx}=2x \quad \Rightarrow dx=\frac{1}{2x}du$$

۳ – د پولې بدلون

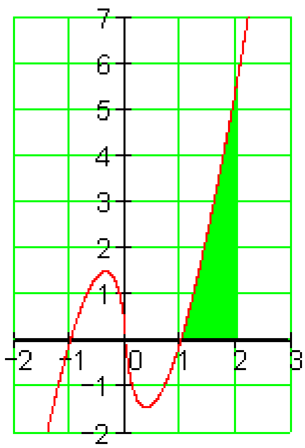
- لاندې پوله $u(1)=1$
- پورته پوله $u(2)=4$

۴ – په انتیګرال کې ځای په ځای کړی

$$\int_1^4 2x\cdot\ln(u)\cdot\frac{1}{2x}du=\int_1^4 \ln(u)du=[u\cdot\ln(u)-u]_1^4$$

$$=[4\cdot\ln(4)-4]-[1\cdot\ln(1)-1]\approx \underline{\underline{2.545}}$$

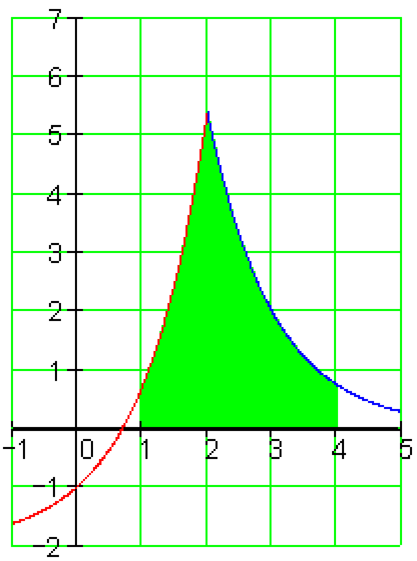
$$f(x) := 2x\cdot\ln(x^2)$$



بیلګه :

د $x<2$ له پاره د $x\geq 2$ له پاره	$f(x)=\begin{cases} e^x-2 \\ (e^2-2)e^{-(x-2} \end{cases}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$A = \underbrace{\int_1^2 \left(e^x - 2\right) dx}_{I_1} + \underbrace{\int_2^4 \left(e^2 - 2\right) e^{-(x-2)}\, dx}_{I_2}$$

$$I_1 = \int_1^2 \left(e^x - 2\right) dx = \left[e^x - 2x\right]_1^2 = e^2 - e - 2$$

$$I_2 = \left(e^2 - 2\right) \int_2^4 e^{-(x-2)}\, dx$$

$$u(x) = -(x-2) = -x + 2$$

$$\frac{du}{dx} = -1 \Rightarrow dx = -du\,;\ u(2) = 0\,;\ u(4) = -2$$

$$I_2 = -\left(e^2 - 2\right) \int_0^{-2} e^u\, du = \left(e^2 - 2\right) \int_{-2}^{0} e^u\, du$$

$$= \left(e^2 - 2\right) \cdot \left[e^u\right]_{-2}^{0} = e^2 + 2e^{-2} - 3$$

$$I = I_1 + I_2 = e^2 - e - 2 + e^2 + 2e^{-2} - 3 = \underline{\underline{7{,}331}}$$

Partialy Integration تو ته انتيګرالونه

توته انتيګرالونه، چې ضرب انتيګرالونه هم بلل کيږي، په انتيګرالشميرنه کې د لومړنيو توابعو ټاکلو يا شميرلو لپاره امکان دی. دا کيدی شي د مشتقشميرنې د برعکسکونی په څير وکتل شي.

د توته انتيګرالونې له پاره لاندې قانون کارول کيږي، چې د متمادي (نه پرېکيدونکي) توابعو f او g له پاره باور لري:.

$$\int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = \left[f(x)\cdot g(x)\right]_a^b - \int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x.$$

دا قانون ټيک هلته ګټور دی، که د f مشتقنيولو سره يو ساده تابع منځ ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ضرب قانون (د ضرب مشتقنیونې) څخه لرو:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$u' \cdot v = (u \cdot v)' - u \cdot v'$$

له دې څخه لاس ته راځي:

$$\int u' \cdot v = \int (u \cdot v)' - \int u \cdot v'$$

$$\int u' \cdot v = u \cdot v - \int u \cdot v'$$

په دې پسې د ټاکلي انتیګرال لپاره باور لري:

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = f(b) \cdot g(b) - f(a) \cdot g(a) - \int_a^b f'(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x$$

یا همدغسې، لکه په زیاتو ریاضي کتابونو کې چې پیداکیږي.

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x.$$

د دې مخ ته حدونو یا ترمونو لپاره ګټور دی، چې لومړی ځان په ناټاکلي انتیګرال محدود کړو، چې دا نا اړینو حدونو څخه چې لید مو رابندوي، ازاد یو.

بیلګه:
د بیلګې په توګه لاندی انتیګرال شمیرو.

$$\int x \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x$$

یو ساده انتیګرالیدونکې تابع $g'(x)$ او همداسی یو ساده مستقکیدونکي تابع $f(x)$ لټوو.
نیسو چې $f(x) = \ln(x)$ او $g'(x) = x$ ، ځکه چې د $\ln(x)$ انتیګرالونه نوې راکوي. اوس د $f(x)$ مشتق نیسو)مشتق کوو) او انتیګرالوو، نو لرو:

$$f'(x) = \frac{1}{x} \text{ او } g(x) = \frac{x^2}{2}.$$

له دې څخه اوس دالاندې فرمول لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int x \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x) - \frac{x^2}{4}$$

بدیل لیکبنه:

اوس دیَ u اوv په خوبنه توابع وي.U او V دې د u اوV لومړني توابع وي ، او همداسې دې u' او v' دu او v مشتقونه وي.

u تابع ده، چې د مشتق نیولو له پاره لومړیتوب لري، v تابع ده چې د انتیګرالونې له پاره لومړیتوب لري. نو باورلري:

$$\int_a^b u(x) \cdot v(x)\,\mathrm{d}x = u(b) \cdot V(b) - u(a) \cdot V(a) - \int_a^b u'(x) \cdot V(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= [u(x) \cdot V(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot V(x)\,\mathrm{d}x$$

ټوټه انتیګرالونې لار(طریقې)

د ټوټه انتیګرالونې ګټور استعمال له پاره مختلف معیاري چلول شته.

بیلګه :

کله کله کیدی شي ګټور وي، جی د مساوات بنیٰ لور ته ټوټه انتیګرال د څو واره انتیګرالونې وروسته بیرته راوګرځي، چې د په ورته بڼه د اصلي یا پخواني کېڼ لور انتیګرال سره یوځای کولی شو.

$$\int \sin(x) \cdot \cos(x)\,\mathrm{d}x$$

که کېږدو f(x) = cos(x) او g'(x) = sin(x) ، نو ترې لرو:

$$f'(x) = -\sin(x) \text{ او } g(x) = -\cos(x)$$

او لاس ته ترې راځي

$$\int \sin(x) \cdot \cos(x)\,\mathrm{d}x = [-\cos^2(x)] - \int \sin(x) \cdot \cos(x)\,\mathrm{d}x.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که دواړو لورو ته وتون انتیگرال ورزیات کړو، نو راکوي:

$$2\int \sin(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x = -\cos^2(x)$$

که واړه لورې په 2 وویشل شي، نو بالاخره لاس ته ترې راځي:

$$\int \sin(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cdot\cos^2(x) + C$$

بیلگه ۲ :

د ځنو انتیگرالونو سره داسي لاس ته راوړنه لرو، چي: که د g'(x) له پاره یو ترم وټاکو چي په انتیگرالونې کې هیڅ یا کو تغیر خوري، لکه د بېلگې په توگه اکسپوننشل تابع او یا مثلثاتي توابع. نو کیدی شي دا بل ترم ،،له منځه یوورل شي،،.

$$\int e^x\cdot(2-x^2)\,\mathrm{d}x$$

که هر ځل ex = g'(x) کیږدو او د f(x) له پاره، د انتیگرال لاندی ترم ، نو ترې لاس ته راځي:

$$\begin{aligned}\int e^x\cdot(2-x^2)\,\mathrm{d}x &= [e^x\cdot(2-x^2)] - \int e^x\cdot(-2x)\,\mathrm{d}x\\ &= [e^x\cdot(2-x^2)] + [e^x\cdot 2x] - \int 2\cdot e^x\,\mathrm{d}x\\ &= [e^x\cdot(2-x^2)] + [e^x\cdot 2x] - [2\cdot e^x]\\ &= [e^x\cdot(2-x^2+2x-2)]\\ &= [e^x\cdot(2x-x^2)] + C\end{aligned}$$

بیلگه ۳ :

که له انتیگرال لاندي فقط یو ترم ولرو، چي د هغه لومړنی تابع بې له جدول ارزښت ځخه پاي ته نه رسیږي(نه پایول کیږي)(نه ختمیږي) کیدی شي کله کله د ورزیاتونې له لارې(ناڅرگند شته) ضریب "1" توته انتیگرال شي.

$$\int \ln(x)\,\mathrm{d}x = \int 1\cdot\ln(x)\,\mathrm{d}x = \int g'(x)\cdot\ln(x)\,\mathrm{d}x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

....

که $f(x) = \ln(x)$ او $g'(x) = 1$ کیږدو، نو لاس ته ترې راوړی شو

$$\int 1 \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x = x \cdot \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$
$$= x \cdot \ln(x) - \int 1\,\mathrm{d}x$$
$$= x \cdot \ln(x) - x + C$$

.

جمله :

مورږ د دې لاندې انتیګرال نیسو: $\int x\cos(x)\,dx$

ږدو $u = x$ ، نو لرو : $du = dx$

ږدو $dv = \cos(x)\,dx$ ، نو $v = \sin(x)$ لرو

په لاندې توګه مخ ته ځو:

$$\int x\cos(x)\,dx = \int u\,dv$$
$$= uv - \int v\,du$$
$$= x\sin(x) - \int \sin(x)\,dx$$
$$= x\sin(x) + \cos(x) + C.$$

C د انتیګرالونې یوه په خوښه ثابته ده

د تړته انتیګرالونې د استعمال سره د انتیګرالونو لکه

$$\int x^2 e^x\,dx \quad \text{او} \quad \int x^3 \sin(x)\,dx$$

کیده شي په همدې لار حل شي:

یوه په زړه پورې بیلګه دا لاندې ده :

$$\int e^x \cos(x)\,dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که په پوره کره والي ونیسو، نو په ورسره بلده لار اړین نه دی، چې دا دې حل ولري.

دا بېلګه د دوه واره ټوټه انتیګرالوني استعمال له لارې حل کولی شو.

لومړی : $u = \cos(x)$ داسې چې $du = -\sin(x)\,dx$

$dv = e^x\,dx$ داسې چې $v = e^x$

نو لرو :

$$\int e^x \cos(x)\,dx = e^x \cos(x) + \int e^x \sin(x)\,dx.$$

اوس ، ددې له پاره چې پاتې انتیګرال حل شي، نو د ټوټه انتیګرالوني قاعده بیا استعمالوو ، د دې لاندې سره :

$u = \sin(x);\ du = \cos(x)\,dx$

$v = e^x;\ dv = e^x\,dx$

نو لرو :

$$\int e^x \sin(x)\,dx = e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)\,dx$$

که دا سره یوځای کړو، نو لاس ته راځي:

$$\int e^x \cos(x)\,dx = e^x \cos(x) + e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)\,dx.$$

که فکر وکړو، نو پورته مساوات دواړو لورو ته همغه انتیګرال لرو(بې له مخ نخښې)، نو د ښي لور انتیګرال که کیڼ لور ته یوسو ، لاس ته ترې راځي:

$$2\int e^x \cos(x)\,dx = e^x(\sin(x) + \cos(x)) + C$$

$$\int e^x \cos(x)\,dx = \frac{e^x(\sin(x) + \cos(x))}{2} + C'$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

C د انتیګرالونې یوه په خوښه ثابته ده

د کور کار:

انتیګرال د بدلون له لارې د لاندې انتیګرالونو ځوابونه، همداسې شمیرنه

لومړی: $\int \frac{3}{4x+1}\,dx$ دویم: $\int_0^2 \frac{4}{4-x}\,dx$

دریم: $\int \frac{2}{(1-x)^2}\,dx$ څلورم: $\int \frac{6}{(2x-1)^3}\,dx$

پنځم: $\int_{-2}^{2} \frac{10}{(x-4)^5}\,dx$ شپږم: $\int_{-2}^{2} e^{1-x}\,dx$

اووم: $\int_0^4 e^{\frac{1}{2}x}\,dx$ اتم: $\int_1^2 e^{4-2x}\,dx$

نهم: $\int_1^2 \frac{4}{e^{2x-4}}\,dx$ لسم: $\int_0^2 \left(x-1-e^{-\frac{1}{2}x}\right)dx$

ځوابونه

انتیګرال د ساده بدلون له لارې

نتیجې: لومړی:

$$\int \frac{3}{4x+1}\,dx = \frac{3}{4}\cdot \ln(4x+1) + C$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم:
$$\int_{0}^{2}\frac{4}{4-x}\,dx = 4\cdot\ln(4)-4\cdot\ln(2) = 4\cdot\ln(2) \approx 2{,}773$$

دزیم:
$$\int\frac{2}{(1-x)^2}\,dx = \frac{2}{1-x}+C$$

څلورم:
$$\int\frac{6}{(2x-1)^3}\,dx = -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{(2x-1)^2}+C$$

پنځم:
$$\int_{-2}^{2}\frac{10}{(x-4)^5}\,dx = -\frac{5}{2}\left[\frac{1}{16}-\frac{1}{1296}\right] = -\frac{25}{162} \approx -0{,}154$$

شپږم:
$$\int_{-2}^{2}e^{1-x}\,dx = e^3-e^{-1} \approx 19{,}718$$

اووم:
$$\int_{0}^{4}e^{\frac{1}{2}x}\,dx = 2\cdot e^2-2\cdot e^0 = 2\cdot e^2-2 \approx 12{,}778$$

اتم:
$$\int_{1}^{2}e^{4-2x}\,dx = \frac{1}{2}\cdot e^2-\frac{1}{2}\cdot e^0 = \frac{1}{2}\cdot e^2-\frac{1}{2} \approx 3{,}195$$

نهم:
$$\int_{1}^{2}\frac{4}{e^{2x-4}}\,dx = 2\cdot e^2-2\cdot e^0 = 2\cdot e^2-2 \approx 12{,}788$$

لسم:
$$\int_{0}^{2}\left(x-1-e^{-\frac{1}{2}x}\right)dx = -2\cdot e^0-\left(-2\cdot e^{-1}\right) = -2+2\cdot e^{-1} \approx -1{,}264$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځوابونه

انتيګرال د ساده بدلون له لارې

مفصل ځوابونه

لومړی:

$$\int \frac{3}{4x+1}\,dx \qquad \text{Substitution: } u = 4x+1 \qquad \frac{du}{dx} = 4 \Rightarrow dx = \frac{1}{4}du$$

$$\frac{3}{4}\int \frac{1}{u}\,du = \frac{3}{4}\cdot \ln(u) + C$$ د $u = 4x+1$ سره

$$\int \frac{3}{4x+1}\,dx = \frac{3}{4}\cdot \ln(4x+1) + C$$

دويم:

$$\int_0^2 \frac{4}{4-x}\,dx \qquad \text{Substitution: } u = 4-x$$

$$\frac{du}{dx} = -1 \Rightarrow dx = -du$$ لاندې پوله $u(0) = 4$ پورته پوله $u(2) = 4-2 = 2$

$$-4\int_4^2 \frac{1}{u}\,du = 4\int_2^4 \frac{1}{u}\,du = \left[4\cdot \ln(u)\right]_2^4 = 4\cdot \ln(4) - 4\cdot \ln(2)$$

$$= 4\left[\ln(4) - \ln(2)\right] = 4\cdot \ln\left(\frac{4}{2}\right) = 4\cdot \ln(2) \approx 2{,}773$$

درېيم:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int \frac{2}{(1-x)^2}\,dx \qquad \text{Substitution: } u = 1-x \qquad \frac{du}{dx} = -1 \Rightarrow dx = -du$$

$$-2\int \frac{1}{u^2}\,du = -2\int u^{-2}\,du = -2\cdot\frac{1}{-1}\cdot u^{-1} = \frac{2}{u}$$

د u=1-x سره

$$\int \frac{2}{(1-x)^2}\,dx = \frac{2}{1-x} + C$$

څلورم:

$$\int \frac{6}{(2x-1)^3}\,dx \qquad \text{Substitution: } u = 2x-1 \qquad \frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{1}{2}du$$

$$\frac{6}{2}\int \frac{1}{u^3}\,du = 3\int u^{-3}\,du = 3\cdot\frac{1}{-2}\cdot u^{-2} = -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{u^2}$$

د U=2x-1 سره

$$\int \frac{6}{(2x-1)^3}\,dx = -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{(2x-1)^2} + C$$

پنځم:

$$\int_{-2}^{2} \frac{10}{(x-4)^5}\,dx \qquad \text{Substitution: } u = x-4 \qquad \frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow dx = du$$

لاندې پوله $u(-2) = -2-4 = -6$ پورته پوله $u(2) = 2-4 = -2$

$$10\int_{-6}^{-2} \frac{1}{u^5}\,du = 10\int_{-6}^{-2} u^{-5}\,du = \left[10\cdot\frac{1}{-4}\cdot u^{-4}\right]_{-6}^{-2} = -\frac{5}{2}\cdot\left[\frac{1}{u^4}\right]_{-6}^{-2}$$

$$= -\frac{5}{2}\left[\frac{1}{16} - \frac{1}{1296}\right] = -\frac{25}{162} \approx -0{,}154$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

شپږم:

$$\int_{-2}^{2} e^{1-x}\,dx \qquad \text{Substitution: } u = 1-x \qquad \frac{du}{dx} = -1 \Rightarrow dx = -du$$

لاندې پوله $u(-2) = 1-(-2) = 3$ پورته پوله $u(2) = 1-2 = -1$

$$-\int_{3}^{-1} e^{u}\,du = \int_{-1}^{3} e^{u}\,du = \left[e^{u}\right]_{-1}^{3} = \underline{\underline{e^{3} - e^{-1} \approx 19{,}718}}$$

اووم:

$$\int_{0}^{4} e^{\frac{1}{2}x}\,dx \qquad \text{Substitution: } u = \frac{1}{2}x \qquad \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} \Rightarrow dx = 2du$$

لاندې پوله u(0)=0 پورته پوله u(4)=2

$$2\int_{0}^{2} e^{u}\,du = 2\left[e^{u}\right]_{0}^{2} = 2\cdot e^{2} - 2\cdot e^{0} = \underline{\underline{2\cdot e^{2} - 2 \approx 12{,}778}}$$

اتم:

$$\int_{1}^{2} e^{4-2x}\,dx \qquad \text{Substitution: } u = 4-2x \qquad \frac{du}{dx} = -2 \Rightarrow dx = -\frac{1}{2}du$$

لاندې پوله u(1)=4-2=2 پورته پوله u(2)=4-4=0

$$-\frac{1}{2}\int_{2}^{0} e^{u}\,du = \frac{1}{2}\int_{0}^{2} e^{u}\,du = \left[\frac{1}{2}e^{u}\right]_{0}^{2} = \frac{1}{2}\cdot e^{2} - \frac{1}{2}\cdot e^{0} = \underline{\underline{\frac{1}{2}\cdot e^{2} - \frac{1}{2} \approx 3{,}195}}$$

نهم:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_1^2 \frac{4}{e^{2x-4}}\,dx = 4\int_1^2 e^{4-2x}\,dx \qquad \text{Substitution: } u = 4-2x \qquad \frac{du}{dx} = -2 \Rightarrow dx = -\frac{1}{2}du$$

لاندې پوله $u(1) = 4-2 = 2$ پورته پوله $u(2) = 4-4 = 0$

$$-4\cdot\frac{1}{2}\int_2^0 e^u\,du = 2\int_0^2 e^u\,du = \left[2e^u\right]_0^2 = 2\cdot e^2 - 2\cdot e^0 = \underline{\underline{2\cdot e^2 - 2 \approx 12{,}788}}$$

لسم:

$$\int_0^2 \left(x - 1 - e^{-\frac{1}{2}x}\right) dx = \int_0^2 (x-1)\,dx - \int_0^2 e^{-\frac{1}{2}x}\,dx$$

$$\text{1. Integral: } \int_0^2 (x-1)\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - x\right]_0^2 = \frac{1}{2}\cdot 4 - 2 - (0) = 0$$

$$\text{2. Integral: } -\int_0^2 e^{-\frac{1}{2}x}\,dx \qquad \text{Substitution: } u = -\frac{1}{2}x \qquad \frac{du}{dx} = -\frac{1}{2} \Rightarrow dx = -2du$$

لاندې پوله $u(0) = 0$ پورته پوله $u(2) = -\frac{1}{2}\cdot 2 = -1$

$$= (-1)(-2)\int_0^{-1} e^u\,du = 2\int_0^{-1} e^u\,du = -2\int_{-1}^0 e^u\,du = \left[-2e^u\right]_{-1}^0$$

$$= -2\cdot e^0 - \left(-2\cdot e^{-1}\right) = \underline{\underline{-2 + 2\cdot e^{-1} \approx -1{,}264}}$$

د ټوټه انټیګرالونو لپاره څو نوربڅ بیلګې

(c) ketabton.com: The Digital Library

که چیرته د دوه توابعو انتیګرال غواړو وشمیرو، نو په زیاتو حالتونو کې دا تراوسه روښانه یا معلومه د انتیګرال لار مو بریا ته نه بیایي.

$$f(x) = x \cdot \ln\left(x^2\right) \Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx = \int\left(x \cdot \ln\left(x^2\right)\right) dx = ?$$

Substitution: $u(x) = x^2 = u$

جوړوو: $u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2x} du$

$$\int f(x)\,dx = \int x \cdot \ln(u) \cdot \frac{1}{2x}\,du = \frac{1}{2}\int \ln(u)\,du = \frac{1}{2}\left[u \cdot \ln(u) - u + C\right] = \frac{1}{2}u \cdot \ln(u) - \frac{1}{2}u + C$$

د بدلون په بیرته په څټ: $\frac{1}{2}u \cdot \ln(u) - \frac{1}{2}u + C = \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln\left(x^2\right) - \frac{1}{2}x^2 + C$

نو: $$\int (x)\,dx = \int\left(x \cdot \ln\left(x^2\right)\right) dx = \underline{\underline{\frac{1}{2}x^2 \cdot \ln\left(x^2\right) - \frac{1}{2}x^2 + C}}$$

دا انتیګرال د بدلون قانون سره حل کیدی شي، دا چې د بدلون له لارې ضریب له منځه ځي. په عادي ډول دا حالت نه دی.

$$f(x) = x \cdot \ln(x) \Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx = \int\left(x \cdot \ln(x)\right) dx = ?$$

دا انتیګرال د بدلون له لارې نه شي حل کیدی. موږ د صرب قانون لپاره د مشتقشمیرنې څخه یوه اینبوونې یا په ځای کونې ته وده ورکوو.

$$f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

د ثابتې په پام کې نه نیولو له امله د دفرنځیال او انتیګرال بنسټ حملې له لارې باور لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int f'(x)\,dx = f(x) = u(x)\cdot v(x)$$

د $f'(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$ سره په دې پسې باید هم باور ولري

$$\int u'(x)\cdot v(x)\,dx + \int u(x)\cdot v'(x)\,dx = u(x)\cdot v(x)$$

د $\int u(x)\cdot v'(x)\,dx$ پسې د بڼه بدلون له امله راکوي:

$$\int u(x)\cdot v'(x)\,dx = u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)\cdot v(x)\,dx$$

د $\int u'(x)\cdot v(x)\,dx$ پسې د بڼه بدلون له امله راکوي:

$$\int u'(x)\cdot v(x)\,dx = u(x)\cdot v(x) - \int u(x)\cdot v'(x)\,dx$$

د دې بڼه بدلون په ریښتوني یا حقیقت کې دا د دوه ضربیونو انتیګرال حل نه شو، مګر د u او ' v او په همدې توګه د ' u او v هوښیاره ټاکنه کیدی شي دا وینه یا افاده داسې بڼه بدل شي، چې ا نتیګرال یې کیدی شي حل شي

بیلګه ۱

$$\int \underbrace{x}_{u}\cdot\underbrace{e^x}_{v'}\,dx = u\cdot v - \int u'\cdot v\,dx$$

$$u = x \Rightarrow u' = 1$$

$$v' = e^x \Rightarrow v = \int e^x\,dx = e^x$$

$$\int x\cdot e^x\,dx = x\cdot e^x - \int 1\cdot e^x\,dx = x\cdot e^x - e^x + C = \underline{\underline{(x-1)e^x + C}}$$

بیلګه ۲

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{e^{k\cdot x}}_{v'}\, dx = u\cdot v - \int u'\cdot v\, dx$$

$u = x \Rightarrow u' = 1$

د بدلون له لاې حل $v' = e^{k\cdot x} \Rightarrow v = \int e^{k\cdot x}\, dx$

$$v = \int e^{k\cdot x}\, dx$$

بدلون $u = k\cdot x \Rightarrow \frac{du}{dx} = k \Rightarrow dx = \frac{1}{k} du$

په ځت یا بیرته بدلون: $v = \int e^{k\cdot x}\, dx = \frac{1}{k} e^{k\cdot x}$

$$\int x\cdot e^{k\cdot x}\, dx = u\cdot v - \int u' v\, dx = x\cdot \frac{1}{k} e^{k\cdot x} - \int 1\cdot \frac{1}{k} e^{k\cdot x}\, dx = \frac{x}{k} e^{k\cdot x} - \frac{1}{k} \underbrace{\int e^{k\cdot x}\, dx}_{\frac{1}{k} e^{k\cdot x}}$$

$$= \frac{x}{k} e^{k\cdot x} - \frac{1}{k}\cdot\frac{1}{k} e^{k\cdot x} = \frac{x}{k} e^{k\cdot x} - \frac{1}{k^2} e^{k\cdot x} = \left(\frac{x}{k} - \frac{1}{k^2}\right) e^{k\cdot x} + C$$

بیلګه ۳ :

$$\int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{v'}\, dx = u\cdot v - \int u'\cdot v\, dx$$

$u = x \Rightarrow u' = 1$

$v' = \ln(x) \Rightarrow v = x\cdot \ln(x) - x$

$$\int x\cdot \ln(x)\, dx = x\cdot (x\cdot \ln(x) - x) - \int 1\cdot (x\cdot \ln(x) - x)\, dx$$

$$\Leftrightarrow \int x\cdot \ln(x)\, dx = x^2\cdot \ln(x) - x^2 - \int x\cdot \ln(x)\, dx + \int x\, dx \;\Big|\; + \int x\cdot \ln(x)\, dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Leftrightarrow 2\cdot\int x\cdot\ln(x)\,dx = x^2\cdot\ln(x) - x^2 + \frac{1}{2}x^2 \;|:2$$

$$\Leftrightarrow \int x\cdot\ln(x)\,dx = \frac{1}{2}x^2\cdot\ln(x) - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^2 = \frac{1}{2}x^2\cdot\ln(x) - \frac{1}{4}x^2 + C \quad (x>0)$$

بیلګه ۴

$$\int \underbrace{x^2}_{u}\cdot\underbrace{e^{2x}}_{v'}\,dx = u\cdot v - \int u'v\,dx \qquad u = x^2 \Rightarrow u' = 2x \qquad v' = e^{2x} \Rightarrow v = \int e^{2x}\,dx$$

منځ شمیرنه

$$\int e^{2x}\,dx \quad \text{Substitution: } u = 2x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{1}{2}du$$

$$\boxed{\int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}}$$ په خټ بدلون $$\Rightarrow \frac{1}{2}\int e^{u}\,du = \frac{1}{2}e^{u}$$

$$\int x^2\cdot e^{2x}\,dx = \underbrace{x^2\cdot\frac{1}{2}e^{2x}}_{u\cdot v} - \int \underbrace{2x}_{u'}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}e^{2x}}_{v}\,dx = \frac{1}{2}x^2\cdot e^{2x} - \int x\cdot e^{2x}\,dx$$

$$\int \underbrace{x}_{u}\cdot\underbrace{e^{2x}}_{v'}\,dx = u\cdot v - \int u'v\,dx \qquad u = x \Rightarrow u' = 1 \qquad v' = e^{2x} \Rightarrow v = \frac{1}{2}e^{2x}$$

(پورته وګورئ)

$$\int x\cdot e^{2x}\,dx = x\cdot\frac{1}{2}e^{2x} - \int 1\cdot\frac{1}{2}e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}x\cdot e^{2x} - \frac{1}{2}\underbrace{\int e^{2x}\,dx}_{\frac{1}{2}e^{2x}} = \frac{1}{2}x\cdot e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int x^2 \cdot e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}x^2 \cdot e^{2x} - \underbrace{\int x \cdot e^{2x}\,dx}_{\frac{1}{2}x \cdot e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}} = \frac{1}{2}x^2 \cdot e^{2x} - \left(\frac{1}{2}x \cdot e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}\right)$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \cdot e^{2x} - \frac{1}{2}x \cdot e^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} = \underline{\underline{\frac{1}{4}\left(2x^2 - 2x + 1\right)e^{2x} + C}}$$

دا بیلګه ښايي، چې په انتیګرال کې زیات وخت ډېرې تلنلارې یو په بل پسې کارول کیږي. دا چې د ټوټه انتیګرال منځنۍ پایله (لاس ته راوړنّ) زیات وخت څرګند یا معلوم دي، سړی دې دا د یوه انتګرئشن جدول په بڼه په یاد کې وساتي.

د انتیګرېشن نورې تلنلارې او تخنیکونه هم شته، چې په دې ځای کې دې ترڅېړنې لاندې دې نه نیول کیږي. د بیلګې په توګه دې ماتنسبي انتیګرېشن د ټوټه مات یا کسر ټوټه ونې په ګوته شي.

یوڅو ناټاکلي انتیګرالونه:

لومړی: $\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \quad n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

دویم: $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C \quad x \neq 0$

دریم : $\int e^x\,dx = e^x + C$

څلورم: $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C \quad a > 0;\ a \neq 1$

پنځة $\int (ax+b)^n\,dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C \quad n \neq -1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

شپږم: $\int \frac{1}{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b|$

اووم: $\int x(ax+b)^n\,dx = \frac{a(n+1)x-b}{a^2(n+1)(n+2)}(ax+b)^{n+1} + C \quad n \neq -1; -2$

اتم: $\int \frac{1}{x(ax+b)}\,dx = -\frac{1}{b}\ln\left|\frac{ax+b}{x}\right| + C$

نهم: $\int \frac{x}{ax+b}\,dx = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2}\ln|ax+b| + C$

لسم : $\int_0^{\infty} \frac{1}{(1-x)\sqrt{x}}\,dx = 0$

یولسم: $\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$

دولسم: $\int x \cdot e^{ax}\,dx = \frac{1}{a^2}(ax-1)e^{ax} + C$

دیارلسم: $\int_{-1}^{1} a^x\,dx = \frac{a^2-1}{a \cdot \ln(a)} \quad a > 0$

څوارلسم: $\int \ln(x)\,dx = x \cdot \ln(x) - x + C \quad x > 0$

پنځلسم: $\int [\ln(x)]^2\,dx = x \cdot [\ln(x)]^2 - 2x \cdot \ln(x) + 2x + C \quad x > 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

شپاړسم: $\int x^n \ln(x)\,dx = x^{n+1}\left(\frac{\ln(x)}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) + C \quad x>0;\, m \neq -1$

اولسم: $\int \frac{[\ln(x)]^n}{x}\,dx = \frac{[\ln(x)]^{n+1}}{n+1} + C \quad x>0;\, n \neq -1$

اتلسم: $\int \frac{1}{x\cdot\ln(x)} = \ln|\ln(x)| + C \quad x>1$

نولسم: $\int \frac{1}{x\cdot[\ln(x)]^n} = -\frac{1}{(n-1)\left([\ln(x)]^{n-1}\right)} + C \quad x>1;\, n \neq 1$

یوڅو ټاکلي انتیګرالونه:

لمړی: $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{\pi}{2}$ دویم: $\int_0^\infty \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\,dx = \pi$

دریم: $\int_a^b \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\,dx = \pi$ څلورم: $\int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \frac{\pi}{2}$

پنځم: $\int_0^\infty \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2a}$ شپږم: $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

اووم: $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 1$ اتم: $\int_0^a \frac{x^2}{\sqrt{ax-x^2}}\,dx = \frac{3}{8}a^2\pi$

نهم: $\int_0^\infty \frac{1}{(1-x)\sqrt{x}}\,dx = 0$ لسم: $\int_0^{2b} \sqrt{2bx-x^2}\,dx = -\frac{b^2\pi}{2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یوولسم: $\int_{-1}^{1} a^x \, dx = \frac{a^2 - 1}{a \cdot \ln(a)} \quad a > 0$ دولسم: $\int_{0}^{\infty} e^{-x} x^n \, dx = n! \quad n \in \mathbb{N}$

دیارلسم: $\int_{0}^{\infty} e^{-x^2} \, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ څوارلسم: $\int_{0}^{\infty} \frac{x}{e^x + 1} \, dx = \frac{\pi^2}{12}$

پنځلسم: $\int_{0}^{\infty} \frac{x}{e^x - 1} \, dx = \frac{\pi^2}{6}$ شپاړلسم: $\int_{0}^{1} \frac{\ln(x)}{x + 1} \, dx = -\frac{\pi^2}{12}$

اوولسم: $\int_{0}^{1} \frac{\ln(x)}{x - 1} \, dx = \frac{\pi^2}{6}$ اتلسم: $\int_{0}^{1} \frac{\ln(x + 1)}{x^2 + 1} \, dx = \frac{\pi}{8} \cdot \ln(2)$

نولسم: $\int_{0}^{1} \frac{\ln(x)}{x^2 - 1} \, dx = \frac{\pi^2}{8}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوي لیکنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړی:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : contributions to general algebra 6 ; Page 117 – 122

1987 Vienna (Austria):

دویم:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Diss . Uni. Wien

لاندې د شمیرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې لیکنه به یې څنو ځایونو غزېدلې او څنې ځایونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: څمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو زرو کې شمیرنه، د ګڼې – او کڼې د کڼې شمیرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتیاوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انګریزي – پښتو ډکشنري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني - پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځیال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپیني خبرې: په الما‌ن کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

بن- المان، کابل – افغانستان ۲۰۱۲ ز ک

ژباړې:

لاندې د برینککن لیکنې چې له پرینمن ن ج ځخه ژباړل شوي دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دويم ټوک

۳ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دريم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه

۵ – احصايه يا ستاتيستيک

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – اناليزی ۱

۷ – اناليزې ۲

۸ – کرښيز الجبر

۹ - د شمیرپوهنې بنستونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ – فنکشنل اناليز

۱۲ – وکتور شمیرنه

نورې ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښيز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه يا د اعدادو تيوري

(c) ketabton.com: The Digital Library

زما ليکني

Bonn (Germany):

۱۵ - د شميرپوهنې ستر کتاب دويم چاپ د پوره تغيراتو سره : دا کتاب د شميرپوهنې برخې برسيره د

انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په

کتاب کې د اړتيا سره زياتونه او کونه راغلي

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دويم چاپ د پوره تغيراتو سره

۱۷ – الجبر ښستونه دويم چاپ له تغيراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه يا سټ تيوري

۱۹ – د شميرپوهنې سم اند (منطق رياضي)

۲۰ - د يو څو شميرپوهانو ژوندليک

۲۱ – د شمير پوهنې ګډې وډې ليکنې

۲۲-   داهم ژباړه ده، خو ليکونکی يې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتيګرال شميرنو ته

تمرينونه او اوبيونې يا حلونه يې

۲۳ – د شميرپوهنې انګريزې پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ – د شميرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو ویپونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپیني خبرې، چې وبه غزیږي.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپریږي:

د ګروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اومم ټولګي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیونې سره په کې راغلي او ماته زیات ګټور برېښي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لیکوال ژوند ته لنډه کتنه

ماخان په اولني نوم میرړي شینواری د اروابنادي پستو او اروابناد نوررحمان زوي په ۱۳۲۰ ؟ ه لمریز کې د شینوارو هسکه مینه کې دې نړۍ ته سترګې راغړولي.

د هسکې میني د لومړني ښوونځي (د لومړنیو زده کوونکو څخه وو) څخه وروسته د رحمان بابا لیسه له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پورې(ښوونځي له لومړي ټولګې پیل او د دویم ټولګې څخه ګام او پای).

د ۱۹۶۶ تر سپمتبر د کابل طب پوهنځی. له ۱۹۶۶ سپټمبر څخه د اتریش برس، چې هلته یې د شمیرپوهنې ډاکټري په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

د۱۹۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فبروري تر پای د دباندنیو چارو وزارت کې مامور. د ۱۹۸۸ مارچ څخه تر ۱۹۹۲ جون پورې په بن کې د افغانستان جمهوریت سفارت شارژد افیر(صفر نه وو). له هغې وروسته په جرمني کې سیاسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ څخه د ۲۰۰۹ دسمبر پورې د د ریاضي څانګه کې د پوهنې وزارت درسي نساب کې دنده.

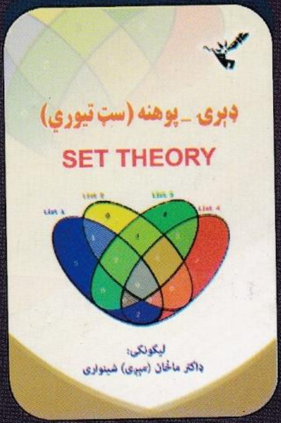
ماخان میرړي په ۱۹۷۲ کې له لرې د میرمن ښاپیرۍ سره واده شوی، چې د واده خبر ورته اتریش ته راغی. ده له میرمن ښاپیرۍ سره په ۱۹۶۳ ز ک کې کوزده کړې وه.

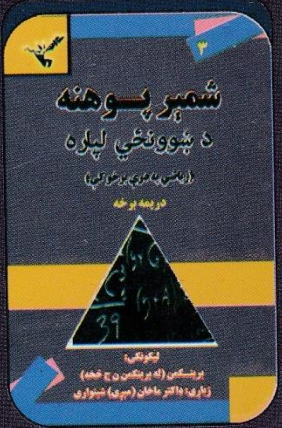
دوي ته لوي څښتن په اتریش ویانا کې د مای په شلم ۱۹۷۹ ز ک دوه بچیان وبخښل، چې څانګه او اباسین نومیرړي. څانګه په المان کې د پوهنتون علمي همکاره وه او د حقوقو ډاکتره ده او اباسین ملي اقتصاد او ټولنیزه سایکولوژي لوستلي.

ماخان شینواري بې کاره نه دی او لړ تر لړه له ۹۷ ۱۹ څخه همدا د کتابونو لیکلو اوو د ژباړې دنده یې په غاړه اخستې، چې خپل فکر د شونې پولې تازه ساتي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ډاکتر ماخان (مېړی) شینواری





د افغانستان د کلتوري ودې ټولنه _ جرمني

VEREIN ZUR FORDERUNG DER
AFGHANISCHEN KULTUR E.V

د خپرونو لړ (۱۲۹)

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library